REPREZENTACIJE NILPOTENTNIH LIEJEVIH GRUPA

Prof. dr. sc. Hrvoje Kraljević

Predavanja održana u okviru poslijediplomskog studija
na PMF−Matematičkom odjelu Sveučilišta u Zagrebu
u akademskoj godini 1978./1979.

Sadržaj

Poglavlje 1

NILPOTENTNE GRUPE

Neka je V realan konačnodimenzionalan vektorski prostor. Neka je $\mathcal{P}(V)$ unitalna podalgebra od $\mathbb{R}^V$ generirana dualom V^* od V (ili potprsten od $\mathbb{R}^V$ generiran sa $V^* \cup \mathbb{R}$). Elemnti od $\mathcal{P}(V)$ zovu se **polinomijalne funkcije** (ili, kraće, **polinomi**) na V.

Ako je $n = \dim V$ i $(f_1, \ldots, f_n)$ baza od V^*, tada je

$$\sum c_{i_1 \ldots i_n} X_1^{i_1} \cdots X_n^{i_n} \mapsto \sum c_{i_1 \ldots i_n} f_1^{i_1} \cdots f_n^{i_n}$$

izomorfizam unitalnih algebri sa $\mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]$ na $\mathcal{P}(V)$.

Za **polinom** $P \in \mathcal{P}(V)$ kažemo da je **homogen stupnja** $k \in \mathbb{Z}_+$ ako vrijedi

$$P(tv) = t^k P(v) \qquad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \forall v \in V.$$

Neka je $\mathcal{P}^k(V)$ skup svih polinoma na V homogenih stupnja k. Očito je to potprostor od $\mathcal{P}(V)$.

Iz gornjeg izomorfizma između $\mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]$ i $\mathcal{P}(V)$ neposredno slijedi:

Lema 1.1. *(a)* $\mathcal{P}(V) = \sum_{k=0}^{\infty} \dot{+} \mathcal{P}_k(V)$.

(b) $\mathcal{P}_k(V)\mathcal{P}(_\ell(V) \subseteq \mathcal{P}_{k+\ell}(V)$.

(c) $\mathcal{P}_0(V) = \mathbb{R}$.

(d) $\mathcal{P}_1(V) = V^*$.

Neka je W također konačnodimenzionalan realan vektorski prostor i $F : V \to W$ preslikavanje. Kažemo da je F **polinomijalno preslikavanje** ako je $f \circ F \in \mathcal{P}(V)$ za svaki $f \in W^*$. Neka je $(w_1, \ldots, w_m)$ baza od W. Definirajmo funkcije $F_1, \ldots, F_m : V \to \mathbb{R}$ sa

$$F(v) = \sum_{i=1}^{m} F_i(v) w_i, \qquad v \in V.$$

Odmah se vidi da je F polinomijalno preslikavanje ako i samo ako su $F_1, \ldots, F_m \in \mathcal{P}(V)$.

Neka je $\mathcal{P}(V, W)$ skup svih polinomijalnih preslikavanja $V \to W$. To je realan vektorski prostor. Nadalje, ako su $F \in \mathcal{P}(V, W)$ i $G \in \mathcal{P}(W, U)$, onda je $G \circ F \in \mathcal{P}(V, U)$.

Za $P \in \mathcal{P}(V)$ i $F \in \mathcal{P}(V, W)$ definiramo preslikavanje $PF : V \to W$ množenjem po točkama: $(PF)(v) = P(v)F(v)$, $v \in V$. Tada je očito $PF \in \mathcal{P}(V, W)$ i na taj način $\mathcal{P}(V, W)$ postaje unitalni $\mathcal{P}(V)-$modul.

Preslikavanje $F \in \mathcal{P}(V, W)$ zove se **homogeno stupnja** $k \in \mathbb{Z}_+$ ako je

$$F(tv) = t^k F(v) \qquad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \forall v \in V.$$

Neka je $\mathcal{P}_k(V, W)$ potprostor svih polinomijalnih preslikavanja stupnja k. Iz leme 1.1. neposredno slijedi:

Lema 1.2. (*a*) $\mathcal{P}(V,W) = \sum_{k=0}^{\infty} \dot{+}\, \mathcal{P}_k(V,W)$.

(*b*) $\mathcal{P}_k(V)\mathcal{P}_\ell(V,W) \subseteq \mathcal{P}_{k+\ell}(V,W)$.

(*c*) $\mathcal{P}_0(V,W) = W$ (*uz identifikaciju* $w(v) = w$, $v \in V$, $w \in W$).

(*d*) $\mathcal{P}_1(V,W) = L(V,W)$ (*prostor linearnih operatora sa* V *u* W).

Nilpotentna grupa je konačno dimenzionalan realan vektorski prostor G snabdjeven s grupovnom operacijom $m : G \times G \to G$ koja ima sljedeća dva svojstva:

(*a*) m je polinomijalno preslikavanje sa $G \times G$ u G.

(*b*) Vrijedi $m(sx, tx) = (s+t)x \ \forall s, t \in \mathbb{R}, \forall x \in G$.

Napominjemo da ono što u ovom kolegiju zovemo *nilpotentna grupa* u standardnoj terminologiji zove se *povezana jednostavno povezana nilpotentna Liejeva grupa*.

U daljnjem je stalno G nilpotentna grupa. Drugi uvjet u gornjoj definiciji znači da ako su $x, y \in G$ linearno zavisni, onda je $x + y$ produkt x i y u G.

Pisat ćemo $m(x,y) = xy$, $x, y \in G$. Iz (*b*) slijedi da je za svako $x \in G$

$$x0 = m(x,0) = m(1x, 0, x) = (1+0)x = 1x = x \quad \text{i} \quad 0x = m(0,x) = m(0x, 1x) = (0+1)x = 1x = x.$$

Dakle, 0 je jedinica u grupi G. Nadalje,

$$m(-x,x) = m(x,-x) = m(1x,(-1)x) = (1-1)x = 0x = 0.$$

Dakle, $-x$ je inverzni element od x u grupi G.

Propozicija 1.3. (*a*) *Neka je $x \in G$ i neka je funkcija $g : \mathbb{R} \to G$ definirana sa $g(t) = tx$. Tada je g neprekidni homomorfizam aditivne grupe $\mathbb{R}$ u grupu G.*

(*b*) *Neka je g neprekidni homomorfizam aditivne grupe $\mathbb{R}$ u grupu G. Neka je $x = g(1)$. Tada je $g(t) = tx \ \ \forall t \in \mathbb{R}$.*

Dokaz: Tvrdnja (*a*) slijedi neposredno iz definicije nilpotentne grupe:

$$g(s+t) = (s+t)x = sx \cdot tx = g(s)g(t).$$

(*b*) Neka je $g : \mathbb{R} \to G$ neprekidni homomorfizam i $x = g(1)$. Tada je $g(0) = 0 = 0x$. Nadalje, za svaki $n \in \mathbb{N}$ imamo

$$g(n) = g(1 + \cdots + 1) = g(1)^n = g(1) + \cdots + g(1) = ng(1) = nx.$$

Nadalje, kako je

$$g(-1) = g(1)^{-1} = -g(1) = -x,$$

za $n \in \mathbb{N}$ imamo i

$$g(-n) = g(-1)^n = ng(-1) = -nx.$$

Time je dokazano da je $g(n) = ng(1) \ \forall n \in \mathbb{Z}$. To vrijedi za svaki neprekidni homomorfizam sa $\mathbb{R}$ u G. Neka su $n \in \mathbb{Z}$ i $m \in \mathbb{N}$. Primijenimo li dokazano na neprekidni homomorfizam $t \to g\left(t\frac{n}{m}\right)$, nalazimo

$$mg\left(\frac{n}{m}\right) = g\left(m\frac{n}{m}\right) = g(n) = ng(1).$$

Time je dokazano da vrijedi

$$g(t) = tg(1) = tx \qquad \forall t \in \mathbb{Q}.$$

Kako su g i $t \to tx$ neprekidne funkcije sa $\mathbb{R}$ u G i kako je $\mathbb{Q}$ gusto u $\mathbb{R}$, odatle slijedi da je $g(t) = tx\ \ \forall t \in \mathbb{R}$.

Za konačnodimenzionalan realan vektorski prostor V označimo sa $C^\infty(V)$ prostor svih realnih funkcija na V klase C^∞. Linearni funkcional X na prostoru $C^\infty(V)$ zove se **tangencijalni vektor na V u točki** $v \in V$ ako vrijedi

$$X(fg) = X(f)g(v) + f(v)X(g) \qquad \forall f, g \in C^\infty(V).$$

Neka je $T_v(V)$ skup svih tangencijalnih vektora na V u točki v. Očito je $T_v(V)$ realan vektorski prostor (potprostor duala vektorskog prostora $C^\infty(V)$). Primijetimo da svaki tangencijalni vektor $X \in T_v(V)$ preslikava svaku konstantu $c \in \mathbb{R}$ u nulu:

$$X(c) = cX(1) = cX(1 \cdot 1) = cX(1) + cX(1) = 2X(c) \qquad \Longrightarrow \qquad X(c) = 0.$$

Neka je $(x_1, \ldots, x_n)$ Kartezijev koordinatni sustav na V (tj. baza dualnog prostora V^*). Neka je $(e_1, \ldots, e_n)$ baza od V dualna bazi $(x_1, \ldots, x_n)$. Za $f \in C^\infty(V)$ definiramo $\tilde{f} \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ sa

$$\tilde{f}(t_1, \ldots, t_n) = f\left(\sum_{i=1}^n t_i e_i\right).$$

Dakle, ako je $(x_1, \ldots, x_n) : V \to \mathbb{R}^n$ izmorfizam koordinatizacije, tj.

$$(x_1, \ldots, x_n)(v) = (x_1(v), \ldots, x_n(v)), \qquad v = \sum_{i=1}^n x_i(v)e_1, \qquad v \in V,$$

onda je $f = \tilde{f} \circ (x_1, \ldots, x_n)$. Za vektor

$$v = \sum_{i=1}^n s_i e_i \in V$$

definiramo preslikavanje $\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_v : C^\infty(V) \to \mathbb{R}$ sa

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_v (f) = (\partial_j \tilde{f})(s_1, \ldots, s_n), \qquad f \in C^\infty(V).$$

Pri tome je ∂_j oznaka za parcijalnu derivaciju po $j-$toj varijabli.

Propozicija 1.4. *Uz uvedene oznake* $\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_v, \ldots, \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)_v\right\}$ *je baza vektorskog prostora* $T_v(V)$.

Dokaz: Lako se vidi da su $\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_v \in T_v(V),\ 1 \leq j \leq n$.

Dokažimo da su ti tangencijalni vektori linearno nezavisni. Neka su $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$ takvi da je

$$\sum_{i=1}^n c_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_v = 0.$$

Koordinatne funkcije $x_1, \ldots, x_n$ su elementi $C^\infty(V)$ i očito je $\tilde{x}_j(t_1, \ldots, t_n) = t_j$. Odatle je $\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_v (x_j) = \delta_{ij}$, pa slijedi

$$0 = \sum_{i=1}^{n} c_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_v (x_j) = c_j, \qquad 1 \leq j \leq n.$$

Time je linearna nezavisnost dokazana.

Dokažimo sada da tangencijalni vektori $\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_v, \ldots, \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)_v$ razapinju prostor $T_v(V)$. Neka je $X \in T_v(V)$. Za $f \in C^\infty(V)$ i $(t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{R}^n$ imamo Taylorovu formulu

$$\tilde{f}(t_1, \ldots, t_n) = \tilde{f}(s_1, \ldots, s_n) + \sum_{i=1}^{n} (\partial_i \tilde{f})(s_1, \ldots, s_n)(t_i - s_i) + \sum_{1 \leq i \leq k \leq n} (t_i - s_i)(t_k - s_k)\varphi_{ik}(t_1, \ldots, t_n)$$

pri čemu su funkcije $\varphi_{ik} \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ neovisne o funkciji f. Neka su $\psi_{ik} \in C^\infty(V)$ takve da je $\tilde{\psi}_{ik} = \varphi_{ik}$. Iz prethodne jednakosti dobivamo

$$f = f(v) + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_v (f)(x_i - s_i) + \sum_{1 \leq i \leq k \leq n} (x_i - s_i)(x_k - s_k)\psi_{ik}.$$

Odatle je

$$X(f) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_v (f) X(x_i - s_i) + \sum_{1 \leq i \leq k \leq n} X(x_i - s_i)(x_k(v) - s_k)\psi_{ik}(v) +$$

$$+ \sum_{1 \leq i \leq k \leq n} (x_i(v) - s_i) X(x_k - s_k)\psi_{ik}(v) + \sum_{1 \leq i \leq k \leq n} (x_i(v) - s_i)(x_k(v) - s_k) X(\psi_{ik}).$$

Tangencijalni vektor X poništava se na konstantama, pa je $X(x_i - s_i) = X(x_i) - X(s_i) = X(x_i)$. Nadalje, $x_j(v) = s_j$ za $1 \leq j \leq n$. Prema tome,

$$X(f) = \sum_{i=1}^{n} X(x_i) \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_v (f).$$

Kako je funkcija $f \in C^\infty(V)$ bila proizvoljna, nalazimo da je

$$X = \sum_{i=1}^{n} X(x_i) \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_v.$$

Time je propozicija dokazana.

Za $w, v \in V$ definiramo $w_v : C^\infty(V) \to \mathbb{R}$ sa

$$w_v(f) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(v + tw)\bigg|_{t=0}, \qquad f \in C^\infty(V).$$

Očito je tada $w_v \in T_v(V)$.

Propozicija 1.5. *$w \mapsto w_v$ je izomorfizam vektorskih prostora sa V na $T_v(V)$.*

Dokaz: Neka je

$$w = \sum_{j=1}^{n} r_j e_j \in V, \qquad r_1, \ldots, r_n \in \mathbb{R}.$$

Imamo

$$w_v(x_j) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} x_j(v + tw)\bigg|_{t=0} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(s_j + tr_j)\bigg|_{t=0} = r_j,$$

dakle, prema posljednjoj formuli u dokazu propozicije 1.4. dobivamo

$$w_v = \sum_{j=1}^{n} w_v(x_j) \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_v = \sum_{j=1}^{n} r_j \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_v .$$

To pokazuje da je $w \mapsto w_v$ linearno preslikavanje sa V u $T_v(V)$. Nadalje, za $w = e_i$ je $r_j = \delta_{ij}$, pa imamo

$$(e_i)_v = \sum_{j=1}^{n} \delta_{ij} \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_v = \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_v .$$

Dakle, linearan operator $w \mapsto w_v$ prevodi bazu $\{e_1, \ldots, e_n\}$ prostora V u bazu $\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_v, \ldots, \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)_v\right\}$ prostora $T_v(V)$. Time je propozicija dokazana.

Za bilo koju (realnu) algebru $\mathcal{A}$ (asocijativnu ili ne) **derivacija** od $\mathcal{A}$ je linearno preslikavanje $A : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ sa svojstvom

$$A(ab) = A(a)b + aA(b) \qquad \forall a, b \in \mathcal{A}.$$

Označavat ćemo sa $Der(\mathcal{A})$ skup svih derivacija algebre $\mathcal{A}$. $Der(\mathcal{A})$ je očito vektorski prostor − potprostor vektorskog prostora $L(\mathcal{A})$ svih linearnih operatora sa $\mathcal{A}$ u $\mathcal{A}$. Ako za $A, B \in L(\mathcal{A})$ definiramo njihov komutator na uobičajeni način, $[A, B] = AB - BA$, prostor $L(\mathcal{A})$ postaje Liejeva algebra.

Lema 1.6. *Za svaku algebru $\mathcal{A}$ $Der(\mathcal{A})$ je Liejeva podalgebra Liejeve algebre $L(\mathcal{A})$.*

Dokaz: Za $A, B \in Der(\mathcal{A})$ i $a, b \in \mathcal{A}$ imamo redom

$$[A, B](ab) = A(B(ab)) - B(A(ab)) = A(B(a)b + aB(b)) - B(A(a)b - aA(b)) =$$

$$= A(B(a))b + B(a)A(b) + A(a)B(b) + aA(B(b)) - B(A(a))b - A(a)B(b) - B(a)A(b) - aB(A(b)) = [A, B](a)b-$$

Dakle, $[A, B] \in Der(\mathcal{A})$ i lema je dokazana.

Posebno, za unitalnu komutativnu asocijativnu algebru $C^\infty(G)$ Liejevu algebru derivacija $Der\left(C^\infty(G)\right)$ označavat ćemo sa $\mathfrak{A}(G)$.

Za $f \in C^\infty(G)$ i $x \in G$ definiramo $f_x \in C^\infty(G)$ sa $f_x(z) = f(xy),\ z \in G$. Očito je

$$\left(f_x\right)_y = f_{xy}, \qquad f \in C^\infty(G), \quad x, y \in G.$$

Za $A \in \mathfrak{A}(G)$ i $x \in G$ definiramo $A^x : C^\infty(G) \to C^\infty(G)$ sa

$$A^x(f) = \left[A\left(f_x\right)\right]_{x^{-1}}, \qquad f \in C^\infty(G).$$

Lema 1.7. *(a) $A \mapsto A^x$ je linearan operator sa $\mathfrak{A}(G)$ u $\mathfrak{A}(G)$ za svaki $x \in G$.*

(b) Za bilo koje $x, y \in G$ i $A \in \mathfrak{A}(G)$ vrijedi $(A^x)^y = A^{yx}$.

(c) Za $x \in G$ i $A, B \in \mathfrak{A}(G)$ je $[A, B]^x = [A^x, B^x]$.

Dokaz: (a) Preslikavanje $A \mapsto A^x$ je očito linearno. Nadalje, za $f, g \in C^\infty(G)$ je

$$A^x(fg) = [A((fg)_x)]_{x^{-1}} = [A(f_x g_x)]_{x^{-1}} = [A(f_x)\, g_x]_{x^{-1}} + [f_x A(g_x)]_{x^{-1}} =$$

$$= [A(f_x)]_{x^{-1}}\, g + f\, [A(g_x)]_{x^{-1}} = A^x(f)g + fA^x(g), \qquad \text{dakle,} \quad A^x \in \mathfrak{A}(G).$$

(b) $(A^x)^y(f) = [A^x(f_y)]_{y^{-1}} = \left\{\left[A\left((f_y)_x\right)\right]_{x^{-1}}\right\}_{y^{-1}} = [A(f_{yx})]_{(yx)^{-1}} = A^{yx}(f)$.
(c) Imamo $A(f_x) = [A^x(f)]_x$ i $B(f_x) = [B^x(f)]_x$, pa je

$$[A, B]^x(f) = \{[A, B](f_x)\}_{x^{-1}} = [A(B(f_x))]_{x^{-1}} - [B(A(f_x))]_{x^{-1}} =$$

$$= (A\{(B^x(f))_x\})_{x^{-1}} - (B\{(A^x(f))_x\})_{x^{-1}} = A^x(B^x(f)) - B^x(A^x(f)) = [A^x, B^x](f).$$

Za **derivaciju** A od $C^\infty(G)$ kažemo da je **lijevoinvarijantna** ako je $A^x = A$ $\forall x \in G$. Skup $\mathcal{D}(G)$ svih lijevoinvarinatnih derivacija od $C^\infty(G)$ je zbog tvrdnje (a) leme 1.7. potprostor od $\mathfrak{A}(G)$, a zbog tvrdnje (c) iste leme, $\mathcal{D}(G)$ je Liejeva podalgebra od $\mathfrak{A}(G)$.

Za $A \in \mathfrak{A}(G)$ i $x \in G$ definiramo $A_x : C^\infty(G) \to \mathbb{R}$ sa

$$A_x(f) = [A(f)](x), \qquad f \in C^\infty(G).$$

Odmah se vidi da je $A_x \in T_x(G)$ i da je $A \mapsto A_x$ linearan operator sa $\mathfrak{A}(G)$ u $T_x(G)$.

Propozicija 1.8. *Za svako $x \in G$ preslikavanje $A \mapsto A_x$ je izomorfizam vektorskog prostora $\mathcal{D}(G)$ na vektorski prostor $T_x(G)$.*

Dokaz: Injektivnost. Neka je $A \in \mathcal{D}(G)$ i pretpostavimo da je $A_x = 0$ za neko $x \in G$. Tada je

$$[A(f)](x) = 0 \qquad \forall f \in C^\infty(G).$$

Odatle za svako $f \in C^\infty(G)$ i svako $y \in G$ dobivamo redom

$$0 = [A(f_{y^{-1}})](x) = [A^y(f_{y^{-1}})](x) = [A(f)_{y^{-1}}](x) = [A(f)]\left(y^{-1}x\right).$$

Zamijenimo li y sa xz^{-1}, slijedi

$$[A(f)](z) = 0 \quad \forall z \in G, \quad \forall f \in C^\infty(G) \quad \Longrightarrow \quad A(f) = 0 \quad \forall f \in C^\infty(G) \quad \Longrightarrow \quad A = 0.$$

Surjektivnost. Neka je $X \in T_x(G)$. Prijelazom na koordinate lako se vidi da je za svaku $f \in C^\infty(G)$ funkcija $\tilde{X}(f)$, definirana sa

$$\left[\tilde{X}(f)\right](y) = X\left(f_{yx^{-1}}\right), \qquad y \in G,$$

također u $C^\infty(G)$. Preslikavanje $\tilde{X} : C^\infty(G) \to C^\infty(G)$ je linearan operator. Nadalje, za proizvoljne $f, g \in C^\infty(G)$ i $y \in G$ imamo redom

$$\left[\tilde{X}(fg)\right](y) = X\left((fg)_{yx^{-1}}\right) = X\left(f_{yx^{-1}} g_{yx^{-1}}\right) =$$

$$= X\left(f_{yx^{-1}}\right) g_{yx^{-1}}(x) + f_{yx^{-1}}(x) X\left(g_{yx^{-1}}\right) = \left[\tilde{X}(f)\right](y)g(y) + f(y)\left[\tilde{X}(g)\right](y).$$

Dakle, $\tilde{X}(fg) = \tilde{X}(f)g + f\tilde{X}(g)$, odnosno, $\tilde{X} \in \mathfrak{A}(G)$.

Nadalje, za proizvoljne $f \in C^\infty(G)$ i $z, y \in G$ imamo

$$\left[\tilde{X}^z(f)\right](y) = \left[\tilde{X}\left(f_z\right)\right]_{z^{-1}}(y) = \left[\tilde{X}\left(f_z\right)\right](z^{-1}y) = X\left(\left(f_z\right)_{z^{-1}yx^{-1}}\right) = X\left(f_{yx^{-1}}\right) = \left[\tilde{X}(f)\right](y).$$

To pokazuje da je $\tilde{X}^z = \tilde{X} \ \forall z \in G$, odnosno, $\tilde{X} \in \mathcal{D}(G)$.

Napokon, za proizvoljnu funkciju $f \in C^\infty(G)$ je $\tilde{X}_x(f) = \left[\tilde{X}(f)\right](x) = X(f)$, dakle, $\tilde{X}_x = X$.

Tangencijalni prostor $T_e(G)$ na G u jedinici e grupe G (to je 0 u vektorskom prostoru G) označavat ćemo sa $L(G)$. Prema prethodnoj propoziciji $A \mapsto A_e$ je izomorfizam vektorskih prostora sa $\mathcal{D}(G)$ na $L(G)$. Inverzni izomorfizam je $X \mapsto \tilde{X}$, gdje je

$$\left[\tilde{X}(f)\right](x) = X\left(f_x\right), \qquad x \in G, \quad f \in C^\infty(G), \quad X \in L(G).$$

Pomoću tih izomorfizama prenosimo strukturu Liejeve algebre sa $\mathcal{D}(G)$ na $L(G)$. S tom strukturom $L(G)$ zove se **Liejeva algebra nilpotentne grupe** G. Dakle, za $X, Y \in L(G)$ i $f \in C^\infty(G)$ je

$$[X,Y](f) = X\left(\tilde{Y}(f)\right) - Y\left(\tilde{X}(f)\right).$$

Propozicija 1.9. *Za svaki $X \in L(G)$ postoji jedinstven neprekidni homomorfizam $\varphi : \mathbb{R} \to G$ takav da je*

$$X(f) = \frac{d}{dt} f(\varphi(t))\bigg|_{t=0}, \qquad f \in C^\infty(G).$$

Tada je

$$\left[\tilde{X}(f)\right](x) = \frac{d}{dt} f(x\varphi(t))\bigg|_{t=0}, \qquad f \in C^\infty(G), \quad x \in G.$$

Obratno, ako je $\varphi : \mathbb{R} \to G$ neprekidni homomorfizam, tada je preslikavanje $X : C^\infty(G) \to \mathbb{R}$, definirano sa

$$X(f) = \frac{d}{dt} f(\varphi(t))\bigg|_{t=0}, \qquad f \in C^\infty(G),$$

tangencijalni vektor na G u jedinici $e(=0)$, tj. $X \in L(G)$.

Dokaz: Druga je tvrdnja očigledna. Dokažimo prvu. Neka je $X \in L(G)$. Izaberimo Kartezijev koordinatni sustav $(x_1, \ldots, x_n)$ na G. Tada znamo da je

$$X = \sum_{i=1}^n c_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_0, \qquad \text{gdje je} \quad c_i = X\left(x_i\right).$$

Neka je $(e_1, \ldots, e_n)$ baza u vektorskom prostoru G dualna bazi $(x_1, \ldots, x_n)$ i neka je $x = c_1 e_1 + \cdots + c_n e_n$. Definiramo $\varphi : \mathbb{R} \to G$ sa $\varphi(t) = tx$. Tada je za proizvoljnu $f \in C^\infty(G)$:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(\varphi(t))\bigg|_{t=0} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(tx)\bigg|_{t=0} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \tilde{f}(tc_1, \ldots, tc_n)\bigg|_{t=0} =$$

$$= \sum_{i=1}^n \left(\partial_i \tilde{f}\right)(0) c_i = \sum_{i=0}^n c_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_0 (f) = X(f).$$

Time je egzistencija u prvoj tvrdnji dokazana.

Dokažimo još jedinstvenost. Neka su $\varphi, \psi : \mathbb{R} \to G$ dva neprekidna homomorfizma i pretpostavimo da je

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(\varphi(t))\bigg|_{t=0} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(\psi(t))\bigg|_{t=0} \qquad \forall f \in C^\infty(G).$$

Prema propoziciji 1.3. postoje $x, y \in G$ takvi da je $\varphi(t) = tx$ i $\psi(t) = ty$. Prikažimo x i y u bazi:

$$x = \sum_{i=1}^n c_i e_i, \qquad y = \sum_{i=1}^n d_i e_i.$$

Imamo

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} x_j(\varphi(t))\bigg|_{t=0} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} x_j\left(\sum_{i=1}^n t c_i e_i\right)\bigg|_{t=0} = c_j$$

i analogno,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} x_j(\psi(t))\bigg|_{t=0} = d_j.$$

Slijedi $c_j = d_j$ za svaki j, odnosno, $x = y$, što znači da je $\varphi = \psi$.

Definirat ćemo sada preslikavanja $\exp : L(G) \to G$ i $\log : G \to L(G)$. Za $X \in L(G)$ neka je $\varphi_X : \mathbb{R} \to G$ jedinstveni neprekidni homomorfizam takav da je

$$X(f) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f\left(\varphi_X(t)\right)\bigg|_{t=0}, \qquad f \in C^\infty(G).$$

Definiramo

$$\exp X = \varphi_X(1), \qquad X \in L(G).$$

Za $s \in \mathbb{R}$, $X \in L(G)$ i $f \in C^\infty(G)$ imamo redom

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(\varphi_{sX}(t))\bigg|_{t=0} = (sX)(f) = sX(f) = s\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(\varphi_X(t))\bigg|_{t=0} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(\varphi_X(st))\bigg|_{t=0}.$$

Zbog jedinstvenosti u propoziciji 1.9. zaključujemo da je $\varphi_{sX}(t) = \varphi_X(t)$, a odatle

$$\varphi_X(s) = \exp sX, \qquad s \in \mathbb{R}, \quad X \in L(G).$$

Prema propoziciji 1.3. preslikavanje $\varphi \mapsto \varphi(1)$ je bijekcija sa skupa svih neprekidnih homomorfizama $\mathbb{R} \to G$ na grupu G. Nadalje, prema propoziciji 1.9. $X \mapsto \varphi_X$ je bijekcija sa $L(G)$ na skup svih neprekidnih homomorfizama $\mathbb{R} \to G$. Preslikavanje $\exp : L(G) \to G$ je upravo kompozicija tih dviju bijekcija. Posebno, exp je bijekcija sa $L(G)$ na G. Štoviše, iz dokaza propozicije 1.9. vidi se da je $\exp : L(G) \to G$ izomorfizam vektorskih prostora. Ako je $(e_1, \ldots, e_n)$ baza od G i $(x_1, \ldots, x_n)$ pripadni Kartezijev koordinatni sustav na G (tj. dualna baza dualnog prostora), onda je

$$\exp\left(\sum_{i=1}^n c_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_0\right) = \sum_{i=1}^n c_i e_i.$$

Preslikavanje $\log : G \to L(G)$ definiramo kao inverzno preslikavanje izomorfizma $\exp : L(G) \to G$. Dakle,

$$(\log x)(f) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(tx)\bigg|_{t=0}.$$

Prema propoziciji 1.9. imamo:

$$X(f) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(\exp tX)\bigg|_{t=0}, \qquad f \in C^\infty(G), \quad X \in L(G),$$

$$\left[\tilde{X}(f)\right](x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(x \exp tX)\bigg|_{t=0}, \qquad f \in C^\infty(G), \quad X \in L(G), \quad x \in G.$$

PRIMJERI

1. Neka je $G = \mathbb{R}^n$ uz zbrajanje kao grupovnu operaciju. Tada je G nilpotentna grupa, $L(G)$ se identificira sa $\mathbb{R}^n$ tako da je $\exp = \log = id_{\mathbb{R}^n}$. Grupa G je komutativna, a i njena Liejeva algebra: $[X, Y] = 0 \ \forall X, Y \in L(G)$.

2. Neka je $G = N_n(\mathbb{R})$ $-$ skup svih gornje trokutastih matrica u $M_n(\mathbb{R})$ s jedinicama na dijagonali. To je podgrupa grupe $GL(n, \mathbb{R})$ svih regularnih matrica $n \times n$. Na G ćemo uvesti strukturu vektorskog prostora tako da G postane nilpotentna grupa.

Neka je $\mathfrak{n}_n(\mathbb{R})$ skup svih strogo gornje trokutastih matrica $n \times n$; $\mathfrak{n}_n(\mathbb{R})$ je vektorski prostor nad $\mathbb{R}$ dimenzije $\frac{n(n-1)}{2}$ i to je Liejeva algebra u odnosu na komutator matrica $[A, B] = AB - BA$. Uočimo sada sljedeće tri evidentne činjenice:

(1) Za $A \in \mathfrak{n}_n(\mathbb{R})$ je $A^k \in \mathfrak{n}_n(\mathbb{R}) \ \forall k \in \mathbb{N}$ i $A^n = 0$.

(2) Za $A \in \mathfrak{n}_n(\mathbb{R})$ je $\mathrm{e}^A \in N_n(\mathbb{R})$.

(3) Za $B \in N_n(\mathbb{R})$ je $I - B \in \mathfrak{n}_n(\mathbb{R})$.

Stoga možemo definirati preslikavanje $\ln : N_n(\mathbb{R}) \to \mathfrak{n}_n(\mathbb{R})$ ovako

$$\ln B = -\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}(I - B)^k, \qquad B \in N_n(\mathbb{R}).$$

Lako se provjerava da tada vrijede jednakosti

$$\ln \mathrm{e}^A = A \quad \forall A \in \mathfrak{n}_n(\mathbb{R}) \qquad \text{i} \qquad \mathrm{e}^{\ln B} = B \quad \forall B \in N_n(\mathbb{R}).$$

Dakle, $\ln$ i $A \mapsto \mathrm{e}^A$ su međusobno inverzne bijekcije. Pomoću njih prenosimo sa $\mathfrak{n}_n(\mathbb{R})$ na $N_n(\mathbb{R})$ strukturu $\frac{n(n-1)}{2}-$dimenzionalnog realnog vektorskog prostora. Dokazat ćemo sada da je s tom strukturom vektorskog prostora $N_n(\mathbb{R})$ nilpotentna grupa. Definiramo preslikavanja $P_1, P_2 : \mathfrak{n}_n(\mathbb{R}) \to \mathfrak{n}_n(\mathbb{R})$ ovako:

$$P_1(A) = \mathrm{e}^A - I, \qquad P_2(A) = \ln(I + A), \qquad A \in \mathfrak{n}_n(A).$$

Zbog gornje činjenice (1) P_1 i P_2 su polinomijalna preslikavanja s vektorskog prostora $\mathfrak{n}_n(\mathbb{R})$ u samog sebe. Da bismo dokazali da je zadovoljeno svojstvo (a) iz definicije nilpotentne grupe, treba pokazati da je preslikavanje $P : \mathfrak{n}_n(\mathbb{R}) \times \mathfrak{n}_n(\mathbb{R}) \to \mathfrak{n}_n(\mathbb{R})$, definirano sa

$$P(A, B) = \ln\left(\mathrm{e}^A \mathrm{e}^B\right), \qquad A, B \in \mathfrak{n}_n(\mathbb{R}),$$

polinomijalno. To slijedi iz

$$P(A, B) = \ln\left(\mathrm{e}^A \mathrm{e}^B\right) = \ln\left((P_1(A) + I)(P_1(B) + I)\right) =$$

$$\ln\left(I + P_1(A) + P_1(B) + P_1(A)P_1(B)\right) = P_2\left(P_1(A) + P_1(B) + P_1(A)P_1(B)\right),$$

budući da je preslikavanje $(C, D) \mapsto C + D + CD$ sa $\mathfrak{n}_n(\mathbb{R}) \times \mathfrak{n}_n(\mathbb{R})$ u $\mathfrak{n}_n(\mathbb{R})$ očito polinomijalno. Svojstvo (b) iz definicije nilpotentne grupe slijedi iz

$$P(sX, tX) = \ln\left(\mathrm{e}^{sX}\mathrm{e}^{tX}\right) = \ln\left(\mathrm{e}^{(s+t)X}\right) = (s+t)X, \qquad s, t \in \mathbb{R}, \quad X \in \mathfrak{n}_n(\mathbb{R}).$$

Dakle, $N_n(\mathbb{R})$ je nilpotentna grupa.

Sada imamo međusobno inverzne izomorfizme vektorskih prostora

$$\exp : L\left(N_n(\mathbb{R})\right) \to N_n(\mathbb{R}) \qquad \text{i} \qquad \log : N_n(\mathbb{R}) \to L\left(N_n(\mathbb{R})\right).$$

Kompozicijama tih izomorfizama s izomorfizmima $exp : A \mapsto \mathrm{e}^A$ sa $\mathfrak{n}_n(\mathbb{R})$ na $N_n(\mathbb{R})$ i ln sa $N_n(\mathbb{R})$ na $\mathfrak{n}_n(\mathbb{R})$ dobivamo izomorfizme

$$\Phi = \log \circ exp : \mathfrak{n}_n(\mathbb{R}) \to L\left(N_n(\mathbb{R})\right) \qquad \text{i} \qquad \Psi = \ln \circ \exp : L\left(N_n(\mathbb{R})\right) \to \mathfrak{n}_n(\mathbb{R}).$$

Budući da su exp i ln međusobno inverzni i da su exp i ln međusobno inverzni, zaključujemo da su Φ i Ψ međusobno inverzni izomorfizmi. Dokazat ćemo sada da su Φ i Ψ izomorfizmi Liejevih algebri, tj. da je

$$[\Phi(A), \Phi(B)] = \Phi\left([A, B]\right) \qquad \forall A, B \in \mathfrak{n}_n(\mathbb{R}).$$

Neka je $(x_{ij};\ 1 \leq i < j \leq n)$ prirodni koordinatni sustav na $N_n(\mathbb{R})$: koordinate matrice $A = [\alpha_{ij}]$ su $x_{ij}(A) = \alpha_{ij}$. Pomoću tog koordinatnog sustava $N_n(\mathbb{R})$ se identificira s $\mathbb{R}^{\frac{n(n-1)}{2}}$. Za $f \in C^\infty\left(N_n(\mathbb{R})\right)$ parcijalnu derivaciju f po koordinati x_{ij} označavat ćemo sa $\partial_{ij} f$..

Neka su $A, B \in \mathfrak{n}_n(\mathbb{R})$, $t, s \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{Z}_+$. Stavimo

$$A^m = \left[\alpha_{ij}^{(m)}\right], \qquad B^m = \left[\beta_{ij}^{(m)}\right], \qquad \mathrm{e}^{tA}\mathrm{e}^{sB} = \left[\gamma_{ij}(t,s)\right], \qquad \mathrm{e}^{tB}\mathrm{e}^{sA} = \left[\varepsilon_{ij}(t,s)\right].$$

Za bilo koju matricu C element na mjestu (i, j) označavat ćemo sa $(C)_{ij}$.

Za $f \in C^\infty\left(N_n(\mathbb{R})\right)$ imamo

$$\begin{aligned}
[\Phi(A), \Phi(B)](f) &= \Phi(A)\left(\Phi(B)\tilde{}(f)\right) - \Phi(B)\left(\Phi(A)\tilde{}(f)\right) = \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\Phi(B)\tilde{}(f)\right]\left(\mathrm{e}^{tA}\right)\Big|_{t=0} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\Phi(A)\tilde{}(f)\right]\left(\mathrm{e}^{tB}\right)\Big|_{t=0} = \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{\partial}{\partial t} f\left(\mathrm{e}^{tA}\mathrm{e}^{sB}\right)\Big|_{t=0}\right)\Big|_{s=0} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{\partial}{\partial t} f\left(\mathrm{e}^{tB}\mathrm{e}^{sA}\right)\Big|_{t=0}\right)\Big|_{s=0}.
\end{aligned}$$

Sada je

$$\frac{\partial}{\partial t} f\left(\mathrm{e}^{tA}\mathrm{e}^{sB}\right)\Big|_{t=0} = \sum_{i<j} \frac{\partial \gamma_{ij}}{\partial t}(0, s)\left(\partial_{ij} f\right)\left(\mathrm{e}^{sB}\right),$$

a kako je

$$\frac{\partial \gamma_{ij}}{\partial t}(0, s) = \left(\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{e}^{tA}\mathrm{e}^{sB}\right)_{ij} = \left(A\mathrm{e}^{sB}\right)_{ij}.,$$

dobivamo

$$\frac{\partial}{\partial t} f\left(\mathrm{e}^{tA}\mathrm{e}^{sB}\right)\Big|_{t=0} = \sum_{i<j}\left(A\mathrm{e}^{sB}\right)_{ij}\left(\partial_{ij} f\right)\left(\mathrm{e}^{sB}\right).$$

Stoga je

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{\partial}{\partial t} f\left(\mathrm{e}^{tA}\mathrm{e}^{sB}\right)\Big|_{t=0}\right)\Big|_{s=0} &= \sum_{i<j}(AB)_{ij}\left(\partial_{ij} f\right)(I) + \sum_{i<j}\alpha_{ij}\left(\partial_{ij} f\right)\left(\mathrm{e}^{sB}\right)\Big|_{s=0} = \\
&= \sum_{i<j}(AB)_{ij}\left(\partial_{ij} f\right)(I) + \sum_{i<j}\sum_{p<q}\alpha_{ij}\beta_{pq}\left(\partial_{pq}\partial_{ij} f\right)(I).
\end{aligned}$$

Analogno je

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{\partial}{\partial t}f\left(\mathrm{e}^{tB}\mathrm{e}^{sA}\right)\Big|_{t=0}\right)\Bigg|_{s=0}=\sum_{i<j}(BA)_{ij}\left(\partial_{ij}f\right)(I)+\sum_{i<j}\sum_{p<q}\beta_{ij}\alpha_{pq}\left(\partial_{pq}\partial_{ij}f\right)(I).$$

Stoga dobivamo

$$\left[\Phi(A),\Phi(B)\right](f)=\sum_{i<j}\left([A,B]\right)_{ij}\left(\partial_{ij}f\right)(I)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f\left(\mathrm{e}^{t[A,B]}\right)\Big|_{t=0}=\Phi\left([A,B]\right)(f).$$

Kako je $f\in C^{\infty}$ bila proizvoljna, dokazana je željena jednakost $[\Phi(a),\Phi(B)]=\Phi\left([A,B]\right).$

Prema dokazanom možemo izvršiti identifikaciju $\mathfrak{n}_n(\mathbb{R})$ sa $L\left(N_n(\mathbb{R})\right)$ tako da izomorfizmi Φ i Ψ postanu identiteti. Tada je $\log=\ln$ i $\exp=exp$.

Poglavlje 2

NILPOTENTNE LIEJEVE ALGEBRE

U ovom poglavlju sve Liejeve algebre su konačnodimenzionalne i nad poljem $\mathbb{R}$ realnih brojeva.

Neka je $\mathfrak{g}$ Liejeva algebra. Liejeva podalgebra od $\mathfrak{g}$ je potprostor $\mathfrak{h}$ takav da je $[X, Y] \in \mathfrak{h}$ $\forall X, Y \in \mathfrak{h}$. **Ideal** u $\mathfrak{g}$ je potprostor $\mathfrak{h}$ od $\mathfrak{g}$ takav da je $[X, Y] \in \mathfrak{h}$ $\forall X \in \mathfrak{g}$, $\forall Y \in \mathfrak{h}$. Naravno, Liejeva podalgebra je i sama Liejeva algebra. Ideal je Liejeva podalgebra.

Neka je $\mathfrak{g}$ Liejeva algebra i $\mathfrak{h}$ ideal u $\mathfrak{g}$. Na kvocijentnom vektorskom prostoru $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ možemo definirati strukturu Liejeve algebre ovako:

$$[X + \mathfrak{h}, Y + \mathfrak{h}] = [X, Y] + \mathfrak{h}, \qquad X, Y \in \mathfrak{g}.$$

Ako je V realan ili kompleksan vektorski prostor, onda je prostor $L(V)$ svih linearnih operatora $V \to V$ Liejeva algebra s uobičajenom operacijom $[A, B] = AB - BA$.

Reprezentacija Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ na vektorskom prostoru V je homomorfizam $\pi : \mathfrak{g} \to L(V)$ Liejevih algebri. Ako su $\mathfrak{g}$ i $\mathfrak{k}$ Liejeve algebre i $\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{k}$ homomorfizam Liejevih algebri, onda je jezgra $\operatorname{Ker}\varphi$ ideal u $\mathfrak{g}$ a slika $\operatorname{Im}\varphi$ jke Liejeva podalgebra od $\mathfrak{k}$ i inducirano preslikavanje $\Phi : \mathfrak{g}/(\operatorname{Ker}\varphi) \to \operatorname{Im}\varphi$ je izomorfizam Liejevih algebri.

Lema 2.1. *Za Liejeveu algebru $\mathfrak{g}$ i $X \in \mathfrak{g}$ definiramo preslikavanje $ad\,X : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ sa*

$$(ad\,X)Y = [X, Y], \qquad Y \in \mathfrak{g}.$$

Tada je ad reprezentacija Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ na vektorskom prostoru $\mathfrak{g}$.

Dokaz: Očito je svaki $ad\,X$ linearan operator i $ad : \mathfrak{g} \to L(\mathfrak{g})$ je linearno preslikavanje. Iz Jacobijevog identiteta slijedi za $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$:

$$(ad\,[X, Y])\,Z = [[X, Y], Z] = -\,[[Y, Z], X] - [[Z, X], Y] = [X, [Y, Z]] - [Y, [X, Z]] =$$

$$= (ad\,X)(ad\,Y)Z - (ad\,Y)(ad\,x)Z = [ad\,X, ad\,Y]Z.$$

Time je dokazano da je $ad\,[X, Y] = [ad\,X, ad\,Y]$, odnosno da je ad reprezentacija $\mathfrak{g}$ na $\mathfrak{g}$.

Neka su $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ potprostori Liejeve algebre $\mathfrak{g}$. Sa $[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}]$ ćemo označavati potprostor od $\mathfrak{g}$ razapetsvim elementima oblika $[A, B]$, gdje su $A \in \mathfrak{a}$ i $B \in \mathfrak{b}$.

Lema 2.2. *Ako su $\mathfrak{a}$ i $\mathfrak{b}$ ideali u Liejeveoj algebri $\mathfrak{g}$, onda je i $[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}]$ ideal u $\mathfrak{g}$.*

Dokaz: Za $X \in \mathfrak{g}$, $A \in \mathfrak{a}$ i $B \in \mathfrak{b}$ imamo zbog Jacobijevog identiteta

$$[X,[A,B]] = [[X,A],B] + [Y,[X,B]] \in [\mathfrak{a},B] + [A,\mathfrak{b}] \subseteq [\mathfrak{a},\mathfrak{b}].$$

Za lijevu algebru $\mathfrak{g}$ definiramo induktivno

$$\mathcal{D}^0\mathfrak{g} = \mathfrak{g}, \qquad \mathcal{D}^n\mathfrak{g} = [\mathcal{D}^{n-1}\mathfrak{g}, \mathcal{D}^{n-1}\mathfrak{g}], \quad n \in \mathbb{N};$$

$$\mathcal{C}^0\mathfrak{g} = \mathfrak{g}, \qquad \mathcal{C}^n\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathcal{C}^{n-1}\mathfrak{g}], \quad n \in \mathbb{N}.$$

Tada su prema lemi 2.2. $\mathcal{D}^k\mathfrak{g}$ i $\mathcal{C}^k\mathfrak{g}$ ideali i vrijedi

$$\mathcal{D}^n\mathfrak{g} \supseteq \mathcal{D}^{n+1}\mathfrak{g} \qquad \text{i} \qquad \mathcal{C}^n\mathfrak{g} \supseteq \mathcal{C}^{n+1}\mathfrak{g} \qquad \forall n \in \mathbb{Z}_+.$$

$\mathcal{D}^k\mathfrak{g}$ zove se $k-$**ti izvedeni ideal** u $\mathfrak{g}$. Niz $(\mathcal{D}^n\mathfrak{g})_{n\in\mathbb{Z}_+}$ zove se **izvedeni niz** Liejeve algebre $\mathfrak{g}$, a $(\mathcal{C}^n\mathfrak{g})_{n\in\mathbb{Z}_+}$ **centralni silazni niz** u $\mathfrak{g}$.

Lema 2.3. *Neka su $\mathfrak{a}$ i $\mathfrak{b}$ potprostori Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ i $\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ surjektivni homomorfizam Liejevih algebri.*

(*a*) $\varphi([A,B]) = [\varphi(A), \varphi(B)]$.

(*b*) $\varphi(\mathcal{D}^p\mathfrak{g}) = \mathcal{D}^p\mathfrak{h}$.

(*c*) $\varphi(\mathcal{C}^p\mathfrak{g}) = \mathcal{C}^p\mathfrak{h}$.

Dokaz: Tvrdnja (*a*) je očigledna (čak i bez pretpostavke o surjektivnosti homomorfizma φ), a tvrdnje (*b*) i (*c*) slijede iz (*a*) indukcijom po p.

Centralizator podskupa $\mathfrak{a}$ Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ je skup

$$C_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{a}) = \{X \in \mathfrak{g};\ [X,Y] = 0\ \forall Y \in \mathfrak{a}\}.$$

Lema 2.4. *Neka je $\mathfrak{g}$ Liejeva algebra, $\mathfrak{a}$ njen podskup i $\mathfrak{h}$ ideal u $\mathfrak{g}$.*

(*a*) $C_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{a})$ *je Liejeva podalgebra od* $\mathfrak{g}$.

(*b*) $C_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$ *je ideal u* $\mathfrak{g}$.

Dokaz: (*a*) Očito je $C_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{a})$ potprostor od $\mathfrak{g}$. Ako su $X, Y \in C_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{a})$ i $Z \in \mathfrak{a}$, onda primjenom Jacobijevog identiteta nalazimo

$$[[X,Y],Z] = [[X,Z],Y] + [X,[Y,Z]] = [0,Y] + [X,0] = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad [X,Y] \in C_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{a}).$$

(*b*) Za $X \in C_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$, $Y \in \mathfrak{g}$ i $Z \in \mathfrak{h}$ je $[X,Z] = 0$ i $[Y,Z] \in \mathfrak{h}$, dakle, $[[Y,Z],X] = 0$. Prema tome,

$$[[Y,X],Z] = [[Y,Z],X] + [Y,[X,Z]] = 0.$$

Dakle, $[Y,X] \in C_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})\ \ \forall X \in C_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$ i $\forall Y \in \mathfrak{g}$, što znači da je $C_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$ ideal u $\mathfrak{g}$.

Centar Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ je centralizator $\mathfrak{g}$ u $\mathfrak{g}$, $C_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g})$. Centar od $\mathfrak{g}$ označavat ćemo sa $Z(\mathfrak{g})$. Dakle,

$$Z(\mathfrak{g}) = \{X \in \mathfrak{g};\ [X,Y] = 0\ \forall Y \in \mathfrak{g}\}.$$

Prema lemi 2.4. $Z(\mathfrak{g})$ je ideal u $\mathfrak{g}$ i to je jezgra homomorfizma Liejevih algebri $ad : \mathfrak{g} \to L(\mathfrak{g})$.

Definirat ćemo sada induktivno tzv. **centralni uzlazni niz** $(\mathcal{C}_n\mathfrak{g})_{n\in\mathbb{Z}_+}$. Stavljamo $\mathcal{C}_0\mathfrak{g}=\{0\}$. Za $n\in\mathbb{Z}_+$ označimo sa $\pi_n:\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}/\mathcal{C}_n\mathfrak{g}$ kvocijentni (surjektivni) homomorfizam. Definiramo

$$\mathcal{C}_{n+1}\mathfrak{g}=\pi_n^{-1}\left(Z\left(\mathfrak{g}/\mathcal{C}_n\mathfrak{g}\right)\right)=\{X\in\mathfrak{g};\ \pi_n(X)\in Z\left(\mathfrak{g}/\mathcal{C}_n\mathfrak{g}\right)\}=\{X\in\mathfrak{g};\ [X,Y]\in\mathcal{C}_n\mathfrak{g}\ \forall Y\in\mathfrak{g}\}.$$

Posebno, $\mathcal{C}_1\mathfrak{g}=Z(\mathfrak{g})$. Nadalje, članovi centralnog uzlaznog niza su ideali u $\mathfrak{g}$ i za svaki $n\in\mathbb{Z}_+$ vrijedi $\mathcal{C}_n\mathfrak{g}\subseteq\mathcal{C}_{n+1}\mathfrak{g}$.

Propozicija 2.5. *Za Liejevu algebru $\mathfrak{g}$ sljedećih je sedam svojstava međusobno ekvivalentno:*

(*a*) *Postoji $p\in\mathbb{N}$ takav da je $(ad\,X_1)(ad\,X_2)\cdots(ad\,X_p)=0\ \forall X_1,\ldots,X_p\in\mathfrak{g}$.*

(*b*) *Za neko $k\in\mathbb{Z}_+$ je $\mathcal{C}^k\mathfrak{g}=\{0\}$.*

(*c*) *Postoji padajući niz ideala $\mathfrak{h}_0\supseteq\mathfrak{h}_1\supseteq\cdots\supseteq\mathfrak{h}_p$ takav da je $\mathfrak{h}_0=\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}_p=\{0\}$ i $[\mathfrak{g},\mathfrak{h}_i]\subseteq\mathfrak{h}_{i+1}$ za $i=0,1,\ldots,p-1$.*

(*d*) *Postoji padajući niz ideala $\mathfrak{k}_0\supseteq\mathfrak{k}_1\supseteq\cdots\supseteq\mathfrak{k}_n$ takav da je $\dim\mathfrak{k}_i=n-i$, $\mathfrak{k}_0=\mathfrak{g}$, $\mathfrak{k}_n=\{0\}$ i $[\mathfrak{g},\mathfrak{k}_i]\subseteq\mathfrak{k}_{i+1}$ za $0\leq i<n$.*

(*e*) *Za neko $k\in\mathbb{Z}_+$ je $\mathcal{C}_k\mathfrak{g}=\mathfrak{g}$.*

(*f*) *Postoji rastući niz ideala $\mathfrak{j}_0\subseteq\mathfrak{j}_1\subseteq\cdots\subseteq\mathfrak{j}_\ell$ takav da je $\mathfrak{j}_0=\{0\}$, $\mathfrak{j}_\ell=\mathfrak{g}$ i $\mathfrak{j}_{k+1}/\mathfrak{j}_k\subseteq Z\left(\mathfrak{g}/\mathfrak{j}_k\right)$ za $0\leq k<\ell$.*

(*g*) *Postoji rastući niz ideala $\mathfrak{i}_0\subseteq\mathfrak{i}_1\subseteq\cdots\subseteq\mathfrak{i}_n$ takav da je $\mathfrak{i}_0=\{0\}$, $\mathfrak{i}_n=\mathfrak{g}$, $\dim\mathfrak{i}_j=j$ za $0\leq j\leq n$ i $\mathfrak{i}_{j+1}/\mathfrak{i}_j\subseteq Z\left(\mathfrak{g}/\mathfrak{i}_j\right)$ za $0\leq j<n$.*

Dokaz: $(a)\Leftrightarrow(b)$. $\mathcal{C}^q\mathfrak{g}$ je potprostor razapet svim elementima oblika

$$(ad\,X_1)\cdots(ad\,X_{q-1})X_q,\qquad X_1,\ldots,X_q\in\mathfrak{g}.$$

Prema tome,

$$(ad\,X_1)\cdots(ad\,X_p)=0\quad\forall X_1,\ldots,X_p\in\mathfrak{g}\qquad\Longleftrightarrow\qquad\mathcal{C}^{p+1}\mathfrak{g}=\{0\}.$$

Time je dokazano da su svojstva (a) i (b) međusobno ekvivalentna.

$(b)\Rightarrow(c)$. Padajući niz ideala $\mathcal{C}^0\mathfrak{g}\supseteq\mathcal{C}^1\mathfrak{g}\supseteq\cdots\supseteq\mathcal{C}^k\mathfrak{g}$ zadovoljava uvjet iz (a) (uz $p=k$).

$(c)\Rightarrow(b)$. Imamo $\mathfrak{h}_0=\mathfrak{g}=\mathcal{C}^0\mathfrak{g}$ i $\mathfrak{h}_1\supseteq[\mathfrak{g},\mathfrak{h}_0]=[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]=\mathcal{C}^1\mathfrak{g}$. Pretpostavimo sada da je dokazano da $\mathfrak{h}_i\supseteq\mathcal{C}^i\mathfrak{g}$ za neki $i<p$. Tada je $\mathfrak{h}_{i+1}\supseteq[\mathfrak{g},\mathfrak{h}_i]\supseteq[\mathfrak{g},\mathcal{C}^i\mathfrak{g}]=\mathcal{C}^{i+1}\mathfrak{g}$. Dakle, indukcijom po i dokazali smo da vrijedi $\mathfrak{h}_i\supseteq\mathcal{C}^i\mathfrak{g}\ \forall i$. Posebno je $\mathcal{C}^p\mathfrak{g}\subseteq\mathfrak{h}_p=\{0\}$.

Implikacija $(d)\Rightarrow(c)$ je očigledna.

$(c)\Rightarrow(d)$. Neka su $\mathfrak{h}_0,\ldots,\mathfrak{h}_p$ kao u (a) i neka je $\mathfrak{k}_0\supseteq\cdots\supseteq\mathfrak{k}_n$ padajući niz potprostora takav da je $\dim\mathfrak{k}_i=n-i$ za $0\leq i\leq n=\dim\mathfrak{g}$ i da za neke $i_0<i_1<\cdots<i_p$ vrijedi $\mathfrak{k}_{i_k}=\mathfrak{h}_k$ za $0\leq k\leq p$. Sada za $i_k\leq i\leq i_{k+1}$ imamo

$$[\mathfrak{g},\mathfrak{k}_i]\subseteq[\mathfrak{g},\mathfrak{k}_{i_k}]=[\mathfrak{g},\mathfrak{h}_k]\subseteq\mathfrak{h}_{k+1}=\mathfrak{k}_{i_{k+1}}\subseteq\mathfrak{k}_i.$$

Prema tome, svi potprostori $\mathfrak{k}_i$ su ideali. Neka $0\leq i<n$ i neka je $k\in\{0,\ldots,p-1\}$ takav da je $i_k\leq i\leq i_{k+1}$. Tada je $i_{k+1}\leq i+1$, pa imamo

$$[\mathfrak{g},\mathfrak{k}_i]\subseteq[\mathfrak{g},\mathfrak{k}_{i_k}]=[\mathfrak{g},\mathfrak{h}_k]\subseteq\mathfrak{h}_{k+1}=\mathfrak{k}_{i_{k+1}}\subseteq\mathfrak{k}_{i+1}.$$

$(c) \Rightarrow (e)$. Imamo $\mathfrak{h}_p = \{0\} = \mathcal{C}_0\mathfrak{g}$. Indukcijom po i dokazat ćemo da vrijedi $\mathfrak{h}_{p-i} \subseteq \mathcal{C}_i\mathfrak{g}$ za svaki i. Pretpostavimo da je $\mathfrak{h}_{p-i} \subseteq \mathcal{C}_i\mathfrak{g}$ za neki $i < p$. Tada imamo $[\mathfrak{g}, \mathfrak{h}_{p-i-1}] \subseteq \mathfrak{h}_{p-i} \subseteq \mathcal{C}_i\mathfrak{g}$. Ako sa $\pi_i : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}/\mathcal{C}_i\mathfrak{g}$ označimo kvocijenti epimorfizam, slijedi

$$[\pi_i(\mathfrak{g}), \pi_i(\mathfrak{h}_{p-i-1})] = \pi_i\left([\mathfrak{g}, \mathfrak{h}_{p-i-1}]\right) \subseteq \pi_i(\mathcal{C}_i\mathfrak{g}) = \{0\}.$$

To znači da je $\pi_i(\mathfrak{h}_{p-i-1}) \subseteq Z(\mathfrak{g}/\mathcal{C}_i\mathfrak{g})$, odnosno, $\mathfrak{h}_{p-i-1} \subseteq \pi_i^{-1}\left(Z(\mathfrak{g}/\mathcal{C}_i\mathfrak{g})\right) = \mathcal{C}_{i+1}\mathfrak{g}$. Posebno, za $i = p$ imamo $\mathcal{C}_p\mathfrak{g} \supseteq \mathfrak{h}_0 = \mathfrak{g}$, tj. $\mathcal{C}_p\mathfrak{g} = \mathfrak{g}$.

$(e) \Rightarrow (c)$. Niz ideala $\mathfrak{g} = \mathcal{C}_k\mathfrak{g} \supseteq \mathcal{C}_{k-1}\mathfrak{g} \supseteq \cdots \supseteq \mathcal{C}_0\mathfrak{g} = \{0\}$ zadovoljava uvjete iz (a), jer je $\mathcal{C}_i\mathfrak{g}/\mathcal{C}_{i-1}\mathfrak{g}$ centar od $\mathfrak{g}/\mathcal{C}_{i-1}\mathfrak{g}$, pa je $[\mathfrak{g}, \mathcal{C}_i\mathfrak{g}] \subseteq \mathcal{C}_{i-1}\mathfrak{g}$.

$(e) \Rightarrow (f)$. Rastući niz ideala $\mathcal{C}_0\mathfrak{g} \subseteq \mathcal{C}_1\mathfrak{g} \subseteq \cdots \subseteq \mathcal{C}_k\mathfrak{g}$ zadovoljava uvjet iz (f) (uz $\ell = k$).

$(f) \Rightarrow (e)$. Indukcijom po $i \geq 0$ dokazat ćemo da vrijedi $\mathfrak{j}_i \subseteq \mathcal{C}_i\mathfrak{g}$. Baza indukcije je evidentna: $\mathfrak{j}_0 = \{0\} = \mathcal{C}_0\mathfrak{g}$. Pretpostavimo da je $i < \ell$ i da vrijedi $\mathfrak{j}_i \subseteq \mathcal{C}_i\mathfrak{g}$. Neka je $\pi_i : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}/\mathcal{C}_i\mathfrak{g}$ kanonski epimorfizam. Inkluzija $\mathfrak{j}_{i+1}/\mathfrak{j}_i \subseteq Z(\mathfrak{g}/\mathfrak{j}_i)$ znači da je $[\mathfrak{g}, \mathfrak{j}_{i+1}] \subseteq \mathfrak{j}_i$, pa slijedi $[\mathfrak{g}, \mathfrak{j}_{i+1}] \subseteq \mathcal{C}_i\mathfrak{g}$. Odatle je $[\pi_i(\mathfrak{g}), \pi_i(\mathfrak{j}_{i+1})] = \pi_i([\mathfrak{g}, \mathfrak{j}_{i+1}]) = \{0\}$, dakle, $\pi_i(\mathfrak{j}_{i+1}) \subseteq Z(\mathfrak{g}/\mathcal{C}_i\mathfrak{g})$. To znači da je $\mathfrak{j}_{i+1} \subseteq \pi_i^{-1}(Z(\mathfrak{g}/\mathcal{C}_i\mathfrak{g}) = \mathcal{C}_{i+1}\mathfrak{g}$. Time je dokazano da vrijedi $\mathfrak{j}_i \subseteq \mathcal{C}_i\mathfrak{g}$ za svaki i. Posebno, za $i = \ell$ nalazimo da je $\mathfrak{j}_\ell \subseteq \mathcal{C}_\ell\mathfrak{g}$, a kako je $\mathfrak{j}_\ell = \mathfrak{g}$, to znači da je $\mathcal{C}_\ell\mathfrak{g} = \mathfrak{g}$.

Implikacija $(g) \Rightarrow (f)$ je trivijalna.

$(f) \Rightarrow (g)$. Izaberimo rastući niz potprostora $\mathfrak{i}_0 \subseteq \mathfrak{i}_1 \subseteq \cdots \subseteq \mathfrak{i}_n$ tako da bude $\dim \mathfrak{i}_j = j$ za $j = 0, 1, \ldots, n = \dim \mathfrak{g}$ i da za neke $j_0 < j_1 < \cdots < j_\ell$ vrijedi $\mathfrak{i}_{j_k} = \mathfrak{j}_k$ za $k = 0, 1, \ldots, \ell$. Tada su $\mathfrak{i}_j$ ideali u $\mathfrak{g}$. Doista, za dano $j \in \{0, 1, \ldots, n\}$ neka je $k \in \{0, 1, \ldots, \ell - 1\}$ takav da je $j_k \leq j \leq j_{k+1}$. Tada imamo

$$[\mathfrak{g}, \mathfrak{i}_j] \subseteq [\mathfrak{g}, \mathfrak{i}_{j_{k+1}}] = [\mathfrak{g}, \mathfrak{j}_{k+1}] \subseteq \mathfrak{j}_k = \mathfrak{i}_{j_k} \subseteq \mathfrak{i}_j.$$

Pri tome je inkluzija $[\mathfrak{g}, \mathfrak{j}_{k+1}] \subseteq \mathfrak{j}_k$ posljedica činjenice da je $\mathfrak{j}_{k+1}/\mathfrak{j}_k$ sadržano u centru kvocijentne algebre $\mathfrak{g}/\mathfrak{j}_k$.

Napokon, neka je $j \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ proizvoljan i neka je $k \in \{0, 1, \ldots, \ell - 1\}$ takav da je $j_k \leq j < j_{k+1}$. Tada je $j + 1 \leq j_{k+1}$, dakle, imamo

$$[\mathfrak{g}, \mathfrak{i}_{j+1}] \subseteq [\mathfrak{g}, \mathfrak{i}_{j_{k+1}}] = [\mathfrak{g}, \mathfrak{j}_{k+1}] \subseteq \mathfrak{j}_k = \mathfrak{i}_{j_k} \subseteq \mathfrak{i}_j$$

a to upravo znači da je $\mathfrak{i}_{j+1}/\mathfrak{i}_j \subseteq Z(\mathfrak{g}/\mathfrak{i}_j)$.

Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ koja ima svojstva iz propozicije 2.5. zove se **nilpotentna**.

Propozicija 2.6. *Neka je $\mathfrak{g} \neq \{0\}$ nilpotentna Liejeva algebra, $\mathfrak{a}$ njena Liejeva podalgebra i $\mathfrak{b}$ ideal u $\mathfrak{g}$.*

(a) $Z(\mathfrak{g}) \neq \{0\}$.

(b) *Liejeva algebra $\mathfrak{a}$ je nilpotentna.*

(c) *Kvocijentna Liejeva algebra $\mathfrak{g}/\mathfrak{b}$ je nilpotentna.*

Dokaz: Kako je $\mathcal{C}_1\mathfrak{g} = Z(\mathfrak{g})$, tvrdnja (a) slijedi iz činjenice da je $\mathfrak{g} = \mathcal{C}_k\mathfrak{g}$ za neki prirodan broj k. Naime, iz $\mathcal{C}_1\mathfrak{g} = \{0\}$ slijedi da je $\mathcal{C}_j\mathfrak{g} = \{0\}\ \forall j$. Tvrdnja (b) je neposredna posljedica evidentne inkluzije $\mathcal{C}^k\mathfrak{a} \subseteq \mathcal{C}^k\mathfrak{g}$. Napokon, označimo sa $\pi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}/\mathfrak{b}$ kvocijentni epimorfizam. Tvrdnja (c) sluijedi iz tvrdnje (c) leme 2.3.: $\pi(\mathcal{C}^k\mathfrak{g}) = \mathcal{C}^k(\mathfrak{g}/\mathfrak{b})$.

Propozicija 2.7. *Neka je $\mathfrak{g}$ Liejeva algebra i $\mathfrak{c}$ njen ideal sadržan u $Z(\mathfrak{g})$. Ako je kvocijentna Liejeva algebra $\mathfrak{g}/\mathfrak{c}$ nilpotentna, onda je i Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ nilpotentna.*

Dokaz: Za neki k vrijedi $\mathcal{C}^k(\mathfrak{g}/\mathfrak{c}) = \{0\}$. To znači da je $\mathcal{C}^k\mathfrak{g} \subseteq \mathfrak{c}$, pa slijedi

$$\mathcal{C}^{k+1}\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathcal{C}^k\mathfrak{g}] \subseteq [\mathfrak{g}, \mathfrak{c}] = \{0\}.$$

Neka je $\mathfrak{a}$ podalgebra Liejeve algebre $\mathfrak{g}$. **Normalizator** od $\mathfrak{a}$ u $\mathfrak{g}$ je

$$N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{a}) = \{X \in \mathfrak{g};\ [X, Y] \in \mathfrak{a}\ \forall Y \in \mathfrak{a}\}.$$

To je očito Liejeva podalgebra od $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{a}$ je ideal u $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{a})$ i $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{a})$ je najveća Liejeva podalgebra od $\mathfrak{g}$ koja sadrži $\mathfrak{a}$ kao ideal.

Propozicija 2.8. *Neka je $\mathfrak{g}$ nilpotentna Liejeva algebra i $\mathfrak{k} \neq \mathfrak{g}$ njena Liejeva podalgebra. Tada je $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{k}) \neq \mathfrak{k}$.*

Dokaz: Neka je k najveći broj iz $\mathbb{Z}_+$ takav da je $\mathcal{C}^k\mathfrak{g} + \mathfrak{k} \neq \mathfrak{k}$. Tada imamo

$$[\mathcal{C}^k\mathfrak{g} + \mathfrak{k}, \mathfrak{k}] \subseteq [\mathcal{C}^k\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] + [\mathfrak{k}, \mathfrak{k}] \subseteq \mathcal{C}^{k+1}\mathfrak{g} + \mathfrak{k} = \mathfrak{k}.$$

Prema tome,

$$N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{k}) \supseteq \mathcal{C}^k\mathfrak{g} + \mathfrak{k} \supsetneq \mathfrak{k}.$$

Lema 2.9. *Neka je V vektorski prostor i $A \in L(V)$ nilpotentan operator. Tada je operator $ad\,A : B \mapsto [A, B] = AB - BA$ na prostoru $L(V)$ nilpotentan.*

Dokaz: Indukcijom po k nalazimo da vrijedi

$$(ad\,A)^k B = \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} A^j B A^{k-j}.$$

Dakle, ako je $A^p = 0$, onda je $(ad\,A)^{2p-1} = 0$.

Teorem 2.10. (**Engel**) *Neka je $V \neq \{0\}$ konačnodimenzionalan vektorski prostor i $\mathfrak{g}$ Liejeva podalgebra od $L(V)$ takva da je svaki operator $A \in \mathfrak{g}$ nilpotentan. Tada postoji $v \in V$, $v \neq 0$, takav da je $Av = 0\ \forall A \in \mathfrak{g}$.*

Dokaz ćemo provesti indukcijom po $n = \dim \mathfrak{g}$. Ako je $n = 0$ ili $n = 1$ tvrdnja je očigledna. Neka je $n \geq 2$ i pretpostavimo da je tvrdnja dokazana za Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ dimenzije manje od n. Neka je $n = \dim \mathfrak{g}$ i neka je $\mathfrak{k}$ Liejeva podalgebra od $\mathfrak{g}$ i $m = \dim \mathfrak{k} < n$. Za $A \in \mathfrak{k}$ operator $ad_{\mathfrak{g}} A$ preslikava $\mathfrak{k}$ u $\mathfrak{k}$, pa definira operator $\tilde{A} : \mathfrak{g}/\mathfrak{k} \to \mathfrak{g}/\mathfrak{k}$. Po lemi 2.9. operator $ad_{\mathfrak{g}} A$ je nilpotentan pa je i kvocijentni operator $\tilde{A}$ nilpotentan. Stavimo $\tilde{\mathfrak{k}} = \{\tilde{A};\ A \in \mathfrak{k}\}$. To je Liejeva podalgebra od $L(\mathfrak{g}/\mathfrak{k})$ sastavljena od nilpotentnih operatora i $\dim \tilde{\mathfrak{k}} \geq m < n$. Po pretpostavci indukcije postoji $u \in \mathfrak{g}/\mathfrak{k}$, $u \neq 0$, takav da je $\tilde{A}u = 0\ \forall A \in \mathfrak{k}$. To znači da postoji $B \in \mathfrak{g} \setminus \mathfrak{k}$ takav da je $[A, B] \in \mathfrak{k}$ $\forall A \in \mathfrak{k}$. Odatle slijedi da je $\mathfrak{m} = \mathfrak{k} \dotplus \mathbb{R}B$ Liejeva podalgebra od $\mathfrak{g}$ dimenzije $m + 1$ koja sadrži $\mathfrak{k}$ kao ideal. Ako je $m + 1 < n$, ponovimo isto zaključivanje sa $\mathfrak{m}$ umjesto $\mathfrak{k}$ i dolazimo do Liejeve podalgebre $\mathfrak{n}$ dimenzije $m + 2$ koja sadrži $\mathfrak{m}$ kao ideal. Korak po korak doći ćemo do ideala $\mathfrak{a}$ u $\mathfrak{g}$ kodimenzije , tj. dimenzije $n - 1$. Stavimo sada

$$V_0 = \{v \in V;\ Av = 0\ \forall A \in \mathfrak{a}\}.$$

Po pretpostavci indukcije tada je $V_0 \neq \{0\}$. Izaberimo $A \in \mathfrak{g} \setminus \mathfrak{a}$. Tada je $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \dotplus \mathbb{R}A$. Za $v \in V_0$ i $B \in \mathfrak{a}$ imamo

$$BAv = [B, A]v + ABv = 0, \qquad \text{jer je } B \in \mathfrak{a},\ \text{i } [B, A] \in \mathfrak{a}.$$

Kako to vrijedi za svaki $B \in \mathfrak{a}$, slijedi da je $Av \in V_0\ \forall v \in V_0$, tj. potprostor V_0 je invarijantan u odnosu nqa operator A. Operator A je nilpotentan, pa je i njegova restrikcija $A|V_0$ nilpotentan operator. Slijedi da postoji $v \in V_0$, $v \neq 0$, takav da je $Av = 0$. No tada je $Bv = 0\ \forall B \in \mathfrak{g}$.

Teorem 2.11. *Liejeva algebra* $\mathfrak{g}$ *je nilpotentna ako i samo ako je nilpotentan svaki operator* $ad\,X$, $X \in \mathfrak{g}$.

Dokaz: Prema propoziciji 2.5. (svojstvo (a)) uvjet je nužan. Pretpostavimo da operator $ad\,X$ nilpotentan za svaki $X \in \mathfrak{g}$. Dokaz da je tada Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ nilpotentna provest ćemo indukcijom u odnosu na dimenziju od $\mathfrak{g}$. Baza indukcije je trivijalna, jer jednodimenzionalna Liejeva algebra je komutativna pa je nilpotentna. Pretpostavimo da je $\dim \mathfrak{g} = n \geq 2$ i da je tvrdnja dokazana za Liejeve algebre dimenzije manje od n. Engelov teorem 2.10. primijenjen na $ad\,\mathfrak{g} = \{ad\,X;\ X \in \mathfrak{g}\}$ pokazuje da je $Z(\mathfrak{g}) \neq \{0\}$. Lema 2.9. pokazuje da Liejeva algebra $ad\,\mathfrak{g}$ zadovoljava uvjet teorema. Ona je izomorfna Liejevoj algebri $\mathfrak{g}/Z(\mathfrak{g})$, jer je $\mathrm{Ker}\,ad = Z(\mathfrak{g})$. Kako je $\dim \mathfrak{g}/Z(\mathfrak{g}) < n$ po pretpostavci indukcije Liejeva algebra $\mathfrak{g}/Z(\mathfrak{g})$ je nilpotentna. No sada iz propozicije 2.7. slijedi da je Liejeva algebra $\mathfrak{g}$. nilpotentna.

Korolar 2.12. *Uz pretpostavke Engelovog teorema 2.10.* $\mathfrak{g}$ *je nilpotentna Liejeva algebra i postoji niz potprostora*
$$\{0\} = V_0 \subseteq V_1 \subseteq \cdots \subseteq V_m = V$$
takav da je $\dim V_j = j$ *i* $AV_j \subseteq V_{j-1}$ $\forall A \in \mathfrak{g}$ *i za* $j = 1, \ldots, m$.

Dokaz: Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ je nilpotentna po teoremu 2.11. i po lemi 2.9.

Drugu tvrdnju dokazujemo indukcijom po $\dim V$. Korak indukcije: po teoremu 2.10. možemo izabrati jednodimenzionalan potprostor V_1 takav da je $A|V_1 = 0$ $\forall A \in \mathfrak{g}$. Sada je $\dim V/V_1 = \dim V - 1$, pa po indukciji možemo naći $V_2, \ldots, V_m = V$ s traženim svojstvima.

Korolar 2.13. *Uz pretpostavke Engelovog teorema 2.10. postoji baza* $\{e_1, \ldots, e_m\}$ *prostora* V *u odnosu na koju svi operatori iz* $\mathfrak{g}$ *imaju striktno gornje trokutaste matrice.*

Dokaz: Neka su $V_0, V_1, \ldots, V_m$ kao u korolaru 2.12. Izaberimo $e_j \in V_j \setminus V_{j-1}$ za $j = 1, \ldots, m$. Tada je $\{e_1, \ldots, e_m\}$ baza od V s traženim svojstvom.

Poglavlje 3

LIEJEVA ALGEBRA NILPOTENTNE GRUPE

U cijelom ovom poglavlju G je nilpotentna grupa i $\mathfrak{g}$ je njena Liejeva algebra.

Neka je V konačnodimenzionalan vektorski prostor. **Reprezentacija** grupe G na prostoru V je neprekidni homomorfizam $\pi : G \to GL(V)$.

Za $x \in G$ i $X \in \mathfrak{g}$ preslikavanje $t \mapsto x(\exp tX)x^{-1}$ je neprekidni homomorfizam aditivne grupe $\mathbb{R}$ u grupu G. Prema propoziciji 1.9. i propoziciji 1.3. postoji jedinstven element $Y \in \mathfrak{g}$ takav da je $x(\exp tX)x^{-1} = \exp tY$ $\forall t \in \mathbb{R}$. Taj element Y označavat ćemo sa $(Ad\,x)X$. Dakle,

$$x(\exp tX)x^{-1} = \exp t(Ad\,x)X, \qquad x \in G, \quad X \in \mathfrak{g}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Propozicija 3.1. *(a) Za svako $x \in G$ preslikavanje $Ad\,x : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ je automorfizam Liejeve algebre $\mathfrak{g}$.*

(b) $Ad : x \mapsto Ad\,x$ je neprekidni homomorfizam grupe G u grupu $Aut(\mathfrak{g})$ svih automorfizama Liejeve algebre $\mathfrak{g}$.

(c) Ad je reprezentacija grupe G na vektorskom prostoru $\mathfrak{g}$.

Dokaz: (1) Neka je $x \in G$ proizvoljno fiksiran. Dokazat ćemo najprije da je $Ad\,x : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ linearan operator. Za $f \in C^\infty(G)$ neka je $\overline{f} \in C^\infty(G)$ definirana sa $\overline{f}(y) = f\left(xyx^{-1}\right)$, $y \in G$. Za $X, Y \in \mathfrak{g}$ i $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ imamo redom

$$[(Ad\,x)(\alpha X + \beta Y)](f) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f\left(\exp t(Ad\,x)(\alpha X + \beta Y)\right)\Big|_{t=0} =$$

$$= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f\left(x(\exp t(\alpha X + \beta Y))x^{-1}\right)\Big|_{t=0} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\overline{f}(\exp t(\alpha X + \beta Y))\Big|_{t=0} =$$

$$= (\alpha X + \beta Y)\left(\overline{f}\right) = \alpha X\left(\overline{f}\right) + \beta Y\left(\overline{\varphi}\right) = \alpha\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\overline{f}(\exp tX)\Big|_{\tau=0} + \beta\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\overline{f}(\exp tY)\Big|_{\tau=0} =$$

$$= \alpha\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f\left(x(\exp tX)x^{-1}\right)\Big|_{\tau=0} + \beta\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f\left(x(\exp tY)x^{-1}\right)\Big|_{\tau=0} =$$

$$= \alpha\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f\left((\exp t(Ad\,x)X)\right)\Big|_{\tau=0} + \beta\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f\left((\exp t(Ad\,x)Y)\right)\Big|_{\tau=0} =$$

$$= \alpha[(Ad\,x)X](f) + \beta[(Ad\,x)Y](f) = [\alpha(Ad\,x)X + (Ad\,x)Y](f).$$

Budući da je funkcija $f \in C^\infty(G)$ bila proizvoljna, zaključujemo da je $(Ad\,x)(\alpha X + \beta Y) = = \alpha(Ad\,x)X + \beta(Ad\,x)Y$, odnosno, operator $Ad\,x : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ je linearan.

(2) Za jedinični element e grupe G imamo $e(\exp tX)e^{-1} = \exp tX$, a to znači da je $Ad\,e = I_{\mathfrak{g}}$ (jedinični operator na prostoru $\mathfrak{g}$). Nadalje, za $x, y \in G$, $t \in \mathbb{R}$ i $X \in \mathfrak{g}$ imamo redom

$$\exp t(Ad\,xy)X = xy(\exp tX)y^{-1}x^{-1} = x(\exp t(Ad\,y)X)x^{-1} = \exp t(Ad\,x)(Ad\,y)X.$$

To pokazuje da je $Ad\,xy = (Ad\,x)(Ad\,y)$, $x, y \in G$. Dakle, $Ad : x \mapsto Ad\,x$ je homomorfizam grupe G u grupu $GL(\mathfrak{g})$.

(3) Dokazat ćemo sada da je $Ad\,x \in Aut(\mathfrak{g})$ za svaki $x \in G$. Kako znamo iz (1) da je operator $Ad\,x$ linearan, a iz (2) da je to izomorfizam vektorskog prostora $\mathfrak{g}$ na samog sebe, ostaje još da dokažemo da je $(Ad\,x)[X, Y] = [(Ad\,x)X, (Ad\,x)Y]$ za bilo koje $X, Y \in \mathfrak{g}$. Neka je $f \in C^\infty(G)$ i neka je funkcija $\overline{f} \in C^\infty(G)$ definirana kao u (1), $\overline{f}(y) = f\left(xyx^{-1}\right)$, $y \in G$. Znamo da je tada

$$[(Ad\,x)Z](f) = Z\left(\overline{f}\right) \qquad \forall Z \in \mathfrak{g}.$$

Stoga imamo redom

$$\begin{aligned}
((Ad\,x)[X,Y])\,(f) &= [X,Y]\left(\overline{f}\right) = X\left(\tilde{Y}\left(\overline{f}\right)\right) - Y\left(\tilde{X}\left(\overline{f}\right)\right) = \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\tilde{Y}\left(\overline{f}\right)\right](\exp tX)\Big|_{t=0} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\tilde{X}\left(\overline{f}\right)\right](\exp tY)\Big|_{t=0} = \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{\partial}{\partial s}\overline{f}((\exp tX)(\exp sY))\Big|_{s=0}\right]\Big|_{t=0} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{\partial}{\partial s}\overline{f}((\exp tY)(\exp sX))\Big|_{s=0}\right]\Big|_{t=0} = \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{\partial}{\partial s}f(x(\exp tX)x^{-1}x(\exp sY)x^{-1})\Big|_{s=0}\right]\Big|_{t=0} - \\
&- \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{\partial}{\partial s}f(x(\exp tY)x^{-1}x(\exp sX)x^{-1})\Big|_{s=0}\right]\Big|_{t=0} = \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{\partial}{\partial s}f((\exp t(Ad\,x)X)(\exp s(Ad\,x)Y))\Big|_{s=0}\right]\Big|_{t=0} - \\
&- \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{\partial}{\partial s}f((\exp t(Ad\,x)Y)(\exp s(Ad\,x)X))\Big|_{s=0}\right]\Big|_{t=0} = \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{[(Ad\,x)Y]\tilde{\ }(f)\right\}(\exp t(Ad\,x)X)\Big|_{t=0} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{[(Ad\,x)X]\tilde{\ }(f)\right\}(\exp t(Ad\,x)Y)\Big|_{t=0} = \\
&= ((Ad\,x)X)\left\{[(Ad\,x)Y]\tilde{\ }(f)\right\} - ((Ad\,x)Y)\left\{[(Ad\,x)X]\tilde{\ }(f)\right\} = [(Ad\,x)X, (Ad\,x)Y]\,(f).
\end{aligned}$$

Zbog proizvoljnosti funkcije $f \in C^\infty(G)$ time je dokazano da je $Ad\,x \in Aut(\mathfrak{g})$ $\forall x \in G$.

(4) Sve tvrdnje propozicije bit će dokazane, ako pokažemo još da je preslikavanje $Ad : G \to L(\mathfrak{g})$ neprekidno. U tu je svrhu dovoljno dokazati da je za svaki $X \in \mathfrak{g}$ preslikavanje $x \mapsto (Ad\,x)X$ sa G u $\mathfrak{g}$ neprekidno. U tu je svrhu dovoljno dokazati da su koordinate vektora $(Ad\,x)X$ u nekoj bazi prostora $\mathfrak{g}$ neprekidne funkcije od x. Koordinate vektora $(Ad\,x)X$ u Kartezijevom koordinatnom sustavu $\{x_1, \ldots, x_n\}$ su $[(Ad\,x)X](x_i)$, $i = 1, \ldots, n$. Prema tome, za neprekidnost je dovoljno dokazati da je za svaku $f \in C^\infty(G)$ funkcija $x \mapsto [(Ad\,x)X](f)$ neprekidna. Za $x \in G$, $X \in \mathfrak{g}$ i $f \in C^\infty(G)$ imamo

$$[(Ad\,x)X](f) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f\left(x(\exp tX)x^{-1}\right)\Big|_{t=0}.$$

Kako je $(x, t) \mapsto f\left(x(\exp tX)x^{-1}\right)$ funkcija klase C^∞ na $G \times \mathbb{R}$, slijedi da je funkcija $x \mapsto [(Ad\,x)X](f)$ neprekidna (čak i klase C^∞).

Lema 3.2. *Neka je V konačnodimenzionalan vektorski prostor i $\varphi : \mathbb{R} \to GL(V)$ neprekidni homomorfizam. Postoji jedinstven $A \in L(V)$ takav da je*

$$\varphi(t) = \mathrm{e}^{tA} \qquad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Dokaz: Jedinstvenost je očita, jer iz jednakosti $\varphi(t) = \mathrm{e}^{tA}$ slijedi da je preslikavanje $\varphi : \mathbb{R} \to L(V)$ diferencijabilno i da je $A = \varphi'(0)$. Da dokažemo egzistenciju, definiramo preslikavanje $\psi : \mathbb{R} \to L(V)$ sa

$$\psi(t) = \int_0^t \varphi(\tau)\mathrm{d}\tau, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Preslikavanje ψ je diferencijabilno, $\psi'(t) = \varphi(t)$, $t \in \mathbb{R}$, i $\psi(0) = 0$. Imamo

$$I_V = \varphi(0) = \psi'(0) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(\psi(t) - \psi(0) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\psi(t).$$

Prema tome, možemo definirati neprekidnu fukciju $f : \mathbb{R} \to L(V)$ ovako:

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{t}\psi(t) & \text{ako je } t \neq 0 \\ I_V & \text{ako je } t = 0. \end{cases}$$

Kako je $I_V \in GL(V)$ i kako je grupa $GL(V)$ otvoren skup u $L(V)$, postoji $s \neq 0$ takav da je $f(s) \in GL(V)$. Tada je i $\psi(s) \in GL(V)$.

Imamo za svaki $t \in \mathbb{R}$

$$\psi(s)\varphi(t) = \varphi(t)\psi(t) = \varphi(t)\int_0^s \varphi(\tau)\mathrm{d}\tau = \int_0^s \varphi(t+\tau)\mathrm{d}\tau = \int_t^{t+s} \varphi(\tau)\mathrm{d}\tau,$$

dakle,

$$\varphi(t) = \psi(s)^{-1}\int_t^{t+s} \varphi(\tau)\mathrm{d}\tau, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Ova formula pokazuje da je preslikavanje $\varphi : \mathbb{R} \to L(V)$ diferencijabilno.

Sada jednakost

$$\varphi(t+u) = \varphi(t)\varphi(u) = \varphi(u)\varphi(t), \qquad t, u \in \mathbb{R},$$

deriviramo po u, pa dobivamo

$$\varphi'(t+u) = \varphi(t)\varphi'(u) = \varphi'(u)\varphi(t), \qquad t, u \in \mathbb{R}.$$

Uvrstimo li $u = 0$ uz oznaku $A = \varphi'(0) \in L(V)$ dobivamo

$$\varphi'(t) = \varphi(t)A = A\varphi(t), \qquad t \in \mathbb{R},$$

pa slijedi

$$\varphi(t) = \varphi(0)\mathrm{e}^{tA}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Lema 3.3. *Neka je $\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fukcija dvije varijable klase C^1. Tada je*

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\varphi(t,t)\right|_{t=0} = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\varphi(t,0)\right|_{t=0} + \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\varphi(0,t)\right|_{t=0}.$$

Dokaz: Imamo

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\varphi(t,t)\bigg|_{t=0} = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}[\varphi(t,t)-\varphi(0,0)] = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}[\varphi(t,t)-\varphi(0,t)] + \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}[\varphi(0,t)-\varphi(0,0)].$$

Funkcija $\partial_1\varphi : \mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ je neprekidna, pa postoji

$$\lim_{t,s\to 0}\frac{1}{t}[\varphi(t,s)-\varphi(0,s)] \qquad \text{i jednak je} \qquad \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}[\varphi(t,t)-\varphi(0,t)].$$

Prema tome,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\varphi(t,t)\bigg|_{t=0} = \lim_{t,s\to 0}\frac{1}{t}[\varphi(t,s)-\varphi(0,s)] + \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}[\varphi(0,t)-\varphi(0,0)] =$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}[\varphi(t,0)-\varphi(0,0)] + \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}[\varphi(0,t)-\varphi(0,0)] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\varphi(t,0)\bigg|_{t=0} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\varphi(0,t)\bigg|_{t=0}.$$

Propozicija 3.4. *Za svaki $X\in\mathfrak{g}$ vrijedi $Ad\,(\exp X) = \mathrm{e}^{ad\,X}$.*

Dokaz: Preslikavanje $t\mapsto Ad\,(\exp tX)$ je neprekidni homomorfizam aditivne grupe $\mathbb{R}$ u grupu $GL(\mathfrak{g})$. Stoga po lemi 3.2. postoji jedinstven $A\in L(\mathfrak{g})$ takav da je

$$Ad\,(\exp tX) = \mathrm{e}^{tA}, \qquad t\in\mathbb{R}.$$

Tada je

$$A = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}Ad(\exp tX)\bigg|_{t=0},$$

pa za $Y\in\mathfrak{g}$ i $f\in C^\infty(G)$ imamo

$$(AY)(f) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[Ad\,(\exp tX)Y](f)\bigg|_{t=0} =$$

$$= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial s}f(\exp s[Ad\,(\exp tX)]Y)\bigg|_{s=0}\bigg|_{t=0} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial s}f((\exp tX)(\exp sY)(\exp -tX))\bigg|_{s=0}\bigg|_{t=0},$$

a to je primjenom leme 3.3. jednako

$$= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial s}f((\exp tX)(\exp sY))\bigg|_{s=0}\bigg|_{t=0} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial s}f((\exp sY)(\exp -tX))\bigg|_{s=0}\bigg|_{t=0} =$$

$$= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial s}f((\exp tX)(\exp sY))\bigg|_{s=0}\bigg|_{t=0} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial s}f((\exp tY)(\exp sX))\bigg|_{s=0}\bigg|_{t=0} =$$

$$= X\left(\tilde{Y}(f)\right) - Y\left(\tilde{X}(f)\right) = [X,Y](f).$$

To znači da je $AY = [X,Y]\ \forall Y\in\mathfrak{g}$, odnosno, $A = ad\,X$.

Propozicija 3.5. *Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ nilpotentne grupe G je nilpotentna.*

Dokaz: Prema propoziciji 3.4. je

$$Ad\,(\exp tX) = \mathrm{e}^{tad\,X}, \qquad X \in \mathfrak{g}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Prema tome, vrijedi

$$(ad\,X)^N = \frac{\mathrm{d}^N}{\mathrm{d}t^N} Ad\,(\exp tX)\Big|_{t=0}, \qquad X \in \mathfrak{g}, \quad N \in \mathbb{N}.$$

Neka je k stupanj polinomijalnog preslikavanja $m : G \times G \to G$ (množenje) i $N > 2k$. Za Kartezijev koordinatni sustav $(x_1, \ldots, x_n)$ na G i za $X, Y \in \mathfrak{g}$ i $t \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$[Ad\,(\exp tX)Y](x_i) = \frac{\partial}{\partial s} x_i((\exp tX)(\exp sY)(\exp -tX))\Big|_{s=0},$$

dakle,

$$[(ad\,X)^N Y](x_i) = \frac{\mathrm{d}^N}{\mathrm{d}t^N} \frac{\partial}{\partial s} x_i((\exp tX)(\exp sY)(\exp -tX))\Big|_{s=0}\Big|_{t=0}. \tag{3.1}$$

Za svako $s \in \mathbb{R}$ funkcija $t \mapsto x_i((\exp tX)(\exp sY)(\exp -tX))$ je polinom stupnja $< N$. Stoga je i

$$t \mapsto \frac{\partial}{\partial s} x_i((\exp tX)(\exp sY)(\exp -tX))\Big|_{s=0}$$

polinom stupnja $< N$. Iz (3.1) slijedi $(ad\,X)^N Y = 0\ \forall X, Y \in \mathfrak{g}$, dakle, $(ad\,X)^N = 0\ \forall X \in \mathfrak{g}$. Prema teoremu 2.11. Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ je nilpotentna.

Nilpotentna podgrupa od G je vektorski potprostor H od G koji je i podgrupa grupe G, tj. $xy \in H\ \forall x, y \in H$. Očito je nilpotentna podgrupa od G i sama nilpotentna grupa.

Teorem 3.6. *Neka je H nilpotentna podgrupa od G i neka je $\mathfrak{h}$ njena Liejeva algebra. Tada je $\log_G H$ Liejeva podalgebra od $\mathfrak{g}$. Preslikavanje $\log_G \circ \exp_H$ je izomorfizam Liejevih algebri sa $\mathfrak{h}$ na $\log_G H$. Inverzni izomorfizam je $\log_H \circ \exp_G | \log_G H$. H je normalna podgrupa od G ako i samo ako je $\log_G H$ ideal u $\mathfrak{g}$.*

Dokaz: Stavimo $\mathfrak{k} = \log_G H$. Preslikavanje $\log_G : G \to \mathfrak{g}$ je linearan operator, pa je $\mathfrak{k}$ potprostor od $\mathfrak{g}$. Neka su $X, Y \in \mathfrak{k}$. Tada su $\exp_G tX, \exp_G sY \in H\ \forall t, s \in \mathbb{R}$, pa je i

$$\exp_G \{s[Ad\,(\exp_G tX)]Y\} = (\exp_G tX)(\exp_G sY)(\exp_G -tX) \in H \qquad \forall t, s \in \mathbb{R}.$$

Odatle slijedi redom (uz primjenu propozicije 3.4.)

$$Ad\,(\exp_G tX)Y \in \mathfrak{k} \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{e}^{t\,ad\,X} Y \in \mathfrak{k} \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad \Longrightarrow \quad [X, Y] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \mathrm{e}^{t\,ad\,X}\Big|_{t=0} \in \mathfrak{k}.$$

Time je dokazano da je $\mathfrak{k}$ Liejeva podalgebra od $\mathfrak{g}$.

Preslikavanja $\exp_G : \mathfrak{g} \to G$ i $\log_H : H \to \mathfrak{h}$ su izomorfizmi vektorskih prostora i vrijedi $\exp_G(K) = \exp_G(\log_G H) = H$. Odatle slijedi da je $\log_H \circ \exp_G | \mathfrak{k}$ izomorfizam vektorskih prostora sa $\mathfrak{k}$ na $\mathfrak{h}$. Inverzni izomorfizam očito je $\log_G \circ \exp_H : \mathfrak{h} \to \mathfrak{k}$. Dokažimo da su to homomorfizmi Liejevih algebri, tj. da vrijedi

$$[\log_H(\exp_G X), \log_H(\exp_G Y)] = \log_H(\exp_G [X, Y]) \qquad \forall X, Y \in \mathfrak{k}. \tag{3.2}$$

Neka je $(x_1,\dots,x_n)$ Kartezijev koordinatni sustav na G takav da je $x_j|H=0$ za $k+1\le j\le n$ ($k=\dim H$). Stavimo $y_j=x_j|H$ za $1\le j\le k$. Tada je $(y_1,\dots,y_k)$ Kartezijev koordinatni sustav na H. Stavimo $\overline{X}=\log_H(\exp_G X)$ i $\overline{Y}=\log_H(\exp_G Y)$. Naravno, tada su $\overline{X},\overline{Y}\in\mathfrak{h}$. Imamo

$$\exp_H t\overline{X}=\exp_H\left(t\log_H(\exp_G)\right)=\exp_H\left(\log_H(\exp_G tX)\right)=\exp_G tX$$

i analogno

$$\exp_H s\overline{Y}=\exp_G sY.$$

Stoga imamo redom

$$\begin{aligned}
\left[\overline{X},\overline{Y}\right](y_j) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial s}y_j\left((\exp_H t\overline{X})(\exp_H s\overline{Y})\right)\Big|_{s=0}\Big|_{t=0}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial s}y_j\left((\exp_H t\overline{Y})(\exp_H s\overline{X})\right)\Big|_{s=0}\Big|_{t=0}=\\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial s}y_j\left((\exp_G tX)(\exp_G sY)\right)\Big|_{s=0}\Big|_{t=0}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial s}y_j\left((\exp_G tY)(\exp_G sX)\right)\Big|_{s=0}\Big|_{t=0}=\\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial s}x_j\left((\exp_G tX)(\exp_G sY)\right)\Big|_{s=0}\Big|_{t=0}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial s}x_j\left((\exp_G tY)(\exp_G sX)\right)\Big|_{s=0}\Big|_{t=0}=\\
&= [X,Y](x_j)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x_j\left(\exp_G t[X,Y]\right)\Big|_{t=0}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y_j\left(\exp_G t[X,Y]\right)\Big|_{t=0}=\\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y_j\left(t\exp_G[X,Y]\right)\Big|_{t=0}=\left\{\log_H(\exp_G[X,Y])\right\}(y_j).
\end{aligned}$$

Kako to vrijedi za $1\le j\le k$, slijedi (3.2).

Pretpostavimo da je H normalna podgrupa od G. Za $X\in\mathfrak{g}$ i $Y\in\mathfrak{k}$ imamo sljedeći niz implikacija:

$$\begin{aligned}
&(\exp tX)(\exp Y)(\exp tX)^{-1}\in H\quad\forall t\in\mathbb{R}\implies\exp[Ad(\exp tX)Y]\in H\quad\forall t\in\mathbb{R}\implies\\
&\implies Ad(\exp tX)Y\in\mathfrak{k}\quad\forall t\in\mathbb{R}\implies \mathrm{e}^{t\,ad\,X}Y\in\mathfrak{k}\quad\forall t\in\mathbb{R}\implies\\
&\implies [X,Y]=(ad\,X)Y=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{e}^{t\,ad\,X}Y\Big|_{t=0}\in\mathfrak{k}.
\end{aligned}$$

Prema tome, $\mathfrak{k}=\log_G H$ je ideal u Liejevoj algebri $\mathfrak{g}$.

Pretpostavimo sada da je $\mathfrak{k}=\log_G H$ ideal u $\mathfrak{g}$. Za $X\in\mathfrak{g}$ i $Y\in\mathfrak{k}$ tada imamo sljedeći niz implikacija:

$$\begin{aligned}
&(ad\,X)^kY\in\mathfrak{k}\quad\forall k\in\mathbb{Z}_+\implies \mathrm{e}^{ad\,X}Y\in\mathfrak{k}\implies Ad(\exp X)Y\in\mathfrak{k}\implies\\
&\implies \exp(Ad(\exp X)Y)\in H\implies(\exp X)(\exp Y)(\exp X)^{-1}\in H.
\end{aligned}$$

Međutim, $G=\exp\mathfrak{g}$ i $H=\exp\mathfrak{k}$, pa zaključujemo da vrijedi $xyx^{-1}\in H$ $\forall y\in H$ i $\forall x\in G$. Time je dokazano da je H normalna podgrupa od G.

Lema 3.7. *Za $X,Y\in\mathfrak{g}$ vrijedi $[X,Y]=0$ ako i samo ako je $(\exp X)(\exp Y)=(\exp Y)(\exp X)$. U tom slučaju je $(\exp X)(\exp Y)=\exp(X+Y)$.*

Dokaz: Pretpostavimo da je $(\exp X)(\exp Y)=(\exp Y)(\exp X)$ i stavimo $x=\exp X$. Tada imamo

$$\begin{aligned}
&\exp(Ad\,x)Y=x(\exp Y)x^{-1}=\exp Y\implies(Ad\,x)Y=Y\implies\\
&\implies \mathrm{e}^{ad\,X}Y=Y\implies \mathrm{e}^{n\,ad\,X}Y=\left(\mathrm{e}^{ad\,X}\right)^nY=Y\quad\forall n\in\mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

Definiramo preslikavanje $P : \mathbb{R} \to \mathfrak{g}$ sa

$$P(t) = \mathrm{e}^{t\,ad\,X}Y - Y, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Kako je $(ad\,X)^m = 0$ za neko m, P je polinomijalno preslikavanje. Nadalje, $P(n) = 0\ \forall n \in Z$, pa slijedi $P(t) = 0\ \forall t \in \mathbb{R}$. Dakle, $\mathrm{e}^{t\,ad\,X}Y = Y\ \forall t \in \mathbb{R}$. Odatle deriviranjem dobivamo

$$[X, Y] = (ad\,X)Y = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{e}^{t\,ad\,X}Y \bigg|\, t = 0 = 0.$$

Pretpostavimo sada da je $[X, Y] = 0$. Tada je $(ad\,X)Y = 0$, pa uz istu oznaku $x = \exp X$ nalazimo

$$Y = \mathrm{e}^{ad\,X}Y = (Ad\,x)Y \quad\Longrightarrow\quad \exp Y = \exp\left[(Ad\,x)Y\right] = x(\exp Y)x^{-1} \quad\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow\quad x(\exp Y) = (\exp Y)x \quad\Longrightarrow\quad (\exp X)(\exp Y) = (\exp Y)(\exp X).$$

U tom slučaju je, naravno, i $[sX, tY] = 0$ pa vrijedi i $(\exp sX)(\exp tY) = (\exp tY)(\exp sX)$ $\forall s, t \in \mathbb{R}$. Definiramo preslikavanje $\varphi : \mathbb{R} \to G$ sa

$$\varphi(t) = (\exp tX)(\exp tY), \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Tada je

$$\varphi(t)\varphi(s) = (\exp tX)(\exp tY)(\exp sX)(\exp sY) =$$

$$= (\exp tX)(\exp sX)(\exp tY)(\exp sY) = (\exp\,(t + s)X)(\exp\,(t + s)Y) = \varphi(t + s).$$

Dakle, φ je neprekidni homomorfizam aditivne grupe $\mathbb{R}$ u grupu G. Prema propoziciji 1.9. i prema definiciji eksponencijalnog preslikavanja postoji $Z \in \mathfrak{g}$ takav da je

$$(\exp tX)(\exp tY) = \exp tZ, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Korištenjem leme 3.3. za svaku funkciju $f \in C^\infty(G)$ imamo

$$Z(f) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(\exp tZ)\bigg|_{t=0} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f((\exp tX)(\exp tY))\bigg|_{t=0} =$$

$$= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(\exp tX)\bigg|_{t=0} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(\exp tY)\bigg|_{t=0} = X(f) + Y(f) = (X + Y)(f).$$

Dakle, $Z = X+Y$, odnosno, $(\exp tX)(\exp tY) = \exp t(X+Y)\ \forall t \in \mathbb{R}$. Posebno, $(\exp X)(\exp Y) =$ $= \exp\,(X + Y)$.

Propozicija 3.8. *Neka je*

$$C = \{x \in G;\ xy = yx \quad \forall y \in G\}$$

centar grupe G i neka je

$$\mathfrak{c} = Z(\mathfrak{g}) = \{X \in \mathfrak{g};\ [X, Y] = 0 \quad \forall Y \in \mathfrak{g}\}$$

centar Liejeve algebre $\mathfrak{g}$.

(*a*) *C je nilpotentna podgrupa od G i $C = \exp \mathfrak{c}$.*

(*b*) *$\exp|\mathfrak{c} : \mathfrak{c} \to C$ je izomorfizam aditivne grupe $\mathfrak{c}$ na grupu C.*

(*c*) *Za $x \in G$ i $y \in C$ vrijedi $xy = x + y$.*

Dokaz: (a) Korištenjem leme 3.7. imamo sljedeće ekvivalencije

$$\exp X \in C \iff (\exp X)(\exp Y) = (\exp Y)(\exp X) \quad \forall Y \in \mathfrak{g} \iff$$

$$\iff [X, Y] = 0 \quad \forall Y \in \mathfrak{g} \iff X \in \mathfrak{c}.$$

Dakle, $C = \exp \mathfrak{c}$. Kako je $\exp : \mathfrak{g} \to G$ izomorfizam vektorskih prostora, C je potprostor od G. Dakle, podgrupa C je nilpotentna podgrupa od G.

(c) Neka su $x \in G$ i $y \in C$. Neka su $X \in \mathfrak{g}$ i $Y \in \mathfrak{c}$ takvi da je $x = \exp X$ i $y = \exp Y$. Tada je $[X, Y] = 0$, pa po lemi 3.7. zbog činjenice da je $\exp : \mathfrak{g} \to G$ linearan operator imamo

$$xy = (\exp X)(\exp Y) = \exp (X + Y) = \exp X + \exp Y = x + y.$$

(b) Preslikavanje $\exp|\mathfrak{c}$ je bijekcija sa $\mathfrak{c}$ na C. Zbog (c) imamo $\exp (X + Y) = \exp X + \exp Y$ za $X, Y \in \mathfrak{c}$. Dakle, $\exp|\mathfrak{c}$ je izomorfizam grupa.

Propozicija 3.9. *Neka je $\mathfrak{a}$ potprostor centra $\mathfrak{c} = Z(\mathfrak{g})$ Liejeve algebre $\mathfrak{g}$, $A = \exp \mathfrak{a}$ pripadna nilpotentna podgrupa centra C od G, $\mathfrak{k} = \mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ i $H = G/A$. Nadalje, neka su $\pi : G \to H$ i $p : \mathfrak{g} \to \mathfrak{k}$ kanonski epimorfizmi. Kvocijentna grupa $H = G/A$ jednaka je kvocijentnom prostoru vektorskog prostora G po potprostoru A. H je nilpotentna grupa i postoji jedinstven izomorfizam φ Liejeve algebre $\mathfrak{k}$ na Liejevu algebru $\mathfrak{h}$ nilpotentne grupe H takav da komutira sljedeći dijagram:*

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[rr, "\pi"] & & H \\
\mathfrak{g} \arrow[u, "\exp_G"] \arrow[r, "p"'] & \mathfrak{k} \arrow[r, "\varphi"'] & \mathfrak{h} \arrow[u, "\exp_H"']
\end{tikzcd}$$

Dokaz: (1) Prema tvrdnji (c) propozicije 3.8. imamo $xA = x + A \; \forall x \in G$. Dakle, kvocijentna grupa G/A podudara se s kvocijentnim prostorom vektorskog prostora G po potprostoru A.

(2) $H = G/A$ ima strukturu grupe i strukturu vektorskog prostora:

$$(xA)(yA) = xyA, \qquad xA + yA = (x + y)A, \qquad x, y \in G.$$

Neka su $m : G \times G \to G$ i $\mu : H \times H \to H$ preslikavanja grupovnih množenja. Tada je

$$\mu(xA, yA) = xyA = m(x, y)A, \qquad x, y \in G.$$

Odatle se vidi da je μ polinomijalno preslikavanje. Nadalje, za $x \in G$ i $t, s \in \mathbb{R}$ imamo

$$\mu(t(xA), s(xA)) = \mu(t(x + A), s(x + A)) = \mu(tx + A, sx + A) = \mu((tx)A, (sx)A) =$$

$$= m(tx, sx)A = ((t + s)x)A = (t + s)x + A = (t + s)(x + A) = (t + s)(xA).$$

Prema tome, H je nilpotentna grupa.

(3) Dokazat ćemo sada da za $X, Y \in \mathfrak{g}$ vrijedi $(\exp_G X)A = (\exp_G Y)A$ ako i samo ako je $X + \mathfrak{a} = Y + \mathfrak{a}$. Doista, imamo sljedeći slijed ekvivalencija:

$$(\exp X)A = (\exp Y)A \iff \exp X = (\exp Y)a \quad \text{za neki} \quad a \in A \iff$$

$$\iff \exp X = (\exp Y)(\exp Z) \quad \text{za neki} \quad Z \in \mathfrak{a} \iff$$

$$\iff \text{(zbog leme 3.7.)} \quad \exp X = \exp (Y + Z) \quad \text{za neki} \quad Z \in \mathfrak{a} \iff$$

$$\iff X = Y + Z \quad \text{za neki} \quad Z \in \mathfrak{a} \iff X + \mathfrak{a} = Y + \mathfrak{a}.$$

(4) Definiramo sada preslikavanje $\varphi : \mathfrak{k} \to \mathfrak{h}$ ovako:

$$\varphi(X + \mathfrak{a}) = \log_H \big((\exp_G X)A\big), \qquad X + \mathfrak{a} \in \mathfrak{k}.$$

Ova definicija ima smisla zbog (3). Nadalje, Kako su preslikavanja $\exp_G$ i $\log_H$ linearna, to je i φ linearno preslikavanje. Budući da je očito $\varphi(\mathfrak{k}) = \mathfrak{h}$ i kako je $\dim \mathfrak{k} = \dim \mathfrak{h}$, preslikavanje φ je izomorfizam vektorskih prostora. Dokažimo sada da je φ homomorfizam (dakle, izomorfizam) Liejevih algebri, tj. da vrijedi $\varphi([X + \mathfrak{a}, Y + \mathfrak{a}]) = [\varphi(X + \mathfrak{a}), \varphi(Y + \mathfrak{a})]$, $\forall X, Y \in \mathfrak{g}$. U tu svrhu, zbog jednostavnijeg pisanja definiramo linearnu surjekciju $\psi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ sa

$$\psi(X) = \log_H \big((\exp_G X)A\big), \qquad X \in \mathfrak{g}.$$

Treba dokazati da je ψ homomorfizam Liejevih algebri, $\psi([X, Y]) = [\psi(X), \psi(Y)]$, $\forall X, Y \in \mathfrak{g}$. Neka je $k = \dim A$ i neka je $(x_1, \ldots, x_n)$ Kartezijev koordinatni sustav na G takav da je $x_j | A = 0$ za $j \geq k + 1$. Kako je $xA = x + A$ za $x \in G$, možemo definirati funkcije y_j, $j \geq k + 1$, na H ovako:

$$y_j(xA) = x_j(x), \qquad x \in G.$$

Tada je $(y_{k+1}, \ldots, y_n)$ Kartezijev koordinatni sustav na H. Za $X, Y \in \mathfrak{g}$ i $j \geq k + 1$ imamo

$$\psi([X, Y])(y_j) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} y_j\big(t(\exp_G [X, Y])A\big)\bigg|_{t=0} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} y_j\big((\exp_G t[X, Y])A\big)\bigg|_{t=0} =$$

$$= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} x_j(\exp_G t[X, Y])\bigg|_{t=0} = [X, Y](x_j) =$$

$$= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial s}\Big(x_j\big((\exp_G tX)(\exp_G sY)\big) - x_j\big((\exp_G tY)(\exp_G sX)\big)\Big)\bigg|_{s=0}\bigg|_{t=0}.$$

S druge strane

$$[\psi(X), \psi(Y)](y_j) =$$

$$= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial s}\Big(y_j\big((\exp_H t\psi(X))(\exp_H s\psi(Y))\big) - y_j\big((\exp_H t\psi(Y))(\exp_H s\psi(X))\big)\Big)\bigg|_{s=0}\bigg|_{t=0} =$$

$$= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial s}\Big(y_j\big((\exp_G tX)A \cdot (\exp_G sY)A\big) - y_j\big((\exp_G tY)A \cdot (\exp_G sX)A\big)\Big)\bigg|_{s=0}\bigg|_{t=0} =$$

$$= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial s}\Big(x_j\big((\exp_G tX)(\exp_G sY)\big) - x_j\big((\exp_G tY)(\exp_G sX)\big)\Big)\bigg|_{s=0}\bigg|_{t=0}.$$

Time je dokazano da je $\psi([X, Y]) = [\psi(X), \psi(Y)]$.

Za svaki $X \in \mathfrak{g}$ imamo iz definicije preslikavanja φ :

$$(\exp_H \circ \varphi \circ p)(X) = \exp_H \big(\varphi(X + \mathfrak{a})\big) = (\exp_G X)A = \pi(\exp_G X) = (\pi \circ \exp_G)(X).$$

Time je dokazana egzistencija preslikavanja φ. Jedinstvenost slijedi iz surjektivnosti $p : \mathfrak{g} \to \mathfrak{k}$ i bijektivnosti $\exp_H : \mathfrak{h} \to H$.

Uz situaciji iz propozicije 3.9. možemo provesti identifikaciju $\mathfrak{k}$ sa $\mathfrak{h}$ tako da je φ identiteta. Tada je $\exp_H \circ p = \pi \circ \exp_G$, tj.

$$\exp_H (X + \mathfrak{a}) = (\exp_G X)A, \qquad X \in \mathfrak{g}.$$

Teorem 3.10. *Neka je* $\mathfrak{h}$ *Liejeva podalgebra od* $\mathfrak{g}$. *Tada je* $H = \exp_G(\mathfrak{h})$ *nilpotentna podgrupa od* G, $\log_H \circ \exp_G |\mathfrak{h}$ *je izomorfizam Liejeve algebre* $\mathfrak{h}$ *na Liejeveu algebru nilpotentne grupe* H, *a* $\log_G \circ \exp_H$ *je inverzni izomorfizam.*

Dokaz: Zbog teorema 3.6. dovoljno je dokazati samo prvu tvrdnju, tj. da je $H = \exp_G(\mathfrak{h})$ nilpotentna podgrupa od G. Kako je preslikavanje $\exp_G$ linearno, H je potprostor vektorskog prostora G. Nadalje, za $X \in \mathfrak{h}$ je $-X \in \mathfrak{h}$, pa je $\exp_G X)^{-1} = \exp_G(-X) \in H$. Treba još dokazati samo da vrijedi

$$X, Y \in \mathfrak{h} \quad \Longrightarrow \quad (\exp_G X)(\exp_G Y) \in H. \tag{3.3}$$

(1) Pretpostavimo najprije da je $\dim \mathfrak{h} = \dim \mathfrak{g} - 1$. Implikaciju (3.3) dokazat ćemo indukcijom po $\dim \mathfrak{g} \geq 1$. Baza indukcije $\dim gg = 1$ je trivijalna jer je tada $\mathfrak{h} = \{0\}$. Provedimo korak indukcije. Neka je $\mathfrak{c}$ centar Liejeve algebre $\mathfrak{g}$. Pretpostavimo da je $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{c} = \{0\}$. Kako je po tvrdnji (a) propozicije 2.6. $\mathfrak{c} \neq \{0\}$, zbog pretpostavke o dimenzijama je $\dim \mathfrak{c} = 1$ i $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \dot{+} \mathfrak{c}$. Neka je $\mathfrak{c}_1$ centar Liejeve algebre $\mathfrak{h}$. Po tvrdnji (a) propozicije 2.6. je $\mathfrak{c}_1 \neq \{0\}$. No zbog $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \dot{+} \mathfrak{c}$, slijedi da je $\mathfrak{c}_1 \subseteq \mathfrak{c}$, a to je nemoguće. Ova kontradikcija pokazuje da je $\mathfrak{a} = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{c} \neq \{0\}$. Stavimo $A = \exp_G(\mathfrak{a})$, $G_1 = G/A$, $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ i $\mathfrak{h}_1 = \mathfrak{h}/\mathfrak{a}$. U skladu s identifikacijom provedenom prije iskaza teorema na temelju propozicije 3.9. $\mathfrak{g}_1$ je Liejeva algebra nilpotentne grupe G_1. $\mathfrak{h}_1$ je Liejeva podalgebra od $\mathfrak{g}_1$, a kako je $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{h}$, imamo $\dim \mathfrak{h}_1 = \dim \mathfrak{g}_1 - 1$. Nadalje, $\dim \mathfrak{g}_1 < \dim \mathfrak{g}$, pa po indukciji zaključujemo da je $\exp_{G_1}(\mathfrak{h}_1)$ podgrupa od G_1. Slijedi da za $X, Y \in \mathfrak{h}$ postoji $Z \in \mathfrak{h}$ takav da je

$$(\exp_{G_1}(X + \mathfrak{a}))(\exp_{G_1}(Y + \mathfrak{a})) = \exp_{G_1}(Z + \mathfrak{a}).$$

Tada je

$$(\exp_G X)A \cdot (\exp_G Y)A = (\exp_G Z)A,$$

pa postoji $V \in \mathfrak{a}$ takav da je

$$(\exp_G X)(\exp_G Y) = (\exp_G Z)(\exp_G V) = \exp_G(Z + V) \quad \text{(zbog leme 3.7.)}$$

Kako je $Z + V \in \mathfrak{h}$, slijedi (3.3).

(2) Dokažimo teorem (tj. implikaciju (3.3)) indukcijom po $\dim \mathfrak{g} - \dim \mathfrak{h}$. Baza indukcije dokazana je u (1). Neka je $n \geq 2$ i pretpostavimo da teorem vrijedi ako je $\dim \mathfrak{g} - \dim \mathfrak{h} < n$. Neka je $\dim \mathfrak{g} - \dim \mathfrak{h} = n$. Kao u dokazu Engelovog teorema 2.10. nalazimo da postoji Liejeva podalgebra $\mathfrak{k}$ od $\mathfrak{g}$ takva da je $\mathfrak{h}$ ideal u $\mathfrak{k}$ i da je $\dim \mathfrak{k} = \dim \mathfrak{h} + 1$. Stavimo $K = \exp_G(\mathfrak{k})$. Kako je $\dim \mathfrak{g} - \dim \mathfrak{k} = n - 1$, K je po pretpostavci indukcije nilpotentna podgrupa od G. Po teoremu 3.6. i uz identifikaciju $\mathfrak{k}$ s Liejevom algebrom od K, imamo $\exp_K = \exp_G |\mathfrak{k}$. Prema (1) $\exp_G(\mathfrak{h}) = \exp_K(\mathfrak{h})$ je podgrupa od G.

Baza $(X_1, \ldots, X_n)$ nilpotentne Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ zove se **Jordan−Hölderova baza** ako za svaki $X \in \mathfrak{g}$ vrijedi

$$[X, X_n] = 0 \quad \text{i} \quad [X, X_j] \in span\{X_{j+1}, \ldots, X_n\} \quad \text{za} \quad 1 \leq j \leq n - 1.$$

To zapravo znači da svi operatori $ad\,X$, $X \in \mathfrak{g}$, imaju u toj bazi striktno donje trokutaste matrice. Takva baza postoji prema propoziciji 2.5. (svojstvo (d)). U tom slučaju potprostori $\mathfrak{h}_j = span\{X_j, \ldots, X_n\}$ čine padajući niz ideala čije dimenzije padaju za 1, $\mathfrak{h}_1 = \mathfrak{g}$, posljednji $\mathfrak{h}_n = \mathbb{R}X_n$ je centralni ideal. Ako je $\mathfrak{g}$ Liejeva algebra nilpotentne grupe G, tada zbog $Ad(\exp X) = e^{ad\,X}$ vrijedi

$$(Ad\,x)X_n = X_n, \quad (Ad\,x)X_j - X_j \in span\{X_{j+1}, \ldots, X_n\} = \mathfrak{h}_{j+1} \quad \text{za} \quad 1 \leq j \leq n - 1, \quad \forall x \in G.$$

Dakle, svaki $Ad\,x$ ima donje trokutastu matricu s jedinicama na dijagonali.

Teorem 3.11. *Neka je* $(X_1, \ldots, X_n)$ *Jordan–Hölderova baza od* $\mathfrak{g}$. *Definiramo preslikavanje* $\varphi : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ *sa*

$$\exp\, \varphi(X, Y) = (\exp\, X)(\exp\, Y), \quad X, Y \in \mathfrak{g}, \qquad tj. \quad \varphi(X, Y) = \log\,((\exp\, X)(\exp\, Y)).$$

Nadalje, neka su $\varphi_j : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathbb{R}$ *pripadna koordinatna preslikavanja:*

$$\varphi(X, Y) = \sum_{j=1}^{n} \varphi_j(X, Y) X_j, \qquad X, Y \in \mathfrak{g}.$$

Tada za

$$X = \sum_{j=1}^{n} t_j X_j, \quad Y = \sum_{j=1}^{n} s_j X_j$$

vrijedi

$$\varphi_1(X, Y) = t_1 + s_1, \quad \varphi_j(X, Y) = t_j + s_j + \psi_j(t_1, \ldots, t_{j-1}, s_1, \ldots, s_{j-1}), \quad 2 \le j \le n,$$

pri čemu je za svako $j \in \{2, \ldots, n\}$ ψ_j *polinomijalna funkcija na* $\mathbb{R}^{2j-2}$.

Dokaz ćemo provesti indukcijom po $\dim \mathfrak{g}$. Baza indukcije $\dim \mathfrak{g} = 1$ je trivijalna. Pretpostavimo sada da je tvrdnja dokazana za nilpotentne Liejeve algebre dimenzije manje od $n = \dim \mathfrak{g} \ge 2$. Potprostor $\mathfrak{a} = \mathbb{R}X_n$ je centralni ideal u $\mathfrak{g}$. Stavimo $A = \exp \mathfrak{a}$, $\overline{G} = G/A$ i $\overline{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g}/\mathfrak{a}$. Prema propoziciji 3.9. možemo identificirati $\overline{\mathfrak{g}}$ s Liejevom algebrom nilpotentne grupe $\overline{G}$, tako da bude:

$$\exp_{\overline{G}}(X + \mathfrak{a}) = (\exp_G X)A, \quad X \in \mathfrak{g},$$

odnosno,

$$\log_{\overline{G}}(xA) = \log_G x + \mathfrak{a}, \quad x \in G.$$

Neka su $p : \mathfrak{g} \to \overline{\mathfrak{g}}$ i $\pi : G \to \overline{G}$ kanonski epimorfizmi. Gornje jednakosti možemo zapisati ovako:

$$\exp_{\overline{G}}(p(X)) = \pi(\exp_G X), \quad X \in \mathfrak{g}, \qquad \log_{\overline{G}}(\pi(x)) = p(\log_G x), \quad x \in G.$$

Stavimo $\overline{X}_j = p(X_j)$, $1 \le j \le n-1$. Tada je očito $(\overline{X}_1, \ldots, \overline{X}_{n-1})$ Jordan–Hölderova baza od $\overline{\mathfrak{g}}$. Definiramo preslikavanja $\overline{\varphi} : \overline{\mathfrak{g}} \times \overline{\mathfrak{g}} \to \overline{\mathfrak{g}}$ i $\overline{\varphi}_j : \overline{\mathfrak{g}} \times \overline{\mathfrak{g}} \to \mathbb{R}$, $1 \le j \le n-1$, sa

$$\exp_{\overline{G}} \overline{\varphi}(\overline{X}, \overline{Y}) = (\exp_{\overline{G}} \overline{X})(\exp_{\overline{G}} \overline{Y}), \quad \overline{\varphi}(\overline{X}, \overline{Y}) = \sum_{j=1}^{n-1} \overline{\varphi}_j(\overline{X}, \overline{Y}) \overline{X}_j, \quad \overline{X}, \overline{Y} \in \overline{\mathfrak{g}}.$$

Po pretpostavci indukcije postoje polinomi $\psi_2, \ldots, \psi_{n-1}$ takvi da za

$$\overline{X} = \sum_{j=1}^{n-1} t_j \overline{X}_j, \quad \overline{Y} = \sum_{j=1}^{n-1} s_j \overline{X}_j$$

vrijedi

$$\overline{\varphi}_1(\overline{X}, \overline{Y}) = t_1 + s_1, \quad \overline{\varphi}_j(\overline{X}, \overline{Y}) = t_j + s_j + \psi_j(t_1, \ldots, t_{j-1}, s_1, \ldots, s_{j-1}), \quad 2 \le j \le n-1.$$

Za $X, Y \in \mathfrak{g}$ imamo

$$p(\varphi(X, Y)) = p(\log_G((\exp_G X)(\exp_G Y))) = \log_{\overline{G}} \pi((\exp_G X)(\exp_G Y)) =$$

$$= \log_{\overline{G}}(\pi(\exp_G X)\pi(\exp_G Y)) = \log_{\overline{G}}((\exp_{\overline{G}} p(X))(\exp_{\overline{G}} p(Y)) = \overline{\varphi}(p(X), p(Y)).$$

Odatle je

$$\sum_{j=1}^{n-1} \varphi_j(X,Y)\overline{X}_j = \sum_{j=1}^{n} \varphi_j(X,Y)p(X_j) = p\left(\sum_{j=1}^{n} \varphi_j(X,Y)X_j\right) =$$

$$= p(\varphi(X,Y)) = \overline{\varphi}(p(X),p(Y)) = \sum_{j=1}^{n-1} \overline{\varphi}_j(p(X),p(Y))\overline{X}_j.$$

Prema tome,

$$\varphi_j(X,Y) = \overline{\varphi}_j(p(X),p(Y)), \qquad 1 \leq j \leq n-1, \quad X,Y \in \mathfrak{g}.$$

Za

$$X = \sum_{j=1}^{n} t_j X_j \quad \text{i} \quad Y = \sum_{j=1}^{n} s_j X_j$$

imamo

$$p(X) = \sum_{j=1}^{n-1} t_j \overline{X}_j \quad \text{i} \quad p(Y) = \sum_{j=1}^{n-1} s_j \overline{X}_j,$$

pa slijedi

$$\varphi_1(X,Y) = \overline{\varphi}_1(p(X),p(Y)) = t_1 + s_1,$$

$$\varphi_j(X,Y) = \overline{\varphi}_j(p(X),p(Y)) = t_j + s_j + \psi_j(t_1,\ldots,t_{j-1},s_1,\ldots,s_{j-1}), \quad 2 \leq j \leq n-1.$$

Budući da je X_n u centru od $\mathfrak{g}$, za $X,Y \in \mathfrak{g}$ i $t,s \in \mathbb{R}$ zbog leme 3.7. imamo

$$\exp_G \varphi(X+tX_n, Y+sX_n) = (\exp_G(X+tX_n))(\exp_G(Y+sX_n)) =$$

$$= (\exp_G(t+s)X_n)(\exp_G X)(\exp_G Y) = (\exp_G(t+s)X_n)(\exp_G \varphi(X,Y)) = \exp_G(\varphi(X,Y)+(t+s)X_n).$$

Dakle,

$$\varphi(X+tX_n, Y+sX_n) = \varphi(X,Y) + (t+s)X_n, \qquad t,s \in \mathbb{R}, \quad X,Y \in \mathfrak{g}.$$

Neka je opet

$$X = \sum_{j=1}^{n} t_j X_j, \qquad Y = \sum_{j=1}^{n} s_j X_j.$$

Stavimo

$$X' = \sum_{j=1}^{n-1} t_j X_j, \qquad Y' = \sum_{j=1}^{n-1} s_j X_j.$$

Sada je

$$\varphi_n(X,Y)X_n = \varphi(X,Y) = \sum_{j=1}^{n-1} \varphi_j(X,Y)X_j = \varphi(X'+t_nX_n, Y'+s_nX_n) - \sum_{j=1}^{n-1} \varphi_j(X,Y)X_j =$$

$$= \varphi(X',Y') + (t_n+s_n)X_n - \sum_{j=1}^{n-1} \varphi_j(X,Y)X_j = \sum_{j=1}^{n} \varphi_j(X',Y')X_j + (t_n+s_n)X_n - \sum_{j=1}^{n-1} \varphi_j(X,Y)X_j.$$

Odatle je

$$\varphi_j(X,Y) = \varphi_j(X',Y'), \quad 1 \leq j \leq n-1; \qquad \varphi_n(X,Y) = t_n + s_n + \varphi_n(X',Y').$$

Neka je kao i prije $m : G \times G \to G$ preslikavanje množenja. Tada je

$$\varphi(X',Y') = \log_G(m(\exp_G(t_1X_1 + \cdots + t_{n-1}X_{n-1}), \exp_G(s_1X_1 + \cdots + s_{n-1}X_{n-1})))$$

Kako su $\exp_G$ i $\log_G$ linearni operatori, a m je polinomijalno preslikavanje,

$$(t_1, \ldots, t_{n-1}, s_1, \ldots, s_{n-1}) \mapsto \varphi(X', Y')$$

je polinomijalno preslikavanje sa R^{2n-2} u $\mathfrak{g}$. Dakle,

$$\psi_n(t_1, \ldots, t_{n-1}, s_1, \ldots, s_{n-1}) = \varphi_n(X', Y')$$

je polinom na $\mathbb{R}^{2n-2}$. Napokon, prema prethodnom računu je

$$\varphi_n(X, Y) = t_n + s_n + \psi_n(t_1, \ldots, t_{n-1}, s_1, \ldots, s_{n-1})$$

i time je korak indukcije proveden, tj. teorem je dokazan.

Korolar 3.12. *Neka je* $(X_1, \ldots, X_n)$ *Jordan–Hölderova baza od* $\mathfrak{g}$ *i* $(x_1, \ldots, x_n)$ *pripadni Kartezijev koordinatni sustav na* G, *tj.* $X_i(x_j) = \delta_{ij}$.

(*a*) $F : (t_1, \ldots, t_n) \mapsto (\exp\, t_1 X_1) \cdots (\exp\, t_n X_n)$ *je homeomorfizam* $\mathbb{R}^n$ *na* G.

(*b*) *Vrijedi*

$$x_1((\exp\, t_1 X_1) \cdots (\exp\, t_n X_n)) = t_1,$$
$$X_j((\exp\, t_1 X_1) \cdots (\exp\, t_n X_n)) = t_j + g_j(t_1, \ldots, t_{j-1}), \qquad 2 \leq j \leq n,$$

pri čemu je g_j *polinom na* R^{j-1} *za* $2 \leq j \leq n$.

Dokaz: $(X_1, \ldots, X_n)$ je baza prostora $\mathfrak{g}$ i exp jue izomorfizam prostora $\mathfrak{g}$ na prostor G. Stoga je $(\exp\, X_1, \ldots, \exp\, X_n)$ baza vektorskog prostora G. Za $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ i $t \in \mathbb{R}$ imamo

$$x_i(\exp\, tX_j) = x_i(t \exp\, X_j) = t x_i(\exp\, X_j).$$

Stoga je

$$x_i(\exp\, X_j) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} x_i(\exp\, tX_j)\bigg|_{t=0} = X_j(x_i) = \delta_{ij}.$$

Time smo dokazali da je $(x_1, \ldots, x_n)$ baza od G^* dualna bazi $(\exp\, X_1, \ldots, \exp\, X_n)$ prostora G. Prema tome, vrijedi

$$x_i\left(\exp \sum_{j=1}^{n} t_j X_j\right) = x_i\left(\sum_{j=1}^{n} t_j \exp\, X_j\right) = t_i \tag{3.4}$$

i, posebno,

$$x_i(\exp\, tX_j) = t\delta_{ij}. \tag{3.5}$$

Dokazat ćemo sada tvrdnju (*b*) indukcijom po $\dim G$. Ako je $\dim G = 1$, tvrdnja slijedi iz (3.5). Neka je $\dim G = n \geq 2$ i pretpostavimo da je tvrdnja (*b*) dokazana u slučaju kad je dimenzija manja od n. Stavimo $\mathfrak{k} = \mathit{span}\{X_2, \ldots, X_n\}$ i $K = \exp\, \mathfrak{k}$. $\mathfrak{k}$ je ideal u $\mathfrak{g}$ dimenzije $n-1$. Po teoremu 3.10. K je normalna nilpotentna podgrupa od G i $\mathfrak{k}$ se može identificirati s njenom Liejevom algebrom tako da bude $\exp_K = \exp_G|\mathfrak{k}$ i $\log_K = \log_G|K$. $(X_2, \ldots, X_n)$ je Jordan–Hölderova baza od $\mathfrak{k}$ i očito je $(x_2|K, \ldots, x_n|K)$ pripadni Kartezijev koordinatni sustav na K, tj. $X_i(x_j|K) = \delta_{ij}$, $2 \leq i, j \leq n$. Po pretpostavci indukcije postoje polinomi h_i na $\mathbb{R}^{i-2}$ za $3 \leq i \leq n$ takvi da je

$$x_2((\exp\, t_2 X_2) \cdots (\exp\, t_n X_n)) = t_2,$$
$$x_i((\exp\, t_2 X_2) \cdots (\exp\, t_n X_n)) = t_i + h_i(t_2, \ldots, t_{i-1}), \qquad 3 \leq i \leq n.$$

Stavimo

$$(\exp t_2X_2)\cdots(\exp t_nX_n) = \exp Y.$$

Tada je $Y \in \mathfrak{k}$ i iz gornjih formula i (3.4) slijedi

$$Y = \sum_{j=2}^{n} s_jX_j$$

pri čemu je

$$s_2 = t_2, \qquad s_i = t_i + h_i(t_2, \ldots, t_{i-1}), \quad 3 \le i \le n.$$

Sada po teoremu 3.10. imamo

$$x_1((\exp t_1X_1)\cdots(\exp t_nX_n)) = x_1((\exp t_1X_1)(\exp Y)) = x_1(\exp \varphi(t_1, X_1, Y)) = \varphi_1(t_1X_1, Y) = t_1,$$

a za $i \ge 2$ (i uz $h_2 = 0$)

$$x_i((\exp t_1X_1)\cdots(\exp t_nX_n)) = \varphi_i(t_1X_1, Y) = s_i + \psi_i(t_1, 0, \ldots, 0, 0, s_2, \ldots, s_{i-1}) =$$

$$= t_i + h_i(t_2, \ldots, t_{i-1}) + \psi_i(t_1, 0, \ldots, 0, 0, t_2, t_3 + h_3(t_2), \ldots, t_i + h_{i-1}(t_2, \ldots, t_{i-2}).$$

Time je tvrdnja (b) dokazana.

Dokažimo sada tvrdnju (a). Definirano preslikavanje sa $\mathbb{R}^n$ u G je očito neprekidno (čak i polinomijalno). Neka je $x \in G$. Definirajmo $n-$torku $(t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}^n$ ovako:

$$t_1 = x_1(x), \qquad t_j = x_j(x) - g_j(t_1, \ldots, t_{j-1}), \quad j \ge 2.$$

Tada je i preslikavanje $x \mapsto (t_1, \ldots, x_n)$ također neprekidno (u stvari, također polinomijalno). Stavimo $y = (\exp t_1X_1)\cdots(\exp t_nX_n)$. Indukcijom po j slijedi da je $x_j(y) = x_j(x)$ za svaki $j = 1, \ldots, n$. Prema tome, vrijedi $y = x$, i to pokazuje da je preslikavanje $x \mapsto (t_1, \ldots, t_n)$ inverzno preslikavanju $(t_1, \ldots, t_n) \mapsto (\exp t_1X_1)\cdots(\exp t_nX_n)$.

Korolar 3.13. *Neka je $\mathfrak{k}$ ideal u $\mathfrak{g}$ kodimenzije* 1, $K = \exp \mathfrak{k}$ *i* $X \in \mathfrak{g} \setminus \mathfrak{k}$. *Tada su preslikavanja* $(t, x) \mapsto (\exp tX)x$ *i* $(t, x) \mapsto x(\exp tX)$ *homeomorfizmi sa* $\mathbb{R} \times K$ *na* G.

Dokaz: Neka je $(X_2, \ldots, X_n)$ Jordan$-$Hölderova baza od $\mathfrak{k}$ takva da je *span* $\{X_i, \ldots, X_n\}$ ideal u $\mathfrak{g}$ za $2 \le i \le n$. Za $X_1 = X$ tada je $(X_1, \ldots, X_n)$ Jordan$-$Hölderova baza od $\mathfrak{g}$. Neka je $(x_1, \ldots, x_n)$ pripadni Kartezijev koordinatni sustav na G, $X_j(x_i) = \delta_{ij}$. Po korolaqru 3.12. preslikavanje $F : (t_2, \ldots, t_n) \mapsto (\exp t_2X_2)\cdots(\exp t_nX_n)$ je homeomorfizam sa $\mathbb{R}^{n-1}$ na K, a preslikavanje $\Phi : (t_1, \ldots, t_n) \mapsto (\exp t_1X_1)\cdots(\exp t_nX_n)$ je homeomorfiza,m sa $\mathbb{R}^n$ na G. Definiramo preslikavanje $\Psi : \mathbb{R} \times K \to G$ ovako

$$\Psi(t, x) = (\exp tX)x, \qquad t \in \mathbb{R}, \quad x \in K.$$

Tada je $\Psi \circ (id_{\mathbb{R}} \times F) = \Phi$, pa je $\Psi = \Phi \circ (id_{\mathbb{R}} \times F^{-1})$ homeomorfizam sa $\mathbb{R} \times K$ na G.

Definiramo sada preslikavanje $\Psi_1 : \mathbb{R} \times K \to G$ sa

$$\Psi_1(t, x) = x(\exp tX), \qquad t \in \mathbb{R}, \quad x \in K.$$

Neka su $f : G \to G$, $h : K \to K$ i $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ homeomorfizmi definirani sa

$$f/x) = x^{-1}, \quad x \in G, \qquad h(y) = y^{-1}, \quad y \in K, \qquad g(t) = -t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Tada je

$$f(\Psi((g \times h)(t, x))) = f(\Psi(-t, x^{-1})) = f((\exp -tX)x^{-1}) = x(\exp tX) = \Psi_1(t, x).$$

Dakle, vrijedi $\Psi_1 = f \circ \Psi \circ (g \times h)$, pa zaključujemo da je i Ψ_1 homeomorfizam sa $\mathbb{R} \times K$ na G.

Poglavlje 4

INVARIJANTNE MJERE

Neka je M lokalno kompaktan Hausdorffov topološki prostor. Za vektorski prostor V i funkciju $f : M \to V$ definiramo **nosač funkcije** f :

$$Supp\, f = Cl\, \{m \in M;\ f(m) \neq 0\}.$$

Pri tome $Cl\, A$ označava zatvarač podskupa $A \subseteq M$ u topološkom prostoru M. Ako je N topološki prostor, $C(M,N)$ označava skupo svih neprekidnih funkcija $f : M \to N$. Ako je V topološki vektorski prostor, $C(M,V)$ je vektorski prostor nad istim poljem kao i V − operacije su definirane po točkama. U tom slučaju $C_0(M,V)$ označava potprostor svih $f \in C(M,V)$ takvih da je $Supp\, f$ kompaktan. Pišemo $C(M) = C(M,\mathbb{C})$ i $C_0(M) = C_0(M,\mathbb{C})$. Nadalje, stavljamo

$$C^+(M) = \{f \in C(M);\ f(m) \geq 0\ \forall m \in M\}, \qquad C_0^+(M) = C^+(M) \cap C_0(M).$$

Za $f \in C_0(M)$ i $T \subseteq M$ definiramo

$$\|f\|_T = \sup\, \{|f(t)|;\ t \in T\}.$$

Mjera na M je linearni funkcional $\mu : C_0(M) \to \mathbb{C}$ sa sljedećim svojstvom ograničenosti (tj. neprekidnosti):

Za svaki kompakt $K \subseteq M$ postoji $m_K > 0$ takav da vrijedi:

$$f \in C_0(M),\ \ Supp\, f \subseteq K \qquad \Longrightarrow \qquad |\mu(f)| \leq m_K \|f\|_K.$$

Pozitivna mjera na M je linearni funkcional $\mu : C_0(M) \to \mathbb{C}$ takav da vrijedi

$$f \in C_0^+(M) \qquad \Longrightarrow \qquad \mu(f) \geq 0.$$

Pokazuje se da je svaka pozitivna mjera na M stvarno mjera na M, tj. da zadovoljava gornji uvjet ograničenosti.

Za mjeru μ na M i za $f \in C_0(M)$ upotrebljavat ćemo uobičajenu oznaku:

$$\mu(f) = \int_M f(m)\mathrm{d}\mu(m).$$

Sa $\mathfrak{M}(M)$ označavamo skup svih mjera na M, a sa $\mathfrak{M}^+(M)$ skup svih pozitivnih mjera na M. Naravno, $\mathfrak{M}(M)$ je kompleksan vektorski prostor, a $\mathfrak{M}^+(M)$ konus u prostoru $\mathfrak{M}(M)$.

Ako je G grupa, S skup, $f : G \to S$ funkcija i $x \in G$, definiramo funkcije $\lambda_x f, \rho_x f, \check{f} : G \to S$ ovako:

$$(\lambda_x f)(y) = f(x^{-1}y), \qquad (\rho_x f)(y) = f(yx), \qquad \check{f}(y) = f(y^{-1}), \qquad y \in G.$$

U daljnjem G označava lokalno kompaktnu topološku grupu. Za $\mu \in \mathfrak{M}(M)$ i $x \in G$ definiramo $\lambda_x\mu, \rho_x\mu, \check{\mu} \in \mathfrak{M}(G)$ ovako:

$$(\lambda_x\mu)(f) = \mu(\lambda_{x^{-1}}f), \qquad (\rho_x\mu)(f) = \mu(\rho_{x^{-1}}f), \qquad \check{\mu}(f) = \mu(\check{f}), \qquad f \in C_0(M).$$

$\mu \in \mathfrak{M}(G)$ zove se **lijevoinvarijantna mjera** na G ako je $\lambda_x\mu = \mu$ $\forall x \in G$, **desnoinvarijantna mjera** na G ako je $\rho_x \in G$, **lijeva Haarova mjera** na G ako je $\mu \in \mathfrak{M}^+(G)$, $\mu \neq 0$ i μ je lijevoinvarijantna, **desna Haarova mjera** na G ako je $\mu \in \mathfrak{M}^+(G)$, $\mu \neq 0$ i μ je desnoinvarijantna. Bez dokaza navodimo:

Teorem 4.1. *Neka je G lokalmno kompaktna topološka grupa.*

(*a*) *Postoji lijeva Haarova mjera μ_ℓ i desna Haarova mjera μ_r na G.*

(*b*) *Ako je μ lijevoinvarijantna (odnosno, desnoinvarijantna) mjera na G, postoji $c \in \mathbb{C}$ takav da je $\mu = c\mu_\ell$ (odnosno, $\mu = c\mu_r$).*

(*c*) *Ako je $f \in C_0^+(G)$ i $f \neq 0$ onda je $\mu_\ell(f) > 0$ i $\mu_r(f) > 0$.*

Lokalno kompaktna grupa zove se **unimodularna** ako je njena lijeva Haarova mjera ujedno i desna Haarova mjera. Ta se mjera tada zove kratko **Haarova mjera**. Naravno, tada je zbog tvrdnje (*b*) u teoremu 4.1. svaka lijevoinvarijantna mjera ujedno desnoinvarijantna i zovemo je invarijantnom mjerom.

Korolar 4.2. *Neka je μ invarijantna mjera na unimodularnoj grupi G. Tada je $\check{\mu} = \mu$.*

Dokaz: Pomoću tvrdnje (*b*) u teoremu 4.1. dokaz se svodi na slučaj kad je μ Haarova mjera na G. Tada je i mjera $\check{\mu}$ Haarova, pa postoji $c > 0$ takav da je $\check{\mu} = c\mu$. Odatle je $\mu = (c\mu)\check{} = c\check{\mu} = c^2\mu$. No tada je $c^2 = 1$, dakle, $c = 1$, odnosno, $\check{\mu} = \mu$.

Neka je H zatvorena podgrupa od G i neka je $M = H\backslash G$ skup svih lijevih $H-$klasa u G :

$$M = H\backslash G = \{Hx;\ x \in G\}, \qquad Hx = \{yx;\ y \in H\}.$$

Neka je $p : G \to M$ kanonska surjekcija, $p(x) = Hx$. Pomoću p uvodimo na M tzv. kvocijentnu topologiju:

$$\text{skup} \quad U \subseteq M \quad \text{je otvoren} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \text{skup} \quad p^{-1}(U) = \{x \in G;\ p(x) \in U\} \subseteq G \quad \text{je otvoren.}$$

Bez dokaza navodimo:

Teorem 4.3. (*a*) *M je lokalno kompaktan Hausdorffov topološki prostor.*

(*b*) *Preslikavanje $p : G \to M$ je neprekidno i otvoreno.*

(*c*) *Za svaki kompakt $K \subseteq M$ postoji kompakt $L \subseteq G$ takav da je $p(L) = K$. Tada je*

$$p^{-1}(K) = HL = \{yx;\ y \in H,\ x \in L\}.$$

(*d*) *Neka je T topološki prostor i neka je $f : G \to T$ funkcija sa svojstvom $f(yx) = f(x)$ $\forall y \in H$ i $\forall x \in G$. Definiramo funkciju $\varphi : M \to T$ sa $\varphi(p(x)) = f(x)$, $x \in G$. Funkcija φ je neprekidna ako i samo ako je funkcija f neprekidna.*

Za $x \in G$ i $m \in M = H\backslash G$ definiramo $mx \in M$ sa $p^{-1}(mx) = p^{-1}(m)x$; tj. $(Hy)x = Hyx$, $y, x \in G$. Tada je $(m, x) \mapsto mx$ neprekidno preslikavanje sa $M \times G$ u M i očito vrijedi

$$me = m, \qquad (mx)y = m(xy), \qquad m \in M, \quad x, y \in G.$$

Za funkciju f na M i za $x \in G$ definiramo funkciju $\rho_x f$ na M sa

$$(\rho_x f)(m) = f(mx), \qquad m \in M.$$

Nadalje, za $\mu \in \mathfrak{M}(M)$ definiramo $\rho_x \mu \in \mathfrak{M}(M)$ sa

$$(\rho_x \mu)(f) = \mu(\rho_{x^{-1}} f), \qquad f \in C_0(M),$$

tj.

$$\int_M f(m)\mathrm{d}(\rho_x \mu)(m) = \int_M f(mx^{-1})\mathrm{d}\mu(m), \qquad f \in C_0(M).$$

Mjera $\mu \in \mathfrak{M}(M)$ zove se $G-$**invarijantna**, ako je $\rho_x \mu = \mu$ $\forall x \in G$.

U daljnjem pretpostavljamo da su grupa G i njena zatvorena podgrupa H unimodularne. Fiksirajmo Haarovu mjeru μ na G i Haarovu mjeru ν na H. Za $f \in C_0(G)$ definiramo funkciju $F : G \to \mathbb{C}$ sa

$$F(x) = \int_H f(yx)\mathrm{d}\nu(y), \qquad x \in G.$$

Lako se vidi da je tada funkcija F neprekidna, $F \in C(G)$. Nadalje, zbog invarijantnosti mjere ν na grupi H vrijedi $F(yx) = F(x)$ $\forall y \in H$ i $\forall x \in G$, pa možemo definirati funkciju $f_\nu \in C(M)$ sa $f_\nu \circ p = F$, tj.

$$f_\nu(p(x)) = f_\nu(Hx) = \int_H f(yx)\mathrm{d}\nu(y), \qquad x \in G.$$

Očito $f_\nu(p(x)) \neq 0$ povlači da je $yx \in \mathit{Supp}\, f$ za neko $y \in H$, dakle, $x \in H \cdot \mathit{Supp}\, f$. Prema tome je

$$\mathit{Supp}\, f_\nu \subseteq p(\mathit{Supp}\, f).$$

Posebno, $f_\nu \in C_0(M)$. Dakle, definirali smo linearan operator $f \mapsto f_\nu$ sa $C_0(G)$ u $C_0(M)$. Za $f \in C_0^+(G)$ i $f \neq 0$ je $f_\nu \in C_0^+(M)$ i $f_\nu \neq 0$. Lako se vidi da je u tom slučaju $\mathit{Supp}\, f_\nu = p(\mathit{Supp}\, f)$.

Propozicija 4.4. *$f \mapsto f_\nu$ je surjekcija sa $C_0(G)$ na $C_0(M)$ i surjekcija sa $C_0^+(G)$ na $C_0^+(M)$.*

Dokaz: Budući da konusi $C_0^+(G)$ i $C_0^+(M)$ razapinju vektorske prostore $C_0(G)$ i $C_0(M)$, dovoljno je dokazati drugu tvrdnju.

Neka je $\varphi \in C_0^+(M)$ i $K = \mathit{Supp}\, \varphi$. Prema tvrdnji (c) teorema 4.3. postoji kompakt $L \subseteq G$ takav da je $p(L) = K$, tj. $p^{-1}(K) = HL$. Neka je $g \in C_0^+(G)$ takva da je $g(x) > 0$ $\forall x \in L$. Tada za svako $x \in HL = p^{-1}(K)$ vrijedi $g_\nu(p(x)) > 0$. Kako je $p^{-1}(\mathit{Supp}\, \varphi) = HL$, vrijedi

$$x \in G \setminus HL \qquad \Longrightarrow \qquad \varphi(p(x)) = 0. \tag{4.1}$$

Definiramo sada funkciju $\psi : G \to \mathbb{C}$ ovako:

$$\psi(x) = \begin{cases} \frac{\varphi(p(x))}{g_\nu(p(x))} & \text{ako je} \quad g_\nu(p(x)) > 0 \\ 0 & \text{ako je} \quad g_\nu(p(x)) = 0. \end{cases}$$

Skupovi $U_1 = G \setminus HL$ i $U_2 = \{x \in G;\ g_\nu(p(x)) > 0\}$ su otvoreni podskupovi od G, a iz (4.1) slijedi da je $G = U_1 \cup U_2$. Vrijedi $\psi|U_1 = 0$, posebno, restrikcija $\psi|U_1$ je neprekidna. Iz definicije je očito da je i restrikcija $\psi|U_2$ neprekidna. Zaključujemo da je $\psi \in C(G)$. Definiramo sada $f = \psi g \in C_0^+(G)$. Tada je

$$\varphi(p(x)) = \psi(x) g_\nu(p(x)) \qquad \forall x \in G.$$

Nadalje, $\psi(yx) = \psi(x)$ $\forall y \in H$ i $\forall x \in G$. Stoga je

$$f_\nu(p(x)) = \int_H \psi(yx) g(yx) \mathrm{d}\nu(y) = \psi(x) g_\nu(p(x)) = \varphi(p(x)), \qquad x \in G.$$

Dakle, $\varphi = f_\nu$.

Teorem 4.5. *Neka je G lokalno kompaktna unimodularna grupa, H njena zatvorena unimodularna podgrupa, $M = H\backslash G$, μ Haarova mjera na G, ν Haarova mjera na H.*

(*a*) *Postoji jedinstvena mjera $m \in \mathfrak{M}(M)$ takva da je*

$$m(f_\nu) = \mu(f) \qquad \forall f \in C_0(G).$$

(*b*) *$m \in \mathfrak{M}^+(M)$ i vrijedi $m(\varphi) > 0$ $\forall \varphi \in C_0^+(M) \setminus \{0\}$.*

(*c*) *Mjera $m_1 \in \mathfrak{M}(M)$ je $G-$invarijantna ako i samo ako je $m_1 = cm$ za neko $c \in \mathbb{C}$.*

Dokaz: Neka je funkcija $f \in C_0(G)$ u jezgri operatora $f \mapsto f_\nu$, tj. $f_\nu = 0$. Izaberimo $\psi \in C_0^+(M)$ tako da bude $\psi(p(x)) = 1$ $\forall x \in Supp\, f$. Tada je

$$f(x) = f(x)\psi(p(x)) \qquad \forall x \in G.$$

Prema propoziciji 4.4. postoji $\varphi \in C_0^+(G)$ takva da je $\varphi_\nu = \psi$. Korištenjem Fubinijevog teorema za neprekidne funkcije s kompakt nim nosačem, nalazimo

$$\mu(f) = \int_G f(x) \mathrm{d}\mu(x) = \int_G f(x) \varphi_\nu(p(x)) \mathrm{g}\mu(x) = \int_G f(x) \left[\int_H \varphi(yx) \mathrm{d}\nu(y) \right] \mathrm{d}\mu(x) =$$

$$= \int_H \left[\int_G f(x)\varphi(yx) \mathrm{d}\mu(x) \right] \mathrm{d}\nu(y) = \int_H \left[\int_G f(y^{-1}x)\varphi(x) \mathrm{d}\mu(x) \right] \mathrm{d}\nu(y) =$$

$$= \int_G \varphi(x) \left[\int_H f(y^{-1}x) \mathrm{d}\nu(y) \right] \mathrm{d}\mu(x) = \int_G \varphi(x) \left[\int_H f(yx) \mathrm{d}\nu(y) \right] \mathrm{d}\mu(x) = \int_G \varphi(x) f_\nu(p(x)) \mathrm{d}\mu(x) = 0.$$

Odatle slijedi da postoji jedinstven linearan funkcional m na $C_0(M)$ takav da je $m(f_\nu) = \mu(f)$ $\forall f \in C_0(G)$.

Ako je $f \in C_0^+(G)$ takva da je $f_\nu \neq 0$, tada je i $f \neq 0$, dakle, $m(f_\nu) = \mu(f) > 0$. Prema tome, ako je $\varphi \in C_0^+(M) \setminus \{0\}$ onda je $m(\varphi) > 0$. Time su dokazane tvrdnje (a) i (b).

(c) Za $f \in C_0(G)$ i $x \in G$ očito vrijedi $\rho_x f_\nu = (\rho_x f)_\nu$. Dakle,

$$(\rho_x m)(f_\nu) = m\left((\rho_{x^{-1}} f)_\nu\right) = \mu(\rho_{x^{-1}} f) = \mu(f) = m(f_\nu).$$

Dakle, mjera m je $G-$invarijantna.

Očito je i svaka mjera cm, $c \in \mathbb{C}$, $G-$invarijantna. Pretpostavimo sada da je $m_1 \in \mathfrak{M}(M)$ $G-$invarijantna mjera. Definiramo $\mu_1 \in \mathfrak{M}(G)$ sa $\mu_1(f) = m_1(f_\nu)$. Tada slijedi $\rho_x \mu_1 = \mu_1$ $\forall x \in G$, pa po tvrdnji (b) teorema 4.1. postoji $c \in \mathbb{C}$ takav da je $\mu_1 = c\mu$. Odatle slijedi $m_1 = cm$.

Neka je sada K zatvorena unimodularna podgrupa od G koja sadrži podgrupu H i neka je σ Haarova mjera na K. Definiramo mjere $m \in \mathfrak{M}(H\backslash G)$, $n \in \mathfrak{M}(K\backslash G)$ i $s \in \mathfrak{M}(H\backslash K)$ sa

$$m(f_\nu) = \mu(f) = n(f_\sigma), \qquad s(\varphi_\nu) = \sigma(\varphi), \qquad f \in C_0(G), \quad \varphi \in C_0(K).$$

Neka su $T_\nu : C_0(G) \to C_0(H\backslash G)$ i $T_\sigma : C_0(G) \to C_0(K\backslash G)$ linearni operatori (surjekcije) definirane sa

$$T_\nu f = f_\nu, \qquad T_\sigma f = f_\sigma, \qquad f \in C_0(G).$$

Lema 4.6. *Vrijedi* $Ker T_\nu \subseteq Ker T_\sigma$, *tj.* $f_\nu = 0 \implies f_\sigma = 0$.

Dokaz: Neka je $f \in C_0(G)$ takva da je $f_\nu = 0$. Za fiksirano $x \in G$ definiramo $\varphi \in C_0(K)$ sa $\varphi(z) = f(zx)$. Za svako $z \in K$ tada imamo

$$\varphi_\nu(Hz) = (\rho_x f)_\nu(Hz) = (\rho_x f_\nu)(Hz) = 0.$$

Dakle, $\varphi_\nu = 0$. Stoga za izabrano $x \in G$ imamo

$$f_\sigma(Kx) = \int_K f(zx) \mathrm{d}\sigma(z) = \int_K \varphi(z) \mathrm{d}\sigma(z) = \sigma(\varphi) = s(\varphi_\nu) = 0.$$

Kako je element $x \in G$ bio proizvoljno fiksiran, zaključujemo da je $f_\sigma = 0$.

Prema tome, postoji linearna surjekcija $T : C_0(H\backslash G) \to C_0(K\backslash G)$ takva da je $T \circ T_\nu = T_\sigma$, tj. da je $T(f_\nu) = f_\sigma \ \forall f \in C_0(G)$.

Neka su $f \in C_0(G)$ i $x \in G$ i neka je funkcija $\varphi \in C_0(K)$ definirana kao u dokazu leme 4.6. sa $\varphi(z) = f(zx)$, $z \in K$. Kao u tom dokazu tada imamo

$$(Tf_\nu)(Kx) = f_\sigma(Kx) = s(\varphi_\nu) = \int_{H\backslash K} \varphi_\nu(Hz) \mathrm{d}s(Hz) = \int_{H\backslash K} f_\nu(Hzx) \mathrm{d}s(Hz).$$

Dakle, vrijedi

$$(T\psi)(Kx) = \int_{H\backslash K} \psi(Hzx) \mathrm{d}s(Hz), \qquad \psi \in C_0(H\backslash G), \quad x \in G.$$

Za $\psi \in C_0(H\backslash G)$ pišemo $\psi_s = T(\psi)$. Dakle, preslikavanje $\psi \mapsto \psi_s$ definirano je sa

$$(f_\nu)_s = f_\sigma, \qquad f \in C_0(G).$$

Neka je $\psi \in C_0(H\backslash G)$. Izaberimo $f \in C_0(G)$ tako da bude $\psi = f_\nu$. Tada je $\psi_s = f_\sigma$, pa slijedi

$$n(\psi_s) = n(f_\sigma) = \mu(f) = m(f_\nu) = m(\psi).$$

Time smo dokazali:

Propozicija 4.7. *Neka je G lokalno kompaktna unimodularna grupa, $H \subseteq K$ njene zatvorene unimodularne podgrupe, ν, σ i μ Haarove mjere na H, K i G. Neka su mjere $m \in \mathfrak{M}(H\backslash G)$, $n \in \mathfrak{M}(K\backslash G)$ i $s \in \mathfrak{M}(H\backslash K)$ definirane sa*

$$m(f_\nu) = \mu(f) = n(f_\sigma), \qquad s(\varphi_\nu) = \sigma(\varphi), \qquad f \in C_0(G), \quad \varphi \in C_0(K).$$

(*a*) *Postoji jedinstven linearan operator $\psi \mapsto \psi_s$ sa $C_0(H\backslash G)$ u $C_0(K\backslash G)$ takav da je $(f_\nu)_s = f_\sigma$ $\forall f \in C_0(G)$. To je surjekcija sa $C_0(H\backslash G)$ na $C_0(K\backslash G)$ i sa $C_0^+(H\backslash G)$ na $C_0^+(K\backslash G)$.*

(*b*) *Vrijedi*

$$\psi_s(Kx) = \int_{H\backslash K} \psi(Hzx) \mathrm{d}s(Hz), \qquad \psi \in C_0(H\backslash G), \quad x \in G.$$

(*c*) *Za $\psi \in C_0(H\backslash G)$ je $n(\psi_s) = m(\psi)$, tj.*

$$\int_{K\backslash G} \left[\int_{H\backslash K} \psi(Hzx) \mathrm{d}s(Hz) \right] \mathrm{d}n(Kx) = \int_{H\backslash G} \psi(Hx) \mathrm{d}m(Hx).$$

Neka je sada G nilpotentna grupa i $\mathfrak{g}$ njena Liejeva algebra. G je vektorski prostor, pa izbor koordinata (tj. baze) na G definira Lebesgueovu mjeru na G. Kako je exp izomorfizam vektorskih prostora sa $\mathfrak{g}$ na G, svaka baza $(X_1, \ldots, X_n)$ u $\mathfrak{g}$ definira Lebesgueovu mjeru μ na G :

$$\mu(f) = \int_G f(x)\mathrm{d}\mu(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f\left(\exp \sum_{i=1}^n t_i X_i\right) \mathrm{d}t_1 \cdots \mathrm{d}t_n, \qquad f \in C_0(G). \tag{4.2}$$

Teorem 4.8. *Neka je G nilpotentna grupa. Grupa G je unimodularna. Lebesgueova mjera na G je Haarova mjera na G.*

Dokaz: Neka je μ Lebesgueova mjera na G definirana sa (4.2) pomoću baze $(X_1, \ldots, X_n)$ od $\mathfrak{g}$. Promjena baze u $\mathfrak{g}$ ima za posljedicu množenje pripadne Lebesgueove mjere brojem > 0. Prema tome, bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $(X_1, \ldots, X_n)$ Jordan−Hölderova baza u $\mathfrak{g}$. Očito je $\mu \in \mathfrak{M}^+(G)$ i $\mu \neq 0$, pa treba još samo dokazati da je $\lambda_y \mu = \rho_y \mu = \mu \ \forall y \in G$.

Neka je $f \mapsto \tilde{f}$ izomorfizam sa $C_0(G)$ na $C_0(\mathbb{R}^n)$ definiran ovako:

$$\tilde{f}(t_1, \ldots, t_n) = f\left(\exp \sum_{i=1}^n t_1 X_i\right), \qquad (t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Neka je $y = \exp \sum_{i=1}^n s_i X_i \in G$. Neka su $\psi_2, \ldots, \psi_n$ polinomi iz teorema 3.11. Tada je

$$(\rho_y f)\tilde{}(t_1, \ldots, t_n) = \tilde{f}\,(t_1 + s_1, t_2 + s_2 + \psi_2(t_1, s_1), \ldots\ldots, t_n + s_n + \psi_n(t_1, \ldots, t_{n-1}, s_2, \ldots, s_{n-1}))$$

i

$$(\lambda_{y^{-1}} f)\tilde{}(t_1, \ldots, t_n) = \tilde{f}\,(t_1 + s_1, t_2 + s_2 + \psi_2(s_1, t_1), \ldots\ldots, t_n + s_n + \psi_n(s_1, \ldots, s_{n-1}, t_2, \ldots, t_{n-1}))$$

Uzastopnom integracijom redom po $t_n, t_{n-1}, \ldots, t_1$ odatle slijedi

$$\int_{\mathbb{R}^n} (\rho_y f)\tilde{}(t_1, \ldots, t_n)\mathrm{d}t_1 \cdots \mathrm{d}t_n = \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{f}(t_1, \ldots, t_n)\mathrm{d}t_1 \cdots \mathrm{d}t_n$$

i

$$\int_{\mathbb{R}^n} (\lambda_{y^{-1}} f)\tilde{}(t_1, \ldots, t_n)\mathrm{d}t_1 \cdots \mathrm{d}t_n = \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{f}(t_1, \ldots, t_n)\mathrm{d}t_1 \cdots \mathrm{d}t_n.$$

Dakle, za svaku funkciju $f \in C_0(G)$ i za svaki $y \in G$ vrijedi

$$(\rho_{y^{-1}}\mu)(f) = \mu(\rho_y f) = \mu(f) \qquad \text{i} \qquad (\lambda_y \mu)(f) = \mu(\lambda_{y^{-1}} f) = \mu(f).$$

Poglavlje 5

UNITARNE REPREZENTACIJE

Za Hilbertov prostor $\mathcal{H}$ sa $U(\mathcal{H})$ označavamo grupu svih unitarnih operatora na $\mathcal{H}$. **Unitarna reprezentacija** lokalno kompaktne grupe G na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$ je homomorfizam grupa $\pi : G \to U(\mathcal{H})$ sa sljedećim svojstvom neprekidnosti:

$\forall \xi \in \mathcal{H}$ *preslikavanje* $x \mapsto \pi(x)\xi$ *je neprekidno sa* G *u* $\mathcal{H}$.

Može se dokazati da je taj uvjet neprekidnosti ekvivalentan sljedećem, prividno slabijem, uvjetu:

Postoji potprostor V *od* $\mathcal{H}$, *gust u* $\mathcal{H}$, *takav da je funkcija* $x \mapsto \mathrm{Re}\,(\pi(x)\xi|\xi)$ *neprekidna u jedinici* $e \in G$ *za svaki vektor* $\xi \in V$.

<u>Skica dokaza:</u> Stavimo $\mathcal{H}_1 = \{\xi \in \mathcal{H};\ x \mapsto \pi(x)\xi$ je neprekidno u $e\}$. Tada je $\mathcal{H}_1$ zatvoren potprostor od $\mathcal{H}$. Iz identiteta

$$\|\pi(x)\xi - \xi\|^2 = 2\left(\|\xi\|^2 - \mathrm{Re}\,(\pi(x)\xi|\xi)\right)$$

slijedi $V \subseteq \mathcal{H}_1$. Dakle, $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}$. Sada iz jednakosti

$$\|\pi(x)\xi - \pi(x_0)\xi\| = \|\pi(x_0^{-1}x)\xi - \xi\|$$

slijedi da je preslikavanje $x \mapsto \pi(x)\xi$ neprekidno ne samo u točki e nego u svakoj točki $x_0 \in G$.

Kažemo da su nitarne reprezentacije π_1 i π_2 od G na Hilbertovim prostorima $\mathcal{H}_1$ i $\mathcal{H}_2$ **ekvivalentne** i pišemo $\pi_1 \simeq \pi_2$ ako postoji izometrički izomorfizam $T : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ takav da je $T\pi_1(x)T^{-1} = \pi_2(x)\ \forall x \in G$.

Neka je π unitarna reprezentacija od G na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$. Za potprostor $\mathcal{V}$ od $\mathcal{H}$ kažemo da je $\pi(G)-$**invarijantan**, ako je $\pi(x)\ cV \subseteq \mathcal{V}\ \forall x \in G$; ustvari, tada je $\pi(x)\mathcal{V} = \mathcal{V}$ $\forall x \in G$. Ako je $\mathcal{V}$ zatvoren $\pi(G)-$invarijantan potprostor od $\mathcal{H}$, tada je $x \mapsto \pi(x)|\mathcal{V}$ unitarna reprezentacija od G na Hilbertovom prostoru $\mathcal{V}$. Ta se reprezentacija označava $\pi_{\mathcal{V}}$ i zove **subreprezentacija** od π.

Reprezentacija π zove se **ireducibilna** ako je $\mathcal{H} \neq \{0\}$ i ako ne postoji zatvoren $\pi(G)-$invarijantan potprostor od $\mathcal{H}$ različit i od $\{0\}$ i od $\mathcal{H}$. U protivnom se reprezentacija π zove **reducibilna**.

Ako je $\mathcal{V}$ zatvoren $\pi(G)-$invarijantan potprostor od $\mathcal{H}$, tada je i njegov ortogonalni komplement $\mathcal{V}^\perp$ zatvoren $\pi(G)-$invarijantan potprostor od $\mathcal{H}$. Tada pišemo $\pi = \pi_{\mathcal{V}} \oplus \pi_{\mathcal{V}^\perp}$. Općenitije, ako je $(\mathcal{V}_i;\ i \in I)$ familija zatvorenih $\pi(G)-$invarijantnih potprostora od $\mathcal{H}$, takva da je $\mathcal{H} = \bigoplus_{i\in I} \mathcal{V}_i$, tada pišemo $\pi = \bigoplus_{i\in I} \pi_{\mathcal{V}_i}$.

Neka je I neprazan skup i neka je za svako $i \in I$ zadan Hilbertov prostor $\mathcal{H}_i$ i unitarna reprezentacija π_i od G na prostoru $\mathcal{H}_i$. Formiramo Hilbertov prostor $\mathcal{H} = \bigoplus_{i\in I} \mathcal{H}_i$. To je skup svih familija $(\xi_i)_{i\in I}$ takvih da je $\xi_i \in \mathcal{H}_i$ $\forall i \in I$ i da je red $\sum_{i\in I} \|\xi\|^2_{\mathcal{H}_i}$ konvergentan. Operacije u $\mathcal{H}$ su definirane po komponentama:

$$\lambda(\xi_i)_{i\in I} = (\lambda\xi_i)_{i\in I}, \qquad (\xi_i)_{i\in I} + (\eta_i)_{i\in I} = (\xi_i + \eta_i)_{i\in I}, \qquad ((\xi_i)_{i\in I}|(\eta_i)_{i\in I}) = \sum_{i\in I}(\xi_i|\eta_i)_{\mathcal{H}_i}.$$

Za $x \in G$ definiramo operator $\pi(x) : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ sa

$$\pi(x)(\xi_i)_{i\in I} = (\pi_i(x)\xi_i)_{i\in I}.$$

Lako se vidi da je tada π unitarna reprezentacija od G na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$. Nadalje, za $j \in I$ je

$$\mathcal{V}_j = \{(\xi_i)_{i\in I} \in \mathcal{H};\ \xi_i = 0\ \forall i \neq j\}$$

zatvoren $\pi(G)-$invarijantan potprostor od $\mathcal{H}$ i pripadna subreprezentacija $\pi_{\mathcal{V}_j}$ ekvivalentna je reprezentaciji π_j. Zato također pišemo $\pi = \bigoplus_{i\in I} \pi_i$.

Neka su π_1 i π_2 unitarne reprezentacije od G na Hilbertovim prostorima $\mathcal{H}_1$ i $\mathcal{H}_2$. Na tenzorskom produktu $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ vektorskih prostora $\mathcal{H}_1$ i $\mathcal{H}_2$ možemo uvesti skalarni produkt formulom

$$\left(\sum_{i=1}^n \xi_i \otimes \eta_i \middle| \sum_{j=1}^m \xi'_j \otimes \eta'_j\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (\xi|\xi'_j)_{\mathcal{H}_1}(\eta_i|\eta'_j)_{\mathcal{H}_2}, \quad \xi_i, \xi'_j \in \mathcal{H}_1,\ \eta_i, \eta'_j \in \mathcal{H}_2.$$

Upotpunjenje unitarnog prostora $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ označavamo $\mathcal{H}_1 \hat{\otimes} \mathcal{H}_2$ i zovemo Hilbertov tenzorski produkt Hilbertovih prostora $\mathcal{H}_1$ i $\mathcal{H}_2$. Zbog univerzalnog svojstva tenzorskog produkta za svaki $x \in G$ postoji jedinstven linearan operator $\pi(x) : \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \to \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ takav da je

$$\pi(x)(\xi \otimes \eta) = \pi_1(x)\xi \otimes \pi_2(x)\eta \qquad \forall \xi \in \mathcal{H}_1 \quad \text{i} \quad \forall \eta \in \mathcal{H}_2.$$

Pokazuje se da se operator $\pi(x)$ jedinstveno proširuje do neprekidnog operatora na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}_1 \hat{\otimes} \mathcal{H}_2$ koji ćemo također označiti sa $\pi(x)$. Tada je π unitarna reprezentacija od G na $\mathcal{H}_1 \hat{\otimes} \mathcal{H}_2$. Ta reprezentacija π zove se **tenzorski produkt reprezentacija** π_1 i π_2 i pišemo $\pi = \pi_1 \otimes \pi_2$.

Ako je u gornjoj konstrukciji reprezentacija π_2 trivijalna, tj $\pi_2(x) = I_{\mathcal{H}_2}$ $\forall x \in G$, onda pišemo $\pi = \pi_1 \otimes I_{\mathcal{H}_2}$. Ta se reprezentacija π zove **multipl reprezentacije** π_1. Ako je $(\eta_i)_{i\in I}$ ortonormirana baza Hilbertovog prostora $\mathcal{H}_2$, za svako $i \in I$ je $\mathcal{H}_i = \mathcal{H}_1 \otimes \mathbb{C}\eta_i$ zatvoren $\pi(G)-$invarijantaqn potprostor od $\mathcal{H}$, subreprezentacija $\pi_{\mathcal{H}_i}$ je ekvivalentna reprezntaciji π_1 i $\pi = \bigoplus_{i\in I} \pi_{\mathcal{H}_i}$. Ako je $m = \dim\, \mathcal{H}_2 = Card\, I$, pisat ćemo također $\pi = m\pi_1$.

Obratno, ako je I neprazan skup i za svaki $i \in I$ je zadana unitarna reprezentacija π_i na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}_i$, i ako su sve te reprezentacije π_i ekvivalentne reprezentaciji π_1 na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}_1$, onda je reprezentacija $\bigoplus_{i\in I} \pi_i$ ekvivalentna reprezentaciji $\pi_1 \otimes I_{\mathcal{H}_2}$, gdje je $\mathcal{H}_2$ neki (bilo koji) Hilbertov prostor dimenzije $Card\, I$.

Pomoću spektralnog teorema za ograničene hermitske operatore može se dokazati da vrijedi:

Teorem 5.1. *Neka je π unitarna reprezentacija od G na Hilberovom prostoru $\mathcal{H} \neq \{0\}$. Sljedeća su tri svojstva međusobno ekvivalentna:*

(a) *Reprezentacija π je reducibilna.*

(b) *Postoji ortogonalan projektor P na $\mathcal{H}$ različit od 0 i od $I_{\mathcal{H}}$ takav da je $P\pi(x) = \pi(x)P$ $\forall x \in G$.*

(c) *Postoji ograničen linearan operator $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ takav da je $T \neq \lambda I_{\mathcal{H}}$ $\forall \lambda \in \mathbb{C}$ i da je $T\pi(x) = \pi(x)T$ $\forall x \in G$.*

Korolar 5.2. *Neka je π_1 ireducibilna unitarna reprezentacija od G na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}_1$. Nadalje, neka je $\mathcal{H}_2$ Hilbertov prostor i $\pi = \pi_1 \otimes I_{\mathcal{H}_2}$. Za svaki ograničen lineran operator $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ takav da je $T\pi(x) = \pi(x)T$ $\forall x \in G$ postoji jedinstven ograničen linearan operator $A : \mathcal{H}_2 \to \mathcal{H}_2$ takav da vrijedi $T(\xi \otimes \eta) = \xi \otimes A\eta$ $\forall \xi \in \mathcal{H}_1$ i $\forall \eta \in \mathcal{H}_2$.*

Dokaz: Dokažimo prvo jedinstvenost. Neka su $A, B : \mathcal{H}_2 \to \mathcal{H}_2$ ograničeni linearni operatori i pretpostavimo da je $\xi \otimes A\eta = \xi \otimes B\eta$ $\forall \xi \in \mathcal{H}_1$ i $\forall \eta \in \mathcal{H}_2$. Za $\xi \in \mathcal{H}_1$, $\|\xi\| = 1$, i za proizvoljne $\eta, \zeta \in \mathcal{H}_2$ je tada

$$(A\eta|\zeta) = (\xi|\xi)(A\eta|\zeta) = (\xi \otimes A\eta|\xi \otimes \zeta) = (\xi \otimes B\eta|\xi \otimes \zeta) = (\xi|\xi)(B\eta|\zeta) = (B\eta|\zeta).$$

Odatle slijedi $A = B$.

Pretpostavimo sada da je $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ ograničen linearan operator takav da je $T\pi(x) = \pi(x)T$ $\forall x \in G$. Neka je $(\eta_i)_{i\in I}$ ortonormirana baza u $\mathcal{H}_2$ i stavimo $\mathcal{V}_i = \mathcal{H}_1 \otimes \mathbb{C}\eta_i$, $i \in I$. Tada je $\mathcal{H} = \bigoplus_{i\in I} \mathcal{V}_i$. Neka je P_i ortogonalni projektor $\mathcal{H}$ na $\mathcal{V}_i$. Nadalje, neka je S_i izometrički izomorfizam prostora $\mathcal{H}_1$ na $\mathcal{V}_i$ definiran sa $S_i\xi = \xi \otimes \eta_i$, $\xi \in \mathcal{H}_1$. Za $i, j \in I$ definiramo ograničen linearan operator $T_{ij} : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_1$ sa $T_{ij} = S_j^{-1} P_j T S_i$. $\mathcal{V}_j$ je zatvoren $\pi(G)-$invarijantan potprostor od $\mathcal{H}$, pa vrijedi $P_j\pi(x) = \pi(x)P_j$ $\forall x \in G$. Nadalje, za $x \in G$, $i \in I$ i $\xi \in \mathcal{H}_1$ imamo

$$S_i\pi_1(x)\xi = \pi_1(x)\xi \otimes \eta_i = \pi(x)(\xi \otimes \eta_i) = \pi(x)S_i\xi.$$

Dakle je $S_i\pi_1(x) = \pi(x)S_i$, a odatle i $\pi_1(x)S_i^{-1} = \pi(x)S_i^{-1}$, $\forall x \in G$. Stoga za proizvoljne $i, j \in I$ i $x \in G$ nalazimo

$$T_{ij}\pi_1(x) = S_j^{-1}P_jTS_i\pi_1(x) = S_j^{-1}P_jT\pi(x)S_i = S_j^{-1}P_j\pi(x)TS_i =$$

$$= S_j^{-1}\pi(x)P_jTS_i = \pi_1(x)S_j^{-1}P_jTS_i = \pi_1(x)T_{ij}.$$

Kako je reprezentacija π_1 ireducibilna, iz teorema 5.1. slijedi da za svaki par $(i, j) \in I \times I$ postoji $\lambda_{ij} \in \mathbb{C}$ takav da je $T_{ij} = \lambda_{ij} I_{\mathcal{H}_1}$. Sada za $\xi \in \mathcal{H}_1$, $\eta \in \mathcal{H}_2$, $\eta = \sum_{i\in I} \alpha_i\eta_i$, imamo

$$T(\xi \otimes \eta) = \sum_{i\in I} \alpha_i T(\xi \otimes \eta_i) = \sum_{i\in I} \alpha_i TS_i\xi.$$

Odatle je

$$T(\xi \otimes \eta) = \sum_{j\in I} P_jT(\xi \otimes \eta) = \sum_{j\in I} P_j \sum_{i\in I} \alpha_i TS_i\xi = \sum_{i,j\in I} \alpha_i P_jTS_i\xi =$$

$$= \sum_{i,j\in I} \alpha_i S_jT_{ij}\xi = \sum_{i,j\in I} \alpha_i\lambda_{ij}S_j\xi = \sum_{i,j\in I} \alpha_i\lambda_{ij}\xi \otimes \eta_j = \xi \otimes \sum_{i,j\in I} \alpha_i\lambda_{ij}\eta_j.$$

Sada definiramo linearan operator $A : \mathcal{H}_2 \to \mathcal{H}_2$ ovako:

$$A\left(\sum_{i\in I} \alpha_i\eta_i\right) = \sum_{i,j\in I} \alpha_i\lambda_{ij}\eta_j.$$

Ta je definicija smislena jer je red s desne strane konvergentan u $\mathcal{H}_2$ i operator A je ograničen. Doista, ako je $\xi \in \mathcal{H}_1$, $\|\xi\| = 1$, imamo

$$\sum_{j\in I} \left|\sum_{i\in I} \alpha_i\lambda_{ij}\right|^2 = \|T(\xi \otimes \eta)\|^2 \leq \|T\|^2\|\eta\|^2.$$

Napokon, iz gornjeg računa vdimo da vrijedi

$$T(\xi \otimes \eta) = \xi \otimes A\eta, \qquad \xi \in \mathcal{H}_1, \quad \eta \mathcal{H}_2.$$

Neka je zadana funkcija $\psi : G \to \mathbb{C}$ i neka je π unitarna reprezentacija od G na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$. Kažemo da π **reprezentacija tipa** ψ, ako postoji ortogonalan projektor P na prostoru $\mathcal{H}$ takav da vrijedi:

(1) $P\pi(x)P = \psi(x)P \ \forall x \in G$.

(2) *Najmanji zatvoren* $\pi(G)-$*invarijantan potprostor od* $\mathcal{H}$ *koji sadrži* $P\mathcal{H}$ *jednak je* $\mathcal{H}$; *tj.*

$$\mathcal{H} = Cl\left(span\left\{\pi(x)P\xi;\ x \in G,\ \xi \in \mathcal{H}\right\}\right).$$

Za $\xi \in \mathcal{H}$ kažemo da je $\pi(G)-$**ciklički vektor** ako je $\mathcal{H}$ najmanji zatvoren $\pi(G)-$invarijantan potprostor od $\mathcal{H}$, koji sadrži ξ; tj.

$$\mathcal{H} = Cl\left(span\left\{\pi(x)\xi;\ x \in G\right\}\right).$$

Ako takav vektor ξ postoji kažemo da je π **ciklička reprezentacija**.

Propozicija 5.3. *Neka je* $\xi \in \mathcal{H}$ $\pi(G)-$*ciklički vektor i* $\|\xi\| = 1$. *Stavimo* $\psi(x) = (\pi(x)\xi|\xi)$, $x \in G$. *Tada je* π *reprezentacija tipa* ψ.

Dokaz: Definiramo $P : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ sa $P\eta = (\eta|\xi)\xi$. Tada je P ortogonalni projektor i $P\mathcal{H} = \mathbb{C}\xi$. Po pretpostavci je $\mathcal{H}$ najmanji zatvoren $\pi(G)-$invarijantan potprostor od $\mathcal{H}$ koji sadrži $\mathbb{C}\xi = P\mathcal{H}$. Nadalje, za $\eta \in \mathcal{H}$ i $x \in G$ imamo

$$P\pi(x)P\eta = (\pi(x)P\eta|\xi)\xi = (\pi(x)[(\eta|\xi)\xi]|\xi)\xi = (\eta|\xi)(\pi(x)\xi|\xi)\xi = \psi(x)P\eta.$$

Propozicija 5.4. *Neka su* π_1 *i* π_2 *cikličke unitarne reprezentacije od* G *na* $\mathcal{H}_1$ *i* $\mathcal{H}_2$, *neka su* ξ_1 *i* ξ_2 *njihovi ciklički vektori i* $\|\xi_1\| = \|\xi_2\| = 1$. *Pretpostavimo da je* $(\pi_1(x)\xi_1|\xi_1) = (\pi_2(x)\xi_2|\xi_2)$ $\forall x \in G$. *Tada su reprezentacije* π_1 *i* π_2 *ekvivalentne.*

Dokaz: Za $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ i $x_1, \ldots, x_n \in G$ imamo redom

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \pi_1(x_i)\xi_1\right\|^2 = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_i \overline{\alpha}_j (\pi_1(x_i)\xi_1|\pi_1(x_j)\xi_1) = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_i \overline{\alpha}_j (\pi_1(x_j^{-1}x_i)\xi_1|\xi_1) =$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_i \overline{\alpha}_j (\pi_2(x_j^{-1}x_i)\xi_2|\xi_2) = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_i \overline{\alpha}_j (\pi_2(x_i)\xi_2|\pi_2(x_j)\xi_2) = \left\|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \pi_2(x_i)\xi_2\right\|^2.$$

To pokazuje da postoji linearna izometrija T' sa unitarnog prostora $\mathcal{H}_1' = span\left\{\pi_1(x)\xi_1;\ x \in G\right\}$ na unitarni prostor $\mathcal{H}_2' = span\left\{\pi_2(x)\xi_2;\ x \in G\right\}$ takva da je $T'\pi_1(x)\xi_1 = \pi_2(x)\xi_2 \ \forall x \in G$. Operator T' jedinstveno se proširuje do izometričkog izomorfizma T sa $Cl\,\mathcal{H}_1' = \mathcal{H}_1$ na $Cl\,\mathcal{H}_2' = \mathcal{H}_2$. Sada za proizvoljne $x, y \in G$ imamo

$$T\pi_1(x)\pi_1\pi(y)\xi_1 = T\pi_1(xy)\xi_1 = \pi_2(xy)\xi_2 = \pi_2(x)\pi_2(y)\xi_2 = \pi_2(x)T\pi_1(y)\xi_1.$$

Stoga je $T\pi_1(x)|\mathcal{H}_1' = \pi_2(x)T|\mathcal{H}_1' \ \forall x \in G$, a kako je potprostor $\mathcal{H}_1'$ gust u $\mathcal{H}_1$, zbog neprekidnosti operatora T, $\pi_1(x)$ i $\pi_2(x)$ slijedi $T\pi_1(x) = \pi_2(x)T \ \forall x \in G$. Dakle, $\pi_1 \simeq \pi_2$.

Propozicija 5.5. *Neka je π unitarna reprezentacija od G na $\mathcal{H}$ tipa ψ. Tada je π multipl cikličke reprezentacije π_1 tipa ψ i vrijedi $\psi(x) = (\pi_1(x)\xi_1|\xi_1)$ $\forall x \in G$ za neki jedinični $\pi_1(G)-$ciklički vektor ξ_1.*

Dokaz: Neka je P ortogonalan projektor na prostoru $\mathcal{H}$ takav da je

$$P\pi(x)P = \psi(x)P \qquad \forall x \in G$$

i takav da je $\mathcal{H}$ najmanji zatvoren $\pi(G)-$invarijantan potprostor od $\mathcal{H}$ koji sadrži $P\mathcal{H}$. Neka je $(\xi_i)_{i\in I}$ ortonormirana baza od $P\mathcal{H}$. Za $i \in I$ neka je $\mathcal{H}_i$ najmanji zatvoren $\pi(G)-$invarijantan potprostor od $\mathcal{H}$ koji sadrži ξ_i, tj.

$$\mathcal{H}_i = Cl\,\mathcal{H}_i', \qquad \mathcal{H}_i' = span\,\{\pi(x)\xi_i;\ x \in G\}.$$

Stavimo $\pi_i = \pi_{\mathcal{H}_i}$.

Dokazat ćemo sada da je $\mathcal{H} = \bigoplus_{i\in I}\mathcal{H}_i$. Prije svega, ako je $i \neq j$ i $x, y \in G$, onda je

$$(\pi(x)\xi_i|\pi(y)\xi_j) = (\pi(x)P\xi_i|\pi(y)P\xi_j) = (P\pi(y^{-1}x)P\xi_i|\xi_j) = \psi(y^{-1}x)(P\xi_i|\xi_j) = 0.$$

To pokazuje da je $\mathcal{H}_i' \perp \mathcal{H}_j'$, dakle i $\mathcal{H}_i \perp \mathcal{H}_j$ za $i \neq j$. Ortogonalna suma $\bigoplus_{i\in I}\mathcal{H}_i$ je zatvoren $\pi(G)-$invarijantan potprostor od $\mathcal{H}$ koji sadrži $P\mathcal{H}$, dakle jednaka je $\mathcal{H}$. Time je dokazano da je $\pi = \bigoplus_{i\in I}\pi_i$.

Svaka reprezentacija π_i je ciklička i ξ_i je jedinični $\pi_i(G)-$ciklički vektor. Po propoziciji 5.3. ona je tipa ψ_i, gdje je $\psi_i(x) = (\pi_i(x)\xi_i|\xi_i)$. Međutim, za svaki $x \in G$ je

$$\psi_i(x) = (\pi_i(x)\xi_i|\xi_i) = (\pi(x)P\xi_i|P\xi_i) = (P\pi(x)P\xi_i|\xi_i) = \psi(x)(\xi_i|\xi_i) = \psi(x).$$

Stoga su po propoziciji 5.4. sve reprezentacije π_i međusobno ekvivalentne.

Poglavlje 6

INDUCIRANE REPREZENTACIJE

Neka je G lokalno kompaktna unimodularna grupa, H njena zatvorena unimodularna podgrupa, $M = H\backslash G$, $p : G \to M$ kanonska surjekcija ($p(x) = Hx$, $x \in G$), μ Haarova mjera na G, ν Haarova mjera na H i $m \in \mathfrak{M}(M)$ $G-$invarijantna mjera na M definirana kao u poglavlju 4.:

$$m(f_\nu) = \mu(f), \qquad f_\nu(Hx) = \int_H f(hx)\mathrm{d}\nu(h), \qquad f \in C_0(G).$$

Neka je τ unitarna reprezentacija grupe H na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$. Označimo sa $C(G,\tau)$ vektorski prostor svih funkcija $f \in C(G,\mathcal{H})$ sa svojstvom

$$f(hx) = \tau(h)f(x) \qquad \forall h \in H \quad \text{i} \quad \forall x \in G. \tag{6.1}$$

Ako je $f \in C(G,\tau)$, njen nosač $\mathit{Supp}\, f$ je unija lijevih $H-$klasa. Sa $C_0(G,\tau)$ označimo potprostor svih funkcija $f \in C(G,\tau)$ takvih da je skup $p(\mathit{Supp}\, f) \subseteq M$ kompaktan, tj. takvih da postoji kompakt $K \subseteq G$ takav da je $\mathit{Supp}\, f \subseteq HK$ (v. prop. 4.3.).

Za $f, g \in C_0(G,\tau)$ $x \mapsto (f(x)|g(x))$ je neprekidna kompleksna funkcija na G i za bilo koje $x \in G$ i $h \in H$ vrijedi

$$(f(hx)|g(hx)) = (\tau(h)f(x)|\tau(h)g(x)) = (f(x)|g(x)).$$

To znači da možemo definirati funkciju $F_{f,g} \in C(M)$ ovako:

$$F_{f,g}(Hx) = (f(x)|g(x)), \qquad x \in G.$$

Nosač $\mathit{Supp}\, F_{f,g}$ sadržan je u $p((\mathit{Supp}\, f) \cap (\mathit{Supp}\, g))$, dakle, kompaktan je. Prema tome, $F_{f,g} \in C_0(M)$.

Za $f, g \in C_0(G,\tau)$ definiramo

$$(f|g) = m(F_{f,g}) = \int_M (f(x)|g(x))\mathrm{d}m(Hx).$$

Lako se vidi da je tada $(\,\cdot\,|\,\cdot\,)$ skalarni produkt na prostoru $C_0(G,\tau)$. Sa $L_2(G,\tau)$ označavat ćemo Hilbertov prostor koji je upotpunjenje unitarnog prostora $C_0(G,\tau)$. Može se pokazati da se $L_2(G,\tau)$ može realizirati kao prostor svih klasa $\mu-$izmjerivih funkcija $f : G \to \mathcal{H}$ koje zadovoljavaju (6.1) i za koje je funkcija $F_{f,f}$ $m-$integrabilna. Pri tome riječ *klasa* znači klasu ekvivalencije u odnosu na relaciju ekvivalencije

$$f \sim g \qquad \Longleftrightarrow \qquad \text{skup} \quad \{x \in G;\ f(x) \neq g(x)\} \quad \text{je } \mu-\text{zanemariv},$$

a skup $L \subseteq G$ zove se $\mu-$*zanemariv* ako je $\mu(L \cap K) = 0$ za svaki kompakt $K \subseteq G$.

Za $x \in G$ i $f \in C_0(G,\tau)$ definiramo funkciju $\rho_x f : G \to \mathcal{H}$ kao i prije: $(\rho_x f)(y) = f(yx)$. Tada je $\rho_x f \in C(G,\mathcal{H})$, za $h \in H$ i $y \in G$ vrijedi

$$(\rho_x f)(hy) = f(hyx) = \tau(h)f(yx) = \tau(h)(\rho_x f)(y),$$

dakle, $\rho_x f \in C(G,\tau)$, i napokon, $p(Supp\,\rho_x f) = p((Supp\,f)x^{-1}) = p(Supp\,f)x^{-1}$ je kompaktan podskup od M, dakle, $\rho_x f \in C_0(G,\tau)$. Očito je preslikavanje $\rho_x : C_0(G,\tau) \to C_0(G,\tau)$ linearan operator. Za $f,g \in C_0(G,\tau)$ i $x \in G$ imamo

$$F_{\rho_x f,\rho_x g}(Hy) = ((\rho_x f)(y)|(\rho_x g)(y)) = (f(yx)|g(yx)) = F_{f,g}(yx) = (\rho_x F_{f,g})(y), \qquad y \in G.$$

Dakle, $F_{\rho_x f,\rho_x g} = \rho_x F_{f,g}$, pa zbog $G-$invarijantnosti mjere m dobivamo

$$(\rho_x f|\rho_x g) = m\left(F_{\rho_x,f,\rho_x g}\right) = m(\rho_x F_{f,g}) = (\rho_{x^{-1}} m)(F_{f,g}) = m(F_{f,g}) = (f|g).$$

Stoga se operator ρ_x jedinstveno proširuje do izometrije $\pi(x)$ Hilbertovog prostora $L_2(G,\tau)$. Iz $\rho_x\rho_y = \rho_{xy}$ i $\rho_e = I_{C_0(G,\tau)}$ slijedi $\pi(x)\pi(y) = \pi(xy)$ i $\pi(e) = I_{L_2(G,\tau)}$. Prema tome, π je homomorfizam grupe G u grupu unitarnih operatora $U\left(L_2(G,\tau)\right)$. U svari, π je reprezenacija G na Hilbertovom prostoru $L_2(G,\tau)$. Da bismo to dokazali dovoljno je provjeriti da je $x \mapsto (\pi(x)f|g)$ neprekidna funkcija u jedinici $e \in G$ $\forall f,g \in C_0(G,\tau)$, a to lagano slijedi iz elementarnih svojstava integrala.

Tako smo došli do unitarne reprezentacije π od G na Hilbertovom prostoru $L_2(G,\tau)$. Za reprezentaciju π kažemo da je inducirana reprezentacijom τ od H i pišemo

$$\pi = Ind\,\tau = Ind_H^G\,\tau.$$

Za $\varphi \in C_0(G,\mathcal{H})$ i $\xi \in \mathcal{H}$ definiramo funkciju $\Phi(\varphi,\xi) : G \to \mathbb{C}$ ovako:

$$\Phi(\varphi,\xi)(x) = \int_H (\tau(h)\varphi(h^{-1}x)|\xi)\mathrm{d}\nu(h), \qquad x \in G.$$

Za fiksne φ i ξ preslikavanje $\xi \mapsto \Phi(\varphi,\xi)(x)$ je antilinearan fukcional na $\mathcal{H}$. Nadalje, vrijedi

$$|\Phi(\varphi,\xi)(x)| \le \int_H \|\varphi(h^{-1}x)\|\|\xi\|\mathrm{d}\nu(h) = \|\xi\| \int_H \|(\rho_x\varphi)(h)\|\mathrm{d}\nu(h) = \|\xi\|\nu(\|\rho_x\varphi\|),$$

gdje je funkcija $\|\rho_x\varphi\| \in C_0^+(H)$ definirana sa $\|\rho_x\varphi\|(h) = \|(\rho_x\varphi)(h)\| = \|\varphi(hx)\|$. Dakle, $\xi \mapsto \Phi(\varphi,\xi)(x)$ je ograničen antilinearan fukcional na $\mathcal{H}$. Stoga postoji jedinstven vektor $\eta \in \mathcal{H}$ takav da je $\Phi(\varphi,\xi)(x) = (\eta|\xi)$ $\forall \xi \in \mathcal{H}$. Pisat ćemo

$$\eta = \Phi(\varphi)(x) = \int_H \tau(h)\varphi(h^{-1}x)\mathrm{d}\nu(h).$$

Kao malo prije nalazimo

$$|(\Phi(\varphi)(x) - \Phi(\varphi)(y)|\xi)| \le \nu(\|\rho_x\varphi - \rho_y\varphi\|)\|\xi\|,$$

pa je

$$\|\Phi(\varphi)(x) - \Phi(\varphi)(y =)\| \le \nu(\|\rho_x\varphi - \rho_y\varphi\|).$$

Odatle lako slijedi da je $\Phi(\varphi) \in C(G,\mathcal{H})$. Za $h \in H$ i $x \in G$ i za proizvoljan $\xi \in \mathcal{H}$ nalazimo zbog invarijantnosti mjere ν :

$$(\Phi(\varphi)(hx)|\xi) = \Phi(\varphi,\xi)(hx) = \int_H (\tau(k)\varphi(k^{-1}hx)|\xi)\mathrm{d}\nu(k) = \int_H (\tau(hk)\varphi(k^{-1}x)|\xi)\mathrm{d}\nu(k) =$$

$$= \int_H (\tau(k)\varphi(k^{-1}x)|\tau(h^{-1})\xi)\mathrm{d}\nu(k) = \Phi(\varphi,\tau(h^{-1})\xi)(x) = (\Phi(\varphi)(x)|\tau(h^{-1})\xi) = (\tau(h)\Phi(\varphi)(x)|\xi).$$

Zbog prozvoljnosti vektora $\xi \in \mathcal{H}$ slijedi

$$\Phi(\varphi)(hx) = \tau(h)\Phi(\varphi)(x), \qquad h \in H, \quad x \in G.$$

To znači da je $\Phi(\varphi) \in C(G, \tau)$. Napokon,

$$Supp\,\Phi(\varphi) \subseteq H(Supp\,\varphi) \qquad \Longrightarrow \qquad p(Supp\,\Phi(\varphi)) \subseteq p(Supp\,\varphi).$$

Dakle, $p(Supp\,\Phi(\varphi))$ je kompaktan podskup od M, što znači da je $\Phi(\varphi) \in C_0(G, \tau)$. Zaključujemo da smo na taj način definirali linearan operator $\Phi : C_0(G, \mathcal{H}) \to C_0(G, \tau)$.

Lema 6.1. $\Phi : C_0(G, \mathcal{H}) \to C_0(G, \tau)$ *je surjekcija.*

Dokaz: Neka je $f \in C_0(G, \tau)$. Neka je $K \subseteq G$ kompakt takav da je $Supp\, f \subseteq HK$. Neka je $\psi \in C_0^+(G)$ takva da je $\psi(x) > 0\ \forall x \in K$. Definiramo $F : G \to \mathcal{H}$ sa

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{\psi_\nu(Hx)} f(x) & \text{ako je} \quad \psi_\nu(Hx) > 0 \\ 0 & \text{ako je} \quad \psi_\nu(Hx) = 0. \end{cases}$$

Sasvim analogno kao u dokazu propozicije 4.4. slijedi da je $F \in C(G, \mathcal{H})$. Nadalje, $F(hx) = \tau(h)F(x)$ za $h \in H$ i $x \in G$. Definiramo $\varphi = \psi F \in C_0(G, \mathcal{H})$. Budući da za svaki $x \in G$ vrijedi $\psi_\nu(Hx)F(x) = f(x)$, imamo

$$\Phi(\varphi)(x) = \int_H \tau(h)\psi(h^{-1}x)F(h^{-1}x)\mathrm{d}\nu(h) = \int_H \psi(h^{-1}x)F(x)\mathrm{d}\nu(h) =$$
$$= \int_H \psi(hx)\mathrm{d}\nu(h) \cdot F(x) = \psi_\nu(Hx)F(x) = f(x).$$

Dakle, $\Phi(\varphi) = f$ i ti8me je surjektivnost dokazana.

Napomenimo da tenzorski produkt $C_0(G) \otimes \mathcal{H}$ možemo identificirati s potprostorom vektorskog prostora $C_0(G, \mathcal{H})$ tako da bude

$$(\varphi \otimes \xi)(x) = \varphi(x)\xi, \qquad \varphi \in C_0(G), \quad \xi \in \mathcal{H}, \quad x \in G.$$

Lema 6.2. *Za svako $x \in G$ je $\{f(x);\ f \in C_0(G, \tau)\}$ je gust potprostor od $\mathcal{H}$. Za sve $x \in G$ to je isti potprostor i on je $\tau(H)-$invarijantan.*

Dokaz: Stavimo $\mathcal{H}_x = \{f(x);\ f \in C_0(G, \tau)\}$. Imamo $\rho_x C_0(G, \tau) = C_0(G, \tau)$, pa je očito $\mathcal{H}_x = \mathcal{H}_e\ \ \forall x \in G$. Za $h \in H$ je $\tau(h)\mathcal{H}_e = \mathcal{H}_h = \mathcal{H}_e$, dakle, potprostor $\mathcal{H}_e$ je $\tau(H)-$invarijantan.

Neka je $\xi \in \mathcal{H}$ i $\varepsilon > 0$. Neka je U otvorena okolina od e u G takva da vrijedi

$$h \in U \cap H \qquad \Longrightarrow \qquad \|\tau(h)\xi - \xi\| \leq \varepsilon.$$

Neka je $\varphi \in C_0^+(G)$ takva da je $Supp\,\varphi \subseteq U$ i $\int_H \varphi(h)\mathrm{d}\nu(h) = 1$. Tada je $\Phi(\varphi \otimes \xi)(e) \in \mathcal{H}_e$ i

$$\|\Phi(\varphi \otimes \xi)(e) - \xi\| = \left\| \int_H \varphi(h^{-1})\tau(h)\xi\mathrm{d}\nu(h) - \int_H \varphi(h^{-1})\mathrm{d}\nu(h)\xi \right\| \leq$$
$$\leq \int_H \varphi(h^{-1})\|\tau(h)\xi - \xi\|\mathrm{d}\nu(h) \leq \varepsilon \int_H \varphi(h^{-1})\mathrm{d}\nu(h) = \varepsilon.$$

Dakle, potprostor $\mathcal{H}_e$ je gust u Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$.

Potprostor iz leme 6.2. označavat ćemo sa $\mathcal{H}(G)$:

$$\mathcal{H}(G) = \{f(x);\ f \in C_0(G, \tau)\} \qquad \text{za bilo koji} \quad x \in G.$$

U daljnjem ćemo $C_0(G, \mathcal{H})$ promatrati kao normiran prostor s normom

$$\|f\|_\infty = \max\{\|f(x)\|;\ x \in G\}.$$

Lema 6.3. *Neka je $\mathcal{V}$ potprostor od $\mathcal{H}$ gust u $\mathcal{H}$. Za dane $\varphi \in C_0(G, \mathcal{H})$, $\varepsilon > 0$ i otvorenu okolinu U od $Supp\, \varphi$, postoji $\psi \in C_0(G) \otimes \mathcal{V}$ takva da je $Supp\, \psi \subseteq U$ i da je $\|\varphi - \psi\|_\infty \leq \varepsilon$. Ako je G nilpotentna grupa, možemo izabrati $\psi \in C_0^\infty(G) \otimes \mathcal{V}$.*

Dokaz: Neka je $\varphi \in C_0(G, \mathcal{H})$, $K = Supp\, \varphi$, $\varepsilon > 0$ i U otvorena okolina od K u G. Za $x \in K$ neka je $V_x \subseteq U$ otvorena okolina od x takva da vrijedi

$$y \in V_x \qquad \Longrightarrow \qquad \|\varphi(x) - \varphi(y)\| \leq \frac{\varepsilon}{4}.$$

Tada je skup K sadržan u uniji skupova V_x, pa zbog kompaktnosti od K postoje $x_1, \ldots, x_n \in K$ takvi da je

$$K \subseteq V_{x_1} \cup \cdots \cup V_{x_n}.$$

Neka su $\xi_i \in \mathcal{V}$ takvi da je

$$\|\xi_i - \varphi(x_i)\| \leq \frac{\varepsilon}{4}, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Tada vrijedi

$$x \in V_{x_i} \qquad \Longrightarrow \qquad \|\varphi(x) - \xi_i\| \leq \frac{\varepsilon}{2}, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Neka su funkcije $\psi_1, \ldots, \psi_n \in C_0^+(G)$ takve da vrijedi

(*a*) $Supp\, \psi_i \subseteq V_{x_i}$, za $i = 1, \ldots, n$,

(*b*) $\psi_1(x) + \cdots + \psi_n(x) = 1 \ \ \forall x \in K$,

(*c*) $\psi_1(x) + \cdots + \psi_n(x) \leq 1 \ \ \forall x \in G$.

Stavimo $\varphi_i = \psi_i \varphi \in C_0(G, \mathcal{H})$. Tada je $\varphi = \varphi_i + \cdots + \varphi_n$. Za $x \in G \backslash V_{x_i}$ je $(\psi_i \otimes \xi_i)(x) = 0 = \varphi_i(x)$, a za $x \in V_{x_i}$ imamo

$$\|(\psi_i \otimes \xi_i)(x) - \varphi_i(x)\| = \|\psi_i(x)\xi_i - \psi_i(x =)\varphi(x)\| \leq \frac{\varepsilon}{2}\psi_i(x).$$

Dakle, vrijedi

$$\|(\psi_i \times \xi_i)(x) - \varphi_i(x)\| \leq \frac{\varepsilon}{2}\Psi_i(x), \qquad x \in G, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Stavimo sada $\psi = \psi_1 \otimes \xi_1 + \cdots + \psi_n \otimes \xi_n$. Tada je $\psi \in C_0(G) \otimes \mathcal{V}$, $Supp\, \psi \subseteq U$ i za svako $x \in G$ je

$$\|\psi(x) - \varphi(x)\| = \left\| \sum_{i=1}^n (\psi_i \otimes \xi_i)(x) - \sum_{i=1}^n \varphi_i(x) \right\| \leq \frac{\varepsilon}{2} \sum_{i=1}^n \psi_i(x) = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Pretpostavimo sada da je G nilpotentna grupa. Za svako $i \in \{1, \ldots, n\}$ odaberemo $\chi_i \in C_0^\infty(G)$ tako da bude

$$Supp\, \chi_i \subseteq V_{x_i} \qquad \text{i} \qquad |\psi_i(x) - \chi_i(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2n\|\xi_i\|} \quad \forall x \in G.$$

Stavimo $\chi = \chi_1 \otimes \xi_1 + \cdots + \chi_n \otimes \xi_i$. Tada je $\chi \in C_0^\infty(G) \otimes \mathcal{V}$, $Supp\, \chi \subseteq U$ i za svaki $x \in G$ vrijedi

$$\|\chi(x) - \psi(x)\| \leq \sum_{i=1}^n |\chi_i(x) - \psi_i(x)| \|\xi\| \leq \sum_{i=1}^n \frac{\varepsilon}{2n} = \frac{\varepsilon}{2},$$

dakle, $\|\chi(x) - \varphi(x)\| \leq \varepsilon$.

Lema 6.4. *Neka je skup $K \subseteq G$ kompaktan. Postoji $N_K > 0$ takav da vrijedi*

$$\varphi \in C_0(G, \mathcal{H}), \quad Supp\, \varphi \subseteq K \qquad \Longrightarrow \qquad \|(\Phi(\varphi)\| \leq N_K \|\varphi\|_\infty.$$

DOkaz: Neka je $L=p(K)$ i neka je $A>0$ takav da vrijedi

$$f\infty9njC_0(M),\quad Supp\,f\subseteq L\qquad\Longrightarrow\qquad |m(f)|\leq A\,\max\{|f(t)|;\ t\in M\}.$$

Neka je $B>0$ takav da vrijedi

$$f\in C_0(H),\quad Supp\,f\subseteq KK^{-1}\cap H\qquad\Longrightarrow\qquad |\nu(f)|\leq B\,\max\{|f(h)|;\ h\in H\}.$$

Za funkciju $\varphi\in C_0(G,\mathcal{H})$ takvu da je $Supp\,\varphi\subseteq K$ vrijedi $Supp\,\Phi(\varphi)\subseteq HK$ i $Supp\,F_{\Phi(\varphi),\Phi(\varphi)}\subseteq L$. Dakle

$$\|\Phi(\varphi)\|^2=m(F_{\Phi(\varphi),\Phi(\varphi)})\leq A\,\max\{|F_{\Phi(\varphi),\Phi(\varphi)}(Hx)|;\ x\in K\}=A\,\max\{\|\Phi(\varphi)(x)\|^2;\ x\in K\}.$$

Za $x\in K$ definiramo $f_x\in C_0(H)$ sa $f_x(h)=\|\varphi(hx)\|$, $h\in H$. Za svako $x\in K$ imamo $Supp\,f_x\subseteq KK^{-1}\cap H$, pa imamo

$$\|\Phi(\varphi)(x)\|=\left\|\int_H\tau(h)\varphi(h^{-1}x)\mathrm{d}\nu(h)\right\|\leq\int_H\|\varphi(h^{-1}x)\|\mathrm{d}\nu(h)=\nu(f_x)\leq B\,\max\{|f_x(h)|;\ h\in H\}.$$

Međutim, $|f_x(h)|=\|\varphi(hx)\|\leq\|\varphi\|_\infty$. Dakle, $\|\Phi(\varphi)(x)\|\leq B\|\varphi\|_\infty\ \ \forall x\in K$, odakle je

$$\|\Phi(\varphi)\|^2\leq AB^2\|\varphi\|_\infty^2.$$

Uzmemo li $N_K=B\sqrt{A}$, tvrdnja slijedi.

Propozicija 6.5. *Neka je $\mathcal{V}$ gust potprostor od $\mathcal{H}$. Tada je $\Phi(C_0(G)\otimes\mathcal{V})$ gust potprostor od $L_2(G,\tau)$. Ako je G nilpotentna grupa, tada je $\Phi(\mathbb{C}_0^\infty(G)\otimes\mathcal{V})$ gust potprostor od $L_2(G,\tau)$.*

Dokaz: Neka je $g\in L_2(G,\tau)$ i $\varepsilon>0$. Neka je $f\in C_0(G,\tau)$ takva da je $\|f-g\|\leq\frac{\varepsilon}{2}$. Po lemi 6.1. postoji $\varphi\in C_0(G,\mathcal{H})$ takva da je $\Phi(\varphi)=f$. Neka je $L=Supp\,\varphi$ i neka je K kompaktna okolina od L. Neka je N_K kao u lemi 6.4. Po lemi 6.3. postoji $\psi\in C_0(G)\otimes\mathcal{V}$ (odnosno, u slučaju da je G nilpotentna grupa $\psi\in C_0^\infty(G)\otimes\mathcal{V}$) takva da je

$$Supp\,\psi\in K\qquad\text{i}\qquad\|\psi-\varphi\|_\infty\leq\frac{\varepsilon}{2N_K}.$$

Pomoću leme 6.4. imamo

$$\|\Phi(\psi)-g\|\leq\|\Phi(\psi)-f\|+\|f-g\|\leq\|\Phi(\psi-\varphi)\|+\frac{\varepsilon}{2}\leq N_K\|\psi-\varphi\|_\infty+\frac{\varepsilon}{2}\leq N_K\frac{\varepsilon}{2N_K}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

Propozicija 6.6. *Za $x\in G$ neka je $H^x=xHx^{-1}$ i neka je τ^x unitarna reprezentacija od H^x na $\mathcal{H}$ definirana sa*

$$\tau^x(h)=\tau(x^{-1}hx),\qquad h\in H^x.$$

Tada je $Ind_H^G\,\tau\simeq Ind_{H^x}^G\,\tau^x$.

Dokaz: Neka je $\varepsilon_x:C_0(H)\to C_0(H^x)$ izomorfizam definiran sa

$$(\varepsilon_x\varphi)(h)=\varphi(x^{-1}hx),\qquad\varphi\in C_0(H),\quad h\in H^x.$$

Nadalje, neka je ν^x pozitivna mjera na H^x definirana sa

$$\nu^x(\varepsilon_x\varphi)=\nu(\varphi),\qquad\varphi\in C_0(H).$$

Za $x \in G$ i $h \in H^x$ imamo

$$\rho_h(\varepsilon_x\varphi) = \varepsilon_x(\rho_{x^{-1}hx}\varphi) \qquad \text{i} \qquad \lambda_h(\varepsilon_x\varphi) = \varepsilon_x(\lambda_{x^{-1}hx}\varphi), \qquad \varphi \in C_0(H).$$

Odatle neposredno slijedi $\rho_h\nu^x = \lambda_h\nu^x = \nu^x$. Prema tome, zatvorena podgrupa H^x je unimodularna grupa i ν^x je Haarova mjera na njoj.

Neka je $M^x = H^x\backslash G$ i neka je m^x $G-$invarijantna mjera na M^x definirana sa

$$m^x(f_{\nu^x}) = \mu(f), \qquad f \in C_0(G).$$

Neka su $\alpha : M^x \to M$ i $\beta : M \to M^x$ međusobno inverzni homeomorfizmi zadani sa

$$\alpha(H^x y) = Hx^{-1}y, \qquad \beta(Hy) = H^x xy, \qquad y \in G.$$

Lako se vidi da za svaku funkciju $\varphi \in C_0(M)$ i za svaku funkciju $\psi \in C_0(M^x)$ vrijedi

$$m(\varphi) = m^x(\varphi \circ \alpha) \qquad \text{i} \qquad m^x(\psi) = m(\psi \circ \beta).$$

Definiramo sada izomorfizam $S : C_0(G, \tau) \to C_0(G, \tau^x)$ i njemu inverzni $T : C_0(G, \tau^x) \to C_0(G, \tau)$ ovako

$$(Sf)(y) = f(x^{-1}y), \quad f \in C_0(G, \tau), \qquad (Tg)(y) = g(xy), \quad g \in C_0(G, \tau^x).$$

Za $f \in C_0(G, \tau)$ imamo

$$\|Sf\|^2_{L_2(G,\tau^x)} = m^x\left(\tilde{F}_{Sf,Sf}\right),$$

pri čemu je

$$\tilde{F}_{g_1,g_2}(H^x y) = (g_1(y)|g_2(y)), \qquad g_1, g_2 \in C_0(G, \tau^x), \quad y \in G.$$

Tada je $\tilde{F}_{Sf,Sf} = F_{f,f} \circ \alpha$, pa dobivamo

$$\|Sf\|^2_{L_2(G,\tau^x)} = m^x(F_{f,f} \circ \alpha) = m(F_{f,f}) = \|f\|^2_{L_2(G,\tau)}.$$

Dakle, S se jedinstveno proširuje do izometričkog izomorfizma $S : L_2(G, \tau) \to L_2(G, \tau^x)$. Stavimo sada $\pi = Ind_H^G\,\tau$ i $\pi^x = Ind_{H^x}^G\,\tau^x$. Za $f \in C_0(G, \tau)$ i $y, z \in G$ tada imamo

$$(\pi^x(y)Sf)(z) = (Sf)(zy) = f(x^{-1}zy) = (\pi(y)f)(x^{-1}z) = (S\pi(y)f)(z).$$

Dakle,

$$\pi^x(y)S = S\pi(y), \quad \text{tj.} \quad \pi^x(y) = S\pi(y)S^{-1} \quad \forall y \in G \qquad \Longrightarrow \qquad \pi^x \simeq \pi.$$

Propozicija 6.7. (**Induciranje u etapama**) *Neka je K zatvorena unimodularna podgrupa od G koja sadrži H. Tada je*

$$Ind_H^G\,\tau \simeq Ind_K^G\left(Ind_H^K\,\tau\right).$$

Dokaz: Neka je σ Haarova mjera na K. Definiramo mjere $n \in \mathfrak{M}(K\backslash G)$ i $p \in \mathfrak{M}(H\backslash K)$ sa

$$n(f_\sigma) = \mu(f), \quad f \in C_0(G); \qquad p(\varphi_\nu) = \sigma(\varphi), \quad \varphi \in C_0(K).$$

Prema propoziciji 4.7. postoji jedinstven linearan operator $\psi \mapsto \psi_p$ sa $C_0(H\backslash G)$ u $C_0(K\backslash G)$ takav da je $(f_\nu)_p = f_\sigma \ \forall f \in C_0(G)$. Taj operator je surjekcija i vrijedi $n(\psi_p) = m(\psi) \ \forall \psi \in C_0(H\backslash G)$.

Stavimo sada

$$\omega = Ind_H^K\,\tau, \qquad \pi = Ind_H^G\,\tau, \qquad \rho = Ind_K^G\,\omega.$$

Treba konstruirati izometrički izomorfizam $P : L_2(G,\tau) \to L_2(G,\omega)$ takav da je $P\pi(x) = \rho(x)P$ $\forall x \in G$.

Za $f \in C_0(G,\tau)$ definiramo $Pf : G \to C(K,\mathcal{H})$ sa

$$[(Pf)(x)](k) = f(kx), \qquad x \in G, \quad k \in K.$$

Očito je $(Pf)(x) \in C(K,\tau)$ $\forall x \in G$. Nadalje, ako je $C \subseteq G$ kompakt takav da je $Supp\, f \subseteq HC$, tada je $Supp\,(Pf)(x) \subseteq HD$, gdje je $D = Cx^{-1} \cap K$ kompakt u K. Dakle je $(Pf)(x) \in C_0(K,\tau)$ $\forall x \in G$.

Na taj način definirali smo $Pf : G \to C_0(K,\tau) \subseteq L_2(K,\tau)$. Dokazat ćemo da je $Pf \in C_0(G,\omega)$.

(1) Imamo

$$\|(Pf)(x) - (Pf)(y)\|^2_{L_2(K,\tau)} = \int_{H\backslash K} \|f(kx) - f(ky)\|^2 \mathrm{d}p(Hk), \qquad x, y \in G.$$

Odatle lako slijedi da je funkcija $Pf : G \to L_2(K,\tau)$ neprekidna, $Pf \in C(G, L_2(K,\tau))$.

(2) Iz definicije se neposredno provjerava

$$(Pf)(kx) = \omega(k)(Pf)(x), \qquad k \in K, \quad x \in G.$$

Dakle je $Pf \in C(G,\omega)$.

(3) Ako je $C \subseteq G$ kompakt takav da je $Supp\, f \subseteq HC$, tada je $Supp\, Pf \subseteq KC$. Dakle je $Pf \in C_0(G,\omega)$.

Tako smo došli do linearnog operatora $P : C_0(G,\tau) \to C_0(G,\omega)$. Dokazat ćemo sada da je P izometrija u odnosu na norme $\|\cdot\|_{L_2(G,\tau)}$ i $\|\cdot\|_{L_2(G,\omega)}$. Za $g_1, g_2 \in C_0(G,\omega)$ definiramo $\tilde{F}_{g_1,g_2} \in C_0(K\backslash G)$ sa

$$\tilde{F}_{g_1,g_2}(Ky) = (g_1(y)|g_2(y))_{L_2(K,\tau)}, \qquad y \in G.$$

Za $f, g \in C_0(G,\tau)$ imamo tada

$$\tilde{F}_{Pf,Pg} = (F_{f,g})_p\,.$$

Prema tome,

$$(Pf|Pg)_{L_2(G,\omega)} = n\big(\tilde{F}_{Pf,Pg}\big) = n\big((F_{f,g})_p\big) = m(F_{f,g}) = (f|g)_{L_2(G,\tau)}.$$

Dakle, P se po neprekidnosti jedinstveno proširuje do izometrije $P : L_2(G,\tau) \to L_2(G,\omega)$. Da bismo dokazali da se radi o izometričkom izomorfizmu Hilbertovih prostora, dovoljno je ustanoviti da je slika od P gusta u $L_2(G,\omega)$.

Neka su $\Phi : C_0(G,\mathcal{H}) \to C_0(G,\tau)$, $\Psi : C_0(G, L_2(K,\tau)) \to C_0(G,\omega)$ i $\Omega : C_0(K,\mathcal{H}) \to C_0(K,\tau)$ linearni operatori (po lemi 6.1. surjekcije) definirani sa

$$[\Phi(\varphi)](x) = \int_H \tau(h)\varphi(h^{-1}x)\mathrm{d}\nu(h), \qquad \varphi \in C_0(G,\mathcal{H}), \quad x \in G,$$

$$[\Psi(\psi)](x) = \int_K \omega(k)\psi(k^{-1}x)\mathrm{d}\sigma(h), \qquad \psi \in C_0(G, L_2(K,\tau)), \quad x \in G,$$

$$[\Omega(g)](k) = \int_H \tau(h)g(h^{-1}k)\mathrm{d}\nu(h), \qquad g \in C_0(K,\mathcal{H}), \quad k \in K.$$

Za $f \in C_0(G)$, $g \in C_0(K)$ i $\xi \in \mathcal{H}$ neposredno se provjerava da je

$$\Psi(f \otimes \Omega(g \otimes \xi)) = P(\Phi(\varphi \otimes \xi)),$$

pri čemu je $\varphi \in C_0(G)$ definirana sa

$$\varphi(x) = \int_K f(k^{-1}x)g(k)\mathrm{d}\sigma(k), \qquad x \in G.$$

Prema tome, slika od P sadrži potprostor $\Psi(C_0(G) \otimes \Omega(C_0(K) \otimes \mathcal{H}))$. Po propoziciji 6.5. potprostor $\Omega(C_0(K) \otimes \mathcal{H})$ je gust u $L_2(K, \tau)$, pa je po istoj propoziciji potprostor $\Psi(C_0(G) \otimes \Omega(C_0(K) \otimes \mathcal{H}))$ gust u $L_2(G, \omega)$.

Dakle, P je izometrički izomorfizam sa $L_2(G, \tau)$ na $L_2(G, \omega)$.

Napokon, za $f \in C_0(G, \tau)$, $x, y \in G$ i $k \in K$ imamo

$$[(\rho(y)Pf)(x)](k) = [(Pf)(xy)](k) = f(kxy) = (\pi(y)f)(kx) = [(P\pi(y)f)(x)](k).$$

Odatle je $\rho(y)P = P\pi(y) \ \forall y \in G$, dakle, $\rho \simeq \pi$.

Neka su sada τ_1 i τ_2 unitarne reprezentacije grupe H na Hilbertovim prostorima $\mathcal{H}_1$ i $\mathcal{H}_2$ i neka je $A : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ ograničen linearan operator koji ih prepliće, tj.

$$A\tau_1(h) = \tau_2(h)A \qquad \forall h \in H.$$

Za $f \in C_0(G, \tau_1)$ definiramo funkciju $Bf : G \to \mathcal{H}_2$ sa

$$(Bf)(x) = Af(x), \quad x \in G, \qquad \text{tj.} \quad Bf = A \circ f.$$

Tada je B linearan operator sa $C_0(G, \tau_1)$ u $C_0(G, \tau_2)$. Za $f \in C_0(G, qt_1)$ i $x \in G$ imamo

$$F_{Bf,Bf}(Hx) = \|(Bf)(x)\|^2 = \|Af(x)\|^2 \leq \|A\|^2\|f(x)\|^2 = \|A\|^2 F_{f,f}(Hx).$$

Dakle, $F_{Bf,Bf} \leq \|A\|^2 F_{f,f}$, pa slijedi

$$\|Bf\|^2 = m(F_{Bf,Bf}) \leq \|A\|^2 m(F_{f,f}) = \|A\|^2\|f\|^2.$$

To pokazuje da je operator B ograničen, pa se po neprekidnosti jedinstveno proširuje do ograničenog operatora $\tilde{A} : L_2(G, \tau_1) \to L_2(G, \tau_2)$. Taj operator prepliće reprezentacije $\pi_1 = Ind_H^G \tau_1$ i $\pi_2 = Ind_H^G \tau_2$. Doista, ako je $f \in C_0(G, \tau_1)$ i $x, y \in G$, onda je

$$(\pi_2(x)\tilde{A}f)(y) = (\tilde{A}f)(yx) = Af(yx) = A(\pi_1(x)f)(y) = (\tilde{A}\pi_1(x)f)(y).$$

Kako je $C_0(G, \tau_1)$ gust potprostor od $L_2(G, \tau_1)$, slijedi

$$\tilde{A}\pi_1(x) = \pi_2(x)\tilde{A} \qquad \forall x \in G.$$

Propozicija 6.8. *Pretpostavimo da je inducirana reprezentacija $Ind_H^G \tau$ ireducibilna. Tada je i reprezentacija τ ireducibilna.*

Dokaz: Neka je $A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ ograničen linearan operator takav da je $A\tau(h) = \tau(h)A \ \forall h \in H$. Prema gornjoj konstrukciji (za $\tau_1 = \tau_2 = \tau$) dobivamo ograničen linearan operator $\tilde{A}$ na prostoru $L_2(G, \tau)$ takav da je $\tilde{A}\pi(x) = \pi(x)\tilde{A} \ \forall x \in G$, pa po teoremu 5.1. postoji $c \in \mathbb{C}$ takav da je $\tilde{A} = cI_{L_2(G,\tau)}$. Tada je

$$Af(e) = (\tilde{A}f)(e) = cf(e) \quad \forall f \in C_0(G, \tau), \quad \text{tj.} \quad A\xi = c\xi \quad \forall \xi \in \mathcal{H}(G) = \{f(e);\ f \in C_0(G, \tau)\}.$$

Kako je operator A neprekidan i kako je po lemi 6.2. potprostor $\mathcal{H}(G)$ gust u $\mathcal{H}$, slijedi $A = cI_{\mathcal{H}}$. Stoga je po teoremu 5.1. reprezentacija τ ireducibilna.

Reprezentacija $\pi_G = Ind_{\{e\}}^G 1$, gdje je 1 oznaka za jednodimenzionalnu reprezentaciju trivijalne grupe $\{e\}$ na $\mathbb{C}$, zove se **regularna reprezentacija** grupe G. Naravno, π_G je reprezentacija grupe G na Hilbertovom prostoru $L_2(G)$ definirana desnim pomacima:

$$(\pi_G(x)f)(y) = f(yx), \qquad f \in L_2(G), \quad x, y \in G.$$

Propozicija 6.9. *Regularna reprezentacija π_G unimodularne grupe $G \neq \{e\}$ je reducibilna.*

Dokaz: Pretpostavimo najprije da je grupa G komutativna. Svaka ireducibilna unitarna reprezentacija od G po teoremu 5.1. djeluje na jednodimenzionalnom prostoru. Međutim, $L_2(G)$ nije jednodimenzionalan prostor, ako je $G \neq \{e\}$. Prema tome, reprezentacija π_G je reducibilna.

Neka je sada $G \neq \{e\}$ proizvoljna i neka je $H \neq \{e\}$ zatvorena komutativna podgrupa od G. Takva postoji: za bilo koji $x \neq e$ zatvarač podgrupe $\{x^n;\ n \in \mathbb{Z}\}$ je zatvorena komutativna podgrupa različita od $\{e\}$. Po propoziciji 6.7. je tada

$$\pi_G = Ind_{\{e\}}^G 1 \simeq Ind_H^G \left(Ind_{\{e\}}^H 1\right) = Ind_H^G \pi_H.$$

Prema prvom dijelu dokaza reprezentacija π_H je reducibilna, pa je prema propoziciji 6.8. i reprezentacija π_G reducibilna.

Propozicija 6.10. *Neka je G unimodularna grupa, H zatvorena unimodularna podgrupa i C centralna zatvorena podgrupa od G sadržana u H. Neka je $\overline{G} = G/C$, $\overline{H} = H/C$ i $\alpha : G \to \overline{G}$ kanonski epimorfizam. Neka je $\overline{\tau}$ unitarna reprezentacija od $\overline{H}$ na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$. Tada je $\left(Ind_{\overline{H}}^{\overline{G}} \overline{\tau}\right) \circ \alpha \simeq Ind_H^G (\overline{\tau} \circ \alpha | H)$.*

Dokaz: Neka su μ, ν i ε Haarove mjere na G, H i C. Definiramo mjere $\overline{\mu}$ i $\overline{\nu}$ na $\overline{G}$ i $\overline{H}$ sa

$$\overline{\mu}(f_\varepsilon) = \mu(f), \quad f \in C_0(G), \qquad \overline{\nu}(\varphi_\varepsilon) = \nu(\varphi), \quad \varphi \in C_0(H).$$

Lako se provjeri da su $\overline{\mu}$ i $\overline{\nu}$ Haarove mjere i da su grupe $\overline{G}$ i $\overline{H}$ unimodularne. Neka su $M = H\backslash G$ i $\overline{M} = \overline{H}\backslash\overline{G}$. Tada je sa $\beta(Hx) = \overline{H}\alpha(x)$, $x \in G$, definiran homeomorfizam $\beta : M \to \overline{M}$. Definirajmo $G-$invarijantnu mjeru m na M i $G-$invarijantnu mjeru $\overline{m}$ na $\overline{M}$ sa

$$m(f_\nu) = \mu(f), \quad f \in C_0(G), \qquad \overline{m}(\varphi_{\overline{\nu}}) = \overline{\mu}(\varphi), \quad \varphi \in C_0(\overline{G}).$$

Koristeći jednakost $(f_\varepsilon)_{\overline{\nu}} = f_\nu$, lako se provjeri da je tada

$$\overline{m}(\psi) = m(\psi \circ \beta) \qquad \forall \psi \in C_0(\overline{M}).$$

Unitarnu reprezentaciju $\overline{\tau} \circ \alpha | H$ od H na $\mathcal{H}$ označimo sa τ i neka je $\pi = Ind_H^G \tau$ i $\overline{\pi} = Ind_{\overline{H}}^{\overline{G}} \overline{\tau}$. Za $f \in C_0(G, \tau)$ definiramo funkciju $Sf : \overline{G} \to \mathcal{H}$ sa

$$(Sf)(\alpha(x)) = f(x), \qquad x \in G.$$

Ova definicija ima smisla, jer je C u jezgri od τ, pa je funkcija $f \in C_0(G, \tau)$ konstantna na $C-$klasama. Nadalje, lako se provjeri da je $Sf \in C_0(\overline{G}, \overline{\tau})$. Tako smo došli do linearnog operatora $S : C_0(G, \tau) \to C_0(\overline{G}, \overline{\tau})$. To je izomorfizam i

$$(S^{-1}\varphi)(x) = \varphi(\alpha(x)), \qquad \varphi \in C_0(\overline{G}, \overline{\tau}), \quad x \in G.$$

Za $\varphi \in C_0(\overline{G}, \overline{\tau})$ i $f \in C_0(G, \tau)$ definiramo fukcije $\overline{F}_{\varphi,\varphi} \in C_0(\overline{M})$ i $F_{f,f} \in C_0(M)$ sa

$$\overline{F}_{\varphi,\varphi}(\overline{H}\overline{x}) = \|\varphi(\overline{x})\|^2, \quad \overline{x} \in \overline{G}, \qquad\qquad F_{f,f}(Hx) = \|f(x)\|^2, \quad x \in G.$$

Tada je $F_{f,f} = \overline{F}_{Sf,Sf} \circ \beta$, pa je

$$\|f\|^2_{L_2(G,\tau)} = m(F_{f,f}) = m(\overline{F}_{Sf,Sf} \circ \beta) = \overline{m}(\overline{F}_{Sf,Sf}) = \|Sf\|^2_{L_2(\overline{G},\overline{\tau})}.$$

Prema tome, S se proširuje do izometričkog izomorfizma sa $L_2(G, \tau)$ na $L_2(\overline{G}, \overline{\tau})$.

Napokon, za $\varphi \in C_0(\overline{G}, \overline{\tau})$ i $x, y \in G$ imamo

$$(S\pi(x)S^{-1}\varphi)(\alpha(y)) = (\pi(x)S^{-1}\varphi)(y) = (S^{-1}\varphi)(yx) = \varphi(\alpha(y)\alpha(x)) = (\overline{\pi}(\alpha(x))\varphi)(\alpha(y)).$$

Dakle,

$$S\pi(x)S^{-1} = (\overline{\pi} \circ \alpha)(x) \quad \forall x \in G \qquad \Longrightarrow \qquad \pi \simeq \overline{\pi} \circ \alpha.$$

Lema 6.11. *Neka je A lokalno kompaktan Hausdorffov topološki prostor, λ pozitivna mjera na A i $\mathcal{H}$ Hilbertov prostor. Postoji jedinstven izometrički izomorfizam $T : L_2(A)\hat{\otimes}\mathcal{H} \to L_2(A,\mathcal{H})$ takav da je*

$$[T(f \otimes \xi)](a) = f(a)\xi, \quad f \in C_0(A), \quad \xi \in \mathcal{H}, \quad a \in A.$$

Dokaz: Iz univerzalnog svojstva tenzorskog produkta slijedi da postoji linearan operator $T : C_0(A) \otimes \mathcal{H} \to L_2(A,\mathcal{H})$ takav da je

$$\left[T\left(\sum_{i=1}^n f_i \otimes \xi_i\right)\right](a) = \sum_{i=1}^n f_i(a)\xi_i, \quad f_1,\dots,f_n \in C_0(A), \quad \xi_1,\dots,\xi_n \in \mathcal{H}, \quad a \in A.$$

Tada je

$$\left(T\left(\sum_{i=1}^n f_i \otimes \xi_i\right)\middle| T\left(\sum_{j=1}^m g_j \otimes \eta_j\right)\right)_{L_2(A,\mathcal{H})} =$$

$$= \int_A \left(\left[T\left(\sum_{i=1}^n f_i \otimes \xi_i\right)\right](a)\middle|\left[T\left(\sum_{j=1}^m g_j \otimes \eta_j\right)\right](a)\right)_{\mathcal{H}} \mathrm{d}\lambda(a) =$$

$$= \int_A \left(\sum_{i=1}^n f_i(a)\xi_i \middle| \sum_{j=1}^m g_j(a)\eta_j\right)_{\mathcal{H}} \mathrm{d}\lambda(a) = \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^m (\xi_i|\eta_j)\int_A \varphi_i(a)\overline{g_j(a)}\mathrm{d}\lambda(a) =$$

$$= \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^m (f_i|g_j)_{L_2(A)}(\xi_i|\eta_j)_{\mathcal{H}} = \left(\sum_{i=1}^n f_i \otimes \xi_i \middle| \sum_{j=1}^m g_j \otimes \eta_j\right)_{L_2(A)\hat{\otimes}\mathcal{H}}.$$

Dakle, T je izometrija sa $C_0(A) \otimes \mathcal{H}$ u $L_2(A,\mathcal{H})$. Kako je $C_0(A)$ gusto u $L_2(A)$ i kako je $L_2(A)\otimes\mathcal{H}$ gusto u $L_2(A)\hat{\otimes}\mathcal{H}$, to je $C_0(A)\otimes\mathcal{H}$ gusto u $L_2(A)\hat{\otimes}\mathcal{H}$. Stoga se T jedinstveno proširuje do izometrije sa $L_2(A)\hat{\otimes}\mathcal{H}$ u $L_2(A,\mathcal{H})$, koju ćemo također označiti sa T. Prema lemi 6.3. potprostor $T(C_0(A)\otimes\mathcal{H})$ je gust u $L_2(A,\mathcal{H})$. Dakle, $T : L_2(A)\hat{\otimes}\mathcal{H} \to L_2(A,\mathcal{H})$ je izometrički izomorfizam.

Propozicija 6.12. *Neka je G unimodularna lokalno kompaktna grupa, H zatvorena unimodularna podgrupa, τ unitarna reprezentacija od H na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$, A lokalno kompaktan Hausdorffov prostor, λ pozitivna mjera na A i $\sigma : A \to G$ preslikavanje takvo da je $\Phi : (h,a) \mapsto h\sigma(a)$ homeomorfizam sa $H \times A$ na G.*

(a) *$\Sigma : a \mapsto H\sigma(a)$ je homeomorfizam sa A na $M = H\backslash G$.*

Pretpostavimo da je $\Sigma-$slika mjere λ mjera na M koja je $G-$invarijantna.

(b) *Preslikavanje S koje funkciji $\psi \in C_0(G,\tau)$ pridružuje funkciju $S\psi : A \to \mathcal{H}$, definiranu sa*

$$(S\psi)(a) = \psi(\sigma(a)), \qquad a \in A,$$

je izomorfizam sa $C_0(G,\tau)$ na $C_0(A,\mathcal{H})$. To se preslikavanje jedinstveno proširuje do izometričkog izomorfizma $S : L_2(G,\tau) \to L_2(A,\mathcal{H})$.

(c) *Izomorfizam S prevodi reprezentaciju $Ind_H^G\tau$ u reprezentaciju π grupe G na Hilbertovom prostoru $L_2(A,\mathcal{H})$ definiranu sa*

$$(\pi(x)\varphi)(a) = \tau(\beta(\sigma(a)x))\varphi(\alpha(\sigma(a)x)), \qquad \varphi \in L_2(A,\mathcal{H}), \quad a \in A, \quad x \in G.$$

Pri tome je $x \mapsto (\beta(x),\alpha(x))$ homeomorfizam sa G na $H \times A$ inverzan homeomorfizmu $\Phi : (h,a) \mapsto h\sigma(a)$.

Dokaz: (a) Očito je Σ neprekidna bijekcija sa A na M. Neka je $p : G \to M$ kanonsko kvocijentno preslikavanje i U otvoren podskup od A. Tada je $H \times U$ otvoren podskup od $H \times A$, pa je $\Phi(H \times U) = p^{-1}(\Sigma(U))$ otvoren podskup od G. Po definiciji topologije na M slijedi da je $\Sigma(U)$ otvoren podskup od M. To pokazuje da je inverzno preslikavanje $\Sigma^{-1} : M \to A$ neprekidno. Dakle, Σ je homeomorfizam.

Definiramo preslikavanja $\alpha : G \to A$ i $\beta : G \to H$ kao u tvrdnji (c). Dakle,

$$x = \beta(x)\sigma(\alpha(x)), \qquad x \in G; \tag{6.2}$$

$$\alpha(hx) = \alpha(x), \quad \beta(hx) = h\beta(x), \qquad h \in H, \quad x \in G; \tag{6.3}$$

$$\alpha(\sigma(a)) = a, \quad \beta(\sigma(a)) = e, \qquad a \in A. \tag{6.4}$$

Označimo sa m $G-$invarijantnu mjeru na M koja je dobivena kao $\Sigma-$slika mjere λ, tj.

$$m(F) = \lambda(F \circ \Sigma), \qquad F \in C_0(M).$$

(b) Neka je $\psi \in C_0(G,\tau)$. Očito je $S\psi = \psi \circ \sigma \in C(A,\mathcal{H})$. Za $a \in A$ imamo sljedeće ekvivalencije:

$$(S\psi)(a) \neq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad F_{\psi,\psi}(H\sigma(a)) = \|\psi(\sigma(a))\|^2 \neq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (F_{\psi,\psi} \circ \Sigma)(a) \neq 0.$$

Dakle, $Supp\, S\psi = \Sigma^{-1}(Supp\, F_{\psi,\psi})$, a to je kompaktan podskup od A. Prema tome, S je linearan operator sa $C_0(G,\tau)$ u $C_0(A,\mathcal{H})$.

Neka je sada $\varphi \in C_0(A,\mathcal{H})$. Definiramo funkciju $T\varphi : G \to \mathcal{H}$ sa

$$(T\varphi)(x) = \tau(\beta(x))\varphi(\alpha(x)), \qquad x \in G.$$

Tada je očito $T\varphi \in C(G,\mathcal{H})$. Za $h \in H$ i $x \in G$ imamo zbog (6.2)

$$(T\varphi)(hx) = \tau(\beta(hx))\varphi(\alpha(hx)) = \tau(h\beta(x))\varphi(\alpha(x)) = \tau(h)\tau(\beta(x))\varphi(\alpha(x)) = \tau(h)(T\varphi)(x).$$

Dakle, $T\varphi \in C(G,\tau)$. Za $a \in A$ imamo sljedeće ekvivalencije

$$F_{T\varphi,T\varphi}(\Sigma(a)) \neq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \|(T\varphi)(\sigma(a))\|^2 \neq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \varphi(\alpha(\sigma(a)) = \varphi(a) \neq 0.$$

Dakle je $Supp\, F_{T\varphi,T\varphi} = \Sigma(Supp\, \varphi)$, a to je kompaktan podskup od M. P Time smo dokazali da je $T\varphi \in C_0(G,\tau)$. Tako smo dobili linearan operator $T : C_0(A,\mathcal{H}) \to C_0(G,\tau)$. Pomoću (6.2) i (6.4) lako se provjerava da su operatori S i T međusobno inverzni, tj. to su izomorfizmi vektorskih prostora.

Za $\varphi \in C_0(A,\mathcal{H})$ i $a \in A$ je $F_{T\varphi,T\varphi}(\Sigma(a)) = \|\varphi(a)\|^2$, dakle,

$$\|T\varphi\|^2_{L_2(G,\tau)} = m(F_{T\varphi,T\varphi}) = \lambda(F_{T\varphi,T\varphi} \circ \Sigma) = \int_A \|\varphi(a)\|^2 \mathrm{d}\lambda(a) = \|\varphi\|^2_{L_2(A,\mathcal{H})}.$$

Dakle, T i S su međusobno inverzne izometrije, pa se proširuju do međusobno inverznih izomorfizama između Hilbertovih prostora $L_2(G,\tau)$ i $L_2(A,\mathcal{H})$.

(c) Neka je $\pi' = Ind_H^G\, \tau$ i neka je za $x \in G$ operator $\pi(x) : L_2(A,\mathcal{H}) \to L_2(A,\mathcal{H})$ definiran kao u iskazu. Za $\varphi \in C_0(A,\mathcal{H})$, $x \in G$ i $a \in A$ imamo

$$[S\pi'(x)S^{-1}\varphi](a) = (\pi' T\varphi)(\sigma(a)) = (T\varphi)(\sigma(a)x) = \tau(\beta(\sigma(a)x))\varphi(\alpha(\sigma(a)x)) = (\pi(x)\varphi)(a).$$

Dakle, $S\pi'(x)S^{-1} = \pi(x)\ \forall x \in G$.

Propozicija 6.13. *Neka je G direktni produkt unimodularnih lokalno kompaktnih grupa A i B. Drugim riječima, A i B su zatvorene podgrupe od G, $A \cap B = \{e\}$, $G = AB$ i $ab = ba$ $\forall a \in A$ i $\forall b \in B$. Neka je τ unitarna reprezentacija grupe B na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$. Tada je inducirana reprezentacija $Ind_B^G \tau$ ekvivalentna reprezentaciji π od G na $L_2(A)\hat{\otimes}\mathcal{H}$ takvoj da je*

$$\pi(ab)(\varphi \otimes \xi) = \pi_A(a)\varphi \otimes \tau(b)\xi, \qquad \varphi \in L_2(A), \quad \xi \in \mathcal{H}, \quad a \in A, \quad b \in B.$$

Pri tome je π_A regularna reprezentacija grupe A.

Dokaz: Neka je $\sigma : A \to G$ preslikavanje inkluzije, $\sigma(a) = a$, $a \in A$, i neka je λ Haarova mjera na A. Tada su zadovoljene pretpostavke propozicije 6.12. (za $H = B$) pa možemo uzeti da je $\pi = Ind_B^G \tau$ reprezentacija na Hilbertovom prostoru $L_2(A, \mathcal{H})$ definirana sa

$$(\pi(x)f)(a_1) = \tau(\beta(a_1x))f(\alpha(a_1x)), \qquad x \in G, \quad a_1 \in A, \quad f \in L_2(A, \mathcal{H}).$$

Ali za $x = ab$, $a \in A$, $b \in B$, je $\alpha(a_1x) = a_1a$ i $\beta(a_1x) = b$, pa je

$$(\pi(ab)f)(a_1) = \tau(b)f(a_1a).$$

Prema propoziciji 6.11. možemo identificirati $L_2(A, \mathcal{H})$ sa $L_2(A)\hat{\otimes}\mathcal{H}$, tako da je

$$(\varphi \otimes \xi)(a) = \varphi(a)\xi, \qquad \varphi \in L_2(A), \quad \xi \in \mathcal{H}, \quad a \in A.$$

Sada za $\varphi \in L_2(A)$, $\xi \in \mathcal{H}$, $a, a_1 \in A$ i $b \in B$ imamo

$$[\pi(ab)(\varphi \otimes \xi)](a_1) = \tau(b)(\varphi \otimes \xi)(a_1a) = \tau(b)\varphi(a_1a)\xi = [\pi_A(a)\varphi](a_1)\tau(b)\xi = [\pi_A(a)\varphi \otimes \tau(b)\xi](a_1).$$

Korolar 6.14. *Neka je G direktni produkt unimodularnih grupa $A \neq \{e\}$ i B, H zatvorena unimodularna podgrupa od B i τ unitarna reprezentacija od H. Tada je reprezentacija $Ind_H^G \tau$ reducibilna.*

Dokaz: Stavimo $\sigma = Ind_H^B \tau$ i neka je $\mathcal{H}$ prostor reprezentacije σ. Prema propoziciji 6.7. je $IndH^G \tau \simeq Ind_B^G \sigma$, a ta je reprezentacija po propoziciji 6.13. ekvivalentna reprezentaciji π od G na $L_2(A)\hat{\otimes}\mathcal{H}$, takvoj da je

$$\pi(ab)(\varphi \otimes \xi) = \pi_A(a)\varphi \otimes \sigma(b)\xi, \qquad a \in A, \quad b \in B, \quad \varphi \in L_2(A), \quad \xi \in \mathcal{H}.$$

Po propoziciji 6.8. regularna reprezentacija π_A grupe A je reducibilna. To znači da postoji zatvoren $\pi_A(A)-$invarijantan potprostor $\mathcal{K}$ od $L_2(A)$ koji je različit od $\{0\}$ i od $L_2(A)$. No tada je očito $\mathcal{K}\hat{\otimes}\mathcal{H}$ zatvoren $\pi(G)-$invarijantan potprostor od $L_2(A)\hat{\otimes}\mathcal{H}$ različit od $\{0\}$ i od $L_2(A)\hat{\otimes}\mathcal{H}$. Dakle, reprezentacija $Ind_H^G \tau \simeq \pi$ je reducibilna.

Poglavlje 7

INDUCIRANE REPREZENTACIJE NILPOTENTNIH GRUPA

U ovom poglavlju G je nilpotentna grupa i $\mathfrak{g}$ je njena Liejeva algebra.

Neka je $\mathfrak{h}$ Liejeva podalgebra od $\mathfrak{g}$. $(\mathfrak{g},\mathfrak{h})-$**baza** je uređena baza $(X_1,\dots,X_s)$ direktnog komplementa od $\mathfrak{h}$ u $\mathfrak{g}$, dakle,

$$\mathfrak{g}=\mathfrak{h}\dotplus\mathbb{R}X_1\dotplus\cdots\dotplus\mathbb{R}X_s,$$

takva da je za svako $j\in\{0,\dots,s\}$ $\mathfrak{g}_j=\mathfrak{h}\dotplus\mathbb{R}X_1\dotplus\cdots\dotplus\mathbb{R}X_j$ Liejeva podalgebra od $\mathfrak{g}$. Budući da je tada $\mathfrak{g}_j$ Liejeva podalgebra od $\mathfrak{g}_{j+1}$ kodimenzije 1, iz propozicije 2.8. slijedi da je $\mathfrak{g}_j$ ideal u $\mathfrak{g}_{j+1}$. Po istoj propoziciji svaka prava Liejeva podalgebra od $\mathfrak{g}$ sadržana je kao ideal kodimenzije 1 u nekoj Liejevoj podalgebri od $\mathfrak{g}$. Prema tome, $(\mathfrak{g},\mathfrak{h})-$baze postoje.

Teorem 7.1. *Neka je $\mathfrak{h}$ Liejeva podalgebra od $\mathfrak{g}$, $H=\exp\mathfrak{h}$ pripadna nilpotentna podgrupa od G, $M=H\backslash G$ i $(X_1,\dots,X_s)$ $(\mathfrak{g},\mathfrak{h})-$baza od $\mathfrak{g}$. Tada je*

$$\Sigma:(t_1,\dots,t_s)\mapsto H(\exp\, t_1X_1)\cdots(\exp\, t_sX_s)$$

homeomorfizam $\mathbb{R}^s$ na $M=H\backslash G$. Pri tom homeomorfizmu Lebesgueova mjera λ na $\mathbb{R}^s$ prelazi u $G-$invarijantnu mjeru na M.

Dokaz: Indukcijom po s pomoću korolara 3.13. slijedi da je

$$\Phi:(t_1,\dots,t_s,h)\mapsto h(\exp\, t_1X_1)\cdots(\exp\, t_sX_s),\qquad t_1,\dots,t_s\in\mathbb{R}^s,\quad h\in H,$$

homeomorfizam $\mathbb{R}^s\times H$ na G. Odatle i iz tvrdnje (a) propozicije 6.12. slijedi da je Σ homeomorfizam $\mathbb{R}^s$ na M.

Neka je ν Haarova mjera na H. Definirajmo mjeru μ na G ovako:

$$\mu(f)=\int_{\mathbb{R}^s\times H}f(h(\exp\, t_1X_1)\cdots(\exp\, t_sX_s))\mathrm{d}\nu(h)\mathrm{d}t_1\cdots\mathrm{d}t_s,\qquad f\in C_0(G).$$

Indukcijom po $s=\dim\mathfrak{g}/\mathfrak{h}\geq 0$ dokazat ćemo da je μ Haarova mjera na G.

Baza indukcije $s=0$ je trivijalna, jer je tada $\mu=\nu$ Haarova mjera na $H=G$.

Korak indukcije: Stavimo $K=\exp\mathfrak{g}_{s-1}$. Tada je $(X_1,\dots,X_{s-1})$ $(\mathfrak{g}_{s-1},\mathfrak{h})-$baza. Definirajmo mjeru σ na K sa

$$\sigma(\varphi)=\int_{\mathbb{R}^{s-1}\times H}\varphi(h(\exp\, t_1X_1)\cdots(\exp\, t_sX_{s-1}))\mathrm{d}\nu(h)\mathrm{d}t_1\cdots\mathrm{d}t_{s-1},\qquad\varphi\in C_0(K).$$

Po indukciji σ je Haarova mjera na K. Nadalje, imamo

$$\mu(f) = \int_{\mathbb{R}\times K} f(k(\exp tX_s))\mathrm{d}\sigma(k)\mathrm{d}t, \qquad f \in C_0(G).$$

Sada za $x \in K$ i $t \in \mathbb{R}$ stavimo $x(t)(\exp tX_s)x(\exp -tX_s)$. Po teoremu 3.6. K je normalna podgrupa od G, pa slijedi $x(t) \in K$ $\forall t$ i $\forall x$. Neka je $z \in G$ proizvoljan. Po korolaru 3.13. možemo pisati $z = x(\exp \tau X_s)$ za neke $x \in K$ i $\tau \in \mathbb{R}$. Kako je σ Haarova mjera na K, za $f \in C_0(G)$ imamo redom

$$\mu(\rho_z f) = \int_{\mathbb{R}\times K} f(k(\exp tX_s)z)\mathrm{d}\sigma(k)\mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}\times K} f(k(\exp tX_s)x(\exp \tau X_s))\mathrm{d}\sigma(k)\mathrm{d}t =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \left[\int_K f(kx(t)(\exp (t+\tau)X_s))\mathrm{d}\sigma(k)\right] \mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}} \left[\int_K f(k(\exp (t+\tau)X_s))\mathrm{d}\sigma(k)\right] \mathrm{d}t =$$

$$= \int_K \left[\int_{\mathbb{R}} f(k(\exp (t+\tau)X_s))\mathrm{d}t\right] \mathrm{d}\sigma(k) = \int_{\mathbb{R}\times K} f(k(\exp tX_s))\mathrm{d}\sigma(k)\mathrm{d}t = \mu(f).$$

To pokazuje da je mjera μ na G desnoinvarijantna, a kako je grupa G unimodularna, μ je Haarova mjera na G.

Definirajmo sada $G-$invarijantnu mjeru m na M kao i prije sa

$$m(f_\nu) = \mu(f), \qquad f \in C_0(G).$$

Sada slijedi i druga tvrdnja teorema:

$$m(f_\nu) = \int_{\mathbb{R}^s} \left[\int_H f(h(\exp t_1X_1)\cdots(\exp t_sX_s))\mathrm{d}\nu(h)\right] \mathrm{d}t_1\cdots \mathrm{d}t_s =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^s} f_\nu(\Sigma(t_1,\ldots,t_s))\mathrm{d}t_1\cdots\mathrm{d}t_s = \lambda(\varphi_\nu \circ \Sigma).$$

Neka je i dalje $\mathfrak{h}$ Liejeva podalgebra od $\mathfrak{g}$, $H = \exp \mathfrak{h}$ pripadna nilpotentna podgrupa od G, $(X_1,\ldots,X_s)$ $(\mathfrak{g},\mathfrak{h})-$baza, $\sigma : \mathbb{R}^s \to G$ neprekidno preslikavanje definirano sa

$$\sigma(t_1,\ldots,t_s) = (\exp t_1X_1)\cdots(\exp t_sX_s), \qquad (t_1,\ldots,t_s) \in \mathbb{R}^s,$$

i $\Phi : \mathbb{R}^s \times H \to G$ homeomorfizam definiran sa

$$\Phi(t,h) = h\sigma(t), \qquad h \in H, \quad t \in \mathbb{R}^s.$$

Inverzni homeomorfizam $\Phi^{-1} : G \to \mathbb{R}^s \times H$ definira neprekidna preslikavanja $\alpha : G \to \mathbb{R}^s$ i $\beta : G \to H$, takva da je

$$\Phi^{-1}(x) = (\alpha(x),\beta(x)), \qquad \text{odnosno}, \quad x = \beta(x)\sigma(\alpha(x)), \quad x \in G.$$

Neka je sada τ unitarna reprezentacija grupe H na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$. Po propoziciji 6.12. inducirana reprezentacija $\pi = Ind_H^G\,\tau$ može se realizirati na Hilbertovom prostoru $L_2(\mathbb{R}^s,\mathcal{H})$ ovako:

$$[\pi(x)\varphi](t) = \tau(\beta(\sigma(t)x))\varphi(\alpha(\sigma(t)x)), \qquad \varphi \in L_2(\mathbb{R}^s,\mathcal{H}), \quad x \in G, \quad t \in \mathbb{R}^s.$$

Razmotrimo sada pobliže situaciju kad je $\dim \mathfrak{g}/\mathfrak{h} = 1$. Tada je $\mathfrak{h}$ ideal u $\mathfrak{g}$ i H je normalna podgrupa od G. Svaki $X \in \mathfrak{g}\setminus\mathfrak{h}$ tvori $(\mathfrak{g},\mathfrak{h})-$bazu. Nadalje, sada je σ homomorfizam aditivne grupe $\mathbb{R}$ u grupu G :

$$\sigma(t) = \exp tX, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Kako je H normalna podgrupa od G, za $h \in H$ i $s, t \in \mathbb{R}$ je $\sigma(t)h\sigma(-t) \in H$, pa iz

$$\sigma(t)h\sigma(s) = \sigma(t)h\sigma(-t)\sigma(t+s)$$

slijedi

$$\alpha(\sigma(t)h\sigma(s)) = t + s \qquad \text{i} \qquad \beta(\sigma(t)h\sigma(s)) = \sigma(t)h\sigma(-t), \qquad t, s \in \mathbb{R}, \quad h \in H.$$

Prema tome, iz teorema 7.1. slijedi:

Korolar 7.2. *Neka je H nilpotentna podgrupa od G kodimenzije 1, $\mathfrak{h} = \log H$ njena Liejeva algebra, $X \in \mathfrak{g} \backslash \mathfrak{h}$ i τ unitarna reprezentacija od H na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$. Tada je inducirana reprezentacija $Ind_H^G \tau$ ekvivalentna reprezentaciji π od G na $L_2(\mathbb{R}, \mathcal{H})$ definiranoj sa*

$$[\pi(h(\exp sX))\varphi](t) = \tau((\exp tX)h(\exp -tX))\varphi(t+s), \qquad h \in H, \quad s, t \in \mathbb{R}, \quad \varphi \in L_2(\mathbb{R}, \mathcal{H}).$$

Posebno,

$$[\pi(h)\varphi](t) = \tau((\exp tX)h(\exp -tX))\varphi(t), \qquad h \in H, \quad t \in \mathbb{R}, \quad \varphi \in L_2(\mathbb{R}, \mathcal{H})$$

i

$$[\pi(\exp sX)\varphi](t) = \varphi(t+s), \qquad s, t \in \mathbb{R}, \quad \varphi \in L_2(\mathbb{R}, \mathcal{H}).$$

Napomenimo još da pri ekvivalenciji u korolaru 7.2. potprostor $C_0(G, \tau)$ od $L_2(G, \tau)$ prelazi u potprostor $C_0(\mathbb{R}, \mathcal{H})$ od $L_2(\mathbb{R}, \mathcal{H})$.

Poglavlje 8

REPREZENTACIJE HEISENBERGOVE GRUPE

Heisenbergova grupa S je trodimenzionalna nilpotentna grupa:

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \ , x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$$

To je upravo grupa $N_3(\mathbb{R})$ iz primjera **(2)** u poglavlju 1. Za elemente grupe S upotrebljavat ćemo ovakvu oznaku:

$$\langle x, y, z \rangle = \begin{bmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Tada imamo

$$\langle x, y, z \rangle \langle x', y', z' \rangle = \langle x + x', y + y', z + z' + xy' \rangle, \qquad \langle x, y, z \rangle^{-1} = \langle -x, y - z + xy \rangle.$$

Centar Z od S je jednodimenzionalan:

$$Z = \{\langle 0, 0, z \rangle;\ z \in \mathbb{R}\}.$$

Neka je π unitarna ireducibilna reprezentacija od S na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$. Za svako $z \in \mathbb{R}$ operator operator $\pi(\langle 0, 0, z \rangle)$ komutira sa svim operatorima $\pi(s)$, $s \in S$. Po teoremu 5.1. svaki $\pi(\langle 0, 0, z \rangle)$ je multipl jediničnog operatora $I = I_{\mathcal{H}}$. Dakle, postoji neprekidni homomorfizam

$$\chi : \mathbb{R} \to T = \{\omega \in \mathbb{C};\ |\omega| = 1\}$$

takav da je

$$\pi(\langle 0, 0, z \rangle) = \chi(z) I, \qquad z \in \mathbb{R}.$$

Svaki neprekidni homomorfizam $\chi : \mathbb{R} \to T$ ima oblik

$$\chi(z) = \mathrm{e}^{i\lambda z}, \qquad z \in \mathbb{R},$$

za jedinstven $\lambda \in \mathbb{R}$. Prema tome, postoji $\lambda \in \mathbb{R}$ takav da je

$$\pi(\langle 0, 0, z \rangle) = \mathrm{e}^{i\lambda z} I, \qquad z \in \mathbb{R}. \tag{8.1}$$

Za svako $\lambda \in \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ konstruirat ćemo sada jednu ireducibilnu unitarnu reprezentaciju od S sa svojstvom (8.1). Za $\langle x, y, z \rangle \in S$ definiramo operator $\pi_\lambda : L_2(\mathbb{R}) \to L_2(\mathbb{R})$ ovako

$$[\pi_\lambda(\langle x, y, z \rangle) f](t) = \mathrm{e}^{i\lambda(z + ty)} f(t + x), \qquad f \in L_2(\mathbb{R}), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Lako se vidi da je π_λ homomorfizam grupe S u unitarnu grupu $U(\mathrm{L}_2(\mathbb{R}))$. Nadalje, za $f, g \in C_0(\mathbb{R})$ imamo

$$(\pi_\lambda(\langle x, y, z\rangle)f|\, g) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{i\lambda(z+ty)} f(t+x)\overline{g(t)}\mathrm{d}t,$$

a to neprekidno ovisi o $\langle x, y, z\rangle \in S$. Dakle, π_λ je unitarna reprezentacija od S na prostoru $L_2(\mathbb{R})$.

Teorem 8.1. *Neka je $\lambda \in \mathbb{R}^*$ i neka su $g_\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ i $\psi_\lambda : S \to \mathbb{C}$ funkcije definirane sa*

$$g_\lambda(t) = \left(\frac{|\lambda|}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} \mathrm{e}^{-\frac{|\lambda|}{2}t^2}, \qquad t \in \mathbb{R},$$

$$\psi_\lambda(\langle x, y, z\rangle) = \mathrm{e}^{i\lambda\left(z-\frac{xy}{2}\right)-\frac{|\lambda|}{4}\left(x^2+y^2\right)}, \qquad x, y, z \in \mathbb{R}.$$

(*a*) *Reprezentacija π_λ je ireducibilna.*

(*b*) *$g_\lambda \in L_2(\mathbb{R})$, $\|g\| = 1$ i $(\pi_\lambda(s)g_\lambda\,|g_\lambda) = \psi_\lambda(s)$ $\forall s \in S$.*

Dokaz ćemo provesti pomoću nekoliko lema. Za $\mu \in \mathbb{R}$ definiramo funkciju $\varphi_\mu : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ sa

$$\varphi_\mu(t) = \mathrm{e}^{i\mu t}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Neka je $\mathcal{C}$ vektorski prostor nad $\mathbb{C}$ razapet skupom funkcija $\varphi_\mu;\ \mu \in \mathbb{R}\}$.

Lema 8.2. *Neka je $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ izmjeriva funkcija takva da je*

$$M = \sup\{|\varphi(t)|;\ t \in \mathbb{R}\} < +\infty.$$

Postoji niz funkcija $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ u $\mathcal{C}$ takav da vrijedi

(*a*) $|\psi_n(t)| \leq M + 1$ $\forall t \in \mathbb{R}$ *i* $\forall n \in \mathbb{N}$.

(*b*) $\lim\limits_{n\to\infty} \psi_n(t) = \varphi(t)$ *za skoro sve* $t \in \mathbb{R}$.

Dokaz: Po Luzinovom teoremu postoji niz $K_1 \subseteq K_2 \subseteq \cdots$ kompakata u $\mathbb{R}$ takvih da vrijedi:

(1) $K_n \subseteq \langle -n, n\rangle$ i $\lambda(\langle -n, n\rangle \setminus K_n) \leq \dfrac{1}{n}$ $\forall n \in \mathbb{N}$; pri tome je λ Lebesgueova mjera na $\mathbb{R}$.

(2) Restrikcija $\varphi|K_n$ je neprekidna $\forall n \in \mathbb{N}$.

Po Tietzeovom teoremu za svako $n \in \mathbb{N}$ postoji neprekidna funkcija $\varphi_n : \mathbb{R} \to \overline{K}(0, M)$, gdje je $\overline{K}(0, M) = \{x \in \mathbb{C};\ |x| \leq M\}$, takva da je $\varphi_n|K_n = \varphi|K_n$. Očito možemo pretpostaviti da su $\varphi_n \in C_0(\mathbb{R})$ i $Supp\,\varphi_n \subseteq \langle -n, n\rangle$. Označimo opet sa T multiplikativnu grupu $\{\omega \in \mathbb{C};\ |\omega| = 1\}$. Definiramo funkcije $\tilde{\varphi}_n \in C(T)$ sa

$$\tilde{\varphi}_n\left(\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{n}t}\right) = \begin{cases} \varphi(t) & \text{ako je } -n < t < n \\ \\ 0 & \text{ako je } t = n. \end{cases}$$

Neka je $\tilde{\mathcal{C}}$ prostor svih trigonometrijskih polinoma, tj. potprostor od $C(T)$ razapet svim potencijama $\omega \mapsto \omega^m$, $m \in \mathbb{Z}$. Po Stone–Weierstrassovom teoremu postoje funkcije $\tilde{\psi}_n \in \tilde{\mathcal{C}}$, $n \in \mathbb{N}$, takve da je

$$|\tilde{\psi}_n(\omega) - \tilde{\varphi}_n(\omega)| \leq \frac{1}{n} \qquad \forall \omega \in T \quad \text{i} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Definiramo funkcije $\psi_n : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ sa

$$\psi_n(t) = \tilde{\psi}_n\left(\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{n}t}\right), \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Tada su $\psi_n \in \mathcal{C}$ i vrijedi

$$|\psi_n(t)| \leq M + \frac{1}{n} \leq M + 1 \qquad \forall t \in \mathbb{R} \quad \text{i} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Za $t \in K_n$ imamo

$$|\psi_n(t) - \varphi(t)| = |\psi_n(t) - \varphi_n(t)| = \left|\tilde{\psi}_n\left(\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{n}t}\right) - \tilde{\varphi}_n\left(\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{n}t}\right)\right| \leq \frac{1}{n}.$$

Stavimo $K = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n$. Neka je $t \in K$ i $\varepsilon > 0$. Izaberimo $n_0 \in \mathbb{N}$ tako da bude $t \in K_{n_0}$ i $n_0\varepsilon \geq 1$. Neka je $n \geq n_0$. Tada je $t \in K_n$ pa je

$$|\psi_n(t) - \varphi(t)| \leq \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} \leq \varepsilon.$$

Prema tome, vrijedi

$$\varphi(t) = \lim_{n\to\infty} \psi_n(t) \qquad \forall t \in K.$$

Neka je $m \in \mathbb{N}$. Komplemeti od K_n u $\langle -m, m\rangle$ čine padajući niz, pa imamo

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} (\langle -m, m\rangle \setminus K_n) = \langle -m, m\rangle \setminus K.$$

Za $n \geq m$ je

$$\lambda(\langle -m, m\rangle \setminus K_n) \leq \lambda(\langle -n, n\rangle \setminus K_n) \leq \frac{1}{n}.$$

Odatle je

$$\lambda(\langle -m, m\rangle \setminus K) = \lim_{n\to\infty} \lambda(\langle -m, m\rangle \setminus K_n) = 0.$$

Budući da je

$$\mathbb{R} \setminus K = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} (\langle -m, m\rangle \setminus K),$$

zaključujemo da je $\lambda(\mathbb{R} \setminus K) = 0$ i time je lema dokazana.

Za ograničenu izmjerivu funkciju $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definiramo linearan operator $L(\varphi)$ na prostporu $L_2(\mathbb{R})$ kao množenje sa φ :

$$L(\varphi)f = \varphi f, \qquad f \in L_2(\mathbb{R}).$$

Operator $L(\varphi)$ je očito ograničen i vrijedi $\|L(\varphi)\| \leq \sup\{|\varphi(t)\|;\ t \in \mathbb{R}\}$.

Lema 8.3. *Neka je $A : L_2(\mathbb{R}) \to L_2(\mathbb{R})$ ograničen linearan operator, takav da je $AL(\varphi) = L(\varphi)A$ $\forall \varphi \in \mathcal{C}$. Tada je $AL(\varphi) = L(\varphi)A$ za svaku ograničenu izmjerivu funkciju $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$.*

Dokaz: Neka je $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ izmjeriva i

$$M = \sup\{|\varphi(t)|;\ t \in \mathbb{R}\} < +\infty.$$

Izaberimo niz $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ u $\mathcal{C}$ kao u lemi 8.2. Za svaku $f \in L_2(\mathbb{R})$ je tada

$$\lim_{n\to\infty} ([L(\psi_n)f](t) - [L(\varphi)f](t)) = 0 \qquad \text{za skoro sve} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Nadalje, za svako $n \in \mathbb{N}$ i svako $t \in \mathbb{R}$ je

$$|[L(\psi_n)f](t) - [L(\varphi)f](t)|^2 \leq (M+1+M)^2|f(t)|^2.$$

Stoga po Lebesgueovom teoremu o dominiranoj konvergenciji za svaku $f \in L_2(\mathbb{R})$ vrijedi

$$L(\varphi)f = \lim_{n\to\infty} L(\psi_n)f \qquad \text{u prostoru} \quad L_2(\mathbb{R}).$$

Zbog neprekidnosti operatora A odatle slijedi tvrdnja leme.

Lema 8.4. *Neka je P ortogonalan projektor na prostoru $L_2(\mathbb{R})$ takav da vrijedi $PL(\varphi) = L(\varphi)P$ za svaku ograničenu izmjerivu funkciju $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. Postoji izmjeriv skup $A \subseteq \mathbb{R}$ takav da je $P = L(\chi_A)$; pri tome je χ_A oznaka za karakterističnu funkciju skupa A.*

Dokaz: Neka je $L_2^b(\mathbb{R})$ gust potprostor od $L_2(\mathbb{R})$ svih ograničenih kvadratno integrabilnih funkcija. Za $n \in \mathbb{N}$ stavimo $\chi_n = \chi_{[-n,n]}$. Tada su $L(\chi_n)$ ortogonalni projektori na prostoru $L_2(\mathbb{R})$ i za svaku $f \in L_2(\mathbb{R})$ je

$$f = \lim_{n\to\infty} L(\chi_n)f \qquad \text{u prostoru} \quad L_2(\mathbb{R}).$$

Stavimo $\varphi_n = P\chi_n$. Tada za $f \in L_2^b(\mathbb{R})$ imamo

$$PL(\chi_n)f = PL(f)\chi_n = L(f)P\chi_n = L(f)\varphi_n = \varphi_n f,$$

dakle,

$$Pf = \lim_{n\to\infty} PL(\chi_n)f = \lim_{n\to\infty} \varphi_n f \qquad \text{u prostoru} \quad L_2(\mathbb{R}).$$

Posebno je

$$\varphi_m = P\chi_m = \lim_{n\to\infty} \varphi_n\chi_m \qquad \forall m \in \mathbb{N}.$$

Stoga za svako $m \in \mathbb{N}$ postoji niz $(k_j(m))_{j\in\mathbb{N}}$ u $\mathbb{N}$ i skupovi $A_m \subseteq \mathbb{R}$ takvi da je $\lambda(A_m) = 0$ i da je

$$\varphi_m(t) = \begin{cases} \lim\limits_{j\to\infty} \varphi_{k_j(m)}(t) & \text{ako je} \quad |t| \leq m \quad \text{i} \quad t \notin A_m \\ \\ 0 & \text{ako je} \quad |t| > m \quad \text{i} \quad t \notin A_m. \end{cases}$$

Možemo pretpostaviti da je za svako $m \geq 2$ niz $(k_j(m))_{j\in\mathbb{N}}$ podniz niza $(k_j(m-1))_{j\in\mathbb{N}}$. Neka je

$$A = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} A_m.$$

Definiramo izmjerivu funkciju $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ ovako

$$\varphi(t) = \begin{cases} \lim\limits_{j\to\infty} \varphi_{k_j(m)}(t) & \text{ako je} \quad m \in \mathbb{N} \quad \text{i} \quad t \in [-m,m] \setminus A \\ \\ 0 & \text{ako je} \quad t \in A. \end{cases}$$

Za $m \in \mathbb{N}$ i $t \in [-m,m] \setminus A$ vrijedi $\varphi_m(t) = \varphi(t)$, a za $|t| > m$ i $t \in \mathbb{R} \setminus A$ je $\varphi_m(t) = 0$. Kako je A skup mjere 0, možemo pretpostaviti da je $\varphi_m|A = 0$ za svako $m \in \mathbb{N}$. Tada je $\varphi_m = \chi_m\varphi$ za svako $m \in \mathbb{N}$.

Neka je sada $f \in C_0(\mathbb{R})$ i izaberimo $m \in \mathbb{N}$ tako da bude $Supp\, f \subseteq [-m,m]$. Imamo tada

$$Pf = \lim_{n\to\infty} \varphi_n f = \lim_{n\to\infty} \varphi_n\chi_m f = \varphi_m f = \varphi\chi_m f = \varphi f.$$

Dakle,
$$Pf = \varphi f \qquad \forall f \in C_0(\mathbb{R}).$$
Za svaku $f \in C_0(\mathbb{R})$ imamo $0 \le (Pf|f) \le (f|f)$, tj.
$$0 \le \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)|f(t)|^2 \mathrm{d}t \le \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 \mathrm{d}t.$$
Odatle slijedi da je $0 \le \varphi(t) \le 1$ za skoro sve $t \in \mathbb{R}$. Izmjenom na skupu mjere 0 možemo pretpostaviti da je $0 \le \varphi(t) \le 1$ za sve $t \in \mathbb{R}$. Primjenom Lebesgueovog teorema o dominiranoj konvergenciji zaključujemo da je
$$Pf = \lim_{n\to\infty} \varphi_n f = \varphi f = L(\varphi) f \qquad \forall f \in L_2^b(\mathbb{R}).$$
Kako su operatori P i $L(\varphi)$ ograničeni, a $L_2^b(\mathbb{R})$ je gust potprostor prostora $L_2(\mathbb{R})$, slijedi $P = L(\varphi)$. Sada iz $P^2 = P$ slijedi da je $\varphi(t)^2 = \varphi(t)$ za skoro sve $t \in \mathbb{R}$. Izmjenom na skupu mjere nula dobivamo da je $\varphi(t) \in \{0,1\}$ $\forall t \in \mathbb{R}$, dakle, $\varphi = \chi_A$ za izmjeriv skup $A = \{t \in \mathbb{R};\ \varphi(t) = 1\}$. Slijedi $P = L(\chi_A)$.

Za $x \in \mathbb{R}$ definiramo unitaran operator L_x na $L_2(\mathbb{R})$ ovako:
$$(L_x f)(t) = f(t+x), \qquad f \in L_2(\mathbb{R}), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Lema 8.5. *Neka je $A \subseteq \mathbb{R}$ izmjeriv skup takav da je $L_x L(\chi_A) = L(\chi_A) Lx$ $\forall x \in \mathbb{R}$. Tada je ili $L(\chi_A) = 0$ ili $L(\chi_A) = I$.*

Dokaz: Definiramo pozitivnu mjeru ν na $\mathbb{R}$:
$$\nu(f) = \lambda\left(L(\chi_A) f\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} \chi_A(t) f(t) \mathrm{d}t, \qquad f \in C_0(\mathbb{R}).$$
Tada je za svaki $x \in \mathbb{R}$ i svaku $f \in C_0(\mathbb{R})$
$$(\lambda_x \nu)(f) = \nu(\lambda_{-x} f) = \nu(L_x f) = \lambda\left(L(\chi_A) L_x f\right) =$$
$$= \lambda\left(L_x L(\chi_A) f\right) = (\lambda_x \lambda)\left(L(\chi_A) f\right) = \lambda\left(L(\chi_A) f\right) = \nu(f).$$
Dakle, ν je pozitivna invarijantna mjera na $\mathbb{R}$, pa je $\nu = c\lambda$ za neko $c \ge 0$. Sada je za svaku $f \in C_0(\mathbb{R})$
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(c - \chi_A(t)\right) f(t) \mathrm{d}t = c\lambda(f) - \nu(f) = 0.$$
Odatle je $\chi_A(t) = c$ za skoro sve $t \in \mathbb{R}$, pa slijedi $c = 0$ ili $c = 1$. To znači da je $L\left(\chi_A\right) = 0$ ili $L\left(\chi_A\right) = I$.

Dokaz tvrdnje (a) **u teoremu 8.1.** Neka je P ortogonalni projektor na $L_2(\mathbb{R})$ takav da je $P\pi_\lambda(s) = \pi_\lambda(s) P$ $\forall s \in \mathbb{R}$. Za $\mu \in \mathbb{R}$ imamo
$$\pi_\lambda\left(\left\langle 0, \frac{\mu}{\lambda}, 0 \right\rangle\right) = L(\varphi_\mu) \qquad \text{gdje je} \quad \varphi_\mu(t) = \mathrm{e}^{i\mu t}.$$
Prema tome je $PL(\varphi) = L(\varphi) P$ $\forall \varphi \in \mathcal{C}$, a prema lemi 8.3. i za svaku ograničenu izmjerivu funkciju $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. Iz leme 8.4. slijedi da je $P = L(\chi_A)$ za neki izmjeriv skup $A \subseteq \mathbb{R}$. Imamo $\pi_\lambda(\langle x, 0, 0\rangle) = L_x$, pa je $L(\chi_A) L_x = L_x L(\chi_A)$ $\forall x \in \mathbb{R}$. Sada po lemi 8.5. slijedi da je $P = 0$ ili $P = I$. Po teoremu 5.1. reprezentacija π_λ je ireducibilna.

Bez dokaza navodimo:

Lema 8.6. *Za $a > 0$ i $\alpha \in \mathbb{C}$ vrijedi*

$$I(a, \alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-at^2+\alpha t} dt = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \mathrm{e}^{\frac{\alpha^2}{4a}}.$$

Dokaz tvrdnje (b) **u teoremu 8.1.** Očito je $g_\lambda \in L_2(\mathbb{R})$. Zbog leme 8.6. imamo

$$\|g_\lambda\|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |g_\lambda(t)|^2 \mathrm{d}t = \sqrt{\frac{|\lambda|}{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-|\lambda| t^2} \mathrm{d}t = \sqrt{\frac{|\lambda|}{\pi}} I(|\lambda|, 0) = 1.$$

Nadalje, koristeći istu lemu 8.6. nalazimo

$$(\pi_\lambda(\langle x, y, z\rangle) g_\lambda | g_\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{i\lambda(z+ty)} g_\lambda(t+x) \overline{g_\lambda(t)} \mathrm{d}t =$$

$$= \sqrt{\frac{|\lambda|}{\pi}} \mathrm{e}^{i\lambda z} \mathrm{e}^{-\frac{|\lambda|}{2} t^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-|\lambda| t^2 + (-|\lambda| x + i\lambda y)t} \mathrm{d}t = \sqrt{\frac{|\lambda|}{\pi}} \mathrm{e}^{i\lambda z} \mathrm{e}^{-\frac{|\lambda|}{2} x^2} I(|\lambda|, -|\lambda| x + i\lambda y) =$$

$$= \mathrm{e}^{i\lambda z - \frac{|\lambda|}{2} x^2 + \frac{(-|\lambda| x + i\lambda y)^2}{4|\lambda|}} = \mathrm{e}^{i\lambda\left(z - \frac{xy}{2}\right) - \frac{|\lambda|}{2}(x^2+y^2)} = \psi_\lambda(\langle x, y, z\rangle).$$

Teorem 8.7. *Neka je $\lambda \in \mathbb{R}^*$ i neka je π unitarna reprezentacija grupe S na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$ takva da vrijedi*

$$\pi(\langle 0, 0, z\rangle) = \mathrm{e}^{i\lambda z} I, \qquad \forall z \in \mathbb{R}.$$

Tada je π multipl reprezentacije π_λ.

Prema tvrdnji (b) teorema 8.1. i prema propozicijama 5.4. i 5.5. za dokaz teorema 8.7. dovoljno je ustanovit da je π reprezentacija tipa ψ_λ.

Za $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ stavimo

$$\pi(x, y) = \pi\left(\left\langle x, y, \frac{xy}{2}\right\rangle\right).$$

Za $v, v' \in \mathbb{R}^2$, $v = (x, y)$, $v' = (x', y')$, tada je

$$\pi(v)\pi(v') = \gamma_\lambda(v, v')\pi(v + v')$$

gdje je

$$\gamma_\lambda(v, v') = \mathrm{e}^{\frac{i\lambda}{2}(xy' - x'y)}.$$

Lema 8.8. *Za $g \in L_1(\mathbb{R}^2)$ postoji jedinstven linearan operator $\pi(g) : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ takav da za sve $\xi, \eta \in \mathcal{H}$ vrijedi*

$$(\pi(g)\xi|\eta) = \int_{\mathbb{R}^2} g(v)(\pi(v)\xi|\eta)\mathrm{d}v.$$

Operator $\pi(g)$ je ograničen i vrijedi $\|\pi(g)\| \leq \|g\|_{L_1(\mathbb{R}^2)}$.

Dokaz: $v \mapsto (\pi(v)\xi|\eta)$ je ograničena neprekidna funkcija na $\mathbb{R}^2$. Prema tome, $v \mapsto g(v)(\pi(v)\xi|\eta)$ je funkcija iz $L_1(\mathbb{R}^2)$. Dakle,

$$A(\xi, \eta) = \int_{\mathbb{R}^2} g(v)(\pi(v)\xi|\eta)\mathrm{d}v, \qquad \xi, \eta \in \mathcal{H},$$

je dobro definirana seskvilinearna forma na $\mathcal{H}\times\mathcal{H}$. Nadalje, kako je $|(\pi(v)\xi|\eta)|\leq\|\xi\|\|\eta\|$, imamo

$$|A(\xi,\eta)|\leq\int_{\mathbb{R}^2}|g(v)|\mathrm{d}v\,\|\xi\|\|\eta\|=\|g\|_{L_1(\mathbb{R}^2)}\|\xi\|\|\eta\|.$$

Odatle slijede tvrdnje.

Za $g_1,g_2\in L_1(\mathbb{R}^2)$ definiramo funkciju $g_1*g_2:\mathbb{R}^2\to\mathbb{C}$ ovako:

$$(g_1*g_2)(v)=\int_{\mathbb{R}^2}\gamma_\lambda(v,w)g_1(v-w)g_2(w)\mathrm{d}w,\qquad v\in\mathbb{R}^2.$$

Budući da je $|\gamma_\lambda(v,w)|=1$, Fubinijev teorem povlači

$$\int_{\mathbb{R}^2}|(g_1*g_2)(v)|\mathrm{d}v\leq\int_{\mathbb{R}^2}\left[\int_{\mathbb{R}^2}|g_1(v-w)|\,|g_2(w)|\mathrm{d}w\right]\mathrm{d}v=$$

$$=\int_{\mathbb{R}^2}|g_2(w)|\left[\int_{\mathbb{R}^2}|g_1(v-w)|\mathrm{d}v\right]\mathrm{d}w=\|g_1\|_{L_1(\mathbb{R}^2)}\|g_2\|_{L_1(\mathbb{R}^2)}.$$

Dakle, $(g_1,g_2)\mapsto g_1*g_2$ je bilinearno preslikavanje sa $L_1(\mathbb{R}^2)\times L_1(\mathbb{R}^2)$ u $L_1(\mathbb{R}^2)$ i vrijedi

$$\|g_1*g_2\|_{L_1(R^2)}\leq\|g_1\|_{L_1(R^2)}\|g_2\|_{L_1(R^2)},\qquad g_1,g_2\in L_1(\mathbb{R}^2).$$

Lema 8.9. *Vrijedi*

$$\pi(g_1)\pi(g_2)=\pi(g_1*g_2)\qquad\forall g_1,g_2\in L_1(\mathbb{R}^2).$$

Dokaz: Za $\xi,\eta\in\mathcal{H}$ i $g_1,g_2\in L_1(\mathbb{R}^2)$ imamo redom

$$(\pi(g_1)\pi(g_2)\xi|\eta)=\int_{\mathbb{R}^2}(\pi(v)\pi(g_2)\xi|\eta)g_1(v)\mathrm{d}v=\int_{\mathbb{R}^2}(\pi(g_2)\xi|\pi(v)^*\eta)g_1(v)\mathrm{d}v=$$

$$=\int_{\mathbb{R}^2}\left[\int_{\mathbb{R}^2}(\pi(w)\xi|\pi(v)^*\eta)g_2(w)\mathrm{d}w\right]g_1(v)\mathrm{d}v=$$

$$=\int_{\mathbb{R}^2}\left[\int_{\mathbb{R}^2}(\pi(v+w)\xi|\eta)\gamma_\lambda(v,w)g_2(w)\mathrm{d}w\right]g_1(v)\mathrm{d}v=$$

$$=\int_{\mathbb{R}^2}\left[\int_{\mathbb{R}^2}(\pi(v+w)\xi|\eta)g_1(v)\gamma_\lambda(v,w)\mathrm{d}v\right]g_2(w)\mathrm{d}w=$$

$$=\int_{\mathbb{R}^2}\left[\int_{\mathbb{R}^2}(\pi(v)\xi\xi|\eta)g_1(v-w)\gamma_\lambda(v-w,w)\mathrm{d}v\right]g_2(w)\mathrm{d}w=$$

$$=\int_{\mathbb{R}^2}(\pi(v)\xi|\eta)\left[\int_{\mathbb{R}^2}g_1(v-w)g_2(w)\gamma_\lambda(v-w,w)\mathrm{d}w\right]\mathrm{d}v.$$

Međutim, $\gamma_\lambda(v-w,w)=\gamma_\lambda(v,w)$, pa je izraz u uglatoj zagradi jednak $(g_1*g_2)(v)$. Stoga je

$$(\pi(g_1)\pi(g_2)\xi|\eta)=(\pi(g_1*g_2)\xi|\eta).$$

Zbog proizvoljnosti $\xi,\eta\in\mathcal{H}$ slijedi tvrdnja leme.

Za $g\in L_1(\mathbb{R}^2)$ definiramo $g^*\in L_1(\mathbb{R}^2)$ ovako:

$$g^*(v)=\overline{g(-v)},\qquad v\in\mathbb{R}^2.$$

Lema 8.10. *Vrijedi*

$$\pi(g)^* = \pi(g^*) \qquad \forall g \in L_1(\mathbb{R}^2).$$

Dokaz: Za $\xi, \eta \in \mathcal{H}$ i $g \in L_1(\mathbb{R}^2)$ imamo

$$(\xi|\pi(g)^*\eta) = (\pi(g)\xi|\eta) = \int_{\mathbb{R}^2} (\pi(v)\xi|\eta)g(v)\mathrm{d}v =$$

$$= \overline{\int_{\mathbb{R}^2} (\eta|\pi(v)\xi)\overline{g(v)}\mathrm{d}v} = \overline{\int_{\mathbb{R}^2} (\pi(v)^*\eta|\xi)\overline{g(v)}\mathrm{d}v}.$$

Kako je

$$\pi(v)^* = \pi\left(\left\langle x, y, \frac{xy}{2}\right\rangle\right)^{-1} = \pi\left(\left\langle x, y, \frac{xy}{2}\right\rangle^{-1}\right) = \pi\left(\left\langle -x, -y, \frac{xy}{2}\right\rangle\right) = \pi(-v),$$

slijedi

$$(\xi|\pi(g)^*\eta)\overline{\int_{\mathbb{R}^2} (\pi(-v)\eta|\xi)\overline{g(v)}\mathrm{d}v} = \overline{\int_{\mathbb{R}^2} (\pi(v)\eta|\xi)\overline{g(-v)}\mathrm{d}v} =$$

$$= \overline{\int_{\mathbb{R}^2} (\pi(v)\eta|\xi)g^*(v)\mathrm{d}v} = \overline{(\pi(g^*)\eta|\xi)} = (\xi|\pi(g^*)\eta).$$

Za $g \in L_1(\mathbb{R}^2)$ i $w \in \mathbb{R}^2$ definiramo $g_w \in L_1(\mathbb{R}^2)$ ovako

$$g_w(v) = \gamma_\lambda(w, v)g(v - w), \qquad v \in \mathbb{R}^2.$$

Lema 8.11. *Vrijedi*

$$\pi(w)\pi(g) = \pi(g_w) \qquad \forall w \in \mathbb{R}^2 \quad i \quad \forall g \in L_1(\mathbb{R}^2).$$

Dokaz: Ponovo računamo u skalarnom produktu i koristimo jednakost $\gamma_\lambda(w, v-w) = \gamma_\lambda(w, v)$:

$$(\pi(w)\pi(g)\xi|\eta) = \int_{\mathbb{R}^2} (\pi(w)\pi(v)\xi|\eta)g(v)\mathrm{d}v = \int_{\mathbb{R}^2} (\pi(w+v)\xi|\eta)\gamma_\lambda(w.v)g(v)\mathrm{d}v =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^2} (\pi(v)\xi|\eta)\gamma_\lambda(w, v-w)g(v-w)\mathrm{d}v = \int_{\mathbb{R}^2} (\pi(v)\xi|\eta)g_w(v)\mathrm{d}v = (\pi(g_w)\xi|\eta).$$

Definiramo sada funkciju $f \in L_1(\mathbb{R}^2)$ ovako

$$f(x, y) = \frac{|\lambda|}{2\pi}\mathrm{e}^{-\frac{|\lambda|}{4}(x^2+y^2)}, \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Lema 8.12. (a) $f^* = f$.

(b) *Za svako* $w = (a, b) \in \mathbb{R}^2$ *je*

$$f * f_w = \mathrm{e}^{-\frac{|\lambda|}{4}(a^2+b^2)}f.$$

Dokaz: Tvrdnja (a) je očita, a tvrdnju (b) dokazujemo direktnim računom:

$$(f * f_w)(v) = \int_{\mathbb{R}^2} f(v-u)f_w(u)\gamma_\lambda(v, u)\mathrm{d}u = \int_{\mathbb{R}^2} f(v-u)f(u-w)\gamma_\lambda(w, u)\gamma_\lambda(v, u)\mathrm{d}u.$$

Uz $v = (x, y)$, $w = (a, b)$ i $u = (t, s)$ podintegralna funkcija jednaka je

$$\frac{|\lambda|^2}{4\pi^2}\mathrm{e}^{-\frac{|\lambda|}{4}[(x-t)^2+(y-s)^2+(a-t)^2+(b-s)^2]+\frac{i\lambda}{2}(as-tb+xs-ty)} =$$

$$= \frac{|\lambda|^2}{4\pi^2}\mathrm{e}^{-\frac{|\lambda|}{4}(x^2+y^2+a^2+b^2)}\mathrm{e}^{-\frac{|\lambda|}{2}t^2+\frac{1}{2}[|\lambda|(x+a)-i\lambda(y+b)]t}\mathrm{e}^{-\frac{|\lambda|}{2}s^2+\frac{1}{2}[|\lambda|(y+b)-i\lambda(x+a)]s}.$$

Dakle, prema lemi 8.6. dobivamo da je $(f * f_w)(v)$ jednako

$$\frac{|\lambda|^2}{4\pi^2}\mathrm{e}^{-\frac{|\lambda|}{4}(x^2+y^2+a^2+b^2)}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{|\lambda|}{2}t^2+\frac{1}{2}[|\lambda|(x+a)-i\lambda(y+b)]t}\mathrm{d}t\right]\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{|\lambda|}{2}s^2+\frac{1}{2}[|\lambda|(y+b)+i\lambda(x+a)]s}\mathrm{d}s\right] =$$

$$= \frac{|\lambda|^2}{4\pi}\mathrm{e}^{-\frac{|\lambda|}{4}(x^2+y^2+a^2+b^2)}I\left(\frac{|\lambda|}{2},\frac{|\lambda|}{2}(x+a)-\frac{i\lambda}{2}(y+b)\right)I\left(\frac{|\lambda|}{2},\frac{|\lambda|}{2}(y+b)+\frac{i\lambda}{2}(x+a)\right) =$$

$$= \frac{|\lambda|^2}{4\pi}\sqrt{\frac{2\pi}{|\lambda|}}\sqrt{\frac{2\pi}{|\lambda|}}\mathrm{e}^{-\frac{|\lambda|}{4}(x^2+y^2+a^2+b^2)}\mathrm{e}^{\frac{1}{2|\lambda|}\left[\left(\frac{|\lambda|}{2}(x+a)-\frac{i\lambda}{2}(y+b)\right)^2+\left(\frac{|\lambda|}{2}(y+b)+\frac{i\lambda}{2}(x+a)\right)^2\right]}.$$

Kako je

$$\left(\frac{|\lambda|}{2}(x+a)-\frac{i\lambda}{2}(y+b)\right)^2+\left(\frac{|\lambda|}{2}(y+b)+\frac{i\lambda}{2}(x+a)\right)^2=0,$$

slijedi

$$(f * f_w)(v) = \frac{|\lambda|}{2\pi}\mathrm{e}^{-\frac{|\lambda|}{4}(a^2+b^2)}\mathrm{e}^{-\frac{|\lambda|}{4}(x^2+y^2)} = \mathrm{e}^{-\frac{|\lambda|}{4}(a^2+b^2)}f(v).$$

Dokaz teorema 8.7. Definiramo $P:\mathcal{H}\to\mathcal{H}$ sa $P=\pi(f)$. Prema tvrdnji (a) leme 8.12. i prema lemi 8.10. vrijedi $P^*=P$. Nadalje, $f_0=f$, pa je po tvrdnji (b) leme 8.12. $f*f=f$. Sada iz leme 8.9. slijedi $P^2=P$. Prema tome, P je ortogonalni projektor na prostoru $\mathcal{H}$.

Imamo

$$\left\langle x, y\frac{xy}{2}\right\rangle\left\langle 0, 0z-\frac{xy}{2}\right\rangle = \langle x,y,z\rangle.$$

Dakle,

$$\pi(\langle x,y,z\rangle) = \mathrm{e}^{i\lambda\left(z-\frac{xy}{2}\right)}\pi(x,y), \qquad \langle x,y,z\rangle\in S.$$

Neka je $s=\langle x,y,z\rangle\in S$ i $v=(x,y)\in\mathbb{R}^2$. Prema lemama 8.9. i8.11. i prema tvrdnji (b) leme 8.12. imamo redom

$$P\pi(s)P = \mathrm{e}^{i\lambda\left(z-\frac{xy}{2}\right)}\pi(f)\pi(v)\pi(v) = \mathrm{e}^{i\lambda\left(z-\frac{xy}{2}\right)}\pi(f*f_v) = \mathrm{e}^{i\lambda\left(z-\frac{xy}{2}\right)}\pi\left(\mathrm{e}^{-\frac{|\lambda|}{4}(x^2+y^2)}f\right) = \psi_\lambda(s)P.$$

Neka je $\mathcal{K}$ najmanji $\pi(S)-$invarijantan zatvoren potprostor od $\mathcal{H}$ koji sadrži $P\mathcal{H}$. Treba još samo dokazati da je $\mathcal{K}=\mathcal{H}$, tj. da vrijedi implikacija

$$\xi\in\mathcal{H},\quad \xi\perp\mathcal{K} \qquad\Longrightarrow\qquad \xi=0.$$

Tome je ekvivalentna sljedeća implikacija

$$\xi\in\mathcal{H},\quad (\xi|\pi(v)P\eta)=0\quad \forall v\in\mathbb{R}^2 \quad \text{i} \quad \forall\eta\in\mathcal{H} \qquad\Longrightarrow\qquad \xi=0.$$

U tu je svrhu dovoljno dokazati sljedeću implikaciju:

$$\xi\in\mathcal{H},\quad (\pi(v)P\pi(-v)\xi|\xi)=0\quad \forall v\in\mathbb{R}^2 \qquad\Longrightarrow\qquad \xi=0.$$

Neka je, dakle, $\xi \in \mathcal{H}$ takav da je $(\pi(v)P\pi(-v)\xi|\xi) = 0\ \forall v \in \mathbb{R}^2$. Definiramo funkciju $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ ovako:

$$h(v) = f(v)(\pi(v)\xi|\xi), \qquad v \in \mathbb{R}^2.$$

Tada je funkcija h neprekidna i $h \in L_1(\mathbb{R}^2)$. Za $v = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ imamo redom

$$0 = (\pi(v)P\pi(-v)\xi|\xi) = (\pi(v)\pi(f)\pi(-v)\xi|\xi) = \int_{\mathbb{R}^2} f(u)(\pi(v)\pi(u)\pi(-v)\xi|\xi)\mathrm{d}u =$$

$$= \int_{\mathbb{R}2} f(u)\gamma_\lambda(u, -v)\gamma_\lambda(v, u - v)(\pi(u)\xi|\xi)\mathrm{d}u = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} h(a, b)\mathrm{e}^{-i\lambda ay+i\lambda bx}\mathrm{d}a\mathrm{d}b = \hat{h}(-\lambda y, \lambda x).$$

Pri tome smo sa $\hat{h}$ označili Fourierov transformat funkcije h. Kako je $\lambda \neq 0$, to znači da je $\hat{h} = 0$, pa iz injektivnosti Fourierove transformacije na $L_1(\mathbb{R}^2)$ slijedi da je $h = 0$ u prostoru $L_1(\mathbb{R}^2)$. No funkcija h je neprekidna, pa je ona identički jednaka nuli. Posebno, $\|\xi\|^2 = h(0, 0) = 0$, dakle, $\xi = 0$.

Poglavlje 9

GÅRDINGOVA DOMENA

U cijelom ovom poglavlju G je nilpotentna grupa, $\mathfrak{g}$ njena Liejeva algebra i μ Haarova mjera na G.

Za $\varphi, \psi \in C_0^\infty(G)$ definiramo $\varphi * \psi \in C_0^\infty(G)$ i $\varphi^* \in C_0^\infty(G)$ sa

$$(\varphi * \psi)(x) = \int_G \varphi(y)\psi(y^{-1}x)\mathrm{d}\mu(y), \qquad \varphi^*(x) = \overline{\varphi\left(x^{-1}\right)}.$$

Lako se provjerava da je $C_0^\infty(G)$ asocijativna $*-$algebra, tj. da za $\varphi, \psi, \chi \in C_0^\infty(G)$ i $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ vrijedi

$$(\alpha\varphi + \beta\psi) * \chi = \alpha\varphi * \chi + \beta\psi * \chi, \qquad \varphi * (\alpha\psi + \beta\chi) = \alpha\varphi * \psi + \beta\varphi * \chi,$$

$$(\varphi * \psi) * \chi = \varphi * (\psi * \chi), \qquad (\varphi * \psi)^* = \psi^* * \varphi *, \qquad \varphi^{**} = \varphi.$$

Nadalje, vrijedi

$$\rho_x\left(\varphi^*\right) = \left(\lambda_x \varphi\right)^*, \qquad x \in G, \quad \varphi \in C_0^\infty(G).$$

Teorem 9.1. *Neka je π unitarna reprezentacija na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$.*

(*a*) *Za svaku funkciju $\varphi \in C_0^\infty(G)$ postoji jedinstven linearan operator $\pi(\varphi) : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, takav da je*

$$(\pi(\varphi)\xi|\eta) = \int_G \varphi(x)(\pi(x)\xi|\eta)\mathrm{d}\mu(x) \qquad \forall \xi, \eta \in \mathcal{H}.$$

Operator $\pi(\varphi)$ je ograničen i vrijedi $\|\pi(\varphi)\| \leq \|\varphi\|_{L_1(G)}$.

(*b*) *$\varphi \mapsto \pi(\varphi)$ je reprezentacija $*-$algebre $C_0^\infty(G)$ na prostoru $\mathcal{H}$, tj. za sve $\varphi, \psi \in C_0^\infty(G)$ i za sve $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ vrijedi*

$$\pi(\alpha\varphi + \beta\psi) = \alpha\pi(\varphi) + \beta\pi(\psi), \qquad \pi(\varphi * \psi) = \pi(\varphi)\pi(\psi), \qquad \pi(\varphi^*) = \pi(\varphi)^*.$$

(*c*) *Za svaki $x \in G$ i svaku funkciju $\varphi \in C_0^\infty(G)$ vrijedi*

$$\pi(\varphi)\pi(x) = \pi(\rho_{x^{-1}}) \qquad i \qquad \pi(x)\pi(\varphi) = \pi(\lambda_x \varphi).$$

Dokaz: (*a*) Dokaz je potpuno analogan dokazu leme 8.8. Definiramo $A : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ sa

$$A(\xi, \eta) = \int_G \varphi(x)(\pi(x)\xi|\eta)\mathrm{d}\mu(x), \qquad \xi, \eta \in \mathcal{H}.$$

Tada je A seskvilinearan funkcional i zbog $|(\pi(x)\xi|\eta)| \leq \|\xi\| \, \|\eta\|$ slijedi

$$|(A\xi|\eta)| \leq \|\varphi\|_{L_1(G)}\|\xi\| \, \|\eta\|.$$

Odatle slijedi tvrdnja (a).

Prva jednakost u tvrdnji (c) dobiva se direktnim računom koristeći desnu invarijantnost mjere μ :

$$(\pi(\varphi)\pi(x)\xi|\eta) = \int_G \varphi(y)(\pi(yx)\xi|\eta)\mathrm{d}\mu(y) = \int_G \varphi(yx^{-1})(\pi(y)\xi|\eta)\mathrm{d}\mu(y) = (\pi(\rho_{x^{-1}}\varphi)\xi|\eta).$$

Druga jednakost slijedi neposredno iz prve koristeći treću jednakost u tvrdnji (b) :

$$\pi(x)\pi(\varphi) = \big(\pi(\varphi)^*\pi(x^{-1})\big)^* = \pi(\rho_x\varphi^*)^* = \pi\left((\lambda_x\varphi)^*\right)^* = \pi(\lambda_x\varphi).$$

(b) Prva jednakost, tj. linearnost preslikavanja $\varphi \mapsto \pi(\varphi)$, je očita. Druga se jednakost dobiva direktnim računom koristeći drugu jednakost u tvrdnji (c) i Fubinijev teorem:

$$(\pi(\varphi)\pi(\psi)\xi|\eta) = \int_G \varphi(x)(\pi(x)\pi(\psi)\xi|\eta)\mathrm{d}\mu(x) = \int_G \varphi(x)(\pi(\lambda_x\psi)\xi|\eta)\mathrm{d}\mu(x) =$$

$$\int_G\int_G \varphi(x)\psi(x^{-1}y)(\pi(y)\xi|\eta)\mathrm{d}\mu(x)\mathrm{d}\mu(y) = \int_G (\varphi * \psi)(y)(\pi(y)\xi|\eta)\mathrm{d}\mu(y) = (\pi(\varphi * \psi)\xi|\eta).$$

Napokon, treća jednakost u tvrdnji (b) slijedi neposrednim računom koristeći unimodularnost grupe G, tj. invarijantnost Haarove mjere mjere μ u odnosu na invertiranje $x \mapsto x^{-1}$:

$$(\pi(\varphi^*)\xi|\eta) = \int_G \overline{\varphi\left(x^{-1}\right)}(\pi(x)\xi|\eta)\mathrm{d}\mu(x) = \int_G \overline{\varphi\left(x^{-1}\right)}\,\overline{\left(\pi\left(x^{-1}\right)\eta\,|\,\xi\right)}\mathrm{d}\mu(x) =$$

$$= \overline{\int_G \varphi(x)(\pi(x)\eta|\xi)\mathrm{d}\mu(x)} = \overline{(\pi(\varphi)\eta|\xi)} = (\xi|\pi(f)\eta) = (\pi(\varphi)^*\xi|\eta).$$

Potprostor

$$\mathcal{H}^\infty(\pi) = span\left\{\pi(\varphi)\xi;\ \varphi \in C_0^\infty(G),\ \xi \in \mathcal{H}\right\} = \sum_{\varphi \in C_0^\infty(G)} \pi(\varphi)\mathcal{H}$$

Hilbertovog prostora $\mathcal{H}$ zove se **Gårdingova domena** u $\mathcal{H}$ (u odnosu na reprezentaciju π).

Teorem 9.2. *Gårdingova domena $\mathcal{H}^\infty(\pi)$ je gust potprostor od $\mathcal{H}$.*

Dokaz: Neka je $\xi \in \mathcal{H}$ i $\xi \perp \mathcal{H}^\infty(\pi)$. Tada je za svaku funkciju $\varphi \in C_0^\infty(G)$

$$0 = (\pi(\varphi)\xi|\xi) = \int_G \varphi(x)(\pi(x)\xi|\xi)\mathrm{d}\mu(x).$$

Kako je funkcija $x \mapsto (\pi(x)\xi|\xi)$ neprekidna na G, slijedi $(\pi(x)\xi|\xi) = 0 \ \forall x \in G$. Odatle je $\|\xi\|^2 = (\pi(e)\xi|\xi) = 0$, dakle, $\xi = 0$.

Teorem 9.3. (a) *Za svaki $\xi \in \mathcal{H}^\infty(\pi)$ i svaki $X \in \mathfrak{g}$ postoji*

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(\pi(\exp\, tX)\xi - \xi)$$

i sadržan je u $\mathcal{H}^\infty(\pi)$. Ako je $\xi = \pi(\varphi)\eta$, $\varphi \in C_0^\infty(G)$, $\eta \in \mathcal{H}$, onda je taj limes jednak $\pi(\lambda_X\varphi)\eta$, pri čemu je funkcija $\lambda_X\varphi \in C_0^\infty(G)$ definirana sa

$$\left(\lambda_X\varphi\right)(x) = \frac{d}{dt}\,\varphi((\exp\, -tX)x)\Big|_{t=0}, \qquad x \in G.$$

(*b*) *Za* $X \in \mathfrak{g}$ *definiramo linearan operator* $\pi^\infty(X) : \mathcal{H}^\infty(\pi) \to \mathcal{H}^\infty(\pi)$ *sa*

$$\pi^\infty(X)\xi = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(\pi(\exp tX)\xi - \xi), \qquad \xi \in \mathcal{H}^\infty(\pi).$$

Tada je π^∞ *reprezentacija Liejeve algebre* $\mathfrak{g}$ *na vektorskom prostoru* $\mathcal{H}^\infty(\pi)$, *tj. za sve* $X, Y \in \mathfrak{g}$ *i sve* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *vrijedi*

$$\pi^\infty(\alpha X + \beta Y) = \alpha\pi^\infty(X) + \beta\pi^\infty(Y), \qquad \pi^\infty([X,Y]) = \pi^\infty(X)\pi^\infty(Y) - \pi^\infty(Y)\pi^\infty(X).$$

(*c*) *Za* $x \in G$, $X \in \mathfrak{g}$ *i* $\xi \in \mathcal{H}^\infty(\pi)$ *vrijedi*

$$\pi(x)\pi^\infty(X)\pi(x^{-1})\xi = \pi^\infty((Ad\, x)X)\xi.$$

(*d*) *Za svaki* $X \in \mathfrak{g}$ *i svaki* $\xi \in \mathcal{H}^\infty(\pi)$ *preslikavanje* $x \mapsto \pi^\infty(X)\pi(x)\xi$ *sa* G *u* $\mathcal{H}$ *je neprekidno.*

Dokaz: (*a*) Prva tvrdnja slijedi iz druge jer je po definiciji $\mathcal{H}^\infty(\pi)$ potprostor od $\mathcal{H}$ razapet svim vektorima oblika $\pi(\varphi)\xi$, $\varphi \in C_0^\infty(G)$, $\xi \in \mathcal{H}$. Neka su $X \in \mathfrak{g}$, $\varphi \in C_0^\infty(G)$ i $\xi, \eta \in \mathcal{H}$. Tada je

$$\left(\frac{1}{t}(\pi(\exp tX) - I)\pi(\varphi)\xi - \pi(\lambda_X\varphi)\xi \middle| \eta\right) = \int_G \left[\frac{\varphi(\exp -tX)x) - \varphi(x)}{t} - (\lambda_X\varphi)(x)\right](\pi(x)\xi|\eta)\mathrm{d}\mu(x).$$

Odatle je

$$\left\|\frac{1}{t}(\pi(\exp tX) - I)\pi(\varphi)\xi - \pi(\lambda_X\varphi)\xi\right\| \le \|\xi\| \int_G \left|\frac{\varphi(\exp -tX)x) - \varphi(x)}{t} - (\lambda_X\varphi)(x)\right| \mathrm{d}\mu(x).$$

Neka je $\psi \in C^\infty(\mathbb{R} \times G)$ definirana sa

$$\psi(t,x)\varphi((\exp -tX)x), \qquad t \in \mathbb{R}, \quad x \in G.$$

Po Taylorovom teoremu postoji $\psi_1 \in C^\infty(\mathbb{R} \times G)$ takva da je

$$\psi(t,x) = \psi(0,x) + t\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\psi(s,x)\bigg|_{s=0} + t^2\psi_1(t,x), \qquad t \in \mathbb{R}, \quad x \in G.$$

Tada imamo

$$\psi(0,x) = \varphi(x) \qquad\qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\psi(s,x)\bigg|_{s=0} = (\lambda_X\varphi)(x), \qquad x \in G.$$

Prema tome je

$$\varphi((\exp -tX)x) = \varphi(x) + t(\lambda_X\varphi)(x) + t^2\psi_1(t,x), \qquad t \in \mathbb{R}, \quad x \in G.$$

Iz te formule vidi se da postoji kompakt $K \subseteq G$ takav da je nosač funkcije $x \mapsto \psi_1(t,x)$ sadržan u K za svako $t \in [-1,1]$. Neka je $N_K > 0$ takav da vrijedi

$$\psi \in C_0(G), \quad Supp\,\psi \subseteq K \qquad \Longrightarrow \qquad |\mu(\psi)| \le N_K\|\psi\|_\infty.$$

Neka je

$$M = \max\{|\psi_1(t,x)|;\ x \in G,\ t \in [-1,1]\}.$$

Za $t \in [-1,1]$ imamo tada

$$\left\|\frac{1}{t}(\pi(\exp tX) - I)\pi(\varphi)\xi - \pi(\lambda_X\varphi)\xi\right\| \le \|\xi\| \int_G |t\psi_1(t,x)|\mathrm{d}\mu(x) \le |t|\,\|\xi\|\,N_K M.$$

Odatle slijedi tvrdnja.

(*b*) Za $X \in \mathfrak{g}$ neka je $\tilde{X} : C^\infty(G) \to C^\infty(G)$ definirano sa

$$(\tilde{X}\varphi)(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\varphi(x(\exp\, tX))\bigg|_{t=0}, \qquad x \in G, \quad \varphi \in C^\infty(G).$$

Prema rezultatima poglavlja 1. tada vrijedi

$$(\alpha X + \beta Y)\tilde{} = \alpha\tilde{X} + \beta\tilde{Y}, \qquad [X,Y]\tilde{} = \tilde{X}\,\tilde{Y} - \tilde{Y}\,\tilde{X}, \qquad \alpha,\beta \in \mathbb{R}, \quad X,Y \in \mathfrak{g}.$$

Nadalje, za $\varphi \in C^\infty(G)$ definiramo $\check{\varphi} \in C^\infty(G)$ sa

$$\check{\varphi}(x) = \varphi(x^{-1}), \qquad x \in G.$$

Tada za $X \in \mathfrak{g}$ i $\varphi \in C_0^\infty(G)$ imamo $\lambda_X\varphi = (\tilde{X}\check{\varphi})\check{}$, pa slijedi

$$\lambda_X\lambda_Y\varphi = (\tilde{X}\,\tilde{Y}\check{\varphi})\check{}, \qquad X,Y \in \mathfrak{g}, \quad \varphi \in C_0^\infty(G).$$

Odatle i iz tvrdnje (*b*) teorema 9.1. za $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$, $X,Y \in \mathfrak{g}$, $\varphi \in C_0^\infty(G)$ i $\xi \in \mathcal{H}$ imamo redom

$$\pi^\infty(\alpha X + \beta Y)\pi(\varphi)\xi = \pi(\lambda_{\alpha X + \beta Y}\varphi)\xi = \pi\left([(\alpha X + \beta Y)\tilde{}\check{\varphi}]\check{}\right)\xi =$$
$$= \pi\left([\alpha\tilde{X}\check{\varphi} + \beta\tilde{Y}\check{\varphi}]\check{}\right)\xi = \pi\left(\alpha(\tilde{X}\check{\varphi})\check{} + \beta(\tilde{Y}\check{\varphi})\check{}\right)\xi = \pi(\alpha\lambda_X\varphi + \beta\lambda_Y\varphi)\xi =$$
$$= \alpha\pi(\lambda_X\varphi)\xi + \beta\pi(\lambda_Y\varphi)\xi = \alpha\pi^\infty(X)\pi(\varphi)\xi + \beta\pi^\infty(Y)\pi(\varphi)\xi = (\alpha\pi^\infty(X) + \alpha\pi^\infty(Y))\pi(\varphi)\xi.$$

Prema tome,

$$\pi^\infty(\alpha X + \beta Y) = \alpha\pi^\infty(X) + \alpha\pi^\infty(Y).$$

Sličnom metodom dolazimo i do druge jednakosti:

$$\pi^\infty([X,Y])\pi(\varphi)\xi = \pi(\lambda_{[X,Y]}\varphi)\xi = \pi\left(([X,Y]\tilde{}\check{\varphi})\check{}\right)\xi = \pi\left((\tilde{X}\,\tilde{Y}\,\check{\varphi} - \tilde{Y}\,\tilde{X}\,\check{\varphi})\check{}\right)\xi =$$
$$= \pi\left((\tilde{X}\,\tilde{Y}\,\check{\varphi})\check{}\right)\xi - \pi\left((\tilde{Y}\,\tilde{X}\,\check{\varphi})\check{}\right)\xi = \pi(\lambda_X\lambda_Y\varphi)\xi - \pi(\lambda_Y\lambda_X\varphi)\xi =$$
$$= \pi^\infty(X)\pi(\lambda_Y\varphi)\xi - \pi^\infty(Y)\pi(\lambda_X\varphi)\xi = [\pi^\infty(X)\pi^\infty(Y) - \pi^\infty(Y)\pi^\infty(X)]\pi(\varphi)\xi.$$

dakle,

$$\pi^\infty([X,Y]) = \pi^\infty(X)\pi^\infty(Y) - \pi^\infty(Y)\pi^\infty(X).$$

(*c*) Za $x,y \in G$, $X \in \mathfrak{g}$, $\varphi \in C_0^\infty(G)$ i $\xi \in \mathcal{H}$ imamo

$$(\lambda_x\lambda_X\lambda_{x^{-1}}\varphi)(y) = (\lambda_X\lambda x^{-1}\varphi)(x^{-1}y) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\lambda_{x^{-1}}\varphi)((\exp\, -tX)x^{-1}y)\bigg|_{t=0} =$$
$$= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\varphi(x(\exp\, -tX)x^{-1}y)\bigg|_{t=0} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\varphi((\exp\, -t(Ad\,x)X)y)\bigg|_{t=0} = (\lambda_{(Ad\,x)X}\varphi)(y).$$

Dakle, $\lambda_x\lambda_X\lambda_{x^{-1}}\varphi = \lambda_{(Ad\,x)X}\varphi$, pa slijedi

$$\pi(x)\pi^\infty(X)\pi(x^{-1})\pi(\varphi)\xi = \pi(\lambda_x\lambda_X\lambda_{x^{-1}}\varphi)\xi = \pi(\lambda_{(Ad\,x)X}\varphi)\xi = \pi^\infty((Ad\,x)X)\pi(\varphi)\xi.$$

(*d*) Neka je $(X_1,\ldots,X_n)$ baza od $\mathfrak{g}$ i $X \in \mathfrak{g}$. Definiramo neprekidne (u stvari C^∞) funkcije $a_1,\ldots,a_n : G \to \mathbb{R}$ ovako:

$$(Ad\,x^{-1})X = \sum_{j=1}^n a_j(x)X_j.$$

Neka je $\xi \in \mathcal{H}^\infty(\pi)$ i stavimo $\xi_j = \pi^\infty(X_j)\xi$, $1 \le j \le n$. Tada prema (*c*) imamo

$$\pi^\infty(X)\pi(x)\xi = \pi(x)\pi(x^{-1})\pi^\infty(X)\pi(x)\xi = \pi(x)\pi^\infty\left((Ad\,x^{-1})X\right)\xi = \sum_{j=1}^n a_j(x)\pi(x)\xi_j.$$

Kako su funkcije $x \mapsto \pi(x)\xi_j$, $1 \le j \le n$, sa G u $\mathcal{H}$ neprekidne, odatle slijedi tvrdnja.

Poglavlje 10

NILPOTENTNE GRUPE S 1−DIMENZIONALNIM CENTROM

Neka je $\mathfrak{g}$ nilpotentna Liejeva algebra. $S-$**rastav** od $\mathfrak{g}$ je uređena četvorka $(X, Y, Z, \mathfrak{l})$ takva da vrijedi:

(a) $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$, $Z \neq 0$ je u centru od $\mathfrak{g}$ i $\mathfrak{l}$ je potprostor od $\mathfrak{g}$.

(b) $[X, Y] = Z$.

(c) $\mathfrak{g} = \mathbb{R}X \dotplus \mathbb{R}Y \dotplus \mathbb{R}Z \dotplus \mathfrak{l}$.

(d) Neka je $\mathfrak{g}_1$ centralizator od Y u $\mathfrak{g}$: $\mathfrak{g}_1 = \{U \in \mathfrak{g};\ [U, Y] = 0\}$. Tada je $\mathfrak{g}_1 = \mathbb{R}Y \dotplus \mathbb{R}Z \dotplus \mathfrak{l}$.

Lema 10.1. *Neka je $\mathfrak{g}$ nekomutativna nilpotentna Liejeva algebra s jednodimenzionalnim centrom. Postoji $S-$rastav od $\mathfrak{g}$.*

Dokaz: Neka je $(X_1, \ldots, X_n)$ Jordan−Hölderova baza od $\mathfrak{g}$. Stavimo $Z = X_n$ i $Y = X_{n-1}$. Tada Z razapinje centar od $\mathfrak{g}$ i po definiciji Jordan−Hölderove baze postoji linearan funkcional $f \in \mathfrak{g}^*$ takav da je

$$[U, Y] = f(U)Z \qquad \forall U \in \mathfrak{g}.$$

Tada je $f \neq 0$, jer Y nije u centru od $\mathfrak{g}$. Nadalje, centralizator od Y u $\mathfrak{g}$ je $G_1 = \operatorname{Ker} f$ i to je potprostor od $\mathfrak{g}$ kodimenzije 1. Neka je $X \in \mathfrak{g}$ takav da je $f(X) = 1$. Tada je $[X, Y] = Z$ i $\mathfrak{g} = \mathbb{R}X \dotplus \mathfrak{g}_1$. Očito su $Y, Z \in \mathfrak{g}_1$, pa ako za $\mathfrak{l}$ uzmemo direktni komplement od $\mathbb{R}Y \dotplus \mathbb{R}Z$ u $\mathfrak{g}_1$ dobivamo da je $(X, Y, Z, \mathfrak{l})$ $S-$rastav od $\mathfrak{g}$.

Napomena. Ako je $(X, Y, Z, \mathfrak{l})$ $S-$rastav od $\mathfrak{g}$, iz svojstva (d) se vidi da je $\mathfrak{g}_1$ ideal u $\mathfrak{g}$ (kodimenzije 1). Nadalje, iz dokaza leme 10.1. vidi se da smo za Z mogli uzeti bilo koji elemet centra, za Y bilo koji element iz $\mathfrak{g}$ takav da je $[\mathfrak{g}, Y] = \mathbb{R}Z$, a za $\mathfrak{l}$ bilo koji direktni komplement od $\mathbb{R}Y \dotplus \mathbb{R}Z$ u $\mathfrak{g}_1$.

Lema 10.2. *Neka je G nilpotentna grupa, $\mathfrak{g}$ njena Liejeva algebra, $(X, Y, Z, \mathfrak{l})$ $S-$rastav od $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}_1 = \mathbb{R}Y \dotplus \mathbb{R}Z \dotplus \mathfrak{l}$ centralizator od Y u $\mathfrak{g}$, $G_1 = \exp \mathfrak{g}_1$ i $S = \exp(\mathbb{R}X \dotplus \mathbb{R}Y \dotplus \mathbb{R}Z)$.*

(a) *G_1 je centralizator od Y i od $\exp Y$ u G :*

$$G_1 = \{x \in G;\ (Ad\, x)Y = Y\} = \{x \in G;\ x(\exp Y) = (\exp Y)x\}.$$

(b) *Grupa S izomorfna je Heisenbergovoj grupi.*

Dokaz: Tvrdnja (a) slijedi iz leme 3.7. i propozicije 3.4.
(b) Stavimo

$$[x,y,z]=(\exp\, yY)(\exp\, xX)(\exp\, zZ), \qquad x,y,z\in\mathbb{R}.$$

(Y,X,Z) je Jordan−Hölderova baza Liejeve algebre $\mathfrak{s}=\mathbb{R}X\dotplus\mathbb{R}Y\dotplus\mathbb{R}Z$, pa iz tvrdnje (a) korolara 3.13. slijedi da je $S=\{[x,y,z];\ x,y,z\in\mathbb{R}^3\}$. Za $t,s\in\mathbb{R}$ prema propoziciji 3.4. imamo

$$(\exp\, tX)(\exp\, sY)=(\exp\, tX)(\exp\, sY)(\exp\, tX)^{-1}(\exp\, tX)=$$
$$=(\exp\, s(Ad\,\exp\, tX)Y)(\exp\, tX)=\left(\exp\, se^{t\,ad\,X}Y\right)(\exp\, tX).$$

Međutim,

$$(ad\,X)Y=Z \quad \text{i} \quad (ad\,X)^2Y=[X,Z]=0 \qquad \Longrightarrow \qquad e^{t\,ad\,X}Y=Y+tZ.$$

Dakle,

$$(\exp\, tX)(\exp\, sY)=(\exp\, s(Y+tZ))(\exp\, tX)=(\exp\, sY)(\exp\, tX)(\exp\, stZ).$$

Stoga za $x,y,z,\xi,\eta,\zeta\in\mathbb{R}$ imamo

$$[x,y,z][\xi,\eta,\zeta]=(\exp\, yY)(\exp\, xX)(\exp\, zZ)(\exp\, \eta Y)(\exp\, \xi X)(\exp\, \zeta Z)=$$
$$=(\exp\, yY)(\exp\, \eta Y)(\exp\, xX)(\exp\, \xi X)(\exp\, zZ)(\exp\, \zeta Z)(\exp\, x\eta Z)=$$
$$=(\exp\,(y+\eta)Y)(\exp\,(x+\xi)X)(\exp\,(z+\zeta+x\eta)Z)=[x+\xi,y+\eta,z+\zeta+x\eta].$$

Prema tome, $\langle x,y,z\rangle\mapsto[x,y,z]$ je izomorfizam Heisenbergove grupe na grupu S.

Teorem 10.3. *Neka je G nilpotentna grupa s jednodimenzionalnim centrom i π unitarna ireducibilna reprezentacija od G. Pretpostavima da restrikcija π na centar grupe G nije trivijalna. Neka je $(X,Y,Z,\mathfrak{l})$ $S-$rastav od $\mathfrak{g}$ i $G_1=\exp(\mathbb{R}Y\dotplus,\mathbb{R}Z\dotplus\mathfrak{l})$ centraliaztor od Y u G. Postoji unitarna (nužno ireducibilna) reprezentacija τ od G_1 takva da je $\pi\simeq Ind_{G_1}^G\,\tau$.*

Dokaz teorema 10.3. provest ćemo pomoću niza lema. Za neko $\lambda\in\mathbb{R}^*$ imamo

$$\pi(\exp\, zZ)=e^{i\lambda z}I.$$

Neka je $S=\exp\,(\mathbb{R}X\dotplus\mathbb{R}Y\dotplus\mathbb{R}Z)$. Prema tvrdnji (b) leme 10.2. i prema teoremu 8.7. restrikcija $\pi|S$ je multipl reprezentacije π_λ. Prema tome, možemo uzeti da je prostor reprezentacije π jednak $L_2(\mathbb{R})\hat{\otimes}\mathcal{H}$ tako da je $\pi|S=\pi_\lambda\otimes I_{\mathcal{H}}$. Prema propoziciji 6.11. Hilbertov prostor $L_2(\mathbb{R})\hat{\otimes}\mathcal{H}$ izometrički je izomorfan prostoru $L_2(\mathbb{R},\mathcal{H})$. Dakle, možemo uzeti da je $L_2(\mathbb{R},\mathcal{H})$ prostor repreetntacije π i da vrijedi

$$(\pi([x,y,z])f)(t)=e^{i\lambda(z+ty)}f(t+x), \qquad f\in L_2(\mathbb{R},\mathcal{H}), \quad [x,y,z]\in S.$$

Bez dokaza navodimo sljedeću lemu o vezi pomaka i diferenciranja:

Lema 10.4. *Neka je $\mathcal{H}$ Hilbertov prostor. Za $\tau\in\mathbb{R}$ definiramo $\pi(\tau):L_2(\mathbb{R},\mathcal{H})\to L_2(\mathbb{R},\mathcal{H})$ sa*

$$(\pi(\tau)f)(t)=f(t+\tau), \qquad f\in L_2(\mathbb{R},\mathcal{H}), \quad t\in\mathbb{R}.$$

Neka je $\mathcal{D}_1$ potprostor od $L_2(\mathbb{R},\mathcal{H})$ svih $f\in L_2(\mathbb{R},\mathcal{H})$ takvih da postoji

$$Xf=\lim_{\tau\to 0}\frac{1}{\tau}\,(\pi(\tau)f-f).$$

Nadalje, neka je padajući niz potprostora $\mathcal{D}_2 \supseteq \mathcal{D}_3 \supseteq \cdots$ definiran induktivno sa

$$\mathcal{D}_{j+1} = \{f \in \mathcal{D}_1;\ Xf \in \mathcal{D}_j\}, \qquad j \in \mathbb{N},$$

i neka je

$$\mathcal{D}_\infty = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} \mathcal{D}_j.$$

Svaka klasa funkcija iz $\mathcal{D}_\infty$ sadrži $C^\infty-$funkciju. Drugim riječima,

$$\mathcal{D}_\infty = C^\infty(\mathbb{R}, \mathcal{H}) \cap L_2(\mathbb{R}, \mathcal{H}).$$

Za $f \in \mathcal{D}_\infty$ je Xf klasa derivacije te $C^\infty-$funkcije u klasi od f.

Stavimo u daljnjem $\mathcal{V} = L_2(\mathbb{R}, \mathcal{H})^\infty(\pi)$ (Gårdingova domena od π). Budući da je $\pi([\tau, 0, 0]) = = \pi(\tau)$ u oznaci iz prethodne leme, prema tvrdnji (a) teorema 9.3. možemo $\mathcal{V}$ identificirati s potprostorom od $C^\infty(\mathbb{R}, \mathcal{H})$. Uz takvu identifikaciju stavimo

$$\mathcal{V}(t) = \{f(t);\ f \in \mathcal{V}\} \subseteq \mathcal{H}.$$

Lema 10.5. *$\mathcal{V}(t)$ je gust potprostor od $\mathcal{H}$ i $\mathcal{V}(t) = \mathcal{V}(s)$ $\forall t.s \in \mathbb{R}$.*

Dokaz: Druga tvrdnja slijedi iz $\pi(x)\mathcal{V} = \mathcal{V}$ za svaki $x \in G$ i iz $(\pi(\exp tX)f)(\tau) = f(\tau + t)$.

Neka je $\mathcal{V}_0$ taj potprostor i neka je $\xi \in \mathcal{H}$, $\xi \perp \mathcal{V}_0$. Neka je $\varphi \in C_0(\mathbb{R})$, $\varphi \neq 0$, i stavimo $g(t)\varphi(t)\xi$. Tada je $g \in L_2(\mathbb{R}, \mathcal{H})$. Za $f \in \mathcal{V}$ imamo $(f(t)|\xi) = 0$ $\forall t \in \mathbb{R}$, pa slijedi

$$(f|g) = \int_\mathbb{R} (f(t)|g(t))\mathrm{d}t = \int_\mathbb{R} \overline{\varphi(t)}(f(t)|\xi)\mathrm{d}t = 0.$$

Prema tome je $g \perp \mathcal{V}$. Ali po teoremu 9.2. $\mathcal{V}$ je gust potprostor od $L_2(\mathbb{R}, \mathcal{H})$. Dakle, $g = 0$, pa je $\xi = 0$.

Lema 10.6. *Za $f \in \mathcal{V}$ i $x \in G_1$ je $\|(/\pi(x)f)(t)\| = \|f(t)\|$ $\forall t \in \mathbb{R}$.*

Dokaz: Za svako $x \in G_1$ i za svako $\tau \in \mathbb{R}$ element x i $\exp \tau Y$ komutiraju. Prema tome, komutiraju i operatori $\pi(x)$ i $\pi(\exp \tau Y)$. Dakle, svaki operator $\pi(x)$, $x \in G_1$, komutira s operatorom množenja s funkcijom $t \mapsto \mathrm{e}^{i\lambda\tau t}$ $\forall \tau \in \mathbb{R}$. Kao u dokazu leme 8.3. slijedi da operatori $\pi(x)$, $x \in G_1$, komutiraju s operatorom množenja s bilo kojom ograničenom izmjerivom funkcijom. Za izmjerivu ograničenu funkciju $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ neka je $L(\varphi) : L_2(\mathbb{R}, \mathcal{H}) \to L_2(\mathbb{R}, \mathcal{H})$ operator množenja sa φ. Tada imamo za $x \in G_1$

$$(L(\varphi)\pi(x)f|\pi(x)f) = (L(\varphi)f|f),$$

tj.

$$\int_\mathbb{R} \varphi(t)\|(\pi(x)f)(t)\|^2\mathrm{d}t = \int_\mathbb{R} \varphi(t)\|f(t)\|^2\mathrm{d}t$$

za svaku ograničenu izmjerivu funkciju $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. Odatle je $\|(\pi(x)f)(t)\| = \|f(t)\|$ za skoro sve $t \in \mathbb{R}$. Ali $f \in \mathcal{V}$ pa su funkcije f i $\pi(x)f$ neprekidne (točnije, u tim klasama postoje neprekidne funkcije), dakle, vrijedi $\|(\pi(x)f)(t)\| = \|f(t)\|$ $\forall t \in \mathbb{R}$.

Neka je $t \in \mathbb{R}$ fiksirano. Tada je $\mathcal{V} = \{f(t);\ f \in \mathcal{V}\}$ gust potprostor od $\mathcal{H}$. Prema lemi 10.6. $f(t) \mapsto (\pi(x)f)(t)$ je izometrija $\mathcal{V}_0$ na $\mathcal{V}_0$. Stoga se to preslikavanje jedinstveno proširuje do unitarnog operatora na $\mathcal{H}$, koji ćemo označiti sa $\pi_t(x)$. Sada iz $\pi(x)\pi(y) = \pi(xy)$ slijedi da je

$\pi_t(x)\pi_t(y) = \pi_t(xy)$, $x, y \in G_1$. Dakle, π_t je homomorfizam grupe G_1 u unitarnu grupu $U(\mathcal{H})$.

Vrijedi

$$(\pi(x)f)(t) = \pi_t(x)f(t), \qquad f \in \mathcal{V}, \quad x \in G_1, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Kako je $\mathcal{V}$ gusto u $L_2(\mathbb{R}, \mathcal{H})$ slijedi da za svaku $f \in L_2(\mathbb{R}, \mathcal{H})$ i svaki $x \in G_1$ vrijedi

$$(\pi(x)f)(t) = \pi_t(x)f(t) \qquad \text{za skoro sve} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Sljedeći nam je cilj da dokažemo da je π_t reprezentacija grupe G_1 na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$ za svaki $t \in \mathbb{R}$.

Lema 10.7. *Za $f \in \mathcal{V}$, $t, s \in \mathbb{R}$ i $\xi \in \mathcal{H}$ vrijedi*

$$\int_s^t ((\pi^\infty(X)f)(\tau)|\xi)\mathrm{d}\tau = (f(t) - f(s)|\xi).$$

Dokaz: Možemo uzeti da je $f = \pi(\varphi)g$, $g \in L_2(\mathbb{R}, \mathcal{H})$, $\varphi \in C_0^\infty(G)$; naime, Gårdingova domena $\mathcal{V}$ razapeta je takvim funkcijama. Neka je μ_1 Haarova mjera na G_1. Tada je sa

$$\mu(\Phi) = \int_\mathbb{R} \int_{G_1} \Phi((\exp \tau X)x_1)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}\mu_1(x_1), \qquad \Phi \in C_0(G),$$

zadana Haarova mjera na G. Prema tvrdnji (a) teorema 9.3. imamo

$$(\pi^\infty(X)f)(t) = \pi(\lambda_X\varphi)g)(t) = \int_\mathbb{R} \int_{G_1} (\lambda_X\varphi)((\exp \tau X)x_1)(\pi(x_1)g)(t+\tau)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}\mu_1(x_1) =$$

$$= \int_\mathbb{R} \int_{G_1} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\varphi((\exp{(\tau - s)}X)x_1)\bigg|_{s=0} (\pi(x_1)g)(t+\tau)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}\mu_1(x_1) =$$

$$= \int_\mathbb{R} \int_{G_1} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\varphi((\exp{(\tau - (t+s))}X)x_1)\bigg|_{s=0} (\pi(x_1)g)(\tau)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}\mu_1(x_1) =$$

$$= \int_\mathbb{R} \int_{G_1} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\varphi((\exp{(\tau - t)}X)x_1)(\pi(x_1)g)(t+\tau)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}\mu_1(x_1) =$$

$$= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\mathbb{R} \int_{G_1} \varphi((\exp{(\tau - t)}X)x_1)(\pi(x_1)g)(t+\tau)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}\mu_1(x_1) =$$

$$= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\mathbb{R} \int_{G_1} \varphi((\exp \tau X)x_1)(\pi(x_1)g)(\tau + t)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}\mu_1(x_1) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\pi(\varphi)g)(t) = f'(t).$$

Dakle, funkcija $f \in \mathcal{V}$ je diferencijabilna i $f' = Xf$. Odatle i iz osnovnog teorema integralnog računa slijedi tvrdnja.

Lema 10.8. *Za svako $t \in \mathbb{R}$ homomorfizam $\pi_t : G_1 \to U(\mathcal{H})$ je unitarna reprezentacija grupe G_1 na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$.*

Dokaz: Neka je $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz u G_1 koji teži prema e. Neka je $f \in \mathcal{V}$ i $t \in \mathbb{R}$. Treba dokazati da je

$$\lim_{n\to\infty} \pi_t(x_n)f(t) = f(t).$$

Stavimo $f_n = \pi(x_n)f - f$ i $g_n = \pi^\infty(X)f_n$. Prema lemi 10.7. je

$$\int_s^t (g_n(\tau)|\xi)\mathrm{d}\tau = (f_n(t) - f_n(s)|\xi), \qquad \xi \in \mathcal{H}, \quad t, s \in \mathbb{R}.$$

Odatle za proizvoljne $t > s$:

$$\|f_n(t) - f_n(s)\| \leq \int_s^t \|g_n(\tau)\|\mathrm{d}\tau \leq \left[(t-s)\int_s^t \|g_n(\tau)\|^2\mathrm{d}\tau\right]^{\frac{1}{2}} \leq \sqrt{(t-s)}\|g_n\|;$$

pri tome smo za drugu nejednakost iskoristili CSB−nejednakost u prostoru $L_2([s,t])$ za funkcije $g_n|[s,t]$ i 1. Zbog tvrdnje (d) teorema 9.3. je $\lim_{n\to\infty}\|g_n\| = 0$. Slijedi da je

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n(t) - f_n(s)\| = 0 \qquad \forall t, s \in \mathbb{R}. \tag{10.1}$$

Prema tome, dovoljno je dokazati da za neko $s \in \mathbb{R}$ vrijedi $\lim_{n\to\infty} f_n(s) = 0$ u prostoru $\mathcal{H}$. Fiksirajmo $s \in \mathbb{R}$. Tada je

$$\|f_n(s)\| = \|\pi_s(x_n)f(s) - f(s)\| \leq 2\|f(s)\|.$$

Pretpostavimo da niz $(f_n(s))_{n\in\mathbb{N}}$ ne teži k nuli u prostoru $\mathcal{H}$. Tada postoji $\varepsilon > 0$ i podniz $(f_{n_k}(s))_{k\in\mathbb{N}}$ takav da je $\varepsilon \leq \|f_{n_k}(s)\| \leq 2\|f(s)\|\ q, \forall k$. Skup $\{\xi;\ \varepsilon \leq \|\xi\| \leq 2\|f(s)\|\}$ je slabo kompaktan. Neka je $\xi \neq 0$ gomolište niza $(f_{n_k}(s))_{k\in\mathbb{N}}$ u slaboj topologiji prostora $\mathcal{H}$. Uz eventualni prijelaz na podniz možemo pretpostaviti da je ξ slabi limes niza $(f_{n_k}(s))_{k\in\mathbb{N}}$, tj. da je

$$(\xi|\eta) = \lim_{k\to\infty} (f_{n_k}(s)|\eta) \qquad \forall \eta \in \mathcal{H}. \tag{10.2}$$

Međutim, vrijedi

$$\lim_{k\to\infty} f_{n_k} = 0 \qquad \text{u prostoru} \quad L_2(\mathbb{R}, \mathcal{H}),$$

pa za svaki podniz vrijedi

$$\lim_{j\to\infty} f_{k_j}(t) = 0 \qquad \text{za gotovo sve} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Odatle i iz (10.1) slijedi

$$\lim_{j\to\infty} f_{n_{k_j}}(t) \qquad \forall t \in \mathbb{R}.$$

No to je u suprotnosti sa (10.2), jer je $\xi \neq 0$. Ova kontradikcija pokazuje da je

$$\lim_{n\to\infty} f_n(s) = 0,$$

a to je trebalo dokazati.

Dokaz teorema 10.3. Za bilo koje $t, s \in \mathbb{R}$ i bilo koji $x_1 \in G_1$ imamo

$$(\pi(\exp tX)f)(s) = f(t+s)$$

i

$$(\pi(x_1)f)(s) = (\pi((\exp sX)x_1)f)(0) = \pi_0((\exp sX)x_1)f(0) =$$
$$= \pi_0((\exp sX)x_1)[\pi(\exp -sX)\pi(\exp sX)f](0) =$$
$$= \pi_0((\exp sX)x_1)\pi_0(\exp -sX)[\pi(\exp sX)f](0) = \pi_0((\exp sX)x_1(\exp -sX))f(s).$$

Prema korolaru 7.2. slijedi da je $\pi \simeq Ind_{G_1}^G \pi_0$.

Uočimo da uz uvedenu oznaku vrijedi $\pi_0([0,y,z]) = \mathrm{e}^{i\lambda z} I_{\mathcal{H}}$.

Teorem 10.9. *Neka su $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}^*$ i neka su τ_1, τ_2 unitarne ireducibilne reprezentacije od G_1 na Hilbertovim prostorima $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ takve da je*

$$\tau_1([0, y, z]) = e^{i\lambda_1 z} I_{\mathcal{H}_1} \quad i \tau_2([0, y, z]) = e^{i\lambda_2 z} I_{\mathcal{H}_2} \quad \forall y, z \in \mathbb{R}.$$

(*a*) *Reprezentacije $\pi_1 = Ind_{G_1}^G \tau_1$ i $\pi_2 = Ind_{G_1}^G \tau_2$ su ireducibilne.*

(*b*) *Reprezentacije π_1 i π_2 su ekvivalentne ako i samo ako su reprezentacije τ_1 i τ_2 ekvivalentne; tada je nužno $\lambda_1 = \lambda_2$.*

Dokaz: (*b*) Očigledno iz $\tau_1 \simeq \tau_2$ slijedi $\pi_1 \simeq \pi_2$. Treba dokazati obrnutu implikaciju. Možemo uzeti da je za $j = 1, 2$ reprezentacija π_j realizirana na prostoru $L_2(\mathbb{R}, \mathcal{H}_j)$ ovako

$$[\pi_j(\exp tX)f](s) = f(t+s), \qquad f \in L_2(\mathbb{R}, \mathcal{H}_j), \quad t, s \in \mathbb{R},$$

$$[\pi_j(x_1)f](s) = \tau_j((\exp sX)x_1(\exp -sX))f(s), \qquad f \in L_2(\mathbb{R}, \mathcal{H}_j), \quad t \in \mathbb{R}, \quad x_1 \in G_1.$$

Prema dokazu teorema 10.3. (naročito zbog leme 10.4.) Gårdingova domena $\mathcal{V}_j = L_2(\mathbb{R}, \mathcal{H}_j)^\infty(\pi_j)$ je sadržana u $C^\infty(\mathbb{R}, \mathcal{H}_j)$.

Neka je $\mathcal{W}_j = \{f(0);\ f \in \mathcal{V}_j\}$. Kako je $\pi_j(x_1)\mathcal{V}_j = \mathcal{V}_j\ \forall x_1 \in G_1$, potprostor $\mathcal{W}_j$ od $\mathcal{H}_j$ je $\tau_j(G_1)-$invarijantan. Budući da je reprezentacija τ_j ireducibilna $\mathcal{W}_j \neq 0$, zaključujemo da je potprostor $\mathcal{W}_j$ gust u $\mathcal{H}_j$. Nadalje, kako je $\pi_j(\exp tX)\mathcal{V}_j = \mathcal{V}_j\ \forall t \in \mathbb{R}$, vrijedi $\mathcal{W}_j = \{f(t);\ f \in \mathcal{V}_j\}$ za svako $t \in \mathbb{R}$.

Pretpostavimo sada da su reprezentacije π_1 i π_2 ekvivalentne i neka je T izometrički izomorfizam sa $L_2(\mathbb{R}, \mathcal{H}_1)$ na $L_2(\mathbb{R}, \mathcal{H}_2)$ takav da vrijedi

$$T\pi_1(x) = \pi_2(x)T \qquad \forall x \in G. \tag{10.3}$$

Za $f \in L_2(\mathbb{R}, \mathcal{H}_j)$ i $z \in \mathbb{R}$ iz formule za π_j slijedi

$$[\pi_j(\exp zZ)f](s) = \tau_j(\exp zZ)f(s) = \mathrm{e}^{i\lambda_j z} f(s).$$

Dakle je

$$\pi_j(\exp zZ) = \mathrm{e}^{i\lambda_j z} I_{\mathcal{H}_j}.$$

Odatle i iz (10.3) slijedi $\mathrm{e}^{i\lambda_1 z}T = \mathrm{e}^{i\lambda_2 z}T\ \ \forall z \in \mathbb{R}$, dakle, vrijedi $\lambda_1 = \lambda_2$. Stoga u daljnjem možemo pretpostavljati da je $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$.

Neka je za ograničenu izmjerivu funkciju $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ $L_j(\varphi)$ operator množenja funkcijom φ na prostoru $L_2(\mathbb{R}, \mathcal{H}_j)$. Iz $\pi_2(\exp yY)T = T\pi_1(\exp yY)\ \ \forall y \in \mathbb{R}$ slijedi da je $L_2(\varphi)T = TL_2(\varphi)$ za svaku funkciju $\varphi \in C_0(\mathbb{R})$ oblika $\varphi(t) = \mathrm{e}^{i\lambda t y}$, $y \in \mathbb{R}$, dakle i za svaku funkciju φ iz potprostora $\mathcal{C}$ razapetog takvim funkcijama. Kao u poglavlju 8. odatle slijedi da je

$$L_2(\varphi)T = TL_1(\varphi) \qquad \text{za svaku ograničenu izmjerivu funkciju} \quad \varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}. \tag{10.4}$$

Nadalje, kako je T izometrički izomorfizam koji preplići reprezentacije π_1 i π_2, vrijedi $\pi_2(\Phi)T = = T\pi_1(\Phi)\ \ \forall \Phi \in C_0^\infty(G)$, pa slijedi da je T izomorfizam s Gårdingove domene $\mathcal{V}_1$ reprezentacije π_1 na Gårdingovu domenu $\mathcal{V}_2$ reprezentacije π_2. Dokazat ćemo sada sljedeću tvrdnju

$$\|(Tf)(t)\| = \|f(t)\| \qquad \forall f \in \mathcal{V}_1 \quad \text{i} \quad \forall t \in \mathbb{R}. \tag{10.5}$$

Doista, za svaku ograničenu izmjerivu funkciju $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ prema (10.4) imamo

$$(L_2(\varphi)Tf|Tf) = (TL_1(\varphi)f|Tf) = (L_1(\varphi)f|f),$$

odnosno,

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi(t)\|(Tf)(t)\|^2 \mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}} \varphi(t)\|f(t)\|^2 \mathrm{d}t.$$

Kako su za svaku $f \in \mathcal{V}_1$ funkcije f i Tf neprekidne, slijedi (10.5). Budući da je potprostor $\mathcal{W}_1 = \{f(t);\ f \in \mathcal{V}_1\}$ gust u $\mathcal{H}_1$, proširenjem po neprekidnosti dolazimo za svaki $t \in \mathbb{R}$ do izometrije $T(t) : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ takve da je

$$(Tf)(t) = T(t)f(t) \qquad \forall f \in \mathcal{V}_1.$$

Odatle za $s, t \in \mathbb{R}$ imamo

$$T(t)f(t) = (Tf)(t) = (Tf)(s + (t - s)) = (\pi_2(\exp{(t - s)X})Tf)(s) =$$

$$= (T\pi_1(\exp{(t - s)X})f)(s) = T(s)(\pi_1(\exp{(t - s)X})f)(s) = T(s)f(t).$$

Kako je potprostor $\mathcal{W}_1$ gust u $\mathcal{H}_1$, slijedi da je $T(t) = T(s)\ \forall t, s \in \mathbb{R}$. Tu izometriju sa $\mathcal{H}_1$ i $\mathcal{H}_2$ označimo sa T_0. Dakle,

$$(Tf)(t) = T_0 f(t) \qquad \forall f \in \mathcal{V}_1 \quad \text{i} \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Sada je za $x_1 \in G_1$ i $f \in \mathcal{V}_1$:

$$T_0\tau_1(x_1)f(0) = T_0(\pi_1(x_1)f)(0) = (T\pi_1(x_1)f)(0) = (\pi_2(x_1)Tf)(0) = \tau_2(x_1)(Tf)(0) = \tau_2(x_1)T_0f(0),$$

dakle,

$$T_0\tau_1(x_1)\xi = \tau_2(x_1)T_0\xi \qquad \forall \xi \in \mathcal{W}_1 \quad \text{i} \quad \forall x_1 \in G_1.$$

Kako je $\mathcal{W}_1$ gust potprostor of $\mathcal{H}_1$, dobivamo

$$T_0\tau_1(x_1)\xi = \tau_2(x_1)T_0\xi \qquad \forall \xi \in \mathcal{H}_1 \quad \text{i} \quad \forall x_1 \in G_1.$$

Slika od T_0 je zatvoren invarijantan potprostor od $\mathcal{H}_2$ različit od $\{0\}$, dakle, zbog ireducibilnosti reprezentacije τ_2, jednak je $\mathcal{H}_2$. Stoga (10.6) znači da su reprezentacije τ_1 i τ_2 ekvivalentne.

Za dokaz tvrdnje (a) stavimo $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}$, $\tau_1 = \tau$ i $\pi_1 = \pi = Ind_{G_1}^G\,\tau$. Neka je $\mathcal{K}$ zatvoren $\pi(G)-$invarijantan potprostor od $L_2(\mathbb{R}, \mathcal{H})$ i neka je P ortogonalan projektor na prostoru $L_2(\mathbb{R}, \mathcal{H})$ sa slikom $\mathcal{K}$. Tada je $P\pi(x) = \pi(x)P\ \forall x \in G$. Za $T = I - 2P$ je

$$TT^* = T^*T = I - 4P + 4P^2 = I,$$

dakle, T je unitaran operator, tj. izometrički izomorfizam prostora $L_2(\mathbb{R}, \mathcal{H})$ na sama sebe i vrijedi $T\pi(x) = \pi(x)T\ \ qfax \in G$. Prema prvom dijelu dokaza postoji unitaran opereator T_0 na prostoru $\mathcal{H}$ takav da je

$$(Tf)(t) = T_0 f(t), \qquad f \in L_2(\mathbb{R}, \mathcal{H}), \quad t \in \mathbb{R},$$

i vrijedi $T_0\tau(x_1) = \tau(x_1)T_0\ \forall x_1 \in G_1$. Budući da je reprezentacija τ ireducibilna, slijedi $T_0 = \alpha I_{\mathcal{H}}$ za neki $\alpha \in \mathbb{C}$. Kako je $T^2 = I_{L_2(\mathbb{R},\mathcal{H})}$, imamo $T_0^2 = I_{\mathcal{H}}$, dakle, $\alpha^2 = 1$, odnosno, $\alpha = \pm 1$. Odatle je $T = \pm I$, dakle,

$$P = \frac{1}{2}(I - T) = I \qquad \text{ili} \qquad P = 0.$$

To znači da je ili $\mathcal{K} = L_2(\mathbb{R}, \mathcal{H})$ ili $\mathcal{K} = \{0\}$. Time je dokazano da je reprezentacija π ireducibilna.

Poglavlje 11

KLASIFIKACIJA UNITARNIH IREDUCIBILNIH REPREZENTACIJA

Rezultate poglavlja 10. iskoristit ćemo sada za dokaz teorema o klasifikaciji unitarnih ireducibilnih reprezentacija proizvoljne nilpotentne grupe G i to kao ključno sredstvo u indukciji po dimenziji od G. **U cijelom ovom poglavlju G je nilpotentna grupa, $\mathfrak{g}$ njena Liejeva algebra i μ Haarova mjera na G.**

Lema 11.1. *Neka je H nilpotentna podgrupa od G i $\mathfrak{h} = \log H \subseteq \mathfrak{g}$ njena Liejeva algebra. Preslikavanje $\tau : H \to \mathbb{C}$ je jednodimenzionalna unitarna reprezentacija od H ako i samo ako postoji $f \in \mathfrak{g}^*$ takav da je*

$$\tau(\exp X) = \mathrm{e}^{if(X)} \qquad X \in \mathfrak{h} \tag{11.1}$$

i

$$f([X_1, X_2]) = 0 \qquad \forall X_1, X_2 \in \mathfrak{h}. \tag{11.2}$$

Dokaz: Neka je $\tau : H \to \mathbb{C}$ unitarna jednodimenzionalna reprezentacija od . Pripadna reprezentacija $\tau^\infty : \mathfrak{h} \to \mathbb{C}$ Liejeve algebre $\mathfrak{h}$ dana je sa

$$\tau^\infty(X) = \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t}\tau(\exp tX)\Big|_{t=0} = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(\tau(\exp tX) - 1), \qquad X \in \mathfrak{h}.$$

Očito je Gårdingova domena $\mathbb{C}^\infty(\tau)$ jednaka $\mathbb{C}$. Po lemi 3.2. imamo

$$\tau(\exp X) = \mathrm{e}^{\tau^\infty(X)}, \qquad X \in \mathfrak{h}.$$

Kako je $|\tau(\exp X)| = 1 \ \forall X \in \mathfrak{h}$, slijedi $\tau^\infty(\mathfrak{h}) \subseteq i\mathbb{R}$. Dakle, postoji $f \in \mathfrak{h}^*$ takav da je $\tau^\infty = if$. Proširimo li f do linearnog funkcionala na $\mathfrak{g}$, vrijedi (11.1) i (11.2).

Obratno, pretpostavimo da je $f \in \mathfrak{g}^*$ linearan funkcional takav da vrijedi (11.2). Definiramo preslikavanje $\tau : H \to \mathbb{C}$ formulom (11.1). Stavimo $\mathfrak{h}_1 = \mathfrak{h} \cap \operatorname{Ker} f$. Ako je $\mathfrak{h}_1 = \mathfrak{h}$, tj. $\mathfrak{h} \subseteq \operatorname{Ker} f$, onda je $\tau(x) = 1 \ \forall x \in H$, pa je τ unitarna ireducibilna reprezentacija od H. Pretpostavimo da je $\mathfrak{h}_1 \neq \mathfrak{h}$. Tada je $\mathfrak{h}_1$ potprostor od $\mathfrak{h}$ kodimenzije 1, pa za $X \in \mathfrak{h} \setminus \mathfrak{h}_1$ vrijedi $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_1 \dotplus \mathbb{R}X$. Prema (11.2) je $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] \subseteq \mathfrak{h}_1$, dakle, $\mathfrak{h}_1$ je ideal u $\mathfrak{h}$. Stoga postoji uređena baza $(X_1, \ldots, X_k)$ od $\mathfrak{h}_1$ takva da je $(X, X_1, \ldots, X_k)$ Jordan$-$Hölderova baza od $\mathfrak{h}$. Tada je

$$\tau(\exp(tX + t_1X_1 + \cdots + t_kX_k)) = \mathrm{e}^{itf(X)}, \qquad t, t_1, \ldots, t_k \in \mathbb{R}.$$

Neka su $x, y \in H$ proizvoljni i neka su $t, t_1, \ldots, t_k, s, s_1 \ldots, s_k \in \mathbb{R}$ takvi da je

$$x = \exp(tX + t_1X_1 + \cdots + t_kX_k) \qquad \text{i} \qquad y = \exp(sX + s_1X_1 + \cdots + s_kX_k).$$

Po teoremu 3.11. za postoje $r_1, \dots, r_k \in \mathbb{R}$ takvi da je

$$xy = \exp\left((t+s)X + r_1X_1 + \cdots + r_kX_k\right).$$

Sada je

$$\tau(xy) = \mathrm{e}^{i(t+s)f(X)} = \mathrm{e}^{itf(X)}\mathrm{e}^{isf(X)} = \tau(x)\tau(y).$$

Dakle, τ je unitarna jednodimenzionalna reprezentacija od H.

Teorem 11.2. *Neka je $G \neq \{e\}$ nilpotentna grupa i π unitarna ireducibilna reprezentacija od G. Postoji nilpotentna podgrupa H od G i jednodimenzionalna unitarna reprezentacija τ od H takve da je $\pi \simeq Ind_H^G\,\tau$.*

Dokaz provodimo indukcijom po $\dim G \geq 1$. Baza indukcije $\dim G = 1$ je trivijalna: $\pi \simeq Ind_G^G\,\pi$. Provedimo korak indukcije. Dakle, pretpostavljamo da je $n = \dim G \geq 2$ i da je teorem dokazan za nilpotentne grupe manje dimenzije. Neka je π unitarna ireducibilna reprezentacija grupe G na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$. Neka je C centar grupe G i $\mathfrak{c} = \log C \subseteq \mathfrak{g}$ njegova Liejeva algebra. Postoji neprekidni homomorfizam grupa $\chi : C \to T = \{z \in \mathbb{C};\ |z| = 1\}$ takav da je $\pi(c) = \chi(c)I_{\mathcal{H}}\ \forall c \in C$. Po lemi 11.1. postoji $f \in \mathfrak{c}^*$ takav da je $\chi(\exp\, X) = \mathrm{e}^{if(X)}\ \ \forall X \in \mathfrak{c}$. Dakle, $\pi(\exp\, X) = \mathrm{e}^{if(X)}I_{\mathcal{H}}\ \ \forall X \in \mathfrak{c}$.

Pretpostavimo najprije da je $\mathfrak{c}_1 = \operatorname{Ker} f \neq \{0\}$. Neka je $C_1 = \exp\, \mathfrak{c}_1$. Tada je $C_1 \subseteq \operatorname{Ker}\pi$ i π definira unitarnu ireducibilnu reprezentaciju π' kvocijentne grupe $G' = G/C_1$ sa $\pi'(xC_1) = \pi(x)$, $x \in G$. Tada je $\dim G' < n$, pa po pretpostavci indukcije postoji nilpotentna podgrupa H' od G' i jednodimenzionalna unitarna reprezentacija τ' od H' takve da je $\pi' \simeq Ind_{H'}^{G'}$. Neka je $\varphi : G \to G'$ kvocijentni epimorfizam i stavimo $H = \varphi'(H')$ i $\tau(x) = \tau'(\varphi(x)),\ x \in H$. Tada je H nilpotentna podgrupa od G i τ je jednodimenzionalna reprezentacija od H. Prema propoziciji 6.10. vrijedi $Ind_H^G\tau \simeq \pi$.

Pretpostavimo sada da je $\operatorname{Ker} f = \{0\}$. Tada je $\dim \mathfrak{c} = 1$ i reprezentacija π je netrivijalna na C. Prema teoremu 10.3. q,postoji $(n-1)-$dimenzionalna nilpotentna podgrupa G_1 od G i unitarna ireducibilna reprezentacija π_1 od G_1 takve da je $\pi \simeq Ind_{G_1}^G\,\pi_1$. Po pretpostavci indukcije postoji nilpotentna podgrupa H od G_1 i unitarna jednodimenzionalna reprezentacija τ od H takve da je $\pi_1 \simeq Ind_H^{G_1}\,\tau$. Prema propoziciji 6.7. o induciranju u etapama dobivamo $\pi \simeq Ind_H^G\,\tau$.

Neka je $f \in \mathfrak{g}^*$. Za **podalgebru** $\mathfrak{h}$ od $\mathfrak{g}$ kažemo da je **podređena funkcionalu** f ako je $f([X,Y]) = 0\ \ \forall X, Y \in \mathfrak{h}$, tj. ako je $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] \subseteq \operatorname{Ker} f$. Neka je $\mathcal{P}(f)$ skup svih podalgebri od $\mathfrak{g}$ podređenih funkcionalu f. Za $\mathfrak{h} \in \mathcal{P}(f)$ i $H = \exp\, \mathfrak{h}$ neka je $\tau_{f,\mathfrak{h}}$ jednodimenzionalna unitarna reprezentacija od H definirana sa

$$\tau_{f,\mathfrak{h}}(\exp\, X) = \mathrm{e}^{if(X)}, \qquad X \in \mathfrak{h}.$$

Stavimo

$$\pi_{f,\mathfrak{h}} = Ind_H^G\,\tau_{f,\mathfrak{h}}.$$

Prema teoremu 11.2. i lemi 11.1. svaka ireducibilna unitarna reprezentacija od G ekvivalentna je nekoj $\pi_{f,\mathfrak{h}},\ f \in \mathfrak{g}^*,\ \mathfrak{h} \in \mathcal{P}(f)$. Da bismo potpuno opisali i parametrizirali skup $\hat{G}$ svih klasa ekvivalencije unitarnih ireducibilnih reprezentacija od G potrebno je još odgovoriti na sljedeća dva pitanja:

1. Za $f \in \mathfrak{g}*$ uz koje uvjete na $\mathfrak{h} \in \mathcal{P}(f)$ je reprezentacija $\pi_{f,\mathfrak{h}}$ ireducibilna?

2. Za $f_1, f_2 \in \mathfrak{g}^*$ i $\mathfrak{h}_1 \in \mathcal{P}(f_1)$, $\mathfrak{h}_2 \in \mathcal{P}(f_2)$ takve da su reprezentacije $\pi_{f_1,\mathfrak{h}_1}$ i $\pi_{f_2,\mathfrak{h}_2}$ ireducibilne, koji su nužni i dovoljani uvjeti na parove $(f_1, \mathfrak{h}_1)$ i $(f_2, \mathfrak{h}_2)$ da bi reprezentacije $\pi_{f_1,\mathfrak{h}_1}$ i $\pi_{f_2,\mathfrak{h}_2}$ bile ekvivalentne?

Lema 11.3. *Neka je G nilpotentna grupa s jednodimenzionalnim centrom, $\mathfrak{g}$ njena Liejeva algebra, $(X, Y, Z, \mathfrak{l})$ $S-$rastav od $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}_1 = \mathbb{R}Y \dotplus \mathbb{R}Z \dotplus \mathfrak{l}$. Neka je funkcional $f \in \mathfrak{g}^*$ takav da je $f(Z) \neq 0$. Neka je $\mathfrak{h} \in \mathcal{P}(f)$ takva da je $Z \in \mathfrak{h}$. Tada postoje $f' \in \mathfrak{g}^*$ i $\mathfrak{h}' \in \mathcal{P}(f')$ takvi da vrijedi*

(*a*) *Za neko $x \in G$ je $f' = f \circ Ad\, x$.*

(*b*) $f'(Y) = 0$.

(*c*) $\dim \mathfrak{h}' = \dim \mathfrak{h}$.

(*d*) $\mathfrak{h}' \subseteq \mathfrak{g}_1$.

(*e*) $\pi_{f,\mathfrak{h}} \simeq \pi_{f',\mathfrak{h}'}$.

Dokaz: Stavimo

$$t = -\frac{f(Y)}{f(Z)}, \qquad x = \exp tX, \qquad f' = f \circ (Ad\, x), \qquad \mathfrak{h}_1 = (Ad\, x^{-1})\mathfrak{h}.$$

Tada je

$$f'(Y) = f((Ad\, x)Y) = f\left(\mathrm{e}^{t\, ad\, X} Y\right) = f(Y + tZ) = f(Y) + tf(Z) = 0$$

i

$$f'(Z) = f\left(\mathrm{e}^{t\, ad\, X} Z\right) = f(Z) \neq 0.$$

Naravno, $\mathfrak{h}_1$ je podalgebra od $\mathfrak{g}$, $\dim \mathfrak{h}_1 = \dim \mathfrak{h}$ i ona je podređena funkcionalu f' :

$$f'([\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_1]) = (f' \circ (Ad\, x^{-1})([\mathfrak{h}, \mathfrak{h}]) = f([\mathfrak{h}, \mathfrak{h}]) = \{0\}.$$

Stavimo $H = \exp \mathfrak{h}$ i $H_1 = \exp \mathfrak{h}_1$. Tada je

$$H = \exp (Ad\, x)\mathfrak{h}_1 = x(\exp \mathfrak{h}_1)x^{-1} = xH_1x^{-1}.$$

Napokon, za $u \in H$ imamo $u = \exp U$ za neki $U \in \mathfrak{h}$ i

$$\tau_{f,\mathfrak{h}}(u) = \mathrm{e}^{if(U)} = \mathrm{e}^{if'((Ad\, x^{-1})U)} = \tau_{f',\mathfrak{h}_1}(\exp (Ad\, x^{-1}U) = \tau_{f',\mathfrak{h}_1}(x^{-1}ux).$$

Odatle i iz propozicije 6.6. slijedi

$$\pi_{f,\mathfrak{h}} = Ind_H^G\, \tau_{f,\mathfrak{h}} \simeq Ind_{H_1}^G\, \tau_{f',\mathfrak{h}_1}.$$

Ukoliko je $\mathfrak{h}_1 \subseteq \mathfrak{g}_1$, lema je dokazana uz $\mathfrak{h}' = \mathfrak{h}_1$.

Pretpostavimo da $\mathfrak{h}_1 \not\subseteq \mathfrak{g}_1$. Neka je $U \in \mathfrak{h}_1 \setminus \mathfrak{g}_1$. Tada je $U = cX + V$ za neke $V \in \mathfrak{g}_1$ i $c \in \mathbb{R}^*$. Neka je $X = \frac{1}{c}U = X + \frac{1}{c}V$. Kako je $V \in \mathfrak{g}_1$, imamo $[V, Y] = 0$, pa je $[X_1, Y] = Z$. Prema tome, $X_1, Y, Z, \mathfrak{l})$ je $S-$rastav od $\mathfrak{g}$. Stavimo

$$X' = X_1 - \frac{f'(X_1)}{f'(Z)}Z.$$

Tada je $X' \in \mathfrak{h}_1 \setminus \mathfrak{g}_1$, $(X', Y, Z, \mathfrak{l})$ je $S-$rastav od $\mathfrak{g}$ i $f'(X') = 0$. Kako je podalgebra $\mathfrak{g}_1$ kodimenzije 1 u $\mathfrak{g}$ i $\mathfrak{g} \not\supseteq \mathfrak{h}_1$, presjek $\mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{g}_1$ je kodimenzije 1 u $\mathfrak{h}_1$. Stoga je

$$\mathfrak{h}_1 = \mathbb{R}X' \dotplus \mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{g}_1.$$

Tvrdimo da je $Y \notin \mathfrak{h}_1$. Doista, kad bi bilo $Y \in \mathfrak{h}_1$, imali bismo $Z = [X', Y] \in \mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_1]$, pa bi zbog $\mathfrak{h}_1 \in \mathcal{P}(f')$ bilo $f'(Z) = 0$, a to nije tako. Stavimo

$$\mathfrak{h}' = \mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{g}_1 \dotplus \mathbb{R}Y.$$

Tada je $\mathfrak{h}'$ podalgebra Liejeve algebre $\mathfrak{g}$. Doista, $\mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{g}_1$ je podalgebra od $\mathfrak{g}$ i vrijedi

$$[Y, \mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{g}_1] \subseteq [Y, \mathfrak{g}_1] = \{0\} \subseteq \mathfrak{h}'.$$

Nadalje,

$$\dim \mathfrak{h}' = \dim (\mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{g}_1) + 1 = \dim \mathfrak{h}_1.$$

Vrijedi $[\mathfrak{h}', \mathfrak{h}'] = [\mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{g}_1, \mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{g}_1] \subseteq [\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_1]$, pa $\mathfrak{h}_1 \in \mathcal{P}(f')$ povlači da je i $\mathfrak{h}' \in \mathcal{P}(f')$.

Stavimo sada

$$\mathfrak{t} = \{U \in \mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{g}_1;\ f'(U) = 0\}.$$

Kako je $Z \in \mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{g}_1$ i $f'(Z) \neq 0$, imamo

$$\mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{g}_1 = \mathfrak{t} \dotplus \mathbb{R}Z,$$

dakle,

$$\mathfrak{h}_1 = \mathbb{R}X' \dotplus \mathbb{R}Z \dotplus \mathfrak{t} \qquad \text{i} \qquad \mathfrak{h}' = \mathbb{R}Y \dotplus \mathbb{R}Z \dotplus \mathfrak{t}.$$

Nadalje,

$$\mathbb{R}X' \dotplus \mathfrak{t} = \{U \in \mathfrak{h}_1;\ f'(U) = 0\}, \qquad \mathbb{R}Y \dotplus \mathfrak{t} = \{U \in \mathfrak{h}';\ f'(U) = 0\}.$$

Budući da su $\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}' \in \mathcal{P}(f')$, slijedi

$$[\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_1] \subseteq \mathbb{R}X' \dotplus \mathfrak{t} \qquad \text{i} \qquad [\mathfrak{h}', \mathfrak{h}'] \subseteq \mathbb{R}Y \dotplus \mathfrak{t}.$$

Prema tome, $\mathbb{R}X' \dotplus \mathfrak{t}$ je ideal u $\mathfrak{h}_1$, a $\mathbb{R}Y \dotplus \mathfrak{t}$ je ideal u $\mathfrak{h}'$. Posebno, to su Liejeve podalgebre od $\mathfrak{g}$, pa je i $\mathfrak{t} = (\mathbb{R}X' \dotplus \mathfrak{t}) \cap (\mathbb{R}Y \dotplus \mathfrak{t})$ je Liejeva podalgebra od $\mathfrak{g}$. Nadalje, $\mathfrak{t}$ je kodimenzije 1 i u $\mathbb{R}X' \dotplus \mathfrak{t}$ i u $\mathbb{R}Y \dotplus \mathfrak{t}$; dakle, $\mathfrak{t}$ je ideal u obje te podalgebre. Odavde odmah slijedi da je

$$\tilde{\mathfrak{g}} = \mathfrak{h}_1 + \mathfrak{h}' = \mathbb{R}X' \dotplus \mathbb{R}Y \dotplus \mathbb{R}Z \dotplus \mathfrak{t}$$

Liejeva podalgebra od $\mathfrak{g}$ i $\mathfrak{t}$ je ideal u $\tilde{\mathfrak{g}}$.

Lema će biti dokazana ako pokažemo da je

$$\pi_{f',\mathfrak{h}_1} \simeq \pi_{f',\mathfrak{h}'}. \tag{11.3}$$

Stavimo

$$\tilde{G} = \exp\,\tilde{\mathfrak{g}}, \qquad H' = \exp\,\mathfrak{h}', \qquad \pi_1 = Ind_{H_1}^{\tilde{G}}\,\tau_{f',\mathfrak{h}_1}, \qquad \pi' = Ind_{H'}^{\tilde{G}}\,\tau_{f',\mathfrak{h}'}.$$

Prema propoziciji 6.7. o induciranju u etapama je

$$\pi_{f',\mathfrak{h}_1} \simeq Ind_{\tilde{G}}^{G}\,\pi_1 \qquad \text{i} \qquad \pi_{f',\mathfrak{h}'} \simeq Ind_{\tilde{G}}^{G}\,\pi'.$$

Prema tome, za dokaz (11.3) dovoljno je dokazati da je

$$\pi_1 \simeq \pi'. \tag{11.4}$$

Vrijedi $f'(\mathfrak{t}) = \{0\}$, pa su reprezentacije $\tau_{f',\mathfrak{h}_1}$, $\tau_{f',\mathfrak{h}'}$, π_1 i π' trivijalne na normalnoj podgrupi $T = \exp\,\mathfrak{t}$ od $\tilde{G}$. Neka je $\alpha : \tilde{G} \to \tilde{G}/T$ kanonski epimorfizam. Neka su π i $\tilde{\pi}$ reprezentacije od $\tilde{G}$, τ reprezentacija od H_1/T i $\tilde{\tau}$ reprezentacija od H'/T definirane sa

$$\pi \circ \alpha = \pi_1, \qquad \tilde{\pi} \circ \alpha = \pi', \qquad \tau \circ \alpha = \tau_{f',\mathfrak{h}_1}, \qquad \tilde{\tau} \circ \alpha = \tau_{f',\mathfrak{h}'}.$$

Sada je (11.4) ekvivalentno sa

$$\pi \simeq \tilde{\pi}. \tag{11.5}$$

Prema propoziciji 6.10. (koja je dokazana za slučaj kad je normalna podgrupa T centralna, ali to je iskorišteno isključivo zato da bismo utvrdili da je kvocijentna grupa unimodularna) vrijedi

$$\pi \simeq Ind_{H_1/T}^{\tilde{G}/T}\,\tau \qquad \text{i} \qquad \tilde{\pi} \simeq Ind_{H'/T}^{\tilde{G}/T}\,\tilde{\tau}.$$

Nadalje, prema lemi 10.2. i njenom dokazu preslikavanje $(\exp yY)(\exp xX')(\exp zZ)T \mapsto \langle x,y,z\rangle$ je izomorfizam grupe $\tilde{G}/T$ na Heisenbergovu grupu S. Pri tom izomorfizmu podgrupa H_1/T prelazi u $\{\langle x,0,z\rangle;\ x,z\in\mathbb{R}\}$, a podgrupa H'/T prelazi u $\{\langle 0,y,z\rangle;\ y,z\in\mathbb{R}\}$. Nadalje, reprezentacije τ i $\tilde{\tau}$ prelaze u

$$\tau(\langle x,0,z\rangle)=\mathrm{e}^{i\lambda z}, \qquad \tilde{\tau}(\langle 0,y,z\rangle) = \mathrm{e}^{i\lambda z}, \qquad \text{gdje je} \quad \lambda = f'(Z).$$

Prema tome, (11.5) se svodi na

Lema 11.4. *Neka su*

$$H=\{\langle x,0,z\rangle;\ x,z\in\mathbb{R}\}, \qquad \tilde{H}=\{\langle 0,y,z\rangle;\ y,z\in\mathbb{R}\},$$

i neka su τ i $\tilde{\tau}$ reprezentacija tih podgrupa Heisenbergove grupe S zadane sa

$$\tau(\langle x,0,z\rangle)=\tilde{\tau}(\langle 0,y,z\rangle)=\mathrm{e}^{i\lambda z}, \qquad x,y,z\in\mathbb{R},$$

gdje je $\lambda\in\mathbb{R}^*$. Tada su reprezentacije $\pi = Ind_H^S\,\tau$ i $\tilde{\pi} = Ind_{\tilde{H}}^S\,\tilde{\tau}$ ekvivalentne.

Dokaz: Prema korolaru 7.2. reprezentacije π i $\tilde{\pi}$ se mogu obje realizirati na Hilbertovom prostoru $L_2(\mathbb{R})$ ovako:

$$[\pi(\langle x,0,0\rangle)f](t)=\tau(\langle 0,t,0\rangle\langle x,0,0\rangle\langle 0,-t,0\rangle)f(t)=\mathrm{e}^{-i\lambda xt}f(t), \quad [\pi(\langle 0,y,0\rangle)f](t)=f(y+t),$$

$$[\pi(\langle 0,0,z\rangle)f](t)=\tau(\langle 0,t,0\rangle\langle 0,0,z\rangle\langle 0,-t,0\rangle)f(t)=\mathrm{e}^{i\lambda z}f(t),$$

$$[\tilde{\pi}(\langle x,0,0\rangle)f](t)=f(x+t), \quad [\tilde{\pi}(\langle 0,y,0\rangle)f](t)=\tilde{\tau}(\langle t,0,0\rangle\langle 0,y,0\rangle\langle -t,0,0\rangle)f(t)=\mathrm{e}^{i\lambda yt}f(t),$$

$$[\tilde{\pi}(\langle 0,0,z\rangle)f](t)=\tilde{\tau}(\langle t,0,0\rangle\langle 0,0,z\rangle\langle -t,0,0\rangle)f(t)=\mathrm{e}^{i\lambda z}f(t).$$

Za $f\in C_0(\mathbb{R})$ definiramo $Tf:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ sa

$$(Tf)(t)=\sqrt{\frac{|\lambda|}{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{it\tau\lambda}f(\tau)\mathrm{d}\tau, \qquad t\in\mathbb{R}.$$

Prema teoriji Fourierove transformacije operator T proširuje se do unitarnog operatora na Hilbertovom prostoru $L_2(\mathbb{R})$. Neposredna provjera pokazuje da za sve $f\in C_0(\mathbb{R})$ i sve $x,y,z\in\mathbb{R}$ vrijedi

$$\pi(\langle x,0,0\rangle)Tf=T\tilde{\pi}(\langle x,0,0\rangle)f, \quad \pi(\langle 0,y,0\rangle)Tf=T\tilde{\pi}(\langle 0,y,0\rangle)f, \quad \pi(\langle 0,0,z\rangle)Tf=T\tilde{\pi}(\langle 0,0,z\rangle)f.$$

Odatle je $\pi(s)T=T\tilde{\pi}(s)\ \ \forall s\in S$, dakle, $\pi\simeq\tilde{\pi}$.

Za $f\in\mathfrak{g}^*$ definiramo

$$d(f)=\max\{\dim\mathfrak{h};\ \mathfrak{h}\in\mathcal{P}(f)\}, \qquad \mathcal{M}(f)=\{\mathfrak{h}\in\mathcal{P}(f);\ \dim\mathfrak{h}=d(f)\}.$$

Teorem 11.5. *Neka je $f\in\mathfrak{g}^*$ i $\mathfrak{h}\in\mathcal{P}(f)$. Reprezentacija $\pi_{f,\mathfrak{h}}$ je ireducibilna ako i samo ako je $\mathfrak{h}\in\mathcal{M}(f)$.*

Dokaz ćemo provesti indukcijom po $\dim \mathfrak{g}$. Neka je $\dim \mathfrak{g} = 1$. Ako je $f \in \mathfrak{g}^*$, tada je $\mathcal{P}(f) = \{\{0\}, \mathfrak{g}\}$ i $f(f) = 1$. $\pi_{f,\{0\}}$ je regularna reprezentacija od G, dakle, po propoziciji 6.9. ta je reprezentacija reducibilna. S druge strane, reprezentacija $\pi_{f,\mathfrak{g}} = \tau_{f,\mathfrak{g}}$ je jednodimenzionalna, dakle, ireducibilna. Time je dokazana baza indukcije.

Prijeđimo na korak indukcije. Neka je $\dim \mathfrak{g} = n \geq 2$ i pretpostavimo da je teorem dokazan u slučaju kad je dimenzija Liejeve algebre manja od n. Neka je $f \in \mathfrak{g}^*$ i $\mathfrak{h} \in \mathcal{P}(f)$ i neka je $\mathfrak{c}$ centar od $\mathfrak{g}$ i $\mathfrak{c}_0 = \mathfrak{c} \cap \operatorname{Ker} f$.

(1) Pretpostavimo da je $\mathfrak{c} \not\subseteq \mathfrak{h}$. Tada je $\mathfrak{h} \notin \mathcal{M}(f)$, jer je $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{h} + \mathfrak{c} \in \mathcal{P}(f)$ i $\dim \mathfrak{g}_1 > \dim \mathfrak{h}$. Treba dokazati da je tada reprezentacija $\pi_{f,\mathfrak{h}}$ reducibilna. U tu je svrhu prema propozicijama 6.7. i 6.8. dovoljno dokazati da je reprezentacija od $G_1 = \exp \mathfrak{g}_1$, inducirana sa $\tau_{f,\mathfrak{h}}$ reducibilna. Izaberimo potprostor $\mathfrak{c}_1$ od $\mathfrak{c}$ takav da je $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{h} \dotplus \mathfrak{c}_1$. Tada je $C_1 = \exp \mathfrak{c}_1 \neq \{e\}$ zatvorena (centralna) podgrupa od G_1 i grupa G_1 je direktan produkt podgrupa H i C_1. Prema korolaru 6.14. reprezentacija $Ind_H^{G_1} \tau_{f,\mathfrak{h}}$ je reducibilna.

(2) Pretpostavimo sada da je $\mathfrak{c} \subseteq \mathfrak{h}$ i da je $\mathfrak{c}_0 \neq \{0\}$. Stavimo

$$C_0 = \exp \mathfrak{c}_0, \quad \overline{G} = G/C_0, \quad \overline{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g}/\mathfrak{c}_0, \quad \overline{H} = H/C_0, \quad \overline{\mathfrak{h}} = \mathfrak{h}/\mathfrak{c}_0$$

i neka su $\varphi : G \to \overline{G}$ i $\psi : \mathfrak{g} \to \overline{\mathfrak{g}}$ kanonski epimorfizmi. Neka je funkcional $\overline{f} \in \overline{\mathfrak{g}}^*$ definiran sa

$$\overline{f}(\psi(X)) = f(X), \qquad X \in \mathfrak{g}.$$

Tada je $\overline{\mathfrak{h}} \in \mathcal{P}(\overline{f})$ i $\tau_{f,\mathfrak{h}} = \tau_{\overline{f},\overline{\mathfrak{h}}} \circ \varphi|H$. Prema propoziciji 6.10. je $\pi_{f,\mathfrak{h}} \simeq \pi_{\overline{f},\overline{\mathfrak{h}}} \circ \varphi$.

Pretpostavimo da je reprezentacija $\pi_{f,\mathfrak{h}}$ ireducibilna. Tada je i reprezentacija $\pi_{\overline{f},\overline{\mathfrak{h}}}$ ireducibilna, pa je po pretpostavci indukcije $\overline{\mathfrak{h}} \in \mathcal{M}(\overline{f})$. Pretpostavimo da je $\dim \mathfrak{h} < d(f)$, tj. da je $\mathfrak{h} \notin \mathcal{M}(f)$. Neka je $\mathfrak{h}_1 \in \mathcal{M}(f)$. Tada je nužno $\mathfrak{c} \subseteq \mathfrak{h}_1$, i slijedi $\overline{\mathfrak{h}}_1 = \mathfrak{h}_1/\mathfrak{c}_0 \in \mathcal{P}(\overline{f})$ i $\dim \overline{\mathfrak{h}}_1 > \dim \overline{\mathfrak{h}}$, a to je nemoguće, jer je $\overline{\mathfrak{h}} \in \mathcal{M}(\overline{f})$. Ova kontradikcija pojkazuje da je pretpostavka $\mathfrak{h} \notin \mathcal{M}(f)$ bila pogrešna. Dakle, $\mathfrak{h} \in \mathcal{M}(f)$.

Pretpostavimo sada da je $\mathfrak{h} \in \mathcal{M}(f)$. Za $\mathfrak{l} \in \mathcal{P}(\overline{f})$ je tada $\psi^{-1}(\mathfrak{l}) \in \mathcal{P}(f)$. Dakle, $\overline{\mathfrak{h}} \in \mathcal{M}(\overline{f})$. Po pretpostavci indukcije reprezentacija $\pi_{\overline{f},\overline{\mathfrak{h}}}$ je ireducibilna, pa je i reprezentacija $\pi_{f,\mathfrak{h}}$ ireducibilna.

(3) Napokon, pretpostavimo da je $\mathfrak{c} \subseteq \mathfrak{h}$ i $\mathfrak{c}_0 = \{0\}$. Tada je nužno $\dim \mathfrak{c} = 1$ i funkcional f je netrivijalan na $\mathfrak{c}$, tj. $f|\mathfrak{c} \neq 0$. Neka je $(X, Y, Z, \mathfrak{l})$ $S-$rastav od $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}_1 = \mathbb{R}Y \dotplus \mathbb{R}Z \dotplus \mathfrak{l}$ i $G_1 = \exp \mathfrak{g}_1$. Tada je $f(Z) \neq 0$.

Neka je $\mathfrak{h} \in \mathcal{M}(f)$. Izaberimo $f' \in \mathfrak{g}^*$ i $\mathfrak{h}' \in \mathcal{P}(\mathfrak{h}')$ kao u lemi 11.3. Tada je $\mathfrak{h}' \in \mathcal{M}(f')$ i zbog tvrdnje (e) u lemi 11.3. da bismo dokazali da je reprezentacija $\pi_{f,\mathfrak{h}}$ ireducibilna dovoljno je dokazati da je reprezentacija $\pi_{f',\mathfrak{h}'}$ ireducibilna. Očito je $\mathfrak{h}' \in \mathcal{M}(f'|\mathfrak{g}_1)$ pa je po pretpostavci indukcije reprezentacija $\pi_{f'|\mathfrak{g}_1,\mathfrak{h}'}$ ireducibilna. Nadalje, $\tau_{f'|\mathfrak{g}_1,\mathfrak{h}'} = \tau_{f',\mathfrak{h}'}$, pa je po propoziciji 6.7. o induciranju u etapama $\pi_{f',\mathfrak{h}'} \simeq Ind_{G_1}^G \pi_{f'|\mathfrak{g}_1,\mathfrak{h}'}$.

Za $y, z \in \mathbb{R}$, $\varphi \in C_0(G_1, \tau_{f'|\mathfrak{g}_1,\mathfrak{h}'})$ i $x \in G_1$ imamo

$$[\pi_{f'|\mathfrak{g}_1,\mathfrak{h}'}(\exp(yY + zZ))\varphi](x) = \tau_{f'|\mathfrak{g}_1,\mathfrak{h}'}(\exp(yY + zZ))\varphi(x) = \mathrm{e}^{if'(yY+zZ)}\varphi(x) = \mathrm{e}^{iz\lambda}\varphi(x).$$

Iz teorema 10.9. slijedi da je reprezentacija $Ind_{G_1}^G \pi_{f'|\mathfrak{g}_1,\mathfrak{h}'}) \simeq \pi_{f',\mathfrak{h}'}$ ireducibilna.

Neka je sada $\mathfrak{h} \in \mathcal{P}(f) \setminus \mathcal{M}(f)$. Izaberimo kao i prije $f' \in \mathfrak{g}^*$ i $\mathfrak{h}' \in \mathcal{P}(f')$. Tada imamo $\mathfrak{h}' \notin \mathcal{M}(f')$. Tvrdimo da $\mathfrak{h}' \notin \mathcal{M}(f'|\mathfrak{g}_1)$. Doista, iz dokaza leme 11.3. slijedi da za svaku $\mathfrak{h}_1 \in \mathcal{P}(f')$ postoji $\mathfrak{h}_2 \in \mathcal{P}(f'|\mathfrak{g}_1)$ takva da je $\dim \mathfrak{h}_1 = \dim \mathfrak{h}_2$. Odatle je $d(f') = d(f'|\mathfrak{g}_1)$, a kako je $\dim \mathfrak{h}' < d(f')$ slijedi $\mathfrak{h}' \notin \mathcal{M}(f'|\mathfrak{g}_1)$. Prema tome, po pretpostavci indukcije reprezentacija $\pi_{f'|\mathfrak{g}_1,\mathfrak{h}'}$ je reducibilna. Pomoću propozicija 6.7. i 6.8. zaključujemo da je i reprezentacija $\pi_{f',\mathfrak{h}'} \simeq Ind_{G_1}^G \pi_{f'|\mathfrak{g}_1,\mathfrak{h}'}$ reducibilna.

Teorem 11.6. *Neka su $f_1, f_2 \in \mathfrak{g}^*$, $\mathfrak{h}_1 \in \mathcal{M}(f_1)$, $\mathfrak{h}_2 \in \mathcal{M}(f_2)$. Tada vrijedi $\pi_{f_1,\mathfrak{h}_1} \simeq \pi_{f_2,\mathfrak{h}_2}$ ako i samo ako postoji $x \in G$ takav da je $f_1 = f_2 \circ (Ad\, x)$, tj. ako i samo ako su funkcionali f_1 i f_2 $Ad(G)-$konjugirani.*

Dokaz ćemo provesti indukcijom po $\dim G$. Ako je $\dim G = 1$, tvrdnja je trivijalna jer je tada $Ad\,x = I_{\mathfrak{g}}$ $\forall x \in G$, $\mathfrak{h}_1 = \mathfrak{h}_2 = \mathfrak{g}$ i $\pi_{f,\mathfrak{g}} = \tau_{f,\mathfrak{g}}$ $\forall f \in \mathfrak{g}^*$, pa je $\pi_{f_1,\mathfrak{g}} \simeq \pi f_2, \mathfrak{g}$ ako i samo ako je $f_1 = f_2$.

Neka je sada $\dim G = n \geq 2$ i pretpostavimo da je teorem dokazan za grupe dimenzije manje od n.

Pretpostavimo najprije da postoji $x \in G$ takav da je $f_1 = f_2 \circ (Ad\,x)$. Po propoziciji 6.6. je

$$\pi_{f_2,\mathfrak{h}_2} \simeq \pi_{f_2 \circ (Ad\,x),(Ad\,x^{-1})\mathfrak{h}_2} = \pi_{f_1,(Ad\,x^{-1})\mathfrak{h}_2}.$$

Prema tome, treba dokazati da za $f \in \mathfrak{g}^*$ i za $\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2 \in \mathcal{M}(f)$ vrijedi $\pi_{f,\mathfrak{h}_1} \simeq \pi_{f,\mathfrak{h}_2}$.

Neka je $\mathfrak{c}$ centar od $\mathfrak{g}$ i $\mathfrak{c}_0 = (\mathrm{Ker}\, f) \cap \mathfrak{c}$. Pretpostavimo najprije da je $\mathfrak{c}_0 \neq \{0\}$. Stavimo

$$C_0 = \exp \mathfrak{c}_0, \qquad \overline{G} = G/C_0, \qquad \overline{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g}/\mathfrak{c}_0, \qquad \overline{\mathfrak{h}}_1 = \mathfrak{h}_1/\mathfrak{c}_0, \qquad \overline{\mathfrak{h}}_2 = \mathfrak{h}_2/\mathfrak{c}_0;$$

primijetimo da zbog $\mathfrak{h}_1 \in \mathcal{M}(f)$ vrijedi $\mathfrak{c} \subseteq \mathfrak{h}_1$ i $\mathfrak{c} \subseteq \mathfrak{h}_2$. Nadalje, neka su

$$\varphi : G \to \overline{G} \qquad \text{i} \qquad \psi : \mathfrak{g} \to \overline{\mathfrak{g}}$$

kanonski epimorfizmi i neka je funkcional $\overline{f} \in \overline{\mathfrak{g}}^*$ definiran sa

$$\overline{f}(\psi(X)) = f(X), \qquad X \in \mathfrak{g}.$$

Kao u dokazu teorema 11.5. (slučaj **(2)**) nalazimo da su $\overline{\mathfrak{h}}_1, \overline{\mathfrak{h}}_2 \in \mathcal{M}(\overline{f})$ i da vrijedi

$$\pi_{f,\mathfrak{h}_1} \simeq \pi_{\overline{f},\overline{\mathfrak{h}}_1} \circ \varphi \qquad \text{i} \qquad \pi_{f,\mathfrak{h}_2} \simeq \pi_{\overline{f},\overline{\mathfrak{h}}_2} \circ \varphi.$$

Kako je $\dim \overline{G} < n$, po pretpostavci indukcije je $\pi_{\overline{f},\overline{\mathfrak{h}}_1} \simeq \pi_{\overline{f},\overline{\mathfrak{h}}_2}$ pa slijedi i $\pi_{f,\mathfrak{h}_1} \simeq \pi_{f,\mathfrak{h}_2}$.

Pretpostavimo sada da je $\mathfrak{c}_0 = \{0\}$. Tada je $\dim \mathfrak{c} = 1$. Neka je $(X, Y, Z, \mathfrak{l})$ $S-$rastav od $\mathfrak{g}$ i neka su kao i prije

$$\mathfrak{g}_1 = \mathbb{R}Y \dotplus \mathbb{R}Z \dotplus \mathfrak{l} \qquad \text{i} \qquad G_1 = \exp \mathfrak{g}_1.$$

Želimo dokazati da je $\pi_{f,\mathfrak{h}_1} \simeq \pi_{f,\mathfrak{h}_2}$. Po lemi 11.3. i njenom dokazu možemo pretpostaviti da je $f(Y) = 0$ i $\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2 \subseteq \mathfrak{g}_1$. Tada su $\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2 \in \mathcal{M}(f|\mathfrak{g}_1)$, pa po pretpostavci indukcije vrijedi $\pi_{f|\mathfrak{g}_1,\mathfrak{h}_1} \simeq$ $\simeq \pi_{f|\mathfrak{g}_1,\mathfrak{h}_2}$. Po propoziciji 6.7. o induciranju u etapama je $\pi_{f,\mathfrak{h}_1} \simeq Ind_{G_1}^G\, \pi_{f|\mathfrak{g}_1,\mathfrak{h}_1}$ i $\pi_{f,\mathfrak{h}_2} \simeq Ind_{G_1}^G\, \pi_{f|\mathfrak{g}_1,\mathfrak{h}_2}$ pa slijedi da je $\pi_{f,\mathfrak{h}_1} \simeq \pi_{f,\mathfrak{h}_2}$.

Dokažimo sada obrnutu implikaciju u teoremu, tj. da za $f_1, f_2 \in \mathfrak{g}^*$ i za $\mathfrak{h}_1 \in \mathcal{M}(f_1)$ i $\mathfrak{h}_2 \in \mathcal{M}(f_2)$ iz $\pi_{f_1,\mathfrak{h}_1} \simeq \pi_{f_2,\mathfrak{h}_2}$ slijedi da postoji $x \in G$ takav da je $f_1 = f_2 \circ (Ad\,x)$. Neka je opet $\mathfrak{c}$ centar od $\mathfrak{g}$. Kako je $\mathfrak{c} \subseteq \mathfrak{h}_1$ i $\mathfrak{c} \subseteq \mathfrak{h}_2$, vrijedi

$$\pi_{f_1,\mathfrak{h}_1}(\exp X) = \mathrm{e}^{if_1(X)} I \qquad \text{i} \qquad \pi_{f_2,\mathfrak{h}_2}(\exp X) = \mathrm{e}^{if_2(X)} I.$$

Stoga $\pi_{f_1,\mathfrak{h}_1} \simeq \pi_{f_2,\mathfrak{h}_2}$ povlači da je $f_1|\mathfrak{c} = f_2|\mathfrak{c}$. Stavimo $\mathfrak{c}_0 = (\mathrm{Ker}\, f_1) \cap \mathfrak{c} = (\mathrm{Ker}\, f_2) \cap \mathfrak{c}$.

Pretpostavimo najprije da je $\mathfrak{c}_0 \neq \{0\}$. Stavimo opet

$$C_0 = \exp \mathfrak{c}_0, \qquad \overline{G} = G/C_0, \qquad \overline{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g}/\mathfrak{c}_0, \qquad \overline{\mathfrak{h}}_1 = \mathfrak{h}_1/\mathfrak{c}_0, \qquad \overline{\mathfrak{h}}_2 = \mathfrak{h}_2/\mathfrak{c}_0,$$

neka su

$$\varphi : G \to \overline{G} \qquad \text{i} \qquad \psi : \mathfrak{g} \to \overline{\mathfrak{g}}$$

kanonski epimorfizmi i neka su funkcionali $\overline{f}_1, \overline{f}_2 \in \overline{\mathfrak{g}}^*$ definirani sa

$$\overline{f_1}(\psi(X)) = f_1(X), \qquad \overline{f_2}(\psi(X)) = f_2(X), \qquad X \in \mathfrak{g}.$$

Kao u dokazu teorema 11.5. (slučaj **(2)**) nalazimo da su $\overline{\mathfrak{h}}_1 \in \mathcal{M}(\overline{f}_1)$ i $\overline{\mathfrak{h}}_2 \in \mathcal{M}(\overline{f}_2)$ i da vrijedi

$$\pi_{f_1,\mathfrak{h}_1} \simeq \pi_{\overline{f}_1,\overline{\mathfrak{h}}_1} \circ \varphi \qquad \text{i} \qquad \pi_{f_2,\mathfrak{h}_2} \simeq \pi_{\overline{f}_2,\overline{\mathfrak{h}}_2} \circ \varphi.$$

Iz $\pi_{f_1,\mathfrak{h}_1} \simeq \pi_{f_2,\mathfrak{h}_2}$ slijedi $\pi_{\overline{f}_1,\overline{\mathfrak{h}}_1} \simeq \pi_{\overline{f}_2,\overline{\mathfrak{h}}_2}$. Kako je $\dim \overline{G} < n$, po pretpostavci indukcije postoji $\overline{x} \in \overline{G}$ takav da je $\overline{f}_1 = \overline{f}_2 \circ (Ad\,\overline{x})$. Neka je $x \in G$ takav da je $\varphi(x) = \overline{x}$. Za $Y \in \mathfrak{g}$ i $\overline{Y} = \psi(Y)$ tada imamo

$$\exp{(Ad\,\overline{x})\overline{Y}} = \overline{x}(\exp{\overline{Y}})\overline{x}^{-1} = \varphi(x)(\exp{\psi(Y)})\varphi(x^{-1}) =$$
$$= \varphi(x)\varphi(\exp{Y})\varphi(x^{-1}) = \varphi\left(x(\exp{Y})x^{-1}\right) = \varphi(\exp{(Ad\,x)Y}) = \exp{\psi((Ad\,x)Y)}.$$

Prema tome je $(Ad\,\overline{x})\overline{Y} = \psi((Ad\,x)Y)$, pa slijedi

$$(f_2 \circ (Ad\,x))(Y) = f_2((Ad\,x)Y) = \overline{f}_2(\psi((Ad\,x)Y)) = \overline{f}_2((Ad\,\overline{x})\overline{Y}) = \overline{f}_1(\overline{Y}) = \overline{f}_1(\psi(Y)) = f_1(Y).$$

Dakle je $f_1 = f_2 \circ (Ad\,x)$.

Pretpostavimo sada da je $\mathfrak{c}_0 = \{0\}$. Tada je $\dim \mathfrak{c} = 1$ i funkcionali f_1 i f_2 su netrivijalni na $\mathfrak{c}$. Neka je $(X, Y, Z, \mathfrak{l})$ $S-$rastav od $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}_1 = \mathbb{R}Y \dotplus \mathbb{R}Z \dotplus \mathfrak{l}$ i $G_1 = \exp \mathfrak{g}_1$. Kako je $f_1|\mathfrak{c} = f_2|\mathfrak{c} \neq 0$, imamo $f_1(Z) = f_2(Z) = \lambda \in \mathbb{R}^*$. Po lemi 11.3. postoje $f_1, f_2 \in \mathfrak{g}^*$, $\mathfrak{h}_1 \in \mathcal{M}(f_1)$, $\mathfrak{h}_2 \in \mathcal{M}(f_2)$ i $x_1, x_2 \in G$ takvi da je

$$\begin{array}{ll} f_1 = f_1 \circ (Ad\,x_1), & f_2 = f_2 \circ (Ad\,x_2), \\ f_1(Y) = 0, & f_2(Y) = 0, \\ \mathfrak{h}_1 \subseteq \mathfrak{g}_1, & \mathfrak{h}_2 \subseteq \mathfrak{g}_1, \\ \pi_{f_1,\mathfrak{h}_1} \simeq \pi_{f_1,\mathfrak{h}_1}, & \pi_{f_2,\mathfrak{h}_2} \simeq \pi_{f_2,\mathfrak{h}_2} \end{array}$$

Kako je $\pi_{f_1,\mathfrak{h}_1} \simeq \pi_{f_2,\mathfrak{h}_2}$, dobivamo da je $\pi_{f_1,\mathfrak{h}_1} \simeq \pi_{f_2,\mathfrak{h}_2}$. Ako doikažemo da postoji $x \in G$ takav da je $f_1 = f_2 \circ (Ad\,x)$, tada će za $x = x_2 x x_1^{-1}$ vrijediti $f_1 = f_2 \circ (Ad\,x)$.

Prema tome, možemo pretpostaviti da je

$$f_1(Y) = f_2(Y) = 0, \qquad \mathfrak{h}_1 \subseteq \mathfrak{g}_1, \qquad \mathfrak{h}_2 \subseteq \mathfrak{g}_1, \qquad \pi_{f_1,\mathfrak{h}_1} \simeq \pi_{f_2,\mathfrak{h}_2},$$

i treba dokazati da postoji $x \in G$ takav da je $f_1 = f_2 \circ (Ad\,x)$.

Prema propoziciji 6.7. o induciranju u etapama imamo

$$\pi_{f_1,\mathfrak{h}_1} \simeq Ind_{G_1}^{G}\, \pi_{f_1|\mathfrak{g}_1,\mathfrak{h}_1} \qquad \text{i} \qquad \pi_{f_2,\mathfrak{h}_2} \simeq Ind_{G_1}^{G}\, \pi_{f_2|\mathfrak{g}_1,\mathfrak{h}_2}.$$

Kao u dokazu teorema 11.5. (slučaj **(3)**) nalazimo

$$\pi_{f_1|\mathfrak{g}_1,\mathfrak{h}_1}(\exp{(yY + zZ)}) = \mathrm{e}^{i\lambda z} I \qquad \text{i} \qquad \pi_{f_2|\mathfrak{g}_1,\mathfrak{h}_2}(\exp{(yY + zZ)}) = \mathrm{e}^{i\lambda z} I, \qquad y, z \in \mathbb{R}.$$

Stoga prema tvrdnji (b) teorema 10.9. iz $\pi_{f_1,\mathfrak{h}_1} \simeq \pi_{f_2,\mathfrak{h}_2}$ slijedi da je $\pi_{f_1|\mathfrak{g}_1,\mathfrak{h}_1} \simeq \pi_{f_2|\mathfrak{g}_1,\mathfrak{h}_2}$. Kako je $\dim G_1 < n$, po pretpostavci indukcije postoji $y \in G_1$ takav da je

$$f_1(U) = f_2((Ad\,y)U) \qquad \forall U \in \mathfrak{g}_1.$$

Budući da je $(Ad\,y)\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{g}_1$, imamo $(Ad\,y)X = X \notin \mathfrak{g}_1$. Prema tome, za neko $c \in \mathbb{R}^*$ i $V \in \mathfrak{g}_1$ vrijedi

$$(Ad\,y)X = cX + V.$$

Neka je

$$t = \frac{1}{c\lambda} f_1(X) - \frac{1}{\lambda} f_2(X) - \frac{1}{c\lambda} f_2(V) \qquad \text{i} \qquad x = (\exp{tY})y.$$

Za $U \in \mathfrak{g}_1$ je $[Y, U] = 0$, pa je $(Ad\,x)U = (Ad\,y)U$. Prema tome je $f_1(U) = f_2((Ad\,x)U)$ $\forall U \in \mathfrak{g}_1$. Nadalje, imamo

$$f_2((Ad\,x)X) = f_2\left(\mathrm{e}^{t\,ad\,Y}(Ad\,y)X\right) = f_2\left(\mathrm{e}^{t\,ad\,Y}(cX + V)\right) = f_2(cX + tcZ + V) =$$
$$= cf_2(X) + f_2(V) + tc\lambda = cf_2(X) + f_2(V)(+f_1(X) - cf_2(X) - f_2(V) = f_1(X).$$

Prema tome je $f_2((Ad\,x)U) = f_1(U)$, $\forall U \in \mathfrak{g}$, odnosno, $f_1 = f_2 \circ (Ad\,x)$.

Time je teorem u potpunosti dokazan.

U dualni prostor $\mathfrak{g}^*$ uvodimo relaciju ekvivalencije u odnosu na kontragredijentno djelovanje grupe G :

$$f_1 \sim f_2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \exists x \in G \quad \text{takav da je} \quad f_1 = f_2 \circ (Ad\, x).$$

Klase ekvivalencije zove se $G-$**orbite** u $\mathfrak{g}^*$. Skup svih $G-$orbita u $\mathfrak{g}^*$ označimo sa $\mathfrak{g}^*/G$. Označimo sa $\hat{G}$ skup svih klasa ekvivalencije ireducibilnih unitarnih reprezentacija od G. Svakoj $G-$orbiti $\mathcal{O} \in \mathfrak{g}^*/G$ po teoremu 11.6. pridružen je element $\pi_{\mathcal{O}} \in \hat{G}$. Prema teoremima 11.5. i 11.6. preslikavanje $\mathcal{O} \mapsto \pi_{\mathcal{O}}$ je bijekcija sa $\mathfrak{g}^*/G$ na $\hat{G}$.

Za $\varphi \in C_0^\infty(G)$ neka je funkcija $\hat{\varphi} : \mathfrak{g}^* \to \mathbb{C}$ definirana sa

$$\hat{\varphi}(f) = \int_G \varphi(x) \mathrm{e}^{if(\log x)} \mathrm{d}\mu(x), \qquad f \in \mathfrak{g}^*;$$

pri tome je μ Haarova mjera na G. Bez dokaza navodimo:

Teorem 11.7. *Neka je π ireducibilna unitarna reprezentacija nilpotentne grupe G i neka je $\mathcal{O}$ pripadna $G-$orbita u dualnom prostoru $\mathfrak{g}^*$ Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ od G. Za svaku funkciju $\varphi \in C_0^\infty(G)$ $\pi(\varphi)$ je operator s tragom. Preslikavanje $\varphi \mapsto \operatorname{Tr} \pi(\varphi)$ je distribucija na G. Postoji jedinstvena $G-$invarijantna mjera $\omega_{\mathcal{O}}$ na $\mathcal{O}$ takva da vrijedi*

$$\operatorname{Tr} \pi(\varphi) = \int_{\mathcal{O}} \hat{\varphi}(f) d\omega_{\mathcal{O}}(f) \qquad \forall \varphi \in C_0^\infty(G).$$