TEOREM O SUBREPREZENTACIJI

Prof. dr. sc. Hrvoje Kraljević

PMF−Matematički odjel Sveučilišta u Zagrebu

Zagreb, 1976.

Sadržaj

Poglavlje 1

DIFERENCIJALNE JEDNADŽBE U KOMPLEKSNOM PODRUČJU

1.1 Oznake i osnovni pojmovi

1.1.1. Ako su X i Y konačnodimenzionalni kompleksni vektorski prostori, sa $\mathcal{L}(X,Y)$ označavamo prostor svih linearnih operatora sa X u Y. Tada je $\mathcal{L}(X)=\mathcal{L}(X,X)$ unitalna algebra. Sa $GL(X)$ označavamo grupu svih invertibilnih elemenata unitalne algebre $\mathcal{L}(X)$, tj. grupu svih izomorfizama $A:X\to X$.

1.1.2. Za $\ell\in\mathbb{N}$ i otvoren skup $\mathcal{O}\subseteq\mathbb{C}^\ell$ sa $\mathcal{H}(\mathcal{O},X)$ označavamo prostor svih holomorfnih funkcija $F:\mathcal{O}\to X$. $\mathcal{H}(\mathcal{O},\mathcal{L}(X))$ je unitalna algebra i $\mathcal{H}(\mathcal{O},X)$ je lijevi $\mathcal{H}(\mathcal{O},\mathcal{L}(X))-$modul.

1.1.3. Ako je f funkcija ℓ realnih ili kompleksnih varijabli, $\partial_j f$ označava parcijalnu derivaciju od f po $j-$toj varijabli. Za $m=(m_1,\dots,m_\ell)\in\mathbb{Z}_+^\ell$ i za $x=(x_1,\dots,x_\ell)\in\mathbb{C}^\ell$ pišemo:

$$x^m=x_1^{m_1}\cdots x_\ell^{m_\ell},\qquad \partial^m=\partial_1^{m_1}\cdots\partial_\ell^{m_\ell},\qquad (\partial-x)^m=(\partial_1-x_1)^{m_1}\cdots(\partial_\ell-x_\ell)^{m_\ell},$$

$$|m|=m_1+\cdots+m_\ell,\qquad m!=m_1!\cdots m_\ell!$$

Nadalje, za $m\in\mathbb{Z}^\ell$ pišemo

$$|m|=|m_1|+\cdots+|m_\ell|.$$

1.1.4. Neka je $\mathcal{O}\subseteq\mathbb{C}^\ell$ područje, tj. otvoren povezan skup. Sa $\mathcal{D}(\mathcal{O},X)$ označavamo unitalnu algebru svih holomorfnih linearnih diferencijalnih operatora na $\mathcal{H}(\mathcal{O},X)$. Svaki $D\in\mathcal{D}(\mathcal{O},X)$ ima oblik

$$D=\sum_{m\in\mathbb{Z}_+^\ell}A_m\partial^m,$$

pri čemu su $A_m\in\mathcal{H}(\mathcal{O},\mathcal{L}(X))$ i samo ih je konačno mnogo različito od nule. Imamo $\mathcal{H}(\mathcal{O},\mathcal{L}(X))\subseteq\mathcal{D}(\mathcal{O},X)$, pa je $\mathcal{D}(\mathcal{O},X)$ lijevi i desni $\mathcal{H}(\mathcal{O},\mathcal{L}(X))-$modul. Za $D\in\mathcal{D}(\mathcal{O},X)$, $D\neq 0$, sa $\deg D$ označavamo najmanji broj $M\in\mathbb{Z}_+$ takav da je $A_m=0\ \forall m\in\mathbb{Z}_+^\ell,\ |m|>M$. Stavljamo $\deg 0=-\infty$. Za $M\in\mathbb{Z}_+$ uvodimo oznaku

$$\mathcal{D}_M(\mathcal{O},X)=\{D\in\mathcal{D}(\mathcal{O},X);\ \deg D\leq M\}.$$

Tada je $(\mathcal{D}_M(\mathcal{O},X))_{M\in\mathbb{Z}_+}$ filtracija algebre $\mathcal{D}(\mathcal{O},X)$; tj. svaki je $\mathcal{D}_M(\mathcal{O},X)$ potprostor i vrijedi

$$\mathcal{D}_M(\mathcal{O},X)\mathcal{D}_N(\mathcal{O},X)\subseteq\mathcal{D}_{M+N}(\mathcal{O},X).$$

1.1.5. Za $z, w \in \mathbb{C}^\ell$ pišemo

$$\langle z|w\rangle = \sum_{j=1}^{\ell} z_j w_j, \qquad \|z\| = \max\{|z_j|;\ 1 \le j \le \ell\}, \qquad \mathrm{e}^z = (\mathrm{e}^{z_1}, \dots \mathrm{e}^{z_\ell})\,.$$

1.1.6. Za $-\infty < \eta \le +\infty$ pišemo

$$\mathbb{C}(\eta) = \{z \in \mathbb{C};\ \mathrm{Re}\, z < \eta\}, \qquad \mathbb{R}(\eta) = \mathbb{C}(\eta) \cap \mathbb{R} = \langle -\infty, \eta\rangle,$$

$$\mathbb{C}^\ell(\eta) = \mathbb{C}(\eta)^\ell, \qquad \mathbb{R}^\ell(\eta) = \mathbb{C}^\ell(\eta) \cap \mathbb{R}^\ell = \mathbb{R}(\eta)^\ell.$$

1.1.7. Za $0 \le r < R \le +\infty$ pišemo:

$$D(r, R) = \{z \in \mathbb{C};\ r < |z| < R\}, \quad D^\ell(r, R) = D(r, R)^\ell,$$

$$D_0(R) = D(0, R), \quad D_0^\ell(R) = D_0(R)^\ell, \quad D_0 = D_0(1),$$

$$D(R) = \{z \in \mathbb{C};\ |z| < R\}, \quad D^\ell(R) = D(R)^\ell, \quad D = D(1).$$

1.1.8. Za $z, w \in \mathbb{C}^\ell$ pišemo $w \ll z$ ili $z \gg w$ ako je $z - w \in \mathbb{Z}_+^\ell$. Nadalje, za z i w kažemo da su **integralno ekvivalentni**, i tada pišemo $z \sim w$, ako je $z - w \in \mathbb{Z}^\ell$.

1.1.9. Za $-\infty < \eta \le +\infty$ preslikavanje $z \mapsto \mathrm{e}^z$, $z \in \mathbb{C}^\ell(\eta)$, je holomorfno natkrivanje sa $\mathbb{C}^\ell(\eta)$ na $D_0^\ell(\mathrm{e}^\eta)$. Ako je $F \in \mathcal{H}(D_0^\ell(\mathrm{e}^\eta), X)$ definiramo funkciju $\tilde{F} \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^\ell(\eta), X)$ kao kompoziciju F s tim natkrivanjem: $\tilde{F}(z) = F(\mathrm{e}^z)$, $z \in \mathbb{C}^\ell(\eta)$. Tada je $F \mapsto \tilde{F}$ linearna injekcija sa prostora $\mathcal{H}(D_0^\ell(\mathrm{e}^\eta), X)$ u prostor $\mathcal{H}(\mathbb{C}^\ell(\eta), X)$. Sliku te injekcije označimo sa $\tilde{\mathcal{H}}(\mathbb{C}^\ell(\eta), X)$. Lako se vidi da je

$$\tilde{\mathcal{H}}(\mathbb{C}^\ell(\eta), X) = \{F \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^\ell(\eta), X);\ F(z + 2\pi i m) = F(z)\ \forall z \in \mathbb{C}^\ell(\eta) \text{ i } \forall m \in \mathbb{Z}^\ell\}.$$

Prostor $\mathcal{H}(D^\ell(\mathrm{e}^\eta), X)$ shvaćamo kao potprostor od $\mathcal{H}(D_0^\ell(\mathrm{e}^\eta), X)$, budući da je svaka funkcija $F \in \mathcal{H}(D^\ell(\mathrm{e}^\eta), X)$ potpuno određena svojom restrikcijom na $D_0^\ell(\mathrm{e}^\eta)$. Sa $\hat{\mathcal{H}}(\mathbb{C}^\ell(\eta), X)$ ćemo označavati sliku tog potprostora pri preslikavanju $F \mapsto \tilde{F}$. Dakle,

$$\hat{\mathcal{H}}(\mathbb{C}^\ell(\eta), X) = \{\tilde{F};\ F \in \mathcal{H}(D^\ell(\mathrm{e}^\eta), X)\}.$$

Za $G \in \hat{\mathcal{H}}(\mathbb{C}^\ell(\eta), X)$ i za funkciju $F \in \mathcal{H}(D^\ell(\mathrm{e}^\eta), X)$ takvu da je $\tilde{F} = G$ po definiciji stavljamo

$$G(\infty) = F(0).$$

1.1.10. Za $s \in \mathbb{C}^\ell$ definiramo funkciju $e_s \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^\ell, \mathbb{C})$ ovako:

$$e_s(z) = \mathrm{e}^{\langle s|z\rangle}, \qquad z \in \mathbb{C}^\ell.$$

Tada su očito $e_m \in \hat{\mathcal{H}}(\mathbb{C}^\ell(\eta), \mathbb{C})$ za svaki $m \in \mathbb{Z}_+^\ell$ i svaki $\eta \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

1.1.11. Za $1 \le j \le \ell$ definiramo $\ell-$torku $\delta_j \in \mathbb{Z}_+^\ell$ sa $(\delta_j)_i = \delta_{ji}$, $1 \le i \le \ell$. Nadalje, stavimo $e_j = e_{\delta_j} \in \hat{\mathcal{H}}(\mathbb{C}^\ell, \mathbb{C})$, tj.

$$e_j(z) = \mathrm{e}^{z_j}, \qquad z \in \mathbb{C}^\ell.$$

Tada je

$$e_m = e_1^{m_1} \cdots e_\ell^{m_\ell}, \qquad m \in \mathbb{Z}^\ell.$$

Nadalje, vrijedi $e_m = \tilde{f}_m$, gdje je $f_m \in \mathcal{H}(D_0^\ell(\eta), \mathbb{C})$ definirana sa $f_m(z) = z^m$. Očito je $e_m \in \hat{\mathcal{H}}(\mathbb{C}^\ell(\eta), \mathbb{C})$ za svaki $m \in \mathbb{Z}_+^\ell$ i svaki $\eta \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

1.1.12. Za $s \in \mathbb{C}^\ell$, $m \in \mathbb{Z}_+^\ell$ i $\eta \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ definiramo:

$$\mathcal{H}_s^m(\mathbb{C}^\ell(\eta), X) = \Big\{F;\ \exists G \in \hat{\mathcal{H}}(\mathbb{C}^\ell(\eta), X) \text{ takva da je } F(z) = \mathrm{e}^{\langle s|z\rangle} z^m G(z)\ \forall z \in \mathbb{C}^\ell(\eta)\Big\}$$

i

$$\mathcal{H}_{s,m}(\mathbb{C}^\ell(\eta), X) = \sum_{\substack{k \in \mathbb{Z}_+^\ell \\ 0 \ll k \ll m}} \dot{+}\, \mathcal{H}_s^k(\mathbb{C}^\ell(\eta), X).$$

Budući da je $e_k = \mathrm{e}^{\langle k|\,\cdot\,\rangle} \in \hat{\mathcal{H}}(\mathbb{C}^\ell(\eta), \mathbb{C})$ za svaki $k \in \mathbb{Z}_+^\ell$, očito vrijedi:

$$s \gg t \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{H}_s^m(\mathbb{C}^\ell(\eta), X) \subseteq \mathcal{H}_t^m(\mathbb{C}^\ell(\eta), X) \quad \text{i} \quad \mathcal{H}_{s,m}(\mathbb{C}^\ell(\eta), X) \subseteq \mathcal{H}_{t,m}(\mathbb{C}^\ell(\eta), X) \quad \forall m \in \mathbb{Z}_+^\ell.$$

Nadalje, za svaki konačan skup $T \subseteq \mathbb{C}^\ell \times \mathbb{Z}_+^\ell$ stavimo

$$\mathcal{H}_T(\mathbb{C}^\ell(\eta), X) = \sum_{(s,m)\in T} \mathcal{H}_{s,m}(\mathbb{C}^\ell(\eta), X).$$

Neka su S i M projekcije skupa T na prvi faktor $\mathbb{C}^\ell$ i na drugi faktor $\mathbb{Z}_+^\ell$:

$$S = \{s \in \mathbb{C}^\ell;\ \exists m \in \mathbb{Z}_+^\ell \text{ takav da je } (s,m) \in T\},$$

$$M = \{m \in \mathbb{Z}_+^\ell;\ \exists s \in \mathbb{C}^\ell \text{ takav da je } (s,m) \in T\}.$$

Pretpostavimo da su svi elementi skupa S međusobno integralno ekvivalentni. Tada postoji $s \in \mathbb{C}^\ell$ takav da je $s \gg t\ \forall t \in S$. Stoga za $m \in \mathbb{Z}_+^\ell$ takav da je $k \ll m\ \ \forall k \in M$, vrijedi

$$\mathcal{H}_T(\mathbb{C}^\ell(\eta), X) \subseteq \mathcal{H}_{s,m}(\mathbb{C}^\ell(\eta), X).$$

1.1.13. Za $s \in \mathbb{C}^\ell$ stavimo

$$\mathcal{H}_s(\mathbb{C}^\ell(\eta), X) = \sum_{m \in \mathbb{Z}_+^\ell} \dot{+}\, \mathcal{H}_s^m(\mathbb{C}^\ell(\eta), X).$$

Potprostor $\mathcal{H}_s(\mathbb{C}^\ell(\eta), X)$ je $\hat{\mathcal{H}}(\mathbb{C}^\ell(\eta), \mathcal{L}(X))-$podmodul od $\mathcal{H}(\mathbb{C}^\ell(\eta), X)$. Uočimo da potprostori $\mathcal{H}_s^m(\mathbb{C}^\ell(\eta), X)$ nisu $\hat{\mathcal{H}}(\mathbb{C}^\ell(\eta), \mathcal{L}(X))-$podmoduli. Dakle, $\big(\mathcal{H}_s^m(\mathbb{C}^\ell(\eta), X)\big)_{m\in\mathbb{Z}_+}$ jest graduacija vektorskog prostora $\mathcal{H}_s(\mathbb{C}^\ell(\eta), X)$ ali nije njegova graduacija kao $\hat{\mathcal{H}}(\mathbb{C}^\ell(\eta), \mathcal{L}(X))-$modula. Međutim, $\big(\mathcal{H}_{s,m}(\mathbb{C}^\ell(\eta), X)\big)_{m\in\mathbb{Z}_+^\ell}$ je filtracija $\hat{\mathcal{H}}(\mathbb{C}^\ell(\eta), \mathcal{L}(X))-$modula $\mathcal{H}_s(\mathbb{C}^\ell(\eta), X)$.

Ako su $s, t \in \mathbb{C}^\ell$, onda vrijedi

$$s \gg t \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{H}_s(\mathbb{C}^\ell(\eta), X) \subseteq \mathcal{H}_t(\mathbb{C}^\ell(\eta), X).$$

Za konačan skup $S \subseteq \mathbb{C}^\ell$ stavimo

$$\mathcal{H}_S(\mathbb{C}^\ell(\eta), X) = \sum_{s\in S} \mathcal{H}_s(\mathbb{C}^\ell(\eta), X).$$

Ako je $S = S_1 \cup \cdots \cup S_r$ rastav skupa S u disjunktnu uniju klasa integralne ekvivalencije, onda je očito

$$\mathcal{H}_S(\mathbb{C}^\ell(\eta), X) = \sum_{i=1}^{r} \dot{+}\, \mathcal{H}_{S_i}(\mathbb{C}^\ell(\eta), X).$$

1.1.14. Neka je $\mathcal{O}$ otvoren podskup od $\mathbb{R}^\ell$ i neka su zadane neprekidne funkcije $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_\ell$ sa $\mathcal{O}$ u $\mathcal{L}(X)$. Stavimo

$$V(\mathcal{O}; \Gamma_1, \ldots, \Gamma_\ell) = \{F : \mathcal{O} \to X;\ F \text{ je klase } C^1 \text{ i } \partial_j F = \Gamma_j F \text{ za } 1 \leq j \leq \ell\}.$$

Slično, za otvoren podskup $\mathcal{O}$ od $\mathbb{C}^\ell$ i za $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_\ell \in \mathcal{H}(\mathcal{O}, \mathcal{L}(X))$ stavimo

$$V(\mathcal{O}; \Gamma_1, \ldots, \Gamma_\ell) = \{F \in \mathcal{H}(\Omega, X);\ \partial_j F = \Gamma_j F \text{ za } 1 \leq j \leq \ell\}.$$

U oba slučaja za $p \in \mathcal{O}$ sa $V_p(\mathcal{O}; \Gamma_1, \ldots, \Gamma_\ell)$ označimo potprostor od X dobiven iz $V(\mathcal{O}; \Gamma_1, \ldots, \Gamma_\ell)$ evaluacijom u točki p :

$$V_p(\mathcal{O}; \Gamma_1, \ldots, \Gamma_\ell) = \{F(p);\ F \in V(\mathcal{O}; \Gamma_1, \ldots, \Gamma_\ell)\}.$$

Taj potprostor od X je skup svih početnih uvjeta u točki p uz koje je sustav homogenih linearnih diferencijalnih jednadžbi $\partial_j F = \Gamma_j F$, $1 \leq j \leq \ell$, rješiv na $\mathcal{O}$.

Katkada ćemo sa Γ označavati uređenu $\ell-$torku funkcija $(\Gamma_1, \ldots, \Gamma_\ell)$, dakle, $\Gamma \in C(\Omega, \mathcal{L}(X))^\ell$ ili $\Gamma \in \mathcal{H}(\mathcal{O}, \mathcal{L}(X))^\ell$. Tada ćemo kraće pisati $V(\mathcal{O}; \Gamma)$ i $V_p(\mathcal{O}; \Gamma)$ umjesto $V(\mathcal{O}; \Gamma_1, \ldots, \mathcal{G}_\ell)$ i $V_p(\mathcal{O}; \Gamma_1, \ldots, \Gamma_\ell)$.

1.1.15. Sa $\hat{\mathcal{D}}(\mathbb{C}^\ell(\eta), X)$ ćemo označavati skup svih diferencijalnih operatora $D \in \mathcal{D}(\mathbb{C}^\ell(\eta), X)$ koji imaju koeficijente u $\hat{\mathcal{H}}(\mathbb{C}^\ell(\eta), \mathcal{L}(X))$. To je unitalna algebra i $\hat{\mathcal{H}}(\mathbb{C}^\ell(\eta), \mathcal{L}(X))$ je njena unitalna podalgebra. Prema tome, $\hat{\mathcal{D}}(\mathbb{C}^\ell(\eta), X)$ je lijevi i desni $\hat{\mathcal{H}}(\mathbb{C}^\ell(\eta), \mathcal{L}(X))-$modul.

Za $D \in \hat{\mathcal{D}}(\mathbb{C}^\ell(\eta), X)$, $s \in \mathbb{C}^\ell$ i $m \in \mathbb{Z}_+^\ell$ očito vrijedi

$$D\mathcal{H}_{s,m}(\mathbb{C}^\ell(\eta), X) \subseteq \mathcal{H}_{s,m}(\mathbb{C}^\ell(\eta), X).$$

Dakle, i za svaki konačan skup $T \subseteq \mathbb{C}^\ell \times \mathbb{Z}_+^\ell$ vrijedi

$$D\mathcal{H}_T(\mathbb{C}^\ell(\eta), X) \subseteq \mathcal{H}_T(\mathbb{C}^\ell(\eta), X).$$

1.1.16. Za podskup $\mathfrak{A} \subseteq \hat{\mathcal{D}}(\mathbb{C}^\ell(\eta), X)$ stavimo

$$V(\mathbb{C}^\ell(\eta), \mathfrak{A}) = \{F \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^\ell(\eta), X);\ DF = 0\ \ \forall D \in \mathfrak{A}\}.$$

Ako je $\mathcal{J}$ lijevi ideal u algebri $\hat{\mathcal{D}}(\mathbb{C}^\ell(\eta), X)$ generiran skupom $\mathfrak{A}$, očito je

$$V(\mathbb{C}^\ell(\eta), \mathfrak{A}) = V(\mathbb{C}^\ell(\eta), \mathcal{J}).$$

Za $s \in \mathbb{C}^\ell$, $m \in \mathbb{Z}_+^\ell$ i lijevi ideal $\mathcal{J}$ u algebri $\hat{\mathcal{D}}(\mathbb{C}^\ell(\eta), X)$ stavimo

$$V_{s,m}(\mathbb{C}^\ell(\eta), \mathcal{J}) = V(\mathbb{C}^\ell(\eta), \mathcal{J}) \cap \mathcal{H}_{s,m}(\mathbb{C}^\ell(\eta), X).$$

Nadalje, za konačan skup $T \subseteq \mathbb{C}^\ell \times \mathbb{Z}_+^\ell$ definiramo

$$V_T(\mathbb{C}^\ell(\eta), \mathcal{J}) = V(\mathbb{C}^\ell(\eta), \mathcal{J}) \cap \mathcal{H}_T(\mathbb{C}^\ell(\eta), X)$$

Zbog **1.1.15.** vrijedi

$$V_T(\mathbb{C}^\ell(\eta), \mathcal{J}) = \sum_{(s,m) \in T} V_{s,m}(\mathbb{C}^\ell(\eta), \mathcal{J}).$$

1.2 Laurentov i eksponencijalni razvoj

Teorem 1.2.1. (**Laurentov razvoj**) *Neka je* $r > 0$ *i* $F \in \mathcal{H}(D_0^\ell(r), X)$.

(*a*) *Postoje jedinstveni* $a_m \in X$, $m \in \mathbb{Z}^\ell$, *takvi da je*

$$F(z) = \sum_{m \in \mathbb{Z}^\ell} z^m a_m \qquad \forall z \in D_0^\ell(r),$$

pri čemu red konvergira apsolutno i lokalno uniformno na $D_0^\ell(r)$ *u odnosu na bilo koju normu* $\|\cdot\|$ *na* X.

(*b*) *Ako postoji* $\varepsilon \in \langle 0, r]$ *takav da je restrikcija* $F|D_0^\ell(\varepsilon)$ *ograničena, onda je* $F \in \mathcal{H}(D^\ell(r), X)$.

Dokaz: (*a*) Ako takvi a_m postoje, iz gornje formule slijedi

$$a_m = \frac{1}{(2\pi i)^\ell} \int_{\gamma_1} \cdots \int_{\gamma_\ell} \frac{F(\zeta)}{\zeta^{m+1}} \mathrm{d}\zeta_1 \cdots \mathrm{d}\zeta_\ell,$$

pri čemu je $m+1 = (m_1+1, \ldots, m_\ell+1)$ i $\gamma_1, \ldots, \gamma_\ell$ su bilo koje pozitivno orjentirane kružnice u $D_0(r)$ sa središtem u 0. Dakle, ako takvi a_m postoje oni su jedinstveno određeni funkcijom F.

Definirajmo sada $a_m \in X$, $m \in \mathbb{Z}^\ell$, gornjim integralom. Iz elementarne teorije holomorfnih funkcija jedne varijable slijedi da ta definicija ne ovisi o izboru kružnica $\gamma_1, \ldots, \gamma_\ell$. Dokazat ćemo da red $\sum_{m \in \mathbb{Z}_+^\ell} z^m a_m$ konvergira apsolutno i lokalno uniformno na $D_0^\ell(r)$, tj. uniformno na svakom kompaktnom podskupu od $D_0^\ell(r)$. U tu je svrhu dovoljno dokazati da red konvergira apsolutno i uniformno na svakom $D^\ell(s,t)$ za $0 < s < t < r$.

Neka su $0 < s < t < r$ i izaberimo s_1, t_1 tako da bude

$$0 < s_1 < s < t < t_1 < r \qquad \text{i} \qquad \frac{s_1}{s} = \frac{t}{t_1} = \rho < 1.$$

Stavimo

$$M = \sup \left\{ \|F(z)\|;\ z \in D^\ell(s_1, t_1) \right\}.$$

Neka je $E = \{1, -1\}^\ell$. Za $\varepsilon \in E$ označimo sa $\mathbb{Z}_\varepsilon^\ell$ skup svih $m \in \mathbb{Z}^\ell$ takvih da za svaki $i \in \{1, \ldots, \ell\}$ vrijedi

$$\varepsilon_i = 1 \quad \Longrightarrow \quad m_i \geq 0 \qquad \text{i} \qquad \varepsilon_i = -1 \quad \Longrightarrow \quad m_i < 0.$$

Tada za $m \in \mathbb{Z}_\varepsilon^\ell$ imamo $|m| = \sum_{i=1}^\ell \varepsilon_i m_i$. Nadalje, skup $\mathbb{Z}^\ell$ je disjunktna unija skupova $\mathbb{Z}_\varepsilon^\ell$, $\varepsilon \in E$.

Neka je γ pozitivno orijentirana kružnica radijusa s_1 sa središtem u 0, a γ' isto takva kružnica radijusa t_1. Za $\varepsilon \in E$ stavimo

$$\int_{\gamma_\varepsilon} (\cdots\cdots) \mathrm{d}\zeta = \int_{\gamma_1} \cdots \int_{\gamma_\ell} (\cdots\cdots) \mathrm{d}\zeta_1 \cdots \mathrm{d}\zeta_\ell,$$

gdje je $\gamma_i = \gamma'$ ako je $\varepsilon_i = 1$ i $\gamma_i = \gamma$ ako je $\varepsilon_i = -1$.

Fiksirajmo $\varepsilon \in E$ i stavimo $I_+ = \{i;\ \varepsilon_i = 1\}$ i $I_- = \{i;\ \varepsilon_i = -1\}$ i neka su $\alpha_+ = Card\, I_+$ i $\alpha_- = Card\, I_-$. Za $m \in \mathbb{Z}_\varepsilon^\ell$ stavimo

$$m_+ = \sum_{i \in I_+} m_i, \qquad m_- = \sum_{i \in I_-} m_i.$$

Tada je $|m| = m_+ - m_-$. Sada za svaki $z \in D^\ell(s,t)$ imamo

$$\|z^m a_m\| \leq t^{m_+} s^{m_-} \frac{1}{(2\pi)^\ell} \left\| \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{F(\zeta)}{\zeta^{m+1}} \mathrm{d}\zeta \right\| \leq t^{m_+} s^{m_-} \frac{1}{(2\pi)^\ell} M s_1^{-\alpha_- - m_-} t_1^{-\alpha_+ - m_+} (2\pi t_1)^{\alpha_+} (2\pi s_1)^{\alpha_-} =$$

$$= \left(\frac{t}{t_1} \right)^{m_+} \left(\frac{s}{s_1} \right)^{m_-} M = M \rho^{m_+ - m_-} = M \rho^{|m|}.$$

Budući da je $\rho < 1$, imamo za svako $z \in D^\ell(s,t)$ (uz napomenu da je $Card\, E = 2^\ell$)

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}^\ell} \|z^m a_m\| = \sum_{\varepsilon\in E}\left(\sum_{m\in\mathbb{Z}^\ell_\varepsilon} \|z^m a_m\|\right) \leq \sum_{\varepsilon\in E}\sum_{m\in\mathbb{Z}^\ell_+} M\rho^{|m|} = \frac{M2^\ell}{(1-\rho)^\ell} < +\infty.$$

Prema tome, red $\sum_{m\in\mathbb{Z}^\ell} z^m a_m$ konvergira apsolutno i uniformno na $D^\ell(s,t)$.

Indukcijom po ℓ dokazat ćemo sada da je suma tog reda jednaka $F(z)$ za svaki $z \in D^\ell_0(r)$. Za $\ell = 1$ to je poznata činjenica iz teorije holomorfnih funkcija jedne varijable. Provedimo sada korak indukcije: pretpostavimo da je tvrdnja istinita za funkcije $\ell - 1$ varijabli. Neka je γ pozitivno orijentirana kružnica u $D_0(r)$ sa središtem u 0. Definiramo funkcije $c_n : D^{\ell-1}_0(r) \to X$, $n \in Z$, sa

$$c_n(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{F(z,\zeta_\ell)}{\zeta_\ell^{n+1}}\mathrm{d}\zeta_\ell, \qquad z \in D^{\ell-1}_0(r).$$

To ne ovisi o izboru kružnice γ i vrijedi $c_n \in \mathcal{H}(D^{\ell-1}_0(r), X)$. Slično kao u prvom dijelu dokaza pokazuje se da za svaki par kompaktnih skupova $K \subseteq D^{\ell-1}_0(r)$ i $L \subseteq D_0(r)$ red

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \|w^n c_n(z)\|$$

konvergira uniformno za $(z,w) \in K \times L$. Prema teoremu o Laurentovom razvoju za jednu varijablu imamo

$$F(z,w) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} w^n c_n(z) \qquad \forall (z,w) \in D^\ell_0(r).$$

Sada za $k \in \mathbb{Z}^{\ell-1}$ i $n \in \mathbb{Z}$ stavimo

$$b_{k,n} = \frac{1}{(2\pi i)^{\ell-1}}\int_\gamma \cdots \int_\gamma \frac{c_n(\zeta)}{\zeta_1^{k_1+1}\cdots\zeta_{\ell-1}^{k_{\ell-1}+1}}\mathrm{d}\zeta_1\cdots\mathrm{d}\zeta_{\ell-1}.$$

Po pretpostavci indukcije tada imamo

$$c_n(z) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^{\ell-1}} z^k b_{k,n} \qquad \forall n \in \mathbb{Z} \quad \text{i} \quad \forall z \in D^{\ell-1}_0(r).$$

No očito je $b_{k,n} = a_{(k_1,\ldots,k_{\ell-1},n)}$, pa slijedi

$$F(z) = \sum_{m\in\mathbb{Z}^\ell} z^m a_m \qquad \forall z \in D^\ell_0(r).$$

Za tvrdnju (b) dovoljno je dokazati da iz ograničenosti $F|D^\ell_0(\varepsilon)$ za neki $0 < \varepsilon \leq r$ slijedi da je $a_m = 0$ za svaki $m \in \mathbb{Z}^\ell \setminus \mathbb{Z}^\ell_+$. Ako je $m \in \mathbb{Z}^\ell \setminus \mathbb{Z}^\ell_+$, onda je $m_i < 0$ za neki $i \in \{1,\ldots,\ell\}$. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $m_\ell < 0$. Prema drugom dijelu dokaza tvrdnje (a) vidi se da je tada $c_n(z) = 0$ za $n < 0$ i za svaki $z \in D^{\ell-1}_0(r)$; doista, tada je za svaki $z \in D^{\ell-1}_0(\varepsilon)$ funkcija $w \mapsto F(z,w)$ ograničena na $D_0(\varepsilon)$, pa ima u nuli uklonjivi singularitet; no tada je $b_{k,n} = 0$ za svaki $k \in \mathbb{Z}^{\ell-1}$ i $n < 0$, a to upravo znači da je $a_m = 0$ za $m_\ell < 0$.

Iz teorema 1.2.1. neposredno slijedi:

Teorem 1.2.2. *(a)* $\hat{\mathcal{H}}(\mathbb{C}^\ell(\eta), X)$ *je prostor svih funkcija oblika* $F : \mathbb{C}^\ell(\eta) \to X$ *oblika*

$$F(z) = \sum_{m \in \mathbb{Z}_+^\ell} \mathrm{e}^{\langle m|z\rangle} c_m, \qquad z \in \mathbb{C}^\ell(\eta), \tag{1.1}$$

gdje su $c_m \in X$, $m \in \mathbb{Z}_+^\ell$, *jedinstveno određeni sa* F *i vrijedi*

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}_+^\ell} \|c_m\| \mathrm{e}^{|m|\varepsilon} < +\infty \qquad \forall \varepsilon < \eta. \tag{1.2}$$

Uz uvjet (1.2) *red* (1.1) *konvergira uniformno i apsolutno na* $\mathbb{C}^\ell(\varepsilon)$ *za svaki* $\varepsilon < \eta$.

(b) $\hat{\mathcal{H}}(\mathbb{C}^\ell(\eta), X)$ *je skup svih* $F \in \tilde{\mathcal{H}}(\mathbb{C}^\ell(\eta), X)$ *čija je restrikcija* $F|\mathbb{C}^\ell(\varepsilon)$ *za neki* $\varepsilon \leq \eta$ *ograničena.*

1.3 Teorem jedinstvenosti za sisteme prvog reda

Lema 1.3.1. *Neka je $-\infty < a < b < +\infty$, $A : [a, b] \to \mathcal{L}(X)$ neprekidna funkcija i $f : [a, b] \to X$ funkcija klase C^1 takva da vrijedi*

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x) = A(x)f(x) \qquad \forall x \in [a, b] \qquad i \qquad f(a) = 0.$$

Tada je $f(x) = 0$ $\forall x \in [a, b]$.

Dokaz: Kako je $f(a) = 0$ iz diferencijalne jednadžbe slijedi

$$f(x) = \int_a^x A(t)f(t)\mathrm{d}t \qquad \forall x \in [a, b].$$

Stavimo

$$M = \max\{\|A(t)\|;\ a \le t \le b\} \qquad \text{i} \qquad N = \max\{\|f(t)\|;\ a \le t \le b\}.$$

Za svaki $x \in [a, b]$ imamo

$$\|F(x)\| = \left\| \int_a^x A(t)f(t)\mathrm{d}t \right\| \le MN(x - a).$$

Indukcijom po k slijedi

$$\|f(x)\| \le N \frac{M^k(x-a)^k}{k!} \qquad \forall x \in [a, b] \quad \text{i} \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Odatle je

$$N \le n \frac{M^k(b-a)^k}{k!} \qquad \forall k \in \mathbb{N}.$$

No tada $N > 0$ vodi na kontradikciju. Prema tome je $N = 0$, odnosno, $f(x) = 0$ $\forall x \in [a, b]$.

Teorem 1.3.2. *Neka je $\mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^\ell$ (odnosno, $\mathcal{O} \subseteq \mathbb{C}^\ell$) područje i $\Gamma \in C(\Omega, \mathcal{L}(X))^\ell$ (odnosno, $\Gamma \in \mathcal{H}(\Omega, \mathcal{L}(X))^\ell$). Za svaku točku $p \in \mathcal{O}$ linearno preslikavanje $F \mapsto F(p)$ sa $V(\mathcal{O}; \Gamma)$ u X je injektivno; drugim riječima, evaluacija u točki p je izomorfizam sa $V(\mathcal{O}; \Gamma)$ na $V_p(\mathcal{O}; \Gamma)$.*

Dokaz: Pretpostavimo da je $F(p) = 0$. Neka je $q \in \mathcal{O}$ proizvoljna i neka je $\gamma : [0, 1] \to \mathcal{O}$ put klase C^1 takav da je $\gamma(0) = p$ i $\gamma(1) = q$. Definiramo funkcije $f : [0, 1] \to X$ i $A : [0, 1] \to \mathcal{L}(X)$ ovako:

$$f(t) = F(\gamma(t)), \qquad A(t) = \sum_{j=1}^{\ell} \gamma_j'(t)\Gamma_j(\gamma(t)), \qquad t \in [0, 1];$$

pri tome je $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \ldots, \gamma_\ell(t))$. Tada je

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}(t) = A(t)f(t) \qquad \forall t \in [0, 1] \qquad \text{i} \qquad f(0) = F(p) = 0.$$

Sada iz leme 1.3.1. slijedi $F(q) = f(1) = 0$. Kako je točka $q \in \mathcal{O}$ bila proizvoljna, zaključujemo da je $F = 0$. Time je injektivnost dokazana.

Prema tome, za svaku točku $p \in \mathcal{O}$ je $\dim V_p(\mathcal{O}; \Gamma) = \dim V(\mathcal{O}; \Gamma)$. Posebno, svi potprostori $V_p(\mathcal{O}; \Gamma)$ prostora X su iste dimenzije.

Neka je $\mathcal{O} \subseteq \mathbb{C}^\ell$ područje, $p \in \mathcal{O}$ i $\Gamma \in \mathcal{H}(\mathcal{O}, \mathcal{L}(X))^\ell$. Za svaki vektor $v \in V_p(\mathcal{O};\Gamma)$ tada postoji jedinstvena funkcija $F_v \in V(\mathcal{O};\Gamma)$ takva da je $F_v(p) = v$. Nadalje, $v \mapsto F_v$ je izomorfizam sa $V_p(\mathcal{O};\Gamma)$ na $V(\mathcal{O};\Gamma)$. Neka je funkcija $\Phi : \mathcal{O} \to \mathcal{L}(V_p(\mathcal{O};\Gamma), X)$ definirana formulom

$$\Phi(z)v = F_v(z), \qquad z \in \mathcal{O}, \quad v \in V_p(\mathcal{O};\Gamma).$$

Tada je $\Phi \in \mathcal{H}(\mathcal{O}, \mathcal{L}(V_p(\mathcal{O};\Gamma), X))$. Funkcija Φ zadovoljava

$$\partial_j \Phi = \Gamma_j \Phi, \qquad 1 \leq j \leq \ell, \qquad \Phi(p) = I_{V_p(\mathcal{O};\Gamma)}. \tag{1.3}$$

Zbog teorema 1.3.2. funkcija Φ jedinstveno je određena sa (1.3). Također, zbog činjenice da je $F \mapsto F(z)$ izomorfizam sa $V(\mathcal{O};\Gamma)$ na $V_z(\mathcal{O};\Gamma)$, operator $\Phi(z)$ je izomorfizam sa $V_p(\mathcal{O};\Gamma)$ na $V_z(\mathcal{O};\Gamma)$ za svaku točku $z \in \mathcal{O}$.

Funkcija $\Phi \in \mathcal{H}(\mathcal{O}, \mathcal{L}(V_p(\mathcal{O};\Gamma), X))$ definirana sa (1.3) zove se **evoluciona funkcija** za $V(\mathcal{O};\Gamma)$ (ili za sistem jednadžbi $\partial_j F = \Gamma_j F$, $1 \leq j \leq \ell$) s početkom p.

1.4 Teorem egzistencije za jednadžbu prvog reda

U ovom odjeljku dokazat ćemo teorem egzistencije za jednu jednadžbu prvog reda na jednostavno povezanom području s proizvoljnim početnim uvjetom. Zbog kasnije primjene tvrdnju ćemo iskazati i dokazati uključujući moguću ovisnost o više kompleksnih parametara.

Teorem 1.4.1. *Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{C}^k$ otvoren skup ($k \in \mathbb{Z}_+$), $U \subseteq \mathbb{C}$ jednostavno povezano područje i $\Gamma \in \mathcal{H}(\Omega \times U, \mathcal{L}(X))$. Stavimo*

$$W(\Omega, U; \Gamma) = \left\{ F \in \mathcal{H}(\Omega \times U, X);\ \frac{\partial F}{\partial w}(z,w) = \Gamma(z,w)F(z,w)\ \forall (z,w) \in \Omega \times U \right\}.$$

Za $F \in W(\Omega, U; \Gamma)$ i $p \in U$ definiramo funkciju $F_p \in \mathcal{H}(\Omega, X)$ kao evaluaciju F u točki p : $F_p(z) = F(z,p)$, $z \in \Omega$. Tada je $F \mapsto F_p$ izomorfizam prostora $W(\Omega, U; \Gamma)$ na prostor $\mathcal{H}(\Omega, X)$.

Dokaz: Preslikavanje $F \mapsto F_p$ je očito linearno, a injektivnost slijedi iz teorema 1.3.2. Treba još dokazati surjektivnost.

Neka je $f \in \mathcal{H}(\Omega, X)$. Induktivno formiramo niz funkcija $(F_j)_{j \in \mathbb{Z}_+}$ sa $\Omega \times U$ u X :

$$F_0(z,w) = f(z), \qquad F_{j+1}(z,w) = f(z) + \int_\gamma \Gamma(z,\zeta)F_j(z,\zeta)\mathrm{d}\zeta, \qquad (z,w) \in \Omega \times U, \quad j \in \mathbb{Z}_+.$$

Pri tome je γ po dijelovima gladak put u U od točke p do točke w. Očito je $F_0 \in \mathcal{H}(\Omega \times U, X)$. Indukcijom po j zaključujemo da integrali ne ovise o izboru puta γ i da je $F_j \in \mathcal{H}(\Omega \times U, X)$ za svaki $j \in \mathbb{Z}_+$. Cilj nam je dokazati da je (F_j) Cauchyjev niz u $\mathcal{H}(\Omega \times U, X)$ u odnosu na lokalno uniformnu topologiju.

$\gamma : [0,n] \to U$ zove se **poligonalni put** u U s vrhovima $a_0, \ldots, a_n$ ako je $\gamma|[j-1,j]$ ravni segment od a_{j-1} do a_j za $j = 1, \ldots, n$. Dakle,

$$\gamma(t) = r a_{r-1} - (r-1)a_r + t(a_r - a_{r-1}), \qquad r-1 \le t \le r, \quad 1 \le r \le n.$$

Dokazat ćemo sljedeću tvrdnju:

Neka je $K \subseteq \Omega$ kompaktan skup i $\gamma : [0,n] \to U$ poligonalni put s vrhovima $a_0 = p, a_1, \ldots, a_n$. Nadalje, neka su $M > 0$, $d > 0$ i $c > 0$ takvi da je:

$$\|\Gamma(z,\gamma(s))\| \le M \qquad \forall z \in K \quad i \quad \forall s \in [0,n],$$

$$\|f(z)\| \le c \qquad \forall z \in K$$

i

$$|a_r - a_{r-1}| \le d \qquad \forall r \in \{1, \ldots, n\}.$$

Tada za svako $j \in \mathbb{Z}_+$ vrijedi:

$$(j) \qquad \|F_{j+1}(z,\gamma(t)) - F_j(z,\gamma(t))\| \le c\,\frac{(dMt)^{j+1}}{(j+1)!} \qquad \forall z \in K \quad i \quad \forall t \in [0,n].$$

Tu ćemo nejednakost (j) dokazati indukcijom po $j \in \mathbb{Z}_+$.

Prije svega uočimo da za $1 \le r \le n$ i $r-1 < t < r$ vrijedi $|\gamma'(t)| = |a_r - a_{r-1}| \le d$. Dakle, $|\gamma'(t)| \le d\ \forall t \in [0,n]$, osim, naravno, u točkama $a_1, \ldots, a_{n-1}$ u kojima γ nije derivabilna funkcija; to ne predstavlja teškoću, jer ćemo nejednakost koristiti samo u integralima. Usput napominjemo da u tim točkama γ ima derivaciju i slijeva i zdesna i obje derivacije zadovoljavaju istu nejednakost.

Baza indukcije: imamo

$$\|F_1(z,\gamma(t)) - F_0(z,\gamma(t))\| = \left\| \int_0^t \Gamma(z,\gamma(s))f(z)\gamma'(s)\mathrm{d}s \right\| \le cdM \int_0^t \mathrm{d}s = cdMt = c\,\frac{(dMt)^1}{1!}.$$

Time je dokazana nejednakost (0).

Prijeđimo sada na korak indukcije i pretpostavimo da vrijedi $(j-1)$. Tada dobivamo

$$\|F_{j+1}(z,\gamma(t)) - F_j(z,\gamma(t))\| = \left\| \int_0^t \Gamma(z,\gamma(s))[F_j(z,\gamma(s)) - F_{j-1}(z,\gamma(s))]\gamma'(s)\mathrm{d}s \right\| \leq$$

$$\leq dMc\,\frac{d^j M^j}{j!}\int_0^t s^j \mathrm{d}s = c\,\frac{(dMt)^{j+1}}{(j+1)!}.$$

Time je dokaz tvrdnje (j) indukcijom proveden.

Da bismo dokazali da je (F_j) Cauchyjev niz u $\mathcal{H}(\Omega \times U, X)$ u odnosu na lokalno uniformnu topologiju dovoljno je dokazati da niz restrikcija $(F_j|K \times D)$ konvergira uniformno za svaki kompaktan skup $K \subseteq \Omega$ i svaki zatvoren krug $D \subseteq U$. Dakle, neka je $K \subseteq \Omega$ kompaktan skup i neka je $D = \{w \in \mathbb{C};\ |w-q| \leq r\} \subseteq U$ za neki $r > 0$. Neka je $\gamma : [0, n-1] \to U$ poligonalni put s vrhovima $a_0 = p, a_1, \ldots, a_{n-1} = q$. Stavimo

$$M = \max\{\|\Gamma(z,w)\|;\ z \in K,\ w \in D \cup \gamma([0,n-1])\},$$

$$d = \max(\{r\} \cup \{|a_i - a_{i-1}|;\ 1 \leq i \leq n-1\}) \quad \text{i} \quad c = \max\{\|f(z)\|;\ z \in K\}.$$

Dokazat ćemo da vrijedi

$$\|F_{j+1}(z,w) - F_j(z,w)\| \leq c\,\frac{(dMn)^{j+1}}{(j+1)!} \qquad \forall z \in K, \quad \forall z \in D, \quad \forall j \in \mathbb{Z}_+. \tag{1.4}$$

Doista, neka su $z \in K$, $w \in D$ i $j \in \mathbb{Z}_+$. Neka je $\gamma_w : [0,n] \to U$ put definiran sa

$$\gamma_w(t) = \begin{cases} \gamma(t) & \text{ako je} \quad 0 \leq t \leq n-1 \\ nq - (n-1)w + t(w-q) & \text{ako je} \quad n-1 \leq t \leq n, \end{cases}$$

tj. poligonalni put s vrhovima $a_0 = p, a_1, \ldots, a_{n-1} = q, a_n = w$. Primijenimo li na taj poligonalni put nejednakost (j), za $t = n$ dobivamo upravo (1.4) jer je $\gamma_w(n) = w$.

Neka je sada $\varepsilon > 0$ proizvoljan. Izaberimo $m(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tako da vrijedi

$$m(\varepsilon) \leq \ell < m \qquad \Longrightarrow \qquad \sum_{j=\ell+1}^{m} c\,\frac{(dMn)^j}{j!} \leq \varepsilon.$$

Za takve m, ℓ i za proizvoljnu točku $(z,w) \in K \times D$ nalazimo zbog (1.4) :

$$\|F_m(z,w) - F_\ell(z,w)\| \leq \sum_{j=\ell+1}^{m} \|F_j(z,w) - F_{j-1}(z,w)\| \leq \sum_{j=\ell+1}^{m} c\,\frac{(dMn)^j}{j!} \leq \varepsilon.$$

Time je dokazano da je (F_j) Cauchyjev niz u $\mathcal{H}(\Omega \times U, X)$ u odnosu na lokalno uniformnu topologiju, pa ima limes $F \in \mathcal{H}(\Omega \times U, X)$. Prijeđemo li na limes po j u definicionoj jednakosti niza (F_j), dobivamo

$$F(z,w) = f(z) + \int_\gamma \Gamma(z,\zeta)F(z,\zeta)\mathrm{d}\zeta \qquad \forall (z,w) \in \Omega \times U,$$

gdje je γ put u U od p do w. Odatle slijedi

$$\frac{\partial F}{\partial w}(z,w) = \Gamma(z,w)F(z,w) \qquad \forall (z,w) \in \Omega \times U,$$

tj. $F \in W(\Omega, U; \Gamma)$, i vrijedi $F_p(z) = F(z,p) = f(z)$.

1.5 Teoremi proširenja za sistem prvog reda

Promatrat ćemo sada pitanje egzistencije rješenja sistema linearnih diferencijalnih jednadžbi prvog reda u slučaju kad je područje $\Omega \subseteq \mathbb{C}^\ell$ produkt ℓ jednostavno povezanih područja u $\mathbb{C}$. Neće nam trebati teorem egzistencije u punoj općenitosti, nego samo pitanje mogućnosti proširenja rješenja sa nekog područja $\mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^\ell \cap \Omega$.

Teorem 1.5.1. *Neka su $\Omega_1, \dots, \Omega_\ell \subseteq \mathbb{C}$ jednostavno povezana područja, $\Omega = \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_\ell \subseteq \mathbb{C}^\ell$, $\Gamma = (\Gamma_1, \dots, \Gamma_\ell) \in \mathcal{H}(\Omega, \mathcal{L}(X))^\ell$ i $\mathcal{O}$ neprazno područje u $\mathbb{R}^\ell$ sadržano u Ω. Tada je $F \mapsto F|\mathcal{O}$ izomorfizam prostora $V(\Omega; \Gamma)$ na prostor $V(\mathcal{O}; \Gamma|\mathcal{O})$.*

Dokaz: Prema teoremu 1.3.2. za bilo koju točku $x \in \mathcal{O}$ je $F \mapsto F(x)$ linearna injekcija sa $V(\mathcal{O}; \Phi|\mathcal{O})$ u X i sa $V(\Omega; \Gamma)$ u X. Odatle neposredno slijedi da je $F \mapsto F|\mathcal{O}$ linearna injekcija sa $V(\Omega; \Gamma)$ u $V(\mathcal{O}; \Gamma|\mathcal{O})$. Treba još dokazati surjektivnost. Budući da je za bilo koju točku $p \in \mathcal{O}$ preslikavanje $F \mapsto F(p)$ injektivno sa $V(\Omega; \Gamma)$ u X i sa $V(\mathcal{O}; \Gamma|\mathcal{O})$ u X, dovoljno je dokazati da za neku točku $p \in \mathcal{O}$ vrijedi $V_p(\mathcal{O}; \Gamma|\mathcal{O}) = V_p(\Omega; \Gamma)$, tj. da za svaku funkciju $G \in V(\mathcal{O}; \Gamma|\mathcal{O})$ postoji funkcija $F \in V(\Omega; \Gamma)$ takva da je $F(p) = G(p)$. Pomakom možemo postići da je $p = 0$. Nadalje, područje $\mathcal{O}$ se očito može bez smanjenja općenitosti smanjiti, pa možemo pretpostaviti da je $\mathcal{O} = I^\ell$, gdje je $I = \langle -\varepsilon, \varepsilon \rangle$ i $\varepsilon > 0$.

Dokaz u takvoj situaciji provest ćemo indukcijom po ℓ. Za $\ell = 1$ surjektivnost slijedi iz teorema 1.4.1. (uz $k = 0$, tj. bez Ω). Pretpostavimo da je surjektivnost dokazana ako je broj varijabli $\leq \ell - 1$. Neka je $G \in V(\mathcal{O}; \Gamma|\mathcal{O})$. Po teoremu 1.4.1. primijenjenom na $\mathcal{L}(X)-$značne funkcije postoji jedinstvena funkcija $\Phi \in \mathcal{H}(\Omega, \mathcal{L}(X))$ takva da vrijedi

$$(\partial_\ell \Phi)(z) = \Gamma_\ell(z)\Phi(z) \qquad \forall z \in \Omega$$

i

$$\Phi(z', 0) = I_X \qquad \forall z' \in \Omega'.$$

Pri tome smo označili

$$\Omega' = \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_{\ell-1} \subseteq \mathbb{C}^{\ell-1}.$$

Stavimo još

$$\mathcal{O}' = I^{\ell-1} \subseteq \Omega' \cap \mathbb{R}^{\ell-1}$$

i definiramo $g : \mathcal{O}' \to X$ sa

$$g(x) = G(x, 0) \qquad \text{za} \quad x \in \mathcal{O}'.$$

Ta je funkcija g klase C^1, jer je funkcija G klase C^1. Neka su $\Gamma'_1, \dots, \Gamma'_{\ell-1}$ funkcije iz $\mathcal{H}(\Omega', \mathcal{L}(X))$ definirane sa

$$\Gamma'_j(z') = \Gamma_j(z', 0), \qquad 1 \leq j \leq \ell - 1, \quad z' \in \Omega'.$$

Tada je $g \in V(\mathcal{O}'; \Gamma'_1|\mathcal{O}', \dots, \Gamma'_{\ell-1}|\mathcal{O}')$, pa po pretpostavci indukcije postoji $f \in V(\Omega'; \Gamma'_1, \dots, \Gamma'_{\ell-1})$ takva da je $f|\mathcal{O}' = g$.

Sada definiramo $F \in \mathcal{H}(\Omega, X)$ sa

$$F(z) = \Phi(z) f(z_1, \dots, z_{\ell-1}), \qquad z = (z_1, \dots, z_{\ell-1}, z_\ell) \in \Omega.$$

Neka je $H = G - F|\mathcal{O}$. Fiksirajmo $x = (x_1, \dots, x_{\ell-1}) \in \mathcal{O}'$ i definirajmo $h : I \to X$ i $\Sigma : I \to \mathcal{L}(X)$ sa

$$h(t) = H(x_1, \dots, x_{\ell-1}, t), \qquad \Sigma(t) = \Gamma_\ell(x_1, \dots, x_{\ell-1}, t), \qquad t \in I.$$

Tada je funkcija h klase C^1 i funkcija Σ je neprekidna. Vrijedi

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}(t) = (\partial_\ell G)(x, t) - (\partial_\ell \Phi)(x, t) f(x) = \Gamma_\ell(x, t) G(x, t) - \Gamma_\ell(x, t)\Phi(x, t) f(x) =$$

$$= \Sigma(t)(G(x, t) - F(x, t)) = \Sigma(t) H(x, t) = \Sigma(t) h(t).$$

Nadalje, kako je $f|\mathcal{O}' = g$, imamo

$$h(0) = G(x,0) - F(x,0) = g(x) - f(x) = 0.$$

Sada je po lemi 1.3.1. $h = 0$, što znači da je $H(x,t) = 0 \ \forall t \in I$. Iz proizvoljnosti $x \in \mathcal{O}'$ slijedi da je $H = 0$, tj. $F|\mathcal{O} = G$.

Budući da je funkcija F holomorfna i zadovoljava sistem jednadžbi na $\mathcal{O}$, ona zadovoljava sistem jednadžbi i na Ω. Dakle, $F \in V(\Omega;\Gamma)$.

Sasvim analogno teoremu 1.5.1. dokazuje se:

Teorem 1.5.2. *Neka su $\Omega_1,\ldots,\Omega_\ell$ jednostavo povezana područja u $\mathbb{C}$, $\Omega = \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_\ell \subseteq \mathbb{C}^\ell$, $\Gamma = (\Gamma_1,\ldots,\Gamma_\ell) \in \mathcal{H}(\Omega,\mathcal{L}(X))^\ell$ i $\mathcal{O}$ neprazno područje u $\mathbb{C}^\ell$ sadržano u Ω. Tada je $F \mapsto F|\mathcal{O}$ izomorfizam sa $V(\Omega;\Gamma)$ na $V(\mathcal{O};\Gamma|\mathcal{O})$.*

1.6 Sistem prvog reda u poluprostoru

U ovom odjeljku fiksiran je neki $\eta \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ i zbog kratkoće označavamo

$$\Omega = \mathbb{C}^\ell(\eta) = \{z = (z_1, \dots, z_\ell) \in \mathbb{C}^\ell;\ \mathrm{Re}\, z_j < \eta \text{ za } 1 \leq j \leq \ell\}.$$

Upotrebljavat ćemo oznake iz 1.1.9.−1.1.11. Posebno, sa $\tilde{\mathcal{H}}(\Omega, X)$ označavamo potprostor od $\mathcal{H}(\Omega, X)$ svih funkcija invarijantnih u odnosu na pomake za $2\pi i\mathbb{Z}^\ell$,

$$\tilde{\mathcal{H}}(\Omega, X) = \{F \in \mathcal{H}(\Omega, X);\ F(z + 2\pi i m) = F(z)\ \forall z \in \Omega \text{ i } \forall m \in \mathbb{Z}_+^\ell\}$$

odnosno, svih holomorfnih funkcija koje su u svakoj varijabli periodičke s periodom $2\pi i$. Sa $\{\delta_1, \dots, \delta_\ell\}$ označavamo standardnu bazu aditivne grupe $\mathbb{Z}_+^\ell$ i vektorskog prostora $\mathbb{C}^\ell$:

$$(\delta_j)_i = \delta_{ji} = \begin{cases} 1 & \text{ako je} \quad i = j \\ 0 & \text{ako je} \quad i \neq j. \end{cases}$$

Dakle, holomorfna funkcija $F : \Omega \to X$ nalazi se u prostoru $\tilde{\mathcal{H}}(\Omega, X)$ ako i samo ako je

$$F(z + 2\pi i\delta_j) = F(z) \qquad \forall z \in \Omega \quad \text{i} \quad \forall j = 1, \dots, \ell.$$

Ako je $\Gamma = (\Gamma_1, \dots, \Gamma_\ell) \in \tilde{\mathcal{H}}(\Omega, \mathcal{L}(X))^\ell$ promatrat ćemo sistem jednadžbi

$$(\partial_j F)(z) = \Gamma_j(z)F(z), \qquad 1 \leq j \leq \ell.$$

Neka je $V = V(\Omega, \Gamma)$ prostor svih rješenja $F : \Omega \to X$ tog sistema. Za $p \in \Omega$ sa $V_p = V_p(\Omega, \Gamma)$ označavamo skup svih mogućih početnih uvjeta za promatrani sistem jednadžbi u točki p. Prema teoremu jedinstvenosti 1.3.2. evaluacija $F \mapsto F(p)$ je izomorfizam prostora V na prostor p. Inverzni izomorfizam dan je preko evolucione funkcije $\Phi : \Omega \to \mathcal{L}(V_p, X)$ za V u točki p. To je jedinstvena holomorfna funkcija koja zadovoljava sljedeći sistem jednadžbi s početnim uvjetom u točki p :

$$\partial\Phi = \Gamma_j\Phi, \qquad 1 \leq j \leq \ell, \qquad \Phi(p) = I_{V_p}$$

Za svaku točku $z \in \Omega$ tada je $\Phi(z)$ izomorfizam sa V_p na V_z i vrijedi

$$\Phi(z)F(p) = F(z) \qquad \forall F \in V \quad \text{i} \quad \forall z \in \Omega.$$

Iako su funkcije Γ_j periodičke, rješenja ne moraju biti periodička. Ipak, rješenja zadovoljavaju određena pravila transformacije u odnosu na pomake iz $2\pi i\mathbb{Z}^\ell$:

Lema 1.6.1. *Neka je $\Gamma \in \tilde{\mathcal{H}}(\Omega, \mathcal{L}(X))^\ell$, $p \in \Omega$, $V = V(\Omega; \Gamma)$, $V_p = V_p(\Omega; \Gamma)$ i Φ evoluciona funkcija za V s početkom p. Za $1 \leq j \leq \ell$ stavimo $C_j = \Phi(p + 2\pi i\delta_j)$. Tada su $C_1, \dots, C_\ell$ operatori iz $GL(V_p)$ koji međusobno komutiraju i vrijedi*

$$\Phi(z + 2\pi ik) = \Phi(z)C^k \qquad \forall z \in \Omega \quad i \quad \forall k \in \mathbb{Z}^\ell.$$

Pri tome smo označili $C^k = C_1^{k_1} \cdots C_\ell^{k_\ell}$.

Dokaz: Stavimo

$$\Phi_j(z) = \Phi(z + 2\pi i\delta_j), \qquad z \in \Omega.$$

Za $1 \leq r \leq \ell$ imamo tada

$$(\partial_r\Phi_j)(z) = \Phi_r(z + 2\pi i\delta_j)\Phi_j(z) = \Gamma_r(z)\Phi_j(z).$$

Dakle, za $v \in V_p$ je funkcija $z \mapsto \Phi_j(z)v$ element od V. Posebno je $C_j v = \Phi_j(p)v \in V_p$, pa je $C_j \in \mathcal{L}(V_p)$. Po definiciji evolucione funkcije imamo

$$\Phi_j(z)v = \Phi(z)\Phi_j(p)v = \Phi(z)C_j v \qquad \forall v \in V_p,$$

pa je

$$\Phi_j(z) = \Phi(z)C_j \qquad \forall z \in \Omega \quad \text{i} \quad \forall j \in \{1,\dots,\ell\}.$$

Ako vrijedi $C_j v = 0$, onda je $\Phi_j(z)v = 0$ $\forall z \in \Omega$, pa je i $\Phi(z)v = 0$ $\forall z \in \Omega$. No tada je nužno $v = 0$. To pokazuje da je $C_j \in GL(V_p)$. Za $1 \le j, r \le \ell$ imamo

$$C_jC_r = \Phi(p)C_jC_r = \Phi(p+2\pi i\delta_j)C_r = \Phi(p+2\pi i\delta_j+2\pi i\delta_r) = \Phi(p+2\pi i\delta_r)C_j = \Phi(p)C_rC_j = C_rC_j.$$

To pokazuje da operatori $C_1,\dots,C_\ell$ međusobno komutiraju. Napokon, za $k \in \mathbb{Z}^\ell$ i $z \in \Omega$ je

$$\Phi(z+2\pi ik) = \Phi\left(z + \sum_{j=1}^{\ell} 2\pi i k_j\delta_j\right) = \Phi(z)C_1^{k_1}\cdots C_\ell^{k_\ell}.$$

Lema 1.6.2. *Neka je W kompleksan konačnodimenzionalan vektorski prostor. Ako operatori $C_1,\dots,C_\ell \in GL(W)$ međusobno komutiraju, onda postoje operatori $A_1,\dots,A_\ell \in \mathcal{L}(W)$ koji međusobno komutiraju i vrijedi $C_j = \mathrm{e}^{A_j}$ za $j = 1,\dots,\ell$.*

Dokaz: Postoji jednostavno povezano područje $\mathcal{O} \subseteq \mathbb{C}$ takvo da $0 \notin \mathcal{O}$ i spektar od C_j je sadržan u $\mathcal{O}$ za svako j. No tada postoji holomorfna funkcija $\log : \mathcal{O} \to \mathbb{C}$ takva da je $\mathrm{e}^{\log z} = z$ $\forall z \in \mathcal{O}$. Sada treba samo staviti $A_j = \log C_j$, $1 \le j \le \ell$.

U situaciji leme 1.6.1. možemo, dakle, naći operatore $R_1,\dots,R_\ell \in \mathcal{L}(V_p)$ koji međusobno komutiraju takve da je $C_j = \mathrm{e}^{2\pi i R_j}$ za $j = 1,\dots,\ell$. Stavimo

$$S(z) = \Phi(z)\mathrm{e}^{-z_1R_1-\cdots-z_\ell R_\ell}, \qquad z \in \Omega.$$

Tada imamo za svaki $r \in \{1,\dots,\ell\}$

$$S(z+2\pi i\delta_r) = \Phi(z)C_r\mathrm{e}^{-2\pi iR_r}\mathrm{e}^{-z_1R_1-\cdots-z_\ell R_\ell} = S(z).$$

Dakle je $S \in \tilde{\mathcal{H}}(\Omega,\mathcal{L}(V_p,X))$. Time smo dokazali:

Teorem 1.6.3. *Neka je $p \in \Omega$ i Φ evoluciona funkcija za V s početkom p. Tada postoje operatori $R_1,\dots,R_\ell \in \mathcal{L}(V_p)$ koji međusobno komutiraju i $S \in \tilde{\mathcal{H}}(\Omega,\mathcal{L}(V_p,X))$ takvi da je*

$$\Phi(z) = S(z)\mathrm{e}^{z_1R_1+\cdots+z_\ell R_\ell} \qquad \forall z \in \Omega.$$

Takvi $R_1,\dots,R_\ell$ i S nisu jedinstveni. Doista, ako uzmemo bilo koji $k \in \mathbb{Z}^\ell$ i stavimo

$$R_j' = R_j - k_jI_{V_p}, \quad 1 \le j \le \ell, \qquad S'(z) = \mathrm{e}^{\langle k|z\rangle}S(z), \quad z \in \Omega,$$

onda je $S' \in \tilde{\mathcal{H}}(\Omega,\mathcal{L}(V_p,X))$, operatori $R_1',\dots,R_\ell' \in \mathcal{L}(V_p)$ međusobno komutiraju i vrijedi

$$\Phi(z) = S'(z)\mathrm{e}^{z_1R_1'+\cdots+z_\ell R_\ell'} \qquad \forall z \in \Omega.$$

Teorem 1.6.4. *Ako je $\Gamma \in \hat{\mathcal{H}}(\Omega,\mathcal{L}(X))^\ell$, operatori $R_1,\dots,R_\ell$ u teoremu 1.6.3. mogu se odabrati tako da bude $S \in \hat{\mathcal{H}}(\Omega,\mathcal{L}(V_p,X))$.*

Dokaz: Neka su $R_1, \ldots, R_\ell$ i pripadna funkcija S bilo kako izabrani. Zbog prethodne napomene dovoljno je dokazati da postoji $k \in \mathbb{Z}^\ell$ takav da je funkcija $z \mapsto \mathrm{e}^{\langle k|z\rangle} S(z)$ element prostora $\hat{\mathcal{H}}(\Omega, \mathcal{L}(V_p, X))$.

Izaberimo $\varepsilon > 0$ tako da bude $-\varepsilon < \eta$. Za $j \in \{1, \ldots, \ell\}$ neka je $k_j \in \mathbb{Z}_+$ takav da je

$$k_j \geq \|R_j\| + \sup\{\|\Gamma_j(z)\|;\ z \in \mathbb{C}^\ell(-\varepsilon)\}.$$

Uvjet ima smisla jer je po pretpostavci $\Gamma_j \in \hat{\mathcal{H}}(\Omega, \mathcal{L}(V_p, X))$ pa je restrikcija $\Gamma_j|\mathbb{C}^\ell(-\varepsilon)$ ograničena. Dokazat ćemo sada da za svaki $j \in \{1, \ldots, \ell\}$ i svaku točku $z \in Cl(\mathbb{C}^\ell(-\varepsilon))$ vrijedi

$$\|S(z)\| \leq \mathrm{e}^{-k_j x_j} \|S(z_1, \ldots, z_{j-1}, -\varepsilon + iy_j, z_{j+1}, \ldots, z_\ell)\|. \tag{1.5}$$

Pri tome je $z_r = x_r + iy_r$, $x_r, y_r \in \mathbb{R}$, $1 \leq r \leq \ell$. Zbog jednostavnijeg pisanja možemo pretpostaviti da je $j = \ell$ i pisati $k_\ell = k$. Neka je vektor $v \in V_p \setminus \{0\}$ proizvoljan. Pretpostavljat ćemo da je norma na prostoru X euklidska, tj. zadana preko skalarnog produkta. Fiksiramo sada točku $z \in Cl(\mathbb{C}^{\ell-1}(-\varepsilon))$ i $y \in \mathbb{R}$ i definiramo funkciju $\varphi : \langle -\infty, \eta\rangle \to X$ sa

$$\varphi(x) = \Phi(z, x + iy)v, \qquad -\infty < x < \eta.$$

Imamo tada

$$\varphi'(x) = (\partial_\ell \Phi)(z, x + iy)v = \Gamma_\ell(z, x + iy)\Phi(z, x + iy)v = \Gamma_\ell(z, x + iy)\varphi(x).$$

Prema izboru k za $x \leq -\varepsilon$ je $\|\Gamma_\ell(z, x + iy)\| \leq k - \|R_\ell\|$, pa je

$$\|\varphi'(x)\| \leq (k - \|R_\ell\|)\|\varphi(x)\| \qquad \forall x \leq -\varepsilon.$$

Budući da je $v \neq 0$, iz teorema jedinstvenosti 1.3.2. slijedi da je $\varphi(x) \neq 0\ \forall x$. Stoga je funkcija

$$f(x) = \ln \|\varphi(-x)\|, \qquad x \in \langle -\eta, +\infty\rangle,$$

dobro definirana diferencijabilna funkcija sa $\langle -\eta, +\infty\rangle$ u $\mathbb{R}$. Sada imamo

$$f'(x) = \frac{1}{\|\varphi(-x)\|} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \sqrt{(\varphi(-x)|\varphi(-x))} = -\frac{\mathrm{Re}\,(\varphi'(-x)|\varphi(-x))}{\|\varphi(-x)\|^2} \leq \frac{\|\varphi'(-x)\|}{\|\varphi(-x)\|}.$$

Dakle, vrijedi

$$f'(x) \leq k - \|R_\ell\| \qquad \forall x \geq \varepsilon.$$

Odatle parcijalnom integracijom slijedi

$$f(x) - f(\varepsilon) \leq (k - \|R_\ell\|)(x - \varepsilon) \qquad \forall x \geq \varepsilon,$$

tj.

$$\ln \|\varphi(x)\| - \ln \|\varphi(-\varepsilon)\| \leq -(x + \varepsilon)(k - \|R_\ell\|) \qquad \forall x \leq -\varepsilon,$$

tj.

$$\|\varphi(x)\| \leq \|\varphi(-\varepsilon)\| \mathrm{e}^{-(x+\varepsilon)(k - \|R_\ell\|)} \qquad \forall x \leq -\varepsilon.$$

Prema tome je

$$\|\Phi(z, x + iy)v\| \leq \|\Phi(z, -\varepsilon + iy)v\| \mathrm{e}^{-(x+\varepsilon)(k-\|R_\ell\|)}, \quad x \leq -\varepsilon,\ y \in \mathbb{R},\ z \in Cl(\mathbb{C}^{\ell-1}(-\varepsilon)),\ v \in V_p. \tag{1.6}$$

Međutim,

$$\Phi(z, w) = S(z, w)Q(z, w), \qquad \text{gdje je} \quad Q(z, w) = \mathrm{e}^{wR_\ell} \mathrm{e}^{\sum_{j=1}^{\ell-1} z_j R_j}.$$

Imamo
$$Q(z,-\varepsilon+iy)=\mathrm{e}^{-(\varepsilon+x)R_\ell}Q(z,x+iy),$$
pa iz (1.6) slijedi
$$\|S(z,x+iy)Q(z,x+iy)v\|\le\left\|\mathrm{e}^{-(\varepsilon+x)R_\ell}S(z,-e+iy)Q(z,x+iy)v\right\|\mathrm{e}^{-(\varepsilon+x)(k-\|R_\ell\|)}.$$
Uz oznaku $w=Q(z,x+iy)v\in V_p$ i zbog $-(\varepsilon+x)\ge 0$ imamo redom:
$$\|S(z,x+iy)w\|\le\left\|\mathrm{e}^{-(\varepsilon+x)R_\ell}S(z,-\varepsilon+iy)w\right\|\mathrm{e}^{-(\varepsilon+x)(k-\|R_\ell\|)}\le$$
$$\le\mathrm{e}^{-(\varepsilon+x)\|R_\ell\|}\|S(z,-\varepsilon+iy)w\|\mathrm{e}^{-(\varepsilon+x)(k-\|R_\ell\|)}=\|S(z,-\varepsilon+iy)w\|\mathrm{e}^{-(\varepsilon+x)k}\le\|S(z,-\varepsilon+iy)w\|\mathrm{e}^{-kx}.$$
Budući da je $v\in V_p\setminus\{0\}$ bio proizvoljan, zbog $Q(z,x+iy)\in GL(V_p)$ i vektor $w\in V_p\setminus\{0\}$ je proizvoljan. Supremum po $\|w\|=1$ daje
$$\|S(z,x+iy)\|\le\mathrm{e}^{-kx}\|S(z,-\varepsilon+iy)\|.$$
Kako je $(z,x+iy)$ proizvoljna točka iz $Cl(\mathbb{C}^\ell(-\varepsilon))$ to je upravo nejednakost (1.5).

Primjenom nejednakosti (1.5) redom za sve $j=1,\dots,\ell$ dobivamo za svaku točku $z\in Cl(\mathbb{C}^\ell(-\varepsilon))$:
$$\left\|\mathrm{e}^{\langle k|z\rangle}S(z)\right\|\le\left|\mathrm{e}^{\langle k|z\rangle}\right|\|S(-\varepsilon+iy_1,\dots,-e+iy_\ell)\|\mathrm{e}^{-\sum_{j=1}^{\ell}k_jx_j}.$$
Međutim,
$$\left|\mathrm{e}^{\langle k|z\rangle}\right|=\mathrm{e}^{\mathrm{Re}\,\langle k|z\rangle}=\mathrm{e}^{\sum_{j=1}^{\ell}k_jx_j},$$
pa iz prethodne nejednakosti slijedi
$$\left\|\mathrm{e}^{\langle k|z\rangle}S(z)\right\|\le\|S(-\varepsilon+iy_1,\dots,-\varepsilon+iy_\ell)\|\qquad\forall z\in Cl(\mathbb{C}^\ell(-\varepsilon)).$$
Budući da je $S\in\tilde{\mathcal{H}}(\Omega,\mathcal{L}(V_p,X))$, vrijedi
$$M=\max\{\|S(-\varepsilon+iy_1,\dots,-\varepsilon+iy_\ell)\|;\ y\in\mathbb{R}^\ell\}<+\infty$$
i imamo
$$\left\|\mathrm{e}^{\langle k|z\rangle}S(z)\right\|\le M\qquad\forall z\in Cl(\mathbb{C}^\ell(-\varepsilon)).$$
Sada pomoću tvrdnje (b) teorema 1.2.2. zaključujemo da je funkcija $z\mapsto\mathrm{e}^{\langle k|z\rangle}S(z)$ u prostoru $\hat{\mathcal{H}}(\Omega,\mathcal{L}(V_p,X))$. Time je teorem 1.6.4. dokazan.

Teorem 1.6.5. *Neka su $\Gamma\in\hat{\mathcal{H}}(\Omega,\mathcal{L}(X))^\ell$, $p\in\Omega$ i Φ evoluciona funkcija za $V=V(\mathbb{C}^\ell(\eta;\Gamma)$ s početkom p. Tada postoji rastav $V_p=V_1\dot{+}\cdots\dot{+}V_r$, brojevi $s_1,\dots,s_r\in\mathbb{C}^\ell$, polinomijalne funkcije $P_j:\mathbb{C}^\ell\to\mathcal{L}(V_j)$, $1\le j\le r$, i $S\in\hat{\mathcal{H}}(\Omega,\mathcal{L}(V_p,X))$ takvi da vrijedi:*

(a) $\Phi(z)=S(z)\displaystyle\sum_{j=1}^{r}\dot{+}\,\mathrm{e}^{\langle s_j|z\rangle}P_j(z).$

(b) *Svaka funkcija P_j je oblika*
$$P_j(z)=I_{V_j}+\sum_{\substack{m\,\in\,\mathbb{Z}_+^\ell\\0<|m|<\dim V_j}}z^mP_{j,m},$$
gdje su $P_{j,m}\in\mathcal{L}(V_j)$ nilpotentni operatori koji međusobno komutiraju. Posebno, vrijednosti od P_j su unipotentni operatori koji međusobno komutiraju i $P_j(0)=I_{V_j}$.

Dokaz: Operatore $R_1, \ldots, R_\ell$ iz tvrdnje teorema 1.6.3. možemo prema teoremu 1.6.4. izabrati tako da bude $S \in \hat{\mathcal{H}}(\Omega, \mathcal{L}(V_p, X))$. Neka su $R_i = S_i + N_i$, $1 \leq i \leq \ell$, Jordanovi rastavi (S_i dijagonalizabilni, N_i nilpotentni). Tada operatori $S_1, \ldots, S_\ell, N_1, \ldots, N_\ell$ međusobno komutiraju. Za $\mu \in \mathbb{C}^\ell$ stavimo

$$V_\mu = \{v \in V_p;\ S_i v = \mu_i v,\ 1 \leq i \leq \ell\}.$$

Budući da su operatori $S_1, \ldots, S_\ell$ dijagonalizabilni i međusobno komutiraju, za neke međusobno različite $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{C}^\ell$ i za $V_j = V_{\lambda_j}$ vrijedi $V_p = V_1 \dot{+} \cdots \dot{+} V_r$. Svaki potprostor V_j invarijantan je s obzirom na sve operatore S_i i N_i i imamo

$$S_i | V_j = \lambda_{ji} I_{V_j}, \qquad 1 \leq i \leq \ell, \quad 1 \leq j \leq r.$$

Pri tome je $\lambda_j = (\lambda_{j1}, \ldots, \lambda_{j\ell})$. Stavimo

$$N_{ji} = N_i | V_j \in \mathcal{L}(V_j), \qquad 1 \leq i \leq \ell, \quad 1 \leq j \leq r.$$

Operatori $N_{j1}, \ldots, N_{j\ell}$ su nilpotentni i međusobno komutiraju pa je produkt bilo kojih $d_j = \dim V_j$ od tih operatora jednak nuli. Stoga su funkcije $P_j : \mathbb{C}^\ell \to \mathcal{L}(V_j)$, definirane sa

$$P_j(z) = \mathrm{e}^{z_1 N_{j1} + \cdots + z_\ell N_{j\ell}}, \qquad 1 \leq j \leq r, \quad z \in \mathbb{C}^\ell,$$

polinomijalne i imaju oblik kao u tvrdnji (b). Neposredno slijedi da je

$$\mathrm{e}^{z_1 R_1 + \cdots + z_\ell R_\ell} = \sum_{j=1}^{r} \dot{+}\, \mathrm{e}^{\langle s_j | z \rangle} P_j(z).$$

Time je teorem u potpunosti dokazan.

1.7 Sistemi višeg reda

I u ovom odjeljku fiksiran je $\eta \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. **Upotrebljavat ćemo kratice:**

$$\Omega = \mathbb{C}^\ell(\eta), \quad \hat{\mathcal{D}} = \hat{\mathcal{D}}(\Omega, X) \quad \text{i} \quad \hat{\mathcal{D}}_M = \hat{\mathcal{D}} \cap \mathcal{D}_M(\Omega, X), \quad M \in \mathbb{Z}_+.$$

Neka je $\mathcal{J}$ lijevi ideal u $\hat{\mathcal{D}}$. Kažemo da je ∞ **prosti singularitet** za $\mathcal{J}$, ako je kvocijent $\hat{\mathcal{D}}/\mathcal{J}$ konačno generirani $\hat{\mathcal{H}}(\Omega, \mathcal{L}(X))-$modul. Taj je uvjet ekvivalentan postojanju $M \in \mathbb{N}$ takvog da je $\hat{\mathcal{D}} = \hat{\mathcal{D}}_M + \mathcal{J}$. Za podskup $\mathfrak{A} \subseteq \hat{\mathcal{D}}$ kažemo da **sistem jednadžbi**

$$DF = 0, \qquad D \in \mathfrak{A},$$

ima prosti singularitet u ∞ ako je ∞ prosti singularitet za lijevi ideal u $\hat{\mathcal{D}}$ generiran sa $\mathfrak{A}$.

Razmotrimo najprije značenje pojma prostog singulariteta u ∞ za slučaj jedne jednadžbe za skalarnu funkciju jedne varijable.

Propozicija 1.7.1. *Neka je* $\ell = 1$, $X = \mathbb{C}$ *i* $D \in \hat{\mathcal{D}}(\Omega, \mathbb{C})$ *Pišemo*

$$D = \sum_{m=0}^{M} f_m d^m, \qquad d = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}.$$

Pretpostavimo da je $f_M(z) \neq 0 \ \ \forall z \in \mathbb{C}(\eta)$. *Tada jednadžba* $DF = 0$ *ima prosti singularitet u* ∞ *ako i samo ako je* $f_M(\infty) \neq 0$.

Dokaz: Neka je $\mathcal{J} = \hat{\mathcal{D}}D$ lijevi ideal u $\hat{\mathcal{D}}$ generiran sa D. Za $k \in \mathbb{Z}_+$ imamo

$$d^k D = f_M d^{k+M} + \text{članovi nižeg reda.}$$

Ako je $f_M(\infty) \neq 0$, tada je $\dfrac{1}{f_M} \in \hat{\mathcal{H}}$, pa slijedi da je $d^p \in \hat{\mathcal{D}}_{p-1} + \mathcal{J} \ \ \forall p \geq M$. To znači da je $\hat{\mathcal{D}} = \hat{\mathcal{D}}_{M-1} + \mathcal{J}$, dakle, jednadžba $DF = 0$ ima prosti singularitet u ∞.

Pretpostavimo sada da je $f_M(\infty) = 0$. Tada za svaki operator $D' \in \mathcal{J}$ reda $p \geq M$ koeficijent uz d^p ima nultočku u ∞. Pretpostavimo sada da za neko $N \in \mathbb{N}$, $N \geq M$, vrijedi $\hat{\mathcal{D}}_N + \mathcal{J} = \hat{\mathcal{D}}$. Odatle slijedi da za svaki operator $D \in \hat{\mathcal{D}}$ reda $p > N$ koeficijent uz d^p ima nultočku u ∞. No to evidentno nije tako: npr. d^p za $p > N$ nema to svojstvo. Ova kontradikcija pokazuje da je $\hat{\mathcal{D}}_N + \mathcal{J} \neq \hat{\mathcal{D}}$ za svaki N. To znači da jednadžba $DF = 0$ nema prosti singularitet u ∞.

Teorem 1.7.2. *Pretpostavimo da je* ∞ *prosti singularitet lijevog ideala* $\mathcal{J}$ *u* $\hat{\mathcal{D}}$. *Tada postoji konačan podskup* $T \subseteq \mathbb{C}^\ell \times \mathbb{Z}_+^\ell$ *takav da je* $V(\Omega; \mathcal{J}) \subseteq \mathcal{H}_T(\Omega, X)$.

Dokaz: Konstrukcija koju ćemo provesti analogna je zamjeni jedne homogene linearne diferencijalne jednadžbe $q-$tog reda

$$f^{(q)} + a_1 f^{(q-1)} + \cdots + a_{q-1} f' + a_q f = 0$$

sistemom od q homogenih linearnih diferencijalnih jednadžbi prvog reda

$$F' = AF,$$

pri čemu je

$$F = \begin{bmatrix} f \\ f' \\ f^{(2)} \\ \vdots \\ f^{(q-2)} \\ f^{(q-1)} \end{bmatrix}, \qquad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_q & -a_{q-1} & -a_{q-2} & \cdots & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix}.$$

Po pretpostavci postoje $D_1 = 1, D_2, \ldots, D_N \in \hat{\mathcal{D}}$ takvi da klase $D_1 + \mathcal{J}, \ldots, D_N + \mathcal{J}$ generiraju $\hat{\mathcal{D}}/\mathcal{J}$ kao $\hat{\mathcal{H}}(\Omega, \mathcal{L}(X))-$modul. Posebno, postoje $A_{ijk} \in \hat{\mathcal{H}}(\Omega, \mathcal{L}(X))$, $1 \leq i \leq \ell$, $1 \leq j, k \leq N$, takve da je

$$\partial_i D_j - \sum_{k=1}^{N} A_{ijk} D_k \in \mathcal{J}, \qquad 1 \leq i \leq \ell, \quad 1 \leq j \leq N.$$

Definiramo preslikavanje $F \mapsto \Phi^F$ sa $V(\Omega; \mathcal{J})$ u $\mathcal{H}(\Omega, X^N)$ sa

$$\Phi^F = (\Phi_1^F, \ldots, \Phi_N^F), \qquad \text{gdje je} \quad \Phi_j^F = D_j F \quad \text{za} \quad 1 \leq j \leq N.$$

Neka su $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_\ell : \Omega \to \mathcal{L}(X^N)$ funkcije definirane sa

$$\Gamma_i(z)(v_1, \ldots, v_N) = \left(\sum_{k=1}^{N} A_{i1k}(z) v_k, \ldots, \sum_{k=1}^{N} A_{iNk}(z) v_k \right).$$

Tada su očito $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_\ell \in \hat{\mathcal{H}}(\Omega, \mathcal{L}(X^N))$. Za svaku funkciju $F \in V(\Omega; \mathcal{J})$ i za $1 \leq i \leq \ell$ i $1 \leq j \leq N$ imamo

$$\partial_i \Phi_j^F = \partial_i D_j F = \sum_{k=1}^{N} A_{ijk} D_k F = \sum_{k=1}^{N} A_{ijk} \Phi_k^F,$$

a to znači da je

$$\partial_i \Phi^F = \Gamma_i \Phi^F, \qquad 1 \leq i \leq \ell.$$

Prema tome, za svaku funkciju $F \in V(\mathbb{C}^\ell(\eta; \mathcal{J})$ je $\Phi^F \in V(\Omega; \Gamma_1, \ldots, \Gamma_\ell)$. Prema teoremu 1.6.5. postoji konačan skup $T \subseteq \mathbb{C}^\ell \times \mathbb{Z}_+^\ell$ takav da je $\Phi^F \in \mathcal{H}_T(\Omega, X^N)$ za svaku funkciju $F \in V(\Omega; \mathcal{J})$. Međutim, $\Phi_1^F = F$, pa slijedi $F \in \mathcal{H}_T(\Omega, X)$. Time je dokazano da je $V(\Omega; \mathcal{J}) \subseteq \mathcal{H}_T(\Omega, X)$.

Napomenimo da se iz teorema 1.6.5. vidi da se konačan skup $T = \{(s_1, m_1), \ldots, (s_r, m_r)\}$ može odabrati tako da bude

$$\sum_{i=1}^{r} |m_i| \leq \ell \left(\dim X^N - Card\, T \right) = \ell(N \dim X - Card\, T).$$

Pri tome je

$$N = Card\, \{m \in \mathbb{Z}_+^\ell;\ |m| \leq M\},$$

gdje je M takav da je $\hat{\mathcal{D}} = \hat{\mathcal{D}}_M + \mathcal{J}$. Štoviše, možemo postići da bude $|m_i| \leq \ell(N \dim X - 1)$ za svaki $i \in \{1, \ldots, r\}$.

Nadalje, skup $T = \{(s_1, m_1), \ldots, (s_r, m_r)\}$ se može odabrati tako da $s_1, \ldots, s_r$ budu međusobno integralno neekvivalentni, s tim da i dalje vrijede nejednakosti za $m_1, \ldots, m_r$. Iz **1.1.13.** i **1.1.16.** slijedi da je tada

$$V(\Omega; \mathcal{J}) = \sum_{i=1}^{r} \dot{+}\, V_{s_i, m_i}(\Omega).$$

Prema tome, svako rješenje $F \in V = V(\Omega; \mathcal{J})$ ima jedinstven prikaz u obliku

$$F(z) = \sum_{i=1}^{r} \sum_{k \in \mathbb{Z}_+^\ell} \sum_{0 \ll n \ll m_i} z^n \mathrm{e}^{\langle s_i + k | z \rangle} A_{s_i + k, n},$$

pri čemu su $A_{s_i+k,n} \in \mathcal{L}(X)$. Sada za svako rješenje F stavimo

$$F_{s_i+k}(z) = \sum_{0 \ll n \ll m_i} z^n \mathrm{e}^{\langle s_i + k | z \rangle} A_{s_i + k, n}.$$

Slijedi

$$F = \sum_{i=1}^{r} \sum_{k \in \mathbb{Z}_+^\ell} F_{s_i+k}.$$

Uz uvedene oznake za $\Phi \in V$ stavimo

$$E(F) = \{t \in \mathbb{C}^\ell;\ F_t \neq 0\}.$$

Elementi od $E(F)$ zovu se **eksponenti rješenja** F. Stavimo

$$E(\mathcal{J}) = \bigcup_{F \in V} E(F).$$

Očito je

$$E(\mathcal{J}) \subseteq \bigcup_{i=1}^{r} \left(s_i + \mathbb{Z}_+^\ell\right).$$

Posebno, skup $E(\mathcal{J})$ (a, naravno, i svaki $E(\Phi)$) je najviše prebrojiv.

Sa $E^\circ(F)$ označavamo skup minimalnih elemenata skupa $E(F)$ u odnosu na relaciju uređaja $\ll$. Nadalje, neka je $E_\circ(\mathcal{J})$ skup minimalnih elemenata od $E(\mathcal{J})$ i neka je $E^\circ(\mathcal{J})$ unija svih $E^\circ(F)$, $F \in V$. Skupovi $E^\circ(F)$ i $E_\circ(\mathcal{J})$ su konačni. Nadalje, vrijedi $E_\circ(\mathcal{J}) \subseteq E^\circ(\mathcal{J})$, no može se dogoditi da je $E_\circ(\mathcal{J}) \neq E^\circ(\mathcal{J})$. Ipak se iz $\dim V < +\infty$ može lako zaključiti da je i skup $E^\circ(\mathcal{J})$ konačan. Kasnije ćemo na drugi način dobiti precizniji rezultat. Elementi od $E^\circ(F)$ zovu se **vodeći eksponenti rješenja** F, a elementi od $E^\circ(\mathcal{J})$ **vodeći eksponenti lijevog ideala** $\mathcal{J}$. Imamo

$$F = \sum_{t \in E(F)} F_t, \qquad F \in V.$$

Za svako rješenje $F \in V$ stavimo

$$F^\circ = \sum_{t \in E^\circ(F)} F_t \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^\ell, X).$$

F° se zove **glavni dio rješenja** F.

Dokazat ćemo još generalizaciju teorema 1.5.1. za slučaj sistema jednadžbi višeg reda.

Teorem 1.7.3. *Neka $\mathcal{J}$ lijevi ideal u $\hat{\mathcal{D}}$ s prostim singularitetom u ∞ i neka je $\mathcal{O}$ neprazno područje sadržano u $\mathbb{R}^\ell(\eta)$. Stavimo*

$$V = V(\Omega; \mathcal{J}), \qquad W = \{f \in C^\infty(\mathcal{O}, X);\ Df = 0\ \forall D \in \mathcal{J}\}.$$

Tada je $F \mapsto F|\mathcal{O}$ izomorfizam sa V na W.

Dokaz: Iz holomorfnosti slijedi da je linearno preslikavanje $F \mapsto F|\mathcal{O}$ sa V u W injektivno. Dokažimo surjektivnost. Neka je $f \in W$. Neka su

$$D_1 = 1, D_2, \ldots, D_N \in \hat{\mathcal{D}} \qquad \text{i} \qquad \Gamma_1, \ldots, \Gamma_\ell \in \hat{\mathcal{H}}(\Omega, X^N)$$

kao u dokazu teorema 1.7.2. Stavimo $F^f = (D_1 f, \ldots, D_N f)$. Tada je $F^f \in C^\infty(\mathcal{O}, X^N)$ i vrijedi $\partial_i F^f = \Gamma_i F^f$ za $1 \leq i \leq \ell$. Dakle, $F^f \in V(\mathcal{O}; \Gamma_1|\mathcal{O}, \ldots, \Gamma_\ell|\mathcal{O})$. Po teoremu 1.5.1. postoji $\Phi = (\Phi_1, \ldots, \Phi_N) \in \mathcal{H}(\Omega, X^N)$ sa svojstvom $\Phi|\mathcal{O} = F^f$. Tada je $F = \Phi_1 \in \mathcal{H}(\Omega, X)$ i $F|\mathcal{O} = f$. Kako je funkcija F holomorfna na Ω i vrijedi $(DF)|\mathcal{O} = 0\ \forall D \in \mathcal{J}$, slijedi $DF = 0\ \forall D \in \mathcal{J}$. Dakle je $F \in V$ i surjektivnost restrikcije $F \mapsto F|\mathcal{O}$ sa V na W je dokazana.

Analogno dobivamo i generalizaciju teorema 1.5.2.:

Teorem 1.7.4. *Neka je $\mathcal{J}$ lijevi ideal u $\hat{\mathcal{D}}$ s prostim singularitetom u ∞ i neka je $\mathcal{O}$ neprazno područje u $\mathbb{C}^\ell$ sadržano u Ω. Tada je $F \mapsto F|\mathcal{O}$ izomorfizam sa $V = V(\Omega; \mathcal{J})$ na $V(\mathcal{O}; \mathcal{J}|\mathcal{O})$. Pri tome je sa $\mathcal{J}|\mathcal{O}$ označen skup restrikcija diferencijalnih operatora iz $\mathcal{J}$ na prostor $\mathcal{H}(\mathcal{O}, X)$.*

1.8 Sistemi s konstantnim koeficijentima

I u ovom odjeljku fiksiran je $\eta \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ **i označavamo:**

$$\Omega = \mathbb{C}^\ell(\eta), \qquad \hat{\mathcal{D}} = \hat{\mathcal{D}}(\Omega, X), \qquad \hat{\mathcal{D}}_M = \hat{\mathcal{D}}_M(\Omega, X), \quad M \in \mathbb{Z}_+.$$

Sa $\mathcal{D}^0$ označavamo unitalnu algebru svih linearnih diferencijalnih operatora na $\mathcal{H}(\Omega, X)$ s konstantnim koeficijentima. Dakle, $\mathcal{D}^0$ je algebra svih konačnih suma oblika

$$D = \sum_{m \in \mathbb{Z}_+^\ell} A_m \partial^m, \qquad A_m \in \mathcal{L}(X).$$

Očito je $\mathcal{D}^0$ unitalna podalgebra od $\hat{\mathcal{D}}$ i ona je i lijevi i desni $\mathcal{L}(X)-$podmodul od $\hat{\mathcal{D}}$.

Neka je $\Delta = \Delta_\ell(X) = \mathcal{L}(X)[Y_1, \ldots, Y_\ell]$ algebra polinoma u ℓ varijabli s koeficijentima iz $\mathcal{L}(X)$. Δ je lijevi i desni $\mathcal{L}(X)-$modul. Centar algebre Δ je $\mathbb{C}[Y_1, \ldots, Y_\ell]$. Za $P \in \Delta$ stavimo $D_P = P(\partial_1, \ldots, \partial_\ell)$. Tada je očito $P \mapsto D_P$ izomorfizam unitalnih algebri i $\mathcal{L}(X)-$bimodula sa Δ na $\mathcal{D}^0$. Za podskup $\Sigma \subseteq \Delta$ pišemo $\mathcal{D}^\Sigma = \{D_P;\ P \in \Sigma\}$. Za lijevi ideal J u algebri Δ sistem jednadžbi

$$D_P \Phi = 0, \qquad P \in J,$$

zovemo **Eulerov sistem** ili **sistem s konstantnim koeficijentima** pridružen idealu J. Označimo sa $\hat{\mathcal{D}}_J$ lijevi ideal u $\hat{\mathcal{D}}$ generiran sa $\mathcal{D}^J = \{D_P;\ P \in J\}$.

Sjetimo se da smo funkcije $e_1, \ldots, e_\ell \in \hat{\mathcal{H}}(\Omega, \mathcal{L}(X))$ definirali sa $e_j(z) = \mathrm{e}^{z_j}$. Sa $\hat{\mathcal{D}}^1$ označavamo desni ideal u $\hat{\mathcal{D}}$ generiran sa $e_1, \ldots, e_\ell$.

Uvodimo još oznaku

$$\hat{\mathcal{H}}_\infty(\Omega, \mathcal{L}(X)) = \{F \in \hat{\mathcal{H}}(\Omega, \mathcal{L}(X));\ F(\infty) = 0\}.$$

To je obostrani ideal u algebri $\hat{\mathcal{H}}(\Omega, \mathcal{L}(X))$.

Teorem 1.8.1. *(a) $\hat{\mathcal{D}}^1$ je i lijevi ideal u $\hat{\mathcal{D}}$ generiran sa $e_1, \ldots, e_\ell$; posebno, $\hat{\mathcal{D}}^1$ je obostrani ideal u algebri $\hat{\mathcal{D}}$.*

(b) $\hat{\mathcal{D}}^1$ je skup svih konačnih suma oblika

$$D = \sum_{m \in \mathbb{Z}_+^\ell} A_m \partial^m, \qquad A_m \in \hat{\mathcal{H}}_\infty(\Omega, \mathcal{L}(X)).$$

(c) Vrijedi $\hat{\mathcal{D}} = \mathcal{D}^0 \dotplus \hat{\mathcal{D}}^1$.

Dokaz: Tvrdnja (a) slijedi iz

$$\partial_i \cdot e_j = e_j \cdot \partial_i, \quad i \neq j; \qquad \partial_i \cdot e_i = e_i \cdot (1 + \partial_i); \qquad \Gamma \cdot e_i = e_i \cdot \Gamma, \quad \Gamma \in \hat{\mathcal{H}}(\Omega, \mathcal{L}(X)).$$

(b) Označimo sa $\mathcal{E}$ skup svih linearnih diferencijalnih operatora na $\mathcal{H}(\Omega, X)$ s koeficijentima iz $\hat{\mathcal{H}}_\infty(\Omega, \mathcal{L}(X))$. Imamo $e_j = \tilde{f}_j$, gdje su funkcije $f_j \in \mathcal{H}(D^\ell(\mathrm{e}^\eta), \mathcal{L}(X))$ definirane sa $f_j(z) = z_j$. Dakle, $e_j(\infty) = f_j(0) = 0$. Ako je

$$D = \sum_{m \in \mathbb{Z}_+^\ell} B_m \partial^m$$

proizvoljan element iz $\hat{\mathcal{D}}$, onda je

$$e_i D = \sum_{m \in \mathbb{Z}_+^\ell} e_i B_m \partial^m$$

diferencijalni operator čiji koeficijenti zadovoljavaju $(e_i B_m)(\infty) = e_i(\infty) B_m(\infty) = 0$. Dakle, $e_i D \in \mathcal{E}$ za svaki i i za svaki $D \in \hat{\mathcal{D}}$. Kako je $\hat{\mathcal{D}}^1$ desni ideal u $\hat{\mathcal{D}}$ generiran sa $e_1, \dots, e_\ell$, zaključujemo da je $\hat{\mathcal{D}}^1 \subseteq \mathcal{E}$.

Obratno, pretpostavimo sada da je

$$D = \sum_{m \in \mathbb{Z}_+^\ell} A_m \partial^m \in \mathcal{E}.$$

Za svaki m imamo $A_m \in \hat{\mathcal{H}}_\infty(\Omega, \mathcal{L}(X))$, pa postoji $B_m \in \mathcal{H}(D^\ell(\mathrm{e}^\eta), \mathcal{L}(X))$ takav da je $A_m = \tilde{B}_m$ i $B_m(0) = 0$. Razvoj B_m u Taylorov red oko 0 pokazuje da je

$$B_m(z) = z_1 B_{m,1}(z) + \cdots + z_\ell B_{m,\ell}(z),$$

za neke $B_{m,1}, \dots, B_{m,\ell} \in \mathcal{H}(D^\ell(\mathrm{e}^\eta), \mathcal{L}(X))$, odnosno,

$$B_m = f_1 B_{m,1} + \cdots + f_\ell B_{m,\ell}.$$

Stavimo li $A_{m,j} = \tilde{B}_{m,j} \in \hat{\mathcal{H}}(\Omega, \mathcal{L}(X))$, dobivamo

$$A_m = e_1 A_{m,1} + \cdots + e_\ell A_{m,\ell}.$$

Neka su $D_1, \dots, D_\ell \in \hat{\mathcal{D}}$ definirani sa

$$D_j = \sum_{m \in \mathbb{Z}_+^\ell} A_{m,j} \partial^m.$$

Tada je $D = e_1 D_1 + \cdots + e_m D_m \in \hat{\mathcal{D}}^1$. Time je dokazana i obrnuta inkluzija $\mathcal{E} \subseteq \hat{\mathcal{D}}^1$.

(c) Neka je

$$D = \sum_{m \in \mathbb{Z}_+^\ell} A_m \partial^m \in \hat{\mathcal{D}}, \qquad A_m \in \hat{\mathcal{H}}(\Omega, \mathcal{L}(X)).$$

Stavimo

$$D^0 = \sum_{m \in \mathbb{Z}_+^\ell} A_m(\infty) \partial^m \in \mathcal{D}^0, \qquad D^1 = D - D^0 = \sum_{m \in \mathbb{Z}_+^\ell} B_m \partial^m, \quad \text{gdje su} \quad B_m = A_m - A_m(\infty).$$

Tada vrijedi $B_m(\infty) = 0$, pa je $D^1 \in \hat{\mathcal{D}}^1$. Time je dokazano da je $\hat{\mathcal{D}} = \mathcal{D}^0 + \hat{\mathcal{D}}^1$. Iz tvrdnje ($b$) je jasno da je $\mathcal{D}^0 \cap \hat{\mathcal{D}}^1 = \{0\}$, dakle, suma je direktna.

Iz teorema 1.8.1. vidi se da postoji jedinstven epimorfizam unitalnih algebri $\sigma : \hat{\mathcal{D}} \to \Delta$, takav da je $\sigma(D_P) = P \ \ \forall P \in \Delta$ i tada je $\operatorname{Ker} \sigma = \hat{\mathcal{D}}^1$. Preslikavanje $D \mapsto D_{\sigma(D)}$ je projektor $\hat{\mathcal{D}}$ na $\mathcal{D}^0$ duž $\hat{\mathcal{D}}^1$. Za svaki $D \in \hat{\mathcal{D}}$ stavimo $D^0 = D_{\sigma(D)}$ i $D^1 = D - D^0$. To je upravo rastav iz dokaza tvrdnje (c) teorema 1.8.1. Operator D^0 zove se **konstantni dio diferencijalnog operatora** $D \in \hat{\mathcal{D}}$.

Teorem 1.8.2. *Neka je J lijevi ideal u Δ. Tada je*

$$\hat{\mathcal{D}}_J = \hat{\mathcal{D}}_J \cap \mathcal{D}^0 \dotplus \hat{\mathcal{D}}_J \cap \hat{\mathcal{D}}^1, \quad \hat{\mathcal{D}}_J \cap \mathcal{D}^0 = \mathcal{D}^J \quad i \quad \hat{\mathcal{D}}_J \cap \hat{\mathcal{D}}^1 = \hat{\mathcal{D}}^1 \mathcal{D}^0.$$

Eulerov sistem pridružen idealu J ima prosti singularitet u ∞ ako i samo ako je J konačne kodimenzije u Δ.

Dokaz: Stavimo
$$\hat{\mathcal{D}}'_J = \hat{\mathcal{D}}_J \cap \mathcal{D}^0 \dot{+} \hat{\mathcal{D}}_J \cap \hat{\mathcal{D}}^1.$$
Očito je $\hat{\mathcal{D}}'_J \subseteq \hat{\mathcal{D}}_J$. Nadalje,
$$\hat{\mathcal{D}}_J = \hat{\mathcal{D}}\mathcal{D}^J = (\mathcal{D}^0 \dot{+} \hat{\mathcal{D}}^1)\mathcal{D}^J = \mathcal{D}^0\mathcal{D}^J \dot{+} \hat{\mathcal{D}}^1\mathcal{D}^J,$$
a kako je $\mathcal{D}^J = \mathcal{D}^0\mathcal{D}^J \subseteq \hat{\mathcal{D}}_J \cap \mathcal{D}^0$ i $\hat{\mathcal{D}}^1\mathcal{D}^J \subseteq \hat{\mathcal{D}}_J \cap \hat{\mathcal{D}}^1$, slijedi prva tvrdnja.

Pretpostavimo sada da je ∞ prosti singularitet za Eulerov sistem pridružen idealu J. To znači da je $\hat{\mathcal{D}}/\hat{\mathcal{D}}^J$ konačno generiran lijevi $\hat{\mathcal{H}}(\Omega, \mathcal{L}(X))-$modul. Međutim, imamo $\sigma(\hat{\mathcal{D}}) = \Delta$, $\sigma(\mathcal{D}^J) = J$ i $\sigma(\hat{\mathcal{H}}(\Omega, \mathcal{L}(X))) = \mathcal{L}(X)$, pa zaključujemo da je Δ/J konačno generiran $\mathcal{L}(X)-$modul. Kako je algebra $\mathcal{L}(X)$ konačnodimenzionalna, slijedi da prostor Δ/J konačnodimenzionalan.

Obratno, pretpostavimo sada da je prostor Δ/J konačnodimenzionalan.Tada postoji $M \in \mathbb{Z}_+$ takav da je $\Delta_M + J = \Delta$. Tada je i $\mathcal{D}^{\Delta_M} + \mathcal{D}^J = \mathcal{D}^0$. Pri tome smo sa Δ_M označili potprostor od Δ polinoma stupnja $\leq M$. Indukcijom po N dokazat ćemo da je $\hat{\mathcal{D}}_N \subseteq \hat{\mathcal{D}}_M + \hat{\mathcal{D}}_J$ $\forall N \in \mathbb{Z}_+$. To je očito za $N \leq M$. Pretpostavimo sada da je $N > M$ i da smo dokazali da je $\hat{\mathcal{D}}_{N-1} \subseteq \hat{\mathcal{D}}_M + \hat{\mathcal{D}}_J$. Za $m \in \mathbb{Z}_+^\ell$, $|m| = N$, postoji $P_m \in J$ takav da je $Y^m - P_m \in \Delta_m$. Tada za $D_m = D_{P_m} \in \mathcal{D}^J \subseteq \hat{\mathcal{D}}_J$ vrijedi $\partial^m - D_m \in \mathcal{D}^{\Delta_M} \subseteq \hat{\mathcal{D}}_M \subseteq \hat{\mathcal{D}}_{N-1}$. Neka je sada $D \in \hat{\mathcal{D}}_N$. Za $m \in \mathbb{Z}_+^\ell$ neka je $A_m \in \hat{\mathcal{H}}(\Omega, \mathcal{L}(X))$ koeficijent od D uz ∂^m. Tada je
$$D - \sum_{|m|=N} A_m \partial^m \in \hat{\mathcal{D}}_{N-1}.$$
Uz malo prije uvedenu oznaku D_m stavimo
$$D' = \sum_{|m|=N} A_m D_m \in \hat{\mathcal{D}}_J.$$
Tada je
$$D - D' = D - \sum_{|m|=N} A_m \partial^m + \sum_{|m|=N} A_m(\partial^m - D_m) \in \hat{\mathcal{D}}_{N-1}.$$
Slijedi $D \in \hat{\mathcal{D}}_{N-1} + \hat{\mathcal{D}}_J$. Time je dokazano $\hat{\mathcal{D}}_N \subseteq \hat{\mathcal{D}}_{N-1} + \hat{\mathcal{D}}_J$, a odatle je po pretpostavci indukcije $\hat{\mathcal{D}}_N \subseteq \hat{\mathcal{D}}_M + \hat{\mathcal{D}}_J$. Kako je $\hat{\mathcal{D}}$ unija $\hat{\mathcal{D}}_N$, $N \in \mathbb{Z}_+$, zaključujemo da je $\hat{\mathcal{D}} = \hat{\mathcal{D}}_M + \hat{\mathcal{D}}_J$. Kao lijevi $\hat{\mathcal{H}}(\Omega, \mathcal{L}(X))-$modul $\hat{\mathcal{D}}_M$ je generiran sa $\{\partial^m;\ |m| \leq M\}$. Odatle slijedi da je kvocijent $\hat{\mathcal{D}}/\hat{\mathcal{D}}_J$ konačno generirani $\hat{\mathcal{H}}(\Omega, \mathcal{L}(X))-$modul. Prema tome, ∞ je prosti singularitet za $\hat{\mathcal{D}}_J$. Drugim riječima, Eulerov sistem pridružen idealu J ima prosti singularitet u ∞.

Za $m \in \mathbb{Z}_+^\ell$ neka je $\mathcal{P}_m$ lijevi $\mathcal{L}(X)-$modul svih polinomijalnih funkcija $p : \mathbb{C}^\ell \to X$ oblika
$$p(z) = \sum_{0 \ll k \ll m} z^k v_k, \qquad v_k \in X,$$
i neka je $\mathcal{P}$ lijevi $\mathcal{L}(X)-$modul svih polinomijalnih funkcija $\mathbb{C}^\ell \to X$. Tada je očito $(\mathcal{P}_m)_{m \in \mathbb{Z}_+^\ell}$ filtracija $\mathcal{L}(X)-$modula $\mathcal{P}$.

Za $s \in \mathbb{C}^\ell$ i $m \in \mathbb{Z}_+^\ell$ stavimo
$$X(s, m) = e_s \cdot \mathcal{P}_m = \{F \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^\ell, X);\ F(z) = \mathrm{e}^{\langle s|z \rangle} p(z),\ p \in \mathcal{P}_m\}.$$
Nadalje, stavimo
$$X(s) = e_s \cdot \mathcal{P} = \bigcup_{m \in \mathbb{Z}_+^\ell} X(s, m).$$
Za svaki $P \in \Delta$ tada vrijedi $D_P X(s, m) \subseteq X(s, m)$ i $D_P X(s) \subseteq X(s)$.

U daljnjem pretpostavljamo da je $\eta = +\infty$, **odnosno,** $\Omega = \mathbb{C}^\ell$. To za sisteme s konstantnim koeficijentima očito (a i zbog teorema 1.7.4.) nije smanjenje općenitosti.

Za lijevi ideal J u Δ konačne kodimenzije stavimo

$$\Sigma^J = V(\mathbb{C}^\ell; \hat{\mathcal{D}}_J) = \{\Phi \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^\ell, X);\ D_P\Phi = 0\ \forall P \in J\}.$$

Nadalje, za $s \in \mathbb{C}^\ell$ i $m \in \mathbb{Z}_+^\ell$ stavimo

$$\Sigma^J(s,m) = \Sigma^J \cap X(s,m) \qquad \text{i} \qquad \Sigma^J(s) = \Sigma^J \cap X(s).$$

Teorem 1.8.3. *Neka je J lijevi ideal u Δ konačne kodimenzije. Postoje $s_1,\dots,s_p \in \mathbb{C}^\ell$ i $m_1,\dots,m_p \in \mathbb{Z}_+^\ell$ takvi da je*

$$\Sigma^J = \Sigma^J(s_1,m_1) \dotplus \cdots \dotplus \Sigma^J(s_p,m_p).$$

Dokaz: Prema teoremu 1.7.2. postoje međusobno integralno neekvivalenni $t_1,\dots,t_r \in \mathbb{C}^\ell$ takvi da je

$$\Sigma^J = \sum_{i=1}^{r} \dotplus \left(\hat{\mathcal{H}}_{(t_i,m_i)}(\mathbb{C}^\ell, X) \cap \Sigma^J\right)$$

za neke $m_1,\dots,m_r \in \mathbb{Z}_+^\ell$.

Neka je $\Phi \in \hat{\mathcal{H}}_{(t,m)}(\mathbb{C}^\ell, X) \cap \Sigma^J$. Tada Φ ima oblik

$$\Phi(z) = \sum_{k\in\mathbb{Z}_+^\ell} \mathrm{e}^{\langle t+k|z\rangle} p_k(z) \qquad \text{za neke} \quad p_k \in \mathcal{P}_m.$$

Stavimo $\Phi_k(z) = \mathrm{e}^{\langle t+k|z\rangle} p_k(z)$. Tada je $\Phi_k \in X(t+k,m)$, pa je i $D_P\Phi_k \in X(t+k,m)$ za svaki $P \in \Delta$. Budući da je suma $X(s,m)$, $s \in \mathbb{C}^\ell$, direktna, slijedi da je $D_P\Phi_k = 0\ \ \forall P \in J$ i za svaki k. To znači da je $\Phi_k \in \Sigma^J(t+k,m)$. Budući da je prostor Σ^J konačnodimenzionalan, slijedi da je $\Phi_k \neq 0$ za samo konačno mnogo $k \in \mathbb{Z}_+^\ell$. Time je dokazano da je

$$\hat{\mathcal{H}}_{(t,m)}(\mathbb{C}^\ell, X) \cap \Sigma^J = \sum_{j=1}^{n} \dotplus \Sigma^J(t+k^{(j)}, m)$$

za neke $k^{(1)},\dots,k^{(n)} \in \mathbb{Z}_+^\ell$. Odatle slijedi tvrdnja teorema.

U daljnjem je stalno J lijevi ideal u Δ konačne kodimenzije. Za $s \in \mathbb{C}^\ell$ stavimo

$$(\Delta/J)_s = \left\{v \in \Delta/J;\ (Y_i - s_i)^{k_i} v = 0 \text{ za neki } k \in \mathbb{Z}_+^\ell \text{ i za } 1 \le i \le \ell\right\},$$

$$S(J) = \left\{s \in \mathbb{C}^\ell;\ (\Delta/J)_s \neq \{0\}\right\}.$$

Prostor Δ/J je konačnodimenzionalan i na njemu množenje sa $Y_i - s_i$ predstavlja linearne operatore koji međusobno komutiraju. Prema tome, skup $S(J)$ je konačan i vrijedi

$$\Delta/J = \sum_{s\in S(J)} \dotplus (\Delta/J)_s.$$

Kako su $Y_i - s_i$ u centru algebre Δ, potprostori $(\Delta/J)_s$ su lijevi $\Delta-$podmoduli od Δ/J.

U prostor $\hat{\mathcal{H}}(\mathbb{C}^\ell, X)$ uvodimo strukturu lijevog $\Delta-$modula ovako:

$$P \cdot f = D_P f, \qquad f \in \hat{\mathcal{H}}(\mathbb{C}^\ell, X), \quad P \in \Delta.$$

Tada su potprostori $X(s)$ i $X(s,m)$ $\Delta-$podmoduli.

Lema 1.8.4. *Za svako $s \in \mathbb{C}^\ell$ preslikavanje $F \mapsto F(1+J)$ je izomorfizam prostora $Hom_\Delta(\Delta/J, X(s))$ na prostor $\Sigma^J(s)$.*

Dokaz: Neka je $F \in Hom_\Delta(\Delta/J, X(s))$. Dokažimo da je $F(1+J) \in \Sigma^J(s)$. Budući da je $F(1+J) \in X(s)$, treba samo dokazati da je $F(1+J) \in \Sigma^J$. Za $P \in \Delta$ imamo

$$D_P(F(1+J)) = P \cdot F(1+J) = F(P+J)$$

jer je F homomorfizam $\Delta-$modula. Prema tome, za svaki $P \in J$ je $D_P(F(1+J)) = 0$. To upravo znači da je $F(1+J) \in \Sigma^J$.

Prema tome, $F \mapsto F(1+J)$ je linearno preslikavanje sa $Hom_\Delta(\Delta/J, X(s))$ u $\Sigma^J(s)$.

Pretpostavimo da je $F(1+J) = 0$. Tada za svaki $P \in \Delta$ imamo

$$0 = D_P(F(1+J)) = F(P+J).$$

To znači da je $F = 0$. Time je dokazano da je preslikavanje $F \mapsto F(1+J)$ injektivno.

Neka je sada $\Phi \in \Sigma^J(s)$. Definiramo preslikavanje $F : \Delta/J \to X(s)$ ovako:

$$F(P+J) = D_P\Phi, \qquad P \in \Delta.$$

Preslikavanje F je smisleno definirano. Doista, pretpostavimo da su $P, Q \in \Delta$ takvi da je $P + J = Q + J$, odnosno, $P - Q \in J$. Budući da je $\Phi \in \Sigma^J(s) \subseteq \Sigma^J$, vrijedi $D_{P-Q}\Phi = 0$, a to znači da je $D_P\Phi = D_Q\Phi$. Time je smislenost preslikavanja F dokazana. Sada za proizvoljne $P, Q \in \Delta$ imamo

$$Q \cdot F(P+J) = D_Q(F(P+J)) = D_Q D_P \Phi = D_{QP}\Phi = F(QP+J) = F(Q \cdot (P+J)).$$

To pokazuje da je $F \in Hom_\Delta(\Delta/J, X(s))$. Očito je $F(1+J) = \Phi$. Prema tome, preslikavanje $F \mapsto F(1+J)$ je i surjekcija.

Lema 1.8.5. *Za $\Phi \in X(s)$ definiramo $\Phi_m \in X$, $m \in \mathbb{Z}_+^\ell$, ovako:*

$$\Phi(z) = \mathrm{e}^{\langle s|z\rangle} \sum_{m \in \mathbb{Z}_+^\ell} z^m \Phi_m.$$

Za $0 \ll k \ll m$ vrijedi

$$\Phi_m = \frac{k!}{m!} \left((\partial - s)^{m-k}\Phi\right)_k.$$

Posebno je

$$\Phi_m = \frac{1}{m!} \left((\partial - s)^m \Phi\right)_0.$$

Dokaz: Neka su kao i prije $\delta_i \in \mathbb{Z}_+^\ell$ definirani sa $(\delta_i)_j = \delta_{ij}$. Tada imamo:

$$\left((\partial - s)^{\delta_i}\Phi\right)(z) = \left((\partial_i - s_i)\Phi\right)(z) =$$

$$= \left(\partial_i \mathrm{e}^{\langle s|z\rangle}\right) \sum_{m \in \mathbb{Z}_+^\ell} z^m \Phi_m + \mathrm{e}^{\langle s|z\rangle} \sum_{m \in \mathbb{Z}_+^\ell} (\partial_i z^m)\Phi_m - s_i \mathrm{e}^{\langle s|z\rangle} \sum_{m \in \mathbb{Z}_+^\ell} z^m \Phi_m =$$

$$= \mathrm{e}^{\langle s|z\rangle} \sum_{m \in \mathbb{Z}_+^\ell} m_i z^{m-\delta_i} \Phi_m = \mathrm{e}^{\langle s|z\rangle} \sum_{m \in \mathbb{Z}_+^\ell} (m_i + 1) z^m \Phi_{m+\delta_i}.$$

To pokazuje da je

$$\left((\partial - s)^{\delta_i}\Phi\right)_m = (m_i + 1)\Phi_{m+\delta_i}. \tag{1.7}$$

Sada ćemo tvrdnju leme dokazati indukcijom po $|m-k|$. Ako je $|m-k|=0$, odnosno, $m=k$, tvrdnja je trivijalna. Za $|m-k|=1$ imamo $m=k+\delta_i$ za neko $i\in\{1,\dots,\ell\}$, pa je prema (1.7)

$$\Phi_m=\Phi_{k+\delta_i}=\frac{1}{k_i+1}\left((\partial-s)^{\delta_i}\Phi\right)_k=\frac{k!}{m!}\left((\partial-s)^{\delta_i}\Phi\right)_k.$$

Pretpostavimo sada da je $N\geq 2$ i da je tvrdnja leme dokazana za $|m-k|<N$. Neka je $|m-k|=N$. Tada možemo naći $n\in\mathbb{Z}_+^\ell$ $k\neq n\neq m$, takav da je $k\ll n\ll m$. Tada je $|m-n|<N$ i $|n-k|<N$, pa dvostruka primjena pretpostavke indukcije daje

$$\Phi_m=\frac{n!}{m!}\left((\partial-s)^{m-n}\Phi\right)_n=\frac{n!}{m!}\frac{k!}{n!}\left((\partial-s)^{n-k}(\partial-s)^{m-n}\Phi\right)_k=\frac{k!}{m!}\left((\partial-s)^{m-k}\Phi\right)_k.$$

Lema 1.8.6. *Neka je $F\in Hom_\Delta(\Delta/J,X(s))$. Tada je $F|(\Delta/J)_t=0$ $\forall t\neq s$. Prema tome, $F\mapsto F|(\Delta/J)_s$ je izomorfizam prostora $Hom_\Delta(\Delta/J,X(s))$ na prostor $Hom_\Delta\left((\Delta/J)_s,X(s)\right)$.*

Dokaz: Neka su $F\in Hom_\Delta(\Delta/J,X(s))$ i $t\in\mathbb{C}^\ell\setminus\{s\}$ i pretpostavimo da je $F|(\Delta/J)_t\neq 0$. Tada postoji $P\in\Delta$ takav da je $P+J\in(\Delta/J)_t$ i da je $F(P+J)\neq 0$. Tada postoji $m\in\mathbb{Z}_+^\ell$ takav da je $F(P+J)_m\neq 0$ i da je $F(P+J)_k=0$ $\forall k\gg m$, $k\neq m$. Stavimo $Q=(Y-s)^mP\in\Delta$. Budući da je $(\Delta/J)_t$ $\Delta-$podmodul, vrijedi $Q+J=(Y-s)^m(P+J)\in(\Delta/J)_t$. Sada prema lemi 1.8.5. i korištenjem činjenice da je F $\Delta-$homomorfizam nalazimo

$$F(Q+J)_0=F\left((Y-s)^m(P+J)\right)_0=\left((\partial-s)^mF(P+J)\right)_0=m!F(P+J)_m\neq 0.$$

Analogno, za $k\in\mathbb{Z}_+^\ell$, $k\neq 0$, dobivamo

$$F(Q+J)_k=F\left((Y-s)^m(P+J)\right)_k=\left((\partial-s)^mF(P+J)\right)_k=\frac{(m+k)!}{k!}F(P+J)_{m+k}=0.$$

To pokazuje da je

$$[F(Q+J)](z)=\mathrm{e}^{\langle s|z\rangle}F(Q+J)_0.$$

Lema 1.8.7. *Za $F\in Hom_\Delta\left((\Delta/J)_s,X(s)\right)$ definiramo $T_F:(\Delta/J)_s\to X$ ovako:*

$$T_F(Q+J)=F(Q+J)_0,\qquad Q\in\Delta,\quad Q+J\in(\Delta/J)_s.$$

Tada je $T_F\in Hom_{\mathcal{L}(X)}\left((\Delta/J)_s,X\right)$ i $F\mapsto T_F$ je izomorfizam sa $Hom_\Delta\left((\Delta/J)_s,X(s)\right)$ na $Hom_{\mathcal{L}(X)}\left((\Delta/J)_s,X\right)$. Inverzni izomorfizam je $T\mapsto F_T$, gdje je za $T\in Hom_{\mathcal{L}(X)}\left((\Delta/J)_s,X\right)$ preslikavanje $F_T:(\Delta/J)_s\to X(s)$ definirano sa

$$F_T(Q+J)_m=\frac{1}{m!}T\left((Y-s)^mQ+J\right),\qquad Q\in\Delta,\quad Q+J\in(\Delta/J)_s,\quad m\in\mathbb{Z}_+^\ell.$$

Dokaz: Dokažimo najprije da je $T_F\in Hom_{\mathcal{L}(X)}\left((\Delta/J)_s,X\right)$ za svaki $F\in Hom_\Delta\left((\Delta/J)_s,X(s)\right)$. Doista, za $A\in\mathcal{L}(X)$ i za $Q\in\Delta$ takav da je $Q+J\in(\Delta/J)_s$ imamo:

$$T_F(A\cdot(Q+J))=F(A\cdot(Q+J))_0=(AF(Q+J))_0=AF(Q+J)_0=AT_F(Q+J).$$

Dakle, $F\mapsto T_F$ je linearno preslikavanje sa $Hom_\Delta\left((\Delta/J)_s,X(s)\right)$ u $Hom_{\mathcal{L}(X)}\left((\Delta/J)_s,X\right)$.

Dokažimo sada da je $F_T\in Hom_\Delta\left((\Delta/J)_s,X(s)\right)$ za svaki $T\in Hom_{\mathcal{L}(X)}\left((\Delta/J)_s,X\right)$. Po samoj definiciji preslikavanje $F_T:(\Delta/J)_s\to X$ je linearno. Da bismo dokazali da je to homomorfizam $\Delta-$modula, dovoljno je provjeru provesti za neki skup generatora unitalne algebre Δ, dakle, npr. za sve $A\in\mathcal{L}(X)$ i za $Y_1,\dots,Y_\ell$.

Ako je $A\in\mathcal{L}(X)$ i ako je $Q\in\Delta$ takav da je $Q+J\in(\Delta/J)_s$, onda imamo za svaki $m\in\mathbb{Z}_+^\ell$:

$$F_T(A\cdot(Q+J))_m=\frac{1}{m!}T\left((Y-s)^mAQ+J\right)=\frac{1}{m!}T\left(A\cdot((Y-s)^mQ+J)\right)=$$
$$=\frac{1}{m!}A\cdot T\left((Y-s)^mQ+J\right)=A\cdot F_T(Q+J)_m.$$

To pokazuje da je

$$F_T(A\cdot(Q+J)) = A\cdot F_T(Q+J).$$

Nadalje, za svaki $m\in\mathbb{Z}_+^\ell$ i svaki $i\in\{1,\dots\ell\}$ imamo redom

$$F_T(Y_iQ+J)_m = \frac{1}{m!}T\left((Y-s)^m Y_iQ+J\right) = \frac{1}{m!}T\left((Y-s)(Y_i-s_i)Q+J\right)+\frac{s_i}{m!}T\left((Y-s)^m Q+J\right) =$$

$$= \frac{1}{m!}T\left((Y-s)^{m+\delta_i}Q+J\right)+\frac{s_i}{m!}T\left((Y-s)^m Q+J\right) = (m_i+1)F_T(Q+J)_{m+\delta_i}+s_iF_T(Q+J)_m.$$

Dakle, vrijedi

$$s_iF_T(Q+J)_m+(m_i+1)F_T(Q+J)_{m+\delta_i} = F_T(Y_iQ+J)_m.$$

Prema tome, nalazimo

$$[Y_i\cdot F_T(Q+J)](z) = \left(\partial_iF_T(Q+J)\right)(z) = \partial_i\left(\mathrm{e}^{\langle s|z\rangle}\sum_{m\in\mathbb{Z}_+^\ell} z^mF_T(Q+J)_m\right) =$$

$$= s_i\mathrm{e}^{\langle s|z\rangle}\sum_{m\in\mathbb{Z}_+^\ell} z^mF_T(Q+J)_m+\mathrm{e}^{\langle s|z\rangle}\sum_{m\in\mathbb{Z}_+^\ell}(m_i+1)z^mF_T(Q+J)_{m+\delta_i} =$$

$$= \mathrm{e}^{\langle s|z\rangle}\sum_{m\in\mathbb{Z}_+^\ell} z^mF_T(Y_iQ+J)_m = [F_T(Y_iQ+J)](z).$$

Odatle je

$$Y_i\cdot F_T(Q+J) = F_T\left(Y_i\cdot(Q+J)\right).$$

Time smo pokazali da je $F_T\in Hom_\Delta\left((\Delta/J)_s, X(s)\right)$. Očito je preslikavanje $T\mapsto F_T$ sa $Hom_{\mathcal{L}(X)}\left((\Delta/J)_s, X\right)$ u $Hom_{\mathcal{L}(X)}\left((\Delta/J)_s, X(s)\right)$ linearno.

Treba još dokazati da su preslikavanja $F\mapsto T_F$ i $T\mapsto F_T$ međusobno inverzna. Za svaki $F\in Hom_\Delta\left((\Delta/J)_s, X(s)\right)$ i za $Q\in\Delta$ takav da je $Q+J\in(\Delta/J)_s$ imamo za svaki $m\in\mathbb{Z}_+^\ell$:

$$F_{T_F}(Q+J)_m = \frac{1}{m!}T_F\left((Y-s)^mQ+J\right) = \frac{1}{m!}F\left((Y-s)^mQ+J\right)_0 =$$

$$= \frac{1}{m!}\left((\partial-s)^mF(Q+J)\right)_0 = F(Q+J)_m,$$

zbog leme 1.8.5. i zbog činjenice da je F homomorfizam $\Delta-$modula. To znači da je $F_{T_F}=F$ $\forall F\in Hom_\Delta\left((\Delta/J)_s, X(s)\right)$.

Nadalje, za $T\in Hom_{\mathcal{L}(X)}\left((\Delta/J)_s, X\right)$ imamo $T_{F_T}(Q+J)=F_T(Q+J)_0=T(Q+J)$. Dakle, vrijedi i $T_{F_T}=T$ $\forall T\in Hom_{\mathcal{L}(X)}\left((\Delta/J)_s, X\right)$.

Iz teorema 1.8.3. i iz lema 1.8.4., 1.8.6. i 1.8.7. neposredno slijedi:

Teorem 1.8.8. *Uz uvedene oznake vrijedi*

$$S(J) = \left\{s\in\mathbb{C}^\ell;\ \Sigma^J(s)\neq\{0\}\right\} = \left\{s\in\mathbb{C}^\ell;\ (\Delta/J)_s\neq\{0\}\right\}$$

i

$$\Sigma^J = \sum_{s\in S(J)}\dot{+}\,\Sigma^J(s).$$

Nadalje, za svako $s\in\mathbb{C}^\ell$ prostor $\Sigma^J(s)$ izomorfan je prostoru $Hom_{\mathcal{L}(X)}\left((\Delta/J)_s, X\right)$.

Budući da je svaki konačnodimenzionalan $\mathcal{L}(X)-$modul potpuno reducibilan i svaki je ireducibilan $\mathcal{L}(X)-$modul izomorfan modulu X, iz posljednje tvrdnje teorema 1.8.8. slijedi:

Korolar 1.8.9. *Za svaki $s \in S(J)$ vrijedi*

$$\dim \Sigma^J(s) = \frac{\dim (\Delta/J)_s}{\dim X}.$$

1.9 Indicijalni modul

I u ovom odjeljku fiksiran je $\eta \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. **Nadalje,**

$$\Omega = \mathbb{C}^\ell(\eta) \qquad \text{i} \qquad \hat{\mathcal{D}} = \hat{\mathcal{D}}(\Omega, X).$$

Podsjetimo se rastava $\hat{\mathcal{D}} = \mathcal{D}^0 \dot{+} \hat{\mathcal{D}}^1$, gdje je $\mathcal{D}^0$ algebra diferencijalnih operatora s konstantnim koeficijentima, a $\hat{\mathcal{D}}^1$ je obostrani ideal u $\hat{\mathcal{D}}$. $\hat{\mathcal{D}}^1$ je kao lijevi ideal generiran sa $e_1, \ldots, e_\ell$, a ujedno je i kao desni ideal generiran sa $e_1, \ldots, e_\ell$. Nadalje, $\Delta = \mathcal{L}(X)[Y_1, \ldots, Y_\ell]$ i $P \mapsto D_P$ je izomorfizam sa Δ na $\mathcal{D}^0$ dobiven tako da se formalna varijabla Y_i zamijeni s parcijalnom derivacijom ∂_i po $i-$toj varijabli. Označimo sa $\sigma : \hat{\mathcal{D}} \to \Delta$ lijevi invers tog izomorfizma s jezgrom $\operatorname{Ker} \sigma = \hat{\mathcal{D}}^1$. Dakle, $D \mapsto D_{\sigma(D)}$ je projektor $\hat{\mathcal{D}}$ na $\mathcal{D}^0$ duž $\hat{\mathcal{D}}^1$. Tada za

$$D = \sum_{m \in \mathbb{Z}_+^\ell} A_m \partial^m \in \hat{\mathcal{D}}, \qquad A_m \in \hat{\mathcal{H}}(\Omega, \mathcal{L}(X)),$$

vrijedi

$$\sigma(D) = \sum_{m \in \mathbb{Z}_+^\ell} A_m(\infty) Y^m.$$

Propozicija 1.9.1. *Neka je $\mathcal{J}$ lijevi ideal u algebri $\hat{\mathcal{D}}$. Ako $\mathcal{J}$ ima u ∞ prosti singularitet, onda je $\sigma(\mathcal{J})$ lijevi ideal konačne kodimenzije u algebri Δ.*

Dokaz: Budući da lijevi ideal ima prosti singularitet u ∞, kvocijent $\hat{\mathcal{D}}/\mathcal{J}$ je konačno generiran $\hat{\mathcal{H}}-$modul; pri tome pišemo $\hat{\mathcal{H}} = \hat{\mathcal{H}}(\Omega, \mathcal{L}(X))$. σ je epimorfizam, pa je $\sigma(\mathcal{J})$ lijevi ideal u Δ. Odatle slijedi da je $\Delta/\sigma(\mathcal{J})$ konačno generiran $\sigma(\hat{\mathcal{H}})-$modul. Međutim, $\sigma(\Gamma) = \Gamma(\infty)$ za svaki $\Gamma \in \hat{\mathcal{H}}$, pa je očito $\sigma(\hat{\mathcal{H}}) = \mathcal{L}(X)$. Prema tome, $\Delta/\sigma(\mathcal{J})$ je konačno generiran $\mathcal{L}(X)-$modul. Kako je algebra $\mathcal{L}(X)$ konačnodimenzionalna, slijedi da je kvocijent $\Delta/\sigma(\mathcal{J})$ konačnodimenzionalan.

U daljnjem je stalno $\mathcal{J}$ lijevi ideal u $\hat{\mathcal{D}}$ s prostim singularitetom u ∞. $\Delta-$modul $\Delta/\sigma(\mathcal{J})$ se zove **indicijalni modul pridružen idealu** $\mathcal{J}$. Imamo

$$\Delta/\sigma(\mathcal{J}) = \sum_{s \in \mathbb{C}^\ell} \dot{+} (\Delta/\sigma(\mathcal{J}))_s.$$

Skup

$$S(\mathcal{J}) = S(\sigma(\mathcal{J})) = \left\{ s \in \mathbb{C}^\ell;\ (\Delta/\sigma(\mathcal{J}))_s \neq \{0\} \right\}$$

je konačan. Svaki potprostor $(\Delta/\sigma(\mathcal{J}))_s$ je $\Delta-$podmodul od $\Delta/\sigma(\mathcal{J})$.

Teorem 1.9.2. *Vrijedi $E^\circ(\mathcal{J}) \subseteq S(\mathcal{J})$. Posebno, $E^\circ(\mathcal{J})$ je konačan skup.*

Tvrdnja teorema slijedi iz sljedeće propozicije:

Propozicija 1.9.3. *Neka je $\Phi \in V(\Omega; \mathcal{J})$ i $r \in E^\circ(\Phi)$. Tada je $D_P \Phi_r = 0$ $\forall P \in \sigma(\mathcal{J})$, tj. $\Phi_r \in \Sigma^{\sigma(\mathcal{J})}$.*

Dokaz: Neka je $P \in \sigma(\mathcal{J})$. Tada je $P = \sigma(D_1)$ za neki $D_1 \in \mathcal{J}$. Vrijedi i $\sigma(D_P) = P$. Prema tome je $D_2 = D_P - D_1 \in \operatorname{Ker} \sigma$. Međutim, $\operatorname{Ker} \sigma = \hat{\mathcal{D}}^1$ je kao lijevi ideal u $\hat{\mathcal{D}}$ generiran sa $e_1, \ldots, e_\ell$, gdje je $e_j(z) = \mathrm{e}^{z_j} = \mathrm{e}^{\langle \delta_j | z \rangle}$. Prema tome, postoje $Q_1, \ldots, Q_\ell \in \hat{\mathcal{D}}$ takvi da je

$$D_2 = Q_1 e_1 + \cdots + Q_\ell e_\ell.$$

Kako je $D_1 \in \mathcal{J}$ i $\Phi \in V(\Omega; \mathcal{J})$ imamo

$$D_P\Phi = D_1\Phi + D_2\Phi = D_2\Phi = Q_1 e_1 \Phi + \cdots + Q_\ell e_\ell \Phi.$$

Eksponencijalni razvoj od Φ ima oblik

$$\Phi = \sum_{s \in E^\circ(\Phi)} \sum_{m \in \mathbb{Z}_+^\ell} e_{s+m} P_{s,m}$$

gdje je kao i prije $e_t(z) = \mathrm{e}^{\langle t|z\rangle}$ za $t \in \mathbb{C}^\ell$ i $P_{s,m} : \mathbb{C}^\ell \to X$ su polinomijalne funkcije. Nadalje, $\Phi_r = e_r P_{r,0}$.

Sada je

$$Q_j e_j e_{s+m} P_{s,m} = Q_j e_{s+m+\delta_j} P_{s,m} = e_{s+m+\delta_j} F^j_{s,m}$$

za neke $F^j_{s,m} \in \mathcal{H}(\Omega, X)$ oblika

$$F^j_{s,m} = \sum_{n \in \mathbb{Z}_+^\ell} e_n Q^{j,n}_{s,m},$$

gdje su $Q^{j,n}_{s,m} : \mathbb{C}^\ell \to X$ polinomijalne funkcije. Dakle,

$$Q_j e_j e_{s+m} P_{s,m} = \sum_{n \in \mathbb{Z}_+^\ell} e_{s+m+n+\delta_j} Q^{j,n}_{s,m}.$$

Stavimo za $k \in \mathbb{Z}_+^\ell$:

$$R^j_{s,k} = \sum_{\substack{m,\, n \,\in\, \mathbb{Z}_+^\ell \\ m+n=k}} Q^{j,n}_{s,m}.$$

Tada su $R^j_{s,k} : \mathbb{C}^\ell \to X$ polinomijalne funkcije i vrijedi

$$D_P\Phi = \sum_{s \in E^\circ(\Phi)} \sum_{j=1}^{\ell} \sum_{k \in \mathbb{Z}_+^\ell} e_{s+k+\delta_j} R^j_{s,k}.$$

Vrijedi $s + k + \delta_j \neq r$ za svaki $s \in E^\circ(\Phi)$, svaki $k \in \mathbb{Z}_+^\ell$ i svaki $j \in \{1, \ldots, \ell\}$. Prema tome, koeficijent u eksponencijalnom razvoju od $D_P\Phi$ uz e_r jednak je 0. Međutim, za svako $n \in \mathbb{Z}_+^\ell$ koeficijent od $\partial^n\Phi$ uz e_r jednak je $\partial^n\Phi_r$. Slijedi da je za svaki $P \in \Delta$ koeficijent od $D_P\Phi$ uz e_r jednak $D_P\Phi_r$. To pokazuje da vrijedi

$$D_P\Phi_r = 0 \qquad \forall P \in \sigma(\mathcal{J}).$$

Iskazat ćemo bez dokaza jedan dovoljan uvjet da bi lijevi ideal $\mathcal{J}$ u $\hat{\mathcal{D}}$ imao u ∞ prosti singularitet. Kao i prije za svaki $D \in \hat{\mathcal{D}}$ pišemo $D^1 = D - D_{\sigma(D)}$; dakle, D^1 je komponenta od D u $\hat{\mathcal{D}}^1$ u rastavu $\hat{\mathcal{D}} = \mathcal{D}^0 \dotplus \hat{\mathcal{D}}^1$.

Propozicija 1.9.4. *Pretpostavimo da lijevi ideal $\mathcal{J}$ u $\hat{\mathcal{D}}$ zadovoljava sljedeća dva uvjeta:*

(a) *Postoji podskup $\mathfrak{A} \subseteq \mathcal{J}$ takav da je $\mathcal{J} = \hat{\mathcal{D}}\mathfrak{A}$ i da vrijedi*

$$\deg D^1 < \deg D \qquad \forall D \in \mathfrak{A}.$$

(b) *Lijevi ideal $\sigma(\mathcal{J})$ u Δ je konačne kodimenzije.*

Tada je ∞ prosti singularitet za ideal $\mathcal{J}$.

Poglavlje 2

SFERIČKE FUNKCIJE

2.1 Osnovne definicije i oznake

2.1.1. G povezana poluprosta Liejeva grupa s Liejevom algebrom $\mathfrak{g}$; ϑ Cartanova involucija od $\mathfrak{g}$ linearno proširena na $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$; $\mathfrak{k} = \{X \in \mathfrak{g};\ \vartheta X = X\}$, $\mathfrak{p} = \{X \in \mathfrak{g};\ \vartheta X = -X\}$; K povezana Liejeva podgrupa od G s Liejevom algebrom $\mathfrak{k}$; Z centar grupe G. Tada je K/Z maksimalna kompaktna podgrupa od G/Z. Nadalje, tada su $(X, k) \mapsto k(\exp X)$ i $(X, k) \mapsto (\exp X)k$ bianalitičke bijekcije sa $\mathfrak{p} \times K$ na G. Sa ϑ označavamo također automorfizam Liejeve grupe G definiran sa $\vartheta(k(\exp X)) = k(\exp -X)$. $(\cdot|\cdot)_\vartheta$ je skalarni produkt na realnom vektorskom prostoru $\mathfrak{g}$ definiran sa $(X|Y)_\vartheta = -B(X, \vartheta Y)$ i on se seskvilinearno proširuje do skalarnog produkta na $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$. Pri tome je sa B označena Killingova forma na $\mathfrak{g}$ i na $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$.

2.1.2. $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}$ Cartanov potprostor; $\mathfrak{m} = Z_{\mathfrak{k}}(\mathfrak{a})$; $\mathfrak{s} = Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{a}) = \mathfrak{m} \dotplus \mathfrak{a}$; $A = \exp \mathfrak{a}$ – to je vektorska podgrupa od G; $M = Z_K(A)$ je zatvorena podgrupa od K s Liejevom algebrom $\mathfrak{m}$; $S = Z_G(A)$ je zatvorena podgrupa od G s Liejevom algebrom $\mathfrak{s}$ i množenje $(m, a) \mapsto ma$ je izomorfizam Liejevih grupa sa $M \times A$ na S.

2.1.3. $\mathfrak{t}$ Cartanova podalgebra od $\mathfrak{m}$; tada je $\mathfrak{h} = \mathfrak{t} \dotplus \mathfrak{a}$ Cartanova podalgebra od $\mathfrak{g}$; stavimo $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}} = i\mathfrak{t} \dotplus \mathfrak{a}$ i uvedimo kompatibilne uređaje u $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*$ i $\mathfrak{a}^*$;

$$R = R(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}, \mathfrak{h}^{\mathbb{C}}) \ \ - \ \ \text{sistem korijena u realnom prostoru } \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*;$$

$$R^0 = R(\mathfrak{s}^{\mathbb{C}}, \mathfrak{h}^{\mathbb{C}}) = \{\alpha \in R;\ \alpha|\mathfrak{a} = 0\};$$

$$\tilde{R} = R \setminus R^0 = \{a \in R;\ \alpha|\mathfrak{a} \neq 0\};$$

$$\Sigma = R(\mathfrak{g}, \mathfrak{a}) = \{\alpha|\mathfrak{a};\ \alpha \in \tilde{R}\};$$

za $\beta \in \Sigma$ stavimo

$$m_\beta = \dim \mathfrak{g}_\beta = Card\{\alpha \in \tilde{R};\ \alpha|\mathfrak{a} = \beta\};$$

u odnosu na uvedene uređaje imamo pozitivne skupove korijena:

$$R_+, \qquad \tilde{R}_+ = R_+ \cap \tilde{R}, \qquad \Sigma_+ = \{\alpha|\mathfrak{a};\ \alpha \in \tilde{R}_+\}, \qquad R_+^0 = R_+ \cap R^0.$$

2.1.4. Stavimo

$$\mathfrak{n} = \sum_{\beta \in \Sigma_+} \mathfrak{g}_\beta, \qquad \overline{\mathfrak{n}} = \vartheta(\mathfrak{n}) = \sum_{\beta \in \Sigma_+} \mathfrak{g}_{-\beta}.$$

Tada je

$$\mathfrak{n}^{\mathbb{C}} = \sum_{\alpha \in \tilde{R}_+} \mathfrak{g}_\alpha^{\mathbb{C}}, \qquad \overline{\mathfrak{n}}^{\mathbb{C}} = \sum_{\alpha \in \tilde{R}_+} \mathfrak{g}_{-\alpha}^{\mathbb{C}}.$$

Stavimo

$$\mathfrak{n}_0^+ = \sum_{\alpha\in R_+^0} \mathfrak{g}_\alpha^{\mathbb{C}}, \qquad \mathfrak{n}_0^- = \sum_{\alpha\in R_+^0} \mathfrak{g}_{-\alpha}^{\mathbb{C}}, \qquad \mathfrak{n}^+ = \sum_{\alpha\in R_+} \mathfrak{g}_\alpha^{\mathbb{C}}, \qquad \mathfrak{n}^- = \sum_{\alpha\in R_+} \mathfrak{g}_{-\alpha}^{\mathbb{C}}.$$

Tada je

$$\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{n}^+ \dotplus \mathfrak{h}^{\mathbb{C}} \dotplus \mathfrak{n}^-; \qquad \mathfrak{s}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{n}_0^+ \dotplus \mathfrak{h}^{\mathbb{C}} \dotplus \mathfrak{n}_0^-; \qquad \mathfrak{n}^+ = \mathfrak{n}_0^+ \dotplus \mathfrak{n}^{\mathbb{C}}; \qquad \mathfrak{n}^- = \mathfrak{n}_0^- \dotplus \overline{\mathfrak{n}}^{\mathbb{C}}.$$

2.1.5. Imamo

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \dotplus \mathfrak{a} \dotplus \mathfrak{n} = \mathfrak{k} \dotplus \mathfrak{a} \dotplus \overline{\mathfrak{n}} = \overline{\mathfrak{n}} \dotplus \mathfrak{m} \dotplus \mathfrak{a} \dotplus \mathfrak{n}.$$

$N = \exp \mathfrak{n}$ i $\overline{N} = \vartheta(N) = \exp \overline{\mathfrak{n}}$ su jednostavno povezane zatvorene nilpotentne podgrupe od G i $\exp|\mathfrak{n} : \mathfrak{n} \to N$ i $\exp|\overline{\mathfrak{n}} : \overline{\mathfrak{n}} \to \overline{N}$ su bianalitičke bijekcije. Nadalje, imamo Iwasawine dekompozicije: množenje inducira bianalitičke bijekcije

$$K \times A \times N \to G, \quad A \times N \times K \to G, \quad N \times A \times K \to G,$$

$$K \times A \times \overline{N} \to G, \quad A \times \overline{N} \times K \to G, \quad \overline{N} \times A \times K \to G.$$

Stavimo $P = MAN$ i $\overline{P} = MA\overline{N}$. To su minimalne paraboličke podgrupe od G i $\overline{P} = \vartheta(P)$.

2.1.6. Polusume pozitivnih korijena:

$$\rho_c = \frac{1}{2} \sum_{\alpha\in R_+} \alpha, \qquad \rho_0 = \frac{1}{2} \sum_{\alpha\in R_+^0} \alpha, \qquad \rho = \frac{1}{2} \sum_{\alpha\in \tilde{R}_+} \alpha.$$

To su linearni funkcionali na $\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}$ sadržani u $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*$ i vrijedi

$$\rho_c = \rho_0 + \rho; \qquad \rho|\mathfrak{a} = \sum_{\beta\in\Sigma_+} m_\beta \beta; \qquad \rho(H) = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\,(ad\,H)|\mathfrak{n} \quad \text{za} \quad H \in \mathfrak{a}.$$

2.1.7. Ako je $\mathfrak{l}$ (realna) Liejeva podalgebra od $\mathfrak{g}$, sa $U(\mathfrak{l})$ označavamo univerzalnu omotačku algebru kompleksifikacije $\mathfrak{l}^{\mathbb{C}}$, a sa $S(\mathfrak{l})$ simetričnu algebru nad kompleksnim vektorskim prostorom $\mathfrak{l}^{\mathbb{C}}$. Ako je $\mathfrak{l}$ kompleksna Liejeva podalgebra od $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$, sa $U(\mathfrak{l})$ označavamo univerzalnu omotačku algebru od $\mathfrak{l}$, a sa $S(\mathfrak{l})$ simetričnu algebru nad vektorskim prostorom $\mathfrak{l}$. Nadalje, $(S^m(\mathfrak{l}))_{m\in\mathbb{Z}_+}$ označava graduaciju, a $(S_m(\mathfrak{l}))_{m\in\mathbb{Z}_+}$ pripadnu filtraciju algebre $S(\mathfrak{l})$. Sa $\Lambda : S(\mathfrak{g}) \to U(\mathfrak{g})$ označavamo simetrizaciju, tj. izomorfizam vektorskih prostora definiran preko restrikcija $\Lambda|S^m(\mathfrak{g})$ ovako

$$\Lambda(X_1 \cdots X_m) = \frac{1}{m!} \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_m} X_{\sigma(1)} \cdots X_{\sigma(m)}, \qquad X_1, \ldots, X_m \in \mathfrak{g};$$

pri tome je s lijeve strane produkt u algebri $S(\mathfrak{g})$ a s desne strane je svaki sumand produkt u algebri $U(\mathfrak{g})$. Stavljamo

$$U^m(\mathfrak{g}) = \Lambda(S^m(\mathfrak{g})), \qquad U_m(\mathfrak{g}) = \Lambda(S_m(\mathfrak{g})).$$

Tada je $(U_m(\mathfrak{g}))_{m\in\mathbb{Z}_+}$ filtracija algebre $U(\mathfrak{g})$. Za $u \in U_m(\mathfrak{g}) \setminus U_{m-1}(\mathfrak{g})$ i za $u \in S_m(\mathfrak{g}) \setminus S_{m-1}(\mathfrak{g})$ pišemo $m = \deg u$; pri tome je $U_{-1}(\mathfrak{g}) = S_{-1}(\mathfrak{g}) = \{0\}$; nadalje, stavljamo $\deg 0 = -\infty$.

Vrijedi $U_m(\mathfrak{g}) = U^m(\mathfrak{g}) \dotplus U_{m-1}(\mathfrak{g})$. Ako su $d_1, \ldots, d_m \in \mathbb{Z}_+$ i $d = d_1 + \cdots + d_m$, i ako su $p_i \in S^{d_i}(\mathfrak{g})$ za $i = 1, \ldots, m$, onda je

$$\Lambda(p_1 \cdots p_m) - \Lambda(p_1) \cdots \Lambda(p_m) \in U_{d-1}(\mathfrak{g}).$$

2.1.8. Za podskup T od G i podskup A od $U(\mathfrak{g})$ ili od $S(\mathfrak{g})$ pišemo

$$A^T = \{a \in A;\ (Ad\,t)a = a\ \ \forall t \in T\}.$$

Slično, ako je T podskup od $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ stavljamo

$$A^T = \{a \in A;\ (ad\,t)a = 0\ \ \forall t \in T\}.$$

U slučaju $A \subseteq U(\mathfrak{g})$, A^T je komutant skupa $T \subseteq \mathfrak{g}^{\mathbb{C}} \subseteq U(\mathfrak{g})$.

Ako je $\mathfrak{l}$ realna Liejeva podalgebra od $\mathfrak{g}$ ili kompleksna Liejeva podalgebra od $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$, sa $\mathcal{Z}(\mathfrak{l})$ označavamo centar algebre $U(\mathfrak{l})$; dakle, $\mathcal{Z}(\mathfrak{l}) = U(\mathfrak{l})^{\mathfrak{l}}$.

2.2 Strukturni teoremi o omotačkoj algebri

Neposredne posljedice PBW−teorema su

$$U(\mathfrak{g}) = U(\mathfrak{n})U(\mathfrak{a})U(\mathfrak{k}) = U(\mathfrak{a})U(\mathfrak{k}) \dotplus \mathfrak{n}U(\mathfrak{g}),$$

$$U_n(\mathfrak{g}) = U_n(\mathfrak{g}) \cap U(\mathfrak{a})U(\mathfrak{k}) \dotplus \mathfrak{n}U_{n-1}(\mathfrak{g}), \qquad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Neka je $P : U(\mathfrak{g}) \to U(\mathfrak{a})U(\mathfrak{k})$ projektor duž potprostora $\mathfrak{n}U(\mathfrak{g})$. Za $u \in U_n(\mathfrak{g})$ je tada $\deg P(u) \leq n$ i $u - P(u) \in \mathfrak{n}U_{n-1}(\mathfrak{g})$. U potprostor $U(\mathfrak{a})U(\mathfrak{k})$ uvodimo strukturu unitalne algebre preko identifikacije sa $U(\mathfrak{a}) \otimes U(\mathfrak{k})$. Pripadno množenje označimo sa $\bullet$. Dakle,

$$\left(\sum_{i=1}^{m} a_i k_i\right) \bullet \left(\sum_{j=1}^{n} b_j h_j\right) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_i b_j k_i h_j, \qquad a_i, b_j \in U(\mathfrak{a}), \quad k_i, h_j \in U(\mathfrak{k}).$$

Nadalje, $U(\mathfrak{a})$ identificiramo sa $S(\mathfrak{a})$. Budući da $\mathfrak{m}$ i $\mathfrak{a}$ komutiraju, množenje $\bullet$ se u $U(\mathfrak{s}) = U(\mathfrak{a})U(\mathfrak{m}) \subseteq U(\mathfrak{a})U(\mathfrak{k})$ podudara s običnim množenjem u algebri $U(\mathfrak{s})$.

Propozicija 2.2.1. (*a*) *Ako je $u \in U_n(\mathfrak{g})^{\mathfrak{a}}$, onda su $P(u) \in U_n(\mathfrak{s})$ i $u - P(u) \in \mathfrak{n}U_{n-2}(\mathfrak{g})\overline{\mathfrak{n}}$.*

(*b*) *Ako je $u \in U_n(\mathfrak{g})^K$, onda je $P(u) \in U_n(\mathfrak{g}) \cap U(\mathfrak{a})U(\mathfrak{k})^M$.*

(*c*) *Restrikcija $P|U(\mathfrak{g})^K$ je antihomomorfizam algebre $U(\mathfrak{g})^K$ u algebru $U(\mathfrak{a})U(\mathfrak{k})^M$, tj.*

$$P(uv) = P(v) \bullet P(u), \qquad u, v \in U(\mathfrak{g})^K.$$

(*d*) *Ako je $u \in \mathcal{Z}(\mathfrak{g})$, onda je $P(u) \in \mathcal{Z}(\mathfrak{s}) = U(\mathfrak{a})\mathcal{Z}(\mathfrak{m})$ i restrikcija $P|\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$ je homomorfizam algebre $\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$ u algebru $\mathcal{Z}(\mathfrak{s})$.*

Dokaz: (*a*) Imamo $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{n}^{\mathbb{C}} \dotplus \mathfrak{s}^{\mathbb{C}} \dotplus \overline{\mathfrak{n}}^{\mathbb{C}}$, pa slijedi $U(\mathfrak{g}) = U(\mathfrak{s})U(\overline{\mathfrak{n}}) \dotplus \mathfrak{n}U(\mathfrak{g})$. Neka je $Q : U(\mathfrak{g}) \to U(\mathfrak{s})U(\overline{\mathfrak{n}})$ projektor duž potprostora $\mathfrak{n}U(\mathfrak{g})$. Tada očito vrijedi:

$$u \in U_n(\mathfrak{g}) \qquad \Longrightarrow \qquad Q(u) \in U_n(\mathfrak{g}) \cap U(\mathfrak{s})U(\overline{\mathfrak{n}}).$$

Neka je $u \in U(\mathfrak{g})^{\mathfrak{a}}$. Potprostori $\mathfrak{n}U(\mathfrak{g})$ i $U(\mathfrak{s})U(\overline{\mathfrak{n}})$ od $U(\mathfrak{g})$ su invarijantni u odnosu na sve operatore $ad\,H$, $H \in \mathfrak{a}$, pa za svaki $H \in \mathfrak{a}$ vrijedi

$$[Q(u), H] = [Q(u) - u, H] \in U(\mathfrak{s})U(\overline{\mathfrak{n}}) \cap \mathfrak{n}U(\mathfrak{g}) = \{0\}.$$

Prema tome, vrijedi

$$Q(u) \in U(\mathfrak{s})U(\overline{\mathfrak{n}}) \cap U(\mathfrak{g})^{\mathfrak{a}} \qquad \text{i} \qquad u - Q(u) \in \mathfrak{n}U(\mathfrak{g}) \cap U(\mathfrak{g})^{\mathfrak{a}}.$$

Dokazat ćemo sada da vrijedi

$$U(\mathfrak{s})U(\overline{\mathfrak{n}}) \cap U(\mathfrak{g})^{\mathfrak{a}} = U(\mathfrak{s}) \qquad \text{i} \qquad \mathfrak{n}U(\mathfrak{g}) \cap U(\mathfrak{g})^{\mathfrak{a}} \subseteq \mathfrak{n}U(\mathfrak{g})\overline{\mathfrak{n}}.$$

Neka je $\{H_1, \ldots, H_m\}$ baza od $\mathfrak{s}$, $\tilde{R}_+ = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$, $X_i \in \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}_{\alpha_i} \setminus \{0\}$ i $Y_i \in \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}_{-\alpha_i} \setminus \{0\}$ za $i = 1, \ldots, n$. Tada je $\{X_1, \ldots, X_n, H_1, \ldots, H_m, Y_1, \ldots, Y_m\}$ baza od $\mathfrak{g}$. Prema PBW−teoremu tada je

$$\{u(p, r, q);\; p, q \in \mathbb{Z}_+^n,\; r \in \mathbb{Z}_+^m\}$$

baza od $U(\mathfrak{g})$, gdje smo za $p = (p_1, \ldots, p_n) \in \mathbb{Z}_+^n$, $r = (r_1, \ldots, r_m) \in \mathbb{Z}_+^m$ i $q = (q_1, \ldots, q_n) \in \mathbb{Z}_+^n$ stavili

$$u(p, r, q) = X_1^{p_1} \cdots X_n^{p_n} H_1^{r_1} \cdots H_m^{r_m} Y_1^{q_1} \cdots Y_n^{q_n}.$$

Nadalje, uz oznaku $|p| = p_1 + \cdots + p_n$ tada je

$$\{u(p,r,q);\ p,q \in \mathbb{Z}_+^n,\ r \in \mathbb{Z}_+^m,\ |p| \geq 1\}$$

baza od $\mathfrak{n}U(\mathfrak{g})$,

$$\{u(0,r,q);\ r \in \mathbb{Z}_+^m,\ q \in \mathbb{Z}_+^n\}$$

je baza od $U(\mathfrak{s})U(\overline{\mathfrak{n}})$ i

$$\{u(p,r,q);\ p,q \in \mathbb{Z}_+^n,\ r \in \mathbb{Z}_+^m,\ |p| \geq 1,\ |q| \geq 1\}$$

je baza od $\mathfrak{n}U(\mathfrak{g})\overline{\mathfrak{n}}$. Za $p \in \mathbb{Z}_+^n$ stavimo

$$p\alpha = \sum_{i=1}^{n} p_i \alpha_i.$$

Kako su $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ pozitivni korijeni, očito vrijedi $p\alpha|\mathfrak{a} = 0$ ako i samo ako je $p = 0$, tj. $p_1 = \cdots = p_n = 0$.

Neka je $v \in \mathfrak{n}U(\mathfrak{g}) \cap U(\mathfrak{g})^{\mathfrak{a}}$. Za neke $c(p,r,q) \in \mathbb{C}$ tada imamo

$$v = \sum_{p,q,r,\,|p|\geq 1} c(p,r,q)u(p,r,q).$$

Sada za proizvoljan $H \in \mathfrak{a}$ dobivamo

$$0 = [H,v] = \sum_{p,q,r,\,|p|\geq 1} (p\alpha - q\alpha)(H)c(p,r,q)u(p,r,q).$$

Stoga je

$$(p\alpha - q\alpha)(H)c(p,r,q) = 0 \qquad \forall p,q,r, \quad |p| \geq 1, \quad H \in \mathfrak{a}.$$

Pretpostavimo da je $c(p,r,0) \neq 0$ za neke p,r, $|p| \geq 1$. Tada slijedi da je $p\alpha|\mathfrak{a} = 0$, a to je nemoguće. To pokazuje da je $v \in \mathfrak{n}U(\mathfrak{g})\overline{\mathfrak{n}}$. Time je dokazana inkluzija $\mathfrak{n}U(\mathfrak{g}) \cap U(\mathfrak{g})^{\mathfrak{a}} \subseteq \mathfrak{n}U(\mathfrak{g})\overline{\mathfrak{n}}$.

Neka je sada $v \in U(\mathfrak{s})U(\overline{\mathfrak{n}}) \cap U(\mathfrak{g})^{\mathfrak{a}}$. Tada za neke $a(r,q) \in \mathbb{C}$ vrijedi

$$v = \sum_{r,q} a(r,q)u(0,r,q).$$

Za proizvoljan $H \in \mathfrak{a}$ tada kao prije nalazimo da je $(q\alpha)(H)a(r,q) = 0\ \forall r,q$, pa slijedi $a(r,q) = 0$ za $q \neq 0$. To pokazuje da je $v \in U(\mathfrak{s})$, odnosno, dokazana je inkluzija $U(\mathfrak{s})U(\overline{\mathfrak{n}}) \cap U(\mathfrak{g})^{\mathfrak{a}} \subseteq \mathfrak{n}U(\mathfrak{g})\overline{\mathfrak{n}}$.

Iz dokazanog slijedi da za $u \in U_n(\mathfrak{g})^{\mathfrak{a}}$ vrijedi $Q(u) \in U_n(\mathfrak{s})$ i $u - Q(u) \in \mathfrak{n}U(\mathfrak{g})\overline{\mathfrak{n}}$. Ali zbog inkluzija $U(\mathfrak{s}) \subseteq U(\mathfrak{a})U(\mathfrak{k})$ i $\mathfrak{n}U(\mathfrak{g}) \supseteq \mathfrak{n}U(\mathfrak{g})\overline{\mathfrak{n}}$ za svaki $u \in U(\mathfrak{g})^{\mathfrak{a}}$ vrijedi $P(u) = Q(u)$. Time je dokazana tvrdnja (a).

(b) Za svaki $m \in M$ potprostori $\mathfrak{n}U(\mathfrak{g})$ i $U(\mathfrak{a})U(\mathfrak{k})$ od $U(\mathfrak{g})$ su $(Ad\,m)-$invarijantni. Stoga vrijedi

$$P((Ad\,m)u) = (Ad\,m)P(u) \qquad \forall u \in U(\mathfrak{g}) \quad \text{i} \quad \forall m \in M.$$

Za $u \in U(\mathfrak{g})^K$ je $(Ad\,m)u = u$ za svaki $m \in M$, pa zaključujemo da je $P(u) \in [U(\mathfrak{a})U(\mathfrak{k})]^M = U(\mathfrak{a})U(\mathfrak{k})^M$. Kako je očito $P(U_n(\mathfrak{g})) \subseteq U_n(\mathfrak{g})$, slijedi tvrdnja (b).

(c) Neka su $u,v \in U(\mathfrak{g})^K$. Prema (b) su $P(u), P(v) \in U(\mathfrak{a})U(\mathfrak{k})^M$, pa možemo pisati

$$P(u) = \sum_i a_i k_i \qquad \text{i} \qquad P(v) = \sum_j b_j h_j \qquad \text{za neke} \quad a_i, b_j \in U(\mathfrak{a}) \quad \text{i} \quad k_i, h_j \in U(\mathfrak{k})^M.$$

Stoga je

$$uv - P(v) \bullet P(u) = uv - \sum_{i,j} b_j a_i h_j k_i = uv - \sum_{i,j} a_i b_j h_j k_i = uv - \sum_i a_i P(v) k_i =$$

$$= uv - \sum_i a_i v k_i + \sum_i a_i (v - P(v)) k_i = uv - \sum_i a_i k_i v + \sum_i a_i (v - P(v)) k_i =$$

$$= (u - P(u))v + \sum_i a_i (v - P(v)) k_i \in \mathfrak{n} U(\mathfrak{g}) + U(\mathfrak{a}) \mathfrak{n} U(\mathfrak{g}).$$

Budući da $\mathfrak{a}$ normalizira $\mathfrak{n}$, vrijedi $U(\mathfrak{a})\mathfrak{n} = \mathfrak{n}U(\mathfrak{a})$, pa slijedi $uv - P(v) \bullet P(u) \in \mathfrak{n}U(\mathfrak{g})$. Stoga je $P(uv - P(v) \bullet P(u)) = 0$, odnosno, $P(uv) = P(P(v) \bullet P(u))$. Kako je $P(v) \bullet P(u) \in U(\mathfrak{a})U(\mathfrak{k})$, vrijedi $P(P(v) \bullet P(u)) = P(v) \bullet P(u)$. Dakle, $P(uv) = P(v) \bullet P(u)$.

(d) Kako je $\mathcal{Z}(\mathfrak{g}) \subseteq U(\mathfrak{g})^K \cap U(\mathfrak{g})^{\mathfrak{a}}$, iz ($a$) i ($b$) za svaki $u \in \mathcal{Z}(\mathfrak{g})$ dobivamo

$$P(u) \in U(\mathfrak{s}) \cap U(\mathfrak{a})U(\mathfrak{k})^M = U(\mathfrak{a})U(\mathfrak{m})^M = U(\mathfrak{a})\mathcal{Z}(\mathfrak{m}) = \mathcal{Z}(\mathfrak{s}).$$

Stoga je prema (c) restrikcija $P|\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$ je antihomomorfizam sa $\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$ u $\mathcal{Z}(\mathfrak{s})$. No kako je algebra $\mathcal{Z}(\mathfrak{s})$ komutativna, to je homomorfizam.

Sasvim analogno propoziciji 2.2.1. dokazuju se tvrdnje (a), (b) i (c) sljedećeg teorema. Tvrdnje (d) i (e) predstavljaju teorem o Harish$-$Chandrinom izomorfizmu.

Teorem 2.2.2. *Neka je $\mathfrak{l}$ kompleksna reduktivna Liejeva algebra, $\mathfrak{h}$ njena Cartanova podalgebra, $R = R(\mathfrak{l}, \mathfrak{h})$, R_+ neki izbor pozitivnih korijena, $W = W(R)$ Weylova grupa sistema korijena R. Stavimo*

$$\rho = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in R_+} \alpha, \qquad \mathfrak{n}^+ = \sum_{\alpha \in R_+} \mathfrak{l}_\alpha, \qquad \mathfrak{n}^- = \sum_{\alpha \in R_+} \mathfrak{l}_{-\alpha}$$

(a) *Za svaki $u \in U(\mathfrak{l})$ postoji jedinstven $\gamma'(u) \in U(\mathfrak{h})U(\mathfrak{n}^-)$ takav da je $u - \gamma'(u) \in \mathfrak{n}^+ U(\mathfrak{l})$. Ako je $u \in U_n(\mathfrak{l})$, onda je $\gamma'(u) \in U_n(\mathfrak{l}) \cap U(\mathfrak{h})U(\mathfrak{n}^-)$.*

(b) *Ako je $u \in U_n(\mathfrak{l})^{\mathfrak{h}}$, onda vrijedi $\gamma'(u) \in U_n(\mathfrak{h})$ i $u - \gamma'(u) \in \mathfrak{n}^+ U_{n-1}(\mathfrak{l})\mathfrak{n}^-$.*

(c) *$u \mapsto \gamma'(u)$ je homomorfizam sa $\mathcal{Z}(\mathfrak{l})$ u $U(\mathfrak{h}) = S(\mathfrak{h})$.*

(d) *Neka je $\psi \in Aut(U(\mathfrak{h}))$ definiran sa $\psi(H) = H + \rho(H)$ za $H \in \mathfrak{h}$. Tada je $\gamma = \psi \circ \gamma'$ izomorfizam sa $\mathcal{Z}(\mathfrak{l})$ na $S(\mathfrak{h})^W$ neovisan o izboru R_+.*

(e) *Za svako $n \in \mathbb{N}$ restrikcije preslikavanja γ i γ' su bijekcije sa $\mathcal{Z}_n(\mathfrak{l}) \setminus \mathcal{Z}_{n-1}(\mathfrak{l})$ na $S_n(\mathfrak{h})^W \setminus S_{n-1}(\mathfrak{h})^W$. Pri tome je $\mathcal{Z}_n(\mathfrak{l}) = \mathcal{Z}(\mathfrak{l}) \cap U_n(\mathfrak{l})$.*

Teorem 2.2.2. primijenit ćemo u dvije situacije:

1. $\mathfrak{l} = \mathfrak{s}^{\mathbb{C}}$, a ulogu Cartanove podalgebre $\mathfrak{h}$ od $\mathfrak{l}$ preuzima uz prijašnje oznake $\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}$. Tada imamo $R(\mathfrak{s}^{\mathbb{C}}, \mathfrak{h}^{\mathbb{C}}) = R^0$, a ulogu ρ iz teorema preuzima ρ_0. Za $u \in U(\mathfrak{s})$ neka je $\gamma_0'(u)$ jedinstven element iz $U(\mathfrak{h})U(\mathfrak{n}_0^-)$ takav da je $u - \gamma_0'(u) \in \mathfrak{n}_0^+ U(\mathfrak{s})$. Tada je $u \mapsto \gamma_0'(u)$ homomorfizam sa $\mathcal{Z}(\mathfrak{s})$ u $S(\mathfrak{h})$. Neka je $\psi_0 \in Aut(S(\mathfrak{h}))$ definiran sa $\psi_0(H) = H + \rho_0(H)$ za $H \in \mathfrak{h}^{\mathbb{C}}$. Stavimo $\gamma_0(u) = \psi_0(\gamma_0'(u))$ za $u \in \mathcal{Z}(\mathfrak{s})$. Tada je γ_0 izomorfizam $\mathcal{Z}(\mathfrak{s})$ na $S(\mathfrak{h})^{W_0}$, gdje je W_0 Weylova grupa sistema korijena R^0, tj. podgrupa od $W_c = W(R)$ generirana refleksijama σ_α, $\alpha \in R^0$.

2. $\mathfrak{l} = \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$, a ulogu $\mathfrak{h}$ ponovo preuzima uz prijašnje oznake $\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}$. Sada je $R = R(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}, \mathfrak{h}^{\mathbb{C}})$ a ulogu ρ preuzima ρ_c. Za $u \in U(\mathfrak{g})$ sa $\gamma'(u)$ označavamo jedinstven element iz $U(\mathfrak{h})U(\mathfrak{n}^-)$ takav da je $u - \gamma'(u) \in \mathfrak{n}^+ U(\mathfrak{g})$. Tada je $u \mapsto \gamma'(u)$ homomorfizam sa $\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$ u $S(\mathfrak{h})$. Neka je $\psi \in Aut(S(\mathfrak{h}))$ definiran sa $\psi(H) = H + \rho_c(H)$ za $H \in \mathfrak{h}^{\mathbb{C}}$. Stavimo li $\gamma(u) = \psi(\gamma'(u))$ za $u \in \mathcal{Z}(\mathfrak{g})$, preslikavanje γ je izomorfizam sa $\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$ na $S(\mathfrak{h})^{W_c}$.

Propozicija 2.2.3. *Vrijedi* $\gamma'(\mathcal{Z}(\mathfrak{g})) \subseteq \gamma_0'(\mathcal{Z}(\mathfrak{s}))$. *Preciznije, za* $u \in \mathcal{Z}(\mathfrak{g})$ *je* $\gamma'(u) = \gamma_0'(P(u))$. *Posebno, restrikcija* $P|\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$ *je injektivni homomorfizam sa* $\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$ *u* $\mathcal{Z}(\mathfrak{s})$.

Dokaz: Imamo $\mathfrak{n}^+ = \mathfrak{n}_0^+ \dot{+} \mathfrak{n}^{\mathbb{C}}$ i $\mathfrak{n}^- = \mathfrak{n}_0^- \dot{+} \overline{\mathfrak{n}}^{\mathbb{C}}$. Za $u \in \mathcal{Z}(\mathfrak{g})$ je $P(u) \in \mathcal{Z}(\mathfrak{s})$ i $u - P(u) \in \mathfrak{n}^{\mathbb{C}} U(\mathfrak{g})$. Nadalje, $\gamma_0'(P(u)) \in S(\mathfrak{h})$ i $P(u) - \gamma_0'(P(u)) \in \mathfrak{n}_0^+ U(\mathfrak{s})$. Stoga je

$$u - \gamma_0'(P(u)) = (u - P(u)) + (P(u) - \gamma_0'(P(u))) \in \mathfrak{n}^{\mathbb{C}} U(\mathfrak{g}) + \mathfrak{n}_0^+ U(\mathfrak{s}) \subseteq \mathfrak{n}^+ U(\mathfrak{g}),$$

pa slijedi $\gamma_0'(P(u)) = \gamma'(u)$.

Lema 2.2.4. $\rho|\mathfrak{t} = 0$.

Dokaz: Za $m \in M$ stavimo $\pi(m) = (Ad\, m)|\mathfrak{n}$. Kako je grupa $Ad\, M$ kompaktna, slijedi $\det \pi(m) = \pm 1$ za svaki $m \in M$. Odatle zbog neprekidnosti za svaki $H \in \mathfrak{t}$ i svaki $t \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$1 = \det \pi(\exp tH) = \det \mathrm{e}^{t\pi(H)} = \mathrm{e}^{t \operatorname{Tr} \pi(H)} = \mathrm{e}^{2t\rho(H)}.$$

Deriviranjem u nuli slijedi $\rho(H) = 0$.

Definiramo sada automorfizam $u \mapsto u^*$ algebre $U(\mathfrak{s})$ sa $X^* = X$ za $X \in \mathfrak{m}$ i $H^* = H + \rho(H)$ za $H \in \mathfrak{a}$. Prema lemi 2.2.4. tada je $H^* = H + \rho(H)$ za svaki $H \in \mathfrak{h}^{\mathbb{C}}$. Neka je $\mu : \mathcal{Z}(\mathfrak{g}) \to \mathcal{Z}(\mathfrak{s})$ injektivni homomorfizam definiran sa

$$\mu(u) = P(u)^*, \qquad u \in \mathcal{Z}(\mathfrak{g}).$$

Lema 2.2.5. *Za* $v \in \mathcal{Z}(\mathfrak{s})$ *je* $\gamma_0'(v^*) = \gamma_0'(v)^*$.

Dokaz: Neka je $R_+^0 = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\}$, $\{H_1, \ldots, H_m\}$ baza od $\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}$ i za svaki $i = 1, \ldots, k$ izaberimo $X_i \in \mathfrak{g}_{\alpha_1}^{\mathbb{C}} \setminus \{0\}$ i $Y_i \in \mathfrak{g}_{-\alpha_i}^{\mathbb{C}}$. Za $p, q \in \mathbb{Z}_+^k$ i $r \in \mathbb{Z}_+^m$ stavimo

$$v(p,r,q) = X_1^{p_1} \cdots X_k^{p_k} H_1^{r_1} \cdots H_m^{r_m} Y_1^{q_1} \cdots Y_k^{q_k}.$$

Tada je $\{v(p,r,q);\ p, q \in \mathbb{Z}_+^k,\ r \in \mathbb{Z}_+^m\}$ baza od $U(\mathfrak{s})$. Za $v \in \mathcal{Z}(\mathfrak{s})$ kao u dokazu propozicije 2.2.1. tada je

$$v = \sum_{p,q,r,\, p\alpha = q\alpha} a(p,r,q) v(p,r,q) \qquad \text{za neke} \quad a(p,r,q) \in \mathbb{C}$$

i imamo

$$\gamma_0'(v) = \sum_{r \in \mathbb{Z}_+^m} a(0,r,0) v(0,r,0) = \sum_{r \in \mathbb{Z}_+^m} a(0,r,0) H_1^{r_1} \cdots H_m^{r_m}.$$

Odatle je

$$\gamma_0'(v)^* = \sum_{r \in \mathbb{Z}_+^m} a(0,r,0)(H_1 + \rho(H_1))^{r_1} \cdots (H_m + \rho(H_m))^{r_m}.$$

S druge strane, imamo

$$v^* = \sum_{p,q,r,\, p\alpha = q\alpha} a(p,r,q) X_1^{p_1} \cdots X_k^{p_k} (H_1 + \rho(H_1))^{r_1} \cdots (H_m + \rho(H_m))^{r_m} Y_1^{q_1} \cdots Y_k^{q_k},$$

pa dobivamo

$$\gamma_0'(v^*) = \sum_{r \in \mathbb{Z}_+^m} a(0,r,0)(H_1 + \rho(H_1))^{r_1} \cdots (H_m + \rho(H_m))^{r_m}.$$

Dakle, $\gamma_0'(v)^* = \gamma_0'(v^*)$.

Lema 2.2.6. *Za* $u \in U(\mathfrak{h})$ *je* $\psi_0(u^*) = \psi_0(u)^* = \psi(u)$.

Dokaz slijedi neposredno iz jednakosti $\rho_c = \rho_0 + \rho$.

Propozicija 2.2.7. *Za* $z \in \mathcal{Z}(\mathfrak{g})$ *je* $\gamma_0(\mu(z)) = \gamma(z)$.

Dokaz: Zbog lema 2.2.5. i 2.2.6. i zbog propozicije 2.2.3. imamo redom:

$$\gamma_0(\mu(z)) = \psi_0\left(\gamma_0'\left(P(z)^*\right)\right) = \psi_0\left(\gamma_0'(P(z))^*\right) = \psi(\gamma_0'(P(z))) = \psi(\gamma'(z)) = \gamma(z).$$

Iz tvrdnje (e) teorema 2.2.2. i iz propozicija 2.2.7. i 2.2.3. neposredno slijedi:

Propozicija 2.2.8. *Za svaki* $z \in \mathcal{Z}(\mathfrak{g})$ *je* $\deg P(z) = \deg \mu(z) = \deg z$.

Neka je $r = [W_c : W_0]$. Iz Chevalleyevog teorema o invarijantama konačne grupe generirane refleksijama znamo da je $S(\mathfrak{h})^{W_0}$ slobodan $S(\mathfrak{h})^{W_c}-$modul ranga r i ima $S(\mathfrak{h})^{W_c}-$bazu $p_1 = 1, p_2, \ldots, p_r$ sastavljenu od homogenih elemenata. Odatle i iz teorema 2.2.2. i propozicije 2.2.7. slijedi:

Propozicija 2.2.9. *Postoje* $v_1 = 1, v_2, \ldots, v_r \in \mathcal{Z}(\mathfrak{s})$ *sa svojstvima:*

(*a*) $\gamma_0(v_1), \ldots, \gamma_0(v_r)$ *su homogeni elementi od* $S(\mathfrak{h})^{W_0}$.

(*b*) *Za svaki* $v \in \mathcal{Z}(\mathfrak{s})$ *postoje jedinstveni* $z_1, \ldots, z_r \in \mathcal{Z}(\mathfrak{g})$ *takvi da je*

$$v = \sum_{i=1}^{r} \mu(z_i) v_i.$$

Nadalje, $\deg z_i + \deg v_i \leq \deg v$ *za* $i = 1, \ldots, r$.

U daljnjem će stalno C označavati negativnu Weylovu komoru u $\mathfrak{a}$ i $\overline{C}$ njen zatvarač:

$$C = \{H \in \mathfrak{a};\ \alpha(H) < 0\ \ \forall \alpha \in \Sigma_+\}, \qquad \overline{C} = \{H \in \mathfrak{a};\ \alpha(H) \leq 0\ \ \forall \alpha \in \Sigma_+\}.$$

Nadalje, stavljamo

$$A_- = \exp C, \quad \overline{A}_- = \exp \overline{C}, \quad C_+ = -C, \quad \overline{C}_+ = -\overline{C}, \quad A_+ = \exp C_+, \quad \overline{A}_+ = \exp \overline{C}_+.$$

Za svaki $\alpha \in \Sigma_+$ definiramo funkcije $f_\alpha^\pm : A_- \to \mathbb{C}$ sa

$$f_\alpha^\pm(\exp H) = \frac{1}{\mathrm{e}^{-\alpha(H)} \pm 1}, \qquad H \in C.$$

Neka je $\mathcal{F}_0$ algebra nad $\mathbb{C}$ (bez jedinice) generirana sa $\{f_\alpha^\pm;\ \alpha \in \Sigma_+\}$ i $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 \dotplus \mathbb{C}1$.

Lema 2.2.10. *Neka su* $\alpha \in \Sigma_+$ *i* $X \in \mathfrak{g}_\alpha$ *i neka su* $Y \in \mathfrak{k}$ *i* $Z \in \mathfrak{p}$ *takvi da je* $\vartheta(X) = Y + Z$. *Tada vrijedi*

$$X = 2\left(f_\alpha^+(a) + f_\alpha^+(a) f_\alpha^-(a)\right)(Ad\, a^{-1})Y - 2 f_\alpha^+(a) f_\alpha^-(a) Y \qquad \forall a \in A_-.$$

Dokaz: Neka je $H \in C$, $a = \exp H \in A_-$ i $t = \alpha(H)$. Imamo $X + \vartheta(X) = 2Y$, tj. $\vartheta(X) = 2Y - X$, pa je

$$(Ad\, a^{-1})Y = \frac{1}{2}((Ad\, a^{-1})X + (Ad\, a^{-1})\vartheta(X)) = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{-1}X + \mathrm{e}^t \vartheta(X)) = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{-1} - \mathrm{e}^t)X + \mathrm{e}^t Y.$$

Dakle,

$$X = \frac{2}{e^{-t} - e^{t}}(Ad\, a^{-1})Y - \frac{2e^{t}}{e^{-t} - e^{t}}Y.$$

Odatle slijedi tvrdnja leme jer je

$$2\left(f_\alpha^+(a) + f_\alpha^+(a)f_\alpha^-(a)\right) = \frac{2}{e^{-t}+1}\left(1 + \frac{1}{e^{-t}-1}\right) = \frac{2e^{-t}}{e^{-2t}-1} = \frac{2}{e^{-t}-e^{t}}$$

i

$$2f_\alpha^+(a)f_\alpha^-(a) = \frac{2}{e^{-2t}-1} = \frac{2e^{t}}{e^{-t}-e^{t}}.$$

Lema 2.2.11. *Neka je $u \in U_n(\mathfrak{g})$. Postoje $x_j, z_j \in U(\mathfrak{k})$, $h_j \in U_{n-1}(\mathfrak{a})$, $f_j \in \mathcal{F}_0$, $1 \leq j \leq p$, takvi da je*

$$u = P(u) + \sum_{j=1}^{p} f_j(a)[(Ad\, a^{-1})x_j]h_j z_j \qquad \forall a \in A_-.$$

Dokaz provodimo indukcijom po $n \in \mathbb{Z}_+$. Za $n = 0$ tvrdnja je trivijalna. Neka je $u \in U_m(\mathfrak{g})$, $m \in \mathbb{N}$, i pretpostavimo da je lema dokazana za $n \leq m-1$. Imamo $u - P(u) \in \mathfrak{n}U_{m-1}(\mathfrak{g})$, pa postoje $\beta_1, \ldots, \beta_s \in \Sigma_+$, $X_j \in \mathfrak{g}_{\beta_j}$ za $j = 1, \ldots, s$ i $v_1, \ldots, v_s \in U_{m-1}(\mathfrak{g})$, takvi da je

$$u - P(u) = \sum_{j=1}^{s} X_j v_j.$$

Po lemi 2.2.10. postoje $g_j, g_j' \in \mathcal{F}_0$ i $V_j \in \mathfrak{k}$, $1 \leq j \leq s$, takvi da je

$$X_j = g_j(a)V_j + g_j'(a)(Ad\, a^{-1})V_j \qquad \text{za} \quad 1 \leq j \leq s \quad \text{i} \quad \forall a \in A_-.$$

Odatle je za svaki $a \in A_-$

$$u - P(u) = \sum_{j=1}^{s}\left(g_j(a)V_j v_j + g_j'(a)\left[\left(Ad\, a^{-1}\right)V_j\right]v_j\right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{s}\left(g_j(a)[V_j, v_j] + g_j(a)v_j V_j + g_j'(a)\left[\left(Ad\, a^{-1}\right)V_j\right]v_j\right)$$

Sada još samo treba primijeniti pretpostavku indukcije na $[V_j, v_j] \in U_{m-1}(\mathfrak{g})$ i na $v_j \in U_{m-1}(\mathfrak{g})$.

U sljedećoj lemi sa $u \mapsto u^\circ$ je označen automorfizam algebre $U(\mathfrak{s})$ koji je invers automorfizma $u \mapsto u^*$.

Lema 2.2.12. *Neka su $v_1 = 1, v_2, \ldots, v_r \in \mathcal{Z}(\mathfrak{s})$ elementi iz propozicije 2.2.9. Za svaki $u \in U(\mathfrak{g})$ postoje $x_j, y_j \in U(\mathfrak{k})$, $w_j \in \sum_{1\leq k\leq r}\mathcal{Z}(\mathfrak{g})v_k^\circ$ i $f_j \in \mathcal{F}$, $1 \leq j \leq p$, takvi da je*

$$u = \sum_{j=1}^{p} f_j(a)\left[\left(Ad\, a^{-1}\right)x_j\right]w_j y_j \qquad \forall a \in A_-.$$

Dokaz provodimo indukcijom po $\deg u$. Ako je $\deg u = 0$ tvrdnja je očita: možemo uzeti $p = 1$, $f_1 = 1$, $x_1 = y_1 = 1$, $w_1 = u \in \mathbb{C}$. Pretpostavimo da je $n \in \mathbb{N}$ i da je tvrdnja leme dokazana ako je deg $u \leq n-1$. Neka je deg $u = n$. Tada je $u - P(u) \in \mathfrak{n}U_{n-1}(\mathfrak{g})$ i $P(u) \in U_n(\mathfrak{g}) \cap U(\mathfrak{a})U(\mathfrak{k})$. Prema tome je

$$P(u) = \sum_{j=1}^{p} h_j k_j, \qquad h_j \in U(\mathfrak{a}), \quad k_j \in U(\mathfrak{k}), \quad \deg h_j + \deg k_j \leq n.$$

Prema propoziciji 2.2.9. postoje $u_{jk} \in \mathcal{Z}(\mathfrak{g})$, $1 \leq k \leq r$, $1 \leq j \leq p$, takvi da je

$$h_j^* = \sum_{k=1}^{r} P(u_{jk})^* v_k \qquad \text{i} \qquad \deg u_{jk} + \deg v_k \leq \deg h_j.$$

Tada je

$$h_j = \sum_{k=1}^{r} P(u_{jk}) v_k^\circ$$

pa nalazimo

$$h_j - \sum_{k=1}^{r} u_{jk} v_k^\circ = \sum_{k=1}^{r} (P(u_{jk}) - u_{jk}) v_k^\circ \in \mathfrak{n}U(\mathfrak{g}).$$

Odatle je

$$P(u) - \sum_{j=1}^{p} \sum_{k=1}^{r} u_{jk} v_k^\circ k_j = \sum_{j=1}^{p} \left(h_j - \sum_{k=1}^{r} u_{jk} v_k^\circ \right) k_j \in \mathfrak{n}U_{n-1}(\mathfrak{g}),$$

pa dobivamo

$$u - \sum_{j=1}^{p} \sum_{k=1}^{r} u_{jk} v_k^\circ k_j \in \mathfrak{n}U_{n-1}(\mathfrak{g}).$$

Stoga postoji $q \in N$ i za $i = 1, \ldots, q$ postoje $\beta_i \in \Sigma_+$, $X_i \in \mathfrak{g}_{\beta_i}$ i $s_i \in U_{n-1}(\mathfrak{g})$ takvi da je

$$u = \sum_{j=1}^{p} \sum_{k=1}^{r} u_{jk} v_k^\circ k_j + \sum_{i=1}^{q} X_i s_i.$$

Prema lemi 2.2.10. postoje $Y_i \in \mathfrak{k}$ i $g_i, f_i \in \mathcal{F}_0$ za $1 \leq i \leq q$ takvi da je

$$X_i = g_i(a) Y_i + f_i(a) \left(Ad\, a^{-1} \right) Y_i \qquad \forall a \in A_-.$$

Odatle nalazimo da za svaki $a \in A_-$ vrijedi

$$u = \sum_{j=1}^{p} \sum_{k=1}^{r} u_{jk} v_k^\circ k_j + \sum_{i=1}^{q} \left(f_i(a) \left[\left(Ad\, a^{-1} \right) Y_i \right] s_i + g_i(a) [Y_i, s_i] + g_i(a) s_i Y_i \right).$$

Lema slijedi primjenom pretpostavke indukcije na $s_i \in U_{n-1}(\mathfrak{g})$ i na $[Y_i, s_i] \in U_{n-1}(\mathfrak{g})$.

2.3 Sferičke funkcije i radijalni dio diferencijalnog operatora

Iz činjenice da je zatvarač Weylove komore $\overline{C}$ fundamentalna domena za djelovanje Weylove grupe $W = W(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$ na $\mathfrak{a}$ i da se u tom djelovanju grupa W identificira s kvocijentnom grupom M'/M, gdje je $M' = N_K(\mathfrak{a}) = \{k \in K;\ (Ad\,k)\mathfrak{a} = \mathfrak{a}\}$, izvodi se da je $G = K\overline{A}_-K$. Stavimo $G_- = KA_-K$. To je otvorena podmnogostrukost od G gusta u G. Nadalje, nije teško vidjeti da ako su $k_1, k_1', k_2, k_2' \in K$ i $a, a' \in A_-$ takvi da je $k_1ak_2 = k_1'a'k_2'$, onda je $a = a'$ i $k_1^{-1}k_1' = k_2k_2'^{-1} \in M$. Napokon, vrijedi $G_- \cap A = A' = \exp \mathfrak{a}'$, gdje je $\mathfrak{a}' = \{H \in \mathfrak{a};\ \alpha(H) \neq 0\ \ \forall \alpha \in \Sigma\}$.

U daljnjem su stalno τ_1 i τ_2 neprekidne reprezentacije grupe K na konačnodimenzionalnim kompleksnim vektorskim prostorima V_1 i V_2. Stavljamo

$$\tau = (\tau_1, \tau_2), \qquad X(\tau) = Hom_{\mathbb{C}}(V_2, V_1) = Hom(V_2, V_1).$$

$$X_0(\tau) = Hom_M(V_2, V_1) = \{T \in X(\tau);\ \tau_1(m)T = T\tau_2(m)\ \ \forall m \in M\}.$$

Za funkciju $F \in C^\infty(G, X(\tau))$ kažemo da je $\tau-$**sferička funkcija na grupi** G ako vrijedi

$$F(k_1xk_2) = \tau_1(k_1)F(x)\tau_2(k_2) \qquad \forall k_1, k_2\ inK \quad \text{i} \quad \forall x \in G.$$

Sa $C_\tau^\infty(G)$ označavamo prostor svih $\tau-$sferičkih funkcija na grupi G. Budući da je G_- otvorena gusta podmnogostrukost od G, restrikcija $F \mapsto F|G_-$ je linearna injekcija prostora $C_\tau^\infty(G)$ u prostor

$$C_\tau^\infty(G_-) = \{F \in C^\infty(G_-, X(\tau));\ F(k_1xk_2) = \tau_1(k_1)F(x)\tau_2(k_2)\ \ \forall k_1, k_2 \in K \text{ i } \forall x \in G_-\}.$$

Nadalje, stavimo

$$C_\tau^\infty(A_-) = C^\infty(A_-, X_0(\tau)).$$

Propozicija 2.3.1. *Restrikcija $F \mapsto F|A_-$ je izomorfizam vektorskih prostora sa $C_\tau^\infty(G_-)$ na $C_\tau^\infty(A_-)$. Posebno, restrikcija $F \mapsto F|A_-$ je linearna injekcija prostora $C_\tau^\infty(G)$ u prostor $C_\tau^\infty(A_-)$.*

Dokaz: Za $F \in C_\tau^\infty(G_-)$, $a \in A_-$ i $m \in M$ imamo

$$F(a)\tau_2(m) = F(am) = F(ma) = \tau_1(m)F(a).$$

To pokazuje da je $F(a) \in X_0(\tau)$, dakle, $F \mapsto F|A_-$ je linearan operator sa $C_\tau^\infty(G_-)$ u $C_\tau^\infty(A_-)$. Taj je operator injektivan jer je $G_- = KA_-K$. Neka je $f \in C_\tau^\infty(A_-)$. Ako su $k_1, k_1', k_2, k_2' \in K$ i $a, a' \in A_-$ takvi da je $k_1ak_2 = k_1'a'k_2'$, onda je $a = a'$ i $m = k_1^{-1}k_1' = k_2k_2'^{-1} \in M$. Tada je $k_1' = k_1m$ i $k_2 = mk_2'$, pa nalazimo

$$\tau_1(k_1')f(a')\tau_2(k_2') = \tau_1(k_1)\tau_1(m)f(a)\tau_2(k_2') = \tau_1(k_1)f(a)\tau_2(m)\tau_2(k_2') = \tau_1(k_1)f(a)\tau_2(k_2).$$

To pokazuje da možemo definirati funkciju $F : G_- \to X(\tau)$ ovako

$$F(k_1ak_2) = \tau_1(k_1)f(a)\tau_2(k_2), \qquad k_1, k_2 \in K, \quad a \in A_-.$$

Tada je očito $F \in C_\tau^\infty(G_-)$ i $F|A_- = f$. Time je dokazano da je $F \mapsto F|A_-$ surjekcija sa $C_\tau^\infty(G_-)$ na $C_\tau^\infty(A_-)$.

Ako je F $C^\infty-$funkcija na otvorenoj podmnogostrukosti od G i $X \in \mathfrak{g}$, definiramo $C^\infty-$funkciju XF sa

$$(XF)(y) = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F(y \exp tX)\right|_{t=0}.$$

To se djelovanje Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ proširuje na $U(\mathfrak{g})$. Na taj način za svaki otvoren podskup $\mathcal{O} \subseteq G$ svaki element $u \in U(\mathfrak{g})$ postaje diferencijalni operator na $C^\infty(\mathcal{O})$ reda deg u.

Lema 2.3.2. *Za $F \in C_\tau^\infty(G_-)$, $u \in U(\mathfrak{g})$, $k_1, k_2 \in K$ i $x \in G_-$ vrijedi*

$$(uF)(k_1xk_2) = \tau_1(k_1)\left([(Ad\, k_2)\, u]\, F\right)(x)\tau_2(k_2).$$

Dokaz: Možemo pretpostaviti da je $u = X_1 \cdots X_n$ za neke $X_1, \ldots, X_n \in \mathfrak{g}$. Tada imamo redom

$$(uF)(k_1xk_2) = \frac{\partial}{\partial t_1} \cdots \frac{\partial}{\partial t_n} F(k_1xk_2(\exp\, t_1X_1) \cdots (\exp\, t_nX_n))\Big|_{t_1=\cdots=t_n=0} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial t_1} \cdots \frac{\partial}{\partial t_n} F(k_1x(\exp\, t_1(Ad\, k_2)X_1) \cdots (\exp\, t_n(Ad\, k_2)X_n)k_2)\Big|_{t_1=\cdots=t_n=0} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial t_1} \cdots \frac{\partial}{\partial t_n} \tau_1(k_1)F(k_1x(\exp\, t_1(Ad\, k_2)X_1) \cdots (\exp\, t_n(Ad\, k_2)X_n))\tau_2(k_2)\Big|_{t_1=\cdots=t_n=0} =$$

$$= \tau_1(k_1)\left([(Ad\, k_2)X_1] \cdots [(Ad\, k_2)X_n]F\right)(x)\tau_2(k_2) = \tau_1(k_1)\left([(Ad\, k_2)\, u]\, F\right)(x)\tau_2(k_2).$$

Odatle neposredno slijedi:

Propozicija 2.3.3. *Za $F \in C_\tau^\infty(G_-)$ i $u \in U(\mathfrak{g})^K$ je $uF \in C_\tau^\infty(G_-)$. Drugim riječima, $C_\tau^\infty(G_-)$ je lijevi $U(\mathfrak{g})^K-$modul.*

Zbog propozicija 2.3.1. i 2.3.3. za svaki $u \in U(\mathfrak{g})^K$ postoji jedinstven linearan operator $\Omega_\tau(u) : C_\tau^\infty(A_-) \to C_\tau^\infty(A_-)$ takav da je

$$\Omega_\tau(u)(F|A_-) = (uF)|A_- \qquad \forall F \in C_\tau^\infty(G_-).$$

Nadalje, Ω_τ je unitalni homomorfizam algebre $U(\mathfrak{g})^K$ u algebru $End(C_\tau^\infty(A_-))$ linearnih operatora na prostoru $C_\tau^\infty(A_-)$. Operator $\Omega_\tau(u)$ zovemo $\tau-$**radijalni dio** od $u \in U(\mathfrak{g})^K$. Cilj je ovog poglavlja da se dokaže da je $\Omega_\tau(u)$ diferencijalni operator na $C_\tau^\infty(A_-)$ za svaki $u \in U(\mathfrak{g})^K$ i da je tako definirano preslikavanje Ω_τ homomorfizam unitalnih algebri.

U daljnjem sa $\mathcal{D}_\tau(A_-)$ označavamo unitalnu algebru linearnih diferencijalnih operatora s analitičkim koeficijentima na prostoru $X_0(\tau)-$značnih funkcija na A_-. Definirat ćemo sada linearno preslikavanje $D_\tau : U(\mathfrak{a})U(\mathfrak{k})^M \to \mathcal{D}_\tau(A_-)$. Prije svega, za svaku funkciju $f \in C_\tau^\infty(A_-)$ i za svaki $a \in A_-$ definiramo preslikavanje $F_{f,a} : U(\mathfrak{a}) \times U(\mathfrak{k})^M \to X(\tau) = Hom(V_2, V_1)$ ovako

$$F_{f,a}(h, v) = (hf)(a)\tau_2(v), \qquad h \in U(\mathfrak{a}), \quad v \in U(\mathfrak{k})^M.$$

Uočimo da je slika tog preslikavanja sadržana u $X_0(\tau) = Hom_M(V_2, V_1)$. Doista, ako je $f \in C_\tau^\infty(A_-)$, tada je i $hf \in C_\tau^\infty(A_-)$, tj. $(hf)(a) \in X_0(\tau)$ za $a \in A_-$, pa za svaki $m \in M$ vrijedi

$$\tau_1(m)F_{f,a}(h, v) = \tau_1(m)(hf)(a)\tau_2(v) = (hf)(a)\tau_2(m)\tau_2(v) = (hf)(a)\tau_2(v)\tau_2(m) = F_{f,a}(h, v)\tau_2(m).$$

Prema tome, $F_{f,a}$ je preslikavanje sa $U(\mathfrak{a}) \times U(\mathfrak{k})^M$ u $X_0(\tau)$. To je preslikavanje bilinearno, pa po univerzalnom svojstvu tenzorskog produkta $U(\mathfrak{a}) \otimes U(\mathfrak{k})^M \simeq U(\mathfrak{a})U(\mathfrak{k})^M$ postoji jedinstveno linearno preslikavanje $\Phi_{f,a} : U(\mathfrak{a})U(\mathfrak{k})^M \to X_0(\tau)$ takvo da vrijedi

$$\Phi_{f,a}(u) = \sum_{i=1}^{s} (h_if)(a)\tau_2(v_i) \qquad \text{za} \quad u = \sum_{i=1}^{s} h_iv_i, \quad u_i \in U(\mathfrak{a}), \quad v_i \in U(\mathfrak{k})^M.$$

Za svaki $u \in U(\mathfrak{a})U(\mathfrak{k})^M$ i svaku funkciju $f \in C_\tau(A_-)$ preslikavanje $a \mapsto \Phi_{f,a}(u)$ sa A_- u $X_0(\tau)$ je klase C^∞. Tu funkciju označimo sa $D_\tau(u)f$. Dakle,

$$(D_\tau(u)f)(a) = \sum_{i=1}^{s}(h_i f)(a)\tau_2(v_i) \quad \text{za } f \in C_\tau(A_-),\ a \in A_-,\ u = \sum_{i=1}^{s} h_i v_i,\ h_i \in U(\mathfrak{a}),\ v_i \in U(\mathfrak{k})^M.$$

Kako je za svaki $h \in U(\mathfrak{a})$ preslikavanje $f \mapsto hf$, $f \in C_\tau(A_-)$, element algebre $\mathcal{D}_\tau(A_-)$, iz gornje formule se vidi da je $D_\tau(u) \in \mathcal{D}_\tau(A_-)$, odnosno, definirali smo linearno preslikavanje $D_\tau : U(\mathfrak{a})U(\mathfrak{k})^M \to \mathcal{D}_\tau(A_-)$.

Lema 2.3.4. *Preslikavanje $D_\tau : U(\mathfrak{a})U(\mathfrak{k})^M \to \mathcal{D}_\tau(A_-)$ je antihomomorfizam unitalnih algebri; pri tome je $U(\mathfrak{a})U(\mathfrak{k})^M$ algebra s množenjem $\bullet$.*

Dokaz: Neka su $f \in C_\tau^\infty(A_-)$, $h, h' \in U(\mathfrak{a})$ i $v, v' \in U(\mathfrak{k})^M$. Stavimo $f' = D_\tau(h'v')f$. Tada za svaki $a \in A_-$ imamo $f'(a) = (h'f)(a)\tau_2(v')$, pa slijedi

$$(D_\tau(hv)D_\tau(h'v')f)(a) = (D_\tau(hv)f')(a) = (hf')(a)\tau_2(v) = (hh'f)(a)\tau_2(v')\tau_2(v) =$$

$$= (h'hf)(a)\tau_2(v'v) = (D_\tau(h'hv'v)f)(a) = (D_\tau(h'v' \bullet hv)f)(a).$$

Dakle, $D_\tau(u_1 \bullet u_2) = D_\tau(u_2)D_\tau(u_1)\ \ \forall u_1, u_2 \in U(\mathfrak{a})U(\mathfrak{k})^M$.

Definiramo sada preslikavanje $P_\tau : U(\mathfrak{g})^K \to \mathcal{D}_\tau(A_-)$ sa

$$P_\tau(u) = D_\tau(P(u)), \qquad u \in U(\mathfrak{g})^K.$$

Budući da je prema tvrdnji (c) propozicije 2.2.1. $P : U(\mathfrak{g})^K \to U(\mathfrak{a})U(\mathfrak{k})^M$ antihomomorfizam, iz leme 2.3.4. neposredno slijedi

Propozicija 2.3.5. *$P_\tau : U(\mathfrak{g})^K \to \mathcal{D}_\tau(A_-)$ je homomorfizam unitalnih algebri.*

Teorem 2.3.6. *Za $n \in \mathbb{N}$ i za $u \in U_n(\mathfrak{g})^K$ postoje $f_1, \ldots, f_p \in \mathcal{F}_0$, $A_1, \ldots, A_p \in End(X_0(\tau))$ i $h_1, \ldots, h_p \in U_{n-1}(\mathfrak{a})$ takvi da je*

$$\Omega_\tau(u) = P_\tau(u) + \sum_{j=1}^{p} f_j A_j D_\tau(h_j).$$

Posebno, $\Omega_\tau(u) \in \mathcal{D}_\tau(A_-)$ i vrijedi $\deg \Omega_\tau(u) \leq \deg u\ \ \forall u \in U(\mathfrak{g})^K$. Napokon, preslikavanje $\Omega_\tau : U(\mathfrak{g})^K \to \mathcal{D}_\tau(A_-)$ je homomorfizam unitalnih algebri.

Dokaz: Prema lemi 2.2.11. postoje $x_j, z_j \in U(\mathfrak{k})$, $h_j \in U_{n-1}(\mathfrak{a})$ i $f_j \in \mathcal{F}_0$, $1 \leq j \leq p$, takvi da je

$$u = P(u) + \sum_{j=1}^{p} f_j(a)\left[\left(Ad\, a^{-1}\right) x_j\right] h_j z_j \qquad \forall a \in A_-.$$

Kako je $u \in U(\mathfrak{g})^K$, vrijedi $P(u) \in U(\mathfrak{a})U(\mathfrak{k})^M$, dakle, za svaki $m \in M$ i svaki $a \in A_-$ imamo

$$u = (Ad\, m)u = P(u) + \sum_{j=1}^{p} f_j(a)\left[\left(Ad\, a^{-1}\right)(Ad\, m)x_j\right] h_j (Ad\, m) z_j. \tag{2.1}$$

Neka je $\varphi \in C_\tau^\infty(A_-)$ proizvoljna. Po propoziciji 2.3.1. postoji jedinstvena $\Phi \in C_\tau^\infty(G_-)$ takva da je $\Phi|A_- = \varphi$. Po definiciji $\tau-$radijalnog dijela imamo

$$\Omega_\tau(u)\varphi = (u\Phi)|A_-.$$

Za svaki $a \in A_-$ i svaki $m \in M$ prema (2.1) je

$$(u\Phi)(a) = (P(u)\Phi)(a) + \sum_{j=1}^{p} f_j(a) \left(\left[\left(Ad\, a^{-1}\right)(Ad\, m)x_j\right] h_j \left[(Ad\, m)z_j\right] \Phi\right)(a). \tag{2.2}$$

Nadalje, za $h \in U(\mathfrak{a})$ i $v \in U(\mathfrak{k})^M$ je $(v\Phi)(a) = \Phi(a)\tau_2(v)$, pa dobivamo

$$(hv\Phi)(a) = (h\Phi)(a)\tau_2(v) = \left[D_\tau(hv)(\Phi|A_-)\right](a) = \left(D_\tau(hv)\varphi\right)(a).$$

Kako je $P(u) \in U(\mathfrak{a})U(\mathfrak{k})^M$, slijedi

$$(P(u)\Phi)(a) = \left(D_\tau(P(u))\varphi\right)(a) = \left(P_\tau(u)\varphi\right)(a). \tag{2.3}$$

Nadalje, za svaki $j = 1, \dots, p$, $a \in A_-$ i $m \in M$ vrijedi

$$\left(\left[\left(Ad\, a^{-1}\right)(Ad\, m)x_j\right] h_j \left[(Ad\, m)z_j\right] \Phi\right)(a) = \tau_1\left((Ad\, m)x_j\right)\left(D_\tau(h_j)\varphi\right)(a)\tau_2\left((Ad\, m)z_j\right). \tag{2.4}$$

Za dokaz te jednakosti možemo pretpostaviti da je

$$(Ad\, m)x_j = X_1 \cdots X_k, \qquad h_j = H_1 \cdots H_m \qquad \text{i} \qquad (Ad\, m)z_j = Y_1 \cdots Y_\ell$$

za neke $X_1, \dots, X_k, Y_1, \dots, Y_\ell \in \mathfrak{k}$ i $H_1, \dots, H_m \in \mathfrak{a}$. Tada uz oznake

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_0 := \left.\frac{\partial}{\partial t_1}\right|_{t_1=0} \cdots \left.\frac{\partial}{\partial t_k}\right|_{t_k=0}, \qquad \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_0 := \left.\frac{\partial}{\partial s_1}\right|_{s_1=0} \cdots \left.\frac{\partial}{\partial s_m}\right|_{s_m=0}, \qquad \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\right|_0 := \left.\frac{\partial}{\partial r_1}\right|_{r_1=0} \cdots \left.\frac{\partial}{\partial r_\ell}\right|_{r_\ell=0},$$

imamo redom

$$\begin{aligned}
&\left(\left[\left(Ad\, a^{-1}\right)(Ad\, m)x_j\right] h_j \left[(Ad\, m)z_j\right] \Phi\right)(a) = \\
&= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_0 \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_0 \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\right|_0 \Phi\left(a(\exp\, t_1(Ad\, a^{-1})X_1) \cdots (\exp\, t_k(Ad\, a^{-1})X_k)(\exp\, s_1H_1) \cdots (\exp\, s_mH_m)(\exp\, r_1Y_1) \cdots (\exp\, r_\ell Y_\ell)\right) = \\
&\qquad = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_0 \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_0 \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\right|_0 \Phi\left((\exp\, t_1X_1) \cdots (\exp\, t_kX_k)a(\exp\, s_1H_1) \cdots (\exp\, s_mH_m)(\exp\, r_1Y_1) \cdots (\exp\, r_\ell Y_\ell)\right) = \\
&\qquad = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_0 \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_0 \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\right|_0 \tau_1(\exp\, t_1X_1 \cdots \exp\, t_kX_k)\Phi\left(a(\exp\, s_1H_1) \cdots (\exp\, s_mH_m)\right)\tau_2(\exp\, r_1Y_1 \cdots \exp\, r_\ell Y_\ell) = \\
&\qquad\quad = \tau_1(X_1 \cdots X_k)(H_1 \cdots H_m\Phi)(a)\tau_2(Y_1 \cdots Y_\ell) = \tau_1\left((Ad\, m)x_j\right)\left(h_j\Phi\right)(a)\tau_2\left((Ad\, m)z_j\right).
\end{aligned}$$

Odatle slijedi jednakost (.4), jer je $\left(h_j\Phi\right)(a) = \left(h_j\varphi\right)(a) = \left(D_\tau(h_j)\varphi\right)(a)$. Sada iz (2.3) i (2.4) slijedi

$$\left(\Omega_\tau(u)\varphi\right)(a) = (u\Phi)(a) = \left(P_\tau(u)\varphi\right)(a) + \sum_{j=1}^{p} f_j(a)\tau_1\left((Ad\, m)x_j\right)\left(D_\tau(h_j)\varphi\right)(a)\tau_2\left((Ad\, m)z_j\right).$$

Ovu jednakost integriramo po $Ad\, m$ u odnosu na normiranu Haarovu mjeru μ na kompaktnoj grupi $Ad\, M \simeq M/Z$, pa dobivamo

$$\left(\Omega_\tau(u)\varphi\right)(a) = \left(P_\tau(u)\varphi\right)(a) + \sum_{j=1}^{p} f_j(a) \int_{Ad\, M} \tau_1\left((Ad\, m)x_j\right)\left(D_\tau(h_j)\varphi\right)(a)\tau_2\left((Ad\, m)z_j\right) \mathrm{d}\mu(Ad\, m). \tag{2.5}$$

Definiramo sada linearne operatore $A_1, \ldots, A_p : X_0(\tau) \to X(\tau)$ ovako:

$$A_j T = \int_{Ad\,M} \tau_1\left((Ad\,m)x_j\right) T \tau_2\left((Ad\,m)z_j\right) \mathrm{d}\mu(Ad\,m), \qquad T \in X_0(\tau).$$

Za svaki $n \in M$ i $T \in X_0(\tau)$ tada imamo

$$\tau_1(n) A_j T \tau_2(n^{-1}) = \int_{Ad\,M} \tau_1(n)\tau_1\left((Ad\,m)x_j\right) T \tau_2\left((Ad\,m)z_j\right) \tau_2(n^{-1}) \mathrm{d}\mu(Ad\,m).$$

Međutim,

$$\tau_1(n)\tau_1\left((Ad\,m)x_j\right) = \tau_1(n)\tau_1(m)\tau_1(x_j)\tau_1(m^{-1}) = \tau_1(nm)\tau_1(x_j)\tau_1\left((nm)^{-1}\right)\tau_1(n) =$$

$$= \tau_1\left((Ad\,nm)x_j\right)\tau_1(n) = \tau_1\left((Ad\,n)(Ad\,m)x_j\right)\tau_1(n)$$

i, slično,

$$\tau_2\left((Ad\,m)z_j\right)\tau_2(n^{-1}) = \tau_2(m)\tau_2(z_j)\tau_2\left((nm)^{-1}\right) = \tau_2(n^{-1})\tau_2(nm)\tau_2(z_j)\tau_2\left((nm)^{-1}\right) =$$

$$= \tau_2(n^{-1})\tau_2\left((Ad\,nm)z_j\right) = \tau_2(n^{-1})\tau_2\left((Ad\,n)(Ad\,m)z_j\right).$$

Budući da je mjera μ invarijantna i budući da je $T \in X_0(\tau) = Hom_M(V_2, V_1)$, dobivamo

$$\tau_1(n)A_jT\tau_2(n^{-1}) = \int_{Ad\,M} \tau_1\left((Ad\,n)(Ad\,m)x_j\right)\tau_1(n)T\tau_2(n^{-1})\tau_2\left((Ad\,n)(Ad\,m)z_j\right)\mathrm{d}\mu(Ad\,m) =$$

$$= \int_{Ad\,M} \tau_1\left((Ad\,m)x_j\right) T \tau_2\left((Ad\,m)z_j\right) \mathrm{d}\mu(Ad\,m) = A_jT.$$

To pokazuje da je $A_jT \in X_0(\tau)$, odnosno, $A_j \in End(X_0(\tau))$. Sada iz (2.5) slijedi

$$\left(\Omega_\tau(u)\varphi\right)(a) = \left(P_\tau(u)\varphi\right)(a) + \sum_{j=1}^{p} f_j(a) A_j \left(D_\tau(h_j)\varphi\right)(a).$$

Kako su $\varphi \in C_\tau(A_-)$ i $a \in A_-$ bili proizvoljni, time je dokazana jednakost

$$\Omega_\tau(u) = P_\tau(u) + \sum_{j=1}^{p} f_j A_j D_\tau(h_j).$$

Iz te jednakosti je jasno da je Ω_τ preslikavanje algebre $U(\mathfrak{k})^K$ u algebru $\mathcal{D}_\tau(A_-)$ i da vrijedi $\deg \Omega_\tau(u) \leq \deg u$ za svaki $u \in U(\mathfrak{k})^K$. Iz definicije operatora $\Omega_\tau(u)$, $u \in U(\mathfrak{g})^K$, vidi se da je preslikavanje $u \mapsto \Omega_\tau(u)$ linearno, a također da je to homomorfizam unitalnih algebri: za $u_1, u_2 \in U(\mathfrak{g})^K$, za $\varphi \in C_\tau^\infty(A_-)$ i za $F \in C_\tau^\infty(G_-)$ takvu da je $F|A_- = \varphi$ imamo

$$\Omega_\tau(u_1u_2)\varphi = \Omega_\tau(u_1u_2)(F|A_-) = (u_1u_2F)|A_- =$$

$$= \Omega_\tau(u_1)((u_2F)|A_-) = \Omega_\tau(u_1)\Omega_\tau(u_2)(F|A_-) = \Omega_\tau(u_1)\Omega_\tau(u_2)\varphi.$$

Time je teorem u potpunosti dokazan.

2.4 Razvoj sferičkih funkcija

U daljnjem A identificiramo sa $\mathbb{R}^\ell \subseteq \mathbb{C}^\ell$ pomoću karte dobivene preko baze $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell\}$ sistema korijena Σ određene izborom Σ_+. Dakle, stavljamo

$$\exp H = (\alpha_1(H), \ldots, \alpha_\ell(H)), \qquad H \in \mathfrak{a}.$$

Uz oznake iz prvog poglavlja tada je $A_- = \mathbb{R}^\ell(0)$ i $\overline{A}_- = Cl\left(\mathbb{R}^\ell(0)\right)$. Neka je $\{H_1, \ldots, H_\ell\}$ baza od $\mathfrak{a}$ dualna bazi $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell\}$ od $\mathfrak{a}^*$. Identifikacija A sa $\mathbb{R}^\ell$ može se tada ovako zapisati:

$$t = \exp(t_1 H_1 + \cdots + t_\ell H_\ell), \qquad t = (t_1, \ldots, t_\ell) \in \mathbb{R}^\ell.$$

Za $\alpha \in \Sigma_+$ imamo $\alpha = m_1\alpha_1 + \cdots + m_\ell\alpha_\ell$, $(m_1, \ldots, m_\ell) = m \in \mathbb{Z}_+^\ell$, pa za $t \in A_- = \mathbb{R}^\ell(0)$ imamo

$$f_\alpha^\pm(t) = \varphi_\alpha^\pm(\exp(t_1H_1 + \cdots + t_\ell H_\ell)) = \frac{1}{\mathrm{e}^{-\langle m,t\rangle} \pm 1}.$$

Prema tome, $f_\alpha^\pm$ se proširuje do funkcije iz $\mathcal{H}(\mathbb{C}^\ell(0))$ koju označavamo istim znakom:

$$f_\alpha^\pm(z) = \frac{1}{\mathrm{e}^{-\langle m,z\rangle} \pm 1}, \qquad z \in \mathbb{C}^\ell(0).$$

Tada je $f_\alpha^\pm = (g_\alpha^\pm)\tilde{}$, gdje je $g_\alpha^\pm$ funkcija iz $\mathcal{H}(D^\ell)$ zadana sa

$$g_\alpha^\pm(z) = \frac{1}{z^{-m} \pm 1} = \frac{z^m}{1 \pm z^m}, \qquad z \in D^\ell.$$

Dakle, $f_\alpha^\pm \in \hat{\mathcal{H}}(\mathbb{C}^\ell(0))$. Nadalje, $f_\alpha^\pm(\infty) = g_\alpha^\pm(0) = 0$. Prema tome, $\mathcal{F}$ postaje podalgebra od $\hat{\mathcal{H}}(\mathbb{C}^\ell(0))$, a za $f \in \mathcal{F}_0$ je $f(\infty) = 0$, dakle, $\mathcal{F}_0 \subseteq \hat{\mathcal{H}}_\infty(\mathbb{C}^\ell(0))$.

Uz uvedenu kartu na A imamo za $1 \leq i \leq \ell$ i $\varphi \in C^\infty(A) = C^\infty(\mathbb{R}^\ell)$:

$$(H_i f)(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\varphi(\exp(t_1H_1 + \cdots + t_\ell H_\ell)\exp sH_i)\bigg|_{s=0} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\varphi(t_1, \ldots, t_i + s, \ldots, t_\ell)\bigg|_{s=0} = (\partial_i\varphi)(t).$$

Prema tome, algebra $U(\mathfrak{a})$ identificira se s algebrom linearnih diferencijalnih operatora na $\mathcal{H}(\mathbb{C}^\ell)$ s konstantnim koeficijentima.

Iz ovog se razmatranja vidi da za $u \in U(\mathfrak{g})^K$ možemo $\Omega_\tau(u)$ shvatiti kao element od $\hat{\mathcal{D}} = \hat{\mathcal{D}}(\mathbb{C}^\ell(0), X_0(\tau))$; nadalje, kako je $\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{H}_\infty(\mathbb{C}^\ell(0))$, konstantni dio od $\Omega_\tau(u)$ (tj. komponenta u $\mathcal{D}^0$ u odnosu na direktni rastav $\hat{\mathcal{D}} = \mathcal{D}^0 \dotplus \hat{\mathcal{D}}^1$) je upravo $P_\tau(u)$.

Neka su u daljnjem $v_1 = 1, v_2, \ldots, v_r \in \mathcal{Z}(\mathfrak{s})$ izabrani kao u propoziciji 2.2.9.

Lema 2.4.1. *Neka je $D \in \hat{\mathcal{D}}$. Postoje $F_1, \ldots, F_p \in \hat{\mathcal{H}}(\mathbb{C}^\ell(0), End(X_0(\tau)))$ i $u_{jk} \in \mathcal{Z}(\mathfrak{g})$, $1 \leq j \leq p$, $1 \leq k \leq r$, takvi da je*

$$D = \sum_{j=1}^{p}\sum_{k=1}^{r} F_j D_\tau(v_k^\circ)\Omega_\tau(u_{jk}).$$

Dokaz: Budući da je svaki $D \in \hat{\mathcal{D}}$ linearna kombinacija nad $\hat{\mathcal{H}} = \hat{\mathcal{H}}(\mathbb{C}^\ell(0), End(X_0(\tau)))$ operatora s konstantnim koeficijentima, tj. $\hat{\mathcal{H}}-$linearna kombinacija elemenata iz $U(\mathfrak{a})$, u dokazu možemo pretpostaviti da je $D = u \in U(\mathfrak{a})$, odnosno, $D = D_\tau(u)$. Nadalje, zbog holomorfnosti gornju je jednakost dovoljno dokazati na funkcijama iz $C_\tau^\infty(A_-)$.

Neka je, dakle, $\varphi \in C_\tau^\infty(A_-)$ i neka je $\Phi \in C_\tau^\infty(G_-)$ takva da je $\Phi|A_- = \varphi$. Tada je

$$u\varphi = (u\Phi)|A_- = D_\tau(u)\varphi.$$

Nadalje, za $x \in \mathcal{Z}(\mathfrak{m})$ i $a \in A_-$ imamo

$$(D_\tau \varphi)(a) = \varphi(a)\tau_2(x) = \tau_1(x)\varphi(a).$$

Po lemi 2.2.12. postoje $x_1, \dots, x_p, y_1, \dots, y_p \in U(\mathfrak{k})$, $w_1, \dots, w_p \in \sum_{1 \le j \le r} \mathcal{Z}(\mathfrak{g}) v_j^\circ$ i $f_1, \dots, f_p \in \mathcal{F}$ takve da je

$$u = \sum_{j=1}^{p} f_j(a) \left[\left(Ad\, a^{-1} \right) x_j \right] w_j y_j \qquad \forall a \in A_-.$$

Za svaki $m \in M$ i svaki $a \in A_-$ je tada

$$u = (Ad\, m)u = \sum_{j=1}^{p} f_j(a) \left[\left(Ad\, a^{-1} \right) (Ad\, m) x_j \right] w_j [(Ad\, m) y_j].$$

Odatle kao u dokazu teorema 2.3.6. slijedi

$$(u\varphi)(a) = (u\Phi)(a) = \sum_{j=1}^{p} f_j(a) \tau_1((Ad\, m)x_j)(w_j \Phi)(a) \tau_2((Ad\, m)y_j), \quad a \in A_-, \quad m \in M.$$

Neka su $u_{jk} \in \mathcal{Z}(\mathfrak{g})$, $1 \le j \le p$, $1 \le k \le r$, takvi da je

$$w_j = \sum_{k=1}^{r} u_{jk} v_k^\circ = \sum_{k=1}^{r} v_k^\circ u_{jk}.$$

Dobivamo

$$(u\varphi)(a) = \sum_{j=1}^{p} \sum_{k=1}^{r} f_j(a) \tau_1((Ad\, m)x_j)(v_k^\circ u_{jk} \Phi)(a) \tau_2((Ad\, m)y_j), \quad a \in A_-, \quad m \in M.$$

Međutim, $v_k^\circ \in \mathcal{Z}(\mathfrak{s}) = U(\mathfrak{a})\mathcal{Z}(\mathfrak{m}) \subseteq U(\mathfrak{a})U(\mathfrak{k})^M$, pa slijedi

$$(u\varphi)(a) = \sum_{j=1}^{p} \sum_{k=1}^{r} f_j(a) \tau_1((Ad\, m)x_j)[D_\tau(v_k^\circ)(u_{jk}\Phi)|A_-](a) \tau_2((Ad\, m)y_j), \quad a \in A_-, \quad m \in M.$$

Nadalje, $(u_{jk}\Phi)|A_- = \Omega_\tau(u_{jk})\varphi$. Dakle,

$$(u\varphi)(a) = \sum_{j=1}^{p} \sum_{k=1}^{r} f_j(a) \tau_1((Ad\, m)x_j)[D_\tau(v_k^\circ)\Omega_\tau(u_{jk})\varphi](a) \tau_2((Ad\, m)y_j), \quad a \in A_-, \quad m \in M.$$

Sada kao u dokazu teorema 2.3.6. definiramo operatore $B_j \in End(X_0(\tau))$, $1 \le j \le p$, sa

$$B_j T = \int_{Ad\, M} \tau_1((Ad\, m)x_j) T \tau_2((Ad\, m)y_j) \mathrm{d}\mu(Ad\, m), \qquad T \in X_0(\tau) = Hom_M(V_2, V_1).$$

Integracijom prethodne jednakosti po $Ad\, M$ slijedi

$$u\varphi = \sum_{j=1}^{p} \sum_{k=1}^{r} f_j B_j D_\tau(v_k^\circ) \Omega_\tau(u_{jk}) \varphi$$

i time je lema dokazana.

Teorem 2.4.2. *Neka je $\mathcal{J}$ ideal i $\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$ konačne kodimenzije. Tada sistem jednadžbi*

$$\Omega_\tau(u)\varphi = 0, \qquad u \in \mathcal{J},$$

ima prosti singularitet u ∞.

Dokaz: Treba dokazati da je $\hat{\mathcal{D}}/\hat{\mathcal{D}}\Omega_\tau(\mathcal{J})$ konačno generiran kao lijevi $\hat{\mathcal{H}}-$modul.

Neka je $\{u_1, \ldots, u_s\}$ baza direktnog komplementa od $\mathcal{J}$ u $\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$. Neka je $\mathcal{I} = \hat{\mathcal{D}}\Omega_\tau(\mathcal{J})$ lijevi ideal u $\hat{\mathcal{D}}$ generiran sa $\Omega_\tau(\mathcal{J})$. Neka je $D \in \hat{\mathcal{D}}$. Po lemi 2.4.2. postoje $F_j \in \hat{\mathcal{H}}(\mathbb{C}^\ell(0), End(X_0(\tau)))$ i $u_{jk} \in \mathcal{Z}(\mathfrak{g})$, $1 \leq j \leq p$, $1 \leq k \leq r$, takvi da je

$$D = \sum_{j=1}^{p}\sum_{k=1}^{r} F_j D_\tau(v_k^\circ)\Omega_\tau(u_{jk}).$$

Stavimo

$$D_{ki} = D_\tau(v_k^\circ)\Omega_\tau(u_i) \in \hat{\mathcal{D}}, \qquad 1 \leq k \leq r, \quad 1 \leq i \leq s.$$

Neka su $c_{jki} \in \mathbb{C}$, $1 \leq j \leq p$, $1 \leq k \leq r$, $1 \leq i \leq s$, takvi da je

$$u_{jk} - \sum_{i=1}^{s} c_{jki}u_i \in \mathcal{J}, \qquad 1 \leq j \leq p, \quad 1 \leq k \leq r.$$

Uz oznake

$$F_{ki} = \sum_{j=1}^{p} c_{jki}F_j \in \hat{\mathcal{H}}, \qquad 1 \leq k \leq r, \quad 1 \leq i \leq s,$$

Imamo

$$D - \sum_{k=1}^{r}\sum_{i=1}^{s} F_{kn}D_{kn} =$$

$$= \sum_{j=1}^{p}\sum_{k=1}^{r} F_j D_\tau(v_k^\circ)\Omega_\tau(u_{jk}) - \sum_{j=1}^{p}\sum_{k=1}^{r}\sum_{i=1}^{s} c_{jki}F_j D_\tau(v_k^\circ)\Omega_\tau(u_i) =$$

$$= \sum_{j=1}^{p}\sum_{k=1}^{r} F_j D_\tau(v_k^\circ)\Omega_\tau\left(u_{jk} - \sum_{i=1}^{s} c_{jki}u_i\right) \in \mathcal{I}.$$

Prema tome, lijevi $\hat{\mathcal{H}}-$modul $\hat{\mathcal{D}}/\mathcal{I}$ generiran je sa $\{D_{ki} + \mathcal{I};\ 1 \leq k \leq r,\ 1 \leq i \leq s\}$.

Za ideal $\mathcal{J}$ u $\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$ konačne kodimenzije stavimo

$$C^\infty_{\tau,\mathcal{J}}(G) = \{F \in C^\infty_\tau(G);\ uF = 0\ \forall u \in \mathcal{J}\}.$$

Za svaku funkciju $F \in C^\infty_{\tau,\mathcal{J}}(G)$ njena restrikcija $F|A_- \in C^\infty_\tau(A_-)$ po definiciji preslikavanja Ω_τ zadovoljava

$$\Omega_\tau(u)(F|A_-) = 0 \qquad \forall u \in \mathcal{J}.$$

Neka je ponovo $\mathcal{I} = \hat{\mathcal{D}}\Omega_\tau(\mathcal{J})$ lijevi ideal u $\hat{\mathcal{D}}$ generiran sa $\Omega_\tau(\mathcal{J})$. Prema propoziciji 2.3.1. za svaku funkciju $F \in C^\infty_{\tau,\mathcal{J}}(G)$ postoji jedinstvena funkcija $f \in V(\mathbb{C}^\ell(0), \mathcal{I})$ takva da je $f|A_- = F|A_-$ i tako definirano preslikavanje $F \mapsto f$ je linearna injekcija sa $C_{\tau,\mathcal{J}}(G)$ u $V(\mathbb{C}^\ell(0), \mathcal{I})$. Primijenit ćemo sada rezultate o sistemima linearnih parcijalnih jednadžbi u kompleksnom području. Prije svega, identificiramo $\mathfrak{a}^{*\mathbb{C}}$ sa $\mathbb{C}^\ell$ tako da stavimo

$$z = (z_1, \ldots, z_\ell) = \sum_{i=1}^{\ell} z_i\alpha_i.$$

Stavimo

$$L = \mathbb{Z}^\ell = span_{\mathbb{Z}}\,\Sigma \qquad \text{i} \qquad L_+ = \mathbb{Z}_+^\ell = span_{\mathbb{Z}_+}\,\Sigma_+.$$

Tada uz oznake iz prvog poglavlja za $\lambda, \mu \in \mathfrak{a}^{*\mathbb{C}}$ imamo

$$\lambda \sim \mu \quad \Longleftrightarrow \quad \lambda - \mu \in L \qquad \text{i} \qquad \lambda \gg \mu \quad \Longleftrightarrow \quad \lambda - \mu \in L_+.$$

Za $k \in \mathbb{Z}_+^\ell = L_+$, $k = (k_1, \ldots, k_\ell) = \sum_{1 \le i \le \ell} k_i \alpha_i$, i za $H \in \mathfrak{a}$ stavimo

$$\alpha(H)^k = \alpha_1(H)^{k_1} \cdots \alpha_\ell(H)^{k_\ell}.$$

Kao i prije, sa C je označena negativna Weylova komora u $\mathfrak{a}$ u odnosu na Σ_+. Nadalje, za $\varepsilon \in \mathbb{R}$ uvodimo oznaku

$$C_\varepsilon = Cl\left(R^\ell(\varepsilon)\right) = \{H \in \mathfrak{a};\ \alpha_i(H) \le \varepsilon,\ \ 1 \le i \le \ell\}.$$

Tada je

$$C_0 = \overline{C} \qquad \text{i} \qquad C = \bigcup_{\varepsilon < 0} C_\varepsilon.$$

Iz rezultata o diferencijalnim jednadžbama u kompleksnom području slijedi:

Teorem 2.4.3. *Neka je $\mathcal{J}$ ideal u $\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$ konačne kodimenzije. Tada postoje međusobno integralno neekvivalentni $\mu_j \in \mathfrak{a}^{*\mathbb{C}}$, $N \in \mathbb{Z}_+$ i $A_{\mu_j+k,m} \in X_0(\tau) = Hom_M(V_2, V_1)$, $1 \le j \le r$, $m, k \in \mathbb{Z}_+^\ell$, $|m| \le N$, takvi da vrijedi:*

(a) *Redovi*

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}_+^\ell} \mathrm{e}^{k(H)} A_{\mu_j+k,m}, \qquad 1 \le j \le r, \quad m \in \mathbb{Z}_+^\ell, \quad |m| \le N,$$

konvergiraju apsolutno za $H \in C$ i uniformno na svakom C_ε, $\varepsilon < 0$.

(b) *Za svaki $H \in C$ i svaku funkciju $F \in C^\infty_{\tau,\mathcal{J}}(G)$ je*

$$F(\exp H) = \mathrm{e}^{\rho(H)} \sum_{j=1}^{r} \sum_{m \in \mathbb{Z}_+^\ell,\, |m| \le N} \alpha(H)^m \mathrm{e}^{\mu_j(H)} \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}_+^\ell} \mathrm{e}^{k(H)} A_{\mu_j+k,m} \right).$$

Za $\lambda \in \mathfrak{a}^{*\mathbb{C}} \backslash \bigcup_{1 \le j \le r} (\mu_j + L_+)$ i za $m \in \mathbb{Z}_+^\lambda$, $|m| \le N$, stavimo $A_{\lambda,m} = 0$. Za funkciju $F \in C^\infty_{\tau,\mathcal{J}}(G)$ definiramo

$$F_\lambda(\exp H) = \mathrm{e}^{\rho(H)} \sum_{m \in \mathbb{Z}_+^\ell,\, |m| \le N} \alpha(H)^m \mathrm{e}^{\lambda(H)} A_{\lambda,m}, \qquad H \in \mathfrak{a}, \quad \lambda \in \mathfrak{a}^{*\mathbb{C}}.$$

Elementi skupa

$$E(F) = \{\lambda \in \mathfrak{a}^{*\mathbb{C}};\ F_\lambda \ne 0\}$$

zovu se **eksponenti sferičke funkcije** F. Očito vrijedi

$$F = \sum_{\lambda \in E(F)} F_\lambda \qquad \text{na} \quad A_-.$$

Označimo sa $E^\circ(F)$ skup svih minimalnih elemenata od $E(F)$ u odnosu na uređaj $\gg$. Elementi od $E^\circ(F)$ zovu se **vodeći eksponenti sferičke funkcije** F, a funkcije F_λ, $\lambda \in E^\circ(F)$, zovu se **vodeći članovi** od F. Primijetimo da su pojmovi malo drugačije definirani nego u prvom poglavlju zbog faktora e^ρ. Nadalje, primijetimo da je očito skup $E^\circ(F)$ konačan.

2.5 Indicijalni moduli

Neka je F $\tau-$sferička funkcija na G. Kažemo da je F $\mathcal{Z}(\mathfrak{g})-$konačna ako je $\{uF;\ u \in \mathcal{Z}(\mathfrak{g})\}$ konačnodimenzionalan prostor, odnosno, ekvivalentno, ako je

$$\mathcal{J}_F = \{u \in \mathcal{Z}(\mathfrak{g});\ uF = 0\}$$

ideal u $\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$ konačne kodimenzije. Dakle, F je $\mathcal{Z}(\mathfrak{g})-$konačna ako je $F \in C^\infty_{\tau,\mathcal{J}}(G)$ za neki ideal $\mathcal{J}$ u $\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$ konačne kodimenzije.

Lema 2.5.1. *Neka je F $\mathcal{Z}(\mathfrak{g})-$konačna $\tau-$sferiška funkcija na G. Tada je F analitička funkcija na G.*

Dokaz: Funkcija F je $K-$konačna i $\mathcal{Z}(\mathfrak{g})-$konačna, pa je i $U(\mathfrak{k})\mathcal{Z}(\mathfrak{g})-$konačna, tj. prostor $\{uF;\ u \in U(\mathfrak{k})\mathcal{Z}(\mathfrak{g})\}$ je konačnodimenzionalan. Neka je $\{X_1, \dots, X_n\}$ baza od $\mathfrak{g}$ takva da je $\{X_1, \dots, X_k\}$ baza od $\mathfrak{k}$, $\{X_{k+1}, \dots, X_n\}$ baza od $\mathfrak{p}$ i $(X_i|X_j)_\vartheta = \delta_{ij}$. Stavimo

$$\Delta = \sum_{i=1}^n X_i^2, \qquad \omega_1 = \sum_{i=1}^k X_i^2, \qquad \omega_2 = -\omega_1 + \sum_{i=k+1}^n X_i^2.$$

Tada su $\omega_2 \in \mathcal{Z}(\mathfrak{g})$ i $\omega_1 \in \mathcal{Z}(\mathfrak{k})$, pa je $\Delta = \omega_2 + 2\omega_1 \in \mathcal{Z}(\mathfrak{k})\mathcal{Z}(\mathfrak{g}) \subseteq U(\mathfrak{k})\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$. To znači da je niz $(\Delta^j F)_{j \in \mathbb{Z}_+}$ linearno zavisan, odnosno, postoje $m \in \mathbb{N}$ i $c_1, \dots, c_m \in \mathbb{C}$ takvi da za

$$D = \Delta^m + \sum_{i=1}^m c_i \Delta^{m-i}$$

vrijedi $DF = 0$. Međutim, lako se vidi da je u svakoj analitičkoj karti na G linearni diferencijalni operator D eliptički s analitičkim koeficijentima (u stvari, oko svake točke postoji analitička karta u kojoj je to eliptički linearni diferencijalni operator s konstantnim koeficijentima). Prema tome, funkcija F je analitička u svakoj analitičkoj karti na G, odnosno, F je analitička funkcija na G.

Neka je u daljnjem $\mathcal{J}$ ideal u $\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$ konačke kodimenzije i $\mathcal{I} = \hat{\mathcal{D}}\Omega_\tau(\mathcal{J})$ lijevi ideal u $\hat{\mathcal{H}} = \hat{\mathcal{H}}(\mathbb{C}^\ell(0), X_0(\tau))$. generiran sa $\Omega_\tau(\mathcal{J})$. Proučit ćemo pobliže indicijalni modul pridružen idealu $\mathcal{I}$ i ustanoviti vezu između vodećih eksponenata od $F \in C^\infty_{\tau,\mathcal{J}}(G)$ i ideala $\mathcal{J}$.

Zbog kratkoće stavimo $X = X_0(\tau) = Hom_M(V_2, V_1)$ i neka je $\Delta = End(X)[Y_1, \dots, Y_\ell]$ algebra polinoma u ℓ varijabli s koeficijentima iz $End(X)$; pri tome je $\ell = \dim \mathfrak{a}$. Neka je $\sigma : \hat{\mathcal{D}} \to \Delta$ epimorfizam iz odjeljka 1.8. s jezgrom $\hat{\mathcal{D}}^1$. Po definiciji indicijalni modul pridružen idealu $\mathcal{I}$ je $\mathbb{C}[Y_1, \dots, Y_\ell]-$modul $\Delta/\sigma(\mathcal{I})$. Neka je kao i prije $\{H_1, \dots, H_\ell\}$ baza od $\mathfrak{a}$ dualna bazi $\{\alpha_1, \dots, \alpha_\ell\}$ od $\mathfrak{a}^*$. Tada $H_i \leftrightarrow Y_i$ inducira identifikaciju algebre $U(\mathfrak{a})$ s algebrom $\mathbb{C}[Y_1, \dots, Y_\ell]$, pa se algebra Δ identificira sa $End(X) \otimes U(\mathfrak{a})$.

Prostor $X = Hom_M(V_2, V_1)$ je $\mathcal{Z}(\mathfrak{m})-$modul u odnosu na djelovanje

$$v \cdot T = \tau_1(v)T = T\tau_2(v), \qquad v \in \mathcal{Z}(\mathfrak{m}).$$

Doista, $v \cdot T$ je linearni operator sa V_2 u V_1 i za $m \in M$ je

$$\tau_1(m)(v \cdot T) = \tau_1(m)\tau_1(v)T = \tau_1(v)\tau_1(m)T = \tau_1(v)T\tau_2(m) = (v \cdot T)\tau_2(m).$$

Nadalje, lako se provjeravaju svojstva $\mathcal{Z}(\mathfrak{m})-$modula. Označimo sa τ pripadnu reprezentaciju od $\mathcal{Z}(\mathfrak{m})$ na prostoru X, odnosno, $\tau : \mathcal{Z}(\mathfrak{m}) \to End(X)$ je pripadni unitalni homomorfizam definiran sa $\tau(v)(T) = v \cdot T$. Sada i $End(X)$ postaje $\mathcal{Z}(\mathfrak{m})-$modul u odnosu na djelovanje

$$v \cdot A = A\tau(v), \qquad v \in \mathcal{Z}(\mathfrak{m}), \quad A \in End(X).$$

Nadalje, $\mathcal{Z}(\mathfrak{s}) = U(\mathfrak{a})\mathcal{Z}(\mathfrak{m})$ je $\mathcal{Z}(\mathfrak{m})-$modul u odnosu na množenje. Formirajmo sada tenzorski produkt $End(X) \otimes_{\mathcal{Z}(\mathfrak{m})} \mathcal{Z}(\mathfrak{s})$. Imamo identifikaciju vektorskih prostora:

$$End(X) \otimes_{\mathcal{Z}(\mathfrak{m})} \mathcal{Z}(\mathfrak{s}) = End(X) \otimes \mathcal{Z}(\mathfrak{s})/\mathcal{W}$$

gdje je

$$\mathcal{W} = span\,\{v \cdot A \otimes u - A \otimes vu;\; A \in End(X),\; u \in \mathcal{Z}(\mathfrak{s}),\; v \in \mathcal{Z}(\mathfrak{m})\}.$$

Kako je $\mathcal{Z}(\mathfrak{s}) = \mathcal{Z}(\mathfrak{m})U(\mathfrak{a}) \simeq \mathcal{Z}(\mathfrak{m}) \otimes U(\mathfrak{a})$, očito postoji izomorfizam vektorskih prostora $\Phi : End(X) \otimes U(\mathfrak{a}) \to End(X) \otimes_{\mathcal{Z}(\mathfrak{m})} \mathcal{Z}(\mathfrak{s})$, takav da vrijedi

$$\Phi(A \otimes h) = A \otimes_{\mathcal{Z}(\mathfrak{m})} h, \qquad A \in End(X).$$

Za svaki $u \in \mathcal{Z}(\mathfrak{s})$ je $(A, u') \mapsto A \otimes uu'$ bilinearno preslikavanje sa $End(X) \times \mathcal{Z}(\mathfrak{s})$ u $End(X) \otimes \mathcal{Z}(\mathfrak{s})$, pa se pomoću univerzalnog svojstva tenzorskog produkta lako vidi da postoji (i jedinstvena je) struktura $\mathcal{Z}(\mathfrak{s})-$modula na $End(X) \otimes \mathcal{Z}(\mathfrak{s})$, takva da je

$$u \cdot (A \otimes u') = A \otimes uu', \qquad u, u' \in \mathcal{Z}(\mathfrak{s}), \quad A \in End(X).$$

Nadalje, potprostor $\mathcal{W}$ je $\mathcal{Z}(\mathfrak{s})-$podmodul, pa i kvocijentni prostor

$$End(X) \otimes_{\mathcal{Z}(\mathfrak{m})} \mathcal{Z}(\mathfrak{s}) = End(X) \otimes \mathcal{Z}(\mathfrak{s})/\mathcal{W}$$

postaje $\mathcal{Z}(\mathfrak{s})-$modul. Pomoću izomorfizma Φ ta se struktura $\mathcal{Z}(\mathfrak{s})-$modula prenosi na vektorski prostor $End(X) \otimes U(\mathfrak{a})$. Tada očito vrijedi

$$(vh) \cdot (A \otimes h') = (v \cdot A) \otimes hh' = A\tau(v) \otimes hh', \qquad A \in End(X), \quad v \in \mathcal{Z}(\mathfrak{m}), \quad h, h' \in U(\mathfrak{a}).$$

Propozicija 2.5.2. *Indicijalni modul pridružen idealu $\mathcal{I}$ je kao $U(\mathfrak{a})-$modul izomorfan modulu $End(X) \otimes_{\mathcal{Z}(\mathfrak{m})} (\mathcal{Z}(\mathfrak{s})/(\mathcal{Z}(\mathfrak{s})P(\mathcal{J})))$.*

Dokaz: Uz prethodne identifikacije σ je epimorfizam $\hat{\mathcal{D}}$ na $End(X) \otimes_{\mathcal{Z}(\mathfrak{m})} \mathcal{Z}(\mathfrak{s})$. Po teoremu 2.3.6. imamo

$$\sigma(\Omega_\tau(u)) = \sigma(P_\tau(u)) \qquad \forall u \in \mathcal{Z}(\mathfrak{s}).$$

Dakle, ako za $u \in \mathcal{Z}(\mathfrak{g})$ stavimo

$$P(u) = \sum_{j=1}^{m} v_j h_j, \qquad v_j \in \mathcal{Z}(\mathfrak{m}), \quad h_j \in U(\mathfrak{a}),$$

onda je

$$\sigma(\Omega_\tau(u)) = \sigma(P_\tau(u)) = \sum_{j=1}^{m} \tau(v_j) \otimes_{\mathcal{Z}(\mathfrak{m})} h_j = 1 \otimes_{\mathcal{Z}(\mathfrak{m})} \sum_{j=1}^{m} v_j h_j = 1 \otimes_{\mathcal{Z}(\mathfrak{m})} P(u).$$

Prema tome, vrijedi $\sigma(\Omega_\tau(\mathcal{J})) = 1 \otimes_{\mathcal{Z}(\mathfrak{m})} P(\mathcal{J})$. Stoga je

$$s(\mathcal{I}) = (End(X) \otimes_{\mathcal{Z}(\mathfrak{m})} \mathcal{Z}(\mathfrak{s})(1 \otimes_{\mathcal{Z}(\mathfrak{m})} P(\mathcal{J})) = End(X) \otimes_{\mathcal{Z}(\mathfrak{m})} (\mathcal{Z}(\mathfrak{s})P(\mathcal{J})).$$

Odatle slijedi

$$\Delta/\sigma(\mathcal{I}) = \left[End(X) \otimes_{\mathcal{Z}(\mathfrak{m})} \mathcal{Z}(\mathfrak{s})\right] / \left[End(X) \otimes_{\mathcal{Z}(\mathfrak{m})} (\mathcal{Z}(\mathfrak{s})P(\mathcal{I}))\right] \simeq End(X) \otimes_{\mathcal{Z}(\mathfrak{m})} [\mathcal{Z}(\mathfrak{s})/(\mathcal{Z}(\mathfrak{s})P(\mathcal{J}))]$$

Za konačnodimenzionalni $U(\mathfrak{a})-$modul $\mathcal{V}$ i za $\lambda \in \mathfrak{a}^{*\mathbb{C}}$ stavimo

$$\mathcal{V}_{(\lambda)} = \{v \in \mathcal{V};\ (H - \lambda(H))^{\dim \mathcal{V}} v = 0\ \ \forall H \in \mathfrak{a}\}.$$

Tada su $\mathcal{V}_{(\lambda)}$ $U(\mathfrak{a})-$podmoduli od $\mathcal{V}$ i vrijedi

$$\mathcal{V} = \sum_{\lambda} \dot{+} \mathcal{V}_{(\lambda)}.$$

Prisjetimo se definicija $*$ i μ iz odjeljka 2.2. Preslikavanje $u \mapsto u^*$ je jedinstveni automorfizam algebre $U(\mathfrak{s})$ takav da je $X^* = X$ za $X \in \mathfrak{m}$ i $H^* = H + \rho(H)$ za $H \in \mathfrak{a}$. Prema lemi 2.2.4. tada je $H^* = H + \rho(H)$ za svaki $H \in \mathfrak{h}^{\mathbb{C}}$. Nadalje, $\mu : \mathcal{Z}(\mathfrak{g}) \to \mathcal{Z}(\mathfrak{s})$ je injektivni homomorfizam definiran sa

$$\mu(u) = P(u)^*, \qquad u \in \mathcal{Z}(\mathfrak{g}).$$

Teorem 2.5.3. *Neka je $\mathcal{J}$ ideal u $\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$ konačne kodimenzije, $F \in C^\infty_{\tau,\mathcal{J}}(G)$ i $\lambda \in E^\circ(F)$. Tada je*

$$\left[End(X) \otimes_{\mathcal{Z}(\mathfrak{m})} (\mathcal{Z}(\mathfrak{s})/(\mathcal{Z}(\mathfrak{s})\mu(\mathcal{J}))\right]_{(\lambda)} \neq \{0\}.$$

Dokaz: $u \mapsto u^*$ je automorfizam od $U(\mathfrak{s})$ i od $\mathcal{Z}(\mathfrak{s})$ koji djeluje trivijalno na $\mathcal{Z}(\mathfrak{m})$ i vrijedi $H^* = H + \rho(H)$ za $H \in \mathfrak{a}$. Budući da je $\mathcal{Z}(\mathfrak{s})^* = \mathcal{Z}(\mathfrak{s})$, imamo $(\mathcal{Z}(\mathfrak{s})P(\mathcal{J}))^* = \mathcal{Z}(\mathfrak{s})\mu(\mathcal{J})$. Dakle, $*$ inducira izomorfizam $\mathcal{Z}(\mathfrak{m})-$modula

$$\varphi : \mathcal{Z}(\mathfrak{s})/\mathcal{Z}(\mathfrak{s})P(\mathcal{J}) \to \mathcal{Z}(\mathfrak{s})/\mathcal{Z}(\mathfrak{s})\mu(\mathcal{J}), \qquad \varphi(u + \mathcal{Z}(\mathfrak{s})P(\mathcal{J})) = u^* + \mathcal{Z}(\mathfrak{s})\mu(\mathcal{J}), \quad u \in \mathcal{Z}(\mathfrak{s}).$$

Dakle, $I_{End(X)} \otimes_{\mathcal{Z}(\mathfrak{m})} \varphi$ je izomorfizam $\mathcal{Z}(\mathfrak{m})-$modula sa $End(X) \otimes_{\mathcal{Z}(\mathfrak{m})} [\mathcal{Z}(\mathfrak{s})/(\mathcal{Z}(\mathfrak{s})P(\mathcal{J}))]$ na $End(X) \otimes_{\mathcal{Z}(\mathfrak{m})} [\mathcal{Z}(\mathfrak{s})/(\mathcal{Z}(\mathfrak{s})\mu(\mathcal{J}))]$.

Usporedimo sada djelovanja $U(\mathfrak{a})$. Za $A \in End(X)$, $u \in \mathcal{Z}(\mathfrak{s})$ i $H \in \mathfrak{a}$ imamo:

$$H \cdot (I_{End(X)} \otimes_{\mathcal{Z}(\mathfrak{m})} \varphi)(A \otimes_{\mathcal{Z}(\mathfrak{m})} (u + \mathcal{Z}(\mathfrak{s})P(\mathcal{J}))) = A \otimes_{\mathcal{Z}(\mathfrak{m})} (Hu^* + \mathcal{Z}(\mathfrak{s})\mu(\mathcal{J})) =$$

$$= A \otimes_{\mathcal{Z}(\mathfrak{m})} (([H - \rho(H)]u)^* + \mathcal{Z}(\mathfrak{s})\mu(\mathcal{J})) = (I_{End(X)} \otimes_{\mathcal{Z}(\mathfrak{m})} \varphi)((H - \rho(H)) \cdot (A \otimes_{\mathcal{Z}(\mathfrak{m})} \mathcal{Z}(\mathfrak{s})\mu(\mathcal{J}))).$$

To možemo formalno ovako zapisati:

$$(H\cdot) \circ (I_{End(X)} \otimes_{\mathcal{Z}(\mathfrak{m})} \varphi) = (I_{End(X)} \otimes_{\mathcal{Z}(\mathfrak{m})} \varphi) \circ ((H - \rho(H)\cdot), \qquad H \in \mathfrak{a}.$$

Dakle, uz oznaku

$$m = \dim End(X) \otimes_{\mathcal{Z}(\mathfrak{m})} (\mathcal{Z}(\mathfrak{s})/(\mathcal{Z}(\mathfrak{s})P(\mathcal{J}))) = \dim End(X) \otimes_{\mathcal{Z}(\mathfrak{m})} (\mathcal{Z}(\mathfrak{s})/(\mathcal{Z}(\mathfrak{s})\mu(\mathcal{J})))$$

imamo sljedeći niz ekvivalencija:

$$w \in [End(X) \otimes_{\mathcal{Z}(\mathfrak{m})} (\mathcal{Z}(\mathfrak{s})/(\mathcal{Z}(\mathfrak{s})P(\mathcal{J})))]_{(\lambda)} \quad \Longleftrightarrow \quad (H - \lambda(H))^m w = 0 \quad \forall H \in \mathfrak{a} \quad \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \quad (I_{End(X)} \otimes_{\mathcal{Z}(\mathfrak{m})} \varphi)((H - \lambda(H))^m w) = 0 \quad \forall H \in \mathfrak{a} \quad \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \quad (H - (\lambda - \rho)(H))^m ((I_{End(X)} \otimes_{\mathcal{Z}(\mathfrak{m})} \varphi)(w)) = 0 \quad \forall H \in \mathfrak{a} \quad \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \quad (I_{End(X)} \otimes_{\mathcal{Z}(\mathfrak{m})} \varphi)(w) \in \left[End(X) \otimes_{\mathcal{Z}(\mathfrak{m})} (\mathcal{Z}(\mathfrak{s})/(\mathcal{Z}(\mathfrak{s})\mu(\mathcal{J}))\right]_{(\lambda-\rho)}.$$

Time smo dokazali da je

$$(I_{End(X)} \otimes_{\mathcal{Z}(\mathfrak{m})} \varphi) \left[End(X) \otimes_{\mathcal{Z}(\mathfrak{m})} (\mathcal{Z}(\mathfrak{s})/(\mathcal{Z}(\mathfrak{s})P(\mathcal{J}))\right]_{(\lambda)} = \left[End(X) \otimes_{\mathcal{Z}(\mathfrak{m})} (\mathcal{Z}(\mathfrak{s})/(\mathcal{Z}(\mathfrak{s})\mu(\mathcal{J}))\right]_{(\lambda-\rho)}. \tag{2.6}$$

Ako je $\lambda \in E^\circ(F)$, onda prema propoziciji 2.5.2. i prema teoremu 1.9.2. vrijedi

$$\left[End(X) \otimes_{\mathcal{Z}(\mathfrak{m})} (\mathcal{Z}(\mathfrak{s})/(\mathcal{Z}(\mathfrak{s})P(\mathcal{J}))\right]_{(\lambda+\rho)} \neq \{0\}$$

a to je prema (2.6) ekvivalentno sa

$$\left[End(X) \otimes_{\mathcal{Z}(\mathfrak{m})} (\mathcal{Z}(\mathfrak{s})/(\mathcal{Z}(\mathfrak{s})\mu(\mathcal{J}))\right]_{(\lambda)} \neq \{0\}.$$

Napomena: Iz teorema 2.5.3. se vidi zbog čega je u razvoju sferičke funkcije bio izdvojen faktor e^ρ.

Za ideal $\mathcal{J}$ u $\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$ konačne kodimenzije stavimo

$$S_{\mathcal{J}} = \{\lambda \in \mathfrak{a}^{*\mathbb{C}};\ [\mathcal{Z}(\mathfrak{s})/(\mathcal{Z}(\mathfrak{s})\mu(\mathcal{J}))]_{(\lambda)} \neq \{0\}\,\}.$$

Za svaki takav $\mathcal{J}$ prostor $\mathcal{Z}(\mathfrak{s})/(\mathcal{Z}(\mathfrak{s})\mu(\mathcal{J}))$ je konačnodimenzionalan, pa je očito $S_{\mathcal{J}}$ konačan skup. Stavimo nadalje

$$E_\circ(\mathcal{J}) = \{\lambda \in \mathfrak{a}^{*\mathbb{C}};\ \lambda \in E^\circ(F) \text{ za neke } F \in C^\infty_{\tau,\mathcal{J}}(G) \text{ i } \tau = (\tau_1, \tau_2)\}.$$

Teorem 2.5.4. *$E_\circ(\mathcal{J}) \subseteq S_{\mathcal{J}}$. Posebno, $E_\circ(\mathcal{J})$ je konačan skup.*

Dokaz: Neka je $\lambda \in E_\circ(F)$ i neka su $\tau = (\tau_1, \tau_2)$ i $F \in C_{\tau,\mathcal{J}}(G)$ takvi da je $\lambda \in E^\circ(F)$. Po teoremu 2.5.3. je $\left[End(X) \otimes_{\mathcal{Z}(\mathfrak{m})} (\mathcal{Z}(\mathfrak{s})/(\mathcal{Z}(\mathfrak{s})\mu(\mathcal{J}))\right]_{(\lambda)} \neq \{0\}$. Prostor $End(X) \otimes (\mathcal{Z}(\mathfrak{s})/(\mathcal{Z}(\mathfrak{s})P(\mathcal{J}))$ je $U(\mathfrak{a})-$modul uz trivijalno djelovanje na $End(X)$ i $End(X) \otimes_{\mathcal{Z}(\mathfrak{m})} (\mathcal{Z}(\mathfrak{s})/(\mathcal{Z}(\mathfrak{s})\mu(\mathcal{J}))$ je izomorfan njegovom kvocijentu. Stoga je $[End(X) \otimes (\mathcal{Z}(\mathfrak{s})/(\mathcal{Z}(\mathfrak{s})\mu(\mathcal{J}))]_{(\lambda)} \neq \{0\}$. No kako je djelovanje $U(\mathfrak{a})$ na $End(X)$ trivijalno, očito je

$$[End(X) \otimes (\mathcal{Z}(\mathfrak{s})/(\mathcal{Z}(\mathfrak{s})\mu(\mathcal{J}))]_{(\lambda)} = End(X) \otimes [\mathcal{Z}(\mathfrak{s})/(\mathcal{Z}(\mathfrak{s})\mu(\mathcal{J}))]_{(\lambda)}.$$

Dakle, $[\mathcal{Z}(\mathfrak{s})/(\mathcal{Z}(\mathfrak{s})\mu(\mathcal{J}))]_{(\lambda)} \neq \{0\}$, odnosno, $\lambda \in S_{\mathcal{J}}$.

2.6 $K-$konačni vektori i dopustivi moduli

Neka je K kompaktna grupa s normiranom Haarovom mjerom μ i neka je $\mathcal{V}$ $K-$modul s reprezentacijom π (ne postavlja se nikakav uvjet neprekidnosti). Za $v \in \mathcal{V}$ neka je $K \cdot v$ potprostor od razapet sa $\{\pi(k)v;\ k \in K\}$. Stavimo

$$\mathcal{V}_K = \{v \in \mathcal{V};\ \dim K \cdot v < +\infty \text{ i } k \mapsto \pi(k)|K \cdot v \text{ je neprekidno}\}.$$

Elementi od $\mathcal{V}_K$ zovu se $K-$**konačni vektori** u modulu $\mathcal{V}$. Kažemo da je $\mathcal{V}$ **neprekidan** $K-$**modul**, ako je $\mathcal{V} = \mathcal{V}_K$. Za svaki $K-$modul $\mathcal{V}$ očito je $\mathcal{V}_K$ najveći neprekidan $K-$podmodul.

Neka je $\hat{K}$ skup svih klasa ekvivalencije konačnodimenzionalnih ireducibilnih neprekidnih $K-$modula i za $\delta \in \hat{K}$ izabiremo predstavnika E^δ s reprezentacijom τ^δ. Neka je $d(\delta) = \dim E^\delta$, χ_δ karakter od τ^δ i $\chi^\delta = d(\delta)\overline{\chi_\delta}$. Za svaku klasu $\delta \in \hat{K}$ izabiremo bazu $\{e_1^\delta, \ldots, e_{d(\delta)}^\delta\}$ od E^δ takvu da je matrica $\left(\tau_{ij}^\delta(k)\right)$ operatora $\tau^\delta(k)$ u toj bazi unitarna za svaki $k \in K$. Možemo pretpostaviti da su baze izabrane tako da za kontragredijantnu klasu δ^* od δ vrijedi $\tau_{ij}^{\delta^*}(k) = \tau_{ji}^\delta(k^{-1}) = \overline{\tau_{ij}^\delta(k)}$.

Neka je $\mathcal{V}$ $K-$modul s reprezentacijom π. Na algebarskom dualu $\mathcal{V}^*$ od $\mathcal{V}$ imamo kontragredijentnu reprezentaciju π^* :

$$\left(\pi^*(k)f\right)(v) = f\left(\pi(k^{-1})v\right), \qquad k \in K, \quad v \in \mathcal{V}, \quad f \in \mathcal{V}^*.$$

Kažemo da je $\mathcal{V}$ **pravilan** $K-$**modul** ako postoji $K-$podmodul $\mathcal{V}'$ od $\mathcal{V}^*$ sa sljedećim svojstvima:

(a) $f(v) = 0\ \forall f \in \mathcal{V}'$ samo ako je $v = 0$.

(b) Za svaki $v \in \mathcal{V}$ i svaki $f \in \mathcal{V}'$ kompleksna funkcija $k \mapsto f(\pi(k)v)$ je neprekidna na K.

(c) Za svaki $v \in \mathcal{V}$ i svaku funkciju $\varphi \in C(K)$ postoji $w \in \mathcal{V}$ (očito jedinstven) takav da je

$$f(w) = \int_K \varphi(k) f(\pi(k)v) \mathrm{d}\mu(k) \qquad \forall f \in \mathcal{V}'.$$

Tada je očito $v \mapsto w$ linearan operator sa $\mathcal{V}$ u $\mathcal{V}$ i taj operator označavamo sa

$$\pi(\varphi) = \int_K \varphi(k)\pi(k) \mathrm{d}\mu(k).$$

Ako je $\mathcal{V}$ pravilan $K-$modul i $\mathcal{V}' \subseteq \mathcal{V}^*$ kao u definiciji, stavimo $\pi'(k) = \pi^*(k)|\mathcal{V}'$, $k \in K$. Tada je $\mathcal{V}'$ s reprezentacijom π' očito pravilan $K-$modul. Nadalje, neprekidan $K-$modul je pravilan: u tom slučaju za $\mathcal{V}'$ možemo uzeti čitav algebarski dual $\mathcal{V}^*$.

Za $K-$modul $\mathcal{V}$ i za $\delta \in \hat{K}$ sa $\mathcal{V}_\delta$ označavamo sumu svih ireducibilnih $K-$podmodula iz klase δ. Dokazi sljedeće dvije propozicije su standardni i izostavljamo ih:

Propozicija 2.6.1. *Neka je $\mathcal{V}$ pravilan $K-$modul i neka je $\mathcal{V}'$ $K-$podmodul od $\mathcal{V}^*$ iz definicije pravilnosti. Za $\delta \in \hat{K}$ i $1 \leq i, j \leq d(\delta)$ stavimo*

$$P_{\delta,ij}^\pi = \pi\left(n(\delta)\overline{\tau_{ij}^\delta}\right), \qquad P_\delta^\pi = \pi\left(\chi^\delta\right).$$

(a) *Za svaki $k \in K$, $\delta \in \hat{K}$ i $1 \leq i, j \leq d(\delta)$ vrijede jednakosti*

$$\pi(k)P_{\delta,ij}^\pi = \sum_{\ell=1}^{d(\delta)} \tau_{\ell i}^\delta(k) P_{\delta,\ell j}^\pi, \qquad P_{\delta,\ell j}^\pi = \sum_{\ell=1}^{d(\delta)} \tau_{j\ell}^\delta(k) P_{\delta,i\ell}^\pi.$$

(b) $P^\pi_{\delta,ij}P^\pi_{\gamma,rs} = \delta_{\delta\gamma}\delta_{jr}P^\pi_{\delta,is}$, $\delta,\gamma \in \hat{K}$, $1 \le i,j \le d(\delta)$, $1 \le r,s \le d(\gamma)$.

(c) P^π_δ, $\delta \in \hat{K}$, *su međusobno ortogonalni projektori, tj. vrijedi* $P^\pi_\delta P^\pi_\gamma = \delta_{\delta\gamma}P^\pi_\delta$.

(d) *Za svaki* $\delta \in \hat{K}$ *je* $\mathcal{V}_\delta = P^\pi_\delta\mathcal{V}$.

(e) *Vrijedi*

$$\mathcal{V}_K = \sum_{\delta\in\hat{K}} \dot{+}\, \mathcal{V}_\delta.$$

Primijetimo da je za svaki $K-$modul $\mathcal{V}$ $K-$podmodul $\mathcal{V}_K$ pravilan, pa tvrdnja (e) vrijedi i bez pretpostavke pravilnosti.

U sljedećoj propoziciji za linearan operator A na prostoru $\mathcal{V}$ sa A^* označavamo njemu dualan operator na $\mathcal{V}^*$; tj. $(A^*f)(v) = f(Av)$, $v \in \mathcal{V}$, $f \in \mathcal{V}^*$. Nadalje, za $\varphi \in C(K)$ sa $\check{\varphi}$ označavamo funkciju iz $C(K)$ definiranu sa $\check{\varphi}(k) = \varphi(k^{-1})$.

Propozicija 2.6.2. *Uz oznake iz propozicije 2.6.1. vrijedi:*

(a) $\pi'(\check{\varphi}) = \pi(\varphi)^*|\mathcal{V}'\ \ \forall\varphi \in C(K)$.

(b) $P^{\pi'}_{\delta,ij} = \left(P^\pi_{\delta^*,ji}\right)^*|\mathcal{V}'$ *za* $\delta \in \hat{K}$ *i za* $1 \le i,j \le d(\delta)$.

(c) $P^{\pi'}_\delta = (P^\pi_{\delta^*})^*|\mathcal{V}'$ *za* $\delta \in \hat{K}$.

(d) *Ako je za* $\delta \in \hat{K}$ *prostor* $\mathcal{V}_\delta$ *konačno dimenzionalan, onda je nužno* $(\mathcal{V}^*)_{\delta^*} \subseteq \mathcal{V}'$ *i vrijedi* $\dim(\mathcal{V}^*)_{\delta^*} = \dim\mathcal{V}_\delta$.

Kažemo da je $\mathcal{V}$ **dopustiv** $K-$**modul** ako je on neprekidan i vrijedi $\dim\mathcal{V}_\delta < +\infty\ \forall\delta \in \hat{K}$. Iz propozicija 2.6.1. i 2.6.2. neposredno slijedi:

Teorem 2.6.3. *Neka je* $\mathcal{V}$ *dopustiv* $K-$*modul. Tada je i* $\tilde{\mathcal{V}} = (\mathcal{V}^*)_K$ *dopustiv* $K-$*modul. Nadalje, slika operatora* $T : \mathcal{V} \to \tilde{\mathcal{V}}^*$, *definiranog sa*

$$(Tv)(f) = f(v), \qquad v \in \mathcal{V}, \qquad f \in \tilde{\mathcal{V}},$$

je upravo $\tilde{\tilde{\mathcal{V}}}$ *i* T *je izomorfizam* $K-$*modula sa* $\mathcal{V}$ *na* $\tilde{\tilde{\mathcal{V}}}$.

Neka je sada G lokalno kompaktna unimodularna grupa i neka je λ Haarova mjera na G. **Banachov** $G-$**modul** je kompleksan Banachov prostor $\mathcal{H}$ s reprezentacijom π od G na vektorskom prodtoru $\mathcal{H}$ takvom da je svaki operator $\pi(x)$, $x \in G$, ograničen i da je preslikavanje $x \mapsto \pi(x)v$ neprekidno sa G u $\mathcal{H}$ za svaki vektor $v \in \mathcal{H}$. Neka je $\mathcal{H}'$ dual Banachovog prostora $\mathcal{H}$ i neka je za $x \in G$ $\pi'(x) = (\pi(x))^*|\mathcal{H}'$. Tada je π' reprezentacija grupe G na vektorskom prostoru $\mathcal{H}'$, ali $\mathcal{H}'$ s tom reprezentacijom ne mora biti Banachov $G-$modul, jer ne mora za svaki $f \in \mathcal{H}'$ preslikavanje $x \mapsto \pi'(x)f$ sa G u $\mathcal{H}'$ biti neprekidno. Stoga stavimo

$$\hat{\mathcal{H}} = \{f \in \mathcal{H}';\ \text{preslikavanje } x \mapsto \pi'(x)f \text{ sa } G \text{ u } \mathcal{H}' \text{ je neprekidno}\}.$$

Tada je očito $\hat{\mathcal{H}}$ potprostor vektorskog prostora $\mathcal{H}'$ koji je invarijantan s obzirom na sve operatore $\pi'(x)$, $x \in G$. Za $\varphi \in C_0(G)$ definiramo operatore $\pi(\varphi) : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ i $\pi'(\varphi) : \mathcal{H}' \to \mathcal{H}'$ sa

$$\pi(\varphi)v = \int_G \varphi(x)\pi(x)v\,\mathrm{d}\lambda(x), \qquad (\pi'(\varphi)f)(v) = \int_G \varphi(x)f(\pi(x^{-1})v)\,\mathrm{d}\lambda(x), \qquad v \in \mathcal{H}, \quad f \in \mathcal{H}'.$$

Propozicija 2.6.4. *Neka je* $\mathcal{H}$ *Banachov* $G-$*modul.*

(a) $\hat{\mathcal{H}}$ *je Banachov* $G-$*modul. Neka je* $\hat{\pi}$ *pripadna reprezentacija, tj.* $\hat{\pi}(x) = \pi'(x)|\hat{\mathcal{H}}$.

(b) *Vrijedi* $\pi'(C_0(G))\mathcal{H}' \subseteq \hat{\mathcal{H}}$ *i* $\hat{\pi}(\varphi) = \pi'(\varphi)|\hat{\mathcal{H}}$ *za svaku* $\varphi \in C_0(G)$.

Dokaz: (a) Treba samo dokazati da je potprostor $\hat{\mathcal{H}}$ Banachovog prostora $\mathcal{H}'$ zatvoren. U tu svrhu dokažimo naprije da je za kompaktan podskup C od G vrijedi

$$M(C) = \sup\{\|\pi'(x)\|;\ x \in C\} < +\infty.$$

Doista, $\|\pi'(x)\| = \|\pi(x^{-1})\|$, pa je

$$M(C) = \sup\{\|\pi(x)\|;\ x \in C^{-1}\}. \tag{2.7}$$

C^{-1} je kompaktan podskup od G, pa iz neprekidnosti preslikavanja $x \mapsto \pi(x)v$ za svaki $v \in \mathcal{H}$ dobivamo da je

$$M_v(C) = \sup\{\|\pi(x)v\|;\ x \in C^{-1}\} < +\infty.$$

Odatle pomoću Banach–Steinhausovog teorema slijedi $M(C) < +\infty$.

Prijeđimo na dokaz zatvorenosti potprostora $\hat{\mathcal{H}}$ od $\mathcal{H}'$. Neka je f element zatvarača od $\hat{\mathcal{H}}$ u $\mathcal{H}'$. Neka je $y \in G$ i neka su $\varepsilon > 0$ i C kompaktna okolina točke y. Neka je $M(C)$ kao malo prije. Budući da je f u zatvaraču od $\hat{\mathcal{H}}$, postoji funkcional $g \in \hat{\mathcal{H}}$ takav da je

$$\|f - g\| \le \frac{\varepsilon}{3M(C)}.$$

Neka je $C_1 \subseteq C$ okolina točke y takva da vrijedi

$$x \in C_1 \qquad \Longrightarrow \qquad \|\pi'(x)g - \pi'(y)g\| \le \frac{\varepsilon}{3}.$$

Sada za $x \in C_1$ imamo

$$\begin{aligned}\|\pi'(x)f - \pi'(y)f\| &\le \|\pi'(x)(f-g)\| + \|\pi'(x)g - \pi'(y)g\| + \|\pi'(y)(g-f)\| \le \\ &\le M(C)\frac{\varepsilon}{3M(C)} + \frac{\varepsilon}{3} + M(C)\frac{\varepsilon}{3M(C)} = \varepsilon.\end{aligned}$$

Dakle, preslikavanje $x \mapsto \pi'(x)f$ je neprekidno u svakoj točki $y \in G$, što znači da je $f \in \hat{\mathcal{H}}$.

(b) Neka je $\varphi \in C_0(G)$ i $f \in \mathcal{H}'$, $\|f\| = 1$. Stavimo $C = Supp\,\varphi$. Za $x \in G$ neka je funkcija $\varphi_x \in C_0(G)$ definirana sa $\varphi_x(y) = \varphi(x^{-1}y)$. Sada za $x, y \in G$ imamo

$$\begin{aligned}\|\pi'(x)\pi'(\varphi)f - \pi'(y)\pi'(\varphi)f\| &= \sum_{\|v\|=1} |(\pi'(\varphi)f)(\pi(x^{-1}v) - (\pi'(\varphi)f)(\pi(y^{-1}v)| = \\ &= \sup_{\|v\|=1} \left| \int_G (\varphi_x(z) - \varphi_y(z)) f(\pi(z^{-1}v) \mathrm{d}\lambda(z) \right| \le \\ &\le \|\varphi_x - \varphi_y\|_{L_1(G)} \cdot \sup\{\|\pi(z)\|;\ z \in C^{-1}x^{-1} \cup C^{-1}y^{-1}\}.\end{aligned} \tag{2.8}$$

Neka je $y \in G$ i neka su $\varepsilon > 0$ i C_1 kompaktna okolina točke y. Budući da je $x \mapsto \varphi_x$ neprekidno preslikavanje sa G u $L_1(G)$, postoji kompaktna okolina $C_2 \subseteq C_1$ točke y takva da uz oznaku iz dokaza tvrdnje (a) vrijedi

$$x \in C_2 \qquad \Longrightarrow \qquad \|\varphi_x - \varphi_y\|_{L_1(G)} \le \frac{\varepsilon}{M(C_1C)}. \tag{2.9}$$

Sada za $x \in C_2$ i za $z \in C^{-1}x^{-1} \cup C^{-1}y^{-1} \subseteq C^{-1}C_1^{-1} = (C_1C)^{-1}$ prema (2.7) imamo $\|\pi(z)\| \le M(C_1C)$. Prema tome, iz (2.8) i (2.9) slijedi za svaki $x \in C_2$:

$$\|\pi'(x)\pi'(\varphi)f - \pi'(y)\pi'(\varphi)f\| \le \frac{\varepsilon}{M(C_1C)} M(C_1C) = \varepsilon.$$

To pokazuje da je preslikavanje $x \mapsto \pi'(x)\pi'(\varphi)f$ sa G u $\mathcal{H}'$ neprekidno u točki y, a kako je točka $y \in G$ bila proizvoljna, to znači da je $\pi'(\varphi)f \in \hat{\mathcal{H}}$. Time je dokazano $\pi'(C_0(G))\mathcal{H}' \subseteq \hat{\mathcal{H}}$. Posljednja jednakost dobiva se direktnim računom.

U daljnjem je K kompaktna podgrupa lokalno kompaktne unimodularne grupe G. Svaki Banachov $G-$modul $\mathcal{H}$ restrikcijom djelovanja na K postaje Banachov $K-$modul i taj je $K-$modul pravilan. Štoviše, projektori P_δ^π su ograničeni, pa su potprostori $\mathcal{H}_\delta$ zatvoreni. $\mathcal{H}$ se zove **dopustiv** $(G, K)-$**modul**, ako je $\dim \mathcal{H}_\delta < +\infty\ \forall \delta \in \hat{K}$.

Za svaki Banachov $G-$modul $\mathcal{H}$ iz Peter−Weylovog teorema slijedi da je potprostor $\mathcal{V} = \mathcal{H}_K$ gust u $\mathcal{H}$. Nadalje, $\hat{\mathcal{H}}$ može igrati ulogu potprostora algebarskog duala $\mathcal{H}^*$ iz definicije pravilnog $K-$modula. Doista, pretpostavimo da je $v \in \mathcal{H}$ takav da je $f(v) = 0\ \forall f \in \hat{\mathcal{H}}$. Po tvrdnji (b) propozicije 2.6.4. tada je $(\pi'(\check{\varphi})f)(v) = 0$ za svaki $f \in \mathcal{H}'$ i za svaku funkciju $\varphi \in C_0(G)$. To znači da je $f(\pi(\varphi)v) = 0\ \forall f \in \mathcal{H}'$ i $\forall \varphi \in C_0(G)$. Odatle je $\pi(\varphi)v = 0\ \forall \varphi \in C_0(G)$, a kako se svaki vektor v nalazi u zatvaraču od $\pi(C_0(G))v$, zaključujemo da je $v = 0$.

Prema tvrdnji (d) propozicije 2.6.2. je $(\mathcal{H}^*)_{\delta^*} = (\mathcal{H}')_{\delta^*} = \hat{\mathcal{H}}_{\delta^*}$ za svaku klasu $\delta \in \hat{K}$ takvu da je $\dim \mathcal{H}_\delta < +\infty$. Nadalje, $\hat{\mathcal{H}}$ je Banachov $K-$modul pa je $\hat{\mathcal{H}}_K = \sum_{\delta \in \hat{K}} \dot{+} \hat{\mathcal{H}}_\delta$ gusto u $\hat{\mathcal{H}}$, odnosno, $\hat{\mathcal{H}}$ je zatvarač od $\hat{\mathcal{H}}_K$ u $\mathcal{H}'$. Posebno, ako je $\mathcal{H}$ dopustiv $(G, K)-$modul, onda je $\hat{\mathcal{H}}$ zatvarač od $(\mathcal{H}')_K$ u $\mathcal{H}'$.

Napokon, ako je $\mathcal{H}$ dopustiv $(G, K)-$modul, onda je to ujedno dopustiv $(K, K)-$modul, pa slijedi da je

$$\{f \in \mathcal{H}';\ \text{preslikavanje } k \mapsto \pi'(k)f \text{ sa } K \text{ u } \mathcal{H}' \text{ je neprekidno}\}$$

zatvarač od $(\mathcal{H}')_K$ u $\mathcal{H}'$. Prema tome, vrijedi:

Propozicija 2.6.5. *Neka je $\mathcal{H}$ dopustiv $(G, K)-$modul.*

(a) *Za svaku klasu $\delta \in \hat{K}$ je $(\mathcal{H}^*)_\delta = (\mathcal{H}')_\delta = \hat{\mathcal{H}}_\delta$ i $\dim \hat{\mathcal{H}}_\delta = \dim \mathcal{H}_{\delta^*}$.*

(b) *$(\mathcal{H}^*)_K = (\mathcal{H}')_K = \hat{\mathcal{H}}_K$ je gusto u $\hat{\mathcal{H}}$.*

(c) *$\hat{\mathcal{H}} = \{f \in \mathcal{H}';$ preslikavanje $k \mapsto \pi'(k)f$ sa K u $\mathcal{H}'$ je neprekidno$\}$.*

(d) *Operator $A : \mathcal{H} \to (\hat{\mathcal{H}})'$ definiran sa $(Av)(f) = f(v)$, $v \in \mathcal{H}$, $f \in \hat{\mathcal{H}}$, je ograničeno injektivno $G-$preplitanje sa $\mathcal{H}$ u $\hat{\hat{\mathcal{H}}}$ i $A|\mathcal{H}_K$ je izomorfizam $K-$modula sa $\mathcal{H}_K$ na $\hat{\hat{\mathcal{H}}}_K$.*

Dokaz: Treba još samo dokazati da je preslikavanje A injektivno; njegova je neprekidnost, tj. ograničenost, očigledna. Pretpostavimo da je $v \in \mathcal{H}$ i $Av = 0$. To znači da je $f(v) = 0\ \forall f \in \hat{\mathcal{H}}$. Prema tvrdnji (b) propozicije 2.6.4. tada je $(\pi'(\varphi)f)(v) = 0\ \forall f \in \mathcal{H}'$ i $\forall \varphi \in C_0(G)$. Odatle kao malo prije zaključujemo da je $v = 0$.

2.7 Dopustivi $(\mathfrak{g}, K)-$moduli

U daljnjem je G poluprosta povezana Liejeva grupa s konačnim centrom i Liejevom algebrom $\mathcal{G}$ i K je maksimalna kompaktna podgrupa od G.

Za realnu Liejevu algebru $\mathfrak{l}$, njenu Liejevu podalgebru $\mathfrak{d}$ i kompaktnu grupu D s Liejevom algebrom $\mathfrak{d}$ definiramo pojam $(\mathfrak{l}, D)-$**modula**. To je kompleksan vektorski prostor $\mathcal{V}$ na kome su zadane strukture $\mathfrak{l}-$modula i $D-$modula takve da vrijedi:

(a) $\mathcal{V}$ je neprekidan $D-$modul, tj. $\mathcal{V} = \mathcal{V}_D$.

(b) Dvije strukture $\mathfrak{d}-$modula na $\mathcal{V}$ (ona dobivena iz strukture $\mathfrak{l}-$modula restrikcijom i ona dobivena diferenciranjem strukture $D-$modula) se podudaraju.

$(\mathfrak{l}, D)-$**modul** zove se **dopustiv**, ako je on dopustiv $D-$modul, tj. $\dim \mathcal{V}_\delta < +\infty \ \forall \delta \in \hat{D}$.

Bez dokaza navodimo:

Teorem 2.7.1. *Neka je $\mathcal{H}$ Banachov dopustiv $(G, K)-$modul. Stavimo $\mathcal{V} = \mathcal{H}_K$. Za $v \in \mathcal{V}$ i $X \in \mathfrak{g}$ postoji*

$$\pi(X)v = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\pi(\exp tX))v\bigg|_{t=0} = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(\pi(\exp tX)v - v).$$

Tada je $X \mapsto \pi(X)$ reprezentacija Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ na prostoru $\mathcal{V}$. Uz tu reprezentaciju $\mathcal{V}$ postaje dopustiv $(\mathfrak{g}, K)-$modul. Nadalje, $V \mapsto Cl(V)$ je bijekcija sa skupa svih $\mathfrak{g}-$podmodula od $\mathcal{V}$ na skup svih zatvorenih $G-$podmodula od $\mathcal{H}$. Inverzna bijekcija je $\mathcal{K} \mapsto \mathcal{K} \cap \mathcal{V}$.

Ako je $\mathcal{H}$ Banachov dopustiv $(G, K)-$modul, znamo da je i $\hat{\mathcal{H}}$ Banachov dopustiv $(G, K)-$modul. Nadalje, za $\mathcal{V} = \mathcal{H}_K$ je $\hat{\mathcal{H}}_K = \tilde{\mathcal{V}} = (\mathcal{V}^*)_K$.

Neka je u daljnjem $I(\mathfrak{p}) = S(\mathfrak{p})^K$ algebra $K-$invarijanata u $S(\mathfrak{p})$. Tada je $I(\mathfrak{p}) \subseteq S(\mathfrak{g})^K$, a kako je $\Lambda\left(S(\mathfrak{g})^K\right) \subseteq U(\mathfrak{g})^K$. imamo $\Lambda(I(\mathfrak{p})) \subseteq U(\mathfrak{g})^K$. Neka je ponovo $W = W(\Sigma) = W(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$ i stavimo $I(\mathfrak{a}) = S(\mathfrak{a})^W = U(\mathfrak{a})^W$. Označimo sa $x \mapsto \overline{x}$ kanonski epimorfizam sa $S(\mathfrak{p})$ na $S(\mathfrak{a})$. Ukoliko izvršimo identifikacije $S(\mathfrak{p}) = \mathcal{P}(\mathfrak{p})$ i $S(\mathfrak{a}) = \mathcal{P}(\mathfrak{a})$ pomoću Killingove forme (čije su restrikcije na $\mathfrak{p} \times \mathfrak{p}$ i na $\mathfrak{a} \times \mathfrak{a}$ nedegenerirane), onda je $x \mapsto \overline{x}$ restrikcija polinoma sa $\mathfrak{p}$ na $\mathfrak{a}$. Također, $x \mapsto \overline{x}$ je projektor u odnosu na direktni rastav $S(\mathfrak{p}) = S(\mathfrak{a}) \dotplus \mathfrak{a}^\perp S(\mathfrak{p})$, gdje je $\mathfrak{a}^\perp$ ortogonalni komplement od $\mathfrak{a}$ u $\mathfrak{p}$ u odnosu na Killingovu formu. Nadalje, $\mathfrak{a}^\perp = \{X - \vartheta(X);\ X \in \mathfrak{n}\}$.

Po Chevalleyevom teoremu $x \mapsto \overline{x}$ je izomorfizam sa $I(\mathfrak{p})$ na $I(\mathfrak{a})$ i vrijedi $\deg x = \deg \overline{x}$ $\forall x \in I(\mathfrak{p})$.

PBW$-$teorem povlači

$$U(\mathfrak{g}) = U(\mathfrak{n})U(\mathfrak{a})U(\mathfrak{k}) = (\mathbb{C} \dotplus \mathfrak{n}U(\mathfrak{n}))U(\mathfrak{a})U(\mathfrak{k}) = U(\mathfrak{a})U(\mathfrak{k}) \dotplus \mathfrak{n}U(\mathfrak{g}),$$

a kako je $U(\mathfrak{k}) = \mathbb{C} \dotplus U(\mathfrak{k})\mathfrak{k}$, slijedi

$$U(\mathfrak{g}) = U(\mathfrak{a}) \dotplus (U(\mathfrak{g})\mathfrak{k} + \mathfrak{n}U(\mathfrak{g})).$$

Neka je $p : U(\mathfrak{g}) \to U(\mathfrak{a})$ pripadni projektor. Tada je očito

$$\deg p(u) \leq \deg u \qquad \forall u \in U(\mathfrak{g}).$$

Lema 2.7.2. *Za svaki $u \in I(\mathfrak{p})$ vrijedi*

$$\deg\left[p(\Lambda(u)) - \overline{u}\right] < \deg u.$$

Dokaz: Možemo pretpostaviti da je u homogen, $u \in I^n(\mathfrak{p})$. Tada je $\overline{u} \in I^n(\mathfrak{a}) \subseteq S^n(\mathfrak{p})$. Kako je $\mathfrak{g} = \mathfrak{n} \dotplus \mathfrak{a} \dotplus \mathfrak{k}$, slijedi

$$u - \overline{u} \in \mathfrak{n}S^{n-1}(\mathfrak{g}) + S^{n-1}(\mathfrak{g})\mathfrak{k}.$$

Kako je $\overline{u} \in I(\mathfrak{a}) \subseteq S(\mathfrak{a}) = U(\mathfrak{a})$ imamo $\Lambda(\overline{u}) = \overline{u}$. Neka su $X_1, \ldots, X_s \in \mathfrak{n}$, $Y_1, \ldots, Y_r \in \mathfrak{k}$ i $u_1, \ldots, u_s, v_1, \ldots, v_r \in S(\mathfrak{g})$ takvi da je

$$u - \overline{u} = \sum_{i=1}^{s} X_i u_i + \sum_{j=1}^{r} v_j Y_j.$$

Imamo

$$\Lambda(X_i u_i) - \Lambda(X_i)\Lambda(u_i) \in U_{n-1}(\mathfrak{g}) \quad \text{i} \quad \Lambda(v_j Y_j) - \Lambda(v_j)\Lambda(Y_j) \in U_{n-1}(\mathfrak{g})$$

i

$$\Lambda(u) - \overline{u} = \Lambda(u - \overline{u}) = \sum_{i=1}^{s} \Lambda(X_i u_i) + \sum_{j=1}^{r} \Lambda(v_j Y_j) =$$

$$= \sum_{i=1}^{s} \Lambda(X_i)\Lambda(u_i) + \sum_{j=1}^{r} \Lambda(v_j)\Lambda(Y_j) + \sum_{i=1}^{s} [\Lambda(X_i u_i) - \Lambda(X_i)\Lambda(u_i)] + \sum_{j=1}^{r} [\Lambda(v_j Y_j) - \Lambda(v_j)\Lambda(Y_j)],$$

pa slijedi

$$\Lambda(u) - \overline{u} \in \mathfrak{n}U(\mathfrak{g}) + U(\mathfrak{g})\mathfrak{k} + U_{n-1}(\mathfrak{g}).$$

Odatle je $p(\Lambda(u)) - p(\overline{u}) \in U_{n-1}(\mathfrak{g})$, a kako je $p(\overline{u}) = \overline{u}$, slijedi $p(\Lambda(u)) - \overline{u} \in U_{n-1}(\mathfrak{g})$.

Lema 2.7.3. *Za svaki $x \in I_n(\mathfrak{a})$ postoji $y \in U_n(\mathfrak{g})^K$ takav da je*

$$x - y \in U_{n-1}(\mathfrak{a}) + \mathfrak{n}U_{n-1}(\mathfrak{g}) + U_{n-1}(\mathfrak{g})\mathfrak{k}.$$

Dokaz: Neka je $u \in I_n(\mathfrak{p})$ takav da je $\overline{u} = x$. Stavimo $y = \Lambda(u)$. Tada je $y \in U_n(\mathfrak{g})^K$ i po lemi 2.7.2. imamo $x - p(y) \in U_{n-1}(\mathfrak{a})$. S druge strane, po definiciji preslikavanja p je $y - p(y) \in \mathfrak{n}U_{n-1}(\mathfrak{g}) + U_{n-1}(\mathfrak{g})\mathfrak{k}$, pa tvrdnja slijedi.

Po Chevalleyevoj teoriji postoji graduirani konačnodimenzionalni $W-$podmodul H od $U(\mathfrak{a})$ takav da množenje inducira izomorfizam $W-$modula sa $H \otimes I(\mathfrak{a})$ na $U(\mathfrak{a})$.

Propozicija 2.7.4. $U(\mathfrak{g}) = U(\mathfrak{n})HU(\mathfrak{g})^K U(\mathfrak{k})$.

Dokaz ćemo provesti tako da indukcijom po n pokažemo da je $U_n(\mathfrak{g}) \subseteq U(\mathfrak{n})HU(\mathfrak{g})^K U(\mathfrak{k})$. Tvrdnja je trivijalna za $n = 0$. Pretpostavimo da je $n \in \mathbb{N}$ i da smo dokazali da je $U_{n-1}(\mathfrak{g}) \subseteq U(\mathfrak{n})HU(\mathfrak{g})^K U(\mathfrak{k})$. Budući da je $U_n(\mathfrak{g}) \subseteq U(\mathfrak{n})U_n(\mathfrak{a})U(\mathfrak{k})$, za korak indukcije dovoljno je dokazati da je $U_n(\mathfrak{a}) \subseteq U(\mathfrak{n})HU(\mathfrak{g})^K U(\mathfrak{k})$. Međutim, $U_n(\mathfrak{a}) = U^n(\mathfrak{a}) \dotplus U_{n-1}(\mathfrak{a})$, pa je dovoljno dokazati da je $U^n(\mathfrak{a}) \subseteq U(\mathfrak{n})HU(\mathfrak{g})^K U(\mathfrak{k})$. Neka je $x \in U^n(\mathfrak{a})$. Tada je

$$x = \sum_{j=1}^{p} h_j y_j \quad \text{za neke } h_j \in H \text{ i } y_j \in I(\mathfrak{a})$$

i očito možemo pretpostaviti da vrijedi

$$k_j = \deg h_j \leq n \quad \text{i} \quad \deg y_j = n - k_j.$$

Za svako $j \in \{1, \ldots, p\}$ po lemi 2.7.3. postoji $z_j \in U(\mathfrak{g})^K$ takav da je

$$y_j - z_j \in U_{n-k_j-1}(\mathfrak{a}) + \mathfrak{n}U_{n-k_j-1}(\mathfrak{g}) + U_{n-k_j-1}(\mathfrak{g})\mathfrak{k}.$$

Sada je
$$x - \sum_{j=1}^{p} h_j z_j = \sum_{j=1}^{p} h_j (y_j - z_j) \in U_{n-1}(\mathfrak{a}) + \mathfrak{n} U_{n-1}(\mathfrak{g}) + U_{n-1}(\mathfrak{g})\mathfrak{k}.$$
Po pretpostavci indukcije slijedi
$$x - \sum_{j=1}^{p} h_j z_j \in U(\mathfrak{n}) H U(\mathfrak{g})^K U(\mathfrak{k}).$$
Kako je $h_j z_j \in HU(\mathfrak{g})^K$ za svaki j, slijedi $x \in U(\mathfrak{n})HU(\mathfrak{g})^K U(\mathfrak{k})$.

Teorem 2.7.5. *Neka je $\mathcal{V}$ dopustiv $(\mathfrak{g}, K)-$modul koji je konačno generiran kao $U(\mathfrak{g})-$modul. Tada je $\mathcal{V}$ konačno generiran kao $U(\mathfrak{n})-$modul.*

Dokaz: Po pretpostavci posatoji konačnodimenzionalan potprostor $V \subseteq \mathcal{V}$ takav da je $\mathcal{V} = U(\mathfrak{g})V$. Možemo pretpostaviti da je
$$V = \sum_{i=1}^{p} \mathcal{V}_{\delta_i}, \qquad \delta_1, \ldots, \delta_p \in \hat{K}.$$
Tada je $U(\mathfrak{g})^K U(\mathfrak{k})V = V$, pa po propoziciji 2.7.4. imamo $\mathcal{V} = U(\mathfrak{g})V = U(\mathfrak{n})HV$. Time je teorem dokazan, jer je potprostor HV konačnodimenzionalan.

Za $(\mathfrak{g}, K)-$modul $\mathcal{V}$ stavimo $\mathcal{V}_{\mathfrak{n}} = \mathcal{V}/\mathfrak{n}\mathcal{V}$ i $\mathcal{V}_{\overline{\mathfrak{n}}} = \mathcal{V}/\overline{\mathfrak{n}}\mathcal{V}$.

Korolar 2.7.6. *Neka je $\mathcal{V}$ dopustiv $(\mathfrak{g}, K)-$modul koji je konačno generiran kao $U(\mathfrak{g})-$modul. Tada je prostor $\mathcal{V}_{\mathfrak{n}}$ konačnodimenzionalan.*

Dokaz: Prema teoremu 2.7.5. postoji konačnodimenzionalan potprostor V od $\mathcal{V}$ takav da je $\mathcal{V} = U(\mathfrak{n})V$. Tada je
$$\mathcal{V} = (\mathbb{C} + \mathfrak{n}U(\mathfrak{n}))V = V + \mathfrak{n}V,$$
pa slijedi $\dim \mathcal{V}_{\mathfrak{n}} \leq \dim V < +\infty$.

Podsjetimo se da je **modul $\mathcal{V}$ konačne duljine** ako postoje podmoduli
$$\{0\} = \mathcal{V}_0 \subseteq \mathcal{V}_1 \subseteq \cdots \subseteq \mathcal{V}_n = \mathcal{V}$$
takvi da je subkvocijentni modul $\mathcal{V}_i/\mathcal{V}_{i-1}$ ireducibilan za $i = 1, \ldots, n$. To je tako ako i samo ako je modul $\mathcal{V}$ i Noetherin i Artinov.

Teorem 2.7.7. *Neka je $\mathcal{V}$ dopustiv $(\mathfrak{g}, K)-$modul. Sljedeća su tri svojstva međusobno ekvivalentna:*

(a) $U(\mathfrak{g})-$moduli $\mathcal{V}$ i $\tilde{\mathcal{V}}$ su konačno generirani.

(b) Modul $\mathcal{V}$ je konačne duljine.

(c) Modul $\tilde{\mathcal{V}}$ je konačne duljine.

Dokaz: Za $V \subseteq \mathcal{V}$ stavimo $V^{\perp} = \{f \in \tilde{\mathcal{V}};\ f|V = 0\}$. Tada je očito $V \mapsto V^{\perp}$ bijekcija sa skupa svih podmodula od $\mathcal{V}$ na skup svih podmodula od $\tilde{\mathcal{V}}$. Odatle slijedi $(b) \iff (c)$. Nadalje, očito vrijedi $(b) \implies (a)$ i $(c) \implies (a)$. Pretpostavimo napokon da vrijedi (a). Budući da je $U(\mathfrak{g})$ Noetherina algebra, $U(\mathfrak{g})-$modul $\mathcal{V}$ je Noetherin. Prema bijekciji $V \mapsto V^{\perp}$ slijedi da je $\tilde{\mathcal{V}}$ Artinov $U(\mathfrak{g})-$modul. No kako je i modul $\tilde{\mathcal{V}}$ konačno generiran, on je i Noetherin. Dakle, vrijedi (c).

2.8 Inducirani i elementarni moduli

Stavimo kao prije $\mathfrak{s} = \mathfrak{m} \dot{+} \mathfrak{a}$ i $S = MA$. Nadalje, uvodimo oznake za minimalne paraboličke podalgebre i podgrupe pridružene Σ_+ i $-\Sigma_+$:

$$\mathfrak{q} = \mathfrak{m} \dot{+} \mathfrak{a} \dot{+} \mathfrak{n}, \quad Q = MAN, \quad \overline{\mathfrak{q}} = \vartheta(\mathfrak{q}) = \mathfrak{m} \dot{+} \mathfrak{a} \dot{+} \overline{\mathfrak{n}}, \quad \overline{Q} = \vartheta(Q) = MA\overline{N}.$$

$\mathfrak{m}$, $\mathfrak{a}$, M i A normaliziraju $\mathfrak{n}$, $\overline{\mathfrak{n}}$, N i $\overline{N}$. Prema tome, $S-$moduli su u bijekciji sa $Q-$modulima (odn. $\overline{Q}-$modulima) na kojima N (odn. $\overline{N}$) djeluje trivijalno. Analogno, $(\mathfrak{s}, M)-$moduli u bijekciji su sa $(\mathfrak{q}, M)-$modulima (odn. $(\overline{\mathfrak{q}}, M)-$modulima) na kojima $\mathfrak{n}$ (odn. $\overline{\mathfrak{n}}$) djeluje trivijalno. Budući da su grupe A, N i $\overline{N}$ povezane i jednostavno povezane, konačnodimenzionalni $(\mathfrak{s}, M)-$moduli su ujedno neprekidni $S-$moduli, konačnodimenzionalni $(\mathfrak{q}, M)-$moduli su neprekidni $Q-$moduli i konačnodimenzionalni $(\overline{\mathfrak{q}}, M)-$moduli su neprekidni $\overline{Q}-$moduli.

Uočimo najprije neka svojstva neprekidnih konačnodimenzionalnih $S-$modula.

Teorem 2.8.1. *Neka je ω konačnodimenzionalna neprekidna reprezentacija grupe S na prostoru V. Za $\lambda \in \mathfrak{a}^{*\mathbb{C}}$ stavimo*

$$V_{(\lambda)} = \{v \in V;\ \exists m \in \mathbb{Z}_+,\ (\omega(H) - \lambda(H) I_V)^m v = 0\ \forall H \in \mathfrak{a}\}$$

i neka je $T(\omega) = \left\{\lambda \in \mathfrak{a}^{*\mathbb{C}};\ V_{(\lambda)} \neq \{0\}\right\}$.

(a) *Za svaki $\lambda \in \mathfrak{a}^{*\mathbb{C}}$ potprostor $V_{(\lambda)}$ je $S-$podmodul i vrijedi*

$$V_{(\lambda)} = \left\{v \in V;\ \exists k \in \mathbb{Z}_+\ \left(\omega(a) - \mathrm{e}^{\lambda(\log a)}\right)^k v = 0\ \forall a \in A\right\}.$$

(b) *Vrijedi*

$$V = \sum_{\lambda \in T(\omega)} \dot{+} V_{(\lambda)}.$$

Posebno, skup $T(\omega)$ je konačan

(c) *Za $\lambda \in T(\omega)$ postoji $S-$podmodul V_1 od V takav da je kvocijentni $S-$modul V/V_1 ireducibilan i da na V/V_1 svaki $a \in A$ djeluje množenjem sa $\mathrm{e}^{\lambda(\log a)}$.*

(d) *Za svaki $\lambda \in T(\omega)$ postoji polinomijalno preslikavanje $P_\lambda : \mathfrak{a} \to End(V_{(\lambda)})$ takvo da je*

$$\omega(a)|V_{(\lambda)} = \mathrm{e}^{\lambda(\log a)} P_\lambda(\log a) \qquad \forall a \in A.$$

Dokaz: (a) i (b) Stavimo privremeno

$$V^{(\lambda)} = \left\{v \in V;\ \exists k \in \mathbb{Z}_+\ \left(\omega(a) - \mathrm{e}^{\lambda(\log a)}\right)^k v = 0\ \forall a \in A\right\}.$$

Budući da je grupa A sadržana u centru grupe S, očito su $V_{(\lambda)}$ i $V^{(\lambda)}$ $S-$podmoduli od V. Neka su $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathfrak{a}^{*\mathbb{C}}$ međusobno različiti. Tada postoji $a \in A$ takav da je $\mathrm{e}^{\lambda_i(\log a)} \neq \mathrm{e}^{\lambda_j(\log a)}$ za $i \neq j$. Tada su potprostori $V^{(\lambda_1)}, \ldots, V^{(\lambda_m)}$ sadržani korijenskim potprostorima operatora $\omega(a)$ za međusobno različite svojstvene vrijednosti, pa je njihova suma direktna. Odatle slijedi

$$V = \sum_{\lambda \in \mathfrak{a}^{*\mathbb{C}}} \dot{+} V^{(\lambda)}, \tag{2.10}$$

a sasvim analogno dobivamo i da je

$$V = \sum_{\lambda \in \mathfrak{a}^{*\mathbb{C}}} \dot{+} V_{(\lambda)}. \tag{2.11}$$

Za svaki $H \in \mathfrak{a}$ potprostor $V_{(\lambda)}$ invarijantan je s obzirom na operator $\omega(H)$ i spektar restrikcije $\omega(H)|V_{(\lambda)}$ jenak je $\{\lambda(H)\}$. Odatle slijedi da je za svaki $a \in A$ potprostor $V_{(\lambda)}$ invarijantan s obzirom na operator $\omega(a) = \mathrm{e}^{\omega(\log a)}$ i spektar restrikcije $\omega(a)|V_{(\lambda)}$ jednak je $\left\{\mathrm{e}^{\lambda(\log a)}\right\}$. Odatle slijedi da je $V_{(\lambda)} \subseteq V^{(\lambda)}$ za svaki $\lambda \in \mathfrak{a}^{*\mathbb{C}}$. Sada iz rastava (2.10) i (2.11) slijedi jednakost $V_{(\lambda)} = V^{(\lambda)}$ $\forall \lambda \in \mathfrak{a}^{*\mathbb{C}}$. Time su dokazane tvrdnje (a) i (b).

(c) Neka je V_2 maksimalni pravi $S-$podmodul od $V_{(\lambda)}$ i stavimo

$$V_1 = V_2 \dot{+} \sum_{\mu \neq \lambda} \dot{+} V_{(\mu)}.$$

Tada je očito V_1 maksimalni pravi $S-$podmodul od V, pa je kvocijentni modul $V/V_1 \simeq V_{(\lambda)}/V_2$ ireducibilan. Tada je za svaki $a \in A$ spektar operatora $\omega_{V/V_1}(a)$ jednak $\left\{\mathrm{e}^{\lambda(\log a)}\right\}$. Po Schurovoj lemi je $\omega_{V/V_1}(a)$ sklarni multipl jediničnog operatora. Dakle,

$$\omega_{V/V_1}(a) = \mathrm{e}^{\lambda(\log a)} I_{V/V_1} \qquad \forall a \in A.$$

(d) Možemo pretpostaviti da je $V = V_{(\lambda)}$. Definiramo

$$\tau(a) = \mathrm{e}^{-\lambda(\log a)} \omega(a), \qquad a \in A.$$

Tada je τ reprezentacija od A na prostoru V i vrijedi $T(\tau) = \{0\}$. Za $H \in \mathfrak{a}$ je tada $\tau(H)$ nilpotentan operator, pa ako je $\dim V = n$, imamo

$$\tau(\exp H) = I_V + \tau(H) + \cdots + \frac{1}{(n-1)!} \tau(H)^{n-1} \qquad \forall H \in \mathfrak{a}.$$

Sada je očito $P = \tau \circ \exp : \mathfrak{a} \to End(V)$ polinomijalno preslikavanje i vrijedi

$$\omega(a) = \mathrm{e}^{\lambda(\log a)} P(\log a) \qquad \forall a \in A.$$

Neka je sada V proizvoljan konačnodimenzionalan neprekidan $Q-$modul s reprezentacijom τ. Označimo sa $\mathcal{H}^\tau$ prostor svih klasa izmjerivih funkcija $f : G \to V$ sa svojstvima

$$f(qx) = \tau(q) f(x) \qquad \forall q \in Q \quad \text{i} \quad \forall x \in G$$

i

$$\int_K \|f(k)\|_V^2 \mathrm{d}\mu(k) < +\infty.$$

Pri tome je $\|\cdot\|_V$ norma na V dobivena iz skalarnog produkta $(\cdot|\cdot)_V$ u odnosu na koji je reprezentacija $\tau|M$ unitarna, a μ je normirana Haarova mjera na K. Budući da je funkcija $f \in \mathcal{H}^\tau$ potpuno određena svojom restrikcijom $f|K$ (jer je $G = QK$), $\mathcal{H}^\tau$ je Hilbertov prostor sa skalarnim produktom

$$(f|g) = \int_K (f(k)|g(k))_V \mathrm{d}\mu(k), \qquad f, g \in \mathcal{H}^\tau.$$

Stavimo $\sigma = \tau|M$ i neka je $\mathcal{H}^\sigma$ prostor svih klasa izmjerivih funkcija $\varphi : K \to V$ sa svojstvima

$$\varphi(mk) = \sigma(m)\varphi(k) \qquad \forall m \in M \quad \text{i} \quad \forall k \in K$$

i

$$\int_K \|\varphi(k)\|_V^2 \mathrm{d}\mu(k) < +\infty.$$

Tada je i $\mathcal{H}^\sigma$ Hilbertov prostor i to je zatvoren potprostor od $L_2(K,V)$. Nadalje, $f \mapsto f|K$ je izometrički izomorfizam sa $\mathcal{H}^\tau$ na $\mathcal{H}^\sigma$. Inverzni izomorfizam $T_\tau : \mathcal{H}^\sigma \to \mathcal{H}^\tau$ je dan sa

$$(T_\tau\varphi)(qk) = \tau(q)\varphi(k), \qquad q \in Q, \quad k \in K, \quad \varphi \in \mathcal{H}^\sigma.$$

Stavimo

$$C^\tau = \mathcal{H}^\tau \cap C(G,V), \qquad \mathcal{C}^\tau = \mathcal{H}^\tau \cap C^\infty(G,V), \quad \mathcal{A}^\tau = \mathcal{H}^\tau \cap \mathcal{A}(G,V),$$

$$C^\sigma = \mathcal{H}^\sigma \cap C(K,V), \qquad \mathcal{C}^\sigma = \mathcal{H}^\sigma \cap C^\infty(K,V), \quad \mathcal{A}^\sigma = \mathcal{H}^\sigma \cap \mathcal{A}(K,V).$$

Pri tome za bilo koju analitičku mnogostrukost X i konačnodimenzionalan vektorski prostor W oznake $C(X,V)$, $C^\infty(X,W)$ i $\mathcal{A}(X,W)$ predstavljaju prostore neprekidnih, C^∞ i analitičkih funkcija sa X u V. Budući da je preslikavanje $(a,n,k) \mapsto ank$ bianalitička bijekcija sa $A \times N \times K$ na G, i budući da je $\tau : Q \to End(V)$ analitičko preslikavanje, slijedi da su restrikcije operatora T_τ izomorfizmi vektorskih prostora sa C^σ, $\mathcal{C}^\sigma$ i $\mathcal{A}^\sigma$ na C^τ, $\mathcal{C}^\tau$ i $\mathcal{A}^\tau$.

Definiramo za svaki $x \in G$ operator π^τ na $\mathcal{H}^\tau$ kao desni pomak:

$$(\pi^\tau(x)f)(y) = f(yx), \qquad f \in \mathcal{H}^\tau, \quad y \in G.$$

Tada je $\pi^\tau(x)$ ograničen operator sa $\mathcal{H}^\tau$ u $\mathcal{H}^\tau$ i $\mathcal{H}^\tau$ postaje Banachov (štoviše, Hilbertov) $G-$modul. Očito su C^τ, $\mathcal{C}^\tau$ i $\mathcal{A}^\tau$ $G-$podmoduli.

Izomorfizam $T_\tau : \mathcal{H}^\sigma \to \mathcal{H}^\tau$ inducira na $\mathcal{H}^\sigma$ strukturu $G-$modula; označimo pripadnu reprezentaciju sa ω^τ :

$$\omega^\tau(x) = T_\tau^{-1}\pi^\tau(x)T_\tau, \qquad x \in G.$$

Neka su $\kappa, \kappa_1 : G \to K$, $H, H_1 : G \to \mathfrak{a}$ i $n, n_1 : G \to N$ analitička preslikavanja pridružena Iwasawinim dekompozicijama $G = KAN$ i $G = ANK$:

$$x = \kappa(x)(\exp\, H(x))n(x) = (\exp\, H_1(x))n_1(x)\kappa_1(x), \qquad x \in G.$$

Inveriranjem lako dobivamo veze između tih preslikavanja za dvije vrste Iwasawinih dekompozicija:

$$\kappa(x) = \kappa_1\left(x^{-1}\right)^{-1}, \quad H(x) = -H_1\left(x^{-1}\right), \quad n(x) = \left(\exp\, H_1\left(x^{-1}\right)\right) n_1\left(x^{-1}\right)^{-1}\left(\exp\, -H_1\left(x^{-1}\right)\right),$$

$$\kappa_1(x) = \kappa\left(x^{-1}\right)^{-1}, \quad H_1(x) = -H\left(x^{-1}\right), \quad n_1(x) = \left(\exp\, H\left(x^{-1}\right)\right) n\left(x^{-1}\right)^{-1}\left(\exp\, -H\left(x^{-1}\right)\right).$$

Pomoću preslikavanja κ_1, H_1 i n_1 možemo eksplicitno zapisati djelovanje reprezentacije ω^τ :

Lema 2.8.2. *Za $x \in G$, $\varphi \in \mathcal{H}^\sigma$ i $k \in K$ je*

$$\left[\omega^\tau(x)\varphi\right](k) = \tau\left(\exp\, H_1(kx)\right)\tau\left(n_1(kx)\right)\varphi\left(\kappa_1(kx)\right).$$

Dokaz je direktan račun:

$$\left[\omega^\tau(x)\varphi\right](k) = \left(\pi^\tau(x)T_\tau\varphi\right)(k) = \left(T_\tau\varphi\right)(kx) =$$

$$= \left(T_\tau\varphi\right)\left(\left(\exp\, H_1(kx)\right)n_1(kx)\kappa_1(kx)\right) = \tau\left(\left(\exp\, H_1(kx)\right)n_1(kx)\right)\varphi\left(\kappa_1(kx)\right).$$

Teorem 2.8.3. *Vrijedi $\mathcal{H}_K^\sigma \subseteq \mathcal{A}^\sigma$ i $\mathcal{H}_K^\tau \subseteq \mathcal{A}^\tau$; tj. sve $K-$konačne funkcije iz $\mathcal{H}^\sigma$ i iz $\mathcal{H}^\tau$ su analitičke.*

Dokaz: Neka je $\varphi \in \mathcal{H}_K^\sigma$. Neka je $\{v_1, \ldots, v_n\}$ baza prostora V. Definiramo funkcije $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in L_2(K)$ kao koordinate funkcije φ :

$$\varphi(k) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(k) v_i, \qquad k \in K.$$

Tada za svako i desni $K-$translati funkcije φ_i razapinju konačnodimenzionalan potprostor od $L_2(K)$. Dakle, za dokaz da je $\varphi \in \mathcal{A}^\sigma$ dovoljno je dokazati da je svaka desno $K-$konačna funkcija $\psi \in L_2(K)$ analitička. No prema Peter$-$Weylovom teoremu takva je funkcija ψ linearna kombinacija matričnih elemenata konačnodimenzionalnih ireducibinih neprekidnih reprezentacija od K, a ti su matrični elementi analitičke funkcije.

Tvrdnja $\mathcal{H}_K^\tau \subseteq \mathcal{A}^\tau$ slijedi iz ove dokazane pomoću izomorfizma T_τ. Naime, očito je $T_\tau|\mathcal{H}_K^\sigma$ izomorfizam prostora $\mathcal{H}_K^\sigma$ na prostor $\mathcal{H}_K^\tau$ i $T_\tau|\mathcal{A}^\sigma$ je izomorfizam prostora $\mathcal{A}^\sigma$ na prostor $\mathcal{A}^\tau$.

Teorem 2.8.4. (**Frobeniusov teorem reciprociteta**) *Neka je δ neprekidna reprezentacija od K na konačnodimenzionalnom vektorskom prostoru U. Za $A \in Hom_K(U, \mathcal{H}^\tau)$ definiramo $\tilde{A} : U \to V$ sa $\tilde{A}u = [Au](e)$. Tada je $\tilde{A} \in Hom_M(U, V)$ i $A \mapsto \tilde{A}$ je izomorfizam prostora $Hom_K(U, \mathcal{H}^\tau)$ na prostor $Hom_M(U, V)$. Inverzni izomorfizam $B \mapsto \hat{B}$ dan je sa*

$$(\hat{B}u)(qk) = \tau(q)B\delta(k)u, \qquad u \in U, \quad q \in Q, \quad k \in K.$$

Dokaz: Neka je $A \in Hom_K(U, \mathcal{H}^\tau)$. Definicija $\tilde{A}$ ima smisla jer je prema teoremu 2.8.3. $Hom_K(U, \mathcal{H}^\tau) = Hom_K(U, \mathcal{A}^\tau)$, pa je za svaki $u \in U$ funkcija Au analitička na G. Očito je $\tilde{A} : U \to V$ linearan operator. Za $m \in M$ i $u \in U$ imamo

$$\tilde{A}\delta(m)u = [A\delta(m)u](e) = [\pi^\tau(m)Au](e) = [Au](m) = \tau(m)[Au](e) = \tau(m)\tilde{A}u.$$

Dakle, $\tilde{A}\delta(m) = \tau(m)\tilde{A} \ \ \forall m \in M$, odnosno, $\tilde{A} \in Hom_M(U, V)$. Dakle, $A \mapsto \tilde{A}$ je preslikavanje sa $Hom_K(U, \mathcal{H}^\tau)$ u $Hom_M(U, V)$, i iz definicije je očito da je to preslikavanje linearno.

Neka je sada $B \in Hom_M(U, V)$. Definiramo preslikavanje $\hat{B}$ sa U u prostor $V-$značnih funkcija na G ovako:

$$(\hat{B}u)(qk) = \tau(q)A\delta(k)u, \qquad u \in U, \quad k \in K, \quad q \in Q.$$

Definicija je smislena. Doista, ako su $q, q_1 \in Q$ i $k, k_1 \in K$ takvi da je $qk = q_1k_1$, onda je $m = q_1^{-1}q = k_1k^{-1} \in Q \cap K = M$, a kako je B preplitanje u odnosu na reprezentacije grupe M, imamo

$$\tau(q_1)B\delta(k_1)u = \tau(q_1)B\delta(m)\delta(k)u = \tau(q_1)\tau(m)B\delta(k)u = \tau(q)B\delta(k)u.$$

Preslikavanja $\tau : P \to End(U)$ i $\delta : K \to End(V)$ su analitička, pa slijedi da je za svaki $u \in U$ preslikavanje $\hat{B}u : G \to V$ analitičko, odnosno, $\hat{B}u \in \mathcal{A}(G, V)$. Za $x \in G$ pišemo $x = qk$ za neke $q \in Q$ i $k \in K$. Sada za $q_1 \in Q$ imamo

$$(\hat{B}u)(q_1x) = (\hat{B}u)(q_1qk) = \tau(q_1q)B\delta(k)u = \tau(q_1)\tau(q)B\delta(k)u = \tau(q_1)(\hat{B}u)(qk) = \tau(q_1)(\hat{B}u)(x).$$

Prema tome, $\hat{B}u \in \mathcal{A}^\tau \subseteq \mathcal{H}^\tau$. Očito je tako definiran operator $\hat{B} : U \to \mathcal{H}^\tau$ linearan. Za $k_1, k \in K$, $q \in Q$, $u \in U$ i $x = qk$ imamo

$$(\hat{B}\delta(k_1)u)(x) = (\hat{B}\delta(k_1)u)(qk) = \tau(q)B\delta(k)\delta(k_1)u = \tau(q)B\delta(kk_1)u =$$

$$= (\hat{B}u)(qkk_1) = (\hat{B}u)(xk_1) = [\pi^\tau(k_1)\hat{B}u](x).$$

Kako su $x \in G$ i $u \in U$ bili proizvoljni, zaključujemo da je

$$\hat{B}\delta(k_1) = \pi^\tau(k_1)\hat{B} \qquad \forall k_1 \in K,$$

odnosno, $\hat{B} \in Hom_K(U, \mathcal{H}^\tau)$. Iz definicije je jasno da je operator $B \mapsto \hat{B}$ sa $Hom_M(U, V)$ u $Hom_K(U, \mathcal{H}^\tau)$ linearan. Sada za $A \in Hom_K(U, \mathcal{H}^\tau)$ i proizvoljne $u \in U$, $q \in Q$ i $k \in K$ imamo

$$(\hat{\tilde{A}}u)(qk) = \tau(q)\tilde{A}\delta(k)u = \tau(q)(A\delta(k)u)(e) = (A\delta(k)u)(q) = (\pi^\tau(k)Au)(q) = (Au)(qk).$$

Dakle, $\hat{\tilde{A}} = A$ za svaki $A \in Hom_K(U, \mathcal{H}^\tau)$. Nadalje, za $B \in Hom_M(U, V)$ i proizvoljan $u \in U$ imamo

$$\tilde{\hat{B}}u = (\hat{B}u)(e) = \tau(e)B\delta(e)u = Bu.$$

Dakle, $\tilde{\hat{B}}$ za svaki $B \in Hom_M(U, V)$. Time smo dokazali da su preslikavanja $A \mapsto \tilde{A}$ i $B \mapsto \hat{B}$ međusobno inverzni izomorfizmi.

Korolar 2.8.5. *$\mathcal{H}^\tau$ je dopustiv $(G, K)-$modul.*

Dokaz: Neka je $\delta \in \hat{K}$ i neka je U $K-$modul iz klase δ. Tada iz teorema 2.8.4. slijedi

$$\dim \mathcal{H}^\tau_\delta = d(\delta) \cdot \dim Hom_K(U, \mathcal{H}^\tau) = d(\delta) \cdot \dim Hom_M(U, V) \leq d(\delta)^2 \cdot \dim V < +\infty.$$

Iz korolara 2.8.5. i teorema 2.7.1. neposredno slijedi:

Korolar 2.8.6. *$\mathcal{H}^\tau_K$ je dopustiv $(\mathfrak{g}, K)-$modul.*

U daljnjem je $\mathcal{V}$ proizvoljan dopustiv $(\mathfrak{g}, K)-$modul. Budući da $\mathfrak{a}$ i M normaliziraju $\mathfrak{n}$, potprostor $\mathfrak{n}\mathcal{V}$ je $M-$podmodul i $\mathfrak{a}-$podmodul od $\mathcal{V}$. Prema tome, kvocijentni modul $\mathcal{V}_\mathfrak{n} = \mathcal{V}/\mathfrak{n}\mathcal{V}$ je $(\mathfrak{s}, M)-$modul. Nadalje, $\mathfrak{n}\mathcal{V}$ je i $\mathfrak{n}-$podmodul od $\mathcal{V}$ i na kvocijentnom modulu $\mathcal{V}_\mathfrak{n}$ $\mathfrak{n}$ djeluje trivijalno. Dakle, $\mathcal{V}_\mathfrak{n}$ je $(\mathfrak{q}, M)-$modul na kome $\mathfrak{n}$ djeluje trivijalno.

Ako je $\dim \mathcal{V}_\mathfrak{n} < +\infty$, a to jest tako prema korolaru 2.7.6. ako je $\mathcal{V}$ kao $U(\mathfrak{g})-$modul konačno generiran, tada $\mathcal{V}_\mathfrak{n}$ postaje $P-$modul na kome N djeluje trivijalno.

Teorem 2.8.7. (**Casselmanov teorem reciprociteta**) *Neka je $\mathcal{V}$ dopustiv $(\mathfrak{g}, K)-$modul i neka je V konačnodimenzionalan neprekidan $P-$modul na kome grupa N djeluje trivijalno. Označimo sa τ pripadnu reprezentaciju od P.*

(*a*) *Preslikavanje $T : \mathcal{H}^\tau_K \to V$, definirano sa $Tf = f(e)$ je preplitanje $(\mathfrak{q}, M)-$modula.*

(*b*) *Za $A \in Hom_{\mathfrak{g},K}(\mathcal{V}, \mathcal{H}^\tau_K)$ je $TA \in Hom_{\mathfrak{q},M}(\mathcal{V}, V)$ i vrijedi $\mathfrak{n}\mathcal{V} \subseteq \mathrm{Ker}\, TA$. Stoga TA inducira preplitanje $(\mathfrak{q}, M)-$modula $A_\mathfrak{n} : \mathcal{V}_\mathfrak{n} \to V$.*

(*c*) *$A \mapsto A_\mathfrak{n}$ je izomorfizam prostora $Hom_{\mathfrak{g},K}(\mathcal{V}, \mathcal{H}^\tau_K)$ na prostor $Hom_{\mathfrak{q},M}(\mathcal{V}_\mathfrak{n}, V)$. Inverzni izomorfizam je $B \mapsto B^\mathfrak{n}$, gdje je*

$$(B^\mathfrak{n} v)(qk) = \tau(q)B(k \cdot v + \mathfrak{n}\mathcal{V}), \qquad v \in \mathcal{V}, \quad q \in Q, \quad k \in K.$$

Dokaz: (*a*) Proširimo preslikavanje T na prostor $\mathcal{A}^\tau$ istom formulom: $Tf = f(e)$, $f \in \mathcal{A}^\tau(G)$. Za $q \in Q$ i $f \in \mathcal{A}^\tau$ imamo

$$T\pi^\tau f = (\pi^\tau(q)f)(e) = f(q) = \tau(q)f(e) = \tau(q)Tf.$$

Dakle, T je preplitanje $Q-$modula sa $\mathcal{A}^\tau$ u V. Odatle deriviranjem dobivamo da je T preplitanje $\mathfrak{q}-$modula, pa je restrikcija na $\mathcal{H}^\tau_K$ također preplitanje $\mathfrak{q}-$modula. Naravno, kako je $M \subseteq Q$, to je i preplitanje $M-$modula.

Za $A \in Hom_{\mathfrak{g},K}(\mathcal{V}, \mathcal{H}^\tau_K)$ je ujedno $A \in Hom_{\mathfrak{q},M}(\mathcal{V}, \mathcal{H}^\tau_K)$, dakle, $TA \in Hom_{\mathfrak{q},M}(\mathcal{V}, V)$. Za $X \in \mathfrak{n}$ je $\tau(X) = 0$, pa za svaki $v \in \mathcal{V}$ nalazimo

$$TA(X \cdot v) = T\pi^\tau(X)Av = \tau(X)TAv = 0.$$

Dakle, $\mathfrak{n}\mathcal{V} \subseteq \mathrm{Ker}\, TA$.

(c) Preslikavanje $A \mapsto A_{\mathfrak{n}}$ sa $Hom_{\mathfrak{g},K}(\mathcal{V},\mathcal{H}^\tau))$ u $Hom_{\mathfrak{q},M}(\mathcal{V}_{\mathfrak{n}},V)$ je očito linearno. Neka je sada $B\in Hom_{\mathfrak{q},M}(\mathcal{V}_{\mathfrak{n}}V)$. Definiramo preslikavanje $\tilde{B}:\mathcal{V}\to V$ sa

$$\tilde{B}v = B(v+\mathfrak{n}\mathcal{V}), \qquad v\in\mathcal{V}.$$

Tada je $\tilde{B}\in Hom_{\mathfrak{q},M}(\mathcal{V},V)$. Za svaki $v\in\mathcal{V}$ definiramo funkciju $F_v:G\to V$ sa

$$F_v(ank)=\tau(a)\tilde{B}(k\cdot v), \qquad a\in A, \quad n\in N, \quad k\in K.$$

Budući da je $\tilde{B}$ preplitanje $M-$modula, za $q=man$, $m\in M$, $a\in A$, $n\in N$ vrijedi $am=ma$ i $mnm^{-1}\in N$, pa za $k\in K$ imamo

$$F_v(qk)=F_v(mank)=F_v(a(mnm^{-1})mk)\tau(a)\tilde{B}(mk\cdot v)=\tau(a)\tau(m)\tilde{B}(k\cdot v)=\tau(q)\tilde{B}(k\cdot v).$$

Očito je $F_v\in\mathcal{A}(G,V)$. Za $q\in Q$ i $x\in G$ pišemo $x=q_1k$ za neke $q_1\in Q$ i $k\in K$, pa nalazimo

$$F_v(qx)=F_v(qq_1k)=\tau(qq_1)\tilde{B}(k\cdot v)=\tau(q)F_v(q_1k)=\tau(q)F_v(x).$$

Dakle, $F_v\in\mathcal{A}^\tau$.

Definiramo sada $B^{\mathfrak{n}}:\mathcal{V}\to\mathcal{A}^\tau$ sa $B^{\mathfrak{n}}v=F_v$, $v\in\mathcal{V}$. Tada je $B^{\mathfrak{n}}$ linearan operator. Za $q\in Q$, $k,k_1\in K$ i $x=qk\in G$ imamo

$$[\pi^\tau(k_1)B^{\mathfrak{n}}v](x)=[B^{\mathfrak{n}}v](xk_1)=F_v(qkk_1)=\tau(q)\tilde{B}(kk_1\cdot v)=F_{k_1\cdot v}(x)=[B^{\mathfrak{n}}(k_1\cdot v)](x).$$

To pokazuje da je $B^{\mathfrak{n}}\in Hom_K(\mathcal{V},\mathcal{A}^\tau)=Hom_K(\mathcal{V},\mathcal{H}^\tau_K)$.

Dokažimo sada da je $B^{\mathfrak{n}}$ također preplitanje $\mathfrak{g}-$modula. Prije svega, neka je $X\in\mathfrak{q}$ i $v\in\mathcal{V}$. Budući da je $\tilde{B}$ preplitanje $\mathfrak{q}-$modula, nalazimo

$$[\pi^\tau(X)B^{\mathfrak{n}}v](e)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\pi^\tau(\exp tX)B^{\mathfrak{n}}v](e)\bigg|_{t=0}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F_v(\exp tX)\bigg|_{t=0}=$$

$$=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\tau(\exp tX)\tilde{B}v\bigg|_{t=0}=\tau(X)\tilde{B}v=\tilde{B}(X\cdot v)=F_{X\cdot v}(e)=[B^{\mathfrak{n}}(X\cdot v)](e).$$

$B^{\mathfrak{n}}$ je preplitanje $K-$modula, dakle i preplitanje $\mathfrak{k}-$modula, pa za $X\in\mathfrak{k}$ također vrijedi

$$[\pi^\tau(X)B^{\mathfrak{n}}v](e)=[B^{\mathfrak{n}}(X\cdot v)](e).$$

Budući da je $\mathfrak{g}=\mathfrak{k}+\mathfrak{q}$, zaključujemo da vrijedi

$$[\pi^\tau(X)B^{\mathfrak{n}}v](e)=[B^{\mathfrak{n}}(X\cdot v)](e) \qquad \forall X\in\mathfrak{g} \quad \text{i} \quad \forall v\in\mathcal{V}.$$

Sada za $k\in K$, $X\in\mathfrak{g}$ i $v\in\mathcal{V}$ dobivamo (jer je $B^{\mathfrak{n}}$ preplitanje $K-$modula):

$$[\pi^\tau(X)B^{\mathfrak{n}}v](k)=[\pi^\tau(k)\pi^\tau(X)B^{\mathfrak{n}}v](1)=[\pi^\tau((Ad\,k)X)\pi^\tau(k)B^{\mathfrak{n}}v](e)=$$

$$=[\pi^\tau((Ad\,k)X)B^{\mathfrak{n}}(k\cdot v)](e)=[B^{\mathfrak{n}}((Ad\,k)X\cdot k\cdot v)](e)=[B^{\mathfrak{n}}(k\cdot X\cdot v)](e)=$$
$$=[\pi^\tau(k)B^{\mathfrak{n}}(X\cdot v)](e)=[B^{\mathfrak{n}}(X\cdot v)](k).$$

Time smo dokazali da vrijedi

$$\pi^\tau B^{\mathfrak{n}}v|K=B^{\mathfrak{n}}(X\cdot v)|K \qquad \forall X\in\mathfrak{g} \quad \text{i} \quad \forall v\in\mathcal{V}.$$

S obje strane nalaze se funkcije iz $\mathcal{A}^\tau$, dakle, one su određene svojim restrikcijama na K. Prema tome, vrijedi

$$\pi^\tau(X)B^\mathfrak{n}v = B^\mathfrak{n}(X\cdot v) \qquad \forall X\in\mathfrak{g} \quad \text{i} \quad \forall v\in\mathcal{V},$$

odnosno, $B^\mathfrak{n}$ je preplitanje $\mathfrak{g}-$modula. Prema tome, $B\mapsto B^\mathfrak{n}$ je linearan operator sa $Hom_{\mathfrak{q},M}(\mathcal{V}_\mathfrak{n},V)$ u $Hom_{\mathfrak{g},K}(\mathcal{V},\mathcal{H}_K^\tau)$.

Za $v\in\mathcal{V}$ i $B\in Hom_{\mathfrak{q},M}(\mathcal{V}_\mathfrak{n},V)$ imamo

$$TB^\mathfrak{n}v = [B^\mathfrak{n}v](e) = F_v(e) = \tilde{B}v.$$

Odatle je $(B^\mathfrak{n})_\mathfrak{n} = B$. Nadalje, za $A\in Hom_{\mathfrak{g},K}(\mathcal{V},\mathcal{H}_K^\tau)$, $x\in G$, $v\in\mathcal{V}$ i $x=qk$, $q\in Q$, $k\in K$, imamo redom

$$[(A_\mathfrak{n})^\mathfrak{n}](x) = F_v(qk) == \tau(q)F_v(k) = \tau(q)(A_\mathfrak{n})\tilde{}(k\cdot v) = \tau(q)A_\mathfrak{n}(k\cdot v+\mathfrak{n}\mathcal{V}) =$$

$$= t(q)TA(k\cdot v) = \tau(q)[A(k\cdot v)](e) = [A(k\cdot v)](q) = [\pi^\tau(k)Av](q) = [Av](qk) = [Qv](x).$$

Dakle, $(A_\mathfrak{n})^\mathfrak{n} = A$. Time smo dokazali da su $A\mapsto A_\mathfrak{n}$ i $B\mapsto B^\mathfrak{n}$ međusobno inverzni izomorfizmi.

Sada zbog korolara 2.7.6. dobivamo kao neposrednu posljedicu:

Korolar 2.8.8. *Ako je dopustiv $(\mathfrak{g},K)-$modul $\mathcal{V}$ konačno generiran kao $U(\mathfrak{g})-$modul, onda je $A\mapsto A_\mathfrak{n}$ izomorfizam vektorskih prostora sa $Hom_{\mathfrak{g},K}(\mathcal{V},\mathcal{H}_K^\tau)$ na $Hom_Q(\mathcal{V}_\mathfrak{n},V) = Hom_S(\mathcal{V}_\mathfrak{n},V)$.*

Za neprekidnu konačnodimenzionalnu reprezentaciju τ od Q konstruirani $(\mathfrak{g},K)-$moduli $\mathcal{H}_K^\tau$ zovu se **inducirani** $(\mathfrak{g},K)-$**moduli**.

Neka je sada σ neprekidna unitarna konačnodimenzionalna reprezentacija od M na prostoru V i neka je $\lambda\in\mathfrak{a}^{*\mathbb{C}}$. Definiramo reprezentaciju $\tau_Q^{\sigma,\lambda}$ od Q na prostoru V :

$$\tau_Q^{\sigma,\lambda}(man) = \mathrm{e}^{(\lambda+\rho)(\log a)}\sigma(m), \qquad m\in M, \quad a\in A, \quad n\in N.$$

Pisat ćemo $\mathcal{V}_Q^{\sigma,\lambda}$, $\mathcal{A}_Q^{\sigma,\lambda}$, $\mathcal{C}_Q^{\sigma,\lambda}$, $C_Q^{\sigma,\lambda}$, $\mathcal{H}_Q^{\sigma,\lambda}$, $\pi_Q^{\sigma,\lambda}$ i $\omega_Q^{\sigma,\lambda}$ umjesto $\mathcal{H}_K^{\tau_Q^{\sigma,\lambda}}$, $\mathcal{A}^{\tau_Q^{\sigma,\lambda}}$, $\mathcal{C}^{\tau_Q^{\sigma,\lambda}}$, $C^{\tau_Q^{\sigma,\lambda}}$, $\mathcal{H}^{\tau_Q^{\sigma,\lambda}}$, $\pi^{\tau_Q^{\sigma,\lambda}}$ i $\omega^{\tau_Q^{\sigma,\lambda}}$. $\mathcal{V}_Q^{\sigma,\lambda}$ se zovu **elementarni** $(\mathfrak{g},K)-$**moduli**, a $\pi_Q^{\sigma,\lambda}$ **elementarne reprezentacije od** G.

Sasvim se analogne konstrukcije provode i sa $\overline{Q}$ i $\overline{N}$ umjesto Q i N $-$ pri tome treba zamijeniti ρ sa $-\rho$. Oznake su u tom slučaju $\mathcal{V}_{\overline{Q}}^{\sigma,\lambda}$, $\mathcal{A}_{\overline{Q}}^{\sigma,\lambda}$, $\mathcal{C}_{\overline{Q}}^{\sigma,\lambda}$, $C_{\overline{Q}}^{\sigma,\lambda}$, $\mathcal{H}_{\overline{Q}}^{\sigma,\lambda}$, $\pi_{\overline{Q}}^{\sigma,\lambda}$ i $\omega_{\overline{Q}}^{\sigma,\lambda}$.

Za dopustiv $(\mathfrak{g},K)-$modul $\mathcal{V}$ s reprezentacijom π označavamo:

$$J(\pi) = \left\{\lambda\in\mathfrak{a}^{*\mathbb{C}};\ \exists\sigma\in\hat{M},\ Hom_{\mathfrak{g},K}(\mathcal{V},\mathcal{V}_Q^{\sigma,\lambda}) \neq \{0\}\right\}.$$

Teorem 2.8.9. *Neka je $\mathcal{V}$ dopustiv $(\mathfrak{g},K)-$modul s reprezentacijom π koji je konačno generiran kao $U(\mathfrak{g})-$modul. Tada je*

$$J(\pi) = \left\{\lambda\in\mathfrak{a}^{*\mathbb{C}};\ (\mathcal{V}_\mathfrak{n})_{(\lambda+\rho)} \neq \{0\}\right\}.$$

Dokaz: Neka je $\lambda\in J(\pi)$. Tada za neko $\sigma\in\hat{M}$ postoji $0\neq A\in Hom_{\mathfrak{g},K}(\mathcal{V},\mathcal{V}_Q^{\sigma,\lambda})$. Prema teoremu 2.8.7. tada je $0\neq A_\mathfrak{n}\in Hom_Q(\mathcal{V}_\mathfrak{n},V)$. Posebno, vrijedi $A_\mathfrak{n}\in Hom_A(\mathcal{V}_\mathfrak{n},V)$. Sada za neki $\mu\in\mathfrak{a}^{*\mathbb{C}}$ postoji $w\in(\mathcal{V}_\mathfrak{n})_{(\mu+\rho)}$ takav da je $A_\mathfrak{n}w\neq 0$. Za neko $n\in\mathbb{N}$ tada vrijedi

$$\left[\pi_\mathfrak{n}(a) - \mathrm{e}^{(\mu+\rho)(\log a)}\right]^n w = 0 \qquad \forall a\in A.$$

Za svaki $\mu \in \mathfrak{a}^{*\mathbb{C}}$ vrijedi $A_{\mathfrak{n}}(\mathcal{V}_{\mathfrak{n}})_{(\mu+\rho)} \subseteq V_{(\mu+\rho)}$. Međutim, $V_{(\mu+\rho)} \neq \{0\}$ samo za $\mu = \lambda$. Dakle, $A_{\mathfrak{n}} \neq 0$ povlači $(\mathcal{V}_{\mathfrak{n}})_{(\lambda+\rho)} \neq \{0\}$.

Neka je sada $\lambda \in \mathfrak{a}^{*\mathbb{C}}$ takav da je $(\mathcal{V}_{\mathfrak{n}})_{(\lambda+\rho)} \neq \{0\}$. Po teoremu 2.8.1. postoji $Q-$podmodul W od $\mathcal{V}_{\mathfrak{n}}$ takav da je $V = \mathcal{V}_{\mathfrak{n}}/W$ ireducibilan $Q-$modul i na njemu svaki $a \in A$ djeluje množenjem sa $\mathrm{e}^{(\lambda+\rho)(\log a)}$. Neka je σ reprezentacija od M na V dobivena iz $\pi_{\mathfrak{n}}$ prijelazom na kvocijent. Tada je reprezentacija Q na V ekvivalentna reprezentaciji $\tau_Q^{\sigma,\lambda}$. Neka je $B : \mathcal{V}_{\mathfrak{n}} \to V$ kvocijentno preslikavanje. Tada je $B \in Hom_Q(\mathcal{V}_{\mathfrak{n}}, V)$ i $B \neq 0$. Stoga je i $B^{\mathfrak{n}} \in Hom_{\mathfrak{g},K}(\mathcal{V}, \mathcal{V}_Q^{\sigma,\lambda})$ različit od nule. To znači da je $\lambda \in J(\pi)$.

U sljedećem odjeljku vidjet ćemo da je stvarno uvijek $\mathcal{V}_{\mathfrak{n}} \neq \{0\}$, ako je $\mathcal{V}$ dobiven iz dopustivog Banachovog $(G, K)-$modula konačne duljine. To će značiti da za pripadnu reprezentaciju π vrijedi $J(\pi) \neq \emptyset$. Posebno, svaki ireducibilan $(\mathfrak{g}, K)-$modul moći će se smjestiti kao podmodul nekog elementarnog $(\mathfrak{g}, K)-$modula.

2.9 Eksponenti dopustivih modula

Neka je $\mathcal{H}$ Banachov dopustiv $(G,K)-$modul s reprezentacijom π. Tada je $\mathcal{V}=\mathcal{H}_K$ dopustiv $(\mathfrak{g},K)-$modul. Stavimo $\tilde{\mathcal{V}}=\mathcal{H}'_K=\mathcal{H}^*_K=\hat{\mathcal{H}}_K$. Tada je i $\tilde{\mathcal{V}}$ dopustiv $(\mathfrak{g},K)-$modul s reprezentacijom $\tilde{\pi}$ danom sa

$$[\tilde{\pi}(X)\tilde{v}](v)=-\tilde{v}(\pi(X)v),\quad [\tilde{\pi}(k)\tilde{v}](v)=\tilde{v}(\pi(k^{-1})v),\qquad v\in\mathcal{V},\quad \tilde{v}\in\tilde{\mathcal{V}},\quad X\in\mathfrak{g},\quad k\in K.$$

Nadalje, $(v,\tilde{v})\mapsto\tilde{v}(v)$ je nedegenerirana bilinearna forma na $\mathcal{V}\times\tilde{\mathcal{V}}$.

Za $v\in\mathcal{V}$ i $\tilde{v}\in\tilde{\mathcal{V}}$ definiramo analitičku kompleksnoznačnu funkciju $c_{v,\tilde{v}}$ na G :

$$c_{v,\tilde{v}}(x)=\tilde{v}(\pi(x)v),\qquad x\in G.$$

Funkcije $c_{v,\tilde{v}}$ zovu se **matrični koeficijenti reprezentacije** π (a također **matrični koeficijenti** $(G,K)-$**modula** $\mathcal{H}$ ili $(\mathfrak{g},K)-$**modula** $\mathcal{V}$).

Lema 2.9.1. *Za svaki $v\in\mathcal{V}$ ideal $\mathcal{J}_v=Ann_{\mathcal{Z}(\mathfrak{g})}(v)=\{u\in\mathcal{Z}(\mathfrak{g});\ \pi(u)v=0\}$ u $\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$ je konačne kodimenzije.*

Dokaz: Neka su $\delta_1,\dots,\delta_s\in\hat{K}$ takvi da je $v\in V=\mathcal{V}_{\delta_1}\dot{+}\cdots\dot{+}\mathcal{V}_{\delta_s}$. Tada je V $\mathcal{Z}(\mathfrak{g})-$invarijantan konačnodimenzionalan potprostor od $\mathcal{V}$. Stoga je $\mathcal{I}=Ann_{\mathcal{Z}(\mathfrak{g})}(V)=\{u\in\mathcal{Z}(\mathfrak{g});\ \pi(u)V=\{0\}\}$ ideal u $\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$ konačne kodimenzije ($\leq$ dim $End(V)=(\text{dim }V)^2$). Kako je očito $\mathcal{I}\subseteq\mathcal{J}_v$, i ideal $\mathcal{J}_v$ je konačne kodimenzije.

Propozicija 2.9.2. *Ako je $\mathcal{V}$konačno generiran kao $U(\mathfrak{g})-$modul, onda je*

$$\mathcal{J}=Ann_{\mathcal{Z}(\mathfrak{g})}(\mathcal{V})=\{u\in\mathcal{Z}(\mathfrak{g});\ \pi(u)=0\}$$

ideal u $\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$ je konačne kodimenzije.

Dokaz: Neka su $v_1,\dots,v_n$ generatori $U(\mathfrak{g})-$modula $\mathcal{V}$. Tada je uz oznaku iz leme 2.9.1.

$$\mathcal{J}=\bigcap_{j=1}^{n}\mathcal{J}_{v_j},$$

pa je

$$u+\mathcal{J}\mapsto(u+\mathcal{J}_{v_1},\dots,u+\mathcal{J}_{v_n}),\qquad u\in\mathcal{Z}(\mathfrak{g}),$$

linearna injekcija sa $\mathcal{Z}(\mathfrak{g})/\mathcal{J}$ u $(\mathcal{Z}(\mathfrak{g})/\mathcal{J}_{v_1})\times\cdots\times(\mathcal{Z}(\mathfrak{g})/\mathcal{J}_{v_n})$. Time je propozicija dokazana jer je prema lemi 2.9.1. svaki od prostora $\mathcal{Z}(\mathfrak{g})/\mathcal{J}_{v_j}$ konačnodimenzionalan.

Lema 2.9.3. *Neka su $v\in\mathcal{V}$ i $\tilde{v}\in\tilde{\mathcal{V}}$. Postoje ideal $\mathcal{J}$ u $\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$ konačne kodimenzije, zatvoren $G-$podmodul $\mathcal{K}$ od $\mathcal{H}$ i $\tilde{v}'\in\tilde{\mathcal{K}}_K$ takvi da je $v\in\mathcal{K}$ (tj. $v\in\mathcal{K}_K$), $\pi(u)|\mathcal{K}_K=0$ $\forall u\in\mathcal{J}$ i $c_{v,\tilde{v}}=c_{v,\tilde{v}'}$.*

Dokaz: Prema lemi 2.9.1. $\mathcal{J}=\mathcal{J}_v=\{u\in\mathcal{Z}(\mathfrak{g});\ \pi(u)v=0\}$ je ideal u $\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$ konačne kodimenzije. Neka je

$$\mathcal{W}=\{w\in\mathcal{V};\ \pi(u)w=0\ \forall u\in\mathcal{J}\}.$$

Tada je $\mathcal{W}$ $(\mathfrak{g},K)-$podmodul od $\mathcal{V}$, pa je $\mathcal{K}=Cl(\mathcal{W})$ zatvoren $G-$podmodul od $\mathcal{H}$. Stavimo li $\tilde{v}'=\tilde{v}|\mathcal{W}$, navedena svojstva su ispunjena.

Za bilo koji konačan podskup $\mathcal{S} \subseteq \hat{K}$ stavimo

$$P^{\pi}_{\mathcal{S}} = \sum_{\delta\in\mathcal{S}} P^{\pi}_{\delta} \quad - \quad \text{projektor} \quad \mathcal{H} \quad \text{na} \quad \mathcal{V}_{\mathcal{S}} = \sum_{\delta\in\mathcal{S}} \dot{+} \mathcal{V}_{\delta},$$

$$P^{\tilde{\pi}}_{\mathcal{S}} = \sum_{\delta\in\mathcal{S}} P^{\tilde{\pi}}_{\delta} \quad - \quad \text{projektor} \quad \hat{\mathcal{H}} \quad \text{na} \quad \tilde{\mathcal{V}}_{\mathcal{S}} = \sum_{\delta\in\mathcal{S}} \dot{+} \tilde{\mathcal{V}}_{\delta}.$$

Tada je $P^{\tilde{\pi}}_{\tilde{\mathcal{S}}}$ dualan operator operatora $P^{\pi}_{\tilde{\mathcal{S}}}$, gdje je $\tilde{\mathcal{S}} = \{\tilde{\delta};\ \delta \in \mathcal{S}\}$.

Za konačne podskupove $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2 \subseteq \hat{K}$ neka je $F^{\pi}_{\mathcal{S}_1,\mathcal{S}_2} : G \to Hom(\mathcal{V}_{\mathcal{S}_2}, \mathcal{V}_{\mathcal{S}_1})$ preslikavanje definirano sa

$$F^{\pi}_{\mathcal{S}_1,\mathcal{S}_2}(x) = P^{\pi}_{\mathcal{S}_1}\pi(x)P^{\pi}_{\mathcal{S}_2}, \qquad x \in G.$$

Ako sa $\tau_{\mathcal{S}}$ označimo reprezentaciju od K koju dobivamo iz π na prostoru $\mathcal{V}_{\mathcal{S}}$ (tj. $\tau_{\mathcal{S}} = (\pi|K)_{\mathcal{V}_{\mathcal{S}}}$), onda je očito $F^{\pi}_{\mathcal{S}_1,\mathcal{S}_2}$ $(\tau_{\mathcal{S}_1}, \tau_{\mathcal{S}_2})-$sferička funkcija na G.

Neka su sada $v \in \mathcal{V}$ i $\tilde{v} \in \tilde{\mathcal{V}}$. Prema lemi 2.9.3. u proučavanju funkcije $c_{v,\tilde{v}}$ možemo pretpostaviti da je $\mathcal{J} = \operatorname{Ker}(\pi|\mathcal{Z}(\mathfrak{g}))$ ideal u $\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$ konačne kodimenzije. Neka su $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2 \subseteq \hat{K}$ konačni podskupovi takvi da su $v \in \mathcal{V}_{\mathcal{S}_1}$ i $\tilde{v} \in \tilde{\mathcal{V}}_{\tilde{\mathcal{S}}_1}$. Tada je

$$c_{v,\tilde{v}}(x) = \tilde{v}\left(F^{\pi}_{\mathcal{S}_1,\mathcal{S}_2}(x)v\right), \qquad x \in G.$$

Za $w \in \mathcal{V}_{\mathcal{S}_2}$, $\tilde{w} \in \tilde{\mathcal{V}}_{\tilde{\mathcal{S}}_1}$ i $X_1, \ldots, X_n \in \mathfrak{g}$ imamo

$$\tilde{w}\left((X_1 \cdots X_n F^{\pi}_{\mathcal{S}_1,\mathcal{S}_2})(x)w\right) = \frac{\partial}{\partial t_1} \cdots \frac{\partial}{\partial t_n} \tilde{w}\left(F^{\pi}_{\mathcal{S}_1,\mathcal{S}_2}(x(\exp\, t_1X_1)\cdots(\exp\, t_nX_n))w\right)\Big|_{t_1=\cdots=t_n=0} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial t_1} \cdots \frac{\partial}{\partial t_n} \tilde{w}\left(P^{\pi}_{\mathcal{S}_1}\pi(x)\pi(\exp\, t_1X_1)\cdots\pi(\exp\, t_nX_n)P^{\pi}_{\mathcal{S}_2}w\right)\Big|_{t_1=\cdots=t_n=0} =$$

$$= \tilde{w}\left(P^{\pi}_{\mathcal{S}_1}\pi(x)\pi(X_1\cdots X_n)P^{\pi}_{\mathcal{S}_2}w\right).$$

Odatle slijedi

$$\tilde{w}\left((uF^{\pi}_{\mathcal{S}_1,\mathcal{S}_2})(x)w\right) = \tilde{w}\left(P^{\pi}_{\mathcal{S}_1}\pi(x)\pi(u)P^{\pi}_{\mathcal{S}_2}w\right), \qquad u \in U(\mathfrak{g}), \quad x \in G, \quad w \in \mathcal{V}_{\mathcal{S}_2}, \quad \tilde{w} \in \tilde{\mathcal{V}}_{\tilde{\mathcal{S}}_2}.$$

Za $u \in \mathcal{J}$ je $\pi(u) = 0$, pa zbog proizvoljnosti $w \in \mathcal{V}_{\mathcal{S}_2}$, $\tilde{w} \in \tilde{\mathcal{V}}_{\tilde{\mathcal{S}}_1}$ i $x \in G$ dobivamo $uF^{\pi}_{\mathcal{S}_1,\mathcal{S}_2} = 0$. Dakle, uz oznaku iz odjeljka 2.4. imamo $F^{\pi}_{\mathcal{S}_1,\mathcal{S}_2} \in C_{(\tau_{\mathcal{S}_1},\tau_{\mathcal{S}_2}),\mathcal{J}}(G)$. Stoga iz teorema 2.4.3. uz oznake iz odjeljka 2.4. dobivamo:

Teorem 2.9.4. *Neka je $\mathcal{H}$ dopustiv Banachov $(G,K)-$modul, $\mathcal{V} = \mathcal{H}_K$, $\tilde{\mathcal{V}} = \mathcal{H}^*_K$, $v \in \mathcal{V}$, $\tilde{v}\tilde{\mathcal{V}}$. Postoje međusobno integralno neekvivalentni $\mu_1, \ldots, \mu_r \in \mathfrak{a}^{*\mathbb{C}}$ i $N \in \mathbb{Z}_+$ takvi da za svaki $\lambda \in \bigcup_{j=1}^r (\mu_j + L_+)$ i svaki $m \in L_+$, $|m| \leq N$, postoje brojevi $c^{\lambda,m}_{v,\tilde{v}} \in \mathbb{C}$ takvi da vrijedi.*

(*a*) *Za svaki $j \in \{1, \ldots, r\}$ i za svaki $m \in L_+$, $|m| \leq N$, red*

$$\sum_{k\in L_+} c^{\mu_j+k,m}_{v,\tilde{v}} e^{k(H)}, \qquad H \in C,$$

konvergira apsolutno na C i uniformno na C_ε za svaki $\varepsilon < 0$.

(*b*) *Za svaki $H \in C$ je*

$$c_{v,\tilde{v}}(\exp\, H) = e^{\rho(H)} \sum_{j=1}^{r} \sum_{\substack{m \in L_+ \\ |m| \leq N}} \alpha(H)^m e^{\mu_j(H)} \sum_{k\in L_+} c^{\mu_j+k,m}_{v,\tilde{v}} e^{k(H)}.$$

Za $\lambda \in \mathfrak{a}^{*\mathbb{C}} \setminus \left(\bigcup_{j=1}^{r}(\mu_j + L_+)\right)$ i za svako $m \in L_+$, $|m| \leq N$, stavimo $c_{v,\tilde{v}}^{\lambda,m} = 0$. Sada za svaki $\lambda \in \mathfrak{a}^{*\mathbb{C}}$ definiramo analitičku funkciju $c_{v,\tilde{v}}^{\lambda} : A \to \mathbb{C}$ sa

$$c_{v,\tilde{v}}^{\lambda}(\exp H) = \mathrm{e}^{\rho(H)} \sum_{\substack{m \in L_+ \\ |m| \leq N}} \alpha(H)^m c_{v,\tilde{v}}^{\lambda,m} \mathrm{e}^{\lambda(H)}, \qquad H \in \mathfrak{a}.$$

Stavimo

$$E(v,\tilde{v}) = \{\lambda \in \mathfrak{a}^{*\mathbb{C}};\ c_{v,\tilde{v}}^{\lambda} \neq 0\}.$$

Elementi skupa $E(v,\tilde{v})$ zovu se **eksponenti matričnog koeficijenta** $c_{v,\tilde{v}}$. Imamo

$$c_{v,\tilde{v}}(a) = \sum_{\lambda \in E(v,\tilde{v})} c_{v,\tilde{v}}^{\lambda}, \qquad a \in A_-.$$

Neka je $E^\circ(v,\tilde{v})$ skup svih minimalnih elemenata od $E(v,\tilde{v})$ (s obzirom na uređaj $\ll$). Elementi skupa $E^\circ(v,\tilde{v})$ zovu se **vodeći eksponenti** od $c_{v,\tilde{v}}$. Budući da je skup $E(v,\tilde{v})$ sadržan u uniji $\bigcup_{j=1}^{r}(\mu_j + L_+)$, jasno je da je $E^\circ(v,\tilde{v})$ konačan skup.

Za ideal $\mathcal{J}$ u $\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$ konačne kodimenzije stavimo kao u odjeljku 2.5. :

$$S_{\mathcal{J}} = \left\{\lambda \in \mathfrak{a}^{*\mathbb{C}};\ [\mathcal{Z}(\mathfrak{s})/\mu(\mathcal{J})\mathcal{Z}(\mathfrak{s})]_{(\lambda)} \neq \{0\}\right\}.$$

Iz teorema 2.5.4. slijedi

Teorem 2.9.5. *Neka su $\mathcal{J}$ ideal u $\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$ konačne kodimenzije, $v \in \mathcal{V}$ i $\tilde{v} \in \tilde{\mathcal{V}}$ i pretpostavimo da je $\pi(u)v = 0$ $\forall u \in \mathcal{J}$. Tada vrijedi $E(v,\tilde{v}) \subseteq S_{\mathcal{J}} + L_+$.*

U daljnjem pretpostavljamo da je modul $\mathcal{V}$ konačne duljine. Prema propoziciji 2.9.2. tada je

$$\mathcal{J}(\pi) = \mathrm{Ker}\,(\pi|\mathcal{Z}(\mathfrak{g})) = \{u \in \mathcal{Z}(\mathfrak{g});\ \pi(u) = 0\}$$

ideal u $\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$ konačne kodimenzije. Stavimo

$$E(\pi) = \bigcup_{v \in \mathcal{V},\, \tilde{v} \in \tilde{\mathcal{V}}} E(v,\tilde{v})$$

i neka je $E^\circ(\pi)$ skup minimalnih elemenata od $E(\pi)$ (u odnosu na $\ll$). Elementi skupa $E(\pi)$ zovu se **eksponenti reprezentacije** π (ili eksponenti modula $\mathcal{V}$), a elementi od $E^\circ(\pi)$ **vodeći eksponenti reprezentacije** π (ili modula $\mathcal{V}$).

Teorem 2.9.6. *Vrijedi $E^\circ(\pi) \subseteq S_{\mathcal{J}(\pi)}$ i $E(\pi) \subseteq E^\circ(\pi) + L_+$.*

Dokaz: Druga je tvrdnja trivijalna. Neka je $\lambda \in E^\circ(\pi)$. Neka su $v \in \mathcal{V}$ i $\tilde{v} \in \tilde{\mathcal{V}}$ takvi da je $\lambda \in E(v,\tilde{v})$. Neka su $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2 \subseteq \hat{K}$ takvi da je $v \in \mathcal{V}_{\mathcal{S}_2}$ i $\tilde{v} \in \tilde{\mathcal{V}}_{\tilde{\mathcal{S}}_1}$. Tada je $\lambda \in E^\circ\left(F_{\mathcal{S}_1,\mathcal{S}_2}^{\pi}\right)$. Kako je $F_{\mathcal{S}_1,\mathcal{S}_2}^{\pi} \in C_{(\tau_{\mathcal{S}_1},\tau_{\mathcal{S}_2}),\mathcal{J}(\pi)}(G)$, prema teoremu 2.5.4. slijedi $\lambda \in \mathcal{S}_{\mathcal{J}(\pi)}$.

Definiramo sada bilinearno preslikavanje $(v,\tilde{v}) \mapsto \Psi_{v,\tilde{v}}$ sa $\mathcal{V} \times \tilde{\mathcal{V}}$ u $\mathcal{A}(A,\mathbb{C}) = \mathcal{A}(A)$ (analitičke funkcije na A) :

$$\Psi_{v,\tilde{v}}(a) = \sum_{\lambda \in E^\circ(\pi)} c_{v,\tilde{v}}^{\lambda}(a), \qquad a \in A.$$

Nadalje, neka je $\varphi : \mathcal{V} \times \tilde{\mathcal{V}} \to \mathbb{C}$ bilinearna forma definirana sa

$$\varphi(v,\tilde{v}) = \Psi_{v,\tilde{v}}(e) = \sum_{\lambda \in E^\circ(\pi)} c_{v,\tilde{v}}^{\lambda}(\exp 0) = \sum_{\lambda \in E^\circ(\pi)} c_{v,\tilde{v}}^{\lambda,0}.$$

Propozicija 2.9.7. *Ako je $v \in \mathfrak{n}\mathcal{V}$ ili $\tilde{v} \in \overline{\mathfrak{n}}\tilde{\mathcal{V}}$, onda je $\Psi_{v,\tilde{v}} = 0$ i, posebno, $\varphi(v,\tilde{v}) = 0$.*

Dokaz: Potprostor $\mathfrak{n}\mathcal{V}$ razapet je vektorima oblika $\pi(X)v$, $v \in \mathcal{V}$, $X \in \mathfrak{g}_\alpha$, $\alpha \in \Sigma_+$. Za $H \in C$ imamo

$$c_{\pi(X)v,\tilde{v}}(\exp\, H) = \tilde{v}(\pi(\exp\, H)\pi(X)v) = \mathrm{e}^{\alpha(H)}\tilde{v}(\pi(X)\pi(\exp\, H)v) =$$
$$= -\mathrm{e}^{\alpha(H)}(\tilde{\pi}(X)\tilde{v})(\pi(\exp\, H)v) = -\mathrm{e}^{\alpha(H)}c_{v,\tilde{\pi}(X)\tilde{v}}(\exp\, H).$$

Odatle je $E(\pi(X)v,\tilde{v}) = \alpha + E(v,\tilde{\pi}(X)\tilde{v}) \subseteq \alpha + E^\circ(\pi) + L_+$. Dakle, $E(\pi(X)v,\tilde{v}) \cap E^\circ(\pi) = \emptyset$, pa slijedi $\Psi_{\pi(X)v,\tilde{v}} = 0$.

Potprostor $\overline{\mathfrak{n}}\tilde{\mathcal{V}}$ razapet je vektorima oblika $\tilde{\pi}(Y)\tilde{v}$, $\tilde{v} \in \tilde{\mathcal{V}}$, $Y \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$, $\alpha \in \Sigma_+$. Sada za $H \in C$ imamo

$$c_{v,\tilde{\pi}(Y)\tilde{v}}(\exp\, H) = (\tilde{\pi}(Y)\tilde{v})(\pi(\exp\, H)v) = -\tilde{v}\pi(Y)\pi(\exp\, H)v) =$$
$$= -\mathrm{e}^{\alpha(H)}\tilde{v}(\pi(\exp\, H)\pi(Y)v) = -\mathrm{e}^{\alpha(H)}c_{\pi(Y)v,\tilde{v}}(\exp\, H).$$

Slijedi $E(v,\tilde{\pi}(Y)\tilde{v}) \subseteq \alpha + E(\pi(Y)v,\tilde{v}) \subseteq \alpha + E^\circ(\pi) + L_+$, pa je opet $E(v,\tilde{\pi}(Y)\tilde{v}) \cap E^\circ(\pi) = \emptyset$, dakle, $\Psi_{v,\tilde{\pi}(Y)\tilde{v}} = 0$.

Uz prije uvedene oznake $\mathcal{V}_\mathfrak{n} = \mathcal{V}/\mathfrak{n}\mathcal{V}$ i $\tilde{\mathcal{V}}_{\overline{\mathfrak{n}}} = \tilde{\mathcal{V}}/\overline{\mathfrak{n}}\tilde{\mathcal{V}}$ neka su $v \mapsto v_\mathfrak{n}$ i $\tilde{v} \mapsto \tilde{v}_{\overline{\mathfrak{n}}}$ kvocijentna preslikavanja $\mathcal{V} \to \mathcal{V}_\mathfrak{n}$ i $\tilde{\mathcal{V}} \to \tilde{\mathcal{V}}_{\overline{\mathfrak{n}}}$. Prema propoziciji 2.9.7. postoje jedinstveno bilinearno preslikavanje $\Phi : \mathcal{V}_\mathfrak{n} \times \tilde{\mathcal{V}}_{\overline{\mathfrak{n}}} \to \mathcal{A}(A)$ i jedinstvena bilinearna forma $\langle\,\cdot\,|\,\cdot\,\rangle$ na $\mathcal{V}_\mathfrak{n} \times \tilde{\mathcal{V}}_{\overline{\mathfrak{n}}}$ takvi da je

$$\Phi_{v_\mathfrak{n},\tilde{v}_{\overline{\mathfrak{n}}}}(a) = \Psi_{v,\tilde{v}}(a), \qquad a \in A, \quad v \in \mathcal{V}, \quad \tilde{v} \in \tilde{\mathcal{V}}$$

i

$$\langle v_\mathfrak{n}|\tilde{v}_{\overline{\mathfrak{n}}}\rangle = \varphi(v,\tilde{v}), \qquad v \in \mathcal{V}, \quad \tilde{v} \in \tilde{\mathcal{V}}.$$

Naravno, tada je

$$\Phi_{w,\tilde{w}}(e) = \langle w|\tilde{w}\rangle, \qquad w \in \mathcal{V}_\mathfrak{n}, \quad \tilde{w} \in \tilde{\mathcal{V}}_{\overline{\mathfrak{n}}}.$$

Teorem 2.9.8. *Za $v \in \mathcal{V}$, $\tilde{v} \in \tilde{\mathcal{V}}$ i $a \in A$ vrijedi*

$$\Psi_{v,\tilde{v}}(a) = \langle \pi_\mathfrak{n}(a)v_\mathfrak{n}|\tilde{v}_{\overline{\mathfrak{n}}}\rangle.$$

Dokaz: Za $H \in C$ i $t > 0$ imamo

$$\tilde{v}(\pi(\exp\, tH)\pi(H)v) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\tilde{v}(\pi(\exp\, tH)\pi(\exp\, sH)v)\bigg|_{s=0} =$$
$$= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\tilde{v}(\pi(\exp\,(t+s)H)v)\bigg|_{s=0} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\tilde{v}(\pi(\exp\, tH)v).$$

Indukcijom po n dobivamo

$$\tilde{v}(\pi(\exp\, tH)\pi(H)^n v) = \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}\tilde{v}(\pi(\exp\, H)v).$$

Odatle je za svaki λ

$$c^\lambda_{\pi(H)^n v,\tilde{v}}(\exp\, tH) = \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}c^\lambda_{v,\tilde{v}}(\exp\, tH),$$

pa slijedi

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}\Psi_{v,\tilde{v}}(\exp\, tH) = \Psi_{\pi(H)^n v,\tilde{v}}(\exp\, tH).$$

Prema tome,

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}\Psi_{v,\tilde{v}}(\exp\, tH)\Big|_{t=0} = \Psi_{\pi(H)^n v,\tilde{v}}(e) = \langle \pi_{\mathfrak{n}}(H)^n v_{\mathfrak{n}} | \tilde{v}_{\overline{\mathfrak{n}}}\rangle.$$

Funkcija $t \mapsto \Psi_{v,\tilde{v}}(\exp\, tH)$ je analitička, pa dobivamo

$$\Psi_{v,\tilde{v}}(\exp\, tH) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}\Psi_{v,\tilde{v}}(\exp\, tH)\Big|_{t=0} = \sum_{n=0}^{\infty}\langle \pi_{\mathfrak{n}}(H)^n v_{\mathfrak{n}} | \tilde{v}_{\overline{\mathfrak{n}}}\rangle = \langle \pi_{\mathfrak{n}}(\exp\, tH) v_{\mathfrak{n}} | \tilde{v}_{\overline{\mathfrak{n}}}\rangle.$$

To znači da je

$$\Psi_{v,\tilde{v}}(a) = \langle \pi_{\mathfrak{n}}(a) v_{\mathfrak{n}} | \tilde{v}_{\overline{\mathfrak{n}}}\rangle$$

za sve $a \in A_-$, dakle i za sve $a \in A$ jer su obje strane jednakosti analitičke funkcije na A.

Prethodni će nam teorem dati vezu između vodećih eksponenata reprezentacije π i strukture $A-$modula $\mathcal{V}_{\mathfrak{n}}$:

Teorem 2.9.9. *Ako je modul $\mathcal{V}$ konačne duljine i $\lambda \in E^\circ(\pi)$ onda je $(\mathcal{V}_{\mathfrak{n}})_{(\lambda+\rho)} \neq \{0\}$.*

Dokaz: Neka je $\lambda \in E^\circ(\pi)$ i neka su $v \in \mathcal{V}$ i $\tilde{v} \in \tilde{\mathcal{V}}$ takvi da je $\lambda \in E(v,\tilde{v})$. Za $H \in \mathfrak{a}$ tada imamo

$$\langle \pi_{\mathfrak{n}}(\exp\, H) v_{\mathfrak{n}} | \tilde{v}_{\overline{\mathfrak{n}}}\rangle = \sum_{\nu\in E^\circ(\pi)}\sum_m c_{v,\tilde{v}}^{\nu,m}\alpha(H)^m \mathrm{e}^{(\nu+\rho)(H)}$$

i za neko m vrijedi $c_{v,\tilde{v}}^{\lambda,m} \neq 0$. Prema teoremu 2.8.1. postoje polinomijalna preslikavanja $P_\mu : \mathfrak{a} \to End(\mathcal{V}_{\mathfrak{n}})$ takva da je

$$\pi_{\mathfrak{n}}(\exp\, H) = \sum_\mu \mathrm{e}^{\mu(H)}P_\mu(H), \qquad H \in \mathfrak{a}.$$

Stoga je

$$\langle \pi_{\mathfrak{n}}(\exp\, H) v_{\mathfrak{n}} | \tilde{v}_{\overline{\mathfrak{n}}}\rangle = \sum_\mu \langle P_\mu(H) v_{\mathfrak{n}} | \tilde{v}_{\overline{\mathfrak{n}}}\rangle \mathrm{e}^{\mu(H)}.$$

Budući da je $\lambda \in E^\circ(\pi)$ i $\sum_m c_{v,\tilde{v}}^{\lambda,m}\alpha(H)^m \neq 0$, slijedi $P_{\lambda+\rho} \neq 0$, dakle $(\mathcal{V}_{\mathfrak{n}})_{(\lambda+\rho)} \neq \{0\}$.

Napomena: Ako je $(\mathcal{V}_{\mathfrak{n}})_{(\nu+\rho)} \neq \{0\}$ ne možemo zaključiti da je $\langle P_{\nu+\rho}(H) v_{\mathfrak{n}} | \tilde{v}_{\overline{\mathfrak{n}}}\rangle \neq 0$ za neke v i $\tilde{v}$, jer forma $\langle \cdot | \cdot \rangle$ ne mora biti (i često nije) nedegenerirana; prema tome, ne možemo zaključiti da je $\nu \in E^\circ(\pi)$.

Iz teorema 2.9.9. neposredno slijedi:

Korolar 2.9.10. *Ako je modul $\mathcal{V}$ konačne duljine, vrijedi $\mathcal{V}_{\mathfrak{n}} \neq \{0\}$.*

Odatle i iz teorema 2.8.9. slijedi:

Teorem 2.9.11. (**Casselmanov teorem o subreprezentaciji**) *Ako je $\mathcal{H}$ ireducibilan dopustiv Banachov $(G,K)-$modul onda je pripadni (ireducibilan) $(\mathfrak{g},K)-$modul $\mathcal{V} = \mathcal{H}_K$ ekvivalentan podmodulu nekog elementarnog $(\mathfrak{g},K)-$modula.*

Prema teoremu 2.9.9. i teoremu 2.8.9. vrijedi $E^\circ(\pi) \subseteq J(\pi)$. U daljnjem ćemo ustanoviti još precizniju tvrdnju, tj. da je $E^\circ(\pi)$ točno skup svih minimalnih elemenata od $J(\pi)$, dakle, da je $J(\pi) \subseteq E^\circ(\pi) + L_+$.

2.10 Eisensteinovi integrali

U odjeljku 2.8. definirana su analitička preslikavanja $\kappa : G \to K$, $H : G \to \mathfrak{a}$ i $n : G \to N$ određena Iwasawinom dekompozicijom $G = KAN$:

$$x = \kappa(x)(\exp H(x))n(x), \qquad x \in G.$$

Tada očito vrijedi

$$\kappa(xy) = \kappa(x\kappa(y)), \quad H(xy) = H(x\kappa(y)) + H(y), \qquad x, y \in G, \tag{2.12}$$

$$\kappa(xm) = \kappa(x)m, \quad H(xm) = H(x), \quad n(xm) = m^{-1}n(x)m \qquad x \in G, \quad m \in M, \tag{2.13}$$

$$\kappa(kx) = k\kappa(x), \quad H(kx) = H(x), \quad n(kx) = n(x), \qquad x \in G, \quad k \in K. \tag{2.14}$$

Neka su V_1 i V_2 konačnodimenzionalni neprekidni unitarni $K-$moduli s reprezentacijama τ_1 i τ_2. Kao i prije označavamo $\tau = (\tau_1, \tau_2)$, $X(\tau) = Hom(V_2, V_1)$ i $X_0(\tau) = Hom_M(V_2, V_1)$. Za $T \in X(\tau)$ i $\lambda \in \mathfrak{a}^{*\mathbb{C}}$ definiramo analitičko preslikavanje $E_{T,\lambda} : G \to X(\tau)$ ovako:

$$E_{T,\lambda}(x) = \int_K \tau_1(\kappa(xk))T\tau_2(k^{-1})\mathrm{e}^{(\lambda-\rho)(H(xk))}\mathrm{d}\mu(k), \qquad x \in G.$$

Pri tome je μ normirana Haarova mjera na K. Funkcija $E_{T,\lambda}$ zove se **Eisensteinov integral**; očito je $T \mapsto E_{T,\lambda}$ linearno preslikavanje sa $X(\tau)$ u $\mathcal{A}(G, X(\tau))$.

Neka je u daljnjem ν normirana Haarova mjera na M. Za $T \in X(\tau)$ stavimo

$$T^\circ = \int_M \tau_1(m)T\tau_2(m^{-1})\mathrm{d}\nu(m).$$

Tada je $T \mapsto T^\circ$ projektor prostora $X(\tau)$ na potprostor $X_0(\tau)$.

Lema 2.10.1. *Za $T \in X(\tau)$ i $\lambda \in \mathfrak{a}^{*\mathbb{C}}$ vrijedi $E_{T,\lambda} = E_{T^\circ,\lambda}$.*

Dokaz: Zbog desne invarijantnosti mjere μ imamo za svaki $x \in G$ i svaki $m \in M$:

$$E_{T,\lambda}(x) = \int_K \tau_1(\kappa(xk))T\tau_2(k^{-1})\mathrm{e}^{(\lambda-\rho)(H(xk))}\mathrm{d}\mu(k) = \int_K \tau_1(\kappa(xkm))T\tau_2(m^{-1}k^{-1})\mathrm{e}^{(\lambda-\rho)(H(xkm))}\mathrm{d}\mu(k).$$

Odatle prema (2.13) dobivamo

$$E_{T,\lambda}(x) = \int_K \tau_1(\kappa(xk))\tau_1(m)T\tau_2(m^{-1})\tau_2(k^{-1})\mathrm{e}^{(\lambda-\rho)(H(xk))}\mathrm{d}\mu(k).$$

Integriramo li ovu jednakost po normiranoj mjeri ν na M, dobivamo $E_{T,\lambda} = E_{T^\circ,\lambda}$.

Lema 2.10.2. *Za svaki $T \in X(\tau)$ i svaki $\lambda \in \mathfrak{a}^{*\mathbb{C}}$ je $E_{T,\lambda} \in C^\infty_\tau(G)$.*

Dokaz je direktan račun. Za $k_1, k_2 \in K$ i $x \in G$ imamo zbog (2.14) i zbog lijeve invarijantnosti mjere μ :

$$E_{T,\lambda}(k_1xk_2) = \int_K \tau_1(\kappa(k_1xk_2k))T\tau_2(k^{-1})\mathrm{e}^{(\lambda-\rho)(H(k_1xk_2k))}\mathrm{d}\mu(k) =$$

$$= \int_K \tau_1(k_1\kappa(xk))T\tau_2(k^{-1}k_2)\mathrm{e}^{(\lambda-\rho)(H(xk))}\mathrm{d}\mu(k) = \tau_1(k_1)E_{T,\lambda}(x)\tau_2(k_2).$$

$\overline{N}MAN$ je otvorena gusta podmnogostrukost od G. Iz 7.6.7. i 7.6.8. u [Wallach, *Harmonic Analysis on Homogeneous spaces*, Marcel Dekker, 1973] slijedi sljedeća integralna formula; to je ujedno lema u dodatku odjeljka 8.1.3. u [G. Warner, *Harmonic Analysis on Semi−Simple Lie Groups II*, Springer, 1972].

Lema 2.10.3. *Haarova mjera $\overline{\omega}$ na $\overline{N}$ može se normirati tako da bude*

$$\int_{\overline{N}} \mathrm{e}^{-2\rho[H(\overline{n})]} \mathrm{d}\overline{\omega}(\overline{n}) = 1.$$

Uz tako izabranu mjeru $\overline{\omega}$ za svaku funkciju $f \in L_1(K)$ vrijedi

$$\int_K f(k)\mathrm{d}\mu(k) = \int_{\overline{N}\times M} f(\kappa(\overline{n})m)\mathrm{e}^{-2\rho[H(\overline{n})]}\mathrm{d}\overline{\omega}(\overline{n})\mathrm{d}\nu(m).$$

U daljnjem za $\alpha \in \Sigma$ označimo sa $H_\alpha \in \mathfrak{a}$ pripadni dualni korijen: H_α je jedinstven element jednodimenzionalnog potprostora $\mathfrak{a} \cap [\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}]$ takav da je $\alpha(H_\alpha) = 2$.

Lema 2.10.4. *Neka je $\lambda \in \mathfrak{a}^*$ takav da je $\lambda(H_\alpha) \geq 0$ $\forall \alpha \in \Sigma_+$; tj. λ je element zatvarača pozitivne Weylove komore u $\mathfrak{a}^*$ određene sa Σ_+. Neka su $H \in \overline{C}_+ = -\overline{C}$, $a = \exp H$ i $\overline{n} \in \overline{N}$. Tada je*

$$\lambda[H(\overline{n})] \geq 0 \quad i \quad \lambda[H(\overline{n}) - H(a\overline{n}a^{-1})] \geq 0.$$

Dokaz: Neka je π_Λ konačnodimenzionalna ireducibilna reprezentacija od $\mathfrak{g}$ na prostoru V_Λ s najvećom težinom Λ. Možemo pretpostaviti da je prostor V_Λ unitaran i sa operatori $\pi_\Lambda(X)$ hermitski za $X \in \mathfrak{p}$ a antihermitski za $X \in \mathfrak{k}$. Neka je $v_\Lambda \in V_\Lambda$ jedinični vektor težine Λ. Imamo $\pi_\Lambda(n)v_\Lambda = v_\Lambda$ za svaki $n \in N$, pa je

$$\|\pi_\Lambda(\overline{n})v_\Lambda\| = \|\pi_\Lambda(\kappa(\overline{n}))\pi_\Lambda(\exp\, H(\overline{n}))\pi_\lambda(n(\overline{n}))v_\lambda\| = \|\pi_\Lambda(\exp\, H(\overline{n}))v_\lambda\| = \mathrm{e}^{\Lambda[H(\overline{n})]}.$$

$\pi_\Lambda(a)$ je pozitivno definitan hermitski operator i najveća mu je svojstvena vrijednost $\mathrm{e}^{\Lambda(H)}$, pa vrijedi $\|\pi_\Lambda(a)\| = \mathrm{e}^{\Lambda(H)}$. Dakle,

$$\mathrm{e}^{\Lambda[H(a\overline{n}a^{-1})]} = \|\pi_\Lambda(a\overline{n}a^{-1})v_\Lambda\| \leq \|\pi_\Lambda(a)\| \cdot \|\pi_\Lambda(\overline{n})\pi_\Lambda(a^{-1})v_\Lambda\| = \mathrm{e}^{\Lambda(H)}\|\pi_\Lambda(\overline{n})\mathrm{e}^{-\Lambda(H)}v_\Lambda\| = \mathrm{e}^{\Lambda[H(\overline{n})]}.$$

Odatle je $\Lambda[H(\overline{n}) - H(a\overline{n}a^{-1})] \geq 0$ za svaku dominantnu težinu Λ. Ali λ je linearna kombinacija dominantnih težina s nenegativnim koeficijentima, pa zaključujemo da vrijedi i $\lambda[H(\overline{n}) - H(a\overline{n}a^{-1})] \geq 0$.

Neka je sada $X \in \overline{\mathfrak{n}}$ takav da je $\overline{n} = \exp X$. Tada je razlika $\pi_\Lambda(\overline{n})v_\Lambda - v_\Lambda = \pi_\lambda(\exp X)v_\Lambda - v_\Lambda$ suma težinskih vektora s težinama manjim od Λ. Slijedi da je $v_\Lambda \perp \pi_\Lambda(\overline{n})v_\Lambda - v_\Lambda$, a odatle je

$$\mathrm{e}^{2\Lambda(H(\overline{n}))} = \|\pi_\Lambda(\overline{n})v_\Lambda\|^2 = \|v_\Lambda\|^2 + \|\pi_\Lambda(\overline{n})v_\Lambda - v_\Lambda\|^2 \geq \|v_\Lambda\|^2 = 1.$$

Stoga je $\Lambda[H(\overline{n})] \geq 0$ za svaku dominantnu težinu Λ, pa slijedi $\lambda[H(\overline{n})] \geq 0$.

Lema 2.10.5. *Neka je $\lambda \in \mathfrak{a}^{*\mathbb{C}}$ takav da je $\mathrm{Re}\,\lambda(H_\alpha) > 0$ za svaki $\alpha \in \Sigma_+$. Tada integral*

$$c(\lambda) = \int_{\overline{N}} \mathrm{e}^{-(\lambda+\rho)[H(\overline{n})]}\mathrm{d}\overline{\omega}(\overline{n})$$

apsolutno konvergira i $c(\lambda) \neq 0$.

Dokaz je vrlo dugačak i nalazi se u točki 8.10.16. prije citirane Wallachove knjige. Tamo se dobiva da je $c(\lambda)$ produkt analognih integrala za grupe realnog ranga 1 (tj. za $\dim \mathfrak{a} = 1$), a u tom se slučaju integral eksplicitno izračuna svođenjem na formule za beta−funkciju.

Teorem 2.10.6. *Neka su $T \in X_0(\tau)$, $\lambda \in \mathfrak{a}^{*\mathbb{C}}$ takav da je $\mathrm{Re}\,\lambda(H_\alpha) > 0$ $\forall \alpha \in \Sigma_+$ i $H \in C_+$. Tada je*

$$\lim_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{-t(\lambda-\rho)(H)}E_{T,\lambda}(\exp\, tH) = \int_{\overline{N}} T\tau_2\left(\kappa(\overline{n})^{-1}\right)\mathrm{e}^{-(\lambda+\rho)[H(\overline{n})]}\mathrm{d}\overline{\omega}(\overline{n}).$$

Dokaz: Za $a \in A$ imamo prema formulama (2.12) i (2.13) i prema lemi 2.10.3.:

$$E_{T,\lambda}(a) = \int_K \tau_1(\kappa(ak))T\tau_2(k^{-1})\mathrm{e}^{(\lambda-\rho)[H(ak)]}\mathrm{d}\mu(k) =$$

$$= \int_{\overline{N}}\int_M \tau_1(\kappa(a\kappa(\overline{n})m))T\tau_2(\kappa(\overline{n})m)^{-1}\mathrm{e}^{(\lambda-\rho)[H(\overline{n})]}\mathrm{e}^{-2\rho[H(\overline{n})]}\mathrm{d}\nu(m)\mathrm{d}\overline{\omega}(\overline{n}) =$$

$$= \int_{\overline{N}} \tau_1(\kappa(a\overline{n}))T\tau_2(\kappa(\overline{n})^{-1})\mathrm{e}^{(\lambda-\rho)[H(a\kappa(\overline{n}))]}\mathrm{e}^{-2\rho[H(\overline{n})]}\mathrm{d}\overline{\omega}(\overline{n}).$$

Nadalje, vrijedi

$$H(a\kappa(\overline{n})) = H(a\overline{n}) - H(\overline{n}) = H(a\overline{n}a^{-1}) - H(\overline{n}) + \log a,$$

pa dobivamo

$$E_{T,\lambda}(a) = \mathrm{e}^{(\lambda-\rho)(\log a)}\int_{\overline{N}} \tau_1(\kappa(a\overline{n}))T\tau_2(\kappa(\overline{n})^{-1})\mathrm{e}^{(\lambda-\rho)[H(a\overline{n}a^{-1})-H(\overline{n})]-2\rho[H(\overline{n})]}\mathrm{d}\overline{\omega}(\overline{n}).$$

Odatle je

$$\mathrm{e}^{-t(\lambda-\rho)(\log a)}E_{T,\lambda}(\exp tH) = \int_{\overline{N}} \tau_1(\kappa(a\overline{n}))T\tau_2(\kappa(\overline{n})^{-1})\mathrm{e}^{(\lambda-\rho)[H(a\overline{n}a^{-1})]}\mathrm{e}^{-(\lambda+\rho)[H(\overline{n})]}\mathrm{d}\overline{\omega}(\overline{n}).$$

Za $H \in C_+$ stavimo $a_t = \exp tH$, $t \in \mathbb{R}$. Tada je

$$\mathrm{e}^{-(\lambda-\rho)(H)}E_{T,\lambda}(\exp tH) = \int_{\overline{N}} \tau_1(\kappa(a_t\overline{n}))T\tau_2(\kappa(\overline{n})^{-1})\mathrm{e}^{(\lambda-\rho)[H(a_t\overline{n}a_{-t})]}\mathrm{e}^{-(\lambda+\rho)[H(\overline{n})]}\mathrm{d}\overline{\omega}(\overline{n}).$$

Imamo $\mathrm{Re}\,\lambda(H_\alpha) > 0$ i $\rho(H_\alpha) > 0$ za svaki $\alpha \in \Sigma_+$. Stoga postoji $0 < \varepsilon < 1$ takav da je

$$\mathrm{Re}\,\lambda(H_\alpha) > \varepsilon\rho(H_\alpha) \qquad \forall \alpha \in \Sigma_+.$$

Sada je

$$(\lambda-\rho)[H(a_t\overline{n}a_{-t})] - (\lambda+\rho)[H(\overline{n})] =$$
$$= (\lambda-\varepsilon\rho)[H(a_t\overline{n}a_{-t}) - H(\overline{n})] - (1-\varepsilon)\rho[H(a_t\overline{n}a_{-t})] - (1+\varepsilon)\rho[H(\overline{n})],$$

pa po lemi 2.10.4. imamo

$$\mathrm{Re}\,\{(\lambda-\rho)[H(a_t\overline{n}a_{-t})] - (\lambda+\rho)[H(\overline{n})]\} =$$

$$= (\mathrm{Re}\,\lambda-\varepsilon\rho)[H(a_t\overline{n}a_{-t}) - H(\overline{n})] - (1-\varepsilon)\rho[H(a_t\overline{n}a_{-t})] - (1+\varepsilon)\rho[H(\overline{n})] \leq -(1+\varepsilon)\rho[H(\overline{n})].$$

Stavimo

$$M = \max\{\|\tau_1(k_1)T\tau_2(k_2)\|;\ k_1, k_2 \in K\}$$

i neka je funkcija $f : \overline{N} \to \mathbb{C}$ definirana sa

$$f(\overline{n}) = M\mathrm{e}^{-(1+\varepsilon)\rho[H(\overline{n})]}, \qquad \overline{n} \in \overline{N}.$$

Po lemi 2.10.5. je $f \in L_1(\overline{N})$. Nadalje, prema dokazanom vrijedi za sve $\overline{n} \in \overline{N}$ i sve $t \in \mathbb{R}$, $t > 0$,

$$\left\|\tau_2(\kappa(a_\tau\overline{n}))T\tau_1(\kappa(\overline{n})^{-1})\mathrm{e}^{(\lambda-\rho)[H(a_t\overline{n}a_{-t})]-(\lambda+\rho)[H(\overline{n})]}\right\| \leq f(\overline{n}).$$

Stoga po Lebesgueovom teoremu o dominiranoj konvergenciji dobivamo

$$\lim_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{-t(\lambda-\rho)(H)}E_{T,\lambda}(\exp tH) = \int_{\overline{N}} \lim_{t\to+\infty} \left\{\tau_1(\kappa(a_t\overline{n}))T\tau_2(\kappa(\overline{n})^{-1})\mathrm{e}^{(\lambda-\rho)[H(a_t\overline{n}a_{-t})]-(\lambda+\rho)[H(\overline{n})]}\right\}\mathrm{d}\overline{\omega}(\overline{n})$$

ukoliko limes pod integralom postoji.

Za $\overline{n} \in \overline{N}$ postoje $Y_\alpha \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$, $\alpha \in \Sigma_+$, takvi da je

$$\overline{n} = \exp\left(\sum_{\alpha\in\Sigma_+} Y_\alpha\right).$$

Stoga je

$$a_t\overline{n}a_{-t} = \exp\left((Ad\, a_t)\sum_{\alpha\in\Sigma_+} Y_\alpha\right) = \exp\left(\sum_{\alpha\in\Sigma_+} \mathrm{e}^{-t\alpha(H)}Y_\alpha\right).$$

Odatle zaključujemo da je

$$\lim_{t\to+\infty} a_t\overline{n}a_{-t} = e \qquad \forall\overline{n} \in \overline{N},$$

dakle,

$$\lim_{t\to+\infty} H(a_t\overline{n}a_{-t}) = 0 \qquad \forall\overline{n} \in \overline{N}.$$

Prema (2.12) je $\kappa(a_t\overline{n}a_{-t}) = \kappa(a_t\overline{n}\kappa(a_t^{-1})) = \kappa(a_t\overline{n})$, pa zaključujemo da vrijedi i

$$\lim_{t\to+\infty} \kappa(a_t\overline{n}) = e \qquad \forall\overline{n} \in \overline{N}.$$

Odatle slijedi tvrdnja teorema.

Lema 2.10.7. *Za $T \in X(\tau)$, $\lambda \in \mathfrak{a}^{*\mathbb{C}}$ i $x \in G$ vrijedi*

$$E_{T,\lambda}(x)^* = E_{T^*,-\overline{\lambda}}(x^{-1}).$$

Dokaz: Koristit ćemo sljedeću integralnu formulu

$$\int_K f(k)\mathrm{d}\mu(k) = \int_K f(\kappa(xk))\mathrm{e}^{-2\rho[H(xk)]}\mathrm{d}\mu(k), \qquad f \in L_1(K), \quad x \in G. \tag{2.15}$$

Odatle imamo

$$E_{T,\lambda}(x)^* = \int_K \tau_2(k)T^*\tau_1(\kappa(xk)^{-1})\mathrm{e}^{(\overline{\lambda}-\rho)[H(xk)]}\mathrm{d}\mu(k) =$$

$$= \int_K \tau_2(\kappa(x^{-1}k))T^*\tau_1(\kappa(x\kappa(x^{-1}k))^{-1})\mathrm{e}^{(\overline{\lambda}-\rho)[H(x\kappa(x^{-1}k))]}\mathrm{e}^{-2\rho[H(x^{-1}k)]}\mathrm{d}\mu(k).$$

Iz (2.12) imamo

$$\kappa(x\kappa(x^{-1}k)) = \kappa(xx^{-1}k) = \kappa(k) = k$$

i

$$H(x\kappa(x^{-1}k)) = H(xx^{-1}k) - H(x^{-1}k) = H(k) - H(x^{-1}k) = -H(x^{-1}k).$$

Stoga dobivamo

$$E_{T,\lambda}(x)^* = \int_K \tau_2(\kappa(x^{-1}k))T^*\tau_1(k^{-1})\mathrm{e}^{(-\overline{\lambda}-\rho)[H(x^{-1}k)]}\mathrm{d}\mu(k) = E_{T^*,-\overline{\lambda}}(x^{-1}).$$

Teorem 2.10.8. *Neka je $T \in X_0(\tau) = Hom_M(V_2, V_1)$ i neka je $\lambda \in \mathfrak{a}^{*\mathbb{C}}$ takav da je $\mathrm{Re}\,\lambda(H_\alpha) < 0$ $\forall\alpha \in \Sigma_+$. Tada za svaki $H \in C$ vrijedi*

$$\lim_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{-t(\lambda+\rho)(H)}E_{T,\lambda}(\exp tH) = \int_{\overline{N}} \tau_1(\kappa(\overline{n}))T\mathrm{e}^{\lambda-\rho)[H(\overline{n})]}\mathrm{d}\overline{\omega}(\overline{n}).$$

Dokaz: Za takav λ imamo

$$\mathrm{Re}\,(-\overline{\lambda}(H_\alpha)) = -\mathrm{Re}\,\lambda(H_\alpha) > 0 \qquad \forall \alpha \in \Sigma_+.$$

Nadalje, ako je $H \in C$, onda je $-H \in C_+$. Stoga po teoremu 2.10.6. vrijedi

$$\lim_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{-t(-\overline{\lambda}-\rho)(-H)} E_{T^*,-\overline{\lambda}}(\exp\, t(-H)) = \int_{\overline{N}} T^* \tau_1(\kappa(\overline{n})^{-1}) \mathrm{e}^{-(-\overline{\lambda}+\rho)[H(\overline{n})]} \mathrm{d}\overline{\omega}(\overline{n}),$$

odnosno,

$$\lim_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{-t(\overline{\lambda}+\rho)(H)} E_{T^*,-\overline{\lambda}}\left((\exp\, tH)^{-1}\right) = \int_{\overline{N}} T^* \mathrm{e}^{(\overline{\lambda}-\rho)[H(\overline{n})]} \mathrm{d}\overline{\omega}(\overline{n}).$$

Primijenimo li na tu jednakost adjungiranje $* : Hom_M(V_1, V_2) \to Hom_M(V_2, V_1) = X_0(\tau)$, zbog leme 2.10.7. dobivamo upravo tvrdnju teorema.

2.11 Langlandsov teorem

U cijelom ovom odjeljku je σ konačnodimenzionalna neprekidna unitarna ireducibilna reprezentacija od M na kompleksnom prostoru V i $\lambda \in \mathfrak{a}^{*\mathbb{C}}$.

Kao u odjeljku 2.8. konstruiramo $\tau_Q^{\sigma,\lambda}$, $\tau_{\overline{Q}}^{\sigma,\lambda}$, $\mathcal{H}_Q^{\sigma,\lambda}$, $C_Q^{\sigma,\lambda}$, $\mathcal{C}_Q^{\sigma,\lambda}$, $\mathcal{A}_Q^{\sigma,\lambda}$, $\pi_Q^{\sigma,\lambda}$, $\omega_Q^{\sigma,\lambda}$, $\mathcal{H}_{\overline{Q}}^{\sigma,\lambda}$, $C_{\overline{Q}}^{\sigma,\lambda}$, $\mathcal{C}_{\overline{Q}}^{\sigma,\lambda}$, $\mathcal{A}_{\overline{Q}}^{\sigma,\lambda}$, $\pi_{\overline{Q}}^{\sigma,\lambda}$, $\omega_{\overline{Q}}^{\sigma,\lambda}$, $\mathcal{H}^\sigma$, C^σ, $\mathcal{C}^\sigma$, $\mathcal{A}^\sigma$. Posebno je

$$\tau_Q^{\sigma,\lambda}(man) = \mathrm{e}^{(\lambda+\rho)(\log a)}\sigma(m), \quad \tau_{\overline{Q}}^{\sigma,\lambda}(ma\overline{n}) = \mathrm{e}^{(\lambda-\rho)(\log a)}\sigma(m), \quad m \in M,\ a \in A,\ n \in N,\ \overline{n} \in \overline{N},$$

$$[\omega_Q^{\sigma,\lambda}(x)\varphi](k) = \mathrm{e}^{(\lambda+\rho)[H_1(kx)]}\varphi(\kappa_1(kx)), \qquad \varphi \in \mathcal{H}^\sigma, \quad k \in K, \quad x \in G,$$
$$[\omega_{\overline{Q}}^{\sigma,\lambda}(x)\varphi](k) = \mathrm{e}^{(\lambda-\rho)[\overline{H}_1(kx)]}\varphi(\overline{\kappa}_1(kx)), \qquad \varphi \in \mathcal{H}^\sigma, \quad k \in K, \quad x \in G.$$

Pri tome su $\kappa, \kappa_1, \overline{\kappa}, \overline{\kappa}_1 : G \to K$, zatim $H, H_1, \overline{H}, \overline{H}_1 : G \to \mathfrak{a}$, te $n, n_1 : G \to N$ i $\overline{n}, \overline{n}_1 : G \to \overline{N}$ analitička preslikavanja određena Iwasawinim dekompozicijama $G = KAN$, $G = ANK$, $G = KA\overline{N}$ i $G = A\overline{N}K$:

$$x = \kappa(x)(\exp\, H(x))n(x) = (\exp\, H_1(x))n_1(x)\kappa_1(x) = \overline{\kappa}(x)(\exp\, \overline{H}(x))\overline{n}(x) = (\exp\, \overline{H}_1(x))\overline{n}_1(x)\overline{\kappa}_1(x).$$

Očigledne veze među tim preslikavanjima su

$$\kappa_1(x) = \kappa\left(x^{-1}\right)^{-1}, \quad \overline{\kappa}_1(x) = \overline{\kappa}\left(x^{-1}\right)^{-1}, \quad H_1(x) = -H\left(x^{-1}\right), \quad \overline{H}_1(x) = -\overline{H}\left(x^{-1}\right),$$

$$n_1(x) = \left(\exp\, H(x^{-1})\right) n\left(x^{-1}\right)^{-1}\left(\exp\, -H(x^{-1})\right), \quad \overline{n}_1(x) = \left(\exp\, \overline{H}(x^{-1})\right)\overline{n}\left(x^{-1}\right)^{-1}\left(\exp\, -\overline{H}(x^{-1})\right).$$

Nadalje, imamo

$$\kappa(\vartheta(x))(\exp\, H(\vartheta(x)))n(\vartheta(x)) = \vartheta(x) = \vartheta[\overline{\kappa}(x)(\exp\, \overline{H}(x))\overline{n}(x)] = \overline{\kappa}(x)(\exp\, -\overline{H}(x))\vartheta(\overline{n}(x)).$$

Dakle, vrijedi

$$\overline{\kappa}(x) = \kappa(\vartheta(x)), \qquad \overline{H}(x) = -H(\vartheta(x)), \qquad \overline{n}(x) = \vartheta(n(\vartheta(x))),$$

i slično

$$\overline{\kappa}_1(x) = \kappa_1(\vartheta(x)), \qquad \overline{H}_1(x) = -H_1(\vartheta(x)), \qquad \overline{n}_1(x) = \vartheta(n_1(\vartheta(x))).$$

Prema tome, vrijedi

$$[\omega_Q^{\sigma,\lambda}(x^{-1})\varphi](k^{-1}) = \mathrm{e}^{-(\lambda+\rho)[H(xk)]}\varphi(\kappa(xk)^{-1}), \qquad \varphi \in \mathcal{H}^\sigma, \quad k \in K, \quad x \in G,$$

$$[\omega_{\overline{Q}}^{\sigma,\lambda}(x^{-1})\varphi](k^{-1}) = \mathrm{e}^{-(\lambda-\rho)[\overline{H}(xk)]}\varphi(\overline{\kappa}(xk)^{-1}), \qquad \varphi \in \mathcal{H}^\sigma, \quad k \in K, \quad x \in G,$$

Napomenimo još da su reprezentacije $\pi_Q^{\sigma,\lambda}$ i $\pi_{\overline{Q}}^{\sigma,\lambda}$ definirane kao desni pomaci na funkcijama iz $\mathcal{H}_Q^{\sigma,\lambda}$ i $\mathcal{H}_{\overline{Q}}^{\sigma,\lambda}$ i da je

$$\omega_Q^{\sigma,\lambda}(x) = \left(T_Q^\lambda\right)^{-1}\pi_Q^{\sigma,\lambda}(x)T_Q^\lambda \quad \text{i} \quad \omega_{\overline{Q}}^{\sigma,\lambda}(x) = \left(T_{\overline{Q}}^\lambda\right)^{-1}\pi_{\overline{Q}}^{\sigma,\lambda}(x)T_{\overline{Q}}^\lambda,$$

pri čemu su $T_Q^\lambda : \mathcal{H}^\sigma \to \mathcal{H}_Q^{\sigma,\lambda}$ i $T_{\overline{Q}}^\lambda : \mathcal{H}^\sigma \to \mathcal{H}_{\overline{Q}}^{\sigma,\lambda}$ izometrički izomorfizmi zadani sa

$$\left(T_Q^\lambda\varphi\right)(x) = \mathrm{e}^{(\lambda+\rho)[H_1(x)]}\varphi(\kappa_1(x)) = \mathrm{e}^{-(\lambda+\rho)[H(x^{-1})]}\varphi\left(\kappa(x^{-1})^{-1}\right), \quad \varphi \in \mathcal{H}^\sigma, \quad x \in G,$$

i

$$\left(T_{\overline{Q}}^\lambda\varphi\right)(x) = \mathrm{e}^{(\lambda-\rho)[\overline{H}_1(x)]}\varphi(\overline{\kappa}_1(x)) = \mathrm{e}^{-(\lambda-\rho)[H_1(x^{-1})]}\varphi\left(\overline{\kappa}(x^{-1})^{-1}\right), \quad \varphi \in \mathcal{H}^\sigma, \quad x \in G.$$

Nadalje, inverzni izomorfizmi su restrikcije na K :

$$\left(T_Q^\lambda\right)^{-1} f = f|K, \quad f \in \mathcal{H}_Q^{\sigma,\lambda}, \qquad \left(T_{\overline{Q}}^\lambda\right)^{-1} f = f|K, \quad f \in \mathcal{H}_{\overline{Q}}^{\sigma,\lambda}.$$

Primijenimo li integralnu formulu (2.15) na funkciju $\check{f}(k) = f(k^{-1})$, dobivamo

$$\int_K f(k)\mathrm{d}\mu(k) = \int_K f(\kappa_1(kx^{-1}))\mathrm{e}^{2\rho[H_1(kx^{-1})]}\mathrm{d}\mu(k), \qquad f \in L_1(K). \tag{2.16}$$

Lema 2.11.1. *Za $f, g \in \mathcal{H}^\sigma$ i $x \in G$ vrijedi*

$$\left(\omega_Q^{\sigma,\lambda}(x)f\Big|\, g\right) = \left(f\,\Big|\omega_Q^{\sigma,-\overline{\lambda}}(x^{-1})g\right) \quad i \quad \left(\omega_{\overline{Q}}^{\sigma,\lambda}(x)f\Big|\, g\right) = \left(f\,\Big|\omega_{\overline{Q}}^{\sigma,-\overline{\lambda}}(x^{-1})g\right).$$

Dokaz: Dokazujemo samo prvu jednakost. Iz eksplicitnih formula za reprezentaciju $\omega_Q^{\sigma,\lambda}$ i korištenjem integralne formule (2.16) imamo

$$\left(\omega_Q^{\sigma,\lambda}(x)f\Big|\, g\right) = \int_K \mathrm{e}^{(\lambda+\rho)[H_1(kx)]}((f(\kappa_1(kx))|\, g(k))\,\mathrm{d}\mu(k) =$$

$$= \int_K \mathrm{e}^{(\lambda+\rho)[H_1(\kappa_1(kx^{-1})x)]}\left(f(\kappa_1(\kappa_1(kx^{-1})x))\Big|\, g(\kappa_1(kx^{-1}))\right)\mathrm{e}^{2\rho[H_1(kx^{-1})]}\mathrm{d}\mu(k).$$

Pomoću veze između preslikavanja H_1 i H te κ_1 i κ i iz formula (2.12) imamo

$$H_1\left(\kappa_1(kx^{-1})x\right) = -H\left(x^{-1}\kappa(xk^{-1})\right) = -H\left(k^{-1}\right) + H\left(xk^{-1}\right) = H\left(kx^{-1}\right) = -H_1\left(kx^{-1}\right)$$

i

$$\kappa_1\left(\kappa_1(kx^{-1})x\right) = \kappa\left(x^{-1}\kappa(xk^{-1})\right)^{-1} = \kappa\left(k^{-1}\right)^{-1} = k.$$

Stoga dobivamo

$$\left(\omega_Q^{\sigma,\lambda}(x)f\Big|\, g\right) = \int_K \mathrm{e}^{(-\lambda+\rho)[H_1(kx^{-1})]}\left(f(k)\,\Big|g(\kappa_1(kx^{-1})\right)\mathrm{d}\mu(k) =$$

$$= \int_K \left(f(k)\,\Big|\mathrm{e}^{(-\overline{\lambda}+\rho)[H_1(kx^{-1})]}g(\kappa_1(kx^{-1})\right)\mathrm{d}\mu(k) = \left(f\,\Big|\omega_Q^{\sigma,-\overline{\lambda}}(x^{-1})g\right).$$

Odatle je

Korolar 2.11.2. *Ako je $\lambda \in i\mathfrak{a}^*$, odnosno, $\lambda = -\overline{\lambda}$, reprezentacije $\omega_Q^{\sigma,\lambda}$, $\pi_Q^{\sigma,\lambda}$, $\omega_{\overline{Q}}^{\sigma,\lambda}$ i $\pi_{\overline{Q}}^{\sigma,\lambda}$, su unitarne.*

Budući da $\tau_Q^{\sigma,\lambda}|M = \sigma$ i $\tau_{\overline{Q}}^{\sigma,\lambda}|M = \sigma$ ne ovise o λ, iz teorema 2.8.4. slijedi da su sve reprezentacije $\pi_Q^{\sigma,\lambda}|K$ i $\pi_{\overline{Q}}^{\sigma,\lambda}|K$ za $\lambda \in \mathfrak{a}^{*\mathbb{C}}$ međusobno ekvivalentne. Zapravo i neposredno se vidi da za ekvivalentne reprezentacije $\omega_Q^{\sigma,\lambda}$ i $\omega_{\overline{Q}}^{\sigma,\lambda}$ vrijedi

$$\left[\omega_Q^{\sigma,\lambda}(k)\varphi\right](k_1) = \left[\omega_{\overline{Q}}^{\sigma,\lambda}(k)\varphi\right](k_1) = \varphi(k_1 k), \qquad \varphi \in \mathcal{H}^\sigma, \quad k, k_1 \in K.$$

Propozicija 2.11.3. *Pretpostavimo da za $\lambda \in \mathfrak{a}^{*\mathbb{C}}$ vrijedi $\operatorname{Re}\lambda(H_\alpha) > 0$ $\forall\alpha \in \Sigma_+$. Za svaku neprekidnu funkciju $\varphi : K \to V$ i za svako $k \in K$ integral*

$$\tilde{\varphi}(k) = \int_{\overline{N}} \mathrm{e}^{-(\lambda+\rho)[H(\overline{n})]}\varphi\left(\kappa(\overline{n})^{-1}k\right)\mathrm{d}\overline{\omega}(\overline{n})$$

apsolutno konvergira i tako definirana funkcija $\tilde{\varphi} : K \to V$ je neprekidna. Preslikavanje $\varphi \mapsto \tilde{\varphi}$ proširuje se do ograničenog linearnog operatora $J^\lambda : L_2(K,V) \to L_2(K,V)$ i uz oznaku iz leme 2.10.5. $\left\|J^\lambda\right\| \leq c(\operatorname{Re}\lambda)$.

Dokaz: Stavimo
$$M = \max\{\|\varphi(k)\|;\ k \in K\}.$$
Tada imamo
$$\int_{\overline{N}} \left\|e^{-(\lambda+\rho)[H(\overline{n})]}\varphi\left(\kappa(\overline{n})^{-1}k\right)\right\| d\overline{\omega}(\overline{n}) \leq M \int_{\overline{N}} e^{-(\mathrm{Re}\,\lambda+\rho)[H(\overline{n})]} d\overline{\omega}(\overline{n}) = Mc(\mathrm{Re}\,\lambda).$$
Time je dokazana tvrdnja o apsolutnoj konvergenciji integrala. Dokažimo da je funkcija $\tilde{\varphi} : K \to V$ definirana tim integralom neprekidna. Neka je $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz u K koji konvergira prema k_0. Za $\overline{n} \in \overline{N}$ stavimo
$$\Phi_n(\overline{n}) = e^{-(\lambda+\rho)[H(\overline{n})]}\varphi\left(\kappa(\overline{n})^{-1}k_n\right), \quad n \in \mathbb{Z}_+, \quad \text{i} \quad \Phi(\overline{n}) = Me^{-(\mathrm{Re}\,\lambda+\rho)[H(\overline{n})]}.$$
Iz prethodne ocjene vidimo da je $\|\Phi_n(\overline{n})\| \leq \Phi(\overline{n})$ za svaki $n \in \mathbb{Z}_+$ i svaki $\overline{n} \in \overline{N}$. Nadalje, prema lemi 2.10.5. je $\Phi \in L_1(\overline{N})$. Stoga po Lebesgueovom teoremu o dominiranoj konvergenciji dobivamo
$$\lim_{n\to+\infty} \tilde{\varphi}(k_n) = \lim_{n\to+\infty} \int_{\overline{N}} \Phi_n(\overline{n}) d\overline{\omega}(\overline{n}) = \int_{\overline{N}} \lim_{n\to+\infty} \Phi_n(\overline{n}) d\overline{\omega}(\overline{n}) = \int_{\overline{N}} \Phi_0(\overline{n}) d\overline{\omega}(\overline{n}) = \tilde{\varphi}(k_0).$$
Time je dokazano da je funkcija $\tilde{\varphi}$ neprekidna u svakoj točki $k_0 \in K$.

Neka je $\|\cdot\|_2$ oznaka za normu i $(\,\cdot\,|\,\cdot\,)_2$ oznaka za skalarni produkt u $L_2(K, V)$. Neka je $[\Phi(\overline{n})](k)$ oznaka za podintegralnu funkciju u definiciji funkcije $\tilde{\varphi}$. Dakle, za svaki $\overline{n}\overline{N}$ je $\Phi(\overline{n}) : K \to V$ funkcija definirana sa
$$[\Phi(\overline{n})](k) = e^{-(\lambda+\rho)[H(\overline{n})]}\varphi\left(\kappa(\overline{n})^{-1}k\right), \qquad k \in K.$$
Tada je $\Phi(\overline{n})$ neprekidna funkcija na K i, posebno, $\Phi(\overline{n}) \in L_2(K, V)$. Sada je
$$\tilde{\varphi} = \int_{\overline{N}} \Phi(\overline{n}) d\overline{\omega}(\overline{n}),$$
pa za svaki $\psi \in L_2(K, V)$ imamo
$$|(\tilde{\varphi}|\psi)_2| = \left|\int_{\overline{N}} (\Phi(\overline{n})|\psi)_2 d\overline{\omega}(\overline{n})\right| \leq \int_{\overline{N}} |(\Phi(\overline{n})|\psi)_2|\, d\overline{\omega}(\overline{n}).$$
Uzmemo li s obje strane supremum po $\psi \in L_2(K, V)$, $\|\psi\|_2 \leq 1$ slijedi
$$\|\tilde{\varphi}\|_2 \leq \int_{\overline{N}} \|\Phi(\overline{n})\|_2 d\overline{\omega}(\overline{n}).$$
Nadalje,
$$\|\Phi(\overline{n})\|_2^2 = \int_K e^{-2(\mathrm{Re}\lambda+\rho)[H(\overline{n})]} \left\|\varphi\left(\kappa(\overline{n})^{-1}k\right)\right\|^2 d\mu(k) = e^{-2(\mathrm{Re}\,\lambda+\rho)[H(\overline{n})]}\|\varphi\|_2^2.$$
Prema tome,
$$\|\tilde{\varphi}\|_2 \leq \int_{\overline{N}} e^{-(\mathrm{Re}\,\lambda+\rho)[H(\overline{n})]} d\overline{\omega}(\overline{n}) \|\varphi\|_2 = c(\mathrm{Re}\,\lambda)\|\varphi\|_2.$$
Dakle, operator $\varphi \mapsto \tilde{\varphi}$ se proširuje do ograničenog operatora na $L_2(K, V)$ s normom $\leq c(\mathrm{Re}\,\lambda)$.

Teorem 2.11.4. *Neka je $\lambda \in \mathfrak{a}^{*\mathbb{C}}$ takav da je $\mathrm{Re}\,\lambda(H_\alpha) > 0$ $\forall \alpha \in \Sigma_+$ i neka je $\sigma \in \hat{M}$.*

(a) *$J^{\sigma,\lambda} = J^\lambda|\mathcal{H}^\sigma$ je ograničen operator sa $\mathcal{H}^\sigma$ u $\mathcal{H}^\sigma$ i $J^{\sigma,\lambda} \neq 0$.*

(b) *$J^{\sigma,\lambda}\omega_Q^{\sigma,\lambda}(y) = \omega_{\overline{Q}}^{\sigma,\lambda}(y)J^{\sigma,\lambda}$ za svaki $y \in G$.*

(c) *Uz oznaku $\tilde{J}^{\sigma,\lambda} = T_{\overline{Q}}^\lambda J^{\sigma,\lambda}\left(T_Q^\lambda\right)^{-1} : \mathcal{H}_Q^{\sigma,\lambda} \to \mathcal{H}_{\overline{Q}}^{\sigma,\lambda}$ vrijedi*
$$[\tilde{J}^{\sigma,\lambda}f](x) = \int_{\overline{N}} f(\overline{n}x) d\overline{\omega}(\overline{n}) \qquad \forall f \in C_Q^{\sigma,\lambda} \quad i \quad \forall x \in G.$$

Dokaz: Neka je $\varphi \in C^\infty$, dakle, $\varphi(mk) = \sigma(m)\varphi(k)$ za $m \in M$ i $k \in K$. Po definiciji je

$$\tilde{\varphi}(mk) = \int_{\overline{N}} \mathrm{e}^{-(\lambda+\rho)[H(\overline{n})]} \varphi\left(\kappa(\overline{n})^{-1} mk\right) \mathrm{d}\overline{\omega}(\overline{n}).$$

Za $m \in M$ i $\overline{n} \in \overline{N}$ je

$$m^{-1}\kappa(\overline{n}) = \kappa\left(m^{-1}\overline{n}\right) = \kappa\left(m^{-1}\overline{n}m\right) m^{-1},$$

dakle,

$$\kappa(\overline{n})^{-1} m = m\kappa\left(m^{-1}\overline{n}m\right)^{-1}.$$

Sa $\psi_m : \overline{n} \mapsto m^{-1}\overline{n}m$ zadano je desno djelovanje grupe M pomoću automorfizama grupe $\overline{N}$. Budući da je grupa M kompaktna, mjera $\overline{\omega}$ je invarijantna u odnosu na to djelovanje. Napokon, vrijedi $H\left(m\overline{n}m^{-1}\right) = H(\overline{n})$. Dakle,

$$\tilde{\varphi}(mk) = \int_{\overline{N}} \mathrm{e}^{-(\lambda+\rho)[H(\overline{n})]} \varphi\left(m\kappa(m^{-1}\overline{n}m)^{-1} k\right) \mathrm{d}\overline{\omega}(\overline{n}) =$$

$$= \int_{\overline{N}} \mathrm{e}^{-(\lambda+\rho)[H(m\overline{n}m^{-1})]} \sigma(m)\varphi\left(\kappa(\overline{n})^{-1} k\right) \mathrm{d}\overline{\omega}(\overline{n}) = \sigma(m)\tilde{\varphi}(k).$$

To pokazuje da je $J\lambda C^\sigma \subseteq C^\sigma$, a kako je operator J^λ ograničen i kako je $\mathcal{H}^\sigma$ zatvarač od C^σ u $L_2(K,V)$, zaključujemo da je $J^\lambda \mathcal{H}^\sigma \subseteq \mathcal{H}^\sigma$. Time je dokazana prva tvrdnja u (a).

Stavimo kao u tvrdnji (c) $\tilde{J}^{\sigma,\lambda} = T^\lambda_{\overline{Q}} J^{\sigma,\lambda}\left(T^\lambda_Q\right)^{-1}$. To je očito ograničen linearan operator sa $\mathcal{H}^{\sigma,\lambda}_Q$ u $\mathcal{H}^{\sigma,\lambda}_{\overline{Q}}$. Neka je $f \in C^{\sigma,\lambda}_Q$ i $\varphi = \left(T^\lambda_Q\right)^{-1} = f|K$. Proizvoljan $x \in G$ pišemo u obliku $x = a\overline{n}_1 k$ gdje su $a \in A$, $\overline{n}_1 \in \overline{N}$ i $k \in K$. Sada je

$$\left(\tilde{J}^{\sigma,\lambda} f\right)(x) = [T^\lambda_{\overline{Q}} J^{\sigma,\lambda}\varphi](a\overline{n}_1 k) =$$

$$= \mathrm{e}^{(\lambda-\rho)(\log a)}\left(J^\lambda\varphi\right)(k) = \mathrm{e}^{(\lambda-\rho)(\log a)} \int_{\overline{N}} \mathrm{e}^{-(\lambda+\rho)[H(\overline{n})]} \varphi\left(\kappa(\overline{n})^{-1} k\right) \mathrm{d}\overline{\omega}(\overline{n}).$$

Uočimo sada da je

$$f\left(\overline{n}^{-1} k\right) = \left(T^\lambda_Q \varphi\right)(\overline{n}^{-1} k) = \left(T^\lambda_Q \varphi\right)\left(n(\overline{n})^{-1}(\exp -H(\overline{n}))\kappa(\overline{n})^{-1} k\right) = \mathrm{e}^{-(\lambda+\rho)[H(\overline{n})]} \varphi\left(\kappa(\overline{n})^{-1} k\right).$$

Prema tome,

$$[\tilde{J}^{\sigma,\lambda} f](x) = \mathrm{e}^{(\lambda-\rho)(\log a)} \int_{\overline{N}} f\left(\overline{n}^{-1} k\right) \mathrm{d}\overline{\omega}(\overline{n}) = \mathrm{e}^{(\lambda-\rho)(\log a)} \int_{\overline{N}} f\left(\overline{n}^{-1} a^{-1} x\right) \mathrm{d}\overline{\omega}(\overline{n}).$$

Budući da je $f \in C^{\sigma,\lambda}_Q$ imamo

$$f\left(\overline{n}^{-1} a^{-1} x\right) = f\left(a^{-1}(a\overline{n}a^{-1})^{-1} x\right) = \mathrm{e}^{-(\lambda+\rho)(\log a)} f\left((a\overline{n}a^{-1})^{-1} x\right).$$

Prema tome,

$$[\tilde{J}^{\sigma,\lambda} f](x) = \mathrm{e}^{-2\rho(\log a)} \int_{\overline{N}} f\left((a\overline{n}a^{-1})^{-1} x\right) \mathrm{d}\overline{\omega}(\overline{n}). \tag{2.17}$$

Budući da je $\overline{N}$ jednostavno povezana nilpotentna grupa, exp je bianalitička bijekcija sa $\overline{\mathfrak{n}}$ na $\overline{N}$ koja prevodi Lebesgueovu mjeru na $\overline{\mathfrak{n}}$ u odnosu na bilo koju bazu u $\overline{\mathfrak{n}}$ u Haarovu mjeru na $\overline{N}$. Odatle se lako izvodi da za svaku funkciju $g \in L_1(\overline{N})$ i za svaki $a \in A$ vrijedi

$$\int_{\overline{N}} g\left(a\overline{n}a^{-1}\right) \mathrm{d}\overline{\omega}(\overline{n}) = |\det[(Ad\, a)|\overline{\mathfrak{n}}]|^{-1} \int_{\overline{N}} g(\overline{n})\mathrm{d}\overline{\omega}(\overline{n}).$$

Nadalje,

$$\det\left[(Ad\, a)|\overline{\mathfrak{n}}\right] = \mathrm{e}^{\mathrm{Tr}\,[(ad\,\log\, a)|\overline{\mathfrak{n}}]}.$$

Imamo $(ad\,\log\, a)|\mathfrak{g}_{-\alpha} = -\alpha(\log\, a) I_{\mathfrak{g}_{-\alpha}}$ za svaki $\alpha \in \Sigma_+$, pa dobivamo

$$\mathrm{Tr}\,[(ad\, a)|\overline{\mathfrak{n}}] = \sum_{\alpha\in\Sigma_+} \mathrm{Tr}\,[(ad\,\log\, a)|\mathfrak{g}_{-\alpha}] = -\sum_{\alpha\in\Sigma_+} \alpha(\log\, a)\dim\,\mathfrak{g}_{-\alpha} = -2\rho(\log\, a).$$

Dakle, za svaki $a \in A$ i za svaku funkciju $g \in L_1(\overline{N})$ vrijedi

$$\int_{\overline{N}} g\left(a\overline{n}a^{-1}\right) \mathrm{d}\overline{\omega}(\overline{n}) = \mathrm{e}^{2\rho(\log\, a)} \int_{\overline{N}} g(\overline{n})\mathrm{d}\overline{\omega}(\overline{n}).$$

Primijenimo li to na funkciju $g(\overline{n}) = f\left(\overline{n}^{-1}x\right)$ iz formule (2.17) dobivamo zbog unimodularnosti grupe $\overline{N}$:

$$\left(\tilde{J}^{\sigma,\lambda} f\right)(x) = \int_{\overline{N}} f\left(\overline{n}^{-1}x\right) \mathrm{d}\overline{\omega}(\overline{n}) = \int_{\overline{N}} f(\overline{n}x)\mathrm{d}\overline{\omega}(\overline{n}).$$

Time je dokazana tvrdnja (c).

Za $x, y \in G$ i $f \in C_Q^{\sigma,\lambda}$ imamo sada redom

$$[\tilde{J}^{\sigma,\lambda}\pi_Q^{\sigma,\lambda}(y)f](x) = \int_{\overline{N}} [\pi_Q^{\sigma,\lambda}(y)f](\overline{n}x)\mathrm{d}\overline{\omega}(\overline{n}) =$$

$$= \int_{\overline{N}} f(\overline{n}xy)\mathrm{d}\overline{\omega}(\overline{n}) = [\tilde{J}^{\sigma,\lambda} f](xy) = [\pi_{\overline{Q}}^{\sigma,\lambda}(y)\tilde{J}^{\sigma,\lambda} f](x).$$

Budući da je $C_P^{\sigma,\lambda}$ gusto u $\mathcal{H}_P^{\sigma,\lambda}$, slijedi tvrdnja (b).

Ostaje još da se dokaže da je $J^{\sigma,\lambda} \neq 0$, ili, ekvivalentno, da je $\tilde{J}^{\sigma,\lambda} \neq 0$. Neka je $\psi \in C_0(\overline{N})$ takva da je

$$\int_{\overline{N}} \psi(\overline{n})\mathrm{d}\overline{\omega}(\overline{n}) = 1$$

i neka je $v \in V$, $v \neq 0$. Definiramo funkciju $F : G \to V$ sa

$$F(x) = \begin{cases} \psi(\overline{n})\tau_Q^{\sigma,\lambda}(q)v & \text{za } x = q\overline{n},\ q \in Q,\ \overline{n} \in \overline{N}, \\ 0 & \text{za } x \in G \setminus Q\overline{N}. \end{cases}$$

Budući da je $Q\overline{N}$ otvorena gusta podmnogostrukost od G, očito je F neprekidna funkcija na G. Nadalje, ona očito zadovoljava transformaciono pravilo za lijeve pomake elementima $q \in Q$:

$$F(qx) = \tau_Q^{\sigma,\lambda}(q)F(x).$$

Drugim riječima, $F \in C_Q^{\sigma,\lambda}$. Napokon,

$$\left(\tilde{J}^{\sigma,\lambda} F\right)(e) = \int_{\overline{N}} F(\overline{n})\mathrm{d}\overline{\omega}(\overline{n}) = \int_{\overline{N}} \psi(\overline{n})\mathrm{d}\overline{\omega}(\overline{n}) \cdot v = v \neq 0.$$

Dakle, $\tilde{J}^{\sigma,\lambda} \neq 0$, i time je teorem u potpunosti dokazan.

Sljedeća lema izražava neke matrične koeficijente elementarne reprezentacije $\pi_Q^{\sigma,\lambda}$ preko Eisensteinovog integrala:

Lema 2.11.5. *Neka su V_1 i V_2 konačnodimenzionalni unitarni $K-$moduli s reprezentacijama τ_1 i τ_2 i neka su $v_1 \in V_1$, $v_2 \in V_2$, $A_1 \in Hom_M(V_1, V)$ i $A_2 \in Hom_M(V_2, V)$. Definiramo funkcije $f_1, f_2 : G \to V$ sa*

$$f_j(qk) = \tau_Q^{\sigma,\lambda}(q) A_j \tau_j(k) v_j, \qquad q \in Q, \quad k \in K, \quad j = 1, 2.$$

Tada su $f_1, f_2 \in C_Q^{\sigma,\lambda}$ i vrijedi

$$\left(\pi_Q^{\sigma,\lambda}(x) f_1 \middle| f_2\right) = \left(E_{A_2^* A_1,\lambda}(x) v_1 \middle| v_2\right), \qquad x \in G.$$

Dokaz: Iz teorema 2.8.4. slijedi da su funkcije f_1, f_2 dobro definirane i nalaze se u $C_Q^{\sigma,\lambda}$ (štoviše, u $\mathcal{A}_Q^{\sigma,\lambda}$). Za $x \in G$ imamo

$$f_j(x) = f_j\left(n(x^{-1})^{-1}(\exp -H(x^{-1}))\kappa(x^{-1})^{-1}\right) = \mathrm{e}^{-(\lambda+\rho)[H(x^{-1})]} A_j \tau_j\left(\kappa(x^{-1})^{-1}\right) v_j,$$

pa slijedi

$$\left(\pi_Q^{\sigma,\lambda}(x) f_1 \middle| f_2\right) = \int_K \left([\pi_Q^{\sigma,\lambda}(x) f_1](k) \middle| f_2(k)\right) \mathrm{d}\mu(k) = \int_K \left(f_1(kx) \middle| f_1(k)\right) \mathrm{d}\mu(k) =$$

$$= \int_K \mathrm{e}^{-(\lambda+\rho)[H(x^{-1}k^{-1})]} \left(A_1 \tau_1(\kappa(x^{-1}k^{-1})^{-1}) v_1 \middle| A_2 \tau_2(k) v_2\right) \mathrm{d}\mu(k) =$$

$$= \int_K \mathrm{e}^{-(\lambda+\rho)[H(x^{-1}k)]} \left(A_1 \tau_1(\kappa(x^{-1}k)^{-1}) v_1 \middle| A_2 \tau_2(k^{-1}) v_2\right) \mathrm{d}\mu(k) =$$

$$= \int_K \mathrm{e}^{-(\lambda+\rho)[H(x^{-1}k)]} \left(A_2^* A_1 \tau_1(\kappa(x^{-1}k)^{-1}) v_1 \middle| \tau_2(k^{-1}) v_2\right) \mathrm{d}\mu(k).$$

Pomoću integralne formule (2.15) dobivamo

$$\left(\pi_Q^{\sigma,\lambda}(x) f_1 \middle| f_2\right) = \int_K \mathrm{e}^{-2\rho[H(xk)]} \mathrm{e}^{-(\lambda+\rho)[H(x^{-1}\kappa(xk))]} \left(A_2^* A_1 \tau_1(\kappa(x^{-1}\kappa(xk))^{-1}) v_1 \middle| \tau_2(\kappa(xk)^{-1}) v_2\right) \mathrm{d}\mu(k).$$

Prema (2.12) je $H(x^{-1}\kappa(xk)) = -H(xk)$ i $\kappa(x^{-1}\kappa(xk)) = k$, pa slijedi:

$$\left(\pi_Q^{\sigma,\lambda}(x) f_1 \middle| f_2\right) = \int_K \mathrm{e}^{(\lambda-\rho)[H(xk)]} \left(A_2^* A_1 \tau_1(k^{-1}) v_1 \middle| \tau_2(\kappa(xk)^{-1}) v_2\right) \mathrm{d}\mu(k) =$$

$$= \int_K \mathrm{e}^{(\lambda-\rho)[H(xk)]} \left(\tau_2(\kappa(xk)) A_2^* A_1 \tau_1(k^{-1}) v_1 \middle| v_2\right) \mathrm{d}\mu(k) = \left(E_{A_2^* A_1}(x) v_1 \middle| v_2\right).$$

Lema 2.11.6. *Neka je $\lambda \in \mathfrak{a}^{*\mathbb{C}}$ takav da je $\operatorname{Re}\lambda(H_\alpha) > 0$ $\forall \alpha \in \Sigma_+$. Tada za proizvoljne $f_1, f_2 \in \mathcal{V}_Q^{\sigma,\lambda}$ vrijedi*

$$\lim_{t \to +\infty} \mathrm{e}^{-t(\lambda-\rho)(H)} \left(\pi_Q^{\sigma,\lambda}(k_2^{-1}(\exp tH)k_1) f_1 \middle| f_2\right) = \left([\tilde{J}^{\sigma,\lambda} f_1](k_1) \middle| f_2(k_2)\right) \quad \forall H \in C_+ \text{ i } \forall k_1, k_2 \in K.$$

Dokaz: Budući da su f_1 i f_2 $K-$konačni vektori u $\mathcal{H}_Q^{\sigma,\lambda}$, postoje neprekidni konačnodimenzionalni $K-$moduli V_1 i V_2 s reprezentacijama τ_1 i τ_2, preplitanja $B_1 \in Hom_K\left(V_1, \mathcal{H}_Q^{\sigma,\lambda}\right)$ i $B_2 \in Hom_K\left(V_2, \mathcal{H}_Q^{\sigma,\lambda}\right)$ i vektori $v_1 \in V_1$ i $v_2 \in V_2$ takvi da je $f_1 = B_1 v_1$ i $f_2 = B_2 v_2$. Prema teoremu 2.8.4. tada je $A_1 = \tilde{B}_1 \in Hom_M(V_1, V)$ i $A_2 = \tilde{B}_2 \in Hom_M(V_2, V)$ i vrijedi

$$f_1(qk) = \tau_Q^{\sigma,\lambda}(q) A_1 \tau_1(k) v_1 \quad \text{i} \quad f_2(qk) = \tau_Q^{\sigma,\lambda}(q) A_2 \tau_2(k) v_2 \qquad \forall k \in K \quad \text{i} \quad \forall q \in Q.$$

Prema lemi 2.11.5. imamo za proizvoljan $H \in C_+$ i proizvoljne $k_1, k_2 \in K$:

$$\lim_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{-t(\lambda-\rho)(H)} \left(\pi_Q^{\sigma,\lambda}(k_2^{-1}(\exp tH)k_1)f_1 \Big| \, f_2\right) = \lim_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{-t(\lambda-\rho)} \left(E_{A_2^*A_1,\lambda}(k_2^{-1}(\exp tH)k_1)v_1 \big| \, v_2\right)$$

a to je prema lemi 2.10.2. jednako

$$\lim_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{-t(\lambda-\rho)(H)} \left(E_{A_2^*A_1,\lambda}(\exp tH)\tau_1(k_1)v_1 \big| \, \tau_2(k_2)v_2\right).$$

Prema teoremu 2.10.6. to je dalje jednako

$$\int_{\overline{N}} \mathrm{e}^{-(\lambda+\rho)[H(\overline{n})]} \left(A_2^*A_1\tau_1(\kappa(\overline{n})^{-1})\tau_1(k_1)v_1 \big| \, \tau_2(k_2)v_2\right) \mathrm{d}\overline{\omega}(\overline{n}) =$$

$$= \int_{\overline{N}} \mathrm{e}^{-(\lambda+\rho)[H(\overline{n})]} \left(A_1\tau_1(\kappa(\overline{n})^{-1}k_1)v_1 \big| \, A_2\tau_2(k_2)v_2\right) \mathrm{d}\overline{\omega}(\overline{n}).$$

Budući da je

$$f_1\left(\overline{n}^{-1}k_1\right) = f_1\left(n(\overline{n})^{-1}(\exp -H(\overline{n}))\kappa(\overline{n})^{-1}k_1\right) = \mathrm{e}^{-(\lambda+\rho)[H(\overline{n})]}A_1\tau_1\left(\kappa(\overline{n})^{-1}k_1\right)v_1$$

i $f_2(k_2) = A_2\tau_2(k_2)v_2$, dobivamo

$$\lim_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{-t(\lambda-\rho)(H)} \left(\pi_Q^{\sigma,\lambda}(k_2^{-1}(\exp tH)k_1)f_1 \Big| \, f_2\right) =$$

$$= \int_{\overline{N}} \left(f_1(\overline{n}^{-1}k_1) \big| \, f_2(k_2)\right) \mathrm{d}\overline{\omega}(\overline{n}) = \int_{\overline{N}} \left(f_1(\overline{n}k_1) | \, f_2(k_2)\right) \mathrm{d}\overline{\omega}(\overline{n}).$$

Sada iz tvrdnje (c) teorema 2.11.4. slijedi

$$\lim_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{-t(\lambda-\rho)(H)} \left(\pi_Q^{\sigma,\lambda}(k_2^{-1}(\exp tH)k_1)f_1 \Big| \, f_1\right) = \left([\tilde{J}^{\sigma,\lambda}f_1](k_1) \Big| \, f_2(k_2)\right).$$

Lema 2.11.7. *Za proizvoljne $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{H}_K^\sigma \backslash \{0\}$ postoje $k_1, k_2 \in K$ takvi da je $(\varphi_1(k_1) | \, \varphi_2(k_2)) \neq 0$.*

Dokaz: Neka je $k_3 \in K$ takav da je $v = \varphi_2(k_3) \neq 0$. Nadalje, neka je $k_1 \in K$ takav da je $\varphi_1(k_1) \neq 0$. Reprezentacija σ od M je ireducibilna, pa je

$$V = span\,\{\sigma(m)v;\ m \in M\} = span\,\{\varphi_2(mk_3);\ m \in M\}.$$

Stoga postoji $m \in M$ takav da za $k_2 = mk_3$ vrijedi $(\varphi_1(k_1) | \, \varphi_2(k_2)) \neq 0$.

Teorem 2.11.8. *Neka je $\lambda \in \mathfrak{a}^{*\mathbb{C}}$ takav da je $\mathrm{Re}\,\lambda(H_\alpha) > 0 \ \ \forall \alpha \in \Sigma_+$ i neka je $\sigma \in \hat{M}$. Tada je $\mathrm{Ker}\,\tilde{J}^{\sigma,\lambda}$ najveći zatvoren pravi $G-$podmodul od $\mathcal{H}_Q^{\sigma,\lambda}$. Drugim riječima, $\mathcal{H}_Q^{\sigma,\lambda}/\left(\mathrm{Ker}\,\tilde{J}^{\sigma,\lambda}\right)$ je jedini ireducibilan kvocijent $G-$modula $\mathcal{H}_Q^{\sigma,\lambda}$.*

Dokaz: Stavimo $\mathcal{H} = \mathcal{H}_Q^{\sigma,\lambda}$ i $\mathcal{K} = \mathrm{Ker}\,\tilde{J}^{\sigma,\lambda}$. Po teoremu 2.11.4. $\mathcal{K}$ je zatvoren $G-$podmodul od $\mathcal{H}$ i $\mathcal{K} \neq \mathcal{H}$. Neka je $\mathcal{M}$ zatvoren pravi $G-$podmodul od $\mathcal{H}$. Treba dokazati da je $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{K}$.

Neka je $g \in \mathcal{H}_K$, $g \neq 0$, $g \perp \mathcal{M}$. Nadalje, neka je f proizvoljan element od $\mathcal{M}_K = \mathcal{M} \cap \mathcal{H}_K$. Budući da je $f \in \mathcal{M}$ i $g \perp \mathcal{M}$ i budući da je $\mathcal{M}$ $G-$podmodul, vrijedi

$$\left(\pi_Q^{\sigma,\lambda}(x)f \Big| \, g\right) = 0 \qquad \forall x \in G.$$

Sada iz leme 2.11.6. slijedi

$$\left([\tilde{J}^{\sigma,\lambda}f](k_1) \Big| \, g(k_2)\right) = 0 \qquad \forall k_1, k_2 \in K.$$

Budući da je $g \neq 0$, po lemi 2.11.7. slijedi $[\tilde{J}^{\sigma,\lambda}f]|K = 0$. To znači da je $\tilde{J}^{\sigma,\lambda}f = 0$, odnosno, $f \in \mathcal{K}$.

Time je dokazano da je $\mathcal{M}_K \subseteq \mathcal{K}$. Kako je $\mathcal{M}_K$ gusto u $\mathcal{M}$, zaključujemo da je $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{K}$.

Lema 2.11.9. *Neka je* $\lambda \in \mathfrak{a}^{*\mathbb{C}}$ *takav da je* $\operatorname{Re}\lambda(H_\alpha) < 0$ $\forall \alpha \in \Sigma_+$ *i neka je* $\sigma \in \hat{M}$. *Tada za proizvoljne* $f_1, f_2 \in \mathcal{V}_Q^{\sigma,\lambda}$, $H \in C$ *i* $k_1, k_2 \in K$ *vrijedi*

$$\lim_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{-t(\lambda+\rho)(H)} \left(\pi_Q^{\sigma,\lambda}(k_2^{-1}(\exp tH)k_1)f_1 \middle| f_2\right) = \left(f_1(k_1) \middle| [J^{\sigma,-\overline{\lambda}}(T_Q^\lambda)^{-1}f_2](k_2)\right).$$

Dokaz: Stavimo $g_1 = T_Q^{-\overline{\lambda}}\left(T_Q^\lambda\right)^{-1} f_1$ i $g_2 = T_Q^{-\overline{\lambda}}\left(T_Q^\lambda\right)^{-1} f_2$. Tada su $f_1, g_1 \in \mathcal{V}_Q^{\sigma,-\overline{\lambda}}$. Nadalje, za svaki $\alpha \in \Sigma_+$ vrijedi $\operatorname{Re}(-\overline{\lambda}(H_\alpha)) = -\operatorname{Re}\lambda(H_\alpha) > 0$. Korištenjem leme 2.11.6. i leme 2.11.1. imamo redom:

$$\lim_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{-t(\lambda+\rho)(H)} \left(\pi_Q^{\sigma,\lambda}(k_2^{-1}(\exp tH)k_1)f_1 \middle| f_2\right) =$$

$$= \lim_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{-t(\lambda+\rho)(H)} \left(\pi_Q^{\sigma,\lambda}(k_2^{-1}(\exp tH)k_1)T_Q^\lambda(T_Q^{-\overline{\lambda}})^{-1}g_1 \middle| T_Q^\lambda(T_Q^{-\overline{\lambda}})^{-1}g_2\right) =$$

$$= \lim_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{-t(\lambda+\rho)(H)} \left(\omega_Q^{\sigma,\lambda}(k_2^{-1}(\exp tH)k_1)(T_Q^{-\overline{\lambda}})^{-1}g_1 \middle| (T_Q^{-\overline{\lambda}})^{-1}g_2\right) =$$

$$= \lim_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{-t(\lambda+\rho)(H)} \left((T_Q^{-\overline{\lambda}})^{-1}g_1 \middle| \omega_Q^{\sigma,\lambda}(k_1^{-1}(\exp t(-H))k_2)(T_Q^{-\overline{\lambda}})^{-1}g_2\right) =$$

$$= \lim_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{-t(\lambda+\rho)(H)} \left(g_1 \middle| \pi_Q^{\sigma,-\overline{\lambda}}(k_1^{-1}(\exp t(-H))k_2)g_2\right) =$$

$$= \overline{\lim_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{-t(-\overline{\lambda}-\rho)(-H)} \left(\pi_Q^{\sigma,-\overline{\lambda}}(k_1^{-1}(\exp t(-H))k_2)g_2 \middle| g_1\right)} =$$

$$= \overline{\left([\tilde{J}^{\sigma,-\overline{\lambda}}g_2](k_2) \middle| g_1(k_1)\right)} = \left(g_1(k_1) \middle| [\tilde{J}^{\sigma,-\overline{\lambda}}g_2](k_2)\right).$$

Tvrdnja leme slijedi jer je $g_1(k_1) = f_1(k_1)$ i

$$[\tilde{J}^{\sigma,-\overline{\lambda}}g_2](k_2) = [\tilde{J}^{\sigma,-\overline{\lambda}}T_Q^{-\overline{\lambda}}(T_Q^\lambda)^{-1}f_2](k_2) = [T_{\overline{Q}}^{-\lambda}J^{\sigma,-\overline{\lambda}}(T_Q^\lambda)^{-1}f_2](k_2) = [J^{\sigma,-\overline{\lambda}}(T_Q^\lambda)^{-1}f_2](k_2).$$

Teorem 2.11.10. *Neka je* $\lambda \in \mathfrak{a}^{*\mathbb{C}}$ *takav da je* $\operatorname{Re}\lambda(H_\alpha) < 0$ $\forall \alpha \in \Sigma_+$. *Postoji jedinstvena ireducibilna subreprezentacija* $\rho_Q^{\sigma,\lambda}$ *elementarne reprezentacije* $\pi_Q^{\sigma,\lambda}$. *Neka je* $\mathcal{W}$ *prostor* $K-$*konačnih vektora reprezentacije* $\rho_Q^{\sigma,\lambda}$. *Za proizvoljne* $f \in \mathcal{W} \setminus \{0\}$ *i* $\tilde{f} \in \tilde{\mathcal{W}} \setminus \{0\}$ *je tada* $\lambda \in E^\circ(f, \tilde{f})$. *Posebno, vrijedi* $\lambda \in E^\circ(\rho_Q^{\sigma,\lambda})$.

Dokaz: Imamo $\operatorname{Re}(-\overline{\lambda}(H_\alpha) = -\operatorname{Re}\lambda(H_\alpha) > 0$ $\forall \alpha \in \Sigma_+$. Stoga prema teoremu 2.11.8. u $\mathcal{H}_Q^{\sigma,-\overline{\lambda}}$ postoji najveći zatvoren pravi $G-$podmodul $\mathcal{K}$ i on je jednak $\operatorname{Ker}\tilde{J}^{\sigma,-\overline{\lambda}}$. Stavimo $\mathcal{K}' = (T_Q^{-\overline{\lambda}})^{-1}\mathcal{K}$. Tada je $\mathcal{K}'$ najveći zatvoren $\omega_Q^{\sigma,-\overline{\lambda}}(G)-$invarijantan pravi potprostor od $\mathcal{H}^\sigma$. Neka je $\mathcal{M}' = \mathcal{K}'^\perp$ ortogonalni komplement od $\mathcal{K}'$ u $\mathcal{H}^\sigma$. Po lemi 2.11.1. $\mathcal{M}'$ je najmanji netrivijalan zatvoren $\omega_Q^{\sigma,\lambda}(G)-$invarijantan potprostor od $\mathcal{H}^\sigma$. Tada je $\mathcal{M} = T_Q^\lambda\mathcal{M}'$ najmanji netrivijalan zatvoren $G-$podmodul od $\mathcal{H}_Q^{\sigma,\lambda}$. Prema tome, $\pi_Q^{\sigma,\lambda}$ ima jedinstvenu ireducibilnu subreprezentaciju $\rho_Q^{\sigma,\lambda}$ i, budući da su T_Q^λ i $T_{\overline{Q}}^{-\lambda}$ izometrički izomorfizmi, za prostor $\mathcal{M}$ te reprezentacije imamo redom

$$\mathcal{M} = T_Q^\lambda\mathcal{M}' = T_Q^\lambda\mathcal{K}'^\perp = (T_Q^\lambda\mathcal{K}')^\perp = \left(T_Q^\lambda(T_Q^{-\overline{\lambda}})^{-1}\operatorname{Ker}\tilde{J}^{\sigma,-\overline{\lambda}}\right)^\perp =$$

$$= \left(\operatorname{Ker}[\tilde{J}^{\sigma,-\overline{\lambda}}T_Q^{-\overline{\lambda}}(T_Q^\lambda)^{-1}]\right)^\perp = \left(\operatorname{Ker}[T_{\overline{Q}}^{-\lambda}J^{\sigma,-\overline{\lambda}}(T_Q^\lambda)^{-1}]\right)^\perp = \left(\operatorname{Ker}[J^{\sigma,-\overline{\lambda}}(T_Q^\lambda)^{-1}]\right)^\perp.$$

Neka su sada $f \in \mathcal{W} \setminus \{0\}$ i $\tilde{f} \in \tilde{\mathcal{W}} \setminus \{0\}$. Neka je $g \in \mathcal{M}$ element koji reprezentira funkcional $\tilde{f}$, tj. $\tilde{f}(h) = (h|g)$ $\forall h \in \mathcal{M}$. Tada iz $K-$konačnosti $\tilde{f}$ slijedi $K-$konačnost g. Dakle, $g \in \mathcal{W} \setminus \{0\}$. Imamo

$$c_{f,\tilde{f}}(x) = \left(\rho_Q^{\sigma,\lambda}(x)f \middle| g\right) = \left(\pi_Q^{\sigma,\lambda}f \middle| g\right), \qquad x \in G.$$

Stavimo $h = J^{\sigma,-\overline{\lambda}}(T_Q^\lambda)^{-1}g \in \mathcal{H}^\sigma$. Kako je $g \in \mathcal{M}$, vrijedi $g \perp \operatorname{Ker}[J^{\sigma,-\overline{\lambda}}(T_Q^\lambda)^{-1}]$. Dakle, $h \neq 0$. Prema lemi 2.11.7. postoje $k_1, k_2 \in K$ takvi da je $(f(k_1)|h(k_2)) \neq 0$. Stavimo $f' = \rho_Q^{\sigma,\lambda}(k_1)f$ i $g' = \rho_Q^{\sigma,\lambda}(k_2)g$. Neka je $\tilde{f}' \in \tilde{\mathcal{W}}$ definiran sa $\tilde{f}'(w) = (w|g')$, $w \in \mathcal{W}$. Tada očito vrijedi $E^\circ(f,\tilde{f}) = E^\circ(f',\tilde{f}')$. Stavimo $h' = J^{\sigma,-\overline{\lambda}}(T_Q^\lambda)^{-1}g'$. Budući da su T_Q^λ i $J^{\sigma,-\overline{\lambda}}$ $K-$preplitanja, imamo $h'(e) = h(k_2)$. Prema tome, vrijedi $(f'(e)|h'(e)) \neq 0$. To pokazuje da u dokazu činjenice da je $\lambda \in E^\circ(f,\tilde{f})$ možemo pretpostavljati da je $(f(e)|h(e)) \neq 0$, gdje je $h = J^{\sigma,-\overline{\lambda}}(T_Q^\lambda)^{-1}g$. Sada po lemi 2.11.9. imamo za svaki $H \in C$:

$$\lim_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{-t(\lambda+\rho)(H)} c_{f,\tilde{f}}(\exp tH) = \lim_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{-t(\lambda+\rho)(H)} \left(\pi_Q^{\sigma,\lambda}(\exp tH)f \,\middle|\, g\right) =$$

$$= \left(f(e) \,\middle|\, [J^{\sigma,-\overline{\lambda}}(T_Q^\lambda)^{-1}g](e)\right) = (f(e)|h(e)) \neq 0.$$

Prema tome, $\lambda \in E^\circ(f,\tilde{f})$.

2.12 Vodeći eksponenti i ulaganja u elementarne module

Prema teoremima 2.8.9. i 2.9.9., ako je $\mathcal{H}$ dopustiv Banachov $(G,K)-$modul konačne duljine s reprezentacijom π, onda je $E^\circ(\pi) \subseteq J(\pi)$. Posebno, kako je $J(\pi) \subseteq E(\pi)$, skup $E^\circ(\pi)$ sadržan je u skupu $J^\circ(\pi)$ svih minimalnih elemenata od $J(\pi)$ (u odnosu na $\ll$). Cilj je ovog odjeljka da se dokaže da je $E^\circ(\pi) = J^\circ(\pi)$, tj. da za svaki $\mu \in J(\pi)$ postoji $\lambda \in E^\circ(\pi)$ takav da je $\lambda \ll \mu$.

Dokazat ćemo najprije neke činjenice o konačnodimenzionalnim $G-$modulima. Neka je τ neprekidna reprezentacija od G na kompleksnom konačnodimenzionalnom prostoru W. Možemo pretpostaviti da je na W zadan skalarni produkt takav da vrijedi $\tau(\vartheta(X)) = -\tau(X)^* \ \forall X \in \mathfrak{g}$; pri tome je $*$ oznaka za hermitsko adjungiranje u $End(W)$ u odnosu na taj skalarni produkt.

Za $\nu \in \mathfrak{h}^{*\mathbb{C}}$ stavimo

$$W_\nu = \{w \in W;\ \tau(H)w = \nu(H)w \ \ \forall H \in \mathfrak{h}\}$$

i neka je

$$M(\tau) = \{\nu \in \mathfrak{h}^{*\mathbb{C}};\ W_\nu \neq \{0\}\,\}, \qquad m_\tau(\nu) = \dim W_\nu$$

Elementi od $M(\tau)$ zovu se $H-$**težine reprezentacije** τ, a $m_\tau(\nu)$ je **multiplicitet** $H-$težine ν u reprezentaciji τ. Tada za svaki $s \in W_c = W(\mathfrak{g}^\mathbb{C}, \mathfrak{h}^\mathbb{C})$ i svaki $\nu \in \mathfrak{h}^{*\mathbb{C}}$ vrijedi $m_\tau(s\nu) = m_\tau(\nu)$.

Neka je B baza sistema korijena $R = R(\mathfrak{g}^\mathbb{C}, \mathfrak{h}^\mathbb{C})$ u odnosu na izabrani uređaj. Označimo sa P skup težina od R, P_+ skup dominantnih težina, Λ skup korijenskih težina (tj. $\Lambda = \mathbb{Z}R$) i $\Lambda_+ = \mathbb{Z}_+R_+$. Ako je reprezentacija τ ireducibilna, označimo sa ν_τ njenu najmanju $\mathfrak{h}-$težinu. Tada je $\nu_\tau \in -P_+$, $m_\tau(\nu_\tau) = 1$ i $M(\tau \subseteq \nu_\tau + \Lambda_+$.

Kao i prije stavimo za $\lambda \in \mathfrak{a}^{*\mathbb{C}}$

$$W_{(\lambda)} = \{w \in W;\ \exists m \in \mathbb{Z}_+,\ (\tau(H) - \lambda(H)I_W)^m w = 0 \ \forall H \in \mathfrak{a}\} =$$

$$= \left\{w \in W;\ \exists k \in \mathbb{Z}_+,\ \left(\tau(a) - \mathrm{e}^{\lambda(\log a)} I_W\right)^k w = 0 \ \forall a \in A\right\}.$$

Nadalje, neka je

$$T(\tau) = \{\lambda \in \mathfrak{a}^{*\mathbb{C}};\ W_{(\lambda)} \neq \{0\}\,\}, \qquad n_\tau(\lambda) = \dim W_{(\lambda)}.$$

Elementi od $T(\tau)$ zovu se $A-$**težine reprezentacije** τ, a $n_\tau(\lambda)$ je **multiplicitet** $A-$težine λ u reprezentaciji τ. Za $\lambda \in \mathfrak{a}^{*\mathbb{C}}$ stavimo

$$M_\lambda(\tau) = \{\nu \in M(\tau);\ \nu|\mathfrak{a} = \lambda\}.$$

Tada se lako vidi da vrijedi:

Lema 2.12.1. *Za svaki $\lambda \in \mathfrak{a}^{*\mathbb{C}}$ vrijedi*

$$W_{(\lambda)} = \{w \in W;\ \tau(H)w = \lambda(H)w \ \forall H \in \mathfrak{a}\} = \{w \in W;\ \tau(a) = \mathrm{e}^{\lambda(\log a)} w \ \forall a \in A\}.$$

Nadalje,

$$n_\tau(\lambda) = \sum_{\nu \in M_\lambda(\tau)} m_\tau(\nu), \qquad T(\tau) = \{\nu|\mathfrak{a};\ \nu \in M(\tau)\}, \qquad W_{(\lambda)} = \sum_{\nu \in M_\lambda(\tau)} \dot{+}\, W_\nu.$$

Budući da grupa M centralizira $\mathfrak{a}$, svaki potprostor $W_{(\lambda)}$ je $M-$podmodul od W (dakle i $S = MA-$podmodul) i pogotovo $\mathfrak{m}-$podmodul.

Ako je reprezentacija τ ireducibilna, stavimo $\lambda_\tau = \nu_\tau|\mathfrak{a}$.

Propozicija 2.12.2. *Uz uvedene oznake vrijedi:*

(*a*) *Za svaki* $s \in W = W(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$ *i svaki* $\lambda \in \mathfrak{a}^{*\mathbb{C}}$ *je* $n_\tau(\lambda) = n_\tau(s\lambda)$.

(*b*) *Ako je reprezentacija* τ *ireducibilna, onda je* $T(\tau) \subseteq \lambda_\tau + L_+$; *pri tome je* $L_+ = \mathbb{Z}_+\Sigma_+$.

(*c*) *Ako je reprezentacija* τ *ireducibilna, onda je* $W_{(\lambda_\tau)}$ *ireducibilan* $\mathfrak{m}-$*modul i pogotovo ireducibilan* $M-$*modul.*

Dokaz: (*a*) Za svaki element $s \in W$ postoji element $t \in W_c$ takav da je $t|\mathfrak{a} = s$ i $\sigma t = t\sigma$ (σ je ovdje oznaka za konjugaciju Liejeve algebre $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ određenu realnom formom $\mathfrak{g}$). Sada za $\lambda \in \mathfrak{a}^{*\mathbb{C}}$ imamo

$$n_\tau(s\lambda) = n_\tau(t\lambda) = \sum_{\nu \in M_\lambda(\tau)} m_\tau(t\nu) = \sum_{\nu \in M_\lambda(\tau)} m_\tau(\lambda) = n_\tau(\lambda).$$

(*b*) Za $\lambda \in T(\tau)$ je $\lambda = \nu|\mathfrak{a}$ za neki $\nu \in M(\tau)$. Tada je

$$\nu = \nu_\tau + \sum_{\alpha \in B} n_\alpha \alpha \quad \text{za neke} \quad n_\alpha \in \mathbb{Z}_+.$$

Slijedi

$$\lambda = \lambda_\tau + \sum_{\alpha \in B} n_\alpha \alpha|\mathfrak{a}.$$

Međutim, za $\alpha \in B$ je ili $\alpha|\mathfrak{a} = 0$ ili je $\alpha|\mathfrak{a} \in \Sigma_+$. Dakle, $\lambda \in \lambda_\tau + L_+$.

(*c*) Neka je $w \in W_{(\lambda_\tau)}$ primitivni vektor $\mathfrak{m}^{\mathbb{C}}-$modula $W_{(\lambda_\tau)}$ u odnosu na $\mathfrak{n}_0^-$, tj. $\tau(X)w = 0$ $\forall X \in \mathfrak{n}_0^-$. Za $\alpha \in \Sigma_+$ i $X \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ imamo $\tau(X)w \in W_{(\lambda_\tau - \alpha)}$. Međutim, $\lambda_\tau - \alpha \notin \lambda_\tau + L_+$, pa je prema (*b*) $W_{(\lambda_\tau-\alpha)} = \{0\}$. Prema tome je $\tau(X)w = 0$. Budući da je

$$\mathfrak{n}^- = \mathfrak{n}_0^- \dotplus \overline{\mathfrak{n}}^{\mathbb{C}} \qquad \text{i} \qquad \overline{\mathfrak{n}} = \sum_{\alpha \in \Sigma_+} \mathfrak{g}_{-\alpha},$$

zaključujemo da je $\tau(X)w = 0\ \forall X \in \mathfrak{n}^-$. Prema tome, w je primitivni vektor za $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ u odnosu na $\mathfrak{n}^-$. No takav je vektor jedinstven do na skalar, pa slijedi $\mathfrak{m}^{\mathbb{C}}$ ima u $W_{(\lambda_\tau)}$ do na skalar jedinstven primitivni vektor. To znači da je $\mathfrak{m}^{\mathbb{C}}-$modul $W_{(\lambda_\tau)}$ ireducibilan.

Uvodimo sada kategoriju $\mathbf{H}$: objekti od $\mathbf{H}$ su $(\mathfrak{g}, K)-$moduli $\mathcal{V}$ takvi da je $\mathcal{V} = \mathcal{H}_K$ za neki Banachov dopustiv $(G, K)-$modul $\mathcal{H}$ konačne duljine, a morfizmi su $(\mathfrak{g}, K)-$preplitanja.

Propozicija 2.12.3. *Neka je* $\mathcal{V} \in Ob(\mathbf{H})$ *s reprezentacijom* π *i neka je* τ *neprekidna reprezentacija od* G *na konačnodimenzionalnom prostoru* W. *Tada je* $\mathcal{V} \otimes W \in Ob(\mathbf{H})$.

Dokaz: Neka je $\mathcal{V} = \mathcal{H}_K$, pri čemu je $\mathcal{H}$ Banachov dopustiv $(G, K)-$modul konačne duljine. Očito je $\mathcal{H}_K \otimes W \subseteq (\mathcal{H} \otimes W)_K$. Neka je $\{w_1, \dots, w_n\}$ baza od W. Stavimo:

$$\tau(x)w_i = \sum_{j=1}^n \tau_{ji}(x)w_j, \qquad \tau(X)w_i = \sum_{j=1}^n \tau_{ji}(X)w_j, \qquad 1 \le i \le n, \quad x \in G, \quad X \in \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}.$$

Za $\xi \in \mathcal{H} \otimes W$ postoje jedinstveni $v_1(\xi), \dots, v_n(\xi) \in \mathcal{H}$ takvi da je

$$\xi = \sum_{i=1}^n v_i(\xi) \otimes w_i.$$

Očigledno je da su $v_1, \ldots, v_n : \mathcal{H} \otimes W \to \mathcal{H}$ linearne surjekcije. Štoviše, $\xi \mapsto (v_1(\xi), \ldots, v_n(\xi))$ je izomorfizam vektorskih prostora sa $\mathcal{H} \otimes W$ na $\mathcal{H}^n$.

Neka je V konačnodimenzionalan $K-$podmodul od $\mathcal{H} \otimes W$. Neka je $\{\xi_1, \ldots, \xi_m\}$ baza od V i neka su $\varphi_{ij} : K \to \mathbb{C}$ matrični elementi $K-$modula V u odnosu na tu bazu:

$$(\pi \otimes \tau)(k)\xi_i = \sum_{j=1}^{m} \varphi_{ji}(k)\xi_j, \qquad 1 \leq i \leq m, \quad k \in K.$$

Tada imamo za $1 \leq i \leq m$ i $k \in K$:

$$\sum_{r=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \varphi_{ji}(k) v_r(\xi_j) \otimes w_r = \sum_{j=1}^{m} \varphi_{ji}(k)\xi_j = (\pi \otimes \tau)(k)\xi_i = (\pi \otimes \tau)(k) \sum_{s=1}^{n} v_s(\xi_i) \otimes w_s =$$

$$= \sum_{s=1}^{n} \pi(k) v_s(\xi_i) \otimes \tau(k) w_s = \sum_{r=1}^{n} \sum_{s=1}^{n} \pi(k) v_s(\xi_i) \otimes \tau_{rs}(k) w_r = \sum_{r=1}^{n} \sum_{s=1}^{n} \tau_{rs}(k)\pi(k) v_s(\xi_i) \otimes w_r.$$

Odatle je

$$\sum_{s=1}^{n} \tau_{rs}(k)\pi(k) v_s(\xi_i) = \sum_{j=1}^{m} \varphi_{ji}(k) v_r(\xi_j), \qquad 1 \leq i \leq m, \quad 1 \leq r \leq n, \quad k \in K.$$

Budući da je $\sum_{r=1}^{n} \tau_{pr}(k^{-1})\tau_{rs}(k) = \tau_{ps}(e) = \delta_{ps}$, iz gornje jednakosti množenjem sa $\tau_{pr}(k^{-1})$ i sumiranjem po r dobivamo

$$\pi(k) v_p(\xi_i) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{r=1}^{n} \tau_{pr}(k^{-1})\varphi_{ji}(k) v_r(\xi_j), \qquad 1 \leq i \leq m, \quad 1 \leq p \leq n, \quad k \in K.$$

To pokazuje da su $v_p(\xi_i) \in \mathcal{H}_K$, dakle, $\xi_1, \ldots, \xi_m \in \mathcal{H}_K \otimes W$. Time smo dokazali da je $V \subseteq \mathcal{H}_K \otimes W$, a kako je V bi proizvoljan konačnodimenzionalan $K-$podmodul od $\mathcal{H} \otimes W$, zaključujemo da vrijedi i obrnuta inkluzija $(\mathcal{H} \otimes W)_K \subseteq \mathcal{H}_K \otimes W$. Time je dokazana jednakost $\mathcal{V} \otimes W = (\mathcal{H} \otimes W)_K$.

Iz teorije konačnodimenzionalnih reprezentacija poluprostih (točnije, reduktivnih) Liejevih algebri lagano slijedi da za svaki $\delta \in \hat{K}$ postoji samo konačno mnogo neekvivalentnih ireducibilnih $K-$modula V takvih da je $(V \otimes W)_\delta \neq \{0\}$. Odatle slijedi da za svaki $\delta \in \hat{K}$ postoji konačan skup $\Gamma(\delta) \subseteq \hat{K}$ takav da je

$$(\mathcal{V} \otimes W)_\delta \subseteq \sum_{\gamma \in \Gamma(\delta)} \mathcal{V}_\gamma \otimes W.$$

Prema tome, za svaki $\delta \in \hat{K}$ je

$$\dim (\mathcal{V} \otimes W)_\delta \leq \sum_{\gamma \in \Gamma(\delta)} (\dim \mathcal{V}_\gamma)(\dim W) < +\infty.$$

Dakle, $\mathcal{H} \otimes W$ je Banachov dopustiv $(G, K)-$modul.

Treba još dokazati da je $(G, K)-$modul $\mathcal{H} \otimes W$ konačne duljine, ili, ekvivalentno, da je $(\mathfrak{g}, K)-$modul $\mathcal{V} \otimes W$ konačne duljine. Neka je $\{0\} = \mathcal{V}_0 \subseteq \mathcal{V}_1 \subseteq \cdots \subseteq \mathcal{V}_n = \mathcal{V}$ kompozicioni niz $(\mathfrak{g}, K)-$modula $\mathcal{V}$. Tada je $\{0\} = \mathcal{V}_0 \otimes W \subseteq \mathcal{V}_1 \otimes W \subseteq \cdots \subseteq \mathcal{V}_n \otimes W = \mathcal{V} \otimes W$ rastući niz $(\mathfrak{g}, K)-$podmodula od $\mathcal{V} \otimes W$ i očito je $(\mathcal{V}_i \otimes W)/(\mathcal{V}_{i-1} \otimes W) \simeq (\mathcal{V}_i/\mathcal{V}_{i-1}) \otimes W$. Prema tome, dokaz da je $(\mathfrak{g}, K)-$modul $\mathcal{V} \otimes W$ konačne duljine dovoljno je provesti uz dodatnu pretpostavku da je $(\mathfrak{g}, K)-$modul $\mathcal{V}$ ireducibilan. Tada je i $\tilde{\mathcal{V}}$ ireducibilan, pa su $\mathcal{V} \otimes W$ i $(\mathcal{V} \otimes W)\tilde{} = \tilde{\mathcal{V}} \otimes W^*$ konačno generirani kao $U(\mathfrak{g})-$moduli. Sada iz teorema 2.7.7. slijedi da je modul $\mathcal{V} \otimes W$ konačne duljine.

Propozicija 2.12.4. *Neka je $\mathcal{V} \in Ob(\mathbf{H})$ s reprezentacijom π i neka je τ neprekidna reprezentacija od G na konačnodimenzionalnom prostoru W. Tada je $E^\circ(\pi \otimes \tau) = \lambda_\tau + E^\circ(\pi)$ i $\lambda_\tau + E(\pi) \subseteq E(\pi \otimes \tau)$.*

Dokaz: Neka je $\{w_1, \ldots, w_n\}$ baza od W sastavljena od težinskih vektora, tj. $w_i| \in W_{(\lambda_i)}$ za $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in T(\tau)$. Neka je $\{\tilde{w}_1, \ldots, \tilde{w}_n\}$ dualna baza od W^*. Za $a = \exp H$, $H \in \mathfrak{a}$, tada imamo

$$\tilde{w}_j(\tau(a)w_i) = \mathrm{e}^{\lambda_i(H)}\delta_{ij}.$$

Neka su kao u dokazu prethodne propozicije $(v_1, \ldots, v_n) : \mathcal{V}\otimes W \to \mathcal{V}^n$ i $(\tilde{v}_1, \ldots, \tilde{v}_n) : \tilde{\mathcal{V}}\otimes W^* \to \tilde{\mathcal{V}}^n$ izomorfizmi vektorskih prostora definirani pomoću tih baza:

$$\xi = \sum_{i=1}^n v_i(\xi) \otimes w_i, \quad \tilde{\xi} = \sum_{j=1}^n \tilde{v}_j(\tilde{\xi}) \otimes \tilde{w}_j, \quad \xi \in \mathcal{V} \otimes W, \quad \tilde{\xi} \in \tilde{\mathcal{V}} \otimes W^* = (\mathcal{V} \otimes W)\tilde{}.$$

Za $H \in C$, $\xi \in \mathcal{V} \otimes W$ i $\tilde{\xi} \in (\mathcal{V} \otimes W)\tilde{}$ imamo tada:

$$\tilde{\xi}((\pi \otimes \tau)(\exp H)\xi) = \sum_{i,j=1}^n \tilde{v}_j(\tilde{\xi})\,(\pi(\exp H)v_i(\xi))\,\tilde{w}_j\,(\tau(\exp H)w_i) =$$

$$= \sum_{i=1}^n \mathrm{e}^{\lambda_i(H)} \sum_{\lambda \in E(v_i(\xi),\tilde{v}_i(\tilde{\xi}))} c^\lambda_{v_i(\xi),\tilde{v}_i(\tilde{\xi})}(H)\mathrm{e}^{\lambda+\rho)(H)}.$$

Odatle je

$$E(\xi, \tilde{\xi}) = \bigcup_{i=1}^n \left[\lambda_i + E(v_i(\xi), \tilde{v}_i(\tilde{\xi}))\right].$$

Budući da su $v_i : \mathcal{V} \otimes W \to \mathcal{V}$ i $\tilde{v}_i : (\mathcal{V} \otimes W)\tilde{} \to \tilde{\mathcal{V}}$ surjekcije, slijedi

$$E(\pi \otimes \tau) = \bigcup_{i=1}^n [\lambda_i + E(\pi)].$$

Odatle su očigledne obje tvrdnje propozicije.

Propozicija 2.12.5. *Neka je τ neprekidna reprezentacija od G na konačnodimenzionalnom prostoru W i neka je na W zadan skalarni produkt u odnosu na koji je $\tau(\vartheta X) = -\tau(X)^*$ $\forall X \in \mathfrak{g}$ (primijetimo da takav skalarni produkt uvijek postoji). Neka je ω neprekidna reprezentacija od $Q = MAN$ na konačnodimenzionalnom unitarnom prostoru V takva da je restrikcija $\omega|M$ unitarna. Stavimo*

$$U^\omega = \{f : G \to V;\ f(qx) = \omega(q)f(x)\ \forall q \in Q \text{ i } \forall x \in G\}$$

i

$$U^{\omega\otimes\tau} = \{f : G \to V \otimes W;\ f(qx) = [\omega(q) \otimes \tau(q)]f(x)\ \forall q \in Q \text{ i } \forall x \in G\}.$$

Postoji jedinstven linearan operator $T : U^\omega \otimes W \to U^{\omega\otimes\tau}$ takav da je

$$[T(f \otimes w)](x) = f(x) \otimes \tau(x)w \qquad \forall x \in G, \quad \forall f \in U^\omega \quad i \quad \forall w \in W.$$

Operator T je izomorfizam i vrijedi

$$T(C^\omega \otimes W) = C^{\omega\otimes(\tau|Q)}, \quad T(\mathcal{C}^\omega \otimes W) = \mathcal{C}^{\omega\otimes(\tau|Q)} \quad i \quad T(\mathcal{A}^\omega \otimes W) = \mathcal{A}^{\omega\otimes(\tau|Q)}.$$

Nadalje, T inducira izometrički izomorfizam $G-$modula sa $\mathcal{H}^\omega \otimes W$ na $\mathcal{H}^{\omega\otimes(\tau|Q)}$.

Dokaz: Za $f \in U^\omega$ i $w \in W$ definiramo $S(f,w) : G \to V \otimes W$ sa

$$S(f,w)(x) = f(x) \otimes \tau(x)w, \qquad xqinG.$$

Za $q \in Q$ i $x \in G$ imamo

$$S(f,w)(qx) = f(qx) \otimes \tau(qx)w = \omega(q)f(x) \otimes \tau(q)\tau(x)w = [\omega(q) \otimes \tau(q)]s(f,w)(x).$$

Prema tome, $S(f,w) \in U^{\omega\otimes\tau}$. Dakle, definirali smo preslikavanje $S : U^\omega \times W \to U^{\omega\otimes\tau}$ i to uje preslikavanje očito bilinearno. Stoga postoji jedinstven linearan operator $T : U^\omega \otimes W \to U^{\omega\otimes\tau}$ s traženim svojstvima.

Neka je $\{w_1, \dots, w_n\}$ baza prostora W. Za svaki $x \in G$ tada je i $\{\tau(x)w_1, \dots, \tau(x)w_n\}$ baza prostora W. Stoga za svaku funkciju $F \in U^{\omega\otimes\tau}$ postoje jedinstvene funkcije $F_1, \dots, F_n : G \to V$ takve da je

$$F(x) = \sum_{i=1}^n F_i(x) \otimes \tau(x)w_i, \qquad x \in G.$$

Sada za $q \in Q$ i $x \in G$ imamo

$$\sum_{i=1}^n F_i(x) \otimes \tau(x)w_i = F(x) = \left[\omega(q^{-1}) \otimes \tau(q^{-1})\right] F(qx) = \sum_{i=1}^n \omega(q^{-1})F_i(qx) \otimes \tau(x)w_i.$$

Odatle je $F_i(x) = \omega(q^{-1})F_i(qx)$, odnosno, $F_i(qx) = \omega(q)F_i(x)$. Dakle, $F_1, \dots, F_n \in U^\omega$, pa možemo definirati $AF \in U^\omega \otimes W$ relacijom

$$AF = \sum_{i=1}^n F_i \otimes w_i.$$

Tako smo došli do linearnog operatora $A : U^{\omega\otimes\tau} \to U^\omega \otimes W$. Za $F \in U^{\omega\otimes\tau}$ i za $x \in G$ je

$$(TAF)(x) = T\left(\sum_{i=1}^n F_i \otimes w_i\right)(x) = \sum_{i=1}^n F_i(x) \otimes \tau(x)w_i = F(x).$$

Dakle, $TA = I_{U^{\omega\otimes\{\tau}}$. Nadalje, za $f \in U^\omega$ i $w \in W$ imamo $w = \sum_{i=1}^n \alpha_i w_i$ za neke $\alpha_i \in \mathbb{C}$, Dakle, za funkciju $F = T(f \otimes w)$ i $x \in G$ dobivamo

$$F(x) = f(x) \otimes \tau(x)w = \sum_{i=1}^n \alpha_i f(x) \otimes \tau(x)w_i;$$

dakle, uz prijašnje oznake za funkciju $F = T(f \otimes w)$ vrijedi $F_i = \alpha_i f$. Prema tome,

$$AT(f \otimes w) = AF = \sum_{i=1}^n \alpha_i f \otimes w_i = f \otimes \sum_{i=1}^n \alpha_i w_i = f \otimes w.$$

Budući da vektori oblika $f \otimes w$, $f \in U^\omega$, $w \in W$, razapinju cijeli prostor $U^\omega \otimes W$, zaključujemo da vrijedi $AT = I_{U^\omega \otimes W}$. Dakle, T i A su međusobno inverzni izomorfizmi. Uočimo odatle slijedi da definirani izomorfizam A u stvari ne ovisi o izboru baze $\{w_1, \dots, w_n\}$.

Očito vrijede inkluzije

$$T(C^\omega \otimes W) \subseteq C^{\omega\otimes(\tau|Q)}, \quad T(\mathcal{C}^\omega \otimes W) \subseteq \mathcal{C}^{\omega\otimes(\tau|Q)}, \quad T(\mathcal{A}^\omega \otimes W) \subseteq \mathcal{A}^{\omega\otimes(\tau|Q)}.$$

Nadalje, ako je funkcija $F \in U^{\omega\otimes\tau}$ neprekidna (odn. klase C^∞, odn. analitička) onda su i prije definirane funkcije $F_1, \dots, F_n$ neprekidne (odn. klase C^∞, odn. analitičke) jer je preslikavanje

$x \mapsto \tau(x)^{-1}$ sa G u $End(W)$ analitičko. To pokazuje da je $AF \in C^\omega \otimes W$, (odn. $AF \in \mathcal{C}^\omega \otimes W$, odn. $AF \in \mathcal{A}^\omega \otimes W$). Zaključujemo da je restrikcija operatora T izomorfizam sa $C^\omega \otimes W$ na $C^{\omega\otimes(\tau|Q)}$ (odn. sa $\mathcal{C}^\omega \otimes W$ na $\mathcal{C}^{\omega\otimes(\tau|Q)}$, odn. sa $\mathcal{A}^\omega \otimes W$ na $\mathcal{A}^{\omega\otimes(\tau|Q)}$).

Pretpostavimo sada da je izabrana baza $\{w_1, \ldots, w_n\}$ od W ortonormirana. Za $f_1, \ldots, f_n \in \mathcal{H}^\omega$ (ili, preciznije, za predstavnike tih klasa u U^ω) imamo

$$T\left(\sum_{i=1}^n f_i \otimes w_i\right)(x) = \sum_{i=1}^n f_i(x) \otimes \tau(x) w_i,$$

dakle,

$$\int_K \left\| \sum_{i=1}^n f_i(k) \otimes \tau(k) w_i \right\|_{V\otimes W}^2 \mathrm{d}\mu(k) = \int_K \sum_{i,j=1}^n \left(f_i(k) \otimes \tau(k) w_i \middle| f_j(k) \otimes \tau(k) w_j \right)_{V\otimes W} \mathrm{d}\mu(k) =$$

$$= \int_K \sum_{i,j=1}^n \left(f_i(k) \middle| f_j(k) \right)_V \left(\tau(k) w_i \middle| \tau(k) w_j \right)_W \mathrm{d}\mu(k) = \int_K \sum_{i=1}^n \| f_i(k) \|_V^2 \, \mathrm{d}\mu(k) = \sum_{i=1}^n \| f_i \|_{\mathcal{H}^\omega}^2 < +\infty.$$

Dakle, T inducira preslikavanje sa $\mathcal{H}^\omega \otimes W$ u $\mathcal{H}^{\omega\otimes(\tau|Q)}$. Nadalje, kako je

$$\sum_{i=1}^n \| f_i \|_{\mathcal{H}^\omega}^2 = \sum_{i,j=1}^n \left(f_i \otimes w_i \middle| f_j \otimes w_j \right)_{\mathcal{H}^\omega \otimes W} = \left\| \sum_{i=1}^n f_i \otimes w_i \right\|_{\mathcal{H}^\omega \otimes W}^2,$$

iz prethodnog računa vidi se da je to preslikavanje izometrija sa $\mathcal{H}^\omega \otimes W$ u $\mathcal{H}^{\omega\otimes(\tau|Q)}$. Budući da prema prije dokazanom slika te izometrije sadrži $C^{\omega\otimes(\tau|Q)}$, ta je slika gusta u $\mathcal{H}^{\omega\otimes(\tau|Q)}$, dakle, jednaka $\mathcal{H}^{\omega\otimes(\tau|Q)}$ jer se r5adi o izometriji. Dakle, T inducira izometrički izomorfizam sa $\mathcal{H}^\omega \otimes W$ na $\mathcal{H}^{\omega\otimes(\tau|Q)}$.

Napokon, za $x, y \in G$, $f \in \mathcal{H}^\omega$ i $w \in W$ imamo

$$\left[\pi^{\omega\otimes(\tau|Q)}(y) T(f \otimes w)\right](x) = T(f \otimes w)(xy) = f(xy) \otimes \tau(xy) w =$$

$$= \left(\pi^\omega(y) f\right)(x) \otimes \tau(x)\tau(y) w = \left[T\left(\pi^\omega(y) f \otimes \tau(y) w\right)\right](x) = \left[T\left(\pi^\omega(y) \otimes \tau(y)\right)(f \otimes w)\right](x).$$

To pokazuje da je izometrički izomorfizam $\mathcal{H}^\omega \otimes W \to \mathcal{H}^{\omega\otimes(\tau|Q)}$ preplitanje $G-$modula.

Lema 2.12.6. *Neka su χ_1 i χ_2 neprekidne reprezentacije od Q na konačnodimenzionalnim prostorima V_1 i V_2 i neka je $B \in Hom_Q(V_1, V_2)$. Za $f \in \mathcal{H}^{\chi_1}$ definiramo $\tilde{B} f : G \to V_2$ sa*

$$(\tilde{B} f)(x) = B f(x), \qquad x \in G.$$

Tada je $\tilde{B} f \in \mathcal{H}^{\chi_2}$ i tako definirano linearno preslikavanje $\tilde{B} : \mathcal{H}^{\chi_1} \to \mathcal{H}^{\chi_2}$ je neprekidno preplitanje $G-$modula. Nadalje, preslikavanje $\tilde{}$ identiteti pridružuje identitetu, a kompoziciji kompoziciju. Drugim riječima induciranje je kovarijantan funktor kategorije neprekidnih konačnodimenzionalnih $Q-$modula u kategoriju dopustivih $(G, K)-$modula.

Dokaz: Za $q \in Q$, $x \in G$ i $f \in \mathcal{H}^{\chi_1}$ imamo

$$(\tilde{B} f)(qx) = b f(qx) = B \chi_1(q) f(x) = \chi_2(q) B f(x) = \chi_2(q) (\tilde{B} f)(x).$$

Nadalje,

$$\int_K \left\| (\tilde{B} f)(k) \right\|_{V_2}^2 \mathrm{d}\mu(k) = \int_K \| B f(k) \|_{V_2}^2 \mathrm{d}\mu(k) \le \| B \|^2 \int_K \| f(k) \|_{V_1}^2 \mathrm{d}\mu(k).$$

To pokazuje da je $\tilde{B}$ neprekidan operator sa $\mathcal{H}^{\chi_1}$ u $\mathcal{H}^{\chi_2}$, i, štoviše, da je $\|\tilde{B}\| \leq \|B\|$. To je preplitanje $G-$modula jer za $x, y \in G$ i $f \in \mathcal{H}^{\chi_1}$ imamo

$$\left[\pi^{\chi_2}(x)\tilde{B}f\right](y) = (\tilde{B}f)(yx) = Bf(yx) = B\left(\pi^{\chi_1}(x)f\right)(y) = \left[\tilde{B}\pi^{\chi_1}(x)f\right](y).$$

Tvrdnja o kovarijantnoj funktorijalnosti dobiva se direktan računima.

Lema 2.12.7. *Neka je $\sigma \in \hat{M}$ realizirana na prostoru V, $\lambda \in \mathfrak{a}^{*\mathbb{C}}$ i τ neprekidna reprezentacija G na konačnodimenzionalnom prostoru W. Neka je χ reprezentacija grupe $Q = MAN$ na prostoru $V \otimes W_{(\lambda_\tau)}$ definirana sa*

$$\chi(man) = \mathrm{e}^{(\lambda+\lambda_\tau+\rho)(\log a)}\sigma(m) \otimes \left(\tau(m)|W_{(\lambda_\tau)}\right), \quad m \in M, \quad a \in A, \quad n \in N.$$

Postoji neprekidno preplitanje $G-$modula $\Phi : \mathcal{H}_Q^{\sigma,\lambda} \otimes W \to \mathcal{H}^\chi$ takvo da za svaki $f \in \mathcal{V}_Q^{\sigma,\lambda} \setminus \{0\}$ vrijedi $\Phi(f \otimes W) \neq \{0\}$.

Dokaz: Neka je χ_1 reprezentacija grupe Q na prostoru $V \otimes W$ definirana sa

$$\chi_1(q) = \tau_Q^{\sigma,\lambda}(q) \otimes \tau(q), \qquad q \in Q.$$

Prema propoziciji 2.12.5. imamo izometrički izomorfizam $T : \mathcal{H}_Q^{\sigma,\lambda} \otimes W \to \mathcal{H}^{\chi_1}$ takav da je

$$T(f \otimes w)(x) = f(x) \otimes \tau(x)w, \qquad f \in \mathcal{H}_Q^{\sigma,\lambda}, \quad w \in W, \quad x \in G,$$

i to je preplitanje $G-$modula. Neka je E projektor prostora W na težinski potprostor $W_{(\lambda_\tau)}$ duž sume ostalih težinskih potprostora. Za $X \in \mathfrak{n}$ i $w \in W_{(\mu)}$ je

$$\tau(X)w \in \sum_{\nu \in (\mu + L_+) \setminus \{\mu\}} \dot{+} W_{(\nu)}.$$

Stoga za $n = \exp X \in N$ i $w \in W_{(\mu)}$ vrijedi

$$\tau(n)w - w \in \sum_{\nu \in (\mu + L_+) \setminus \{\mu\}} \dot{+} W_{(\nu)} \subseteq \operatorname{Ker} E.$$

To pokazuje da je $E\tau(n) = E$ za svaki $n \in N$. Nadalje, za $m \in M$ i $a \in A$ je očito

$$E\tau(ma) = \mathrm{e}^{\lambda_\tau(\log a)}\tau(m)E.$$

Neka je operator $B : V \otimes W \to V \otimes W_{(\lambda_\tau)}$ definiran sa $B = I_V \otimes E$. Tada za $m \in M$, $a \in A$ i $n \in N$ imamo

$$B\chi_1(man) = \tau_Q^{\sigma,\lambda}(man) \otimes E\tau(man) = \mathrm{e}^{(\lambda+\rho)(\log a)}\sigma(m) \otimes \mathrm{e}^{\lambda_\tau(\log a)}\tau(m)E =$$

$$= \left[\mathrm{e}^{\lambda+\lambda_\tau+\rho)(\log a)}\sigma(m) \otimes \tau(m)\right] B = \chi(man)B.$$

Dakle, $B \in Hom_Q(V \otimes W, V \otimes W_{(\lambda_\tau)})$. Prema lemi 2.12.6. dobivamo neprekidno preplitanje $G-$modula $\tilde{B} : \mathcal{H}^{\chi_1} \to \mathcal{H}^\chi$. Stavimo $\Phi = \tilde{B} \circ T$. Tada je Φ neprekidno preplitanje $G-$modula sa $\mathcal{H}_Q^{\sigma,\lambda} \otimes W$ u $\mathcal{H}^\chi$.

Za $f \in \mathcal{H}_Q^{\sigma,\lambda}$, $w \in W$ i $x \in G$ imamo:

$$[\Phi(f \otimes w)](x) = [\tilde{B}T(f \otimes w)](x) = B[T(f \otimes w)](x) = (I_V \otimes E)(f(x) \otimes \tau(x)w) = f(x) \otimes E\tau(x)w.$$

Pretpostavimo da je funkcija $f \in \mathcal{V}_Q^{\sigma,\lambda}$ takva da je $\Phi(f \otimes w) = 0$ $\forall w \in W$. To znači da za svaki $w \in W$ i svaki $x \in G$ vrijedi $f(x) \otimes E\tau(x)w = 0$. Međutim, za svako $x \in G$ postoji $w \in W$ takav da je $E\tau(x)w \neq 0$. Doista, možemo uzeti $v \in W_{(\lambda_\tau)} \setminus \{0\}$ i staviti $w = \tau(x^{-1})v$. Prema tome, $f(x) = 0$ $\forall x \in G$, tj. $f = 0$.

Propozicija 2.12.8. *Neka je $\mathcal{H}$ dopustiv Banachov $(G,K)-$modul konačne duljine s reprezentacijom π i neka je τ neprekidna konačnodimenzionalna ireducibilna reprezentacija od G. Tada je $\lambda_\tau + J(\pi) \subseteq J(\pi \otimes \tau)$.*

Dokaz: Neka je $\mathcal{V} = \mathcal{H}_K$ i $\lambda \in J(\pi)$. Po definiciji $J(\pi)$ to znači da postoji $\sigma \in \hat{M}$ takav da je $Hom_{\mathfrak{g},K}(\mathcal{V}, \mathcal{V}_Q^{\sigma,\lambda}) \neq \{0\}$. Za $A \in Hom_{\mathfrak{g},K}(\mathcal{V}, \mathcal{V}_Q^{\sigma,\lambda})$ tada uz oznaku Φ iz leme 2.12.7. imamo

$$B = \Phi \circ (A \otimes I_W) \in Hom_{\mathfrak{g},K}(\mathcal{V} \otimes W, \mathcal{V}^\chi),$$

gdje je χ reprezentacija od Q na prostoru $V \otimes W_{(\lambda_\tau)}$ (gdje je V prostor reprezentacije σ) dana sa

$$\chi(man) = \mathrm{e}^{(\lambda+\lambda_\tau+\rho)(\log a)}\sigma(m) \otimes \tau(m)|W_{(\lambda_\tau)}, \qquad m \in M, \quad a \in A, \quad n \in N.$$

Prema lemi 2.12.7. ako je $A \neq 0$, onda je i $B \neq 0$. Prema tome, $Hom_{\mathfrak{g},K}(\mathcal{V} \otimes W, \mathcal{V}^\chi) \neq \{0\}$.

Reprezentacija $\omega : m \mapsto \sigma(m) \otimes \tau(m)|W_{(\lambda_\tau)}$ od M na prostoru $V \otimes W_{(\lambda_\tau)}$ reducira se u direktnu sumu ireducibilnih, $\omega = \sigma_1 \dot{+} \cdots \dot{+} \sigma_p$. No tada je $(\mathfrak{g}, K)-$modul $\mathcal{V}^\chi$ ekvivalentna direktnoj sumi modula $\mathcal{V}_Q^{\sigma_i,\lambda+\lambda_\tau}$, $i = 1, \ldots, p$. Prema tome, postoji i takav da je $Hom_{\mathfrak{g},K}(\mathcal{V} \otimes W, \mathcal{V}_Q^{\sigma_i,\lambda+\lambda_\tau}) \neq \{0\}$. No to znači da je $\lambda + \lambda_\tau \in J(\pi \otimes \tau)$.

Neka je $\mathcal{H}$ Banachov dopustiv $(G,K)-$modul konačne duljine s reprezentacijom π. Neka je $\{0\} = \mathcal{H}_0 \subseteq \mathcal{H}_1 \subseteq \cdots \subseteq \mathcal{H}_n = \mathcal{H}$ kompozicioni niz zatvorenih $(G,K)-$podmodula. Neka je $\pi_i = \pi_{\mathcal{H}_i/\mathcal{H}_{i-1}}$ $i-$ta subkvocijentna reprezentacija i neka je π_{ss} direktna suma ireducibilnih reprezentacija $\pi_1, \ldots, \pi_n$. Prema Jordan$-$Hölderovom teoremu π_{ss} do na ekvivalenciju ne ovisi o izboru kompozicionog niza. π_{ss} se zove **semisimplifikacija** reprezentacije π. Pisat ćemo $\mathcal{H}_{ss}$ za pripadni Banachov $(G,K)-$modul i $\mathcal{V}_{ss} = (\mathcal{H}_{ss})_K$.

Lema 2.12.9. *Za neprekidni konačnodimenzionalan $G-$modul W su $(\mathcal{V} \otimes W)_{ss}$ i $(\mathcal{V}_{ss} \otimes W)_{ss}$ ekvivalentni $(\mathfrak{g}, K)-$moduli.*

Dokaz: Neka je $\{0\} = \mathcal{V}_0 \subseteq \mathcal{V}_1 \subseteq \cdots \subseteq \mathcal{V}_n = \mathcal{V}$ kompozicioni niz $(\mathfrak{g}, K)-$modula $\mathcal{V}$. Tada filtraciju $\{0\} = \mathcal{V}_0 \otimes W \subseteq \mathcal{V}_1 \otimes W \subseteq \cdots \subseteq \mathcal{V}_n \otimes W = \mathcal{V} \otimes W$ možemo profiniti do kompozicionog niza tako da za svaki $i \in \{1, \ldots, n\}$ umetnemo niz $(\mathfrak{g}, K)-$podmodula

$$\mathcal{V}_{i-1} \otimes W = \mathcal{V}_0^i \subseteq \mathcal{V}_1^i \subseteq \cdots \mathcal{V}_{p_i}^i = \mathcal{V}_i \otimes W$$

takvih da su subkvocijentni moduli $\mathcal{V}_j^i/\mathcal{V}_{j-1}^i$ ireducibilni za $1 \leq j \leq p_i$. Neka je π_j^i subkvocijentna reprezentacija na $\mathcal{V}_j^i/\mathcal{V}_{j-1}^i$. Neka je τ reprezentacija na $G-$modulu W. Tada je

$$(\pi \otimes \tau)_{ss} \simeq \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p_i} \dot{+} \pi_j^i.$$

Za svaki $i \in \{1, \ldots, n\}$ označimo sa π_i reprezentaciju na subkvocijentnom $(\mathfrak{g}, K)-$modulu $\mathcal{V}_i/\mathcal{V}_{i-1}$. Tada je očito

$$(\pi_{ss} \otimes \tau)_{ss} = \sum_{i=1}^{n} (\pi_i \otimes \tau)_{ss}.$$

Nadalje,

$$\{0\} = \mathcal{V}_0^i/(\mathcal{V}_{i-1} \otimes W) \subseteq \mathcal{V}_1^i/(\mathcal{V}_{i-1} \otimes W) \subseteq \cdots \subseteq \mathcal{V}_{p_i}^i/(\mathcal{V}_{i-1} \otimes W) = (\mathcal{V}_i \otimes W)/(\mathcal{V}_{i-1} \otimes W)$$

je kompozicioni niz $(\mathfrak{g}, K)-$modula $(\mathcal{V}_i \otimes W)/(\mathcal{V}_{i-1} \otimes W)$. Reprezentacija na $(\mathfrak{g}, K)-$modulu

$$\left(\mathcal{V}_j^i/(\mathcal{V}_{i-1} \otimes W)\right) / \left(\mathcal{V}_{j-1}^i/(\mathcal{V}_{i-1} \otimes W)\right) \simeq \mathcal{V}_j^i/\mathcal{V}_{j-1}^i$$

ekvivalentna je π^i_j. Stoga je

$$(\pi_i \otimes \tau)_{ss} \simeq \sum_{j=1}^{p_i} \dot{+}\, \pi^i_j,$$

pa dobivamo

$$(\pi_{ss} \otimes \tau)_{ss} \simeq \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p_i} \dot{+}\, \pi^i_j \simeq (\pi \otimes \tau)_{ss}.$$

Lema 2.12.10. *Uz uvedene oznake vrijedi* $E(\pi_{ss}) \subseteq E(\pi)$.

Dokaz: Kako je $\pi_{ss} \simeq \pi_1 \dot{+} \cdots \dot{+} \pi_n$, to je

$$E(\pi_{ss}) = \bigcup_{i=1}^{n} E(\pi_i).$$

Stavimo

$$\mathcal{V}_i^{\perp} = \{f \in \tilde{\mathcal{V}};\ f|\mathcal{V}_i = 0\}, \qquad 0 \leq i \leq n.$$

Tada je

$$\{0\} = \mathcal{V}_n^{\perp} \subseteq \mathcal{V}_{n-1}^{\perp} \subseteq \cdots \subseteq \mathcal{V}_0^{\perp} = \tilde{\mathcal{V}}$$

kompozicioni niz $(\mathfrak{g}, K)-$modula $\tilde{\mathcal{V}}$. Nadalje,

$$(\mathcal{V}_i/\mathcal{V}_{i-1})\tilde{} \simeq \mathcal{V}_{i-1}^{\perp}/\mathcal{V}_i^{\perp}, \qquad 1 \leq i \leq n.$$

Neka su $v \in \mathcal{V}_i$ i $\tilde{v} \in \mathcal{V}_{i-1}^{\perp}$. Za $H \in C$ tada imamo

$$c_{v+\mathcal{V}_{i-1},\tilde{v}+\mathcal{V}_i^{\perp}}(\exp H) = (\tilde{v} + \mathcal{V}_i^{\perp})(\pi(\exp H)v + \mathcal{V}_{i-1}) = \tilde{v}(\pi(\exp H)v) = c_{v,\tilde{v}}(\exp H).$$

Slijedi $E(v+\mathcal{V}_{i-1}, \tilde{v}+\mathcal{V}_i^{\perp}) = E(v, \tilde{v})$. To pokazuje da je $E(\pi_i) \subseteq E(\pi)$ za svaki $i = 1, \ldots, n$, dakle,

$$E(\pi_{ss}) = \bigcup_{i=1}^{n} E(\pi_i) \subseteq E(\pi).$$

Lema 2.12.11. *Uz uvedene oznake vrijedi* $J(\pi) \subseteq J(\pi_{ss})$.

Dokaz: Neka je $\lambda \in J(\pi)$. Tada postoji $\sigma \in \hat{M}$ takva da je $Hom_{\mathfrak{g},K}(\mathcal{V}, \mathcal{V}_Q^{\sigma,\lambda}) \neq \{0\}$. Neka je $A \in Hom_{\mathfrak{g},K}(\mathcal{V}, \mathcal{V}_Q^{\sigma,\lambda}) \setminus \{0\}$. Za neki $i \in \{1, \ldots, n\}$ tada je $A\mathcal{V}_{i-1} = \{0\}$ i $A\mathcal{V}_i \neq \{0\}$. Operator A tada inducira $A_i \in Hom_{\mathfrak{g},K}(\mathcal{V}_i/\mathcal{V}_{i-1}, \mathcal{V}_Q^{\sigma,\lambda}) \setminus \{0\}$. Odatle je $Hom_{\mathfrak{g},K}(\mathcal{V}_{ss}, \mathcal{V}_Q^{\sigma,\lambda}) \neq \{0\}$, pa slijedi $\lambda \in J(\pi_{ss})$.

Teorem 2.12.12. *Neka je $\mathcal{H}$ dopustiv Banachov $(G, K)-$modul konačne duljine s reprezentacijom π. Tada vrijedi:*

(*a*) $E^\circ(\pi)$ *je skup svih minimalnih elemenata od* $J(\pi)$ *u odnosu na uređaj* $\ll$.

(*b*) $E^\circ(\pi) = E^\circ(\pi_{ss})$.

Dokaz: (*a*) Neka je $\lambda \in J(\pi)$. Treba dokazati da postoji $\nu \in E^\circ(\pi)$ takav da je $\nu \ll \lambda$. Neka je W neprekidan konačnodimenzionalan $G-$modul s reprezentacijom τ takav da je

$$\mathrm{Re}\,(\lambda + \lambda_\tau)(H_\alpha) < 0 \qquad \forall \alpha \in \Sigma_+.$$

Po propoziciji 2.12.8. tada je $\lambda+\lambda_\tau \in J(\pi\otimes\tau)$. Po lemi 2.12.11. je $\lambda+\lambda_\tau \in J\left((\pi\otimes\tau)_{ss}\right)$, pa postoje $\sigma \in \hat{M}$ i $B \in Hom_{\mathfrak{g},K}((\mathcal{V}\otimes W)_{ss}, \mathcal{V}_Q^{\sigma,\lambda+\lambda_\tau}) \setminus \{0\}$. Tada je $B(\mathcal{V}\otimes W)_{ss}$ podmodul $(\mathfrak{g},K)-$modula $\mathcal{V}_Q^{\sigma,\lambda+\lambda_\tau}$ koji je različit od $\{0\}$. Taj je modul ekvivalentan kvocijentnom modulu poluprostog modula $(\mathcal{V}\otimes W)_{ss}$ i kao takav je i sam poluprost. Međutim, prema teoremu 2.11.10. $(\mathfrak{g},K)-$modul $\mathcal{V}_Q^{\sigma,\lambda+\lambda_\tau}$ ima jedinstven ireducibilan podmodul $\mathcal{V}_1$ $-$ to je onaj s reprezentacijom koju smo označili sa $\nu_Q^{\sigma,\lambda+\lambda_\tau}$ $-$ i vrijedi $\lambda+\lambda_\tau \in E^\circ(\nu_Q^{\sigma,\lambda+\lambda_\tau})$. Tada je $\mathcal{V}_1$ ujedno jedini poluprost $(\mathfrak{g},K)-$podmodul od $\mathcal{V}_Q^{\sigma,\lambda+\lambda_\tau}$ koji je različit od $\{0\}$. To znači da je $B(\mathcal{V}\otimes W)_{ss} = \mathcal{V}_1$. Dakle, $(\mathfrak{g},K)-$modul $\mathcal{V}_1$ izomorfan je nekom ireducibilnom podmodulu od $(\mathcal{V}\otimes W)_{ss}$. Slijedi $\lambda+\lambda_\tau \in E\left((\pi\otimes\tau)_{ss}\right)$, a odatle je po lemi 2.12.10. $\lambda+\lambda_\tau \in E(\pi\otimes\tau)$. Stoga postoji $\mu \in E^\circ(\pi\otimes\tau)$ takav da je $\mu \ll \lambda+\lambda_\tau$. Po propoziciji 2.12.4. tada je $\mu = \nu+\lambda_\tau$ za neki $\nu \in E^\circ(\pi)$. Sada je $\nu+\lambda_\tau \ll \lambda+\lambda_\tau$, dakle, $\nu \ll \lambda$.

(b) Iz leme 2.12.10. neposredno slijedi $E^\circ(\pi_{ss}) \subseteq E^\circ(\pi)$. S druge strane, lema 2.12.11. i tvrdnja (a) povlače obrnutu inkluziju $E^\circ(\pi) \subseteq E^\circ(\pi_{ss})$.