LIEJEVE ALGEBRE

Prof. dr. sc. Hrvoje Kraljević

Predavanja održana u okviru diplomskog studija Teorijska matematika
na PMF−Matematičkom odjelu Sveučilišta u Zagrebu
u ljetnom semestru akademske godine 2012./2013.

Zagreb, lipanj 2013.

Sadržaj

Poglavlje 1

OSNOVNI POJMOVI

1.1 Definicije i osnovna svojstva

Liejeva algebra nad poljem K je algebra $\mathfrak{g}$, u kojoj se množenje obično označava sa $(x, y) \mapsto [x, y]$ i zove **komutator**, ukoliko su ispunjena sljedeća dva uvjeta:

$(L1)$ $[x, x] = 0 \ \ \forall x \in \mathfrak{g}$.

$(L2)$ $[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0 \ \ \forall x, y, z \in \mathcal{A}$.

Svojstvo $(L2)$ zove se **Jacobijev identitet**. Iz svojstva $(L1)$ slijedi

$$0 = [x + y, x + y] = [x, x] + [x, y] + [y, x] + [y, y] = [x, y] + [y, x],$$

dakle,

$(L1')$ $[x, y] = -[y, x] \ \ \forall x, y \in \mathfrak{g}$.

Zbog toga se obično svojstvo $(L1)$ zove **antikomutativnost**. Napomenimo da $(L1')$ povlači $(L1)$ ukoliko je karakteristika polja K različita od 2 :

$$[x, x] = -[x, x] \qquad \Longrightarrow \qquad 2[x, x] = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad [x, x] = 0.$$

U slučaju Liejevih algebri zbog svojstva antikomutativnosti $(L1')$ nema razlike među lijevim i desnim idealima, pa kažemo samo **ideal**. Ako je $\mathfrak{a}$ ideal u Liejevoj algebri $\mathfrak{g}$, lako se vidi da je kvocijentna algebra $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ također Liejeva algebra.

Važan primjer Liejevih algebri dobiva se iz asocijativnih algebri:

Zadatak 1.1.1. *Neka je $\mathcal{A}$ asocijativna algebra. Definiramo*

$$[x, y] = xy - yx, \qquad x, y \in \mathcal{A}.$$

Dokažite da s operacijom $[\,\cdot\,, \cdot\,]$ $\mathcal{A}$ postaje Liejeva algebra.

Liejevu algebru iz zadatka 1.1.2. označavat ćemo sa $\mathrm{Lie}(\mathcal{A})$. Ako je $\mathfrak{g}$ Liejeva algebra i $\mathcal{A}$ asocijativna algebra onda ćemo preslikavanje $\varphi : \mathfrak{g} \to \mathcal{A}$, koje je homomorfizam Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ u Liejevu algebru $\mathrm{Lie}(\mathcal{A})$, zvati **Liejev morfizam** Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ u asocijativnu algebru $\mathcal{A}$. Posebni slučaj je kad je $\mathcal{A}$ zapravo asocijativna algebra $L(V)$ svih linearnih operatora na vektorskom prostoru V. U tom slučaju Liejev homomorfizam $\pi : \mathfrak{g} \to L(V)$ zove se **reprezentacija** Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ na vektorskom prostoru V. Dakle, reprezentacija Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ (nad poljem

K) na vektorskom prostoru V (nad poljem K) je preslikavanje π koje svakom elementu $x \in \mathfrak{g}$ pridružuje linearan operator $\pi(x) : V \to V$ ukoliko su zadovoljeni uvjeti:

$$\pi(x+y) = \pi(x)+\pi(y), \quad \pi(\lambda x) = \lambda\pi(x), \quad \pi([x,y]) = \pi(x)\pi(y)-\pi(y)\pi(x), \quad \forall x,y \in \mathfrak{g}, \ \forall\lambda \in K.$$

Mi ćemo se u ovom kolegiju gotovo isključivo baviti konačnodimenzionalnim Liejevim algebrama. Međutim, vektorski prostori koje ćemo promatrati (pa ni asocijativne algebre) ne će uvijek biti konačnodimenzionalni.

Neka je V konačnodimenzionalan vektorski prostor nad poljem K i $n = \dim V$. Liejevu algebru $\mathrm{Lie}(L(V))$ označavat ćemo sa $\mathfrak{gl}(V)$. Naravno, $\dim \mathfrak{gl}(V) = n^2$. Izaberemo li bazu prostoru V dobivam izomorfizam Liejeve algebre $\mathfrak{gl}(V)$ s Liejevom algebrom $\mathrm{Lie}(M_n(K))$ svih kvadratnih matrica $n \times n$; ova posljednja se obično označava $\mathfrak{gl}(n,K)$. **Linearna Liejeva algebra** je bilo koja Liejeva podalgebra od $\mathfrak{gl}(V)$ za konačnodimenzionalan vektorski prostor V. Dakle, linearna Liejeva algebra izomorfna je Liejevoj podalgebri od $\mathfrak{gl}(n,K)$. Napomenimo, da se Liejeva algebra $\mathfrak{gl}(V)$, pa i $\mathfrak{gl}(n,K)$, često zove **opća linearna Liejeva algebra**.

Lako je zapisati tablicu množenja Liejeve algebre $\mathfrak{gl}(n,K)$. Naime, ako sa e_{ij} označimo $n \times n$ matricu kojoj su svi elementi 0 osim broja 1 na presjecištu $i-$tog retka i $j-$tog stupca, onda je $e_{ij}e_{k\ell} = \delta_{jk}e_{i\ell}$, pa imamo

$$[e_{ij}, e_{k\ell}] = \delta_{jk}e_{i\ell} - \delta_{i\ell}e_{kj}.$$

Neka je $\mathcal{A}$ algebra nad poljem K (bilo kakva, dakle, vektorski prostor na kome je zadana bilinearna operacija $(a,b) \mapsto ab$ sa $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$ u $\mathcal{A}$). Linearan operator $D : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ zove se **derivacija algebre** $\mathcal{A}$ ako vrijedi

$$D(ab) = D(a)b + aD(b) \qquad \forall a,b \in \mathcal{A}.$$

Skup svih derivacija algebre $\mathcal{A}$ označavat ćemo sa $\mathrm{Der}(\mathcal{A})$. Primijetimo da je $\mathrm{Der}(\mathcal{A})$ potprostor vektorskog prostora $L(\mathcal{A}) = L(\mathcal{A},\mathcal{A})$ svih linearnih operatora $\mathcal{A} \to \mathcal{A}$. Prostor $L(\mathcal{A})$ je unitalna algebra, ali $\mathrm{Der}(\mathcal{A})$ općenito nije podalgebra, budući da kompozicija derivacija ne mora biti (i obično nije) derivacija. Međutim, vrijedi:

Propozicija 1.1.1. *Ako je $\mathcal{A}$ algebra i $D, E \in \mathrm{Der}(\mathcal{A})$ onda je $DE - ED \in \mathrm{Der}(\mathcal{A})$. Drugim riječima, $\mathrm{Der}(\mathcal{A})$ je Liejeva podalgebra Liejeve algebre $\mathrm{Lie}(L(\mathcal{A}))$.*

Zadatak 1.1.2. *Dokažite propoziciju 1.1.1.*

Posebno je tako u slučaju Liejeve algebre $\mathfrak{g}$. Tada je

$$\mathrm{Der}(\mathfrak{g}) = \{D \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{g});\ D([x,y]) = [D(x),y] + [x,D(y)] \quad \forall x,y \in \mathfrak{g}\}.$$

Za bilo koji element $x \in \mathfrak{g}$ definiramo preslikavanje $\mathrm{ad}\,x : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ na sljedeći način:

$$(\mathrm{ad}\,x)(y) = [x,y], \qquad y \in \mathfrak{g}.$$

Iz bilinearnosti preslikavanja $(x,y) \mapsto [x,y]$ neposredno slijedi da su svi operatori $\mathrm{ad}\,x$ linearni i da je $ad : \mathfrak{g} \to L(\mathfrak{g}),\ x \mapsto \mathrm{ad}\,x$, linearno preslikavanje. Štoviše, vrijedi:

Propozicija 1.1.2. *Za svaku Liejevu algebru $\mathfrak{g}$ preslikavanje ad je homomorfizam Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ u Liejevu algebru $\mathrm{Der}(\mathfrak{g})$. Posebno, ad je reprezentacija Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ na vektorskom prostoru $\mathfrak{g}$.*

Dokaz: Iz Jacobijevog identiteta $(L2)$ i iz antikomutativnosti $(L1')$ imamo redom za bilo koje $x,y,z \in \mathfrak{g}$

$$(\mathrm{ad}\,x)([y,z]) = [x,[y,z]] = -[z,[x,y]]-[y,[z,x]] = [[x,y],z]+[y,[x,z]] = [(\mathrm{ad}\,x)(y),z]+[y,(\mathrm{ad}\,x)(z)],$$

što pokazuje da je $\mathrm{ad}\, x \in \mathrm{Der}(\mathfrak{g})$. Nadalje, koristeći ista pravila izvodimo i

$$(\mathrm{ad}\,[x,y])(z) = [[x,y],z] = -[z,[x,y]] = [x,[y,z]] + [y,[z,x]] =$$

$$= [x,[y,z]] - [y,[x,z]] = (\mathrm{ad}\, x)((\mathrm{ad}\, y)(z)) - (\mathrm{ad}\, y)((\mathrm{ad}\, x)(z)),$$

dakle,

$$\mathrm{ad}\,[x,y] = (\mathrm{ad}\, x)(\mathrm{ad}\, y) - (\mathrm{ad}\, y)(\mathrm{ad}\, x) = [\mathrm{ad}\, x, \mathrm{ad}\, y],$$

što pokazuje da je $\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \to \mathrm{Der}(\mathfrak{g})$ homomorfizam Liejevih algebri, i, posebno, ad je reprezentacija Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ na vektorskom prostoru $\mathfrak{g}$. Kad hoćemo istaknuti o kojoj se Liejevoj algebri $\mathfrak{g}$ radi, pišemo $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}$ umjesto ad.

Derivacije Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ oblika $ad\, x$ za neki $x \in \mathfrak{g}$ zovu se **unutarnje derivacije** Liejeve algebre. Svi ostali elementi od $\mathrm{Der}(\mathfrak{g})$ zovu se **vanjske derivacije** Liejeve algebre $\mathfrak{g}$.

Propozicija 1.1.3. *Skup $ad\, \mathfrak{g}$ svih unutarnjih derivacija Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ je ideal u Liejevoj algebri* $\mathrm{Der}(\mathfrak{g})$.

Dokaz: Za $x, y \in \mathfrak{g}$ i $D \in \mathrm{Der}(\mathfrak{g})$ imamo

$$[D, ad\, x](y) = D([x,y]) - [x, D(y)] = [D(x), y] + [x, D(y)] - [x, D(y)] = [D(x), y] = (ad\, D(x))(y).$$

Dakle, $[D, ad\, x] = ad\, D(x) \in ad\, \mathfrak{g}$.

Primjetimo da je jezgra homomorfizma $ad : \mathfrak{g} \to \mathrm{Der}(\mathfrak{g})$, koja je naravno ideal u Liejevoj algebri $\mathfrak{g}$, jednaka

$$Z(\mathfrak{g}) = \{x \in \mathfrak{g};\ \mathrm{ad}\, x = 0\} = \{x \in \mathfrak{g};\ [x,y] = 0\ \forall y \in \mathfrak{g}\}.$$

Taj se ideal u $\mathfrak{g}$ zove **centar** Liejeve algebre $\mathfrak{g}$. Liejeva algebra $Z(\mathfrak{g})$ ima svojstvo da je u njoj komutator trivijalan: $[x,y] = 0\ \forall x, y \in Z(\mathfrak{g})$. Općenito, za Liejevu algebru $\mathfrak{g}$ kažemo da je **komutativna** ili **Abelova** ako je $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \{0\}$, tj. $[x,y] = 0\ \forall x, y \in \mathfrak{g}$. Naravno, Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ je komutativna ako i samo ako je $Z(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}$.

Uočimo da je definicija komutativnosti za Liejeve algebre malo različita od uobičajene definicije komutativnosti. Naime, ako je $\mathcal{A}$ bilo koja algebra, ona se obično zove komutativna ili Abelova ako je $xy = yx\ \forall x, y \in \mathcal{A}$. U slučaju Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ zbog antikomutativnosti to je ekvivalentno uvjetu $2[x,y] = 0\ \forall x, y \in \mathfrak{g}$, a to je ekvivalentno našoj definiciji komutativnosti Liejeve algebre ukoliko je $char\, K \neq 2$. Međutim, ako je $char\, K = 2$, onda je svaka algebra s antikomutativnim množenjem ujedno i komutativna, jer je $-1 = 1$. Ipak, kod Liejeve algebre postavljamo jači zahtjev (inače bi svaka Liejeva algebra nad poljem karakteristike 2 bila komutativna).

Naravno, ako je V bilo koji vektorski prostor, onda uz definiciju $[x,y] = 0\ \forall x, y \in V$ prostor V postaje komutativna Liejeva algebra.

Općenito, neka je $\mathfrak{g}$ konačnodimenzionalna Liejeva algebra i neka je $\{e_1, \ldots, e_n\}$ baza vektorskog prostora $\mathfrak{g}$. Tada možemo pisati

$$[e_i, e_j] = \sum_{k=1}^{n} c_{i,j,k} e_k, \qquad c_{i,j,k} \in K, \quad 1 \le i, j, k \le n.$$

Skalari $c_{i,j,k}$ zovu se **strukturne konstante** Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ u odnosu na bazu $\{e_1, \ldots, e_n\}$. Iz svojstava $(L1)$ i $(L2)$ jednostavno se izvodi koji su nužni i dovoljni uvjeti da bi zadanih n^3 skalara mogli biti strukturne konstante:

Zadatak 1.1.3. *Neka je V vektorski prostor nad poljem K, $\{e_1, \ldots, e_n\}$ baza od V i $c_{i,j,k} \in K$, $i, j, k \in \{1, \ldots, n\}$. Dokažite da na V postoji struktura Liejeve algebre takva da vrijedi*

$$[e_i, e_j] = \sum_{k=1}^{n} c_{i,j,k} e_k \qquad \forall i, j \in \{1, \ldots, n\}$$

ako i samo ako skalari $c_{i,j,k}$ zadovoljavaju

$$c_{i,i,k} = 0 \qquad \forall i, k \in \{1, \ldots, n\},$$

$$c_{i,j,k} + c_{j,i,k} = 0 \qquad \forall i, j, k \in \{1, \ldots, n\}$$

i

$$\sum_{k=1}^{n} (c_{i,j,k} c_{k,\ell,m} + c_{j,\ell,k} c_{k,i,m} + c_{\ell,i,k} c_{k,j,m}) = 0 \qquad \forall i, j, \ell, m \in \{1, \ldots, n\}.$$

Sljedeća dva zadatka rješavaju se primjenom Jacobijevog identitata:

Zadatak 1.1.4. *Neka je $\mathfrak{g}$ Liejeva algebra i $S \subseteq \mathfrak{g}$ bilo koji podskup. Dokažite da je*

$$C_{\mathfrak{g}}(S) = \{x \in \mathfrak{g};\ [x, y] = 0 \quad \forall y \in S\}.$$

Liejeva podalgebra od $\mathfrak{g}$.

Liejeva podalgebra $C_{\mathfrak{g}}(S)$ od $\mathfrak{g}$ zove se **centralizator** skupa S u Liejevoj algebri $\mathfrak{g}$. Naravno, $Z(\mathfrak{g}) = C_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g})$.

Zadatak 1.1.5. *Neka sada $\mathfrak{h}$ Liejeva podalgebra Liejeve algebre $\mathfrak{g}$. Dokažite da je*

$$N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) = \{x \in \mathfrak{g};\ [x, \mathfrak{h}] \subseteq \mathfrak{h}\}.$$

Liejeva podalgebra od $\mathfrak{g}$ koja sadrži $\mathfrak{h}$ i $\mathfrak{h}$ je ideal u $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$. Dokažite da je štoviše $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$ je najveća takva Liejeva podalgebra: ako je $\mathfrak{k}$ Liejeva podalgebra od $\mathfrak{g}$ koja sadrži $\mathfrak{h}$ i ako je $\mathfrak{h}$ ideal u $\mathfrak{k}$, onda je $\mathfrak{k} \subseteq N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$.

Liejeva algebra $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$ zove se **normalizator** od $\mathfrak{h}$ u Liejevoj algebri $\mathfrak{g}$.

Potprostor $\mathfrak{h}$ Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ zove se **karakteristični ideal** ako vrijedi $D\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{h}$ za svaku derivaciju $D \in \mathrm{Der}(\mathfrak{g})$. Naravno, svaki je karakteristični ideal zaista ideal, jer ideal u Liejevoj algebri je potprostor koji je invarijantan u odnosu na sve unutarnje derivacije $\mathrm{ad}\, x$, $x \in \mathfrak{g}$.

Zadatak 1.1.6. *Dokažite:*

(a) *Ako su $\mathfrak{a}$ i $\mathfrak{b}$ ideali u Liejevoj algebri $\mathfrak{g}$ onda je i $[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}]$ ideal u Liejevoj algebri $\mathfrak{g}$.*

(b) *Ako su $\mathfrak{a}$ i $\mathfrak{b}$ karakteristični ideali u Liejevoj algebri $\mathfrak{g}$ onda je i $[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}]$ karakteristični ideal u Liejevoj algebri $\mathfrak{g}$.*

1.2 Proširenje polja skalara

Neka svojstva Liejevih algebri vrijedit će samo ako je polje algebarski zatvoreno. Neka druga svojstva vrijedit će za Liejeve algebre nad proizvoljnim poljem, ali bit će ih lakše dokazati ako je polje algebarski zatvoreno. Zbog toga je važna konstrukcija tzv. *proširenje polja skalara*.

Općenito, neka je V vektorski prostor nad poljem k i neka je K proširenje polja k. **Vektorski prostor dobiven iz V proširenjem polja skalara** sa k na K je uređen par (W, φ) sa svojstvima:

$(ES1)$ W je vektorski prostor nad poljem K.

$(ES2)$ φ je $k-$linearan operator sa V u W.

$(ES3)$ Vrijedi tzv. *univerzalno svojstvo*: ako je U vektorski prostor nad poljem K i ako je $\psi : V \to U$ $k-$linearan operator, onda postoji jedinstven $K-$linearan operator $\chi : W \to U$ takav da je $\psi = \chi \circ \varphi$.

Teorem 1.2.1. *Neka je K proširenje polja k i V vektorski prostor nad k.*

(a) **Egzistencija:***Postoji vektorski prostor dobiven iz prostora V proširenjem polja skalara sa k na K.*

(b) **Jedinstvenost:** *Ako su (W_1, φ_1) i (W_2, φ_2) vektorski prostori dobiveni iz V proširenjem polja skalara sa k na K, onda je jedinstven $K-$linearan operator $\chi : W_1 \to W_2$ sa svojstvom $\varphi_2 = \chi \circ \varphi_1$ izomorfizam.*

Neka (W, φ) prostor dobiven iz V proširenjem polja skalara sa k na K. Tada vrijedi:

(c) *Operator $\varphi : V \to W$ je injektivan.*

(d) *Ako je podskup $S \subseteq V$ linearno nezavisan nad poljem k, onda je $\varphi(S)$ linearno nezavisan nad poljem K.*

(e) *Ako podskup $S \subseteq V$ razapinje prostor V (nad poljem k) onda $\varphi(S)$ razapinje prostor W (nad poljem K).*

(f) *Ako je $(v_i)_{i\in I}$ baza prostora V onda je $(\varphi(v_i))_{i\in I}$ baza prostora W.*

Dokaz: (a) Neka je $(v_i)_{i\in I}$ baza prostora V i neka je W vektorski prostor nad poljem K s bazom $(w_i)_{i\in I}$, dakle, indeksiranom s istim skupom I. Definiramo $\varphi : V \to W$ kao jedinstven $k-$linearan operator takav da je $\varphi(v_i) = w_i$ $\forall i \in I$. Dakle, za bilo koji konačan podskup $J \subseteq I$ i bilo koje $\alpha_j \in k$, $j \in J$, je

$$\varphi\left(\sum_{j\in J} \alpha_j v_j\right) = \sum_{j\in J} \alpha_j w_j.$$

Tvrdimo da je tada uređen par (W, φ) vektorski prostor dobiven iz V proširenjem polja skalara sa k na K. Doista, neka je U vektorski prostor nad K i neka je $\psi : V \to U$ $k-$linearan operator. Tada postoji jedinstven $K-$linearan operator $\chi : W \to U$ takav da je $\chi(w_i) = \psi(v_i)$ $\forall i \in I$. Tada vrijedi

$$\psi(v_i) = \chi(w_i) = \chi(\varphi(v_i)) = (\chi \circ \varphi)(v_i) \qquad \forall i \in I.$$

Budući da se $k-$linearni operatori $\psi, \chi\circ\varphi : V \to U$ podudaraju na bazi prostora V, oni su jednaki: $\psi = \chi \circ \varphi$.

Napokon, ako je i $\chi' : W \to U$ $K-$linearan operator takav da je $\psi = \chi' \circ \varphi$, onda je

$$\chi'(w_i) = \chi'(\varphi(v_i)) = (\chi' \circ \varphi)(v_i) = \psi(v_i) = (\chi \circ \varphi)(v_i) = \chi(\varphi(v_i)) = \chi(w_i) \qquad \forall i \in I.$$

Budući da se $K-$linearni operatori $\chi, \chi' : W \to U$ podudaraju na bazi prostora W, oni su jednaki, $\chi' = \chi$.

Time smo dokazali da uređen par (W,φ) zadovoljava univerzalno svojstvo $(ES3)$, dakle, (W,φ) je vektorski prostor dobiven iz V proširenjem polja skalara sa k na K.

(b) Budući da je i (W_2,φ_2) zadovoljava univerzalno svojstvo $(ES3)$ postoji (jedinstven) $K-$linearan operator $\vartheta : W_2 \to W_1$ takav da je $\varphi_1 = \vartheta \circ \varphi_2$. Sada je $\vartheta \circ \chi : W_1 \to W_1$ $K-$linearan operator i vrijedi

$$(\vartheta \circ \chi) \circ \varphi_1 = \vartheta \circ (\chi \circ \varphi_1) = \vartheta \circ \varphi_2 = \varphi_1.$$

Dakle, $\vartheta \circ \chi$ i I_{W_1} su $K-$linearni operatori sa W_1 u W_1 koji zadovoljavaju $(\vartheta \circ \chi) \circ \varphi_1 = \varphi_1$ i $I_{W_1} \circ \varphi_1 = \varphi_1$. Sada iz jedinstvenosti u univerzalnom svojstvu $(ES3)$ za (W_1,φ_1) slijedi da je $\vartheta \circ \chi = I_{W_1}$. Sasvim analogno se dokazuje da je $\chi \circ \vartheta = I_{W_2}$. Prema tome, $\chi : W_1 \to W_2$ je izomorfizam vektorskih prostora nad K.

Uočimo da tvrdnja (c) slijedi neposredno iz tvrdnje (f). Nadalje, svaki linearno nezavisan podskup vektorskog prostora sadržan je u nekoj bazi, dakle, i tvrdnja (d) slijedi iz tvrdnje (f). Napokon, svaki podskup vektorskog prostora koji ga razapinje sadrži neku bazu tog prostora, pa i (e) slijedi iz (f).

Za dokaz tvrdnje (f), neka je (W,φ) prostor dobiven iz V proširenjem polja skalara i neka je (W',φ') upravo onaj prostor dobiven iz V proširenjem polja skalara koji je konstruiran u dokazu tvrdnje (a). Dakle, W' je vektorski prostor nad K s bazom $(w_i)_{i\in I}$ i $\varphi' : V \to W'$ je jedinstven $k-$linearan operator takv da je $\varphi'(v_i) = w_i$ $\forall i \in I$. Zbog univerzalnog svojstva postoji $K-$linearan operator $\chi : W' \to W$ takav da vrijedi $\varphi = \chi \circ \varphi'$. Prema tvrdnji (b) tada je χ izomorfizam vektorskih prostora. Vrijedi

$$\chi(w_i) = \chi(\varphi'(v_i)) = (\chi \circ \varphi')(v_i) = \varphi(v_i) \qquad \forall i \in I.$$

No izomorfizam vektorskih prostora prevodi bazu u bazu, pa zaključujemo da je $(\varphi(v_i))_{\infty\in I}$ baza vektorskog prostora W.

Neka je (W,φ) vektorski prostor dobiven iz prostora V proširenjem polja skalara sa k na K. Zbog tvrdnje (c) u prethodnom teoremu, operator $\varphi : V \to W$ možemo upotrijebiti kao identifikaciju i shvaćati V kao podskup od W. Tada univerzalno svojstvo znači da se svaki $k-$linearan operator sa V u $K-$vektorski prostor U jedinstveno proširuje do $K-$linearnog operatora sa W u U. Nadalje, baza od V (nad k) je ujedno baza od W (nad K). Uz takvu identifikaciju obično ćemo pisati V^K za prostor W. Dualna konstrukcija od proširenja polja skalara sa k na K je **suženje polja skalara** sa K na k : ako je W vektorski prostor nad proširenjem K polja k, možemo ga shvaćati kao vektorski prostor nad poljem k zaboravivši da znamo vektore iz W množiti i sa skalarima iz $K \setminus k$. Taj se $k-$vektorski prostor označava sa W_k. Primijetimo da ove konstrukcije nisu međusobno inverzne. Npr. ako je $k = \mathbb{R}$ i $K = \mathbb{C}$, i ako je V konačnodimenzionalan realan vektorski prostor, a W konačnodimenzionalan kompleksan vektorski prostor, onda je

$$\dim_{\mathbb{C}} V^{\mathbb{C}} = \dim_{\mathbb{R}} V, \qquad \text{ali} \qquad \dim_{\mathbb{R}} W_{\mathbb{R}} = 2\dim_{\mathbb{C}} W,$$

dakle,

$$\dim_{\mathbb{R}} \left(V^{\mathbb{C}}\right)_{\mathbb{R}} = 2\dim_{\mathbb{R}} V \qquad \text{i} \qquad \dim_{\mathbb{C}} (W_{\mathbb{R}})^{\mathbb{C}} = 2\dim_{\mathbb{C}} W.$$

Zadatak 1.2.1. *Neka su V, W i U vektorski prostori nad poljem k, neka je K proširenje polja k i neka je $A : V \times W \to U$ $k-$bilinearan operator. Dokažite da se A jedinstveno proširuje do $K-$bilinearnog operatora $A^K : V^K \times W^K \to U^K$.*

Posebno, ako je $\mathcal{A}$ algebra nad poljem k onda se množenje $\mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ jedinstveno proširuje do $K-$bilinearnog preslikavanja sa $\mathcal{A}^K \times \mathcal{A}^K$ u $\mathcal{A}^K$ i $\mathcal{A}^K$ postaje algebra nad poljem K. Tada kažemo da je algebra $\mathcal{A}^K$ dobivena iz algebre $\mathcal{A}$ proširenjem polja skalara sa k na K.

Ako je V vektorski prostor nad poljem k i K proširenje od k onda se za potprostor U od V potprostor koji je u $K-$prostoru V^K razapet sa U može identificirati sa U^K. Dakle, možemo shavaćati da je $U^K \subseteq V^K$. Ako je $\mathcal{I}$ ideal (lijevi, desni ili obostrani) u $k-$algebri $\mathcal{A}$ onda se lako vidi da je $\mathcal{I}^K$ ideal iste vrste u algebri $\mathcal{A}^K$. Ako je ideal $\mathcal{I}$ obostrani, kvocijentna algebra $\mathcal{A}^K/\mathcal{I}^K$ identificira se s algebrom $(\mathcal{A}/\mathcal{I})^K$. Nadalje, homomorfizam $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ $k-$algebri jedinstveno se proširuje do homomorfizma $\varphi^K : \mathcal{A}^K \to \mathcal{B}^K$ i pridruživanje $\varphi \mapsto \varphi^K$ je injekcija sa $Hom_k(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ u $Hom_K(\mathcal{A}^K, \mathcal{B}^K)$. Tu ćemo injekciju obično shvaćati kao identifikaciju $Hom_k(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ s podskupom $\{\varphi \in Hom_K(\mathcal{A}^K, \mathcal{B}^K);\ \varphi(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{B}\}$.

Ako je $\mathcal{A}$ algebra (nad k) s jedinicom (odnosno, asocijativna algebra, unitalna algebra, Liejeva algebra) lako se vidi da je i $\mathcal{A}^K$ algebra s jedinicom (odnosno, asocijativna algebra, unitalna algebra, Liejeva algebra).

Zadatak 1.2.2. *Neka je $\mathfrak{g}$ Liejeva algebra nad poljem k i K proširenje polja k. Dokažite:*

(*a*) *Ako su X i Y potprostori od $\mathfrak{g}$ onda je $\left[X^K, Y^K\right] = [X, Y]^K$.*

(*b*) *Ako je S podskup od $\mathfrak{g}$ onda je $C_{\mathfrak{g}^K}(S) = C_{\mathfrak{g}}(S)^K$.*

(*c*) *Ako je $\mathfrak{h}$ Liejeva podalgebra od $\mathfrak{g}$ onda je $N_{\mathfrak{g}^K}\left(\mathfrak{h}^K\right) = N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})^K$.*

Ovaj ćemo odjeljak završiti još jednom definicijom vezanom uz pojam proširenjem polja skalara. Neka je i dalje K proširenje polja k i neka je V vektorski prostor nad K. $k-$**struktura vektorskog prostora** V je potprostor W prostora V_k takav da je V vektorski prostor dobiven iz W proširenjem polja skalara sa k na K. Drugim riječima, potprostor W ima bazu koja je ujedno baza prostora V. Ako je $\mathcal{A}$ algebra nad K, $k-$**struktura algebre** $\mathcal{A}$ je podalgebra $\mathcal{B}$ od $\mathcal{A}_k$ koja je $k-$struktura vektorskog prostora $\mathcal{A}$.

Neka je fiksirana neka $k-$struktura W vektorskog prostora W nad K. Za **potprostor** U prostora V kažemo da je **definiran nad** k ako je $W \cap U$ $k-$struktura od U. To je ispunjeno ako i samo ako je $span_K(W \cap U) = U$.

Propozicija 1.2.2. *Neka je V vektorski prostor nad poljem K i neka je fiksirana njegova $k-$struktura W. Ako je $\mathcal{S}$ skup potprostora V koji su definirani nad k onda je i potprostor $\sum \mathcal{S}$ definiran nad k. Ako je prostor V konačnodimenzionalan, onda je i potprostor $\bigcap \mathcal{S}$ definiran nad k.*

Dokaz: Iz $span_K(W \cap Z) = Z\ \forall Z \in \mathcal{S}$ dobivamo

$$\sum \mathcal{S} \supseteq span_K(W \cap \sum \mathcal{S}) \supseteq span_K\left(\sum_{Z\in\mathcal{S}}(W \cap Z)\right) = \sum_{Z\in\mathcal{S}} span_K(W \cap Z) = \sum_{Z\in\mathcal{S}} Z = \sum \mathcal{S}.$$

Dakle, potprostor $\sum \mathcal{S}$ je definiran nad k.

Pretpostavimo sada da je prostor V konačnodimenzionalan. Tada je $\bigcap \mathcal{S}$ jednak presjeku konačno mnogo potprostora iz skupa $\mathcal{S}$. Zbog toga u dokazu možemo pretpostavljati da je skup $\mathcal{S}$ konačan, a indukcijom po broju elemenata od $\mathcal{S}$ dokaz se svodi na slučaj dvaju potprostora X i Y od V definiranih nad k. Već znamo da je potprostor $X + Y$ definiran nad k, pa možemo pretpostavljati da je $V = X + Y$ i $W = W \cap X + W \cap Y$. Sada je

$$\dim_k W = \dim_K V, \quad \dim_k (W \cap X) = \dim_K X, \quad \dim_k (W \cap Y) = \dim_K Y,$$

pa slijedi

$$\dim_k (W \cap (X \cap Y)) = \dim_k ((W \cap X) \cap (W \cap Y)) = \dim_k (W \cap X) + \dim_k (W \cap Y) - \dim_k W =$$
$$= \dim_K X + \dim_K Y - \dim_K V = \dim_K (X \cap Y).$$

Dakle, potprostor $X \cap Y$ je definiran nad k.

Neka su sada V_1 i V_2 vektorski prostori nad K i neka su fiksirane njihove $k-$strukture W_1 i W_2. Za **lineran operator** $A \in L(V_1, V_2)$ kažemo da je **definiran nad** k, ako je $AW_1 \subseteq W_2$.

Propozicija 1.2.3. *Ako su prostori V_1 i V_2 konačnodimenzionalni i ako je operator $A \in L(V_1, V_2)$ definiran nad k onda su potprostori $\operatorname{Ker} A$ i $\operatorname{Im} A$ definirani nad k.*

Dokaz: Vrijedi

$$\operatorname{Im} A \supseteq span_K \left((\operatorname{Im} A) \cap W_2\right) \supseteq span_K AW_1 = A\, span_K W_1 = AV_1 = \operatorname{Im} A.$$

Dakle, potprostor $\operatorname{Im} A$ prostora V_2 je definiran nad k i $\operatorname{Im}(A|W_1)$ je $k-$struktura potprostora $\operatorname{Im} A$. Nadalje, dvostruka primjena teorema o rangu i defektu daje

$$\dim_K \operatorname{Ker} A = \dim_K V_1 - \dim_K \operatorname{Im} A = \dim_k W_1 - \dim_k \operatorname{Im}(A|W_1) =$$

$$= \dim_k \operatorname{Ker}(A|W_1) = \dim_k (\operatorname{Ker} A) \cap W_1.$$

Dakle, $(\operatorname{Ker} A) \cap W_1$ je $k-$struktura potprostora $\operatorname{Ker} A$, dakle, taj je potprostor definiran nad k.

Propozicija 1.2.4. *Neka su V_1 i V_2 konačnodimenzionalni vektorski prostori nad K i neka su fiksirane njihove $k-$strukture W_1 i W_2. Tada je*

$$L(V_1, V_2)_{W_1, W_2} = \{A \in L(V_1, V_2);\ A \textit{ je definiran nad } k\}$$

$k-$struktura vektorskog prostora $L(V_1, V_2)$ i $A \mapsto A|W_1$ je izomorfizam $k-$vektorskih prostora sa $L(V_1, V_2)_{W_1, W_2}$ na $L(W_1, W_2)$.

Zadatak 1.2.3. *Dokažite propoziciju 1.2.4.*

1.3 Bilinearne forme

Neka su V i W vektorski prostori nad istim poljem K. **Bilinearna forma** na $V \times W$ je preslikavanje $F : V \times W \to K$ koje je bilinearno, tj. linearno je u prvoj varijabli

$$F(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2, w) = \alpha_1 F(v_1, w) + \alpha_2 F(v_2, w) \qquad \forall \alpha_1, \alpha_2 \in K, \quad \forall v_1, v_2 \in V, \quad \forall w \in W,$$

i u drugoj varijabli

$$F(v, \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2) = \alpha_1 F(v, w_1) + \alpha_2 F(v, w_2) \qquad \forall \alpha_1, \alpha_2 \in K, \quad \forall v \in V, \quad \forall w_1, w_2 \in W.$$

Naravno, tada vrijedi

$$F\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i, \sum_{j=1}^{m} \beta_j w_j\right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \alpha_i \beta_j F(v_i, w_j)$$

$$\forall n, m \in \mathbb{N}, \quad \forall \alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_m \in K, \quad \forall v_1, \ldots, v_n \in V, \quad \forall w_1, \ldots, w_m \in W.$$

Skup svih bilinearnih formi $V \times W \to K$ označavamo sa $L(V \times W, K)$ i to je vektorski prostor nad K s operacijama

$$(F + G)(v, w) = F(v, w) + G(v, w), \qquad (\alpha F)(v, w) = \alpha F(v, w),$$

$$F, G \in L(V \times W, K), \quad \alpha \in K, \quad v \in V, \quad w \in W.$$

Za formu F kažemo da je **slijeva nedegenerirana** ako vrijedi

$$v \in V, \quad F(v, w) = 0 \quad \forall w \in W \qquad \Longrightarrow \qquad v = 0,$$

a **zdesna nedegenerirana** ako vrijedi

$$w \in W, \quad F(v, w) = 0 \quad \forall v \in V \qquad \Longrightarrow \qquad w = 0.$$

Kažemo da je forma F **nedegenerirana** ako je nedegenerirana i slijeva i zdesna.

U daljnjem promatramo isključivo bilinearne forme na konačnodimenzionalnim vektorskim prostorima. Ako je $e = \{e_1, \ldots, e_n\}$ baza vektorskog prostora V i $f = \{f_1, \ldots, f_m\}$ baza vektorskog prostora W **matrica bilinearne forme** $F : V \times W \to K$ **u paru baza** (e, f) je matrica $F(e, f)$ tipa $n \times m$ čiji je matrični element na mjestu (i, j) jednak $F(e_i, f_j)$. Očito je $F \mapsto F(e, f)$ izomorfizam vektorskog prostora $L(V \times W, K)$ svih bilinearnih formi $V \times W \to K$ na vektorski prostor $M_{n,m}(K)$ svih matrica formata $n \times m$ s koeficijentima iz K.

Propozicija 1.3.1. *Neka je $e = \{e_1, \ldots, e_n\}$ baza vektorskog prostora V, $f = \{f_1, \ldots, f_m\}$ baza vektorskog prostora W i $F \in L(V \times W, K)$.*

(a) *Forma F je slijeva nedegenerirana ako i samo ako je rang matrice $F(e, f)$ jednak n.*

(b) *Forma F je zdesna nedegenerirana ako i samo ako je rang matrice $F(e, f)$ jednak m*

(c) *Ako je $n = m$, tj. $\dim V = \dim W$, forma F je slijeva nedegenerirana ako i samo ako je ona zdesna nedegenerirana. To je ispunjeno ako i samo ako je matrica forme F u nekom (u svakom) paru baza regularna.*

(d) *Ako je forma F nedegenerirana onda je $n = m$.*

Dokaz: (a) Pretpostavimo da je forma F slijeva nedegenerirana. Neka je $F_i \in M_{1,m}(K)$ $i-$ti redak matrice $F(e,f)$, tj.

$$F_i = [F(e_i, f_1) \quad F(e_i, f_2) \quad \cdots \quad F(e_i, f_m)], \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Neka su $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in K$ takvi da je

$$\lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2 + \cdots + \lambda_n F_n = 0. \tag{1.1}$$

To znači da vrijedi

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i F(e_i, f_j) = 0 \qquad \forall j \in \{1, 2, \ldots, m\}.$$

Slijedi da za vektor

$$v = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \cdots + \lambda_n e_n \in V \tag{1.2}$$

vrijedi

$$F(v, f_j) = 0 \qquad \forall j \in \{1, 2, \ldots, m\}. \tag{1.3}$$

Kako je $\{f_1, f_2, \ldots, f_m\}$ baza prostora W, zaključujemo da je $F(v,w) = 0 \ \forall w \in W$. Budući da je forma F po pretpostavci slijeva nedegenerirana, slijedi $v = 0$, a odatle je $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$. Time je dokazano da su reci $F_1, F_2, \ldots, F_n$ matrice $F(e,f)$ linearno nezavisni. Dakle, rang te matrice jednak je n.

Obratno, pretpostavimo da je rang matrice $F(e,f)$ jednak n. To znači da su reci $F_1, F_2, \ldots, F_n$ te matrice linearno nezavisni. Neka je $v \in V$ takav da je $F(v,w) = 0 \ \forall w \in W$. Tada, posebno, vrijedi (1.13). Neka je (1.12) prikaz vektora v u bazi e. Tada iz (1.13) slijedi (1.11), a kako su reci $F_1, F_2, \ldots, F_n$ matrice $F(e,f)$ linearno nezavisni, slijedi da je $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$, odnosno, $v = 0$. Time je dokazano da je forma F slijeva nedegenerirana.

Tvrdnja (b) dokazuje se potpuno analogno tvrdnji (a) promatranjem stupaca matrice $F(e,f)$, a tvrdnje (c) i (d) neposredne su posljedice tvrdnji (a) i (b).

Propozicija 1.3.2. *Neka su V i W konačnodimenzionalni vektorski prostori nad poljem K i neka je $F : V \times W \to K$ nedegenerirana bilinearna forma.*

(a) *Za svaki linearan funkcional $\varphi \in V^*$ postoji jedinstven vektor $w \in W$ takav da je*

$$\varphi(v) = F(v,w) \qquad \forall v \in V.$$

Tako definirano preslikavanje $\varphi \mapsto w$ je izomorfizam prostora V^* na prostor W.

(b) *Za svaki linearan funkcional $\psi \in W^*$ postoji jedinstven vektor $v \in V$ takav da je*

$$\psi(w) = F(v,w) \qquad \forall w \in W.$$

Tako definirano preslikavanje $\psi \mapsto v$ je izomorfizam prostora W^* na prostor V.

(c) *Za svaki linearan operator $A : V \to V$ postoji jedinstven linearan operator $A^F : W \to W$ takav da vrijedi*

$$F(Av, w) = F(v, A^F w) \qquad \forall v \in V \quad i \quad \forall w \in W.$$

Preslikavanje $A \mapsto A^F$ je izomorfizam prostora $L(V)$ na prostor $L(W)$ i vrijedi

$$(A_1 A_2)^F = A_2^F A_1^F \qquad \forall A_1, A_2 \in L(V).$$

(*d*) *Za svaki linearan operator* $B : W \to W$ *postoji jedinstven linearan operator* ${}^F B : V \to V$ *takav da vrijedi*

$$F(v, Bw) = F({}^F Bv, w) \qquad \forall v \in V \quad i \quad w \in W.$$

Preslikavanje $B \mapsto {}^F B$ *je izomorfizam prostora* $L(W)$ *na prostor* $L(V)$ *i vrijedi*

$${}^F(B_1 B_2) = {}^F B_2 {}^F B_1 \qquad \forall B_1, B_2 \in L(W).$$

(*e*) *Izmorfizmi* $A \mapsto A^F$ *sa* $L(V)$ *na* $L(W)$ *i* $B \mapsto {}^F B$ *sa* $L(W)$ *na* $L(V)$ *su međusobno inverzni.*

Dokaz: (*a*) Za $w \in W$ definiramo preslikavanje $\varphi_w : V \to K$ sa

$$\varphi_w(v) = F(v, w), \qquad v \in V.$$

Zbog linearnosti forme F u prvoj varijabli φ_w je linearan funkcional na prostoru V, tj. $\varphi_w \in V^*$. Nadalje, iz linearnosti forme F u drugoj varijabli slijedi da je preslikavanje $w \mapsto \varphi_w$ sa W u V^* linearno. Iz nedegeneriranosti forme F (zdesna) slijedi da je to preslikavanje injektivno:

$$\varphi_w = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad F(v, w) = \varphi_w(v) = 0 \quad \forall v \in V \qquad \Longrightarrow \qquad w = 0.$$

Po teoremu o rangu i defektu primijenjenom na operator $w \mapsto \varphi_w$ slijedi da je njegov rang jednak dim W. Međutim, po tvrdnji (*d*) propozicije 1.3.1. to je jednako dim V, dakle, dim V^*. Prema tome, preslikavanje $w \mapsto \varphi_w$ je izomorfizam prostora W na prostor V^*.

Tvrdnja (*b*) dokazuje se sasvim analogno ili primjenom tvrdnje (*a*) na formu $F^0 \in L(W \times V, K)$ definiranu sa $F^0(w, v) = F(v, w)$, $v \in V$, $w \in W$.

(*c*) Neka je $A \in L(V)$. Za $w \in W$ definiramo $\psi_w \in V^*$ sa

$$\psi_w(v) = F(Av, w), \qquad v \in V.$$

Prema tvrdnji (*a*) postoji jedinstven vektor iz W, koji ćemo označiti sa $A^F(w)$, takav da je

$$F(Av, w) = \psi_w(v) = F(v, A^F(w)) \qquad \forall v \in V.$$

Iz linearnosti forme F u drugoj varijabli slijedi linearnost preslikavanja $A^F : W \to W$. Time je dokazana egzistencija u tvrdnji (*c*). Jedinstvenost slijedi iz nedegeneriranosti forme F zdesna: ako i $B \in L(W)$ ima svojstvo da je $F(Av, w) = F(v, Bw)$ $\forall v \in V$ i $\forall w \in W$, onda za $w \in W$ i za svaki $v \in V$ vrijedi $F(v, A^F w - Bw) = 0$, pa slijedi $A^F w - Bw = 0$, a to zbog proizvoljnosti vektora $w \in W$ znači $B = A^F$.

Preslikavanje $A \mapsto A^F$ sa $L(V)$ u $L(W)$ je očito linearno. Nadalje, ono je injektivno, jer imamo sljedeći niz implikacija

$$A^F = 0 \;\Rightarrow\; F(Av, w) = F(v, A^F w) = 0 \;\forall v \in V \text{ i } \forall w \in W \;\Rightarrow\; Av = 0 \;\forall v \in V \;\Rightarrow\; A = 0;$$

pri tome smo kod druge implikacije koristili nedegeneriranost forme F slijeva. Budući da je dim $V =$ dim W, vrijedi dim $L(V) =$ dim $L(W)$, pa je po teoremu o rangu i defektu preslikavanje $A \mapsto A^F$ izomorfizam sa $L(V)$ na $L(W)$.

Napokon, za $A_1, A_2 \in L(V)$ imamo za proizvoljne $v \in V$ i $w \in W$:

$$F(v, (A_1 A_2)^F w) = F(A_1 A_2 v, w) = F(A_2 v, A_1^F w) = F(v, A_2^F A_1^F w).$$

Odatle i iz nedegeneriranosti forme F zdesna slijedi $(A_1 A_2)^F = A_2^F A_1^F$.

Tvrdnja (*d*) dokazuje se sasvim analogno.

(*e*) Za $A \in L(V)$ i za proizvoljne $v \in V$ i $w \in W$ imamo

$$F(Av, w) = F(v, A^F w) = F\left({}^F\left(A^F\right) v, w\right).$$

Odatle i iz nedegeneriranosti forme F slijeva slijedi ${}^F\left(A^F\right) = A$. Sasvim analogno za svaki $B \in L(W)$ nalazimo da je $({}^F B)^F = B$. Time je dokazano da su izomorfizmi $A \mapsto A^F$ i $B \mapsto {}^F B$ međusobno inverzni.

Neka je $F \in L(V \times W, K)$ bilinearna forma. Za potprostor X prostora V definiramo njegov **desni** $F-$**ortogonal** $^\perp X$:

$$^\perp X = \{w \in W;\ F(x,w) = 0\ \ \forall x \in X\}.$$

To je očito potprostor od W. Analogno, za svaki potprostor Y prostora W definiramo njegov **lijevi** $F-$**ortogonal**. To je potprostor $Y^\perp$ od V zadan sa

$$Y^\perp = \{v \in V;\ F(v,y) = 0\ \ \forall y \in Y\}.$$

Desni $F-$ortogonal $^\perp V$ čitavog prostora V zove se **desni radikal forme** F; analogno, $W^\perp$ je **lijevi radikal forme** F. Forma F je zdesna nedegenerirana ako i samo ako je njen desni radikal $^\perp V$ jednak $\{0\}$, a slijeva nedegenerirana ako i samo ako je njen lijevi radikal $W^\perp$ jednak $\{0\}$.

Propozicija 1.3.3. *Neka je $F \in L(V \times W, K)$ nedegenerirana bilinearna forma. Za svaki potprostor X od V i svaki potprostor Y od W vrijede jednakosti*

$$\dim\,^\perp X = \dim V - \dim X \qquad i \qquad \dim Y^\perp = \dim W - \dim Y.$$

Dokaz: Neka je $w \mapsto \varphi_w$ izomorfizam sa W na V^* iz dokaza tvrdnje (a) propozicije 1.3.2., tj.

$$\varphi_w(v) = F(v,w), \qquad v \in V, \quad w \in W.$$

Tada vrijedi

$$w \in\, ^\perp X \qquad \Longleftrightarrow \qquad \varphi_w \in X^0 = \{\varphi \in V^*;\ \varphi(x) = 0\ \ \forall x \in X\}.$$

Dakle, $w \mapsto \varphi_w$ je izomorfizam sa $^\perp X$ na X^0. No tada je $\dim\,^\perp X = \dim X^0 = \dim V - \dim X$. Sasvim analogno dokazuje se i druga jednakost.

Neka su $e = \{e_1, \ldots, e_n\}$ i $e' = (e'_1, \ldots, e'_n)$ baze prostora V i $f = (f_1, \ldots, f_m)$ i $f' = (f'_1, \ldots, f'_m)$ baze prostora W. Nadalje, neka su $A \in GL(V)$ operator koji povezuje bazu e s bazom e' i $B \in GL(W)$ operator koji povezuje bazu f s bazom f' :

$$Ae_i = e'_i, \quad i = 1, \ldots, n, \qquad Bf_j = f'_j, \quad j = 1, \ldots, m.$$

Označimo sa $A(e) = [\alpha_{ip}]$ matricu operatora A u bazi e i sa $B(f) = [\beta_{jq}]$ matricu operatora B u bazi f :

$$e'_p = Ae_p = \sum_{i=1}^n \alpha_{ip} e_i, \quad p = 1, \ldots, n, \qquad f'_q = Af_q = \sum_{j=1}^m \beta_{jq} f_j, \quad q = 1, \ldots, m.$$

Tada imamo za bilo koje $p \in \{1, \ldots, n\}$ i $q \in \{1, \ldots, m\}$:

$$F(e'_p, f'_q) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \alpha_{ip}\beta_{jq} F(e_i, f_j).$$

To pokazuje da je

$$F(e', f') = A(e)^t F(e,f) B(f).$$

Pri tome za bilo koju matricu $C \in M_{k\ell}(K)$ sa $C^t \in M_{\ell k}(K)$ označavamo njoj transponiranu matricu. Kako su matrice $A(e)$ (dakle i $A(e)^t$) i $B(f)$ regularne, iz ove se jednakosti vidi da je rang matrice $F(e,f)$ jednak rangu matrice $F(e', f')$. Drugim riječima, rang matrice bilinearne forme F ne ovisi o izboru baza u prostorima V i W. Taj se rang zove **rang bilinearne forme** F i označava sa $r(F)$.

Propozicija 1.3.4. *Neka su V i W konačnodimenzionalni vektorski prostori nad istim poljem K i $F \in L(V \times W, K)$ bilinearna forma.*

(a) *Neka su X i Y potprostori od V i W takvi da je $V = W^\perp \dot{+} X$ i $W = {}^\perp V \dot{+} Y$. Tada je restrikcija $F|X \times Y$ nedegenerirana bilinearna forma.*

(b) *Vrijedi* $\dim V = \dim W^\perp + r(F)$ *i* $\dim W = \dim {}^\perp V + r(F)$.

Dokaz: (a) Pretpostavimo da je $x \in X$ takav da je $F(x, y) = 0\ \ \forall y \in Y$. Budući da vrijedi i $F(x, y) = 0\ \ \forall y \in {}^\perp V$, i budući da je $W = {}^\perp V \dot{+} Y$, slijedi da je $F(x, y) = 0\ \ \forall y \in W$. No tada je $x \in W^\perp$, a kako je $X \cap W^\perp = \{0\}$, zaključujemo da je $x = 0$. To pokazuje da je forma $F|X \times Y$ slijeva nedegenerirana. Sasvim analogno dokazuje se da je ta forma i zdesna nedegenerirana.

(b) Izaberimo potprostore X od V i Y od W takve da je $V = W^\perp \dot{+} X$ i $W = {}^\perp V \dot{+} Y$. Zbog nedegeneriranosti forme $F|X \times Y$, prema tvrdnji (d) propozicije 1.3.1. vrijedi $\dim X = \dim Y$; taj broj označimo sa r i neka su $n = \dim V$ i $m = \dim W$. Izaberimo sada bazu $\{e_1, \ldots, e_r\}$ od X, bazu $\{e_{r+1}, \ldots, e_n\}$ od $W^\perp$, bazu $\{f_1, \ldots, f_r\}$ od Y i bazu $\{f_{r+1}, \ldots, f_m\}$ od ${}^\perp V$. Tada je $\{e_1, \ldots, e_n\}$ baza prostora V i $\{f_1, \ldots, f_m\}$ je baza od W. U tom paru baza forma F ima matricu kojoj je u gornjem lijevom $r \times r$ bloku matrica nedegenerirane forme $F|X \times Y$, dakle, matrica iz $GL(r, K)$, a svi su ostali elementi te matrice 0. To pokazuje da je $r(F) = r$, a odatle je

$$r(F) = \dim X = \dim V - \dim W^\perp \qquad \text{i} \qquad r(F) = \dim Y = \dim W - \dim {}^\perp V.$$

Propozicija 1.3.5. *Neka je $F \in L(V \times V, K)$ nedegenerirana simetrična ili antisimetrična bilinearna forma i neka je U potprostor od V. Sljedeća su svojstva međusobno ekvivalentna:*

(a) *Restrikcija $F|U \times U$ je nedegenerirana.*

(b) $V = U + U^\perp$.

(c) $U \cap U^\perp = \{0\}$.

(d) *Restrikcija $F|U^\perp \times U^\perp$ je nedegenerirana.*

Dokaz: Prije svega, uočimo da za simetričnu ili antisimetričnu formu $F \in L(V \times V, K)$ za svaki potprostor U od V vrijedi $U^\perp = {}^\perp U$. Kako je forma F nedegenerirana, po propoziciji 1.3.3. za svaki potprostor U od V vrijedi $\dim V = \dim U + \dim U^\perp$. Prema tome, svojstva ($b$) i ($c$) su međusobno ekvivalentna. Iz tih svojstava slijedi svojstvo (a). Doista, ako je $u \in U$ takav da je $F(u, x) = 0\ \ \forall x \in U$, onda zbog ($b$) vrijedi $F(u, x) = 0\ \ \forall x \in V$, pa zbog nedegeneriranosti forme F slijedi $u = 0$. Pretpostavimo sada da vrijedi svojstvo (a). Tada je očito $U \cap U^\perp = \{0\}$, tj. vrijedi (c). Time je dokazano da su svojstva (a), (b) i (c) međusobno ekvivalentna.

Za svaki potprostor U od V je očito $U \subseteq \left(U^\perp\right)^\perp$. Nadalje, iz propozicije 1.3.3. primijenjene najprije na potprostor $X = U^\perp$ a zatim na potprostor $X = U$ dobivamo

$$\dim \left(U^\perp\right)^\perp = \dim V - \dim U^\perp = \dim V - (\dim V - \dim U) = \dim U.$$

Dakle, za svaki potprostor U od V je $U = \left(U^\perp\right)^\perp$. Primijenimo li dokazano na potprostor $U^\perp$ nalazimo da je svojstvo (d) ekvivalentno npr. svojstvu (c).

1.4 Primjeri Liejevih algebri

Liejeve podalgebre od $\mathfrak{gl}(V)$ za konačnodimenzionalan vektorski prostor V i od $\mathfrak{gl}(n,K)$ za $n \in \mathbb{N}$ zovu se **linearne Liejeve algebre**. Definirat ćemo sada sada neke serije linearnih Liejevih algebri, koje se obično zovu **klasične Liejeve algebre**.

1. Za konačnodimenzionalan prostor V sa $\mathfrak{sl}(V)$ označavamo skup svih linearnih operatora kojima je trag jednak nuli; analogno, sa $\mathfrak{sl}(n,K)$ označavamo skup svih matrica $n \times n$ traga 0. Budući da je trag komutatora dvaju operatora, odnosno, dviju matrica, uvijek jednak nuli $\mathfrak{sl}(V)$ je Liejeva podalgebra od $\mathfrak{gl}(V)$ i $\mathfrak{sl}(n,K)$ je Liejeva podalgebra od $\mathfrak{gl}(n,K)$. Ta se Liejeva algebra zove se **specijalna linearna Liejeva algebra**. Trag je netrivijalni linearni funkcional na prostoru $\mathfrak{gl}(V)$ (odnosno, na prostoru $\mathfrak{gl}(n,K)$) i $\mathfrak{sl}(V)$ (odnosno, $\mathfrak{sl}(n,K)$) je njegova jezgra. Dakle, $\dim \mathfrak{sl}(V) = \dim \mathfrak{sl}(n,K) = n^2 - 1$. Lako je napisati bazu od $\mathfrak{sl}(n,K)$: to je npr.

$$\{e_{ij};\ i,j \in \{1,\ldots,n\}\, i \neq j\} \cup \{h_i = e_{ii} - e_{i+1,i+1};\ i \in \{1,\ldots,n-1\}\,\}.$$

Tu ćemo bazu zvati *standardna baza od* $\mathfrak{sl}(n,K)$.

2. Neka je V konačnodimenzionalan vektorski prostor nad poljem K i neka je $F : V \times V \to K$ nedegenerirana antisimentrična bilinearna forma na $V \times V$.

Zadatak 1.4.1. *Dokažite da je dimenzija prostora V paran broj $2n$ i da postoji baza $\{e_1,\ldots,e_{2n}\}$ od V takva da vrijedi:*

$$v = \sum_{i=1}^{2n} \alpha_i e_i, \quad w = \sum_{i=1}^{2n} \beta_i e_i \qquad \Longrightarrow \qquad F(v,w) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \beta_{n+i} - \sum_{i=1}^{n} \alpha_{n+i} \beta_i.$$

Stavimo

$$\mathfrak{sp}(V) = \{x \in \mathfrak{gl}(V);\ F(x(v),w) + F(v,x(w)) = 0\ \ \forall v,w \in V\}.$$

Zadatak 1.4.2. (*a*) *Dokažite da je $\mathfrak{sp}(V)$ Liejeva podalgebra od $\mathfrak{gl}(V)$ sadržana u $\mathfrak{sl}(V)$ i da je ta Liejeva algebra izomorfna Liejevoj algebri matrica*

$$\mathfrak{sp}(2n,K) = \{x \in \mathfrak{gl}(2n,K);\ sx = -x^t s\}, \quad \textit{gdje je} \quad s = \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{bmatrix},$$

pri čemu je I_n oznaka za jediničnu matricu $n \times n$.

(*b*) *Dokažite da je*

$$\mathfrak{sp}(2n,K) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & -a^t \end{bmatrix};\ a,b,c \in M_n(n,K),\ b = b^t,\ c = c^t \right\},$$

pri čemu je g^t oznaka za transponiranu matricu matrice g.

(*c*) *Dokažite da je* $\dim \mathfrak{sp}(2n,K) = 2n^2 + n$.

Liejeve algebre $\mathfrak{sp}(V)$ i $\mathfrak{sp}(2n,K)$ zovu se **simplektičke Liejeve algebre**.

3. Neka je sada nedegenerirana simetrična bilinearna forma na $V \times V$. Stavimo

$$\mathfrak{o}_F(V) = \{x \in \mathfrak{gl}(V);\ F(xv,w) + F(v,xw) = 0 \quad \forall v,w \in V\}.$$

Zadatak 1.4.3. *(a) Dokažite da je $\mathfrak{o}_F(V)$ Liejeva podalgebra od $\mathfrak{gl}(V)$ sadržana u $\mathfrak{sl}(V)$.*

(b) Dokažite da je $\dim \mathfrak{o}_F(V) = \dfrac{n(n-1)}{2}$, $n = \dim V$.

$\mathfrak{o}_F(V)$ zove se **ortogonalna Liejeva algebra** na prostoru V **u odnosu na formu** F. Zajednički naziv za specijalne linearne Liejeve algebre, simplektičke Liejeve algebre i ortogonalne Liejeve algebre je **klasične Liejeve algebre**.

Ako je polje K algebarski zatvoreno sljedeći zadaci pokazuju da se gubi razlika među Liejevim algebrama $\mathfrak{o}_F(V)$ za različite nedegenerirane simetrične bilinearne forme F. Stoga se tada obično izostavlja oznaka F i piše samo $\mathfrak{o}(F)$. Razmatrat ćemo odvojeno prostore parne i prostore neparne dimenzije.

Zadatak 1.4.4. *Neka je F nedegenerirana simetrična bilinearna forma na neparnodimenzionalnom vektorskom prostoru V* ($\dim V = 2n+1$) *nad algebarski zatvorenim poljem K karakteristike* 0.

(a) Dokažite da u V postoji baza $\{e_0, e_1, \ldots, e_{2n}\}$ takva da je

$$v = \sum_{i=0}^{2n} \alpha_i e_i, \quad w = \sum_{i=0}^{2n} \beta_i e_i \qquad \Longrightarrow \qquad F(v,w) = \alpha_0\beta_0 + \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i \beta_{n+i} + \alpha_{n+1}\beta_i).$$

(b) Dokažite da je $\mathfrak{o}_F(V)$ izomorfna Liejevoj algebri matrica

$$\mathfrak{o}(2n+1, K) = \{x \in \mathfrak{gl}(2n+1, K);\ sx = -x^t s\}, \quad \textit{gdje je} \quad s = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_n \\ 0 & I_n & 0 \end{bmatrix}.$$

(c) Dokažite da je jedna baza od $\mathfrak{o}(2n+1, K)$ dana sa

$$\{e_{ii} - e_{n+i,n+i};\ 1 \le i \le n\} \cup \{e_{0,n+i} - e_{i,0};\ 1 \le i \le n\} \cup$$
$$\cup \{e_{0,1} - e_{n+i,0};\ 1 \le i \le n\} \cup \{e_{ij} - e_{n+j,n+i};\ 1 \le i,j \le n,\ i \ne j\} \cup$$
$$\cup \{e_{i,n+j} - e_{j,n+i};\ 1 \le i < j \le n\} \cup \{e_{n+j,i} - e_{n+i,j};\ 1 \le i < j \le n\}.$$

Zadatak 1.4.5. *Neka je F nedegenerirana simetrična bilinearna forma na parnodimenzionalnom vektorskom prostoru V* ($\dim V = 2n$) *nad algebarski zatvorenim poljem K karakteristike* 0.

(a) Dokažite da u V postoji baza $\{e_1, \ldots, e_{2n}\}$ takva da je

$$v = \sum_{i=1}^{2n} \alpha_i e_i, \quad w = \sum_{i=1}^{2n} \beta_i e_i \qquad \Longrightarrow \qquad F(v,w) = \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i \beta_{n+i} + \alpha_{n+i}\beta_i).$$

(b) Dokažite da je $\mathfrak{o}_F(V)$ izomorfna Liejevoj algebri matrica

$$\mathfrak{o}(2n, K) = \{x \in \mathfrak{gl}(2n+1, K);\ sx = -x^t s\}, \quad \textit{gdje je} \quad s = \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ I_n & 0 \end{bmatrix}.$$

(c) Dokažite da je jedna baza od $\mathfrak{o}(2n+1, K)$ dana sa

$$\{e_{ii} - e_{n+i,n+i};\ 1 \le i \le n\} \cup \{e_{ij} - e_{n+j,n+i};\ 1 \le i,j \le n,\ i \ne j\} \cup$$
$$\cup \{e_{i,n+j} - e_{j,n+i};\ 1 \le i < j \le n\} \cup \{e_{n+j,i} - e_{n+i,j};\ 1 \le i < j \le n\}.$$

Baze iz zadataka 1.4.4. i 1.4.5. zovu se *standardna baza* od $\mathfrak{o}(2n+1, K)$, odnosno, od $\mathfrak{o}(2n, K)$.

Navedimo još nekoliko Liejevih algebri matrica s kojima ćemo se susretati. Sa $\mathfrak{t}(n, K)$ označavamo Liejevu algebru svih **gornje trokutastih matrica** $n \times n$:

$$\mathfrak{t}(n, K) = \{a = [\alpha_{ij}] \in \mathfrak{gl}(n, K);\ \alpha_{ij} = 0 \quad \text{ako je} \quad i > j\}.$$

Nadalje, $\mathfrak{n}(n, K)$ je Liejeva algebra svih **striktno gornje trokutastih matrica** $n \times n$:

$$\mathfrak{n}(n, K) = \{a = [\alpha_{ij}] \in \mathfrak{gl}(n, K);\ \alpha_{ij} = 0 \quad \text{ako je} \quad i \geq j\}.$$

Napokon, $\mathfrak{d}(n, K)$ označava Liejevu algebru svih **dijagonalnih matrica** $n \times n$:

$$\mathfrak{d}(n, K) = \{a = [\alpha_{ij}] \in \mathfrak{gl}(n, K);\ \alpha_{ij} = 0 \quad \text{ako je} \quad i \neq j\}.$$

Očito je

$$\dim\, \mathfrak{t}(n, K) = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \dim\, \mathfrak{n}(n, K) = \frac{n(n-1)}{2}, \quad \dim\, \mathfrak{d}(n, K) = n.$$

Zadatak 1.4.6. *Dokažite da vrijedi:*

(*a*) $\mathfrak{t}(n, K) = \mathfrak{d}(n, K) \dotplus \mathfrak{n}(n, K)$.

(*b*) $[\mathfrak{d}(n, K), \mathfrak{d}(n, K)] = \{0\}$.

(*c*) $[\mathfrak{d}(n, K), \mathfrak{n}(n, K)] = \mathfrak{n}(n, K)$.

(*d*) $[\mathfrak{t}(n, K), \mathfrak{t}(n, K)] = \mathfrak{n}(n, K)$.

1.5 Reprezentacije i moduli

Neka je S skup. $S-$**modul nad poljem** K je vektorski prostor V nad poljem K sa zadanim preslikavanjem $S \times V \to V$, $(s, v) \mapsto sv$, takvim da je $v \mapsto sv$, $v \in V$, linearan operator na prostoru V $\forall s \in S$:

$$s(\alpha v + \beta w) = \alpha sv + \beta sw, \qquad \forall \alpha, \beta \in K, \quad \forall v, w \in V, \quad \forall s \in S.$$

Reprezentacija skupa S na vektorskom prostoru V je preslikavanje $\pi : S \to L(V)$. Naravno, $S-$moduli i reprezentacije od S su u biti jedno te isto: ako je π reprezentacija od S na prostoru V onda je sa $sv = \pi(s)v$, $s \in S$, $v \in V$, zadano preslikavanje $S \times V \to V$ koje V čini $S-$modulom; s druge strane, ako je V $S-$modul, onda je sa $\pi(s)v = sv$, $s \in S$, $v \in V$, zadana reprezentacija π skupa S na prostoru V.

U daljnjem je V $S-$modul nad poljem K i π pripadna reprezentacija skupa S na prostoru V. $S-$**podmodul** od V je potprostor $W \subseteq V$ takav da je $sw \in W$ $\forall s \in S$ i $\forall w \in W$. Naravno, s restrikcijom domene preslikavanja $(s, v) \to sv$ sa $S \times V$ na $S \times W$ i kodomene tog preslikavanja sa V na W i sam W postaje $S-$modul. Potprostor W od V je $S-$podmodul ako i samo ako je taj potprostor invarijantan s obzirom na sve operatore $\pi(s)$, $s \in S$. Reprezentacija pridružena $S-$podmodulu W označava se π_W i zove **subreprezentacija** reprezentacije π. **Pravi** $S-$**podmodul** od V je $S-$podmodul W koji je različit od V. W je **netrivijalan** $S-$**podmodul** od V ako je $W \neq V$ i $W \neq \{0\}$. **Maksimalan** $S-$**podmodul** od V je pravi $S-$podmodul od V koji nije pravi $S-$podmodul nijednog pravog $S-$podmodula od V. Drugim riječima, maksimalan $S-$podmodul od V je svaki maksimalan element skupa svih pravih podmodula od V parcijalno uređenog inkluzijom. Za pripadnu subreprezentaciju kažemo da je **maksimalna subreprezentacija** od π.

Presjek bilo kojeg skupa $S-$podmodula od V je očito $S-$podmodul od V. Ako je Σ podskup $S-$modula V, postoji najmanji $S-$podmodul od V koji sadrži skup Σ : to je presjek svih $S-$podmodula koji sadrže skup Σ. Za taj $S-$podmodul kažemo da je **generiran skupom** Σ. On je očito jednak

$$span_K(\Sigma \cup \{s_1 \cdots s_n v;\ n \in \mathbb{N},\ s_1, \ldots, s_n \in S,\ v \in \Sigma\}).$$

Ako je W $S-$podmodul $S-$modula V, kvocijentni vektorski prostor V/W možemo snabdjeti strukturom $S-$modula ovako:

$$s(v + W) = sv + W, \qquad s \in S, \quad v \in V.$$

S tom strukturom V/W se zove **kvocijentni** $S-$**modul** ($S-$modula V po $S-$podmodulu W). Pripadna reprezentacija označava se sa $\pi_{V/W}$ i zove **kvocijentna reprezentacija** reprezentacije π. Kvocijentni $S-$modul $S-$podmodula od V ili, ekvivalentno, $S-$podmodul kvocijentnog $S-$modula od V, zove se **subkvocijentni** $S-$**modul**, ili kraće **subkvocijent**, $S-$modula V. Dakle, subkvocijent od V je $S-$modul oblika W/U, gdje su W i U $S-$podmoduli od V i $U \subseteq W$. Pripadna reprezentacija označava se sa $\pi_{W/U}$ i zove **subkvocijentna reprezentacija** ili **subkvocijent** reprezentacije π.

Ako su V i W $S-$moduli nad poljem K, $S-$**homomorfizam** (ili homomorfizam $S-$modula) V u W je linearan operator $A : V \to W$ sa svojstvom

$$Asv = sAv \qquad \forall s \in S \quad \text{i} \quad \forall v \in V.$$

Skup svih $S-$homomorfizama V u W označavamo sa $\mathrm{Hom}_S(V, W)$ i to je potprostor prostora $L(V, W)$ svih linearnih operatora sa V u W. Ako su π i ρ pripadne reprezentacije od S na prostorima V i W, $S-$homomorfizmi se zovu i **preplitanja** reprezentacije π s reprezentacijom ρ. Surjektivni (odn., injektivni, bijektivni) $S-$homomorfizam zove se $S-$epimorfizam (odn.,

$S-$monomorfizam, $S-$izomorfizam). Kažemo da je $S-$modul V izomorfan $S-$modulu W ako postoji $S-$izomorfizam sa V na W, tj. ako u $\mathrm{Hom}_S(V,W)$ postoji bijekcija. Kako je kompozicija $S-$homomorfizama $S-$homomorfizam, očito je relacija izomorfnosti među $S-$modulima tranzitivna. Ona je i simetrična jer invers $S-$izomorfizma je $S-$izomorfizam. Napokon, identiteta I_V na V je izomorfizam $S-$modula V sa samim sobom. Prema tome, izomorfnost $S-$modula je relacija ekvivalencije.

Vrijede sljedeća dva standardna rezultata:

Teorem 1.5.1. *Ako je $A : V \to W$ homomorfizam $S-$modula onda je* $\mathrm{Ker}\, A$ *$S-$podmodul od V,* $\mathrm{Im}\, A$ *je $S-$podmodul od W i sa*

$$v + \mathrm{Ker}\, A \mapsto Av, \qquad v \in V,$$

je zadan izomorfizam $S-$modula sa $V/(\mathrm{Ker}\, A)$ na $\mathrm{Im}\, A$.

Suma bilo kojeg skupa $S-$podmodula od V je $S-$podmodul od V. Posebno, ako su W i U $S-$podmoduli od V onda je i $W + U$ $S-$podmodul od V.

Teorem 1.5.2. *Ako su W i U $S-$podmoduli $S-$modula V, onda je sa*

$$w + (W \cap U) \mapsto w + U, \qquad w \in W,$$

zadan izomorfizam $S-$modula $W/(W \cap U)$ na $S-$modul $(W + U)/U$.

Kažemo da je $S-$**modul** V **prost** ako je $V \neq \{0\}$ i V nema netrivijalnih $S-$podmodula; tj. V i $\{0\}$ su jedini $S-$podmoduli od V. U tom se slučaju pripadna **reprezentacija** zove **ireducibilna**. Kažemo da je π **reducibilna reprezentacija** ako ona nije ireducibilna. V je **poluprost** $S-$**modul**, ako za svaki $S-$podmodul W od V postoji $S-$podmodul U od V takav da je $V = W \dotplus U$. Za pripadnu reprezentaciju u tom slučaju kažemo da je **potpuno reducibilna**.

Propozicija 1.5.3. *Ako je W $S-$podmodul poluprostog $S-$modula V, onda su $S-$moduli W i V/W poluprosti.*

Dokaz: Neka je X $S-$podmodul od W. Tada je X ujedno $S-$podmodul od V, pa po pretpostavci postoji $S-$podmodul Y od V takav da je $V = X \dotplus Y$. Sada je $Z = Y \cap W$ $S-$podmodul od W i očito vrijedi $W = X \dotplus Z$. Time smo dokazali da je $S-$modul W poluprost.

Neka je sada X $S-$podmodul kvocijentnog modula V/W. Stavimo

$$Y = \{y \in V;\ y + W \in X\}.$$

Tada je Y potprostor prostora V koji je $S-$podmodul od V. Doista, ako su $s \in S$ i $y \in Y$, onda je $y + W \in X$, pa iz činjenice da je X $S-$podmodul od V/W slijedi $s(y + W) \in X$. Međutim, po definiciji strukture $S-$modula na kvocijentnom prostoru V/W vrijedi $s(y + W) = sy + W$. To pokazuje da je $sy \in Y$. Kako su $s \in S$ i $y \in Y$ bili proizvoljni, dokazali smo da je Y $S-$podmodul od V. Budući da je $S-$modul V poluprost, postoji $S-$podmodul Z od V takav da je $V = Y \dotplus Z$. Stavimo sada

$$U = \{z + W;\ z \in Z\}.$$

Tada je U potprostor kvocijentnog prostora V/W i to je $S-$podmodul od V/W : za $s \in S$ i $u \in U$ i za $z \in Z$ takav da je $u = z + W$ vrijedi $sz \in Z$, jer je Z $S-$podmodul od V, pa vrijedi $su = s(z+W) = sz+W \in U$. Dokažimo sada da je $V/W = X \dotplus U$. Prije svega, proizvoljan vektor $v \in V$ može se napisati u obliku $v = y + z$, $y \in Y$, $z \in Z$. Tada je $v + W = (y + W) + (z + W)$ i vrijedi $y+W \in X$ i $z+W \in U$. To pokazuje da je $V/W = X+U$. Neka je sada $u \in X \cap U$. Budući da je $u \in U$, postoji $z \in Z$ takav da je $u = z + W$. No tada je $z + W \in X$, pa slijedi $z \in Y$. Dakle, $z \in Z \cap Y = \{0\}$, tj. $z = 0$, a to znači da je $u = z + W$ nulvektor u kvocijentnom prostoru V/W. Prema tome, suma je direktna: $V/W = X \dotplus U$. Time je dokazano da je i kvocijentni $S-$modul V/W poluprost.

Propozicija 1.5.4. *Svaki poluprost $S-$modul $V \neq \{0\}$ ima prost $S-$podmodul.*

Dokaz: Neka je $v \in V$, $v \neq 0$. Neka je $\mathcal{S}$ skup svih $S-$podmodula od V koji ne sadrže vektor v. Uz relaciju inkluzije $\mathcal{S}$ postaje parcijalno uređen skup. On je neprazan jer je $\{0\} \in \mathcal{S}$. Primjenom Zornove leme lako se vidi da skup $\mathcal{S}$ ima bar jedan maksimalni element W. Kako je $S-$modul V poluprost, postoji $S-$podmodul U takav da je $V = W \dotplus U$. Tada je $U \neq \{0\}$, jer $v \notin W$. Pretpostavimo da je U' netrivijalan podmodul od U. Prema propoziciji 1.5.3. $S-$modul U je poluprost pa on ima $S-$podmodul U'' takav da je $U = U' \dotplus U''$. Kako je W maksimalan $S-$podmodul od V sa svojstvom $v \notin W$, vrijedi $v \in W \dotplus U'$ i $v \in W \dotplus U''$. No tada slijedi da je $v \in (W \dotplus U') \cap (W \dotplus U'') = W$ suprotno svojstvu od W. Ova kontradikcija pokazuje da U nema netrivijalnih $S-$podmodula, odnosno, $S-$modul U je prost.

Teorem 1.5.5. *Sljedeća su tri svojstva $S-$modula V međusobno ekvivalentna:*

(a) *Modul V je poluprost.*

(b) *Modul V je suma svojih prostih podmodula.*

(c) *Modul V je direktna suma nekog skupa svojih prostih podmodula.*

Dokaz: (a) $\Rightarrow$ (b). Neka je V poluprost i neka je W suma svih njegovih prostih podmodula. Tada je $V = W \dotplus U$ za neki podmodul U. Prema propoziciji 1.5.4. ako je $U \neq \{0\}$ onda U sadrži neki prost podmodul Z. No po definiciji W tada je $Z \subseteq W$, a to je nemoguće. Ova kontradikcija pokazuje da je $U = \{0\}$, tj. $W = V$.

(b) $\Rightarrow$ (c). Pretpostavimo da je V suma svojih prostih podmodula. Primjenom Zornove leme nalazimo da postoji maksimalan skup $\mathcal{S}$ prostih podmodula čija je suma direktna. Neka je $W = \sum \mathcal{S}$. Pretpostavimo da je $W \neq V$. Tada postoji prost podmodul U od V takav da $U \nsubseteq W$. Tada je $U \cap W \neq U$, dakle, $U \cap W = \{0\}$. Odatle slijedi da je suma $\sum(\mathcal{S} \cup \{U\})$ direktna i vrijedi $\mathcal{S} \subsetneq \mathcal{S} \cup \{U\}$, a to je nemoguće zbog izbora $\mathcal{S}$. Ova kontradikcija pokazuje da je $W = V$.

(c) $\Rightarrow$ (a). Pretpostavimo da je V direktna suma skupa $\mathcal{S}$ prostih podmodula od V i neka je W podmodul od V. Primjenom Zornove leme nalazimo da u skupu svih podmodula U od V takvih da je $U \cap W = \{0\}$ postoji bar jedan maksimalan element U. Neka je $Z \in \mathcal{S}$. Tvrdimo da je tada $Z \cap (W \dotplus U) \neq \{0\}$. Doista, u protivnom bi $U \dotplus Z$ bio podmodul od V sa svojstvom $(U \dotplus Z) \cap W = \{0\}$ i imali bismo da je $U \subsetneq U \dotplus Z$, a to je suprotno izboru podmodula U. Kako je Z prost i $Z \cap (W \dotplus U) \neq \{0\}$, vrijedi $Z \cap (W \dotplus U) = Z$, tj. $Z \subseteq W \dotplus U$. Kako to vrijedi za svaki $Z \in \mathcal{S}$, slijedi $V = \sum \mathcal{S} \subseteq W \dotplus U$, odnosno, $V = W \dotplus U$.

Za $S-$modul V pisat ćemo $\mathrm{End}_S(V)$ umjesto $\mathrm{Hom}_S(V, V)$. $\mathrm{End}_S(V)$ je unitalna podalgebra unitalne algebre $L(V) = L(V, V)$ svih linearnih operatora na prostoru V.

Teorem 1.5.6. (**Schurova lema**) *Neka su V i W prosti $S-$moduli nad poljem K.*

(a) *Svaki element $A \in \mathrm{Hom}_S(V, W) \setminus \{0\}$ je izomorfizam. Posebno, ako je $\mathrm{Hom}_S(V, W) \neq \{0\}$, onda su $S-$moduli V i W izomorfni.*

(b) *Unitalna algebra $\mathrm{End}_S(V)$ je tijelo, tj. svaki $A \in \mathrm{End}_S(V) \setminus \{0\}$ je invertibilan.*

(c) *Ako je polje K algebarski zatvoreno i prostor V je konačnodimenzionalan, onda je $\mathrm{End}_S(V) =$ $= \{\lambda I_V;\ \lambda \in K\}$.*

Dokaz: (a) Pretpostavimo da je $A \in \mathrm{Hom}_S(V, W) \setminus \{0\}$. Tada je $\mathrm{Ker}\, A$ $S-$podmodul od V :

$$v \in \mathrm{Ker}\, A,\ s \in S \qquad \Longrightarrow \qquad Asv = sAv = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad sv \in \mathrm{Ker}\, A.$$

Kako je $A \neq 0$, vrijedi $\operatorname{Ker} A \neq V$, a kako je V prost $S-$modul, zaključujemo da je $\operatorname{Ker} A = \{0\}$, odnosno, A je injekcija. Nadalje, $\operatorname{Im} A$ je $S-$podmodul od W :

$$s \in S, \quad w \in \operatorname{Im} A, \quad v \in V \quad \text{takav da je} \quad w = Av \qquad \Longrightarrow \qquad sw = sAv = Asv \in \operatorname{Im} A.$$

Kako je $A \neq 0$ to je $\operatorname{Im} A \neq \{0\}$. Budući da je W prost $S-$modul, slijedi $\operatorname{Im} A = W$. Prema tome, A je i surjekcija, dakle, izomorfizam.

(b) Iz tvrdnje (a) slijedi da je svaki $A \in \operatorname{End}_S(V) \setminus \{0\}$ invertibilan.

(c) Neka je $A \in \operatorname{End}_S(V)$. Kako je prostor V konačnodimenzionalan, a polje K je algebarski zatvoreno, operator A ima neku svojstvenu vrijednost $\lambda \in K$. Tada operator $A - \lambda I_V \in \operatorname{End}_S(V)$ nije invertibilan, pa je prema tvrdnji (b) jednak nuli. To znači da je $A = \lambda I_V$ i time je dokazana tvrdnja (c).

Uočimo da je dokaz tvrdnje (c) baziran na tvrdnji (b) i na činjenici da svaki linearan operator na konačnodimenzionalnom vektorskom prostoru nad algebarski zatvorenim poljem ima neprazan spektar. Ova posljednja činjenica vrijedi i u općenitijoj situaciji:

Teorem 1.5.7. (**J. Dixmier**) *Neka je V vektorski prostor nad algebarski zatvorenim poljem K i pretpostavimo da je* $\dim V$ *manja od* $\operatorname{Card} K$. *Tada za svaki $A \in L(V)$ vrijedi*

$$Sp(A) = \{\lambda \in K;\ A - \lambda I_V \notin \mathrm{GL}(V)\} \neq \emptyset.$$

Dokaz: Neka je $A \in L(V)$ i pretpostavimo suprotno da je spektar $Sp(A)$ prazan, tj. da je operator $A - \lambda I_V$ invertibilan za svaki $\lambda \in K$. Tada je operator $P(A)$ invertibilan za svaki polinom $P \in K[T] \setminus \{0\}$. Dakle, ako je $R = P/Q$ racionalna funkcija, možemo definirati $R(A) = P(A)Q(A)^{-1}$. Tako dolazimo do linearnog preslikavanja $R \mapsto R(A)$ prostora $K(T)$ racionalnih funkcija jedne varijable nad poljem K u prostor $L(V)$. Neka je $v \in V$, $v \neq 0$. Tada je $R \mapsto R(A)v$ injektivan linearan operator sa $K(T)$ u V. Odatle slijedi da je $\dim K(T) \leq \dim V$.

Uočimo sada da je skup

$$\left\{ \frac{1}{T - \lambda};\ \lambda \in K \right\} \tag{1.4}$$

linearno nezavisan. Doista, u suprotnom bi postojali međusobno različiti skalari $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$ i skalari $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K \setminus \{0\}$ takvi da je

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\alpha_j}{T - \lambda_j} = 0.$$

Množenjem te jednakosti s umnoškom $(T - \lambda_1) \cdots (T - \lambda_n)$ dobivamo

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j Q_j(T) = 0, \qquad \text{gdje je} \quad Q_j(T) = (T - \lambda_1) \cdots (T - \lambda_{j-1})(T - \lambda_{j+1}) \cdots (T - \lambda_n).$$

Sada je $Q_i(\lambda_j) = 0$ za $i \neq j$ i $Q_i(\lambda_i) = (\lambda_i - \lambda_1) \cdots (\lambda_i - \lambda_{i-1})(\lambda_i - \lambda_{i+1}) \cdots (\lambda_i - \lambda_n) \neq 0$. Stoga za proizvoljan indeks $i \in \{1, \ldots, n\}$ vrijedi

$$0 = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j Q_j(\lambda_i) = \alpha_i Q_i(\lambda_i),$$

a to je nemoguće jer je $\alpha_i \neq 0$ i $Q_i(\lambda_i) \neq 0$. Time je dokazana linearna nezavisnost skupa (3.2). Odatle slijedi da je $\operatorname{Card} K \leq \dim K(T)$, pa iz prije utvrđene nejednakosti $\dim K(T) \leq \dim V$ zaključujemo da je $\operatorname{Card} K \leq \dim V$, a to je suprotno pretpostavci. Ova kontradikcija pokazuje da je $Sp(A) \neq \emptyset$ za svaki $A \in L(V)$, odnosno, teorem je dokazan.

Odatle neposredno slijedi sljedeća generalizacija tvrdnje (c) Schurove leme:

Korolar 1.5.8. (**J. Dixmier**) *Neka je V prost $S-$modul nad algebarski zatvorenim poljem K i pretpostavimo da je* $\dim V < \operatorname{Card} K$. *Tada je* $End_S(V) = \{\lambda I_V;\ \lambda \in K\}$.

Neka je sada zadana familija $S-$modula $(V_i)_{i\in I}$ i neka je za $i \in I$ sa π_i označena pripadna reprezentacija od S na prostoru V_i. Tada na direktnoj sumi

$$\coprod_{i\in I} V_i = \left\{ f : I \to \bigcup_{i\in I} V_i;\ f(i) \in V_i\ \ \forall i \in I,\ \text{skup}\ \{i \in I;\ f(i) \neq 0\}\ \text{je konačan} \right\}$$

definiramo reprezentaciju π od S na sljedeći način:

$$(\pi(s)f)(i) = \pi_i(s)f(i), \qquad s \in S, \quad i \in I.$$

π se zove **direktna suma reprezentacija** π_i. Uz pripadnu strukturu $S-$modula V se zove **direktna suma $S-$modula** V_i.

Naravno, ako je W $S-$modul i ako su V_i, $i \in I$, $S-$podmoduli od W takvi da je prostor W direktna suma potprostora V_i, $i \in I$, onda je $S-$modul W izomorfan direktnoj sumi V familije $S-$modula $(V_i)_{i\in I}$, a izomorfizam sa V na W dan je sa

$$f \mapsto \sum_{i\in I} f(i), \qquad f \in V = \coprod_{i\in I} V_i.$$

Drugim riječima, reprezentacija od S na prostoru W ekvivalentna je direktnoj sumi familije reprezentacija $(\pi_{V_i})_{i\in I}$.

Propozicija 1.5.9. *Neka je S skup i neka je V $S-$modul.*

(a) *Neka su W i U $S-$podmoduli od V takvi da je $V = W \dotplus U$. Tada je $V/W \simeq U$.*

(b) *Neka su A, B i C $S-$podmoduli od V takvi da je $V = A \dotplus B = A \dotplus C$. Tada $B \simeq C$.*

Dokaz: (a) Izomorfizam sa U na V/W dan je sa $u \mapsto u + W$.
Tvrdnja (b) slijedi primjenom tvrdnje (a) :

$$B \simeq V/A \simeq C.$$

U slučaju konačnodimenzionalnog $S-$modula teorem 1.5.5. se može ovako iskazati:

Teorem 1.5.10. *Neka je V konačnodimenzionalan $S-$modul. Sljedeća su tri svojstva međusobno ekvivalentna:*

(a) *Modul V je poluprost.*

(b) *Postoji familija $(V_i)_{i\in I}$ prostih $S-$podmodula od V takva da je*

$$V = \sum_{i\in I} V_i.$$

(c) *Postoje prosti podmoduli $V_1, V_2, \ldots, V_n$ od V takvi da je*

$$V = V_1 \dotplus V_2 \dotplus \cdots \dotplus V_n.$$

U situaciji iz tvrdnje (c) prethodnog teorema neka je π oznaka za reprezentaciju od S na prostoru V i neka je za svaki $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ izabrana neka baza $e^{(j)} = \left\{e_1^{(j)}, e_2^{(j)}, \ldots, e_{m_j}^{(j)}\right\}$ potprostora V_j. Nadalje, neka je e oznaka za bazu prostora V koja je dobivena iz tih baza:

$$e = \left\{e_1^{(1)}, e_2^{(1)}, \ldots, e_{m_1}^{(1)}, e_1^{(2)}, e_2^{(2)}, \ldots, e_{m_2}^{(2)}, \ldots\ldots, e_1^{(n)}, e_2^{(n)}, \ldots, e_{m_n}^{(n)}\right\}.$$

Za $s \in S$ označimo sa $\pi(s)[e]$ matricu operatora $\pi(s)$ u bazi e, a za $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ neka je $\pi_{V_j}(s)[e^{(j)}]$ oznaka za matricu operatora $\pi_{V_j}(s) = \pi(s)|V_j$ u bazi $e^{(j)}$. Tada se lako vidi da je $\pi(s)[e]$ blok$-$dijagonalna matrica:

$$\pi(s)[e] = \begin{bmatrix} \pi_{V_1}(s)[e^{(1)}] & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \pi_{V_2}(s)[e^{(2)}] & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \pi_{V_n}(s)[e^{(n)}] \end{bmatrix}, \qquad s \in S.$$

Sljedeće dvije propozicije navodimo bez dokaza:

Propozicija 1.5.11. *Neka su V i W $S-$moduli nad istim poljem K. Ako je X $S-$podmodul od W tada prostor* $\mathrm{Hom}_S(V, X)$ *možemo na prirodan način identificirati s potprostorom*

$$\{A \in \mathrm{Hom}_S(V, W);\ \mathrm{Im}\, A \subseteq X\}$$

prostora $\mathrm{Hom}_S(V, W)$. *Ukoliko je $W = X_1 \dotplus X_2 \dotplus \cdots \dotplus X_n$, pri čemu su X_i $S-$podmoduli od W uz spomenutu identifikaciju prostora* $\mathrm{Hom}_S(V, X_i)$ *s potprostorima od* $\mathrm{Hom}_S(V, W)$ *vrijedi*

$$\mathrm{Hom}_S(V, W) = \mathrm{Hom}_S(V, X_1) \dotplus \mathrm{Hom}_S(V, X_2) \dotplus \cdots \dotplus \mathrm{Hom}_S(V, X_n).$$

Propozicija 1.5.12. *Neka su V i W $S-$moduli nad istim poljem K.*

(a) *Ako je X $S-$podmodul od V, postoji izomorfizam prostora* $\mathrm{Hom}_S(V/X, W)$ *s potprostorom*

$$\{A \in \mathrm{Hom}_S(V, W);\ A|X = 0\}$$

prostora $\mathrm{Hom}_S(V, W)$.

(b) *Ako je $V = X_1 \dotplus X_2 \dotplus \cdots \dotplus X_n$, gdje su X_i, $1 \le i \le n$, $S-$podmoduli od V, definirajmo potprostore $\mathcal{X}_i$ prostora $L(V, W)$ ovako:*

$$\mathcal{X}_i = \{A \in L(V, W);\ A|X_j = 0 \text{ za } j \neq i,\ A|X_i \in \mathrm{Hom}_S(X_i, W)\}.$$

Tada je svaki $\mathcal{X}_i$ potprostor prostora $\mathrm{Hom}_S(V, W)$ *i vrijedi*

$$\mathrm{Hom}_S(V, W) = \mathcal{X}_1 \dotplus \mathcal{X}_2 \dotplus \cdots \dotplus \mathcal{X}_n.$$

Teorem 1.5.13. *Neka su V i W konačnodimenzionalni $S-$moduli nad algebarski zatvorenim poljem K pri čemu je $S-$modul V poluprost, a $S-$modul W prost. Neka je $V = V_1 \dotplus V_2 \dotplus \cdots \dotplus V_n$, pri čemu je svaki od potprostora V_i prost $S-$podmodul od V. Tada je*

$$|\{i \in \{1, 2, \ldots, n\};\ V_i \simeq W\}| = \dim \mathrm{Hom}_S(W, V) = \dim \mathrm{Hom}_S(V, W).$$

(*Pri tome $|S|$ označava broj elemenata konačnog skupa S*).

Dokaz: Prema propoziciji 1.5.11. vrijedi

$$\mathrm{Hom}_S(W,V) = \mathrm{Hom}_S(W,V_1) \dotplus \mathrm{Hom}_S(W,V_2) \dotplus \cdots \dotplus \mathrm{Hom}_S(W,V_n). \tag{1.5}$$

Nadalje, prema Schurovoj lemi (teorem 1.5.6.) vrijedi

$$\dim \mathrm{Hom}_S(W,V_i) = \begin{cases} 1 & \text{ako je } V_i \simeq W \\ \\ 0 & \text{ako je } V_i \not\simeq W. \end{cases}$$

Odatle i iz (1.5) slijedi jednakost $\dim \mathrm{Hom}_S(W,V) = |\{i \in \{1,2,\ldots,n\};\ V_i \simeq W\}|$. Sasvim analogno, pomoću propozicije 1.5.12. dobivamo $\dim \mathrm{Hom}_S(V,W) = |\{i \in \{1,2,\ldots,n\};\ V_i \simeq W\}|$.

U slučaju da se radi o reprezentaciji na kompleksnom ili realnom konačnodimenzionalnom vektorskom prostoru, uz određeni uvjet imamo potpunu reducibilnost reprezentacije, odnosno poluprostotu pripadnog modula.

Teorem 1.5.14. *Neka je π konačnodimenzionalna reprezentacija skupa S na realnom ili kompleksnom unitarnom prostoru V. Pretpostavimo da vrijedi $\pi(S)^* = \pi(S)$, tj. da je adjungiranje operatora $A \mapsto A^*$ permutacija skupa operatora reprezentacije $\pi(S) = \{\pi(s);\ s \in S\}$. Tada je reprezentacija π potpuno reducibilna.*

Dokaz: Neka je X $\pi-$invarijantan potprostor od V. Prema teoremu o ortogonalnoj projekciji tada je

$$V = X \dotplus X^\perp \qquad \text{gdje je} \quad X^\perp = \{v \in V;\ (v|x) = 0\ \forall x \in X\}.$$

Neka je $v \in X^\perp$ i neka je $s \in S$. Po pretpostavci postoji $t \in S$ takav da je $\pi(s)^* = \pi(t)$. Sada za proizvoljan $x \in X$ imamo $\pi(t)x \in X$, dakle, $(\pi(s)v|x) = (v|\pi(t)x) = 0$. Dakle,

$$v \in X^\perp \qquad \Longrightarrow \qquad \pi(s)v \in X^\perp \quad \forall s \in S,$$

i time je dokazano da je reprezentacija π potpuno reducibilna.

Ako skup S ima strukturu grupe, asocijativne algebre, unitalne algebre ili Liejeve algebre, i s tom strukturom ga označimo sa $\mathcal{S}$, među svim $S-$modulima uočit ćemo one koji nose odgovarajuću dodatnu strukturu i takve ćemo zvati $\mathcal{S}-$modulima:

- Ako je G grupa, $G-$modul nad poljem K je vektorski prostor V nad poljem K koji je modul nad skupom G i vrijedi

  $$(ab)v = a(bv) \quad \forall a,b \in G \quad \text{i} \quad \forall v \in V \qquad \text{i} \qquad e_G v = v \quad \forall v \in V.$$

  Tada je svaki operator $v \mapsto av$, $a \in G$, invertibilan i njegov je invers $v \mapsto a^{-1}v$.

- Ako je $\mathcal{A}$ asocijativna algebra nad poljem k i K je proširenje polja k, $\mathcal{A}-$modul nad poljem K je vektorski prostor nad K koji je modul nad skupom $\mathcal{A}$ i vrijedi

  $$(a+b)v = av + bv, \quad (\lambda a)v = \lambda av \quad \text{i} \quad (ab)v = a(bv) \qquad \forall a,b \in \mathcal{A}, \quad \forall \lambda \in k \quad \text{i} \quad \forall v \in V.$$

- Ako je $\mathcal{A}$ unitalna algebra, pored prethodnog zahtijevamo još da je

  $$e_{\mathcal{A}} v = v \qquad \forall v \in V.$$

- Ako je $\mathfrak{g}$ Liejeva algebra nad poljem k i K proširenje polja k, $\mathfrak{g}-$modul nad poljem K je vektorski prostor V nad poljem K koji je modul nad skupom $\mathfrak{g}$ i vrijedi

$$(a+b)v = av+bv, \quad (\lambda a)v = \lambda av \quad \text{i} \quad [a,b]v = a(bv)-b(av) \qquad \forall a,b \in \mathfrak{g}, \quad \forall \lambda \in k \quad \text{i} \quad \forall v \in V.$$

Pripadne reprezentacije zovu se reprezentacije te strukture:

- **Reprezentacija grupe** G na vektorskom prostoru V nad poljem K je homomorfizam grupa $\pi : G \to \mathrm{GL}(V)$. Drugim riječima, reprezentacija G na V je preslikavanje $\pi \colon G \to L(V)$ takvo da vrijedi
$$\pi(ab) = \pi(a)\pi(b) \quad \forall a,b \in G, \qquad \pi(e) = I.$$

- **Reprezentacija asocijativne algebre** $\mathcal{A}$ nad poljem k na vektorskom prostoru V nad poljem $K \supseteq k$ je homomorfizam asocijativnih $k-$algebri $\pi : \mathcal{A} \to L(V)$. Dakle, reprezentacija $\mathcal{A}$ na V je preslikavanje $\pi \colon \mathcal{A} \to L(V)$ takvo da vrijedi
$$\pi(\alpha x + \beta y) = \alpha\pi(x) + \beta\pi(y), \qquad \pi(xy) = \pi(x)\pi(y), \qquad \forall x,y \in \mathcal{A}, \ \forall \alpha,\beta \in k.$$

- **Reprezentacija unitalne algebre** $\mathcal{A}$ nad k na vektorskom prostoru V nad $K \supseteq k$ je homomorfizam unitalnih $k-$algebri $\pi : \mathcal{A} \to L(V)$. Drugim riječima, reprezentacija unitalne algebre $\mathcal{A}$ na prostoru V je reprezentacija asocijativne algebre $\mathcal{A}$ takva da vrijedi
$$\pi\left(e_{\mathcal{A}}\right) = I.$$

- **Reprezentacija Liejeve algebre** $\mathfrak{g}$ nad poljem k na vektorskom prostoru V nad poljem $K \supseteq k$ je homomorfizam Liejevih $k-$algebri $\pi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$. Dakle, reprezentacija $\mathfrak{g}$ na V je preslikavanje $\pi \colon \mathfrak{g} \to L(V)$ takvo da vrijedi
$$\pi(\alpha x+\beta y) = \alpha\pi(x)+\beta\pi(y), \qquad \pi([x,y]) = \pi(x)\pi(y)-\pi(y)\pi(x), \qquad \forall x,y \in \mathfrak{g}, \ \forall \alpha,\beta \in k.$$

U svakom od ta četiri slučaja vektorski prostor V zovemo **prostorom reprezentacije** π. Ako je prostor V konačnodimenzionalan, **reprezentacija** π zove se **konačnodimenzionalna** i tada se prirodan broj (ili nula) $d(\pi) = \dim V$ zove **dimenzija reprezentacije** π.

Ako je reprezentacija π injektivni homomorfizam, kažemo da je π **vjerna reprezentacija**. Ako se radi o reprezentaciji asocijativne, unitalne ili Liejeve algebre $\mathcal{A}$, onda je jezgra

$$\mathcal{I} = \mathrm{Ker}\,\pi = \{a \in \mathcal{A};\ \pi(a) = 0\}$$

reprezentacije π ideal u toj algebri $\mathcal{A}$ i prijelazom na kvocijent dobivamo vjernu reprezentaciju asocijativne, unitalne ili Liejeve kvocijentne algebre $\mathcal{A}/\mathcal{I}$:

$$\tilde{\pi}(a+\mathcal{I}) = \pi(x), \qquad x+\mathcal{I} \in \mathcal{A}/\mathcal{I}.$$

Važna je primjena teorema 1.5.14. na tzv. **antihermitsku reprezentaciju** π **realne Liejeve algebre** $\mathfrak{g}$ na realnom ili kompleksnom unitarnom prostoru V, tj. takvu da je svaki operator reprezentacije $\pi(x)$, $x \in \mathfrak{g}$, antihermitski:

$$\pi(x)^* = -\pi(x) \qquad \forall x \in \mathfrak{g}.$$

U tim slučajevima iz teorema 1.5.14. neposredno slijedi:

Teorem 1.5.15. *Neka je V konačnodimenzionalan realan ili kompleksan unitaran prostor i neka je π antihermitska reprezentacija realne Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ na prostoru V. Tada je reprezentacija π potpuno reducibilna.*

Neka je π reprezentacija Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ na vektorskom prostoru V. Tada se $\mathfrak{g}-$**invarijantama** zovu vektori $\pi-$invarijantnog potprostora

$$V^{\mathfrak{g}} = \{v \in V;\ \pi(x)v = 0\ \ \forall x \in \mathfrak{g}\}$$

Ako su π i ρ reprezentacije Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ na vektorskim prostorima V i W na prostoru $L(V, W)$ možemo definirati reprezentaciju τ od $\mathfrak{g}$ na sljedeći način:

$$\tau(x)(A) = \rho(x)A - A\pi(x), \qquad A \in L(V, W), \quad x \in \mathfrak{g}.$$

Tada je $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(V, W)$ upravo $\tau-$invarijantan potprostor $L(V, W)^{\mathfrak{g}}$ svih $\mathfrak{g}-$invarijanata reprezentacije τ.

Neka je π reprezentacija Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ na vektorskom prostoru V tada se na dualnom prostoru V' kontragredijentna reprezentacija π^t reprezentacije π definira ovako:

$$\pi^t(x)f = -f \circ \pi(x), \qquad \text{tj.} \qquad (\pi^t(x)f)(v) = -f(\pi(x)v), \qquad x \in \mathfrak{g}, \quad v \in V, \quad f \in V'.$$

Ovdje se u stvari radi o prethodnoj konstrukciji za trivijalnu reprezentaciju ρ Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ na jednodimenzionalnom prostoru $W = K$ ($\rho(x) = 0\ \forall x \in \mathfrak{g}$).

Teorem 1.5.16. *Neka je π ireducibilna konačnodimenzionalna reprezentacija Liejeve algebre $\mathfrak{g}$. Tada je njoj kontragredijentna reprezentacija π^t također ireducibilna.*

Dokaz: Neka je $U \subseteq V'$ π^t-invarijantan potprostor. Tada je njegov anihilator

$$U^\circ = \{v \in V;\ f(v) = 0 \quad \forall f \in U\}$$

potprostor od V koji je $\pi-$invarijantan:

$$v \in U^\circ,\ x \in \mathfrak{g}\ f \in U \qquad \Longrightarrow \qquad f(\pi(x)v) = -(\pi^t(x)f)(v) = 0,$$

jer je $\pi^t(x)f \in U$. Dakle,

$$v \in U^\circ,\ x \in \mathfrak{g} \qquad \Longrightarrow \qquad \pi(x)v \in U^\circ.$$

Kako je reprezentacija π ireducibilna, slijedi da je ili $U^\circ = \{0\}$ ili $U^\circ = V$. Znamo da je

$$\dim V' = \dim V \qquad \text{i} \qquad \dim U^\circ = \dim V - \dim U.$$

Dakle, ili je $\dim U = \dim V'$, tj. $U = V'$, ili je $\dim U = 0$, tj. $U = \{0\}$. Time je dokazano da je reprezentacija π^t ireducibilna.

Poglavlje 2

LIEJEVE GRUPE

U ovom ćemo poglavlju prikazati osnove teorije Liejevih grupa i njihovu povezanost s Liejevim algebrama. Sve će definicije u ovom poglavlju biti jasno iskazane, a također i tvrdnje, međutim, za nasloženije tvrdnje dokaze ćemo ili poptpuno izostaviti ili samo dati samo njihove naznake.

2.1 Diferencijabilne i analitičke mnogostrukosti

Neka je M Hausdorffov topološki prostor i neka je $n \in \mathbb{N}$. $n-$**dimenzionalna karta** na M je uređen par (U, ψ) gdje je $U \subseteq M$ otvoren skup i ψ je homeomorfizam sa U na otvoren podskup od $\mathbb{R}^n$. Skup U zovemo **domena karte** (U, ψ). $n-$**dimenzionalni diferencijabilni atlas** na M je skup $\mathcal{A}$ $n-$dimenzionalnih karata na M sa sljedećim svojstvima:

(a) Domene karata u skupu $\mathcal{A}$ pokrivaju M :

$$\bigcup_{(U,\psi)\in\mathcal{A}} U = M.$$

(b) Ako su $(U, \psi), (V, \varphi) \in \mathcal{A}$ takve karte da je $U \cap V \neq \emptyset$, onda je

$$\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \longrightarrow \psi(U \cap V)$$

preslikavanje klase C^∞, odnosno, diferencijabilno preslikavanje.

Za dva $n-$dimenzionalna diferencijabilna atlasa $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ kažemo da su ekvivalentni ako je $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ također diferencijabilni atlas. To znači da su za bilo koje dvije karte $(U, \psi) \in \mathcal{A}$ i $(V, \varphi) \in \mathcal{B}$, takve da je $U \cap V \neq \emptyset$, preslikavanja

$$\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \longrightarrow \psi(U \cap V) \qquad \text{i} \qquad \varphi \circ \psi^{-1} : \psi(U \cap V) \longrightarrow \varphi(U \cap V)$$

klase C^∞. Na taj je način definirana relacija ekvivalencije na skupu svih $n-$dimenzionalnih diferencijabilnih atlasa na topološkom prostoru M. Unija svih atlasa u nekoj klasi ekvivalencije je također atlas. Taj se atlas zove $n-$**dimenzionalna diferencijabilna struktura** na M. Očito je atlas $\mathcal{A}$ diferencijabilna struktura ako i samo ako on pored (a) i (b) zadovoljava i svojstvo maksimalnosti:

(c) Ako je (W, χ) $n-$dimenzionalna karta na M i ako su za svaku kartu $(U, \psi) \in \mathcal{A}$ takvu da je $U \cap W \neq \emptyset$

$$\psi \circ \chi^{-1} : \chi(U \cap W) \longrightarrow \psi(U \cap W) \qquad \text{i} \qquad \chi \circ \psi^{-1} : \psi(U \cap W) \longrightarrow \chi(U \cap W)$$

$C^\infty-$preslikavanja, onda je $(W, \chi) \in \mathcal{A}$.

Diferencijabilna mnogostrukost je uređen par $(M, \mathcal{A})$, gdje je M Hausdorffov topološki prostor s prebrojivom bazom topologije, a $\mathcal{A}$ je $n-$dimenzionalna diferencijabilna struktura na M za neki $n \in \mathbb{N}$. Pišemo tada $n = \dim M$.

Neka je $U \subseteq \mathbb{R}^n$ otvoren skup i $f : U \to \mathbb{R}$. Kažemo da je f $\mathbb{R}-$**analitička funkcija** ako svaka točka $x = (x_1, \ldots, x_n) \in U$ ima otvorenu okolinu $V \subseteq U$ takvu da za neke $\alpha_m \in \mathbb{R}$, $m = (m_1, \ldots, m_n) \in \mathbb{Z}_+^n$, vrijedi

$$f(y) = \sum_{m \in \mathbb{Z}_+^n} \alpha_m (y_1 - x_1)^{m_1} \cdots (y_n - x_n)^{m_n} \qquad \forall y = (y_1, \ldots, y_n) \in V.$$

Pokazuje se da tada gornji red konvergira apsolutno i uniformno na svakom kompaktnom podskupu od V. Nadalje, svaka je $\mathbb{R}-$analitička funkcija klase C^∞ i deriviranje gornjeg reda potencija može se provoditi član po član. Preslikavanje $F : U \to \mathbb{R}^m$ je $\mathbb{R}-$**analitičko preslikavanje** ako je svaka od njegovih m koordinatnih funkcija $\mathbb{R}-$analitička. Zamijenimo li svuda u prethodnim definicijama izraz *diferencijabilno preslikavanje* s izrazom $\mathbb{R}-$*analitičko preslikavanje*, dobivamo definicije pojmova $n-$dimenzionalni **analitički atlas**, $n-$dimenzionalna **analitička struktura** i **analitička mnogostrukost**. Svaka analitička mnogostrukost je, naravno, ujedno diferencijabilna mnogostrukost, jer svaki je analitički atlas ujedno i diferencijabilni atlas i svaka je analitička struktura sadržana u jedinstvenoj diferencijabilnoj strukturi. Međutim, moguće je da jedna diferencijabilna struktura sadrži više analitičkih struktura.

Primjeri:

(1) $M = \mathbb{R}^n$; tada je $\{(R^n, id_{\mathbb{R}^n})\}$ $n-$dimenzionalni analitički atlas. Jedinstvena analitička struktura koja sadrži taj atlas zove se **standardna analitička struktura** na $\mathbb{R}^n$, a jedinstvena diferencijabilna struktura koja sadrži taj atlas je **standardna diferencijabilna struktura** na $\mathbb{R}^n$.

(2) Ako je V $n-$dimenzionalan realan vektorski prostor, izborom baze $\{e_1, \ldots, e_n\}$ taj se prostor identificira s $\mathbb{R}^n$, a na taj način i V postaje $n-$dimenzionalna analitička mnogostrukost. Jasno je da pripadna analitička struktura ovisi o izboru baze.

(3) Neka je $(M, \mathcal{A})$ diferencijabilna (odn. analitička) mnogostrukost i neka je $V \subseteq M$ otvoren skup. Tada je
$$\{(U \cap V, \psi | U \cap V);\ (U, \psi) \in \mathcal{A},\ U \cap V \neq \emptyset\}$$
diferencijabilni (odn. analitički) atlas na V. V se s pripadnom diferencijabilnom (odn. analitičkom) strukturom zove **otvorena podmnogostrukost** od M.

(4) Neka su $(M, \mathcal{A})$ i $(N, \mathcal{B})$ diferencijabilne (odn. analitičke) mnogostrukosti, $\dim M = m$, $\dim N = n$. Neka je
$$\mathcal{C} = \{(U \times V, \psi \times \varphi);\ (U, \psi) \in \mathcal{A},\ (V; \varphi) \in \mathcal{B}\},$$
pri čemu je $(\psi \times \varphi)(x, y) = (\psi(x), \varphi(y))$, $x \in U$, $y \in V$. Tada je $\mathcal{C}$ $(m+n)-$dimenzionalni diferencijabilni (odn. analitički) atlas na $M \times N$. S pripadnom diferencijabilnom (odn. analitičkom) strukturom $M \times N$ se zove **produkt mnogostrukosti** M i N.

Neka su M i N diferencijabilne (odn. analitičke) mnogostrukosti, $\dim M = m$, $\dim N = n$. Za $f : M \to N$ kažemo da je **diferencijabilno** (odn. **analitičko**) **preslikavanje** ako za svaku točku $p \in M$ postoje karte (U, ψ) na M i (V, φ) na N takve da je $p \in U$, $f(U) \subseteq V$ i da je $\varphi \circ f \circ \psi^{-1} : \psi(U) \longrightarrow \varphi(V)$ diferencijabilno (odn. analitičko) preslikavanje iz $\mathbb{R}^m$ u $\mathbb{R}^n$. Ako je $f : M \to N$ bijekcija i ako su f i f^{-1} diferencijabilna (odn. analitička) preslikavanja, onda se f zove **difeomorfizam** (odn. **analitički difeomorfizam**).

Za diferencijabilnu mnogostrukost M diferencijabilno preslikavanje $f : M \to \mathbb{R}$ obično se zove **diferencijabilna funkcija**. Skup svih diferencijabilnih funkcija na M označavamo sa $C^\infty(M)$. Uz operacije po točkama $C^\infty(M)$ je komutativna unitalna algebra. Važno je uočiti da na svakoj diferencijabiloj mnogostrukosti postoji mnoštvo diferencijabilnih funkcija:

Propozicija 2.1.1. *Neka su K i C međusobno disjunktni podskupovi diferencijabilne mnogostrukosti M pri čemu je skup K kompaktan, a skup C zatvoren. Tada postoji $f \in C^\infty(M)$ takva da je $f|K = 1$ i $f|C = 0$.*

Dokaz: Za $0 < r < R < +\infty$ promatramo funkciju $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiranu sa

$$f(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{\frac{1}{x-R} - \frac{1}{x-r}} & \text{ako je} \quad r < x < R \\ \\ 0 & \text{ako je} \quad x \leq r \quad \text{ili} \quad x \geq R. \end{cases}$$

Tada je funkcija f klase C^∞ a isto vrijedi i za funkciju

$$F(x) = \frac{\int_x^R f(t)\mathrm{d}t}{\int_r^R f(t)\mathrm{d}t}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Funkcija F poprima vrijednost 1 za $x \leq r$ i vrijednost 0 za $x \geq R$. Definiramo sada funkciju $\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sa

$$\psi(x_1, \ldots, x_n) = F\left(x_1^2 + \cdots + x_n^2\right).$$

Ta je funkcija klase C^∞ i vrijedi $\psi(x) = 1$ ako je $\|x\|^2 = x_1^2 + \cdots + x_n^2 \leq r$ i $\psi(x) = 0$ ako je $\|x\|^2 \geq R$. Pomakom u $\mathbb{R}^n$ nalazimo da za bilo dvije koncentrične sfere u $\mathbb{R}^n$ postoji $\varphi \in C^\infty(R^n)$ koja je jednaka 1 unutar manje sfere i jednaka 0 izvan veće sfere.

Neka su sada K i C međusobno disjunktni podskupovi od $\mathbb{R}^n$ pri čemu je skup K kompaktan, a skup C zatvoren. Tada zbog kompkatnosti možemo pronaći konačno mnogo otvorenih kugala $U_1, \ldots, U_s$ koje pokrivaju K i disjunktne su sa C. Neka je sada za svaki $j \in \{1, \ldots, s\}$ izabrana koncentrična otvorena kugla $V_j \subseteq U_j$ manjeg radijusa, ali tako da je i dalje $K \subseteq \bigcup_{j=1}^s V_j$. Vidjeli smo da postoje $\varphi_1, \ldots, \varphi_j \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ takve da vrijedi

$$\varphi_j(x) = 1 \qquad \forall x \in V_j, \qquad \varphi_j(x) = 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus U_j, \qquad j = 1, \ldots, s.$$

Sada definiramo

$$f(x) = 1 - (1 - \varphi_1(x)) \cdots (1 - \varphi_s(x)), \qquad x \in \mathbb{R}^n.$$

Iz svojstava funkcija $\varphi_1, \ldots, \varphi_s$ slijedi da je $f(x) = 1$ za $x \in \bigcup_{j=1}^s V_j$, dakle, i za $x \in K$, i $f(x) = 0$ za x izvan $\bigcup_{j=1}^s U_j$, dakle, i za $x \in C$. Time je propozicija dokazana za slučaj $M = \mathbb{R}^n$.

Prijeđimo sada na dokaz općeg slučaja za $n-$dimenzionalnu mnogostrukost M. Pretpostavimo najprije da je (U, φ) karta mnogostrukosti M i da je L kompaktan podskup od U. Prema prethodnom znamo da postoji funkcija $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ takva da je $f|\varphi(L) = 1$ i da je nosač $\operatorname{Supp} f = \operatorname{Cl}(\{x \in \mathbb{R}^n;\ f(x) \neq 0\})$ sadržan u $\varphi(U)$. Sada definiramo funkciju $F : M \to \mathbb{R}$ sa

$$F(p) = \begin{cases} f(\varphi(p)) & \text{ako je} \quad p \in U \\ \\ 0 & \text{ako je} \quad p \in M \setminus U. \end{cases}$$

Imamo $F|U = f \circ \varphi \in C^\infty(U)$. Nadalje, $\operatorname{Supp} f \circ \varphi$ je zatvoren podskup od M sadržan u U, dakle, $V = M \setminus \operatorname{Supp} f \circ \varphi$ je otvoren podskup od M i $M = U \cup V$. Kako je $F|V = 0$, zaključujemo da je $F \in C^\infty(M)$. Sada iz $f|\varphi(L) = 1$ slijedi da je $F|L = 1$. Nadalje, po definiciji je $F|M \setminus U = 0$.

Budući da je podskup $K \subseteq M$ kompaktan, a podskup $C \subseteq M$ je zatvoren i $K \cap C = \emptyset$, postoje karte $(U_1, \varphi_1), \ldots, (U_s, \varphi_s)$ mnogostrukosti M i kompaktni skupovi $L_1, \ldots, L_s \subseteq M$ takvi da je

$$K \subseteq \bigcup_{j=1}^{s} L_j, \qquad L_j \subseteq U_j \qquad \text{i} \qquad U_j \cap C = \emptyset \qquad \text{za} \quad j = 1, \ldots, s.$$

Prema prethodnom postoje funkcije $F_1, \ldots, F_s \in C^\infty(M)$ takve da je $F_j|L_j = 1$ i $F_j|C = 0$ za $j = 1, \ldots, s$. Tada je

$$f = 1 - (1 - F_1) \cdots (1 - F_s) \in C^\infty(M)$$

i vrijedi $f|K = 1$ i $f|C = 0$.

Neka je M diferencijabilna mnogostrukost i $\mathcal{U}$ otvoren pokrivač od M. **Particija jedinice podređena pokrivaču $\mathcal{U}$** je niz $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ u $C^\infty(M)$ takav da vrijedi:

(a) Za svaki $n \in \mathbb{N}$ nosač

$$\operatorname{Supp} \varphi_n = \operatorname{Cl}(\{p \in M;\ \varphi_n(p) \neq 0\})$$

je kompaktan skup sadržan u nekom $U \in \mathcal{U}$.

(b) Za svaku točku $p \in M$ postoji otvorena okolina V točke p takva da je $\operatorname{Supp} \varphi_n \cap V \neq \emptyset$ za samo konačno mnogo $n \in \mathbb{N}$.

(c) Za svaku točku $p \in M$ vrijedi

$$\varphi_n(p) \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad \text{i} \qquad \sum_{n\in\mathbb{N}} \varphi_n(p) = 1.$$

Pomoću propozicije 2.1.1. dokazuje se da vrijedi:

Teorem 2.1.2. *Za svaki otvoren pokrivač $\mathcal{U}$ diferencijabilne mnogostrukosti M postoji particija jedinice podređena pokrivaču $\mathcal{U}$.*

Neka je M diferencijabilna mnogostrukost i $p \in M$. **Tangencijalni vektor** na mnogostrukost M u točki p je linearan funkcional $X : C^\infty(M) \to \mathbb{R}$ sa svojstvom

$$X(fg) = X(f)g(p) + f(p)X(g) \qquad \forall f, g \in C^\infty(M).$$

Skup svih takvih je očito realan vektorski prostor. On se označava sa $T_p(M)$ i zove **tangencijalni prostor** na mnogostrukost M u točki p.

Vektorsko polje na mnogostrukosti M je derivacija algebre $C^\infty(M)$, tj. linearan operator $X : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ takav da vrijedi

$$X(fg) = X(f)g + fX(g) \qquad \forall f, g \in C^\infty(M). \tag{2.1}$$

Skup $\operatorname{Der}(C^\infty(M))$ svih vektorskih polja na mnogostrukosti M označavamo kraće sa $\mathcal{V}(M)$. Prema propoziciji 1.1.1. znamo da je realan vektorski prostor $\mathcal{V}(M)$ Liejeva algebra u odnosu na komutator $[X, Y] = XY - YX$. Ako je $X \in \mathcal{V}(M)$ onda je za bilo koju točku $p \in M$ sa

$$X_p(f) = (X(f))(p), \qquad f \in C^\infty(M),$$

definiran tangencijalni vektor $X_p \in T_p(M)$. Obratno, ako je $(X_p)_{p\in M}$ familija tangencijalnih vektora $X_p \in T_p(M)$, onda možemo definirati linearan operator

$$X : C^\infty(M) \to \mathbb{R}^M, \qquad (X(f))(p) = X_p(f), \quad f \in C^\infty.$$

Zbog definicionog svojstva tangencijalnih vektora taj linearan operator očito ima svojstvo (2.1). Prema tome, vektorsko polje može se identificirati s familijom tangencijalnih vektora $(X_p)_{p\in M}$ iz $\prod_{p\in M} T_p(M)$ takvih da za je za svaku funkciju $f \in C^\infty(M)$ funkcija $p \mapsto X_p(f)$ također iz $C^\infty(M)$.

Ako je $X \in \mathcal{V}(M)$ i $f \in C^\infty(M)$, možemo definirati preslikavanje $fX : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ sa $(fX)(g) = fX(g)$, $g \in C^\infty(M)$. Tada je očito $fX \in \mathcal{V}(M)$. Prema tome, $\mathcal{V}(M)$ je ne samo realan vektorski prostor, nego i modul nad unitalnim prstenom $C^\infty(M)$.

Za konstantnu funkciju 1 na M i za $X \in \mathcal{V}(M)$ vrijedi

$$X(1) = X(1^2) = X(1) + X(1) \qquad \Longrightarrow \qquad X(1) = 0.$$

Dakle, za svaku konstantnu funkciju f na M i za svako vektorsko polje $X \in \mathcal{V}(M)$ vrijedi $X(f) = 0$. Uzmimo sada da funkcija $f \in C^\infty(M)$ iščezava na otvorenom skupu $U \subseteq M$ i neka je $p \in U$. Zbog propozicije 2.1.1. postoji $g \in C^\infty(M)$ takva da je $g(p) = 0$ i $g|M \setminus U = 1$. Tada je $f = gf$, dakle, za svaki tangencijalni vektor $X_p \in T_p(M)$ imamo

$$X_p(f) = X_p(fg) = X_p(f)g(p) + f(p)X_p(g) = 0.$$

Odatle slijedi da je $X(f)|U = 0$ za svako vektorsko polje $X \in \mathcal{V}(M)$. Budući da je nosač $\operatorname{Supp} f$ funkcije $f \in C^\infty(M)$ komplement najvećeg otvorenog podskupa od M na kome se f poništava, dokazali smo sljedeće *svojstvo lokalnosti* vektorskih polja:

Propozicija 2.1.3. *Za svaku funkciju $f \in C^\infty(M)$ i svako vektorsko polje $X \in \mathcal{V}(M)$ vrijedi* $\operatorname{Supp} X(f) \subseteq \operatorname{Supp} f$.

Neka je sada U otvorena podmnogostrukost mngostrukosti M. Za svako vektorsko polje $X \in \mathcal{V}(M)$ definirat ćemo sada njegovu restrikciju $Y = X|U \in \mathcal{V}(U)$. Za funkciju $f \in C^\infty(U)$ i za točku $p \in U$ možemo zbog propozicije 2.1.1. izabrati funkciju $\tilde{f} \in C^\infty(M)$ koja se podudara s funkcijom f na okolini točke p. Definiramo tada $(Y(f))(p) = \left(X\left(\tilde{f}\right)\right)(p)$. Zbog lokalnosti vektorskih polja ta definicija ne ovisi o izboru funkcije $\tilde{f}$. Funkcija $Y(f) : U \to \mathbb{R}$ definirana na taj način diferencijabilna je na okolini svake točke $p \in U$, dakle, $Y(f) \in C^\infty(U)$. Nadalje, lako se vidi da je tako definirano preslikavanje $Y : C^\infty(U) \to C^\infty(U)$ derivacija algebre $C^\infty(U)$, odnosno, $Y = X|U$ je vektorsko polje na U. Očito je

$$(fX)|U = (f|U)(X|U) \qquad \text{i} \qquad (X(f))|U = (X|U)(f|U) \qquad \forall f \in C^\infty(M) \quad \text{i} \quad \forall X \in \mathcal{V}(M).$$

Na isti način nalazimo da se tangencijalni prostor $T_p(U)$ na otvorenu podmnogostrukost U u bilo kojoj točki $p \in U$ prirodno identificira s tangencijalnim prostorom $T_p(M)$ na mnogostrukost M u toj točki. Identifikacija je takva da je $(X|U)_p = X_p$ za svako vektorsko polje $X \in \mathcal{V}(M)$. Restrikcija $X|U$ je zapravo vektorsko polje na U zadano familijom tangencijalnih vektora $(X_p)_{p\in U}$.

S druge strane, neka je $Z \in \mathcal{V}(U)$ i neka je $p \in U$. Tada postoje vektorsko polje $\tilde{Z} \in \mathcal{V}(M)$ i otvorena okolina $V \subseteq U$ točke p takvi da je $\tilde{Z}|V = Z|V$. Doista, neka je $K \subseteq U$ kompaktna okolina točke p i neka je $V = \operatorname{Int} K$ (nutrina od K). Prema propoziciji 2.1.1. postoji $\psi \in C^\infty(M)$ s nosačem sadržanim u U takva da je $\psi|K = 1$. Za bilo koju funkciju $g \in C^\infty(M)$ definiramo funkciju $\tilde{Z}(g)$ na M ovako:

$$\left(\tilde{Z}(g)\right)(q) = \begin{cases} \psi(q)(Z(g|U))(q) & \text{ako je} \quad q \in U \\ \\ 0 & \text{ako je} \quad q \in M \setminus U. \end{cases}$$

Zadatak 2.1.1. *Dokažite da je tada $\tilde{Z}(g) \in C^\infty(M)$ i da je na taj način definirano vektorsko polje $\tilde{Z} \in \mathcal{V}(M)$ koje ima svojstvo $\tilde{Z}|V = Z|V$.*

Neka je sada (U,ψ) karta mnogostrukosti M, $X \in \mathcal{V}(U)$ i $p \in U$. Označimo sa $x_1,\ldots,x_n$ koordinatne funkcije te karte, tj.

$$\psi(q) = (x_1(q),\ldots,x_n(q)), \qquad q \in U.$$

Nadalje, za $f \in C^\infty(M)$ neka je $f^* = f \circ \psi^{-1} \in C^\infty(\psi(U))$. Neka je sada $V \subseteq U$ otvoren skup takav da je $\psi(V)$ otvorena kugla u $\mathbb{R}^n$ sa središtem u točki $\psi(p) = (a_1,\ldots,a_n)$. Za bilo koju točku $(x_1,\ldots,x_n) \in \psi(V)$ imamo

$$f^*(x_1,\ldots,x_n) = f^*(a_1,\ldots,a_n) + \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t} f^*(a_1 + t(x_1-a_1),\ldots,a_n + t(x_n-a_n))\mathrm{d}t =$$

$$f^*(a_1,\ldots,a_n) + \sum_{j=1}^n (x_j - a_1) \int_0^1 f_j^*(a_1 + t(x_1-a_1),\ldots,a_n + t(x_n-a_n))\mathrm{d}t.$$

Pri tome smo sa f_j^* označili parcijalnu derivaciju funkcije f^* po $j-$toj varijabli. Prebacimo li tu jednakost natrag na M dobivamo

$$f(q) = f(p) + \sum_{j=1}^n (x_j(q) - x_i(p))\, g_j(q), \qquad q \in V,$$

pri čemu su $g_1,\ldots,g_n \in C^\infty(V)$ i vrijedi

$$g_j(p) = \left(\frac{\partial f^*}{\partial x_j}\right)_{x=\psi(p)}.$$

Odatle i iz činjenice da tangencijalni vektor svaku konstantu preslikava u 0 dobivamo

$$X_p(f) = \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial f^*}{\partial x_j}\right)_{x=\psi(p)} X_p(x_j).$$

Primijetimo sada da je preslikavanje

$$f \mapsto \left(\frac{\partial f^*}{\partial x_j}\right)_{x=\psi(p)}, \qquad f \in C^\infty(U),$$

tangencijalni vektor na U (dakle, i na M) u točki p. Taj tangencijalni vektor označavamo sa $\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_p$. Familija $\left(\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_p\right)_{p\in U}$ je vektorsko polje na U koje označavamo sa $\frac{\partial}{\partial x_j}$. Prema dokazanom nalazimo da za svako vektorsko polje $X \in \mathcal{V}(U)$ vrijedi

$$X = \sum_{j=1}^n X(x_j) \frac{\partial}{\partial x_j}. \tag{2.2}$$

Propozicija 2.1.4. *Uz uvedene oznake za svaku kartu (U,ψ) mnogostrukosti M $n-$torka*

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial}{\partial x_n}\right)$$

je baza $C^\infty(U)-$modula $\mathcal{V}(U)$. Nadalje, za svaku točku $p \in U$ $n-$torka

$$\left(\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_p,\ldots,\left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)_p\right)$$

je baza tangencijalnog prostora $T_p(M)$. Posebno, $\dim M = \dim T_p(M)$.

Dokaz: Prema (2.2) znamo da vektorska polja $\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}$ razapinju $C^\infty(U)-$modul $\mathcal{V}(U)$. Treba još dokazati njihovu linearnu nezavisnost nad algebrom $C^\infty(U)$. Međutim, iz definicije se lako provjeri da vrijedi $\frac{\partial}{\partial x_j}(x_i) = \delta_{ij}$. Odatle slijedi linearna nezavisnost vektorskih polja $\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}$ nad algebrom $C^\infty(U)$: ako su $f_1, \ldots, f_n \in C^\infty(U)$ takve da je

$$\sum_{j=1}^{n} f_j \frac{\partial}{\partial x_j} = 0,$$

primjenom te jednakosti na funkcije $x_1, \ldots, x_n$ nalazimo da je $f_1 = \cdots = f_n = 0$.

Nadalje, iz (2.2) slijedi za svaku točku $p \in U$

$$X_p = \sum_{j=1}^{n} (X(x_j))(p) \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_p = \sum_{j=1}^{n} X_p(x_j) \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_p.$$

Prema tome, tangencijalni vektori $\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_p, \ldots, \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)_p$ razapinju tangencijalni prostor $T_p(M)$ i linearno su nezavisni jer je $\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_p (x_i) = \delta_{ij}$.

Neka su M i N diferencijabilne mnogostrukosti i $\Phi : M \to N$ diferencijabilno preslikavanje. Za $p \in M$ definiramo $T_p(\Phi) : T_p(M) \to T_{\Phi(p)}(N)$ sa

$$[T_p(\Phi)X](f) = X(f \circ \Phi), \qquad f \in C^\infty(N), \quad X \in T_p(M).$$

Tada je $T_p(\Phi)$ linearan operator i zove se **diferencijal** (ili **tangencijalno preslikavanje**) od Φ u točki p. Neka je sada $p \in M$ i neka su (U, ψ) karta od M i (V, φ) karta od N takve da je $p \in U$ i $\Phi(U) \subseteq V$. Stavimo $m = \dim M$, $n = \dim N$ i neka su $x_1, x_2, \ldots, x_m$ koordinatne funkcije za kartu (U, ψ) i $y_1, y_2, \ldots, y_n$ koordinatne funkcije za kartu (V, φ). Direktno iz definicije tangencijalnih vektora $\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p$ i $\left(\frac{\partial}{\partial y_j}\right)_{\Phi(p)}$ dobiva se da je matrica operatora u paru baza

$$\left(\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_p, \left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)_p, \ldots, \left(\frac{\partial}{\partial x_m}\right)_p\right) \quad \text{prostora} \quad T_p(M)$$

i

$$\left(\left(\frac{\partial}{\partial y_1}\right)_{\Phi(p)}, \left(\frac{\partial}{\partial y_2}\right)_{\Phi(p)}, \ldots, \left(\frac{\partial}{\partial y_n}\right)_{\Phi(p)}\right) \quad \text{prostora} \quad T_{\Phi(p)}(N)$$

upravo Jacobijeva matrica preslikavanja $\varphi \circ \Phi \circ \psi^{-1} : \psi(U) \to \varphi(V)$ u točki $\psi(p)$. Odatle i iz teorema o inverznoj funkciji slijedi da je diferencijabilno preslikavanje $\Phi : M \to N$ difeomorfizam ako i samo ako je Φ bijekcija i $T_p(\Phi) : T_p(M) \to T_{\Phi(p)}(N)$ je izomorfizam za svaku točku $p \in M$.

Zadatak 2.1.2. *Neka su M, N i P diferencijabilne mnogostrukosti i neka su $\Phi : M \to N$ i $\Psi : N \to P$ diferencijabilna preslikavanja. Dokažite da vrijedi:*

(a) *$\Psi \circ \Phi : M \to P$ je diferencijabilno preslikavanje.*

(b) *Za svaku točku $p \in M$ vrijedi $T_p(\Psi \circ \Phi) = T_{\Phi(p)}(\Psi) T_p(\Phi)$.*

(c) *Ako je Φ difeomorfizam, onda je $T_p(\Phi) : T_p(M) \to T_{\Phi(p)}(N)$ izomorfizam vektorskih prostora za svaku točku $p \in M$.*

Sve definicije vrijede i za analitičke mnogostrukosti, koje su poseban slučaj diferencijabilnih mnogostrukosti. Iz teorema o inverznoj funkciji za analitička preslikavanja slijedi da je analitičko preslikavanje analitičkih mnogostrukosti $\Phi : M \to N$ koje je difeomorfizam automatski analitički difeomorfizam.

Za **vektorsko polje** X na analitičkoj mnogostrukosti M kažemo da je **analitičko u točki** $p \in M$ ako za svaku otvorenu okolinu U točke p i za svaku $\mathbb{R}-$analitičku funkciju $f : U \to \mathbb{R}$ postoji otvorena okolina $V \subseteq U$ točke p takva da je funkcija $p \mapsto X_p(f)$ $\mathbb{R}-$analitička na V. $X \in \mathcal{V}(M)$ je **analitičko vektorsko polje** na M ako je ono analitičko u svakoj točki $p \in M$. Važno je uočiti lokalni karakter definicije analitičnosti vektorskih polja. Nedovoljno je zahtijevati da je za svaku $\mathbb{R}-$analitičku funkciju $f : M \to \mathbb{R}$ i funkcija $X(f)$ $\mathbb{R}-$analitička; naime, može se dogoditi da uopće nema nekonstantnih $\mathbb{R}-$analitičkih funkcija na analitičkoj mnogostrukosti M (to je tako ako je mnogostrukost M povezana i kompaktna), pa bi sva vektorska polja bila analitička. To nije istina, ali ipak mogu postojati netrivijalna analitička vektorska polja na takvoj analitičkoj mnogostrukosti M.

Podmnogostrukost mnogostrukosti M je podskup $N \subseteq M$ koji ima svoju diferencijabilnu strukturu koja je takva da inkluzija $\iota : N \to M$ zadovoljava:

(*a*) ι je $C^\infty-$preslikavanje;

(*b*) $T_p(\iota) : T_p(N) \to T_p(M)$ je injekcija $\forall p \in N$.

Posebno, svaka otvorena podmnogostrukost je podmnogostrukost.

Neka je sada p točka diferencijabilne mnogostrukosti M. **Krivulja kroz točku** p je diferencijabilno preslikavanje $\sigma : I \to M$, gdje je I otvoren interval u $\mathbb{R}$ koji sadrži 0 i vrijedi $\sigma(0) = p$. U tom slučaju definiramo preslikavanje $Y_\sigma : C^\infty(M) \to \mathbb{R}$ sa

$$Y_\sigma(f) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(\sigma(t))\bigg|_{t=0}, \qquad f \in C^\infty(M).$$

Tada je očito $Y_\sigma \in T_p(M)$. Ustvari, ako su $x_1, \ldots, x_n$ koordinatne funkcije neke karte (U, φ) mnogostrukosti M, takve da je $p \in U$ i $\varphi(p) = 0$, i ako sa $\{e_1, \ldots, e_n\}$ označimo standardnu bazu od $\mathbb{R}^n$, onda su sa

$$\sigma_j(t) = \psi^{-1}(te_j), \qquad j = 1, \ldots, n,$$

definirane krivulje kroz točku p i vrijedi $Y_{\sigma_j} = \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_p$. Odatle i iz propozicije 2.1.4. slijedi da je svaki tangencijalni vektor iz $T_p(M)$ oblika Y_σ za neku krivulju σ kroz točku p.

Razmotrimo sada posebno slučaj analitičke mnogostrukosti iz primjera (2) na str. 32. Dakle, V je realan $n-$dimenzionalan vektorski prostor. Za $v, u \in V$ definiramo $A(v)_u : C^\infty(V) \to \mathbb{R}$ na sljedeći način:

$$A(v)_u(f) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(u + tv)\bigg|_{t=0}, \qquad f \in C^\infty(V).$$

Zadatak 2.1.3. *Uz uvedenu oznaku dokažite:*

(*a*) $A(v)_u \in T_u(V)$ *za svaki* $v \in V$ *i svaki* $u \in V$.

(*b*) *Za svaki vektor* $u \in V$ *preslikavanje* $v \mapsto A(v)_u$ *je izomorfizam prostora* V *na prostor* $T_u(V)$.

(*c*) *Ako je* $\{e_1, \ldots, e_n\}$ *baza prostora* V *i ako su* $x_1, \ldots, x_n$ *pripadne koordinatne funkcije, tj.* $v = \sum_{j=1}^n x_j(v)e_j$, $v \in V$, *onda vrijedi* $A(e_j)_u = \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_u$ *za svaki* $u \in V$ *i za* $j = 1, \ldots, n$.

Za vektorski prostor V pomoću izomorfizma $v \mapsto A(v)_u$ svaki se tangencijalni prostor $T_u(V)$, $u \in V$, identificira sa samim prostorom V. Dakle, vektor $v \in V$ identificira se s tangencijalnim vektorom iz $T_u(V)$ zadanim sa

$$f \mapsto \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(u + tv)\bigg|_{t=0}, \qquad f \in C^\infty(V).$$

2.2 Liejeve grupe

Liejeva grupa je skup G sa svojstvima:

(a) G je grupa.

(b) G je diferencijabilna mnogostrukost.

(c) $(x, y) \mapsto xy^{-1}$ je diferencijabilno preslikavanje sa $G \times G$ u G.

Vrlo je netrivijalan sljedeći teorem:

Teorem 2.2.1. *Neka je G Liejeva grupa. $C^\infty-$struktura mnogostrukosti G sadrži jedinstvenu analitičku strukturu takvu da je preslikavanje $(x, y) \mapsto xy^{-1}$ sa $G \times G$ u G analitičko.*

Neka je u daljnjem G Liejeva grupa. Jedinicu u grupi G označavat ćemo sa e. Za $x \in G$ definiramo preslikavanja $\lambda_x, \rho_x : G \to G$ ovako:

$$\lambda_x(g) = xg, \qquad \rho_x(g) = gx^{-1}, \qquad g \in G.$$

λ_x i ρ_x su analitički difeomorfizmi sa G na G. **Vektorsko polje** $X \in \mathcal{V}(G)$ zove se **lijevoinvarijantno** ako vrijedi

$$T_g(\lambda_x)X_g = X_{xg} \qquad \forall x, g \in G.$$

Neka je $\mathfrak{g}$ potprostor od $\mathcal{V}(G)$ svih lijevoinvarijantnih vektorskih polja na G.

Teorem 2.2.2. (a) *$X \mapsto X_e$ je izomorfizam vektorskih prostora sa $\mathfrak{g}$ na $T_e(G)$.*
(b) *$\mathfrak{g}$ je Liejeva algebra, tj. $X, Y \in \mathfrak{g} \implies [X, Y] \in \mathfrak{g}$.*

Zadatak 2.2.1. *Dokažite teorem 2.2.2.*

Uputa za surjektivnost u (a) : Za $v \in T_e(G)$ izaberimo glatku krivulju $\sigma : \langle -\varepsilon, \varepsilon \rangle \to G$ takvu da je $\sigma(0) = e$ i $Y_\sigma = v$. Definiramo $\sigma_g(t) = g\sigma(t)$, $\varepsilon < t < \varepsilon$. Tada je σ_g glatka krivulja u G kroz točku g. Definiramo preslikavanje $X : g \mapsto X_g = Y_{\sigma_g} \in T_g(G)$. Dokažite da je tada $X \in \mathcal{V}(G)$ i $T_g(\lambda_x)X_g = X_{xg}$, dakle $X \in \mathfrak{g}$, i da vrijedi $X_e = v$.

$\mathfrak{g}$ se zove **Liejeva algebra Liejeve grupe** G. Zbog tvrdnje (a) teorema 2.2.2. obično se Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ Liejeve grupe G identificira s tangencijalnim prostorom $T_e(G)$. Primijetimo da se uz tu identifikaciju komutator $[X, Y]$ elemenata $X, Y \in T_e(G)$ izračunava tako da najprije odredimo lijevoinvarijantna vektorska polja $\tilde{X}$ i $\tilde{Y}$ takva da je $\tilde{X}_e = X$ i $\tilde{Y}_e = Y$, a onda je $[X, Y] = \left[\tilde{X}, \tilde{Y}\right]_e$.

Neka su sada G i H Liejeve grupe s Liejevim algebrama $\mathfrak{g}$ i $\mathfrak{h}$. Preslikavanje $\varphi : G \to H$ zove se **Liejev homomorfizam** ako je to homomorfizam grupa i analitičko preslikavanje.

Zadatak 2.2.2. *Neka je $\varphi : G \to H$ Liejev homomorfizam. Dokažite da je tada $T_e(\varphi)$ homomorfizam Liejeve algebre $T_e(G) \simeq \mathfrak{g}$ u Liejevu algebru $T_e(H) \simeq \mathfrak{h}$.*

Jednoparametarska podgrupa Liejeve grupe G je Liejev homomorfizam $\varphi : \mathbb{R} \to G$. Posebno, φ je glatka krivulja kroz e, pa je $Y_\varphi \in T_e(G) = \mathfrak{g}$.

Teorem 2.2.3. *Za svaki $X \in \mathfrak{g}$ postoji jedinstvena jednoparametarska podgrupa φ_X od G takva da je $X = Y_{\varphi_X}$. Preslikavanje $(X, t) \mapsto \varphi_X(t)$ sa $\mathfrak{g} \times \mathbb{R}$ u G je analitičko.*

Uz oznake iz teorema 2.2.3. definiramo **eksponencijalno preslikavanje** $\exp : \mathfrak{g} \to G$ sa

$$\exp X = \varphi_X(1), \qquad X \in \mathfrak{g} = T_e(G).$$

Zadatak 2.2.3. *Dokažite da je* $\varphi_X(t) = \exp tX$.

Teorem 2.2.4. *Postoje okolina* U *nule u* $\mathfrak{g}$ *i okolina* V *jedinice u* G *takve da je* $\exp|U$ *analitički difeomorfizam sa* U *na* V.

Korolar 2.2.5. *Neka je* G *Liejeva grupa i* $\mathfrak{g}$ *njezina Liejeva algebra. Tada je komponenta povezanosti jedinice* G_0 *u grupi* G *otvorena podgrupa i ona je generirana skupom* $\exists\,\mathfrak{g} = \{\exp X;\ X \in \mathfrak{g}\}$. *Štoviše, za svaku otvorenu okolinu* U *nule u* $\mathfrak{g}$ *podgrupa* G_0 *generirana je sa* $\exp U$:

$$G_0 = \{(\exp X_1)(\exp X_2)\cdots(\exp X_n);\ n \in \mathbb{N},\ \ X_1, \ldots, X_n \in U\}.$$

Dokaz: Prema teoremu 2.2.4. skup $\exp \mathfrak{g}$ sadrži okolinu jedinice u grupi G i očito je povezan, dakle, sadržan je u G_0. Neka je sada U otvorena okolina nule u $\mathfrak{g}$. Možemo pretpostaviti da je ta okolina nule dovoljno mala da je $\exp|U$ analitički difeomorfizam na otvorenu okolinu jedinice $\exp U$ u grupi G (dakle, i u grupi G_0). Neka je G_1 podgrupa generirana sa $\exp U$. Ta je podgrupa očito otvorena $-$ jednaka je uniji otvorenih skupova

$$\{(\exp X_1)\cdots(\exp X_n);\ X_1, \ldots, X_n \in U\}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Međutim, otvorena je podgrupa ujedno zatvorena podgrupa. Doista, grupa G_0 je unija međusobno disjunktnih desnih G_1-klasa G_1x. Sve su te klase otvoreni podskupovi jer je $g \mapsto gx$ homeomorfizam (čak analitički difeomorfizam) sa G_1 na G_1x. Sada je i $G_0 \setminus G_1$ unija otvorenih klasa G_1x različitih od G_1, dakle, i to je otvoren skup, odnosno, G_1 je zatvoren skup. Sada zbog povezanosti slijedi da je $G_1 = G_0$.

Pomoću teorema 2.2.4. izvodi se i sljedeći vrlo netrivijalan reztultat:

Teorem 2.2.6. *Neka su* G *i* H *Liejeve grupe i* $\varphi : G \to H$ *neprekidni homorfizam grupa. Tada je* φ *Liejev homomorfizam.*

Za element g Liejeve grupe G definiramo preslikavanje $\operatorname{Int} g : G \to G$ sa

$$(\operatorname{Int} g)(x) = gxg^{-1}, \qquad x \in G.$$

Očito je $\operatorname{Int} g$ analitički difeomorfizam sa G na G za svaki $g \in G$. Diferencijal tog preslikavanja u jedinici označimo sa $\operatorname{Ad} g$. Dakle,

$$\operatorname{Ad} g : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}, \qquad \operatorname{Ad} g = T_e(Int\, g).$$

Zadatak 2.2.4. *Dokažite da je* $g \mapsto \operatorname{Ad} g$ *homomorfizam grupe* G *u grupu* $\operatorname{Aut}(\mathfrak{g})$ *svih automorfizama Liejeve algebre* $\mathfrak{g}$.

Neka je sada $\varphi : G \to H$ Liejev homomorfizam Liejevih grupa i neka su $\mathfrak{g} = T_e(G)$ i $\mathfrak{h} = T_e(H)$ Liejeve algebre tih Liejevih grupa. Preslikavanja Int i Ad za grupe G i H označimo sa Int_G i Ad_H, odnosno, sa Int_H i Ad_H. Za $x, y \in G$ imamo

$$\varphi\left((\operatorname{Int}_G x)(y)\right) = \varphi\left(xyx^{-1}\right) = \varphi(x)\varphi(y)\varphi(x)^{-1} = \left(\operatorname{Int}_H \varphi(x)\right)(\varphi(y)).$$

Dakle,

$$\varphi \circ (\operatorname{Int}_G x) = (\operatorname{Int}_H \varphi(x)) \circ \varphi.$$

Odatle slijedi

$$T_e(\varphi) T_e\left(\operatorname{Int}_G x\right) = T_e\left(\operatorname{Int}_H \varphi(x)\right) T_e(\varphi).$$

Time smo dokazali:

Propozicija 2.2.7. *Neka je $\varphi : G \to H$ Liejev homomorfizam. Tada za svaki element $x \in G$ vrijedi*

$$T_e(\varphi)\,(\mathrm{Ad}_G x) = (\mathrm{Ad}_H \varphi(x))\,T_e(\varphi).$$

Posebno, ako je φ izomorfizam, onda je

$$\mathrm{Ad}_H \varphi(x) = T_e(\varphi)\,(\mathrm{Ad}_G x)\,T_e(\varphi)^{-1}$$

Neka je i dalje $\varphi : G \to H$ Liejev homomorfizam Liejevih grupa i neka su $\mathfrak{g}$ i $\mathfrak{h}$ Liejeve algebre od G i H. Eksponencijalna preslikavanja $\mathfrak{g} \to G$ i $\mathfrak{h} \to H$ označimo sa $\exp_G$ i $\exp_H$. Za $X \in \mathfrak{g}$ preslikavanje $t \mapsto \exp_G X$ je jedinstvena jednoparametarska podgrupa Liejeve grupe G s tangencijalnim vektorom u jedinici $e = e_G$ jednakim X. Kompozicija tog preslikavanja s homomorfizmom φ dobivamo jednoparametarsku podgrupu $t \mapsto \varphi(\exp_G X)$ u Liejevoj grupi H. Pripadni tangencijalni vektor u jedinici $e = e_H$ grupe H na bilo koju funkciju $f \in C^\infty(H)$ djeluje ovako:

$$f \mapsto \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(\varphi(\exp_G tX))\bigg|_{t=0} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f \circ \varphi)(\exp_G tX)\bigg|_{t=0} = X(f \circ \varphi) = [T_e(\varphi)X](f).$$

Zbog jedinstvenosti u teoremu 2.2.3. za Liejevu grupu H slijedi da je

$$\exp_H tT_e(\varphi)X = \varphi(\exp_G tX), \qquad t \in \mathbb{R}, \quad X \in \mathfrak{g} = T_e(G).$$

Dakle,

Propozicija 2.2.8. *Ako je $\varphi : G \to H$ Liejev homomorfizam onda je*

$$\varphi(\exp_G X) = \exp_H T_e(\varphi)X$$

za svaki X iz Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ Liejeve grupe G.

Pokazuje se da vrijedi:

Teorem 2.2.9. *Neka je G Liejeva grupa i $\mathfrak{g}$ njena Liejeva algebra. Tada za svaki $X \in \mathfrak{g}$ vrijedi*

$$\mathrm{Ad}\,(\exp X) = e^{\mathrm{ad}\,X}.$$

Nadalje,

$$T_e(\mathrm{Ad}) = \mathrm{ad}, \qquad \textit{odnosno,} \quad (T_e(\mathrm{Ad})X)\,(Y) = [X, Y] \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g} = T_e(G).$$

Primijetimo da posljednja formula daje komutator elemenata $X, Y \in \mathfrak{g} = T_e(G)$ bez njihova proširenja do lijevoinvarijantnih vektorskih polja na G.

$H \subseteq G$ zove se **Liejeva podgrupa** Liejeve grupe G ako vrijedi:

(1) H je podgrupa od G koja ima svoju strukturu mnogostrukosti uz koju je H Liejeva grupa.

(2) Inkluzija $\iota : H \to G$ je Liejev homomorfizam.

(3) Pripadni homomorfizam Liejevih algebri $T_e(\iota) : \mathfrak{h} \to \mathfrak{g}$ je injektivan.

Tada se pomoću $T_e(\iota)$ Liejeva algebra $\mathfrak{h}$ identificira s Liejevom podalgebrom Liejeve algebre $\mathfrak{g}$.

Teorem 2.2.10. *Neka je G Liejeva grupa s Liejevom algebrom $\mathfrak{g}$ i neka je $\mathfrak{h}$ Liejeva podalgebra od $\mathfrak{g}$. Postoji jedinstvena povezana Liejeva podgrupa H od G čija je Liejeva algebra jednaka $\mathfrak{h}$.*

Ovaj se teorem dokazuje tako da se promatra skup $\exp \mathfrak{h} \subseteq G$ i za H se uzme podgrupa generirana tim skupom. $C^\infty-$strukturu u H uvedemo najprije na okolinu jedinice pomoću $\exp|\mathfrak{h}$, a zatim pomacima i na cijelu grupu H.

Teorem 2.2.11. *Neka je G Liejeva grupa i H zatvorena podgrupa. Tada je H Liejeva podgrupa.*

Za dokaz ovog teorema najprije se pokaže da je

$$\mathfrak{h} = \{X \in \mathfrak{g};\ \exp tX \in H\ \forall t \in \mathbb{R}\}$$

Liejeva podalgebra od $\mathfrak{g}$, a zatim da je $\exp \mathfrak{h}$ okolina jedinice u grupi H.

Teorem 2.2.12. *Neka je G Liejeva grupa i H njezina zatvorena podgrupa. Neka je $\mathfrak{g}$ Liejeva algebra od G i $\mathfrak{h}$ njezina Liejeva podalgebra koja odgovara zatvorenoj podgrupi H :*

$$\mathfrak{h} = \{X \in \mathfrak{g};\ \exp tX \in H\ \ \forall t \in \mathbb{R}\}.$$

(a) *Na kvocijentnom prostoru $M = G/H$ postoji jedinstvena $C^\infty-$struktura (odnosno, analitička struktura) takva da je $(g, m) \mapsto gm$, $g \in G$, $m \in M$, diferencijabilno (odnosno, analitičko) preslikavanje sa $G \times M$ u M.*

(b) *Ako je podgrupa H normalna, kvocijentna grupa G/H s tom strukturom je Liejeva grupa i kvocijentno preslikavanje $G \to G/H$ je Liejev homomorfizam. Nadalje, tada je $\mathfrak{h}$ ideal u Liejevoj algebri $\mathfrak{h}$ i kvocijentna Liejeva algebra $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ prirodno se identificira s Liejevom algebrom kvocijentne grupe G/H.*

Neka je sada $\mathcal{A}$ konačnodimenzionalna realna ili kompleksna unitalna algebra i neka je $G = \mathcal{A}^\times$ grupa njezinih invertibilnih elemenata. Jedinicu u algebri $\mathcal{A}$ (i u grupi G) označimo sa e. Element $x \in \mathcal{A}$ je invertibilan ako i samo ako je operator $\lambda_x : y \mapsto xy$, $y \in \mathcal{A}$, lijevog množenja sa x regularan. Dakle,

$$G = \{x \in \mathcal{A};\ \det \lambda_x \neq 0\}.$$

To pokazuje da je G otvoren podskup od $\mathcal{A}$. Dakle, G je otvorena podmnogostrukost od $\mathcal{A}$. Nadalje, lako se vidi da su množenje i invertiranje analitička preslikavanja sa $G \times G$ u G, odnosno, sa G u G. Dakle, G je Liejeva grupa.

Prema diskusiji nakon propozicije 2.1.3. tangencijalni prostor na G u bilo kojoj točki x identificira se s tangencijalnim prostorom na $\mathcal{A}$ u toj točki. Nadalje, prema zadatku 2.1.3. tangencijalni prostor na $\mathcal{A}$ u točki x identificira se s vektorskim prostorom $\mathcal{A}$. Pri tome se $y \in \mathcal{A}$ identificira s tangencijalnim vektorom $A(y)_x \in T_x(\mathcal{A})$ zadanim sa

$$A(y)_x(f) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(x + ty)\bigg|_{t=0}.$$

Prema tome, Liejeva algebra $\mathfrak{g} = T_e(G) = T_e(\mathcal{A})$ Liejeve grupe $G = \mathcal{A}^\times$ identificira se s vektorskim prostorom $\mathcal{A}$.

Propozicija 2.2.13. *Neka je $z \in \mathcal{A}$. Lijevoinvarijantno vektorsko polje na G čiji je tangencijalni vektor u jedinici e jednak z dano je sa $x \mapsto xz$, $x \in G$. Nadalje, komutator u Liejevoj algebri $\mathfrak{g} = T_e(G) = T_e(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$ dan je sa $[y, z] = yz - zy$, $y, z \in \mathcal{A}$. Drugim riječima,* $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(\mathcal{A})$.

Zadatak 2.2.5. *Dokažite prvu tvrdnju propozicije 2.2.13.*

Propozicija 2.2.14. *Neka je $x \in \mathcal{A}$. Jednoparametarska podgrupa φ_x od G čiji je tangencijalni vektor u jedinici jednak x dana je sa*

$$\varphi_x(t) = \mathrm{e}^{tx} = e + tx + \frac{t^2}{2!}x^2 + \frac{t^3}{3!}x^3 + \cdots\cdots, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Dokaz: Očito je φ_x jednoparametarska podgrupa od G. Tangencijalni vektor X u jedinici koji ona definira dan je sa

$$X(f) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f\left(e + tx + \frac{t^2}{2!}x^2 + \cdots\right)\bigg|_{t=0}, \qquad f \in C^\infty(G).$$

Pomoću Taylorove formule pokazuje se da je to jednako

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(e + tx)\bigg|_{t=0},$$

dakle, upravo tangencijalni vektor određen vektorom x.

Prema tome, u slučaju Liejeve grupe $G = \mathcal{A}^\times$ eksponencijalno preslikavanje dano je sa

$$\exp x = \mathrm{e}^x = \sum_{n \in \mathbb{Z}_+} \frac{1}{n!} x^n, \qquad x \in \mathcal{A}.$$

Posebno, to vrijedi za Liejevu grupu $\mathrm{GL}(V) = L(V)^\times$ i njezinu Liejevu algebru $L(V) = \mathfrak{gl}(V)$, gdje je V konačnodimenzionalan realan (ili kompleksan) vektorski prostor V, a također za Liejeve grupe $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ i $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ i njihove Liejeve algebre $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ i $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$.

Definiramo sada

$$\mathrm{SL}(V) = \{A \in \mathrm{GL}(V);\ \det A = 1\}.$$

To je zatvorena podgrupa od $\mathrm{GL}(V)$, dakle, i to je Liejeva grupa. Njezina je Liejeva algebra

$$\left\{A \in \mathfrak{gl}(V);\ \mathrm{e}^{tA} \in \mathrm{SL}(V)\ \ \forall t \in \mathbb{R}\right\}.$$

Kako je $\det \mathrm{e}^B = \mathrm{e}^{\mathrm{Tr}\, B}$ za svaki linearan operator $B \in \mathfrak{gl}(V)$, dobivamo da je $\det \mathrm{e}^{tA} = 1$ za svaki $t \in \mathbb{R}$ ako i samo ako je $\mathrm{Tr}\, A = 0$. To pokazuje da je

$$\mathfrak{sl}(V) = \{A \in \mathfrak{gl}(V);\ \mathrm{Tr}\, A = 0\}$$

Liejeva algebra Liejeve grupe $\mathrm{SL}(V)$.

Zadatak 2.2.6. *Pronađite Liejeve grupe čije Liejeve algebre su one iz ostalih primjera u odjeljku 1.4. za $K = \mathbb{R}$ ili $K = \mathbb{C}$, tj. $\mathfrak{sl}(n, K)$, $\mathfrak{sp}(V)$, $\mathfrak{sp}(2n, K)$, $\mathfrak{o}_F(V)$, $\mathfrak{t}(n, K)$, $\mathfrak{n}(n, K)$ i $\mathfrak{d}(n, K)$.*

Poglavlje 3

DEKOMPOZICIJE LINEARNOG OPERATORA

3.1 Fittingova dekompozicija linearnog operatora

Neka je A linearan operator na ne nužno konačnodimenzionalnom vektorskom prostoru V nad poljem K. Promatrat ćemo sljedeće monotone (rastući i padajući) nizove potprostora od V :

$$\{0\} = \operatorname{Ker} A^0 \subseteq \operatorname{Ker} A \subseteq \operatorname{Ker} A^2 \subseteq \cdots\cdots \qquad \text{i} \qquad V = \operatorname{Im} A^0 \supseteq \operatorname{Im} A \supseteq \operatorname{Im} A^2 \supseteq \cdots\cdots$$

Lema 3.1.1. (a) *Ako je* $\operatorname{Ker} A^k = \operatorname{Ker} A^{k+1}$ *za neki* $k \in \mathbb{Z}_+$ *onda je* $\operatorname{Ker} A^k = \operatorname{Ker} A^m \ \forall m \geq k$.

(b) *Ako je* $\operatorname{Im} A^k = \operatorname{Im} A^{k+1}$ *za neki* $k \in \mathbb{Z}_+$ *onda je* $\operatorname{Im} A^k = \operatorname{Im} A^m \ \forall m \geq k$.

Dokaz: (a) Dovoljno je dokazati da je $\operatorname{Ker} A^{k+1} \supseteq \operatorname{Ker} A^{k+2}$. Neka je $v \in \operatorname{Ker} A^{k+2}$. Tada je $Av \in \operatorname{Ker} A^{k+1} = \operatorname{Ker} A^k$, pa slijedi $A^{k+1}v = 0$, odnosno, $v \in \operatorname{Ker} A^{k+1}$.

(b) Analogno, dovoljno je dokazati da je $\operatorname{Im} A^{k+1} \subseteq \operatorname{Im} A^{k+2}$. Neka je $v \in \operatorname{Im} A^{k+1}$ i neka je $w \in V$ takav da je $v = A^{k+1}w$. Sada je $A^k w \in \operatorname{Im} A^k = \operatorname{Im} A^{k+1}$, pa postoji $u \in V$ takav da je $A^k w = A^{k+1}u$. Slijedi $v = AA^k w = AA^{k+1}u = A^{k+2}u \in \operatorname{Im} A^{k+2}$.

Prema lemi 3.1.1. niz $(\operatorname{Ker} A^k)_{k\in\mathbb{Z}_+}$ je striktno rastući dok se na nekom mjestu ne stabilizira. Ako se to dogodi, najmanji $k \in \mathbb{Z}_+$ takav da je $\operatorname{Ker} A^k = \operatorname{Ker} A^{k+1}$ označavmo sa $\operatorname{asc}(A)$. Ako takav $k \in \mathbb{Z}_+$ ne postoji, pišemo $\operatorname{asc}(A) = +\infty$. Isto tako, niz $(\operatorname{Im} A^k)_{k\in\mathbb{Z}_+}$ je striktno padajući dok se na nekom mjestu ne stabilizira. Ako se to dogodi, najmanji $k \in \mathbb{Z}_+$ takav da je $\operatorname{Im} A^k = \operatorname{Im} A^{k+1}$ označavamo sa $\operatorname{desc}(A)$. Ako takav $k \in \mathbb{Z}_+$ ne postoji, pišemo $\operatorname{desc}(A) = +\infty$.

Teorem 3.1.2. *Pretpostavimo da za linearan operator* $A : V \to V$ *vrijedi* $p = \operatorname{asc}(A) < +\infty$ *i* $q = \operatorname{desc}(A) < +\infty$. *Tada je:*

(a) $p = q$.

(b) $V = \operatorname{Ker} A^p \dotplus \operatorname{Im} A^p$.

(c) *Operator* $A|\operatorname{Ker} A^p$ *je nilpotentan indeksa* p.

(d) *Ako je* W *potprostor od* V *koji je* $A-$*invarijantan i ako je operator* $A|W$ *nilpotentan, onda je* $W \subseteq \operatorname{Ker} A^p$.

(e) *Operator* $A|\operatorname{Im} A^p$ *je invertibilan, tj. element grupe* $GL(\operatorname{Im} A^p)$.

(f) *Ako je* W *potprostor od* V *sa svojstvom* $AW = W$, *onda je* $W \subseteq \operatorname{Im} A^p$.

Dokaz: (a) Pretpostavimo da je $p > q \geq 0$ i neka je $v \in \operatorname{Ker} A^p \setminus \operatorname{Ker} A^{p-1}$. Dakle, $A^p v = 0$ i $A^{p-1}v \neq 0$. Po pretpostavci je $q \leq p-1$, dakle, vrijedi $\operatorname{Im} A^{p-1} = \operatorname{Im} A^p$. Stoga postoji $w \in V$ takav da je $A^{p-1}v = A^p w$. Tada je $A^{p+1}w = A^p v = 0$, dakle, $w \in \operatorname{Ker} A^{p+1} = \operatorname{Ker} A^p$. Slijedi $0 = A^p w = A^{p-1}v$ suprotno izboru vektora v. Ova kontradikcija pokazuje da je pretpostavka $p > q$ nemoguća, odnosno, dokazano je da je $p \leq q$.

Pretpostavimo sada da je $q > p \geq 0$ i neka je $v \in (\operatorname{Im} A^{q-1}) \setminus (\operatorname{Im} A^q)$. Neka je $w \in V$ takav da je $A^{q-1}w = v$. Stavimo $u = Av$. Tada je $u = A^q w \in \operatorname{Im} A^q = \operatorname{Im} A^{q+1}$, pa postoji $x \in V$ takav da je $u = A^{q+1}x$. Stavimo $y = Ax - w$. Tada je $A^q y = A^{q+1}x - A^q w = u - u = 0$. Dakle, $y \in \operatorname{Ker} A^q$. Po pretpostavci je $q - 1 \geq p$, dakle, $\operatorname{Ker} A^{q-1} = \operatorname{Ker} A^q$, pa slijedi $y \in \operatorname{Ker} A^{q-1}$. To znači da je $0 = A^{q-1}y = A^q x - A^{q-1}w = A^q x - v$. No to je nemoguće, jer po pretpostavci $v \notin \operatorname{Im} A^q$. Ova kontradikcija pokazuje da je pretpostavka $q > p$ nemoguća, odnosno, dokazana je i obrnuta nejednakost $p \geq q$.

(b) Neka je $v \in (\operatorname{Ker} A^p) \cap (\operatorname{Im} A^p)$ i neka je $u \in V$ takav da je $v = A^p u$. Tada je $0 = A^p v = A^{2p}u$, dakle, $u \in \operatorname{Ker} A^{2p} = \operatorname{Im} A^p$, a odatle slijedi da je $v = A^p u = 0$. Time je dokazano da je $(\operatorname{Ker} A^p) \cap (\operatorname{Im} A^p) = \{0\}$, odnosno, suma potprostora $\operatorname{Ker} A^p$ i $\operatorname{Im} A^p$ je direktna. Neka je sada $v \in V$ proizvoljan. Tada je $A^p v \in \operatorname{Im} A^p = \operatorname{Im} A^{2p}$, pa postoji $u \in V$ takav da je $A^p v = A^{2p}u$. Stavimo sada $w = v - A^p u$. Tada je $v = w + A^p u$, gdje je $A^p u \in \operatorname{Im} A^p$ i $A^p w = A^p v - A^{2p}u = 0$, dakle, $w \in \operatorname{Ker} A^p$. Time je dokazano da je direktna suma $\operatorname{Ker} A^p \dotplus \operatorname{Im} A^p$ jednaka čitavom prostoru V.

Tvrdnja (c) je očita.

(d) Ako je $AW \subseteq W$ i $(A|W)^k = 0$, onda je $W \subseteq \operatorname{Ker} A^k \subseteq \operatorname{Ker} A^p$.

(e) Stavimo $W = \operatorname{Im} A^p$. Tada je $AW = \operatorname{Im} A^{p+1} = \operatorname{Im} A^p = W$, dakle, $A|W$ je surjekcija W na W. Nadalje, $\operatorname{Ker} A|W = (\operatorname{Ker} A) \cap W \subseteq (\operatorname{Ker} A^p) \cap W = \{0\}$. Dakle, $A|W$ je i injekcija.

(f) Iz $AW = W$ slijedi da je $W = A^p W \subseteq \operatorname{Im} A^p$.

Uz pretpostavke teorema 3.1.2. broj $p = q$ zove se **nil−indeks operatora** A, a rastav

$$V = \operatorname{Ker} A^p \dotplus \operatorname{Im} A^p$$

zove se **Fittingova dekompozicija** prostora V u odnosu na operator A. Pisat ćemo

$$V_{(0)}(A) = \operatorname{Ker} A^p \qquad \text{i} \qquad V_*(A) = \operatorname{Im} A^p.$$

Potprostor $V_{(0)}(A)$ zove se **Fittingova** $0-$**komponenta**, a potprostor $V_*(A)$ **Fittingova** $*-$**komponenta prostora** V u odnosu na operator A. Restrikcija $A|V_{(0)}(A)$ zove se **Fittingova** $0-$**komponenta operatora** A i označava sa $A_{(0)}$, a restrikcija $A|V_*(A)$ zove se **Fittingova** $*-$**komponenta operatora** A i označava sa A_*.

Sve ovo ima smisla samo ako je $\operatorname{asc}(A) < +\infty$ i $\operatorname{desc}(A) < +\infty$. To je, naravno, sigurno ispunjeno ako je prostor V konačnodimenzionalan.

Zadatak 3.1.1. *Neka je A linearan operator na konačnodimenzionalnom prostoru V. Dokažite jednakost* $\operatorname{asc}(A) = \operatorname{desc}(A)$ *pomoću teorema o rangu i defektu.*

3.2 Korijenska dekompozicija linearnog operatora

Neka je sada A linearan operator na konačnodimenzionalnom prostoru V nad poljem K i $\mu_A \in K[T]$ njegov minimalan polinom. Rastav polinoma μ_A na relativno proste faktore tada vodi na rastav prostora V na $A-$invarijantne potprostore:

Teorem 3.2.1. *Neka je A linearan operator na konačnodimenzionalnom prostoru V nad poljem K i $\mu_A \in K[T]$ njegov minimalan polinom. Pretpostavimo da su $\mu_1, \dots, \mu_s$ normirani polinomi takvi da su μ_i i μ_j relativno prosti ako je $i \neq j$ i da je $\mu_A = \mu_1 \cdots \mu_s$. Stavimo $V_j = \operatorname{Ker} \mu_j(A)$, $j = 1, \dots, s$. Tada vrijedi:*

(*a*) *Vrijedi $V = V_1 \dotplus \cdots \dotplus V_s$.*

(*b*) *Za svaki $j \in \{1, \dots, s\}$ potprostor V_j je $A-$invarijantan i μ_j je minimalni operator restrikcije $A_j = A|V_j$.*

(*c*) *Za $j \in \{1, \dots, s\}$ stavimo $\nu_j = \mu_1 \cdots \mu_{j-1}\mu_{j+1} \cdots \mu_s$, tj. $\mu_A = \mu_j \nu_j$. Tada je $V_j = \operatorname{Im} \nu_j(A)$.*

(*d*) *Ako je W $A-$invarijantan potprostor od V onda je*

$$W = \sum_{j=1}^{s} \dotplus W \cap V_j.$$

Dokaz: Ako je polinom P relativno prost sa svakim od polinoma $P_1, \dots, P_k$ onda je P relativno prost s njihovim produktom $P_1 \cdots P_k$. Odatle vidimo da je dokaz teorema dovoljno provesti u slučaju $s = 2$.

Dakle, pretpostavljamo da je $\mu_A = \mu_1\mu_2$, gdje su μ_1 i μ_2 relativno prosti normirani polinomi, i stavljamo $V_1 = \operatorname{Ker} \mu_1(A)$ i $V_2 = \operatorname{Ker} \mu_2(A)$. Budući da operatori $\mu_1(A)$ i $\mu_2(A)$ komutiraju s operatorom A, potprostori V_1 i V_2 su $A-$invarijantni. Kako su μ_1 i μ_2 relativno prosti, postoje polinomi $P, Q \in K[T]$ takvi da je $\mu_1 P + \mu_2 Q = 1$. Tada vrijedi

$$v = \mu_1(A)P(A)v + \mu_2(A)Q(A)v \qquad \forall v \in V. \tag{3.1}$$

Za $v \in V$ stavimo $v_1 = \mu_2(A)Q(A)v$ i $v_2 = \mu_1(A)P(A)v$. Tada je $\mu_1(A)v_1 = \mu_A(A)Q(A)v = 0$, pa je $v_1 \in V_1$. Analogno je $v_2 \in V_2$. Iz (3.1) slijedi da je $v = v_1 + v_2$. Time je dokazano da je $V = V_1 + V_2$. Ako je $v \in V_1 \cap V_2$, onda je $\mu_1(A)v = \mu_2(A)v = 0$, pa iz (3.1) slijedi da je $v = 0$. Dakle, suma je direktna: $V = V_1 \dotplus V_2$. Time je dokazana tvrdnja (a).

Već smo spomenuli da su potprostori V_1 i V_2 $A-$invarijatni. Stavimo $A_1 = A|V_1$ i $A_2 = A|V_2$. Za svaki $v \in V_1$ je $\mu_1(A_1)v = \mu_1(A)v = 0$. To pokazuje da je $\mu_1(A_1) = 0$, pa slijedi da je polinom μ_1 djeljiv s minimalnim polinomom μ_{A_1} operatora A_1. Stavimo sada $S = \mu_{A_1}\mu_2$. Za $v \in V_1$ tada je $S(A)v = S(A_1)v = \mu_{A_1}(A_1)\mu_2(A_1)v = 0$, a za $v \in V_2$ je $\mu_2(A)v = 0$, pa je također $S(A)v = 0$. Kako je prostor V suma potprostora V_1 i V_2, zaključujemo da je $S(A) = 0$. Tada je polinom S djeljiv s minimalnim polinomom μ_A, dakle, $\mu_{A_1}\mu_2 = S = \mu_A R = \mu_1\mu_2 R$ za neki polinom R. Slijedi $\mu_{A_1} = \mu_1 R$, odnosno, polinom μ_{A_1} djeljiv je s polinomom μ_1. Kako su polinomi μ_{A_1} i μ_1 normirani, slijedi $\mu_{A_1} = \mu_1$. Analogno se dokazuje da je $\mu_{A_2} = \mu_2$. Time je dokazana tvrdnja (b).

Napokon, za $v \in V_1$ iz (3.1) slijedi da je $v = \mu_2(A)Q(A)v \in \operatorname{Im} \mu_2(A)$. Dakle, $V_1 \subseteq \operatorname{Im} \mu_2(A)$. S druge strane, neka je $v \in \operatorname{Im} \mu_2(A)$ i neka je $w \in V$ takav da je $v = \mu_2(A)w$. Tada je $\mu_1(A)v = \mu_A(A)w = 0$, odnosno, $v \in V_1$. Time je dokazana i obrnuta inkluzija $\operatorname{Im} \mu_2(A) \subseteq V_1$. Dakle, $V_1 = \operatorname{Im} \mu_2(A)$. Analogno je $V_2 = \operatorname{Im} \mu_1(A)$. Time je dokazana tvrdnja (c).

Neka je sada W $A-$invarijantan potprostor prostora V. Za $v \in W$ prema (3.1) je $v = v_1 + v_2$, gdje su $v_1 = \mu_2(A)Q(A)v$ i $v_2 = \mu_1(A)P(A)v$. No tada je $v_1 \in W \cap V_1$ i $v_2 \in W \cap V_2$. Time smo dokazali da je $W \subseteq W \cap V_1 \dotplus W \cap V_2$. Kako je obrnuta inkluzija očigledna, vrijedi jednakost $W = W \cap V_1 \dotplus W \cap V_2$. Time je i tvrdnja ($d$) dokazana.

Korolar 3.2.2. *Neka je A linearan operator na konačnodimenzionalnom prostoru V i μ_A njegov minimalan polinom. Pretpostavimo da je 0 nultočka polinoma μ_A kratnosti $k \in \mathbb{Z}_+$, tj. $\mu_A(T) = T^k \nu(T)$ za neki polinom ν takav da je $\nu(0) \neq 0$ (uključen je i slučaj kad 0 nije nultočka od μ_A : tada je $k = 0$ i $\nu = \mu_A$). Tada je*

$$V_{(0)}(A) = \operatorname{Ker} A^k \qquad i \qquad V_*(A) = \operatorname{Ker} \nu(A).$$

Dokaz: Tada su polinomi T^k i ν relativno prosti, pa prema tvrdnji (a) teorema 3.2.1. vrijedi $V = V_1 \dot{+} V_2$, gdje su $V_1 = \operatorname{Ker} A^k$ i $V_2 = \operatorname{Ker} \nu(A)$. Očito je operator $A|V_1$ nilpotentan, pa prema tvrdnji (d) teorema 3.1.2. vrijedi $V_1 \subseteq V_{(0)}(A)$. Nadalje, prema tvrdnji (b) teorema 3.2.1. je ν minimalni polinom restrikcije $A|V_2$. Kako je 0 nije nultočka od ν, zaključujemo da je operator $A|V_2$ invertibilan. Sada iz tvrdnje (f) teorema 3.1.2. zaključujemo da je $V_2 \subseteq V_*(A)$. Dakle, imamo

$$V = V_1 \dot{+} V_2, \qquad V_1 \subseteq V_{(0)}(A), \qquad V_2 \subseteq V_*(A) \qquad \text{i} \qquad V = V_{(0)}(A) \dot{+} V_*(A).$$

Odatle slijedi $V_1 = V_{(0)}(A)$ i $V_2 = V_*(A)$, a to je upravo tvrdnja korolara.

Za $A \in L(V)$ i $\lambda \in K$ definiramo **korijenski potprostor** $V_{(\lambda)}(A)$ kao Fittingovu $0-$komponentu prostora V u odnosu na operator $A - \lambda I)$:

$$V_{(\lambda)}(A) = V_{(0)}(A - \lambda I) = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}_+} \operatorname{Ker}(A - \lambda I)^k = \{v \in V;\ \exists k \in \mathbb{Z}_+ \text{ takav da je } (A - \lambda_k I)^k v = 0\}.$$

Po definiciji je **svojstveni potprostor** $V_\lambda(A) = \operatorname{Ker}(A - \lambda I)$ sadržan u korijenskom potprostoru $V_{(\lambda)}(A)$. Dakle, $V_{(\lambda)}(A) \neq \{0\}$ ako i samo ako je $V_\lambda(A) \neq \{0\}$, odnosno, ako i samo ako je λ svojstvena vrijednost operatora A.

Neka je A linearan operator na konačnodimenzionalnom vektorskom prostoru V nad poljem K. Kažemo da je A **rascjepiv operator** ako se njegov minimalni polinom μ_A razlaže nad poljem K, tj. ako postoje $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in K$ takvi da je

$$\mu_A(T) = (T - \lambda_1) \cdots (T - \lambda_m).$$

Primijetimo da pri tome ne pretpostavljamo da je polinom μ_A separabilan, tj. ne zahtijevamo da su sve njegove nultočke jednostruke. Znamo da je $Sp(A) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_m\}$. Naravno, ako je polje K algebarski zatvoreno, svaki je linearan operator rascjepiv.

Teorem 3.2.3. *Neka je A rascjepiv linearan operator na konačnodimenzionalnom prostoru V.*

(a) *Vrijedi*

$$V = \sum_{\lambda \in Sp(A)} \dot{+} V_{(\lambda)}(A). \tag{3.2}$$

(b) *Ako je W $A-$invarijantan potprostor od V onda je*

$$W = \sum_{\lambda \in Sp(A)} \dot{+} W \cap V_{(\lambda)}(A).$$

(c) *Za $\lambda \in Sp(A)$ je*

$$V_*(A - \lambda I) = \sum_{\mu \in Sp(A) \setminus \{\lambda\}} \dot{+} V_{(\mu)}(A). \tag{3.3}$$

Dokaz: (a) Neka je μ_A minimalni polinom operatora A i $Sp(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_s\}$ njegov spektar, pri čemu je $\lambda_i \neq \lambda_j$ za $i \neq j$. Tada vrijedi

$$\mu_A(T) = (T - \lambda_1)^{p_1} \cdots (T - \lambda_s)^{p_s}$$

za neke prirodne brojeve $p_1, \dots, p_s$. Polinomi $(T - \lambda_i)^{p_i}$ i $(T - \lambda_j)^{p_j}$ su normirani i relativno prosti za $i \neq j$. Prema tvrdnji (a) teorema 3.2.1. tada je

$$V = \sum_{j=1}^{s} \dot{+} \operatorname{Ker}(A - \lambda_j I)^{p_j}, \tag{3.4}$$

a prema tvrdnji b) istog teorema svaki potprostor $\operatorname{Ker}(A - \lambda_j I)^{p_j}$ je $A-$invarijantan i minimalni polinom pripadne restrikcije operatora A je $(T - \lambda_j)^{p_j}$.

Za $i \in \{1, \dots, s\}$ očito je $\operatorname{Ker}(A - \lambda_i)^{p_i} \subseteq V_{(\lambda_i)}(A)$. S druge strane, $V_{(\lambda_i)}(A)$ je $A-$invarijantan potprostor od V pa je po tvrdnji (d) teorema 3.2.1. potprostor $V_{(\lambda_i)}(A)$ direktna suma

$$V_{(\lambda_i)}(A) = \sum_{j=1}^{s} V_{(\lambda_i)}(A) \cap (\operatorname{Ker}(A - \lambda_j I)^{p_j}).$$

Neka je $j \neq i$ i $v \in V_{(\lambda_i)}(A) \cap (\operatorname{Ker}(A - \lambda_j I)^{p_j})$. Tada vrijedi $(A - \lambda_j I)^{p_j} v = 0$ i za neki $k \in \mathbb{N}$ je $(A - \lambda_i I)^k v = 0$. Polinomi $(T - \lambda_j)^{p_j}$ i $(T - \lambda_i I)^k$ su relativno prosti, pa postoje polinomi $R, S \in K[T]$ takvi da je $R(T)(T - \lambda_j)^{p_j} + S(T)(T - \lambda_i I)^k = 1$. Tada je

$$v = R(A)(A - \lambda_j I)^{p_j} v + S(A)(A - \lambda_i I)^k v = 0.$$

Time je dokazano da je $V_{(\lambda_i)}(A) \cap (\operatorname{Ker}(A - \lambda_j I)^{p_j}) = \{0\}$ za $j \neq i$. Zaključujemo da je $V_{(\lambda_i)}(A) = V_{(\lambda_i)}(A) \cap (\operatorname{Ker}(A - \lambda_i I)^{p_i})$, a to zajedno s inkluzijom $\operatorname{Ker}(A - \lambda_i I)^{p_i} \subseteq V_{(\lambda_i)}(A)$ daje jednakost $V_{(\lambda_i)}(A) = \operatorname{Ker}(A - \lambda_i I)^{p_i}$. Prema tome, (3.4) je upravo jednakost (3.2).

Tvrdnja (b) slijedi neposredno iz tvrdnje (d) teorema 3.2.1.

(c) Za bilo koji $i \in \{1, \dots, s\}$ minimalni polinom operatora $B = A - \lambda_i I$ jednak je $\mu_A(T + \lambda_i)$. Imamo

$$\mu_B(T) = \mu_A(T + \lambda_i) = T^{p_i} \nu(T), \quad \text{gdje je} \quad \nu(T) = \prod_{j \neq i} (T + \lambda_i - \lambda_j)^{p_j}.$$

Vrijedi

$$\nu(0) = \prod_{j \neq i} (\lambda_i - \lambda_j)^{p_j} \neq 0.$$

Prema korolaru 3.2.2 . slijedi

$$V_*(A - \lambda_i I) = V_*(B) = \operatorname{Ker} \nu(B).$$

Ali prema tvrdnji (b) teorema 3.2.1. ν je minimalni polinom restrikcije $C = B|(\operatorname{Ker} \nu(B))$, pa po tvrdnji ($a$) teorema 3.2.1. primijenjenog na operator C i na rastav njegovog minimalnog polinoma

$$\nu(T) = \prod_{j \neq i} (T + \lambda_i - \lambda_j)^{p_j}$$

u relativno proste normirane faktore zaključujemo da je

$$V_*(A - \lambda_i I) = \sum_{j \neq i} \dot{+} \operatorname{Ker}(B + \lambda_i I - \lambda_j I)^{p_j} = \sum_{j \neq i} \dot{+} \operatorname{Ker}(A - \lambda_j I)^{p_j} = \sum_{j \neq i} \dot{+} V_{(\lambda_j)}(A).$$

No to je upravo jednakost (3.3) za $\lambda = \lambda_i$.

Rastav (3.2) zove se **korijenska dekompozicija** ili **korijenski rastav** prostora V u odnosu na operator A.

3.3 Jordanova dekompozicija rascjepivog operatora

Neka je A linearan operator na vektorskom prostoru V. Kažemo da je A **poluprost operator** ako je $\{A\}-$modul V poluprost, odnosno, ako za svaki $A-$invarijantan potprostor W postoji $A-$invarijantan potprostor U takav da je $V = W \dot{+} U$. Prema teoremu 1.5.5. to je ispunjeno ako i samo ako je V suma svojih prostih $\{A\}-$podmodula, odnosno, ako i samo ako je V direktna suma nekih svojih prostih $\{A\}-$podmodula.

Propozicija 3.3.1. *Neka je A rascjepiv linearan operator na konačnodimenzionalnom vektorskom prostoru V. Sljedeća su tri svojstva međusobno ekvivalentna:*

(a) *Operator A je poluprost.*

(b) *Operator A je dijagonalizabilan, tj. postoji baza prostora V u odnosu na koju A ima dijagonalnu matricu.*

(c) *Minimalni polinom μ_A operatora A je separabilan, odnosno, sve su mu nultočke jednostruke.*

Dokaz: $(a) \Rightarrow (b)$ Pretpostavimo da je operator A poluprost i neka je W prost $\{A\}-$podmodul od V. Budući da je operator A rascjepiv, u $A-$invarijantnom potprostoru W postoji svojstven vektor, tj. postoje $\lambda \in K$ i $e \in W \setminus \{0\}$ takvi da je $Ae = \lambda e$. Tada je $Ke \neq \{0\}$ $\{A\}-$podmodul od W, pa zbog prostote slijedi $W = Ke$. Kako je V direktna suma nekih svojih prostih $\{A\}-$podmodula, zaključujemo da postoji baza prostora V sastavljena od svojstvenih vektora operatora A. No to upravo znači da je operator A dijagonalizabilan.

Obrnuta implikacija $(b) \Rightarrow (a)$ trivijalno slijedi iz implikacije $(c) \Rightarrow (a)$ u teoremu 1.5.5.

$(b) \Rightarrow (c)$ Pretpostavimo da je operator A dijagonalizabilan. To znači da vrijedi

$$V = \sum_{\lambda \in Sp(A)} \dot{+} V_\lambda(A).$$

Stavimo sada $P(T) = \prod_{\lambda \in Sp(A)}(T - \lambda)$. Iz gornjeg rastava slijedi da je $P(A) = 0$. No tada je polinom P djeljiv s minimalnim polinomom μ_A, a kako su točke spektra nultočke minimalnog polinoma slijedi $P = \mu_A$. Dakle, sve su nultočke polinoma μ_A jednostruke.

Napokon, implikacija $(c) \Rightarrow (b)$ slijedi iz teorema 3.2.1. Naime, ako je $Sp(A) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_s\}$ i $\lambda_i \neq \lambda_j$ za $i \neq j$, onda je $\mu_A = (T - \lambda_1) \cdots (T - \lambda_s)$ i polinomi $\mu_i = T - \lambda_i$ i $\mu_j = T - \lambda_j$ su relativno prosti za $i \neq j$. Uz oznake iz teorema 3.2.1. tada je $V_j = \operatorname{Ker} \mu_j(A) = V_{\lambda_j}(A)$, pa je prema tvrdnji (a) tog teorema

$$V = \sum_{j=1}^{s} \dot{+} V_{\lambda_j}(A).$$

To znači da je operator A dijagonalizabilan.

Teorem 3.3.2. *Neka je A rascjepiv linearan operator na konačnodimenzionalnom vektorskom prostoru V.*

(a) *Postoje jedinstven poluprost operator A_s i jedinstven nilpotentan operator A_n na prostoru V takvi da je $A = A_s + A_n$ i $A_s A_n = A_n A_s$.*

(b) *Ako je B linearan operator na prostoru V koji komutira s operatorom A onda B komutira i s operatorima A_s i A_n.*

(c) *Ako je W $A-$invarijantan potprostor od V onda je W A_s-invarijantan i A_n-invarijantan. Nadalje, tada je $(A|W)_s = A_s|W$ i $(A|W)_n = A_n|W$.*

Dokaz: Imamo korijenski rastav (3.2) prostora V u odnosu na operator A. Definiramo operatore A_s i A_n na prostoru V ovako:

$$A_s|V_{(\lambda)}(A) = \lambda I_{V_{(\lambda)}}, \quad \lambda \in Sp(A), \qquad A_n = A - A_s.$$

Očito je tada $Sp(A_s) = Sp(A)$ i $V_\lambda(A_s) = V_{(\lambda)}(A)$ za svaki $\lambda \in Sp(A)$. Prema tome, operator A_s je poluprost. Nadalje, operator A_s komutira s operatorom A, dakle, i operator A_n komutira s operatorom A. Za $\lambda \in Sp(A)$ vrijedi $(A - \lambda I)^p|V_{(\lambda)}(A) = 0$, gdje je p kratnost nultočke λ u minimalnom polinomu μ_A operatora A. Po definiciji operatora A_s i A_n imamo

$$(A - \lambda I)|V_{(\lambda)}(A) = (A - A_s)|V_{(\lambda)}(A) = A_n|V_{(\lambda)}(A).$$

To pokazuje da je $(A_n)^p|V_{(\lambda)}(A) = 0$. Dakle, ako je k maksimum kratnosti nultočaka minimalnog polinoma μ_A, onda je $(A_n)^k|V_{(\lambda)}(A) = 0 \ \forall \lambda \in Sp(A)$, pa slijedi $(A_n)^k = 0$. Prema tome, operator A_n je nilpotentan. Napokon, kako A_s komutira sa A, A_s komutira i sa $A_n = A - A_s$. Time je dokazana egzistencija u tvrdnji (a).

Dokazat ćemo sada da za definirane operatore A_s i A_n vrijedi tvrdnja (b). Doista, neka je B linearan operator na prostoru V koji komutira s operatorom A. Neka je $v \in V_{(\lambda)}(A)$ za neki $\lambda \in Sp(A)$. Tada je $(A - \lambda I)^k v = 0$ za neki $k \in \mathbb{N}$. No tada je $(A - \lambda I)^k Bv = B(A - \lambda I)^k v = 0$, dakle, $Bv \in V_{(\lambda)}(A)$. Slijedi $A_s Bv = \lambda Bv = B\lambda v = BA_s v$. Prema tome, vrijedi $A_s B|V_{(\lambda)}(A) = = BA_s|V_{(\lambda)}(A) \ \forall \lambda \in Sp(A)$. Kako je V suma potprostora $V_{(\lambda)}(A)$, $\lambda \in Sp(A)$, zaključujemo da je $A_s B = BA_s$. No tada B komutira i sa $A_n = A - A_s$.

Dokažimo sada jedinstvenost u tvrdnji (a). Neka su S poluprost i N nilpotentan operator na prostoru V takvi da je $A = S + N$ i $SN = NS$. Tada operatori S i N komutiraju s operatorom A, pa prema tvrdnji (b) oni komutiraju s operatorima A_s i A_n. Sada iz $A = A_s + A_n = S + N$ slijedi $A_s - S = N - A_n$. Označimo taj operator sa C. Budući da su operatori A_s i S poluprosti oni su dijagonalizabilni, a kako komutiraju i njihova razlika C je dijagonalizabilan operator. S druge strane, operator C je razlika nilpotentnih operatora koji međusobno komutiraju pa i sam nilpotentan. Stoga je $Sp(C) = \{0\}$, a kako je C dijagonalizabilan, slijedi $C = 0$. Dakle, $S = A_s$ i $N = A_n$, odnosno, dokazana je i jedinstvenost u tvrdnji (a).

(c) Neka je W $A-$invarijantan potprostor od V. Prema tvrdnji (b) teorema 3.2.3. tada je

$$W = \sum_{\lambda \in Sp(A)} \dot{+}\, W \cap V_{(\lambda)}(A).$$

Međutim, svaki $V_{(\lambda)}(A)$ je svojstven potprostor operatora A_s, pa je svaki njegov potprostor, posebno, presjek $W \cap V_{(\lambda)}(A)$, A_s-invarijantan. Stoga je i suma W tih presjeka A_s-invarijantan potprostor od V. Kako je $A_n = A - A_s$, potprostor W je i A_n-invarijantan.

Operator A_s iz teorema 3.3.2. zove se **poluprosti dio** operatora A, a operator A_n zove se **nilpotentni dio** operatora A. Rastav $A = A_s + A_n$ zove se **Jordanov rastav** ili **Jordanova dekompozicija** operatora A.

Treba nam sada jedan opći rezultat iz teorije komutativnih prstenova:

Teorem 3.3.3. (**Kineski teorem o ostacima**) *Neka je R unitalan komutativni prsten i $I_1, \ldots, I_n$ ideali u R takvi da je $I_i + I_j = R$ za $i \neq j$. Za proizvoljne $x_1, \ldots, x_n \in R$ postoji $x \in R$ takav da je $x - x_j \in I_j$ za $j = 1, \ldots, n$.*

Dokaz provodimo indukcijom po $n \geq 2$.

Pretpostavimo najprije da je $n = 2$. Dakle, neka su I_1, I_2 su ideali u R takvi da je $R = I_1 + I_2$ i neka su $x_1, x_2 \in R$. Tada postoje $a_1 \in I_1$ i $a_2 \in I_2$ takvi da je $a_1+a_2 = 1$. Stavimo $x = x_1a_2+x_2a_1$. Tada je

$$x - x_1 = x - x_1a_2 + x_1a_2 - x_1 = x_2a_1 + x_1(a_2 - 1) = x_2a_1 - x_1a_1 = (x_2 - x_1)a_1 \in I_1$$

i, analogno, $x - x_2 \in I_2$. Time je teorem dokazan za $n = 2$.

Neka je sada $n \geq 3$ proizvoljan, $I_1, \dots, I_n$ ideali u R i $x_1, \dots, x_n \in R$. Fiksirajmo sada $i \in \{1, \dots, n\}$. Tada je $I_i + I_j = R$ za $j \neq i$, pa postoje $a_j \in I_i$ i $b_j \in I_j$ takvi da je $a_j + b_j = 1$. Tada je

$$1 = (a_1 + b_1)\cdots(a_{i-1} + b_{i-1})(a_{i+1} + b_{i+1})\cdots(a_n + b_n).$$

Riješimo li se s desne strane te jednakosti zagrada, dobivamo da je

$$1 = c + d \qquad \text{gdje je} \quad c = b_1 \cdots b_{i-1}b_{i+1} \cdots b_n \in \bigcup_{j\neq i} I_j \quad \text{i} \quad d = 1 - c \in I_i.$$

Odatle slijedi da je

$$I_i + \bigcap_{j\neq i} I_j = R$$

pa prema dokazanoj tvrdnji teorema za $n = 2$ slijedi da postoji $y_i \in R$ takav da je

$$y_i - 1 \in I_i \qquad \text{i} \qquad y_i = y_i - 0 \in \bigcap_{j\neq i} I_j.$$

Stavimo sada $x = x_1y_1 + \cdots + x_ny_n$. Za bilo koji $i \in \{1, \dots, n\}$ tada je $y_j \in I_i$ za svaki $j \neq i$, dakle,

$$x - x_iy_i = x_1 + \cdots + x_{i-1}y_{i-1} + x_{i+1}y_{i+1} + \cdots + x_ny_n \in I_i. \tag{3.5}$$

Nadalje,

$$x_iy_i - x_i = x_i(y_i - 1) \in I_i. \tag{3.6}$$

Iz (1.7) i (1.8) slijedi $x - x_i = (x - x_iy_i) + (x_iy_i - x_i) \in I_i$.

Teorem 3.3.4. *Neka je A rascjepiv linearan operator na konačnodimenzionalnom vektorskom prostoru. Postoje polinomi $P, Q \in K[T]$ takvi da je $P(0) = Q(0) = 0$, $P(A) = A_s$ i $Q(A) = A_n$.*

Dokaz: Neka je $Sp(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_s\}$, pri čemu je $\lambda_i \neq \lambda_j$ za $i \neq j$. Tada imamo rastav minimalnog polinoma μ_A operatora A,

$$\mu_A(T) = (T - \lambda_1)^{p_1} \cdots (T - \lambda_s)^{p_s}$$

za neke prirodne brojeve $p_1, \dots, p_s$. Neka je I_j ideal u prstenu $K[T]$ generiran polinomom $(T-\lambda_j)^{p_j}$. Za $i \neq j$ polinomi $(T-\lambda_i)^{p_i}$ i $(T-\lambda_j)^{p_j}$ relativno prosti, pa postoje polinomi $R, S \in K[T]$ takvi da je $R(T)(T-\lambda_i)^{p_i}+S(T)(T-\lambda_j)^{p_j} = 1$. Odatle slijedi da je $I_i+I_j = K[T]$. Nadalje, ako $0 \notin Sp(A)$ neka je $I_0 = TK[T]$ ideal u $R[T]$ generiran polinomom T. Tada su polinomi T i $(T-\lambda_i)^{p_i}$ relativno prosti pa vrijedi i $I_0+I_i = K[T]$ za svaki $i \in \{1, \dots, s\}$. Prema tome, zadovoljene su pretpostavke Kineskog teorema o ostacima, pa postoji polinom $P \in K[T]$ takav da je

$$P - \lambda_j \in I_j \quad \text{za} \quad j = 1, \dots, s \quad \text{i} \quad P = P - 0 \in I_0.$$

Stavimo $Q = T - P$. Tada su $P, Q \in I_0$, pa vrijedi $P(0) = Q(0) = 0$. Nadalje, stavimo $S = P(A)$ i $N = Q(A)$. Tada operatori S i N komutiraju i vrijedi $A = S + N$. Dakle, svaki od potprostora $V_{(\lambda_j)}(A)$ je $S-$invarijantan. Kako je $P - \lambda_j \in I_j$ postoji polinom $R_j \in K[T]$ takav da je

$$P(T) - \lambda_j = R_j(T)(T - \lambda_j)^{p_j}, \qquad \text{dakle} \qquad S - \lambda_jI = R_j(A)(A - \lambda_jI)^{p_j}.$$

Prema dokazu teorema 3.2.3. vrijedi $V_{(\lambda_j)}(A) = \mathrm{Ker}\,(A - \lambda_j I)^{p_j}$. Zaključujemo da je

$$(S - \lambda_j I)|V_{(\lambda_j)}(A) = 0, \quad \text{tj.} \quad S|V_{(\lambda_j)}(A) = \lambda_j I_{V_{(\lambda_j)}(A)} = A_s|V_{(\lambda_j)}(A).$$

Kako to vrijedi za svaki j, slijedi da je $S = A_s$. Tada je i $A_n = I - A_s = I - S = N = Q(A)$.

Podsjećamo da je za linearan operator A na vektorskom prostoru V $\mathrm{ad}\,A$ linearan operator na Liejevoj algebri $\mathfrak{gl}(V) = L(V)$ definiran sa $(\mathrm{ad}\,A)B = AB - BA$, $B \in \mathfrak{gl}(V)$.

Propozicija 3.3.5. *Neka je A linearan operator na konačnodimenzionalnom vektorskom prostoru V nad poljem K.*

(a) *Ako je linearan operator A dijagonalizabilan, onda je i operator* $\mathrm{ad}\,A$ *dijagonalizabilan.*

(b) *Ako je linearan operator A nilpotentan, onda je i operator* $\mathrm{ad}\,A$ *nilpotentan.*

(c) *Ako je linearan operator A rascjepiv, onda je i operator* $\mathrm{ad}\,A$ *rascjepiv. U tom slučaju vrijedi* $(\mathrm{ad}\,A)_s = \mathrm{ad}\,A_s$ *i* $(\mathrm{ad}\,A)_n = \mathrm{ad}\,A_n$.

Dokaz: (a) Neka je $\{e_1, \dots, e_n\}$ baza prostora V sastavljena od svojstvenih vektora operatora A,

$$Ae_j = \lambda_j e_j, \qquad j = 1, \dots, n$$

Neka je $\{E_{ij};\ i, j = 1, \dots, n\}$ pripadna baza od $\mathfrak{gl}(V)$; tj. E_{ij} su linearni operatori na V zadani sa

$$E_{ij}e_k = \delta_{jk}e_i, \qquad i, j, k = 1, \dots, n.$$

Tada se lako vidi da je

$$(\mathrm{ad}\,A)E_{ij} = (\lambda_i - \lambda_j)E_{ij}, \qquad i, j = 1, \dots, n.$$

Dakle, i operator $\mathrm{ad}\,A$ je dijagonalizabilan.

(b) Definiramo linearne operatore L_A i R_A na prostoru $\mathfrak{gl}(V)$ pomoću lijevog i desnog množenja s operatorom A :

$$L_A B = AB, \qquad R_A B = BA, \qquad B \in \mathfrak{gl}(V).$$

Tada je $\mathrm{ad}\,A = L_A - R_A$ i operatori L_A i R_A komutiraju. Prema tome, ako je $k \in \mathbb{N}$ takav da je $A^k = 0$, dakle, i $(L_A)^k = (R_A)^k = 0$, onda je

$$(\mathrm{ad}\,A)^{2k-1} = (L_A - R_A)^{2k-1} = \sum_{j=0}^{2k-1} (-1)^j \binom{2k-1}{j} (L_A)^{2k-1-j}(R_A)^j = 0,$$

jer ili je $j \geq k$ ili je $2k - 1 - j \geq k$. Dakle, operator $\mathrm{ad}\,A$ je nilpotentan.

(c) Prema (a) i (b) operator $\mathrm{ad}\,A_s$ je poluprost i operator $\mathrm{ad}\,A_n$ je nilpotentan. Budući da operatori A_s i A_n komutiraju, operatori $\mathrm{ad}\,A_s$ i $\mathrm{ad}\,A_n$ također komutiraju. Napokon, vrijedi $\mathrm{ad}\,A = \mathrm{ad}\,A_s + \mathrm{ad}\,A_n$, pa iz jedinstvenosti u tvrdnji (a) teorema 3.3.2. slijedi da je $(\mathrm{ad}\,A)_s = \mathrm{ad}\,A_s$ i $(\mathrm{ad}\,A)_n = \mathrm{ad}\,A_n$.

Propozicija 3.3.6. *Neka je $\mathcal{A}$ konačnodimenzionalna algebra i neka je $D \in \mathrm{Der}(\mathcal{A})$ rascjepiva derivacija. Tada su $D_s, D_n \in \mathrm{Der}(\mathcal{A})$.*

Dokaz: Kako je $\mathrm{Der}(\mathcal{A})$ vektorski prostor i $D_n = D - D_s$, dovoljno je dokazati da je $D_s \in \mathrm{Der}(\mathcal{A})$. Imamo

$$\mathcal{A} = \sum_{\lambda \in Sp(D)} \dot{+}\, \mathcal{A}_{(\lambda)}(D) \tag{3.7}$$

i vrijedi $Sp(D_s) = Sp(D)$ i $D_s|\mathcal{A}_{(\lambda)}(D) = \lambda I_{\mathcal{A}_{(\lambda)}(D)}$.

Zadatak 3.3.1. *Indukcijom po $n \in \mathbb{N}$ dokažite da za bilo koje $\lambda, \mu \in K$ i $x, y \in \mathcal{A}$ vrijedi*

$$(D-(\lambda+\mu)I_{\mathcal{A}})^n(xy) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \left((D-\lambda I_{\mathcal{A}})^{n-j}x\right) \left((D-\mu I_{\mathcal{A}})^{j}y\right).$$

Nastavimo sada dokaz propozicije 3.3.6. Neka su $\lambda, \mu \in K$, $x \in \mathcal{A}_{(\lambda)}(D)$ i $y \in \mathcal{A}_{(\mu)}(D)$. Tada za neke $p, q \in \mathbb{N}$ vrijedi $(D-\lambda I_{\mathcal{A}})^p x = 0$ i $(D-\mu I_{\mathcal{A}})^q y = 0$. Sada u formuli u zadatku 3.3.1. za $n = p+q-1$ vidimo da je s desne strane $(D-\lambda I_{\mathcal{A}})^{p+q-1-j} = 0$ za $p+q-1-j \geq p$, odnosno, za $j \leq q-1$, i $(D-\mu I_{\mathcal{A}})^j y = 0$ za $j \geq q$. Prema tome, svi su članovi s desne strane jednaki 0, pa zaključujemo da je $(D-(\lambda+\mu)I_{\mathcal{A}})^{p+q-1}xy = 0$, a to znači da je $xy \in \mathcal{A}_{(\lambda+\mu)}(D)$. Međutim, za svaki $\nu \in K$ vrijedi $\mathcal{A}_{(\nu)}(D) = \mathcal{A}_{\nu}(D_s)$, pa je $D_s x = \lambda x$, $D_s y = \mu y$ i $D_s xy = (\lambda+\mu)xy$. Dakle,

$$D_s(xy) = (\lambda+\mu)xy = (\lambda x)y + x(\mu y) = (D_s x)y + x(D_s y).$$

Sada iz (3.7) slijedi da jednakost $D_s(xy) = (D_s x)y + x(D_s y)$ vrijedi za sve $x, y \in \mathcal{A}$, odnosno, $D_s \in \mathrm{Der}(\mathcal{A})$.

3.4 Jordanov rastav za nerascjepive operatore

U ovom odjeljku k je polje karakteristike 0 i K je algebarski zatvarač polja k, tj. algebarsko proširenje polja k koje je algebarski zatvoreno. Označimo sa $\mathrm{Aut}(K)$ grupu automorfizama polja K i sa $\mathrm{Aut}_k(K)$ Galoisovu grupu proširenja $K \supseteq k$, tj. podgrupu svih $k-$linearnih elemenata grupe $\mathrm{Aut}(K)$:

$$\mathrm{Aut}_k(K) = \{\sigma \in \mathrm{Aut}(K);\ \sigma(\lambda) = \lambda\ \forall \lambda \in k\}.$$

U ovom se odjeljku koristi sljedeći fundamentalni rezultat Galoisove teorije:

Teorem 3.4.1. *Vrijedi* $k = \{\lambda \in K;\ \sigma(\lambda) = \lambda\ \forall \sigma \in \mathrm{Aut}_k(K)\}$.

Neka je sada V vektorski prostor nad poljem k i $V^K \supseteq V$ vektorski prostor nad poljem K dobiven iz V proširenjem polja skalara (v. odjeljak 1.2.). Svaka je baza prostora V (nad poljem k) ujedno baza prostora V^K (nad poljem K). Budući da je svaki linearno nezavisan podskup vektorskog prostora sadržan u nekoj bazi tog prostora, zaključujemo da je podskup prostora V linearno nezavisan nad poljem k ako i samo ako je on linearno nezavisan nad poljem K.

Lema 3.4.2. *Za svaki* $\sigma \in \mathrm{Aut}_k(K)$ *postoji jedinstven* $k-$*linearan operator* $T(\sigma) : V^K \to V^K$ *takav da vrijedi*

$$T(\sigma)(\lambda v) = \sigma(\lambda)v \qquad \forall \lambda \in K \quad i \quad \forall v \in V.$$

Tada je $\sigma \mapsto T(\sigma)$ *reprezentacija Galoisove grupe* $\mathrm{Aut}_k(K)$ *na prostoru* $\left(V^K\right)_k$. *Nadalje, vrijedi*

$$V = \{v \in V^K;\ T(\sigma)v = v\ \forall \sigma \in \mathrm{Aut}_k(K)\}.$$

Dokaz: Neka je $\{e_j;\ j \in J\}$ baza prostora V. Tada je to ujedno baza prostora V^K. Stoga se svaki $v \in V^K$ jedinstveno zapisuje u obliku

$$v = \sum_{j \in J} \lambda_j e_j, \qquad \lambda_j \in K,$$

pri čemu je, naravno, skup $\{j \in J;\ \lambda_j \neq 0\}$ konačan. Za $\sigma \in \mathrm{Aut}_k(K)$ definiramo sada preslikavanje $T(\sigma) : V^K \to V^K$ sa

$$T(\sigma)v = \sum_{j \in J} \sigma(\lambda_j) e_j.$$

Tada sve tvrdnje neposredno slijede.

Podsjećamo da za **potprostor** W prostora V^K kažemo da je **definiran nad** poljem k ako je $W \cap V$ njegova $k-$struktura, a to je ispunjeno ako i samo ako je $W = \mathrm{span}_K\, W \cap V$.

Lema 3.4.3. *Potprostor* W *prostora* V^K *definiran je nad* k *ako i samo ako vrijedi* $T(\sigma)W = W$ *za svaki* $\sigma \in \mathrm{Aut}_k(K)$.

Dokaz: Pretpostavimo da je potprostor W definiran nad k. To znači da je $W = \mathrm{span}_K\, V \cap W$. Prema tome, svaki se vektor $w \in W$ može zapisati u obliku

$$w = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j w_j, \qquad \lambda_j \in K, \quad w_j \in V \cap W, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Tada za svaki $\sigma \in \mathrm{Aut}_k(K)$ vrijedi $T(\sigma)w = \sum_{j=1}^{n} \sigma(\lambda_j) w_j \in \mathrm{span}_K\, V \cap W = W$. Dakle, $T(\sigma)W \subseteq W$ za svaki $\sigma \in \mathrm{Aut}_k(K)$. No tada je i $T(\sigma)^{-1}W = T(\sigma^{-1})W \subseteq W$, pa slijedi $T(\sigma)W = W$ za svaki $\sigma \in \mathrm{Aut}_k(K)$.

Obratno, pretpostavimo sada da je W potprostor od V^K takav da je $T(\sigma)W = W$ za svaki $\sigma \in \mathrm{Aut}_k(K)$. Stavimo

$$W_{(k)} = W \cap V \qquad \text{i} \qquad W' = \mathrm{span}_K\, W_{(k)}.$$

Tada je očito $W' \cap V = W_{(k)}$, pa slijedi da je potprostor W' definiran nad k. Stavimo sada $X = V^K/W'$ i neka je $\pi : V^K \to X$ kvocijentno preslikavanje. Tada je X vektorski prostor nad K i iz činjenice da je potprostor W' od V^K definiran nad k lako slijedi da je $X_{(k)} = \pi(V)$ $k-$struktura prostora X. Nadalje, ako za $\sigma \in \mathrm{Aut}_k(K)$ sa $T'(\sigma) : X \to X$ označimo jedinstven $k-$linearan operator takav da je $T'(\sigma)(\lambda x) = \sigma(\lambda)x$ za svaki $\lambda \in K$ i svaki $x \in X_{(k)}$, onda vrijedi

$$T'(\sigma) \circ \pi = \pi \circ T(\sigma) \qquad \forall \sigma \in \mathrm{Aut}_k(K).$$

Neka je sada $\overline{W} = \pi(W)$. To je potprostor od X i iz gornje jednakosti slijedi da je $T'(\sigma)\overline{W} = \overline{W}$ za svaki $\sigma \in \mathrm{Aut}_k(K)$. Neka je $x \in \overline{W} \cap X_{(k)}$. Tada je $x = \pi(w) = \pi(v)$ za neke $w \in W$ i $v \in V$. Tada je $\pi(w - v) = 0$, dakle, $w - v \in W'$. Posebno, tada je $w - v \in W$. Odatle slijedi $v \in W$, pa je $v \in W_{(k)}$. Međutim, $W_{(k)} \subseteq W'$, pa slijedi $x = \pi(w) = 0$. Time smo dokazali da je $\overline{W} \cap X_{(k)} = \{0\}$. Da dokažemo tvrdnju treba pokazati da odatle slijedi da je $\overline{W} = \{0\}$. Doista, u tom je slučaju $W = W' = \mathrm{span}_K\, W \cap V$, odnosno, potprostor W je definiran nad k.

Time se dokaz svodi na slučaj kad je $W_{(k)} = W \cap V = \{0\}$ i tada treba pokazati da iz $\mathrm{Aut}_k(K)-$invarijantosti od W slijedi $W = \{0\}$.

Pretpostavimo, naprotiv, da je $W \neq \{0\}$. Neka je $w \in W \setminus \{0\}$. Možemo pisati

$$w = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j v_j, \qquad \lambda_j \in K, \quad v_j \in V, \quad j = 1, \ldots, n,$$

i pretpostavimo da je to prikaz s najmanjim mogućim $n \in \mathbb{N}$ i za sva moguće $w \in W \setminus \{0\}$. Tada su, naravno, $v_1, \ldots, v_n$ linearno nezavisni nad K i svi su koeficijenti $\lambda_j \neq 0$. Pomnožimo li sa $\frac{1}{\lambda_1}$ vidimo da možemo pretpostaviti da je $w = v_1$ ako je $n = 1$, odnosno,

$$w = v_1 + \sum_{j=2}^{n} \lambda_j v_j \quad \text{ako je} \quad n \geq 2.$$

U prvom je slučaju $0 \neq w \in W \cap V$, a to je suprotno pretpostavci $W \cap V = \{0\}$. Prema tome, nužno je $n \geq 2$. Za svaki $\sigma \in \mathrm{Aut}_k(K)$ tada imamo

$$T(\sigma)w = v_1 + \sum_{j=2}^{n} \sigma(\lambda_j) v_j$$

pa je

$$T(\sigma)w - w = \sum_{j=2}^{n} (\sigma(\lambda_j) - \lambda_j)\, v_j.$$

Buidući da je po pretpostavci $T(\sigma)w \in W$, slijedi i $T(\sigma)w - w \in W$. Kako gornja suma ima najviše $n - 1$ članova, zbog pretpostavke o minimalnosti n zaključujemo da je $T(\sigma)w - w = 0$, odnosno, zbog linearne nezavisnosti vektora $v_2, \ldots, v_n$ vrijedi $\sigma(\lambda_j) = \lambda_j$ za $j = 2, \ldots, n$. Budući da je $\sigma \in \mathrm{Aut}_k(K)$ bio proizvoljan, iz teorema 3.4.1. slijedi $\lambda_2, \ldots, \lambda_n \in k$. Dakle, $w \in W \cap V$ a to je u suprotnosti sa $W \cap V = \{0\}$. Ova kontradikcija pokazuje da je $W = \{0\}$ i time je lema dokazana.

Propozicija 3.4.4. *Neka je S skup i neka V $S-$modul nad poljem k. Proširenjem po $K-$linearnosti V^K postaje $S-$modul nad poljem K. Vrijedi:*

(a) *Ako je V^K prost $S-$modul onda je i V prost $S-$modul.*

(b) *Ako je V konačnodimenzionalan poluprost $S-$modul, onda je i $S-$modul V^K poluprost.*

Dokaz: (a) Neka je $W \neq \{0\}$ podmodul od V. Tada je $W^K \neq \{0\}$ podmodul od V^K, pa zbog prostote slijedi $W^K = V^K$. No odatle slijedi $W = V$. Dakle, modul V je prost.

(b) Pretpostavimo najprije da je V prost konačnodimenzionalan $S-$modul. Zbog konačne dimenzije sigurno postoji prost podmodul U od V^K. Lako se vidi da je i $T(\sigma)U$ prost podmodul od V^K za svaki $\sigma \in \mathrm{Aut}_k(K)$. Stavimo

$$W = \sum_{\sigma \in \mathrm{Aut}_k(K)} T(\sigma)U.$$

W je podmodul od V^K za koji vrijedi $T(\sigma)W = W$ za svaki $\sigma \in \mathrm{Aut}_k(K)$, pa po lemi 3.4.3. zaključujemo da je potprostor W definiran nad k. To znači da $W \cap V$ razapinje prostor W nad K i, posebno, vrijedi $W \cap V \neq \{0\}$. No $W \cap V$ je podmodul od V, pa zbog prostote modula V slijedi $W \cap V = V$, odnosno, $V \subseteq W$. To znači da je $W = V^K$. Prema tome, V^K je suma prostih podmodula $T(\sigma)U$ pa po teoremu 1.5.10. zaključujemo da je modul V^K poluprost.

Pretpostavimo sada da je V poluprost modul. Tada je prema teoremu 1.5.10. V direktna suma nekih njegovih prostih podmodula:

$$V = V_1 \dotplus \cdots \dotplus V_n.$$

Slijedi

$$V^K = V_1^K \dotplus \cdots \dotplus V_n^K.$$

Prema prvom dijelu dokaza tvrdnje (b) znamo da su moduli $V_1^K, \ldots, V_n^K$ poluprosti. Odatle slijedi da je i modul V^K poluprost.

Svaki linearan operator na konačnodimenzionalnom prostoru V jedinstveno se proširuje do $K-$linearnog operatora na prostoru V^K koji ćemo označavati sa A^K. Za dokaz sljedećeg teorema trebaju nam dvije leme.

Lema 3.4.5. *Minimalni polinom $\mu_{A^K} \in K[X]$ operatora A^K podudara se s minimalnim polinomom $\mu_A \in k[X]$ operatora A.*

Dokaz: Vrijedi $\left(A^j\right)^K = \left(A^K\right)^j$ za svaki $j \in \mathbb{Z}_+$, pa slijedi $P(A^K) = P(A)^K$ za svaki polinom $P \in k[X]$. Posebno, vrijedi $\mu_A(A^K) = 0$. Odatle slijedi da je polinom μ_A djeljiv s polinomom μ_{A^K} u prstenu $K[X]$.

Za polinom $Q \in K[X]$ i za $\sigma \in \mathrm{Aut}_k(K)$ označimo sa Q^σ polinom koji se iz Q dobiva primjenom automorfizma σ na svaki koeficijent polinoma Q :

$$Q = \alpha_0 + \alpha_1 X + \cdots + \alpha_n X^n \qquad \Longleftrightarrow \qquad Q^\sigma = \sigma(\alpha_0) + \sigma(\alpha_1)X + \cdots + \sigma(\alpha_n)X^n.$$

Posljedica je teorema 3.4.1. da je $Q \in k[X]$ ako i samo ako je $Q^\sigma = Q$ za svaki $\sigma \in \mathrm{Aut}_k(K)$. Za bilo koji $v \in V$ imamo

$$Q^\sigma(A^K)v = \sigma(\alpha_0)v + \sigma(\alpha_1)Av + \cdots + \sigma(\alpha_n)A^n v = T(\sigma)Q(A^K)v.$$

Budući da V razapinje prostor V^K nad poljem K, slijedi da je $Q^\sigma(A^K) = T(\sigma)Q(A^K)$ za svaki $\sigma \in \mathrm{Aut}_k(K)$. Odatle posebno slijedi da je $(\mu_{A^K})^\sigma(A^K) = T(\sigma)\mu_{A^K}(A^K) = 0$, dakle, polinom $(\mu_{A^K})^\sigma$ je djeljiv s polinomom μ_{A^K}. Budući da je polinom μ_{A^K} normiran i ima isti stupanj kao i $(\mu_{A^K})^\sigma$, slijedi jednakost $(\mu_{A^K})^\sigma = \mu_{A^K}$. Kako je $\sigma \in \mathrm{Aut}_k(K)$ bio proizvoljan, zaključujemo da je $\mu_{A^K} \in k[X]$. Očito vrijedi $\mu_{A^K}(A) = 0$, dakle, polinom μ_{A^K} djeljiv je s polinomom μ_A u prstenu $k[X]$. Dvije dokazane djeljivosti daju jednakost $\mu_{A^K} = \mu_A$.

Lema 3.4.6. . *Pretpostavimo da je minimalni polinom* μ_A *operatora* A *ireducibilan u prstenu* $k[X]$ *i neka je* $m = \deg \mu_A$.

(a) *Za svaki* $v \in V \setminus \{0\}$ *vektori* $v, Av, \dots, A^{m-1}v$ *su linearno nezavisni. Štoviše, ako je* W $A-$*invarijantan potprostor od* V *i ako je* $v \in V \setminus W$*, onda su vektori*

$$v + W, Av + W, \dots, A^{m-1}v + W$$

u kvocijentnom prostoru V/W *linearno nezavisni.*

(b) $A-$*invarijantan potprostor* W *od* V *je prost* $A-$*modul ako i samo ako je* $\dim W = m$.

(c) *Dimenzija* n *prostora* V *djeljiva je sa* m *i ako je* $n = ms$ *postoje prosti* $A-$*podmoduli* $V_1, \dots, V_s$ *od* V *takvi da je*

$$V = V_1 \dot{+} \cdots \dot{+} V_s.$$

Posebno, operator A *je poluprost.*

Dokaz: (a) Neka je $v \in V \setminus \{0\}$ i neka je $k \in \mathbb{N}$ najmanji prirodan broj k takav da je vektor $A^k v$ linearna kombinacija vektora $v, Av, \dots, A^{k-1}v$. Neka je

$$A^k v = \alpha_1 A^{k-1}v + \cdots + \alpha_{k-1}Av + \alpha_k v.$$

Stavimo

$$\mu_v(X) = X^k - \alpha_1 X^{k-1} - \cdots - \alpha_{k-1}X - \alpha_k.$$

Tada vrijedi $\mu_v(A)v = 0$ i lako se vidi da ako je $P \in k[X]$ polinom takav da je $P(A)v = 0$, onda je taj polinom djeljiv s polinomom μ_v. Budući da vrijedi $\mu_A(A) = 0$, slijedi da je minimalni polinom μ_A djeljiv s polinomom μ_v, a kako je μ_A ireducibilan polinom (i oba polinoma μ_A i μ_v su normirani) zaključujemo da je $\mu_v = \mu_A$. Dakle, vektori $v, Av \dots, A^{m-1}v$ su linearno nezavisni.

Pretpostavimo sada da je W pravi $A-$invarijantan potprostor od V i neka je $v \in V \setminus W$. Definiramo operator B na kvocijentnom prostoru V/W sa

$$B(x + W) = Ax + W, \qquad x \in V.$$

Tada je $B^k(x + W) = A^k x + W$, dakle, $P(B)(x + W) = P(A)x + W$ za svaki polinom $P \in k[X]$ i svaki vektor $x \in V$. Odatle slijedi da je $\mu_A(B) = 0$, dakle, polinom μ_A djeljiv je s minimalnim polinomom μ_B u prstenu $k[X]$. Budući da je polinom μ_A po pretpostavci ireducibilan u prstenu $k[X]$ slijedi da je $\mu_B = \mu_A$. Primijenimo li dokazano na operator B zaključujemo da su vektori

$$v + W, B(v + W), \dots, B^{m-1}(v + W)$$

u kvocijentnom prostoru V/W linearno nezavisni. No to su upravo vektori

$$v + W, Av + W, \dots, A^{m-1}v + W.$$

(b) Neka je W prost $A-$podmodul od V i neka je $v \in W \setminus \{0\}$. Iz (a) slijedi da su vektori $v, Av, \dots, A^{m-1}v$ linearno nezavisni. Oni razapinju $m-$dimenzionalan potprostor U od W, i taj je potprostor $A-$invarijantan budući da je $A^m v$ linearna kombinacija vektora $v, Av, \dots, A^{m-1}v$. Iz prostote $A-$modula W slijedi $U = W$, dakle, $\dim W = m$.

Pretpostavimo sada da je W $m-$dimenzionalan $A-$podmodul od V. Prema dokazanom svaki je njegov prost $A-$podmodul iste dimenzije, dakle, jednak W. Prema tome, $A-$modul W je prost.

(c) Neka je $\mathcal{V}$ skup svih $A-$podmodula od V za koje tvrdnja (c) vrijedi. Taj je skup neprazan jer u njemu je svaki prost $A-$podmodul od V. Pretpostavimo da $V \notin \mathcal{V}$ i neka je W maksimalni element od $\mathcal{V}$ u odnosu na inkluziju. Za vektor $v \in V \setminus W$ prema tvrdnji (a) vektori

$$v + W, Av + W, \ldots, A^{m-1}v + W$$

kvocijentnog prostora V/W linearno su nezavisni. To znači da za potprostor U od V, razapet vektorima $v, Av, \ldots, A^{m-1}v$, vrijedi $U \cap W = \{0\}$. Nadalje, U je prost podmodul od V pa slijedi da je $W \dot{+} U \in \mathcal{V}$, a to je suprotno pretpostavci o maksimalnosti W u skupu $\mathcal{V}$. Ova kontradikcija pokazuje da je $V \in \mathcal{V}$, odnosno, tvrdnja (c) je dokazana.

Teorem 3.4.7. *Neka je A linearan operator na prostoru V nad poljem k karakteristike 0 i neka je K algebarski zatvarač polja k.*

(a) *Operator A je nilpotentan ako i samo ako je operator A^K nilpotentan.*

(b) *Operator A je poluprost ako i samo ako je operator A^K poluprost (odnosno, dijagonalizabilan).*

Dokaz: Tvrdnja (a) je trivijalna jer je $(A^n)^K = \left(A^K\right)^n$ za svaki $n \in \mathbb{N}$.

(b) Iz tvrdnje (b) teorema 3.4.4. slijedi da ako je A poluprost operator onda je i A^K poluprost operator.

Pretpostavimo sada da je A^K poluprost operator. Tada prema propoziciji 3.3.1. minimalni polinom $\mu_{A^K} = \mu_A$ ima jednostruke nultočke, odnosno, vrijedi

$$\mu_A(X) = \prod_{\lambda \in Sp(A^K)} (X - \lambda).$$

Očito je $Sp\left(A^K\right)$ invarijantan s obzirom na djelovanje grupe $\mathrm{Aut}_k(K)$. Doista, za $\sigma \in \mathrm{Aut}_k(K)$ i $\lambda \in K$ vrijedi $\mu_A(\lambda) = 0$ ako i samo ako je $\mu_A(\sigma(\lambda)) = 0$. To znači da je spektar $Sp\left(A^K\right)$ unija međusobno disjunktnih $\mathrm{Aut}_k(K)-$orbita $\mathcal{O}_1, \ldots, \mathcal{O}_s$. Definiramo polinome $\mu_1, \ldots, \mu_s \in K[X]$ sa

$$\mu_j(X) = \prod_{\lambda \in \mathcal{O}_j} (X - \lambda), \qquad j = 1, \ldots, s.$$

Iz definicije se vidi da je $\mu_j^\sigma = \mu_j$ za svaki $\sigma \in \mathrm{Aut}_k(K)$ (naime, σ permutira elemente orbite $\mathcal{O}_j$). Dakle, $\mu_j \in k[X]$ za $j = 1, \ldots, s$. Primijetimo sada da su polinomi $\mu_1, \ldots, \mu_s$ ireducibilni u prstenu $k[X]$. Doista, neka je $\nu \in k[X]$ nekonstantni normirani djelitelj polinoma μ_j. Tada ν je neka od nultočaka $\lambda \in \mathcal{O}_j$ polinoma μ_j nultočka i od ν. No tada su sve točke iz orbite $\mathcal{O}_j$ nultočke od ν, pa slijedi $\nu = \mu_j$.

Primijenimo sada teorem 3.2.1. na rastav $\mu_A = \mu_1 \cdots \mu_s$. Naime, za $i \neq j$ polinomi μ_i i μ_j su međusobno različiti ireducibilni polinomi u $k[X]$, dakle, oni su relativno prosti. Ako stavimo $V_j = \mathrm{Ker}\, \mu_j(A)$, $j = 1, \ldots, s$, onda su $V_1, \ldots, V_s$ $A-$invarijantni potprostori od V, prostor V je njihova direktna suma, minimalni polinom $\mu_{A|V_j}$ restrikcije $A|V_j$ jednak je μ_j i ako je W bilo koji $A-$invarijantni potprostor od V, onda vrijedi

$$W = W \cap V_1 \dot{+} \cdots \dot{+} W \cap V_s.$$

Odatle slijedi da je operator A poluprost ako i samo ako su njegove restrikcije $A|V_1, \ldots, A|V_s$ poluprosti operatori. No to slijedi iz tvrdnje (c) leme 3.4.6. budući da je $\mu_{A|V_j} = \mu_j$ ireducibilan polinom u prstenu $k[X]$.

Za generalizaciju teorema o Jordanovom rastavu na nerascjepive operatore treba nam još nekoliko pomoćnih tvrdnji.

Lema 3.4.8. *Polinom $0 \neq P \in k[X]$ je separabilan ako i samo ako su polinomi P i P' (derivacija od P) relativno prosti.*

Dokaz: Polinomi P i P' su relativno prosti u $k[X]$ ako i samo ako je $k[X] = k[X]P + k[X]P'$. No to je ekvivalentno sa $K[X] = K[X]P + K[X]P'$ što znači da su P i P' relativno prosti u $K[X]$. Prema tome, u dokazu možemo pretpostavljati da je polje $k = K$ algebarski zatvoreno.

Pretpostavimo da je $P \in K[X]$ separabilan. Možemo uzeti da je polinom P normiran. Tada imamo faktorizaciju

$$P(X) = (X - \lambda_1) \cdots (X - \lambda_n)$$

za neke međusobno različite $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$. Pretpostavimo da polinomi P i P' nisu relativno prosti. To znači da je polinom P' djeljiv s nekim $X - \lambda_j$, odnosno, da je $P'(\lambda_j) = 0$. Međutim, ako napišemo

$$P(X) = (X - \lambda_j)Q(X) \qquad \text{za} \quad Q(X) = (X - \lambda_1) \cdots (X - \lambda_{j-1})(X - \lambda_{j+1}) \cdots (X - \lambda_n) \in K[X],$$

onda je $P'(X) = Q(X) + (X - \lambda_j)Q'(X)$, pa slijedi $P'(\lambda_j) = Q(\lambda_j) \neq 0$. Ova kontradikcija pokazuje da su polinomi P i P' relativno prosti.

Obratno, pretpostavimo sada da polinom P nije separabilan. Tada postoji $\lambda \in K$ i $Q \in K[X]$ takvi da je $P(X) = (X - \lambda)^2 Q(X)$. Tada je

$$P'(X) = 2(X - \lambda)Q(X) + (X - \lambda)^2 Q'(X).$$

To pokazuje da su P i P' djeljivi sa $X - \lambda$, dakle, nisu relativno prosti.

Za $P, Q \in k[X]$ sa $P \circ Q$ označavamo polinom iz $k[X]$ definiran sa $(P \circ Q)(X) = P(Q(X))$.

Lema 3.4.9. *Neka je $P \in k[X]$ separabilan polinom i neka je $n \in \mathbb{N}$. Pretpostavimo da postoji polinom $Q \in k[X]$ takav da je $P \circ Q$ sadržan u idealu $k[X]P^n$. Tada postoji polinom $R_n \in k[X]$ takav da je $P \circ (Q - R_n P^n)$ sadržan u idealu u $k[X]P^{n+1}$.*

Dokaz: U prstenu $k[X, Y]$ možemo pisati (Taylorova formula)

$$P(X + Y) = P(X) + P'(X)Y + S(X, Y)Y^2,$$

gdje je $S \in K[X, Y]$. Dakle, za svaki polinom $R \in k[X]$ imamo

$$P \circ (Q - RP^n) = P \circ Q - (P' \circ Q)RP^n + TP^{n+1} \tag{3.8}$$

za neki $T \in k[X]$. Po pretpostavci je $P \circ Q = UP^n$ za neki $U \in k[X]$. Budući da su po lemi 3.4.8. polinomi P i P' relativno prosti, postoje $A, B \in K[X]$ takvi da je $1 = AP' + BP$. Odatle je

$$1 = (A \circ Q)(P' \circ Q) + (B \circ Q)(P \circ Q).$$

Stavimo li $R_n = (A \circ Q)U$, imamo

$$U = (A \circ Q)(P' \circ Q)U + (B \circ Q)(P \circ U)U = (P' \circ Q)R_n + (B \circ U)UP^n,$$

a odatle je

$$UP^n - (P' \circ Q)R_n P^n = (B \circ U)UP^{2n}.$$

Sada iz (3.8) za $R = R_n = (A \circ Q)U$ slijedi

$$P \circ (Q - R_n P^n) = P \circ Q - (P' \circ Q)R_n P^n + TP^{n+1} =$$

$$= UP^n - (P' \circ Q)R_n P^n + TP^{n+1} = (B \circ U)UP^{2n} + TP^{n+1}.$$

Kako je $2n \geq n + 1$, slijedi $P \circ (Q - R_n P^n) \in k[X]P^{n+1}$. Odatle se indukcijom izvodi:

Lema 3.4.10. *Neka je $P \in k[X]$ separabilan polinom i neka je $n \in \mathbb{Z}_+$. Tada postoje polinomi $R_0 = 0, R_1, \ldots, R_n$ takvi da je polinom*

$$P\left(X - \sum_{j=0}^{n} R_j(X)P(X)^j\right)$$

sadržan u idealu $k[X]P^{n+1}$.

Teorem 3.4.11. (**Jordanov rastav**) *Neka je A linearan operator na konačnodimenzionalnom prostoru V nad poljem k karakteristike 0. Postoje jedinstveni linearni operatori A_s i A_n na V takvi da vrijedi:*

(*a*) *A_s je poluprost.*

(*b*) *A_n je nilpotentan.*

(*c*) *$A_sA_n = A_nA_s$.*

(*d*) *$A = A_s + A_n$.*

Nadalje, postoje polinomi $R, S \in k[X]$ bez konstantnog člana takvi da je $A_s = R(A)$ i $A_n = S(A)$. Posebno, potprostor W od V je $A-$invarijantan ako i samo ako je on A_s-invarijantan i A_n-invarijantan.

Dokaz: Neka su $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$ sve međusobno različite svojstvene vrijednosti operatora A^K, tj. sve nultočke minimalnog polinoma $P = \mu_A$ operatora A. Stavimo $P(X) = (X-\lambda_1)\cdots(X-\lambda_n)$. Za neki $p \in \mathbb{N}$ svojstveni polinom od A dijeli polinom P^p, dakle, $P(A)^p = 0$. Prema lemi 3.4.10. postoje polinomi $R_0 = 0, R_1, \ldots, R_{p-1} \in k[X]$ takvi da je polinom $P\left(X - \sum_{j=0}^{p-1} R_j(X)P(X)^j\right)$ sadržan u idealu generiranom sa P^p. No tada je $P\left(A - \sum_{j=0}^{p-1} R_j(A)P(A)^j\right) = 0$. Stavimo

$$A_n = \sum_{j=0}^{p-1} R_j(A)P(A)^j \qquad \text{i} \qquad A_s = A - A_n = A - \sum_{j=0}^{p-1} R_j(A)P(A)^j.$$

Tada je $P(A_s) = 0$, dakle, polinom P djeljiv je s minimalnim polinomom μ_{A_s} operatora A_s, a to znači da je μ_{A_s} separabilan polinom. Međutim, $\mu_{A_s} = \mu_{A_s^K}$. To znači da je operator A^K poluprost, a prema tvrdnji (*b*) teorema 3.4.7. operator A_s je poluprost. Nadalje, kako je $R_0 = 0$, vrijedi $A_n = P(A)Q(A)$ za neki polinom $Q \in k[X]$, pa slijedi $A_n^p = P(A)^pQ(A)^p = 0$. Dakle, operator A_n je nilpotentan. Time je dokazana egzistencija takvih operatora A_s i A_n, a jedinstvenost se dokazuje sasvim analogno kao u teoremu 3.3.2.

Poglavlje 4

NEKE KLASE LIEJEVIH ALGEBRI

4.1 Nilpotentne Liejeve algebre

U daljnjem ćemo promatrati samo **konačnodimenzionalne Liejeve algebre.** Nadalje, promatrat ćemo isključivo Liejeve algebre i vektorske prostore **nad poljima karakteristike** 0.

Strukturu Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ proučavat ćemo prije svega razmatranjem tzv. **adjungirane reprezentacije** $x \mapsto \operatorname{ad} x$, $x \in \mathfrak{g}$, Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ na vektorskom prostoru $\mathfrak{g}$. Preko te reprezentacije Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ postaje $\mathfrak{g}-$modul. Uočimo da su ideali u Liejevoj algebri $\mathfrak{g}$ upravo $\mathfrak{g}-$podmoduli $\mathfrak{g}-$modula $\mathfrak{g}$. U ovom ćemo odjeljku proučiti Liejeve algebre kod kojih su svi operatori adjungirane reprezentacije nilpotentni. Takve nazivamo **nilpotentne Liejeve algebre**. Dakle, $\mathfrak{g}$ je nilpotentna Liejeva algebra ako je operator $\operatorname{ad} x : y \mapsto [x, y]$, $y \in \mathfrak{g}$, nilpotentan $\forall x \in \mathfrak{g}$. Svaka je komutativna Liejeva algebra naravno nilpotentna. Neka je V konačnodimenzionalan vektorski prostor. Niz drugih primjera nilpotentnih Liejevih algebri dobivamo na temelju sljedeće propozicije:

Propozicija 4.1.1. *Neka je V konačnodimenzionalan vektorski prostor. Ako je $\mathfrak{g}$ Liejeva podalgebra od $\mathfrak{gl}(V)$ koja se sastoji od nilpotentnih operatora, onda je $\mathfrak{g}$ nilpotentna Liejeva algebra.*

Dokaz: Neka je $\mathfrak{g}$ Liejeva podalgebra od $\mathfrak{gl}(V)$ koja se sastoji od nilpotentnih operatora. Prema tvrdnji (b) propozicije 3.3.5. $ad_{\mathfrak{gl}(V)} A$ je nilpotentan operator na prostoru $\mathfrak{gl}(V)$ za svaki $A \in \mathfrak{g}$. No tada je restrikcija $(ad_{\mathfrak{gl}(V)} A)|\mathfrak{g} = ad_{\mathfrak{g}} A$ nilpotentan operator za svaki $A \in \mathfrak{g}$. Dakle, $\mathfrak{g}$ je nilpotentna Liejeva algebra.

Propozicija 4.1.2. *Neka je $\mathfrak{g}$ nilpotentna Liejeva algebra, $\mathfrak{h}$ njena podalgebra i $\mathfrak{j}$ ideal u $\mathfrak{g}$. Tada su Liejeve algebre $\mathfrak{h}$ i $\mathfrak{g}/\mathfrak{j}$ nilpotentne.*

Dokaz: Za $x \in \mathfrak{h}$ operator $ad_{\mathfrak{h}} x$ je restrikcija na $\mathfrak{h}$ nilpotentnog operatora $ad_{\mathfrak{g}} x$, dakle, $ad_{\mathfrak{h}} x$ je nilpotentan. Dakle, Liejeva algebra $\mathfrak{h}$ je nilpotentna. Neka je $\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}/\mathfrak{j}$ kanonski epimorfizam koji elementu $x \in \mathfrak{g}$ pridružuje njegovu klasu $x + \mathfrak{j}$ u $\mathfrak{g}/\mathfrak{j}$. Neka je $y \in \mathfrak{g}/\mathfrak{j}$ i neka $x \in \mathfrak{g}$ takav da je $y = \varphi(x)$. Tada se direktno provjerava da vrijedi $(ad_{\mathfrak{g}/\mathfrak{j}} y) \circ \varphi = \varphi \circ (ad_{\mathfrak{g}} x)$. Odatle je za svaku potenciju $(ad_{\mathfrak{g}/\mathfrak{j}} y)^m \circ \varphi = \varphi \circ (ad_{\mathfrak{g}} x)^m$. Dakle, ako je $m \in \mathbb{N}$ takav da je $(ad_{\mathfrak{g}} x)^m = 0$, onda je $(ad_{\mathfrak{g}/\mathfrak{j}} y)^m \circ \varphi = 0$, a odatle je $(ad_{\mathfrak{g}/\mathfrak{j}} y)^m = 0$ jer je $\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}/\mathfrak{j}$ surjekcija. Dakle, kvocijentna Liejeva algebra $\mathfrak{g}/\mathfrak{j}$ je nilpotentna.

Neka je π reprezentacija Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ na vektorskom prostoru V. Kažemo da je π **nil−reprezentacija** ako su svi operatori $\pi(x)$, $x \in \mathfrak{g}$, nilpotentni. Centralni rezultat u teoriji nilpotentnih Liejevih algebri je **Engelov teorem:**

Teorem 4.1.3. *Neka je π nil−reprezentacija Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ na konačnodimenzionalnom vektorskom prostoru $V \neq \{0\}$. Tada postoji $v \in V \setminus \{0\}$ takav da je $\pi(x)v = 0\ \forall x \in \mathfrak{g}$.*

Dokaz: Neka je $\mathfrak{a} = \operatorname{Ker}\pi$. Tada π inducira vjernu (tj. injektivnu) reprezentaciju kvocijentne algebre $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$. Kako su svi operatori iz $\operatorname{Im}\pi$ nilpotentni, prema tvrdnji (b) propozicije 4.1.1. Liejeva algebra $\operatorname{Im}\pi$, dakle, i njoj izomorfna Liejeva algebra $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$, je nilpotentna. To pokazuje da nije smanjenje općenitosti ako pretpostavimo da je Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ nilpotentna. U daljnjem to pretpostavljamo i provodimo dokaz indukcijom po $\dim\mathfrak{g}$. Za $\dim\mathfrak{g} = 1$ tvrdnja je trivijalna, jer svaki nilpotentan operator poništava neki vektor $\neq 0$. Pretpostavimo da je $n \geq 2$ i da je teorem dokazan za nilpotentne Liejeve algebre dimenzije $< n$. Neka je $\dim\mathfrak{g} = n$. Označimo sa $\mathcal{G}$ skup svih Liejevih podalgebri $\mathfrak{h}$ od $\mathfrak{g}$ takvih da je $0 < \dim\mathfrak{h} < n$. Tada je $Kx \in \mathcal{G}$ za svaki $x \in \mathfrak{g} \setminus \{0\}$, dakle, skup $\mathcal{G}$ je neprazan. Neka je $\mathfrak{h} \in \mathcal{G}$ takva da je $\dim\mathfrak{h} \geq \dim\mathfrak{h}'$ $\forall\mathfrak{h}' \in \mathcal{G}$. Tvrdimo da tada $\mathfrak{h}$ ideal u $\mathfrak{g}$ dimenzije $n-1$. Da to dokažemo, promatrajmo vektorski prostor $W = \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$. Ako je $x \in \mathfrak{h}$, $\operatorname{ad}x$ je nilpotentan operator na $\mathfrak{g}$ u odnosu na koji je potprostor $\mathfrak{h}$ invarijantan. Stoga $\operatorname{ad}x$ inducira nilpotentan operator $\rho(x)$ na kvocijentnom prostoru W. Sada je ρ nil$-$reprezentacija Liejeve algebre $\mathfrak{h}$ na prostoru $W \neq \{0\}$. Po pretpostavci indukcije postoji $w \in W \setminus \{0\}$ takav da je $\rho(x)w = 0$ $\forall x \in \mathfrak{h}$. Neka je $y \in \mathfrak{g} \setminus \mathfrak{h}$ takav da je $w = y + \mathfrak{h}$. Iz $\rho(x)w = 0$ slijedi da je $[x, y] \in \mathfrak{h}$ $\forall x \in \mathfrak{h}$. To pokazuje da je $Ky \dotplus \mathfrak{h}$ Liejeva podalgebra od $\mathfrak{g}$ u kojoj je $\mathfrak{h}$ ideal. Međutim, zbog izbora $\mathfrak{h}$ zaključujemo da je $\mathfrak{g} = Ky \dotplus \mathfrak{h}$. Dakle, stvarno je $\dim\mathfrak{h} = n - 1$ i $\mathfrak{h}$ je ideal u $\mathfrak{g}$. Sada iz pretpostavke indukcije slijedi da je potprostor

$$V' = \{v \in V;\ \pi(x)v = 0\ \forall x \in \mathfrak{h}\}$$

prostora V različit od $\{0\}$. Neka je i dalje $y \in \mathfrak{g}$ takav da je $\mathfrak{g} = Ky \dotplus \mathfrak{h}$. Za $v \in V'$ i $x \in \mathfrak{h}$ imamo

$$\pi(x)\pi(y)v = \pi(y)\pi(x)v + \pi([x, y])v = 0$$

jer je $[x, y] \in \mathfrak{h}$. To pokazuje da je $\pi(y)V' \subseteq V'$. Kako je operator $\pi(y)$ nilpotentan, postoji $v \in V' \setminus \{0\}$ takav da je $\pi(y)v = 0$. No tada je $\pi(x)v = 0$ $\forall x \in \mathfrak{g}$.

Engelov teorem 4.1.3. ima sljedeću važnu posljedicu:

Teorem 4.1.4. *Neka je π nil$-$reprezentacija Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ na konačnodimenzionalnom vektorskom prostoru $V \neq \{0\}$. Stavimo*

$$V_0 = \{0\}, \qquad V_i = \{v \in V;\ \pi(x)v \in V_{i-1}\ \forall x \in \mathfrak{g}\}, \quad i \geq 1.$$

(a) *Za neki $s \leq \dim V$ vrijedi $V_0 \subsetneqq V_1 \subsetneqq \cdots \subsetneqq V_s = V$.*

(b) *Ako su $x_1, \ldots, x_s \in \mathfrak{g}$, onda je $\pi(x_1)\cdots\pi(x_s) = 0$.*

(c) *Postoji baza od V u odnosu na koju svaki operator $\pi(x)$, $x \in \mathfrak{g}$, ima striktno gornje trokutastu matricu.*

Dokaz: (a) Prema Engelovom teoremu 4.1.3. vrijedi $V_1 \neq \{0\}$. Ako je $V_1 \neq V$, primjena Engelovog teorema na kvocijentnu reprezentaciju π_{V/V_1}, koja je također nil$-$reprezentacija, pokazuje da je $V_2 \supsetneqq V_1$. Ako je $V_2 \neq V$, promatramo kvocijentnu reprezentaciju π_{V/V_2}. Kako je dimenzija prostora V konačna, nakon $s \leq \dim V$ koraka dobivamo $V_s = V$.

Tvrdnja (b) je neposredna posljedica definicije potprostora V_i i tvrdnje (a).

Napokon, ako je $n_i = \dim V_i$ izaberemo bazu $\{v_1, \ldots, v_n\}$ od V takvu da je

$$V_i = span\,\{v_1, \ldots, v_{n_i}\}, \qquad i = 1, \ldots, s.$$

U odnosu na tu bazu svaki operator $\pi(x)$, $x \in \mathfrak{g}$, ima striktno gornje trokutastu matricu; štoviše, te matrice imaju na dijagonali redom nul$-$blokove formata $(n_i - n_{i-1}) \times (n_i - n_{i-1})$, $i = 1, \ldots, s$.

Budući da su ideali u Liejevoj algebri upravo invarijantni potprostori u odnosu na adjungiranu reprezentaciju, neposredna primjena teorema 4.1.4. daje sljedeći ključni rezultat o strukturi nilpotentnih Liejevih algebri:

Teorem 4.1.5. *Neka je* $\mathfrak{g} \neq \{0\}$ *nilpotentna Liejeva algebra. Stavimo*

$$\mathfrak{g}_0 = \{0\}, \qquad \mathfrak{g}_i = \{x \in \mathfrak{g};\ [x, \mathfrak{g}] \subseteq \mathfrak{g}_{i-1}\}, \quad i \geq 1.$$

(*a*) *Postoji* $s \leq \dim \mathfrak{g}$ *takav da je* $\mathfrak{g}_0 \subsetneq \mathfrak{g}_1 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{g}_s = \mathfrak{g}$.

(*b*) $\mathfrak{g}_i$ *su ideali u* $\mathfrak{g}$.

(*c*) *Za* $x_1, \ldots, x_s \in \mathfrak{g}$ *je* $(\operatorname{ad} x_1) \cdots (\operatorname{ad} x_s) = 0$.

(*d*) *Postoji baza u* $\mathfrak{g}$ *u odnosu na koju svi operatori* $\operatorname{ad} x$, $x \in \mathfrak{g}$, *imaju striktno gornje trokutastu matricu.*

Uočimo da za proizvoljnu Liejevu algebru $\mathfrak{g}$ možemo induktivno definirati rastući niz ideala $\mathfrak{g}_i$, $i \in \mathbb{Z}_+$, kao u teoremu 4.1.4.:

$$\mathfrak{g}_0 = \{0\}, \qquad \mathfrak{g}_i = \{x \in \mathfrak{g};\ [x, \mathfrak{g}] \subseteq \mathfrak{g}_{i-1}\}, \quad i \in \mathbb{N}.$$

Tada je posebno

$$\mathfrak{g}_1 = \{x \in \mathfrak{g};\ [x, y] = 0\ \forall y \in \mathfrak{g}\} = Z(\mathfrak{g})$$

centar Liejeve algebre $\mathfrak{g}$. Nadalje, neka $\pi_i : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}/\mathfrak{g}_{i-1}$ kanonski epimorfizam. Tada je

$$\mathfrak{g}_i = \{x \in \mathfrak{g};\ \pi_i([x, y]) = 0\ \forall y \in \mathfrak{g}\} = \{x \in \mathfrak{g};\ [\pi_i(x), \pi_i(y)] = 0\ \forall y \in \mathfrak{g}\} =$$

$$= \{x \in \mathfrak{g};\ \pi_i(x) \in Z(\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_{i-1})\} = \pi_i^{-1}(Z(\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_{i-1})).$$

Dakle, $\mathfrak{g}_i$ je totalni invers u $\mathfrak{g}$ centra kvocijentne algebre $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_{i-1}$. Zbog toga se ovako definiran rastući niz ideala

$$\{0\} = \mathfrak{g}_0 \subseteq \mathfrak{g}_1 \subseteq \mathfrak{g}_2 \subseteq \cdots\cdots$$

zove se **centralni uzlazni niz** u algebri $\mathfrak{g}$. Očito se zbog konačne dimenzije taj niz stabilizira na nekom mjestu. Prema teoremu 4.1.5. za nilpotentnu Liejevu algebru $\mathfrak{g}$ postoji s takav da je $\mathfrak{g}_s = \mathfrak{g}$. S druge strane, ako pretpostavimo da za Liejevu algebru $\mathfrak{g}$ postoji s takav da je $\mathfrak{g}_s = \mathfrak{g}$, onda očito vrijedi tvrdnja (*c*) teorema 4.1.5. i, posebno, $(\operatorname{ad} x)^s = 0\ \forall x \in \mathfrak{g}$. Zaključujemo da je Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ nilpotentna.

Definiramo sada za proizvoljnu Liejevu algebru $\mathfrak{g}$ tzv. **centralni silazni niz** ideala

$$\mathfrak{g}^0 = \mathfrak{g}, \qquad \mathfrak{g}^i = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^{i-1}] \quad i \geq 1.$$

Tada je očito $\mathfrak{g}^i \subseteq \mathfrak{g}^{i-1}$, dakle, radi se o padajućem nizu ideala. Ako je $\mathfrak{g}$ nilpotentna i $\mathfrak{g}_s = \mathfrak{g}$, onda vrijedi $\mathfrak{g}^i \subseteq \mathfrak{g}_{s-i}$. Doista,

$$\mathfrak{g}^1 = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_s] \subseteq \mathfrak{g}_{s-1},$$

a iz pretpostavke $\mathfrak{g}^i \subseteq \mathfrak{g}_{s-i}$ za neki i imamo korak indukcije

$$\mathfrak{g}^{i+1} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^i] \subseteq [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_{s-i}] \subseteq \mathfrak{g}_{s-i-1} = \mathfrak{g}_{s-(i+1)}.$$

Posebno, dobivamo da je $\mathfrak{g}^s \subseteq \mathfrak{g}_0 = \{0\}$, dakle, $\mathfrak{g}^s = \{0\}$. Obratno, pretpostavimo da je $\mathfrak{g}^s = \{0\}$ za neki s. Za $x \in \mathfrak{g}$ je $(\operatorname{ad} x)\mathfrak{g}^i \subseteq \mathfrak{g}^{i+1}$, pa slijedi $(\operatorname{ad} x)^s\mathfrak{g} = (\operatorname{ad} x)^s\mathfrak{g}^0 \subseteq \mathfrak{g}^s = \{0\}$. Dakle, $(\operatorname{ad} x)^s = 0$ $\forall x \in \mathfrak{g}$, pa zaključujemo da je Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ nilpotentna. Time smo dokazali:

Teorem 4.1.6. *Za Liejevu algebru $\mathfrak{g}$ sljedeća su tri svojstva međusobno ekvivalentna:*

(a) *Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ je nilpotentna.*

(b) *Postoji $p \in \mathbb{N}$ takav da je $\mathfrak{g}_p = \mathfrak{g}$.*

(c) *Postoji $q \in \mathbb{N}$ takav da je $\mathfrak{g}^q = \{0\}$.*

Korolar 4.1.7. *Neka je $\mathfrak{g}$ Liejeva algbera takva da je kvocijentna Liejeva algebra $\mathfrak{g}/Z(\mathfrak{g})$ nilpotentna. Tada je i Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ nilpotentna.*

Zadatak 4.1.1. *Dokažite korolar 4.1.7.*

Uputa: Koristite karakterizaciju (b) u teoremu 4.1.6. za nilpotentnost Liejeve algebre. Druga je mogućnost, da dokažete da za $x \in \mathfrak{g}$ iz nilpotentnosti operatora $ad_{\mathfrak{g}/Z(\mathfrak{g})}(x + Z(\mathfrak{g}))$ slijedi nilpotentnost operatora $ad_{\mathfrak{g}}\, x$.

Korolar 4.1.8. *Neka je $\mathfrak{g}$ Liejeva algebra nad poljem k i neka je K proširenje polja k. Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ je nilpotentna ako i samo ako je Liejeva algebra $\mathfrak{g}^K$ nilpotentna.*

Zadatak 4.1.2. *Dokažite korolar 4.1.8.*

Uputa: Koristite iz tvrdnju (a) u zadatku 1.2.2. i karakterizaciju (c) u teoremu 4.1.6. za nilpotentnost Liejeve algebre.

Korolar 4.1.9. *Ako je $\mathfrak{g} \neq \{0\}$ nilpotentna Liejeva algebra, onda je $Z(\mathfrak{g}) \neq \{0\}$.*

Dokaz: U protivnom se centralni uzlazni niz stabilizira na prvom koraku, tj. $\mathfrak{g}_j = \{0\}\ \forall j$, a to je nemoguće po karakterizaciji (b) u teoremu 4.1.6.

Dokažimo još jednu posljedicu Engelovog teorema 4.1.3.:

Korolar 4.1.10. *Neka je $\mathfrak{g} \neq \{0\}$ nilpotentna Liejeva algebra i neka je $\mathfrak{h}$ maksimalna prava Liejeva podalgebra od $\mathfrak{g}$. Tada je $\mathfrak{h}$ ideal u $\mathfrak{g}$ kodimenzije* 1.

Dokaz: $\mathfrak{g}$ promatramo kao $\mathfrak{h}-$modul u odnosu na reprezentaciju $x \mapsto ad_{\mathfrak{g}}\, x$, $x \in \mathfrak{h}$. Kako je $\mathfrak{h}$ Liejeva podalgebra od $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$ je $\mathfrak{h}-$podmodul od $\mathfrak{g}$. Promatrajmo kvocijentni $\mathfrak{h}-$modul $\mathfrak{g}/\mathfrak{h} \neq \{0\}$ i označimo pripadnu kvocijentnu reprezentaciju od $\mathfrak{h}$ sa π :

$$\pi(x)(y + \mathfrak{h}) = [x, y] + \mathfrak{h}, \qquad x \in \mathfrak{h}, \quad y \in \mathfrak{g}.$$

Tada je operator $\pi(x)$ nilpotentan za svaki $x \in \mathfrak{h}$, pa po Engelovom teoremu postoji $\eta \in \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ različit od nule takav da je $\pi(x)\eta = 0\ \forall x \in \mathfrak{h}$. Neka je $y \in \mathfrak{g}$ predstavnik od η u $\mathfrak{g}$, tj. $\eta = y + \mathfrak{h}$. Tada $y \notin \mathfrak{h}$, jer je $\eta \neq 0$. Sada $\pi(x)\eta = 0\ \forall x \in \mathfrak{h}$ znači da je $[x, y] \in \mathfrak{h}$ za svaki $x \in \mathfrak{h}$. Odatle slijedi da je $\mathfrak{k} = Ky \dotplus \mathfrak{h}$ Liejeva podalgebra od $\mathfrak{g}$, a kako je po pretpostavci $\mathfrak{h}$ maksimalna prava podalgebra, zaključujemo da je $\mathfrak{k} = \mathfrak{g}$. Dakle, $\dim \mathfrak{h} = \dim \mathfrak{g} - 1$, a iz $[y, \mathfrak{h}] \subseteq \mathfrak{h}$ slijedi da je $\mathfrak{h}$ ideal u $\mathfrak{g}$.

Proučit ćemo sada nilpotentne ideale u proizvoljnoj Liejevoj algebri $\mathfrak{g}$. U tu svrhu najprije ćemo ustanoviti neka svojstva reprezentacija od $\mathfrak{g}$ i njihovih restrikcija na ideale u $\mathfrak{g}$.

Lema 4.1.11. *Neka je $\mathfrak{g}$ Liejeva algebra, π ireducibilna reprezentacija od $\mathfrak{g}$ na konačnodimenzionalnom vektorskom prostoru V i $\mathfrak{h}$ ideal u $\mathfrak{g}$. Ako je operator $\pi(y)$ nilpotentan za svaki $y \in \mathfrak{h}$, onda je $\mathfrak{h} \subseteq \operatorname{Ker} \pi$, tj. $\pi(y) = 0\ \forall y \in \mathfrak{h}$.*

Dokaz: Neka je

$$W = \{v \in V;\ \pi(y)v = 0\ \ \forall y \in \mathfrak{h}\}.$$

Prema Engelovom teoremu 4.1.3. vrijedi $W \neq \{0\}$. Nadalje, prostor W je $\pi-$invarijantan. Doista, za $w \in W$, $x \in \mathfrak{g}$ i $y \in \mathfrak{h}$ je $[y, x] \in \mathfrak{h}$ pa je $\pi(y)w = \pi([y, x])w = 0$. Slijedi

$$\pi(y)\pi(x)w = \pi([y, x])w + \pi(x)\pi(y)w = 0.$$

Kako je $y \in \mathfrak{h}$ bio proizvoljan, zaključujemo da je stvarno $\pi(x)w \in W$. Budući da je reprezentacija π ireducibilna, slijedi $W = V$, odnosno, $\pi(y) = 0\ \ \forall y \in \mathfrak{h}$.

Za proizvoljnu reprezentaciju π Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ na konačnodimenzionalnom vektorskom prostoru V **kompozicioni niz** je konačan niz $\pi-$invarijantnih potrostora $(V_0, V_1, \ldots, V_n)$ od V takvih da je

$$\{0\} = V_0 \subseteq V_1 \subseteq \cdots\cdots \subseteq V_n = V$$

i da su sve subkvocijentne reprezentacije $\pi_{V_i/V_{i-1}}$, $i = 1, \ldots, n$ ireducibilne. Očito je da za svaku konačnodimenzionalnu reprezentaciju postoji bar jedan kompozicioni niz.

Za svaku konačnodimenzionalnu reprezentaciju π definiramo simetričnu bilinearnu formu B_π na $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ sa

$$B_\pi(x, y) = \operatorname{Tr} \pi(x)\pi(y), \qquad x, y \in \mathfrak{g}.$$

B_π se zove **forma pridružena reprezentaciji** π.

Zadatak 4.1.3. *Dokažite da vrijedi* $B_\pi([x, y], z) = B_\pi(x, [y, z])\ \ \forall x, y, z \in \mathfrak{g}$.

Uputa: Iskoristite činjenicu da za operatore A, B na konačnodimenzionalnom vektorskom prostoru vrijedi $\operatorname{Tr} AB = \operatorname{Tr} BA$.

Lema 4.1.12. *Neka je $\mathfrak{g}$ Liejeva algebra, $\mathfrak{h}$ ideal u $\mathfrak{g}$, π reprezentacija od $\mathfrak{g}$ na konačnodimenzionalnom vektorskom prostoru V i $(V_0, V_1, \ldots, V_n)$ kompozicioni niz u V u odnosu na reprezentaciju π. Sljedeća su dva svojstva međusobno ekvivalentna:*

(*a*) *Za svaki $y \in \mathfrak{h}$ operator $\pi(y)$ je nilpotentan.*

(*b*) *Za svaki $y \in \mathfrak{h}$ i svaki $i \in \{1, \ldots, n\}$ vrijedi $\pi(y)V_i \subseteq V_{i-1}$.*

U tom slučaju je $B_\pi(x, y) = 0\ \ \forall x \in \mathfrak{g}$ i $\forall y \in \mathfrak{h}$.

Dokaz: Ako vrijedi (*b*) onda je očito $\pi(y)^n = 0$, dakle, vrijedi (*a*).

Pretpostavimo da vrijedi (*a*). Tada je operator $\pi_{V_i/V_{i-1}}(y)$ nilpotentan za svaki $y \in \mathfrak{h}$ i svaki $i \in \{1, \ldots, n\}$. Međutim, subkvocijentne reprezentacije $\pi_{V_i/V_{i-1}}$ su ireducibilne, pa po lemi 4.1.11. imamo $\pi_{V_i/V_{i-1}}(y) = 0\ \forall y \in \mathfrak{h}$, odnosno, vrijedi (*b*).

Pretpostavimo sada da su ispunjena svojstva (*a*) i (*b*). Za $x \in \mathfrak{g}$ i $y \in \mathfrak{h}$ je $\pi(y)V_i \subseteq V_{i-1}$, dakle, $\pi(x)\pi(y)V_i \subseteq \pi(x)V_{i-1} \subseteq V_{i-1}$. To pokazuje da je operator $\pi(x)\pi(y)$ nilpotentan za svaki $x \in \mathfrak{g}$ i svaki $y \in \mathfrak{h}$. Posebno, $B_\pi(x, y) = \operatorname{Tr} \pi(x)\pi(y) = 0$.

Propozicija 4.1.13. *Neka je $\mathfrak{g}$ Liejeva algebra, π reprezentacija od $\mathfrak{g}$ na konačnodimenzionalnom vektorskom prostoru $V \neq \{0\}$ i $(V_0, V_1, \ldots, V_n)$ kompozicioni niz u V u odnosu na π.*

(*a*) *U skupu svih ideala $\mathfrak{h}$ u $\mathfrak{g}$, takvih da je operator $\pi(y)$ nilpotentan za svaki $y \in \mathfrak{h}$, postoji najveći element $\mathfrak{n}_\pi$.*

(*b*) *Vrijedi $\mathfrak{n}_\pi = \{y \in \mathfrak{g};\ \pi(y)V_i \subseteq V_{i-1}\ \ \forall i \in \{1, \ldots, n\}\}$.*

(*c*) *Vrijedi $B_\pi(x, y) = \operatorname{Tr} \pi(x)\pi(y) = 0\ \ \forall x \in \mathfrak{g}$ i $\forall y \in \mathfrak{n}_\pi$.*

Dokaz: Stavimo

$$\mathfrak{n}_\pi = \{y \in \mathfrak{g};\ \pi(y)V_i \subseteq V_{i-1}\ \ \forall i \in \{1, \ldots, n\}\}.$$

Očito je $\mathfrak{n}_\pi$ potprostor od $\mathfrak{g}$. Nadalje, za $x \in \mathfrak{g}$ je $\pi(x)V_i \subseteq V_i$ za svaki i. Dakle, za $x \in \mathfrak{g}$ i $x \in \mathfrak{n}_\pi$ je

$$\pi(x)\pi(y)V_i \subseteq \pi(x)V_{i-1} \subseteq V_{i-1} \qquad \text{i} \qquad \pi(y)\pi(x)V_i \subseteq \pi(y)V_i \subseteq V_{i-1}.$$

Slijedi

$$\pi([x,y])V_i \subseteq \pi(x)\pi(y)V_i + \pi(y)\pi(x)V_i \subseteq V_{i-1},$$

a kako to vrijedi za svaki $i \in \{1, \ldots, n\}$, zaključujemo da je $[x,y] \in \mathfrak{n}_\pi$. To pokazuje da je $\mathfrak{n}_\pi$ ideal u Liejevoj algebri $\mathfrak{g}$. Sada iz leme 4.1.12. slijedi da je operator $\pi(y)$ nilpotentan za svaki $y \in \mathfrak{n}_\pi$. Također, iz iste leme slijedi da $\mathfrak{n}_\pi$ sadrži svaki ideal $\mathfrak{h}$ u $\mathfrak{g}$ sa svojstvom da je operator $\pi(y)$ nilpotentan za svaki $y \in \mathfrak{h}$ i da je $B_\pi(x,y) = 0\ \ \forall x \in \mathfrak{g}$ i $\forall y \in \mathfrak{n}_\pi$.

Ideal $\mathfrak{n}_\pi$ iz propozicije 4.1.13. zove se **najveći ideal nilpotencije** reprezentacije π. Uočimo da jednakost (b) vrijedi za svaki kompozicioni niz reprezentacije π. Ideal $\mathfrak{n}_\pi$ sadrži jezgru $\operatorname{Ker}\pi$ reprezentacije π i jednak joj je ako je reprezentacija π potpuno reducibilna, ali ne i općenito. Nadalje, važno je uočiti da se $\mathfrak{n}_\pi$ sastoji od elemenata $y \in \mathfrak{g}$ sa svojstvom da je operator $\pi(y)$ nilpotentan, ali ne moraju svi takvi elementi biti sadržani u $\mathfrak{n}_\pi$. Ideal $\mathfrak{n}_\pi$ je samo najveći ideal sadržan u skupu (koji najčešće nije niti potprostor od $\mathfrak{g}$)

$$\mathcal{N}_\pi = \{y \in \mathfrak{g};\ \text{operator } \pi(y) \text{ je nilpotentan}\}.$$

Zadatak 4.1.4. *Neka je $\mathfrak{g}$ Liejeva algebra i $\mathfrak{h}$ ideal u $\mathfrak{g}$. Dokažite da je ideal $\mathfrak{h}$ je nilpotentna Liejeva algebra ako i samo ako je operator $ad_{\mathfrak{g}}\, y$ nilpotentan za svaki $y \in \mathfrak{h}$.*

Uputa: Uočite da za svaki $y \in \mathfrak{h}$ vrijedi $ad_{\mathfrak{h}}\, y = (ad_{\mathfrak{g}}\, y)|\mathfrak{h}$ i $(ad_{\mathfrak{g}}\, y)\mathfrak{g} \subseteq \mathfrak{h}$.

Zbog tvrdnje u prethodnom zadatku primjena propozicije 4.1.13. na adjungiranu reprezentaciju $ad_{\mathfrak{g}}$ Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ ima za posljedicu:

Propozicija 4.1.14. *Neka je $\mathfrak{g}$ Liejeva algebra i neka je $(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_1, \ldots, \mathfrak{g}_n)$ bilo koji kompozicioni niz prostora $\mathfrak{g}$ u odnosu na adjungiranu reprezentaciju $ad_{\mathfrak{g}}$.*

(*a*) *U skupu svih nilpotentnih ideala u Liejevoj algebri $\mathfrak{g}$ postoji najveći element $\mathfrak{n}$.*

(*b*) *Vrijedi $\mathfrak{n} = \{y \in \mathfrak{g};\ [y, \mathfrak{g}_i] \subseteq \mathfrak{g}_{i-1}\ \text{ za }\ i = 1, \ldots, n\}$.*

(*c*) *Vrijedi $B_{ad_{\mathfrak{g}}}(x,y) = \operatorname{Tr}(ad_{\mathfrak{g}}\, x)(ad_{\mathfrak{g}}\, y) = 0\ \ \forall x \in \mathfrak{g}$ i $\forall y \in \mathfrak{n}$.*

Ideal $\mathfrak{n}$ iz propozicije 4.1.14. zove se **najveći nilpotentni ideal** u Liejevoj algebri $\mathfrak{g}$. Katkada se u literaturi taj ideal zove nilradikal od $\mathfrak{g}$, no uobičajenije je da se nilradikalom od $\mathfrak{g}$ zove presjek $\mathfrak{s}$ jezgara svih ireducibilnih konačnodimenzionalnih reprezentacija od $\mathfrak{g}$. Taj ideal $\mathfrak{s}$ je nilpotentan, kao takav je sadržan u $\mathfrak{n}$, a sadržan je i u najvećem idealu nilpotencije svake konačnodimenzionalne reprezentacije od $\mathfrak{g}$.

Zadatak 4.1.5. *Pronađite primjer Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ s najvećim nilpotentnim idealom $\mathfrak{n}$ takve da u kvocijentnoj Liejevoj algebri $\mathfrak{g}/\mathfrak{n}$ postoje nilpotentni ideali različiti od $\{0\}$.*

Forma $B_{ad_{\mathfrak{g}}}$ na $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ pridružena adjungiranoj reprezentaciji $ad_{\mathfrak{g}}$ obično se označava sa $B_{\mathfrak{g}}$. Ona se zove **Killingova forma** Liejeve algebre $\mathfrak{g}$.

Propozicija 4.1.15. *Neka je $\mathfrak{g}$ Liejeva algebra i $\mathfrak{n}$ njen najveći nilpotentni ideal. Za svaki automorfizam $\varphi \in Aut(\mathfrak{g})$ vrijedi $\varphi(\mathfrak{n}) = \mathfrak{n}$.*

Zadatak 4.1.6. *Dokažite propoziciju 4.1.15.*

Uputa: Dokažite da je $\varphi(\mathfrak{n})$ nilpotentni ideal u $\mathfrak{g}$.

4.2 Rješive Liejeve algebre. Radikal

Za Liejevu algebru $\mathfrak{g}$ ideal $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ zove se **izvedeni ideal**. To je prvi netrivijalni član centralnog silaznog niza definiranog u odjeljku 4.1. Definiramo sada još jedan silazni niz ideala: to je tzv. **izvedeni niz** $\left(\mathfrak{g}^{(k)}\right)_{k\in\mathbb{Z}_+}$ u Liejevoj algebri $\mathfrak{g}$ definiran induktivno sa

$$\mathfrak{g}^{(0)} = \mathfrak{g}, \qquad \mathfrak{g}^{(k+1)} = \left[\mathfrak{g}^{(k)}, \mathfrak{g}^{(k)}\right], \quad k \in \mathbb{Z}_+.$$

$\mathfrak{g}^{(k)}$ se zove $k-$**ti izvedeni ideal** Liejeve algebre $\mathfrak{g}$. Kažemo da je $\mathfrak{g}$ **rješiva Liejeva algebra** ako postoji $k \in \mathbb{Z}_+$ takav da je $\mathfrak{g}^{(k)} = \{0\}$. Naravno, za svaki $k \in \mathbb{Z}_+$ je $\mathfrak{g}^{(k)} \subseteq \mathfrak{g}^k$, pa prema karakterizaciji (c) u teoremu 4.1.6. vidimo da je svaka nilpotentna Liejeva rješiva.

Zadatak 4.2.1. *Dokažite da je Liejeva algebra* $\mathfrak{t}(n, K)$ *rješiva i da je Liejeva algebra* $\mathfrak{n}(n, K)$ *nilpotentna.*

Zadatak 4.2.2. *Neka je* $\mathfrak{g}$ *Liejeva algebra nad poljem* k *i neka je* K *proširenje polja* k. *Dokažite da je Liejeva algebra* $\mathfrak{g}$ *rješiva ako i samo je Liejeva algebra* $\mathfrak{g}^K$ *rješiva.*

Uputa: Koristite tvrdnju (a) zadatka 1.2.2.

Teorem 4.2.1. *Neka je* $\mathfrak{g}$ *Liejeva algebra,* $\mathfrak{h}$ *njena podalgebra i* $\mathfrak{a}$ *i* $\mathfrak{b}$ *ideali u* $\mathfrak{g}$.

(a) *Ako je Liejeva algebra* $\mathfrak{g}$ *rješiva, onda su i Liejeve algebre* $\mathfrak{h}$ *i* $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ *rješive.*

(b) *Ako su Liejeve algebre* $\mathfrak{a}$ *i* $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ *rješive, onda je i Liejeva algebra* $\mathfrak{g}$ *rješiva.*

(c) *Ako su ideali* $\mathfrak{a}$ *i* $\mathfrak{b}$ *rješivi, onda je i ideal* $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ *rješiv.*

Dokaz: (a) Očito je $\mathfrak{h}^{(k)} \subseteq \mathfrak{g}^{(k)}$, pa iz rješivosti $\mathfrak{g}$ slijedi rješivost $\mathfrak{h}$. Nadalje, neka je $\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ kvocijentni epimorfizam, $\varphi(x) = x+\mathfrak{a}$, $x \in \mathfrak{g}$. Indukcijom lako slijedi da je tada $(\mathfrak{g}/\mathfrak{a})^{(k)} = \varphi(\left(\mathfrak{g}^{(k)}\right)$ $\forall k \geq 0$, pa ponovo iz rješivosti $\mathfrak{g}$ slijedi rješivost $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$.

(b) Pretpostavimo da su $m, n \geq 0$ takvi da je $(\mathfrak{g}/\mathfrak{a})^{(n)} = \{0\}$ i $\mathfrak{a}^{(m)} = \{0\}$. Uz oznaku $\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ kao u (a) imamo tada $\varphi\left(\mathfrak{g}^{(n)}\right) = (\mathfrak{g}/\mathfrak{a})^{(n)} = \{0\}$. Dakle, $\mathfrak{g}^{(n)} \subseteq \operatorname{Ker}\varphi = \mathfrak{a}$. Kako je očito $\left(\mathfrak{g}^{(j)}\right)^{(k)} = \mathfrak{g}^{(j+k)}$ $\forall j, k \geq 0$, slijedi

$$\mathfrak{g}^{(n+m)} = \left(\mathfrak{g}^{(n)}\right)^{(m)} \subseteq \mathfrak{a}^{(m)} = \{0\};$$

Dakle, Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ je rješiva.

(c) Standardni algebarski teorem (analogan teoremu 1.3.2.) daje izomorfizam $x+\mathfrak{a} \mapsto x+\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b}$, $x \in \mathfrak{b}$, Liejeve algebre $(\mathfrak{a} + \mathfrak{b})/\mathfrak{a}$ na Liejevu algebru $\mathfrak{b}/(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b})$. Kako je Liejeva algebra $\mathfrak{b}$ po pretpostavci rješiva, iz (a) slijedi da je i kvocijentna algebra $\mathfrak{b}/(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b})$ rješiva. Dakle i $(\mathfrak{a} + \mathfrak{b})/\mathfrak{a}$ je rješiva Liejeva algebra, a kako je i Liejeva algebra $\mathfrak{a}$ rješiva, iz (b) zaključujemo da je $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ rješiva Liejeva algebra.

Pomoću tvrdnje (c) teorema 4.2.1. zaključujemo da u svakoj Liejevoj algebri $\mathfrak{g}$ postoji najveći rješivi ideal, tj. rješivi ideal koji sadrži svaki drugi rješivi ideal u $\mathfrak{g}$. Taj ideal označavat ćemo sa $\operatorname{Rad}(\mathfrak{g})$ i zvati **radikal Liejeve algebre** $\mathfrak{g}$.

Teorem 4.2.2. *Za svaku Liejevu algebru* $\mathfrak{g}$ *vrijedi* $\operatorname{Rad}(\mathfrak{g}/\operatorname{Rad}(\mathfrak{g})) = \{0\}$.

Dokaz: Neka je $\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}/\mathrm{Rad}(\mathfrak{g})$ kvocijentni epimorfizam i neka je $\mathfrak{a} = \varphi^{-1}\left(\mathrm{Rad}\left(\mathfrak{g}/\mathrm{Rad}(\mathfrak{g})\right)\right)$. To je ideal u Liejevoj algebri $\mathfrak{g}$. Tada je $\mathfrak{a}/\mathrm{Rad}(\mathfrak{g}) = \varphi(\mathfrak{a}) = \mathrm{Rad}\left(\mathfrak{g}/\mathrm{Rad}(\mathfrak{g})\right)$ rješiva Liejeva algebra, a također je $\mathrm{Rad}(\mathfrak{g})$ rješiva Liejeva algebra. Prema tvrdnji (c) propozicije 1.3.1. ideal $\mathfrak{a}$ je rješiva Liejeva algebra. No tada po definiciji radikala vrijedi $\mathfrak{a} \subseteq \mathrm{Rad}(\mathfrak{g})$. Kako je $\mathrm{Rad}(\mathfrak{g}) = \mathrm{Ker}\,\varphi$, zaključujemo da je $\mathrm{Rad}\left(\mathfrak{g}/\mathrm{Rad}(\mathfrak{g})\right) = \varphi(\mathfrak{a}) = \{0\}$.

Ukoliko je polje K algebarski zatvoreno Engelov teorem 4.1.3. generalizira se na rješive Liejeve algebre operatora:

Teorem 4.2.3. (**Sophus Lie**) *Neka je $V \neq \{0\}$ konačnodimenzionalan vektorski prostor nad algebarski zatvorenim poljem karakteristike* 0 *i neka je $\mathfrak{g}$ rješiva podalgebra Liejeve algebre $\mathfrak{gl}(V)$. Tada postoji vektor $v \in V$, $v \neq 0$, koji je svojstven za svaki operator $x \in \mathfrak{g}$.*

Dokaz ćemo provesti indukcijom u odnosu na $\dim \mathfrak{g}$. Baza indukcije $\dim \mathfrak{g} = 0$ je trivijalna. Pretpostavimo sada da je $\dim \mathfrak{g} \geq 1$ i da je teorem dokazan za sve konačnodimenzionalne vektorske prostore W i sve rješive Liejeve podalgebre od $\mathfrak{gl}(W)$ čija je dimenzija manja od $\dim \mathfrak{g}$. Dokaz ćemo provesti u nekoliko koraka.

(1) Budući da je Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ rješiva, vrijedi $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}] \neq \mathfrak{g}$. Neka je $\mathfrak{h}$ potprostor od $\mathfrak{g}$ kodimenzije 1 koji sadrži $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$. Tada je $[\mathfrak{g},\mathfrak{h}] \subseteq [\mathfrak{g},\mathfrak{g}] \subseteq \mathfrak{h}$, dakle, $\mathfrak{h}$ je ideal. Kako je $\dim \mathfrak{h} = \dim \mathfrak{g} - 1 < < \dim \mathfrak{g}$, po pretpostavci indukcije postoji $v \in V$, $v \neq 0$, koji je svojstven vektor svih operatora $y \in \mathfrak{h}$. Za $y \in \mathfrak{h}$ označimo sa $\lambda(y) \in K$ pripadnu svojstvenu vrijednost:

$$yv = \lambda(y)v, \qquad y \in \mathfrak{h}.$$

Očito je $\lambda : \mathfrak{h} \to K$ linearan funkcional. Stavimo sada

$$W = \{w \in V;\ yw = \lambda(y)w\ \forall y \in \mathfrak{h}\}.$$

Tada je $W \neq \{0\}$ potprostor od V.

(2) Dokažimo sada da je potprostor W invarijantan s obzirom na sve operatore $x \in \mathfrak{g}$. Neka je $x \in \mathfrak{g}$ i $0 \neq w \in W$. Neka je n najmanji prirodan broj takav da su vektori $w, xw, \ldots, x^n w$ linearno zavisni. To naravno znači da su vektori $w, xw, \ldots, x^{n-1}w$ linearno nezavisni. Definiramo potprostore

$$W_0 = \{0\}, \qquad W_j = span_K\{w, xw, \ldots, x^{j-1}w\}, \quad j \in \mathbb{N}.$$

Tada očito vrijedi

$$\dim W_j = j \quad \text{za} \quad 0 \leq j \leq n \qquad \text{i} \qquad xW_{j-1} \subseteq W_j \quad \forall j \in \mathbb{N}.$$

Nadalje, kako je $x^n w$ linearna kombinacija vektora $w, xw, \ldots, x^{n-1}w$, lako se vidi da je $W_m = W_n$ $\forall m \geq n$. Posebno, potprostor W_n je invarijantan s obzirom na operator x.

Dokazat ćemo sada da vrijedi

$$yx^j w - \lambda(y)x^j w \in W_j \qquad \forall y \in \mathfrak{h} \quad \text{i} \quad \forall j \in \mathbb{Z}_+. \tag{4.1}$$

Dokaz provodimo indukcijom u odnosu na $j \in \mathbb{Z}_+$. Prije svega, za $j = 0$ po definiciji potprostora W imamo $yw = \lambda(y)w$, dakle, $yw - \lambda(y)w = 0 \in W_0$, odnosno, baza indukcije je dokazana. Provedimo sada korak indukcije. Neka je $j \geq 1$ i pretpostavimo da je dokazano da vrijedi

$$yx^{j-1}w - \lambda(y)x^{j-1}w \in W_{j-1} \qquad \forall y \in \mathfrak{h}.$$

Fiksirajmo sada bilo koji $y \in \mathfrak{h}$. Tada je i $[y,x] \in \mathfrak{h}$, pa imamo

$$yx^{j-1}w = \lambda(y)x^{j-1}w + u \quad \text{i} \quad [y,x]x^{j-1}w = \lambda([y,x])x^{j-1}w + v \quad \text{za neke } u, v \in W_{j-1}.$$

Odatle je

$$yx^jw = yxx^{j-1}w = xyx^{j-1}w + [y,x]x^{j-1}w = \lambda(y)x^jw + xu + \lambda([y,x])x^{j-1}w + v,$$

dakle,

$$yx^jw - \lambda(y)x^jw = xu + \lambda([y,x])x^{j-1}w + v \in W_j,$$

budući da je $W_{j-1} \subseteq W_j$ i $xW_{j-1} \subseteq W_j$. Time je korak indukcije proveden i (4.1) je dokazano.

Iz (4.1) slijedi da je svaki od potprostora W_j invarijantan s obzirom na svaki operator $y \in \mathfrak{h}$. Nadalje, (4.1) pokazuje da za $y \in \mathfrak{h}$ restrikcija $y|W_n$ ima u bazi $\{w, x(w), \ldots, x^{n-1}(w)\}$ gornje trokutastu matricu u kojoj su svi dijagonalni elementi jednaki $\lambda(y)$. Prema tome je

$$\text{Tr }(y|W_n) = n\lambda(y) \qquad \forall y \in \mathfrak{h}.$$

Posebno, vrijedi

$$\text{Tr }([x,y]|W_n) = n\lambda([x,y]) \qquad \forall y \in \mathfrak{h}.$$

Međutim, potprostor W_n je invarijantan s obzirom na x i s obzirom na svaki $y \in \mathfrak{h}$; stoga je $[x,y]|W_n = [x|W_n, y|W_n]$, pa slijedi da je gornji trag jednak nuli. Budući da je po pretpostavci K polje karakteristike 0, slijedi $\lambda([x,y]) = 0 \ \forall y \in \mathfrak{h}$. Stoga imamo

$$yxw = xyw - [x,y]w = x(\lambda(y)w) - \lambda([x,y])w = \lambda(y)xw \qquad \Longrightarrow \qquad xw \in W.$$

Kako su $w \in W$ i $x \in \mathfrak{g}$ bili proizvoljno odabrani, zaključujemo da je potprostor W invarijantan s obzirom na svaki operator $x \in \mathfrak{g}$.

(3) Za $z \in \mathfrak{g} \setminus \mathfrak{h}$ je $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \dotplus Kz$. Budući da je potprostor $W \neq \{0\}$ invarijatan s obzirom na operator z, postoje $v \in W,\ v \neq 0$, i $\alpha \in K$ takvi da je $zv = \alpha v$. Sada za bilo koji $x \in \mathfrak{g}$ imamo $x = y + \beta z$ za neke $y \in \mathfrak{h}$ i $\beta \in K$ pa slijedi

$$xv = yv + \beta zv = \lambda(y)v + \beta\alpha v = (\lambda(y) + \beta\alpha)v.$$

Dakle, vektor v je svojstven za sve operatore $x \in \mathfrak{g}$. Time je teorem 4.2.3. u potpunosti dokazan.

Zastava u konačnodimenzionalnom vektorskom prostoru V je konačan rastući niz potprostora

$$\{0\} = V_0 \subseteq V_1 \subseteq \cdots \subseteq V_n = V$$

takav da je $\dim V_j = j$ za svaki j.

Teorem 4.2.4. *Neka je V konačnodimenzionalan vektorski prostor nad algebarski zatvorenim poljem K karakteristike* 0 *i neka je $\mathfrak{g}$ neka rješiva Liejeva podalgebra od $\mathfrak{gl}(V)$. Tada $\mathfrak{g}$ stabilizira neku zastavu u prostoru V. Drugim riječima, postoji baza prostora V u kojoj svi operatori $x \in \mathfrak{g}$ imaju gornje trokutaste matrice.*

Dokaz: Ovaj teorem slijedi neposredno iz teorema 4.2.3. indukcijom po $\dim V$. U koraku indukcije, uz oznake iz dokaza prethodnog teorema, s vektorskog prostora V prelazimo na kvocijentni prostor V/Kv. Kako je $\dim (V/Kv) = \dim V - 1 < \dim V$, po pretpostavci indukcije postoji zastava $(W_0, W_1, \ldots, W_{n-1})$ u prostoru V/Kv ($W_0 = \{0\}$, $W_{n-1} = V/Kv$) koju stabiliziraju svi operatori koje na kvocijentu V/Kv induciraju operatori $x \in \mathfrak{g}$. Neka je $\pi : V \to V/Kv$ kvocijentno preslikavanje. Stavimo $V_0 = \{0\}$ i $V_j = \pi^{-1}(W_{j-1})$ za $j = 1, \ldots, n$. Tada se lako vidi da $\mathfrak{g}$ stabilizira zastavu $(V_0, V_1, \ldots, V_n)$ u prostoru V.

Korolar 4.2.5. *Neka je $\mathfrak{g}$ rješiva Liejeva algebra nad algebarski zatvorenim poljem K karakteristike* 0 *i neka je π njena reprezentacija na konačnodimenzionalnom vektorskom prostoru V. Tada u V postoji zastava invarijantna s obzirom na sve operatore $\pi(x),\ x \in \mathfrak{g}$.*

Dokaz: Treba samo primijetiti da je Liejeva podalgebra $\mathrm{Im}\,\pi = \pi(\mathfrak{g})$ od $\mathfrak{gl}(V)$ izomorfna kvocijentnoj Liejevoj algebri $\mathfrak{g}/(\mathrm{Ker}\,\pi)$, a ova je prema tvrdnji (a) propozicije 1.3.1. rješiva.

Potprostor Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ koji je invarijantan s obzirom na sve operatore $\mathrm{ad}\,x,\ x \in \mathfrak{g}$, je ideal u $\mathfrak{g}$. Dakle, iz korolara 4.2.5. primijenjenog na reprezentaciju *ad* neposredno slijedi

Korolar 4.2.6. *Neka je $\mathfrak{g}$ konačnodimenzionalna rješiva Liejeva algebra nad algebarski zatvorenim poljem karakteristike* 0. *Tada u $\mathfrak{g}$ postoje ideali $\mathfrak{j}_k,\ k = 0, 1, \ldots, n = \dim\,\mathfrak{g}$, takvi da je*

$$\{0\} = \mathfrak{j}_0 \subseteq \mathfrak{j}_1 \subseteq \cdots \subseteq \mathfrak{j}_n = \mathfrak{g} \qquad i \qquad \dim\,\mathfrak{j}_k = k \quad \forall k.$$

Teorem 4.2.7. *Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ je rješiva ako i samo ako je njen izvedeni ideal $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ nilpotentna Liejeva algebra. U tom slučaju za svaki $x \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ operator $\mathrm{ad}\,x$ je nilpotentan.*

Dokaz: Prema korolaru 4.1.8. i prema zadatku 4.2.2. možemo pretpostaviti da je polje K algebarski zatvoreno. Pretpostavimo najprije da je Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ rješiva i izaberimo zastavu ideala $(\mathfrak{j}_0, \mathfrak{j}_1, \ldots, \mathfrak{j}_n)$ kao u tvrdnji korolara 4.2.6. Uzmimo sada $x_k \in \mathfrak{j}_k \setminus \mathfrak{j}_{k-1}$ za $k = 1, \ldots, n$. Tada je $\{x_1, \ldots, x_n\}$ baza od $\mathfrak{g}$. Matrice operatora $\mathrm{ad}\,x,\ x \in \mathfrak{g}$, pripadaju Liejevoj algebri $\mathfrak{t}(n, K)$. Slijedi da matrice operatora $\mathrm{ad}\,y,\ y \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, pripadaju Liejevoj algebri $[\mathfrak{t}(n, K), \mathfrak{t}(n, K)] = \mathfrak{n}(n, K)$. To pokazuje da je $\mathrm{ad}\,y = ad_{\mathfrak{g}}\,y$ nilpotentan operator za svaki $y \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$. Prema zadatku 4.1.4. slijedi da je izvedeni ideal $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ nilpotentna Liejeva algebra.

Obratno, pretpostavimo sada da je $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ nilpotentna Liejeva algebra. Tada je ujedno ideal $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ rješiva Liejeva algebra. Nadalje, kvocijentna Liejeva algebra $\mathfrak{g}/[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ je komutativna, dakle, također rješiva. Sada iz tvrdnje (b) teorema 4.2.1. slijedi da je Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ rješiva.

Dokazat ćemo sada dovoljnost jednog uvjeta za nilpotentnost linearnog operatora koja će nam trebati za dokaz važnog Cartanovog kriterija rješivosti Liejeve algebre.

Lema 4.2.8. *Neka je V konačnodimenzionalan vektorski prostor i neka su $X \subseteq Y$ potprostori od $\mathfrak{gl}(V)$. Stavimo*

$$\mathfrak{a} = \{A \in \mathfrak{gl}(V);\ [A, Y] \subseteq X\}.$$

Ako za $A \in \mathfrak{a}$ vrijedi $\mathrm{Tr}\,AB = 0\ \forall B \in \mathfrak{a}$, onda je operator A nilpotentan.

Dokaz: Prije svega uočimo da je tvrdnju dovoljno dokazati u slučaju kad je polje K algebarski zatvoreno. Treba dokazati da za takav operator A vrijedi $A_s = 0$. Neka je $\{e_1, \ldots, e_n\}$ baza od V sastavljena od svojstvenih vektora operatora A_s i neka su $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K$ pripadne svojstvene vrijednosti: $A_s e_j = \alpha_j e_j$. Neka je L vektorski potprostor od K nad poljem $\mathbb{Q}$ racionalnih brojeva razapet sa $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$. Cilj nam je dokazati da je $L = \{0\}$, jer će to značiti da je $A_s = 0$. Kako je L konačnodimenzionalan vektorski prostor, dovoljno je dokazati da je njegov dualni prostor L^* jednak $\{0\}$, tj. da je nul$-$funkcional jedini $\mathbb{Q}-$linearni funkcional $f : L \to \mathbb{Q}$.

Neka je $f : L \to \mathbb{Q}$ $\mathbb{Q}-$linearni funkcional. Neka je $B \in \mathfrak{gl}(V)$ zadan sa

$$Be_j = f(\alpha_j)e_j, \qquad j = 1, \ldots, n.$$

Neka je kao i prije $\{E_{ij};\ i, j = 1, \ldots, n\}$ baza prostora $\mathfrak{gl}(V)$ dobivena iz baze $\{e_1, \ldots, n\}$ prostora V :

$$E_{ij}e_k = \delta_{jk}e_i, \qquad i, j, k = 1, \ldots, n.$$

Kao što smo vidjeli u dokazu propozicije 3.3.5. tada je

$$(ad\,A_s)E_{ij} = (\alpha_i - \alpha_j)E_{ij} \qquad \text{i} \qquad (ad\,B)E_{ij} = (f(\alpha_i) - f(\alpha_j))E_{ij}. \tag{4.2}$$

Neka je sada $R \in K[T]$ Lagrangeov interpolacioni polinom definiran podacima

$$\{0\} \cup \{\alpha_i - \alpha_j;\ i, j = 1, \ldots, n\} \qquad \text{i} \qquad \{0\} \cup \{f(\alpha_i) - f(\alpha_j);\ i, j = 1, \ldots, n\},$$

tj. polinom najnižeg stupnja takav da je

$$R(0) = 0, \qquad R(\alpha_i - \alpha_j) = f(\alpha_i) - f(\alpha_j), \quad i, j = 1, \ldots, n.$$

Pri tome nema dvojbe ili kontradikcije u definiciji polinoma R budući da iz $\alpha_i - \alpha_j = \alpha_k - \alpha_\ell$ za neke i, j, k, ℓ zbog $\mathbb{Q}-$linearnosti od f slijedi da je i $f(\alpha_i) - f(\alpha_j) = f(\alpha_k) - f(\alpha_\ell)$. Iz jednakosti (4.2) vidi se da vrijedi $R(ad\, A_s) = ad\, B$.

Prema tvrdnji (c) propozicije 3.3.5. znamo da je $ad\, A_s$ poluprosti dio operatora $ad\, A$, pa prema teoremu 3.3.4. primijenjenom na operator $ad\, A$ operator $ad\, A_s$ polinom u operatoru $ad\, A$ bez konstantnog člana. Dakle, operator $ad\, B$ je polinom u operatoru $ad\, A$ bez konstantnog člana. Po pretpostavici operator $ad\, A$ preslikava potprostor Y u potprostor X. Slijedi da i operator $ad\, B$ prelikava potprostor Y u potprostor X. Dakle, vrijedi $B \in \mathfrak{a}$. Po pretpostavci je stoga $\mathrm{Tr}\, AB = 0$. Možemo pretpostaviti da smo bazu $\{e_1, \ldots, e_n\}$ numerirali tako da u njoj operator A ima gornje trokutastu matricu s elementima $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ na dijagonali. Tada operator AB ima gornje trokutastu matricu i na dijagonali su mu elementi $f(\alpha_1)\alpha_1, \ldots, f(\alpha_n)\alpha_n$. Dakle, $\mathrm{Tr}\, AB = 0$ znači da je

$$\sum_{i=1}^{n} f(\alpha_i)\alpha_i = 0.$$

Lijeva strana je $\mathbb{Q}-$linearna kombinacija elemenata $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in L$. Primijenimo li na gornju jednakost $\mathbb{Q}-$linearan funkcional f, slijedi

$$\sum_{i=1}^{n} f(\alpha_i)^2 = 0.$$

Kako su svi $f(\alpha_i)$ racionalni brojevi, slijedi da su svi jednaki nuli. Dakle, $f = 0$, budući da $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ razapinju L nad $\mathbb{Q}$.

Sljedeća dva teorema zovu se **Cartanovi kriteriji rješivosti**.

Teorem 4.2.9. *Neka je V konačnodimenzionalan vektorski prostor nad poljem karakteristike 0 i neka je $\mathfrak{g}$ Liejeva podalgebra od $\mathfrak{gl}(V)$ takva da vrijedi*

$$\mathrm{Tr}\, xy = 0 \qquad \forall x \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \quad i \quad \forall y \in \mathfrak{g}.$$

Tada je Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ rješiva.

Dokaz: Pretpostavljamo najprije da je polje algebarski zatvoreno. Primijenit ćemo lemu 4.2.8. na prostor V i na sljedeće potprostore X i Y od $\mathfrak{gl}(V)$:

$$X = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}], \qquad Y = \mathfrak{g}.$$

Tada uz oznaku iz leme 4.2.8. imamo

$$\mathfrak{a} = \{x \in \mathfrak{gl}(V);\ [x, \mathfrak{g}] \subseteq [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]\}.$$

Očito je $\mathfrak{g} \subseteq \mathfrak{a}$. Pretpostavka je da je $\mathrm{Tr}\, xy = 0$ $\forall x \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ i $\forall y \in \mathfrak{g}$. Želimo ustanoviti da je svaki operator $x \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ nilpotentan. Ta će činjenica slijediti iz leme 4.2.8. ako dokažemo da je $\mathrm{Tr}\, xy = 0$ $\forall x \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ i $\forall y \in \mathfrak{a}$ a ne samo da je $\mathrm{Tr}\, xy = 0$ $\forall x \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ i $\forall y \in \mathfrak{g}$.

Svaki $x \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ je suma elemenata oblika $[x_1, x_2]$, gdje su $x_1, x_2 \in \mathfrak{g}$. S druge strane, za $y \in \mathfrak{a}$ imamo

$$\mathrm{Tr}\,[x_1, x_2]y = \mathrm{Tr}\,x_1[x_2, y] = \mathrm{Tr}\,[x_2, y]x_1,$$

a to je jednako nuli jer po definiciji od $\mathfrak{a}$ je $[x_2, y] \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$. Time je dokazano da je svaki $x \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ nilpotentan. Sada iz propozicije 4.1.1. slijedi da je Liejeva algebra $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ nilpotentna. Dakle, prema teoremu 4.2.8. Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ je rješiva.

Neka je sada V vektorski prostor nad proizvoljnim poljem k karakteristike 0 i neka je $K \supseteq k$ njegovo algebarski zatvoreno proširenje. Promatramo prostor V^K, Liejevu podalgebru $\mathfrak{g}^K$ od $\mathfrak{gl}\left(V^K\right)$ i $K-$bilinearnu formu $\Phi : \left[\mathfrak{g}^K, \mathfrak{g}^K\right] \times \mathfrak{g}^K \to K$ definiranu sa

$$\Phi(x, y) = \mathrm{Tr}\,xy, \qquad x \in \left[\mathfrak{g}^K, \mathfrak{g}^K\right], \quad y \in \mathfrak{g}^K.$$

Po pretpostavci je $\Phi|[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \times \mathfrak{g} = 0$. Prema tvrdnji (a) zadatka 1.2.2. je $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]^K = \left[\mathfrak{g}^K, \mathfrak{g}^K\right]$, pa iz $K-$bilinearnosti forme Φ slijedi da je $\Phi = 0$. Prema dokazanom je tada Liejeva algebra $\mathfrak{g}^K$ rješiva, pa je po zadatku 4.2.2. i Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ rješiva.

U odjeljku 4.1. definirali smo **Killingovu formu** Liejeve algebre $\mathfrak{g}$: to je simetrična bilinearna forma $B_{\mathfrak{g}} : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to K$ dana sa

$$B_{\mathfrak{g}}(x, y) = \mathrm{Tr}\,(\mathrm{ad}\,x)(\mathrm{ad}\,y), \qquad x, y \in \mathfrak{g}.$$

Teorem 4.2.10. *Konačnodimenzionalna Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ nad poljem karakteristike 0 je rješiva ako i samo ako je*

$$B_{\mathfrak{g}}(x, y) = 0 \qquad \forall x \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \quad i \quad \forall y \in \mathfrak{g}.$$

Dokaz: Primijenimo li teorem 4.2.9. na Liejevu podalgebru $\mathrm{ad}\,\mathfrak{g}$ Liejeve algebre $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$, zaključujemo da je Liejeva algebra $\mathrm{ad}\,\mathfrak{g}$ rješiva. Međutim, kako je $\mathrm{Ker}\,ad = Z(\mathfrak{g})$, Liejeva algebra $\mathrm{ad}\,\mathfrak{g}$ izomorfna je kvocijentnoj Liejevoj algebri $\mathfrak{g}/Z(\mathfrak{g})$, dakle, ta je kvocijentna Liejeva algebra rješiva. Budući da je Liejeva algebra $Z(\mathfrak{g})$ komutativna, ona je i rješiva, pa po tvrdnji (b) teorema 4.2.1. slijedi da je i Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ rješiva.

Pretpostavimo sada da je $\mathfrak{g}$ rješiva Liejeva algebra nad poljem k karakteristike 0. Neka je K algebarski zatvoreno proširenje polja k. Prema zadatku 4.2.2. Liejeva algebra $\mathfrak{g}^K$ je rješiva. Primijenimo li korolar 4.2.5. na reprezentaciju $\pi = ad_{\mathfrak{g}^K}$ Liejeve algebre $\mathfrak{g}^K$, zaključujemo da postoji baza Liejeve algebre $\mathfrak{g}^K$ u kojoj svi operatori $ad_{\mathfrak{g}^K}\, y,\ y \in \mathfrak{g}^K$, imaju gornje trokutaste matrice. Kako je $ad_{\mathfrak{g}^K}\,[\mathfrak{g}^K, \mathfrak{g}^K] = \left[ad_{\mathfrak{g}^K}\,\mathfrak{g}^K, ad_{\mathfrak{g}^K}\,\mathfrak{g}^K\right]$, slijedi da svi operatori $ad_{\mathfrak{g}^K}\,x,\ x \in [\mathfrak{g}^K, \mathfrak{g}^K]$ imaju u toj bazi striktno gornje trokutaste matrice. No tada za svaki $x \in [\mathfrak{g}^K, \mathfrak{g}^K]$ i svaki $y \in \mathfrak{g}^K$ umnožak $\left(ad_{\mathfrak{g}^K}\,x\right)\left(ad_{\mathfrak{g}^K}\,y\right)$ ima u toj bazi striktno gornje trokutastu matricu, pa mu je trag jednak nuli. To znači da vrijedi

$$B_{\mathfrak{g}^K}(x, y) = 0 \qquad \forall x \in [\mathfrak{g}^K, \mathfrak{g}^K] \quad \mathrm{i} \quad \forall y \in \mathfrak{g}^K.$$

Kako je očito $B_{\mathfrak{g}} = B_{\mathfrak{g}^K}|\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$, slijedi da vrijedi

$$B_{\mathfrak{g}}(x, y) = 0 \qquad \forall x \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \quad \mathrm{i} \quad \forall y \in \mathfrak{g}.$$

4.3 Proste i poluproste Liejeve algebre

Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ je **poluprosta** ako je njen radikal $\mathrm{Rad}(\mathfrak{g}) = \{0\}$. To znači da je su poluproste Liejeve algebre one koje ne sadrže rješive ideale različite od $\{0\}$. Primijetimo da je prema teoremu 4.2.2. za svaku Liejevu algebru $\mathfrak{g}$ kvocijentna algebra $\mathfrak{g}/\mathrm{Rad}(\mathfrak{g})$ poluprosta.

Propozicija 4.3.1. *Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ je poluprosta ako i samo ako ona ne sadrži nijedan komutativni ideal različit od $\{0\}$.*

Dokaz: Budući da su komutativni ideali ujedno rješivi ideali, jedan smjer je jasan: poluprosta Liejeva algebra ne sadrži nijedan komutativni ideal različit od $\{0\}$. Pretpostavimo sada da Liejeva algebra $\mathfrak{g} \neq \{0\}$ zadovoljava taj uvjet, tj. da ne sadrži nijedan komutativni ideal različit od $\{0\}$. Pretpostavimo da $\mathfrak{g}$ nije poluprosta. Tada ona sadrži rješivi ideal $\mathfrak{a} \neq \{0\}$. Neka je $k \in \mathbb{N}$ takav da je $\mathfrak{a}^{(k-1)} \neq \{0\}$ i $\mathfrak{a}^{(k)} = \{0\}$. Kako je $\left[\mathfrak{a}^{(k-1)}, \mathfrak{a}^{(k-1)}\right] = \mathfrak{a}^{(k)} = \{0\}$, ideal $\mathfrak{a}^{(k-1)} \neq \{0\}$ je komutativan suprotno pretpostavci. Ova kontradikcija pokazuje da je pretpostavka da $\mathfrak{g}$ nije poluprosta pogrešna. Time je i drugi smjer dokazan.

Liejevu algebra $\mathfrak{g}$ je **prosta** ako ona nije komutativna i ne sadrži nijedan netrivijalni ideal. Zahtjev nekomutativnosti znači da isključujemo slučajeve $\mathfrak{g} = \{0\}$ i $\dim \mathfrak{g} = 1$. Naravno, svaka je prosta Liejeva algebra poluprosta.

Važna karakterizacija poluprostote Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ dobiva se pomoću njene Killingove forme $B_{\mathfrak{g}}$. U tu svrhu dokažimo najprije osnovna svojstva Killingove forme:

Propozicija 4.3.2. *Za svaku Liejevu algebru $\mathfrak{g}$ vrijedi:*

(*a*) $B_{\mathfrak{g}}(\varphi(x), \varphi(x)) = B_{\mathfrak{g}}(x, y)\ \ \forall x, y \in \mathfrak{g}$ *i* $\forall \varphi \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$.

(*b*) $B_{\mathfrak{g}}(Dx, y) + B_{\mathfrak{g}}(x, Dy) = 0\ \ \forall x, y \in \mathfrak{g}$ *i* $\forall D \in \mathrm{Der}(\mathfrak{g})$.

(*c*) $B_{\mathfrak{g}}([x, y], z) = B_{\mathfrak{g}}(x, [y, z])\ \ \forall x, y, z \in \mathfrak{g}$.

(*d*) *Ako je $\mathfrak{a}$ ideal u $\mathfrak{g}$ onda je $B_{\mathfrak{a}} = B_{\mathfrak{g}}|\mathfrak{a} \times \mathfrak{a}$.*

Dokaz: (*a*) Za $\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ i $x, y \in \mathfrak{g}$ vrijedi

$$(\mathrm{ad}\, \varphi(x))y = [\varphi(x), y] = \varphi\left([x, \varphi^{-1}y]\right) = \left(\varphi \circ (\mathrm{ad}\, x) \circ \varphi^{-1}\right) y.$$

Dakle, vrijedi $\mathrm{ad}\, \varphi(x) = \varphi \circ (\mathrm{ad}\, x) \circ \varphi^{-1}$, pa imamo

$$B_{\mathfrak{g}}(\varphi(x), \varphi(y)) = \mathrm{Tr}\,(\mathrm{ad}\, \varphi(x))(\mathrm{ad}\, \varphi(y)) = \mathrm{Tr}\,(\varphi \circ (\mathrm{ad}\, x)(\mathrm{ad}\, y) \circ \varphi^{-1}) = \mathrm{Tr}\,(\mathrm{ad}\, x)(\mathrm{ad}\, y) = B_{\mathfrak{g}}(x, y).$$

(*b*) U dokazu propozicije 4.1.3. vidjeli smo da za derivaciju $D \in \mathrm{Der}(\mathfrak{g})$ vrijedi $\mathrm{ad}\, Dx = [D, \mathrm{ad}\, x]$ za svaki $x \in \mathfrak{g}$. Stoga za proizvoljne $x, y \in \mathfrak{g}$ imamo redom

$$B_{\mathfrak{g}}(Dx, y) + B_{\mathfrak{g}}(x, Dy) = \mathrm{Tr}\,(\mathrm{ad}\, Dx)(\mathrm{ad}\, y) + \mathrm{Tr}\,(\mathrm{ad}\, x)(\mathrm{ad}\, Dy) =$$

$$= \mathrm{Tr}\,[D, \mathrm{ad}\, x](\mathrm{ad}\, y) + \mathrm{Tr}\,(\mathrm{ad}\, x)[D, \mathrm{ad}\, y] =$$

$$= \mathrm{Tr}\, D(\mathrm{ad}\, x)(\mathrm{ad}\, y) - \mathrm{Tr}\,(\mathrm{ad}\, x)D(\mathrm{ad}\, y) + \mathrm{Tr}\,(\mathrm{ad}\, x)D(\mathrm{ad}\, y) - \mathrm{Tr}\,(\mathrm{ad}\, x)(\mathrm{ad}\, y)D = 0,$$

jer za linearne operatore A, B, C je $\mathrm{Tr}\, ABC = \mathrm{Tr}\, BCA$.

Tvrdnja (*c*) slijedi neposrednom primjenom tvrdnje (*b*) na unutarnju derivaciju $D = \mathrm{ad}\, y$.

(d) Uočimo sljedeću činjenicu iz linearne algebre: *ako je W potprostor konačnodimenzionalnog vektorskog prostora V i ako je $A : V \to V$ linearan operator čija je slika sadržana u W onda je* $\mathrm{Tr}\, A = \mathrm{Tr}\,(A|W)$. Doista, da to dokažemo dovoljno je izabrati bazu $\{e_1, \ldots, e_k\}$ od W i dopuniti je do baze $\{e_1, \ldots, e_k, e_{k+1}, \ldots, e_n\}$ od V. U toj bazi matrica operatora A ima matricu u kojoj je donjih $n-k$ redaka nula, a u gornjem lijevom kvadratu formata $k \times k$ je upravo matrica restrikcije $A|W$ u bazi $\{e_1, \ldots, e_k\}$. Primijenimo sada tu činjenicu na situaciju $V = \mathfrak{g}$, $W = \mathfrak{a}$ i $A = (ad_{\mathfrak{g}}\, x)(ad_{\mathfrak{g}}\, y)$, gdje su x, y proizvoljni elementi ideala $\mathfrak{a}$. Kako je očito $(ad_{\mathfrak{g}}\, x)|\mathfrak{a} = ad_{\mathfrak{a}}\, x$, $(ad_{\mathfrak{g}}\, y)|\mathfrak{a} = ad_{\mathfrak{a}}\, y$ i $(ad_{\mathfrak{g}}\, x)(ad_{\mathfrak{g}}\, y)|\mathfrak{a} = ((ad_{\mathfrak{g}}\, x)|\mathfrak{a})\,((ad_{\mathfrak{g}}\, y)|\mathfrak{a})$, dobivamo

$$B_{\mathfrak{g}}(x, y) = \mathrm{Tr}\,(ad_{\mathfrak{g}}\, x)(ad_{\mathfrak{g}}\, y) = \mathrm{Tr}\,(ad_{\mathfrak{a}}\, x)(ad_{\mathfrak{a}}\, y) = B_{\mathfrak{a}}(x, y).$$

Najavljena karakterizacija poluprostote je:

Teorem 4.3.3. *Liejeva algebra $\mathfrak{g} \neq \{0\}$ je poluprosta ako i samo ako je njena Killingova forma $B_{\mathfrak{g}}$ nedegenerirana, tj. vrijedi implikacija*

$$B_{\mathfrak{g}}(x, y) = 0 \quad \forall y \in \mathfrak{g} \qquad \Longrightarrow \qquad x = 0.$$

Dokaz: Pretpostavimo da je $\mathfrak{g} \neq \{0\}$ poluprosta Liejeva algebra. Stavimo

$$\mathfrak{r} = \{x \in \mathfrak{g};\ B_{\mathfrak{g}}(x, y) = 0\ \ \forall y \in \mathfrak{g}\}. \tag{4.3}$$

Treba dokazati da je $\mathfrak{r} = \{0\}$. $\mathfrak{r}$ je očito potprostor od $\mathfrak{g}$. Nadalje, iz tvrdnje (c) propozicije 4.3.2. slijedi da je $\mathfrak{r}$ ideal u $\mathfrak{g}$. Doista, ako su $x \in \mathfrak{r}$ i $y \in \mathfrak{g}$, onda za svaki $z \in \mathfrak{g}$ vrijedi

$$B_{\mathfrak{g}}([x, y], z) = B_{\mathfrak{g}}(x, [y, z]) = 0,$$

dakle, $[x, y] \in \mathfrak{r}$. Po definiciji $\mathfrak{r}$ je $B_{\mathfrak{g}}|\mathfrak{r} \times \mathfrak{g} = 0$, dakle i $B_{\mathfrak{g}}|\mathfrak{r} \times \mathfrak{r} = 0$, a to prema tvrdnji (d) propozicije 4.3.2. znači da je $B_{\mathfrak{r}} = 0$. No tada iz Cartanovog kriterija rješivosti (teorem 4.2.10.) slijedi da je ideal $\mathfrak{r}$ rješiv. Dakle, $\mathfrak{r} \subseteq \mathrm{Rad}(\mathfrak{g})$. Ali Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ je po pretpostavci poluprosta, tj. $\mathrm{Rad}(\mathfrak{g}) = \{0\}$, pa slijedi $\mathfrak{r} = \{0\}$.

Pretpostavimo sada da je Killingova forma $B_{\mathfrak{g}}$ nedegenerirana, tj. da je ideal $\mathfrak{r}$ definiran sa (4.3) jednak $\{0\}$. Neka je $\mathfrak{a}$ komutativni ideal u $\mathfrak{g}$. Za $x \in \mathfrak{a}$ i bilo koji $y \in \mathfrak{g}$ operator $(\mathrm{ad}\, x)(\mathrm{ad}\, y)$ ima sliku sadržanu u $\mathfrak{a}$, pa njegov kvadrat $((\mathrm{ad}\, x)(\mathrm{ad}\, y))^2$ ima sliku sadržanu u $[\mathfrak{a}, \mathfrak{a}] = \{0\}$. Dakle, operator $(\mathrm{ad}\, x)(\mathrm{ad}\, y)$ je nilpotentan, pa mu je trag jednak 0. Dakle, za svaki $x \in \mathfrak{a}$ vrijedi $B_{\mathfrak{g}}(x, y) = 0\ \forall y \in \mathfrak{g}$. Time je dokazano da je $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{r}$. Ali po pretpostavci je $\mathfrak{r} = \{0\}$, pa je i $\mathfrak{a} = \{0\}$. Time smo dokazali da Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ ne sadrži nijedan komutativni ideal različit od $\{0\}$, a to prema propoziciji 4.3.1. znači da je Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ poluprosta.

Korolar 4.3.4. *Neka je $\mathfrak{g}$ Liejeva algebra nad poljem k i neka je K proširenje polja k. Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ je poluprosta ako i samo ako je Liejeva algebra $\mathfrak{g}^K$ poluprosta.*

Zadatak 4.3.1. *Dokažite korolar 4.3.4.*

Uputa: Uočite da je bilinearna forma B na vektorskom prostoru V nedegenerirana ako i samo ako je za neku (za svaku) bazu $\{e_1, \ldots, e_n\}$ prostora V matrica $[B(e_i, e_j)]_{i,j=1}^n$ regularna.

Zadatak 4.3.2. *Uočite da drugi dio dokaza vrijedi i bez pretpostavke da je polje karakteristike* 0. *Razmatranjem primjera $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(3, K)/Z(\mathfrak{sl}(3, K))$ za polje K karakteristike* 3 *pokažite da obrnuta implikacija u teoremu 4.3.3. općenito ne vrijedi, tj. da je ta Liejeva algebra poluprosta, ali njena Killingova forma je degenerirana.*

Ako su $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2, \ldots, \mathfrak{g}_k$ Liejeve algebre nad poljem K onda je očito da se na sljedeći način u Kartezijev produkt $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_2 \times \cdots \times \mathfrak{g}_k$ uvodi struktura Liejeve algebre:

$$[(x_1, x_2, \ldots, x_k), (y_1, y_2, \ldots, y_k)] = ([x_1, y_1], [x_2, y_2], \ldots, [x_k, y_k]), \qquad x_j, y_j \in \mathfrak{g}_j, \quad j = 1, 2, \ldots, k.$$

Ta se Liejeva algebra zove **direktni produkt Liejevih algebri** $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2, \ldots, \mathfrak{g}_k$. Primijetimo da je tada za svaki j

$$\underbrace{\{0\} \times \cdots \times \{0\}}_{j-1} \times \mathfrak{g}_j \times \underbrace{\{0\} \times \cdots \times \{0\}}_{k-j} = \{(\underbrace{0, \ldots, 0}_{j-1}, x, \underbrace{0, \ldots, 0}_{k-j});\ x \in \mathfrak{g}_j\}$$

ideal u Liejevoj algebri $\mathfrak{g}$ koji je kao Liejeva algebra izomorfan $\mathfrak{g}_j$. Nadalje, kao vektorski prostor $\mathfrak{g}$ je direktna suma tih ideala.

Pretpostavimo sada da je $\mathfrak{g}$ Liejeva algebra i da su $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_k$ ideali u $\mathfrak{g}$ takvi da je

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{a}_1 \dotplus \mathfrak{a}_2 \dotplus \cdots \dotplus \mathfrak{a}_k.$$

Tada za $i \neq j$ imamo

$$[\mathfrak{a}_i, \mathfrak{a}_j] \subseteq \mathfrak{a}_i \cap \mathfrak{a}_j = \{0\}.$$

Stoga za $x_j, y_j \in \mathfrak{a}_j$, $j = 1, 2, \ldots, k$, vrijedi

$$[x_1 + x_2 + \cdots + x_k, y_1 + y_2 + \cdots + y_k] = [x_1, y_1] + [x_2, y_2] + \cdots + [x_k, y_k].$$

To pokazuje da je Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ izomorfna direktnom produktu $\mathfrak{a}_1 \times \mathfrak{a}_2 \times \cdots \times \mathfrak{a}_k$.

Propozicija 4.3.5. *Neka je $\mathfrak{g}$ poluprosta Liejeva algebra i neka je $\mathfrak{a}$ ideal u $\mathfrak{g}$.*

(*a*) *$\mathfrak{a}$ je poluprosta Liejeva algebra.*

(*b*) *$\mathfrak{a}^\perp = \{x \in \mathfrak{g};\ B_\mathfrak{g}(x, y) = 0 \ \ \forall y \in \mathfrak{a}\}$ je ideal u $\mathfrak{g}$.*

(*c*) *Vrijedi $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \dotplus \mathfrak{a}^\perp$.*

Dokaz: (*b*) Za $x \in \mathfrak{a}^\perp$, $y \in \mathfrak{g}$ i $z \in \mathfrak{a}$ vrijedi $[y, z] \in \mathfrak{a}$, dakle, prema tvrdnji (*c*) propozicije 4.3.2. vrijedi

$$B_\mathfrak{g}([x, y], z) = B_\mathfrak{g}(x, [y, z]) = 0.$$

To pokazuje da je

$$[x, y] \in \mathfrak{a}^\perp \qquad \forall x \in \mathfrak{a}^\perp \quad \text{i} \quad \forall y \in \mathfrak{g}.$$

Dakle, potprostor $\mathfrak{a}^\perp$ je ideal u Liejevoj algebri $\mathfrak{g}$.

(*c*) Zbog nedegeneriranosti forme $B_\mathfrak{g}$ vrijedi $\dim \mathfrak{a} + \dim \mathfrak{a}^\perp = \dim \mathfrak{g}$. Nadalje, Cartanov kriterij (teorem 4.2.10.) primijenjen na Liejevu algebru $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{a}^\perp$ pokazuje da je ta Liejeva algebra rješiva. Međutim, $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{a}^\perp$ je ideal u $\mathfrak{g}$, a kako je Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ poluprosta, zaključujemo da je $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{a}^\perp = \{0\}$. Uz jednakost dimenzija to nam daje $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \dotplus \mathfrak{a}^\perp$.

(*a*) Iz tvrdnje (*c*) i iz nedegeneriranosti forme $B_\mathfrak{g}$ slijedi da je i njena restrikcija $B_\mathfrak{g}|\mathfrak{a} \times \mathfrak{a}$ nedegenerirana. No prema tvrdnji (*d*) propozicije 4.3.2. ta je restrikcija upravo Killingova forma $B_\mathfrak{a}$ Liejeve algebre $\mathfrak{a}$. Prema teoremu 4.3.3. Liejeva algebra $\mathfrak{a}$ je poluprosta.

Teorem 4.3.6. *Za poluprostu Liejevu algebru $\mathfrak{g}$ vrijedi $\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$.*

Dokaz: Stavimo

$$\mathfrak{a} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]^{\perp} = \{x \in \mathfrak{g},\ B_{\mathfrak{g}}(x, [y, z]) = 0\ \ \forall y, z \in \mathfrak{g}\}.$$

Prema tvrdnji (b) propozicije 4.3.5. $\mathfrak{a}$ je ideal u $\mathfrak{g}$. Nadalje, prema tvrdnji (d) propozicije 4.3.2. Killingova forma od $\mathfrak{a}$ je restrikcija $B_{\mathfrak{g}}|\mathfrak{a} \times \mathfrak{a}$. Stoga za $x \in \mathfrak{a}$ i $y \in [\mathfrak{a}, \mathfrak{a}] \subseteq [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ imamo

$$B_{\mathfrak{a}}(x, y) = B_{\mathfrak{g}}(x, y) = 0.$$

Sada po Cartanovom kriteriju rješivosti (teorem 4.2.10.) zaključujemo da je ideal $\mathfrak{a}$ rješiv. Kako je Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ poluprosta, slijedi $\mathfrak{a} = \{0\}$. Sada iz tvrdnje (c) propozicije 4.3.5. slijedi da je $\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$.

Korolar 4.3.7. *Neka je π reprezentacija poluproste Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ na konačnodimenzionalnom vektorskom prostoru V. Tada je $\pi(\mathfrak{g}) \subseteq \mathfrak{sl}(V) = \{A \in \mathfrak{gl}(V);\ \mathrm{Tr}\, A = 0\}$.*

Dokaz: Tvrdnja slijedi neposredno iz teorema 4.3.6.:

$$\pi(\mathfrak{g}) = \pi([\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]) = [\pi(\mathfrak{g}), \pi(\mathfrak{g})] \subseteq [\mathfrak{gl}(V), \mathfrak{gl}(V)] \subseteq \mathfrak{sl}(V).$$

Odatle očito slijedi:

Korolar 4.3.8. *Neka je π reprezentacija poluproste Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ na jednodimenzionalnom vektorskom prostoru V. Tada je $\pi(x) = 0\ \ \forall x \in \mathfrak{g}$.*

Teorem 4.3.9. *Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ je poluprosta ako i samo ako je ona izomorfna direktnom produktu prostih Liejevih algebri. Ako je $\mathfrak{g} \neq \{0\}$ poluprosta Liejeva algebra i $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \dot{+} \mathfrak{g}_2 \dot{+} \cdots \dot{+} \mathfrak{g}_k$, pri čemu su $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2, \ldots, \mathfrak{g}_k$ prosti ideali u $\mathfrak{g}$ i ako je $\mathfrak{a} \neq \{0\}$ ideal u $\mathfrak{g}$ onda postoje $1 \leq i_1 < \cdots < i_\ell \leq k$ takvi da je $\mathfrak{a} = \mathfrak{g}_{i_1} \dot{+} \cdots \dot{+} \mathfrak{g}_{i_\ell}$. Posebno, $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2, \ldots, \mathfrak{g}_k$ su jedini prosti ideali u $\mathfrak{g}$.*

Dokaz: Pretpostavimo da je $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \dot{+} \mathfrak{g}_2 \dot{+} \cdots \dot{+} \mathfrak{g}_k$, pri čemu su $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2, \ldots, \mathfrak{g}_k$ prosti ideali u $\mathfrak{g}$. Neka je $x \in \mathfrak{g}$ takav da je $B_{\mathfrak{g}}(y, x) = 0\ \ \forall y \in \mathfrak{g}$. Imamo

$$x = x_1 + x_2 + \cdots + x_k \quad \text{za neke} \quad x_1 \in \mathfrak{g}_1, x_2 \in \mathfrak{g}_2, \ldots, x_k \in \mathfrak{g}_k.$$

Za $j \in \{1, 2, \ldots, k\}$ i $y \in \mathfrak{g}_j$ imamo $[y, \mathfrak{g}_i] = \{0\}$ za $i \neq j$, tj. $(\mathrm{ad}\, y)|\mathfrak{g}_i = 0$. To pokazuje da je $B_{\mathfrak{g}}(y, x_i) = 0$ za $i \neq j$. Prema tome, imamo

$$B_{\mathfrak{g}_j}(y, x_j) = B_{\mathfrak{g}}(y, x_j) = \sum_{i=1}^{k} B_{\mathfrak{g}}(y, x_i) = B_{\mathfrak{g}}(y, x) = 0 \qquad \forall y \in \mathfrak{g}_j.$$

Kako je Liejeva algebra $\mathfrak{g}_j$ prosta, dakle i poluprosta, pomoću teorema 4.3.3. zaključujemo da je $x_j = 0$. Kako je $j \in \{1, 2, \ldots, k\}$ bio proizvoljan, slijedi $x = 0$. Time je dokazano da je Killingova forma $B_{\mathfrak{g}}$ nedegenerirana, odnosno, po teoremu 4.3.3. Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ je poluprosta.

Pretpostavimo sada da je u toj situaciji $\mathfrak{a} \neq \{0\}$ ideal u $\mathfrak{g}$. Za bilo koji $j \in \{1, 2, \ldots, k\}$ tada je $[\mathfrak{a}, \mathfrak{g}_j]$ ideal u $\mathfrak{g}_j$, a kako je $\mathfrak{g}_j$ prosta Liejeva algebra, mora biti ili $[\mathfrak{a}, \mathfrak{g}_j] = \mathfrak{g}_j$ ili $[\mathfrak{a}, \mathfrak{g}_j] = \{0\}$. S druge strane, prema tvrdnji (a) propozicije 4.3.5. $\mathfrak{a}$ je poluprosta Liejeva algebra. Stoga je po teoremu 4.3.6. $\mathfrak{a} = [\mathfrak{a}, \mathfrak{a}]$. S druge strane, očito je $[\mathfrak{a}, \mathfrak{a}^{\perp}] = \{0\}$. Stoga je po tvrdnji (c) propozicije 4.3.5. $[\mathfrak{a}, \mathfrak{g}] = [\mathfrak{a}, \mathfrak{a} \dot{+} \mathfrak{a}^{\perp}] = [\mathfrak{a}, \mathfrak{a}] = \mathfrak{a}$. Dakle,

$$\mathfrak{a} = [\mathfrak{a}, \mathfrak{g}] = [\mathfrak{a}, \mathfrak{g}_1 \dot{+} \mathfrak{g}_2 \dot{+} \cdots \dot{+} \mathfrak{g}_k] = [\mathfrak{a}, \mathfrak{g}_1] \dot{+} [\mathfrak{a}, \mathfrak{g}_2] \dot{+} \cdots \dot{+} [\mathfrak{a}, \mathfrak{g}_k].$$

Kako je za svaki j ili $[\mathfrak{a}, \mathfrak{g}_j] = \mathfrak{g}_j$ ili $[\mathfrak{a}, \mathfrak{g}_j] = \{0\}$, slijedi da je za neke $1 \leq i_1 < \cdots < i_\ell \leq k$

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{g}_{i_1} \dot{+} \cdots \dot{+} \mathfrak{g}_{i_\ell}.$$

Pretpostavimo sada da je $\mathfrak{g} \neq \{0\}$ proizvoljna poluprosta Liejeva algebra. Ako $\mathfrak{g}$ nije prosta, u $\mathfrak{g}$ postoji ideal $\mathfrak{a}$ različit i od $\{0\}$ i od $\mathfrak{g}$. Tada je po propoziciji 4.3.5. $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \dotplus \mathfrak{a}^\perp$ i ideali $\mathfrak{a}$ i $\mathfrak{a}^\perp$ su poluproste Liejeve algebre. Indukcijom po $\dim \mathfrak{g}$ slijedi da postoje prosti ideali $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2, \ldots, \mathfrak{g}_k$ takvi da je $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \dotplus \mathfrak{g}_2 \dotplus \cdots \dotplus \mathfrak{g}_k$.

Time je teorem u potpunosti dokazan.

Teorem 4.3.10. *Neka je $\mathfrak{g}$ poluprosta Liejeva algebra. Tada je svaka njena derivacija unutarnja, tj.* $\operatorname{ad} \mathfrak{g} = \operatorname{Der}(\mathfrak{g})$.

Dokaz: Kako je $\mathfrak{g}$ poluprosta, njena je Killingova forma $B = B_\mathfrak{g}$ nedegenerirana. Odatle slijedi da za svaki linearni funkcional $f \in \mathfrak{g}^*$ postoji jedinstven element $y \in \mathfrak{g}$ takav da je $f(x) = B(x, y)$ $\forall x \in \mathfrak{g}$. Neka je $D \in \operatorname{Der}(\mathfrak{g})$. Definiramo linearan funkcional $f \in \mathfrak{g}^*$ sa $f(x) = \operatorname{Tr}(\operatorname{ad} x)D$, $x \in \mathfrak{g}$. Neka je $y \in \mathfrak{g}$ takav da je $f(x) = B(x, y)$ $\forall x \in \mathfrak{g}$, tj. da je

$$\operatorname{Tr}(\operatorname{ad} x)D = B(x, y) \qquad \forall x \in \mathfrak{g}.$$

Neka je E derivacija od $\mathfrak{g}$ definirana sa $E = D - \operatorname{ad} y$. Tada je

$$\operatorname{Tr} E(\operatorname{ad} x) = \operatorname{Tr} D(\operatorname{ad} x) - \operatorname{Tr}(\operatorname{ad} y)(\operatorname{ad} x) = \operatorname{Tr}(\operatorname{ad} x)D - B(x, y) = 0 \qquad \forall x \in \mathfrak{g}.$$

Prema dokazu propozicije 1.1.3. znamo da je $\operatorname{ad} Ex = [E, \operatorname{ad} x]$ $\forall x \in \mathfrak{g}$. Prema tome, za proizvoljne $x, z \in \mathfrak{g}$ imamo redom

$$B(Ex, z) = \operatorname{Tr}(\operatorname{ad} Ex)(\operatorname{ad} z) = \operatorname{Tr}[E, \operatorname{ad} x](\operatorname{ad} z) = \operatorname{Tr}(E(\operatorname{ad} x)(\operatorname{ad} z) - (\operatorname{ad} x)E(\operatorname{ad} z)) =$$

$$= \operatorname{Tr}(E(\operatorname{ad} x)(\operatorname{ad} z) - E(\operatorname{ad} z)(\operatorname{ad} x)) = \operatorname{Tr} E[\operatorname{ad} x, \operatorname{ad} z] = \operatorname{Tr} E(\operatorname{ad}[x, z]) = 0.$$

Kako je forma B nedegenerirana, odatle slijedi $E = 0$, tj. $D = \operatorname{ad} y$.

Sjetimo se sada Jordanove dekompozicije linearnih operatora. Prema teoremu 3.3.2. za svaki linearan operator A na konačnodimenzionalnom vektorskom prostoru V postoje jedinstveni poluprost operator A_s i nilpotentan operator A_n takvi da je $A = A_s + A_n$ i $A_s A_n = A_n A_s$. Nadalje, prema teoremu 3.3.4. postoje polinomi P i Q takvi da je $P(0) = Q(0) = 0$, $A_s = P(A)$ i $A_n = Q(A)$. To smo dokazali uz pretpostavku da je polje algebarski zatvoreno. Pomoću proširenja polja skalara može se dokazati da te tvrdnje vrijede za svako polje karakteristike 0.

Neka je sada $\mathfrak{g}$ poluprosta Liejeva algebra i $x \in \mathfrak{g}$. Reći ćemo da je element x **poluprost** ako je operator $\operatorname{ad} x$ poluprost, a **nilpotentan** ako je operator $\operatorname{ad} x$ nilpotentan. Za svaki $x \in \mathfrak{g}$ je $\operatorname{ad} x = (\operatorname{ad} x)_s + (\operatorname{ad} x)_n$. Nadalje, prema propoziciji 3.3.6. operatori $(\operatorname{ad} x)_s$ i $(\operatorname{ad} x)_n$ su derivacije Liejeve algebre $\mathfrak{g}$. Sada iz teorema 4.3.10. slijedi da postoje $x_{(s)}, x_{(n)} \in \mathfrak{g}$ takvi da je $(\operatorname{ad} x)_s = \operatorname{ad} x_{(s)}$ i $(\operatorname{ad} x)_n = \operatorname{ad} x_{(n)}$. Nadalje, kako je $\operatorname{Ker} \operatorname{ad} = Z(\mathfrak{g}) = \{0\}$, ti su elementi $x_{(s)}$ i $x_{(n)}$ jedinstveni. Napomenimo da je po definiciji tada $x_{(s)}$ poluprost elemet od $\mathfrak{g}$ i $x_{(n)}$ je nilpotentan element od $\mathfrak{g}$. Nadalje, vrijedi

$$\operatorname{ad}[x_{(s)}, x_{(n)}] = [\operatorname{ad} x_{(s)}, \operatorname{ad} x_{(n)}] = [(\operatorname{ad} x)_s, (\operatorname{ad} x)_n] = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad [x_{(s)}, x_{(n)}] = 0.$$

$x_{(s)}$ se zove **poluprost dio** a $x_{(n)}$ **nilpotentan dio** elemeta $x \in \mathfrak{g}$. Pretpostavimo sada da su s poluprost i n nilpotentan element od $\mathfrak{g}$ takvi da je $x = s + n$ i $[s, n] = 0$. Tada je $\operatorname{ad} s$ poluprost operator na $\mathfrak{g}$ i $\operatorname{ad} n$ je nilpotentan operator na $\mathfrak{g}$ i vrijedi

$$\operatorname{ad} x = \operatorname{ad} s + \operatorname{ad} n \qquad \text{i} \qquad [\operatorname{ad} s, \operatorname{ad} n] = 0.$$

Dakle,

$$\operatorname{ad} s = (\operatorname{ad} x)_s = \operatorname{ad} x_{(s)} \qquad \text{i} \qquad \operatorname{ad} n = (\operatorname{ad} x)_n = \operatorname{ad} x_{(n)},$$

pa slijedi $s = x_{(s)}$ i $n = x_{(n)}$ jer je ad injektivni homomorfizam. Time smo dokazali:

Teorem 4.3.11. (**Jordan–Chevalleyeva dekompozicija**) *Neka je* $\mathfrak{g}$ *poluprosta Liejeva algebra* (*nad poljem karakteristike* 0) *i* $x \in \mathfrak{g}$. *Postoje jedinstven poluprost element* $x_{(s)}$ *i jedinstven nilpotentan element* $x_{(n)}$ *Liejeve algebre* $\mathfrak{g}$ *takvi da je* $x = x_{(s)} + x_{(n)}$ *i* $[x_{(s)}, x_{(n)}] = 0$. *Nadalje, postoje polinomi* P *i* Q *takvi da je* $P(0) = Q(0) = 0$, $\operatorname{ad} x_{(s)} = P(\operatorname{ad} x)$ *i* $\operatorname{ad} x_{(n)} = Q(\operatorname{ad} x)$.

4.4 Weylov teorem potpune reducibilnosti

U ovom ćemo odjeljku promatrati konačnodimenzionalne reprezentacije poluprostih Liejevih algebri. Za reprezentaciju π Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ na konačnodimenzionalnom vektorskom prostoru V nad poljem K (karakteristike 0) definiramo formu $B_\pi : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to K$ ovako:

$$B_\pi(x, y) = \mathrm{Tr}\, \pi(x)\pi(y), \qquad x, y \in \mathfrak{g}.$$

Očito je B_π bilinearna simetrična forma na $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$. Ona se zove **forma na $\mathfrak{g}$ pridružena reprezentaciji π**.

Propozicija 4.4.1. *Neka je $\mathfrak{g}$ Liejeva algebra, π njena reprezentacija na konačnodimenzionalnom vektorskom prostoru V i B_π pridružena forma na $\mathfrak{g}$.*

(a) *Forma B_π je* **invarijantna**, *tj.*

$$B_\pi([x, y], z) = B_\pi(x, [y, z]) \qquad \forall x, y, z \in \mathfrak{g}.$$

(b) *Ako je $\mathfrak{a}$ ideal onda je i*

$$\mathfrak{a}^\pi = \{x \in \mathfrak{g};\ B_\pi(x, y) = 0\ \ \forall y \in \mathfrak{g}\}$$

ideal u $\mathfrak{g}$.

(c) *Ako je forma B_π nedegenerirana i ako je $\mathfrak{a}$ ideal u $\mathfrak{g}$, onda je ideal $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{a}^\pi$ komutativan.*

Dokaz: (a) Za $x, y, z \in \mathfrak{g}$ zbog svojstava traga umnoška linearnih operatora imamo redom:

$$B_\pi([x, y], z) = \mathrm{Tr}\, \pi([x, y])\pi(z) = \mathrm{Tr}\, \pi(x)\pi(y)\pi(z) - \mathrm{Tr}\, \pi(y)\pi(x)\pi(z) =$$
$$= \mathrm{Tr}\, \pi(x)\pi(y)\pi(z) - \mathrm{Tr}\, \pi(x)\pi(z)\pi(y) = \mathrm{Tr}\, \pi(x)\pi([y, z]) = B_\pi(x, [y, z]).$$

Tvrdnja (b) dokazuje se sasvim analogno tvrdnji (b) propozicije 4.3.5. Za $x \in \mathfrak{a}^\pi$, $y \in \mathfrak{g}$ i $z \in \mathfrak{a}$ prema tvrdnji (a) imamo $B_\pi([x, y], z) = B_\pi(x, [y, z]) = 0$. To pokazuje da je $[\mathfrak{a}^\pi, \mathfrak{g}] \subseteq \mathfrak{a}^\pi$, odnosno, potprostor $\mathfrak{a}^\pi$ je ideal u Liejevoj algebri $\mathfrak{g}$.

(c) Za $x, y \in \mathfrak{a} \cap \mathfrak{a}^\pi$ i svaki $z \in \mathfrak{g}$ imamo $[y, z] \in \mathfrak{a}$ i $x \in \mathfrak{a}^\pi$, pa zbog (a) vrijedi $B_\pi([x, y], z) = = B_\pi(x, [y, z]) = 0$. To pokazuje da je $[x, y] \in \mathfrak{g}^\pi\ \ \forall x, y \in \mathfrak{a} \cap \mathfrak{a}^\pi$. Kako je forma B_π po pretpostavci nedegenerirana, vrijedi $\mathfrak{g}^\pi = \{0\}$, a to znači da je ideal $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{a}^\pi$ komutativan.

Propozicija 4.4.2. *Neka je π vjerna konačnodimenzionalna reprezentacija poluproste Liejeve algebre $\mathfrak{g}$. Tada je forma pridružena forma B_π nedegenerirana.*

Dokaz: Prema tvrdnji (b) propozicije 4.4.1. $\mathfrak{g}^\pi$ je ideal u $\mathfrak{g}$. Neka je V prostor reprezentacije π. Budući da je reprezentacija π po pretpostavci vjerna, možemo pretpostaviti da je $\mathfrak{g} \subseteq \mathfrak{gl}(V)$ i da je π identiteta. Za $x, y \in \mathfrak{g}^\pi$ tada je

$$\mathrm{Tr}\, xy = B_\pi(x, y) = 0.$$

Sada iz Cartanovog kriterija rješivosti (teorem 4.2.9.) slijedi da je ideal $\mathfrak{g}^\pi$ rješiv. Kako je $\mathfrak{g}$ poluprosta, slijedi $\mathfrak{g}^\pi = \{0\}$, odnosno, forma B_π je nedegenerirana.

Propozicija 4.4.3. *Neka je π vjerna reprezentacija poluproste Liejeve algebre $\mathfrak{g} \neq \{0\}$ na konačnodimenzionalnom vektorskom prostoru V i B_π pridružena (nedegenerirana) forma. Neka je $\{x_1, \ldots, x_n\}$ baza od $\mathfrak{g}$ i neka je $\{y_1, \ldots, y_n\}$ njoj biortogonalna baza u odnosu na formu B_π, dakle, takva da je*

$$B_\pi(x_i, y_j) = \delta_{ij} \qquad \forall i, j \in \{1, \ldots, n\}.$$

Definiramo linearan operator $C_\pi : V \to V$ sa

$$C_\pi = \sum_{i=1}^{n} \pi(x_i)\pi(y_i).$$

(a) *Operator* C_π *neovisan je o izboru baze* $\{x_1,\dots,x_n\}$.

(b) *Vrijedi* $C_\pi\pi(x)=\pi(x)C_\pi\ \ \forall x\in\mathfrak{g}$, *tj.* $C_\pi\in End_{\mathfrak{g}}(V)$.

(c) $\operatorname{Tr}C_\pi=\dim\,\mathfrak{g}$.

(d) *Ako je reprezentacija* π *ireducibilna, onda je* $C_\pi\in GL(V)$.

Dokaz: (a) Neka je $\{x_1',\dots,x_n'\}$ druga baza od $\mathfrak{g}$ i $\{y_1',\dots,y_n'\}$ njoj biortogonalna baza od $\mathfrak{g}$ u odnosu na formu B_π. Neka su $A=[\alpha_{ij}]_{i,j=1}^n$ i $B=[\beta_{ij}]_{i,j=1}^n$ matrice veze između parova tih baza:

$$x_j'=\sum_{i=1}^n\alpha_{ij}x_i,\qquad y_j'=\sum_{i=1}^n\beta_{ij}y_i,\qquad j=1,\dots,n.$$

Tada za bilo koje $j,k\in\{1,\dots,n\}$ imamo

$$\delta_{jk}=B_\pi(x_j',y_k')=\sum_{i,\ell=1}^n\alpha_{ij}\beta_{\ell k}B_\pi(x_i,y_\ell)=\sum_{i,\ell=1}^n\alpha_{ij}\beta_{\ell k}\delta_{i\ell}=\sum_{i=1}^n\alpha_{ij}\beta_{ik}.$$

To pokazuje da je B transponirana matrica inverzne matrice od A. Stoga vrijedi i

$$\sum_{i=1}^n\alpha_{ji}\beta_{ki}=\delta_{jk}\qquad\forall j,k\in\{1,\dots,n\}.$$

Slijedi

$$\sum_{i=1}^n\pi(x_i')\pi(y_i')=\sum_{i,j,k=1}^n\alpha_{ji}\beta_{ki}\pi(x_j)\pi(y_k)=\sum_{j,k=1}^n\delta_{jk}\pi(x_j)\pi(y_k)=\sum_{j=1}^n\pi(x_j)\pi(y_j)=C_\pi.$$

Time je dokazano da je definicija operatora C_π neovisna o izboru baze $\{x_1,\dots,x_n\}$ od $\mathfrak{g}$.

(b) Neka je sada $x\in\mathfrak{g}$ i neka su λ_{ij} i μ_{ij} matrični elementi operatora $\operatorname{ad}x$ u bazama $\{x_1,\dots,x_n\}$ i $\{y_1,\dots,y_n\}$:

$$[x,x_j]=\sum_{i=1}^n\lambda_{ij}x_i,\qquad [x,y_j]=\sum_{i=1}^n\mu_{ij}y_i,\qquad i=1,\dots,n.$$

Tada zbog tvrdnje (a) propozicije 4.4.1. imamo redom za bilo koje $i,k\in\{1,\dots,n\}$:

$$\lambda_{ki}=\sum_{j=1}^n\lambda_{ji}\delta_{jk}=\sum_{j=1}^n\lambda_{ji}B_\pi(x_j,y_k)=B_\pi([x,x_i],y_k)=$$

$$=-B_\pi(x_i,[x,y_k])=-\sum_{j=1}^n\mu_{jk}B_\pi(x_i,y_j)=-\sum_{j=1}^n\mu_{jk}\delta_{ij}=-\mu_{ik}.$$

Zadatak 4.4.1. *Dokažite da linearne operatore* A,B,C *na vektorskom prostoru* V *vrijedi*

$$[A,BC]=[A,B]C+B[A,C].$$

Formulu iz prethodnog zadatka iskoristit ćemo za operatore $A=\pi(x)$, $B=\pi(x_i)$ i $C=\pi(y_i)$. Zbog dokazane jednakosti $\mu_{ji}=-\lambda_{ij}$ imamo redom

$$[\pi(x),C_\pi]=\sum_{i=1}^n[\pi(x),\pi(x_i)\pi(y_i)]=\sum_{i=1}^n\left([\pi(x),\pi(x_i)]\pi(y_i)+\pi(x_i)[\pi(x),\pi(y_i)]\right)=$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (\pi([x, x_i])\pi(y_i) + \pi(x_i)\pi([x, y_i])) = \sum_{i,j=1}^{n} (\lambda_{ij}\pi(x_j)\pi(y_i) + \mu_{ji}\pi(x_i)\pi(y_j)) =$$

$$= \sum_{i,j} \lambda_{ji}\pi(x_j)\pi(y_i) - \sum_{i,j=1}^{n} \lambda_{ij}\pi(x_i)\pi(y_j) = 0.$$

Time je dokazana tvrdnja (b).

(c) Imamo

$$\mathrm{Tr}\, C_\pi = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Tr}\, \pi(x_i)\pi(y_i) = \sum_{i=1}^{n} B_\pi(x_i, y_i) = n = \dim \mathfrak{g}.$$

Napokon, tvrdnja (d) slijedi iz neposredno iz tvrdnje (b) Schurove leme (teorem 1.5.6.), budući da je prema (b) i (c) $C_\pi \in End_{\mathfrak{g}}(V) \setminus \{0\}$.

Operator C_π iz prethodnog teorema zove se **Casimirov operator reprezentacije** π. Ukoliko reprezentacija π nije vjerna, ali nije trivijalna, tj. $\pi \neq 0$, možemo je promatrati kao vjernu reprezentaciju poluproste Liejeve algebre $\mathfrak{g}/(\mathrm{Ker}\, \pi)$. Pripadni Casimirov operator ponovo označavamo sa C_π i zovemo Casimirovim operatorom reprezentacije π.

Zadatak 4.4.2. *Dokažite da su Liejeve algebre $\mathfrak{sl}(2, K)$ i $\mathfrak{sl}(3, K)$ proste i izračunajte Casimirove operatore*

(a) *adjungirane reprezentacije $ad_{\mathfrak{g}}$ Liejeve algebre $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2, K)$;*

(b) *standardne reprezentacije Liejeve algebre $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(3, K)$ na prostoru $M_{3,1}(K) \cong K^3$.*

Dokazat ćemo sada centralni rezultat ovog odjeljka, jedan od fundamentalnih rezultata teorije poluprostih Liejevih algebri, tzv. **Weylov teorem o potpunoj reducibilnosti:**

Teorem 4.4.4. *Svaka konačnodimenzionalna reprezentacija poluproste Liejeve algebre je potpuno reducibilna.*

Dokaz: Neka je π reprezentacija poluproste Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ na konačnodimenzionalnom vektorskom prostoru V i neka je W $\pi-$invarijantan potprostor. Treba dokazati da postoji $\pi-$invarijantan potprostor U od V takav da je $V = W \dot{+} U$.

Pretpostavimo najprije da je W potprostor od V kodimenzije 1. Prema korolaru 4.3.8. tada je $\pi_{V/W}(x) = 0 \ \ \forall x \in \mathfrak{g}$, odnosno, vrijedi

$$\pi(x)V \subseteq W \qquad \forall x \in \mathfrak{g}. \tag{4.4}$$

Pretpostavimo dalje da je subreprezentacija $\sigma = \pi_W$ ireducibilna. Ako je $\sigma = 0$, tj. $\sigma(x) = 0$ $\forall x \in \mathfrak{g}$, onda iz (4.4) za proizvoljne $x, y \in \mathfrak{g}$ slijedi da je $\pi(x)\pi(y) = \sigma(x)\pi(y) = 0$. No tada je zbog teorema 4.3.6.

$$\pi(\mathfrak{g}) = \pi([\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]) = [\pi(\mathfrak{g}), \pi(\mathfrak{g})] = span\,\{\pi(x)\pi(y) - \pi(y)\pi(x);\ x, y \in \mathfrak{g}\} = \{0\},$$

pa je svaki direktni komplement od W u V $\pi-$invarijantan.

Pretpostavimo sada da $\sigma \neq 0$. Prema tvrdnji (d) propozicije 4.4.3. tada je

$$C_\pi|W = C_\sigma \in GL(W).$$

Kako je zbog (4.4) $C_\pi V \subseteq W$, zaključujemo da je

$$C_\pi V = \mathrm{Im}\, C_\pi = W.$$

Odatle slijedi da je $\mathrm{Ker}\, C_\pi$ jednodimenzionalan potprostor od V koji je direktni komplement od W. No taj je potprostor $\pi-$invarijantan zbog tvrdnje (c) propozicije 4.4.3.

U općem slučaju kad subreprezentacija $\sigma = \pi_W$ nije nužno ireducibilna dokaz egzistencije $\pi-$invarijantnog direktnog komplementa od W u V dokazujemo indukcijom u odnosu na dim V. Baza indukcije (dim, $V = 1$, $W = \{0\}$) je trivijalna. Provedimo korak indukcije i pretpostavimo da je tvrdnja dokazana za prostore manje dimenzije (i dalje, naravno, uz pretpostavku da je potprostor W kodimenzije 1 u V). Ako subreprezentacija σ nije ireducibilna, neka je $T \neq \{0\}$ $\pi-$invarijantan potprostor od W takav da je subreprezentacija $\pi_T = \sigma_T$ ireducibilna; naravno, tada je i $T \neq W$. Promatrajmo sada kvocijentnu reprezentaciju $\pi_{V/T}$. Tada je W/T potprostor od V/T kodimenzije 1 koji je $\pi_{V/T}-$invarijantan. Kako je dim $V/T <$ dim V, po pretpostavci indukcije postoji jednodimenzionalni $\pi_{V/T}-$invarijantan potprostor Z' od V/T takav da je $V/T = W/T \dotplus Z'$. Neka je Z totalni invers od Z' u V u odnosu na kvocijentno preslikavanje $V \to V/T$:

$$Z = \{v \in V;\ v + T \in Z'\}.$$

Tada je potprostor Z od V očito $\pi-$invarijantan. Nadalje, vrijedi dim $Z/T = 1$ i $Z \cap W = T$. Zbog korolara 4.3.8. je $\pi(x)Z \subseteq T\ \ \forall x \in \mathfrak{g}$. Kako je dim $Z =$ dim $T + 1 <$ dim $W + 1 =$ dim V, po pretpostavci indukcije postoji jednodimenzionalan π_Z-invarijantan potprostor U od Z takav da je $Z = T \dotplus U$. No tada je U $\pi-$invarijantan potprostor od V i vrijedi $V = W \dotplus U$.

Napustimo sada dodatnu pretpostavku dim $V/W = 1$. Neka je ω reprezentacija Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ na prostoru $\mathfrak{gl}(V)$ svih linearnih operatora na V definirana sa

$$\omega(x)A = [\pi(x), A] = \pi(x)A - A\pi(x), \qquad x \in \mathfrak{g}, \quad A \in \mathfrak{gl}(V).$$

Uočimo sada sljedeća dva potprostora M i N od $\mathfrak{gl}(V)$:

$$M = \{A \in \mathfrak{gl}(V);\ AV \subseteq W \text{ i } A|W = \lambda I_W \text{ za neki } \lambda \in K\},$$

$$N = \{A \in \mathfrak{gl}(V);\ AV \subseteq W \text{ i } A|W = 0\}.$$

Očito je N potprostor od M i dim $M/N = 1$. Dokažimo da su ti potprostori $\omega-$invarijantni. Neka je $A \in M$ i neka je $\lambda \in K$ takav da je $A|W = \lambda I_W$. Za $x \in\in \mathfrak{g}$ tada je $\pi(x)W \subseteq W$. Stoga za proizvoljan $v \in V$ i $w \in W$ imamo

$$[\pi(x), A]v = \pi(x)Av - A\pi(x)v \in W$$

i

$$[\pi(x), A]w = \pi(x)Aw - A\pi(x)w = \lambda\pi(x)w - \lambda\pi(x)w = 0.$$

To znači da je $\omega(x)A = [\pi(x), A] \in N\ \ \forall A \in M$. To pokazuje da su i M i njegov potprostor N $\omega-$invarijantni. Primijenimo sada dokazano na reprezentaciju ω_M i ω_M-invarijantan potprostor N kodimenzije 1. Slijedi da postoji jednodimenzionalan $\omega-$invarijantan potprostor P od M takav da je $M = N \dotplus P$. Prema korolaru 4.3.8. tada je $\omega_P(x) = 0\ \ \forall x \in \mathfrak{g}$. To znači da je $[\pi(x), A] = 0$ $\forall A \in P$ i $\forall x \in \mathfrak{g}$, odnosno, $P \subseteq End_{\mathfrak{g}}(V)$. Za $A \in P \setminus \{0\}$ je $AV \subseteq W$ i $A|W = \lambda I_W$ za neki $\lambda \neq 0$. Možemo $A \in P$ izabrati tako da je $\lambda = 1$, tj. da je $A|W = I_W$. No to znači da je A projektor prostora V na potprostor W. Tada za $U = \text{Ker}\, A$ vrijedi $V = W \dotplus U$. Nadalje, potprostor $U = \text{Ker}\, A$ je $\pi-$invarijantan jer je $A \in End_{\mathfrak{g}}(V)$, odnosno, jer je $\pi(x)A = A\pi(x)\ \ \forall x \in \mathfrak{g}$.

Važna je posljedica Weylovog teorema o potpunoj reducibilnosti da se za poluprostu Liejevu podalgebru $\mathfrak{g}$ od $\mathfrak{gl}(V)$ Jordan$-$Chevalleyeva dekompozicija elementa $x \in \mathfrak{g}$ podudara sa Jordanovom dekompozicijom linearnog operatora x :

Teorem 4.4.5. *Neka je V konačnodimenzionalan vektorski prostor i neka je $\mathfrak{g}$ poluprosta Liejeva podalgebra od $\mathfrak{gl}(V)$. Neka je $x \in \mathfrak{g}$ i neka su x_s i x_n poluprost i nilpotentan dio linearnog operatora x. Tada vrijedi $x_s = x_{(s)}$ i $x_n = x_{(n)}$ tj. $x = x_s + x_n$ je Jordan$-$Chevalleyeva dekompozicija od x u poluprostoj Liejevoj algebri $\mathfrak{g}$.*

Dokaz: Prvi nam je cilj dokazati da su $x_s, x_n \in \mathfrak{g}$. Kako je

$$\big(ad_{\mathfrak{gl}(V)}\, x\big)\, \mathfrak{g} = [x, \mathfrak{g}] \subseteq \mathfrak{g},$$

iz tvrdnje (c) teorema 3.3.2. (ili iz teorema 3.3.4.) slijedi da je i

$$\big(ad_{\mathfrak{gl}(V)}\, x\big)_s\, \mathfrak{g} \subseteq \mathfrak{g} \qquad \text{i} \qquad \big(ad_{\mathfrak{gl}(V)}\, x\big)_n\, \mathfrak{g} \subseteq \mathfrak{g}.$$

S druge strane, prema tvrdnji (c) propozicije 3.3.5. vrijedi

$$\big(ad_{\mathfrak{gl}(V)}\, x\big)_s = ad_{\mathfrak{gl}(V)}\, x_s \qquad \text{i} \qquad \big(ad_{\mathfrak{gl}(V)}\, x\big)_n = ad_{\mathfrak{gl}(V)}\, x_n.$$

Zaključujemo da vrijedi

$$\big(ad_{\mathfrak{gl}(V)}\, x_s\big)\, \mathfrak{g} \subseteq \mathfrak{g} \quad \text{i} \quad \big(ad_{\mathfrak{gl}(V)}\, x_n\big)\, \mathfrak{g} \subseteq \mathfrak{g}, \qquad \text{odnosno,} \quad [x_s, \mathfrak{g}] \subseteq \mathfrak{g} \quad \text{i} \quad [x_n, \mathfrak{g}] \subseteq \mathfrak{g}.$$

Drugim riječima, operatori $x_s, x_n \in \mathfrak{gl}(V)$ su elementi normalizatora

$$\mathfrak{n} = N_{\mathfrak{gl}(V)}(\mathfrak{g}) = \{y \in \mathfrak{gl}(V);\ [y, \mathfrak{g}] \subseteq \mathfrak{g}\}$$

Liejeve podalgebre $\mathfrak{g}$ u Liejevoj algebri $\mathfrak{gl}(V)$. Tvrdnja $x_s, x_n \in \mathfrak{g}$ bila bi dokazana kada bismo znali da je $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}$. Nažalost, to nikada nije istina: naime, po teoremu 4.3.6. je

$$\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \subseteq [\mathfrak{gl}(V), \mathfrak{gl}(V)] = \mathfrak{sl}(V),$$

a očito je jedinični operator $I = I_V$ element od $\mathfrak{n}$, ali ne i od $\mathfrak{sl}(V)$, dakle, ne i od $\mathfrak{g}$.

Neka je sada $\tilde{K}$ algebarski zatvoreno proširenje polja K. Tada se svaki $K-$linearan operator x na prostoru V jedinstveno proširuje do $\tilde{K}-$linearnog operatora na $V^{\tilde{K}}$. Taj ćemo prošireni operator označavati istim znakom x. Na taj način $\mathfrak{g}$ postaje podalgebra Liejeve algebre $\mathfrak{gl}(V^{\tilde{K}})_K$. Označimo sada sa $Inv_{\mathfrak{g}}(V^{\tilde{K}})$ skup svih $\mathfrak{g}-$invarijantnih potprostora od $V^{\tilde{K}}$. Za svaki $W \in Inv_{\mathfrak{g}}(V^{\tilde{K}})$ definiramo

$$\mathfrak{a}_W = \{y \in \mathfrak{gl}(V);\ yW \subseteq W \ \text{ i } \ \mathrm{Tr}\,(y|W) = 0\}.$$

Lako se vidi da je $\mathfrak{a}_W$ Liejeva podalgebra od $\mathfrak{gl}(V)$. Nadalje, za svaki $W \in Inv_{\mathfrak{g}}(V^{\tilde{K}})$ preslikavanje $x \mapsto x|W$, $x \in \mathfrak{g}$, je reprezentacija poluproste Liejeve algebre $\mathfrak{g}$, pa po korolaru 4.3.7. vrijedi $\mathrm{Tr}\,(x|W) = 0\ \ \forall x \in \mathfrak{g}$. Prema tome,

$$\mathfrak{g} \subseteq \mathfrak{a}_W \qquad \forall W \in Inv_{\mathfrak{g}}(V^{\tilde{K}}).$$

Stavimo sada

$$\mathfrak{g}^* = \mathfrak{n} \cap \bigcap_{W \in Inv_{\mathfrak{g}}\left(V^{\tilde{K}}\right)} \mathfrak{a}_W.$$

Tada je $\mathfrak{g}^*$ Liejeva podalgebra od $\mathfrak{n}$ koja sadrži $\mathfrak{g}$. Ako je $W \in Inv_{\mathfrak{g}}(V^{\tilde{K}})$, onda po već spomenutoj tvrdnji (c) teorema 3.3.2. (ili po teoremu 3.3.4.) vrijedi $x_sW \subseteq W$ i $x_nW \subseteq W$. Nadalje, operator x_n je nilpotentan, pa je i restrikcija $x_n|W$ nilpotentan operator i, posebno, $\mathrm{Tr}\,(x_n|W) = 0$. Kako je $\mathrm{Tr}\,(x|W) = 0$ i $x_s = x - x_n$, vrijedi i $\mathrm{Tr}\,(x_s|W) = 0$. Dakle, za svaki $W \in Inv_{\mathfrak{g}}(V^{\tilde{K}})$ vrijedi $x_s, x_n \in \mathfrak{a}_W$. Zaključujemo da su $x_s, x_n \in \mathfrak{g}^*$.

Prema tome, dokaz tvrdnje $x_s, x_n \in \mathfrak{g}$ bit će potpun ako pokažemo da je $\mathfrak{g}^* = \mathfrak{g}$. U tu svrhu poslužit će nam Weylov teorem 4.4.4. o potpunoj reducibilnosti. Taj ćemo teorem primijeniti na dvije reprezentacije poluproste Liejeve algebre $\mathfrak{g}$: na restrikciju $ad_{\mathfrak{g}^*}|\mathfrak{g}$ adjungirane reprezentacije Liejeve algebre $\mathfrak{g}^*$ i na identičnu reprezentaciju $x \mapsto x$, $x \in \mathfrak{g}$, na prostoru $V^{\tilde{K}}$. Prije svega, $\mathfrak{g}$ je potprostor od $\mathfrak{g}^*$ koji je $ad_{\mathfrak{g}^*}|\mathfrak{g}-$invarijantan, pa postoji potprostor $\mathfrak{b}$ od $\mathfrak{g}^*$ takav da je $\mathfrak{g}^* = \mathfrak{g} \dotplus \mathfrak{b}$

i da je $\mathfrak{b}$ invarijantan u odnosu na reprezentaciju $ad_{\mathfrak{g}^*}|\mathfrak{g}$, tj. da je $[\mathfrak{g},\mathfrak{b}] \subseteq \mathfrak{b}$. Međutim, vrijedi i $[\mathfrak{g},\mathfrak{b}] \subseteq [\mathfrak{g},\mathfrak{g}^*] \subseteq [\mathfrak{g},\mathfrak{n}] \subseteq \mathfrak{g}$. Kako je $\mathfrak{g} \cap \mathfrak{b} = \{0\}$, zaključujemo da je $[\mathfrak{g},\mathfrak{b}] = \{0\}$, odnosno, subreprezentacija $ad_{\mathfrak{g}^*}|\mathfrak{g}$ na potprostoru $\mathfrak{b}$ je trivijalna. Neka je sada W bilo koji $\mathfrak{g}-$invarijantan potprostor od $V^{\tilde{K}}$, tj. $W \in Inv_{\mathfrak{g}}(V^{\tilde{K}})$, takav da je pripadna subreprezentacija $x \mapsto x|W$, $x \in \mathfrak{g}$, ireducibilna. Neka je $y \in \mathfrak{b}$. Tada je $y \in \mathfrak{g}^*$, dakle, $b \in \mathfrak{a}_W$. Posebno, potprostor W invarijantan je s obzirom na operator y. Kako je $[\mathfrak{b},\mathfrak{g}] = \{0\}$, iz tvrdnje (c) Schurove leme (teorem 1.5.6.) slijedi da je $y|W = \lambda I_W$ za neki $\lambda \in \tilde{K}$. Međutim, po definiciji $\mathfrak{a}_W \supseteq \mathfrak{b}$ vrijedi $\mathrm{Tr}\,(y|W) = 0$, dakle, $\lambda \cdot \dim W = 0$. Budući da je K, a time i $\tilde{K}$, polje karakteristike 0, zaključujemo da je $\lambda = 0$. To pokazuje da je $y|W = 0$. To vrijedi za svaki $W \in Inv_{\mathfrak{g}}(V^{\tilde{K}})$ takav da je reprezentacija $x \mapsto x|W$ od $\mathfrak{g}$ ireducibilna. Po Weylovom teoremu 4.2.4. $V^{\tilde{K}}$ je direktna suma takvih potprostora W, pa zaključujemo da je $y = 0$. Kako je $y \in \mathfrak{b}$ bio proizvoljan, slijedi $\mathfrak{b} = \{0\}$, odnosno, $\mathfrak{g}^* = \mathfrak{g}$. Time je dokazana prva tvrdnja teorema 4.4.5.:

$$x \in \mathfrak{g} \qquad \Longrightarrow \qquad x_s, x_n \in \mathfrak{g}.$$

Imamo

$$ad_{\mathfrak{g}}\, x = ad_{\mathfrak{g}}\, x_s + ad_{\mathfrak{g}}\, x_n \qquad \text{i} \qquad [ad_{\mathfrak{g}}\, x_s, ad_{\mathfrak{g}}\, x_n] = ad_{\mathfrak{g}}\, [x_s, x_n] = 0.$$

Po tvrdnji (a) propozicije 3.3.5. operator $ad_{\mathfrak{gl}(V)}\, x_s$ je poluprost, pa je i njegova restrikcija $ad_{\mathfrak{g}}\, x = \left(ad_{\mathfrak{gl}(V)}\, x\right)|\mathfrak{g}$ poluprost operator. Na isti način iz tvrdnje (b) iste propozicije slijedi da je operator $ad_{\mathfrak{g}}\, x_n$ nilpotentan. Zbog jedinstvenosti Jordanove dekompozicije linearnog operatora $ad_{\mathfrak{g}}\, x$ slijedi

$$ad_{\mathfrak{g}}\, x_s = (ad_{\mathfrak{g}}\, x)_s = ad_{\mathfrak{g}}\, x_{(s)} \qquad \text{i} \qquad ad_{\mathfrak{g}}\, x_n = (ad_{\mathfrak{g}}\, x)_n = ad_{\mathfrak{g}}\, x_{(n)}.$$

Iz injektivnosti preslikavanja $ad_{\mathfrak{g}}$ slijedi $x_s = x_{(s)}$ i $x_n = x_{(n)}$.

Zbog teorema 4.4.5. poluprosti i nilpotentni dio elementa x poluproste Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ označavat ćemo sa x_s i x_n umjesto sa $x_{(s)}$ i $x_{(n)}$.

Teorem 4.4.6. *Neka je π konačnodimenzionalna reprezentacija poluproste Liejeve algebre $\mathfrak{g}$.*

(a) *Ako je element $x \in \mathfrak{g}$ poluprost, onda je operator $\pi(x)$ poluprost.*

(b) *Ako je element $x \in \mathfrak{g}$ nilpotentan, onda je operator $\pi(x)$ nilpotentan.*

(c) *Za svaki $x \in \mathfrak{g}$ je $\pi(x)_s = \pi(x_s)$ i $\pi(x)_n = \pi(x_n)$.*

Zadatak 4.4.3. *Dokažite teorem 4.4.6.*

Uputa: Uočite da je Liejeva podalgebra $\pi(\mathfrak{g})$ od $\mathfrak{gl}(V)$ izomorfna kvocijentnoj Liejevoj algebri $\mathfrak{g}/(\mathrm{Ker}\,\pi)$, dakle, poluprosta. Sada primijenite teorem 4.4.5. na tu poluprostu Liejevu podalgebru od $\mathfrak{gl}(V)$ za dokaz tvrdnje (c). Zatim iz tvrdnje (c) dokažite tvrdnje (a) i (b).

Zadatak 4.4.4. *Neka je $\mathfrak{g}$ poluprosta Liejeva algebra nad poljem K i $D \in \mathrm{Der}(\mathfrak{g})$. Za $x \in \mathfrak{g}$ definiramo linearan operator $\pi(x)$ na prostoru $K \times \mathfrak{g}$ sa*

$$\pi(x)(\lambda, y) = (0, \lambda D x + [x, y]), \qquad \lambda \in K, \quad x, y \in \mathfrak{g}.$$

Dokažite da je π reprezentacija Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ na prostoru $K \times \mathfrak{g}$ i da je $\{0\} \times \mathfrak{g}$ $\pi-$invarijantni potprostor od $K \times \mathfrak{g}$. Primijenite Weylov teorem o potpunoj reducibilnosti da dokažete da je $D \in ad_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g})$, tj. da na drugi način dokažete teorem 4.3.10.

4.5 Reduktivne Liejeve algebre

Za Liejevu podalgebru $\mathfrak{s}$ Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ kažemo da je **reduktivna u algebri** $\mathfrak{g}$, ako je reprezentacija $x \mapsto ad_{\mathfrak{g}}\, x$ Liejeve algebre $\mathfrak{s}$ na vektorskom prostoru $\mathfrak{g}$ (tj. restrikcija $ad_{\mathfrak{g}}|\mathfrak{s}$) potpuno reducibilna. **Reduktivna Liejeva algebra** je Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ koja je reduktivna u samoj sebi, tj. ako je adjungirana reprezentacija $ad_{\mathfrak{g}}$ Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ na prostoru $\mathfrak{g}$ potpuno reducibilna. Budući da su $ad_{\mathfrak{g}}-$invarijantni potprostori od $\mathfrak{g}$ upravo ideli u $\mathfrak{g}$, Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ je reduktivna ako i samo ako za svaki ideal $\mathfrak{a}$ u $\mathfrak{g}$ postoji ideal $\mathfrak{b}$ u $\mathfrak{g}$ takav da je $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \dotplus \mathfrak{b}$. U tom slučaju je, naravno, Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ izomorfna direktnom produktu $\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}$. Ako je $\mathfrak{s}$ Liejeva podalgebra Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ koja je reduktivna u $\mathfrak{g}$, onda je $\mathfrak{s}$ reduktivna Liejeva algebra. Doista, $ad_{\mathfrak{s}}$ je subreprezentacija od $ad_{\mathfrak{g}}|\mathfrak{g}$, a prema propoziciji 1.3.3. subreprezentacija potpuno reducibilne reprezentacije je i sama potpuno reducibilna. Po Weylovom teoremu 4.4.4. o potpunoj reducibilnosti poluprosta Liejeva podalgebra $\mathfrak{s}$ bilo koje Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ je reduktivna u $\mathfrak{g}$. Posebno, svaka poluprosta Liejeva algebra je reduktivna Liejeva algebra.

Zadatak 4.5.1. *Neka je $\mathfrak{g}$ Liejeva algebra nad poljem k, $\mathfrak{s}$ Liejeva podalgebra od $\mathfrak{g}$ i K proširenje polja k. Dokažite da je Liejeva algebra $\mathfrak{s}$ reduktivna u $\mathfrak{g}$ ako i samo ako je $\mathfrak{s}^K$ reduktivna u $\mathfrak{g}^K$.*

Zadatak 4.5.2. *Neka je $\mathfrak{g}$ Liejeva algebra nad poljem K, $\mathfrak{s}$ Liejeva podalgebra od $\mathfrak{g}$ i k potpolje polja K. Dokažite da je Liejeva algebra $\mathfrak{s}$ reduktivna u $\mathfrak{g}$ ako i samo ako je $\mathfrak{s}_k$ reduktivna u $\mathfrak{g}_k$.*

U proučavanju i dokazivanju osnovnih svojstava reduktivnih Liejevih algebri igra jedan ideal u Liejevoj algebri $\mathfrak{g}$, koji ćemo zvati **nilradikal** od $\mathfrak{g}$ i označavati sa $\mathrm{Nrad}(\mathfrak{g})$; to je presjek jezgara svih konačnodimenzionalnih ireducibilnih reprezentacija od $\mathfrak{g}$. Neka je π potpuno reducibilna reprezentacija od $\mathfrak{g}$ na konačnodimenzionalnom vektorskom prostoru V i neka su $V_1, \dots, V_n$ $\pi-$invarijantni potprostori od V takvi da je $V = V_1 \dotplus \cdots \dotplus V_n$ i da su sve subreprezentacije $\pi_{V_1}, \dots, \pi_{V_n}$ ireducibilne. Tada je

$$\mathrm{Ker}\,\pi = \bigcap_{1 \le j \le n} \mathrm{Ker}\,\pi_{V_j} \supseteq \mathrm{Nrad}(\mathfrak{g}).$$

Drugim riječima, $\mathrm{Nrad}(\mathfrak{g})$ je sadržan u jezgri svake konačnodimenzionalne potpuno reducibilne reprezentacije od $\mathfrak{g}$. Nadalje, zbog konačnodimenzionalnosti od $\mathfrak{g}$ postoji konačno mnogo ireducibilnih konačnodimenzionalnih reprezentacija $\pi_1, \dots, \pi_n$ takvih da je

$$\mathrm{Nrad}(\mathfrak{g}) = \bigcap_{1 \le j \le n} \mathrm{Ker}\,\pi_j.$$

Prema prethodnom razmatranju, ako je π direktna suma reprezentacija $\pi_1, \dots, \pi_n$, onda je π potpuno reducibilna konačnodimenzionalna reprezentacija od $\mathfrak{g}$ za koju vrijedi $\mathrm{Ker}\,\pi = \mathrm{Nrad}(\mathfrak{g})$. Prema tome, nilradikal $\mathrm{Nrad}(\mathfrak{g})$ je najmanji element skupa jezgara svih potpuno reducibilnih konačnodimenzionalnih reprezentacija od $\mathfrak{g}$. Zaključujemo i da Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ ima vjernu konačnodimenzionalnu potpuno reducibilnu reprezentaciju ako i samo ako je $\mathrm{Nrad}(\mathfrak{g}) = \{0\}$.

Za dokaz ključnog teorema o nilradikalu trebat će nam sljedeći rezultat o radikalu:

Propozicija 4.5.1. *Ako je $\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ epimorfizam Liejevih algebri, onda je $\varphi(\mathrm{Rad}(\mathfrak{g})) = \mathrm{Rad}(\mathfrak{h})$.*

Dokaz: Budući da je φ epimorfizam, $\varphi(\mathrm{Rad}(\mathfrak{g}))$ je ideal u Liejevoj algebri $\mathfrak{h}$. Liejeva algebra $\varphi(\mathrm{Rad}(\mathfrak{g}))$ izomorfna je kvocijentnoj algebri $\mathrm{Rad}(\mathfrak{g})/(\mathrm{Rad}(\mathfrak{g}) \cap \mathrm{Ker}\,\varphi)$, a kako je Liejeva algebra $\mathrm{Rad}(\mathfrak{g})$ rješiva po tvrdnji (a) teorema 4.2.1. $\varphi(\mathrm{Rad}(\mathfrak{g}))$ je rješiva Liejeva algebra. Prema tome, vrijedi $\varphi(\mathrm{Rad}(\mathfrak{g})) \subseteq \mathrm{Rad}(\mathfrak{h})$.

Definiramo sada preslikavanje $\Phi : \mathfrak{g}/\mathrm{Rad}(\mathfrak{g}) \to \mathfrak{h}/\varphi(\mathrm{Rad}(\mathfrak{g}))$ sa

$$\Phi(x + \mathrm{Rad}(\mathfrak{g})) = \varphi(x) + \varphi(\mathrm{Rad}(\mathfrak{g})), \qquad x \in \mathfrak{g}.$$

To je preslikavanje dobro definirano. Naime, ako su $x, y \in \mathfrak{g}$ takvi da je $x + \mathrm{Rad}(\mathfrak{g}) = y + \mathrm{Rad}(\mathfrak{g})$, onda je $x - y \in \mathrm{Rad}(\mathfrak{g})$, dakle, $\varphi(x) - \varphi(y) = \varphi(x - y) \in \varphi(\mathrm{Rad}(\mathfrak{g}))$, a to znači da vrijedi $\varphi(x) + \varphi(\mathrm{Rad}(\mathfrak{g})) = \varphi(y) + \varphi(\mathrm{Rad}(\mathfrak{g}))$. Preslikavanje Φ je homomorfizam Liejevih algebri. Doista, Φ je očito linearno preslikavanje. Nadalje, za $x, y \in \mathfrak{g}$ imamo redom

$$\Phi([x + \mathrm{Rad}(\mathfrak{g}), y + \mathrm{Rad}(\mathfrak{g})]) = \Phi([x, y] + \mathrm{Rad}(\mathfrak{g}) = \varphi([x, y]) + \varphi(\mathrm{Rad}(\mathfrak{g})) =$$

$$= [\varphi(x), \varphi(y)]+\varphi(\mathrm{Rad}(\mathfrak{g})) = [\varphi(x)+\varphi(\mathrm{Rad}(\mathfrak{g})), \varphi(y)+\varphi(\mathrm{Rad}(\mathfrak{g}))] = [\Phi(x+\mathrm{Rad}(\mathfrak{g})), \Phi(y+\mathrm{Rad}(\mathfrak{g}))].$$

Napokon, kako je $\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ epimorfizam, to je i $\Phi : \mathfrak{g}/\mathrm{Rad}(\mathfrak{g}) \to \mathfrak{h}/\varphi(\mathrm{Rad}(\mathfrak{g}))$ epimorfizam. Doista, ako $y \in \mathfrak{h}$, izaberimo $x \in \mathfrak{g}$ takav da je $y = \varphi(x)$. Tada je

$$\Phi(x + \mathrm{Rad}(\mathfrak{g})) = \varphi(x) + \varphi(\mathrm{Rad}(\mathfrak{g})) = y + \varphi(\mathrm{Rad}(\mathfrak{g})).$$

Odatle slijedi da je Liejeva algebra $\mathfrak{h}/\varphi(\mathrm{Rad}(\mathfrak{g}))$ izomorfna kvocijentnoj algebri od $\mathfrak{g}/\mathrm{Rad}(\mathfrak{g})$. No kako je po teoremu 4.2.2. Liejeva algebra $\mathfrak{g}/\mathrm{Rad}(\mathfrak{g})$ poluprosta, iz propozicije 4.3.5. slijedi da je i svaka njena kvocijentna algebra poluprosta. Posebno, Liejeva algebra $\mathfrak{h}/\varphi(\mathrm{Rad}(\mathfrak{g}))$ je poluprosta. No odatle slijedi da je njen rješivi ideal $\mathrm{Rad}(\mathfrak{h})/\varphi(\mathrm{Rad}(\mathfrak{g}))$ jednak $\{0\}$. Prema tome, vrijedi jednakost $\varphi(\mathrm{Rad}(\mathfrak{g})) = \mathrm{Rad}(\mathfrak{h})$.

Trebat će nam još sljedeća lema:

Lema 4.5.2. *Neka je V konačnodimenzionalan vektorski prostor, $\mathfrak{g}$ Liejeva podalgebra od $\mathfrak{gl}(V)$ takva da je identična reprezentacija od $\mathfrak{g}$ na V ireducibilna. Tada za svaki komutativni ideal $\mathfrak{a}$ u $\mathfrak{g}$ vrijedi $\mathfrak{a} \cap [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \{0\}$.*

Dokaz: Neka je $\mathcal{A}$ unitalna podalgebra od $L(V)$ generirana sa $\mathfrak{a}$. Algebra $\mathcal{A}$ je komutativna. Pretpostavimo da je $\mathfrak{b}$ ideal u $\mathfrak{g}$ sadržan u $\mathfrak{a}$ takav da je

$$\mathrm{Tr}\, ba = 0 \qquad \forall b \in \mathfrak{b} \quad \text{i} \quad \forall a \in \mathcal{A}.$$

Tada je posebno

$$\mathrm{Tr}\, b^n = 0 \qquad \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{i} \quad \forall b \in \mathfrak{b}.$$

Odatle slijedi da je svaki $b \in \mathfrak{b}$ nilpotentan operator. Sada iz leme 4.1.11. slijedi da je $\mathfrak{b} = \{0\}$.

Promatrajmo sada ideal $[\mathfrak{a}, \mathfrak{g}]$ u $\mathfrak{g}$ sadržan u $\mathfrak{a}$. Za $x \in \mathfrak{g}$, $y \in \mathfrak{a}$ i $a \in \mathcal{A}$ imamo

$$\mathrm{Tr}\, [x, y]a = \mathrm{Tr}\, xya - \mathrm{Tr}\, yxa = \mathrm{Tr}\, xya - \mathrm{Tr}\, xay = \mathrm{Tr}\, x(ya - ay) = 0$$

jer je $ya = ay$. Iz dokazanog slijedi da je $[\mathfrak{g}, \mathfrak{a}] = \{0\}$. Prema tome, vrijedi i $ya = ay$ $\forall y \in \mathfrak{g}$ i $\forall a \in \mathcal{A}$. Sada za $x, y \in \mathfrak{g}$ i $a \in \mathcal{A}$ dobivamo

$$\mathrm{Tr}\, [x, y]a = \mathrm{Tr}\, xya - \mathrm{Tr}\, yxa = \mathrm{Tr}\, xya - \mathrm{Tr}\, xay = \mathrm{Tr}\, x(ay - ya) = 0.$$

Primijenimo sada prvi dio dokaza na ideal $\mathfrak{b} = \mathfrak{a} \cap [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$. Slijedi $\mathfrak{a} \cap [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \{0\}$.

Teorem 4.5.3. *Za svaku Liejevu algebru $\mathfrak{g}$ vrijedi $\mathrm{Nrad}(\mathfrak{g}) = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \cap \mathrm{Rad}(\mathfrak{g})$ i to je nilpotentni ideal u $\mathfrak{g}$ sadržan u najvećem idealu nilpotencije svake konačnodimenzionalne reprezentacije od $\mathfrak{g}$.*

Dokaz: Neka je $\lambda \in \mathfrak{g}^*$ linearan funkcional takav da je $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \subseteq \mathrm{Ker}\, \lambda$. Tada je λ ireducibilna reprezentacija od $\mathfrak{g}$, pa slijedi $\mathrm{Nrad}(\mathfrak{g}) \subseteq \mathrm{Ker}\, \lambda$. Budući da je očito

$$[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \bigcap\{\mathrm{Ker}\, \lambda; \ \lambda \in \mathfrak{g}^*, \ \mathrm{Ker}\, \lambda \supseteq [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]\},$$

slijedi $\mathrm{Nrad}(\mathfrak{g}) \subseteq [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$.

Neka je sada π proizvoljna konačnodimenzionalna reprezentacija od $\mathfrak{g}$ na prostoru V i neka je $(V_0, V_1, \ldots, V_n)$ kompozicioni niz te reprezentacije. Neka je $\tilde{\pi}$ direktna suma ireducibilnih reprezentacija $\pi_{V_1/V_0}, \ldots, \pi_{V_n/V_{n-1}}$. Tada je $\tilde{\pi}$ potpuno reducibilna reprezentacija pa vrijedi $\mathrm{Nrad}(\mathfrak{g}) \subseteq \mathrm{Ker}\,\tilde{\pi}$. Međutim, prema propoziciji 4.1.13. $\mathrm{Ker}\,\tilde{\pi}$ je upravo jednak najvećem idealu nilpotencije $\mathfrak{n}_\pi$ reprezentacije π. Time je dokazano da je ideal $\mathrm{Nrad}(\mathfrak{g})$ sadržan u najvećem idealu nilpotencije $\mathfrak{n}_\pi$ svake konačnodimenzionalne reprezentacije π. To posebno vrijedi za adjungiranu reprezentaciju $ad_{\mathfrak{g}}$, što znači da je $\mathrm{Nrad}(\mathfrak{g})$ sadržan u najvećem nilpotentnom idealu Liejeve algebre $\mathfrak{g}$. Dakle, ideal $\mathrm{Nrad}(\mathfrak{g})$ je nilpotentan. Stoga vrijedi i $\mathrm{Nrad}(\mathfrak{g}) \subseteq \mathrm{Rad}(\mathfrak{g})$.

Time smo dokazali inkluziju $\mathrm{Nrad}(\mathfrak{g}) \subseteq [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \cap \mathrm{Rad}(\mathfrak{g})$.

Neka je sada π konačnodimenzionalna ireducibilna reprezentacija od $\mathfrak{g}$ na prostoru V. Stavimo $\mathrm{Rad}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{r}$ i neka je $k \in \mathbb{Z}_+$ najmanji takav da je $\pi\left(\mathfrak{r}^{(k+1)}\right) = \{0\}$. Stavimo

$$\mathfrak{g}' = \pi(\mathfrak{g}) \qquad \text{i} \qquad \mathfrak{a}' = \pi\left(\mathfrak{r}^{(k)}\right) \neq \{0\}.$$

Kako je $x \mapsto \pi(x)$ epimorfizam $\mathfrak{g}$ na $\mathfrak{g}'$ i kako je $\mathfrak{r}^{(k)}$ ideal u Liejevoj algebri $\mathfrak{g}$, to je $\mathfrak{a}'$ ideal u Liejevoj algebri $\mathfrak{g}'$. Taj je ideal komutativan:

$$[\mathfrak{a}', \mathfrak{a}'] = \left[\pi\left(\mathfrak{r}^{(k)}\right), \pi\left(\mathfrak{r}^{(k)}\right)\right] = \pi\left(\left[\mathfrak{r}^{(k)}, \mathfrak{r}^{(k)}\right]\right) = \pi\left(\mathfrak{r}^{(k+1)}\right) = \{0\}.$$

$\mathfrak{g}'$ je Liejeva podalgebra od $\mathfrak{gl}(V)$ i identična reprezentacija od $\mathfrak{g}'$ na prostoru V je ireducibilna. Prema lemi 4.5.2. vrijedi

$$\pi\left(\mathfrak{r}^{(k)} \cap [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]\right) \subseteq \pi\left(\mathfrak{r}^{(k)}\right) \cap [\pi(\mathfrak{g}), \pi(\mathfrak{g})] = \mathfrak{a}' \cap [\mathfrak{g}', \mathfrak{g}'] = \{0\}.$$

Kad bi bilo $k > 0$, onda bismo imali $\mathfrak{r}^{(k)} = [\mathfrak{r}^{(k-1)}, \mathfrak{r}^{(k-1)}] \subseteq [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, pa bi slijedilo $\pi\left(\mathfrak{r}^{(k)}\right) = \{0\}$, a to je suprotno izboru broja k. Zaključujemo da je $k = 0$. To znači da je

$$\pi([\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \cap \mathfrak{r}) = \pi\left([\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \cap \mathfrak{r}^{(0)}\right) = \{0\}.$$

Time smo dokazali da je $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \cap \mathrm{Rad}(\mathfrak{g}) \subseteq \mathrm{Ker}\,\pi$ za svaku konačnodimenzionalnu ireducibilnu reprezentaciju π od $\mathfrak{g}$. Odatle slijedi i obrnuta inkluzija $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \cap \mathrm{Rad}(\mathfrak{g}) \subseteq \mathrm{Nrad}(\mathfrak{g})$, odnosno, vrijedi jednakost $\mathrm{Nrad}(\mathfrak{g}) = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \cap \mathrm{Rad}(\mathfrak{g})$.

Teorem 4.5.4. *Neka je $\mathfrak{g}$ Liejeva algebra. Sljedećih je sedam svojstava međusobno ekvivalentno:*

(*a*) *Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ je reduktivna.*

(*b*) *Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ izomorfna je direktnom produktu poluproste Liejeve algebre i komutativne Liejeve algebre.*

(*c*) *Prvi izvedeni ideal $\mathfrak{g}^{(1)} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ je poluprosta Liejeva algebra.*

(*d*) $\mathrm{Nrad}(\mathfrak{g}) = \{0\}$.

(*e*) $\mathrm{Rad}(\mathfrak{g}) = Z(\mathfrak{g})$.

(*f*) *Postoji konačnodimenzionalna reprezentacija π od $\mathfrak{g}$ takva da je pridružena simetrična bilinearna forma B_π na $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$, zadana sa $B_\pi(x, y) = \mathrm{Tr}\,\pi(x)\pi(y)$, nedegenerirana.*

(*g*) *Postoji vjerna konačnodimenzionalna potpuno reducibilna reprezentacija od $\mathfrak{g}$.*

U tom je slučaju $\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \dotplus Z(\mathfrak{g})$.

Dokaz: $(a) \Rightarrow (b)$. Ako je reprezentacija $ad = ad_{\mathfrak{g}}$ potpuno reducibilna, onda je prema teoremu 1.3.5. Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ direktna suma $ad-$invarijantnih potprostora $\mathfrak{g}_1, \ldots, \mathfrak{g}_k$ takvih da su pripadne subreprezentacije ireducibilne. No to znači da su $\mathfrak{g}_1, \ldots, \mathfrak{g}_k$ minimalni ideali u $\mathfrak{g}$. Tada za svaki indeks i Liejeva algebra $\mathfrak{g}_i$ nema netrivijalnih ideala. No tada je ili $\mathfrak{g}_i$ prosta Liejeva algebra ili je $\dim \mathfrak{g}_i = 1$, a tada je $\mathfrak{g}_i$ komutativna. Možemo pretpostaviti da je numeracija takva da su za neki j Liejeve algebre $\mathfrak{g}_1, \ldots, \mathfrak{g}_j$ proste, a $\mathfrak{g}_{j+1}, \ldots, \mathfrak{g}_k$ su jednodimenzionalne. Tada je očito

$$[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{g}_1 \dot{+} \cdots \dot{+} \mathfrak{g}_j \qquad \text{i} \qquad Z(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}_{j+1} \dot{+} \cdots \dot{+} \mathfrak{g}_k.$$

Odatle vidimo da vrijedi implikacija $(a) \Rightarrow (b)$ a također i posljednja tvrdnja teorema.

Implikacija $(b) \Rightarrow (c)$ je očita, a također i implikacija $(c) \Rightarrow (d)$, jer $\mathfrak{g}^{(1)} \cap \mathrm{Rad}(\mathfrak{g})$ je rješivi ideal u Liejevoj algebri $\mathfrak{g}^{(1)}$.

$(d) \Rightarrow (e)$. Očito u svakoj Liejevoj algebri $\mathfrak{g}$ vrijedi $Z(\mathfrak{g}) \subseteq \mathrm{Rad}(\mathfrak{g})$, jer je $Z(\mathfrak{g})$ komutativan, dakle, rješiv ideal u $\mathfrak{g}$. S druge strane, iz pretpostavke (d) pomoću prve tvrdnje teorema 4.5.3. dobivamo

$$[\mathfrak{g}, \mathrm{Rad}(\mathfrak{g})] \subseteq [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \cap \mathrm{Rad}(\mathfrak{g}) = \mathrm{Nrad}(\mathfrak{g}) = \{0\}.$$

Dakle, imamo i obrnutu inkluziju $\mathrm{Rad}(\mathfrak{g}) \subseteq Z(\mathfrak{g})$.

$(e) \Rightarrow (a)$. Pretpostavimo da je $\mathrm{Rad}(\mathfrak{g}) = Z(\mathfrak{g})$. Centar $Z(\mathfrak{g})$ jednak je jezgri adjungirane reprezentacije $ad_{\mathfrak{g}}$ od $\mathfrak{g}$ na $\mathfrak{g}$. Prijelazom na kvocijent po jezgri dobivamo (vjernu) reprezentacije kvocijentne Liejeve algebre $\mathfrak{g}/\mathrm{Rad}(\mathfrak{g})$ na prostoru $\mathfrak{g}$. Prema teoremu 4.2.2. kvocijentna Liejeva algebra $\mathfrak{g}/\mathrm{Rad}(\mathfrak{g})$ je poluprosta, pa je po Weylovom teoremu 4.4.4. o potpunoj reducibilnosti reprezentacija od $\mathfrak{g}/\mathrm{Rad}(\mathfrak{g})$ na $\mathfrak{g}$ potpuno reducibilna. No to znači da je reprezentacija $ad_{\mathfrak{g}}$ od $\mathfrak{g}$ potpuno reducibilna, odnosno, Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ je reduktivna.

$(b) \Rightarrow (f)$. Pretpostavimo da je $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \times \mathfrak{k}$, gdje je $\mathfrak{h}$ poluprosta, a $\mathfrak{k}$ komutativna Liejeva algebra. Tada je Killingova forma $B_{\mathfrak{h}}$ Liejeve algebre $\mathfrak{h}$ nedegenerirana. Neka je $\{x_1, \ldots, x_n\}$ baza od $\mathfrak{k}$. Neka je V $n-$dimenzionalan vektorski prostor s bazom $e = \{e_1, \ldots, e_n\}$. Za linearan operator $A \in \mathfrak{gl}(V)$ označimo sa $A(e)$ matricu tog operatora u bazi e. Neka je $\rho : \mathfrak{k} \to \mathfrak{gl}(V)$ preslikavanje definirano sa

$$[\rho(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n)](e) = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha_n \end{bmatrix}.$$

Tada je ρ reprezentacija Liejeve algebre $\mathfrak{k}$. Nadalje, za pridruženu simetričnu bilinearnu formu B_ρ vrijedi $B_\rho(x_i, x_j) = \delta_{ij}$. To pokazuje da je forma B_ρ nedegenerirana. Sada na Kartezijevom produktu $X = \mathfrak{h} \times V$ definiramo reprezentaciju $\pi = ad_{\mathfrak{h}} \times \rho$ od $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \times \mathfrak{k}$:

$$\pi(x, y)(y, v) = ((ad_{\mathfrak{h}}\, x)y, \rho(z)v) = ([x, y], \rho(z)v), \qquad x, y \in \mathfrak{h}, \quad z \in \mathfrak{k}, \quad v \in V.$$

Za simetričnu bilinearnu formu B_π pridruženu toj reprezentaciji π vrijedi

$$B_\pi | \mathfrak{h} \times \mathfrak{h} = B_{\mathfrak{h}}, \qquad B_\pi | \mathfrak{k} \times \mathfrak{k} = B_\rho, \qquad B_\pi | \mathfrak{h} \times \mathfrak{k} = 0.$$

Kako su forme $B_{\mathfrak{h}}$ i B_ρ nedegenerirane, slijedi da je i forma B_π nedegenerirana.

$(f) \Rightarrow (d)$. Neka je π konačnodimenzionalna reprezentacija od $\mathfrak{g}$ takva da je pridružena forma B_π nedegenerirana. Prema propoziciji 4.1.13. za najveći ideal nilpotencije $\mathfrak{n}_\pi$ reprezentacije π vrijedi $B_\pi(\mathfrak{n}_\pi, \mathfrak{g}) = \{0\}$. Kako je po pretpostavci forma B_π nedegenerirana, slijedi $\mathfrak{n}_\pi$. Odatle prema drugoj tvrdnji teorema 4.5.3. slijedi da je $\mathrm{Nrad}(\mathfrak{g}) = \{0\}$.

Napokon, prema diskusiji prije iskaza propozicije 4.5.1. svojstva (d) i (g) su međusobno ekvivalentna.

Time je teorem 4.5.4. u potpunosti dokazan.

Zadatak 4.5.3. *Dokažite da je direktni produkt reduktivnih Liejevih algebri reduktivna Liejeva algebra.*

Zadatak 4.5.4. *Neka je* $\mathfrak{a}$ *ideal u reduktivnoj Liejevoj algebri* $\mathfrak{g}$. *Dokažite da je*

$$\mathfrak{a} = [\mathfrak{g},\mathfrak{g}] \cap \mathfrak{a} \dotplus Z(\mathfrak{g}) \cap \mathfrak{a}$$

i da je Liejeva algebra $\mathfrak{a}$ *reduktivna u* $\mathfrak{g}$ *i, posebno, reduktivna. Nadalje, dokažite da je i kvocijentna algebra* $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ *reduktivna.*

Korolar 4.5.5. *Za svaku Liejevu algebru* $\mathfrak{g}$ *je* $\mathrm{Nrad}(\mathfrak{g}) = [\mathfrak{g}, \mathrm{Rad}(\mathfrak{g})]$.

Dokaz: Neka je $\mathfrak{r} = \mathrm{Rad}(\mathfrak{g})$. Prema prvoj tvrdnji teorema 4.5.3. vrijedi $\mathrm{Nrad}(\mathfrak{g}) = [\mathfrak{g},\mathfrak{g}] \cap \mathfrak{r}$. Kako je ideal $[\mathfrak{g},\mathfrak{r}]$ očito sadržan i u $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ i u $\mathfrak{r}$, zaključujemo da vrijedi inkluzija $[\mathfrak{g},\mathfrak{r}] \subseteq \mathrm{Nrad}(\mathfrak{g})$.

Stavimo sada $\mathfrak{g}' = \mathfrak{g}/[\mathfrak{g},\mathfrak{r}]$ i neka je $\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$ kvocijentni epimorfizam. Po propoziciji 4.5.1. tada je $\mathfrak{r}' = \varphi(\mathfrak{r})$ radikal od $\mathfrak{g}'$. Slijedi $[\mathfrak{g}',\mathfrak{r}'] = \varphi([\mathfrak{g},\mathfrak{r}]) = \{0\}$, odnosno, radikal $\mathfrak{r}'$ Liejeve algebre $\mathfrak{g}'$ jednak je njenom centru. Prema teoremu 4.5.4. Liejeva algebra $\mathfrak{g}'$ je reduktivna i ima vjernu potpuno reducibilnu reprezentaciju π'. Neka je $\pi = \pi' \circ \varphi$ pripadna "podignuta" reprezentacija od $\mathfrak{g}$. Tada je reprezentacija π potpuno reducibilna i

$$\mathrm{Ker}\,\pi = \mathrm{Ker}\,\varphi = [\mathfrak{g},\mathfrak{r}].$$

Međutim, $\mathrm{Nrad}(\mathfrak{g})$ je sadržan u jezgri svake potpuno reducibilne konačnodimenzionalne reprezentacije od $\mathfrak{g}$, pa imamo i obrnutu inkluziju $\mathrm{Nrad}(\mathfrak{g}) \subseteq [\mathfrak{g},\mathfrak{r}]$.

Korolar 4.5.6. *Ako je* $\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$ *epimorfizam Liejevih algebri, onda je* $\varphi(\mathrm{Nrad}(\mathfrak{g})) = \mathrm{Nrad}(\mathfrak{g}')$. *Liejeva algebra* $\mathfrak{g}'$ *je reduktivna ako i samo ako je* $\mathrm{Nrad}(\mathfrak{g}) \subseteq \mathrm{Ker}\,\varphi$.

Dokaz: Neka su $\mathfrak{r} = \mathrm{Rad}(\mathfrak{g})$ i $\mathfrak{r}' = \mathrm{Rad}(\mathfrak{g}')$ radikali Liejevih algebri $\mathfrak{g}$ i $\mathfrak{g}'$. Po propoziciji 4.5.1. je $\varphi(\mathfrak{r}) = \mathfrak{r}'$. Neka je $\mathfrak{s}'$ presjek jezgara svih konačnodimenzionalnih ireducibilnih reprezentacija od $\mathfrak{g}'$. Prema korolaru 4.5.5. primijenjenom na Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ i $\mathfrak{g}'$ imamo

$$\mathrm{Nrad}(\mathfrak{g}') = [\mathfrak{g}',\mathfrak{r}'] = [\varphi(\mathfrak{g}),\varphi(\mathfrak{r})] = \varphi([\mathfrak{g},\mathfrak{r}]) = \varphi(\mathrm{Nrad}(\mathfrak{g})).$$

Druga je tvrdnja neposredna posljedica prve tvrdnje i karakterizacije (d) u teoremu 4.5.4.

Zadatak 4.5.5. *Za konačnodimenzionalnu reprezentaciju* π *Liejeve algebre* $\mathfrak{g}$ *neka je* B_π *pridružena bilinearna simetrična forma*

$$B_\pi(x,y) = \mathrm{Tr}\,\pi(x)\pi(y), \qquad x,y \in \mathfrak{g},$$

i

$$\mathrm{Rad}\,B_\pi = \{x \in \mathfrak{g};\ B_\pi(x,y) = 0\ \ \forall y \in \mathfrak{g}\}$$

njen (*lijevi i desni*) *radikal. Dokažite da je*

$$\mathrm{Nrad}(\mathfrak{g}) = \bigcap \{\mathrm{Rad}\,B_\pi;\ \pi \textit{ konačnodimenzionalna reprezentacija od } \mathfrak{g}\}. \tag{4.5}$$

Uputa: Koristite tvrdnju (c) propozicije 4.1.3. i drugu tvrdnju teorema 4.5.3. da zaključite da je $\mathrm{Nrad}(\mathfrak{g})$ sadržan u svakom $\mathrm{Rad}\,B_\pi$, dakle, da je lijeva strana u (2.4) sadržana u desnoj strani. Za dokaz obrnute inkluzije uočite da kvocijentna Liejeva algebra $\mathfrak{g}' = \mathfrak{g}/\mathrm{Nrad}(\mathfrak{g})$ ima vjernu konačnodimenzionalnu potpuno reducibilnu reprezentaciju. Sada iskoristite teorem 4.5.4. da zaključite da Liejeva algebra $\mathfrak{g}'$ ima konačnodimenzionalnu reprezentaciju ρ takvu da je forma B_ρ na $\mathfrak{g}' \times \mathfrak{g}'$ nedegenerirana. Sada pokažite da za "podignutu" reprezentaciju π od $\mathfrak{g}$, tj. za

$$\pi(x) = \rho(x + \mathrm{Nrad}(\mathfrak{g})), \qquad x \in \mathfrak{g},$$

vrijedi $\mathrm{Rad}\,B_\pi = \mathrm{Nrad}(\mathfrak{g})$.

Poglavlje 5

TEŽINE I KORIJENI

5.1 Nilpotentne Liejeve algebre operatora

Neka je V konačnodimenzionalan vektorski prostor nad poljem K (karakteristike 0) i neka je x linearan operator na prostoru V. Prisjetimo se nekih rezultata iz odjeljka 1.3. Prije svega, imamo Fittingovu dekompoziciju prostora V u odnosu na operator x (teorem 3.1.2.):

$$V = V_{(0)}(x) \dot{+} V_*(x), \qquad V_{(0)}(x) = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}_+} \operatorname{Ker} x^k, \quad V_*(x) = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \operatorname{Im} x^k. \tag{5.1}$$

Pri tome, naravno, za neki $p \in \mathbb{N}$ vrijedi $V_{(0)}(x) = \operatorname{Ker} x^p$ i $V_*(x) = \operatorname{Im} x^p$.

Nadalje, za $\lambda \in Sp(x)$ definirali smo pripadni svojstveni potprostor i korijenski potprostor od V u odnosu na operator x :

$$V_\lambda(x) = \{v \in V;\ xv = \lambda v\} = \operatorname{Ker}(\lambda I - x) \qquad \text{i} \qquad V_{(\lambda)}(x) = V_{(0)}(\lambda I - x) = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}_+} \operatorname{Ker}(\lambda I - x)^k.$$

Korijenski potprostori $V_{(\lambda)}(x)$ čine direktnu sumu, a ako je operator x rascjepiv, tj. ako se njegov minimalni polinom razlaže nad K, ta je direktna suma jednaka čitavom prostoru V :

$$V = \sum_{\lambda \in Sp(x)} \dot{+} V_{(\lambda)}(x). \tag{5.2}$$

U ovom ćemo odjeljku generalizirati te rezultate na slučaj kad imamo ne samo jedan operator nego Liejevu podalgebru $\mathfrak{g}$ od $\mathfrak{gl}(V)$ koja je nilpotentna.

Neka je $\mathfrak{g}$ Liejeva podalgebra od $\mathfrak{gl}(V)$. Ako je $v \in V \setminus \{0\}$ svojstven vektor svih operatora $x \in \mathfrak{g}$, onda za neku funkciju $\alpha : \mathfrak{g} \to K$ vrijedi

$$xv = \alpha(x)v \qquad \forall x \in \mathfrak{g}.$$

Tada je α jednodimenzionalna reprezentacija od $\mathfrak{g}$, a to znači da je α linearan funkcional na $\mathfrak{g}$ i da je $\alpha([x,y]) = \alpha(x)\alpha(y) - \alpha(y)\alpha(x) = 0\ \forall x, y \in \mathfrak{g}$, odnosno, $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \subseteq \operatorname{Ker}\alpha$. Za svaki takav linearan funkcional α skup svih pripadnih svojstvenih vektora označavamo sa

$$V_\alpha(\mathfrak{g}) = \{v \in V;\ xv = \alpha(x)v\ \forall x \in \mathfrak{g}\}.$$

Ako je $V_\alpha(\mathfrak{g}) \neq \{0\}$, linearni funkcional α zove se **težina** $\mathfrak{g}-$modula V, a $V_\alpha(\mathfrak{g})$ se zove **težinski potprostor** od V. Naravno, težinski potprostor je $\mathfrak{g}-$podmodul. Oponašamo sada situaciju s jednim operatorom na prostoru V pa definiramo pripadni **korijenski potprostor**

$$V_{(\alpha)}(\mathfrak{g}) = \{v \in V;\ \forall x \in \mathfrak{g}\ \exists k \in \mathbb{N}\ (x - \alpha(x)I)^k v = 0\}.$$

U stvari, $V_{(\alpha)}(\mathfrak{g})$ je unija rastućeg niza $\mathfrak{g}-$podmodula $\left(V_\alpha^k(\mathfrak{g})\right)_{k\in\mathbb{Z}_+}$ definiranih sa

$$V_\alpha^k(\mathfrak{g}) = \{v \in V;\ (x-\alpha(x)I)^k v = 0\ \forall x \in \mathfrak{g}\} = \bigcap_{x\in\mathfrak{g}} \text{Ker}\ \left[(x-\alpha(x)I)^k\right],$$

tj.

$$V_\alpha^0(\mathfrak{g}) = \{0\}, \quad V_\alpha^1(\mathfrak{g}) = V_\alpha(\mathfrak{g}), \quad V_\alpha^{k+1}(\mathfrak{g}) = \{v \in V;\ (x-\alpha(x)I)v \in V_\alpha^k(\mathfrak{g})\ \forall x \in \mathfrak{g}\}.$$

Prema tome, svaki $V_{(\alpha)}(\mathfrak{g})$ je $\mathfrak{g}-$podmodul od V.

Imamo sljedeću generalizaciju tvrdnje (a) leme 3.1.1.:

Lema 5.1.1. *Neka je $\mathfrak{g}$ Liejeva podalgebra od $\mathfrak{gl}(V)$ i $\alpha \in \mathfrak{g}^*$. Ako za neki $k \in \mathbb{Z}_+$ vrijedi $V_\alpha^k(\mathfrak{g}) = V_\alpha^{k+1}(\mathfrak{g})$ onda je $V_\alpha^k(\mathfrak{g}) = V_\alpha^m(\mathfrak{g})\ \ \forall m \geq k$.*

Dokaz: Dovoljno je dokazati da iz $V_\alpha^k(\mathfrak{g}) = V_\alpha^{k+1}(\mathfrak{g})$ slijedi $V_\alpha^{k+1}(\mathfrak{g}) = V_\alpha^{k+2}(\mathfrak{g})$. Ustvari, zbog toga što je $V_\alpha^{k+1}(\mathfrak{g}) \subseteq V_\alpha^{k+2}(\mathfrak{g})$ dovoljno je dokazati inkluziju $V_\alpha^{k+2}(\mathfrak{g}) \subseteq V_\alpha^{k+1}(\mathfrak{g})$. Dakle, neka je $v \in V_\alpha^{k+2}(\mathfrak{g})$. Tada je $(x-\alpha(x))v \in V_\alpha^{k+1}(\mathfrak{g})\ \forall x \in \mathfrak{g}$. Po pretpostavci je $V_\alpha^{k+1}(\mathfrak{g}) = V_\alpha^k(\mathfrak{g})$, pa imamo $(x-\alpha(x))v \in V_\alpha^k(\mathfrak{g})$, a to znači da je $v \in V_\alpha^{k+1}(\mathfrak{g})$. Time je dokazana inkluzija $V_\alpha^{k+2}(\mathfrak{g}) \subseteq V_\alpha^{k+1}(\mathfrak{g})$.

Lema 5.1.2. *Za Liejevu podalgebru $\mathfrak{g}$ od $\mathfrak{gl}(V)$ i $\alpha \in \mathfrak{g}^*$ vrijedi*

$$V_{(\alpha)}(\mathfrak{g}) = \bigcap_{x\in\mathfrak{g}} V_{(\alpha(x))}(x).$$

Dokaz: Doista

$$V_{(\alpha)}(\mathfrak{g}) = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}_+} V_\alpha^k(\mathfrak{g}) = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}_+}\bigcap_{x\in\mathfrak{g}} \text{Ker}\ \left[(x-\alpha(x)I)^k\right] = \bigcap_{x\in\mathfrak{g}}\bigcup_{k\in\mathbb{Z}_+} \text{Ker}\ \left[(x-\alpha(x)I)^k\right] = \bigcap_{x\in\mathfrak{g}} V_{(\alpha(x))}(x).$$

Promatrat ćemo sada slučaj $\alpha = 0$. To će razmatranje u slučaju nilpotentne Liejeve podalgebre $\mathfrak{g}$ od $\mathfrak{gl}(V)$ voditi na generalizaciju Fittingove dekompozicije (5.1) prostora V u odnosu na jedan linearan operator. Definiramo induktivno sljedeći padajući niz $\mathfrak{g}-$podmodula $\left(V_*^k(\mathfrak{g})\right)_{k\in\mathbb{Z}_+}$ od V :

$$V_*^0(\mathfrak{g}) = V, \quad V_*^{k+1}(\mathfrak{g}) = \text{span}\,\{xv;\ x \in \mathfrak{g},\ v \in V_*^k(\mathfrak{g})\}, \quad k \in \mathbb{Z}_+.$$

Dakle,

$$V_*^0(\mathfrak{g}) = V, \qquad V_*^k(\mathfrak{g}) = \text{span}\,\{x_1\cdots x_k v;\ x_1,\ldots,x_k \in \mathfrak{g},\ v \in V\}, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{5.3}$$

I tvrdnja (b) leme 5.1.1. se generalizira:

Lema 5.1.3. *Neka je $\mathfrak{g}$ Liejeva podalgebra od $\mathfrak{gl}(V)$. Ako za neki $k \in \mathbb{Z}_+$ vrijedi $V_*^k(\mathfrak{g}) = V_*^{k+1}(\mathfrak{g})$, onda je $V_*^k(\mathfrak{g}) = V_*^m(\mathfrak{g})\ \ \forall m \geq k$.*

Dokaz: Kao kod leme 5.1.1. dovoljno je dokazati da iz jednakosti $V_*^k(\mathfrak{g}) = V_*^{k+1}(\mathfrak{g})$ slijedi jednakost $V_*^{k+1}(\mathfrak{g}) = V_*^{k+2}(\mathfrak{g})$. No to je očigledno:

$$V_*^{k+1}(\mathfrak{g}) = \text{span}\,\{xv;\ x \in \mathfrak{g},\ v \in V_*^k(\mathfrak{g})\} = \text{span}\,\{xv;\ x \in \mathfrak{g},\ v \in V_*^{k+1}(\mathfrak{g})\} = V_*^{k+2}(\mathfrak{g}).$$

Za Liejevu podalgebru $\mathfrak{g}$ od $\mathfrak{gl}(V)$ definiramo

$$V_*(\mathfrak{g}) = \bigcap_{k\in\mathbb{Z}_+} V_*^k(\mathfrak{g}).$$

Naravno, zbog konačnodimenzionalnosti je $V_*(\mathfrak{g}) = V_*^k(\mathfrak{g})$ za neki k.

Za generalizaciju Fittingove dekompozicije na nilpotentne Liejeve algebre operatora trebaju nam sljedeće dvije leme.

Lema 5.1.4. *Za bilo koje $x, y \in \mathfrak{gl}(V)$ i bilo koji $n \in \mathbb{Z}_+$ vrijede sljedeće dvije jednakosti:*

$$x^n y = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} [(\operatorname{ad} x)^j y] x^{n-j}, \tag{5.4}$$

$$y x^n = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} x^{n-j} [(\operatorname{ad} x)^j y]. \tag{5.5}$$

Dokaz se provodi indukcijom po $n \in \mathbb{Z}_+$. Baza indukcije $n = 0$ je trivijalna za obje tvrdnje. Pretpostavimo da za neki $n \in \mathbb{Z}_+$ vrijedi (5.4). Sada ćemo jednakost

$$xab = abx + [x, ab] = abx + [x, a]b + a[x, b] \qquad \forall x, a, b \in \mathfrak{gl}(V)$$

primijeniti na slučaj $a = (\operatorname{ad} x)^j y$ i $b = x^{n-j}$. Tada je $[x, a] = (\operatorname{ad} x)^{j+1} y$ i $[x, b] = 0$, pa imamo

$$x[(\operatorname{ad} x)^j y] x^{n-j} = [(\operatorname{ad} x)^j y] x^{n-j+1} + [(\operatorname{ad} x)^{j+1} y] x^{n-j},$$

pa nalazimo

$$x^{n+1} y = x x^n y = x \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} [(\operatorname{ad} x)^j y] x^{n-j} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} [(\operatorname{ad} x)^j y] x^{n-j+1} + \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} [(\operatorname{ad} x)^{j+1} y] x^{n-j} =$$

$$= \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} [(\operatorname{ad} x)^j y] x^{n+1-j} + \sum_{j=1}^{n+1} \binom{n}{j-1} [(\operatorname{ad} x)^j y] x^{n+1-j} =$$

$$= y x^{n+1} + \sum_{j=1}^{n} \left(\binom{n}{j} + \binom{n}{j-1} \right) [(\operatorname{ad} x)^j y] x^{n+1-j} + (\operatorname{ad} x)^{n+1} y = \sum_{j=0}^{n+1} \binom{n+1}{j} [(\operatorname{ad} x) j y] x^{n+1-j}.$$

Time je proveden korak indukcije i jednakost (5.4) je dokazana.

Zadatak 5.1.1. *Dokažite jednakost* (5.5).

Lema 5.1.5. *Neka su $x, y \in \mathfrak{gl}(V)$ takvi da je $(\operatorname{ad} x)^\ell y = 0$ za neki $\ell \in \mathbb{N}$. Tada su Fittingovi potprostori $V_{(0)}(x)$ i $V_*(x)$ u odnosu na operator x invarijantni s obzirom na operator y.*

Dokaz: Za $v \in V_{(0)}(x)$ je $x^k v = 0$ za neki $k \in \mathbb{N}$, pa za $n = \ell + k - 1$ prema (5.4) nalazimo

$$x^n y v = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} [(\operatorname{ad} x)^j y] x^{n-j} v = 0,$$

jer za $j < \ell$ je $n - j \geq k$, pa je $x^{n-j} v = 0$, a za $j \geq \ell$ je $(\operatorname{ad} x)^j y = 0$. Dakle, vrijedi $yv \in V_{(0)}(x)$.

Neka je sada $v \in V_*(x)$. Neka je $k \in \mathbb{N}$ takav da je $V_*(x) = \operatorname{Im} x^k$. Tada je $V_*(x) = \operatorname{Im} x^n$ za $n = \ell + k - 1 \geq k$, dakle, postoji $w \in V$ takav da je $v = x^n w$. Sada prema (5.5) imamo

$$yv = y x^n w = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} x^{n-j} [(\operatorname{ad} x)^j y] w = \sum_{j=0}^{\ell-1} (-1)^j \binom{n}{j} x^{n-j} [(\operatorname{ad} x)^j y] w \tag{5.6}$$

jer je $(\operatorname{ad} x)^j y = 0$ za $j \geq \ell$. Međutim, za $j \leq \ell - 1$ vrijedi $n - j = \ell + k - 1 - j \geq k$, pa slijedi $\operatorname{Im} x^{n-j} = V_*(x)$. To znači da su u (5.6) svi članovi u sumi s desne strane elementi od $V_*(x)$. Zaključujemo da je $yv \in V_*(x)$ i time je dokazano da je i potprostor $V_*(x)$ invarijantan s obzirom na operator y.

Teorem 5.1.6. (**Fittingova dekompozicija za nilpotentne Liejeve algebre operatora**) *Za nilpotentnu Liejevu podalgebru $\mathfrak{g}$ od $\mathfrak{gl}(V)$ vrijedi*

$$V = V_{(0)}(\mathfrak{g}) \dotplus V_*(\mathfrak{g}).$$

Nadalje,

$$V_*(\mathfrak{g}) = \sum_{x\in\mathfrak{g}} V_*(x).$$

Dokaz: Pretpostavimo najprije da je svaki operator $x \in \mathfrak{g}$ nilpotentan. Tada je $V_{(0)}(x) = V$ za svaki $x \in \mathfrak{g}$, pa je prema lemi 5.1.2.

$$V_{(0)}(\mathfrak{g}) = \bigcap_{x\in\mathfrak{g}} V_{(0)}(x) = V.$$

Nadalje, tada je $V_*(x) = \{0\}$, pa je i $\sum_{x\in\mathfrak{g}} V_*(x) = \{0\}$. Prema Engelovom teoremu, odnosno, prema njegovoj posljedici 4.1.4., postoji $s \in \mathbb{N}$ takav da je $x_1 \cdots x_s = 0$ $\forall x_1, \ldots, x_s \in \mathfrak{g}$. No tada je prema (5.3) $V_*^s(\mathfrak{g}) = \{0\}$, a odatle slijedi $V_*(\mathfrak{g}) = \{0\}$. Time je teorem dokazan u slučaju da su svi operatori $x \in \mathfrak{g}$ nilpotentni.

Dokaz za opći slučaj provodimo indukcijom u odnosu na dim V. Baza indukcije $\dim V = 1$ je trivijalna, pa prelazimo na korak indukcije: pretpostavljamo da je $\dim V \geq 2$ i da je teorem dokazan za prostore dimenzije manje od dim V. Prema prvom dijelu dokaza možemo pretpostaviti da neki $y \in \mathfrak{g}$ nije nilpotentan, tj. da je $V_{(0)}(y) \neq V$. Imamo Fittingovu dekompoziciju prostora V u odnosu na operator y :

$$V = V_{(0)}(y) \dotplus V_*(y).$$

Prema lemi 5.1.5. tada su potprostori $V_{(0)}(y)$ i $V_*(y)$ invarijantni u odnosu na sve operatore $x \in \mathfrak{g}$, tj. $V_{(0)}(y)$ i $V_*(y)$ su $\mathfrak{g}-$podmoduli od V. Po pretpostavci indukcije teorem vrijedi za prostor $W = V_{(0)}(y)$ i za nilpotentnu Liejevu podalgebru $\mathfrak{a} = \{x|W;\ x \in \mathfrak{g}\}$ od $\mathfrak{gl}(W)$. Dakle,

$$V_{(0)}(y) = W = W_{(0)}(\mathfrak{a}) \dotplus W_*(\mathfrak{a}) \qquad \text{i} \qquad W_*(\mathfrak{a}) = \sum_{z\in\mathfrak{a}} W_*(z).$$

Dakle,

$$V = V_{(0)}(y) \dotplus V_*(y) = W \dotplus V_*(y) = W_{(0)}(\mathfrak{a}) \dotplus W_*(\mathfrak{a}) \dotplus V_*(y).$$

Prema lemi 5.1.3. imamo

$$V_{(0)}(\mathfrak{g}) = \bigcap_{x\in\mathfrak{g}} V_{(0)}(x) = W \cap \bigcap_{x\in\mathfrak{g}} V_{(0)}(x) = \bigcap_{x\in\mathfrak{g}} \big(W \cap V_{(0)}(x)\big) = \bigcap_{z\in\mathfrak{a}} W_{(0)}(z) = W_{(0)}(\mathfrak{a}),$$

pa iz prethodne jednakosti dobivamo

$$V = V_{(0)}(\mathfrak{g}) \dotplus W_*(\mathfrak{a}) \dotplus V_*(y). \tag{5.7}$$

Dokazat ćemo sada da vrijedi

$$W_*(\mathfrak{a}) \dotplus V_*(y) = \sum_{x\in\mathfrak{g}} V_*(x) = V_*(\mathfrak{g}). \tag{5.8}$$

Odatle i iz (5.7) će slijediti

$$V = V_{(0)}(\mathfrak{g}) \dotplus V_*(\mathfrak{g}) \qquad \text{i} \qquad V_*(\mathfrak{g}) = \sum_{x\in\mathfrak{g}} V_*(x).$$

Time će biti proveden korak indukcije, odnosno, teorem 5.1.6. će biti u potpunosti dokazan.

Jednakost (5.8) ćemo dokazati tako da dokažemo tri inkluzije:

$$W_*(\mathfrak{a}) \dot{+} V_*(y) \subseteq \sum_{x\in\mathfrak{g}} V_*(x), \tag{5.9}$$

$$\sum_{x\in\mathfrak{g}} V_*(x) \subseteq V_*(\mathfrak{g}) \tag{5.10}$$

i

$$V_*(\mathfrak{g}) \subseteq W_*(\mathfrak{a}) \dot{+} V_*(y). \tag{5.11}$$

Prije svega, očito je

$$W_*(\mathfrak{a}) \dot{+} V_*(y) = \sum_{z\in\mathfrak{a}} W_*(z) + V_*(y) \subseteq \sum_{x\in\mathfrak{g}} V_*(x),$$

dakle, vrijedi (5.9). Nadalje, za svaki $x \in \mathfrak{g}$ očito vrijedi $\operatorname{Im} x^k \subseteq V_*^k(\mathfrak{g})$ $\forall k \in \mathbb{Z}_+$ pa je

$$V_*(x) = \bigcap_{k\in\mathbb{Z}_+} \operatorname{Im} x^k \subseteq \bigcap_{k\in\mathbb{Z}_+} V_*^k(\mathfrak{g}) = V_*(\mathfrak{g}),$$

a odatle slijedi (5.10). Da dokažemo posljednju inkluziju (5.11), uočimo da se Liejeva algebra $\{x|V_{(0)}(\mathfrak{g});\ x \in \mathfrak{g}\}$ sastoji od nilpotentnih linearnih operatora na $V_{(0)}(\mathfrak{g})$. Prema posljedici 4.1.4. Engelovog teorema postoji $s \in \mathbb{N}$ takav da je

$$x_1 \cdots x_s V_{(0)}(\mathfrak{g}) = \{0\} \qquad \forall x_1, \ldots, x_s \in \mathfrak{g}.$$

Stoga zbog (5.7) za proizvoljne $x_1, \ldots, x_s \in \mathfrak{g}$ imamo

$$x_1 \cdots x_s V = x_1 \cdots x_s (V_{(0)}(\mathfrak{g}) \dot{+} W_*(\mathfrak{a}) \dot{+} V_*(y)) \subseteq$$
$$\subseteq x_1 \cdots x_s V_{(0)}(\mathfrak{g}) + x_1 \cdots x_s W_*(\mathfrak{a}) + x_1 \cdots x_s V_*(y) =$$
$$= x_1 \cdots x_s W_*(\mathfrak{a}) + x_1 \cdots x_s V_*(y) \subseteq W_*(\mathfrak{a}) + V_*(y),$$

budući da su $W_*(\mathfrak{a})$ i $V_*(y)$ $\mathfrak{g}-$podmoduli od V. Kako su $x_1, \ldots, x_s \in \mathfrak{g}$ bili proizvoljni, dobivamo

$$V_*(\mathfrak{g}) \subseteq V_*^s(\mathfrak{g}) \subseteq W_*(\mathfrak{a}) \dot{+} V_*(y),$$

odnosno, dokazana je i inkluzija (5.11).

Teorem 5.1.7. *Neka je V konačnodimenzionalan vektorski prostor i $\mathfrak{g}$ nilpotentna Liejeva podalgebra od $\mathfrak{gl}(V)$ takva da je svaki operator $x \in \mathfrak{g}$ rascjepiv. Tada vrijedi*

$$V = \sum_{\alpha\in\mathfrak{g}^*} \dot{+} V_{(\alpha)}(\mathfrak{g}).$$

Nadalje,

$$V_*(\mathfrak{g}) = \sum_{\alpha\in\mathfrak{g}^*\setminus\{0\}} \dot{+} V_{(\alpha)}(\mathfrak{g}).$$

Dokaz prve tvrdnje provodimo indukcijom po dimenziji prostora V. Baza indukcije $\dim V = 1$ je trivijalna, pa prelazimo na korak indukcije. Dakle, poretpostavljamo da je $\dim V \geq 2$ i da je teorem dokazan za prostore dimenzije manje od $\dim V$. Svaki $x \in \mathfrak{g}$ može se pisati u obliku $x = x_s + x_n$, gdje je x_s dijagonalizabilan a x_n nilpotentan operator na V i $x_s x_n = x_n x_s$. Prema propoziciji 5.3.5. tada je $(\operatorname{ad} x)_s = \operatorname{ad} x_s$ i $(\operatorname{ad} x)_n = \operatorname{ad} x_n$. Budući da je $\mathfrak{g}$ Liejeva podalgebra od $\mathfrak{gl}(V)$, ona je potprostor od $\mathfrak{gl}(V)$ koji je $(\operatorname{ad} x)-$invarijantan za svaki $x \in \mathfrak{g}$. Iz tvrdnje (c)

teorema 5.3.2. slijedi da je potprostor $\mathfrak{g}$ i $(\operatorname{ad} x_s)-$invarijantan i $(\operatorname{ad} x_n)-$invarijantan potprostor od $\mathfrak{gl}(V)$. Međutim, Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ je nilpotentna, pa je svaki operator $(\operatorname{ad} x)|\mathfrak{g} = ad_{\mathfrak{g}}\, x$, $x \in \mathfrak{g}$, nilpotentan. To znači da je $(\operatorname{ad} x)|\mathfrak{g} = (\operatorname{ad} x_n)|\mathfrak{g}$, odnosno, $(\operatorname{ad} x_s)|\mathfrak{g} = 0\ \forall x \in \mathfrak{g}$. Drugim riječima, vrijedi $x_s y = y x_s\ \forall x, y \in \mathfrak{g}$, odnosno, $\{x_s;\ x \in \mathfrak{g}\}$ je skup dijagonalizabilnih operatora koji komutiraju sa svim operatorima iz $\mathfrak{g}$.

Pretpostavimo najprije da za neki $x \in \mathfrak{g}$ operator x_s nije multipl jediničnog operatora, odnosno, da spektar $Sp(x_s)$ nije jednočlan skup. Neka je $Sp(x_s) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\}$ pri čemu je $k \geq 2$ i $\lambda_i \neq \lambda_j$ za $i \neq j$. Tada imamo svojstveni rastav prostora V u odnosu na dijagonalizabilan operator x_s :

$$V = \sum_{j=1}^{k} \dot{+}\, V_{\lambda_j}(x_s).$$

Budući da operator x_s komutira sa svim operatorima $y \in \mathfrak{g}$, svaki od svojstvenih potprostora $V_{\lambda_j}(x_s)$ je pravi $\mathfrak{g}-$podmodul od V, pa tvrdnja teorema slijedi iz pretpostavke indukcije.

Dakle, dokaz se svodi na situaciju kad je operator x_s skalarni multipl jediničnog operatora za svaki $x \in \mathfrak{g}$. Pripadnu jedinu svojstvenu vrijednost operatora x_s označimo sa $\alpha(x)$. No tada je $\alpha(x)$ jedina svojstvena vrijednost operatora x, pa vrijedi $V = V_{(\alpha(x))}(x)$ za svaki $x \in \mathfrak{g}$. Dokažimo sada da je α linearan funkcional na $\mathfrak{g}$. Homogenost preslikavanja $\alpha : \mathfrak{g} \to K$ je očita: za $x \in \mathfrak{g}$ i $\lambda \in K$ je s jedne strane $Sp(\lambda x) = \{\alpha(\lambda x)\}$, a s druge je $Sp(x) = \{\alpha(x)\}$, pa slijedi $Sp(\lambda x) = \{\lambda\alpha(x)\}$; dakle, $\alpha(\lambda x) = \lambda\alpha(x)$. Dokažimo aditivnost. Neka su $x, y \in \mathfrak{g}$. Neka je $v \neq 0$ vektor iz V koji je svojstven za operator $x + y$, naravno, u odnosu na jedinu njegovu svojstvenu vrijednost $\alpha(x + y)$. Dakle,

$$(x + y)v = \alpha(x + y)v, \quad \text{odnosno}, \quad xv = \alpha(x + y)v - yv.$$

Odatle je

$$(x - \alpha(x)I)v = -\left(y - [\alpha(x + y) - \alpha(x)]I\right)v,$$

dakle, za svako $k \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$(x - \alpha(x)I)^k v = (-1)^k \left(y - [\alpha(x + y) - \alpha(x)]I\right)^k v.$$

Međutim, $V = V_{(\alpha(x))}(x)$, pa postoji $k \in \mathbb{N}$ takav da je $(x - \alpha(x)I)^k v = 0$. Slijedi

$$\left(y - [\alpha(x + y) - \alpha(x)]I\right)^k v = 0.$$

To znači da je $\alpha(x + y) - \alpha(x)$ svojstvena vrijednost operatora y. Ali $\alpha(y)$ je po pretpostavci jedina svojstvena vrijednost operatora y, pa zaključujemo da je $\alpha(x+y) - \alpha(x) = \alpha(y)$, odnosno, $\alpha(x + y) = \alpha(x) + \alpha(y)$. Dakle, $\alpha : \mathfrak{g} \to K$ je linearni funkcional i za svako $v \in V$ i svako $x \in \mathfrak{g}$ postoji $k \in \mathbb{N}$ takav da je $(x - \alpha(x)I)^k v = 0$. Time je dokazano da je $V = V_{(\alpha)}(\mathfrak{g})$, dakle, dokazana je prva tvrdnja teorema 5.1.7.

Neka je $\alpha \in \mathfrak{g}^* \setminus \{0\}$. Izaberimo $x_0 \in \mathfrak{g}$ takav da je $\alpha(x_0) \neq 0$. Tada je

$$V_{(\alpha)}(\mathfrak{g}) = \bigcap_{x \in \mathfrak{g}} V_{(\alpha(x))}(x) \subseteq V_{(\alpha(x_0))}(x_0) \subseteq V_*(x_0).$$

No prema teoremu 5.1.6. je $V_*(x) \subseteq V_*(\mathfrak{g})\ \ \forall x \in \mathfrak{g}$. Zaključujemo da je $V_{(\alpha)}(\mathfrak{g}) \subseteq V_*(\mathfrak{g})$. Kako to vrijedi za svaki $\alpha \in \mathfrak{g}^* \setminus \{0\}$, dobivamo inkluziju

$$\sum_{\alpha \in \mathfrak{g}^* \setminus \{0\}} V_{(\alpha)}(\mathfrak{g}) \subseteq V_*(\mathfrak{g}). \tag{5.12}$$

Prema prvoj tvrdnji teorema je

$$V = V_{(0)}(\mathfrak{g}) \dotplus \sum_{\alpha \in \mathfrak{g}^* \setminus \{0\}} \dotplus V_{(\alpha)}(\mathfrak{g}),$$

a prema teoremu 5.1.6. je $V = V_{(0)}(\mathfrak{g}) \dotplus V_*(\mathfrak{g})$. To pokazuje je inkluzija u (5.12) zapravo jednakost, odnosno, dokazana je i druga tvrdnja teorema 5.1.7.

Ako je $\mathfrak{n}$ nilpotentna podalgebra neke Liejeve algebre $\mathfrak{g}$, onda je $\mathfrak{g}$ $\mathfrak{n}-$modul u odnosu na restrikciju $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}|\mathfrak{n}$ adjungirane reprezentacije, pa je za svaki linearan funkcional $\alpha \in \mathfrak{n}^*$ (takav da je $[\mathfrak{n}, \mathfrak{n}] \subseteq \mathrm{Ker}\, \alpha$) dobro definiran potprostor $\mathfrak{g}_{(\alpha)}(\mathfrak{n})$ od $\mathfrak{g}$ i vrijedi $[\mathfrak{n}, \mathfrak{g}_{(\alpha)}(\mathfrak{n})] \subseteq \mathfrak{g}_{(\alpha)}(\mathfrak{n})$. Kažemo da je **Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ rascjepiva u odnosu na nilpotentnu podalgebru $\mathfrak{n}$** ako su svi operatori $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\, x$, $x \in \mathfrak{n}$, rascjepivi. Prema teoremu 5.1.7. tada vrijedi

$$\mathfrak{g} = \sum_{\alpha \in \mathfrak{n}^*} \dotplus\, \mathfrak{g}_{(\alpha)}(\mathfrak{n}).$$

Teorem 5.1.8. *Neka je V konačnodimenzionalan $\mathfrak{g}-$modul i $\mathfrak{n}$ nilpotentna Liejeva podalgebra od $\mathfrak{g}$. Tada za bilo koje $\alpha, \beta \in \mathfrak{n}^*$ vrijedi $\mathfrak{g}_{(\alpha)}(\mathfrak{n}) V_{(\beta)}(\mathfrak{n}) \subseteq V_{(\alpha+\beta)}(\mathfrak{n})$.*

Dokaz ćemo provesti pomoću sljedeće konstrukcije:

Lema 5.1.9. *Neka je $\mathfrak{g}$ Liejeva algebra i V konačnodimenzionalan $\mathfrak{g}-$modul. Na vektorskom prostoru $\mathfrak{g}^V = \mathfrak{g} \times V$ definiramo operaciju $[\,\cdot\,,\,\cdot\,] : \mathfrak{g}^V \times \mathfrak{g}^V \to \mathfrak{g}^V$ ovako:*

$$[(x, v), (y, w)] = ([x, y], xw - yv), \qquad x, y \in \mathfrak{g}, \quad v, w \in V.$$

(*a*) *Uz tako definiranu operaciju $\mathfrak{g}^V$ je Liejeva algebra.*

(*b*) *$x \mapsto (x, 0)$ je izomorfizam Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ na Liejevu podalgebru $\mathfrak{g} \times \{0\} = \{(x, 0);\ x \in \mathfrak{g}\}$ od $\mathfrak{g}^V$.*

(*c*) *$\{0\} \times V = \{(0, v);\ v \in V\}$ je komutativni ideal u Liejevoj algebri $\mathfrak{g}^V$.*

(*d*) *$v \mapsto (0, v)$ je izomorfizam prostora V na prostor $\{0\} \times V$.*

(*e*) *Za svaki $x \in \mathfrak{g}$ preslikavanje $D_x : \mathfrak{g}^V \to \mathfrak{g}^V$, definirano sa $D_x(y, v) = ([x, y], xv)$, $(x, v) \in \mathfrak{g}^V$, je derivacija Liejeve algebre $\mathfrak{g}^V$ i $x \mapsto D_x$ je homomorfizam Liejevih algebri sa $\mathfrak{g}$ u* $\mathrm{Der}\left(\mathfrak{g}^V\right)$.

Dokaz: (*a*) Dokažimo najprije da je definirana operacija linearna u prvoj varijabli: za bilo koje $\alpha_1, \alpha_2 \in K$, $x_1, x_2, y \in \mathfrak{g}$ i $v_1, v_2, w \in V$ imamo redom

$$[\alpha_1(x_1, v_1) + \alpha_2(x_2, v_2), (y, w)] = [(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2), (y, w)] =$$

$$= ([\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, y], (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)w - y(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2)) =$$

$$= (\alpha_1[x_1, y] + \alpha_2[x_2, y], \alpha_1 x_1 w + \alpha_2 x_2 w - \alpha_1 y v_1 - \alpha_2 y v_2) =$$

$$= (\alpha_1[x_1, y] + \alpha_2[x_2, y], \alpha_1(x_1 w - y v_1) + \alpha_2(x_2 w - y v_2)) =$$

$$= \alpha_1([x_1, y], x_1 w - y v_1) + \alpha_2([x_2, y], x_2 w - y v_2) = \alpha_1[(x_1, v_1), (y, w)] + \alpha_2[(x_2, v_2), (y, w)].$$

Time je dokazana linearnost operacije $[\,\cdot\,,\,\cdot\,]$ na $\mathfrak{g}^V$ u prvoj varijabli. Nadalje, vrijedi

$$[(x, v), (x, v)] = ([x, x], xv - xv) = (0, 0) = 0,$$

dakle i

$$[(x,v),(y,w)] = -[(y,w),(x,v)].$$

Odatle slijedi da je operacija $[\,\cdot\,,\,\cdot\,]$ na $\mathfrak{g}^V$ linearna i u drugoj varijabli. Napokon, vrijedi Jacobijev identitet: za $x,y,z \in \mathfrak{g}$ i $u,v,w \in V$ imamo

$$[(x,u),[(y,v),(z,w)]] + [(y,v),[(z,w),(x,u)]] + [(z,w),[(x,u),(y,v)]] =$$

$$= [(x,u),([y,z],yw-zv)] + [(y,v),([z,x],zu-xw)] + [(z,w),([x,y],xv-yu)] =$$

$$= ([x,[y,z]],xyw-xzv-[y,z]u) + ([y,[z,x]],yzu-yxw-[z,x]v) + ([z,[x,y]],zxv-zyu-[x,y]w) =$$

$$= ([x,[y,z]]+[y,[z,x]]+[z,[x,y]],xyw-xzv-yzu+zyu+yzu-yxw-zxv+xzv+zxv-zyu-xyw+yxw) = 0.$$

Time je dokazana tvrdnja (a).

Zadatak 5.1.2. *Dokažite preostale tvrdnje* (b), (c), (d) *i* (e) *leme 5.1.9.*

Dokaz teorema 5.1.8.: Na temelju leme 5.1.9. možemo identificirati Liejevu algebru $\mathfrak{g}$ s podalgebrom $\mathfrak{g}\times\{0\}$ Liejeve algebre $\mathfrak{g}^V$ i prostor V s komutativnim idealom $\{0\}\times V$ u Liejevoj algebri $\mathfrak{g}^V$. Uz te identifikacije je $\mathfrak{g}^V = \mathfrak{g}\dot{+}V$, a za $x\in\mathfrak{g}$ derivacija D_x Liejeve algebre $\mathfrak{g}^V$ iz tvrdnje (e) leme 5.1.9. je dana svojim restrikcijama na potprostore $\mathfrak{g}$ i V ovako:

$$D_x|\mathfrak{g} = \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\,x, \qquad D_x|V = x\,\cdot\,.$$

Neka je u daljnjem $x\in\mathfrak{n}$. Budući da su potprostori $\mathfrak{g}$ i V invarijantni s obzirom na operator D_x, za svaki $\lambda\in Sp(D_x)$ vrijedi

$$\left(\mathfrak{g}^V\right)_{(\lambda)}(D_x) = \mathfrak{g}_{(\lambda)}(\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\,x)\ \dot{+}\ V_{(\lambda)}(x).$$

Nadalje, iz dokaza propozicije 3.3.6., preciznije iz jednakosti u zadatku 3.3.1. primijenjene na Liejevu algebru $\mathfrak{g}^V$ i na njenu derivaciju D_x, za bilo koje $\lambda,\mu\in K$ vrijedi

$$\left[\left(\mathfrak{g}^V\right)_{(\lambda)}(D_x),\left(\mathfrak{g}^V\right)_{(\mu)}(D_x)\right] \subseteq \left(\mathfrak{g}^V\right)_{(\lambda+\mu)}(D_x).$$

Kako je V ideal u Liejevoj algebri $\mathfrak{g}^V$, odatle slijedi

$$\mathfrak{g}_{(\lambda)}(\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\,x)V_{(\mu)}(x) = \left[\mathfrak{g}_{(\lambda)}(\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\,x)\times\{0\},\{0\}\times V_{(\mu)}(x)\right] \subseteq$$

$$\subseteq \left[\left(\mathfrak{g}^V\right)_{(\lambda)}(D_x),\left(\mathfrak{g}^V\right)_{(\mu)}(D_x)\right]\cap V \subseteq \left(\mathfrak{g}^V\right)_{(\lambda+\mu)}(D_x)\cap V = V_{(\lambda+\mu)}(x).$$

Napokon, kako za linearne funkcionale $\alpha,\beta\in\mathfrak{n}^*$ vrijedi

$$\mathfrak{g}_{(\alpha)}(\mathfrak{n}) = \bigcap_{x\in\mathfrak{n}}\mathfrak{g}_{(\alpha(x))}(\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\,x) \qquad \text{i} \qquad V_{(\beta)}(\mathfrak{n}) = \bigcap_{x\in\mathfrak{n}}V_{(\beta(x))}(x),$$

dobivamo

$$\mathfrak{g}_{(\alpha)}(\mathfrak{n})V_{(\beta)}(\mathfrak{n}) \subseteq \mathfrak{g}_{(\alpha(x))}(\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\,x)V_{(\beta(x))}(x) \subseteq V_{(\alpha(x)+\beta(x))}(x) = V_{((\alpha+\beta)(x))}(x) \qquad \forall x\in\mathfrak{n},$$

pa slijedi

$$\mathfrak{g}_{(\alpha)}(\mathfrak{n})V_{(\beta)}(\mathfrak{n}) \subseteq \bigcap_{x\in\mathfrak{n}}V_{((\alpha+\beta)(x))}(x) = V_{(\alpha+\beta)}(\mathfrak{n}).$$

Korolar 5.1.10. *Neka je* $\mathfrak{n}$ *nilpotentan ideal u Liejevoj algebri* $\mathfrak{g}$ *i neka je* V *konačnodimenzionalan* $\mathfrak{g}-$*modul. Tada je* $V_{(\alpha)}(\mathfrak{n})$ $\mathfrak{g}-$*podmodul od* V *za svaki linearan funkcional* $\alpha\in\mathfrak{n}^*$

Zadatak 5.1.3. *Dokažite korolar 5.1.10.*

5.2 Cartanove podalgebre

Cartanova podalgebra Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ je izvjesna nilpotentna podalgebra, koja je pogodno smještena u $\mathfrak{g}$, tako da rastav $\mathfrak{g}$ u sumu korijenskih potprostora daje grubi opis operacije $[\cdot\,,\,\cdot]$ u $\mathfrak{g}$. Definicija je sljedeća: nilpotentna podalgebra $\mathfrak{h}$ Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ zove se **Cartanova podalgebra** od $\mathfrak{g}$ ako je $\mathfrak{h} = N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$.

Zadatak 5.2.1. *Neka je $\mathfrak{h}$ Cartanova podalgebra Liejeve algebre $\mathfrak{g}$. Dokažite da je $\mathfrak{h}$ Cartanova podalgebra svake Liejeve podalgebre od $\mathfrak{g}$ koja sadrži $\mathfrak{h}$.*

Propozicija 5.2.1. *Cartanova podalgebra Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ je maksimalna nilpotentna podalgebra od $\mathfrak{g}$.*

Dokaz: Pretpostavimo da je $\mathfrak{k}$ nilpotentna podalgebra od $\mathfrak{g}$ i da je $\mathfrak{h} \subsetneq \mathfrak{k}$. Tada je $x \mapsto \mathrm{ad}_{\mathfrak{k}}\, x$ nil$-$reprezentacija od $\mathfrak{h}$ na prostoru $\mathfrak{k}$. Potprostor $\mathfrak{h}$ od $\mathfrak{k}$ je invarijantan s obzirom na tu reprezentaciju. Slijedi da je kvocijentna reprezentacija π od $\mathfrak{h}$ na prostoru $\mathfrak{k}/\mathfrak{h}$, zadana sa

$$\pi(x)(y + \mathfrak{h}) = [x, y] + \mathfrak{h}, \qquad x \in \mathfrak{h}, \quad y \in \mathfrak{k},$$

nil$-$reprezentacija. Prema Engelovom teoremu 4.1.3. postoji $v \in \mathfrak{k}/\mathfrak{h}$, $v \neq 0$, takav da je $\pi(x)v = 0$ $\forall x \in \mathfrak{h}$. No tada je $v = y + \mathfrak{h}$ za neki $y \in \mathfrak{k} \setminus \mathfrak{h}$ i vrijedi $[\mathfrak{h}, y] \subseteq \mathfrak{h}$, odnosno, $y \in N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$. To je nemoguće jer je $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$. Ova kontradikcija dokazuje propoziciju.

Propozicija 5.2.2. *Neka je $\mathfrak{h}$ nilpotentna podalgebra Liejeve algebre $\mathfrak{g}$.*

(*a*) *Vrijedi $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) \subseteq \mathfrak{g}_{(0)}(\mathfrak{h})$.*

(*b*) *$\mathfrak{h}$ je Cartanova podalgebra od $\mathfrak{g}$ ako i samo ako je $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_{(0)}(\mathfrak{h})$.*

Dokaz: (*a*) Imamo prema definiciji

$$\mathfrak{g}_{(0)}(\mathfrak{h}) = \{x \in \mathfrak{g};\ \forall h \in \mathfrak{h},\ \exists k \in \mathbb{N},\ (\mathrm{ad}\, h)^k x = 0\}.$$

Za $x \in N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$ je $(\mathrm{ad}\, h)x = [h, x] \in \mathfrak{h}$ za svaki $h \in \mathfrak{h}$. Kako je $\mathfrak{h}$ nilpotentna Liejeva algebra, svaki operator $ad_{\mathfrak{h}}\, h = (\mathrm{ad}\, h)|\mathfrak{h}$, $h \in \mathfrak{h}$, je nilpotentan. Dakle, za svaki $h \in \mathfrak{h}$ postoji $k \in \mathbb{N}$ takav da je $(\mathrm{ad}\, h)^k|\mathfrak{h} = 0$. No tada je $(\mathrm{ad}\, h)^{k+1}x = (\mathrm{ad}\, h)^k[h, x] = 0$, pa slijedi $x \in \mathfrak{g}_{(0)}(\mathfrak{h})$. Dakle, $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) \subseteq \mathfrak{g}_{(0)}(\mathfrak{h})$.

(*b*) Budući da je $\mathfrak{h} \subseteq N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$, prema tvrdnji (*a*) iz $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_{(0)}(\mathfrak{h})$ slijedi da je $\mathfrak{h} = N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$, tj. $\mathfrak{h}$ je Cartanova podalgebra od $\mathfrak{g}$.

Pretpostavimo sada da je $\mathfrak{h}$ Cartanova podalgebra od $\mathfrak{g}$, ali da je $\mathfrak{h} \neq \mathfrak{g}_{(0)}(\mathfrak{h})$. Za svaki $h \in \mathfrak{h}$ operator $(\mathrm{ad}\, h)|\mathfrak{g}_{(0)}(\mathfrak{h})$ je nilpotentan. Stoga je nilpotentan i operator $\pi(h)$ koji $(\mathrm{ad}\, h)|\mathfrak{g}_{(0)}(\mathfrak{h})$ definira na kvocijentnom prostoru $V = \mathfrak{g}_{(0)}(\mathfrak{h})/\mathfrak{h}$:

$$\pi(h)(x + \mathfrak{h}) = [x, h] + \mathfrak{h}, \qquad x \in \mathfrak{g}_{(0)}(\mathfrak{h}).$$

Dakle, π je nil$-$reprezentacija Liejeve algebre $\mathfrak{h}$ na prostoru $V \neq \{0\}$. Prema Engelovom teoremu 4.1.3. postoji $v \in V \setminus \{0\}$ takav da je $\pi(h)v = 0\ \ \forall h \in \mathfrak{h}$. Tada je $v = x + \mathfrak{h}$ za neki $x \in \mathfrak{g}_{(0)}(\mathfrak{h}) \setminus \mathfrak{h}$ i vrijedi $[h, x] \in \mathfrak{h}\ \ \forall h \in \mathfrak{h}$. No tada je $x \in N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$, suprotno pretpostavci da $x \notin \mathfrak{h}$. Ova kontradikcija pokazuje da za Cartanovu podalgebru $\mathfrak{h}$ vrijedi $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_{(0)}(\mathfrak{h})$.

Za Cartanovu podalgebru $\mathfrak{h}$ Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ kažemo da je **rascjepiva** ili **razloživa**, ako je za svaki $h \in \mathfrak{h}$ operator $\mathrm{ad}\, h$ na $\mathfrak{g}$ rascjepiv. Naravno, u slučaju algebarski zatvorenog polja svaka je Cartanova podalgebra rascjepiva.

Iz propozicije 5.2.2. i iz teorema 5.1.6. i 5.1.7. neposredno slijedi

Korolar 5.2.3. *Neka je* $\mathfrak{h}$ *Cartanova podalgebra Liejeve algebre* $\mathfrak{g}$.

(*a*) $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \dotplus \mathfrak{g}_*(\mathfrak{h})$.

(*b*) *Ako je* $\mathfrak{h}$ *rascjepiva, onda je*

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \dotplus \sum_{\alpha \in \mathfrak{h}^* \setminus \{0\}} \dotplus \, \mathfrak{g}_{(\alpha)}(\mathfrak{h}).$$

Za Cartanovu podalgebru $\mathfrak{h}$ Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ stavljamo

$$R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) = \{\alpha \in \mathfrak{h}^*; \ \mathfrak{g}_{(\alpha)}(\mathfrak{h}) \neq \{0\}, \ \alpha \neq 0\}.$$

Taj se skup linearnih funkcionala na $\mathfrak{h}$ zove **sistem korijena Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ u odnosu na Cartanovu podalgebru $\mathfrak{h}$**. Njegovi elementi su **korijeni** od $\mathfrak{g}$ u odnosu na $\mathfrak{h}$, a za $\alpha \in \{0\} \cup R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ kažemo da je $\mathfrak{g}_{(\alpha)} = \mathfrak{g}_{(\alpha)}(\mathfrak{h})$ pripadni **korijenski potprostor**. Ako je Cartanova podalgebra $\mathfrak{h}$ rascjepiva, prema tvrdnji (*b*) korolara 5.2.3. imamo tzv. **korijenski rastav Liejeve algebre $\mathfrak{g}$** :

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \dotplus \sum_{\alpha \in R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})} \dotplus \, \mathfrak{g}_{(\alpha)}.$$

Teorem 5.2.4. *Neka je* $\mathfrak{h}$ *rascjepiva Cartanova podalgebra Liejeve algebre* $\mathfrak{g}$.

(*a*) *Za* $\alpha, \beta \in \{0\} \cup R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ *vrijedi* $[\mathfrak{g}_{(\alpha)}, \mathfrak{g}_{(\beta)}] \subseteq \mathfrak{g}_{(\alpha+\beta)}$.

(*b*) *Ako su* $\alpha, \beta \in \{0\} \cup R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ *takvi da je* $0 \neq \alpha + \beta \notin R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$, *onda je* $[\mathfrak{g}_{(\alpha)}, \mathfrak{g}_{(\beta)}] = \{0\}$.

(*c*) *Za* $\alpha, \beta \in \{0\} \cup R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ *takve da je* $\alpha + \beta \neq 0$ *vrijedi* $B_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g}_{(\alpha)}, \mathfrak{g}_{(\beta)}) = \{0\}$.

Dokaz: Tvrdnja (*a*) je neposredna posljedica teorema 5.1.8. a tvrdnja (*b*) slijedi iz tvrdnje (*a*) jer ako $\alpha + \beta \notin \{0\} \cup R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$, onda je $\mathfrak{g}_{(\alpha+\beta)} = \{0\}$.

(*c*) Neka su $x \in \mathfrak{g}_{(\alpha)}$ i $y \in \mathfrak{g}_{(\beta)}$. Prema tvrdnji (*a*) linearan operator $(\mathrm{ad}\, x)(\mathrm{ad}\, y)$ preslikava svaki potprostor u korijenskom rastavu Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ u odnosu na $\mathfrak{h}$ u neki drugi potprostor u tom rastavu. Dakle, ako izaberemo bazu u $\mathfrak{g}$ sastavljenu od baza svih korijenskih potprostora, matrica operatora $(\mathrm{ad}\, x)(\mathrm{ad}\, y)$ u toj bazi ima nule na dijagonali. Stoga mu je trag jednak nuli, a to znači da je $B_{\mathfrak{g}}(x, y) = 0$.

Za linearan operator A na $n-$dimenzionalnom vektorskom prostoru V označimo sa $P_A(T)$ njegov svojstveni polinom, a njegove koeficijente sa $-\sigma_1(A), \ldots, -\sigma_n(A)$:

$$P_A(T) = \det(T\, I_V - A) = T^n - \sigma_1(A)T^{n-1} - \cdots - \sigma_{n-1}(A)T - \sigma_n(A).$$

Tada vrijede tzv. *Newtonove formule*:

$$\sigma_1(A) = \mathrm{Tr}\, A, \qquad j\sigma_j(A) = \mathrm{Tr}\, A^j - \sigma_1(A)\mathrm{Tr}\, A^{j-1} - \ldots - \sigma_{j-1}(A)\mathrm{Tr}\, A, \quad 1 < j \leq n.$$

Uočimo da je operator A nilpotentan ako i samo ako je $P_A(T) = T^n$, a po Newtonovim formulama to je ispunjeno ako i samo ako je $\mathrm{Tr}\, A^j = 0$ za $j = 1, \ldots, n$. Dimenzija Fittingovog potprostora $V_{(0)}(A)$ u odnosu na operator A jednaka je kratnosti 0 kao nultočke polinoma $P_A(T)$. Dakle, $\dim V_*(A) = \max\{j; \ \sigma_j(A) \neq 0\}$.

Neka je i dalje V $n-$dimenzionalan vektorski prostor nad poljem K karakteristike 0. Skup K^V svih funkcija sa V u K je unitalna komutativna algebra u odnosu operacije po točkama:

$$(f+g)(v) = f(v) + g(v), \quad (\lambda f)(v) = \lambda f(v), \quad (fg)(v) = f(v)g(v), \quad f, g \in K^V, \ \lambda \in K, \ v \in V.$$

Označimo sa $\mathcal{P}(V)$ unitalnu podalgebru od K^V generiranu skupom V^* svih linearnih funkcionala na V. Dakle, $\mathcal{P}(V)$ je skup svih linearnih kombinacija produkata linearnih funkcionala. Izaberemo li bazu $\{f_1, \dots, f_n\}$ od V^*, vidimo da algebru $\mathcal{P}(V)$ možemo identificirati s algebrom polinoma $K[f_1, \dots, f_n]$.

Neka je sada $\mathfrak{g}$ $n-$dimenzionalna Liejeva algebra. Definiramo **rang** $\operatorname{rank}(\mathfrak{g})$ **Liejeve algebre** $\mathfrak{g}$ kao minimum dimenzija Fittingovih potprostora $\mathfrak{g}_{(0)}(\operatorname{ad} x)$ za $x \in \mathfrak{g}$:

$$\operatorname{rank}(\mathfrak{g}) = \min\{\dim \mathfrak{g}_{(0)}(\operatorname{ad} x);\ x \in \mathfrak{g}\}.$$

Naravno, zbog Fittingovih dekompozicija za operatore $\operatorname{ad} x$, $x \in \mathfrak{g}$, imamo

$$\operatorname{rank}(\mathfrak{g}) = n - \max\{\dim \mathfrak{g}_*(\operatorname{ad} x);\ x \in \mathfrak{g}\}.$$

Za svaki $x \in \mathfrak{g}$ operator $\operatorname{ad} x$ ima nulu u spektru jer je $(\operatorname{ad} x)x = 0$. Dakle, $\mathfrak{g}_{(0)}(\operatorname{ad} x) \neq \{0\}$. Prema tome, za Liejevu algebru $\mathfrak{g} \neq \{0\}$ je $\operatorname{rank}(\mathfrak{g}) \geq 1$. Element $x \in \mathfrak{g}$ zove se **regularan** ako je

$$\dim \mathfrak{g}_{(0)}(\operatorname{ad} x) = \operatorname{rank}(\mathfrak{g}).$$

Skup svih regularnih elemenata Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ označavat ćemo sa $\mathfrak{g}'$.

Za $x \in \mathfrak{g}$ svojstveni polinom $P_{\operatorname{ad} x}$ operatora $\operatorname{ad} x$ označavat ćemo kraće sa P_x, a njegove kofficijente sa $-\sigma_j(x)$. Dakle,

$$P_x(T) = \det(T\, I_{\mathfrak{g}} - \operatorname{ad} x) = T^n - \sum_{j=1}^{n} \sigma_j(x) T^{n-j}.$$

Prema Newtonovim formulama je

$$\sigma_1(x) = \operatorname{Tr}(\operatorname{ad} x), \qquad j\sigma_j(x) = \operatorname{Tr}(\operatorname{ad} x)^j - \sum_{i=1}^{j-1} \sigma_i(x) \operatorname{Tr}(\operatorname{ad} x)^{j-i}, \quad 1 < j \leq n.$$

Iz tih se formula vidi da su sve funkcije $\sigma_j : \mathfrak{g} \to K$ polinomijalne.

Ako je $\ell = \operatorname{rank}(\mathfrak{g})$, onda je 0 barem $\ell-$struka nultočka polinoma P_x i postoji $x \in \mathfrak{g}$ takav da je ona točno $\ell-$struka. To znači da su $\sigma_j \equiv 0$ za $n - \ell + 1 \leq j \leq n$ i $\sigma_{n-\ell} \not\equiv 0$. Dakle,

$$P_x(T) = T^n - \sum_{j=1}^{n-\ell} \sigma_j(x) T^{n-j}, \qquad \sigma_{n-\ell} \not\equiv 0.$$

Nadalje,

$$\mathfrak{g}' = \{x \in \mathfrak{g};\ \sigma_{n-\ell}(x) \neq 0\}.$$

Propozicija 5.2.5. *Neka je $\mathfrak{g}$ Liejeva algebra nad poljem k i neka je K proširenje polja k.*

(*a*) *Vrijedi $\mathfrak{g}' = \mathfrak{g} \cap \left(\mathfrak{g}^K\right)'$; tj. $x \in \mathfrak{g}$ je regularan u $\mathfrak{g}$ ako i samo ako je on regularan u $\mathfrak{g}^K$.*

(*b*) $\operatorname{rank}(\mathfrak{g}) = \operatorname{rank}\left(\mathfrak{g}^K\right)$.

Dokaz: Za $x \in \mathfrak{g}$ svojstveni polinom operatora $ad_{\mathfrak{g}}\, x$ podudara se sa svojstvenim polinomom $ad_{\mathfrak{g}^K}\, x$. Doista, ako je $e = \{e_1, \dots, e_n\}$ baza od $\mathfrak{g}$, onda je e ujedno baza od $\mathfrak{g}^K$, a u toj bazi operatori $ad_{\mathfrak{g}}\, x$ i $ad_{\mathfrak{g}'}\, x$ imaju istu matricu. To znači da ako pišemo

$$P_x(T) = T^n - \sum_{j=1}^{n} \sigma_j(x) T^{n-j}, \quad x \in \mathfrak{g}, \qquad \text{i} \qquad P_y(T) = T^n - \sum_{j=1}^{n} \tau_j(y) T^{n-j}, \quad y \in \mathfrak{g}^K,$$

onda za polinomijalne funkcije $\sigma_1, \dots, \sigma_n \in \mathcal{P}(\mathfrak{g})$ i $\tau_1, \dots, \tau_n \in \mathcal{P}\left(\mathfrak{g}^K\right)$ vrijedi $\sigma_j = \tau_j|\mathfrak{g}$ za $j = 1, \dots, n$.

Dokažimo sada da za polinomijalnu funkciju $f \in \mathcal{P}(\mathfrak{g}^K)$ takvu da je $f|\mathfrak{g} = 0$ vrijedi $f = 0$. Doista, ako izaberemo bazu $\{e_1, \dots, e_n\}$ od $\mathfrak{g}$, dakle i od $\mathfrak{g}^K$, onda vrijedi

$$f(\xi_1 e_1 + \cdots + \xi_n e_n) = P(\xi_1, \dots, \xi_n), \qquad \xi_1, \dots, \xi_n \in K,$$

gdje je $P \in K[T_1, \dots, T_n]$ polinom u n varijabli s koeficijentima iz K. Dakle, tvrdnja se svodi na sljedeće: ako za $P \in K[T_1, \dots, T_n]$ vrijedi $P(\xi_1, \dots, \xi_n) = 0$ $\forall \xi_1, \dots, \xi_n \in k$, onda je $P = 0$. Tu ćemo činjenicu dokazati indukcijom u odnosu na n. Ako je $n = 1$, tj. ako je $P \in K[T]$ takav da je $P(\xi) = 0$ $\forall \xi \in k$, onda je nužno $P = 0$, jer $P \neq 0$ ima samo konačno mnogo nultočaka, a polje k je beskonačno. Time je dokazana baza indukcije. Provedimo sada korak indukcije. Neka je $n \geq 2$ i pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za polinome u $n-1$ varijabli. Neka je $P \in K[T_1, \dots, T_n]$ takav da je $P(\xi_1, \dots, \xi_n) = 0$ $\forall \xi_1, \dots, \xi_n \in k$. Možemo pisati

$$P(T_1, \dots, T_n) = \sum_{j=0}^{m} P_j(T_1, \dots, T_{n-1}) T_n^j$$

gdje je $m \in \mathbb{Z}_+$ i $P_j \in K[T_1, \dots, T_{n-1}]$ za $j = 0, \dots, m$. Fiksirajmo sada $\xi_1, \dots, \xi_{n-1} \in k$ i definirajmo polinom $Q \in K[T]$ sa $Q(T) = P(\xi_1, \dots, \xi_{n-1}, T)$. Tada je

$$Q(T) = \sum_{j=0}^{m} P_j(\xi_1, \dots, \xi_{n-1}) T^j.$$

Po pretpostavci je $Q(\xi) = P(\xi_1, \dots, \xi_{n-1}, \xi) = 0$ $\forall \xi \in k$. Prema bazi indukcije znamo da je tada $Q(T)$ nul$-$polinom, odnosno svi su mu koeficijenti jednaki nuli. Budući da je izbor $\xi_1, \dots, \xi_{n-1} \in k$ bio proizvoljan, zaključujemo da je

$$P_j(\xi_1, \dots, \xi_{n-1}) = 0 \qquad \forall \xi_1, \dots, \xi_{n-1} \in k \quad \text{i za} \quad j = 0, \dots, m.$$

No tada su po pretpostavci indukcije $P_0, \dots, P_m$ nul$-$polinomi. To znači da je P nul$-$polinom.

Vratimo sa sada dokazu propozicije 5.2.5. Prema upravo dokazanom vidimo da za svaki $j \in \{1, \dots, n\}$ vrijedi $\sigma_j = 0$ ako i samo ako je $\tau_j = 0$. Odatle neposredno slijede obje tvrdnje propozicije.

Propozicija 5.2.6. *Neka je $\varphi : \mathfrak{g}_1 \to \mathfrak{g}_2$ epimorfizam Liejevih algebri.*

(a) $\varphi(\mathfrak{g}_1') \subseteq \mathfrak{g}_2'$.

(b) *Ako je* $\operatorname{Ker}\varphi \subseteq Z(\mathfrak{g}_1)$, *onda je* $\varphi(\mathfrak{g}_1') = \mathfrak{g}_2'$.

(c) $\operatorname{rank}(\mathfrak{g}_1) \geq \operatorname{rank}(\mathfrak{g}_2)$.

Dokaz: Stavimo $\operatorname{rank}(\mathfrak{g}_1) = r_1$, $\operatorname{rank}(\mathfrak{g}_2) = r_2$, $\dim \mathfrak{g}_1 = n$ i $\dim \mathfrak{g}_2 = m$. Dakle, vrijedi $\dim \operatorname{Ker}\varphi = n - m$. Za $x \in \mathfrak{g}$ svojstveni polinomi P_x, $P_{\varphi(x)}$ i Q operatora $\operatorname{ad} x$, $\operatorname{ad}\varphi(x)$ i $(\operatorname{ad} x)|\operatorname{Ker}\varphi$ imaju oblik

$$P_x(T) = T^n - \sum_{j=1}^{n-r_1} \sigma_j(x) T^{n-j}, \qquad P_{\varphi(x)}(T) = T^m - \sum_{i=1}^{m-r_2} \tau_i(x) T^{m-i},$$

$$Q(T) = T^{n-m} - \sum_{k=1}^{n-m-p} \omega_k(x) T^{n-m-k},$$

gdje su $\sigma_j, \tau_i, \omega_k \in \mathcal{P}(\mathfrak{g}_1)$ i vrijedi $\sigma_{n-r_1} \neq 0$ i $\tau_{m-r_2} \neq 0$, a i p je izabran tako da je $\omega_{n-m-p} \neq 0$. Izaberemo li bazu $e = \{e_1, \ldots, e_n\}$ od $\mathfrak{g}_1$ tako da je $e' = \{e_{m+1}, \ldots, e_n\}$ baza od $\operatorname{Ker}\varphi$, onda je $e'' = \{\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_m)\}$ baza od $\mathfrak{g}_2$. Tada φ inducira izomorfizam sa $\mathfrak{g}_1/(\operatorname{Ker}\varphi)$ na $\mathfrak{g}_2$, koji za $x \in \mathfrak{g}_1$ prevodi operator induciran sa $\operatorname{ad} x$ na kvocijentnom prostoru $\mathfrak{g}_1/(\operatorname{Ker}\varphi)$ u operator $\operatorname{ad}\varphi(x)$ (jer je φ homomorfizam Liejevih algebri). Odatle slijedi da je u bazi e matrica operatora $\operatorname{ad} x$ oblika $\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & C \end{bmatrix}$, gdje je A matrica operatora $\operatorname{ad}\varphi(x)$ u bazi e'', a C je matrica operatora $(\operatorname{ad} x)|\operatorname{Ker}\varphi$ u bazi e'. Odatle slijedi da je $P_x = P_{\varphi(x)}Q$, pa imamo $n - r_1 = m - r_2 + n - m - p$, tj. $r_1 = r_2 + p$, i $\sigma_{n-r_1}(x) = \tau_{m-r_2}(x)\omega_{n-m-p}(x)$ $\forall x \in \mathfrak{g}_1$. Iz $r_1 = r_2 + p$ slijedi da je $r_1 \geq r_2$, a to je tvrdnja (c). Nadalje, ako je $x \in \mathfrak{g}_1'$, onda je $\sigma_{n-r_1}(x) \neq 0$, pa slijedi da je $\tau_{m-r_2}(x) \neq 0$, dakle, $\varphi(x) \in \mathfrak{g}_2'$. Time je dokazana tvrdnja (a). Napokon, pretpostavimo da je $\operatorname{Ker}\varphi \subseteq Z(\mathfrak{g}_1)$. Tada je $(\operatorname{ad} x)|\operatorname{Ker}\varphi = 0$ za svaki $x \in \mathfrak{g}_1$, pa slijedi da je $Q(T) = T^{n-m}$. Tada je $\sigma_{n-r_1}(x) = \tau_{m-r_2}(x)$, dakle, $x \in \mathfrak{g}_1'$ ako i samo ako je $\varphi(x) \in \mathfrak{g}_2'$. Time je dokazana i tvrdnja (c).

Propozicija 5.2.7. *Neka je $\mathfrak{k}$ podalgebra Liejeve algebre $\mathfrak{g}$. Tada je $\mathfrak{g}' \cap \mathfrak{k} \subseteq \mathfrak{k}'$.*

Dokaz: Za $x \in \mathfrak{k}$ vrijedi $\operatorname{ad}_{\mathfrak{k}} x = (\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} x)|\mathfrak{k}$. Neka je $A(x)$ operator na kvocijentnom prostoru $\mathfrak{g}/\mathfrak{k}$ induciran sa $\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} x$:

$$A(x)(y + \mathfrak{k}) = (\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} x)y + \mathfrak{k} = [x, y] + \mathfrak{k}, \qquad y \in \mathfrak{g}.$$

Za svaki $x \in \mathfrak{k}$ neka su $d_0(x)$ i $d_1(x)$ dimenzije Fittingovih nul−komponenti operatora $\operatorname{ad}_{\mathfrak{k}} x$ i $A(x)$:

$$d_0(x) = \dim \mathfrak{k}_{(0)}(\operatorname{ad}_{\mathfrak{k}} x), \qquad d_1(x) = \dim (\mathfrak{g}/\mathfrak{k})_{(0)}(A(x)).$$

Nadalje, neka su

$$c_0 = \min\{d_0(x);\ x \in \mathfrak{k}\} \qquad \text{i} \qquad c_1 = \min\{d_1(x);\ x \in \mathfrak{k}\}.$$

Tada za neke polinomijalne funkcije $P_0, P_1 \in \mathcal{P}(\mathfrak{k}) \setminus \{0\}$ vrijedi

$$d_0(x) = c_0 \iff P_0(x) \neq 0 \qquad \text{i} \qquad d_1(x) = c_1 \iff P_1(x) \neq 0.$$

Stavimo sada

$$S = \{x \in \mathfrak{k};\ d_0(x) = c_0 \quad \text{i} \quad d_1(x) = c_1\} = \{x \in \mathfrak{k};\ P_0(x) \neq 0 \neq P_1(x)\} = \{x \in \mathfrak{k};\ P(x) \neq 0\}$$

gdje je $P = P_0 P_1 \in \mathcal{P}(\mathfrak{k}) \setminus \{0\}$. Budući da je polje k beskonačno, skup S je neprazan. Svaki element od S je regularan u $\mathfrak{k}$. Nadalje, za svaki $x \in \mathfrak{k}$ je $\mathfrak{k}_{(0)}(\operatorname{ad}_{\mathfrak{k}} x) \subseteq \mathfrak{g}_{(0)}(\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} x)$ i budući da je $\mathfrak{k}_{(0)}(\operatorname{ad}_{\mathfrak{k}} x)$ potprostor od $\mathfrak{g}$ koji je $(\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} x)$−invarijantan, vrijedi $(\mathfrak{g}/\mathfrak{k})_{(0)}(A(x)) = \mathfrak{g}_{(0)}(\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} x)/\mathfrak{k}_{(0)}(\operatorname{ad}_{\mathfrak{k}} x)$. Prema tome,

$$S = \{x \in \mathfrak{k};\ \dim \mathfrak{g}_{(0)}(\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} x) \quad \text{je minimalna}\}.$$

Odatle slijedi da je svaki $x \in \mathfrak{g}' \cap \mathfrak{k}$ sadržan u S,. Dakle, $\mathfrak{g}' \cap \mathfrak{k} \subseteq S \subseteq \mathfrak{k}'$.

Napomena: Za Liejevu podalgebru $\mathfrak{k}$ od $\mathfrak{g}$ skup $\mathfrak{g}' \cap \mathfrak{k}$ ne mora biti neprazan. Ali ako jest neprazan, onda je on upravo jednak skupu S iz dokaza prethodne propozicije.

Teorem 5.2.8. (a) *Za $x \in \mathfrak{g}'$ Fittingov potprostor*

$$\mathfrak{g}_{(0)}(\operatorname{ad} x) = \{y \in \mathfrak{g};\ \exists k \in \mathbb{N}\ (\operatorname{ad} x)^k y = 0\}$$

je Cartanova podalgebra od $\mathfrak{g}$.

(b) *Ako je $\mathfrak{h}$ Cartanova podalgebra od $\mathfrak{g}$ i $x \in \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}'$, onda je $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_{(0)}(\operatorname{ad} x)$. Posebno, ako su $\mathfrak{h}_1$ i $\mathfrak{h}_2$ Cartanove podalgebre i ako je $\mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{h}_2 \cap \mathfrak{g}' \neq \emptyset$, onda je $\mathfrak{h}_1 = \mathfrak{h}_2$.*

Dokaz: (*a*) Neka je $x \in \mathfrak{g}'$ i stavimo $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_{(0)}(\operatorname{ad} x)$. Tada je očito $\mathfrak{h}_{(0)}(\operatorname{ad}_{\mathfrak{h}} x) = \mathfrak{h}$. Po propoziciji 5.2.7. vrijedi $x \in \mathfrak{h}'$. To znači da je $\operatorname{rank}(\mathfrak{h}) = \dim \mathfrak{h}$, pa slijedi da je Liejeva algebra $\mathfrak{h}$ nilpotentna. Nadalje, imamo

$$\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_{(0)}(\operatorname{ad} x) \supseteq \mathfrak{g}_{(0)}(\mathfrak{h}) \supseteq \mathfrak{h}.$$

Dakle, $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_{(0)}(\mathfrak{h})$, a to prema tvrdnji (*b*) propozicije 5.2.2. znači da je $\mathfrak{h}$ Cartanova podalgebra od $\mathfrak{g}$.

(*b*) Neka je $\mathfrak{h}$ Cartanova podalgebra od $\mathfrak{g}$ i pretpostavimo da je $x \in \mathfrak{g}' \cap \mathfrak{h}$. Tada je prema (*a*) $\mathfrak{g}_{(0)}(\operatorname{ad} x)$ Cartanova podalgebra od $\mathfrak{g}$. No kako je $\mathfrak{h}$ nilpotentna Liejeva algebra, operator $(\operatorname{ad} x)|\mathfrak{h}$ je nilpotentan. Odatle slijedi da je $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}_{(0)}(\operatorname{ad} x)$, dakle, $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_{(0)}(\operatorname{ad} x)$.

5.3 Polinomijalna preslikavanja i topologija Zariskog

U ovom odjeljku promatramo isključivo konačnodimenzionalne vektorske prostore nad poljem K karakteristike 0. U prethodnom odjeljku definirali smo algebru polinomijalnih funkcija $\mathcal{P}(V)$ na vektorskom prostoru V kao unitalnu podalgebru algebre K^V svih funkcija sa V u K generiranu s dualnim prostorom V^*. Uočili smo da se $\mathcal{P}(V)$ može identificirati s algebrom polinoma $K[f_1, \ldots, f_n]$ za bilo koju bazu $\{f_1, \ldots, f_n\}$ dualnog prostora V^*. Važno je uočiti da odatle slijedi da je prsten $\mathcal{P}(V)$ integralna domena: ako su $f, g \in \mathcal{P}(V) \setminus \{0\}$ onda je i $fg \neq 0$. Kažemo da je **polinomijalna funkcija** $f \in \mathcal{P}(V)$ **homogena stupnja** $k \in \mathbb{Z}_+$, ako vrijedi

$$f(\lambda v) = \lambda^k f(v) \qquad \forall v \in V \quad \text{i} \quad \forall \lambda \in K.$$

Skup svih homogenih polinomijalnih funkcija stupnja k označavamo sa $\mathcal{P}^k(V)$. To je potprostor od $\mathcal{P}(V)$ i čitava algebra $\mathcal{P}(V)$ je direktna suma tih potprostora:

$$\mathcal{P}(V) = \sum_{k \in \mathbb{Z}_+} \dot{+}\, \mathcal{P}^k(V).$$

Očito vrijedi

$$\mathcal{P}^0(V) = K, \qquad \mathcal{P}^k(V) = \operatorname{span}\{g_1 \cdots g_k;\ g_1, \ldots, g_k \in V^*\}.$$

Za $f \in \mathcal{P}(V)$ stavimo

$$V_f = \{v \in V;\ f(v) \neq 0\}.$$

Za svaku polinomijalnu funkciju f osim nul−funkcije skup V_f je očito neprazan. Definiramo tzv. **topologiju Zariskog** na V kao topologiju čija je baza otvorenih skupova $\{V_f;\ f \in \mathcal{P}(V)\}$. Dakle, $U \subseteq V$ je **Zariski otvoren** podskup od V ako za svaku točku $v \in U$ postoji $f \in \mathcal{P}(V)$ takav da je $v \in V_f \subseteq U$. Definicija ima smisla jer skup $\{V_f;\ f \in \mathcal{P}(V)\}$ zadovoljava uvjete nužne da bi mogao biti baza otvorenih skupova za neku topologiju, jer je $\emptyset = V_0$ i konačan presjek skupova oblika V_f je ponovo skup takvog oblika:

$$V_{f_1} \cap \cdots \cap V_{f_m} = V_{f_1 \cdots f_m}.$$

Propozicija 5.3.1. *Svaka je točka $\{v\}$ zatvoren skup u odnosu na topologiju Zariskog.*

Dokaz: Ako je $w \in V \setminus \{v\}$, postoji linearan funkcional $g \in V^*$ takav da je $g(v) \neq g(w)$. Tada za $f = g - g(v)$ vrijedi $f(v) = 0$ i $f(w) \neq 0$. Dakle, $w \in V_f \subseteq V \setminus \{v\}$. Time je dokazano da je skup $V \setminus \{v\}$ Zariski otvoren, što znači da je skup $\{v\}$ Zariski zatvoren.

Međutim, topologija Zariskog nije Hausdorffova topologija, štoviše vrlo je daleko od tog svojstva:

Propozicija 5.3.2. *Ako su U_1 i U_2 Zariski otvoreni neprazni podskupovi vektorskog prostora V onda je $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$. Svaki neprazan Zariski otvoren podskup od V je Zariski gust u V.*

Dokaz: Izaberimo nekonstantne polinomijalne funkcije $f_1, f_2 \in \mathcal{P}(V)$ takve da je $V_{f_1} \subseteq U_1$ i $V_{f_2} \subseteq U_2$. Tada je

$$V_{f_1 f_2} = V_{f_1} \cap V_{f_2} \subseteq U_1 \cap U_2.$$

Umnožak $f_1 f_2$ je nekonstantna polinomijalna funkcija, pa vrijedi $V_{f_1 f_2} \neq \emptyset$. Dakle, $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$. Time je dokazana i druga tvrdnja. Naime, ako je U neprazan Zariski otvoren podskup od V, prema dokazanom njegov komplement $V \setminus U$ ne sadrži nijedan neprazan Zariski otvoren skup, a to upravo znači da je skup U gust u V u odnosu na topologiju Zariskog.

Za vektorske prostore V i W kažemo da je $F : V \to W$ **polinomijalno preslikavanje** ako je $\varphi \circ F \in \mathcal{P}(V)$ za svaki $\varphi \in W^*$.

Propozicija 5.3.3. *Za preslikavanje $F : V \to W$ sljedeća su svojstva međusobno ekvivalentna:*

(a) *F je polinomijalno preslikavanje.*

(b) *Za svaku bazu $\{w_1, \ldots, w_m\}$ od W vrijedi*

$$F(v) = \sum_{i=1}^{m} F_i(v) w_i, \qquad v \in V, \qquad \textit{za neke} \quad F_1, \ldots, F_m \in \mathcal{P}(V). \tag{5.13}$$

(c) *Za neku bazu $\{w_1, \ldots, w_m\}$ od W vrijedi* (5.13).

Dokaz: $(a) \Rightarrow (b)$. Neka je $\{w_1, \ldots, w_m\}$ baza od W i neka je $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_m\}$ dualna baza od W^*. Tada za svaki $v \in V$ imamo

$$F(v) = \sum_{i=1}^{m} \varphi_i(F(v)) w_i = \sum_{i=1}^{m} (\varphi_i \circ F)(v) w_i$$

i $\varphi_1 \circ F, \ldots, \varphi_m \circ F \in \mathcal{P}(V)$.

Implikacija $(b) \Rightarrow (c)$ je trivijalna.

$(c) \Rightarrow (a)$. Pretpostavimo da je $\{w_1, \ldots, w_m\}$ baza od W i da vrijedi (5.13). Tada za proizvoljne $\varphi \in W^*$ i $v \in V$ imamo

$$(\varphi \circ F)(v) = \varphi(F(v)) = \sum_{i=1}^{m} F_i(v) \varphi(w_i).$$

Dakle, $\varphi \circ F = \varphi(w_1) F_1 + \cdots + \varphi(w_m) F_m \in \mathcal{P}(V)$.

Skup svih polinomijalnih preslikavanja $F : V \to W$ označavat ćemo sa $\mathcal{P}(V, W)$. To je očito vektorski prostor. Štoviše, $\mathcal{P}(V, W)$ je unitalni modul nad unitalnom algebrom $\mathcal{P}(V)$ u odnosu na množenje po točkama:

$$(fF)(v) = f(v) F(v), \qquad v \in V, \quad f \in \mathcal{P}(V), \quad F \in \mathcal{P}(V, W).$$

Propozicija 5.3.4. *Ako su V, W i U vektorski prostori i ako su $F \in \mathcal{P}(V, W)$ i $G \in \mathcal{P}(W, U)$, onda je $G \circ F \in \mathcal{P}(V, U)$.*

Dokaz: Pretpostavimo prvo da je $U = K$, tj. da je $G \in \mathcal{P}(W)$. Tada je G suma produkata oblika $\varphi_1 \cdots \varphi_k$, gdje su $\varphi_1, \ldots, \varphi_k \in W^*$. Za svaki takav produkt i za $v \in V$ imamo

$$[(\varphi_1 \cdots \varphi_k) \circ F](v) = (\varphi_1 \cdots \varphi_k)(F(v)) = (\varphi_1(F(v)) \cdots (\varphi_k(F(v)) =$$

$$= (\varphi_1 \circ F)(v) \cdots (\varphi_k \circ F)(v) = [(\varphi_1 \circ F) \cdots (\varphi_k \circ F)](v).$$

Nadalje, kako je F polinomijalno preslikavanje, svaka od funkcija $\varphi_j \circ F$ je polinomijalna, pa je i njihov produkt polinomijalna funkcija na V.

U općem slučaju za $F \in \mathcal{P}(V, W)$, $G \in \mathcal{P}(W, U)$ i $\varphi \in U^*$ imamo $\varphi \circ (G \circ F) = (\varphi \circ G) \circ F$. Nadalje, kako je $\varphi \circ G \in \mathcal{P}(W)$, prema prvom dijelu dokaza je $(\varphi \circ G) \circ F \in \mathcal{P}(V)$. Dakle, $\varphi \circ (G \circ F) \in \mathcal{P}(V)$ $\forall \varphi \in U^*$, a to znači da je preslikavanje $G \circ F : V \to U$ polinomijalno.

Propozicija 5.3.5. *Svako polinomijalno preslikavanje $F \in \mathcal{P}(V, W)$ je neprekidno u odnosu na toplogije Zariskog na V i W.*

Dokaz: Neka je $U \subseteq W$ Zariski otvoren podskup. Treba dokazati da je

$$F^{-1}(U) = \{v \in V;\ F(v) \in U\}$$

Zariski otvoren podskup od V. Neka je $v \in F^{-1}(U)$. Tada je $F(v) \in U$, pa zbog otvorenosti od U u W u topologiji Zariskog postoji $g \in \mathcal{P}(W)$ takva da je $F(v) \in W_g \subseteq U$. To znači da je

$$g(F(v)) \neq 0 \qquad \text{i} \qquad g(w) = 0 \quad \forall w \in W \setminus U.$$

Stavimo $f = g \circ F$. Tada je prema propoziciji 5.3.4. $f \in \mathcal{P}(V)$ i po konstrukciji je $f(v) \neq 0$, odnosno, $v \in V_f$. Nadalje, za $v' \in V \setminus F^{-1}(U)$ vrijedi $F(v') \in W \setminus U$, pa je

$$f(v') = (g \circ F)(v') = g(F(v') = 0.$$

To znači da je $v \in V_f \subseteq F^{-1}(U)$, odnosno, zbog proizvoljnosti točke $v \in F^{-1}(U)$ dokazano je da je $F^{-1}(U)$ Zariski otvoren podskup od V.

Kao i u slučaju polinomijalnih funkcija, za **polinomijalno preslikavanje** $F : V \to W$ kažemo da je **homogeno** stupnja $k \in \mathbb{Z}_+$ ako vrijedi

$$F(\lambda v) = \lambda^k F(v) \qquad \forall \lambda \in K \quad \text{i} \quad \forall v \in V.$$

Označit ćemo sa $\mathcal{P}^k(V, W)$ skup svih homogenih polinomijalnih preslikavanja sa V u W stupnja $k \in \mathbb{Z}_+$. Tada su očito $\mathcal{P}^k(V, W)$ potprostori vektorskog prostora $\mathcal{P}(V, W)$. Nadalje, vrijedi $\mathcal{P}^k(V)\mathcal{P}^\ell(V, W) \subseteq \mathcal{P}^{k+\ell}(V, W)$.

Propozicija 5.3.6. *Za vektorske prostore V, W i U vrijedi:*

(*a*) *Za $F \in \mathcal{P}^k(V, W)$ i $G \in \mathcal{P}^\ell(W, U)$ je $G \circ F \in \mathcal{P}^{k\ell}(V, U)$.*

(*b*) $\mathcal{P}^k(V, W) = \{F \in \mathcal{P}(V, W);\ \varphi \circ F \in \mathcal{P}^k(V)\ \forall \varphi \in W^*\}$.

(*c*) *$\mathcal{P}^1(V, W)$ je prostor $L(V, W)$ svih linearnih operatora sa V u W.*

(*d*)
$$\mathcal{P}(V, W) = \sum_{k \in \mathbb{Z}_+} \dot{+}\, \mathcal{P}^k(V, W).$$

Dokaz: (*a*) Ako su $F \in \mathcal{P}^k(V, W)$ i $G \in \mathcal{P}^\ell(W, U)$ onda za $\lambda \in K$ i $v \in V$ vrijedi

$$(G \circ F)(\lambda v) = G(F(\lambda v)) = G(\lambda^k F(v)) = (\lambda^k)^\ell G(F(v)) = \lambda^{k\ell}(G \circ F)(v).$$

Dakle, $G \circ F \in \mathcal{P}^{k\ell}(V, U)$.

(*b*) Prema (*a*) za svaki $\varphi \in W^* = \mathcal{P}^1(W)$ i za $F \in \mathcal{P}^k(V, W)$ vrijedi $\varphi \circ F \in \mathcal{P}^k(V)$. Obratno, pretpostavimo sada da je $\varphi \circ F \in \mathcal{P}^k(V)$ za svaki $\varphi \in W^*$. Za proizvoljne $\lambda \in K$ i $v \in V$ tada vrijedi

$$\varphi(F(\lambda v) - \lambda^k F(v)) = \varphi(F(\lambda v)) - \lambda^k \varphi(F(v)) = (\varphi \circ F)(\lambda v) - \lambda^k (\varphi \circ F)(v) = 0 \qquad \forall \varphi \in W^*.$$

Dakle,
$$F(\lambda v) - \lambda^k F(v) = 0, \qquad \text{tj.} \quad F(\lambda v) = \lambda^k F(v), \qquad \forall \lambda \in K \quad \text{i} \quad \forall v \in V.$$
To znači da je $F \in \mathcal{P}^k(V, W)$.

(c) Za $\varphi \in W^*$ i $A \in L(V, W)$ je $\varphi \circ A \in V^* \subseteq \mathcal{P}(V)$. To znači da je $A \in \mathcal{P}(V, W)$. Nadalje, $A(\lambda v) = \lambda A(v)$ za svaki $\lambda \in K$ i svaki $v \in V$. Dakle, $L(V, W) \subseteq \mathcal{P}^1(V, W)$. Neka je sada $F \in \mathcal{P}^1(V, W)$. Prema ($a$) tada je $\varphi \circ F \in \mathcal{P}^1(V) = V^*$ za svaki $\varphi \in W^*$. Stoga za proizvoljne $v, v' \in V$ i $\varphi \in W^*$ imamo

$$\varphi(F(v + v') - F(v) - F(v')) = \varphi(F(v + v')) - \varphi(F(v)) - \varphi(F(v')) =$$

$$= (\varphi \circ F)(v + v') - (\varphi \circ F)(v) - (\varphi \circ F)(v') = 0.$$

Odatle slijedi da je $F(v + v') = F(v) + F(v')$ $\forall v, v' \in V$. Dakle, preslikavanje $F : V \to W$ je aditivno, a kako je i homogeno, zaključujemo da je $F \in L(V, W)$. Time je dokazana i obrnuta inkluzija $\mathcal{P}^1(V, W) \subseteq L(V, W)$, odnosno, imamo jednakost $\mathcal{P}^1(V, W) = L(V, W)$.

(d) Neka je $F \in \mathcal{P}(V, W)$. Izaberimo bazu $\{w_1, \dots, w_m\}$ od W i neka su $F_1, \dots, F_m \in \mathcal{P}(V, W)$ takvi da vrijedi

$$F(v) = \sum_{i=1}^{m} F_i(v) w_i \qquad \forall v \in V.$$

Tada se svaka polinomijalna funkcija F_i može pisati kao suma homogenih polinomijalnih funkcija:

$$F_i = \sum_{k \in \mathbb{Z}_+} F_{ik}, \qquad F_{ik} \in \mathcal{P}^k(V) \quad \text{za} \quad k \in \mathbb{Z}_+ \quad \text{i} \quad i = 1, \dots, m.$$

Naravno, u svakoj od gornjih suma svi su članovi nula osim konačno mnogo njih. Za svaki $k \in \mathbb{Z}_+$ definiramo preslikavanje $F_{(k)} : V \to W$ sa

$$F_{(k)}(v) = \sum_{i=1}^{m} F_{ik}(v) w_i, \qquad v \in V.$$

Tada je

$$F = \sum_{k \in \mathbb{Z}_+} F_{(k)}.$$

Po propoziciji 5.3.3. sva preslikavanja $F_{(k)}$ su polinomijalna. Nadalje, kako je polinomijalna funkcija F_{ki} homogena stupnja k, imamo za $\lambda \in K$ i $v \in V$:

$$F_{(k)}(\lambda v) = \sum_{i=1}^{m} F_{ik}(\lambda v) w_i = \sum_{i=1}^{m} \lambda^k F_{ik}(v) w_i = \lambda^k F_{(k)}(v).$$

Prema tome, $F_{(k)} \in \mathcal{P}^k(V, W)$ za svaki $k \in \mathbb{Z}_+$. Time je dokazano da je $\mathcal{P}(V, W)$ suma potprostora $\mathcal{P}^k(V, W)$, $k \in \mathbb{Z}_+$. Dokažimo da je ta suma direktna. Neka su $k_1, \dots, k_p \in \mathbb{Z}_+$ međusobno različiti i neka su $F_i \in \mathcal{P}^{k_i}(V, W) \setminus \{0\}$ za $i = 1, \dots, p$. Pretpostavimo da za neke $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in K$ vrijedi

$$\lambda_1 F_1 + \cdots + \lambda_p F_p = 0.$$

Tada je za svaki $\varphi \in W^*$

$$0 = \varphi \circ (\lambda_1 F_1 + \cdots + \lambda_p F_p) = \lambda_1(\varphi \circ F_1) + \cdots \lambda_p(\varphi \circ F_p).$$

Prema tvrdnji (b) vrijedi $\varphi \circ F_i \in \mathcal{P}^{k_i}(V)$. Budući da je $\mathcal{P}(V)$ direktna suma potprostora $\mathcal{P}^k(V)$, slijedi da za svaki $i \in \{1, \dots, p\}$ vrijedi ili $\lambda_i = 0$ ili $\varphi \circ F_i = 0$. Kako su sva polinomijalna preslikavanja F_i različita od 0, za svaki $i \in \{1, \dots, p\}$ postoji $\varphi \in W^*$ takav da je $\varphi \circ F_i \neq 0$. Zaključujemo da su svi λ_i jednaki 0. Time je dokazano da je suma potprostora $\mathcal{P}^k(V, W)$ direktna.

Dakle, svako polinomijalno preslikavanje $F : V \to W$ možemo na jedinstven pisati u obliku

$$F = \sum_{k\in\mathbb{Z}_+} F_k, \qquad \text{gdje su} \quad F_k \in \mathcal{P}^k(V,W).$$

Naravno, u gornjoj je sumi samo konačno mnogo članova različito od 0. Prostor $\mathcal{P}^0(V,W)$ identificira se s prostorom W, tako da se svaki vektor $w \in W$ identificira s konstantnom funkcijom na V, koja ima tu vrijednost w. Uz tu identifikaciju očito je $F_0 = F(0)$ i taj se vektor iz W zove **konstantni član polinomijalnog preslikavanja** F.

Linearan operator $F_1 \in \mathcal{P}^1(V,W) = L(V,W)$ zovemo **diferencijal polinomijalnog preslikavanja F u točki** $0 \in V$. Općenitije, za proizvoljan vektor $v \in V$ promatramo preslikavanje $F_v : V \to W$ definirano sa

$$F_v(v') = F(v+v'), \qquad v' \in V.$$

Tada je očito $F_v \in \mathcal{P}(V,W)$. Diferencijal od F_v u točki 0 zove se **diferencijal polinomijalnog preslikavanja F u točki** v. Taj ćemo linearan operator sa V u W označavati sa D_vF; drugi je naziv za taj linearan operator **tangencijalno preslikavanje** polinomijalnog preslikavanja F u točki v. Dakle, imamo

$$F(v+v') = F(v)+(D_vF)(v')+\sum_{k\geq 2}(D_v^{(k)}F)(v'), \qquad v' \in V, \qquad \text{gdje su } D_v^{(k)}F \in \mathcal{P}^k(V,W) \text{ za } k \geq 2.$$

Neka je $F \in \mathcal{P}(V,W)$. Tada za svaku polinomijalnu funkciju $f \in \mathcal{P}(W)$ vrijedi $f \circ F \in \mathcal{P}(V)$.

Propozicija 5.3.7. *Za $F \in \mathcal{P}(V,W)$ preslikavanje $\Phi_F : \mathcal{P}(W) \to \mathcal{P}(V)$ definirano sa*

$$\Phi_F(f) = f \circ F, \qquad f \in \mathcal{P}(W),$$

je unitalni homomorfizam unitalnih algebri.

Dokaz: Jedinica 1_W (odnosno, 1_V) u algebri $\mathcal{P}(W)$ (odn., $\mathcal{P}(V)$) je konstantna funkcija 1 na V (odn. W). Dakle,

$$\Phi_F(1_W) = 1_W \circ F = 1_V.$$

Nadalje, za $\lambda, \mu \in K$ i $f, g \in \mathcal{P}(W)$ imamo za svaki $v \in V$:

$$[\Phi_F(\lambda f + \mu g)](v) = [(\lambda f + \mu g) \circ F](v) = (\lambda f + \mu g)(F(v)) =$$

$$= \lambda f(F(v)) + \mu g(F(v)) = \lambda(f \circ F)(v) + \mu(g \circ F)(v) = [\lambda\Phi_F(f) + \mu\Phi_F(g)](v).$$

Dakle, $\Phi_F(\lambda f + \mu g) = \lambda\Phi_F(f) + \mu\Phi_F(g)$, odnosno, preslikavanje $\Phi_F : \mathcal{P}(W) \to \mathcal{P}(V)$ je linearno. Napokon, za $f, g \in \mathcal{P}(W)$ i za $v \in V$ je

$$[\Phi_F(fg)](v) = [(fg) \circ F](v) = (fg)(F(v)) = f(F(v))g(F(v)) =$$

$$= (f \circ F)(v)(g \circ F)(v) = [\Phi_F(f)](v)[\Phi_F(g)](v) = [\Phi_F(f)\Phi_F(g)](v).$$

Dakle, $\Phi_F(fg) = \Phi_F(f)\Phi_F(g)$, odnosno, preslikavanje $\Phi_F : \mathcal{P}(W) \to \mathcal{P}(V)$ ima i svojstvo multiplikativnosti.

Kažemo da je $F \in \mathcal{P}(V,W)$ **dominantno polinomijalno preslikavanje** ako je pridruženi homomorfizam $\Phi_F : \mathcal{P}(W) \to \mathcal{P}(V)$ injektivan. Općenito, jezgra homomorfizma Φ_F je skup svih $f \in \mathcal{P}(W)$ takvih da je $f|F(V) \equiv 0$, a to zbog propozicije 5.3.5. znači da je f jednaka nuli svuda na Zariski zatvaraču skupa $F(V)$. Prema tome, vrijedi:

Propozicija 5.3.8. *Polinomijalno preslikavanje $F \in \mathcal{P}(V,W)$ je dominantno ako i samo ako je njegova slika $\operatorname{Im} F = F(V)$ Zariski gusta u W.*

U slučaju algebarski zatvorenog polja K dominantna polinomijalna preslikavanja imaju sljedeće važno svojstvo:

Propozicija 5.3.9. *Neka su V i W prostori nad algebarski zatvorenim poljem K i neka je $F \in \mathcal{P}(V,W)$ dominantno polinomijalno preslikavanje. Za svaki neprazan otvoren podskup U od V njegova slika $F(U)$ sadrži neprazan otvoren podskup od W.*

Dokaz: Dovoljno je dokazati da za svaku polinomijalnu funkciju $f \in \mathcal{P}(V) \setminus \{0\}$ skup $F(V_f)$ sadrži neprazan otvoren podskup od W, odnosno, da postoji polinomijalna funkcija $g \in \mathcal{P}(W)\setminus\{0\}$ takva da je $W_g \subseteq F(V_f)$. To će slijediti iz sljedećeg vrlo netrivijalnog teorema iz **komutativne algebre**:

Teorem 5.3.10. *Neka je $\mathcal{A}$ komutativna unitalna algebra nad algebarski zatvorenim poljem K, koja je integralna domena (tj. ne postoje $a, b \in \mathcal{A} \setminus \{0\}$ takvi da je $ab = 0$). Nadalje, neka je $\mathcal{B}$ unitalna podalgebra od $\mathcal{A}$ nad kojom je $\mathcal{A}$ konačno generirana. Tada za svaki $a \in \mathcal{A} \setminus \{0\}$ postoji $b \in \mathcal{B} \setminus \{0\}$ takav da se svaki unitalni homomorfizam $\varphi : \mathcal{B} \to K$ sa svojstvom $\varphi(b) \neq 0$ produljuje do unitalnog homomorfizma $\psi : \mathcal{A} \to K$ sa svojstvom $\psi(a) \neq 0$.*

Za unitalnu algebru $\mathcal{A}$, njenu unitalnu podalgebru $\mathcal{B}$ i elemente $a_1, \ldots, a_n \in \mathcal{A}$ sa $\mathcal{B}[a_1, \ldots, a_n]$ označavamo unitalnu podalgebru od $\mathcal{A}$ generiranu sa $\mathcal{B} \cup \{a_1, \ldots, a_n\}$. Tada je $\mathcal{B}[a_1, \ldots, a_n]$ slika unitalnog homomorfizma $P \mapsto P(a_1, \ldots, a_n)$ algebre $\mathcal{B}[T_1, \ldots, T_n]$ (algebre polinoma u n varijabli s koeficijentima iz $\mathcal{B}$) u algebru $\mathcal{A}$. Ako postoji $n \in \mathbb{N}$ i elementi $a_1, \ldots, a_n \in \mathcal{A}$ takvi da je $\mathcal{A} = \mathcal{B}[a_1, \ldots, a_n]$, onda kažemo da je **algebra $\mathcal{A}$ konačno generirana nad podalgebrom $\mathcal{B}$**.

Za element $a \in \mathcal{A}$ kažemo da je **algebarski nad podalgebrom** $\mathcal{B}$ ako postoji polinom $P \in \mathcal{B}[T] \setminus \{0\}$ takav da je $P(a) = 0$. To znači da epimorfizam $P \mapsto P(a)$ sa $\mathcal{B}[T]$ na $\mathcal{B}[a]$ nije injektivan, nego mu je jezgra

$$\mathcal{J}_a = \{P \in \mathcal{B}[T];\ P(a) = 0\}$$

ideal u algebri $\mathcal{B}[T]$ različit od $\{0\}$. U protivnom, tj. u slučaju da je $P \mapsto P(a)$ izomorfizam sa $\mathcal{B}[T]$ na $\mathcal{B}[a]$, kažemo da je element a **transcendentan nad algebrom** $\mathcal{B}$. Naravno, ako je $\mathcal{K}$ polje razlomaka integralne domene $\mathcal{A}$ i $\mathcal{L}$ potpolje generirano sa $\mathcal{B}$, onda je element $a \in \mathcal{A}$ algebarski (odnosno, transcendentan) nad podalgebrom $\mathcal{B}$ ako i samo je on algebarski (odnosno, transcendentan) nad poljem $\mathcal{L}$. Znamo da je skup $\mathcal{M}$ svih elemenata polja $\mathcal{K}$ algebarskih nad potpoljem $\mathcal{L}$ polje. Odatle slijedi da je skup $\mathcal{M} \cap \mathcal{A}$ svih elemenata iz $\mathcal{A}$ koji su algebarski nad podalgebrom $\mathcal{B}$ podalgebra od $\mathcal{A}$. Naravno, ta podalgebra sadrži podalgebru $\mathcal{B}$: za svaki element $b \in \mathcal{B}$ polinom $P = T - b \in \mathcal{B}[T]$ je različit od nule i vrijedi $P(b) = 0$.

Prije dokaza teorema 5.3.10. dokazat ćemo jedno svojstvo ideala u prstenu $\mathcal{B}[T]$. Ukoliko je $\mathcal{B}$ polje, znamo da je $\mathcal{B}[T]$ prsten glavnih ideala: svaki ideal $\mathcal{J}$ u prstenu $\mathcal{B}[T]$ je glavni tj. oblika

$$\mathcal{J} = \mathcal{B}[T]P = \{QP;\ Q \in \mathcal{B}[T]\} = \{Q \in \mathcal{B}[T];\ P|Q\}$$

za neki polinom $P \in \mathcal{J}$. Ako je $\mathcal{J} \neq \{0\}$, P je naravno polinom najnižeg stupnja u skupu polinoma $\mathcal{J} \setminus \{0\}$. Ako $\mathcal{B}$ nije polje nego samo integralna domena, imamo nešto slabiji rezultat:

Lema 5.3.11. *Neka je $\mathcal{B}$ integralna domena i neka je $\mathcal{J} \neq \{0\}$ ideal u prstenu $\mathcal{B}[T]$. Nadalje, neka je $P \in \mathcal{J} \setminus \{0\}$ polinom sa svojstvom*

$$\deg P = \min\{\deg Q;\ Q \in \mathcal{J} \setminus \{0\}\}$$

i neka mu je $c \in \mathcal{B}$ vodeći koeficijent (tj. koeficijent uz $T^{\deg P}$). Tada za svaki $Q \in \mathcal{J}$ postoji $k \in \mathbb{Z}_+$ takav da je polinom $c^k Q$ djeljiv s polinomom P u prstenu $\mathcal{B}[T]$.

Dokaz ćemo provesti indukcijom po deg Q. Naravno, za deg $Q <$ deg P, tvrdnja je trivijalna. Neka je deg $Q =$ deg P i neka je $a \in \mathcal{B}$ vodeći koeficijent od Q. Tada je $R = cQ - aP \in \mathcal{J}$ i vrijedi deg $R <$ deg P, pa zbog minimalnosti deg P zaključujemo da je $R = 0$. Prema tome, $cQ = aP$, što znači da je cQ djeljiv s polinomom P u prstenu $\mathcal{B}[T]$. Pretpostavimo sada da je deg $Q = m > k =$ deg P i da je lema dokazana za polinome stupnja manjeg od m. Označimo ponovo sa a vodeći koeficijent od Q. Tada je $R = cQ - aT^{m-k}P \in \mathcal{J}$ i deg $R < m$, pa po pretpostavci indukcije postoje $j \in \mathbb{Z}_+$ i $A \in \mathcal{B}[T]$ takvi da je $c^jR = AP$. Slijedi

$$c^{j+1}Q = c^jR + ac^jT^{m-k}P = AP + ac^jT^{m-k}P = \left(ac^jT^{m-k} + A\right)P,$$

dakle, polinom $c^{j+1}Q$ djeljiv je s polinomom P u prstenu $\mathcal{B}[T]$. Time je korak indukcije proveden, odnosno, lema je dokazana.

U daljnjem za unitalnu algebru $\mathcal{A}$ nad poljem K sa $Hom(\mathcal{A}, K)$ označavamo skup svih unitalnih homomorfizama sa $\mathcal{A}$ u K. Ako je $\varphi \in Hom(\mathcal{A}, K)$ i $P \in \mathcal{A}[T]$ sa P^φ označavamo polinom iz $K[T]$ dobiven primjenom homomorfizma φ na koeficijente polinoma P :

$$P = a_nT^n + a_{n-1}T^{n-1} + \cdots + a_1T + a_0 \quad \Longrightarrow \quad P^\varphi = \varphi(a_n)T^n + \varphi(a_{n-1})T^{n-1} + \cdots + \varphi(a_1)T + \varphi(a_0).$$

Naravno, $P \mapsto P^\varphi$ je unitalni homomorfizam sa $\mathcal{A}[T]$ u $K[T]$ i njegova restrikcija na $\mathcal{A}$ se podudara sa φ. Nadalje, za $a \in \mathcal{A}$ i $P \in \mathcal{A}[T]$ vrijedi $\varphi(P(a)) = P^\varphi(\varphi(a))$.

Dokaz teorema 5.3.10.: Po pretpostavci postoje $u_1, \ldots, u_n \in \mathcal{A}$ takvi da je $\mathcal{A} = \mathcal{B}[u_1, \ldots, u_n]$. Dokaz ćemo provesti indukcijom po n.

Pretpostavimo da je $n = 1$, tj. da je $\mathcal{A} = \mathcal{B}[u]$ za neki $u \in \mathcal{A}$. Razmotrimo najprije slučaj kad je element u transcendentan nad $\mathcal{B}$, tj. kad je $P \mapsto P(u)$ izomorfizam sa $\mathcal{B}[T]$ na $\mathcal{A}$. Neka je $a \in \mathcal{A} \setminus \{0\}$ i neka je $P \in \mathcal{B}[T]$ takav da je $a = P(u)$. Označimo sa b vodeći koeficijent polinoma P. Polinom $P^\varphi \in K[T]$ ima u polju K najviše deg P nultočaka, pa postoji skalar $\lambda \in K$ takav da je $P^\varphi(\lambda) \neq 0$. Definiramo sada preslikavanje $\psi : \mathcal{A} \to K$ sa

$$\psi(Q(u)) = Q^\varphi(\lambda), \qquad Q \in \mathcal{B}[T].$$

Kako je evaluaciji u točki λ unitalni homomorfizam sa $K[T]$ u K, a $Q \mapsto Q^\varphi$ je unitalni homomorfizam sa $\mathcal{B}[T] \simeq \mathcal{A}$ u $K[T]$, vidimo da je $\psi \in Hom(\mathcal{A}, K)$. Za $c \in \mathcal{B}$ vrijedi $\psi(c) = \varphi(c)$, dakle, $\psi|\mathcal{B} = \varphi$. Nadalje, $\psi(a) = \psi(P(u)) = P^\varphi(\lambda) \neq 0$. Time je tvrdnja dokazana u slučaju trenscendentnosti elementa u nad podalgebrom $\mathcal{B}$.

Pretpostavimo sada da je element u algebarski nad $\mathcal{B}$, dakle, da je ideal

$$\mathcal{J}_u = \{P \in \mathcal{B}[T];\ P(u) = 0\}$$

u algebri $\mathcal{B}[T]$ različit od $\{0\}$. Tada je i element a algebarski nad $\mathcal{B}$, tj. i ideal

$$\mathcal{J}_a = \{P \in \mathcal{B}[T];\ P(a) = 0\}$$

u algebri $\mathcal{B}[T]$ je različit od nule. Neka je $P \in \mathcal{J}_u \setminus \{0\}$ polinom najmanjeg stupnja u $\mathcal{J}_u \setminus \{0\}$ i neka je $Q \in \mathcal{J}_a \setminus \{0\}$ polinom najmanjeg stupnja u $\mathcal{J}_a \setminus \{0\}$. Označimo sa c vodeći koeficijent polinoma P i neka je $d = Q(0)$. Dokazatćemo da element $b = cd$ ima traženo svojstvo.

Neka je $\varphi \in Hom(\mathcal{B}, K)$ takav da je $\varphi(b) \neq 0$. Tada je naravno $\varphi(c) \neq 0$ i $\varphi(d) \neq 0$. Pretpostavimo sada da je $\psi \in Hom(\mathcal{A}, K)$ bilo koje proširenje homomorfizma φ. Tada iz $Q(a) = 0$ slijedi $0 = \psi(Q(a)) = Q^\varphi(\psi(a))$. Kad bi bilo $\psi(a) = 0$, imali bismo $0 = Q^\varphi(0) = \varphi(Q(0)) = \varphi(d)$, a to nije tako. Prema tome, za svako proširenje $\psi \in Hom(\mathcal{A}, K)$ homomorfizma φ vrijedi $\psi(a) \neq 0$.

Dakle, treba dokazati da homomorfizam φ ima bilo kakvo proširenje $\psi \in Hom(\mathcal{A}, K)$. Neka je $\lambda_0 \in K$ nultočka polinoma $P^\varphi \in K[T]$. Definiramo $\Phi \in Hom(\mathcal{B}[T], K)$ kao kompoziciju homomorfizma $R \mapsto R^\varphi$ sa $\mathcal{B}[T]$ u $K[T]$ i evaluacije u točki λ_0 :

$$\Phi(R) = R^\varphi(\lambda_0), \qquad R \in \mathcal{B}[T].$$

Ideal $\mathcal{J}_u$ u prstenu $\mathcal{B}[T]$ je jezgra epimorfizma $R \mapsto R(u)$ sa $\mathcal{B}[T]$ na $\mathcal{A} = \mathcal{B}[u]$. Dokazat ćemo sada da je $\mathcal{J}_u \subseteq \operatorname{Ker}\Phi$. Neka je $R \in \mathcal{J}_u$. Po lemi 5.3.11. postoji $k \in \mathbb{Z}_+$ takav da je polinom $c^k R$ djeljiv s polinomom P u prstenu $\mathcal{B}[T]$, tj. postoji $S \in \mathcal{B}[T]$ takav da je $c^k R = PS$. Sada imamo

$$\varphi(c)^k R^\varphi(\lambda_0) = \left(c^k R\right)^\varphi(\lambda_0) = (PS)^\varphi(\lambda_0) = (P^\varphi S^\varphi)(\lambda_0) = P^\varphi(\lambda_0) S^\varphi(\lambda_0) = 0,$$

jer je λ_0 nultočka polinoma P^φ. Kako je $\varphi(c) \neq 0$, zaključujemo da je $0 = R^\varphi(\lambda_0) = \Phi(R)$, dakle, $R \in \operatorname{Ker}\Phi$.

Kako je $\mathcal{J}_u \subseteq \operatorname{Ker}\Phi$, prijelazom na kvocijent Φ definira homomorfizam sa $\mathcal{B}[T]/\mathcal{J}_u \simeq \mathcal{A}$ u K. Dakle, postoji $\psi \in Hom(\mathcal{A}, K)$ takav da je

$$\psi(R(u)) = R^\varphi(\lambda_0), \qquad R \in \mathcal{B}[T].$$

Za proizvoljan $x \in \mathcal{B}$ neka je $R \in \mathcal{B}[T]$ konstantan polinom x. Tada je

$$\psi(x) = \psi(R(u)) = R^\varphi(\lambda_0) = \varphi(x).$$

Dakle, $\psi(x) = \varphi(x)$ za svaki $x \in \mathcal{B}$, odnosno, homomorfizam $\psi : \mathcal{A} \to K$ je proširenje homomorfizma $\varphi : \mathcal{B} \to K$.

Time je teorem dokazan za $n = 1$, odnosno, dokazana je baza indukcije. Prijeđimo sada na korak indukcije. Neka je $n \geq 2$, pretpostavimo da je teorem dokazan za algebre generirane nad podalgebrom $\mathcal{B}$ s manje od n elemenata i neka je $\mathcal{A} = \mathcal{B}[u_1, \ldots, u_n]$. Stavimo $\mathcal{C} = \mathcal{B}[u_1, \ldots, u_{n-1}]$. Tada je $\mathcal{A} = \mathcal{C}[u_n]$, pa prema prvom dijelu dokaza za dani element $a \in \mathcal{A} \setminus \{0\}$ postoji $c \in \mathcal{C}$ takav da se svaki $\chi \in Hom(\mathcal{C}, K)$ takav da je $\chi(c) \neq 0$ proširuje do $\psi \in Hom(\mathcal{A}, K)$ takvog da je $\psi(a) \neq 0$. Nadalje, po pretpostavci indukcije postoji $b \in \mathcal{B} \setminus \{0\}$ takav da se svaki $\varphi \in Hom(\mathcal{B}, K)$ takav da je $\varphi(b) \neq 0$ proširuje do $\chi \in Hom(\mathcal{C}, K)$ takvog da je $\chi(c) \neq 0$, a taj se opet proširuje do $\psi \in Hom(\mathcal{A}, K)$ takvog da je $\psi(a) \neq 0$. Time je i korak indukcije proveden.

Za dokaz propozicije 5.3.9. treba nam još sljedeća jednostavna činjenica:

Teorem 5.3.12. *Neka je V konačnodimenzionalan vektorski prostor nad proizvoljnim poljem K. Za $v \in V$ definiramo $\varphi_v \in Hom(\mathcal{P}(V), K)$ kao evaluaciju u točki v :*

$$\varphi_v(P) = P(v), \qquad P \in \mathcal{P}(V).$$

Tada je

$$Hom(\mathcal{P}(V), K) = \{\varphi_v;\ v \in V\}.$$

Štoviše, $v \mapsto \varphi_v$ je bijekcija sa V na $Hom(\mathcal{P}(V), K)$.

Dokaz: Neka je $\varphi \in Hom(\mathcal{P}(V), K)$ proizvoljan. Tada je φ linearan funkcional na prostoru $\mathcal{P}(V)$ različit od 0, pa je njegova jezgra $\operatorname{Ker}\varphi$ potprostor od $\mathcal{P}(V)$ kodimenzije 1. Pretpostavimo da je $\varphi \neq \varphi_0$, tj. da φ nije homomorfizam evaluacije $P \mapsto P(0)$. Tada $V^* \not\subseteq \operatorname{Ker}\varphi$, pa slijedi da je $(\operatorname{Ker}\varphi) \cap V^*$ potprostor od V^* kodimenzije 1. No tada postoji baza $\{f_1, \ldots, f_n\}$ od V^* takva da je

$$\varphi(f_1) = 1 \qquad \text{i} \qquad \varphi(f_j) = 0 \quad \text{za} \quad j = 2, \ldots, n.$$

Neka je $\{e_1, \ldots, e_n\}$ baza od V dualna bazi $\{f_1, \ldots, f_n\}$, tj. $f_i(e_j) = \delta_{ij}$. Tada imamo

$$\varphi_{e_1}(f_1) = f_1(e_1) = 1 \qquad \text{i} \qquad \varphi_{e_1}(f_j) = f_j(e_1) = 0 \quad \text{za} \quad j = 2, \ldots, n.$$

To znači da se unitalni homomorfizmi φ i φ_{e_1} podudaraju na skupu $\{f_1, \ldots, f_n\}$. Međutim, taj skup generira unitalnu algebru $\mathcal{P}(V)$, što znači da je $\varphi = \varphi_{e_1}$. Time je dokazano da je $v \mapsto \varphi_v$ surjekcija sa V na $Hom(\mathcal{P}(V), K)$. No to je i injekcija: ako su $v \neq w$ vektori iz V, onda postoji $f \in V^* \subseteq \mathcal{P}(V)$ takav da je $f(v) \neq f(w)$; to znači da je $\varphi_v(f) \neq \varphi_w(f)$, dakle, $\varphi_v \neq \varphi_w$.

Prijeđimo sada na **dokaz propozicije 5.3.9.** Primijetimo da je algebra $\mathcal{A} = \mathcal{P}(V)$ integralna domena koja je konačno generirana nad K : doista, ona je kao unitalna algebra generirana s bilo kojom bazom dualnog prostora V. Prema tome, ona je konačno generirana nad svakom svojom unitalnom podalgebrom. Slika $\mathcal{B} = \operatorname{Im} \Phi_F$ homomorfizma Φ_F je unitalna podalgebra od $\mathcal{A}$ i po pretpostavci je $\Phi_F : \mathcal{P}(W) \to \mathcal{B}$ izomorfizam unitalnih algebri. Neka je $P \in \mathcal{P}(V) \setminus \{0\} = \mathcal{A} \setminus \{0\}$. Prema teoremu 5.3.10. tada postoji $b \in \mathcal{B} \setminus \{0\} = \Phi_F(\mathcal{P}(W) \setminus \{0\})$ takav da vrijedi:

$$\forall \varphi \in Hom(\mathcal{B}, K) \quad \text{t.d.} \quad \varphi(b) \neq 0 \quad \exists \psi \in Hom(\mathcal{B}, K) \quad \text{t.d.} \quad \psi|\mathcal{B} = \varphi \quad \text{i} \quad \psi(P) \neq 0. \tag{5.14}$$

Neka je $Q \in \mathcal{P}(W)$ jedinstven element takav da je $b = \Phi_F(Q) = Q \circ F$. Sada (5.14) postaje:

$$\forall \varphi \in Hom(\mathcal{B}, K) \ \text{t.d.} \ (\varphi \circ \Phi_F)(Q) \neq 0 \ \exists \psi \in Hom(\mathcal{A}, K) \ \text{t.d.} \ \psi|\mathcal{B} = \varphi \ \text{i} \ \psi(P) \neq 0. \tag{5.15}$$

Φ_F je izomorfizam unitalnih algebri sa $\mathcal{P}(W)$ na $\mathcal{B}$, pa po teoremu 5.3.12. vrijedi

$$\{\varphi \circ \Phi_F;\ \varphi \in Hom(\mathcal{B}, K)\} = Hom(\mathcal{P}(W), K) = \{\varphi_w;\ w \in W\}.$$

Po istom teoremu je i

$$Hom(\mathcal{A}, K) = Hom(\mathcal{P}(V), K) = \{\varphi_v;\ v \in V\}.$$

Prema tome, (5.15) se može ovako zapisati:

$$\forall w \in W \quad \text{t.d.} \quad \varphi_w(Q) \neq 0 \quad \exists v \in V \quad \text{t.d.} \quad \varphi_v \circ \Phi_F = \varphi_w \quad \text{i} \quad \varphi_v(P) \neq 0. \tag{5.16}$$

Kako je $\varphi_v(P) = P(v)$ i $\varphi_w(Q) = Q(w)$, (5.16) poprima oblik

$$\forall w \in W \quad \text{t.d.} \quad Q(w) \neq 0 \quad \exists v \in V \quad \text{t.d.} \quad \varphi_v \circ \Phi_F = \varphi_w \quad \text{i} \quad P(v) \neq 0. \tag{5.17}$$

Pogledajmo sada što znači jednakost $\varphi_v \circ \Phi_F = \varphi_w$. Budući da W^* generira cijelu unitalnu algebru $\mathcal{P}(W)$ imamo sljedeći niz ekvivalencija

$$\varphi_v \circ \Phi_F = \varphi_w \iff (\varphi_v \circ \Phi_F)(h) = \varphi_w(h) \ \forall h \in W^* \iff \varphi_v(\Phi_F(h)) = \varphi_w(h) \ \forall h \in W^* \iff$$

$$\iff \varphi_v(h \circ F) = \varphi_w(h) \ \forall h \in W^* \iff h(F(v)) = h(w) \ \forall h \in W^* \iff F(v) = w.$$

Dakle, (5.17) postaje

$$\forall w \in W \quad \text{t.d.} \quad Q(w) \neq 0 \quad \exists v \in V \quad \text{t.d} \quad F(v) = w \quad \text{i} \quad P(v) \neq 0,$$

odnosno, uz prije uvedene oznake

$$W_Q = \{w \in W;\ Q(w) \neq 0\} \qquad \text{i} \qquad V_P = \{v \in V;\ P(v) \neq 0\}$$

dobivamo

$$\forall w \in W_Q \quad \exists v \in V_P \quad \text{t.d.} \quad F(v) = w.$$

No to upravo znači da je $W_Q \subseteq F(V_P)$, a to je i trebalo dokazati.

Propozicija 5.3.13. *Ako za $F \in \mathcal{P}(V, W)$ postoji $v \in V$ takav da je diferencijal $D_v F$ surjekcija sa V na W, onda je polinomijalno preslikavanje F dominantno.*

Dokaz: Pomoću translacija u prostoru V za vektor $-v$ i u prostoru W za vektor $-F(v)$ možemo pretpostaviti da je $v = 0$ i $F(v) = 0$. Dakle, $F : V \to W$ je polinomijalno preslikavanje takvo da je $F(0) = 0$ i da mu je diferencijal u nuli $D_0 F$ surjekcija sa V na W. Dakle, možemo pisati

$$F = D_0 F + \sum_{j \geq 2} F_k \quad \text{za neke} \quad F_j \in \mathcal{P}^j(V, W).$$

Pretpostavimo da preslikavanje F nije dominantno. To znači da postoji $g \in \mathcal{P}(W) \setminus \{0\}$ takva da je $g \circ F = 0$. Tada je $g(0) = g(F(0)) = (g \circ F)(0) = 0$, pa za neki $m \in \mathbb{N}$ imamo

$$g = \sum_{k \geq m} g_k \quad \text{za neke} \quad g_k \in \mathcal{P}^k(W) \quad \text{i} \quad g_m \neq 0.$$

Sada je

$$0 = g \circ F = \left(\sum_{k \geq m} g_k \right) \circ \left(D_0 F + \sum_{j \geq 2} F_j \right) = g_m \circ D_0 F + \sum_{k > m} g_k \circ D_0 F + \sum_{k \geq m} \sum_{j \geq 2} g_k \circ F_j.$$

Prema tvrdnji (a) propozicije 5.3.6. imamo $g_m \circ D_0 F \in \mathcal{P}^m(V)$, $g_k \circ D_0 F \in \mathcal{P}^k(V)$ za $k > m$ i $g_k \circ F_j \in \mathcal{P}^{kj}(V)$ za $k \geq m$ i $j \geq 2$. Prema tome,

$$0 = g_m \circ D_0 F + h \quad \text{gdje je} \quad h \in \sum_{\ell > m} \dot{+} \mathcal{P}^\ell(V).$$

Odatle slijedi $g_m \circ D_0 F = 0$, a kako je po pretpostavci $D_0 F : V \to W$ surjekcija, zaključujemo da je $g_m = 0$. No to je suprotno pretpostavci. Ova kontradikcija dokazuje propoziciju.

5.4 Konjugiranost Cartanovih podalgebri

U ovom odjeljku promatramo isključivo Liejeve algebre i vektorske prostore nad algebarski zatvorenim poljem K karakteristike 0.

Za Liejevu algebru $\mathfrak{g}$ sa $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ označavamo grupu automorfizama od $\mathfrak{g}$, tj. podgrupu od $GL(\mathfrak{g})$ svih izomorfizama vektorskog prostora $\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ takvih da vrijedi $\varphi([x, y]) = [\varphi(x), \varphi(y)]\ \forall x, y \in \mathfrak{g}$.

Neka je sada V konačnodimenzionalan vektorski prostor i $A : V \to V$ nilpotentan linearan operator. Tada definiramo operator $\mathrm{e}^A : V \to V$ ovako

$$\mathrm{e}^A = \sum_{k\in\mathbb{Z}_+} \frac{1}{k!} A^k.$$

Kako je A nilpotentan, gornja je suma konačna i definicija operatora e^A je smislena.

Zadatak 5.4.1. *Neka su $A, B : V \to V$ nilpotentni linearni operatori koji komutiraju, tj. $AB = BA$. Dokažite da je tada operator $A + B$ nilpotentan i da vrijedi*

$$\mathrm{e}^A \mathrm{e}^B = \mathrm{e}^{A+B}.$$

Uputa: Uočite da za komutirajuće operatore A i B vrijedi binomni poučak

$$(A + B)^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} A^j B^{k-j},$$

i odatle zaključite da je $A + B$ nilpotentan. Zatim u izračunavanju e^{A+B} iskoristite svojstva binomnih koeficijenata.

Zadatak 5.4.2. *Dokažite da je za svaki nilpotentan operator $A : V \to V$ operator e^A izomorfizam V na V, tj. da je $\mathrm{e}^A \in GL(V)$.*

Uputa: Iskoristite prethodni zadatak za $B = -A$.

Zadatak 5.4.3. *Ako je x ad−nilpotetan element Liejeve algebre $\mathfrak{g}$, dokažite da je $\mathrm{e}^{\mathrm{ad}\, x} \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$.*

Uputa: Dokažite indukcijom po k da za svaku derivaciju D Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ vrijedi Leibnitzova formula

$$D^k[y, z] = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} [D^j y, D^{k-j} z], \qquad k \in \mathbb{Z}_+, \quad y, z \in \mathfrak{g}.$$

To možete dobiti i kao specijalan slučaj formule u zadatku 3.3.1. Sada to primijenite na derivaciju $D = \mathrm{ad}\, x$ da pokažete da vrijedi

$$\mathrm{e}^{\mathrm{ad}\, x}[y, z] = \left[\mathrm{e}^{\mathrm{ad}\, x} y, \mathrm{e}^{\mathrm{ad}\, x} z\right], \qquad y, z \in \mathfrak{g}.$$

Podgrupa od $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ generirana skupom $\{\mathrm{e}^{\mathrm{ad}\, x};\ x \in \mathfrak{g}\ ad - \text{nilpotentan}\}$ označava se sa $Int(\mathfrak{g})$ i njeni se elementi zovu **unutarnji automorfizmi** od $\mathfrak{g}$.

Uočit ćemo sada još jednu normalnu podgrupu od $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ sadržanu u $Int(\mathfrak{g})$. Neka je $\mathfrak{h}$ Cartanova podalgebra Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ i $R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ skup svih korijena od $\mathfrak{g}$ u odnosu na $\mathfrak{h}$. Imamo tada korijenski rastav

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \dotplus \sum_{\lambda\in R} \dotplus\, \mathfrak{g}_{(\lambda)}(\mathfrak{h}).$$

Za $\lambda \in R$ i $x \in \mathfrak{g}_{(\lambda)}(\mathfrak{h})$ operator $\operatorname{ad} x$ je nilpotentan. Označit ćemo sa $\mathcal{E}(\mathfrak{h})$ podgrupu od $Int(\mathfrak{g})$ generiranu sa

$$\left\{ \mathrm{e}^{\operatorname{ad} x};\ x \in \mathfrak{g}_{(\lambda)}(\mathfrak{h}),\ \lambda \in R \right\}.$$

Ako je $\varphi \in \operatorname{Aut}(\mathfrak{g})$, očito vrijedi $\varphi \mathcal{E}(\mathfrak{h}) \varphi^{-1} = \mathcal{E}(\varphi(\mathfrak{h}))$.

Lema 5.4.1. (*a*) *Skup $\mathfrak{h}' = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}'$ je Zariski otvoren podskup od $\mathfrak{h}$ gust u $\mathfrak{h}$ u topologiji Zariskog. Nadalje,*

$$\mathfrak{h}' = \{x \in \mathfrak{h};\ \mathfrak{g}_{(0)}(\operatorname{ad} x) = \mathfrak{g}_{(0)}(\mathfrak{h})\} = \{x \in \mathfrak{h};\ \lambda(x) \neq 0\ \forall \lambda \in R\}.$$

(*b*) *Neka je $R = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_r\}$ gdje su $\lambda_i \neq \lambda_j$ za $i \neq j$ i neka je preslikavanje*

$$F : \mathfrak{h} \times \mathfrak{g}_{(\lambda_1)}(\mathfrak{h}) \times \cdots \times \mathfrak{g}_{(\lambda_r)}(\mathfrak{h}) \to \mathfrak{g}$$

zadano sa

$$F(h, x_1, \ldots, x_r) = \mathrm{e}^{\operatorname{ad} x_1} \cdots \mathrm{e}^{\operatorname{ad} x_r} h.$$

Preslikavanje F je dominantno polinomijalno preslikavanje.

Dokaz: Tvrdnja (*a*) je očigledna.

Ako je $n = \dim \mathfrak{g}$, za svaki nilpotentan linearan operator $A : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ je $A^n = 0$. Prema tome, za svaki $x_j \in \mathfrak{g}_{(\lambda_j)}(\mathfrak{h})$ je

$$\mathrm{e}^{\operatorname{ad} x_j} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} (\operatorname{ad} x_j)^k.$$

dakle to je polinom u operatoru $\operatorname{ad} x_j$. Odatle naravno slijedi da je F polinomijalno preslikavanje.

Neka je sada $h_0 \in \mathfrak{h}'$ i neka je DF diferencijal preslikavanja F u točki $(h_0, 0, \ldots, 0)$. Za $h \in \mathfrak{h}$ imamo

$$F(h_0 + h, 0, \ldots, 0) = h_0 + h \qquad \Longrightarrow \qquad (DF)(h, 0, \ldots, 0) = h.$$

Time je dokazano da je $\mathfrak{h} \subseteq \operatorname{Im} DF$. Nadalje, za $x \in \mathfrak{g}_{(\lambda_1)}(\mathfrak{h})$ imamo

$$F(h_0, x, 0, \ldots, 0) = \mathrm{e}^{\operatorname{ad} x} h_0 = h_0 + (\operatorname{ad} x) h_0 + \frac{1}{2!} (\operatorname{ad} x)^2 h_0 + \cdots + \frac{1}{(n-1)!} (\operatorname{ad} x)^{n-1} h_0.$$

Odatle je

$$(DF)(0, x, 0, \ldots, 0) = (\operatorname{ad} x) h_0 = -(\operatorname{ad} h_0) x.$$

Kako je $\lambda_1(h_0) \neq 0$, vrijedi $(\operatorname{ad} h_0) \mathfrak{g}_{(\lambda_1)}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{g}_{(\lambda_1)}(\mathfrak{h})$, pa slijedi da je $\mathfrak{g}_{(\lambda_1)}(\mathfrak{h}) \subseteq \operatorname{Im} DF$. Analogno vrijedi $\mathfrak{g}_{(\lambda_i)}(\mathfrak{h}) \subseteq \operatorname{Im} DF$ za svaki i, pa zbog korijenskog rastava zaključujemo da je operator DF surjektivan. Prema propoziciji 5.3.13. F je dominantno polinomijalno preslikavanje.

Propozicija 5.4.2. *Neka su $\mathfrak{h}_1$ i $\mathfrak{h}_2$ Cartanove podalgebre od $\mathfrak{g}$. Tada postoje $\varphi_1 \in \mathcal{E}(\mathfrak{h}_1)$ i $\varphi_2 \in \mathcal{E}(\mathfrak{h}_2)$ takvi da je $\varphi_1(\mathfrak{h}_1) = \varphi_2(\mathfrak{h}_2)$.*

Dokaz: Prema lemi 5.4.1. i propoziciji 5.3.9. skupovi $\mathcal{E}(\mathfrak{h}_1)\mathfrak{h}_1'$ i $\mathcal{E}(\mathfrak{h}_2)\mathfrak{h}_2'$ sadrže Zariski otvorene Zariski guste podskupove od $\mathfrak{g}$. Stoga je $\mathcal{E}(\mathfrak{h}_1)\mathfrak{h}_1' \cap \mathcal{E}(\mathfrak{h}_2)\mathfrak{h}_2' \neq \emptyset$. To znači da postoje $\varphi_1 \in \mathcal{E}(\mathfrak{h}_1)$, $\varphi_2 \in \mathcal{E}(\mathfrak{h}_2)$, $h_1 \in \mathfrak{h}_1'$ i $h_2 \in \mathfrak{h}_2'$ takvi da je $\varphi_1(h_1) = \varphi_2(h_2)$. Tada je za $i = 1, 2$:

$$\varphi_i(\mathfrak{h}_i) = \varphi_i(\mathfrak{g}_{(0)}(\mathfrak{h}_i)) = \varphi_i(\mathfrak{g}_{(0)}(\operatorname{ad} h_i)) = \mathfrak{g}_{(0)}(\varphi_i (\operatorname{ad} h_i) \varphi_i^{-1}) = \mathfrak{g}_{(0)}(\operatorname{ad} \varphi_i(h_i))$$

pa slijedi $\varphi_1(\mathfrak{h}_1) = \varphi_2(\mathfrak{h}_2)$.

Korolar 5.4.3. *Za bilo koje Cartanove podalgebre $\mathfrak{h}_1$ i $\mathfrak{h}_2$ od $\mathfrak{g}$ je $\mathcal{E}(\mathfrak{h}_1) = \mathcal{E}(\mathfrak{h}_2)$.*

Dokaz: Izaberimo φ_1 i φ_2 kao u propoziciji 5.4.2. Tada je

$$\mathcal{E}(\mathfrak{h}_1) = \varphi_1\mathcal{E}(\mathfrak{h}_1)\varphi_1^{-1} = \mathcal{E}(\varphi_1(\mathfrak{h}_1)) = \mathcal{E}(\varphi_2(\mathfrak{h}_2)) = \varphi_2\mathcal{E}(\mathfrak{h}_2)\varphi_2^{-1} = \mathcal{E}(\mathfrak{h}_2).$$

Zbog ovog korolara umjesto $\mathcal{E}(\mathfrak{h})$ pisat ćemo samo $\mathcal{E}$.

Teorem 5.4.4. *$\mathcal{E}$ je normalna podgrupa od* $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ *koja djeluje tranzitivno na skupu svih Cartanovih podalgebri od $\mathfrak{g}$. Drugim riječima, za Cartanove podalgebre $\mathfrak{h}_1$ i $\mathfrak{h}_2$ postoji $\varphi \in \mathcal{E}$ takav da je $\mathfrak{h}_2 = \varphi(\mathfrak{h}_1)$.*

Dokaz: Neka je $\mathfrak{h}$ Cartanova podalgebra od $\mathfrak{g}$ i $\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$. Tada je i $\varphi(\mathfrak{h})$ Cartanova podalgebra od $\mathfrak{g}$, pa imamo

$$\varphi\mathcal{E}\varphi^{-1} = \varphi\mathcal{E}(\mathfrak{h})\varphi^{-1} = \mathcal{E}(\varphi(\mathfrak{h})) = \mathcal{E}.$$

To pokazuje da je $\mathcal{E}$ normalna podgrupa od $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$.

Neka su $\mathfrak{h}_1$ i $\mathfrak{h}_2$ Cartanove podalgebre od $\mathfrak{g}$. Prema propoziciji 5.4.2. postoje $\varphi_1 \in \mathcal{E}(\mathfrak{h}_1) = \mathcal{E}$ i $\varphi_2 \in \mathcal{E}(\mathfrak{h}_2) = \mathcal{E}$ takvi da je $\varphi_1(\mathfrak{h}_1) = \varphi_2(\mathfrak{h}_2)$. Tada je $\varphi = \varphi_2^{-1}\varphi_1 \in \mathcal{E}$ i vrijedi $\mathfrak{h}_2 = \varphi(\mathfrak{h}_1)$.

Može se dokazati da za proizvoljno polje (karakteristike 0) u $\mathfrak{g}$ postoji samo konačno mnogo klasa $Int(\mathfrak{g})-$konjugiranosti Cartanovih podalgebri.

Poglavlje 6

KOMPLEKSNE POLUPROSTE LIEJEVE ALGEBRE

U ovom poglavlju $\mathfrak{g}$ je poluprosta Liejeva algebra nad poljem $\mathbb{C}$ kompleksnih brojeva. U stvari, sve se tvrdnje ovog poglavlja mogu na gotovo isti način dokazati i za proizvoljno algebarski zatvoreno polje K karakteristike 0, ali nešto je malo jednostavnije ako se ograničimo na $K = \mathbb{C}$.

6.1 Cartanove podalgebre

Teorem 6.1.1. *Liejeva podalgebra $\mathfrak{h}$ od $\mathfrak{g}$ je Cartanova podalgebra ako i samo ako su ispunjena sljedeća dva uvjeta*

(*a*) *$\mathfrak{h}$ je maksimalna komutativna podalgebra od $\mathfrak{g}$.*

(*b*) *Svaki element $h \in \mathfrak{h}$ je poluprost.*

Za bilo koju Cartanovu podalgebru $\mathfrak{h}$ od $\mathfrak{g}$ restrikcija Killingove forme $B_{\mathfrak{g}}|\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}$ je nedegenerirana.

Dokaz: Neka je $\mathfrak{h}$ Cartanova podalgebra od $\mathfrak{g}$ i neka je $x \in \mathfrak{g}' \cap \mathfrak{h}$. Takav x postoji po tvrdnji (c) teorema 5.2.5. a po tvrdnji (b) istog teorema tada je

$$\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_{(0)}(\operatorname{ad} x) = \{h \in \mathfrak{g};\ \exists k \in \mathbb{N}\ (\operatorname{ad} x)^k h = 0\}.$$

Neka je x_s poluprosti dio elementa x. Tada je $(\operatorname{ad} x)x_s = [x, x_s] = 0$, dakle, $x_s \in \mathfrak{h}$. Nadalje, operatori $\operatorname{ad} x$ i $\operatorname{ad} x_s$ imaju isti svojstveni polinom, pa slijedi da je element x_s regularan. No tada je $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_{(0)}(\operatorname{ad} x_s)$, a kako je $\operatorname{ad} x_s$ poluprost, njegov korijenski potprostor $\mathfrak{g}_{(0)}(\operatorname{ad} x_s)$ jednak je njegovom svojstvenom potprostoru $\mathfrak{g}_0(\operatorname{ad} x_s)$, tj.

$$\mathfrak{h} = \{y \in \mathfrak{g};\ (\operatorname{ad} x_s)y = 0\} = \{y \in \mathfrak{g};\ [x_s, y] = 0\} = Z_{\mathfrak{g}}(x_s).$$

Sada je prema Fittingovoj dekompoziciji u odnosu na operator $\operatorname{ad} x_s$

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \dot{+} \mathfrak{g}_*(\operatorname{ad} x_s).$$

a kako je operator $\operatorname{ad} x_s$ poluprost, vrijedi

$$\mathfrak{g}_*(\operatorname{ad} x_s) = \operatorname{Im}(\operatorname{ad} x_s) = [x_s, \mathfrak{g}].$$

Dakle, vrijedi

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \dotplus [x_s, \mathfrak{g}]. \tag{6.1}$$

Sada za $h \in \mathfrak{h}$ i $y \in \mathfrak{g}$ imamo po tvrdnji (c) propozicije 4.3.2.

$$B_{\mathfrak{g}}(h, [x_s, y]) = B_{\mathfrak{g}}([h, x_s], y) = 0.$$

To pokazuje da je $B_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}, [x_s, \mathfrak{g}]) = \{0\}$. Kako je forma $B_{\mathfrak{g}}$ nedegenerirana, odatle i iz (6.1) slijedi da je restrikcija $B_{\mathfrak{g}}|\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}$ nedegenerirana.

Liejeva algebra $\mathfrak{h}$ je nilpotentna, dakle, rješiva. Prema korolaru 4.2.5. postoji baza u $\mathfrak{g}$ u odnosu na koju svi operatori $\operatorname{ad} h$, $h \in \mathfrak{h}$, imaju gornje trokutaste matrice. Pretpostavimo sada da je neki $x \in \mathfrak{h}$ nilpotentan. Onda $\operatorname{ad} x$ u toj bazi ima striktno gornje trokutastu matricu pa za svaki $h \in \mathfrak{h}$ produkt $(\operatorname{ad} x)(\operatorname{ad} h)$ ima striktno gornje trokutastu matricu. No tada mu je trag jednak nuli, tj.

$$B_{\mathfrak{g}}(x, h) = \operatorname{Tr}(\operatorname{ad} x)(\operatorname{ad} h) = 0 \qquad \forall h \in \mathfrak{h}.$$

Kako je forma $B_{\mathfrak{g}}|\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}$ nedegenerirana, slijedi $x = 0$. To pokazuje da u $\mathfrak{h}$ nema nilpotentnih elemenata različitih od 0. No kako za $x \in \mathfrak{h}$ vrijedi $x_s \in \mathfrak{h}$, to je i $x_n = x - x_s \in \mathfrak{h}$, dakle, $x_n = 0$. To pokazuje da su svi elementi Cartanove podalgebre $\mathfrak{h}$ poluprosti. Time je dokazano da svaka Cartanova podalgebra $\mathfrak{h}$ ima svojstvo (b).

Dokažimo sada da je Liejeva algebra $\mathfrak{h}$ komutativna. Neka je $x \in \mathfrak{h}$ proizvoljan. Kako je operator $\operatorname{ad} x$ poluprost, njegova restrikcija $(\operatorname{ad} x)|\mathfrak{h} = ad_{\mathfrak{h}}\, x$ također je poluprost, dakle, dijagonalizabilan operator. Treba dokazati da je $ad_{\mathfrak{h}}\, x = 0$, a to će slijediti ako dokažemo da operator $ad_{\mathfrak{h}}\, x$ nema svojstvenih vrijednosti različitih od 0. Pretpostavimo suprotno da postoji $0 \neq \lambda \in Sp(ad_{\mathfrak{h}}\, x)$ i neka je $y \in \mathfrak{h} \setminus \{0\}$ pripadni svojstveni vektor:

$$(ad_{\mathfrak{h}}\, x)y = [x, y] = \lambda y.$$

No tada je

$$(ad_{\mathfrak{h}}\, y)x = [y, x] = -\lambda y \neq 0.$$

S druge strane, operator $ad_{\mathfrak{h}}\, y$ je dijagonalizabilan, pa se x može napisati kao suma njegovih svojstvenih vektora. Kako je $(ad_{\mathfrak{h}}\, y)x \neq 0$, među tim svojstvenim vektorima postoje neki sa svojstvenom vrijednošću $\neq 0$. Drugim riječima, postoji $k \in \mathbb{N}$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $x_0 \in \mathfrak{h}$ i $x_1, \ldots, x_k \in \mathfrak{h} \setminus \{0\}$ takvi da je

$$x = x_0 + x_1 + \cdots + x_k, \qquad [y, x_0] = 0, \qquad [y, x_j] = \alpha_j x_j \quad \text{za } j = 1, \ldots, k.$$

Slijedi

$$-\lambda y = (ad_{\mathfrak{h}}\, y)x = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_k x_k \qquad \Longrightarrow \qquad \alpha_1 x_1 + \cdots \alpha_k x_k + \lambda y = 0.$$

No to je nemoguće jer su $x_1, \ldots, x_k, y$ svojstveni vektori operatora $ad_{\mathfrak{h}}\, y$ za međusobno različite svojstvene vrijednosti i kao takvi su linearno nezavisni. Ova kontradikcija dokazuje tvrdnju $ad_{\mathfrak{h}}\, x = 0$, a kako je $x \in \mathfrak{h}$ bio proizvoljan, slijedi da je Liejeva algebra $\mathfrak{h}$ komutativna.

Napokon, prema propoziciji 5.2.1. $\mathfrak{h}$ je maksimalna nilpotentna podalgebra od $\mathfrak{g}$. Kako je svaka komutativna Liejeva algebra nilpotentna, slijedi da je $\mathfrak{h}$ maksimalna komutativna podalgebra, tj. vrijedi svojstvo (a).

Pretpostavimo sada da je $\mathfrak{h}$ podalgebra Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ sa svojstvima (a) i (b). Tada je $h \mapsto \operatorname{ad} h$ potpuno reducibilna reprezentacija od $\mathfrak{h}$, dakle, postoji $(\operatorname{ad} \mathfrak{h})-$invarijantan potprostor $\mathfrak{k}$ od $\mathfrak{g}$ takav da je $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \dotplus \mathfrak{k}$. Pretpostavimo sada da $\mathfrak{h}$ nije Cartanova podalgebra od $\mathfrak{g}$. Tada je $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) \neq \mathfrak{h}$, dakle, postoji $y \in \mathfrak{g} \setminus \mathfrak{h}$ takav da je $[y, \mathfrak{h}] \subseteq \mathfrak{h}$. Pišemo sada $y = z + u$, $z \in \mathfrak{h}$, $u \in \mathfrak{k}$, $u \neq 0$. Tada je $[z, \mathfrak{h}] = \{0\}$, jer je $\mathfrak{h}$ komutativna, pa iz $[y, \mathfrak{h}] \subseteq \mathfrak{h}$ slijedi $[u, \mathfrak{h}] \subseteq \mathfrak{h}$. S druge strane je $[u, \mathfrak{h}] \subseteq [\mathfrak{k}, \mathfrak{h}] \subseteq \mathfrak{k}$, jer je $\mathfrak{k}$ $(\operatorname{ad} \mathfrak{h})-$invarijantan potprostor, pa slijedi $[u, \mathfrak{h}] \subseteq \mathfrak{h} \cap \mathfrak{k} = \{0\}$. No to je nemoguće jer je $u \notin \mathfrak{h}$ i pretpostavili smo da je $\mathfrak{h}$ maksimalna komutativna podalgebra od $\mathfrak{g}$. Ova kontradikcija pokazuje da je pretpostavka da $\mathfrak{h}$ nije Cartanova podalgebra bila pogrešna. Time je teorem u potpunosti dokazan.

6.2 Trodimenzionalna prosta Liejeva algebra

U ovom ćemo odjeljku proučiti Liejevu algebru $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ svih kompleksnih kvadratnih matrica drugog reda s tragom nula i njezine konačnodimenzionalne reprezentacije. Dakle,

$$\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix};\ a,b,c \in \mathbb{C} \right\}.$$

To je trodimenzionalna prosta Liejeva algebra i jednu njezinu bazu čine matrice

$$x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad y = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad h = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Te matrice zadovoljavaju komutacione relacije

$$[h,x] = 2x, \qquad [h,y] = -2y, \qquad [x,y] = h.$$

Lako se vidi da svaka kompleksna trodimenzionalna prosta Liejeva algebra ima bazu čiji elementi zadovoljavaju gornje komutacione relacije. Proste trodimenzionalne Liejeve algebre zvat ćemo **TDS−algebre** (prema engleskom *three−dimensional simple*), a baza $\{x,y,h\}$ takve algebre koja zadovoljava gornje komutacione relacije zove se **standardna baza**.

Neka je u daljnjem $\mathfrak{g}$ kompleksna TDS−algebra i $\{x,y,h\}$ njezina standardna baza. Uočimo da je operator $\mathrm{ad}\,h$ dijagonalizabilan: baza $\{x,y,h\}$ sastavljena je od svojstvenih vektora operatora $\mathrm{ad}\,h$. Prema tome, operator $\mathrm{ad}\,h$ je poluprost, odnosno, element h je poluprost. Nadalje, vidi se da vrijedi $(\mathrm{ad}\,x)^3 = (\mathrm{ad}\,y)^3 = 0$, dakle, elementi x i y su nilpotentni.

Promotrimo sada neku reprezentaciju π Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ na konačnodimenzionalnom kompleksnom vektorskom prostoru V i stavimo

$$X = \pi(x), \qquad Y = \pi(y), \qquad H = \pi(h).$$

Prema tvrdnjama (a) i (b) teorema 4.4.6. operator H je poluprost, tj. dijagonalizabilan, a operatori X i Y su nilpotentni. Elementi spektra $Sp(H)$ operatora H zovu se **težine reprezentacije** π a za težinu λ pripadni svojstveni potprostor

$$V_\lambda = V_\lambda(H) = \{v \in V;\ Hv = \lambda v\}$$

zove se **težinski potprostor** a njegovi elementi **težinski vektori** težine λ. Kako je operator H dijagonalizabilan, imamo rastav u direktnu sumu

$$V = \sum_{\lambda \in Sp(H)} \dot{+}\, V_\lambda.$$

Iz teorema 5.1.8. slijedi da je $XV_\lambda \subseteq V_{\lambda+2}$ i $YV_\lambda \subseteq V_{\lambda-2}$. To se i direktno jednostavno provjerava iz komutacionih relacija $HX = XH + 2X$ i $HY = YH - 2Y$.

Težinski vektor $v \neq 0$ zove se **primitivni vektor** reprezentacije π ako je $Xv = 0$. Primitivni vektori očito postoje jer je operator X nilpotentan.

Lema 6.2.1. *Neka je v primitivni vektor težine λ, tj. $0 \neq v \in V_\lambda$ i $Xv = 0$. stavimo*

$$v_{-1} = 0, \quad v_0 = v, \quad v_j = \frac{1}{j!} Y^j v, \quad j \in \mathbb{N}.$$

Tada vrijedi:

$$Hv_j = (\lambda - 2j)v_j, \quad Xv_j = (\lambda - j + 1)v_{j-1}, \quad Yv_j = (j+1)v_{j+1}, \quad j \in \mathbb{Z}_+. \tag{6.2}$$

Dokaz: Prva i treća jednakost slijede neposredno iz definicije vektora v_j i iz $Y^jV_\lambda \subseteq V_{\lambda-2j}$. Drugu jednakost dokazujemo indukcijom po $j \in \mathbb{Z}_+$. Za $j = 0$ jednakost vrijedi zbog izbora vektora v :

$$Xv_0 = Xv = 0 = (\lambda - 0 + 1)v_{-1}.$$

Za korak indukcije pretpostavimo da je $j \in \mathbb{Z}_+$ i da je jednakost $Xv_j = (\lambda - j + 1)v_{j-1}$ dokazana. Prema trećoj jednakosti je $Yv_j = (j+1)v_{j+1}$ i $Yv_{j-1} = jv_j$. Stoga zbog jednakosti $XY = YX + H$ imamo redom

$$(j+1)Xv_{j+1} = XYv_j = YXv_j + Hv_j = (\lambda - j + 1)Yv_{j-1} + (\lambda - 2j)v_j =$$

$$= [j(\lambda - j + 1) + \lambda - 2j]v_j = (j+1)(\lambda - j)v_j.$$

No to znači da je

$$Xv_{j+1} = [\lambda - (j+1) + 1]v_{(j+1)-1},$$

odnosno, proveden je korak indukcije za dokaz druge jednakosti u (6.2).

Zadržimo pretpostavke i oznake iz leme 6.2.1. Prema prvoj jednakosti u (6.2) vektori v_j su svojstveni vektori operatora H za međusobno različite svojstvene vrijednosti. Prema tome, svi oni koji su $\neq 0$ su linearno nezavisni. Budući da je prostor V konačnodimenzionalan, postoji $m \in \mathbb{Z}_+$ takav da je $v_m \neq 0$ i $v_{m+1} = 0$. Sada formule (6.2) pokazuju da je potprostor span$\{v_0, \ldots, v_m\}$ $\pi-$invarijantan i $(m + 1)-$dimenzionalan. Pretpostavimo li da je reprezentacija π ireducibilna, zaključujemo da je $\{v_0, \ldots, v_m\}$ baza prostora V. Napokon, kako je $v_{m+1} = 0$, druga jednakost u (6.2) za $j = m + 1$ daje

$$0 = Xv_{m+1} = (\lambda - m)v_m,$$

a kako je $v_m \neq 0$, zaključujemo da je $\lambda - m = 0$, odnosno, $\lambda = m$.

Obratno, neka je $m \in \mathbb{Z}_+$ i pretpostavimo da je V $(m+1)-$dimenzionalan kompleksan vektorski prostor s bazom $\{v_0, \ldots, v_m\}$. Neka su X, Y i H linearni operatori na prostoru V zadani svojim djelovanjem na izabranu bazu:

$$\begin{gathered} Hv_j = (m-2j)v_j, \qquad 0 \leq j \leq m, \\ Xv_0 = 0, \qquad Xv_j = (m-j+1)v_{j-1}, \quad 0 < j \leq m, \\ Yv_j = (j+1)v_{j+1}, \quad 0 \leq j < m, \qquad Yv_m = 0. \end{gathered} \tag{6.3}$$

Direktni račun daje:

$$[H, X]v_0 = HXv_0 - XHv_0 = -mXv_0 = 0 = 2Xv_0;$$

$$\text{za } 1 \leq j \leq m: \quad [H, X]v_j = HXv_j - XHv_j = (m-j+1)Hv_{j-1} - (m-2j)Xv_j =$$

$$= (m-j+1)(m-2j+2)v_{j-1} - (m-2j)(m-j+1)v_{j-1} = 2(m-j+1)v_{j-1} = 2Xv_j;$$

$$\text{za } 0 \leq j < m: \quad [H, Y]v_j = HYv_j - YHv_j = (j+1)Hv_{j+1} - (m-2j)Yv_j =$$

$$= (j+1)(m-2j-2)v_{j+1} - (m-2j)(j+1)v_{j+1} = -2(j+1)v_{j+1} = -2Yv_j;$$

$$[H, Y]v_m = HYv_m - YHv_m = mYv_m = 0 = -2Yv_m;$$

$$[X, Y]v_0 = XYv_0 - YXv_0 = Xv_1 = mv_0 = Hv_0;$$

$$\text{za } 0 < j < m: \quad [X, Y]v_j = XYv_j - Yxv_j = (j+1)Xv_{j+1} - (m-j+1)Yv_{j-1} =$$

$$= (j+1)(m-j)v_j - (m-j+1)jv_j = (m-2j)v_j = Hv_j;$$

$$[X, Y]v_m = XYv_m - YXv_m = -Yv_{m-1} = -mv_m = Hv_m.$$

Time je dokazano da operatori X, Y i H zadovoljavaju komutacione relacije

$$[H, X] = 2X, \qquad [H, Y] = -2Y, \qquad [X, Y] = H.$$

No tada je sa

$$\pi(\alpha x + \beta y + \gamma h) = \alpha X + \beta Y + \gamma H, \qquad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C},$$

zadana reprezentacija π Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ na prostoru V. Ta je reprezentacija ireducibilna. Doista, pretpostavimo da je $W \neq \{0\}$ potprostor od V koji je $\pi-$invarijantan, tj. koji je invarijantan s obzirom na operatore X, Y i H. Tada W sadrži neki svojstven vektor operatora H. Kako su vektori baze $v_0, \ldots, v_m$ svojstveni vektori od H s međusobno različitim svojstvenim vrijednostima $m, m-2, \ldots, -m+2, -m$, zaključujemo da je $v_j \in W$ za neki $j \in \{0, \ldots, m\}$. Iz druge formule u (6.3) slijedi da su tada $v_0, \ldots, v_{j-1} \in W$, a iz treće da su i $v_{j+1}, \ldots, v_m \in W$. Dakle, nužno je $W = V$ i time je dokazana ireducibilnost reprezentacije π.

Na taj način dokazali smo:

Teorem 6.2.2. *Neka je $\mathfrak{g}$ kompleksna TDS$-$algebra sa standardnom bazom $\{x, y, h\}$.*

(a) *Za svaki $m \in \mathbb{Z}_+$ postoji do na ekvivalenciju jedinstvena ireducibilna $(m+1)-$dimenzionalna reprezentacija π_m Liejeve algebre $\mathfrak{g}$.*

(b) *Težine reprezentacije π_m su $m, m-2, \ldots, -m+2, -m$ i svaki je težinski potprostor jednodimenzionalan.*

(c) *Postoji do na skalarni multipl $\neq 0$ jedinstven primitivni vektor reprezentacije π_m i njegova težina je m.*

(d) *Postoji baza $\{v_0, \ldots, v_m\}$ prostora reprezentacije π_m na koju operatori $H = \pi_m(h)$, $X = \pi_m(x)$ i $Y = \pi_m(y)$ djeluju po formulama* (6.3).

Teorem 6.2.3. *Neka je π reprezentacija kompleksne TDS$-$algebre $\mathfrak{g}$ sa standardnom bazom $\{x, y, h\}$ na konačnodimenzionalnom prostoru V.*

(a) *Sve su težine reprezentacije π cijeli brojevi.*

(b) *Za svaki $j \in \mathbb{Z}_+$ vrijedi* $\dim V_j = \dim V_{-j}$.

(c) *Ako je $V = X_1 \dotplus \cdots \dotplus X_s$ rastav prostora V u direktnu sumu $\pi-$invarijantnih potprostora takvih da je svaka subreprezentacija π_{X_i} ireducibilna, onda je $s = \dim V_0 + \dim V_1$. Preciznije, $\dim V_0$ je broj indeksa $i \in \{1, \ldots, s\}$ takvih da je potprostor X_i neparne dimenzije, a $\dim V_1$ je broj indeksa $i \in \{1, \ldots, s\}$ takvih da je potprostor X_i parne dimenzije.*

Dokaz: Prema Weylovom teoremu 4.4.4. o potpunoj reducibilnosti postoji rastav

$$V = X_1 \dotplus \cdots \dotplus X_s,$$

gdje su svi potprostori X_i $\pi-$invarijantni i sve subreprezentacije π_{X_i} su ireducibilne. Svaka od tih subreprezentacija je prema teoremu 6.2.2. ekvivalentna nekoj od reprezentacija π_m čije su sve težine cijeli brojevi. Odatle neposredno slijedi tvrdnja (a), a i tvrdnja (b). Napokon, u svakoj neparnodimenzionalnoj ireducibilnoj reprezentaciji težinski potprostor za težinu 0 je jednodimenzionalan, a 1 nije težina, dok je s druge strane u svakoj parnodimenzionalnoj ireducibilnoj reprezentaciji težinski potprostor za težinu 1 jednodimenzionalan, a 0 nije težina. Odatle slijedi tvrdnja (c).

Činjenica da vrijedi $\dim V_j = \dim V_{-j}$ za prostor V bilo koje konačnodimenzionalne reprezentacije π slijedi i kao posljedica lako provjerljive činjenice da je sa

$$\tau : \alpha x + \beta y + \gamma h \mapsto -\alpha y - \beta x - \gamma h$$

zadan automorfizam Liejeve algebre $\mathfrak{g}$, tj. njezin izomorfizam na samu sebe, i pri tom automorfizmu element h prelazi u $-h$. Napomenimo da se taj automorfizam τ može eksplicitno konstruirati pomoću adjungirane reprezentacije. U slučaju proizvoljne konačnodimenzionalne reprezentacije ista konstrukcija vodi na izomorfizam svakog težinskog potprostora V_j na težinski potprostor V_{-j}. Naime, može se dokazati da vrijedi:

Propozicija 6.2.4. *Neka je π konačnodimenzionalna reprezentacija kompleksne TDS−algebre $\mathfrak{g}$ sa standardnom bazom $\{x, y, h\}$ na vektorskom prostoru V. Za operator $A_\pi \in GL(V)$, definiran sa*

$$A_\pi = \mathrm{e}^{\pi(x)}\mathrm{e}^{-\pi(y)}\mathrm{e}^{\pi(x)},$$

i za svaku težinu j reprezentacije π vrijedi

$$A_\pi V_j = V_{-j}.$$

Nadalje, ako je

$$\tau = A_{ad} = \mathrm{e}^{\mathrm{ad}\, x}\mathrm{e}^{-\mathrm{ad}\, y}\mathrm{e}^{\mathrm{ad}\, x}$$

onda je τ automorfizam Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ i vrijedi $\tau(\alpha x + \beta y + \gamma h) = -\alpha y - \beta x - \gamma h$. Napokon, za svaku konačnodimenzionalnu reprezentaciju π od $\mathfrak{g}$ vrijedi

$$A_\pi \pi(z) A_\pi^{-1} = \pi(\tau(z)) \qquad \forall z \in \mathfrak{g}.$$

6.3 Korijenski rastav

U ovom je odjeljku $\mathfrak{g}$ kompleksna poluprosta Liejeva algebra i $\mathfrak{h}$ njezina Cartanova podalgebra. Označavat ćemo sa R pripadni sistem korijena $R(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$. Proučit ćemo sada pobliže korijenski rastav od $\mathfrak{g}$ u odnosu na $\mathfrak{h}$:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \dot{+} \sum_{\alpha\in R} \dot{+} \mathfrak{g}_\alpha, \qquad \mathfrak{g}_\alpha = \{x \in \mathfrak{g};\ [h,x] = \alpha(h)x\ \ \forall h \in \mathfrak{h}\}. \tag{6.4}$$

Neka je $B = B_\mathfrak{g}$ Killingova forma Liejeve algebre $\mathfrak{g}$. Prema teoremu 6.1.1. restrikcija $B|\mathfrak{h}\times\mathfrak{h}$ je nedegenerirana. Zbog toga je po propoziciji 1.3.2. dobro definiran izomorfizam $\lambda \mapsto t_\lambda$ dualnog prostora $\mathfrak{h}^*$ na prostor $\mathfrak{h}$ sa svojstvom

$$\lambda(h) = B(h, t_\lambda) \qquad \forall h \in \mathfrak{h}.$$

Teorem 6.3.1. *(a)* $\mathfrak{h}^* = \operatorname{span} R$.

(b) $R = -R$, *tj.* $\alpha \in R \iff -\alpha \in R$.

(c) Za $\alpha \in R$, $x \in \mathfrak{g}_\alpha$ *i* $y \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ *vrijedi*

$$[x,y] = B(x,y)t_\alpha.$$

(d) Za svaki $\alpha \in R$ *je* $\alpha(t_\alpha) = B(t_\alpha,t_\alpha) \neq 0$.

(e) Za svaki $\alpha \in R$ *je* $[\mathfrak{g}_\alpha,\mathfrak{g}_{-\alpha}] = \mathbb{C}t_\alpha$, *tj.* $\dim [\mathfrak{g}_\alpha,\mathfrak{g}_{-\alpha}] = 1$.

(f) Za svaki $\alpha \in R$ *postoji jedinstven* $h_\alpha \in [\mathfrak{g}_\alpha,\mathfrak{g}_{-\alpha}]$ *takav da je* $\alpha(h_\alpha) = 2$. *Vrijedi*

$$h_\alpha = \frac{2}{B(t_\alpha,t_\alpha)} t_\alpha = -h_{-\alpha}.$$

(g) Za $\alpha \in R$ *i* $x_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha \setminus \{0\}$ *postoji* $y_\alpha \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ *takav da je* $[x_\alpha,y_\alpha] = h_\alpha$. *Tada je* $\{x_\alpha,y_\alpha,h_\alpha\}$ *standardna baza TDS−podalgebre* $\mathfrak{s}_\alpha$ *od* $\mathfrak{g}$.

Dokaz: (a) Pretpostavimo da je $\mathfrak{h}^* \neq \operatorname{span} R$. Tada postoji $h \in \mathfrak{h}\setminus\{0\}$ takav da je $\alpha(h) = 0$ $\forall \alpha \in R$. To znači da je $[h,\mathfrak{g}_\alpha] = \{0\}$ $\forall \alpha \in R$. Kako je i $[h,\mathfrak{h}] = \{0\}$, iz korijenskog rastava (6.4) slijedi da je $[h,\mathfrak{g}] = \{0\}$, odnosno, $h \in Z(\mathfrak{g})$. No to je nemoguće jer je za poluprostu Liejevu algebru $\mathfrak{g}$ centar $Z(\mathfrak{g})$ jednak $\{0\}$. Ova kontradikcija dokazuje da je $\mathfrak{h}^* = \operatorname{span} R$.

(b) Neka je $\alpha \in R$ i pretpostavimo da $-\alpha \notin R$. Prema tvrdnji (c) teorema 5.2.4. slijedi da je $B(\mathfrak{g}_\alpha,\mathfrak{g}_\beta) = \{0\}$ $\forall \beta \in R$, a također i $B(\mathfrak{g}_\alpha,\mathfrak{h}) = \{0\}$. Sada iz korijenskog rastava (6.4) zaključujemo da je $B(\mathfrak{g}_\alpha,\mathfrak{g}) = \{0\}$, a to je nemoguće zbog nedegeneriranosti Killingove forme B. Ova kontradikcija dokazuje da je nužno $-\alpha \in R$.

(c) Neka su $\alpha \in R$, $x \in \mathfrak{g}_\alpha$, $y \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ i $h \in \mathfrak{h}$. Zbog svojstava Killingove forme B imamo redom

$$B(h,[x,y]) = B([h,x],y) = \alpha(h)B(x,y) = B(h,t_\alpha)B(x,y) = B(h,B(x,y)t_\alpha).$$

Kako je $B(x,y)t_\alpha \in \mathfrak{h}$ i kako je restrikcija $B|\mathfrak{h}\times\mathfrak{h}$ nedegenerirana, zbog proizvoljnosti elementa $h \in \mathfrak{h}$ zaključujemo da vrijedi $[x,y] = B(x,y)t_\alpha$.

(e) Tvrdnja (c) pokazuje da je ili $[\mathfrak{g}_\alpha,\mathfrak{g}_{-\alpha}] = \{0\}$ ili je $[\mathfrak{g}_\alpha,\mathfrak{g}_{-\alpha}] = \mathbb{C}t_\alpha$. Neka je $x \in \mathfrak{g}_\alpha \setminus \{0\}$. Kad bi bilo $B(x,\mathfrak{g}_{-\alpha}) = \{0\}$, kao u dokazu tvrdnje (b) mogli bismo zaključiti da je $B(x,\mathfrak{g}) = \{0\}$. No to je nemoguće zbog nedegeneriranosti Killingove forme B. Prema tome, postoji $y \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ takav da je $B(x,y) \neq 0$. Prema tvrdnji (c) slijedi da je $[x,y] \neq 0$. To dokazuje da je $[\mathfrak{g}_\alpha,\mathfrak{g}_{-\alpha}] \neq \{0\}$, dakle, $[\mathfrak{g}_\alpha,\mathfrak{g}_{-\alpha}] = \mathbb{C}t_\alpha$.

(d) Pretpostavimo da je $\alpha(t_\alpha) = 0$. To znači da je

$$[t_\alpha, x] = [t_\alpha, y] = 0 \qquad \forall x \in \mathfrak{g}_\alpha \quad \text{i} \quad \forall y \in \mathfrak{g}_{-\alpha}.$$

Kao u dokazu tvrdnje (e) možemo izabrati $x \in \mathfrak{g}_\alpha$ i $y \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ tako da bude $B(x, y) \neq 0$. Pomnožimo li jednog od njih pogodnim skalarom, vdimo da možemo pretpostaviti da je $B(x, y) = 1$. Tada prema tvrdnji (c) imamo $[x, y] = t_\alpha$. Slijedi da je $\mathfrak{s} = \text{span}\,\{x, y, t_\alpha\}$ trodimenzionalna rješiva Liejeva podalgebra od $\mathfrak{g}$. Budući da je $ad_\mathfrak{g}$ vjerna reprezentacija od $\mathfrak{g}$, Liejeva algebra $\mathfrak{s}$ izomorfna je Liejevoj podalgebri $ad_\mathfrak{g}\,\mathfrak{s}$ od $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$. Prema teoremu 6.2.4. postoji baza od $\mathfrak{g}$ u kojoj svi operatori $ad_\mathfrak{g}\,s$, $s \in \mathfrak{s}$, imaju gornje trokutaste matrice. No tada su svi operatori $ad_\mathfrak{g}\,s$, $s \in [\mathfrak{s}, \mathfrak{s}]$, nilpotentni. Kako je $t_\alpha = [x, y] \in [\mathfrak{s}, \mathfrak{s}]$ slijedi da je t_α nilpotentan element od $\mathfrak{g}$. No to je nemoguće jer je element $t_\alpha \neq 0$ poluprost. Ova kontradikcija pokazuje da je $\alpha(t_\alpha) \neq 0$.

Tvrdnja (f) slijedi neposredno iz tvrdnji (d) i (e).

(g) Za $x_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha \setminus \{0\}$ je $B(x_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}) \neq \{0\}$, pa zbog tvrdnje (e) možemo izabrati $y_\alpha \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ tako da bude

$$B(x_\alpha, y_\alpha) = \frac{2}{B(t_\alpha, t_\alpha)}.$$

Prema tvrdnji (c) i uz oznaku h_α iz tvrdnje (f) tada je $[x_\alpha, y_\alpha] = h_\alpha$. Nadalje, kako je $\alpha(h_\alpha) = 2$, imamo $[h_\alpha, x_\alpha] = 2x_\alpha$ i $[h_\alpha, y_\alpha] = -2y_\alpha$. Dakle, $\mathfrak{s}_\alpha = \text{span}\,\{x_\alpha, y_\alpha, h_\alpha\}$ je TDS$-$podalgebra od $\mathfrak{g}$ i $\{x_\alpha, y_\alpha, h_\alpha\}$ je njezina standardna baza.

Primijenit ćemo sada rezultate prethodnog odjeljka na TDS$-$podalgebru $\mathfrak{s}_\alpha$ od $\mathfrak{g}$ i na njezinu reprezentaciju $ad_\mathfrak{g}|\mathfrak{s}_\alpha$ na prostoru $\mathfrak{g}$.

Teorem 6.3.2. (a) *Za svaki* $\alpha \in R$ *je* $\dim \mathfrak{g}_\alpha = 1$.

(b) *Za svaki* $\alpha \in R$ *je* $\mathbb{C}\alpha \cap R = \{\alpha, -\alpha\}$.

(c) *Ako su* $\alpha, \beta \in R$, *onda je* $\beta(h_\alpha) \in \mathbb{Z}$ *i* $\beta - \beta(h_\alpha)\alpha \in R$.

(d) *Ako su* $\alpha, \beta \in R$ *takvi da je i* $\alpha + \beta \in R$, *onda je* $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] = \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$.

(e) *Neka su* $\alpha, \beta \in R$ *takvi da je* $\beta \neq \pm\alpha$ *i neka su*

$$q = \max\,\{j \in \mathbb{Z}_+;\ \beta + j\alpha \in R\} \quad i \quad r = \max\,\{j \in \mathbb{Z}_+;\ \beta - j\alpha \in R\}.$$

Tada za $j \in \mathbb{Z}$ *vrijedi* $\beta + j\alpha \in R$ *ako i samo ako je* $-r \leq j \leq q$. *Nadalje, vrijedi* $\beta(h_\alpha) = r - q$.

(f) *Liejeva algebra* $\mathfrak{g}$ *generirana je sa* $\cup_{\alpha \in R}\mathfrak{g}_\alpha$.

Dokaz: Neka je $\alpha \in R$. Prema tvrdnji (g) teorema 6.3.1. možemo izabrati $x_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$ i $y_\alpha \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ tako da je $\mathfrak{s}_\alpha = \text{span}\,\{x_\alpha, y_\alpha, h_\alpha\}$ TDS$-$podalgebra od $\mathfrak{g}$ i da je $\{x_\alpha, y_\alpha, h_\alpha\}$ njezina standardna baza. Promatrat ćemo reprezentaciju $\rho = ad_\mathfrak{g}|\mathfrak{s}_\alpha$ TDS$-$algebre $\mathfrak{s}_\alpha$ na prostoru $\mathfrak{g}$. Stavimo sada

$$J = \{c \in \mathbb{C};\ c\alpha \in R\}, \quad \text{dakle,} \quad \mathbb{C}\alpha \cap R = \{c\alpha;\ c \in J\},$$

i neka je

$$V = \mathfrak{h} \dotplus \sum_{c \in J} \dotplus\, \mathfrak{g}_{c\alpha}.$$

Tada je V $\rho-$invarijantan potprostor od $\mathfrak{g}$. Neka je $\pi = \rho_V$ pripadna subreprezentacija reprezentacije ρ Liejeve algebre $\mathfrak{s}_\alpha$. Prema tvrdnji (a) teorema 6.2.3. sve težine te reprezentacije su cijeli brojevi. Te težine su 0 i $c\alpha(h_\alpha) = 2c$ za $c \in J$. Odatle slijedi da je $2c \in \mathbb{Z}$ za svaki $c \in J$, odnosno, da je $J \subseteq \frac{1}{2}\mathbb{Z}$.

Kao i prije sa V_n označimo težinski potprostor reprezentacije π za težinu $n \in \mathbb{Z}$. Prema tvrdnji (c) teorema 6.2.3. znamo da je broj ireducibilnih konstituenata reprezentacije π jednak $\dim V_0 + \dim V_1$. Štoviše, iz tvrdnje (b) teorema 6.2.2. znamo da su težine neke ireducibilne reprezentacije ili sve parne ili sve neparne. Dakle, $\dim V_0$ je broj ireducibilnih konstituenata reprezentacije π s parnim težinama, a $\dim V_1$ je broj ireducibilnih konstituenata od π s neparnim težinama.

Primijetimo sada da je $V_0 = \mathfrak{h}$. Prema tome, broj ireducibilnih konstituenata reprezentacije π s parnim težinama jednak je $\ell = \dim \mathfrak{h}$. Te je ireducibilne konstituente vrlo lako eksplicitno naći. Prije svega, $(\ell-1)-$dimenzionalni potprostor $\operatorname{Ker}\alpha = \{h \in \mathfrak{h};\ \alpha(h) = 0\}$ je očito $\pi-$invarijantan i na njemu je subreprezentacija od π trivijalna; dakle, u njoj je sadržano $\ell - 1$ ireducibilnih konstituenata od π s parnim težinama (tj. s jedinom težinom 0). Još jedan $\pi-$invarijantan potprostor od V s ireducibilnom subreprezentacijom i s parnim težinama je $\mathfrak{s}_\alpha$: težine su $2, 0, -2$. Time smo došli do ukupno ℓ ireducibilnih konstituenata od π s parnim težinama, što znači da takvih više nema. Odatle slijedi da $n\alpha \notin R$ za $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$. Drugim riječima, vrijedi $J \cap \mathbb{Z} = \{1, -1\}$. Posebno, $2\alpha \notin R$. Odatle možemo zaključiti i da $\frac{1}{2}\alpha \notin R$; doista, kad bi $\beta = \frac{1}{2}\alpha$ bio korijen, onda bi to prema dokazanom značilo da $\alpha = 2\beta$ nije korijen. Dakle, $\frac{1}{2} \notin J$, a to znači da je $V_1 = \{0\}$. Prema tome, u reprezentaciji π uopće nema ireducibilnih konstituenata s neparnim težinama. Zaključujemo da je $V = \mathfrak{h} + \mathfrak{s}_\alpha$. To ima za posljedicu da je $\mathfrak{g}_\alpha = \mathbb{C}x_\alpha$, odnosno, $\dim \mathfrak{g}_\alpha = 1$. Nadalje, slijedi da je $J \subseteq \mathbb{Z}$, odnosno, vrijedi $J = \{1, -1\}$ ili $\mathbb{C}\alpha \cap R = \{\alpha, -\alpha\}$. Time su dokazane tvrdnje (a) i (b).

Neka su sada $\alpha, \beta \in R$. Tada je $\beta(h_\alpha)$ jedna od težina reprezentacije $\rho = ad_{\mathfrak{g}}|\mathfrak{s}_\alpha$, pa iz tvrdnje (a) teorema 6.2.3. slijedi da je $\beta(h_\alpha) \in \mathbb{Z}$. Time je dokazana prva tvrdnja u (c).

Pretpostavimo sada da je $\beta \neq \pm\alpha$ i stavimo

$$X = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \dot{+}\, \mathfrak{g}_{\beta + j\alpha}.$$

Tada je očito X $\rho-$invarijantan potprostor od $\mathfrak{g}$. Kako je $\alpha(h_\alpha) = 2$, sve težine pripadne subreprezentacije $\pi = \rho_X$ su oblika $\beta(h_\alpha) + 2j$ za $j \in \mathbb{Z}$, dakle, ili su sve parne ili su sve neparne. Nadalje, svaki je težinski potprostor je jednodimenzionalan, pa je ili $\dim X_0 = 1$ i $\dim X_1 = 0$ ili je $\dim X_0 = 0$ i $\dim X_1 = 1$. U oba slučaja je $\dim X_0 + \dim X_1 = 1$, a to prema tvrdnji (c) teorema 6.2.3. znači da je reprezentacija $\pi = \rho_X$ Liejeve algebre $\mathfrak{s}_\alpha$ ireducibilna. Najveća je težina $\beta(h_\alpha) + 2q$, a najmanja $\beta(h_\alpha) - 2r$. Prema tvrdnji (b) teorema 6.2.2. vrijedi

$$\beta(h_\alpha) - 2r = -(\beta(h_\alpha) + 2q),$$

a odatle je $2\beta(h_\alpha) = 2r - 2q$, odnosno, $\beta(h_\alpha) = r - q$. Nadalje, iz iste tvrdnje vidimo da su težine reprezentacije $\pi = \rho_X$ upravo svi brojevi oblika $\beta(h_\alpha) + 2j$ za $j = -r, -r+1, \ldots, q-1, q$. To znači da je $\mathfrak{g}_{\beta+j\alpha} \neq \{0\}$, tj. $\beta + j\alpha \in R$, ako i samo ako je $j \in \mathbb{Z}$ i $-r \leq j \leq q$. Time je dokazana tvrdnja (e).

Odatle slijedi i druga tvrdnja tvrdnja u (c) za $\beta \neq \pm\alpha$. Doista, vrijedi $-r \leq -(r-q) \leq q$, dakle,

$$\beta - \beta(h_\alpha)\alpha = \beta - (r-q)\alpha \in R.$$

Ako je $\beta = \alpha$, onda je $\beta(h_\alpha) = 2$, pa je

$$\beta - \beta(h_\alpha)\alpha = \alpha - 2\alpha = -\alpha \in R.$$

Napokon, ako je $\beta = -\alpha$, onda je $\beta(h_\alpha) = -2$, pa je opet

$$\beta - \beta(h_\alpha)\alpha = -\alpha + 2\alpha = \alpha \in R.$$

Time je tvrdnja (c) u potpunosti dokazana.

Neka su sada $\alpha, \beta \in R$ takvi da je i $\alpha + \beta \in R$. Uz prethodne oznake iz tvrdnje (e) tada je $q \geq 1$. Iz teorije reprezentacija TDS$-$algebre $\mathfrak{s}_\alpha$ znamo da za svaku težinu n ireducibilne reprezentacije $\pi = \rho_X$ manju od najveće vrijedi $\pi(x_\alpha)X_n = X_{n+2}$. Posebno je $\pi(x_\alpha)X_0 = X_2$, odnosno, $(ad_\mathfrak{g}\, x_\alpha)\mathfrak{g}_\beta = \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$, ili $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] = \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$. Time je dokazana tvrdnja (d).

Napokon, budući da je $\lambda \mapsto t_\lambda$ izomorfizam prostora $\mathfrak{h}^*$ na prostor $\mathfrak{h}$, iz tvrdnje (a) teorema 6.3.1. slijedi da $\{t_\alpha;\ \alpha \in R\}$ razapinje $\mathfrak{h}$. To prema tvrdnji (e) teorema 6.3.1. znači da je

$$\mathfrak{h} = \sum_{\alpha \in R} [\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}]$$

(naravno, ovo nije direktna suma). Odatle slijedi tvrdnja (f).

Kako je restrikcija Killingove forme $B|\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}$ nedegenerirana, mogli smo definirati izomorfizam $\lambda \mapsto t_\lambda$ prostora $\mathfrak{h}^*$ na prostor $\mathfrak{h}$ i to ovako:

$$\lambda(h) = B(h, t_\lambda) \qquad \forall h \in \mathfrak{h}.$$

Prenesimo sada pomoću tog izomorfizma bilinearnu formu $B|\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}$ na $\mathfrak{h}^* \times \mathfrak{h}^*$. Tu ćemo bilinearnu formu na $\mathfrak{h}^* \times \mathfrak{h}^*$ označavati sa $(\,\cdot\,|\,\cdot\,)$. Dakle,

$$(\lambda|\mu) = B(t_\lambda, t_\mu) = \mathrm{Tr}\,(ad_\mathfrak{g}\, t_\lambda)(ad_\mathfrak{g}\, t_\mu) = \lambda(t_\mu) = \mu(t_\lambda), \qquad \lambda, \mu \in \mathfrak{h}^*.$$

Prema tvrdnji (a) teorema 6.3.1. skup R razapinje čitav prostor $\mathfrak{h}^*$. Prema tome, postoji baza prostora $\mathfrak{h}^*$ sastavljena od korijena.

Propozicija 6.3.3. *Neka je $B = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell\} \subseteq R$ baza prostora $\mathfrak{h}^*$. Tada je $R \subseteq \mathrm{span}_\mathbb{Q} B$, odnosno, svaki korijen $\gamma \in R$ je $\mathbb{Q}-$linearna kombinacija korijena $\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell$.*

Dokaz: Neka je $\gamma \in R$. Tada, naravno, vrijedi

$$\gamma = \sum_{i=1}^{\ell} c_i \alpha_i \qquad \text{za neke } c_1, \ldots, c_\ell \in \mathbb{C}.$$

Odatle slijedi

$$(\gamma|\alpha_j) = \sum_{i=1}^{\ell} (\alpha_i|\alpha_j) c_i, \qquad j = 1, \ldots, \ell.$$

Za svako $j \in \{1, \ldots, \ell\}$ pomnožimo gornju jednakost sa $\dfrac{2}{(\alpha_j|\alpha_j)}$. Tako dobivamo sljedeći sistem od ℓ linearnih algebarskih jednadžbi sa ℓ nepoznanica $c_1, \ldots, c_\ell$:

$$2\frac{(\gamma|\alpha_j)}{(\alpha_j|\alpha_j)} = \sum_{i=1}^{\ell} 2\frac{(\alpha_i|\alpha_j)}{(\alpha_j|\alpha_j)} c_i, \qquad j = 1, \ldots, \ell. \tag{6.5}$$

Primijetimo sada da su svi koeficijenti u tom sustavu jednadžbi cijeli brojevi. Doista, za proizvoljne $\alpha, \gamma \in R$ prema tvrdnji (c) teorema 6.3.2. vrijedi $\gamma(h_\alpha) \in \mathbb{Z}$, a po tvrdnji (f) teorema 6.3.1. je

$$h_\alpha = \frac{2}{B(t_\alpha, t_\alpha)} t_\alpha = \frac{2}{(\alpha|\alpha)} t_\alpha.$$

Odatle je

$$2\frac{(\gamma|\alpha)}{(\alpha|\alpha)} = 2\frac{\gamma(t_\alpha)}{(\alpha|\alpha)} = \gamma\left(\frac{2}{(\alpha|\alpha)} t_\alpha\right) = \gamma(h_\alpha) \in \mathbb{Z} \qquad \forall \alpha, \beta \in R.$$

Time je dokazano da su svi koeficijenti sustava (6.5), tj.

$$2\frac{(\gamma|\alpha_j)}{(\alpha_j|\alpha_j)} \quad \text{za } j = 1, \ldots, \ell \qquad \text{i} \qquad 2\frac{(\alpha_i|\alpha_j)}{(\alpha_j|\alpha_j)} \quad \text{za } i, j = 1, \ldots, \ell,$$

cijeli brojevi.

Forma $(\cdot|\cdot)$ na $\mathfrak{h}^* \times \mathfrak{h}^*$ je nedegenerirana, pa je njezina matrica u bilo kojoj bazi regularna. Posebno, matrica $[(\alpha_i|\alpha_j)]_{i,j=1}^{\ell}$ je regularna. No tada je regularna i matrica koja se iz nje dobije množenjem svakog retka nekim skalarom različitim od nule. Prema tome, matrica sistema (6.5)

$$\left[2\frac{(\alpha_i|\alpha_j)}{(\alpha_j|\alpha_j)}\right]_{i,j=1}^{\ell} \in M_\ell(\mathbb{Z}) \subseteq M_\ell(\mathbb{Q})$$

je regularna. Stoga je njoj inverzna matrica element od $M_\ell(\mathbb{Q})$, a odatle slijedi da su svi skalari $c_1, \ldots, c_\ell$ racionalni brojevi.

Teorem 6.3.4. *(a) Realan prostor $\mathfrak{h}^*(R) = \operatorname{span}_{\mathbb{R}} R$ je realna forma prostora $\mathfrak{h}^*$ i realan prostor $\mathfrak{h}(R) = \operatorname{span}_{\mathbb{R}} \{h_\alpha;\ \alpha \in R\}$ je realna forma prostora $\mathfrak{h}$. Nadalje, $\mathfrak{h}^*(R)$ se identificira s dualnim prostorom $\mathfrak{h}(R)^*$ prostora $\mathfrak{h}(R)$.*

(b) Vrijedi

$$(\lambda|\lambda) > 0 \qquad \forall \lambda \in \mathfrak{h}^*(R) \setminus \{0\},$$

odnosno, restrikcija forme $(\cdot|\cdot)$ na $\mathfrak{h}^*(R) \times \mathfrak{h}^*(R)$ je skalarni produkt na realnom vektorskom prostoru $\mathfrak{h}^*(R)$.

(c) Restrikcija Killingove forme B na $\mathfrak{h}(R) \times \mathfrak{h}(R)$ je skalarni produkt na realnom prostoru $\mathfrak{h}(R)$.

Dokaz: (a) Iz propozicije 6.3.3. slijedi da je $\operatorname{span}_{\mathbb{Q}}(B) = \operatorname{span}_{\mathbb{Q}}(R)$ za svaku bazu B prostora $\mathfrak{h}^*$ sadržanu u R. No tada je i $\operatorname{span}_{\mathbb{R}} B = \operatorname{span}_{\mathbb{R}} R = \mathfrak{h}^*(R)$ za takvu bazu od $\mathfrak{h}^*$. No to znači da je jedna baza realnog prostora $\mathfrak{h}^*(R)$ ujedno baza kompleksnog prostora $\mathfrak{h}^*$, dakle, $\mathfrak{h}^*(R)$ je realna forma od $\mathfrak{h}^*$. Ostatak dokaza tvrdnje (a) ostavljamo za zadatak:

Zadatak 6.3.1. *Neka je B baza od $\mathfrak{h}^*$ sadržana u R. Dokažite:*

(a) $\{h_\alpha;\ \alpha \in B\}$ je baza od $\mathfrak{h}$.

(b) $\operatorname{span}_{\mathbb{Q}} \{h_\alpha;\ \alpha \in B\} = \operatorname{span}_{\mathbb{Q}} \{h_\alpha;\ \alpha \in R\}$.

(c) $\lambda \mapsto \lambda|\mathfrak{h}(R)$ je izomorfizam realnog prostora $\mathfrak{h}^*(R)$ na dualni prostor realnog prostora $\mathfrak{h}(R)$.

Dokažimo sada tvrdnju (b) teorema 6.3.4. Neka je $\{h_1, \ldots, h_\ell\}$ baza od $\mathfrak{h}$. Za svaki $\alpha \in R$ izaberimo $x_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha \setminus \{0\}$. Tada je prema korijenskom rastavu od $\mathfrak{g}$ skup

$$\{h_1, \ldots, h_\ell\} \cup \{x_\alpha;\ \alpha \in R\}$$

baza vektorskog prostora $\mathfrak{g}$. Za svaki $h \in \mathfrak{h}$ operator $\operatorname{ad} h$ ima u toj bazi dijagonalnu matricu koja na dijagonali ima ℓ nula i brojeve $\alpha(h)$, $\alpha \in R$. Prema tome, za $h, k \in \mathfrak{h}$ je

$$B(h,k) = \operatorname{Tr}(\operatorname{ad} h)(\operatorname{ad} k) = \sum_{\alpha \in R} \alpha(h)\alpha(k).$$

Stoga za $\lambda \in \mathfrak{h}^*(R) \setminus \{0\}$ vrijedi

$$(\lambda|\lambda) = B(t_\lambda, t_\lambda) = \sum_{\alpha \in R} \alpha(t_\lambda)^2.$$

Neka je opet B baza od $\mathfrak{h}^*$ sadržana u R. Tada je prema zadatku 6.3.1. $\{h_\beta;\ \beta \in B\}$ baza realnog prostora $\mathfrak{h}(R)$ pa imamo

$$t_\lambda = \sum_{\beta \in B} c_\beta h_\beta \quad \text{za neke } c_\beta \in \mathbb{R}.$$

Odatle dobivamo za svaki $\alpha \in R$:

$$\alpha(t_\lambda) = \sum_{\beta \in B} c_\beta \alpha(h_\beta) \in \mathbb{R} \qquad \Longrightarrow \qquad \alpha(t_\lambda)^2 \geq 0.$$

Nadalje, kako R razapinje $\mathfrak{h}^*$ i $t_\lambda \neq 0$, za neki $\alpha \in R$ je $\alpha(t_\lambda) \neq 0$, dakle, $\alpha(t_\lambda)^2 > 0$. Odatle je

$$(\lambda|\lambda) = \sum_{\alpha \in R} \alpha(t_\lambda)^2 > 0.$$

Zadatak 6.3.2. *Dokažite tvrdnju* (c) *teorema 6.3.4.*

Za bilo koji vektor $\lambda \neq 0$ realnog unitarnog prostora $\mathfrak{h}^*(R)$ označimo sa σ_λ ortogonalnu refleksiju protora $\mathfrak{h}^*(R)$ u odnosu na hiperravninu $\lambda^\perp$. Operator σ_λ zovemo **refleksija u odnosu na** λ. Ako $\mu \in \mathfrak{h}^*(R)$ prikažemo u obliku $\mu = c\lambda + \nu$ za jedinstvene $c \in \mathbb{C}$ i $\nu \perp \lambda$ onda je

$$\sigma_\lambda \mu = -c\lambda + \nu.$$

Tada je $(\mu|\lambda) = c(\lambda|\lambda)$, dakle,

$$c = \frac{(\mu|\lambda)}{(\lambda|\lambda)} \qquad \text{i} \qquad \nu = \mu - \frac{(\mu|\lambda)}{(\lambda|\lambda)}\lambda.$$

Prema tome, formula za refleksiju unitarnog prostora $\mathfrak{h}^*(R)$ u odnosu na $\lambda \in \mathfrak{h}^*(R)$ je

$$\sigma_\lambda \mu = \mu - 2\frac{(\mu|\lambda)}{(\lambda|\lambda)}\lambda.$$

Propozicija 6.3.5. *Za svaki* $\alpha \in R$ *je* $\sigma_\alpha R = R$.

Dokaz: Neka su $\alpha, \beta \in R$. Prema tvrdnji (c) teorema 6.3.2. tada vrijedi $\beta - \beta(h_\alpha)\alpha \in R$. Nadalje, u dokazu propozicije 6.3.3. vidjeli smo da je

$$\beta(h_\alpha) = 2\frac{(\beta|\alpha)}{(\alpha|\alpha)}.$$

Prema tome,

$$\sigma_\alpha \beta = \beta - 2\frac{(\beta|\alpha)}{(\alpha|\alpha)}\alpha = \beta - \beta(h_\alpha)\alpha \in R.$$

Time je dokazano da je $\sigma_\alpha R \subseteq R$, a kako je σ_α^2 jedinični operator, zaključujemo da je $\sigma_\alpha R = R$.

Propozicija 6.3.6. (a) *Ako su* $\alpha, \beta \in R$ *takvi da je* $(\alpha|\beta) < 0$ *onda je* $\alpha + \beta \in R$.

(b) *Ako su* $\alpha, \beta \in R$ *takvi da je* $(\alpha|\beta) > 0$ *onda je* $\alpha - \beta \in R$.

Dokaz: (a) Iz $(\alpha|\beta) < 0$ slijedi $\beta(h_\alpha) = 2\dfrac{(\beta|\alpha)}{(\alpha|\alpha)} < 0$, pa uz oznake iz tvrdnje (e) teorema 6.3.2. imamo $r - q < 0$, dakle, $q > 0$. No tada je prema toj tvrdnji $\alpha + \beta \in R$.

Tvrdnja (b) dobiva se sasvim analogno, a slijedi i neposredno iz tvrdnje (a) zamjenom β sa $-\beta$, jer znamo da je $-R = R$.

6.4 Sistemi korijena

U ovom odjeljku promatrat ćemo konačne podskupove konačnodimenzionalnog realnog unitarnog vektorskog prostora koji imaju neka od svojstava sistema korijena kompleksne poluproste Liejeve algebre.

U cijelom odjeljku V je konačnodimenzionalan realan unitaran prostor. Nadalje, za $x \in V$ označavamo sa σ_x ortogonalnu refleksiju prostora V u odnosu na x, tj.

$$\sigma_x v = v - 2\frac{(v|x)}{(x|x)}x, \qquad v \in V, \qquad \text{tj.} \quad \sigma_x x = -x \quad \text{i} \quad \sigma_x v = v \quad \text{za} \quad v \perp x.$$

Sistem korijena u prostoru V je konačan podskup R od V sa sljedećim svojstvima:

(1) $0 \notin R$ i R razapinje prostor V.

(2) Za $\alpha, \beta \in R$ je $2\frac{(\beta|\alpha)}{(\alpha|\alpha)} \in \mathbb{Z}$.

(3) Za svaki $\alpha \in R$ je $\sigma_\alpha R = R$.

(4) Ako su $\alpha, \beta \in R$ takvi da je $(\alpha|\beta) < 0$, onda je $\alpha + \beta \in R \cup \{0\}$.

(5) Za $\alpha \in R$ i $c \in \mathbb{R}$ vrijedi $c\alpha \in R$ ako i samo ako je $c = 1$ ili $c = -1$.

U ovom sustavu aksioma ima suvišnih. U stvari, može se dokazati da je (4) posljedica prva tri aksioma. Nadalje, može se dokazati da bez pretpostavke (5) za svaki $\alpha \in R$ nužno vrijedi

$$\mathbb{R}\alpha \cap R \subseteq \left\{\pm\frac{1}{2}\alpha, \pm\alpha, \pm 2\alpha\right\}.$$

Dakle, aksiom (5) ekvivalentan je aksiomu

(5′) $\alpha \in R \quad \Longrightarrow \quad 2\alpha \notin R$.

Neka je R sistem korijena u prostoru V i R' sistem korijena u prostoru V'. **Izomorfizam sistema korijena** R na sistem korijena R' je izometrički izomorfizam unitarnih prostora $\varphi : V \to V'$ takav da je $R' = \varphi R$. Nadalje, **automorfizam sistema korijena** R je izomorfizam R na R, tj. ortogonalan operator $\tau : V \to V$ takav da je $\tau R = R$. Sa $\mathrm{Aut}(R)$ označavamo skup svih automorfizama sistema korijena R. Tada je $\mathrm{Aut}(R)$ podgrupa grupe $\mathrm{O}(V)$ svih ortogonalnih operatora na prostoru V. Grupa $\mathrm{Aut}(R)$ je konačna jer je R konačan podskup od V koji razapinje V, dakle, ako je $A : V \to V$ linearan operator takav da je $AR = R$, onda je A potpuno određen svojom restrikcijom $A|R$, a ta je restrikcija permutacija konačnog skupa R.

Prema (3) za svaki $\alpha \in R$ je $\sigma_\alpha \in \mathrm{Aut}(R)$. Sa $W(R)$ označavamo podgrupu od $\mathrm{Aut}(R)$ generiranu sa $\{\sigma_\alpha;\ \alpha \in R\}$. Ta se podgrupa zove **Weylova grupa sistema korijena** R.

Propozicija 6.4.1. *(a) Ako je φ izomorfizam sistema korijena R u prostoru V na sistem korijena R' u prostoru V' onda je $\sigma_{\varphi\alpha}\varphi = \varphi\sigma_\alpha$ za svaki $\alpha \in R$.*

(b) Ako je $\tau \in \mathrm{Aut}(R)$ i $\alpha \in R$ onda je $\sigma_{\tau\alpha} = \tau\sigma_\alpha\tau^{-1}$.

(c) $W(R)$ je normalna podgrupa grupe $\mathrm{Aut}(R)$.

(d) Za $\alpha, \beta \in R$ vrijedi $\sigma_{\sigma_\beta\alpha} = \sigma_\beta\sigma_\alpha\sigma_\beta$.

Dokaz: (a) Kako je φ izometrički izomorfizam sa V na V', za $\alpha \in R$ i $x \in V$ imamo

$$\sigma_{\varphi\alpha}\varphi x = \varphi x - 2\frac{(\varphi x|\varphi\alpha)}{(\varphi\alpha|\varphi\alpha)}\varphi\alpha = \varphi x - 2\frac{(x|\alpha)}{(\alpha|\alpha)}\varphi\alpha = \varphi\left(x - 2\frac{(x|\alpha)}{(\alpha|\alpha)}\alpha\right) = \varphi\sigma_\alpha x.$$

Dakle, $\sigma_{\varphi\alpha}\varphi = \varphi\sigma_\alpha$.

Tvrdnja (b) slijedi neposredno iz tvrdnje (a), a tvrdnja (c) iz tvrdnje (b). Napokon, tvrdnja (d) je posljedica tvrdnje (b) jer je $\sigma_\beta \in W(R) \subseteq \mathrm{Aut}(R)$ i $\sigma_\beta^2 = I_V$, pa je $\sigma_\beta^{-1} = \sigma_\beta$.

Neka je R sistem korijena u prostoru V. Vektor $x \in V$ zove se **regularan** u odnosu na R, ako je $(\alpha|x) \neq 0 \ \forall\alpha \in R$. Skup V^{reg} svih regularnih vektora je komplement unije hiperravnina $\alpha^\perp$, $\alpha \in R$. Komponente povezanosti skupa V^{reg} zovu se **Weylove komore** u V u odnosu na sistem korijena R. Za $x \in V^{\mathrm{reg}}$ stavimo

$$R_+(x) = \{\alpha \in R;\ (\alpha|x) > 0\} \qquad \text{i} \qquad R_-(x) = \{\alpha \in R;\ (\alpha|x) < 0\} = -R_+(x).$$

Tada je $R = R_+(x) \cup R_-(x)$ i $R_+(x) \cap R_-(x) = \emptyset$. Ako su $x, y \in V^{\mathrm{reg}}$ u istoj Weylovoj komori onda zbog neprekidnosti funkcija $z \mapsto (\alpha|z)$, $\alpha \in R$, očito vrijedi $R_\pm(x) = R_\pm(y)$. Za Weylovu komoru C pisemo $R_\pm(C) = R_\pm(x)$ za bilo koji $x \in C$. Nije teško dokazati da vrijedi

Propozicija 6.4.2. *Podskup R_+ od R ima svojstva*

(a) $R = R_+ \cup (-R_+)$ i $R_+ \cap (-R_+) = \emptyset$,

(b) za $\alpha, \beta \in R_+$ takve da je $\alpha + \beta \in R$ vrijedi $\alpha + \beta \in R_+$,

ako i samo ako je $R_+ = R_+(C)$ za neku Weylovu komoru C.

Zadatak 6.4.1. *Dokažite propoziciju 6.4.2.*

Neka je C Weylova komora. Za $\alpha \in R$ kažemo da je **prost korijen** u odnosu na C ako je $\alpha \in R_+(C)$ i ne postoje $\beta, \gamma \in R_+(C)$ takvi da je $\alpha = \beta + \gamma$. Skup svih prostih korijena u odnosu na Weylovu komoru C označavamo sa $B(C)$.

Teorem 6.4.3. *Neka je C Weylova komora u V u odnosu na sistem korijena R.*

(a) $B(C)$ je baza vektorskog prostora V.

(b) Za međusobno različite $\alpha, \beta \in B(C)$ vrijedi $(\alpha|\beta) \leq 0$.

(c) Svaki $\beta \in R$ ima prikaz

$$\beta = \pm \sum_{\alpha \in B(C)} c_\alpha \alpha, \quad \textit{gdje su } c_\alpha \in \mathbb{Z}_+.$$

(d) Vrijedi

$$R_+(C) = \left\{\beta \in R;\ \beta = \sum_{\alpha \in B(C)} c_\alpha \alpha \ \textit{gdje su } c_\alpha \in \mathbb{Z}_+\right\}.$$

Dokaz: Neka je $x \in C$. Ako je $\alpha \in R_+(C) \setminus B(C)$, postoje $\beta, \gamma \in R_+(C)$ takvi da je $\alpha = \beta + \gamma$. Stoga je $(\alpha|x) > (\beta|x)$ i $(\alpha|x) > (\gamma|x)$. Budući da je skup $R_+(C)$ konačan, odatle lako slijedi da je

$$R_+(C) = \left\{ \beta \in R;\ \beta = \sum_{\alpha \in B(C)} c_\alpha \alpha \text{ za neke } c_\alpha \in \mathbb{Z}_+ \right\}.$$

Time je dokazano (d), a budući da je R disjunktna unija $R_+(C)$ i $R_-(C) = -R_+(C)$, slijedi i tvrdnja (c).

Pretpostavimo da su $\alpha, \beta \in B(C)$ takvi da je $(\alpha|\beta) > 0$. Prema (4) tada vrijedi $\alpha - \beta, \beta - \alpha \in R \cup \{0\}$. Budući da su $\alpha, \beta \in B(C)$ i $\alpha = \beta + (\alpha - \beta)$ i $\beta = \alpha + (\beta - \alpha)$, zaključujemo da $\alpha - \beta \notin R_+(C)$ i $\beta - \alpha \notin R_+(C)$. To znači da je $\alpha - \beta = 0$, tj. $\alpha = \beta$. Time je dokazana tvrdnja (b).

Budući da skup R razapinje prostor V, iz (c) slijedi da $B(C)$ razapinje V. Treba još dokazati linearnu nezavisnost skupa $B(C)$. Pretpostavimo da je

$$\sum_{\alpha \in B(C)} c_\alpha \alpha = 0 \qquad \text{za neke } c_\alpha \in \mathbb{R}.$$

Stavimo sada

$$\gamma = \sum_{\alpha \in B(C),\, c_\alpha > 0} c_\alpha \alpha \qquad \text{i} \qquad \delta = \sum_{\alpha \in B(C),\, c_\alpha < 0} c_\alpha \alpha.$$

Tada je prema tvrdnji (b)

$$(\gamma|\delta) = \sum_{\alpha, \beta \in B(C),\, c_\alpha > 0,\, c_\beta < 0} c_\alpha c_\beta (\alpha|\beta) \geq 0.$$

Stoga imamo

$$0 = (\gamma + \delta|\gamma + \delta) = (\gamma|\gamma) + (\delta|\delta) + 2(\gamma|\delta) \geq (\gamma|\gamma) + (\delta|\delta),$$

a odatle slijedi $\gamma = \delta = 0$. Sada je za $x \in C$

$$0 = (\gamma|x) = \sum_{\alpha \in B(C),\, c_\alpha > 0} c_\alpha (\alpha|x),$$

a budući da je $(\alpha|x) > 0$ za svaki $\alpha \in B(C)$, zaključujemo da je $\{\alpha \in B(C);\ c_\alpha > 0\} = \emptyset$. Analogno iz $\delta = 0$ slijedi da je i $\{\alpha \in B(C);\ c_\alpha < 0\} = \emptyset$. To pokazuje da je $c_\alpha = 0\ \forall \alpha \in B(C)$. Time je dokazano da je skup $B(C)$ linearno nezavisan, dakle, baza prostora V, odnosno, dokazana je tvrdnja (a).

Propozicija 6.4.4. *Za svaki $\alpha \in R$ postoji Weylova komora C takva da je $\alpha \in B(C)$.*

Dokaz: Neka je P ortogonalni projektor prostora V na potprostor $\alpha^\perp$. Dakle, $\operatorname{Ker} P = \mathbb{R}\alpha$. Tada je

$$\{P\beta;\ \beta \in R,\ \beta \notin \mathbb{R}\alpha\} = \{P\beta;\ \beta \in R \setminus \{\alpha, -\alpha\}\}$$

konačan podskup potprostora $\alpha^\perp$ koji ne sadrži 0. Stoga postoji $y \in \alpha^\perp$ takav da je $(P\beta|y) \neq 0$ za svaki $\beta \in R \setminus \{\alpha, -\alpha\}$. Budući da je P ortogonalni projektor na $\alpha^\perp$ i $y \in \alpha^\perp$, to znači da je $(\beta|y) \neq 0$ za svaki $\beta \in R \setminus \{\alpha, -\alpha\}$. Tada su $\{(\alpha|\alpha) + |(\beta|\alpha)|;\ \beta \in R \setminus \{\alpha, -\alpha\}\}$ i $\{|(\beta|y)|;\ \beta \in R \setminus \{\alpha, -\alpha\}\}$ dva konačna skupa strogo pozitivnih brojeva, možemo izabrati $c > 0$ tako da bude

$$c(\alpha|\alpha) + c|(\beta|\alpha)| < |(\beta|y)| \qquad \forall \beta \in R \setminus \{\alpha, -\alpha\}.$$

Tada za $x = y + c\alpha$ vrijedi $(\pm\alpha|x) = \pm c(\alpha|\alpha) \neq 0$ i

$$\beta \in R \setminus \{\alpha, -\alpha\} \qquad \Longrightarrow \qquad (\beta|x) = (\beta|y) + c(\beta|\alpha) \neq 0.$$

Dakle, $x \in V^{\text{reg}}$. Neka je C Weylova komora koja sadrži x. Sada je

$$(\alpha|x) = (\alpha|y) + c(\alpha|\alpha) = c(\alpha|\alpha) > 0,$$

dakle, $\alpha \in R_+(x) = R_+(C)$. Nadalje, ako je $\beta \in R_+(C) \setminus \{\alpha\}$, onda imamo

$$(\beta|x) = |(\beta|x)| = |(\beta|y) + c(\beta|\alpha)| \geq |(\beta|y)| - c|(\beta|\alpha)| > c(\alpha|\alpha) = (\alpha|x).$$

To pokazuje da ne postoje $\beta, \gamma \in R_+(C)$ takvi da je $\alpha = \beta + \gamma$, a to znači da je $\alpha \in B(C)$.

Proučit ćemo sada moguće geometrijske odnose između dva neproporcionalna korijena $\alpha, \beta \in R$. Pretpostavimo da je $\|\alpha\| \geq \|\beta\|$. Eventualnom zamjenom β sa $-\beta$ možemo postići da bude $(\alpha|\beta) \leq 0$. Označimo sa $\vartheta \in \langle 0, \pi\rangle$ kut između vektora α i β. Tada imamo

$$2\frac{(\beta|\alpha)}{(\alpha|\alpha)} \cdot 2\frac{(\alpha|\beta)}{(\beta|\beta)} = 4\frac{(\alpha|\beta)^2}{\|\alpha\|^2\|\beta\|^2} = 4(\cos\vartheta)^2 < 4.$$

Budući da su $n(\beta, \alpha) = 2\dfrac{(\beta|\alpha)}{(\alpha|\alpha)}$ i $n(\alpha, \beta) = 2\dfrac{(\alpha|\beta)}{(\beta|\beta)}$ cijeli brojevi ≤ 0 i $|n(\beta, \alpha)| \leq |n(\alpha, \beta)|$, sve mogućnosti su prikazane u sljedećoj tablici:

	$n(\beta,\alpha)$	$n(\alpha,\beta)$	$\dfrac{\|\alpha\|^2}{\|\beta\|^2}$	$\cos\vartheta$	ϑ
1.	0	0		0	$\frac{\pi}{2}$ ili 90°
2.	-1	-1	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$ ili 120°
3.	-1	-2	2	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$ ili 135°
4.	-1	-3	3	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{5\pi}{6}$ ili 150°

Propozicija 6.4.5. *Ako su $\alpha, \beta \in R$ i $(\alpha|\beta) < 0$, onda je $(\alpha|\alpha) + (\beta|\beta) + 4(\alpha|\beta) \leq 0$.*

Dokaz: Slučaj $\alpha = -\beta$ je trivijalan. Pretpostavimo da je $\alpha \neq -\beta$. Tada su α i β neproporcionalni i možemo pretpostaviti da je $\|\alpha\| \geq \|\beta\|$. Iz tablice mogućnosti vidimo da je tada

$$\frac{(\alpha|\alpha)}{(\beta|\beta)} + 2\frac{(\alpha|\beta)}{(\beta|\beta)} = 0 \qquad \text{i} \qquad \frac{(\beta|\beta)}{(\beta|\beta)} + 2\frac{(\alpha|\beta)}{(\beta|\beta)} \leq 0.$$

Zbrojimo li i pomnožimo sa $(\beta|\beta)$ dobivamo traženu nejednakost.

Ako je C Weylova komora i $\tau \in \mathrm{Aut}(R)$, očito je i $\tau(C)$ Weylova komora. Posebno, Weylova grupa $W(R)$ djeluje na skupu svih Weylovih komora.

Teorem 6.4.6. *(a) Weylova grupa $W(R)$ djeluje tranzitivno na skupu svih Weylovih komora.*

(b) Za svaku Weylovu komoru C Weylova grupa $W(R)$ generirana je skupom $\{\sigma_\alpha;\ \alpha \in B(C)\}$.

Dokaz: Neka je C Weylova komora i neka je W' podgrupa od $W(R)$ generirana skupom $\{\sigma_\alpha;\ \alpha \in B(C)\}$. Neka je i D Weylova komora. Izaberimo $\sigma \in W'$ tako da broj elemenata $|\sigma(R_+(D)) \cap R_+(C)|$ bude najveći mogući. Pretpostavimo da je $\sigma(R_+(D)) \neq R_+(C)$. Tada očito $B(C)$ nije sadržano u $\sigma(R_+(D))$, pa postoji $\alpha \in B(C)$ takav da $\alpha \notin \sigma(R_+(D))$. Tvrdimo da je tada $\sigma_\alpha(R_+(C) \setminus \{\alpha\}) = R_+(C) \setminus \{\alpha\}$. Doista, neka je $\gamma \in R_+(C) \setminus \{\alpha\}$. Tada je

$$\gamma = \sum_{\beta \in B(C)} c_\beta \beta \qquad \text{za neke} \quad c_\beta \in \mathbb{Z}_+$$

i sigurno je $c_\beta > 0$ za neki $\beta \neq \alpha$. Nadalje,

$$\sigma_\alpha \gamma = \gamma - 2\frac{(\gamma|\alpha)}{(\alpha|\alpha)}\alpha = \sum_{\beta \in B(C)} d_\beta \beta \qquad \text{i} \qquad d_\beta = c_\beta \quad \text{za} \quad \beta \neq \alpha.$$

Prema tome, za neki $\beta \in B(C)$ je $d_\beta > 0$, a to prema teoremu 6.4.3. znači da je $\sigma_\alpha \gamma \in R_+(C) \setminus \{\alpha\}$. Odatle slijedi da presjek $\sigma_\alpha \sigma(R_+(D)) \cap R_+(C)$ sadrži skup $(\sigma(R_+(D)) \cap R_+(C)) \cup \{\alpha\}$, a to je nemoguće zbog izbora elementa $\sigma \in W'$, tj. zbog maksimalnosti broja $|\sigma(R_+(D)) \cap R_+(C)|$. Ova kontardikcija pokazuje da je $\sigma(R_+(D)) = R_+(C)$. To znači da je $\sigma(D) = C$. Time je dokazano da grupa W' djeluje tranzitivno na skupu svih Weylovih komora.

Ostaje još da se dokaže da je $W' = W(R)$. Neka je $\alpha \in R$. Prema propoziciji 6.4.4. postoji Weylova komora D takva da je $\alpha \in B(D)$. Izaberimo $\sigma \in W'$ tako da bude $\sigma(D) = C$, dakle, $\sigma(B(D)) = B(C)$. Tada je $\sigma\alpha = \beta \in B(C)$, a prema tvrdnji (b) propozicije 6.4.1. je $\sigma_\beta = \sigma_{\sigma\alpha} = \sigma\sigma_\alpha\sigma^{-1}$. Odatle je $\sigma_\alpha = \sigma^{-1}\sigma_\beta\sigma \in W'$. Dakle, skup $\{\sigma_\alpha;\ \alpha \in R\}$ sadržan je u grupi W', a kako taj skup generira čitavu grupu $W(R)$, zaključujemo da je $W' = W(R)$.

Napominjemo da se može dokazati da Weylova grupa $W(R)$ djeluje *prosto tranzitivno* na skupu svih Weylovih komora, tj. da za Weylove komore C i D postoji jedinstven $\sigma \in W(R)$ takav da je $\sigma(D) = C$.

Zadržimo oznake

$$n(\alpha, \beta) = 2\frac{(\alpha|\beta)}{(\beta|\beta)}, \qquad \alpha, \beta \in R.$$

Tada je

$$\sigma_\alpha \beta = \beta - n(\beta, \alpha)\alpha, \qquad \alpha, \beta \in R.$$

Teorem 6.4.7. *Neka su R i R' sistemi korijena u realnim prostorima V i V' i neka je C Weylova komora u V u odnosu na R i C' Weylova komora u V' u odnosu na R'. Svaka bijekcija $\varphi : B(C) \to B(C')$, takva da je $n(\varphi\alpha, \varphi\beta) = n(\alpha, \beta)$ $\forall \alpha, \beta \in B(C)$ i da je $\|\varphi\alpha\| = \|\alpha\|$ $\forall \alpha \in B(C)$ jedinstveno se proširuje do izomorfizma sistema korijena R na sistem korijena R'. Obratno, ako je φ izomorfizam sistema korijena R na sistem korijena R' onda vrijedi $n(\varphi\alpha, \varphi\beta) = n(\alpha, \beta)$ $\forall \alpha, \beta \in R$.*

Dokaz: Pretpostavimo prvo da je φ izomorfizam sistema korijena R na sistem korijena R'. Tada je $\varphi : V \to V'$ izometrički izomorfizam, tj. $(\varphi x, \varphi y) = (x|y)\ \ \forall x, y \in V$. Posebno, za korijene $\alpha, \beta \in R$ imamo

$$n(\varphi\alpha, \varphi\beta) = 2\frac{(\varphi\alpha|\varphi\beta)}{(\varphi\beta|\varphi\beta)} = 2\frac{(\alpha|\beta)}{(\beta|\beta)} = n(\alpha, \beta).$$

Pretpostavimo sada da je $\varphi : B(C) \to B(C')$ bijekcija takva da vrijedi $n(\varphi\alpha, \varphi\beta) = n(\alpha, \beta)$ $\forall \alpha, \beta \in B(C)$ i $\|\varphi\alpha\| = \|\alpha\|\ \forall \alpha \in B(C)$. Neka je istim znakom φ označen jedinstven izomorfizam sa V na V' koji proširuje tu bijekciju. Tada za $\alpha, \beta \in B(C)$ imamo

$$\sigma_{\varphi\alpha}\varphi\beta = \varphi\beta - n(\varphi\beta, \varphi\alpha)\varphi\alpha = \varphi(\beta - n(\beta, \alpha)\alpha) = \varphi\sigma_\alpha\beta.$$

Budući da je $B(C)$ baza od V, odatle slijedi da je $\sigma_{\varphi\alpha}\varphi = \varphi\sigma_\alpha$, odnosno, $\sigma_{\varphi\alpha} = \varphi\sigma_\alpha\varphi^{-1}$. Zbog tvrdnje (b) teorema 6.4.6. slijedi $W(R') = \varphi W(R)\varphi^{-1}$.

Za $\alpha \in R$ prema propoziciji 6.4.4. i prema tvrdnji (a) teorema 6.4.6. postoji $\sigma \in W(R)$ takav da je $\sigma\alpha \in B(C)$. Sada je

$$\varphi\alpha = (\varphi\sigma^{-1}\varphi^{-1})(\varphi\sigma\alpha) \in R'$$

jer je $\varphi\sigma^{-1}\varphi^{-1} \in W(R')$. Prema tome, $\varphi(R) \subseteq R'$. Analogno vrijedi i $\varphi^{-1}(R') \subseteq R$, a iz te dvije inkluzije slijedi jednakost $\varphi(R) = R'$.

Napokon, iz $n(\varphi\alpha, \varphi\beta) = n(\alpha, \beta)$ i $\|\varphi\beta\| = \|\beta\|$ slijedi $(\varphi\alpha|\varphi\beta) = (\alpha|\beta)\ \ \forall \alpha, \beta \in B(C)$. Kako je $B(C)$ baza prostora V, odatle se pomoću Gramm−Schmidtovog postupka dokazuje da izomorfizam $\varphi : V \to V'$ prevodi ortonormiranu bazu prostora V (dobivenu ortonormiranjem baze $B(C)$ Gramm−Schmidtovim postupkom) prevodi u ortonormiranu bazu prostora V' (dobivenu Gramm−Scmidtovim postupkom iz baze $B(C')$. Dakle, φ je izometrija, što znači da je φ izomorfizam sistema korijena R na sistem korijena R'.

Za korijene $\alpha, \beta \in R$ kažemo da su jedan drugome **susjedi** ako je $\alpha \neq \pm\beta$ i $(\alpha|\beta) \neq 0$. Za podskup S od R **lanac** u S je konačan niz $(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ elemenata iz S takvih da su α_{i-1} i α_i susjedi za $i = 1, \ldots, m$. Poskup $S \subseteq R$ je **povezan** ako za svaka dva njegova međusobno različita elementa α i β postoji lanac $(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ u S takav da je $\alpha_0 = \alpha$ i $\alpha_m = \beta$. Na povezanom podskupu S od R možemo definirati metriku ovako:

$$d_S(\alpha, \beta) = \min\{m \in \mathbb{N};\ \text{postoji lanac } (\alpha_0, \ldots, \alpha_m) \text{ takav da je } \alpha_0 = \alpha \text{ i } \alpha_m = \beta\}, \quad \alpha \neq \beta,$$

$$d_S(\alpha, \alpha) = 0.$$

Propozicija 6.4.8. *Neka je $S \neq \emptyset$ povezan podskup od R. Postoji $\beta \in S$ takav da je $S \setminus \{\beta\}$ povezan.*

Dokaz: Možemo pretpostaviti da skup S ima barem dva elementa. Izaberimo $\alpha, \beta \in S$ tako da udaljenost $d_S(\alpha, \beta)$ bude maksimalna. Tvrdimo da je tada skup $S \setminus \{\beta\}$ povezan. Doista, neka je $\gamma \in S \setminus \{\beta\}$ i neka je $(\alpha_0, \ldots, \alpha_m)$ lanac u S takav da je $\alpha_0 = \alpha$, $\alpha_m = \gamma$ i $m = d_S(\alpha, \gamma)$. Tada je $m \leq d_S(\alpha, \beta)$, dakle, $\alpha_i \neq \beta\ \ \forall i \in \{0, \ldots, m\}$. Dakle, $(\alpha_0, \ldots, \alpha_m)$ je lanac u $S \setminus \{\beta\}$.

Za povezan skup $S \subseteq R$ korijen $\beta \in S$ je **ekstreman** ako je skup $S \setminus \{\beta\}$ povezan. **Standardan podskup** od R je podskup $S \subseteq R_+(C)$ za neku Weylovu komoru C takav da je $(\alpha|\beta) \leq 0$ $\forall \alpha, \beta \in S$, $\alpha \neq \beta$. Prema tvrdnji (b) teorema 6.4.3. za Weylovu komoru C baza $B(C)$ je standardni podskup od R. Sasvim analogno dokazu linearne nezavisnosti od $B(C)$ dokazuje se:

Propozicija 6.4.9. *Svaki standardni podskup od R je linearno nezavisan.*

Propozicija 6.4.10. *Neka je S povezan standardni podskup od R. Tada je*

$$\beta_S = \sum_{\alpha \in S} \alpha \in R.$$

Ako su svi korijeni $\alpha \in S$ iste duljine, onda je $\|\beta_S\| = \|\alpha\|$ za $\alpha \in S$.

Dokaz: Pretpostavimo da prva tvrdnja nije istinita i neka je S kontraprimjer s najmanjim mogućim brojem elemenata; naravno, $|S| \geq 2$. Neka je β ekstremni korijen iz S. Tada je skup $T = S \setminus \{\beta\}$ standardan, pa je po pretpostavci $\beta_T \in R$. Nadalje, iz pretpostavke slijedi da je $(\beta_T, \beta) < 0$. Sada iz aksioma (4) sistema korijena slijedi da je $\beta_S = \beta_T + \beta \in R \cup \{0\}$. Kako zbog linearne nezavisnosti skupa S vrijedi $\beta_S \neq 0$, zaključujemo da je $\beta_S \in R$. Ova kontradikcija dokazuje prvu tvrdnju.

Pretpostavimo sada da su svi korijeni iz S iste duljine d i da druga tvrdnja nije istinita. Neka je ponovo S kontraprimjer s najmanjim mogućim brojem elemenata. Za ekstremni korijen $\beta \in S$ i za $T = S \setminus \{\beta\}$ je tada $\|\beta_T\| = \|\beta\| = d$. Kako je opet $(\beta_T|\beta) < 0$, iz tablice na str. 90 zbog $\|\beta_T\| = \|\beta\|$ slijedi

$$2\frac{(\beta_T|\beta)}{(\beta_T|\beta_T)} = 2\frac{(\beta_T|\beta)}{(\beta|\beta)} = -1.$$

Odatle je $2(\beta_T|\beta) = -(\beta|\beta) = -d^2$, dakle,

$$\|\beta_S\|^2 = (\beta_T + \beta|\beta_T + \beta) = (\beta_T|\beta_T) = (\beta|\beta) + (\beta_T|\beta_T) + 2(\beta_T|\beta) = d^2 + d^2 - d^2 = d^2.$$

Ova kontradikcija dokazuje drugu tvrdnju.

Neka je C Weylova komora. Za $\beta \in R$ definiramo **nivo korijena** β u odnosu na C : to je prirodan broj $\ell_C(\beta)$ zadan ovako:

$$\beta = \sum_{\alpha \in B(C)} c_\alpha \alpha \qquad \Longrightarrow \qquad \ell_C(\beta) = \sum_{\alpha \in B(C)} |c_\alpha|.$$

Dakle, za $\beta \in R_+(C)$ je $\ell_C(\beta) = \sum_{\alpha \in B(C)} c_\alpha$, a za $\beta \in R_-(C)$ je $\ell_C(\beta) = \ell_C(-\beta)$. Nadalje, definiramo **nosač korijena** β u odnosu na C :

$$\mathrm{Supp}_C(\beta) = \{\alpha \in B(C);\ c_\alpha \neq 0\}.$$

Propozicija 6.4.11. *Za $\beta \in R_+(C) \setminus B(C)$ postoji $\alpha \in \mathrm{Supp}_C(\beta)$ takav da je $\beta - \alpha \in R_+(C)$. Za svaki takav α je $\ell_C(\beta) = \ell_C(\beta - \alpha) + 1$.*

Dokaz: Iz $(\beta|\beta) > 0$ slijedi da je $(\beta|\alpha) > 0$ za neki $\alpha \in \mathrm{Supp}_C(\beta)$. Za takav α prema tvrdnji (b) propozicije 6.3.6. razlika $\beta - \alpha$ je korijen. Neki od koeficijenata korijena $\beta - \alpha$ u rastavu po bazi $B(C)$ je pozitivan, pa slijedi da je $\beta - \alpha \in R_+(C)$. Posljednja je tvrdnja trivijalna.

Propozicija 6.4.12. *Za svaki korijen β nosač $\mathrm{Supp}_C(\beta)$ je povezan.*

Dokaz: Pretpostavimo da tvrdnja nije istinita i neka je $\beta \in R_+(C)$ kontraprimjer s najmanjim nivoom $\ell_C(\beta)$. Budući da $\mathrm{Supp}_C(\beta)$ nije povezan, vrijedi $\mathrm{Supp}_C(\beta) = S_1 \cup S_2$, gdje su S_1 i S_2 neprazni i disjunktni i vrijedi $(\alpha_1|\alpha_2) = 0$ za bilo koje $\alpha_1 \in S_1$ i $\alpha_2 \in S_2$. Budući da je $(\beta|\beta) > 0$ i svi koeficijenti c_α u prikazu β pomoću baze $B(C)$ su ≥ 0, postoji $\gamma \in \mathrm{Supp}_C(\beta)$ takav da je $(\beta|\gamma) > 0$. Tada je prema tvrdnji (b) propozicije 6.3.6. $\beta - \gamma \in R_+(C)$. Možemo pretpostaviti da je $\gamma \in S_1$. Budući da je $\ell_C(\beta - \gamma) < \ell_C(\beta)$, po pretpostavci indukcije nosač $\mathrm{Supp}_C(\beta - \gamma)$ je povezan. Međutim, očito je

$$\mathrm{Supp}_C(\beta - \gamma) = (S_1 \setminus \{\gamma\}) \cup S_2.$$

Iz povezanosti nosača $\mathrm{Supp}_C(\beta - \gamma)$ slijedi da je $S_1 \setminus \{\gamma\} = \emptyset$, tj. $S_1 = \{\gamma\}$, i $c_\gamma = 1$. Dakle,

$$\beta = \gamma + \sum_{\alpha \in S_2} c_\alpha \alpha.$$

Prema aksiomima sistema korijena $\sigma_\gamma \beta$ je korijen. Nadalje, za svaki $\alpha \in S_2$ je $(\gamma|\alpha) = 0$, dakle, $\sigma_\gamma \alpha = \alpha$. Slijedi

$$\sigma_\gamma \beta = \sigma_\gamma \gamma + \sum_{\alpha \in S_2} c_\alpha \sigma_\gamma \alpha = -\gamma + \sum_{\alpha \in S_2} c_\alpha \alpha.$$

Dobivena jednakost u suprotnosti je s tvrdnjom (c) teorema 6.4.3. Ova kontradikcija dokazuje propoziciju.

Neka je R sistem korijena u prostoru V. Podskup R' od R zove se **podsistem** od R, ako za potprostor $V' = \mathrm{span}\, R'$ vrijedi $R' = R \cap V'$. Primijetimo da je tada R' sistem korijena u prostoru V' : naime, za $\alpha \in V'$ je $\sigma_\alpha V' = V'$, pa posebno za $\alpha \in R'$ vrijedi

$$\sigma_\alpha R' = \sigma_\alpha (R \cap V') = \sigma_\alpha R \cap \sigma_\alpha V' = R \cap V' = R'.$$

Za podsistem R'' od R kažemo da je **komplementaran** podsistemu R', ako je $R'' = R \setminus R'$ i vrijedi $V = V' \dotplus V''$ za $V' = \mathrm{span}\, R'$ i $V'' = \mathrm{span}\, R''$. Podsistem R' zove se **direktni faktor** od R ako je $R \setminus R'$ podsistem od R komplementaran podsistemu R'. Za direktni faktor R' od R kažemo da je **netrivijalan** ako je $R' \neq \emptyset$ i $R' \neq R$. Kažemo da je R **ireducibilan sistem korijena** ako je $R \neq \emptyset$ i R ne sadrži nijedan netrivijalan direktni faktor.

Propozicija 6.4.13. *Ako su R' i R'' komplementarni podsistemi od R, onda su potprostori $V' = \mathrm{span}\, R'$ i $V'' = \mathrm{span}\, R''$ međusobno ortogonalni, tj. $V = V' \oplus V''$.*

Dokaz: Za $\alpha \in R'$ refleksija σ'_α prostora V' u odnosu na α je restrikcija na V' refleksije σ_α prostora V u odnosu na α. Imamo $\sigma_\alpha R' = R'$ i $\sigma_\alpha R = R$ za svaki $\alpha \in R'$, pa slijedi i $\sigma_\alpha R'' = R''$ za svaki $\alpha \in R'$. Slijedi $\sigma_\alpha V'' = V''$ za svaki $\alpha \in R'$. Međutim, za $v'' \in V''$ i $\alpha \in R'$ imamo

$$\sigma_\alpha v'' = v'' - 2\frac{(\alpha|v'')}{(\alpha|\alpha)}\alpha \quad \Longrightarrow \quad 2\frac{(\alpha|v'')}{(\alpha|\alpha)}\alpha = v'' - \sigma_\alpha v'' \in V' \cap V'' = \{0\} \quad \Longrightarrow \quad (\alpha|v'') = 0.$$

Dakle, $\alpha \perp V''$ $\forall \alpha \in R'$, pa slijedi $V' \perp V''$.

Korolar 6.4.14. *Ako je neka baza sistema korijena R povezana, sve su baze od R povezane i R je ireducibilan sistem korijena.*

Dokaz: Ako su $B = B(C)$ i $B_1 = B(C_1)$ baze sistema korijena R pridružene Weylovim komorama C i C_1, prema tvrdnji (a) teorema 6.4.6. postoji $\sigma \in W(R)$ takav da je $\sigma C = C_1$, dakle, $\sigma B = B_1$. Kako su elementi Weylove grupe ortogonalni operatori, iz povezanosti baze B slijedi povezanost baze B_1.

Pretpostavimo sada da R nije ireducibilan i neka su R' i R'' međusobno komplementarni netrivijalni podsistemi od R. Neka je B' baza sistema korijena R' i B'' baza sistema korijena R''. Tada je $B' \cup B''$ baza sistema korijena R i ona je zbog propozicije 6.4.13. nepovezana.

Propozicija 6.4.15. *Neka su R_1 i R_2 direktni faktori sistema korijena R. Tada su $R_1 \cup R_2$ i $R_1 \cap R_2$ direktni faktori od R.*

Dokaz: Neka su R'_1 i R'_2 podsistemi od R komplementarni podsistemima R_1 i R_2. Stavimo

$$V_1 = \mathrm{span}\, R_1, \qquad V_2 = \mathrm{span}\, R_2, \qquad V'_1 = \mathrm{span}\, R'_1, \qquad V'_2 = \mathrm{span}\, R'_2.$$

Tvrdimo da su $R_1 \cap R_2$ i $R'_1 \cup R'_2$ međusobno komplementarni podsistemi od R i da vrijedi

$$\operatorname{span}(R_1 \cap R_2) = V_1 \cap V_2 \qquad \text{i} \qquad \operatorname{span}(R'_1 \cup R'_2) = V'_1 + V'_2.$$

Prije svega, iz $R = R_1 \cup R'_1$ i $R = R_2 \cup R'_2$, slijedi

$$R = (R_1 \cup R'_1) \cap (R_2 \cup R'_2) = (R_1 \cap R_2) \cup (R_1 \cap R'_2) \cup (R'_1 \cap R_2) \cup (R'_1 \cap R'_2) \subseteq (R_1 \cap R_2) \cup (R'_1 \cup R'_2),$$

dakle, vrijedi

$$R = (R_1 \cap R_2) \cup (R'_1 \cup R'_2).$$

S druge strane, kako je $R_1 \cap R'_1 = \emptyset$ i $R_2 \cap R'_2 = \emptyset$, imamo

$$(R_1 \cap R_2) \cap (R'_1 \cup R'_2) = (R_1 \cap R_2 \cap R'_1) \cup (R_1 \cap R_2 \cap R'_2) = \emptyset.$$

Što se tiče potprostora razapetih s ta dva komplementarna podskupa od R, imamo

$$\operatorname{span}(R'_1 \cup R'_2) = \operatorname{span} R'_1 \ + \ \operatorname{span} R'_2 = V'_1 + V'_2.$$

Nadalje,

$$V_1 \cap V_2 = (\operatorname{span} R_1) \cap (\operatorname{span} R_2) \supseteq \operatorname{span}(R_1 \cap R_2).$$

Prema tome, vrijedi

$$V = \operatorname{span} R = \operatorname{span}(R_1 \cap R_2) + \operatorname{span}(R'_1 \cup R'_2) sub (V_1 \cap V_2) + (V'_1 + V'_2),$$

dakle,

$$V = (V_1 \cap V_2) + (V'_1 + V'_2).$$

Dokažimo da je ta suma direktna. Prije svega, iz

$$\dim V \leq \dim (V_1 \cap V_2) + \dim (V'_1 + V'_2) \qquad \text{i} \qquad \dim (V'_1 + V'_2) = \dim V'_1 + \dim V'_2 - \dim (V'_1 \cap V'_2)$$

slijedi

$$\dim V \leq \dim (V_1 \cap V_2) - \dim (V'_1 \cap V'_2) + \dim V'_1 + \dim V'_2. \tag{6.6}$$

Zamijenimo li uloge R_1 i R_2 sa R'_1 i R'_2 dobivamo i nejednakost

$$\dim V \leq \dim (V'_1 \cap V'_2) - \dim (V_1 \cap V_2) + \dim V_1 + \dim V_2.$$

Kako je $\dim V = \dim V_1 + \dim V'_1 = \dim V_2 + \dim V'_2$, imamo $\dim V_1 = \dim V - \dim V'_1$ i $\dim V_2 = \dim V - \dim V'_2$, pa iz prethodne nejednakosti dobivamo

$$\dim V \leq \dim (V'_1 \cap V'_2) - \dim (V_1 \cap V_2) + 2 \dim V - \dim V'_1 - \dim V'_2,$$

odnosno,

$$\dim V \geq \dim (V_1 \cap V_2) - \dim (V'_1 \cap V'_2) + \dim V'_1 + \dim V'_2.$$

Dakle, u (6.6) vrijedi znak jednakosti, pa slijedi

$$\dim V = \dim (V_1 \cap V_2) + \dim V'_1 + \dim V'_2 - \dim (V'_1 \cap V'_2) = \dim (V_1 \cap V_2) + \dim (V'_1 + V'_2).$$

Time je dokazano da je

$$V = (V_1 \cap V_2) \dotplus (V'_1 + V'_2).$$

Treba još dokazati da je $\operatorname{span}(R_1 \cap R_2) = V_1 \cap V_2$, a ne samo $\operatorname{span}(R_1 \cap R_2) \subseteq V_1 \cap V_2$. Pretpostavimo da je $v \in V_1 \cap V_2$ ortogonalan na sve korijene $\alpha \in R_1 \cap R_2$. Kako je

$$(V_1 \cap V_2)^\perp = V_1^\perp + V_2^\perp = V_1' + V_2' = \operatorname{span}(R_1' \cup R_2'),$$

slijedi da je v ortogonalan i na sve korijene iz $R_1' \cup R_2'$. Sada iz $R = (R_1 \cap R_2) \cup (R_1' \cup R_2')$ zaključujemo da je v ortogonalan na sve korijene iz R. Kako je $V = \operatorname{span} R$, slijedi $v = 0$. Time je dokazano da je $\operatorname{span}(R_1 \cap R_2) = V_1 \cap V_2$.

To pokazuje da su $R_1 \cap R_2$ i $R_1' \cup R_2'$ međusobno komplementarni podskupovi od R i da je

$$V = \operatorname{span}(R_1 \cap R_2) \dotplus \operatorname{span}(R_1' \cup R_2').$$

Drugim riječima, $R_1 \cap R_2$ i $R_1' \cup R_2'$ su međusobno komplementarni podsistemi od R. Posebno, $R_1 \cap R_2$ je direktni faktor od R. Također je $R_1' \cup R_2'$ direktni faktor od R, a zamjenom uloge R_1 i R_2 sa R_1' i R_2' zaključujemo da je $R_1 \cup R_2$ direktni faktor od R.

Za podskup S od R stavimo

$$V_S = \operatorname{span} S \qquad \text{i} \qquad R_S = R \cap V_S.$$

Očito je za svaki podskup S od R tako definiran skup R_S podsistem od R koji sadrži S. Štoviše, R_S je najmanji podsistem od R koji sadrži skup S.

Teorem 6.4.16. *Neka je $B = B(C)$ baza sistema korijena R u odnosu na neku Weyalovu komoru C. Neka su $B_1, \dots, B_s$ sve različite komponente povezanosti od B. Tada su $R_{B_1}, \dots, R_{B_s}$ svi ireducibilni direktni faktori od R i vrijedi*

$$R = R_{B_1} \cup \cdots \cup R_{B_s} \quad (\textit{disjunktna unija}) \quad \textit{i} \quad V = V_{B_1} \oplus \cdots \oplus V_{B_s}.$$

Dokaz: Kako je B baza prostora V i skupovi $B_1, \dots, B_s$ su međusobno ortogonalni, vrijedi

$$V = V_{B_1} \oplus \cdots \oplus V_{B_s}.$$

Za svaki korijen $\beta \in R$ njegov je nosač $\operatorname{Supp}_C(\beta)$ prema propoziciji 6.4.12. povezan. To znači da je $\operatorname{Supp}_C(\beta) \subseteq B_j$ za neki $j \in \{1, \dots, s\}$. Tada je $\beta \in R_{B_j}$. To pokazuje da je

$$R = R_{B_1} \cup \cdots \cup R_{B_s} \tag{6.7}$$

i ta je unija disjunktna jer su potprostori $V_{B_1}, \dots, V_{B_s}$ međusobno ortogonalni. Dakle, svaki podsistem R_{B_j} je direktni faktor od R. Očito je B_j baza sistema korijena R_{B_j} (u odnosu na Weylovu komoru $C \cap V_{B_j}$). Kako je skup B_j povezan, prema korolaru 6.4.14. svaki je podsistem R_{B_j} ireducibilan.

Neka je sada R' bilo koji ireducibilan direktni faktor od R. Tada je za svaki $j \in \{1, \dots, s\}$ prema propoziciji 6.4.15. $R' \cap R_{B_j}$ direktni faktor od R i vrijedi $\operatorname{span}(R' \cap R_{B_j}) = (\operatorname{span} R') \cap (\operatorname{span} R_{B_j})$. Odatle slijedi da je $R' \cap R_{B_j}$ direktni faktor od R_{B_j}, a kako je sistem korijena R_{B_j} ireducibilan, vrijedi ili $R' \cap R_{B_j} = \emptyset$ ili $R' \cap R_{B_j} = R_{B_j}$. Sada iz (6.7) slijedi da je $R' = R_{B_j}$ za neki $j \in \{1, \dots, s\}$. Time je dokazano da su $R_{B_1}, \dots, R_{B_s}$ svi ireducibilni direktni faktori od R.

Teorem 6.4.16. ima sljedeće dvije neposredne posljedice:

Korolar 6.4.17. *Uz oznake iz teorema 6.4.16. ako su $\alpha \in R_{B_i}$ i $\beta \in R_{B_j}$ za neke $i \neq j$, onda $\alpha + \beta \notin R$.*

Korolar 6.4.18. *Sistem korijena $R \neq \emptyset$ je ireducibilan ako i samo ako je svaka njegova baza povezana.*

Definirali smo standardan podskup sistema korijena R kao podskup $S \subseteq R_+(C)$ za neku Weylovu komoru C takav da je $(\alpha|\beta) \leq 0 \ \forall \alpha, \beta \in S$, $\alpha \neq \beta$. Klasificirat ćemo sada sve standardne podskupove sistema korijena tako da svakom pridružimo određen dijagram i zatim klasificiramo sve takve dijagrame. Budući da su baze sistema korijena standardni podskupovi, na taj način ćemo doći do klasifikacije svih ireducibilnih sistema korijena.

Ciklus u sistemu korijena R je standardni podskup $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ od R takav da je $n \geq 3$ i vrijedi $(\alpha_i|\alpha_{i+1}) < 0$ za $i = 1, \dots, n-1$ i $(\alpha_n|\alpha_1) < 0$. Broj n zove se tada **duljina ciklusa**.

Propozicija 6.4.19. *U sistemu korijena nema ciklusa.*

Dokaz: Neka je $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ ciklus u sistemu korijena R. Stavimo $\alpha = \alpha_3 + \cdots + \alpha_n$. Prema propoziciji 6.4.10. α je korijen. Nadalje, kako je $(\alpha_i|\alpha_j) \leq 0$ za $i \neq j$, iz $(\alpha_2|\alpha_3) < 0$ slijedi $(\alpha_2|\alpha) < 0$, a iz $(\alpha_n|\alpha_1) < 0$ slijedi $(\alpha|\alpha_1) < 0$. To pokazuje da je $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha\}$ ciklus. Prema tome, za nepostojanje ciklusa je dovoljno dokazati da ne postoji ciklus duljine 3.

Pretpostavimo, dakle, da je $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ ciklus u R. Sada za korijen $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$ imamo

$$2(\alpha|\alpha) = 2(\alpha_1|\alpha_1) + 2(\alpha_2|\alpha_2) + 2(\alpha_3|\alpha_3) + 4(\alpha_1|\alpha_2) + 4(\alpha_1|\alpha_3) + 4(\alpha_2|\alpha_3) =$$

$$= [(\alpha_1|\alpha_1) + (\alpha_2|\alpha_2) + 4(\alpha_1|\alpha_2)] + [(\alpha_1|\alpha_1) + (\alpha_3|\alpha_3) + 4(\alpha_1|\alpha_3)] + [(\alpha_2|\alpha_2) + (\alpha_3|\alpha_3) + 4(\alpha_2|\alpha_3)].$$

Odatle i iz propozicije 6.4.5. slijedi $2(\alpha|\alpha) \leq 0$, a to je nemoguće, jer su po propoziciji 6.4.9. vektori $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ linearno nezavisni, pa je njihova suma α različita od 0. Ova kontradikcija dokazuje propoziciju.

Propozicija 6.4.20. *Neka je S standardni podskup od R i $\beta \in S$. Tada je β susjed najviše trima korijenima iz S.*

Dokaz: Pretpostavimo da su $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ međusobno različiti korijeni iz S koji su susjedi korijenu β. Tada je $(\beta|\alpha_j) < 0$ za svaki $j = 1, 2, 3, 4$. Budući da u R nema ciklusa, nužno je $(\alpha_i|\alpha_j) = 0$ za $i \neq j$. Stavimo sada

$$\alpha = 2\beta + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4.$$

Tada je

$$(\alpha|\alpha) = 4(\beta|\beta) + \sum_{i=1}^{4} (\alpha_i|\alpha_i) + \sum_{i=1}^{4} (\beta|\alpha_i) = \sum_{i=1}^{4} [(\beta|\beta) + (\alpha_i|\alpha_i) + 4(\beta|\alpha_i)]$$

a to je prema propoziciji 6.4.5. ≤ 0. No to je nemoguće, jer su vektori $\beta, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ linearno nezavisni, pa je $\alpha \neq 0$.

Neka je S standardni podskup od R i S' neprazan povezan podskup od S. Definiramo tada skup

$$S/S' = (S \setminus S') \cup \{\beta_{S'}\}.$$

Pri tome podsjećamo da je

$$\beta_{S'} = \sum_{\alpha \in S'} \alpha.$$

Uočimo da je S/S' također standardni podskup od R. Naime, ako je C Weylova komora takva da je $S \subseteq R_+(C)$, onda je $\beta_{S'} \in R_+(C)$, dakle, $S/S' \subseteq R_+(C)$. Nadalje, za $\alpha \in S \setminus S'$ i $\alpha' \in S'$ je $(\alpha|\alpha') \leq 0$, dakle, vrijedi $(\alpha|\beta_{S'}) \leq 0$.

Propozicija 6.4.21. *Neka je S' neprazan povezan podskup standardnog podskupa S od R. Korijen $\alpha \in S \setminus S'$ je susjed nekom korijenu $\alpha' \in S'$ ako i samo ako je α susjed korijenu $\beta_{S'}$. Posebno, S je povezan ako i samo ako je S/S' povezan.*

Dokaz: Tvrdnja je očita, jer je

$$(\alpha|\beta_{S'}) = \sum_{\alpha' \in S'} (\alpha|\alpha') \qquad \text{i} \qquad (\alpha|\alpha') \leq 0 \quad \forall \alpha' \in S'.$$

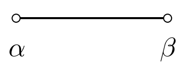
Propozicija 6.4.22. *Neka je S povezan standardni podskup od R. Tada je najviše jedan korijen $\beta \in S$ susjed trima različitim korijenima iz S.*

Dokaz: Pretpostavimo da su β i β' različiti korijeni iz S i da je svaki od njih susjed trima različitim korijenima iz S. Neka je $(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ lanac minimalne duljine koji povezuje $\beta = \alpha_0$ sa $\beta' = \alpha_m$. Stavimo $S' = \{\beta, \alpha_1, \ldots, \alpha_{m-1}, \beta'\}$. Tada je S' povezan podskup od S. Budući da nema ciklusa u S', korijen β nije susjed nijednom korijenu iz S' različitom od α_1. Isto tako, korijen β' nije susjed nijednom korijenu iz S' osim α_{m-1}. Stoga postoje međusobno različiti korijeni $\beta_1, \beta_2 \in S \setminus S'$ koji su susjedi korijenu β i međusobno različiti korijeni $\beta_1', \beta_2' \in S \setminus S'$ koji su susjedi korijenu β'. Ponovo zbog nepostojanja ciklusa sva četiri korijena $\beta_1, \beta_2, \beta_1'$ i β_2' su međusobno različita. No tada su prema propoziciji 6.4.21. svi oni susjedi korijenu $\beta_{S'} \in S/S'$, a to je nemoguće zbog propozicije 6.4.20. Ova kontradikcija pokazuje da ne postoje dva različita korijena u S koji su svaki susjedi trima različitim korijenima iz S, odnosno, propozicija je dokazana.

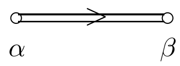
Svakom standardnom podskupu S od R pridružujemo njegov **Dynkinov dijagram** $\mathrm{Dyn}(S)$ na sljedeći način: vrhovi od $\mathrm{Dyn}(S)$ su korijeni iz S; dva različita vrha α i β iz $\mathrm{Dyn}(S)$ su spojena sa $n(\alpha,\beta)n(\beta,\alpha)$ spojnica (dakle, ili među njima nema spojnice ili ima jedna, dvije ili tri spojnice); ako su vrhovi α i β spojeni i ti korijeni nisu iste duljine (dakle, vrhovi su spojeni s dvije ili s tri spojnice) to se označuje znakom strelice od duljeg prema kraćem korijenu. U četiri moguća slučaja iz tablice na str. 90 za standardni dvočlani skup $S = \{\alpha, \beta\}$ sa $\|\alpha\| \geq \|\beta\|$ Dynkinovi dijagrami su sljedeći:

1. : 

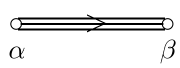
$n(\beta,\alpha) = 0, \quad n(\alpha,\beta) = 0, \quad \vartheta = 90^{\circ};$

2. : 

$n(\beta,\alpha) = -1, \quad n(\alpha,\beta) = -1, \quad \|\alpha\| = \|\beta\|, \quad \vartheta = 120^{\circ};$

3. : 

$n(\beta,\alpha) = -1, \quad n(\alpha,\beta) = -2, \quad \|\alpha\| = \sqrt{2}\|\beta\|, \quad \vartheta = 135^{\circ};$

4. : 

$n(\beta,\alpha) = -1, \quad n(\alpha,\beta) = -3, \quad \|\alpha\| = \sqrt{3}\|\beta\|, \quad \vartheta = 150^{\circ}.$

Dynkinov dijagram standardnog skupa korijena S bez označenih strelica je običan graf i on se zove **Coxeterov graf** od S. Označavat ćemo ga sa $\mathrm{Cox}(S)$. Kažemo da je Dynkinov dijagram $\mathrm{Dyn}(S)$ povezan, ako je graf $\mathrm{Cox}(S)$ povezan, odnosno, ako je standardan skup korijena S povezan. **Komponente povezanosti** od $\mathrm{Dyn}(S)$ su $\mathrm{Dyn}(S_1), \ldots, \mathrm{Dyn}(S_n)$, gdje su $S_1, \ldots, S_n$ komponente povezanosti od S.

Ako su S i T standardni skupovi korijena, **izomorfizam Dynkinovih dijagrama** sa $\mathrm{Dyn}(S)$ na $\mathrm{Dyn}(T)$ je bijekcija $f : S \to T$ koja čuva broj spojnica između vrhova (tj. broj spojnica između α i β iz S jednak je broju spojnica između $f(\alpha)$ i $f(\beta)$) i koja čuva orijentaciju (tj. ako su $\alpha, \beta \in S$

spojeni s dvije ili tri spojnice u $\mathrm{Dyn}(S)$ onda je $\|\alpha\| > \|\beta\|$ ako i samo ako je $\|f(\alpha)\| > \|f(\beta)\|$). Odmah se vidi da je bijekcija $f : S \to T$ izomorfizam sa $\mathrm{Dyn}(S)$ na $\mathrm{Dyn}(T)$ ako i samo ako je $n(\alpha, \beta) = n(f(\alpha), f(\beta))\ \forall \alpha, \beta \in S$.

Propozicija 6.4.23. *Neka je S' povezan podskup standardnog skupa korijena S takav da $\mathrm{Cox}(S')$ nema dvostrukih ni trostrukih spojnica. Tada se $\mathrm{Dyn}(S/S')$ dobiva iz $\mathrm{Dyn}(S)$ tako da se S' stegne u jednu točku $\beta_{S'}$.*

Dokaz: Prema propoziciji 6.4.21. korijen $\alpha \in S \setminus S'$ je susjed korijenu $\beta_{S'}$ ako i samo ako je α susjed nekom korijenu α' iz S'. Budući da nema ciklusa, takav $\alpha' \in S'$ je jedinstven. Svojstvo od S' da $\mathrm{Dyn}(S')$ nema dvostrukih ni trostrukih spojnica znači da su svi korijeni iz S' međusobno iste duljine. Prema propoziciji 6.4.10. tada i korijen $\beta_{S'}$ ima tu istu duljinu. Kako je $(\alpha|\beta_{S'}) = (\alpha|\alpha')$ (jer $(\alpha|\alpha'') = 0\ \forall \alpha'' \in S' \setminus \{\alpha'\}$) nalazimo da je $n(\alpha, \beta_{S'}) = n(\alpha, \alpha')$ i $n(\beta_{S'}, \alpha) = n(\alpha', \alpha)$. Dakle, orijentacija i broj spojnica između α i α' u $\mathrm{Dyn}(S)$ jednak je orijentaciji i broju spojnica između α i $\beta_{S'}$ u $\mathrm{Dyn}(S/S')$. Time je propozicija dokazana.

Sada ćemo pojačati propoziciju 6.4.20.

Propozicija 6.4.24. *Neka je S standardni skup korijena. Za svaki $\beta \in S$ ukupan broj spojnica između β i njegovih susjeda u S je najviše tri.*

Dokaz: Neka su $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ svi međusobno različiti susjedi od β u S (naravno, prema propoziciji 6.4.20. je $n \leq 3$). Budući da u S nema ciklusa, vrijedi $(\alpha_i|\alpha_j) = 0$ za $i \neq j$. Odatle slijedi da je $\sigma_{\alpha_i}\alpha_j = \alpha_j$ za $i \neq j$ i da refleksije $\sigma_{\alpha_1}, \ldots, \sigma_{\alpha_n}$ međusobno komutiraju. Neka je $\sigma \in W(R)$ njihov produkt, $\sigma = \sigma_{\alpha_1} \cdots \sigma_{\alpha_n}$, i stavimo $\gamma = \sigma\beta$. Tada je

$$\gamma = \beta - \sum_{i=1}^{n} n(\beta, \alpha_i)\alpha_i,$$

pa slijedi

$$n(\gamma, \beta) = 2\frac{(\gamma|\beta)}{(\beta|\beta)} = 2 - \sum_{i=1}^{n} n(\beta, \alpha_i) 2\frac{(\alpha_i|\beta)}{(\beta|\beta)} = 2 - \sum_{i=1}^{n} n(\beta, \alpha_i)n(\alpha_i, \beta) = 2 - \sum_{i=1}^{n} m_i,$$

gdje je $m_i = n(\beta, \alpha_i)n(\alpha_i, \beta)$ broj spojnica vrhova α_i i β u $\mathrm{Cox}(S)$. Dakle,

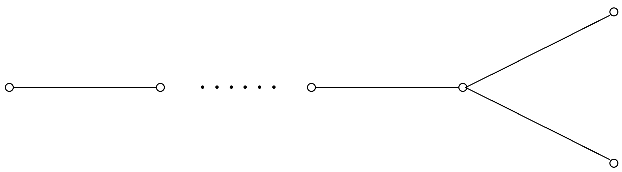
$$\sum_{i=1}^{n} m_i = 2 - n(\gamma, \beta) \leq 2 + |n(\gamma, \beta)|.$$

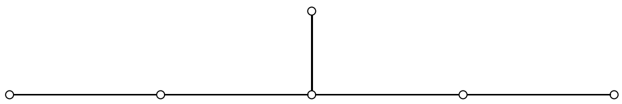
Međutim, operator $\sigma \in W(R)$ je ortogonalan pa korijeni β i $\gamma = \sigma\beta$ imaju istu duljinu. Sada iz tablice na str. 90 slijedi da je $|n(\gamma, \beta)| \leq 1$, dakle,

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \leq 3.$$

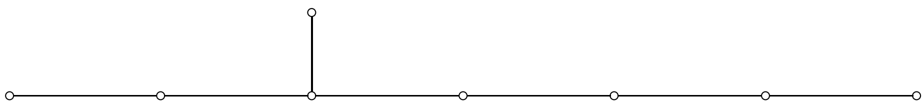
Teorem 6.4.25. *Neka je S povezan standardan skup korijena takav da u njegovom Dynkinovom dijagramu $\mathrm{Dyn}(S)$ nema ni dvostrukih ni trostrukih spojnica (tj. svi korijeni u S imaju istu duljinu). Tada je $\mathrm{Dyn}(S)$ izomorfan jednom od sljedećih dijagrama:*

A_ℓ : ($\ell \geq 1$ točaka)

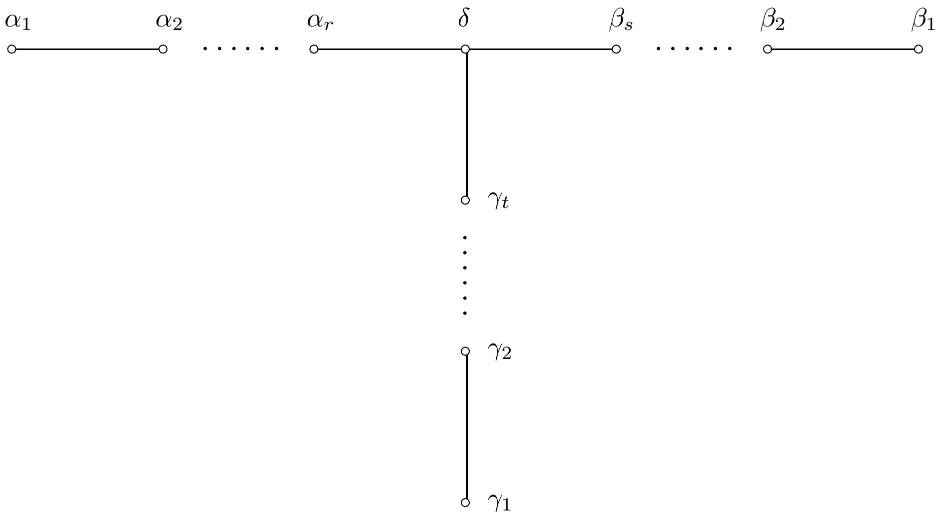
D_ℓ :  ($\ell \geq 4$ točaka)

E_6 : 

E_7 : 

E_8 : 

Dokaz: Označimo sa ℓ broj elemenata skupa S, tj. broj vrhova u Dynkinovom dijagramu $\mathrm{Dyn}(S)$. Možemo pretpostaviti da su duljine svih korijena u S jednake 1. Pretpostavimo da $\mathrm{Dyn}(S)$ nije izomorfan dijagarmu A_ℓ. Tada prema propozicijama 6.4.20. i 6.4.22. postoji jedinstven $\delta \in S$ koji ima tri susjeda u S; broj susjeda svih ostalih vrhova je jedan ili dva. To znači da je dijagram $\mathrm{Dyn}(S)$ sljedećeg oblika:



Možemo pretpostaviti da je $1 \leq t \leq s \leq r$. Sada ćemo isključiti tri dijagrama koji ne mogu biti izomorfni $\mathrm{Dyn}(S)$, dakle, $\mathrm{Dyn}(S)$ ih ne može sadržavati niti kao poddijagram. To su slučajevi

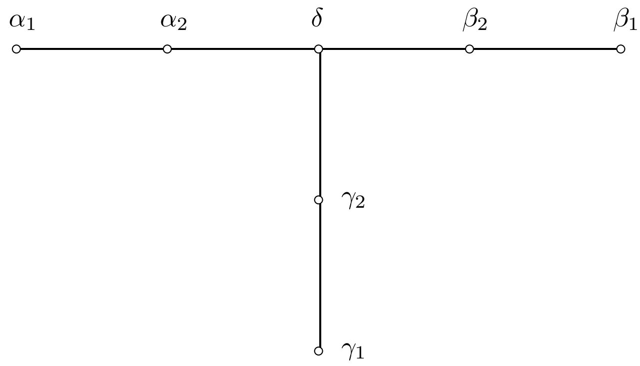
(1) $r = s = t = 2$;

(2) $r = s = 3$, $t = 1$;

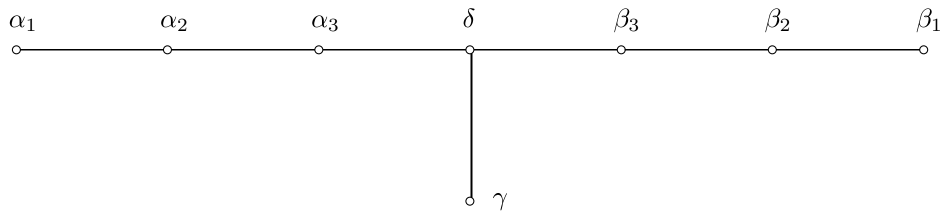
(3) $r = 5$, $s = 2$, $t = 1$.

Dakle, radi se o dijagramima:

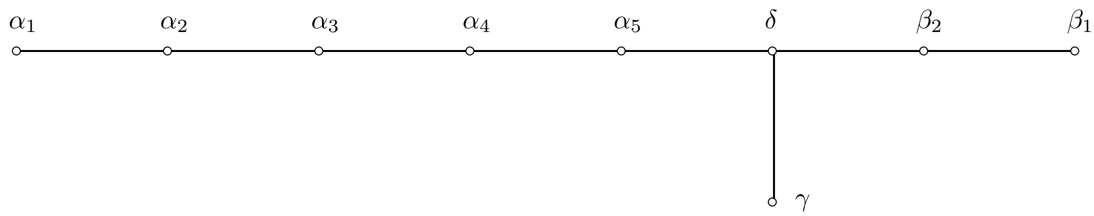
(1)



(2)



(3)



U svakom od ovih slučajeva definiramo vektor $v \neq 0$ ovako:

(1) $v = \alpha_1 + 2\alpha_2 + \beta_1 + 2\beta_2 + \gamma_1 + 2\gamma_2 + 3\delta$;

(2) $v = \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + \beta_1 + 2\beta_2 + 3\beta_3 + 2\gamma + 4\delta$;

(3) $v = \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + 4\alpha_4 + 5\alpha_5 + 2\beta_1 + 4\beta_2 + 3\gamma + 6\delta$.

Uzmemo li u obzir da su svi korijeni duljine 1, a da su svi skalarni produkti susjednih korijena jednaki $-\frac{1}{2}$, direktnim računom provjeravamo da u svakom od ova tri slučaja vrijedi $(v|v) = 0$. To je, naravno, nemoguće i ova kontradikcija pokazuje da su stvarno navedena tri dijagrama nemoguća.

Sada zaključujemo da je nužno $t = 1$; doista, kad bi bilo $t \geq 2$, dijagram $\mathrm{Dyn}(S)$ bi imao poddijagram tipa (1), a to je nemoguće. Nadalje, nužno je $s \leq 2$; doista, kad bi bilo $s \geq 3$, dijagram $\mathrm{Dyn}(S)$ bi imao poddijagram tipa (2). Napokon, ako je $s = 2$ onda je nužno $r \leq 4$; doista, kad bi bilo $s = 2$ i $r \geq 5$, dijagram $\mathrm{Dyn}(S)$ bi imao poddijagram tipa (3), što je također nemoguće. To pokazuje da su (osim A_ℓ, $\ell \geq 1$) preostale jedino sljedeće mogućnosti:

(a) $t = s = 1$, $r \geq 1$; tada je $\ell \geq 4$ i dijagram je tipa D_ℓ.

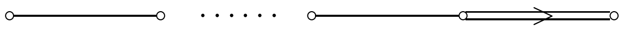
(b) $t = 1$, $s = r = 2$; tada je $\ell = 6$ i dijagram je tipa E_6.

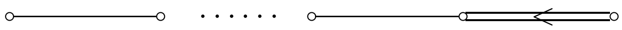
(c) $t = 1$, $s = 2$, $r = 3$; tada je $\ell = 7$ i dijagram je tipa E_7.

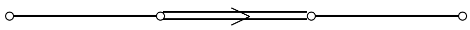
(d) $t = 1$, $s = 2$, $r = 4$; tada je $\ell = 8$ i dijagram je tipa E_8.

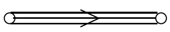
Time je teorem 6.4.25. dokazan.

Teorem 6.4.26. *Neka je S povezan standardni skup korijena takav da se u njegovom Dynkinovom dijagramu* $\mathrm{Dyn}(S)$ *pojavljuje dvostruka ili trostruka spojnica. Tada je* $\mathrm{Dyn}(S)$ *izomorfan jednom od sljedećih dijagrama:*

B_ℓ :  ($\ell \geq 2$ točaka)

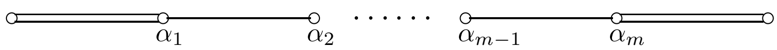
C_ℓ :  ($\ell \geq 3$ točaka)

F_4 : 

G_2 : 

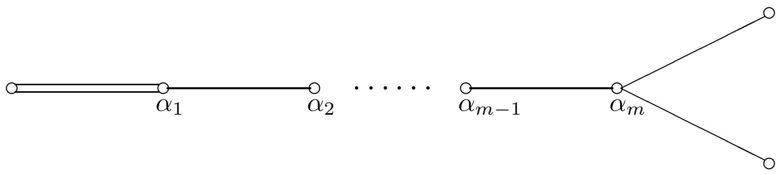
Dokaz: Ukoliko $\mathrm{Dyn}(S)$ sadrži trostruku spojnicu, onda prema propoziciji 6.4.24. nijedan od dvaju vrhova koji su spojeni trostrukom spojnicom nema drugih susjeda. Kako je S povezan, to znači da osim ta dva uopće nema drugih vrhova u $\mathrm{Dyn}(S)$. Dakle, $\mathrm{Dyn}(S)$ je izomorfan dijagramu koji je u iskazu teorema označen sa G_2.

Pretpostavimo sada da $\mathrm{Dyn}(S)$ nema trostrukih spojnica, ali ima barem jednu dvostruku spojnicu. U daljnjem privremeno zanemarimo strelice, odnosno promatramo Coxeterove grafove. Uočimo da $\mathrm{Cox}(S)$ ne može sadržavati podgraf sljedećih dvaju oblika:



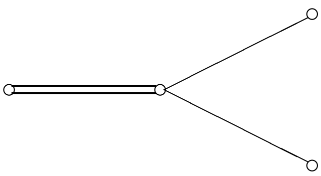
($m \geq 1$)

i

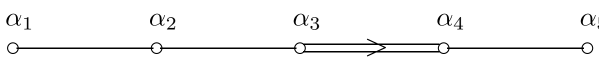


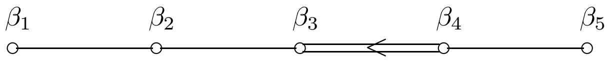
($m \geq 1$)

Ako je $m = 1$, to slijedi iz propozicije 6.4.24. Pretpostavimo da je $m \geq 2$ i da $\mathrm{Cox}(S)$ sadrži jedan od ta dva podgrafa. Stavimo $S' = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}$. Tada $\mathrm{Cox}(S/S')$ sadrži kao podgraf

 ili 

a i jedno i drugo je nemoguće zbog propozicije 6.4.24. Prema tome, zaključujemo da je $\mathrm{Dyn}(S)$ izomorfan dijagramu tipa B_ℓ, C_ℓ ili F_4 ili da sadrži poddijagram jednog od sljedećih dvaju oblika:



ili


Isključit ćemo sada te dvije mogućnosti i to ponovo tako da konstruiramo vektore v i w različite od 0 takve da je $(v|v) = 0$ i $(w|w) = 0$. To su vektori

$$v = \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + 4\alpha_4 + 2\alpha_5 \qquad \text{i} \qquad w = \beta_1 + 2\beta_2 + \beta_3 + 2\beta_4 + \beta_5.$$

Možemo uzeti da su u oba slučaja kraći vektori duljine 1. Dakle,

$$(\alpha_1|\alpha_1) = (\alpha_2|\alpha_2) = (\alpha_3|\alpha_3) = 2, \quad (\alpha_4|\alpha_4) = (\alpha_5|\alpha_5) = 1,$$

$$(\beta_1|\beta_1) = (\beta_2|\beta_2) = (\beta_3|\beta_3) = 1, \quad (\beta_4|\beta_4) = (\beta_5|\beta_5) = 2.$$

Kad znamo duljine i broj spojnica susjednih vektora γ i δ, iz tablice na str. 90 možemo izračunati njihov skalarni produkt

$$(\gamma|\delta) = \|\gamma\| \cdot \|\delta\| \cdot \cos\vartheta.$$

Ako su oba korijena duljine 1, spojeni su s jednom spojnicom i tada je $(\gamma|\delta) = -\frac{1}{2}$. Ako su oba korijena duljine $\sqrt{2}$, također su spojeni s jednom spojnicom, no tada je $(\gamma|\delta) = -1$. Napokon, ako je jedan korijen duljine 1, a drugi duljine $\sqrt{2}$, tada su spojeni s dvije spojnice pa dobivamo $(\gamma|\delta) = -1$. Dakle,

$$(\alpha_1|\alpha_2) = -1, \quad (\alpha_2|\alpha_3) = -1, \quad (\alpha_3|\alpha_4) = -1, \quad (\alpha_4|\alpha_5) = -\frac{1}{2},$$

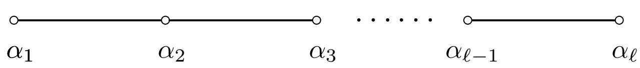
$$(\beta_1|\beta_2) = -\frac{1}{2}, \quad (\beta_2|\beta_3) = -\frac{1}{2}, \quad (\beta_3|\beta_4) = -1, \quad (\beta_4|\beta_5) = -1.$$

Odatle direktnim računom nalazimo $(v|v) = (w|w) = 0$. Time je teorem 6.4.26. dokazan.

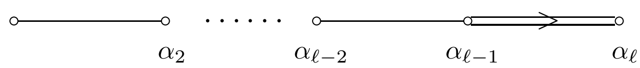
Teoremi 6.4.25. i 6.4.26. daju sve moguće klase izomorfizama Dynkinovih dijagrama povezanih standardnih skupova korijena. Baza ireducibilnog sistema korijena je standardan povezan skup korijena, pa teoremi 6.4.25. i 6.4.26. određuju sve moguće klase izomorfizama Dynkinovih dijagrama ireducibilnih sistema korijena. Ireducibilan sistem korijena R u realnom unitarnom prostoru V smatratćemo izomorfnim sa istim sistemom korijena ali s drugim skalarnim produktom u V. Nije teško dokazati da su svi skalarni produkti u V u odnosu na koje je R sistem korijena u V međusobno proporcionalni. Odatle slijedi da su brojevi $n(\alpha, \beta)$ neovisni o tome koji smo skalarni produkt u V izabrali. Uz takvo proširenje pojma izomorfnosti ireducibilnih sistema korijena iz teorema 6.4.7. slijedi da su ireducibilni sistemi korijena R i R' izomorfni ako i samo su njihovi Dynkinovi dijagrami izomorfni. Na taj način dobivamo klasifikaciju mogućih ireducibilnih sistema korijena:

Teorem 6.4.27. *Ako je R ireducibilan sistem korijena u $\ell-$dimenzionalnom realnom unitarnom prostoru, onda je njegov Dynkinov dijagram jedan od sljedećih:*

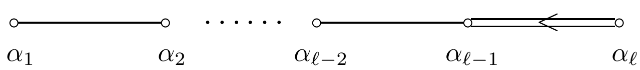
$A_\ell \ (\ell \geq 1):$



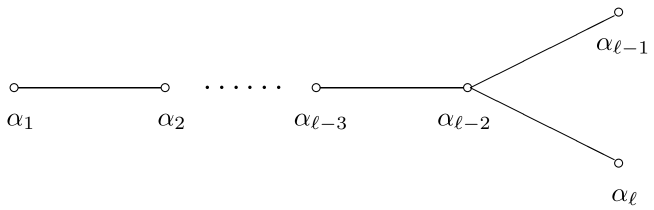
$B_\ell \ (\ell \geq 2):$



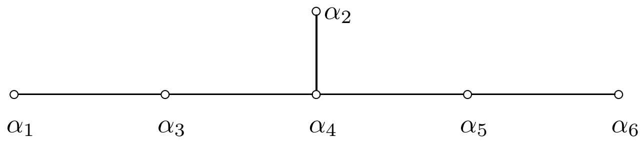
$C_\ell \ (\ell \geq 3):$



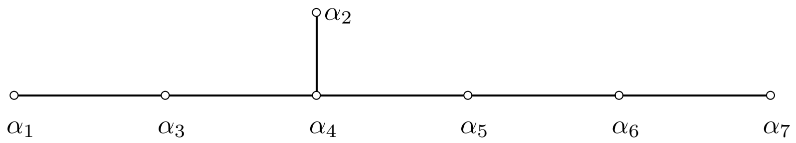
D_ℓ $(\ell \geq 4)$:



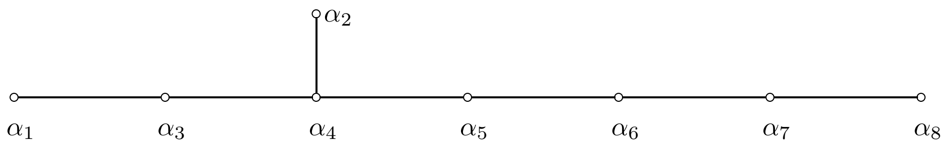
E_6 :



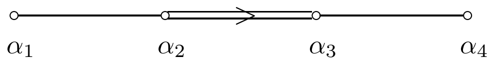
E_7 :



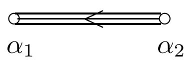
E_8 :



F_4 :



G_2 :



6.5 Konstrukcija ireducibilnih sistema korijena

Svaki od Dynkinovih dijagrama iz teorema 6.4.27. stvarno pripada nekom ireducibilnom reduciranom sistemu korijena. To ćemo ustanoviti eksplicitnim konstrukcijama.

U daljnjem je $\mathbb{R}^n$ realan unitaran prostor svih uređenih $n-$torki realnih brojeva sa standardnim skalarnim produktom

$$(x|y) = \xi_1\eta_1 + \xi_2\eta_2 + \cdots + \xi_n\eta_n, \qquad x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n), y = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Nadalje, $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ označava standardnu ortonormiranu bazu u $\mathbb{R}^n$: e_j ima $j-$tu koordinatu 1, a ostale 0. Aditivna podgrupa od $\mathbb{R}^n$ generirana s tom bazom je $\mathbb{Z}^n$.

Sada ćemo redom za svaki Dynkinov dijagram sa ℓ vrhova:

(1) definirati realan unitaran prostor V dimenzije ℓ; to će uvijek biti ili $\mathbb{R}^\ell$ ili određeni potprostor od $\mathbb{R}^n$ za neki $n > \ell$;

(2) zadati konačan skup $R \subseteq V$, za koji se direktno može provjeriti da je sistem korijena u realnom unitarnom prostoru V;

(3) zadati jednu bazu $B = \{\alpha_1, \dots, \alpha_\ell\}$ sistema korijena R;

(4) zapisati pripadni skup pozitivnih korijena R_+;

(5) napisati pripadnu tzv. Cartanovu matricu $[n(\alpha_i, \alpha_j)]_{i,j=1}^\ell$.

Također, u slučajevima A_ℓ, B_ℓ, C_ℓ i D_ℓ potpuno ćemo opisati Weylovu grupu $W = W(R)$. U svim slučajevima navest ćemo broj korijena $|R|$ i red Weylove grupe $|W|$.

Tip A_ℓ $(\ell \geq 1)$**:** V je ortogonalni komplement vektora $e_1 + \cdots + e_{\ell+1}$ u prostoru $\mathbb{R}^{\ell+1}$:

$$V = \{x \in \mathbb{R}^{\ell+1};\ (x|e_1 + \cdots + e_{\ell+1}) = 0\} = \{x = (\xi_1, \dots, \xi_{\lambda+1}) \in \mathbb{R}^{\ell+1};\ \xi_1 + \cdots + \xi_{\ell+1} = 0\}.$$

Nadalje,

$$R = \{\alpha \in \mathbb{Z}^{\ell+1} \cap V;\ (\alpha|\alpha) = 2\} = \{\alpha_{ij} = e_i - e_j;\ i, j = 1, \dots, \ell+1,\ i \neq j\};$$

$$B = \{\alpha_1, \dots, \alpha_\ell\}, \qquad \alpha_i = \alpha_{i,i+1} = e_i - e_{i+1}; \qquad R_+ = \{\alpha_{ij};\ 1 \leq i < j \leq \ell+1\}.$$

Prikazi pozitivnih korijena pomoću korijena iz baze B su:

$$\alpha_{ij} = \alpha_i + \cdots + \alpha_{j-1}, \qquad 1 \leq i < j \leq \ell+1.$$

Cartanova matrica je:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Refleksija σ_{α_i} zamjenjuje indekse i i $i+1$ a ostale ostavlja na miru:

$$\sigma_{\alpha_i}(\xi_1, \dots, \xi_i, \xi_{i+1}, \dots, \xi_{\ell+1}) = (\xi_1, \dots, \xi_{i+1}, \xi_i, \dots, \xi_{\ell+1}).$$

Prema tome, σ_{α_i} odgovara transpoziciji $(i, i+1)$ u grupi $\mathcal{S}_{\ell+1}$ svih permutacija skupa $\{1, \dots, \ell+1\}$. Budući da te transpozicije generiraju čitavu grupu $\mathcal{S}_{\ell+1}$, zaključujemo da je Weylova grupa izomorfna grupi $\mathcal{S}_{\ell+1}$. Napokon, $|R| = \ell(\ell+1)$ i $|W| = (\ell+1)!$.

Tip B_ℓ $(\ell \geq 2)$**:** Sada stavljamo

$$V = \mathbb{R}^\ell, \qquad R = \{\alpha \in \mathbb{Z}^\ell;\ (\alpha|\alpha) \in \{1,2\}\} = \{\pm e_i;\ 1 \leq i \leq \ell\} \cup \{\pm e_i \pm e_j;\ i,j = 1,\ldots,\ell,\ i \neq j\};$$

$$B = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell\}, \qquad \alpha_i = e_i - e_{i+1} \quad \text{za} \quad 1 \leq i \leq \ell - 1, \qquad \alpha_\ell = e_\ell;$$

$$R_+ = \{e_i;\ i = 1, \ldots, \ell\} \cup \{e_i \pm e_j;\ 1 \leq i < j \leq \ell\}.$$

Prikazi pozitivnih korijena pomoću korijena iz baze B su:

$$e_i = \alpha_i + \cdots + \alpha_\ell \quad \text{za} \quad 1 \leq i \leq \ell;$$

$$e_i - e_j = \alpha_i + \cdots + \alpha_{j-1} \quad \text{za} \quad 1 \leq i < j \leq \ell;$$

$$e_i + e_j = \alpha_i + \ldots + \alpha_{j-1} + 2\alpha_j + \cdots 2\alpha_\ell \quad \text{za} \quad 1 \leq i < j \leq \ell.$$

Cartanova matrica je:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Weylova grupa W djeluje na bazu $(e_1, \ldots, e_\ell)$ od V permutacijama uz množenje nekih članova sa -1. Dakle, W je izomorfna semidirektnom produktu grupe $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^\ell$ i grupe permutacija $\mathcal{S}_\ell$, pri čemu je $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^\ell$ normalna podgrupa, a na njoj djeluje grupa permutacija $\mathcal{S}_\ell$. Napokon, $|R| = 2\ell^2$ i $|W| = 2^\ell \ell!$.

Tip C_ℓ $(\ell \geq 3)$**:** Sada uzimamo:

$$V = \mathbb{R}^\ell, \qquad R = \{\pm 2e_i;\ 1 \leq i \leq \ell\} \cup \{\pm e_i \pm e_j;\ i,j = 1 \ldots, \ell,\ i \neq j\},$$

$$B = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell\}, \qquad \alpha_i = e_i - e_{i+1} \quad \text{za} \quad 1 \leq i \leq \ell - 1, \qquad \alpha_\ell = 2e_\ell;$$

$$R_+ = \{2e_i;\ 1 \leq i \leq \ell\} \cup \{e_i \pm e_j;\ 1 \leq i < j \leq \ell\}.$$

Prikazi pozitivnih korijena pomoću korijena iz baze B su:

$$2e_i = 2\alpha_i + \cdots + 2\alpha_{\ell-1} + \alpha_\ell;$$

$$e_i - e_j = \alpha_i + \cdots + \alpha_{j-1} \quad \text{za} \quad 1 \leq i < j \leq \ell;$$

$$e_i + e_j = \alpha_i + \cdots + \alpha_{j-1} + 2\alpha_j + \cdots + 2\alpha_{\ell-1} + \alpha_\ell \quad \text{za} \quad 1 \leq i < j \leq \ell.$$

Cartanova matrica je transponirana Cartanovoj matrici sistema tipa B_ℓ :

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Weylova grupa za ovaj tip podudara se s Weylovom grupom za tip B_ℓ, i isti su brojevi $|R| = 2\ell^2$ i $|W| = 2^\ell \ell!$.

Tip D_ℓ $(\ell \geq 4)$**:** Sada je

$$V = \mathbb{R}^\ell, \qquad R = \{\alpha \in \mathbb{Z}^\ell;\ (\alpha|\alpha) = 2\} = \{\pm e_i \pm e_j;\ i, j = 1, \dots, \ell,\ i \neq j\}.$$

Jedna baza $B = \{\alpha_1, \dots, \alpha_\ell\}$ od R je dana sa

$$\alpha_i = e_i - e_{i+1} \quad \text{za} \quad 1 \leq i \leq \ell - 1, \qquad \alpha_\ell = e_{\ell-1} + e_\ell.$$

Tada je

$$R_+ = \{e_i \pm e_j;\ 1 \leq i < j \leq \ell\}.$$

Prikazi pozitivnih korijena pomoću korijena iz baze B su:

$$e_i - e_j = \alpha_i + \dots + \alpha_{j-1} \quad \text{za} \quad 1 \leq i < j \leq \ell;$$

$$e_i + e_j = \alpha_i + \dots + \alpha_{j-1} + 2\alpha_j + \dots + 2\alpha_{\ell-2} + \alpha_{\ell-1} + \alpha_\ell, \quad \text{za} \quad 1 \leq i > j \leq \ell - 2;$$

$$e_i + e_{\ell-1} = \alpha_i + \dots + \alpha_\ell \quad \text{za} \quad 1 \leq i \leq \ell - 2;$$

$$e_i + e_\ell = \alpha_i + \dots + \alpha_{\ell-2} + \alpha_\ell \quad \text{za} \quad 1 \leq i \leq \ell - 2; \qquad e_{\ell-1} + e_\ell = \alpha_\ell.$$

Cartanova matrica je

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Weylova grupa je grupa permutacija vektora $e_1, \dots, e_\ell$ uz paran broj promjena predznaka. Dakle, W je izomorfna semidirektnom produktu $(\mathbb{Z}/2Z)^{\ell-1}$ i $\mathcal{S}_\ell$. Napokon, $|R| = 2\ell(\ell-1)$ i $|W| = 2^{\ell-1}\ell!$.

Tip E_ℓ $(\ell = 6, 7, 8)$**:** Napisat ćemo samo V, R i $B = \{\alpha_1, \dots, \alpha_8\}$ za E_8. Sistemi korijena E_6 i E_7 dobivaju se tako da se uzmu potprostori V' i V'' od V razapeti s prvih 6, odnosno, s prvih 7 vektora baze B; traženi sistemi korijena su tada $R \cap V'$ i $R \cap V''$.

Za E_8 uzimamo $V = \mathbb{R}^8$. Zatim stavimo

$$I = \mathbb{Z}^8 + \mathbb{Z}\frac{1}{2}e, \qquad \text{gdje je} \quad e = e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + e_5 + e_6 + e_7 + e_8,$$

i neka je J aditivna podgrupa od I dana sa

$$J = \left\{ \sum_{i=1}^{8} c_i e_i + \frac{c}{2}e;\ c_i, c \in \mathbb{Z},\ c + \sum_{i=1}^{8} c_i \in 2\mathbb{Z} \right\}.$$

Sada je

$$R = \{\alpha \in J;\ (\alpha|\alpha) = 2\} =$$
$$= \{\pm e_i \pm e_j;\ i, j \in \{1, \dots, 8\},\ i \neq j\} \cup \left\{ \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{8}(-1)^{k_i} e_i;\ k_i \in \{0, 1\},\ \sum_{i=1}^{8} k_i \in 2\mathbb{Z} \right\}.$$

Jedna baza $B = \{\alpha_1, \dots, \alpha_8\}$ sistema korijena R dana je sa

$$\alpha_1 = e_1 + e_8 - \frac{1}{2}e = \frac{1}{2}(e_1 - e_2 - e_3 - e_4 - e_5 - e_6 - e_7 + e_8), \quad \alpha_2 = e_1 + e_2, \quad \alpha_3 = e_2 - e_1,$$

$$\alpha_4 = e_3 - e_2, \quad \alpha_5 = e_4 - e_3, \quad \alpha_6 = e_5 - e_4, \quad \alpha_7 = e_6 - e_5, \quad \alpha_8 = e_7 - e_6.$$

Cartanove matrice za E_6, E_7 i E_8, njihovi brojevi korijena $|R|$ i redovi $|W|$ pripadnih Weylovih grupa su:

$$E_6 : \qquad \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix},$$

$$|R| = 72, \qquad |W| = 2^7 \cdot 3^4 \cdot 5 = 544.320.$$

$$E_7 : \qquad \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix},$$

$$|R| = 126, \qquad |W| = 2^{10} \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7 = 30.481.920.$$

$$E_8 : \qquad \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix},$$

$$|R| = 240, \qquad |W| = 2^{14} \cdot 3^5 \cdot 5^2 \cdot 7 = 7.315.660.800.$$

Tip F_4: Sada je $V = \mathbb{R}^4$. Nadalje, promatramo diskretnu aditivnu podgrupu $I = \mathbb{Z}^4 + \frac{1}{2}\mathbb{Z}e$ od $\mathbb{R}^4$, gdje je $e = e_1 + e_2 + e_3 + e_4$, i stavimo

$$R = \{\alpha \in I;\ (\alpha|\alpha) \in \{1, 2\}\}.$$

Tada je

$$R = \{\pm e_i;\ i = 1, 2, 3, 4\} \cup \{\pm(e_i - e_j);\ 1 \leq i < j \leq 4\} \cup \left\{\frac{1}{2}(\pm e_1 \pm e_2 \pm e_3 \pm e_4)\right\}.$$

Jedna je baza $B = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$, gdje je

$$\alpha_1 = e_2 - e_3, \qquad \alpha_2 = e_3 - e_4, \qquad \alpha_3 = e_4, \qquad \alpha_4 = \frac{1}{2}(e_1 - e_2 - e_3 - e_4).$$

Pozitivni korijeni u odnosu na tu bazu su:

$$R_+ = \{e_i;\ i = 1,2,3,4\} \cup \{e_i - e_j;\ 1 \le i < j \le 4\} \cup \left\{\frac{1}{2}(e_1 \pm e_2 \pm e_3 \pm e_4)\right\}.$$

Cartanova matrica i brojevi $|R|$ i $|W|$ su:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad |R| = 48, \qquad |W| = 2^7 \cdot 3^2 = 1152.$$

Tip G_2: Za V uzimamo ortogonalni komplement od $e = e_1 + e_2 + e_3$ u $\mathbb{R}^3$, tj.

$$V = \{\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in \mathbb{R}^3;\ \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 0\}.$$

Sistem korijena je $R = \{\alpha \in \mathbb{Z}^3 \cap V;\ (\alpha|\alpha) \in \{2,6\}\}$, tj.

$$R = \{\pm(e_1 - e_2), \pm(e_2 - e_3), \pm(e_1 - e_3), \pm(2e_1 - e_2 - e_3), \pm(2e_2 - e_1 - e_3), \pm(2e_3 - e_1 - e_2)\}.$$

Jedna je baza $B = \{\alpha_1, \alpha_2\}$, gdje su $\alpha_1 = e_1 - e_2$ i $\alpha_2 = -2e_1 + e_2 + e_3$. Tada je

$$R_+ = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2, 2\alpha_1 + \alpha_2, 3\alpha_1 + \alpha_2, 3\alpha_1 + 2\alpha_2\} =$$

$$= \{e_1 - e_2, -e_1 + e_3, -e_2 + e_3, -2e_1 + e_2 + e_3, e_1 - 2e_2 + e_3, -e_1 - e_2 + 2e_3\}.$$

Cartanova matrica i brojevi $|R|$ i $|W|$ su:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}, \qquad |R| = |W| = 12.$$

6.6 Klasifikacija kompleksnih prostih Liejevih algebri

Za svaki ireducibilan sistem korijena R postoji kompleksna prosta Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ takva da je za svaku njezinu Cartanovu podalgebru $\mathfrak{h}$ pripadni sistem korijena $R(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ izomorfan sistemu korijena R. Štoviše, dvije proste kompleksne Liejeve algebre su izomorfne ako i samo ako su njihovi sistemi korijena izomorfni. To je posljedica sljedećeg općeg teorema koji navodimo bez dokaza:

Teorem 6.6.1. (**Serre–ov teorem egzistencije**) *Neka je R sistem korijena u realnom unitarnom prostoru V. Tada postoji poluprosta kompleksna Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ i njezina Cartanova podalgebra $\mathfrak{h}$ takve da je sistem korijena R izomorfan sistemu korijena $R(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ u realnom prostoru $\mathfrak{h}(R) = \operatorname{span}_{\mathbb{R}} R(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$. Ako izaberemo bazu $B = \{\alpha_1,\dots,\alpha_\ell\}$ sistema korijena R i stavimo $c_{ij} = n(\alpha_i,\alpha_j)$, ta se Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ može realizirati kao Liejeva algebra generirana sa 3ℓ generatora $\{h_i, x_i, y_i;\ 1 \le i \le \ell\}$ i s relacijama:*

$(S1)$ $[h_i,h_j] = 0$ *za sve* $i,j = 1,\dots,\ell$.

$(S2)$ $[x_i,y_i] = h_i$, $[x_i,y_j] = 0$ *za* $i,j = 1,\dots,\ell$, $i \neq j$.

$(S3)$ $[h_i,x_j] = c_{ji}x_j$, $[h_i,y_j] = -c_{ji}y_j$ *za sve* $i,j = 1,\dots,\ell$.

(S_{ij}^+) $(\operatorname{ad} x_i)^{-c_{ji}+1}(x_j) = 0$ *za* $i,j = 1,\dots,\ell$.

(S_{ij}^-) $(\operatorname{ad} y_i)^{-c_{ji}+1}(y_j) = 0$ *za* $i,j = 1,\dots,\ell$.

Drugim riječima, ako je $\mathfrak{l}$ bilo koja Liejeva algebra i ako je $f : \{h_i,x_i,y_i;\ 1 \le i \le \ell\} \to \mathfrak{l}$ preslikavanje sa svojstvom da slike $H_i = f(h_i)$, $X_i = f(x_i)$, $Y_i = f(y_i)$ zadovoljavaju gornje relacije u Liejevoj algebri $\mathfrak{l}$, odnosno, da vrijedi

1. $[H_i,H_j] = 0$ *za sve* $i,j = 1,\dots,\ell$,
2. $[X_i,Y_i] = h_i$, $[X_i,Y_j] = 0$ *za* $i,j = 1,\dots,\ell$, $i \neq j$,
3. $[H_i,X_j] = c_{ji}X_j$, $[H_i,Y_j] = -c_{ji}Y_j$ *za sve* $i,j = 1,\dots,\ell$,
4. $(ad_{\mathfrak{l}}\,X_i)^{-c_{ji}+1}(X_j) = 0$ *za* $i,j = 1,\dots,\ell$,
5. $(ad_{\mathfrak{l}}\,Y_i)^{-c_{ji}+1}(Y_j) = 0$ *za* $i,j = 1,\dots,\ell$,

onda se f jedinstveno proširuje do homomorfizma $F : \mathfrak{g} \to \mathfrak{l}$.

Prema tome, klasifikacija ireducibilnih sistema korijena iz prethodnog odjeljka daje klasifikaciju prostih kompleksnih Liejevih algebri: klase izomorfnosti su pridružene Dynkinovim dijagramima A_ℓ, $\ell \ge 1$, B_ℓ, $\ell \ge 2$, C_ℓ, $\ell \ge 3$, D_ℓ, $\ell \ge 4$, E_ℓ, $\ell = 6,7,8$, F_4 i G_2. U ovom odjeljku vidjet ćemo da primjeri matričnih Liejevih algebri iz odjeljka 1.4. numerirani sa **1.**, **2.** i **3.** daju upravo proste Liejeve algebre sa četiri beskonačne serije Dynkinovih dijagrama. Te se Liejeve algebre zovu **klasične kompleksne proste Liejeve algebre**. Preostalih pet vrsta s Dynkinovim dijagramima E_6, E_7, E_8, F_4 i G_2 zovu se **izuzetne kompleksne proste Liejeve algebre**.

Proučimo sada pobliže svaki od primjera iz odjeljka 1.4.

1. Promatramo Liejevu algebru matrica $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(\ell+1,\mathbb{C}) = \{x \in \mathfrak{gl}(\ell+1,\mathbb{C});\ Tr\,x = 0\}$ za $\ell \in \mathbb{N}$, tzv. **specijalnu linearnu Liejevu algebru**. Neka je $\mathfrak{h}$ skup svih dijagonalnih matrica u $\mathfrak{g}$. Tada je $\mathfrak{h}$ Cartanova podalgebra od $\mathfrak{g}$ i

$$R(\mathfrak{g},\mathfrak{h}) = \{\alpha_{ij};\ 1 \le i,j \le \ell+1,\ i \neq j\},$$

gdje je
$$\alpha_{ij}(\operatorname{diag}(c_1, \ldots, c_{\ell+1})) = c_i - c_j.$$
Nadalje, $\mathfrak{g}_{\alpha_{ij}}$ je potprostor svih matrica $x = [x_{pq}] \in \mathfrak{g}$ takvih da je $x_{pq} = 0$ ako je $p \neq i$ ili $q \neq j$. Dakle, $\mathfrak{g}_{\alpha_{ij}} = \operatorname{span}\{e_{ij}\}$. Pri tome je u ovom i daljnjim primjerima e_{ij} oznaka za kvadratnu matricu formata $(\ell+1) \times (\ell+1)$ koja ima 1 na presjecištu $i-$tog retka i $j-$tog stupca, a svi ostali su joj elementi jednaki 0. Tada je $h_{\alpha_{ij}} = e_{ii} - e_{jj} = [e_{ij}, e_{ji}]$. Nadalje, korijenski potprostor $\mathfrak{g}_{\alpha_{ij}}$ razapet je matricom e_{ij}.

2. Neka je sada $\mathfrak{g}$ tzv. **simplektička Liejeva algebra**:
$$\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}(2\ell, \mathbb{C}) = \{x \in \mathfrak{gl}(2\ell, \mathbb{C});\ sx = -x^t s\}, \quad \text{gdje je} \quad s = \begin{bmatrix} 0 & I_\ell \\ -I_\ell & 0 \end{bmatrix}.$$
Pri tome je I_ℓ oznaka za jediničnu matricu $\ell-$tog reda.

Ako proizvoljnu matricu $x \in \mathfrak{gl}(2\ell, \mathbb{C})$ pišemo pomoću kvadratnih blokova $\ell-$tog reda kao $x = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, onda se lako vidi da je $x \in \mathfrak{g}$ ako i samo ako je $d = -a^t$, $b^t = b$ i $c^t = c$. Dakle,
$$\mathfrak{g} = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & -a^t \end{bmatrix};\ a, b, c \in \mathfrak{gl}(\ell, \mathbb{C}),\ b = b^t,\ c = c^t \right\}.$$

Primijetimo da je $\mathfrak{sp}(2, \mathbb{C}) = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$, dakle, nove primjere dobivamo samo za $\ell \geq 2$.

Neka je $\mathfrak{h}$ skup svih dijagonalnih matrica u $\mathfrak{g}$, tj.
$$\mathfrak{h} = \{\operatorname{diag}(c_1, \ldots, c_\ell, -c_1, \ldots, -c_\ell);\ c_1, \ldots, c_\ell \in \mathbb{C}\}.$$
Tada je $\mathfrak{h}$ Cartanova podalgebra od $\mathfrak{g}$ i pripadni sistem korijena je
$$R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) = \{\pm\alpha_i;\ 1 \leq i \leq \ell\} \cup \{\beta_{ij};\ 1 \leq i, j \leq \ell,\ i \neq j\} \cup \{\pm\gamma_{ij};\ 1 \leq i < j \leq \ell\},$$
uz oznake
$$\alpha_i(\operatorname{diag}(c_1, \ldots, c_\ell, -c_1, \ldots, -c_\ell)) = 2c_i, \qquad 1 \leq i \leq \ell;$$
$$\beta_{ij}(\operatorname{diag}(c_1, \ldots, c_\ell, -c_1, \ldots, -c_\ell)) = c_i - c_j, \qquad 1 \leq i, j \leq \ell, \quad i \neq j;$$
$$\gamma_{ij}(\operatorname{diag}(c_1, \ldots, c_\ell, -c_1, \ldots, -c_\ell)) = c_i + c_j, \qquad 1 \leq i < j \leq \ell.$$
Nadalje, tada je
$$h_{\alpha_i} = -h_{-\alpha_i} = e_{ii} - e_{\ell+i,\ell+i}, \qquad 1 \leq i \leq \ell,$$
$$h_{\beta_{ij}} = e_{ii} - e_{jj} - e_{\ell+i,\ell+i} + e_{\ell+j,\ell+j}, \qquad 1 \leq i, j \leq \ell, \quad i \neq j, \quad -\beta_{ij} = \beta_{ji},$$
$$h_{\gamma_{ij}} = -h_{-\gamma_{ij}} = e_{ii} + e_{jj} - e_{\ell+i,\ell+i} - e_{\ell+j,\ell+j}, \qquad 1 \leq i < j \leq \ell.$$
Korijenski potprostori su $\mathfrak{g}_\alpha = \operatorname{span}\{e_\alpha\}$, $\alpha \in R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$, gdje su bazni vektori korijenskih potprostora e_α dani sa
$$e_{\alpha_i} = e_{i,\ell+i}, \qquad e_{-\alpha_i} = e_{\ell+i,i}, \qquad 1 \leq i \leq \ell,$$
$$e_{\beta_{ij}} = e_{ij} - e_{\ell+j,\ell+i}, \qquad 1 \leq i, j \leq \ell, \quad i \neq j, \quad -\beta_{ij} = \beta_{ji},$$
$$e_{\gamma_{ij}} = e_{i,\ell+j} + e_{j,\ell+i}, \qquad e_{-\gamma_{ij}} = e_{\ell+i,j} + e_{\ell+j,i}, \qquad 1 \leq i < j \leq \ell.$$

3. Promatramo sada tzv. **ortogonalnu kompleksnu Liejevu algebru** neparnog reda:
$$\mathfrak{g} = \mathfrak{o}(2\ell+1, \mathbb{C}) = \{x \in \mathfrak{gl}(2\ell+1, \mathbb{C});\ sx = -x^t s\}, \qquad \text{gdje je} \quad s = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_\ell \\ 0 & I_\ell & 0 \end{bmatrix}.$$

Proizvoljnu matricu $x \in \mathfrak{gl}(2\ell+1,\mathbb{C})$ zapišimo u blok−formi u skladu s blokovima u gornjoj matrici s :

$$x = \begin{bmatrix} \alpha & f & g \\ h^t & a & b \\ k^t & c & d \end{bmatrix}, \qquad \alpha \in \mathbb{C}, \quad f,g,h,k \in \mathbb{C}^\ell, \quad a,b,c,d \in \mathfrak{gl}(\ell,\mathbb{C}),$$

pri čemu smo $\mathbb{C}^\ell$ identificirali s prostorom $M_{\ell,1}(\mathbb{C})$ jednorednih matrica duljine ℓ. Tada je $x \in \mathfrak{o}(2\ell+1,\mathbb{C})$ ako i samo ako je $\alpha = 0$, $d = -a^t$, $b^t = -b$, $c^t = -c$, $h = -g$ i $k = -f$. Dakle,

$$\mathfrak{g} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & f & g \\ -g^t & a & b \\ -f^t & c & -a^t \end{bmatrix};\ f,g \in \mathbb{C}^\ell,\ a,b,c \in \mathfrak{gl}(\ell,\mathbb{C}),\ b^t = -b,\ c^t = -c \right\}.$$

Neka je $\mathfrak{h}$ skup svih dijagonalnih matrica iz $\mathfrak{g}$, tj.

$$\mathfrak{h} = \{\mathrm{diag}(0,c_1,\ldots,c_\ell,-c_1,\ldots,-c_\ell);\ c_1,\ldots,c_\ell \in \mathbb{C}\}.$$

Tada je $\mathfrak{h}$ Cartanova podalgebra od $\mathfrak{g}$ i pripadni sistem korijena je

$$R(\mathfrak{g},\mathfrak{h}) = \{\pm\alpha_i;\ 1 \le i \le \ell\} \cup \{\beta_{ij};\ 1 \le i,j \le \ell,\ i \neq j\} \cup \{\pm\gamma_{ij};\ 1 \le i < j \le \ell\},$$

uz oznake

$$\alpha_i(\mathrm{diag}(0,c_1,\ldots,c_\ell,-c_1,\ldots,-c_\ell)) = c_i, \qquad 1 \le i \le \ell;$$
$$\beta_{ij}(\mathrm{diag}(0,c_1,\ldots,c_\ell,-c_1,\ldots,-c_\ell)) = c_i - c_j, \qquad 1 \le i,j \le \ell, \quad i \neq j;$$
$$\gamma_{ij}(\mathrm{diag}(0,c_1,\ldots,c_\ell,-c_1,\ldots,-c_\ell)) = c_i + c_j, \qquad 1 \le i < j \le \ell.$$

Koristimo uobičajenu oznaku e_{ij} za matricu s jedinicom na presjecištu $i-$tog retka i $j-$tog stupca i na svim ostalim mjestima 0, s tim da se sada indeksi i,j kreću skupom $\{0,1,\ldots,2\ell\}$. Tada je

$$h_{\alpha_i} = -h_{-\alpha_i} = 2e_{ii} - 2e_{\ell+i,\ell+i}, \qquad 1 \le i \le \ell,$$

$$h_{\beta_{ij}} = e_{ii} - e_{jj} - e_{\ell+i,\ell+i} + e_{\ell+j,\ell+j}, \qquad 1 \le i,j \le \ell, \quad i \neq j, \quad -\beta_{ij} = \beta_{ji},$$
$$h_{\gamma_{ij}} = -h_{-\gamma_{ij}} = e_{ii} + e_{jj} - e_{\ell+i,\ell+i} - e_{\ell+j,\ell+j}, \qquad 1 \le i < j \le \ell.$$

Korijenski potprostori su $\mathfrak{g}_\alpha = \mathrm{span}\,\{e_\alpha\}$, $\alpha \in R(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$, gdje su bazni vektori korijenskih potprostora e_α dani sa

$$e_{\alpha_i} = e_{i,0} - e_{0,\ell+i}, \qquad e_{-\alpha_i} = e_{0,i} - e_{\ell+i,0}, \qquad 1 \le i \le \ell,$$
$$e_{\beta_{ij}} = e_{ij} - e_{\ell+j,\ell+i}, \qquad 1 \le i,j \le \ell, \quad i \neq j, \quad -\beta_{ij} = \beta_{ji},$$
$$e_{\gamma_{ij}} = e_{j,\ell+i} - e_{i,\ell+j}, \qquad e_{-\gamma_{ij}} = e_{\ell+i,j} - e_{\ell+j,i}, \qquad 1 \le i < j \le \ell.$$

Napomenimo još da nije tečko dokazati da je Liejeva algebra $\mathfrak{o}(3,\mathbb{C})$ izomorfna Liejevoj algebri $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$, te da je Liejeva algebra $\mathfrak{o}(5,\mathbb{C})$ izomorfna Liejevoj algebri $\mathfrak{sp}(4,\mathbb{C})$.

4. Na koncu promatramo kompleksnu ortogonalnu Liejevu algebru parnog reda:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{o}(2\ell,\mathbb{C}) = \{x \in \mathfrak{gl}(2\ell,\mathbb{C});\ sx = -x^t s\}, \qquad \text{gdje je} \quad s = \begin{bmatrix} 0 & I_\ell \\ I_\ell & 0 \end{bmatrix}.$$

Proizvoljnu matricu $x \in \mathfrak{gl}(2\ell,\mathbb{C})$ zapišimo u blok−formi:

$$x = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \qquad a,b,c,d \in \mathfrak{gl}(\ell,\mathbb{C}).$$

Tada je $x \in \mathfrak{g}$ ako i samo ako je $d = -a^t$, $b^t = -b$ i $c^t = -c$. Dakle,

$$\mathfrak{g} = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & -a^t \end{bmatrix}; \ a, b, c \in \mathfrak{gl}(\ell, \mathbb{C}), \ b^t = -b, \ c^t = -c \right\}.$$

Neka je ponovo $\mathfrak{h}$ skup svih dijagonalnih matrica iz $\mathfrak{g}$, tj.

$$\mathfrak{h} = \{\mathrm{diag}(c_1, \ldots, c_\ell, -c_1, \ldots, -c_\ell); \ c_1, \ldots, c_\ell \in \mathbb{C}\}.$$

Tada je $\mathfrak{h}$ Cartanova podalgebra od $\mathfrak{g}$ i pripadni sistem korijena je

$$R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) = \{\beta_{ij}; \ 1 \leq i, j \leq \ell, \ i \neq j\} \cup \{\pm\gamma_{ij}; \ 1 \leq i < j \leq \ell\},$$

uz oznake

$$\beta_{ij}(\mathrm{diag}(c_1, \ldots, c_\ell, -c_1, \ldots, -c_\ell)) = c_i - c_j, \qquad 1 \leq i, j \leq \ell, \quad i \neq j;$$
$$\gamma_{ij}(\mathrm{diag}(c_1, \ldots, c_\ell, -c_1, \ldots, -c_\ell)) = c_i + c_j, \qquad 1 \leq i < j \leq \ell.$$

Sada je

$$h_{\beta_{ij}} = e_{ii} - e_{jj} - e_{\ell+i,\ell+i} + e_{\ell+j,\ell+j}, \qquad 1 \leq i, j \leq \ell, \quad i \neq j, \quad -\beta_{ij} = \beta_{ji},$$
$$h_{\gamma_{ij}} = -h_{-\gamma_{ij}} = e_{ii} + e_{jj} - e_{\ell+i,\ell+i} - e_{\ell+j,\ell+j}, \qquad 1 \leq i < j \leq \ell.$$

Korijenski potprostori su $\mathfrak{g}_\alpha = \mathrm{span}\,\{e_\alpha\}$, $\alpha \in R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$, gdje su bazni vektori korijenskih potprostora e_α dani sa

$$e_{\beta_{ij}} = e_{ij} - e_{\ell+j,\ell+i}, \qquad 1 \leq i, j \leq \ell, \quad i \neq j, \quad -\beta_{ij} = \beta_{ji},$$
$$e_{\gamma_{ij}} = e_{i,\ell+j} - e_{j,\ell+i}, \qquad e_{-\gamma_{ij}} = e_{\ell+j,i} - e_{\ell+i,j}, \qquad 1 \leq i < j \leq \ell.$$

Napomenimo da Liejeve algebre $\mathfrak{o}(2, \mathbb{C})$ i $\mathfrak{o}(4, \mathbb{C})$ nisu proste: $\mathfrak{o}(2, \mathbb{C})$ je komutativna, a $\mathfrak{o}(4, \mathbb{C})$ je direktna suma dvaju prostih ideala koji su oba izomorfna Liejevoj algebri $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$. Nadalje, pokazuje se da je Liejeva algebra $\mathfrak{o}(6, \mathbb{C})$ izomorfna Liejevoj algebri $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$. Napokon, nema drugih međusobnih izomorfizama osim ovih koje smo naveli: proste Liejeve algebre iz četiriju serija $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$, $n \geq 2$, $\mathfrak{o}(2\ell+1, \mathbb{C})$, $\ell \geq 2$, $\mathfrak{sp}(2\ell, \mathbb{C})$, $\ell \geq 3$, $\mathfrak{o}(2\ell, \mathbb{C})$, $\ell \geq 4$, sve su međusobno neizomorfne.

Proučit ćemo sada pobliže sistem korijena $R = R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ za svaku klasičnu kompleksnu prostu Liejevu algebru $\mathfrak{g}$ i izabranu Cartanovu podalgebru $\mathfrak{h}$ i posebno, ustanoviti njihove Dynkinove dijagrame. Na realnim međusobno dualnim prostorima $\mathfrak{h}(R) = \mathrm{span}_\mathbb{R}\,\{h_\alpha; \ \alpha \in R\}$ i $\mathfrak{h}^*(R) = \mathrm{span}_\mathbb{R}\, R$ imamo skalarne produkte inducirane Killingovom formom $B_\mathfrak{g}$. Skalarne produkte među korijenima zbog određivanja brojeva $n(\alpha, \beta)$ bit će nam znatno lakše računati pomoću elemenata $h_\alpha \in \mathfrak{h}(R)$. Podsjetimo se da je za $\alpha \in R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ h_α jedinstven element iz $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}]$ takav da je $\alpha(h_\alpha) = 2$ i da je

$$h_\alpha = \frac{2}{B_\mathfrak{g}(t_\alpha, t_\alpha)}\, t_\alpha,$$

pri čemu je $\lambda \mapsto t_\lambda$ izomorfizam sa $\mathfrak{h}^*$ na $\mathfrak{h}$ induciran nedegeneriranom restrikcijom Killingove forme $B_\mathfrak{g}|\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}$:

$$\lambda(h) = B_\mathfrak{g}(h, t_\lambda) \qquad \forall h \in \mathfrak{h}.$$

Tim izomorfizmom prenesen je skalarni produkt $B_\mathfrak{g}|\mathfrak{h}(R) \times \mathfrak{h}(R)$ na prostor $\mathfrak{h}^*(R)$:

$$(\lambda|\mu) = B_\mathfrak{g}(t_\lambda, t_\mu) = \lambda(t_\mu) = \mu(t_\lambda), \qquad \lambda, \mu \in \mathfrak{h}^*(R).$$

Za $\alpha \in R$ imamo

$$B_\mathfrak{g}(h_\alpha, h_\alpha) = \frac{4}{B_\mathfrak{g}(t_\alpha, t_\alpha)^2}\, B(t_\alpha, t_\alpha) = \frac{4}{B_\mathfrak{g}(t_\alpha, t_\alpha)},$$

dakle,

$$t_\alpha = \frac{1}{2}\,B_{\mathfrak{g}}(t_\alpha,t_\alpha)h_\alpha = \frac{1}{2}\,\frac{4}{B_{\mathfrak{g}}(h_\alpha,h_\alpha)}\,h_\alpha = \frac{2}{B_{\mathfrak{g}}(h_\alpha,h_\alpha)}\,h_\alpha.$$

Stoga za $\alpha,\beta\in R$ nalazimo

$$(\alpha|\beta) = B_{\mathfrak{g}}(t_\alpha,t_\beta) = 4\frac{B(h_\alpha,h_\beta)}{B_{\mathfrak{g}}(h_\alpha,h_\alpha)B(h_\beta,h_\beta)}$$

i, posebno,

$$(\alpha|\alpha) = \frac{4}{B_{\mathfrak{g}}(h_\alpha,h_\alpha)}.$$

Odatle je

$$n(\alpha,\beta) = 2\,\frac{(\alpha|\beta)}{(\beta|\beta)} = 2\,\frac{B_{\mathfrak{g}}(h_\alpha,h_\beta)}{B_{\mathfrak{g}}(h_\alpha,h_\alpha)B_{\mathfrak{g}}(h_\beta,h_\beta)}\,B_{\mathfrak{g}}(h_\beta,h_\beta) = 2\,\frac{B(h_\alpha,h_\beta)}{B(h_\alpha,h_\alpha)} \tag{6.8}$$

i

$$\frac{\|\alpha\|^2}{\|\beta\|^2} = \frac{B_{\mathfrak{g}}(h_\beta,h_\beta)}{B_{\mathfrak{g}}(h_\alpha,h_\alpha)}. \tag{6.9}$$

U daljnjem ćemo za svaku od klasičnih kompleksnih prostih Liejevih algebri $\mathfrak{g}$ i izabranu Cartanovu podalgebru $\mathfrak{h}$ utvrdit ćemo Dynkinov dijagram pripadnog sistema korijena $R(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$. U tu svrhu mogli bismo koristiti opisani skalarni produkt $(\,\cdot\,|\,\cdot\,)$ na prostoru $\mathfrak{h}^*(R)$, odnosno, skalarni produkt $B_{\mathfrak{g}}|\mathfrak{h}(R)\times\mathfrak{h}(R)$ na prostoru $\mathfrak{h}(R)$. Međutim, mnogo je jednostavnije koristiti jedan drugi skalarni produkt, tj. onaj koji se dobije iz simetrične bilinearne forme na $\mathfrak{g}$ definirane pomoću traga matrica, a ne traga operatora adjungirane reprezentacije na prostoru $\mathfrak{g}$. Naime, ako je $\mathfrak{g}$ Liejeva podalgebra od $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$, definiramo simetričnu bilinearnu formu $A_{\mathfrak{g}}:\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}\to\mathbb{C}$ sa

$$A_{\mathfrak{g}}(x,y) = \operatorname{Tr} xy, \qquad x,y\in\mathfrak{g}. \tag{6.10}$$

Ta je forma uvijek nedegenerirana, a u slučaju da je $\mathfrak{g}$ prosta Liejeva podalgebra od $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$, ona je proporcionalna Killingovoj formi. To je posljedica činjenice da forma $A_{\mathfrak{g}}$ ima isto svojstvo invarijantnosti s obzirom na adjungiranu reprezentaciju $z\mapsto \operatorname{ad} z$ od $\mathfrak{g}$ kao i Killingova forma $B_{\mathfrak{g}}$. Doista, za bilo koje $x,y,z\in\mathfrak{g}$ imamo redom

$$A_{\mathfrak{g}}((\operatorname{ad} z)x,y) + A_{\mathfrak{g}}(x,(\operatorname{ad} z)y) = \operatorname{Tr}\left([z,x]y + x[z,y]\right) =$$

$$= \operatorname{Tr}\left(zxy - xzy + xzy - xyz\right) = \operatorname{Tr} zxy - \operatorname{Tr} xyz = 0.$$

Propozicija 6.6.2. *Neka je $\mathfrak{g}$ prosta kompleksna Liejeva algebra i neka je $A:\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}\to\mathbb{C}$ bilinearna forma invarijantna s obzirom na adjungiranu reprezentaciju $z\mapsto \operatorname{ad} z$, $z\in\mathfrak{g}$, tj. takva da je*

$$A((\operatorname{ad} z)x,y) + A(x,(\operatorname{ad} z)y) = 0 \qquad \forall x,y,z\in\mathfrak{g}.$$

Tada postoji $c\in\mathbb{C}$ takav da je $A(x,y) = cB_{\mathfrak{g}}(x,y)$ $\forall x,y\in\mathfrak{g}$.

Dokaz: Budući da je bilinearna forma $B_{\mathfrak{g}}$ nedegenerirana, postoji jedinstven linearan operator $T:\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}$ takav da je

$$A(x,y) = B_{\mathfrak{g}}(Tx,y) \qquad \forall x,y\in\mathfrak{g}.$$

Za $x,y,z\in\mathfrak{g}$ imamo redom

$$B_{\mathfrak{g}}(T(\operatorname{ad} z)x,y) = A((\operatorname{ad} z)x,y) = -A(x,(\operatorname{ad} z)y) = -B_{\mathfrak{g}}(Tx,(\operatorname{ad} z)y) = B_{\mathfrak{g}}((\operatorname{ad} z)Tx,y).$$

Sada iz nedegeneriranosti Killingove forme $B_{\mathfrak{g}}$ slijedi $T(\operatorname{ad} z) = (\operatorname{ad} z)T \ \forall z \in \mathfrak{g}$. Dakle, T je preplitanje reprezentacije *ad* sa samom sobom. Međutim, kako je Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ prosta, reprezentacija *ad* je ireducibilna. Prema tvrdnji (c) Schurove leme (teorem 1.5.6.) postoji $c \in \mathbb{C}$ takav da je $T = cI_{\mathfrak{g}}$. Dakle, $A(x, y) = B_{\mathfrak{g}}(Tx, y) = B_{\mathfrak{g}}(cx, y) = cB_{\mathfrak{g}}(x, y)$.

Odredit ćemo sada eksplicitno faktor proporcionalnosti u slučaju klasičnih prostih Liejevih algebri:

Propozicija 6.6.3. *Neka je $\mathfrak{g}$ klasična prosta kompleksna Liejeva algebra, tj. $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$, $n \geq 2$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}(n, \mathbb{C})$, $n \in 2\mathbb{N}$, ili $\mathfrak{g} = \mathfrak{o}(n, \mathbb{C})$, $n = 3$ ili $n \geq 5$. Tada je bilinearna forma $A_{\mathfrak{g}} : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathbb{C}$ definirana sa* (6.10) *proporcionalna Killingovoj formi $B_{\mathfrak{g}}$ i faktori proporcionalnosti su u tri slučaja jednaki $\frac{1}{2n}$ za $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$, $\frac{1}{(n+2)}$ za $\mathfrak{sp}(n, \mathbb{C})$ i $\frac{1}{n-2}$ za $\mathfrak{o}(n, \mathbb{C})$ Dakle,*

(a) $B_{\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})}(x, y) = 2n\, Tr\, xy, \ \forall x, y \in \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$.

(b) $B_{\mathfrak{sp}(n,\mathbb{C})}(x, y) = (n + 2)Tr\, xy, \ \forall x, y \in \mathfrak{sp}(n, \mathbb{C})$.

(c) $B_{\mathfrak{o}(n,\mathbb{C})}(x, y) = (n - 2)Tr\, xy, \ \forall x, y \in \mathfrak{o}(n, \mathbb{C})$.

Dokaz: Prva tvrdnja neposredna je posljedica propozicije 6.6.2. Dakle, u svakom od tri slučaja vrijedi $A_{\mathfrak{g}}(x, y) = cB_{\mathfrak{g}}(x, y), \forall x, y \in \mathfrak{g}$, gdje je $c \in \mathbb{C}$. Da bismo izračunali c, dovoljno je izračunati $A_{\mathfrak{g}}(x, x)$ i $B_{\mathfrak{g}}(x, x)$ za zgodno izabrani $x \in \mathfrak{g}$. Provedimo to za svaki od slučajeva. U njima ćemo upotrebljavati uvedene oznake za korijene i korijenske vektore.

1. $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(\ell + 1)$, $\ell \in \mathbb{N}$. Izaberimo $x = h_{\alpha_1} = e_{11} - e_{22}$. Tada je $A_{\mathfrak{g}}(x, x) = \operatorname{Tr} x^2 = 2$. Nadalje, svi elementi baze

$$\{e_{ii} - e_{i+1,i+1};\ 1 \leq i \leq \ell\} \cup \{e_{ij};\ 1 \leq i, j \leq \ell + 1,\ i \neq j\}$$

Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ su svojstveni vektori operatora $\operatorname{ad} x$:

$$(\operatorname{ad} x)(e_{ii} - e_{i+1,i+1}) = 0, \qquad \text{za} \quad 1 \leq i \leq \ell;$$

$$(\operatorname{ad} x)e_{12} = 2e_{12}; \qquad (\operatorname{ad} x)e_{21} = -2e_{21};$$
$$(\operatorname{ad} x)e_{1i} = e_{1i}, \quad (\operatorname{ad} x)e_{i1} = -e_{i1}, \qquad \text{za} \quad 3 \leq i \leq \ell + 1;$$
$$(\operatorname{ad} x)e_{2i} = -e_{2i}, \quad (\operatorname{ad} x)e_{i2} = e_{i2} \qquad \text{za} \quad 3 \leq i \leq \ell + 1;$$
$$(\operatorname{ad} x)e_{ij} = 0 \qquad \text{za} \quad i \neq j \quad \text{i} \quad \{i, j\} \cap \{1, 2\} = \emptyset.$$

Prema tome,

$$B_{\mathfrak{g}}(x, x) = \operatorname{Tr} (\operatorname{ad} x)^2 = 2 \cdot 4 + 4(\ell - 1) = 4(\ell + 1).$$

Dakle, u ovom je slučaju

$$c = \frac{2}{4(\ell + 1)} = \frac{1}{2(\ell + 1)}.$$

2. $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}(2\ell, \mathbb{C})$, $\ell \in \mathbb{N}$. U ovom slučaju biramo $x = h_{\alpha_1} = e_{11} - e_{\ell+1,\ell+1}$. Ponovo je $A_{\mathfrak{g}}(x, x) = \operatorname{Tr} x^2 = 2$. Operator $\operatorname{ad} x$ ima u bazi

$$\{h_{\alpha_i};\ 1 \leq i \leq \ell\} \cup \{e_{\alpha_i};\ 1 \leq i \leq \ell\}\{e_{\beta ij};\ 1 \leq i, j \leq \ell,\ i \neq j\} \cup \{e_{\pm\gamma_{ij}};\ 1 \leq i < j \leq \ell\}$$

Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ dijagonalnu matricu:

$$(\operatorname{ad} x)h_{\alpha_i} = 0, \qquad \text{za} \quad 1 \leq i \leq \ell;$$

$$(\operatorname{ad} x)e_{\alpha_1} = 2e_{\alpha_1}; \qquad (\operatorname{ad} x)e_{-\alpha_1} = -2e_{-\alpha_1};$$
$$(\operatorname{ad} x)e_{\alpha_i} = (\operatorname{ad} x)e_{-\alpha_i} = 0 \quad \text{za} \quad 2 \leq i \leq \ell;$$
$$(\operatorname{ad} x)e_{\beta_{1i}} = e_{\beta_{1i}}, \quad (\operatorname{ad} x)e_{\beta_{i1}} = -e_{\beta_{i1}} \quad \text{za} \quad 2 \leq i \leq \ell;$$
$$(\operatorname{ad} x)e_{\beta_{ij}} = 0 \quad \text{za} \quad 2 \leq i, j \leq \ell, \quad i \neq j;$$
$$(\operatorname{ad} x)e_{\gamma_{1i}} = e_{\gamma_{1i}}, \quad (\operatorname{ad} x)e_{-\gamma_{1i}} = -e_{-\gamma_{1i}}, \quad \text{za} \quad 2 \leq i \leq \ell;$$
$$(\operatorname{ad} x)e_{\gamma_{ij}} = (\operatorname{ad} x)e_{-\gamma_{ij}} = 0 \quad \text{za} \quad 2 \leq i < j \leq \ell.$$

Prema tome,

$$B_{\mathfrak{g}}(x, x) = 2 \cdot 4 + 4(\ell - 1) = 4(\ell + 1).$$

Dakle,

$$c = \frac{2}{4(\ell + 1)} = \frac{1}{2(\ell + 1)} = \frac{1}{2\ell + 2}.$$

3. $\mathfrak{g} = \mathfrak{o}(2\ell+1, \mathbb{C})$**,** $\ell \in \mathbb{N}$**.** Biramo $x = \frac{1}{2}h_{\alpha_1} = e_{11} - e_{\ell+1,\ell+1}$. Ponovo je $A_{\mathfrak{g}}(x, x) = \operatorname{Tr} x^2 = 2$. Sada operator $\operatorname{ad} x$ djeluje na vektore baze

$$\{h_{\alpha_i};\ 1 \leq i \leq \ell\} \cup \{e_{\alpha_i};\ 1 \leq i \leq \ell\} \cup \{e_{\beta ij};\ 1 \leq i, j \leq \ell,\ i \neq j\} \cup \{e_{\pm\gamma_{ij}};\ 1 \leq i < j \leq \ell\}$$

Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ ovako:

$$(\operatorname{ad} x)h_{\alpha_i} = 0, \qquad \text{za} \quad 1 \leq i \leq \ell;$$
$$(\operatorname{ad} x)e_{\alpha_1} = e_{\alpha_1}; \qquad (\operatorname{ad} x)e_{-\alpha_1} = -e_{-\alpha_1};$$
$$(\operatorname{ad} x)e_{\alpha_i} = (\operatorname{ad} x)e_{-\alpha_i} = 0 \quad \text{za} \quad 2 \leq i \leq \ell;$$
$$(\operatorname{ad} x)e_{\beta_{1i}} = e_{\beta_{1i}}, \quad (\operatorname{ad} x)e_{\beta_{i1}} = -e_{\beta_{i1}} \quad \text{za} \quad 2 \leq i \leq \ell;$$
$$(\operatorname{ad} x)e_{\beta_{ij}} = 0 \quad \text{za} \quad 2 \leq i, j \leq \ell, \quad i \neq j;$$
$$(\operatorname{ad} x)e_{\gamma_{1i}} = e_{\gamma_{1i}}, \quad (\operatorname{ad} x)e_{-\gamma_{1i}} = -e_{-\gamma_{1i}}, \quad \text{za} \quad 2 \leq i \leq \ell;$$
$$(\operatorname{ad} x)e_{\gamma_{ij}} = (\operatorname{ad} x)e_{-\gamma_{ij}} = 0 \quad \text{za} \quad 2 \leq i < j \leq \ell.$$

Prema tome,

$$B_{\mathfrak{g}}(x, x) = 2 + 4(\ell - 1) = 2(2\ell - 1).$$

Dakle,

$$c = \frac{2}{2(2\ell - 1)} = \frac{1}{2\ell - 1} = \frac{1}{(2\ell + 1) - 2}.$$

4. $\mathfrak{g} = \mathfrak{o}(2\ell, \mathbb{C})$**,** $\ell \in \mathbb{N}$**,** $\ell \geq 3$**.** Biramo $x = h_{\beta_{12}} = e_{11} - e_{22} - e_{\ell+1,\ell+1} + e_{\ell+2,\ell+2}$. Sada je $A_{\mathfrak{g}}(x, x) = \operatorname{Tr} x^2 = 4$. Nadalje, operator $\operatorname{ad} x$ djeluje na vektore baze

$$\{h_{\beta_{i,\ell+i}};\ 1 \leq i \leq \ell\} \cup \{e_{\beta ij};\ 1 \leq i, j \leq \ell,\ i \neq j\} \cup \{e_{\pm\gamma_{ij}};\ 1 \leq i < j \leq \ell\}$$

Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ ovako:

$$(\operatorname{ad} x)h_{\beta_{i,\ell+i}} = 0 \quad \text{za} \quad 1 \leq i \leq \ell;$$
$$(\operatorname{ad} x)e_{\beta_{12}} = 2e_{\beta_{12}}, \qquad (\operatorname{ad} x)e_{\beta_{21}} = -2e_{\beta_{21}};$$
$$(\operatorname{ad} x)e_{\beta_{1i}} = e_{\beta_{1i}}, \quad (\operatorname{ad} x)e_{\beta_{2i}} = -e_{\beta_{2i}}, \quad \text{za} \quad 3 \leq i \leq \ell;$$
$$(\operatorname{ad} x)e_{\beta_{i1}} = -e_{\beta_{i1}}, \quad (\operatorname{ad} x)e_{\beta_{i2}} = e_{\beta_{i2}}, \quad \text{za} \quad 3 \leq i \leq \ell;$$
$$(\operatorname{ad} x)e_{\beta_{ij}} = 0 \quad \text{za} \quad 3 \leq i, j \leq \ell, \quad i \neq j;$$
$$(\operatorname{ad} x)e_{\gamma_{12}} = (\operatorname{ad} x)e_{-\gamma_{12}} = 0;$$

$$(\operatorname{ad} x)e_{\gamma_{1i}} = e_{\gamma_{1i}}, \quad (\operatorname{ad} x)e_{\gamma_{2i}} = -e_{\gamma_{2i}}, \quad \text{za} \quad 3 \leq i \leq \ell;$$
$$(\operatorname{ad} x)e_{-\gamma_{1i}} = -e_{-\gamma_{1i}}, \quad (\operatorname{ad} x)e_{-\gamma_{2i}} = e_{-\gamma_{2i}} \quad \text{za} \quad 3 \leq i \leq \ell;$$
$$(\operatorname{ad} x)e_{\gamma_{ij}} = (\operatorname{ad} x)e_{-\gamma_{ij}} = 0 \quad \text{za} \quad 3 \leq i < j \leq \ell.$$

Prema tome,

$$B_{\mathfrak{g}}(x, x) = 2 \cdot 4 + 8(\ell - 2) = 8(\ell - 1).$$

Dakle,

$$c = \frac{4}{8(\ell - 1)} = \frac{1}{2(\ell - 1)} = \frac{1}{2\ell - 2}.$$

Time je propozicija 6.6.3. u potpunosti dokazana.

Napomena. Direktnim računom lako se vidi da (c) vrijedi i za $n = 2$ i $n = 4$ iako pripadne Liejeve algebre nisu proste: $\mathfrak{o}(2, \mathbb{C})$ je komutativna, a $\mathfrak{o}(4, \mathbb{C})$ je direktna suma dvaju prostih ideala, koji su oba izomorfni sa $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$.

Posljedica je propozicije 6.6.3. da se u slučaju kad je $\mathfrak{g}$ klasična prosta kompleksna Liejeva algebra umjesto skalarnog produkta induciran na $\mathfrak{h}(R)$ i na njegovu dualu $\mathfrak{h}^*(R)$ Killingovom formom $B_{\mathfrak{g}}$ možemo koristiti skalarnim produktima induciranim bilinearnom formom $A_{\mathfrak{g}}(x, y) = \operatorname{Tr} xy,\ x, y \in \mathfrak{g}$. U daljnjem ćemo upravo te skalarne produkte i na $\mathfrak{h}^*(R)$ i na $\mathfrak{h}(R)$ označavati sa $(\cdot|\cdot)$, a pripadne norme sa $\|\cdot\|$. Sada formule (6.8) i (6.9) prelaze u

$$n(\alpha, \beta) = 2\,\frac{(h_\alpha|h_\beta)}{(h_\alpha|h_\alpha)} \qquad \text{i} \qquad \frac{\|\alpha\|^2}{\|\beta\|^2} = \frac{\|h_\beta\|^2}{\|h_\alpha\|^2}. \tag{6.11}$$

Sada ćemo identificirati Dynkinove dijagrame klasičnih prostih kompleksnih Liejevih algebri. I dalje upotrebljavamo uvedene oznake za četiri serije klasičnih Liejevih algebri.

Specijalna linearna Liejeva algebra $\mathfrak{sl}(\ell + 1, \mathbb{C})$, $\ell \geq 1$

Stavimo $\alpha_i = \alpha_{i,i+1}$, $1 \leq i \leq \ell$. Lako se vidi da je tada

$$\alpha_{ij} = \alpha_i + \cdots + \alpha_{j-1}, \qquad 1 \leq i < j \leq \ell + 1,$$

$$\alpha_{ij} = -\alpha_{ji} = -\alpha_j - \cdots - \alpha_{i-1}, \qquad 1 \leq j < i \leq \ell + 1.$$

To pokazuje da je $B = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell\}$ baza sistema korijena $R = R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$. Pripadni skup pozitivnih korijena je $R_+ = \{\alpha_{ij}; 1 \leq i < j \leq \ell + 1\}$.

Odredimo sada Dynkinov dijagram sistema korijena R. Najprije računamo skalarne produkte $(h_{\alpha_i}|h_{\alpha_j})$, $1 \leq i, j \leq \ell$:

$$(h_{\alpha_i}|h_{\alpha_i}) = \operatorname{Tr}(e_{ii} - e_{i+1,i+1})^2 = \operatorname{Tr}(e_{ii} + e_{i+1,i+1}) = 2$$

$$\big(h_{\alpha_i}|h_{\alpha_{i+1}}\big) = \operatorname{Tr}(e_{ii} - e_{i+1,i+1})(e_{i+1,i+1} - e_{i+2,i+2}) = \operatorname{Tr}(-e_{i+1,i+1}) = -1 \quad \text{za} \quad 1 \leq i \leq \ell - 1;$$

$$\big(h_{\alpha_i}|h_{\alpha_j}\big) = \operatorname{Tr}(e_{ii} - e_{i+1,i+1})(e_{jj} - e_{j+1,j+1}) = 0 \quad \text{ako je} \quad 1 \leq i, j \leq \ell, \quad |i - j| \geq 2.$$

Odatle i iz (6.11) nalazimo

$$n(\alpha_i, \alpha_{i+1}) = 2\,\frac{\big(h_{\alpha_{i+1}}|h_{\alpha_i}\big)}{(h_{\alpha_i}|h_{\alpha_i})} = 2\,\frac{-1}{2} = -1 = n(\alpha_{i+1}, \alpha_i) \quad 1 \leq i \leq \ell - 1,$$

i

$$n(\alpha_i, \alpha_j) = 0 \qquad \text{ako je } |i - j| \geq 2.$$

To pokazuje da je Dynkinov dijagram sistema korijena $R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ tipa A_ℓ.

Ortogonalna Liejeva algebra $\mathfrak{o}(2\ell+1,\mathbb{C})$, $\ell \geq 2$

Stavimo $\delta_i = \beta_{i,i+1}$ za $1 \leq i \leq \ell-1$ i $\delta_\ell = \alpha_\ell$. Tada nalazimo

$$\alpha_i = \delta_i + \cdots + \delta_\ell, \qquad 1 \leq i \leq \ell,$$

$$\beta_{ij} = \delta_i + \cdots + \delta_{j-1}, \qquad 1 \leq i < j \leq \ell,$$

$$\gamma_{ij} = \delta_i + \cdots + \delta_{j-1} + 2\delta_j + \cdots + 2\delta_\ell, \qquad 1 \leq i < j \leq \ell.$$

Dakle, $\{\delta_1, \cdots, \delta_\ell\}$ je baza sistema korijena $R = R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ i skup pozitivnih korijena u odnosu na tu bazu je

$$R_+ = \{\alpha_i;\ 1 \leq i \leq \ell\} \cup \{\beta_{ij};\ 1 \leq i < j \leq \ell\} \cup \{\gamma_{ij};\ 1 \leq i < j \leq \ell\}.$$

Odredimo sada Coxeterov graf i Dynkinov dijagram od R. Imamo

$$h_{\delta_i} = e_{ii} - e_{i+1,i+1} - e_{\ell+i,\ell+i} + e_{\ell+i+1,\ell+i+1} \quad \text{za} \quad 1 \leq i \leq \ell-1 \quad \text{i} \quad h_{\delta_\ell} = 2e_{\ell\ell} - 2e_{2\ell,2\ell}$$

pa je

$$(h_{\delta_i}|h_{\delta_i}) = \mathrm{Tr}\,(e_{ii} - e_{i+1,i+1} - e_{\ell+i,\ell+i} + e_{\ell+i+1,\ell+i+1})^2 = 4 \quad \text{za } 1 \leq i \leq \ell-1,$$

$$(h_{\delta_\ell}|h_{\delta_\ell}) = \mathrm{Tr}\,(2e_{\ell\ell} - 2e_{2\ell,2\ell})^2 = 8,$$

$$\big(h_{\delta_i}|h_{\delta_{i+1}}\big) = \mathrm{Tr}\,(e_{ii}-e_{i+1,i+1}-e_{\ell+i,\ell+i}+e_{\ell+i+1,\ell+i+1})(e_{i+1,i+1}-e_{i+2,i+2}-e_{\ell+i+1,\ell+i+1}+e_{\ell+i+2,\ell+i+2}) =$$

$$= \mathrm{Tr}\,(-e_{i+1,i+1} - e_{\ell+i+1,\ell+i+1}) = -2 \quad \text{za} \quad 1 \leq i \leq \ell-2,$$

$$\big(h_{\delta_{\ell-1}}|h_{\delta_\ell}\big) = \mathrm{Tr}\,(e_{\ell-1,\ell-1} - e_{\ell\ell} - e_{2\ell-1,2\ell-1} + e_{2\ell,2\ell})(2e_{\ell\ell} - 2e_{2\ell,2\ell}) = \mathrm{Tr}\,(-2e_{\ell\ell} - 2e_{2\ell,2\ell}) = -4.$$

Svi ostali međusobni skalarni produkti vektora baze h_{δ_i} jednaki su nuli, jer su produkti tih matrica jednaki nuli. Odatle imamo prema (6.11)

$$n(\delta_i, \delta_{i+1}) = 2\frac{\big(h_{\delta_{i+1}}|h_{\delta_i}\big)}{(h_{\delta_i}|h_{\delta_i})} = 2\frac{-2}{4} = -1 = n(\delta_{i+1}, \delta_i) \quad \text{za} \quad 1 \leq i \leq \ell-2,$$

$$n(\delta_{\ell-1}, \delta_\ell) = 2\frac{\big(h_{\delta_\ell}|h_{\delta_{\ell-1}}\big)}{\big(h_{\delta_{\ell-1}}|h_{\delta_{\ell-1}}\big)} = 2\frac{-4}{4} = -2,$$

$$n(\delta_\ell, \delta_{\ell-1}) = 2\frac{\big(h_{\delta_{\ell-1}}|h_{\delta_\ell}\big)}{(h_{\delta_\ell}|h_{\delta_\ell})} = 2\frac{-4}{8} = -1.$$

Nadalje, $n(\delta_i, \delta_j) = 0$ ako je $|i-j| \geq 2$. Dakle,

$$n(\delta_i, \delta_{i+1})n(\delta_{i+1}, \delta_i) = 1 \qquad \text{za} \quad 1 \leq i \leq \ell-2; \qquad n(\delta_{\ell-1}, \delta_\ell)n(\delta_\ell, \delta_{\ell-1}) = 2.$$

Prema tome, u Coxeterovom grafu spojeni su samo vrhovi δ_i i δ_{i+1} za $1 \leq i \leq \ell-1$ i to s jednom linijom za $1 \leq i \leq \ell-2$ i s dvije linije za $i = \ell-1$. Nadalje, omjeri kvadrata duljina korijena $\delta_{\ell-1}$ i δ_ℓ su prema (6.11) :

$$\frac{\|\delta_{\ell-1}\|^2}{\|\delta_\ell\|^2} = \frac{\|h_{\delta_\ell}\|^2}{\big\|h_{\delta_{\ell-1}}\big\|^2} = \frac{8}{4} = 2.$$

Dakle, korijen $\delta_{\ell-1}$ dulji je od korijena δ_ℓ, pa je u Dynkinovom dijagramu strelica usmjerena od vrha $\delta_{\ell-1}$ prema vrhu δ_ℓ. To znači da je Dynkinov dijagram sistema korijena $R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ tipa B_ℓ.

Simplektička Liejeva algebra $\mathfrak{sp}(2\ell, \mathbb{C})$, $\ell \geq 2$

Stavimo kao i u prethodnom primjeru $\delta_i = \beta_{i,i+1}$ za $1 \leq i \leq \ell - 1$ i $\delta_\ell = \alpha_\ell$. Tada je

$$\alpha_i = 2\delta_i + \cdots + 2\delta_{\ell-1} + \delta_\ell, \qquad 1 \leq i \leq \ell,$$

$$\beta_{ij} = \delta_i + \cdots + \delta_{j-1}, \qquad 1 \leq i < j \leq \ell,$$

$$\gamma_{ij} = \delta_i + \cdots + \delta_{j-1} + 2\delta_j + \cdots + 2\delta_{\ell-1} + \delta_\ell, \qquad 1 \leq i < j \leq \ell.$$

Dakle, $\{\delta_1, \cdots, \delta_\ell\}$ je baza sistema korijena $R = R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ i skup pozitivnih korijena u odnosu na tu bazu je

$$R_+ = \{\alpha_i;\ 1 \leq i \leq \ell\} \cup \{\beta_{ij};\ 1 \leq i < j \leq \ell\} \cup \{\gamma_{ij};\ 1 \leq i < j \leq \ell\}.$$

Izračunajmo sada skalarne produkte $\left(h_{\delta_i} | h_{\delta_j}\right)$. Imamo

$$h_{\delta_i} = e_{ii} - e_{i+1,i+1} - e_{\ell+i,\ell+i} + e_{\ell+i+1,\ell+i+1} \quad \text{za} \quad 1 \leq i \leq \ell - 1; \qquad h_{\delta_\ell} = e_{\ell\ell} - e_{2\ell,2\ell}.$$

Prema tome, za $1 \leq i \leq \ell - 1$ je

$$(h_{\delta_i} | h_{\delta_i}) = \operatorname{Tr}(e_{ii} - e_{i+1,i+1} - e_{\ell+i,\ell+i} + e_{\ell+i+1,\ell+i+1})^2 = \operatorname{Tr}(e_{ii} + e_{i+1,i+1} + e_{\ell+i,\ell+i} + e_{\ell+i+1,\ell+i+1}) = 4,$$

a

$$(h_{\delta_\ell} | h_{\delta_\ell}) = \operatorname{Tr}(e_{\ell\ell} - e_{2\ell,2\ell})^2 = \operatorname{Tr}(e_{\ell\ell} + e_{2\ell,2\ell}) = 2.$$

Dakle, kvadrati duljina vektora baze $h_{\delta_1}, \ldots, h_{\delta_{\ell-1}}$ su međusobno jednaki kao i u prethodnom primjeru, ali sada je kvadrat duljine vektora h_{δ_ℓ} upola manji. Prema (6.11) duljine korijena $\delta_1, \ldots, \delta_{\ell-1}$ su jednake a kvadrat duljine korijena δ_ℓ je dvostruko veći od kvadrata duljina ostalih. Odredimo među kojim vrhovima postoje spojnice. Imamo

$$\left(h_{\delta_i} | h_{\delta_{i+1}}\right) = \operatorname{Tr}(e_{ii} - e_{i+1,i+1} - e_{\ell+i,\ell+i} + e_{\ell+i+1,\ell+i+1})(e_{i+1,i+1} - e_{i+2,i+2} - e_{\ell+i+1,\ell+i+1} + e_{\ell+i+2,\ell+i+2}) =$$

$$= \operatorname{Tr}(-e_{i+1,i+1} - e_{\ell+i+1,\ell+i+1}) = -2 \quad \text{za} \quad 1 \leq i \leq \ell - 2,$$

$$\left(h_{\delta_{\ell-1}} | h_{\delta_\ell}\right) = \operatorname{Tr}(e_{\ell-1,\ell-1} - e_{\ell\ell} - e_{2\ell-1,2\ell-1} + e_{2\ell,2\ell})(e_{\ell\ell} - e_{2\ell,2\ell}) = \operatorname{Tr}(-e_{\ell\ell} - e_{2\ell,2\ell}) = -2.$$

Svi ostali međusobni skalarni produkti vektora baze h_{δ_i} jednaki su nuli, jer su produkti tih matrica jednaki nuli. Prema (6.11) imamo

$$n(\delta_i, \delta_{i+1}) = 2\frac{\left(h_{\delta_{i+1}} | h_{\delta_i}\right)}{(h_{\delta_i} | h_{\delta_i})} = 2\frac{-2}{4} = -1 = n(\delta_{i+1}, \delta_i) \quad \text{za} \quad 1 \leq i \leq \ell - 2,$$

$$n(\delta_{\ell-1}, \delta_\ell) = 2\frac{\left(h_{\delta_\ell} | h_{\delta_{\ell-1}}\right)}{\left(h_{\delta_{\ell-1}} | h_{\delta_{\ell-1}}\right)} = 2\frac{-2}{4} = -1,$$

$$n(\delta_\ell, \delta_{\ell-1}) = 2\frac{\left(h_{\delta_{\ell-1}} | h_{\delta_\ell}\right)}{(h_{\delta_\ell} | h_{\delta_\ell})} = 2\frac{-2}{2} = -2.$$

Dakle,

$$n(\delta_i, \delta_{i+1}) n(\delta_{i+1}, \delta_i) = 1 \qquad \text{za} \quad 1 \leq i \leq \ell - 2; \qquad n(\delta_{\ell-1}, \delta_\ell) n(\delta_\ell, \delta_{\ell-1}) = 2.$$

Prema tome, Coxeterov graf je isti kao i u prethodnom slučaju. Međutim, sada je korijen δ_ℓ dulji od korijena $\delta_{\ell-1}$, pa je strelica u Dynkinovom dijagramu okrenuta suprotno: od δ_ℓ prema $\delta_{\ell-1}$. Dakle, Dynkinov dijagram sistema korijena $R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ je tipa C_ℓ.

Ortogonalna Liejeva algebra $\mathfrak{o}(2\ell,\mathbb{C})$, $\ell \geq 3$

Sada stavimo $\alpha_i = \beta_{i,i+1}$ za $q \leq i \leq \ell - 1$ i $\alpha_\ell = \gamma_{\ell-1,\ell}$. Tada je

$$\beta_{ij} = \alpha_i + \cdots + \alpha_{j-1} \qquad 1 \leq i < j \leq \ell,$$

$$\gamma_{ij} = \alpha_i + \cdots + \alpha_{j-1} + 2\alpha_j + \cdots + 2\alpha_{\ell-2} + \alpha_{l-1} + \alpha_\ell, \qquad 1 \leq i < j \leq \ell.$$

Dakle, $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell\}$ je baza sistema korijena $R = R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ i pripadni skup pozitivnih korijena je

$$R_+ = \{\beta_{ij};\ 1 \leq i < j \leq \ell\} \cup \{\gamma_{ij};\ 1 \leq i < j \leq \ell\}.$$

Imamo

$$h_{\alpha_i} = h_{\beta_{i,i+1}} = e_{ii} - e_{i+1,i+1} - e_{\ell+i,\ell+i} + e_{\ell+i+1,\ell+i+1} \quad \text{za} \quad 1 \leq i \leq \ell - 1,$$
$$h_{\alpha_\ell} = h_{\gamma_{\ell-1,\ell}} = e_{\ell-1,\ell-1} + e_{\ell\ell} - e_{2\ell-1,2\ell-1} - e_{2\ell,2\ell}.$$

Prema tome, za $1 \leq i \leq \ell - 1$ je

$$(h_{\alpha_i}|h_{\alpha_i}) = \mathrm{Tr}\,(e_{ii} - e_{i+1,i+1} - e_{\ell+i,\ell+i} + e_{\ell+i+1,\ell+i+1})^2 = \mathrm{Tr}\,(e_{ii} + e_{i+1,i+1} + e_{\ell+i,\ell+i} + e_{\ell+i+1,\ell+i+1}) = 4,$$

$$(h_{\alpha_\ell}|h_{\alpha_\ell}) = \mathrm{Tr}\,(e_{\ell-1,\ell-1} + e_{\ell\ell} - e_{2\ell-1,2\ell-1} - e_{2\ell,2\ell})^2 = \mathrm{Tr}\,(e_{\ell-1,\ell-1} + e_{\ell\ell} + e_{2\ell-1,2\ell-1} + e_{2\ell,2\ell}) = 4.$$

Dakle, prema (6.11) u ovom su slučaju duljine svih vektora izabrane baze od R iste duljine. Odredimo sada spojnice među vrhovima. Imamo za $1 \leq i \leq \ell - 2$

$$\big(h_{\alpha_i}|h_{\alpha_{i+1}}\big) = \mathrm{Tr}\,(e_{ii} - e_{i+1,i+1} - e_{\ell+i,\ell+i} + e_{\ell+i+1,\ell+i+1})(e_{i+1,i+1} - e_{i+2,i+2} - e_{\ell+i+1,\ell+i+1} + e_{\ell+i+2,\ell+i+2}) =$$

$$= \mathrm{Tr}\,(-e_{i+1,i+1} - e_{\ell+i+1,\ell+i+1}) = -2.$$

Nadalje,

$$\big(h_{\alpha_{\ell-2}}|h_{\alpha_\ell}\big) = \mathrm{Tr}\,(e_{\ell-2,\ell-2} - e_{\ell-1,\ell-1} - e_{2\ell-2,2\ell-2} + e_{2\ell-1,2\ell-1})(e_{\ell-1,\ell-1} + e_{\ell\ell} - e_{2\ell-1,2\ell-1} - e_{2\ell,2\ell}) =$$

$$= \mathrm{Tr}\,(-e_{\ell-1,\ell-1} - e_{2\ell-1,2\ell-1}) = -2$$

ali

$$\big(h_{\alpha_{\ell-1}}|h_{\alpha_\ell}\big) = \mathrm{Tr}\,(e_{\ell-1,\ell-1} - e_{\ell,\ell} - e_{2\ell-1,2\ell-1} + e_{2\ell,2\ell})(e_{\ell-1,\ell-1} + e_{\ell\ell} - e_{2\ell-1,2\ell-1} - e_{2\ell,2\ell}) =$$

$$= \mathrm{Tr}\,(e_{\ell-1,\ell-1} - e_{\ell\ell} + e_{2\ell-1,2\ell-1} - e_{2\ell,2\ell})) = 0.$$

Svi ostali međusobni skalarni produkti elemenata h_{α_i} jednaki su nuli jer su svi međusobni produkti tih matrica jednaki nuli. Sada pomoću (6.11) dobivamo

$$n(\alpha_i, \alpha_{i+1}) = 2\frac{\big(h_{\alpha_{i+1}}|h_{\alpha_i}\big)}{\big(h_{\alpha_i}|h_{\alpha_i}\big)} = 2\frac{-2}{4} = -1 = n(\alpha_{i+1}, \alpha_i), \quad \text{za} \quad 1 \leq i \leq \ell - 2,$$

$$n(\alpha_{\ell-2}, \alpha_\ell) = 2\frac{\big(h_{\alpha_\ell}|h_{\alpha_{\ell-2}}\big)}{\big(h_{\alpha_{\ell-2}}|h_{\alpha_{\ell-2}}\big)} = 2\frac{-2}{4} = -1 = n(\alpha_\ell, \alpha_{\ell-2}).$$

To znači da je Coxeterov graf sistema korijena $R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$, a time i Dynkinov dijagram jer su svi korijeni iste duljine, tipa D_ℓ.

Bibliografija

[1] N. Bourbaki, *Lie Groups and Lie Algebras*, Ch. 1−3, Springer−Verlag, 2nd printing, Berlin−Heidelberg−New York−London−Paris−Tokyo, 1989; Ch. 4−6, Springer−Verlag, Berlin−Heidelberg−New York, 2002; Ch. 7−9, Springer−Verlag, Berlin−Heidelberg, 2005.

[2] R. Carter, G. Segal, I. Macdonald, *Lectures on Lie Groups and Lie Algebras*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1995.

[3] K. Erdmann and M.J. Wildon, *Introduction to Lie Algebras*, Springer−Verlag, London, 2006.

[4] W.A. de Graaf, *Lie Algebras: Theory and Algorithms*, North−Holland, Elsevier, Amsterdam−Lausanne−New York−Oxford−Shannon−Singapore−Tokyo, 2000.

[5] B.C. Hall, *Lie Groups, Lie Algebras, and Representations, An Elementary Introduction*, Springer−Verlag, New York, 2004.

[6] J.E. Humphreys, *Introduction to Lie Algebras and Representation Theory*, Springer−Verlag, Berlin−Heidelberg−New York, 1972.

[7] N. Jacobson, *Lie Algebras*, Dover Publications, New York, 1979.

[8] V.S. Varadarajan, *Lie Groups, Lie Algebras, and Their Representations*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1974.

[9] H. Weyl, *The Classical Groups, Their Invariants and Representations*, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1997.

[10] D.J. Winter, *Abstract Lie Algebras*, Dover Publications, Inc., Mineola, N.Y., 2008.