

# APSTRAKTNA ALGEBRA NA NATJECANJIMA

Ivan Krijan

14. 05. 2015.

Za **domaću zadaću** riješite dva zadatka iz grupa i dva iz prstena. Rok predaje je na predavanju 28.05.2015.

**Grupa**  $G$  je neprazan skup snabdjeven binarnom operacijom  $\cdot$  koja zadovoljava:

- (asocijativnost)  $x(yz) = (xy)z$ , za sve  $x, y, z \in G$ ,
- (jedinica) postoji  $e \in G$  takav da je  $ex = xe = x$ , za sve  $x \in G$ ,
- (inverz) za svaki  $x \in G$  postoji  $x^{-1} \in G$  takav da je  $xx^{-1} = x^{-1}x = e$ .

Napomena.

- Jedinica u grupi je jedinstvena, također, za dani  $x \in G$ , njegov inverz  $x^{-1}$  je jedinstven.
- Grupu koja je komutativna, tj.  $xy = yx$ , za sve  $x, y \in G$ , nazivamo **Abelova** grupa. Abelove grupe ćemo najčešće zapisivati aditivno, tj. binarna operacija će biti  $+$ .
- Ako je grupa  $G$  konačna (a takva će uglavnom i biti), broj njezinih elemenata nazivamo **red** grupe.
- **Red** elementa  $x \in G$  je najmanji prirodni broj  $n \in \mathbb{N}$  takav da je  $x^n = e$ . Ako je grupa konačna, onda svaki element ima konačan red. Štoviše, ako je red grupe jednak  $N$ , onda je  $x^N = e$ , za sve  $x \in G$ . Dakle, u konačnim grupama vrijedi da red svakog elementa dijeli red grupe.
- Podgrupa grupe  $G$  je podskup skupa  $G$  koji je grupa uz operacije naslijedene iz grupe  $G$ . Oznaka je  $H \leq G$ . Jasno je da presjek proizvoljne familije podgrupa neke grupe opet podgrupa. Za podskup  $S \subseteq G$  sa  $\langle S \rangle$  označavamo podgrupu **generiranu** skupom  $S$ . To je naprsto presjek svih podgrupa grupe  $G$  koje sadrže skup  $S$ . Ukoliko postoji konačan skup  $S \subseteq G$  takav da je  $\langle S \rangle = G$ , onda kažemo da je grupa  $G$  **konačno generirana**. Ukoliko je taj konačni skup  $S$  jednočlan, onda je grupa **ciklička**. Primjer cikličke grupe je naprsto skup cijelih brojeva. Njegovi generatori su 1 ili  $-1$ . To su i jedini generatori. Zašto?

**Primjer 1.** Neka je  $G$  neprazan skup snabdjeven binarnom operacijom  $\cdot$  koja je asocijativna i dopušta kraćenje slijeva, tj. ako je  $xy = xz$ , onda je  $y = z$ . Ako postoji  $a \in G$  takav da je  $x^3 = axa$ , za sve  $x \in G$  dokažite da je  $(G, \cdot)$  Abelova grupa.

**Primjer 2.** Neka je  $(G, \cdot)$  grupa s jedinicom  $e$ . Ako su  $a, b \in G$  takvi da je  $a^3 = e$ ,  $ab^2 = ba^2$  i  $(a^2b)^{2015} = e$ , dokažite da je  $a = b$ .

**Primjer 3.** Neka je  $p > 2$  prost broj. Dokažite da  $p \mid F_{2p(p^2-1)}$ , gdje je  $F_n$   $n$ -ti Fibonaccijev broj.

**Zadatak 1.** Neka su  $r, s, t$  u parovima relativno prosti prirodni brojevi. Neka je  $G$  Abelova grupa s jedinicom  $e$ , ako su  $a, b \in G$  takvi da je  $a^r = b^s = (ab)^t = e$ , dokažite da je  $a = b = e$ .

**Zadatak 2.** Vrijedi li tvrdnja prethodnog zadatka za proizvoljnu grupu  $G$ ?

**Zadatak 3.** Neka je  $G$  grupa s jedinicom  $e$  te neka su  $a, b \in G$  i  $n$  prirodan broj. Ako je  $(aba^{-1})^n = e$ , dokažite da je  $b^n = e$ .

**Zadatak 4.** Neka je  $G$  grupa koja ne sadrži element reda 2, ako je  $(xy)^2 = (yx)^2$ , za sve  $x, y \in G$  dokažite da je grupa  $G$  Abelova.

**Prsten**  $R$  je neprazan skup snabdjeven s dvije binarne operacije,  $+$ ,  $\cdot$  takve da je  $(R, +)$  Abelova grupa s neutralnim elementom  $0$  te da vrijedi:

- (asocijativnost)  $x(yz) = (xy)z$ , za sve  $x, y, z \in R$ ,
- (distributivnost)  $x(y + z) = xy + xz$  te  $(x + y)z = xz + yz$ , za sve  $x, y, z \in R$ .

Napomena.

- Ukoliko prsten posjeduje neutralni element i za množenje onda govorimo o prstenu s jedinicom. Jasno da je tada ta jedinica jedinstvena. Također,  $0$  je jedinstvena. Nadalje, za svaki  $x \in R$  je  $x \cdot 0 = 0 \cdot x = 0$ . Ako je operacija množenja također komutativna, onda je riječ o komutativnom prstenu.
- Za element  $x \in R$  kažemo da je **invertibilan** (o čemu ima smisla pričati jedino ako je prsten s jedinicom) ako postoji  $x^{-1} \in R$  takav da je  $xx^{-1} = x^{-1}x = 1$ . Jasno je da je takav element  $x^{-1}$  jedinstven.
- Za prsten kažemo da je **trivijalan** ako je  $R = \{0\}$ . Ako je  $R$  netrivijalan i posjeduje jedinicu, onda je  $1 \neq 0$ .

**Primjer 4.** Neka je  $R$  prsten s jedinicom te neka su  $x, y \in R$  takvi da je  $1 - xy$  invertibilan. Dokažite da je  $1 - yx$  također invertibilan.

**Primjer 5.** Za prsten  $R$  kažemo da je **poluprost** ukoliko za svaki  $a \in R$ ,  $a \neq 0$  postoji  $x \in R$  takav da je  $axa \neq 0$ . Neka je  $R$  poluprost prsten bez 2-torzije, tj. ako je  $2x = 0$ , onda je  $x = 0$ . Pretpostavimo da element  $a \in R$  komutira sa svim svojim komutatorima  $ax - xa$ ,  $x \in R$ . Dokažite da se  $a$  nalazi u centru od  $R$ , tj. da  $a$  komutira sa svim elemetima iz  $R$ .

**Primjer 6.** Neka je  $R$  prsten s jedinicom.

- Ako je  $x^2 = x$ , za svaki  $x \in R$ , dokažite da je  $R$  komutativan.
- Ako je  $x^6 = x$ , za svaki  $x \in R$ , dokažite da je  $R$  komutativan.

Napomena. **Jacobsonov teorem.** Neka je  $R$  prsten takav da, za svaki  $x \in R$  postoji prirodan broj  $n(x) > 1$  takav da je  $x^{n(x)} = x$ . Takav prsten je komutativan.

**Zadatak 5.** Neka je  $R$  netrivijalan prsten s jedinicom. Neka je  $M$  skup **idempotentnih** elemenata u  $R$ , tj.  $M = \{x \in R : x = x^2\}$ . Pretpostavimo da je  $M$  konačan skup, dokažite da tada sadrži parno mnogo elemenata.

**Zadatak 6.** Neka je  $R$  prsten s jedinicom takav da je  $(xy)^2 = x^2y^2$ , za sve  $x, y \in R$ . Dokažite da je  $R$  komutativan.

**Zadatak 7.** Neka je  $R$  prsten s jedinicom. Neka su  $x, y \in R$  te  $n \in \mathbb{N}$  takvi da je element  $1 - (xy)^n$  invertibilan, dokažite da je i  $1 - (yx)^n$  invertibilan.

**Zadatak 8.** Neka je  $R$  prsten sa svojstvom da ako je  $x \in R$  takav da je  $x^2 = 0$ , onda je  $x = 0$ .

- Neka je  $x \in R$  idempotentan, dokažite da je  $xyx - yx = 0$ , za sve  $y \in R$ .
- Dokažite da se svi idempotentni elementi u  $R$  nalaze u centru od  $R$ .

**Zadatak 9.** Neka je  $R$  prsten s jedinicom. Neka su  $a, b, c \in R$  takvi da je:

- $ab = ba$ ,  $bc = cb$ ,
- ako je  $bx = by$ , onda je  $x = y$ , za sve  $x, y \in R$ ,
- $b = ca \neq ac$ .

Dokažite da  $R$  ima beskonačno mnogo elemenata.