SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
MATEMATIČKI ODSJEK

Ivan Krijan

REPREZENTACIJE KLASIČNIH KONAČNIH GRUPA

Diplomski rad

Voditelj rada:
Akademik, prof. dr. sc. Marko Tadić

Zagreb, 2013

Želim zahvaliti svima onima koji su na bilo koji način zaslužni za nastanak ovog rada. Prvenstveno hvala mom mentoru, akademiku Marku Tadiću na zanimljivoj temi i čitanju prvotnih verzija i savjetima oko izrade diplomskog rada. Hvala mom srednjoškolskom mentoru, Branku Topiću, koji mi je usadio veliki interes za matematikom i koji mi je jako pomogao u početnim koracima mog matematičkog obrazovanja. Također, hvala svim profesorima i asistentima Matematičkog odsjeka Prirodoslovno–Matematičkog fakulteta u Zagrebu koji su me uveli u svijet ozbiljnije matematike. Posebno hvala profesoru Goranu Muiću na izboru odlične teme i iznimnoj podršci tokom izrade rada nagrađenog Rektorovom nagradom.
Hvala mojim roditeljima, obitelji, djevojci i prijateljima na bezuvjetnoj podršci!

Sadržaj

Uvod

Prvi cilj ovog rada je sustvano i precizno izložiti osnovne pojmove i rezultate teorije konačno dimenzionalnih kompleksnih reprezentacija konačnih grupa. Sljedeći cilj je opisati strukturu PSH algebre te objasniti kako se ona relativno prirodno dobije u slučaju dviju teorija konačnih grupa. To su simetrične grupe, tj. grupa svih permutacija elemenata skupa $\{1, 2, \ldots, n\}$, za $n \in \mathbb{N}$, u oznaci S_n te generalne linearne grupe nad konačnim poljem, u oznaci $\mathrm{GL}\,(n, \mathbb{F}_q)$. To je grupa svih regularnih $n \times n$ ($n \in \mathbb{N}$) matrica s elementima iz polja $\mathbb{F}_q$, gdje je $q = p^k$ za neki prost broj p i prirodan broj k. Struktura PSH algebre, točnije, strukturna teorija PSH algebri na primjeru tih grupa nam daje lijepu i korisnu karakterizaciju njihovih reprezentacija.

U poglavlju 1, koristeći se uglavnom knjigom [2], dajemo već spomenuti pregled osnovnih pojmova i rezultata iz teorije reprezentacija. Cilj nam je prvenstveno doći do pojma karaktera reprezentacije, restrikcije reprezentacije te inducirane reprezentacije. Ti su nam pojmovi od posebne važnosti u drugom poglavlju.

Poglavlje 2, napravljeno većinom prema knjizi [3], je podijeljeno na tri sekcije. U prvoj, 2.1, precizno definiramo strukturu PSH algebre te dajemo, bez dokaza, pregled osnovne strukturne teorije PSH algebri. Zatim objašnjavamo, u 2.2, kako uvodimo strukturu PSH algebre na reprezentacije od S_n te kako time dolazimo do boljeg razumijevanja reprezentacija simetričnih grupa. Naposljetku, u sekciji 2.3, to isto radimo za reprezentacije od $\mathrm{GL}\,(n, \mathbb{F}_q)$.

Poglavlje 1

Reprezentacije

1.1 Osnovni pojmovi

U ovoj, prvoj, sekciji ćemo dati pregled osnovnih pojmova kojima ćemo se baviti u ovom radu. Neke pojmove ćemo smatrati poznatima (kao što su vektorski prostor, grupa, homomorfizam, ...), njihove definicije se mogu naći u [1].

Neka je V konačno dimenzionalni vektorski prostor nad poljem $\mathbb{C}$ kompleksnih brojeva i neka je $\mathrm{GL}(V)$ grupa automorfizama tog vektorskog prostora. Ukoliko je dimenzija vektorskog prostora V jednaka $n \in \mathbb{N}$ znamo da je grupa $\mathrm{GL}(V)$ izomorfna grupi invertibilnih matrica reda n. Točnije, linearni operator $A : V \to V$ promatramo kao njegov matrični zapis u nekoj bazi vektorskog prostora V i tada znamo da je $A \in \mathrm{GL}(V)$ ako i samo ako je $\det A \neq 0$.

Neka je G (multiplikativna) konačna grupa s jedinicom 1.

Definicija 1.1.1. ***Reprezentacija*** *grupe G na vektorskom prostoru V je homomorfizam $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$.* ***Stupanj*** *reprezentacije ρ je $n = \dim V$.*

Preciznije, svakom elementu $s \in G$ grupe G pridružujemo regularni linearni operator $\rho(s) \in \mathrm{GL}(V)$ i to tako da vrijedi:

$$\rho(st) = \rho(s)\,\rho(t)\,, \quad \forall s, t \in G.$$

Primijetimo da nam iz definicije odmah slijedi da je

$$\rho(1) = I = \mathrm{id}_V \quad \text{i} \quad \rho\left(s^{-1}\right) = \rho(s)^{-1}\,,\ \forall s \in G.$$

Uglavnom ćemo pisati, jednostavnije, ρ_s, također, kada je iz konteksta jasno na koji homomorfizam ρ mislimo ili kada nam sam homomorfizam nije bitan reći ćemo naprosto da je V prostor reprezentacije grupe G ili još slobodnije, da je V reprezentacija od G.

Neka je $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ neka (fiksna) baza vektorskog prostora V. Za svaki $s \in G$ neka je R_s matrični zapis operatora ρ_s u toj bazi. Znamo da je

$$\det R_s \neq 0 \quad \text{i} \quad R_{st} = R_s R_t, \ \forall s, t \in G.$$

Obratno, zadamo li matrice $(R_s)_{s\in G}$ koje imaju ista svojstva zapravo smo zadali reprezentaciju grupe G na vektorskom prostoru V. Dakle, zadali smo reprezentaciju "u matričnoj formi".

Definicija 1.1.2. *Neka su ρ i ρ' dvije reprezentacije grupe G na vektorskim prostorima V i V' redom. Kažemo da su te dvije reprezentacije* ***ekvivalentne*** *(izomorfne) ako postoji linearni izomorfizam $\tau : V \to V'$ takav da je*

$$\tau \circ \rho(s) = \rho'(s) \circ \tau, \ \forall s \in G.$$

U tom slučaju pišemo $\rho \cong \rho'$.

Iz definicije je jasno da ekvivalentne reprezentacije imaju isti stupanj. Pogledamo li matričnu formu ekvivalentnih reprezentacija vidjeti ćemo da ekvivalentnost zapravo znači da postoji invertibilna matrica T takva da je

$$T \cdot R_s = R'_s \cdot T, \ \forall s \in G,$$

gdje je R_s matrični zapis operatora ρ_s na V, a R'_s matrični zapis operatora ρ'_s na V'. Dakle, za svaki $s \in G$ vrijedi da je $R'_s = T \cdot R_s \cdot T^{-1}$.

Primjer 1.1.3. Ovdje dajemo primjere dvaju tipičnih reprezentacija.

(a) Reprezentacija stupnja 1 grupe G je homomorfizam $\rho : G \to \mathbb{C}^*$, gdje $\mathbb{C}^*$ označava multiplikativnu grupu kompleksnih brojeva različitih od 0. Zašto? Naime, svi linearni operatori na vektorskom prostoru dimenzije 1 su zapravo množenje nekim kompleksnim brojem, a svi regularni su upravo oni kada je taj broj različit od 0. Kako je svaki element grupe G konačnog reda, jasno je da su $\rho(s)$ korijeni iz jedinice, $s \in G$. Stavimo li da je $\rho(s) = 1$ za sve $s \in G$ dobivamo reprezentaciju koju zovemo **trivijalna** (jedinična) reprezentacija.

(b) **Regularna** reprezentacija grupe G. Neka je n red grupe G i neka je V vektorski prostor dimenzije n. Fiksirajmo neku bazu od V i indeksirajmo ju po elementima grupe G, tj. neka je $(e_t)_{t\in G}$ baza vektorskog prostora V. Za svaki $s \in G$ neka je $\rho_s \in \mathrm{GL}(V)$ takav da je $\rho_s(e_t) = e_{st}$, za sve $t \in G$. Tu reprezentaciju nazivamo regularnom reprezentacijom grupe G, njena dimenzija je jednaka redu grupe G. Primijetimo da slike od e_1 tvore bazu za V, zato što je $\rho_s(e_1) = e_s$, za svaki $s \in G$. Obratno, neka je W reprezentacija od G takva da postoji vektor $w \in W$ takav da je $(\rho_s(w))_{s\in G}$ baza za W. Tada je W izomorfna regularnoj reprezentaciji, izomorfizam $\tau : V \to W$ je dan s $\tau(e_t) = \rho_t(w)$, za svaki $t \in G$.

Neka je $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ reprezentacija grupe G na vektorskom prostoru V i neka je W potprostor od V. Kažemo da je W **invarijantan** za danu reprezentaciju ako za svaki $x \in W$ vrijedi da je $\rho_s(x) \in W$, za svaki $s \in G$.

Definicija 1.1.4. *Neka je $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ reprezentacija grupe G na vektorskom prostoru V i neka je W potprostor od V invarijantan za ρ.* ***Podreprezentacija*** *reprezentacije ρ je homomorfizam $\rho^W : G \to \mathrm{GL}(W)$ takav da je, za svaki $s \in G$, ρ_s^W restrikcija od ρ_s na W.*

Primjer 1.1.5. Neka je V regularna reprezentacija grupe G (primjer 1.1.3, dio (b)). Neka je W jednodimenzionalni potprostor od V generiran elementom $x = \sum_{t \in G} e_t$. Tada imamo da je $\rho_s x = x$, za sve $s \in G$, tj. W je podreprezentacija od V i ona je ekvivalentna trivijalnoj reprezentaciji.

Dalje će nam biti potrebni neki (osnovni) pojmovi i rezultati linearne algebre, svi se mogu naći u [1], sada ćemo ih samo navesti. Za potprostore W i W' vektorskog prostora V kažemo da su direktni komplementi (jedan drugomu) ako se svaki $x \in V$ može na jedinstven način prikazati kao $x = w + w'$, gdje je $w \in W$ i $w' \in W'$. Tada pišemo $V = W \oplus W'$ i kažemo da je V direktna suma od W i W'. Preslikavanje koje svakom $x \in V$ pridružuje njemu odgovarajući $w \in W$ nazivamo projekcija u odnosu na dekompoziciju $V = W \oplus W'$. Poznato je da za svaki potprostor W od V postoji barem jedan (ne nužno jedinstven) njegov direktni komplement. Također, ukoliko je operator $\pi : V \to W$ surjekcija i vrijedi da je $\pi(x) = x$, za svaki $x \in W$, onda postoji direktni komplement od W takav da je π projekcija u odnosu na tu dekompoziciju. Preciznije, taj direktni komplement je upravo jednak $\mathrm{Ker}(\pi)$, jezgi operatora π.

Teorem 1.1.6. *Neka je $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ reprezentacija grupe G na vektorskom prostoru V i neka je W potprostor od V invarijantan za ρ. Tada postoji direktni komplement W^0 od W koji je također invarijantan za ρ.*

Dokaz. Neka je W' neki direktni komplement od W u V i neka je $\pi : V \to W$ odgovarajuća projekcija. Neka je red grupe G jednak n, promatrajmo operator

$$\pi^0 = \frac{1}{n} \sum_{t \in G} \rho_t \circ \pi \circ \rho_t^{-1}.$$

Za svaki $t \in G$ i za svaki $x \in W$ je $\rho_t^{-1}(x) \in W$, zato što je W invarijantan za ρ_t. Dakle,

$$\left(\pi \circ \rho_t^{-1}\right)(x) = \rho_t^{-1}(x) \Longrightarrow \left(\rho_t \circ \pi \circ \rho_t^{-1}\right)(x) = x, \ \forall t \in G.$$

Iz ovoga zaključujemo da je $\pi^0(x) = x$, za svaki $x \in W$, a kako je slika od π^0 sadržana u W, jer je π projekcija na W i W je invarijantan za ρ, zaključujemo da je slika od π^0

jednaka W. Dakle, postoji direktni komplement W^0 od W takav da je π^0 projekcija na W u odnosu na dekompoziciji $V = W \oplus W^0$. Primijetimo da je, za svaki $s \in G$,

$$\rho_s \circ \pi^0 \circ \rho_s^{-1} = \frac{1}{n} \sum_{t \in G} \rho_s \circ \rho_t \circ \pi \circ \rho_t^{-1} = \frac{1}{n} \sum_{t \in G} \rho_{st} \circ \pi \circ \rho_{st}^{-1} = \pi^0.$$

Konačno, za $x \in W^0$ i $s \in G$ je $\pi^0(x) = 0$, a kako je $\pi^0 \circ \rho_s = \rho_s \circ \pi^0$, zaključujemo da je $\pi^0(\rho_s(x)) = 0$, dakle, $\rho_s(x) \in W^0$, tj. W^0 je invarijantan za ρ. $\mathfrak{Q.E.D.}$

Uz oznake iz prethodnog teorema, jasno je da reprezentacije W i W^0 određuju reprezentaciju V. To ćemo pisati isto kao i za direktnu sumu prosotra, $V = W \oplus W^0$. Ako je, za $s \in G$ operator ρ_s^W dan matričnim zapisom R_s, a operator $\rho_s^{W^0}$ matričnim zapisom R_s^0, onda je operator ρ_s dan matričnim zapisom

$$\begin{pmatrix} R_s & 0 \\ 0 & R_s^0 \end{pmatrix}.$$

Ireducibilne reprezentacije

Definicija 1.1.7. *Neka je $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ reprezentacija konačne grupe G na konačno dimenzionalnom vektorskom prostoru V. Kažemo da je ρ* ***ireducibilna reprezentacija*** *ako nije jednaka 0 i ako ne postoji netrivijalni (različit od 0 i V) potprostor od V koji je invarijantan za ρ.*

Prema teoremu 1.1.6 vidimo da je reprezentacija ireducibilna ako i samo ako nije jednaka direktnoj sumi nekih dviju reprezentacija (različitih od 0). Također, prema tome je jasno da je svaka reprezentacija stupnja 1 ireducibilna.

Teorem 1.1.8. *Svaka reprezentacija jednaka je direktnoj sumi ireducibilnih reprezentacija.*

Dokaz. Neka je V reprezentacija od G, kao u prethodnoj definiciji. Dokaz provodimo indukcijom po $\dim V$. Ako je $\dim V = 0$ nemamo što dokazivati. Pretpostavimo da je $\dim V \geq 1$ i pretpostavimo da V nije ireducibilna (u suprotnom smo gotovi) te da je svaka reprezentacija dimenzije manje od $\dim V$ prikaziva kao direktna suma ireducibilnih reprezentacija. Prema teoremu 1.1.6, V se može prikazati kao direktna suma $V = V' \oplus V''$ nekih reprezentacija takvih da je $\dim V' < \dim V$ i $\dim V'' < \dim V$. No, prema pretpostavci smo sada gotovi. $\mathfrak{Q.E.D.}$

Napomena 1.1.9. *Dekompozicija reprezentacije na ireducibilne reprezentacije nipošto nije jedinstvena. Npr. vektorski prostor $\mathbb{R}^2$ (ravnina) se može prikazati kao direktna suma bilo koja dva različita pravca koja prolaze ishodištem. Primijetimo da* *su svi pravci izomorfni s $\mathbb{R}$. Pokazati će se da je ono što je jedinstveno u rastavu reprezentacije na ireducibilne reprezentacije upravo broj tih ireducibilnih reprezentacija koje su izomorfne nekoj danoj reprezentaciji.*

Tenzorski produkt reprezentacija

Ovdje ćemo definirati tenzorski produkt dviju reprezentacija. Direktna suma je svojevrsno zbrajanje reprezentacija, dok će množenje biti upravo tenzorski produkt.

Definicija 1.1.10. *Neka su V_1 i V_2 vektorski prostori redom s bazama $(e_i)_{i=1,\dots,n}$ i $(e_j)_{j=1,\dots,m}$, gdje su $n,\ m \in \mathbb{N}$. Vektorski prostor W s operacijom $\varphi : V_1 \times V_2 \to W$ je* ***tenzorski produkt*** *prostora V_1 i V_2 ako su ispunjena sljedeća dva svojstva:*

(i) φ je linearno preslikavanje u obje varijable.

(ii) $(\varphi(e_i,\ e_j))_{i=1,\dots,n,\ j=1,\dots,m}$ je baza vektorskog prostora W.

U gornjoj definiciji, uglavnom ne pišemo funkciju φ, nego jednostavno

$$(x_1,\ x_2) \mapsto x_1 \cdot x_2 = x_1 x_2 \in W, \text{ za } x_1 \in V_1 \text{ i } x_2 \in V_2.$$

Jasno je da je dimenzija vektorskog prostora W jednaka $n \cdot m$, tj. $\dim V_1 \cdot \dim V_2$. Također, lako se vidi da takav prostor W uvijek postoji i da je jedinstven (jasno, do na izomorfizam). Pisati ćemo $W = V_1 \otimes V_2$.

Definicija 1.1.11. *Neka su $\rho^1 : G \to \mathrm{GL}(V_1)$ i $\rho^2 : G \to \mathrm{GL}(V_2)$ dvije reprezentacije konačne grupe G na vektorskim prostorima V_1 i V_2. Za svaki $s \in G$ definirajmo $\rho_s \in \mathrm{GL}(V_1 \otimes V_2)$ relacijom*

$$\rho_s(x_1 \cdot x_2) = \rho_s^1(x_1) \cdot \rho_s^2(x_2),\ x_1 \in V_1,\ x_2 \in V_2.$$

Tako definirana reprezentacija ρ grupe G u vektorskom prostoru $V_1 \otimes V_2$ naziva se ***tenzorski produkt reprezentacija*** *ρ^1 i ρ^2.*

Opet, jasno je da tenzorski produkt reprezentacija postoji i da je jedinstven do na izomorfizam, također, pisati ćemo $\rho = \rho^1 \otimes \rho^2$. Fiksirajmo baze za V_1, V_2, a time i za $W = V_1 \otimes V_2$, kao u definiciji 1.1.10. Tada lako vidimo da je, za $s \in G$, matrični prikaz operatora ρ_s jednak (Kroneckerovom) tenzorskom produktu matričnih prikaza operatora ρ_s^1 i ρ_s^2. Tenzorski produkt matrica $A = (a_{i_1,j_1})$, $B = (b_{i_2,j_2})$ dimenzija, redom $n \times n$ i $m \times m$ je matrica $C = (c_{i_1 j_1, i_2 j_2})$ dimenzije $nm \times nm$ takva da je $c_{i_1 j_1, i_2 j_2} = a_{i_1,j_1} b_{i_2,j_2}$.

1.2 Karakter reprezentacije

Ovdje će nam biti potreban još jedan pojam iz linearne algebre, a to je trag matrice, odnosno operatora, opet, sve o njemu se može naći u [1]. Za matricu (operator) A ćemo njen trag označavati s $\mathrm{Tr}\,(A)$. Spomenuti ćemo da je on jednak sumi dijagonalnih elemenata matrice, a to je zapravo jednako sumi svojstvenih vrijednosti pripadajućeg operatora, brojenih s odgovarajućim multiplicitetima. Također, ne ovisi o izboru baze promatranog vektorskog prostora.

Definicija 1.2.1. *Neka je $\rho : G \to \mathrm{GL}\,(V)$ reprezentacija konačne grupe G u vektorskom prostoru V. Za svaki $s \in G$ neka je*

$$\chi_\rho\,(s) = \mathrm{Tr}\,(\rho_s)\,.$$

Funkciju χ_ρ nazivamo ***karakter reprezentacije*** *ρ.*

Propozicija 1.2.2. *Neka je χ karakter reprezentacije ρ (grupe G) stupnja $n \in \mathbb{N}$, tada je:*

(1) $\chi\,(1) = n$,

(2) $\chi\left(s^{-1}\right) = \overline{\chi\,(s)}$, *za svaki* $s \in G$,

(3) $\chi\,(ts) = \chi\,(st)$, *za sve* $s,\ t \in G$.

Dokaz.

(1) Očito, zato što je $\rho\,(1) = I$ i $\mathrm{Tr}\,(I) = n$.

(2) Znamo da je, za svaki $s \in G$, ρ_s konačnog reda, zato što je G konačna grupa. To znači da postoji $m \in \mathbb{N}$ takav da je $\rho_s^m = I$, a to onda znači da su sve svojstvene vrijednosti operatora ρ_s po apsolutnoj vrijednosti jednake 1. Neka su $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots,\ \lambda_n$ sve svojstvene vrijednosti operatora ρ_s. Sada vidimo da je

$$\chi\left(s^{-1}\right) = \mathrm{Tr}\left(\rho_s^{-1}\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^{-1} = \sum_{i=1}^{n} \overline{\lambda_i} = \overline{\mathrm{Tr}\,(\rho_s)} = \overline{\chi\,(s)}.$$

(3) Ovo slijedi direktno iz činjenice da za proizvoljne matrice A i B dimenzija $n \times n$ vrijedi da je $\mathrm{Tr}\,(AB) = \mathrm{Tr}\,(BA)$. $\mathfrak{Q}.\mathfrak{E}.\mathfrak{D}.$

Sljedeća propozicija će nam još malo približiti činjenicu da su direktna suma i tenzorski produkt u neku ruku zbrajanje i množenje reprezentacija.

Propozicija 1.2.3. *Neka su ρ_1 i ρ_2 reprezentacije konačne grupe G s karakterima, redom, χ_1 i χ_2.*

(1) Za karakter $\chi_\oplus$ reprezentacije $\rho_1 \oplus \rho_2$ vrijedi da je $\chi_\oplus = \chi_1 + \chi_2$.

(2) Za karakter $\chi_\otimes$ reprezentacije $\rho_1 \otimes \rho_2$ vrijedi da je $\chi_\otimes = \chi_1 \cdot \chi_2$.

Dokaz. Slijedi direktno pogledamo li matrične zapise reprezentacija $\rho_1 \oplus \rho_2$ i $\rho_1 \otimes \rho_2$, tj. kako njih dobijemo iz matričnih zapisa reprezentacija ρ_1 i ρ_2. $\mathfrak{Q.E.D.}$

Schurova lema i relacije ortogonalnosti

Najprije navodimo elementaran, ali jako koristan rezultat (Schurovu lemu), a zatim idemo prema relacijama ortogonalnosti, rezultatima koji će nas dovesti do činjenice spomenute u napomeni 1.1.9.

Teorem 1.2.4 (Schurova lema)**.** *Neka su $\rho_1 : G \to \mathrm{GL}(V_1)$ i $\rho_2 : G \to \mathrm{GL}(V_2)$ dvije ireducibilne reprezentacije konačne grupe G na konačno dimenzionalnim vektorskim prostorima V_1 i V_2. Ako je $f : V_1 \to V_2$ linearno preslikavanje takvo da je*

$$\rho_s^2 \circ f = f \circ \rho_s^1, \quad \forall s \in G,$$

onda

(1) ako ρ_1 i ρ_2 nisu ekvivalentne, onda je $f = 0$,

(2) ako je $V_1 = V_2$ i $\rho_1 = \rho_2$, onda je $f = \lambda I$, za neki $\lambda \in \mathbb{C}$.

Dokaz. Ukoliko je $f = 0$ nemamo što dokazivati, stoga pretpostavimo da je $f \neq 0$. Neka je $W_1 = \mathrm{Ker}(f)$. Za svaki $x \in W_1$, kako je $\rho_s^2 \circ f = f \circ \rho_s^1$, vidimo da je i $\rho_s^1(x) \in W_1$, stoga je W_1 invarijantan za ρ_1. No, ρ_1 je ireducibilna reprezentacija, stoga je $W_1 = V_1$ ili $W_1 = \{0\}$, a kako je $f \neq 0$, zaključujemo da je $W_1 = \{0\}$. Neka je $W_2 = \mathrm{Im}(f)$, slično vidimo da je W_2 invarijantan za ρ_2, a onda zaključujemo da je $W_2 = V_2$. Iz svega toga zaključujemo da je f izomorfizam između V_1 i V_2, ovime smo pokazali tvrdnju (1).

Za dokaz tvrdnje (2), postoji $\lambda \in \mathbb{C}$, svojstvena vrijednost linearnog operatora f. Neka je $f_0 = f - \lambda$, jasno je da je tada $\mathrm{Ker}(f_0) \neq \{0\}$, ali i da vrijedi da je $\rho_s^2 \circ f_0 = f_0 \circ \rho_s^1$, za sve $s \in G$. No, sada postupajući kao u prvom dijelu dokaza zaključujemo da je moguće jedino da je $f_0 = 0$, tj. $f = \lambda I$. $\mathfrak{Q.E.D.}$

Kao i u prethodnom teoremu, neka su $\rho_1 : G \to \mathrm{GL}(V_1)$ i $\rho_2 : G \to \mathrm{GL}(V_2)$ dvije ireducibilne reprezentacije konačne grupe G, reda $g \in \mathbb{N}$, na konačno dimenzionalnim vektorskim prostorima V_1 i V_2, dimenzija, redom, m, $n \in \mathbb{N}$. Fiksirajmo neke baze tih vektorskih prostora te neka su, za svaki $t \in G$,

$$\rho_t^1 = (r_{i_1 j_1}(t)), \quad \rho_t^2 = (r_{i_2 j_2}(t))$$

matrični zapisi tih reprezentacija, i_1, $j_1 \in \{1, 2, \ldots, m\}$, i_2, $j_2 \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Nadalje, neka je $h : V_1 \to V_2$ linearni operator čija je matrična forma u danim bazama jednaka $(x_{i_2 i_1})$, $i_1 \in \{1, 2, \ldots, m\}$, $i_2 \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Neka je $h^0 : V_1 \to V_2$ linearni operator definiran relacijom

$$h^0 = \frac{1}{g} \sum_{t \in G} \left(\rho_t^2\right)^{-1} h \rho_t^1$$

i neka je njegova matrična forma u danim bazama jednaka $\left(x_{i_2 i_1}^0\right)$. Jasno je da tada vrijedi:

$$x_{i_2 i_1}^0 = \frac{1}{g} \sum_{\substack{t \in G \\ j_1 \in \{1, 2, \ldots, m\} \\ j_2 \in \{1, 2, \ldots, n\}}} r_{i_2 j_2}\left(t^{-1}\right) x_{j_2 j_1} r_{j_1 i_1}(t). \tag{1.2.1}$$

Definirajmo još što je to Kroneckerov simbol, za njega naprosto vrijedi:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ako je } i = j \\ 0, & \text{inače} \end{cases}, \text{ za sve } i,\, j \in \mathbb{N}.$$

sada smo spremni izreći i dokazati sljedeći (bitan) korolar.

Korolar 1.2.5.

(1) Ako ρ^1 i ρ^2 nisu izomorfne reprezentacije, onda je $h^0 = 0$ i vrijedi da je

$$\sum_{t \in G} r_{i_2 j_2}\left(t^{-1}\right) r_{j_1 i_1}(t) = 0,$$

za sve i_1, $j_1 \in \{1, 2, \ldots, m\}$ te i_2, $j_2 \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

(2) Ako je $V_1 = V_2$ (tada je i $m = n$) i $\rho^1 = \rho^2$, onda je $h^0 = \frac{\operatorname{Tr}(h)}{n} \cdot I$ i vrijedi da je

$$\sum_{t \in G} r_{i_2 j_2}\left(t^{-1}\right) r_{j_1 i_1}(t) = \frac{g}{n} \delta_{i_2 i_1} \delta_{j_2 j_1},$$

za sve i_1, j_1, i_2, $j_2 \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Dokaz. Lako se vidi da je $\rho_s^2 \circ h^0 = h^0 \circ \rho_s^1, \quad \forall s \in G$, zaista:

$$\begin{aligned}\left(\rho_s^2\right)^{-1} \circ h^0 \circ \rho_s^1 &= \frac{1}{g} \sum_{t \in G} \left(\rho_s^2\right)^{-1} \left(\rho_t^2\right)^{-1} h \rho_t^1 \rho_s^1 \\ &= \frac{1}{g} \sum_{t \in G} \left(\rho_{ts}^2\right)^{-1} h \rho_{ts}^1 = h^0.\end{aligned}$$

(1) Prva tvrdnja slijedi direktno iz Schurove leme (teorem 1.2.4, dio (1)), druga tvrdnja slijedi iz činjenice što je $h_0 = 0$ neovisno o h pa onda u (1.2.1) možemo, za proizvoljne i_1 i i_2 te fiksne j_1 i j_2, staviti $x_{j_2 j_1} = 1$, a sve ostale 0.

(2) Opet iz Schurove leme (točnije, iz dijela (2)) znamo da je $h^0 = \lambda I$, za neki $\lambda \in \mathbb{C}$. No, iz definicije od h^0 vidimo da je $\operatorname{Tr}\left(h^0\right) = \operatorname{Tr}(h)$, a s druge strane je $\operatorname{Tr}\left(h^0\right) = n\lambda$, iz čega zaključujemo da je $\lambda = \dfrac{\operatorname{Tr}(h)}{n}$. Nadalje, znamo da je $x_{i_2 i_1}^0 = \lambda \delta_{i_2 i_1}$, iz čega vidimo da je, uvrštavajući to u (1.2.1),

$$\frac{1}{g} \sum_{\substack{t \in G \\ j_1 \in \{1,2,\ldots,m\} \\ j_2 \in \{1,2,\ldots,n\}}} r_{i_2 j_2}\left(t^{-1}\right) x_{j_2 j_1} r_{j_1 i_1}(t) = \frac{1}{n} \sum_{j_1, j_2 \in \{1,2,\ldots,n\}} \delta_{i_2 i_1} \delta_{j_2 j_1} x_{j_2 j_1},$$

konačno, izjednačavajući koeficijente uz $x_{j_2 j_1}$ dobivamo ono što želimo. $\mathfrak{Q.E.D.}$

Sada ćemo najprije definirati skalarni produkt kompleksnih funkcija na konačnoj grupi G.

Definicija 1.2.6. *Neka je G konačna grupa reda $g \in \mathbb{N}$ i neka su $\phi, \psi : G \to \mathbb{C}$ funkcije, definiramo njihov* ***skalarni produkt*** *kao*

$$\langle \phi, \psi \rangle = \frac{1}{g} \sum_{t \in G} \phi(t) \overline{\psi(t)}.$$

Prisjetimo se da za karaktere vrijedi da je $\chi\left(s^{-1}\right) = \overline{\chi(s)}$, za svaki $s \in G$ (dio (2), propozicije 1.2.2), stoga imamo sljedeću lemu koju navodimo bez dokaza (zato što isti slijedi direktno iz spomenute činjenice).

Lema 1.2.7. *Neka je G konačna grupa reda $g \in \mathbb{N}$ i neka je $\phi : G \to \mathbb{C}$ funkcija te χ karakter neke reprezentacije grupe G, tada je*

$$\langle \phi, \chi \rangle = \frac{1}{g} \sum_{t \in G} \phi(t) \chi\left(t^{-1}\right) = \frac{1}{g} \sum_{t \in G} \phi\left(t^{-1}\right) \chi(t).$$

Sljedeći teorem nam daje relacije ortogonalnosti za karaktere.

Teorem 1.2.8.

(1) Ako je χ karakter ireducibilne reprezentacije, onda je $\langle\chi,\, \chi\rangle = 1$, tj. χ je "norme" 1.

(2) Ako su χ i χ' karakteri dviju neizomorfnih ireducibilnih reprezentacija, onda je $\langle\chi,\, \chi'\rangle = 0$, tj. "ortogonalni" su.

Dokaz. Koristimo iste oznake kao u diskusiji neposredno prije korolara 1.2.5, neka je χ karakter reprezentacije ρ^1, a χ' karakter reprezentacije ρ^2. Znamo: $\chi(t) = \sum_{i_1=1}^{m} r_{i_1 i_1}(t)$ i $\chi'(t) = \sum_{i_2=1}^{n} r_{i_2 i_2}(t)$. Koristeći dio (2) spomenutog korolara i lemu 1.2.7 vidimo da je

$$\begin{aligned}\langle\chi,\, \chi\rangle &= \frac{1}{g}\sum_{t\in G}\chi\left(t^{-1}\right)\chi(t) = \frac{1}{g}\sum_{t\in G}\left(\sum_{i_1=1}^{m} r_{i_1 i_1}\left(t^{-1}\right)\sum_{j_1=1}^{m} r_{j_1 j_1}(t)\right)\\ &= \frac{1}{g}\sum_{i_1,\, j_1=1}^{m}\sum_{t\in G} r_{i_1 i_1}\left(t^{-1}\right) r_{j_1 j_1}(t) = \frac{1}{g}\cdot m\cdot\frac{g}{m} = 1,\end{aligned}$$

čime je pokazan dio (1). Da bismo pokazali dio (2), opet koristimo lemu 1.2.7 i dio (1) korolara 1.2.5:

$$\begin{aligned}\langle\chi,\, \chi'\rangle &= \frac{1}{g}\sum_{t\in G}\chi(t)\,\chi'\left(t^{-1}\right) = \frac{1}{g}\sum_{t\in G}\left(\sum_{i_1=1}^{m} r_{i_1 i_1}(t)\sum_{i_2=1}^{n} r_{i_2 i_2}\left(t^{-1}\right)\right)\\ &= \frac{1}{g}\sum_{i_2=1}^{n}\sum_{i_1=1}^{m}\sum_{t\in G} r_{i_2 i_2}\left(t^{-1}\right) r_{i_1 i_1}(t) = 0.\end{aligned}$$

$\mathfrak{Q}.\mathfrak{E}.\mathfrak{D}.$

Definicija 1.2.9. *Za karakter ireducibilne reprezentacije kažemo da je **ireducibilni karakter**.*

Primijetimo da nam teorem 1.2.8 zapravo govori da skup svih ireducibilnih karaktera neke konačne grupe čini ortonormiran sustav, jasno, uz skalarni produkt definiran u definiciji 1.2.6. Sljedeći teorem, tj. njegovi korolari nam daju rezultat najavljen u napomeni 1.1.9.

Teorem 1.2.10. *Neka je V reprezentacija grupe G karaktera ϕ. Pretpostavimo da se V dekomponira u direktnu sumu ireducibilnih reprezentacija kao*

$$V = W_1 \oplus W_2 \oplus \ldots \oplus W_k,$$

za neki $k \in \mathbb{N}$. Tada, ako je W ireducibilna reprezentacija karaktera χ, onda je broj reprezentacija izomorfnih reprezentaciji W u danoj dekompoziciji jednak $\langle \phi, \chi \rangle$.

Dokaz. Neka je χ_i karakter reprezentacije W_i, za svaki $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$. Prema dijelu (1) propozicije 1.2.3 vidimo da je $\phi = \chi_1 + \chi_2 + \ldots + \chi_k$, stoga je

$$\langle \phi, \chi \rangle = \langle \chi_1, \chi \rangle + \langle \chi_2, \chi \rangle + \ldots + \langle \chi_k, \chi \rangle .$$

No, sada iz teorema 1.2.8 vidimo da je $\langle \chi_i, \chi \rangle$ jednako 1 ili 0, ovisno o tome je li W_i izomorfna s W ili nije. $\mathfrak{Q}.\mathfrak{E}.\mathfrak{D}.$

Sljedeća dva korolara slijede direktno iz upravo dokazanog teorema, stoga ih navodimo bez dokaza.

Korolar 1.2.11. *Uz iste oznake kao i u prethodnom teoremu, broj reprezentacija W_i izomorfnih reprezentaciji W ne ovisi o izboru dekompozicije.*

Korolar 1.2.12. *Dvije reprezentacije istog karaktera su izomorfne.*

Vidimo, dakle, da nam se razumijevanje reprezentacija svodi na razumijevanje njihovih karaktera. Neka je $h \in \mathbb{N}$ i neka su $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_h$ svi međusobno različiti ireducibilni karakteri grupe G i neka su $W_1, W_2, \ldots, W_h$ pripadajuće ireducibilne reprezentacije. Zaključujemo da je svaka reprezentacija, V, grupe G izomorfna direktnoj sumi:

$$V = m_1 W_1 \oplus m_2 W_2 \oplus \ldots \oplus m_h W_h,$$

gdje je m_i nenegativan cijeli broj za sve $i \in \{1, 2, \ldots, h\}$. Karakter, ϕ, reprezentacije V je jednak $m_1\chi_1 + m_2\chi_2 + \ldots + m_h\chi_h$, znamo da je $m_i = \langle \phi, \chi_i \rangle$, a relacije ortogonalnosti nam govore da je

$$\langle \phi, \phi \rangle = \sum_{i=1}^{h} m_i^2.$$

Kao posljedicu toga dobivamo još jedan korolar:

Korolar 1.2.13. *Ako je ϕ karakter reprezentacije V, onda je $\langle \phi, \phi \rangle$ prirodan broj i vrijedi da je $\langle \phi, \phi \rangle = 1$ ako i samo ako je V ireducibilna reprezentacija.*

Dekompozicija regularne reprezentacije

Prisjetimo se najprije što je regularna reprezentacija, tj. pogledajmo dio (b) primjera 1.1.3. Koristimo sve oznake kao u tom primjeru. Neka je $h \in \mathbb{N}$ i neka su $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_h$ svi međusobno različiti ireducibilni karakteri regularne reprezentacije ρ te neka su njihovi stupnjevi, redom, jednaki $n_1, n_2, \ldots, n_h$. Također, neka su $W_1, W_2, \ldots, W_h$ pripadajuće ireducibilne reprezentacije. Prema dijelu (1) propozicije 1.2.2 znamo da je, za svaki $i \in \{1, 2, \ldots, h\}$, $n_i = \chi_i(1)$.

Propozicija 1.2.14. *Karakter r_G regularne reprezentacije ρ konačne grupe G je dan formulama:*

$$r_G(1) = n, \quad r_G(s) = 0, \text{ za svaki } s \in G,\ s \neq 1,$$

gdje je n red grupe G.

Dokaz. Neka je $(e_t)_{t \in G}$ baza u odnosu na koju je reprezentacija ρ regularna, za svaki $s \in G$ koji je različit od 1 znamo da je $st \neq t$, za svaki $t \in G$, zato su svi dijagonalni elementi matričnog zapisa operatora ρ_s u toj bazi jednaki 0. Specijalno je $\operatorname{Tr}(\rho_s) = 0$. Također, znamo da je $\operatorname{Tr}(\rho_1) = \operatorname{Tr}(I) = n$. $\mathfrak{Q.E.D.}$

Korolar 1.2.15. *Za svaki $i \in \{1, 2, \ldots, h\}$, svaka ireducibilna reprezentacija, W_i, je sadržana u ρ onoliko puta koliki joj je stupanj, tj. n_i.*

Dokaz. Koristimo teorem 1.2.10 i računamo:

$$\langle r_G, \chi_i \rangle = \frac{1}{n} \sum_{s \in G} r_G\left(s^{-1}\right) \chi_i(s) = \frac{1}{n} \cdot n \cdot \chi_i(1) = n_i. \qquad \mathfrak{Q.E.D.}$$

Korolar 1.2.16. *Uz iste oznake, vrijedi:*

(1) $\displaystyle\sum_{i=1}^{h} n_i^2 = n,$

(2) $\displaystyle\sum_{i=1}^{h} n_i \chi_i(s) = 0$, *za svaki* $s \in G$, $s \neq 1$.

Dokaz. Prema prethodnom korolaru, znamo da je $r_G(s) = \displaystyle\sum_{i=1}^{h} n_i \chi_i(s)$, za sve $s \in G$. Sada uvrštavajući $s = 1$ i $s \neq 1$ slijede tvrdnje. $\mathfrak{Q.E.D.}$

Pretpostavimo sada da smo konstruirali neke međusobno neizomorfne ireducibilne reprezentacije grupe G stupnjeva $n_1, n_2, \ldots, n_k$. To će biti sve ireducibilne reprezentacije grupe G (do na izomorfizam) ako i samo ako je $n_1^2 + n_2^2 + \ldots + n_k^2 = n$, gdje je n red grupe G.

1.3 Kanonska dekompozicija reprezentacije

Najprije ćemo, za konačnu grupu G, odrediti koliko postoji međusobno neizomorfnih ireducibilnih reprezentacija te grupe. U tu svrhu najprije definiramo sljedeći pojam.

Definicija 1.3.1. *Za funkciju $f : G \to \mathbb{C}$ kažemo da je* ***funkcija klasa*** *ako je*

$$f\left(st\right) = f\left(ts\right), \quad \forall s,\, t \in G.$$

Propozicija 1.3.2. *Neka je G konačna grupa ranga $g \in \mathbb{N}$ i neka je $f : G \to \mathbb{C}$ funkcija klasa. Neka je $\rho : G \to \mathrm{GL}\left(V\right)$ reprezentacija grupe G na konačno dimenzionalnom vektorskom prostoru V. Nadalje, neka je $\rho_f : V \to V$ linearni operator definiran kao:*

$$\rho_f = \sum_{t \in G} f\left(t\right) \rho_t.$$

Ako je ρ ireducibilna reprezentacija stupnja $n \in \mathbb{N}$ i karaktera χ, onda je $\rho_f = \lambda I$, gdje je

$$\lambda = \frac{1}{n} \sum_{t \in G} f\left(t\right) \chi\left(t\right) = \frac{g}{n} \left\langle f,\, \overline{\chi} \right\rangle.$$

Dokaz. Za $s \in G$ računamo:

$$\begin{aligned} \rho_s^{-1} \rho_f \rho_s &= \sum_{t \in G} f\left(t\right) \rho_s^{-1} \rho_t \rho_s = \sum_{t \in G} f\left(t\right) \rho_{s^{-1} t s} \\ &= \sum_{u \in G} f\left(sus^{-1}\right) \rho_u = \sum_{u \in G} f\left(u\right) \rho_u = \rho_f. \end{aligned}$$

Dakle, za svaki $s \in G$ je $\rho_f \rho_s = \rho_s \rho_f$ pa prema Schurovoj lemi (teorem 1.2.4, dio (2)) znamo da postoji $\lambda \in \mathbb{C}$ takav da je $\rho_f = \lambda I$. Vrijedi da je $\mathrm{Tr}\left(\rho_f\right) = n\lambda$, a s druge strane je $\mathrm{Tr}\left(\rho_f\right) = \sum_{t \in G} f\left(t\right) \mathrm{Tr}\left(\rho_t\right) = \sum_{t \in G} f\left(t\right) \chi\left(t\right) = g \left\langle f,\, \overline{\chi} \right\rangle$. $\mathfrak{Q}.\mathfrak{E}.\mathfrak{D}.$

Opet, neka je $h \in \mathbb{N}$ i neka su $\chi_1,\, \chi_2,\, \ldots,\, \chi_h$ svi ireducibilni karakteri grupe G. Neka je H unitarni prostor svih funkcija klasa na grupi G (sa skalarnim produktom definiranim u definiciji 1.2.6). Prema dijelu (3) propozicije 1.2.2 znamo da se $\chi_1,\, \chi_2,\, \ldots,\, \chi_h$ nalaze u H, no, pokazuje se da vrijedi i puno više:

Teorem 1.3.3. *Karakteri $\chi_1,\, \chi_2,\, \ldots,\, \chi_h$ tvore ortonormiranu bazu za H.*

Dokaz. Već znamo (teorem 1.2.8) da $\chi_1,\, \chi_2,\, \ldots,\, \chi_h$ tvore ortonormiran sistem, dakle, dovoljno je pokazati da generiraju cijeli prostor H. Znamo da je za to dovoljno pokazati da ako je $f \in H$ i $\left\langle f,\, \chi_i \right\rangle = 0$, za sve $i \in \{1,\, 2,\, \ldots,\, h\}$, da je onda $f = 0$.

No, to je isto kao da pokažemo da iz $\langle f, \overline{\chi_i}\rangle = 0, \forall i \in \{1, 2, \ldots, h\}$, slijedi da je $f = 0$. Zašto? Zato jer onda zaključujemo da ako je $\langle f, \chi_i\rangle = 0$, za sve $i \in \{1, 2, \ldots, h\}$, da je onda $\overline{f} = 0$, a time i da je $f = 0$. Dakle, pretpostavimo da je $f \in H$ i da je $\langle f, \overline{\chi_i}\rangle = 0$, za sve $i \{1, 2, \ldots, h\}$. Uz iste oznake kao u propoziciji 1.3.2 zaključujemo da je ρ_f jednaka 0 čim je ρ ireducibilna reprezentacija, no, onda svaku reprezentaciju dekomponiramo na ireducibilne pa vidimo da je $\rho_f = 0$ za svaku reprezentaciju grupe G. Neka je sada ρ regularna reprezentacija grupe G, uz iste oznake kao u primjeru 1.1.3 (dio (b)). Sada imamo:

$$0 = \rho_f(e_1) = \sum_{t \in G} f(t)\, \rho_t(e_1) = \sum_{t \in G} f(t)\, e_t,$$

dakle, $f(t) = 0$, za svaki $t \in G$, tj. $f = 0$. $\mathfrak{Q}.\mathfrak{E}.\mathfrak{D}.$

Sada opet uvodimo jedan poznati pojam o kojem se detaljnije može čitati u [1]. Neka je G konačna grupa i neka su $t, t' \in G$. Kažemo da su t i t' konjugirani elementi (jedan drugome) ako postoji $s \in G$ takav da je $t' = sts^{-1}$. Lako se vidi da je to relacija ekvivalencije i ta relacija particionira grupu G na klase koje nazivamo **konjugacijske klase**.

Teorem 1.3.4. *Broj međusobno neizomorfnih ireducibilnih reprezentacija konačne grupe G je jednak broju konjugacijskih klasa grupe G.*

Dokaz. Neka je $k \in \mathbb{N}$ i neka su $C_1, C_2, \ldots, C_k$ sve međusobno različite konjugacijske klase grupe G. Vidimo da je $f : G \to \mathbb{C}$ funkcija klasa ako i samo ako je konstantna na svakom C_i, $i = 1, 2, \ldots, k$. Odnosno, funkcija klasa je određena vrijednostima $\lambda_i \in \mathbb{C}$ koje postiže na C_i i one mogu biti odabrane proizvoljno. Zaključujemo da je dimenzija prostora, H, svih funkcija klasa jednaka k, ali iz prethodnog teorema, 1.3.3, vidimo da je k jednak broju ireducibilnih reprezentacija grupe G (do na izomorfizam). $\mathfrak{Q}.\mathfrak{E}.\mathfrak{D}.$

Korolar 1.3.5. *Neka je G konačna grupa reda $g \in \mathbb{N}$ i neka su $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_h$ svi njeni (međusobno različiti) ireducibilni karakteri, za $h \in \mathbb{N}$. Za $s \in G$ neka je $c(s)$ broj elemenata od G koji se nalaze u konjugacijskoj klasi od s. Tada:*

(1) $\displaystyle\sum_{i=1}^{h} \overline{\chi_i(s)}\chi_i(s) = \frac{g}{c(s)}$,

(2) za svaki $t \in G$ koji nije konjugat od s je $\displaystyle\sum_{i=1}^{h} \overline{\chi_i(s)}\chi_i(t) = 0$.

Dokaz. Neka je $f_s : G \to \mathbb{C}$ funkcija klasa takva da je $f_s = 1$ na konjugacijskoj klasi od s te $f_s = 0$ drugdje. Prema teoremu 1.3.3 vrijedi:

$$f_s = \sum_{i=1}^{h} \lambda_i \chi_i, \quad \lambda_i = \langle f_s, \chi_i \rangle = \frac{c(s)}{g} \overline{\chi_i(s)}.$$

Dakle, za svaki $t \in G$ je:

$$f_s(t) = \frac{c(s)}{g} \sum_{i=1}^{h} \overline{\chi_i(s)} \chi_i(t),$$

uvrštavajući $t = s$ i t koji nije u konjugacijskoj klasi od s slijede tvrdnje. $\mathfrak{Q}.\mathfrak{E}.\mathfrak{D}.$

Neka je $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ reprezentacija konačne grupe G ranga $g \in \mathbb{N}$ na konačno dimenzionalnom vektorskom prostoru V. Sada ćemo definirati dekompoziciju reprezentacije V na direktnu sumu određenih reprezentacija, koja će, doduše, biti grublja od dekompozicije na ireducibilne reprezentacije, ali će zato imati svojstvo jedinstvenosti.

Definicija 1.3.6. *Neka je $h \in \mathbb{N}$ i neka su $W_1, W_2, \ldots, W_h$ međusobno neizomorfne ireducibilne reprezentacija od G. Neka je $m \in \mathbb{N}$ i neka je*

$$V = U_1 \oplus U_2 \oplus \ldots \oplus U_m$$

dekompozicija od V u direktnu sumu ireducibilnih reprezentacija. Za $i = 1, 2, \ldots, h$ neka je V_i direktna suma onih U_j $(j = 1, 2, \ldots, m)$ koji su izomorfni s W_i (moguće je neki $V_i = \{0\}$), tada je

$$V = V_1 \oplus V_2 \oplus \ldots \oplus V_h,$$

***kanonska dekompozicija** reprezentacije V.*

Sljedeći teorem nam govori o tom svojstvu jedinstvenosti.

Teorem 1.3.7. *Uz iste oznake, neka su $n_1, n_2, \ldots, n_h$ stupnjevi odgovarajućih ireducibilnih reprezentacija i neka su im karakteri $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_h$, tada vrijedi:*

(1) Projekcija $\pi_i : V \to V_i$ $(i = 1, 2, \ldots, h)$ pridružena kanonskoj dekompoziciji je dana formulom:

$$\pi_i = \frac{n_i}{g} \sum_{t \in G} \overline{\chi_i(t)} \rho_t. \tag{1.3.2}$$

(2) Kanonska dekompozicija $V = V_1 \oplus V_2 \oplus \ldots \oplus V_h$ ne ovisi o odabiru dekompozicije od V na ireducibilne reprezentacije, $V = U_1 \oplus U_2 \oplus \ldots \oplus U_m$.

Dokaz. Jasno je da je dovoljno dokazati samo tvrdnju (1), zato jer onda tvrdnja (2) slijedi direktno pošto je V_i jedinstveno određen odgovarajućom projekcijom, π_i. Jasno je da je dovoljno (a i nužno) pokazati da funkcija definirana formulom (1.3.2) zadovoljava da je jednaka identiteti na V_i te 0 na svim ostalim V_j, $j = 1, 2, \ldots, h$, $j \neq i$. No, prema propoziciji 1.3.2 i teoremu 1.2.8 vidimo da je

$$\pi_i|_{W_j} = \langle \overline{\chi_i}, \overline{\chi_j} \rangle I = \delta_{ij} I,$$

ovime smo gotovi. $\mathfrak{Q.E.D.}$

Eksplicitna dekompozicija reprezentacije

Neka je $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ reprezentacija konačne grupe G reda $g \in \mathbb{N}$ na konačno dimenzionalnom prostoru V, dimenzije $n \in \mathbb{N}$. Nadalje, neka je $h \in \mathbb{N}$ i neka su $W_1, W_2, \ldots, W_h$ $\left(\text{tj. } \rho^1, \rho^2, \ldots, \rho^h\right)$ sve međusobno neizomorfne ireducibilne reprezentacije grupe G stupnjeva, redom, $n_1, n_2, \ldots, n_h$ i karaktera $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_h$. Neka je $V = V_1 \oplus V_2 \oplus \ldots \oplus V_h$ kanonska dekompzicija reprezentacije V. Odaberimo neki $i \in \{1, 2, \ldots, h\}$, pokazati ćemo metodu kojom možemo eksplicitno konstruirati dekompoziciju reprezentacije V_i u direktnu sumu podreprezentacija izomorfnih reprezentaciji W_i. Neka je $(e_1, e_2, \ldots, e_{n_i})$ neka (fiksna) baza za W_i te neka je matrični zapis operatora ρ^i_s jednak $(r_{\alpha\beta}(s))_{\alpha, \beta \in \{1, 2, \ldots, n_i\}}$, za svaki $s \in G$. Tada znamo da je $\chi_i(s) = \sum_{\alpha=1}^{n_i} r_{\alpha\alpha}(s)$, za svaki $s \in G$. Za sve $\alpha, \beta \in \{1, 2, \ldots, n_i\}$ neka je $p_{\alpha\beta} : V \to V$ linearan operator zadan s

$$p_{\alpha\beta} = \frac{n_i}{g} \sum_{t \in G} r_{\beta\alpha}\left(t^{-1}\right) \rho_t.$$

Propozicija 1.3.8.

(1) *Za svaki $\alpha \in \{1, 2, \ldots, n_i\}$, $p_{\alpha\alpha} : V \to V_{i\alpha}$ je projekcija i pri tome vrijedi da je $\mathrm{Im}(p_{\alpha\alpha}) = V_{i\alpha} \subseteq V_i$ te je $V_i = V_{i1} \oplus V_{i2} \oplus \ldots \oplus V_{in_i}$. Također vrijedi da je $\pi_i = \sum_{\alpha=1}^{n_i} p_{\alpha\alpha}$, projekcija $V \to V_i$.*

(2) *Za $\alpha, \beta \in \{1, 2, \ldots, n_i\}$ vrijedi da je $p_{\alpha\beta}$ nula na V_j, za svaki $j \in \{1, 2, \ldots, h\}$, $j \neq i$. Također, $p_{\alpha\beta}$ je nula na $V_{i\gamma}$, za svaki $\gamma \in \{1, 2, \ldots, n_i\}$, $\gamma \neq \beta$. Nadalje, $p_{\alpha\beta} : V_{i\beta} \to V_{i\alpha}$ je linearni izomorfizam vektorskih prostora.*

(3) *Neka je $0 \neq x_1 \in V_{i1}$ i neka je, za svaki $\alpha \in \{1, 2, \ldots, n_i\}$, $x_\alpha = p_{\alpha 1}(x_1) \in V_{i\alpha}$. Tada su $x_1, x_2, \ldots, x_{n_i}$ linearno nezaivsni i razapinju vektorski prostor, u oznaci*

$W(x_1)$, koji je invarijantan za ρ i čija je dimenzija n_i. Nadalje, za svaki $s \in G$ vrijedi:

$$\rho_s(x_\alpha) = \sum_{\beta=1}^{n_i} r_{\beta\alpha}(s)\, x_\beta.$$

(4) Neka je $m \in \mathbb{N}$ i neka je $\left(x_1^{(1)}, x_1^{(2)}, \ldots, x_1^{(m)}\right)$ baza za V_{i1}, tada je

$$V_i = W\left(x_1^{(1)}\right) \oplus W\left(x_1^{(2)}\right) \oplus \ldots \oplus W\left(x_1^{(m)}\right).$$

Dokaz. Kroz cijeli ovaj dokaz, neka su $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \{1, 2, \ldots, n_i\}$. Primijetimo da na W_i vrijedi da je $\rho_t = \rho_t^i$, za svaki $t \in G$ pa računamo:

$$p_{\alpha\beta}(e_\gamma) = \frac{n_i}{g} \sum_{t \in G} r_{\beta\alpha}\left(t^{-1}\right) \rho_t(e_\gamma) = \frac{n}{g} \sum_{\delta=1}^{n_i} \sum_{t \in G} r_{\beta\alpha}\left(t^{-1}\right) r_{\delta\gamma}(t)\, e_\delta.$$

Prema dijelu (2) korolara 1.2.5 vidimo da je

$$p_{\alpha\beta}(e_\gamma) = \begin{cases} e_\alpha, & \text{ako je } \gamma = \beta, \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

Zaključujemo da je $\sum_{\alpha=1}^{n_i} p_{\alpha\alpha} = I_{W_i}$, identiteta na W_i, također, vrijedi:

$$p_{\alpha\beta} \circ p_{\gamma\delta} = \begin{cases} p_{\alpha\delta}, & \text{ako je } \gamma = \beta, \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

$$\rho_s \circ p_{\alpha\gamma} = \sum_{\beta=1}^{n_i} r_{\beta\alpha}(s)\, p_{\beta\gamma}, \ \forall s \in G.$$

Iskoristimo li dio (1) korolara 1.2.5 vidimo da je $p_{\alpha\beta}$ jednak 0 na W_j, za svaki $j \neq i$, $j \in \{1, 2, \ldots, h\}$. Sada lako vidimo da vrijede tvrdnje (1) i (2). Kako bismo dokazali (3), računamo:

$$\rho_s(x_\alpha) = \rho_s \circ \rho_{\alpha 1}(x_1) = \sum_{\beta=1}^{n_i} r_{\beta\alpha}(s)\, p_{\beta 1}(x_1) = \sum_{\beta=1}^{n_i} r_{\beta\alpha}(s)\, x_\beta, \ \forall s \in G.$$

Dakle, (3) je isto pokazano, (4) sada slijedi direktno iz (1), (2) i (3). $\mathfrak{Q.E.D.}$

1.4 Podgrupe, produkti i inducirane reprezentacije

Za grupu G kažemo da je **Abelova** (tj. **komutativna**) ako je $st = ts$, za sve $s,\, t \in G$. Primijetimo da to zapravo znači da se svaka konjugacijska klasa grupe G sastoji od samo jednog elementa, također, to znači da je svaka funkcija $f : G \to \mathbb{C}$, funkcija klasa.

Teorem 1.4.1. *Sljedeća dva svojstva su ekvivalentna:*

(1) Konačna grupa G je komutativna.

(2) Sve ireducibilne reprezentacije grupe G su stupnja 1.

Dokaz. Neka je $g \in \mathbb{N}$ red grupe G te neka je $h \in \mathbb{N}$ broj konjugacijskih klasa grupe G, a time i broj međusobno neizomorfnih ireducibilnih reprezentacija grupe G (teorem 1.3.4). Neka su $n_1,\, n_2,\, \ldots,\, n_h$ stupnjevi svih međusobno neizomorfnih ireducibilnih reprezentacija od G, tada prema korolaru 1.2.16, dio (1), vrijedi da je $n_1^2 + n_2^2 + \ldots + n_h^2 = g$. No, znamo da je G komutativna ako i samo ako je $h = g$, odnosno ako i samo ako je $n_1 = n_2 = \ldots = n_h = 1$. $\mathfrak{Q}.\mathfrak{E}.\mathfrak{D}.$

Korolar 1.4.2. *Neka je G konačna grupa i neka je A njena Abelova podgrupa. Neka su $a,\, g \in \mathbb{N}$ redovi, redom, grupa A i G. Tada svaka ireducibilna reprezentacija grupe G ima stupanj $\leq \dfrac{g}{a} = [G : A]$.*

Dokaz. Neka je $\rho : G \to \mathrm{GL}\,(V)$ ireducibilna reprezentacija od G, njena restrikcija na A definira reprezentaciju $\rho_A : A \to \mathrm{GL}\,(V)$. Neka je $W \subseteq V$ ireducibilna reprezentacija od ρ_A, prema prethodnom teoremu znamo da je tada $\dim W = 1$. Neka je V' potprostor od V koji je generiran s $\rho_s\,(W)$, $s \in G$, očito je V' invarijantan za ρ pa je zato $V' = V$. Nadalje, za $s \in G$ i $t \in A$ je $\rho_{st}\,(W) = \rho_s\,(\rho_t\,(W)) = \rho_s\,(W)$, iz čega zaključujemo da je broj različitih skupova među skupovima $\rho_s\,(W)$, $s \in G$ najviše $\dfrac{g}{a}$, a time smo gotovi. $\mathfrak{Q}.\mathfrak{E}.\mathfrak{D}.$

Neka su G_1 i G_2 dvije konačne grupe i neka je $G_1 \times G_2$ njihov (za sad samo skupovno) Kartezijev produkt. Za $s_1,\, t_1 \in G_1$ i $s_2,\, t_2 \in G_2$ definiramo

$$(s_1,\, t_1) \cdot (s_2,\, t_2) = (s_1 t_1,\, s_2 t_2)\,,$$

time smo u skup $G_1 \times G_2$ uveli grupovnu strukturu, tu grupu nazivamo **produkt** grupa G_1 i G_2. Jasno da, ako su G_1 i G_2 reda, redom, $g_1,\, g_2 \in \mathbb{N}$ da je onda $G_1 \times G_2$ reda $g_1 g_2$. G_1 i G_2 smatramo podgrupama od $G_1 \times G_2$ i to tako da G_1 identificiramo sa skupom $\{(s_1,\, 1) \,:\, s_1 \in G_1\}$ te slično za G_2. Uz taj dogovor lako se vidi da svaki element podgrupe G_1 komutira sa svakim elementom podgrupe G_2.

Obratno, neka je G konačna grupa i neka su G_1 i G_2 dvije njene podgrupe koje zadovoljavaju sljedeća dva uvjeta:

(i) Svaki $s \in G$ se može na jedinstven način zapisati u obliku $s_1 s_2$, gdje je $s_1 \in G_1$ i $s_2 \in G_2$.

(ii) Za sve $s_1 \in G_1$ i $s_2 \in G_2$ vrijedi da je $s_1 s_2 = s_2 s_1$.

Uz te uvjete možemo identificirati da je $G = G_1 \times G_2$. Kako? Naime, za $s, t \in G$ uzmimo $s_1, t_1 \in G_1$ i $s_2, t_2 \in G_2$ takve da je $s = s_1 s_2$ i $t = t_1 t_2$, možemo pisati: $st = s_1 s_2 t_1 t_2 = (s_1 t_1)(s_2 t_2)$. Dakle, jasno je da svaki element $G \ni s = s_1 s_2$ možemo shvatiti kao $(s_1, s_2) \in G_1 \times G_2$.

Nadalje, neka su $\rho^1 : G_1 \to \mathrm{GL}(V_1)$ i $\rho^2 : G_2 \to \mathrm{GL}(V_2)$ reprezentacije konačnih grupa G_1 i G_2 na konačno dimenzionalnim vektorskim prostorima V_1 i V_2. Definiramo reprezentaciju $\rho^1 \otimes \rho^2$ grupe $G_1 \times G_2$ na vektorskom prostoru $V_1 \otimes V_2$ formulom

$$\left(\rho^1 \otimes \rho^2\right)(s_1, s_2) = \rho^1(s_1) \otimes \rho^2(s_2), \ \forall s_1 \in G_1, s_2 \in G_2.$$

Ta reprezentacija se naziva **tenzorski produkt** reprezentacija ρ^1 i ρ^2. Ako su χ_1 i χ_2 karakteri od, redom, ρ^1 i ρ^2 onda za karakter χ od $\rho^1 \otimes \rho^2$ vrijedi da je

$$\chi(s_1, s_2) = \chi_1(s_1) \cdot \chi_2(s_2), \ \forall s_1 \in G_1, s_2 \in G_2.$$

Napomena 1.4.3. *Kada vrijedi da je $G_1 = G_2 = G$ onda je upravo definirana reprezentacija $\rho^1 \otimes \rho^2$ reprezentacija grupe $G \times G$. Ne smijemo to pomiješati s reprezentacijom $\rho^1 \otimes \rho^2$ grupe G definiranom u definiciji 1.1.11, unatoč istim oznakama. Doduše, vrijedi da se ta reprezentacija dobije pogledamo li restrikciju reprezentacije $\rho^1 \otimes \rho^2$ grupe $G \times G$ na njenu dijagonalu, tj. na grupu $\{(s, s) : s \in G\}$.*

Teorem 1.4.4. *Koristimo iste oznake.*

(1) Ako su ρ^1 i ρ^2 ireducibilne, onda je $\rho^1 \otimes \rho^2$ ireducibilna reprezentacija grupe $G_1 \times G_2$.

(2) Za svaku ireducibilnu reprezentaciju ρ grupe $G_1 \times G_2$ postoje ireducibilne reprezentacije ρ^1 grupe G_1 i ρ^2 grupe G_2 takve da je $\rho \cong \rho^1 \otimes \rho^2$.

Dokaz.

(1) Koristimo korolar 1.2.13. Znamo da je

$$\frac{1}{g_i} \sum_{s_i \in G_i} |\chi_i(s_i)|^2 = 1, \quad i = 1, 2$$

pa množenjem dobivamo da je $\frac{1}{g_1 g_2} \sum_{\substack{s_1 \in G_1 \\ s_2 \in G_2}} |\chi(s_1, s_2)|^2 = 1$ što znači da je reprezentacija $\rho^1 \otimes \rho^2$ ireducibilna.

(2) Neka su S_1 i S_2 skupovi svih ireducibilnih karaktera od, redom, G_1 i G_2. Jasno je da je dovoljno pokazati da skup

$$S = \{\chi_1 \chi_2 \ : \ \chi_1 \in S_1, \ \chi_2 \in S_2\}$$

čini ortonormiranu bazu za skup funkcija klasa na grupi $G_1 \times G_2$. Neka je $f : G_1 \times G_2 \to \mathbb{C}$ funkcija klasa koja je ortogonalna na skup S. Dovoljno nam je pokazati da je $f = 0$. Dakle, znamo da je, za sve $\chi_1 \in S_1$ i sve $\chi_2 \in S_2$:

$$\sum_{\substack{s_1 \in G_1 \\ s_2 \in G_2}} f(s_1, s_2) \overline{\chi_1(s_1) \chi_2(s_2)} = 0.$$

Fiksirajmo χ_2 i označimo $g(s_1) = \sum_{s_2 \in G_2} f(s_1, s_2) \overline{\chi_2(s_2)}$, tada je:

$$\sum_{s_1 \in G_1} g(s_1) \overline{\chi_1(s_1)} = 0, \ \forall \chi_1 \in S_1.$$

Kako je g klasna funkcija na grupi G_1, zaključujemo da je $g = 0$ (teorem 1.3.3). Ponavljanjem istog argumenta, ali sada za svaki $\chi_2 \in S_2$, zaključujemo da je $f = 0$. $\mathfrak{Q}.\mathfrak{E}.\mathfrak{D}.$

Zaključujemo da nam se proučavanje reprezentacija grupe $G_1 \times G_2$ svodi na proučavanje reprezentacija grupa G_1 i G_2.

Inducirane reprezentacije

Najprije ćemo trebati još jedan poznati pojam, o kojem se više može naći, opet, u [1].

Neka je G konačna grupa i neka je H njena podgrupa. Definirati ćemo **lijeve klase grupe** G po njenoj podgrupi H. Neka je $s \in G$, definiramo:

$$sH = \{st \ : \ t \in H\}$$

i kažemo da je sH lijeva klasa grupe G po podgrupi H koja sadrži element s. Za dva elementa $s, s' \in G$ koja pripadaju istoj lijevoj klasi, tj. ako je $s'^{-1}s \in H$, kažemo da su **kongruentni** modulo H i to pišemo $s' \equiv s \pmod{H}$. Skup svih lijevih klasa se označava s G/H, ako je red od G jednak $g \in \mathbb{N}$, a red od H jednak $h \in \mathbb{N}$, onda je red od G/H jednak $\frac{g}{h}$, to označavamo i $[G : H]$ te nazivamo **indeks** grupe G po grupi H. Za svaku lijevu klasu odaberimo neki njen element i označimo taj skup s R, tada se svaki $s \in G$ može na jedinstven način zapisati u obliku $s = rt$, gdje je $r \in R$ i $t \in H$.

Sada dolazimo do definicije inducirane reprezentacije. Neka je $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ reprezentacija konačne grupe G na konačno dimenzionalnom vektorskom prostoru V. Neka je H podgrupa od G i neka je ρ_H restrikcija od ρ na H. Neka je W podreprezentacija od ρ_H, tj. vektorski potprosotr od V koji je invarijantan za ρ_H. Označimo tu podreprezentaciju s

$$\theta : H \to \mathrm{GL}(W).$$

Neka je $s \in G$, vektorski prostor $\rho_s(W)$ ovisi jedino o lijevoj klasi sH elementa s, to je očito jer za $t \in H$ vrijedi:

$$\rho_{st}(W) = \rho_s(\rho_t(W)) = \rho_s(W).$$

Dakle, za svaku lijevu klasu, σ, grupe G po podgrupi H možemo definirati potprostor W_σ od V kao $\rho_s(W)$ za bilo koji $s \in \sigma$. Jasno je da svaki ρ_s, $s \in G$ djeluje na skup $\{W_\sigma : \sigma \in G/H\}$ permutiranjem. Zaključujemo dakle da je $\sum_{\sigma \in G/H} W_\sigma$ (vektorski prostor razapet unijom skupova W_σ) potprostor od V koji je invarijantan za ρ, tj. podreprezentacija od ρ.

Definicija 1.4.5. *Kažemo da je reprezentacija ρ grupe G na V inducirana reprezentacijom θ podgrupe H na potprostoru W ako je*

$$V = \bigoplus_{\sigma \in G/H} W_\sigma.$$

Prije dokaza egzistencije i jedinstvenosti inducirane reprezentacije pogledajmo nekoliko primjera.

Primjer 1.4.6. Neka je G konačna grupa i H njena podgrupa.

(a) Neka je V regularna reprezentacija grupe G, tj. $(e_t)_{t \in G}$ je baza od V takva da je $\rho_s(e_t) = e_{st}$, za svaki $s \in G$. Neka je W potprostor od V čija baza je jednaka $(e_t)_{t \in H}$ te označimo s θ restrikciju od ρ na H, jasno je da je θ regularna reprezentacija od H te da je ρ inducirana s θ.

(b) Neka je V vektorski prostor s bazom $(e_\sigma)_{\sigma\in G/H}$ te neka je ρ reprezentacija od G na V definirana s $\rho_s(e_\sigma)=e_{s\sigma}$. Jasno je da je potprostor razapet s $\{e_H\}$ invarijantan za restrikciju, θ, od ρ na H. θ je trivijalna reprezentacija od H i ona inducira reprezentaciju ρ.

(c) Ako su reprezentacije ρ^1 i ρ^2 inducirane s, redom, reprezentacijama θ^1 i θ^2, onda je reprezentacija $\rho^1\oplus\rho^2$ inducirana reprezentacijom $\theta^1\oplus\theta^2$.

(d) Ako je reprezentacija ρ na V inducirana reprezentacijom θ na W i ako je W_1 potprostor od W invarijantan za θ, onda je potprostor $V_1=\sum_{r\in R}\rho_r(W_1)$ (R je skup nekih odabranih predstavnika svih lijevih klasa grupe G po podgrupi H) od V invarijantan za ρ te vrijedi da je reprezentacija grupe G na V_1 inducirana reprezentacijom podgrupe H na potprostoru W_1 (jasno, gledamo restrikcije reprezentacija ρ i θ).

(e) Neka je ρ inducirana s θ, ako je ρ' reprezentacija od G i ako je ρ'_H restrikcija od ρ na H, onda je $\rho\otimes\rho'$ inducirana s $\theta\otimes\rho'_H$.

Sada dokazujem egzistenciju i jedinstvenost (jasno, do na izomorfizam) inducirane reprezentacije. Najprije navodimo jednu pomoćnu tvrdnju, a zatim i teorem koji nam govori ono što želimo.

Lema 1.4.7. *Neka je G konačna grupa i H njena podgrupa te neka je V konačno dimenzionalni vektorski prostor i W neki potprostor. Neka je $\rho : G\to \mathrm{GL}(V)$ reprezentacija inducirana reprezentacijom $\theta : H\to W$. Neka je $\rho' : G\to V'$ reprezentacija od G na konačno dimenzionalnom vektorskom prostoru V' i neka je $f : W\to V'$ linearno preslikavanje takvo da je $f(\theta_t(w))=\rho'_t(f(w))$, za sve $t\in H$ i $w\in W$. Tada postoji jedinstveno linearno preslikavanje $F : V\to V'$ koje je proširenje od f (tj. $F|_W=f$) i takvo da je $F\circ\rho_s=\rho'_s\circ F$, za sve $s\in G$.*

Dokaz. Pretpostavimo da takvo preslikavanje F postoji, pokažimo najprije njegovu jedinstvenost. Neka je $s\in G$ i $x\in\rho_s(W)$, tj. $\rho_s^{-1}(x)\in W$, dakle, vrijedi:

$$F(x)=F\left(\rho_s\left(\rho_s^{-1}(x)\right)\right)=\rho'_s\left(F\left(\rho_s^{-1}(x)\right)\right)=\rho'_s\left(f\left(\rho_s^{-1}(x)\right)\right).$$

Zaključujemo da je F jedinstveno određen na svakom $\rho_s(W)$, tj. F je jedinstveno određen na V.

Nadalje, neka je $\sigma\in G/H$ te neka je $x\in W_\sigma$, odaberimo neki $s\in\sigma$ te definirajmo $F(x)=\rho'_s\left(f\left(\rho_s^{-1}(x)\right)\right)$. Pokažimo da takva definicija ne ovisi o odabiru $s\in\sigma$, zaista, neka je $t\in H$,

$$\rho'_{st}\left(f\left(\rho_{st}^{-1}(x)\right)\right)=\rho'_s\left(\rho'_t\left(f\left(\theta_t^{-1}\left(\rho_s^{-1}(x)\right)\right)\right)\right)=\rho'_s\left(f\left(\rho_s^{-1}(x)\right)\right).$$

Znamo da je $V = \bigoplus_{\sigma \in G/H} W_\sigma$ pa zaključujemo postojanje od F, a iz njegove definicije (na svakom od W_σ) lako vidimo da zadovoljava tražene uvjete. $\mathfrak{Q.E.D.}$

Teorem 1.4.8. *Neka je G konačna grupa i H njena podgrupa te neka je V konačno dimenzionalni vektorski prostor s potprsotorom W. Ako je $\theta : H \to \mathrm{GL}(W)$ reprezentacija, onda postoji, jedinstvena do na izomorfizam, reprezentacija $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ koja je inducirana reprezentacijom θ.*

Dokaz. Pogledamo li dio (c) primjera 1.4.6 vidimo da možemo, bez smanjenja općenitosti, pretpostaviti da je θ ireducibilna reprezentacija. Prema korolaru 1.2.15 zaključujemo da je θ izomorfna nekoj podreprezentaciji regularne reprezentacije od H. Sada iz dijela (a) već spomenutog primjera vidimo da regularna reprezentacija od H inducira regularnu reprezentaciju od G pa kao u dijelu (d) vidimo da postoji reprezentacija ρ koju inducira θ. Dakle, dokazali smo egzistenciju inducirane reprezentacije.

Preostaje dokazati jedinstvenost do na izomorfizam. Neka je $\rho' : G \to \mathrm{GL}(V')$ također reprezentacija inducirana reprezentacijom θ. Primijenimo li lemu 1.4.7 na ulaganje $W \hookrightarrow V'$ vidimo da postoji linearno preslikavanje $F : V \to V'$ koje je identiteta na W i za koje vrijedi da je $F \circ \rho_s = \rho'_s \circ F$, za svaki $s \in G$. No, to znači da slika od F sadrži sve skupove $\rho'_s(W)$ pa je radi toga $\mathrm{Im}(F) = V'$. Također, vrijedi da je $\dim V' = [G : H] \cdot \dim W = \dim V$ pa zaključujemo da je F nužno izomorfizam, ovime smo gotovi. $\mathfrak{Q.E.D.}$

Karakter inducirane reprezentacije

Zadržavamo iste oznake te dodatno uvodimo χ_ρ i χ_θ, karaktere od, redom, ρ i θ. Vidjeli smo da θ jedinstveno (do na izomorfizam) određuje ρ pa je stoga prirodno očekivati da se χ_ρ može izračunati iz χ_θ. O tome nam govori sljedeći teorem.

Teorem 1.4.9. *Neka je red grupe H jednak $h \in \mathbb{N}$ te neka je R skup nekih odabranih predstavnika lijevih klasa grupe G po podgrupi H. Tada, za svaki $u \in G$ vrijedi:*

$$\chi_\rho(u) = \sum_{\substack{r \in R \\ r^{-1}ur \in H}} \chi_\theta\left(r^{-1}ur\right) = \frac{1}{h} \sum_{\substack{s \in G \\ s^{-1}us \in H}} \chi_\theta\left(s^{-1}us\right).$$

Dokaz. Fiksirajmo $u \in G$, očito je da druga formula slijedi direktno iz prve, stoga dokazujemo samo prvu. Znamo da je $V = \bigoplus_{r \in R} \rho_r(W)$ pa promatrajmo sve matrične zapise u bazi od V koja je jednaka uniji baza od $\rho_r(W)$ te sve matrice promatrajmo kao blok matrice s dijagonalnim blokovima dimenzije $\dim W$. Također, sve kongruencije koje ćemo navesti će biti modulo H. Zanima nas koliko je $\chi_\rho(u) = \mathrm{Tr}_V(\rho_u)$, vidimo da će trag onih blokova za koje je $ur \not\equiv r$ biti jednak 0, zato vrijedi:

$$\chi_\rho(u) = \sum_{\substack{r \in R \\ r^{-1}ur \in H}} \mathrm{Tr}_{\rho_r(W)}\left(\rho_u|_{\rho_r(W)}\right).$$

Neka je $r \in R$ takav da je $ur \equiv r$, tj. $r^{-1}ur = t \in H$. Znamo da je $\rho_r : W \to \rho_r(W)$ izomorfizam te da je

$$\rho_r \circ \theta_t = \left(\rho_u|_{\rho_r(W)}\right) \circ \rho_r,$$

iz čega zaključujemo da je $\mathrm{Tr}_{\rho_r(W)}\left(\rho_u|_{\rho_r(W)}\right) = \mathrm{Tr}_W(\theta_t) = \chi_\theta\left(r^{-1}ur\right)$. $\mathfrak{Q}.\mathfrak{E}.\mathfrak{D}.$

Poglavlje 2

Klasične konačne grupe

2.1 PSH algebra

Najprije dajemo definiciju strukture iz naslova sekcije i njena osnovna svojstva. Zatim ćemo u nastavku ovoga poglavlja u naredne dvije sekcije pokazati kako se ta struktura prirodno javlja u slučaju reprezentacija simetričnih (S_n) i generalnih linearnih grupa nad konačnim poljem ($\mathrm{GL}(n, \mathbb{F}_q)$). Strukturna teorija PSH algebri će nam tada dati lijepu i korisnu klasifikaciju reprezentacija dviju navedenih grupa.

Definicija 2.1.1. ***T-grupa*** *je slobodni $\mathbb{Z}$-modul R s odabranom bazom nad $\mathbb{Z}$ u oznaci $\Omega = \Omega(R)$. Sam prsten $\mathbb{Z}$ smatramo T-grupom uzimajući da je $\Omega(\mathbb{Z}) = \{1\}$.*

Formalna definicija gornjeg pojma modula se može naći na u [1]. Slobodno govoreći, R sadrži sve elemente oblika $\sum_{w \in \Omega} m_\omega \cdot \omega$, gdje je $m_\omega \in \mathbb{Z}$, za svaki $\omega \in \Omega$.

Primijetimo da direktna suma, kao i tenzorski produkt elemenata konačne familije T-grupa na prirodan način postaje T-grupa, naime:

$$\Omega\left(\bigoplus_{i=1}^{n} R_i\right) = \coprod_{i=1}^{n} \Omega(R_i), \quad \Omega\left(\bigotimes_{i=1}^{n} R_i\right) = \prod_{i=1}^{n} \Omega(R_i).$$

Nadalje, jasno je da se bilo koja T-grupa dekomponira u direktnu sumu T-grupa, $\mathbb{Z} \cdot \omega$, gdje ω ide po $\Omega(R)$.

Definicija 2.1.2. ***T-podgrupa*** *T-grupe R je bilo koja podgrupa oblika $\sum_{\omega \in \Omega'} \mathbb{Z} \cdot \omega$, gdje je $\Omega' \subseteq \Omega(R)$.*

Uvodimo oznaku

$$R^+ = \left\{ \sum_{\omega \in \Omega} m_\omega \cdot \omega \ : \ m_\omega \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \ \forall \omega \in \Omega \right\},$$

gdje je $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ skup svih nenegativnih cijeli brojeva. Elemente toga skupa nazivamo **pozitivni elementi** od R. Za $x, y \in R$ pišemo da je $x \geq y$ ako je $x - y \in R^+$. Homomorfizam između dvije T-grupe je **pozitivan** ako prebacuje pozitivne elemente u pozitivne elemente.

Definicija 2.1.3. ***Skalarni produkt*** *na T-grupi R je bilinearna forma,* $[\cdot, \cdot]$, *nad Z definirana s:*

$$[\omega, \omega'] = \begin{cases} 1, & \text{ako je } \omega = \omega', \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

Lako se vidi da je uvedena forma, $[\cdot, \cdot]$ simetrična, nedegenerirana i pozitivno definitna pa ju s pravom možemo zvati skalarnim produktom.

Za T-grupu R, elemente baze, tj. one iz Ω nazivamo **ireducibilni elementi** T-grupe R. Ako je $R^+ \ni \pi = \sum_{\omega \in \Omega} m_\omega \cdot \omega$, onda za $\omega \in \Omega$ takav da je $m_\omega > 0$ kažemo da je **ireducibilni član** od π, taj uvjet također može biti zapisan kao $\pi \geq \omega$ ili $[\pi, \omega] > 0$.

Slijedi nam definicija Hopfove algebre. Najprije nam je potrebno poznavanje pojma stupnjevanog K-modula $R = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} R_n$. To zapravo znači da je R_n K-modul, za svaki $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Ovdje nam je K komutativni prsten s jedinicom. Za više o svemu ovome pogledati u [1] i [3]. Također, moramo znati što znači pojam "preslikavanje K-modula". Za K-module R i R', $f : R \to R'$ je preslikavanje K-modula ako je $f(kr) = kf(r)$, za sve $k \in K$ i sve $r \in R$.

Definicija 2.1.4. *Neka je K komutativni prsten s jedinicom.* ***Hopfova algebra nad*** *K je stupnjevani K-modul $R = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} R_n$ zajedno s preslikavanjima K-modula:*

$$\begin{array}{ll} \text{(jedinica) } e : K \to R, & \text{(kojedinica) } e^* : R \to K, \\ \text{(produkt) } m : R \otimes R \to R, & \text{(koprodukt) } m^* : R \to R \otimes R, \end{array}$$

takvima da vrijede sljedeći aksiomi. (R_n na prirodan način smatramo podmodulom od R, za svaki $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.)

(1) *(Stupnjevanje). Svako od preslikavanja e, e^*, m i m^* je morfizam stupnjevanih modula pri čemu su stupnjevanja od K i $R \otimes R$ dana s:*

$$K = K_0, \qquad (R \otimes R)_n = \bigoplus_{k=0}^{n} (R_k \otimes R_{n-k}), \ \forall n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}.$$

Preciznije, to znači da je $e : K \to R_0$, e^* je određen svojim djelovanjem na R_0 pa možemo pisati $e^* : R_0 \to K$, vrijedi da je $e^*(R_n) = 0$, za svaki $n \in \mathbb{N}$. Također, za sve k, l, $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ vrijedi da je

$$m|_{R_k \otimes R_l} : R_k \otimes R_l \to R_{k+l}, \qquad m^*|_{R_n} : R_n \to \bigoplus_{k=0}^{n} (R_k \otimes R_{n-k}).$$

(2) *(Asocijativnost). Preslikavanje m, tj. produkt je asocijativan, odnosno, označimo li, za a, $b \in R$, $ab = m(a \otimes b)$, onda za sve a, b, $c \in R$ vrijedi da je $(ab)c = a(bc)$. Ovo znači da dijagram*

$$\begin{tikzcd} R \otimes R \otimes R \arrow[r, "m \otimes \mathrm{id}_R"] \arrow[d, "\mathrm{id}_R \otimes m"] & R \otimes R \arrow[d, "m"] \\ R \otimes R \arrow[r, "m"] & R \end{tikzcd}$$

komutira.

(3) *(Jedinica). Element $e(1) \in R_0$ je jedinica prstena R. To znači da dijagram*

$$\begin{tikzcd} & R \otimes R \arrow[d, "m"] & \\ R \otimes K \arrow[ur, "\mathrm{id}_R \otimes e"] \arrow[r, "\sim"] & R & K \otimes R \arrow[l, "\backsim"'] \arrow[ul, "e \otimes \mathrm{id}_R"'] \end{tikzcd}$$

komutira.

(4) *(Koasocijativnost i kojedinica). Ova svojstva znače da možemo promijeniti smjer strelica u komutativnim dijagramima za asocijativnost i jedinicu te e, odnosno m zamijeniti s e^* i m^*. Dakle, sljedeća dva dijagrama komutiraju.*

$$\begin{tikzcd}
R \otimes R \otimes R & & R \otimes R \arrow[ll, "m^* \otimes \mathrm{id}_R"'] \\
R \otimes R \arrow[u, "\mathrm{id}_R \otimes m^*"] & & R \arrow[ll, "m^*"'] \arrow[u, "m^*"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & R \otimes R \arrow[dl, "\mathrm{id}_R \otimes e^*"'] \arrow[dr, "e^* \otimes \mathrm{id}_R"] & \\
R \otimes K & R \arrow[l, "\backsim"'] \arrow[r, "\sim"] \arrow[u, "m^*"'] & K \otimes R
\end{tikzcd}$$

(5) *(Hopfov aksiom). Preslikavanje $m^* : R \to R \otimes R$ je homomorfizam prstenova. Množenje u prstenu $R \otimes R$ je definirano na prirodan način:*

$$(x \otimes y) \cdot (x' \otimes y') = xx' \otimes yy'.$$

Izuzmemo li iz gornje definicije svojstva asocijativnosti i koasocijativnosti (aksiomi (2) i (4)) dolazimo do definicije **kvazi-Hopfove algebre**. Za kvazi-Hopfovu algebru R kažemo da je **povezana** ako je ispunjen sljedeći aksiom:

(6) (Povezanost). Preslikavanja $e : K \to R_0$ i $e^* : R_0 \to K$ su međusbno inverzni izomorfizmi.

Nadalje, Hopfova algebra R je **komutativna**, odnosno **kokomutativna** ako vrijedi:

(7) (Komutativnost). Preslikavanje m, tj. produkt je komutativan. Drugim riječima, dijagram

$$\begin{tikzcd}
R \otimes R \arrow[loop above, "\sigma"] \arrow[r, "m"] & R,
\end{tikzcd} \qquad \text{gdje je } \sigma\,(x \otimes y) = y \otimes x,$$

komutira.

(8) (Kokomutativnost). Opet mijenjamo strelice, tj. dijagram

$$\begin{tikzcd}
R \otimes R \arrow[loop above, "\sigma"] & R \arrow[l, "m^*"']
\end{tikzcd}$$

komutira.

Sada dolazimo do onoga što je nama zapravo potrebno, a to je pojam pozitivne, samoadjungirane Hopfove algebre, zvati ćemo ju jednostavno PSH algebra.

Definicija 2.1.5. *Kvazi-Hopfova algebra R nad prstenom cijelih brojeva $\mathbb{Z}$ je* ***pozitivna*** *i* ***samoadjungirana*** *ako je ispunjeno:*

(9) Za svaki $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, R_n je T-grupa, posebno, R je T-grupa.

(10) (Pozitivnost). Sva preslikavanja, e, e^*, m i m^* su pozitivna.

(11) (Samoadjungiranost). Preslikavanja e i e^*, odnosno m i m^* su adjungirana jedno drugom u odnosu na skalarne produkte $[\cdot, \cdot]$ na R, $R \otimes R$ i $\mathbb{Z}$. To znači da vrijedi:

$$[e^*(r), n] = [r, e(n)] \quad i \quad [m^*(r), r_1 \otimes r_2] = [r, m(r_1 \otimes r_2)].$$

Definicija 2.1.6. ***PSH algebra*** *je povezana, pozitivna i samoadjungirana Hopfova algebra nad $\mathbb{Z}$.*

Od sada pa nadalje nam je R PSH algebra. Jedinicu prstena R, odnosno element $e(1) \in R_0$ ćemo označiti jednostavno s 1. Aksiomi povezanosti i pozitivnosti ((6) i (10)) nam govore da je 1 ireducibilni element u R te da je $R_0 = \mathbb{Z} \cdot 1$, zato ćemo jednostavno smatrati da je $R_0 = \mathbb{Z}$. Nadalje, za $x, y \in R$ ćemo pisati xy za $m(x \otimes y)$, označimo $I = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} R_n$ ($\mathbb{N}$ je skup prirodnih, tj. pozitivnih cijelih brojeva). Svojstva stupnjevanja, kpovezanosti i kojedinice ((1), (6) i (4)) nam govore da tada za svaki $x \in I$ vrijedi da je

$$m^*(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x + m^*_+(x),$$

gdje je $m^*_+(x) \in I \otimes I$.

Definicija 2.1.7. *Element $x \in I$ se zovi* ***primitivni*** *element ako je $m^*_+(x) = 0$, odnosno, $m^*(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x$.*

Označimo s P podgrupu od R koja sadrži sve primitivne elemente te neka je $I^2 = m(I \otimes I)$.

Propozicija 2.1.8. *Svaka pozitivna, povezana i samoadjungirana kvazi-Hopfova algebra nad $\mathbb{Z}$ je PSH algebra, odnosno, asocijativnost i koasocijativnost slijede iz ostalih akioma PSH algebre. Nadalje, svaka PSH algebra je komutativna i kokomutativna.*

Dokaz. Pogledati u [3], propozicija 1.6. $\mathfrak{Q.E.D.}$

Neka je R PSH algebra, za svaki $x \in R$ označimo s $x^* : R \to R$ operator adjungiran operatoru množenja s x, konkretnije, x^* je definiran pomoću:

$$[x^*(y),\, z] = [y,\, xz]\,,\ \forall y,\, z \in R.$$

U dijelu (b) sljedeće propozicije ćemo vidjeti da ovakva definicija ima smisla. Operator x^* će biti naš glavni alat u razvoju strukturne teorije PSH algebri, sljedeća propozicija govori o njegovim osnovnim svojstvima.

Propozicija 2.1.9.

(a) *Neka je $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ i neka je $x \in R_k$, onda za svaki $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ takav da je $n < k$ vrijedi da je $x^*(R_n) = 0$, a ako je $n \geq k$, onda je $x^*(R_n) \subseteq R_{n-k}$. Primijetimo da je*

$$x^*|_{R_k} : R_k \to R_0 = \mathbb{Z}$$

zapravo skalarni produkt s x na R_k, označimo ga s $[x,\, \cdot]$.

(b) *Operator $x^* : R \to R$ odgovara kompoziciji*

$$R \xrightarrow{m^*} R \otimes R \xrightarrow{id_R \otimes [x,\, \cdot]} R \otimes \mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} R$$

(c) *Za sve $x,\, y \in R$ vrijedi da je*

$$(xy)^* = y^* \circ x^*,$$

a kako je R komutativan, vidimo da svi operatori x^* međusobno komutiraju.

(d) *Ako je $x \in R^+$, onda je x^* pozitivan operator.*

(e) *Ako su $x,\, y,\, z \in R$ i ako je $m^*(x) = \sum_{j \in J} (a_j \otimes b_j)$, onda je*

$$x^*(yz) = \sum_{j \in J} a_j^*(y)\, b_j^*(z).$$

(f) *Ako je $\rho \in R$ primitivan element, onda je $\rho^* : R \to R$ derivacija prstena R, odnosno:*

$$\rho^*(yz) = \rho^*(y)\, z + y\rho^*(z)\,.$$

(g) *Ako je $n \in \mathbb{N}$ i $\rho \in R_n$ primitivan te $k \in \mathbb{N}$, $k < n$ i $x \in R_k$, onda je $x^*(\rho) = 0$.*

Dokaz. Pogledati u [3], propozicija 1.9. $\mathfrak{Q.E.D.}$

Strukturna teorija PSH algebri

Neka je $(R_\alpha)_{\alpha\in A}$ proizvoljna familija PSH algebri. Definiramo tenzorski produkt

$$R = \bigotimes_{\alpha\in A} R_\alpha$$

kao induktivni limes konačnih tenzorskih produkata $\bigotimes\limits_{\beta\in S} R_\beta$, gdje S ide po konačnim podskupovima od A. To možemo zato jer se za svaki konačni podskup $S \subseteq A$ na prirodan način dobiva inkluziju:

$$\bigotimes_{\beta\in S} R_\beta \hookrightarrow \bigotimes_{\alpha\in A} R_\alpha.$$

Teorem 2.1.10 (Dekompozicijski)**.** *Neka je R PSH algebra i neka je $\mathcal{C} = \Omega \cap P$ skup ireducibilnih i primitivnih elemenata od R. Za svaki $\rho \in \mathcal{C}$ označavamo*

$$\Omega(\rho) = \{\omega \in \Omega \ : \ \exists n \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \text{ takav da je } [\omega,\, \rho^n] \neq 0\}$$

i

$$R(\rho) = \bigoplus_{\omega\in\Omega(\rho)} \mathbb{Z}\cdot\omega.$$

Tada je $R(\rho)$ PSH podalgebra od R sa skupom ireducibilnih elemenata jednakim $\Omega(\rho)$ i vrijedi da je ρ jedinstveni ireducibilni i primitivni element u $R(\rho)$. Konačno, vrijedi:

$$R = \bigotimes_{\rho\in\mathcal{C}} R(\rho).$$

Dokaz. Pogledati u [3], teorem 2.2. $\mathfrak{Q.E.D.}$

Prethodni teorem nam govori da je svaka PSH algebra jednaka tenzorskom produktu PSH algebri sa samo jednim ireducibilnim primitivnim elementom. Uvedimo sljedeću oznaku, uz oznake iz dekompozicijskog teorema, za $\rho \in \mathcal{C}$, sa $\deg\rho$ (stupanj) označimo $m \in \mathbb{N}$ takav da je $\rho \in R_m$. Ovdje je, jasno, $R = \bigoplus\limits_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}} R_n$. Zašto takav $m \in \mathbb{N}$ postoji? Naime, ρ je ireducibilan i primitivan element, a kako je svaki R_n, a time i R T-grupa, zaključujemo da se svaki ireducibilni element nalazi u nekom R_m, činjenica da je $m > 0$ slijedi iz primitivnosti od ρ.

Neka je sada $R = \bigoplus\limits_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}} R_n$ PSH algebra s jedinstvenim ireducibilnim primitivnim elementom ρ. Drugim riječima, vrijedi da je

$$R = R(\rho) = \bigoplus_{\omega\in\Omega(\rho)} \mathbb{Z}\omega.$$

To znači da je $\Omega(\rho) = \Omega$, a to onda znači da je $R_n = \{0\}$ ako $\deg \rho \nmid n$, za svaki $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Stoga možemo pretpostaviti da je $\deg \rho = 1$ (izbacimo sve one R_n koji su jednaki $\{0\}$). Dakle, vrijedi da je $\rho \in R_1$, što znači da je

$$R_1 = \mathbb{Z} \cdot \rho.$$

Sada dolazimo do teorema koji nam otrkiva strukturu PSH algebre s jedinstvenim ireducibilnim primitivnim elementom, ρ.

Teorem 2.1.11 (Strukturni)**.** *Uz prethodnu diskusiju i oznake iz nje vrijedi sljedeće.*

(a) Element ρ^2 je jednak sumi dvaju ireducibilnih elemenata, x_2 i y_2.

(b) Za svaki $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ postoje jedinstveni ireducibilni elementi x_n, $y_n \in R_n$ takvi da je

$$x_2^*(y_n) = 0 \quad i \quad y_2^*(x_n) = 0.$$

(c) Za n, $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ takve da je $k \leq n$ vrijedi:

$$x_k^*(x_n) = x_{n-k} \quad i \quad y_k^*(y_n) = y_{n-k}.$$

Nadalje, ako je $\omega \in \Omega$ različit od x_0, x_1, $\ldots$, x_n, onda je $\omega^*(x_n) = 0$, analogna tvrdnja vrijedi i za y_0, y_1, $\ldots$, y_n, posebno

$$y_k^*(x_n) = x_k^*(y_n) = 0, \text{ za sve } n, k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \ k \geq 2.$$

(d) Za $n \in \mathbb{N}$ vrijedi da je

$$m^*(x_n) = \sum_{k=0}^{n} x_k \otimes x_{n-k},$$
$$m^*(y_n) = \sum_{k=0}^{n} y_k \otimes y_{n-k}.$$

(e) Prsten R je jednak prstenu $\mathbb{Z}[x_1, x_2, \ldots]$, svih polinoma u varijablama $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, također, $R = \mathbb{Z}[y_1, y_2, \ldots]$. Nadalje, za svaki $n \in \mathbb{N}$, vrijedi:

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k x_k y_{n-k} = 0.$$

(f) Algebra R posjeduje jedinstveni netrivijalni automorfizam PSH algebri, u oznaci t i za njega vrijedi:

$$t(x_n) = y_n, \qquad t(y_n) = x_n, \qquad \text{za svaki } n \in \mathbb{N}.$$

(g) *Svaka PSH algebra, R', koja ima jedinstveni ireducibilni primitivni element, ρ', stupnja 1, izomorfna je PSH algebri R. Prema točki (f), postoje točno dva izomorfizma između PSH algebri R i R'.*

Dokaz. Opet pogledati u [3], teorem 3.1. $\mathfrak{Q.E.D.}$

Daljnji, logični, korak u klasifikaciji je, jasno, pronalazak svih primitivnih elemenata PSH algebre R s jedinstvenim ireducibilnim, primitivnim elementom ρ. Mi to ovdje nećemo raditi pošto bi se na taj način opseg ovoga rada povećao daleko iznad nekih razumnih granica. Sve to, a i puno više se može naći u knjizi [3] na kojoj se i bazira ovo poglavlje rada.

2.2 Struktura PSH algebre na S_n

Najprije, za $n \in \mathbb{N}$, sa S_n označavamo grupu svih permutacija skupa $\{1, 2, \ldots, n\}$, dodatno stavljamo da je $S_0 = \{e\}$, trivijalna grupa, samo s neutralnim elementom. U ovoj sekciji ćemo opisati na koji način uvodimo strukturu PSH algebre na reprezentacije svih grupa S_n, $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Zašto promatramo reprezentacije svih tih grupa od jednom? Zato jer se ispostavlja da ako gledamo na taj način da se struktura PSH algebre nameće gotovo sama od sebe, vrlo prirodno.

Neka je, za svaki $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $R_n = R(S_n)$ T-grupa čiju bazu tvore sve međusobno neizomorfne ireducibilne reprezentacije grupe S_n. Jasno je da tada skup R_n^+ sadrži sve (do na izomorfizam) reprezentacije grupe S_n, također, vidimo da je $R_0 = \mathbb{Z}$. Neka je

$$R(S) = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} R_n,$$

jasno je da je to stupnjevana T-grupa. Sada želimo na njoj definirati produkt, m i koprodukt, m^* kako bi postala PSH algebra. Napomenimo da su e i e^* definirane na trivijalan način, to su naprosto identitete na $\mathbb{Z}$.

Primijetimo da nam teorem 1.4.4 daje izomorfizam $R(S_k \times S_l) \cong R(S_k) \otimes R(S_l)$, za sve $k, l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Ovdje, jasno, $R(S_k \times S_l)$ označava T-grupu čiju bazu čine sve međusobno neizomorfne ireducibilne reprezentacije grupe $S_k \times S_l$.

Neka su $k, l, n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ takvi da je $k + l = n$. Grupu $S_k \times S_l$ na prirodan način smatramo podgrupom od S_n, to su jednostavno permutacije od S_n koje stabiliziraju skup $\{1, 2, \ldots, k\} \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$. Sada, za reprezentacije ρ_k i ρ_l od, redom, grupa S_k i S_l promatramo reprezentaciju $\rho_k \otimes \rho_l$ grupe $S_k \times S_l$ shvaćenje kao podgrupe od S_n. Tu reprezentaciju možemo inducirati (teorem 1.4.8) do reprezentacije grupe G_n. Dakle, došli smo do nečega što prirodno možemo nazvati produktom, slijedi formalni zapis. Na upravo opisan način definiramo funktor

$$i_{k,l} : R\,(S_k) \otimes R\,(S_l) \cong R\,(S_k \times S_l) \to R\,(S_n),$$

jasno je da je to preslikavanje linearno nad $\mathbb{Z}$. Obratno, za bilo koju reprezentaciju, σ, grupe S_n možemo promatrati njenu restrikciju na podgrupu $S_k \times S_l$ pa dobivamo funktor

$$r_{k,l} : R\,(S_n) \to R\,(S_k \times S_l) \cong R\,(S_k) \otimes R\,(S_n),$$

za kojeg je također jasno da je linearan nad $\mathbb{Z}$. Konačno, definiramo stupnjevane homomorfizme:

$$m : R\,(S) \otimes R\,(S) \to R\,(S) \quad \text{i} \quad m^* : R\,(S) \to R\,(S) \otimes R\,(S),$$

kao

$$m|_{R_k \otimes R_l} = i_{k,l} \quad \text{i} \quad m^*|_{R_n} = \sum_{k=0}^{n} r_{k,n-k},$$

za sve k, l, $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

Propozicija 2.2.1. *Uz definirana preslikavanja, $R\,(S)$ je PSH algebra. Dodatno, ona ima jedinstveni ireducibilni primitivni element, jediničnu reprezentaciju grupe S_1.*

Dokaz. Jasno, [3], propozicija 6.2. $\mathfrak{Q.E.D.}$

Ono što slijedi nakon ove propozicije u spomenutoj knjizi je primjena dekompozicijskog (2.1.10) i strukturnog (2.1.11) teorema s ciljem što boljeg razumijevanja reprezentacija od S_n. Svi detalji se mogu naći u knjizi, mi se ovdje nećemo time baviti, iz već dobro poznatih razloga.

2.3 Struktura PSH algebre na $\mathrm{GL}\,(n,\, F_q)$

Fiksirajmo konačno polje $\mathbb{F}_q$, tj. polje s q elemenata, gdje je $q = p^k$, za neki prosti broj p i prirodni broj k. S $\mathrm{GL}\,(n,\, \mathbb{F}_q)$ označavamo grupu svih regularnih $n \times n$ matrica s elementima iz polja $\mathbb{F}_q$. Za svaki $n \in \mathbb{N}$ označimo $G_n = \mathrm{GL}\,(n,\, \mathbb{F}_q)$, dodatno, neka je $G_0 = \{e\}$. Kao u prethodnoj sekciji, za svaki $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ neka je $R_n = R\,(G_n)$ T-grupa čiju bazu čine sve međusobno neizomorfne ireducibilne reprezentacije grupe G_n. Uvedimo oznaku za stupnjevanu T-grupu:

$$R\,(q) = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} R_n.$$

Jasno, cilj nam je opet definirati produkt, m i koprodukt, m^* kako bismo dobili PSH algebru. Opet su e i e^* definirane na trivijalan način, to su naprosto identitete na $\mathbb{Z}$. Prema teoremu 1.4.4 vidimo da imamo izomorfizam $R(G_k) \otimes R(G_l) \cong R(G_k \times G_l)$, za sve $k, l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Sada, fiksirajmo $k, l, n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ takve da je $k + l = n$, definirati ćemo homomorfizme

$$m|_{R_k \otimes R_l} : R_k \otimes R_l \cong R(G_k \times G_l) \to R_n$$

i

$$m^*_{k,l} : R_n \to R(G_k \times G_l) \cong R_k \otimes R_l$$

te pomoću njih, stupnjevanjem dobiti produkt i koprodukt, kao i u prethodnoj sekciji. Da bismo to učinili najprije će nam trebati poopćenja pojmova indukcije i restrikcije reprezentacije.

Neka je G konačna grupa i neka su H i U njene podgrupe takve da je $H \cap U = \{e\}$ te neka H normalizira U, preciznije, vrijedi:

$$\left\{h^{-1}uh \ : \ u \in U\right\} = U, \ \forall h \in H.$$

Neka je $\psi : U \to \mathbb{C}$ neki karakter grupe U kojega H normalizira, tj.

$$\psi\left(h^{-1}uh\right) = \psi(u), \ \forall u \in U, \ h \in H.$$

Označimo s $\mathcal{A}(G)$ skup (preciznije, kategoriju, za pojam kategorije pogledati u [1]) svih reprezentacija grupe G. Sada smo spremni definirati funktore:

$$i_{U,\psi} : \mathcal{A}(H) \to \mathcal{A}(G),$$

$$r_{U,\psi} : \mathcal{A}(G) \to \mathcal{A}(H),$$

prvi će biti poopćenje indukcije, dok je drugi poopćenje restrikcije. Nazivamo ih, redom, ψ-indukcija i ψ-restrikcija. Poopćenje u smislu da ako je $U = \{e\}$, onda su navedeni funktori upravo indukcija (ona iz teorema 1.4.8) i restrikcija reprezentacije. Najprije, kako H normalizira U, onda je HU podgrupa od G koja sadrži sve elemente oblike hu, gdje je $h \in H$ i $u \in U$.

(1) Neka je $\rho \in \mathcal{A}(H)$ te neka je V pripadajući vektorski prostor. Najprije proširimo reprezentaciju ρ do reprezentacije $\tilde{\rho} : HU \to \mathrm{GL}(V)$ stavljajući

$$\tilde{\rho}(u) = \psi(u) \cdot I_V, \ \forall u \in U.$$

Sada stavljamo da je

$$i_{U,\psi}(\rho) = \mathrm{Ind}_{HU}^{G}(\tilde{\rho}),$$

ovdje je Ind_{HU}^{G} oznaka za reprezentaciju induciranu s podgrupe HU na grupu G, teorem 1.4.8.

(2) Neka je $\pi \in \mathcal{A}(G)$ i neka je E pripadajući vektorski prostor. Neka je

$$E^{U,\psi} = \{v \in E \; : \; \pi_u(v) = \psi(u) \cdot v, \; \forall u \in U\}.$$

Jasno je da je $E^{U,\psi}$ invarijantan za $\pi|_H$. Zašto? Neka je $h \in H$ te $v \in E^{U,\psi}$, želimo pokazati da je $w = \pi_h(v)$ također u $E^{U,\psi}$. Najprije, kako H normalizira U, znamo da za svaki $u \in U$ postoji $u' \in U$ takav da je $uh = hu'$, konkretno, vrijedi da je $u' = h^{-1}uh$. Sada, za proizvoljan $u \in U$, računamo:

$$\begin{aligned}\pi_u(w) &= (\pi_u \circ \pi_h)(v) = \pi_{uh}(v) \\ &= \pi_{hu'}(v) = (\pi_h \circ \pi_{u'})(v) = \pi_h(\psi(u') \cdot v) \\ &= \psi\left(h^{-1}uh\right) \cdot \pi_h(v) = \psi(u) \cdot w,\end{aligned}$$

dakle, $w \in E^{U,\psi}$. Stavljamo da je $r_{U,\psi}(\pi)$ upravo restrikcija reprezentacije π na podgrupu H i to na prostoru $E^{U,\psi}$.

Neka su $k,\, l,\, n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, takvi da je $k + l = n$. Grupu $H = G_k \times G_l$ smatramo podgrupom blok-dijagonalnih matrica od G_n na prirodan način. Preciznije, to su sve matrice oblika:

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix},$$

gdje je $A \in G_k$, $B \in G_l$. Nadalje, s $U = U_{k,l}$ označimo podgrupu od G_n svih matrica kojima su sve svojstvene vrijednosti jednake 1 (tzv. unipotentne matrice) te za koje vrijedi da ako je $(u_{ij})_{i,\,j \in \{1,\,2,\,\ldots,\,n\}} \in U_{k,l}$, onda iz $u_{ij} \neq 0$ slijedi da je $i = j$ ili $i \leq k < j$. Preciznije, U_{kl} sadrži sve matrice oblika:

$$\begin{pmatrix} I_k & C \\ 0 & I_l \end{pmatrix},$$

gdje su $I_k \in G_k$ i $I_l \in G_l$ jedinične matrice, a C je proizvoljna $k \times l$ matrica s elementima iz $\mathbb{F}_q$.

Očito je da H normalizira U te da je $H \cap U = \{e\}$. Stoga, kao što smo prije opisali, možemo definirati funktore:

$$i_{U,1} : \mathcal{A}(H) \to \mathcal{A}(G_n)$$

i

$$r_{U,1} : \mathcal{A}(G_n) \to \mathcal{A}(H).$$

Sada jednostavno stavljamo:

$$m|_{R_k \otimes R_l} = i_{U,1}, \quad m^*_{k,l} = r_{U,1} \quad \text{te} \quad m^*|_{R_n} = \sum_{k=0}^{n} m^*_{k,n-k}.$$

Prirodnim stupnjevanjem sada dolazimo do produkta i koprodukta u istim oznakama, m i m^*.

Propozicija 2.3.1. *Uz definirane homomorfizme, $R(q)$ je PSH algebra.*

Dokaz. Pogledati u [3], propozicija 9.1. $\mathfrak{Q.E.D.}$

Napomenimo da se ovakvim pristupom komutativnost i kokomutativnost u $R(q)$ dobivaju direktno, što je inače sasvim netrivijalna činjenica. Ireducibilne primitivne elemente od $R(q)$ nazivamo **kuspidalne reprezentacije**. Ovdje se zaustavljamo, svojstva kuspidalnih reprezentacija i daljna klasifikacija reprezentacija od G_n se može naći u knjizi [3], sve slijedi u tekstu nakon navedene propozicije. Jasno, glavna aparatura su, kao i u prethodnoj sekciji, teorem dekompozicije (2.1.10) i strukturni teorem (2.1.11).

Literatura

[1] T. W. Hungerford, *Algebra*, Graduate Texts in Mathematics, sv. 73, Springer–Verlag, New York, 1980.

[2] J. P. Serre, *Linear Representations of Finite Groups*, Graduate Texts in Mathematics, sv. 42, Springer–Verlag, New York, 1977.

[3] A. V. Zelevinsky, *Representations of Finite Classical Groups: A Hopf Algebra Approach*, Lecture Notes in Mathematics, sv. 869, Springer–Verlag, New York, 1981.

Sažetak

U ovom radu najprije dajemo osnove teorije konačno dimenzionalnih kompleksnih reprezentacija konačnih grupa. Cilj nam je upoznati se s pojmom karaktera reprezentacije kao i induciranom reprezentacijom te restrikcijom dane reprezentacije. Zatim pomoću strukturne teorije PSH algebri otkrivamo način za bolje razumijevanje reprezentacija simetričnih grupa i generalnih linearnih grupa nad konačnim poljem. Točnije, opisujemo kako se na spomenute grupe uvodi struktura PSH algebre.

Rad je podijeljen na dva poglavlja, u prvom se govori o reprezentacijama, dok u drugom detaljno opisujemo strukturu PSH algebre i pripadajuću strukturnu teoriju. U nastavku drugog poglavlja, kao što je već rečeno, opisujemo uvođenje strukture PSH algebre u slučaju simetričnih grupa i generalnih linearnih grupa nad konačnim poljem.

Summary

At the begining of this thesis we revise basics of the theory of finite-dimensional complex representations of finite groups. Our goal is to get acquainted with the concepts of the character of a representation and the induction and restriction of a given representation. Then, using the structure theory of PSH algebras, we discover a way for better understanding of the representations of symmetric groups and general linear groups over the finite field. More precisely, we describe how the structure of PSH algebra is introduced on aforementioned groups.

Paper is divided into two chapters, the first is about representations, while in the second we describe the structure of PSH algebra in great details and the associated structural theory. In second chapter, we continue, as stated above, with describing a way to introduce the structure of PSH algebra in the case of symmetric groups and general linear groups over finite field.

Životopis

Moje ime je Ivan Krijan i rođen sam 4. listopada 1989. godine u Slavonskom Brodu. Osnovnu školu pohađao sam u Poreču (OŠ Poreč) i Novigradu istarskom (OŠ Rivarela), dok sam srednju školu upisao u Varaždinu (Gimnazija Varaždin, kasnije Prva gimnazija Varaždin). Za vrijeme završnih razreda osnovnoškolskog i tokom cijelog srednjoškolskog obrazovanja sudjelovao sam na natjecanjima iz matematike, fizike, informatike, a kasnije i logike. Iz matematike sam redovito dolazio do državne razine pri čemu bih izdvojio I. nagradu na državnom natjecanju u 4. razredu srednje škole. Zanimanje za matematiku je prevladalo pa 2008. godine upisujem preddiplomski studij matematike na Matematičkom odsjeku Prirodoslovno–matematičkog fakulteta u Zagrebu, a 2011. diplomski studij teorijske matematike na istom fakultetu.

Tijekom studija sam bio demonstrator iz niza kolegija te aktivni član u udruzi MNM Marin Getaldić[1] gdje sam pripremao srednjoškolce za natjecanja iz matematike te nastavio, kao mentor, sudjelovati na državnim natjecanjima. Za izniman uspjeh na studiju nagrađen sam, na završnim godinama preddiplomskog i diplomskog studija, od strane PMF-a (Dekanova nagrada) i od strane Odsjeka. Dobitnik sam Rektorove nagrade u akademskoj godini 2012./2013., za rad pod nazivom "Multipliciteti presjeka i racionalnost ravninskih krivulja" kojega sam izradio zajedno s kolegicom sa smjera. Sudjelovao sam na međunarodnim studentskim natjecanjima iz matematike, IMC[2] (3 puta) i Vojtěch Jarnik[3] (2 puta), a izdvojio bih II. nagradu na IMC-u 2011. godine. Tokom svih 5 godina studija bio sam stipendist Državne stipendije u A kategoriji, Ministarstva znanosti, obrazovanja i športa, a na kraju 5. godine (akademske 2012./2013.) dobitnik sam stipendije Nacionalne zaklade za potporu učeničkom i studentskom standardu.

[1] http://mnm.hr/
[2] http://www.imc-math.org/
[3] http://vjimc.osu.cz/