REPREZENTACIJE LOKALNO KOMPAKTNIH GRUPA

Prof. dr. sc. Hrvoje Kraljević

Predavanja održana na poslijediplomskom studiju 1976./1977.
PMF–Matematički odjel Sveučilišta u Zagrebu

Sadržaj

Poglavlje 1

Lokalno kompaktne grupe

1.1 Funkcije i mjere na lokalno kompaktnim prostorima

Neka je T lokalno kompaktan Hausdorffov topološki prostor. Sa $C(T)$ ćemo označavati prostor svih neprekidnih funkcija $f : T \to \mathbb{C}$. Za $f \in C(T)$ stavljamo

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(t)|;\ t \in T\}.$$

Za $f \in C(T)$ neka je $Supp\, f$ **nosač funkcije** f :

$$Supp\, f = Cl(\{t \in T;\ f(t) \neq 0\}).$$

Pri tome $Cl(S)$ označava zatvarač podeskupa $S \subseteq T$.

Neka je $C_0(T)$ potprostor svih funkcija iz $C(T)$ s kompaktnim nocačem. **Mjera** na T je svaki linearni funkcional $\mu : C_0(T) \to \mathbb{C}$ koji ima sljedeće svojstvo neprekidnosti: za svaki kompaktan skup $K \subseteq T$ postoji $M_K > 0$ tako da vrijedi:

$$f \in C_0(T), \quad Supp\, f \subseteq K \qquad \Longrightarrow \qquad |\mu(f)| \leq M_K \|f\|_\infty.$$

Sa $\mathfrak{M}(T)$ ćemo označavati skup svih mjera na T. Očito je $\mathfrak{M}(T)$ kompleksan vektorski prostor.

Neka je $C_0^r(T)$ realan vektorski prostor svih realnih funkcija iz $C_0(T)$. **Realna mjera** na T je mjera $\mu \in \mathfrak{M}(T)$ takva da je $\mu(f) \in \mathbb{R}\ \forall f \in C_0^r(T)$. Realan vektorski prostor realnih mjera označavat ćemo sa $\mathfrak{M}^r(T)$.

Lema 1.1.1. *Linearni funcional $\mu : C_0^r(T) \to \mathbb{R}$ proširuje se do mjere na T ako i samo ako za svaki kompaktan skup $K \subseteq T$ postoji $M_K > 0$ takav da vrijedi:*

$$f \in C_0^r(T), \quad Supp\, f \subseteq K \qquad \Longrightarrow \qquad |\mu(f)| \leq M_K \|f\|_\infty.$$

Dokaz: Uvjet je očito zadovoljen ako se μ proširuje do mjere na T.

Pretpostavimo da je uvjet zadovoljen. Definiramo proširenje $\mu : C_0(T) \to \mathbb{C}$ po linearnosti:

$$\mu(f_1 + if_2) = \mu(f_1) + i\mu(f_2), \qquad f_1, f_2 \in C_0^r(T).$$

Neka je $K \subseteq T$ kompaktan skup i neka je $M_K > 0$ takav da vrijedi uvjet iz iskaza leme. Neka je $g \in C_0(T)$ takva da je $Supp\, g \subseteq K$. Tada je $\mu(g) = |\mu(g)|e^{i\alpha}$ za neki $\alpha \in \mathbb{R}$. Stavimo

$$e^{-i\alpha} g = f_1 + if_2, \qquad f_1, f_2 \in C_0^r(T).$$

Tada je $Supp\, f_1 \subseteq K$ pa imamo redom

$$|\mu(g)| = e^{-i\alpha}\mu(g) = \mu(e^{-i\alpha} g) = \mu(f_1) + i\mu(f_2) = \mu(f_1) \leq M_K \|f_1\|_\infty \leq M_K \|g\|_\infty.$$

Dakle, proširenje μ je mjera na T.

Neka je $C_0^+(T)$ konus svih nenegativnih funkcija iz $C_0^r(T)$. Mjera $\mu \in \mathfrak{M}(T)$ zove se **pozitivna** ako je $\mu(f) \geq 0 \ \forall f \in C_0^+(T)$. Skup svih pozitivnih mjera na T označavat ćemo sa $\mathfrak{M}^+(T)$. Očito je $\mathfrak{M}^+(T) \subseteq \mathfrak{M}^r(T)$ i to je konus.

Sljedeća propozicija pokazuje da već sama pozitivnost linearnog funkcionala ima za posljedicu definirano svojstvo neprekidnosti.

Propozicija 1.1.1. *Neka je* $\nu : C_0^+(T) \to \mathbb{R}_+ = [0, +\infty\rangle$ *preslikavanje sa sljedeća dva svojstva:*

(*a*) $\nu(f+g) = \nu(f) + \nu(g) \ \forall f, g \in C_0^+(T)$.

(*b*) $\nu(\alpha f) = \alpha\nu(f) \ \forall \alpha \in \mathbb{R}_+$ *i* $\forall f \in C_0^+(T)$.

Tada se ν *jedinstveno proširuje do mjere* μ *na* T. *Mjera* μ *je pozitivna.*

Dokaz: Za $f \in C_0^r(T)$ definiramo $f^+, f^- \in C_0^+(T)$ sa

$$f^+(t) = \max\{f(t), 0\}, \qquad f^-(t) = \min\{-f(t), 0\}.$$

Tada je očito $f = f^+ - f^-$. Nadalje, ako su $\varphi, \psi \in C_0^+(T)$ takve da je $f = \varphi - \psi$, tada je $f^+ \leq \varphi$ i $f^- \leq \psi$ svuda na T.

Definiramo sada $\mu : C_0^r(T) \to \mathbb{R}$ sa

$$\mu(f) = \nu(f^+) - \nu(f^-), \qquad f \in C_0^r(T).$$

Za $\alpha > 0$ i $f \in C_0^r(T)$ očito je $(\alpha f)^+ = \alpha f^+$ i $(\alpha f)^- = \alpha f^-$. S druge strane, ako je $\alpha < 0$ i $f \in C_0^r(T)$, tada je $(\alpha f)^+ = -\alpha f^-$ i $(\alpha f)^- = -\alpha f^+$. Odatle korištenjem svojstva (b) iz iskaza propozicije lako slijedi da vrijedi

$$\mu(\alpha f) = \alpha\mu(f), \qquad f \in C_0^r(T), \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Neka su sada $f, g \in C_0^r(T)$. Tada je $f + g = f^+ + g^+ - (f^- + g^-)$, pa je $(f+g)^+ \leq f^+ + g^+$ i $(f+g)^- \leq f^- + g^-$. Slijedi da je

$$h = f^+ + g^+ - (f+g)^+ = f^- + g^- - (f+g)^- \in C_0^+(T).$$

Korištenjem svojstva (a) iz iskaza propozicije imamo redom:

$$\mu(f) + \mu(g) = \nu(f^+) - \nu(f^-) + \nu(g^+) - \nu(g^-) = \nu(f^+ + g^+) - \nu(f^- + g^-) =$$

$$= \nu((f+g)^+ + h) - \nu((f+g)^- + h) = \nu((f+g)^+) + \nu(h) - \nu((f+g)^-) - \nu(h) = \mu(f+g).$$

Na taj način dokazali smo da je $\mu : C_0^r(T) \to \mathbb{R}$ linearni funkcional.

Dokažimo sada da linearan funkcional $\mu : C_0^r(T) \to \mathbb{R}$ zadovoljava uvjet leme 1.1.1. Neka je $K \subseteq T$ kompaktan skup. Izaberimo $f_0 \in C_0^+(T)$ takvu da je $f_0(t) = 1 \ \forall t \in K$. Stavimo $M_K = \nu(f_0) \geq 0$. Ako je $f \in C_0^r(T)$ takva da je $Supp\, f \subseteq K$, tada je

$$f + \|f\|_\infty f_0 \in C_0^+(T) \qquad \text{i} \qquad \|f\|_\infty f_0 - f \in C_0^+(T),$$

pa je

$$\mu(f + \|f\|_\infty f_0) = \nu(f + \|f\|_\infty f_0) \geq 0 \qquad \text{i} \qquad \mu(\|f\|_\infty f_0 - f) = \nu(\|f\|_\infty f_0 - f) \geq 0,$$

a odatle je

$$-\|f\|_\infty M_K \leq \mu(f) \leq \|f\|_\infty M_K \qquad \Longrightarrow \qquad |\mu(f)| \leq M_K \|f\|_\infty.$$

Prema lemi 1.1.1. μ se proširuje do mjere na T. Kako je očito $\mu|C_0^+(T) = \nu$, mjera μ je pozitivna.

Za realne mjere $\mu, \nu \in \mathfrak{M}^r(T)$ pišemo $\mu \leq \nu$ (ili, ekvivalentno, $\nu \geq \mu$) ako je $\nu - \mu \in \mathfrak{M}^+(T)$. Kako je $\mathfrak{M}^+(T)$ konus, očito je $\leq$ relacija (parcijalnog) uređaja na $\mathfrak{M}^r(T)$ i vrijedi:

$$\nu, \mu, \omega \in \mathfrak{M}^r(T), \quad \nu \leq \mu \qquad \Longrightarrow \qquad \nu + \omega \leq \mu + \omega,$$

$$\nu, \mu \in \mathfrak{M}^r(T), \quad \nu \leq \mu, \quad \alpha \in \mathbb{R}_+ \qquad \Longrightarrow \qquad \alpha\nu \leq \alpha\mu,$$

$$\nu, \mu \in \mathfrak{M}^r(T), \quad \nu \leq \mu \qquad \Longrightarrow \qquad -\mu \leq -\nu.$$

Propozicija 1.1.2. *Za svaku realnu mjeru $\mu \in \mathfrak{M}^r(T)$ postoje jedinstvene pozitivne mjere $\mu^+, \mu^- \in \mathfrak{M}^+(T)$ sa sljedeća dva svojstva:*

(*a*) $\mu = \mu^+ - \mu^-$.

(*b*) *Ako su $\nu_1, \nu_2 \in \mathfrak{M}^+(T)$ takve da je $\mu = \nu_1 - \nu_2$ onda je $\mu^+ \leq \nu_1$ i $\mu^- \leq \nu_2$.*

Dokaz: Jedinstvenost je neposredna posljedica očigledne implikacije

$$\alpha, \beta \in \mathfrak{M}^r(T), \quad \alpha \leq \alpha \quad \text{i} \quad \beta \leq \alpha \qquad \Longrightarrow \qquad \alpha = \beta.$$

Dokažimo egzistenciju. Definiramo $\mu^+ : C_0^+(T) \to \mathbb{R}_+$ sa

$$\mu(f) = \sup\{\mu(g);\ g \in C_0^+(T),\ g \leq f\}, \qquad f \in C_0^+(T).$$

Očito je

$$\mu^+(\alpha f) = \alpha\mu(f), \qquad f \in C_0^+(T), \quad \alpha \in \mathbb{R}_+.$$

Nadalje, neka su $f_1, f_2 \in C_0^+(T)$. Tada imamo redom

$$\mu^+(f_1) = \mu^+(f_2) = \sup\{\mu(g_1);\ g_1 \in C_0^+(T),\ g_1 \leq f_1\} + \sup\{\mu(g_2);\ g_2 \in C_0^+(T),\ g_2 \leq f_2\} =$$

$$= \sup\{\mu(g_1 + g_2);\ g_1, g_2 \in C_0^+(T),\ g_1 \leq f_1,\ g_2 \leq f_2\} \leq$$

$$\leq \sup\{\mu(g);\ g \in C_0^+(T),\ g \leq f_1 + f_2\} = \mu^+(f_1 + f_2).$$

Dakle, dokazali smo nejednakost

$$\mu^+(f_1) + \mu^+(f_2) \leq \mu^+(f_1 + f_2), \qquad f_1, f_2 \in C_0^+(T).$$

Dokažimo sada da vrijedi i obrnuta nejednakost, dakle, jednakost. Neka je $g \in C_0^+(T)$ takva da je $g \leq f_1 + f_2$. Stavimo $g_1(t) = \min\{g(t), f_1(t)\}$, $g_2(t) = g(t) - g_1(t)$, $t \in T$. Tada su $g_1, g_2 \in C_0^r(T)$. Nadalje, očito je $g_1 \in C_0^+(T)$ i $g_1 \leq f_1$. Ako je $t \in T$ takav da je $g(t) \leq f_1(t)$, tada je $g_1(t) = g(t)$, pa je $g_2(t) = 0 \leq f_2(t)$. Ako je pak $t \in T$ takav da je $g(t) \geq f_1(t)$, tada je $g_1(t) = f_1(t)$, pa je $0 \leq g_2(t) = g(t) - f_1(t) \leq f_2(t)$. To pokazuje da je i $g_2 \in C_0^+(T)$ i da vrijedi $g_2 \leq f_2$. Prema tome je

$$\mu(g) = \mu(g_1) + \mu(g_2) \leq \mu^+(f_1) + \mu^+(f_2).$$

Ovo zaključivanje vrijedi za svaku $g \in C_0^+(T)$ takvu da je $g \leq f_1 + f_2$, pa slijedi tražena obrnuta nejednakost:

$$\mu^+(f_1 + f_2) = \sup\{\mu(g);\ g \in C_0^+(T),\ g \leq f_1 + f_2\} \leq \mu^+(f_1) + \mu^+(f_2).$$

Dakle, vrijedi jednakost

$$\mu^+(f_1+f_2)=\mu^+(f_1)+\mu^+(f_2),\qquad f_1,f_2\in C_0^+(T).$$

Prema propoziciji 1.1.1. μ^+ se jedinstveno proširuje do mjere μ^+ na T i $\mu^+\in\mathfrak{M}^+(T)$.

Stavimo sada $\mu^-=\mu-\mu^+\in\mathfrak{M}^r(T)$. Za proizvoljnu $f\in C_0^+(T)$ je $f\leq f$, pa je $\mu^+(f)\geq\mu(f)$, dakle, $\mu^-(f)\geq 0$. Zaključujemo da je $\mu^-\in\mathfrak{M}^+(T)$. Naravno, $\mu=\mu^+-\mu^-$.

Napokon, pretpostavimo da su $\nu_1,\nu_2\in\mathfrak{M}^+(T)$ takve da je $\mu=\nu_1-\nu_2$. Za $f\in C_0^+(T)$ je tada

$$\mu^+(f)=\sup\{\mu(g);\ g\in C_0^+(T),\ g\leq f\}=\sup\{\nu_1(g)-\nu_2(g);\ g\in C_0^+(T),\ g\leq f\}\leq$$

$$\leq\sup\{\nu_1(g);\ g\in C_0^+(T),\ g\leq f\}=\nu_1(f).$$

Zaključujemo da je da je $\mu^+\leq\nu_1$, a odatle je i $\mu^-=\mu^+-\mu\leq\nu_1-\mu=\nu_2$. Time je propozicija u potpunosti dokazana.

Za $\mu\in\mathfrak{M}^r(T)$ μ^+ se zove **pozitivni** a μ^- **negativni dio mjere** μ. Nadalje, mjera $|\mu|=\mu^++\mu^-\in\mathfrak{M}^+(T)$ se zove **apsolutna vrijednost mjere** $\mu\in\mathfrak{M}^r(T)$.

Propozicija 1.1.3. *Neka je* $\mu\in\mathfrak{M}^r(T)$.

(a) *Ako je* $\nu\in\mathfrak{M}^r(T)$ *takva da je* $\nu\leq\mu^+$ *i* $\nu\leq\mu^-$ *onda je* $\nu\leq 0$ *tj.* $-\nu\in\mathfrak{M}^+(T)$.

(b) *Za svaku* $f\in C_0^+(T)$ *vrijedi*

$$|\mu|(f)=\sup\{\mu(g);\ g\in C_0^r(T),\ |g|\leq f\}.$$

(c) *Za* $f\in C_0^r(T)$ *vrijedi* $|\mu(f)|\leq|\mu|(|f|)$.

Dokaz: (a) Stavimo $\nu_1=\mu^+-\nu$ i $\nu_2=\mu^--\nu$. Tada su $\nu_1,\nu_2\in\mathfrak{M}^+(T)$ i $\mu=\nu_1-\nu_2$. Prema propoziciji 1.1.2. odatle slijedi $\mu^+\leq\nu_1$. To znači da je $-\nu=(\mu^+-\nu)-\mu^+=\nu_1-\mu^+\in\mathfrak{M}^+(T)$.

(b) Imamo redom

$$|\mu|(f)=\mu^+(f)+\mu^-(f)=2\mu^+(f)-\mu(f)=2\sup\{\mu(h);\ h\in C_0^+(T),\ h\leq f\}-\mu(f)=$$

$$=\sup\{\mu(h);\ h\in C_0^+(T),\ h\leq 2f\}-\mu(f)=\sup\{\mu(h-f);\ h\in C_0^+(T),\ h\leq 2f\}=$$

$$=\sup\{\mu(g);\ g\in C_0^r(T),\ -f\leq g\leq f\}=\sup\{\mu(g);\ |g|\leq f\}.$$

(c) Za $f\in C_0^r(T)$ očito vrijedi $|f|\in C_0^+(T)$ i $|f|\leq|f|$, pa iz (b) slijedi $|\mu|(|f|)\geq\mu(f)$. Budući da je $|-\mu|=|\mu|$ slijedi i $|\mu|(|f|)\geq-\mu(f)$. Dakle je $|\mu(f)|\leq|\mu|(|f|)$.

Za $\varphi\in C(T)$ i $\mu\in\mathfrak{M}(T)$ definiramo $\varphi\mu:C_0(T)\to\mathbb{C}$ sa

$$(\varphi\mu)(f)=\mu(\varphi f),\qquad f\in C_0(T).$$

Neka je $K\subseteq T$ kompaktan skup i neka je $M_K>0$ takav da vrijedi

$$f\in C_0(K),\quad Supp\, f\subseteq K\qquad\Longrightarrow\qquad|\mu(f)|\leq M_K\|f\|_\infty.$$

Ako je $Supp\, f\subseteq K$ tada je i $Supp\,\varphi f\subseteq K$. Stoga vrijedi

$$|(\varphi\mu)(f)|=|\mu(\varphi f)|\leq\|\varphi f\|_\infty\leq M_K\|\varphi\|_K\|f\|_\infty,$$

uz oznaku

$$\|\varphi\|_K=\sup\{|\varphi(t)|;\ t\in K\}.$$

Time je dokazano da je $\varphi\mu \in \mathfrak{M}(T)$. Na taj način $\mathfrak{M}(T)$ je postao modul nad komutativnim prstenom $C(T)$. $\mathfrak{M}^r(T)$ je modul nad prstenom $C^r(T)$ i vrijedi:

$$\varphi \in C^+(T), \quad \mu \in \mathfrak{M}^+(T) \qquad \Longrightarrow \qquad \varphi\mu \in \mathfrak{M}^+(T).$$

Napokon, primijetimo da se kompleksno konjugiranje prenosi s funkcija na mjere:

$$\overline{\mu}(f) = \overline{\mu(\overline{f})}, \qquad \mu \in \mathfrak{M}(T),\ f \in C_0(T).$$

Tada su za svaku $\mu \in \mathfrak{M}(T)$ mjere

$$\operatorname{Re}\mu = \frac{1}{2}(\mu + \overline{\mu}) \quad \text{i} \quad \operatorname{Im}\mu = \frac{1}{2i}(\mu - \overline{\mu})$$

realne i vrijedi

$$\mu = \operatorname{Re}\mu + i \operatorname{Im}\mu.$$

1.2 Topološke grupe

Grupa G zove se **topološka grupa**, ako mje G Hausdorffov topološki prostor i ako su preslikavanja $(x, y) \mapsto xy$ sa $G \times G$ u G i $x \mapsto x^{-1}$ sa G u G neprekidna. Topološka grupa G je **lokalno kompaktna**, (odnosno **kompaktna**, odnosno **diskretna**, odnosno **povezana**) ako je topološki prostor takav (lokalno kompaktan, kompaktan, diskretan, povezan).

Neka je G topološka grupa i $x \in G$. Definiramo preslikavanja $\lambda_x, \rho_x, \iota_x : G \to G$ sa

$$\lambda_x(y) = xy, \qquad \rho_x(y) = yx^{-1}, \qquad \iota_x(y) = xyx^{-1}, \qquad y \in G.$$

Tada su λ_x, ρ_x i ι_x homeomorfizmi sa G na G i vrijedi (e će stalno biti oznaka za jedinicu u grupi):

$$\lambda_e = \rho_e = \iota_e = id_G, \quad \lambda_x \circ \lambda_y = \lambda_{xy}, \quad \rho_x \circ \rho_y = \rho_{xy}, \quad \iota_x \circ \iota_y = \iota_{xy}, \quad \iota_x = \lambda_x \circ \rho_x = \rho_x \circ \lambda_x.$$

Kako su λ_x i ρ_x homeomorfizmi sa G na G, svaka okolina točke $x \in G$ ima oblik xU i Vx gdje su U i V okoline od e. Posebno, topološka grupa je lokalno kompaktna ako i samo ako jedinica u grupi ima kompaktnu okolinu.

Primijetimo još da ι_x ima i svojstvo $\iota_x(yz) = \iota_x(y)\iota_x(z)$, dakle, ι_x je ne samo homeomorfizam sa G na G nego i automorfizam grupe G.

U više navrata trebat će nam sljedeća topološka činjenica:

Lema 1.2.1. *Neka su X, Y i Z Hausdorffovi topološki prostori, $\varphi : X \times Y \to Z$ neprekidno preslikavanje, $K \subseteq X$ kompaktan skup i $U \subseteq Z$ otvoren skup. Tada je*

$$W = \{y \in Y;\ \varphi(x, y) \in U\ \forall x \in K\}$$

otvoren podskup od Y.

Dokaz: Neka je $y \in W$. Za svaku točku $x \in K$ tada imamo $\varphi(x, y) \in U$. Kako je skup U otvoren i preslikavanje φ neprekidno, postoje otvorena okolina $V_x \subseteq X$ točke x i otvorena okolina $\mathcal{O}_x \subseteq Y$ točke y takve da je $\varphi(V_x \times \mathcal{O}_x) \subseteq U$. $(V_x)_{x\in K}$ je otvoren pokrivač kompaktnog skupa K, pa postoji konačno mnogo točaka $x_1, x_2, \ldots, x_n \in K$ takvih da je

$$K \subseteq V_{x_1} \cup V_{x_2} \cup \cdots \cup V_{x_n}.$$

Stavimo
$$\mathcal{O} = \mathcal{O}_{x_1} \cap \mathcal{O}_{x_2} \cap \cdots \cap \mathcal{O}_{x_n}.$$
Tada je $\mathcal{O}$ otvorena okolina točke y u prostoru Y. Neka su $x \in K$ i $y' \in \mathcal{O}$. Tada je $x \in V_{x_j}$ za neki indeks $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, a vrijedi i $y' \in \mathcal{O}_{x_j}$. Stoga je $\varphi(x, y') \in U$. To pokazuje da je $\mathcal{O} \subseteq W$, a kako je točka $y \in W$ bila proizvoljna, zaključujemo da je W otvoren podskup od Y.

Za podskupove A, B grupe G upotrebljavat ćemo sljedeće oznake:
$$AB = \{ab;\ a \in A,\ b \in B\}, \quad A^{-1} = \{a^{-1};\ a \in A\},$$
$$A^1 = A, \quad A^n = AA^{n-1} = \{a_1, a_2 \cdots a_n;\ a_1, a_2, \dots, a_n \in A\}.$$

Propozicija 1.2.1. *Neka je G topološka grupa.*

(*a*) *Ako je skup $U \subseteq G$ otvoren i $S \subseteq G$ onda su skupovi US, SU i U^{-1} otvoreni.*

(*b*) *Ako je U okolina jedinice e onda postoji okolina V od e takva da je $V = V^{-1} \subseteq U$.*

(*c*) *Ako je U okolina od e i $n \in \mathbb{N}$ onda postoji okolina V od e takva da je $V^n \subseteq U$.*

(*d*) *Ako su skupovi $A, B \subseteq G$ kompaktni, onda su i skupovi AB i A^{-1} kompaktni.*

(*e*) *Ako je skup $A \subseteq G$ zatvoren i $K \subseteq G$ kompaktan onda su skupovi A^{-1}, KA i AK zatvoreni.*

(*f*) *Ako je skup $U \subseteq G$ otvoren i ako je skup $K \subseteq G$ kompaktan i sadržan u U, onda postoji okolina V od e, takva da je $KV \subseteq U$ i $VK \subseteq U$.*

Dokaz: (*a*) $x \mapsto x^{-1}$ je homeomorfizam sa G na G. Prema tome, akup U^{-1} je otvoren. Nadalje, SU je unija otvorenih skupova xU, $x \in S$, pa je i sam otvoren. Analogno, US je otvoren jer je to unija otvorenih skupova Ux, $x \in S$.

(*b*) Traženo svojstvo ima $V = U \cap U^{-1}$.

(*c*) Tvrdnja je posljedica neprekidnosti preslikavanja $(x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto x_1 x_2 \cdots x_n$ sa $G \times G \times \cdots \times G$ u G.

(*d*) Tvrdnje slijede iz činjenice da je A^{-1} slika kompaktnog skupa A pri neprekidnom preslikavanju $x \mapsto x^{-1}$ i iz činjenice da je AB slika kompaktnog skupa $A \times B \subseteq G \times G$ pri neprekidnom preslikavanju $(x, y) \mapsto xy$.

(*e*) Kako je $x \mapsto x^{-1}$ homeomorfizam sa G na G, skup A^{-1} je zatvoren. Nadalje, neka je preslikavanje $\varphi : G \times G \to G$ definirano sa $\varphi(x, y) = x^{-1}y$. To je preslikavanje neprekidno, pa je po lemi 1.2.1. skup
$$W = \{y \in G;\ x^{-1}y \in G \setminus A\ \forall x \in K\}$$
otvoren u G. Međutim, imamo
$$y \in W \iff x^{-1}y \in G \setminus A\ \forall x \in K \iff K^{-1}y \subseteq G \setminus A \iff K^{-1}y \cap A = \emptyset \iff y \notin KA.$$
Dakle, $W = G \setminus KA$, pa zaključujemo da je skup KA zatvoren. Odatle i iz (*d*) slijedi da je i skup $AK = (K^{-1}A^{-1})^{-1}$ zatvoren.

(*e*) Neka je preslikavanje $\varphi : G \times G \to G$ definirano sa $\varphi(x, y) = xy$. To je preslikavanje neprekidno. Stavimo
$$V_1 = \{y \in G;\ \varphi(x, y) \in U\ \forall x \in K\} = \{y \in G;\ xy \in U\ \forall x \in K\}.$$
Tada je $e \in V_1$ i po lemi 1.2.1. skup V_1 je otvoren. Analogno je i skup
$$V_2 = \{y \in G;\ yx \in U\ \forall x \in K\}$$
otvoren i $e \in V_2$. Stoga je $V = V_1 \cap V_2$ okolina od e i vrijedi $VK \subseteq U$ i $KV \subseteq U$.

1.3 Invarijantne mjere na lokalno kompaktnim grupama

U cijeloj ovoj točki G označava lokalno kompaktnu grupu i e njenu jedinica.

Funkcija $f \in C(G)$ zove se **lijevo uniformno neprekidna** ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji okolina V od e takva da vrijedi

$$y \in xV \qquad \Longrightarrow \qquad |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Analogno, f je **desno uniformno neprekidna** ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji okolina V od e takva da vrijedi

$$y \in Vx \qquad \Longrightarrow \qquad |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Propozicija 1.3.1. *Svaka funkcija $f \in C_0(G)$ je i lijevo i desno uniformno neprekidna.*

Dokaz: Neka je $K = Supp\, f$ i $\varepsilon > 0$. Neka je $U = U^{-1}$ kompaktna okolina od e. Tada je po tvrdnji (d) propozicije 1.2.1. KU kompaktan podskup od G. Stavimo

$$W = \{y \in G;\ |f(xy) - f(x)| < \varepsilon\ \forall x \in KU\}.$$

Tada je $e \in W$. Neka je $\varphi : G \times G \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija definirana sa $\varphi(x, y) = |f(xy) - f(x)|$. Tada je

$$W = \{y \in G;\ \varphi(x, y) \in \langle -\infty, \varepsilon\rangle\ \forall x \in KU\}$$

pa je po lemi 1.2.1. W otvoren podskup od G. Prema tome, W je okolina od e u G.

Stavimo $V = W \cap U$. Neka su $x, y \in G$ takvi da je $y \in xV$, tj. $x^{-1}y \in V$. Dokazat ćemo da je tada $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Pretpostavimo prvo da $x \notin KU$. Kako je U okolina jednice, tada $x \notin K$, pa je $f(x) = 0$. Kad bi bilo $y \in K$, imali bismo

$$x = y\left(y^{-1}x\right) = y\left(x^{-1}y\right)^{-1} \in KV^{-1} \subseteq KU^{-1} = KU$$

suprotno pretpostavci. Dakle, vrijedi i $y \notin K$, pa je $f(y) = 0$. Stoga je u tom slučaju

$$|f(x) - f(y)| = 0 < \varepsilon.$$

Pretpostavimo sada da je $x \in KU$. Tada je $x^{-1}y \in V \subseteq W$, pa vrijedi

$$|f(x) - f(y)| = \left|f\left(x\left(x^{-1}y\right)\right) - f(x)\right| < \varepsilon.$$

Time je dokazano da je funkcija f lijevo uniformno neprekidna. Sasvim analogno dokazuje se da je f desno uniformno neprekidna (ili se primijeni dokazano na funkciju $x \mapsto f\left(x^{-1}\right)$).

Za $x \in G$ i za funkciju f na grupi G definiramo transformirane funkcije

$$\lambda_x f = f \circ \lambda_{x^{-1}}, \quad \rho_x f = f \circ \rho_{x^{-1}}, \quad \iota_x f = f \circ \iota_{x^{-1}},$$

tj.

$$(\lambda_x f)(y) = f\left(x^{-1}y\right), \quad (\rho_x f)(y) = f(yx), \quad (iota_x f)(y) = f\left(x^{-1}yx\right), \quad y \in G.$$

Te se transformacije prenose i na mjere na grupi G : za $\mu \in \mathfrak{M}(G)$ i za $x \in G$ stavljamo

$$(\lambda_x\mu)(f) = \mu\left(\lambda_{x^{-1}}f\right), \quad (\rho_x\mu)(f) = \mu\left(\rho_{x^{-1}}f\right), \quad (\iota_x\mu)(f) = \mu\left(\iota_{x^{-1}}f\right), \quad f \in C_0(G).$$

Mjera $\mu \in \mathfrak{M}(G)$ zove se **lijevoinvarijantna** (odn., **desnoinvarijantna**) **mjera** na G ako je $\lambda_x\mu = \mu$ (odn., $\rho_x\mu = \mu$) $\forall x \in G$. Ako je k tome μ pozitivna i $\neq 0$, onda se μ zove **lijeva** (odn., **desna**) **Haarova mjera** na grupi G.

Prenošenjem invertiranja u grupi na funkcije a zatim na mjere dolazimo do bijekcije među lijevoinvarijantnim i desnoinvarijantnim mjerama na G. Naime, za funkciju f na grupi G definiramo novu funkciju $\check{f}$ relacijom

$$\check{f}(x) = f\left(x^{-1}\right), \qquad x \in G.$$

Tada imamo redom

$$(\rho_x \check{f})(y) = \check{f}(yx) = f\left(x^{-1}y^{-1}\right) = (\lambda_x f)\left(y^{-1}\right) = (\lambda_x f)\check{\ }(y), \qquad x, y \in G.$$

Prema tome, za svaku funkciju f na grupi G i za svaki $x \in G$ vrijedi

$$\rho_x \check{f} = (\lambda_x f)\check{\ } \qquad \text{i, analogno,} \qquad \lambda_x \check{f} = (\rho_x f)\check{\ }.$$

Za mjeru $\mu \in \mathfrak{M}(G)$ definiramo $\check{\mu} \in \mathfrak{M}(G)$ sa

$$\check{\mu}(f) = \mu(\check{f}), \qquad f \in C_0(G).$$

Iz gornjih relacija za funkcije slijede analogne relacije za mjere:

$$\rho_x \check{\mu} = (\lambda_x \mu)\check{\ } \qquad \text{i} \qquad \lambda_x \check{\mu} = (\rho_x \mu)\check{\ }, \qquad \mu \in \mathfrak{M}(G), \quad x \in G.$$

Prema tome, $\mu \mapsto \check{\mu}$ je involutivna bijekcija sa skupa svih lijevoinvarijantnih (odnosno, lijevih Haarovih) na skup svih desnoinvarijantnih (odnosno, desnih Haarovih) mjera na lokalno kompaktnoj grupi G. Stoga je dovoljno proučiti samo jednu vrstu – npr. desnoinvarijantne i desne Haarove mjere.

Prema propoziciji 1.1.2. pozitivna mjera na G potpuno je određena svojom restrikcijom na $C_0^+(G)$. Dakle, desne Haarove mjere na grupi G potpuno su određene preslikavanjima $\mu : C_0^+(G) \to \mathbb{R}_+$ sa sljedećim svojstvima:

(A) $\mu(f_1 + f_2) = \mu(f_1) + \mu(f_2)$ $\forall f_1, f_2 \in C_0^+(G)$.

(B) $\mu(\alpha f) = \alpha\mu(f)$ $\forall \alpha \in \mathbb{R}_+$ i $\forall f \in C_0^+(G)$.

(C) $\mu(\rho_x f) = \mu(f)$ $\forall x \in G$ i $\forall f \in C_0^+(G)$.

(D) $\exists f \in C_0^+(G)$ takva da je $\mu(f) > 0$.

Osnovni cilj ove točke da se dokaže egzistencija takvog preslikavanja $\mu : C_0^+(G) \to \mathbb{R}_+$ a vidjet ćemo da tada μ umjesto (D) ima jače svojstvo:

(D') $f \in C_0^+(G) \setminus \{0\} \quad \Longrightarrow \quad \mu(f) > 0$.

U daljnjem ćemo označavati $L = C_0^+(G)$. Za $f, g \in L$ pišemo $f \sim g$ ako postoje $n \in \mathbb{N}$, $f_1, f_2, \ldots, f_n \in L$ i $x_1, x_2, \ldots, x_n \in G$ takvi da je

$$f = \sum_{i=1}^{n} f_i \qquad \text{i} \qquad g = \sum_{i=1}^{n} \rho_{x_i} f_i.$$

Očito, svako preslikavanje $\mu : L \to \mathbb{R}_+$ sa svojstvima (a), (b) i (c) nužno ima svojstvo:

$$f, g \in L, \quad f \sim g \qquad \Longrightarrow \qquad \mu(f) = \mu(g).$$

Lema 1.3.1. *Neka su $f, g_1, g_2, \ldots, g_n \in L$ i neka je*

$$g = \sum_{i=1}^{n} g_i.$$

Tada vrijedi $f \sim g$ ako i samo ako postoje $f_1, f_2, \ldots, f_n \in L$ takve da je

$$f = \sum_{i=1}^{n} f_i \qquad i \qquad f_i \sim g_i \quad \forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}.$$

Dokaz: Očito vrijedi:

$$f_i \sim g_i \quad \forall i \qquad \Longrightarrow \qquad \sum_{i=1}^{n} f_i \sim \sum_{i=1}^{n} g_i.$$

Dokažimo obrat. Pretpostavimo da vrijedi

$$f \sim g = \sum_{i=1}^{n} g_i.$$

To znači da postoje $m \in \mathbb{N}$, $h_1, h_2, \ldots, h_m \in L$ i $x_1, x_2, \ldots, x_m \in G$ takvi da vrijedi

$$g = \sum_{j=1}^{m} h_j \qquad \text{i} \qquad f = \sum_{j=1}^{m} \rho_{x_j} h_j.$$

Definiramo sada funkcije $f_{ij} : G \to \mathbb{R}_+$ sa

$$f_{ij}(x) = \begin{cases} \dfrac{g_i(x) h_j(x)}{g(x)} & \text{ako je } g(x) > 0 \\ \\ 0 & \text{ako je } g(x) = 0. \end{cases}$$

Funkcija f_{ij} očito je neprekidna u svakoj točki otvorenog skupa $A = \{x \in G;\ g(x) > 0\}$. Također, ona je identički nula, dakle, također neprekidna na otvorenom skupu $G \setminus Cl(A)$; napominjemo da je $Cl(A) = Supp\, g$. Neka je sada $x_0 \in \partial A = Cl(A) \setminus A$ i neka je $\varepsilon > 0$. Tada je $g(x_0) = 0$, dakle, i $f_{ij}(x_0) = 0$. Zbog neprekidnosti i pozitivnosti funkcije g postoji okolina $\mathcal{O}$ točke x_0 takva da vrijedi

$$x \in \mathcal{O} \qquad \Longrightarrow \qquad 0 \leq g(x) \leq \varepsilon.$$

Budući da su sve funkcije $g_1, g_2, \ldots, g_n, h_1, h_2, \ldots, h_m$ nenegativne, vrijedi $g_i \leq g$ i $h_j \leq g$. Dakle, ako je $x \in \mathcal{O} \cap A$, onda je $0 < g(x) \leq \varepsilon$, pa vrijedi

$$f_{ij}(x) = \frac{g_i(x) h_j(x)}{g(x)} = g_i(x) \frac{h_j(x)}{g(x)} \leq g_i(x) \leq g(x) \leq \varepsilon.$$

Time je dokazano da je funkcija f_{ij} neprekidna svuda na G. Nadalje, vidi se da za svaku točku $x \in G$ vrijedi $0 \leq f_{ij}(x) \leq g(x)$, pa zaključujemo da je $f_{ij} \in L$. Iz definicije funkcija f_{ij} neposredno slijedi da je

$$g_i = \sum_{j=1}^{m} f_{ij} \qquad \text{i} \qquad h_j = \sum_{i=1}^{n} f_{ij}.$$

Stavimo

$$f_i = \sum_{j=1}^{m} \rho_{x_j} f_{ij}, \qquad 1 \le i \le n.$$

Tada vrijedi $f_i \sim g_i$ $\forall i$. Nadalje,

$$\sum_{i=1}^{n} f_i = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \rho_{x_j} f_{ij} = \sum_{j=1}^{m} \rho_{x_j} \left[\sum_{i=1}^{n} f_{ij}\right] = \sum_{j=1}^{m} \rho_{x_j} h_j = f.$$

Lema 1.3.2. *$\sim$ je relacija ekvivalencije na skupu L.*

Dokaz: Očito vrijedi $f \sim f$ za svaku $f \in L$.

Neka su $f, g \in L$ i $f \sim g$. To znači da postoje $n \in \mathbb{N}$, $f_1, f_2, \ldots, f_n \in L$ i $x_1, x_2, \ldots, x_n \in G$ takvi da je

$$f = \sum_{i=1}^{n} f_i \qquad \text{i} \qquad g = \sum_{i=1}^{n} \rho_{x_i} f_i.$$

Stavimo li $g_i = \rho_{x_i} f_i$ i $y_i = x_i^{-1}$, tada su $g_1, g_2, \ldots, g_n \in L$, $y_1, y_2, \ldots, y_n \in G$ i

$$g = \sum_{i=1}^{n} g_i \qquad \text{i} \qquad f = \sum_{i=1}^{n} \rho_{y_i} g_i.$$

Prema tome vrijedi $g \sim f$.

Ostaje nam još dokaz tranzitivnosti relacije $\sim$. Neka su $f, g, h \in L$ i neka vrijedi $f \sim g$ i $g \sim h$. Tada postoje $g_1, g_2, \ldots, g_n \in L$ i $y_1, y_2, \ldots, y_n \in G$ takvi da vrijedi

$$g = \sum_{i=1}^{n} g_i \qquad \text{i} \qquad h = \sum_{i=1}^{n} \rho_{y_i} g_i.$$

Prema lemi 1.3.1. tada postoje $f_1, f_2, \ldots, f_n \in L$ takvi da je

$$f = \sum_{i=1}^{n} f_i \qquad \text{i} \qquad f_i \sim g_i \quad \forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}.$$

No tada je i $f_i \sim \rho_{y_i} g_i$ $\forall i$ pa po istoj lemi 1.3.1. slijedi

$$f = \sum_{i=1}^{n} f_i \ \sim \ \sum_{i=1}^{n} \rho_{y_i} g_i = h.$$

Lema 1.3.3. *Neka je $f \in L$ i neka je $U \subseteq G$ otvoren neprazan skup. Tada postoji $\varphi \in L$ takva da je $Supp\,\varphi \subseteq U$ i $f \sim \varphi$.*

Dokaz: Neka je $V \neq \emptyset$ otvoren podskup od G takav da mu je zatvarač $Cl(V)$ kompaktan i sadržan u U. Tada je $(Vx)_{x \in G}$ otvoren pokrivač od G dakle i od svakog podskupa od G. Stoga za kompaktan skup $Supp\,f$ postoje točke $x_1, x_2, \ldots, x_n \in G$ takve da je

$$Supp\,f \subseteq Vx_1 \cup Vx_2 \cup \cdots \cup Vx_n.$$

Za svako $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ neka je $h_i \in L$ takva da vrijedi

$$h_i(x) = 1 \quad \forall x \in Vx_i \qquad \text{i} \qquad Supp\,h_i \subseteq Ux_i.$$

Stavimo

$$h = \sum_{i=1}^{n} h_i \in L.$$

Ako je $x \in Supp\, f$, tada je $x \in Vx_i$ za neko i pa slijedi $h_i(x) = 1$. Dakle, vrijedi

$$x \in Supp\, f \qquad \Longrightarrow \qquad h(x) \geq 1.$$

Definiramo sada funkcije $f_1, f_2, \ldots, f_n : G \to \mathbb{R}_+$ sa

$$f_i(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x)h_i(x)}{h(x)} & \text{ako je } x \in Supp\, f \\ 0 & \text{ako je } x \notin Supp\, f \end{cases} \qquad 1 \leq i \leq n.$$

Kao u dokazu leme 1.3.1. vidi se da su $f_1, f_2, \ldots, f_n \in L$. Ako je $x \notin Supp\, f$ imamo

$$f(x) = 0 = \sum_{i=1}^{n} f_i(x).$$

Ako je pak $x \in Supp\, f$ tada je

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{f(x)h_i(x)}{h(x)} = \frac{f(x)}{h(x)} \sum_{i=1}^{n} h_i(x) = f(x).$$

Dakle, vrijedi

$$f = \sum_{i=1}^{n} f_i.$$

Nadalje,

$$Supp\, f_i \subseteq Supp\, h_i \subseteq Ux_i.$$

Napokon, stavimo

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} \rho_{x_i} f_i \in L.$$

Iz $Supp\, f_i \subseteq Ux_i$ slijedi da je $Supp\, \rho_{x_i} f_i \subseteq U$ $\forall i$, dakle, $Supp\, \varphi \subseteq U$. Napokon, po konstrukciji vidimo da vrijedi $f \sim \varphi$.

Definirajmo sada relaciju $\succeq$ na L na sljedeći način: za $f, g \in L$ stavljamo $f \succeq g$ ako postoje $f', g' \in L$ takve da je $f' \sim f$, $g' \sim g$ i $f' \geq g'$.

Lema 1.3.4. *Relacija $\succeq$ ima sljedeća svojstva:*

(a) *$f \succeq g$ ako i samo ako postoje $f_1, f_2 \in L$ takve da je $f = f_1 + f_2$ i $f_1 \sim g$.*

(b) *$f \succeq g$ ako i samo ako postoji $f' \in L$ takva da je $f' \sim f$ i $f' \geq g$.*

(c) *Ako je $f \succeq g$ i $g \succeq h$ onda je $f \succeq h$.*

(d) *Ako je $f \succeq g$ i $f' \succeq g'$ onda je $f + f' \succeq g + g'$.*

(e) *Ako je $f \succeq g$ i $\alpha \in \mathbb{R}_+$ onda je $\alpha f \succeq \alpha g$.*

Dokaz: (a) Pretpostavimo da je $f \succeq g$ i neka su $f', g' \in L$ takve da je $f \sim f'$, $g \sim g'$ i $f' \geq g'$. Stavimo $h = f' - g'$. Kako je $f' \geq g'$, to je $h \in L$. Dakle, imamo

$$f \sim f' = g' + h, \qquad f, f', g', h \in L.$$

Po lemi 1.3.1. postoje $f_1, f_2 \in L$ takve da je

$$f = f_1 + f_2, \quad f_1 \sim g' \sim g, \quad f_2 \sim h.$$

Time je dokazana nužnost uvjeta, a dovoljnost je očigledna.

(b) Ponovo je netrivijalna samo nužnost. Neka je, dakle, $f \succeq g$. Zbog (a) postoje $f_1, f_2 \in L$ takve da je $f = f_1 + f_2$ i $f_1 \sim g$. Stavimo $f' = g + f_2$. Tada je $f \sim f'$ i $f' \geq g$.

(c) Zbog (a) iz $g \succeq h$ slijedi da postoje $g_1, g_2 \in L$ takve da je $g = g_1 + g_2$ i $g_1 \sim h$. Nadalje, zbog (b) $f \succeq g$ povlači da postoji $f' \in L$ takva da je $f' \sim f$ i $f' \geq g$. Tada je i $f' \geq g_1$, pa slijedi $f' \succeq g_1$, dakle i $f \succeq g_1$. Sada opet prema (a) postoje $f_1, f_2 \in L$ takve da je $f = f_1 + f_2$ i $f_1 \sim g_1$. Zbog leme 1.3.2. iz $f_1 \sim g_1$ i $g_1 \sim h$ slijedi $f_1 \sim h$, pa iz (a) slijedi $f \succeq h$.

(d) Ako je $f \succeq g$ i $f' \succeq g'$, onda prema (a) postoje $f_1, f_2, f_1', f_2' \in L$ takve da je $f = f_1 + f_2$, $f' = f_1' + f_2'$, $f_1 \sim g$ i $f_1' \sim g'$. Tada vrijedi $f + f' = (f_1 + f_1') + (f_2 + f_2')$ i $f_1 + f_1' \sim g + g'$, pa prema (a) imamo $f + f' \succeq g + g'$.

(e) Po definiciji iz $f \succeq g$ slijedi da postoje $f', g' \in L$ takve da je $f \sim f'$, $g \sim g'$ i $f' \geq g'$. No tada za $\alpha \in \mathbb{R}_+$ očito vrijedi $\alpha f \sim \alpha f'$, $\alpha g \sim \alpha g'$ i $\alpha f' \geq \alpha g'$. Dakle, $\alpha f \succeq \alpha g$.

Lema 1.3.5. *Neka su $f, g \in L$ i $g \neq 0$. Tada postoji $\alpha \in \mathbb{R}_+$ takav da vrijedi $\alpha g \succeq f$.*

Dokaz: Stavimo $U = \{x \in G;\ g(x) > 0\}$. Po lemi 1.3.3. postoji $\varphi \in L$ takva da je $Supp\,\varphi \subseteq U$ i $f \sim \varphi$. Tada je $g(x) > 0\ \forall x \in Supp\,\varphi$, a kako je $Supp\,\varphi$ kompaktan skup imamo

$$m = \min\{g(x);\ x \in Supp\,\varphi\} > 0.$$

Stavimo

$$M = \|\varphi\|_\infty = \max\{\varphi(x);\ x \in G\} \qquad \text{i} \qquad \alpha = \frac{M}{m}.$$

Tada imamo za $x \in Supp\,\varphi$

$$\alpha g(x) = \frac{M}{m} g(x) \geq M \geq \varphi(x),$$

a za $x \notin Supp\,\varphi$ je

$$\alpha g(x) \geq 0 = \varphi(x).$$

Dobili smo da je $\alpha g \geq \varphi$ i $\varphi \sim f$. Dakle, vrijedi $\alpha g \succeq f$.

Pretpostavimo da preslikavanje $\mu : L \to \mathbb{R}_+$ ima svojstva (A), (B), (C) i (D'). Neka je $g \in L$, $g \neq 0$. Tada je $\mu(g) > 0$, pa zamjenom funkcije g njenim umnoškom s pozitivnim brojem možemo postići da je $\mu(g) = 1$. Ako je $f \in L$ i $g \succeq f$ onda je nužno $\mu(f) \leq 1$. Nadalje, ako je $\alpha \in \mathbb{R}_+$ i $\alpha g \succeq f$ onda je $\mu(f) \leq \alpha$, a ako je $f \succeq \alpha g$ onda je $\mu(f) \geq \alpha$. Slijedi da za takvo preslikavanje μ i za $g \in L$ takvu da je $\mu(g) = 1$ nužno vrijedi

$$\sup\{\alpha \in \mathbb{R}_+;\ f \succeq \alpha g\} \leq \mu(f) \leq \inf\{\alpha \in \mathbb{R}_+;\ \alpha g \succeq f\}.$$

Naš je cilj da dokažemo da za $f, g \in L$, $g \neq 0$, vrijedi

$$\sup\{\alpha \in \mathbb{R}_+;\ f \succeq \alpha g\} = \inf\{\alpha \in \mathbb{R}_+;\ \alpha g \succeq f\}.$$

Fiksirat ćemo tada bilo koju funkciju $g \in L \setminus \{0\}$ i definirati $\mu_g(f)$ kao taj broj, a zatim dokazati da tako definirano preslikavanje $\mu_g : L \to \mathbb{R}_+$ ima svojstva (A), (B), (C) i (D').

Dokaz gornje jednakosti izvest ćemo iz sljedeće dvije propozicije, čije dokaze ćemo provesti naknadno:

Propozicija 1.3.2. *Neka je $f \in L \setminus \{0\}$ i neka je $\alpha \in \mathbb{R}_+$ takav da je $f \succeq \alpha f$. Tada je $\alpha \leq 1$.*

Propozicija 1.3.3. *Neka su $f, g \in L$, $g \neq 0$ i $\varepsilon > 0$. Tada postoji $\alpha \in \mathbb{R}_+$ takav da vrijedi $(1+\varepsilon)f \succeq \alpha g \succeq f$.*

Korolar 1.3.1. *Ako su $f, g \in L$ takve da je $f \succeq g$ i $g \succeq f$ onda je $f \sim g$.*

Dokaz: Prema tvrdnji (a) leme 1.3.4. iz $g \succeq f$ slijedi da postoje $g_1, g_2 \in L$ takve da je $g = g_1 + g_2$ i $g_1 \sim f$. Pretpostavimo da je $g_1 \neq 0$. Prema lemi 1.3.5. tada postoji $\varepsilon > 0$ takav da je $g_2 \succeq \varepsilon f$. Slijedi

$$f \succeq g = g_1 + g_2 \succeq f + \varepsilon f = (1+\varepsilon)f.$$

No to je u suprotnosti s propozicijom 1.3.2. Ova kontradikcija pokazuje da je $g_2 = 0$, dakle, $g = g_1 \sim f$.

Korolar 1.3.2. *Neka su $f, g \in L$ i $g \neq 0$. Tada vrijedi*

$$\sup\{\alpha \in \mathbb{R}_+;\ f \succeq \alpha g\} = \inf\{\alpha \in \mathbb{R}_+;\ \alpha g \succeq f\}.$$

Dokaz: Neka su $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}_+$ takvi da je $\alpha_2 g \succeq f \succeq \alpha_1 g$. Zbog tvrdnji (c) i (e) leme 1.3.4. odatle slijedi da je $g \succeq \dfrac{\alpha_1}{\alpha_2} g$, pa je zbog propozicije 1.3.2. $\dfrac{\alpha_1}{\alpha_2} \leq 1$, tj. $\alpha_1 \leq \alpha_2$. Time je dokazana nejednakost

$$\sup\{\alpha \in \mathbb{R}_+;\ f \succeq \alpha g\} \leq \inf\{\alpha \in \mathbb{R}_+;\ \alpha g \succeq f\}.$$

Dokažimo sada da vrijedi i obrnuta nejednakost. Prema propoziciji 1.3.3. za $\varepsilon > 0$ postoji $\beta \in \mathbb{R}_+$ takav da je $(1+\varepsilon)f \succeq \beta g \succeq f$. Stoga je

$$\inf\{\alpha \in \mathbb{R}_+;\ \alpha g \succeq f\} \leq \beta \leq \sup\{\alpha \in \mathbb{R}_+;\ (1+\varepsilon)f \succeq \alpha g\} = (1+\varepsilon)\sup\{\alpha \in \mathbb{R}_+;\ f \succeq \alpha g\}.$$

Kako je $\varepsilon > 0$ bio proizvoljan, slijedi tražena obrnuta nejednakost

$$\inf\{\alpha \in \mathbb{R}_+;\ \alpha g \succeq f\} \leq \sup\{\alpha \in \mathbb{R}_+;\ f \succeq \alpha g\}.$$

Kao što smo planirali, za $g \in L$, $g \neq 0$, definiramo preslikavanje $\mu_g : L \to \mathbb{R}_+$ sa

$$\mu_g(f) = \sup\{\alpha \in \mathbb{R}_+;\ f \succeq \alpha g\} = \inf\{\alpha \in \mathbb{R}_+;\ \alpha g \succeq f\}.$$

Dokazat ćemo sada da preslikavanje μ_g zadovoljava uvjete (A), (B), (C) i (D').

(A) Neka su $f_1, f_2 \in L$. Ako su $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$ takvi da je $\alpha g \succeq f_1$ i $\beta g \succeq f_2$ tada prema tvrdnji (d) leme 1.3.4. vrijedi $(\alpha+\beta)g \succeq f_1 + f_2$. To pokazuje da je

$$\alpha + \beta \geq \inf\{\gamma \in \mathbb{R}_+;\ \gamma g \succeq f_1 + f_2\} = \mu_g(f_1 + f_2).$$

Uzevši infimume po takvima α i β nalazimo da vrijedi

$$\mu_g(f_1) + \mu_g(f_2) \geq \mu_g(f_1 + f_2).$$

Neka su sada $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$ takvi da je $f_1 \succeq \alpha g$ i $f_2 \succeq \beta g$. Tada je $f_1 + f_2 \succeq (\alpha+\beta)g$, dakle,

$$\alpha + \beta \leq \sup\{\gamma \in \mathbb{R}_+;\ f_1 + f_2 \succeq \gamma g\} = \mu_g(f_1 + f_2).$$

Uzevši sada supremume po takvima α i β dobivamo obrnutu nejednakost

$$\mu_g(f_1) + \mu_g(f_2) \le \mu_g(f_1 + f_2).$$

Dakle, vrijedi jednakost

$$\mu_g(f_1 + f_2) = \mu_g(f_1) + \mu_g(f_2).$$

(B) Za $\alpha \in \mathbb{R}_+$ i $f \in L$ imamo

$$\mu_g(\alpha f) = \sup\{\beta \in \mathbb{R}_+;\ \alpha f \succeq \beta g\} = \alpha \sup\{\beta \in \mathbb{R}_+;\ f \succeq \beta g\} = \alpha\mu_g(f).$$

(C) Za $x \in G$ i $f \in L$ vrijedi $\rho_x f \sim f$. Prema tome,

$$\rho_x f \succeq \alpha g \qquad \Longleftrightarrow \qquad f \succeq \alpha g.$$

To znači da je $\mu_g(\rho_x f) = \mu_g(f)$.

(D') Neka je $f \in L$, $f \neq 0$. Prema propoziciji 1.3.3. postoji $\alpha \in \mathbb{R}_+$ takav da je $\alpha f \succeq g$. Tada je $\alpha > 0$ i za $\varepsilon = \dfrac{1}{\alpha} > 0$ vrijedi $f \succeq \varepsilon g$. Dakle,

$$\mu_g(f) = \sup\{\beta \in \mathbb{R}_+;\ f \succeq \beta g\} \ge \varepsilon > 0.$$

Teorem 1.3.1. (a) *Na lokalno kompaktnoj grupi G postoji desna Haarova mjera μ.*

(b) *Ako je μ desna Haarova mjera na G i $f \in C_0^+(G) \setminus \{0\}$, onda je $\mu(f) > 0$.*

(c) *Ako je μ desna Haarova mjera i ν desnoinvarijantna mjera na G postoji $\lambda \in \mathbb{C}$ takav da je $\nu = \lambda\mu$.*

Dokaz: Tvrdnja (a) već je dokazana: za $g \in L \setminus \{0\}$ konstruirana mjera μ_g je desna Haarova mjera.

Dokazat ćemo sada sljedeću tvrdnju koja će imati za posljedicu tvrdnje (b) i (c) :

(d) *Neka je $g \in L \setminus \{0\}$ i neka je μ desnoinvarijantna mjera na grupi G. Tada postoji $\lambda \in \mathbb{C}$ takav da je $\mu = \lambda\mu_g$.*

Možemo pisati

$$\mu = (\mu_1 - \mu_2) + i(\mu_3 - \mu_4), \quad \mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4 \in \mathfrak{M}^+(G),$$

pri čemu su

$$\mu_1 = (\operatorname{Re}\mu)^+, \quad \mu_2 = (\operatorname{Re}\mu)^-, \quad \mu_3 = (\operatorname{Im}\mu)^+, \quad \mu_4 = (\operatorname{Im}\mu)^-.$$

Tada su μ_1, μ_2, μ_3 i μ_4 pozitivne desnoinvarijatne mjere. To pokazuje da je tvrdnju (d) dovoljno dokazati u slučaju kad je μ pozitivna desnoinvarijatna mjera, tj. desna Haarova mjera.

Neka je, dakle, μ desna Haarova mjera i $g \in L \setminus \{0\}$. Ako su $f, h \in L$ i $f \sim h$ iz desnoinvarijatnosti mjere μ slijedi da je $\mu(f) = \mu(h)$. Nadalje, kako je mjera μ pozitivna, iz $f \ge h$ slijedi $\mu(f) \ge \mu(h)$. Prema tome vrijedi

$$f, h \in L, \quad f \succeq h \qquad \Longrightarrow \qquad \mu(f) \ge \mu(h).$$

Prema tome, ako je $\alpha \in \mathbb{R}_+$ takav da je $\alpha g \succeq f$ onda je $\alpha\mu(g) \ge \mu(f)$, a ako je $f \succeq \alpha g$, onda je $\alpha\mu(g) \le \mu(f)$. Stoga imamo

$$\mu(g)\mu_g(f) = \mu(g) \cdot \inf\{\alpha \in \mathbb{R}_+;\ \alpha g \succeq f\} \ge \mu(f),$$

$$\mu(g)\mu_g(f) = \mu(g) \cdot \sup\{\alpha \in \mathbb{R}_+;\ f \succeq \alpha g\} \le \mu(f).$$

Uz oznaku $\lambda = \mu(g)$ slijedi

$$\mu(f) = \lambda\mu_g(f) \quad \forall f \in L, \quad \text{dakle i} \quad \forall f \in C_0(G).$$

Dakle, $\mu = \lambda\mu_g$. Time je tvrdnja (d) dokazana.

(b) Neka je μ desna Haarova mjera na G i $f \in L \setminus \{0\}$. Prema (d) postoji $\lambda \in \mathbb{C}$ takav da je $\mu = \lambda\mu_f$. Budući da su μ i μ_f pozitivne mjere i $\mu \neq 0$, očito je $\lambda > 0$. Nadalje, prema dokazanom μ_f zadovoljava (D'), dakle je $\mu_f(f) > 0$. Odatle je $\mu(f) = \lambda\mu_f(f) > 0$.

(c) Neka je μ desna Haarova mjera na G i ν desnoinvarijantna mjera na G. Neka je $g \in L\setminus\{0\}$. Prema (d) postoje α i β takvi da je $\mu = \alpha\mu_g$ i $\nu = \beta\mu_g$. Kako je $\mu \neq 0$ to je $\alpha \neq 0$, pa za $\lambda = \dfrac{\beta}{\alpha}$ vrijedi $\nu = \beta\mu_g = \lambda\mu$.

Ostaje nam još da dokažemo propozicije 1.3.2. i 1.3.3. Za to nam treba još nekoliko pomoćnih tvrdnji.

Lema 1.3.6. *Neka su J i I i neka su $\mathcal{P}(J)$ i $\mathcal{P}(I)$ njihovi partitivni skupovi (skupovi svih podskupova). Neka je $f : \mathcal{P}(J) \to \mathcal{P}(I)$ preslikavanje sa sljedeća dva svojstva:*

(a) $f(S \cup T) = f(S) \cup f(T)$ $\forall S, T \in \mathcal{P}(J)$.

(b) $|f(S)| \geq |S|$ $\forall S \in \mathcal{P}(J)$.

($|A|$ označava broj elemenata konačnog skupa A). Tada postoji injekcija $\sigma : J \to I$ takva da je $\sigma(j) \in f(\{j\})$ $\forall j \in J$.

Dokaz provodimo indukcijom po $|J|$. Ako je $|J| = 1$ tvrdnja je trivijalna. Pretpostavimo da je $n \geq 2$ i da tvrdnja vrijedi ako je $|J| < n$. Neka je $|J| = n$.

Pretpostavimo najprije da postoji neprazan $J_1 \subsetneq J$ takav da je $|f(J_1)| = |J_1|$. Po pretpostavci indukcije postoji bijekcija $\sigma_1 : J_1 \to I_1 = f(J_1)$ takva da je $\sigma_1(j) \in f(\{j\})$ $\forall j \in J_1$. Neka je $J_2 = J \setminus J_1$ i $I_2 = I \setminus I_1$. Definiramo $g : \mathcal{P}(J_2) \to \mathcal{P}(I_2)$ sa

$$g(S) = f(S) \setminus f(J_1), \qquad S \in \mathcal{P}(J_2).$$

Tada očito vrijedi $g(S \cup T) = g(S) \cup g(T)$ $\forall S, T \in \mathcal{P}(J_2)$. Nadalje, za $S \in \mathcal{P}(J_2)$ imamo

$$|S| = |(S\cup J_1)| - |J_1| \leq |f(S \cup J_1)| - |f(J_1)| = |(f(S) \cup f(J_1))| - |f(J_1)| = |(f(S) \setminus f(J_1))| = |g(S)|.$$

Ponovna primjena pretpostavke indukcije daje da postoji injekcija $\sigma_2 : J_2 \to I_2$ takva da je $\sigma_2(j) \in g(\{j\})$ $\forall j \in J_2$. Kako je $g(\{j\}) \subseteq f(\{j\})$, slijedi da je $\sigma_2(j) \in f(\{j\})$ $\forall j \in J_2$. Napokon, definiramo $\sigma : J \to I$ slaganjem preslikavanja σ_1 i σ_2 :

$$\sigma(j) = \begin{cases} \sigma_1(j) & \text{ako je } j \in J_1 \\ \\ \sigma_2(j) & \text{ako je } j \in J_2. \end{cases}$$

Tada je σ injekcija i vrijedi $\sigma(j) \in f(\{j\})$ $\forall j \in J$.

Pretpostavimo sada da je $|f(S)| > |S|$ $\forall S \subsetneq J$, $S \neq \emptyset$. Izaberimo $j \in J$ i $i \in f(\{j\})$. Stavimo $J' = J \setminus \{j\}$ i $I' = I \setminus \{i\}$. Nadalje, definiramo $g : \mathcal{P}(J') \to \mathcal{P}(I')$ sa

$$g(S) = f(S) \setminus \{i\}, \qquad S \in \mathcal{P}(J').$$

Tada je očito $g(S \cup T) = g(S) \cup g(T)$ $\forall S, T \in \mathcal{P}(J')$. Nadalje, za $S \in \mathcal{P}(J')$ je

$$|f(S)| > |S|, \qquad \text{dakle} \qquad |f(S)| \geq |S| + 1.$$

Stoga je

$$|g(S)| = |(f(S) \setminus \{i\})| \geq |f(S)| - 1 \geq |S|.$$

Po pretpostavci indukcije postoji injekcija $\sigma' : J' \to I'$ takva da je $\sigma'(k) \in g(\{k\}) \subseteq f(\{k\})$ $\forall k \in J'$. Definiramo sada $\sigma : J \to I$ sa $\sigma(j) = i$ i $\sigma|J' = \sigma'$. Tada je σ injekcija i vrijedi $\sigma(k) \in f(\{k\})$ $\forall k \in J$.

Neka su $U, V \subseteq G$. $U-$**mreža za skup** V je svaki skup $S \subseteq G$ takav da je $V \subseteq SU$. Ako skup V ima kompaktan zatvarač i ako skup U ima nepraznu nutrinu, onda iz osnovnog svojstva kompaktnih skupova slijedi da V ima konačnu $U-$mrežu. U tom slučaju sa $[U, V]$ označavamo minimum kardinalnih brojeva svih konačnih $U-$mreža za V. Dakle, $[U, V]$ je najmanji prirodan broj n takav da postoje $x_1, x_2, \ldots, x_n \in G$ takvi da je

$$V \subseteq x_1U \cup x_2U \cup \cdots \cup x_nU.$$

Ako su U, V, W skupovi s nepraznim nutrinama i kompaktnim zatvaračima, onda je $[U, W] \leq [U, V][V, W]$. Doista, ako je $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ $U-$mreža V i ako je $\{y_1, y_2, \ldots, y_m\}$ $V-$mreža za W, onda je

$$V \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} x_iU, \qquad W \subseteq \bigcup_{j=1}^{m} y_jV \qquad \Longrightarrow \qquad W \subseteq \bigcup_{j=1}^{m}\bigcup_{i=1}^{n} y_jx_iU,$$

dakle, $\{y_jx_i;\ 1 \leq j \leq m,\ 1 \leq i \leq n\}$ je $U-$mreža za W.

Lema 1.3.7. *Neka je $K \subseteq G$ neprazan kompaktan skup, N kompaktna okolina jedinice e u G i $U = U^{-1} \subseteq N$ otvorena okolina od e. Neka je $n = [U, KN]$, $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ $U-$mreža KN i $I = \{1, 2, \ldots, n\}$. Za $x \in G$ stavimo $J = \{j \in I;\ xx_j \in K\}$. Tada postoji injekcija $\sigma : J \to I$ takva da vrijedi $x_{\sigma(j)} \in xx_jU^2 \ \ \forall j \in J$.*

Dokaz: Definirajmo najprije preslikavanje $f : \mathcal{P}(J) \to \mathcal{P}(I)$. Za bilo koji podskup $S \subseteq J$ stavimo

$$f(S) = \left\{ i \in I;\ \left(\bigcup_{j\in S} xx_jU \right) \cap x_iU \neq \emptyset \right\}.$$

Tada očito vrijedi $f(S \cup T) = f(S) \cup f(T)$, $S, T \in \mathcal{P}(J)$. Nadalje, za svako $j \in J$ imamo

$$xx_jU \subseteq KU \subseteq KN \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} x_iU.$$

Neka je $S \in \mathcal{P}(J)$. Tada za $j \in S$ i $i \in I \setminus f(S)$ vrijedi $xx_jU \cap x_iU = \emptyset$. To znači da je

$$\bigcup_{j\in S} xx_jU \subseteq \bigcup_{i\in f(S)} x_iU, \qquad \text{dakle} \qquad \bigcup_{j\in S} x_jU \subseteq \bigcup_{i\in f(S)} x^{-1}x_iU.$$

Kako je $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ $U-$mreža za skup KN, to pokazuje da je $|f(S)| \geq |S|$. Prema lemi 1.3.6. postoji injekcija $\sigma : J \to I$ takva da je

$$\sigma(j) \in f(\{j\}) = \{i \in I;\ xx_jU \cap x_iU \neq \emptyset\}, \quad \forall j \in J.$$

Dakle, vrijedi $xx_jU \cap x_{\sigma(j)}U \neq \emptyset \ \ \forall j \in J$. Kako je $U = U^{-1}$, slijedi $x_{\sigma(j)} \in xx_jU^2 \ \ \forall j \in J$.

Lema 1.3.8. *Neka je $A \subseteq G$ kompaktan skup, $\varepsilon > 0$, $m \in \mathbb{N}$ i $g_1, g_2, \ldots, g_m \in L \setminus \{0\}$. Tada postoje $n \in \mathbb{N}$ i $x_1, x_2, \ldots, x_n \in G$ takvi da je*

$$\left| \frac{\sum_{i=1}^n g_j(xx_i)}{\sum_{i=1}^n g_j(x_i)} - 1 \right| \leq \varepsilon \qquad \forall x \in A, \quad \forall j \in \{1, 2, \ldots, m\}.$$

Dokaz: Možemo pretpostaviti da je $e \in A = A^{-1}$ (ako nije tako, zamijenimo A sa skupom $A \cup A^{-1} \cup \{e\}$). Stavimo

$$K_0 = A \cdot \bigcup_{j=1}^m Supp\, g_j.$$

K_0 je kompaktan skup. Stavimo

$$\eta = \min_{1 \leq j \leq m} \max \{g_j(x);\ x \in G\}.$$

Tada je $0 < \eta \leq \max\{g_j(x);\ x \in G\}$ za svaki $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$. Nadalje, za svaki j stavimo

$$V_j = \left\{ x \in G;\ g_j(x) \geq \frac{2}{3}\eta \right\}, \qquad W_j = \left\{ x \in G;\ g_j(x) \geq \frac{1}{3}\eta \right\}.$$

Tada su V_j i W_j kompaktni skupovi s nepraznim nutrinama i V_j je sadržan u nutrini od W_j.

Neka je N kompaktna okolina od e takva da je $V_jN \subseteq W_j$ za $j = 1, 2, \ldots, m$. Neka je $\delta > 0$ takav da je

$$\delta \leq \frac{\eta\varepsilon}{3[V_j, K_0N]} \qquad \forall j \in \{1, 2, \ldots, m\}.$$

Nadalje, neka je $U = U^{-1} \subseteq N$ okolina od e takva da vrijedi

$$x^{-1}y \in U^2 \qquad \Longrightarrow \qquad |g_j(x) - g_j(y)| \leq \delta \quad \forall j \in \{1, 2, \ldots, m\};$$

egzistenciju takve okoline garantira činjenica da funkcije g_j imaju kompaktne nosače, dakle, one su ne samo neprekidne nego uniformno neprekidne.

Ostatak dokaza ove leme podijelit ćemo u tri koraka.

(1) *Neka je $n = [U, K_0N]$ i neka je $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ $U-$mreža za K_0N. Dokažimo da vrijedi*

$$\frac{n\delta}{\sum_{i=1}^n g_j(x_i)} \leq \varepsilon \qquad \text{za} \quad j = 1, 2, \ldots, m.$$

Doista, za svaki j imamo

$$K_0N \subseteq \bigcup_{i=1}^n x_iU \quad \text{i} \quad V_j \subseteq Supp\, g_j \subseteq K_0 \subseteq K_0N \qquad \Longrightarrow \qquad V_j \subseteq \bigcup_{i=1}^n x_iU.$$

To pokazuje da je

$$|\{i;\ 1 \leq i \leq n,\ V_j \cap x_iU \neq \emptyset\}| \geq [U, V_j] \geq \frac{[U, K_0N]}{[V_j, K_0N]} = \frac{n}{[V_j, K_0N]}.$$

Nadalje,

$$x_iU \cap V_j \neq \emptyset \qquad \Longrightarrow \qquad x_i \in V_jU \subseteq V_jN \subseteq W_j \qquad \Longrightarrow \qquad g_j(x_i) \geq \frac{\eta}{3}.$$

Dakle,

$$\sum_{i=1}^{n} g_j(x_i) \geq \frac{\eta}{3} \cdot \frac{n}{[V_j, K_0N]},$$

pa slijedi

$$\frac{n\delta}{\sum_{i=1}^{n} g_j(x_i)} \leq \delta \cdot \frac{3}{\eta} \cdot [V_j, K_0N] \leq \varepsilon.$$

(2) *Neka je $y \in A$, $K = yK_0$ i $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ $U-$mreža za $KN = yK_0N$, tj.*

$$KN \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} y_iU.$$

Tada vrijedi

$$\sum_{i=1}^{n} g_j(xy_i) \leq \sum_{i=1}^{n} g(y_i) + n\delta \qquad \forall j \in \{1, 2, \ldots, m\}, \quad \forall x \in G.$$

Prije svega primijetimo da iz $g_j(xy_i) \neq 0$ slijedi $xy_i \in Supp\, g_j \subseteq K$, pa je $i \in J$. Neka je u toj situaciji $\sigma : J \to I = \{1, 2, \ldots, n\}$ injekcija iz leme 1.3.7., tj. $y_{\sigma(i)} \in xy_iU^2 \ \ \forall i \in J$. Tada je $(xy_i)^{-1}y_{\sigma(i)} \in U^2$, pa prema izboru skupa U vrijedi $|g_j(y_{\sigma(i)}) - g_j(xy_i)| \leq \delta \ \ \forall j$. Odatle slijedi

$$\sum_{i\in I} g_j(xy_i) = \sum_{i\in J} g_j(xy_i) \leq \sum_{i\in J} \big(g_j(y_{\sigma(i)}) + \delta\big) \leq \sum_{i\in I} (g_j(y_i) + \delta) = \sum_{i\in I} g_j(y_i) + n\delta.$$

(3) *Neka je ponovo $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ $U-$mreža za K_0N. Dokazat ćemo da je tada*

$$\left| \frac{\sum_{i\in I} g_j(xx_i)}{\sum_{i\in I} g_j(x_i)} - 1 \right| \leq \varepsilon \qquad \forall j \in \{1, 2, \ldots, m\}, \quad \forall x \in A,$$

i time će lema 1.3.8. *biti dokazana.*

Prije svega, primijenimo **(2)** na slučaj $y = e \in A$, dakle, $K = K_0$. Možemo uzeti da je $y_i = x_i$ $\forall i \in I$. Slijedi

$$\sum_{i\in I} g_j(xx_i) \leq \sum_{i\in I} g_j(x_i) + n\delta \qquad \forall j \in \{1, 2, \ldots, m\}, \quad \forall x \in G.$$

Prema **(1)** odatle slijedi

$$\frac{\sum_{i\in I} g_j(xx_i)}{\sum_{i\in I} g_j(x_i)} \leq 1 + \frac{n\delta}{\sum_{i\in I} g_j(x_i)} \leq 1 + \varepsilon \qquad \forall j \in \{1, 2, \ldots, m\}, \quad \forall x \in G.$$

Fiksirajmo sada $x \in A$ i stavimo $K = xK_0$. Primijenimo **(2)** na taj slučaj. Imamo

$$KN = xK_0N \subseteq \bigcup_{i\in I} xx_iU,$$

pa možemo uzeti $y_i = xx_i$ $\forall i \in I$. Slijedi

$$\sum_{i\in I} g_j(yy_i) \leq \sum_{i\in I} g_j(y_i) + n\delta \qquad \forall j \in \{1, 2, \ldots, m\}, \quad \forall y \in G.$$

Izaberemo li $y = x^{-1}$ dobivamo

$$\sum_{i\in I} g_j(x_i) \leq \sum_{i\in I} g_j(xx_i) + n\delta \qquad \forall j \in \{1, 2, \ldots, m\}.$$

Sada primjenom **(1)** slijedi

$$\frac{\sum_{i\in I} g_j(xx_i)}{\sum_{i\in I} g_j(x_i)} \geq 1 - \frac{n\delta}{\sum_{i\in I} g_j(x_i)} \geq 1-\varepsilon \qquad \forall j \in \{1,2,\ldots,m\}.$$

Dakle, za svako $x \in A$ i za svako $j \in \{1,2,\ldots,m\}$ vrijedi

$$1-\varepsilon \leq \frac{\sum_{i\in I} g_j(xx_i)}{\sum_{i\in I} g_j(x_i)} \leq 1+\varepsilon.$$

Time je lema dokazana.

Lema 1.3.9. *Neka su $f, g \in L \setminus \{0\}$ takvi da je $f \sim g$ i neka je $\varepsilon > 0$. Tada postoje $y_1, y_2, \ldots, y_n$ iz G takvi da vrijedi*

$$\left|\frac{\sum_{i=1}^n g(y_i)}{\sum_{i=1}^n f(y_i)} - 1\right| \leq \varepsilon.$$

Dokaz: Budući da je $f \sim g$, postoje $m \in \mathbb{N}$, $f_1, f_2, \ldots, f_m \in L$ i $z_1, z_2, \ldots, z_m \in G$ takvi da vrijedi

$$f(x) = \sum_{j=1}^m f_j(x), \qquad g(x) = \sum_{j=1}^m f_j(xz_j), \qquad x \in G.$$

Stavimo $A = \{z_2^{-1}, z_2^{-1}, \ldots, z_m^{-1}\}$ i $g_j = \check{f}_j$ za $j = 1,2,\ldots,m$. Prema lemi 1.3.8. postoje $n \in \mathbb{N}$ i $x_1, x_2, \ldots, x_n \in G$ takvi da je

$$\left|\frac{\sum_{i=1}^n g_j(xx_i)}{\sum_{i=1}^n g_j(x_i)} - 1\right| \leq \varepsilon \qquad \forall j \in \{1,2,\ldots,m\}, \quad \forall x \in A,$$

tj.

$$\left|\frac{\sum_{i=1}^n g_j\left(z_k^{-1}x_i\right)}{\sum_{i=1}^n g_j(x_i)} - 1\right| \leq \varepsilon \qquad \forall j,k \in \{1,2,\ldots,m\},$$

tj.

$$\left|\frac{\sum_{i=1}^n f_j\left(x_i^{-1}z_k\right)}{\sum_{i=1}^n f_j\left(x_i^{-1}\right)} - 1\right| \leq \varepsilon \qquad \forall j,k \in \{1,2,\ldots,m\}.$$

Stavimo $y_i = x_i^{-1}$. Tada za $k = j$ dobivamo

$$\left|\frac{\sum_{i=1}^n f_j(y_iz_j)}{\sum_{i=1}^n f_j(y_i)} - 1\right| \leq \varepsilon \qquad \forall j \in \{1,2,\ldots,m\}.$$

Stavimo sada

$$\alpha_j = \sum_{i=1}^n f_j(y_iz_j), \qquad \beta_j = \sum_{i=1}^n f_j(y_i), \qquad j = 1,2,\ldots,m$$

Tada imamo

$$\left|\frac{\alpha_j}{\beta_j} - 1\right| \leq \varepsilon \qquad \forall j \in \{1,2,\ldots,m\},$$

pa slijedi

$$\left|\sum_{j=1}^m \alpha_j - \sum_{j=1}^m \beta_j\right| \leq \sum_{j=1}^m |\alpha_j - \beta_j| \leq \varepsilon \cdot \sum_{j=1}^m \beta_j.$$

To znači da je

$$\varepsilon \geq \left|\frac{\sum_{j=1}^m \alpha_j}{\sum_{j=1}^m \beta_j} - 1\right| = \left|\frac{\sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n f_j(y_iz_j)}{\sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n f_j(y_i)} - 1\right| = \left|\frac{\sum_{i=1}^n g(y_i)}{\sum_{i=1}^n f(y_i)} - 1\right|.$$

Dokaz propozicije 1.3.2. Neka su $f \in L \setminus \{0\}$ i $\alpha \in \mathbb{R}_+$ i pretpostavimo da je $f \succeq \alpha f$. Prema tvrdnji (*b*) leme 1.3.4. tada postoji $g \in L$ takva da je $f \sim g$ i $g(x) \geq \alpha f(x)$ $\forall x \in G$. Neka je $\varepsilon > 0$. Prema lemi 1.3.9. postoje $n \in \mathbb{N}$ i $y_1, y_2, \ldots, y_n \in G$ takvi da vrijedi

$$\frac{\sum_{i=1}^n g(y_i)}{\sum_{i=1}^n f(y_i)} \leq 1 + \varepsilon.$$

Zbog $g \geq \alpha f$ lijeva strana gornje nejednakosti je $\geq \alpha$. Dakle, vrijedi $\alpha \leq 1 + \varepsilon$, a kako je $\varepsilon > 0$ bio proizvoljan, zaključujemo da je $\alpha \leq 1$.

Lema 1.3.10. *Neka su $f \in L$ i $\varepsilon > 0$. Tada postoji okolina $U = U^{-1}$ od e takva da za svaku funkciju $g \in L \setminus \{0\}$ sa $\mathit{Supp}\, g \subseteq U$ postoje $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}_+$ i $y_1, y_2, \ldots, y_n \in G$ sa svojstvima*

$$\left| f(x) - \sum_{i=1}^n \alpha_i g(xy_i) \right| \leq \varepsilon \quad \forall x \in G \qquad i \qquad \mathit{Supp}\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \rho_{y_i} g \right) \subseteq U^2 \cdot \mathit{Supp}\, f.$$

Dokaz: Neka je

$$M = \|f\|_\infty = \max\{|f(x)|;\ x \in G\}.$$

Neka su $\delta > 0$ i $\eta > 0$ takvi da je $M\eta + \delta(1+\eta) \leq \varepsilon$. Neka je $U = U^{-1}$ kompaktna okolina od e takva da vrijedi

$$xy^{-1} \in U \qquad \Longrightarrow \qquad |f(x) - f(y)| \leq \delta.$$

Stavimo $A = U^2 \cdot \mathit{Supp}\, f$; to je kompaktan podskup od G. Neka je $g \in L \setminus \{0\}$ takva da je $\mathit{Supp}\, g \subseteq U$. Po lemi 1.3.8. postoje $n \in \mathbb{N}$ i $y_1, y_2, \ldots, y_n \in G$ takvi da je

$$\left| \frac{\sum_{i=1}^n g(xy_i)}{\sum_{i=1}^n g(y_i)} - 1 \right| \leq \eta \qquad \forall x \in A.$$

Za $x \in A$ je tada

$$\left| f(x) - \frac{\sum_{i=1}^n f(x) g(xy_i)}{\sum_{i=1}^n g(y_i)} \right| \leq f(x)\eta.$$

Ako je $x \in A$ takav da je $g(xy_i) \neq 0$, tada je $xy_i \in U$, pa je $\left| f(x) - f\left(y_i^{-1}\right) \right| \leq \delta$. Prema tome, za $x \in A$ vrijedi

$$\left| \frac{\sum_{i=1}^n f(x) g(xy_i)}{\sum_{i=1}^n g(y_i)} - \frac{\sum_{i=1}^n f\left(y_i^{-1}\right) g(xy_i)}{\sum_{i=1}^n g(y_i)} \right| \leq$$

$$\leq \frac{\sum_{i=1}^n \left| f(x) - f\left(y_i^{-1}\right) \right| g(xy_i)}{\sum_{i=1}^n g(y_i)} \leq \delta \frac{\sum_{i=1}^n g(xy_i)}{\sum_{i=1}^n g(y_i)} \leq \delta(1+\eta).$$

Stavimo sada

$$\alpha_i = \frac{f\left(y_i^{-1}\right)}{\sum_{j=1}^n g(y_j)}, \qquad 1 \leq i \leq n.$$

Pomoću dobivenih nejednakosti za $x \in A$ izvodimo

$$\left| f(x) - \sum_{i=1}^n \alpha_i g(xy_i) \right| \leq \left| f(x) - \frac{\sum_{i=1}^n f(x) g(xy_i)}{\sum_{i=1}^n g(y_i)} \right| + \left| \frac{\sum_{i=1}^n f(x) g(xy_i)}{\sum_{i=1}^n g(y_i)} - \frac{\sum_{i=1}^n f\left(y_i^{-1}\right) g(xy_i)}{\sum_{i=1}^n g(y_i)} \right| \leq$$

$$\leq f(x)\eta + \delta(1+\eta) \leq M\eta + \delta(1+\eta) \leq \varepsilon.$$

Time smo dokazali da vrijedi

$$\left| f(x) - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i g(xy_i) \right| \leq \varepsilon \qquad \forall x \in A.$$

Ustanovit ćemo sada da ako uklonimo neke indekse $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ nejednakost i dalje vrijedi za $x \in A$ ali i za $x \in G \setminus A$. Usput ćemo dobiti i tvrdnju o nosačima.

Stavimo

$$I = \{1, 2, \ldots, n\}, \qquad J = \{i \in I;\ \mathit{Supp}\ (\rho_{y_i} g) \subseteq A\}.$$

Neka je $i \in I \setminus J$. Tada postoji $y \in \mathit{Supp}\ (\rho_{y_i} g)$ takav da $y \notin A = U^2 \cdot \mathit{Supp}\, f$. Imamo

$$\mathit{Supp}\ (\rho_{y_i} g) = (\mathit{Supp}\ )y_i^{-1} \subseteq U y_i^{-1}.$$

Dakle, imamo redom

$$y \in U y_i^{-1} \quad \Longrightarrow \quad y_i \in y^{-1} U \quad \Longrightarrow \quad \mathit{Supp}\ (\rho_{y_i} g) \subseteq U y_i^{-1} \subseteq U \left(y^{-1} U \right)^{-1} = U^2 y.$$

Budući da je $U = U^{-1}$, iz $y \notin U^2 \cdot \mathit{Supp}\, f$ i iz dobivene inkluzije slijedi $\mathit{Supp}\ (\rho_{y_i} g) \cap \mathit{Supp}\, f = \emptyset$. Stoga imamo za $x \in \mathit{Supp}\, f$

$$\left| f(x) - \sum_{j \in J} \alpha_j g(xy_j) \right| = \left| f(x) - \sum_{i \in I} \alpha_i g(xy_i) \right| \leq \varepsilon;$$

za $x \in A \setminus \mathit{Supp}\, f$ je

$$\left| f(x) - \sum_{j \in J} \alpha_j g(xy_j) \right| = \sum_{j \in J} \alpha_j g(xy_j) \leq \sum_{i \in I} \alpha_i g(xy_i) = \left| f(x) - \sum_{i \in I} \alpha_i g(xy_i) \right| \leq \varepsilon;$$

napokon, za $x \in G \setminus A$ je $f(x) = g(xy_j) = 0\ \forall j \in J$ pa je opet

$$\left| f(x) - \sum_{j \in J} \alpha_j g(xy_j) \right| \leq \varepsilon.$$

Time smo dokazali da vrijedi

$$\left| f(x) - \sum_{j \in J} \alpha_j g(xy_j) \right| \leq \varepsilon \qquad \forall x \in G,$$

a izbor skupa J je bio takav da vrijedi i $\mathit{Supp}\ \left(\rho_{y_j} g\right) \subseteq U^2 \cdot \mathit{Supp}\, f\ \forall j \in J$.

Lema 1.3.11. *Neka su $f, g \in L$ takve da je $f \neq g$ i $f(x) \geq g(x)\ \forall x \in G$. Tada postoji $f' \in L$ takva da je $f' \sim f$ i da vrijedi $f'(x) > g(x)\ \forall x \in \mathit{Supp}\, g$.*

Dokaz: Neka je $h = f - g \in L \setminus \{0\}$ i $U = \{x \in G;\ h(x) > 0\}$. U je neprazan otvoren skup (s kompaktnim zatvaračem). Neka su $n \in \mathbb{N}$ i $x_1, x_2, \ldots, x_n \in G$ takvi da je

$$\mathit{Supp}\, g \subseteq U x_1^{-1} \cup U x_2^{-1} \cup \cdots \cup U x_n^{-1}.$$

Stavimo

$$h_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \rho_{x_i} h \qquad \text{i} \qquad f' = g + h_1.$$

Budući da je $f = g + h$ i $h_1 \sim h$, vrijedi $f' \sim f$. Nadalje, za $x \in Supp\, g$ je $x \in Ux_i^{-1}$ za neki i pa imamo redom

$$xx_i \in U \quad \Longrightarrow \quad h(xx_i) > 0 \quad \Longrightarrow \quad h_1(x) > 0 \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = g(x) + h_1(x) > g(x).$$

Dokaz propozicije 1.3.3. Neka su $f, g \in L$, $g \neq 0$ i $\varepsilon > 0$. Treba dokazati da postoji $\alpha \in \mathbb{R}_+$ takav da vrijedi $(1+\varepsilon)f \succeq \alpha g \succeq f$. Ako je $f = 0$ možemo uzeti $\alpha = 0$. Pretpostavimo da je $f \neq 0$. Tada po lemi 1.3.11. postoji $h \in L$ takva da je $h \sim \left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right) f$ i da je $h(x) > f(x)$ $\forall x \in Supp\, f$. Po istoj lemi postoji $k \in L$ takva da je $k \sim \frac{2+2\varepsilon}{2+\varepsilon} h$ i da je $k(x) > h(x)$ $\forall x \in Supp\, h$. Tada je

$$k \sim \frac{2+2\varepsilon}{2+\varepsilon}\left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right) f = (1+\varepsilon) f.$$

Dakle, vrijedi

$$h \sim \left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right) f, \quad k \sim (1+\varepsilon) f, \quad h(x) > f(x) \ \ \forall x \in Supp\, f, \quad k(x) > h(x) \ \ \forall x \in Supp\, h.$$

Tada je $Supp\, h$ sadržan u nutrini $Int(Supp\, k)$ nosača od k, pa postoji kompaktan skup K takav da je

$$Supp\, h \subseteq Int(K) \subseteq K \subseteq Int(Supp\, k).$$

Neka je $U = U^{-1}$ okolina od e takva da je $U^2 \cdot Supp\, h \subseteq K$. Odaberimo $\varphi \in L$ tako da je $\varphi \sim g$ i $Supp\, \varphi \subseteq U$; to možemo zbog leme 1.3.3. Stavimo

$$\delta_1 = \min\{h(x) - f(x);\ x \in Supp\, f\} > 0, \quad \delta_2 = \min\{k(x) - h(x);\ x \in K\} > 0, \quad \delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}.$$

Prema lemi 1.3.10. postoje $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}_+$ i $y_1, y_2, \ldots, y_n \in G$ takvi da vrijedi

$$\left| h(x) - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi(xy_i) \right| \leq \delta \qquad \forall x \in G$$

i

$$Supp\ (\rho_{y_i}\varphi) \subseteq U^2 \cdot Supp\, h \subseteq K, \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Za $x \in Supp\, f$ je tada

$$f(x) \leq h(x) - \delta \leq \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi(xy_i) \qquad \Longrightarrow \qquad f(x) \leq \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi(xy_i) \quad \forall x \in G.$$

Nadalje, za $x \in K$ je

$$k(x) \geq h(x) + \delta \geq \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi(xy_i).$$

Međutim,

$$Supp\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \rho_{y_i} \varphi\right) \subseteq K,$$

pa slijedi

$$k(x) \geq \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi(xy_i) \qquad \forall x \in G.$$

Dakle je

$$f \leq \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \rho_{y_i} \varphi \leq k.$$

Ali za $\alpha = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$ je

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \rho_{y_i} \varphi \sim \alpha \varphi \sim \alpha\ g.$$

Dakle,

$$(1+\varepsilon) \succeq \alpha g \succeq f.$$

1.4 Modularna funkcija

Neka je μ desna Haarova mjera na lokalno kompaktnoj grupi G. Tada za $x, y \in G$ vrijedi $\rho_x(\lambda_y \mu) = \lambda_y(\rho_x \mu) = \lambda_y \mu$, dakle, i $\lambda_y \mu$ je desna Haarova mjera na G. Prema teoremu 1.3.1. postoji $\Delta(y) > 0$ takav da je $\lambda_y \mu = \Delta(y)\mu$. Na taj način smo došli do funkcije $\Delta : G \to \mathbb{R}_+^* = \langle 0, +\infty \rangle$ takve da je

$$\lambda_y \mu = \Delta(y)\mu \qquad \forall y \in G. \qquad\qquad (*)$$

Kako je svaka desnoinvarijantna mjera proporcionalna desnoj Haarovoj mjeri, $(*)$ vrijedi za svaku desnoinvarijantnu mjeru μ.

Neka je sada μ lijevoinvarijantna mjera na G. Tada je mjera $\check{\mu}$ desnoinvarijantna, pa vrijedi

$$\lambda_y \check{\mu} = \Delta(y)\check{\mu} \qquad \forall y \in G.$$

Međutim, $\lambda_y \check{\mu} = (\rho_y \mu)\check{}$. Zaključujemo da vrijedi

$$\rho_y \mu = \Delta(y)\mu \qquad \forall y \in G \qquad\qquad (**)$$

za svaku lijevoinvarijatnu mjeru μ.

Funkcija $\Delta = \Delta_G$ zove se **modularna funkcija** grupe G.

Propozicija 1.4.1. *Modularna funkcija lokalno kompaktne grupe G je neprekidni homomorfizam grupe G u multiplikativnu grupu $\mathbb{R}_+^*$.*

Dokaz: Neka je μ desna Haarova mjera na G. Tada je za $x, y \in G$

$$\Delta(xy)\mu = \lambda_{xy}\mu = \lambda_x(\lambda_y \mu) = \Delta(y)\lambda_x \mu = \Delta(x)\Delta(y)\mu.$$

Dakle, $\Delta(xy) = \Delta(x)\Delta(y)$, odnosno, $\Delta : G \to \mathbb{R}_+^*$ je homomorfizam.

Neka je sada $f \in L = C_0^+(G)$ takva da je $\mu(f) = 1$. Imamo tada

$$\Delta(x) = \Delta(x)\mu(f) = (\lambda_x \mu)(f) = \mu(\lambda_{x^{-1}} f), \qquad x \in G.$$

Neka je točka $x_0 \in G$ proizvoljno odabrana. Neka je V kompaktna okolina od e i neka je $K = Supp\, \varphi$. Neka je $M > 0$ takav da vrijedi

$$g \in C_0(G), \quad Supp\, g \subseteq x_0^{-1} V K \qquad \Longrightarrow \qquad |\mu(g)| \leq M \cdot \|g\|_\infty.$$

Neka je $\varepsilon > 0$. Odaberimo okolinu $U = U^{-1} \subseteq V$ jedinice e takvu da vrijedi

$$xy^{-1} \in U \qquad \Longrightarrow \qquad |f(x) - f(y)| \leq \frac{\varepsilon}{M}$$

(naime, funkcija f je uniformno neprekidna jer ima kompaktan nosač). Za $x \in Ux_0$ tada imamo

$$Supp\ (\lambda_{x^{-1}} f) = \{y \in G;\ xy \in K\} = x^{-1}K \subseteq (Ux_0)^{-1}K = x_0^{-1}UK \subseteq x_0^{-1}VK.$$

Očito je $x_0 \in Ux_0$, pa je, posebno, $Supp\,(\lambda_{x_0^{-1}} f) \subseteq x_0^{-1}VK$. Dakle,

$$x \in Ux_0 \qquad \Longrightarrow \qquad Supp\left(\lambda_{x^{-1}} f - \lambda_{X_0^{-1}} f\right) \subseteq x_0^{-1}VK.$$

Odavde slijedi

$$x \in Ux_0 \qquad \Longrightarrow \qquad |\Delta(x) - \Delta(x_0)| = |\mu(\lambda_{x^{-1}} f - \lambda_{x_0^{-1}} f)| \leq M \cdot \|\lambda_{x^{-1}} f - \lambda_{x_0^{-1}} f\|_\infty.$$

Za svaki $y \in G$ i $x \in Ux_0$ je $(xy)(x_0y)^{-1} = xx_0^{-1} \in U$, pa vrijedi

$$|(\lambda_{x^{-1}} f)(y) - (\lambda_{x_0^{-1}} f)(y)| = |f(xy) - f(x_0y)| \leq \frac{\varepsilon}{M}.$$

Odatle je $|\lambda_{x^{-1}} f - \lambda_{x_0^{-1}} f\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{M}$. Prema tome, vrijedi

$$x \in Ux_0 \qquad \Longrightarrow \qquad |\Delta(x) - \Delta(x_0)| \leq \varepsilon.$$

Time je dokazano da je funkcija Δ neprekidna u svakoj točki $x_0 \in G$.

Propozicija 1.4.2. (a) *Za svaku desnoinvarijantnu mjeru μ na G vrijedi*

$$\check{\mu} = \Delta\mu.$$

(b) *Za svaku lijevoinvarijantnu mjeru μ na G vrijedi*

$$\check{\mu} = \frac{1}{\Delta}\mu.$$

Dokaz: (a) Dokaz je dovoljno provesti za desnu Haarovu mjeru μ. Tada je $\Delta\mu$ pozitivna mjera na G. Za $x \in G$ imamo

$$\lambda_x(\Delta\mu) = \lambda_x\Delta \cdot \lambda_x\mu = \Delta(x)\lambda_x\Delta \cdot \mu.$$

Nadalje,

$$(\lambda_x\Delta)(y) = \Delta(x^{-1}y) = \Delta(x)^{-1}\Delta(y) \qquad \Longrightarrow \qquad \lambda_x\Delta = \frac{1}{\Delta(x)}\Delta.$$

Iz gornje dvije jednakosti slijedi

$$\lambda_x(\Delta\mu) = \Delta(x) \cdot \frac{1}{\Delta(x)} \cdot \Delta \cdot \mu = \Delta\mu \qquad \forall x \in G.$$

Dakle, $\Delta\mu$ je lijeva Haarova mjera na G. No i $\check{\mu}$ je lijeva Haarova mjera na G. Stoga postoji $\alpha > 0$ takav da je $\check{\mu} = \alpha\Delta\mu$. Sada je

$$\mu = (\check{\mu})\check{} = (\alpha\Delta\mu)\check{} = \alpha\check{\Delta}\check{\mu} = \alpha\frac{1}{\Delta}\alpha\Delta\mu = \alpha^2\mu.$$

Odatle slijedi $\alpha^2 = 1$, dakle, $\alpha = 1$. Time je dokazano $\check{\mu} = \Delta\mu$.

(*b*) Ako je μ lijevoinvarijantna mjera, onda je $\check{\mu}$ desnoinvarijantna mjera, pa iz (*a*) slijedi

$$(\check{\mu})\check{} = \Delta\check{\mu} \qquad \Longrightarrow \qquad \check{\mu} = (\Delta\check{\mu})\check{} = \check{\Delta}\mu = \frac{1}{\Delta}\mu.$$

Kad god imamo mjeru μ na G i $f \in C_0(G)$ uobičajen je integralni zapis

$$\mu(f) = \int_G f(x)\mathrm{d}\mu(x).$$

Uz integralni zapis svojstva desnoinvarijantne mjere μ izgledaju ovako

$$\int_G f(xy)\mathrm{d}\mu(x) = \int_G f(x)\mathrm{d}\mu(x), \qquad \int_G f(yx)\mathrm{d}\mu(x) = \Delta(y)\int_G f(x)\mathrm{d}\mu(x),$$

$$\int_G f\left(x^{-1}\right)\mathrm{d}\mu(x) = \int_G \Delta(x)f(x)\mathrm{d}\mu(x).$$

Slično, svojstva lijevoinvarijantne mjere μ uz integralni zapis su

$$\int_G f(yx)\mathrm{d}\mu(x) = \int_G f(x)\mathrm{d}\mu(x), \qquad \int_G f(xy)\mathrm{d}\mu(x) = \Delta\left(y^{-1}\right)\int_G f(x)\mathrm{d}\mu(x),$$

$$\int_G f\left(x^{-1}\right)\mathrm{d}\mu(x) = \int_G \Delta\left(x^{-1}\right)f(x)\mathrm{d}\mu(x).$$

Ako se radi o desnoj, odnosno lijevoj, Haarovoj mjeri, ove jednakosti vrijede ne samo za $f \in C_0(G)$ nego i za sve integrabilne funkcije f. U stvari, u trećim jednakostima funkcija $\check{f}$ treba biti integrabilna, a to u slučaju kad je modularna funkcija Δ netrivijalna (tj. $\Delta \not\equiv 1$) nije ekvivalentno integrabilnosti funkcije f.

Lokalno kompaktna grupa G zove se **unimodularna** ako je $\Delta_G \equiv 1$, tj. ako je svaka lijevoinvarijantna mjera ujedno i desnoinvarijantna, odnosno, ako postoji netrivijalna biinvarijantna mjera.

Propozicija 1.4.3. *Ako je grupa G diskretna, komutativna ili kompaktna ona je unimodularna.*

Dokaz: Pretpostavimo da je grupa G diskretna. Tada je $C_0(G)$ skup svih funkcija $f : G \to \mathbb{C}$ s konačnim nosačem. Dakle, postoji biinvarijatna Haarova mjera:

$$\mu(f) = \sum_{x \in Supp\, f} f(x), \qquad f \in C_0(G).$$

Slijedi da je G unimodularna.

Ako je G komutativna, lijevoinvarijantnost i desnoinvarijantnost je jedno te isto, dakle i u tom slučaju je G unimodularna.

Napokon, neka je G kompaktna grupa. Tada je područje vrijednosti neprekidne modularne funkcije Δ_G kompaktna podgrupa multiplikativne grupe $\mathbb{R}_+^*$. No takva je samo $\{1\}$, dakle, $\Delta_G \equiv 1$, pa je G unimodularna.

Napomenimo još da je **komutatorska podgrupa** G' grupe G, a to je podgrupa generirana svim elementima oblika $xyx^{-1}y^{-1}$, $x, y \in G$, sadržana u jezgri homomorfizma $\Delta_G : G \to \mathbb{R}_+^*$.

1.5 Grupovna algebra

Neka je G lokalno kompaktna grupa i neka je na G fiksirana neka desna Haarova mjera μ. Neka je Δ modularna funkcija grupe G. Za $f, g \in C_0(G)$ definiramo funkcije $f * g : G \to \mathbb{C}$ i $f^* : G \to \mathbb{C}$ relacijama

$$(f*g)(x) = \int_G f(xy^{-1})g(y)\mathrm{d}\mu(y) = \int_G f(y^{-1})g(yx)\mathrm{d}\mu(y) =$$

$$= \int_G f(xy)g(y^{-1})\mathrm{d}\check{\mu}(y) = \int_G f(y)g(y^{-1}x)\mathrm{d}\check{\mu}(y),$$

$$f^*(x) = \Delta(x^{-1})\overline{f(x^{-1})}, \quad \text{tj.} \quad f^* = (\Delta\overline{f})\check{}.$$

Propozicija 1.5.1. *(a) Za $f, g \in C_0(G)$ funkcije $f * g$ i f^* su neprekidne i vrijedi $Supp\,(f*g) \subseteq (Supp\,f)(Supp\,g)$ i $Supp\,f^* = (Supp\,f)^{-1}$. Dakle, $f*g, f^* \in C_0(G)$.*

(b) $C_0(G)$ s množenjem $(f, g) \mapsto f * g$ je asocijativna algebra.

(c) Preslikavanje $f \mapsto f^*$ je antilinearno, $f^{**} = f$ i $(f*g)^* = g^* * f^*$. Drugim riječima, $C_0(G)$ je $*-$algebra.

(d) Za bilo koje $f, g \in C_0(G)$ i $x \in G$ vrijede jednakosti

$$\lambda_x(f*g) = (\lambda_x f) * g, \qquad \rho_x(f*g) = f * \rho_x g, \qquad (\lambda_x f)^* * (\lambda_x g) = f^* * g,$$

$$\lambda_x f^* = \Delta(x)(\rho_x f)^*, \qquad \rho_x f^* = \Delta(x^{-1})(\lambda_x f)^*.$$

Dokaz: (*a*) Tvrdnje $f^* \in C_0(G)$ i $Supp\,f^* = (Supp\,f)^{-1}$ su očigledne.
Stavimo

$$A = Int(Supp\,f) = \{x \in G;\ f(x) \neq 0\} \qquad \text{i} \qquad B = Int(Supp\,g) = \{x \in G;\ g(x) \neq 0\}.$$

Ako je $x \in G$ takav da je $(f*g)(x) \neq 0$ onda postoji $y \in B$ takav da je $xy^{-1} \in A$. Tada je $x = (xy^{-1})y \in AB$. Slijedi

$$Supp\,(f*g) \subseteq Cl(AB) \subseteq Cl(A)Cl(B) = (Supp\,f)(Supp\,g).$$

Ostaje još da dokažemo neprekidnost funkcije $f * g$. Neka je $x_0 \in G$ i $\varepsilon > 0$. Stavimo $K = Supp\,g$. Neka je $N = N^{-1}$ kompaktna okolina od e i neka je $M > 0$ takav da vrijedi

$$h \in C_0(G), \quad Supp\,h \subseteq KNx_0^{-1} \qquad \Longrightarrow \qquad |\mu(h)| \leq M \cdot \|h\|_\infty.$$

Izaberimo sada okolinu $U \subseteq N$ jedinice e takvu da vrijedi

$$z^{-1}y \in U \qquad \Longrightarrow \qquad |g(y) - g(z)| \leq \frac{\varepsilon}{M \cdot \|f\|_\infty}.$$

Za $x \in x_0U$ sada imamo

$$|(f*g)(x) - (f*g)(x_0)| = \left| \int_G g(yx)f(y^{-1})\mathrm{d}\mu(y) - \int_G g(yx_0)f(y^{-1})\mathrm{d}\mu(y) \right| \leq$$

$$\int_G |g(yx) - g(yx_0)| \cdot |f(y^{-1})|\mathrm{d}\mu(y) \leq \|f\|_\infty \mu(|\rho_x g - \rho_{x_0} g|).$$

Kako su $x, x_0 \in x_0U \subseteq x_0N$, to je $Supp\,\rho_x g = Kx^{-1} \subseteq KNx_0^{-1}$ i $Supp\,\rho_{x_0} g \subseteq KNx_0^{-1}$ pa je i $Supp\,|\rho_x g - \rho_{x_0} g| \subseteq KNx_0^{-1}$. Prema tome je

$$\mu(|\rho_x g - \rho_{x_0} g|) \leq M \cdot \|\rho_x g - \rho_{x_0} g\|_\infty, \qquad x \in x_0U.$$

Dakle, za $x \in x_0U$ imamo

$$|(f * g)(x) - (f * g)(x_0)| \leq M \cdot \|f\|_\infty \cdot \|\rho_x g - \rho_{x_0} g\|_\infty.$$

Ocijenimo još normu razlike pomaka funkcije g. Ako je $x \in x_0U$, onda za bilo koji $y \in G$ vrijedi $(yx_0)^{-1}(yx) = x_0^{-1}x \in U$, dakle,

$$|(\rho_x g)(y) - (\rho_{x_0} g)(y)| = |g(yx) - g(yx_0)| \leq \frac{\varepsilon}{M \cdot \|f\|_\infty}.$$

Odatle je

$$\|\rho_x g - \rho_{x_0} g\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{M \cdot \|f\|_\infty}.$$

Prema tome,

$$x \in x_0U \qquad \Longrightarrow \qquad |(f * g)(x) - (f * g)(x_0)| \leq M \cdot \|f\|_\infty \cdot \frac{\varepsilon}{M \cdot \|f\|_\infty} = \varepsilon,$$

i time dokazana neprekidnost funkcije $f * g$ u bilo kojoj točki $x_0 \in G$.

(b) Očito je preslikavanje $(f, g) \mapsto f * g$ bilinearno. Treba još dokazati asocijativnost:

$$[(f * g) * h](x) = \int_G (f * g)(xy^{-1})h(y)\mathrm{d}\mu(y) = \int_G \left[\int_G f(z^{-1})g(zxy^{-1}h(y)\mathrm{d}\mu(z)\right]\mathrm{d}\mu(y) =$$

$$= \int_G \left[\int_G f(z^{-1})g(zxy^{-1}h(y)\mathrm{d}\mu(y)\right]\mathrm{d}\mu(z) = \int_G f(z^{-1})(g * h)(zx)\mathrm{d}\mu(z) = [f * (g * h)](x).$$

(c) Očito je preslikavanje $f \mapsto f^*$ antilinearno i involutivno $f^{**} = f$. Nadalje,

$$(g^* * f^*)(x) = \int_G g^*(xy^{-1})f^*(y)\mathrm{d}\mu(y) = \int_G \Delta(y^{-1})\overline{f(y^{-1})}\Delta(yx^{-1})\overline{g(yx^{-1})}\mathrm{d}\mu(y) =$$

$$= \Delta(x^{-1})\overline{\int_G f(y^{-1})g(yx^{-1})\mathrm{d}\mu(y)} = \Delta(x^{-1})\overline{(f^*)(x^{-1})} = (f * g)^*(x).$$

(d) Imamo redom

$$[\lambda_x(f * g)](y) = (f * g)(x^{-1}y) = \int_G f(x^{-1}yz^{-1})g(z)\mathrm{d}\mu(z) =$$

$$= \int_G (\lambda_x f)(yz^{-1})g(z)\mathrm{d}\mu(z) = (\lambda_x f * g)(y);$$

$$[\rho_x(f * g)](y) = (f * g)(yx) = \int_G f(z^{-1})g(zyx)\mathrm{d}(z) =$$

$$= \int_G f(z^{-1})(\rho_x g)(zy)\mathrm{d}\mu(z) = (f * \rho_x g)(y);$$

$$[(\lambda_x f)^* * (\lambda_x g)](y) = \int_G (\lambda_x f)^*(yz^{-1})(\lambda_x g)(z)\mathrm{d}\mu(z) = \int_G \Delta(zy^{-1})\overline{f(x^{-1}zy^{-1})}g(x^{-1}z)\mathrm{d}\mu(z) =$$

$$= \Delta(x^{-1}) \int_G \Delta(xzy^{-1}\overline{f(zy^{-1})}g(z)\mathrm{d}\mu(z) = \int_G f^*(yz^{-1})g(z)\mathrm{d}\mu(z) = (f^* * g)(y);$$

$$(\lambda_x f^*)(y) = f^*(x^{-1}y) = \Delta(y^{-1}x)\overline{f(y^{-1}x)} = \Delta(x)\Delta(y^{-1})\overline{(\rho_x f)(y^{-1})} = \Delta(x)(\rho_x f)^*(y);$$

primjenom posljednje dokazane jednakosti na funkciju f^* umjesto funkcije f dobivamo:

$$\rho_x f^* = [(\rho_x f^*)^*]^* = \left[\Delta(x^{-1})\lambda_x f^{**}\right]^* = \Delta(x^{-1})(\lambda_x f)^*.$$

Za $f \in C_0(G)$ definiramo

$$\|f\|_1 = \int_G |f(x)|\mathrm{d}\check{\mu}(x) = \int_G |f(x^{-1})|\mathrm{d}\mu(x).$$

Tada je $\|\cdot\|_1$ norma na prostoru $C_0(G)$.

Propozicija 1.5.2. *Za $f, g \in C_0(G)$ vrijedi*

$$\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1\|g\|_1, \qquad \|f^*\|_1 = \|f\|_1.$$

Drugim riječima, $C_0(G)$ je normirana $*-$algebra.

Dokaz: Tvrdnje se dokazuju direktnim računom:

$$\|f * g\|_1 = \int_G |(f * g)(x^{-1})|\mathrm{d}\mu(x) = \int_G \left| \int_G f(y^{-1})g(yx^{-1})\mathrm{d}\mu(y) \right| \mathrm{d}\mu(x) \leq$$

$$\leq \int_G \int_G |f(y^{-1})||g(yx^{-1})|\mathrm{d}\mu(y)\mathrm{d}\mu(x) = \int_G \int_G |f(y^{-1})||g(x^{-1})|\mathrm{d}\mu(y)\mathrm{d}\mu(x) = \|f\|_1\|g\|_1;$$

$$\|f^*\|_1 = \int_G |f^*(x^{-1})|\mathrm{d}\mu(x) = \int_G \Delta(x)|f(x)|\mathrm{d}\mu(x) = \int_G |f(x^{-1})|\mathrm{d}\mu(x) = \|f\|_1.$$

Popunjenjem algebre $C_0(G)$ po normi $\|\cdot\|_1$ dobivamo Banachovu $*-$algebru. Kao Banachov prostor to se popunjenje identificira s prostorom $L_1(G, \check{\mu})$ svih klasa $\check{\mu}-$integrabilnih funkcija na G; pri tome se dvije funkcije nalaze u istoj klasi ako i samo ako se podudaraju svuda osim na skupu mjere nula. Pokazuje se da se množenje i involucija mogu za predstavnike elemenata od $L_1(G, \check{\mu})$ pisati pomoću istih formula kao i za elemente $C_0(G)$ s tim da se jednakosti interpretiraju kao jednakosti "*gotovo svuda*" (odnosno, svuda osim na skupu mjere 0). Algebra $C_0(G)$, pa ni $L_1(G, \check{\mu})$, općenito nema jedinicu. Može se pokazati da $C_0(G)$ (odnosno, $L_1(G, \check{\mu})$) ima jedinicu ako i samo ako je grupa G diskretna. Tada je Haarova mjera $\mu = \check{\mu}$ zadana sa

$$\mu(f) = \sum_{x \in G} f(x) = \sum_{x \in Supp\, f} f(x),$$

a jedinica je

$$1(x) = \begin{cases} 1 & \text{ako je } x = e \\ \\ 0 & \text{ako je } x \neq e. \end{cases}$$

U mnogim važnim situacijama nepostojanje jedinice može nadomjestiti postojanje tzv. *aproksimativne jedinice*:

Propozicija 1.5.3. *Postoji hiperniz $(\varphi_i)_{i\in I}$ u $C_0^+(G)$ takav da za svaku funkciju $f \in C_0(G)$ vrijedi*

$$\lim_{i\in I} \|\varphi_i * f - f\|_1 = \lim_{i\in I} \|f * \varphi_i - f\|_1 = 0.$$

Dokaz: Neka je I usmjeren skup svih kompaktnih okolina jedinice e uređen inkluzijom:

$$i \geq j \qquad \Longleftrightarrow \qquad i \subseteq j.$$

Za svaki $i \in I$ izaberimo $\varphi_i \in C_0^+(G)$ takvu da je $Supp\,\varphi_i \subseteq i$ i $\check{\mu}(\varphi_i) = 1$. Pokazat ćemo da taj hiperniz funkcija ima tražena svojstva.

Neka je $f \in C_0(G)$ i $i \in I$. Tada je

$$\|\varphi_i * f - f\|_1 = \int_G |(\varphi_i * f)(x^{-1}) - f(x^{-1})| \mathrm{d}\mu(x) =$$

$$= \int_G \left| \int_G \varphi_i(y^{-1}) f(yx^{-1}) \mathrm{d}\mu(y) - f(x^{-1}) \int_G \varphi_i(y^{-1}) \mathrm{d}\mu(y) \right| \mathrm{d}\mu(x) =$$

$$= \int_G \left| \int_G \varphi_i(y^{-1})[f(yx^{-1}) - f(x^{-1})] \mathrm{d}\mu(y) \right| \mathrm{d}\mu(x) \leq \int_G \varphi_i(y^{-1}) \int_G |f(yx^{-1}) - f(x^{-1})| \mathrm{d}\mu(x) \mathrm{d}\mu(y).$$

Neka je $\varepsilon > 0$. Izaberimo kompaktnu okolinu $N = N^{-1}$ od e. Neka je $M > 0$ takav da vrijedi:

$$g \in C_0(G), \quad Supp\, g \subseteq K^{-1}N \qquad \Longrightarrow \qquad |\mu(g)| \leq M \cdot \|g\|_\infty.$$

Neka je $i_0 \in I$ takav da je $i_0 \subseteq N$ i da vrijedi:

$$a, b \in G, \quad ab^{-1} \in i_0 \qquad \Longrightarrow \qquad |f(b) - f(a)| \leq \frac{\varepsilon}{M}.$$

Neka je sada $i \in I$, $i \geq i_0$ (tj. $i \subseteq i_0$). Neka je $y \in G$ takav da je $\varphi_i(y^{-1}) \neq 0$. Tada je $y \in i^{-1} \subseteq i_0^{-1} \subseteq N^{-1} \subseteq N$. Stoga je

$$Supp\,(\lambda_{y^{-1}} f)\check{} = (Supp\,\lambda_{y^{-1}} f)^{-1} = (y^{-1}K)^{-1} = K^{-1}y \subseteq K^{-1}N \quad \text{i} \quad Supp\,\check{f} = K^{-1} \subseteq K^{-1}N.$$

Dakle, za takav element y je

$$\int_G |f(yx^{-1}) - f(x^{-1})| \mathrm{d}\mu(x) = \mu(|(\lambda_{y^{-1}} f)\check{} - \check{f}|) \leq M \cdot \|(\lambda_{y^{-1}} f)\check{} - \check{f}\|_\infty.$$

S druge strane, za takav y i za svaki $x \in G$ je $x^{-1}(yx^{-1})^{-1} = y^{-1} \in i \subseteq i_0$, pa vrijedi

$$|(\lambda_{y^{-1}} f)\check{}(x) - \check{f}(x)| = |f(yx^{-1}) - f(x^{-1})| \leq \frac{\varepsilon}{M}.$$

Slijedi

$$\|(\lambda_{y^{-1}} f)\check{} - \check{f}\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{M} \qquad \Longrightarrow \qquad \int_G |f(yx^{-1}) - f(x^{-1})| \mathrm{d}\mu(x) \leq M \cdot \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon.$$

Odatle i iz prve nejednakosti dobivamo

$$\|\varphi_i * f - f\|_1 \leq \varepsilon \int_g \varphi_i(y^{-1}) \mathrm{d}\mu(y) = \varepsilon \qquad \forall i \geq i_0.$$

Time je dokazano da vrijedi

$$\lim_{i\in I} \|\varphi_i * f - f\|_1 = 0.$$

Sasvim analogno dokazuje se da vrijedi i

$$\lim_{i\in I} \|f * \varphi_i - f\|_1 = 0.$$

Poglavlje 2

Unitarne reprezentacije

2.1 Definicije i osnovna svojstva

Unitarna reprezentacija lokalno kompaktne grupe G na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$ je homomorfizam π grupe G u grupu $U(\mathcal{H})$ unitarnih operatora na $\mathcal{H}$ takav da je preslikavanje $(x, \xi) \mapsto \pi(x)\xi$ sa $G \times \mathcal{H}$ u $\mathcal{H}$ neprekidno. Sljedeće dvije leme pokazuju da je ovo svojstvo neprekidnosti ekvivalentno prividno mnogo slabijim svojstvima.

Lema 2.1.1. *Neka $\pi : G \to U(\mathcal{H})$ homomorfizam grupa takav da je za svako $\xi \in \mathcal{H}$ funkcija $x \mapsto Re\,(\pi(x)\xi|\xi)$ neprekidna u jedinici e grupe G. Tada je π unitarna reprezentacija.*

Dokaz: Neka je $\xi_0 \in \mathcal{H}$, $x_0 \in G$ i $\varepsilon > 0$. Vrijednost funkcije $x \mapsto \mathrm{Re}\,(\pi(x)\pi(x_0)\xi_0|\pi(x_0)\xi_0)$ u točki e jednaka je $\|\xi_0\|^2$. Po pretpostavci ta je funkcija neprekidna u točki e pa postoji okolina U od e takva da vrijedi

$$a \in U \qquad \Longrightarrow \qquad \|\xi_0\|^2 - \mathrm{Re}\,(\pi(a)\pi(x_0)\xi_0|\pi(x_0)\xi_0) \leq \frac{\varepsilon^2}{8}.$$

Za $x \in Ux_0$ (tj. $xx_0^{-1} \in U$) i za $\xi \in \mathcal{H}$ takav da je $\|\xi - \xi_0\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ imamo redom

$$\|\pi(x)\xi - \pi(x_0)\xi_0\| \leq \|\pi(x)\xi - \pi(x)\xi_0\| + \|\pi(x)\xi_0 - \pi(x_0)\xi_0\| =$$
$$= \|\xi - \xi_0\| + \sqrt{(\pi(x)\xi_0|\pi(x)\xi_0) + (\pi(x_0)\xi_0|\pi(x_0)\xi_0) - 2\mathrm{Re}\,(\pi(x)\xi_0|\pi(x_0)\xi_0)} =$$
$$= \|\xi - \xi_0\| + \sqrt{2[\|\xi_0\|^2 - \mathrm{Re}\,(\pi(xx_0^{-1})\pi(x_0)\xi_0|\pi(x_0)\xi_0)]} \leq \frac{\varepsilon}{2} + \sqrt{2\frac{\varepsilon^2}{8}} = \varepsilon.$$

Time je dokazano da je preslikavanje $(x, \xi) \mapsto \pi(x)\xi$ neprekidno u svakoj točki $(x_0, \xi_0) \in G \times \mathcal{H}$.

Lema 2.1.2. *Neka je $\pi : G \to U(\mathcal{H})$ homomorfizam. Pretpostavimo da je preslikavanje $x \mapsto (\pi(x)\xi|\eta)$ sa G u $\mathbb{C}$ neprekidno u točki e za svaka dva vektora ξ i η iz totalnog podskupa $S \subseteq \mathcal{H}$ (tj. iz skupa koji razapinje gust potprostor od $\mathcal{H}$). Tada je π unitarna reprezentacija.*

Dokaz: Stavimo

$$\mathcal{H}_1 = \{\xi \in \mathcal{H};\ \text{preslikavanje } x \mapsto (\pi(x)\xi|\eta) \text{ je neprekidno u točki } e \text{ za svaki } \eta \in S\}.$$

Očito je $\mathcal{H}_1$ potprostor od $\mathcal{H}$ i po pretpostavci $S \subseteq \mathcal{H}_1$. Kako je S totalan, zaključujemo da je potprostor $\mathcal{H}_1$ gust u prostoru $\mathcal{H}$. Za $\xi \in \mathcal{H}$, $\xi_1, \eta \in \mathcal{H}_1$ i $x \in G$ vrijedi

$$|(\pi(x)\xi|\eta) - (\xi|\eta)| \leq |(\pi(x)(\xi - \xi_1)|\eta)| + |(\pi(x)\xi_1|\eta) - (\xi_1|\eta)| + |(\xi_1 - \xi|\eta)| \leq$$
$$\leq 2\|\xi - \xi_1\| \cdot \|\eta\| + |(\pi(x)\xi_1|\eta) - (\xi_1|\eta)|.$$

Neka je $\xi \in \mathcal{H}$, $\eta \in S$, $\eta \neq 0$, i $\varepsilon > 0$. Izaberimo $\xi_1 \in \mathcal{H}_1$ tako da bude $\|\xi - \xi_1\| \leq \dfrac{\varepsilon}{3\|\eta\|}$. Nadalje, neka je U okolina od e u G takva da vrijedi

$$x \in U \qquad \Longrightarrow \qquad |(\pi(x)\xi_1|\eta) - (\xi_1|\eta)| \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Odatle i iz prethodne nejednakosti slijedi

$$x \in U \qquad \Longrightarrow \qquad |(\pi(x)\xi|\eta) - (\xi|\eta)| \leq 2\frac{\varepsilon}{3\|\eta\|} \cdot \|\eta\| + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Dakle, preslikavanje $x \mapsto (\pi(x)\xi|\eta)$ je neprekidno u točki e. Budući da je vektor $\eta \in S \setminus \{0\}$ bio proizvoljan, zaključujemo da je $\xi \in \mathcal{H}_1$. Time je dokazano da je $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}$, odnosno da je preslikavanje $x \mapsto (\pi(x)\xi|\eta)$ neprekidno u točki e za svaki $\xi \in \mathcal{H}$ i za svaki $\eta \in S$.

Stavimo sada

$$\mathcal{H}_2 = \{\eta \in \mathcal{H};\ \text{preslikavanje } x \mapsto (\pi(x)\xi|\eta) \text{ je neprekidno u točki } e \text{ za svaki } \xi \in \mathcal{H}\}.$$

Sasvim analogno nalazimo da je i $\mathcal{H}_2 = \mathcal{H}$.

Prema tome, preslikavanje $x \mapsto (\pi(x)\xi|\eta)$ je neprekidno u točki e za svaka dva vektora $\xi, \eta \in \mathcal{H}$. Sada tvrdnja leme slijedi iz prethodne leme.

Neka je π unitarna reprezentacija od G na $\mathcal{H}$. Zatvoren potprostor $\mathcal{K}$ od $\mathcal{H}$ zove se $\pi-$**invarijantan potprostor** ako je on invarijantan s obzirom na sve operatore $\pi(x)$, $x \in G$. U tom slučaju je $\pi(x)\mathcal{K} = \mathcal{K}\ \forall x \in G$ i restrikcija $\pi_{\mathcal{K}}(x) = \pi(x)|\mathcal{K}$ je unitaran operator na Hilbertovom prostoru $\mathcal{K}$. Na taj način dobivamo unitarnu reprezentaciju $\pi_{\ cK}$ grupe G na Hilbertovom prostoru $\mathcal{K}$. Ta se reprezentacija zove **subreprezentacija** reprezentacije π. Kako je $\pi(x)^* = \pi(x^{-1})\ \forall x \in G$, to je i ortogonalni komplement $\mathcal{L} = \mathcal{K}^{\perp}$ $\pi-$invarijantan potprostor. Tada je $\mathcal{H} = \mathcal{K} \oplus \mathcal{L}$; pišemo $\pi = \pi_{\mathcal{K}} \oplus \pi_{\mathcal{L}}$ i kažemo da je π ortogonalna suma svojih subreprezentacija $\pi_{\mathcal{K}}$ i $\pi_{\mathcal{L}}$. Općenitije, ako je $(\mathcal{H}_i)_{i\in I}$ familija zatvorenih $\pi-$invarijantnih potprostora takvih da je

$$\bigoplus_{i\in I} \mathcal{H}_i = \mathcal{H}$$

(tj. potprostori $\mathcal{H}_i$ su međusobno ortogonalni i suma im je gust potprostor od $\mathcal{H}$) onda pišemo

$$\pi = \bigoplus_{i\in I} \pi_{\mathcal{H}_i}.$$

Uzmimo sada da je $(\mathcal{H}_i)_{i\in I}$ familija Hilbertovih prostora i neka je za svako $i \in I$ zadana unitarna reprezentacija π_i od G na $\mathcal{H}_i$. Formirajmo ortogonalnu sumu tih Hilbertovih prostora:

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{i\in I} \mathcal{H}_i = \left\{(\xi_i)_{i\in I};\ \xi_i \in \mathcal{H}_i\ \forall i \in I,\ \sum_{i\in I} \|\xi\|^2 < +\infty\right\}.$$

To je Hilberov prostor sa skalarnim produktom

$$((\xi_i)_{i\in I}\,|(\eta_i)_{i\in I}\,) = \sum_{i\in I} (\xi_i|\eta_i)_i,$$

gdje je sa $(\,\cdot\,|\,\cdot\,)_i$ označen skalarni produkt na prostoru $\mathcal{H}_i$. Nadalje, za svaki $x \in G$ možemo definirati $\pi(x) \in U(\mathcal{H})$ sa

$$\pi(x)(\xi_i)_{i\in I} = (\pi_i(x)\xi_i)_{i\in I}.$$

Tada je π homomorfizam sa G u $U(\mathcal{H})$. Nadalje, ako identificiramo svaki $\mathcal{H}_j$, $j \in I$, sa zatvorenim potprostorom od $\mathcal{H}$ tako da stavimo

$$\xi = (\xi_i)_{i\in I} \qquad \text{uz} \quad \xi_j = \xi \quad \text{i} \quad \xi_i = 0 \quad \text{za} \quad i \neq j,$$

onda je unija tih potprostora

$$S = \bigcup_{i\in I} \mathcal{H}_i$$

totalan skup u $\mathcal{H}$. Za $\xi \in S$ je preslikavanje $x \mapsto \pi(x)\xi$ očito neprekidno. Iz leme 2.1.2. slijedi da je π unitarna reprezentacija grupe G. I tu reprezentaciju zovemo ortogonalnom sumom reprezentacija π_i i pišemo

$$\pi = \bigoplus_{i\in I} \pi_i.$$

Neka je i dalje π unitarna reprezentacija lokalno kompaktne grupe G na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$. Vektor $\xi \in \mathcal{H}$ zove se **ciklički vektor** za reprezentaciju π ako je skup $\pi(G)\xi$ totalan u $\mathcal{H}$, odnosno ako mu je ortogonalni komplement $\{0\}$:

$$\eta \in \mathcal{H}, \quad (\pi(x)\xi|\eta) = 0 \quad \forall x \in G \qquad \Longrightarrow \qquad \eta = 0.$$

Ekvivalentno: $\mathcal{H}$ je jedini $\pi-$invarijantan zatvoren potprostor od $\mathcal{H}$ koji sadrži ξ. Ako postoji ciklički vektor, π se zove **ciklička reprezentacija**.

Reprezentacija π se zove **ireducibilna** ako je svaki vektor $\xi \in \mathcal{H} \setminus \{0\}$ ciklički za π. Ekvivalentno: $\mathcal{H}$ i $\{0\}$ su jedini zatvoreni $\pi-$invarijantni potprostori od $\mathcal{H}$. Ako reprezentacija π nije ireducibilna, ona se zove **reducibilna**. To znači da postoji zatvoren $\pi-$invarijantan potprostor $\mathcal{K}$ od $\mathcal{H}$ takav da je $\mathcal{K} \neq \{0\}$ i $\mathcal{K} \neq \mathcal{H}$.

Propozicija 2.1.1. *Svaka unitarna reprezentacija je ortogonalna suma cikličkih subreprezentacija.*

Dokaz: Neka je $\mathcal{P}(\mathcal{H})$ partitivni skup od $\mathcal{H}$ i neka je $\mathcal{F}$ skup svih podskupova F od $\mathcal{P}(\mathcal{H})$ sa sljedeća dva svojstva:

(a) Svaki $\mathcal{K} \in F$ je zatvoren $\pi-$invarijantan potprostor od $\mathcal{H}$ takav da je subreprezentacija $\pi_{\mathcal{K}}$ ciklička.

(b) Ako su $\mathcal{K}, \mathcal{L} \in F$ i $\mathcal{K} \neq \mathcal{L}$ onda je $\mathcal{K} \perp \mathcal{L}$.

Skup $\mathcal{F}$ nasljeđuje iz $\mathcal{P}(\mathcal{H})$ (parcijalni) uređaj inkluzijom. Lako se provjeri da je $\mathcal{F}$ s tim uređajem induktivan (tj. da zadovoljava uvjet Zornove leme). Po Zornovoj lemi $\mathcal{F}$ ima bar jedan maksimalan element F. Stavimo

$$\mathcal{H}_1 = \bigoplus_{\mathcal{K}\in F} \mathcal{K}.$$

Pretpostavimo da je $\mathcal{H}_1 \neq \mathcal{H}$. Neka je $\xi \in \mathcal{H}_1^{\perp} \setminus \{0\}$. Kako je $\mathcal{H}_1$ $\pi-$invarijantan, to je i $\mathcal{H}_1^{\perp}$ $\pi-$invarijantan. Dakle, $\pi(G)\xi \subseteq \mathcal{H}_1^{\perp}$. Neka je $\mathcal{L}$ zatvarač potprostora razapetog sa $\pi(G)\xi$. Tada je $\mathcal{L} \neq \{0\}$ zatvoren $\pi-$invarijantan potprostor od $\mathcal{H}$ i subreprezentacija $\pi_{\mathcal{L}}$ je ciklička (ξ joj je ciklički vektor). Nadalje, $\mathcal{L} \perp \mathcal{K} \ \ \forall \mathcal{K} \in F$, pa je $F \cup \{\mathcal{L}\} \in \mathcal{F}$ i $F \cup \{\mathcal{L}\} \supsetneq F$. No to je u suprotnosti s maksimalnošću F u $\mathcal{F}$. Ova kontradikcija pokazuje da je pretpostavka $\mathcal{H}_1 \neq \mathcal{H}$ bila pogrešna. Zaključujemo da je $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}$, dakle,

$$\pi = \bigoplus_{\mathcal{K}\in F} \pi_{\mathcal{K}}.$$

Neka su π_1 i π_2 unitarne reprezentacije od G na Hilbertovim prostorima $\mathcal{H}_1$ i $\mathcal{H}_2$. Operator $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ se zove **operator preplitanja** reprezentacije π_1 s reprezentacijom π_2 ako vrijedi

$$T\pi_1(x) = \pi_2(x)T \qquad \forall x \in G.$$

Skup svih takvih operatora preplitanja označavat ćemo sa $Hom_G(\pi_1, \pi_2)$. To je potprostor vektorskog prostora $\mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$, koji je zatvoren u odnosu na topologiju norme, ali i u odnosu na jaku topologiju, pa čak i u odnosu na slabu topologiju. Adjungiranje $T \mapsto T^*$ je bijekcija sa $Hom_G(\pi_1, \pi_2)$ na $Hom_G(\pi_2, \pi_1)$. Nadalje, za tri reprezentacije π_1, π_2 i π_3 je

$$Hom_G(\pi_2, \pi_3) Hom_G(\pi_1, \pi_2) \subseteq Hom_G(\pi_1, \pi_3).$$

Za unitarnu reprezentaciju π na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$ pišemo $Hom_G(\pi) = Hom_G(\pi, \pi)$. To je slabo zatvorena $*-$podalgebra od $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ s jedinicom; dakle, $Hom_G(\pi)$ je von Nemannova algebra. Ta se algebra zove **komutant reprezentacije** π.

Za reprezentacije π_1 i π_2 kažemo da su **ekvivalentne** ako postoji izometrički izomorfizam $U : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ takav da je

$$U\pi_1(x)U^{-1} = \pi_2(x) \qquad \forall x \in G.$$

Posebno je tada $U \in Hom_G(\pi_1, \pi_2)$. Pišemo $\pi_1 \sim \pi_2$. Očito je $\sim$ relacija ekvivalencije.

Propozicija 2.1.2. *Neka su π_1 i π_2 unitarne reprezentacije od G na Hilbertovim prostorima $\mathcal{H}_1$ i $\mathcal{H}_2$ i pretpostavimo da je π_1 ireducibilna. Sljedeće su tri svojstva međusobno ekvivalentna:*

(*a*) $Hom_G(\pi_1, \pi_2) \neq \{0\}$.

(*b*) $Hom_G(\pi_2, \pi_1) \neq \{0\}$.

(*c*) *Reprezentacija π_1 ekvivalentna je nekoj subreprezentaciji reprezentacije π_2.*

Dokaz: Ekvivalencija $(a) \iff (b)$ neposredna je posljedica jednakosti $Hom_G(\pi_2, \pi_1) = Hom_G(\pi_1, \pi_2)^*$.

Dokažimo da iz (b) slijedi (c). Neka je $T \in Hom_G(\pi_2, \pi_1) \setminus \{0\}$. Tada je $T^*T \in Hom_G(\pi_2)$ i to je pozitivan operator na $\mathcal{H}_2$. Stoga postoji jedinstven pozitivan operator $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_2)$ takav da je $A^2 = T^*T$. Nadalje, A komutira sa svakim ograničenim operatorom s kojim komutira T^*T. Posebno, $A \in Hom_G(\pi_2)$.

$T\mathcal{H}_2$ je potprostor od $\mathcal{H}_1$ koji je π_1-invarijantan:

$$\pi_1(x)T\xi = T\pi_2(x)\xi.$$

Njegov zatvarač $Cl(T\mathcal{H}_2)$ je zatvoren π_1-invarijantan potprostor od $\mathcal{H}_1$ koji je različit od $\{0\}$ jer jue $T \neq 0$. Kako je reprezentacija π_1 ireducibilna, slijedi $Cl(T\mathcal{H}_2) = \mathcal{H}_1$. Dakle, potprostor $T\mathcal{H}_2$ je gust u Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}_1$. Definiramo sada linearan operator $U : T\mathcal{H}_2 \to \mathcal{H}_2$ sa

$$U(T\xi) = A\xi, \qquad \xi \in \mathcal{H}_2.$$

Za svaki $\xi \in \mathcal{H}_2$ imamo

$$\|A\xi\|^2 = (A\xi|A\xi) = (A^2\xi|\xi) = (T^*T\xi|\xi) = (T\xi|T\xi) = \|T\xi\|^2.$$

To pokazuje da je operator U dobro definiran i da je to izometrija sa $T\mathcal{H}_2$ u $\mathcal{H}_2$. Kako je potprostor $T\mathcal{H}_2$ gust u $\mathcal{H}_1$, U se proširuje do linearne izometrije sa $\mathcal{H}_1$ u $\mathcal{H}_2$, koju ćemo i dalje označavati sa U. Sada za $x \in G$ i $\xi \in \mathcal{H}_2$ imamo

$$\pi_2(x)UT\xi = \pi_2(x)A\xi = A\pi_2(x)\xi = UT\pi_2(x)\xi = U\pi_1(x)T\xi.$$

Odatle je

$$\pi_2(x)U = U\pi_1(x) \qquad \forall x \in G \qquad \Longrightarrow \qquad U \in Hom_G(\pi_1, \pi_2).$$

Kako je U izometrija sa $\mathcal{H}_1$ u $\mathcal{H}_2$, to je $U \neq 0$. Stavimo $\mathcal{K} = U\mathcal{H}_1$. Tada je $\mathcal{K}$ zatvoren potprostor od $\mathcal{H}_2$ koji je π_2-invarijantan. Tada je U izometrički izomorfizam sa $\mathcal{H}_1$ na $\mathcal{K}$ koji ostvaruje ekvivalenciju reprezentacije π_1 sa subreprezentacijom $(\pi_2)_{\mathcal{K}}$.

Napokon, implikacija $(c) \implies (a)$ je očigledna.

Korolar 2.1.1. *Ako su π_1 i π_2 ireducibilne reprezentacije, one su ekvivalentne ako i samo ako je $Hom_G(\pi_1, \pi_2) \neq \{0\}$.*

2.2 Veza reprezentacija grupa i grupovnih algebri

Neka je $\mathcal{A}$ normirana $*-$algebra. Neka je $\mathcal{H}$ Hilbertov prostor. Tada je algebra ograničenih operatora Banachova $*-$algebra s jedinicom. **Reprezentacija algebre** $\mathcal{A}$ na prostoru $\mathcal{H}$ je neprekidno $*-$homomorfizam algebri $\pi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Dakle, π je neprekidano linearno preslikavanje za koje vrijedi

$$\pi(ab) = \pi(a)\pi(b) \quad \text{i} \quad \pi(a^*) = \pi(a)^* \qquad \forall a, b \in \mathcal{A}.$$

Propozicija 2.2.1. *Neka je π reprezentacija od $\mathcal{A}$ na $\mathcal{H}$. Stavimo*

$$\mathcal{H}_0 = \{\xi \in \mathcal{H};\ \pi(a)\xi = 0\ forall a \in \mathcal{A}\}$$

i neka je $\mathcal{H}_1$ zatvarač potprostora razapetog sa $\pi(\mathcal{A})\mathcal{H}$. Tada su potprostori $\mathcal{H}_0$ i $\mathcal{H}_1$ $\pi-$invarijantni i $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1$.

Dokaz: Očito su potprostori $\mathcal{H}_0$ i $\mathcal{H}_1$ $\pi-$invarijantni. Imamo sljedeći slijed ekvivalencija:

$$\xi \in \mathcal{H}_0 \iff \pi(a)\xi = 0\ \forall a \in \mathcal{A} \iff (\pi(a)\xi|\eta) = 0\ \forall a \in \mathcal{A},\ \forall \eta \in \mathcal{H} \iff$$

$$\iff (\xi|\pi(a^*)\eta) = 0\ \forall a \in \mathcal{A};\ \forall \eta \in \mathcal{H} \iff (\xi|\zeta) = 0\ \forall \zeta \in \mathcal{H}_1 \iff \xi \in \mathcal{H}_1^\perp.$$

Time je dokazano da je $\mathcal{H}_0 = \mathcal{H}_1^\perp$ a to upravo tvrdnja propozicije.

Reprezentacija π zove se **nedegenerirana** ako vrijedi

$$\xi \in \mathcal{H}, \quad \pi(a)\xi = 0\ \forall a \in \mathcal{A}Llr \qquad \xi = 0.$$

Uz oznake iz propozicije 2.2.1 to znači da je $\mathcal{H}_0 = \{0\}$, a prema tvrdnji te propozicije to je ekvivalentno sa $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}$. Dakle, reprezentacija π je nedegenerirana ako i samo ako vektori oblika $\pi(a)\xi$, $a \in \mathcal{A}$, $\xi \in \mathcal{H}$, razapinju gusti potprostor od $\mathcal{H}$.

Za reprezentacije normiranih $*-$algebri imamo sasvim analogne definicije pojmova kao za unitarne reprezentacije lokalno kompaktnih grupa (cikličnost, ireducibilnost, ekvivalentnost, preplitanje itd.). Nadalje, lako se vidi da vrijede analogoni propozicija 2.1.1. i 2.1.2. a također i korolara 2.1.1.

Neka je sada π unitarna reprezentacija lokalno kompaktne grupe G na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$. Neka je μ desna Haarova mjera na G. Za $f \in C_0(G)$ (ili $f \in L_1(G, \check{\mu})$) definiramo preslikavanje $B_f : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ sa

$$B_f(\xi, \eta) = \int_G \varphi(f)(\pi(x)\xi|\eta)\mathrm{d}\check{\mu}(x), \qquad \xi, \eta \in \mathcal{H}.$$

Tada je B_f seskvilinearna forma na $\mathcal{H}$. Nadalje,

$$|B_f(\xi, \eta)| = \left| \int_G f(x)(\pi(x)\xi|\eta)\mathrm{d}\check{\mu}(x) \right| \leq \int_G |f(x)| \cdot \|\pi(x)\| \cdot \|\xi\| \cdot \|\eta\| \mathrm{d}\check{\mu}(x).$$

Međutim, $\pi(x)\| = 1\ \ \forall x \in G$ pa slijedi

$$|B_f(\xi, \eta)| \leq \|f\|_1 \cdot \|\xi\| \cdot \|\eta\|, \qquad \xi, \eta \in \mathcal{H}.$$

Dakle, forma B_f je ograničena, odnosno, neprekidna. Prema tome postoji jedinstven $\pi(f) \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ takav da je

$$(\pi(f)\xi|\eta) = B_f(\xi, \eta) = \int_G f(x)(\pi(x)\xi|\eta)\mathrm{d}\check{\mu}(x), \qquad \xi, \eta \in \mathcal{H}$$

i vrijedi

$$\|\pi(f)\| \leq \|f\|_1.$$

Pisat ćemo kraće

$$\pi(f) = \int_G f(x)\pi(x)\mathrm{d}\check{\mu}(x).$$

Primijetimo da je preslikavanje $\pi : C_0(G) \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ (ili $\pi : L_1(G, \check{\mu}) \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$) linearno. Nadalje, za $f, g \in C_0(G)$ (ili $f, g \in L_1(G, \check{\mu})$) imamo

$$\pi(f)\pi(g) = \int_G f(x)\pi(x)\mathrm{d}\check{\mu}(x) \cdot \int_G g(y)\pi(y)\mathrm{d}\check{\mu}(y) = \int_G \int_G f(x)g(y)\pi(xy)\mathrm{d}\check{\mu}(x)\mathrm{d}\check{\mu}(y) =$$

$$= \int_G \int_G f(x)g(x^{-1}y)\pi(y)\mathrm{d}\check{\mu}(x)\mathrm{d}\check{\mu}(y) = \int_G (f * g)(y)\pi(y)\mathrm{d}\check{\mu}(y) = \pi(f * g).$$

Također,

$$\pi(f^*) = \int_G \Delta(x^{-1})\overline{f(x^{-1})}\pi(x)\mathrm{d}\check{\mu}(x) = \int_G \overline{f(x)}\pi(x^{-1})\mathrm{d}\check{\mu}(x) =$$

$$= \int_G \overline{\varphi(x)}\pi(x)^*\mathrm{d}\check{\mu}(x) = \left[\int_G f(x)\pi(x)\mathrm{d}\check{\mu}(x)\right]^* = \pi(f)^*.$$

Prema tome $f \mapsto \pi(f)$ je reprezentacija normirane $*-$algebre $C_0(G)$ (odnosno, Banachove $*-$algebre $L_1(G, \check{\mu})$) na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$.

Dokažimo još da je ta reprezentacija nedegenerirana. Neka je $\xi \in \mathcal{H}$ takav da je $\pi(f)\xi = 0$ $\forall f \in C_0(G)$. Pretpostavimo da je $\xi \neq 0$. Tada je $(\pi(x)\xi|\xi) \neq 0$ za sve x iz neke okoline U jedinice e u G. Neka je $\varphi \in C_0^+(G) \setminus \{0\}$ takva da je $Supp\,\varphi \subseteq U$. Definiramo sada funkciju $f : G \to \mathbb{C}$ sa

$$f(x) = \begin{cases} \varphi(x)\dfrac{|(\pi(x)\xi|\xi)|}{(\pi(x)\xi|\xi)} & \text{ako je } x \in U \\ \\ 0 & \text{ako je } x \in G \setminus U. \end{cases}$$

Tada je $f \in C_0(G)$ i dobivamo

$$0 = (\pi(f)\xi|\xi) = \int_G \varphi(x)\frac{|(\pi(x)\xi|\xi)|}{(\pi(x)\xi|\xi)}(\pi(x)\xi|\xi)\mathrm{d}\check{\mu}(x) = \int_G \varphi(x)|(\pi(x)\xi|\xi)|\mathrm{d}\check{\mu}(x) > 0.$$

Ova kontradikcija pokazuje da je pretpostavka $\xi \neq 0$ bila pogrešna. Dakle, doista se radi o nedegeneriranoj reprezentaciji.

Prema tome, svakoj unitarnoj reprezentaciji π lokalno kompaktne grupe G na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$ pridružena je nedegenerirana reprezentacija normirane $*-$algebre $C_0(G)$ (odnosno, Banachove $*-$algebre $L_1(G, \check{\mu})$) na istom prostoru:

$$\pi(f) = \int_G f(x)\pi(x)\mathrm{d}\check{\mu}(x), \qquad f \in C_0(G) \quad (\text{ili } f \in L_1(G, \check{\mu})).$$

Primijetimo da za $y \in G$ vrijedi

$$\pi(y)\pi(f) = \int_G f(x)\pi(yx)\mathrm{d}\check{\mu}(x) = \int_G f(y^{-1}x)\pi(x)\mathrm{d}\check{\mu}(x) = \pi(\lambda_y f).$$

Ta formula nam je vodilja za obrnutu konstrukciju. Naime, neka je sada π nedegenerirana reprezentacija normirane $*-$algebre $C_0(G)$ na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$. Neka je $\mathcal{H}_1$ potprostor od

$\mathcal{H}$ razapet sa $\pi(C_0(G))\mathcal{H}$, koji je zbog nedegeneriranosti gust u $\mathcal{H}$. Za $x \in G$ definiramo linearan operator $\pi(x) : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_1$ po uzoru na gornju formulu:

$$\pi(x) \sum_{j=1}^{n} \pi(f_j)\xi_j = \sum_{j=1}^{n} \pi(\lambda_x f_j)\xi_j, \qquad f_1, f_2, \dots, f_n \in C_0(G), \quad \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n \in \mathcal{H}.$$

Prije svega, treba dokazati da ova definicija uopće ima smisla, jer jasno je da gornji zapis vektora iz $\mathcal{H}_1$ nije nipošto jedinstven. Primjenom formule u tvrdnji (d) propozicije 1.5.1. imamo redom

$$\left\| \sum_{j=1}^{n} \pi(\lambda_x f_j)\xi_j \right\|^2 = \sum_{i,j=1}^{n} (\pi(\lambda_x f_i)\xi_i | \pi(\lambda_x f_j)\xi_j) = \sum_{i,j=1}^{n} (\pi((\lambda_x f_j)^* * (\lambda_x f_i))\xi_i | \xi_j) =$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} (\pi(f_j^* * f_i)\xi_i | \xi_j) = \sum_{i,j=1}^{n} (\pi(f_i)\xi_i | \pi(f_j)\xi_j) = \left\| \sum_{j=1}^{n} \pi(f_j)\xi_j \right\|^2.$$

Dakle, $\pi(x) : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_1$ je dobro definiran i to je izometrija. Kako je $\mathcal{H}_1$ gust potprostor od $\mathcal{H}$, taj se operator po neprekidnosti jedinstveno produljuje do izometrije sa $\mathcal{H}$ u $\mathcal{H}$ koju ćemo također označavati sa $\pi(x)$. Za $x, y \in G$ imamo za svaku $f \in C_0(G)$ i svaki $\xi \in \mathcal{H}$

$$\pi(x)\pi(y)\pi(f)\xi = \pi(x)\pi(\lambda_y f)\xi = \pi(\lambda_x \lambda_y f)\xi = \pi(\lambda_{xy} f)\xi = \pi(xy)\pi(f)\xi.$$

Dakle je $\pi(x)\pi(y) = \pi(xy)$. Očito je $\pi(e) = I_{\mathcal{H}}$ (jedinični operator na $\mathcal{H}$). Dakle, π je homomorfizam grupe G u unitarnu grupu $U(\mathcal{H})$. Dokažimo još neprekidnost. Neka je

$$\mathcal{H}_1 = \{\xi \in \mathcal{H};\ \text{preslikavanje } x \mapsto \pi(x)\xi \text{ je neprekidno sa } G \text{ u } \mathcal{H} \text{ u točki } e\}.$$

Neka su $\xi \in \mathcal{H}$ i $f \in C_0(G)$. Tada je

$$\|\pi(x)\pi(f)\xi - \pi(f)\xi\| = \|\pi(\lambda_x f - f)\xi\| \leq \|\pi(\lambda_x f - f)\| \cdot \|\xi\|.$$

Linearno preslikavanje π s normirane algebre $\mathbb{C}_0(G)$ u Banachovu algebru $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ je neprekidno, dakle, ograničeno. Stoga postoji $M > 0$ takav da vrijedi

$$\|\pi(g)\| \leq M \cdot \|g\|_1 \qquad \forall g \in C_0(G).$$

Slijedi

$$\|\pi(x)\pi(f)\xi - \pi(f)\xi\| \leq M\|\lambda_x f - f\|_1 \cdot \|\xi\|.$$

Kada x teži prema e onda $\lambda_x f$ teži prema f uniformno, jer je funkcija f uniformno neprekidna. Odatle slijedi da $\|\lambda_x f - f\|_1$ teži k nuli kada x teži prema e. To pokazuje da je $\pi(f)\xi \in \mathcal{H}_1$. Zbog prozvoljnosti f i ξ zaključujemo da je $\pi(C_0(G)) \subseteq \mathcal{H}_1$. Pretpostavka o nedegeneriranosti reprezentacije π znači da je skup $\pi(C_0(G))\mathcal{H}$ totalan u $\mathcal{H}$. Sada iz leme 2.1.2. slijedi da je $x \mapsto \pi(x)$ unitarna reprezentacija od G na $\mathcal{H}$.

Označimo sada sa $\tilde{\pi}$ reprezentaciju normirane $*-$algebre $C_0(G)$ dobivenu iz reprezentacije π grupe G na prije opisani način:

$$\tilde{\pi}(g) = \int_G f(x)\pi(x)\mathrm{d}\check{\mu}(x) \qquad g \in C_0(G).$$

Dokazat ćemo sada da se $\tilde{\pi}$ podudara s polaznom reprezentacijom π od $C_0(G)$. Doista, za $f, g \in C_0(G)$ i $\xi \in \mathcal{H}$ zbog linearnosti preslikavanja $\pi : C_0(G) \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ imamo redom

$$\tilde{\pi}(g)\pi(f)\xi = \int_G g(x)\pi(x)\pi(f)\xi\mathrm{d}\check{\mu}(x) = \int_G \pi(g(x)\lambda_x f)\xi\mathrm{d}\check{\mu}(x).$$

Nadalje, za $y \in G$ imamo

$$(g * f)(y) = \int_G g(x) f(x^{-1}y) \mathrm{d}\check{\mu}(x) = \int_G g(x)(\lambda_x f)(y) \mathrm{d}\check{\mu}(x).$$

Budući da je linearan operator $h \mapsto \pi(h)\xi$ sa $C_0(G)$ u $\mathcal{H}$ neprekidan odavde zbog **??????** slijedi

$$\pi(g * f)\xi = \int_G \pi(g(x)\lambda_x f)\xi \mathrm{d}\check{\mu}(x).$$

Dakle, vrijedi

$$\tilde{\pi}(g)\pi(f)\xi = \pi(g * f)\xi = \pi(g)\pi(f)\xi \qquad \forall f, g \in C_0(G), \quad \forall \xi \in \mathcal{H}.$$

Budući da skup $\pi(C_0(G))\mathcal{H}$ po pretpostavci razapinje gust potprostor od $\mathcal{H}$ zaključujemo da je

$$\tilde{\pi}(g) = \pi(g) \qquad \forall g \in C_0(G).$$

Time je dokazana prva tvrdnja teorema:

Teorem 2.2.1. *Postoji bijekcija između unitarnih reprezentacija od G i nedegeneriranih reprezentacija normirane $*-$algebre $C_0(G)$. Ako odgovarajuće reprezentacije na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$ označimo istim znakom π onda je veza dana sa*

$$\pi(f) = \int_G f(x)\pi(x) d\check{\mu}(x), \qquad \pi(y)\pi(f)\xi = \pi(\lambda_y f)\xi, \qquad f \in C_0(G), \quad y \in G, \quad \xi \in \mathcal{H}$$

Nadalje, vrijedi:

(*a*) *Zatvoren potprostor $\mathcal{H}_1$ od $\mathcal{H}$ je $\pi(G)-$invarijantan ako i samo ako je on $\pi(C_0(G))-$invarijantan.*

(*b*) *π je ireducibilna reprezentacija od G ako i samo ako je π ireducibilna reprezentacija od $C_0(G)$.*

(*c*) *Za $\xi \in \mathcal{H}$ najmanji zatvoren $\pi(G)-$invarijantan potprostor koji sadrži ξ je $Cl(\pi(C_0(G))\xi)$.*

(*d*) *Za reprezentacije π_1 i π_2 na $\mathcal{H}_1$ i $\mathcal{H}_2$ vrijedi $Hom_G(\pi_1, \pi_2) = Hom_{C_0(G)}(\pi_1, \pi_2)$. Tj. operator $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ je preplitanje za reprezentacije od G ako i samo je T preplitanje za reprezentacije od $C_0(G)$.*

(*e*) *π_1 i π_2 su ekvivalentne reprezentacije od G ako i samo ako su π_1 i π_2 ekvivalentne reprezentacije od $C_0(G)$.*

Dokaz: (*a*) Pretpostavimo da je $\mathcal{H}_1$ zatvoren $\pi(G)-$invarijantan potprostor. Neka su $\xi \in \mathcal{H}_1$, $\eta \in \mathcal{H}_1^{\perp}$ i $f \in C_0(G)$. Tada je

$$(\pi(f)\xi|\eta) = \int_G f(x)(\pi(x)\xi|\eta) \mathrm{d}\check{\mu}(x) = 0.$$

Dakle je $\pi(f)\xi \in \mathcal{H}_1^{\perp\perp} = \mathcal{H}_1$. Dakle, $\mathcal{H}_1$ je $\pi(C_0(G))-$invarijantan.

Pretpostavimo sada da je $\mathcal{H}_1$ zatvoren potprostor koji je $\pi(C_0(G))-$invarijantan. Neka je $\xi \in \mathcal{H}_1$, $f \in C_0(G)$ i $x \in G$. Tada je $\pi(x)\pi(f)\xi = \pi(\lambda_x f)\xi \in \mathcal{H}_1$. Prema **??????** subreprezentacija nedegenerirane reprezentacije je nedegenerirana, dakle skup $\pi(C_0(G))\mathcal{H}_1$ je totalan u $\mathcal{H}_1$. Slijedi da je $\mathcal{H}_1$ invarijantan za operator $\pi(x)$ $\forall x \in G$, tj. $\mathcal{H}_1$ je $\pi(G)-$invarijantan.

Tvrdnja (b) slijedi neposredno iz tvrdnje (a).

(c) Neka je $\mathcal{H}_1 = Cl(\pi(C_0(G)\xi)$. Tada je $\mathcal{H}_1$ zatvoren potprostor od $\mathcal{H}$ koji je $\pi(C_0(G))-$invarijantan, dakle i $\pi(G)-$invarijantan. Prema **??????** vrijedi $\xi \in \mathcal{H}_1$. Neka je $\mathcal{H}_2 \subseteq \mathcal{H}_1$ zatvoren $\pi(G)-$invarijantan potprostor i $\xi \in \mathcal{H}_2$. Prema (a) tada je $\mathcal{H}_2$ i $\pi(C_0(G))-$invarijantan potprostor, pa slijedi $\mathcal{H}_1 = Cl(\pi(C_0(G))\xi) \subseteq \mathcal{H}_2$, dakle $\mathcal{H}_2 = \mathcal{H}_1$.

(d) Neka je $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$. Pretpostavimo da je $T\pi(x) = \pi_2(x)T \quad \forall x \in G$. Za $f \in C_0(G)$, $\xi \in \mathcal{H}_1$ i $\eta \in \mathcal{H}_2$ imamo

$$(T\pi(f)\xi|\eta) = (\pi(f)\xi|T^*\eta) = \int_G f(x)(\pi_1(x)\xi|T^*\eta)\mathrm{d}\check{\mu}(x) =$$

$$\int_G f(x)(T\pi_1(x)\xi|\eta)\mathrm{d}\check{\mu}(x) = \int_G f(x)(\pi_2(x)T\xi|\eta)\mathrm{d}\check{\mu}(x) = (\pi_2(f)T\xi|\eta).$$

Odatle je $T\pi_1(f) = \pi_2(f)T \quad \forall f \in C_0(G)$.

Pretpostavimo sada da je $T\pi(f) = \pi_2(f)T \quad \forall f \in C_0(G)$. Za $x \in G$, $f \in C_0(G)$ i $\xi \in \mathcal{H}_1$ tada imamo

$$T\pi_1(x)\pi_1(f)\xi = T\pi_1(\lambda_x f)\xi = \pi_2(\lambda_x f)T\xi = \pi_2(x)\pi_2(f)T\xi = \pi_2(x)T\pi_1(f)\xi.$$

Budući da je $\pi_1(C_0(G))\mathcal{H}_1$ totalan skup u $\mathcal{H}_1$, slijedi $T\pi_1(x) = \pi_2(x)T \quad \forall x \in G$.

Tvrdnja (e) slijedi neposredno iz (d).

Formulama

$$(f|g)_\ell = \int_G f(x)\overline{g(x)}\mathrm{d}\check{\mu}(x) \qquad \text{i} \qquad (f|g)_r = \int_G f(x)\overline{g(x)}\mathrm{d}\mu(x), \qquad f, gt \in C_0(G),$$

definirani su skalarni produkti na vektorskom prostoru $C_0(G)$. Popunjenja su Hilbertovi prostori koja označavamo sa $L_2(G, \check{\mu})$ i $L_2(G, \mu)$.

Za $x \in G$ definiramo linearne operatore $\pi_{ell}(x), \pi_r(x) : C_0(G) \to C_0(G)$ sa

$$\pi_\ell(x)f = \lambda_x f, \qquad \pi_r(x)f = \rho_x f, \qquad f \in C_0(G).$$

Tada je za $x \in G$ i $f, g \in C_0(G)$:

$$(\pi_\ell(x)f|\pi_\ell(x)g)_\ell = \int_G f(x^{-1}y)\overline{g(x^{-1}y)}\mathrm{d}\check{\mu}(x) = \int_G f(y)\overline{g(y)}\mathrm{d}\check{\mu}(x) = (f|g)_\ell,$$

$$(\pi_r(x)f|\pi_r(x)g)_r = \int_G f(yx)\overline{g(yx)}\mathrm{d}\mu(x) = \int_G f(y)\overline{g(y)}\mathrm{d}\mu(x))(f|g)_r.$$

Dakle, $\pi_\ell(x)$ se produljuje do izometrije $L_2(G, \check{\mu})$ u $L_2(G, \check{\mu})$ i $\pi_r(x)$ se produljuje do izometrije $L_2(G, \mu)$ u $L_2(G, \mu)$. Te ćemo operatore također označavati sa π_ℓ i $\pi_r(x)$. Kako je $\lambda_x \circ \lambda_y = \lambda_{xy}$ i $\rho_x \circ \rho_y = \rho_{xy}, \ \ x, y \in G$, vidimo da je $x \mapsto \pi_\ell(x)$ homomorfizam grupe G u grupu $U(L_2(G, \check{\mu})$ i $x \mapsto \pi_r(x)$ je homomorfizam G u $U(L_2(G, \mu)$.

Norme na Hilbertovim prostorima $L_2(G, \check{\mu}$ i $L_2(G, \mu)$ označavamo sa $\|\cdot\|_\ell$ i $\|\cdot\|_r$. Za $f \in C_0(G)$ i $x \in G$ imamo

$$\|\pi_\ell f - f\|_\ell^2 = \int_G |\lambda_x f(y) - f(y)|^2 \mathrm{d}\check{\mu}(x).$$

Budući da prema **??????** $\lambda_x f - f$ uniformno teži prema nuli kada x teži prema e, slijedi da $\|\pi_\ell f - f\|_\ell$ teži prema nuli kada x teži prema e. Kako je $C_0(G)$ gusto u $L_2(G, \check{\mu})$, po lemi 2.1.2. slijedi da je π_ℓ unitarna reprezentacija grupe G na Hilbertovom prostoru $L_2(G, \check{\mu})$. Sasvim analogno zaključujemo da je π_r unitarna reprezentacija G na Hilbertovom prostoru $L_2(G,\mu)$. π_ℓ se zove **lijeva regularna reprezentacija** grupe G, a π_r je **desna regularna reprezentacija** grupe G.

Neka je $T : C_0(G) \to C_0(G)$ bijekcija zadana sa $Tf = \check{f}$. Tada je

$$\|Tf\|_r^2 = \int_G |\check{f}(x)|^2 \mathrm{d}\mu(x) = \int_G |f(x)|^2 \mathrm{d}\check{\mu}(x) = \|f\|_\ell^2.$$

Dakle, T se produljuje do izometričkog izomorfizma sa $L_2(G,\check{\mu})$ na $L_2(G,\mu)$. Za $x \in G$ i $f \in C_0(G)$ imamo

$$\pi_r(x)Tf = \rho_x \check{f} = (\lambda_x f)\check{} = T\pi_\ell(x)f.$$

Dakle, T ostvaruje ekvivalenciju reprezentacije π_ℓ s reprezentacijom π_r.

Ustanovimo još kako djeluju pripadne reprezentacije grupovne algebre. Neka su $f, g \in C_0(G)$ i $x \in G$. Imamo

$$[\pi_\ell(f)g](x) = \int_G f(y)(\pi_\ell(y)g)(x)\mathrm{d}\check{\mu}(x) = \int_G f(y)g(y^{-1}x)\mathrm{d}\check{\mu}(x) = (f\check{g})(x),$$

$$[\pi_r(f)g](x) = \int_G f(y)g(xy)\mathrm{d}\check{\mu}(x) = \int_G g(xy)\check{f}(y^{-1})\mathrm{d}\check{\mu}(x) = (g * \check{f})(x).$$

Dakle,

$$\pi_\ell(f)g = f * g, \qquad \pi_r(f)g = g * \check{f}, \qquad f, g \in C_0(G).$$

Propozicija 2.2.2. *π_ℓ i π_r su vjerne reprezentacije od $C_0(G)$, tj.*

$$\pi_\ell(f) = 0 \implies f = 0 \qquad i \qquad \pi_r(f) = 0 \implies f = 0.$$

Dokaz: Neka je $f \in C_0(G)$ takva da je $\pi_r(f) = 0$. Tada je posebno $\pi_r(f)\overline{f} = 0$, pa imamo redom

$$0 = (\pi_r(f)\overline{f})(e) = (\overline{f} * \check{f})(e) = \int_G \overline{f(y)}\check{f}(y^{-1})\mathrm{d}\check{\mu}(y) = \int_G |f(y)|^2 \mathrm{d}\check{\mu}(y),$$

pa slijedi $f = 0$.

Za $f \in C_0(G)$ stavimo

$$\|f\| = \sup\{\|\pi(f)\|;\ \pi \text{ unitarna reprezentacija od } G\}.$$

Budući da za svaku unitarnu reprezentaciju π od G za svaku $f \in C_0(G)$ vrijedi $\|\pi(f)\| \le \|f\|_1$, slijedi da je

$$\|f\| \le \|f\|_1 \qquad \forall f \in C_0(G).$$

Dokažimo da je $\|\cdot\|$ norma na prostoru $C_0(G)$. Prije svega, očito je $\|f\| \ge 0$, a zbog propozicije 2.2.2. iz $\|f\| = 0$ slijedi $f = 0$. Relacije $\|\alpha f\| = |\alpha|\|f\|$ i $\|f + g\| \le \|f\| + \|g\|$ slijede neposredno iz definicije. Štoviše, za svaku reprezentaciju π je $\pi(f * g) = \pi(f)\pi(g)$ i $\pi(f^*) = \pi(f)^*$. Slijedi $\|\pi(f * g)\| \le \|\pi(f)\| \cdot \|\pi(g)\|$ i $\pi(f^*)\| = \|\pi(f)\|$, pa dobivamo $\|f * g\| \le \|f\| \cdot \|g\|$ i $\|f^*\| = \|f\|$. Dakle, uz normu $\|\cdot\|$ $C_0(G)$ je normirana $*-$algebra. Norma $\|\cdot\|$ ima jedno važno svojstvo, koje nema norma $\|\cdot\|_1$:

$$\|f^* * f\| = \sup_\pi \|\pi(f)^*\pi(f)\| = \sup_\pi \|\pi(f)\|^2 = \|f\|^2.$$

Banachova $*-$algebra $\mathcal{A}$ u kojoj vrijedi $\|a^*a\| = \|a\|^2 \ \ \forall a \in \mathcal{A}$ zove se C^*-**algebra**.

Neka je $C^*(G)$ popunjenje od $C_0(G)$ po normi $\|\cdot\|$. Tada je $C^*(G)$ C^*-algebra; ona se zove **grupovna** C^*-**algebra** od G ili C^*-**algebra grupe** G.

Neka je π unitarna reprezentacija grupe G i pripadna nedegenerirana reprezentacija od $C_0(G)$. Tada je $\pi(f)\| \leq \|f\| \quad \forall f \in C_0(G)$. Dakle, π se jedinstveno proširuje do nedegenerirane reprezentacije od $C^*(G)$ (nedegenerirana je jer njena slika sadrži $\pi(C_0(G))$). Obrnuto, neka je π nedegenerirana reprezentacija od $C^*(G)$. Kako je $\|f\| \leq \|f\|_1 \quad \forall f \in C_0(G)$, restrikcija $\pi|C_0(G)$ je reprezentacija normirane $*-$algebre $(C_0(G), \| \cdot \|_1)$. Ona je nedegenerirana jer je $C_0(G)$ gusto u $C^*(G)$. Odatle i iz teorema 2.2.1. neposredno slijedi:

Teorem 2.2.2. *Bijekcija između unitarnih reprezentacija lokalno kompaktne grupe G i nedegeneriranih reprezentacija njene C^*-algebre $C^*(G)$ ima sljedeća svojstva:*

(a) *Zatvoren potprostor $\mathcal{H}_1$ od $\mathcal{H}$ je $\pi(G)-$invarijantan ako i samo ako je $\mathcal{H}_1$ $\pi(C^*(G))-$invarijantan.*

(b) *π je ireducibilna reprezentacija od G ako i samo ako je π ireducibilna reprezentacija od $C^*(G)$.*

(c) *Za $\xi \in \mathcal{H}$ najmanji zatvoren $\pi(G)-$invarijantan potprostor koji sadrži ξ je $Cl(\pi(C^*(G)))$.*

(d) *$Hom_G(\pi_1, \pi_2) = Hom_{C^*(G)}(\pi_1, \pi_2)$.*

(e) *π_1 i π_2 su ekvivalentne reprezentacije od G ako i samo ako su π_1 i π_2 ekvivalentne reprezentacije od $C^*(G)$.*

Poglavlje 3

Komutativne C^*-algebre

3.1 Spektar elementa Banachove algebre

Neka je $\mathcal{A}$ Banachova algebra s jedinicom 1. Sa $G(\mathcal{A})$ označavat ćemo grupu svih invertibilnih elemenata u $\mathcal{A}$.

Propozicija 3.1.1. *Za svaki $x \in \mathcal{A}$ niz $(\|x^n\|^{\frac{1}{n}})_{n\in\mathbb{N}}$ je konvergentan i*

$$\lim_{n\to\infty} \|x^n\|^{\frac{1}{n}} = \inf\{\|x^n\|^{\frac{1}{n}};\ n \in \mathbb{N}\}.$$

Dokaz: Ako je $x^n = 0$ za neko n, tvrdnja je trivijalna. Pretpostavimo da je $x^n \neq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Fiksirajmo $m \in \mathbb{N}$. Za svaki $n \in \mathbb{N}$ neka su $p(n) \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ i $q(n) \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$ jedinstveni takvi da je

$$n = p(n)m + q(n).$$

Imamo

$$\|x^n\|^{\frac{1}{n}} = \|x^{p(n)m+q(n)}\|^{\frac{1}{n}} \leq \|x^{p(n)m}\|^{\frac{1}{n}}\|x^{q(n)}\|^{\frac{1}{n}} \leq \|x^m\|^{\frac{p(n)}{n}}\|x\|^{\frac{q(n)}{n}}.$$

Budući da je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p(n)}{n} = \frac{1}{m} \qquad \text{i} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{q(n)}{n} = 0,$$

slijedi

$$\limsup_{n\to\infty} \|x^n\|^{\frac{1}{n}} \leq \|x^m\|^{\frac{1}{m}} \qquad \forall m \in \mathbb{N}.$$

Odatle je

$$\limsup_{n\to\infty} \|x^n\|^{\frac{1}{n}} \leq \inf\{\|x^n\|^{\frac{1}{n}};\ n \in \mathbb{N}\} \leq \liminf_{n\to\infty} \|x^n\|^{\frac{1}{n}}$$

pa tvrdnja slijedi.

Za $x \in \mathcal{A}$ stavljamo

$$\nu(x) = \lim_{n\to\infty} \|x^n\|^{\frac{1}{n}} = \inf\{\|x^n\|^{\frac{1}{n}};\ n \in \mathbb{N}\}.$$

Taj se broj zove **spektralni radijus** elementa x. Očito je $\nu(x) \leq \|x\|$.

Propozicija 3.1.2. (a) *Za $x \in \mathcal{A}$ red potencija*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|x^n\|\lambda^n, \qquad \lambda \in \mathbb{C},$$

ima radijus konvergencije jednak $\dfrac{1}{\nu(x)}$.

(b) *Ako je $x \in \mathcal{A}$ takav da je $\nu(x) < 1$ onda je $1 - x \in G(\mathcal{A})$ i vrijedi*

$$(1-x)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

pri čemu red konvergira apsolutno (tj. konvergira red normi $\sum \|x^n\|$).

(c) *$G(\mathcal{A})$ je otvoren podskup od $\mathcal{A}$.*

Dokaz: Tvrdnja (a) slijedi neposredno iz Cauchy−Hadamardove formule za radijus konvergencije R reda potencija:

$$R = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \|x^n\|^{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{\nu(x)}.$$

(b) Ako je $\nu(x) < 1$ onda je $\dfrac{1}{\nu(x)} > 1$ pa prema (a) red potencija

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|x^n\|\lambda^n, \qquad \lambda \in \mathbb{C},$$

ima radijus konvergencije veći od 1. Posebno, on konvergira za $\lambda = 1$, tj.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|x^n\| < +\infty.$$

Kako $\mathcal{A}$ Banachov prostor, red

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

konvergira. Označimo njegovu sumu sa y. Sada imamo

$$1 + yx = 1 + xy = y \qquad \Longrightarrow \qquad 1 = (1-x)y = y(1-x) \qquad \Longrightarrow \qquad (1-x)^{-1} = y.$$

(c) Stavimo

$$U = \{x \in \mathcal{A};\ \|x\| < 1\}, \qquad V = 1 - U = \{1 - x;\ x \in U\}.$$

V je otvoren podskup od $\mathcal{A}$. Nadalje, za $x \in U$ je $\nu(x) \leq \|x\| < 1$, pa je prema (b) $1 - x \in G(\mathcal{A})$. To pokazuje da je $V \subseteq G(\mathcal{A})$.

Neka je $y \in G(\mathcal{A})$. Kako je $z \mapsto yz$ homeomorfizam sa $\mathcal{A}$ na $\mathcal{A}$, yV je otvoren skup u $\mathcal{A}$ i očito je $y \in yV \subseteq G(\mathcal{A})$. Dakle, $G(\mathcal{A})$ je otvoren podskup od $\mathcal{A}$.

Propozicija 3.1.3. *$G(\mathcal{A})$ je topološka grupa.*

Dokaz: Kako je $\|xy\| \leq \|x\| \cdot \|y\|$, množenje $(x, y) \mapsto xy$ je neprekidno preslikavanje sa $G(\mathcal{A}) \times G(\mathcal{A})$ u $G(\mathcal{A})$.

Treba još dokazati neprekidnost invertiranja. Neka je $a \in G(\mathcal{A})$. Stavimo $r = \dfrac{1}{2 \cdot \|a^{-1}\|}$ i neka je $x \in G(\mathcal{A}) \cap K(a, r)$ (oznaka za otvorenu kuglu radijusa r sa središtem u točki a : $K(a, r) = \{x \in \mathcal{A};\ \|x - a\| < r\}$). Tada je

$$\|a - x\| < \frac{1}{2 \cdot \|a^{-1}\|}$$

pa imamo redom

$$\|x^{-1}\| - \|a^{-1}\| \leq \|x^{-1} - a^{-1}\| = \|x^{-1}(a-x)a^{-1}\| \leq \|x^{-1}\| \cdot \|a-x\| \cdot \|a^{-1}\| < \frac{1}{2}\|x^{-1}\|.$$

Odatle je $\|x^{-1}\| < 2 \cdot \|a^{-1}\|$ pa slijedi

$$\|x^{-1} - a^{-1}\| \leq \|x^{-1}\| \cdot \|a-x\| \cdot \|a^{-1}\| \leq 2 \cdot \|a^{-1}\|^2 \cdot \|a-x\|.$$

Time je dokazana neprekidnost invertiranja $x \mapsto x^{-1}$ u bilo kojoj točki $a \in G(\mathcal{A})$.

Za $x \in \mathcal{A}$ njegov spektar označavamo sa $\sigma(x)$:

$$\sigma(x) = \{\lambda \in \mathbb{C};\ \lambda 1 - x \notin G(\mathcal{A})\}.$$

Rezolventa elementa $x \in \mathcal{A}$ je funkcija $\lambda \mapsto R(\lambda; x) = (\lambda 1 - x)^{-1}$ definirana na skupu $\mathbb{C} \setminus \sigma(x)$ s vrijednostima u $\mathcal{A}$ (u stvari, u $G(\mathcal{A})$).

Teorem 3.1.1. *Neka je $\mathcal{A} \neq \{0\}$ Banachova algebra s jedinicom 1 i neka je $x \in \mathcal{A}$.*

(a) *Spektar $\sigma(x)$ je neprazan kompaktan skup.*

(b) $\nu(x) = \max\{|\lambda|;\ \lambda \in \sigma(x)\}$.

(c) *Funkcija $\lambda \mapsto R(\lambda; x)$ je analitička na $\mathbb{C} \setminus \sigma(x)$ i teži k 0 kada $|\lambda|$ teži prema $+\infty$.*

Dokaz: (a) Neka je $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda \neq 0$. Tada je $\lambda 1 - x \in \mathcal{A} \setminus G(\mathcal{A})$ pa slijedi $1 - \dfrac{1}{\lambda}x \in \mathcal{A} \setminus G(\mathcal{A})$. No tada je prema tvrdnji (b) propozicije 2.1.2. $\nu\left(\frac{1}{\lambda}x\right) \geq 1$, dakle je $|\lambda| \leq \nu(x)$. Time je dokazano da vrijedi

$$\sigma(x) \subseteq D(0, \nu(x)) = \{\lambda \in \mathbb{C};\ |\lambda| \leq \nu(x)\}.$$

Posebno, $\sigma(x)$ je ograničen podskup od $\mathbb{C}$. Nadalje, $\lambda \mapsto \lambda 1 - x$ je neprekidno preslikavanje sa $\mathbb{C}$ u $\mathcal{A}$ a po tvrdnji (c) propozicije 3.1.2. $\mathcal{A} \setminus G(\mathcal{A})$ je zatvoren podskup od $\mathcal{A}$. Dakle, njegov totalni invers $\sigma(x) = \{\lambda \in \mathbb{C};\ \lambda 1 - x \in \mathcal{A} \setminus G(\mathcal{A})\}$ je zatvoren u $\mathbb{C}$. Time je dokazano da je skup $\sigma(x)$ kompaktan. Svojstvo $\sigma(x) \neq \varepsilon$ slijedit će neposredno iz tvrdnje (b).

(c) Prije svega, ta je funkcija neprekidna na $\mathbb{C} \setminus \sigma(x)$ jer je to kompozicija neprekidne funkcije $\lambda \mapsto \lambda 1 - x$ sa $\mathbb{C} \setminus \sigma(x)$ u $G(\mathcal{A})$ i funkcije $y \mapsto y^{-1}$ sa $G(\mathcal{A})$ u $G(\mathcal{A})$ koja je također neprekidna po propoziciji 3.1.3. Nadalje, za $\lambda, \lambda_0 \in \mathbb{C} \setminus \sigma(x)$ množenjem jednakosti

$$\lambda 1 - x) - (\lambda_0 1 - x) = (\lambda - \lambda_0)1$$

sa $R(\lambda_0; x)R(\lambda; x)$ dobivamo

$$R(\lambda; x) - R(\lambda_0; x) = (\lambda - \lambda_0)R(\lambda_0; x)R(\lambda; x)$$

a odatle

$$\frac{1}{\lambda - \lambda_0}(R(\lambda; x) - R(\lambda_0; x)) = -R(\lambda_0; x)R(\lambda; x).$$

Zbog neprekidnosti rezolvente $\lambda \mapsto R(\lambda; x)$ slijedi da za svaki $\lambda_0 \in \mathbb{C} \setminus \sigma(x)$ postoji limes

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} \frac{1}{\lambda - \lambda_0}(R(\lambda; x)R(\lambda_0; x) = -R(\lambda_0; x)^2.$$

Time je dokazano da je rezolventa $\lambda \mapsto R(\lambda, x)$ analitička funkcija na cijelom svom području definicije $\mathbb{C} \setminus \sigma(x)$.

Dokazat ćemo sada da vrijedi

$$R(\lambda; x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda^{n+1}} \qquad \forall \lambda \in \mathbb{C} \setminus D(0, \nu(x)).$$

Doista, ako je $\lambda \in \mathbb{C} \setminus D(0, \nu(x))$ tada je $|\lambda| > \nu(x)$, dakle, $\nu\left(\frac{1}{\lambda}x\right) < 1$. Sada iz tvrdnje ($b$) propozicije 3.1.2. slijedi

$$R(\lambda; x) = (\lambda - x)^{-1} = \frac{1}{\lambda}\left(1 - \frac{1}{\lambda}x\right)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda^{n+1}} x^n.$$

Iz dokazane jednakosti neposredno slijedi

$$\lim_{|\lambda| \to +\infty} R(\lambda; x) = 0.$$

Time je (c) u potpunosti dokazano.

(b) Prije svega, prema (1) vrijedi nejednakost $\max\{|\lambda|;\ \lambda \in \sigma(x)\} \leq \nu(x)$. Pretpostavimo da je nejednakost striktna, tj. da je $\max\{|\lambda|;\ \lambda \in \sigma(x)\} < \nu(x)$. Izaberimo ρ tako da je

$$\max\{|\lambda|;\ \lambda \in \sigma(x)\} < \rho < \nu(x).$$

Tada je $\sigma(x) \subseteq D(0, \rho)$ pa je rezolventa $\lambda \mapsto R(\lambda; x)$ analitička na $\mathbb{C} \setminus D(0, \rho)$. Slijedi da je funkcija $\lambda \mapsto R(\lambda^{-1}; x)$ analitička na $K\left(0, \frac{1}{\rho}\right) = \{\lambda \in \mathbb{C};\ |\lambda| < \frac{1}{\rho}\}$ i ima nultočku u 0. Dakle, postoje $c_n \in \mathcal{A}$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, takvi da vrijedi

$$R(\lambda^{-1}; x) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{n+1} c_n \qquad |\lambda| < \frac{1}{\rho}.$$

Prema razvoju u red iz dokaza tvrdnje (b) nalazimo $c_n = x^n$, pa slijedi da je radijus konvergencije reda $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{n+1} x^n$ veći ili jednak $\dfrac{1}{\rho}$. Prema tvrdnji (a) propozicije 3.1.2. radijus konvergencije tog reda jednak je $\dfrac{1}{\nu(x)}$. Odatle je $\nu(x) \leq \rho$, suprotno izboru broja ρ. Ova kontradikcija pokazuje da je pretpostavka o striktnoj nejednakosti nemoguća. Dakle, vrijedi jednakost

$$\nu(x) = \max\{|\lambda|;\ \lambda \in \sigma(x)\}.$$

Posebno, to znači da postoji $\lambda \in \sigma(x)$ takav da je $|\lambda| = \nu(x)$, pa slijedi i nedokazani dio tvrdnje (a), tj. $\sigma(x) \neq \emptyset$.

Primijetimo još da bi $\sigma(x) = \emptyset$ značilo da je rezolventa elementa x cijela funkcija, a kako ona teži k nuli u beskonačnosti, slijedilo bi da je ona ograničena funkcija. No tada bi po Liouvilleovom teoremu slijedilo $R(\lambda; x) = 0\ \ \forall \lambda \in \mathbb{C}$, a to je nemoguće jer $0 \notin G(\mathcal{A})$ budući da smo pretpostavili da je $\mathcal{A} \neq \{0\}$.

Teorem 3.1.2. (*Geljfand–Mazur*) *Neka je $\mathcal{A} \neq \{0\}$ Banachova algebra s jedinicom 1 i pretpostavimo da je $\mathcal{A}$ tijelo. Tada je $\mathcal{A} = \mathbb{C} \cdot 1$.*

Dokaz: Za $x \in \mathcal{A}$ je $\sigma(x) \neq \emptyset$. Prema tome, postoji $\lambda \in \mathbb{C}$ takav da je $\lambda 1 - x \in \mathcal{A} \setminus G(\mathcal{A})$. Međutim, $\mathcal{A}$ je po pretpostavci tijelo, dakle, $\mathcal{A} \setminus G(\mathcal{A}) = \{0\}$. Slijedi $\lambda 1 - x = 0$, odnosno, $x = \lambda 1$.

Teorem 3.1.3. *Neka je $\mathcal{B}$ C^*-algebra s jedinicom, $\mathcal{A}$ Banachova $*-$algebra i $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ $*-$homomorfizam. Tada je $\varphi(x)\| \leq \|x\|$ $\forall x \in \mathcal{A}$. Posebno, ako je $\mathcal{H}$ Hilbertov prostor i $\pi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ $*-$homomorfizam, tada je π reprezentacija $*-$algebre $\mathcal{A}$ i vrijedi $\|\pi(x)\| \leq \|x\|$ $\forall x \in \mathcal{A}$.*

Dokaz: Za $b \in \mathcal{B}$ takav da je $b = b^*$ imamo $\|b^2\| = \|b^*b\| = \|b\|^2$. Odatle indukcijom po n nalazimo da za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $\left\|b^{2^n}\right\| = \|b\|^{2^n}$. Slijedi

$$\nu(b) = \lim_{n\to\infty} \|b^n\|^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \left\|b^{2^n}\right\|^{\frac{1}{2^n}} = \|b\|.$$

Pretpostavimo najprije da algebra $\mathcal{A}$ ima jedinicu 1 i da je $\varphi(1) = 1$. Ako je $x \in \mathcal{A}$ i $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\sigma(x)$, tada je $\lambda 1 - x$ invertibilan, pa slijedi da je $\varphi(\lambda 1 - x) = \lambda 1 - \varphi(x)$ invertibilan u $\mathcal{B}$, odnosno, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \sigma(\varphi(x))$. Time je dokazano da vrijedi $\sigma(\varphi(x)) \subseteq \sigma(x)$, a odatle je prema tvrdnji (b) teorema 3.1.1. $\nu(\varphi(x)) \leq \nu(x) \leq \|x\|$. Za $x \in \mathcal{A}$ element $b = \varphi(x^*x)$ ima svojstvo $b^* = b$, pa prema dokazanom imamo redom

$$\|\varphi(x)\|^2 = \|\varphi(x)\varphi(x)^*\| = \|\varphi(x^*x)\| = \nu(\varphi(x^*x)) \leq \|x^*x\| = \|x\|^2.$$

Pretpostavimo sada da $\mathcal{A}$ ima jedinicu 1 ali da je $\varphi(1) \neq 1$. Tada je $Cl(\varphi(\mathcal{A}))$ C^*-podalgebra od $\mathcal{B}$ u kojoj je element $\varphi(1)$ jedinica. Zamjena C^*-algebre $\mathcal{B}$ s tom C^*-algebrom dovodi nas u već dokazani slučaj.

Napokon, neka je $\mathcal{A}$ algebra bez jedinice. Tada formiramo $\tilde{\mathcal{A}} = \mathcal{A} \times \mathbb{C}$ i u taj prostor uvodimo množenje, operaciju $*$ i normu ovako:

$$(a, \lambda)(b, \mu) = (ab + \lambda b, +\mu a, \lambda\mu), \qquad (a, \lambda)^* = (a^*, \overline{\lambda}), \qquad \|(a, \lambda)\| = \|a\| + |\lambda|.$$

Lako se provjerava da je tada $\tilde{\mathcal{A}}$ Banachova $*-$algebra s jedinicom $(0, 1)$. Očito je $a \mapsto (a, 0)$ injektivni izometrički $*-$homomorfizam algebre $\mathcal{A}$ u algebru $\tilde{\mathcal{A}}$. Nadalje, definiramo $\tilde{\varphi} : \tilde{\mathcal{A}} \to \mathcal{B}$ sa

$$\tilde{\varphi}((a, \lambda)) = \varphi(a) + \lambda 1.$$

Tada je $\tilde{\varphi}$ $*-$homomorfizam koji preslikava jedinicu u jedinicu, pa je prema dokazanom

$$\|\tilde{\varphi}((a, \lambda))\| \leq \|(a, \lambda)\| = \|a\| + |\lambda| \qquad \Longrightarrow \qquad \|\varphi(a)\| = \|\tilde{\varphi}((a, 0))\| \leq \|(a, 0)\| = \|a\|.$$

3.2 Spektar komutativne Banachove algebre

Neka je $\mathcal{A}$ komutativna Banachova algebra s jedinicom 1. **Karakter** algebre $\mathcal{A}$ je linearan funkcional $f : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ takav da je $f(xy) = f(x)f(y)$ $\forall x, y \in \mathcal{A}$ i $f(1) = 1$. Dakle, karakter je homomorfizam algebre $\mathcal{A}$ u algebru $\mathbb{C}$ različit od nule, jer za homomorfizam f je $f \neq 0$ očito ekvivalentno sa $f(1) = 1$.

Teorem 3.2.1. *Neka je $\mathcal{A}$ komutativna Banachova algebra s jedinicom 1 i neka je f karakter od $\mathcal{A}$. Tada je linearni funkcional f neprekidan i vrijedi $\|f\| = 1$. Nadalje, $f(x) \in \sigma(x)$ $\forall x \in \mathcal{A}$.*

Dokaz: Pretpostavimo da $f(x) \notin \sigma(x)$ za neki $x \in \mathcal{A}$. Tada je $f(x) \cdot 1 - x \in G(\mathcal{A})$. Označimo s y njegov invers. Tada je $1 = y(f(x) \cdot 1 - x)$ pa slijedi $1 = f(1) = f(y)(f(x)f(1) - f(x)) = 0$. Ova kontradikcija pokazuje da je $f(x) \in \sigma(x)$ $\forall x \in \mathcal{A}$. Odatle je $|f(x)| \leq \nu(x) \leq \|x\|$. Dakle, fukcional f je neprekidan i $\|f\| \leq 1$. Međutim, $f(1) = 1$ i $\|1\| = 1$ pa slijedi $\|f\| = 1$.

Skup svih karaktera komutativne Banachove algebre $\mathcal{A}$ s jedinicom zve se **spektar algebre** $\mathcal{A}$ i označavat ćemo ga sa $\hat{\mathcal{A}}$. Neka je $\mathcal{A}'$ dualni prostor Banachovog prostora $\mathcal{A}$. Tada je prema prethodnom teoremu $\hat{\mathcal{A}}$ podskup jedinične kugle u $\mathcal{A}'$.

Dualni prostor $\mathcal{A}'$ promatrat ćemo sa tzv. **slabom topologijom**. Radi se o topologiji za koju je podbaza okolina bilo kojeg $f \in \mathcal{A}'$ sastavljena od svih skupova oblika

$$V(f;\varepsilon,x) = \{g \in \mathcal{A}';\ |g(x) - f(x)| < \varepsilon\}, \qquad \varepsilon > 0, \quad x \in \mathcal{A}.$$

To je najslabija među svim topologijama na $\mathcal{A}'$ za koje su sva preslikavanja $f \mapsto f(x)$, $x \in \mathcal{A}$, sa $\mathcal{A}'$ u $\mathbb{C}$ neprekidna. Nadalje, ako je $(f_i)_{i\in I}$ hiperniz u $\mathcal{A}'$ i $f \in \mathcal{A}'$ onda u odnosu na slabu topologiju vrijedi

$$\lim_{i\in I} f_i = f \qquad \Longleftrightarrow \qquad \lim_{i\in I} f_i(x) = f(x) \quad \forall x \in \mathcal{A}.$$

Sljedeći je teorem za separabilne prostore dokazao S. Banach 1932. godine, a općenito L. Alaoglu 1940. godine.

Teorem 3.2.2. (**Banach−Alaoglu**) *Neka X normiran prostor i neka je K zatvorena jedinična kugla u dualnom prostoru*

$$K = \overline{K}_{X'}(0,1) = \{f \in X';\ \|f\| \le 1\}.$$

K je u odnosu na slabu topologiju dualnog prostora X' kompaktan skup.

Dokaz: Neka je

$$S = \prod_{x\in X} \{\lambda \in \mathbb{C};\ |\lambda| \le \|x\|\}$$

s topologijom produkta. Prema Aleksandrovljevom teoremu S je kompaktan Hausdorffov topološki prostor. Definiramo sada injekciju $\varphi : K \to S$ sa

$$\varphi(f) = (f(x))_{x\in X}.$$

Očito je φ homeomorfizam sa K na $\varphi(K)$. Dakle, treba samo dokazati da je slika $\varphi(K)$ zatvorena u prostoru S.

Neka je f točka iz zatvarača skupa $\varphi(K)$. Tada je f funkcija sa X u $\mathbb{C}$ i vrijedi $|f(x)| \le \|x\|$ $\forall x \in X$. Posebno je $f(0) = 0$. Neka su $x, y \in X$ i $\varepsilon > 0$. Budući da je f u zatvaraču od $\varphi(K)$ postoji $g \in K$ takva da vrijedi

$$|f(x) - g(x)| \le \frac{\varepsilon}{3}, \qquad |f(y) - g(y)| \le \frac{\varepsilon}{3}, \qquad |f(x+y) - g(x+y)| \le \frac{\varepsilon}{3}.$$

Sada je

$$|f(x+y) - f(x) - f(y)| \le |f(x+y) - g(x+y)| + |g(x) - f(x)| + |g(y) - f(y)| \le \varepsilon.$$

Budući da je $\varepsilon > 0$ bio proizvoljan, slijedi $f(x+y) = f(x)+f(y)$. Nadalje, za $x \in X$ i za $\lambda = 0 \in \mathbb{C}$ je $f(\lambda x) = f(0) = 0 = \lambda f(x)$. Ako je $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ i $x \in X$ za dano $\varepsilon > 0$ izaberimo $g \in K$ takav da je

$$|f(x) - g(x)| \le \frac{\varepsilon}{2|\lambda|}, \qquad |f(\lambda x) - g(\lambda x)| \le \frac{\varepsilon}{2}.$$

Tada je

$$|f(\lambda x) - \lambda f(x)| \le |f(\lambda x) - g(\lambda x)| + |\lambda||g(x) - f(x)| \le \varepsilon,$$

pa zbog proizvoljnosti $\varepsilon > 0$ slijedi $f(\lambda x) = \lambda f(x)$. Time je dokazano da je $f \in \mathcal{A}'$. Kako je $|f(x)| \le \|x\|$ slijedi $\|f\| \le 1$, dakle, $f \in K$, odnosno, kao element od S je $f \in \varphi(K)$. Time je dokazano da je $\varphi(K)$ zatvoren podskup topološkog prostora S.

Teorem 3.2.3. *Neka je $\mathcal{A}$ komutativna Banachova algebra s jedinicom. Tada je njen spektar $\hat{\mathcal{A}}$ sa slabom topologijom kompaktan Hausdorffov topološki prostor.*

Dokaz: Zbog teorema 3.2.2. dovoljno je dokazati da je $\hat{\mathcal{A}}$ zatvoren podskup od $\mathcal{A}'$ u odnosu na slabu topologiju. Neka je $f \in \mathcal{A}'$ točka iz slabog zatvarača od $\hat{\mathcal{A}}$. Tada postoji hiperniz $(f_i)_{i\in I}$ u $\hat{\mathcal{A}}$ koji konvergira prema f. Slijedi

$$f(1) = \lim_{i\in I} f_i(1) = 1 \quad \text{i} \quad f(xy) = \lim_{i\in I} f_i(xy) = \lim_{i\in I} f_i(x)f_i(y) = f(x)f(y).$$

Dakle, $f \in \hat{\mathcal{A}}$ i time je dokazano da je $\hat{\mathcal{A}}$ slabo zatvoren u $\mathcal{A}'$.

Sada za bilo koji $x \in \mathcal{A}$ definiramo funkciju $\hat{x} : \hat{\mathcal{A}} \to \mathbb{C}$ sa

$$\hat{x}(f) = f(x), \qquad f \in \hat{\mathcal{A}}.$$

Topologija na $\hat{\mathcal{A}}$ je najslabija od svih za koje su sve funkcije $\hat{x}$, $x \in \mathcal{A}$, neprekidne. Prema tome, $x \mapsto \hat{x}$ je preslikavanje algebre $\mathcal{A}$ u algebru $C(\hat{\mathcal{A}})$ svih neprekidnih kompleksnih funkcija na kompaktnom prostoru $\hat{\mathcal{A}}$. U toj su algebri operacije definirane po točkama:

$$(\varphi+\psi)(f) = \varphi(f)+\psi(f), \;\; (\lambda\varphi)(f) = \lambda\varphi(f), \;\; (\varphi\psi)(f) = \varphi(f)\psi(f), \;\; \varphi, \psi \in C(\hat{\mathcal{A}}), \;\; \lambda \in \mathbb{C}, \;\; f \in \hat{\mathcal{A}}.$$

Nadalje, to je Banachova algebra s jedinicom u odnosu na maksimum$-$normu

$$\|\varphi\|_\infty = \max\{|\varphi(f)|;\; f \in \hat{\mathcal{A}}\}, \qquad \varphi \in C(\hat{\mathcal{A}}).$$

Preslikavanje $x \mapsto \hat{x}$ je homomorfizam algebri s jedinicom, jer za $x, y \in \mathcal{A}$, $\lambda \in \mathbb{C}$ i $f \in \hat{\mathcal{A}}$ imamo redom

$$\begin{gathered}
(x+y)\hat{}(f) = f(x+y) = f(x) + f(y) = \hat{x}(f) + \hat{y}(f) = (\hat{x}+\hat{y})(f), \\
(\lambda x)\hat{}(f) = f(\lambda x) = \lambda f(x) = \lambda\hat{x}(f) = (\lambda\hat{x})(f), \\
(xy)\hat{}(f) = f(xy) = f(x)f(y) = \hat{x}(f)\hat{y}(f) = (\hat{x}\hat{y})(f), \\
\hat{1}(f) = f(1) = 1.
\end{gathered}$$

Preslikavanje $x \mapsto \hat{x}$ zove se **Geljfandova transformacija** ili **Geljfandov homomorfizam** algebre $\mathcal{A}$. Funkcija $\hat{x}$ zove se **Geljfandov transformat** elementa x.

Za $x \in \mathcal{A}$ i $f \in \hat{\mathcal{A}}$ po teoremu 2.1.2. imamo

$$|\hat{x}(f)| = |f(x)| \le \nu(x) \le \|x\| \qquad \Longrightarrow \qquad \|\hat{x}\|_\infty = \max\{|\hat{x}(f)|;\; f \in \hat{\mathcal{A}}\} \le \|x\|.$$

Napokon, ako su $f, g \in \hat{\mathcal{A}}$ takve da je $\hat{x}(f) = \hat{y}(f) \;\; \forall x \in \mathcal{A}$, tada je $f(x) = g(x) \;\; \forall x$, dakle, $f = g$. Prema tome, algebra funkcija $\{\hat{x};\; x \in \mathcal{A}\}$ **razdvaja točke** od $\hat{\mathcal{A}}$: ako su $f, g \in \hat{\mathcal{A}}$ i $f \neq g$, onda postoji $x \in \mathcal{A}$ takva da je $\hat{x}(f) \neq \hat{x}(g)$. Time smo dokazali:

Teorem 3.2.4. *Geljfandova transformacija $x \mapsto \hat{x}$ je homomorfizam Banachove algebre $\mathcal{A}$ s jedinicom u Banachovu algebru $C(\hat{\mathcal{A}})$ neprekidnih funkcija na spektru $\hat{\mathcal{A}}$. Vrijedi $\|\hat{x}\|_\infty \le \|x\|$ $\forall x \in \mathcal{A}$. Algebra funkcija $\{\hat{x};\; x \in \mathcal{A}\}$ razdvaja točke od $\hat{\mathcal{A}}$.*

Bit će nam koristan i jedan drugačiji opis spektra komutativne Banachove algebre s jedinicom, naime, kao skupa svih maksimalnih ideala. Općenito, ako je $\mathcal{A}$ algebra s jedinicom 1, **lijevi ideal** u $\mathcal{A}$ je pravi potprostor $\mathcal{I} \subsetneq \mathcal{A}$ takav da je $x\mathcal{I} \subseteq \mathcal{I} \;\; \forall x \in \mathcal{A}$. Analogno, **desni ideal** je pravi potprostor $\mathcal{I} \subsetneq \mathcal{A}$ takav da je $\mathcal{I}x \subseteq \mathcal{I} \;\; \forall x \in \mathcal{A}$. **Obostrani ideal** je potprostor koji je i lijevi i desni ideal. Ako je $\mathcal{I}$ bilo lijevi bilo desni ideal onda je $\mathcal{I} \cap G(\mathcal{A}) = \emptyset$. Doista, kad bismo imali $y \in \mathcal{I} \cap G(\mathcal{A})$, gdje je $\mathcal{I}$ npr. lijevi ideal, slijedilo bi $1 = y^{-1}y \in \mathcal{I}$, dakle, $x = x1 \in \mathcal{I} \;\; \forall x \in \mathcal{A}$. To bi značilo da je $\mathcal{I} = \mathcal{A}$, suprotno definiciji ideala.

Propozicija 3.2.1. *Neka je $\mathcal{A}$ Banachova algebra s jedinicom* 1.

(*a*) *Ako je $\mathcal{I}$ lijevi* (*desni, obostrani*) *ideal u $\mathcal{A}$, onda je i njegov zatvarač $Cl(\mathcal{I})$ lijevi* (*desni, obostrani*) *ideal u $\mathcal{A}$.*

(*b*) *Svaki lijevi* (*desni, obostrani*) *ideal u $\mathcal{A}$ sadržan je u nekom maksimalnom lijevom* (*desnom, obostranom*) *idealu u $\mathcal{A}$.*

(*c*) *Maksimalni lijevi* (*desni, obostrani*) *ideali su zatvoreni.*

Dokaz: Dokaz triju tvrdnji provodimo za lijeve ideale; dokazi za desne i obostrane ideali sasvim su analogni.

(*a*) Očito je $Cl(\mathcal{I})$ potprostor od $\mathcal{A}$ i $xCl(\mathcal{I}) \subseteq Cl(\mathcal{I})$. Pretpostavka $Cl(\mathcal{I}) = \mathcal{A}$ bi zbog otvorenosti $G(\mathcal{A})$ imala za posljedicu $\mathcal{I} \cap G(\mathcal{A}) \neq \emptyset$, a to nije istina.

Neka je $\mathcal{I}$ lijevi ideal i neka je $\mathfrak{I}$ skup svih lijevih ideala u $\mathcal{A}$ koji sadrže $\mathcal{I}$. Uz relaciju inkluzije to je parcijalno uređen skup. Neka je $\mathfrak{J}$ linearno uređen podskup od $\mathfrak{I}$. Neka je $\mathcal{J}$ unija svih članova skupa $\mathfrak{J}$. Lako se vidi da je tada $\mathcal{J}$ potprostor od $\mathcal{A}$ i da vrijedi $x\mathcal{J} \subseteq \mathcal{J}\ \ \forall x \in \mathcal{A}$. Nadalje, $1 \notin K$ $\forall K \in \mathfrak{J}$, pa slijedi $1 \notin \mathcal{J}$. To pokazuje da je $\mathcal{J} \neq \mathcal{A}$, tj. $\mathcal{J}$ je lijevi ideal. Dakle, parcijalno uređen skup $\mathfrak{I}$ zadovoljava uvjet Zornove leme. Stoga $\mathfrak{I}$ ima bar jedan maksimalni element, a to je onda maksimalni lijevi ideal koji sadrži $\mathcal{I}$.

Tvrdnja (*c*) slijedi neposredno iz (*a*) i (*b*).

Neka je $\mathcal{A}$ Banachova algebra s jedinicom 1 i neka je $\mathcal{I}$ obostrani ideal u $\mathcal{A}$. Tada preko predstavnika možemo definirati množenje na kvocijentnom prostoru $\mathcal{A}/\mathcal{I}$

$$(x+\mathcal{I})(y+\mathcal{I}) = xy + \mathcal{I}, \qquad x, y \in \mathcal{A},$$

i s tim množenjem $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ postaje algebra s jedinicom $1+\mathcal{I}$. Nadalje, $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ je Banachov prostor s normom

$$\|x+\mathcal{I}\| = \inf\{\|x+y\|;\ y \in \mathcal{I}\}, \qquad x \in \mathcal{A}.$$

Za $x, y \in \mathcal{A}$ i za $u, v \in \mathcal{I}$ je $xv + uy + uv \in \mathcal{I}$, dakle,

$$\|(x+\mathcal{I})(y+\mathcal{I})\| = \inf\{\|xy+z\|;\ z \in \mathcal{I}\} \leq \|xy+xv+uy+uv\| = \|(x+u)(y+v)\| \leq \|x+u\|\cdot\|y+v\|.$$

Uzmemo li infimume po svim $u, v \in \mathcal{I}$ dobivamo

$$\|(x+\mathcal{I})(y+\mathcal{I})\| \leq \|x+\mathcal{I}\| \cdot \|y+\mathcal{I}\|.$$

Dakle, $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ je Banachova algebra. Za jedinicu $1+\mathcal{I}$ vrijedi $\|1+\mathcal{I}\| = \|(1+\mathcal{I})^2\| \leq \|1+\mathcal{I}\|^2$, a kako je $1+\mathcal{I} \neq 0$ u kvocijentnoj algebri $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ zaključujemo da je $\|1+\mathcal{I}\| \geq 1$. S druge strane je

$$\|1+\mathcal{I}\| = \inf \|1+x\|;\ x \in \mathcal{I}\} \leq \|1+0\| = \|1\| = 1.$$

Dakle je $\|1+\mathcal{I}\| = 1$, tj. $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ je Banachova algebra s jedinicom.

Teorem 3.2.5. *Neka je $\mathcal{A}$ komutativna Banachova algebra s jedinicom* 1. *Za $f \in \hat{\mathcal{A}}$ stavimo*

$$\mathcal{M}_f = Ker\, f = \{x \in \mathcal{A};\ f(x) = 0\}.$$

(*a*) *$f \mapsto \mathcal{M}_f$ je bijekcija sa $\hat{\mathcal{A}}$ na skup svih maksimalnih ideala u $\mathcal{A}$.*

(*b*) $\sigma(x) = \{f(x);\ f \in \hat{\mathcal{A}}\}\ \ \forall x \in \mathcal{A}$.

(*c*) $\|\hat{x}\|_\infty = \nu(x)\ \ \forall x \in \mathcal{A}$.

Dokaz: (a) Za $f \in \hat{\mathcal{A}}$ $\mathcal{M}_f$ je zatvoren ideal kodimenzije 1, dakle, maksimalan.

Neka je $\mathcal{M}$ maksimalan ideal u $\mathcal{A}$. Tada je prema tvrdnji (c) propozicije 3.2.1. $\mathcal{M}$ zatvoren, pa je $\mathcal{B} = \mathcal{A}/\mathcal{M}$ Banachova algebra s jedinicom. Kako je ideal $\mathcal{M}$ maksimalan, u komutativnoj algebri $\mathcal{B}$ nema ideala $\neq \{0\}$, što znači da je $\mathcal{B}$ polje. Po Geljfand$-$Mazurovom teoremu 3.1.2. $\mathcal{B} = \mathbb{C} \cdot (1 + \mathcal{M})$. Slijedi $\mathcal{A} = \mathbb{C} \cdot 1 \dot{+} \mathcal{M}$. Definiramo $f : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ kao projekciju na prvi sumand; tj. za svaki $x \in \mathcal{A}$ $f(x)$ je jedini kompleksan broj takav da je $f(x) \cdot 1 - x \in \mathcal{M}$. Tada je f linearan funkcional, vrijedi $f(1) = 1$ i za $x, y \in \mathcal{A}$ imamo

$$f(x)f(y) \cdot 1 - xy = f(x)(f(y) \cdot 1 - y) + (f(x) \cdot 1 - x)y \in \mathcal{M} \qquad \Longrightarrow \qquad f(x)f(y) = f(xy).$$

Dakle, $f \in \hat{\mathcal{A}}$, a očito je da je $\mathcal{M} = \mathcal{M}_f$. Time je dokazano da je $f \mapsto \mathcal{M}_f$ surjekcija $\hat{\mathcal{A}}$ na skup svih maksimalnih ideala.

Napokon, neka su $f, g \in \hat{\mathcal{A}}$ takvi da je $\mathcal{M}_f = \mathcal{M}_g$. Označimo taj maksimalan ideal sa $\mathcal{M}$. Ideal $\mathcal{M}$ je kodimenzije 1 u $\mathcal{A}$, pa je $\mathcal{A} = \mathbb{C} \cdot 1 + \mathcal{M}$. Dakle, za svaki $x \in \mathcal{A}$ postoje jedinstveni $\lambda \in \mathbb{C}$ i $y \in \mathcal{M}$ takvi da je $x = \lambda \cdot 1 + y$. Kako je $\mathcal{M}$ jezgra i od f i od g, to je $f(y) = g(y) = 0$, dakle, $f(x) = \lambda \cdot f(1) = \lambda = \lambda \cdot g(1) = g(x)$. Slijedi $f = g$, dakle je $f \mapsto \mathcal{M}_f$ i injekcija.

(b) Za svaki $x \in \mathcal{A}$ i za svaki $f \in \hat{\mathcal{A}}$ imamo $f(x) \cdot 1 - x \in \mathcal{M}_f$, dakle, $f(x) \cdot 1 - x \in \mathcal{A} \setminus G(\mathcal{A})$, a to znači da je $f(x) \in \sigma(x)$. Time je dokazana inkluzija $\{f(x);\ f \in \hat{\mathcal{A}}\} \subseteq \sigma(x)$. Neka je sada $\lambda \in \sigma(x)$. Tada element $y = \lambda \cdot 1 - x$ nije invertibilan. To znači da $1 \not\in \mathcal{A}y$, tj. $\mathcal{A}y \neq \mathcal{A}$. Prema tome, $\mathcal{A}y$ je ideal pa je prema tvrdnji (b) propozicije 3.2.1. sadržan u nekom maksimalnom idealu $\mathcal{M}$. Tada je $y = \lambda \cdot 1 - x \in \mathcal{A}y \subseteq \mathcal{M}$. Prema (a) $\mathcal{M} = \mathcal{M}_f$ za neki $f \in \hat{\mathcal{A}}$. Tada je $0 = f(\lambda \cdot 1 - x) = \lambda f(1) - f(x) = \lambda - f(x)$, tj. $\lambda = f(x)$. Time je dokazana i obrnuta inkluzija, dakle, jednakost.

Napokon, tvrdnja (c) slijedi neposredno iz tvrdnje (b).

Korolar 3.2.1. *Za komutativnu Banachovu algebru $\mathcal{A}$ s jedinicom vrijedi*

$$G(\mathcal{A}) = \{x \in \mathcal{A};\ f(x) \neq 0\ \forall f \in \hat{\mathcal{A}}\} = \{x \in \mathcal{A};\ \textit{funkcija } \hat{x} \textit{ je svuda različita od nule}\}.$$

3.3 Komutativne C^*-algebre

Neka je $\mathcal{A}$ Banachova $*-$algebra. Element $x \in \mathcal{A}$ zove se

hermitski ako je $x^* = x$,

antihermitski ako je $x^* = -x$,

unitaran ako je $x \in G(\mathcal{A})$ i $x^* = x^{-1}$, tj. ako je $x^*x = xx^* = 1$,

normalan ako je $x^*x = xx^*$.

Propozicija 3.3.1. *Neka je $\mathcal{A}$ C^*-algebra s jedinicom.*

(a) *Ako je $x \in \mathcal{A}$ unitaran, onda je $\sigma(x) \subseteq T = \{\lambda \in \mathbb{C};\ |\lambda| = 1\}$.*

(b) *Ako je $x \in \mathcal{A}$ hermitski, onda je $\sigma(x) \subseteq \mathbb{R}$.*

Dokaz: (a) Imamo

$$\|x\|^2 = \|x^*x\| = \|1\| = 1 \implies \|x\| = 1 \implies \nu(x) \leq 1 \implies \sigma(x) \subseteq D^* = \{\lambda \in \mathbb{C};\ 0 < |\lambda| \leq 1\}.$$

Nadalje,

$$\lambda \in \sigma(x) \implies x - \lambda \cdot 1 \not\in G(\mathcal{A}) \implies \lambda^{-1} \cdot 1 - x^{-1} = \lambda^{-1}x^{-1}(x - \lambda \cdot 1) \not\in G(\mathcal{A}) \implies \lambda^{-1} \in \sigma(x^{-1}).$$

Međutim, x^{-1} je također unitaran, pa slijedi $\sigma(x^{-1}) \subseteq D^*$, dakle, $\lambda^{-1} \in D^*$. Zaključujemo da je $\sigma(x) \subseteq D^* \cap (D^*)^{-1} = T$.

Stavimo

$$y = \mathrm{e}^{ix} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} x^n.$$

Tada je

$$y^* = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!}(-x)^n = \mathrm{e}^{-ix} = y^{-1}.$$

Dakle, y je unitaran. Neka je sada $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Tada je $|\mathrm{e}^{i\alpha}| \neq 1$, dakle, prema (a) $\mathrm{e}^{i\alpha} \not\in \sigma(y)$. To znači da je

$$1 - \mathrm{e}^{i(x-\alpha\cdot 1)} = \mathrm{e}^{-i\alpha}(\mathrm{e}^{i\alpha} \cdot 1 - y) \in G(\mathcal{A}).$$

Stavimo

$$z = i(x - \alpha \cdot 1), \qquad v = \mathrm{e}^z - 1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n, \qquad u = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!} z^n.$$

Prema dokazanom je $v \in G(\mathcal{A})$. Kako je

$$zu = uz = \mathrm{e}^z - 1 = v \in G(\mathcal{A}),$$

slijedi da je

$$1 = (v^{-1}u)z = z(uv^{-1}),$$

dakle, $z \in G(\mathcal{A})$. Zaključujemo da je $x - \alpha \cdot 1 \in G(\mathcal{A})$ što znači $\alpha \not\in \sigma(x)$. Time je dokazano $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C} \setminus \sigma(x)$, tj. $\sigma(x) \subseteq \mathbb{R}$.

Teorem 3.3.1. (**Geljfand−Naimark**) *Neka je $\mathcal{A}$ komutativna C^*-algebra s jedinicom. Geljfandov homomorfizam je izometrički izomorfizam C^*-algebre $\mathcal{A}$ na C^*-algebru $C(\hat{\mathcal{A}})$.*

Dokaz: Neka je $x \in \mathcal{A}$ hermitski. Po tvrdnji (b) propozicije 3.3.1. je $\sigma(x) \subseteq \mathbb{R}$, pa je po tvrdnji (b) teorema 3.2.5. $f(x) \in \mathbb{R} \;\; \forall f \in \hat{\mathcal{A}}$. To znači da je funkcija $\hat{x}$ realna za svaki hermitski element $x \in \mathcal{A}$.

Neka je sada $x \in \mathcal{A}$ proizvoljan. Tada je

$$x = x_1 + ix_2, \qquad \text{gdje su} \quad x_1 = \frac{1}{2}(x + x^*) \quad \text{i} \quad x_2 = \frac{1}{2i}(x - x^*) \quad \text{hermitski.}$$

Stoga za proizvoljan $f \in \hat{\mathcal{A}}$ imamo redom

$$(x^*)\hat{}\,(f) = f(x^*) = f(x_1 - ix_2) = f(x_1) - if(x_2) = \overline{f(x_1) + if(x_2)} = \overline{f(x)} = \overline{\hat{x}(f)} = \hat{x}^*(f).$$

Dakle, $(x^*)\hat{}\; = \hat{x}^*$, odnosno, $x \mapsto \hat{x}$ je homomorfizam $*-$algebri.

Stavimo $\mathcal{B} = \{\hat{x};\; x \in \mathcal{A}\}$. To je podalgebra od $\mathcal{A}$, vrijedi $\mathcal{B}^* = \mathcal{B}$, $\mathcal{B}$ sadrži konstante i prema teoremu 3.2.4. $\mathcal{B}$ razdvaja točke od $\hat{\mathcal{A}}$. Po Stone−Weierstrassovom teoremu algebra $\mathcal{B}$ je gusta u algebri $C(\hat{\mathcal{A}})$.

Treba još, dakle, samo dokazati da je $x \mapsto \hat{x}$ izometrija. Za hermitski $x \in \mathcal{A}$ kao u dokazu teorema 3.1.3. nalazimo da je tada $\|x\| = \nu(x)$. Za proizvoljan $x \in \mathcal{A}$ element x^*x je hermitski, pa pomoću tvrdnje (c) teorema 3.2.5. imamo redom

$$\|x\|^2 = \|x^*x\| = \nu(x^*x) = \|(x^*x)\hat{}\,\|_\infty = \|\hat{x}\|_\infty^2.$$

3.4 Funkcionalni račun u C^*-algebrama

Teorem 3.4.1. *Neka je $\mathcal{A}$ komutativna C^*-algebra s jedinicom 1. Pretpostavimo da je $\mathcal{A}$ generirana s jednim elementom $x \in \mathcal{A}$, tj. da je $\mathcal{A}$ najmanja C^*-podalgebra od $\mathcal{A}$ koja sadrži x i 1. Tada je $f \mapsto f(x)$ homeomorfizam sa $\hat{\mathcal{A}}$ na $\sigma(x)$.*

Dokaz: Prema tvrdnji (b) teorema 3.2.5. preslikavanje $\hat{x} : f \mapsto f(x)$ je surjekcija sa $\hat{\mathcal{A}}$ na $\sigma(x)$. Po definiciji topologije na $\hat{\mathcal{A}}$ to je preslikavanje neprekidno.

Neka su $f, g \in \hat{\mathcal{A}}$ takvi da je $f(x) = g(x)$. Stavimo $\mathcal{B} = \{y \in \mathcal{A};\ f(y) = g(y)\}$. Tada je $\mathcal{B}$ C^*-podalgebra od $\mathcal{A}$ i očito vrijedi $x \in \mathcal{B}$ i $1 \in \mathcal{B}$. Po pretpostavci je $\mathcal{B} = \mathcal{A}$. Dakle, $f = g$ i time je dokazano da je preslikavanje $\hat{x} : f \mapsto \sigma(x)$ i injekcija, dakle, bijekcija. Tvrdnja slijedi iz jednostavne topološke činjenice da je neprekidna bijekcija kompaktnih topoloških prostora homeomorfizam.

Propozicija 3.4.1. *Neka je $\mathcal{A}$ C^*-algebra s jedinicom i neka je $\mathcal{B}$ C^*-podalgebra koja sadrži jedinicu algebre $\mathcal{A}$.*

(a) *Vrijedi $G(\mathcal{B}) = G(\mathcal{A}) \cap \mathcal{B}$.*

(b) *Za svaki $x \in \mathcal{B}$ je $\sigma_{\mathcal{B}} = \sigma_{\mathcal{A}}(x)$. Pri tome $\sigma_{\mathcal{A}}(x)$ označava spektar elementa x u algebri $\mathcal{A}$, a $\sigma_{\mathcal{B}}(x)$ spektar od x u $\mathcal{B}$.*

Dokaz: (a) Očito je $G(\mathcal{B}) \subseteq G(\mathcal{A}) \cap \mathcal{B}$.

Neka je $x \in G(\mathcal{A}) \cap \mathcal{B}$ i pretpostavimo najprije da je x hermitski, $x^* = x$. Pretpostavimo da $x \notin G(\mathcal{B})$. To znači da je $0 \in \sigma_{\mathcal{B}}(x)$, a prema tvrdnji (b) propozicije 3.3.1. vrijedi $\sigma_{\mathcal{B}}(x) \subseteq \mathbb{R}$. Prema tome

$$\frac{i}{n} \notin \sigma_{\mathcal{B}}(x)\ \ \forall n \in \mathbb{N} \quad \Longrightarrow \quad x - \frac{i}{n} \cdot 1 \in G(\mathcal{B})\ \ \forall n \in \mathbb{N} \quad \Longrightarrow \quad \left(x - \frac{i}{n} \cdot 1\right)^{-1} \in \mathcal{B}\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Element x je limes niza $\left(x - \frac{i}{n} \cdot 1\right)_{n \in \mathbb{N}}$ u $\mathcal{A}$, dakle, u $G(\mathcal{A})$. Prema propoziciji 3.1.3. slijedi

$$x^{-1} = \lim_{n \to \infty} \left(x - \frac{i}{n} \cdot 1\right)^{-1}.$$

Međutim, podalgebra $\mathcal{B}$ je zatvorena, pa možemo zaključiti da je $x^{-1} \in \mathcal{B}$. Prema tome, $x \in G(\mathcal{B})$.

Neka je sada $x \in G(\mathcal{A}) \cap \mathcal{B}$ proizvoljan. Tada je i $x^* \in G(\mathcal{A}) \cap \mathcal{B}$. Stavimo $u = xx^*$ i $v = x^*x$. Tada su $u, v \in G(\mathcal{A}) \cap \mathcal{B}$ i ti su elementi hermitski. Prema dokazanom su tada $u, v \in G(\mathcal{B})$, tj. $u^{-1}, v^{-1} \in \mathcal{B}$. Sada za elemente $y = v^{-1}x^* \in \mathcal{B}$ i $z = x^*u^{-1} \in \mathcal{B}$ vrijedi

$$yx = v^{-1}x^*x = v^{-1}v = 1 \qquad \text{i} \qquad xz = xx^*u^{-1} = uu^{-1} = 1.$$

Prema tome je x i lijevoinvertibilan u $\mathcal{B}$ i desnoinvertibilan u $\mathcal{B}$, a to znači da je $x \in G(\mathcal{B})$. Time je dokazana obrnuta inkluzija $G(\mathcal{A}) \cap \mathcal{B} \subseteq G(\mathcal{B}$, tj. rijedi jednakost $G(\mathcal{A}) \cap \mathcal{B} = G(\mathcal{B})$.

Tvrdnja (b) slijedi neposredno iz tvrdnje (a).

Teorem 3.4.2. *Neka je $\mathcal{A}$ C^*-algebra s jedinicom 1 i neka je $x \in \mathcal{A}$ normalan element, $x^*x = xx^*$. Postoji jedinstven $*-$homomorfizam $\tau_x : C(\sigma(x)) \to \mathcal{A}$ takav da je*

$$\tau_x(1_{\sigma(x)}) = 1 \qquad i \qquad \tau(id_{\sigma(x)}) = x;$$

pri tome je $1_{\sigma(x)}$ jedinica a $id_{\sigma(x)}$ identiteta u $C(\sigma(x))$:

$$1_{\sigma(x)}(\lambda) = 1 \qquad i \qquad id_{\sigma(x)}(\lambda) = \lambda \qquad \forall \lambda \in \sigma(x).$$

τ_x je izometrički izomorfizam C^*-algebre $C(\sigma(x))$ na C^*-podalgebru od $\mathcal{A}$ generiranu sa $\{1, x\}$.

Dokaz: Pretpostavimo da postoji $*-$homomorfizam $\tau_x : C(\sigma(x)) \to \mathcal{A}$ takav da je $\tau_x(1_{\sigma(x)}) = 1$ i $\tau_x(id_{\sigma(x)}) = x$. Tada je $\tau_x(id^*_{\sigma(x)}) = \tau_x(id_{\sigma(x)})^* = x^*$. Stoga za svaki polinom P u dvije varijable nad $\mathbb{C}$ vrijedi $\tau_x(P(id_{\sigma(x)}, id^*_{\sigma(x)}) = P(x, x^*)$. Dakle, τ_x je potpuno određen na podalgebri od $C(\sigma(x))$ sastavljenoj od svih polinoma u $id_{\sigma(x)}$ i $id^*_{\sigma(x)}$, a ona je prema Weierstrassovom teoremu gusta u $C(\sigma(x))$. Nadalje, prema teoremu 3.1.3. homomorfizam τ_x je neprekidan. Zaključujemo da je τ_x potpuno određen na čitavoj algebri $C(\sigma(x))$. Dakle, τ_x je jedinstven ukoliko postoji.

Dokažimo sada egzistenciju τ_x. Neka je $\mathcal{B}$ C^*-podalgebra od $\mathcal{A}$ generirana sa $\{1, x\}$. Budući da je x normalan C^*-algebra $\mathcal{B}$ je komutativna. Po tvrdnji (b) propozicije 3.4.1. vrijedi $\sigma_{\mathcal{B}}(x) = \sigma_{\mathcal{A}}(x) = \sigma(x)$. Definiramo preslikavanje

$$\alpha : \hat{\mathcal{B}} \to \sigma(x) \qquad \text{sa} \qquad \alpha(f) = f(x), \quad f \in \hat{\mathcal{B}}.$$

Po teoremu 3.4.1. preslikavanje α je homeomorfizam sa $\hat{\mathcal{B}}$ na $\sigma(x)$. Stoga je

$$\beta : C(\sigma(x)) \to C(\hat{\mathcal{B}}), \qquad \beta(\varphi) = \varphi \circ \alpha, \quad \varphi \in C(\sigma(x)),$$

izometrički izomorfizam C^*-algebri s jedinicom. Nadalje,

$$[\beta(id_{\sigma(x)})](f) = (id_{\sigma(x)} \circ \alpha)(f) = id_{\sigma(x)}(\alpha(f)) = \alpha(f) = f(x) = \hat{x}(f) \qquad \forall f \in \hat{\mathcal{B}}.$$

Prema tome je $\beta(id_{\sigma(x)}) = \hat{x}$. Neka je $\gamma : C(\hat{\mathcal{B}}) \to B$ inverzni izomorfizam od Geljfandove transformacije i stavimo

$$\tau_x = \gamma \circ \beta : C(\sigma(x)) \to B.$$

Tada je τ_x izometrički izomorfizam C^*-algebri s jedinicom sa $C(\sigma(x))$ na $\mathcal{B}$ i vrijedi

$$\tau_x(id_{\sigma(x)}) = \gamma(\beta(id_{\sigma(x)})) = \gamma(\hat{x}) = x.$$

Za normalni element x C^*-algebre $\mathcal{A}$ s jedinicom i za $\varphi \in C(\sigma(x))$ pišemo $\varphi(x)$ umjesto $\tau_x(\varphi)$. Tada je $\varphi \to \varphi(x)$ izometrički izomorfizam C^*-algebre $C(\sigma(x))$ na C^*-podalgebru od $\mathcal{A}$ generiranu sa $\{1, x\}$. Drugim riječima, za $\varphi, \psi \in C(\sigma(x))$ i $\lambda \in \mathbb{C}$ vrijedi

$$(\varphi + \psi)(x) = \varphi(x) + \psi(x), \qquad (\lambda\varphi)(x) = \lambda\varphi(x)), \qquad (\varphi\psi)(x) = \varphi(x)\psi(x),$$

$$\varphi(x)^* = \varphi^*(x), \qquad \|f(x)\| = \|\varphi\|_\infty = \max\{|\varphi(\lambda)|;\ \lambda \in \sigma(x)\}.$$

Pridruživanje $\varphi \to \varphi(x)$ zove se **funkcionalni račun** za normalni element x u C^*-algebri. Iz dokaza prethodnog teorema vidimo da vrijedi

$$f(\varphi(x)) = \varphi(f(x)) \qquad \forall \varphi \in C(\sigma(x)), \quad \forall f \in \hat{\mathcal{B}},$$

gdje je $\mathcal{B}$ C^*-podalgebra od $\mathcal{A}$ generirana sa $\{1, x\}$.

Propozicija 3.4.2. *Neka je $\mathcal{A}$ C^*-algebra s jedinicom 1, $x \in \mathcal{A}$ normalni element i $\varphi \in C(\sigma(x))$. Tada vrijedi pravilo o preslikavanju spektra:*

$$\sigma(\varphi(x)) = \varphi(\sigma(x)) = \{f(\lambda);\ \lambda \in \sigma(x)\}.$$

Dokaz: Neka je $\mathcal{B}$ C^*-podalgebra generirana sa $\{1, x\}$. Dokaz se dobiva iz sljedećeg slijeda ekvivalencija:

$$\lambda \in \sigma_{\mathcal{A}}(\varphi(x)) \iff \lambda \in \sigma : \mathcal{B}(\varphi(x)) \iff \lambda = f(\varphi(x)) \text{ za neki } f \in \hat{\mathcal{B}} \iff$$

$$\iff \lambda = \varphi(f(x)) \text{ za neki } f \in \hat{\mathcal{B}} \iff \lambda = \varphi(\mu) \text{ za neki } \mu \in \sigma(x).$$

Funkcionalni račun omogućuje nam da dokažemo vrlo važnu karakterizaciju ireducibilnosti:

Teorem 3.4.3. *Neka je $\mathcal{H}$ Hilbertov prostor i neka je $\mathcal{S}$ podskup od $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ takav da je $\mathcal{S}^* = \mathcal{S}$. Sljedeća su dva svojstva ekvivalentna:*

(a) *$\mathcal{S}$ je ireducibilan, tj. ne postoji zatvoren potprostor $\mathcal{K}$ od $\mathcal{H}$ koji je $\mathcal{S}-$invarijantan, osim $\mathcal{K} = \{0\}$ i $\mathcal{K} = \mathcal{H}$.*

(b) *$\{T \in \mathcal{B}(\mathcal{H});\ TS = ST\ \forall S \in \mathcal{S}\} = \mathbb{C}I = \{\lambda I;\ \lambda \in \mathbb{C}\}$, pri čemu I označava jedinični operator na $\mathcal{H}$.*

Dokaz: $(b) \Rightarrow (a)$ Neka je $\mathcal{K}$ zatvoren $\mathcal{S}-$invarijantan potprostor od $\mathcal{H}$. Tada je i $\mathcal{K}^\perp$ $\mathcal{S}-$invarijantan, jer je $\mathcal{S}^* = \mathcal{S}$. Neka je P projektor $\mathcal{H}$ na $\mathcal{K}$ duž $\mathcal{K}^\perp$. Tada je $PS = SP\ \ \forall S \in \mathcal{S}$, pa iz (b) slijedi da je $P = \lambda I$ za neki $\lambda \in \mathbb{C}$. No P je projektor pa slijedi $\lambda I = P = P^2 = \lambda^2 I$, dakle, $\lambda = \lambda^2$, a to znači da je $\lambda = 0$ ili $\lambda = 1$. U prvom slučaju je $P = 0$, dakle, $\mathcal{K} = \{0\}$, a u drugom je $P = I$, dakle, $\mathcal{K} = \mathcal{H}$.

$(a) \Rightarrow (b)$ Sada pretpostavljamo da je skup $\mathcal{S}$ ireducibilan. Neka je $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ takav da je $TS = ST\ \ \forall S \in \mathcal{S}$. Pretpostavimo prvo da je $T = T^*$. Neka je $\mathcal{A}$ C^*-podalgebra od $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ generirana sa $\{I, T\}$. Tada je $AS = SA\ \ \forall A \in \mathcal{A}$ i $\forall S \in \mathcal{S}$. Nadalje, algebra $\mathcal{A}$ je izomorfna sa $C(\sigma(T))$. Pretpostavimo da $\sigma(T)$ nije jednočlan skup. Tada postoje $\varphi, \psi \in C(\sigma(T))$, $\varphi \neq 0$, $\psi \neq 0$, takvi da je $\varphi\psi = 0$. Stavimo $A = \varphi(T)$ i $B = \psi(T)$. Tada su $A, B \in \mathcal{A}$, $A \neq 0$, $B \neq 0$, $AB = 0$. Stavimo

$$\mathcal{K} = \operatorname{Ker} A = \{\xi \in \mathcal{H};\ A\xi = 0\}.$$

Tada je $\mathcal{K}$ zatvoren $\mathcal{S}-$invarijantan potprostor od $\mathcal{H}$. Nadalje, $B \neq 0$, pa postoji $\eta \in \mathcal{H}$ takav da je $\xi = B\eta \neq 0$. No tada je $A\xi = AB\eta = 0$, dakle, $\xi \in \mathcal{K}$. To pokazuje da je $\mathcal{K} \neq \{0\}$. Zbog ireducibilnosti je $\mathcal{K} = \mathcal{H}$. No to je u suprotnosti sa $A \neq 0$. Ova kontradikcija pokazuje da je $\sigma(T)$ jednočlan skup. No tada je $\dim \mathcal{A} = \dim C(\sigma(T)) = 1$, pa slijedi da je $\mathcal{A} = \mathbb{C}I$. Dakle, $T = \lambda I$ za neki $\lambda \in \mathbb{C}$ (u stvari, za neki $\lambda \in \mathbb{R}$, jer je T hermitski).

Uzmimo sada da je $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ proizvoljan takav da je $TS = ST\ \ \forall S \in \mathcal{S}$. Stavimo

$$T_1 = \frac{1}{2}(T + T^*), \quad T_2 = \frac{1}{2i}(T - T^*).$$

Tada su T_1 i T_2 hermitski i $T = T_1 + iT_2$. Budući da je $\mathcal{S} = \mathcal{S}^*$ slijedi

$$T_1 S = S T_1 \qquad \text{i} \qquad T_2 S = S T_2 \qquad \forall S \in \mathcal{S}.$$

Prema dokazanom postoje $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ takvi da je $T_1 = \lambda_1 I$ i $T_2 = \lambda_2 I$. Odatle za $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2 \in \mathbb{C}$ dobivamo $T = \lambda I$.

3.5 Algebre bez jedinice

Neka je $\mathcal{A}$ Banachova algebra bez jedinice. Ponovimo sada malo pažljivije konstrukciju iz dokaza teorema 3.1.3. Na kompleksnom vektorskom prostoru $\tilde{\mathcal{A}} = \mathcal{A} \times \mathbb{C}$ definiramo množenje sa

$$(a, \lambda)(b, \mu) = (ab + \lambda b + \mu a, \lambda\mu), \qquad (a, \lambda), (b, \mu) \in \tilde{\mathcal{A}}.$$

Tada $\tilde{\mathcal{A}}$ postaje asocijativna algebra s jedinicom $1 = (0, 1)$. Nadalje, $a \mapsto (a, 0)$ je injektivni homomorfizam algebre $\mathcal{A}$ u algebru $\tilde{\mathcal{A}}$. Pomoću tog monomorfizma izvršimo identifikaciju algebre $\mathcal{A}$ s podalgebrom od $\tilde{\mathcal{A}}$. Uz tu identifikaciju $\mathcal{A}$ je u stvari obostrani ideal u $\tilde{\mathcal{A}}$ kodimenzije 1 i $\tilde{\mathcal{A}} = \mathcal{A} \dotplus \mathbb{C} \cdot 1$.

Dopustiva norma na $\tilde{\mathcal{A}}$ je norma na prostoru $\tilde{\mathcal{A}}$ u odnosu na koju je $\tilde{\mathcal{A}}$ normirana algebra s jedinicom i koja se na $\mathcal{A}$ podudara s polaznom normom. Takve norme postoje; primjer je

$$\|a + \lambda \cdot 1\| = \|a\| + |\lambda|, \qquad a \in \mathcal{A}, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Uz svaku dopustivu normu $\tilde{\mathcal{A}}$ je Banachova algebra s jedinicom, jer je $\mathcal{A}$ potpuna i kodimenzije 1.

Neka je sada $\mathcal{A}$ komutativna Banachova algebra bez jedinice. **Karakter** od $\mathcal{A}$ je linearan funkcional $f : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ takav da je $f \neq 0$ i $f(ab) = f(a)f(b)$ $\forall a, b \in \mathcal{A}$. Neka je $\hat{\mathcal{A}}$ topološki prostor svih karaktera od $\mathcal{A}$ snabdjeven s topologijom proste konvergencije, odnosno, konvergencije po točkama. Podrazumijevamo da je $\tilde{\mathcal{A}}$ snabdjevena s nekom dopustivom normom.

Propozicija 3.5.1. *Neka je $\varphi_\infty \in \hat{\tilde{\mathcal{A}}}$ definiran sa $\varphi_\infty|\mathcal{A} = 0$, tj.*

$$\varphi_\infty(a + \lambda \cdot 1) = \lambda, \qquad a \in \mathcal{A}, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Tada je $\varphi \mapsto \varphi|\mathcal{A}$ homeomorfizam sa $\hat{\tilde{\mathcal{A}}} \setminus \{\varphi_\infty\}$ na $\hat{\mathcal{A}}$. Posebno, $\hat{\mathcal{A}}$ je lokalno kompaktan Hausdorffov topološki prostor i $\hat{\tilde{\mathcal{A}}}$ je kompaktifikacija od $\hat{\mathcal{A}}$ s jednom točkom.

Dokaz: Za $\varphi \in \hat{\tilde{\mathcal{A}}} \setminus \{\varphi_\infty\}$ je očito $\varphi|\mathcal{A} \in \hat{\mathcal{A}}$. Nadalje, ako su $\varphi, \psi \in \hat{\tilde{\mathcal{A}}} \setminus \{\varphi_\infty\}$ takvi da je $\varphi|\mathcal{A} = \psi|\mathcal{A}$, onda je za $a \in \mathcal{A}$ i $\lambda \in \mathbb{C}$

$$\varphi(a + \lambda \cdot 1) = \varphi(a) + \lambda\varphi(1) = \varphi(a) + \lambda = \psi(a) + \lambda\psi(1) = \psi(a + \lambda \cdot 1),$$

pa slijedi $\varphi = \psi$. Dakle, preslikavanje $\varphi \mapsto \varphi|\mathcal{A}$ je injekcija sa $\hat{\tilde{\mathcal{A}}} \setminus \{\varphi_\infty\}$ u $\hat{\mathcal{A}}$.

Neka je $f \in \hat{\mathcal{A}}$. Definiramo $\varphi : \tilde{\mathcal{A}} \to \mathbb{C}$ sa

$$\varphi(a + \lambda \cdot 1) = f(a) + \lambda, \qquad a \in \mathcal{A}, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Tada se provjerava da je $\varphi \in \hat{\tilde{\mathcal{A}}} \setminus \{\varphi_\infty\}$ i očito je $\varphi|\mathcal{A} = f$.

Time je dokazano da je $\varphi \mapsto \varphi|\mathcal{A}$ bijekcija sa $\hat{\tilde{\mathcal{A}}} \setminus \{\varphi_\infty\}$ na $\hat{\mathcal{A}}$. Napokon, ako je $(\varphi_i)_{i\in I}$ hiperniz u $\hat{\tilde{\mathcal{A}}} \setminus \{\varphi_\infty\}$ i ako je $\varphi \in \hat{\tilde{\mathcal{A}}} \setminus \{\varphi_\infty\}$ onda imamo ovaj slijed očiglednih ekvivalencija:

$$\varphi(a) = \lim_{i\in I} \varphi_i(a) \ \ \forall a \in \mathcal{A} \quad \Longleftrightarrow \quad \varphi(a) + \lambda = \lim_{i\in I} \varphi_i(a) + \lambda \ \ \forall a \in \mathcal{A}, \ \forall \lambda \in \mathbb{C} \quad \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \quad \varphi(a + \lambda \cdot 1) = \lim_{i\in I} \varphi_i(a + \lambda \cdot 1) \ \ \forall a \in \mathcal{A}, \ \forall \lambda \in \mathbb{C} \quad \Longleftrightarrow \quad \varphi(x) = \lim_{i\in I} \varphi_i(x) \ \ \forall x \in \tilde{\mathcal{A}}.$$

To pokazuje da je $\varphi \mapsto \varphi|\mathcal{A}$ homeomorfizam.

Za $x \in \mathcal{A}$ na isti način kao i u slučaju algebri s jedinicom definiramo funkciju $\hat{x} : \hat{\mathcal{A}} \to \mathbb{C}$ sa $\hat{x}(f) = f(x)$, $f \in \hat{\mathcal{A}}$. I u ovom slučaju se $x \mapsto \hat{x}$ zove Geljfandova transformacija ili Geljfandov homomorfizam. To je homomorfizam algebre $\mathcal{A}$ u algebru $C(\hat{\mathcal{A}})$. Za $x \in \mathcal{A}$ je $\varphi_\infty(x) = 0$. Dakle, neprekidna funkcija $\hat{x}$ na lokalno kompaktnom prostoru $\hat{\mathcal{A}}$ teži k nuli u beskonačnosti. Prema tome, Geljfandova transformacija je homomorfizam $\mathcal{A}$ u Banachovu algebru $C_\infty(\hat{\mathcal{A}})$ svih neprekidnih funkcija na $\hat{\mathcal{A}}$ koje teže k nuli u beskonačnosti.

Neka je sada $\mathcal{A}$ Banachova $*-$algebra bez jedinice. Tada i $\tilde{\mathcal{A}}$ postaje $*-$algebra uz proširenje involucije $*$ na sljedeći način:

$$(a, \lambda)^* = (a^*, \overline{\lambda}) \qquad \text{tj.} \qquad (a + \lambda \cdot 1)^* = a^* + \overline{\lambda} \cdot 1, \qquad a \in \mathcal{A}, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Propozicija 3.5.2. *Neka je $\mathcal{A}$ C^*-algebra bez jedinice. Tada na $\tilde{\mathcal{A}}$ postoji jedinstvena norma s kojom je $\tilde{\mathcal{A}}$ C^*-algebra s jedinicom. Ta je norma dopustiva.*

Dokaz: Prije svega, jedinstvenost slijedi neposredno iz teorema 3.1.3. Dakle, dokaz će biti potpun ako konstruiramo neku dopustivu normu na $\tilde{\mathcal{A}}$ u odnosu na koju je $\tilde{\mathcal{A}}$ C^*-algebra.

Za $x \in \tilde{\mathcal{A}}$ stavimo

$$|||x||| = \sup\{\|xa\|;\ a \in \mathcal{A},\ \|a\| \leq 1\}.$$

Tada je očito $x \mapsto |||x|||$ polunorma na $\tilde{\mathcal{A}}$ i vrijedi $|||xy||| \leq |||x||| \cdot |||y|||$ $\forall x, y \in \tilde{\mathcal{A}}$.

Dokažimo da se to preslikavanje na $\mathcal{A}$ podudara s normom od $\mathcal{A}$, tj. da je

$$|||x||| = \|x\| \qquad \forall x \in \mathcal{A}.$$

To je očito ako je $x = 0$. Uzmimo da je $x \in \mathcal{A}$, $x \neq 0$. Tada za $a \in \mathcal{A}$, $\|a\| \leq 1$, vrijedi $\|xa\| \leq \|x\|$. Prema tome je $|||x||| \leq \|x\|$. Uzmimo $a = \|x\|^{-1}x^* \in \mathcal{A}$. Tada je $\|a\| = 1$ i

$$\|xa\| = \frac{1}{\|x\|}\|xx^*\| = \frac{1}{\|x\|}\|x^*\|^2 = \|x\|.$$

Stoga vrijedi i obrnuta nejednakost $|||x||| \geq \|x\|$. Time je dokazana tražena jednakost $|||x||| = \|x\|$.

Dokažimo sada da je $|||\cdot|||$ definitna, dakle, norma na $\tilde{\mathcal{A}}$. Neka je $x = b + \lambda \cdot 1 \in \tilde{\mathcal{A}}$ ($b \in \mathcal{A}$, $\lambda \in \mathbb{C}$) takav da je $|||x||| = 0$. Pretpostavimo da je $\lambda \neq 0$. Stavimo $e = -\lambda^{-1}b \in \mathcal{A}$. Budući da je $|||x||| = 0$, za svaki $a \in \mathcal{A}$ vrijedi $xa = 0$, tj. $ba + \lambda a = 0$. Odatle je

$$ea = a \qquad \forall a \in \mathcal{A}.$$

Slijedi

$$ae^* = (ea^*)^* = (a^*)^* = a.$$

Prema tome, vrijedi

$$ea = a = ae^* \qquad \forall a \in \mathcal{A}.$$

Posebno, $e = ee^* = e^*$, pa zaključujemo da je e jedinica u algebri $\mathcal{A}$, suprotno pretpostavci da je $\mathcal{A}$ algebra bez jedinice. Ova kontradikcija pokazuje da je nužno $\lambda = 0$. No tada je $x = a \in \mathcal{A}$, pa prema dokazanom slijedi $0 = |||a||| = \|a\|$, dakle, $x = a = 0$.

Prema tome, $|||\cdot|||$ je dopustiva norma na $\tilde{\mathcal{A}}$. S tom je normom $\tilde{\mathcal{A}}$ Banachova algebra s jedinicom.

Dokažimo sada da je

$$|||z^*z||| \geq |||z|||^2 \qquad \forall z \in \tilde{\mathcal{A}}.$$

U tu svrhu pretpostavimo prvo da je $|||z||| = 1$. Neka je $\rho < 1$ proizvoljan. Iz definicije norme $|||\cdot|||$ slijedi da postoji $y \in \mathcal{A}$ takav da je $\|y\| \leq 1$ i $\|zy\|^2 \geq \rho$. Budući da je $zy \in \mathcal{A}$, imamo redom

$$\rho \leq \|z\|^2 = \|(zy)^*(zy)\| = \|y^*(z^*z)y\| = |||y^*(z^*z)y||| \leq |||y^*||| \cdot |||y||| \cdot |||z^*z||| = \|y\|^2 \cdot |||z^*z||| \leq |||z^*z|||.$$

Zbog proizvoljnosti $\rho < 1$ zaključujemo da je $|||z^*z||| \geq 1$.

Uzmimo sada proizvoljan $z \in \tilde{\mathcal{A}}$, $z \neq 0$. Za $x = |||z|||^{-1}z$ je tada $|||x||| = 1$, pa je prema dokazanom $|||x^*x||| \geq 1$, odakle slijedi tražena nejednakost $|||z^*z||| \geq |||z|||^2$.

Sada za svaki $z \in \tilde{\mathcal{A}}$ imamo

$$|||z|||^2 \leq |||z^*z||| \leq |||z^*||| \cdot |||z||| \qquad \Longrightarrow \qquad |||z||| \leq |||z^*|||.$$

Primijenimo li dobivenu nejednakost na z^* umjesto z dobivamo i obrnutu nejednakost $|||z||| \geq |||z^*|||$, dakle, vrijedi jednakost

$$|||z||| = |||z^*||| \qquad \forall z \in \tilde{\mathcal{A}}.$$

Napokon,

$$|||z|||^2 \leq |||z^*z||| \leq |||z^*||| \cdot |||z||| = |||z|||^2 \qquad \Longrightarrow \qquad |||z^*z||| = |||z|||^2 \quad \forall z \in \tilde{\mathcal{A}}.$$

Teorem 3.5.1. *Neka je $\mathcal{A}$ komutativna C^*-algebra bez jedinice. Geljfandova transformacija je izometrički izomorfizam $\mathcal{A}$ na C^*-algebru $C_\infty(\hat{\mathcal{A}})$ svih neprekidnih funkcija na $\hat{\mathcal{A}}$ koje teže k nuli u beskonačnosti.*

Dokaz: Uz prije uvedene oznake $f \mapsto f|\hat{\mathcal{A}}$ je izometrički izomorfizam C^*-algebre $\{g \in C(\hat{\tilde{\mathcal{A}}});\ g(\varphi_\infty) = 0\}$ na C^*-algebru $C_\infty(\hat{\mathcal{A}})$; pri tome se podrazumijevaju identifikacije $\mathcal{A} \subseteq \tilde{\mathcal{A}}$ i $\hat{\mathcal{A}} = \hat{\tilde{\mathcal{A}}} \setminus \{\varphi_\infty\}$. Nadalje, $x \mapsto \hat{x}$ je izometrički izomorfizam C^*-algebre $\tilde{\mathcal{A}}$ na algebru $C(\hat{\tilde{\mathcal{A}}})$. Za $x \in \tilde{\mathcal{A}}$ imamo ekvivalencije

$$\hat{x}(\varphi_\infty) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \varphi_\infty(x) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x \in \mathcal{A}.$$

Dakle, pri tom izomorfiznu C^*-algebra $\mathcal{A}$ se preslikava na C^*-algebru $\{g \in C(\hat{\tilde{\mathcal{A}}});\ g(\varphi_\infty) = 0\}$. Dakle, kompozicija dvaju izomorfizama je izometrički izomorfizam C^*-algebre $\mathcal{A}$ na C^*-algebru $C_\infty(\hat{\mathcal{A}})$.

Poglavlje 4

Abelove lokalno kompaktne grupe

4.1 Dualna grupa

Propozicija 4.1.1. *Neka je π unitarna reprezentacija Abelove lokalno kompaktne grupe G na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H} \neq \{0\}$. Tada je* $\dim \mathcal{H} = 1$.

Dokaz: Po teoremu 3.4.3. operator $\pi(x)$ proporcionalan je sa jediničnim operatorom I na $\mathcal{H}$ $\forall x \in G$. To znači da svaki zatvoren potprostor od $\mathcal{H}$ $\pi-$invarijantan. Kako je reprezentacija ireducibilna, nužno je $\mathcal{H}$ jednodimenzionalan.

U daljnjem je G Abelova lokalno kompaktna grupa. Nadalje, fiksirajmo neku Haarovu mjeru μ na G. Primijetimo da su algebre $C_0(G)$, $L_1(G)$ i $C^*(G)$ komutativne.

Karakter od G je neprekidni homomorfizam χ grupe G u multiplikativnu grupu $T = \{\lambda \in \mathbb{C};\ |\lambda| = 1\}$. Dakle, karakter je ireducibilna unitarna reprezentacija od G. Označavat ćemo sa $\hat{G}$ skup svih karaktera od G. U taj skup uvodimo strukturu Abelove grupe pomoću množenja po točkama:

$$(\chi\chi')(x) = \chi(x)\chi'(x), \qquad \chi, \chi' \in \hat{G}, \quad x \in G.$$

Nadalje, za $\chi \in \hat{G}$ definiramo $\zeta_\chi : L_1(G) \to \mathbb{C}$ sa

$$\zeta_\chi(f) = \int_G f(x)\chi(x)\mathrm{d}\mu(x), \qquad f \in L_1(G).$$

Propozicija 4.1.2. $\chi \mapsto \zeta_\chi$ *je bijekcija sa* $\hat{G}$ *na* $L_1(G)\hat{}$.

Dokaz: Prema jednostavnom proširenju teorema 2.2.1. sa algebre $C_0(G)$ na algebru $L_1(G)$ za svaki karakter $\chi \in \hat{G}$ je ζ_χ nedegenerirana reprezentacija Banachove $*-$algebre $L_1(G)$ na jednodimenzionalnom prostoru. Dakle je $\zeta_\chi \in L_1(G)\hat{}$.

Pretpostavimo da su $\chi, \chi' \in \hat{G}$ takvi da je $\zeta_\chi = \zeta_{\chi'}$. Posebno, tada su ζ_χ i $\zeta_{\chi'}$ ekvivalentne reprezentacije od $L_1(G)$. Prema tvrdnji (*e*) teorema 2.2.1. tada su χ i χ' ekvivalentne reprezentacije od G. No to znači $\chi = \chi'$. Time je dokazano da je preslikavanje $\chi \mapsto \zeta_\chi$ injekcija.

Napokon, tvrdnja o surjektivnosti slijedila bi neposredno iz bijektivnosti skupova ireducibilnih reprezentacija u teoremu 2.2.1. kad bismo znali da je svaki $\zeta \in L_1(G)\hat{}$ $*-$homomorfizam, tj. da je $\zeta(f^*) = \overline{\zeta(f)}$, $\forall f \in L_1(G)$, ali to nije a priori jasno. Stoga moramo surjektivnost dokazati neovisno o teoremu 2.2.1.

Neka je $\zeta \in L_1(G)\hat{}$. Tada je ζ neprekidni linearni funkcional na $L_1(G)$ i njegova je norma ≤ 1, tj.

$$|\zeta(f)| \leq \|f\|_1 \qquad \forall f \in L_1(G).$$

Neka je $f \in C_0(G)$ takva da je $\zeta(f) \neq 0$. Definiramo preslikavanje $\chi : G \to \mathbb{C}$ sa

$$\chi(x) = \frac{\zeta(\lambda_x f)}{\zeta(f)}, \qquad x \in G.$$

Neka je $(\varphi_i)_{i\in I}$ hiperniz iz propozicije 1.5.3. Dakle, $\varphi_i \in C_0^+(G)$ i vrijedi

$$\lim_{i\in I} \|\varphi_i * g - g\|_1 = \lim_{i\in I} \|g * \varphi_i - g\|_1 = 0 \qquad \forall g \in C_0(G).$$

Kako je algebra $C_0(G)$ komutativna, pomoću tvrdnje (d) propozicije 1.5.1. za $x \in G$ i $g \in C_0(G)$ imamo

$$\lambda_x g = \lim_{i\in I} \lambda_x g * \varphi_i = \lim_{i\in I} \lambda_x(g * \varphi_i) = \lim_{i\in I} \lambda_x(\varphi_i * g) = \lim_{i\in I} \lambda_x\varphi_i * g.$$

Stoga je

$$\zeta(\lambda_x g) = \lim_{i\in I} \zeta(\lambda_x\varphi_i * g) = \lim_{i\in I} \zeta(\lambda_x\varphi_i)\zeta(g) = \zeta(g) \cdot \lim_{i\in I} \zeta(\lambda_x\varphi_i).$$

Primijenimo li dobiveno na $g = f$, slijedi

$$\chi(x) = \lim_{i\in I} \zeta(\lambda_x\varphi_i), \qquad x \in G.$$

Iz posljednjih dviju jednakosti slijedi

$$\zeta(\lambda_x g) = \chi(x)\zeta(g), \qquad x \in G, \quad g \in C_0(G).$$

Odatle za $x, y \in G$ nalazimo

$$\chi(xy) = \frac{\zeta(\lambda_{xy} f)}{\zeta(f)} = \frac{\zeta(\lambda_x(\lambda_y f))}{\zeta(f)} = \chi(x)\frac{\zeta(\lambda_y f)}{\zeta(f)} = \chi(x)\chi(y).$$

Prema tome, χ je homomorfizam grupe G u multiplikativnu grupu $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Nadalje,

$$|\chi(x)| = \frac{|\zeta(\lambda_x f)|}{|\zeta(f)|} \leq \|\lambda_x f\|_1 |\zeta(f)| = \frac{\|f\|_1}{|\zeta(f)|} \qquad \forall x \in G.$$

Dakle, homomorfizam χ je ograničen. No svaka ograničena podgrupa multiplikativne grupe $\mathbb{C}^*$ sadržana je u T. Time je dokazano da je χ homomorfizam grupe G u multiplikativnu grupu T. Nadalje, iz dokaza propozicije 1.5.3. vidi se da je preslikavanje $x \mapsto \lambda_x f$ sa G u $L_1(G)$ neprekidno. Slijedi da je homomorfizam χ neprekidan, dakle, $\chi \in \hat{G}$.

Dokažimo još da je $\zeta = \zeta_\chi$. Time će dokaz propozicije biti potpun. Za $g \in C_0(G)$ imamo

$$\zeta(g)\zeta(f) = \zeta(g * f)$$

i

$$(g * f)(y) = \int_G g(x) f(x^{-1}y) \mathrm{d}\mu(x) = \int_G g(x)(\lambda_x f)(y) \mathrm{d}\mu(x),$$

pa primjenom **??????** na linearno neprekidno preslikavanje $\zeta : L_1(G) \to \mathbb{C}$ i na neprekidnu funkciju $x \mapsto g(x)\lambda_x f$ sa G u $L_1(G)$ dobivamo

$$\zeta(g)\zeta(f) = \int_G g(x)\zeta(\lambda_x f) \mathrm{d}\mu(x) = \int_G g(x)\chi(x)\zeta(f) \mathrm{d}\mu(x) = \zeta(f)\zeta_\chi(g).$$

Kako je $\zeta(f) \neq 0$, zaključujemo da je $\zeta(g) = \zeta_\chi(g) \ \ \forall g \in C_0(G)$. Budući da je podalgebra $C_0(G)$ gusta u $L_1(G)$ i budući da su funkcionali ζ i ζ_χ neprekidni, slijedi $\zeta = \zeta_\chi$.

Propozicija 4.1.3. *$\zeta \mapsto \zeta|L_1(G)$ je homeomorfizam sa $C^*(G)\hat{}$ na $L_1(G)\hat{}$.*

Dokaz: Očito je $\zeta \mapsto \zeta|L_1(G)$ preslikavanje sa $C^*(G)\hat{}$ u $L_1(G)\hat{}$. Ono je injektivno, jer je $L_1(G)$ gusta podalgebra od $C^*(G)$. Neka je $\xi \in L_1(G)\hat{}$. Prema propoziciji 4.1.2. tada je $\xi = \zeta_\chi$ za neki $\chi \in \hat{G}$, dakle je ξ $*-$homomorfizam algebre $L_1(G)$ u $\mathbb{C}$. Prema teoremima 2.2.1. i 2.2.2. ξ se jedinstveno proširuje do $*-$homomorfizma $\zeta : C^*(G) \to \mathbb{C}$. Dakle, $\xi = \zeta|L_1(G)$ i $\zeta \in C^*(G)\hat{}$, i time je dokazana surjektivnost preslikavanja $\zeta \mapsto \zeta|L_1(G)$ sa $C^*(G)\hat{}$ na $L_1(G)\hat{}$.

Neka je ζ limes hiperniza $(\zeta_i)_{i\in I}$ u $C^*(G)\hat{}$. Tada je

$$\zeta(f) = \lim_{i\in I} \zeta_i(f) \qquad \forall f \in C^*(G) \quad \text{i, posebno,} \quad \forall f \in L_1(G).$$

Slijedi da je $\zeta|L_1(G)$ limes hiperniza $(\zeta_i|L_1(G))_{i\in I}$ u $L_1(G)\hat{}$. Time je dokazano da je preslikavanje $\zeta \mapsto \zeta|L_1(G)$ sa $C^*(G)\hat{}$ u $L_1(G)\hat{}$ neprekidno.

Pretpostavimo sada da je $(\zeta_i)_{i\in I}$ hiperniz u $C^*(G)\hat{}$ i $\zeta \in C^*(G)\hat{}$ i da vrijedi

$$\zeta|L_1(G) = \lim_{i\in I} \zeta_i|L_1(G) \qquad \text{u} \quad L_1(G)\hat{},$$

tj. da je

$$\zeta(f) = \lim_{i\in I} \zeta_i(f) \qquad \forall f \in L_1(G).$$

Neka je $g \in C^*(G)$ i $\varepsilon > 0$. Izaberimo $f \in L_1(G)$ tako da u $C^*(G)$ vrijedi

$$\|g - f\| \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Nadalje, neka je $i_0 \in I$ takav da vrijedi

$$i \in I, \ \ i \geq i_0 \qquad \Longrightarrow \qquad |\zeta(f) - \zeta_i(f)| \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Za $i \in I$, $i \geq i_0$, imamo

$$|\zeta(g) - \zeta_i(g)| \leq |\zeta(g) - \zeta(f)| + |\zeta(f)\zeta_i(f)| + |\zeta_i(f) - \zeta_i(g)| =$$

$$= |\zeta(g - f)| + |\zeta(f) - \zeta_i(f)| + |\zeta_i(f - g)| \leq 2\|f - g\| + |\zeta(f) - \zeta_i(f)| \leq \varepsilon.$$

Time je dokazano da je

$$\zeta(g) = \lim_{i\in I} \zeta_i(g) \qquad \forall g \in C^*(G)$$

tj. da je

$$\zeta = \lim_{i\in I} \zeta_i \qquad \text{u} \quad C^*(G)\hat{}.$$

Prema tome, $\zeta \mapsto \zeta|L_1(G)$ je homeomorfizam sa $C^*(G)\hat{}$ na $L_1(G)\hat{}$.

Na osnovu propozicija 4.1.2. i 4.1.3. vršimo identifikaciju $\hat{G} = L_1(G)\hat{} = C^*(G)\hat{}$. Posebno, umjesto uvedene oznake ζ_χ upotrebljavamo $\chi \in \hat{G}$ i kao oznaku za pripadne karaktere algebri $L_1(G)$ i $C^*(G)$. Na taj način $\hat{G}$ postaje lokalno kompaktan Hausdorffov topološki prostor.

Propozicija 4.1.4. *Preslikavanje $(\chi, x) \mapsto \chi(x)$ sa $\hat{G} \times G$ u T je neprekidno.*

Dokaz: Neka je $(\chi_0, x_0) \in \hat{G} \times G$. Izaberimo $f \in C_0(G)$ tako da je $\chi_0(f) = 1$. Sada za proizvoljan par $(\chi, x) \in \hat{G} \times G$ imamo

$$|\chi(\lambda_x f) - \chi_0(\lambda_{x_0} f)| \leq |\chi(\lambda_x f) - \chi(\lambda_{x_0} f)| + |\chi(\lambda_{x_0} f) - \chi_0(\lambda_{x_0} f)| =$$

$$= |\chi(\lambda_x f - \lambda_{x_0} f)| + |\chi(\lambda_{x_0} f) - \chi_0(\lambda_{x_0} f)| \leq \|\lambda_x f - \lambda_{x_0} f\|_1 + |\chi(\lambda_{x_0} f) - \chi_0(\lambda_{x_0} f)|$$

Odatle slijedi da je preslikavanje $(\chi, x) \mapsto \chi(\lambda_x f)$ neprekidno sa $\hat{G} \times G$ u $\mathbb{C}$ u točki (χ_0, x_0). Nadalje, preslikavanje $\chi \mapsto \chi(f)$ je neprekidno sa $\hat{G}$ u $\mathbb{C}$ i $\chi_0(f) = 1 \neq 0$. Prema tome, preslikavanje

$$(\chi, x) \mapsto \frac{\chi(\lambda_x f)}{\chi(f)} = \chi(x)$$

sa $\hat{G} \times G$ u $\mathbb{C}$ je neprekidno u točki (χ_0, x_0).

Teorem 4.1.1. *(a) Topologija prostora $\hat{G}$ promatranog kao prostor funkcija na G je topologija lokalno uniformne konvergencije (tj. uniformne konvergencije na svakom kompaktnom podskupu od G).*

(b) $\hat{G}$ je lokalno kompaktna grupa.

Dokaz: (a) Neka je $(\chi_i)_{i\in I}$ hiperniz u $\hat{G}$ i $\chi_0 \in \hat{G}$.

Pretpostavimo da hiperniz $(\chi_i)_{i\in I}$ konvergira lokalno uniformno prema χ_0, tj. da za svaki kompaktan skup $K \subseteq G$ hiperniz restrikcija $(\chi_i|K)_{i\in K}$ konvergira uniformno prema restrikciji $\chi_0|K$. Neka je $f \in C_0(G)$. Tada je $Supp\, f$ kompaktan skup pa slijedi

$$\chi_0(f) = \int_G f(x)\chi_0(x)\mathrm{d}\mu(x) = \lim_{i\in I} \int_G f(x)\chi_i(x)\mathrm{d}\mu(x) = \lim_{i\in I} \chi_i(f).$$

Budući da je $C_0(G)$ gusto u $C^*(G)$, kao u dokazu propozicije 4.1.3. slijedi da hiperniz $(\chi_i)_{i\in I}$ konvergira prema χ_0 u $\hat{G} = C^*(G)\hat{}$.

Pretpostavimo sada obratno da hiperniz $(\chi_i)_{i\in I}$ konvergira prema χ_0 u odnosu na topologiju od $\hat{G}$. Neka je $K \subseteq G$ kompaktan skup i $\varepsilon > 0$. Stavimo

$$W = \{\chi \in \hat{G};\ |\chi(x) - \chi_0(x)| < \varepsilon\ \forall x \in K\}.$$

Budući da je prema propoziciji 4.1.4. preslikavanje $(\chi, x) \mapsto \chi(x)$ neprekidno na $\hat{G} \times G$, pomoću leme 1.2.1. zaključujemo da je W otvoren skup u $\hat{G}$. Budući da je $\chi_0 \in W$, W je okolina točke χ_0 u prostoru $\hat{G}$. Prema tome postoji $i_0 \in I$ takav da $i \geq i_0 \implies \chi_i \in W$, tj. da vrijedi

$$i \geq i_0 \qquad \Longrightarrow \qquad |\chi_i(x) - \chi_0(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in K.$$

Dakle, hiperniz restrikcija $(\chi_i|K)_{i\in I}$ konvergira uniformno prema restrikciji $\chi_0|K$.

(b) Budući da je $\chi^{-1}(x) = \overline{\chi(x)}$, očito je invertiranje $\chi \mapsto \chi^{-1}$ sa $\hat{G}$ u $\hat{G}$ neprekidno. Neka su $\chi_0, \chi_0' \in \hat{G}$, neka je $K \subseteq G$ kompaktan skup i neka je $\varepsilon > 0$. Ako su $\chi, \chi' \in \hat{G}$ takvi da je

$$|\chi(x) - \chi_0(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{i} \qquad |\chi'(x) - \chi_0'(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} \qquad \forall x \in K,$$

onda za $x \in K$ imamo

$$|(\chi\chi')(x) - (\chi_0\chi_0'(x)| \leq |\chi(x)\chi'(x) - \chi_0(x)\chi'(x)| + |\chi_0(x)\chi'(x) - \chi_0\chi_0'(x)| =$$

$$= |\chi(x) - \chi_0(x)| \cdot |\chi'(x)| + |\chi_0(x)| \cdot |\chi'(x) - \chi_0'(x)| = |\chi(x) - \chi_0(x)| + |\chi'(x) - \chi_0'(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Prema tome, ako χ teži prema χ_0 i ako χ' teži prema χ_0', onda $\chi\chi'$ teži prema $\chi_0\chi_0'$. Time je dokazano da je i množenje $(\chi, \chi') \mapsto \chi\chi'$ sa $\hat{G} \times \hat{G}$ u $\hat{G}$ neprekidno.

Lokalno kompaktna grupa $\hat{G}$ zove se **dualna grupa** grupe G.

Propozicija 4.1.5. *Za $x \in G$ definiramo $\eta(x) : \hat{G} \to T$ sa*

$$[\eta(x)](\chi) = \chi(x), \qquad \chi \in \hat{G}.$$

Tada je $\eta(x) \in \hat{\hat{G}}$ i $\eta : G \to \hat{\hat{G}}$ je neprekidni injektivni homomorfizam.

Dokaz: Budući da je svaki jednočlan skup $\{x\}$ kompaktan, preslikavanje $\eta(x) : \chi \mapsto \chi(x)$ je neprekidno sa $\hat{G}$ u T. Očito je to homomorfizam grupa. Dakle, vrijedi $\eta(x) \in \hat{\hat{G}}$, $\forall x \in G$. Nadalje, direktno se provjerava da je $\eta : G \to \hat{\hat{G}}$ homomorfizam grupa.

Dokažimo injektivnost. Neka su $x, y \in G$, $x \neq y$. Tada postoji $f \in C_0(G)$ takva da je $\lambda_x f \neq \lambda_y f$. $C_0(G)$ je podalgebra od $C^*(G)$, a algebra $C^*(G)$ je izomorfna sa $C(\hat{G})$ ako ima jedinicu, odnosno sa $C_\infty(\hat{G})$ ako nema jedinicu. Stoga postoji $\chi \in \hat{G}$ takav da je $(\lambda_x f)\hat{}(\chi) \neq (\lambda_y f)\hat{}(\chi)$, tj. $\chi(\lambda_x f) \neq \chi(\lambda_y f)$, tj. $\chi(x)\chi(f) \neq \chi(y)\chi(f)$. No tada je $\chi(f) \neq 0$ i slijedi $\chi(x) \neq \chi(y)$, odnosno, $[\eta(x)](\chi) \neq [\eta(y)](\chi)$. Dakle, je $\eta(x) \neq \eta(y)$ i dokazana je injektivnost preslikavanja $\eta : G \to \hat{\hat{G}}$.

Treba još dokazati da je preslikavanje $\eta : G \to \hat{\hat{G}}$ neprekidno. Neka je $(x_i)_{i \in I}$ konvergentan hiperniz u G i neka je $x_0 \in G$ njegov limes. Prema tvrdnji (a) teorema 4.1.1. primijenjenoj na Abelovu lokano kompaktnu grupu $\hat{G}$, treba dokazati da za svaki kompaktan podskup $K \subseteq \hat{G}$ hiperniz restrikcija $(\eta(x_i)|K)_{i \in I}$ konvergira uniformno prema restrikciji $\eta(x_0)|K$, odnosno da je

$$\lim_{i \in I} \chi(x_i) = \chi(x_0) \qquad \text{uniformno u odnosu na} \quad \chi \in K.$$

Neka je $\varepsilon > 0$. Prema propoziciji 4.1.4. za svaki $\chi \in K$ postoje otvorena okolina V_χ od χ u $\hat{G}$ i otvorena okolina W_χ od x_0 u G takve da vrijedi

$$(\chi', x') \in V_\chi \times W_\chi \qquad \Longrightarrow \qquad |\chi'(x') - \chi(x_0)| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Odatle slijedi

$$(\chi', x'), (\chi'', x'') \in V_\chi \times W_\chi \qquad \Longrightarrow \qquad |\chi'(x') - \chi''(x'')| \leq \varepsilon.$$

K je kompaktan, pa postoje $n \in \mathbb{N}$ i $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_n \in K$ takvi da je

$$K \subseteq V_{\chi_1} \cup V_{\chi_2} \cup \cdots \cup V_{\chi_n}.$$

Stavimo

$$W = W_{\chi_1} \cap W_{\chi_2} \cap \cdots \cap W_{\chi_n}.$$

Tada je W okolina od x_0 u G. Neka je $i_0 \in I$ takav da vrijedi

$$i \in I, \quad i \geq i_0 \qquad \Longrightarrow \qquad x_i \in W.$$

Neka je sada $\chi \in K$ proizvoljan. Tada je $\chi \in V_{\chi_j}$ za neko $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, a vrijedi i $x_0 \in W_{\chi_j}$. Dakle, za $i \geq i_0$ je $|\chi(x_i) - \chi(x_0)| \leq \varepsilon$. Time je dokazano da vrijedi

$$i \in I, \quad i \geq i_0 \qquad \Longrightarrow \qquad |\chi(x_i) - \chi(x_0)| \quad \forall \chi \in K.$$

4.2 Konvolucija na unimodularnoj grupi

Neka je u daljnjem G proizvoljna lokalno kompaktna grupa (ne nužno Abelova pa čak, za sada, ne nužno unimodularna) i neka je μ desna Haarova mjera na G. Za $x \in G$ i $f \in L_1(G, \check{\mu})$ definirano je $\lambda_x f \in L_1(G, \check{\mu})$ sa

$$(\lambda_x f)(y) = f(x^{-1}y), \qquad y \in G.$$

U dokazu propozicije 1.5.3. vidjeli smo da je u slučaju $f \in C_0(G)$ preslikavanje $x \mapsto \lambda_x f$ neprekidno sa G u $L_1(G, \check{\mu})$. Budući da je $\lambda_x : L_1(G, \check{\mu}) \to L_1(G, \check{\mu})$ izometrija i budući da je $C_0(G)$ gusto u $L_1(G, \check{\mu})$, odatle slijedi da je preslikavanje $x \mapsto \lambda_x f$ sa G u $L_1(G, \check{\mu})$ neprekidno i za svaku $f \in L_1(G, \check{\mu})$:

$$\|\lambda_x f - \lambda_y f\|_1 \leq \|\lambda_x f - \lambda_x g\|_1 + \|\lambda_x g - \lambda_y g\|_1 + \|\lambda_y g - \lambda_y f\|_1 = 2\|f - g\|_1 + \|\lambda_x g - \lambda_y g\|_1.$$

Neka je sada π unitarna reprezentacija od G na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$. Tada je

$$\pi(\lambda_x f) = \pi(x)\pi(f), \qquad x \in G, \quad f \in L_1(G, \check{\mu}).$$

Budući da je operator $\pi(x)$ unitaran, slijedi

$$\|\pi(\lambda_x f)\| = \|\pi(f)\|, \qquad x \in G, \quad f \in L_1(G, \check{\mu}).$$

Sjetimo se da je $C^*(G)$ popunjenje algebre $L_1(G, \check{\mu})$ po normi $\|\cdot\|$ zadanoj sa

$$\|g\| = \sup\{\|\pi(g)\|;\ \pi \text{ unitarna reprezentacija grupe } G\}.$$

Slijedi

$$\|\lambda_x f\| = \|f\|, \qquad x \in G, \quad f \in L_1(G, \check{\mu}).$$

Prema tome, λ_x se proširuje do izometrije $\lambda_x : C^*(G) \to C^*(G)$. Kako je podalgebra $L_1(G, \check{\mu})$ gusta u $C^*(G)$ i $\|f\| \leq \|f\|_1$, $\forall f \in L_1(G, \check{\mu})$, slijedi da je $x \mapsto \lambda_x \varphi$ neprekidno sa G u $C^*(G)$ $\forall \varphi \in C^*(G)$. Nadalje, također zbog gustoće nalazimo da je $\lambda_{xy}\varphi = \lambda_x(\lambda_y \varphi)$, $x, y \in G$, $\varphi \in C^*(G)$.

Za $\varphi \in C_0(G)$ i $f \in L_2(G, \check{\mu})$ imamo

$$\pi_\ell(\varphi)f = \varphi * f \in L_2(G, \check{\mu})$$

gdje je

$$(\varphi * f)(x) = \int_G \varphi(y) f(y^{-1}x) \mathrm{d}\check{\mu}(x), \qquad x \in G.$$

Za $\varphi \in C^*(G)$ i $f \in L_2(G, \check{\mu})$ definiramo $\varphi * f \in L_2(G, \check{\mu})$ sa

$$\varphi * f = \pi_\ell(\varphi)f.$$

Tada je

$$\|\varphi * f\|_2 = \|\pi_\ell(\varphi)f\|_2 \leq \|\pi_\ell(\varphi)\| \cdot \|f\|_2 \leq \|\varphi\| \cdot \|f\|_2.$$

Posebno, $(\varphi, f) \mapsto \varphi * f$ je neprekidno bilinearno preslikavanje sa $C^*(G) \times L_2(G, \check{\mu})$ u $L_2(G, \check{\mu})$.

Lema 4.2.1. *Neka je I skup svih kompaktnih okolina od e u G promatran kao usmjeren skup parcijalno uređen obrnutom inkluzijom. Za svaku $i \in I$ izaberimo $\varphi_i \in C_0^*(G)$ takvu da je*

$$Supp\, \varphi_i \subseteq i \qquad i \qquad \int_G \varphi_i(x)\, d\check{\mu}(x) = 1.$$

Tada vrijedi

$$\lim_{i \in I} \|f - \varphi_i * f\|_1 = 0 \qquad \forall f \in L_1(G, \check{\mu})$$

i

$$\lim_{i \in I} \|f - \varphi_i * f\|_2 = 0 \qquad \forall f \in L_2(G, \check{\mu}).$$

Dokaz: Neka je $p \in \{1,2\}$. Znamo da je $x \mapsto \lambda_x f$ neprekidno sa G u $L_p(G,\check{\mu})$ $\forall f \in L_p(G,\check{\mu})$. Stoga za danu $f \in L_p(G,\check{\mu})$ i za dano $\varepsilon > 0$ postoji $i_0 \in I$ takav da vrijedi

$$x \in i_0 \qquad \Longrightarrow \qquad \|\lambda_x f - f\|_p \leq \varepsilon.$$

Za $i \in I$ imamo redom

$$(\varphi_i * f)(x) = \int_G \varphi_i)(y) f(y^{-1}x) \mathrm{d}\check{\mu}(x) \qquad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \qquad (\varphi_i * f)(x) - f(x) = \int_G \varphi_i(y)[\lambda_y f - f](x) \mathrm{d}\check{\mu}(x) \qquad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \qquad \|\varphi_i * f - f\|_p \leq \int_G \varphi_i(y) \|\lambda_y f - f\|_p \mathrm{d}\check{\mu}(x).$$

Ako je $i \geq i_0$, tj. $i \subseteq i_0$, i ako je $y \in G$ takav da je $\varphi_i(y) \neq 0$, tada je $y \in i \subseteq i_0$ pa je $\|\varphi_i * f - f\|_p \leq \varepsilon$. Prema tome,

$$i \geq i_0 \qquad \Longrightarrow \qquad \|\varphi_i * f - f\|_p \leq \varepsilon \int_G \varphi_i(y) \mathrm{d}\check{\mu}(x) = \varepsilon.$$

U daljnjem je grupa G stalno unimodularna, dakle $\check{\mu} = \mu$. Pisat ćemo $L_1(G) = L_1(G,\mu)$ i $L_2(G) = L_2(G,\mu)$. Tada je $f \mapsto \check{f}$ izometrija sa $L_1(G)$ na $L_1(G)$ i sa $L_2(G)$ na $L_2(G)$.

Neka je π unitarna reprezentacija grupe G na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$. Neka je $\overline{\mathcal{H}}$ konjugiran prostor od $\mathcal{H}$; kao aditivna grupa $\overline{\mathcal{H}}$ se podudara sa $\mathcal{H}$; množenje skalarom $\alpha \in \mathbb{C}$ definirano je sa $\alpha \cdot \xi = \overline{\alpha}\xi$; skalarni produkt je $(\xi|\eta)_{\overline{\mathcal{H}}} = (\eta|\xi)_{\mathcal{H}}$. Za $x \in G$ definiramo $\overline{\pi}(x) : \overline{\mathcal{H}} \to \overline{\mathcal{H}}$ sa $\overline{\pi}(x) = \pi(x)$. Tada je $\overline{\pi}$ unitarna reprezentacija grupe G na Hilbertovom prostoru $\overline{\mathcal{H}}$ i zove se **konjugirana reprezentacija** reprezentacije π. Za $f \in L_1(G)$ i $\xi, \eta \in \overline{\mathcal{H}} = \mathcal{H}$ imamo

$$(\pi(\check{f})\xi|\eta)_{\mathcal{H}} = \int_G f(x^{-1})(\pi(x)\xi|\eta)_{\mathcal{H}} \mathrm{d}\mu(x) = \int_G f(x)(\xi|\pi(x)\eta)_{\mathcal{H}} \mathrm{d}\mu(x) =$$

$$= \int_G f(x)(\overline{\pi}(x)\eta|\xi)_{\overline{\mathcal{H}}} \mathrm{d}\mu(x) = (\overline{\pi}(f)\eta|\xi)_{\overline{\mathcal{H}}}.$$

Odatle je $\|\pi(\check{f})\| = \|\overline{\pi}(f)\|$, pa slijedi da je za C^*-normu $\|\check{f}\| = \|f\|$ $\forall f \in L_1(G)$. To pokazuje da se $f \mapsto \check{f}$ proširuje do linearne izometrije $\varphi \mapsto \check{\varphi}$ sa $C^*(G)$ na $C^*(G)$. Očito je

$$(\varphi * \psi)\check{} = \check{\psi} * \check{\varphi}, \qquad \check{\check{\varphi}} = \varphi, \qquad \varphi, \psi \in C^*(G).$$

Analogno kao prije λ_x sada se i ρ_x proširuje do izometrije $\rho_x : C^*(G) \to C^*(G)$. Ponovo je $x \mapsto \rho_x \varphi$ neprekidno sa G u $C^*(G)$ $\forall \varphi \in C^*(G)$. Također, vrijedi $\rho_{xy}\varphi = \rho_x(\rho_y \varphi)$ za $x, y \in G$ i $\varphi \in C^*(G)$.

Za $\varphi \in C_0(G)$ i $f \in L_2(G)$ znamo da je

$$\pi_r(\varphi) f = f * \check{\varphi}.$$

Stoga za $\varphi \in C^*(G)$ i $f \in L_2(G)$ definiramo

$$f * \varphi = \pi_r(\check{\varphi}) f.$$

Slično kao prije dobivamo

$$\|f * \varphi\|_2 \leq \|f\|_2 \cdot \|\varphi\|, \qquad f \in L_2(G), \quad \varphi \in C^*(G)..$$

Lema 4.2.2. *Za* $\varphi, \psi \in C^*(G)$ *i* $f \in L_2(G)$ *vrijedi* $(\varphi * f) * \psi = \varphi * (f * \psi)$.

Dokaz: Tvrdnja slijedi iz jednakosti $\pi_\ell(\varphi)\pi_r(\psi) = \pi_r(\psi)\pi_\ell(\varphi)\ \ \forall \varphi, \psi \in C^*(G)$, a to je posljedica očitog svojstva komutativnosti lijevih i desnih pomaka: $\pi_\ell(x)\pi_r(y) = \pi_r(y)\pi_\ell(x)\ \ \forall x, y \in G$.

Propozicija 4.2.1. *Neka su* $f, g \in L_2(G)$.

(*a*) *Za svaki* $x \in G$ *je* $y \mapsto f(y)g(y^{-1}x)$ *funkcija (točnije klasa funkcija) iz* $L_1(G)$.

(*b*) *Stavimo*

$$(f \bullet g)(x) = \int_G f(y)g(y^{-1}x)\,d\mu(y), \qquad x \in G.$$

Tada je $f \bullet g \in C_\infty(G)$ *i vrijedi*

$$|(f \bullet g)(x)| \leq \|f\|_2 \cdot \|g\|_2 \qquad \forall x \in G.$$

Posebno, $(f, g) \mapsto f \bullet g$ *je neprekidno bilinearno preslikavanje sa* $L_2(g) \times L_2(G)$ *u Banachov prostor* $C_\infty(G)$.

(*c*) *Ako je ili* $f \in L_1(G) \cap L_2(G)$ *ili* $g \in L_1(G) \cap L_2(G)$ *onda je* $f \bullet g \in L_2(g)$ *i u prostoru* $L_2(G)$ *vrijedi jednakost*

$$f \bullet g = f * g.$$

Dokaz: (*a*) Imamo $f(y)g(y^{-1}x) = (f \cdot \lambda_x \check{g})(y)$. Budući da je $g \in L_2(G)$ i grupa G je unimodularna, to je i $\check{g} \in L_2(G)$, dakle je i $\lambda_x \check{g} \in L_2(G)$. No produkt po točkama dvije funkcije iz $L_2(G)$ je element prostora $L_1(G)$, dakle, $f \cdot \lambda_x \check{g} \in L_1(G)$, odnosno, $y \mapsto f(y)g(y^{-1}x)$ je funkcija iz $L_1(G)$.

(*b*) Kako je prema dokazu (*a*) $f(y)g(y^{-1}x) = (f \cdot \lambda_x \check{g})(y)$, to je

$$|(f \bullet g)(x)| = |(f|\overline{\lambda_x \check{g}})| \leq \|f\|_2 \cdot \|\overline{\lambda_x \check{g}}\|_2 = \|f\|_2 \cdot \|g\|_2.$$

Neka su sada $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ i $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nizovi u $C_0(G)$ koji u $L_2(G)$ konvergiraju prema f i g. Dakle,

$$\lim_{n \to \infty} \|f - f_n\|_2 = \lim_{n \to \infty} \|g - g_n\|_2 = 0.$$

Tada je $f_n \bullet g_n = f_n * g_n \in C_0(G)$. Za bilo koji $x \in G$ imamo

$$|(f \bullet g)(x) - (f_n * g_n)(x)| = |(f|\overline{\lambda_x \check{g}}) - (f_n|\overline{\lambda_x \check{g}_n})| \leq$$

$$\leq |(f - f_n|\overline{\lambda_x \check{g}})| + |(f_n|\overline{\lambda_x (g - g_n)\check{}})| \leq \|f - f_n\|_2 \cdot \|g\|_2 + \|f_n\|_2 \cdot \|g - g_n\|_2.$$

Odatle slijedi da je

$$(f \bullet g)(x) = \lim_{n \to \infty} (f_n * g_n)(x) \quad \text{uniformno po} \quad x \in G.$$

Kako su $f_n * g_n \in C_0(G)$, zaključujemo da je $f \bullet g \in C_\infty(G)$.

Napokon, iz dokazanog je

$$\|f \bullet g\|_\infty \leq \|f_2\| \cdot \|g\|_2, \qquad f, g \in L_2(G).$$

Dakle, $(f, g) \mapsto f \bullet g$ je neprekidno bilinearno preslikavanje sa $L_2(G) \times L_2(G)$ u Banachov prostor $C_\infty(G)$.

(*c*) Dokazat ćemo najprije sljedeću tvrdnju:

Ako je $f \in L_1(G) \cap L_2(G)$, onda postoji niz $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ u $C_0(G)$ koji konvergira prema f i u $L_1(G)$ i u $L_2(G)$:

$$\lim_{n\to\infty} \|f - f_n\|_1 = \lim_{n\to\infty} \|f - f_n\|_2 = 0.$$

Neka su I i $(\varphi_i)_{i\in I}$ kao u lemi 4.2.1. Za $n \in \mathbb{N}$ izaberemo $i_n \in I$ tako da je

$$\|\varphi_{i_n} * f - f\|_1 \leq \frac{1}{n} \qquad \text{i} \qquad \|\varphi_{i_n} * f - f\|_2 \leq \frac{1}{n}.$$

Stavimo

$$g_n = \varphi_{i_n} * f = \varphi_{i_n} \bullet f, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Kako je $f \in L_2(G)$ znamo da je i $g_n \in L_2(G)$. Nadalje, $\varphi_{i_n}, f \in L_1(G)$, pa je također $g_n \in L_1(G)$. Napokon, prema tvrdnji (b) vrijedi i $g_n \in C_\infty(G)$. Dakle, $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ je niz u $C_\infty(G) \cap L_1(G) \cap L_2(G)$.

Sada za svaki $n \in \mathbb{N}$ izaberimo $h_n \in C_0(G)$ tako da bude

$$\|h_n - g_n\|_1 \leq \frac{1}{n}.$$

Neka je $K_n \subseteq G$ kompaktan skup takav da je $Supp\, h_n \subseteq K_n$ i da vrijedi

$$x \in G \setminus K_n \qquad \Longrightarrow \qquad |g_n(x)| \leq \frac{1}{n}.$$

Izaberimo sada za svaki $n \in \mathbb{N}$ funkciju $\psi_n \in C_0(G)$ takvu da je $0 \leq \psi_n \leq 1$ i $\psi_n(x) = 1 \ \ \forall x \in K_n$. Napokon, neka je $f_n = \psi_n g_n \in C_0(G)$.

Provjerit ćemo sada da niz $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zadovoljava tvrdnju koju dokazujemo. Za svaki $x \in G$ i za $n \in \mathbb{N}$ je

$$|f_n(x) - g_n(x)| = |g_n(x)|(1 - \psi_n(x)) \leq |g_n(x)|,$$

jer je $0 \leq 1 - \psi_n \leq 1$, a također i

$$|f_n(x) - g_n(x)| = |g_n(x)|(1 - \psi_n(x)) \leq \frac{1}{n},$$

jer za $x \in K_n$ je $1 - \psi_n(x) = 0$, a za $x \in G \setminus K_n$ je $1 - \psi_n(x) \leq 1$ i $|g_n(x)| \leq \frac{1}{n}$. Sada imamo

$$x \in K_n \qquad \Longrightarrow \qquad |f_n(x) - g_n(x)| = 0 \leq |h_n(x) - g_n(x)|,$$

i

$$x \in G \setminus K_n \qquad \Longrightarrow \qquad |f_n(x) - g_n(x)| \leq |g_n(x)| = |g_n(x) - h_n(x)|,$$

jer je $Supp\, h_n \subseteq K_n$. Odatle je

$$\|f_n(x) - g_n(x)\|_1 \leq \frac{1}{n} \qquad \text{i} \qquad \|f_n - g_n\|_\infty \leq \frac{1}{n}.$$

Slijedi

$$\|f_n - g_n\|_2^2 = \int_G |f_n(x) - g_n(x)|^2 \mathrm{d}\mu(x) \leq \frac{1}{n} \cdot \|f_n - g_n\|_1 \leq \frac{1}{n^2},$$

dakle,

$$\|f_n - g_n\|_2 \leq \frac{1}{n}.$$

Odatle je

$$\|f_n - f\|_1 \leq \|f_n - g_n\|_1 + \|g_n - f\|_1 \leq \frac{2}{n} \qquad \|f_n - f\|_2 \leq \|f_n - g_n\|_2 + \|g_n - f\|_2 \leq \frac{2}{n}$$

i time je tvrdnja dokazana.

Pretpostavimo sada da je $f \in L_1(G) \cap L_2(G)$ i $g \in L_2(G)$. Neka je $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz u $C_0(G)$ koji teži prema f i u $L_1(G)$ i u $L_2(G)$. Tada je $f_n * g = f_n \bullet g$. Nadalje, prema razmatranjima prije leme 4.2.1. imamo

$$\|f * g - f_n * g\|_2 = \|(f - f_n) * g\|_2 \leq \|f - f_n\| \cdot \|g\|_2 \leq \|f - f_n\|_1 \cdot \|g\|_2,$$

a prema tvrdnji (b) je

$$\|f \bullet g - f_n * g\|_\infty = \|(f - f_n) \bullet g\|_\infty \leq \|f - f_n\|_2 \cdot \|g\|_2.$$

Prema tome je

$$f * g = \lim_{n\to\infty} f_n * g \quad \text{u } L_2(G) \qquad \text{i} \qquad f \bullet g = \lim_{n\to\infty} f_n * g \quad \text{u } C_\infty(G).$$

Odatle slijedi $f \bullet g \in L_2(G)$ i u $L_2(G)$ vrijedi jednakost $f \bullet g = f * g$.

U daljnjem ćemo sa $\mathcal{A}(G)$ označavati potprostor od $L_1(G)$ razapet sa

$$\{f * g;\ f, g \in L_1(G) \cap L_2(G)\}.$$

Propozicija 4.2.2. *(a) $L_1(G) \cap L_2(G)$ je obostrani ideal u algebri $L_1(G)$.*

(b) $\mathcal{A}(G)$ je obostrani ideal u $L_1(G)$ i sadržan je u $L_1(G) \cap L_2(G) \cap C_\infty(G)$.

Dokaz: (a) Za $f \in L_1(G)$ i $g \in L_1(G) \cap L_2(G)$ imamo $f * g \in L_1(G)$ i $f * g = \pi_\ell(f)g \in L_2(G)$. Analogno, $g * f \in L_1(G)$ i $g * f = \pi_r(\check{f})g \in L_2(G)$.

Tvrdnja (b) slijedi iz tvrdnje (a) i iz tvrdnji (b) i (c) propozicije 4.2.1.

Propozicija 4.2.3. *Postoji hiperniz $(\varphi_i)_{i\in I}$ u $\mathcal{A}(G) \cap C_0^+(G)$ takav da vrijedi*

$$\lim_{i\in I} \|f - \varphi_i * f\|_1 = 0 \qquad \forall f \in L_1(G) \qquad i \qquad \lim_{i\in I} \|f - \varphi_i * f\|_2 = 0 \qquad \forall f \in L_2(G).$$

Posebno, $\mathcal{A}(G)$ je gusto i u $L_1(G)$ i u $L_2(G)$. Nadalje, $\mathcal{A}(G)$ je gusto u $C^*(G)$.

Dokaz: Neka je I skup svih kompaktnih okolina od e u G. Za $i \in I$ izaberemo okolinu U_i od e takvu da je $U_i^2 \subseteq i$ i izaberemo $\psi_i \in C_0^+(G)$ takvu da je $\mathit{Supp}\,\psi_i \subseteq U_i$ i da je $\int_G \psi_i(x)\mathrm{d}\mu(x) = 1$. Stavimo $\varphi_i = \psi_i * \psi_i$, $i \in I$. Tada je $\varphi_i \in \mathcal{A}(G) \cap C_0^+(G)$, $\mathit{Supp}\,\varphi_i \subseteq U_i^2 \subseteq i$ i zbog lijeve invarijantnosti mjere μ vrijedi

$$\int_G \varphi_i(x)\mathrm{d}\mu(x) = \int_G \left[\int_G \psi_i(y)\psi_i(y^{-1}x)\mathrm{d}\mu(y)\right]\mathrm{d}\mu(x) =$$

$$= \int_G \psi_i(y)\left[\int_G \psi_i(y^{-1}x)\mathrm{d}\mu(x)\right]\mathrm{d}\mu(y) = \int_G \psi_i(y)\mathrm{d}\mu(y) = 1.$$

Sada iz leme 4.2.1. slijedi

$$\lim_{i\in I} \|f - \varphi_i * f\|_1 = 0 \qquad \forall f \in L_1(G) \qquad \text{i} \qquad \lim_{i\in I} \|f - \varphi_i * f\|_2 = 0 \qquad \forall f \in L_2(G).$$

Napokon, gustoća $\mathcal{A}(G)$ u $C^*(G)$ slijedi iz gustoće $\mathcal{A}(G)$ u $L_1(G)$, iz gustoće $L_1(G)$ u $C^*(G)$ i iz $\|f\| \leq \|f\|_1 \ \ \forall f \in L_1(G)$.

Propozicija 4.2.4. *Neka je $f \in \mathcal{A}(G)$. Tada su $\varphi \mapsto \varphi * f$ i $\varphi \mapsto f * \varphi$ neprekidni linearni operatori sa $C^*(G)$ u $C_\infty(G)$.*

Dokaz: Možemo pretpostaviti da je $f = f_1 * f_2$ gdje su $f_1, f_2 \in L_1(G) \cap L_2(G)$. Imamo

$$\varphi * f = \varphi * (f_1 * f_2) = (\varphi * f_1) * f_2.$$

Sada je $\varphi * f_1 \in L_2(G)$, pa je po tvrdnjama (b) i (c) propozicije 4.2.1.

$$\varphi * f = (\varphi * f_1) \bullet f_2 \in C_\infty(G) \qquad \text{i} \qquad \|\varphi * f\|_\infty \leq \|\varphi * f_1\|_2 \cdot \|f_2\|_2 \leq \|\varphi\| \cdot \|f_1\| \cdot \|f_2\|_2.$$

Analogno, imamo

$$f * \varphi = (f_1 * f_2) * \varphi = f_1 * (f_2 * \varphi)$$

i vrijedi $f_2 * \varphi \in L_2(G)$, pa je

$$f * \varphi = f_1 \bullet (f_2 * \varphi) \in C_\infty(G) \qquad \text{i} \qquad \|f * \varphi\|_\infty \leq \|f_1\|_2 \cdot \|f_2 * \varphi\|_2 \leq \|f_1\|_2 \cdot \|f_2\|_2 \cdot \|\varphi\|.$$

4.3 Fourierova transformacija

U cijeloj ovoj točki G je Abelova lokalno kompaktna grupa.

Definiramo izometričke izomorfizme C^*-algebri $\mathcal{F}, \overline{\mathcal{F}} : C^*(G) \to C_\infty(G)$ na sljedeći način:

$$\overline{\mathcal{F}} f = \hat{f}, \qquad \mathcal{F} f = (\hat{f})\check{} \quad \text{tj.} \quad (\mathcal{F} f)(\chi) = \hat{f}(\chi^{-1}), \quad \chi \in \hat{G}.$$

Podsjećamo da smo izvršili identifikaciju $\hat{G} = C^*(G)\hat{}(= L_1(G)\hat{})$. Nadalje, $\hat{f}$ je oznaka za Geljfandov transformat elementa $f \in C^*(G)$, a to je funkcija iz $C_\infty(\hat{G})$. Za $f \in L_1(G)$ i $\chi \in \hat{G}$ dobivamo integralne formule:

$$(\overline{\mathcal{F}} f)(\chi) = \hat{f}(\chi) = \chi(f) = \int_G \chi(x) f(x) \mathrm{d}\mu(x),$$

$$(\mathcal{F} f)(\chi) = \hat{f}(\chi^{-1}) = \chi^{-1}(f) = \int_G \chi^{-1}(x) f(x) \mathrm{d}\mu(x) = \int_G \overline{\chi(x)} f(x) \mathrm{d}\mu(x).$$

Ako postoji mogućnost dvojbe, pisat ćemo $\mathcal{F}_G$ i $\overline{\mathcal{F}}_G$ umjesto $\mathcal{F}$ i $\overline{\mathcal{F}}$. Restrikcija $\mathcal{F}|L_1(G)$ zove se **Fourierova transformacija** a $\overline{\mathcal{F}}|L_1(G)$ **Fourierova kotransformacija** na grupi G. To su neprekidni injektivni $*-$homomorfizmi Banachove algebre $L_1(G)$ u Banachovu algebru $C_\infty(\hat{G})$. Podsjećamo da je produkt u $L_1(G)$ definiran kao konvolucija

$$(f * g)(x) = \int_G f(y) g(y^{-1}x) \mathrm{d}\mu(x), \qquad f, g \in L_1(G), \quad x \in G,$$

a u $C_\infty(\hat{G})$ je produkt definiran kao množenje po točkama

$$(\varphi\psi)(\chi) = \varphi(\chi)\psi(\chi), \qquad \varphi, \psi \in C_\infty(\hat{G}), \quad \chi \in \hat{G}.$$

Involucija je u obje algebre definirana pomoću kompleksnog konjugiranja, a u slučaju $L_1(G)$ i invertiranja

$$f^*(x) = \overline{f(x^{-1})}, \qquad \varphi^*(\chi) = \overline{\varphi(\chi)}, \qquad f \in L_1(G), \quad x \in G, \quad \varphi \in C_\infty(\hat{G}), \quad \chi \in \hat{G}.$$

Napomenimo još da se može dogoditi da je grupa $\hat{G}$ kompaktna i tada je $C_\infty(\hat{G}) = C(\hat{G})$. Poazat ćemo kasnije de je to tako ako i samo ako je grupa G diskretna.

Propozicija 4.3.1. *Neka su $x \in G$, $\chi \in \hat{G}$ i $f \in L_1(G)$.*

(a) $[\mathcal{F}(\lambda_x f)](\chi) = \overline{\chi(x)}(\mathcal{F}f)(\chi)$ *i* $[\overline{\mathcal{F}}(\lambda_x f)](\chi) = \chi(x)(\overline{\mathcal{F}}f)(\chi)$.

(b) $\mathcal{F}(\chi f) = \lambda_\chi(\mathcal{F}f)$ *i* $\overline{\mathcal{F}}(\chi f) = \lambda_{\chi^{-1}}(\overline{\mathcal{F}}f)(\chi)$.

Dokaz: (a) I jedna i druga formula dobivaju se direktnim računanjem; npr.

$$[\mathcal{F}(\lambda_x f)](\chi) = \chi^{-1}(\lambda_x f) = \chi^{-1}(x)\chi^{-1}(f) = \overline{\chi(x)}(\mathcal{F}f)(\chi).$$

(b) Za $\varphi \in \hat{G}$ je

$$[\mathcal{F}(\chi f)](\varphi) = \varphi^{-1}(\chi f) = \int_G \varphi^{-1}(x)\chi(x)f(x)\mathrm{d}\mu(x) =$$

$$= \int_G \overline{(\chi^{-1}\varphi)(x)}f(x)\mathrm{d}\mu(x) = (\mathcal{F}f)(\chi^{-1}\varphi) = [\lambda_\chi(\mathcal{F}f)](\varphi).$$

Analogno se dokazuje i druga formula.

Neka je kao i prije $\mathcal{A}(G)$ potprostor razapet sa svim funkcijama oblika $f * g$ gdje su $f, g \in L_1(G) \cap L_2(G)$. Dokazali smo da je to ideal u $L_1(G)$ sadržan u $L_1(G) \cap L_2(G) \cap C_\infty(G)$. Nadalje, $\mathcal{A}(G)$ je gusto u $L_1(G)$, u $L_2(G)$ i u $C^*(G)$.

Lema 4.3.1. *Za $\chi \in \hat{G}$ i $f \in \mathcal{A}(G)$ je $\chi f \in \mathcal{A}(G)$.*

Dokaz: Lemu je dovoljno dokazati za $f = g * h,\ \ g, h \in L_1(G) \cap L_2(G)$. Tada je za $x \in G$

$$(\chi f)(x) = [\chi(g * h)](x) = \int_G \chi(x)g(y)h(y^{-1}x)\mathrm{d}\mu(y) =$$

$$= \int_G \chi(y)g(y)\chi(y^{-1}x)h(y^{-1}x)\mathrm{d}\mu(y) = [(\chi g) * (\chi h)](x).$$

Kako je $\chi : G \to \mathbb{C}$ neprekidno i $|\chi(x)| = 1\ \ \forall x$, slijedi $\chi g, \chi h \in L_1(G) \cap L_2(G)$, dakle, $\chi f \in \mathcal{A}(G)$.

Propozicija 4.3.2. *Za svaku funkciju $f \in \mathcal{A}(G)$ postoji jedinstvena ograničena mjera μ_f na $\hat{G}$ takva da za svaki element $\varphi \in C^*(G)$ vrijedi*

$$(\varphi * f)(e) = \int_G (\mathcal{F}\varphi)(\chi)\, d\mu_f(\chi).$$

Napomena: Mjera ν na lokalno kompaktnom Hausdorffovom topološkom prostoru T zove se **ograničena mjera** ako se linearni funkcional $\nu : C_0(T) \to \mathbb{C}$ produljuje do ograničenog linearnog funkcionala na Banachovom prostoru $C_\infty(T)$. U tom slučaju se i to (jedinstveno) proširenje označava sa ν. Evidentno je da je za svaki ograničen linearni funkcional ν na Banachovom prostoru $C_\infty(T)$ njegova restrikcija $\nu|C_0(T)$ mjera na T. Stoga pojam *ograničena mjera na T* možemo identificirati s pojmom *ograničeni linearni funkcional na Banachovom prostoru $C_\infty(T)$*.

Dokaz: $\mathcal{F}$ je izometrija sa $C^*(G)$ na $C_\infty(\hat{G})$. Prema propoziciji 4.2.4. preslikavanje $\mathcal{F}\varphi \mapsto (\varphi * f)(e)$ je neprekidni linearni funkcional na $C_\infty(\hat{G})$, tj. ograničena mjera na $\hat{G}$.

Teorem 4.3.1. *(a) Postoji jedinstvena mjera ν na $\hat{G}$ takva da je*

$$\mu_f = (\mathcal{F}f)\cdot\nu \qquad \forall f \in \mathcal{A}(G).$$

(b) Za $f \in L_1(G)$ i $g \in \mathcal{A}(G)$ je

$$\int_{\hat{G}} (\mathcal{F}f)(\chi)(\mathcal{F}g)(\chi)\,d\nu(\chi) = \int_G f(x)g(x^{-1})\,d\mu(x).$$

(c) Za $f \in \mathcal{A}(G)$ je $\mathcal{F}f \in L_1(\hat{G},\nu)\cap L_2(\hat{G},\nu)$ i $\|\mathcal{F}f\|_{L_2(\hat{G},\nu)} = \|f\|_{L_2(G)}$.

(d) ν je Haarova mjera na grupi $\hat{G}$.

Dokaz ćemo provesti putem niza pomoćnih tvrdnji.
(1) *Ako su $f,g \in \mathcal{A}(G)$, onda je $(\mathcal{F}f)\cdot\mu_g = (\mathcal{F}g)\cdot\mu_f$.*
Doista, Za $\varphi \in C^*(G)$ imamo redom

$$[(\mathcal{F}f)\cdot\mu_g](\mathcal{F}\varphi) = \int_{\hat{G}} (\mathcal{F}\varphi)(\chi)(\mathcal{F}f)(\chi)\mathrm{d}\mu_g(\chi) = \int_{\hat{G}} [(\mathcal{F}\varphi)\cdot(\mathcal{F}f)](\chi)\mathrm{d}\mu_g(\chi) =$$

$$= \int_{\hat{G}} [\mathcal{F}(\varphi * f)](\chi)\mathrm{d}\mu_g(\chi) = [(\varphi * f) * g](e).$$

Zamjenom uloga f i g imamo

$$[(\mathcal{F}g)\cdot\mu_f](\mathcal{F}\varphi) = [(\varphi * g) * f](e).$$

Međutim, grupa G je komutativna, pa je $(\varphi * f) * g = (\varphi * g) * f$. Tvrdnja slijedi jer je $C_\infty(\hat{G}) = \mathcal{F}(C^*(G))$.
(2) *Za $f \in \mathcal{A}(G)$ stavimo*

$$\Omega_f = Int(Supp\,\mathcal{F}f) = \{\chi\hat{G};\ (\mathcal{F}f)(\chi) \neq 0\}.$$

Tada je $\{\Omega_f;\ f \in \mathcal{A}(G)\}$ otvoren pokrivač od $\hat{G}$.

Doista $\mathcal{A}(G)$ je gusto u $C^*(G)$, pa je $\mathcal{F}(\mathcal{A}(G))$ gusto u $C_\infty(\hat{G})$. Slijedi da za svaki $\chi \in \hat{G}$ postoji $f \in \mathcal{A}(G)$ takva da je $(\mathcal{F}f)(\chi) \neq 0$, tj. $\chi \in \Omega_f$. Dakle, unija otvorenih skupova Ω_f, $f \in \mathcal{A}(G)$, je čitav prostor $\hat{G}$.
(3) *Za $f \in \mathcal{A}(G)$ neka je ξ_f karakteristična funkcija skupa Ω_f. Tada je $\xi_f\cdot\mu_f = \mu_f$.*
Za $g \in \mathcal{A}(G)$ imamo redom zbog **(1)**

$$(\xi_f\cdot\mu_f)(\mathcal{F}g) = \int_{\hat{G}} \xi_f(\chi)(\mathcal{F}g)(\chi)\mathrm{d}\mu_f(\chi) = \int_{\hat{G}} \xi_f(\chi)\mathrm{d}[(\mathcal{F}g)\cdot\mu_f](\chi) = \int_{\hat{G}} \xi_f(\chi)\mathrm{d}[(\mathcal{F}f)\cdot\mu_g](\chi) =$$

$$= \int_{\hat{G}} \xi_f(\chi)(\mathcal{F}f)(\chi)\mathrm{d}\mu_g(\chi) = \int_{\hat{G}} (\mathcal{F}f)(\chi)\mathrm{d}\mu_g(\chi) = \int_{\hat{G}} (\mathcal{F}g)(\chi)\mathrm{d}\mu_f(\chi) = \mu_f(\mathcal{F}g).$$

Tvrdnja slijedi, jer je $\mathcal{A}(G)$ gusto u $C^*(G)$, pa je $\mathcal{F}(\mathcal{A}(G))$ gusto u $\mathcal{F}(C^*(G)) = C_\infty(\hat{G})$.
(4) *Za $f \in \mathcal{A}(G)$ definiramo mjeru ν_f na Ω_f sa*

$$\nu_f = \frac{1}{(\mathcal{F}f)|\Omega_f}\cdot(\mu_f|\Omega_f).$$

Postoji mjera ν na $\hat{G}$ takva da je $\nu|\Omega_f = \nu_f \ \ \forall f \in \mathcal{A}(G)$.

Prema **(3)** i **(1)** je $\nu_f|\Omega_f \cap \Omega_g = \nu_g|\Omega_f \cap \Omega_g \quad \forall f, g \in \mathcal{A}(G)$. Budući da je prema **(2)** $\{\Omega_f;\ f \in \mathcal{A}(G)\}$ otvoren pokrivač od $\hat{G}$ tvrdnja slijedi.

Prijeđimo sada na dokaz teorema.

(a) Neka je ν mjera na $\hat{G}$ iz **(4)**. Za $f \in \mathcal{A}(G)$ je tada

$$\xi_f \cdot \mu_f = \mu_f \qquad \text{i} \qquad \xi_f \cdot (\mathcal{F}f) \cdot \nu = (\mathcal{F}f) \cdot \nu.$$

Nadalje,

$$[(\mathcal{F}f) \cdot \nu]|\Omega_f = [(\mathcal{F})|\Omega_f] \cdot \nu_f = \mu_f|\Omega_f.$$

Odatle slijedi $(\mathcal{F}f) \cdot \nu = \mu_f$. Posebno je $\mathcal{F}f \in L_1(\hat{G}, \nu) \quad \forall f \in \mathcal{A}(G)$.

Treba još dokazati jedinstvenost. Neka je ν_1 druga takva mjera na $\hat{G}$. Tada je $(\mathcal{F}f)\cdot\nu = (\mathcal{F}f)\cdot\nu_1$ $\forall f \in \mathcal{A}(G)$, pa je $\nu|\Omega_f = \nu_1|\Omega_f \quad \forall f \in \mathcal{A}(G)$. Sada iz **(2)** slijedi $\nu = \nu_1$.

(b) Za $f \in L_1(G)$ i $g \in \mathcal{A}(G)$ imamo

$$\int_{\hat{G}} (\mathcal{F}f)(\chi)(\mathcal{F}g)(\chi)\mathrm{d}\nu(\chi) = \mu_g(\mathcal{F}f) = (f * g)(e) = \int_G f(x)g(x^{-1})\mathrm{d}\mu(x).$$

(c) Neka je $f \in \mathcal{A}(G)$. Tada znamo da je $\mathcal{F}f \in L_1(\hat{G}, \nu)$. Nadalje, $\mathcal{F}f \in C_\infty(\hat{G})$ pa je $\mathcal{F}f \in L_2(\hat{G}, \nu)$. Primijenimo sada ($b$) za $g = f^*$. Dobivamo

$$\|f\|^2_{L_2(G)} = \int_G |f(x)|^2\mathrm{d}\mu(x) = \int_G f(x)g(x^{-1})\mathrm{d}\mu(x) = \int_{\hat{G}} (\mathcal{F}f)(\chi)(\mathcal{F}g)(\chi)\mathrm{d}\nu(\chi) =$$

$$= \int_{\hat{G}} (\mathcal{F}f)(\chi)(\mathcal{F}f)^*(\chi)\mathrm{d}\nu(\chi) = \int_{\hat{G}} |(\mathcal{F}f)(\chi)|^2\mathrm{d}\nu(\chi) = \|\mathcal{F}f\|^2_{\mathrm{L}_2(\hat{G},\nu)}.$$

(d) Iz (c) slijedi da je ν pozitivna mjera na $\hat{G}$ i da je $\nu \neq 0$. Neka su $f, g \in \mathcal{A}(G)$ i $\chi \in \hat{G}$. Prema (b), prema lemi 4.3.1 i prema tvrdnji (b) propozicije 4.3.1. imamo redom

$$\nu(\mathcal{F}f \cdot \mathcal{F}g) = \int_G f(x)g(x^{-1})\mathrm{d}\mu(x) = \int_G (\chi f)(x)(\chi g)(x^{-1})\mathrm{d}\mu(x) =$$

$$= \nu(\mathcal{F}(\chi f) \cdot \mathcal{F}(\chi g)) = \nu(\lambda_\chi(\mathcal{F}f) \cdot \lambda_\chi(\mathcal{F}g)) = \nu(\lambda_\chi(\mathcal{F}f \cdot \mathcal{F}g)) = (\lambda_{\chi^{-1}}\nu)(\mathcal{F}f \cdot \mathcal{F}g).$$

Prema tome je

$$\mu_f(\mathcal{F}g) = [(\mathcal{F}f) \cdot (\lambda_{\chi^{-1}}\nu)](\mathcal{F}f) \qquad \forall g \in \mathcal{A}(G).$$

Budući da je $\mathcal{F}(\mathcal{A}(G))$ gusto u $C_\infty(\hat{G})$, odatle slijedi

$$\mu_f = (\mathcal{F}f) \cdot (\lambda_{\chi^{-1}}\nu) \qquad \forall f \in \mathcal{A}(G).$$

Iz jedinstvenosti u (a) slijedi

$$\nu = \lambda_{\chi^{-1}}\nu \qquad \forall \chi \in \hat{G}.$$

Dakle, ν je Haarova mjera na $\hat{G}$.

Za Haarovu mjeru ν na dualnoj grupi $\hat{G}$ iz prethodnog teorema kažemo da je **dualna** ili **pridružena** Haarovoj mjeri μ na G. U daljnjem ćemo pisati

$$\nu = \hat{\mu}.$$

Napomena. Zamijenimo μ sa $\mu_1 = a\mu$, $a > 0$. Neka je $\mathcal{F}_1$ Fourierova transformacija u odnosu na Haarovu mjeru μ_1 i $*_1$ konvolucija u odnosu na μ_1. Imamo za $\chi \in \hat{G}$ i $f \in L_1(G) = L_1(G, \mu_1)$:

$$(\mathcal{F}_1 f)(\chi) = \int_G \overline{\chi(x)} f(x) \mathrm{d}\mu_1(x) = a(\mathcal{F}f)(\chi) \qquad \text{tj.} \quad \mathcal{F}_1 f = a\mathcal{F}f.$$

Nadalje,

$$(f *_1 g)(x) = \int_G f(y) g(y^{-1}x) \mathrm{d}\mu_1(y) = a(f * g)(x) \qquad \text{tj.} \quad f *_1 g = af * g.$$

Dakle,

$$(\mu_1)_f(\mathcal{F}_1\varphi) = (\varphi *_1 f)(e) = a(\varphi * f)(e),$$

pa dijeljenjem sa a dobivamo

$$(\mu_1)_f(\mathcal{F}\varphi) = (\varphi * f)(e) = \mu_f(\mathcal{F}\varphi) \qquad \Longrightarrow \qquad (\mu_1)_f = \mu_f.$$

Odatle je za $f \in \mathcal{A}(G)$:

$$(\mathcal{F}_1 f) \cdot \hat{\mu}_1 = (\mu_1)_f = \mu_f = (\mathcal{F}f) \cdot \hat{\mu} \qquad \Longrightarrow \qquad (\mathcal{F}f) \cdot \hat{\mu}_1 = (\mathcal{F}f) \cdot \frac{1}{a}\hat{\mu}.$$

Dakle je

$$(a\mu)\hat{} = \frac{1}{a}\hat{\mu}, \qquad a > 0.$$

$G \times \hat{G}$ je lokalno kompaktna grupa i $\mu \otimes \hat{\mu}$ je Haarova mjera na $G \times \hat{G}$. Prema prethodnom razmatranju ta Haarova mjera ne ovisi o izboru Haarove mjere μ na grupi G. Ta se mjera zove **kanonska Haarova mjera** na grupi $G \times \hat{G}$.

Teorem 4.3.2. (**Plancherel**) *Za $f \in L_1(G, \mu) \cap L_2(G, \mu)$ je $\mathcal{F}f \in L_2(\hat{G}, \hat{\mu})$. Preslikavanje $f \mapsto \mathcal{F}f$ sa $L_1(G, \mu) \cap L_2(G, \mu)$ u $L_2(\hat{G}, \hat{\mu})$ jednoznačno se proširuje do izometričkog izomorfizma Hilbertovog prostora $L_2(G, \mu)$ na Hilbertov prostor $L_2(\hat{G}, \hat{\mu})$.*

Dokaz: Prema tvrdnji (c) teorema 4.3.1. preslikavanje $f \mapsto \mathcal{F}f$ je izometrija sa unitarnog prostora $\mathcal{A}(G) \subseteq L_2(G, \mu)$ u Hilbertov prostor $L_2(\hat{G}, \hat{\mu})$. Budući da je potprostor $\mathcal{A}(G)$ gust u Hilbertovom prostoru $L_2(G, \mu)$, ta se izometrija jedinstveno proširuje do linearne izometrije $\Phi : L_2(G, \mu) \to L_2(\hat{G}, \hat{\mu})$. Pretpostavimo da je $\Phi(L_2(G, \mu)) \neq L_2(\hat{G}, \hat{\mu})$. Tada postoji $h \in L_2(\hat{G}, \hat{\mu})$ takav da je $h \neq 0$ i $\mathcal{F}f|\overline{h}) = 0 \ \ \forall f \in \mathcal{A}(G)$. Dakle,

$$\int_{\hat{G}} (\mathcal{F}f)(\chi) h(\chi) \mathrm{d}\hat{\mu}(\chi) = 0 \qquad \forall f \in \mathcal{A}(G).$$

Za $f, g \in \mathcal{A}(G)$ imamo $f * g \in \mathcal{A}(G)$ i $\mathcal{F}(f * g) = (\mathcal{F}f) \cdot (\mathcal{F}g)$. Prema tome je

$$\int_{\hat{G}} (\mathcal{F}f)(\chi)(\mathcal{F}g)(\chi) h(\chi) \mathrm{d}\hat{\mu}(\chi) = 0 \qquad \forall f, g \in \mathcal{A}(G).$$

Nadalje,

$$f \in \mathcal{A}(G) \qquad \Longrightarrow \qquad \mathcal{F}f \in L_2(\hat{G}, \hat{\mu}) \qquad \Longrightarrow \qquad h \cdot \mathcal{F}f \in L_1(\hat{G}, \hat{\mu}).$$

Prema tome, $h \cdot \mathcal{F}f \cdot \hat{\mu}$ je ograničena mjera na $\hat{G}$ $\ \forall f \in \mathcal{A}(G)$. Prema gornjem je

$$(h \cdot \mathcal{F}f \cdot \hat{\mu})(\mathcal{F}g) = 0 \qquad \forall g \in \mathcal{A}(G).$$

Kako je $\mathcal{F}(\mathcal{A}(G))$ gusto u $C_\infty(\hat{G})$, slijedi

$$h \cdot \mathcal{F}f\hat{\mu} = 0 \quad \text{tj.} \quad h \cdot \mathcal{F}f = 0 \quad \hat{\mu} - \text{lokalno gotovo svuda na } \hat{G} \ \forall f \in \mathcal{A}(G).$$

Budući da je $\{\Omega_f;\ f \in \mathcal{A}(G)\}$ otvoren pokrivač od $\hat{G}$, slijedi da je $h = 0$ $\hat{\mu}-$lokalno gotovo svuda na $\hat{G}$, a odatle slijedi da je $h = 0$ u prostoru $L_2(\hat{G}, \hat{\mu})$ suprotno pretpostavci. Ova kontradikcija dokazuje da je $\Phi(L_2(G, \mu)) = L_2(\hat{G}, \hat{\mu})$. Dakle, Φ je izometrički izomorfizam Hilbertovog prostora $L_2(G, \mu)$ na Hilbertov prostor $L_2(\hat{G}, \hat{\mu})$.

Neka je sada $f \in L_1(G, \mu) \cap L_2(G, \mu)$. Prema propoziciji 4.2.3. postoji hiperniz $(f_i)_{i\in I}$ u $\mathcal{A}(G)$ koji teži prema f i u $L_1(G, \mu)$ i u $L_2(G, \mu)$. Tada je $\mathcal{F}f_i = \Phi f_i$, pa slijedi

$$\Phi f = \lim_{i\in I} \mathcal{F}f_n \qquad \text{u prostoru } L_2(\hat{G}, \hat{\mu}).$$

Nadalje, $\|f - f_i\| \leq \|f - f_i\|_1$, pa $(f_i)_{i\in I}$ teži prema f i u $C^*(G)$. Kako je $\mathcal{F}$ izometrija sa $C^*(G)$ na $C_\infty(\hat{G})$, slijedi

$$\mathcal{F}f = \lim_{i\in I} \mathcal{F}f_i \qquad \text{u prostoru } C_\infty(\hat{G}).$$

Prema tome je $\mathcal{F}f = \Phi f$ za svaki $f \in L_1(G, \mu) \cap L_2(G, \mu)$, a ne samo za $f \in \mathcal{A}(G)$.

Dobivenu izometriju sa $L_2(G, \mu)$ na $L_2(\hat{G}, \hat{\mu})$ označavat ćemo također sa $\mathcal{F}$ ili sa $\mathcal{F}_G$ i zvat ćemo je također **Fourierova transformacija**. Sasvim analogno se $\overline{\mathcal{F}}$ proširuje do izometričkog izomorfizma sa $L_2(G, \mu)$ na $L_2(\hat{G}, \hat{\mu})$. Označavamo je i dalje sa $\overline{\mathcal{F}}$ ili sa $\overline{\mathcal{F}}_G$ i zovemo **Fourierova kotransformacija**.

4.4 Teorem dualiteta

I u cijeloj ovoj točki G označava Abelovu lokalno kompaktnu grupu, s izuzetkom leme 4.4.2., propozicije 4.4.2. i korolara 4.4.3. i 4.4.4. Nadalje, koristimo i sve oznake uvedene u prethodnoj točki. Fiksirajmo Haarovu mjeru μ na G i njoj dualnu mjeru $\hat{\mu}$ na $\hat{G}$. Pisat ćemo $L_1(G, \mu) = L_1(G)$, $L_2(G, \mu) = L_2(G)$, $L_1(\hat{G}, \hat{\mu}) = L_1(\hat{G})$ i $L_2(\hat{G}, \hat{\mu}) = L_2(\hat{G})$.

Cilj nam je u ovoj točki dokazati da je preslikavanje $\eta \to \hat{\hat{G}}$, definirano sa

$$[\eta(x)](\chi) = \chi(x), \qquad x \in G, \quad \chi \in \hat{G},$$

za koje smo u propoziciji 4.1.5. ustanovili da je neprekidni injektivni homomorfizam, u stvari izomorfizam topoloških grupa preko kojega se grupa G može prirodno identificirati s dualnom grupom njene dualne grupe.

Propozicija 4.4.1. *(a) Ako je $f \in \mathcal{A}(G)$, tada je $\mathcal{F}_G f \in L_1(\hat{G}) \cap L_2(\hat{G})$.*

(b) Ako je $f \in L_2(G)$ takva da je $\mathcal{F}_G f \in L_1(\hat{G})$, onda je $\overline{\mathcal{F}}_{\hat{G}}\mathcal{F}_G f \in C_\infty(\hat{\hat{G}})$ i vrijedi

$$f = (\overline{\mathcal{F}}_{\hat{G}}\mathcal{F}_G f) \circ \eta \qquad \textit{u prostoru } L_2(G).$$

Dokaz: (a) Ako je $f \in \mathcal{A}(G) \subseteq C^*(G)$, tada je, naravno, $\mathcal{F}_G f \in C_\infty(\hat{G})$. Nadalje, za $g, h \in L_1(G) \cap L_2(G)$ su $\mathcal{F}_G g, \mathcal{F}_G h \in L_2(\hat{G})$, pa je $\mathcal{F}_G(g * h) = \mathcal{F}_G g \cdot \mathcal{F}_G h \in L_1(\hat{G})$. Kako funkcije $g*h$, $g, h \in L_1(G)\cap L_2(G)$, razapinju prostor $\mathcal{A}(G)$, zaključujemo da je $\mathcal{F}_G f \in L_1(\hat{G})\ \ \forall f \in \mathcal{A}(G)$.

(b) Neka je $f \in L_2(G)$, takva da je $\mathcal{F}_G f \in L_1(\hat{G})$. Stavimo $F = \mathcal{F}_G f$. Kako je $\mathcal{F}_G(L_2(G)) = L_2(\hat{G})$, zaključujemo da je $F \in L_1(\hat{G}) \cap L_2(\hat{G})$. Nadalje, $\overline{\mathcal{F}}_{\hat{G}}\mathcal{F}_G f = \overline{\mathcal{F}}_{\hat{G}} F \in C_\infty(\hat{\hat{G}})$, jer je $F \in L_1(\hat{G}) \subseteq C^*(\hat{G})$. Stavimo

$$\varphi = \left(\overline{\mathcal{F}}_{\hat{G}}\mathcal{F}_G f\right) \circ \eta = \left(\overline{\mathcal{F}}_{\hat{G}} F\right) \circ \eta.$$

Tada je φ neprekidna ograničena funkcija na G. Za $g \in L_1(G) \cap L_2(G)$ imamo

$$\int_G g(x)\varphi(x)\mathrm{d}\mu(x) = \int_G g(x) \left[\int_{\hat{G}} \chi(x)F(\chi)\mathrm{d}\hat{\mu}(\chi)\right] \mathrm{d}\mu(x).$$

Funkcija $(x, \chi) \mapsto g(x)F(\chi)\chi(x)$ je integrabilna na $G\times\hat{G}$ u odnosu na mjeru $\mu\otimes\hat{\mu}$, jer je $g \in L_1(G)$, $F \in L_1(\hat{G})$ i $|\chi(x)| = 1 \ \ \forall(x, \chi) \in G \times \hat{G}$. Primjenom Fubinijevog teorema slijedi

$$\int_G g(x)\varphi(x)\mathrm{d}\mu(x) = \int_{\hat{G}} F(\chi) \left[\int_G \chi(x)g(x)\mathrm{d}\mu(x)\right] \mathrm{d}\hat{\mu}(\chi) = \int_{\hat{G}} \left(\overline{\mathcal{F}}_G g\right)(\chi)F(\chi)\mathrm{d}\hat{\mu}(\chi).$$

Definiramo linearan funkcional $\Phi : L_1(G) \cap L_2(G) \to \mathbb{C}$ sa

$$\Phi(g) = \int_G g(x)\varphi(x)\mathrm{d}\mu(x), \qquad g \in L_1(G) \cap L_2(G).$$

Tada je

$$|\Phi(g)| = \left|\left(\overline{\mathcal{F}}_G g \,|\overline{F}\,\right)_{L_2(\hat{G})}\right| \le \|\overline{\mathcal{F}}_G g\|_{L_2(\hat{G})}\|F\|_{L_2(\hat{G})} = \|g\|_{L_2(G)}\|F\|_{L_2(\hat{G})}.$$

To pokazuje da je funkcional Φ ograničen u odnosu na normu $\|\cdot\|_{L_2(G)}$. Prema Rieszovom teoremu postoji $\psi \in L_2(G)$ takva da je

$$\Phi(g) = \int_G \psi(x)\mathrm{d}\mu(x) \qquad \forall g \in L_1(G) \cap L_2(G).$$

Iz definicije funkcionala Φ sada slijedi da je $\varphi = \psi$, dakle, $\varphi \in L_2(G)$.

Prema teoremu 4.3.2. imamo

$$\int_G g(x)\varphi(x)\mathrm{d}\mu(x) = (\varphi|\overline{g})_{L_2(G)} = (\mathcal{F}_G\varphi\,|\mathcal{F}_G\overline{g})_{L_2(\hat{G})} =$$

$$= \int_{\hat{G}} \overline{(\mathcal{F}_G\overline{g})(\chi)}\,(\mathcal{F}_G\varphi)(\chi)\mathrm{d}\hat{\mu}(\chi) = \int_{\hat{G}} \left(\overline{\mathcal{F}}_G g\right)(\chi)\,(\mathcal{F}_G\varphi)(\chi)\mathrm{d}\hat{\mu}(\chi).$$

Prema tome, vrijedi

$$\int_{\hat{G}} \left(\overline{\mathcal{F}}_G g\right)(\chi)\,[F(\chi) - (\mathcal{F}_G\varphi)(\chi)]\,\mathrm{d}\hat{\mu}(\chi) = 0 \qquad \forall g \in L_1(G) \cap L_2(G).$$

Kako je $L_1(G) \cap L_2(G)$ gusto u $L_2(G)$, po Plancherelovom teoremu 4.3.2. je potprostor

$$\{\overline{\mathcal{F}}_G g;\ g \in L_1(G) \cap L_2(G)\}$$

gust u $L_2(\hat{G})$. Prema tome, u $L_2(\hat{G})$ vrijedi jednakost $F = \mathcal{F}_G\varphi$, tj. $\mathcal{F}_G f = \mathcal{F}_G\varphi$. Po Plancherelovom teoremu slijedi $f = \varphi$ u $L_2(G)$, a to je upravo tvrdnja koju dokazujemo.

Korolar 4.4.1. *Za $f \in \mathcal{A}(G)$ i $x \in G$ vrijedi*

$$f(x) = \int_{\hat{G}} \chi(x)\,(\mathcal{F}_G f)(\chi)\,d\hat{\mu}(\chi).$$

Dokaz: Funkcije f i $\left(\overline{\mathcal{F}}_{\hat{G}}\mathcal{F}_G f\right) \circ \eta$ su neprekidne pa jednakost iz tvrdnje (b) propozicije 4.4.1. vrijedi po točkama a ne samo u smislu $L_2(G)$, dakle,

$$f(x) = \left(\overline{\mathcal{F}}_{\hat{G}}\mathcal{F}_G f\right)(\eta(x)) = \int_{\hat{G}} [\eta(x)](\chi)\,(\mathcal{F}_G f)(\chi)\mathrm{d}\hat{\mu}(\chi) = \int_{\hat{G}} \chi(x)\,(\mathcal{F}_G f)(\chi)\mathrm{d}\hat{\mu}(\chi).$$

Lema 4.4.1. *Neka je skup $T \subseteq \hat{G}$ zatvoren i neka je $\chi \in \hat{G} \setminus T$. Tada postoji $f \in L_1(G)$ takva da je $(\mathcal{F}_G f)(\chi) = 1$ i $(\mathcal{F}_G f)|T = 0$.*

Dokaz: Imamo

$$\lambda_\chi (\mathcal{F}_G f) = \mathcal{F}_G(\chi \cdot f), \qquad \chi \in \hat{G}.$$

Dakle, bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $\chi = \varepsilon$ (jedinica u grupi $\hat{G}$). Tada $\varepsilon \notin T$ pa postoji kompaktna okolina $U = U^{-1}$ od ε u $\hat{G}$ takva da je $U^2 \cap T = \emptyset$. Neka je $H \in C_0^+(\hat{G})$ takva da je $Supp\, H \subseteq U$ i $H(\varepsilon) > 0$. Tada je $F = H * H \in C_0^+(\hat{G})$, $F|T = 0$, $F(\varepsilon) > 0$. Zamjenom funkcije H nekim njenim pozitivnim multiplom, možemo pretpostaviti da je $F(\varepsilon) = 1$. Dokazat ćemo sada da postoji $f \in L_1(G)$, takva da je $F = \mathcal{F}_G f$.

Imamo $H, F \in C_0^+(\hat{G}) \subseteq L_1(\hat{G}) \cap L_2(\hat{G})$. Neka su $h, f \in L_2(G)$ takve da u prostoru $L_2(\hat{G})$ vrijede jednakosti

$$H = \mathcal{F}_G h \qquad \text{i} \qquad F = \mathcal{F}_G f.$$

Imamo tada $f, h \in L_2(G)$ i $\mathcal{F}_G f, \mathcal{F}_G h \in L_1(\hat{G})$, pa je po tvrdnji (b) propozicije 4.4.1.

$$f = \left(\overline{\mathcal{F}}_{\hat{G}} F\right) \circ \eta \qquad \text{i} \qquad h = \left(\overline{\mathcal{F}}_{\hat{G}} H\right) \circ \eta \qquad \text{u prostoru } L_2(G).$$

Nadalje,

$$\begin{aligned} f = \left(\overline{\mathcal{F}}_{\hat{G}} F\right) \circ \eta = \left[\overline{\mathcal{F}}_{\hat{G}} (H * H)\right] \circ \eta = \left[\left(\overline{\mathcal{F}}_{\hat{G}} H\right) \cdot \left(\overline{\mathcal{F}}_{\hat{G}} H\right)\right] \circ \eta = \\ = \left[\left(\overline{\mathcal{F}}_{\hat{G}} H\right) \circ \eta\right] \cdot \left[\left(\overline{\mathcal{F}}_{\hat{G}} H\right) \circ \eta\right] = h \cdot h \in L_1(G). \end{aligned}$$

Treba nam sada jedna topološka činjenica o podgrupama lokalno kompaktnih grupa.

Lema 4.4.2. *Neka je G lokalno kompaktna grupa i H podgrupa. Sljedeća su dva svojstva međusobno ekvivalentna:*

(a) *H je zatvorena.*

(b) *H je s induciranom topologijom lokalno kompaktna grupa.*

Dokaz: Očito iz (a) slijedi (b). Pretpostavimo da vrijedi (b). Tada postoji okolina $V = V^{-1}$ jedinice e u G takva da je skup $V \cap H$ kompaktan. Posebno, skup $V \cap H$ je zatvoren u V. Neka je x točka iz zatvarača $Cl(H)$ od H. Tada je $xV \cap H \neq \emptyset$, pa postoji $y \in xV \cap H$. Kako je $V = V^{-1}$, slijedi $x \in yV$. Skup $y(V \cap H) = (yV) \cap H$ je zatvoren u yV, jer je $V \cap H$ zatvoren u V. Stoga je $(yV) \cap H = (yV) \cap Cl(H)$. Sada je $x \in (yV) \cap Cl(H) = (yV) \cap H$, dakle, $x \in H$. Time je dokazano da je $Cl(H) = H$, odnosno, podgrupa H je zatvorena.

Teorem 4.4.1. (**Pontrjagin**) *Neka je G Abelova lokalno kompaktna grupa i μ Haarova mjera na G.*

(a) *$\eta : G \to \hat{\hat{G}}$ je izomorfizam topoloških grupa.*

(b) *$\eta(\mu) = \hat{\hat{\mu}}$.*

(c) *Ako pomoću η identificiramo $\hat{\hat{G}}$ sa G, tada je preslikavanje $\overline{\mathcal{F}}_{\hat{G}} : L_2(\hat{G}) \to L_2(G)$ inverzno preslikavanju $\mathcal{F}_G : L_2(G) \to L_2(\hat{G})$.*

Dokaz: Već znamo da je $\eta : G \to \hat{\hat{G}}$ neprekidni injektivni homomorfizam. Dokazat ćemo najprije da je η homeomorfizam sa G na $\eta(G)$ snabdjeven s induciranom topologijom iz $\hat{\hat{G}}$. U tu svrhu treba dokazati da za svaki otvoren skup $U \subseteq G$ postoji otvoren skup $W \subseteq \hat{\hat{G}}$ takav da je $\eta^{-1}(W) \subseteq U$. Kako je η homomorfizam grupa, dovoljno je dokazati sljedeću tvrdnju:

Za svaku okolinu U jedinice $e = e_G$ u grupi G postoji okolina W jedinice $\mathfrak{e} = e_{\hat{\hat{G}}}$ u grupi $\hat{\hat{G}}$, takva da je $\eta^{-1}(W) \subseteq U$.

Neka je U okolina od e u G. Neka je $V = V^{-1}$ kompaktna okolina od e u G takva da je $V^2 \subseteq U$. Izaberimo $f \in C_0^+(G)$ tako da je $Supp\, f \subseteq V$ i $\|f\|_2 = 1$. Stavimo $g = f^* * f$. Tada je $g \in \mathcal{A}(G)$, $Supp\, g \subseteq U$ i

$$g(e) = \int_G f^*(y) f(y^{-1}) \mathrm{d}\mu(y) = \int_G |f(y^{-1})|^2 \mathrm{d}\mu(y) = \int_G |f(y)|^2 \mathrm{d}\mu(y) = \|f\|_2^2 = 1.$$

Po tvrdnji (a) 4.4.1. iz $g \in \mathcal{A}(G)$ slijedi $\mathcal{F}_G g \in L_1(\hat{G})$. Topologija na $\hat{\hat{G}}$ je topologija proste konvergencije na $L_1(\hat{G})$; naime, $\hat{\hat{G}}$ se identificira sa spektrom $L_1(\hat{G})\hat{}$ komutativne Banachove algebre $L_1(\hat{G})$. Prema tome, postoji okolina W jedinice $\mathfrak{e}$ u $\hat{\hat{G}}$ takva da vrijedi:

$$\mathfrak{x} \in W \qquad \Longrightarrow \qquad |\mathfrak{x}\,(\mathcal{F}_G g) - \mathfrak{e}\,(\mathcal{F}_G g)| \leq \frac{1}{2}.$$

Međutim, za $\mathfrak{x} \in \hat{\hat{G}}$ je

$$\mathfrak{x}\,(\mathcal{F}_G g) = \int_{\hat{G}} \mathfrak{x}(\chi)\,(\mathcal{F}_G g)\,(\chi) \mathrm{d}\hat{\mu}(\chi) = \left(\overline{\mathcal{F}}_{\hat{G}} \mathcal{F}_G g\right)(\mathfrak{x}).$$

Dakle,

$$\mathfrak{x} \in W \qquad \Longrightarrow \qquad \left|\left(\overline{\mathcal{F}}_{\hat{G}} \mathcal{F}_G g\right)(\mathfrak{x}) - \left(\overline{\mathcal{F}}_{\hat{G}} \mathcal{F}_G g\right)(\mathfrak{e})\right| \leq \frac{1}{2}.$$

Neka je $x \in \eta^{-1}(W)$. Tada je $\eta(x) \in W$ i $\eta(e) = \mathfrak{e}$, pa slijedi

$$\left|\left[\left(\overline{\mathcal{F}}_{\hat{G}} \mathcal{F}_G g\right) \circ \eta\right](x) - \left[\left(\overline{\mathcal{F}}_{\hat{G}} \mathcal{F}_G g\right) \circ \eta\right](e)\right| \leq \frac{1}{2}.$$

Međutim, imamo $g \in \mathcal{A}(G)$, pa po korolaru 4.4.1. vrijedi $\left(\overline{\mathcal{F}}_{\hat{G}} \mathcal{F}_G g\right) \circ \eta = g$. Dakle, za $x \in \eta^{-1}(W)$ vrijedi $|g(x) - g(e)| \leq \frac{1}{2}$, dakle, $|g(x) - 1| \leq \frac{1}{2}$. Slijedi $g(x) \neq 0$ što znači da je $x \in Supp\, g \subseteq U$. Time je dokazano da vrijedi $\eta^{-1}(W) \subseteq U$.

Time smo dokazali da je η homeomorfizam sa G na svoju sliku $\eta(G)$. To znači da je $\eta(G)$ podgrupa od $\hat{\hat{G}}$, koja je s induciranom topologijom lokalno kompaktna. Pomoću leme 4.4.2. zaključujemo da je $\eta(G)$ zatvorena podgrupa od $\hat{\hat{G}}$.

Pretpostavimo da je $\eta(G) \neq \hat{\hat{G}}$. Prema lemi 4.4.1. tada postoji $f \in L_1(\hat{G})$ takva da je $\mathcal{F}_{\hat{G}} f | \eta(G) = 0$ i $f \neq 0$. Tada je $(\mathcal{F}_{\hat{G}} f)\,(\eta(x)) = 0 \;\; \forall x \in G$, a to znači

$$0 = \int_{\hat{G}} \overline{[\eta(x)](\chi)} f(\chi) \mathrm{d}\hat{\mu}(\chi) = \int_{\hat{G}} \overline{\chi(x)} f(\chi) \mathrm{d}\hat{\mu}(\chi).$$

Neka je sada funkcija $u \in L_1(G)$ proizvoljna. Tada je funkcija $(x, \chi) \mapsto u(x)\overline{\chi(x)} f(\chi)$ na $G \times \hat{G}$ integrabilna u odnosu na mjeru $\mu \otimes \hat{\mu}$, pa je na nju primjenjiv Fubinijev teorem o zamjeni redoslijeda integracije. Dakle,

$$\int_{\hat{G}} f(\chi)\,(\mathcal{F}_G u)\,(\chi) \mathrm{d}\hat{\mu}(\chi) = \int_{\hat{G}} f(\chi) \left[\int_G \overline{\chi(x)} u(x) \mathrm{d}\mu(x)\right] \mathrm{d}\hat{\mu}(\chi) =$$

$$= \int_G u(x) \left[\int_{\hat{G}} \overline{\chi(x)} f(\chi) \mathrm{d}\hat{\mu}(\chi)\right] \mathrm{d}\mu(x) = 0.$$

Budući da je $\mathcal{F}_G(L_1(G))$ gusto u $C_\infty(\hat{G})$, odatle slijedi da je ograničena mjera $f \cdot \hat{\mu}$ na $\hat{G}$ jednaka nuli. No to je u suprotnosti sa $f \neq 0$. Ova kontradikcija pokazuje da je $\eta(G) = \hat{\hat{G}}$, dakle, $\eta : G \to \hat{\hat{G}}$ je izomorfizam topoloških grupa.

(b) $\overline{\mathcal{F}}_{\hat{G}}$ je izometrija sa $L_2(\hat{G}, \hat{\mu})$ na $L_2\big(\hat{\hat{G}}, \hat{\hat{\mu}}\big)$. S druge strane, pomoću tvrdnje (b) propozicije 4.4.1. za $f \in \mathcal{A}(G)$ imamo

$$\left\|\overline{\mathcal{F}}_{\hat{G}}\mathcal{F}_G f\right\|_{L_2\left(\hat{\hat{G}},\eta(\mu)\right)} = \left\|\left(\overline{\mathcal{F}}_{\hat{G}}\mathcal{F}_G f\right) \circ \eta\right\|_{L_2(G,\mu)} = \|f\|_{L_2(G,\mu)} = \|\mathcal{F}_G f\|_{L_2(\hat{G},\hat{\mu})}.$$

Budući da je $\mathcal{F}(\mathcal{A}(G))$ gusto u $L_2(\hat{G}, \hat{\mu})$, odatle slijedi da je $\overline{\mathcal{F}}_{\hat{G}}$ ne samo izometrija sa $L_2(\hat{G}, \hat{\mu})$ na $L_2\big(\hat{\hat{G}}, \hat{\hat{\mu}}\big)$ nego i izometrija sa $L_2(\hat{G}, \hat{\mu})$ na $L_2\big(\hat{\hat{G}}, \eta(\mu)\big)$. Kako su $\hat{\hat{\mu}}$ i $\eta(\mu)$ Haarove mjere na $\hat{\hat{G}}$, slijedi da je $\eta(\mu) = \hat{\hat{\mu}}$.

(c) Budući da po propoziciji 4.4.1. vrijedi $\overline{\mathcal{F}}_{\hat{G}}\mathcal{F}_G f = f$ za svaku $f \in \mathcal{A}(G)$ i budući da je $\mathcal{A}(G)$ gusto u $L_2(G, \mu)$, slijedi da je $\overline{\mathcal{F}}_{\hat{G}}\mathcal{F}_G$ identiteta na $L_2(G, \mu)$.

Temeljem teorema 4.4.1. u daljnjem ćemo stalno pomoću η identificirati G sa $\hat{\hat{G}}$. Nadalje, u oznakama prostora L_1 i L_2 izostavljamo oznake μ i $\hat{\mu}$.

Teorem 4.4.2. *Neka je* $\mathcal{B}(G) = \{f \in L_1(G);\ \mathcal{F}_G f \in L_1(\hat{G})\}$.

(a) $\mathcal{B}(G) = \{f \in L_1(G);\ \overline{\mathcal{F}}_G f \in L_1(\hat{G})\}$.

(b) $\mathcal{F}_G$ *(odnosno,* $\overline{\mathcal{F}}_G$*) je izomorfizam vektorskog prostora* $\mathcal{B}(G)$ *na vektorski prostor* $\mathcal{B}(\hat{G})$. *Njemu inverzni izomorfizam je* $\overline{\mathcal{F}}_{\hat{G}}$ *(odnosno,* $\mathcal{F}_{\hat{G}}$*).*

(c) *Vrijedi*
$$\mathcal{B}(G) = L_1(G) \cap \mathcal{F}_{\hat{G}}(L_1(\hat{G})) = L_1(G) \cap \overline{\mathcal{F}}_{\hat{G}}(L_1(\hat{G})).$$
Posebno, $\mathcal{B}(G) \subseteq C_\infty(G)$.

(d) $\mathcal{B}(G)$ *je algebra i s obzirom na konvoluciju* $*$ *i s obzirom na množenje po točkama* $\cdot$. $\mathcal{F}_G$ *i* $\overline{\mathcal{F}}_G$ *su izomorfizmi algebre* $(\mathcal{B}(G), *)$ *na algebru* $(\mathcal{B}(\hat{G}), \cdot\,)$ *i algebre* $(\mathcal{B}(G), \cdot\,)$ *na algebru* $(\mathcal{B}(\hat{G}), *)$.

Dokaz: (a) Imamo $\left(\overline{\mathcal{F}}_G f\right)(\chi) = (\mathcal{F}_G f)(\chi^{-1})$, pa budući da je mjera $\hat{\mu}$ invarijantna u odnosu na invertiranje $\chi \mapsto \chi^{-1}$ slijedi

$$\mathcal{F}_G f \in L_1(\hat{G}) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \overline{\mathcal{F}}_G f \in L_1(\hat{G}).$$

(b) Za $f \in \mathcal{B}(G)$ je $\mathcal{F}_G f \in L_1(\hat{G})$. Nadalje, tada je $f \in L_1(G) \subseteq C^*(G)$ pa je $\mathcal{F}_G f \in C_\infty(\hat{G})$. Dakle,
$$f \in \mathcal{B}(G) \qquad \Longrightarrow \qquad \mathcal{F}_G f \in L_1(\hat{G}) \cap C_\infty(\hat{G}) = L_1(\hat{G}) \cap L_2(\hat{G}) \cap C_\infty(\hat{G}),$$
jer svaka ograničena integrabilna funkcija je kvadratno integrabilna, pa je $L_1(\hat{G}) \cap C_\infty(\hat{G}) \subseteq L_2(\hat{G})$.

Fiksirajmo sada $f \in \mathcal{B}(G)$ i stavimo $h = \overline{\mathcal{F}}_{\hat{G}}\mathcal{F}_G f$. Tada je $h \in L_2(G)$. Za $g \in C_0(\hat{G})$ imamo po Plancherelovom teoremu 4.3.2.:

$$\left(\mathcal{F}_{\hat{G}} g \middle| \overline{h}\right) = \left(g \middle| \overline{\mathcal{F}}_G \overline{h}\right) = \left(g \middle| \overline{\mathcal{F}_G h}\right).$$

Ali $\mathcal{F}_G f \in L_1(\hat{G}) \cap L_2(\hat{G})$, pa je opet po Plancherelovom teoremu

$$\mathcal{F}_G h = \mathcal{F}_G \overline{\mathcal{F}}_{\hat{G}} \mathcal{F}_G f = \mathcal{F}_G f \qquad \text{u prostoru } L_2(\hat{G}).$$

Odatle je

$$\left(\mathcal{F}_{\hat{G}}g|\,\overline{h}\right) = \left(g\,|\overline{\mathcal{F}_G f}\,\right) = \left(\mathcal{F}_{\hat{G}}g|\,\overline{f}\right).$$

Budući da je $\mathcal{F}_{\hat{G}}(C_0(\hat{G}))$ gusto u $L_2(G)$, odatle slijedi $f = h$. Dakle, $f = \overline{\mathcal{F}}_{\hat{G}}\mathcal{F}_G f \in L_1(G)$.

Dakle, dokazali smo sljedeće dvije implikacije

$$f \in \mathcal{B}(G) \quad\Longrightarrow\quad \mathcal{F}_G f \in L_1(\hat{G}) \qquad \text{i} \qquad f \in \mathcal{B}(G) \quad\Longrightarrow\quad \overline{\mathcal{F}}_{\hat{G}}\mathcal{F}_G f \in L_1(G).$$

Dakle, vrijedi

$$f \in \mathcal{B}(G) \qquad\Longrightarrow\qquad \mathcal{F}_G f \in \mathcal{B}(\hat{G}).$$

Također smo dokazali

$$f \in \mathcal{B}(G) \qquad\Longrightarrow\qquad \overline{\mathcal{F}}_{\hat{G}}\mathcal{F}_G f = f.$$

Zamijenimo li uloge $\mathcal{F}$ i $\overline{\mathcal{F}}$ analogno nalazimo

$$f \in \mathcal{B}(G) \qquad\Longrightarrow\qquad \overline{\mathcal{F}}_G f \in \mathcal{B}(\hat{G}) \quad \text{i} \quad \overline{\mathcal{F}}_{\hat{G}}\mathcal{F}_G f = f.$$

Nadalje, zamjenom uloga G i $\hat{G}$ dobivamo također

$$g \in \mathcal{B}(\hat{G}) \qquad\Longrightarrow\qquad \mathcal{F}_{\hat{G}}g \in \mathcal{B}(G) \quad \text{i} \quad \overline{\mathcal{F}}_G\mathcal{F}_G\mathcal{F}_{\hat{G}}g = g$$

i

$$g \in \mathcal{B}(\hat{G}) \qquad\Longrightarrow\qquad \overline{\mathcal{F}}_{\hat{G}}g \in \mathcal{B}(G) \quad \text{i} \quad \mathcal{F}_G\overline{\mathcal{F}}_G\mathcal{F}_{\hat{G}}g = g$$

Time je (b) dokazano.

(c) Neka je $f \in \mathcal{B}(G)$ i stavimo $g = \overline{\mathcal{F}}_G f \in \mathcal{B}(\hat{G}) \subseteq L_1(\hat{G})$. Tada je $f = \mathcal{F}_{\hat{G}}g$, pa je $f \in L_1(G) \cap \mathcal{F}_{\hat{G}}(L_1(\hat{G}))$.

Obratno, neka je $f \in L_1(G) \cap \mathcal{F}_{\hat{G}}(L_1(\hat{G})$. Neka je $g \in L_1(\hat{G})$ takva da je $f = \mathcal{F}_{\hat{G}}g$. Tada je $g \in \mathcal{B}(\hat{G})$, pa je $f \in \mathcal{F}_{\hat{G}}(\mathcal{B}(\hat{G})) = \mathcal{B}(G)$.

Time je dokazano $\mathcal{B}(G) = L_1(G) \cap \mathcal{F}_{\hat{G}}(L_1(\hat{G}))$. Sasvim analogno dokazuje se jednakost $\mathcal{B}(G) = L_1(G) \cap \overline{\mathcal{F}}_{\hat{G}}(L_1(\hat{G}))$.

(d) Neka su $f, g \in \mathcal{B}(G)$. Tada su posebno $f, g \in L_1(G)$, dakle i $f * g \in L_1(G)$. Nadalje, $\mathcal{F}_G f \in L_1(\hat{G})$ i $\mathcal{F}_G g \in C_\infty(\hat{G})$, pa slijedi da je $\mathcal{F}_G(f * g) = (\mathcal{F}_G f) \cdot (\mathcal{F}_G g) \in L_1(\hat{G})$. Dakle je $f * g \in \mathcal{B}(G)$. Time je dokazano da je $\mathcal{B}(G)$ algfebra u odnosu na $*$. Budući da je $\mathcal{F}_G$ izomorfizam $\mathcal{B}(G)$ na $\mathcal{B}(\hat{G})$ i budući da $\mathcal{F}$ prevodi operaciju $*$ u operaciju $\cdot$, zaključujemo da je $\mathcal{B}(\hat{G})$ algebra u odnosu na operaciju $\cdot$. Zamjenom G i $\hat{G}$ zaključujemo da je $\mathcal{B}(G)$ algebra i u odnosu na $\cdot$ i da je $\mathcal{B}(\hat{G})$ alhgebra i u odnosu na $*$. Sve tvrdnje slijede jer je $(\mathcal{F}_G|\mathcal{B}(G))^{-1} = \overline{\mathcal{F}}_{\hat{G}}|\mathcal{B}(\hat{G})$ i $\left(\overline{\mathcal{F}}_G|\mathcal{B}(G)\right)^{-1} = \mathcal{F}_{\hat{G}}|\mathcal{B}(\hat{G})$

Korolar 4.4.2. *Ako su $f, g \in L_2(G)$ onda je $\mathcal{F}_G(f \cdot g) = (\mathcal{F}_G f) * (\mathcal{F}_G g)$.*

Napominjemo da smo u iskazu ovog korolara upotrijebili oznaku $*$ umjesto oznake $\bullet$ iz propozicije 4.2.1. To ne dovodi do nedoumice zbog tvrdnje (c) te propozicije.

Dokaz: Znamo da tvrdnja vrijedi ako su $f, g \in \mathcal{B}(G)$ i posebno za $f, g \in \mathcal{A}(G)$, jer je $\mathcal{A}(G) \subseteq \mathcal{B}(G)$. Budući da je $\mathcal{A}(G)$ gusto u $L_2(G)$, dovoljno je dokazati da su preslikavanja $(f, g) \mapsto \mathcal{F}_G(f \cdot g)$ i $(f, g) \mapsto (\mathcal{F}_G f) * (\mathcal{F}_G g)$ sa $L_2(G) \times L_2(G)$ u $C_\infty(\hat{G})$ neprekidna.

$(f, g) \mapsto \mathcal{F}_G(f \cdot g)$ je kompozicija dvaju neprekidnih preslikavanja: $(f, g) \mapsto f \cdot g$ sa $L_2(G) \times L_2(G)$ u $L_1(G)$ i $\mathcal{F}_G : L_1(G) \to C_\infty(\hat{G})$.

$(f, g) \mapsto (\mathcal{F}_G f) * (\mathcal{F}_G g)$ je također kompozicija dvaju neprekidnih preslikavanja: $(f, g) \mapsto (\mathcal{F}_G f, \mathcal{F}_G g)$ sa $L_2(G) \times L_2(G)$ u $L_2(\hat{G}) \times L_2(\hat{G})$ i $(\varphi, \psi) \mapsto \varphi * \psi$ sa $L_2(\hat{G}) \times L_2(\hat{G})$ u $C_\infty(\hat{G})$. Neprekidnost ovog posljednjeg preslikavanja slijedi primjenom tvrdnje (b) propozicije 4.2.1. na grupu $\hat{G}$.

Treba nam još nekoliko općih topoloških rezultata o lokalno kompaktnim grupama. Neka je G lokalno kompaktna grupa i H zatvorena podgrupa. Označimo sa $H\backslash G$ (odnosno, sa G/H) skup svih desnih $H-$klasa Hx (odnosno, svih lijevih $H-$klasa xH) u G. Promatrat ćemo samo G/H, a rezultati za $H\backslash G$ su sasvim analogni. Neka je $p : G \to G/H$ kanonstka surjekcija $p(x) = xH$, $x \in G$. G/H snabdijemo s kvocijentnom topologijom, odnosno, s najjačom topologijom za koju je preslikavanje p neprekidno: skup $U \subseteq G/H$ je otvoren ako i samo ako je $p^{-1}(U)$ otvoren u G.

Propozicija 4.4.2. (a) *Preslikavanje p je otvoreno, tj. za svaki otvoren skup $V \subseteq G$ njegova slika $p(V)$ je otvorena u G/H.*

(b) *G/H je Hausdorffov lokalno kompaktan topološki prostor.*

(c) *Ako je $K \subseteq G/H$ kompaktan skup, postoji kompaktan skup $K_1 \subseteq G$ takav da je $p(K_1) = K$.*

(d) *Ako je T topološki prostor, preslikavanje $f : G/H \to T$ je neprekidno ako i samo ako je kompozicija $f \circ p : G \to T$ neprekidna.*

Dokaz: (a) Neka je $V \subseteq G$ otvoren skup. Imamo

$$p^{-1}(p(V)) = \{x \in G;\ p(x) \in p(V)\} = \{x \in G;\ xH \subseteq VH\} = VH = \bigcup_{y\in H} Vy.$$

Dakle, $p^{-1}(p(V))$ je kao unija otvorenih skupova otvoren skup. Po definiciji topologije u G/H skup $p(V)$ je otvoren u G/H.

(b) Neka su $x, y \in G$ takvi da je $p(x) \neq p(y)$. To znači da je $y^{-1}x \notin H$, pa postoji kompaktna okolina V_1 od e u G takva da je $y^{-1}xV_1 \cap H = \emptyset$. Skup $y^{-1}xV_1$ je kompaktan, a H je zatvoren, dakle po tvrdnji (f) propozicije 1.2.1. postoji okolina V_2 od e u G takva da je $V_2^{-1}y^{-1}xV_1 \cap H = \emptyset$. Tada je $xV_1H \cap yV_2H = \emptyset$, tj. $p(xV_1) \cap p(yV_2) = \emptyset$. Prema ($a$) $p(xV_1)$ je okolina od $p(x)$, a $p(yV_2)$ je okolina od $p(y)$. To pokazuje da je topološki prostor G/H Hausdorffov. Budući da je p neprekidna i otvorena surjekcija, topološki prostor G/H je lokalno kompaktan.

(c) Za $x \in p^{-1}(K)$ neka je V_x relativno kompaktna otvorena okolina od x. Tada je

$$K \subseteq \bigcup_{x\in p^{-1}(K)} p(V_x),$$

pa zbog kompaktnosti od K postoje $x_1, x_2, \ldots, x_n \in p^{-1}(K)$ takvi da je

$$K \subseteq p(Vx_1) \cup p(Vx_2) \cup \cdots \cup p(Vx_n) = p\left(Vx_1 \cup Vx_2 \cup \cdots \cup Vx_n\right).$$

Stavimo

$$K_2 = p^{-1}(K) \cap \left(Vx_1 \cup Vx_2 \cup \cdots \cup Vx_n\right), \qquad K_1 = Cl(K_2).$$

Tada je K_1 kompaktan podskup od G. Nadalje, $p(K_2) = K$, a kako je preslikavanje p neprekidno, slijedi

$$p(Cl(K_2)) \subseteq Cl(p(K_2)) = Cl(K) = K.$$

Budući da je $K = p(K_2) \subseteq p(K_1)$, slijedi $K = p(K_1)$.

(d) Očito vrijedi implikacija

$$f \quad \text{neprekidno} \qquad \Longrightarrow \qquad f \circ p \quad \text{neprekidno}.$$

Pretpostavimo da je $f \circ p$ neprekidno preslikavanje i neka je $U \subseteq T$ otvoren skup. Tada je skup $p^{-1}\left(f^{-1}(U)\right) = (f \circ p)^{-1}(U)$ otvoren skup u G, pa je po definiciji topologije u G/H skup $f^{-1}(U)$ otvoren u G/H. Dakle, preslikavanje f je neprekidno.

Korolar 4.4.3. *Neka je G lokalno kompaktna grupa i H zatvorena normalna podgrupa. G/H je s kvocijentnom topologijom lokalno kompaktna grupa.*

Dokaz: Neka su $x, y \in G$ i neka je V okolina od $p(x)p(y)^{-1} = p(xy^{-1})$ u G/H. Tada je $p^{-1}(V)$ okolina od xy^{-1} u G, pa postoje okolina U_1 od x i okolina U_2 od y u G takve da je $U_1U_2^{-1} \subseteq p^{-1}(V)$. Prema tvrdnji (a) propozicije 4.4.2. $p(U_1)$ je okolina pd $p(x)$ i $p(U_2)$ je okolina od $p(y)$ u G/H. Nadalje, $p(U_1)p(U_2)^{-1} = p(U_1U_2^{-1}) \subseteq V$. To pokazuje da je preslikavanje $(\xi, \eta) \mapsto \xi\eta^{-1}$ sa $G/H \times G/H$ u G/H neprekidno, tj. G/H je topološka grupa.

Korolar 4.4.4. *Neka su G i H lokalno kompaktne grupe, $f : G \to H$ neprekidni homomorfizam i $p : G \to G/(Ker\,f)$ kanonski epimorfizam. Jedinstveni homomorfizam $\tilde{f} : G/(Ker\,f) \to H$, takav da je $f = \tilde{f} \circ p$, je neprekidan.*

Dokaz: To slijedi neposredno iz tvrdnje (d) propozicije 4.4.2.

Neka su sada G i H Abelove lokalno kompaktne grupe i $\varphi : G \to H$ neprekidni homomorfizam. Za $\xi \in \hat{H}$ je $qxi \circ \varphi \in \hat{G}$. Definiramo $\hat{\varphi} : \hat{H} \to \hat{G}$ sa

$$\hat{\varphi}(\xi) = \xi \circ \varphi, \qquad \text{tj.} \quad [\hat{\varphi}(\xi)](y) = \xi(\varphi(y)), \quad \xi \in \hat{H},\ y \in G.$$

Tada je očito $\hat{\varphi}$ homomorfizam grupa. Neka je $(\xi_i)_{i\in I}$ hiperniz u $\hat{H}$ koji konvergira prema $\xi \in \hat{H}$. Prema tvrdnji (a) teorema 4.1.1. to znači da hiperniz $(\xi_i)_{i\in I}$ konvergira prema ξ lokalno uniformno na H. Tada hiperniz $(\hat{\varphi}(\xi_i))_{i\in I} = (\xi_i \circ \varphi)_{i\in I}$ konvergira prema $\hat{\varphi}(\xi) = \xi \circ \varphi$ lokalno uniformno na G, dakle, u topologiji prostora $\hat{G}$. To znači da je homorfizam $\hat{\varphi} : \hat{H} \to \hat{G}$ neprekidan.

Očito vrijedi

$$(\varphi \circ \psi)\hat{} = \hat{\psi} \circ \hat{\varphi};$$

$$\varphi = id_G \quad \Longrightarrow \quad \hat{\varphi} = id_{\hat{G}};$$

$$\varphi : G \to H, \quad \varphi(G) = \{e_H\} \quad \Longrightarrow \quad \hat{\varphi}(\hat{H}) = \{e_{\hat{G}}\};$$

$$\hat{\hat{\varphi}} = \varphi.$$

Dakle, $G \mapsto \hat{G}$, $\varphi \mapsto \hat{\varphi}$ je involutivni kontravarijantni funktor na kategoriji lokalno kompaktnih Abelovih grupa.

Propozicija 4.4.3. *Neka su G i H Abelove lokalno kompaktne grupe. Za $\chi \in \hat{G}$ i $\xi \in \hat{H}$ definiramo preslikavanje $\Phi(\chi, \xi) : G \times H \to T$ sa*

$$[\Phi(\chi, \xi)](x, y) = \chi(x)\xi(y), \qquad (x, y) \in G \times H.$$

Tada je Φ izomorfizam topoloških grupa sa $\hat{G} \times \hat{H}$ na $(G \times H)\hat{}$.

Dokaz: Očito je Φ neprekidni homomorfizam. Neka su $i : G \to G \times H$ i $j : H \to G \times H$ kanonski monomorfizmi, tj. $i(x) = (x, e_H)$, $j(y) = (e_G, y)$. Tada su $\hat{i} : (G \times H)\hat{} \to \hat{G}$ i $\hat{j} : (G \times H)\hat{} \to \hat{H}$ neprekidni homomorfizmi. Od njih složimo neprekidni homomorfizam $F : (G \times H)\hat{} \to \hat{G} \times \hat{H}$:

$$F(\varphi) = (\hat{i}(\varphi), \hat{j}(\varphi)), \qquad \varphi \in (G \times H)\hat{}.$$

Za $(\chi, \xi) \in \hat{G} \times \hat{H}$ imamo

$$(F \circ \Phi)(\chi, \xi) = F(\Phi(\chi, \xi)) = (\hat{i}(\Phi(\chi, \xi)), \hat{j}(\Phi(\chi, \xi))).$$

Nadalje, za $x \in G$ je

$$[\hat{i}(\Phi(\chi,\xi))](x) = [\Phi(\chi,\xi)](i(x)) = [\Phi(\chi,\xi)](x,e_H) = \chi(x)\xi(e_H) = \chi(x).$$

Dakle, $\hat{i}(\Phi(\chi,\xi)) = \chi$. Analogno je $\hat{j}(\Phi(\chi,\xi)) = \xi$. Prema tome,

$$(F \circ \Phi)(\chi,\xi) = (\chi,\xi) \qquad \forall(\chi,\xi) \in \hat{G} \times \hat{H},$$

a to znači da je $F \circ \Phi = id_{\hat{G}\times\hat{H}}$. S druge strane, za $\varphi \in (G \times H)\hat{}$ i za $(x,y) \in G \times H$ imamo

$$[(\Phi \circ F)(\varphi)](x,y) = [\Phi(F(\varphi))](x,y) = [\Phi(\hat{i}(\varphi),\hat{j}(\varphi))](x,y) = [\hat{i}(\varphi)](x)[\hat{j}(\varphi)](y) =$$

$$= \varphi(i(x))\varphi(j(y)) = \varphi(x,e_H)\varphi(e_G,y) = \varphi((x,e_H)(e_G,y)) = \varphi(x,y).$$

Prema tome,

$$(\Phi \circ F)(\varphi) = \varphi \qquad \forall\varphi \in (G \times H)\hat{},$$

a to znači da je $\Phi \circ F = id_{(G\times H)\hat{}}$. Time je dokazano da su neprekidni homomorfizmi topoloških grupa $\Phi : \hat{G} \times \hat{H} \to (G \times H)\hat{}$ i $F : (G \times H)\hat{} \to \hat{G} \times \hat{H}$ međusobno inverzni, dakle, radi se o izomorfizmima topoloških grupa.

Neka je $\varphi : G \to H$ neprekidni homomorfizam topoloških grupa. Kažemo da je φ **striktni morfizam** ako on inducira izomorfizam topoloških grupa sa $G/(\mathrm{Ker}\,\varphi)$ na $\varphi(G)$. Tada imamo egzaktni niz topoloških grupa:

$$\{e\} \longrightarrow \mathrm{Ker}\,\varphi \longrightarrow G \xrightarrow{\varphi} H \longrightarrow H/\varphi(G) \longrightarrow \{e\}.$$

Neka je G Abelova lokalno kompaktna grupa. Za podskup $S \subseteq G$ stavimo

$$S^\perp = \{\chi \in \hat{G};\ \chi(s) = 1\ \forall s \in S\}.$$

Očito je $S^\perp$ zatvorena podgrupa grupe $\hat{G}$.

Teorem 4.4.3. *Neka je H zatvorena podgrupa Abelove lokalno kompaktne grupe. Stavimo $A = G/H$ i neka je $i : H \to G$ inkluzija, a $p : G \to A$ kanonski epimorfizam. Tada je $\hat{p}$ izomorfizam topoloških grupa sa $\hat{A}$ na podgrupu $H^\perp$ od $\hat{G}$ i $\hat{i}$ je striktni epimorfizam sa $\hat{G}$ na $\hat{H}$ s jezgrom $H^\perp$.*

Dokaz: **(1)** Dokažimo najprije da je homomorfizam $\hat{p} : \hat{A} \to \hat{G}$ injektivan. Doista, ako je $\alpha \in \hat{A}$ takav da je $\hat{p}(\alpha) = e_{\hat{G}}$, onda je $1 = [\hat{p}(\alpha)](x) = \alpha(p(x))$ za svaki $x \in G$. To znači da je $\alpha(a) = 1$ za svaki $a \in A$, dakle, $\alpha = e_{\hat{A}}$.

(2) Dokažimo sada da je $\hat{p}(\hat{A}) = H^\perp$. Doista, za $\alpha \in \hat{A}$ i $y \in H$ je

$$[\hat{p}(\alpha)](y) = \alpha(p(y)) = \alpha(e_A) = 1,$$

dakle, $\hat{p}(\alpha) \in H^\perp$. Neka je sada $\chi \in H^\perp$. Tada je $\chi(y) = 1\ \ \forall y \in H$, dakle, $\chi(xy) = \chi(x)\ \ \forall x \in G$ i $\forall y \in H$. Sada iz korolara 4.4.4. slijedi da postoji $\alpha \in \hat{A}$ takav da je $\chi = \alpha \circ p$, a to znači da je $\chi = \hat{p}(\alpha) \in \hat{p}(\hat{A})$.

Iz **(1)** i **(2)** slijedi da je $\hat{p}$ neprekidni bijektivni homomorfizam sa $\hat{A}$ na $H^\perp$.

(3) Dokažimo sada da je $\hat{p}$ izomorfizam topoloških grupa sa $\hat{A}$ na $H^\perp$. U tu svrhu treba još dokazati da je inverzno preslikavanje $H^\perp \to \hat{A}$ preslikavanja $\hat{p}$ neprekidno. Budući da je to preslikavanje homomorfizam grupa, dovoljno je dokazati njegovu neprekidnost u jedinici. Dakle, dovoljno je dokazati da za svaku okolinu U od $e_{\hat{A}}$ u $\hat{A}$ postoji okolina V od $e_{\hat{G}}$ u $\hat{G}$ takva da vrijedi

$$\alpha \in \hat{A}, \quad \hat{p}(\alpha) \in V \qquad \Longrightarrow \qquad \alpha \in U.$$

Neka je, dakle, U okolina od $e_{\hat{A}}$ u $\hat{A}$. Topologija na $\hat{A}$ je topologija lokalno uniformne konvergencije na A, dakle, postoje kompaktan podskup $K \subseteq A$ i $\varepsilon > 0$ takvi da vrijedi

$$\alpha \in \hat{A}, \quad |\alpha(a) - 1| \leq \varepsilon \quad \forall a \in K \qquad \Longrightarrow \qquad \alpha \in U.$$

Po tvrdnji (c) propozicije 4.4.2. postoji kompaktan skup $K_1 \subseteq G$ takav da je $p(K_1) = K$. Stavimo

$$V = \{\gamma \in \hat{G};\ |\gamma(x) - 1| \leq \varepsilon \quad \forall x \in K_1\}.$$

Tada je V okolina od $e_{\hat{G}}$ u $\hat{G}$ i očito vrijedi

$$\alpha \in \hat{A}, \quad \hat{p}(\alpha) \in V \qquad \Longrightarrow \qquad |\alpha(p(x)) - 1| \leq \varepsilon \quad \forall x \in K_1 \qquad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \qquad |\alpha(a) - 1| \leq \varepsilon \quad \forall a \in p(K_1) = K \qquad \Longrightarrow \qquad \alpha \in U.$$

Time je dokazano da je $\hat{p} : \hat{A} \to H^\perp$ izomorfizam topoloških grupa.

(4) Dokažimo sada da je $\operatorname{Ker} \hat{i} = H^\perp$. Doista, za $\gamma \in \hat{G}$ imamo sljedeći slijed ekvivalencija:

$$\gamma \in H^\perp \qquad \Longleftrightarrow \qquad \gamma(y) = 1 \quad \forall x \in H \qquad \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \qquad (\gamma \circ i)(y) = 1 \quad \forall y \in H \qquad \Longleftrightarrow \qquad \hat{i}(\gamma) = e_{\hat{H}} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \gamma \in \operatorname{Ker} \hat{i}.$$

(5) Napokon, dokažimo da je $\hat{i}$ surjektivni striktni morfizam sa $\hat{G}$ na $\hat{H}$. Neka je B Abelova lokalno kompaktna grupa takva da je $\hat{G}/H^\perp = \hat{B}$, tj. u skladu s Pontrjaginovim teoremom B je dualna grupa od $\hat{G}/H^\perp$. Neka je $q : \hat{G} \to \hat{B}$ pripadni kanonski surjektivni striktni morfizam. Stavimo $\psi = \hat{q} : L \to G$. Tada je $q = \hat{\psi}$ i prema **(3)** ψ je injektivni striktni morfizam. Budući da je $\operatorname{Ker} \hat{i} = \operatorname{Ker} \hat{\psi}$, prema korolaru 4.4.4. postoji jedinstven homomorfizam $\eta : \hat{B} \to \hat{H}$ takav da je $\hat{i} = \eta \circ \hat{\psi}$. Neka je $\varphi = \hat{\eta} : H \to B$, tj. $\eta = \hat{\varphi}$. Tada je $\hat{i} = \hat{\varphi} \circ \hat{\psi}$, pa je $i = \psi \circ \varphi$.

Imamo

$$H = i(H) = \psi(\varphi(H)) \subseteq \psi(B).$$

Nadalje,

$$(\hat{\psi} \circ \hat{p})(\hat{A}) = \hat{\psi}(\hat{p}(\hat{A})) = \hat{\psi}(H^\perp) = \{e_{\hat{B}}\},$$

pa je $(p \circ \psi)(B) = \{e_A\}$, odnosno, $\psi(B) \subseteq \operatorname{Ker} p = H$. Dvije inkluzije pokazuju da je $\psi(B) = H$. Budući da je ψ injektivni striktni morfizam sa L u G, slijedi da je ψ izomorfizam topoloških grupa sa B na H. Kako je $i = \psi \circ \varphi$, iz činjenice da su $\psi : B \to H$ i $i : H \to H$ izomorfizmi topoloških grupa slijedi da je $\varphi : H \to B$ izomorfizam topoloških grupa, dakle, $\hat{\varphi} : \hat{B} \to \hat{H}$ je izomorfizam topoloških grupa. Time je dokazano da $\hat{i}$ inducira izomorfizam topoloških grupa sa $\hat{B} = \hat{G}/H^\perp = \hat{G}/\operatorname{Ker} \hat{i}$ na $\hat{H}$. Dakle, $\hat{i} : \hat{G} \to \hat{H}$ je surjektivni striktni morfizam.

Korolar 4.4.5. *Neka je G Abelova lokalno kompaktna grupa i $S \subseteq G$ podskup. Tada je $\left(S^\perp\right)^\perp$ zatvorena podgrupa od G generirana sa S (tj. najmanja zatvorena podgrupa koja sadrži skup S).*

Dokaz: Neka je H zatvorena podgrupa od G generirana skupom S. Upotrijebimo iznake iz prethodnog teorema i njegova dokaza. Tada je $\hat{i}$ surjektivni striktni morfizam $\hat{G}$ na $\hat{H}$ s jezgrom $H^\perp$, pa je $i = \hat{\hat{i}}$ izomorfizam sa $H = \hat{\hat{H}}$ na $\left(H^\perp\right)^\perp$. Budući da je i oznaka za preslikavanje inkluzije, zaključujemo da je $H = \left(H^\perp\right)^\perp$. Sada imamo:

$$S \subseteq H \qquad \Longrightarrow \qquad S^\perp \supseteq H^\perp \qquad \Longrightarrow \qquad \left(S^\perp\right)^\perp \subseteq \left(H^\perp\right)^\perp = H.$$

Budući da je $\left(S^\perp\right)^\perp$ zatvorena podgrupa od G koja očito sadrži skup S, vrijedi i obrnuta inkluzija $\left(S^\perp\right)^\perp \supseteq H$. Prema tome je $H = \left(S^\perp\right)^\perp$.

Jednostavna posljedica ovog korolara je:

Korolar 4.4.6. *Neka su S_i, $i \in I$, podskupovi Abelove lokalno kompaktne grupe G i $H_i = \left(S_i^\perp\right)^\perp$ zatvorena podgrupa od G generirana skupom S_i. Tada je $(\cup_{i\in I} S_i)^\perp = \cap_{i\in I} S_i^\perp$ i $(\cap_{i\in I} H_i)^\perp$ je zatvorena podgrupa od $\hat{G}$ generirana sa $\cup_{i\in I} S_i^\perp$.*

Korolar 4.4.7. *Neka je $\varphi : G \to H$ neprekidni homomorfizam Abelovih lokalno kompaktnih grupa. Sljedeća su dva svojstva međusobno ekvivalentna:*

(a) *φ je striktni surjektivni morfizam.*

(b) *$\hat{\varphi}$ je striktni injektivni morfizam.*

Dokaz: Implikacija $(a) \Rightarrow (b)$ je neposredna posljedica teorema 4.4.3.

Dokažimo sada implikaciju $(b) \Rightarrow (a)$. Pretpostavimo da je $\hat{\varphi}$ striktni injektivni morfizam. To znači da je $\hat{\varphi}$ izomorfizam grupe $\hat{G}$ na neku lokalno kompaktnu podgrupu, dakle, prema lemi 4.4.2. na zatvorenu podgrupu grupe $\hat{H}$. Primjena teorema 4.4.3. pokazuje da je tada φ surjektivni striktni morfizam.

Korolar 4.4.8. *Neka je $\varphi : G \to H$ neprekidni homomorfizam Abelovih lokalno kompaktnih grupa. Tada je φ striktni morfizam ako i samo ako je $\hat{\varphi}$ striktni morfizam.*

Dokaz: Dovoljno je dokazati jednu implikaciju zbog dualiteta $\hat{\hat{\varphi}} = \varphi$. Pretpostavimo da je φ striktni morfizam. Tada je $H_1 = \varphi(H)$ zatvorena podgrupa od H. Neka je $i : H_1 \to H$ monomorfizam inkluzije. Označimo sa $\varphi_0 : G \to H_1$ koji djeluje jednako kao φ. Kako je φ striktni morfizam, to je φ_0 striktni surjektivni morfizam. Prema korolaru 4.4.7. tada je $\hat{\varphi}_0 : \hat{H}_1 \to \hat{G}$ injektivni striktni morfizam. Nadalje, $i : H_1 \to H$ je injektivni striktni morfizam, pa je po istom korolaru $\hat{i} : \hat{H} \to \hat{H}_1$ surjektivni striktni morfizam. Imamo $\varphi = i \circ \varphi_0$, dakle, $\hat{\varphi} = \hat{\varphi}_0 \circ \hat{i}$. Kako je $\hat{i}$ surjektivni striktni morfizam i $\hat{\varphi}_0$ je injektivni striktni morfizam, dakle, izomorfizam na sliku, to je $\hat{\varphi} = \hat{\varphi}_0 \circ \hat{i}$ striktni morfizam.

Korolar 4.4.9. *Neka je $\varphi : G \to H$ neprekidni homomorfizam Abelovih lokalno kompaktnih grupa. Tada vrijedi*

$$Ker\,\hat{\varphi} = (Im\,\varphi)^\perp \qquad i \qquad (Ker\,\hat{\varphi})^\perp = Cl(Im\,\varphi).$$

Dakle, $\hat{\varphi}$ je injektivan ako i samo ako je $Im\,\varphi$ gusto u H.

Dokaz: Za $\chi \in \hat{H}$ vrijedi sljedeći slijed ekvivalencija:

$$\chi \in \operatorname{Ker}\hat{\varphi} \iff [\hat{\varphi}(\chi)](x) = 1 \quad \forall x \in G \iff \chi(\varphi(x)) = 1 \quad \forall x \in G \iff$$

$$\iff \chi|\varphi(G) \equiv 1 \iff \chi \in (\operatorname{Im}\varphi)^\perp.$$

Dakle je $\operatorname{Ker}\hat{\varphi} = (\operatorname{Im}\varphi)^\perp$. Druga jednakost slijedi primjenom $\perp$ zbog korolara 4.4.5.

Za Abelovu lokalno kompaktnu grupu G i za $k \in \mathbb{Z}$ definiramo

$$G^{(k)} = \{x^k;\ x \in G\} \qquad \text{i} \qquad G_{(k)} = \{x \in G;\ x^k = e\}.$$

Korolar 4.4.10. *Za Abelovu lokalno kompaktnu grupu G i za $k \in \mathbb{Z}$ vrijedi*

$$\left(G^{(k)}\right)^\perp = \hat{G}_{(k)}, \qquad \left(\hat{G}^{(k)}\right)^\perp = G_{(k)}, \qquad \left(G_{(k)}\right)^\perp = Cl\left(\hat{G}^{(k)}\right) \qquad i \qquad \left(\hat{G}_{(k)}\right)^\perp = Cl\left(G^{(k)}\right).$$

Dokaz: Definiramo $\varphi_k : G \to G$ sa

$$\varphi_k(x) = x^k, \qquad x \in G.$$

Tada za $\hat{\varphi}_k : \hat{G} \to \hat{G}$ i za $\chi \in \hat{G}$ i $x \in G$ imamo

$$[\hat{\varphi}_k(\chi)](x) = \chi(\varphi_k(x)) = \chi(x^k) = [\chi(x)]^k = \chi^k(x).$$

Dakle,

$$\hat{\varphi}_k(\chi) = \chi^k, \qquad \chi \in \hat{G}.$$

Sada tvrdnje slijede iz korolara 4.4.9. jer je

$$\operatorname{Ker} \varphi_k = G_{(k)}, \qquad \operatorname{Ker} \hat{\varphi}_k = \hat{G}_{(k)}, \qquad \operatorname{Im} \varphi_k = G^{(k)} \qquad \text{i} \qquad \operatorname{Im} \hat{\varphi}_k = \hat{G}^{(k)}.$$

Za Abelovu grupu G kažemo da je **bez torzije** ako je $G_{(k)} = \{e\}$ $\forall k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, tj. ako vrijedi

$$k \in \mathbb{Z}, \quad x \in G, \quad x^k = e \qquad k = 0 \quad \text{ili} \quad x = e.$$

Za Abelovu grupu G kažemo da je **djeljiva** ako je $G^{(k)} = G$ $\forall k \in \mathbb{Z}$, tj. ako vrijedi

$$x \in G, \quad k \in \mathbb{Z} \qquad \Longrightarrow \qquad \exists\, y \in G \text{ takav da je } x = y^k.$$

Korolar 4.4.11. *Neka je G Abelova lokalno kompaktna grupa.*

(a) *Ako je grupa G djeljiva, onda je njoj dualna grupa $\hat{G}$ bez torzije.*

(b) *Ako je dualna grupa $\hat{G}$ bez torzije, onda je podgrupa $G^{(k)}$ gusta u grupi G $\forall k \in \mathbb{Z}$.*

(c) *Pretpostavimo da je grupa G ili diskretna ili kompaktna. Tada je G djeljiva ako i samo ako je $\hat{G}$ bez torzije.*

Dokaz: Tvrdnje (a) i (b) su neposredne posljedice korolara 4.4.10. Ukoliko je grupa G diskretna ili kompaktna, onda je $G^{(k)}$ zatvorena podgrupa od G za svaki $k \in \mathbb{Z}$, pa tvrdnja (c) slijedi iz tvrdnji (a) i (b).

Propozicija 4.4.4. *Neka je G Abelova lokalno kompaktna grupa. Grupa G je kompaktna ako i samo ako je grupa $\hat{G}$ diskretna. Pretpostavimo da je tako i neka je μ normirana Haarova mjera na G, tj. $\mu(1_G) = 1$, $1_G(x) = 1$ $\forall x \in G$. Tada je*

$$\hat{\mu}(f) = \sum_{\chi \in Supp\, f} f(\chi), \qquad f \in C_0(\hat{G}).$$

Dokaz: Pretpostavimo najprije da je grupa G kompaktna. Stavimo

$$V = \{\chi \in \hat{G};\ |\chi(x) - 1| \leq 1 \ \ \forall x \in G\}.$$

Budući da grupa G kompaktna, primjenom leme 1.2.1. zaključujemo da je V okolina jedinice $\varepsilon = e_{\hat{G}}$ u grupi $\hat{G}$. Sada je

$$|\chi(x)^k - 1| = |\chi(x^k) - 1| \leq 1 \qquad \forall \chi \in V, \quad \forall x \in G, \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

No za $\lambda \in T$ vrijedi $|\lambda^k - 1| \leq 1$ $\forall k \in \mathbb{Z}$ ako i samo ako je $\lambda = 1$. Dakle,

$$\chi(x) = 1 \qquad \forall \chi \in V, \quad \forall x \in G.$$

Drugim riječima, $V = \{\varepsilon\}$ i time je dokazano da grupa $\hat{G}$ diskretna.

Pretpostavimo sada da je grupa $\hat{G}$ diskretna i neka je μ Haarova mjera na G takva da je

$$\hat{\mu}(f) = \sum_{\chi \in Supp\, f} f(\chi) = \sum_{\chi \in \hat{G}} f(\chi), \qquad f \in C_0(\hat{G}).$$

Neka je $f \in C_0(\hat{G})$ zadana sa $f(\varepsilon) = 1$ i $f(\chi) = 0$ za $\chi \neq \varepsilon$. Za svaki $x \in G$ je tada

$$\left(\mathcal{F}_{\hat{G}} f\right)(x) = \int_{\hat{G}} \overline{\chi(x)} f(\chi) \mathrm{d}\hat{\mu}(\chi) = \overline{\varepsilon(x)} = 1.$$

Međutim, $\mathcal{F}_{\hat{G}} f \in C_\infty(G)$ pa slijedi $1_G \in C_\infty(G)$, a to je moguće samo ako je grupa G kompaktna.

Treba još ustanoviti da je Haarova mjeru $\mu = \hat{\hat{\mu}}$ na grupi G normirana, tj. da je $\mu(1_G) = 1$. Doista, vidjeli smo da je $1_G = \mathcal{F}_{\hat{G}} f$ za gore definiranu funkciju f. Stoga imamo

$$\mu\left(1_G\right) = \mu\left(\mathcal{F}_{\hat{G}} f\right) = \mu\left(|\mathcal{F}_{\hat{G}} f|^2\right) = \|\mathcal{F}_{\hat{G}} f\|^2_{L_2(G,\mu)} = \|f\|^2_{L_2(\hat{G},\hat{\mu})} = \hat{\mu}\left(|f|^2\right) = \sum_{\chi \in \hat{G}} |f(\chi)|^2 = 1.$$

Korolar 4.4.12. *Neka je G Abelova lokalno kompaktna grupa i H njena zatvorena podgrupa. Grupa H je kompaktna ako i samo ako je $H^\perp$ otvorena podgrupa od $\hat{G}$.*

Dokaz: Doista, otvorenost zatvorene podgrupe je nužna i dovoljna da bi kvocijentna grupa bila diskretna. Dakle, zbog teorema 4.4.3. i prethodne propozicije imamo sljedeći slijed ekvivalencija:

$$H^\perp \text{ otvorena} \iff \hat{G}/H^\perp \text{ diskretna} \iff \hat{H} \text{ diskretna} \iff H \text{ kompaktna.}$$

Na koncu ove točke dokazat ćemo da je u slučaju nediskretnog lokalno kompaktnog tijela njegova aditivna grupa samodualna.

Teorem 4.4.4. *Neka je K lokalno kompaktno nediskretno tijelo. Neka je $G = (K, +)$ njegova aditivna grupa i neka je $\chi \in \hat{G}$ netrivijalan karakter, $\chi \not\equiv 1$. Za $y \in G$ definiramo $\chi_y : G \to T$ sa $\chi_y(x) = \chi(xy)$, $x \in G$. Tada je $y \mapsto \chi_y$ izomorfizam topoloških grupa sa G na $\hat{G}$.*

Dokaz ćemo provesti putem niza pomoćnih tvrdnji.

(1) $\chi_y \in \hat{G}\ \ \forall y \in G$.

Doista, kako je $\chi : G \to T$ neprekidno i kako je $x \mapsto xy$ neprekidno sa G u G, to je kompozicija tih dvaju preslikavanja $\chi_y : G \to T$ neprekidna. Nadalje, za $x_1, x_2 \in G$ je

$$\chi_y(x_1 + x_1) = \chi((x_1 + x_2)y) = \chi(x_1 y + x_2 y) = \chi(x_1 y)\chi(x_2 y) = \chi_y(x_1)\chi_y(x_2).$$

U daljnjem preslikavanje $y \mapsto \chi_y$ sa G u $\hat{G}$ označavamo sa ϑ.

(2) *$\vartheta : G \to \hat{G}$ je homomorfizam grupa.*

Doista, za $x, y, z \in G$ je

$$(\chi_y \cdot \chi_z)(x) = \chi_y(x)\chi_z(x) = \chi(xy)\chi(xz) = \chi(xy + xz) = \chi(x(y + z)) = \chi_{y+z}(x),$$

dakle,

$$\vartheta(y + z) = \chi_{y+z} = \chi_y \cdot \chi_z = \vartheta(y)\vartheta(z).$$

Neka je u daljnjem $|\cdot|$ apsolutna vrijednost na tijelu K koja definira topologiju od K. Tada vrijedi

$$|x| \geq 0 \quad \forall x \in K,$$

$$x \neq 0 \implies |x| > 0,$$

$$|xy| = |x| \cdot |y| \quad \forall x, y \in K,$$

$$|x + y| \leq |x| + |y| \quad \forall x, y \in K.$$

Baza okolina nule u K (odnosno, baza okolina jedinice u G) tada je sastavljena od skupova

$$V_M = \{x \in G;\ |x| \leq M\}, \qquad M > 0,$$

i sve su te okolina kompaktna. Za $\varepsilon > 0$, $\varepsilon \leq 1$, i za $M > 0$ stavimo

$$U(\varepsilon, M) = \{\varphi \in \hat{G};\ |\varphi(x) - 1| \leq \varepsilon \quad \forall x \in V_M\}.$$

Tada skupovi $U(\varepsilon, M)$, $0 < \varepsilon \leq 1$, $M > 0$, tvore bazu okolina jedinice u $\hat{G}$.

(3) *Homomorfizam* $\vartheta : G \to \hat{G}$ *je neprekidan.*

Doista, neka su $\varepsilon > 0$, $\varepsilon \leq 1$, i $M > 0$. Neka je $\delta > 0$ takav da vrijedi

$$z \in V_\delta \qquad \implies \qquad |\chi(z) - 1| \leq \varepsilon;$$

takav δ postoji jer je χ neprekidan. Stavimo $\eta = \dfrac{\delta}{M}$ i neka je $y \in V_\eta$. Za $x \in V_M$ imamo

$$|xy| = |x| \cdot |y| \leq M \cdot \frac{\delta}{M} = \delta \qquad \implies \qquad |\chi(xy) - 1| \leq \varepsilon.$$

Dakle,

$$|\chi_y(x) - 1| \leq \varepsilon \quad \forall x \in V_M, \quad \forall y \in V_\eta.$$

Prema tome, $\chi_y \in U(\varepsilon, M) \quad \forall y \in V_\eta$. Time je dokazano da za svaki $\varepsilon > 0$, $\varepsilon \leq 1$, i svaki $M > 0$ postoji $\eta > 0$ takav da je $\vartheta(V_\eta \subseteq U(\varepsilon, M)$. Dakle, $\vartheta : G \to \hat{G}$ je neprekidan u jedinici grupe G, a kako je ϑ homomorfizam grupa, to je ϑ svuda neprekidan.

(4) ϑ *je injekcija.*

Doista, pretpostavimo da je $y \in \operatorname{Ker}\vartheta$, tj. $\vartheta(y) = e_{\hat{G}}$. Dakle, $\chi_y(x) = 1 \quad \forall x \in G$, odnosno, $\chi(xy) = 1 \quad \forall x \in G$. Pretpostavimo da je $y \neq 0 (= e_G)$. Neka je $x_0 \in G$ takav da je $\chi(x_0) \neq 1$. Za $x = x_0 y^{-1}$ tada imamo $\chi(xy) = \chi(x_0) \neq 1$, što je nemoguće. Ova kontradikcija pokazuje da je $\operatorname{Ker}\vartheta = \{e_G\}$, odnosno, ϑ je injekcija.

(5) $\vartheta(G)$ *je gusta podgrupa od* $\hat{G}$.

Neka je $x \in \vartheta(G)^\perp$, tj. $\chi_y(x) = 1 \quad \forall y \in G$. To znači da je $\chi(xy) = 1 \quad \forall y \in G$. Kao u dokazu tvrdnje **(4)** odatle slijedi $x = 0 = e_G$. Dakle, $\vartheta(G)^\perp = \{e_G\}$, pa iz korolara 4.4.5. slijedi

$$Cl(\vartheta(G)) = \left(\vartheta(G)^\perp\right)^\perp = \{e_G\}^\perp = \hat{G}.$$

(6) $\vartheta : G \to \vartheta(G)$ *je homeomorfizam.*

Uz prije uvedene oznake treba dokazati da za svaki $\varepsilon > 0$, $\varepsilon \leq 1$, i svaki $M > 0$ postoji $\delta > 0$ takav da je $\vartheta^{-1}(U(\varepsilon, M)) \subseteq V_\delta$. Neka su, dakle, zadani $0 < \varepsilon \leq 1$ i $M > 0$. Podgrupa

$\{\chi(x);\ x \in G\}$ grupe T različita je od $\{1\}$, pa postoji $x_0 \in G$ takav da je $|\chi(x_0) - 1| > \varepsilon$. Stavimo $\delta = M^{-1}|x_0| > 0$. Neka je $y \in \vartheta^{-1}(U(\varepsilon, M))$. Ako je $y = 0$, očito je $y \in V_\delta$. Pretpostavimo da je $y \neq 0$. Tada je

$$|\chi_y(x) - 1| \leq \varepsilon \qquad \forall x \in V_M.$$

Dakle, imamo redom

$$|\chi(x_0) - 1| > \varepsilon \quad \Longrightarrow \quad |\chi_y(x_0 y^{-1}) - 1| > \varepsilon \quad \Longrightarrow \quad x_0 y^{-1} \notin V_M \quad \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \quad |x_0 y^{-1}| > M \quad \Longrightarrow \quad |y| < M^{-1}|x_0| = \delta \quad \Longrightarrow \quad y \in V_\delta.$$

Dakle je $\vartheta^{-1}(U(\varepsilon, M)) \subseteq V_\delta$.

Sada iz **(5)** i **(6)** slijedi $\vartheta(G) = \hat{G}$, pa je zbog **(2)**, **(3)**, **(4)** i **(6)** ϑ izomorfizam topoloških grupa.

4.5 Mjere na kvocijentnim prostorima

Materijal prvog dijela ove točke nije vezan isključivo za Abelove, nego za proizvoljne lokalno kompaktne grupe i trebat će nam i u teoriji unitarnih reprezentacija općih lokalno kompaktnih grupa. Neka je G lokalno kompaktna grupa i H njena zatvorena podgrupa. Neka je ν desna Haarova mjera na grupi H. Za $f \in C_0(G)$ definiramo neprekidnu funkciju $F : G \to \mathbb{C}$ sa

$$F(x) = \int_H f(yx) \mathrm{d}\nu(y), \qquad x \in G.$$

Za $x \in G$ i $z \in H$ iz desne invarijantnosti mjere ν slijedi da je $F(zx) = F(x)$. Prema tome postoji jedinstvena funkcija $f_\nu : H\backslash G \to \mathbb{C}$ takva da je $f_\nu(p(x)) = F(x),\ x \in G$. Pri tome smo sa $p : G \to H\backslash G$ označili kanonsku surjekciju, $p(x) = Hx,\ x \in G$. Dakle,

$$f_\nu(p(x)) = \int_H f(yx) \mathrm{d}\nu(y), \qquad x \in G, \quad f \in C_0(G).$$

Funkcija $f_\nu \circ p = F$ je neprekidna, pa je prema tvrdnji (d) propozicije 4.4.2. i funkcija f_ν neprekidna. Nadalje, ako je $f_\nu(p(x)) \neq 0$, onda je nužno $f(yx) \neq 0$ za neku točku $y \in H$, dakle je $x \in H \cdot (Supp\, f)$, pa slijedi $p(x) \in p(Supp\, f)$. Time smo dokazali da je $Supp\, f_\nu \subseteq p(Supp\, f)$. Posebno je $f_\nu \in C_0(H\backslash G)$. Očito je $f \mapsto f_\nu$ linearan operator sa $C_0(G)$ u $C_0(H\backslash G)$, koji preslikava $C_0^+(G)$ u $C_0(H\backslash G)$.

Neka je sada $\varphi \in C_0^+(H\backslash G)$ i stavimo $K = Supp\, \varphi$. Prema tvrdnji (c) propozicije 4.4.2. postoji kompaktan skup $K_1 \subseteq G$ takav da je $p(K_1) = K$. Neka je $g \in C_0^+(G)$ takva da je $g(x) > 0$ $\forall x \in K_1$. Neka je $x \in HK_1$. Tada je $yx \in K_1$ za neki $y \in H$, dakle je $g(yx) > 0$ za neki $y \in H$. No tada je $g_\nu(p(x)) > 0$. Dakle, vrijedi.

$$x \in HK_1 \qquad \Longrightarrow \qquad g_\nu(p(x)) > 0.$$

S druge strane,

$$x \in G \setminus HK_1 \quad \Longrightarrow \quad p(x) \in (H\backslash G) \setminus p(K_1) = (H\backslash G) \setminus K \quad \Longrightarrow \quad \varphi(p(x)) = 0.$$

Definirajmo $\psi : G \to \mathbb{C}$ sa

$$\psi(x) = \begin{cases} \dfrac{\varphi(p(x))}{g_\nu(p(x))} & \text{ako je } g_\nu(p(x)) > 0 \\ \\ 0 & \text{ako je } g_\nu(p(x)) = 0. \end{cases}$$

Stavimo

$$U_1 = G \setminus HK_1 \qquad \text{i} \qquad U_2 = \{x \in G;\ g_\nu(p(x)) > 0\}.$$

U_1 i U_2 su otvoreni podskupovi od G i prema dokazanom je $G = U_1 \cup U_2$. Budući da je $\varphi(p(x)) = 0$ za svaki $x \in U_1$, vrijedi $\psi|U_1 = 0$. Posebno, restrikcija $\psi|U_1$ je neprekidna. Očito je i restrikcija $\psi|U_2$ neprekidna. Prema tome, $\psi : G \to \mathbb{C}$ je neprekidna funkcija.

Uočimo sada da vrijedi

$$\varphi(p(x)) = \psi(x) g_\nu(p(x)) \qquad \forall x \in G.$$

Doista, ako je $x \in U_1$, onda je $\varphi(p(x)) = 0 = \psi(x) g_\nu(p(x))$, a ako je $x \in U_2$, onda jednakost slijedi neposredno iz definicije funkcije ψ. Nadalje, vrijedi

$$\psi(yx) = \psi(x) \qquad \forall y \in H, \quad \forall x \in G.$$

Definiramo $f = \psi g \in C_0^+(G)$. Imamo tada

$$f_\nu(p(x)) = \int_H g(yx)\psi(yx)\mathrm{d}\nu(y) = \psi(x) g_\nu(p(x)) = \varphi(p(x)).$$

Dakle, vrijedi $\varphi = f_\nu$. Budući da je prostor $C_0(H\backslash G)$ razapet s konusom $C_0^+(H\backslash G)$, dokazali smo:

Propozicija 4.5.1. *Uz uvedene oznake $f \mapsto f_\nu$ je linearna surjekcija sa $C_0(G)$ na $C_0(H\backslash mG)$. Nadalje, vrijedi*

$$C_0^+(H\backslash G) = \{f_\nu;\ f \in C_0^+(G)\}.$$

Napokon, za svaku $f \in C_0(G)$ je $\mathrm{Supp}\, f_\nu \subseteq p(\mathrm{Supp}\, f)$.

Neka je sada $m \in \mathfrak{M}(H\backslash G)$. Definiramo preslikavanje $\nu m : C_0(G) \to \mathbb{C}$ sa

$$(\nu m)(f) = m(f_\nu), \qquad f \in C_0(G).$$

Tada je νm linearan funkcional na prostoru $C_0(G)$. Ako je $m \in \mathfrak{M}^+(H\backslash G)$, tada je $(\nu m)(f) = m(f_\nu) \geq 0$ za svaki $f \in C_0^+(G)$. Prema tome je $\nu m \in \mathfrak{M}^+(G)$. Budući da je preslikavanje $m \mapsto \nu m$ očito linearno i budući da konus $\mathfrak{M}^+(H\backslash G)$ razapinje prostor $\mathfrak{M}(H\backslash G)$, zaključujemo da je $\nu m \in \mathfrak{M}(G)\ \ \forall m \in \mathfrak{M}(H\backslash G)$. Dakle, $m \mapsto \nu m$ je linearan operator sa $\mathfrak{M}(H\backslash G)$ u $\mathfrak{M}(G)$. Kako je $f \mapsto f_\nu$ surjekcija sa $C_0(G)$ na $C_0(H\backslash G)$, to je $m \mapsto \nu m$ injekcija sa $\mathfrak{M}(H\backslash G)$ u $\mathfrak{M}(G)$.

Sa Δ_H označavamo modularnu funkciju grupe H. Za $y \in H$ i $f \in C_0(G)$ izvodimo

$$(\lambda_y f)_\nu(p(x)) = \int_H f(y^{-1}zx)\mathrm{d}\nu(z) = \Delta_H(y^{-1}) \int_H f(zx)\mathrm{d}\nu(z) = \Delta_H(y^{-1}) f_\nu(p(x)).$$

Dakle,

$$(\lambda_y f)_\nu = \Delta_H(y^{-1}) f_\nu, \qquad y \in H, \quad f \in C_0(G).$$

Dakle, imamo

$$[\lambda_y(\nu m)](f) = (\nu m)(\lambda_{y^{-1}} f) = \Delta_H(y)(\nu m)(f),$$

tj.

$$\lambda_y(\nu m) = \Delta_H(y)(\nu m), \qquad y \in H, \quad m \in \mathfrak{M}(H\backslash G).$$

Pretpostavimo sada da $\omega \in \mathfrak{M}(G)$ ima svojstvo

$$\lambda_y \omega = \Delta_H(y)\omega \qquad \forall y \in H.$$

Neka je $f \in C_0(G)$ u jezgri preslikavanja $f \mapsto f_\nu$, tj. $f_\nu = 0$. Izaberimo $\psi \in C_0^+(H\backslash G)$ takvu da je $\psi|p(Supp\, f) = 1$. Neka je $\varphi \in C_0^+(G)$ takva da je $\varphi_\nu = \psi$. Tada vrijedi

$$x \in G, \quad f(x) \neq 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \varphi_\nu(p(x)) = 1.$$

Stoga imamo redom

$$\omega(f) = \int_G f(x)\varphi_\nu(p(x))\mathrm{d}\omega(x) = \int_G f(x)\left[\int_H \varphi(yx)\mathrm{d}\nu(y)\right]\mathrm{d}\omega(x) =$$

$$= \int_H \left[\int_G f(x)\varphi(yx)\mathrm{d}\omega(x)\right]\mathrm{d}\nu(y) = \int_H \left[\int_G f(x)\varphi(yx)\frac{1}{\Delta_H(y^{-1})}\mathrm{d}(\lambda_{y^{-1}}\omega)(x)\right]\mathrm{d}\nu(y) =$$

$$= \int_H \left[\int_G f(y^{-1}x)\varphi(x)\Delta_H(y)\mathrm{d}\omega(x)\right]\mathrm{d}\nu(y) = \int_G \varphi(x)\left[\int_H f(y^{-1}x)\Delta_H(y)\mathrm{d}\nu(y)\right]\mathrm{d}\omega(x) =$$

$$= \int_G \varphi(x)\left[\int_H f(yx)\mathrm{d}\nu(y)\right]\mathrm{d}\omega(x) = \int_G \varphi(x)f_\nu(p(x))\mathrm{d}\omega(x) = 0.$$

Prema tome, lineran funkcional $\omega : C_0(G) \to \mathbb{C}$ poništava se na jezgri linearnog operatora $f \mapsto f_\nu$. Stoga postoji jedinstven linearan funkcional $m : C_0(H\backslash G) \to \mathbb{C}$ takav da je

$$\omega(f) = m(f_\nu) \qquad \forall f \in C_0(G).$$

Pretpostavimo sada da je $\omega \in \mathfrak{M}^+(G)$. Za $\varphi \in C_0^+(H\backslash G)$ izaberemo $f \in C_0^+(G)$ tako da bude $f_\nu = \varphi$. Tada je $m(\varphi) = \omega(f) \geq 0$. dakle, tada je $m \in \mathfrak{M}^+(H\backslash G)$. Vrijedi i obratno: ako je $m \in \mathfrak{M}^+(H\backslash G)$, onda je $\omega(f) = m(f_\nu) \geq 0 \ \ \forall f \in C_0^+(G)$, dakle, $\omega \in \mathfrak{M}^+(G)$.

Neka je sada opet $\omega \in \mathfrak{M}(G)$ takva da je $\lambda_y\omega = \Delta_H(y^{-1})\omega \ \ \forall y \in H$. Stavimo tada

$$\omega_1 = (\mathrm{Re}\,\omega)^+, \qquad \omega_2 = (\mathrm{Re}\,\omega)^-, \qquad \omega_3 = (\mathrm{Im}\,\omega)^+, \qquad \omega_4 = (\mathrm{Im}\,\omega)^-.$$

Tada je očito $\lambda_y\omega_j = \Delta_H(y)\omega_j \ \ \forall y \in H$ i za $j = 1, 2, 3, 4$. Neka su m, m_1, m_2, m_3, m_4 linearni funkcionali na prostoru $C_0(H\backslash G)$ takvi da je

$$m(f_\nu) = \omega(f), \qquad m_j(f_\nu) = \omega_j(f), \qquad f \in C_0(G), \quad j = 1, 2, 3, 4.$$

Prema gornjem tada su $m_1, m_2, m_3, m_4 \in \mathfrak{M}^+(H\backslash G)$. Dakle, $m = m_1 - m_2 + im_3 - im_4 \in \mathfrak{M}(H\backslash G)$.

Napokon, očito je $\nu m = \omega$. Time smo dokazali:

Propozicija 4.5.2. *$m \mapsto \nu m$ je izomorfizam vektorskog prostora $\mathfrak{M}(H\backslash G)$ na potprostor*

$$\{\omega \in \mathfrak{M}(G);\ \lambda_y\omega = \Delta_H(y)\omega \ \ \forall y \in H\}$$

prostora $\mathfrak{M}(G)$. Taj izomorfizam preslikava konus $\mathfrak{M}^+(H\backslash G)$ na skup

$$\{\omega \in \mathfrak{M}^+(G);\ \lambda_y\omega = \Delta_H(y)\omega \ \ \forall y \in H\}$$

Ako je mjera $\omega \in \mathfrak{M}(G)$ takva da je $\lambda_y\omega = \Delta_H(y)\omega \ \ \forall y \in H$, za jedinstvenu mjeru $m \in \mathfrak{M}(H\backslash G)$ takvu da je $\nu m = \omega$ pisat ćemo $m = \dfrac{\omega}{\nu}$.

Propozicija 4.5.3. *Neka je H normalna zatvorena podgrupa lokalno kompaktne grupe G, neka je ν desna Haarova mjera na H i neka je m desna Haarova mjera na $H\backslash G = G/H$. Tada je νm desna Haarova mjera na G.*

Dokaz: Za $f \in C_0(G)$ i $x, y \in G$ imamo

$$(\rho_x f)_\nu(p(y)) = \int_H (\rho_x f)(zy)\mathrm{d}\nu(z) = \int_H f(zyx)\mathrm{d}\nu(z) = f_\nu(p(yx)) = f_\nu(p(y)p(x)) = \rho_{p(x)} f_\nu(p(y)).$$

Dakle, $(\rho_x f)_\nu = \rho_{p(x)} f_\nu$, pa slijedi

$$(\rho_x(\nu m))(f) = (\nu m)(\rho_{x^{-1}} f) = m\left((\rho_{x^{-1}} f)_\nu\right) = m(\rho_{p(x)^{-1}} f_\nu) = (\rho_{p(x)} m)(f_\nu) = m(f_\nu) = (\nu m)(f).$$

Dakle je $\rho_x(\nu m) = \nu m \ \ \forall x \in G$. Time je propozicija dokazana.

Drugim riječima, u opisanoj situaciji je sa

$$\int_G f(x)\mathrm{d}\mu(x) = \int_{H\backslash G} \left[\int_H f(yx)\mathrm{d}\nu(y)\right] \mathrm{d}m(p(x)), \qquad f \in C_0(G),$$

zadana desna Haarova mjera μ na G.

Vratimo sa sada na Abelove lokalno kompaktne grupe. Tada je svaka zatvorena podgrupa normalna. Nadalje, Abelove grupe su unimodularne.

Teorem 4.5.1. *Neka je G Abelova lokalno kompaktna grupa, H njena zatvorena podgrupa, μ Haarova mjera na G i ν Haarova mjera na H. Tada je $m = \dfrac{\mu}{\nu}$ Haarova mjera na G/H. Nadalje, za dualne mjere $\hat{\mu}$, $\hat{\nu}$ i $\hat{m}$ uz identifikacije $\hat{H} = \hat{G}/H^\perp$ i $(G/H)\hat{} = H^\perp$ vrijedi $\hat{\nu} = \dfrac{\hat{\mu}}{\hat{m}}$.*

Dokaz: Neka je $f \in C_0(G)$, $f \neq 0$. Definiramo $\varphi : G \times \hat{G} \to \mathbb{C}$ sa

$$\varphi(x, \gamma) = \int_H f(yx)\gamma(y)\mathrm{d}\nu(y), \qquad (x, \gamma) \in G \times \hat{G}.$$

Lako se provjeri da je funkcija φ neprekidna. Nadalje, za $x \in G$ definiramo $F_x : H \to \mathbb{C}$ sa

$$F_x(y) = f(yx), \qquad y \in H.$$

Tada je očito $F_x \in C_0(H)$. Neka je $\hat{i} : \hat{G} \to \hat{G}/H^\perp = \hat{H}$ kanonska surjekcija. Za $\gamma \in \hat{G}$ imamo

$$\left(\overline{\mathcal{F}}_H F_x\right)(\hat{i}(\gamma)) = \int_H [\hat{i}(\gamma)](y) F_x(y)\mathrm{d}\nu(y) = \int_H \gamma(y) f(yx)\mathrm{d}\nu(y) = \varphi(x, \gamma).$$

Posebno, za fiksno $x \in G$ preslikavanje $\gamma \mapsto \varphi(x, \gamma)$ je konstantno na svakoj $H^\perp-$klasi $\hat{i}(\gamma) = \gamma H^\perp$. Nadalje, iz Plancherelovog teorema slijedi

$$\int_{\hat{G}/H^\perp} |\varphi(x, \gamma)|^2 \mathrm{d}\hat{\nu}(\hat{i}(\gamma)) = \int_H |f(yx)|^2 \mathrm{d}\nu(y), \qquad x \in G. \qquad (*)$$

Za $x \in G$, $y \in H$ i $\gamma \in \hat{G}$ imamo

$$\gamma(yx)\varphi(yx, \gamma) = \gamma(y)\gamma(x) \int_H f(zyx)\gamma(z)\mathrm{d}\nu(z) =$$

$$= \gamma(x) \int_H f(zyx)\gamma(zy)\mathrm{d}\nu(z) = \gamma(x) \int_H f(zx)\gamma(z)\mathrm{d}\nu(z) = \gamma(x)\varphi(x, \gamma).$$

Dakle, za svako $\gamma \in \hat{G}$ možemo definirati funkciju $\Phi_\gamma \in C_0(G/H)$ sa

$$\Phi_\gamma(p(x)) = \gamma(x)\varphi(x,\gamma), \qquad x \in G.$$

Pri tome je $p : G \to G/H$ kanonski epimorfizam koji daje identifikaciju $\hat{p} : (G/H)\hat{} \to H^\perp$. $\overline{\mathcal{F}}_{G/H}\Phi_\gamma$ je funkcija na $(G/H)\hat{} = H^\perp$ dana za bilo koji $\eta \in H^\perp$ sa

$$\left(\overline{\mathcal{F}}_{G/H}\Phi_\gamma\right)(\eta) = \int_{G/H} \eta(p(x))\gamma(x)\varphi(x,\gamma)\mathrm{d}m(p(x)) =$$

$$= \int_{G/H} (\eta\gamma)(x)\left[\int_H f(yx)\gamma(y)\mathrm{d}\nu(y)\right]\mathrm{d}m(p(x)) = \int_{G/H}\left[\int_H (\eta\gamma)(yx)f(yx)\mathrm{d}\nu(y)\right]\mathrm{d}m(p(x)) =$$

$$= \int_G (\eta\gamma)(x)f(x)\mathrm{d}\mu(x) = \left(\overline{\mathcal{F}}_G f\right)(\eta\gamma).$$

Po Plancherelovom teoremu dobivamo

$$\int_{G/H} |\varphi(x,\gamma)|^2 \mathrm{d}m(p(x)) = \int_{H^\perp} \left|\left(\overline{\mathcal{F}}_G f\right)(\eta\gamma)\right|^2 \mathrm{d}\hat{m}(\eta), \qquad \gamma \in \hat{G}. \qquad (**)$$

Sada imamo redom

$$\begin{aligned}
\textstyle\int_{\hat{G}} \left|\left(\overline{\mathcal{F}}_G f\right)(\gamma)\right|^2 \mathrm{d}\hat{\mu}(\gamma) &= \textstyle\int_G |f(x)|^2 \mathrm{d}\mu(x) = && \text{Plancherel}\\
&= \textstyle\int_{G/H}\left[\int_H |f(yx)|^2\mathrm{d}\nu(y)\right]\mathrm{d}m(p(x)) = && \text{jer je } \mu = \nu m\\
&= \textstyle\int_{G/H}\left[\int_{\hat{G}/H^\perp} |\varphi(x,\gamma)|^2 \mathrm{d}\hat{\nu}(\hat{\imath}(\gamma))\right]\mathrm{d}m(p(x)) = && \text{zbog } (*)\\
&= \textstyle\int_{\hat{G}/H^\perp}\left[\int_G /H |\varphi(x,\gamma)|^2 \mathrm{d}m(p(x))\right]\mathrm{d}\hat{\nu}(\hat{\imath}(\gamma)) = && \text{Fubini}\\
&= \textstyle\int_{\hat{G}/H^\perp}\left[\int_{H^\perp}\left|\left(\overline{\mathcal{F}}_G f\right)(\eta\gamma)\right|^2 \mathrm{d}\hat{m}(\eta)\right]\mathrm{d}\hat{\nu}(\hat{\imath}(\gamma)) = && \text{zbog } (**)\\
&= \textstyle\int_{\hat{G}} \left|\left(\overline{\mathcal{F}}_G f\right)(\gamma)\right|^2 \mathrm{d}(\hat{m}\hat{\nu})(\gamma) && \text{po definiciji } \hat{m}\hat{\nu}.
\end{aligned}$$

Budući da su $\hat{\mu}$ i $\hat{m}\hat{\nu}$ Haarove mjere na $\hat{G}$, zbog $f \neq 0$ slijedi $\hat{\mu} = \hat{m}\hat{\nu}$, tj. $\hat{\nu} = \dfrac{\hat{\mu}}{\hat{m}}$.

Propozicija 4.5.4. *(a) Neka je $G = (\mathbb{R}, +)$ i μ Lebesgueova mjera na $\mathbb{R}$ (tj. Haarova mjera na G takva da je $\mu([0,1]) = 1$). Za $a \in \mathbb{R}$ definiramo $\chi_a : G \to T$ sa*

$$\chi_a(b) = e^{2\pi i a b}, \qquad b \in \mathbb{R}.$$

Tada je $a \mapsto \chi_a$ izomorfizam topoloških grupa sa G na $\hat{G}$, pri kojem μ prelazi u $\hat{\mu}$.

(b) Za $n \in \mathbb{Z}$ definiramo $\varphi_n : T \to T$ sa $\varphi_n(\alpha) = \alpha^n$. Tada je $n \mapsto \varphi_n$ izomorfizam diskretne aditivne grupe $\mathbb{Z}$ na dualnu grupu $\hat{T}$ multiplikativne kompaktne grupe T.

(c) Za $\alpha \in T$ definiramo $\psi_\alpha : \mathbb{Z} \to T$ sa $\psi_\alpha(n) = \alpha^n$. Tada je $\alpha \mapsto \psi_\alpha$ izomorfizam kompaktne multiplikativne grupe T na dualnu grupu $\hat{\mathbb{Z}}$ diskretne aditivne grupe $\mathbb{Z}$.

Dokaz: (a) Prema teoremu 4.4.4. $\vartheta : a \mapsto \chi_a$ je izomorfizam topoloških grupa sa G na $\hat{G}$. Identificiramo G sa $\hat{G}$ pomoću tog izomorfizma ϑ. Imamo identifikaciju $T = G/\mathbb{Z}$, pa je po teoremu 4.4.3.

$$\hat{T} = \mathbb{Z}^{\perp} = \{a \in G;\ \mathrm{e}^{2\pi i a n} = 1 \quad \forall n \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{Z}$$

i

$$\hat{\mathbb{Z}} = \hat{G}/\mathbb{Z}^{\perp} = G/\mathbb{Z} = T.$$

Neka je μ Lebesgueova mjera na $G\,(=\mathbb{R})$. Nadalje, neka je ν Haarova mjera na aditivnoj grupi $\mathbb{Z}$ definirana sa $\nu(f) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n)$. Napokon, neka je σ normirana Haarvova mjera na kompaktnoj grupi $T = G/\mathbb{Z}$. Tada je očito $\sigma = \dfrac{\mu}{\nu}$. Po propoziciji 4.4.4. tada je $\hat{\sigma} = \nu$ i $\hat{\nu} = \sigma$. Nadalje, po teoremu 4.5.1. je $\hat{\nu} = \dfrac{\hat{\mu}}{\hat{\sigma}}$, pa je

$$\frac{\mu}{\nu} = \sigma = \hat{\nu} = \frac{\hat{\mu}}{\hat{\sigma}} = \frac{\hat{\mu}}{\nu}.$$

Dakle, $\hat{\mu} = \mu$.

Poglavlje 5

Reprezentacije kompaktnih grupa

5.1 Egzistencija ireducibilnih unitarnih reprezentacija

Teorem 5.1.1. (**Geljfand−Raikov**) *Neka je G lokalno kompaktna grupa, $x \in G$, $x \neq e$. Postoji ireducibilna unitarna reprezentacija π od G na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$ takva da je $\pi(x) \neq I = id_{\mathcal{H}}$.*

Taj fundamentalni teorem ne dokazujemo detaljno nego samo skiciramo korake u dokazu.

(1) Neka je $\mathcal{A}$ C^*-algebra. Linearni funkcional $f : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ zove se pozitivan ako je $f(x^*x) \geq 0$ $\forall x \in \mathcal{A}$. Svaki je takav funkcional neprekidan. Označimo sa $\mathcal{P}$ skup svih pozitivnih funkcionala na $\mathcal{A}$ norme ≤ 1. Tada je očito $\mathcal{P}$ slabo zatvoren podskup jedinične kugle u dualnom prostoru $\mathcal{A}'$, dakle sa slabom topologijom je $\mathcal{P}$ kompaktan Hausdorffov topološki prostor. Nadalje, $\mathcal{P}$ je konveksan podskup od $\mathcal{A}'$.

(2) Neka je $\mathcal{E}$ skup svih ekstremnih točaka od $\mathcal{E}$ različitih od 0. Po Krein−Millmanovom teoremu $\mathcal{P}$ je najmanji slabo zatvoren konveksan podskup od $\mathcal{A}'$ koji sadrži $\mathcal{E} \cup \{0\}$. Drugim riječima, $\mathcal{P}$ je slabi zatvarač skupa

$$\left\{ \sum_{i=1}^{n} t_i f_i;\ n \in \mathbb{N},\ f_1, \ldots, f_n \in \mathcal{E},\ t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{R}_+,\ \sum_{i=1}^{n} t_i \leq 1 \right\}.$$

(3) Neka je $f \in \mathcal{P}$. Za $x, y \in \mathcal{A}$ stavimo $(x|y) = f(y^*x)$. Tada je $(\,\cdot\,|\,\cdot\,)$ pozitivno semidefinitna hermitska forma na $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$ i

$$\mathcal{N}_f = \{x \in \mathcal{A};\ (x|x) = 0\} = \{x \in \mathcal{A};\ (x|y) = 0 \ \ \forall y \in \mathcal{A}\}$$

je lijevi ideal u $\mathcal{A}$. Stavimo $\mathcal{V}_f = \mathcal{A}/\mathcal{N}_f$. Tada je $\mathcal{V}_f$ unitaran prostor sa skalarnim produktom

$$(x + \mathcal{N}_f | y + \mathcal{N}_f) = (x|y).$$

Neka je $\mathcal{H}_f$ Hilbertov prostor dobiven popunjenjem unitarnog prostora $\mathcal{V}_f$.

Za $x \in \mathcal{A}$ definiramo $\pi_f(x) : \mathcal{V}_f \to \mathcal{V}_f$ sa $\pi_f(x)(y + \mathcal{N}_f) = xy + \mathcal{N}_f$. Tada je

$$(\pi_f(x)\xi|\eta) = (\xi|\pi_f(x^*)\eta), \qquad \xi, \eta \in \mathcal{V}_f, \quad x \in \mathcal{A}.$$

Nadalje, π_f je homomorfizam algebre $\mathcal{A}$ u algebru $\mathcal{L}(\mathcal{V}_f)$ svih linearnih operatora na vektorskom prostoru $\mathcal{V}_f$. Nadalje, pokazuje se da je za svaki $x \in \mathcal{A}$ operator $\pi_f(x)$ ograničen u odnosu na skalarni produkt na $\mathcal{V}_f$ pa se jedinstveno produljuje do ograničenog operatora na popunjenju $\mathcal{H}_f$;

to produljenje također označavamo sa $\pi_f(x)$. Tada je π_f reprezentacija C^*-algebre $\mathcal{A}$ na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}_f$. Ova se konstrukcija reprezentacije polazeći od pozitivnog funkcionala zove Gelfand$-$Naimark$-$Segalova (ili GNS) konstrukcija.

(4) Pokazuje se da je za $\|f\| = 1$ reprezentacija π_f ireducibilna ako i samo ako je $f \in \mathcal{E}$.

(5) Neka je sada $\mathcal{A} = C^*(G)$, $x \in G$, $x \neq e$. Tada postoji $\varphi \in C_0(G) \subseteq C^*(G)$ takva da je $\lambda_x\varphi \neq \varphi$. Lijeva regularna reprezentacija π_ℓ je vjerna (tj. injektivna) na $C_0(G)$ pa postoji $\xi \in L_2(G)$, $\|\xi\|_2 = 1$, takav da je $(\pi_\ell(\lambda_x\varphi - \varphi)\xi|\xi) \neq 0$. Definiramo $f : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ sa $f(\psi) = (\pi_\ell(\psi)\xi|\xi)$. Tada je $f \in \mathcal{P}$ i $f(\lambda_x\varphi - \varphi) \neq 0$. Prema tome, postoji $g \in \mathcal{E}$ takav da je $g(\lambda_x\varphi - \varphi) \neq 0$. Tada je π_g ireducibilna reprezentacija od G.

Postoje nizovi $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ i $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ u $C_0(G)$ takvi da je $\psi = \lambda_x\varphi - \varphi = \lim_{n\to\infty} \sigma_n^* * \psi * \tau_n$ u $L_1(G)$, dakle, pogotovo u $C^*(G)$. Sada imamo

$$0 \neq g(\psi) = \lim_{n\to\infty} g(\sigma_n^* * \psi * \tau_n) = \lim_{n\to\infty} (\pi_g(\psi)(\tau_n + \mathcal{N}_g)|(\sigma_n + \mathcal{N}_g)),$$

pa imamo

$$\pi_g(\psi) \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad \pi_g(\lambda_x\varphi) \neq \pi_g(\varphi) \quad \Longrightarrow \quad \pi_g(x)\pi_g(\varphi) \neq \pi_g(\varphi) \quad \Longrightarrow \quad \pi_g(x) \neq I.$$

5.2 Ireducibilne reprezentacije kompaktnih grupa

U ostatku ovog poglavlja, G **je oznaka za kompaktnu grupu i** μ **za normiranu Haarovu mjeru na** G. Dakle, za konstantnu funkciju $1_G(x) = 1 \ \ \forall x \in G$ vrijedi $\mu(1_G) = 1$. $C(G)$ je Banachov prostor svih neprekidnih funkcija $f : G \to \mathbb{C}$ s normom

$$\|f\|_\infty = \max\{|f(x)|;\ x \in G\}.$$

Sa $L_1(G)$ i $L_2(G)$ označavat ćemo Banachov i Hilbertov prostor koji su popunjenja prostora $C(G)$ u odnosu na norme

$$\|f\|_1 = \int_G |f(x)|\mathrm{d}\mu(x) \qquad \text{i} \qquad \|f\|_2 = \sqrt{\int_G |f(x)|^2\mathrm{d}\mu(x)}.$$

$L_1(G)$ (odnosno, $L_2(G)$) identificira se s prostorom klasa ekvivalencije svih $\mu-$izmjerivih funkcija $f : G \to \mathbb{C}$ takvih da je funkcija $x \mapsto |f(x)|$ (odnosno, $x \mapsto |f(x)|^2$) integrabilna. Pri tome je relacije ekvivalencije jednakost $\mu-$skoro svuda, tj. f i g su ekvivalentne ako je skup $\{x \in G;\ f(x) \neq g(x)\}$ $\mu-$zanemariv:

$$\mu(\{x \in G;\ f(x) \neq g(x)\}) = 0.$$

Uz takvu interpretaciju norme na prostorima $L_1(G)$ i $L_2(G)$ zadane su gornjim formulama za bilo koje predstavnike klasa funkcija. Nadalje, ako su f i g predstavnici klasa iz $L_2(G)$ onda je funkcija $x \mapsto f(x)\overline{g(x)}$ integrabilna i sklarani produkt klasa iz $L_2(G)$ zapisuje se pomoću predstavnika kao integral te funkcije:

$$(f|g) = \int_G (f(x)|g(x))\mathrm{d}\mu(x).$$

U označavanju ne ćemo praviti razliku između funkcije i njene klase.

Teorem 5.2.1. (*a*) *Neka su π i π' neekvivalentne ireducibilne unitarne reprezentacije od G na Hilbertovim prostorima $\mathcal{H}$ i $\mathcal{H}'$. Za $\xi,\eta\in\mathcal{H}$ i $\xi',\eta'\in\mathcal{H}'$ vrijedi*

$$\int_G (\pi(x)\xi|\eta)\overline{(\pi'(x)\xi'|\eta')}\,d\mu(x) = 0.$$

(*b*) *Neka je π ireducibilna unitarna reprezentacija od G na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$. Tada je prostor $\mathcal{H}$ konačnodimenzionalan i ako je $n=\dim\mathcal{H}$ za $\xi,\eta,\xi',\eta'\in\mathcal{H}$ vrijedi*

$$\int_G (\pi(x)\xi|\eta)\overline{(\pi'(x)\xi'|\eta')}\,d\mu(x) = \frac{1}{n}(\xi|\xi')(\eta'|\eta).$$

Dokaz: (*a*) Neka su $\eta\in\mathcal{H}$ i $\eta'\in\mathcal{H}'$ proizvoljno odabrani. Definiramo seskvilinearnu formu $A:\mathcal{H}\times\mathcal{H}'\to\mathbb{C}$ formulom

$$A(\xi,\xi') = \int_G (\pi(x)\xi|\eta)\overline{\pi'(x)\xi'|\eta')}\mathrm{d}\mu(x), \qquad \xi\in\mathcal{H}, \quad \xi'\in\mathcal{H}'.$$

Stavimo $M=\|\eta\|\cdot\|\eta'\|$. Tada imamo

$$|A(\xi|\xi')|\le M\|\xi\|\cdot\|\xi'\|, \qquad \forall\xi\in\mathcal{H}, \quad \forall\xi'\in\mathcal{H}'.$$

Prema tome, forma A je ograničena, pa po Rieszovom teoremu postoji $B\in\mathcal{B}(\mathcal{H},\mathcal{H}')$ takav da je

$$A(\xi,\xi') = (B\xi|\xi') \qquad \xi\in\mathcal{H}, \quad \xi'\in\mathcal{H}'.$$

Tada za svaki $y\in G$ i za $\xi\in\mathcal{H}$ i $\xi'\in\mathcal{H}'$ nalazimo

$$(B\pi(y)\xi|\xi') = \int_G (\pi(xy)\xi|\eta)\overline{(\pi'(x)\xi'|\eta')}\mathrm{d}\mu(x) =$$

$$= \int_G (\pi(x)\xi|\eta)\overline{(\pi'(xy^{-1})\xi'|\eta')}\mathrm{d}\mu(x) = (B\xi|\pi'(y^{-1}\xi') = (\pi'(y)B\xi|\xi').$$

Budući da su $\xi\in\mathcal{H}$ i $\xi'\in\mathcal{H}'$ bili proizvoljni, slijedi $B\pi(y)=\pi'(y)B$ $\forall y\in G$. Dakle, $B\in Hom_G(\pi,\pi')$. Jezgra $\mathcal{N}(B)=\{\xi\in\mathcal{H};\ B\xi=0\}$ operatora B, koja je zatvoren potprostor od $\mathcal{H}$, je $\pi-$invarijantan potprostor od $\mathcal{H}$. Doista, za $y\in G$ imamo

$$\xi\in\mathcal{N}(B) \qquad \Longrightarrow \qquad B\pi(y)\xi=\pi'(y)B\xi=0 \qquad \Longrightarrow \qquad \pi(y)\xi\in\mathcal{N}(B).$$

Kako je reprezentacija π ireducibilna, slijedi da je ili $\mathcal{N}(B)=\{0\}$ ili $\mathcal{N}(B)=\mathcal{H}$.

Pretpostavimo da je $\mathcal{N}(B)=\{0\}$, tj. da je B injekcija. Tada je $B^*\in Hom_G(\pi,\pi')$, pa je $B^*B\in Hom_G(\pi,\pi)$. Nadalje, kako je $\|B\xi\|^2=(B^*B\xi|\xi)$ to je $\mathcal{N}(B^*B)=\mathcal{N}(B)=\{0\}$ i, posebno, $B^*B\neq 0$. Operator $B^*B\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$ je ne samo hermitski nego i pozitivan. Stoga postoji jedinstven pozitivan operator $C\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$ takav da je $C^2=B^*B$. Sada za $\xi\in\mathcal{H}$ imamo

$$\|C\xi\|^2=(C\xi|C\xi)=(C^2\xi|\xi)=(B^*B\xi|\xi)=(B\xi|B\xi)=\|B\xi\|^2.$$

Neka je $\mathcal{V}=\mathcal{R}(B)=\{B\xi;\ \xi\in\mathcal{H}\}$ područje vrijednosti operatora B. To je potprostor od $\mathcal{H}'$ koji je $\pi'-$invarijantan. Doista, za $\xi'\in\mathcal{V}$ postoji $\xi\in\mathcal{H}$ takav da je $\xi'=B\xi$. Tada za bilo koji $y\in G$ imamo

$$\pi'(y)\xi'=\pi'(y)B\xi=B\pi(y)\xi\in\mathcal{V}.$$

Prema tome, i zatvarač potprostora $\mathcal{V}$ u Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}'$ je $\pi'-$invarijantan. Kako je $B\neq 0$, to je $\mathcal{V}\neq\{0\}$, pa je zbog ireducibilnosti reprezentacije π' zatvarač od $\mathcal{V}$ jednak $\mathcal{H}'$. Dakle, $\mathcal{V}=\mathcal{R}(B)$ je gust potprostor Hilbertovog prostora $\mathcal{H}'$.

Definirajmo sada $U : \mathcal{V} \to \mathcal{H}$ sa

$$UB\xi = C\xi, \qquad \xi \in \mathcal{H}.$$

Definicija ima smisla jer je B injekcija. Nadalje, U je očito linearan operator i zbog dokazane jednakosti $\|C\xi\| = \|B\xi|$ vidimo da je U izometrija sa $\mathcal{V}$ u $\mathcal{H}$. Kako je $\mathcal{V}$ gust potprostor od $\mathcal{H}'$, ta se izometrija jedinstveno produljuje do izometrije iz $\mathcal{B}(\mathcal{H}', \mathcal{H})$. Tu ćemo izometriju također označavati sa U. Kako je $B^*B \in Hom_G(\pi, \pi)$ to je i $C \in Hom_G(\pi, \pi)$. Stoga imamo za svaki $\xi \in \mathcal{H}$ i za svaki $y \in G$:

$$\pi(y)UB\xi = \pi(y)C\xi = C\pi(y)\xi = UB\pi(y)\xi = U\pi'(y)B\xi.$$

Time je dokazano da je $\pi(y)U\xi' = U\pi(y)\xi'$ za svaki $\xi' \in \mathcal{V}$, a budući da je $\mathcal{V}$ gust u $\mathcal{H}'$ slijedi $\pi(y)U = U\pi'(y)$, tj. vrijedi $U \in Hom_G(\pi', \pi)$. Stoga je područje vrijednosti izometrije U zatvoren $\pi-$invarijantan potprostor od $\mathcal{H}$, pa zbog ireducibilnosti reprezentacije π i zbog $U \neq 0$ slijedi da je područje vrijednosti od U čitav prostor $\mathcal{H}$. Dakle, U je izometrički izomorfizam Hilbertovog prostora $\mathcal{H}'$ na Hilbertov prostor $\mathcal{H}$. No kako je $U \in Hom_G(\pi', \pi)$, to ima za posljedicu $\pi' \sim \pi$, suprotno pretpostavci. Ova kontradikcija pokazuje da je pretpostavka $\mathcal{N}(B) = \{0\}$ neostvariva. Prema tome je $\mathcal{N}(B) \neq \{0\}$, pa zbog ireducibilnosti reprezentacije π slijedi $\mathcal{N}(B) = \mathcal{H}$, tj. $B = 0$. Tada slijedi $A(\xi, \xi') = 0 \ \ \forall \xi, \xi'$, a kako su na početku dokaza vektori η i η' bili proizvoljno odabrani, slijedi da vrijedi tvrdnja (a).

(b) Sasvim analogno dokazu tvrdnje (a) nalazimo da za dane $\eta \in \mathcal{H}$ i $\eta' \in \mathcal{H}'$ postoji $B \in Hom_G(\pi, \pi)$ takav da je

$$(B\xi|\xi') = \int_G (\pi(x)\xi|\eta)\overline{(\pi(x)\xi'|\eta')}\mathrm{d}\mu(x) \qquad \forall \xi, \xi' \in \mathcal{H}.$$

Međutim, kako je π ireducibilna, iz teorema 3.4.3. slijedi da postoji $\lambda(\eta, \eta') \in \mathbb{C}$ takav da je $B = \lambda(\eta, \eta')I$, gdje je I jedinični operator na $\mathcal{H}$. Dakle, došli smo do preslikavanja $\lambda : \mathcal{H} \times \mathcal{H}' \to \mathbb{C}$ takvog da vrijedi

$$\int_G (\pi(x)\xi|\eta)\overline{(\pi(x)\xi'|\eta')}\mathrm{d}\mu(x) = \lambda(\eta, \eta')(\xi|\xi') \qquad \forall \xi, \eta, \xi', \eta' \in \mathcal{H}.$$

Fiksirajmo sada $\xi_0 \in \mathcal{H}$, $\|\xi_0\| = 1$, i stavimo $c = \lambda(\xi_0, \xi_0)$. Imamo

$$\lambda(\eta, \eta') = \lambda(\eta, \eta')(\xi_0|\xi_0) = \int_G (\pi(x)\xi_0|\eta)\overline{(\pi(x)\xi_0|\eta')}\mathrm{d}\mu(x) = \int_G (\pi(x^{-1})\xi_0|\eta)\overline{(\pi(x^{-1})\xi_0|\eta')}\mathrm{d}\mu(x) =$$

$$= \int_G (\xi_0|\pi(x)\eta)\overline{(\xi_0|\pi(x)\eta')}\mathrm{d}\mu(x) = \int_G (\pi(x)\eta'|\xi_0)\overline{(\pi(x)\eta|\xi_0)}\mathrm{d}\mu(x) = \lambda(\xi_0, \xi_0)(\eta'|\eta) = c \cdot (\eta'|\eta).$$

Dakle je $\lambda(\eta, \eta') = c \cdot (\eta'|\eta) \ \ \forall \eta, \eta' \in \mathcal{H}$.

time smo dokazali da postoji $c \in \mathbb{C}$ takav da je

$$\int_G (\pi(x)\xi|\eta)\overline{(\pi(x)\xi'|\eta')}\mathrm{d}\mu(x) = c \cdot (\xi|\xi')(\eta'|\eta) \qquad \forall \xi, \xi', \eta, \eta' \in \mathcal{H}.$$

Nadalje,

$$c = \int_G |(\pi(x)\xi_0|\xi_0)|^2\mathrm{d}\mu(x) > 0.$$

Neka je ponovo $\xi_0 \in \mathcal{H}$, $\|\xi_0\| = 1$. Neka $m \in \mathbb{N}$ i neka su $e_1, e_2, \ldots, e_m$ ortonormirani vektori u $\mathcal{H}$. Za bilo koji $x \in G$ tada su vektori $\pi(x)e_1, \pi(x)e_2, \ldots, \pi(x)e_m$ ortonormirani. Zbog Besselove nejednakosti tada je

$$1 = \|\xi_0\|^2 \geq \sum_{i=1}^{m} |(\pi(x)e_i|\xi_0)|^2 = \sum_{i=1}^{m} (\pi(x)e_i|\xi_0)\overline{(\pi(x)e_i|\xi_0)} \qquad \forall x \in G.$$

Dakle,

$$1 \geq \sum_{i=1}^{m} (\pi(x)e_i|\xi_0)\overline{(\pi(x)e_i|\xi_0)} \mathrm{d}\mu(x) = c \sum_{i=1}^{m} \|e_i\|^2 \|\xi_0\|^2 = mc.$$

Odatle je $m \leq \dfrac{1}{c}$, Pa slijedi $\dim \mathcal{H} \leq \dfrac{1}{c} < +\infty$. Ako je $n = \dim \mathcal{H}$ i ako je $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ ortonormirana baza od $\mathcal{H}$, gore umjesto Besselove nejednakosti imamo Parsevalovu jednakost, pa je $c = \dfrac{1}{n}$.

Za kompaktnu grupu gotovo ništa novo ne donosi napuštanje unitarnosti u definiciji reprezentacije. Razmotrimo zasada slučaj konačnodimenzionalnih reprezentacija. Ako je G bilo kakva grupa i ako je V vektorski prostor (nad poljem $\mathbb{C}$), onda se hmomorfizam π grupe G u grupu $Gl(V)$ svih linearnih bijekcija sa V na V zove **reprezentacija grupe G na vektorskom prostoru** V. U slučaju da je V topološki vektorski prostor, toj definiciji dodaje i zahtjev neprekidnosti svakog operatora $\pi(x)$, $x \in G$, a ako je k tome grupa G topološka, može se dodati i neki zahtjev neprekidnosti na preslikavanje $x \mapsto \pi(x)$ (slaba, jaka, uniformna,...). Ako je prostor V konačnodimenzionalan, sve su te vrste neprekidnosti međusobno ekvivalentne. **Reprezentacija** topološke grupe G na konačnodimenzionalnom vektorskom prostoru V zove se **neprekidna** ako je preslikavanje π sa G u prostor $L(V)$ linearnih operatora na V neprekidno. Dovoljno je zahtijevati neprekidnost u jednoj točki, npr. u jedinici e grupe G.

Teorem 5.2.2. *Neka je π neprekidna reprezentacija kompaktne grupe G na konačnodimenzionalnom vektorskom prostoru V. Tada na V postoji skalarni produkt u odnosu na koji je reprezentacija π unitarna. Za svaki $\pi-$invarijantan potprostor V_1 od V postoji $\pi-$invarijantan potprostor V_2 takav da je $V = V_1 \dotplus V_2$. Nadalje, postoje $\pi-$invarijantni potprostori $V_1, V_2, \ldots, V_s$ od V takvi da je $V = V_1 \dotplus V_2 \dotplus \cdots \dotplus V_s$ i da su sve subreprezentacije $\pi_{V_1}, \pi_{V_2}, \ldots, \pi_{V_s}$ ireducibilne.*

Dokaz: Iz prve tvrdnje slijede ostale tvrdnje, zato jer ako je prostor V unitaran i ako je svaki operator $\pi(x)$, $x \in G$, unitaran, onda iz $\pi-$invarijantnosti potprostora $W \subseteq V$ slijedi $\pi-$invarijantnost njegovog ortogonalnog komplementa $W^\perp$.

Neka je sada $\langle \cdot | \cdot \rangle$ bilo koji skalarni produkt na V. Tada iz neprekidnosti reprezentacije π slijedi da je za bilo koje $\xi, \eta \in V$ funkcija $x \mapsto \langle \pi(x)\xi|\eta\rangle$ sa G u $\mathbb{C}$ neprekidna. Neka je μ Haarova mjera na G. Tada je sa

$$(\xi|\eta) = \int_G \langle \pi(x)\xi|\eta\rangle \mathrm{d}\mu(x), \qquad \xi, \eta \in V,$$

zadan novi skalarni produkt i iz invarijantnosti mjere μ slijedi da su svi operatori $\pi(y)$, $y \in G$, unitarni u odnosu na skalarni produkt $(\cdot|\cdot)$:

$$(\pi(y)\xi|\pi(y)\eta) = \int_G \langle \pi(x)\pi(y)\xi|\pi(x)\pi(y)\eta\rangle \mathrm{d}\mu(x) =$$

$$= \int_G \langle \pi(xy)\xi|\pi(xy)\eta\rangle \mathrm{d}\mu(x) = \int_G \langle \pi(x)\xi|\pi(x)\eta\rangle \mathrm{d}\mu(x) = (\xi|\eta).$$

5.3 Peter–Weylov teorem

U daljnjem je stalno G kompaktna grupa i μ normirana Haarova mjera na G. Tada je $C(G)$ algebra u odnosu na množenje po točkama i u odnosu na konvoluciju. Nadalje, $L_1(G)$ je također algebra u odnosu na konvoluciju.

Za konačnodimenzionalnu reprezentaciju π od G na V pišemo $\dim \pi = \dim V$ i taj se broj zove **dimenzija reprezentacije** π. Bez posebnog isticanja uvijek ćemo pretpostavljati da je konačnodimenzionalna reprezentacija neprekidna.

Za funkciju $f : G \to \mathbb{C}$ stavljamo

$$L(f) = span_{\mathbb{C}}\{\lambda_x f;\ x \in G\} \qquad \text{i} \qquad R(f) = span_{\mathbb{C}}\{\rho_x f;\ x \in \Gamma\}.$$

Te definicije imaju smisla i ako je f klasa funkcija u odnosu na mjeru μ; naime, ako je $x \in G$ i f, g su funkcije na G onda su $\lambda_x f$ i $\lambda_x g$ (odnosno, $\rho_x f$ i $\rho_x g$) $\mu-$ekvivalentne ako i samo ako su f i g $\mu-$ekvivalentne.

Nadalje, definiramo

$$L(G) = \{f \in L_2(G);\ \dim L(f) < +\infty\} \qquad \text{i} \qquad R(G) = \{f \in L_2(G);\ \dim R(f) < +\infty\}.$$

Očito je $L(f+g) \subseteq L(f)+L(g)$ i $R(f+g) \subseteq R(f)+R(g)$, pa slijedi da su $L(G)$ i $R(G)$ potprostori od $L_2(G)$.

Neka je sada π konačnodimenzionalna reprezentacija grupe G na vektorskom prostoru V i neka je V' dualni prostor od V. Za $\xi \in V$ i $\eta' \in V'$ definiramo funkciju $\varphi^\pi_{\xi,\eta'} : G \to \mathbb{C}$ sa

$$\varphi^\pi_{\xi,\eta'}(x) = \eta'(\pi(x)\xi), \qquad x \in G.$$

Sve takve funkcije su očito neprekidne. One se zovu **matrični koeficijenti reprezentacije** π. Sa $\Phi(\pi)$ označavamo potprostor od $C(G)$ razapet svim matričnim koeficijentima reprezentacije π :

$$\Phi(\pi) = span_{\mathbb{C}}\{\varphi^\pi_{\xi,\eta'};\ \xi \in V,\ \eta' \in V'\}.$$

Ako je $\{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\}$ baza od V i $\{\eta'_1, \eta'_2, \ldots, \eta'_n\}$ baza od V' onda je očito $\Phi(\pi)$ razapet sa $\{\varphi^\pi_{\xi_i,\eta'_j};\ 1 \le i, j \le n\}$. Dakle, prostor $\Phi(\pi)$ je konačnodimenzionalan i vrijedi $\dim \Phi(\pi) \le (\dim \pi)^2$. Ako su reprezentacije π i σ ekvivalentne (tj. ako u $Hom_G(\pi, \sigma)$ postoji izomorfizam) onda je očito $\Phi(\pi) = \Phi(\sigma)$.

Napokon stavimo

$$F(G) = \bigcup \{\Phi(\pi);\ \pi \text{ konačnodimenzionalna reprezentacija}\}.$$

Teorem 5.3.1. *Vrijedi $L(G) = R(G) = F(G)$ i to je podalgebra od $(C(G), \cdot)$. Ona je gusta u $C(G)$ u odnosu na normu $\|\cdot\|_\infty$, gusta je u $L_1(G)$ u odnosu na $\|\cdot\|_1$ i gusta je u $L_2(G)$ u odnosu na $\|\cdot\|_2$. Također, $F(G)$ je gusta u C^*-algebri $C^*(G)$.*

Dokaz: Neka je π konačnodimenzionalna reprezentacija od G na V. Neka je $\{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\}$ baza od V i $\{\eta'_1, \eta'_2, \ldots, \eta'_n\}$ njoj dualna baza od V'. Za $1 \le i, j \le n$ i za $x, y \in G$ imamo

$$(\lambda_x \varphi^\pi_{\xi_i,\eta'_j})(y) = \varphi^\pi_{\xi_i,\eta'_j}(x^{-1}y) = \eta'_j(\pi(x^{-1})\pi(y)\xi_i) =$$

$$= \eta'_j\left(\pi(x^{-1})\sum_{k=1}^n \eta'_k(\pi(y)\xi_i)\xi_k\right) = \sum_{k=1}^n \eta'_k(\pi(y)\xi_i)\eta'_j(\pi(x^{-1})\xi_k).$$

Dakle je

$$\lambda_x \varphi^\pi_{\xi_i,\eta'_j} = \sum_{k=1}^n \varphi^\pi_{\xi_k,\eta'_j}(x^{-1})\varphi^\pi_{\xi_i,\eta'_k}.$$

Analogno je

$$\rho_x \varphi^\pi_{\xi_i,\eta'_j} = \sum_{k=1}^n \varphi^\pi_{\xi_i,\eta'_k}(x)\varphi^\pi_{\xi_k,\eta'_j}.$$

Prema tome je

$$\lambda_x \varphi^\pi_{\xi_i,\eta'_j} \in \Phi(\pi) \qquad \text{i} \qquad \rho_x \varphi^\pi_{\xi_i,\eta'_j} \in \Phi(\pi) \qquad \forall x, i, j.$$

Zaključujemo da je

$$L(\varphi^\pi_{\xi_i,\eta'_j}) \subseteq \Phi(\pi) \qquad \text{i} \qquad R(\varphi^\pi_{\xi_i,\eta'_j}) \subseteq \Phi(\pi) \qquad \forall i, j.$$

Kako je $\Phi(\pi)$ konačnodimenzionalan, slijedi da su svi matrični koeficijenti $\varphi^\pi_{\xi_i,\eta'_j}$ elementi i prostora $L(G)$ i prostora $R(G)$. Dakle, vrijedi

$$\Phi(\pi) \subseteq L(G) \cap R(G).$$

Budući da to vrijedi za svaku konačnodimenzionalnu reprezentaciju π, zaključujemo da je

$$F(G) \subseteq L(G) \cap R(G).$$

Neka je sada $f \in R(G)$. Tada je $R(f)$ konačnodimenzionalan potprostor od $L_2(G)$ invarijantan s obzirom na desnu regularnu reprezentaciju π_r od G. Neka je $V = R(f)$ i neka je π pripadna subreprezentacija, $\pi(x) = \pi_r(x)|V$. Za $g \in V$ tada je $\pi(x)g = \rho_x g$. Neka je $\delta \in V'$ definiran sa $\delta(g) = g(e)$. Tada imamo za $x \in G:$

$$\varphi^\pi_{f,\delta}(x) = \delta(\pi(x)f) = (\rho_x f)(e) = f(x).$$

Dakle, $f = \varphi^\pi_{f,\delta} \in \Phi(\pi) \subseteq F(G)$. Time je dokazano

$$R(G) \subseteq F(G).$$

Neka je sada $f \in L(G)$. Neka je V dualni prostor konačnodimenzionalnog vektorskog prostora $L(f)$, što možemo shvaćati i kao $V' = L(g)$. Neka je π reprezentacija od G na V definirana sa

$$(\pi(x)\xi)(g) = \xi(\lambda_{x^{-1}} g), \qquad \xi \in V, \quad g \in L(f).$$

Neka je $\delta \in V$ definirano sa $\delta(g) = g(e), \;\; g \in L(f)$. Sada je

$$\varphi^\pi_{\delta,f}(x) = (\pi(x)\delta)(f) = \delta(\lambda_{x^{-1}} f) = (\lambda_{x^{-1}} f)(e) = f(x).$$

Dakle, $f = \varphi^\pi_{\delta,f} \in \Phi(\pi) \subseteq F(G)$. Time je dokazano da je

$$L(G) \subseteq F(G).$$

Iz dokazanih inkluzija

$$F(G) \subseteq L(G) \cap R(G), \qquad L(G) \subseteq F(G), \qquad R(G) \subseteq F(G)$$

slijedi

$$F(G) = L(G) = R(G).$$

Matrični koeficijenti su neprekidne funkcije, pa slijedi da je to potprostor od $C(G)$. Taj potprostor sadrži konstante i invarijantan je s obzirom na kompleksno konjugiranje, jer, npr. očito je da za funkciju f vrijedi

$$f \in L(G) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \overline{f} \in L(G).$$

Dokazat ćemo sada da je $F(G) = L(G) = R(G)$ podalgebra od $(C(G), \cdot)$. Neka su $f, g \in L(G)$. Tada imamo slijed implikacija

$$\lambda_x(f \cdot g) = (\lambda_x f) \cdot (\lambda_x g) \in L(f) \cdot L(g) \quad \forall x \in G \quad \Longrightarrow \quad L(f \cdot g) \subseteq span_{\mathbb{C}}\, L(f) \cdot L(g) \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad \dim L(f \cdot g) \leq (\dim L(f)) \cdot (\dim L(g)) < +\infty \quad \Longrightarrow \quad f \cdot g \in L(G).$$

Time je dokazano da je $L(G) = R(G) = F(G)$ podalgebra od $C(G)$ u odnosu na množenje po točkama.

Dokažimo sada da ta podalgebra razlikuje točke od G. Neka su $x, y \in G$, $x \neq y$. Po teoremu 5.1.1. postoji unitarna ireducibilna reprezentacija od G na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$ takva da je $\pi(x) \neq \pi(y)$. Prema teoremu 5.2.1. reprezentacija π je konačnodimenzionalna, pa je $\Phi(\pi) \subseteq F(G)$. Postoje $\xi \in \mathcal{H}$ i $\eta' \in \mathcal{H}'$ takvi da je $\eta'(\pi(x)\xi) \neq \eta'(\pi(y)\xi)$. No to znači da je $\varphi^{\pi}_{\xi,\eta'}(x) \neq \varphi^{\pi}_{\xi,\eta'}(y)$. Dakle, $F(G)$ razlikuje točke od G.

Dakle, dokazali smo da je $F(G)$ podalgebra od $C(G)$ u odnosu na množenje po točkama, da sadrži konstante, da je invarijantna na kompleksno konjugiranje i da razlikuje točke od G. Sada iz Stone$-$Weierstrassovog teorema slijedi da je $F(G)$ gusta u $C(G)$ u odnosu na $\| \cdot \|_\infty$. Budući da je $C(G)$ gusta u $L_1(G)$ u odnosu na $\| \cdot \|_1$ i u $L_2(G)$ u odnosu na $\| \cdot \|_2$ i budući da za $f \in C(G)$ zbog normiranosti mjere μ vrijedi

$$\|f\|_1 = \int_G |f(x)| \mathrm{d}\mu(x) \leq \|f\|_\infty \qquad \text{i} \qquad \|f\|_2 = \sqrt{\int_G |f(x)|^2 \mathrm{d}\mu(x)} \leq \|f\|_\infty,$$

slijedi da je $F(G)$ gusta u $L_1(G)$ s obzirom na $\| \cdot \|_1$ i u $L_2(G)$ s obzirom na $\| \cdot \|_2$. Napokon, $L_1(G)$ je gusta u $C^*(G)$ u odnosu na njenu C^*-normu $\| \cdot \|$, pa kako za $f \in L_1(G)$ vrijedi

$$\|f\| \leq \|f\|_1,$$

slijedi da je $F(G)$ gusta i u grupovnoj C^*-algebri $C^*(G)$.

U daljnjem sa $\hat{G}$ označavamo skup svih klasa ekvivalencije ireducibilnih unitarnih reprezentacija od G. Prema teoremima 5.2.1. i 5.2.2. to je ujedno skup svih klasa ekvivalencije ireducibilnih konačnodimenzionalnih reprezentacija od G. Za $\alpha \in \hat{G}$ izaberimo unitarnu reprezentaciju π^α na prostoru $\mathcal{H}^\alpha$ iz klase α. Nadalje, stavimo $d(\alpha) = \dim \mathcal{H}^\alpha$. Izaberimo ortonormiranu bazu $\{\xi_1^\alpha, \xi_2^\alpha, \ldots, \xi_{d(\alpha)}^\alpha\}$ prostora $\mathcal{H}^\alpha$ i za $x \in G$ neka su $\pi^\alpha_{ij}(x)$ matrični elementi operatora $\pi^\alpha(x)$ u toj bazi.

Teorem 5.3.2. **(Peter$-$Weyl)** *$S = \{\sqrt{d(\alpha)}\pi^\alpha_{ij};\ 1 \leq i, j \leq d(\alpha),\ \alpha \in \hat{G}\}$ je ortonormirana baza Hilbertovog prostora $L_2(G)$ i algebarska baza vektorskog prostora $F(G)$.*

Dokaz: Za $\alpha, \beta \in \hat{G}$, $1 \leq i, j \leq d(\alpha)$ i $1 \leq k, \ell \leq d(\beta)$ vrijedi

$$(\sqrt{d(\alpha)}\pi^\alpha_{ij} | \sqrt{d(\beta)}\pi^\beta_{k\ell}) = \sqrt{d(\alpha)d(\beta)} \int_G \pi^\alpha_{ij}(x)\overline{\pi^\beta_{k\ell}(x)} \mathrm{d}\mu(x) =$$

$$= \sqrt{d(\alpha)d(\beta)} \int_G (\pi^\alpha \xi^\alpha_j | \xi^\alpha_i)\overline{(\pi^\beta(x)\xi^\beta_\ell | \xi^\beta_k)} \mathrm{d}\mu(x).$$

Prema tvrdnji (a) teorema 5.2.1. to je jednako nuli ako je $\alpha \neq \beta$. Nadalje, prema tvrdnji (b) istog teorema za $\alpha = \beta$ dobivamo

$$(\sqrt{d(\alpha)}\pi^{\alpha}_{ij}|\sqrt{d(\alpha)}\pi^{\alpha}_{k\ell}) = d(\alpha)\frac{1}{d(\alpha)}(\xi^{\alpha}_i|\xi^{\alpha}_k)(\xi^{\alpha}_j|\xi^{\alpha}_\ell) = \delta_{ik}\delta_{j\ell}.$$

Dakle, vrijedi

$$(\sqrt{d(\alpha)}\pi^{\alpha}_{ij}|\sqrt{d(\beta)}\pi^{\beta}_{k\ell}) = \delta_{\alpha\beta}\delta_{ik}\delta_{j\ell}.$$

Dakle, S je ortonormiran skup u $L_2(G)$.

Imamo $\pi^{\alpha}_{ij} \in \Phi(\pi^{\alpha}) \subseteq F(G)$, pa slijedi da je $S \subseteq F(G)$. Neka je π proizvoljna konačnodimenzionalna reprezentacija od G na V. Prema teoremu 5.2.2. tada postoje $\pi-$invarijantni potprostori $V_1, V_2, \ldots, V_s$ od V takvi da je $V = V_1 \dotplus V_2 \dotplus \cdots \dotplus V_s$ i da je svaka od subreprezentacija π_{V_i} ireducibilna. Neka je $\alpha_i \in \hat{G}$ klasa ekvivalencije ireducibilne reprezentacije π_{V_i}. U svakom V_i izaberemo bazu $\{e^i_1, e^i_2, \ldots, e^i_{d(\alpha_i)}\}$ potprostora V_i u kojoj operator $\pi_{V_i}(x)$ ima matricu $(\pi^{\alpha_i}_{k\ell}(x))^{d(\alpha_i)}_{k,\ell=1}$. Tada je $\{e^i_j;\ 1 \leq j \leq d(\alpha_i),\ 1 \leq i \leq s\}$ baza prostora V. Neka je $\{f^i_j;\ 1 \leq j \leq d(\alpha_i),\ 1 \leq i \leq s\}$ njoj dualna baza od V'. Tada funkcije

$$\varphi^{\pi}_{e^i_j, f^k_\ell}, \qquad 1 \leq j \leq d(\alpha_i), \quad 1 \leq \ell \leq d(\alpha_k), \quad 1 \leq i, k \leq s$$

razapinju prostor $\Phi(\pi)$. Međutim, lako se vidi da je $\varphi^{\pi}_{e^i_j, f^k_\ell} = \delta_{ik}\pi^{\alpha_i}_{\ell j}$. To znači da funkcije

$$\pi^{\alpha_i}_{\ell j}, \qquad 1 \leq \ell, j \leq d(\alpha_i), \quad 1 \leq i \leq s$$

razapinju prostor $\Phi(\pi)$. Kako je π bila proizvoljna konačnodimenzionalna reprezentacija, zaključujemo da skup funkcija S razapinje vektorski prostor $F(G)$. No taj je skup ortonormiran u $L_2(G)$, dakle je linearno nezavisan. Time je dokazano da je S baza vektorskog prostora $F(G)$.

Napokon, skup S je ortonormiran u Hilbertovom prostoru $L_2(G)$ i razapinje potprostor $F(G)$ koji je prema teoremu 5.3.1. gust u $L_2(G)$. Dakle, S je ortonormirana baza Hilbertovog prostora $L_2(G)$.

5.4 Grupovne algebre. Karakteri

Prema propoziciji 4.2.1. za $f, g \in L_2(G)$ konvolucija $f * g$ je dobro definirana i to je funkcija iz $C_\infty(G) = C(G) \subseteq L_2(G)$. Prema tome, u slučaju kompaktne grupe G Hilbertov prostor $L_2(G)$ je algebra u odnosu na konvoluciju i vrijedi $L_2(G) * L_2(G) \subseteq C(G)$. Dakle, $C(G)$ je obostrani ideal u algebri $L_2(G)$. Nadalje, kako je kompaktna grupa unimodularna, $L_2(G)$ je i $*-$algebra u odnosu na involuciju $f^*(x) = \overline{f(x^{-1})}$. Kako je na unimodularnoj grupi Haarova mjera invarijantna u odnosu na invertiranje, slijedi i $\|f^*\|_2 = \|f\|_2 \ \ \forall f \in L_2(G)$.

Lema 5.4.1. (a) *Za $f, g \in L_2(G)$ i $x \in G$ je $(f * g)(x) = (f|(\rho_x g)^*) = (f|\lambda_x g^*)$.*

(b) *Za $f, g \in L_2(G)$ je $\|f * g\|_2 \leq \|f\|_2 \cdot \|g\|_2$; drugim riječima, $L_2(G)$ je Banachova $*-$algebra.*

(c) *Za $f, g \in L_2(G)$ je $(f|g) = (g^*|f^*)$.*

(d) *Za $f, g, h \in L_2(G)$ je $(f * g|h) = (f|h * g^*) = (g|f^* * h)$.*

Dokaz: (a) Imamo

$$(f * g)(x) = \int_G f(y)g(y^{-1}x)\mathrm{d}\mu(y) = \int_G f(y)\overline{(\rho_x g)^*(y)}\mathrm{d}\mu(y) = (f|(\rho_x g)^*).$$

Nadalje,

$$(\rho_x g)^*(y) = \overline{g(y^{-1}x)} = g^*(x^{-1}y) = (\lambda_x g^*)(y).$$

(b) Iz (a) slijedi

$$\|f * g\|_2^2 = \int_G |(f * g)(x)|^2 \mathrm{d}\mu(x) \leq \|f\|_2^2 \cdot \|\lambda_x g^*\|_2^2 = \|f\|_2^2 \cdot \|g\|_2^2.$$

(c) $(g^*|f^*) = \int_G \overline{g(x^{-1})} f(x^{-1}) \mathrm{d}\mu(x) = \int_G f(x)\overline{g(x)} \mathrm{d}\mu(x) = (f|g)$.

(d) Iz (a) slijedi $(f|g) = (f|\lambda_e g) = (f * g^*)(e)$. Dakle,

$$(f * g|h) = (f * g * h^*)(e) = (f * (h * g^*)^*)(e) = (f|h * g^*).$$

Odatle i iz (c) imamo

$$(g|f^* * h) = (h^* * f|g^*) = (h^*|g^* * f^*) = (f * g|h).$$

Lema 5.4.2. *Neka su $\alpha, \beta \in \hat{G}$, $1 \leq i, j \leq d(\alpha)$, $1 \leq k, \ell \leq d(\beta)$, $x \in G$.*

(a) $\rho_x \pi_{ij}^\alpha = sum_{k=1}^{d(\alpha)} \pi_{kj}^\alpha(x) \pi_{ik}^\alpha$, $\lambda_x \pi_{ij}^\alpha = sum_{k=1}^{d(\alpha)} \pi_{ik}^\alpha(x^{-1}) \pi_{kj}^\alpha$.

(b) $\left(\pi_{ij}^\alpha\right) = \pi_{ji}^\alpha$.

(c) $\pi_{ij}^\alpha * \pi_{k\ell}^\beta = \dfrac{1}{d(\alpha)} \delta_{\alpha\beta} \delta_{jk} \pi_{i\ell}^\alpha$.

Dokaz: Tvrdnja (a) slijedi neposredno iz činjenice da je π^α reprezentacija.

Tvrdnja (b) slijedi iz činjenice da je $\left(\pi_{ij}^\alpha(x)\right)_{i,j=1}^{d(\alpha)}$ unitarna matrica i njoj inverzna je matrica $\left(\pi_{ij}^\alpha(x^{-1})\right)_{i,j=1}^{d(\alpha)}$.

(c) Iz (a) i (b) i iz tvrdnje (a) leme 5.4.1. slijedi

$$\left(\pi_{ij}^\alpha * \pi_{k\ell}^\beta\right)(x) = \left(\pi_{ij}^\alpha \middle| \lambda_x \left(\pi_{k\ell}^\beta\right)^*\right) = \left(\pi_{ij}^\alpha \middle| \lambda_x \pi_{\ell k}^\beta\right) = \sum_{m=1}^{d(\beta)} \left(\pi_{ij}^\alpha \middle| \overline{\pi_{m\ell}^\beta(x)} \pi_{mk}^\beta\right) =$$

$$= \sum_{m=1}^{d(\beta)} \pi_{m\ell}^\beta(x) \left(\pi_{ij}^\alpha \middle| \pi_{mk}^\beta\right) = \sum_{m=1}^{d(\beta)} \delta_{\alpha\beta} \delta_{im} \delta_{jk} \frac{1}{d(\alpha)} \pi_{m\ell}^\beta(x) = \frac{1}{d(\alpha)} \delta_{\alpha\beta} \delta_{jk} \pi_{i\ell}^\alpha(x).$$

Stavimo

$$C_\alpha(G) = \Phi(\pi^\alpha), \qquad \alpha \in \hat{G}.$$

Iz Peter−Weylovog teorema znamo da je

$$L_2(G) = \bigoplus_{\alpha \in \hat{G}} C_\alpha(G), \qquad F(G) = \sum_{\alpha \in \hat{G}} \dot{+} C_\alpha(G).$$

Propozicija 5.4.1. (a) *$F(G)$ je obostrani ideal u $L_2(G)$.*

(b) *Za $\alpha \neq \beta$ je $C_\alpha(G) * C_\beta(G) = \{0\}$; $C_\alpha(G) * C_\alpha(G) \subseteq C_\alpha(G)$.*

(c) *$C_\alpha(G)^* = C_\alpha(G)$ i to je obostrani ideal u $L_2(G)$.*

Dokaz: (a) Prema tvrdnji (d) propozicije 1.5.1. za $f \in L(G)$, $g \in R(G)$, $h \in L_2(G)$ i $x \in G$ je

$$\lambda_x(f * h) = (\lambda_x f) * h \qquad \text{i} \qquad \rho_x(h * g) = h * (\rho_x g).$$

Stoga je

$$L(f * h) = L(f) * h \quad \text{i} \quad R(h * g) = h * R(g) \qquad \Longrightarrow \qquad f * h \in L(G) \quad \text{i} \quad h * g \in R(G).$$

Kako je $F(G) = L(G) = R(G)$, to je obostrani ideal u $L_2(G)$.

Tvrdnja (b) slijedi neposredno iz tvrdnje (c) leme 5.4.2.

(c) Iz tvrdnje (c) leme 5.4.2. slijedi $C_\alpha(G)^* = C_\alpha(G)$. Kako je

$$F(G) = \sum_{\beta \in \hat{G}} \dot{+} C_\beta(G),$$

iz (b) slijedi da je $C_\alpha(G)$ obostrani ideal u $F(G)$. Nadalje, $\dim C_\alpha(G) = d(\alpha)^2 < +\infty$, pa je $C_\alpha(G)$ zatvoren potprostor od $L_2(G)$. Napokon, $F(G)$ je prema teoremu 5.3.2. gusto u $L_2(G)$ i konvolucija je prema tvrdnji (b) leme 5.4.1. neprekidno preslikavanje sa $L_2(G) \times L_2(G)$ u $L_2(G)$, pa slijedi da je $C_\alpha(G)$ obostrani ideal i u $L_2(G)$.

Neka je $Z_2(G)$ centar algebre $(L_2(G), *)$ $Z(G)$ centar algebre $(C(G), *)$ i $Z_F(G)$ centar algebre $(F(G), *)$.

Lema 5.4.3. (a) $Z(G) = Z_2(G) \cap C(G)$.

(b) $Z_F(G) = Z_2(G) \cap F(G) = Z(G) \cap F(G)$.

(c) $Z_2(G) = \{f \in L_2(G);\ \lambda_{x^{-1}} f = \rho_x f\ \forall x \in G\}$.

(d) $Z(G) = \{f \in C(G);\ f(xy) = f(yx)\ \forall x, y \in G\}$.

Dokaz: (a) Inkluzija $Z_2(G) \cap C(G) \subseteq Z(G)$ je očigledna. Neka su $f \in Z(G)$ i $g \in L_2(G)$. Kako je $C(G)$ gusto u $L_2(G)$, postoji niz $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ u $C(G)$ takav da vrijedi $g = \lim_{n\to\infty} g_n$ u prostoru $L_2(G)$. Po tvrdnji (b) leme 5.4.1. konvolucija je neprekidna na $L_2(G)$, pa imamo

$$f * g = f * \left(\lim_{n\to\infty} g_n\right) = \lim_{n\to\infty} f * g_n = \lim_{n\to\infty} g_n * f = \left(\lim_{n\to\infty} g_n\right) * f = g * f.$$

Zaključujemo da je $f \in Z_2(G)$. Time je dokazano da je $Z(G) \subseteq Z_2(G)$, što zajedno sa $Z(G) \subseteq C(G)$ i $Z_2(G) \cap C(G) \subseteq Z(G)$ daje jednakost $Z(G) = Z_2(G) \cap C(G)$.

(b) Budući da je i $F(G)$ gusto u $L_2(G)$, analogno kao u (a) dokazuje se jednakost $Z_F(G) = Z_2(G) \cap F(G)$. Napokon, kako je $F(G) \subseteq C(G)$, iz dokazanog i iz (a) slijedi

$$Z(G) \cap F(G) = Z_2(G) \cap C(G) \cap F(G) = Z_2(G) \cap F(G) = Z_F(G).$$

(c) Po tvrdnji (a) leme 5.4.1. za $f, g \in L_2(G)$ i $x \in G$ imamo

$$(f * g)(x) = (\lambda_{x^{-1}} f | g^*) \qquad \text{i} \qquad (g * f)(x) = (g | (\rho_x f)^*) = (\rho_x f | g^*).$$

Slijedi

$$f \in Z_2(G) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \lambda_{x^{-1}} f = \rho_x f \quad \forall x \in G.$$

(d) Za $f, g \in C(G)$ jednakost njihovih klasa u $L_2(G)$ znači isto što i jednakost tih funkcija po točkama. Dakle, zbog (a) za $f \in C(G)$ nalazimo

$$f \in Z(G) \quad \Longleftrightarrow \quad (\lambda_{x^{-1}} f)(y) = (\rho_x f)(y) \quad \forall x, y \in G \quad \Longleftrightarrow \quad f(xy) = f(yx) \quad \forall x, y \in G.$$

Razmotrimo sada lijevu i desnu regularnu reprezentaciju π_ℓ i π_r grupe G na Hilbertovom prostoru $L_2(G)$. Operatori $\pi_\ell(x)$ i $\pi_r(y)$ komutiraju $\forall x, y \in G$. Stavimo

$$\pi(y) = \pi_\ell(y)\pi_r(y) = \pi_r(y)\pi_\ell(y), \qquad y \in G.$$

Tada je π unitarna reprezentacija od G na $L_2(G)$. Imamo

$$(\pi(y)f)(x) = f(y^{-1}xy), \qquad x, y \in G, \quad f \in L_2(G).$$

Za konstantnu funkciju $1(x) \equiv 1$ imamo $1^* = 1 = 1 * 1$. Dakle, ako stavimo $E = \pi(1)$, onda je $E^* = E = E^2$, tj. E je ortogonalni projektor. Imamo

$$(Ef)(x) = \int_G f(y^{-1}xy)\mathrm{d}\mu(y), \qquad f \in L_2(G), \quad x \in G.$$

Lema 5.4.4. *(a)* $EL_2(G) = Z_2(G)$.

(b) Restrikcija $E|C(G)$ *je neprekidan operator na Banachovom prostoru* $(C(G), \|\cdot\|_\infty)$ *i* $EC(G) = Z(G)$.

Dokaz: (a) Za $f \in Z_2(G)$ imamo

$$\pi(y)f = \lambda_y\rho_y f = \lambda_y\lambda_{y^{-1}}f = f \qquad \Longrightarrow \qquad (Ef)(x) = \int_G (pi(y)f)(x)\mathrm{d}\mu(y) = f(x).$$

Dakle, $Z_2(G) \subseteq EL_2(G)$. Nadalje, za $x \in G$ imamo

$$\pi(x)E = \pi(x)\pi(1) = \pi(\lambda_x 1) = \pi(1) = E.$$

Prema tome, za $f \in L_2(G)$ je $Ef = \pi(x)Ef = \lambda_x\rho_x Ef$, pa slijedi $\lambda_{x^{-1}}Ef = \rho_x Ef \ \ \forall x \in G$. Sada pomoću tvrdnje (c) leme 5.4.3. zaključujemo da je $Ef \in Z_2(G)$. Dakle, dokazali smo i obrnutu inkluziju $EL_2(G) \subseteq Z_2(G)$.

(b) Neka je $f \in C(G)$. Dokažimo da je Ef neprekidna funkcija. Neka je $\varepsilon > 0$ i neka je U otvorena okolina od e u G takva da vrijedi

$$u, v \in G, \quad u^{-1}v \in U \qquad \Longrightarrow \qquad |f(u) - f(v)| \leq \varepsilon.$$

Stavimo

$$V = \{t \in G;\ wtw^{-1} \in U \ \forall w \in G\}.$$

Budući da je preslikavanje $(w, t) \mapsto wtw^{-1}$ sa $G \times G$ u G neprekidno i budući da je grupa G kompaktna, iz leme 1.2.1. slijedi da je V otvorena okolina od e u G. Ako su $x, z \in G$ takvi da je $z^{-1}x \in V$, onda za svaki $y \in G$ imamo

$$(y^{-1}zy)^{-1}(y^{-1}xy) = y^{-1}z^{-1}xy \in U \qquad \Longrightarrow \qquad |f(y^{-1}xy) - f(y^{-1}zy)| \leq \varepsilon.$$

Dakle,

$$z^{-1}x \in V \quad \Longrightarrow \quad |(Ef)(x) - (Ef)(z)| \leq \int_G |f(y^{-1}xy) - f(y^{-1}zy)|\mathrm{d}\mu(y) \leq \varepsilon.$$

Slijedi $Ef \in C(G)$. Time je dokazano da je $EC(G) \subseteq C(G)$.

Za $f \in C(G)$ je

$$\|Ef\|_\infty = \max_{x \in G}\left|\int_G f(y^{-1}xy)\mathrm{d}\mu(y)\right| \leq \|f\|_\infty.$$

Dakle, restrikcija $E|C(G)$ je neprekidan operator sa $C(G)$ u $C(G)$.

Napokon, za $f \in Z(G) \subseteq Z_2(G)$ je $Ef = f$. To znači da je $Z(G) \subseteq EC(G)$. S druge strane, pomoću tvrdnje (a) leme 5.4.3. dobivamo i obrnutu inkluziju

$$EC(G) \subseteq C(G) \cap EL_2(G) = C(G) \cap Z_(G) = Z(G),$$

pa imamo jednakost $EC(G) = Z(G)$.

Za svaku konačnodimenzionalnu reprezentaciju π od G definiramo $\chi^\pi \in F(G)$ sa

$$\chi^\pi(x) = \operatorname{Tr}\pi(x), \qquad x \in G.$$

Očito χ^π ovisi samo o klasi ekvivalencije reprezentacije π. Nadalje,

$$\chi^\pi(xy) = \operatorname{Tr}\pi(xy) = \operatorname{Tr}\pi(x)\pi(y) = \operatorname{Tr}\pi(y)\pi(x) = \operatorname{Tr}\pi(yx) = \chi^\pi(yx) \qquad \forall x, y \in G.$$

Dakle, $\chi^\pi \in Z_F(G)$. Funkcija χ^π zove se **karakter reprezentacije** π. Očito je

$$\chi^\pi(e) = \operatorname{Tr}\pi(e) = \operatorname{Tr} I = \dim \pi.$$

Za $\alpha \in \hat{G}$ stavimo

$$\chi^\alpha = \chi^{\pi^\alpha} = \sum_{i=1}^{d(\alpha)} \pi_{ii}^\alpha \in C_\alpha(G) \cap Z_F(G).$$

Lema 5.4.5. (a) $E\pi_{ij}^\alpha = \dfrac{1}{d(\alpha)}\delta_{ij}\chi^\alpha, \ \alpha \in \hat{G}, \ 1 \le i, j \le d(\alpha)$.

(b) $\chi^\alpha * \pi_{ij}^\beta = \dfrac{1}{d(\alpha)}\delta_{\alpha\beta}\pi_{ij}^\beta, \ \alpha, \beta \in \hat{G}, \ 1 \le i, j \le d(\beta)$.

(c) $\chi^\alpha * \chi^\beta = \dfrac{1}{d(\alpha)}\delta_{\alpha\beta}\chi^\alpha, \ \alpha, \beta \in \hat{G}$.

(d) $(\chi^\alpha)^* = \chi^\alpha, \ \alpha \in \hat{G}$.

(e) $(\chi^\alpha|\chi^\beta) = \delta_{\alpha\beta}, \ \alpha, \beta \in \hat{G}$.

Dokaz: Sve se tvrdnje dokazuju direktno:
(a)

$$(E\pi_{ij}^\alpha)(x) = \int_G \pi_{ij}^\alpha(y^{-1}xy)\mathrm{d}\mu(y) = \sum_{k,\ell=1}^{d(\alpha)} \pi_{k\ell}^\alpha(x) \int_G \overline{\pi_{ki}^\alpha(y)}\pi_{\ell j}^\alpha(y)\mathrm{d}\mu(y) =$$

$$= \sum_{k,\ell=1}^{d(\alpha)} \pi_{k\ell}^\alpha(x)\frac{1}{d(\alpha)}\delta_{ij}\delta_{k\ell} = \frac{1}{d(\alpha)}\delta_{ij}\sum_{k=1}^{d(\alpha)}\pi_{kk}^\alpha(x) = \frac{1}{d(\alpha)}\delta_{ij}\chi^\alpha(x).$$

(b)

$$\chi^\alpha * \pi_{ij}^\beta = \sum_{k=1}^{\alpha} \pi_{kk}^\alpha * \pi_{ij}^\beta = \sum_{k=1}^{d(\alpha)} \frac{1}{d(\alpha)}\delta_{\alpha\beta}\delta_{ki}\pi_{kj}^\beta = \frac{1}{d(\alpha)}\delta_{\alpha\beta}\pi_{ij}^\beta.$$

(c)

$$\chi^\alpha * \chi^\beta = \sum_{k=1}^{d(\beta)} \chi^\alpha * \pi_{kk}^\beta = \frac{1}{d(\alpha)}\delta_{\alpha\beta}\sum_{k=1}^{d(\alpha)}\pi_{kk}^\beta = \frac{1}{d(\alpha)}\delta_{\alpha\beta}\chi^\beta = \frac{1}{d(\alpha)}\delta_{\alpha\beta}\chi^\alpha.$$

(*d*)
$$(\chi^\alpha)^* = \sum_{k=1}^{d(\alpha)} (\pi^\alpha_{kk})^* = \sum_{k=1}^{d(\alpha)} \pi^\alpha_{kk} = \chi^\alpha.$$

(*e*)
$$(\chi^\alpha|\chi^\beta) = \left(\chi^\alpha * \left(\chi^\beta\right)^*\right)(e) = \left(\chi^\alpha * \chi^\beta\right)(e) = \frac{1}{d(\alpha)}\,\delta_{\alpha\beta}\,\chi^\alpha(e) = \delta_{\alpha\beta}.$$

Teorem 5.4.1. (*a*) *$Z_F(G)$ je gust u $(Z(G), \|\cdot\|_\infty)$ i u $Z_2(G), \|\cdot\|_2)$.*

(*b*) *$\{\chi^\alpha;\ \alpha \in \hat{G}$ je baza vektorskog prostora $Z_F(G)$ i ortonormirana baza Hilbertovog prostora $Z_2(G)$.*

(*c*) *$C_\alpha(G) = \chi^\alpha * L_2(G) = \chi^\alpha * C(G) = \chi^\alpha * F(G)$.*

Dokaz: (*a*) Neka je $f \in Z(G)$ (odnosno, $f \in Z_2(G)$). Tada postoji niz $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ u $F(G)$ koji teži prema f u odnosu na normu $\|\cdot\|_\infty$ (odnosno, u odnosu na normu $\|\cdot\|_2$). Po lemi 5.4.4. tada niz $(Ef_n)_{n\in\mathbb{N}}$ teži prema $Ef = f$ u odnosu na normu $\|\cdot\|_\infty$ (odnosno, u odnosu na normu $\|\cdot\|_2$). Po tvrdnji (*a*) leme 5.4.5. vrijedi $Ef_n \in F(G)\ \ \forall n$, dakle, $Ef_n \in F(G) \cap Z_2(G) = Z_F(G)$.

(*b*) Po tvrdnji (*b*) propozicije 5.4.1. je

$$Z_F(G) = Z_F(G) \cap \left(\sum_{\alpha\in\hat{G}} \dot{+}\, C_\alpha(G)\right) = \sum_{\alpha\in\hat{G}} \dot{+}\, Z_F(G) \cap C_\alpha(G),$$

a iz tvrdnje (*a*) leme 5.4.5. slijedi da je $Z_F(G) \cap C_\alpha(G) = \mathbb{C}\cdot\chi^\alpha$. Prema tome, $\{\chi^\alpha;\ \alpha \in \hat{G}\}$ je baza vektorskog prostora $Z_F(G)$. Kako je prema (*a*) $Z_F(G)$ gusto u $Z_2(G)$ iz tvrdnje (*e*) leme 5.4.5. slijedi da je $\{\chi^\alpha;\ \alpha \in \hat{G}\}$ ortonormirana baza od $Z_2(G)$.

(*c*) Po tvrdnji (*b*) leme 5.4.5. vrijedi

$$\chi^\alpha * C_\beta(G) = \{0\} \quad \text{ako je } \alpha \neq \beta \qquad \text{i} \qquad \chi^\alpha * C_\alpha(G) = C_\alpha(G).$$

Kako je

$$L_2(G) = \bigoplus_{\alpha\in\hat{G}} C_\alpha(G) \qquad \text{i} \qquad F(G) = \sum_{\alpha\in\hat{G}} \dot{+}\, C_\alpha(G)$$

i kako je konvolucija sa $L_2(G) \times L_2(G)$ u $L_2(G)$ neprekidna, slijedi

$$\chi^\alpha * L_2(G) = \chi^\alpha * F(G) = C_\alpha(G).$$

Budući da je $F(G) \subseteq C(G) \subseteq L_2(G)$, imamo i $\chi^\alpha * C(G) = C_\alpha(G)$.

Neka je π proizvoljna reprezentacija od G na konačnodimenzionalnom prostoru V. Tada postoje $\pi-$invarijantni potprostori $V_1, V_2, \ldots, V_s$ od V takvi da je $V = V_1 \dot{+} V_2 \dot{+} \cdots \dot{+} V_s$ i da su sve subreprezentacije π_{V_i}, $1 \leq i \leq s$, ireducibilne. Neka je $\alpha_i \in \hat{G}$ klasa reprezentacije π_{V_i}. Tada slijedi $\chi^\pi = \sum_{i=1}^s \chi^{\alpha_i}$. Kako su χ^α, $\alpha \in \hat{G}$, linearno nezavisni, broj $(\pi : \alpha)$ koliko puta se u rastavu reprezentacije π pojavljuje ireducibilna subreprezentacija iz klase α je neovisan o izboru gornjeg rastava. Naravno, imamo

$$\chi^\pi = \sum_{\alpha\in\hat{G}} (\pi : \alpha)\chi^\alpha.$$

Kako su χ^α ortonormirani, slijedi $(\pi : \alpha) = (\chi^\pi\,|\chi^\alpha)$. Broj $(\pi : \alpha)$ zove se **multiplicitet** od α u reprezentaciji π.

Dakle, vrijedi:

Propozicija 5.4.2. (*a*) $(\pi : \alpha) = (\chi^\pi\,|\chi^\alpha)$.

(*b*) *Konačnodimenzionalne reprezentacije π i π' od G su ekvivalentne ako i samo ako je $\chi^\pi = \chi^{\pi'}$.*

5.5 Reprezentacije na lokalno konveksnim prostorima

Neka je G lokalno kompaktna grupa i neka je V lokalno konveksni vektorski prostor. Reprezentacija G na V je homomorfizam π grupe G u grupu $Aut(V)$ svih linearnih homeomorfizama sa V na V takav da je preslikavanje $(x, v) \mapsto \pi(x)v$ neprekidno sa $G \times V$ u V.

U daljnjem je G kompaktna grupa i μ normirana Haarova mjera na G.

Lema 5.5.1. *Neka je $\pi : G \to Aut(V)$ homomorfizam grupa. Tada su sljedeća dva svojstva ekvivalentna:*

(a) *π je reprezentacija.*

(b) *Za svaku okolinu U_1 nule u V postoji okolina U_2 nule u V takva da je $\pi(G)U_2 \subseteq U_1$.*

Dokaz: $(a) \Rightarrow (b)$ Neka je U_1 otvorena okolina nule u V. Stavimo

$$U_2 = \{v \in V;\ \pi(x)v \in U_1 \ \ \forall x \in G\}.$$

Prema lemi 1.2.1. U_2 je otvoren podeskup od V i očito je $0 \in U_2$ i $\pi(G)U_2 \subseteq U_1$.

$(b) \Rightarrow (a)$ Neka su $x \in G$, $(x_i)_{i\in I}$ hiperniz u G i $(v_i)_{i\in I}$ hiperniz u V takvi da je

$$\lim_{i\in I} x_i = x \qquad \text{i} \qquad \lim_{i\in I} v_i = 0.$$

Neka je U_1 okolina nule u V i neka je U_2 okolina nule u V takva da je $\pi(G)U_2 \subseteq U_1$. Tada postoji $i_0 \in I$ takav da je $v_i \in U_2 \ \ \forall i \geq i_0$. Za $i \geq i_0$ je tada $\pi(x_i)v_i \in \pi(x_i)U_2 \subseteq U_1$. Dakle,

$$\lim_{i\in I} \pi(x_i)v_i = 0.$$

Sljedeći teorem o integraciji vektorskih funkcija navodimo bez dokaza. Dokaz se može pronaći npr. u [Bourbaki, **??mjera??**, Gl.III.t.4].

Teorem 5.5.1. *Neka je T lokalno kompaktan Hausdorffov topološki prostor i $\mu \in \mathfrak{M}(T)$.*

(a) *Neka je $\mathcal{V}$ Banachov prostor i $f \in C_0(T, \mathcal{V})$. Tada postoji jedinstven $\eta \in \mathcal{V}$ takav da vrijedi*

$$\varphi(\eta) = \int_T \varphi(f(t))\,d\mu(t) \qquad \forall \varphi \in V'.$$

Tada pišemo

$$\eta = \int_T f(t)\,d\mu(t) \qquad \text{ili} \qquad \eta = \mu(f).$$

Preslikavanje $f \mapsto \int_T f(t)\,d\mu(t)$ je linearan operator sa $C_0(T, \mathcal{V})$ u $\mathcal{V}$.

(b) *Uz oznake iz (a) vrijedi*

$$\int_T f(t)\,d\mu(t) \in \mu(Supp\, f) \cdot C,$$

gdje je C zatvorena konveksna ljuska skupa $f(T)$ u prostoru $\mathcal{V}$.

(c) *Uz oznake iz (a) i uz pretpostavku da je mjera μ pozitivna vrijedi*

$$\left\| \int_T f(t)\,d\mu(t) \right\| \leq \int_T \|f(t)\|\,d\mu(t)$$

(d) Neka su $\mathcal{V}$ i $\mathcal{W}$ Banachovi prostori, $f \in C_0(T, \mathcal{V})$ i $A \in \mathcal{B}(\mathcal{V}, \mathcal{W})$. Tada je

$$A\left(\int_T f(t)d\mu(t)\right) = \int_T A(f(t))d\mu(t).$$

Napomena: *Dokaz u Bourbakiju uključuje znatno općenitiji slučaj nego što je pretpostavka da je prostor Banachov. U stvari, teorem vrijedi i u slučaju lokalno konveksnih vektorskih prostora koji ne moraju biti potpuni, nego je dovoljna pretpostavka kvazipotpunosti. Pri tome se lokalno konveksan vektorski prostor V zove* **kvazipotpun** *ako je svaki njegov ograničen zatvoren podskup potpun (tj. u njemu je svaki Cauchyjev hiperniz konvergentan). Tvrdnje (a) i (b) vrijede ako je $\mathcal{V}$ kvazipotpun lokalno konveksan vektorski prostor. Tvrdnja (c) također s tim da umjesto norme $\|\cdot\|$ uzmemo bilo koju neprekidnu polunormu $\mathfrak{q} : \mathcal{V} \to \mathbb{R}_+$. Napokon, tvrdnja (d) vrijedi ako su $\mathcal{V}$ i $\mathcal{W}$ kvazipotpuni lokalno konveksni vektorski prostori, a A je neprekidan linearan operator sa $\mathcal{V}$ u $\mathcal{W}$.*

Neka je sada π reprezentacija kompaktne grupe G na kvazipotpunom lokalno konveksnom vektorskom prostoru V. Za $f \in C_0(G)$ i $v \in V$ tada je $x \mapsto f(x)\pi(x)v$ neprekidna funkcija sa G u V i ako je $v \neq 0$ nosaš te funkcije podudara se sa $Supp\, f$. Tada postoji jedinstven $\pi(f)v \in V$ takav da je

$$\varphi(\pi(f)v) = \int_G f(x)\varphi(\pi(x)v)\mathrm{d}\mu(x) \qquad \forall \varphi \in V'.$$

Očito je tako definiran operator $\pi(f) : V \to V$ linearan. Dokažimo da je taj operator neprekidan. Pretpostavimo da je $f \neq 0$. Neka je $(v_i)_{i \in I}$ hiperniz u V koji konvergira prema 0. Neka je U_1 zatvorena konveksna okolina nule. Po lemi 5.5.1. postoji okolina nule U_2 u V takva da vrijedi

$$\pi(G)U_2 \subseteq \frac{1}{c\|f\|_\infty} \cdot U_1 \qquad \text{gdje je} \quad c = \mu(Supp\, f).$$

Možemo pretpostaviti da je $\lambda U_2 \subseteq U_2 \ \ \forall \lambda, |\lambda| \leq 1$. Neka je $i_0 \in I$ takav da je $v_i \in U_2 \ \ \forall i \geq i_0$. Tada za $i \geq i_0$ i $x \in G$ imamo

$$\frac{f(x)}{\|f\|_\infty}\pi(x)v_i \in \frac{f(x)}{\|f\|_\infty}\pi(x)U_2 \subseteq \pi(x)U_2 \subseteq \frac{1}{c\|f\|_\infty} \cdot U_1.$$

Dakle,

$$f(x)\pi(x)v_i \in \frac{1}{c} \cdot U_1 \qquad \forall x \in G, \quad \forall i \geq i_0.$$

Stoga je za $i \geq i_0$ zatvorena konveksna ljuska skupa $\{f(x)\pi(x)v_i;\ x \in G\}$ sadržana u $\dfrac{1}{c} \cdot U_1$. No odatle slijedi da je $\pi(f)v_i \in U_1$. Drugim riječima,

$$i \geq i_0 \qquad \Longrightarrow \qquad \pi(f)v_i \in U_1.$$

Slijedi

$$\lim_{i \in I} \pi(f)v_i = 0$$

i time je dokazano da je $\pi(f) : V \to V$ neprekidan operator.

Algebru svih neprekidnih operatora sa V u V označavat ćemo sa $\mathcal{L}(V)$. Nadalje, za $A \in \mathcal{L}(V)$ označimo sa $A' : V' \to V'$ dualni operator: $(A'\varphi)(v) = \varphi(Av)$, $v \in V$, $\varphi \in V'$. Očito je preslikavanje $f \mapsto \pi(f)$ sa $C(G)$ u $\mathcal{L}(V)$ linearno. Nadalje, za $f, g \in C(G)$, $v \in V$ i $\varphi \in V'$ imamo redom

$$\varphi(\pi(f)\pi(g)v) = \int_G f(x)\varphi(\pi(x)\pi(g)v)\mathrm{d}\mu(x) = \int_G f(x)(\pi(x)'\varphi)(\pi(g)v)\mathrm{d}\mu(x) =$$

$$= \int_G f(x) \left[\int_G g(y)(\pi(x)'\varphi)(\pi(y)v)\mathrm{d}\mu(y) \right] \mathrm{d}\mu(x) = \int_G \int_G f(x)g(y)\varphi(\pi(xy)v)\mathrm{d}\mu(y)\mathrm{d}\mu(x) =$$

$$= \int_G \left[\int_G f(xy^{-1})g(y)\mathrm{d}\mu(y) \right] \varphi(\pi(x)v)\mathrm{d}\mu(x) = \int_G (f * g)(x)\varphi(\pi(x)v)\mathrm{d}\mu(x) = \varphi(\pi(f * g)v).$$

Dakle, vrijedi

$$\pi(f * g) = \pi(f)\pi(g), \qquad f, g \in C(G).$$

Drugim riječima, $f \mapsto \pi(f)$ je homomorfizam algebre $(C(G), *)$ u algebru $\mathcal{L}(V)$.

Uz oznake iz t.3. i t.4. stavimo

$$E^\alpha_{ij} = d(\alpha)\pi(\overline{\pi^\alpha_{ij}}), \qquad E^\alpha = d(\alpha)\pi(\overline{\chi^\alpha}) = \sum_{i=1}^{d(\alpha)} E^\alpha_{ii}, \qquad \alpha \in \hat{G}, \quad 1 \le i, j \le d(\alpha).$$

Tada iz lema 5.4.2. i 5.4.5. slijedi

$$E^\alpha_{ij} E^\beta_{k\ell} = \delta_{\alpha\beta}\delta_{jk}E^\alpha_{i\ell}, \qquad \alpha, \beta \in \hat{G}, \quad 1 \le i, j \le d(\alpha), \quad 1 \le k, \ell \le d(\beta);$$

$$E^\alpha E^\beta = \delta_{\alpha\beta}E^\alpha, \qquad \alpha, \beta \in \hat{G}.$$

Posebno, E^α, $\alpha \in \hat{G}$, su međusobno ortogonalni neprekidni projektori na prostoru V. Također, E^α_{ii}, $\alpha \in \hat{G}$, $1 \le i \le d(\alpha)$, su međusobno ortogonalni neprekidni projektori na prostoru V.

Teorem 5.5.2. *Neka je π reprezentacija kompaktne grupe G na kvazipotpunom lokalno konveksnom prostoru V. Stavimo, uz oznake iz t.4.*

$$E^\alpha = d(\alpha)\pi\left(\overline{\chi^\alpha}\right), \qquad V^\alpha = E^\alpha V, \qquad \alpha \in \hat{G}.$$

Nadalje, za $v \in V$ označimo sa V_v najmanji $\pi-$invarijantan potprostor od V koji sadrži vektor v, tj.

$$V_v = span_{\mathbb{C}}\,(\pi(G)v).$$

Stavimo

$$V_0 = \{v \in V;\ potprostor\ V_v\ je\ konačnodimenzionalan\}.$$

(*a*) *V_0 je gusti potprostor od V i vrijedi*

$$V_0 = \sum_{\alpha \in \hat{G}} \dot{+} V^\alpha.$$

(*b*) *Za svaki $\alpha \in \hat{G}$ je*

$$V^\alpha = \{v \in V_0;\ x \mapsto \pi(x)|V_v\ je\ direktna\ suma\ reprezentacija\ iz\ klase\ \alpha\}.$$

Nadalje, ako je U $\pi-$invarijantan potprostor od V takav da je subreprezentacija π_U ireducibilna iz klase α, onda je $U \subseteq V^\alpha$.

Za dokaz će nam trebati lema:

Lema 5.5.2. *Neka je W vektorski prostor i σ homomorfizam grupe G u grupu $Gl(W)$ svih invertibilnih linearnih operatora na W. Neka je $\alpha \in \hat{G}$ i neka su $w_1, w_2, \ldots, w_{d(\alpha)} \in W$ vektori od kojih je bar jedan različit od nule i vrijedi*

$$\sigma(x)w_j = \sum_{i=1}^{d(\alpha)} \pi^\alpha_{ij}(x)w_i \qquad \forall x \in G, \quad \forall j \in \{1, 2, \ldots, d(\alpha)\}.$$

Tada su vektori $w_1, w_2, \ldots, w_{d(\alpha)}$ linearno nezavisni i razapinju potprostor U koji je invarijantan s obzirom na sve operatore $\sigma(x)$, $x \in G$, i $x \mapsto \sigma(x)|U$ ireducibilna reprezentacija od G iz klase α.

Dokaz: Očito je potprostor $U \neq \{0\}$ invarijantan s obzirom na sve operatore $\sigma(x)$, $x \in G$. Stavimo $\tau(x) = \sigma(x)|U$. Budući da su π^α_{ij} neprekidne funkcije na G, τ je reprezentacija od G na U. Definiramo linearan operator $A : \mathcal{H}^\alpha \to U$ sa

$$Ae^\alpha_i = w_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, d(\alpha).$$

Tada je očito $\tau(x)A = A\pi^\alpha(x)\ \ \forall x \in G$. Operator A je surjekcija na $U \neq \{0\}$, pa je $A \neq 0$. Odatle je $\operatorname{Ker} A \neq \mathcal{H}^\alpha$. Međutim, $\operatorname{Ker} A$ je $\pi^\alpha-$invarijantan potprostor od $\mathcal{H}^\alpha$, pa iz ireducibilnosti reprezentacije π^α slijedi da je $\operatorname{Ker} \mathcal{H}^\alpha = \{0\}$. Prema tome, A je izomorfizam vektorskih prostora koji ostvaruje ekvivalenciju reprezentacija τ i π^α.

Dokaz teorema 5.5.2.: Budući da je $E^\alpha E^\beta = 0$ za $\alpha \neq \beta$, suma $\sum V^\alpha$ je direktna. Stavimo

$$V_1 = \sum_{\alpha \in \hat{G}} \dot{+} V^\alpha.$$

Dokazat ćemo najprije da je potprostor V_1 gust u V. Pretpostavimo suprotno. Tada po Hahn$-$Banachovom teoremu postoji $\varphi \in V'$ takav da je $\varphi \neq 0$ i $\varphi(V_1) = \{0\}$.

Za $\alpha \in \hat{G}$ i $i, j \in \beta 1, 2, \ldots, d(\alpha)\}$ vrijedi $E^\alpha E^\alpha_{ij} = E^\alpha_{ij}$. Slijedi da za svaki vektor $v \in V$ vrijedi $E^\alpha_{ij} v \in V^\alpha$. Dakle,

$$\varphi(E^\alpha_{ij} v) = 0 \qquad \forall v \in V,\ \forall \alpha \in \hat{G},\ \forall i, j \in \{1, 2, \ldots, d(\alpha)\}.$$

To znači da je

$$\int_G \overline{\pi^\alpha_{ij}(x)} \varphi(\pi(x)v) \mathrm{d}\mu(x) = 0 \qquad \forall v \in V,\ \forall \alpha \in \hat{G},\ \forall i, j \in \{1, 2, \ldots, d(\alpha)\}.$$

Sada iz teorema 5.3.2. slijedi da je neprekidna funkcija $x \mapsto \varphi(\pi(x)v)$ svuda jednaka nuli za svaki $v \in V$. Posebno za $x = e$ nalazimo $\varphi(v) = 0\ \ \forall v \in V$, suprotno pretpostavci $\varphi \neq 0$. Ova kontradikcija pokazuje da je potprostor V_1 gust u V.

Neka su $v \in V$, $\varphi \in V'$, $x \in G$, $\alpha \in \hat{G}$, $1 \leq i, j \leq d(\alpha)$. Tada imamo redom

$$\varphi(\pi(x)E^\alpha_{ij} v) = (\pi(x)'\varphi)(E^\alpha_{ij} v) = d(\alpha) \int_G \overline{\pi^\alpha_{ij}(y)} (\pi(x)'\varphi)(\pi(y)v) \mathrm{d}\mu(y) =$$

$$= d(\alpha) \int_G \overline{\pi^\alpha_{ij}(y)} \varphi(\pi(xy)v) \mathrm{d}\mu(y) = d(\alpha) \int_G \overline{\pi^\alpha_{ij}(x^{-1}y)} \varphi(\pi(y)v) \mathrm{d}\mu(y) =$$

$$= d(\alpha) \sum_{k=1}^{d(\alpha)} \overline{\pi^\alpha_{ik}(x^{-1})} \int_G \overline{\pi^\alpha_{kj}(y)} \varphi(\pi(y)v) \mathrm{d}\mu(y) = \sum_{k=1}^{d(\alpha)} \pi^\alpha_{ki}(x) \varphi(E^\alpha_{kj} v) = \varphi\left(\sum_{k=1}^{d(\alpha)} \pi^\alpha_{ki}(x) E^\alpha_{kj} v \right).$$

Budući da to vrijedi za sve $v \in V$ i sve $\varphi \in V'$ zaključujemo da je

$$\pi(x)E^\alpha_{ij} = \sum_{k=1}^{d(\alpha)} \pi^\alpha_{ki}(x) E^\alpha_{kj}, \qquad x \in G, \quad \alpha \in \hat{G}, \quad 1 \leq i, j \leq d(\alpha). \qquad (*)$$

Iako nam u ovom dokazu to ne će trebati, napominjemo da se sličnim računom dobiva da vrijedi

$$E^\alpha_{ij} \pi(x) = \sum_{k=1}^{d(\alpha)} \pi^\alpha_{jk}(x) E^\alpha_{ik}, \qquad x \in G, \quad \alpha \in \hat{G}, \quad 1 \leq i, j \leq d(\alpha). \qquad (**)$$

Neka je sada $\alpha \in \hat{G}$ i $v \in V^\alpha$. Tada je $E^\alpha v = v$. Stavimo

$$W = span_{\mathbb{C}}\,\{E^\alpha_{ij}v;\ 1 \leq i, j \leq d(\alpha)\}.$$

Tada je W konačnodimenzionalan potprostor od V i vrijedi

$$v = E^\alpha v = E^\alpha_{11}v + E^\alpha_{22}v + \cdots + E^\alpha_{d(\alpha)d(\alpha)}v \in W.$$

Nadalje, prema $(*)$ potprostor W je $\pi-$invarijantan. Dakle, $span_{\mathbb{C}}\,(\pi(G)v) \subseteq W$, pa zaključujemo da je $v \in V_0$. Time je dokazano da je $V^\alpha \subseteq V_0\ \ \forall \alpha \in \hat{G}$. Dakle, $V_1 \subseteq V_0$.

Dokažimo sada posljednju tvrdnju u (b). Neka je U $\pi-$invarijantan potprostor od V takav da je subreprezentacija π_U ireducibilna iz klase α. Tada u prostoru U možemo izabrati bazu $\{u_1, u_2, \ldots, u_{d(\alpha)}\}$ takvu da vrijedi

$$\pi(x)u_j = \sum_{i=1}^{\delta(\alpha)} \pi^\alpha_{ij}(x)u_i \qquad \forall x \in G,\ \forall j \in \{1, 2, \ldots, d(\alpha)\}.$$

Pomoću Peter$-$Weylovog teorema 5.3.2. slijedi

$$E^\alpha_{k\ell}u_j = d(\alpha)\int_G \overline{\pi^\alpha_{k\ell}(x)}\pi(x)u_j \mathrm{d}\mu(x) =$$

$$= d(\alpha)\int_G \overline{\pi^\alpha_{k\ell}(x)}\sum_{i=1}^{\alpha}(x)u_i\mathrm{d}\mu(x) = d(\alpha)\sum_{i=1}^{d(\alpha)}\left(\pi^\alpha_{ij}\,|\pi^\alpha_{k\ell}\right)u_i = \sum_{i=1}^{d(\alpha)}\delta_{ik}\delta_{j\ell}u_i = \delta_{j\ell}u_k.$$

Dakle,

$$E^\alpha u_j = \sum_{k=1}^{d(\alpha)} E^\alpha_{kk}u_j = \sum_{k=1}^{d(\alpha)}\delta_{kj}u_k = u_j.$$

Slijedi $u_1, u_2, \ldots, u_{d(\alpha)} \in V^\alpha$, dakle, $U \subseteq V^\alpha$.

Neka je sada $v \in V_0$ i neka je $W = span_{\mathbb{C}}\,(\pi(G)v)$. Tada je W konačnodimenzionalan $\pi-$invarijantan potprostor od V. No tada po teoremu 5.2.2. postoje $\pi-$invarijantni potprostori $W_1, W_2, \ldots, W_s$ od W takvi da je $W = W_1 \dot{+} W_2 \dot{+} \cdots \dot{+} W_s$ i da su sve subreprezentacije π_{W_i}, $i = 1, 2, \ldots, s$, ireducibilne. Označimo sa α_i klasu reprezentacije π_{W_i}. Prema upravo dokazanoj posljednjoj tvrdnji u (b) tada je $W_i \subseteq V^{\alpha_i}$, pa slijedi

$$v \in W \subseteq V^{\alpha_1} \dot{+} V^{\alpha_2} \dot{+} \cdots \dot{+} V^{\alpha_s} \subseteq V_1.$$

Zaključujemo da je $V_0 \subseteq V_1$, pa zbog prije dokazane obrnute inkluzije imamo jednakost $V_0 = V_1$.

Time je dokazana tvrdnja (a). Nadalje, za tvrdnju (b) je dokazana posljednja tvrdnja, pa time i inkluzija

$$\{v \in V_0;\ x \mapsto \pi(x)|V_v \text{ je direktna suma reprezentacija iz klase } \alpha\} \subseteq V^\alpha.$$

Treba još samo dokazati obrnutu inkluziju.

Neka je $v \in V^\alpha$. Stavimo kao i prije

$$W = span_{\mathbb{C}}\,\{E^\alpha_{ij}v;\ 1 \leq i, j \leq d(\alpha)\}.$$

Znamo da je $V_v = span_{\mathbb{C}}\,(\pi(G)v) \subseteq W$. Nadalje, iz svojstva integrala vektorskih funkcija znamo da je $E^\alpha_{ij}v$ sadržano u zatvorenoj konveksnoj ljuski skupa $\left\{\overline{\pi^\alpha_{ij}(x)}\pi(x)v;\ x \in G\right\}$, a taj je očito sadržan u $span_{\mathbb{C}}(\pi(G)v) = V_v$. Stoga slijedi i obrnuta inkluzija $W \subseteq V_v$. Zaključujemo da vrijedi jednakost $W = V_v$. Stavimo sada

$$W_j = span_{\mathbb{C}}\{E_{ij}^{\alpha}v;\ 1 \leq i \leq d(\alpha)\}, \qquad j = 1, 2, \ldots, d(\alpha).$$

Sada iz jednakosti $(*)$ i iz leme 5.5.2. slijedi da je za svaki j ili $W_j = \{0\}$ ili je W_j $\pi-$invarijantan potprostor i subreprezentacija π_{W_j} je ireducibilna iz klase α. Očito je $V_v = W_1 + W_2 + \cdots + W_{d(\alpha)}$. Dokažimo još da postoje indeksi $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_s \leq d(\alpha)$ takvi da je $V_v = W_{i_1} \dot{+} \cdots \dot{+} W_{i_s}$. Indekse i_k biramo induktivno: i_1 je prvi u nizu $1, 2, \ldots, d(\alpha)$ takav da je $W_{i_1} \neq \{0\}$; nakon što su izabrani $i_1, \ldots, i_{k-1}$, indeks i_k biramo kao prvi u nizu $i_{k-1} + 1, \ldots, d(\alpha)$ takav da

$$W_{i_k} \not\subseteq U_{k-1} = \sum_{j=1}^{k-1} \dot{+} W_{i_j}.$$

Tada je $W_{i_k} \cap U_{k-1}$ invarijantan potprostor od W_{i_k} koji je različit od W_{i_k}, a kako je subreprezentacija $\pi_{W_{i_k}}$ ireducibilna, zaključujemo da je $W_{i_k} \cap U_{k-1} = \{0\}$, odnosno, suma $U_k = U_{k-1} \dot{+} W_{i_k}$ je direktna. Ova induktivna konstrukcija vodi do traženih indeksa $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_s \leq d(\alpha)$ takvih da je $V_v = U_s = W_{i_1} \dot{+} W_{i_2} \dot{+} \cdots \dot{+} W_{i_s}$.

Time je dokazano da je za svaki $v \in V^{\alpha}$ subreprezentacija π_{V_v} direktna suma ireducibilnih reprezentacija iz klase α, pa je dokazana i obrnuta inkluzija, odnosno, jednakost iz tvrdnje (b).

Korolar 5.5.1. *Neka je π reprezentacija kompaktne grupe G na kvazipotpunom lokalno konveksnom vektorskom prostoru V i pretpostavimo da je π ireducibilna u smislu da ne postoji zatvoren $\pi-$invarijantan potprostor od V rezličit od $\{0\}$ i od V. Tada je V konačnodimenzionalan.*

Dokaz: Svaki V^{α}, $\alpha \in \hat{G}$ je $\pi-$invarijantan i zatvoren jer je to područje vrijednosti neprekidnog projektora na V. Dakle, nužno je $V = V^{\alpha}$ za neku klasu $\alpha \in \hat{G}$. Sada je zbog ireducibilnosti $\dim V = d(\alpha)$.

Korolar 5.5.2. *Neka je π unitarna reprezentacija od G na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$. Tada su zatvoreni potprostori $\mathcal{H}^{\alpha}$ međusobno ortogonalni, odnosno, vrijedi*

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{\alpha \in \hat{G}} \mathcal{H}^{\alpha}.$$

Dokaz: Iz tvrdnje (d) leme 5.4.5. slijedi da su E^{α} ortogonalni projektori:

$$(E^{\alpha})^* = d(\alpha)\pi\left(\overline{\chi^{\alpha}}\right)^* = d(\alpha)\pi\left(\overline{\chi^{\alpha}}^*\right) = d(\alpha)\pi\left(\overline{(\chi^{\alpha})^*}\right) = d(\alpha)\pi\left(\overline{\chi^{\alpha}}\right) = E^{\alpha}.$$

Stoga iz $E^{\alpha}E^{\beta} = 0$ za $\alpha \neq \beta$ slijedi $\mathcal{H}^{\alpha} \perp \mathcal{H}^{\beta}$.

Korolar 5.5.3. (*a*) *Za desnu regularnu reprezentaciju π_r od G na $L_2(G)$ i za $E_r^{\alpha} = d(\alpha)\pi_r\left(\overline{\chi^{\alpha}}\right)$ je $E_r^{\alpha}L_2(G) = C_{\alpha}(G)$.*

(*b*) *Za lijevu regularnu reprezentaciju π_{ℓ} od G na $L_2(G)$ i za $E_{\ell}^{\alpha} = d(\alpha)\pi_{\ell}\left(\overline{\chi^{\alpha}}\right)$ je $E_{\ell}^{\alpha}L_2(G) = \overline{C_{\alpha}(G)} = \{\overline{f};\ f \in C_{\alpha}(G)\}$.*

Dokaz: Prilikom definicije reprezentacija π_{ℓ} i π_r prije iskaza propozicije 2.2.2. ustanovili smo da je $\pi_{\ell}(f)g = f * g$ i $\pi_r(f)g = g * \check{f}$. Koristeći tvrdnju (c) teorema 5.4.1. i tvrdnju (d) leme 5.4.5. izvodimo

$$E_r^{\alpha}L_2(G) = L_2(G) * \check{\overline{\chi^{\alpha}}} = L_2(G) * (\chi^{\alpha})^* = L_2(G) * \chi^{\alpha} = C_{\alpha}(G);$$

$$E_{\ell}^{\alpha}L_2(G) = \overline{\chi^{\alpha}} * L_2(G) = \overline{\chi^{\alpha} * L_2(G)} = \overline{C_{\alpha}(G)}.$$

5.6 Plancherelov teorem za kompaktnu grupu

U ovoj točki uspostavit ćemo slične veze među funkcijama na G i na $\hat{G}$ kao u slučaju Abelovih lokalno kompaktnih grupa. Sjetimo se da je u slučaju Abelove kompaktne grupe G topologija na $\hat{G}$ diskretna. Tako ćemo i u slučaju opće kompaktne grupe G skup $\hat{G}$ njenih klasa ekvivalencije ireducibilnih reprezentacija promatrati kao topološki prostor s diskretnom topologijom, odnosno na funkcije definirane na $\hat{G}$ ne ćemo postavljati nikakve uvjete neprekidnosti.

Za svaku klasu $\alpha \in \hat{G}$ izaberimo kao i prije unitarnu reprezentaciju π^α klase α na konačnodimenzionalnom unitarnom prostoru $\mathcal{H}^\alpha$ dimenzije $d(\alpha)$. U slučaju Abelovih grupa sve su ireducibilne unitarne reprezentacije jednodimenzionalne i u tom slučaju promatrali smo skalarne funkcije na $\hat{G}$. U slučaju kompaktne grupe G promatrat ćemo prostore funkcija Φ na $\hat{G}$ koje nisu skalarne nego takve da je $\Phi(\alpha) \in \mathcal{L}(\mathcal{H}^\alpha)$ za svaki $\alpha \in \hat{G}$. Skup svih takvih funkcija označimo sa $P(\hat{G})$. To je algebra s jedinicom u odnosu na operacije po točkama:

$$(\Phi + \Psi)(\alpha) = \Phi(\alpha) + \Psi(\alpha), \quad (\lambda\Phi)(\alpha) = \lambda\Phi(\alpha), \quad (\Phi\Psi)(\alpha) = \Phi(\alpha)\Psi(\alpha), \quad \Phi, \Psi \in P(\hat{G}),\ \lambda \in \mathbb{C}.$$

Jedinica u toj algebri je funkcija Υ koja poprima kao vrijednosti u svim točkama jedinične operatore: $\Upsilon(\alpha) = I_{\mathcal{H}^\alpha}$, $\forall \alpha \in \hat{G}$. Nadalje, $P(\hat{G})$ postaje $*-$algebra s involucijom definiranom po točkama:

$$\Phi^*(\alpha) = \Phi(\alpha)^*, \qquad \alpha \in \hat{G}.$$

Kako je topologija na $\hat{G}$ diskretna, pa je svaki podskup od $\hat{G}$ i otvoren i zatvoren, nosač funkcije $\Phi \in P(\hat{G})$ definiramo sa

$$\mathit{Supp}\,\Phi = \{\alpha \in \hat{G};\ \Phi(\alpha) \neq 0\}.$$

Uočimo sada neke podalgebre od $P(\hat{G})$. Neka je $C_0(G)$ skup svih funkcija $\Phi \in P(\hat{G})$ s konačnim (tj. kompaktnim) nosačem. Neka je $C_\infty(\hat{G})$ skup svih $\Phi \in P(\hat{G})$ koje teže k nuli u beskonačnosti. Konvergencija k nuli u beskonačnosti za funkciju $\Phi \in P(\hat{G})$ u ovom slučaju znači da za svaki $\varepsilon > 0$ postoji konačan podskup $F \subseteq \hat{G}$ takav da vrijedi

$$\alpha \in \hat{G} \setminus F \qquad \Longrightarrow \qquad \|\Phi(\alpha)\|_\alpha \leq \varepsilon.$$

Pri tome je sa $\|\cdot\|_\alpha$ označena operatorska norma na prostoru $\mathcal{L}(\mathcal{H}^\alpha)$ dobivena iz norme na unitarnom prostoru. Tada je $C_\infty(\hat{G})$ $*-$podalgebra od $P(\hat{G})$. Definiramo normu na $C_\infty(\hat{G})$ sa

$$\|\Phi\|_\infty = \max\{\|\Phi(\alpha)\|_\alpha;\ \alpha \in \hat{G}\}.$$

Lako se vidi da uz tu normu $C_\infty(\hat{G})$ postaje C^*-algebra.

Označimo sa $C_0(\hat{G})$ skup svih funkcija iz $P(\hat{G})$ s konačnim nosačem. Tada je $C_0(\hat{G})$ $*-$podalgebra gusta u $C_\infty(\hat{G})$.

Definiramo sada $L_2(\hat{G})$ kao prostor svih funkcija $\Phi \in P(\hat{G})$ sa svojstvom

$$\sum_{\alpha \in \hat{G}} d(\alpha) \mathrm{Tr}\,\Phi(\alpha)\Phi(\alpha)^* < +\infty.$$

Nije teško dokazati da je tada $L_2(\hat{G})$ Hilbertov prostor uz skalarni produkt definiran sa

$$(\Phi|\Psi) = \sum_{\alpha \in \hat{g}} d(\alpha) \mathrm{Tr}\,\Phi(\alpha)\Psi(\alpha)^*, \qquad \Phi, \Psi \in L_2(\hat{G}).$$

Norma izvedena iz tog skalarnog produkta je

$$\|\Phi\|_2 = \|\Phi\|_{L_2(\hat{G})} = \sqrt{\sum_{\alpha \in \hat{G}} d(\alpha) \mathrm{Tr}\,\Phi(\alpha)\Phi(\alpha)^*}, \qquad \Phi \in L_2(\hat{G}).$$

$\mathcal{L}(\mathcal{H}^\alpha)$ možemo identificirati s potprostorom od $L_2(\hat{G})$, ako operator $S \in \mathcal{L}(\mathcal{H}^\alpha)$ identificiramo s funkcijom

$$\mathcal{S}(\beta) = \begin{cases} S & \text{ako je } \beta = \alpha \\ \\ 0 & \text{ako je } \beta \neq 0. \end{cases}$$

Skalarni produkt na $\mathcal{L}(\mathcal{H}^\alpha)$ dan je sa $(S|T)_{[\alpha]} = d(\alpha)\mathrm{Tr}\, ST^*$. Uz takvu identifikaciju imamo

$$L_2(\hat{G}) = \bigoplus_{\alpha\in\hat{G}} \mathcal{L}(\mathcal{H}^\alpha), \qquad (\Phi|\Psi) = \sum_{\alpha\in\hat{G}} (\Phi(\alpha)|\Psi(\alpha))_{[\alpha]}, \qquad \|\Phi\|_2 = \sqrt{\sum_{\alpha\in\hat{G}} \|\Phi(\alpha)\|_{[\alpha]}^2}$$

Primijetimo da je $C_0(\hat{G})$ gust potprostor od $L_2(\hat{G})$. Štoviše, vrijedi

$$C_0(\hat{G}) = \sum_{\alpha\in\hat{G}} \dot{+}\, \mathcal{L}(\mathcal{H}^\alpha).$$

Uočimo da za $\Phi, \Psi \in L_2(\hat{G})$ nije nužno $\Phi\Psi \in L_2(\hat{G})$ ako grupa G nije Abelova. Dakle, općenito $L_2(\hat{G})$ nije podalgebra od $P(\hat{G})$.

Prije iskaza sljedećeg teorema napomenimo da za kompaktnu grupu G vrijedi $L_2(G) \subseteq L_1(G)$. Stoga je za svaku $f \in L_2(G)$ i za svaku unitarnu reprezentaciju π od G dobro definiran operator $\pi(f)$.

Teorem 5.6.1. *Za $f \in L_2(G)$ definiramo $\mathcal{F}f \in P(\hat{G})$ sa*

$$(\mathcal{F}f)(\alpha) = \pi^\alpha(f), \qquad \alpha \in \hat{G}.$$

(a) $\mathcal{F}$ je izometrički izomorfizam Hilbertovog prostora $L_2(G)$ na Hilbertov prostor $L_2(\hat{G})$.

(b) Restrikcija $\mathcal{F}|F(G)$ je izomorfizam $*-$algebre $F(G)$ na $*-$algebru $C_0(\hat{G})$.

(c) $\mathcal{F}|F(G)$ se proširuje do izometričkog izomorfizma C^*-algebri sa $C^*(G)$ na $C_\infty(\hat{G})$.

Dokaz: (*b*) Za $\alpha, \beta \in \hat{G}$ i za $1 \leq i, j \leq d(\alpha)$ izračunajmo matrične elemente operatora $\left(\mathcal{F}\overline{\pi_{ij}^\alpha}\right)(\beta) = \pi^\beta\left(\overline{\pi_{ij}^\alpha}\right)$. Te matrične elemente označimo sa $\pi^\beta\left(\overline{\pi_{ij}^\alpha}\right)_{k\ell}$, $1 \leq k, \ell \leq d(\beta)$. Prema Peter$-$Weylovom teoremu imamo

$$\pi^\beta\left(\overline{\pi_{ij}^\alpha}\right)_{k\ell} = \int_G \overline{\pi_{ij}^\alpha(x)}\pi_{k\ell}^\beta(x)\mathrm{d}\mu(x) = \left(\pi_{k\ell}^\beta \,|\pi_{ij}^\alpha\right) = \frac{1}{d(\alpha)}\,\delta_{\alpha\beta}\,\delta_{ik}\,\delta_{j\ell}.$$

Posebno, vidimo da je $\mathcal{F}|\overline{C_\alpha(G)}$ izomorfizam prostora $\overline{C_\alpha(G)}$ na prostor $\mathcal{L}(\mathcal{H}^\alpha)$. Budući da je

$$F(G) = \overline{F(G)} = \sum_{\alpha\in\hat{G}} \dot{+}\, \overline{C_\alpha(G)} \qquad\qquad C_0(\hat{G}) = \sum_{\alpha\in\hat{G}} \dot{+}\, \mathcal{L}(\mathcal{H}^\alpha)$$

vidimo da je $\mathcal{F}|F(G)$ izomorfizam prostora $F(G)$ na prostor $C_0(\hat{G})$.

(*a*) Prema Peter$-$Weylovom teoremu $\{\sqrt{d(\alpha)}\pi_{ij}^\alpha;\ \alpha \in \hat{G},\ 1 \leq i, j \leq d(\alpha)\}$ je ortonormirana baza Hilbertovog prostora $L_2(G)$. Njoj kompleksno konjugirana je također ortonormirana baza od $L_2(G)$. Dakle, za $f \in L_2(G)$ imamo u smislu L_2-konvergencije

$$f = \sum_\alpha \sum_{i,j} d(\alpha)\left(f\,|\overline{\pi_{ij}^\alpha}\right)\overline{\pi_{ij}^\alpha},$$

i vrijedi Parsevalova jednakost za kvadrat norme

$$\|f\|_2^2 = \sum_\alpha \sum_{i,j} d(\alpha) \left| \left(f \left| \overline{\pi_{ij}^\alpha} \right. \right) \right|^2 . \qquad (*)$$

S druge strane, matrični elementi operatora $(\mathcal{F}f)(\alpha) = \pi^\alpha(f)$ su

$$\pi^\alpha(f)_{ij} = \int_G \pi_{ij}^\alpha(x) f(x) \mathrm{d}\mu(x) = \left(f \left| \overline{\pi_{ij}^\alpha} \right. \right), \qquad 1 \leq i, j \leq d(\alpha).$$

Dakle,

$$\mathrm{Tr}\, \pi^\alpha(f)\pi^\alpha(f)^* = \sum_{i,j=1}^{d(\alpha)} \pi^\alpha(f)_{ij} \overline{\pi^\alpha(f)_{ij}} = \sum_{i,j} \left| \left(f \left| \overline{\pi_{ij}^\alpha} \right. \right) \right|^2 .$$

Odatle slijedi da je $\mathcal{F}f \in L_2(\hat{G}$ i pomoću $(*)$ nalazimo

$$\|\mathcal{F}f\|_2^2 = \sum_\alpha \sum_{i,j} d(\alpha) \mathrm{Tr}\, (\mathcal{F}f)(\alpha)(\mathcal{F}f)(\alpha)^* =$$

$$= \sum_\alpha \sum_{i,j} d(\alpha) \mathrm{Tr}\, \pi^\alpha(f)\pi^\alpha(f)^* = \sum_\alpha \sum_{i,j} d(\alpha) \left| \left(f \left| \overline{\pi_{ij}^\alpha} \right. \right) \right|^2 = \|f\|_2^2.$$

Dakle, $\mathcal{F}(L_2(G)) \subseteq L_2(\hat{G})$ i $\mathcal{F} : L_2(G) \to L_2(\hat{G})$ je izometrija. Napokon, prema (a) je

$$C_0(\hat{G}) = \mathcal{F}(F(G)) \subseteq \mathcal{F}(L_2(G)),$$

a kako je $C_0(\hat{G})$ gusto u $L_2(\hat{G})$, zaključujemo da je $\mathcal{F}(L_2(G)) = L_2(\hat{G})$. Dakle, $\mathcal{F}$ je izometrički izomorfizam Hilbertovog prostora $L_2(G)$ na Hilbertov prostor $L_2(\hat{G})$.

(c) Za $f, g \in C(G)$ imamo za $\alpha \in \hat{G}$

$$(\mathcal{F}(f * g))(\alpha) = \pi^\alpha(f * g) = \pi^\alpha(f)\pi^\alpha(g) = (\mathcal{F}f)(\alpha)(\mathcal{F}g)(\alpha) = (\mathcal{F}f \cdot \mathcal{F}g)(\alpha),$$

$$(\mathcal{F}f)^*(\alpha) = (\mathcal{F}f)(\alpha)^* = \pi^\alpha(f)^* = \pi^\alpha(f^*) = (\mathcal{F}f^*)(\alpha).$$

Time je dokazano da je $\mathcal{F}|C(G)$ homomorfizam $*-$algebri.

Odredimo sada C^*-normu na $C(G)$ u odnosu na koju popunjenjem $C(G)$ dolazimo do grupovne C^*-algebre. Ta je norma općenito definirana sa

$$\|f\| = \sup \{ \|\pi(f)\|;\ \pi \text{ unitarna reprezentacija od } G \}.$$

Neka je π unitarna reprezentacija od G na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$. Tada iz teorema 5.5.2. i korolara 5.5.2. slijedi da postoje konačnodimenzionalni $\pi-$invarijantni potprostori $\mathcal{H}_i$, $i \in I$, od $\mathcal{H}$ takvi da je svaka subreprezentacija $\pi_{\mathcal{H}_i}$ ireducibilna i da je

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{i \in I} \mathcal{H}_i.$$

Ako je reprezentacija $\pi_{\mathcal{H}_i}$ iz klase $\alpha_i \in \hat{G}$ onda je $\|\pi_{\mathcal{H}_i}(f)\| = \|\pi^{\alpha_i}(f)\|_{\alpha_i}$, $f \in C(G)$, $i \in I$. Dakle, kako je za svaku $f \in C(G)$ i za svaki $i \in I$ potprostor $\mathcal{H}_i$ invarijantan s obzirom na operator $\pi(f)$ i $\pi(f)|\mathcal{H}_i = \pi_{\mathcal{H}_i}(f)$, nalazimo

$$\|\pi(f)\| = \sup \{ \|\pi_{\mathcal{H}_i}(f)\|;\ i \in I \} = \sup \{ \|\pi^{\alpha_i}(f)\|_{\alpha_i};\ i \in I \} \leq \sup \{ \|\pi^\alpha(f)\|_\alpha;\ \alpha \in \hat{G} \}.$$

Budući da to vrijedi za svaku unitarnu reprezentaciju π, zaključujemo da je

$$\|f\| = \sup\{\|\pi^\alpha(f)\|_\alpha;\ \alpha \in \hat{G}\}.$$

Označimo sa $\mathcal{A}(\hat{G})$ skup svih $\Phi \in P(\hat{G})$ takvih da je

$$\sup\{\|\Phi(\alpha)\|_\alpha;\ \alpha \in \hat{G}\} < +\infty.$$

Tada je $\mathcal{A}(\hat{G})$ $*-$podalgebra od $P(\hat{G})$ i to je C^*-algebra u odnosu na normu

$$\|\Phi\|_\infty = \sup\{\|\Phi(\alpha)\|_\alpha;\ \alpha \in \hat{G}\}, \qquad \Phi \in \mathcal{A}(\hat{G}).$$

Sada za $f \in C(G)$ imamo

$$\sup\{\|(\mathcal{F}f)(\alpha)\|_\alpha;\ \alpha \in \hat{G}\} = \sup\{\|\pi^\alpha(f)\|_\alpha;\ \alpha \in \hat{G}\} = \|f\|.$$

To pokazuje da je $\mathcal{F}f \in \mathcal{A}(\hat{G})$ za svaku $f \in C(G)$ i da je

$$\|\mathcal{F}f\|_\infty = \|f\| \qquad \forall f \in C(G).$$

Dakle, restrikcija $\mathcal{F}|C(G)$ je izometrija normirane $*-$algebre $C(G)$ s C^*-normom $\|\cdot\|$ u C^*-algebru $\mathcal{A}(\hat{G})$. Stoga se $\mathcal{F}|C(G)$ produljuje do izometričkog injektivnog homomorfizma C^*-algebri sa $C^*(G)$ u $\mathcal{A}(\hat{G})$. Taj izometrički monomorfizam $C^*(G) \to \mathcal{A}(\hat{G})$ označimo sa $\tilde{\mathcal{F}}$. Ostaje još da dokažemo da je slika $\tilde{\mathcal{F}}(C^*(G))$ tog monomorfizma upravo C^-algebra $C_\infty(\hat{G})$.

Stavimo $\mathcal{B} = \tilde{\mathcal{F}}(C^*(G))$. Tada je $\mathcal{B}$ C^*-podalgebra od $\mathcal{A}(\hat{G})$ i $\tilde{\mathcal{F}}$ je izometrički izomorfizam sa $C^*(G)$ na $\mathcal{B}$. Očito je $\mathcal{F}(F(G)) \subseteq \mathcal{F}(C(G)) \subseteq \mathcal{B}$.

Algebra $F(G)$ je prema teoremu 5.3.1. gusta u $C(G)$ u odnosu na normu $\|\cdot\|_\infty$. Nadalje, budući da je mjera μ normirana, vrijedi

$$\|f\|_1 \leq \|f\|_\infty \qquad \forall f \in C(G).$$

Kako je $C(G)$ gusta u $L_1(G)$ u odnosu na normu $\|\cdot\|_1$, slijedi da je $F(G)$ gusta u $L_1(G)$ u odnosu na normu $\|\cdot\|_1$.

Analogno, $L_1(G)$ je gusta u $C^*(G)$ u odnosu na C^*-normu $\|\cdot\|$ i vrijedi

$$\|f\| \leq \|f\|_1 \qquad \forall f \in L_1(G).$$

Odatle i iz činjenice da je $F(G)$ gusta u $L_1(G)$ u odnosu na normu $\|\cdot\|_1$ zaključujemo da je algebra $F(G)$ gusta u $C^*(G)$ u odnosu na C^*-normu $\|\cdot\|$. No to znači da je $\mathcal{B}$ zatvarač od $\mathcal{F}(F(G))$ u C^*-algebri $\mathcal{A}(\hat{G})$. Kako je prema (b) $\mathcal{F}(F(G)) = C_0(\hat{G})$, slijedi da je $\mathcal{B}$ zatvarač od $C_0(\hat{G})$ u $\mathcal{A}(\hat{G})$. No prema uvodnim napomenama taj je zatvarač jednak $C_\infty(\hat{G})$. Dakle, $\mathcal{B} = \tilde{\mathcal{F}}(C^*(G)) = C_\infty(\hat{G})$. Time je dokazano da je produljenje $\tilde{\mathcal{F}}$ od $\mathcal{F}|C(G)$ izometrički izomorfizam C^*-algebri sa $C^*(G)$ na $C_\infty(\hat{G})$.

Poglavlje 6

Inducirane reprezentacije

6.1 Definicije i osnovna svojstva

Neka je G lokalno kompaktna grupa i $H \subseteq G$ zatvorena podgrupa. Ako je π unitarna reprezentacija grupe G onda je njena restrikcija $\pi|H$ unitarna reprezentacija grupe H. U ovom poglavlju bavit ćemo se u određenom smislu obrnutom konstrukcijom: iz zadane unitarne reprezentacije grupe H konstruirat ćemo tzv. induciranu reprezentaciju grupe G. Teorija induciranih reprezentacija lokalno kompaktnih grupa generalizacija je Frobeniusove algebarske teorije za konačne grupe.

Neka su u daljnjem μ i ν desne Haarove mjere na G i H, $\Delta = \Delta_G$ i $\delta = \Delta_H$ modularne funkcije grupa G i H, $M = H\backslash G$ i $p : G \to M$ kanonska surjekcija, $p(x) = Hx$, $x \in H$. Neka je σ unitarna reprezentacija grupe H na Hilbertovom prostoru $\mathcal{K}$. Označimo sa $\mathcal{F} = \mathcal{F}(G, \sigma)$ skup svih funkcija $f : G \to \mathcal{K}$ koje imaju sljedeća tri svojstva:

(A) f je izmjeriva u odnosu na mjeru μ.

(B) U odnosu na lijeve pomake elementima iz H vrijedi

$$f(yx) = \sqrt{\frac{\Delta(y)}{\delta(y)}}\,\sigma(y)f(x) \qquad \forall x \in G, \quad \forall y \in H.$$

(C) Funkcija $x \mapsto \|f(x)\|^2$ je lokalno integrabilna na G u odnosu na mjeru μ.

Budući da je $\|f(x)+g(x)\|^2 \leq 2(\|f(x)\|^2+\|g(x)\|^2$, lako se vidi da je $\mathcal{F}$ vektorski prostor. Nadalje, za $f, g \in \mathcal{F}$ funkcija $x \mapsto (f(x)|g(x))$ je izmjeriva i, kako je $|(f(x)|g(x))| \leq \frac{1}{2}(\|f(x)\|^2 + \|g(x)\|^2)$, ta je funkcija lokalno integrabilna na G u odnosu na mjeru μ.

Za $f, g \in \mathcal{F}$ definiramo mjeru $\alpha_{f,g}$ na G sa

$$\alpha_{f,g} = (f(\cdot)|g(\cdot)) \cdot \mu,$$

tj.

$$\alpha_{f,g}(\varphi) = \int_G (f(x)|g(x))\varphi(x)\mathrm{d}\mu(x), \qquad \varphi \in C_0(G).$$

Tada je $\alpha_{f,f}$ pozitivna mjera i vrijedi $\alpha_{f,f} = 0$ ako i samo ako je $f = 0$ lokalno gotovo svuda u odnosu na mjeru μ. To znači da je presjek skupa $\{x \in G;\ f(x) \neq 0\}$ sa svakim kompaktnim podskupom od G $\mu-$zanemariv (tj. $\mu-$mjere nula).

Za $y \in H$ imamo

$$\lambda_y\mu = \Delta(y)\mu$$

i za $f,g\in\mathcal{F}$ je

$$\lambda_y(f(\cdot)|g(\cdot))=((\lambda_y f)(\cdot)|(\lambda_y g)(\cdot))=(f(y^{-1}\cdot)|g(y^{-1}\cdot))=$$
$$=\frac{\delta(y)}{\Delta(y)}(\sigma(y^{-1})f(\cdot)|\sigma(y^{-1})g(\cdot))=\frac{\delta(y)}{\Delta(y)}(f(\cdot)|g(\cdot)).$$

Odatle je

$$\lambda_y\alpha_{f,g}=\delta(y)\alpha_{f,g}\qquad\forall y\in H.$$

Prema propoziciji 4.5.2. tada postoji jedinstvena mjera $\beta_{f,g}$ na M takva da za svaku $\varphi\in C_0(G)$ vrijedi

$$\int_G(f(x)|g(x))\varphi(x)\mathrm{d}\mu(x)=\beta_{f,g}(\varphi_\nu)=\int_M\left[\int_H\varphi(yx)\mathrm{d}\nu(y)\right]\mathrm{d}\beta_{f,g}(p(x)).$$

Prema istoj propoziciji $\beta_{f,f}$ je pozitivna mjera na M i $\beta_{f,f}=0$ ako i samo ako je $f=0$ lokalno gotovo svuda. Lako se vidi da je preslikavanje $(f,g)\mapsto\beta_{f,g}$ seskvilinearno i da je $\beta_{g,f}=\overline{\beta_{f,g}}$.

Neka je $\mathcal{F}_2=\mathcal{F}_2(G,\sigma)$ skup svih $f\in\mathcal{F}$ takvih da je $\beta_{f,f}$ ograničena mjera, $\beta_{f,f}(M)<+\infty$. Tada je $\mathcal{F}_2$ potprostor od $\mathcal{F}$. Doista, za $\varphi\in C_0^+(G)$ i za $f,g\in\mathcal{F}_2$ imamo

$$\beta_{f+g,f+g}(\varphi_\nu)=\int_G\|f(x)+g(x)\|^2\varphi(x)\mathrm{d}\mu(x)\le$$

$$\le 2\int_G\|f(x)\|^2\varphi(x)\mathrm{d}\mu(x)+2\int_G\|g(x)\|^2\varphi(x)\mathrm{d}\mu(x)=2\beta_{f,f}(\varphi_\nu)+2\mu_{g,g}(\varphi_\nu).$$

Odatle je

$$\beta_{f+g,f+g}(M)\le 2\beta_{f,f}(M)+2\beta_{g,g}(M)<+\infty\qquad\Longrightarrow\qquad f+g\in\mathcal{F}_2.$$

Time smo dokazali $f,g\in\mathcal{F}_2\ \Rightarrow\ f+g\in\mathcal{F}_2$. Zatvorenost u odnosu na množenje skalarima je evidentna, pa je time dokazano da je $\mathcal{F}_2$ potprostor od $\mathcal{F}$.

Neka su $f,g\in\mathcal{F}_2$. Tada vrijedi za svaki $x\in G$:

$$(f(x)|g(x))=\frac{1}{4}\left[\|f(x)+g(x)\|^2-\|f(x)-g(x)\|^2+i\|f(x)+ig(x)\|^2-i\|f(x)-ig(x)\|^2\right].$$

Odatle slijedi

$$\beta_{f,g}=\frac{1}{4}\left(\beta_{f+g,f+g}-\beta_{f-g,f-g}+i\beta_{f+ig,f+ig}-i\beta_{f-ig,f-ig}\right)$$

odakle zaključujemo da je $\beta_{f,g}$ ograničena mjera na M. Sada za $f,g\in\mathcal{F}_2$ definiramo

$$(f|g)=\beta_{f,g}(1_M)$$

gdje je 1_M konstanta 1 na M. Tada vrijedi:

(*a*) $(f|f)\ge 0\ \ \forall f\in\mathcal{F}_2$.

(*b*) $(f|f)=0$ ako i samo ako je $f=0$ lokalno gotovo svuda na G.

(*c*) $(g|f)=\overline{(f|g)}\ \ \forall f,g\in\mathcal{F}_2$.

(*d*) $f\mapsto(f|g)$ je linearan funkcional na $\mathcal{F}_2\ \ \forall g\in\mathcal{F}_2$.

Za $f\in\mathcal{F}$ stavimo

$$\|f\|_2=\sqrt{\beta_{f,f}(M)}\in[0,+\infty].$$

Tada je $\mathcal{F}_2 = \{f \in \mathcal{F};\ \|f\|_2 < +\infty\}$ i za $f \in \mathcal{F}_2$ je $\|f\|_2 = \sqrt{(f|f)}$.

Sada ćemo na standardan način iz predunitarnog prostora $\mathcal{F}_2$ konstruirati unitaran prostor prijelazom na kvocijent. Stavimo

$$\mathcal{N} = \mathcal{N}(G,\sigma) = \{f \in \mathcal{F};\ \|f\|_2 = 0\} = \{f \in \mathcal{F};\ f = 0 \text{ lokalno gotovo svuda na } G\}.$$

Tada je potprostor $\mathcal{N}$ sadržan u $\mathcal{F}_2$. Stavimo $\mathcal{H} = \mathcal{H}(G,\sigma) = \mathcal{F}_2/\mathcal{N}$. To je prostor klasa ekvivalencije funkcija iz $\mathcal{F}_2$, pri čemu je relacija ekvivalencije definirana kao jednakost lokalno gotovo svuda. Tada $(\,\cdot\,|\,\cdot\,)$ prelazi u skalarni produkt na $\mathcal{H}$ i $\mathcal{H}$ postaje unitaran prostor.

Cilj nam je dokazati potpunost, tj. da je $\mathcal{H}$ Hilbertov prostor. to ćemo postići imitiranjem dokaza da je L_2-prostor potpun.

Lema 6.1.1. *Za svaki kompaktan skup $K \subseteq G$ postoji $N \geq 0$ takav da za svako $f \in \mathcal{F}_2$ vrijedi*

$$\int_K \|f(x)\|\, d\mu(x) \leq N \cdot \|f\|_2.$$

Dokaz: Neka je $\varphi \in C_0^+(G)$ takva da je $\varphi(x) = 1\ \ \forall x \in K$. Stavimo $N = \sqrt{\mu(K)\|\varphi_\nu\|_\infty}$. Imamo

$$\int_K \|f(x)\|^2 \mathrm{d}\mu(x) \leq \int_G \varphi(x)\|f(x)\|^2 \mathrm{d}\mu(x) =$$

$$= \int_M \varphi_\nu(m)\mathrm{d}\beta_{f,f}(m) \leq \beta_{f,f}(M)\cdot\|\varphi_\nu\|_\infty = \|\varphi_\nu\|_\infty \cdot \|f\|_2^2.$$

Stoga je

$$\int_K \|f(x)\|\mathrm{d}\mu(x) \leq \left(\int_K \|f(x)\|^2\mathrm{d}\mu(x)\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_K 1\mathrm{d}\mu(x)\right)^{\frac{1}{2}} \leq \sqrt{\mu(K)\|\varphi_\nu\|_\infty}\|f\|_2 = N\cdot\|f\|_2.$$

U daljnjem ćemo za svaki kompaktan podskup $K \subseteq G$ sa $N(K)$ označiti infimum skupa svih takvih $N \geq 0$. Dakle, vrijedi

$$\int_K \|f(x)\|\mathrm{d}\mu(x) \leq N(K)\cdot\|f\|_2, \qquad \forall f \in \mathcal{F}_2, \quad \forall \text{ kompaktan } K \subseteq G.$$

Propozicija 6.1.1. *$\mathcal{H}$ je Hilbertov prostor.*

Dokaz: Neka je $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz u $\mathcal{F}_2$ čije klase ekvivalencije u $\mathcal{H}$ čine Cauchyjev niz u $\mathcal{H}$. Neka je $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ podniz takav da vrijedi

$$\|f_{n_k} - f_{n_{k+1}}\|_2 \leq 2^{-k} \qquad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Stavimo $g_k = f_{n_k}$.

Neka je $K \subseteq G$ kompaktan skup. Tada vrijedi

$$\int_K \|g_k(x) - g_{k+1}(x)\|\mathrm{d}\mu(x) \leq N(K)\cdot 2^{-k}, \qquad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Slijedi

$$\int_K \left(\sum_{k=1}^{\infty} \|g_k(x) - g_{k+1}(x)\|\right)\mathrm{d}(x) = \int_K \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} \|g_k(x) - g_{k+1}(x)\|\right)\mathrm{d}\mu(x) \leq$$

$$\leq \lim_{n\to\infty}\int_K\left(\sum_{k=1}^n \|g_k(x)-g_{k+1}(x)\|\right)\mathrm{d}\mu(x) = \sum_{k=1}^\infty\int_K \|g_k(x)-g_{k+1}(x)\|\mathrm{d}\mu(x) \leq N(K)\sum_{k=1}^\infty 2^{-k} = N(K).$$

Stavimo

$$F(x) = \sum_{k=1}^\infty \|g_k(x)-g_{k+1}(x)\|.$$

Tada je

$$\int_K F(x)\mathrm{d}\mu(x) \leq N(K).$$

Prema tome postoji $\mu-$zanemariv skup $S \subseteq K$ takav da vrijedi

$$x \in K\setminus S \qquad \Longrightarrow \qquad F(x) < +\infty.$$

Dakle,

$$x \in K\setminus S \qquad \Longrightarrow \qquad \sum_{k=1}^\infty \|g_k(x)-g_{k+1}(x)\| < +\infty.$$

Neka je $x \in K\setminus S$ i $\varepsilon > 0$. Tada postoji $\ell \in \mathbb{N}$ takav da je

$$\sum_{k=\ell}^\infty \|g_k(x)-g_{k+1}(x)\| \leq \varepsilon.$$

Neka su $m > r \geq \ell$. Tada je

$$\|g_r(x)-g_m(x)\| = \left\|\sum_{k=r}^{m-1}(g_k(x)-g_{k+1}(x))\right\| \leq \sum_{k=\ell}^\infty \|g_k(x)-g_{k+1}(x)\| \leq \varepsilon.$$

Dakle, za svaki $x \in K\setminus S$ je $(g_k(x))_{k\in\mathbb{N}}$ Cauchyjev niz u $\mathcal{K}$.

Stavimo sada

$$L = \{x \in G;\ (g_k(x))_{k\in\mathbb{N}} \text{ nije Cauchyjev niz u } \mathcal{K}\}.$$

Prema dokazanom vrijedi $\mu(L\cap K) = 0$ za svaki kompaktan skup $K \subseteq G$. Drugim riječima, L je lokalno $\mu-$zanemariv skup u G. Stavimo

$$f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{k\to\infty} g_k(x) & \text{ako je } x \in G\setminus L \\ \\ 0 & \text{ako je } x \in L. \end{cases}$$

Funkcija f je lokalno gotovo svuda limes niza izmjerivih funkcija, pa slijedi da je f izmjeriva. Nadalje, $yL = L\ \ \forall y \in H$, pa je očito da funkcija f zadovoljava uvjet (B) iz definicije prostora $\mathcal{F}$.

Za vektore $\xi, \eta \in \mathcal{K}$ imamo $\|\xi+\eta\|^2 \leq 2\|\xi\|^2 + 2\|\eta\|^2$. Indukcijom po k odatle izvodimo da za $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k \in \mathcal{K}$ vrijedi

$$\left\|\sum_{j=1}^k \xi_j\right\|^2 \leq \sum_{j=1}^k 2^j\|\xi_j\|^2.$$

Neka je sada $\varphi \in C_0^+(G)$ proizvoljna. Za $r, k \in \mathbb{N}$ imamo redom

$$\int_G \|g_r(x)-g_{r+k}(x)\|^2\varphi(x)\mathrm{d}\mu(x) = \int_G \left\|\sum_{j=1}^k(g_{r+j-1}(x)-g_{r+j}(x))\right\|^2\varphi(x)\mathrm{d}\mu(x) \leq$$

$$\leq \sum_{j=1}^{k} 2^j \int_G \|g_{r+j-1}(x) - g_{r+j}(x)\|^2 \varphi(x) \mathrm{d}\mu(x) = \sum_{j=1}^{k} 2^j \beta_{g_{r+j-1}-g_{r+j}, g_{r+j-1}-g_{r+j}}(\varphi_\nu) \leq$$

$$\leq \sum_{j=1}^{k} 2^j \|g_{r+j-1} - g_{r+j}\|_2^2 \cdot \|\varphi_\nu\|_\infty \leq \|\varphi_\nu\|_\infty \sum_{j=1}^{k} 2^{j-2r-2j+2} = 2^{2-2r} \|\varphi_\nu\|_\infty.$$

Primjenom Fatouove leme dobivamo

$$\int_G \|g_r(x) - f(x)\|^2 \varphi(x) \mathrm{d}\mu(x) = \int_G \lim_{k\to\infty} \|g_r(x) - g_{r+k}(x)\|^2 \varphi(x) \mathrm{d}\mu(x) \leq$$

$$\leq \liminf_{k\to\infty} \int_G \|g_r(x) - g_{r+k}(x)\|^2 \varphi(x) \mathrm{d}\mu(x) \leq 2^{2-2r} \|\varphi_\nu\|_\infty.$$

Budući da ta ocjena vrijedi za sve $\varphi \in C_0^+(G)$ zaključujemo da je $x \mapsto \|g_r(x) - f(x)\|^2$ lokalno integrabilna funkcija na G. Stoga je $g_r - f \in \mathcal{F}$, a kako je $g_r \in \mathcal{F}$, slijedi $f \in \mathcal{F}$.

Nadalje, slijedi

$$\beta_{g_r - f, g_r - f}(\varphi_\nu) \leq 2^{2-2r} \|\varphi_\nu\|_\infty \qquad \forall \varphi \in C_0^+(G).$$

Odatle je $\|g_r - f\|_2^2 \leq 2^{2-2r}$, tj. $\|g_r - f\|_2 \leq 2^{1-r}$. Stoga je $g_r - f \in \mathcal{F}_2$, a kako je $g_r \in \mathcal{F}_2$, to je i $f \in \mathcal{F}_2$. Nadalje, klasa od f je limes niza klasa od (g_r) u $\mathcal{H}$. Kako je (g_r) podniz niza (f_n), slijedi da je Cauchyjev niz klasa od (f_n) konvergentan u $\mathcal{H}$.

Napomena: Dokazali smo nešto više: za svaki Cauchyjev niz u $\mathcal{H}$ i za svaki niz predstavnika u $\mathcal{F}_2$ tog niza možemo izabrati podniz koji konvergira prema predstavniku limesa.

Sa $C_0(G, \mathcal{K})$ ćemo označavati prostor svih neprekidnih funkcija sa G u $\mathcal{K}$ s kompaktnim nosačem. Tenzorski produkt $C_0(G) \otimes \mathcal{K}$ možemo shvaćati potprostorom od $C_0(G, \mathcal{K})$ uz identifikaciju

$$(\varphi \otimes \xi)(x) = \varphi(x)\xi, \qquad \varphi \in C_0(G), \quad \xi \in \mathcal{K}.$$

Pretpostavimo da je funkcija $f \in \mathcal{F}$ neprekidna. Budući da vrijedi

$$f(yx) = \sqrt{\frac{\Delta(y)}{\delta(y)}}\, \sigma(y) f(x), \qquad x \in G, \quad y \in H,$$

vidimo da je nosač od f lijevo $H-$invarijantan, tj. $Supp\, f = p^{-1}(p(Supp\, f))$. Posebno, $Supp\, f$ je zatvoren podskup od M.

Neka je

$$C_0(G, \sigma) = \{f \in \mathcal{F};\ p(Supp\, f) \text{ je kompaktan podskup od } M\}.$$

Po propoziciji 4.4.2. za svaku funkciju $f \in C_0(G, \sigma)$ postoji kompaktan skup $C \subseteq G$ takav da je $p(Supp\,) = p(C)$; slijedi $Supp\, f = p^{-1}(p(C)) = HC$.

Lema 6.1.2. *(a) $C_0(G, \sigma)$ je potprostor od $\mathcal{H}$.*

(b) Za $f \in C_0(G, \sigma)$ i $g \in \mathcal{F}_2$ i za $\varphi \in C_0(G)$ takvu da je $\varphi_\nu(m) = 1$ $\forall m \in p(Supp\, f)$ vrijedi

$$(f|g) = \int_G \varphi(x)(f(x)|g(x))d(x).$$

Dokaz: (a) Neka je $f \in C_0(G,\sigma)$ i neka je $\psi \in C_0^+(G)$ takva da je $\psi_\nu(m) = 0 \ \ \forall m \in p(Supp\, f)$. Za $x \in Supp\, f$ je tada

$$0 = \psi_\nu(p(x)) = \int_H \psi(yx)\mathrm{d}\nu(y),$$

pa kako je ψ neprekidna i nenegativna, zaključujemo da je $\psi(x) = 0$. To znači da je

$$\|f(x)\|^2\psi(x) = 0 \qquad \forall x \in G,$$

pa slijedi

$$\beta_{f,f}(\psi_\nu) = \int_G \|f(x)\|^2\psi(x)\mathrm{d}\mu(x) = 0.$$

Budući da je $\psi \mapsto \psi_\nu$ prema tvrdnji (a) propozicije 4.5.1. surjekcija sa $C_0^+(G)$ na $C_0^+(M)$, dokazali smo da vrijedi

$$\gamma \in C_0^+(M), \quad \gamma(p(Supp\, f)) = \{0\} \qquad \Longrightarrow \qquad \beta_{f,f}(\gamma) = 0.$$

Dakle, $\beta_{f,f}(M \setminus p(Supp\, f)) = 0$, pa slijedi $\beta_{f,f}(M) = \beta_{f,f}(p(Supp\, f)) < +\infty$, a to znači da je $f \in \mathcal{F}_2$.

Napokon, za neprekidne funkcije jednakost u $\mathcal{H}$ (odnosno, jednakost lokalno gotovo svuda) znači jednakost funkcija po točkama, dakle je stvarno $C_0(G,\sigma)$ potprostor od $\mathcal{H}$.

(b) Za $f \in C_0(G,\sigma)$, $g \in \mathcal{F}_2$ i $\psi \in C_0^+(G)$ takvu da je $\psi_\nu(m) = 0 \ \ \forall m \in p(Supp\, f)$ kao u (a) nalazimo da je $\psi(x)(f(x)|g(x)) = 0 \ \ \forall x \in G$, dakle, $\beta_{f,g}(G \setminus p(Supp\, f)) = 0$. Stoga za funkciju $\varphi \in C_0(G)$, za koju je $\varphi_\nu(m) = 1 \ \ \forall m \in M$, nalazimo

$$(f|g) = \beta_{f,g}(M) = \beta_{f,g}(\varphi_\nu) = \int_G \varphi(x)(f(x)|g(x))\mathrm{d}\mu(x).$$

Za $f \in C_0(G,\mathcal{K})$ definiramo funkciju $T_\sigma f : G \to \mathcal{K}$ sa

$$(T_\sigma f)(x) = \int_H \sqrt{\frac{\delta(y)}{\Delta(y)}}\,\sigma(y^{-1}f(yx)\mathrm{d}\nu(y), \qquad x \in G.$$

Lema 6.1.3. *T_σ je linearna surjekcija sa $C_0(G,\mathcal{K})$ na $C_0(G,\sigma)$.*

Dokaz: Neka je $f \in C_0(G,\mathcal{K})$ i $x_0 \in G$. Dokazat ćemo najprije da je funkcija $g = T_\sigma f$ neprekidna u točki x_0. Stavimo $K = Supp\, f$. Neka je $\varepsilon > 0$ i neka je C kompaktna okolina od x_0. Za $x \in C$ imamo

$$\|g(x_0) - g(x)\| \leq \int_H \sqrt{\frac{\delta(y)}{\Delta(y)}}\|f(yx_0) - f(yx)\|\mathrm{d}\nu(y) = \int_{H\cap KC^{-1}} \sqrt{\frac{\delta(y)}{\Delta(y)}}\|f(yx_0) - f(yx)\|\mathrm{d}\nu(y) \leq$$

$$\leq \max\left\{\sqrt{\frac{\delta(y)}{\Delta(y)}};\ y \in H \cap KC^{-1}\right\} \cdot \nu(H \cap KC^{-1}) \cdot \max\{\|f(yx_0) - f(yx)\|;\ y \in H \cap KC^{-1}\}.$$

Funkcija f je neprekidna i ima kompaktan nosač, pa je ona uniformno neprekidna. Stoga postoji okolina U od e u G takva da je $x_0 U \subseteq C$ i da vrijedi

$$a^{-1}b \in U \qquad \Longrightarrow \qquad \max\left\{\sqrt{\frac{\delta(y)}{\Delta(y)}};\ y \in H \cap KC^{-1}\right\} \cdot \nu(H \cap KC^{-1}) \cdot \|f(b) - f(a)\| \leq \varepsilon.$$

Sada za $x \in x_0 U$ i $y \in H$ vrijedi $y \in C$ i $(yx_0)^{-1}(yx) = x_0^{-1}x \in U$, pa iz gornjih nejednakosti slijedi $\|g(x_0) - g(x)\| \leq \varepsilon$. Time je dokazano da je funkcija $g = T_\sigma f : G \to \mathcal{K}$ neprekidna u svakoj točki $x_0 \in G$.

Nadalje, zbog desne invarijantnosti mjere ν na H za $y \in H$ i $x \in G$ imamo

$$g(yx) = \int_H \sqrt{\frac{\delta(z)}{\Delta(z)}}\,\sigma(z^{-1})f(zyx)\mathrm{d}\nu(z) = \int_H \sqrt{\frac{\delta(zy^{-1})}{\Delta(zy^{-1})}}\,\sigma(yz^{-1})f(zx)\mathrm{d}\nu(z) = \sqrt{\frac{\Delta(y)}{\delta(y)}}\,\sigma(y)g(x).$$

Budući da je g neprekidna zahtjev lokalne integrabilnosti je ispunjen, pa zaključujemo da je $g \in \mathcal{F}$.

Za $x \notin H \cdot (Supp\, f)$ je $f(yx) = 0 \ \ \forall y \in H$, pa je $g(x) = 0$. Slijedi da je $Supp\, g \subseteq H \cdot (Supp\, f)$, dakle, $p(Supp\, g) \subseteq p(Supp\, f)$. Zaključujemo da je $g \in C_0(G, \sigma)$. Time je dokazano da je T_σ (očito linearan) operator sa $C_0(G, \mathcal{K})$ u $C_0(G, \sigma)$.

Treba još dokazati surjektivnost. Neka je $f \in C_0(G, \sigma)$. Neka je $K \subseteq G$ kompaktan skup takav da je $p(K) = p(Supp\, f)$. Neka je $\psi \in C_0^+(G)$ takva da je $\psi(x) > 0 \ \ \forall x \in K$. Definiramo funkciju $F : G \to \mathcal{K}$ sa

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\psi_\nu(p(x))}F(x) & \text{ako je } \psi_\nu(p(x)) > 0 \\ \\ 0 & \text{ako je } \psi_\nu(p(x)) = 0. \end{cases}$$

Dokažimo da je funkcija F neprekidna. Stavimo

$$U = G \setminus HK \qquad \text{i} \qquad V = \{x \in G;\ \psi_\nu(p(x)) > 0\}.$$

U i V su otvoreni podskupovi od G. Ako je $x \in G \setminus U = HK$, onda je $\psi(yx) > 0$ za neko $y \in H$, pa slijedi da je $\psi_\nu(p(x)) > 0$, a to znači $x \in V$. Prema tome je $G \setminus U \subseteq V$, odnosno, $G = U \cup V$.

Za $x \in U$ je $f(x) = 0$, pa slijedi $F(x) = 0$. Dakle je $F|U = 0$ i posebno, restrikcija $F|U$ je neprekidna. S druge strane, očito je iz defincije da je

$$F|V = \frac{1}{(\psi_\nu \circ p)|V} \cdot f|V$$

pa vidimo da je i restrikcija $F|V$ neprekidna. Kako su U i V otvoreni i vrijedi $G = U \cup V$, zaključujemo da je funkcija $F : G \to \mathcal{K}$ neprekidna. Nadalje, iz definicije funkcije F je jasno da vrijedi

$$\psi_\nu(p(x))F(x) = f(x) \qquad \forall x \in G.$$

Također, budući da je $f \in C_0(G, \sigma)$ i budući da je skalarna funkcija $\psi_\nu \circ p$ lijevo $H-$invarijantna, slijedi da je $F \in \mathcal{F}$, odnosno

$$F(yx) = \sqrt{\frac{\Delta(y)}{\delta(y)}}\,\sigma(y)F(x), \qquad \forall x \in G, \quad \forall y \in H.$$

Definirajmo sada $g = \psi \cdot F \in C_0(G, \mathcal{K})$. Tada je

$$(T_\sigma g)(x) = \int_H \sqrt{\frac{\delta(y)}{\Delta(y)}}\,\sigma(y^{-1})\psi(yx)F(yx)\mathrm{d}\nu(y) = \int_H \psi(yx)\mathrm{d}\nu(y) \cdot F(x) = \psi_\nu(p(x))F(x) = f(x).$$

Dakle, $f = T_\sigma g$ i time je dokazana surjektivnost linearnog operatora $T_\sigma : C_0(G, \mathcal{K}) \to C_0(G, \sigma)$.

Lema 6.1.4. *Za svako $x \in G$ je $\{f(x);\ f \in C_0(G, \sigma)\}$ gust potprostor od $\mathcal{K}$. Nadalje, za sve $x \in G$ je to jedan te isti potprostor.*

Dokaz: Neka je $\xi \in \mathcal{K}$ i $\varepsilon > 0$. Neka je U okolina od e u G takva da vrijedi

$$y \in U \cap H \qquad \Longrightarrow \qquad \|\sigma(y^{-1})\xi - \xi\| \leq \varepsilon.$$

Neka je $\varphi \in C_0^+(G)$ takva da je

$$Supp\, \varphi \subseteq U \qquad \text{i} \qquad \int_H \sqrt{\frac{\delta(y)}{\Delta(y)}}\varphi(y)\mathrm{d}\nu(y) = 1.$$

Tada je

$$\|[T_\sigma(\varphi \otimes \xi)](e) - \xi\| = \left\| \int_H \sqrt{\frac{\delta(y)}{\Delta(y)}}\, \varphi(y)\sigma(y^{-1})\xi \mathrm{d}\nu(y) - \int_H \sqrt{\frac{\delta(y)}{\Delta(y)}}\, \varphi(y)\mathrm{d}\nu(y) \cdot \xi \right\| \leq$$

$$\leq \int_U \sqrt{\frac{\delta(y)}{\Delta(y)}}\varphi(y)\|\sigma(y^{-1}\xi - \xi\|\mathrm{d}\nu(y) \leq \varepsilon \int_H \sqrt{\frac{\delta(y)}{\Delta(y)}}\, \varphi(y)\mathrm{d}\nu(y) = \varepsilon.$$

Prema tome, $\{f(e);\ f \in C_0(G,\sigma)\}$ je gusto u $\mathcal{K}$.

Za $x \in G$ je ρ_x bijekcija sa $C_0(G,\sigma)$ na $C_0(G,\sigma)$. Odatle je

$$\{f(e);\ f \in C_0(G,\sigma)\} = \{f(x);\ f \in C_0(G,\sigma)\} \qquad \forall x \in G.$$

Lema 6.1.5. *Za $\varphi \in C_0(G)$, $\xi \in \mathcal{K}$ i $g \in \mathcal{F}_2$ vrijedi*

$$(T_\sigma(\varphi \otimes \xi)|g) = \int_G \varphi(x)(\xi|g(x))\,d\mu(x).$$

Dokaz: Neka je $\psi \in C_0(G)$ takva da je $\psi_\nu(m) = q \ \ \forall m \in p(Supp\, \varphi)$. Tada je $\psi_\nu(m) = 1$ $\forall m \in p(T_\sigma(\varphi \otimes \xi))$, pa po lemi 6.1.2. imamo

$$(T_\sigma(\varphi \otimes \xi)|g) = \int_G \psi(x)(T_\sigma(\varphi \otimes \xi)(x)|g(x))\mathrm{d}\mu(x) =$$

$$= \int_G \psi(x) \left[\int_H \sqrt{\frac{\delta(y)}{\Delta(y)}}\, \varphi(yx)(\sigma(y^{-1}\xi|g(x))\mathrm{d}\nu(y)\right] \mathrm{d}\mu(x) =$$

$$= \int_H \sqrt{\frac{\delta(y)}{\Delta(y)}} \left[\int_G \psi(x)\varphi(yx)(\xi|\sigma(y)g(x))\mathrm{d}\mu(x)\right] \mathrm{d}\nu(y) =$$

$$= \int_H \frac{\delta(y)}{\Delta(y)} \left[\int_G \psi(x)\varphi(yx)(\xi|g(yx))\mathrm{d}\mu(x)\right] \mathrm{d}\nu(y) =$$

$$= \int_H \delta(y) \left[\int_G \psi(y^{-1}x)\varphi(x)(\xi|g(x))\mathrm{d}\mu(x)\right] \mathrm{d}\nu(y) =$$

$$= \int_G \varphi(x)(\xi|g(x)) \left[\int_H \delta(y)\psi(y^{-1}x)\mathrm{d}\nu(y)\right] \mathrm{d}\mu(x) =$$

$$= \int_G \varphi(x)(\xi|g(x))\psi_\nu(p(x))\mathrm{d}\mu(x) = \int_G \varphi(x)(\xi|g(x))\mathrm{d}\mu(x).$$

Lema 6.1.6. *Za $\varphi \in C_0(G)$ i $\xi \in \mathcal{K}$ vrijedi*

$$\|T_\sigma(\varphi \otimes \xi)\|_2 \leq N(Supp\, \varphi) \cdot \|\varphi\|_\infty \cdot \|\xi\|.$$

Napominjemo da se u iskazu koristi oznaka $N(K)$ za kompaktan poskup $K \subseteq G$ uvedena nakon leme 6.1.1.

Dokaz: Prema lemama 6.1.5. i 6.1.1. imamo za svaku funkciju $g \in \mathcal{F}_2$:

$$|(T_\sigma(\varphi \otimes \xi)|g)| \leq \int_G |\varphi(x)| \cdot \|\xi\| \cdot \|g(x)\| \, \mathrm{d}\mu(x) \leq$$

$$\leq \|\varphi\|_\infty \cdot \|\xi\| \cdot \int_{Supp\,\varphi} \|g(x)\| \mathrm{d}\mu(x) \leq N(Supp\,\varphi) \cdot \|\varphi\|_\infty \cdot \|\xi\| \cdot \|g\|_2.$$

Uzmemo li sada supremum po $g \in \mathcal{F}_2$ (odnosno, po $g \in \mathcal{H}$) takvima da je $\|g\|_2 \leq 1$, tvrdnja slijedi.

Propozicija 6.1.2. *(a) Ako je $\mathcal{V}$ gust potprostor od $\mathcal{K}$, tada je $T_\sigma(C_0(G) \otimes \mathcal{V})$ gust potprostor od $\mathcal{H}$.*

(b) $C_0(G, \sigma)$ i $T_\sigma(C_0(G) \otimes \mathcal{K}_G)$ su gusti potprostori od $\mathcal{H}$.

Dokaz: (a) Pretpostavimo da je

$$(T_\sigma(\varphi \otimes \xi))|g) = 0 \qquad \forall \varphi \in C_0(G) \quad \text{i} \quad \forall \xi \in \mathcal{K}.$$

Pomoću leme 6.1.5. odatle slijedi da za svaki $\xi \in \mathcal{K}$ vrijedi $(\xi|g(x)) = 0$ za lokalno gotovo sve $x \in G$.

Neka je $K \subseteq G$ kompaktan skup. Tada prema propoziciji 10. u [Bourbaki, **??mjera??**, Gl.IV.t.5] postoji separabilan potprostor $\mathcal{L}$ od $\mathcal{K}$ takav da je $g(x) \in \mathcal{L}$ za gotovo sve $x \in K$. To znači da postoje $N \subseteq K$, $\mu(N) = 0$, izmjerive funkcije $g_n : K \to \mathbb{C}$ i ortonormiran skup $\{\xi_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ takvi da je

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)\xi_n \qquad \forall x \in K \setminus N.$$

Stavimo

$$N_n = \{x \in K;\ (g(x)|\xi_n) \neq 0\}, \qquad S = N \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} N_n.$$

Tada je prema dokazanom $\mu(N_n) = 0\ \ \forall n \in \mathbb{N}$, dakle, $\mu(S) = 0$. Imamo

$$x \in K \setminus S \qquad \Longrightarrow \qquad 0 = (g(x)|\xi_n) = g_n(x) \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad \Longrightarrow \qquad g(x) = 0.$$

Dakle, $g|(K \setminus S) = 0$ i time je dokazano da je $g(x) = 0$ za lokalno gotovo sve $x \in G$, tj. $g = 0$ u $\mathcal{H}$.

Dakle, dokazali smo da je potprostor $T_\sigma(C_0(G) \otimes \mathcal{K})$ gust u $\mathcal{H}$. Ako je $\mathcal{V}$ gust u $\mathcal{K}$ onda pomoću leme 6.1.6. slijedi da je $T_\sigma(C_0(G) \otimes \mathcal{V})$ gust u $T_\sigma(C_0(G) \otimes \mathcal{K})$, dakle, i u $\mathcal{H}$.

(b) Prema lemi 6.1.4. $\mathcal{K}_G$ je gust potprostor od $\mathcal{K}$, pa iz (a) slijedi da je $T_\sigma(C_0(G) \otimes \mathcal{K}_G)$ gust potprostor od $\mathcal{H}$.

Napokon, prema lemi 6.1.3. $C_0(G, \sigma) = T_\sigma(C_0(G, \mathcal{K})) \supseteq T_\sigma(C_0(G) \otimes \mathcal{K})$, pa je prema (a) $C_0(G, \sigma)$ gust potprostor od $\mathcal{H}$.

Teorem 6.1.1. *Linearna bijekcija $\rho_x : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ definira bijekciju $\mathcal{F}_2 \to \mathcal{F}_2$ i prijelazom na kvocijent dobivamo unitaran operator $\pi^\sigma(x)$ na prostoru $\mathcal{H}$. Tako dobiveno preslikavanje $\pi^\sigma : G \to U(\mathcal{H})$ je unitarna reprezentacija od G na $\mathcal{H}$.*

Dokaz: Za $f \in \mathcal{F}$ i $\varphi \in C_0(G)$ imamo

$$\beta_{\rho_x f,\rho_x f}(\varphi_\nu) = \int_G \varphi(y)\|f(yx\|^2 \mathrm{d}\mu(y) = \int_G (\rho_{x^{-1}}\varphi)(y)\|f(y)\|^2 \mathrm{d}\mu(y) = \beta_{f,f}((\rho_{x^{-1}}\varphi)_\nu) = \beta_{f,f}(\rho_{x^{-1}}\varphi_\nu).$$

Pri tome za $\psi \in C_0(M)$ i za $x, y \in G$ upotrebljavamo oznaku $(\rho_x\psi)(p(y)) = \psi(p(yx))$. Stavimo

$$\mathcal{P} = \{\varphi \in C_0^+(G);\ \varphi_\nu(m) \leq 1\ \forall m \in M\}.$$

Za $\beta \in \mathfrak{M}^+(M)$ je tada

$$\beta(M) = \sup\{\beta(\varphi_\nu);\ \varphi \in \mathcal{P}\},$$

pa slijedi

$$\|\rho_x f\|_2^2 = \beta_{\rho_x f,\rho_x f}(M) = \beta_{f,f}(M) = \|f\|_2^2.$$

Time je dokazano da je $\rho_x\mathcal{F}_2 \subseteq \mathcal{F}_2$, a kako je i $\rho_{x^{-1}}\mathcal{F}_2 \subseteq \mathcal{F}_2$, to je $\rho_x|\mathcal{F}_2$ bijekcija sa $\mathcal{F}_2$ na $\mathcal{F}_2$. Također vidimo da je $\rho_x|\mathcal{N}$ bijekcija $\mathcal{N}$ na $\mathcal{N}$. Dakle, prijelazom na kvocijent $\mathcal{F}_2/\mathcal{N} = \mathcal{H}$ dolazimo do bijekcije $\pi^\sigma(x) : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$. Nadalje, prema dokazanoj jednakosti normi svaki operator $\pi^\sigma(x)$ je unitaran, a iz $\rho_{xy} = \rho_x\rho_y$ slijedi da je $\pi^\sigma : G \to U(\mathcal{H})$ homomorfizam grupa.

Budući da je po propoziciji 6.1.2. $T_\sigma(C_0(G) \otimes \mathcal{K})$ gusto u $\mathcal{H}$, da dokažemo da je π^σ unitarna reprezentacija od G na $\mathcal{H}$, dovoljno je dokazati da je preslikavanje $x \mapsto \pi^\sigma(x)T_\sigma(\varphi \otimes \xi)$ neprekidno u jedinici e u G $\forall \varphi \in C_0(G)$ i $\forall \xi \in \mathcal{K}$. Međutim, $\pi^\sigma(x)T_\sigma(\varphi \otimes \xi) = T_\sigma(\rho_x\varphi \otimes \xi)$ i prema lemi 6.1.6. za sve x iz kompaktne okoline C od e u G i za $K = Supp\,\varphi$ vrijedi

$$\|\pi^\sigma T_\sigma(\varphi \otimes \xi) - T_\sigma(\varphi \otimes \xi)\|_2 = \|T_\sigma((\rho_x\varphi - \varphi) \otimes \xi)\|_2 \leq N(KC^{-1}) \cdot \|\rho_x\varphi - f\|_\infty \cdot \|\xi\|$$

a to teži k nuli kada x teži prema e.

Za reprezentaciju π^σ grupe G kažemo da je **inducirana** reprezentacijom σ podgrupe H.

6.2 Reprezentacije homogenih prostora

Kao i prije u cijeloj ovoj točki G je lokalno kompaktna grupa, H je njena zatvorena podgrupa, μ i ν su desne Haarove mjere na grupama G i H, Δ i δ su modularne funkcije grupa G i H, p je kanonska projekcija $G \to M = H\backslash G$. Na lokalno kompaktnom kvocijentnom prostoru M grupa G djeluje tranzitivno zdesna: $p(x)y = p(xy),\ x, y \in G$. To se djelovanje prenosi na funkcije na M

$$(\rho_x\varphi)(m) = \varphi(mx), \qquad x \in G, \quad m \in M,$$

i na mjere na prostoru M

$$(\rho_x\beta)(\varphi) = \beta(\rho_{x^{-1}}\varphi), \qquad x \in G, \quad \beta \in \mathfrak{M}(M), \quad \varphi \in C_0(M).$$

U opisanoj situaciji uređeni par (M, G) zove se **homogeni prostor**. Promatrat ćemo sada teoriju reprezentacija homogenih prostora. **Reprezentacija homogenog prostora** (M, G) na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$ je uređeni par $(\mathcal{E}, \pi)$, gdje je

(A) $\mathcal{E}$ nedegenerirana reprezentacija C^*-algebre $C_\infty(M)$ na prostoru $\mathcal{H}$,

(B) π unitarna reprezentacija lokalno kompaktne grupe G na prostoru $\mathcal{H}$,

(C) $\pi(x)\mathcal{E}(\varphi)\pi(x^{-1}) = \mathcal{E}(\rho_x\varphi)\ \ \forall x \in G$ i $\forall \varphi \in C_\infty(M)$.

Neka je σ unitarna reprezentacija podgrupe H na Hilbertovom prostoru $\mathcal{K}$ i neka je π^σ njome inducirana reprezentacija grupe G na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H} = \mathcal{H}(G,\sigma)$. Za $\varphi \in C_\infty(M)$ definiramo operator $\mathcal{E}^\sigma(\varphi) : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ sa

$$(\mathcal{E}^\sigma(\varphi)f)(x) = \varphi(p(x))f(x), \qquad x \in G, \quad f \in \mathcal{H}.$$

Očito je $\mathcal{E}^\sigma$ reprezentacija C^*-algebre $C_\infty(M)$ na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$. Nadalje, za $x, y \in G$, $\varphi \in C_\infty(M)$ i $f \in \mathcal{H}$ imamo

$$\left[\pi^\sigma(x)\mathcal{E}^\sigma(\varphi)\pi^\sigma(x^{-1})f\right](y) = \left[\mathcal{E}^\sigma(\varphi)\pi^\sigma(x^{-1})f\right](yx) =$$

$$= \varphi(p(yx))f(y) = (\rho_x\varphi)(p(y))f(y) = \left[\mathcal{E}^\sigma(\rho_x\varphi)f\right](y).$$

Kako su $y \in G$ i $f \in \mathcal{H}$ proizvoljni, slijedi

$$\pi^\sigma(x)\mathcal{E}^\sigma(\varphi)\pi^\sigma(x^{-1}) = \mathcal{E}^\sigma(\varphi)\pi^\sigma(x^{-1}) \qquad \forall x \in G, \quad \forall \varphi \in C_\infty(M).$$

Dakle, $(\mathcal{E}^\sigma, \pi^\sigma)$ je reprezentacija homogenog prostora (M,G). Zovemo je **reprezentacija od** (M,G) **inducirana** reprezentacijom σ od H. Cilj nam je u ovoj točki dokazati da $\sigma \mapsto (\mathcal{E}^\sigma, \pi^\sigma)$ daje kovarijantan funktor koji uspostavlja ekvivalenciju kategorije unitarnih reprezentacija od H na kategoriju reprezentacija od (M,G).

Prije svega, na teoriju reprezentacija homogenog prostora (M,G) prenose se svi pojmovi iz teorije reprezentacija C^*-algebri, odnosno iz teorije unitarnih reprezentacija grupa. Tako za reprezentacije od (M,G) definiramo:

− **invarijantan potprostor:** Za reprezentaciju $(\mathcal{E},\pi)$ od (M,G) na $\mathcal{H}$ kažemo da je zatvoren potprostor $\mathcal{K}$ od $\mathcal{H}$ $(\mathcal{E},\pi)-$invarijantan, ako je on invarijantan s obzirom na sve operatore $\mathcal{E}(\varphi)$, $\varphi \in C_\infty(M)$, i s obzirom na sve operatore $\pi(x)$, $x \in G$.

− **subreprezentacija:** Ako je $(\mathcal{E},\pi)$ reprezentacija od (M,G) na $\mathcal{H}$ i ako je $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{H}$ zatvoren $(\mathcal{E},\pi)-$invarijantan potprostor, onda definiramo pripadnu subreprezentaciju $(\mathcal{E}_\mathcal{K}, \pi_\mathcal{K})$. To je reprezentacija od (M,G) na $\mathcal{K}$ definirana pomoću restrikcija operatora reprezentacije: $\mathcal{E}_\mathcal{K}(\varphi) = \mathcal{E}(\varphi)|\mathcal{K}$, $\pi_\mathcal{K}(x) = \pi(x)|\mathcal{K}$, $\varphi \in C_\infty(M)$, $x \in G$.

− **ireducibilnost:** Reprezentacija $(\mathcal{E},\pi)$ od (M,G) na $\mathcal{H}$ je ireducibilna ako ne postoji zatvoren $(\mathcal{E},\pi)-$invarijantan potprostor od $\mathcal{H}$ različit od $\{0\}$ i od $\mathcal{H}$.

− **ekvivalentnost:** Za reprezentacije $(\mathcal{E}_1,\pi_1)$ i $(\mathcal{E}_2,\pi_2)$ od (M,G) na $\mathcal{H}_1$ i $\mathcal{H}_2$ kažemo da su ekvivalentne ako postoji izometrički izomorfizam $T : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ takav da vrijedi

$$T\mathcal{E}_1(\varphi) = \mathcal{E}_2(\varphi)T \quad \forall \varphi \in C_0(M) \qquad \text{i} \qquad T\pi_1(x) = \pi_2(x)T \quad \forall x \in G.$$

− **cikličnost:** Za reprezentaciju $(\mathcal{E},\pi)$ od (M,G) na $\mathcal{H}$ kažemo da je ciklička s cikličkim vektorom ξ ako je $\mathcal{H}$ najmanji zatvoren $(\mathcal{E},\pi)-$invarijantan potprostor od $\mathcal{H}$ koji sadrži ξ.

− **preplitanje:** Kažemo da je operator $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1,\mathcal{H}_2)$ preplitanje reprezentacija $(\mathcal{E}_1,\pi_1)$ i $(\mathcal{E}_2,\pi_2)$ na $\mathcal{H}_1$ i $\mathcal{H}_2$ ako je

$$T\mathcal{E}_1(\varphi) = \mathcal{E}_2(\varphi)T \quad \forall \varphi \in C_0(M) \qquad \text{i} \qquad T\pi_1(x) = \pi_2(x)T \quad \forall x \in G.$$

Skup svih operatora preplitanja je zatvoren potprostor Banachovog prostora $\mathcal{B}(\mathcal{H}_1,\mathcal{H}_2)$ koji označavamo sa $Hom_{(M,G)}(\mathcal{E}_1,\pi_1;\mathcal{E}_2,\pi_2)$. Očito je

$$Hom_{(M,G)}(\mathcal{E}_1,\pi_1;\mathcal{E}_2,\pi_2) = Hom_{C_\infty(M)}(\mathcal{E}_1,\mathcal{E}_2) \cap Hom_G(\pi_1,\pi_2).$$

– **ortogonalna suma reprezentacija:** Ako je I skup i za svaki $i \in I$ je zadana reprezentacija $(\mathcal{E}_i, \pi_i)$ od (M, G) na $\mathcal{H}_i$, onda je ortogonalna suma Hilbertovih prostora $\mathcal{H}_i$ definirana sa

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{i \in I} \mathcal{H}_i = \left\{ f : I \to \bigcup_{i \in I} \mathcal{H}_i;\ f(i) \in \mathcal{H}_i\ \forall i \in I,\ \sum_{i \in I} \|f(i)\|^2_{\mathcal{H}_i} < +\infty \right\}.$$

To je Hilbertov prostor uz operacije $(f+g)(i) = f(i) + g(i)$, $(\lambda f)(i) = \lambda f(i)$ i uz skalarni produkt

$$(f|g) = \sum_{i \in I} (f(i)|g(i))_{\mathcal{H}_i}.$$

Na tom Hilbertovom prostoru dobivamo reprezentaciju $(\mathcal{E}, \pi)$ od (M, G) ovako:

$$[\mathcal{E}(\varphi)(f)](i) = \mathcal{E}_i(\varphi) f(i), \qquad [\pi(x) f](i) = \pi_i(x) f(i), \qquad \varphi \in C_\infty(M), \quad x \in G, \quad f \in \mathcal{H}.$$

Ta se reprezentacija zove ortogonalna suma reprezentacija $(\mathcal{E}_i, \pi_i)$ i pišemo

$$(\mathcal{E}, \pi) = \bigoplus_{i \in I} (\mathcal{E}_i, \pi_i) = \left(\bigoplus_{i \in I} \mathcal{E}_i, \bigoplus_{i \in I} \pi_i \right).$$

Neka je $(\mathcal{E}, \pi)$ reprezentacija od (M, G) na $\mathcal{H}$ i neka su $\mathcal{H}_i$, $i \in I$, $(\mathcal{E}, \pi)-$invarijantni zatvoreni potprostori od $\mathcal{H}$ koji su međusobno ortogonalni i nčija je suma gusta u $\mathcal{H}$. Tada također pišemo

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{i \in I} \mathcal{H}_i.$$

Lako se vidi da je tada reprezentacija $(\mathcal{E}, \pi)$ ekvivalentna ortogonalnoj sumi subreprezentacija

$$\bigoplus_{i \in I} (\mathcal{E}_{\mathcal{H}_i}, \pi_{\mathcal{H}_i}).$$

Kao i kod lokalno kompaktnih grupa ili C^*-algebri pomoću Zornove leme pokazuje se da je svaka reprezentacija od (M, G) ortogonalna suma cikličkih subreprezentacija.

Pokazuje se da je reprezentacija $(\mathcal{E}, \pi)$ od (M, G) na $\mathcal{H}$ ireducibilna ako i samo ako je

$$Hom_{(M,G)}(\mathcal{E}, \pi; \mathcal{E}, \pi) = \mathbb{C} \cdot I_{\mathcal{H}}.$$

Ireducibilne reprezentacije $(\mathcal{E}_1, \pi_1)$ i $(\mathcal{E}_2, \pi_2)$ od (M, G) su ekvivalentne ako i samo ako je

$$Hom_{(M,G)}(\mathcal{E}_1, \pi_1; \mathcal{E}_2, \pi_2) \neq \{0\}.$$

Lema 6.2.1. *Neka je σ unitarna reprezentacija od H na $\mathcal{K}$. Za $\varphi \in C_0(G)$ i za $f, g \in \mathcal{H} = \mathcal{H}(G, \sigma)$ vrijedi*

$$(\mathcal{E}^\sigma(\varphi_{nu}) f|g) = \int_G \varphi(x)(f(x)|g(x) d\mu(x).$$

Dokaz: Za $\psi \in C_0(G)$ je

$$\beta_{\mathcal{E}^\sigma(\varphi_\nu)f,g}(\psi_\nu) = \int_G \psi(x)(\varphi_\nu(p(x))f(x)|g(x))\mathrm{d}\mu(x) =$$

$$= \int_G [\psi \cdot (\varphi_\nu \circ p)](x)(f(x)|g(x))\mathrm{d}\mu(x) = \beta_{f,g}\left([\psi \cdot (\varphi_\nu \circ p)]_\nu\right).$$

Međutim,

$$[(\psi \cdot (\varphi_\nu \circ p)]_\nu(p(x)) = \int_H \psi(yx)\varphi_\nu(p(yx))\mathrm{d}\nu(y) = \psi_\nu(p(x))\varphi_\nu(p(x)),$$

tj. vrijedi $[\psi \cdot (\varphi_\nu \circ p)]_\nu = \psi_\nu \cdot \varphi_\nu$. Dakle,

$$\beta_{\mathcal{E}^\sigma(\varphi_\nu)f,g}(\psi_\nu) = b_{f,g}(\varphi_\nu \cdot \psi_\nu) = (\varphi_\nu \cdot \beta_{f,g})(\psi_\nu),$$

odnosno,

$$\beta_{\mathcal{E}^\sigma(\varphi_\nu)f,g} = \varphi_\nu \cdot \beta_{f,g}.$$

Prema tome je

$$(\mathcal{E}^\sigma(\varphi_\nu)f|g) = \beta_{\mathcal{E}^\sigma(\varphi_\nu)f,g}(1) = (\varphi_\nu \cdot \beta_{f,g})(1) = \beta_{f,g}(\varphi_\nu) = \int_G \varphi(x)(f(x)|g(x))\mathrm{d}\mu(x).$$

Lema 6.2.2. *Neka je I skup i za svako $i \in I$ neka je zadana unitarna reprezentacija od H na Hilbertovom prostoru $\mathcal{K}_i$. Nadalje, neka je σ ortogonalna suma reprezentacija σ_i, $i \in I$. Tada je inducirana reprezentacija $(\mathcal{E}^\sigma, \pi^\sigma)$ od (M,G) ekvivalentna ortogonalnoj sumi induciranih reprezentacija $(\mathcal{E}^{\sigma_i}, \pi^{\sigma_i})$, $i \in I$.*

Dokaz: Stavimo

$$\mathcal{H}_i = \mathcal{H}(G,\sigma_i), \qquad \mathcal{K} = \bigoplus_{i\in I} \mathcal{K}_i, \qquad \mathcal{H} = \mathcal{H}(G,\sigma).$$

Za svaki $i \in I$ prostor $\mathcal{K}_i$ se identificira sa zatvorenim potprostorom od $\mathcal{K}$ svih $f \in \mathcal{K}$ takvih da je $f(j) = 0$ za svaki $j \neq i$. Nadalje, prostor $\mathcal{H}_i$ može se identificirati s potprostorom svih $f \in \mathcal{H}$ takvih da je $f(G) \subseteq \mathcal{K}_i$. Nadalje, uz takvu identifikaciju je $\mathcal{H}_i \perp \mathcal{H}_j$ za $\infty \neq j$. Stavimo

$$\tilde{\mathcal{H}} = \bigoplus_{i\in I} \mathcal{H}_i$$

i neka je P_i ortogonalni projektor prostora $\mathcal{K}$ na $\mathcal{K}_i$. Za $f \in \mathcal{H}$ definiramo $f_i \in \mathcal{H}_i$ tako da stavimo $f_i(x) = P_i f(x)$, $x \in G$. Tada je f_i ortogonalna projekcija od f na $\mathcal{H}_i$, jer je $(f|g) = (f_i|g)\ \ \forall g \in \mathcal{H}_i$.

Sada za $\varphi \in C_0^+(G)$ imamo

$$\int_G \varphi(x)(f(x)|f(x))\mathrm{d}\mu(x) = \int_G \varphi(x) \sum_{i\in I}(P_i f(x)|P_i f(x))\mathrm{d}\mu(x) \leq \sum_{i\in I}\int_G \varphi(x)(f_i(x)|f_i(x))\mathrm{d}\mu(x).$$

Odatle slijedi

$$\sum_{i\in I}\|f_i\|_2^2 \leq \|f\|_2^2 \leq \sum_{i\in I}\|f_i\|_2^2 \qquad \Longrightarrow \qquad \|f\|_2^2 = \sum_{i\in I}\|f_i\|_2^2.$$

U Hilbertovom prostoru ako u Besselovoj nejednakosti za neki vektor i neki ortogonalan sustav vrijedi znak jednakosti, onda je vektor u zatvaraču potprostora razapetog tim ortogonalnim sustavom. Odatle slijedi da je $f \in \tilde{\mathcal{H}}$. Kako je $f \in \mathcal{H}$ bio proizvoljan, zaključujemo da je $\mathcal{H} = \tilde{\mathcal{H}}$, a to uz opisane identifikacije upravo daje tvrdnju leme.

Provest ćemo sada *induciranje preplitanja* koje će nam zajedno s induciranjem reprezentacija dati funktor s kategorije unitarnih reprezentacija od H u kategoriju reprezentacija od (M,G); naime, i u jednoj i u drugoj kategoriji morfizmi su preplitanja. Neka su, dakle, σ_1 i σ_2 unitarne reprezentacije od H na $\mathcal{K}_1$ i $\mathcal{K}_2$. Stavimo $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}(G,\sigma_1)$ i $\mathcal{H}_2 = \mathcal{H}(G,\sigma_2)$. Za $A \in Hom_H(\sigma_1,\sigma_2)$ i za $f \in \mathcal{H}_1$ defniramo $\tilde{A} : G \to \mathcal{K}_2$ sa

$$(\tilde{A}f)(x) = Af(x), \qquad x \in G.$$

Teorem 6.2.1. *$A \mapsto \tilde{A}$ je izomorfizam vektorskog prostora $Hom_H(\sigma_1, \sigma_2)$ na vektorski prostor $Hom_{(M,G)}(\mathcal{E}^{\sigma_1}, \pi^{\sigma_1}; \mathcal{E}^{\sigma_2}, \pi^{\sigma_2})$. Posebno, reprezentacija σ od H je ireducibilna ako i samo ako je inducirana reprezentacija $(\mathcal{E}^\sigma, \pi^\sigma)$ od (M, G) ireducibilna. Nadalje, reprezentacije σ_1 i σ_2 od H su ekvivalentne ako i samo ako su inducirane reprezentacije $(\mathcal{E}^{\sigma_1}, \pi^{\sigma_1})$ i $(\mathcal{E}^{\sigma_2}, \pi^{\sigma_2})$ od (M, G) ekvivalentne.*

Dokaz: **(1)** Dokazujemo najprije da je $\tilde{A}f \in \mathcal{H}_2$ i da je $\tilde{A} \in Hom_{(M,G)}(\mathcal{E}^{\sigma_1}, \pi^{\sigma_1}; \mathcal{E}^{\sigma_2}, \pi^{\sigma_2})$. Doista ako je $f \in \mathcal{H}_1$ neka je istim znakom označen i pretstavnik te funkcije iz $\mathcal{F}_2(G, \sigma_1)$. Tada je zbog neprekidnosti operatora A funkcija $\tilde{A}f : G \to \mathcal{K}_2$ izmjeriva. Nadalje,

$$x \mapsto \|(\tilde{A}f)(x)\|^2 = \|Af(x)\|^2 \leq \|A\| \cdot \|f(x)\|^2$$

je lokalno integrabilna. Kako je A preplitanje σ_1 i σ_2, za $y \in H$ i $x \in G$ imamo

$$(\tilde{A}f)(yx) = Af(yx) = \sqrt{\frac{\Delta(y)}{\delta(y)}}\, A\sigma_1(y)f(x) = \sqrt{\frac{\Delta(y)}{\delta(y)}}\, \sigma_2(y)Af(x) = \sqrt{\frac{\Delta(y)}{\delta(y)}}\, \sigma_2(y)(\tilde{A}f)(x).$$

Prema tome je $\tilde{A}f \in \mathcal{F}(G, \sigma_2)$. Nadalje,

$$\|(\tilde{A}f)(x)\|^2 \leq \|A\|^2 \cdot \|f(x)\|^2 \quad \forall x \in G \qquad \Longrightarrow \qquad \|\tilde{A}f\|_2 \leq \|A\| \cdot \|f\|_2.$$

Dakle je $\tilde{A}f \in \mathcal{F}_2(G, \sigma_2)$, odnosno, ako se vratimo na klase funkcija, dobivamo $\tilde{A}f \in \mathcal{H}_2$. Očito je $\tilde{A} : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ linearan operator, koji je ograničen i $\|\tilde{A}\| \leq \|A\|$.

Iz definicije operatora $\tilde{A}$ neposredno se dobiva da je

$$\tilde{A}\pi^{\sigma_1}(x) = \pi^{\sigma_2}(x)\tilde{A} \quad \forall x \in G \qquad \text{i} \qquad \tilde{A}\mathcal{E}^{\sigma_1}(\varphi) = \mathcal{E}^{\sigma_2}(\varphi)\tilde{A} \quad \forall \varphi \in C_\infty(M).$$

Dakle, $A \mapsto \tilde{A}$ je linearno preslikavanje sa $Hom_H(\sigma_1, \sigma_2)$ u $Hom_{(M,G)}(\mathcal{E}^{\sigma_1}, \pi^{\sigma_1}; \mathcal{E}^{\sigma_2}, \pi^{\sigma_2})$.

(2) Dokažimo injektivnost preslikavanja $A \mapsto \tilde{A}$. Pretpostavimo da je $A \in Hom_H(\sigma_1, \sigma_2)$ takav da je $\tilde{A} = 0$. Tada je posebno $Af(x) = 0 \ \ \forall x \in G$ i $\forall f \in C_0(G, \sigma_1)$. No odatle zbog leme 6.1.4. slijedi $A = 0$.

(3) Sada dokazujemo surjektivnost u slučaju $\sigma_1 = \sigma_2$. Dakle, imamo unitarnu reprezentaciju σ od H na $\mathcal{K}$. U ovom slučaju stavimo $\mathcal{H} = \mathcal{H}(G, \sigma)$. $Hom_{(M,G)}(\mathcal{E}^\sigma, \pi^\sigma) = Hom_{(M,G)}(\mathcal{E}^\sigma, \pi^\sigma; \mathcal{E}^\sigma, \pi^\sigma)$ je zatvorena $*-$podalgebra C^*-algebre $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Prema tome, svaki $S \in Hom_{(M,G)}(\mathcal{E}^\sigma, \pi^\sigma)$ je linearna kombinacija hermitskih elemenata $T \in Hom_{(M,G)}(\mathcal{E}^\sigma, \pi^\sigma)$ takvih da je $0 \leq T \leq I = I_{\mathcal{H}}$, odnosno, takvih da je $0 \leq (Tf|f) \leq (f|f) \ \ \forall f \in \mathcal{H}$. Dakle, da dokažemo surjektivnost dovoljno je ustanoviti da za svaki takav T postoji $A \in Hom_H(\sigma) = Hom_H(\sigma, \sigma)$ takav da je $\tilde{A} = T$.

Prije prijelaza na dokaz surjektivnosti, provest ćemo jednu konstrukciju. Za svaki $\varphi \in C_0(G)$ i za $f \in \mathcal{H}$ definiramo antilinearni funkcional $\mathcal{S}(\varphi, f) : \mathcal{K} \to \mathbb{C}$ sa

$$\mathcal{S}(\varphi, f)(\xi) = \int_G \varphi(x)(f(x^{-1})|\xi)\mathrm{d}\mu(x), \qquad \xi \in \mathcal{K}.$$

Neka je $K = (Supp\, \varphi)^{-1}$ – kompaktan podskup od G. Za $\xi \in \mathcal{K}$ po lemi 6.1.1. imamo

$$|\mathcal{S}(\varphi, f)(\xi)| \leq \int_G |\varphi(x)| \cdot \|f(x^{-1}\| \cdot \|\xi\|\, \mathrm{d}\mu(x) \leq \|\varphi\|_\infty \cdot \|\xi\| \cdot \int_{K^{-1}} \|f(x^{-1})\|\, \mathrm{d}\mu(x) =$$

$$= \|\varphi\|_\infty \cdot \|\xi\| \cdot \int_K \Delta(x)\|f(x)\|\, \mathrm{d}\mu(x) \leq \|\varphi\|_\infty \cdot \|\Delta|K\|_\infty \cdot N(K) \cdot \|f\|_2 \cdot \|\xi\|.$$

Prema tome, antilinearan funkcional $\mathcal{S}(\varphi, f)$ je ograničen, pa po Rieszovom teoremu postoji jedinstven $\mathfrak{s}(\varphi, f) \in \mathcal{K}$ takav da je $\mathcal{S}(\varphi, f)(\xi) = (\mathfrak{s}(\varphi, f)|\xi) \quad \forall \xi \in \mathcal{K}$. Možemo pisati

$$\mathfrak{s}(\varphi, f) = \int_G \varphi(x) f(x^{-1}) \mathrm{d}\mu(x).$$

Tako smo došli do bilinearnog preslikavanja $\mathfrak{s} : C_0(G) \times \mathcal{H} \to \mathcal{K}$. Prema dokazanom vrijedi

$$\|\mathfrak{s}(\varphi, f)\| \leq \|\varphi\|_\infty \cdot \|\Delta|K\|_\infty \cdot N(K) \cdot \|f\|_2, \qquad \varphi \in C_0(G), \quad f \in \mathcal{H}, \quad K = (Supp\,\varphi)^{-1}.$$

Prema tome, za dano $\varphi \in C_0(G)$ preslikavanje $\mathcal{S}(\varphi) : \mathcal{H} \to \mathcal{K}$ definirano sa

$$\mathcal{S}(\varphi) f = \mathfrak{s}(\varphi, f) = \int_G \varphi(x) f(x^{-1}) \mathrm{d}\mu(x), \qquad f \in \mathcal{H},$$

je ograničen linearan operator i vrijedi

$$\|\mathcal{S}(\varphi)\| \leq N(K) \cdot \|\Delta|K\|_\infty \cdot \|\varphi\|_\infty.$$

Neka je $\mathcal{K}_1$ potprostor od $\mathcal{K}$ razapet unijom područja vrijednosti svih operatora $\mathcal{S}(\varphi)$, $\varphi \in C_0(G)$:

$$\mathcal{K}_1 = span_{\mathbb{C}} \left(\bigcup_{\varphi \in C_0(G)} \mathcal{S}(\varphi)\mathcal{H} \right).$$

Dokazat ćemo sada da je $\mathcal{K}_1$ gust potprostor od $\mathcal{K}$. Neka je $\xi \in \mathcal{K}$ i $\varepsilon > 0$. Izaberimo okolinu U od e u G takvu da vrijedi

$$y \in U \cap H \qquad \Longrightarrow \qquad \|\sigma(y^{-1}\xi - \xi\| \leq \varepsilon.$$

Neka je $\varphi \in C_0^+(G)$ takva da je

$$Supp\,(\varphi * \varphi) \subseteq U \qquad \text{i} \qquad \int_H \sqrt{\frac{\delta(y)}{\Delta(y)}}\,(\varphi * \varphi)(y) \mathrm{d}\nu(y) = 1.$$

Sasvim analogno kao u dokazu leme 6.1.4. sada slijedi

$$\|T_\sigma(\varphi * \varphi \otimes \xi)(e) - \xi\| \leq \varepsilon.$$

Dokazat ćemo sada da je $T_\sigma(\varphi * \varphi \otimes \xi)(e) \in \mathcal{K}_1$ i time će gustoća $\mathcal{K}_1$ u $\mathcal{K}$ biti dokazana. Za proizvoljan $\eta \in \mathcal{K}$ imamo

$$(T_\sigma(\varphi * \varphi \otimes v)(e)|\eta) = \int_H \sqrt{\frac{\delta(y)}{\Delta(y)}}\,(\varphi * \varphi)(y)(\sigma(y^{-1})\xi|\eta) \mathrm{d}\nu(y) =$$

$$= \int_H \sqrt{\frac{\delta(y)}{\Delta(y)}}\,(\sigma(y^{-1})\xi|\eta) \left[\int_G \varphi(yx^{-1})\varphi(x) \mathrm{d}\mu(x) \right] \mathrm{d}\nu(y) =$$

$$= \int_G \varphi(x) \left[\int_H \sqrt{\frac{\delta(y)}{\Delta(y)}}\,\varphi(yx^{-1})(\sigma(y^{-1})\xi|\eta) \mathrm{d}\nu(y) \right] \mathrm{d}\mu(x) =$$

$$= \int_G \varphi(x)(T_\sigma(\varphi \otimes \xi)(x^{-1})|\eta) \mathrm{d}\mu(x) = (\mathcal{S}(\varphi)T_\sigma(\varphi \otimes \xi)|\eta).$$

Prema tome je
$$T_\sigma(\varphi * \varphi \otimes \xi)(e) = \mathcal{S}(\varphi)T_\sigma(\varphi \otimes \xi) \in \mathcal{K}_1$$
i time je gustoća $\mathcal{K}_1$ u $\mathcal{K}$ dokazana.

Sada za $\varphi, \psi \in C_0(G)$ definiramo $\mathcal{A}(\varphi, \psi) \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ sa
$$\mathcal{A}(\varphi, \psi) = \mathcal{S}(\psi)^*\mathcal{S}(\varphi).$$
Tvrdimo da je tada
$$\mathcal{A}(\varphi, \psi) = \int_G \mathcal{E}^\sigma\left((\Phi^y)_\nu\right)\pi^\sigma(y^{-1})\mathrm{d}\mu(y),$$
tj. da za $f, g \in \mathcal{H}$ vrijedi
$$(\mathcal{A}(\varphi, \psi)f|g) = \int_G \big(\mathcal{E}^\sigma\left((\Phi^y)_\nu\right)\pi^\sigma(y^{-1})f\big|\, g\big)\,\mathrm{d}\mu(y),$$
pri čemu je funkcija $\Phi^y \in C_0(G)$ definirana sa
$$\Phi^y(x) = \Delta(x)\varphi(yx^{-1})\overline{\psi(x^{-1})}, \qquad x, y \in G.$$
Doista,
$$(\mathcal{A}(\varphi, \psi)f|g) = (\mathcal{S}(\varphi)f|\mathcal{S}(\psi)g) = \int_G \varphi(y)(f(y^{-1})|\mathcal{S}(\psi)g)\mathrm{d}\mu(y) =$$
$$= \int_G\int_G \varphi(y)\overline{\psi(x)}(f(y^{-1})|g(x^{-1}))\mathrm{d}\mu(y)\mathrm{d}\mu(x) =$$
$$= \int_G\int_G \varphi(yx)\overline{\psi(x)}(f(x^{-1}y^{-1})|g(x^{-1})\mathrm{d}\mu(y)\mathrm{d}\mu(x) =$$
$$= \int_G\int_G \Delta(x)\varphi(yx^{-1})\overline{\psi(x^{-1})}(f(xy^{-1})|g(x))\mathrm{d}\mu(y)\mathrm{d}\mu(x) =$$
$$= \int_G\int_G \Phi^y(x)((\pi^\sigma(y^{-1}f)(x)|g(x))\mathrm{d}\mu(x)\mathrm{d}\mu(y) = \int_G \big(\mathcal{E}^\sigma((\Phi^y)_\nu)\pi^\sigma(y^{-1})f\big|\, g\big)\,\mathrm{d}\mu(y).$$
Za posljednju jednakost iskoristili smo lemu 6.2.1.

Neka je sada $R \in Hom_{(M,G)}(\mathcal{E}^\sigma, \pi^\sigma)$. Tada za $\varphi, \psi \in C_0(G)$ i $f, g \in \mathcal{H}$ imamo
$$(\mathcal{A}(\varphi, \psi)Rf|g) = \int_G \big(\mathcal{E}^\sigma\left((\Phi^y)_\nu\right)\pi^\sigma(y^{-1})Rf\big|\, g\big)\,\mathrm{d}\mu(y) =$$
$$= \int_G \big(\mathcal{E}^\sigma\left((\Phi^y)_\nu\right)\pi^\sigma(y^{-1})f\big|\, R^*g\big)\,\mathrm{d}\mu(y) = (\mathcal{A}(\varphi, \psi)f|R^*g) = (R\mathcal{A}(\varphi, \psi)f|g).$$
Time smo dokazali da svaki operator $\mathcal{A}(\varphi, \psi)$ komutira sa svakim operatorom iz $Hom_{(M,G)}(\mathcal{E}^\sigma, \pi^\sigma)$.

Uzmimo sada proizvoljne $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n \in C_0(G)$, $f_1, f_2, \ldots, f_n \in \mathcal{H}$ i $R \in Hom_{(M,G)}(\mathcal{E}^\sigma, \pi^\sigma)$. Imamo
$$\left\|\sum_{i=1}^n \mathcal{S}(\varphi_i)Rf_i\right\|^2 = \sum_{i,j=1}^n (\mathcal{S}(\varphi_i)Rf_i|\mathcal{S}(\varphi_j)Rf_j) = \sum_{i,j=1}^n (R^*\mathcal{S}(\varphi_j)^*\mathcal{S}(\varphi_i)Rf_i|f_j) =$$
$$= \sum_{i,j=1}^n (R^*\mathcal{A}(\varphi_j, \varphi_i)Rf_i|f_j) = \sum_{i,j=1}^n (R^*R\mathcal{A}(\varphi_j, \varphi_i)f_i|f_j).$$
Dakle, vrijedi za sve $n \in \mathbb{N}$, $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n \in C_0(G)$ i $f_1, f_2, \ldots, f_n \in \mathcal{H}$:
$$\left\|\sum_{i=1}^n \mathcal{S}(\varphi_i)Rf_i\right\|^2 = \sum_{i,j=1}^n (R^*R\mathcal{A}(\varphi_j, \varphi_i)f_i|f_j). \qquad (*)$$

Vratimo se sada na dokaz surjektivnosti. Kao što smo uvodno napomenuli možemo se ograničiti na hermitski operator $T \in Hom_{(M,G)}(\mathcal{E}^\sigma, \pi^\sigma)$ takav da je $0 \leq T \leq I$, tj. $0 \leq (Tf|f) \leq (f|f)$ $\forall f \in \mathcal{H}$. Za takav T u sljedećem računu upotrijebit ćemo jednakost $(*)$ na operator $R = \sqrt{T}$ i na operator $R = \sqrt{I-T}$. Imamo redom

$$\left\|\sum_{i=1}^n \mathcal{S}(\varphi_i)\sqrt{T}f_i\right\|^2 \leq \left\|\sum_{i=1}^n \mathcal{S}(\varphi_i)\sqrt{T}f_i\right\|^2 + \left\|\sum_{i=1}^n \mathcal{S}(\varphi_i)\sqrt{I-T}f_i\right\|^2 =$$

$$= \sum_{i,j=1}^n (T\mathcal{A}(\varphi_j,\varphi_i)f_i|f_j) + \sum_{i,j=1}^n ((I-T)\mathcal{A}(\varphi_j,\varphi_i)f_i|f_j) =$$

$$= \sum_{i,j=1}^n (\mathcal{A}(\varphi_j,\varphi_i)f_i|f_j) = \sum_{i,j=1}^n (\mathcal{S}(\varphi_i)f_i|\mathcal{S}(\varphi_j)f_j) = \left\|\sum_{i=1}^n \mathcal{S}(\varphi_i)f_i\right\|^2.$$

Odatle slijedi da možemo definirati linearan operator $U : \mathcal{K}_1 \to \mathcal{K}$ relacijom:

$$U\sum_{i=1}^n \mathcal{S}(\varphi_i)f_i = \sum_{i=1}^n \mathcal{S}(\varphi_i)\sqrt{T}f_i, \qquad n \in \mathbb{N}, \quad \varphi_1,\varphi_2,\ldots,\varphi_n \in C_0(G), \quad f_1,f_2,\ldots,f_n \in \mathcal{H},$$

i tako definiran linearan operator je ograničen i norme ≤ 1. U se jedinstveno produljuje s gustog potprostora $\mathcal{K}_1$ do ograničenog operatora na čitavom prostoru $\mathcal{K}$. To ćemo produljenje i dalje označavati sa U. Dakle, $U \in \mathcal{B}(\mathcal{K})$ ima svojstvo

$$U\mathcal{S}(\varphi) = \mathcal{S}(\varphi)\sqrt{T} \qquad \forall \varphi \in C_0(G).$$

Primijetimo sada da za $y \in H$, $\varphi \in C_0(G)$ i $f \in \mathcal{H}$ imamo

$$\sigma(y)\mathcal{S}(\varphi)f = \int_G \varphi(x)\sigma(y)f(x^{-1})\mathrm{d}\mu(x) = \sqrt{\frac{\delta(y)}{\Delta(y)}}\int_G \varphi(x)f(yx^{-1})\mathrm{d}\mu(x) =$$

$$= \sqrt{\frac{\delta(y)}{\Delta(y)}}\int_G \varphi(xy)\varphi(x^{-1})\mathrm{d}\mu(x) = \sqrt{\frac{\delta(y)}{\Delta(y)}}\mathcal{S}(\rho_y\varphi)f.$$

Stoga je

$$\sigma(y)\mathcal{S}(\varphi) = \sqrt{\frac{\delta(y)}{\Delta(y)}}\mathcal{S}(\rho_y\varphi), \qquad \forall y \in H, \quad \forall \varphi \in C_0(G),$$

pa slijedi

$$U\sigma(y)\mathcal{S}(\varphi) = \sqrt{\frac{\delta(y)}{\Delta(y)}}U\mathcal{S}(\rho_y\varphi) = \sqrt{\frac{\delta(y)}{\Delta(y)}}\mathcal{S}(\rho_y\varphi)\sqrt{T} = \sigma(y)\mathcal{S}(\varphi)\sqrt{T} = \sigma(y)U\mathcal{S}(\varphi).$$

Budući da područja vrijednosti operatora $\mathcal{S}(\varphi)$, $\varphi \in C_0(G)$, razapinju gusti potprostor $\mathcal{K}_1$ prostora $\mathcal{K}$, iz dobivene jednakosti slijedi $U\sigma(y) = \sigma(y)U \quad \forall y \in H$, tj. $U \in Hom_H(\sigma)$. Stavimo sada $A = U^*U \in Hom_H(\sigma)$. Imamo tada za $\varphi \in C_0(G)$, $f \in \mathcal{H}$, $\xi \in \mathcal{K}$:

$$(\mathcal{S}(\varphi)\tilde{A}f|\xi) = \int_G \varphi(x)((\tilde{A}f)(x^{-1})|\xi)\mathrm{d}\mu(x) = \int_G \varphi(x)(Af(x^{-1})|\xi)\mathrm{d}\mu(x) =$$

$$= \int_G \varphi(x)(f(x^{-1})|A^*\xi)\mathrm{d}\mu(x) = (\mathcal{S}(\varphi)f|A^*\xi) = (A\mathcal{S}(\varphi)f|\xi).$$

Zbog proizvoljnosti $f \in \mathcal{H}$ i $\xi \in \mathcal{K}$ slijedi

$$\mathcal{S}(\varphi)\tilde{A} = A\mathcal{S}(\varphi) \qquad \forall \varphi \in C_0(G).$$

Odatle je za $\varphi, \psi \in C_0(G)$ i $f, g \in \mathcal{H}$:

$$(\mathcal{S}(\varphi)\tilde{A}f|\mathcal{S}(\psi)g) = (A\mathcal{S}(\varphi)f|\mathcal{S}(\psi)g) = (U^*U\mathcal{S}(\varphi)f|\mathcal{S}(\psi)g) = (U\mathcal{S}(\varphi)f|U\mathcal{S}(\psi)g) =$$

$$= (\mathcal{S}(\varphi)\sqrt{T}f|\mathcal{S}(\psi)\sqrt{T}g) = (\mathcal{A}(\varphi,\psi)\sqrt{T}f|\sqrt{T}g) = (\mathcal{A}(\varphi,\psi)Tf|g) = (\mathcal{S}(\varphi)Tf|\mathcal{S}(\psi)g).$$

Budući da skup vektora $\{\mathcal{S}(\psi)g;\ \psi \in C_0(G),\ g \in \mathcal{H}\}$ razapinje gust potprostor $\mathcal{K}_1$ od $\mathcal{K}$, zaključujemo

$$\mathcal{S}(\varphi)\tilde{A}f = \mathcal{S}(\varphi)Tf \qquad \forall \varphi \in C_0(G), \quad \forall f \in \mathcal{H}.$$

Prema tome, vrijedi

$$\int_G \varphi(x)((\tilde{A}f - Tf)(x^{-1})|\xi)\mathrm{d}\mu(x) = 0 \qquad \forall \varphi \in C_0(G), \quad \forall f \in \mathcal{H}, \quad \forall \xi \in \mathcal{K}.$$

Sada na isti način kao u dokazu propozicije 6.1.2. slijedi $\tilde{A}f = Tf \ \ \forall f \in \mathcal{H}$, tj. $\tilde{A} = T$. Time je dokazana surjektivnost preslikavanja $A \mapsto \tilde{A}$ sa $Hom_H(\sigma)$ na $Hom_{(M,G)}(\mathcal{E}^\sigma, \pi^\sigma)$.

(4) Dokažimo sada surjektivnost preslikavanja $A \mapsto \tilde{A}$ u općemo slučaju, tj. sa $Hom_H(\sigma_1, \sigma_2)$ na $Hom_{(M,G)}(\mathcal{E}^{\sigma_1}, \pi^{\sigma_1}; \mathcal{E}^{\sigma_2}, \pi^{\sigma_2})$. Tada je $\sigma = \sigma_1 \oplus \sigma_2$ unitarna reprezentacija od H na Hilbertovom prostoru $\mathcal{K} = \mathcal{K}_1 \oplus \mathcal{K}_2$. Nadalje, prema lemi 6.2.2. možemo izvršiti identifikaciju

$$(\mathcal{E}^\sigma, \pi^\sigma) = (\mathcal{E}^{\sigma_1}, \pi^{\sigma_1}) \oplus (\mathcal{E}^{\sigma_2}, \pi^{\sigma_2}).$$

Algebru ograničenih linearnih operatora $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$ identificiramo s algebrom 2×2 matrica oblika

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}, \qquad A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_1),\ B \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1),\ C \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2),\ D \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_2).$$

Sasvim analogno postupamo i u slučaju $\mathcal{B}(\mathcal{K})$. Neka je sada $T \in Hom_{(M,G)}(\mathcal{E}^{\sigma_1}, \pi^{\sigma_1}; \mathcal{E}^{\sigma_2}, \pi^{\sigma_2})$. Definiramo

$$T_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ T & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{B}(\mathcal{H}),$$

tj.

$$T_0(f_1, f_2) = (0, Tf_1), \qquad (f_1, f_2) \in \mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2.$$

Tada za $x \in G$ i proizvoljan $(f_1, f_2) \in \mathcal{H}$ imamo

$$T_0\pi^\sigma(x)(f_1, f_2) = T_0(\pi^{\sigma_1}(x)f_1, \pi^{\sigma_2}(x)f_2) = (0, T\pi^{\sigma_1}(x)f_1) =$$

$$= (0, \pi^{\sigma_2}(x)Tf_1) = \pi^\sigma(x)(0, Tf_1) = \pi^\sigma(x)T_0(f_1, f_2).$$

Dakle, vrijedi $T_0\pi^\sigma(x) = \pi^\sigma(x)T_0 \ \ \forall x \in G$, odnosno, $T_0 \in Hom_G(\pi^\sigma)$. Sasvim analogno slijedi i da je $T_0 \in Hom_{C_\infty(M)}(\mathcal{E}^\sigma)$. Dakle, vrijedi $T_0 \in Hom_{(M,G)}(\mathcal{E}^\sigma, \pi^\sigma)$. Prema **(3)** postoji $A_0 \in Hom_H(\sigma)$ takav da je $\tilde{A}_0 = T_0$. Drugim riječima,

$$[T_0(f_1, f_2)](x) = A_0(f_1(x), f_2(x)), \qquad x \in G, \quad f_1 \in \mathcal{H}_1, \quad f_2 \in \mathcal{H}_2.$$

Možemo pisati

$$A_0 = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}, \qquad A \in \mathcal{B}(\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_1),\ B \in \mathcal{B}(\mathcal{K}_2, \mathcal{K}_1),\ C \in \mathcal{B}(\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2),\ D \in \mathcal{B}(\mathcal{K}_2, \mathcal{K}_2),$$

tj.

$$A_0(\xi_1,\xi_2) = (A\xi_1 + B\xi_2, C\xi_1 + D\xi_2), \qquad (\xi_1,\xi_2) \in \mathcal{K} = \mathcal{K}_1 \oplus \mathcal{K}_2.$$

Sada za $y \in H$ i $(\xi_1,\xi_2) \in \mathcal{K}$ imamo

$$(A\sigma_1(y)\xi_1 + B\sigma_2(y)\xi_2, C\sigma_1(y)\xi_1 + D\sigma_2(y)\xi_2) = A_0(\sigma_1(y)\xi_1, \sigma_2(y)\xi_2) = A_0\sigma(y)(\xi_1,\xi_2) =$$

$$= \sigma(y)A_0(\xi_1,\xi_2) = \sigma(y)(A\xi_1 + B\xi_2, C\xi_1 + D\xi_2) = (\sigma_1(y)A\xi_1 + \sigma_1(y)B\xi_2, \sigma_2(y)C\xi_1 + \sigma_2(y)D\xi_2).$$

Uzmemo li ovdje $\xi_2 = 0$, dobivamo

$$(A\sigma_1(y)\xi_1, C\sigma_1(y)\xi_1) = (\sigma_1(y)A\xi_1, \sigma_2(y)C\xi_1).$$

Slijedi

$$C\sigma_1(y) = \sigma_2(y)C \quad \forall y \in H \qquad \Longrightarrow \qquad C \in Hom_H(\sigma_1,\sigma_2).$$

(Naravno, i $A \in Hom_H(\sigma_1)$, a za $\xi_1 = 0$ analogno bismo dobili da je $B \in Hom_H(\sigma_2,\sigma_1)$ i $D \in Hom_H(\sigma_2)$.) Sada za $f_1 \in \mathcal{H}_1$ i $x \in G$ imamo

$$(0,(Tf_1)(x)) = [T_0(f_1,0)](x) = A_0(f_1(x),0) = (Af_1(x), Cf_1(x)).$$

Odatle je $(Tf_1)(x) = Cf_1(x)$, odnosno, $T = \tilde{C}$. Time je surjektivnost dokazana i u općem slučaju.

Ako su $A \in Hom_H(\sigma_1,\sigma_2)$ i $B \in Hom_H(\sigma_2,\sigma_3)$ onda je očito $(BA)\tilde{} = \tilde{B}\tilde{A}$. Prema tome je $\sigma \mapsto (\mathcal{E}^\sigma, \pi^\sigma)$, $A \mapsto \tilde{A}$ kovarijantni funktor s kategorije unitarnih reprezentacija od H u kategoriju reprezentacija od (M,G). Naš je cilj da dokažemo da se radi o ekvivalenciji kategorija, tj. da za svaku reprezentaciju $(\mathcal{E},\pi)$ od (M,G) postoji unitarna reprezentacija σ grupe H takva da je inducirana reprezentacija $(\mathcal{E}^\sigma,\pi^\sigma)$ ekvivalentna reprezentaciji $(\mathcal{E},\pi)$. To ćemo postići zaobilazno. Najprije ćemo uvesti strukturu topološke $*-$algebre u prostor funkcija $C_0(M \times G)$. Zatim ćemo definirati kovarijantan funktor $(\mathcal{E},\pi) \mapsto \tau^{\mathcal{E},\pi}$ sa kategorije reprezentacija od (M,G) u kategoriju neprekidnih reprezentacija $*-$algebre $C_0(M \times G)$. Uočit ćemo potkategoriju kategorije reprezentacija od $C_0(M \times G)$ koja sadrži sve tako dobivene reprezentacije $\tau^{\mathcal{E},\pi}$. Napokon ćemo za svaku reprezentaciju τ od $C_0(M \times G)$ iz te potkategorije definirati unitarnu reprezentaciju σ grupe H takvu da je τ ekvivalentna reprezentaciji $\tau^{\mathcal{E}^\sigma,\pi^\sigma}$.

Lema 6.2.3. *Za $f,g \in C_0(M \times G)$ definiramo funkcije $f * g : M \times G \to \mathbb{C}$ i $f^* : M \times G \to \mathbb{C}$ sa*

$$(f*g)(m,x) = \int_G f(my^{-1}, xy^{-1})g(m,y)d\mu(y), \qquad (m,x) \in M \times G,$$

$$f^*(m,x) = \Delta(x^{-1})\overline{f(mx^{-1},x^{-1})}, \qquad (m,x) \in M \times G.$$

Uz te dvije operacije $C_0(M \times G)$ postaje $*-$algebra.

Dokaz: Neka su $K_1, K_2 \subseteq M$ i $C_1, C_2 \subseteq G$ kompaktni skupovi takvi da je $Supp\, f \subseteq K_1 \times C_1$ i $Supp\, g \subseteq K_2 \times C_2$. Prije svega, dokažimo da je $Supp\, f*g \subseteq K_2 \times C_1C_2$. Doista, ako $m \notin K_2$ onda je $g(m,y) = 0 \ \ \forall y \in G$, prema tome je $(f*g)(m,x) = 0 \ \ \forall x \in G$. S druge strane, neka je $m \in K_2$, ali $x \notin C_1C_2$. Tada $xy^{-1} \notin C_1 \ \ \forall y \in C_2$. Stoga je $f(my^{-1},xy^{-1})g(m,y) = 0 \ \ \forall y \in G$, pa je opet $(f*g)(m,x) = 0$. Time je dokazano da je nosač funkcije $f*g$ sadržan u kompaktnom skupu $K_2 \times C_1C_2$; posebno, $Supp\, f*g$ je kompaktan skup.

Dokažimo sada neprekidnost funkcije $f*g$. Pretpostavimo $f \neq 0$ i $g \neq 0$. Uzmimo proizvoljnu točku $(m_0,x_0) \in M \times G$ i neka je $\varepsilon > 0$. Funkcije f i g su neprekidne s kompaktnim nosačem, dakle, one su uniformno neprekidne. Prema tome, postoji otvorena okolina V od e u G takva da za $(m,x),(m',x')\in M\times G$ vrijede implikacije:

$$(m',x')\in mV\times xV \qquad \Longrightarrow \qquad |f(m,x)-f(m',x')|\leq\frac{\varepsilon}{2\|g\|_\infty\mu(C_2)},$$

$$(m',x')\in mV\times xV \qquad \Longrightarrow \qquad |g(m,x)-g(m',x')|\leq\frac{\varepsilon}{2\|f\|_\infty\mu(C_2)}.$$

stavimo

$$U=\{z\in V;\ yzy^{-1}\in V\ \ \forall y\in C_2\}.$$

Prema lemi 1.2.1. U je otvorena okolina od e u G sadržana u V. Ako je $m\in m_0U$ i $x\in x_0U$, onda je

$$|g(m,y)-g(m_0,y)|\leq\frac{\varepsilon}{2\|f\|_\infty\mu(C_2)} \qquad \forall y\in C_2.$$

Nadalje, tada za svaki $y\in C_2$ vrijedi

$$my^{-1}\in m_0Uy^{-1}=m_0y^{-1}yUy^{-1}\subseteq m_0y^{-1}V \qquad \text{i} \qquad xy^{-1}\in x_0Uy^{-1}=x_0y^{-1}yUy^{-1}\subseteq x_0y^{-1}V$$

pa slijedi

$$|f(my^{-1},xy^{-1})-f(m_0y^{-1},x_0y^{-1})|\leq\frac{\varepsilon}{2\|g\|_\infty\mu(C_2)} \qquad \forall y\in C_2.$$

Prema tome, ako su $m\in m_0U$ i $x\in x_0U$ onda imamo redom

$$|(f*g)(m,x)-(f*g)(m_0,x_0)|\leq\int_{C_2}|f(my^{-1},xy^{-1})g(m,y)-f(m_0y^{-1},x_0y^{-1})g(m_0,y)|\mathrm{d}\mu(y)\leq$$

$$\leq\int_{C_2}|f(my^{-1},xy^{-1})-f(m_0y^{-1},x_0y^{-1})|\cdot|g(m,y)|\mathrm{d}\mu(y)+$$

$$+\int_{C_2}|f(m_0y^{-1},x_0y^{-1})|\cdot|g(m,y)-g(m_0,y)|\mathrm{d}\mu(y)\leq$$

$$\leq\|g\|_\infty\int_{C_2}|f(my^{-1},xy^{-1})-f(m_0y^{-1},x_0y^{-1})|\mathrm{d}\mu(y)+\|f\|_\infty\int_{C_2}|g(m,y)-g(m_0,y)|\mathrm{d}\mu(y)\leq$$

$$\leq\|g\|_\infty\frac{\varepsilon}{2\|g\|_\infty\mu(C_2)}\mu(C_2)+\|f\|_\infty\frac{\varepsilon}{2\|f\|_\infty\mu(C_2)}\mu(C_2)=\varepsilon.$$

Time je dokazano da je funkcija $f*g$ neprekidna u svakoj točki $(m_0,x_0)\in M\times G$.

Dakle, $(f,g)\mapsto f*g$ je preslikavanje sa $C_0(M\times G)\times C_0(M\times G)$ u $C_0(M\times G)$ i to je preslikavanje očigledno bilinearno. Dokažimo asocijativnost. Neka su $f,g,h\in C_0(M\times G)$. Tada zbog desne invarijantnosti mjere μ i korištenjem Fubinijevog teorema imamo redom

$$[(f*g)*h](m,x)=\int_G(f*g)(my^{-1},xy^{-1})h(m,y)\mathrm{d}\mu(y)=$$

$$=\int_G\left[\int_G f(my^{-1}z^{-1},xy^{-1}z^{-1})g(my^{-1},z)\mathrm{d}\mu(z)\right]h(m,y)\mathrm{d}\mu(y)=$$

$$=\int_G\left[\int_G f(mz^{-1},xz^{-1})g(my^{-1},zy^{-1})\mathrm{d}\mu(z)\right]h(m,y)\mathrm{d}\mu(y)=$$

$$=\int_G f(mz^{-1},xz^{-1})\left[\int_G g(my^{-1},zy^{-1})h(m,y)\mathrm{d}\mu(y)\right]\mathrm{d}\mu(z)=$$

$$= \int_G f(mz^{-1}, xz^{-1})(g * h)(m, z)\mathrm{d}\mu(z) = [f * (g * h)](m, x).$$

Dakle, $C_0(M \times G)$ je asocijativna algebra.

Razmotrimo sada svojstva preslikavanja $f \to f^*$. Očito je to preslikavanje antilinearno i involutivno: $f^{**} = f$. Nadalje, za $f, g \in C_0(M \times G)$ i za $(m, x) \in M \times G$ imamo

$$(g^* * f^*)(m, x) = \int_G g^*(my^{-1}, xy^{-1}) f^*(m, y)\mathrm{d}\mu(y) =$$

$$= \int_G \Delta(yx^{-1})\, \overline{g(my^{-1}yx^{-1}, yx^{-1})}\, \Delta(y^{-1})\ \overline{f(my^{-1}, y^{-1})}\mathrm{d}\mu(y) =$$

$$= \Delta(x^{-1}) \int_G \overline{f(my^{-1}, y^{-1})}\ \overline{g(mx^{-1}, yx^{-1})}\mathrm{d}\mu(y) =$$

$$= \Delta(x^{-1}) \int_G \overline{f(mx^{-1}y^{-1}, x^{-1}y^{-1})}\ \overline{g(mx^{-1}, y)}\mathrm{d}\mu(y) = \Delta(x^{-1})\, \overline{(f * g)(mx^{-1}, x^{-1})} = (f * g)^*(m, x).$$

Dakle, vrijedi i $(f * g)^* = g^* * f^*$, odnosno, dokazano je da je $C_0(M \times G)$ s definiranim operacijama $*-$algebra.

Na $*-$algebru $C_0(M \times G)$ ne ćemo uvoditi normu, nego ćemo je snabdjeti s topologijom induktivnog limesa, odnosno, onom u odnosu na koju se definiraju mjere kao neprekidni linearni funkcionali. Ta je topologija definirana na sljedeći način. Za svaki kompaktan skup $K \subseteq M \times G$ definiramo potprostor od $C_0(M \times G)$:

$$C_K(M \times G) = \{f \in C_0(M \times G);\ \mathit{Supp}\, f \subseteq K\}.$$

(Naravno, ako K ima praznu nutrinu onda je $C_K(M \times G) = \{0\}$.) $C_K(M \times G)$ je Banachov prostor u odnosu na normu

$$\|f\|_\infty = \max\{|f(m, x))|;\ (m, x) \in K\}, \qquad f \in C_0(M \times G).$$

Topologija tog Banachovog prostora je topologija uniformne konvergencije na K. Sada se topologija od $C_0(M \times G)$ definira kao ona kojoj bazu okolina nule čine otvorene kugle oko nule u prostoru $C_K(M \times G)$, za sve kompaktne podskupove K od $M \times G$ s nepraznom nutrinom. Za topološki prostor T preslikavanje $F : C_0(M \times G) \to T$ je neprekidno ako i samo ako je za svaki kompaktan skup $K \subseteq M \times G$ restrikcija $F|C_K(M \times G)$ neprekidna s Banachovog prostora $C_K(M \times G)$ u topološki prostor T. Ako je $\mathcal{V}$ normiran prostor s normom $\|\cdot\|$ i $A : C_0(M \times G) \to \mathcal{V}$ linearan operator, onda je A neprekidan ako i samo ako je $A|C_K(M \times G)$ ograničen operator za svaki kompaktan podskup $K \subseteq M \times G$. Dakle, za svaki kompaktan skup $K \subseteq M \times G$ mora postojati $M_K > 0$ takav da je

$$\|Af\| \leq M_K \|f\|_\infty \qquad \forall f \in C_K(M \times G).$$

Primijetimo da je sve spomenuto dovoljno zahtijevati za sve kompaktne skupove K iz neke familije čije nutrine pokrivaju $M \times G$.

Ako je $\mathcal{V}$ normiran prostor i $B : \mathcal{V} \to C_0(M \times G)$ linearan operator, on je neprekidan ako i samo ako je njegovo područje vrijednosti sadržano u $C_K(M \times G)$ za neki kompaktan skup $K \subseteq M \times G$ i ako je operator $B : \mathcal{V} \to C_K(M \times G)$ ograničen.

Linearan (ili antilinearan) operator $B : C_0(M \times G) \to C_0(M \times G)$ je neprekidan ako i samo ako za svaki kompaktan skup $K \subseteq M \times G$ postoje kompaktan skup $L \subseteq M \times G$ i $M_{K,L} > 0$ takvi da vrijedi

$$B(C_K(M \times G)) \subseteq C_L(M \times G) \qquad \text{i} \qquad \|Bf\|_\infty \leq M_{K,L} \cdot \|f\|_\infty \qquad \forall f \in C_K(M \times G).$$

Slično, bilinearno preslikavanje $D : C_0(M \times G) \times C_0(M \times G) \to C_0(M \times G)$ je neprekidno ako i samo ako za svaki kompaktan skup $K \subseteq M \times G$ postoje kompaktan skup $L \subseteq M \times G$ i $M_{K,L} > 0$ takvi da je $D(C_K(M \times G) \times C_K(M \times G)) \subseteq C_L(M \times G)$ i da vrijedi

$$\|D(f, g)\|_\infty \leq M_{K,L} \cdot \|f\|_\infty \cdot \|g\|_\infty \qquad \forall f, g \in C_K(M \times G).$$

Lema 6.2.4. *$C_0(M \times G)$ je topološka $*-$algebra, tj. množenje $(f, g) \mapsto f * g$ je neprekidno sa $C_0(M \times G) \times C_0(M \times G)$ u $C_0(M \times G)$ i involucija $f \mapsto f^*$ je neprekidna sa $C_0(M \times G)$ u $C_0(M \times G)$.*

Dokaz: Neka je $K \subseteq M \times G$ kompaktan skup. Neka su $A \subseteq M$ i $B \subseteq G$ kompaktni skupovi takvi da je $K \subseteq A \times B$. Ako su $f, g \in C_K(M \times G)$, prema dokazu leme 6.2.3. tada je $f * g \in C_L(M \times G)$, gdje je $L = A \times B^2$. Nadalje, imamo

$$\|f * g\|_\infty = \max_{(m,x)\in M\times G} \left| \int_G f(my^{-1}, xy^{-1})g(m, y)\mathrm{d}\mu(y) \right| \leq$$

$$\leq \max_{(m,x)\in A\times B^2} \int_B |f(my^{-1}, xy^{-1})| \cdot |g(m, y)|\mathrm{d}\mu(y) \leq \mu(B) \cdot \|f\|_\infty \cdot \|g\|_\infty.$$

Time je dokazana neprekidnost množenja $(f, g) \mapsto f * g$. Dokažimo sada neprekidnost involucije $f \mapsto f^*$. Neka je $K \subseteq M \times G$ kompaktan skup i neka su ponovo $A \subseteq M$ i $B \subseteq G$ kompaktni skupovi takvi da je $K \subseteq A \times B$. Za $f \in C_K(M \times G)$ je nosač od f^* sadržan u kompaktnom skupu $L = AB^{-1} \times B^{-1}$. Nadalje, ako stavimo $M_{K,L} = \max\{\Delta(x);\ x \in B\}$, tada očito vrijedi

$$\|f^*\|_\infty \leq M_{K,L} \cdot \|f\|_\infty \qquad \forall f \in C_K(M \times G).$$

Dakle, i involucija $f \mapsto f^*$ je neprekidna.

Topološku $*-$algebru $C_0(M \times G)$ zovemo **homogena algebra** homogenog prostora (M, G).

Neka je sada $(\mathcal{E}, \pi)$ reprezentacija od (M, G) na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$. Za $f \in C_0(M \times G)$ i za $x \in G$ definiramo $f^x \in C_0(M)$ sa

$$f^x(m) = f(m, x^{-1}), \qquad m \in M.$$

Kako je funkcija f uniformno neprekidna, preslikavanje $x \mapsto f^x$ je funkcija iz $C_0(G, C_\infty(M))$. Stoga je $x \mapsto \mathcal{E}(f^x)$ funkcija iz $C_0(G, \mathcal{B}(\mathcal{H}))$, dakle je i $x \mapsto \pi(x^{-1})\mathcal{E}(f^x)$ funkcija iz $C_0(G, \mathcal{B}(\mathcal{H}))$. Stoga možemo definirati operator $\tau^{\mathcal{E},\pi}(f) \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ ovako

$$\tau^{\mathcal{E},\pi}(f) = \int_G \pi(x^{-1})\mathcal{E}(f^x)\mathrm{d}\mu(x).$$

Na taj način dolazimo do preslikavanja $\tau^{\mathcal{E},\pi} : C_0(M \times G) \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$.

Lema 6.2.5. *$\tau^{\mathcal{E},\pi}$ je neprekidna reprezentacija $*-$algebre $C_0(M \times G)$ na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$.*

Dokaz: Očito je preslikavanje $f \mapsto \tau^{\mathcal{E},\pi}(f)$ linearno preslikavanje sa $C_0(M \times G)$ u $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Dokažimo da je to preslikavanje neprekidno. Neka je $K \subseteq M \times G$ kompaktan skup. Treba dokazati da je restrikcija $\tau^{\mathcal{E},\pi}|C_K(M \times G)$ ograničen linearan operator sa $C_K(M \times G)$ u $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, tj. da postoji $M_K > 0$ takav da vrijedi

$$\|\tau^{\mathcal{E},\pi}(f)\| \leq M_K\|f\|_\infty \qquad \forall f \in C_K(M \times G).$$

Neka su $A \subseteq M$ i $B \subseteq G$ kompaktni skupovi takvi da je $K \subseteq A \times B$. Ako je $f \in C_K(M \times G)$, tada je $f^x = 0 \ \ \forall x \in G \setminus B^{-1}$, dakle i $\mathcal{E}(f^x) = 0 \ \ \forall x \in G \setminus B^{-1}$. Nadalje, kako je $\mathcal{E}$ reprezentacija C^*-algebre $C_\infty(M)$ i π je unitarna reprezentacija grupe G imamo za svaki $x \in G$

$$\|\mathcal{E}(f^x)\| \leq \|f^x\|_\infty = \max\{|f^x(m)|;\ m \in M\} \leq \max\{|f(m,x^{-1})|;\ (m,x) \in M \times G\} = \|f\|_\infty.$$

Nadalje, π je unitarna reprezentacija od G pa vrijedi i

$$\|\pi(x^{-1})\| = 1 \qquad \forall x \in G.$$

Dakle, za $f \in C_K(M \times G)$ pomoću tvrdnje (c) teorema 6.2.2. nalazimo

$$\|\tau^{\mathcal{E},\pi}(f)\| = \left\| \int_{B^{-1}} \pi(x^{-1})\mathcal{E}(f^x)\mathrm{d}\mu(x) \right\| \leq \int_{B^{-1}} \|\pi(x^{-1})\| \cdot \|\mathcal{E}(f^x)\|\mathrm{d}\mu(x) \leq \mu(B^{-1}) \cdot \|f\|_\infty.$$

Time je dokazana neprekidnost linearnog preslikavanja $\tau^{\mathcal{E},\pi} : C_0(M \times G) \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$.

Dokažimo sada da je $\tau^{\mathcal{E},\pi}$ homomorfizam algebri, tj. da je $\tau^{\mathcal{E},\pi}(f * g) = \tau^{\mathcal{E},\pi}(f)\tau^{\mathcal{E},\pi}(g)$ za $f, g \in C_0(M \times G)$. Prije svega, za $x \in G$ i $m \in M$ imamo

$$(f * g)^x(m) = (f * g)(m, x^{-1}) = \int_G f(my^{-1}, x^{-1}y^{-1})g(m,y)\mathrm{d}\mu(y) =$$

$$= \int_G f^{yx}(my^{-1})g^{y^{-1}}(m)\mathrm{d}\mu(y) = \int_G [(\rho_{y^{-1}}f^{yx}) \cdot (g^{y^{-1}})](m)\mathrm{d}\mu(y).$$

Budući da je za svaki $x \in G$ preslikavanje $y \mapsto (\rho_{y^{-1}}f^{yx}) \cdot (g^{y^{-1}})$ funkcija iz $C_0(G, C_\infty(M))$, gornja se jednakost može pisati ovako

$$(f * g)^x = \int_G (\rho_{y^{-1}}f^{yx}) \cdot (g^{y^{-1}})\mathrm{d}\mu(y).$$

Budući da je $\mathcal{E} : C_\infty(M) \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ neprekidno linearno preslikavanje, primjenom tvrdnje (d) teorema 6.2.2. dobivamo

$$\mathcal{E}((f * g)^x) = \int_G \mathcal{E}((\rho_{y^{-1}}f^{yx}) \cdot (g^{y^{-1}}))\mathrm{d}\mu(y) = \int_G \mathcal{E}(\rho_{y^{-1}}f^{yx})\mathcal{E}(g^{y^{-1}})\mathrm{d}\mu(y).$$

Supstitucija $y \mapsto y^{-1}$ daje

$$\mathcal{E}((f * g)^x) = \int_G \Delta(y^{-1})\mathcal{E}(\rho_y f^{y^{-1}x})\mathcal{E}(g^y)\mathrm{d}\mu(y),$$

gdje je Δ modularna funkcija grupe G. Sada, korištenjem Fubinijevog teorema i pomoću supstitucije $x \mapsto yx$ u integralu po $x \in G$, nalazimo

$$\tau^{\mathcal{E},\pi}(f * g) = \int_G \pi(x^{-1})\mathcal{E}((f * g)^x)\mathrm{d}\mu(x) =$$

$$= \int_G \pi(x^{-1}) \left[\int_G \Delta(y^{-1})\mathcal{E}(\rho_y f^{y^{-1}x})\mathcal{E}(g^y)\mathrm{d}\mu(y) \right] \mathrm{d}\mu(x) =$$

$$= \int_G \Delta(y^{-1}) \left[\int_G \pi(x^{-1})\mathcal{E}(\rho_y f^{y^{-1}x})\mathrm{d}\mu(x) \right] \mathcal{E}(g^y)\mathrm{d}\mu(y) =$$

$$= \int_G \left[\int_G \pi(x^{-1}y^{-1})\mathcal{E}(\rho_y f^x)\mathrm{d}\mu(x) \right] \mathcal{E}(g^y)\mathrm{d}\mu(y).$$

Po definiciji reprezentacije od (M,G) imamo

$$\mathcal{E}(\rho_y f^x) = \pi(y)\mathcal{E}(f^x)\pi(y^{-1}),$$

dakle,

$$\int_G \pi(x^{-1}y^{-1})\mathcal{E}(\rho_y f^x)\mathrm{d}\mu(x) = \int_G \pi(x^{-1})\mathcal{E}(f^x)\pi(y^{-1})\mathrm{d}\mu(x) = \tau^{\mathcal{E},\pi}(f)\pi(y^{-1}).$$

Slijedi

$$\tau^{\mathcal{E},\pi}(f * g) = \tau^{\mathcal{E},\pi}(f)\int_G \pi(y^{-1})\mathcal{E}(g^y)\mathrm{d}\mu(y) = \tau^{\mathcal{E},\pi}(f)\tau^{\mathcal{E},\pi}(g).$$

Time je dokazano da je $\tau^{\mathcal{E},\pi} : C_0(M \times G) \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ homomorfizam algebri.

Treba još dokazati da je $\tau^{\mathcal{E},\pi}$ $*-$homomorfizam. Prije svega, $\mathcal{E}$ je reprezentacija C^*-algebre $C_\infty(M)$ u kojoj je involucija kompleksno konjugiranje. Dakle,

$$\mathcal{E}(h)^* = \mathcal{E}\left(\overline{h}\right), \qquad h \in C_\infty(M).$$

Nadalje, tvrdnja (d) teorema 6.2.2. vrijedi i za antilinearan operator A ako je mjera μ pozitivna (u stvari, dovoljno je da je mjera μ realna). Dakle, za svaku funkciju $g \in C_0(M \times G)$ je

$$\tau^{\mathcal{E},\pi}(g)^* = \int_G [\pi(x^{-1})\mathcal{E}(g^x)]^*\mathrm{d}\mu(x) = \int_G \mathcal{E}\left(\overline{g^x}\right)\pi(x)\mathrm{d}\mu(x),$$

odnosno, za $g = f^*$ imamo

$$\tau^{\mathcal{E},\pi}(f^*)^* = \int_G \mathcal{E}\left(\overline{(f^*)^x}\right)\pi(x)\mathrm{d}\mu(x).$$

Sada je

$$\overline{(f^*)^x}(m) = \overline{f^*(m,x^{-1})} = \Delta(x)f(mx,x) = \Delta(x)(\rho_x f^{x^{-1}})(m), \qquad m \in M,$$

pa slijedi

$$\tau^{\mathcal{E},\pi}(f^*)^* = \int_G \Delta(x)\mathcal{E}(\rho_x f^{x^{-1}})\pi(x)\mathrm{d}\mu(x).$$

Zbog definicije reprezentacije od (M,G) je

$$\mathcal{E}(\rho_x f^{x^{-1}}) = \pi(x)\mathcal{E}(f^{x^{-1}})\pi(x^{-1}), \qquad \text{tj.} \qquad \mathcal{E}(\rho_x f^{x^{-1}})\pi(x) = \pi(x)\mathcal{E}(f^{x^{-1}}),$$

pa dobivamo

$$\tau^{\mathcal{E},\pi}(f^*)^* = \int_G \Delta(x)\pi(x)\mathcal{E}(f^{x^{-1}})\mathrm{d}\mu(x) = \int_G \pi(x^{-1})\mathcal{E}(f^x)\mathrm{d}\mu(x) = \tau^{\mathcal{E},\pi}(f).$$

Time je lema u potpunosti dokazana.

Uvest ćemo sada dodatnu strukturu u algebru $C_0(M \times G)$. Za $\varphi \in C_\infty(M)$, $x \in G$ i $f \in C_0(M \times G)$ definiramo funkcije $\varphi f, f\varphi, \rho_x f, \lambda_x f \in C_0(M \times G)$ sa

$$(\varphi f)(m,y) = \varphi(my^{-1})f(m,y), \qquad (f\varphi)(m,y) = f(m,y)\varphi(m),$$

$$(\rho_x f)(m,y) = f(mx,yx), \qquad (\lambda_x f)(m,y) = f(m,x^{-1}y).$$

Podsjećamo da je za $x \in G$ i $\varphi \in C_\infty$ funkcija $\rho_x\varphi$ definirana sa

$$(\rho_x\varphi)(m) = \varphi(mx) \qquad m \in M.$$

Lema 6.2.6. *Za $x, y \in G$, $\varphi, \psi \in C_\infty(M)$ i $f \in C_0(M \times G)$ vrijede jednakosti*

$$\lambda_x\lambda_y f = \lambda_{xy} f, \qquad \rho_x\rho_y f = \rho_{xy} f, \qquad \lambda_x\rho_y f = \rho_y\lambda_x f,$$

$$\varphi(\psi f) = (\varphi\psi)f, \qquad (f\varphi)\psi = f(\varphi\psi), \qquad (\varphi f)\psi = \varphi(f\psi),$$

$$\lambda_x(\varphi f) = (\rho_x\varphi)(\lambda_x f), \quad \lambda_x(f\varphi) = (\lambda_x f)\varphi, \quad \rho_x(\varphi f) = \varphi(\rho_x f), \quad \rho_x(f\varphi) = (\rho_x f)(\rho_x\varphi),$$

$$(\varphi f)^* = f^*\,\overline{\varphi}, \qquad (f\varphi)^* = \overline{\varphi}\,f^*, \qquad (\lambda_x f)^* = \Delta(x)\rho_x f^*, \qquad (\rho_x f)^* = \Delta(x^{-1})\lambda_x f^*,$$

$$(\lambda_x f)^* * (\lambda_x g) = f * g, \qquad (\varphi f)^* * g = f^* * (\overline{\varphi} g).$$

Dokaz: Sve tvrdnje dokazuju se direktnim računom:

$$(\lambda_x\lambda_y f)(m,z) = (\lambda_y f)(m, x^{-1}z) = f(m, y^{-1}x^{-1}z) = f(m, (xy)^{-1}z) = (\lambda_{xy} f)(m,z).$$

$$(\rho_x\rho_y f)(m,z) = (\rho_y f)(mx, zx) = f(mxy, zxy) = (\rho_{xy} f)(m,z).$$

$$(\lambda_x\rho_y f)(m,z) = (r_y f)(m, x^{-1}z) = f(my, x^{-1}zy) = (\lambda_x f)(my, zy) = (\rho_y\lambda_x f)(m,z).$$

$$[\varphi(\psi f)](m,x) = \varphi(mx^{-1})(\psi f)(m,x) = \varphi(mx^{-1})\psi(mx^{-1})f(m,x) =$$
$$= (\varphi\psi)(mx^{-1})f(m,x) = [(\varphi\psi)f](m,x).$$

$$[(f\varphi)\psi](m,x) = (f\varphi)(m,x)\psi(m) = f(m,x)\varphi(m)\psi(m) = f(m,x)(\varphi\psi)(m) = [f(\varphi\psi)](m,x).$$

$$[(\varphi f)\psi](m,x) = (\varphi f)(m,x)\psi(m) = \varphi(mx^{-1})f(m,x)\psi(m) = \varphi(mx^{-1})(f\psi)(m,x) = [\varphi(f\psi)](m,x).$$

$$[\lambda_x(\varphi f)](m,y) = (\varphi f)(m, x^{-1}y) = \varphi(my^{-1}x)f(m, x^{-1}y) =$$
$$= (\rho_x\varphi)(my^{-1})(\lambda_x f)(m,y) = [(\rho_x\varphi)(\lambda_x f)](m,y).$$

$$[\lambda_x(f\varphi)](m,y) = (f\varphi)(m, x^{-1}y) = f(m, x^{-1}y)\varphi(m) = (\lambda_x f)(m,y)\varphi(m) = [(\lambda_x f)\varphi](m,y).$$

$$[\rho_x(\varphi f)](m,y) = (\varphi f)(mx, yx) = \varphi(my^{-1})f(mx, yx) = \varphi(my^{-1})(\rho_x f)(m,y) = [\varphi(\rho_x f)](m,y).$$

$$[\rho_x(f\varphi)](m,y) = (f\varphi)(mx, yx) = f(mx, yx)\varphi(mx) = (\rho_x f)(m,y)(\rho_x\varphi)(m) = [(\rho_x f)(\rho_x\varphi)](m,y).$$

$$(\varphi f)^*(m,x) = \Delta(x^{-1})\,\overline{(\varphi f)(mx^{-1}, x^{-1})} = \Delta(x^{-1})\,\overline{\varphi(m)}\;\overline{f(mx^{-1}, x^{-1})} =$$
$$= \overline{\varphi}(m)f^*(m,x) = (f^*\,\overline{\varphi})(m,x).$$

$$(f\varphi)^*(m,x) = \Delta(x^{-1})\,\overline{(f\varphi)(mx^{-1}, x^{-1})} = \Delta(x^{-1})\,\overline{f(mx^{-1}, x^{-1})}\;\overline{\varphi(mx^{-1})} =$$
$$= f^*(m,x)\,\overline{\varphi}(m, x^{-1}) = (\overline{\varphi}\,f^*)(m,x).$$

$$(\lambda_x f)^*(m,y) = \Delta(y^{-1})\,\overline{(\lambda_x f)(my^{-1}, y^{-1})} = \Delta(y^{-1})\,\overline{f(my^{-1}, x^{-1}y^{-1})} =$$
$$= \Delta(x)\Delta((yx)^{-1})\,\overline{f(mx(yx)^{-1}, (yx)^{-1})} = \Delta(x)f^*(mx, yx) = \Delta(x)(\rho_x f^*)(m,y).$$

$$(\rho_x f)^*(m,y) = \Delta(y^{-1})\,\overline{(\rho_x f)(my^{-1}, y^{-1})} = \Delta(y^{-1})\,\overline{f(my^{-1}x, y^{-1}x)} =$$
$$= \Delta(x^{-1})\Delta((x^{-1}y)^{-1})\,\overline{f(m(x^{-1}y)^{-1}, (x^{-1}y)^{-1})} = \Delta(x^{-1})f^*(m, x^{-1}y) = \Delta(x^{-1})(\lambda_x f^*)(m,y).$$

$$[(\lambda_x f)^* * (\lambda_x g)](m,y) = \int_G (\lambda_x f)^*(mz^{-1}, yz^{-1})(\lambda_x g)(m,z)\mathrm{d}\mu(z) =$$
$$= \int_G \Delta(zy^{-1})\overline{(\lambda_x f)(my^{-1}, zy^{-1})}\,(\lambda_x g)(m,z)\mathrm{d}\mu(z) =$$
$$= \int_G \Delta(zy^{-1})\overline{f(my^{-1}, x^{-1}zy^{-1})}\,g(m, x^{-1}z)\mathrm{d}\mu(z) =$$
$$= \int_G \Delta(x^{-1})\Delta(xzy^{-1})\overline{f(my^{-1}, zy^{-1})}\,g(m,z)\mathrm{d}\mu(z) =$$

$$= \int_G f^*(mz^{-1}, yz^{-1}) g(m, z) \mathrm{d}\mu(z) = (f^* * g)(m, y).$$

$$[(\varphi f)^* * g](m, x) = \int_G (\varphi f)^*(my^{-1}, xy^{-1})\, g(m, y) \mathrm{d}\mu(y) =$$

$$= \int_G \Delta(yx^{-1}) \overline{(\varphi f)(mx^{-1}, yx^{-1})}\, g(m, y) \mathrm{d}\mu(y) =$$

$$= \int_G \Delta(yx^{-1}) \overline{\varphi(my^{-1})}\ \overline{f(mx^{-1}, yx^{-1})}\, g(m, y) \mathrm{d}\mu(y) =$$

$$= \int_G \Delta(yx^{-1}) \overline{f(mx^{-1}, yx^{-1})}\, \overline{\varphi}(my^{-1}) g(m, y) \mathrm{d}\mu(y) =$$

$$= \int_G f^*(my^{-1}, xy^{-1}) (\overline{\varphi}\, g)(m, y) \mathrm{d}\mu(y) = [f^* * (\overline{\varphi}\, g)](m, x).$$

Lema 6.2.7. (*a*) *Bilinearna preslikavanja* $(\varphi, f) \mapsto \varphi f$ *i* $(\varphi, f) \mapsto f\varphi$ *su neprekidna sa* $C_\infty(M) \times C_0(M \times G)$ *u* $C_0(M \times G)$.

(*b*) *Preslikavanja* $(x, f) \mapsto \lambda_x f$ *i* $(x, f) \mapsto \rho_x f$ *su neprekidna sa* $G \times C_0(M \times G)$ *u* $C_0(M \times G)$.

Dokaz: (*a*) Neka je $K \subseteq M \times G$ kompaktan skup. Da bismo dokazali neprekidnost preslikavanja $(\varphi, f) \mapsto f\varphi$ treba dokazati da postoji kompaktan skup $L \subseteq M \times G$ takav da je $C_L(M \times G) C_\infty(M) \subseteq C_K(M \times G)$ i da postoji $M_{K,L} > 0$ takav da vrijedi

$$\|f\varphi\|_\infty \leq M_{K,L} \cdot \|f\|_\infty \cdot \|\varphi\|_\infty \qquad \forall f \in C_K(M \times G), \quad \forall \varphi \in C_\infty(M).$$

Međutim, za svaki $(m, x) \in M \times G$ vrijedi

$$|(f\varphi)(m, x)| = |f(m, x)\varphi(m)| = |f(m, x)| \cdot |\varphi(m)| \qquad \Longrightarrow \qquad \|f\varphi\|_\infty \leq \|f\|_\infty \cdot \|\varphi\|_\infty.$$

Slijedi $\mathit{Supp}\, f\varphi \subseteq \mathit{Supp}\, f$. Dakle je $C_K(M \times G) C_\infty(M) \subseteq C_K(M \times G)$ i zahtjevi su zadovoljeni uz $L = K$ i $M_{K,K} = 1$.

Neprekidnost preslikavanja $(\varphi, f) \mapsto \varphi f$ slijedi iz dokazanog zbog jednakosti $(f\varphi)^* = \overline{\varphi}\, f^*$ iz leme 6.2.6. budući da je involucija $\varphi \mapsto \overline{\varphi}$ homeomorfizam algebre $C_\infty(M)$ na samu sebe i involucija $f \mapsto f^*$ je homeomorfizam algebre $C_0(M \times G)$ na samu sebe.

(*b*) Dokažimo sada neprekidnost preslikavanja $(x, f) \mapsto \lambda_x f$ sa $G \times C_0(M \times G)$ u $C_0(M \times G)$. Budući da je to preslikavanje linearno u drugoj varijabli i budući da je $\lambda_x \lambda_y f = \lambda_{xy} f$, dovoljno je dokazati neprekidnost u točki $(e, 0) \in G \times C_0(M \times G)$. To znači da treba dokazati da za svaki kompaktan skup $K \subseteq M \times G$ i za svaki $\varepsilon > 0$ postoje okolina V od e u G, kompaktan skup $L \subseteq M \times G$ i $\delta > 0$ takvi da vrijedi

$$x \in V, \quad f \in C_L(M \times G), \quad \|f\|_\infty \leq \delta \qquad \Longrightarrow \qquad \lambda_x f \in C_K(M \times G) \quad \text{i} \quad \|\lambda_x f\|_\infty \leq \varepsilon.$$

Budući da je $\|\lambda_x f\|_\infty = \|f\|_\infty \ \ \forall x \in G \ \text{ i } \ \forall f \in C_0(M \times G)$, bez obzira na K i na izbor V i L možemo uzeti $\delta = \varepsilon$ i posljednja nejednakost će biti ispunjena. Prema tome, treba samo dokazati da za svaki kompaktan skup $K \subseteq M \times G$ postoje okolina V od e u G i kompaktan skup $L \subseteq M \times G$ takvi da je $\lambda_x f \in C_L(M \times G) \ \ \forall x \in V \ \text{ i } \ \forall f \in C_K(M \times G)$. Za dani K izaberimo kompaktne skupove $A \subseteq M$ i $B \subseteq G$ i kompaktnu okolinu V od e u G. Za $x \in V$ i $\mathit{Supp}\, f \subseteq K$ slijedi da je $\mathit{Supp}\, \lambda_x f \subseteq A \times VB$. Dakle, za L možemo uzeti kompaktan skup $A \times VB$.

Neprekidnost preslikavanja $(x, f) \mapsto \rho_x f$ slijedi iz dokazanog, budući da prema lemi 6.2.6. vrijedi jednakost $r_x f = \Delta(x^{-1})(\lambda_x f^*)^*$ i budući da su invertiranje $x \mapsto x^{-1}$, modularna funkcija Δ i involucija $f \mapsto f^*$ neprekidna preslikavanja.

Pomoću lijevog i desnog množenja funkcijama iz $C_\infty(M)$ i pomoću lijevih i desnih pomaka definiramo linearne operatore na $C_0(M \times G)$:

$$\mathcal{E}_\ell(\varphi)f = \varphi f,\ \pi_\ell(x)f = \lambda_x f,\ \mathcal{E}_r(\varphi)f = f\varphi,\ \pi_r(x)f = \rho_x f,\ \varphi \in C_\infty(M),\ x \in G,\ f \in C_0(M \times G).$$

Prema lemama 6.2.6. i 6.2.7. to su neprekidne reprezentacije algebre $C_\infty(M)$, odnosno, grupe G na prostoru $C_0(M \times G)$. U stvari radi se o reprezentacijama homogenog prostora (M, G) :

Lema 6.2.8. *Za $\varphi \in C_\infty(M)$ i $x \in G$ vrijede jednakosti*

$$\mathcal{E}_\ell(\rho_x\varphi) = \pi_\ell(x)\mathcal{E}_\ell\pi_\ell(x^{-1}) \qquad i \qquad \mathcal{E}_r(\varphi)(\rho_x\varphi) = \pi_r(x)\mathcal{E}_r\pi_r(x^{-1}).$$

Dokaz je direktan račun:

$$[\mathcal{E}_\ell(\rho_x\varphi)f](m,y) = (\rho_x\varphi)(my^{-1})f(m,y) = \varphi(my^{-1}x)f(m,y) = \varphi(my^{-1}x)(\lambda_{x^{-1}}f)(m,x^{-1}y) =$$

$$= \varphi(my^{-1}x)(\pi_\ell(x^{-1})f)(m,x^{-1}y) = [\mathcal{E}_\ell(\varphi)\pi_\ell(x^{-1})f](m,x^{-1}y) = [\pi_\ell(x)\mathcal{E}_\ell(\varphi)\pi_\ell(x^{-1})](m,y);$$

$$[\mathcal{E}_r(\rho_x\varphi)f](m,y) = [f(\rho_x\varphi)](m,y) = f(m,y)\varphi(mx) = (\rho_{x^{-1}}f)(mx,yx)\varphi(mx) =$$

$$= [(\rho_{x^{-1}}f)\varphi](mx,yx) = [\mathcal{E}_r(\varphi)\pi_r(x^{-1})f](mx,yx) = [\pi_r(x)\mathcal{E}_r(\varphi)\pi_r(x^{-1})f](m,y).$$

$(\mathcal{E}_\ell, \pi_\ell)$ se zove **lijeva regularna reprezentacija homogenog prostora** (M, G) na prostoru $C_0(M \times G)$. $(\mathcal{E}_r, \pi_r)$ je **desna regularna reprezentacija homogenog prostora** (M, G) na prostoru $C_0(M \times G)$. Iz leme 6.2.6. slijedi da operatori lijeve regularne reprezentacije komutiraju s operatorima desne regularne reprezentacije:

Lema 6.2.9. *Za $\varphi, \psi \in C_\infty(M)$ i $x, y \in G$ vrijedi*

$$\pi_\ell(x)\pi_r(y) = \pi_r(y)\pi_\ell(x), \qquad \pi_\ell(x)\mathcal{E}_r(\varphi) = \mathcal{E}_r(\varphi)\pi_\ell(x),$$

$$\pi_r(x)\mathcal{E}_\ell(\varphi) = \mathcal{E}_\ell(\varphi)\pi_r(x), \qquad \mathcal{E}_\ell(\varphi)\mathcal{E}_r(\psi) = \mathcal{E}_r(\psi)\mathcal{E}_\ell(\varphi).$$

Dokaz: Jednakosti su samo drugačije napisane sljedeće jednakosti iz leme 6.2.6:

$$\lambda_x\rho_y f = \rho_y\lambda_x f, \quad \lambda_x(f\varphi) = (\lambda_x f)\varphi, \quad \rho_x(\varphi f) = \varphi(\rho_x f), \quad (\varphi f)\psi = \varphi(f\psi).$$

Lema 6.2.10. *Neka je $(\mathcal{E}, \pi)$ reprezentacija od (M, G) na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$. Tada vrijedi*

$$\tau^{\mathcal{E},\pi}(\varphi f) = \mathcal{E}(\varphi)\tau^{\mathcal{E},\pi}(f), \qquad \tau^{\mathcal{E},\pi}(f\varphi) = \tau^{\mathcal{E},\pi}(f)\mathcal{E}(\varphi), \qquad \varphi \in C_\infty(M), \quad f \in C_0(M \times G),$$

$$\tau^{\mathcal{E},\pi}(\rho_x f) = \Delta(x^{-1})\tau^{\mathcal{E},\pi}(f)\pi(x^{-1}), \qquad \tau^{\mathcal{E},\pi}(\lambda_x f) = \pi(x)\tau^{\mathcal{E},\pi}(f), \qquad x \in G, \quad f \in C_0(M \times G).$$

Dokaz: Za $(m, x) \in M \times G$ je

$$(\varphi f)^x(m) = (\varphi f)(m, x^{-1}) = \varphi(mx)f(m, x^{-1}) = (\rho_x\varphi)(m)f^x(m).$$

Dakle, $(\varphi f)^x = \rho_x\varphi \cdot f^x$, pa nalazimo

$$\tau^{\mathcal{E},\pi}(\varphi f) = \int_G \pi(x^{-1})\mathcal{E}(\rho_x\varphi)\mathcal{E}(f^x)\mathrm{d}\mu(x) = \int_G \mathcal{E}(\varphi)\pi(x^{-1})\mathcal{E}(f^x)\mathrm{d}\mu(x) = \mathcal{E}(\varphi)\tau^{\mathcal{E},\pi}(f).$$

Nadalje, za $(m, x) \in M \times G$ je

$$(f\varphi)^x(m) = (f\varphi)(m, x^{-1}) = f(m, x^{-1})\varphi(m) = f^x(m)\varphi(m) = (f^x \cdot \varphi)(m),$$

pa slijedi

$$\tau^{\mathcal{E},\pi}(f\varphi)=\int_G \pi(x^{-1})\mathcal{E}((f\varphi)^x)\mathrm{d}\mu(x)=\int_G \pi(x^{-1})\mathcal{E}(f^x)\mathcal{E}(\varphi)\mathrm{d}\mu(x)=\tau^{\mathcal{E},\pi}(f)\mathcal{E}(\varphi).$$

Za $m\in M$ i $x,y\in G$ je

$$(\rho_x f)^y(m)=(\rho_x fr)(m,y^{-1})=f(mx,y^{-1}x)=f^{x^{-1}y}(mx)=(\rho_x f^{x^{-1}y})(m),$$

dakle,

$$\tau^{\mathcal{E},\pi}(\rho_x f)=\int_G \pi(y^{-1})\mathcal{E}((\rho_x f)^y)\mathrm{d}\mu(y)=\int_G \pi(y^{-1})\mathcal{E}(\rho_x f^{x^{-1}y})\mathrm{d}\mu(y)=$$

$$=\int_G \pi(y^{-1}x)\mathcal{E}(f^{x^{-1}y})\pi(x^{-1})\mathrm{d}\mu(y)=\Delta(x^{-1})\int_G \pi(y^{-1})\mathcal{E}(f^y)\pi(x^{-1})\mathrm{d}\mu(y)=\Delta(x^{-1})\tau^{\mathcal{E},\pi}(f)\pi(x^{-1}).$$

Napokon, za $m\in M$ i $x,y\in G$ je

$$(\lambda_x f)^y(m)=(\lambda_x f)(m,y^{-1})=f(m,x^{-1}y^{-1})=f^{yx}(m),$$

dakle,

$$\tau^{\mathcal{E},\pi}(\lambda_x f)=\int_G \pi(y^{-1})\mathcal{E}\left((\lambda_x f)^y\right)\mathrm{d}\mu(y)=\int_G \pi(y^{-1})\mathcal{E}(f^{yx})\mathrm{d}\mu(y)=$$

$$=\int_G \pi(xy^{-1})\mathcal{E}(f^y)\mathrm{d}\mu(y)=\pi(x)\int_G \pi(y^{-1})\mathcal{E}(f^y)\mathrm{d}\mu(y)=\pi(x)\tau^{\mathcal{E},\pi}(f).$$

U točki 2.2 svakoj unitarnoj reprezentaciji π lokalno kompaktne grupe G na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$ pridružili smo nedegeneriranu reprezentaciju normirane $*-$algebre $C_0(G)$ na istom prostoru $\mathcal{H}$. Tu smo reprezentaciju označavali istim znakom π i definicija je bila sljedeća

$$\pi(\Phi)=\int_G \Phi(x)\pi(x)\mathrm{d}\check{\mu}(x)=\int_G \Phi(x^{-1})\pi(x^{-1})\mathrm{d}\mu(x),\qquad \Phi\in C_0(G).$$

Lema 6.2.11. *Za funkcije $\varphi\in C_0(M)$ i $\Phi\in C_0(G)$ definiramo funkciju $f_{\varphi,\Phi}\in C_0(M\times G)$ sa $f_{\varphi,\Phi}(m,x)=\varphi(m)\Phi(x)$, $(m,x)\in M\times G$. Za reprezentaciju $(\mathcal{E},\pi)$ od (M,G) na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$ vrijedi*

$$\tau^{\mathcal{E},\pi}(f_{\varphi,\Phi})=\pi(\Phi)\mathcal{E}(\varphi)\qquad \forall\varphi\in C_0(M),\quad \forall\Phi\in C_0(G).$$

Dokaz: Imamo

$$(f_{\varphi,\Phi})^x(m)=f_{\varphi,\Phi}(m,x^{-1})=\varphi(m)\Phi(x^{-1}).$$

Dakle,

$$\mathcal{E}((f_{\varphi,\Phi})^x)=\Phi(x^{-1})\mathcal{E}(\varphi),$$

pa slijedi

$$\tau^{\mathcal{E},\pi}(f_{\varphi,\Phi})=\int_G \pi(x^{-1})\Phi(x^{-1})\mathcal{E}(\varphi)\mathrm{d}\mu(x)=\int_G \Phi(x^{-1})\pi(x^{-1})\mathrm{d}\mu(x)\cdot\mathcal{E}(\varphi)=\pi(\Phi)\mathcal{E}(\varphi).$$

Lema 6.2.12. *Neka je $(\mathcal{E},\pi)$ reprezentacija od (M,G) na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$. Tada je reprezentacija $\tau^{\mathcal{E},\pi}$ algebre $C_0(M\times G)$ nedegenerirana.*

Dokaz: Neka je $\xi \in \mathcal{H}$. Budući da je reprezentacija $\mathcal{E}$ algebre $C_\infty(M)$ nedegenerirana i budući da je $C_0(M)$ gusta podalgebra od $C_\infty(M)$, restrikcija $\mathcal{E}|C_0(M)$ je nedegenerirana reprezentacija algebre $C_0(M)$. Stoga postoji niz $(\varphi_i)_{i\in\mathbb{N}}$ u $C_0(M)$ takav da je

$$\xi = \lim_{i\to\infty} \mathcal{E}(\varphi_i)\xi.$$

Nadalje, π je nedegenerirana reprezentacija algebre $C_0(G)$ pa postoji niz $(\Phi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ u $C_0(G)$ takav da je

$$\xi = \lim_{j\to\infty} \pi(\Phi_j)\xi.$$

Sada je

$$\xi = \lim_{j\to\infty} \pi(\Phi_j)\xi = \lim_{j\to\infty} \pi(\Phi_j)\left(\lim_{i\to\infty} \mathcal{E}(\varphi_i)\xi\right) = \lim_{j\to\infty}\lim_{i\to\infty} \pi(\Phi_j)\mathcal{E}(\varphi_i)\xi = \lim_{j\to\infty}\lim_{i\to\infty} \tau^{\mathcal{E},\pi}(f_{\varphi_i,\Phi_j})\xi.$$

Dakle, $\tau^{\mathcal{E},\pi}$ je nedegenerirana reprezentacija algebre $C_0(M\times G)$.

Lema 6.2.13. *Neka je $(\mathcal{E},\pi)$ reprezentacija od (M,G) na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$.*

(*a*) *Zatvoren potprostor $\mathcal{K}$ od $\mathcal{H}$ je $(\mathcal{E},\pi)-$invarijantan ako i samo ako je on $\tau^{\mathcal{E},\pi}-$invarijantan.*

(*b*) *Ako je $\mathcal{K}$ zatvoren $(\mathcal{E},\pi)-$invarijantan potprostor od $\mathcal{H}$, onda se subreprezentacija $(\tau^{\mathcal{E},\pi})_{\mathcal{K}}$ podudara s reprezentacijom $\tau^{\mathcal{E}_{\mathcal{K}},\pi_{\mathcal{K}}}$.*

Dokaz: (*a*) Pretpostavimo da je $\mathcal{K}$ zatvoren $(\mathcal{E},\pi)-$invarijantan potprostor od $\mathcal{H}$. Za $x\in G$, $f\in C_0(M\times G)$ i $\xi\in\mathcal{K}$ je tada $\pi(x^{-1})\mathcal{E}(f^x)\xi\in\mathcal{K}$, pa slijedi

$$\tau^{\mathcal{E},\pi}(f)\xi = \int_G \pi(x^{-1})\mathcal{E}(f^x)\xi \mathrm{d}\mu(x) \in \mathcal{K}.$$

Dakle, potprostor $\mathcal{K}$ je $\tau^{\mathcal{E},\pi}-$invarijantan.

Pretpostavimo sada da je $\mathcal{K}$ zatvoren $\tau^{\mathcal{E},\pi}-$invarijantan potprostor od $\mathcal{H}$. Budući da je reprezentacija $\tau^{\mathcal{E},\pi}$ prema lemi 6.2.12. nedegenerirana, to je nedegenerirana i njena subreprezentacija na potprostoru $\mathcal{K}$. Dakle, potprostor $\mathcal{V}$ od $\mathcal{K}$ razapet svim vektorima oblika $\tau^{\mathcal{E},\pi}(f)\xi$, $f\in C_0(M\times G)$, $\xi\in\mathcal{K}$, je gust u $\mathcal{K}$. Međutim, po lemi 6.2.10. za $\varphi\in C_\infty(M)$, $x\in G$, $f\in C_0(M\times G)$ i $\xi\in\mathcal{K}$ je

$$\mathcal{E}(\varphi)\tau^{\mathcal{E},\pi}(f)\xi = \tau^{\mathcal{E},\pi}(\varphi f)\xi \in \mathcal{V} \qquad \pi(x)\tau^{\mathcal{E},\pi}(f)\xi = \tau^{\mathcal{E},\pi}(\lambda_x f)\xi \in \mathcal{V}.$$

To pokazuje da je potprostor $\mathcal{V}$ $(\mathcal{E},\pi)-$invarijantan, pa je i njegov zatvarač $\mathcal{K}$ $(\mathcal{E},\pi)-$invarijantan.

Tvrdnja (*b*) je neposredna posljedica tvrdnje (*a*).

Iz leme 6.2.13. neposredno slijedi:

Lema 6.2.14. *Neka je $(\mathcal{E},\pi)$ reprezentacija od (M,G) na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$.*

(*a*) *Vektor $\xi\in\mathcal{H}$ je ciklički za reprezentaciju $(\mathcal{E},\pi)$ ako i samo ako je on ciklički za reprezentaciju $\tau^{\mathcal{E},\pi}$.*

(*b*) *Reprezentacija $(\mathcal{E},\pi)$ je ireducibilna ako i samo ako je reprezentacija $\tau^{\mathcal{E},\pi}$ ireducibilna.*

Lema 6.2.15. *Neka su $(\mathcal{E}_1,\pi_1)$ i $(\mathcal{E}_2,\pi_2)$ reprezentacije od (M,G) na Hilbertovim prostorima $\mathcal{H}_1$ i $\mathcal{H}_2$. Tada je*

$$Hom_{M,G}(\mathcal{E}_1,\pi_1;\mathcal{E}_2,\pi_2) = Hom_{C_0(M\times G)}(\tau^{\mathcal{E}_1,\pi_1},\tau^{\mathcal{E}_2,\pi_2}).$$

Dokaz: Neka je $T \in Hom_{M,G}(\mathcal{E}_1, \pi_1; \mathcal{E}_2, \pi_2) = Hom_G(\pi_1, \pi_2) \cap Hom_{C_\infty(M)}(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2)$. Tada za $f \in C_0(M \times G)$ vrijedi

$$\tau^{\mathcal{E}_2,\pi_2}(f)T = \int_G \pi_2(x^{-1})\mathcal{E}_2(f^x)T\mathrm{d}\mu(x) = \int_G T\pi_1(x^{-1})\mathcal{E}_1(f^x)\mathrm{d}\mu(x) = T\tau^{\mathcal{E}_1,\pi_1}(f).$$

Dakle, $T \in Hom_{C_0(M\times G)}(\tau^{\mathcal{E}_1,\pi_1}, \tau^{\mathcal{E}_2,\pi_2})$ i time je dokazana inkluzija

$$Hom_{M,G}(\mathcal{E}_1, \pi_1; \mathcal{E}_2, \pi_2) \subseteq Hom_{C_0(M\times G)}(\tau^{\mathcal{E}_1,\pi_1}, \tau^{\mathcal{E}_2,\pi_2}).$$

Pretpostavimo sada da je $T \in Hom_{C_0(M\times G)}(\tau^{\mathcal{E}_1,\pi_1}, \tau^{\mathcal{E}_2,\pi_2})$. Tada za $\varphi \in C_\infty(M)$, $x \in G$, $f \in C_0(M \times G)$ i $\xi \in \mathcal{H}_1$ imamo prema lemi 6.2.10.

$$\mathcal{E}_2(\varphi)T\tau^{\mathcal{E}_1,\pi_1}(f)\xi = \mathcal{E}_2(\varphi)\tau^{\mathcal{E}_2,\pi_2}(f)T\xi = \tau^{\mathcal{E}_2,\pi_2}(\varphi f)T\xi = T\tau^{\mathcal{E}_1,\pi_1}(\varphi f)\xi = T\mathcal{E}_1(\varphi)\tau^{\mathcal{E}_1,\pi_1}(f)\xi,$$

$$\pi_2(x)T\tau^{\mathcal{E}_1,\pi_1}(f)\xi = \pi_2(x)\tau^{\mathcal{E}_2,\pi_2}(f)T\xi = \tau^{\mathcal{E}_2,\pi_2}(\lambda_x f)T\xi = T\tau^{\mathcal{E}_1,\pi_1}(\lambda_x f)\xi = T\pi_1(x)\tau^{\mathcal{E}_1,\pi_1}(f)\xi.$$

Budući da je po lemi 6.2.12. reprezentacija $\tau^{\mathcal{E}_1,\pi_1}$ nedegenerirana, vektori oblika $\tau^{\mathcal{E}_1,\pi_1}(f)\xi$, $f \in C_0(M \times G)$, $\xi \in \mathcal{H}$, razapinju gust potprostor od $\mathcal{H}_1$. Stoga iz gornjih jednakosti slijedi

$$\mathcal{E}_2(\varphi)T = T\mathcal{E}_1(\varphi), \qquad \pi_2(x)T = T\pi_1(x), \qquad \forall\varphi \in C_\infty(M), \quad \forall x \in G.$$

Dakle, vrijedi $T \in Hom_G(\pi_1, \pi_2) \cap Hom_{C_\infty(M)}(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2) = Hom_{M,G}(\mathcal{E}_1, \pi_1; \mathcal{E}_2, \pi_2)$ i time je dokazana i obrnuta inkluzija

$$Hom_{M,G}(\mathcal{E}_1, \pi_1; \mathcal{E}_2, \pi_2) \supseteq Hom_{C_0(M\times G)}(\tau^{\mathcal{E}_1,\pi_1}, \tau^{\mathcal{E}_2,\pi_2}).$$

Sljedeći nam je cilj da provedemo posljednju konstrukciju iz odlomka prije leme 6.2.3. Dakle, polazeći od reprezentacije τ homogene algebre $C_0(M \times G)$ želimo konstruirati unitarnu reprezentaciju σ od H takvu da je reprezentacija τ ekvivalentna reprezentaciji $\tau^{\mathcal{E}^\sigma,\pi^\sigma}$. Prije svega treba definirati odgovarajuću potkategoriju kategorije reprezentacija homogene algebre $C_0(M\times G)$, budući da za opću reprezentaciju od $C_0(M \times G)$ takva konstrukcija nije moguća. Naravno, bilo bi nam zadovoljavajuće da kao tu potkategoriju uzmemo onu čiji su objekti reprezentacije oblika $\tau^{\mathcal{E},\pi}$, gdje je $(\mathcal{E}, \pi)$ reprezentacija homogenog prostora (M, G). Postupit ćemo malo općenitije i opisati potkategoriju svojstvima samih reprezentacija. Na taj način dobit ćemo i karakterizaciju reprezentacija od $C_0(M \times G)$ koje su oblika $(\tau^{\mathcal{E},\pi}$. Uočimo da prema lemi 6.2.10. za reprezentaciju $(\mathcal{E}, \pi)$ homogenog prostora (M, G) i za $x \in G$, $\varphi \in C_\infty(M)$ i $f \in C_0(M \times G)$ vrijedi

$$\tau^{\mathcal{E},\pi}(f\varphi) = \tau^{\mathcal{E},\pi}(f)\mathcal{E}(\varphi), \qquad \tau^{\mathcal{E},\pi}(\varphi f) = \mathcal{E}(\varphi)\tau^{\mathcal{E},\pi}(f),$$

$$\tau^{\mathcal{E},\pi}(\rho_x f) = \Delta(x^{-1})\tau^{\mathcal{E},\pi}(f)\pi(x^{-1}), \qquad \tau^{\mathcal{E},\pi}(\lambda_x f) = \pi(x)\tau^{\mathcal{E},\pi}(f).$$

Posljedica ovih jednakosti su sljedeće inkluzije i jednakosti:

$$\operatorname{Im}\tau^{\mathcal{E},\pi}(f\varphi) \subseteq \operatorname{Im}\tau^{\mathcal{E},\pi}(f), \qquad \operatorname{Ker}\tau^{\mathcal{E},\pi}(\varphi f) \supseteq \operatorname{Ker}\tau^{\mathcal{E},\pi}(f),$$

$$\operatorname{Im}\tau^{\mathcal{E},\pi}(\rho_x f) = \operatorname{Im}\tau^{\mathcal{E},\pi}(f), \qquad \operatorname{Ker}\tau^{\mathcal{E},\pi}(\lambda_x f) = \operatorname{Ker}\tau^{\mathcal{E},\pi}(f).$$

Primijetimo da su zbog odnosa između jezgara i slika operatora i adjungiranog operatora na Hilbertovom prostoru (tj. $\operatorname{Ker} A = (\operatorname{Im} A^*)^\perp$) i zbog posljednjih jednakosti u lemi 6.2.6. druga inkluzija posljedica prve, a posljednja jednakost je posljedica prethodne. Stoga bismo kao definiciju naše potkategorije mogli postulirati prvu inkluziju i prvu jednakost. Ipak, zbog lakšeg baratanja upotrijebit ćemo prividno nešto slabije zahtjeve, tj. drugu inkluziju i posljednju jednakost.

Reprezentaciju τ homogene algebre $C_0(M\times G)$ zvat ćemo **pravilna reprezentacija** ako vrijedi

$$\operatorname{Ker}\tau(\varphi f) \supseteq \operatorname{Ker}\tau(f) \quad \text{i} \quad \operatorname{Ker}\tau(\lambda_x f) = \operatorname{Ker}\tau(f) \qquad \forall\varphi \in C_\infty(M), \quad \forall x \in G, \quad \forall f \in C_0(M\times G).$$

Konstrukciju unitarne reprezentacije σ grupe H iz pravilne reprezentacije τ homogene algebre $C_0(M \times G)$ provest ćemo najprije u slučaju da je reprezentacija τ ciklička. Opći slučaj će slijediti formiranjem ortogonalne sume cikličkih reprezentacija. **U daljnjem stalno pretpostavljamo da je zadana pravilna neprekidna reprezentacija τ homogene algebre $C_0(M \times G)$ na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$ koja je ciklička. Nadalje, fiksirajmo ciklički vektor $\xi_c \in \mathcal{H}$, $\|\xi_c\| = 1$, i označimo sa $\mathcal{V} = \tau(C_0(M \times G)\xi_c$ pripadni gusti potprostor Hilbertovog prostora $\mathcal{H}$.**

Definiramo sada linearnu surjekciju

$$T : C_0(M \times G) \to \mathcal{V}, \qquad Tf = \tau(f)\xi_c, \qquad f \in C_0(M \times G).$$

Tada dobivamo izomorfizam S kvocijentnog prostora $C_0(M \times G)$ po potprostoru

$$\mathcal{N} = \operatorname{Ker} T = \{f \in C_0(M \times G);\ \tau(f)\xi_c = 0\}$$

na vektorski prostor $\mathcal{V}$:

$$S : C_0(M \times G)/\mathcal{N} \to \mathcal{V}, \qquad S(f + \mathcal{N}) = \tau(f)\xi_c, \qquad f \in C_0(M \times G).$$

Lema 6.2.16. *Potprostor $\mathcal{N}$ invarijantan je u odnosu na lijevu regularnu reprezentaciju $(\mathcal{E}_\ell, \pi_\ell)$ homogenog prostora (M, G).*

Dokaz: Doista, zbog pravilnosti reprezentacije τ imamo sljedeće nizove implikacija:

$$f \in \mathcal{N} \Rightarrow \tau(f)\xi_c = 0 \Rightarrow \xi_c \in \operatorname{Ker}\tau(f) \Rightarrow \xi_c \in \operatorname{Ker}\tau(\varphi f) \Rightarrow \tau(\varphi f)\xi_c = 0 \Rightarrow \mathcal{E}_\ell(\varphi)f = \varphi f \in \mathcal{N};$$

$$f \in \mathcal{N} \Rightarrow \tau(f)\xi_c = 0 \Rightarrow \xi_c \in \operatorname{Ker}\tau(f) \Rightarrow \xi_c \in \operatorname{Ker}\tau(\lambda_x f) \Rightarrow \tau(\lambda_x f)\xi_c = 0 \Rightarrow \pi_\ell(x)f = \lambda_x f \in \mathcal{N}.$$

Stoga možemo prijeći na kvocijent i upotrijebiti izomorfizam $S : C_0(M \times G) \to \mathcal{V}$ da definiramo linearne operatore $\mathcal{E}(\varphi)$, $\varphi \in C_\infty(M)$, i $\pi(x)$, $x \in G$, na prostoru $\mathcal{V}$:

$$\mathcal{E}(\varphi)S(f + \mathcal{N}) = S(\mathcal{E}_\ell(\varphi)f + \mathcal{N}), \qquad \pi(x)S(f + \mathcal{N}) = S(\pi_\ell(x)f + \mathcal{N}), \qquad f \in C_0(M \times G).$$

Te se relacije zbog definicije operatora S i T mogu i ovako zapisati:

$$\mathcal{E}(\varphi)\tau(f)\xi_c = \tau(\mathcal{E}_\ell(\varphi)f)\xi_c, \qquad \pi(x)\tau(f)\xi_c = \tau(\pi_\ell(x)f)\xi_c, \qquad f \in C_0(M \times G).$$

Zbog svojstava preslikavanja $\mathcal{E}_\ell$ i π_ℓ slijedi da je $\mathcal{E}$ homomorfizam algebre $C_\infty(M)$ u algebru $\mathcal{L}(\mathcal{V})$ linearnih operatora na vektorskom prostoru $\mathcal{V}$ i da je π homomorfizam grupe G u grupu invertibilnih operatora u $\mathcal{L}(\mathcal{V})$:

$$\mathcal{E}(\varphi + \psi) = \mathcal{E}(\varphi) + \mathcal{E}(\psi), \quad \mathcal{E}(\lambda\varphi) = \lambda\mathcal{E}(\varphi), \quad \mathcal{E}(\varphi\psi) = \mathcal{E}(\varphi)\mathcal{E}(\psi), \qquad \varphi, \psi \in C_\infty(M), \quad \lambda \in \mathbb{C};$$

$$\pi(xy) = \pi(x)\pi(y), \quad \pi(e) = I_{\mathcal{V}}, \qquad x, y \in G.$$

Lema 6.2.17. *Za svaki $x \in G$ operator $\pi(x)$ proširuje se do unitarnog operatora na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$. Dobiveno preslikavanje G u $\mathcal{U}(\mathcal{H})$ je unitarna reprezentacija grupe G na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$.*

Dokaz: Neka je $x \in G$ i neka su $\eta, \zeta \in \mathcal{V}$. Izaberimo $f, g \in C_0(M \times G)$ tako da bude $\eta = \tau(f)\xi_c$ i $\zeta = \tau(g)\xi_c$. Koristeći pretposljednju jednakost u lemi 6.2.6. imamo redom

$$(\pi(x)\eta|\pi(x)\zeta) = (\pi(x)\tau(f)\xi_c|\pi(x)\tau(g)\xi_c) = (\tau(\pi_\ell(x)f)\xi_c|\tau(\pi_\ell(x)g)\xi_c) = (\tau(\lambda_x f)\xi_c|\tau(\lambda_x g)\xi_c) =$$

$$= (\xi_c|\tau(\lambda_x f)^*\tau(\lambda_x g)\xi_c) = (\xi_c|\tau((\lambda_x f)^* * (\lambda_x g))\xi_c) = (\xi_c|\tau(f^* * g)\xi_c) = (\xi_c|\tau(f)^*\tau(g)\xi_c) = (\eta|\zeta).$$

Time je dokazano da vrijedi

$$(\pi(x)\eta|\pi(x)\zeta) = (\eta|\zeta) \qquad \forall \eta, \zeta \in \mathcal{V}, \quad \forall x \in G.$$

Stoga se $\pi(x)$ jedinstveno proširuje do izometrije sa $\mathcal{H}$ na $\mathcal{H}$, tj. do unitarnog operatora na prostoru $\mathcal{H}$, koji ćemo i dalje označavati sa $\pi(x)$. Preslikavanje $x \mapsto \pi(x)$ je homomorfizam grupe G u grupu $\mathcal{U}(\mathcal{H})$ unitarnih operatora na $\mathcal{H}$.

Dokažimo da je π unitarna reprezentacija lokalno kompaktne grupe G na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$. U tu svrhu treba još dokazati neprekidnost. Prema lemi 2.1.2. dovoljno je dokazati da je preslikavanje $x \mapsto \pi(x)\eta$ neprekidno u jedinici e grupe G za svaki $\eta \in \mathcal{V}$. Neka je $\eta \in \mathcal{V}$ i neka je $f \in C_0(M \times G)$ takva da je $\eta = \tau(f)\xi_c$. Imamo $\pi(x)\eta = \tau(\lambda_x f)\xi_c$. Budući da je τ neprekidna reprezentacija algebre $C_0(M \times G)$, preslikavanje $T : g \mapsto \tau(g)\xi_c$ sa $C_0(M \times G)$ u $\mathcal{H}$ je neprekidno. Stoga je dovoljno dokazati da je preslikavanje $x \mapsto \lambda_x f$ neprekidno sa G u $C_0(M \times G)$ u točki e za svaku funkciju $f \in C_0(M \times G)$. Funkcija $f \in C_0(M \times G)$ je uniformno neprekidna. Stoga za dano $\varepsilon > 0$ postoji okolina $V = V^{-1}$ od e u G takva da vrijedi

$$m' \in mV, \quad x' \in Vx \qquad \Longrightarrow \qquad |f(m', x') - f(m, x)| \leq \varepsilon.$$

Neka je sada $x \in V$. Tada je $m \in MV$ za svaki $m \in M$ i $x^{-1}y \in Vy$ za svaki $y \in G$. Dakle, za svaki $(m, y) \in M \times G$ je

$$|(\lambda_x f)(m, y) - f(m, y)| = |f(m, x^{-1}y) - f(m, y)| \leq \varepsilon.$$

Dakle,

$$x \in V \qquad \Longrightarrow \qquad \|\lambda_x f - f\|_\infty \leq \varepsilon$$

i time je dokazana neprekidnost preslikavanja $x \mapsto \lambda_x f$ u točki e. Dakle, π je unitarna reprezentacija lokalno kompaktne grupe G na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$.

Lema 6.2.18. *Za $\varphi \in C_\infty(M)$ i za $\eta, \zeta \in \mathcal{V}$ vrijedi*

$$(\mathcal{E}(\varphi)\eta|\zeta) = (\eta|\mathcal{E}(\overline{\varphi})\,\zeta).$$

Dokaz: Izaberimo $f, g \in C_0(M \times G)$ tako da bude $\eta = \tau(f)\xi_c$ i $\zeta = \tau(g)\xi_c$. Tada imamo redom koristeći posljednju jednakost u lemi 6.2.6:

$$(\mathcal{E}(\varphi)\eta|\zeta) = (\mathcal{E}(\varphi)\tau(f)\xi_c|\tau(g)\xi_c) = (\tau(\mathcal{E}_\ell(\varphi)f)\xi_c|\tau(g)\xi_c) = (\tau(\varphi f)\xi_c|\tau(g)\xi_c) =$$

$$= (\xi_c|\tau(\varphi f)^*\tau(g)\xi_c) = (\xi_c|\tau((\varphi f)^* * g)\xi_c) = (\mathcal{E}(\varphi)\eta|\zeta) = (\xi_c|\tau(f^* * (\overline{\varphi}\,g))\xi_c) =$$

$$= (\xi_c|\tau(f)^*\tau(\overline{\varphi}\,g)\xi_c) = (\tau(f)\xi_c|\tau(\mathcal{E}_\ell(\overline{\varphi})g)\xi_c) = (\tau(f)\xi_c|\mathcal{E}(\overline{\varphi})\tau(g)\xi_c) = (\eta|\mathcal{E}(\overline{\varphi})\zeta).$$

Nažalost, za operatore $\mathcal{E}(\varphi)$ nije evidentno (kao što je to bilo u slučaju operatora $\pi(x)$) da se proširuju do ograničenih operatora na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$. To stvarno jest tako ali vidjet će tek nakon konstrukcije reprezentacije σ od H takve da je τ ekvivalentna reprezentaciji $\tau^{\mathcal{E}^\sigma,\pi^\sigma}$.

Definirajmo sada linearan funkcional $\gamma : C_0(M \times G) \to \mathbb{C}$ sa

$$\gamma(f) = (\tau(f)\xi_c|\xi_c), \qquad f \in C_0(M \times G).$$

Budući da je preslikavanje $\tau : C_0(M\times G) \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ neprekidno, funkcional γ je neprekidan. Drugim riječima, γ je mjera na $M \times G$. Definiramo sada seskvilinearni funkcional $(\,\cdot\,|\,\cdot\,)_{M,G}$ na produktu $C_0(M \times G) \times C_0(M \times G)$ ovako

$$(f|g)_{M,G} = \gamma(g^* * f), \qquad f, g \in C_0(M \times G).$$

Tada je

$$(f|g)_{M,G} = \gamma(g^* * f) = (\tau(g^* * f)\xi_c|\xi_c) = (\tau(g)^*\tau(f)\xi_c|\xi_c) = (\tau(f)\xi_c|\tau(g)\xi_c) = (Tf|Tg).$$

Odatle slijedi da je $(\,\cdot\,|\,\cdot\,)_{M,G}$ pozitivno semidefinitan hermitski funkcional na prostoru $C_0(M\times G)$. Nadalje,

$$\{f \in C_0(M \times G);\ (f|f)_{M,G} = 0\} = \{f \in C_0(M \times G);\ \|Tf\| = 0\} = \operatorname{Ker} T = \mathcal{N}.$$

Prema tome, taj funkcional definira skalarni produkt na kvocijentnom prostoru $C_0(M \times G)/\mathcal{N}$, a S je izometrički izomorfizam tako dobivenog unitarnog prostora $C_0(M \times G)/\mathcal{N}$ na unitaran prostor $\mathcal{V}$.

U daljnjem p označava kvocijentno preslikavanje sa G na $M = H\backslash G$, $p(x) = Hx$. Nadalje, ν je desna Haarova mjera na H i δ je modularna funkcija grupe H.

Za funkciju F na produktu $G \times G$ i za $x \in G$ definiramo funkciju $\rho_x F$ sa

$$(\rho_x F)(y, z) = F(yx, zx), \qquad (y, z) \in G \times G.$$

Desno djelovanje grupe G na funkcije prenosi se na uobičajen način na mjere:

$$(\rho_x\alpha)(F) = \alpha(\rho_{x^{-1}}F) = \int_{G\times G} F(yx^{-1}, zx^{-1})\mathrm{d}\alpha(y, z), \quad x \in G,\ F \in C_0(G \times G),\ \alpha \in \mathfrak{M}(G \times G).$$

Lema 6.2.19. (*a*) *Postoji mjera α na $G \times G$ takva da za svaku funkciju $F \in C_0(G \times G)$ vrijedi*

$$\int_{G\times G} F(x, y)d\alpha(x, y) = \int_{M\times G} \left[\int_H F(yx^{-1}h^{-1}, x^{-1}h^{-1})\Delta(hxy^{-1})\,d\nu(h)\right] d\gamma(p(x)), y).$$

(*b*) *Vrijedi*

$$\rho_h\alpha = \frac{\delta(h)}{\Delta(h)}\,\alpha, \qquad h \in H.$$

Dokaz: (*a*) Za funkciju $F \in C_0(G \times G)$ definiramo funkciju $\tilde{F} : G \times G \to \mathbb{C}$ sa

$$\tilde{F}(x, y) = \int_H F(yx^{-1}h^{-1}, x^{-1}h^{-1})\Delta(hxy^{-1})\mathrm{d}\nu(h), \qquad (x, y) \in G \times G.$$

Iz uniformne neprekidnosti funkcije F lako slijedi da je funkcija $\tilde{F}$ neprekidna na $G\times G$. Za $k \in H$ i $(x, y) \in G \times G$ imamo

$$\tilde{F}(kx,y) = \int_H F(yx^{-1}k^{-1}h^{-1}, x^{-1}k^{-1}h^{-1})\Delta(hkxy^{-1})\mathrm{d}\nu(h) =$$
$$= \int_H F(yx^{-1}(hk)^{-1}, x^{-1}(hk)^{-1})\Delta(hkxy^{-1})\mathrm{d}\nu(h) =$$
$$= \int_H F(yx^{-1}h^{-1}, x^{-1}h^{-1})\Delta(hxy^{-1})\mathrm{d}\nu(h) = \tilde{F}(x,y).$$

Dakle, vrijedi
$$\tilde{F}(kx,y) = \tilde{F}(x,y) \qquad \forall k \in H, \quad \forall (x,y) \in G \times G.$$
Prema tome, funkcija $\tilde{F}$ definira neprekidnu funkciju $\hat{F} : M \times G \to \mathbb{C}$ tako da je
$$\hat{F}(p(x),y) = \tilde{F}(x,y) = \int_H F(yx^{-1}h^{-1}, x^{-1}h^{-1})\Delta(hxy^{-1})\mathrm{d}\nu(h), \qquad (x,y) \in G \times G.$$
To je funkcija s kompaktnim nosačem. Doista, neka su $A, B \subseteq G$ kompaktni skupovi takvi da je $Supp\, F \subseteq A \times B$. Neka su $x, y \in G$ takvi da je $\hat{F}(p(x),y) \neq 0$. Tada postoji $h \in H$ takav da je $F(yx^{-1}h^{-1}, x^{-1}h^{-1}) \neq 0$. No tada je $yx^{-1}h^{-1} \in A$ i $x^{-1}h^{-1} \in B$, dakle, $x \in h^{-1}B^{-1}$ i $y \in AB^{-1}$, pa slijedi $p(x) \in p(B^{-1})$ i $y \in AB^{-1}$. Prema tome je $Supp\, \hat{F} \subseteq p(B^{-1}) \times AB^{-1}$. Dakle, $\hat{F} \in C_0(M \times G)$.

Napokon, primijetimo da je linearno preslikavanje $F \mapsto \hat{F}$ sa $C_0(G \times G)$ u $C_0(M \times G)$ neprekidno. Doista, neka je $K \subseteq M \times G$ kompaktan skup. Neka su $A \subseteq M$ i $B \subseteq G$ kompaktni skupovi takvi da je $K \subseteq A \times B$. U prethodnom odlomku ustanovili smo da iz $Supp\, F \subseteq A \times B$ slijedi $Supp\, \hat{F} \subseteq b(B^{-1}) \times AB^{-1}$. Prema tome, za kompaktan skup $L = p(B^{-1}) \times AB^{-1} \subseteq M \times G$ vrijedi
$$F \in C_K(G \times G) \qquad \Longrightarrow \qquad \hat{F} \in C_L(M \times G).$$
Nadalje, ako je $F \in C_K(G \times G)$ imamo za svaku točku $(x,y) \in G \times G$:
$$|\hat{F}(p(x),y)| \leq \int_H |F(yx^{-1}h^{-1}, x^{-1}h^{-1})|\Delta(hxy^{-1})\mathrm{d}\nu(h).$$
Zanima nas ocjena lijeve strane samo za one točke $(x,y) \in G \times G$ za koje je $\hat{F}(p(x),y) \neq 0$. Posebno, možemo pretpostavaljati da je $y \in AB^{-1}$ i da je $p(x) \in p(B^{-1})$. Nadalje, ako $x^{-1}h^{-1} \notin B$, odnosno, ako $h \notin B^{-1}x^{-1}$, podintegralna funkcija jednaka je nuli, pa slijedi
$$|\hat{F}(p(x),y)| \leq \Psi(x) \cdot \nu(H \cap B^{-1}x^{-1}) \cdot \|F\|_\infty$$
uz oznaku
$$\Psi(x) = \max\{\Delta(hxy^{-1});\ h \in H \cap B^{-1}x^{-1},\ y \in AB^{-1}\}.$$
Za $k \in H$ imamo očito $\Psi(x) = \Psi(kx)$, jer je $H \cap B^{-1}(kx)^{-1} = (H \cap B^{-1}x^{-1})k^{-1}$. Stoga vrijedi:
$$x \in G,\ p(x) \in p(B^{-1}) \qquad \Longrightarrow \qquad \Psi(x) \leq R,$$
gdje je
$$R = \sup\{\Psi(x);\ p(x) \in p(B^{-1})\} \leq \max\{\Delta(hxy^{-1});\ h \in H \cap B^{-1}B,\ x \in B^{-1},\ y \in AB^{-1}\} < +\infty.$$
Također, za $k \in H$ zbog desne invarijantnosti mjere ν imamo
$$\nu(H \cap B^{-1}(kx)^{-1}) = \nu((H \cap B^{-1}x^{-1})k^{-1}) = \nu(H \cap B^{-1}x^{-1}).$$

Ako je $x \in G$ takav da je $p(x) \in p(B^{-1})$, onda postoje $z \in B^{-1}$ i $k \in H$ takvi da je $z = xk$, dakle, $\nu(H \cap B^{-1}x^{-1}) = \nu(H \cap B^{-1}z^{-1})$. No tada je $H \cap B^{-1}z^{-1} \subseteq H \cap B^{-1}B$, pa zaključujemo da vrijedi

$$x \in G,\ p(x) \in p(B^{-1}) \qquad \Longrightarrow \qquad \nu(H \cap B^{-1}x^{-1}) \leq \nu(H \cap B^{-1}B) < +\infty.$$

Prema tome, za kompaktan skup $L = p(B^{-1}) \times AB^{-1} \subseteq M \times G$ i za $M_{K,L} = R \cdot \nu(H \cap B^{-1}B)$ imamo:

$$F \in C_K(G \times G) \qquad \Longrightarrow \qquad \hat{F} \in C_L(M \times G) \quad \text{i} \quad \|\hat{F}\|_\infty \leq M_{K,L} \cdot \|F\|_\infty.$$

Time je dokazano da je linearan operator $F \mapsto \hat{F}$ sa $C_0(G \times G)$ u $C_0(M \times G)$ neprekidan. (Usput napominjemo da se analogno dokazu propozicije 4.5.1. može dokazati da je taj operator surjektivan i da je $C_0^+(M \times G) = \{\hat{F};\ F \in C_0^+(G \times G)\}$.)

Dakle, kao kompozicija dvaju neprekidnih preslikavanja $F \mapsto \hat{F}$ sa $C_0(G \times G)$ u $C_0(M \times G)$ i γ sa $C_0(M \times G)$ u $\mathbb{C}$, linearan funkcional $\alpha : F \mapsto \gamma(\hat{F})$ na $C_0(G \times G)$ je neprekidan, odnosno, to je mjera na $G \times G$.

(b) Za $h \in H$ i $F \in C_0(G \times G)$ imamo redom

$$(\rho_h\alpha)(F) = \alpha(\rho_{h^{-1}}F) = \int_{M \times G} \int_H (\rho_{h^{-1}}F)(yx^{-1}k^{-1}, x^{-1}k^{-1})\Delta(kxy^{-1})\mathrm{d}\nu(k)\mathrm{d}\gamma(p(x), y) =$$

$$= \int_{M \times G} \int_H F(yx^{-1}(hk)^{-1}, x^{-1}(hk)^{-1}) \frac{1}{\Delta(h)}\, \Delta((hk)xy^{-1})\mathrm{d}\nu(k)\mathrm{d}\gamma(p(x), y) =$$

$$= \frac{\delta(h)}{\Delta(h)} \int_{M \times G} \int_H F(yx^{-1}k^{-1}, x^{-1}k^{-1})\Delta(kxy^{-1})\mathrm{d}\nu(k)\mathrm{d}\gamma(p(x), y) = \frac{\delta(h)}{\Delta(h)}\, \alpha(F).$$

Prema tome, mjera α na $G \times G$ ima svojstvo

$$\rho_h\alpha = \frac{\delta(h)}{\Delta(h)}\, \alpha, \qquad \forall h \in H.$$

Definiramo sada seskvilinearan funkcional $\langle \cdot | \cdot \rangle$ na $C_0(G) \times C_0(G)$ ovako

$$\langle \varphi | \psi \rangle = \int_{G \times G} \varphi(y)\, \overline{\psi(x)}\, \mathrm{d}\alpha(x, y) \qquad \varphi, \psi \in C_0(G).$$

Za $z \in G$ i $f \in C_0(M \times G)$ definiramo $\hat{f}(z) \in C_0(G)$ sa

$$[\hat{f}(z)](x) = f(p(x^{-1}), z^{-1}x^{-1}), \qquad x \in G.$$

Lema 6.2.20. *Za $f, g \in C_0(M \times G)$ i za $\varphi \in C_0(G)$ vrijedi*

$$\int_G \varphi(z)\langle \hat{f}(z) | \hat{g}(z) \rangle\, d\mu(z) = (\mathcal{E}(\varphi_\nu)\tau(f)\xi_c | \tau(g)\xi_c).$$

Dokaz: Za zadane funkcije $f, g \in C_0(M \times G)$ i za $z \in G$ definiramo funkciju $\Phi_z \in C_0(G \times G)$ sa

$$\Phi_z(x, y) = f(p(y^{-1}), z^{-1}y^{-1})\, \overline{g(p(x^{-1}), z^{-1}x^{-1})}, \qquad (x, y) \in G \times G.$$

Tada imamo

$$\langle\hat{f}(z)|\hat{g}(z)\rangle = \int_{G\times G}[\hat{f}(z)](y)\,\overline{[\hat{g}(z)](x)}\,\mathrm{d}\alpha(x,y) =$$

$$= \int_{G\times G} f(p(y^{-1}), z^{-1}y^{-1})\,\overline{g(p(x^{-1}), z^{-1}x^{-1})}\,\mathrm{d}\alpha(x,y) = \alpha(\Phi_z) =$$

$$= \int_{M\times G}\Phi_z(yx^{-1}h^{-1}, x^{-1}h^{-1})\Delta(hxy^{-1})\mathrm{d}\nu(h)\mathrm{d}\gamma(p(x),y) =$$

$$= \int_{M\times G}\int_H f(p(hx), z^{-1}hx)\,\overline{g(p(hxy^{-1}), z^{-1}hxy^{-1})}\,\Delta(hxy^{-1})\mathrm{d}\nu(h)\mathrm{d}\gamma(p(x),y) =$$

$$= \int_{M\times G}\int_H f(p(x), z^{-1}hx)\,\overline{g(p(xy^{-1}), z^{-1}hxy^{-1})}\,\Delta(hxy^{-1})\mathrm{d}\nu(h)\gamma(p(x),y).$$

Odavde za svaku funkciju $\varphi \in C_0(G)$ korištenjem Fubinijevog teorema te pomoću supstitucije $z \mapsto hxz$ kod druge jednakosti i zamjenom $z \mapsto z^{-1}$ kod četvrte jednakosti nalazimo redom

$$\int_G \varphi(z)\langle\hat{f}(z)|\hat{g}(z)\rangle\mathrm{d}\mu(z) =$$

$$= \int_{M\times G}\int_G\int_H \varphi(z)f(p(x), z^{-1}hx)\,\overline{g(p(xy^{-1}), z^{-1}hxy^{-1})}\,\Delta(hxy^{-1})\mathrm{d}\nu(h)\mathrm{d}\mu(z)\mathrm{d}\gamma(p(x),y) =$$

$$= \int_{M\times G}\int_G\int_H \varphi(hxz)f(p(x), z^{-1})\,\overline{g(p(xy^{-1}), z^{-1}y^{-1})}\,\Delta(y^{-1})\mathrm{d}\nu(h)\mathrm{d}\mu(z)\mathrm{d}\gamma(p(x),y) =$$

$$= \int_{M\times G}\int_G \varphi_\nu(p(xz))f(p(x), z^{-1})\,\overline{g(p(xy^{-1}), z^{-1}y^{-1})}\,\Delta(y^{-1})\mathrm{d}\mu(z)\mathrm{d}\gamma(p(x),y) =$$

$$= \int_{M\times G}\int_G \varphi_\nu(p(x)z^{-1})f(p(x), z)\,\overline{g(p(x)y^{-1}, zy^{-1})}\,\Delta(zy^{-1})\mathrm{d}\mu(z)\mathrm{d}\gamma(p(x),y) =$$

$$= \int_{M\times G}\int_G [\mathcal{E}_\ell(\varphi_\nu)f](p(x),z)g^*(p(x)z^{-1}, yz^{-1})\mathrm{d}\mu(z)\mathrm{d}\gamma(p(x),y) =$$

$$= \int_{M\times G}[g^* * \mathcal{E}_\ell(\varphi_\nu)f](p(x)y)\mathrm{d}\gamma(p(x),y) = \gamma(g^* * \mathcal{E}_\ell(\varphi_\nu)f) = (\mathcal{E}_\ell(\varphi_\nu)f|g)_{M,G} = (\mathcal{E}(\varphi_\nu)\tau(f)\xi_c|\tau(g)\xi_c).$$

Time je lema dokazana.

Lema 6.2.21. *Za svaku točku $z \in G$ je preslikavanje $f \mapsto \hat{f}(z)$ surjekcija sa $C_0(M\times G)$ na $C_0(G)$.*

Dokaz: Prije svega, sjetimo se da je za $y \in G$ lijevi pomak λ_y na prostoru $C_0(M\times G)$ je bijekcija prostora $C_0(M\times G)$ na samog sebe definirana sa

$$(\lambda_y f)(m,x) = f(m, y^{-1}x), \qquad f \in C_0(M\times G), \quad (m,x) \in M\times G.$$

Za $x, y, z \in G$ i $f \in C_0(M\times G)$ imamo

$$[(\lambda_y f)\hat{\ }(z)](x) = (\lambda_y f)(p(x^{-1}), z^{-1}x^{-1}) = f(p(x^{-1}), y^{-1}z^{-1}x^{-1}) = f(p(x^{-1}), (zy)^{-1}x^{-1}) = [\hat{f}(zy)](x).$$

Odavde se vidi da je $\{\hat{f}(z);\ f \in C_0(M\times G)\}$ jedan te isti potprostor od $C_0(G)$ za svaku točku $z \in G$. Prema tome, lemu je dovoljno dokazati za $z = e$.

Neka je sada $\varphi \in C_0(G)$ proizvoljna. Neka je $\Phi \in C_0(M)$ takva da je $\Phi(m) = 1$ za svaku točku $m \in p\left((Supp\,\varphi)^{-1}\right)$. Dakle,

$$\Phi(p(x^{-1})) = 1 \quad \forall x \in Supp\,\varphi \qquad \Longrightarrow \qquad \Phi(p(x^{-1}))\varphi(x) = \varphi(x) \quad \forall x \in G.$$

Definiramo sada funkciju $f \in C_0(M \times G)$ sa $f(m, x) = \Phi(m)\varphi(x^{-1})$. Tada je

$$[\hat{f}(e)](x) = f(p(x^{-1}), x^{-1}) = \Phi(p(x^{-1}))\varphi(x) = \varphi(x) \qquad \forall x \in G.$$

Time je dokazano da je $f \mapsto \hat{f}(e)$ surjekcija sa $C_0(M \times G)$ na $C_0(G)$.

Lema 6.2.22. $\langle \cdot | \cdot \rangle$ *je pozitivno semidefinitan hermitski funkcional na prostoru* $C_0(G)$.

Dokaz: Neka je $\varphi \in C_0^+(G)$. Tada je $\varphi_\nu \in C_0^+(M)$, pa za $\psi(m) = \sqrt{\varphi_\nu(m)}$ imamo $\psi \in C_0^+(M)$ i $\varphi_\nu = \psi\psi$. Dakle, za $f \in C_0(M \times G)$ prema lemi 6.2.20. imamo

$$\int_G \varphi(z)\langle \hat{f}(z)|\hat{f}(z)\rangle \mathrm{d}\mu(z) = \|\mathcal{E}(\psi)\tau(f)\xi_c\|^2 \geq 0.$$

Time smo dokazali da vrijedi

$$\int_G \varphi(z)\langle \hat{f}(z)|\hat{f}(z)\rangle \mathrm{d}\mu(z) \geq 0 \qquad \forall \varphi \in C_0^+(G), \quad \forall f \in C_0(M \times G).$$

Budući da je funkcija $z \mapsto \langle \hat{f}(z)|\hat{f}(z)\rangle$ neprekidna, odatle slijedi

$$\langle \hat{f}(z)|\hat{f}(z)\rangle \geq 0 \qquad \forall z \in G, \quad \forall f \in C_0(M \times G).$$

Sada zbog leme 6.2.21. slijedi

$$\langle \varphi|\varphi\rangle \geq 0 \qquad \forall \varphi \in C_0(G),$$

tj. funkcional $\langle \cdot | \cdot \rangle$ je pozitivno semidefinitan.

Stavimo sada

$$\mathcal{U} = \{\varphi \in C_0(G);\ \langle \varphi|\varphi\rangle = 0\}.$$

Tada je $\mathcal{U}$ potprostor od $C_0(G)$ i funkcional $\langle \cdot | \cdot \rangle$ na kvocijentnom prostoru $C_0(G)/\mathcal{U}$ definira skalarni produkt, odnosno, strukturu unitarnog prostora. Neka je $\mathcal{K}$ Hilbertov prostor dobiven popunjenjem unitarnog prostora $C_0(G)/\mathcal{U}$. Na tom prostoru skalarni produkt ćemo također označavati sa $\langle \cdot | \cdot \rangle$. Namjera nam je na tom Hilbertovom prostoru definirati unitarnu reprezentaciju σ od H i zatim dokazati da je polazna reprezentacija τ homogene algebre $C_0(M \times G)$ ekvivalentna reprezentaciji $\tau^{\mathcal{E}^\sigma, \pi^\sigma}$.

Za $h \in H$ definiramo linearan operator $\tilde{\sigma}(h) : C_0(G) \to C_0(G)$ sa

$$(\tilde{\sigma}(h)\varphi)(x) = \sqrt{\frac{\delta(h)}{\Delta(h)}}\,\varphi(xh), \qquad \varphi \in C_0(G).$$

Za $h \in H$ i $\varphi, \psi \in C_0(G)$ korištenjem tvrdnje (b) leme 6.2.19. nalazimo

$$\langle\tilde{\sigma}(h)\varphi|\tilde{\sigma}(h)\psi\rangle = \int_{G\times G}(\tilde{\sigma}(h)\varphi)(y)\,\overline{(\tilde{\sigma}(h)\psi)(x)}\,\mathrm{d}\alpha(x,y) = \frac{\delta(h)}{\Delta(h)}\int_{G\times G}\varphi(yh)\,\overline{\psi(xh)}\,\mathrm{d}\alpha(x,y) =$$

$$= \frac{\delta(h)}{\Delta(h)}\int_{G\times G}\varphi(y)\,\overline{\psi(x)}\,\mathrm{d}(\rho_{h^{-1}}\alpha)(x,y) = \int_{G\times G}\varphi(y)\,\overline{\psi(x)}\,\mathrm{d}\alpha(x,y) = \langle\varphi|\psi\rangle.$$

Odatle slijedi da je potprostor $\mathcal{U}$ od $C_0(G)$ invarijantan s obzirom na sve operatore $\tilde{\sigma}(h)$, $h\in H$. Nadalje, gornja jednakost pokazuje da se operator dobiven iz $\tilde{\sigma}(h)$ prijelazom na kvocijent $C_0(G)/\mathcal{U}$ jedinstveno proširuje do izometrije $\sigma(h):\mathcal{K}\to\mathcal{K}$. Kako je očito $\sigma(hk)=\sigma(h)\sigma(k)$, vidimo da je σ homomorfizam grupe H u grupu $\mathcal{U}(\mathcal{K})$ unitarnih operatora na Hilbertovom prostoru $\mathcal{K}$. Napokon, za $\varphi,\psi\in C_0(G)$ i $h\in H$ imamo

$$\langle\sigma(h)(\varphi+\mathcal{U})|\psi+\mathcal{U}\rangle = \langle\tilde{\sigma}(h)\varphi|\psi\rangle = \sqrt{\frac{\delta(h)}{\Delta(h)}}\int_{G\times G}\varphi(yh)\,\overline{\psi(x)}\,\mathrm{d}\alpha(x,y)$$

i lako se vidi da posljednji integral neprekidno ovisi o $h\in H$. Prema lemi 2.1.2. odatle slijedi da je σ unitarna reprezentacija grupe H na Hilbertovom prostoru $\mathcal{K}$.

Za $f\in C_0(M\times G)$ neka je $\tilde{W}f : G\to C_0(G)/\mathcal{U}\subseteq\mathcal{K}$ funkcija definirana sa

$$(\tilde{W}f)(x) = \hat{f}(x)+\mathcal{U}, \qquad x\in G,$$

gdje je kao i prije funkcija $\hat{f}(x)\in C_0(G)$ definirana sa

$$[\hat{f}(x)](y) = f(p(y^{-1}), x^{-1}y^{-1}), \qquad x,y\in G.$$

Lema 6.2.23. *$\tilde{W}$ je linearan operator sa $C_0(M\times G)$ u $C_0(G,\sigma)$.*

Dokaz: Neka je $f\in C_0(M\times G)$. Prvo ćemo provjeriti transformaciono svojstvo funkcije $\tilde{W}f$ u odnosu na lijeve pomake elementima iz H. Za $x,y\in G$ i $h\in H$ imamo

$$[\hat{f}(hx)](y) = f(p(y^{-1}), x^{-1}h^{-1}y^{-1}) = f(p(h^{-1}y^{-1}), x^{-1}h^{-1}y^{-1}) =$$

$$= f(p((yh)^{-1}), x^{-1}(yh)^{-1}) = [\hat{f}(x)](yh) = [\rho_h\hat{f}(x)](y).$$

Dakle,

$$(\tilde{W}f)(hx) = \hat{f}(hx)+\mathcal{U} = \rho_h\hat{f}(x)+\mathcal{U} = \sqrt{\frac{\Delta(h)}{\delta(h)}}\,\tilde{\sigma}(h)\hat{f}(x)+\mathcal{U} =$$

$$= \sqrt{\frac{\Delta(h)}{\delta(h)}}\,\sigma(h)(\hat{f}(x)+\mathcal{U}) = \sqrt{\frac{\Delta(h)}{\delta(h)}}\,\sigma(h)(\tilde{W}f)(x).$$

Dokažimo sada da je funkcija $\tilde{W}f : G\to\mathcal{K}$ neprekidna. Za $x,y\in G$ imamo

$$\|(\tilde{W}f)(x)-(\tilde{W}f)(y)\|_{\mathcal{K}}^2 = \langle\hat{f}(x)-\hat{f}(y)|\hat{f}(x)-\hat{f}(y)\rangle =$$

$$= \int_{G\times G}([\hat{f}(x)](v)-[\hat{f}(y)](v))\,\overline{([\hat{f}(x)](u)-[\hat{f}(y)](u))}\,\mathrm{d}\alpha(u,v) =$$

$$= \int_{G\times G}(f(p(v^{-1}),x^{-1}v^{-1})-f(p(v^{-1}),y^{-1}v^{-1}))\,\overline{(f(p(u^{-1}),x^{-1}u^{-1})-f(p(u^{-1}),y^{-1}u^{-1}))}\,\mathrm{d}\alpha(u,v).$$

Fiksirajmo sada $x \in G$ i neka je V kompaktna okolina od x u G. Za svaki $y \in V$ označimo sa Φ_y podintegralnu funkciju u posljednjem integralu:

$$\Phi_y(u,v) = (f(p(v^{-1}), x^{-1}v^{-1}) - f(p(v^{-1}), y^{-1}v^{-1}))\,\overline{(f(p(u^{-1}), x^{-1}u^{-1}) - f(p(u^{-1}), y^{-1}u^{-1}))}.$$

Lako se vidi da postoji kompaktan skup $K \subseteq G \times G$ takav da je $Supp\,\Phi_y \subseteq K \quad \forall y \in V$ i da Φ_y konvergira uniformno prema nuli kada y teži prema x. Slijedi

$$\lim_{y \to x} \|(\tilde{W}f)(x) - (\tilde{W}f)(y)\|_{\mathcal{K}} = 0.$$

Dakle, funkcija $\tilde{W}f$ je neprekidna u svakoj točki $x \in G$.

Napokon, razmotrimo nosač funkcije $\tilde{W}f$. Neka su $A, B \subseteq G$ kompaktni skupovi, takvi da je $Supp\, f \subseteq p(A) \times B$. Neka je $x \in G \setminus HAB^{-1}$. Ako je $y \in A^{-1}H$ tada vrijedi $yx \notin B^{-1}$ (inače bismo imali $x \in y^{-1}B^{-1} \subseteq HAB^{-1}$), pa slijedi $x^{-1}y^{-1} \notin B$. No tada je $f(p(y^{-1}), x^{-1}y^{-1}) = 0$, odnosno $[\hat{f}(x)](y) = 0$. S druge strane, ako je $y \in G \setminus A^{-1}H$, onda je $y^{-1} \in G \setminus HA$, dakle, $p(y^{-1}) \notin p(A)$. Slijedi $f(p(y^{-1}), x^{-1}y^{-1}) = 0$, odnosno, ponovo je $[\hat{f}(x)](y) = 0$. Time smo dokazali

$$x \notin HAB^{-1} \qquad \Longrightarrow \qquad \hat{f}(x) = 0.$$

Drugim riječima, $Supp\,\tilde{W}f \subseteq HAB^{-1}$. Budući da je AB^{-1} kompaktan podskup od G, zaključujemo da je $\tilde{W}f \in C_0(G, \sigma)$.

Lema 6.2.24. *Područje vrijednosti operatora $\tilde{W}$ je gusto u Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}(G, \sigma)$.*

Dokaz: Prema tvrdnji (a) propozicije 6.1.2. dovoljno je dokazati da područje vrijednosti operatora $\tilde{W}$ sadrži $T_\sigma(C_0(G) \otimes (C_0(G)/\mathcal{U}))$. Doista, neka su $\varphi, \psi \in C_0(G)$ proizvoljne. Tada je za $x \in G$

$$[T_\sigma(\psi \otimes (\varphi + \mathcal{U}))](x) = \int_H \sqrt{\frac{\delta(h)}{\Delta(h)}}\,\psi(hx)[\sigma(h^{-1})(\varphi + \mathcal{U})]\mathrm{d}\nu(h) =$$

$$= \int_H \psi(hx)\sqrt{\frac{\delta(h)}{\Delta(h)}}\,(\tilde{\sigma}(h^{-1})\varphi + \mathcal{U})\mathrm{d}\nu(h) = \int_H \psi(hx)(\rho_{h^{-1}}\varphi + \mathcal{U})\mathrm{d}\nu(h) = \int_H \psi(hx)\rho_{h^{-1}}\varphi\mathrm{d}\nu(h) + \mathcal{U}.$$

De4finirajmo sada neprekidnu funkciju $f : M \times G \to \mathbb{C}$ sa

$$f(p(u), v) = \int_H \psi(huv^{-1})\varphi(u^{-1}h^{-1})\mathrm{d}\nu(h), \qquad u, v \in G.$$

Tada se lako vidi da je

$$Supp\, f \subseteq p\left((Supp\,\varphi)^{-1}\right) \times [(Supp\,\psi)(Supp\,\varphi)]^{-1}.$$

Prema tome je $f \in C_0(M \times G)$. Nadalje, imamo

$$[\hat{f}(x)](y) = f(p(y^{-1}), x^{-1}y^{-1}) = \int_H \psi(hx)\varphi(yh^{-1})\mathrm{d}\nu(h) = \int_H \psi(hx)(\rho_{h^{-1}}\varphi)(y)\mathrm{d}\nu(h).$$

Zaključujemo da je

$$(\tilde{W}f)(x) = \hat{f}(x) + \mathcal{U} = [T_\sigma(\psi \otimes (\varphi + \mathcal{U}))](x) \quad \Longrightarrow \quad T_\sigma(\psi \otimes (\varphi + \mathcal{U})) = \tilde{W}f$$

i time je lema dokazana.

Lema 6.2.25. *Za $f, g \in C_0(M \times G)$ vrijedi*

$$(\tilde{W}f|\tilde{W}g)_{\mathcal{H}(g,\sigma)} = (\tau(f)\xi_c|\tau(g)\xi_c)_{\mathcal{H}}.$$

Dokaz: Neka su $A, B \subseteq G$ kompaktni skupovi takvi da je $Supp\, f \subseteq p(A) \times B$. Iz dokaza leme 6.2.23. znamo da je tada $Supp\, \tilde{W}f \subseteq p(AB^{-1})$. Neka je $\varphi \in C_0(G)$ takva da je $\varphi_\nu(m) = 1$ $\forall m \in p(AB^{-1})$. Prema lemi 6.1.2. i prema lemi 6.2.20. tada je

$$(\tilde{W}f|\tilde{W}g)_{\mathcal{H}(G,\sigma)} = \int_G \varphi(x)((\tilde{W}f)(x)|(\tilde{W}g)(x))_{\mathcal{K}} \mathrm{d}\mu(x) =$$

$$= \int_G \varphi(x)\langle \hat{f}(x)|\hat{g}(x)\rangle \mathrm{d}\mu(x) = (\mathcal{E}(\varphi_\nu)\tau(f)\xi_c|\tau(g)\xi_c)_{\mathcal{H}}.$$

Za $(m, x) \in Supp\, f \subseteq p(A) \times B$ imamo $mx^{-1} \in p(AB^{-1})$, pa je $\varphi_\nu(mx^{-1}) = 1$. Odatle je $\mathcal{E}_\ell(\varphi_\nu)f = f$, dakle,

$$\mathcal{E}(\varphi_\nu)\tau(f)\xi_c = \tau(\mathcal{E}_\ell(\varphi_\nu)f)\xi_c = \tau(f)\xi_c,$$

pa slijedi tvrdnja leme.

Iz lema 6.2.25. i 6.2.24. slijedi da operator $\tilde{W}$ prijelazom na kvocijent definira izometriju unitarnog prostora $C_0(M \times G)/\mathcal{N}$ na gusti potprostor Hilbertovog prostora $\mathcal{H}(G, \sigma)$. Preko izomorfizma $S : C_0(M \times G)/\mathcal{N} \to \mathcal{V}$ definiranog prije leme 6.2.17., tj.

$$S(f + \mathcal{N}) = \tau(f)\xi_c, \qquad f \in C_0(M \times G),$$

dolazimo do izometrije $\hat{W} : \mathcal{V} \to \mathcal{H}(G, \sigma)$ s područjem vrijednosti koje je gusto u $\mathcal{H}(G, \sigma)$. No tada se $\hat{W}$ jedinstveno proširuje do izometričkog izomorfizma W Hilbertovog prostora $\mathcal{H}$ na Hilbertov prostor $\mathcal{H}(G, \sigma)$. Dakle, imamo

$$W\tau(f)\xi_c = \hat{W}\tau(f)\xi_c = \tilde{W}f \qquad \text{i} \qquad (\tilde{W}f)(x) = \hat{f}(x) + \mathcal{U} \qquad f \in C_0(M \times G).$$

Sada za $x \in G$ i $f \in C_0(M \times G)$ imamo

$$W\pi(x)\tau(f)\xi_c = W\tau(\pi_\ell(x)f)\xi_c = \tilde{W}\pi_\ell(x)f.$$

Nadalje,

$$(\tilde{W}\pi_\ell(x)f)(y) = (\pi_\ell(x)f)\hat{\ }(y) + \mathcal{U}.$$

Računamo dalje funkciju $(\pi_\ell(x)f)\hat{\ }(y)$:

$$[(\pi_\ell(x)f)\hat{\ }(y)](z) = (\pi_\ell(x)f)(p(z^{-1}), y^{-1}z^{-1}) = f(p(z^{-1}), x^{-1}y^{-1}z^{-1}) = [\hat{f}(yx)](z).$$

Slijedi

$$(\pi_\ell(x)f)\hat{\ }(y) = \hat{f}(yx)$$

pa imamo redom

$$(\tilde{W}\pi_\ell(x)f)(y) = \hat{f}(yx) + \mathcal{U} = (\tilde{W}f)(yx) = (\pi^\sigma(x)\tilde{W}f)(y).$$

Odatle nalazimo

$$\pi^\sigma(x)W\tau(f)\xi_c = \pi^\sigma(x)\tilde{W}f = \tilde{W}\pi_\ell(x)f = W\pi(x)\tau(f)\xi_c.$$

Kako je $\mathcal{V} = \tau(C_0(M \times G)\xi_c$ gust potprostor od $\mathcal{H}$, zaključujemo

$$\pi^\sigma(x)W = W\pi(x) \qquad \forall x \in G.$$

Dakle, izometrički izomorfizam $W : \mathcal{H} \to \mathcal{H}(G, \sigma)$ ostvaruje ekvivalenciju reprezentacija π i π^σ.

Sličan račun provodimo za operatore $\mathcal{E}^\sigma(\varphi)$ i $\mathcal{E}(\varphi)$ za $\varphi \in C_\infty(M)$, s tim da je ovaj posljednji zasada definiran samo na gustom potprostoru $\mathcal{V}$ od $\mathcal{H}$, jer još ne znamo da je taj operator ograničen. Za $\varphi \in C_\infty(M)$ i $f \in C_0(M \times G)$ imamo

$$W\mathcal{E}(\varphi)\tau(f)\xi_c = W\tau(\mathcal{E}_\ell(\varphi)f)\xi_c = \tilde{W}\mathcal{E}_\ell f.$$

Nadalje,

$$(\tilde{W}\mathcal{E}_\ell(\varphi)f)(x) = (\mathcal{E}_\ell(\varphi)f)\hat{}(x) + \mathcal{U}.$$

Računamo dalje funkciju $(\mathcal{E}_\ell(\varphi)f)\hat{}(x)$:

$$[(\mathcal{E}_\ell(\varphi)f)\hat{}(x)](y) = (\mathcal{E}_\ell(\varphi)f)(p(y^{-1}), x^{-1}y^{-1}) = \varphi(p(y^{-1})yx)f(p(y^{-1}), x^{-1}y^{-1}) =$$

$$= \varphi(p(x))f(p(y^{-1}), x^{-1}y^{-1}) = \varphi(p(x)[\hat{f}(x)](y).$$

Slijedi

$$(\mathcal{E}_\ell(\varphi)f)\hat{}(x) = \varphi(p(x))\hat{f}(x)$$

pa imamo redom

$$(\tilde{W}\mathcal{E}_\ell(\varphi)f)(x) = \varphi(p(x))\hat{f}(x) + \mathcal{U} = \varphi(p(x))(\tilde{W}f)(x) = (\mathcal{E}^\sigma(\varphi)\tilde{W}f)(x).$$

Odatle nalazimo

$$\mathcal{E}^\sigma(\varphi)W\tau(f)\xi_c = \mathcal{E}^\sigma(\varphi)\tilde{W}f = \tilde{W}\mathcal{E}_\ell(\varphi)f = W\mathcal{E}(\varphi)\tau(f)\xi_c.$$

Time je dokazano

$$\mathcal{E}^\sigma(\varphi)W|\mathcal{V} = W\mathcal{E}(\varphi) \qquad \forall \varphi \in C_\infty(M).$$

Odatle slijedi da je za svaku funkciju $\varphi \in C_\infty(M)$ operator $\mathcal{E}(\varphi) \in \mathcal{L}(\mathcal{V})$ ograničen. Stoga se on jedinstveno proširuje do ograničenog operatora na $\mathcal{H}$, koji ćemo također označavati sa $\mathcal{E}(\varphi)$. Tada je $(\mathcal{E}, \pi)$ reprezentacija homogenog prostora (M, G) na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$ i dokazali smo da je ekvivalentna induciranoj reprezentaciji $(\mathcal{E}^\sigma, \pi^\sigma)$.

Napokon, za $f, g \in C_0(M \times G)$ je

$$\tau^{\mathcal{E},\pi}(f)\tau(g)\xi_c = \int_G \pi(x^{-1})\mathcal{E}(f^x)\tau(g)\xi_c \mathrm{d}\mu(x) = \int_G \pi(x^{-1})\tau(\mathcal{E}_\ell(f^x)g)\xi_c \mathrm{d}\mu(x) =$$

$$= \int_G \tau(\pi_\ell(x^{-1})\mathcal{E}_\ell(f^x)g)\xi_c \mathrm{d}\mu(x) = \tau\left(\int_G \pi_\ell(x^{-1})\mathcal{E}_\ell(f^x)g \mathrm{d}\mu(x)\right)\xi_c$$

Izračunajmo funkciju $\pi_\ell(x^{-1})\mathcal{E}_\ell(f^x)g$:

$$(\pi_\ell(x^{-1})\mathcal{E}_\ell(f^x)g)(m, y) = (\mathcal{E}_\ell(f^x)g)(m, xy) = f^x(my^{-1}x^{-1})g(m, xy) = f(my^{-1}x^{-1}, x^{-1})g(m, xy).$$

Dakle,

$$\left(\int_G \pi_\ell(x^{-1})\mathcal{E}_\ell(f^x)g \mathrm{d}\mu(x)\right)(m, y) = \int_G f(my^{-1}x^{-1}, x^{-1})g(m, xy)\mathrm{d}\mu(x) =$$

$$= \int_G f(mx^{-1}, yx^{-1})g(m, x)\mathrm{d}\mu(x) = (f * g)(m, y).$$

Stoga imamo

$$\tau^{\mathcal{E},\pi}(f)\tau(g)\xi_c = \tau(f * g)\xi_c = \tau(f)\tau(g)\xi_c.$$

Budući da je $\mathcal{V} = \{\tau(g)\xi_c;\ g \in C_0(M \times G)\}$ gust potprostor od $\mathcal{H}$, zaključujemo

$$\tau^{\mathcal{E},\pi}(f) = \tau(f) \qquad \forall f \in C_0(M \times G).$$

Razmotrimo sada opći slučaj, bez pretpostavke o cikličnosti. Neka je τ pravilna neprekidna nedegenerirana reprezentacija homogene algebre $C_0(M \times G)$ na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$. Pomoću Zornove leme kao i kod unitarnih reprezentacija lokalno kompaktnih grupa ili kod reprezentacija C^*-algebri lako se vidi da je τ ortogonalna suma cikličkih subreprezentacija. Drugim riječima, postoje zatvoreni međusobno ortogonalni $\tau-$invarijantni potprostori $\mathcal{H}_i$, $i \in I$, čija je direktna suma gusta u $\mathcal{H}$, tj. takvi da je $\mathcal{H} = \oplus_{i\in I}\mathcal{H}_i$, i takvi da je svaka subreprezentacija $\tau_{\mathcal{H}_i}$ ciklička. Prema dokazanom za svaki $i \in I$ postoji reprezentacija $(\mathcal{E}_i, \pi_i)$ homogenog prostora (M, G) na prostoru $\mathcal{H}_i$ takva da je $\tau_{\mathcal{H}_i} = \tau^{\mathcal{E}_i,\pi_i}$. Te reprezentacije daju reprezentaciju $(\mathcal{E}, \pi)$ od (M, G) na $\mathcal{H}$ takvu da je

$$\mathcal{E}(\varphi)|\mathcal{H}_i = \mathcal{E}_i(\varphi), \qquad \pi(x)|\mathcal{H}_i = \pi_i(x), \qquad \varphi \in C_\infty(M), \quad x \in G, \quad i \in I.$$

Tada je za $f \in C_0(M \times G)$ i za $i \in I$

$$\tau(f)|\mathcal{H}_i = \tau_{\mathcal{H}_i}(f) = \tau^{\mathcal{E}_i,\pi_i}(f) = \int_G \pi_i(x^{-1})\mathcal{E}_i(f^x)\mathrm{d}\mu(x) =$$

$$= \int_G (\pi(x^{-1})|\mathcal{H}_i)(\mathcal{E}(f^x)|\mathcal{H}_i)\mathrm{d}\mu(x) = \left.\left(\int_G \pi(x^{-1})\mathcal{E}(f^x)\mathrm{d}\mu(x)\right)\right|\mathcal{H}_i = \tau^{\mathcal{E},\pi}(f)|\mathcal{H}_i.$$

Slijedi $\tau(f) = \tau^{\mathcal{E},\pi}(f)\ \ \forall f \in C_0(M \times G)$, odnosno, $\tau = \tau^{\mathcal{E},\pi}$.

Uzmimo sada da je $(\mathcal{E}, \pi)$ reprezentacija homogenog prostora (M, G) na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$. Ponovo je to ortogonalna suma cikličkih subreprezentacija. Dakle, postoje međusobno ortogonalni zatvoreni $(\mathcal{E}, \pi)-$invarijantni potprostori $\mathcal{H}_i$, $i \in I$, prostora $\mathcal{H}$, čija je direktna suma gusta u $\mathcal{H}$ i takvi da je subreprezentacija $(\mathcal{E}_{\mathcal{H}_i}, \pi_{\mathcal{H}_i})$ ciklička za svaki $i \in I$. Prema dokazanom za svaki $i \in I$ postoji unitarna reprezentacija σ_i grupe H na Hilbertovom prostoru $\mathcal{K}_i$ takva da je reprezentacija $(\mathcal{E}_{\mathcal{H}_i}, \pi_{\mathcal{H}_i})$ ekvivalentna induciranoj reprezentaciji $(\mathcal{E}^{\sigma_i}, \pi^{\sigma_i})$. Ako je $\sigma = \oplus_{i\in I}\sigma_i$ ortogonalna suma reprezentacija σ_i na ortogonalnoj sumi $\mathcal{K} = \oplus_{i\in I}\mathcal{K}_i$, onda je prema lemi 6.2.2. inducirana reprezentacija $(\mathcal{E}^\sigma, \pi^\sigma)$ ekvivalentna ortogonalnoj sumi reprezentacija $(\mathcal{E}^{\sigma_i}, \pi^{\sigma_i})$, $i \in I$. To znači da je reprezentacija $(\mathcal{E}^\sigma, \pi^\sigma)$ ekvivalentna ortogonalnoj sumi reprezentacija $(\mathcal{E}_{\mathcal{H}_i}, \pi_{\mathcal{H}_i})$, a ta ortogonalna suma je upravo polazna reprezentacija $(\mathcal{E}, \pi)$. Prema tome, postoji unitarna reprezentacija σ grupe H takva da je reprezentacija $(\mathcal{E}, \pi)$ ekvivalentna induciranoj reprezentaciji $(\mathcal{E}^\sigma, \pi^\sigma)$.

Sve u svemu, dokazali smo teorem:

Teorem 6.2.2. *Neka je G lokalno kompaktna grupa, $H \subseteq G$ zatvorena podgrupa i $M = H\backslash G$.*

(a) *Za svaku reprezentaciju $(\mathcal{E}, \pi)$ homogenog prostora (M, G) postoji unitarna reprezentacija σ grupe H takva da je $(\mathcal{E}, \pi)$ ekvivalentna induciranoj reprezentaciji $(\mathcal{E}^\sigma, \pi^\sigma)$.*

(b) *Za svaku neprekidnu pravilnu nedegeneriranu reprezentaciju τ homogene $*-$algebre $C_0(M \times G)$ na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$ postoji reprezentacija $(\mathcal{E}, \pi)$ homogenog prostora (M, G) na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$ takva da je $\tau = \tau^{\mathcal{E},\pi}$.*

(c) *Za svaku neprekidnu pravilnu nedegeneriranu reprezentaciju τ homogene $*-$algebre $C_0(M \times G)$ postoji unitarna reprezentacija σ grupe H takva da je reprezentacija τ ekvivalentna reprezentaciji $\tau^{\mathcal{E}^\sigma,\pi^\sigma}$.*