LINEARNA ALGEBRA NA NATJECANJIMA

Ivan Krijan

05. 03. 2015.

Cilj ovog izlaganja je pokazati studentima neke "trikove" koje do sada možda nisu vidjeli, a i ako jesu, uvijek je korisno utvrditi znanje. Koncentrirati ćemo se na najosnovnije tvrdnje u linearnoj algebri koje svaki natjecatelj (točnije, svaki student matematike) **mora** znati. Pretpostavlja se poznavanje pojmova kao što su:

- **polje** (npr. $\mathbb{Q}$ ili $\mathbb{R}$) i **algebarski zatvoreno polje** (npr. $\mathbb{C}$),
- **konačnodimezionalni vektorski prostor**, **vektor**, **skalar**, **baza**, **linearni operator**
- **matrica** (regularna, singularna), **trag**, **determinanta**, **jezgra**, **slika**,
- prostori $\mathrm{GL}\,(n,\,\mathbb{K})$ i $\mathrm{SL}\,(n,\,\mathbb{K})$.

Najprije ćemo navesti najosnovnija svojstva (definicije, teoreme, leme, propozicije, ...), a zatim ćemo pokazati neke trikove za rješavanje zadataka. To i je cilj ovog izlaganja, dokaze svega ovdje navedenog ste ili već čuli na nekom kolegiju ili ćete tek čuti, tako da se time nećemo ovdje zamarati.

Definicije. Neka je V konačnodimenzionalni (dimenzije n) vektorski prostor nad poljem $\mathbb{K}$ te neka je $A \in L(V)$, tj. A je linearni operator $V \to V$. Također, s A ćemo označavati i matricu danog linearnog operatora u nekoj (fiksnoj) bazi prostora V. Odabir te baze je ovdje nebitan. Zašto?

- **svojstvena vrijednost** operatora A je svaki $\lambda \in \mathbb{K}$ takav da postoji $0 \neq v \in V$ takav da je $Av = \lambda v$. Ekvivalentno to možemo zapisati kao $(A - \lambda I)v = 0$, kako je $v \neq 0$, to znači da je $\mathrm{Ker}\,(A - \lambda I) \neq \{0\}$, odnosno da operator $A - \lambda I$ nije regularan, konačno, to znači da je $\det\,(A - \lambda I) = 0$.
- **spektar** operatora A je skup svih svojstvenih vrijednosti:
$$\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{K} \,:\, \mathrm{Ker}\,(A - \lambda I) \neq \{0\}\} = \{\lambda \in \mathbb{K} \,:\, \det\,(A - \lambda I) = 0\}\,,$$
jasno je da je taj skup konačan, točnije, broj njegovih elemenata je $\leq n$, zašto?
- **svojstveni vektor** operatora A pridružen svojstvenoj vrijednosti $\lambda \in \sigma(A)$ je svaki ne–nul vektor iz skupa
$$V_\lambda(A) = \{v \in V \,:\, Av = \lambda v\} = \mathrm{Ker}\,(A - \lambda I)$$
kojeg nazivamo **svojstveni potprostor** operatora A pridružen svojstvenoj vrijednosti λ. Dimenziju tog potprostora nazivamo **geometrijska kratnost** svojstvene vrijednosti λ.
- **karakteristični polinom** operatora A se definira kao $k_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$, to je polinom stupnja $n = \dim V$ s koeficijentima iz $\mathbb{K}$. Skup svih njegovih nultočaka (u $\mathbb{K}$!) je upravo $\sigma(A)$. Kratnost nultočke $\lambda \in \mathbb{K}$ polinoma k_A nazivamo **algebarska kratnost** svojstvene vrijednosti λ.
- za svaki polinom $p \in \mathbb{K}[x]$, $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ definiran je linearni operator $p(A)\colon V \to V$, $p(A) = a_n A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \ldots + a_1 A + a_0 I$. Kažemo da polinom p **poništava** operator A ako je $p(A) = 0$ (ovdje nam je 0 zapravo $n \times n$ nul–matrica).
- operator (matrica) A je **dijagonalizabilan** ako postoji regularna matrica S i dijagonalna matrica D takva da je $A = S^{-1}DS$. Ovo zapravo znači da postoji neka baza prostora V u kojoj je zapis linearnog operatora A dijagonalna matrica. Za svake dvije matrice A i B za koje postoji regularna matrica S takva da je $B = S^{-1}AS$ kažemo da su **slične**.

Svojstva. Kao i prije, V nam je konačnodimenzionalni vektorski prostor (KDVP) nad poljem $\mathbb{K}$, dimenzije n. Neka su $A, B \in L(V)$ i $S \in \mathrm{GL}\,(V)$.

- Matrica A je ili regularna ili postoje $C, D \in L(V) \setminus \{0\}$ takvi da je $AC = DA = 0$.
- Ako je $AB = I$, onda je i $BA = I$.
- **Teorem o rangu i defektu.** Vrijedi: $\dim \mathrm{Im}\,(A) + \dim \mathrm{Ker}\,(A) = n$.
- **Trag je invarijanta sličnosti.** Uvijek vrijedi: $\mathrm{Tr}\,(AB) = \mathrm{Tr}\,(BA)$, posebno je
$$\mathrm{Tr}\left(S^{-1}AS\right) = \mathrm{Tr}\left(SS^{-1}A\right) = \mathrm{Tr}\,(A)\,.$$
- **Teorem Binet-Cauchy.** Vrijedi: $\det\,(AB) = \det\,(A)\det\,(B)$.
- **Determinanta i karakteristični polinom su invarijante sličnosti.** Ovo slijedi direktno iz prethodnog teorema; $\det(S^{-1}AS) = \det(S^{-1})\det(A)\det(S) = \det(A)$ te
$$\det(S^{-1}AS - \lambda I) = \det(S^{-1}AS - \lambda S^{-1}IS) = \det(S^{-1}(A - \lambda I)S) = \det(A - \lambda I).$$
- **Teorem Hamilton-Cayley.** Karakteristični polinom operatora A, k_A, poništava operator A, tj. $k_A(A) = 0$. Valja napomenuti da dokaz ovog teorema nije očit te da sljedeće **NIJE** valjan dokaz: $k_A(A) = \det(A - AI) = \det(0) = 0$, zašto?
- operator (matrica) A je nilpotentan ako postoji $N \in \mathbb{N}$ takav da je $A^N = 0$, ako takav N postoji, onda je $N \leq n$.
- Definiramo **minimalni polinom** operatora A, u oznaci m_A. To je normirani (vodeći koeficijent je 1) polinom nad $\mathbb{K}$ najmanjeg stupnja koji poništava operator A. Jasno je da za svaki operator taj polinom postoji te da je on jedinstveno određen operatorom (obratno ne vrijedi!).
  - polinomi k_A i m_A imaju jednake normirane ireducibilne faktore, eventualno se pojavljuju različit broj puta, posebno vrijedi: $\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{K} \,:\, m_A(\lambda) = 0\}$,
  - polinom $p \in \mathbb{K}[x]$ poništava operator A ako i samo ako $m_A \mid p$.
- Za svaki $\lambda \in \sigma(A)$ vrijedi da je geometrijska kratnost $\leq$ algebarska kratnost.
- Pretpostavimo da se sve nultočke polinoma k_A nalaze u $\mathbb{K}$, što vrijedi uvijek ako je $\mathbb{K}$ algebarski zatvoreno polje. Vièteove formule (na polinom k_A) nam tada daju da je
$$\det A = \prod_{k=1}^{n} \lambda_k \qquad \text{i} \qquad \mathrm{Tr}\,(A) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k.$$
  Pod istim uvjetima, sljedeće je međusobno ekvivalentno:
  - A je dijagonalizabilan
  - za svaku svojstvenu vrijednost, λ, od A vrijedi da je geometrijska kratnost = algebarska kratnost
  - kratnost svake nultočke polinoma m_A jednaka je 1.
- **Teorem o preslikavanju spektra.** Neka je $p \in \mathbb{K}[x]$, tada vrijedi da je
$$\sigma(p(A)) = p(\sigma(A)) = \{p(\lambda) \,:\, \lambda \in \sigma(A)\}\,,$$
  vrijedi i $\sigma(A^*) = \overline{\sigma(A)} = \left\{\overline{\lambda} \,:\, \lambda \in \sigma(A)\right\}$, također, ako je A regularan, onda je $\sigma(A^{-1}) = \left\{\frac{1}{\lambda} \,:\, \lambda \in \sigma(A)\right\}$.

- Opet, ako se sve nultočke od k_A nalaze u $\mathbb{K}$ (što vrijedi automatski ako je $\mathbb{K}$ algebarski zatvoreno), onda je operator A **normalan**, odnosno $AA^* = A^*A$, ako i samo ako postoje svojstveni vektori od A koji čine ortonormiranu bazu za V.

- ako je operator A **hermitski** (u realnom slučaju kažemo simetričan), tj. $A^* = A$, onda je A normalan i sve svojstvene vrijednosti od A su realne.

- ako je operator A **unitaran** (odnosno ortogonalan), tj. $A^{-1} = A^*$, onda je A normalan i sve svojstvene vrijednosti od A su modula 1.

- operator A je normalan ako i samo ako je **unitarno sličan** nekoj dijagonalnoj matrici D, tj. ako postoji unitarna matrica U takva da je $A = U^*DU$.

- **Komutativne familije.** Neka je $\mathbb{K}$ algebarski zatvoreno polje.
  - Neka je $\mathcal{S} \subset L(V)$ skup matrica koje međusobno komutiraju, tada postoji regularna matrica S takva da je SAS^{-1} gornje trokutasta matrica, za svaki $A \in \mathcal{S}$. Odnosno, matrice iz skupa $\mathcal{S}$ su **simultano triangularizabilne**.
  - Neka je $\mathcal{S} \subset L(V)$ skup **dijagonalizabilnih** matrica koje međusobno komutiraju, tada postoji regularna matrica S takva da je SAS^{-1} dijagonalna matrica, za svaki $A \in \mathcal{S}$. Odnosno, matrice iz skupa $\mathcal{S}$ su **simultano dijagonalizabilne**.

- **adjunkta matrice**, to je matrica $\widetilde{A} = \left((-1)^{i+j} A_{i,j}\right)^t$, gdje je $A_{i,j}$ (i,j)-ta **minora** (algebarski komplement) matrice A, tj. determinanta $(n-1)\times(n-1)$ matrice koja je dobivena od matrice A izbacivanjem njenog i-tog retka i j-tog stupca. Vrijedi da je $\widetilde{A}A = \det(A)I$.

Zadaci. Od studenata se očekuje da za **domaću zadaću** odaberu i riješe barem **9 zadataka** (koje **nismo** riješili na predavanju). **Rok** za predaju zadaće je na predavanju **19.03.2015**.

1. (Vandermonde) Neka su $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{C}$ i $A = \left(x_i^{j-1}\right)_{1\le i,j\le n}$. Odredite $\det A$.

2. (Cirkularna matrica) Neka su $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$ i
$$A = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \ldots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & \ldots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \ldots & a_0 \end{pmatrix},$$
dokažite da je $\det A = \prod_{j=0}^{n-1}\left(\sum_{k=0}^{n-1} \xi^{jk} a_k\right)$, gdje je $\xi = e^{\frac{2\pi i}{n}}$, primitivni n-ti korijen iz jedinice.

3. (Putnam 1999., B5) Neka je $n \ge 3$ prirodan broj i $A = \left(\cos\frac{2(i+j)\pi}{n}\right)_{1\le i,j\le n}$. Odredite $\det(A+I)$.

4. (Izborno za VJIMC 2012., 2.1) Neka su A i B realne 2015×2015 matrice takve da je $AB = BA$ i $A^{2015} = B^{2015} = I$. Ako je $\mathrm{Tr}\,(AB) = 2015$, dokažite da je $\mathrm{Tr}\,(A) = \mathrm{Tr}\,(B)$.

5. (IMC 2011., 1.2) Postoji li realna 3×3 matrica takva da je $\mathrm{Tr}\,(A) = 0$ i $A^2 + A^t = I$?

6. Neka su A i B realne $n\times n$ matrice, dokažite da je $\det(I + AB) = \det(I + BA)$.

7. Neka je G konačna podgrupa grupe $\mathrm{GL}\,(n, \mathbb{C})$. Pretpostavimo da je $\sum_{A\in G} \mathrm{Tr}\,(A) = 0$. Dokažite da je $\sum_{A\in G} A = 0$.

8. Dokažite da je $\det(I + A^2) \ge 0$ za svaku realnu $n\times n$ matricu.

9. Dokažite: $\det(I+\lambda A^2) \geq 0$, za svaku realnu antisimetričnu $n \times n$ matricu A i svaki $\lambda \in \mathbb{R}$.

10. Neka su A i B realne $n \times n$ matrice takve da postoje a, $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ takvi da je $aA + bB = AB$, dokažite da je $AB = BA$.

11. Postoje li realne $n \times n$ matrice A i B takve da je $AB - BA = I$?

12. (Putnam 1986., B6) Neka su A, B, C i D realne $n \times n$ matrice takve da su matrice AB^t i CD^t simetrične i $AD^t - BC^t = I$, dokažite da je $A^tD - C^tB = I$.

13. (VJIMC 2010., 2.3) Neka su A i B $n \times n$ matrice s cjelobrojnim koeficijentima takve da su matrice
$$A, \quad A+B, \quad A+2B, \quad \ldots, \quad A+2nB$$
invertibilne i inverzi im imaju cjelobrojne koeficijente. Dokažite da je i $A + (2n+1)B$ invertibilna matrica te da joj inverz ima cjelobrojne koeficijente.

14. Neka su A i B kompleksne $n \times n$ matrice. Neka je A regularna i $ABA^{-1} = B^2$. Dokažite da za svaku svojstvenu vrijednost, λ, od B vrijedi $\lambda = 0$ ili $\lambda^k = 1$ za neki $k \in \mathbb{N}$.

15. Neka su A, B, C realne $n \times n$ matrice takve da je
$$ABC + AB + BC + AC + A + B + C = 0.$$
Dokažite da matrice A i $B + C$ komutiraju ako i samo ako matrice A i BC komutiraju.

16. Neka je A $n \times n$ matrica koja na glavnoj dijagonali ima 0, a na svim ostalim mjestima 1, odredite svojstvene vrijednosti i pripadne svojstvene potprostore matrice A.

17. Neka je n neparan prirodan broj i neka je S realna $n \times n$ ortogonalna matrica takva da je $\det S \geq 0$. Dokažite da je $1 \in \sigma(S)$. Vrijedi li tvrdnja i za paran n?

18. Neka je A realna, simetrična, pozitivno definitna $n \times n$ matrica i neka je $0 \neq y \in \mathbb{R}^n$. Dokažite da limes $\lim\limits_{m\to\infty} \dfrac{\langle A^{m+1}y,\, y\rangle}{\langle A^m y,\, y\rangle}$ postoji i da se nalazi u $\sigma(A)$.

19. Neka su A i B realne $n \times n$ matrice takve da je matrica $A + B$ invertibilna. Dokažite da je $A(A+B)^{-1}B = B(A+B)^{-1}A$.

20. Neka je A matrica tipa $2^{2015} \times 2^{2015}$ koja na glavnoj dijagonali ima 0, a na svim ostalim mjestima ima ± 1. Dokažite da je A regularna.

21. Neka su A i B realne $n \times n$ matrice za koje je $\operatorname{Tr}(AA^t + B^tB) = \operatorname{Tr}(AB^t + A^tB)$. Dokažite da je $A = B$.

22. Neka su A i B realne 3×3 matrice za koje je $\det A = \det B = \det(A+B) = \det(A-B) = 0$. Dokažite da je $\det(xA + yB) = 0$ za sve realne brojeve x i y.

23. Postoji li $p \in \mathbb{R}[x]$ parnog stupnja takav da je funkcija, $f\colon M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$, $f(X) = p(X)$, surjekcija?

24. (Izborno za VJIMC 2009., 1.1) Neka je n neparan prirodan broj i A realna $n \times n$ matrica takva da je $A^2 = 0$ ili $A^2 = I$. Dokažite da je $\det(A+I) \geq \det(A-I)$.

25. Neka je $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ kompleksna matrica takva da je $\sum\limits_{j=1}^{n} |a_{i,j}| < 1$, za svaki i. Dokažite da je matrica $I - A$ regularna.

26. Neka je $A \in M_n(\mathbb{R})$ takva da postoji $k \in \mathbb{N}$ za koji je $kA^{k+1} = (k+1)A^k$. Dokažite da je $A - I$ regularna i odredite joj inverz.

27. Neka su A, $B \in M_3(\mathbb{R})$. Dokažite da je $\det(AB - BA) = \frac{1}{3}\operatorname{Tr}((AB-BA)^3)$.