

MATEMATIKA - Matrice i vektori

1. Ako je $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -5 & 9 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$, izračunajte

- (a) $2A - B$
- (b) $-2A + 3B$
- (c) $2A + 2B$
- (d) $2A + 3B - 4I$

2. Ako je $A = \begin{bmatrix} -2 & -3 & 4 \\ 5 & 4 & -2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ i $C = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 4 & -3 \\ 3 & 2 & 1 & -3 \\ 2 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$, izračunajte

- (a) $A \cdot B - C$
- (b) $A \cdot C$
- (c) $B \cdot A \cdot C$
- (d) $A \cdot B$
- (e) $B \cdot A$
- (f) $A \cdot C - B \cdot A \cdot C$

3. Gaussovom metodom eliminacija riješite sustav jednačbi:

(a)

$$\begin{array}{rrrrrr} x_1 & + & 2x_2 & - & 7x_3 & + & 9x_4 & = & -5 \\ 4x_1 & - & x_2 & - & x_3 & & & = & -2 \\ -3x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & - & 2x_4 & = & 3 \end{array}$$

(b)

$$\begin{array}{rrrrrr} x_1 & - & 2x_2 & - & x_3 & - & 3x_4 & = & 3 \\ 3x_1 & + & 2x_2 & & & - & x_4 & = & -2 \\ & & 5x_2 & + & 2x_3 & + & 2x_4 & = & -3 \end{array}$$

(c)

$$\begin{array}{rrrrrr} x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & + & x_4 & = & 1 \\ x_1 & & & + & 3x_3 & - & 3x_4 & = & -1 \\ 2x_1 & + & x_2 & & & + & 2x_4 & = & -3 \end{array}$$

(d)

$$\begin{array}{rrrrrr} x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & - & x_4 & = & -1 \\ 2x_1 & - & x_2 & - & 2x_3 & & & = & 3 \\ 5x_1 & & & + & 2x_3 & - & 2x_4 & = & 2 \end{array}$$

(e)

$$\begin{array}{rrrrrr} x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & + & 2x_4 & = & -1 \\ 4x_1 & - & x_2 & - & x_3 & & & = & -2 \\ -3x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & = & 3 \end{array}$$

(f)

$$\begin{array}{rrrrrr} x_1 & - & 2x_2 & & & + & 2x_4 & = & 1 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & = & 2 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 2 \end{array}$$

4. Izračunajte determinantu sljedećih matrica:

$$(a) \begin{bmatrix} -3 & -2 & 8 & 4 \\ -6 & -4 & 9 & 2 \\ -7 & -4 & 9 & -1 \\ -2 & 2 & 9 & 6 \end{bmatrix} \quad (\text{rješenje: } -146)$$

$$(b) \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 \\ 5 & 7 & -2 & -2 \\ -1 & -5 & 6 & -9 \\ 3 & 9 & 5 & -4 \end{bmatrix} \quad (\text{rješenje: } 525)$$

$$(c) \begin{bmatrix} 1 & -2 & 7 & 0 \\ -6 & -3 & 4 & 2 \\ 0 & 7 & 6 & -1 \\ 4 & 7 & 5 & 4 \end{bmatrix} \quad (\text{rješenje: } -2495)$$

$$(d) \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 6 & 3 & -5 \\ 3 & -3 & -5 \end{bmatrix} \quad (\text{rješenje: } -72)$$

5. Riješite jednadžbu:

$$(a) \begin{vmatrix} -5 & 1 & 2 & 3 \\ -5 & x-1 & -3 & -1 \\ 0 & 2 & 6 & 2 \\ -2 & -9 & -5 & 4 \end{vmatrix} = 286 \quad (\text{rješenje: } x=2)$$

$$(b) \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 & 3 \\ -5 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ -2 & -1 & -5 & 2x \end{vmatrix} = -133 \quad (\text{rješenje: } x=2)$$

$$(c) \begin{vmatrix} 0 & -2 & 6 & -3 \\ -1 & -1 & -1 & x \\ 0 & -1 & 4 & -1 \\ -1 & -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -20 \quad (\text{rješenje: } x=-7)$$

$$(d) \begin{vmatrix} 2 & 2x-3 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 4 & -3 & 0 \end{vmatrix} = -30 \quad (\text{rješenje: } x=2)$$

6. Izračunajte inverz sljedećih matrica:

$$(a) \begin{bmatrix} 0 & -2 & 6 & -3 \\ -1 & -1 & -1 & -7 \\ 0 & -1 & 4 & -1 \\ -1 & -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{rješenje: } \begin{bmatrix} 57/20 & -13/20 & -87/20 & -7/20 \\ -17/10 & 3/10 & 27/10 & -3/10 \\ -9/20 & 1/20 & 19/20 & -1/20 \\ -1/10 & -1/10 & 1/10 & 1/10 \end{bmatrix}$$

$$(b) \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 6 & 3 & -5 \\ 3 & -3 & -5 \end{bmatrix}, \quad \text{rješenje: } \begin{bmatrix} 5/12 & -1/36 & 1/9 \\ -5/24 & 13/72 & -2/9 \\ 3/8 & -1/8 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(c) \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 4 & -3 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{rješenje: } \begin{bmatrix} 1/5 & 1/10 & 1/10 \\ 4/15 & 2/15 & -1/15 \\ 1/3 & -1/3 & 0 \end{bmatrix}$$

7. Izračunajte inverze matrica

$$(a) \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 5 & -3 \end{bmatrix} \quad (b) \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 7 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (c) \begin{bmatrix} 2 & -4 & 2 \\ -1 & 5 & 2 \\ 3 & -3 & 6 \end{bmatrix}$$

Rješenje: (a) $\begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{5}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 7 & -4 & -3 \\ 2 & -1 & -1 \\ -21 & 12 & 10 \end{bmatrix}$ (c) Matrica je singularna.

8. Izračunajte determinantu matrice

(a) $\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 6 & 2 \end{vmatrix}$ (b) $\begin{vmatrix} 1 & -3 & -8 \\ 2 & -3 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \end{vmatrix}$ (c) $\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 2 & -5 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

Rješenje: (a) -26 (b) 12 (c) 8

9. Izračunajte determinantu i rang matrice

$$A = \begin{bmatrix} -5 & 8 & 0 \\ -4 & 7 & 0 \\ -8 & 8 & 3 \end{bmatrix}$$

Rješenje: $\det(A) = -9$, $r(A) = 3$.

10. Ako je vektor $\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ okomit na vektore $\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$ i $-\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$, izračunajte koordinate y i z .

Rješenje: $y = \frac{3}{5}$, $z = \frac{1}{5}$

11. Izračunajte duljine stranica i kutove trokuta s vrhovima $A(-1, 2, 3)$, $B(2, 1, 2)$ i $C(0, 3, 0)$. (Uputa: Najprije izračunajte vektore svake stranice. Duljina tih vektora jednaka je duljini stranice trokuta. Skalarnim množenjem dođite do kuta između vektora. To će biti kutevi između stranica trokuta.)

12. Izračunaj površinu paralelograma $ABCD$ ako su vektori njegovih stranica $\overrightarrow{AB} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$ i $\overrightarrow{AD} = -\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$.

Rješenje: $P = \sqrt{35}$

13. Odredite površinu trokuta s vrhovima $(4, 4, 4)$, $(2, 4, 2)$ i $(3, 3, 6)$.

Rješenje: $P = \sqrt{11}$

14. Izračunajte volumen tetraedra s vrhovima $A(1, 1, 1)$, $B(6, 3, 1)$, $C(3, 6, 1)$ i $D(2, 3, 5)$.

Rješenje: $V = 14$

15. Izračunajte volumen paralelepipeda $ABCD A' B' C' D'$ ako je $A(2, 1, -3)$, $B(4, 1, -2)$, $D(3, 2, 1)$ i $A'(5, 2, -1)$.

Rješenje: $V = 6$