INVARIJANTE REDUKTIVNIH GRUPA

Prof. dr. sc. Hrvoje Kraljević

Predavanja održana u okviru doktorskog studija
na PMF−Matematičkom odsjeku Sveučilišta u Zagrebu
u akademskoj godini 2012./2013.

Zagreb, 2013.

Sadržaj

Poglavlje 1

INVARIJANTE I SEPARACIJA VARIJABLI

1.1 Graduirane algebre nad vektorskim prostorom

U cijelom kolegiju bavit ćemo se isključivo vektorskim prostorima i algebrama nad poljem K karakteristike 0. **Unitalna algebra** je asocijativna algebra s jedinicom $1_{\mathcal{A}}$. Uvijek ćemo identificirati $\lambda \in K$ sa $\lambda 1_{\mathcal{A}}$. Dakle, $1_{\mathcal{A}} = 1$ i $K \subseteq \mathcal{A}$.

Graduacija na unitalnoj algebri $\mathcal{A}$ je niz potprostora $\left(\mathcal{A}^k\right)_{k\in\mathbb{Z}_+}$ takav da vrijedi

$$\mathcal{A} = \sum_{k\in\mathbb{Z}_+} \dot{+} \mathcal{A}^k \qquad \text{i} \qquad \mathcal{A}^k\mathcal{A}^\ell \subseteq \mathcal{A}^{k+\ell}, \quad k,\ell \in \mathbb{Z}_+.$$

Graduirana algebra je unitalna algebra sa zadanom graduacijom. Za elemente potprostora $\mathcal{A}^k$ kažemo da su **homogeni stupnja** k. Uočimo da je $\mathcal{A}^0$ unitalna podalgebra od $\mathcal{A}$ i da algebru $\mathcal{A}$ možemo shvaćati kao algebru nad prstenom $\mathcal{A}^0$. **Graduirana algebra** $\mathcal{A}$ zove se **povezana** ako vrijedi $\mathcal{A}^0 = K$.

Filtracija na unitalnoj algebri $\mathcal{A}$ je niz potprostora $(\mathcal{A}_k)_{k\in\mathbb{Z}_+}$ takav da vrijedi

$$\mathcal{A}_k \subseteq \mathcal{A}_\ell \quad \text{ako je} \quad k \leq \ell, \qquad \mathcal{A} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}_+} \mathcal{A}_k, \qquad \mathcal{A}_k\mathcal{A}_\ell \subseteq \mathcal{A}_{k+\ell}, \quad k,\ell \in \mathbb{Z}_+.$$

Filtrirana algebra je unitalna algebra sa zadanom filtracijom. **Filtrirana algebra** $\mathcal{A}$ je **povezana** ako je $\mathcal{A}_0 = K$.

Ako je $(\mathcal{A}_k)_{k\in\mathbb{Z}_+}$ filtracija na unitalnoj algebri $\mathcal{A}$, definiramo

$$\mathrm{Gr}^k(\mathcal{A}) = \mathcal{A}_k/\mathcal{A}_{k-1}, \qquad k \in \mathbb{Z}_+, \qquad \mathcal{A}_{-1} = \{0\},$$

i neka je $\mathrm{Gr}(\mathcal{A})$ direktna suma tih kvocijentnih prostora

$$\mathrm{Gr}(\mathcal{A}) = \coprod_{k\in\mathbb{Z}_+} \mathrm{Gr}^k(\mathcal{A}).$$

Pri tome je $\coprod$ oznaka za (vanjsku) direktnu sumu vektorskih prostora, i, općenitije, modula: ako je A prsten i ako je $(V_i)_{i\in I}$ familija (lijevih) $A-$modula, onda je

$$\prod_{i\in I} V_i = \left\{ f : I \to \bigcup_{i\in I} V_i;\ f(i) \in V_i \ \ \forall i \in I \right\}$$

$A-$modul uz operacije

$$(f+g)(i) = f(i) + g(i), \qquad (af)(i) = af(i), \qquad f, g \in \prod_{i \in I} V_i, \quad a \in A, \quad i \in I.$$

Taj se modul zove **direktni produkt** familije modula $(V_i)_{i \in I}$. **Direktna suma** familije $(V_i)_{i \in I}$ je sljedeći podmodul direktnog produkta

$$\coprod_{i \in I} V_i = \left\{ f \in \prod_{i \in I} V_i; \text{ nosač } \operatorname{Supp} f = \{i \in I;\ f(i) \neq 0\} \text{ je konačan} \right\}.$$

Svaki se modul V_j identificira s podmodulom direktne sume $\coprod_{i \in I} V_i$ tako da $v \in V_j$ identificiramo s funkcijom

$$i \mapsto v(i) = \begin{cases} v & \text{ako je } i = j \\ \\ 0 & \text{ako je } i \neq j \end{cases}$$

Uz tu identifikaciju (vanjska) direktna suma je (unutarnja) direktna suma svojih podmodula V_i, $i \in I$. Naravno, sve se analogno definira i za desne module.

Za $k, \ell \in \mathbb{Z}_+$ nije teško vidjeti da je dobro definirano preslikavanje

$$\operatorname{Gr}^k(\mathcal{A}) \times \operatorname{Gr}^\ell(\mathcal{A}) \longrightarrow \operatorname{Gr}^{k+\ell}(\mathcal{A}), \qquad (a + \mathcal{A}_{k-1}, b + \mathcal{A}_{\ell-1}) \mapsto ab + \mathcal{A}_{k+\ell-1},$$

i da je to preslikavanje bilinearno. Ta familija bilinearnih preslikavanja definira bilinearno preslikavanje $\operatorname{Gr}(\mathcal{A}) \times \operatorname{Gr}(\mathcal{A}) \to \operatorname{Gr}(\mathcal{A})$ uz koje $\operatorname{Gr}(\mathcal{A})$ postaje unitalna algebra s graduacijom $\left(\operatorname{Gr}^k(\mathcal{A})\right)_{k \in \mathbb{Z}_+}$. Kažemo da je $\operatorname{Gr}(\mathcal{A})$ **graduirana algebra pridružena filtriranoj algebri** $\mathcal{A}$.

Naravno, svaka se graduirana algebra $\mathcal{A}$ može shvatiti i kao filtrirana algebra: iz graduacije $\left(\mathcal{A}^k\right)_{k \in \mathbb{Z}_+}$ formiramo filtraciju $(\mathcal{A}_k)_{k \in \mathbb{Z}_+}$ ovako:

$$\mathcal{A}_k = \sum_{j=0}^{k} \dot{+} \mathcal{A}^j, \qquad k \in \mathbb{Z}_+.$$

Očito je tada $\mathcal{A}_k = \mathcal{A}^k \dot{+} \mathcal{A}_{k-1}$ pa je polazna graduirana algebra $\mathcal{A}$ prirodno izomorfna algebri $\operatorname{Gr}(\mathcal{A})$ (tj. graduiranoj algebri pridruženoj filtriranoj algebri $\mathcal{A}$).

Neka su $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ graduirane algebre s graduacijama $\left(\mathcal{A}^k\right)_{k \in \mathbb{Z}_+}$ i $\left(\mathcal{B}^k\right)_{k \in \mathbb{Z}_+}$. Za **unitalni homomorfizam** $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ kažemo da je **graduiran**, ili da je φ **homomorfizam graduiranih algebri** ako vrijedi

$$\varphi\left(\mathcal{A}^k\right) \subseteq \mathcal{B}^k \qquad \forall k \in \mathbb{Z}_+.$$

Analogno, ako su $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ filtrirane algebre s filtracijama $(\mathcal{A}_k)_{k \in \mathbb{Z}_+}$ i $(\mathcal{B}_k)_{k \in \mathbb{Z}_+}$, **homomorfizam filtriranih algebri** je unitalni homomorfizam $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ takav da je

$$\varphi\left(\mathcal{A}_k\right) \subseteq \mathcal{B}_k \qquad \forall k \in \mathbb{Z}_+.$$

Zadatak 1.1.1. *Neka je $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ homomorfizam filtriranih algebri. Dokažite:*

(a) *Dobro je definirano linearno preslikavanje* $\operatorname{Gr}(\varphi) : \operatorname{Gr}(\mathcal{A}) \to \operatorname{Gr}(\mathcal{B})$ *sa*

$$\operatorname{Gr}(\varphi)(a + \mathcal{A}_{k-1}) = \varphi(a) + \mathcal{B}_{k-1}, \qquad a \in \mathcal{A}_k, \quad k \in \mathbb{Z}_+$$

(b) $\operatorname{Gr}(\varphi)$ *iz (a) je homomorfizam graduiranih algebri.*

(c) *Homorfizam* $\mathrm{Gr}(\varphi)$ *je injektivan ako i samo ako je homomorfizam* φ *injektivan.*

(d) *Homorfizam* $\mathrm{Gr}(\varphi)$ *je surjektivan ako i samo ako je homomorfizam* φ *surjektivan.*

(e) *Ako je i* $\psi : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ *homomorfizam filtriranih algebri, onda je* $\mathrm{Gr}(\psi \circ \varphi) = \mathrm{Gr}(\psi) \circ \mathrm{Gr}(\varphi)$.

Dakle, pridruživanje graduirane algebre filtriranoj algebri je zapravo kovarijantan funktor između dviju kategorija. Uočimo da „*ako*" u (c) i (d) zapravo znači da je taj funktor egzaktan: ako je

$$\mathcal{A} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{B} \xrightarrow{\psi} \mathcal{C}$$

egzaktan niz u kategoriji filtriranih algebri, tj. ako vrijedi $\mathrm{Im}\,\varphi = \mathrm{Ker}\,\psi$, onda je

$$\mathrm{Gr}(\mathcal{A}) \xrightarrow{\mathrm{Gr}(\varphi)} \mathrm{Gr}(\mathcal{B}) \xrightarrow{\mathrm{Gr}(\psi)} \mathrm{Gr}(\mathcal{C})$$

egzaktan niz u kategoriji graduiranih algebri.

Za **potprostor** V graduirane algebre $\mathcal{A}$ kažemo da je **graduiran** ako je razapet svojim homogenim elementima, odnosno, ako je

$$V = \sum_{k \in \mathbb{Z}_+} \dot{+} V^k, \qquad V^k = V \cap \mathcal{A}^k, \quad k \in \mathbb{Z}_+.$$

Ako je dvostrani ideal $\mathcal{J}$ u graduiranoj algebri $\mathcal{A}$ graduiran, onda je kvocijentna algebra $\mathcal{A}/\mathcal{J}$ graduirana uz graduaciju $(\mathcal{A}/\mathcal{J})^k = \mathcal{A}^k/\mathcal{J}^k$. Uočimo da je jezgra $\mathrm{Ker}(\varphi)$ homomorfizma $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ graduiranih algebri graduiran dvostrani ideal i φ definira izomorfizam graduiranih algebri $\mathcal{A}/\mathrm{Ker}(\varphi) \to \mathrm{Im}(\varphi)$.

Zadatak 1.1.2. *Neka je* $\mathcal{A}$ *graduirana algebra i neka je* S *neki skup njenih homogenih elemenata. Dokažite da su lijevi, desni i dvostrani ideal generirani sa* S *graduirani potprostori od* $\mathcal{A}$.

S druge strane, ako je $\mathcal{A}$ filtrirana algebra s filtracijom $(\mathcal{A}_k)_{k \in \mathbb{Z}_+}$ i ako je $\mathcal{J}$ dvostrani ideal u $\mathcal{A}$, onda bez ikakve daljnje pretpostavke na $\mathcal{J}$ kvocijentna algebra $\mathcal{A}/\mathcal{J}$ postaje filtrirana algebra uz filtraciju $(\mathcal{A}_k/(\mathcal{A}_k \cap \mathcal{J}))_{k \in \mathbb{Z}_+}$.

Podsjetimo se sada pojma tenzorskog produkta vektorskih prostora. Neka su $V_1, \dots, V_n$ vektorski prostori nad poljem K. **Tenzorski produkt** tih vektorskih prostora je uređen par (T, φ), gdje je T vektorski prostor nad poljem K, φ je $n-$multilinearno preslikavanje sa $V_1 \times \cdots \times V_n$ u T i vrijedi sljedeće univerzalno svojstvo:

> *Ako je* V *vektorski prostor nad poljem* K *i ako je* $\psi : V_1 \times \cdots \times V_n \to V$ $n-$*multilinearno preslikavanje, onda postoji jedinstven linearan operator* $\Psi : T \to V$ *takav da je* $\psi = \Psi \circ \varphi$.

Teorem 1.1.1. *Postoji tenzorski produkt vektorskih prostora* $V_1, \dots, V_n$. *Tenzorski je produkt jedinstven do na izomorfizam: ako su* (T, φ) *i* (S, ψ) *tenzorski produkti prostora* $V_1, \dots, V_n$, *jedinstveni linearni operatori* $\Phi : S \to T$ *i* $\Psi : T \to S$, *takvi da vrijedi* $\varphi = \Phi \circ \psi$ *i* $\psi = \Psi \circ \varphi$, *međusobno su inverzni izomorfizmi.*

Dokaz: Dokažimo najprije jedinstvenost do na izomorfizam. Neka su (T, φ) i (S, ψ) tenzorski produkti vektorskih prostora $V_1, \dots, V_n$ i neka su $\Phi : S \to T$ i $\Psi : T \to S$ jedinstveni linearni operatori takvi da vrijedi $\varphi = \Phi \circ \psi$ i $\psi = \Psi \circ \varphi$. Tada je $\Phi \circ \Psi : T \to T$ linearan operator i vrijedi

$$(\Phi \circ \Psi) \circ \varphi = \Phi \circ (\Psi \circ \varphi) = \Phi \circ \psi = \varphi.$$

Kako je ujedno $I_T \circ \varphi = \varphi$, iz jedinstvenosti u univerzalnom svojstvu tenzorskog produkta (T, φ) slijedi da je $\Phi \circ \Psi = I_T$. Sasvim analogno iz jedinstvenosti u univerzalnom svojstvu tenzorskog produkta (S, ψ) slijedi da je $\Psi \circ \Phi = I_S$.

Dokažimo sada egzistenciju. Izaberimo bazu $\left\{e_j^{(i)},\ j \in I_i\right\}$ prostora V_i za svaki $i = 1, \ldots, n$. Neka je T vektorski prostor nad poljem K s bazom koja je numerirana Kartezijevim produktom $I_1 \times \cdots \times I_n$:

$$\{e_{j_1,\ldots,j_n};\ (j_1, \ldots, j_n) \in I_1 \times \cdots \times I_n\}.$$

Neka je $\varphi : V_1 \times \cdots \times V_n \to T$ jedinstveno $n-$multilinearno preslikavanje takvo da vrijedi

$$\varphi\left(e_{j_1}^{(1)}, \ldots, e_{j_n}^{(n)}\right) = e_{j_1,\ldots,j_n} \qquad \forall (j_1, \ldots, j_n) \in I_1 \times \cdots \times I_n.$$

Treba dokazati da par (T, φ) ima univerzalno svojstvo tenzorskog produkta. Neka je V vektorski prostor i $\psi : V_1 \times \cdots \times V_n \to V$ $n-$multilinearno preslikavanje. Neka je $\Psi : T \to V$ linearan operator definiran na bazi $\{e_{j_1,\ldots,j_n}\}$ ovako:

$$\Psi\left(e_{j_1,\ldots,j_n}\right) = \psi\left(e_{j_1}^{(1)}, \ldots, e_{j_n}^{(n)}\right), \qquad (j_1, \ldots, j_n) \in I_1 \times \cdots \times I_n.$$

Tada se očito $n-$multilinearna preslikavanja $\Psi \circ \varphi$ i ψ sa $V_1 \times \cdots \times V_n$ u V podudarajuna svim $n-$torkama $\left(e_{j_1}^{(1)}, \ldots, e_{j_n}^{(n)}\right)$, $(j_1, \ldots, j_n) \in I_1 \times \cdots \times I_n$, a odatle zbog $n-$multilinearnosti slijedi da se podudaraju na svim $n-$torkama $(v_1, \ldots, v_n) \in V_1 \times \cdots \times V_n$, tj. vrijedi $\Psi \circ \varphi = \psi$. Napokon, budući da je po definiciji $\{e_{j_1,\ldots,j_n}\}$ baza prostora T, jedinstvenost linearnog operatora $\Psi : T \to V$ s takvim svojstvom je očigledna.

Uobičajena je oznaka $V_1 \otimes \cdots \otimes V_n$ za prvi član tenzorskog produkta (T, φ) vektorskih prostora $V_1, \ldots, V_n$. Nadalje, tada se upotrebljava oznaka

$$v_1 \otimes \cdots \otimes v_n = \varphi(v_1, \ldots, v_n), \qquad v_1 \in V_1, \ldots, v_n \in V_n.$$

Iz konstrukcije u dokazu egzistencije u teoremu 1.1.1. i iz jedinstvenosti do na izomorfizam neposredno slijedi da je za bilo koje baze $\left\{e_j^{(i)};\ j \in I_i\right\}$ prostora V_i za $i = 1, \ldots, n$ familija

$$\left\{e_{j_1}^{(1)} \otimes \cdots \otimes e_{j_n}^{(n)};\ (j_1, \ldots, j_n) \in I_1 \times \cdots \times I_n\right\}$$

baza prostora $V_1 \otimes \cdots \otimes V_n$. Štoviše, budući da je svaki linearno nezavisan podskup vektorskog prostora sadržan u nekoj bazi tog vektorskog prostora, ako za svaki $i = 1, \ldots, n$ izaberemo linearno nezavisan podskup $S_i \subseteq V_i$, onda je

$$\{v_1 \otimes \cdots \otimes v_n;\ (v_1, \ldots, v_n) \in S_1 \times \cdots \times S_n\} \tag{1.1}$$

linearno nezavisan podskup prostora $V_1 \otimes \cdots \otimes V_n$. Analogno, budući da svaki skup koji razapinje vektorski prostor sadrži bazu tog vektorskog prostora, ako za svaki $i = 1, \ldots, n$ podskup $S_i \subseteq V_i$ razapinje prostor V_i, onda skup (1.1) razapinje prostor $V_1 \otimes \cdots \otimes V_n$. Posebno, svaki je element tenzorskog produkta $V_1 \otimes \cdots \otimes V_n$ suma vektora oblika $v_1 \otimes \cdots \otimes v_n$, uz $v_1 \in V_1, \ldots, v_n \in V_n$. Istaknimo da se **ne može** svaki vektor tenzorskog produkta $V_1 \otimes \cdots \otimes V_n$ zapisati u obliku $v_1 \otimes \cdots \otimes v_n$; no svaki je suma konačno mnogo takvih. Zbog toga su dva linearna operatora $A, B : V_1 \otimes \cdots \otimes V_n \to V$ jednaki ukoliko se podudaraju na svim vektorima oblika $v_1 \otimes \cdots \otimes v_n$, $v_1 \in V_1, \ldots, v_n \in V_n$.

Iz jedinstvenosti u univerzalnom svojstvu tenzorskog produkta slijedi da se mogu identificirati tenzorski produkti

$$(V_1 \otimes \cdots \otimes V_n) \otimes (W_1 \otimes \cdots \otimes W_m) \qquad \text{i} \qquad V_1 \otimes \cdots \otimes V_n \otimes W_1 \otimes \cdots \otimes W_m$$

i to tako da za sve vektore $v_1 \in V_1, \dots, v_n \in V_n, w_1 \in W_1, \dots, w_m \in W_m$ vrijedi

$$(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) \otimes (w_1 \otimes \cdots \otimes w_m) = v_1 \otimes \cdots \otimes v_n \otimes w_1 \otimes \cdots \otimes w_m.$$

Posebno, imamo identifikacije

$$V \otimes (W \otimes U) = (V \otimes W) \otimes U = V \otimes W \otimes U.$$

Neka je u daljnjem V vektorski prostor nad poljem K. Stavimo

$$T^0(V) = K, \qquad T^1(V) = V, \qquad T^k = \underbrace{V \otimes \cdots \otimes V}_{k}, \quad k \geq 2.$$

Formirajmo sada direktnu sumu

$$T(V) = \coprod_{k \in \mathbb{Z}_+} T^k(V).$$

Uz prethodnu identifikaciju je $T^k(V) \otimes T^\ell(V) = T^{k+\ell}(V)$. Posebno, za bilo koje $k, \ell \in \mathbb{Z}_+$ imamo bilinearno preslikavanje $(x, y) \mapsto x \otimes y$ sa $T^k(V) \times T^\ell(V)$ u $T^{k+\ell}(V) \subseteq T(V)$. Složena zajedno ta preslikavanja definiraju bilinearno preslikavanje sa $T(V) \times T(V)$ u $T(V)$. Uz dogovorene identifikacije to je preslikavanje očito asocijativno. Uz tu operaciju množenja $T(V)$ postaje unitalna algebra nad poljem K. Štoviše, iz definicije množenja je jasno da je $T(V)$ (povezana) graduirana algebra s graduacijom $\left(T^k(V)\right)_{k \in \mathbb{Z}_+}$. Ta se graduirana algebra zove **tenzorska algebra** nad vektorskim prostorom V.

Teorem 1.1.2. (*a*) *Tenzorska algebra $T(V)$ ima sljedeće univerzalno svojstvo:*

> *Ako je $\mathcal{A}$ unitalna algebra nad poljem K, svaki linearan operator $V \to \mathcal{A}$ jedinstveno se proširuje do unitalnog homomorfizma $T(V) \to \mathcal{A}$.*

(*b*) *Pretpostavimo da uređen par $(\mathcal{A}, \varphi)$, gdje je $\mathcal{A}$ unitalna algebra nad poljem K i $\varphi : V \to \mathcal{A}$ je linearan operator, ima sljedeće univerzalno svojstvo*

> *Za svaku unitalnu algebru $\mathcal{B}$ i linearan operator $\psi : V \to \mathcal{B}$ postoji jedinstven unitalan homomorfizam $\Psi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ takav da je $\psi = \Psi \circ \varphi$.*

Tada je jedinstven unitalan homomorfizam $\Phi : T(V) \to \mathcal{A}$, takav da je $\Phi|V = \varphi$, izomorfizam unitalnih algebri. Njegov je invers jedinstven unitalan homomorfizam $\Psi : \mathcal{A} \to T(V)$ takav da je $\Psi \circ \varphi : V \to T(V)$ inkluzija $V \hookrightarrow T(V)$.

Dokaz: (*a*) Neka je $\mathcal{A}$ unitalna algebra nad poljem K i $\psi : V \to \mathcal{A}$ linearan operator. Za svaki $k \in \mathbb{Z}_+$, $k \geq 2$, preslikavanje $(v_1, \dots, v_k) \mapsto \psi(v_1) \cdots \psi(v_k)$ sa $V^k = V \times \cdots \times V$ (k faktora) u $\mathcal{A}$. Zbog univerzalnog svojstva tenzorskog produkta $T^k(V)$ postoji linearan operator $\Psi^k : T^k(V) \to \mathcal{A}$ takav da vrijedi

$$\Psi^k(v_1 \otimes \cdots \otimes v_k) = \psi(v_1) \cdots \psi(v_k) \qquad \forall v_1, \dots, v_k \in V.$$

Stavimo $\Psi^0(\lambda) = \lambda 1_{\mathcal{A}}$, $\lambda \in T^0(V) = K$, i $\Psi^1 = \psi$. Nadalje, neka je $\Psi : T(V) \to \mathcal{A}$ linearan operartor definiran sa $\Psi|T^k(V) = \Psi^k$, $k \in \mathbb{Z}_+$. Zbog jednakosti

$$(v_1 \otimes \cdots \otimes v_k)(w_1 \otimes \cdots \otimes w_\ell) = v_1 \otimes \cdots \otimes v_k \otimes w_1 \otimes \cdots \otimes w_\ell, \qquad v_1, \dots, v_k, w_1, \dots, w_\ell \in V,$$

vrijedi

$$\Psi\left((v_1 \otimes \cdots \otimes v_k)(w_1 \otimes \cdots \otimes w_\ell)\right) = \psi(v_1)\cdots\psi(v_k)\psi(w_1)\cdots\psi(w_k) = \Psi(v_1 \otimes \cdots \otimes v_k)\Psi(w_1 \otimes \cdots \otimes w_\ell).$$

Budući da vektori oblika $v_1 \otimes \cdots \otimes v_k$ razapinju prostor $T^k(V)$, odatle slijedi da je Ψ homomorfizam $T(V) \to \mathcal{A}$. Po definiciji taj je homomorfizam unitalan i vrijedi $\Psi|V = \psi$. Time je dokazana egzistencija, a jedinstvenost je posljedica spomenute činjenice da vektori oblika $v_1 \otimes \cdots \otimes v_k$ razapinju vektorski prostor $T^k(V)$.

Neka je sada i W vektorski prostor nad K. Budući da je $W = T^1(W)$ potprostor od $T(W)$, linearan operator $A \in L(V,W)$ možemo shvaćati kao linearno preslikavanje $A : V \to T(W)$. Ono se jedinstveno proširuje do unitalnog homomorfizma sa $T(V)$ u $T(W)$ koji ćemo označavati sa $T(A)$. Očito vrijedi

$$T(A)(v_1 \otimes \cdots \otimes v_k) = Av_1 \otimes \cdots \otimes Av_k, \qquad v_1, \ldots, v_k \in V.$$

Nadalje, za vektorske prostore V, W i U i za operatore $A \in L(V,W)$ i $B \in L(W,U)$ zbog jedinstvenosti proširenja očito vrijedi $T(BA) = T(B) \circ T(A)$. Dakle, na taj je način definiran kovarijantan funktor iz kategorije konačnodimenzionalnih vektorskih prostora nad K u kategoriju unitalnih algebri nad K.

Ako je operator $A \in L(V,W)$ surjektivan, onda postoji $B \in L(W,V)$ takav da je $AB = I_W$. No tada je $T(A) \circ T(B) = T(A) = T(I_W) = I_{T(W)}$, što pokazuje da je $T(A)$ epimorfizam. Analogno, ako je operator $A \in L(V,W)$ injektivan, onda postoji $B \in L(W,V)$ takav da je $BA = I_V$. Tada slijedi $T(B) \circ T(A) = I_{T(V)}$, što znači da $T(A)$ monomorfizam. Time smo dokazali:

Propozicija 1.1.3. *Neka su V i W konačnodimenzionalni vektorski prostori nad poljem K. Svaki linearan operator $A \in L(V,W)$ jedinstveno se proširuje do unitalnog homomorfizma graduiranih algebri $T(A) : T(V) \to T(W)$. Ako je operator A surjektivan (injektivan, bijektivan), onda je i homomorfizam $T(A)$ takav. Posebno, $A \mapsto T(A)$ je homomorfizam grupe $\mathrm{GL}(V)$ u grupu $\mathrm{Aut}(T(V))$ automorfizama graduirane algebre $T(V)$.*

Neka je sada J dvostrani ideal u algebri $T(V)$ generiran skupom $\{v \otimes w - w \otimes v;\ v, w \in V\}$. Taj je skup sastavljen od homogenih elemenata pa je prema zadatku 1.1.2. ideal J graduiran. Graduirana kvocijentna algebra $T(V)/J$ zove se **simetrična algebra** nad vektorskim prostorom V i označava $S(V)$. Njena se graduacija označava sa $\left(S^k(V)\right)_{k \in \mathbb{Z}_+}$ a pripadna filtracija sa $(S_k(V))_{k \in \mathbb{Z}_+}$. Primijetimo da je $J \cap T^0(V) = \{0\}$ i $J \cap T^1(V) = \{0\}$, pa imamo $S^0(V) = K$ i $S^1(V) = V$. Nadalje, za $v, w \in V = S^1(V)$ imamo

$$vw - wv = (v+J)(w+J) - (w+J)(v+J) = (v \otimes w + J) - (w \otimes v + J) = (v \otimes w - w \otimes v) + J = 0_{S(V)}.$$

Budući da V generira unitalnu algebru $T(V)$ i budući da je kvocijentno preslikavanje sa $T(V)$ na $S(V)$ epimorfizam, V generira i unitalnu algebru $S(V)$. Prema tome, simetrična algebra $S(V)$ je komutativna.

Zadatak 1.1.3. *Dokažite da simetrična algebra $S(V)$ ima sljedeće univerzalno svojstvo:*

Ako je $\mathcal{A}$ unitalna algebra (nad K), svako linearno preslikavanje $\psi : V \to \mathcal{A}$ sa svojstvom

$$\psi(v)\psi(w) = \psi(w)\psi(v) \qquad \forall v, w \in V$$

jedinstveno se proširuje do unitalnog homomorfizma $\Psi : S(V) \to \mathcal{A}$.

Propozicija 1.1.4. *Neka je vektorski prostor V konačnodimenzionalan i neka je $\{e_1, \dots, e_n\}$ njegova baza. Za $k \in \mathbb{N}$ je*

$$\{e_{j_1} \cdots e_{j_k};\ 1 \le j_1 \le \cdots \le j_k \le n\}$$

baza vektorskog prostora $S^k(V)$. Posebno, vrijedi

$$\dim S^k(V) = \binom{k+n-1}{n-1} = \binom{k+n-1}{k}.$$

Nadalje,

$$\{1\} \cup \{e_{j_1} \cdots e_{j_k};\ k \in \mathbb{N},\ 1 \le j_1 \le \cdots \le j_k \le n\}$$

je baza vektorskog prostora $S(V)$.

Dokaz: Budući da je kvocijentno preslikavanje $T(V) \to S(V)$ epimorfizam, jasno je da skup

$$B = \{1\} \cup \{e_{j_1} \cdots e_{j_k};\ k \in \mathbb{N},\ 1 \le j_1 \le \cdots \le j_k \le n\}$$

razapinje vektorski prostor $S(V)$. Neka je sada $\varphi : V \to K[X_1, \dots, X_n]$ jedinstveno linearno preslikavanje takvo da je $\varphi(e_j) = X_j$ za $j = 1, \dots, n$. Kako je algebra polinoma $K[X_1, \dots, X_n]$ komutativna, iz zadatka 1.1.3. slijedi da se φ proširuje do jedinstvenog homomorfizma unitalnih algebri $\Phi : S(V) \to K[X_1, \dots, X_n]$. Tada je $\Phi(e_{j_1} \cdots e_{j_k}) = X_{j_1} \cdots X_{j_k}$. Monomi u varijablama X_j čine bazu prostora $K[X_1, \dots, X_n]$, posebno, oni su linearno nezavisni. Odatle slijedi linearna nezavisnost skupa $B \subseteq S(V)$, odnosno, B je baza prostora $S(V)$. Odatle slijedi i tvrdnja za $S^k(V)$, budući da je skup B disjunktna unija njegovih presjeka sa $S^k(V)$, $k \in \mathbb{Z}_+$, i vrijedi

$$B \cap S^k(V) = \{e_{j_1} \cdots e_{j_k};\ 1 \le j_1 \le \cdots \le j_k \le n\}.$$

Uočimo da iz dokaza propozicije 1.1.4. slijedi

Korolar 1.1.5. *Neka je $\{e_1, \dots, e_n\}$ baza vektorskog prostora V. Jedinstven unitalni homomorfizam $\Phi : S(V) \to K[X_1, \dots, X_n]$, takav da je $\Phi(e_j) = X_j$ za $j = 1, \dots, n$, je izomorfizam unitalnih algebri.*

Drugim riječima, za svaku bazu $\{e_1, \dots, e_n\}$ simetričnu algebru $S(V)$ možemo identificirati s algebrom polinoma $K[e_1, \dots, e_n]$.

Ako je $\{e_1, \dots, e_n\}$ baza od V i $\alpha = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \in \mathbb{Z}_+^n$ upotrebljavat ćemo oznake

$$e^\alpha = e_1^{\alpha_1} \cdots e_n^{\alpha_n}, \qquad |\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n, \qquad \alpha! = \alpha_1! \cdots \alpha_n!$$

Tada se baza od $S(V)$ iz prethodne propozicije može zapisati kao $\{e^\alpha;\ \alpha \in \mathbb{Z}_+^n\}$, a baza od $S^k(V)$ kao $\{e^\alpha;\ \alpha \in \mathbb{Z}_+^n,\ |\alpha| = k\}$.

Za $k \in \mathbb{N}$ neka $\mathcal{S}_k$ označava $k-$tu simetričnu grupu, odnosno, grupu permutacija skupa $\{1, \dots, k\}$. Iz univerzalnog svojstva tenzorskog produkta slijedi da postoji jedinstven linearan operator $\mathrm{Sym}_k : T^k(V) \to T^k(V)$ takav da vrijedi

$$\mathrm{Sym}_k(v_1 \otimes \cdots \otimes v_k) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_k} v_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(k)} \qquad \forall v_1, \dots, v_k \in V.$$

Jedinstven linearan operator $\mathrm{Sym} : T(V) \to T(V)$, takav da vrijedi

$$\mathrm{Sym}|T^0(V) = 1 \qquad \text{i} \qquad \mathrm{Sym}|T^k(V) = \mathrm{Sym}_k \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

zovemo **simetrizacija**. Označimo sa $\tilde{S}^k(V)$ sliku operatora Sym_k i sa $\tilde{S}(V)$ sliku operatora Sym.

Propozicija 1.1.6. (*a*) *Za svaki* $k \in \mathbb{N}$ *operator* Sym_k *je projektor i njegova je jezgra* $T^k(V) \cap J$. *Posebno, vrijedi*

$$T^k(V) = \tilde{S}^k(V) \dot{+} T^k(V) \cap J.$$

Rrestrikcija kvocijentnog epimorfizma $T(V) \to S(V) = T(V)/J$ *na potprostor* $\tilde{S}^k(V)$ *je izomorfizam prostora* $\tilde{S}^k(V)$ *na prostor* $S^k(V)$.

(*b*) *Operator* Sym *je projektor i njegova jezgra je ideal* J, *pa vrijedi* $T(V) = \tilde{S}(V) \dot{+} J$. *Posebno, restrikcija kvocijentnog epimorfizma* $T(V) \to S(V)$ *na potprostor* $\tilde{S}(V)$ *je izomorfizam prostora* $\tilde{S}(V)$ *na prostor* $S(V)$.

Dokaz: (*a*) Za proizvoljne vektore $v_1, \ldots, v_k \in V$ imamo

$$\mathrm{Sym}_k^2(v_1 \otimes \cdots \otimes v_k) = \frac{1}{(k!)^2} \sum_{\tau,\sigma \in \mathcal{S}_k} v_{\tau(\sigma(1))} \otimes \cdots \otimes v_{\tau(\sigma(k))} =$$

$$= \frac{1}{(k!)^2} \sum_{\tau \in \mathcal{S}_k} \sum_{\omega \in \mathcal{S}_k} v_{\omega(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\omega(k)} = \frac{1}{k!} \sum_{\tau \in \mathcal{S}_k} \mathrm{Sym}_k(v_1 \otimes \cdots \otimes v_k) = \mathrm{Sym}_k(v_1 \otimes \cdots \otimes v_k).$$

Budući da vektori oblika $v_1 \otimes \cdots \otimes v_k$ razapinju vektorski prostor $T^k(V)$, gornji račun pokazuje da je $\mathrm{Sym}_k^2 = \mathrm{Sym}_k$, odnosno, da je operator Sym_k projektor.

Treba još dokazati da je $\mathrm{Ker}\,\mathrm{Sym}_k = T^k(V) \cap J$. Potprostor $T^k(V) \cap J$ razapet je elementima oblika

$$x_1 \otimes \cdots \otimes x_r \otimes v \otimes w \otimes y_1 \otimes \cdots \otimes y_s - x_1 \otimes \cdots \otimes x_r \otimes w \otimes v \otimes y_1 \otimes \cdots \otimes y_s,$$

gdje su $x_1, \ldots, x_r, y_1, \ldots, y_s, v, w \in V$ i $r + s + 2 = k$. Svaki je takav element očito u jezgri od Sym_k. Prema tome, $T^k(V) \cap J \subseteq \mathrm{Ker}\,\mathrm{Sym}_k$. Pretpostavimo da je ta inkluzija striktna i neka je $t \in \mathrm{Ker}\,\mathrm{Sym}_k$ takav da je $t \notin T^k(V) \cap J$. Nadalje, neka je $\pi : T(V) \to S(V)$ kvocijentni epimorfizam. Jezgra restrikcije $\pi | T^k(V)$ je upravo $T^k(V) \cap J$, dakle, vrijedi $\pi(t) \neq 0$. Prema propoziciji 1.1.4. tenzorski produkti k vektora baze od V s nepadajućim indeksima preslikavaju se na bazu prostora $S^k(V)$. Kako je algebra $S(V)$ komutativna, i Sym_k-slike tih tenzorskih produkata se preslikavaju na bazu od $S^k(V)$. To pokazuje da je $\pi\left(\tilde{S}^k(V)\right) = S^k(V)$. Neka je $s \in \tilde{S}^k(V) = \mathrm{Im}\,\mathrm{Sym}_k$ takav da je $\pi(s) = \pi(t)$. Tada je $s - t \in \mathrm{Ker}\,\left(\pi | T^k(V)\right) = T^k(V) \cap J \subseteq \mathrm{Ker}\,\mathrm{Sym}_k$. Kako je i $t \in \mathrm{Ker}\,\mathrm{Sym}_k$, slijedi $s \in \mathrm{Ker}\,\mathrm{Sym}_k$. Dakle, $s \in (\mathrm{Ker}\,\mathrm{Sym}_k) \cap (\mathrm{Im}\,\mathrm{Sym}_k) = \{0\}$, pa slijedi $s = 0$, a odatle je $\pi(t) = \pi(s) = 0$. No to je suprotno izboru elementa t. Ova kontradikcija dokazuje da je $T^k(V) \cap J = \mathrm{Ker}\,\mathrm{Sym}_k$.

Odatle slijedi i druga tvrdnja u (a) : budući da je $S^k(V) = T^k(V)/T^k(V) \cap J$, restrikcija kvocijentnog epimorfizma $T(V) \longrightarrow S(V) = T(V)/J$ na potprostor $\tilde{S}^k(V)$ je izomorfizam prostora $\tilde{S}^k(V)$ na prostor $S^k(V)$.

Tvrdnja (b) slijedi neposredno iz tvrdnje (a).

Neka su V i W konačnodimenzionalni vektorski prostori. Označimo sa J_V dvostrani ideal u $T(V)$ generiran skupom $\{v_1 \otimes v_2 - v_2 \otimes v_1;\ v_1, v_2 \in V\}$ i sa J_W dvostrani ideal u $T(W)$ generiran skupom $\{w_1 \otimes w_2 - w_2 \otimes w_1;\ w_1, w_2 \in W\}$. Nadalje, neka su $\pi_V : T(V) \to S(V) = T(V)/J_V$ i $\pi_W : T(W) \to S(W) = T(W)/J_W$ kvocijentni epimorfizmi. Ako je $A \in L(V, W)$, za $v_1, v_2 \in V$ imamo

$$T(A)(v_1 \otimes v_2 - v_2 \otimes v_1) = Av_1 \otimes Av_2 - Av_2 \otimes Av_1.$$

Budući da je $T(A) : T(V) \to T(W)$ homomorfizam, slijedi da je $T(A)J_V \subseteq J_W$. Prijelazom na kvocijente dobivamo unitalni homomorfizam $S(A) : S(V) \to S(W)$ i za taj homomorfizam vrijedi

$S(A) \circ \pi_V = \pi_W \circ T(A)$. Uočimo da zbog $V \cap J_V = \{0\}$ imamo $S(A)|V = T(A)|V = A$. Prema tome, homomorfizam $S(A)$ je proširenje operatora A i to je proširenje jedinstveno. Odatle i iz propozicije 1.1.3. slijedi:

Propozicija 1.1.7. *Neka su V i W konačnodimenzionalni vektorski prostori nad poljem K. Svaki linearan operator $A \in L(V,W)$ jedinstveno se proširuje do unitalnog homomorfizma graduiranih algebri $S(A) : S(V) \to S(W)$. Ako je operator A surjektivan (injektivan, bijektivan), onda je i homomorfizam $S(A)$ takav. Posebno, $A \mapsto S(A)$ je homomorfizam grupe $\mathrm{GL}(V)$ u grupu $\mathrm{Aut}(S(V))$ automorfizama graduirane algebre $S(V)$. Napokon, za kvocijentne epimorfizme $\pi_V : T(V) \to S(V)$ i $\pi_W : T(W) \to S(W)$ i za svaki $A \in L(V,W)$ vrijedi $S(A) \circ \pi_V = \pi_W \circ T(A)$.*

Linearan operator $A \in L(V)$ može se jedinstveno proširiti i do derivacija algebri $T(V)$ i $S(V)$. Pri tome **derivacija** unitalne algebre $\mathcal{A}$ je linearan operator $D : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ sa svojstvom

$$D(ab) = D(a)b + aD(b) \qquad \forall a, b \in \mathcal{A}.$$

Skup $\mathrm{Der}(\mathcal{A})$ je potprostor ali ne i podalgebra algebre $L(\mathcal{A})$ svih linearnih operatora $\mathcal{A} \to \mathcal{A}$. Međutim, $\mathrm{Der}(\mathcal{A})$ je Liejeva podalgebra Liejeve algebre $\mathrm{Lie}(L(\mathcal{A}))$. Pri tome se za bilo koju asocijativnu algebru $\mathcal{B}$ Liejeva algebra $\mathrm{Lie}(\mathcal{B})$ kao vektorski prostor podudara sa $\mathcal{B}$, a komutator je uobičajeni $[a,b] = ab - ba$, $a, b \in \mathcal{B}$. Za vektorski prostor V obično se piše $\mathrm{Lie}(L(V)) = \mathfrak{gl}(V)$.

Propozicija 1.1.8. *Neka je V konačnodimenzionalan vektorski prostor nad poljem K. Svaki linearan operator $A \in L(V) = \mathfrak{gl}(V)$ jedinstvo se proširuje do derivacija $D(A) \in \mathrm{Der}(T(V))$ i $d(A) \in \mathrm{Der}(S(V))$. Preslikavanja $D : \mathfrak{gl}(V) \to \mathrm{Der}(T(V))$ i $d : \mathfrak{gl}(V) \to \mathrm{Der}(S(V))$ su homomorfizmi Liejevih algebri, odnosno, reprezentacije Liejeve algebre $\mathfrak{gl}(V)$ na prostorima $T(V)$ i $S(V)$. Kvocijentni epimorfizam $\pi : T(V) \to S(V)$ prepliće te dvije reprezentacije, tj. $d(A) \circ \pi = \pi \circ D(A)$ za svaki $A \in \mathfrak{gl}(V)$.*

Dokaz: Pomoću univerzalnog svojstva tenzorskog produkta dokazuje se da za svaki $k \in \mathbb{N}$ postoji jedinstven linearan operator $D_k(A) : T^k(V) \to T^k(V)$ takav da vrijedi

$$D_k(A)(v_1 \otimes \cdots v_k) = \sum_{j=1}^{k} v_1 \otimes \cdots \otimes v_{j-1} \otimes Av_j \otimes v_{j+1} \otimes \cdots \otimes v_k \qquad \forall v_1, \ldots, v_k \in V.$$

Definiramo $D(A) : T(V) \to T(V)$ kao jedinstven linearan operator takav da je $D(A)|T^0(V) = 0$ i $D(A)|T^k(V) = D_k(A)$ za svaki $k \in \mathbb{N}$. Sada za $k, \ell \in\in \mathbb{N}$ i za $v_1, \ldots, v_k, w_1, \ldots, w_\ell \in V$ vrijedi

$$D(A)((v_1 \otimes \cdots \otimes v_k) \cdot (w_1 \otimes \cdots \otimes w_\ell)) = D(A)(v_1 \otimes \cdots \otimes v_k \otimes w_1 \otimes \cdots \otimes w_\ell) =$$

$$= \sum_{i=1}^{k} v_1 \otimes \cdots \otimes v_{i-1} \otimes Av_i \otimes v_{i+1} \otimes \cdots \otimes v_k \otimes w_1 \otimes w_\ell +$$

$$+ \sum_{j=1}^{\ell} v_1 \otimes \cdots \otimes v_k \otimes w_1 \otimes w_{j-1} \otimes Aw_j \otimes w_{j+1} \otimes \cdots \otimes w_\ell =$$

$$[D(A)(v_1 \otimes \cdots \otimes v_k)] \cdot (w_1 \otimes \cdots \otimes w_\ell) + (v_1 \otimes \cdots \otimes v_k)[D(A)(w_1 \otimes \cdots \otimes w_\ell)].$$

Budući da 1 i elementi oblika $u_1 \otimes \cdots \otimes u_m$, $m \in \mathbb{N}$, $u_1, \ldots, u_m \in V$, razapinju vektorski prostor $T(V)$, slijedi da vrijedi

$$D(A)(st) = [D(A)s]t + s[D(A)t] \qquad \forall s, t \in T(V),$$

odnosno, $D(A) \in \mathrm{Der}(T(V))$. Po definiciji $D(A)$ proširuje operator A, jer je $D_1(A) = A$. Jedinstvenost slijedi iz činjenice da je derivacija unitalne algebre potpuno određena s njenim djelovanjem na nekom skupu generatora te algebre.

Dokažimo sada da je dvostrani ideal J u $T(V)$ generiran skupom $\{v \otimes w - w \otimes v;\ v, w \in V\}$ invarijantan u odnosu na operator $D(A)$. Doista, za $v, w \in V$ imamo

$$D(A)(v\otimes w - w\otimes v) = Av\otimes w + v\otimes Aw - Aw\otimes v - w\otimes Av = [Av\otimes w - w\otimes Av] + [v\otimes Aw - Aw\otimes v] \in J.$$

Nadalje, ako su $s, t \in T(V)$ i $u = v \otimes w - w \otimes v$ za neke $v, w \in V$, onda je

$$D(A)(sut) = [D(A)s]ut + s[D(A)u]t + su[D(A)t] \in J.$$

Budući da takvi elementi sut razapinju potprostor J, zaključujemo da vrijedi $D(A)J \subseteq J$. Prijelazom na kvocijent po J dobivamo linearan operator $d(A) : S(V) \to S(V)$ dan sa

$$d(A)(t + J) = D(A)t + J, \qquad t \in T(V).$$

Lako se vidi da je $d(A)$ derivacija algebre $S(V)$. Nadalje, iz definicije je jasno da vrijedi

$$d(A) \circ \pi = \pi \circ D(A) \qquad \forall A \in L(V), \tag{1.2}$$

Za bilo koje $v_1, \ldots, v_k \in V$ i za $A, B \in \mathfrak{gl}(V)$ imamo

$$(D(A)D(B) - D(B)D(A))(v_1 \otimes \cdots \otimes v_k) = \sum_{1\le i<j\le k} v_1 \otimes \cdots \otimes Av_i \otimes \cdots \otimes Bv_j \otimes \cdots \otimes v_k +$$

$$+ \sum_{1\le j<i\le k} v_1 \otimes \cdots \otimes Bv_j \otimes \cdots \otimes Av_i \otimes \cdots \otimes v_k + \sum_{i=1}^{k} v_1 \otimes \cdots \otimes ABv_i \otimes \cdots \otimes v_k -$$

$$- \sum_{1\le j<i\le k} v_1 \otimes \cdots \otimes Bv_j \otimes \cdots \otimes Av_i \otimes \cdots \otimes v_k - \sum_{1\le i<j\le k} v_1 \otimes \cdots \otimes Av_i \otimes \cdots \otimes Bv_j \otimes \cdots \otimes v_k -$$

$$- \sum_{i=1}^{k} v_1 \otimes \cdots \otimes BAv_i \otimes \cdots \otimes v_k = \sum_{i=1}^{k} v_1 \otimes \cdots \otimes [A,B]v_i \otimes \cdots \otimes v_k = D([A,B])(v_1 \otimes \cdots \otimes v_k).$$

Odatle slijedi $D([A,B]) = D(A)D(B) - D(B)D(A)$ tj. $D : \mathfrak{gl}(V) \to \mathrm{Der}(T(V))$ je homomorfizam Liejevih algebri, odnosno, to je reprezentacija Liejeve algebre $\mathfrak{gl}(V)$ na vektorskom prostoru $T(V)$. Prijelazom na kvocijent nalazimo da je i $d : \mathfrak{gl}(V) \to \mathrm{Der}(S(V))$ homomorfizam Liejevih algebri, dakle, reprezentacija Liejeve algebre $\mathfrak{gl}(V)$ na vektorskom prostoru $S(V)$. Napokon, (1.2) pokazuje da je epimorfizam $\pi : T(V) \to S(V)$ preplitanje reprezentacija D i d.

Neka je i dalje V konačnodimenzionalan vektorski prostor nad poljem K. Skup K^V svih funkcija sa V u K s uobičajenim operacijama po točkama postaje unitalna komutativna algebra nad K :

$$(f+g)(v) = f(v) + g(v), \quad (\lambda f)(v) = \lambda f(v), \quad (fg)(v) = f(v)g(v), \quad f, g \in K^V, \ \lambda \in K, \ v \in V.$$

Dualni prostor V^* svih linearnih funkcionala na V je potprostor od K^V. **Polinomijalna algebra** nad prostorom V je unitalna podalgebra $\mathcal{P}(V)$ algebre K^V generirana prostorom V^*. Elementi od $\mathcal{P}(V)$ zovu se **polinomijalne funkcije** na vektorskom prostoru V ili **polinomi** na V. Ako je $\{f_1, \ldots, f_n\}$ baza prostora V^*, algebra $\mathcal{P}(V)$ se prirodno identificira s algebrom $K[f_1, \ldots, f_n]$ polinoma u n varijabli $f_1, \ldots, f_n$ s koeficijentima iz K. Posebno, prema korolaru 1.1.5. polinomijalna algebra $\mathcal{P}(V)$ identificira se sa simetričnom algebrom $S(V^*)$ nad dualnim prostorom V^*.

Za $k \in \mathbb{Z}_+$ označimo sa $\mathcal{P}^k(V)$ potprostor svih **homogenih polinoma** na V **stupnja** k :

$$\mathcal{P}^k(V) = \{P \in \mathcal{P}(V);\ P(\lambda v) = \lambda^k P(v) \ \forall \lambda \in K \ \text{i} \ \forall v \in V\}.$$

Zadatak 1.1.4. *Dokažite da je za $k \in \mathbb{N}$ potprostor $\mathcal{P}^k(V)$ razapet svim produktima $g_1 \cdots g_k$, $g_1, \dots, g_k \in V^*$.*

Odatle se odmah vidi da je $\left(\mathcal{P}^k(V)\right)_{k \in \mathbb{Z}_+}$ graduacija algebre $\mathcal{P}(V)$. Nadalje,

$$\mathcal{P}^0(V) = K, \qquad \mathcal{P}^1(V) = V^*.$$

Pripadnu filtraciju algebre $\mathcal{P}(V)$ označavamo s donjim indeksima:

$$\mathcal{P}_k(V) = \sum_{j=0}^{k} \dot{+} \mathcal{P}^j(V).$$

Dakle, $\mathcal{P}_k(V)$ je potprostor svih polinoma stupnja $\leq k$.

Za bilo koji vektor $x \in V$ označimo sa $\partial(x) : \mathcal{P}(V) \to \mathcal{P}(V)$ linearan operator definiran kao derivacija duž vektora x :

$$[\partial(x)f](y) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(y + tx)\bigg|_{t=0}, \qquad f \in \mathcal{P}(V), \quad y \in V.$$

Uočimo da je za fiksne vektore $x, y \in V$ preslikavanje $t \mapsto f(y + tx)$ polinom na K, pa gornji izraz ima smisla bez obzira koje je polje K : ova je derivacija po varijabli t čisto algebarska operacija.

Zadatak 1.1.5. *Dokažite da je $x \mapsto \partial(x)$ linearno preslikavanje sa V u algebru $L(\mathcal{P}(V))$ svih linearnih operatora na prostoru $\mathcal{P}(V)$ i da vrijedi $\partial(x)\partial(y) = \partial(y)\partial(x)$ $\forall x, y \in V$.*

Prema univerzalnom svojstvu simetrične algebre $S(V)$ iz zadatka 1.1.3. preslikavanje $x \mapsto \partial(x)$ jedinstveno se proširuje do unitalnog homomorfizma $\partial : S(V) \to L(\mathcal{P}(V))$.

Neka je sada $\{e_1, \dots, e_n\}$ baza prostora V i $\{f_1, \dots, f_n\}$ njoj dualna baza dualnog prostora V^*. Za $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ stavimo $f^\alpha = f_1^{\alpha_1} \cdots f_n^{\alpha_n}$. Tada je $\{f^\alpha;\ \alpha \in \mathbb{Z}_+^n\}$ baza prostora $\mathcal{P}(V)$. Za $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$, $y \in V$ i $j \in \{1, \dots, n\}$ imamo

$$[\partial(e_j)f^\alpha](y) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f_1(y + te_j)^{\alpha_1} \cdots f_n(y + te_j)^{\alpha_n}\bigg|_{t=0}.$$

Za $k \in \{1, \dots, n\}$ je

$$f_k(y + te_j) = f_k(y) + t\delta_{kj} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f_k(y + te_j)^{\alpha_k}\bigg|_{t=0} = \alpha_k f_k(y)^{\alpha_k - 1}\delta_{kj}.$$

Prema tome, vrijedi

$$\partial(e_j)f^\alpha = \alpha_j f^{\alpha - \varepsilon_j}, \qquad \alpha \in \mathbb{Z}_+^n, \quad j \in \{1, \dots, n\},$$

pri čemu je $\varepsilon_j = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ (jedinica na $j-$tom mjestu). Drugim riječima, $\partial(e_j)$ je operator parcijalnog deriviranja na $\mathcal{P}(V) = K[f_1, \dots, f_n]$ po varijabli f_j. Odatle je

$$\partial(e^\beta) = \frac{\partial^{|\beta|}}{\partial f_1^{\beta_1} \cdots \partial f_n^{\beta_n}} = \partial_f^\beta, \qquad \beta \in \mathbb{Z}_+^n. \tag{1.3}$$

Time je dokazana

Propozicija 1.1.9. *$\partial : S(V) \to L(\mathcal{P}(V))$ je izomorfizam algebre $S(V)$ na algebru $\mathcal{D}(V)$ svih linearnih diferencijalnih operatora na $\mathcal{P}(V)$ s konstantnim koeficijentima.*

Definiramo sada bilinearnu formu $\langle \cdot, \cdot \rangle : S(V) \times \mathcal{P}(V) \to K$ sa

$$\langle u, f \rangle = [\partial(u) f](0), \qquad u \in S(V), \quad f \in \mathcal{P}(V).$$

Propozicija 1.1.10. *(a) Bilinearna forma $\langle \cdot, \cdot \rangle$ je nedegenerirana u odnosu na prvu i na drugu varijablu.*

(b) Vrijedi $\langle S^k(V), \mathcal{P}^\ell(V) \rangle = \{0\}$ za $k, \ell \in \mathbb{Z}_+$, $k \neq \ell$.

(c) Za bilo koje $u, v \in S(V)$ i $f \in \mathcal{P}(V)$ vrijedi

$$\langle uv, f \rangle = \langle v, \partial(u) f \rangle = \langle u, \partial(v) f \rangle.$$

Dokaz: Neka je $\{e_1, \ldots, e_n\}$ baza od V i $\{f_1, \ldots, f_n\}$ njoj dualna baza dualnog prostora V^*. Iz formule (1.3) nalazimo da za bilo koje $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^n$ vrijedi

$$\langle e^\alpha, f^\beta \rangle = \left(\partial_f^\alpha f^\beta \right)(0) = \alpha! \delta_{\alpha\beta}.$$

To pokazuje da su baze $\{e^\alpha;\ \alpha \in \mathbb{Z}_+^n\}$ od $S(V)$ i $\left\{\frac{1}{\alpha!} f^\alpha;\ \alpha \in \mathbb{Z}_+^n\right\}$ međusobno biortogonalne u odnosu na bilinearnu formu $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Odatle neposredno slijede tvrdnje (a) i (b). Tvrdnja (c) slijedi iz definicije forme $\langle \cdot, \cdot \rangle$:

$$\langle uv, f \rangle = [\partial(uv) f](0) = [\partial(u)\partial(v) f](0) = \langle u, \partial(v) f \rangle.$$

Neka je sada B simetrična bilinearna forma na $V \times V$. Za $k \in \mathbb{N}$ označimo sa V^k $k-$struki Kartezijev produkt prostora V :

$$V^k = \underbrace{V \times \cdots \times V}_{k}.$$

Promatrajmo preslikavanje

$$\tilde{B}_k : V^k \times V^k \to K, \qquad \tilde{B}_k(v_1, \ldots, v_k, w_1, \ldots, w_k) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_k} B(v_1, w_{\sigma(1)}) \cdots B(v_k, w_{\sigma(k)}).$$

To je preslikavanje linearno u svakoj varijabli i simetrično je u odnosu na prvih k varijabli i u odnosu na drugih k varijabli. Pomoću univerzalnog svojstva $k-$strukog tenzorskog produkta $V \otimes \cdots \otimes V$ pokazuje se da postoji jedinstvena bilinearna forma $B_k : S^k(V) \times S^k(V) \to K$ takva da je

$$B_k(v_1 \cdots v_k, w_1 \cdots w_k) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_k} B(v_1, w_{\sigma(1)}) \cdots B(v_k, w_{\sigma(k)}), \qquad \forall v_1, \ldots, v_k, w_1, \ldots, w_k \in V.$$

Označimo sa $\langle \cdot, \cdot \rangle_B$ bilinearnu formu na $S(V) \times S(V)$ dobivenu na prirodan način iz formi B_k :

$$\langle u, v \rangle_B = B_k(u, v) \quad \text{ako su } u, v \in S^k(V); \qquad \langle u, v \rangle_B = 0 \quad \text{ako su } u \in S^k(V) \text{ i } v \in S^\ell(V) \text{ i } k \neq \ell.$$

Propozicija 1.1.11. *Neka je B nedegenerirana simetrična bilinearna forma na $V \times V$. Tada je i svaka od simetričnih bilinearnih formi B_k na $S^k(V) \times S^k(V)$, $k \in \mathbb{N}$, nedegenerirana. Nadalje, simetrična bilinearna forma $\langle \cdot, \cdot \rangle_B$ na $S(V) \times S(V)$ je nedegenerirana.*

Dokaz: Neka je $\{e_1, \ldots, e_n\}$ baza prostora V i neka je $\{g_1, \ldots, g_n\}$ njoj $B-$biortogonalna baza od V, tj. takva da je $B(e_i, g_j) = \delta_{ij}$ bilo koje $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. Takva postoji zbog nedegeneriranosti forme B. Sasvim analogno dijelu dokaza propozicije 1.1.9. nalazimo da je tada

$$B_k(e^\alpha, g^\beta) = \alpha! \delta_{\alpha\beta}, \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^n, \quad |\alpha| = |\beta| = k.$$

Odatle se vidi da je $\{\frac{1}{\alpha!} g^\alpha;\ \alpha \in \mathbb{Z}_+^n,\ |\alpha| = k\}$ baza od $S^k(V)$ koja je B_k-biortogonalna bazi $\{e^\alpha;\ \alpha \in \mathbb{Z}_+^n,\ |\alpha| = k\}$ od $S^k(V)$. Odatle slijede tvrdnje.

Napomenimo na koncu da svaka nedegenerirana simetrična bilinearna forma B na $V \times V$ definira izomorfizam $\varphi_B : V \to V^*$ ovako:

$$[\varphi_B(v)](w) = B(v,w), \qquad v, w \in V.$$

Izomorfizam φ_B proširuje se do izomorfizma unitalnih algebri $\Phi_B : S(V) \to S(V^*) = \mathcal{P}(V)$. Taj izomorfizam povezuje formu $\langle \cdot , \cdot \rangle$ na $S(V) \times \mathcal{P}(V)$ s formom $\langle \cdot , \cdot \rangle_B$ na $S(V) \times S(V)$:

Propozicija 1.1.12. *Uz uvedene oznake vrijedi*

$$\langle u, v \rangle_B = \langle u, \Phi_B(v) \rangle, \qquad u, v \in S(V).$$

Dokaz: Budući da su $\langle \cdot , \cdot \rangle_B$ i $(u, v) \mapsto \langle u, \Phi_B(v) \rangle$ bilinearne forme na $S(V) \times S(V)$, gornju je jednakost dovoljno provjeriti za sve elemente u iz neke baze prostora $S(V)$ i za sve elemente v neke druge baze prostora $S(V)$. Kao i prije, neka je $\{e_1, \ldots, e_n\}$ baza prostora V i $\{g_1, \ldots, g_n\}$ njoj $B-$biortogonalna baza od V. Tada su $\{e^\alpha;\ \alpha \in \mathbb{Z}_+^n\}$ i $\{g^\alpha;\ \alpha \in \mathbb{Z}_+^n\}$ baze prostora $S(V)$. Nadalje, neka je $\{f_1, \ldots, f_n\}$ baza dualnog prostora V^* dualna bazi $\{e_1, \ldots, e_n\}$ prostora V. Tada je očito $\varphi_B(g_j) = f_j$ za $j = 1, \ldots, n$, dakle, vrijedi $\Phi_B(g^\alpha) = f^\alpha$ za svaki $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$. Za $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^n$, $|\alpha| = |\beta| = k$, imamo prema dokazima propozicija 1.1.10. i 1.1.11.

$$\langle e^\alpha, g^\beta \rangle_B = B_k(e^\alpha, g^\beta) = \alpha! \delta_{\alpha\beta} = \langle e^\alpha, f^\beta \rangle = \langle e^\alpha, \Phi_B(g^\beta) \rangle.$$

Nadalje, ako su $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+$ i $|\alpha| \neq |\beta|$, onda je

$$\langle e^\alpha, g^\beta \rangle_B = 0 = \langle e^\alpha, f^\beta \rangle = \langle e^\alpha, \Phi_B(g^\beta) \rangle.$$

Time je tvrdnja dokazana.

1.2 Invarijante i harmonijski polinomi

Neka je i dalje V konačnodimenzionalan vektorski prostor nad K i neka je G podgrupa grupe $\mathrm{GL}(V)$. Prema propoziciji 1.1.3. grupa G djeluje automorfizmima na algebri $S(V)$. Za $\sigma \in G$ pripadni automorfizam $S(\sigma)$ od $S(V)$ ćemo kraće označavati također sa σ. Neka je $S(V)^G$ unitalna podalgebra svih $G-$invarijanata u $S(V)$:

$$S(V)^G = \{u \in S(V);\ \sigma u = u\ \ \forall \sigma \in G\}.$$

Uočimo da je svaki homogen potprostor $S^k(V)$ invarijantan za djelovanje grupe G, prema tome, $S(V)^G$ je graduirana podalgebra od $S(V)$:

$$S(V)^G = \sum_{k\in\mathbb{Z}_+} \dot{+}\, S^k(V)^G, \qquad S^k(V)^G = S^k(V) \cap S(V)^G = \{u \in S^k(V);\ \sigma u = u\ \ \forall \sigma \in G\}.$$

Neka je $S_+(V)^G$ ideal u algebri $S(V)^G$ definiran sa

$$S_+(V)^G = \sum_{k\in\mathbb{N}} \dot{+}\, S^k(V)^G.$$

Dakle, ako proizvoljan $u \in S(V)$ pišemo u obliku konačne sume

$$u = \sum_{k\in\mathbb{Z}_+} u_k, \qquad u_k \in S^k(V),$$

onda je

$$S_+(V)^G = \{u \in S(V)^G;\ u_0 = 0\}.$$

Neka je $S(V)S_+(V)^G$ ideal u $S(V)$ generiran sa $S_+(V)^G$. Uočimo da je taj ideal graduiran i njegov homogeni dio stupnja k je

$$[S(V)S_+(V)^G]^k = S(V)S_+(V)^G \cap S^k(V) = \sum_{j=1}^{k} S^j(V)^G S^{k-j}(V)$$

Propozicija 1.2.1. *Neka je L graduirani potprostor od $S(V)$ takav da je $S(V) = S(V)S_+(V)^G \dot{+} L$. Tada je $S(V) = S(V)^G L$.*

Dokaz: Treba dokazati da je $S^k(V) \subseteq S(V)^G L$ za svaki $k \in \mathbb{Z}_+$. Za $k = 0$ to je očito jer je $S^0(V) = K \subseteq L$. Pretpostavimo da je $k > 0$ i da je dokazano da vrijedi $S^j(V) \subseteq S(V)^G L$ za $j = 0, \ldots, k-1$, odnosno, da je $S_{k-1}(V) \subseteq S(V)^G L$. Budući da je očito

$$S^k(V) \subseteq S_+(V)^G S_{k-1}(V) + L,$$

slijedi da je i $S^k(V) \subseteq S(V)^G L$. Time je tvrdnja dokazana indukcijom po $k \in \mathbb{Z}_+$.

Ukoliko je L graduirani potprostor od $S(V)$ takav da je $S(V) = S(V)S_+(V)^G \dot{+} L$, onda je prema propoziciji 1.2.1. linearan operator $S(V)^G \otimes L \to S(V)$ induciran množenjem surjetivan.

Propozicija 1.2.2. *Sljedeća su tri svojstva međusobno ekvivalentna:*

(a) *Neka je L kao u propoziciji 1.2.1. Tada je linearno preslikavanje $S(V)^G \otimes L \to S(V)$ inducirano množenjem izomorfizam vektorskih prostora.*

(*b*) *$S(V)$ je slobodan kao $S(V)^G-$modul.*

(*c*) *Neka je $M \subseteq S(V)$ bilo koji potprostor takav da je $M \cap S(V)S_+(V)^G = \{0\}$. Tada su vektori $f_1, \ldots, f_k \in M$ linearno nezavisni nad poljem K ako i samo ako su linearno nezavisni nad prstenom $S(V)^G$.*

Dokaz: implikacija $(a) \Rightarrow (b)$ je očita jer baza od L nad poljem K je baza od $S(V)$ nad prstenom $S(V)^G$.

Pretpostavimo da vrijedi (b) i neka je $\{u_j;\ j \in J\}$ baza od $S(V)$ nad prstenom $S(V)^G$. Neka su vektori $f_1, \ldots, f_k \in M$ linearno nezavisni nad poljem K. Tada za svaki $i \in \{1, \ldots, k\}$ možemo pisati

$$f_i = \sum_{j \in J} a_{ji} u_j \qquad \text{za jedinstvene} \quad a_{ji} \in S(V)^G.$$

Za svaki $i \in \{1, \ldots, k\}$ u gornjoj je sumi samo konačno mnogo elemenata $a_{ji} \neq 0$. Dakle, možemo pretpostaviti da za neki $p \in \mathbb{N}$ vrijedi $\{1, \ldots, p\} \subseteq J$ i da je $a_{ji} = 0$ za svaki $i \in \{1, \ldots, k\}$ i za $j \in J \setminus \{1, \ldots, p\}$. Dakle,

$$f_i = \sum_{j=1}^{p} a_{ji} u_j, \qquad i = 1, \ldots, k. \tag{1.4}$$

Pretpostavimo da su $b_1, \ldots, b_k \in S(V)^G$ takvi da vrijedi $b_1 f_1 + \cdots + b_k f_k = 0$. Tada je

$$0 = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{p} a_{ji} b_i u_j = \sum_{j=1}^{p} \left(\sum_{i=1}^{k} a_{ji} b_i \right) u_j.$$

Budući da su u_j linearno nezavisni nad prstenom $S(V)^G$, slijedi

$$\sum_{i=1}^{k} a_{ji} b_i = 0 \qquad \text{za} \quad j = 1, \ldots, p. \tag{1.5}$$

Neka je sada $f \mapsto f'$ kvocijentni epimorfizam $S(V) \to S(V)/S(V)S_+(V)^G$. Za svaki $u \in S(V)^G$ tada vrijedi $u' = u_0 + S(V)S_+(V)^G$ (uz oznaku iz uvodnog dijela ovog odjeljka). Stoga iz (1.4) dobivamo

$$f_i' = \sum_{j=1}^{p} (a_{ji})_0 u_j', \qquad i = 1, \ldots, k.$$

Algebru $S(V)$ možemo identificirati s algebrom $\mathcal{P}(V^*)$. Uz tu identifikaciju je očito $u_0 = u(0)$ za svaki $u \in S(V)$. Dakle, gornje jednakosti možemo zapisati ovako:

$$f_i' = \sum_{j=1}^{p} a_{ji}(0) u_j', \qquad i = 1, \ldots, k.$$

Po pretpostavci je $M \cap S(V)S_+(V)^G = \{0\}$ pa su $f_1', \ldots, f_k'$ linearno nezavisni nad K. Odatle slijedi da matrica $[a_{ji}(0)]$ s elementima iz K ima rang k. Stoga postoje $1 \leq j_1 < \cdots < j_k \leq p$ takvi da je kvadratna matrica $[a_{j_s i}(0)]_{s,i=1}^k$ regularna. Dakle, $\det\, [a_{j_s i}(0)] \neq 0$. No tada je $D = \det\, [a_{j_s i}]$ element iz $S(V)^G$ različit od nule. Iz (1.5) imamo

$$\sum_{i=1}^{k} a_{j_s i} b_i = 0 \qquad \text{za} \quad s = 1, \ldots, k. \tag{1.6}$$

Neka je $[c_{rs}] \in M_k(S(V)^G)$ adjunkta matrice $[a_{j_s i}]$. Tada je

$$\sum_{s=1}^{k} c_{rs} a_{j_s i} = \delta_{ri} D$$

pa iz (1.6) dobivamo za svaki $r \in \{1, \ldots, k\}$

$$Db_r = \sum_{i=1}^{k} \delta_{ri} D b_i = \sum_{i,s=1}^{k} c_{rs} a_{j_s i} b_i = 0$$

Kako je $S(V)$ integralna domena, slijedi $b_r = 0$ za $r = 1, \ldots, k$. Time je dokazano da su $f_1, \ldots, f_k$ linearno nezavisni nad prstenom $S(V)^G$.

Naravno, budući da je $K \subseteq S(V)^G$, iz linearne nezavisnosti nad prstenom $S(V)^G$ trivijalno slijedi linearna nezavisnost nad poljem K. Time je dokazana implikacija $(b) \Rightarrow (c)$.

Napokon, za dokaz implikacije $(c) \Rightarrow (a)$ treba samo uzeti $M = L$.

Neka je i dalje G podgrupa $\mathrm{GL}(V)$. Definiramo potprostor $\mathcal{H}_G(V)$ od $\mathcal{P}(V)$ ovako

$$\mathcal{H}_G(V) = \{f \in \mathcal{P}(V);\ \partial(u)f = 0 \ \ \forall u \in S_+(V)^G\}.$$

Elementi potprostora $\mathcal{H}_G(V)$ zovu se $G-$**harmonijski polinomi** na prostoru V. To je graduiran potprostor od $\mathcal{P}(V)$ i pripadne homogene potprostore označavamo sa

$$\mathcal{H}_G^k(V) = \mathcal{H}_G(V) \cap \mathcal{P}^k(V) = \{f \in \mathcal{P}^k(V);\ \partial(u)f = 0 \ \ \forall u \in S_+(V)^G\}.$$

Sjetimo se da je $S(V)S_+(V)^G$ graduirani potprostor od $S(V)$ i pripadni homogeni potprostori su

$$[S(V)S_+(V)^G]^k = S(V)S_+(V)^G \cap S^k(V) = \sum_{j=1}^{k} S^j(V)^G S^{k-j}(V).$$

Propozicija 1.2.3. *Vrijedi*

$$\mathcal{H}_G(V) = \{f \in \mathcal{P}(V);\ \langle u, f\rangle = 0 \ \ \forall u \in S(V)S_+(V)^G\} \tag{1.7}$$

i

$$\mathcal{H}_G^k(V) = \{f \in \mathcal{P}^k(V);\ \langle u, f\rangle = 0\ \forall u \in [S(V)S_+(V)^G]^k\}, \qquad k \in \mathbb{Z}_+. \tag{1.8}$$

Dokaz: Zbog tvrdnje (b) propozicije 1.1.10. dovoljno je dokazati (1.7). Uočimo sada da zbog nedegeneriranosti forme $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle$ i zbog tvrdnje (c) propozicije 1.1.10. za $u \in S(V)$ i $f \in \mathcal{P}(V)$ imamo sljedeće ekvivalencije:

$$\partial(u)f = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \langle v, \partial(u)f\rangle = 0 \quad \forall v \in S(V) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \langle uv, f\rangle = 0 \quad \forall v \in S(V).$$

Prema tome,

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_G(V) = \{f \in \mathcal{P}(V);\ \partial(u)f = 0\ \forall u \in S_+(V)^G\} = \\ = \{f \in \mathcal{P}(V);\ \langle uv, f\rangle = 0\ \forall u \in S_+(V)^G,\ \forall v \in S(V)\}. \end{aligned}$$

To je upravo jednakost (1.7).

Grupa G djeluje automorfizmima algebre $\mathcal{P}(V)$ na sljedeći način:

$$(\sigma f)(v) = f(\sigma^{-1}v), \qquad \sigma \in G, \quad f \in \mathcal{P}(V), \quad v \in V.$$

Definiramo unitalnu podalgebru $G-$invarijantnih polinoma

$$\mathcal{P}(V)^G = \{f \in \mathcal{P}(V);\ \sigma f = f\ \ \forall \sigma \in G\}$$

i ideal u toj algebri kodimenzije 1 :

$$\mathcal{P}_+(V)^G = \{f \in \mathcal{P}(V)^G;\ f(0) = 0\}.$$

Svi homogeni potprostori $\mathcal{P}^k(V)$ su $G-$invarijantni pa je podalgebra $\mathcal{P}(V)^G$ graduirana, a i $\mathcal{P}_+(V)^G$ je graduiran potprostor i vrijedi

$$\mathcal{P}(V)^G = \sum_{k \in \mathbb{Z}_+} \dot{+}\, \mathcal{P}^k(V)^G, \qquad \mathcal{P}_+(V)^G = \sum_{k \in \mathbb{N}} \dot{+}\, \mathcal{P}^k(V)^G,$$

$$\mathcal{P}^k(V)^G = \mathcal{P}(V)^G \cap \mathcal{P}^k(V) = \{f \in \mathcal{P}^k(V);\ \sigma f = f\ \forall \sigma \in G\}.$$

Zadatak 1.2.1. *Neka je B nedegenerirana simetrična bilinearna forma na $V \times V$, koja je $G-$invarijantna tj. takva da je*

$$B(\sigma v, \sigma w) = B(v, w), \qquad \forall v, w \in V \quad i \quad \forall \sigma \in G.$$

Nadalje, neka je $\Phi_B : S(V) \to \mathcal{P}(V)$ izomorfizam graduiranih algebri definiran tom formom. Dokažite:

(*a*) *Φ_B prepliće djelovanja grupe G na $S(V)$ i na $\mathcal{P}(V)$:*

$$\Phi_B(\sigma u) = \sigma \Phi_B(u), \qquad \sigma \in G, \quad u \in S(V).$$

(*b*) *$\Phi_B(S(V)^G) = \mathcal{P}(V)^G$, $\Phi_B(S_+(V)^G) = \mathcal{P}_+(V)^G$ i $\Phi_B(S(V)S_+(V)^G) = \mathcal{P}(V)\mathcal{P}_+(V)^G$.*

(*c*) *Vrijedi:*

$$\partial(\sigma u)(\sigma f) = \sigma(\partial(u) f), \qquad \sigma \in G, \quad u \in S(V), \quad f \in \mathcal{P}(V).$$

Razmotrimo sada jedan specijalan slučaj, koji u ovom trenutku može izgledati izvještačen, ali kasnije ćemo vidjeti da su upravo takve pretpostavke ispunjene u nekoliko važnih slučajeva. U daljnjem pretpostavljamo da je $K = \mathbb{C}$, dakle, V je kompleksan konačnodimenzionalan vektorski prostor, i neka je B je bilinearna forma na $V \times V$. Nadalje, pretpostavimo da su ispunjeni sljedeći uvjeti:

(1) Zadana je realna forma $V_\mathbb{R}$ od V (tj. realan potprostor od V takav da je $V = V_\mathbb{R} \dot{+} iV_\mathbb{R}$) takva da je restrikcija $B|V_\mathbb{R} \times V_\mathbb{R}$ skalarni produkt na realnom prostoru $V_\mathbb{R}$.

(2) $G \subseteq GL(V)$ je linearna algebarska grupa, tj. za neke $f_1, \ldots, f_k \in \mathcal{P}(L(V))$ vrijedi

$$G = \{\sigma \in GL(V);\ f_1(\sigma) = \cdots = f_k(\sigma) = 0\},$$

i forma B je $G-$invarijantna.

(3) G je kompleksifikacija svoje podgrupe

$$K = \{\sigma \in G;\ \sigma V_\mathbb{R} = V_\mathbb{R}\},$$

tj. svaki neprekidni homomorfizam $\varphi : K \to H$ u kompleksnu Liejevu grupu H jedinstveno se proširuje do holomorfnog homomorfizma $\Phi : G \to H$.

Naravno, iz pretpostavke (1) slijedi da je forma B nedegenerirana, dakle, ona definira izomorfizam $\varphi_B : V \to V^*$ koji se proširuje do izomorfizma $\Phi_B : S(V) \longrightarrow \mathcal{P}(V)$. Nadalje, za svaki $k \in \mathbb{Z}_+$ restrikcija $B_k | S^k(V_{\mathbb{R}}) \times S^k(V_{\mathbb{R}})$ je skalarni produkt na realnom prostoru $S^k(V_{\mathbb{R}})$. Spomenimo još da iz (3) slijedi da je K zatvorena podgrupa ortogonalne grupe $\mathrm{O}(V_{\mathbb{R}})$, dakle, K je kompaktna grupa. U nama važnim situacijama to će biti maksimalna kompaktna podgrupa od G.

Označimo kao i u odjeljku 1.1. sa $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle_B$ bilinearnu formu na $S(V) \times S(V)$ definiranu sa

$$\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle_B | S^k(V) \times S^k(V) = B_k \quad \forall k \in \mathbb{Z}_+, \qquad \langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle_B | S^k(V) \times S^\ell(V) = 0 \quad \text{za } k \neq \ell.$$

Tada je restrikcija forme $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle_B$ na $S(V_{\mathbb{R}}) \times S(V_{\mathbb{R}})$ skalarni produkt na realnom prostoru $S(V_{\mathbb{R}})$.

Propozicija 1.2.4. *Uz navedene uvjete vrijedi:*

(*a*) *Ako je U potprostor od $S(V)$ takav da je $U_{\mathbb{R}} = U \cap S(V_{\mathbb{R}})$ realna forma od U, tj. da je $U = U_{\mathbb{R}} \dot{+} iU_{\mathbb{R}}$, tada je restrikcija forme $\langle\,\cdot\,|\,\cdot\,\rangle : S(V) \times \mathcal{P}(V) \to \mathbb{C}$ na $U \times \Phi_B(U)$ nedegenerirana.*

(*b*) *Vrijedi*

$$\mathcal{P}(V) = \mathcal{P}_+(V)^G \mathcal{P}(V) \dot{+} \mathcal{H}_G(V).$$

Štoviše, za svaki $k \in \mathbb{Z}_+$ je

$$\mathcal{P}^k(V) = (\mathcal{P}_+(V)\mathcal{P}(V))^k \dot{+} \mathcal{H}_G^k(V).$$

(*c*) *Vrijedi*

$$\mathcal{P}(V) = \mathcal{P}(V)^G \mathcal{H}_G(V).$$

Dokaz: (*a*) Budući da je restrikcija forme $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle_B$ na $S(V_{\mathbb{R}}) \times S(V_{\mathbb{R}})$ skalarni produkt na realnom prostoru $V_{\mathbb{R}}$, njegova restrikcija na $U_{\mathbb{R}} \times U_{\mathbb{R}}$ je skalarni produkt na realnom prostoru $U_{\mathbb{R}}$. Prema tome, restrikcija forme $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle_B$ na $U \times U$ je nedegenerirana. Sada tvrdnja (*a*) slijedi iz propozicije 1.1.12.

(*b*) Svaka od reprezentacija G na $S^k(V)$ je holomorfna, pa je ona potpuno određena svojom restrikcijom na K. Odatle slijedi da za $v \in S(V)$, $v = v_1 + iv_2$, $v_1, v_2 \in S(V_{\mathbb{R}})$, vrijedi $v \in S(V)^G$ ako i samo ako su $v_1, v_2 \in S(V_{\mathbb{R}})^K$. To znači da je $\left(S(V)^G\right)_{\mathbb{R}} = S(V_{\mathbb{R}})^K$ i to je realna forma od $S(V)^G$. Odatle slijedi da je $\left(S_+(V)^G S(V)\right)_{\mathbb{R}}$ realna forma od $S_+(V)^G S(V)$. Prema tvrdnji (*a*) tada je restrikcija $\langle\,\cdot\,|\,\cdot\,\rangle$ na $S_+(V)^G S(V) \times \Phi_B\left(S_+(V)^G S(V)\right)$ nedegenerirana. No kako je prema zadatku 1.2.1. $\Phi_B\left(S_+(V)^G S(V)\right) = \mathcal{P}_+(V)^G \mathcal{P}(V)$, tvrdnja slijedi iz propozicije 1.2.3.

Napokon, tvrdnja (*c*) slijedi iz tvrdnje (*b*) i iz propozicije 1.2.1. pomoću izomorfizma $\Phi_B : S(V) \to \mathcal{P}(V)$.

Primijetimo da iz tvrdnje (*c*) prethodne propozicije slijedi da množenje definira epimorfizam $\mathcal{P}(V)^G \otimes \mathcal{H}_G(V) \longrightarrow \mathcal{P}(V)$. Kao što ćemo dokazati u daljnjim poglavljima, u nekim je važnim situacijama to izomorfizam – to se zove „*separacija varijabli*”. Naime, u slučaju kad je V kompleksifikacija realnog unitarnog prostora $V_{\mathbb{R}}$ i grupa $G = \mathrm{SO}(V)$ je kompleksifikacija grupe rotacija $\mathrm{SO}(V_{\mathbb{R}})$, onda su $\mathcal{H}_G(V)$ upravo obični harmonijski polinomi (tj. oni koji zadovoljavaju Laplaceovu diferencijalnu jednadžbu) a $\mathcal{P}(V)^G$ je algebra kompleksnih polinoma u „*radijalnoj varijabli*”. Napomenimo još da je prema propoziciji 1.2.2., prenesenoj na algebru $\mathcal{P}(V)$ pomoću izomorfizma Φ_B, injektivnost epimorfizma $\mathcal{P}(V)^G \otimes \mathcal{H}_G(V) \longrightarrow \mathcal{P}(V)$ ekvivalentna slobodnosti $\mathcal{P}(V)$ kao $\mathcal{P}(V)^G$–modula.

1.3 Bernstein–Luntsov teorem

U ovom ćemo odjeljku dokazati

Teorem 1.3.1. *Neka je V konačnodimenzionalan vektorski prostor (nad poljem karakteristike 0) i neka je G podgrupa grupe $\mathrm{GL}(V)$. Pretpostavimo da je X potprostor od V takav da je restrikcija epimorfizma restrikcije $r : \mathcal{P}(V) \to \mathcal{P}(X)$ na podalgebru $\mathcal{P}(V)^G$ injektivna. Nadalje, pretpostavimo da je za podgrupu W od $\mathrm{GL}(X)$ definiranu sa*

$$W = \{\sigma|X;\ \sigma \in G,\ \ \sigma X = X\}$$

$\mathcal{P}(X)$ slobodan kao $\mathcal{P}(X)^W$–modul. Tada je $\mathcal{P}(V)$ slobodan kao $\mathcal{P}(V)^G$–modul.

Ovaj teorem će nam biti posebno važan u situaciji kad je potprostor X takav da je pripadna grupa W konačna. U tom slučaju u sljedećem ćemo poglavlju detaljno proučiti problem slobodnosti $\mathcal{P}(X)^W$–modula $\mathcal{P}(X)$ i dokazati vrlo netrivijalan teorem da je ta slobodnost ekvivalentna svojstvu da je grupa W generirana refleksijama. To će ujedno biti ekvivalentno činjenici da je algebra invarijanata $\mathcal{P}(X)^W$ polinomijalna algebra u $\ell = \dim X$ homogenih W–invarijantnih polinoma. Budući da je tada $\mathcal{P}(V)^G \cong \mathcal{P}(X)^W$, moći ćemo zaključiti da je i $\mathcal{P}(V)^G$ polinomijalna algebra u ℓ homogenih G–invarijantih polinoma.

Teorem 1.3.1. neposredna je posljedica sljedećeg općenitijeg teorema:

Teorem 1.3.2. (Bernstein–Lunts) *Neka je V konačnodimenzionalan vektorski prostor, neka je $\mathcal{A}$ graduirana podalgebra algebre $\mathcal{P}(V)$ i neka je X potprostor od V takva da je restrikcija epimorfizma restrikcije $r : \mathcal{P}(V) \to \mathcal{P}(X)$ na podalgebru $\mathcal{A}$ injektivna. Pretpostavimo da je $\mathcal{P}(X)$ slobodan $r(\mathcal{A})$–modul. Tada je $\mathcal{P}(V)$ slobodan $\mathcal{A}$–modul. Štoviše, ako je $\{a_i\}_{i\in I}$ neka baza $r(\mathcal{A})$–modula $\mathcal{P}(X)$, koja se sastoji od homogenih polinoma a_i, i ako su $b_i \in \mathcal{P}(V)$ homogeni polinomi takvi da je $r(b_i) = a_i$, onda je $\{b_i\}_{i\in I}$ baza $\mathcal{P}(V/X) \otimes \mathcal{A}$–modula $\mathcal{P}(V)$. Posebno, ako je $\{c_j\}_{j\in J}$ baza vektorskog prostora $\mathcal{P}(V/X)$, onda je $\{c_j \otimes b_i;\ (j,i) \in J \times I\}$ baza $\mathcal{A}$–modula $\mathcal{P}(V)$.*

Promatrajmo sada proizvoljan potprostor X konačnodimenzionalnog vektorskog prostora V. Tada imamo epimorfizam restrikcije $r : \mathcal{P}(V) \longrightarrow \mathcal{P}(X)$, a također je prirodno definiran monomorfizam $\jmath : \mathcal{P}(V/X) \longrightarrow \mathcal{P}(V)$ sa

$$(\jmath(f))(v) = f(v + X), \qquad v \in V, \quad f \in \mathcal{P}(V/X).$$

Pomoću monomorfizma $\jmath$ identificiramo algebru $\mathcal{P}(V/X)$ s podalgebrom od $\mathcal{P}(V)$. Dakle, na taj način algebra $\mathcal{P}(V/X)$ postaje algebra svih polinoma iz $\mathcal{P}(V)$ koji su konstantni na svakoj klasi $v + X$, $v \in V$:

$$\mathcal{P}(V/X) = \{f \in \mathcal{P}(V);\ f(v + x) = f(v)\ \forall v \in V \text{ i } \forall x \in X\}.$$

S druge strane, algebru $\mathcal{P}(X)$ ne možemo na prirodan način promatrati kao podalgebru od $\mathcal{P}(V)$. No ako izaberemo bilo koji direktni komplement Y od X u V, onda je prostor X izomorfan kvocijentnom prostoru V/Y, pa je algebra $\mathcal{P}(X)$ izomorfna podalgebri $\mathcal{P}(V/Y)$ algebre $\mathcal{P}(V)$. Pri tome je izomorfizam $\mathcal{P}(V/Y) \to \mathcal{P}(X)$ definiran restrikcijom polinoma na potprostor X.

Za dokaz teorema 1.3.2. treba nam nekoliko pomoćnih tvrdnji. Trebamo najprije generalizirati pojmove s početka prvog odjeljka. **Graduacija vektorskog prostora** M je familija potprostora $(M^n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ takvih da je njihova suma direktna i jednaka M. **Graduiran vektorski prostor** je vektorski prostor na kome je zadana graduacija. Ako su M i N graduirani vektorski prostori s graduacijama $(M^n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ i $(N^n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$, **morfizam graduiranih prostora** $\varphi : M \to N$ je linearno preslikavanje takvo da je $\varphi(M^n) \subseteq N^n\ \forall n \in \mathbb{Z}_+$.

Filtracija vektorskog prostora M je familija potprostora $(M_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ takva da je

$$M_n \subseteq M_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{Z}_+ \qquad \text{i} \qquad M = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}_+} M_n.$$

Filtriran vektorski prostor je vektorski prostor sa zadanom filtracijom. Ako su M i N filtrirani vektorski prostori s filtracijama $(M_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ i $(N_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$, linearno preslikavanje $\varphi : M \to N$ zove se **morfizam filtriranih prostora** ako vrijedi $\varphi(M_n) \subseteq N_n$ $\forall n \in \mathbb{Z}_+$.

Kao i kod algebri ako je M filtriran vektorski prostor s filtracijom $(M_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$, definiramo pripadni graduiran vektorski prostor $\mathrm{Gr}(M)$ kao direktnu sumu kvocijenata $\mathrm{Gr}^n(M) = M_n/M_{n-1}$, $n \in \mathbb{Z}_+$ (uz $M_{-1} = \{0\}$). U tom slučaju za svaki $0 \neq m \in M$ postoji najmanji $n \in \mathbb{Z}_+$ takav da je $m \in M_n$. Tada definiramo **simbol** $\sigma(m)$ elementa m kao njegovu klasu u $\mathrm{Gr}^n(M)$:

$$\sigma(m) = m + M_{n-1}.$$

Ovu definiciju upotpunjujemo sa $\sigma(0) = 0$. Uočimo da tako definirano preslikavanje σ sa M u $\mathrm{Gr}(M)$ nije linearno, osim u slučaju kad je filtracija vrlo specijalna, takva da za neki $n_0 \in \mathbb{Z}_+$ vrijedi $M_n = \{0\}$ za $n < n_0$ i $M_n = M$ za $n \geq n_0$. Doista, slika preslikavanja σ sastoji se od svih homogenih elemenata prostora $\mathrm{Gr}(M)$, a to nije potprostor osim ako je samo jedan od homogenih potprostora $\mathrm{Gr}^n(M)$ različit od $\{0\}$.

Ako je $\varphi : M \to N$ morfizam filtriranih prostora, prirodno se definira morfizam graduiranih prostora $\mathrm{Gr}(\varphi) : \mathrm{Gr}(M) \to \mathrm{Gr}(N)$; to je jedinstveno linearno preslikavanje takvo da je

$$(\mathrm{Gr}(\varphi))(m + M_{n-1}) = \varphi(m) + N_{n-1} \quad \text{za} \quad m \in M_n, \qquad \text{tj.} \quad (\mathrm{Gr}(\varphi))(\sigma(m)) = \sigma(\varphi(m)).$$

Obratno, ako je M graduiran vektorski prostor s graduacijom $(M^n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$, onda se pridružena filtracija $(M_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ prostora M definira sa

$$M_n = \sum_{k=0}^{n} M_k, \qquad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Tada se pripadni graduiran prostor $\mathrm{Gr}(M)$ identificira s polaznim graduiranim prostorom M i u tom je slučaju $\sigma(m) = m$ za svaki $m \in M$. Sasvim analogno zadatku 1.1.1. imamo i u ovoj općenitijoj situaciji:

Zadatak 1.3.1. *Neka je $\varphi : M \to N$ morfizam filtriranih vektorskih prostora. Dokažite:*

(*a*) *Morfizam $\mathrm{Gr}(\varphi)$ je injektivan ako i samo ako je morfizam φ injektivan.*

(*b*) *Morfizam $\mathrm{Gr}(\varphi)$ je surjektivan ako i samo ako je morfizam φ surjektivan.*

Neka je $\mathcal{A}$ graduirana algebra s graduacijom $(\mathcal{A}^n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$. **Graduiran $\mathcal{A}$−modul** je graduiran vektorski prostor s graduacijom $\left(M^k\right)_{k\in\mathbb{Z}_+}$ koji je ujedno lijevi $\mathcal{A}$−modul i vrijedi $\mathcal{A}^n M^k \subseteq M^{n+k}$ za sve $n, k \in \mathbb{Z}_+$.

Analogno, neka je $\mathcal{A}$ filtrirana algebra s filtracijom $(\mathcal{A}_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$. **Filtriran $\mathcal{A}$−modul** je filtriran vektorski prostor M s filtracijom $(M_k)_{k\in\mathbb{Z}_+}$ koji je ujedno lijevi $\mathcal{A}$−modul i vrijedi $\mathcal{A}_n M_k \subseteq M_{n+k}$ za sve $n, k \in \mathbb{Z}_+$.

Ako je M filtrirani modul nad filtriranom algebrom $\mathcal{A}$, onda $\mathrm{Gr}(M)$ na prirodan način postaje graduirani modul nad graduiranom algebrom $\mathrm{Gr}(\mathcal{A})$:

$$(a + \mathcal{A}_{n-1})(m + M_{k-1}) = am + M_{n+k-1}, \qquad n, k \in \mathbb{Z}_+, \quad a \in \mathcal{A}_n, \quad m \in M_k.$$

Lema 1.3.3. *Neka je M filtrirani modul nad fitriranom algebrom $\mathcal{A}$ i neka je $(m_j)_{j\in J}$ familija elemenata iz M. Pretpostavimo da je $\mathrm{Gr}(M)$ slobodan $\mathrm{Gr}(\mathcal{A})-$modul i da mu je $(\sigma(m_j))_{j\in J}$ baza. Tada je M slobodan $\mathcal{A}-$modul i $(m_j)_{j\in J}$ mu je baza.*

Dokaz: Stavimo $d_j = \deg m_j = \min\{i \in \mathbb{Z}_+;\ m_j \in M_i\}$. Neka je N slobodan $\mathcal{A}-$modul s bazom $(n_j)_{j\in J}$. Zadajemo filtraciju $(N_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ prostora N ovako:

$$N_i = \sum_{n+d_j\le i} \mathcal{A}_n n_j.$$

Neka je $\varphi : N \to M$ jedinstven homomorfizam $\mathcal{A}-$modula takav da je $\varphi(n_j) = m_j\ \forall j \in J$.

Zadatak 1.3.2. *Dokažite da je N filtriran $\mathcal{A}-$modul i da je φ morfizam filtriranih $\mathcal{A}-$modula.*

Uočimo sada da je $\mathrm{Gr}(\varphi)$ izomorfizam graduiranih $\mathrm{Gr}(\mathcal{A})-$modula, jer prevodi bazu u bazu. Prema zadatku 1.3.1. φ je izomorfizam. No to znači da je i M slobodan $\mathcal{A}-$modul i da mu je $(m_j)_{j\in J}$ baza. Time je lema 1.3.3. dokazana.

Neka su $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ unitalne algebre. Pomoću univerzalnog svojstva tenzorskog produkta može se dokazati da postoji jedinstveno bilinearno preslikavanje $(c, d) \mapsto cd$ sa $\mathcal{A}\otimes\mathcal{B} \times \mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$ u $\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$ takvo da vrijedi

$$(a \otimes b)(a' \otimes b') = aa' \otimes bb'.$$

S tom binarnom operacijom $\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$ postaje algebra koja je očito asocijativna, a i unitalna: jedinica u $\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$ je $1_\mathcal{A} \otimes 1_\mathcal{B}$. Ako su $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ graduirane algebre s graduacijama $(\mathcal{A}_k)_{k\in\mathbb{Z}_+}$ i $(\mathcal{B}_k)_{k\in\mathbb{Z}_+}$, onda se lako vidi da je sa

$$(\mathcal{A}\otimes\mathcal{B})^k = \sum_{j=0}^{k} \mathcal{A}^j \otimes \mathcal{B}^{k-j}, \qquad k \in \mathbb{Z}_+,$$

zadana graduacija na algebri $\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$. Graduirana algebra $\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$ s tom graduacijom $\left((\mathcal{A}\otimes\mathcal{B})^k\right)_{k\in\mathbb{Z}_+}$ zove se **tenzorski produkt graduiranih algebri** $\mathcal{A}$ **i** $\mathcal{B}$.

Neka je sada V konačnodimenzionalan vektorski prostor i X potprostor. Imamo prirodnu graduaciju $\left(\mathcal{P}^k(V)\right)_{k\in\mathbb{Z}_+}$ i pripadnu prirodnu filtraciju $(\mathcal{P}_k(V))_{k\in\mathbb{Z}_+}$ algebre $\mathcal{P}(V)$. Definiramo sada još jednu filtraciju $(\Phi_k\mathcal{P}(V))_{n\in\mathbb{Z}_+}$ algebre $\mathcal{P}(V)$ ovako:

$$\Phi_k\mathcal{P}(V) = \mathcal{P}(V/X)\mathcal{P}_k(V), \qquad k \in \mathbb{Z}_+.$$

Neka je $\mathrm{Gr}_\Phi(\mathcal{P}(V))$ graduirana algebra pridružena filtriranoj algebri $\mathcal{P}(V)$ s filtracijom $(\Phi_k\mathcal{P}(V))_{k\in\mathbb{Z}_+}$.

Lema 1.3.4. *Uz uvedene oznake vrijedi:*

(*a*) *Graduirana algebra $\mathrm{Gr}_\Phi(\mathcal{P}(V))$ izomorfna je tenzorskom produktu graduiranih algebri $\mathcal{P}(X) \otimes \mathcal{P}(V/X)$, pri čemu je algebra $\mathcal{P}(X)$ graduirana sa standardnom graduacijom $\left(\mathcal{P}^k(X)\right)_{k\in\mathbb{Z}_+}$, a algebra $\mathcal{P}(V/X)$ graduirana je s trivijalnom tzv.* **nul–graduacijom** *$\mathcal{P}(V/X)^0 = \mathcal{P}(V/X)$ i $\mathcal{P}(V/X)^k = \{0\}$ za $k \in \mathbb{N}$.*

(*b*) *Uz identifikaciju graduiranih algebri $\mathrm{Gr}_\Phi(\mathcal{P}(V)) = \mathcal{P}(X)\otimes\mathcal{P}(V/X)$ iz (a) pretpostavimo da je $g \in \mathcal{P}(V)$ homogen polinom takav da je $r(g) = g|X \neq 0$. Tada je njegov simbol $\sigma_\Phi(g)$ u odnosu na filtraciju $(\Phi_k(\mathcal{P}(V))_{k\in\mathbb{Z}_+}$ jednak $r(g) \in \mathcal{P}(X) \subseteq \mathcal{P}(X)\otimes\mathcal{P}(V/X)$.*

Dokaz: (a) Neka je Y potprostor od V koji je komplementaran potprostoru X, tj. $V = X \dotplus Y$. Tada se pomoću restrikcije na Y algebra $\mathcal{P}(V/X)$ identificira s algebrom $\mathcal{P}(Y)$, a pomoću restrikcije na X algebra $\mathcal{P}(V/Y)$ identificira se sa algebrom $\mathcal{P}(X)$. Uz te identifikacije imamo $\mathcal{P}(V) = \mathcal{P}(X) \otimes \mathcal{P}(Y)$ i to je jednakost graduiranih algebri sa standardnim graduacijama:

$$\mathcal{P}^k(V) = \sum_{j=0}^{k} \mathcal{P}^j(X) \otimes \mathcal{P}^{k-j}(Y).$$

Nadalje, uz tu identifikaciju imamo

$$\Phi_k \mathcal{P}(V) = \mathcal{P}_k(X) \otimes \mathcal{P}(Y) \cong \mathcal{P}_k(X) \otimes \mathcal{P}(V/X),$$

pa slijedi

$$\mathrm{Gr}^k(\mathcal{P}(V)) \cong (\mathcal{P}_k(X) \otimes \mathcal{P}(V/X))/(\mathcal{P}_{k-1}(X) \otimes \mathcal{P}(V/X)) \cong \mathcal{P}^k(X) \otimes \mathcal{P}(V/X).$$

Time je tvrdnja dokazana.

(b) Neka je $g \in \mathcal{P}^k(V)$ polinom takav da je $r(g) = g|X \neq 0$. Tada uz identifikaciju iz (a) imamo

$$g = \sum_{j=0}^{k} g_j \otimes h_{k-j}, \qquad g_j \in \mathcal{P}^j(X), \quad h_{k-j} \in \mathcal{P}^{k-j}(V/X).$$

Tada je $h_{k-j}|X = 0$ za $k - j > 0$, tj. za $j < k$. Dakle, $r(g) = g_k h_0$. S druge strane, je

$$\sum_{j=0}^{k-1} g_j \otimes h_{k-j} \in \Phi_{k-1}\mathcal{P}(V),$$

dakle, vrijedi i $\sigma_\Phi(g) = g_k h_0$. Time je i tvrdnja (b) dokazana.

Dokaz teorema 1.3.2.: Na algebri $\mathcal{A}$ definiramo novu filtraciju induciranu s filtracijom Φ. Prema tvrdnji (b) leme 1.3.4. za svaki se homogeni element $f \in \mathcal{A}$ njegov simbol $\sigma_\Phi(f)$ uz identifikaciju $\mathrm{Gr}_\Phi(\mathcal{P}(V)) = \mathcal{P}(X) \otimes \mathcal{P}(V/X)$ podudara sa $r(f) \in \mathcal{P}(X) \subseteq \mathcal{P}(V/X) \otimes \mathcal{P}(X)$. Odatle slijedi da $\sigma_\Phi(\mathcal{A}) \subseteq \mathrm{Gr}_\Phi(\mathcal{P}(V))$ razapinje podalgebru $r(\mathcal{A})$. Osim toga je $\sigma_\Phi(b_i) = r(b_i) = a_i$. Budući da je $(a_i)_{i\in I}$ baza slobodnog $r(\mathcal{A})-$modula $\mathcal{P}(X)$, to je ujedno baza slobodnog $(\mathcal{P}(V/X) \otimes r(\mathcal{A}))-$modula $\mathcal{P}(V/X) \otimes \mathcal{P}(X)$. Međutim, $\mathcal{P}(V/X) \otimes r(\mathcal{A}) = \mathrm{Gr}_\Phi(\mathcal{P}(V/X) \otimes \mathcal{A})$ i $\mathcal{P}(V/X) \otimes \mathcal{P}(X) = \mathrm{Gr}_\Phi(\mathcal{P}(V))$. Stoga iz leme 1.3.3. slijedi da je $(\mathcal{P}(V/X) \otimes \mathcal{A})-$modul $\mathcal{P}(V)$ slobodan i da mu je $(b_i)_{i\in I}$ baza.

Poglavlje 2

INVARIJANTE KONAČNIH GRUPA

2.1 Invarijante simetrične grupe

Sa $\mathcal{S}_n$ označavamo $n-$**tu simetričnu grupu**, tj. grupu permutacija skupa $\{1,\dots,n\}$. Neka je R komutativan unitalan prsten i neka je $\mathcal{A} = R[X_1,\dots,X_n]$ prsten polinoma u n varijabli s koeficijentima iz R. Pomoću permutiranja varijabli grupa $\mathcal{S}_n$ prirodno djeluje na $\mathcal{A}$ automorfizmima:

$$\sigma(f)(X_1,\dots,X_n) = f(X_{\sigma(1)},\dots,X_{\sigma(n)}), \qquad \sigma \in \mathcal{S}_n, \quad f \in \mathcal{A}.$$

Tada je svaka homogeni $R-$podmodul $\mathcal{A}^k = R^k[X_1,\dots,X_n]$ invarijantan s obzirom na djelovanje grupe $\mathcal{S}_n$. Elementi potprstena

$$\mathcal{A}^{\mathcal{S}_n} = \{f \in \mathcal{A};\ \sigma(f) = f\ \ \forall\sigma \in \mathcal{S}_n\}$$

invarijanata u odnosu na to djelovanje zovu se **simetrični polinomi**. Taj je potprsten očito graduiran. Definiramo **elementarne simetrične polinome** $e_1,\dots,e_n$ sa

$$e_k = \sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le n} X_{i_1}\cdots X_{i_k}.$$

Očito su $e_1,\dots,e_n \in \mathcal{A}^{\mathcal{S}_n}$.

Promatrajmo sada skup $\mathcal{M}$ svih monoma

$$X^\alpha = X_1^{\alpha_1}\cdots X_n^{\alpha_n}, \qquad \alpha = (\alpha_1,\dots,\alpha_n) \in \mathbb{Z}_+^n.$$

U skup $\mathcal{M}$ uvodimo „*leksikografski uređaj po stupnju*" ovako:

$$X^\alpha < X^\beta \qquad \Longleftrightarrow \qquad \text{ili je } |\alpha| < |\beta| \text{ ili je } |\alpha| = |\beta| \text{ i } \alpha_i < \beta_i \text{ za } i = \min\{j;\ \alpha_j \neq \beta_j\}.$$

Svaka orbita $\{\sigma(X^\alpha);\ \sigma \in \mathcal{S}_n\}$ sadrži jedinstven maksimalan element u odnosu na taj uređaj i za taj monom X^β vrijedi $\beta_1 \ge \beta_2 \ge \cdots \ge \beta_n$. Skup svih takvih $\beta \in \mathbb{Z}_+^n$ označimo sa $\mathbb{Z}_{+,\ge}^n$:

$$\mathbb{Z}_{+,\ge}^n = \{\beta \in \mathbb{Z}_+^n;\ \beta_1 \ge \cdots \ge \beta_n\}.$$

Dakle, $\{X^\beta;\ \beta \in \mathbb{Z}_{+,\ge}^n\}$ je skup predstavnika svih $\mathcal{S}_n-$orbita u skupu $\mathcal{M}$ svih monoma. Svakom monomu X^α pridružena je njegova „*orbitna suma*":

$$\mathrm{orb}_{\mathcal{S}_n}(X^\alpha) = \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n} \sigma(X^\alpha).$$

Neka je $f \in \mathcal{A}$. Pišemo

$$f = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^n} r_\alpha X^\alpha$$

gdje su $r_\alpha \in R$ jedinstveno određeni (i samo ih je konačno mnogo različito od nule). Tada je očito $f \in \mathcal{A}^{\mathcal{S}_n}$ ako i samo ako je $r_\alpha = r_\beta$ kad god je $\sigma(X^\alpha) = X^\beta$ za neki $\sigma \in \mathcal{S}_n$. Odatle slijedi da se $f \in \mathcal{A}^{\mathcal{S}_n}$ na jedinstven način može zapisati u obliku

$$f = \sum_{\beta \in \mathbb{Z}_{+,\geq}^n} r_\beta \mathrm{orb}_{\mathcal{S}_n}(X^\beta).$$

Neka je

$$X^\gamma = \max\{X^\beta;\ \beta \in \mathbb{Z}_{+,\geq}^n,\ r_\beta \neq 0\}.$$

Zadatak 2.1.1. *Uz uvedene oznake dokažite da je X^γ maksimalni monom u polinomu*

$$e_\gamma = e_1^{\gamma_1-\gamma_2} e_2^{\gamma_2-\gamma_3} \cdots e_{n-1}^{\gamma_{n-1}-\gamma_n} e_n^{\gamma_n}.$$

Zadatak 2.1.2. *Dokažite da su svi monomi u polinomu $f - r_\gamma e_\gamma$ manji od monoma X^γ.*

Ponovimo li taj postupak s invarijantnim polinomom $f - r_\gamma e_\gamma$ umjesto polinoma f dolazimo do multiindeksa $\delta \in \mathbb{Z}_{+,\geq}^n$ takvog da je svaki monom u polinomu $f - r_\gamma e_\gamma - r_\delta e_\delta$ striktno manji od X^δ. Nakon konačno mnogo takvih koraka dolazimo do konstante. To pokazuje da se svaki $f \in \mathcal{A}^{\mathcal{S}_n}$ može napisati kao polinom u $e_1, \ldots, e_n$ s koeficijentima iz R.

Zadatak 2.1.3. *Dokažite da su $e_1, \ldots, e_n$ algebarski nezavisni, tj. da su polinomi $e^\alpha = e_1^{a_1} \cdots e_n^{\alpha_n}$, $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$, linearno nezavisni nad R.*

Uputa: Dokažite da je najveći monom u e^α jednak $X_1^{\alpha_1+\cdots+\alpha_n} X_2^{\alpha_2+\cdots+\alpha_n} \cdots X_n^{\alpha_n}$. Zatim dokažite da su takvi monomi međusobno različiti, dakle, linearno nezavisni. Napokon dokažite da odatle slijedi linearna nezavisnost polinoma e^α, $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$.

Na taj način dokazali smo:

Teorem 2.1.1. *Vrijedi $R[X_1, \ldots, X_n]^{\mathcal{S}_n} = R[e_1, \ldots, e_n]$ i (homogeni) polinomi $e_1, \ldots, e_n$ su algebarski nezavisni.*

Definiramo sada invarijantne polinome

$$\nu_j = X_1^j + X_2^j + \cdots + X_n^j, \qquad j \in \mathbb{Z}_+.$$

Očito su $\nu_j \in R[X_1, \ldots, x_n]^{\mathcal{S}_n}$ za sve $j \in \mathbb{Z}_+$.

Zadatak 2.1.4. *Dokažite Newtonove formule:*

$$(-1)^{j+1} j e_j = \nu_j - e_1\nu_{j-1} + e_2\nu_{j-2} - \cdots + (-1)^{j-1} e_{j-1}\nu_1, \qquad j = 1, \ldots, n.$$

Uputa: Slučaj $j = n$ slijedi promatranjem polinoma

$$f(T, X_1, \ldots, X_n) = \prod_{i=1}^n (T - X_i) \in K[X_1, \ldots, X_n, T]$$

i izračunavanjem lijeve strane očite jednakosti

$$\sum_{i=1}^n f(X_i, X_1, \ldots, X_n) = 0.$$

Za $j < n$ desna je strana jednakosti koju treba dokazati homogen simetrični polinom stupnja j, dakle, prema teoremu 2.1.1. može se napisati kao polinom u $e_1, \ldots, e_j$. Sada uvrstite $X_{j+1} = \cdots = X_n = 0$ u koristite silaznu indukciju po n.

2.2 Teoremi konačnosti

Teorem 2.2.1. (**D. Hilbert**) *Neka je G podgrupa grupe* $\mathrm{GL}(V)$, *gdje je V konačnodimenzionalan vektorski prostor nad poljem K. Pretpostavimo da je reprezentacija grupe G na $\mathcal{P}(V)$ potpuno reducibilna. Tada je algebra invarijanata $\mathcal{P}(V)^G$ konačno generirana.*

Dokaz: Neka je $\hat{G}$ skup svih klasa ekvivalencije ireducibilnih konačnodimenzionalnih reprezentacija grupe G nad poljem K. Za svaku $\alpha \in \hat{G}$ označimo sa $\mathcal{P}(V)_\alpha$ sumu svih $G-$stabilnih potprostora od $\mathcal{P}(V)$ na kome djeluje ireducibilna reprezentacija iz klase α. Budući da su potprostori $\mathcal{P}^n(V)$ konačnodimenzionalni i $G-$stabilni, iz potpune reducibilnosti reprezentacije grupe G na prostoru $\mathcal{P}(V)$ slijedi da je

$$\mathcal{P}(V) = \bigoplus_{\alpha \in \hat{G}} \mathcal{P}(V)_\alpha.$$

Nadalje, $\mathcal{P}(V)^G = \mathcal{P}(V)_{\alpha_0}$, gdje je $\alpha_0 \in \hat{G}$ klasa trivijalne jednodimenzionalne reprezentacije. Stavimo

$$X = \bigoplus_{\alpha \in \hat{G}'} \mathcal{P}(V)_\alpha, \qquad \text{gdje je} \quad \hat{G}' = \hat{G} \setminus \{\alpha_0\}.$$

Tada je $\mathcal{P}(V) = \mathcal{P}(V)^G \dotplus X$. Neka je R projektor prostora $\mathcal{P}(V)$ na potprostor $\mathcal{P}(V)^G$ duž potprostora X. Očito je R preplitanje reprezentacija grupe G.

Neka je $f \in \mathcal{P}(V)^G$ i $\alpha \in \hat{G}'$. Nadalje, neka je $W \subseteq \mathcal{P}(V)_\alpha$ konačnodimenzionalan $G-$stabilan potprostor na kome je reprezentacija od G ireducibilna (i, naravno, u klasi α). Neka je $\{f_1, \ldots, f_n\}$ baza od W. Ako je $f = 0$, naravno, vrijedi $fW = \{0\} \subseteq \mathcal{P}(V)_\alpha$. Pretpostavimo da je $f \neq 0$. Budući da je $\mathcal{P}(V)$ integralna domena, vektori $ff_1, \ldots, ff_n$ su linearno nezavisni, tj. tvore bazu potprostora fW. Kako je $f \in \mathcal{P}(V)^G$, potprostor fW je $G-$stabilan. Za svaki σ matrica od $\sigma|W$ u bazi $\{f_1, \ldots, f_n\}$ jednaka je matrici od $\sigma|fW$ u bazi $\{ff_1, \ldots, ff_n\}$. Prema tome, reprezentacija od G na fW je ireducibilna i u klasi α. To znači da je $fW \subseteq \mathcal{P}(V)_\alpha$. Time smo dokazali da je $f\mathcal{P}(V)_\alpha \subseteq \mathcal{P}(V)_\alpha$ za svaku klasu $\alpha \in \hat{G}'$. Dakle, svaki od potprostora $\mathcal{P}(V)_\alpha$ je $\mathcal{P}(V)^G-$podmodul od $\mathcal{P}(V)$. Slijedi da je X $\mathcal{P}(V)^G-$podmodul od $\mathcal{P}(V)$. Posebno, ako je $f \in \mathcal{P}(V)^G$ i ako $g \in \mathcal{P}(V)$ rastavimo kao $g = R(g) + g_1$, gdje je $g_1 \in X$, onda je $fR(g) \in \mathcal{P}(V)^G$ i $fg_1 \in X$, pa slijedi $R(fg) = fR(g)$.

Odatle slijedi da za svaki ideal $\mathcal{J}$ u algebri $\mathcal{P}(V)^G$ vrijedi

$$R(\mathcal{P}(V)\mathcal{J}) = \mathcal{P}(V)\mathcal{J} \cap \mathcal{P}(V)^G = \mathcal{J}.$$

Posebno je

$$R\left(\mathcal{P}(V)\mathcal{P}_+(V)^G\right) = \mathcal{P}_+(V)^G.$$

Budući da je $\mathcal{P}(V)$ Noetherina algebra, ideal $\mathcal{P}(V)\mathcal{P}_+(V)^G$ je konačno generiran, pa postoje homogeni polinomi $f_1, \ldots, f_n \in \mathcal{P}_+(V)^G$ takvi da je

$$\mathcal{P}(V)\mathcal{P}_+(V)^G = \mathcal{P}(V)f_1 + \cdots + \mathcal{P}(V)f_n.$$

Odatle slijedi

$$\mathcal{P}_+(V)^G = R\left(\mathcal{P}(V)\mathcal{P}_+(V)^G\right) = R\left(\mathcal{P}(V)f_1 + \cdots + \mathcal{P}(V)f_n\right),$$

a kako je $R\left(\mathcal{P}(V)f_j\right) = \mathcal{P}(V)^G f_j$, dobivamo

$$\mathcal{P}_+(V)^G = \mathcal{P}(V)^G f_1 + \cdots \mathcal{P}(V)^G f_n. \tag{2.1}$$

Tvrdimo da je tada $\mathcal{P}(V)^G = K[f_1, \ldots, f_n]$. U tu je svrhu dovoljno dokazati da vrijedi $\mathcal{P}_m(V)^G \subseteq K[f_1, \ldots, f_n]$ za svaki $m \in \mathbb{Z}_+$. To dokazujemo indukcijom po $m \in \mathbb{Z}_+$. Baza indukcije $\mathcal{P}_0(V)^G \subseteq K[f_1, \ldots, f_n]$ je očita budući da je $\mathcal{P}_0(V)^G = K$. Pretpostavimo da je $m \geq 1$ i da je dokazano $\mathcal{P}_{m-1}(V)^G \subseteq K[f_1, \dots, f_n]$. Neka je $f \in \mathcal{P}^m(V)^G$. Stavimo $r_j = \deg f_j$. Zbog (2.1) možemo pisati

$$f = g_1 f_1 + \cdots + g_n f_n, \qquad g_j \in \mathcal{P}^{m-r_j}(V)^G, \quad j = 1, \dots, n$$

Kako je $m - r_j \leq m - 1$ za svaki j, iz pretpostavke indukcije slijedi da je $f \in K[f_1, \dots, f_n]$.

Primijetimo da je pretpostavka teorema sigurno zadovoljena ako je grupa G konačna i K je polje karakteristike 0. Tada je operator R iz dokaza teorema 2.2.1. dan sa

$$R(f) = \frac{1}{|G|} \sum_{\sigma \in G} \sigma(f), \qquad f \in \mathcal{P}(V).$$

U tom slučaju možemo ograničiti broj homogenih generatora algebre invarijanata $\mathcal{P}(V)^G$:

Teorem 2.2.2. (**E. Noether**) *Neka je G konačna podgrupa grupe* $\mathrm{GL}(V)$, *pri čemu je V konačnodimenzionalan vektorski prostor nad poljem K karakteristike* 0. *Tada je algebra invarijanata $\mathcal{P}(V)^G$ generirana s invarijantama stupnja $\leq |G|$.*

Dokaz: Ako izaberemo bazu $\{e_1, \dots, e_n\}$ prostora V algebra $\mathcal{P}(V)$ se identificira s algebrom $K[X_1, \dots, X_n]$ na način da se formalna varijabla X_j identificira sa f_j, gdje je $\{f_1, \dots, f_n\}$ baza od V^* dualna bazi $\{e_1, \dots, e_n\}$. Definiramo invarijantne polinome

$$j_\alpha = \sum_{\sigma \in G} \sigma(X^\alpha), \qquad \alpha \in \mathbb{Z}_+^n.$$

Neka je $f \in \mathcal{P}(V)^G = K[X_1, \dots, X_n]^G$. Tada možemo na jedinstven način pisati

$$f = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^n} c_\alpha X^\alpha, \qquad c_\alpha \in K.$$

Tada slijedi

$$|G| f = \sum_{\sigma \in G} \sigma(f) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^n} c_\alpha j_\alpha.$$

Dakle, za dokaz je dovoljno pokazati da je algebra $\mathcal{P}(V)^G$ generirana sa $\{j_\alpha;\ \alpha \in \mathbb{Z}_+^n,\ |\alpha| \leq |G|\}$.

Definiramo sada polinome $p_j \in K[X_1, \dots, X_n, Z_1, \dots, Z_n] = \mathcal{P}(V)[Z_1, \dots, Z_n]$ sa

$$p_j(X_1, \dots, X_n, Z_1, \dots, Z_n) = \sum_{\sigma \in G} \left(\sigma(X_1) Z_1 + \sigma(X_2) Z_2 + \ldots + \sigma(X_n) Z_n\right)^j, \qquad j \in \mathbb{N}.$$

Zadatak 2.2.1. *Dokažite da je tada*

$$p_j = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^n,\, |\alpha| = j} j_\alpha Z^\alpha.$$

Zadatak 2.2.2. *Dokažite da se svaki p_j za $j < |G|$ može izraziti kao polinom u p_i za $i < j$.*

Uputa: Koristite zadatak 2.1.4.

Zadatak 2.2.3. *Dokažite da iz zadataka 2.2.1. i 2.2.2. slijedi da se invarijanta j_α za $|\alpha| > |G|$ može može zapisati kao polinom u invarijantama j_β za $|\beta| \leq |G|$.*

Time je teorem 2.2.2. dokazan.

Neka je i dalje G konačna podgrupa od $\mathrm{GL}(V)$ i V je konačnodimenzionalan vektorski prostor nad poljem K karakteristike 0. Djelovanje grupe G automorfizmima algebre $\mathcal{P}(V)$ prirodno se proširuje do djelovanja automorfizmima na polju racionalnih funkcija $\mathcal{R}(V)$:

$$\sigma\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{\sigma(f)}{\sigma(g)}, \qquad f, g \in \mathcal{P}(V), \quad g \neq 0.$$

Stavimo $\mathcal{R}(V)^G = \{f \in \mathcal{R}(V);\ \sigma(f) = f \ \ \forall \sigma \in G\}$.

Teorem 2.2.3. *Polje $\mathcal{R}(V)$ je Galoisovo proširenje potpolja invarijanata $\mathcal{R}(V)^G$ i grupa G je Galoisova grupa tog proširenja. Nadalje, $\mathcal{R}(V)^G$ je polje kvocijenata prstena $\mathcal{P}(V)^G$.*

Dokaz: Prva je tvrdnja neposredna posljedica Galoisove teorije: kad god je G konačna podgrupa grupe $\mathrm{Aut}(L)$ automorfizama polja L, onda je L Galoisovo proširenje potpolja invarijanata L^G i G je Galoisova grupa tog proširenja.

Uočimo sada da se svaka racionalna funkcija iz $\mathcal{R}(V)$ može napisati kao razlomak f/g pri čemu je $f \in \mathcal{P}(V)$ i $g \in \mathcal{P}(V)^G$. Doista, takav se prikaz dobije iz proizvoljnog zapisa u obliku F/G, $F, G \in \mathcal{P}(V)$, tako da i brojnik i nazivnik pomnožimo sa $\prod_{\sigma \in G \setminus \{1\}} \sigma(G)$. Nadalje, ako su $f \in \mathcal{P}(V)$ i $g \in \mathcal{P}(V)^G$ onda je racionalna funkcija f/g u polju invarijanata ako i samo ako je $f \in \mathcal{P}(V)^G$. Na taj je način dokazano da je $\mathcal{R}(V)^G = \{f/g;\ f, g \in \mathcal{P}(V)^G,\ g \neq 0\}$, a to je upravo druga tvrdnja teorema.

Ako je R unitalan potprsten komutativnog unitalnog prstena S, za element $s \in S$ kažemo da je **integralan nad** R (ili **cio nad** R) ako postoji normiran polinom $P \in R[T]$ takav da je $P(s) = 0$. Ako je svaki element $s \in S$ integralan nad R, kažemo da je **prsten** S **integralan nad** R. Napomenimo da za $s_1, \ldots, s_n \in S$ sa $R[s_1, \ldots, s_n]$ označavamo najmanji potprsten od S koji sadrži $R \cup \{s_1, \ldots, s_n\}$. Očito je

$$R[s_1, \ldots, s_n] = \{P(s_1, \ldots, s_n);\ P \in R[X_1, \ldots, X_n]\}.$$

Teorem 2.2.4. *Neka je R unitalan potprsten komutativnog unitalnog prstena S i neka je $s \in S$. Tada su sljedeća tri svojstva međusobno ekvivalentna:*

(a) *Element s je integralan nad R.*

(b) *Prsten $R[s]$ je konačno generiran kao $R-$modul.*

(c) *Postoji potprsten T od S koji sadrži $R[s]$ i koji je konačno generiran kao $R-$modul.*

Dokaz: $(a) \Rightarrow (b)$. Neka je $0 \neq P \in R[X]$ normiran polinom takav da je $P(s) = 0$. Neka je $n = \deg P$. Svaki element prstena $R[s]$ može se napisati u obliku $Q(s)$, gdje je $Q \in R[X]$. Budući da je polinom P normiran, možemo pisati $Q = PF + G$, gdje su $F, G \in R[X]$ i $\deg G < n$. Tada je $Q(s) = G(s)$. Time je dokazano da je

$$R[s] = R + Rs + \cdots + Rs^{n-1},$$

pa vidimo da je $R[s]$ konačno generiran kao $R-$modul.

Implikacija $(b) \Rightarrow (c)$ je trvivijalna.

$(c) \Rightarrow (a)$. Neka su $t_1, \ldots, t_n \in T$ takvi da je

$$T = Rt_1 + \cdots + Rt_n.$$

Za svaki $i \in \{1, \ldots, n\}$ je $st_i \in T$ pa postoje $r_{ij} \in R$ takvi da je $st_i = r_{i1}t_1 + \cdots + r_{in}t_n$. Neka je $D \in R[s]$ determinanta $n \times n$ matrice iz $M_n(R[s])$ s elementima $\delta_{ij}s - r_{ij}$. Tada slijedi $Dt_i = 0$ za svaki i, a kako $t_1, \ldots, t_n$ generiraju $R-$modul T i kako je $1 \in T$, slijedi $D = 0$. Međutim, očito je $D = F(s)$ za normiran polinom $F \in R[X]$ stupnja n. Slijedi da je s integralan nad R.

Neposredna je posljedica:

Korolar 2.2.5. *Ako je R unitalan potprsten komutativnog unitalnog prstena S i ako je S konačno generiran kao $R-$modul, onda je prsten S integralan nad R.*

Korolar 2.2.6. *Neka je R unitalan potprsten komutativnog unitalnog prstena S i neka su elementi $s_1, \ldots, s_n \in S$ integralni nad R. Tada je prsten $R[s_1, \ldots, s_n]$ konačno generiran kao $R-$modul i taj je prsten integralan nad R.*

Dokaz: Za svaki $i \in \{1, \ldots, n\}$ element s_i je integralan nad R, dakle, i nad $R[s_1, \ldots, s_{i-1}]$. Iz teorema 2.2.4. slijedi da je prsten $R[s_1, \ldots, s_i] = R[s_1, \ldots, s_{i-1}][s_i]$ konačno generiran kao modul nad $R[s_1, \ldots, s_{i-1}]$. Sada tvrdnja slijedi indukcijom po n pomoću sljedeće očigledne činjenice: Ako su $A \subseteq B \subseteq C$ komutativni prstenovi i ako je B konačno generiran kao $A-$modul, a C je konačno generiran kao $B-$modul, onda je C konačno generiran kao $A-$modul. Naime, vrijedi:

$$B = \sum_{j=1}^{n} Ab_j \quad \text{i} \quad C = \sum_{k=1}^{m} Bc_k \qquad \Longrightarrow \qquad C = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} Ab_jc_k.$$

Korolar 2.2.7. *Neka je T unitalan komutativan prsten i neka su $R \subseteq S$ njegovi unitalni potprstenovi takvi da je T integralan nad S i da je S integralan nad R. Tada je T integralan nad R.*

Dokaz: Za proizvoljan $t \in T$ postoje $n \in \mathbb{N}$ i $s_1, \ldots, s_n \in S$ takvi da je

$$t^n + \sum_{j=1}^{n} s_j t^{n-j} = 0.$$

Tada je t integralan nad $R[s_1, \ldots, s_n]$, dakle, $R[s_1, \ldots, s_n, t] = R[s_1, \ldots, s_n][t]$ je konačno generiran kao $R[s_1, \ldots, s_n]-$modul. Kako su $s_1, \ldots, s_n$ integralni nad R, prema korolaru 2.2.6. prsten $R[s_1, \ldots, s_n]$ je konačno generiran kao $R-$modul. Kao u dokazu korolara 2.2.6. zaključujemo da je $R[s_1, \ldots, s_n, t]$ konačno generiran kao $R-$modul. No sada iz teorema 2.2.4. slijedi da je element t integralan nad R. Kako je element $t \in T$ bio proizvoljan, tvrdnja je dokazana.

Korolar 2.2.8. *Neka je R unitalan potprsten komutativnog unitalnog prstena S. Tada je*

$$\overline{R}^S = \{s \in S;\ s \text{ je integralan nad } R\}$$

potprsten od S koji sadrži R. Prsten $\overline{R}^S$ je integralan nad R i najveći je takav potprsten od S: ako je T potprsten od S koji sadrži R i integralan je nad R, onda je $T \subseteq \overline{R}^S$.

Dokaz: Ako su $x, y \in \overline{R}^S$, prema korolaru 2.2.6. potprsten $R[x, y]$ je konačno generiran kao $R-$modul. Kako su $x - y, xy \in R[x, y]$, iz teorema 2.2.4. slijedi da su $x - y, xy \in \overline{R}^S$. Dakle, $\overline{R}^S$ je potprsten od S. Ostale su tvrdnje evidentne.

Prsten $\overline{R}^S$ zove se **integralni zatvarač** od R u S. Kažemo da je potprsten R **integralno zatvoren** u prstenu S ako je $\overline{R}^S = R$. Kažemo da je integralna domena R integralno zatvorena, ako je ona integralno zatvorena u svom polju razlomaka. Sljedeći rezultat navodimo bez dokaza:

Teorem 2.2.9. *Integralna domena koja je faktorijalan prsten je integralno zatvorena. Posebno, ako je K polje, prsten $K[X_1, \ldots, X_n]$ je integralno zatvoren.*

Ako je R unitalan potprsten komutativnog unitalnog prstena S, kažemo da je S **konačno proširenje** od R ako je S integralan nad R i ako je S konačno generirana $R-$algebra.

Zadatak 2.2.4. *Dokažite da je prsten S je konačno proširenje svog potprstena R ako i samo ako je S konačno generiran kao $R-$modul.*

Neka je u daljnjem opet G konačna podgrupa grupe $\mathrm{GL}(V)$, gdje je V konačnodimenzionalan vektorski prostor nad poljem K karakteristike 0.

Propozicija 2.2.10. *Prsten invarijanata $\mathcal{P}(V)^G$ je integralno zatvoren.*

Dokaz: Prema teoremu 2.2.3. polje razlomaka prstena $\mathcal{P}(V)^G$ je upravo polje $\mathcal{R}(V)^G$ $G-$invarijantnih racionalnih funkcija. Neka je racionalna funkcija $f \in \mathcal{R}(V)^G$ integralna nad $\mathcal{P}(V)^G$. Tada je ona integralna nad $\mathcal{P}(V)$. Međutim, prsten $\mathcal{P}(V) \cong K[X_1, \ldots, X_n]$ je prema teoremu 2.2.9. integralno zatvoren. Odatle slijedi da je $f \in \mathcal{P}(V)$, a kako je $\mathcal{P}(V) \cap \mathcal{R}(V)^G = \mathcal{P}(V)^G$, zaključujemo da je $f \in \mathcal{P}(V)^G$. Dakle, prsten $\mathcal{P}(V)^G$ je integralno zatvoren.

Teorem 2.2.11. *Prsten $\mathcal{P}(V)$ je konačno proširenje potprstena invarijanata $\mathcal{P}(V)^G$.*

Dokaz: Neka je $f \in \mathcal{P}(V)$. Stavimo

$$F_f = \prod_{\sigma \in G} (T - \sigma(f)) \in \mathcal{P}(V)^G[T].$$

Tada je F_f normiran polinom (s koeficijentima iz $\mathcal{P}(V)^G$) i očito vrijedi $F_f(f) = 0$. Prema tome, svaki je element $f \in \mathcal{P}(V)$ integralan nad $\mathcal{P}(V)^G$. Nadalje, kako je $\mathcal{P}(V)$ konačno generirana kao $K-$algebra, ona je pogotovo konačno generirana kao $\mathcal{P}(V)^G-$algebra.

Sada iz zadatka 2.2.4. neposredno slijedi:

Korolar 2.2.12. *$\mathcal{P}(V)$ je konačno generiran $\mathcal{P}(V)^G-$modul.*

Neka su sada $f_1, \ldots, f_k \in \mathcal{P}(V)$ polinomi koji generiraju $K-$algebru $\mathcal{P}(V)$. Neka je $R \subseteq \mathcal{P}(V)^G \subseteq \mathcal{P}(V)$ podalgebra generirana s koeficijentima polinoma $F_{f_1}, \ldots, F_{f_k} \in \mathcal{P}(V)^G[T]$. Budući da je R konačno generirana algebra, ona je Noetherin prsten. Nadalje, prema izboru R vidimo da je $\mathcal{P}(V)$ konačno generiran kao $R-$modul, dakle, $\mathcal{P}(V)$ je Noetherin $R-$modul. Tada je i svaki $R-$podmodul od $\mathcal{P}(V)$ Noetherin, pa je posebno, $\mathcal{P}(V)^G$ Noetherin $R-$modul. No tada je $\mathcal{P}(V)^G$ konačno generiran kao $R-$modul. Sada iz konačne generiranosti $K-$algebre R slijedi da je i $K-$algebra $\mathcal{P}(V)^G$ konačno generirana. Na taj smo način dali drugi dokaz Hilbertovog teorema 2.2.1. za slučaj konačne podgrupe grupe $\mathrm{GL}(V)$, pri čemu je V konačnodimenzionalan vektorski prostor nad poljem K karakteristike 0.

U gornjem smo dokazu koristili pojam i svojstva Notherinosti prstena i modula. Sada ćemo te pojmove definirati i njihova svojstva zbog potpunosti dokazati.

Za **modul** M nad prstenom R kažemo da je **Noetherin** ako za svaki rastući niz podmodula

$$M_1 \subseteq M_2 \subseteq M_3 \subseteq \cdots\cdots$$

postoji $k \in \mathbb{N}$ takav da je $M_j = M_k$ $\forall j \geq k$. **Prsten** R je (lijevo, desno) **Noetherin** ako je on Noetherin kao (lijevi, desni) $R-$modul.

Teorem 2.2.13. (a) *$R-$modul M je Noetherin ako i samo ako svaki neprazan skup njegovih podmodula sadrži bar jedan maksimalan element.*

(b) *Svaki podmodul Noetherinog modula je Noetherin modul.*

(c) *Svaki kvocijentni modul Noetherinog modula je Noetherin modul.*

(d) *Ako je N podmodul modula M takav da su moduli N i M/N Noetherini, onda je i modul M Noetherin.*

(e) *Ako su $M_1, \ldots, M_n$ Noetherini moduli, onda je i njihova direktna suma Noetherin modul.*

(f) *Svaki je Noetherin modul konačno generiran.*

(g) *Ako je R (lijevo, desno) Noetherin prsten, svaki je (lijevi, desni) konačno generiran $R-$modul Noetherin.*

Dokaz: (a) Pretpostavimo da je M Noetherin $R-$modul i neka je S neprazan skup njegovih podmodula. Neka je $M_1 \in S$. Ako M_1 nije maksimalan element skupa S, postoji $M_2 \in S$ takav da je $M_1 \subsetneq M_2$. Kad skup S ne bi imao nijedan maksimalan element, na taj bismo način mogli konstruirati striktno rastući niz elemenata od S, a to bi bilo u suprotnosti sa svojstvom Noetherinosti modula M.

Pretpostavimo sada da svaki neprazan skup podmodula od M sadrži bar jedan maksimalan element. Neka je

$$M_1 \subseteq M_2 \subseteq M_3 \subseteq \cdots\cdots$$

rastući niz podmodula od M. Tada skup podmodula $\{M_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ sadrži maksimalan element M_k. Za $j > k$ vrijedi $M_k \subseteq M_j$, ali ne može biti $M_k \neq M_j$ zbog maksimalnosti od M_k u skupu $\{M_n;\ n \in \mathbb{N}\}$. Dakle, vrijedi $M_j = M_k$ za svaki $j \geq k$.

Tvrdnja (b) slijedi neposredno iz tvrdnje (a) ili direktno iz definicije jer podmodul nekog podmodula od M je ujedno podmodul od M.

(c) Neka je N podmodul Noetherinog modula M i neka je $\pi : M \to M/N$ kvocijentni epimorfizam. Tada je $K \mapsto \pi^{-1}(K)$ monotona (u odnosu na inkluziju) bijekcija sa skupa svih podmodula od M/N na skup svih podmodula od M kohji sadrže N. Stoga i tvrdnja (c) slijedi neposredno iz tvrdnje (a).

(d) Pretpostavimo da je N podmodul modula M takav da su moduli N i M/N Noetherini. Neka je opet $\pi : M \to M/N$ kvocijentni epimorfizam i neka je

$$M_1 \subseteq M_2 \subseteq M_3 \subseteq \cdots\cdots$$

rastući niz podmodula od M. Stavimo za svaki $i \in \mathbb{N}$

$$N_i = M_i \cap N \qquad \text{i} \qquad T_i = \pi(M_i).$$

Budući da su moduli N i M/N Noetherini, slijedi da postoji $k \in \mathbb{N}$ takav da je $N_j = N_k$ i $T_j = T_k$ za svaki $j \geq k$. Neka je $j \geq k$ i neka je $m \in M_j$. Tada je $\pi(m) \in T_j = T_k$, pa postoji $m' \in M_k$ takav da je $\pi(m) = \pi(m')$. Slijedi $m - m' \in \operatorname{Ker} \pi = N$, a zbog $j \geq k$ je i $m - m' \in M_j$. Dakle, $m - m' \in N \cap M_j = N_j = N_k = N \cap M_k$. Budući da je $m' \in M_k$, odatle slijedi da je $m \in M_k$. Kako je $m \in M_j$ bio proizvoljan, zaključujemo da je $M_j = M_k$. Kako je $j \geq k$ bio proizvoljan, dokazali smo da je $M_j = M_k\ \forall j \geq k$. Dakle, modul M je Noetherin.

Tvrdnja (e) slijedi neposredno iz tvrdnje (d) indukcijom po n. Doista, ako stavimo

$$N_k = \coprod_{j=1}^{k} M_j, \qquad k = 1, \ldots, n,$$

onda je $M_1 = N_1$ i $M_k \cong N_k/N_{k-1}$ za $k \geq 2$.

(f) Neka je M (lijevi) Noetherin $R-$modul i pretpostavimo da M nije konačno generiran. Tada možemo induktivno konstruirati niz $(m_i)_{i\in\mathbb{N}}$ u M takav da je

$$m_1 \neq 0, \qquad m_i \in M \setminus M_{i-1} \quad \text{za} \quad i \geq 2, \quad \text{gdje je} \quad M_j = Rm_1 + \cdots + Rm_j, \quad j \in \mathbb{N}.$$

No tada je $(M_i)_{i\in\mathbb{N}}$ striktno rastući niz podmodula od M, a to je nemoguće jer je modul M Noetherin. Ova kontradikcija pokazuje da je svaki Noetherin modul konačno generiran. Dokaz za desne $R-$module sasvim je analogan.

(g) Neka je M konačno generiran lijevi modul nad lijevo Noetherinim prstenom R. Dakle,

$$M = Rm_1 + \cdots + Rm_n$$

za neke $m_1, \ldots, m_n$. Tada je $\varphi : (r_1, \ldots, r_n) \mapsto r_1m_1 + \cdots + r_nm_n$ epimorfizam modula R^n na modul M. Međutim, prema tvrdnji (e) modul R^n je Noetherin, pa je prema tvrdnji (c) i svaki njegov kvocijentni modul Noetherin. Dakle, modul $M =\cong R^n/(\mathrm{Ker}\,\varphi)$ je Noetherin. Dokaz za desne module nad desno Noetherinim prstenom R sasvim je analogan.

Uočimo da se tvrdnje (b), (c) i (d) teorema 2.2.13. mogu i ovako iskazati:

Korolar 2.2.14. *Neka je*

$$\{0\} \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow \{0\}$$

kratki egzaktni niz $R-$modula. Modul M je Noetherin ako i samo ako su moduli M' i M'' Noetherini.

Teorem 2.2.15. (**Hilbertov teorem o bazi**) *Ako je R komutativan unitalan Noetherin prsten onda je i prsten polinoma $R[T]$ Noetherin. Posebno, ako je K polje, prsten $K[X_1, \ldots, X_n]$ je Noetherin. Nadalje, svaka konačno generirana komutativna $K-$algebra je Noetherina.*

Dokaz: Ako $R[T]$ promatramo kao $R[T]-$modul, njegovi su podmoduli upravo ideali. Prema tvrdnjama (f) i (g) prsten $R[T]$ je Noetherin ako i samo ako je svaki njegov ideal konačno generiran.

Neka je J ideal u prstenu $R[T]$. Za svaki $n \in \mathbb{Z}_+$ označimo sa I_n skup svih $r \in R$ takvih da je ili $r = 0$ ili je r vodeći koeficijent nekog polinoma iz $R^n[T] \cap J$. Neka su $r, s \in I_n \setminus \{0\}$ i $r \neq s$ Nadalje, neka su $P, Q \in J$ polinomi stupnja n takvi da je r vodeći koeficijent od P i da je s vodeći koeficijent od Q. Tada je $P - Q \in J$ polinom stupnja n i $r - s$ je njegov vodeći koeficijent. Time je dokazano da je I_n aditivna podgrupa od R. Ako je $r \in I_n \setminus \{0\}$ i ako je $P \in J$ polinom stupnja n s vodećim koeficijentom r, onda je za svaki $s \in R$ umnožak sr ili jednak 0 ili je on vodeći koeficijent polinoma $sP \in J$ stupnja n. To pokazuje da je $sr \in I_n$. Dakle, I_n je ideal u prstenu J za svaki $n \in \mathbb{Z}_+$. Neka je $r \in I_n \setminus \{0\}$ i neka je $P \in J$ polinom stupnja n s vodećim koeficijentom r. Tada je $XP \in J$ polinom stupnja $n+1$ i r je njegov vodeći koeficijent. Dakle, $I_n \subseteq I_{n+1}$, odnosno, imamo rastući niz ideala u R :

$$I_0 \subseteq I_1 \subseteq I_2 \subseteq \cdots\cdots$$

Budući da je prsten R Noetherin, postoji $k \in \mathbb{Z}_+$ takav da je $I_j = I_k$ za svaki $j \geq k$. Nadalje, svaki od ideala $I_0, \ldots, I_k$ je konačno generiran. Stoga postoje prirodni brojevi $i_0, \ldots, i_k$ i za svaki $n \in \{0, \ldots, k\}$ elementi $r_{n1}, \ldots, r_{ni_n} \in I_n$ takvi da je

$$I_n = Rr_{n1} + \cdots + R_{ni_n}, \qquad n = 0, \ldots, k.$$

Za $0 \leq n \leq k$ i $1 \leq j \leq i_n$ neka je $P_{nj} \in J$ polinom stupnja n s vodećim koeficijentom r_{nj}. Označimo sa J' ideal u $R[T]$ generiran s polinomima P_{nj}, $0 \leq n \leq k$, $1 \leq j \leq i_n$. Tada je očito $J' \subseteq J$ (naime, svi polinomi P_{nj} su iz ideala J). Da dokažemo da obrnutu inkluziju, dovoljno je dokazati da je $J \cap R_n[T] \subseteq J'$ za svaki $n \in \mathbb{Z}_+$. Tu ćemo inkluziju dokazati indukcijom po n. Pretpostavimo da je $n \in \mathbb{Z}_+$ i da je dokazano da je $J \cap R_{n-1}[T] \subseteq J'$. (Napomenimo da je baza indukcije trivijalna uz dogovor $R_{-1}[T] = \{0\}$.) Neka je $0 \neq P \in J \cap R^n[T]$ i neka je $r \neq 0$ njegov vodeći koeficijent.

Ako je $n \leq k$, onda je $r \in I_n$, pa postoje $s_1, \ldots, s_{i_n} \in R$ takvi da je

$$r = s_1 r_{n1} + \cdots + s_{i_n} r_{n i_n}.$$

Tada polinom $s_1 P_{n1} + \cdots + s_{i_n} P_{n i_n} \in J'$ ima stupanj n i vodeći koeficijent r. Dakle, razlika $P - s_1 P_{n1} - \cdots - s_{i_n} P_{n i_n} \in J$ ima stupanj $\leq n-1$. Po pretpostavci indukcije ta je razlika sadržana u J'. Stoga je i $P \in J'$. Time je korak indukcije proveden ako je $n \leq k$.

Pretpostavimo sada da je $n > k$. Tada je $r \in I_n = I_k$ pa postoje $s_1, \ldots, s_{i_k} \in R$ takvi da je

$$r = s_1 r_{k1} + \cdots + s_{i_k} r_{k i_k}.$$

Sada polinom $s_1 T^{n-k} P_{k1} + \cdots + s_{i_k} T^{n-k} P_{k i_k} \in J'$ ima stupanj n i vodeći koeficijent r. Kao i malo prije, razlika $P - s_1 T^{n-k} P_{k1} - \cdots - s_{i_k} T^{n-k} P_{k i_k}$ ima stupanj $\leq n-1$, pa je po pretpostavci indukcije ta razlika sadržana u J', dakle, opet je $P \in J'$. Time je korak indukcije proveden i u slučaju kad je $n > k$.

Napokon, konačno generirana komutativna algebra nad poljem K izomorfna je kvocijentu prstena $K[X_1, \ldots, X_n]$ za neki n, dakle, prema tvrdnji (c) teorema 2.2.13. ta je algebra Noetherina.

Neka je i dalje R komutativan unitalan prsten. Za bilo koji neprazan skup I sa R^I označavamo direktan produkt familije $R-$modula $(M_i)_{i \in I}$ pri čemu je $M_i = R$ za svaki $i \in I$. Direktnu sumu te familije označavamo sa $R^{(I)}$. $R-$**modul** M zove se **slobodan** ako je ili $M = \{0\}$ ili je M izomorfan modulu $R^{(I)}$ za neki neprazan skup I. To znači da postoji neka familija $(m_i)_{i \in I}$ elemenata iz M koja **baza** $R-$**modula** M, tj. svaki se element iz M može na jedinstven način zapisati kao (konačna) $R-$linearna kombinacija elemenata m_i, $i \in I$.

Kažemo da je $R-$**modul** P **projektivan** ako za svaki epimorfizam $R-$modula $g : N \to M$ i za svaki homomorfizam $R-$modula $f : P \to M$ postoji homomorfizam $R-$modula $h : P \to N$ takav da je $g \circ h = f$:

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, "h"'] \arrow[d, "f"] & \\ N \arrow[r, "g"] & M \arrow[r] & \{0\} \end{tikzcd}$$

Propozicija 2.2.16. *Svaki je slobodan modul P projektivan.*

Dokaz: Neka je $g : N \to M$ epimorfizam i neka je $f : F \to M$ homomorfizam. Nadalje, neka je $(p_i)_{i \in I}$ baza slobodnog modula P. Budući da je g epimorfizam, za svaki $i \in I$ postoji $n_i \in N$ takav da je $g(n_i) = f(p_i)$. Nadalje, kako je $(p_i)_{i \in I}$ baza slobodnog modula P, postoji (štoviše, jedinstven je) homomorfizam $h : P \to N$ takav da je $h(p_i) = n_i$ za svaki $i \in I$. Tada imamo

$$(g \circ h)(p_i) = g(h(p_i)) = g(n_i) = f(p_i) \qquad \forall i \in I,$$

a kako je $(P_i)_{i \in I}$ baza modula P, slijedi $g \circ h = f$.

Teorem 2.2.17. *Sljedeća su tri svojstva $R-$modula P međusobno ekvivalentna:*

(a) *Modul P je projektivan.*

(b) *Svaki kratki egzaktni niz $R-$modula*

$$\{0\} \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} P \longrightarrow \{0\}$$

je rascjepiv, tj. homomorfizam g ima desni invers, ili, ekvivalentno, homomorfizam f ima lijevi invers (dakle, B je izomorfan direktnoj sumi $A \coprod P$).

(c) *P je direktni sumand slobodnog $R-$modula; tj. postoji $R-$modul Q takav da je direktna suma $P \coprod Q$ slobodan modul.*

Dokaz: $(a) \Rightarrow (b)$. Budući da je P projektivan modul, dijagram

$$\begin{array}{ccccc} & & P & & \\ & & \downarrow id_P & & \\ B & \xrightarrow{g} & P & \longrightarrow & \{0\} \end{array}$$

može se dopuniti homomorfizmom $h : P \to P$ takvim da dijagram bude komutativan, tj. takvim da $g \circ h = id_P$. Dakle, homomorfizam g ima desni invers.

$(b) \Rightarrow (c)$. Očito postoji slobodan modul F i epimorfizam $g : F \to P$ (Možemo izabrati bilo koju familiju $(p_i)_{i \in I}$ generatora $R-$modula P, uzeti $F = R^{(I)}$ i definirati epimorfizam $g : F \to P$ sa $g\left((r_i)_{i\in I}\right) = \sum_{i\in I} r_i p_i$). Tada imamo kratki egzaktni niz

$$\{0\} \longrightarrow \operatorname{Ker} g \hookrightarrow F \longrightarrow P \longrightarrow \{0\}.$$

No tada je po pretpostavci slobodan modul F izomorfan direktnoj sumi modula $\operatorname{Ker} g$ i P.

$(c) \Rightarrow (a)$. Neka je $F = P \coprod Q$ slobodan $R-$modul. Nadalje, označimo sa $\pi : F \to P$ projektor na prvu komponentu, a sa $\iota : P \to F$ inkluziju. Neka je sada $g : A \to B$ epimorfizam $R-$modula i neka je $f : P \to B$ homomorfizam $R-$modula. Tada je $f \circ \pi : F \to B$ homomorfizam $R-$modula. Prema propoziciji 2.2.16. modul F je projektivan, pa postoji homomorfizam $h_1 : F \to A$ takav da je $g \circ h_1 = f \circ \pi$. Stavimo $h = h_1 \circ \iota : P \to A$. Tada je

$$g \circ h = g \circ (h_1 \circ \iota) = (g \circ h_1) \circ \iota = (f \circ \pi) \circ \iota = f \circ (\pi \circ \iota) = f \circ id_P = f.$$

Dakle, modul P je projektivan.

Zadatak 2.2.5. *Neka je $(P_i)_{i\in I}$ familija $R-$modula. Dokažite da je direktna suma $\coprod_{i\in I} P_i$ projektivan $R-$modul ako i samo ako su svi moduli P_i projektivni.*

Propozicija 2.2.18. *Neka je $\mathcal{A}$ graduirana povezana komutativna algebra. Konačno generiran graduiran $\mathcal{A}-$modul je projektivan ako i samo ako je slobodan.*

Treba samo dokazati da je konačno generiran projektivan graduiran modul M slobodan. U tu nam svrhu trebaju neke pomoćne tvrdnje. Neka je $(\mathcal{A}^n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ graduacija od $\mathcal{A}$ i stavimo

$$\mathcal{A}_+ = \sum_{n\in\mathbb{N}} \dot{+}\, \mathcal{A}^n.$$

Tada je $\mathcal{A}_+$ ideal u $\mathcal{A}$ kodimenzije 1. Za graduiran modul M $\mathcal{A}_+ M$ je graduiran podmodul. Definiramo

$$Q(M) = M/\mathcal{A}_+ M.$$

Tada je u stvari $Q(M)$ graduiran $\mathcal{A}/\mathcal{A}_+-$modul, a kako je $\mathcal{A}/\mathcal{A}_+ = K$, $Q(M)$ je graduiran vektorski prostor. Sada vektorski prostor

$$\mathcal{A} \otimes_K Q(M) = \left\{ \sum a_i \otimes \mu_i;\ a_i \in \mathcal{A},\ \mu_i \in Q(M) \right\}$$

na prirodan način postaje slobodan $\mathcal{A}-$modul: struktura $\mathcal{A}-$modula je takva da je

$$b(a \otimes \mu) = ba \otimes \mu, \qquad a, b \in \mathcal{A}, \quad \mu \in Q(M).$$

Izaberimo sada bazu $(\mu_i)_{i\in I}$ prostora $Q(M)$ sastavljenu od homogenih elemeneta tog graduiranog vektorskog prostora. Nadalje, neka je za svaki $i \in I$ element $m_i \in M$ neki homogeni predstavnik klase $\mu_i \in Q(M) = M/\mathcal{A}_+M$. Ti izbori određuju jedinstven homomorfizam $\mathcal{A}-$modula

$$\varepsilon : \mathcal{A} \otimes_K Q(M) \longrightarrow M \qquad \text{takav da je} \quad \varepsilon(a \otimes \mu_i) = am_i \quad \forall i \in I \quad \text{i} \quad \forall a \in \mathcal{A}.$$

Uočimo da je tako definiran homomorfizam ε graduiran.

Propozicija 2.2.18. bit će dokazana ako pokažemo da je ε izomorfizam.

Lema 2.2.19. *Uz navedene pretpostavke i uz uvedene oznake vrijedi $M = \{0\}$ ako i samo ako je $Q(M) = \{0\}$.*

Dokaz: Iz $M = \{0\}$ trivijalno slijedi $Q(M) = \{0\}$. Pretpostavimo sada da je $Q(M) = \{0\}$. Tada je $M = \mathcal{A}_+M$, dakle, svaki se $m \in M^k$ može pisati kao konačna suma oblika

$$x = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n m_n, \qquad \text{gdje su} \quad a_n \in \mathcal{A}^n \quad \text{i} \quad m_n \in M^{k-n}.$$

Pri tome smo stavili $M^j = \{0\}$ za $j < 0$. Iz gornjeg izraza indukcijom po k slijedi da je $M^k = \{0\}$ za svaki k, dakle, $M = \{0\}$.

Nastavimo sada dokaz propozicije 2.2.18. Treba još dokazati da je prije definiran homomorfizam $\varepsilon : \mathcal{A} \otimes_K Q(M) \to M$ izomorfizam. Iz definicije je jasno da je ε epimorfizam. Neka je $N = \operatorname{Ker} \varepsilon$. Budući da je homomorfizam ε graduiran, N je graduiran podmodul od M. Budući da je modul M projektivan, postoji homomorfizam $g : M \to \mathcal{A} \otimes_K Q(M)$ takav da je $\varepsilon \circ g = id_M$. Prema tome, vrijedi

$$\mathcal{A} \otimes_K Q(M) \cong N \coprod M.$$

Sada je N kao direktni sumand slobodnog modula projektivan modul. Nadalje, $Q(M)$ je konačno generiran $\mathcal{A}-$modul, dakle, konačnodimenzionalan vektorski prostor nad K. Prema tome, modul $\mathcal{A} \otimes_K Q(M)$ je konačno generiran. Odatle slijedi da je i N, kao modul izomorfan kvocijentnom modulu od $\mathcal{A} \otimes_Q (M)$, konačno generiran. Iz definicije modula (tj. vektorskog prostora) $Q(M)$ vidi se da je $Q(N \coprod M) = Q(N) \coprod Q(M)$. Međutim, očito je $Q(\mathcal{A} \otimes_K Q(M)) \cong Q(M)$. Zbog konačne dimenzionalnosti slijedi $Q(N) = \{0\}$. Sada iz leme 2.2.19. slijedi da je $N = \{0\}$. Prema tome, epimorfizam ε je i monomorfizam, dakle, izomorfizam.

Teorem 2.2.20. (**Noetherina lema o normalizaciji**) *Neka je $\mathcal{A}$ komutativna konačno generirana unitalna algebra nad poljem K (karakteristike 0) koja je integralna domena. Tada postoje algebarski nezavisni elementi $x_1, \ldots, x_n$ u $\mathcal{A}$ takvi da je prsten $\mathcal{A}$ integralan nad potprstenom $K[x_1, \ldots, x_n]$. Pri tome je broj n potpuno određen i jednak je stupnju transcendentnosti polja razlomaka od $\mathcal{A}$ nad poljem K.*

Dokaz: Neka je m najmanji nenegativan cijeli broj takav da postoje $y_1, \ldots, y_m \in \mathcal{A}$ koji generiraju $\mathcal{A}$, tj. $\mathcal{A} = K[y_1, \ldots, y_m]$. Dokaz ćemo provesti indukcijom po m. Za $m = 0$ tvrdnja je trivijalna jer je tada $\mathcal{A} = K$. Neka je sada $m \in \mathbb{N}$ i pretpostavimo da teorem dokazan za algebre s manje od m generatora. Neka su $y_1, \ldots, y_m \in \mathcal{A}$ takvi da je $\mathcal{A} = K[y_1, \ldots, y_m]$. Ako su $y_1, \ldots, y_m$ algebarski nezavisni, tvrdnja trivijalno slijedi. Pretpostavimo da $y_1, \ldots, y_m$ nisu algebarski nezavisni i neka je $q < m$ maksimalan broj algebarski nezavisnih elemenata u skupu $\{y_1, \ldots, y_m\}$. Možemo pretpostaviti da su $y_1, \ldots, y_m$ numerirani tako da su $y_1, \ldots, y_q$ algebarski nezavisni. Tada su $y_1, \ldots, y_q, y_m$ algebarski zavisni pa postoji $P \in K[X_1, \ldots, X_q, T]$ takav da je $P \neq 0$ i $P(y_1, \ldots, y_q, y_m) = 0$. Neka je $r = \deg P$. Možemo pisati

$$P = P_0 + P_1 + \cdots + P_r,$$

gdje su $P_j \in K^j[X_1, \ldots, X_q, T]$ za $j = 0, 1, \ldots, r$.

Za nastavak dokaza treba nam sljedeća elementarna lema:

Lema 2.2.21. *Neka je K beskonačno polje i neka je $P \in K[X_1, \ldots, X_n] \setminus \{0\}$. Tada postoje $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K$ takvi da je $P(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \neq 0$. Drugim riječima, preslikavanje koje polinomu $P \in K[X_1, \ldots, X_n]$ pridružuje polinomijalnu funkciju $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \mapsto P(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ je izomorfizam sa $K[X_1, \ldots, X_n]$ na $K[K^n]$.*

Dokaz provodimo indukcijom po n. Ako je $n = 1$, tvrdnja je trivijalna jer broj nultočaka polinoma $P \in K[X_1]$ u polju nije veći od deg P, pa zbog beskonačnosti polja K nisu sve točke iz K nultočke od P. Pretpostavimo sada da je $n \geq 2$ i da je tvrdnja dokazana za polinome s $n - 1$ varijabli. Nadalje, pretpostavimo da je $P(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = 0 \ \forall (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in K^n$. Možemo pisati

$$P = \sum_{j=0}^{m} Q_j X_n^j \qquad \text{gdje su} \quad Q_0, \ldots, Q_m \in K[X_1, \ldots, X_{n-1}].$$

Za bilo koju $(n-1)-$torku $\alpha' = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}) \in K^{n-1}$ definiramo polinom $P_{\alpha'} \in K[X]$ sa

$$P_{\alpha'} = \sum_{j=0}^{m} Q_j(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}) X^j.$$

Po pretpostavci je tada $P_{\alpha'}(\alpha) = 0 \ \forall \alpha \in K$ pa prema bazi indukcije slijedi da je $P_{\alpha'}$ nul$-$polinom. To znači da je $Q_j(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}) = 0$ za $j = 0, \ldots, m$, a kako je $(n-1)-$tporna $\alpha' = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}) \in K^{n-1}$ bila proizvoljna, po pretpostavci indukcije zaključujem da su svi Q_j nul$-$polinomi. Dakle, P je nul$-$polinom.

Nastavimo sada dokaz teorema 2.2.20. Prema lemi 2.2.21. postoje $\mu_1, \ldots, \mu_q, \mu \in K$ takvi da je $P_r(\mu_1, \ldots, \mu_q, \mu) \neq 0$. Kako je P_r homogen polinom, možemo pretpostaviti da je $\mu \neq 0$. Sada je

$$P_r(\mu_1, \ldots, \mu_q, \mu) = \mu^r P_r(\lambda_1, \ldots, \lambda_q, 1) \qquad \text{za} \quad \lambda_1 = \frac{\mu_1}{\mu}, \ldots, \lambda_q = \frac{\mu_q}{\mu}.$$

Prema tome, postoje $\lambda_1, \ldots, \lambda_q \in K$ takvi da je

$$c = P_r(\lambda_1, \ldots, \lambda_q, 1) \neq 0.$$

Za takav izbor $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_q) \in K^q$ imamo

$$P_r(X_1 + \lambda_1 T, \ldots, X_q + \lambda_q T, T) = cT^r + \sum_{k=1}^{r} B_k^{\lambda}(X_1, \ldots, X_q) T^{r-k}$$

za neke polinome $B_1^{\lambda}, \ldots, B_r^{\lambda} \in K[X_1, \ldots, X_q]$. Prema tome, imamo

$$P(X_1+\lambda_1 T, \ldots, X_q+\lambda_q T, T) = cT^r + \sum_{k=1}^{r} B_k^{\lambda}(X_1, \ldots, X_q) T^{r-k} + \sum_{j=0}^{r-1} P_j(X_1+\lambda_1, T, \ldots, X_q+\lambda_q T, T).$$

Uvrstimo li u tu jednakost $z_j = y_j - \lambda_j y_m$ na mjesto varijable X_j za $j = 1, \ldots, q$ i y_m na mjesto varijable T, nalazimo

$$0 = P(y_1, \ldots, y_q, y_m) = c y_m^r + \sum_{k=1}^{r} B_k^{\lambda}(z_1, \ldots, z_q) y_m^{r-k} + \sum_{j=0}^{r-1} P_j(z_1 + \lambda_1 y_m, \ldots, z_q + \lambda_q y_m, y_m).$$

Budući da su polinomi P_j homogeni stupnja j, odatle slijedi jednakost oblika

$$cy_m^r + \sum_{j=1}^{r} c_j y_m^{r-j} = 0 \qquad \text{za neke} \quad c_1, \dots, c_r \in \mathcal{B} = K[z_1, \dots, z_q].$$

Kako je $c \in K$ i $c \neq 0$, odatle se vidi da je element y_m integralan nad prstenom $\mathcal{B} = K[z_1, \dots, z_q]$.

Uočimo sada da elementi $z_1, \dots, z_q, y_{q+1}, \dots, y_m$ generiraju algebru $\mathcal{A}$. Dokazali smo da je element y_m integralan nad prstenom $\mathcal{B} = K[z_1, \dots, z_q]$, pa je y_m integralan i nad prstenom $\mathcal{C} = K[z_1, \dots, z_q, y_{q+1}, \dots, y_{m-1}]$. Dakle, prsten $\mathcal{A} = \mathcal{C}[y_m]$ je integralan nad prstenom $\mathcal{C}$. Međutim, algebra $\mathcal{C}$ generirana je sa $m-1$ generatora pa je po pretpostavci indukcije prsten $\mathcal{C}$ integralan nad prstenom $K[x_1, \dots, x_n]$ za neke algebarski nezavisne elemente $x_1, \dots, x_n \in \mathcal{C} \subseteq \mathcal{A}$. No tada je prema korolaru 2.2.7. prsten $\mathcal{A}$ integralan nad prstenom $K[x_1, \dots, x_n]$.

Napokon, neka je L polje razlomaka integralne domene $\mathcal{A}$. Tada je L proširenje polja K. Elementi $x_1, \dots, x_n$ su algebarski nezavisni nad K. Iz činjenice da je prsten $\mathcal{A}$ integralan nad $K[x_1, \dots, x_n]$ neposredno slijedi da su svi elementi polja L algebarski nad poljem $K(x_1, \dots, x_n)$. To znači da je $\{x_1, \dots, x_n\}$ baza transcendentnosti proširenja L polja K, dakle, n je stupanj transcendentnosti L nad K.

Algebarski nezavisan konačan podskup $\{x_1, \dots, x_n\}$ konačno generirane integralne domene $\mathcal{A}$, takav da je prsten $\mathcal{A}$ integralan nad svojim polinomijalnim potprstenom $K[x_1, \dots, x_n]$ zove se **sistem parametara** za algebru $\mathcal{A}$. Sistem parametara, naravno, nije jedinstven. Npr. ako je $\{x_1, \dots, x_n\}$ sistem parametara za $\mathcal{A}$ onda je za proizvoljne prirodne brojeve $k_1, \dots, k_n$ i $\{x_1^{k_1}, \dots, x_n^{k_n}\}$ sistem parametara za $\mathcal{A}$. No, prema Noetherinoj lemi o normalizaciji jedinstveno je određen broj parametara: taj je broj jednak stupnju transcendentnosti polja razlomaka L od $\mathcal{A}$ nad poljem K. Svojstvo slobodnosti od $\mathcal{A}$ kao modula nad $K[x_1, \dots, x_n]$ također ne ovisi o izboru sistema parametara:

Zadatak 2.2.6. *Neka su $\{x_1, \dots, x_n\}$ i $\{y_1, \dots, y_n\}$ sistemi parametara za konačno generiranu integralnu domenu $\mathcal{A}$. Pretpostavimo da je $\mathcal{A}$ slobodan $K[x_1, \dots, x_n]-$modul. Dokažite da je tada $\mathcal{A}$ slobodan $K[y_1, \dots, y_n]-$modul.*

Za komutativnu unitalnu algebru $\mathcal{A}$ nad poljem K kažemo da je **Cohen−Macauleyeva algebra**, ako postoje algebarski nezavisni elementi $x_1, \dots, x_n \in \mathcal{A}$ takvi da je $\mathcal{A}$ kao modul nad polinomijalnom podalgebrom $K[x_1, \dots, x_n]$ slobodan i konačnog ranga. Drugim riječima, postoje $\alpha_1, \dots, \alpha_s \in \mathcal{A}$ takvi da je

$$(f_1, \dots, f_s) \longmapsto \sum_{j=1}^{s} f_j \alpha_j$$

izomorfizam prostora $K[x_1, \dots, x_n]^s$ na prostor $\mathcal{A}$. Primijetimo da je tada nužno algebra $\mathcal{A}$ konačno generirana. Cohen−Macauleyevo svojstvo proučit ćemo kasnije detaljnije u slučaju graduiranih algebri. Osnovni rezultat u vezi s polinomijalnim invarijantama konačnih grupa je sljedeći teorem (koji ćemo također kasnije razraditi preciznije):

Teorem 2.2.22. (**Hochster−Eagan**) *Ako je V konačnodimenzionalan vektorski prostor nad poljem K karakteristike* 0, *i ako je G konačna podgrupa od* $\mathrm{GL}(V)$, *onda je $\mathcal{P}(V)^G$ Cohen−Macauleyeva algebra.*

Dokaz: Prema Noetherinoj lemi o normalizaciji (teorem 2.2.20.) postoje algebarski nezavisni elementi $x_1, \dots, x_n \in \mathcal{P}(V)^G$ takvi da je prsten $\mathcal{P}(V)^G$ integralan nad $K[x_1, \dots, x_n]$, a kako je prema Hilbertovom teoremu 2.2.1. $\mathcal{P}(V)^G$ konačno generirana algebra, $\mathcal{P}(V)^G$ je konačno generiran kao $K[x_1, \dots, x_n]-$modul. Sada tvrdnja slijedi iz sljedeće leme:

Lema 2.2.23. *Neka su $x_1, \ldots, x_n \in \mathcal{P}(V)^G$ algebarski nezavisni i takvi da je $\mathcal{P}(V)^G$ konačno generiran kao $K[x_1, \ldots, x_n]-$modul. Tada je $\mathcal{P}(V)^G$ slobodan $K[x_1, \ldots, x_n]-$modul.*

Dokaz: Dokazat ćemo najprije da je $\mathcal{P}(V)$ slobodan $K[x_1, \ldots, x_n]-$modul. Prije svega, po korolaru 2.2.12. $\mathcal{P}(V)$ je konačno generiran kao $\mathcal{P}(V)^G-$modul. Slijedi da je $\mathcal{P}(V)$ konačno generiran kao $K[x_1, \ldots, x_n]-$modul. Nadalje, kako je prsten $\mathcal{P}(V)^G$ integralan nad $K[x_1, \ldots, x_n]$, a prema teoremu 2.2.11. prsten $\mathcal{P}(V)$ je integralan nad $\mathcal{P}(V)^G$, zaključujemo da je prsten $\mathcal{P}(V)$ integralan nad $K[x_1, \ldots, x_n]$. Prema tome, $\{x_1, \ldots, x_n\}$ je sistem parametara ne samo za algebru $\mathcal{P}(V)^G$, nego i za algebru $\mathcal{P}(V)$. Međutim, ako je $\{f_1, \ldots, f_n\}$ baza prostora V^*, onda je $\mathcal{P}(V) = K[f_1, \ldots, f_n]$, dakle, i $\{f_1, \ldots, f_n\}$ je sistem parametara za prsten $\mathcal{P}(V)$. Kako je $\mathcal{P}(V) = K[f_1, \ldots, f_n]$, očito je $\mathcal{P}(V)$ slobodan kao $K[f_1, \ldots, f_n]-$modul (ranga 1). Sada iz zadatka 2.2.6. slijedi da je $\mathcal{P}(V)$ slobodan $K[x_1, \ldots, x_n]-$modul.

Iskoristimo sada usrednjenje $R : \mathcal{P}(V) \to \mathcal{P}(V)$ definirano sa

$$R(f) = \frac{1}{|G|} \sum_{\sigma \in G} \sigma(f), \qquad f \in \mathcal{P}(V).$$

To je projektor sa $\mathcal{P}(V)$ na $\mathcal{P}(V)^G$ koji je prema dokazu Hilbertovog teorema 2.2.1. homomorfizam $\mathcal{P}(V)^G-$modula. Zbog toga je $\operatorname{Ker} R$ $\mathcal{P}(V)^G-$podmodul od $\mathcal{P}(V)$ i vrijedi $\mathcal{P}(V) = \mathcal{P}(V)^G \dotplus \operatorname{Ker} R$. Kako je $K[x_1, \ldots, x_n] \subseteq \mathcal{P}(V)^G$, to je ujedno direktni rastav $K[x_1, \ldots, x_n]-$modula. Kako je $\mathcal{P}(V)$ slobodan $K[x_1, \ldots, x_n]-$modul, a $\mathcal{P}(V)^G$ je njegov direktni sumand, prema teoremu 2.2.17. $\mathcal{P}(V)^G$ je projektivan $K[x_1, \ldots, x_n]-$modul. No sada tvrdnja leme slijedi iz propozicije 2.2.18.

2.3 Molienov teorem i pseudorefleksije

Za **graduirani vektorski prostor** M s graduacijom $(M_i)_{i\in\mathbb{Z}_+}$ kažemo da je **konačnog tipa** ako su svi potprostori M^i konačnodimenzionalni. U tom slučaju definiramo njegov **Poincaréov red** $P_M(t)\in\mathbb{Z}[[t]]$ sa

$$P_M(t)=\sum_{i\in\mathbb{Z}_+}\left(\dim M^i\right)t^i.$$

Zadatak 2.3.1. *Neka su M, M' i M'' graduirani vektorski prostori.*

(*a*) *Neka je*

$$\{0\}\longrightarrow M'\longrightarrow M\longrightarrow M''\longrightarrow\{0\}$$

egzaktni niz graduiranih modula. Dokažite da je M konačnog tipa ako i samo ako su M' i M'' konačnog tipa i da je tada $P_M(t)=P_{M'}(t)+P_{M''}(t)$.

(*b*) *Neka su M' i M'' konačnog tipa i neka je $M=M'\otimes M''$ (tenzorski produkt graduiranih vektorskih prostora). Dokažite da je M konačnog tipa i da je $P_M(t)=P_{M'}(t)P_{M''}(t)$.*

Zadatak 2.3.2. *Neka je*

$$\{0\}\longrightarrow M_1\longrightarrow M_2\longrightarrow\cdots\longrightarrow M_n\longrightarrow\{0\}$$

egzaktan niz u kategoriji graduiranih vektorskih prostora konačnog tipa. Dokažite da je tada

$$\sum_{j=1}^{n}(-1)^jP_{M_j}(t)=0.$$

Uputa: U dokazu koristite indukciju po $n\in\mathbb{N}$. Za korak indukcije i $n\geq 4$ rastavite zadani egzaktni niz u dva egzaktna niza

$$\{0\}\longrightarrow M_1\longrightarrow M_2\longrightarrow M\longrightarrow\{0\}\qquad\text{i}\qquad\{0\}\longrightarrow M\longrightarrow M_3\longrightarrow\cdots\longrightarrow M_n\longrightarrow\{0\}$$

gdje je $M\subseteq M_3$ slika homomorfizma $M_2\to M_3$ iz zadanog egzaktnog niza.

Neka je M graduiran vektorski prostor konačnog tipa s graduacijom $(M^n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$. Za $k\in\mathbb{Z}_+$ definiramo graduiran vektorski prostor $M[k]$ kome je graduacija zadana sa $M[k]^n=\{0\}$ za $n<k$ i $M[k]^n=M_{n-k}$ za $n\geq k$. Tada je

$$P_{M[k]}(t)=\sum_{n\in\mathbb{Z}_+}(\dim M[k]^n)\,t^n=\sum_{n\geq k}\left(\dim M^{n-k}\right)t^n=\sum_{n\in\mathbb{Z}_+}(\dim M^n)\,t^{n+k}=t^kP_M(t).$$

Pretpostavimo sada da je $\mathcal{A}$ graduirana povezana komutativna algebra s graduacijom $(\mathcal{A}^n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ i da je $\mathcal{A}=K[x]$, pri čemu je $x\in\mathcal{A}^d$ algebarski nezavisan. Tada je $\mathcal{A}^n=\{0\}$ ako n nije djeljiv s d i $\mathcal{A}^{jd}=Kx^j$ za $j\in\mathbb{Z}_+$. Prema tome,

$$P_{\mathcal{A}}(t)=\sum_{j\in\mathbb{Z}_+}t^{jd}=\frac{1}{1-t^d}.$$

Općenitije, ako je $\mathcal{A}=K[x_1,\ldots,x_n]$, gdje su $x_i\in\mathcal{A}^{d_i}$ algebarski nezavisni i $d_1,\ldots,d_n\in\mathbb{N}$, onda je

$$\mathcal{A}\cong K[x_1]\otimes\cdots\otimes K[x_n],$$

pa iz tvrdnje (b) zadatka 2.3.1. i iz gornje formule slijedi

$$P_{\mathcal{A}}(t) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{1-t^{d_i}}.$$

To je racionalna funkcija koja u točki $t = 1$ ima pol reda n. Sljedeći **Hilbert−Serreov** teorem je generalizacija tog rezultata.

Teorem 2.3.1. *Neka je $\mathcal{A}$ graduirana povezana komutativna algebra nad poljem K generirana s homogenim elementima $x_i \in \mathcal{A}^{k_i}$, $i = 1, \dots, s$. Neka je M konačno generiran graduiran $\mathcal{A}$−modul. Tada vrijedi*

$$P_M(t) = \frac{f(t)}{(1-t^{k_1})\cdots(1-t^{k_s})},$$

pri čemu je $f(t) \in \mathbb{Z}[t]$.

Dokaz provodimo indukcijom po s. Ako je $s = 0$, onda je $\mathcal{A} = K$ i M je konačnodimenzionalan graduiran vektorski prostor nad K pa je očito $P_M(t) = f(t) \in \mathbb{Z}[t]$. Pretpostavimo da je $s > 0$ i da je teorem dokazan za algebre s manje od s homogenih generatora. Neka je $\varphi : M \to M$ homomorfizam $\mathcal{A}$−modula definiran djelovanjem elementa $x_s : \varphi(m) = x_s m$, $m \in M$. Tada je φ homomorfizam graduiranih $\mathcal{A}$−modula sa M u $M[k_s]$. Imamo egzaktan niz graduiranih $\mathcal{A}$−modula:

$$\{0\} \longrightarrow \operatorname{Ker}\varphi \longrightarrow M \xrightarrow{\varphi} M[k_s] \longrightarrow \operatorname{Coker}\varphi \longrightarrow \{0\}$$

Prema zadatku 2.3.2. vrijedi

$$-P_{\operatorname{Ker}\varphi}(t) + P_M(t) - P_{M[k_s]}(t) + P_{\operatorname{Coker}\varphi}(t) = 0.$$

Kao što smo vidjeli, vrijedi $P_{M[k_s]} = t^{k_s} P_M(t)$, pa iz gornje jednakosti slijedi

$$P_M(t) = \frac{P_{\operatorname{Ker}\varphi}(t) - P_{\operatorname{Coker}\varphi}(t)}{1-t^{k_s}}.$$

Sada tvrdnju teorema dobivamo iz pretpostavke indukcije budući da na modulima $\operatorname{Ker}\varphi$ i $\operatorname{Coker}\varphi = M/(\operatorname{Im}\varphi)$ množenje sa x_s daje nulu, dakle, to su konačno generirani graduirani moduli nad povezanom graduiranom podalgebrom $\mathcal{A}' = K[x_1, \dots, x_{s-1}]$ sa $s-1$ homogenih generatora.

Ako $P_M(t)$ u situaciji iz Hilbert−Serreovog teorema shvatimo kao funkciju kompleksne varijable, sljedeća propozicija pokazuje da red pola te funkcije u točki $t = 1$ možemo interpretirati kao polinomijalni red rasta dimenzija potprostora graduacije.

Propozicija 2.3.2. *Pretpostavimo da je*

$$P(t) = \frac{f(t)}{(1-t^{k_1})\cdots(1-t^{k_s})} = \sum_{n\in\mathbb{Z}_+} a_n t^n,$$

gdje su $f(t) \in \mathbb{Z}[t]$, $k_1, \dots, k_s \in \mathbb{N}$ i $a_n \in \mathbb{Z}_+$ za svaki $n \in \mathbb{Z}_+$. Neka je d red pola funkcije $P(t)$ u točki $t = 1$. Tada vrijedi:

(a) *Postoji $K > 0$ takav da vrijedi $a_n \leq K n^{d-1}$ za svaki $n \in \mathbb{N}$.*

(b) *Ne postoji $K > 0$ takav da vrijedi $a_n \leq K n^{d-2}$ za svaki $n \in \mathbb{N}$.*

Dokaz: Prije svega primijetimo da pretpostavke i tvrdnje ostaju neizmijenjene ako $P(t)$ zamijenimo sa $P(t)(1+t+\cdots+t^{k_j-1})$. Prema tome, bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $k_j = 1$ za svaki $j = 1, \ldots, s$. Dakle, ako još po potrebi skratimo s potencijom od $(1-t)$, možemo pretpostaviti da je

$$P(t) = \frac{f(t)}{(1-t)^d} \qquad \text{i} \qquad f(t) \in \mathbb{Z}[t], \quad f(1) \neq 0.$$

Neka je

$$f(t) = \alpha_m t^m + \cdots + \alpha_1 t + \alpha_0.$$

Tada razvojem $(1-t)^{-d}$ u red potencija nalazimo

$$a_n = \alpha_0 \binom{n+d-1}{d-1} + \alpha_1 \binom{n+d-2}{d-1} + \cdots + \alpha_m \binom{n-d-m-1}{d-1}.$$

Sada uvjet $f(1) \neq 0$ znači da je $\alpha_0 + \cdots + \alpha_m \neq 0$. Dakle, gornji izraz za a_n je polinom u varijabli n stupnja točno $d-1$.

U situaciji iz Hilbert–Serreovog teorema sa $d(M)$ označavamo red pola od $P_M(t)$ u točki $t = 1$.

Lema 2.3.3. *Neka je $\mathcal{A} \supseteq \mathcal{B}$ konačno proširenje povezanih komutativnih graduiranih algebri nad K od kojih je svaka generirana s konačno mnogo homogenih generatora pozitivnog stupnja. Tada je $d(\mathcal{A}) = d(\mathcal{B})$.*

Dokaz: $\mathcal{A}$ je konačno generirana kao $\mathcal{B}$–modul, dakle, izomorfna je kvocijentu konačno generiranog slobodnog graduiranog $\mathcal{B}$–modula M. Imamo tada $P_M(t) = f(t)P_{\mathcal{B}}(t)$ za neki polinom $f(t) \in \mathbb{Z}[t]$ sa $f(1) > 0$. Budući da je $\dim \mathcal{B}^n \leq \dim \mathcal{A}^n \leq \dim M^n$, tvrdnja slijedi iz propozicije 2.3.2.

Propozicija 2.3.4. *Neka je G konačna podgrupa grupe* $\mathrm{GL}(V)$, *gdje je V konačnodimenzionalan vektorski prostor nad poljem K karakteristike* 0. *Tada je* $d\left(\mathcal{P}(V)^G\right) = \dim V$.

Dokaz: Neka je $n = \dim V$. Prema teoremu 2.2.11. i lemi 2.3.3. imamo $d\left(\mathcal{P}(V)^G\right) = d(\mathcal{P}(V))$. Nadalje, imamo

$$P_{\mathcal{P}(V)}(t) = P_{K[X_1,\ldots,X_n]}(t) = \frac{1}{(1-t)^n}.$$

Dakle, $d\left(\mathcal{P}(V)^G\right) = d(\mathcal{P}(V)) = n = \dim V$.

Neka je i dalje G konačna podgrupa grupe $\mathrm{GL}(V)$, gdje je V konačnodimenzionalan vektorski prostor nad poljem K karakteristike 0. Tada znamo da je operator usrednjenja $R : \mathcal{P}(V) \to \mathcal{P}(V)$, zadan sa

$$Rf = \frac{1}{|G|} \sum_{\sigma \in G} \sigma(f), \qquad f \in \mathcal{P}(V),$$

projektor prostora $\mathcal{P}(V)$ na potprostor $\mathcal{P}(V)^G$ i za svaki $j \in \mathbb{Z}_+$ restrikcija $R|\mathcal{P}^j(V)$ je projektor prostora $\mathcal{P}^j(V)$ na potprostor $\mathcal{P}^j(V)^G$. Prema tome, vrijedi $\dim \mathcal{P}^j(V)^G = \mathrm{Tr}\, R|\mathcal{P}^j(V)$, dakle,

$$P_{\mathcal{P}(V)^G}(t) = \sum_{j \in \mathbb{Z}_+} \left(\mathrm{Tr}\, R|\mathcal{P}^j(V)\right) t^j = \frac{1}{|G|} \sum_{\sigma \in G} \sum_{j \in \mathbb{Z}_+} \left(\mathrm{Tr}\, \sigma|\mathcal{P}^j(V)\right) t^j. \tag{2.2}$$

Lema 2.3.5. *Za svaki $\sigma \in G$ vrijedi*

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}_+} \left(\operatorname{Tr}\sigma|\mathcal{P}^j(V)\right) t^j = \frac{1}{\det(I-\sigma^{-1}t)}.$$

U desnoj strani formule determinanta je dobro definirana uz identifikaciju $M_n(K)[t] = M_n(K[t])$.

Dokaz: Proširenje polja ne mijenja niti lijevu niti desnu strane gornje jednakosti, pa možemo pretpostaviti da je polje K algebarski zatvoreno. Tada je operator σ dijagonalizabilan. Neka je $n = \dim V$ i neka su $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ svojstvene vrijednosti od σ (svaka zapisana toliko puta kolika joj je kratnost). Tada su svojstvene vrijednosti kontragredijentnog operatora na V^* jednake $\lambda_1^{-1}, \ldots, \lambda_n^{-1}$, dakle, svojstvene vrijednosti od $\sigma|\mathcal{P}^j(V)$ su svi mogući produkti od j ne nužno različitih λ_i−ova, odnosno, svih produkata

$$\lambda^{-m} = \lambda_1^{-m_1}\cdots\lambda_n^{-m_n}, \qquad m = (m_1, \ldots, m_n) \in \mathbb{Z}_+^n, \quad |m| = m_1 + \cdots + m_n = j.$$

Prema tome,

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}_+} \left(\operatorname{Tr}\sigma|\mathcal{P}^j(V)\right) t^j = \sum_{j\in\mathbb{Z}_+}\sum_{m\in\mathbb{Z}_+,\,|m|=j} \lambda^{-m}t^j = \sum_{m\in\mathbb{Z}_+} \lambda^{-m}t^{|m|} =$$

$$= \prod_{i=1}^n \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}_+} \lambda_i^{-k}t^k\right) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{1-\lambda_i^{-1}t} = \frac{1}{\det(I-\sigma^{-1}t)}.$$

Sada iz formule (2.2) i iz leme 2.3.5. neposredno slijedi:

Teorem 2.3.6. (T. Molien, 1897.) *Neka je G konačna podgrupa grupe* $\mathrm{GL}(V)$, *gdje V konačnodimenzionalan vektorski prostor nad poljem K karakteristike* 0. *Tada je*

$$P_{\mathcal{P}(V)^G}(t) = \frac{1}{|G|}\sum_{\sigma\in G}\frac{1}{\det(1-\sigma t)}.$$

Korolar 2.3.7. (R.P. Stanley, 1979.) *Neka je G konačna podgrupa grupe* $\mathrm{SL}(V)$, *gdje je V konačnodimenzionalan vektorski prostor nad poljem K karakteristike* 0. *Tada je*

$$P_{\mathcal{P}(V)^G}\left(\frac{1}{t}\right) = (-1)^n t^n P_{\mathcal{P}(V)^G}(t).$$

Dokaz: Prema Molienovom teoremu dobivamo redom

$$P_{\mathcal{P}(V)^G}\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{1}{|G|}\sum_{\sigma\in G}\frac{1}{\det(I-\sigma^{-1}t^{-1})} = \frac{t^n}{|G|}\sum_{\sigma\in G}\frac{1}{\det(tI-\sigma^{-1})} =$$

$$= \frac{t^n}{|G|}\sum_{\sigma\in G}\frac{1}{\det(\sigma t-I)} = \frac{(-1)^n t^n}{|G|}\sum_{\sigma\in G}\frac{1}{\det(I-\sigma t)} = (-1)^n t^n P_{\mathcal{P}(V)^G}(t).$$

Neka je i dalje V konačnodimenzionalan vektorski prostor nad poljem K karakteristike 0. Operator $\sigma \in \mathrm{GL}(V)$ zove se **pseudorefleksija** ako je rang operatora $\sigma - I$ jednak 1 i operator σ je konačnog reda, tj. postoji $k \in \mathbb{N}$ takav da je $\sigma^k = I$. Tada je $\{1, \lambda_\sigma\}$ spektar od σ za neki $\lambda_\sigma \in K$, $\lambda_\sigma \neq 1$, koji je k−ti korijen iz jedinice, $\lambda_\sigma^k = 1$. Hiperploha $H_\sigma = \operatorname{Ker}(\sigma - I)$ zove se **refleksijska hiperploha pseudorefleksije** σ. Svojstven potprostor $R_\sigma = \{v \in V;\ \sigma v = \lambda_\sigma v\}$ je jednodimenzionalan i zove se **smjer pseudorefleksije** σ, također i **korijenski potprostor pseudorefleksije** σ. Svaki svojstveni vektor $e \in R_\sigma \setminus \{0\}$ zove se **korijenski vektor** ili **korijen**

pseudorefleksije σ. Naravno, vrijedi $V = H_\sigma \dot{+} R_\sigma$ i ako izaberemo bazu od V u skladu s tim rastavom, matrica od σ u toj bazi je

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_\sigma \end{bmatrix}$$

Pseudorefleksija σ reda 2, tj. $\sigma^2 = I$, ima $\lambda_\sigma = -1$ i zove se **refleksija** u odnosu na hiperplohu H_σ i u smjeru bilo kojeg korijena $e \in R_\sigma \setminus \{0\}$. Primijetimo da je u slučaju kad je K potpolje polja $\mathbb{R}$ realnih brojeva pseudorefleksija zapravo refleksija.

Zadatak 2.3.3. *Neka je σ pseudorefleksija na prostoru V i $T \in \mathrm{GL}(V)$. Dokažite da je $T\sigma T^{-1}$ pseudorefleksija i da vrijedi*

$$H_{T\sigma T^{-1}} = TH_\sigma, \qquad R_{T\sigma T^{-1}} = TR_\sigma \qquad i \qquad \lambda_{T\sigma T^{-1}} = \lambda_\sigma.$$

Za konačnu podgrupu G grupe $\mathrm{GL}(V)$ označimo sa $\mathcal{R}(G)$ skup svih pseudorefleksija u grupi G i sa $r(G) = |\mathcal{R}(G)|$ njihov broj. Nadalje, neka je

$$\mathcal{H}(G) = \{H_\sigma;\ \sigma \in \mathcal{R}(G)\}$$

skup svih refleksijskih hiperploha pseudorefleksija iz grupe G. Nadalje, za $H \in \mathcal{H}(G)$ stavimo

$$G_H = \{\sigma \in G;\ \sigma|H = I_H\} = \{\sigma \in \mathcal{R}(G);\ H_\sigma = H\} \cup \{I\}.$$

Lema 2.3.8. *G_H je ciklička grupa i preslikavanje*

$$\lambda : G_H \longrightarrow K^*, \qquad \sigma \mapsto \begin{cases} \lambda_\sigma & \text{ako je } \sigma \neq I \\ 1 & \text{ako je } \sigma = I \end{cases}$$

je monomorfizam grupa.

Dokaz: Očito je G_H podgrupa od G. Pisat ćemo $\lambda_I = 1$. Uz tu oznaku očito je $\lambda_\sigma = \det \sigma$ za svaki $\sigma \in G_H$. Odatle slijedi da je λ homomorfizam sa G_H u K^* koji je injektivan jer je $\lambda_\sigma \neq 1$ za $\sigma \neq I$. Napokon, kako je svaka konačna podgrupa multiplikativne grupe K^* ciklička, G_H je cilička grupa.

Lema 2.3.9. *Ako su $\sigma, \tau \in \mathcal{R}(G)$ takve da je $H_\sigma = H_\tau$, onda je $R_\sigma = R_\tau$.*

Dokaz: Neka je $H = H_\sigma = H_\tau$. Tada su $\sigma, \tau \in G_H$ i prema lemi 2.3.8. grupa G_H je ciklička. Ako je σ_H generator te cikličke grupe, onda su σ i τ potencije od σ_H pa slijedi $R_\sigma = R_{\sigma_H} = R_\tau$.

Neka je σ pseudorefleksija na prostoru V i neka e_σ neki njezih korijenski vektor. Tada možemo pisati

$$\sigma v = v + \ell_\sigma(v) e_\sigma, \qquad v \in V,$$

pri čemu je $\ell_\sigma \in V^*$ linearni funkcional takav da je $\mathrm{Ker}\, \ell_\sigma = H_\sigma$. Funkcional ℓ_σ ovisi samo o izboru korijena e_σ, dakle, određen je do na multipl iz K^*. Imamo $\ell_\sigma(e_\sigma) = \lambda_\sigma - 1 \neq 0$. Za $f \in \mathcal{P}(V)$ i $u \in H_\sigma$ imamo

$$(\sigma f - f)(u) = f(\sigma^{-1} u) - f(u) = f(u) - f(u) = 0.$$

Odatle slijedi da ℓ_σ dijeli polinom $\sigma f - f$ u $\mathcal{P}(V)$. Označimo sa $\Delta_\sigma(f) \in \mathcal{P}(V)$ kvocijent tih dvaju polinoma, tj.

$$\sigma f - f = \Delta_\sigma(f)\ell_\sigma \qquad \text{u} \quad \mathcal{P}(V).$$

Dakle, $\deg \Delta_\sigma(f) = \deg f - 1$. Primijetimo da Δ_σ ovisi o izboru e_σ, odnosno o izboru ℓ_σ, dakle, određen je do na multipl iz K^*. Δ_σ se zove $\Delta-$**operator** ili **zakrenuta derivacija** pridružena pseudorefleksiji σ.

Zadatak 2.3.4. *Neka je σ pseudorefleksija na prostoru V i neka je S podgrupa od $\mathrm{GL}(V)$ generirana sa σ. Dokažite da je tada*

$$\mathcal{P}(V)^S = \{f \in \mathcal{P}(V);\ \Delta_\sigma(f) = 0\}.$$

Zadatak 2.3.5. *Neka je σ pseudorefleksija. Dokažite da je tada*

$$\sigma\ell_\sigma = \lambda_\sigma^{-1}\ell_\sigma \qquad i \qquad \Delta_\sigma(\ell_\sigma) = \lambda_\sigma^{-1} - 1.$$

Lema 2.3.10. *Neka su $\sigma, \tau \in \mathrm{GL}(V)$ pseudorefleksije. Tada je $\Delta_\sigma(\ell_\tau) = 0$ ako i samo ako je $H_\sigma \neq H_\tau$ i $H_\tau = H_{\sigma\tau\sigma^{-1}}$.*

Dokaz: Pretpostavimo da je $\Delta_\sigma(\ell_\tau) = 0$. Tada je $H_\sigma \neq H_\tau$. Doista, ako bi bilo $H_\sigma = H_\tau$, onda bismo imali $\ell_\tau = \alpha\ell_\sigma$ za neki $\alpha \in K^*$, pa bi prema zadatku 2.3.5. bilo

$$\Delta_\sigma(\ell_\tau) = \alpha\Delta_\sigma(\ell_\sigma) = \alpha(\lambda_\sigma^{-1} - 1) \neq 0.$$

Nadalje, $\Delta_\sigma(\ell_\tau) = 0$ znači da je $\sigma\ell_\tau = \ell_\tau$. Neka je $x \in H_\tau$. Tada je

$$0 = \ell_\tau(x) = (\sigma\ell_\tau)(x) = \ell_\tau(\sigma^{-1}x).$$

Dakle, $\sigma^{-1}x \in \operatorname{Ker}\ell_\tau = H_\tau$, pa pomoću zadatka 2.3.3. slijedi $x \in \sigma H_\tau = H_{\sigma\tau\sigma^{-1}}$. Time smo dokazali $H_\tau \subseteq H_{\sigma\tau\sigma^{-1}}$, a budući da su H_τ i $H_{\sigma\tau\sigma^{-1}}$ hiperplohe, zaključujemo da je $H_\tau = H_{\sigma\tau\sigma^{-1}}$.

Pretpostavimo sada da je $H_\sigma \neq H_\tau$ i $H_\tau = H_{\sigma\tau\sigma^{-1}} = \sigma H_\tau$. Neka je $x \in H_\tau \setminus H_\sigma$. Tada je $x \in \sigma H_\tau$, dakle, $\sigma^{-1}x \in H_\tau$. Prema tome,

$$\Delta_\sigma(\ell_\tau)\ell_\sigma(x) = (\sigma\ell_\tau)(x) - \ell_\tau(x) = \ell_\tau(\sigma^{-1}x) - \ell_\tau(x) = 0 - 0 = 0.$$

Međutim, $\lambda_\sigma(x) \neq 0$, jer $x \notin H_\sigma = \operatorname{Ker}\ell_\sigma$. Dakle, $\Delta_\tau(\ell_\tau) = 0$.

Propozicija 2.3.11. *Pretpostavimo da je G konačna podgrupa od $\mathrm{GL}(V)$ koja je generirana pseudorefleksijama. Tada polinom*

$$\mathcal{L} = \prod_{\sigma \in \mathcal{R}(G)} \ell_\sigma$$

ima svojstvo

$$\sigma\mathcal{L} = (\det \sigma^{-1})\mathcal{L} \qquad \forall \sigma \in G.$$

Dokaz: Za svaku hiperplohu $H \in \mathcal{H}(G)$ izaberimo generator σ_H cikličke grupe G_H. Tada elementi σ_H, $H \in \mathcal{H}(G)$, generiraju grupu G, pa je tvrdnju dovoljno dokazati za $\sigma = \sigma_H$. Svaka pseudorefleksija $\sigma \in \mathcal{R}(G)$ pripada jedinstvenoj podgrupi G_H, $H \in \mathcal{H}(G)$, dakle, možemo izabrati $\ell_\sigma = \ell_{\sigma_H}$ za takve σ i H. Tada imamo

$$\mathcal{L} = \prod_{\sigma \in \mathcal{R}(G)} \ell_\sigma = \prod_{H \in \mathcal{H}(G)} \ell_{\sigma_H}^{\mathrm{c}(H)-1}$$

uz oznaku $c(H) = |G_H|$. Neka je $H \in \mathcal{H}(G)$. Pseudorefleksija σ_H djeluje na skupu $\mathcal{H}(G)$ tako da permutira elemente od $\mathcal{H}(G) \setminus \{H\}$. Dakle, ako je $H' \in \mathcal{H}(G) \setminus \{H\}$, postoje $H'' \in \mathcal{H}(G) \setminus \{H\}$ i $\alpha' \in K^*$ takvi da je $\sigma_H(\ell_{H'}) = \alpha' \ell_{H''}$. Stavimo

$$\mathcal{L}' = \prod_{H' \neq H} \ell_{\sigma_{H'}}^{c(H')-1}.$$

Budući da su operatori $\sigma_{H'}$ i $\sigma_{H''}$ konjugirani, imamo $c(H') = c(H'')$. Prema tome, vrijedi

$$\sigma_H(\mathcal{L}') = \alpha \prod_{H'' \neq H} \ell_{\sigma_{H''}}^{c(H'')-1} = \alpha \mathcal{L}'$$

za neki $\alpha \in K^*$. Slijedi

$$(\alpha - 1)\mathcal{L}' = \sigma_H \mathcal{L}' - \mathcal{L}' = \Delta_{\sigma_H}(\mathcal{L}') \cdot \ell_{\sigma_H}.$$

Kad bi bilo $\alpha \neq 1$ iz te bi jednakosti slijedilo da je polinom $\mathcal{L}'$ djeljiv sa ℓ_{σ_H}. Međutim, linearni funkcionali $\ell_{\sigma_{H'}}$ i $\ell_{\sigma_{H''}}$ za $H', H'' \in \mathcal{H}(G)$, $H' \neq H''$, su relativno prosti jer imaju različite jezgre. Prema tome, polinom $\mathcal{L}'$ ne može biti djeljiv sa ℓ_{σ_H}. Na taj način dokazali smo da je $\alpha = 1$. Sada prema lemi 2.3.10. nalazimo

$$\sigma_H(\mathcal{L}) = \sigma_H\left(\ell_{\sigma_H}^{c(H)-1} \mathcal{L}'\right) = \sigma_H\left(\ell_{\sigma_H}^{c(H)-1}\right) \sigma_H\left(\mathcal{L}'\right) = \lambda_{\sigma_H}^{c(H)-1} \ell_{\sigma_H}^{c(H)-1} \mathcal{L}' = \left(\det \sigma_H\right)^{-1} \mathcal{L}.$$

Time je propozicija dokazana.

Propozicija 2.3.12. *Neka je G konačna podgrupa od $\mathrm{GL}(V)$, $\mathcal{R}(G)$ skup svih pseudorefleksija u grupi G i $r(G) = |\mathcal{R}(G)|$ njihov broj. Tada Laurentov red od $P_{\mathcal{P}(V)^G}(t)$ oko točke $t = 1$ ima oblik:*

$$P_{\mathcal{P}(V)^G}(t) = \frac{1}{|G|}\left[\frac{1}{(1-t)^n} + \frac{r(G)}{2(1-t)^{n-1}} + \cdots\right], \qquad n = \dim_K V.$$

Dokaz: Propoziciju ćemo dokazati razvojem članova $1/\det(I - \sigma t)$, $\sigma \in G$, iz Molienovog teorema u Laurentove redove oko točke $t = 1$. Za svaki $\sigma \in G$ imamo faktorizaciju

$$\det(I - \sigma t) = f(t)(1-t)^k, \qquad f(1) \neq 0, \qquad k = \dim_K V^\sigma, \qquad V^\sigma = \mathrm{Ker}\,(I - \sigma).$$

Dakle, imamo

$$P_{\mathcal{P}(V)^G}(t) = \frac{1}{|G|}\sum_{\sigma \in G} \frac{1}{\det(I - \sigma t)} = \frac{1}{|G|}\left[\frac{1}{(1-t)^n} + \sum_{\sigma \in \mathcal{R}(G)} \frac{1}{(1-t)^{n-1}(1-\lambda_\sigma t)} + \cdots\cdots\right] =$$

$$= \frac{1}{|G|}\left[\frac{1}{(1-t)^n} + \frac{\alpha}{(1-t)^{n-1}} + \cdots\cdots\right]$$

Pri tome je

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{R}(G)} \frac{1}{(1-t)^{n-1}(1-\lambda_\sigma t)} = \frac{\alpha}{(1-t)^{n-1}} + \frac{\beta}{(1-t)^{n-2}} + \cdots\cdots$$

Posljednju jednakost pomožimo sa $(1-t)^{n-1}$ i uvrstimo $t = 1$. Tako dobivamo

$$\alpha = \sum_{\sigma \in \mathcal{R}(G)} \frac{1}{1 - \lambda_\sigma}.$$

Međutim, σ je pseudorefleksija ako i samo ako je σ^{-1} pseudorefleksija. Dakle, imamo i

$$\alpha = \sum_{\sigma \in \mathcal{R}(G)} \frac{1}{1-\lambda_\sigma^{-1}}.$$

Zbrojimo li te dvije jednakosti dobivamo

$$2\alpha = \sum_{\sigma \in \mathcal{R}(G)} \left[\frac{1}{1-\lambda_\sigma} + \frac{1}{1-\lambda_\sigma^{-1}} \right] = r(G),$$

budući da je

$$\frac{1}{1-\gamma} + \frac{1}{1-\gamma^{-1}} = 1 \qquad \forall \gamma \in K^* \setminus \{1\}.$$

Time je propozicija dokazana.

Teorem 2.3.13. *Neka je G konačna podgrupa grupe* $\mathrm{GL}(V)$ *i pretpostavimo da postoje homogeni algebarski nezavisni elementi $x_1, \ldots, x_n \in \mathcal{P}(V)^G$ takvi da je $\mathcal{P}(V)^G = K[x_1, \ldots, x_n]$. Stavimo $d_i = \deg\, x_i$, $i = 1, \ldots, n$. Tada vrijedi:*

(*a*) $|G| = d_1 \cdots d_n$.

(*b*) $r(G) = (d_1 - 1) + \cdots + (d_n - 1)$.

Dokaz: (*a*) Imamo $K[x_1, \ldots, x_n] \cong K[x_1] \otimes \cdots \otimes K[x_n]$, dakle,

$$P_{\mathcal{P}(V)^G} = \frac{1}{\prod_{i=1}^n (1-t^{d_i})} = \frac{1}{(1-t)^n \prod_{i=1}^n (1+t+\cdots+t^{d_i-1})}.$$

S druge strane, prema propoziciji 2.3.12. imamo Laurentov razvoj oko točke $t = 1$:

$$P_{\mathcal{P}(V)^G}(t) = \frac{1}{|G|} \left[\frac{1}{(1-t)^n} + \frac{C_{n-1}}{(1-t)^{n-1}} + \frac{C_{n-2}}{(1-t)^{n-2}} + \cdots\cdots \right],$$

gdje je $C_{n-1} = r(G)/2$. Ako ta dva izraza izjednačimo i pomnožimo sa $(1-t)^n$, dobivamo

$$\frac{1}{\prod (1+t+\cdots+t^{d_i-1})} = \frac{1}{|G|} \left[1 + C_{n-1}(1-t) + C_{n-2}(1-t)^2 + \cdots\cdots \right], \tag{2.3}$$

odnosno,

$$|G| = \left[1 + C_{n-1}(1-t) + C_{n-2}(1-t)^2 + \cdots\cdots \right] \prod_{i=1}^n (1+t+\cdots+t^{d_i-1}).$$

Uvrstimo li $t = 1$ dobivamo traženu jednakost.

(*b*) Deriviramo li obje strane (2.3) po t dobivamo jednakost

$$\frac{1}{\prod_{i=1}^n (1+t+\cdots+t^{d_i-1})} \left[-\sum_{i=1}^n \frac{1+2t+\cdots+(d_i-1)t^{d_i-2}}{1+t+\cdots+t^{d_i-1}} \right] = \frac{1}{|G|} \left[-C_{n-1} - 2C_{n-2}(1-t) - \cdots\cdots \right].$$

Uvrstimo li ovdje $t = 1$ nalazimo zbog jednakosti (*a*)

$$\frac{1}{|G|} C_{n-1} = \frac{1}{d_1 \cdots d_n} \left[\sum_{i=1}^n \frac{d_i(d_i-1)}{2d_i} \right] = \frac{1}{|G|} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (d_i - 1).$$

Budući da je $C_{n-1} = r(G)/2$, tvrdnja slijedi.

Teorem 2.3.14. *Neka je G konačna podgrupa grupe $\mathrm{GL}(V)$ i $n = \dim V$. Pretpostavimo da su $x_1, \ldots, x_n \in \mathcal{P}(V)^G$ algebarski nezavisni homogeni elementi pozitivnih stupnjeva $d_i = \deg x_i$, $i = 1, \ldots, n$.*

(*a*) *Produkt $d_1 \cdots d_n$ je djeljiv sa $|G|$.*

(*b*) *Vrijedi $\mathcal{P}(V)^G = K[x_1, \ldots, x_n]$ ako i samo ako je $|G| = d_1 \cdots d_n$.*

Dokaz: Tada je $\{x_1, \ldots, x_n\}$ sistem parametara za algebru $\mathcal{P}(V)^G$ i, posebno, prsten $\mathcal{P}(V)^G$ je konačno proširenje prstena $K[x_1, \ldots, x_n]$. Prema lemi 2.2.23. tada je $\mathcal{P}(V)^G$ slobodan kao modul nad $K[x_1, \ldots, x_n]$, naravno, konačnog ranga. Budući da je podalgebra $K[x_1, \ldots, x_n]$ graduirana, postoje homogeni elementi $a_1, \ldots, a_s \in \mathcal{P}(V)^G$ takvi da je

$$\mathcal{P}(V)^G = \sum_{j=1}^{s} \dot{+}\, K[x_1, \ldots, x_n] a_j.$$

Stavimo $e_j = \deg a_j$, $j = 1, \ldots, s$. Tada iz gornje jednakosti slijedi

$$P_{\mathcal{P}(V)^G}(t) = \frac{t^{e_1} + \cdots + t^{e_s}}{\prod_{i=1}^n (1 - t^{d_i})}.$$

Ostatak dokaza analogan je dokazu tvrdnje (a) u teoremu 2.3.13. U ovom slučaju imamo

$$\frac{t^{e_1} + \cdots + t^{e_s}}{\prod_{i=1}^n (1 - t^{d_i})} = \frac{1}{|G|}\left[\frac{1}{(1-t)^n} + \frac{C_{n-1}}{(1-t)^{n-1}} + \frac{C_{n-2}}{(1-t)^{n-2}} + \cdots\cdots\right]$$

pa množenjem sa $|G| \cdot \prod_{i=1}^n (1 - t^{d_i})$ slijedi

$$|G|\left(t^{e_1} + \cdots + t^{e_s}\right) = \left[1 + C_{n-1}(1-t) + C_{n-2}(1-t)^2 + \cdots\cdots\right] \cdot \prod_{i=1}^{n} \left(1 + t + \cdots + t^{d_i - 1}\right).$$

Uvrštavanjem $t = 1$ dobivamo

$$s|G| = d_1 \cdots d_n.$$

Iz te jednakosti slijede obje tvrdnje teorema.

2.4 Algebra kovarijanata

Za podgrupu G grupe $\mathrm{GL}(V)$ **algebra kovarijanata** je kvocijentna algebra $\mathcal{P}(V)/\left(\mathcal{P}_+(V)^G\mathcal{P}(V)\right)$. U ovom ćemo odjeljku za konačnu grupu G ustanoviti vrlo netrivijalnu vezu između strukture algebre kovarijanata i strukture $\mathcal{P}(V)^G-$modula $\mathcal{P}(V)$. Dokazat ćemo:

Teorem 2.4.1. *Vrijedi* $\dim \mathcal{P}(V)/\left(\mathcal{P}_+(V)^G\mathcal{P}(V)\right) \geq |G|$ *uz jednakost ako i samo ako je* $\mathcal{P}(V)$ *slobodan* $\mathcal{P}(V)^G-$*modul.*

Dokažimo najprije lemu:

Lema 2.4.2. *Neka je* $\{\overline{e}_1,\ldots,\overline{e}_m\}$ *baza vektorskog prostora* $\mathcal{P}(V)/\left(\mathcal{P}_+(V)^G\mathcal{P}(V)\right)$ *sastavljena od homogenih elemenata i neka su* $e_1,\ldots,e_m \in \mathcal{P}(V)$ *njihovi homogeni predstavnici. Tada* $e_1,\ldots,e_m$ *generiraju* $\mathcal{P}(V)$ *kao* $\mathcal{P}(V)^G-$*modul, tj.*

$$\mathcal{P}(V) = \sum_{q=1}^{m} \mathcal{P}(V)^G e_q.$$

Dokaz: Označimo sa $\mathcal{A}$ desnu stranu. Indukcijom po stupnju k dokazat ćemo da je svaki $\mathcal{P}^k(V)$ sadržan u $\mathcal{A}$. Neka je $a \mapsto \overline{a}$ kvocijentni epimorfizam sa $\mathcal{P}(V)$ na algebru kovarijanata. Prije svega, neki e_q je nužno stupnja 0, tj. iz K^*. Stoga je jasno da je $\mathcal{P}^0(V) = \mathcal{P}_0(V) = K$ sadržano u $\mathcal{A}$. Pretpostavimo da je $k \in \mathbb{N}$ i da je dokazano da je $\mathcal{P}_{k-1}(V) \subseteq \mathcal{A}$. Neka je $f \in \mathcal{P}^k(V)$. Tada možemo pisati

$$f = \sum_{q=1}^{m} \lambda_q e_q + d, \qquad \text{gdje su} \quad \lambda_q \in K \quad \text{i} \quad d \in \left(\mathcal{P}_+(V)^G\mathcal{P}(V)\right)^k.$$

Sada je

$$d = \sum_{j=1}^{k} c_{k-j} d_j, \qquad c_i \in \mathcal{P}^i(V), \quad d_j \in \mathcal{P}^j(V)^G.$$

Po pretpostavci indukcije su $c_0,\ldots,c_{k-1} \in \mathcal{A}$, pa iz gornje jednakosti slijedi da je i $d \in \mathcal{A}$. Time je lema dokazana.

Za $f(t), g(t) \in \mathbb{Z}[[t]]$ pisat ćemo $f(t) \leq g(t)$ ako je

$$f(t) = \sum_{j\in\mathbb{Z}_+} f_j t^j, \qquad g(t) = \sum_{j\in\mathbb{Z}_+} g_j t^j \qquad \text{i} \qquad f_j \leq g_j \quad \forall j \in \mathbb{Z}_+.$$

Ukoliko su $f(t)$ i $g(t)$ polinomi, onda su dobro definirani $f(1)$ i $g(1)$. Nadalje, ako su im svi koeficijenti iz $\mathbb{Z}_+$ onda iz $f(t) \leq g(t)$ slijedi $f(1) \leq g(1)$. Nadalje, u tom je slučaju $f(t) = g(t)$ ako i samo ako je $f(1) = g(1)$.

Primijetimo još da iz $f(t) \leq g(t)$ slijedi $f(t)h(t) \leq g(t)h(t)$ ako je $h(t) \in \mathbb{Z}[[t]]$ formalni red potencija čiji su svi koeficijenti u $\mathbb{Z}_+$.

Dokaz teorema 2.4.1.: Prema teoremu 2.3.1. imamo

$$P_{\mathcal{P}(V)^G}(t) = \frac{f(t)}{\prod_{i=1}^{n}(1-t^{d_i})} \tag{2.4}$$

za neke $d_1,\ldots,d_n \in \mathbb{N}$ i za neki polinom $f(t) \in \mathbb{Z}[t]$. Uz oznake iz prethodne leme imamo

$$\mathcal{P}(V) = \sum_{q=1}^{m} \mathcal{P}(V)^G e_q$$

za homogene elemente $e_1, \ldots, e_m \in \mathcal{P}(V)$ takve da je $\{\overline{e}_1, \ldots, \overline{e}_m\}$ baza vektorskog prostora $\mathcal{P}(V)/\left(\mathcal{P}_+(V)^G\mathcal{P}(V)\right)$. Neka je $P(t)$ Poincaréov red (u stvari, polinom) od $\mathcal{P}(V)/\left(\mathcal{P}_+(V)^G\mathcal{P}(V)\right)$. $P(t)$ ima koeficijente u $\mathbb{Z}_+$: koeficijent od t^j jednak je broju indeksa $q \in \{1, \ldots, m\}$ takvih da je $\deg\, e_q = j$. Stoga dobivamo nejednakost formalnih redova potencija

$$\frac{1}{(1-t)^n} = P_{\mathcal{P}(V)}(t) \leq P_{\mathcal{P}(V)^G}(t)P(t)$$

uz jednakost ako i samo ako je $\mathcal{P}(V)$ slobodan kao $\mathcal{P}(V)^G-$modul. Odatle i iz (2.4) množenjem s polinomom $\prod_{i=1}^n(1+t+\cdots+t^{d_i-1})$ (koji ima koeficijente u $\mathbb{Z}_+$) i kraćenjem sa $(1-t)^n$ dobivamo

$$\prod_{i=1}^n(1+t+\cdots+t^{d_i-1}) \leq f(t)P(t),$$

s tim da vrijedi znak jednakosti ako i samo ako je $\mathcal{P}(V)$ slobodan $\mathcal{P}(V)^G-$modul. Uvrstimo li u tu nejednakost $t=1$, slijedi

$$d_1 \cdots d_n \leq f(1)P(1). \tag{2.5}$$

Kako se radi o polinomima, u (2.5) vrijedi znak jednakosti ako i samo ako je $\mathcal{P}(V)$ slobodan $\mathcal{P}(V)^G-$modul.

Imamo $P(1) = \dim\, \mathcal{P}(V)/\left(\mathcal{P}_+(V)^G\mathcal{P}(V)\right)$. Stavimo li $f(1)=s$, kao u dokazu teorema 2.3.14. nalazimo da je $d_1 \cdots d_n = s|G|$. Uvrstimo li to dvoje u (2.5), dobivamo

$$s|G| \leq s\left(\dim\, \mathcal{P}(V)/\left(\mathcal{P}_+(V)^G\mathcal{P}(V)\right)\right)$$

uz jednakost ako i samo ako je $\mathcal{P}(V)$ slobodan $\mathcal{P}(V)^G-$modul. Budući da je $s>0$, teorem je dokazan.

2.5 Pseudorefleksijske grupe

Pseudorefleksijska grupa je konačna podgrupa G grupe $\mathrm{GL}(V)$ koja je generirana pseudorefleksijama. Ukoliko su sve pseudorefleksije u G refleksije upotrebljavamo naziv **refleksijska grupa**. Kao i prije sa $\mathcal{R}(G)$ označavamo skup svih pseudorefleksija u grupi G a sa $r(G) = |\mathcal{R}(G)|$ njihov broj. Glavni rezultat koji želimo dokazati u ovom odjeljku je

Teorem 2.5.1. (**Chevalley−Shephard−Todd**) *Neka je V konačnodimenzionalan vektorski prostor nad poljem K karakteristike 0. Neka je G konačna podgrupa grupe $\mathrm{GL}(V)$. Sljedeća su tri svojstva međusobno ekvivalentna:*

(*a*) *G je pseudorefleksijska grupa.*

(*b*) *Postoje homogeni algebarski nezavisni elementi $x_1, \dots, x_n \in \mathcal{P}(V)^G$ takvi da vrijedi $\mathcal{P}(V)^G = K[x_1, \dots, x_n]$.*

(*c*) *$\mathcal{P}(V)$ je slobodan $\mathcal{P}(V)^G$−modul.*

U tom slučaju znamo da je n stupanj transcendentnosti polja razlomaka od $\mathcal{P}(V)^G$ i od $\mathcal{P}(V)$, dakle, $n = \dim V$. Prirodni brojevi $d_i = \deg x_i$, $i = 1, \dots, n$, zovu se **stupnjevi pseudorefleksijske grupe** G, a $m_i = d_i - 1$, $i = 1, \dots, n$, **eksponenti pseudorefleksijske grupe** G. Homogeni generatori $x_1, \dots, x_n$ nisu jedinstveni ali stupnjevi $d_1, \dots, d_n$ jesu (do na poredak).

Uočimo da prema teoremu 2.3.13. vrijedi:

Korolar 2.5.2. *Ukoliko je G pseudorefleksijska grupa i $d_1, \dots, d_n$ njezini stupnjevi, vrijedi*

(*a*) $|G| = d_1 \cdots d_n$.

(*b*) $r(G) = (d_1 - 1) + \cdots + (d_n - 1)$.

Dokaz teorema 2.5.1. provest ćemo pomoću niza lema.

Prije svega, sjetimo se da smo za svaku pseudorefleksiju $\sigma : V \to V$ definirali pripadnu zakrenutu derivaciju $\Delta_\sigma : \mathcal{P}(V) \to \mathcal{P}(V)$ zahtjevom

$$\sigma f - f = \Delta_\sigma(f)\ell_\sigma \qquad \forall f \in \mathcal{P}(V).$$

Pri tome je ℓ_σ linearan funkcional na V čija je jezgra refleksijska hiperploha H_σ pseudorefleksije σ. Prema zadatku 2.3.5. vrijedi

$$\sigma\ell_\sigma = \lambda_\sigma^{-1}\ell_\sigma \qquad \text{i} \qquad \Delta_\sigma(\ell_\sigma) = \lambda_\sigma^{-1} - 1.$$

Ako je S podgrupa od $\mathrm{GL}(V)$ generirana pseudorefleksijom σ, onda prema zadatku 2.3.4. vrijedi

$$\mathcal{P}(V)^S = \{f \in \mathcal{P}(V);\ \Delta_\sigma(f) = 0\}.$$

Odatle neposredno slijedi:

Propozicija 2.5.3. *Za pseudorefleksijsku grupu G vrijedi*

$$\mathcal{P}(V)^G = \{f \in \mathcal{P}(V);\ \Delta_\sigma(f) = 0\ \forall\sigma \in \mathcal{R}(G)\}$$

Naziv *zakrenuta derivacija* dolazi iz sljedećeg svojstva operatora Δ_σ :

Lema 2.5.4. *Za $f, g \in \mathcal{P}(V)$ i za pseudorefleksiju $\sigma : V \to V$ vrijedi*

$$\Delta_\sigma(fg) = \Delta_\sigma(f)g + (\sigma f)\Delta_\sigma(g).$$

Dokaz: Za $f, g \in \mathcal{P}(V)$ imamo redom

$$\Delta_\sigma(fg)\ell_\sigma = \sigma(fg) - fg = (\sigma f)(\sigma g) - fg = [(\sigma f)g - fg] + [(\sigma f)(\sigma g) - (\sigma f)g] =$$

$$= \Delta_\sigma(f)\ell_\sigma g + (\sigma f)\Delta_\sigma(g)\ell_\sigma = [\Delta_\sigma(f)g + (\sigma f)\Delta_\sigma(g)]\ell_\sigma.$$

Odatle tvrdnja slijedi, budući da je $\ell_\sigma \neq 0$ i $\mathcal{P}(V)$ je integralna domena.

Lema 2.5.5. *Neka je $G \subseteq \mathrm{GL}(V)$ pseudorefleksijska grupa i $\sigma \in \mathcal{R}(G)$. Tada je Δ_σ endomorfizam $\mathcal{P}(V)^G-$modula $\mathcal{P}(V)$, tj. vrijedi*

$$\Delta_\sigma(fg) = f\Delta_\sigma(g) \qquad \forall f \in \mathcal{P}(V)^G \quad i \quad \forall g \in \mathcal{P}(V).$$

Dokaz: Tvrdnja slijedi neposredno iz propozicije 2.5.3. i leme 2.5.4.

U daljnjem sa $\mathcal{J}$ označavamo ideal $\mathcal{P}_+(V)^G\mathcal{P}(V)$ u algebri $\mathcal{P}(V)$ generiran s homogenim invarijantama pozitivnog stupnja. Iz leme 2.5.5. slijedi da je $\Delta_\sigma\mathcal{J} \subseteq \mathcal{J}$. Dakle, prijelazom na kvocijent svaki Δ_σ definira linearan operator na algebri kovarijanata $\mathcal{P}(V)/\mathcal{J}$. Taj ćemo linearan operator označavati istim znakom Δ_σ :

$$\Delta_\sigma(f + \mathcal{J}) = \Delta_\sigma(f) + \mathcal{J}, \qquad f \in \mathcal{P}(V).$$

Njegovo je djelovanje na prostoru $\mathcal{P}(V)/\mathcal{J}$ vrlo netrivijalno.

Svaki element $\sigma \in G$ djeluje kao identiteta na $\mathcal{P}(V)^G$ i, posebno, $\sigma\left(\mathcal{P}_+(V)^G\right) = \mathcal{P}_+(V)^G$, dakle, $\sigma(\mathcal{J}) = \mathcal{J}$. Prema tome, djelovanje grupe G na $\mathcal{P}(V)$ prenosi se na djelovanje te grupe na algebri kovarijanata $\mathcal{P}(V)/\mathcal{J}$:

$$\sigma(f + \mathcal{J}) = \sigma f + \mathcal{J}, \qquad f \in \mathcal{P}(V), \quad \sigma \in G.$$

Operatore usrednjenja po grupi G na prostorima $\mathcal{P}(V)$ i $\mathcal{P}(V)/\mathcal{J}$ označavamo sa $R_{\mathcal{P}(V)}$ i $R_{\mathcal{P}(V)/\mathcal{J}}$:

$$R_{\mathcal{P}(V)}(f) = \frac{1}{|G|}\sum_{\sigma \in G}\sigma f, \qquad f \in \mathcal{P}(V),$$

$$R_{\mathcal{P}(V)/\mathcal{J}}(f + \mathcal{J}) = \frac{1}{|G|}\sum_{\sigma \in G}\sigma(f + \mathcal{J}) = R_{\mathcal{P}(V)}(f) + \mathcal{J}, \qquad f \in \mathcal{P}(V).$$

Operator usrednjenja je projektor na potprostor $G-$invarijanata. Posebno, $R_{\mathcal{P}(V)}(\mathcal{P}(V)) = \mathcal{P}(V)^G$ i $R_{\mathcal{P}(V)}\left(\mathcal{P}^k(V)\right) = \mathcal{P}^k(V)^G$ za svaki $k \in \mathbb{Z}_+$, dakle, i $R_{\mathcal{P}(V)}\left(\mathcal{P}_+(V)\right) = \mathcal{P}_+(V)^G$.

Lema 2.5.6. *Za svaki $k \in \mathbb{N}$ i $x \in (\mathcal{P}(V)/\mathcal{J})^k$ vrijedi $R_{\mathcal{P}(V)/\mathcal{J}}(x) = 0$.*

Dokaz: Neka je $f \in \mathcal{P}^k(V)$ takav da je $x = f + \mathcal{J}$. Tada je

$$R_{\mathcal{P}(V)}(f) \in \mathcal{P}^k(V)^G \subseteq \mathcal{P}_+(V)^G \subseteq \mathcal{J},$$

dakle,

$$R_{\mathcal{P}(V)/\mathcal{J}}(x) = R_{\mathcal{P}(V)}(f) + \mathcal{J} = 0_{\mathcal{P}(V)/\mathcal{J}}.$$

Lema 2.5.7. *Neka je $G \subseteq \mathrm{GL}(V)$ pseudorefleksijska grupa i neka je $0 \neq x \in \mathcal{P}(V)/\mathcal{J}$ homogeni element stupnja > 0. Tada postoji pseudorefleksija $\sigma \in \mathcal{R}(G)$ takva da je $\Delta_\sigma(x) \neq 0$.*

Dokaz: Neka je $k > 0$ i neka je $x \in (\mathcal{P}(V)/\mathcal{J})^k = (\mathcal{P}_+(V)/\mathcal{J})^k$. Pretpostavimo da je $\Delta_\sigma(x) = 0$ za svaku pseudorefleksiju $\sigma \in \mathcal{R}(G)$. Tada je $\sigma x = x$ za svaku $\sigma \in \mathcal{R}(G)$, a budući da je grupa G generirana pseudorefleksijama, slijedi da je $\sigma x = x$ $\forall \sigma \in G$. Tada je i $R_{\mathcal{P}(V)/\mathcal{J}}(x) = x$. Međutim, prema lemi 2.5.6. je $R_{\mathcal{P}(V)/\mathcal{J}}(x) = 0$. Dakle, $x = 0$.

Lema 2.5.8. *Neka je $G \subseteq \mathrm{GL}(V)$ pseudorefleksijska grupa i neka je $\{\overline{e}_q;\ q = 1, \ldots, m\}$ baza vektorskog prostora $\mathcal{P}(V)/\mathcal{J}$ sastavljena od homogenih elemenata. Nadalje, neka je $e_q \in \mathcal{P}(V)$ homogeni predstavnik od $\overline{e}_q$ za svaki $q \in \{1, \ldots, m\}$. Tada su $e_1, \ldots, e_m$ linearno nezavisni nad prstenom $\mathcal{P}(V)^G$.*

Dokaz: Pretpostavimo suprotno i neka su $q_1 < \cdots < q_\ell$ ($\ell \geq 2$) i $x_1, \ldots, x_\ell \in \mathcal{P}(V)^G \setminus \{0\}$ takvi da vrijedi

$$x_1 e_{q_1} + \cdots + x_\ell e_{q_\ell} = 0. \tag{2.6}$$

Budući da su svi e_q homogeni, možemo pretpostaviti da su i svi x_j homogeni. Nadalje, možemo pretpostaviti da je $\deg e_{q_1} = d$ najveći od svih stupnjeva $\deg e_{q_i}$. Budući da svaka zakrenuta derivacija Δ_σ snižava stupanj polinoma za 1, prema lemi 2.5.7. postoje zakrenute derivacije $\Delta_{\sigma_1}, \ldots, \Delta_{\sigma_d}$ takve da za operator $\Delta = \Delta_{\sigma_1} \cdots \Delta_{\sigma_d}$ vrijedi $\Delta(e_{q_1}) \in K^*$. Primijenimo li operator Δ na gornju jednakost, zbog leme 2.5.5. dobivamo

$$0 = \Delta(x_1 e_{q_1} + \cdots + x_\ell e_{q_\ell}) = x_1 \Delta(e_{q_1}) + \cdots + x_\ell \Delta(e_{q_\ell}).$$

Međutim, imamo $\Delta(e_{q_i}) = 0$ ako je $\deg e_{q_i} < d$ i $\Delta(e_{q_i}) \in K$ ako je $\deg e_{q_i} = d$. Prema tome, gornja jednakost pokazuje da su elementi $x_1, \ldots, x_\ell \in \mathcal{P}(V)^G$ linearno zavisni.

Pretpostavimo sada da je izbor za jednakost (2.6) učinjen s najmanjim mogućim $\ell \geq 2$ u odnosu na sve baze $\{\overline{e}_1, \ldots, \overline{e}_m\}$ prostora $\mathcal{P}(V)/\mathcal{J}$ sastavljene od homogenih elemenata i u odnosu na sve izbore homogenih predstavnika $e_1, \ldots, e_m \in \mathcal{P}(V)$. Prema dokazanom možemo pisati

$$x_1 = \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_\ell x_\ell, \qquad \lambda_i \in K,$$

i u toj jednakosti možemo pretpostavljati da je $\lambda_i = 0$ ako je $\deg e_{q_i} < d$. Sada se jednakost (2.6) može zapisati ovako

$$x_2 e'_2 + \cdots + x_\ell e'_\ell = 0$$

gdje smo stavili

$$e'_i = e_{q_i} + \lambda_i e_{q_1}.$$

No to je u kontradikciji s pretpostavkom o minimalnosti ℓ. Ova kontradikcija dokazuje lemu.

Dokaz implikacije $(a) \Rightarrow (c)$ **u teoremu 2.5.1.:** Uz oznake i pretpostavke iz leme 2.5.8. elementi $e_1, \ldots, e_m \in \mathcal{P}(V)$ su linearno nezavisni nad prstenom $\mathcal{P}(V)^G$. Nadalje, prema lemi 2.4.2. ti elementi generiraju $\mathcal{P}(V)$ kao $\mathcal{P}(V)^G-$modul. Dakle, $\mathcal{P}(V)$ je slobodan $\mathcal{P}(V)^G-$modul (čiji je rang jednak kodimenziji ideala $\mathcal{J}$ u algebri $\mathcal{P}(V)$, odnosno, dimenziji algebre kovarijanata).

Prelazimo sada na dokaz implikacije $(c) \Rightarrow (b)$ u teoremu 2.5.1. Dakle, **u daljnjem pretpostavljamo da je $\mathcal{P}(V)$ slobodan kao $\mathcal{P}(V)^G-$modul**. Prije svega, prema Hilbertovom teoremu 2.2.1. znamo da je algebra $\mathcal{P}(V)^G$ konačno generirana. Naravno, uvijek možemo pronaći homogene generatore te algebre.

Lema 2.5.9. *Pretpostavimo da je $\{f_1, \ldots, f_\ell\}$ minimalan skup homogenih generatora algebre $\mathcal{P}(V)^G$. Tada su $f_1, \ldots, f_\ell$ algebarski nezavisni.*

Dokaz ćemo provesti tako da pokažemo da svaka algebarska relacija među elementima $f_1, \ldots, f_\ell$ povlači da je f_i za neki indeks i $\mathcal{P}(V)^G-$linearna kombinacija $f_1, \ldots, f_{i-1}, f_{i+1}, \ldots, f_\ell$. Odatle neposredno slijedi da je $\{f_1, \ldots, f_{i-1}, f_{i+1}, \ldots, f_\ell\}$ skup homogenih generatora algebre $\mathcal{P}(V)^G$, a to se protivi minimalnosti od ℓ.

Dakle, pretpostavimo da je $P \neq 0$ polinom nad K u ℓ varijabli takav da je $P(f_1, \ldots, f_\ell) = 0$. Treba dokazati da je tada neki f_i $\mathcal{P}(V)^G-$linearna kombinacija $f_1, \ldots, f_{i-1}, f_{i+1}, \ldots, f_\ell$.

Možemo pisati $\mathcal{P}(V) = K[T_1, \ldots, T_n]$ (gdje je npr. $\{T_1, \ldots, T_n\}$ baza dualnog prostora V^*). Neka su

$$P_i = \frac{\partial P}{\partial f_i}, \quad 1 \leq i \leq \ell, \qquad f_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial T_j}, \quad 1 \leq i \leq \ell, \quad 1 \leq j \leq n.$$

Za bilo koje polinome $Q_1, \ldots, Q_m \in \mathcal{P}(V)$ sa $(Q_1, \ldots, Q_m)$ ćemo označavati njima generiran ideal u $\mathcal{P}(V)$:

$$(Q_1, \ldots, Q_m) = \sum_{j=1}^{m} \mathcal{P}(V) Q_j.$$

Dokaz tvrdnje provest ćemo najprije uz dodatnu pretpostavku da **nijedan pravi podskup od** $\{P_1, \ldots, P_\ell\}$ **ne generira ideal** $(P_1, \ldots, P_\ell)$, tj. da vrijedi

$$P_i \notin (P_1, \ldots, P_{i-1}, P_{i+1}, \ldots, P_\ell) \qquad \forall i \in \{1, \ldots, \ell\}.$$

Za dokaz tog posebnog slučaja treba nam sljedeća pomoćna tvrdnja:

Lema 2.5.10. *Za svaki par indeksa (i, j) polinom f_{ij} sadržan je u idealu $(f_1, \ldots, f_\ell)$.*

Dokaz: Prema pretpostavci $\mathcal{P}(V)$ je slobodan $\mathcal{P}(V)^G-$modul, pa postoje $e_1, \ldots, e_m \in \mathcal{P}(V)$ takve da je

$$\mathcal{P}(V) = \sum_{k=1}^{m} \dot{+} \mathcal{P}(V)^G e_k$$

Budući da je $\mathcal{P}(V)^G$ graduirana podalgebra od $\mathcal{P}(V)$, možemo pretpostaviti da su svi polinomi e_k homogeni i da je $e_k = 1$ za neki k. Sada možemo pisati

$$f_{ij} = \sum_{k=1}^{m} \rho_{ijk} e_k, \qquad \rho_{ijk} \in \mathcal{P}(V)^G. \tag{2.7}$$

Formalnim deriviranjem jednakosti $P(f_1, \ldots, f_\ell) = 0$ po T_j korištenjem lančanog pravila i uvrštavanjem (2.7) dobivamo

$$0 = \sum_{i=1}^{\ell} P_i f_{ij} = \sum_{1=1}^{\ell} P_i \left[\sum_{k=1}^{m} \rho_{ijk} e_k \right] = \sum_{k=1}^{m} \left[\sum_{i=1}^{\ell} P_i \rho_{ijk} \right] e_k.$$

Međutim, $\{e_1, \ldots, e_m\}$ je baza $\mathcal{P}(V)^G-$modula $\mathcal{P}(V)$, pa slijedi

$$\sum_{i=1}^{\ell} P_i \rho_{ijk} = 0 \qquad \forall k \in \{1, \ldots, m\} \quad \text{i} \quad \forall j \in \{1, \ldots, n\}.$$

Iz ovih jednakosti slijedi da je $\deg \rho_{ijk} > 0$ kad god je $\rho_{ijk} \neq 0$. Doista, u suprotnom bismo mogli P_i prikazan kao $\mathcal{P}(V)-$linearnu kombinaciju preostalih P_j, $j \neq i$, a to bi bilo suprotno našoj dodatnoj pretpostavci. Dakle $\rho_{ijk} \in \mathcal{P}_+(V)^G \subseteq (f_1, \ldots, f_\ell)$ za bilo koje i, j, k. No tada iz (2.7) slijedi da je $f_{ij} \in (f_1, \ldots, f_\ell)$ za bilo koje i, j.

Nastavimo sada dokaz leme 2.5.9. (i dalje uz dodatnu pretpostavku $P_i \notin (P_1, \ldots, P_{i-1}, P_{i+1}, \ldots, P_\ell)$ za svaki $i \in \{1, \ldots, \ell\}$). Zbog Eulerovog identiteta uz oznake $d_i = \deg f_i$ imamo

$$d_i f_i = \left[\sum_{j=1}^{n} T_j \frac{\partial}{\partial T_j} \right] f_i = \sum_{j=1}^{n} f_{ij} T_j, \qquad 1 \leq i \leq \ell. \tag{2.8}$$

(Napominjemo da su svi $d_i \neq 0$). Stoga možemo pisati

$$f_1 = \sum_{i=2}^{\ell} \lambda_i f_i \qquad \text{za neke} \quad \lambda_2, \ldots, \lambda_\ell \in \mathcal{P}(V). \tag{2.9}$$

Doista, u tu svrhu treba samo u jednakosti (2.8) svaki f_{1j} prikazati kao $\mathcal{P}(V)-$linearnu kombinaciju polinoma $f_1, \ldots, f_\ell$, a to možemo zbog leme 2.5.10. Uočimo sada da u jednakosti (2.9) možemo pretpostaviti da su $\lambda_2, \ldots, \lambda_\ell \in \mathcal{P}(V)^G$. Doista, $f_i \in \mathcal{P}(V)^G$, dakle, ako razvijemo svaki λ_i u skladu s rastavom

$$\mathcal{P}(V) = \sum_{k=1}^{m} \dot{+} \mathcal{P}(V)^G e_k$$

i uzmemo samo članove koji su u $\mathcal{P}(V)^G$ (sjetimo se da je $e_k = 1$ za neki k) dobivamo željenu jednakost

$$f_1 = \sum_{i=2}^{\ell} \overline{\lambda}_i f_i, \qquad \overline{\lambda}_2, \ldots, \overline{\lambda}_\ell \in \mathcal{P}(V)^G.$$

Time je lema 2.5.9. dokazana, uz dodatnu pretpostavku $P_i \notin (P_1, \ldots, P_{i-1}, P_{i+1}, \ldots, P_\ell)$ za svaki $i = 1, \ldots, \ell$.

Napustimo sada tu dodatnu pretpostavku. U slučaju kad ta pretpostavka nije zadovoljena numeraciju možemo provesti tako da je za neki $m < \ell$ skup $\{P_1, \ldots, P_m\}$ minimalan među svim podskupovima od $\{P_1, \ldots, P_\ell\}$ koji generiraju ideal $(P_1, \ldots, P_\ell)$. Tada za $m < r \leq \ell$ možemo pisati

$$P_r = \sum_{i=1}^{m} \varepsilon_{ir} P_i, \qquad \text{gdje su} \quad \varepsilon_{ir} \in \mathcal{P}(V).$$

Definiramo

$$F_{ij} = f_{ij} + \sum_{r=m+1}^{\ell} \varepsilon_{ir} f_{rj}, \qquad 1 \leq i \leq \ell, \quad 1 \leq j \leq n.$$

Sada zbog Eulerove jednakosti imamo

$$d_i f_i = \sum_{j=1}^{n} f_{ij} T_j = \sum_{j=1}^{n} \left[F_{ij} - \sum_{r=m+1}^{\ell} \varepsilon_{ir} f_{rj} \right] T_j = \sum_{j=1}^{n} F_{ij} T_j - \sum_{r=m+1}^{\ell} \varepsilon_{ir} \left[\sum_{j=1}^{n} f_{rj} T_j \right].$$

Ponovna primjena Eulerove jednakosti daje

$$\sum_{j=1}^{n} f_{rj} T_j = d_r f_r.$$

Stoga dobivamo jednakost

$$d_i f_i = \sum_{j=1}^{n} F_{ij} T_j - \sum_{r=m+1}^{\ell} d_r \varepsilon_{ir} f_r. \tag{2.10}$$

Kao i u prvom dijelu dokaza dovoljno je još dokazati da vrijedi

Lema 2.5.11. *Za svaki par indeksa (i, j) polinom F_{ij} sadržan je u idealu $(f_1, \ldots, f_\ell)$.*

Dokaz ove leme potpuno je analogan dokazu leme 2.5.9. Prvo razvijemo

$$F_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \rho_{ijk} e_k.$$

Deriviranjem jednakosti $P(f_1, \ldots, f_\ell) = 0$ dobivamo

$$\sum_{i=1}^{m} P_i F_{ij} = 0.$$

Uvrštavanjem prethodne jednakosti i korištenjem činjenice da je $\{e_1, \ldots, e_m\}$ baza slobodnog $\mathcal{P}(V)^G$−modula $\mathcal{P}(V)$ nalazimo da vrijedi

$$\sum_{i=1}^{m} P_i \rho_{ijk} = 0.$$

Minimalnost $\{P_1, \ldots, P_m\}$ kao skupa generatora ideala $(P_1, \ldots, P_\ell)$ ima ponovo za posljedicu da je $\deg \rho_{ijk} > 0$ kad god je $\rho_{ijk} \neq 0$, a odatle lema 2.5.9. slijedi sasvim analogno kao u dokazu uz dodatnu pretpostavku na polinome $P_1, \ldots, P_\ell$.

Primijetimo sada da tvrdnja leme 2.5.9. predstavlja implikaciju $(c) \Rightarrow (b)$ u teoremu 2.5.1.

Ostaje nam još da dokažemo implikaciju $(b) \Rightarrow (a)$ u teoremu 2.5.1. Neka su $x_1, \ldots, x_n$ homogeni algebarski nezavisni invarijantni polinomi takvi da je $\mathcal{P}(V)^G = K[x_1, \ldots, x_n]$. Neka je H podgrupa od G generirana svim pseudorefleksijama $\mathcal{R}(G)$. Primjenom dokazanog na grupu H zaključujemo da postoje homogeni algebarski nezavisni elementi $y_1, \ldots, y_n \in \mathcal{P}(V)^H$ takvi da je $\mathcal{P}(V)^H = K[y_1, \ldots, y_n]$. Stavimo $d_i = \deg\, x_i$ i $e_i = \deg\, y_i$ i pretpostavimo da smo numerirali tako da bude

$$d_1 \leq \cdots \leq d_n \qquad \text{i} \qquad e_1 \leq \cdots \leq e_n.$$

Primijetimo sada da nužno vrijedi $d_i \geq e_i$ za svaki $i = 1, \ldots, n$. Doista, kad bi bilo $d_i < e_i$ za neki indeks i, svaki bi se od polinoma $x_1, \ldots, x_i \in \mathcal{P}(V)^G \subseteq \mathcal{P}(V)^H$ mogao napisati kao polinom u $y_1, \ldots, y_{i-1}$, a to nije moguće zbog algebarske nezavisnosti $x_1, \ldots, x_i$. Nadalje, po konstrukciji je $\mathcal{R}(G) = \mathcal{R}(H)$, pa iz tvrdnje (b) teorema 2.3.13. slijedi da je

$$(d_1 - 1) + \cdots + (d_n - 1) = (e_1 - 1) + \cdots + (e_n - 1).$$

Odatle i iz $d_i \geq e_i$ za svaki $i = 1, \ldots, n$ slijedi da mora biti $d_i = e_i$ za svaki $i = 1, \ldots, n$. Sada iz tvrdnje (a) teorema 2.3.14. nalazimo da je

$$|G| = d_1 \cdots d_n = e_1 \cdots e_n = |H|,$$

a kako je H podgrupa od G, zaključujemo da je $G = H$. Dakle, grupa G generirana je pseudorefleksijama.

Zadatak 2.5.1. *Neka je V $n-$dimenzionalan kompleksan vektorski prostor s bazom $\{e_1, \ldots, e_n\}$ i neka je $\pi : \mathcal{S}_n \to \mathrm{GL}(V)$ homomorfizam grupa zadan sa*

$$\pi(\sigma)e_j = e_{\sigma(j)}, \qquad j = 1, \ldots, n.$$

Dokažite da je $G = \operatorname{Im} \pi$ refleksijska grupa i odredite njezine eksponente.

Zadatak 2.5.2. *Uz oznake iz prethodnog zadatka ustanovite da li je $\pi(\mathcal{A}_n)$ pseudorefleksijska grupa. Pri tome je $\mathcal{A}_n$ podgrupa od $\mathcal{S}_n$ svih parnih permutacija.*

Poglavlje 3

REDUKTIVNE GRUPE

3.1 Liejeve algebre: definicije i osnovni rezultati

Iako tvrdnje koje ćemo iznositi (a neke i dokazivati) u ovom i u sljedećem odjeljku vrijede za Liejeve algebre nad proizvoljnim poljem karakteristike 0 (katkada algebarski zatvorenim), mi ćemo se ograničiti na **Liejeve algebre nad poljem realnih brojeva** $\mathbb{R}$ **ili nad poljem kompleksnih brojeva** $\mathbb{C}$, budući da ćemo rezultate primjenjivati isključivo u teoriji invarijanata realnih i kompleksnih Liejevih grupa, (preciznije, u teoriji invarijanata realnih i kompleksnih algebarskih grupa).

Neka je $\mathfrak{g}$ konačnodimenzionalna (realna ili kompleksna) Liejeva algebra. Za podskupove S i T Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ sa $[S,T]$ označavamo potprostor razapet svim komutatorima $[x,y]$, $x \in S$, $y \in T$. Sa $Z(\mathfrak{g})$ označavamo **centar Liejeve algebre** $\mathfrak{g}$:

$$Z(\mathfrak{g}) = \{x \in \mathfrak{g};\ [x,y] = 0\ \ \forall y \in \mathfrak{g}\}.$$

Definiramo sljedeće nizove ideala u $\mathfrak{g}$:

(a) **Izvedeni niz** $\mathcal{D}^n(\mathfrak{g})$, $n \in \mathbb{Z}_+$:

$$\mathcal{D}^0(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}, \quad \mathcal{D}^1(\mathfrak{g}) = \mathcal{D}(\mathfrak{g}) = [\mathfrak{g},\mathfrak{g}], \quad \mathcal{D}^n(\mathfrak{g}) = \mathcal{D}\left(\mathcal{D}^{n-1}(\mathfrak{g})\right) = \left[\mathcal{D}^{n-1}(\mathfrak{g}), \mathcal{D}^{n-1}(\mathfrak{g})\right], \quad n \in \mathbb{N}.$$

(b) **Centralni silazni niz** $\mathcal{C}^n(\mathfrak{g})$, $n \in \mathbb{Z}_+$:

$$\mathcal{C}^0(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}, \qquad \mathcal{C}^1(\mathfrak{g}) = [\mathfrak{g},\mathfrak{g}], \qquad \mathcal{C}^n(\mathfrak{g}) = \left[\mathfrak{g}, \mathcal{C}^{n-1}(\mathfrak{g})\right], \quad n \in \mathbb{N}.$$

(c) **Centralni uzlazni niz** $\mathcal{C}_n(\mathfrak{g})$, $n \in \mathbb{Z}_+$:

$$\mathcal{C}_0(\mathfrak{g}) = \{0\}, \quad \mathcal{C}_1(\mathfrak{g}) = Z(\mathfrak{g}), \quad \mathcal{C}_n = \{x \in \mathfrak{g};\ [x,\mathfrak{g}] \subseteq \mathcal{C}_{n-1}(\mathfrak{g})\} = \pi_n^{-1}\left(Z(\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_{n-1})\right), \quad n \in \mathbb{N},$$

gdje je sa π_n označen kanonski epimorfizam sa $\mathfrak{g}$ na $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_{n-1}$.

Prva su dva niza ideala padajuća, a treći je rastući. Zbog konačne dimenzije svaki se od triju nizova na nekom mjestu stabilizira. Kažemo da je $\mathfrak{g}$ **rješiva Liejeva algebra**, ako je $\mathcal{D}^n(\mathfrak{g}) = \{0\}$ za neki $n \in \mathbb{Z}_+$. Kažemo da je $\mathfrak{g}$ **nilpotentna Liejeva algebra** ako je $\mathcal{C}^n(\mathfrak{g}) = \{0\}$ za neki $n \in \mathbb{Z}_+$. Primijetimo da je realna Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ rješiva (odnosno, nilpotentna) ako i samo ako je njezina kompleksifikacija $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ rješiva (odnosno, nilpotentna).

Podsjećamo da za $x \in \mathfrak{g}$ sa $\operatorname{ad} x$ označavamo pripadnu unutarnju derivaciju od $\mathfrak{g}$ zadanu sa

$$(\operatorname{ad} x)y = [x,y], \qquad y \in \mathfrak{g}.$$

Tada je ad homomorfizam Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ u Liejevu algebru $\operatorname{Der}(\mathfrak{g})$ svih derivacija od $\mathfrak{g}$. Posebno, ad je reprezentacija Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ na vektorskom prostoru $\mathfrak{g}$ i ona se zove **adjungirana reprezentacija**.

Bez dokaza navodimo niz teorema o nilpotentnim i o rješivim Liejevim algebrama. Njihovi se dokazi mogu pronaći u bilo kojoj standardnoj knjizi o Liejevim algebrama, a također u mojim skriptama http://web.math.pmf.unizg.hr/~hrk/nastava/2010-11/LA.pdf.

Teorem 3.1.1. *Za konačnodimenzionalnu Liejevu algebru $\mathfrak{g}$ sljedeća su četiri svojstva međusobno ekvivalentna:*

(a) *Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ je nilpotentna.*

(b) *Za svaki $x \in \mathfrak{g}$ operator $\operatorname{ad} x$ je nilpotentan.*

(c) *Postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je $(\operatorname{ad} x_1)\cdots(\operatorname{ad} x_n) = 0$ za bilo koje $x_1, \ldots, x_n \in \mathfrak{g}$.*

(d) *Postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je $\mathcal{C}_n(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}$.*

Lako se vidi da je svaka Liejeva podalgebra i svaka kvocijentna Liejeva algebra nilpotentne Liejeve algebre i sama nilpotentna Liejeva algebra. Primijetimo, međutim, da nenilpotentna Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ može sadržavati nilpotentni ideal $\mathfrak{a}$ takav da je kvocijentna Liejeva algebra $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ nilpotentna.

Reprezentacija π Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ na vektorskom prostoru V zove se **nil−reprezentacija** ako su svi operatori $\pi(x)$, $x \in \mathfrak{g}$, nilpotentni. Ključni rezultat u teoriji nilpotentnih Liejevih algebri je **Engelov teorem**:

Teorem 3.1.2. *Neka je π nil−reprezentacija konačnodimenzionalne Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ na konačnodimenzionalnom vektorskom prostoru $V \neq \{0\}$. Tada postoji $v \in V \setminus \{0\}$ takav da je $\pi(x)v = 0$ za svaki $x \in \mathfrak{g}$.*

Odatle neposredno slijedi teorem, pomoću kojeg se dokazuju ključne tvrdnje teorema 3.1.1.:

Teorem 3.1.3. *Neka je π nil−reprezentacija konačnodimenzionalne Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ na konačnodimenzionalnom vektorskom prostoru $V \neq \{0\}$. Stavimo*

$$V_0 = \{0\}, \qquad V_n = \{v \in V;\ \pi(x)v \in V_{n-1}\ \ \forall x \in \mathfrak{g}\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

(a) *Za neki $s \leq \dim V$ vrijedi $V_0 \subsetneq V_1 \subsetneq \cdots \subsetneq V_s = V$.*

(b) *Za bilo koje $x_1, \ldots, x_s \in \mathfrak{g}$ vrijedi $\pi(x_1)\cdots\pi(x_s) = 0$.*

(c) *Postoji baza prostora V u odnosu na koju svaki operator $\pi(x)$, $x \in \mathfrak{g}$, ima striktno gornje trokutastu matricu.*

Za konačnodimenzionalnu reprezentaciju π Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ definiramo simetričnu bilinearnu formu B_π na $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ sa

$$B_\pi(x, y) = \operatorname{Tr} \pi(x)\pi(y), \qquad x, y \in \mathfrak{g}.$$

B_π se zove **forma pridružena reprezentaciji** π. Iz svojstava traga operatora jednostavno slijedi da je forma B_π invarijantna u odnosu na adjungiranu reprezentaciju, odnosno, da vrijedi

$$B_\pi([x, y], z) = B_\pi(x, [y, z]) \qquad \forall x, y, z \in \mathfrak{g}.$$

Za reprezenataciju π Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ na konačnodimenzionalnom vektorskom prostoru V **kompozicioni niz** je konačan rastući niz π−invarijantnih potprostora $(V_0, V_1, \ldots, V_n)$ od V takvih da je $V_0 = \{0\}$, $V_n = V$ i sve su subkvocijentne reprezentacije $\pi_{V_i/V_{i-1}}$, $1 \leq i \leq n$, ireducibilne. Naravno, za svaku konačnodimenzionalnu reprezentaciju postoji bar jedan kompozicioni niz.

Teorem 3.1.4. *Neka je π reprezentacija konačnodimenzionalne Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ na konačnodimenzionalnom vektorskom prostoru $V \neq \{0\}$ i neka je $(V_0, V_1, \dots, V_n)$ bilo koji kompozicioni niz te reprezentacije.*

(a) *U skupu svih ideala $\mathfrak{h}$ u $\mathfrak{g}$, takvih da je operator $\pi(y)$ nilpotentan za svaki $y \in \mathfrak{h}$, postoji najveći element $\mathfrak{n}_\pi$.*

(b) $\mathfrak{n}_\pi = \{y \in \mathfrak{g};\ \pi(y)V_i \subseteq V_{i-1} \ \ \forall i \in \{1, \dots, n\}\}$.

(c) $B_\pi(x, y) = \operatorname{Tr} \pi(x)\pi(y) = 0$ *za svaki* $x \in \mathfrak{g}$ *i svaki* $y \in \mathfrak{n}_\pi$.

Ideal $\mathfrak{n}_\pi$ u teoremu 3.1.4. zove se **najveći ideal nilpotencije** reprezentacije π. Primijetimo da se ideal $\mathfrak{n}_\pi$ sastoji od elemenata $y \in \mathfrak{g}$ takvih da je operator $\pi(y)$ nilpotentan, ali ne moraju svi takvi elementi biti sadržani u $\mathfrak{n}_\pi$. Ideal $\mathfrak{n}_\pi$ je samo najveći ideal sadržan u skupu (koji najčešće nije niti potprostor od $\mathfrak{g}$)

$$\mathcal{N}_\pi = \{y \in \mathfrak{g};\ \text{operator}\ \ \pi(y)\ \ \text{je nilpotentan}\}.$$

Forma pridružena adjungiranoj reprezentaciji $\mathrm{ad} = \mathrm{ad}_\mathfrak{g}$ zove se **Killingova forma** na Liejevoj algebri $\mathfrak{g}$ i označava sa $B = B_\mathfrak{g}$:

$$B(x, y) = \operatorname{Tr} (\operatorname{ad} x)(\operatorname{ad} y), \qquad x, y \in \mathfrak{g}.$$

Osim spomenutog svojstva invarijantnosti Killingova forma invarijantna je u odnosu na sve automorfizme Liejeve algebre $\mathfrak{g}$:

$$B(\sigma(x), \sigma(y)) = B(x, y) \qquad \forall x, y \in \mathfrak{g} \quad \text{i} \quad \forall \sigma \in \operatorname{Aut}(\mathfrak{g}).$$

Primijenimo li teorem 3.1.4. na adjungiranu reprezentaciju $\mathrm{ad} = \mathrm{ad}_\mathfrak{g}$ dobivamo:

Teorem 3.1.5. *Neka je $(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_1, \dots, \mathfrak{g}_n)$ bilo koji kompozicioni niz u konačnodimenzionalnoj Liejevoj algebri $\mathfrak{g}$ u odnosu na adjungiranu reprezentaciju* ad.

(a) *U skupu svih nilpotentnih ideala u Liejevoj algebri $\mathfrak{g}$ postoji najveći element $\mathfrak{n}$.*

(b) $\mathfrak{n} = \{y \in \mathfrak{g};\ [y, \mathfrak{g}_i] \subseteq \mathfrak{g}_{i-1}\ \ \text{za}\ \ i = 1, \dots, n\}$.

(c) $B(x, y) = 0$ *za svaki* $x \in \mathfrak{g}$ *i svaki* $y \in \mathfrak{n}$.

Za reprezentacije rješive Liejeve algebre na kompleksnim vektorskim prostorima vrijedi sljedeći **Liejev teorem**, koji je analogon Engelovog teorema:

Teorem 3.1.6. *Neka je π reprezentacija rješive Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ na konačnodimenzionalnom kompleksnom vektorskom prostoru $V \neq \{0\}$. Tada postoji vektor $v \in V \setminus \{0\}$ koji je svojstven za sve operatore $\pi(x)$, $x \in \mathfrak{g}$.*

Odatle neposredno slijedi:

Teorem 3.1.7. *Neka je π reprezentacija rješive Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ na konačnodimenzionalnom kompleksnom vektorskom prostoru $V \neq \{0\}$. Tada postoji baza prostora V u odnosu na koju svi operatori $\pi(x)$, $x \in \mathfrak{g}$, imaju gornje trokutaste matrice.*

Evo nekoliko karakterizacija rješivosti Liejeve algebre:

Teorem 3.1.8. *Konačnodimenzionalna Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ rješiva je onda i samo onda ako je izvedeni ideal $\mathcal{D}(\mathfrak{g}) = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ nilpotentan. U tom je slučaju za svaki $x \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ operator* $\operatorname{ad} x$ *nilpotentan.*

Svaki od sljedeća dva teorema zove se **Cartanov kriterij rješivosti**.

Teorem 3.1.9. *Neka je V konačnodimenzionalan vektorski prostor i neka je $\mathfrak{g}$ Liejeva podalgebra od $\mathfrak{gl}(V)$ takva da vrijedi*

$$\operatorname{Tr} xy = 0 \qquad \forall x \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \quad i \quad \forall y \in \mathfrak{g}.$$

Tada je $\mathfrak{g}$ rješiva Liejeva algebra.

Teorem 3.1.10. *Konačnodimenzionalna Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ rješiva je ako i samo ako vrijedi*

$$B(x, y) = 0 \qquad \forall x \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \quad i \quad \forall y \in \mathfrak{g}.$$

Lako se vidi da je svaka Liejeva podalgebra i svaka kvocijentna Liejeva algebra rješive Liejeve algebre i sama rješiva. Štoviše, za razliku od svojstva nilpotentnosti, ako je $\mathfrak{g}$ Liejeva algebra i ako je $\mathfrak{a}$ rješiv ideal u $\mathfrak{g}$ takav da je kvocijentna Liejeva algebra $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ rješiva, onda je i Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ rješiva. Odatle se izvodi da je za rješive ideale $\mathfrak{a}$ i $\mathfrak{b}$ i njihova suma $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ rješiv ideal u $\mathfrak{g}$. Prema tome, u svakoj konačnodimenzionalnoj Liejevoj algebri postoji najveći rješiv ideal. Taj se ideal zove **radikal Liejeve algebre** $\mathfrak{g}$ i označava $\operatorname{Rad}(\mathfrak{g})$. Kažemo da je $\mathfrak{g}$ **poluprosta Liejeva algebra** ako je $\operatorname{Rad}(\mathfrak{g}) = \{0\}$. Nije teško vidjeti da je $\operatorname{Rad}(\mathfrak{g}/\operatorname{Rad}(\mathfrak{g})) = \{0\}$ za svaku Liejevu algebru $\mathfrak{g}$, odnosno, kvocijentna Liejeva algebra $\mathfrak{g}/\operatorname{Rad}(\mathfrak{g})$ je poluprosta. Nadalje, ako je $\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ epimorfizam Liejevih algebri, onda je $\varphi(\operatorname{Rad}(\mathfrak{g})) = \operatorname{Rad}(\mathfrak{h})$.

Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ zove se **prosta** ako ona nije komutativna i ne sadrži nijedan netrivijalni ideal. Zahtjev nekomutativnosti znači da isključujemo slučajeve $\mathfrak{g} = \{0\}$ i $\dim \mathfrak{g} = 1$. Naravno, svaka je prosta Liejeva algebra poluprosta.

Teorem 3.1.11. *Neka je $\mathfrak{g}$ konačnodimenzionalna Liejeva algebra. Sljedeća su četiri svojstva međusobno ekvivalentna:*

(*a*) *Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ je poluprosta.*

(*b*) *$\mathfrak{g}$ ne sadrži nijedan netrivijalan komutativan ideal.*

(*c*) *Killingova forma $B = B_{\mathfrak{g}}$ je nedegenerirana.*

(*d*) *Postoje prosti ideali $\mathfrak{a}_1, \dots \mathfrak{a}_n$ u $\mathfrak{g}$ takvi da je*

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{a}_1 \dotplus \cdots \dotplus \mathfrak{a}_n \cong \mathfrak{a}_1 \times \cdots \times \mathfrak{a}_n.$$

U tom slučaju ideali $\mathfrak{a}_1, \dots, \mathfrak{a}_n$ su jedinstveni, tj. to su upravo svi prosti ideali u $\mathfrak{g}$. Nadalje, svaki je ideal $\mathfrak{a}$ u $\mathfrak{g}$ poluprost,

$$\mathfrak{a}^\perp := \{x \in \mathfrak{g};\ B(x, y) = 0 \ \forall y \in \mathfrak{a}\}$$

je također ideal u $\mathfrak{g}$ i vrijedi $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \dotplus \mathfrak{a}^\perp$.

Primijetimo da iz svojstva (*b*) slijedi da je za poluprostu Liejevu algebru $\mathfrak{g}$ njezin centar $Z(\mathfrak{g})$ jednak $\{0\}$. Budući da je $Z(\mathfrak{g}) = \operatorname{Ker} \operatorname{ad}$, to znači da je adjungirana reprezentacija $\operatorname{ad} : \mathfrak{g} \to \operatorname{Der}(\mathfrak{g})$ vjerna, odnosno, injektivna. Štoviše, vrijedi:

Teorem 3.1.12. *Svaka je derivacija poluproste Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ unutarnja, tj. za svaku derivaciju $D \in \operatorname{Der}(\mathfrak{g})$ postoji $x \in \mathfrak{g}$ takav da je $D = \operatorname{ad} x$. Drugim riječima,* $\operatorname{ad} : \mathfrak{g} \to \operatorname{Der}(\mathfrak{g})$ *je izomorfizam Liejevih algebri.*

Posjećamo da se **reprezentacija** π na vektorskom prostoru V zove **potpuno reducibilna** ako za svaki $\pi-$invarijantan potprostor W od V postoji njemu komplementaran $\pi-$invarijantan potprostor U, tj. takav da je $V = W \dotplus U$. **Reprezentacija** π je **ireducibilna** ako je $V \neq \{0\}$ i ako ne postoji netrivijalan $\pi-$invarijantan potprostor od V (tj. različit od V i od $\{0\}$). Pomoću Zornove leme dokazuje se da je reprezentacija π potpuno reducibilna ako i samo ako je prostor V suma svih svojih $\pi-$invarijantnih potprostora W takvih da je pripadna subreprezentacija π_W ireducibilna. Nadalje, u tom slučaju postoji familija $(W_i)_{i\in I}$ $\pi-$invarijantnih potprostora takvih da su subreprezentacije π_{W_i}, $i \in I$, ireducibilne i da je $V = \sum_{i\in I} \dotplus W_i$. Izuzetno je važan **Weylov teorem o potpunoj reducibilnosti**:

Teorem 3.1.13. *Svaka je konačnodimenzionalna reprezentacija poluproste Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ potpuno reducibilna.*

Operator A na konačnodimenzionalnom vektorskom prostoru V zove se **poluprost** ako za svaki $A-$invarijantan potprostor W od V postoji njemu komplementaran $A-$invarijantan potprostor U, tj. takav da je $V = W \dotplus U$. Na kompleksnom prostoru V operator je poluprost ako i samo ako je **dijagonalizabilan**, tj. takav da postoji baza od V sastavljena od njegovih svojstvenih vektora. Klasični **Jordanov teorem** glasi:

Teorem 3.1.14. *Neka je V konačnodimenzionalan vektorski prostor i $A \in L(V)$. Tada postoje jedinstveni operatori $A_s, A_n \in L(V)$ sa svojstvima:*

(a) *Operator A_s je poluprost.*

(b) *Operator A_n je nilpotentan.*

(c) *Ti operatori komutiraju: $A_sA_n = A_nA_s$.*

(d) $A = A_s + A_n$.

Nadalje, postoje polinomi P i Q u jednoj varijabli bez konstantnog člana (tj. $P(0) = Q(0) = 0$) takvi da je $A_s = P(A)$ i $A_n = Q(A)$. Posebno, potprostor od V je $A-$invarinatan ako i samo ako je on A_s-invarijantan i A_n-invarijantan.

Rastav $A = A_s+A_n$ zove se **Jordanova dekompozicija operatora** A. Operator A_s (odnosno, operator A_n) zove se **poluprosti dio** (odnosno, **nilpotentni dio**) **operatora** $A \in L(V)$.

Neka je $\mathfrak{g}$ poluprosta (konačnodimenzionalna) Liejeva algebra. Element $x \in \mathfrak{g}$ zove se **poluprost** ako je operator $\operatorname{ad} x$ poluprost, a **nilpotentan** ako je operator $\operatorname{ad} x$ nilpotentan. Pokazuje se da ako je $x \in \mathfrak{g}$ proizvoljan onda su i poluprosti i nilpotentni dio $(\operatorname{ad} x)_s$ i $(\operatorname{ad} x)_n$ derivacije $\operatorname{ad} x$ također derivacije Liejeve algebre $\mathfrak{g}$. Dakle, prema teoremu 3.1.12. postoje jedinstven poluprost element x_s i jedinstven nilpotentan element x_n u $\mathfrak{g}$ takvi da vrijedi

$$x = x_s + x_n \qquad \text{i} \qquad [x_s, x_n] = 0.$$

Taj se rastav zove **Jordan−Chevalleyeva dekompozicija** elementa $x \in \mathfrak{g}$. Pomoću Weylovog teorema o potpunoj reducibilnosti dokazuje se sljedeći vrlo netrivijalan teorem:

Teorem 3.1.15. *Neka je π konačnodimenzionalna reprezentacija konačnodimenzionalne poluproste Liejeve algebre $\mathfrak{g}$. Tada vrijedi*

(a) *Ako je element $x \in \mathfrak{g}$ poluprost, onda je operator $\pi(x)$ poluprost.*

(b) *Ako je element $x \in \mathfrak{g}$ nilpotentan, onda je operator $\pi(x)$ nilpotentan.*

(c) *Za svaki $x \in \mathfrak{g}$ vrijedi $\pi(x)_s = \pi(x_s)$ i $\pi(x)_n = \pi(x_n)$.*

Za Liejevu podalgebru $\mathfrak{s}$ Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ kažemo da je **reduktivna u algebri** $\mathfrak{g}$ ako je reprezentacija $x \mapsto \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}} x$ Liejeve algebre $\mathfrak{s}$ na vektorskom prostoru $\mathfrak{g}$ (tj. restrikcija $\pi_{\mathfrak{g}}|\mathfrak{s}$) potpuno reducibilna. **Reduktivna Liejeva algebra** je Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ koja je reduktivna u samoj sebi, tj. adjungirana reprezentacija $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}$ je potpuno reducibilna. Naravno, prema Weylovom teoremu o potpunoj reducibilnosti svaka je poluprosta Liejeva podalgebra $\mathfrak{s}$ u (konačnodimenzionalnoj) Liejevoj algebri $\mathfrak{g}$ reduktivna u $\mathfrak{g}$. Posebno, svaka je poluprosta Liejeva algebra reduktivna.

Za svaku konačnodimenzionalnu Liejevu algebru $\mathfrak{g}$ presjek jezgara svih konačnodimenzionalnih ireducibilnih reprezentacija od $\mathfrak{g}$ označava se sa $\mathrm{Nrad}(\mathfrak{g})$ i zove **nilradikal Liejeve algebre** $\mathfrak{g}$. Lako se vidi da je to ujedno najmanji element skupa jezgara svih potpuno reducibilnih konačnodimenzionalnih reprezentacija od $\mathfrak{g}$. Posebno, Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ ima vjernu (tj. injektivnu) konačnodimenzionalnu potpuno reducibilnu reprezentaciju ako i samo ako je $\mathrm{Nrad}(\mathfrak{g}) = \{0\}$.

Teorem 3.1.16. *Neka je $\mathfrak{g}$ konačnodimenzionalna Liejeva algebra. Sljedećih je sedam svojstava međusobno ekvivalentno:*

(a) *Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ je reduktivna.*

(b) *Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ izomorfna je direktnom produktu poluproste i komutativne Liejeve algebre.*

(c) *$\mathcal{D}(\mathfrak{g}) = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ je poluprosta Liejeva algebra.*

(d) $\mathrm{Nrad}(\mathfrak{g}) = \{0\}$.

(e) $\mathrm{Rad}(\mathfrak{g}) = Z(\mathfrak{g})$.

(f) *Postoji konačnodimenzionalna reprezentacija π od $\mathfrak{g}$ takva da je pridružena simetrična bilinearna forma B_π na $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ nedegenerirana.*

(g) *Postoji vjerna konačnodimenzionalna potpuno reducibilna reprezentacija od $\mathfrak{g}$.*

U tom je slučaju $\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \dotplus Z(\mathfrak{g})$.

Iako nam vjerojatno neće trebati, zbog potpunosti navodimo i posljedicu ovog teorema:

Korolar 3.1.17. *Za svaku Liejevu algebru $\mathfrak{g}$ vrijedi $\mathrm{Nrad}(\mathfrak{g}) = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \cap \mathrm{Rad}(\mathfrak{g}) = [\mathfrak{g}, \mathrm{Rad}(\mathfrak{g})]$ i to je nilpotentni ideal u $\mathfrak{g}$ koji je sadržan u najvećem idealu nilpotencije svake konačnodimenzionalne reprezentacije od $\mathfrak{g}$.*

Za Liejevu podalgebru $\mathfrak{h}$ Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ definiramo njezin **normalizator** $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$ kao najveću Liejevu podalgebru od $\mathfrak{g}$ koja sadrži $\mathfrak{h}$ i u kojoj je $\mathfrak{h}$ ideal. Drugim riječima,

$$N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) = \{x \in \mathfrak{g};\ [x, \mathfrak{h}] \subseteq \mathfrak{h}\}.$$

Cartanova podalgebra Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ je nilpotentna Liejeva podalgebra $\mathfrak{h}$ od $\mathfrak{g}$ takva da je $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$. Pokazuje se da Cartanove podalgebre uvijek postoje, a u slučaju kompleksne Liejeve algebre sve su one međusobno konjugirane u odnosu na grupu $\mathrm{Int}(\mathfrak{g})$ unutarnjih automorfizama, tj. podgrupu od $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ generiranu svim automorfizmima oblika $\mathrm{e}^{\mathrm{ad}\, x}$, $x \in \mathfrak{g}$, (koja je ujedno generirana sa svim $\mathrm{e}^{\mathrm{ad}\, x}$ za $x \in \mathfrak{g}$ takav da je operator $\mathrm{ad}\, x$ nilpotentan). U slučaju poluproste Liejeve algebre Cartanove se podalgebre mogu karakterizirati na drugi vrlo upotrebljiv način:

Teorem 3.1.18. *Neka je $\mathfrak{g}$ poluprosta Liejeva algebra. Liejeva podalgebra $\mathfrak{h}$ je njezina Cartanova podalgebra ako i samo ako su ispunjena sljedeća dva uvjeta:*

(a) *$\mathfrak{h}$ je maksimalna komutativna podalgebra od $\mathfrak{g}$.*

(b) *Svaki element $h \in \mathfrak{h}$ je poluprost.*

U tom je slučaju restrikcija $B|\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}$ nedegenerirana.

Prema tome, za poluprostu Liejevu algebru $\mathfrak{g}$ i njezinu Cartanovu podalgebru $\mathfrak{h}$ dobro je definiran izomorfizam $\lambda \mapsto t_\lambda$ sa $\mathfrak{h}^*$ na $\mathfrak{h}$ takav da vrijedi

$$\lambda(h) = B(h, t_\lambda) \qquad \forall h \in \mathfrak{h}.$$

Neka je u daljnjem $\mathfrak{g}$ kompleksna poluprosta Liejeva algebra i neka je $\mathfrak{h}$ njezina Cartanova podalgebra. Tada je $\{\operatorname{ad} x;\ x \in \mathfrak{h}\}$ skup linearnih operatora na $\mathfrak{g}$ koji su svi poluprosti i međusobno komutiraju. To znači da se oni mogu istovremeno dijagonalizirati. Drugim riječima, vrijedi

$$\mathfrak{g} = \sum_{\alpha \in \mathfrak{h}^*} \dot{+}\, \mathfrak{g}_\alpha \qquad \text{gdje je} \quad \mathfrak{g}_\alpha = \{x \in \mathfrak{g};\ [h, x] = \alpha(h)x\ \ \forall h \in \mathfrak{h}\} \quad \text{za} \quad \alpha \in \mathfrak{h}^*.$$

Lako se vidi da je tada $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] \subseteq \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$ za bilo koje $\alpha, \beta \in \mathfrak{h}^*$. Naravno, budući da je Cartanova podalgebra $\mathfrak{h}$ komutativna, vrijedi $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}_0$. Stavimo

$$R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) = \{\alpha \in \mathfrak{h}^*;\ \alpha \neq 0,\ \ \mathfrak{g}_\alpha \neq \{0\}\,\}.$$

Elementi $\alpha \in R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ zovu se **korijeni** od $\mathfrak{g}$ u odnosu na $\mathfrak{h}$. Skup $R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ zove se **sistem korijena** od $\mathfrak{g}$ u odnosu na $\mathfrak{h}$. Potprostori $\mathfrak{g}_\alpha$ zovu se **korijenski potprostori**.

Teorem 3.1.19. *Neka je $\mathfrak{g}$ kompleksna poluprosta Liejeva algebra i $\mathfrak{h}$ njezina Cartanova podalgebra.*

(*a*) $\mathfrak{h}^* = \operatorname{span} R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$.

(*b*) $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{h}$.

(*c*) *Vrijedi* **korijenski rastav***:*
$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \dot{+} \sum_{\alpha \in R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})} \dot{+}\, \mathfrak{g}_\alpha.$$

(*d*) $R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) = -R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$, *tj. za* $\alpha \in \mathfrak{h}^*$ *vrijedi* $\alpha \in R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ *ako i samo ako je* $-\alpha \in R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$. *Štoviše, za svaki* $\alpha \in R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ *vrijedi* $R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) \cap \mathbb{C}\alpha = \{\alpha, -\alpha\}$.

(*e*) $\dim \mathfrak{g}_\alpha = 1$ *za svaki* $\alpha \in R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$.

(*f*) *Ako su* $\alpha, \beta \in R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ *i ako je* $\alpha + \beta \neq 0$, *onda je* $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] = \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$.

(*g*) *Uz prije uvedenu oznaku* t_λ, $\lambda \in \mathfrak{h}^*$, *za svaki* $\alpha \in R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ *vrijedi* $\alpha(t_\alpha) = B(t_\alpha, t_\alpha) \neq 0$ *i* $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}] = \mathbb{C}t_\alpha$. *Posebno,* $\dim [\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}] = 1$.

3.2 TDS−podalgebre

Liejeva algebra $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ svih kompleksnih kvadratnih matrica drugog reda s tragom nula najjednostavnija je prosta kompleksna Liejeva algebra. Za njezinu bazu

$$h = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \qquad x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad y = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

vrijede komutacione relacije

$$[h,x] = 2x, \qquad [h,y] = -2y, \qquad [x,y] = h.$$

Kompleksna prosta trodimenzionalna Liejeva algebra $\mathfrak{s}$ zove se **TDS−algebra** (prema engleskom *three−dimensional simple algebra*). Ako je ona podalgebra neke Liejeve algebre $\mathfrak{g}$, kažemo da je $\mathfrak{s}$ **TDS−podalgebra** od $\mathfrak{g}$.

Zadatak 3.2.1. *Neka je* $\mathfrak{s}$ TDS−*algebra. Dokažite da je* $\mathfrak{s}$ *izomorfna Liejevoj algebri* $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$.

Uputa: Izaberite Cartanovu podalgebru od $\mathfrak{s}$, koja je nužno jednodimenzionalna.

Prema tome, u svakoj TDS−algebri $\mathfrak{s}$ postoji uređena baza (h,x,y) čiji elementi zadovoljavaju gornje komutacione relacije. Svaka se takva baza zove S−**trojka** TDS−algebre $\mathfrak{s}$, a ako je $\mathfrak{s}$ podalgebra Liejeve algebre $\mathfrak{g}$, kažemo da je (h,x,y) S−trojka u $\mathfrak{g}$. Uočimo da su elementi x i y nilpotentni, a element h je poluprost. Nadalje, $\mathfrak{h} = \mathbb{C}h$ je Cartanova podalgebra od $\mathfrak{s}$ i $R(\mathfrak{s},\mathfrak{h}) = \{\alpha, -\alpha\}$, gdje je $\alpha \in \mathfrak{h}^*$ zadan sa $\alpha(h) = 2$. Tada je $\mathfrak{s}_\alpha = \mathbb{C}x$ i $\mathfrak{s}_{-\alpha} = \mathbb{C}y$. Zbog teorema 3.1.15. za svaku konačnodimenzionalnu reprezentaciju π TDS−algebre $\mathfrak{s}$ operatori $\pi(x)$ i $\pi(y)$ su nilpotentni, a operator $\pi(h)$ je poluprost. Posebno, ako je (h,x,y) S−trojka u kompleksnoj Liejevoj algebri $\mathfrak{g}$, operatori $\operatorname{ad} x$ i $\operatorname{ad} y$ su nilpotentni, a operator $\operatorname{ad} h$ je poluprost, dakle, dijagonalizabilan.

TDS−podalgebra prirodno je vezana uz svaki korijen $\alpha \in R(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ za proizvoljnu kompleksnu poluprostu Liejevu algebru $\mathfrak{g}$ i njezinu Cartanovu podalgebru $\mathfrak{h}$. Za svaki $\alpha \in R(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ prema tvrdnji (g) teorema 3.1.19. postoji jedinstven $h_\alpha \in [\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\mathfrak{a}}] \subseteq \mathfrak{h}$ takav da je $\alpha(h_\alpha) = 2$. Uz prije uvedenu oznaku lako se vidi da je

$$h_\alpha = \frac{2}{B(t_\alpha,t_\alpha)} t_\alpha = -h_{-\alpha}.$$

Nadalje, za svaki $x_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha \setminus \{0\}$ postoji jedinstven $y_\alpha \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ takav da je $[x_\alpha, y_\alpha] = h_\alpha$. Tada je očito

$$\mathfrak{s}_\alpha = \operatorname{span}\{h_\alpha, x_\alpha, y_\alpha\}$$

TDS−podalgebra od $\mathfrak{g}$ i $(h_\alpha, x_\alpha, y_\alpha)$ je jedna njezina S−trojka.

Teorija reprezentacija proste trodimenzionalne Liejeve algebre vrlo je moćno sredstvo u proučavanju strukture poluprostih (i, općenitije, reduktivnih) Liejevih algebri, a i u teoriji invarijanata reduktivnih grupa, jer kao što ćemo vidjeti u toj će teoriji ključnu ulogu imati struktura nilpotentnih orbita. U daljnjem je $\mathfrak{s}$ kompleksna TDS−algebra i (h,x,y) neka njezina S−trojka. Neka je π reprezentacija od $\mathfrak{s}$ na konačnodimenzionalnom kompleksnom vektorskom prostoru V. Kao što smo već spomenuli, prema teoremu 3.1.15. operatori $X = \pi(x)$ i $Y = \pi(y)$ su nilpotentni, a operator $H = \pi(h)$ je poluprost, dakle, dijagonalizabilan. Elementi spektra $Sp(H)$ operatora H zovu se **težine reprezentacije** π. Za težinu λ pripadni svojstveni potprostor

$$V_\lambda = \{v \in V;\ Hv = \lambda v\}$$

zove se **težinski potprostor** a njegovi su elementi **težinski vektori** težine λ. Kako je operator H dijagonalizabilan, imamo rastav u direktnu sumu

$$V = \sum_{\lambda \in Sp(H)} \dot{+} V_\lambda.$$

Zadatak 3.2.2. *Dokažite da uz uvedene oznake vrijedi*

$$XV_\lambda \subseteq V_{\lambda+2} \qquad i \qquad YV_\lambda \subseteq V_{\lambda-2} \qquad \forall \lambda \in \mathbb{C}.$$

Uputa: Primijenite komutacione relacije $HX - XH = 2X$ i $HY - YH = -2Y$.

Težinski vektor $v \neq 0$ zove se **primitivni vektor** reprezentacije π ako je $Xv = 0$. Primitivni vektori očito postoje jer je operator X nilpotentan.

Lema 3.2.1. *Neka je v primitivni vektor težine λ, tj. $0 \neq v \in V_\lambda$ i $Xv = 0$. stavimo*

$$v_{-1} = 0, \quad v_0 = v, \quad v_j = \frac{1}{j!} Y^j v, \quad j \in \mathbb{N}.$$

Tada vrijedi:

$$Hv_j = (\lambda - 2j)v_j, \quad Xv_j = (\lambda - j + 1)v_{j-1}, \quad Yv_j = (j+1)v_{j+1}, \quad \forall j \in \mathbb{Z}_+. \tag{3.1}$$

Dokaz: Treća jednakost slijedi neposredno iz definicije vektora v_j, a prva iz $Y^j V_\lambda \subseteq V_{\lambda-2j}$. Drugu jednakost dokazujemo indukcijom po $j \in \mathbb{Z}_+$. Za $j = 0$ jednakost vrijedi zbog izbora vektora v :

$$Xv_0 = Xv = 0 = (\lambda - 0 + 1)v_{-1}.$$

Za korak indukcije pretpostavimo da je $j \in \mathbb{Z}_+$ i da je jednakost $Xv_j = (\lambda - j + 1)v_{j-1}$ dokazana. Prema trećoj jednakosti je $Yv_j = (j+1)v_{j+1}$ i $Yv_{j-1} = jv_j$. Stoga zbog $XY = YX + H$ imamo redom

$$(j+1)Xv_{j+1} = XYv_j = YXv_j + Hv_j = (\lambda - j + 1)Yv_{j-1} + (\lambda - 2j)v_j =$$

$$= [j(\lambda - j + 1) + \lambda - 2j]v_j = (j+1)(\lambda - j)v_j.$$

No to znači da je

$$Xv_{j+1} = [\lambda - (j+1) + 1]v_{(j+1)-1},$$

odnosno, proveden je korak indukcije za dokaz druge jednakosti u (3.1).

Zadržimo pretpostavke i oznake iz leme 3.2.1. Prema prvoj jednakosti u (3.1) vektori v_j su svojstveni vektori operatora H za međusobno različite svojstvene vrijednosti. Prema tome, svi oni koji su $\neq 0$ su linearno nezavisni. Budući da je prostor V konačnodimenzionalan, postoji $m \in \mathbb{Z}_+$ takav da je $v_m \neq 0$ i $v_{m+1} = 0$. Sada formule (3.1) pokazuju da je potprostor $span\{v_0, \ldots, v_m\}$ $\pi-$invarijantan i $(m+1)-$dimenzionalan. Pretpostavimo li da je reprezentacija π ireducibilna, zaključujemo da je $\{v_0, \ldots, v_m\}$ baza prostora V. Napokon, kako je $v_{m+1} = 0$, druga jednakost u (3.1) za $j = m+1$ daje

$$0 = Xv_{m+1} = (\lambda - m)v_m,$$

a kako je $v_m \neq 0$, zaključujemo da je $\lambda - m = 0$, odnosno, $\lambda = m$.

Obratno, neka je $m \in \mathbb{Z}_+$ i pretpostavimo da je V $(m+1)-$dimenzionalan kompleksan vektorski prostor s bazom $\{v_0, \ldots, v_m\}$. Neka su X, Y i H linearni operatori na prostoru V zadani svojim djelovanjem na izabranu bazu:

$$\begin{gathered} Hv_j = (m-2j)v_j, \qquad 0 \leq j \leq m, \\ Xv_0 = 0, \qquad Xv_j = (m-j+1)v_{j-1}, \quad 0 < j \leq m, \\ Yv_j = (j+1)v_{j+1}, \quad 0 \leq j < m, \qquad Yv_m = 0. \end{gathered} \tag{3.2}$$

Direktnim računom djelovanja operatora H, X i Y i njihovih komutatora na vektore baze provjerava se da vrijede komutacione relacije

$$[H,X] = 2X, \qquad [H,Y] = -2Y, \qquad [X,Y] = H.$$

No tada je sa

$$\pi(\alpha x + \beta y + \gamma h) = \alpha X + \beta Y + \gamma H, \qquad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C},$$

očito zadana reprezentacija π Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ na prostoru V. Ta je reprezentacija ireducibilna. Doista, pretpostavimo da je $W \neq \{0\}$ potprostor od V koji je $\pi-$invarijantan, tj. koji je invarijantan s obzirom na operatore X, Y i H. Tada W sadrži neki svojstven vektor operatora H. Kako su vektori baze $v_0, \ldots, v_m$ svojstveni vektori od H s međusobno različitim svojstvenim vrijednostima $m, m-2, \ldots, -m+2, -m$, zaključujemo da je $v_j \in W$ za neki $j \in \{0, \ldots, m\}$. Iz druge formule u (3.2) slijedi da su tada $v_0, \ldots, v_{j-1} \in W$, a iz treće da su i $v_{j+1}, \ldots, v_m \in W$. Dakle, nužno je $W = V$ i time je dokazana ireducibilnost reprezentacije π.

Na taj način dokazali smo:

Teorem 3.2.2. *Neka je $\mathfrak{s}$ TDS$-$algebra i (h,x,y) neka njezina $S-$trojka.*

(a) *Za svaki $m \in \mathbb{Z}_+$ postoji do na ekvivalenciju jedinstvena ireducibilna $(m+1)-$dimenzionalna reprezentacija π_m Liejeve algebre $\mathfrak{s}$.*

(b) *Težine reprezentacije π_m su $m, m-2, \ldots, -m+2, -m$ i svaki je težinski potprostor jednodimenzionalan.*

(c) *Postoji do na skalarni multipl $\neq 0$ jedinstven primitivni vektor reprezentacije π_m i njegova težina je m.*

(d) *Postoji baza $\{v_0, \ldots, v_m\}$ prostora reprezentacije π_m na koju operatori $H = \pi_m(h)$, $X = \pi_m(x)$ i $Y = \pi_m(y)$ djeluju po formulama* (3.2).

Teorem 3.2.3. *Neka je π reprezentacija TDS$-$algebre $\mathfrak{s}$ na konačnodimenzionalnom kompleksnom vektorskom prostoru V.*

(a) *Sve su težine reprezentacije π cijeli brojevi.*

(b) *Za svaki $j \in \mathbb{Z}_+$ vrijedi* $\dim V_j = \dim V_{-j}$.

(c) *Ako je $V = W_1 \dotplus \cdots \dotplus W_s$ rastav prostora V u direktnu sumu $\pi-$invarijantnih potprostora takvih da je svaka subreprezentacija π_{W_i} ireducibilna, onda je* $s = \dim V_0 + \dim V_1$. *Preciznije,* $\dim V_0$ *je broj indeksa $i \in \{1, \ldots, s\}$ takvih da je potprostor W_i neparne dimenzije, a* $\dim V_1$ *je broj indeksa $i \in \{1, \ldots, s\}$ takvih da je potprostor W_i parne dimenzije.*

Dokaz: Prema Weylovom teoremu 3.1.13. o potpunoj reducibilnosti postoji rastav

$$V = W_1 \dotplus \cdots \dotplus W_s,$$

gdje su svi potprostori W_i $\pi-$invarijantni i sve subreprezentacije π_{W_i} su ireducibilne. Svaka od tih subreprezentacija je prema teoremu 3.2.2. ekvivalentna nekoj od reprezentacija π_m čije su sve težine cijeli brojevi. Odatle neposredno slijedi tvrdnja (a), a i tvrdnja (b). Napokon, u svakoj neparnodimenzionalnoj ireducibilnoj reprezentaciji težinski potprostor za težinu 0 je jednodimenzionalan, a 1 nije težina, dok je s druge strane u svakoj parnodimenzionalnoj ireducibilnoj reprezentaciji težinski potprostor za težinu 1 jednodimenzionalan, a 0 nije težina. Odatle slijedi tvrdnja (c).

Za svaku (kompleksnu ili realnu) Liejevu algebru $\mathfrak{g}$ i za $x \in \mathfrak{g}$ operator $\operatorname{ad} x$ na prostoru $\mathfrak{g}$ je derivacija Liejeve algebre $\mathfrak{g}$. Jednostavan račun pokazuje da je za svaku derivaciju $D \in \operatorname{Der}(\mathfrak{g})$ linearan operator e^D automorfizam Liejeve algebre $\mathfrak{g}$. Doista, taj je operator invertibilan i za bilo koje $x, y \in \mathfrak{g}$ imamo

$$\mathrm{e}^D[x,y] = \sum_{n\in\mathbb{Z}_+} \frac{1}{n!} D^n[x,y].$$

Nadalje, budući da je D derivacija Liejeve algebre, indukcijom po n dokazuje se da vrijedi binomna formula

$$D^n[x,y] = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left[D^k x, D^{n-k} y\right].$$

Odatle nalazimo zamjenom poretka sumacije (koja se opravdava apsolutnom konvergencijom u podnosu na bilo koju normu na prostoru $\mathfrak{g}$) nalazimo

$$\mathrm{e}^D[x,y] = \sum_{n\in\mathbb{Z}_+} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n!} \left[D^k x, D^{n-k} y\right] = \sum_{n\in\mathbb{Z}_+} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!(n-k)!} \left[D^k x, D^{n-k} y\right] =$$

$$= \sum_{k\in\mathbb{Z}_+} \sum_{j\in\mathbb{Z}_+} \frac{1}{k!j!} \left[D^k x, D^j y\right] = \left[\sum_{k\in\mathbb{Z}_+} \frac{1}{k!} D^k x, \sum_{j\in\mathbb{Z}_+} \frac{1}{j!} D^j y\right] = \left[\mathrm{e}^D x, \mathrm{e}^D y\right].$$

Posebno, $\mathrm{e}^{\operatorname{ad} x} \in \operatorname{Aut}(\mathfrak{g})$ za svaki $x \in \mathfrak{g}$. Podgrupa od $\operatorname{Aut}(\mathfrak{g})$ generirana svim takvim automorfizmima označava se $\operatorname{Int}(\mathfrak{g})$ i njeni se elementi zovu **unutarnji automorfizmi** Liejeve algebre $\mathfrak{g}$. Ako je $\mathfrak{g}$ poluprosta Liejeva algebra, pomoću teorema 3.1.12. može se dokazati da je $\operatorname{Int}(\mathfrak{g})$ komponenta povezanosti jedinice u topološkoj grupi $\operatorname{Aut}(\mathfrak{g})$ (koja je očito zatvorena podgrupa grupe $\operatorname{GL}(\mathfrak{g})$).

U teoriji invarijanata poluproste kompleksne Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ posebnu će ulogu igrati skup $\mathcal{N}$ svih nilpotentnih elemenata od $\mathfrak{g}$. Taj je skup očito $\operatorname{Int}(\mathfrak{g})-$invarijantan (pa i $\operatorname{Aut}(\mathfrak{g})-$invarijantan), dakle, $\mathcal{N}$ je disjunktna unija $\operatorname{Int}(\mathfrak{g})-$orbita. Proučimo sada $\operatorname{Int}(\mathfrak{s})-$orbite u kompleksnoj TDS−algebri $\mathfrak{s}$. U tu svrhu možemo pretpostaviti da je $\mathfrak{s} = \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$.

Lema 3.2.4. *(a)* *$z \in \mathfrak{s}$ je nilpotentan element Liejeve algebre $\mathfrak{s}$ ako i samo ako je z nilpotentna matrica.*

(b) *$z \in \mathfrak{s}$ je poluprost element Liejeve algebre $\mathfrak{s}$ ako i samo ako je z poluprosta (tj. dijagonalizabilna) matrica.*

(c) *Svaki element $z \in \mathfrak{s}$ je ili poluprost ili nilpotentan.*

(d) *Ako sa $\mathcal{N}$ označimo skup svih nilpotentnih elemenata Liejeve algebre $\mathfrak{s}$, onda je $\mathcal{N} \setminus \{0\}$ jedna $\operatorname{Int}(\mathfrak{s})-$orbita.*

Dokaz: Neka je $z \in \mathfrak{s} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ nenilpotentna matrica. Promatrajmo z na uobičajen način kao linearan operator na dvodimenzionalnom prostoru jednostupčanih matrica $V = M_{2,1}(\mathbb{C})$. Spektar $Sp(z)$ nenilpotentnog operatora z različit je od $\{0\}$. Ako je $\lambda \in Sp(z) \setminus \{0\}$ onda postoji vektor $v \in V \setminus \{0\}$ takav da je $zv = \lambda v$. U bazi $\{v, w\}$ prostora V operator z ima gornje trokutastu matricu, a zbog zahtjeva $\operatorname{Tr} z = 0$ slijedi da je i $-\lambda$ svojstvena vrijednost operatora z i drugi vektor baze w možemo izabrati tako da je $zw = -\lambda w$. To znači da je matrica z slična matrici $\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & -\lambda \end{bmatrix}$, odnosno, z je poluprosta matrica. Time je dokazano da je svaka matrica iz $\mathfrak{s}$ ili nilpotentna ili poluprosta.

Pretpostavimo sada da je $z \in \mathfrak{s}$ poluprosta matrica različita od nule. Tada je $Sp(z) = \{\lambda, -\lambda\}$ za neki $\lambda \in \mathbb{C}^*$ i postoji matrica $g \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$ takva da je $u = gzg^{-1} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & -\lambda \end{bmatrix}$. Imamo za standardnu S$-$trojku (h, x, y) od $\mathfrak{s}$

$$(\operatorname{ad} u)h = \left[\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & -\lambda \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\right] = 0,$$

$$(\operatorname{ad} u)x = \left[\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & -\lambda \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right] = \begin{bmatrix} 0 & \lambda \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 2\lambda x,$$

$$(\operatorname{ad} u)y = \left[\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & -\lambda \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -2\lambda & 0 \end{bmatrix} = -2\lambda y.$$

Prema tome operator $\operatorname{ad} u$ je poluprost. Međutim, imamo za svaki $v \in \mathfrak{s}$

$$(\operatorname{ad} z)v = (\operatorname{ad} g^{-1}ug)v = [g^{-1}ug, v] = g^{-1}[u, gvg^{-1}]g = \left(g^{-1}(\operatorname{ad} u)g\right) gvg^{-1},$$

što pokazuje da je i $\operatorname{ad} z$ poluprost operator, odnosno, z je poluprost element Liejeve algebre $\mathfrak{s}$.

Pretpostavimo sada da je $z \in \mathfrak{s}$ nilpotentna matrica. Tada je $z^2 = 0$, pa za svaki $u \in \mathfrak{s}$ imamo

$$(\operatorname{ad} z)^2 u = [z, [z, u]] = [z, zu - uz] = z^2 u - 2zuz + uz^2 = -2zuz,$$

dakle,

$$(\operatorname{ad} z)^3 u = -2[z, zuz] = -2z^2 uz + 2zuz^2 = 0.$$

Prema tome, $(\operatorname{ad} z)^3 = 0$, dakle, $\operatorname{ad} z$ je nilpotentan operator, odnosno, z je nilpotentan element Lijeve algebre $\mathfrak{s}$.

Time su dokazane tvrdnje (a), (b) i (c).

Neka je sada $z \in \mathcal{N} \setminus \{0\}$. Tada je z nilpotentna matrica indeksa 2, dakle, slična je matrici $x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Možemo izabrati $g \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ tako da je $z = gxg^{-1}$. Dokaz tvrdnje (d) sada slijedi iz sljedećeg zadatka:

Zadatak 3.2.3. *Dokažite da vrijedi*

$$\operatorname{Int}(\mathfrak{s}) = \operatorname{Ad} \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}) = \{\operatorname{Ad} g;\ g \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})\},$$

pri čemu je

$$(\operatorname{Ad} g)u = gug^{-1}, \qquad u \in \mathfrak{s}, \quad g \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}).$$

Uputa: Iskoristite mogućnost (jedinstvenog) prikaza bilo koje matrice $g \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ u polarnom obliku $g = k\mathrm{e}^b$, gdje je k unitarna matrica determinante 1, tj. $k \in \mathrm{SU}(2)$, a b je hermitska matrica traga 0.

Napominjemo da je tvrdnja zadatka 3.2.3. specijalni slučaj opisa grupe unutarnjih automorfizama reduktivne Liejeve podalgebre od $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ ili $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ koji ćemo obraditi u jednom od narednih odjeljaka.

3.3 Nilpotentni elementi i TDS−podalgebre

U proučavanju nilpotentnih orbita u kompleksnoj poluprostoj Liejevoj algebri $\mathfrak{g}$ glavno je sredstvo Jacobson−Morosovljev teorem prema kojem je svaki nilpotentni element $e \in \mathfrak{g}$ sadržan u nekoj TDS−podalgebri od $\mathfrak{g}$. Da bismo to dokazali, trebaju nam neki rezultati o nilpotentnosti linearnih operatora. U daljnjem je V konačnodimenzionalan vektorski prostor nad poljem K karakteristike 0.

Propozicija 3.3.1. *Linearan operator $A \in L(V)$ je nilpotentan ako i samo ako je $\operatorname{Tr} A^k = 0$ za svaki $k \in \mathbb{N}$ (dovoljno je za $k \leq \dim V$).*

Dokaz: Možemo pretpostaviti da je polje K algebarski zatvoreno. Jasno je da je za nilpotentan operator A i svaka njegova potencija A^k nilpotentan operator, pa je $\operatorname{Tr} A^k = 0$. Za proizvoljan operator $A \in L(V)$ postoji baza u kojoj A ima gornje trokutastu matricu. Na njenoj su dijagonali svojstvene vrijednosti $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ operatora A ($n = \dim V$) i svojstveni polinom od A jednak je

$$P_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \prod_{j=1}^{n} (\lambda - \lambda_j) = \lambda^n - \sigma_1 \lambda^{n-1} - \cdots \sigma_{n-1}\lambda - \sigma_n.$$

Stavimo sada

$$\tau_k = \operatorname{Tr} A^k = \lambda_1^k + \cdots + \lambda_n^k.$$

Tada prema Newtonovim formulama (v. zadatak 2.1.4.) vrijedi

$$\sigma_1 = \tau_1 \qquad \text{i} \qquad \sigma_k = \tau_k - \sigma_1 \tau_{k-1} - \cdots - \sigma_{k-1}\tau_1 \quad \text{za} \quad 2 \leq k \leq n.$$

Ako pretpostavimo da je $\tau_k = \operatorname{Tr} A^k = 0$ za $k = 1, \ldots, n$, indukcijom po k slijedi $\sigma_k = 0$ za $k = 1, \ldots, n$. To znači da je $P_A(\lambda) = \lambda^n$, odnosno, prema Hamilton−Cayleyevom teoremu je $A^n = 0$. Dakle, A je nilpotentan operator.

Lema 3.3.2. (**Jacobson**) *Neka su $A_1, \ldots, A_s, B_1, \ldots, B_s \in L(V)$ i pretpostavimo da operator $X = \sum_{j=1}^{s} [A_j, B_j]$ komutira s operatorima $A_1, \ldots, A_s$. Tada je operator X nilpotentan. Posebno, ako su $A, B \in L(V)$ i vrijedi $[A, [A, B]] = 0$, onda je $[A, B]$ nilpotentan operator.*

Dokaz: Budući da X komutira sa $A_1, \ldots, A_s$, svaka njegova potencija također komutira sa $A_1, \ldots, A_s$, pa za svaki $k \in \mathbb{N}$ imamo

$$X^k = X^{k-1} \sum_{j=1}^{s} (A_j B_j - B_j A_j) = \sum_{j=1}^{s} (A_j X^{k-1} B_j - X^{k-1} B_j A_j) = \sum_{j=1}^{s} \left[A_j, X^{k-1} B_j\right].$$

Kako je trag komutatora linearnih operatora jednak nuli, slijedi da je $\operatorname{Tr} X^k = 0$ za svaki $k \in \mathbb{N}$. Sada tvrdnja slijedi iz propozicije 3.3.1.

Lema 3.3.3. (**Kostant**) *Neka su $A, B \in L(V)$ i pretpostavimo da je operator A nilpotentan i da komutira sa $[A, B]$. Tada je AB nilpotentan operator.*

Dokaz: Ponovo možemo pretpostaviti da je polje K algebarski zatvoreno. Stavimo

$$V_k = \operatorname{Ker} A^k, \qquad k \in \mathbb{Z}_+.$$

Indukcijom po k dokazat ćemo da su svi potprostori V_k invarijantni u odnosu na operator AB. To je očito za $k = 0$, jer je $V_0 = \{0\}$. Pretpostavimo da je tvrdnja dokazana za neki $k \in \mathbb{Z}_+$ i neka je $v \in V_{k+1}$. Budući da A^{k+1} komutira sa $[A,B]$, primjenom A^{k+1} na obje strane jednakosti $ABv = [A,B]v + BAv$ dobivamo

$$A^{k+1}ABv = [A,B]A^{k+1}v + A^{k+1}BAv = A^k(AB)Av.$$

Međutim, $Av \in V_k$ pa je po pretpostavci indukcije $(AB)Av \in V_k$. Slijedi $A^k(AB)Av = 0$, odnosno, prema gornjoj jednakosti $(AB)v \in V_{k+1}$. Time je tvrdnja dokazana.

Pretpostavimo da operator AB nije nilpotentan. Tada postoje $0 \neq \lambda \in K$ i $0 \neq v \in V$ takvi da je

$$ABv = \lambda v. \tag{3.3}$$

Neka je $k \in \mathbb{Z}_+$ najmanji takav da je $v \in V_{k+1}$. Takav postoji jer je A nilpotentan operator, pa je $V_{\dim V} = V$. Sada imamo

$$A^kABv = A^k[A,B]v + A^kBAv.$$

Indukcijom po k provjerava se da vrijedi $[A^k, B] = k[A,B]A^{k-1}$, odnosno, $A^kB = BA^k + k[A,B]A^{k-1}$. Odatle je

$$A^kBAv = BA^{k+1}v + k[A,B]A^kv = k[A,B]A^kv.$$

Uvrstimo li to u prethodnu jednakost, dobivamo

$$A^kABv = (k+1)[A,B]A^kv.$$

Odatle i iz (3.3) slijedi

$$[A,B]A^kv = \frac{\lambda}{k+1}A^kv.$$

Kako je $A^kv \neq 0$, to je u suprotnosti s Jacobsonovom lemom 3.3.2. prema kojoj je operator $[A,B]$ nilpotentan. Ova kontradikcija dokazuje lemu.

U daljnjem je $\mathfrak{g}$ kompleksna poluprosta Liejeva algebra. Da bi element $x \in \mathfrak{g}$ bio poluprost nužno je i dovoljno da bude sadržan u nekoj Cartanovoj podalgebri. To je neposredna posljedica teorema 3.1.8. Za svaki $x \in \mathfrak{g}$ označavamo

$$\mathfrak{g}^x = \operatorname{Ker} \operatorname{ad} x = C_{\mathfrak{g}}(x) = \{y \in \mathfrak{g};\ [x,y] = 0\}.$$

Element $h \in \mathfrak{g}$ zove se **regularan** ako je poluprost i $\mathfrak{g}^h$ je Cartanova podalgebra. Skup svih regularnih elemenata u $\mathfrak{g}$ označavamo sa $\mathfrak{g}'$. Iz teorema 3.1.9. slijedi da je za svaku Cartanovu podalgebru $\mathfrak{h}$ od $\mathfrak{g}$ presjek $\mathfrak{h}' = \mathfrak{g}' \cap \mathfrak{h}$ komplement unije hiperravnina $\bigcup_{\alpha \in R(\mathfrak{g},\mathfrak{h})} \operatorname{Ker} \alpha$.

Ako je nilpotentan element $e \in \mathfrak{g}$ sadržan u nekoj TDS$-$podalgebri, onda je $e \in \operatorname{Im}(\operatorname{ad} e)^2$. Naime, prema tvrdnji (d) leme 3.2.4. svaki takav element $e \neq 0$ je drugi član x neke $S-$trojke (h,x,y), a tada je $(ad\, e)^2 y = [e,h] = -2e$. To svojstvo imaju svi nilpotentni elementi poluproste Liejeve algebre:

Lema 3.3.4. *Neka je $e \in \mathfrak{g}$ nilpotentan element. Tada je $e \in \operatorname{Im}(\operatorname{ad} e)^2$.*

Dokaz: Zbog svojstva invarijantnosti Killingove forme B operator $\operatorname{ad} e$ je antisimetričan u odnosu na formu B. No tada je njegov kvadrat $A = (\operatorname{ad} e)^2$ simetričan u odnosu na B. Neka su $v \in \operatorname{Im} A$ i $u \in \operatorname{Ker} A$. Za neki $z \in \mathfrak{g}$ je tada $v = Az$, dakle, $B(v,u) = B(Az,u) = B(z,Au) = 0$. Prema tome, vrijedi

$$B(\operatorname{Im} A, \operatorname{Ker} A) = \{0\}.$$

Zbog nedegeneriranosti forme B i zbog teorema o rangu i defektu imamo

$$\dim(\operatorname{Ker} A)^{\perp} = \dim \mathfrak{g} - \dim \operatorname{Ker} A = \dim \operatorname{Im} A.$$

Prema tome,

$$\operatorname{Im} A = (\operatorname{Ker} A)^{\perp} = \{z \in \mathfrak{g};\ B(z, y) = 0 \ \ \forall y \in \operatorname{Ker} A\}.$$

Ako je $y \in \operatorname{Ker} A$, onda je $[e, [e, y]] = 0$, pa slijedi $[\operatorname{ad} e, [\operatorname{ad} e, \operatorname{ad} y]] = 0$. Budući da je $\operatorname{ad} e$ nilpotentan operator, iz Kostantove leme 3.3.3. slijedi da je umnožak $(\operatorname{ad} e)(\operatorname{ad} y)$ nilpotentan operator. Tada je posebno

$$0 = \operatorname{Tr}(\operatorname{ad} e)(\operatorname{ad} y) = B(e, y).$$

Kako je $y \in \operatorname{Ker} A$ bio proizvoljan, dokazali smo da je $e \in (\operatorname{Ker} A)^{\perp} = \operatorname{Im} A = \operatorname{Im}(\operatorname{ad} e)^2$.

U daljnjem je fiksiran nilpotentan element $e \in \mathfrak{g}$. Iz leme 3.3.4. slijedi da postoji $f \in \mathfrak{g}$ takav da je $2e = [e, [e, f]]$. Fiksiramo u daljnjem takav element f i stavimo $h = [f, e]$. Tada je $[h, e] = 2e$. Budući da je $\operatorname{ad} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ homomorfizam Liejevih algebri, operatori $E = \operatorname{ad} e$, $F = \operatorname{ad} f$ i $H = \operatorname{ad} h$ zadovoljavaju

$$[F, E] = H \qquad \text{i} \qquad [H, E] = 2E. \tag{3.4}$$

Zadatak 3.3.1. *Neka su E, F i H linearni operatori na vektorskom prostoru V koji zadovoljavaju* (3.4)*. Indukcijom po k dokažite da vrijedi*

$$[H, E^k] = 2kE^k \qquad i \qquad [E^k, F] = k(k-1)E^{k-1} - kHE^{k-1} \qquad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Lema 3.3.5. *(a) Podalgebra $\mathfrak{g}^e = \operatorname{Ker} \operatorname{ad} e = C_{\mathfrak{g}}(e)$ invarijantna je u odnosu na operator $\operatorname{ad} h$.*

(b) Neka je $m \in \mathbb{Z}_+$ najmanji takav da je $(\operatorname{ad} e)^{m+1} = 0$. Tada produkt

$$\prod_{p=0}^{m} (\operatorname{ad} h - pI)$$

iščezava na $\mathfrak{g}^e$.

(c) Restrikcija $(\operatorname{ad} h)|\mathfrak{g}^e$ je poluprost operator i spektar mu je sadržan u $\{0, 1, \ldots, m\}$.

Dokaz: (a) Ako je $y \in \mathfrak{g}^e$, imamo $[e, y] = 0$, pa je

$$(\operatorname{ad} e)(\operatorname{ad} h)y = [e, [h, y]] = [[e, h], y] + [h, [e, y]] = -2[e, y] = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad (\operatorname{ad} h)y \in \mathfrak{g}^e.$$

Time je dokazana invarijantnost podalgebre $\mathfrak{g}^e$ u odnosu na operator $\operatorname{ad} h$.

(b) Definiramo padajući niz potprostora

$$\mathfrak{g}^e = X_0 \supseteq X_1 \supseteq \cdots \supseteq X_{m+1} = \{0\}, \qquad X_p = \operatorname{Im}(\operatorname{ad} e)^p \cap \mathfrak{g}^e.$$

Tvrdnja će slijediti ako dokažemo da vrijedi

$$(\operatorname{ad} h - pI)X_p \subseteq X_{p+1}.$$

Neka je $y \in X_p$. Tada je $y = (\operatorname{ad} e)^p z$ za neki $z \in \mathfrak{g}$. Prema zadatku 3.3.1. je

$$[\operatorname{ad}, h, (\operatorname{ad} e)^p] = 2p(\operatorname{ad} e)^p,$$

dakle,

$$[\operatorname{ad} h, (\operatorname{ad} e)^p]\, z = 2py.$$

Stoga imamo

$$[h,y]-2py=(ad\,h)(\mathrm{ad}\,e)^pz-[\mathrm{ad}\,h,(\mathrm{ad}\,e)^p]\,z=(\mathrm{ad}\,e)^p(\mathrm{ad}\,h)z=(\mathrm{ad}\,e)^p[h,z]=(\mathrm{ad}\,e)^p[[f,e],z].$$

Međutim,

$$[[f,e],z]=[z,[e,f]]=[e,[z,f]]+[[z,e],f]=(\mathrm{ad}\,e)[z,f]+(\mathrm{ad}\,f)[e,z].$$

Stoga iz prethodne jednakosti dobivamo

$$[h,y]-2py=(\mathrm{ad}\,e)^{p+1}[z,f]+(\mathrm{ad}\,e)^p(\mathrm{ad}\,f)[e,z]. \tag{3.5}$$

Prema drugoj jednakosti u zadatku 3.3.1. za $k=p$ imamo

$$[(\mathrm{ad}\,e)^p,\mathrm{ad}\,f]=p(p-1)(\mathrm{ad}\,e)^{p-1}-p(\mathrm{ad}\,h)(\mathrm{ad}\,e)^{p-1}.$$

Primijenimo li tu jednakost na $[e,z]=(\mathrm{ad}\,e)z$, dobivamo

$$(\mathrm{ad}\,e)^p(\mathrm{ad}\,f)[e,z]=(\mathrm{ad}\,f)(\mathrm{ad}\,e)^p[e,z]+p(p-1)(\mathrm{ad}\,e)^pz-p(\mathrm{ad}\,h)(\mathrm{ad}\,e)^pz.$$

Međutim, kako je $y\in\mathfrak{g}^e$, imamo $(\mathrm{ad}\,e)^p[e,z]=(\mathrm{ad}\,e)(\mathrm{ad}\,e)^pz=(\mathrm{ad}\,e)y=0$. Dakle, dobivamo

$$(\mathrm{ad}\,e)^p(\mathrm{ad}\,f)[e,z]=p(p-1)y-p[h,y].$$

Uvrstimo li to u (3.5), nalazimo

$$[h,y]-2py=(\mathrm{ad}\,e)^{p+1}[z,f]+p(p-1)y-p[h,y].$$

Odatle slijedi

$$(p+1)[h,y]-p(p+1)y=(\mathrm{ad}\,e)^{p+1}[z,f]\quad\Longrightarrow\quad(\mathrm{ad}\,h-pI)y=\frac{1}{p+1}(\mathrm{ad}\,e)^{p+1}[z,f]\in X_{p+1}.$$

Time je tvrdnja (b) dokazana.

(c) Prema tvrdnji (b) za restrikciju $A=(\mathrm{ad}\,h)|\mathfrak{g}^e$ i za polinom $P(\lambda)=\lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-m)$ vrijedi $P(A)=0$. Tada je polinom $P(\lambda)$ djeljiv s minimalnim polinomom $\mu_A(\lambda)$ operatora A, pa slijedi da $\mu_A(\lambda)$ ima jednostruke nultočke i sve su iz skupa $\{0,1,\ldots,m\}$. To znači da je operator $A=(\mathrm{ad}\,h)|\mathfrak{g}^e$ poluprost i spektar mu je sadržan u $\{0,1,\ldots,m\}$.

Iz tvrdnje (c) leme 3.3.5. neposredno slijedi

Korolar 3.3.6. *Linearan operator* $(\mathrm{ad}\,h+2I)|\mathfrak{g}^e$ *je regularan.*

Teorem 3.3.7. (**Jacobson−Morosov**) *Svaki je nilpotentan element kompleksne poluproste Liejeve algebre* $\mathfrak{g}\neq\{0\}$ *sadržan u nekoj* TDS−*podalgebri.*

Dokaz: Prije svega uočimo da teorem vrijedi za nilpotentan element 0 ukoliko dokažemo da u $\mathfrak{g}$ postoji barem jedna TDS−podalgebra. No to će slijediti iz ovog dokaza budući da poluprosta algebra $\mathfrak{g}\neq\{0\}$ sadrži nilpotentne elemente $\neq 0$.

Neka je $e\neq 0$ nilpotentan element u $\mathfrak{g}$ i neka su $f,h\in\mathfrak{g}$ izabrani kao prije iskaza leme 3.3.5., dakle, takvi da je $h=[f,e]$ i $[h,e]=2e$. Pretpostavimo najprije da je $[h,f]=-2f$. Tada za $x=e$ i $y=-f$ imamo $[x,y]=h$, $[h,x]=2x$ i $[h,y]=-2y$, odnosno, (h,x,y) je S−trojka i element $e=x$ sadržan je u TDS−podalgebri $\mathbb{C}h\dotplus\mathbb{C}x\dotplus\mathbb{C}y$.

Pretpostavimo sada da je $[h,f]\neq-2f$, tj. $z=(\mathrm{ad}\,h+2I)f\neq 0$. Imamo

$$[z,e]=[[h,f],e]+2[f,e]=-[[f,e],h]-[[e,h],f]+2h=-[h,h]+2[e,f]+2h=0.$$

To znači da je $z \in \mathfrak{g}^e$. Prema korolaru 3.3.6. linearan operator $(\operatorname{ad} h + 2I)|\mathfrak{g}^e$ je regularan, pa postoji $g \in \mathfrak{g}^e$ takav da je $z = (\operatorname{ad} h + 2I)g$. Tada imamo $[h, f] + 2f = z = [h, g] + 2g$, tj. $[h, g - f] = -2(g - f)$. Dakle, ako stavimo $x = e$ i $y = g - f$, imamo

$$[h, x] = 2x, \qquad [h, y] = -2y \qquad \text{i} \qquad [x, y] = [e, g] - [e, f] = [f, e] = h.$$

Prema tome, (h, x, y) je $S-$trojka i $e = x$ je sadržan u TDS−algebri $\mathbb{C}h \dotplus \mathbb{C}x \dotplus \mathbb{C}y$.

Za $S-$trojku (h, x, y) kažemo da je h njezin **neutralan element**, x je njezin **nilpozitivan element** i y je njezin **nilnegativan element**. Svaka $S-$trojka je baza TDS−podalgebre. Za dvije $S-$trojke (h, x, y) i (h', x', y') kažemo da su **konjugirane** ako postoji $A \in \operatorname{Int}(\mathfrak{g})$ takav da je $Ah = h'$, $Ax = x'$ i $Ay = y'$. Sljedeći nam je cilj za dani nilpotentan element $e \neq 0$ pronaći sve $S-$trojke u kojima je e nilpozitivni element. Prema tvrdnji (d) leme 3.2.4. na taj ćemo način pronaći sve TDS−podalgebre koje sadrže element e.

Korolar 3.3.8. *Neka su $e, h \in \mathfrak{g}$, pri čemu je $e \neq 0$ nilpotentan. Tada su h i e neutralan i nilpozitivan element neke $S-$trojke ako i samo ako vrijedi*

(1) $h \in \operatorname{Im} \operatorname{ad} e$.

(2) $[h, e] = 2e$.

Nadalje, ako h i e zadovoljavaju te uvjete onda je takva $S-$trojka jedinstvena (odnosno, tada su h i e sadržani u samo jednoj TDS−*podalgebri).*

Dokaz: Ako je h neutralan a e nilpozitivan element neke $S-$trojke, onda su očito ispunjeni uvjeti (1) i (2). Obratno, ako su ti uvjeti ispunjeni, onda iz dokaza Jacobson−Morosovljevog teorema 3.3.7. slijedi da je h neutralan, a e nilpozitivan element neke $S-$trojke. Da dokažemo jedinstvenost takve $S-$trojke pretpostavimo da su (h, e, y_1) i (h, e, y_2) $S-$trojke. Tada vrijedi $[e, y_1 - y_2] = 0$, dakle, $y_1 - y_2 \in \mathfrak{g}^e$. Nadalje,

$$(\operatorname{ad} h + 2I)(y_1 - y_2) = [h, y_1] - [h, y_2] + 2y_1 - 2y_2 = 0.$$

Odatle i iz korolara 3.3.6. slijedi $y_1 - y_2 = 0$, tj. $y_1 = y_2$.

Grupa automorfizama $\operatorname{Aut}(\mathfrak{g})$ Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ je zatvorena podgrupa Liejeve grupe $\operatorname{GL}(\mathfrak{g})$, dakle, i sama je Liejeva grupa. Liejeva algebra Liejeve grupe $\operatorname{GL}(\mathfrak{g})$ identificira se sa $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$, i uz tu identifikaciju eksponencijalno preslikavanje $\exp : \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}) \to \operatorname{GL}(\mathfrak{g})$ dano je sa $A \mapsto \mathrm{e}^A$. Iz teorije Liejevih grupa slijedi da se Liejeva algebra zatvorene podgrupe $\operatorname{Aut}(\mathfrak{g})$ identificira sa

$$\{A \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{g});\ \mathrm{e}^{tA} \in \operatorname{Aut}(\mathfrak{g})\ \ \forall t \in \mathbb{R}\}.$$

Imamo

$$\mathrm{e}^{tA} \in \operatorname{Aut}(\mathfrak{g}) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mathrm{e}^{tA}[x, y] = \left[\mathrm{e}^{tA}x, \mathrm{e}^{tA}y\right] \quad \forall x, y \in \mathfrak{g}.$$

Deriviranjem po t u nuli odatle slijedi $A[x, y] = [Ax, y] + [x, Ay]\ \forall x, y \in \mathfrak{g}$, tj. $A \in \operatorname{Der}(\mathfrak{g})$. Obratno, ako je $A \in \operatorname{Der}(\mathfrak{g})$ vrijedi Leibnitzova formula

$$A^n[x, y] = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} [A^k x, A^{n-k} y],$$

a odatle, koristeći apsolutnu konvergenciju eksponencijalnih redova, dobivamo

$$\mathrm{e}^{tA}[x,y] = \left[\mathrm{e}^{tA}x, \mathrm{e}^{tA}y\right] \qquad \forall t \in \mathbb{R} \quad \text{i} \quad \forall x,y \in \mathfrak{g},$$

dakle, $\mathrm{e}^{tA} \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ $\forall t \in \mathbb{R}$, odnosno, A je u Liejevoj algebri Liejeve grupe $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$. Prema tome, Liejeva algebra od $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ je $\mathrm{Der}(\mathfrak{g})$. No prema teoremu 3.1.12. sve su derivacije poluproste Liejeve algebre unutarnje, $\mathrm{Der}(\mathfrak{g}) = \mathrm{ad}\,\mathfrak{g}$. Prema tome, povezana podgrupa $\mathrm{Int}(\mathfrak{g})$ unutarnjih automorfizama, koja je generirana sa $\mathrm{e}^{\mathrm{ad}\,\mathfrak{g}}$, ima istu Liejevu algebru kao i grupa $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$. Ovo razmatranje pokazuje da je $\mathrm{Int}(\mathfrak{g})$ povezana otvorena podgrupa od $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$, dakle, $\mathrm{Int}(\mathfrak{g})$ je komponenta povezanosti jedinice grupe $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$.

U daljnjem grupu unutarnjih automorfizama $\mathrm{Int}(\mathfrak{g})$ kompleksne poluproste Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ označavamo sa G. Njena je Liejeva algebra identificirana sa $\mathfrak{g}$ i $x \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{ad}\,x}$ je odgovarajuće eksponencijalno preslikavanje. Prirodna je bijekcija $A \longleftrightarrow \mathfrak{a}$ između svih povezanih Liejevih podgrupa A od G i svih Liejevih podalgebri $\mathfrak{a}$ od $\mathfrak{g}$. Ta je bijekcija dana sa

$$A = \left\langle \mathrm{e}^{\mathrm{ad}\,x};\ x \in \mathfrak{a} \right\rangle, \qquad \mathfrak{a} = \left\{ x \in \mathfrak{g};\ \mathrm{e}^{t\,\mathrm{ad}\,x} \in A\ \ \forall t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Za svaki $e \in \mathfrak{g}$ definirali smo

$$\mathfrak{g}^e = \mathrm{Ker}\,\mathrm{ad}\,e = C_{\mathfrak{g}}(e) = \{x \in \mathfrak{g};\ [x,e] = 0\}.$$

Uočimo da je $[x,e] = 0$ ako i samo ako je $\mathrm{e}^{t\,\mathrm{ad}\,x}e = e$ za svaki $t \in \mathbb{R}$. Prema tome, povezana Liejeva podgrupa G^e od $\mathrm{Int}(\mathfrak{g})$ kojoj $\mathfrak{g}^e$ Liejeva algebra je komponenta povezanosti zatvorene podgrupe

$$C_G(e) = \{g \in G;\ ge = e\}$$

grupe G.

Za $e \in \mathfrak{g}$ definiramo

$$\mathfrak{g}_e = (\mathrm{Ker}\,\mathrm{ad}\,e) \cap (\mathrm{Im}\,\mathrm{ad}\,e) = \mathfrak{g}^e \cap (\mathrm{ad}\,e)\mathfrak{g}.$$

Tada je $\mathfrak{g}_e$ Liejeva podalgebra od $\mathfrak{g}$. Doista, znamo da je $\mathfrak{g}^e$ Liejeva podalgebra od $\mathfrak{g}$. Dakle, da dokažemo da je i $\mathfrak{g}_e$ Liejeva podalgebra, dovoljno je dokazati da za bilo koje elemente $u, v \in \mathfrak{g}_e$ vrijedi $[u,v] \in (\mathrm{ad}\,e)\mathfrak{g}$. Možemo pisati $v = [e,w]$ za neki $w \in \mathfrak{g}$, pa kako je $u \in \mathfrak{g}^e$, imamo

$$[u,v] = [u,[e,w]] = [e,[u,w]] \in (\mathrm{ad}\,e)\mathfrak{g}.$$

Neka je G_e povezana Liejeva podgrupa od G s Liejevom algebrom $\mathfrak{g}_e$. Tada je, naravno, G_e podgrupa grupe G^e i, posebno, vrijedi $ge = e$ za svaki $g \in G_e$.

U daljnjem će nam trebati neki teoremi iz opće teorije Liejevih grupa, od kojih prvi navodimo bez dokaza:

Teorem 3.3.9. *Neka je G Liejeva grupa i $\mathfrak{g}$ njezina Liejeva algebra.*

(a) *Postoje otvorena okolina U nule u $\mathfrak{g}$ i otvorena okolina V jedinice u G takve da je restrikcija* $\exp|U$ *eksponencijalnog preslikavanja* $\exp : \mathfrak{g} \to G$ *analitički difeomorfizam sa U na V.*

(b) *Ako je $\mathfrak{g} = \mathfrak{a}_1 \dotplus \cdots \dotplus \mathfrak{a}_s$, gdje su $\mathfrak{a}_j$ potprostori od $\mathfrak{g}$, onda postoje otvorene okoline U_j nule u $\mathfrak{a}_j$, $j = 1, \ldots, s$, i otvorena okolina V jedinice u G takve da je*

$$(x_1, \ldots, x_s) \mapsto (\exp x_1) \cdots (\exp x_s),$$

analitički difeomorfizam sa $U_1 \times \cdots \times U_s$ na V.

(c) (**Campbell–Hausdorffova formula**) *Postoji otvorena okolina U nule u $\mathfrak{g}$ i analitičko preslikavanje $\Phi : U \times U \to \mathfrak{g}$ takvo da je $(\exp x)(\exp y) = \exp \Phi(x, y)$ i pri tome se $\Phi(x, y)$ može napisati kao konvergentan red*

$$\Phi(x, y) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \Phi_k(x, y),$$

gdje su $\Phi_k(x, y)$ $\mathbb{Q}$–linearne kombinacije k–strukih komutatora elemenata x i y i koeficijenti u tim linearnim kombinacijama su univerzalni, odnosno, ne ovise o grupi G ni o Liejevoj algebri $\mathfrak{g}$. Za $k = 1, 2, 3$ je

$$\Phi_1(x, y) = x + y, \qquad \Phi_2(x, y) = \frac{1}{2}[x, y], \qquad \Phi_3(x, y) = \frac{1}{12}([x, [x, y]] + [y, [y, x]]).$$

Promatrajmo sada konačnodimenzionalan realan ili kompleksan vektorski prostor V i Liejevu grupu $\mathrm{GL}(V)$ svih regularnih linearnih operatora na V. Njezina se Liejeva algebra identificira s Liejevom algebrom $\mathfrak{gl}(V)$ svih linearnih operatora na V s komutatorom $[A, B] = AB - BA$. Uz tu identifikaciju eksponencijalno preslikavanje $\exp : \mathfrak{gl}(V) \to \mathrm{GL}(V)$ dano je sa $A \mapsto \mathrm{e}^A$. Analogna je situacija s Liejevim grupama $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ i $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ i njihovim Liejevim algebrama $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ i $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$. Označimo sa $N(n, \mathbb{C})$ (odnosno, sa $N(n, \mathbb{R})$) Liejevu grupu svih kompleksnih (odnosno, realnih) gornje trokutastih matrica u $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ (odnosno, u $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$) s jedinicama na dijagonali. Ta je grupa zatvorena podgrupa od $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ (odnosno, od $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$). Njezina je Liejeva algebra $\mathfrak{n}(n, \mathbb{C})$ (odnosno, $\mathfrak{n}(n, \mathbb{R})$) sastavljena od svih striktno gornje trokutastih kompleksnih (odnosno, realnih) $n\times n$ matrica. Primijetimo da Liejevu grupu $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ možemo identificirati sa zatvorenom podgrupom od $\mathrm{GL}(2n, \mathbb{R})$, pa će u daljnjem biti dovoljno promatrati sve nad poljem $\mathbb{R}$ realnih brojeva.

Propozicija 3.3.10. *$A \mapsto \mathrm{e}^A$ je bianalitička bijekcija sa $\mathfrak{n}(n, \mathbb{R})$ na $N(n, \mathbb{R})$. Za svaku Liejevu podalgebru $\mathfrak{n}$ od $\mathfrak{n}(n, \mathbb{R})$ pripadna povezana Liejeva podgrupa N je zatvorena podgrupa od $N(n, \mathbb{R})$ i $\exp|\mathfrak{n}$ je bianalitička bijekcija sa $\mathfrak{n}$ na N. Štoviše, N je zatvoren podskup od $M_n(\mathbb{R})$. Liejeva grupa $N = \exp \mathfrak{n}$ je jednostavno povezana.*

Dokaz: Prije svega, jasno je da je $\exp : A \mapsto \mathrm{e}^A$ analitičko preslikavanje sa $\mathfrak{n}(n, \mathbb{R})$ u $N(n, \mathbb{R})$. Ako je $B \in N(n, \mathbb{R})$ onda je $B - I \in \mathfrak{n}(n, \mathbb{R})$, dakle, $B - I$ je nilpotentna matrica. Definiramo preslikavanje $\log : N(n, \mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$ sa

$$\log B = \sum_{j\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^{j-1}}{j}(B - I)^j = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{(-1)^{j-1}}{j}(B - I)^j.$$

Kako je $B - I \in \mathfrak{n}(n, \mathbb{R})$ i sve su potencije $(B - I)^j$ elementi od $\mathfrak{n}(n, \mathbb{R})$. Dakle, log je analitičko preslikavanje sa $N(n, \mathbb{R})$ u $\mathfrak{n}(n, \mathbb{R})$. Za $B \in \mathfrak{n}(n, \mathbb{R})$ i $t \in \mathbb{R}$ stavimo $A(t) = \mathrm{e}^{tB} - I$. Tada je

$$\log \mathrm{e}^{tB} = \sum_{j\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^{j-1}}{j} A(t)^j,$$

pa slijedi

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \log \mathrm{e}^{tB} = \sum_{j\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^{j-1}}{j} jA'(t)A(t)^{j-1} = A'(t) \sum_{j\in\mathbb{N}} (-A(t))^{j-1}.$$

Primijetimo sada da za svcaku nilpotentnu matricu C vrijedi

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}_+} C^j = (I - C)^{-1}.$$

Posebno,

$$\sum_{j\in\mathbb{N}}(-A(t))^{j-1} = \sum_{j\in\mathbb{Z}_+}(-A(t))^j = (I + A(t))^{-1} = \left(\mathrm{e}^{tB}\right)^{-1} = \mathrm{e}^{-tB}.$$

Nadalje,

$$A'(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\mathrm{e}^{tB} - I\right) = B\mathrm{e}^{tB}.$$

Prema tome,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\log \mathrm{e}^{tB} = B\mathrm{e}^{tB}\mathrm{e}^{-tB} = B.$$

Odatle slijedi da je $\log \mathrm{e}^{tB} = tB + C$ za neku matricu $C \in \mathfrak{n}(n,\mathbb{R})$. Za $t = 0$ imamo $C = \log I = 0$. Dakle, za $t = 1$ dobivamo

$$\log \mathrm{e}^{B} = B \quad \text{za svaku matricu} \quad B \in \mathfrak{n}(n,\mathbb{R}).$$

Dakle, $\log : N(n,\mathbb{R}) \to \mathfrak{n}(n,\mathbb{R})$ je lijevi invers preslikavanja $\exp : \mathfrak{n}(n,\mathbb{R}) \to N(n,\mathbb{R})$.

S druge strane, prema tvrdnji (a) teorema 3.3.9. postoje otvorena okolina U nule u $\mathfrak{n}(n,\mathbb{R})$ i otvorena okolina V jedinice I u $N(n,\mathbb{R})$ takve da je $\exp|U$ bianalitička bijekcija sa U na V. Vidjeli smo da je $\log : N(n,\mathbb{R})$ lijevi invers preslikavanja $\exp : \mathfrak{n}(n,\mathbb{R}) \to N(n,\mathbb{R})$, pa je restrikcija $\log|V$ lijevi invers restrikcije $\exp|U$. No kako je $\exp|U$ bijekcija sa U na V, zaključujemo da je $\log|V$ i desni invers od $\exp|U$. Prema tome,

$$\mathrm{e}^{\log A} = A \qquad \forall A \in V.$$

Matrični elementi matrice $\mathrm{e}^{\log A}$ su polinomijalne funkcije matričnih elemenata matrice A. Stoga gornja jednakost vrijedi svuda na $N(n,\mathbb{R})$:

$$\mathrm{e}^{\log A} = A \qquad \forall A \in N(n,\mathbb{R}).$$

Prema tome, analitičko preslikavanje $\log : N(n,\mathbb{R}) \to \mathfrak{n}(n,\mathbb{R})$ je i desni invers eksponencijalnog preslikavanja $\exp : \mathfrak{n}(n,\mathbb{R}) \to N(n,\mathbb{R})$.

Neka je sada $\mathfrak{n}$ Liejeva podalgebra od $\mathfrak{n}(n,\mathbb{R})$. Prema dokazanom tada je $\exp|\mathfrak{n}$ bijekcija sa $\mathfrak{n}$ na $\exp\mathfrak{n}$ i inverzno je preslikavanje $\log|\exp\mathfrak{n}$. Očito je $A^{-1} \in \exp\mathfrak{n}$ za svaku matricu $A \in \exp\mathfrak{n}$. Tvrdimo da je $\exp\mathfrak{n}$ podgrupa od $N(n,\mathbb{R})$, tj. da za bilo koje $A_1, A_2 \in \exp\mathfrak{n}$ vrijedi $A_1A_2 \in \exp\mathfrak{n}$. Neka je U otvorena okolina nule u $\mathfrak{n}$ takva da je $\exp U$ otvorena okolina jedinice u N i da je $\exp|U$ bijekcija sa U na $\exp U$. Prema tvrdnji (c) ako je U dovoljno malena onda je

$$\mathrm{e}^{B_1}\mathrm{e}^{B_2} = \mathrm{e}^{\Phi(B_1,B_2)} \qquad \forall B_1, B_2 \in U.$$

Pri tome je $\Phi(B_1, B_2)$ red čiji su članovi $\mathbb{Q}-$linearne kombinacije $k-$strukih komutatora operatora B_1 i B_2 za $k \in \mathbb{N}$. Međutim, kako su $B_1, B_2 \in \mathfrak{n}$ i $\mathfrak{n}$ je nilpotentna Liejeva algebra, $\Phi(B_1, B_2)$ je konačna suma tih $k-$strukih komutatora. No tada su matrični elementi lijeve i desne strane u gornjoj jednakosti polinomijalne funkcije matričnih elemenata matrica B_1 i B_2. Dakle, ako ta jednakost vrijedi na nepraznom otvorenom skupu $U \times U$ od $\mathfrak{n} \times \mathfrak{n}$, onda ona vrijedi na čitavom $\mathfrak{n} \times \mathfrak{n}$. Napokon, kako $k-$struki komutatori matrica $B_1, B_2 \in \mathfrak{n}$ svi leže u $\mathfrak{n}$, to je i $\Phi(B_1, B_2) \in \mathfrak{n}$. Time je dokazano da vrijedi $(\exp\mathfrak{n})(\exp\mathfrak{n}) \subseteq \exp\mathfrak{n}$. Dakle, $\exp\mathfrak{n}$ je podgrupa od $N(n,\mathbb{R})$. Ta je podgrupa povezana sadržana je u N i sadrži otvorenu okolinu jedinice $\exp U$ u grupi N. Odatle slijedi da je $\exp\mathfrak{n}$ otvorena podgrupa od N, a kako je grupa N povezana, slijedi da je $\exp\mathfrak{n} = N$.

Napokon, $\mathfrak{n}$ je zatvoren i jednostavno povezan podskup od $\mathfrak{n}(n,\mathbb{R})$, pa kako je $\exp|\mathfrak{n}(n,\mathbb{R})$ homeomorfizam sa $\mathfrak{n}(n,\mathbb{R})$ na $N(n,\mathbb{R})$, $N = \exp\mathfrak{n}$ je zatvoren i jednostavno povezan podskup od $N(n,\mathbb{R})$. Primijetimo još da je $N(n,\mathbb{R})$ zatvoren podskup algebre matrica $M_n(\mathbb{R})$; doista, to je skup svih matrica $[\alpha_{ij}] \in M_n(n,\mathbb{R})$ takvih da je $\alpha_{ii} = 1$ za svaki i i $\alpha_{ij} = 0$ za $i > j$. Stoga je i N zatvoren podskup od $M_n(\mathbb{R})$.

Propozicija 3.3.11. *Neka je V realan konačnodimenzionalan vektorski prostor i neka je $\mathfrak{n}$ Liejeva podalgebra od $\mathfrak{gl}(V)$ koja je sastavljena od nilpotentnih operatora. Nadalje, neka je N njoj pridružena povezana Liejeva podgrupa od $\mathrm{GL}(V)$. Tada je N zatvorena podgrupa od $\mathrm{GL}(V)$ i $\exp : \mathfrak{n} \to N$ je bianalitička bijekcija sa $\mathfrak{n}$ na N.*

Dokaz: Zbog Engelovog teorema postoji baza u kojoj svi operatori iz $\mathfrak{n}$ imaju striktno gornje trokutaste matrice. Ako pomoću te baze identificiramo $\mathfrak{gl}(V)$ sa $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ i $\mathrm{GL}(V)$ sa $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$, onda se $\mathfrak{n}$ identificira s Liejevom podalgebrom od $\mathfrak{n}(n,\mathbb{R})$ a N s pripadnom povezanom Liejevom podgrupom od $N(n,\mathbb{R})$. Stoga tvrdnje slijede iz propozicije 3.3.10.

Vratimo se sada na kompleksnu poluprostu Liejevu algebru $\mathfrak{g}$ i na prije uvedene oznake.

Teorem 3.3.12. *Neka je $e \neq 0$ nilpotentan element od $\mathfrak{g}$. Tada su svi elementi od $\mathfrak{g}_e$ nilpotentni i svi su elementi od G_e unipotentni. G_e je jednostavno povezana zatvorena podgrupa od G. Neka je $h \in \mathfrak{g}$ takav da su h i e neutralan i nilpozitivan element $S-$trojke. Tada je linearna višestrukost $h+\mathfrak{g}_e$ skup svih neutralnih elemenata svih $S-$trojki koje sadrže e kao nilpozitivan element. Nadalje, svaka su dva elementa iz $h+\mathfrak{g}_e$ konjugirana elementom iz G_e, tako da je e fiksan pri toj konjugaciji. Štoviše, za svaki $A \in G_e$ je $Ah \in h + \mathfrak{g}_e$ i preslikavanje $A \mapsto Ah$ je bijekcija sa G_e na $h + \mathfrak{g}_e$.*

Drugim riječima, (zbog korolara 3.3.8.) ako je (h, e, y) $S-$trojka onda je $A \mapsto (Ah, e, Ay)$ bijekcija sa G_e na skup svih $S-$trojki koje sadrže e kao nilpozitivan element i pri tome Ah prolazi cijelom linearnom višestrukošću $h + \mathfrak{g}_e$.

Dokaz: Neka su (h, e, y) i (k, e, z) $S-$trojke. Tada je $[h, e] = [k, e] = 2e$, pa je $h - k \in \mathfrak{g}^e$. Nadalje, $h - k = [e, y - z] \in (\mathrm{ad}\, e)\mathfrak{g}$. Prema tome, $h - k \in \mathfrak{g}_e$, odnosno, $k \in h + \mathfrak{g}_e$.

Obratno, pretpostavimo da je (h, e, y) $S-$trojka i da je $k \in h+\mathfrak{g}_e$. Tada je $[k, e] = 2e$. Nadalje, $h = [e, y] \in (\mathrm{ad}\, e)\mathfrak{g}$ i $\mathfrak{g}_e \subseteq (\mathrm{ad}\, e)\mathfrak{g}$, dakle, $k \in (\mathrm{ad}\, e)\mathfrak{g}$. Primijenimo li korolar 3.3.8. zaključujemo da je k neutralni element u nekoj (jedinstvenoj) $S-$trojki u kojoj je e nilpozitivan element.

Prema teoremu 3.1.15. operator $\mathrm{ad}\, h$ je poluprost, a prema teoremu 3.2.3. sve su njegove svojstvene vrijednosti cijeli brojevi. Za $p \in \mathbb{Z}$ označimo sa $\mathfrak{g}_p$ svojstven potprostor od $\mathfrak{g}$ za svojstvenu vrijednost p. Nadalje, neka je $\mathfrak{g}^e_p = \mathfrak{g}_p \cap \mathfrak{g}^e$ svojstveni potprostor restrikcije $(\mathrm{ad}\, h)|\mathfrak{g}^e$ za svojstvenu vrijednost p. Prema lemi 3.3.5. $\mathfrak{g}^e$ ima rastav u direktnu sumu

$$\mathfrak{g}^e = \sum_{p=0}^{m} \dot{+}\, \mathfrak{g}^e_p,$$

pri čemu je $m \in \mathbb{Z}_+$ najmanji takav da je $(\mathrm{ad}\, e)^{m+1} = 0$. Iz Jacobijevog identiteta slijedi

$$[\mathfrak{g}_p, \mathfrak{g}_q] \subseteq \mathfrak{g}_{p+q} \qquad \text{i} \qquad [\mathfrak{g}^e_p, \mathfrak{g}^e_q] \subseteq \mathfrak{g}^e_{p+q}. \tag{3.6}$$

Neka je $\mathfrak{a}$ TDS−podalgebra s bazom $\{h, e, y\}$. Ako sa π_d označimo ireducibilnu $d-$dimenzionalnu reprezentaciju od $\mathfrak{a}$, iz teorema 3.2.2. slijedi da je svojstveni potprostor operatora $\pi_d(h)$ za najveću svojstvenu vrijednost $d-1$ sadržan u $\mathrm{Im}\, \pi_d(e)$ ako i samo ako je $d \geq 2$. Rastavimo sada $\mathfrak{g}$ u direktnu sumu ireducibilnih $(\mathrm{ad}\, \mathfrak{a})-$podmodula i primijenimo na njih tu činjenicu. Iz tvrdnje (c) teorema 3.2.3. slijedi da je

$$\mathfrak{g}_e = \sum_{p=1}^{m} \dot{+}\, \mathfrak{g}^e_p. \tag{3.7}$$

Posebno, operator $(\mathrm{ad}\, h)|\mathfrak{g}_e$ je regularan.

Iz druge formule u (3.6) i iz (3.7) slijedi da je $\mathfrak{g}_e$ nilpotentna Liejeva podalgebra od $\mathfrak{g}$. Nadalje, budući da su svojstvene vrijednosti poluprostog operatora $(\mathrm{ad}\, h)|\mathfrak{g}_e$ striktno pozitivne, iz prve formule u (3.6) slijedi da je operator $\mathrm{ad}\, w$ nilpotentan za svaki $w \in \mathfrak{g}_e$. Prema propoziciji 3.3.11.

G_e je zatvorena podgrupa od G i $x \mapsto e^{\operatorname{ad} x}$ je bianalitička bijekcija sa $\mathfrak{g}_e$ na G_e. Dakle, svaki se $A \in G_e$ može na jedinstven način pisati kao $A = e^{\operatorname{ad} w}$, $w \in \mathfrak{g}_e$. Tada je

$$Ah = h + [w,h] + \frac{1}{2}[w,[w,h]] + \cdots\cdots \tag{3.8}$$

Budući da je $\mathfrak{g}_e$ Liejeva podalgebra koja je invarijantna u odnosu na operator $\operatorname{ad} h$, svi članovi u (3.8) počevši od drugog leže u $\mathfrak{g}_e$. Dakle, $Ah \in h + \mathfrak{g}_e$ za svaki $A \in G_e$.

Neka je sada $v \in \mathfrak{g}_e$. Indukcijom po $j \in \{1, \ldots, m\}$ dokazat ćemo da za svaki takav j postoji jedinstven element

$$w_j \in \sum_{p=1}^{j} \dot{+}\, \mathfrak{g}_p^e \tag{3.9}$$

takav da je

$$e^{\operatorname{ad} w_j} h - (h+v) \in \sum_{p=j+1}^{m} \dot{+}\, \mathfrak{g}_p^e. \tag{3.10}$$

Uvjeti (3.9) i (3.10) za $j = 1$ izgledaju

$$w_1 \in \mathfrak{g}_1^e \qquad \text{i} \qquad e^{\operatorname{ad} w_1} h - (h+v) \in \sum_{p=2}^{m} \dot{+}\, \mathfrak{g}_p^e.$$

Prvi od tih uvjeta znači da je $[e, w_1] = 0$ i $[h, w_1] = w_1$. Tada je $(\operatorname{ad} w_1)h = -w_1$ i $(\operatorname{ad} w_1)^2 h = 0$, dakle,

$$e^{\operatorname{ad} w_1} h = h - w_1.$$

Prema tome, drugi je uvjet ispunjen ako i samo ako je $w_1 = -v_1$, gdje je v_1 komponenta od v u $\mathfrak{g}_1^e$ u odnosu na rastav (3.7). To pokazuje da takav w_1 postoji i jedinstven je.

Prijeđimo sada na korak indukcije i pretpostavimo da su određeni jedinstveni takvi $w_1, \ldots, w_j$ za neki $j < m$. Neka je z_{j+1} komponenta od $e^{\operatorname{ad} w_j} h - (h+v)$ u $\mathfrak{g}_{j+1}^e$ u odnosu na rastav (3.7). Stavimo

$$w_{j+1} = w_j + \frac{1}{j+1} z_{j+1}.$$

Tada je $[z_{j+1}, h] = -(j+1) z_{j+1}$, dakle, $[w_{j+1}, h] = [w_j, h] - z_{j+1}$. Za $i > 1$ iz (3.6) slijedi da su komponente od $(\operatorname{ad} w_{j+1})^i h$ i od $(\operatorname{ad} w_j)^i h$ u $\mathfrak{g}_s^e$ iste za sve $s \leq j+1$. Prema tome, vrijedi

$$w_{j+1} \in \sum_{s=1}^{j+1} \dot{+}\, \mathfrak{g}_s^e$$

i

$$e^{\operatorname{ad} w_{j+1}} h - (h+v) \in \sum_{s=j+2}^{m} \dot{+}\, \mathfrak{g}_s^e.$$

Zadatak 3.3.2. *Dokažite da je takav w_{j+1} jedinstven.*

Time je korak indukcije proveden. Posebno, tvrdnja vrijedi za $j = m$. To znači da postoji jedinstven $w \in \mathfrak{g}_e$ takav da je $e^{\operatorname{ad} w} h = h + v$. Time je teorem dokazan.

Primijetimo da su u dokazu da je $h + \mathfrak{g}_e = G_e h$ važne bile samo dvije činjenice: nilpotentnost Liejeve algebre $\mathfrak{g}_e$ i regularnost operatora $(\operatorname{ad} h)|\mathfrak{g}_e$.

Sada možemo nadopuniti Jacobson$-$Morosovljev teorem 3.3.7.:

Korolar 3.3.13. *Neka je $e \neq 0$ nilpotentan element iz $\mathfrak{g}$ i pretpostavimo da je $e \in \mathfrak{s}_1 \cap \mathfrak{s}_2$, gdje su $\mathfrak{s}_1$ i $\mathfrak{s}_2$* TDS*−podalgebre. Tada su $\mathfrak{s}_1$ i $\mathfrak{s}_2$ jedna drugoj konjugirane i konjugacija se može izabrati tako da element e ostaje fiksan.*

Dokaz: Prema tvrdnji (d) leme 3.2.4. možemo izabrati dvije $S-$trojke koje su baze od $\mathfrak{s}_1$ i od $\mathfrak{s}_2$ i u kojima je e nilpozitivni element. Sada korolar slijedi neposredno iz teorema 3.3.12.

Korolar 3.3.13. je zapravo specijalni slučaj sljedećeg korolara koji je zbog tvrdnje (d) u lemi 3.2.4. i zbog Jacobson−Morosovljevog teorema 3.3.7. njegova neposredna posljedica

Korolar 3.3.14. *Klase konjugiranosti* TDS*−podalgebri od $\mathfrak{g}$ su u prirodnoj bijekciji s klasama konjugiranosti nilpotentnih elemenata $\neq 0$ u $\mathfrak{g}$. Ta je bijekcija sljedeća: ako je $\mathfrak{s}$* TDS*−podalgebra od $\mathfrak{g}$, njezinoj klasi konjugiranosti pridružena je klasa konjugiranosti bilo kojeg nilpotentnog elementa $\neq 0$ u $\mathfrak{s}$. Drugim riječima,* TDS*−podalgebre $\mathfrak{s}_1$ i $\mathfrak{s}_2$ su konjugirane ako i samo ako su konjugirani nilpotentni elementi $0 \neq e_1 \in \mathfrak{s}_1$ i $0 \neq e_2 \in \mathfrak{s}_2$.*

Na koncu ovog odjeljka istaknimo još važnu vezu između nilpotentnih elemenata kompleksne poluproste Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ i polinomijalnih $G-$invarijanata. Kao i prije označimo sa $\mathcal{P}(\mathfrak{g})$ algebru svih polinomijalnih funkcija na $\mathfrak{g}$ i neka je $\mathcal{P}(\mathfrak{g})^G$ podalgebra svih $G-$invarijantnih polinomijalnih funkcija. Nadalje, sa $\mathcal{P}_+(\mathfrak{g})^G$ označimo ideal u $\mathcal{P}(\mathfrak{g})^G$ svih polinomijalnih funkcija bez konstantnog člana:

$$\mathcal{P}_+(\mathfrak{g})^G = \sum_{n\in\mathbb{N}} \dot{+}\, \mathcal{P}^n(\mathfrak{g})^G = \{f \in \mathcal{P}(\mathfrak{g})^G;\ f(0) = 0\}.$$

Propozicija 3.3.15. *Skup svih simultanih nultočaka ideala $\mathcal{P}_+(\mathfrak{g})^G$*

$$\mathcal{N} = \left\{x \in \mathfrak{g};\ f(x) = 0\ \ \forall f \in \mathcal{P}_+(\mathfrak{g})^G\right\}$$

je upravo skup svih nilpotentnih elemenata u Liejevoj algebri $\mathfrak{g}$.

Dokaz: Pretpostavimo da je $x \in \mathcal{N}$, tj. da je $f(x) = 0$ za svaki $f \in \mathcal{P}_+(\mathfrak{g})^G$. Za $k \in \mathbb{N}$ preslikavanje $f_k : y \mapsto \mathrm{Tr}\,(\mathrm{ad}\, y)^k$ je homogena polinomijalna funkcija na $\mathfrak{g}$ stupnja k i ona je zbog svojstava traga očito $G-$invarijantna (štoviše, ona je $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})-$invarijantna). Prema tome, $f_k \in \mathcal{P}_+(\mathfrak{g})^G$. Stoga je $f_k(x) = 0\ \forall k \in \mathbb{N}$, tj. $\mathrm{Tr}\,(\mathrm{ad}\, x)^k = 0\ \forall k \in \mathbb{N}$. Sada iz propozicije 3.3.1. slijedi da je operator $\mathrm{ad}\, x$ nilpotentan, odnosno, x je nilpotentan element Liejeve algebre $\mathfrak{g}$.

Obratno, pretpostavimo sada da je $x \neq 0$ nilpotentan element od $\mathfrak{g}$. Prema lemi 3.3.4. tada je $x \in \mathrm{Im}\,(\mathrm{ad}\, x)^2$, pa postoji $h \in \mathfrak{g}$ takav da je $[h, x] = 2x$. Tada je $\mathrm{e}^{-t\,\mathrm{ad}\, h}x = \mathrm{e}^{-2t}x$ za svaki $t \in \mathbb{R}$. Kako je $\mathrm{e}^{-t\,\mathrm{ad}\, h} \in G$, za svaki $f \in \mathcal{P}_+(\mathfrak{g})^G$ vrijedi

$$f(x) = f\left(\mathrm{e}^{-t\,\mathrm{ad}\, h}x\right) = f\left(\mathrm{e}^{-2t}x\right) \qquad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Odavde je

$$f(x) = \lim_{t\to+\infty} f\left(\mathrm{e}^{-2t}x\right) = f(0) = 0.$$

Kako to vrijedi za svaki $f \in \mathcal{P}_+(\mathfrak{g})^G$, zaključujemo da je $x \in \mathcal{N}$.

3.4 Poluprosti elementi i TDS−podalgebre

Neka je $\mathfrak{s}$ TDS−podalgebra kompleksne poluproste Liejeve algebre $\mathfrak{g}$. Prema tvrdnji (a) teorema 3.1.15. ako je $h \in \mathfrak{s}$ poluprost kao element od $\mathfrak{s}$ onda je h poluprost i kao element od $\mathfrak{g}$. Naravno, vrijedi i obratno: ako je h poluprost kao element od $\mathfrak{g}$, to znači da je operator $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}h$ poluprost, pa je i njegova restrikcija $(\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}h) = \mathrm{ad}_{\mathfrak{s}}h$ na invarijantan potprostor $\mathfrak{s}$ poluprost operator, a to znači da je h poluprost kao element od $\mathfrak{s}$. Kažemo da je $h \in \mathfrak{s}$ **monopoluprost element** TDS−podalgebre $\mathfrak{s}$ ako je on neutralan element neke S−trojke u $\mathfrak{s}$. Za to je nužno da je $2 \in Sp\,(\mathrm{ad}_{\mathfrak{s}}h)$. No to je i dovoljno. Naime, ako je $2 \in Sp\,(\mathrm{ad}_{\mathfrak{s}}h)$, onda je i $-2 \in Sp\,(\mathrm{ad}_{\mathfrak{s}}h)$, budući da je trag operatora $\mathrm{ad}_{\mathfrak{s}}h$ jednak nuli. Izaberemo li $x, y \in \mathfrak{s} \setminus \{0\}$ takve da je $[h, x] = 2x$ i $[h, y] = -2y$, onda je $[x, y] \neq 0$ (jer $[x, y] = 0$ bi značilo da je $\mathbb{C}x \dot{+} \mathbb{C}y$ komutativan ideal u $\mathfrak{s}$) i $[x, y], x, y$ su linearno nezavisni budući da su to svojstveni vektori operatora $\mathrm{ad}_{\mathfrak{s}}h$ za različite svojstvene vrijednosti. Odatle slijedi da je $[x, y] = ch$ za neki $c \in \mathbb{C}^*$. Zamijenimo li npr. y s njemu proporcionalnim elementom dolazimo do S−trojke u $\mathfrak{s}$ kojoj je h neutralni element.

U ovom ćemo odjeljku razmotriti pitanje konjugiranosti monopoluprostih elemenata TDS−podalgebri od $\mathfrak{g}$. Neka je (h, x, y) S−trojka i neka je $\mathfrak{s}$ TDS−podalgebra razapeta sa h, x i y. Kao što smo spomenuli, promatranjem adjungirane reprezentacije $\mathfrak{s}$ na $\mathfrak{g}$ iz teorema 3.2.3. nalazimo da su sve svojstvene vrijednosti operatora $\mathrm{ad}\,h$ cijeli brojevi. Za $p \in \mathbb{Z}$ označimo sa $\mathfrak{g}_p$ svojstven potprostor od $\mathrm{ad}\,h$ za svojstvenu vrijednost p :

$$\mathfrak{g}_p = \{z \in \mathfrak{g};\ [h, z] = pz\}.$$

Neka je $k = \max\{j \in \mathbb{N};\ \mathfrak{g}_j \neq \{0\}\}$. Tada je

$$\dim\,\mathfrak{g}_p = \dim\,\mathfrak{g}_{-p} \quad \forall p \in \mathbb{Z} \qquad \text{i} \qquad \mathfrak{g} = \sum_{p=-k}^{k} \dot{+}\, \mathfrak{g}_p.$$

Nadalje, zbog Jacobijevog identiteta vrijedi

$$[\mathfrak{g}_p, \mathfrak{g}_q] \subseteq \mathfrak{g}_{p+q}. \tag{3.11}$$

Najprije želimo odrediti sve S−trojke koje sadrže h kao neutralni element. Nilpozitivni element bilo koje S−trojke koja sadrži h kao neutralni element sadržan je u $\mathfrak{g}_2$. Posebno, vrijedi $x \in \mathfrak{g}_2$. Postavlja se pitanje koji još elementi potprostora $\mathfrak{g}_2$ pripadaju S−trojkama koje sadrže h i da li su te S−trojke konjugirane S−trojki (h, x, y). Da bismo na to pitanje odgovorili, promatrajmo Liejevu podalgebru $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g}^h = \mathrm{Ker}\,\mathrm{ad}\,h$. Neka je G^h povezana Liejeva podgrupa od G koja odgovara Liejevoj podalgebri $\mathfrak{g}^h$. Iz (3.11) slijedi da je svaki potrostor $\mathfrak{g}_p$ invarijantan s obzirom na $\mathrm{ad}\,\mathfrak{g}^h$, dakle, on je i G^h−invarijantan. Posebno nas zanima djelovanje grupe G^h na $\mathfrak{g}_2$.

Za svaki $e \in \mathfrak{g}_2$ iz (3.11) slijedi $(\mathrm{ad}\,e)\mathfrak{g}_0 \subseteq \mathfrak{g}_2$. Neka je $T(e) = (\mathrm{ad}\,e)|\mathfrak{g}_0$. Uočimo sljedeći podskup od $\mathfrak{g}_2$:

$$\hat{\mathfrak{g}}_2 = \{e \in \mathfrak{g}_2;\ T(e)\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g}_2\} = \{e \in \mathfrak{g}_2;\ \mathrm{rank}\,T(e) = \dim\,\mathfrak{g}_2\}.$$

Lema 3.4.1. *Neka je e nilpozitivni element S−trojke koja sadrži h. Tada je $e \in \hat{\mathfrak{g}}_2$. Posebno, vrijedi $x \in \hat{\mathfrak{g}}_2$.*

Dokaz: Pretpostavimo da e i h pripadaju nekoj S−trojki i neka je $\mathfrak{s}'$ TDS−podalgebra razapeta tom S−trojkom. Primijenimo li teorem 3.2.2. na adjungiranu reprezentaciju od $\mathfrak{s}'$ na $\mathfrak{g}$, slijedi da je $\mathfrak{g}_2 \subseteq \mathrm{Im}\,\mathrm{ad}\,e = (\mathrm{ad}\,e)\mathfrak{g}$. S druge strane, iz (3.11) slijedi da je $(\mathrm{ad}\,e)\mathfrak{g} \cap \mathfrak{g}_2 = (\mathrm{ad}\,e)\mathfrak{g}_0 \cap \mathfrak{g}_2$. Dakle, vrijedi $T(e)\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g}_2$.

Lema 3.4.2. *$\hat{\mathfrak{g}}_2$ je otvoren, gust i povezan podskup od $\mathfrak{g}_2$.*

Dokaz: Prema lemi 3.4.1. taj je skup neprazan (sadrži x). Izaberimo bazu od $\mathfrak{g}_0$ i bazu od $\mathfrak{g}_2$. Za $e \in \mathfrak{g}_2$ označimo sa $[T(e)]$ matricu operatora $T(e)$ u tom paru baza. To je matrica formata $\dim \mathfrak{g}_0 \times \dim \mathfrak{g}_2$. Zbog $T(x)\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g}_2$ znamo da je $\dim \mathfrak{g}_0 \geq \dim \mathfrak{g}_2$. Sada je jasno da je $\hat{\mathfrak{g}}_2$ skup svih $e \in \mathfrak{g}_2$ takvih da je u matrici $[T(e)]$ barem jedna minora formata $\dim \mathfrak{g}_2 \times \dim \mathfrak{g}_2$ različita od nule. Svaka je minora od $[T(e)]$, promatrana kao funkcija od e, polinomijalna funkcija na $\mathfrak{g}_2$. Neka su $F_1, \ldots, F_m$ sve od tih minora koje nisu identički jednake nuli. Takvih ima jer je $\operatorname{rank} T(x) = \dim \mathfrak{g}_2$, dakle, barem jedna od minora matrice $[T(x)]$ formata $\dim \mathfrak{g}_2 \times \dim \mathfrak{g}_2$ nije jednaka nuli. Tada je $\hat{\mathfrak{g}}_2$ komplement u $\mathfrak{g}_2$ skupa svih zajedničkih nultočaka od $F_1, \ldots, F_m$. Jasno je da je taj skup otvoren u $\mathfrak{g}_2$. Gustoća i povezanost slijede iz činjenice da ako su $u \in \hat{\mathfrak{g}}_2$ i $v \in \mathfrak{g}_2$, onda za indeks j takav da je $F_j(u) \neq 0$ ima samo konačno mnogo skalara $\lambda \in \mathbb{C}$ takvih da je $F_j^0(\lambda) = F_j(\lambda u + (1-\lambda)v) = 0$.

Uočimo sada da je skup $\hat{\mathfrak{g}}_2$ G^h–invarijantan, dakle, on je unija G_h–orbita.

Lema 3.4.3. *Neka je $e \in \hat{\mathfrak{g}}_2$. Tada je njezina G^h–orbita $G^h e$ otvorena u $\mathfrak{g}_2$, dakle, i u $\hat{\mathfrak{g}}_2$.*

Dokaz: Preslikavanje $A \mapsto Ae$ sa G^h u $\mathfrak{g}_2$ je analitičko. Dakle, dovoljno je dokazati da je diferencijal tog preslikavanja s tangencijalnog prostora na G^h u jedinici u tangencijalan prostor na $\mathfrak{g}_2$ u točki e (a taj se identificira s prostorom $\mathfrak{g}_2$) surjektivan. No po definiciji skupa $\hat{\mathfrak{g}}_2$, slika tog diferencijala je

$$(\operatorname{ad} \mathfrak{g}^h)e = [e, \mathfrak{g}^h] = (\operatorname{ad} e)\mathfrak{g}^h = (\operatorname{ad} e)\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g}_2$$

Time je lema dokazana.

Korolar 3.4.4. *Skup $\hat{\mathfrak{g}}_2$ je jedna G^h–orbita.*

Dokaz: Naime, $\hat{\mathfrak{g}}_2$ je disjunktna unija G^h–orbita, a kako je svaka od tih orbita otvoren podskup od $\hat{\mathfrak{g}}_2$, to je i komplement svake od tih orbita otvoren podskup od $\hat{\mathfrak{g}}_2$. Sada tvrdnja slijedi iz leme 3.4.2. prema kojoj je $\hat{\mathfrak{g}}_2$ povezan podskup od $\mathfrak{g}_2$.

Ove tri leme i korolar daju sljedeći teorem:

Teorem 3.4.5. *Neka je (h, x, y) S–trojka u kompleksnoj poluprostoj Liejevoj algebri $\mathfrak{g}$. Nadalje, neka su $\mathfrak{g}^h$ centralizator od h u $\mathfrak{g}$ i G^h povezana Liejeva podgrupa od G određena s Liejevom algebrom $\mathfrak{g}^h$. Stavimo*

$$\mathfrak{g}_2 = \{e \in \mathfrak{g};\ [h, e] = 2e\}.$$

Tada je

$$(\operatorname{ad} e)\mathfrak{g}^h \subseteq \mathfrak{g}_2 \qquad \forall e \in \mathfrak{g}_2. \tag{3.12}$$

Element $e \in \mathfrak{g}$ je nilpozitivni element neke S–trojke u kojoj je h neutralan element ako i samo ako su zadovoljena sljedeća dva uvjeta:

(1) $e \in \mathfrak{g}_2$.

(2) $(\operatorname{ad} e)\mathfrak{g}^h = \mathfrak{g}_2$.

Svake dvije S–trojke koje sadrže element h konjugirane su jedna drugoj elementom grupe G^h. Drugim riječima, vrijedi

$$\hat{\mathfrak{g}}_2 = \{e \in \mathfrak{g}_2;\ [e, \mathfrak{g}^h] = \mathfrak{g}_2\} = G^h x.$$

Napokon, $\hat{\mathfrak{g}}_2$ je skup svih nilpozitivnih elemenata svih S–trojki koje sadrže h kao neutralan element.

Korolar 3.4.6. (**Malcev**) *Dvije* TDS$-$*podalgebre u* $\mathfrak{g}$ *konjugirane su ako i samo ako je bilo koji monopoluprost element jedne konjugiran bilo kojem monopoluprostom elementu druge.*

Zadržimo uvedene oznake. Podskup $\hat{\mathfrak{g}}_2$ samo je dio klase $G-$konjugiranosti od x u $\mathfrak{g}$ (odnosno, $G-$orbite Gx). Nešto veći dio te klase bit će opisan u sljedećem teoremu.

Za $j \in \{0, 1, \dots, k\}$ stavimo

$$\mathfrak{n}_j = \sum_{p=j}^{k} \dot{+}\, \mathfrak{g}_p.$$

Iz (3.11) je jasno da je to Liejeva podalgebra od $\mathfrak{g}$ i ta je podalgebra nilpotentna ako je $j > 0$. Neka je N_j povezana Liejeva podgrupa od G s Liejevom algebrom $\mathfrak{n}_j$.

Teorem 3.4.7. *Vrijedi*

$$N_0 h = h + \mathfrak{n}_1 = \{h + v;\ v \in \mathfrak{n}_1\} \qquad i \qquad N_0 x = \hat{\mathfrak{g}}_2 + \mathfrak{n}_3 = \{e + v;\ e \in \hat{\mathfrak{g}}_2,\ \ v \in \mathfrak{n}_3\}.$$

G^h je podgrupa od N_0, N_1 je normalna podgrupa od N_0 i N_0 je njihov semidirektan produkt:

$$N_0 = N_1 G^h, \qquad N_1 \cap G^h = \{1\}.$$

Elementi od N_1 su unipotentni operatori na $\mathfrak{g}$. Preslikavanje $A \mapsto Ah$ je bijekcija sa N_1 na $h + \mathfrak{n}_1$.

Skica dokaza: Imamo $\mathfrak{n}_0 = \mathfrak{g}^h \dot{+} \mathfrak{n}_1$ i $\mathfrak{n}_1$ je ideal u $\mathfrak{n}_0$. Odatle slijedi da je G^h podgrupa od N_0 i da je N_1 normalna podgrupa od N_0. Prema tvrdnji (b) teorema 3.3.9. grupa N_0 generirana je sa $G^h N_1$. Međutim, kako je N_1 normalna podgrupa od N_0, slijedi da je $G^h N_1$ grupa pa zaključujemo da je $N_0 = G^h N_1$. Neka je $A \in G^h \cap N_1$. Prema propoziciji 3.3.11. postoji jedinstven $w \in \mathfrak{n}_1$ takav da je $A = \mathrm{e}^{\mathrm{ad}\, w}$. Neka je $y \in \mathfrak{g}_p$ za neki $p \in \mathbb{Z}$. Tada je

$$(\mathrm{ad}\, w)^j y \in \sum_{q>p} \dot{+}\, \mathfrak{g}_q \qquad \forall j \in \mathbb{N},$$

dakle,

$$Ay = y + u \qquad \text{za neki} \quad u \in \sum_{q>p} \dot{+}\, \mathfrak{g}_q.$$

S druge strane, kako je $A \in G^h$ vrijedi $Ay \in \mathfrak{g}_p$. Prema tome, vrijedi $Ay = y$ za svaki $y \in \mathfrak{g}_p$ i za svaki $p \in \mathbb{Z}$. Dakle, $A = I$, odnosno dokazali smo da je $G^h \cap N_1 = \{I\}$.

Uočimo sada da je $\mathfrak{n}_1$ invarijantan potprostor za operator $\mathrm{ad}\, h$ i restrikcija $(\mathrm{ad}\, h)|\mathfrak{n}_1$ je regularan operator. Sada se dokaz da je $A \mapsto Ah$ bijekcija sa N_1 na $h + \mathfrak{n}_1$ provodi se potpuno analogno dokazu odgovarajuće tvrdnje u teoremu 3.3.12. Nadalje, ako je $e \in \hat{\mathfrak{g}}_2$, analogno tom istom dokazu pokazuje se da je $A \mapsto Ae$ bijekcija sa N_1 na $e + \mathfrak{n}_3$. Napokon, prema korolaru 3.4.4. vrijedi $\hat{\mathfrak{g}}_2 = G^h x$. Prema tome,

$$N_0 x = N_1 G^h x = N_1 \hat{\mathfrak{g}}_2 = \hat{\mathfrak{g}}_2 + \mathfrak{n}_3.$$

3.5 Glavni nilpotentni elementi

U daljnjem je fiksirana neka Cartanova podalgebra $\mathfrak{h}$ kompleksne poluproste Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ i $R = R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ je pripadni sistem korijena. Za $\alpha \in R$ označimo sa $\mathfrak{g}_\alpha$ pripadni korijenski potprostor

$$\mathfrak{g}_\alpha = \{x \in \mathfrak{g};\ [h, x] = \alpha(h)x\ \ \forall h \in \mathfrak{h}\}.$$

Tada prema teoremu 3.1.19. imamo korijenski rastav u direktnu sumu

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \dotplus \sum_{\alpha \in R} \dotplus \mathfrak{g}_\alpha$$

i svi su korijenski potprostori $\mathfrak{g}_\alpha$ jednodimenzionalni.Nadalje, R razapinje cijeli dualni prostor $\mathfrak{h}^*$.

Neka je B Killingova forma od $\mathfrak{g}$, $B(x, y) = \mathrm{Tr}\,(\mathrm{ad}\,x)(\mathrm{ad}\,y)$. Prem,a teoremu 3.1.11. forma B je nedegenerirana, a prema teoremu 3.1.18. njena restrikcija na Cartanovu podalgebru $B|\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}$ također je nedegenerirana. Zbog toga, kao što smo naveli u odjeljku 3.1., imamo izomorfizam $\lambda \mapsto t_\lambda$ sa $\mathfrak{h}^*$ na $\mathfrak{h}$ definiran sa

$$\lambda(h) = B(h, t_\lambda) \qquad \forall h \in \mathfrak{h}.$$

Trebaju nam još neki rezultati o strukturi kompleksnih poluprostih Liejevih algebri. Stavimo

$$\mathfrak{h}_\mathbb{R} = \mathrm{span}_\mathbb{R}\{t_\alpha;\ \alpha \in R\} = \mathrm{span}_\mathbb{R}\{h_\alpha;\ \alpha \in R\} \qquad \text{i} \qquad \mathfrak{h}^*_\mathbb{R} = \mathrm{span}_\mathbb{R} R.$$

Pri tome je h_α jedinstven element od $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}] = \mathbb{C}t_\alpha$ takav da je $\alpha(h_\alpha) = 2$.

Teorem 3.5.1. *Vrijedi*

(a) $\mathfrak{h}_\mathbb{R}$ *je realna forma od* $\mathfrak{h}$, *tj.* $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_\mathbb{R} \dotplus i\mathfrak{h}_\mathbb{R}$. *Nadalje,* $\mathfrak{h}_\mathbb{R} = \{h \in \mathfrak{h};\ Sp(\mathrm{ad}\,h) \subseteq \mathbb{R}\}$.

(b) $\mathfrak{h}^*_\mathbb{R}$ *je realna forma od* $\mathfrak{h}^*$.

(c) *Restrikcija* $\lambda \mapsto \lambda|\mathfrak{h}_\mathbb{R}$ *je izomorfizam prostora* $\mathfrak{h}^*_\mathbb{R}$ *na dualni prostor od* $\mathfrak{h}_\mathbb{R}$.

(d) *Restrikcija* $B|\mathfrak{h}_\mathbb{R} \times \mathfrak{h}_\mathbb{R}$ *je skalarni produkt na realnom prostoru* $\mathfrak{h}_\mathbb{R}$.

Za $\alpha \in R$ neka je $H_\alpha = \mathrm{Ker}\,\alpha|\mathfrak{h}_\mathbb{R}$ pripadna hiperravnina u $\mathfrak{h}_\mathbb{R}$. **Weylova komora** je svaka komponenta povezanosti komplementa unije svih tih hiperravnina, tj. komponenta povezanosti skupa

$$\mathfrak{h}_\mathbb{R} \setminus \bigcup_{\alpha \in R} H_\alpha.$$

Podskup $R_+ \subseteq R$ zove se **skup pozitivnih korijena** za R ako vrijedi

$$R = R_+ \cup (-R_+), \qquad R_+ \cap (-R_+) = \emptyset \qquad \text{i} \qquad \alpha, \beta \in R_+,\ \alpha + \beta \in R \qquad \Longrightarrow \qquad \alpha + \beta \in R_+.$$

Takvi skupovi postoje: ako u prostor $\mathfrak{h}^*_\mathbb{R}$ uvedemo leksikografski uređaj $\geq$ u odnosu na bilo koju bazu, onda je $\{\alpha \in R;\ \alpha > 0\}$ skup pozitivnih korijena za R. Kažemo da je $\alpha \in R$ **prost korijen** u odnosu na R_+ ako je $\alpha \in R_+$ i ne postoje $\beta, \gamma \in R_+$ takvi da je $\alpha = \beta + \gamma$. Označimo sa $B(R_+)$ skup svih prostih korijena u odnosu na R_+. Nadalje, stavimo

$$C(R_+) = \{h \in \mathfrak{h}_\mathbb{R};\ \alpha(h) > 0\ \ \forall \alpha \in R_+\}.$$

Tada je očito $C(R_+)$ Weylova komora u $\mathfrak{h}_\mathbb{R}$, a njezin je zatvarač

$$\overline{C}(R_+) = \{h \in \mathfrak{h}_\mathbb{R};\ \alpha(h) \geq 0\ \ \forall \alpha \in R_+\}.$$

Teorem 3.5.2. *(a) $B(R_+)$ je baza realnog prostora $\mathfrak{h}_\mathbb{R}^*$ za svaki skup pozitivnih korijena R_+.*

(b) Za podskup $B \subseteq R$ vrijedi $B = B(R_+)$ za neki skup pozitivnih korijena R_+ ako i samo ako za svaki $\alpha \in R$ vrijedi

$$\alpha = \pm \sum_{\beta \in B} n_\beta \beta, \qquad n_\beta \in \mathbb{Z}_+.$$

U tom je slučaju R_+ jedinstveno određen sa B i sastoji se od svih korijena $\alpha \in R_+$ za koje u gornjem prikazu stoji znak $+$, tj. skup svih korijena α koji su sume korijena iz B.

(c) $R_+ \mapsto C(R_+)$ je bijekcija sa skupa svih skupova pozitivnih korijena na skup svih Weylovih komora. Obrnuta bijekcija $C \mapsto R_+(C)$ dana je sa

$$R_+(C) = \{\alpha \in R;\ \alpha(h) > 0\ \ \forall h \in C\}.$$

Podskup $B \subseteq R$ sa svojstvom iz tvrdnje (b) zovemo **baza sistema korijena** R. Tvrdnje (a) i (b) teorema 3.5.2. znače da je $R_+ \mapsto B(R_+)$ bijekcija sa skupa svih skupova pozitivnih korijena za R na skup svih baza od R.

Za $\alpha \in R$ označimo kao i ranije h_α jedinstven element iz $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}]$ takav da je $\alpha(h_\alpha) = 2$. Tada je sa

$$\sigma_\alpha(\lambda) = \lambda - \lambda(h_\alpha)\alpha, \qquad \lambda \in \mathfrak{h}^*,$$

definirana refleksija na prostoru $\mathfrak{h}^*$ u odnosu na koju je realna forma $\mathfrak{h}_\mathbb{R}^*$ invarijantna. Označimo sa $W(R) = W(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ podgrupu grupe $\mathrm{GL}(\mathfrak{h}^*)$ generiranu svim refleksijama σ_α, $\alpha \in R$. $W(R)$ se zove **Weylova grupa** sistema korijena R, odnosno, Weylova grupa para Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ u odnosu na Cartanovu podalgebru $\mathfrak{h}$. Ta grupa djeluje i na $\mathfrak{h}$ pomoću kontragredijentnog djelovanja:

$$\lambda(\sigma(h)) = \left(\sigma^{-1}(\lambda)\right)(h), \qquad h \in \mathfrak{h}, \quad \lambda \in \mathfrak{h}^*, \quad \sigma \in W(R).$$

Teorem 3.5.3. *(a) $W(R)$ je konačna grupa.*

(b) Grupa $W(R)$ djeluje prosto tranzitivno na skupu svih Weylovih komora u $\mathfrak{h}_\mathbb{R}$, tj. ako su C i C' bilo koje Weylove komore u $\mathfrak{h}_\mathbb{R}$ onda postoji jedinstven element $\sigma \in W(R)$ takav da je $C' = \sigma(C)$.

(c) Grupa $W(R)$ djeluje prosto tranzitivno na skupu svih skupova pozitivnih korijena u R.

(d) Grupa $W(R)$ djeluje prosto tranzitivno na skupu svih baza sistema korijena R.

(e) Neka je C Weylova komora u $\mathfrak{h}_\mathbb{R}$. Tada je njezin zatvarač $\overline{C}$ fundamantalna domena za djelovanje grupe $W(R)$ na $\mathfrak{h}_\mathbb{R}$, tj. za svaki $h \in \mathfrak{h}_\mathbb{R}$ presjek $\overline{C} \cap W(R)h$ je jednočlan skup.

Neka je $G = \mathrm{Int}(\mathfrak{g})$. Stavimo

$$N_G(\mathfrak{h}) = \{g \in G;\ g\mathfrak{h} = \mathfrak{h}\} \qquad \text{i} \qquad C_G(\mathfrak{h}) = \{g \in G;\ g|\mathfrak{h} = I_\mathfrak{h}\}.$$

Tada su očito normalizator $N_G(\mathfrak{h})$ od $\mathfrak{h}$ u G i centralizator $C_G(\mathfrak{h})$ od $\mathfrak{h}$ u G zatvorene podgrupe grupe G i $C_G(\mathfrak{h})$ je normalna podgrupa od $N_G(\mathfrak{h})$. Tada je za svaki element $g \in N_G(\mathfrak{h})$ restrikcija $g|\mathfrak{h}$ element od $\mathrm{GL}(\mathfrak{h})$ i $g \mapsto g|\mathfrak{h}$ je homomorfizam grupe $N_G(\mathfrak{h})$ u grupu $\mathrm{GL}(\mathfrak{h})$ i jezgra tog homomorfizma je $C_G(\mathfrak{h})$. Prema tome, kvocijentna grupa $N_G(\mathfrak{h})/C_G(\mathfrak{h})$ prirodno se identificira s podgrupom od $\mathrm{GL}(\mathfrak{h})$.

Teorem 3.5.4. *Uz opisanu identifikaciju vrijedi $N_G(\mathfrak{h})/C_G(\mathfrak{h}) = W(R)$. Drugim riječima, za svaki $g \in N_G(\mathfrak{h})$ je $g|\mathfrak{h} \in W(R)$ i za svaki $\sigma \in W(R)$ postoji $g \in N_G(\mathfrak{h})$ takav da je $\sigma = g|\mathfrak{h}$.*

Označimo sa $\mathcal{S}$ skup svih poluprostih elemenata Liejeve algebre $\mathfrak{g}$. Nadalje, neka je $\mathcal{S}_{\mathbb{R}} = \{h \in \mathcal{S};\ Sp(\operatorname{ad} h) \subseteq \mathbb{R}\}$. Svaki $h \in \mathcal{S}$ sadržan je u nekoj Cartanovoj podalgebri $\mathfrak{h}'$. Budući da su sve Cartanove podalgebre od $\mathfrak{g}$ međusobno $G-$konjugirane, postoji $g \in G$ takav da je $g(h) \in \mathfrak{h}$. Kako je $\operatorname{ad} g(h) = g \circ (\operatorname{ad} h) \circ g^{-1}$, spektri operatora $\operatorname{ad} h$ i $\operatorname{ad} g(h)$ se podudaraju. Stoga je skup $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}$ invarijantan s obzirom na djelovanje grupe G. Sada iz teorema 3.5.4. i iz tvrdnje (e) teorema 3.5.3. neposredno slijedi:

Korolar 3.5.5. *Zatvarač $\overline{C}$ bilo koje Weylove komore C u $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ je fundamentalna domena za djelovanje grupe G na $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}$.*

Neka je u daljnjem fiksiran neki skup pozitivnih korijena R_+ i neka je $B(R_+) = \{\alpha_1, \dots, \alpha_\ell\}$ pripadna baza. Prema tvrdnji (a) teorema 3.5.2. to je baza realnog prostora $\mathfrak{h}^*_{\mathbb{R}}$, dakle, prema tvrdnji (b) teorema 3.5.1. to je i baza kompleksnog prostora $\mathfrak{h}^*$. Neka je $\{h_1, \dots, h_\ell\}$ njoj dualna baza od $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$, dakle, i od $\mathfrak{h}$. Tada su očito Weylova komora $C = C(R_+)$ pridružena R_+ i njen zatvarač dani sa

$$C = \{c_1h_1 + \cdots + c_\ell h_\ell;\ c_1, \dots, c_\ell \in \mathbb{R}^*_+\}, \qquad \overline{C} = \{c_1h_1 + \cdots + c_\ell h_\ell;\ c_1, \dots, c_\ell \in \mathbb{R}_+\}.$$

Lema 3.5.6. *Neka je $h \in \overline{C}$ neutralni element neke $S-$trojke (h, x, y). Tada je*

$$h = c_1h_1 + \cdots + c_\ell h_\ell, \qquad c_1, \dots, c_\ell \in \{0, 1, 2\}.$$

Dokaz: Iz teorije reprezentacije TDS slijedi da su sve svojstvene vrijednosti operatora $\operatorname{ad} h$ cjelobrojne. Nadalje, ako zapišemo

$$h = c_1h_1 + \cdots + c_\ell h_\ell, \qquad c_1, \dots, c_\ell \in \mathbb{R}_+,$$

onda za $e_{\alpha_j} \in \mathfrak{g}_{\alpha_j} \setminus \{0\}$ imamo $(\operatorname{ad} h)e_{\alpha_j} = \alpha_j(h)e_{\alpha_j} = c_je_{\alpha_j}$, dakle, $c_j \in Sp(\operatorname{ad} h)$. Prema tome, vrijedi $c_j \in \mathbb{Z}_+$ za svaki $j = 1, \dots, \ell$. Pretpostavimo da je $c_j > 2$ za neki $j \in \{1, \dots, \ell\}$. Za svaki $\alpha \in R$ izaberimo $e_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha \setminus \{0\}$. Tada je

$$\{h_1, \dots, h_\ell\} \cup \{e_\alpha;\ \alpha \in R\}$$

baza od $\mathfrak{g}$ pa se posebno nilnegativni element y može pisati u obliku

$$y = \sum_{j=1}^{\ell} a_jh_j + \sum_{\alpha \in R} a_\alpha e_\alpha$$

Budući da je $(\operatorname{ad} h)y = -2y$, $(\operatorname{ad} h)h_j = 0$, $j = 1, \dots, \ell$, $(\operatorname{ad} h)e_\alpha = \alpha(h)e_\alpha$, $\alpha \in R$, imamo

$$\sum_{\alpha \in R} a_\alpha \alpha(h)e_\alpha = -2\sum_{j=1}^{\ell} a_jh_j - 2\sum_{\alpha \in R} a_\alpha e_\alpha,$$

dakle,

$$a_1 = \cdots = a_\ell = 0 \qquad \text{i} \qquad a_\alpha(\alpha(h) + 2) = 0 \quad \forall \alpha \in R.$$

Kako je po pretpostavci $h \in \overline{C}$, imamo $\alpha(h) \geq 0$ za $\alpha \in R_+$ i $\alpha(h) \leq 0$ za $\alpha \in R_- = -R_+$, pa iz gornjih jednakosti slijedi da je $a_\alpha = 0$ za svaki $\alpha \in R_+$ (a također i $a_\alpha = 0$ ako je $\alpha \in R_-$ i $\alpha(h) \neq -2$). Prema tome,

$$y = \sum_{\alpha \in R_-} a_\alpha e_\alpha. \tag{3.13}$$

Prema teoriji reprezentacija TDS$-$algebri, primijenjenoj na TDS$-$podalgebru $\mathfrak{a} = \mathbb{C}h + \mathbb{C}x + \mathbb{C}y$ i na njezinu reprezentaciju $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}|\mathfrak{a}$, znamo da je operator $\mathrm{ad}\, y$ injektivan na svakom svojstvenom potprostoru operatora $\mathrm{ad}\, h$ za svojstvenu vrijednost > 0. Posebno, vrijedi $z = (\mathrm{ad}\, y)e_{\alpha_j} \neq 0$. Sada je $z = [y, e_{\alpha_j}]$ svojstveni vektor za operator $\mathrm{ad}\, h$ za svojstvenu vrijednost $c_j - 2 > 0$. Slično kao što smo dokazali (3.13) nalazimo da je

$$[y, e_{\alpha_j}] = \sum_{\beta \in R_+} d_\beta e_\beta \qquad \text{za neke} \quad d_\beta \in \mathbb{C}.$$

S druge strane, iz (3.13) slijedi

$$[y, e_{\alpha_j}] = \sum_{\alpha \in R_-} a_\alpha [e_\alpha, e_{\alpha_j}]$$

i vrijedi $[e_\alpha, e_{\alpha_j}] \in \mathfrak{g}_{\alpha+\alpha_j}$. Odatle zaključujemo da je $a_\alpha \neq 0$ moguće samo ako je $\alpha + \alpha_j \in R_+$. No to je nemoguće za bilo koji $\alpha \in R_-$, budući da je α_j prost korijen u odnosu na R_+. Ova kontradikcija pokazuje da ne može biti $c_j > 2$ ni za jedan $j \in \{1, \ldots, \ell\}$, odnosno, nužno je $c_j \in \{0, 1, 2\}$ za svaki j.

Ova lema pokazuje da ima manje od 3^ℓ monopoluprostih elemenata u $\overline{C}$. Neka su to $h_{(1)}, \ldots, h_{(k)}$ (pri čemu je $k < 3^\ell$). Prema korolarima 3.4.6. i 3.5.5. ima točno k klasa $G-$konjugiranosti TDS$-$podalgebri od $\mathfrak{g}$: ako je za svaki $j \in \{1, \ldots, k\}$ izabrana neka TDS$-$podalgebra $\mathfrak{a}_{(j)}$ u kojoj je $h_{(j)}$ neutralni element, onda su $\mathfrak{a}_{(1)}, \ldots, \mathfrak{a}_{(k)}$ međusobno nekonjugirani predstavnici svih klasa konjugiranosti TDS$-$podalgebri od $\mathfrak{g}$.

Među elementima $h_{(1)}, \ldots, h_{(k)}$ jedan se posebno ističe. To je onaj koji je dan sa $c_j = 2$ za $j = 1, \ldots, \ell$:

Lema 3.5.7. *Uz uvedene oznake $h_0 = 2h_1 + \cdots + 2h_\ell$ je monopoluprost element od $\mathfrak{g}$ sadržan u Weylovoj komori C.*

Dokaz: Prema teoremu 3.5.2. $B(R_+) = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell\}$ je baza realnog prostora $\mathfrak{h}^*_{\mathbb{R}}$, pa je prema teoremu 3.5.1. $\{t_{\alpha_1}, \ldots, t_{\alpha_\ell}\}$ baza realnog prostora $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$. Stoga je i $\{h_{\alpha_1}, \ldots, h_{\alpha_\ell}\}$ baza od $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$. Budući da je $h_0 \in \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$, postoje jedinstveni $r_1, \ldots, r_\ell \in \mathbb{R}$ takvi da je

$$h_0 = r_1 h_{\alpha_1} + \cdots + r_\ell h_{\alpha_\ell}.$$

Možemo pretpostaviti da su $e_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha \setminus \{0\}$ izabrani tako da je $[e_\alpha, e_{-\alpha}] = h_\alpha$ za svaki $\alpha \in R$. Sada za proizvoljne $c_1, \ldots, c_\ell \in \mathbb{C}^*$ stavimo

$$x_0 = c_1 e_{\alpha_1} + \cdots + c_\ell e_{\alpha_\ell} \qquad \text{i} \qquad y_0 = \frac{r_1}{c_1} e_{-\alpha_1} + \cdots + \frac{r_\ell}{c_\ell} e_{-\alpha_\ell}.$$

Imamo $\alpha_j(h_i) = \delta_{ij}$, dakle, $\alpha_j(h_0) = 2$ za svaki $j = 1, \ldots, \ell$. To znači da je $[h_0, e_{\alpha_j}] = 2e_{\alpha_j}$ i $[h_0, e_{-\alpha_j}] = -2e_{-\alpha_j}$ za $j = 1, \ldots, \ell$, pa vrijedi

$$[h_0, x_0] = 2x_0 \qquad \text{i} \qquad [h_0, y_0] = -2y_0.$$

Nadalje, budući da su $\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell$ prosti korijeni, vrijedi $\alpha_i - \alpha_j \notin R$ za $i \neq j$, dakle, $[e_{\alpha_i}, e_{-\alpha_j}] = 0$ za $i \neq j$. Prema tome, vrijedi

$$[x_0, y_0] = \sum_{j=1}^{\ell} r_j [e_{\alpha_j}, e_{-\alpha_j}] = \sum_{j=1}^{\ell} r_j h_{\alpha_j} = h_0.$$

Dakle, (h_0, x_0, y_0) je $S-$trojka u $\mathfrak{g}$, odnosno, h_0 je monopoluprost element od $\mathfrak{g}$. Napokon, kako je $\alpha_j(h_0) = 2 > 0$ za $j = 1, \ldots, \ell$, vrijedi $h_0 \in C$.

Neka su h_0, x_0, y_0 definirani kao u lemi 3.5.7. i njezinom dokazu i neka je $\mathfrak{a}_0$ TDS$-$podalgebra od $\mathfrak{g}$ njima razapeta. Svaka TDS$-$podalgebra koja je $G-$konjugirana TDS$-$podalgebri $\mathfrak{a}_0$ zove se **glavna TDS$-$podalgebra**. $S-$trojka (h_0, x_0, y_0) i svaka druga koja je njoj $G-$konjugirana zove se **glavna $S-$trojka**. Primijetimo da je $\alpha(h_0) \neq 0$ za svaki $\alpha \in R$, dakle, element h_0 je regularan. Svaki element klase konjugiranosti Gh_0 zove se **glavni regularni element** od $\mathfrak{g}$, a svaki element klase konjugiranosti Gx_0 zove se **glavni nilpotentni element** od $\mathfrak{g}$.

Važno svojstvo po kojem se glavna TDS$-$podalgebra ističe među svim TDS$-$podalgebrama odnosi se na njezinu adjungiranu reprezentaciju na $\mathfrak{g}$. Za bilo koju TDS$-$podalgebru $\mathfrak{a}$ označimo sa $n(\mathfrak{a})$, $n^E(\mathfrak{a})$ i $n^O(\mathfrak{a})$ redom broj ireducibilnih konstituenata, broj parnodimenzionalnih ireducibilnih konstituenata i broj neparnodimenzionalnih ireducibilnih konstituenata reprezentacije $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}|\mathfrak{a}$.

Teorem 3.5.8. *Za svaku* TDS$-$*podalgebru* $\mathfrak{a}$ *vrijedi* $n(\mathfrak{a}) \geq \ell = \dim \mathfrak{h} = \operatorname{rank} \mathfrak{g}$. *Nadalje,* TDS$-$*podalgebra* $\mathfrak{a}$ *je glavna ako i samo ako je* $n(\mathfrak{a}) = \ell$.

Dokaz: Neka je (h, x, y) $S-$trojka koja razapinje TDS$-$podalgebru $\mathfrak{a}$. Zbog korolara 3.5.5. možemo pretpostaviti da je $h \in \overline{C} \subseteq \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$. Budući da je $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}^h$, očito je $\dim \mathfrak{g}^h \geq \ell$. Nadalje, prema tvrdnji (c) teorema 3.2.3. vrijedi $\dim \mathfrak{g}^h = n^O(\mathfrak{a})$. Dakle,

$$n(\mathfrak{a}) \geq n^O(\mathfrak{a}) = \dim \mathfrak{g}^h \geq \ell. \tag{3.14}$$

Time je dokazana prva tvrdnja.

Pretpostavimo sada da je $\mathfrak{a}$ glavna TDS$-$podalgebra. Tada je element h regularan, pa je $\mathfrak{g}^h = \mathfrak{h}$, dakle, $\dim \mathfrak{g}^h = \ell$. Nadalje, u tom su slučaju sve svojstvene vrijednosti operatora $\mathrm{ad}\, h$ parne, pa je $n^E(\mathfrak{a}) = 0$. Dakle, $n(\mathfrak{a}) = n^O(\mathfrak{a}) = \dim \mathfrak{g}^h = \ell$.

Pretpostavimo sada da je $n(\mathfrak{a}) = \ell$. Prema (3.14) tada je $\dim \mathfrak{g}^h = \ell$, dakle, element h je regularan. Stoga iz leme 3.5.6. slijedi

$$h = c_1 h_1 + \cdots + c_\ell h_\ell, \qquad c_1, \ldots, c_\ell \in \{1, 2\}$$

Prema (3.14) vrijedi $n^O(\mathfrak{a}) = n(\mathfrak{a})$, dakle, $n^E(\mathfrak{a}) = 0$, a to znači da su sve svojstvene vrijednosti operatora $\mathrm{ad}\, h$ parne. Kako je $\alpha_j(h_i) = \delta_{ij}$, vrijedi $[h, e_{\alpha_j}] = c_j e_{\alpha_j}$ za $j = 1, \ldots, \ell$. Odatle slijedi $c_j = 2$ za $j = 1, \ldots, \ell$, odnosno, $h = h_0$ iz leme 3.5.8., odnosno, $\mathfrak{a}$ je glavna TDS$-$podalgebra.

Neposredna je posljedica ovog dokaza:

Korolar 3.5.9. *Neka je* $\mathfrak{a}$ TDS$-$*podalgebra od* $\mathfrak{g}$. *Tada je* $n^O(\mathfrak{a}) \geq \ell$. *Jednakost* $n^O(\mathfrak{a}) = \ell$ *vrijedi ako i samo ako su monopoluprosti elementi u* $\mathfrak{a}$ *regularni u* $\mathfrak{g}$. *Ukoliko je* $\mathfrak{a}$ *glavna* TDS$-$*podalgebra, onda je* $n^E(\mathfrak{a}) = 0$.

Sljedeći je korolar teorema 3.5.8. karakterizacija glavnih nilpotentnih elemenata u skupu $\mathcal{N}$ svih nilpotentnih elemenata u $\mathfrak{g}$. Dokaz slijedi neposredno iz teorema 3.2.2. i 3.2.3.

Korolar 3.5.10. *Za svaki* $e \in \mathcal{N}$ *vrijedi* $\dim \mathfrak{g}^e \geq \ell$ *i* e *je glavni nilpotentni element ako i samo ako je* $\dim \mathfrak{g}^e = \ell$.

Promotrimo sada pobliže glavnu $S-$trojku (h_0, x_0, y_0) iz leme 3.5.7. i njezinog dokaza. Neka je $\mathfrak{g}_p$ svojstveni potprostor operatora $\mathrm{ad}\, h_0$ za svojstvenu vrijednost $p \in \mathbb{Z}$. Primijetimo da je $\mathfrak{g}_p = \{0\}$ za neparne brojeve p, budući da operator $\mathrm{ad}\, h_0$ ima samo parne svojstvene vrijednosti. Svaki korijen $\alpha \in R$ možemo pisati

$$\alpha = \sum_{j=1}^{\ell} n_j \alpha_j \qquad \text{gdje su} \quad n_1, \ldots, n_\ell \in \mathbb{Z}_\pm \quad \text{za} \quad \alpha \in R_\pm.$$

Definiramo **red korijena** α sa

$$o(\alpha) = \sum_{j=1}^{\ell} n_j.$$

Budući da je $\alpha_j(h_0) = 2$ za $j = 1, \dots, \ell$, vrijedi

$$\mathfrak{g}_{2p} = \sum_{o(\alpha)=p} \dot{+}\, \mathfrak{g}_\alpha \qquad \text{ako je} \quad p \in \mathbb{Z}^*.$$

Kao u odjeljku 3.4. stavimo

$$\mathfrak{n}_j = \sum_{p \geq j} \dot{+}\, \mathfrak{g}_p, \qquad j \in \mathbb{Z}_+.$$

Neka je

$$\mathfrak{n} = \mathfrak{n}_1 = \mathfrak{n}_2 = \sum_{j \geq 2} \dot{+}\, \mathfrak{g}_j = \sum_{\alpha \in R_+} \dot{+}\, \mathfrak{g}_\alpha$$

i

$$\mathfrak{s} = \mathfrak{n}_0 = \mathfrak{h} \dot{+} \mathfrak{n}.$$

Tada znamo da je $\mathfrak{n}$ maksimalna u skupu Liejevih podalgebri od $\mathfrak{g}$ sastavljenih od nilpotentnih elemenata i $\mathfrak{s}$ je maksimalna rješiva Liejeva podalgebra od $\mathfrak{g}$. Neka su H, N i S povezane Liejevve podgrupe od G s Liejevim algebrama $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{n}$ i $\mathfrak{s}$. Prema teoremima 3.4.5. i 3.4.7. imamo

$$Hx_0 = \hat{\mathfrak{g}}_2 = \left\{ e \in \mathfrak{g}_2;\ e = \sum_{j=1}^{\ell} a_j e_{\alpha_j},\ \ a_1, \dots, a_\ell \in \mathbb{C}^* \right\}$$

i (budući da je $\mathfrak{n}_3 = \mathfrak{n}_4$)

$$Sx_0 = \hat{\mathfrak{g}}_2 + \mathfrak{n}_4 = \left\{ e \in \mathfrak{n};\ e = \sum_{\alpha \in R_+} a_\alpha e_\alpha,\ \ a_\alpha \in \mathbb{C},\ \ a_{\alpha_j} \neq 0 \text{ za } j = 1, \dots, \ell \right\}. \tag{3.15}$$

(3.15) između ostalog znači da su „*gotovo svi*” elementi u maksimalnoj podalgebri $\mathfrak{n}$ sastavljenoj od nilpotentnih elemenata glavni nilpotentni, dakle, leže u istoj klasi $G-$konjugiranosti. Sljedeća jednostavna karakterizacija glavnih nilpotentnih elemenata u $\mathfrak{n}$ pokazuje da Sx_0 sadrži svaki glavni nilpotentni element od $\mathfrak{n}$, odnosno da je $Gx_0 \cap \mathfrak{n} = Sx_0$.

Teorem 3.5.11. *Element*

$$e = \sum_{\alpha \in R_+} a_\alpha e_\alpha \in \mathfrak{n}$$

je glavni nilpotentni element ako i samo ako je $a_{\alpha_j} \neq 0$ *za* $j = 1, \dots, \ell$.

Dokaz: Prema (3.15) ako $e \in \mathfrak{n}$ zadovoljava uvjet teorema onda je e glavni nilpotentni element. Pretpostavimo sada da je $e \in \mathfrak{n}$ glavni nilpotentni element i da je $a_{\alpha_j} = 0$ za neki $j \in \{1, \dots, \ell\}$.

Pretpostavimo najprije da je Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ prosta. Tada je poznato da postoji najveći korijen $\psi \in R_+$ u sljedećem smislu:

$$\psi = \sum_{j=1}^{\ell} q_j \alpha_j \quad \text{gdje su svi} \quad q_j \in \mathbb{N}$$

i ako je

$$\alpha = \sum_{j=1}^{\ell} t_j \alpha_j \in R, \qquad t_1, \ldots, t_\ell \in \mathbb{Z},$$

onda je

$$t_j \leq q_j \qquad \text{za} \quad j = 1, \ldots, \ell.$$

Odatle slijedi da je

$$o(\psi) > o(\alpha) \qquad \forall \alpha \in R \setminus \{\psi\}. \tag{3.16}$$

Stavimo

$$q = o(\psi) = \sum_{j=1}^{\ell} q_j.$$

Neka je $\mathfrak{a}_0$ TDS$-$podalgebra razapeta $S-$trojkom (h_0, x_0, y_0) i promotrimo reprezentaciju $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}|\mathfrak{a}_0$. Sada iz (3.16) i iz teorema 3.2.2. slijedi:

(1) e_ψ leži u jedinstvenom ireducibilnom $\mathfrak{a}_0-$podmodulu $\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{g}$.

(2) $\dim\, \mathfrak{b} = 2q + 1$.

(3) $e_{-\psi} \in \mathfrak{b}$.

(4) Svaki drugi ireducibilan $\mathfrak{a}_0-$podmodul u $\mathfrak{g}$ ima dimenziju striktno manju od $2q + 1$.

Prema tome,

$$(\mathrm{ad}\, y_0)^{2q+1} = 0 \qquad \text{i} \qquad (\mathrm{ad}\, y_0)^{2q} e_\psi = a e_{-\psi} \quad \text{za neki} \quad a \in \mathbb{C}^*.$$

Budući da je y_0 konjugiran elementu e (svi su glavni nilpotentni elementi u jednoj klasi konjugiranosti), slijedi $(\mathrm{ad}\, e)^{2q} \neq 0$. S druge strane, kako je $e \in \mathfrak{n}$, za svaki $\alpha \in R$ imamo

$$(\mathrm{ad}\, e)^{2q} e_\alpha = \sum_{\beta \in R} b_\beta e_\beta \tag{3.17}$$

i pri tome vrijedi

$$b_\beta \neq 0 \qquad \Longrightarrow \qquad o(\beta) \geq o(\alpha) + 2q.$$

Sada zbog (3.15) možemo zaključiti da je (3.17) jednako nuli ako je $\alpha \neq -\psi$. Prema tome, iz $(\mathrm{ad}\, e)^{2q} \neq 0$ slijedi da mora biti $(\mathrm{ad}\, e)^{2q} e_{-\psi} \neq 0$, pa pomoću (3.15) zaključujemo da je

$$(\mathrm{ad}\, e)^{2q} e_{-\psi} = a' e_\psi \qquad \text{za neki} \quad a' \in \mathbb{C}^*.$$

Pišemo sada

$$e = e_1 + e_2, \qquad e_1 \in \mathfrak{g}_2, \quad e_2 \in \mathfrak{n}_4.$$

Sada je $(\mathrm{ad}\, e)^{2q} = (\mathrm{ad}\, e_1 + \mathrm{ad}\, e_2)^{2q}$, dakle, $(\mathrm{ad}\, e)^{2q}$ je suma produkata potencija operatora $\mathrm{ad}\, e_1$ i operatora $\mathrm{ad}\, e_2$, s tim da je suma eksponenata u svakom takvom produktu jednaka $2q$. Sada zbog (3.15) nalazimo da svaki član u toj sumi vektor $e_{-\psi}$ preslikava u nulu, osim člana $(\mathrm{ad}\, e_1)^{2q}$. To znači da je

$$(\mathrm{ad}\, e_1)^{2q} e_{-\psi} = (\mathrm{ad}\, e)^{2q} e_{-\psi} = a' e_\psi.$$

Za bilo koji $0 < p \leq 2q$ imamo

$$(\mathrm{ad}\, e_1)^p e_{-\psi} = \sum_{\beta \in R} b'_\beta e_\beta.$$

Budući da je po pretpostavci $a_{\alpha_j} = 0$, slijedi da b'_β može biti različito od nule samo ako je

$$\beta = \sum_{k=1}^{\ell} t_k \alpha_k \qquad \text{i} \qquad t_j = -q_j.$$

Posebno, za $p = 2q$ slijedi $q_j = -q_j$, odnosno, $q_j = 0$, a to nije tako za najveći korijen ψ. Ova kontradikcija dokazuje tvrdnju u slučaju da je Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ prosta.

Odatle slijedi tvrdnja i u općem slučaju jer tada je $\mathfrak{g}$ direktna suma prostih ideala i prema korolaru 3.5.10. e je glavni nilpotentni element ako i samo ako su sve njegove komponente u tim prostim idealima glavni nilpotetni elementi u tim idealima.

Poznato je da su sve maksimalne rješive podalgebre (tj. sve Borelove podalgebre) kompleksne poluproste Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ međusobno $G-$konjugirane. To znači da je svaka rješiva podalgebra od $\mathfrak{g}$ konjugirana nekoj podalgebri $\mathfrak{s}'$ od $\mathfrak{s}$. Ako su svi njezini elementi nilpotentni onda je očito $\mathfrak{s}' \subseteq \mathfrak{n}$. To posebno znači da je svaki nilpotentni element od $\mathfrak{g}$ konjugiran nekom elementu iz $\mathfrak{n}$. Ta činjenica slijedi i iz leme 3.5.6.:

Lema 3.5.12. *Svaki nilpotentni element $e \in \mathfrak{g}$ konjugiran je nekom elementu $e' \in \mathfrak{n}$.*

Dokaz: Prema Jacobson$-$Morosovljevom teoremu 3.3.7. dovoljno je dokazati da je nilpozitivni element bilo koje $S-$trojke u kojoj je neutralni element neki od elemenata $h_{(1)}, \ldots, h_{(k)}$ (oznake iz odlomka iza dokaza leme 3.5.6.) sadržan u $\mathfrak{n}$. No to je jasno, budući da su svi $h_{(j)} \in \overline{C}$ pa ako je $\alpha \in R$ i $\alpha(h_{(j)}) = 2$, onda je $\alpha \in R_+$.

Kao neposrednu posljedicu teorema 3.5.11. i leme 3.5.12. dobivamo sljedeću karakterizaciju glavnih nilpotentnih elemenata proste Liejeve algebre:

Korolar 3.5.13. *Pretpostavimo da je Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ prosta i neka je $q = o(\psi)$ za najveći korijen ψ. Za svaki nilpotentni element $e \in \mathfrak{g}$ vrijedi $(\operatorname{ad} e)^{2q+1} = 0$ i e je glavni nilpotentni element ako i samo ako je $(\operatorname{ad} e)^{2q} \neq 0$.*

Korolar 3.3.14. uspostavlja prirodnu bijekciju između klasa $G-$konjugiranosti nilpotentnih elemenata i klasa $G-$konjugiranosti TDS$-$podalgebri. Naravno, u toj korespondenciji klasa glavnih nilpotentnih elemenata odgovara klasi glavnih TDS$-$podalgebri.

Korolar 3.5.14. *Klasa konjugiranosti glavnih nilpotentnih elemenata u $\mathfrak{g}$ je otvoren, gust i povezan podskup skupa $\mathcal{N}$ svih nilpotentnih elemenata u $\mathfrak{g}$.*

Dokaz: Otvorenost slijedi iz korolara 3.5.10. Naime, treba samo izabrati bazu $\{e_1, \ldots, e_n\}$ od $\mathfrak{g}$ i promatrati minore formata $(n-\ell) \times (n-\ell)$ matrice nilpotentnog operatora $\operatorname{ad} e$. Tada je e glavni nilpotentni ako i samo ako je neka od tih minora različita od nule. Gustoća slijedi iz teorema 3.5.1. i leme 3.5.12. Napokon, povezanost svake klase $G-$konjugiranosti slijedi iz povezanosti grupe G.

Uočimo sada da postoji vrlo jaka analogija između glavnih nilpotentnih elemenata u skupu $\mathcal{N}$ svih nilpotentnih elemenata i regularnih elemenata u skupu $\mathcal{S}$ svih poluprostih elemenata. To pokazuju korolari 3.5.10. i 3.5.14. Po toj analogiji Cartanove podalgebre odgovaraju maksimalnim Liejevim podalgebrama sastavljenim od nilpotentnih elemenata. Po lemi 3.5.12. svaki je nilpotentni element $e \in \mathcal{N}$ konjugiran nekom elementu fiksne izabrane maksimalne Liejeve podalgebre $\mathfrak{n}$ satavljene od nilpotentnih elemenata, a isto tako je svaki poluprosti element $h \in \mathcal{S}$ konjugiran nekom elementu fiksne izabrane Cartanove podalgebre $\mathfrak{h}$. Nadalje, sve su maksimalne Liejeve podalgebre sastavljene od nilpotentnih elemenata međusobno konjugirane isto kao što su sve

Cartanove podalgebre međusobno konjugirane. Znamo da su regularni elementi okarakterizirani svojstvom da se svaki nalazi u jedinstvenoj Cartanovoj podalgebri. Sljedeći korolar potvrđuje naznačenu analogiju:

Korolar 3.5.15. *Nilpotentni element $e \in \mathcal{N}$ je glavni nilpotentni element ako i samo ako je sadržan u jedinstvenoj maksimalnoj Liejevoj podalgebri sastavljenoj od nilpotentnih elemenata.*

Dokaz: Prema lemi 3.5.12. možemo pretpostaviti da je $e \in \mathfrak{n}$.

Pretpostavimo da e nije glavni nilpotentni element. Dokazat ćemo da se tada e nalazi u barem još jednoj maksimalnoj Liejevoj podalgebri $\mathfrak{n}' \neq \mathfrak{n}$ sastavljenoj od nilpotentnih elemenata. Možemo pisati

$$e = \sum_{\alpha \in R_+} a_\alpha e_\alpha.$$

Prema teoremu 3.5.11. vrijedi $a_{\alpha_j} = 0$ za neki $j \in \{1, \ldots, \ell\}$. No tada se lako vidi da je

$$\mathfrak{n}' = \mathfrak{g}_{-\alpha_j} \dotplus \sum_{\alpha \in R_+ \setminus \{\alpha_j\}} \dotplus \mathfrak{g}_\alpha$$

maksimalna Liejeva podalgebra sastavljena od nilpotentnih elemenata. (Precizno, $\mathfrak{n}$ se preslikava na $\mathfrak{n}'$ bilo kojim elementom iz $N_G(\mathfrak{h})$ čija je restrikcija na $\mathfrak{h}$ refleksija iz $W(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ u odnosu na korijen α_j. Napokon, očito je $e \in \mathfrak{n}'$ i $\mathfrak{n}' \neq \mathfrak{n}$.

Pretpostavimo sada da je e glavni nilpotentni element. Možemo pretpostaviti da je $e = x_0$, uz oznaku iz leme 3.5.7., tj.

$$e = c_1 e_{\alpha_1} + \cdots + c_\ell e_{\alpha_\ell}, \qquad c_1, \ldots, c_\ell \in \mathbb{C}^*.$$

Pretpostavimo da je $e \in \mathfrak{n}' = g\mathfrak{n}$ za neki $g \in G$. U daljnjem ćemo koristiti crticu $'$ da označimo efekat konjugiranja elementom g. Primijenimo li teorem 3.5.11. na $\mathfrak{n}'$ slijedi da je

$$e = \sum_{\alpha' \in R'_+} a_{\alpha'} e'_{\alpha'}$$

gdje su $a_{\alpha'_j} \neq 0$ za $j = 1, \ldots, \ell$. Prema teoremu 3.4.7. postoji $g_1 \in N'$ takav da je

$$g_1 e = \sum_{j=1}^{\ell} a_{\alpha'_j} e'_{\alpha'_j}$$

Budući da su $h'_0(= gh_0)$ i $g_1 e$ očito neutralan i nilpozitivan element neke $S-$trojke (v. dokaz leme 3.5.7.), iz teorema 3.3.12. slijedi da je

$$g_1 h_0 \in h'_0 + \mathfrak{g}^{g_1 e}.$$

Budući da je element h'_0 regularan primjenom teorije reprezentacija TDS$-$podalgebre razapete tom $S-$trojkom nalazimo da je $\mathfrak{g}^{g_1 e} \subseteq \mathfrak{n}'$. No tada po teoremu 3.4.7. postoji $g_2 \in N'$ takav da je $g_2 g_1 h_0 = h'_0$. Budući da je element h_0 regularan, nužno je tada $g_2 g_1 \mathfrak{h} = \mathfrak{h}'$. To povlači da je $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{s}'$ (jer je $g_1^{-1} g_2^{-1} \in S'$). To znači da je $\mathfrak{s}'$, a time i $\mathfrak{n}' = [\mathfrak{s}', \mathfrak{s}']$, stabilna za djelovanje $\operatorname{ad} \mathfrak{h}$. Nadalje, jasno je da vrijedi $\mathfrak{n}' \cap \mathfrak{h} = \{0\}$. No tada iz $\operatorname{ad} \mathfrak{h}-$invarijantnosti slijedi da $\mathfrak{n}'$ mora biti razapeta s korijenskim vektorima u odnosu na $\mathfrak{h}$. Međutim,

$$e = \sum_{j=1}^{\ell} c_j e_{\alpha_j} \qquad \text{i} \quad c_j \neq 0 \quad \forall j.$$

Prema tome, $e_{\alpha_j} \in \mathfrak{n}'$ za $j = 1, \ldots, \ell$. Budući da e_{α_j} generiraju Liejevu podalgebru $\mathfrak{n}$, slijedi da je $\mathfrak{n} \subseteq \mathfrak{n}'$, a to znači da je $\mathfrak{n} = \mathfrak{n}'$ (jer su i $\mathfrak{n}$ i $\mathfrak{n}'$ po pretpostavci maksimalne Liejeve podalgebre sastavljene od nilpotentnih elemenata).

Teorem 3.5.16. *Centralizator $\mathfrak{g}^z$ proizvoljnog elementa $z \in \mathfrak{g}$ sadrži $\ell-$dimenzionalnu komutativnu Liejevu podalgebru.*

Dokaz: Skup $\mathcal{R}$ svih regularnih elemenata u $\mathfrak{g}$ je gust u $\mathfrak{g}$. Prema tome, postoji niz regularnih elemenata (z_n) takvih da je $z = \lim z_n$. Promatrajmo sada Grassmannovu mnogostrukost svih $\ell-$dimenzionalnih potprostora od $\mathfrak{g}$. To je kompaktan topološki prostor u odnosu na operatorsku topologiju za neki skalarni produkt na $\mathfrak{g}$ (potprostor od $\mathfrak{g}$ identificiramo s ortogonalnim projektorom na taj potprostor). Prema tome, postoji podniz $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niza $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ takav da niz Cartanovih podalgebri $(\mathfrak{g}^{u_n})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira prema nekom $\ell-$dimenzionalnom potprostoru $\mathfrak{u}$ u toj Grassmannovoj mnogostrukosti. Ako je $\{w_1, \ldots, w_\ell\}$ bilo koja baza od $\mathfrak{u}$, za svaki $n \in \mathbb{N}$ postoje elementi $w_1^n, \ldots, w_\ell^n \in \mathfrak{g}^{u_n}$ takvi da niz $\left(w_j^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira prema w_j za svaki $j = 1, \ldots, \ell$. Budući da je $[u_n, w_j^n] = 0$, prijelazom na limes slijedi da je $\mathfrak{u} \subseteq \mathfrak{g}^z$. Nadalje, prijelazom na limes u jednakosti $[w_i^n, w_j^n] = 0$ slijedi $[w_i, w_j] = 0$ za sve $i, j \in \{1, \ldots, \ell\}$. Dakle, $\mathfrak{u}$ je komutativna $\ell-$dimenzionalna Liejeva podalgebra sadržana u $\mathfrak{g}^z$.

Neposredna je posljedica:

Korolar 3.5.17. *Neka je $z \in \mathfrak{g}$ takav da je $\dim \mathfrak{g}^z = \ell$. Tada je Liejeva algebra $\mathfrak{g}^z$ komutativna.*

Odatle i iz korolara 3.5.10. slijedi:

Korolar 3.5.18. *Neka je e glavni nilpotentni element u $\mathfrak{g}$. Tada je Liejeva podalgebra $\mathfrak{g}^e$ komutativna.*

Posebni slučaj tog korolara je dobro poznata činjenica da je komutant matrice

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

komutativan (sastoji se od polinoma te matrice).

3.6 Univerzalna omotačka algebra

U ovom ćemo odjeljku dopuniti uvodni odjeljak 1.1. definicijom, konstrukcijom i osnovnim svojstvima univerzalne omotačke algebre $U(\mathfrak{g})$ Liejeve algebre $\mathfrak{g}$. To je unitalna algebra u koju je prirodno uložena promatrana Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ i to tako da se svaki homomorfizam Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ u bilo koju unitalnu algebru $\mathcal{A}$ (promatrane kao Liejevu algebru s komutatorom $[a,b]=ab-ba$) jedinstveno produljuje do unitalnog homomorfizma unitalnih algebri. Algebra $U(\mathfrak{g})$ nije prirodno graduirana ukoliko $\mathfrak{g}$ nije komutativna, ali jest prirodno filtrirana i vidjet ćemo da se pripadna graduirana algebra $\mathrm{Gr}\,U(\mathfrak{g})$ prirodno identificira sa simetričnom algebrom $S(\mathfrak{g})$ nad vektorskim prostorom $\mathfrak{g}$.

Neka je $\mathfrak{g}$ Liejeva algebra nad poljem K. Linearno preslikavanje $\varphi:\mathfrak{g}\to\mathcal{A}$, gdje je $\mathcal{A}$ asocijativna algebra nad istim poljem K ili nad nekim proširenjem tog polja, zove se **Liejev morfizam** ako vrijedi

$$\varphi([x,y])=\varphi(x)\varphi(y)-\varphi(y)\varphi(x) \qquad \forall x,y\in\mathfrak{g}.$$

Drugim riječima, Liejev morfizam je homomorfizam Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ u Liejevu algebru $\mathrm{Lie}(\mathcal{A})$ definirane u odjeljku 1.1. ($\mathrm{Lie}(\mathcal{A})$ podudara se sa $\mathcal{A}$ kao vektorski prostor, a komutator je zadan sa $[a,b]=ab-ba$.)

Univerzalna omotačka algebra Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ je uređen par $(\mathcal{U},\varphi)$, gdje je $\mathcal{U}$ unitalna algebra nad poljem K, $\varphi:\mathfrak{g}\to\mathcal{U}$ je Liejev morfizam i vrijedi sljedeće *univerzalno svostvo*:

> *Ako je $\mathcal{A}$ unitalna algebra nad poljem K i ako je $\psi:\mathfrak{g}\to\mathcal{A}$ Liejev morfizam, onda postoji jedinstven unitalni homomorfizam $\Psi:\mathcal{U}\to\mathcal{A}$ takav da je $\psi=\Psi\circ\varphi$.*

Teorem 3.6.1. *Neka je $\mathfrak{g}$ Liejeva algebra nad poljem K. Postoji univerzalna omotačka algebra Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ i ona je jedinstvena do na izomorfizam: ako su $(\mathcal{U},\varphi)$ i $(\mathcal{V},\psi)$ univerzalne omotačke algebre Liejeve algebre $\mathfrak{g}$, jedinstveni unitalni homomorfizmi $\Psi:\mathcal{U}\to\mathcal{V}$ i $\Phi:\mathcal{V}\to\mathcal{U}$, takvi da vrijedi $\varphi=\Phi\circ\psi$ i $\psi=\Psi\circ\varphi$, međusobno su inverzni izomorfizmi.*

Dokaz: Neka je $T(\mathfrak{g})$ tenzorska algebra nad vektorskim prostorom $\mathfrak{g}$ i neka je $\mathcal{J}$ dvostrani ideal u $T(\mathfrak{g})$ generiran skupom

$$\{x\otimes y-y\otimes x-[x,y];\ x,y\in\mathfrak{g}\}.$$

Stavimo $\mathcal{U}=T(\mathfrak{g})/\mathcal{J}$ i neka je $\pi:T(\mathfrak{g})\to\mathcal{U}$ kvocijentni epimorfizam. Definiramo preslikavanje $\varphi:\mathfrak{g}\to\mathcal{U}$ kao restrikciju $\pi|\mathfrak{g}$. Tada je π Liejev morfizam. Doista, očito je to preslikavanje linearno; nadalje, ako su $x,y\in\mathfrak{g}$, onda je $x\otimes y-y\otimes x-[x,y]\in\mathcal{J}$, dakle, vrijedi

$$\varphi([x,y])=\pi([x,y])=[x,y]+\mathcal{J}=x\otimes y-y\otimes x+\mathcal{J}=\pi(x\otimes y)-\pi(y\otimes x)=$$

$$=\pi(x)\pi(y)-\pi(y)\pi(x)=\varphi(x)\varphi(y)-\varphi(y)\varphi(x).$$

Dakle, $\varphi:\mathfrak{g}\to\mathcal{U}$ je Liejev morfizam.

Neka je sada $\mathcal{A}$ unitalna algebra nad poljem K i neka je $\psi:\mathfrak{g}\to\mathcal{A}$ Liejev morfizam. Tada je ψ linearno preslikavanje, pa se po univerzalnom svojstvu tenzorske algebre jedinstveno proširuje do unitalnog homomorfizma $\Omega:T(\mathfrak{g})\to\mathcal{A}$. Za $x,y\in\mathfrak{g}$ tada imamo (zbog toga što je $\psi:\mathfrak{g}\to\mathcal{A}$ Liejev morfizam)

$$\Omega([x,y])=\psi([x,y])=\psi(x)\psi(y)-\psi(y)\psi(x)=\Omega(x)\Omega(y)-\Omega(y)\Omega(x)=\Omega(x\otimes y-x\otimes y).$$

Prema tome, vrijedi

$$\Omega(x\otimes y-y\otimes x-[x,y])=0 \qquad \forall x,y\in\mathfrak{g}.$$

Budući da je Ω homomorfizam asocijativnih algebri, odatle slijedi da je čitav dvostrani ideal $\mathcal{J}$ sadržan u jezgri od Ω. Neka je $\Psi : \mathcal{U} \to \mathcal{A}$ unitalni homomorfizam dobiven iz Ω prijelazom na kvocijent po $\mathcal{J}$:

$$\Psi(a + \mathcal{J}) = \Omega(a), \qquad a \in T(\mathfrak{g}), \qquad \text{tj.} \quad \Psi \circ \pi = \Omega.$$

Tada za $x \in \mathfrak{g}$ vrijedi

$$\psi(x) = \Omega(x) = \Psi(x + \mathcal{J}) = \Psi(\pi(x)) = \Psi(\varphi(x)) = (\Psi \circ \varphi)(x).$$

Dakle, $\psi = \Psi \circ \varphi$. Takav je Ψ jedinstven: ako je $\Phi : \mathcal{U} \to \mathcal{A}$ unitalni homomorfizam takav da je $\psi = \Phi \circ \varphi$, onda za svaki $x \in \mathfrak{g}$ imamo

$$\Psi(x + \mathcal{J}) = \psi(x) = \Phi(\varphi(x)) = \Phi(\pi(x) = \Phi(x + \mathcal{J}).$$

Sada jedinstvenost slijedi iz činjenice da $\mathfrak{g}$ generira unitalnu algebru $T(\mathfrak{g})$, pa $\{x + \mathcal{J};\ x \in \mathfrak{g}\}$ generira unitalnu algebru $\mathcal{U}$.

Druga tvrdnja dokazuje se potpuno analogno dokazima takvih tvrdnji u teoremima 1.1.1. i 1.1.2.

U daljnjem zbog jednostavnosti promatramo isključivo konačnodimenzionalne Liejeve algebre. Bez dokaza navodimo tzv. **PBW−teorem:**

Teorem 3.6.2. (**Poincaré−Birkhoff−Witt**) *Neka je $(\mathcal{U}, \varphi)$ univerzalna omotačka algebra Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ i neka je $\{e_1, \ldots, e_n\}$ baza vektorskog prostora $\mathfrak{g}$. Tada je*

$$\{\varphi(e_1)^{j_1} \cdots \varphi(e_n)^{j_n};\ (j_1, \ldots, j_n) \in \mathbb{Z}_+^n\}$$

baza vektorskog prostora $\mathcal{U}$. (Pri tome kao i obično podrazumijevamo da je $a^0 = 1$ za svaki $a \in \mathcal{U}$.) Posebno, restrikcija $\varphi|\mathfrak{g}$ je injektivna.

Univerzalnu omotačku algebru konstruiranu u dokazu teorema 3.6.1. označavat ćemo sa $U(\mathfrak{g})$. Dakle,

$$U(\mathfrak{g}) = T(\mathfrak{g})/\mathcal{J}, \qquad \mathcal{J} = \operatorname{span}\{a \otimes (x \otimes y - y \otimes x - [x, y]) \otimes b;\ a, b \in T(\mathfrak{g}),\ \ x, y \in \mathfrak{g}\}.$$

Produkt u algebri $U(\mathfrak{g})$ označavat ćemo s točkom ili bez ikakvog znaka. Liejev morfizam $\mathfrak{g} \to U(\mathfrak{g})$ definiran je kao restrikcija na $\mathfrak{g}$ kvocijentnog epimorfizma $\pi : T(\mathfrak{g}) \to U(\mathfrak{g})$. Prema PBW−teoremu taj je Liejev morfizam injektivan i pomoću njega ćemo identificirati Liejevu algebru $\mathfrak{g}$ s Liejevom podalgebrom od $\operatorname{Lie}(U(\mathfrak{g}))$. Dakle, za $x, y \in \mathfrak{g} \subseteq U(\mathfrak{g})$ vrijedi $[x, y] = xy - yx$. Sada univerzalno svojstvo iz definicije univerzalne algebre postaje:

> *Svaki se Liejev morfizam $\varphi : \mathfrak{g} \to \mathcal{A}$ jedinstveno proširuje do unitalnog homomorfizma $\Phi : U(\mathfrak{g}) \to \mathcal{A}$.*

Posebno, ako je π reprezentacija Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ na vektorskom prostoru V, ona se jedinstveno proširuje do reprezentacije unitalne algebre $U(\mathfrak{g})$ na istom prostoru. Tu ćemo reprezentaciju od $U(\mathfrak{g})$ označavati istim znakom π.

Imamo sljedeće posljedice PBW−teorema:

Zadatak 3.6.1. *Neka je $\mathfrak{h}$ Liejeva podalgebra Liejeve algebre $\mathfrak{g}$. Tada se inkluzija $\mathfrak{h} \hookrightarrow \mathfrak{g}$ jedinstveno proširuje do unitalnog homomorfizma $U(\mathfrak{h}) \to U(\mathfrak{g})$. Dokažite da je taj homomorfizam injektivan.*

Uputa: Izaberite bazu od $\mathfrak{h}$, dopunite je do baze od $\mathfrak{g}$ i koristite PBW−teorem.

Za Liejevu podalgebru $\mathfrak{h}$ Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ monomorfizam $U(\mathfrak{h}) \to U(\mathfrak{g})$ iz zadatka 3.6.1. shvaćamo kao identifikaciju univerzalne omotačke algebre $U(\mathfrak{h})$ od $\mathfrak{h}$ s unitalnom podalgebrom univerzalne omotačke algebre $U(\mathfrak{g})$ od $\mathfrak{g}$ generiranom sa $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g} \subseteq U(\mathfrak{g})$.

Zadatak 3.6.2. *Neka su $\mathfrak{a}$ i $\mathfrak{b}$ Liejeve podalgebre Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ takve da je $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \dot{+} \mathfrak{b}$. Uz opisane identifikacije $U(\mathfrak{a}) \subseteq U(\mathfrak{g})$ i $U(\mathfrak{b}) \subseteq U(\mathfrak{g})$ dokažite da postoji jedinstven linearan operator $\Phi : U(\mathfrak{a}) \otimes U(\mathfrak{b}) \to U(\mathfrak{g})$ takav da vrijedi*

$$\Phi(a \otimes b) = ab \qquad \forall a \in U(\mathfrak{a}) \quad i \quad \forall b \in U(\mathfrak{b})$$

i da je Φ izomorfizam vektorskih prostora.

Neka je $\pi : T(\mathfrak{g}) \to U(\mathfrak{g}) = T(\mathfrak{g})/\mathcal{J}$ i dalje kvocijentni epimorfizam. Budući da ideal $\mathcal{J}$ u tenzorskoj algebri $T(\mathfrak{g})$ nije generiran homogenim elementima (osim ako je Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ komutativna), ideal $\mathcal{J}$ općenito nije graduiran pa ni kvocijentna algebra $U(\mathfrak{g}) = T(\mathfrak{g})/\mathcal{J}$ nije graduirana. Međutim, filtracija algebre $T(\mathfrak{g})$ prenosi se pomoću π na filtraciju algebre $U(\mathfrak{g})$:

$$U_n(\mathfrak{g}) = \pi\left(T_n(\mathfrak{g})\right), \qquad T_n(\mathfrak{g}) = \sum_{k=0}^{n} \dot{+}\, T^k(\mathfrak{g}).$$

Promatrajmo sada kompoziciju

$$T_n(\mathfrak{g}) \longrightarrow (T_n(\mathfrak{g}) + \mathcal{J})/\mathcal{J} = U_n(\mathfrak{g}) \longrightarrow \mathrm{Gr}^n(U(\mathfrak{g})) = U_n(\mathfrak{g})/U_{n-1}(\mathfrak{g}).$$

Ta je kompozicija surjektivna, jer su oba preslikavanja surjektivna. Nadalje, potprostor $T_{n-1}(\mathfrak{g})$ sadržan je u jezgri te kompozicije. Budući da je $T_n(\mathfrak{g}) = T_{n-1}(\mathfrak{g}) \dot{+} T^n(\mathfrak{g})$, dolazimo do linearnog preslikavanja

$$\tilde{\Phi}_n : T^n(\mathfrak{g}) \longrightarrow \mathrm{Gr}^n(U(\mathfrak{g})) = U_n(\mathfrak{g})/U_{n-1}(\mathfrak{g}).$$

Definiramo sada linearno preslikavanje $\tilde{\Phi} : T(\mathfrak{g}) \to \mathrm{Gr}(U(\mathfrak{g}))$ pomoću njegovih restrikcija:

$$\tilde{\Phi}|T^n(\mathfrak{g}) = \tilde{\Phi}_n \qquad \forall n \in \mathbb{Z}_+.$$

Teorem 3.6.3. *Preslikavanje $\tilde{\Phi} : T(\mathfrak{g}) \to \mathrm{Gr}(\mathfrak{g})$ je unitalni homomorfizam. Jezgra $\mathrm{Ker}\,\tilde{\Phi}$ sadrži dvostrani ideal J u $T(\mathfrak{g})$ generiran skupom $\{x \otimes y - y \otimes x;\ x, y \in \mathfrak{g}\}$. Prijelazom na kvocijent $T(\mathfrak{g})/J = S(\mathfrak{g})$ dobivamo izomorfizam $\Phi : S(\mathfrak{g}) \to \mathrm{Gr}(\mathfrak{g})$ i vrijedi $\Phi\left(S^n(\mathfrak{g})\right) = \mathrm{Gr}^n(\mathfrak{g})$.*

Dokaz: Neka su $a \in T^n(\mathfrak{g})$ i $b \in T^m(\mathfrak{g})$, dakle, $a \otimes b \in T^{n+m}(\mathfrak{g})$. Tada je $a + \mathcal{J} \in U_n(\mathfrak{g})$ i $\tilde{\Phi}(a)$ možemo shvaćati kao klasu $a + T_{n-1}(\mathfrak{g}) + \mathcal{J}$ u $\mathrm{Gr}^n(U(\mathfrak{g})) = U_n(\mathfrak{g})/U_{n-1}(\mathfrak{g})$, budući da iz homogenosti tenzora $a \in T^n(\mathfrak{g})$ slijedi da su sve komponente od $\tilde{\Phi}(a)$ u $\mathrm{Gr}^k(U(\mathfrak{g}))$ za $k \neq n$ jednake nuli. Ista argumentacija primjenjiva je i na elemente $b \in T^m(\mathfrak{g})$ i $a \otimes b \in T^{n+m}(\mathfrak{g})$. Dakle,

$$\tilde{\Phi}(a) = a + T_{n-1}(\mathfrak{g}) + \mathcal{J}, \quad \tilde{\Phi}(b) = b + T_{m-1}(\mathfrak{g}) + \mathcal{J}, \quad \tilde{\Phi}(a \otimes b) = a \otimes b + T_{n+m-1}(\mathfrak{g}) + \mathcal{J}.$$

Budući da je $\mathcal{J}$ ideal, slijedi $\tilde{\Phi}(a)\tilde{\Phi}(b) = \tilde{\Phi}(a \otimes b)$. Bilinearnim proširenjem na $T(\mathfrak{g}) \times T(\mathfrak{g})$ zaključujemo da je preslikavanje $\tilde{\Phi} : T(\mathfrak{g}) \to \mathrm{Gr}(\mathfrak{g})$ homomorfizam unitalnih algebri.

Da dokažemo da je $J \subseteq Ker\,\tilde{\Phi}$ dovoljno je dokazati da obostrani ideal $Ker\,\tilde{\Phi}$ sadrži generatore ideala J, tj sve elemente oblika $x \otimes y - y \otimes x$, $x, y \in \mathfrak{g}$. Kako je $x \otimes y - y \otimes x - [x, y] \in \mathcal{J}$ i $[x, y] \in \mathfrak{g} = T^1(\mathfrak{g}) \subseteq T_1(\mathfrak{g})$, imamo

$$\tilde{\Phi}(x \otimes y - y \otimes x) = x \otimes y - y \otimes x + T_1(\mathfrak{g}) + \mathcal{J} = [x, y] + T_1(\mathfrak{g}) + \mathcal{J} = T_1(\mathfrak{g}) + \mathcal{J},$$

a to je nula u $\mathrm{Gr}^2(U(\mathfrak{g})) \subseteq \mathrm{Gr}(U(\mathfrak{g}))$. Time je dokazano da je $J \subseteq Ker\,\tilde{\Phi}$. Sada je očito preslikavanje $\Phi : S(\mathfrak{g}) \to \mathrm{Gr}(U(\mathfrak{g}))$, dobiveno iz $\tilde{\Phi}$ prijelazom na kvocijent po J, homomorfizam unitalnih algebri.

Neka je sada $\{e_1, \ldots, e_m\}$ baza od $\mathfrak{g}$. Prema propoziciji 1.1.4. skup monoma

$$\{e_1^{k_1} \cdots e_m^{k_m};\ (k_1, \cdots, k_m) \in \mathbb{Z}_+^m,\ \ |k| = k_1 + \cdots + k_m = n\}$$

je baza od $S^n(\mathfrak{g})$. Razmotrimo djelovanje homomorfizma $\Phi : S(\mathfrak{g}) \to \mathrm{Gr}(U(\mathfrak{g}))$ na takav monom. Imamo

$$\Phi(e_1^{k_1} \cdots e_m^{k_m}) = \tilde{\Phi}\left(\underbrace{e_1 \otimes \cdots \otimes e_1}_{k_1} \otimes \cdots \otimes \underbrace{e_m \otimes \cdots \otimes e_m}_{k_m}\right),$$

a to je jednako slici monoma $e_1^{k_1} \cdots e_m^{k_m} \in U_n(\mathfrak{g})$ u kvocijentu $U_n(\mathfrak{g})/U_{n-1}(\mathfrak{g})$. Međutim, prema PBW−teoremu ti monomi tvore bazu direktnog komplementa od $U_{n-1}(\mathfrak{g})$ u $U_n(\mathfrak{g})$, dakle, njihove slike tvore bazu kvocijentnog prostora $\mathrm{Gr}^n(U(\mathfrak{g})) = U_n(\mathfrak{g})/U_{n-1}(\mathfrak{g})$. Time je dokazano da Φ preslikava bazu od $S(\mathfrak{g})$ na bazu od $\mathrm{Gr}(U(\mathfrak{g}))$. Dakle, homomorfizam Φ je izomorfizam. Iz dokaza slijedi i posljednja tvrdnja $\Phi(S^n(\mathfrak{g})) = \mathrm{Gr}^n(U(\mathfrak{g}))$.

Korolar 3.6.4. *Neka je za $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, W potprostor od $T^n(\mathfrak{g})$ takav da je*

$$T^n(\mathfrak{g}) = W \dotplus T^n(\mathfrak{g}) \cap J,$$

tj. da je restrikcija kvocijentnog epimorfizma $T(\mathfrak{g}) \to S(\mathfrak{g}) = T(\mathfrak{g})/J$ na potprostor W izomorfizam sa W na $S^n(\mathfrak{g})$. Tada je restrikcija $\pi|W$ kvocijentnog epimorfizma $\pi : T(\mathfrak{g}) \to U(\mathfrak{g}) = T(\mathfrak{g})/\mathcal{J}$ injektivna i vrijedi

$$U_n(\mathfrak{g}) = \pi(W) \dotplus U_{n-1}(\mathfrak{g}).$$

Dokaz: Promotrimo dijagram

$$\begin{tikzcd} T^n(\mathfrak{g}) \arrow[r, "\pi|T^n(\mathfrak{g})"] \arrow[d] & U_n(\mathfrak{g}) \arrow[d] \\ S^n(\mathfrak{g}) \arrow[r, "\Phi|S^n(\mathfrak{g})"'] & \mathrm{Gr}^n(U(\mathfrak{g})) \end{tikzcd}$$

Činjenica da je taj dijagram komutativan ekvivalentna je tvrdnji teorema 3.6.3. da iz preslikavanja $\tilde{\Phi} : T^n(\mathfrak{g}) \to \mathrm{Gr}^n(U(\mathfrak{g}))$ prijelazom na kvocijent po $T^n(\mathfrak{g}) \cap J$ dobivamo preslikavanje $\Phi : S^n(\mathfrak{g}) \to \mathrm{Gr}^n(U(\mathfrak{g}))$. Nadalje, po tom teoremu donja je strelica u tom dijagramu izomorfizam vektorskih prostora. Pretpostavka je da je lijeva strelica restringirana na potprostor W izomorfizam sa W na $S^n(\mathfrak{g})$. Zaključujemo da je restrikcija kompozicije gornje i desne strelice na potprostor W izomorfizam sa W na $\mathrm{Gr}^n(U(\mathfrak{g}))$. Odatle slijedi tvrdnja korolara.

U daljnjem pretpostavljamo da je K polje karakteristike 0. Primijenimo korolar 3.6.4. na prostor $W = \tilde{S}^n(\mathfrak{g})$ simetričnih n−tenzora iz odjeljka 1.1. To je slika operatora simetrizacije $\mathrm{Sym}_n : T^n(\mathfrak{g}) \to T^n(\mathfrak{g})$. Prema propoziciji 1.1.6. vrijedi

$$T^n(\mathfrak{g}) = \tilde{S}^n(\mathfrak{g}) \dotplus T^n(\mathfrak{g}) \cap J$$

pa je korolar 3.6.4. primjenjiv. Na taj način prijelazom na kvocijent $T(\mathfrak{g}) \to S(\mathfrak{g}) = T(\mathfrak{g})/J$ dolazimo do izomorfizma prostora $S^n(\mathfrak{g})$ na direktni komplement potprostora $U_{n-1}(\mathfrak{g})$ u prostoru $U_n(\mathfrak{g})$. I to ćemo preslikavanje označiti sa Sym_n. Dakle,

$$U_n(\mathfrak{g}) = \mathrm{Sym}_n\left(S^n(\mathfrak{g})\right) \dotplus U_{n-1}(\mathfrak{g}), \tag{3.18}$$

gdje je

$$\mathrm{Sym}_n(x_1 \cdots x_n) = \frac{1}{n!} \sum_{\tau \in \mathcal{S}_n} x_{\tau(1)} \cdots x_{\tau(n)}, \qquad x_1, \ldots, x_n \in \mathfrak{g}.$$

U lijevoj strani gornje formule $x_1 \cdots x_n$ predstavlja umnožak u algebri $S(\mathfrak{g})$ a s desne strane $x_{\tau(1)} \cdots x_{\tau(n)}$ je umnožak u algebri $U(\mathfrak{g})$. Ta se preslikavanja Sym_n po linearnosti proširuju do linearnog operatora $\mathrm{Sym} : S(\mathfrak{g}) \to U(\mathfrak{g})$,

$$\mathrm{Sym}|S^n(\mathfrak{g}) = \mathrm{Sym}_n, \qquad n \in \mathbb{Z}_+.$$

I taj se operator Sym zove **simetrizacija**.

Zadatak 3.6.3. *Dokažite da se izomorfizam* $\Phi : S(\mathfrak{g}) \to \mathrm{Gr}(U(\mathfrak{g}))$ *iz teorema 3.6.3. može dobiti iz simetrizacije* $\mathrm{Sym} : S(\mathfrak{g}) \to U(\mathfrak{g})$ *prijelazom na uzastopne kvocijente, tj. da vrijedi*

$$\Phi(a) = \mathrm{Sym}(a) + U_{n-1}(\mathfrak{g}) \qquad \forall a \in S^n(\mathfrak{g}) \quad i \quad \forall n \in \mathbb{Z}_+.$$

Uputa: Dokažite najprije da za bilo koje $x_1, \ldots, x_n \in \mathfrak{g}$ i za bilo koju permutaciju $\tau \in \mathcal{S}_n$ vrijedi

$$x_1 \cdots x_n - x_{\tau(1)} \cdots x_{\tau(n)} \in U_{n-1}(\mathfrak{g}).$$

(Za dokaz toga upotrijebite činjenicu da je grupa $\mathcal{S}_n$ generirana transpozicijama susjednih indeksa j i $j+1$ za $j = 1, \ldots, n-1$). Odatle i iz formule kojom je definiran operator Sym_n dokažite tvrdnju za elemente $a \in U_n(\mathfrak{g})$ oblika $a = x_1 \cdots x_n$, $x_1, \ldots, x_n \in \mathfrak{g}$.

Propozicija 3.6.5. *Simetrizacija* $\mathrm{Sym} : S(\mathfrak{g}) \to U(\mathfrak{g})$ *je izomorfizam vektorskih prostora i za svaki* $n \in \mathbb{N}$ *vrijedi*

$$U_n(\mathfrak{g}) = \mathrm{Sym}\,(S^n(\mathfrak{g})) \dot{+} U_{n-1}(\mathfrak{g}).$$

Dokaz: Gornja je formula upravo (3.18), a odatle neposredno slijedi tvrdnja o izomorfizmu.

Zadatak 3.6.4. *Neka su* $\mathfrak{a}$ *i* $\mathfrak{b}$ *potprostori Liejeve algebre* $\mathfrak{g}$ *takvi da je* $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \dot{+} \mathfrak{b}$. *Dokažite da postoji jedinstven linearan operator* $\Psi : S(\mathfrak{a}) \otimes S(\mathfrak{b}) \to U(\mathfrak{g})$ *takav da je*

$$\Psi(a \otimes b) = \mathrm{Sym}(a)\mathrm{Sym}(b) \qquad \forall a \in S(\mathfrak{a}) \quad i \quad \forall b \in S(\mathfrak{b})$$

i da je taj operator izomorfizam vektorskih prostora.

Zadatak 3.6.5. *Neka je* $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \dot{+} \mathfrak{p}$, *gdje je* $\mathfrak{k}$ *Liejeva podalgebra i* $\mathfrak{p}$ *potprostor Liejeve algebre* $\mathfrak{g}$. *Dokažite da postoji jedinstven linearan operator* $\Psi : U(\mathfrak{k}) \otimes S(\mathfrak{p}) \to U(\mathfrak{g})$ *takav da je*

$$\Psi(a \otimes b) = a\mathrm{Sym}(b) \qquad \forall a \in U(\mathfrak{k}) \quad i \quad \forall b \in S(\mathfrak{p})$$

i da je taj operator izomorfizam vektorskih prostora.

Zadatak 3.6.6. *Dokažite da univerzalna omotačka algebra* $U(\mathfrak{g})$ *Liejeve algebre* $\mathfrak{g}$ *nema ni lijevog ni desnog djelitelja nule, tj. da za* $a, b \in U(\mathfrak{g}) \setminus \{0\}$ *vrijedi* $ab \neq 0$.

Uputa: Iskoristite činjenice da je $S(\mathfrak{g}) = \mathcal{P}(\mathfrak{g}^*)$ integralna domena i da je $S^n(\mathfrak{g}) \cong U_n(\mathfrak{g})/U_{n-1}(\mathfrak{g})$, odnosno, da je algebra $S(\mathfrak{g})$ izomorfna algebri $\mathrm{Gr}(U(\mathfrak{g}))$.

Povezat ćemo sada preslikavanja iz propozicija 1.1.3., 1.1.7. i 1.1.8. s analognim preslikavanjima na univerzalnoj omotačkoj algebri. Prema propoziciji 1.1.3. za konačnodimenzionalne prostore V i W svaki linearan operator $A \in L(V, W)$ jedinstveno se proširuje do unitalnog homomorfizma graduiranih algebri $T(A) : T(V) \to T(W)$ koji je surjektivan (injektivan, surjektivan) ukoliko je A takav. Posebno, $A \mapsto T(A)$ je monomorfizam grupe $\mathrm{GL}(V)$ u grupu $\mathrm{Aut}(T(V))$ automorfizama algebre $T(V)$. Analogno, prema propoziciji 1.1.7. svaki se linearan operator $A \in L(V, W)$ jedinstveno proširuje do unitalnog homomorfizma graduiranih algebri $S(A) : S(V) \to S(W)$ koji je surjektivan (injektivan, bijektivan) ako i samo ako je A takav. Posebno, $A \mapsto S(A)$ je monomorfizam grupe $\mathrm{GL}(V)$ u grupu $\mathrm{Aut}(S(V))$ automorfizama unitalne algebre $S(V)$. Ako sa $\pi_V : T(V) \to S(V) = T(V)/J_V$ i $\pi_W : T(W) \to S(W) = T(W)/J_W$ označimo kvocijentne epimorfizme onda vrijedi

$$S(A) \circ \pi_V = \pi_W \circ T(A) \qquad \forall A \in L(V, W).$$

Prema propoziciji 1.1.8. svaki se linearan operator $A \in L(V) = \mathfrak{gl}(V)$ jedinstveno proširuje do derivacija $D(A) \in \mathrm{Der}(T(V))$ i $d(A) \in \mathrm{Der}(S(V))$, preslikavanja $D : \mathfrak{gl}(V) \to \mathrm{Der}(T(V))$ i $d : \mathfrak{gl}(V) \to \mathrm{Der}(S(V))$ su homomorfizmi Liejevih algebri, odnosno, reprezentacije Liejeve algebre $\mathfrak{gl}(V)$ na prostorima $T(V)$ i $S(V)$ i kvocijentni epimorfizam $\pi_V : T(V) \to S(V)$ prepliće te dvije reprezentacije:

$$d(A) \circ \pi_V = \pi_V \circ D(A) \qquad \forall A \in \mathfrak{gl}(V).$$

Sljedećih nekoliko propozicija navodimo (za sada) bez dokaza. Uzmimo sada Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ i $\mathfrak{h}$ u ulozi prostora V i W u navedenim propozicijama. Ukoliko je $A : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ ne samo linearan operator nego homomorfizam Liejevih algebri, imamo sljedeću analogiju za univerzalne omotačke algebre:

Propozicija 3.6.6. *Neka je $\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ homomorfizam Liejevih algebri. Tada se φ jedinstveno proširuje do homomorfizma filtriranih unitalnih algebri $U(\varphi) : U(\mathfrak{g}) \to U(\mathfrak{h})$ koji je surjektivan (injektivan, bijektivan) ukoliko je φ takav. Posebno, $\varphi \mapsto U(\varphi)$ je monomorfizam grupe* $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ *automorfizama Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ u grupu* $\mathrm{Aut}(U(\mathfrak{g}))$ *automorfizama filtrirane unitalne algebre $U(\mathfrak{g})$. Nadalje, ako su $\Pi_\mathfrak{g} : T(\mathfrak{g}) \to U(\mathfrak{g})$ i $\Pi_\mathfrak{h} : T(\mathfrak{h}) \longrightarrow U(\mathfrak{h})$ kvocijentni epimorfizmi, onda vrijedi*

$$U(\varphi) \circ \Pi_\mathfrak{g} = \Pi_\mathfrak{h} \circ T(\varphi).$$

Analogno, ako je $A \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ ne samo linearan operator nego derivacija Liejeve algebre $\mathfrak{g}$, onda imamo i analogiju s propozicijom 1.1.8.:

Propozicija 3.6.7. *Neka je $\mathfrak{g}$ Liejeva algebra i $U(\mathfrak{g}) \supseteq \mathfrak{g}$ njezina univerzalna omotačka algebra. Svaka se derivacija A Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ jedinstveno proširuje do derivacije $\delta(A)$ unitalne algebre $U(\mathfrak{g})$. Preslikavanje $\delta : \mathrm{Der}(\mathfrak{g}) \to \mathrm{Der}(U(\mathfrak{g}))$ je homomorfizam Liejevih algebri, pa je δ reprezentacija Liejeve algebre* $\mathrm{Der}(\mathfrak{g})$ *na prostoru $U(\mathfrak{g})$ i kvocijentni epimorfizam $\Pi_\mathfrak{g} : T(\mathfrak{g}) \to U(\mathfrak{g})$ prepliće tu reprezentaciju s reprezentacijom $D|\mathrm{Der}(\mathfrak{g})$ iz propozicije 1.1.8.:*

$$\delta(A) \circ \Pi_\mathfrak{g} = \Pi_\mathfrak{g} \circ D(A) \qquad \forall A \in \mathrm{Der}(\mathfrak{g}).$$

Prema propoziciji 3.6.6. $U(\varphi) : U(\mathfrak{g}) \to U(\mathfrak{h})$ nije samo homomorfizam unitalnih algebri nego i filtriranih algebri, odnosno, vrijedi $U(\varphi)\,(U_n(\mathfrak{g})) \subseteq U_n(\mathfrak{h})$ za svaki $n \in \mathbb{Z}_+$. Prema tome, on definira homomorfizam $\mathrm{Gr}\,U(\varphi) : \mathrm{Gr}(U(\mathfrak{g})) \to \mathrm{Gr}(U(\mathfrak{h})$ pridruženih graduiranih algebri. Prema teoremu 3.6.3. imamo izomorfizme graduiranih algebri $\Phi_\mathfrak{g} : S(\mathfrak{g}) \to \mathrm{Gr}(U(\mathfrak{g}))$ i $\Phi_\mathfrak{h} : S(\mathfrak{h}) \to \mathrm{Gr}(U(\mathfrak{h}))$.

Propozicija 3.6.8. *Za svaki homomorfizam $\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ vrijedi*

$$(\mathrm{Gr}\,U(\varphi)) \circ \Phi_\mathfrak{g} = \Phi_\mathfrak{h} \circ S(\varphi).$$

Analogno, za derivaciju $A \in \mathrm{Der}(\mathfrak{g})$ vrijedi $\delta(A)\,(U_n(\mathfrak{g})) \subseteq U_n(\mathfrak{g})$, pa dobivamo derivaciju $\mathrm{Gr}\,\delta(A)$ algebre $\mathrm{Gr}\,U(\mathfrak{g})$.

Propozicija 3.6.9. *Za svaku derivaciju $A \in \mathrm{Der}(\mathfrak{g})$ vrijedi*

$$(\mathrm{Gr}\,\delta(A)) \circ \Phi_\mathfrak{g} = \Phi_\mathfrak{g} \circ d(A).$$

Prema propoziciji 3.6.6. preslikavanje $\varphi \mapsto U(\varphi)$ je (injektivni) homomorfizam grupe automorfizama $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ u grupu automorfizama $\mathrm{Aut}(U(\mathfrak{g}))$ unitalne algebre $U(\mathfrak{g})$. Također, prema propoziciji 1.1.7. preslikavanje $A \mapsto S(A)$ je (injektivni) homomorfizam grupe $\mathrm{GL}(\mathfrak{g})$ u grupu $\mathrm{Aut}(S(\mathfrak{g}))$ automorfizama komutativne unitalne algebre $S(\mathfrak{g})$. Grupa $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ je podgrupe grupe $\mathrm{GL}(\mathfrak{g})$, dakle, restrikcijom dobivamo injektivni homomorfizam $\varphi \mapsto S(\varphi)$ grupe $\mathrm{Aut}(\varphi)$ u grupu $\mathrm{Aut}(S(\mathfrak{g}))$. Posebno, $\varphi \mapsto U(\varphi)$ i $\varphi \mapsto S(\varphi)$ su reprezentacije grupe $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ na prostorima $U(\mathfrak{g})$ i $S(\mathfrak{g})$. Primijetimo sada da je simetrizacija $\mathrm{Sym} : S(\mathfrak{g}) \to U(\mathfrak{g})$ preplitanje tih dviju reprezentacija. Doista, za proizvoljne $x_1, \ldots, x_n \in \mathfrak{g}$ i za $\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ imamo

$$(\mathrm{Sym} \circ S(\varphi))(x_1 \cdots x_n) = \mathrm{Sym}\,(\varphi(x_1) \cdots \varphi(x_n)) = \frac{1}{n!} \sum_{\tau \mathcal{S}_n} \varphi(x_{\tau(1)}) \cdots \varphi(x_{\tau(n)}) =$$

$$= U(\varphi) \left(\frac{1}{n!} \sum_{\tau \in \mathcal{S}_n} x_{\tau(1)} \cdots x_{\tau(n)} \right) = (U(\varphi) \circ \mathrm{Sym})(x_1 \cdots x_n).$$

Budući da produkti $x_1 \cdots x_n$, $n \in \mathbb{Z}_+$, $x_1, \ldots, x_n \in \mathfrak{g}$, razapinju cijeli prostor $S(\mathfrak{g})$, slijedi tvrdnja $\mathrm{Sym} \circ S(\varphi) = U(\varphi) \circ \mathrm{Sym}$ za svaki $\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$. To, naravno, vrijedi i za podgrupu $G = \mathrm{Int}(\mathfrak{g})$. Odatle slijedi da je restrikcija $\mathrm{Sym}|S(\mathfrak{g})^G$ izomorfizam prostora invarijanata $S(\mathfrak{g})^G$ na prostor invarijanata $U(\mathfrak{g})^G$. Ovaj posljednji je upravo centar $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$ algebre $U(\mathfrak{g})$:

Propozicija 3.6.10. *Unitalna podalgebra* $U(\mathfrak{g})^G = \{u \in U(\mathfrak{g});\ U(\varphi)u = u\ \ \forall \varphi \in G = \mathrm{Int}(\mathfrak{g})\}$ *je centar* $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$ *algebre* $U(\mathfrak{g})$. *Posebno, restrikcija* $\mathrm{Sym}|S(\mathfrak{g})^G$ *je izomorfizam prostora* $S(\mathfrak{g})^G$ *na centar* $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$ *algebre* $U(\mathfrak{g})$.

Dokaz: Za $x \in \mathfrak{g}$ promotrimo djelovanje jedinstvenog proširenja $\delta(\mathrm{ad}\, x)$ unutarnje derivacije $\mathrm{ad}\, x$ Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ do derivacije algebre $U(\mathfrak{g})$. Za $x_1, \ldots, x_n \in \mathfrak{g}$ imamo

$$\delta(\mathrm{ad}\, x)(x_1 \cdots x_n) = \sum_{j=1}^{n} x_1 \cdots x_{j-1} \left((\mathrm{ad}\, x) x_j\right) x_{j+1} \cdots x_n =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} x_1 \cdots x_{j-1} x x_j x_{j+1} \cdots x_n - \sum_{j=1}^{n} x_1 \cdots x_{j-1} x_j x x_{j+1} \cdots x_n = x x_1 \cdots x_n - x_1 \cdots x_n x.$$

Budući da $\mathfrak{g}$ generira unitalnu algebru $U(\mathfrak{g})$, produkti $x_1 \cdots x_n$, $n \in \mathbb{Z}_+$, $x_1, \ldots, x_n \in \mathfrak{g}$, razapinju cijeli prostor $U(\mathfrak{g})$, pa zaključujemo da vrijedi

$$\delta(\mathrm{ad}\, x)u = xu - ux \qquad \forall x \in \mathfrak{g} \quad \text{i} \quad \forall u \in U(\mathfrak{g}).$$

Odatle slijedi da je $\delta(\mathrm{ad}\, x)u = 0$ za svaki $u \in \mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$ i svaki $x \in \mathfrak{g}$. Obratno, ako je $u \in U(\mathfrak{g})$ takav da vrijedi $\delta(\mathrm{ad}\, x)u = 0$ za svaki $x \in \mathfrak{g}$, onda je $xu = ux$ za svaki $x \in \mathfrak{g}$, a kako $\mathfrak{g}$ generira unitalnu algebru $U(\mathfrak{g})$, slijedi da je $vu = uv$ za svaki $v \in U(\mathfrak{g})$, odnosno, $u \in \mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$. Time je dokazano da je

$$\mathfrak{Z}(\mathfrak{g}) = \{u \in U(\mathfrak{g});\ \delta(\mathrm{ad}\, x)u = 0\ \ \forall x \in \mathfrak{g}\}.$$

S druge strane, za $x \in \mathfrak{g}$ jedinstveno proširenje $U\left(\mathrm{e}^{\mathrm{ad}\, x}\right)$ unutarnjeg automorfizma $\mathrm{e}^{\mathrm{ad}\, x}$ Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ do automorfizma unitalne algebre $U(\mathfrak{g})$ očito se podudara sa $\mathrm{e}^{\delta(\mathrm{ad}\, x)}$. Ovaj posljednji operator je smisleno definiran iako je vektorski prostor $U(\mathfrak{g})$ beskonačnodimenzionalan, jer je svaki od konačnodimenzionalnih filtracionih potprostora $U_n(\mathfrak{g})$ invarijantan s obzirom na operator $\delta(\mathrm{ad}\, x)$. Dakle,

$$U(\mathfrak{g})^G = \{u \in U(\mathfrak{g});\ U(\varphi)u = u\ \ \forall \varphi \in G\} = \left\{u \in U(\mathfrak{g});\ \mathrm{e}^{\delta(\mathrm{ad}\, x)}u = u\ \ \forall x \in \mathfrak{g}\right\}.$$

Budući da za $u \in \mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$ vrijedi $\delta(\operatorname{ad} x)u = xu - ux = 0\ \forall x \in \mathfrak{g}$, slijedi da je $e^{\delta(\operatorname{ad} x)}u = u\ \forall x \in \mathfrak{g}$, dakle, prema gornjoj jednakosti $u \in U(\mathfrak{g})^G$. Time smo dokazali inkluziju $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g}) \subseteq U(\mathfrak{g})^G$. Obratno pretpostavimo da je $u \in U(\mathfrak{g})^G$. Tada za svaki $x \in \mathfrak{g}$ i svaki $t \in \mathbb{R}$ vrijedi $e^{t\delta(\operatorname{ad} x)}u = u$. Odatle deriviranjem po t u točki $t = 0$ slijedi $\delta(\operatorname{ad} x)u = 0$, odnosno, $xu = ux$. Budući da $\mathfrak{g}$ generira unitalnu algebru $U(\mathfrak{g})$, slijedi da je $u \in \mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$. Time je dokazana i obrnuta inkluzija $U(\mathfrak{g})^G \subseteq \mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$.

Neka je sada V konačnodimenzionalan kompleksan vektorski prostor i neka je G povezana zatvorena kompleksna podgrupa od $\mathrm{GL}(V)$. Označimo sa $\mathfrak{g} \subseteq \mathfrak{gl}(V)$ njezinu Liejevu algebru. Za $v \in V$ stavimo

$$\mathcal{O}_v = \{gv;\ g \in G\}, \qquad G^v = \{g \in G;\ gv = v\}.$$

Tada je G^v zatvorena kompleksna Liejeva podgrupa od G, dakle, G/G^v je komleksna analitička mnogostrukost. Preslikavanje $g \mapsto gv$ inducira bijekciju β_v sa G/G^v na orbitu $\mathcal{O}_v$

$$\beta_v(gG^v) = gv, \qquad g \in G,$$

i ta bijekcija prenosi kompleksnu analitičku strukturu sa G/G^v na orbitu $\mathcal{O}_v$. Ako je $\{x_1, \ldots, x_n\}$ baza od $\mathfrak{g}$, takva da je $\{x_{k+1}, \ldots, x_n\}$ baza Liejeve algebre $\mathfrak{g}^v$ grupe G^v, onda tangencijalni vektori na G/G^v u točki G^v definirani sa $x_1, \ldots, x_k$ čine bazu kompleksnog tangencijalnog prostora na G/G^v u točki G^v.

Djelovanje grupe G na prostoru V inducira djelovanje na dualnom prostoru V^* koje se proširuje do djelovanja automorfizmima na simetričnoj algebri $S(V^*) = \mathcal{P}(V)$ i to je djelovanje dano sa

$$(g \cdot f)(v) = f\left(g^{-1}v\right), \qquad g \in G, \quad f \in \mathcal{P}(V), \quad v \in V.$$

Djelovanje grupe G automorfizmima algebre $\mathcal{P}(V)$ inducira djelovanje Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ derivacijama algebre $\mathcal{P}(V)$. To se djelovanje dobiva deriviranjem u nuli, tj. $x \in \mathfrak{g}$ djeluje na $\mathcal{P}(V)$ ovako:

$$(x \cdot f)(v) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(e^{tx} \cdot f\right)(v)\bigg|_{t=0} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f\left(e^{-tx}v\right)\bigg|_{t=0} = f(-xv), \qquad v \in V, \quad f \in \mathcal{P}(V).$$

To je djelovanje reprezentacija Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ na prostoru $\mathcal{P}(V)$ i ono se jedinstveno proširuje do reprezentacije univerzalne omotačke algebre $U(\mathfrak{g})$ na prostoru $\mathcal{P}(V)$. Time $\mathcal{P}(V)$ postahje unitalni $U(\mathfrak{g})-$modul. Efekt djelovanja elementa $u \in U(\mathfrak{g})$ na polinom $f \in \mathcal{P}(V)$ označavamo sa $u \cdot f$. Očito je svaki homogeni potprostor $\mathcal{P}^k(V)$ $U(\mathfrak{g})-$podmodul od $\mathcal{P}(V)$.

Propozicija 3.6.11. *Neka su $f_1, \ldots, f_\ell \in \mathcal{P}(V)$ i neka je $\{u_i;\ i \in \mathbb{N}\}$ baza prostora $U(\mathfrak{g})$. Promatramo beskonačnu matricu s ℓ stupaca $D = [d_{ij}]$, gdje je $d_{ij} = u_i \cdot f_j$. (Ta matrica ima elemente u $\mathcal{P}(V)$ pa za svaki $v \in V$ matrica $D(v) = [d_{ij}(v)]$ ima elemente u $\mathbb{C}$). Za $v \in V$ restrikcije $f_1|\mathcal{O}_v, \ldots, f_\ell|\mathcal{O}_v$ su linearno nezavisne (nad $\mathbb{C}$) ako i samo ako je rang matrice $D(v)$ jednak ℓ.*

Dokaz: Neka je $\mathcal{A}$ algebra svih holomorfnih funkcija na kompleksnoj analitičkoj mnogostrukosti G/G^v. Elementi od $\mathfrak{g}$ možemo shvaćati kao lijevoinvarijantna holomorfna vektorska polja na G, dakle, definiraju holomorfna vektorska polja na G/G^v. Dakle, svaki $x \in \mathfrak{g}$ postaje derivacija algebre $C^\infty(G/G^v)$ koja ostavlja invarijantnom algebru $\mathcal{A}$. Proširenjem djelovanja Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ na $\mathcal{A}$ do univerzalne omotačke algebre $U(\mathfrak{g})$ algebra $\mathcal{A}$ postaje $U(\mathfrak{g})-$modul. Definiramo unitalni homomorfizam $\alpha_v : \mathcal{P}(V) \to \mathcal{A}$ sa

$$\alpha_v(f) = f \circ \beta_v, \qquad \text{tj.} \qquad [\alpha_v(f)](gG^v) = f(gv), \qquad f \in \mathcal{P}(V), \quad g \in G.$$

Tada se deriviranjem u nuli lako vidi da je

$$\alpha_v(x \cdot f) = x \cdot \alpha_v(f) \qquad \forall x \in \mathfrak{g} \quad \text{i} \quad \forall f \in \mathcal{P}(V).$$

Odatle neposredno slijedi

$$\alpha_v(u \cdot f) = u \cdot \alpha_v(f) \qquad \forall f \in \mathcal{P}(V) \quad \text{i} \quad \forall u \in U(\mathfrak{g}). \tag{3.19}$$

Budući da je mnogostrukost G/G^v povezana, holomorfna funkcija $g \in \mathcal{A}$ jednaka je nuli ako i samo ako su joj svi koeficijenti u Taylorovom razvoju oko zadane točke jednaki nuli. Posebno to vrijedi za točku $s \in G/G^v$ koja predstavlja klasu G^v. Budući da je tangencijalni prostor na G/G^v razapet s tangencijalnim vektorima definiranim elementima $x \in \mathfrak{g}$, slijedi da je $g = 0$ ako i samo ako je $(u \cdot g)(s) = 0$ za svaki $u \in U(\mathfrak{g})$.

Pretpostavimo sada da je rang matrice $D(v)$ manji od ℓ. Tada postoji $\ell-$torka $(c_1, \ldots, c_\ell) \in \mathbb{C}^\ell$ takva da je

$$\sum_{j=1}^{\ell} d_{ij}(v) c_j = 0 \qquad \forall i \in \mathbb{N}.$$

Stavimo $f = \sum_{j=1}^{\ell} c_j f_j$; tada slijedi

$$(u_i \cdot f)(v) = \sum_{j=1}^{\ell} c_j (u_i \cdot f_j)(v) = \sum_{j=1}^{\ell} c_j d_{ij}(v) = 0 \qquad \forall i \in \mathbb{N},$$

a kako je $\{u_i\}$ baza od $U(\mathfrak{g})$, slijedi $(u \cdot f)(v) = 0$ za svaki $u \in U(\mathfrak{g})$. Odatle i iz (3.19) zaključujemo da je $(u \cdot \alpha_v(f))(s) = 0$ za svaki $u \in U(\mathfrak{g})$, pa po prethodnom razmatranju zaključujemo da je $\alpha_v(f) = 0$ svuda na G/G^v. No to znači da je $f|\mathcal{O}_v = 0$. Time je dokazano da su restrikcije $f_1|\mathcal{O}_v, \ldots, f_\ell|\mathcal{O}_v$ linearno zavisne.

Obratno, pretpostavimo da su restrikcije $f_1|\mathcal{O}_v, \ldots, f_\ell|\mathcal{O}_v$ linearno zavisne. Tada postoji $\ell-$torka $0 \neq (c_1, \ldots, c_\ell) \in \mathbb{C}^\ell$ takva da je $\left(\sum_j c_j f_j\right)\Big| \mathcal{O}_v = 0$. To znači da je $\alpha_v\left(\sum_j c_j f_j\right) = 0$, dakle, za svaki $i \in \mathbb{N}$ imamo

$$0 = \left(u_i \cdot \alpha_v \left(\sum_j c_j f_j\right)\right)(s) = \left(\alpha_v \sum_j c_j (u_i \cdot f_j)\right)(s) = \sum_j c_j (u_i \cdot f_j)(v) = \sum_j c_j d_{ij}(v).$$

To znači da su stupci matrice $D(v)$ linearno zavisni, odnosno, rang matrice $D(v)$ je manji od ℓ.

Kao posljedicu dobivamo sljedeći važan kriterij za linearnu nezavisnost nad algebrom invarijanata $\mathcal{P}(V)^G$:

Propozicija 3.6.12. *Neka su $f_1, \ldots, f_\ell \in \mathcal{P}(V)$. Ako postoji $G-$orbita $\mathcal{O}$ u V takva da su restrikcije $f_1|\mathcal{O}, \ldots, f|\mathcal{O}$ linearno nezavisne funkcije, onda su elementi $f_1, \ldots, f_\ell$ linearno nezavisni nad $\mathcal{P}(V)^G$.*

Dokaz: Pretpostavimo da za neke $g_1, \ldots, g_\ell \in \mathcal{P}(V)^G$ vrijedi $\sum_j g_j f_j = 0$. Neka je $v \in \mathcal{O}$ i neka je D matrica iz propozicije 3.6.11. Po pretpostavci su restrikcije $f_1|\mathcal{O}, \ldots, f_\ell|\mathcal{O}$ linearno nezavisne, pa iz propozicije 3.6.11. slijedi da kompleksna matrica $D(v)$ ima rang jednak ℓ. To znači da za determinantu $\alpha \in \mathcal{P}(V)$ neke $\ell \times \ell$ submatrice od D vrijedi $\alpha(v) \neq 0$. No tada postoji otvorena okolina W točke $v \in V$ takva da je rang matrice $D(w)$ jednak ℓ za svaku točku $w \in W$. Stoga su po propoziciji 3.6.11. restrikcije $f_1|\mathcal{O}_w, \ldots, f_\ell|\mathcal{O}_w$ linearno nezavisne za svaku točku $w \in W$. Budući da je svaka od funkcija g_j konstanta na svakoj orbiti $\mathcal{O}_w$, iz jednakosti $\sum_j g_j f_j = 0$ zaključujemo da je $g_j|W = 0$ za $j = 1, \ldots, \ell$. Budući da je W neprazan otvoren podskup od V, zaključujemo da su polinomi $g_1, \ldots, g_\ell$ jednaki nuli svuda na V. Time je dokazano da su $f_1, \ldots, f_\ell$ linearno nezavisni nad $\mathcal{P}(V)^G$.

Sjetimo se sada propozicije 1.2.2. Prema toj propoziciji (primijenjenoj na $\mathcal{P}(V) = S(V^*)$ umjesto na $S(V)$) za graduiran potprostor L od $\mathcal{P}(V)$ takav da je $\mathcal{P}(V) = \mathcal{P}(V)\mathcal{P}_+(V)^G \dot{+} L$ sljedeća su tri svojstva međusobno ekvivalentna:

(a) Linearno preslikavanje $\mathcal{P}(V)^G \otimes L \to \mathcal{P}(V)$ inducirano množenjem je izomorfizam vektorskih prostora.

(b) $\mathcal{P}(V)$ je slobodan kao $\mathcal{P}(V)^G-$modul.

(c) Neka je $M \subseteq \mathcal{P}(V)$ bilo koji potprostor takav da je $M \cap \mathcal{P}(V)\mathcal{P}_+(V)^G = \{0\}$. Tada su vektori $f_1, \ldots, f_\ell \in M$ linearno nezavisni nad $\mathbb{C}$ ako i samo ako su oni linearno nezavisni nad prstenom $\mathcal{P}(V)^G$.

Za svaki podskup $N \subseteq V$ označimo sa

$$I(N) = \{f \in \mathcal{P}(V);\ f|N = 0\}$$

ideal u $\mathcal{P}(V)$ definiran sa N. Neka je sada $\mathcal{N} \subseteq V$ konus (jer je potprostor $\mathcal{P}_+(V)^G$ graduiran) definiran sa

$$\mathcal{N} = \left\{v \in V;\ f(v) = 0\ \ \forall f \in \mathcal{P}_+(V)^G\right\}.$$

Tada je $\mathcal{N}$ Zariski zatvoren podskup od V definiran idealom $\mathcal{P}(V)\mathcal{P}_+(V)^G$, pa je po Hilbertovom teoremu o nulama $I(\mathcal{N})$ radikal ideala $\mathcal{P}(V)\mathcal{P}_+(V)^G$, tj. skup svih $f \in \mathcal{P}(V)$ takvih da je neka potencija f^n sadržana u idealu $\mathcal{P}(V)\mathcal{P}_+(V)^G$. To znači da je $\mathcal{P}(V)\mathcal{P}_+(V)^G = I(\mathcal{N})$ ako i samo ako je $\mathcal{P}(V)\mathcal{P}_+(V)^G$ prost ideal u prstenu $\mathcal{P}(V)$.

Propozicija 3.6.12. vodi na kriterij za ispunjenost uvjeta propozicije 1.2.2. u našoj situaciji:

Teorem 3.6.13. *Neka je V konačnodimenzionalan kompleksan vektorski prostor i neka je G zatvorena kompleksna Liejeva podgrupa grupe* $\mathrm{GL}(V)$. *Neka je* $\mathcal{N} = \left\{v \in V;\ f(v) = 0\ \ \forall f \in \mathcal{P}_+^G\right\}$. *Pretpostavimo da je $\mathcal{P}(V)\mathcal{P}_+(V)^G$ prost ideal u prstenu $\mathcal{P}(V)$ i da postoji $G-$orbita $\mathcal{O}$ u $\mathcal{N}$ koja je gusta u $\mathcal{N}$. Tada su ispunjena svojstva* (a), (b) *i* (c) *propozicije 1.2.2. Dakle, $\mathcal{P}(V)$ je slobodan $\mathcal{P}(V)^G-$modul, štoviše, ako je L bilo koji graduiran potprostor od $\mathcal{P}(V)$ takav da je $\mathcal{P}(V) = \mathcal{P}(V)\mathcal{P}_+(V)^G \dot{+} L$, onda je preslikavanje $\mathcal{P}(V)^G \otimes L \to \mathcal{P}(V)$ inducirano množenjem izomorfizam vektorskih prostora.*

Dokaz: Neka je $M \subseteq \mathcal{P}(V)$ potprostor takav da je $M \cap \mathcal{P}(V)\mathcal{P}_+(V)^G = \{0\}$. Budući da je $\mathcal{P}(V)\mathcal{P}_+(V)^G = I(\mathcal{N})$, jasno je da ako su $f_1, \ldots, f_\ell \in M$ linearno nezavisni, onda su restrikcije $f_1|\mathcal{N}, \ldots, f_\ell|\mathcal{N}$ linearno nezavisne. No tada su zbog gustoće $\mathcal{O}$ u $\mathcal{N}$ i restrikcije $f_1|\mathcal{O}, \ldots, f_\ell|\mathcal{O}$ linearno nezavisne. Sada iz propozicije 3.6.12. slijedi da su polinomi $f_1, \ldots, f_\ell$ linearno nezavisni nad prstenom $\mathcal{P}(V)^G$. Dakle, ispunjeno je svojstvo (c), a time i svojstva (a) i (b) propozicije 1.2.2.

Uzmimo sada da je $\mathfrak{g}$ kompleksna poluprosta Liejeva algebra i $G = \mathrm{Int}(\mathfrak{g})$ njezina grupa unutarnjih automorfizama. Prema propoziciji 3.3.15. tada je

$$\mathcal{N} = \left\{x \in \mathfrak{g};\ f(x) = 0\ \ \forall f \in \mathcal{P}_+(\mathfrak{g})^G\right\}$$

upravo skup svih nilpotentnih elemenata Liejeve algebre $\mathfrak{g}$, a prema korolaru 3.5.14. $G-$orbita u $\mathcal{N}$ koja se sastoji od svih glavnih nilpotentnih elemenata u $\mathfrak{g}$ je gusta u $\mathcal{N}$. Nadalje, može se dokazati da je $\mathcal{P}(\mathfrak{g})\mathcal{P}_+(\mathfrak{g})^G$ prost ideal u prstenu $\mathcal{P}(\mathfrak{g})$. Prema tome, vrijedi:

Teorem 3.6.14. *Neka je $\mathfrak{g}$ kompleksna poluprosta Liejeva algebra i $G =$* $\mathrm{Int}(\mathfrak{g})$ *njezina grupa unutarnjih automorfizama. Tada je $\mathcal{P}(\mathfrak{g})$ slobodan $\mathcal{P}(\mathfrak{g})^G-$modul.*

Činjenicu da je $\mathcal{P}(\mathfrak{g})\mathcal{P}_+(\mathfrak{g})^G$ prost ideal nećemo dokazivati. Međutim, zaključak teorema 3.6.14. slijedit će i iz Bernstein−Luntsovog teorema 1.3.2. budući da ćemo dokazati da je za Cartanovu podalgebru $\mathfrak{h}$ preslikavanje $f \mapsto f|\mathfrak{h}$ izomorfizam sa $\mathcal{P}(\mathfrak{g})^G$ na $\mathcal{P}(\mathfrak{h})^W$, gdje je W Weylova grupa $W(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$. Naime, Weylova grupa W generirana je refleksijama, dakle, Chevalley−Shephard−−Toddov teorem 2.5.1. povlači da je $\mathcal{P}(\mathfrak{h})$ je slobodan $\mathcal{P}(\mathfrak{h})^W$−modul, a odatle prema Bernstein−−Luntsovom teoremu slijedi da je $\mathcal{P}(\mathfrak{g})$ slobodan $\mathcal{P}(\mathfrak{g})^G$−modul.

Prema propoziciji 1.2.4. za prostor $\mathcal{H}_G(\mathfrak{g})$ G−harmonijskih polinoma na $\mathfrak{g}$ vrijedi

$$\mathcal{P}(\mathfrak{g}) = \mathcal{P}(\mathfrak{g})\mathcal{P}_+(\mathfrak{g})^G \dotplus \mathcal{H}_G(\mathfrak{g}).$$

Prema tome, slijedi:

Teorem 3.6.15. *Za kompleksnu poluprostu Liejevu algebru $\mathfrak{g}$ i za grupu $G = \mathrm{Int}(\mathfrak{g})$ njezinih unutarnjih automorfizama linearno preslikavanje $\mathcal{P}(\mathfrak{g})^G \otimes \mathcal{H}_G(\mathfrak{g}) \to \mathcal{P}(\mathfrak{g})$ inducirano množenjem je izomorfizam vektorskih prostora.*

Neka je i dalje $\mathfrak{g}$ kompleksna poluprosta Liejeva algebra. Tada je njezina Killingova forma B nedegenerirana pa ona prema zadatku 1.2.1. definira izomorfizam graduiranih algebri $\Phi_B : S(\mathfrak{g}) \to \mathcal{P}(\mathfrak{g})$ koji prepliće djelovanja grupe G na $S(\mathfrak{g})$ i na $\mathcal{P}(\mathfrak{g})$ tako da je

$$\Phi_B\left(S(\mathfrak{g})^G\right) = \mathcal{P}(\mathfrak{g})^G.$$

Izomorfizam $\Phi_B : S(\mathfrak{g}) \to \mathcal{P}(\mathfrak{g})$ dobiven je prirodnim proširenjem izomorfizma $\varphi_B : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}^*$ definiranog nedegeneriranom formom B :

$$B(x,y) = (\varphi_B(x))(y), \qquad x, y \in \mathfrak{g}.$$

Stavimo $\mathcal{N}' = \varphi_B(\mathcal{N})$, gdje je $\mathcal{N}$ skup svih nilpotentnih elemenata u $\mathfrak{g}$.

Propozicija 3.6.16. *$\mathcal{H}_G(\mathfrak{g})$ je potprostor od $\mathcal{P}(\mathfrak{g})$ razapet svim potencijama f^m, $f \in \mathcal{N}'$, $m \in \mathbb{Z}_+$.*

Dokaz: Označimo sa $\mathcal{H}'_G(\mathfrak{g})$ potprostor od $\mathcal{P}(\mathfrak{g})$ razapet skupom $\{f^m;\ f \in \mathcal{N}',\ m \in \mathbb{Z}_+\}$. Za dokaz inkluzije $\mathcal{H}'_G(\mathfrak{g}) \subseteq \mathcal{H}_G(\mathfrak{g})$ treba nam sljedeća posljedica dokaza propozicije 1.1.10.:

Zadatak 3.6.7. *Neka je V konačnodimenzionalan vektorski prostor. Dokažite da za $m \in \mathbb{Z}_+$, $z \in V$ i $g \in \mathcal{P}(V)$ vrijedi*

$$\langle z^m, g\rangle = m!g(z).$$

Uputa: Uočite da je tvrdnju dovoljno dokazati za sve elemente g neke baze od $\mathcal{P}(V)$. Iskoristite sada formulu iz dokaza propozicije 1.1.10. $\langle e^\alpha, f^\beta\rangle = \alpha!\delta_{\alpha\beta}\ \forall\alpha,\beta \in \mathbb{Z}_+^n$, gdje je $\{e_1,\dots,e_n\}$ baza od V, $\{f_1,\dots,f_n\}$ je njoj dualna baza od V^*, $e^\alpha = e_1^{\alpha_1}\cdots e_n^{\alpha_n}$, $f^\beta = f_1^{\beta_1}\cdots f_n^{\beta_n}$ i $\alpha! = \alpha_1!\cdots\alpha_n!$. Tvrdnju dokažite u slučaju $z = 0$ pomoću bilo kojeg izbora tih baza, a u slučaju $z \neq 0$ uz pretpostavku da je npr. $e_1 = z$.

Neka je $f \in \mathcal{N}'$ i neka je $z \in \mathcal{N}$ takav da je $f = \varphi_B(z)$. Treba dokazati da su tada sve potencije f^m G−harmonijski polinomi, odnosno, treba dokazati da je $\partial(u)f^m = 0$ za svaki $u \in S^k(\mathfrak{g})^G$ i svaki $k \in \mathbb{N}$. Možemo pretpostaviti da je $m \geq k$ (jer za $m < k$ je očito $\partial(u)f^m = 0$). Prema propoziciji 1.1.10. dovoljno je dokazati da vrijedi

$$\langle uv, f^m\rangle = 0 \qquad \forall v \in S^{m-k}(\mathfrak{g}).$$

Imamo

$$\langle uv, f^m\rangle = \langle uv, \varphi_B(z)^m\rangle = \langle uv, \Phi_B(z^m)\rangle = \langle z^m, \Phi_B(uv)\rangle = \langle z^m, h_1h_2\rangle,$$

gdje su $h_1 = \Phi_B(u)$ i $h_2 = \Phi_B(v)$. Budući da je $u \in S^k(\mathfrak{g})^G$, slijedi da je $h_2 \in \mathcal{P}_+(\mathfrak{g})^G$, dakle, $g = h_1 h_2 \in \mathcal{P}_+(\mathfrak{g})^G \mathcal{P}(\mathfrak{g})$. Sada pomoću zadatka 3.6.7. nalazimo da je

$$\langle uv, f^m \rangle = \langle z^m, g \rangle = m! g(z) = 0.$$

Time je dokazana inkluzija $\mathcal{H}'_G(\mathfrak{g}) \subseteq \mathcal{H}_G(\mathfrak{g})$.

Za dokaz jednakosti iskoristit ćemo još jednom nedokazanu činjenicu da je $\mathcal{P}(\mathfrak{g})\mathcal{P}_+(\mathfrak{g})^G$ prost ideal u prstenu $\mathcal{P}(\mathfrak{g})$. Očito je $\mathcal{H}'_G(\mathfrak{g})^0 = \mathbb{C} = \mathcal{H}_G(\mathfrak{g})^0$. Kad bi za neki prirodan broj $m \in \mathbb{N}$ bilo $\mathcal{H}'_G(\mathfrak{g})^m \neq \mathcal{H}_G(\mathfrak{g})^m$, prema propoziciji 1.1.10. postojao bi $0 \neq g \in \mathcal{H}_G(\mathfrak{g})^m$ takav da je $\langle u, g \rangle = 0$ za svaki $u \in \Phi_B^{-1}(\mathcal{H}'_G(\mathfrak{g})^m)$ i, posebno, $\langle z^m, g \rangle = 0$ za svaki $z \in \mathcal{N}$. To prema zadatku 3.6.7. znači da je $g(z) = 0$ za svaki $z \in \mathcal{N}$. Budući da je ideal $\mathcal{P}(\mathfrak{g})\mathcal{P}_+(\mathfrak{g})^G$ prost, slijedi da je $g \in \mathcal{P}(\mathfrak{g})\mathcal{P}_+(\mathfrak{g})^G$. No to je u kontradikciji sa $\mathcal{P}(\mathfrak{g})\mathcal{P}_+(\mathfrak{g})^G \cap \mathcal{H}_G(\mathfrak{g}) = \{0\}$.

Kompozicijom izomorfizma $\mathrm{Sym} : S(\mathfrak{g}) \to U(\mathfrak{g})$ s inverznim izomorfizmom $\Phi_B^{-1} : \mathcal{P}(\mathfrak{g}) \to S(\mathfrak{g})$ dolazimo do izomorfizma $G-$modula $\Phi : \mathcal{P}(\mathfrak{g}) \to U(\mathfrak{g})$. Zbog propozicije 3.6.10. imamo

$$\Phi\left(\mathcal{P}(\mathfrak{g})^G\right) = U(\mathfrak{g})^G = \mathfrak{Z}(\mathfrak{g}).$$

Izomorfizam $G-$modula $\Phi : \mathcal{P}(\mathfrak{g}) \to U(\mathfrak{g})$ omogućuje nam da opišemo strukturu $U(\mathfrak{g})$ kao $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g})-$modula:

Teorem 3.6.17. *$U(\mathfrak{g})$ je kao $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g})-$modul slobodan. Preciznije, neka je E potprostor od $U(\mathfrak{g})$ razapet svim potencijama z^m, $z \in \mathcal{N}$, $m \in \mathbb{Z}_+$. Tada je linearno preslikavanje $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g}) \otimes E \to U(\mathfrak{g})$ definirano množenjem izomorfizam vektorskih prostora.*

Dokaz: Primijetimo da je

$$\Phi(f^m) = \left(\Phi_B^{-1}(f)\right)^m \qquad \forall f \in \mathcal{P}(\mathfrak{g}) \quad \text{i} \quad \forall m \in \mathbb{Z}_+,$$

dakle, posebno,

$$\Phi\left(\varphi_B(z)^m\right) = z^m \qquad \forall z \in \mathfrak{g} \quad \text{i} \quad \forall m \in \mathbb{Z}_+.$$

Stoga iz propozicije 3.6.16. slijedi da je $E = \Phi\left(\mathcal{H}_G(\mathfrak{g})\right)$, pa tvrdnja slijedi iz teorema 3.6.15.

3.7 Konačnodimenzionalne reprezentacije

Neka je $\mathfrak{g}$ kompleksna poluprosta Liejeva algebra i neka je $\mathfrak{h}$ neka njezina Cartanova podalgebra. Nadalje, neka je $G = \mathrm{Int}(\mathfrak{g})$ grupa unutarnjih automorfizama Liejeve algebre $\mathfrak{g}$. Označimo sa $R = R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ sistem korijena od $\mathfrak{g}$ u odnosu na $\mathfrak{h}$ i neka je $W = W(R)$ Weylova grupa tog sistema korijena. Neka je $\iota : \mathcal{P}(\mathfrak{g}) \to \mathcal{P}(\mathfrak{h})$ epimorfizam restrikcije, $\iota(f) = f|\mathfrak{h}$. U sljedećem odjeljku cilj nam je dokazati da je $\iota|\mathcal{P}(\mathfrak{g})^G$ izomorfizam algebre $\mathcal{P}(\mathfrak{g})^G$ na algebru $\mathcal{P}(\mathfrak{h})^W$. Pored toga dokazat ćemo da je algebra polinomijalnih $G-$invarijanata $\mathcal{P}(\mathfrak{g})^G$ razapeta polinomima oblika $x \mapsto \mathrm{Tr}\,\pi(x)^n$, gdje je $n \in \mathbb{Z}_+$ i π je konačnodimenzionalna reprezentacija od $\mathfrak{g}$. U tu svrhu u ovom ćemo odjeljku detaljno proučiti konačnodimEnzionalne ireducibilne reprezentacije od $\mathfrak{g}$ i provesti njihovu potpunu klasifikaciju.

Neka je π reprezentacija od $\mathfrak{g}$ na vektorskom prostoru V. Za $\mu \in \mathfrak{h}^*$ stavimo

$$V_\mu = \{v \in V;\ \pi(h)v = \mu(h)v\ \ \forall h \in \mathfrak{h}\}.$$

Ako je $V_\mu \neq \{0\}$, μ se zove **težina reprezentacije** π, a V_μ se zove **težinski potprostor** od V. Ukoliko je taj potprostor konačnodimenzionalan, broj $\dim V_\mu$ zove se **multiplicitet** težine μ u reprezentacij π.

Kao i prije za $\alpha \in \mathfrak{h}^*$ označimo sa $\mathfrak{g}_\alpha$ korijenske potprostore od $\mathfrak{g}$, tj. težinske potprostore za reprezentaciju $\mathrm{ad}_\mathfrak{g}$:

$$\mathfrak{g}_\alpha = \{x \in \mathfrak{g};\ [h, x] = \alpha(h)x\ \ \forall h \in \mathfrak{h}\}.$$

Tada imamo korijenski rastav

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \dotplus \sum_{\alpha \in R} \dotplus\, \mathfrak{g}_\alpha.$$

Lako se vidi da za bilo koju reprezentaciju π od $\mathfrak{g}$ na prostoru V i za bilo koje $\mu, \alpha \in \mathfrak{h}^*$ vrijedi

$$\pi(\mathfrak{g}_\alpha)V_\mu \subseteq V_{\mu+\alpha}.$$

Odatle slijedi da je suma težinskih potprostora $\sum_{\mu \in \mathfrak{h}^*} V_\mu$ $\pi-$invarijantna. Ako su $\mu_1, \ldots, \mu_n \in \mathfrak{h}^*$ međusobno različiti, za neki $h \in \mathfrak{h}$ skalari $\mu_1(h), \ldots, \mu_n(h)$ su međusobno različiti. Suma pripadnih svojstvenih potprostora $V_{\mu_j(h)}(\pi(h))$ operatora $\pi(h)$ je stoga direktna, a kako je $V_{\mu_j} \subseteq V_{\mu_j(h)}(\pi(h))$ za svaki j, zaključujemo da je suma $V_{\mu_1} + \cdots + V_{\mu_n}$ direktna. Prema tome, suma težinskih potprostora $\sum_{\mu \in \mathfrak{h}^*} V_\mu$ je direktna.

Naravno, može se dogoditi da reprezentacija od $\mathfrak{g}$ nema nijednu težinu. Nas će zanimati samo tzv. **težinske reprezentacije**, tj. takve da je

$$V = \sum_{\mu \in \mathfrak{h}^*} \dotplus\, V_\mu.$$

Propozicija 3.7.1. *Svaka je konačnodimenzionalna reprezentacija od $\mathfrak{g}$ težinska.*

Dokaz: Neka je π reprezentacija od $\mathfrak{g}$ na konačnodimenzionalnom prostoru V. Zbog Weylovog teorema 3.1.13. o potpunoj reducibilnosti u dokazu možemo bez smanjenja općenitosti pretpostaviti da je reprezentacija π ireducibilna. Nadalje, kako je suma težinskih potprostora $\pi-$invarijantan potprostor, dovoljno je dokazati da reprezentacija π ima barem jednu težinu.

Izaberimo bazu B sistema korijena R i neka je R_+ pripadni skup pozitivnih korijena. Stavimo

$$\mathfrak{n} = \sum_{\alpha \in R_+} \dotplus\, \mathfrak{g}_\alpha \qquad \text{i} \qquad \mathfrak{b} = \mathfrak{h} \dotplus \mathfrak{n}.$$

Tada je $\mathfrak{n}$ nilpotentna Liejeva podalgebra od $\mathfrak{g}$ i vrijedi $[\mathfrak{b},\mathfrak{b}]=\mathfrak{n}$, pa prema teoremu 3.1.8. zaključujemo da je $\mathfrak{b}$ rješiva Liejeva podalgebra od $\mathfrak{g}$. Prema Liejevom teoremu 3.1.6. postoji vektor $v\neq 0$ koji je svojstven za sve operatore $\pi(x)$, $x\in\mathfrak{b}$. Dakle, za neki linearan funkcional $\lambda\in\mathfrak{b}^*$ vrijedi $\pi(x)v=\lambda(x)v$ za svaki $x\in\mathfrak{b}$. No tada je $v\in V_\mu$ za $\mu=\lambda|\mathfrak{h}$. Dakle, $V_\mu\neq\{0\}$, odnosno, μ je težina reprezentacije π.

Za konačnodimenzionalnu reprezentaciju π na prostoru V očito postoji težina μ takva da $\mu+\alpha$ nije težina ni za jedan $\alpha\in R_+$. Tada je $\pi(\mathfrak{g}_\alpha)V_\mu=\{0\}$ za svaki $\alpha\in R_+$, dakle, $\pi(\mathfrak{n})V_\mu=\{0\}$. Proučit ćemo sada reprezentacije s takvim svojstvom. U tu svrhu najprije ćemo opisati jednu konstrukciju reprezentacije Liejeve algebre iz reprezentacije njezine Liejeve podalgebre. Prije svega, generalizirat ćemo pojam i konstrukciju tenzorskog produkta sa vektorskih prostora na module nad prstenom.

Neka je $\mathcal{R}$ unitalan prsten i neka su V unitalan desni $\mathcal{R}-$modul i W unitalan lijevi $\mathcal{R}-$modul. Za komutativnu aditivnu grupu $\mathcal{A}$ preslikavanje $\varphi: V\times W\to\mathcal{A}$ zove se $\mathcal{R}-$**bimorfizam**, ako je to preslikavanje biaditivno, tj.

$$\varphi(v+v',w)=\varphi(v,w)+\varphi(v',w)\quad \text{i}\quad \varphi(v,w+w')=\varphi(v,w)+\varphi(v,w'\quad \forall v,v'\in V\ \text{ i }\ \forall w,w'\in W$$

i ako vrijedi

$$\varphi(vr,w)=\varphi(v,rw)\qquad \forall v\in V,\quad \forall w\in W\quad \text{i}\quad \forall r\in\mathcal{R}.$$

Tenzorski produkt modula V i W je uređen par $(\mathcal{T},\iota)$ takav da vrijedi

(1) $\mathcal{T}$ je komutativna aditivna grupa.

(2) ι je $\mathcal{R}-$bimorfizam sa $V\times W$ u $\mathcal{T}$.

(3) Par $(\mathcal{R},\iota)$ ima univerzalno svojstvo u odnosu na bimorfizme: za svaku komutativnu aditivnu grupu $\mathcal{A}$ i svaki $\mathcal{R}-$bimorfizam $\varphi: V\times W\to\mathcal{A}$ postoji jedinstven homomorfizam grupa $\Phi:\mathcal{T}\to\mathcal{A}$ takav da je $\varphi=V\times W\to\mathcal{A}$.

Sasvim analogno kao za vektorske prostore dokazuje se:

Teorem 3.7.2. *Neka su $\mathcal{R}$ unitalan prsten, V desni unitalan $\mathcal{R}-$modul i W lijevi unitalan $\mathcal{R}-$modul.*

(a) *Postoji tenzorski produkt modula V i W.*

(b) *Ako su $(\mathcal{T},\iota)$ i $\mathcal{T}',\iota')$ tenzorski produkti $\mathcal{R}-$modula V i W, jedinstven homomorfizam grupa $\Phi:\mathcal{T}\to\mathcal{T}'$ sa svojstvom $\iota'=\Phi\circ\iota$ je izomorfizam grupa. Njegov je invers jedinstven homomorfizma $\Psi:\mathcal{T}'\to\mathcal{T}$ sa svojstvom $\iota=\Psi\circ\iota'$.*

(c) *Ako je $(\mathcal{T},\iota)$ tenzorski produkt modula V i W, ako skup $S\subseteq V$ generira $\mathcal{R}-$modul V i ako skup $T\subseteq W$ generira $\mathcal{R}-$modul W, onda skup $\iota(S\times T)$ generiran grupu $\mathcal{T}$.*

Tenzorski produkt nad prstenom $\mathcal{R}$ obično se označava znakom $\otimes_{\mathcal{R}}$, odnosno, grupa $\mathcal{T}$ se piše $V\otimes_{\mathcal{R}} W$. U tom se slučaju bimorfizam ι označava ovako: $\iota(v,w)=v\otimes_{\mathcal{R}} w$, $v\in V$, $w\in W$.

Nas će zanimati samo situacija kad je $\mathcal{R}$ ne samo prsten nego kompleksna unitalna algebra, tj. polje $\mathbb{C}$ sadržano je u centru prstena $\mathcal{R}$. Tada je svaki (bilo lijevi, bilo desni) $\mathcal{R}-$modul V ujedno kompleksan vektorski prostor i djelovanje svakog elementa prstena $\mathcal{R}$ na prostoru V je lineran operator. Nadalje, i tenzorski produkt $V\otimes_{\mathcal{R}} W$ desnog i lijevog $\mathcal{R}-$modula je ne samo komutativna grupa nego kompleksan vektorski prostor.

Zadatak 3.7.1. *Neka je $\mathcal{R}$ kompleksna unitalna algebra i neka su V desni i W lijevi unitalni $\mathcal{R}-$moduli. Neka je U potprostor vektorskog prostora $V \otimes_{\mathbb{C}} W$ razapet svim elementima oblika $vr \otimes_{\mathbb{C}} w - v \otimes_{\mathbb{C}} rw$, $v \in V$, $w \in W$, $r \in \mathcal{R}$. Dokažite da je tada kvocijentni prostor $\mathcal{T} = (V \otimes_{\mathbb{C}} W)/U$ s preslikavanje $\iota : V \times W \to \mathcal{T}$, zadanim sa*

$$\iota(v, w) = v \otimes_{\mathbb{C}} w + U, \qquad v \in V, \quad w \in W,$$

tenzorski produkt $\mathcal{R}-$modula V i W.

Neka je sada $\mathcal{S}$ još jedna kompleksna unitalna algebra i pretpostavimo da je V ne samo desni $\mathcal{R}-$modul nego i lijevi $\mathcal{S}-$modul takav da vrijedi

$$(sv)r = s(vr) \qquad \forall s \in \mathcal{S}, \quad \forall v \in V, \quad \forall r \in \mathcal{R}.$$

Tada se V zove $(\mathcal{S}, \mathcal{R})-$**bimodul**. Ako je i dalje W unitalan lijevi $\mathcal{R}-$modul, onda se lako vidi da na tenzorskom produktu $V \otimes_{\mathcal{R}} W$ postoji jedinstvena struktura lijevog $\mathcal{S}-$modula takva da vrijedi

$$s(v \otimes_{\mathcal{R}} w) = (sv) \otimes_{\mathcal{R}} w \qquad \forall s \in \mathcal{S}, \quad \forall v \in W, \quad \forall w \in W.$$

Sasvim analogno, za desni $\mathcal{R}-$modul V i za $(\mathcal{R}, \mathcal{S})-$bimodul W na aditivnoj grupi $V \otimes_{\mathcal{R}} W$ postoji prirodna struktura desnog $\mathcal{S}-$modula.

Neka je sada $\mathfrak{g}$ kompleksna Liejeva algebra, neka je $\mathfrak{b}$ njezina Liejeva podalgebra i neka je σ reprezentacija Liejeve algebre $\mathfrak{b}$ na vektorskom prostoru W. Tada W ima strukturu $U(\mathfrak{b})-$modula. Nadalje, $U(\mathfrak{b})$ možemo shvaćati kao unitalnu podalgebru od $U(\mathfrak{g})$ generiranu sa $\mathfrak{b}$. Prema tome, množenje $(g, b) \mapsto gb$, $g \in U(\mathfrak{g})$, $b \in U(\mathfrak{b})$, definira na $U(\mathfrak{g})$ strukturu unitalnog desnog $U(\mathfrak{b})-$modula. Ujedno je $U(\mathfrak{g})$ unitalni lijevi $U(\mathfrak{g})-$modul, a zbog asocijativnosti $U(\mathfrak{g})$ je zapravo $(U(\mathfrak{g}), U(\mathfrak{b}))-$bimodul. Prema tome, možemo formirati tenzorski produkt $U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{b})} W$ i to je (unitalni lijevi) $U(\mathfrak{g})-$modul. Na taj način dolazimo do reprezentacije π Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ na vektorskom prostoru $V = U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{b})} W$. Za tu reprezentaciju π Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ kažemo da je **inducirana reprezentacijom** σ podalgebre $\mathfrak{b}$, a također za $U(\mathfrak{g})-$modul V kažemo da je **induciran** $U(\mathfrak{b})-$**modulom** W; pišemo

$$\pi = \mathrm{Ind}_{\mathfrak{b}}^{\mathfrak{g}} \sigma, \qquad V = \mathrm{Ind}_{\mathfrak{b}}^{\mathfrak{g}} W.$$

Iz PBW−teorema slijedi da je $U(\mathfrak{g})$ slobodan desni $U(\mathfrak{b})-$modul. Doista, ako je $\{x_1, \ldots, x_m\}$ baza direktnog komplementa od $\mathfrak{b}$ u $\mathfrak{g}$, onda se dopunjavanjem te baze s bazom od $\mathfrak{b}$ do baze od $\mathfrak{g}$ lako vidi da je

$$\{x_1^{\alpha_1} \cdots x_m^{\alpha_m};\ (\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \in \mathbb{Z}_+^m\}$$

baza desnog $U(\mathfrak{b})-$modula $U(\mathfrak{g})$. Odatle slijedi da je $w \mapsto 1 \otimes_{U(\mathfrak{b})} w$ linearna injekcija prostora W u prostor $V = \mathrm{Ind}_{\mathfrak{b}}^{\mathfrak{g}} W$ i to preslikavanje je homomorfizam lijevih $U(\mathfrak{b})-$modula, odnosno, preplitanje reprezentacije σ s reprezentacijom $\pi|\mathfrak{b}$. Tu injekciju možemo upotrijebiti kao identifikaciju, pa W postaje potprostor od V koji je $\pi|\mathfrak{b}-$invarijantan, odnosno, to je $U(\mathfrak{b})-$podmodul od V. Naravno, $U(\mathfrak{g})-$modul V generiran je sa W. Takvo uranjanje W u V ima univerzalno svojstvo:

Propozicija 3.7.3. *Neka su $\mathfrak{b}$ Liejeva podalgebra Liejeve algebre $\mathfrak{g}$, W $U(\mathfrak{b})-$modul i $V = \mathrm{Ind}_{\mathfrak{b}}^{\mathfrak{g}} W$ $U(\mathfrak{g})-$modul induciran sa W. Ako je V' $U(\mathfrak{g})-$modul i ako je $\psi : W \to V'$ homomorfizam $U(\mathfrak{b})-$modula, onda se ψ jedinstveno proširuje do homomorfizma $U(\mathfrak{g})-$modula $\Psi : V \to V'$. Nadalje, opisano pridruživanje $\psi \mapsto \Psi$ je izomorfizam prostora* $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{b}}(W, V')$ *na prostor* $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(V, V')$; *inverzni izomorfizam je restrikcija $\Psi \mapsto \Psi|W$.*

Dokaz: Neka je V' $U(\mathfrak{g})-$modul i neka je $\psi : W \to V'$ homomorfizam $U(\mathfrak{b})-$modula. Prema univerzalnom svojstvu tenzorskog produkta $V = \mathrm{Ind}_{\mathfrak{b}}^{\mathfrak{g}} W = U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{b})} W$ i uz identifikaciju W s $U(\mathfrak{b})-$podmodulom $1 \otimes_{U(\mathfrak{b})} W$ od V, ψ se jedinstveno proširuje do homomorfizma $U(\mathfrak{g})-$modula $\Psi : V \to V'$. Označimo tako definiran Ψ sa $A(\psi)$. Na taj je način definiran linearan operator $A : \mathrm{Hom}_{\mathfrak{b}}(W, V') \to \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(V, V')$.

Pretpostavimo sada da je zadan homomorfizam $U(\mathfrak{g})-$modula $\Psi : V \to V'$, tj. $\Psi \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(V, V')$. Tada je $B(\Psi) = \Psi|W$ homomorfizam $U(\mathfrak{b})-$modula, tj. $B(\Psi) \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{b}}(W, V')$, i na taj je način definirano linearno preslikavanje $B : \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(V, V') \to \mathrm{Hom}_{\mathfrak{b}}(W, V')$.

Za $\psi \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{b}}(W, V')$ tada imamo

$$(B \circ A)(\psi) = B(A(\psi)) = A(\psi)|W = \psi,$$

budući da je $A(\psi)$ proširenje ψ sa W na V. To pokazuje da je $A \circ B = I_{\mathrm{Hom}_{\mathfrak{b}}(W,V')}$.

S druge strane, ako je $\Psi \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(V, V')$, onda za svaki $w \in W$ vrijedi

$$[(A \circ B)(\Psi)](w) = A(B(\Psi))(w) = B(\Psi)(w) = \Psi(w).$$

Kako su $w \in W$ i $\Psi \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(V, V')$ bili proizvoljni, zaključujemo da je $A \circ B = I_{\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(V,V')}$.

Time smo dokazali da su A i B međusobno inverzni izomorfizmi, odnosno, propozicija je dokazana.

Neka je i dalje $\{x_1, \ldots, x_m\}$ baza direktnog komplementa od $\mathfrak{b}$ u $\mathfrak{g}$. Za $\alpha \in \mathbb{Z}_+^m$ pišemo $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_m^{\alpha_m}$. Opisano uranjanje $w \mapsto 1 \otimes_{U(\mathfrak{b})} w$ $U(\mathfrak{b})-$modula W u inducirani $U(\mathfrak{g})-$modul $V = \mathrm{Ind}_{\mathfrak{b}}^{\mathfrak{g}} W$ ima za posljedicu da za proizvoljan $v \in V$ postoje jedinstveni $w_\alpha \in W$, $\alpha \in \mathbb{Z}_+^m$, među kojima je samo konačno mnogo njih različito od nule, takvi da je

$$v = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^m} x^\alpha \otimes_{U(\mathfrak{b})} w_\alpha. \tag{3.20}$$

Drugim riječima, vrijedi

$$V = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^m} \dot{+}\, x^\alpha \otimes_{U(\mathfrak{b})} W.$$

Neka je $\pi = \mathrm{Ind}_{\mathfrak{b}}^{\mathfrak{g}} \sigma$ inducirana reprezentacija. Tada uz identifikaciju $W = 1 \otimes_{U(\mathfrak{b})} W$ imamo $x^\alpha \otimes_{U(\mathfrak{b})} w = \pi(x^\alpha) w$, $w \in W$, pa umjesto (3.20) možemo pisati

$$v = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^m} \pi(x^\alpha) w_\alpha.$$

Ako je $u \in U(\mathfrak{g})$ proizvoljan, operator $\pi(u)$ se može izračunati na sljedeći način. Za svaki $\alpha \in \mathbb{Z}_+^m$ možemo pisati

$$u x^\alpha = \sum_{\beta \in \mathbb{Z}_+^m} x^\beta u_{\beta\,\alpha}, \qquad u_{\beta\,\alpha} \in U(\mathfrak{b}).$$

Tada za $w \in W$ vrijedi

$$\pi(u)(\pi(x^\alpha)w) = \left(\sum_\beta x^\beta u_{\beta\,\alpha} \right) (1 \otimes_{U(\mathfrak{b})} w) = \sum_\beta x^\beta \otimes_{U(\mathfrak{b})} u_{b\,\alpha} w = \sum_\beta \pi(x^\beta)(u_{\beta\,\alpha} w).$$

Propozicija 3.7.4. *Neka su* $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{b}$, σ, W, π, V *kao i do sada, uz identifikaciju* $W = 1 \otimes_{U(\mathfrak{b})} W \subseteq V$. *Neka je* J *jezgra od* σ *u* $U(\mathfrak{b})$.

(a) *Lijevi ideal $U(\mathfrak{g})J$ generiran sa J u $U(\mathfrak{g})$ jednak je anihilatoru od W u $U(\mathfrak{g})$:*

$$U(\mathfrak{g})J = \operatorname{span}_K \{ua;\ u \in U(\mathfrak{g}),\ a \in J\} = \operatorname{Ann}_{U(\mathfrak{g})}W = \{u \in U(\mathfrak{g});\ uw = 0\ \ \forall w \in W\}.$$

(b) *Jezgra od π u $U(\mathfrak{g})$ je najveći dvostrani ideal u $U(\mathfrak{g})$ sadržan u lijevom idealu $U(\mathfrak{g})J$.*

Dokaz: (a) Budući da je J dvostrani, pa dakle i lijevi ideal u $U(\mathfrak{b})$, vrijedi

$$U(\mathfrak{g})J = \sum_\alpha x^\alpha J.$$

Sada za $u \in U(\mathfrak{g})$ pišemo

$$u = \sum_\alpha x^\alpha u_\alpha, \qquad u_\alpha \in U(\mathfrak{b}),$$

pa imamo sljedeći slijed ekvivalencija

$$uW = \{0\} \iff \sum_\alpha x^\alpha \otimes_{U(\mathfrak{b})} u_\alpha W = \{0\} \iff u_\alpha W = \{0\} \quad \forall\alpha \iff$$

$$\iff u_\alpha \in J \quad \forall\alpha \iff u \in U(\mathfrak{g})J.$$

(b) Neka je $u \in U(\mathfrak{g})$. Budući da W generira $U(\mathfrak{g})-$modul V, tj. $V = U(\mathfrak{g})W$, koristeći dokazanu tvrdnju (a) nalazimo

$$u \in \operatorname{Ker}\pi \iff u(U(\mathfrak{g})W) = \{0\} \iff uU(\mathfrak{g}) \subseteq U(\mathfrak{g})J \iff U(\mathfrak{g})uU(\mathfrak{g}) \subseteq U(\mathfrak{g})J.$$

Time je i tvrdnja (b) dokazana.

Posebno će nam biti važne reprezentacije inducirane jednodimenzionalnim reprezentacijama.

Propozicija 3.7.5. *Neka je $\mathfrak{b}$ Liejeva algebra i neka je $\sigma : \mathfrak{b} \to \mathbb{C}$ jednodimenzionalna reprezentacija od $\mathfrak{b}$. Označimo sa N jezgru te reprezentacije u $U(\mathfrak{b})$. Tada je N lijevi ideal u $U(\mathfrak{b})$ generiran skupom $\{x - \sigma(x);\ x \in \mathfrak{b}\}$ i ujedno desni ideal u $U(\mathfrak{b})$ generiran tim skupom.*

Dokaz: Označimo sa L lijevi, a sa R desni ideal u algebri $U(\mathfrak{b})$ generiran sa $\{x - \sigma(x);\ x \in \mathfrak{b}\}$. Očito je $L \subseteq N$. Izaberimo sada bazu $\{z_1, \ldots, z_n\}$ od $\mathfrak{b}$ tako da vrijedi

$$\sigma(z_2) = \cdots = \sigma(z_n) = 0.$$

Tada je prema PBW−teoremu

$$\{z_1^{m_1} \cdots z_n^{m_n};\ (m_1, \ldots, m_n) \in \mathbb{Z}_+^n\}$$

baza od $U(\mathfrak{b})$. Svaki element $z_1^{m_1} \cdots z_n^{m_n}$ te baze takav da je $m_2 + \cdots + m_n > 0$ leži u L. Također, za svaki $m_1 \in \mathbb{N}$ je $z_1^{m_1} - \sigma(z_1)^{m_1} \in L$. Odatle slijedi da je L potprostor od $U(\mathfrak{b})$ kodimenzije ≤ 1, pa zaključujemo da je $L = N$. Sasvim analogno dokazuje se da je i $R = N$.

Propozicija 3.7.6. *Neka su $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{b}$, σ, W, $\pi = \operatorname{Ind}_\mathfrak{b}^\mathfrak{g}\sigma$ i $V = \operatorname{Ind}_\mathfrak{b}^\mathfrak{g}W$ kao i ranije, ponovo uz identifikaciju $W \subseteq V$. Pretpostavimo da je $w \in W$ ciklički vektor, tj. takav da je $W = U(\mathfrak{b})w$ i neka je $L = \{x \in U(\mathfrak{b});\ \sigma(x)w = 0\}$ anihilator vektora w u $U(\mathfrak{b})$.*

(a) *Vektor w je ciklički i za $U(\mathfrak{g})-$modul V, tj. vrijedi $V = U(\mathfrak{g})w$. Jezgra surjektivnog preslikavanja $\varphi : u \mapsto uw$ sa $U(\mathfrak{g})$ na V je lijevi ideal $U(\mathfrak{g})L$ u $U(\mathfrak{g})$ generiran sa L.*

(*b*) *Neka je* $\psi : U(\mathfrak{g})/U(\mathfrak{g})L \to V$ *izomorfizam vektorskih prostora dobiven iz* φ *prijelazom na kvocijent. Ako* $U(\mathfrak{g})/U(\mathfrak{g})L$ *snabdijemo strukturom* $U(\mathfrak{g})-$*modula dobivenom iz množenja slijeva na* $U(\mathfrak{g})$, *onda je* ψ *izomorfizam* $U(\mathfrak{g})-$*modula.*

(*c*) *Ako je reprezentacija* σ *jednodimenzionalna,* $\dim W = 1$, *lijevi ideal* $U(\mathfrak{g})L$ *generiran je skupom* $\{x - \sigma(x);\ x \in \mathfrak{b}\}$.

Dokaz: (*a*) Imamo $U(\mathfrak{b})w = W$, dakle je $U(\mathfrak{g})w = U(\mathfrak{g})W = V$. Da bismo odredili jezgru surjekcije $u \mapsto uw$ izaberimo bazu $\{x_1, \ldots, x_m\}$ direktnog komplementa od $\mathfrak{b}$ u $\mathfrak{g}$ i koristimo oznake uvedene iza propozicije 3.7.3. Neka je $u \in U(\mathfrak{g})$ i neka su $u_\alpha \in U(\mathfrak{b})$, $\alpha \in \mathbb{Z}_+^m$, jedinstveni elementi takvi da je

$$u = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^m} x^\alpha u_\alpha.$$

Tada imamo slijed ekvivalencija:

$$uw = 0 \iff \sum_\alpha x^\alpha \otimes u_\alpha w = 0 \iff u_\alpha w = 0 \quad \forall \alpha \iff$$

$$\iff u_\alpha \in L \quad \forall \alpha \iff u \in U(\mathfrak{g})L.$$

Dakle, $Ker\,\varphi = U(\mathfrak{g})L$ i time je dokazana tvrdnja (*a*). Očito je φ homomomrfizam $U(\mathfrak{g})-$modula pa slijedi (*b*). Napokon, tvrdnja (*c*) slijedi neposredno iz propozicije 3.7.5.

U daljnjem je $\mathfrak{g}$ kompleksna poluprosta Liejeva algebra, $\mathfrak{h}$ je neka njezina Cartanova podalgebra, $R = R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ je pripadni sistem korijena, B je neka baza sistema korijena R i R_+ i $R_- = -R_+$ su pripadni skupovi pozitivnih i negativnih korijena u odnosu na bazu B. Uz prije uvedene oznake $\mathfrak{n} = \sum_{\alpha \in R_+} \dotplus \mathfrak{g}_\alpha$ i $\mathfrak{b} = \mathfrak{h} \dotplus \mathfrak{n}$ stavimo još $\overline{\mathfrak{n}} = \sum_{\alpha \in R_-} \dotplus \mathfrak{g}_\alpha$. Dakle, $\mathfrak{g} = \mathfrak{n} \dotplus \mathfrak{h} \dotplus \overline{\mathfrak{n}} = \mathfrak{b} \dotplus \overline{\mathfrak{n}}$.

Neka je $\lambda \in \mathfrak{h}^*$. Definiramo jednodimenzionalnu reprezentaciju τ_λ od $\mathfrak{b}$ na prostoru $\mathbb{C}_\lambda = \mathbb{C}$ ovako:

$$\tau_\lambda(h + n) = \lambda(h), \qquad h \in \mathfrak{h}, \quad n \in \mathfrak{n}.$$

Neka je

$$\sigma_\lambda = \mathrm{Ind}_\mathfrak{b}^\mathfrak{g} \tau_\lambda \qquad \text{i} \qquad M(\lambda) = Ind_\mathfrak{b}^\mathfrak{g} \mathbb{C}_\lambda = U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{b})} \mathbb{C}_\lambda.$$

Tako definiran $U(\mathfrak{g})-$modul $M(\lambda)$ zove se **Vermaov modul** pridružen $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$, B, λ.

Budući da je $\overline{\mathfrak{n}}$ direktni komplement od $\mathfrak{b}$ u $\mathfrak{g}$, prema razmatranjima prije i iza propozicije 3.7.3. vidimo da je $u \mapsto u \otimes_{U(\mathfrak{b})} 1 = \sigma_\lambda(u)(1 \otimes_{U(\mathfrak{b})} 1)$ izomorfizam vektorskog prostora $U(\overline{\mathfrak{n}})$ na vektorski prostor $M(\lambda)$. Očito je to homomorfizam lijevih $U(\overline{\mathfrak{n}})-$modula.

Sljedeća propozicija precizno opisuje težinsku strukturu Vermaovog modula. U tu svrhu definiramo skup Q tzv. **korijenskih težina**:

$$Q = \mathrm{span}_\mathbb{Z} B = span_\mathbb{Z} R = \left\{ \sum_{\alpha \in B} n_\beta \beta;\ \ n_\beta \in \mathbb{Z} \ \text{ za } \beta \in B \right\}.$$

Neka je

$$Q_+ = \mathbb{Z}_+ B = \left\{ \sum_{\beta \in B} n_\beta \beta;\ \ n_\beta \in \mathbb{Z}_+ \ \text{ za } \ \beta \in B \right\} = \left\{ \sum_{\alpha \in R_+} n_\alpha \alpha;\ \ n_\alpha \in \mathbb{Z}_+ \ \text{ za } \ \alpha \in R_+ \right\}.$$

Za $\lambda \in Q_+$ označimo sa $\mathcal{P}(\lambda)$ broj načina da se λ napiše kao $\mathbb{Z}_+-$linearna kombinacija pozitivnih korijena. Dakle, ako je $|R_+| = s$, numerirajmo sve pozitivne korijene: $R_+ = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_s\}$. Tada je

$$\mathcal{P}(\lambda) = \left| \left\{ (c_1, \ldots, c_s) \in \mathbb{Z}_+^s;\ \lambda = \sum_{i=1}^{s} c_i \alpha_i \right\} \right|.$$

Funkcija $\mathcal{P} : \mathbb{Q}_+ \to \mathbb{N}$ zove se **Kostantova funkcija** sistema korijena R u odnosu na bazu B.

Propozicija 3.7.7. *Neka je* $\lambda \in \mathfrak{h}^*$.

(a) *Reprezentacija* σ_λ *je* $\mathfrak{h}-$*težinska, tj.* $M(\lambda) = \sum_{\mu \in \mathfrak{h}^*} \dot{+} M(\lambda)_\mu$.

(b) $M(\lambda)_\mu \neq \{0\}$ *ako i samo ako je* $\lambda - \mu \in Q_+$, *odnosno,* $\mu \in \lambda - Q_+$.

(c) $\dim M(\lambda)_\mu = \mathcal{P}(\lambda - \mu)\ \forall \mu \in \lambda - Q_+$.

(d) *Vrijedi* $M(\lambda)_\lambda = 1 \otimes_{U(\mathfrak{b})} \mathbb{C}_\lambda$, $M(\lambda) = U(\overline{\mathfrak{n}}) M(\lambda)_\lambda$ *i* $\mathfrak{n} M(\lambda)_\lambda = \{0\}$.

Dokaz: Neka je $|R_+| = s$ i numerirajmo pozitivne korijene: $R_+ = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_s\}$. Za svaki $j \in \{1, \ldots, s\}$ neka je $y_j \in \mathfrak{g}_{-\alpha_j} \setminus \{0\}$. Tada je $\{y_1, \ldots, y_s\}$ baza od $\overline{\mathfrak{n}}$, pa je prema PBW$-$teoremu $\{y_1^{n_1} \cdots y_s^{n_s};\ (n_1, \ldots, n_s) \in \mathbb{Z}_+^s\}$ baza vektorskog prostora $U(\overline{\mathfrak{n}})$. Slijedi da je $\{y_1^{n_1} \cdots y_s^{n_s} \otimes_{U(\mathfrak{b})} 1;\ (n_1, \ldots, n_s) \in \mathbb{Z}_+^s\}$ baza vektorskog prostora $M(\lambda)$. Sada ćemo izračunati djelovanje proizvoljnog $h \in \mathfrak{h}$ na vektore te baze. Budući da je $[h, y_i] = -\alpha_i(h) y_i$, indukcijom po $k = n_1 + \cdots + n_s \in \mathbb{Z}_+$ lako slijedi da u algebri $U(\mathfrak{g})$ vrijedi

$$[h, y_1^{n_1} \cdots y_s^{n_s}] = (-n_1\alpha_1 - \cdots - n_s\alpha_s)(h) y_1^{n_1} \cdots y_s^{n_s}.$$

Stoga je

$$\begin{aligned} \sigma_\lambda(h)(y_1^{n_1} \cdots y_s^{n_s} \otimes_{U(\mathfrak{b})} 1) &= \sigma_\lambda(h)\sigma_\lambda(y_1^{n_1} \cdots y_s^{n_s})(1 \otimes_{U(\mathfrak{b})} 1) = \\ = \sigma_\lambda(h)([h, y_1^{n_1} \cdots y_s^{n_s}])(1 \otimes_{U(\mathfrak{b})} 1) &+ \sigma_\lambda(h)(y_1^{n_1} \cdots y_s^{n_s})\sigma_\lambda(h)(1 \otimes_{U(\mathfrak{b})} 1) = \\ = (-n_1\alpha_1 - \cdots - n_s\alpha_s)(h) y_1^{n_1} \cdots y_s^{n_s} &\otimes_{U(\mathfrak{b})} 1 + y_1^{n_1} \cdots y_s^{n_s} h \otimes_{U(\mathfrak{b})} 1. \end{aligned}$$

Kako je $h \in \mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{b} \subseteq U(\mathfrak{b})$, imamo

$$h \otimes_{U(\mathfrak{b})} 1 = 1 \cdot h \otimes 1_{U(\mathfrak{b})} = 1 \otimes_{U(\mathfrak{b})} h \cdot 1 = \lambda(h)(1 \otimes_{U(\mathfrak{b})} 1),$$

pa slijedi

$$\sigma_\lambda(h)(y_1^{n_1} \cdots y_s^{n_s} \otimes_{U(\mathfrak{b})} 1) = (\lambda - n_1\alpha_1 - \cdots - n_s\alpha_s)(h)(y_1^{n_1} \cdots y_s^{n_s} \otimes_{U(\mathfrak{b})} 1).$$

Odatle slijede sve tvrdnje propozicije.

Vermaov modul ima univerzalno svojstvo u odnosu na cikličke $U(\mathfrak{g})-$module s cikličkim vektorom koji je težinski i poništen sa $\mathfrak{n}$:

Propozicija 3.7.8. *Neka je* V $U(\mathfrak{g})-$*modul. Nadalje, neka je* $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ *i neka je* $v \in V_\lambda$ *vektor takav da je* $\mathfrak{n} v = \{0\}$ *i da je* $V = U(\mathfrak{g})v$.

(a) *Postoji jedinstveno preplitanje* $\varphi : M(\lambda) \to V$ *takvo da je* $\varphi(1 \otimes_{U(\mathfrak{b})} 1) = v$. φ *je epimorfizam Vermaovog modula* $M(\lambda)$ *na modul* V.

(b) *Modul* V *je* $\mathfrak{h}-$*težinski. Za svaku njegovu težinu* μ *vrijedi* $\lambda - \mu \in Q_+$. *Svaki težinski potprostor* V_μ *je konačnodimenzionalan. Vrijedi* $V_\lambda = \mathbb{C}v$. *Dakle, ako je* $V \neq \{0\}$, *onda je* $\dim V_\lambda = 1$.

(*c*) *Vrijedi* $V = U(\overline{\mathfrak{n}})v$.

(*d*) *Ako je* $T : V \to V$ *preplitanje, onda je* $T = cI_V$ *za neki* $c \in \mathbb{C}$.

(*e*) *Postoji unitalni homomorfizam* χ *centra* $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$ *algebre* $U(\mathfrak{g})$ *u polje* $\mathbb{C}$ *takav da je* $zw = \chi(z)w$ *za svaki* $z \in \mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$ *i svaki* $w \in V$.

(*f*) *Preplitanje* φ *iz* (*a*) *je izomorfizam ako i samo ako je* $V \neq \{0\}$ *i linearan operator* $w \mapsto uw$ *sa* V *u* V *je injektivan za svaki* $u \in U(\overline{\mathfrak{n}}) \setminus \{0\}$.

Dokaz: Tvrdnja (*a*) slijedi neposredno iz propozicije 3.7.3. Tvrdnje (*b*) slijedi iz surjektivnosti φ i iz $\varphi(M(\lambda)_\mu) = V_\mu \ \forall \mu \in \mathfrak{h}^*$. Tvrdnja (*c*) je posljedica PBW−teorema (zadatak 3.6.3.):

$$V = U(\mathfrak{g})v = U(\overline{\mathfrak{n}})U(\mathfrak{b})v = U(\overline{\mathfrak{n}})v.$$

Neka je $T : V \to V$ preplitanje, odnosno, homomorfizam $U(\mathfrak{g})$−modula. Za svaki $h \in \mathfrak{h}$ imamo $hTv = Thv = \lambda(h)Tv$, dakle, vrijedi $Tv \in V_\lambda = \mathbb{C}v$. Stoga je $Tv = cv$ za neki $c \in \mathbb{C}$. No svaki $w \in V$ ima po pretpostavci oblik $w = uv$ za neki $u \in U(\mathfrak{g})$. Slijedi $Tw = Tuv = uTv = ucv = cw$, dakle, $T = cI_V$. Time je dokazana tvrdnja (*d*). Odatle odmah slijedi tvrdnja (*e*), jer za $z \in \mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$ preslikavanje $w \mapsto zw$ sa V u V je preplitanje.

Dokažimo još tvrdnju (*f*). Ako je φ izomorfizam, injektivnost operatora $w \mapsto uw$ za $u \in U(\overline{\mathfrak{n}})$ slijedi iz prije spomenute činjenice da je $u \mapsto u(1 \otimes_{U(\mathfrak{b})} 1)$ izomorfizam $U(\overline{\mathfrak{n}})$−modula $U(\overline{\mathfrak{n}})$ na Vermaov modul $M(\lambda)$ (promatran kao $U(\overline{\mathfrak{n}})$−modul) i iz činjenice da prsten $U(\overline{\mathfrak{n}})$ nema djelitelja nule (zadatak 3.6.6.). Napokon, pretpostavimo da φ nije izomorfizam. Tada φ nije injekcija, pa postoji $u \in U(\overline{\mathfrak{n}}) \setminus \{0\}$ takav da je $\varphi(u \otimes_{U(\mathfrak{b})} 1) = 0$. Slijedi

$$uv = u\varphi(1 \otimes_{U(\mathfrak{b})} 1) = \varphi(\sigma_\lambda(u)(1 \otimes_{U(\mathfrak{b})} 1)) = \varphi(u \otimes_{U(\mathfrak{b})} 1) = 0.$$

Prema tome, ako je $V \neq \{0\}$, dakle, $v \neq 0$, linearan operator $w \mapsto uw$ nije injekcija.

Svaki unitalni homomorfizam $\chi : \mathfrak{Z}(\mathfrak{g}) \to \mathbb{C}$ zove se **infinitezimalni karakter** Liejeve algebre $\mathfrak{g}$. χ se zove **infinitezimalni karakter reprezentacije** π Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ na prostoru V (ili **infinitezimalni karakter** $U(\mathfrak{g})$**−modula** V) ako je $\pi(z) = \chi(z)I_V$ za svaki $z \in \mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$. Iz tvrdnje (*e*) propozicije 3.7.8. slijedi da Vermaov modul $M(\lambda)$ ima infinitezimalni karakter. Njega ćemo označavati sa χ_λ.

Propozicija 3.7.9. *Neka je* $\lambda \in \mathfrak{h}^*$.

(*a*) *Svaki pravi* $U(\mathfrak{g})$*−podmodul od* $M(\lambda)$ *sadržan je u potprostoru*

$$M_+(\lambda) = \sum_{\mu \neq \lambda} M(\lambda)_\mu.$$

(*b*) *Postoji najveći pravi* $U(\mathfrak{g})$*−podmodul* $K(\lambda)$ *od* $M(\lambda)$. *Kvocijentni* $U(\mathfrak{g})$*−modul* $L(\lambda) = M(\lambda)/K(\lambda)$ *je prost, tj. kvocijentna reprezentacija* $\pi_\lambda = (\sigma_\lambda)_{M(\lambda)/K(\lambda)}$ *je ireducibilna.*

Dokaz: (*a*) Neka je V $U(\mathfrak{g})$−podmodul od $M(\lambda)$ različit od $M(\lambda)$. Tada je V $U(\mathfrak{h})$−podmodul od $M(\lambda)$ pa vrijedi

$$V = \sum_{\mu \in (\lambda - Q_+)} \dot{+} V_\mu \qquad \text{i} \qquad V_\mu = V \cap M(\lambda)_\mu \qquad \forall \mu.$$

Budući da je $\dim M(\lambda)_\lambda = 1$ i $U(\mathfrak{g})M(\lambda)_\lambda = M(\lambda)$, iz $V \neq M(\lambda)$ slijedi da je $V \cap M(\lambda)_\lambda = \{0\}$. Prema tome je

$$V = \sum_{\mu \neq \lambda} \dot{+}\, V \cap M(\lambda)_\mu \subseteq M_+(\lambda).$$

(b) Neka je $K(\lambda)$ suma svih pravih $U(\mathfrak{g})-$podmodula od $M(\lambda)$. Tada je $K(\lambda)$ $U(\mathfrak{g})-$podmodul od $M(\lambda)$ koji sadrži svaki pravi $U(\mathfrak{g})-$podmodul od $M(\lambda)$. Kako je prema (a) svaki pravi $U(\mathfrak{g})-$podmodul od $M(\lambda)$ sadržan u $M_+(\lambda)$, slijedi da je i $K(\lambda) \subseteq M_+(\lambda)$, dakle, $K(\lambda)$ je stvarno pravi podmodul od $M(\lambda)$.

Propozicija 3.7.10. *Neka je V ireducibilan $U(\mathfrak{g})-$modul i neka je $\lambda \in \mathfrak{h}^*$. Pretpostavimo da postoji $v \in V_\lambda \setminus \{0\}$ takav da je $\mathfrak{n}v = \{0\}$. Tada je modul V izomorfan modulu $L(\lambda)$, odnosno, reprezentacija od $\mathfrak{g}$ na V ekvivalentna je reprezentaciji π_λ.*

Dokaz: Kako je $U(\mathfrak{g})-$modul V ireducibilan, vrijedi $U(\mathfrak{g})v = V$. Prema tvrdnji (a) propozicije 3.7.8. postoji surjektivno preplitanje $\varphi : M(\lambda) \to V$. Tada je modul V izomorfan kvocijentnom modulu $M(\lambda)/(\operatorname{Ker}\varphi)$. Budući da je $\varphi \neq \{0\}$, to je $\operatorname{Ker}\varphi \neq M(\lambda)$, pa je uz oznaku iz propozicije 3.7.9. $\operatorname{Ker}\varphi \subseteq K(\lambda)$. Sada iz ireducibilnosti kvocijentnog modula $M(\lambda)/(\operatorname{Ker}\varphi)$ slijedi da je $\operatorname{Ker}\varphi = K(\lambda)$, dakle, modul V je izomorfan modulu $M(\lambda)/K(\lambda) = L(\lambda)$.

Označimo sa $\rho = \rho_B$ polusumu pozitivnih korijena:

$$\rho = \sum_{\alpha \in R_+} \alpha.$$

Za $\alpha \in R$ neka je h_α kao i ranije jedinstven element iz $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}] \subseteq \mathfrak{h}$ takav da je $\alpha(h_\alpha) = 2$. Znamo da je tada $\{h_\beta;\ \beta \in B\}$ baza prostora $\mathfrak{h}$. Neka je $\{\lambda_\beta;\ \beta \in B\}$ njoj dualna baza prostora $\mathfrak{h}^*$; dakle, $\lambda_\beta(h_\gamma) = \delta_{\beta\gamma}$ za $\beta, \gamma \in B$. Tada je

$$\lambda = \sum_{\beta \in B} \lambda(h_\beta)\lambda_\beta \qquad \forall \lambda \in \mathfrak{h}^*.$$

Može se dokazati da za svaki $\beta \in B$ refleksija σ_β permutira skup $R_+ \setminus \{\beta\}$. Odatle slijedi

$$\sigma_\beta\rho = \frac{1}{2}\sigma_\beta\beta + \frac{1}{2}\sum_{\gamma \in R_+ \setminus \{\beta\}} \sigma_\beta\gamma = -\frac{1}{2}\beta + \sum_{\gamma \in R_+ \setminus \{\beta\}} \gamma = \rho - \beta.$$

S druge strane je $\sigma_\beta\rho = \rho - \rho(h_\beta)\beta$. Prema tome, vrijedi

$$\rho(h_\beta) = 1 \quad \forall \beta \in B, \qquad \text{dakle} \quad \rho = \sum_{\beta \in B} \lambda_\beta. \tag{3.21}$$

Propozicija 3.7.11. *Pretpostavimo da za $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ i $\beta \in B$ vrijedi $m = \lambda(h_\beta) \in \mathbb{Z}_+$. Neka su $v \in M(\lambda)_\lambda \setminus \{0\}$ i $y \in \mathfrak{g}_{-\beta} \setminus \{0\}$. Stavimo $v' = y^{m+1}v$ i neka je V $U(\mathfrak{g})-$podmodul od $M(\lambda)$ generiran sa v', $V = U(\mathfrak{g})v'$. Tada je V izomorfan Vermaovom modulu $M(\sigma_\beta(\lambda + \rho) - \rho)$.*

Za dokaz će nam trebati sljedeća činjenica, koja se jednostavno dokazuje indukcijom u odnosu na $m \in \mathbb{Z}_+$:

Zadatak 3.7.2. *Neka je $\mathcal{A}$ unitalna algebra i $x, y, h \in \mathcal{A}$ takvi da je $[h, y] = -2y$ i $[x, y] = h$. Dokažite da je*

$$[x, y^{m+1}] = (m + 1)(h + m)y^m = (m + 1)y^m(h - m) \qquad \forall m \in \mathbb{Z}_+.$$

Dokaz propozicije 3.7.11.: Budući da je $u \mapsto uv$ izomorfizam vektorskog prostora $U(\overline{\mathfrak{n}})$ na vektorski prostor $M(\lambda)$, vrijedi $v' \neq 0$. Nadalje, kako je prema (3.21) $\rho(h_\beta) = 1$, imamo

$$\sigma_\beta(\lambda + \rho) - \rho = \lambda + \rho - (\lambda + \rho)(h_\beta)\beta - \rho = \lambda - (m+1)\beta,$$

pa slijedi

$$v' = y^{m+1}v \in M(\lambda)_{\lambda-(m+1)\beta} = M(\lambda)_{\sigma_\beta(\lambda+\rho)-\rho}.$$

Za $\gamma \in B \setminus \{\beta\}$ vrijedi $[\mathfrak{g}_{-\beta}, \mathfrak{g}_\gamma] = \{0\}$ jer $\gamma - \beta \notin R$. Odatle i iz $\mathfrak{g}_\gamma v = \{0\}$ slijedi $\mathfrak{g}_\gamma v' = \{0\}$. Nadalje, neka je $x \in \mathfrak{g}_\beta$ takav da je $[x, y] = h_\beta$. Tada zbog jednakosti u zadatku 3.7.2. i zbog $xv = 0$ nalazimo

$$xv' = xy^{m+1}v = [x, y^{m+1}]v + y^{m+1}xv = (m+1)y^m(h_\beta - m)v = (m+1)y^m(\lambda(h_\beta) - m)v = 0.$$

Time je dokazano da vrijedi $\mathfrak{g}_\gamma v' = \{0\}$ $\forall \gamma \in B$, a odatle slijedi $\mathfrak{n}v' = \{0\}$. Sada po tvrdnji (a) propozicije 3.7.8. postoji epimorfizam $U(\mathfrak{g})-$modula $\varphi : M(\sigma_\beta(\lambda + \rho) - \rho) \to V$. No kako je za svaki $u \in U(\overline{\mathfrak{n}}) \setminus \{0\}$ preslikavanje $w \mapsto uw$ injektivan linearan operator na $M(\lambda)$, njegova restrikcija na potprostor V je također injektivna. Sada tvrdnja (f) propozicije 3.7.8. pokazuje da je $\varphi : M(\sigma_\beta(\lambda + \rho) - \rho) \to V$ izomorfizam $U(\mathfrak{g})-$modula.

U daljnjem sa P označavamo skup svih tzv. **integralnih težina** sistema korijena R :

$$P = \{\lambda \in \mathfrak{h}^*;\ \lambda(h_\alpha) \in \mathbb{Z}\ \forall \alpha \in R\} = \{\lambda \in \mathfrak{h}^*;\ \lambda(h_\alpha) \in \mathbb{Z}\ \forall \alpha \in B\}.$$

Nadalje, neka je P_+ skup svih tzv. **dominantnih integralnih težina** sistema korijena R u odnosu na bazu B :

$$P_+ = \{\lambda \in \mathfrak{h}^*;\ \lambda(h_\alpha) \in \mathbb{Z}_+\ \forall \alpha \in R_+\} = \{\lambda \in \mathfrak{h}^*;\ \lambda(h_\alpha) \in \mathbb{Z}_+\ \forall \alpha \in B\}.$$

Propozicija 3.7.12. *Neka je π konačnodimenzionalna reprezentacija od $\mathfrak{g}$ na prostoru V. Svaka težina od π je integralna. Nadalje, za svaki $\mu \in \mathfrak{h}^*$ i za svaki element σ Weylove grupe $W = W(R)$ vrijedi* $\dim V_\mu = \dim V_{\sigma\mu}$.

Dokaz: Neka je $\alpha \in R$. Neka su $x_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$ i $y_\alpha \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ takvi da je $[x_\alpha, y_\alpha] = h_\alpha$, tj. da je $(H_\alpha, x_\alpha, y_\alpha)$ $S-$trojka, i neka je $\mathfrak{s}_\alpha$ TDS$-$podalgebra razapeta sa h_α, x_α i y_α. Restrikcija $\pi|\mathfrak{s}_\alpha$ je konačnodimenzionalna reprezentacija od $\mathfrak{s}_\alpha$, pa su po tvrdnji (a) teorema 3.2.3. sve svojstvene vrijednosti operatora $\pi(h_\alpha)$ cijeli brojevi. Dakle, vrijedi $\mu(h_\alpha) \in \mathbb{Z}$ za svaku težinu μ reprezentacije π. Kako je $\alpha \in R$ bio proizvoljan, prva je tvrdnja dokazana.

Za drugu ćemo tvrdnju također koristiti rezultate odjeljka 3.2. Neka je $\mu \in \mathfrak{h}^*$ težina reprezentacije π i neka je $\alpha \in R$. Stavimo $m = \mu(h_\alpha)$. Neka je

$$V = V^{(1)} \dotplus \cdots \dotplus V^{(s)}$$

rastav prostora V u direktnu sumu $\pi|\mathfrak{s}_\alpha-$invarijantnih potprostora na kojima su pripadne subreprezentacije Liejeve algebre $\mathfrak{s}_\alpha$ ireducibilne. Stavimo $n_j = \dim V^{(j)}$. Neka su $V_k^{(j)}$ težinski potprostori:

$$V_k^{(j)} = \{v \in V^{(j)};\ \pi(h_\alpha)v = kv\}.$$

Iz tvrdnje (b) teorema 3.2.2. slijedi da je $V_k^{(j)} \neq \{0\}$ ako i samo ako je $-n_j \leq k \leq n_j$ i $n_j - k \in 2\mathbb{Z}$ i u tom je slučaju $\dim V_k^{(j)} = 1$. Nadalje, iz eksplicitnih formula (3.2) za djelovanje restrikcija operatora $\pi(x_\alpha)$ i $\pi(y_\alpha)$ slijedi da je u slučaju $k \geq 0$ restrikcija $\pi(y_\alpha)^k|V_k^{(j)}$ izomorfizam sa $V_k^{(j)}$ na

$V_{-k}^{(j)}$, a restrikcija $\pi(x_\alpha)^k|V_{-k}^{(j)}$ je izomorfizam sa $V_{-k}^{(j)}$ na $V_k^{(j)}$. Primijetimo sada da iz $\mu(h_\alpha) = m$ slijedi

$$V_\mu = V_\mu \cap V_m^{(1)} \dotplus \cdots \dotplus V_\mu \cap V_m^{(s)},$$

a kako je svaki potprostor $V_m^{(j)}$ ili $\{0\}$ ili je jednodimenzionalan, zaključujemo da je težinski potprostor V_μ direktna suma nekih od potprostora $V_m^{(j)}$; preciznije, vidi se da je V_μ direktna suma točno svih onih $V_m^{(j)}$ za koje je $-n_j \leq m \leq n_j$ i $n_j - m \in 2\mathbb{Z}$. Odatle slijedi da je u slučaju $m \geq 0$ restrikcija $\pi(y_\alpha)^m|V_\mu$ injektivna, a u slučaju $m \leq 0$ restrikcija $\pi(x_\alpha)^{-m}|V_\mu$ je injektivna. U prvom slučaju vrijedi $\pi(y_\alpha)^m V_\mu \subseteq V_{\mu-m\alpha}$, a u drugom $\pi(x_\alpha)^{-m} V_\mu \subseteq V_{\mu-m\alpha}$. Dakle, zbog spomenutih injektivnosti imamo u oba slučaja da je $\dim V_\mu \leq \dim V_{\mu-m\alpha}$. Međutim, vrijedi $\mu - m\alpha = \mu - \mu(h_\alpha)\alpha = \sigma_\alpha\mu$. Dakle, dokazali smo da je

$$\dim V_\mu \leq \dim V_{\sigma_\alpha\mu} \qquad \forall \mu \in \mathfrak{h}^* \quad \text{i} \quad \forall \alpha \in R.$$

Kako je σ_α^2 identiteta, vrijede i obrnute nejednakosti

$$\dim V_{\sigma_\alpha\mu} \leq \dim V_\mu \qquad \forall \mu \in \mathfrak{h}^* \quad \text{i} \quad \forall \alpha \in R.$$

Dakle, dokazali smo da vrijede jednakosti

$$\dim V_\mu = \dim V_{\sigma_\alpha\mu} \qquad \forall \mu \in \mathfrak{h}^* \quad \text{i} \quad \forall \alpha \in R.$$

Budući da refleksije σ_α, $\alpha \in R$, generiraju Weylovu grupu $W(R)$, slijedi druga tvrdnja propozicije:

$$\dim V_\mu = \dim V_{\sigma\mu} \qquad \forall \mu \in \mathfrak{h}^* \quad \text{i} \quad \forall \sigma \in W(R).$$

Postoji i direktniji dokaz da je $\dim V_\mu = \dim V_{\sigma_\alpha\mu}$. Naime, izračunavanjem komutatora operatora $\pi(h)$, $h \in \mathfrak{h}$, s potencijama $\pi(x_\alpha)^k$ i $\pi(y_\alpha)^k$, a odatle i komutatora operatora $\pi(h)$, $h \in \mathfrak{h}$, s operatorom $e^{\pi(x_\alpha)}e^{-\pi(y_\alpha)}e^{\pi(x_\alpha)}$ nije teško dokazati da je za svaki $\alpha \in R$ restrikcija operatora $e^{\pi(x_\alpha)}e^{-\pi(y_\alpha)}e^{\pi(x_\alpha)}$ na težinski potprostor V_μ izomorfizam sa V_μ na $V_{\sigma_\alpha\mu}$.

Neka je za $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ kao i prije sa $M(\lambda)$ označen Vermaov modul pridružen $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$, B, λ, i neka je σ_λ pripadna reprezentacija od $\mathfrak{g}$. Nadalje, neka je $L(\lambda)$ jedinstven ireducibilni kvocijent modula $M(\lambda)$. Sa π_λ ćemo označavati (ireducibilnu) reprezentaciju od $\mathfrak{g}$ na $L(\lambda)$. Nadalje, označimo sa $(\,\cdot\,|\,\cdot\,)$ bilinearnu formu koju na $\mathfrak{h}^* \times \mathfrak{h}^*$ po dualnosti definira restrikcija Killingove forme $B_\mathfrak{g}|\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}$. Podsjećamo da je tada restrikcija forme $(\,\cdot\,|\,\cdot\,)$ na realni potprostor $\mathfrak{h}_\mathbb{R}^* = \operatorname{span}_\mathbb{R} R$ skalarni produkt na $\mathfrak{h}_\mathbb{R}^*$. Taj je skalarni produkt invarijantan u odnosu na sve elemente Weylove grupe $W = W(R)$.

Propozicija 3.7.13. *Neka je π ireducibilna reprezentacija od $\mathfrak{g}$ na konačnodimenzionalnom prostoru V.*

(*a*) *Postoji jedinstven $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ takav da je π ekvivalentna reprezentaciji π_λ.*

(*b*) *Vrijedi $\lambda \in P_+$ i $\dim V_\lambda = 1$.*

(*c*) *Ako je μ težina od π, tj. ako je $V_\mu \neq \{0\}$, onda je $\lambda - \mu \in Q_+$ i vrijedi $(\mu|\mu) \leq (\lambda|\lambda)$.*

Dokaz: Budući da je prostor V konačnodimenzionalan, postoji težina λ od π takva da za svaki pozitivni korijen $\alpha \in R_+$ $\lambda + \alpha$ nije težina od π. To znači da je $\pi(\mathfrak{n})V_\lambda = \{0\}$. No tada iz propozicije 3.7.10. slijedi da je reprezentacija π ekvivalentna reprezentaciji π_λ. Nadalje, iz tvrdnje (*b*) propozicije 3.7.8. slijedi da je $\dim V_\lambda = 1$. Za $\alpha \in R_+$ izaberimo kao obično $x_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$ i $y_\alpha \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ tako da bude $[x_\alpha, y_\alpha] = h_\alpha$. Za $v \in V_\lambda \setminus \{0\}$ je tada $\pi(x_\alpha)v = 0$, pa iz teorije reprezentacija TDS$-$algebri slijedi da je $\lambda(h_\alpha) \in \mathbb{Z}_+$ (preciznije, $\lambda(h_\alpha) + 1$ je dimenzija $U(\mathfrak{s}_\alpha)-$podmodula generiranog sa v). Kako je $\alpha \in R_+$ proizvoljan, zaključujemo da je $\lambda \in P_+$. Iz tvrdnje (b) propozicije 3.7.8. slijedi da za svaku težinu μ reprezentacije $\pi \simeq \pi_\lambda$ vrijedi $\lambda - \mu \in Q_+$. Odatle slijedi jedinstvenost u tvrdnji (a) : ako je $\pi_\lambda \simeq \pi_{\lambda'}$, onda je $\lambda - \lambda' \in Q_+$ i $\lambda' - \lambda \in Q_+$, pa nalazimo da je $\lambda - \lambda' \in Q_+ \cap (-Q_+) = \{0\}$, odnosno, $\lambda = \lambda'$.

Treba još dokazati da je $(\mu|\mu) \leq (\lambda|\lambda)$ za svaku težinu μ reprezentacije $\pi \simeq \pi_\lambda$. Kako je P_+ presjek P sa zatvaračem Weylove komore određene sa B (u realnom vektorskom prostoru $\mathfrak{h}^*_\mathbb{R} = \operatorname{span}_\mathbb{R} R$), i kako je prema tvrdnji (e) teorema 3.5.3. zatvarač bilo koje Weylove komore fundamentalna domena za djelovanje Weylove grupe $W(R)$, za svaku težinu μ reprezentacije π postoji $\sigma \in W(R)$ takav da je $\sigma\mu \in P_+$. Budući da je prema propoziciji 3.7.12. μ težina od π ako i samo ako je $\sigma\mu$ težina od π i budući da je $(\sigma\mu|\sigma\mu) = (\mu|\mu)$, u dokazu nejednakosti $(\mu|\mu) \leq (\lambda|\lambda)$ možemo pretpostavljati da je $\mu \in P_+$. No tada je i $\lambda + \mu \in P_+$. S druge strane je $\lambda - \mu \in Q_+$, pa postoje $c_\alpha \in \mathbb{Z}_+$, $\alpha \in B$, takvi da je

$$\lambda - \mu = \sum_{\alpha \in B} c_\alpha \alpha.$$

No tada je

$$(\lambda|\lambda) - (\mu|\mu) = (\lambda + \mu|\lambda - \mu) = \sum_{\alpha \in B} c_\alpha (\lambda + \mu|\alpha).$$

Uz oznaku t_α iz odjeljka 3.5. imamo za svaki $\alpha \in B$

$$(\lambda + \mu|\alpha) = (\lambda + \mu)(t_\alpha) = \frac{(\alpha|\alpha)}{2}(\lambda + \mu)(h_\alpha) \geq 0.$$

Slijedi da je $(\lambda|\lambda) - (\mu|\mu) \geq 0$, odnosno, $(\mu|\mu) \leq (\lambda|\lambda)$.

Lema 3.7.14. *Neka je $V \neq \{0\}$ $U(\mathfrak{g})-$modul s reprezentacijom π. Pretpostavimo da za neki $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ i neki $v \in V_\lambda$ vrijedi $\pi(\mathfrak{n})v = \{0\}$ i $\pi(U(\mathfrak{g}))v = V$. Nadalje, izaberimo $y_\alpha \in \mathfrak{g}_{-\alpha} \setminus \{0\}$, $\alpha \in B$, i pretpostavimo da za svaki $\alpha \in B$ vrijedi $\pi(y_\alpha)^m v = 0$ za neki $m \in \mathbb{N}$. Tada je reprezentacija π ireducibilna i konačnodimenzionalna.*

Dokaz: Neka je Π skup svih težina reprezentacije π, $\mu \in \Pi$, $\alpha \in B$. U vezi s izabranim $y_\alpha \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ izaberimo kao i obično $x_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$ tako da bude $[x_\alpha, y_\alpha] = h_\alpha$, tj. da je $(h_\alpha, x_\alpha, y_\alpha)$ $S-$trojka, i neka je $\mathfrak{s}_\alpha$ njom razapeta TDS$-$podalgebra. Stavimo $v_j = \pi(y_\alpha)^j v$, $j \in \mathbb{Z}_+$, i neka je m najveći sa svojstvom $v_m \neq 0$. Tada znamo da je potprostor $\operatorname{span}\{v_0, \ldots, v_m\}$ invarijantan u odnosu na restrikciju $\pi|\mathfrak{s}_\alpha$ i pripadna je subreprezentacija od $\mathfrak{s}_\alpha$ ireducibilna. Prema tome, suma V' svih konačnodimenzionalnih $\pi|\mathfrak{s}_\alpha-$invarijantnih potprostora od V, na kojima je subreprezentacija od $\pi|\mathfrak{s}_\alpha$ ireducibilna, različita je od $\{0\}$ i vrijedi $v \in V'$.

Neka je sada $T : \mathfrak{g} \otimes V \to V$ jedinstven lineran operator takav da je

$$T(x \otimes w) = \pi(x)w, \qquad \forall x \in \mathfrak{g} \quad \text{i} \quad \forall w \in V.$$

Lako se provjerava da je T preplitanje reprezentacije $(ad_\mathfrak{g}|\mathfrak{s}_\alpha) \otimes (\pi|\mathfrak{s}_\alpha)$ s reprezentacijom $\pi|\mathfrak{s}_\alpha$. Odatle slijedi da je potprostor V' $\pi-$invarijantan. Kako je $\pi(U(\mathfrak{g}))v = V$, zaključujemo da je $V' = V$. Odatle slijedi da je V direktna suma konačnodimenzionalnih $\pi|\mathfrak{s}_\alpha-$invarijantnih potprostora T_i, $i \in I$, na kojima je subreprezentacija od $\pi|\mathfrak{s}_\alpha$ ireducibilna.

Neka je $w \in V_\mu \setminus \{0\}$. Tada možemo pisati $w = \sum_{i \in I} w_i$, gdje su $w_i \in T_i$ za svaki $i \in I$ (i, naravno, samo ih je konačno mnogo različitih od 0). Tada je $\pi(h_\alpha)w = \mu(h_\alpha)w$, a kako su svi potprostori T_i $\pi(h_\alpha)-$invarijantni, slijedi da je $\pi(h_\alpha)w_i = \mu(h_\alpha)w_i$ za svaki $i \in I$. Stavimo $\mu(h_\alpha) = n$. Kako je $w \neq 0$, to je $w_i \neq 0$ za barem jedan indeks $i \in I$, pa zaključujemo da je $n \in \mathbb{Z}$. Ako je $n \geq 0$, onda je kao u dokazu propozicije 3.7.12. $\pi(y_\alpha)^n w_i \neq 0$ za svaki $i \in I$ takav da je

$w_i \neq 0$. Prema tome je $\pi(y_\alpha)^n w \neq 0$, a kako je $\pi(y_\alpha)^n V_\mu \subseteq V_{\mu-n\alpha} = V_{\sigma_\alpha\mu}$, slijedi da je $\sigma_\alpha\mu \in \Pi$. Do istog zaključka dolazimo i ako je $n \leq 0$; u tom slučaju koristimo se s operatorom $\pi(x_\alpha)^{-n}$ umjesto operatora $\pi(y_\alpha)^n$.

Na taj smo način dokazali da je $\Pi \subseteq P$ i da je $\sigma_\alpha\Pi = \Pi$ $\forall\alpha \in B$, dakle, $\sigma\Pi = \Pi$ $\forall\sigma \in W$. Međutim, svaka $W-$orbita u P siječe se sa P_+. Prema tvrdnji (b) propozicije 3.7.8. slijedi da je skup $\Pi \cap P_+$ konačan, dakle, i Π je konačan skup, a po istoj tvrdnji svaki je težinski potprostor V_μ, $\mu \in \Pi$, konačnodimenzionalan. Prema tome, prostor V je konačnodimenzionalan. Prema Weylovom teoremu o potpunoj reducibilnosti vrijedi $V = S_1 \dotplus \cdots \dotplus S_p$, gdje su $S_1, \ldots, S_p$ $\pi-$invarijantni potprostori takvi da su subreprezentacije $\pi_{S_1}, \ldots, \pi_{S_p}$ ireducibilne. Kako je po tvrdnji (b) propozicije 3.7.8. $\dim V_\lambda = 1$, slijedi da je $V_\lambda \subseteq S_j$ za neki j. No tada je $V = \pi(U(\mathfrak{g}))V_\lambda = S_j$. Dakle, $p = 1$, odnosno, reprezentacija π je ireducibilna.

Lema 3.7.15. *Neka je $\lambda \in P_+$. Označimo sa $K(\lambda)$ najveći pravi $U(\mathfrak{g})-$podmodul od $M(\lambda)$ i neka je $v \in M(\lambda)_\lambda \setminus \{0\}$. Za svaki $\alpha \in B$ neka je $m_\alpha = \lambda(h_\alpha)$ i izaberimo $y_\alpha \in \mathfrak{g}_{-\alpha} \setminus \{0\}$. Tada je*

$$K(\lambda) = \sum_{\alpha \in B} U(\mathfrak{g}) y_\alpha^{m_\alpha+1} v = \sum_{\alpha \in B} U(\overline{\mathfrak{n}}) y_\alpha^{m_\alpha+1} v.$$

Nadalje, potprostor $K(\lambda)$ od $M(\lambda)$ je konačne kodimenzije.

Dokaz: Za $\alpha \in B$ označimo sa Y_α $U(\mathfrak{g})-$podmodul od $M(\lambda)$ generiran sa $y_\alpha^{m_\alpha+1}v$. Prema propoziciji 3.7.11. modul Y_α je izomorfan Vermaovom modulu $M(\sigma_\alpha(\lambda+\rho)-\rho)$. Posebno, zbog tvrdnje (d) propozicije 3.7.7. je $Y_\alpha = U(\overline{\mathfrak{n}})y_\alpha^{m_\alpha+1}v$. Budući da je $\lambda+\rho$ sadržan u Weylovoj komori određenoj sa B, vrijedi $\sigma_\alpha(\lambda+\rho) \neq \lambda+\rho$, odnosno, $\sigma_\alpha(\lambda+\rho)-\rho \neq \lambda$. To pokazuje da je $Y_\alpha \neq M(\lambda)$. Dakle, vrijedi $Y_\alpha \subseteq K(\lambda)$ za svaki $\alpha \in B$. Prema tome je

$$K' = \sum_{\alpha \in B} Y_\alpha \subseteq K(\lambda).$$

Iz leme 3.7.14. slijedi da je prostor $M(\lambda)/K'$ konačnodimenzionalan i reprezentacija na njemu je ireducibilna. Odatle slijedi da je $K(\lambda) = K'$ i time je lema dokazana.

Teorem 3.7.16. *Preslikavanje $\lambda \mapsto \pi_\lambda$ inducira bijekciju sa P_+ na skup svih klasa ekvivalencije ireducibilnih konačnodimenzionalnih reprezentacija od $\mathfrak{g}$. Drugim riječima, vrijedi:*

(a) *Reprezentacija π_λ je konačnodimenzionalna ako i samo ako je $\lambda \in P_+$.*

(b) *Za međusobno različite $\lambda, \lambda' \in P_+$ reprezentacije π_λ i $\pi_{\lambda'}$ su neekvivalentne.*

(c) *Svaka ireducibilna konačnodimenzionalna reprezentacija od $\mathfrak{g}$ ekvivalentna je nekoj reprezentaciji π_λ, $\lambda \in P_+$.*

Dokaz: Ako je $\lambda \in P_+$ iz leme 3.7.15. slijedi da je reprezentacija π_λ ireducibilna i konačnodimenzionalna. Obratno, ako je π konačnodimenzionalna ireducibilna reprezentacija onda prema propoziciji 3.7.13. postoji jedinstven $\lambda \in P_+$ takav da je $\pi \simeq \pi_\lambda$. Odatle slijede sve tri tvrdnje teorema.

Neka je V ciklički $U(\mathfrak{g})-$modul s cikličkim vektorom v, tj. $V = U(\mathfrak{g})v$. Stavimo

$$I = Ann_{U(\mathfrak{g})}(v) = \{u \in U(\mathfrak{g});\ uv = 0\}.$$

Tada je očito I lijevi ideal u $U(\mathfrak{g})$, odnosno, I je podmodul lijevog $U(\mathfrak{g})-$modula $U(\mathfrak{g})$. Nadalje, budući da je $u \mapsto uv$ epimorfizam lijevih $U(\mathfrak{g})-$modula sa $U(\mathfrak{g})$ na V, modul V izomorfan je kvocijentnom modulu $U(\mathfrak{g})/I$.

U sljedećoj propoziciji određeni su anihilatori kanonskih cikličkih vektora modula $M(\lambda)$ za $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ i modula $L(\lambda)$ za $\lambda \in P_+$.

Propozicija 3.7.17. *Neka je* $\lambda \in \mathfrak{h}^*$, $v \in M(\lambda)_\lambda \setminus \{0\}$, $v' \in L(\lambda)_\lambda \setminus \{0\}$, $I = Ann_{U(\mathfrak{g})}(v)$ *i* $I' = Ann_{U(\mathfrak{g})}(v')$.

(a) *Vrijedi* $I = U(\mathfrak{g})\mathfrak{n} + \sum_{h\in\mathfrak{h}} U(\mathfrak{g})(h - \lambda(h))$.

(b) I' *je najveći pravi lijevi ideal u* $U(\mathfrak{g})$ *koji sadrži* I.

(c) *Ako je* $\lambda \in P_+$, *za svaki* $\alpha \in B$ *stavimo* $m_\alpha = \lambda(h_\alpha)$ *i izaberimo* $y_\alpha \in \mathfrak{g}_{-\alpha} \setminus \{0\}$. *Tada je*

$$I' = I + \sum_{\alpha\in B} U(\mathfrak{g}) y_\alpha^{m_\alpha+1} = I + \sum_{\alpha\in B} U(\overline{\mathfrak{n}}) y_\alpha^{m_\alpha+1}.$$

Dokaz: Tvrdnja (a) slijedi direktno iz tvrdnje (c) propozicije 3.7.6.
(b) Za svaki $U(\mathfrak{g})-$podmodul T od $M(\lambda)$ neka je

$$I_T = \{u \in U(\mathfrak{g});\ uv \in T\}.$$

Tada je $T \mapsto I_T$ bijekcija sa skupa svih $U(\mathfrak{g})-$podmodula od $M(\lambda)$ na skup svih lijevih ideala u $U(\mathfrak{g})$ koji sadrže I i ta je bijekcija obostrano monotono rastuća u smislu da za podmodule T i T' vrijedi $T \subseteq T'$ ako i samo ako je $I_T \subseteq I_{T'}$.

Ako sa $K(\lambda)$ označimo kao i prije najveći pravi podmodul od $M(\lambda)$ onda je $L(\lambda) = M(\lambda)/K(\lambda)$, dakle, v' je proporcionalan klasi $v + K(\lambda)$, dakle,

$$I' = \{u \in U(\mathfrak{g});\ uv' = 0\} = \{u \in U(\mathfrak{g});\ u(v + K(\lambda)) = 0 \ \text{u}\ L(\lambda) = M(\lambda)/K(\lambda)\} =$$

$$= \{u \in U(\mathfrak{g});\ uv \in K(\lambda)\} = I_K(\lambda).$$

Odatle slijedi tvrdnja (b).
(c) Prema lemi 3.7.15. imamo za $u \in U(\mathfrak{g})$:

$$u \in I' \quad \Longleftrightarrow \quad uv \in K(\lambda) \quad \Longleftrightarrow \quad \exists u_1 \in \sum_{\alpha\in B} U(\mathfrak{g}) y_\alpha^{m_\alpha+1} \quad \text{takav da je} \quad uv = u_1 v.$$

Kako je tada $u - u_1 \in I$, slijedi da je posljednje ekvivalentno sa

$$u \in I + \sum_{\alpha\in B} U(\mathfrak{g}) y_\alpha^{m_\alpha+1}.$$

Time je dokazana prva jednakost u (c). Druga jednakost slijedi potpuno analogno koristeći drugu jednakost u lemi 3.7.15.:

$$K(\lambda) = \sum_{\alpha\in B} U(\overline{\mathfrak{n}}) y_\alpha^{m_\alpha+1} v.$$

3.8 Restrikcija na Cartanovu podalgebru

Neka je i dalje $\mathfrak{g}$ kompleksna poluprosta Liejeva algebra i $\mathfrak{h}$ neka njezina Cartanova podalgebra. Nadalje, neka je $R = R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ pripadni sistem korijena. Fiksirajmo neku bazu $B = \{\alpha_1, \dots, \alpha_\ell\}$ sistema korijena i neka je R_+ pripadni skup pozitivnih korijena, C pripadna Weylova komora u $\mathfrak{h}^*_\mathbb{R}$ i $\overline{C}$ njezin zatvarač. Za $\alpha \in R$ neka je h_α kao i ranije jedinstven element iz $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}] \subseteq \mathfrak{h}$ takav da je $\alpha(h_\alpha) = 2$.

Neka je $G = \mathrm{Int}(\mathfrak{g})$ grupa unutarnjih automorfizama Liejeve algebre $\mathfrak{g}$. U ovom ćemo odjeljku proučiti epimorfizam restrikcije $\mathcal{P}(\mathfrak{g}) \to \mathcal{P}(\mathfrak{h})$ i njegovu restrikciju na podalgebru invarijanata $\mathcal{P}(\mathfrak{g})^G$.

Weylova grupa $W = W(R)$ djeluje na algebri $\mathcal{P}(\mathfrak{h})$ polinomijalnih funkcija na $\mathfrak{h}$. Budući da je grupa W generirana refleksijama, znamo da je algebra invarijanata $\mathcal{P}(\mathfrak{h})^W$ polinomijalna algebra u $\ell = \dim\, \mathfrak{h}$ homogenih invarijanata.

Lema 3.8.1. *Za $n \in \mathbb{Z}_+$ svaki element od $\mathcal{P}^n(\mathfrak{h})^W$ je linearna kombinacija polinomijalnih funkcija na $\mathfrak{h}$ oblika $h \mapsto \mathrm{Tr}\, \pi(h)^n$, gdje je π konačnodimenzionalna reprezentacija od $\mathfrak{g}$.*

Dokaz: Funkcije λ^n, $\lambda \in P$, razapinju vektorski prostor $\mathcal{P}^n(\mathfrak{h}^*)$. Za svaki $f \in \mathcal{P}(\mathfrak{h})$ stavimo

$$T_W f = \sum_{\sigma \in W} f \circ \sigma.$$

Tada je, naravno, $\mathcal{P}(\mathfrak{h})^W = \{T_W f;\ f \in \mathcal{P}(\mathfrak{h})\}$. Budući da svaka $W-$orbita u P siječe P_+, zaključujemo da funkcije $T_W \lambda^n$, $\lambda \in P_+$, razapinju vektorski prostor $\mathcal{P}^n(\mathfrak{h})^W$. Lema će biti dokazana ako pokažemo da je za svaki $\lambda \in P_+$ funkcija $T_W \lambda^n$ linearna kombinacija funkcija na $\mathfrak{h}$ oblika kao u iskazu leme.

Neka je $\lambda \in P_+$. Stavimo $E_\lambda = P_+ \cap (\lambda - Q_+) \setminus \{\lambda\}$. Neka je π ireducibilna konačnodimenzionalna reprezentacija od $\mathfrak{g}$ s najvećom težinom λ. Prema propoziciji 3.7.12. funkcija $g : h \mapsto \mathrm{Tr}\, \pi(h)^n$ na $\mathfrak{h}$ je linearna kombinacija funkcija $T_W \mu^n$ za sve one težine μ reprezentacije π koje pripadaju P_+ i u toj linearnoj kombinaciji koeficijent uz $T_W \lambda^n$ jednak je 1 (jer je težinski potprostor reprezentacije π za težinu λ jednodimenzionalan). Stoga je funkcija $T_W \lambda^n$ linearna kombinacija funkcije g i funkcija $T_W \mu^n$ za $\mu \in E_\lambda$. Budući da za svaki $\mu \in E_\lambda$ očito vrijedi $E_\mu \subsetneq E_\lambda$, to je $|E_\mu| < |E_\lambda|$, pa tvrdnja slijedi indukcijom po $|E_\lambda|$.

Teorem 3.8.2. *Neka je $\iota : \mathcal{P}(\mathfrak{g}) \to \mathcal{P}(\mathfrak{h})$ epimorfizam definiran restrikcijom.*

(*a*) *Restrikcija $\iota | \mathcal{P}(\mathfrak{g})^G$ je izomorfizam algebre $\mathcal{P}(\mathfrak{g})^G$ na algebru $\mathcal{P}(\mathfrak{h})^W$.*

(*b*) *Za svaki $n \in \mathbb{Z}_+$ prostor $\mathcal{P}^n(\mathfrak{g})^G$ razapet je funkcijama oblika $x \mapsto Tr\, \pi(x)^n$, gdje je π konačnodimenzionalna reprezentacija od $\mathfrak{g}$.*

Za dokaz ovog dalekosežnog teorema treba nam nekoliko elementarnih činjenice iz algebarske geometrije.

Neka je $n \in \mathbb{N}$. Neka je $\mathbb{C}[X] = \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$ algebra polinoma u n varijabli s kompleksnim koeficijentima. Za ideal I u $\mathbb{C}[X]$ stavimo kao i obično $\mathcal{V}(I) = \{\lambda \in \mathbb{C}^n;\ f(\lambda) = 0\ \forall f \in I\}$. Na skupu $\mathbb{C}^n$ **topologija Zariskog** je ona za koju je $\{\mathcal{V}(I);\ I \text{ ideal u } \mathbb{C}[X]\}$ skup svih zatvorenih podskupova. Definicija ima smisla jer su očito $\emptyset$ i $\mathbb{C}^n$ zatvoreni skupovi i jer su konačne unije i proizvoljni presjeci zatvorenih skupova zatvoreni skupovi:

$$\mathcal{V}(I_1) \cup \cdots \cup \mathcal{V}(I_m) = \mathcal{V}(I_1 \cdots I_m), \qquad \bigcap_{\alpha \in \mathcal{A}} \mathcal{V}(I_\alpha) = \mathcal{V}\left(\sum_{\alpha \in \mathcal{A}} I_\alpha\right).$$

Polinomijalne funkcije na $\mathbb{C}^n$ su funkcije oblika $\lambda \mapsto f(\lambda)$ za $f \in \mathbb{C}[X]$. Svaka je takva funkcija očito neprekidna u odnosu na topologiju Zariskog. Budući da je polje $\mathbb{C}$ beskonačno, polinomijalna funkcija koja je definirana polinomom $f \in \mathbb{C}[X] \setminus \{0\}$ nije identički jednaka nuli.

Podskup $S \subseteq \mathbb{C}^n$ zove se **ireducibilan** ako ne postoje zatvoreni podskupovi $V_1, V_2 \subseteq \mathbb{C}^n$ takvi da je $S \subseteq V_1 \cup V_2$, ali $S \not\subseteq V_1$ i $S \not\subseteq V_2$.

Lema 3.8.3. *Čitav prostor $\mathbb{C}^n$ je ireducibilan.*

Dokaz: Pretpostavimo da su I_1 i I_2 ideali u $\mathbb{C}[X]$ takvi da je $\mathbb{C}^n = \mathcal{V}(I_1) \cup \mathcal{V}(I_2)$ ali $\mathcal{V}(I_1) \neq \mathbb{C}^n$ i $\mathcal{V}(I_2) \neq \mathbb{C}^n$. Tada su $I_1 \neq \{0\}$ i $I_2 \neq \{0\}$. Neka su $f \in I_1 \setminus \{0\}$ i $g \in I_2 \setminus \{0\}$. Tada je $fg \neq 0$, ali polinomijalna funkcija $\lambda \mapsto f(\lambda)g(\lambda)$ iščezava i na $\mathcal{V}(I_1)$ i na $\mathcal{V}(I_2)$, dakle, na $\mathbb{C}^n$, a to je nemoguće.

Korolar 3.8.4. *Svaki neprazan Zariski otvoren podskup od $\mathbb{C}^n$ je gust u $\mathbb{C}^n$ u odnosu na topologiju Zariskog.*

Dokaz: Neka je U neprazan Zariski otvoren podskup od $\mathbb{C}^n$. Pretpostavimo da U nije Zariski gust u $\mathbb{C}^n$. Tada postoji neprazan Zariski otvoren podskup V od $\mathbb{C}^n$ takav da je $U \cap V = \emptyset$. Tada su $\mathbb{C}^n \setminus U$ i $\mathbb{C}^n \setminus V$ zatvoreni podskupovi različiti od $\mathbb{C}^n$ čija je unija jednaka $\mathbb{C}^n$. No to je nemoguće zbog leme 3.8.3.

Ako u $\mathfrak{g}$ izaberemo bazu $\{x_1, \ldots, x_n\}$ Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ se identificira sa $\mathbb{C}^n$, pa na njoj možemo promatrati topologiju Zariskog. Naravno, ta topologija ne ovisi o izboru baze u $\mathfrak{g}$. Polinomijalne funkcije na $\mathfrak{g}$ su upravo one dobivene iz elemenata od $\mathbb{C}[X] = \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]$. U odnosu na izabranu bazu operator $\mathrm{ad}\, x$ ima $n \times n$ matricu čiji su elementi linearne, dakle, polinomijalne funkcije od $x \in \mathfrak{g}$. Neka je T formalna varijabla i neka je $P_x(T) \in \mathbb{C}[T]$ svojstveni polinom operatora $ad\, x$. Tada je

$$P_x(T) = \sum_{i=0}^{n} c_i(x) T^i$$

i svaki c_i je polinomijalna funkcija na $\mathfrak{g}$. Operator $\mathrm{ad}\, x$ singularan je za svaki $x \in \mathfrak{g}$, dakle, $c_0 = 0$. Definiramo $\rho-$**rang** Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ kao najmanji $m \in \mathbb{N}$ takav da polinomijalna funkcija c_m nije identički jednaka nuli. Element $x \in \mathfrak{g}$ zove se $\rho-$**regularan** ako je $c_m(x) \neq 0$. Dakle, x je $\rho-$regularan ako i samo ako je nil$-$indeks operatora $\mathrm{ad}\, x$ najmanji mogući, odnosno, algebarski multiplicitet svojstvene vrijednosti 0 operatora $\mathrm{ad}\, x$ je najmanji mogući. Za $x \in \mathfrak{g}$ označimo kao i obično sa x_s njegov poluprosti dio. Operatori $\mathrm{ad}\, x$ i $\mathrm{ad}\, x_s$ imaju isti svojstveni polinom, pa zaključujemo da je element x $\rho-$regularan ako i samo ako je njegov poluprosti dio x_s takav. To pokazuje da postoje poluprosti $\rho-$regularni elementi.

Skup $\mathcal{R}$ svih $\rho-$regularnih elemenata u $\mathfrak{g}$ je otvoren u odnosu na topologiju Zariskog. Prema korolaru 3.8.4. skup $\mathcal{R}$ je gust u $\mathfrak{g}$.

Neka je $x \in \mathfrak{g}$ poluprost element. Tada x leži u nekoj Cartanovoj podalgebri. Budući da su sve Cartanove podalgebre $G-$konjugirane, postoji $g \in G$ takav da je $h = gx \in \mathfrak{h}$. Za $h \in \mathfrak{h}$ vrijedi $\mathfrak{h} \subseteq C_{\mathfrak{g}}(h)$, dakle,

$$\dim C_{\mathfrak{g}}(h) \geq \dim \mathfrak{h} = \ell = \text{ rang od } \mathfrak{g}.$$

Znamo da postoje elementi $h \in \mathfrak{h}$ takvi da je $C_{\mathfrak{g}}(h) = \mathfrak{h}$ $-$ takve smo zvali *regularni elementi* od $\mathfrak{h}$. Za takav element h algebarski multiplicitet svojstvene vrijednosti 0 operatora $\mathrm{ad}\, h$ jednak je njegovom geometrijskom multiplicitetu $-$ tj. svaki korijenski vektor za $\mathrm{ad}\, h$ je ujedno svojstveni vektor za $\mathrm{ad}\, h$. Budući da smo vidjeli da postoje $\rho-$regularni poluprosti elementi, oni su ujedno regularni poluprosti elementi, pa vrijedi $m = \ell$. Nadalje, 0 je jedini nilpotentni element koji se nalazi u centralizatoru regularnog poluprostog elementa. Prema tome, ako je element $x \in \mathfrak{g}$ $\rho-$regularan, onda je nužno $x = x_s$. Time smo dokazali da je $\mathcal{R}$ skup svih regularnih poluprostih elemenata od $\mathfrak{g}$. Tim više vrijedi

Propozicija 3.8.5. *Skup svih poluprostih elemenata u $\mathfrak{g}$ je gust u $\mathfrak{g}$ u odnosu na topologiju Zariskog.*

Za dokaz teorema 3.8.2. trebat će nam još sljedeća lema:

Lema 3.8.6. *Neka je $\alpha \in R$ i neka je $(h_\alpha, x_\alpha, y_\alpha)$ $S-$trojka s neutralnim elementom h_α. Tada za element $g = \mathrm{e}^{\mathrm{ad}\, x_\alpha}\mathrm{e}^{-\mathrm{ad}\, y_\alpha}\mathrm{e}^{\mathrm{ad}\, x_\alpha} \in G$ vrijedi $g\mathfrak{h} = \mathfrak{h}$ i restrikcija $g|\mathfrak{h}$ je refleksija σ_α u odnosu na korijen α.*

Dokaz: Imamo $\mathfrak{h} = \mathbb{C}h_\alpha \dotplus \mathrm{Ker}\,\alpha$. Za $h \in \mathrm{Ker}\,\alpha$ imamo $[h, x_\alpha] = [h, y_\alpha] = 0$, dakle, $(\mathrm{ad}\, x_\alpha)h = (\mathrm{ad}\, y_\alpha)h = 0$, pa slijedi $gh = h$. S druge strane je i

$$\sigma_\alpha h = h - \alpha(h)h_\alpha = h.$$

Promotrimo sada djelovanje g na h_α. Imamo

$$(\mathrm{ad}\, x_\alpha)h_\alpha = [x_\alpha, h_\alpha] = -2x_\alpha \qquad \text{i} \qquad (\mathrm{ad}\, x_\alpha)^2 h_\alpha = 0,$$

dakle,

$$\mathrm{e}^{\mathrm{ad}\, x_\alpha} h_\alpha = h_\alpha - 2x_\alpha.$$

Slično dobivamo

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{ad}\, y_\alpha} h_\alpha = h_\alpha - (\mathrm{ad}\, y_\alpha)h_\alpha = h_\alpha - 2y_\alpha.$$

Nadalje,

$$(\mathrm{ad}\, y_\alpha)x_\alpha = [y_\alpha, x_\alpha] = -h_\alpha, \qquad (\mathrm{ad}\, y_\alpha)^2 x_\alpha = -[y_\alpha, h_\alpha] = -2y_\alpha, \qquad (\mathrm{ad}\, y_\alpha)^3 x_\alpha = 0,$$

pa imamo

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{ad}\, y_\alpha} x_\alpha = x_\alpha + h_\alpha - y_\alpha.$$

Dakle,

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{ad}\, y_\alpha}\mathrm{e}^{\mathrm{ad}\, x_\alpha} h_\alpha = \mathrm{e}^{-\mathrm{ad}\, y_\alpha}((h_\alpha - 2x_\alpha) = h_\alpha - 2y_\alpha - 2(x_\alpha + h_\alpha - y_\alpha) = -h_\alpha - 2x_\alpha.$$

Stoga je

$$gh_\alpha = \mathrm{e}^{\mathrm{ad}\, x_\alpha}(-h_\alpha - 2x_\alpha) = -h_\alpha + 2x_\alpha - 2x_\alpha = -h_\alpha = \sigma_\alpha h_\alpha.$$

Time je lema dokazana.

Budući da refleksije σ_α, $\alpha \in R$, generiraju Weylovu grupu W, iz leme 3.8.6. neposredno slijedi:

Korolar 3.8.7. *Za svaki $\sigma \in W$ postoji $g \in G$ takav da je $g\mathfrak{h} = \mathfrak{h}$ i $g|\mathfrak{h} = \sigma$.*

Dokaz teorema 3.8.2.: (1) Inkluzija $\iota\left(\mathcal{P}(\mathfrak{g})^G\right) \subseteq \mathcal{P}(\mathfrak{h})^W$ neposredna je posljedica korolara 3.8.7.

(2) Dokažimo sada injektivnost restrikcije $\iota|\mathcal{P}(\mathfrak{g})^G$. Neka je polinomijalna funkcija $f \in \mathcal{P}(\mathfrak{g})^G$ takva da je $\iota(f) = f|\mathfrak{h} = 0$. Neka je $x \in \mathfrak{g}$ poluprost element. Tada je x sadržan u nekoj Cartanovoj podalgebri, pa zbog $G-$konjugiranosti Cartanovih podalgebri postoji $G \in G$ takav da je $gx \in \mathfrak{h}$. Kako je funkcija f $G-$invarijantna, slijedi $f(x) = 0$. Prema tome, polinomijalna funkcija f poništava se na svakom poluprostom elementu $x \in \mathfrak{g}$. Prema propoziciji 3.8.5. slijedi $f = 0$.

(3) Neka je A^n potprostor od $\mathcal{P}^n(\mathfrak{g})^G$ razapet svim funkcijama oblika $x \mapsto \mathrm{Tr}\,\pi(x)^n$, gdje je π konačnodimenzionalna reprezentacija od $\mathfrak{g}$. Prema lemi 3.8.1. vrijedi $\iota(A^n) \supseteq \mathcal{P}^n(\mathfrak{h})^W$. Zbog (1) i (2) odatle slijede obje tvrdnje (a) i (b).

Killingova forma $B_{\mathfrak{g}}$ na poluprostoj Liejevoj algebri $\mathfrak{g}$ je nedegenerirana, pa definira izomorfizam $x \mapsto f_x$ sa $\mathfrak{g}$ na $\mathfrak{g}^*$:

$$f_x(y) = B_{\mathfrak{g}}(x, y), \qquad x, y \in \mathfrak{g}.$$

Taj se izomorfizam jedinstveno proširuje do izomorfizma unitalnih algebri

$$\Phi_{\mathfrak{g}} : S(\mathfrak{g}) \to S(\mathfrak{g}^*) = \mathcal{P}(\mathfrak{g}).$$

Nadalje, restrikcija Killingove forme $B_{\mathfrak{g}}|\mathfrak{h}\times\mathfrak{h}$ na Cartanovu podalgebru $\mathfrak{h}$ također je nedegenerirana bilinearna forma, pa definira izomorfizam sa $\mathfrak{h}$ na $\mathfrak{h}^*$ koji se jedinstveno proširuje do izomorfizma unitalnih algebri

$$\Phi_{\mathfrak{h}} : S(\mathfrak{h}) \to S(\mathfrak{h}^*) = \mathcal{P}(\mathfrak{h}).$$

Propozicija 3.8.8. *Neka je J ideal u algebri $S(\mathfrak{g})$ generiran sa $\mathfrak{n} \dotplus \overline{\mathfrak{n}}$.*

(*a*) *Izomorfizam $\Phi_{\mathfrak{h}} : S(\mathfrak{h}) \to \mathcal{P}(\mathfrak{h})$ je preplitanje reprezentacija Weylove grupe W, pa definira ekvivalenciju tih reprezentacija.*

(*b*) *Izomorfizam $\Phi_{\mathfrak{g}} : S(\mathfrak{g}) \to \mathcal{P}(\mathfrak{g})$ je preplitanje reprezentacija grupe G pa definira ekvivalenciju tih reprezentacija.*

(*c*) *Vrijedi $S(\mathfrak{g}) = S(\mathfrak{h}) \dotplus J$. Neka je $\jmath : S(\mathfrak{g}) \to S(\mathfrak{h})$ pripadni epimorfizam algebri (tj. projektor duž potprostora J).*

(*d*) *Vrijedi $\iota \circ \Phi_{\mathfrak{g}} = \Phi_{\mathfrak{h}} \circ \jmath$; pri tome je $\iota : \mathcal{P}(\mathfrak{g}) \to \mathcal{P}(\mathfrak{h})$ epimorfizam definiran restrikcijom sa $\mathfrak{g}$ na $\mathfrak{h}$.*

Dokaz: Neka su π i π^* reprezentacije grupe W pomoću automorfizama unitalnih algebri $S(\mathfrak{h})$ i $S(\mathfrak{h}^*) = \mathcal{P}(\mathfrak{h})$. Neka su $\sigma \in W$, $h \in \mathfrak{h} \subseteq S(\mathfrak{h})$ i $f = \Phi_{\mathfrak{h}}(h) \in \mathfrak{h}^* \subseteq \mathcal{P}(\mathfrak{h})$. Tada za svaki $k \in \mathfrak{h}$ zbog invarijantnosti restrikcije $B_{\mathfrak{g}}|\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}$ na djelovanje Weylove grupe vrijedi

$$(\Phi_{\mathfrak{h}}\pi(\sigma)h)(k) = B_{\mathfrak{g}}(\pi(\sigma)h, k) = B_{\mathfrak{g}}(h, \pi(\sigma^{-1})k) = (\Phi_{\mathfrak{h}}h)(\pi(\sigma^{-1})k) = (\pi^*(\sigma)\Phi_{\mathfrak{h}}h)(k).$$

Dakle, $\Phi_{\mathfrak{h}}\pi(\sigma)|\mathfrak{h} = \pi * (\sigma)\Phi_{\mathfrak{h}}|\mathfrak{h}$ za svaki $\sigma \in W$. Budući da $\mathfrak{h}$ generira unitalnu algebru $S(\mathfrak{h})$, odatle slijedi jednakost $\Phi_{\mathfrak{h}}\pi(\sigma) = \pi^*(\sigma)\Phi_{\mathfrak{h}}\ \ \forall \sigma \in W$. Time je tvrdnja ($a$) dokazana.

Tvrdnja (b) dokazuje se potpuno analogno koristeći invarijatnost Killingove forme $B_{\mathfrak{g}}$ u odnosu na djelovanje grupe G.

Tvrdnja (c) je očita.

Preslikavanja ι, $\jmath$, $\Phi_{\mathfrak{g}}$ i $\Phi_{\mathfrak{h}}$ su unitalni homomorfizmi algebri, pa je jednakost u tvrdnji (d) dovoljno dokazati na nekom skupu koji generira unitalnu algebru $S(\mathfrak{g})$, npr. na $\mathfrak{g}$. Neka je $x \in \mathfrak{g}$. Za bilo koji $h \in \mathfrak{h}$ tada imamo redom

$$((\iota \circ \Phi_{\mathfrak{g}})(x))(h) = (\iota(\Phi_{\mathfrak{g}}(x)))(h) = (\Phi_{\mathfrak{g}}(x))(h) = B_{\mathfrak{g}}(x, h) =$$
$$= B_{\mathfrak{g}}(\jmath(x), h) = (\Phi_{\mathfrak{h}}(\jmath(x)))(h) = ((\Phi_{\mathfrak{h}} \circ \jmath)(x))(h).$$

Pri tome smo za treću jednakost koristili činjenicu da je potprostor $\mathfrak{n} \dotplus \overline{\mathfrak{n}}$ ortogonalan na $\mathfrak{h}$ u odnosu na Killingovu formu. Budući da je $h \in \mathfrak{h}$ bio proizvoljan, iz gornje jednakosti slijedi da je $(\iota \circ \Phi_{\mathfrak{g}})(x) = (\Phi_{\mathfrak{h}} \circ \jmath)(x)$ za svaki $x \in \mathfrak{g}$. Time je i tvrdnja (d) dokazana.

Iz propozicije 3.8.8. neposredno slijedi:

Teorem 3.8.9. *Neka su J i $\jmath$ kao u propoziciji 3.8.8. Neka je $S(\mathfrak{g})^G$ podalgebra svih $G-$invarijanata u algebri $S(\mathfrak{g})$. Tada je restrikcija $\jmath|S(\mathfrak{g})^G$ izomorfizam algebre $S(\mathfrak{g})^G$ na algebru $S(\mathfrak{h})^W$.*

U sljedećem ćemo odjeljku ustanoviti da je centar $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$ univerzalne omotačke algebre $U(\mathfrak{g})$ kompleksne poluproste Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ izomorfan algebri invarijanata $S(\mathfrak{g})^G$ u simetričnoj algebri Liejeve algebre $\mathfrak{g}$, odnosno, algebri polinomijalnih invarijanata $\mathcal{P}(\mathfrak{g})^G$, a time i algebri $W-$invarijanata $\mathcal{P}(\mathfrak{h})^W \approx S(\mathfrak{h})^W$. Dakle, centar $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$ od $U(\mathfrak{g})$ je izomorfan algebri polinoma u $\ell = \dim\, \mathfrak{h}$ varijabli.

3.9 Harish−Chandrin izomorfizam

U ovom je odjeljku kao i do sada $\mathfrak{g}$ kompleksna poluprosta Liejeva algebra, $\mathfrak{h}$ neka njezina Cartanova podalgebra, $R = R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ pripadni sistem korijena, $W = W(R)$ Weylova grupa sistema korijena R, B neka baza sistema korijena R, R_+ i $R_- = -R_+$ pripadni pozitivni i negativni skupovi korijena, $Q = \mathrm{span}_{\mathbb{Z}} R$ rešetka korijenskih težina sistema korijena R i $Q_+ = \mathrm{span}_{\mathbb{Z}_+} B = \mathrm{span}_{\mathbb{Z}_+} R_+$ pozitivne korijenske težine u odnosu na B (ili u odnosu na R_+). Nadalje, stavimo kao i prije

$$\mathfrak{n} = \sum_{\alpha \in R_+} \dot{+}\, \mathfrak{g}_\alpha, \qquad \overline{\mathfrak{n}} = \sum_{\alpha \in R_-} \dot{+}\, \mathfrak{g}_\alpha, \qquad \mathfrak{b} = \mathfrak{h} \dot{+} \mathfrak{n}.$$

Za svaki korijen $\alpha \in R$ sa $h_\alpha \in \mathfrak{h}$ označavamo njemu tzv. dualni korijen: to je jedinstven element iz $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}]$ sa svojstvom $\alpha(h_\alpha) = 2$. Sa P označavamo integralne težine sistema korijena R, a sa P_+ dominantne integralne težine u odnosu na bazu B. :

$$P = \{\lambda \in \mathfrak{h}^*;\ \lambda(h_\alpha) \in \mathbb{Z}\ \ \forall \alpha \in R\} = \{\lambda \in \mathfrak{h}^*;\ \lambda(h_\alpha) \in \mathbb{Z}\ \ \forall \alpha \in B\},$$

$$P_+ = \{\lambda \in \mathfrak{h}^*;\ \lambda(h_\alpha) \in \mathbb{Z}_+\ \ \forall \alpha \in R_+\} = \{\lambda \in \mathfrak{h}^*;\ \lambda(h_\alpha) \in \mathbb{Z}_+\ \ \forall \alpha \in B\}.$$

Skup $\{h_\alpha;\ \alpha \in B\}$ je baza prostora $\mathfrak{h}$. Neka je kao i prije $\{\lambda_\alpha;\ \alpha \in B\}$ njoj dualna baza dualnog prostora $\mathfrak{h}^*$:

$$\lambda_\alpha(h_\beta) = \delta_{\alpha\beta}, \qquad \alpha, \beta \in B.$$

Linearni funkcionali λ_α su dominantne integralne težine i one se zovu **fundamentalne težine sistema korijena** R u odnosu na bazu B. Očito vrijedi

$$P = \left\{ \sum_{\alpha \in B} c_\alpha \lambda_\alpha;\ c_\alpha \in \mathbb{Z} \ \text{ za } \ \alpha \in B \right\}, \quad P_+ = \left\{ \sum_{\alpha \in B} c_\alpha \lambda_\alpha;\ c_\alpha \in \mathbb{Z}_+ \ \text{ za } \ \alpha \in B \right\}.$$

Podsjećamo još na oznaku

$$\rho = \rho_B = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in R_+} \alpha = \sum_{\alpha \in B} \lambda_\alpha.$$

Neka je $|R_+| = s$ i numerirajmo pozitivne korijene indeksima od 1 do s : $R_+ = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_s\}$. Nadalje, neka je $|B| = \ell = \mathrm{rank}(\mathfrak{g})$ i pretpostavimo da je numeracija takva da je $B = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell\}$. Za svaki $j \in \{1, \ldots, s\}$ izaberimo elemente $x_j \in \mathfrak{g}_{\alpha_j} \setminus \{0\}$ i $y_j \in \mathfrak{g}_{-\alpha_j}$. Možemo pretpostaviti (iako to u daljnjem nije bitno) da je $[x_j, y_j] = h_{\alpha_j}$. Stavimo još $h_i = h_{\alpha_i}$ za $i = 1, \ldots, \ell$. Sada je $\{y_1, \ldots, y_s, h_1, \ldots, h_\ell, x_1, \ldots, x_s\}$ baza od $\mathfrak{g}$. Za $q = (q_1, \ldots, q_s) \in \mathbb{Z}_+^s$, $m = (m_1, \ldots, m_\ell) \in \mathbb{Z}_+^\ell$ i $p = (p_1, \ldots, p_s) \in \mathbb{Z}_+^s$ definiramo elemente $u(q, m, p) \in U(\mathfrak{g})$ kao monome u elementima te baze od $\mathfrak{g}$:

$$u(q, m, p) = y_1^{q_1} \cdots y_s^{q_s} h_1^{m_1} \cdots h_\ell^{m_\ell} x_1^{p_1} \cdots x_s^{p_s}.$$

Prema PBW−teoremu $\{u(q, m, p);\ q, p \in \mathbb{Z}_+^s,\ \ m \in \mathbb{Z}_+^\ell\}$ je baza od $U(\mathfrak{g})$.

Kao što znamo za svaki $x \in \mathfrak{g}$ derivacija $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\, x$ Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ jedinstveno se proširuje do derivacije unitalne algebre $U(\mathfrak{g})$. Tu ćemo derivaciju označavati sa $\mathrm{ad}_{U(\mathfrak{g})}\, x$. Kao što smo vidjeli tada je

$$\left(\mathrm{ad}_{U(\mathfrak{g})}\, x\right) u = xu - ux \qquad \forall x \in \mathfrak{g} \quad \text{i} \qquad \forall u \in U(\mathfrak{g}).$$

Reprezentacija $\mathrm{ad}_{U(\mathfrak{g})}$ Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ na prostoru $U(\mathfrak{g})$ je težinska:

Zadatak 3.9.1. *Dokažite:*

(a) *Za svaki $h \in \mathfrak{h}$ i za bilo koje $q, p \in \mathbb{Z}_+^s$ i $m \in \mathbb{Z}_+^\ell$ vrijedi*

$$\left(\mathrm{ad}_{U(\mathfrak{g})}\, h\right) u(q, m, p) = ((p_1 - q_1)\alpha_1 + \cdots + (p_s - q_s))\, u(q, m, p).$$

(*b*) *Reprezentacija* $\mathrm{ad}_{U(\mathfrak{g})}$ *je težinska, tj.*

$$U(\mathfrak{g}) = \sum_{\lambda\in\mathfrak{h}^*} \dot{+}\, U(\mathfrak{g})_\lambda, \qquad U(\mathfrak{g})_\lambda = \left\{u \in U(\mathfrak{g});\ \left(\mathrm{ad}_{U(\mathfrak{g})}\, h\right) u = \lambda(h)u \ \ \forall h \in \mathfrak{h}\right\}.$$

(*c*) *Q je skup svih težina reprezentacije* $\mathrm{ad}_{U(\mathfrak{g})}$, *tj.* $U(\mathfrak{g})_\lambda \neq \{0\}$ *ako i samo ako je* $\lambda \in Q$.

(*d*) *Za svaki* $\lambda \in Q$ *težinski potprostor* $U(\mathfrak{g})_\lambda$ *je beskonačnodimenzionalan i baza mu je*

$$\left\{u(q,m,p);\ q,p \in \mathbb{Z}_+^s,\ \ m \in \mathbb{Z}_+^\ell,\ \ (p_1-q_1)\alpha_1 + \cdots + (p_s-q_s)\alpha_s = \lambda\right\}.$$

(*e*) $(U(\mathfrak{g})_\lambda)_{\lambda\in Q}$ *je graduacija algebre* $U(\mathfrak{g})$ *aditivnom komutativnom grupom* Q, *tj. vrijedi*

$$U(\mathfrak{g})_\lambda U(\mathfrak{g})_\mu \subseteq U(\mathfrak{g})_{\lambda+\mu} \qquad \forall \lambda,\mu \in Q.$$

Iz tvrdnje (*e*) u zadatku 3.9.1. vidimo da je $U(\mathfrak{g})_0$ unitalna podalgebra od $U(\mathfrak{g})$. To je jasno i iz činjenice da je zapravo $U(\mathfrak{g})_0$ centralizator od $\mathfrak{h}$ u $U(\mathfrak{g})$:

$$U(\mathfrak{g})_0 = U(\mathfrak{g})^{\mathfrak{h}} = \{u \in U(\mathfrak{g});\ hu = uh \ \ \forall h \in \mathfrak{h}\}.$$

Promotrimo sada lijevi ideal $U(\mathfrak{g})\mathfrak{n}$ u $U(\mathfrak{g})$ generiran sa $\mathfrak{n}$ i neka je $\mathcal{L} = U(\mathfrak{g})\mathfrak{n} \cap U(\mathfrak{g})_0$ njegov presjek s podalgebrom $U(\mathfrak{g})_0$.

Zadatak 3.9.2. *Dokažite da vrijedi:*

(*a*) $\mathcal{L} = \overline{\mathfrak{n}}U(\mathfrak{g}) \cap U(\mathfrak{g})_0$.

(*b*) $\mathcal{L}$ *je dvostrani ideal u algebri* $U(\mathfrak{g})_0$.

(*c*) $U(\mathfrak{g})_0 = U(\mathfrak{h}) \dot{+} \mathcal{L}$.

Uputa: Uočite da vrijedi

$$u(q,m,p) \in U(\mathfrak{g})_0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad p_1\alpha_1 + \cdots + p_s\alpha_s = q_1\alpha_1 + \cdots + q_s,$$

da je

$$\left\{u(q,m,p);\ q,p \in \mathbb{Z}_+^s,\ m \in \mathbb{Z}_+^\ell,\ \ p_1 + \cdots + p_s > 0\right\}$$

baza od $U(\mathfrak{g})\mathfrak{n}$ i da je

$$\left\{u(q,m,p);\ q,p \in \mathbb{Z}_+^s,\ m \in \mathbb{Z}_+^\ell,\ \ q_1 + \cdots + q_s > 0\right\}$$

baza od $\overline{\mathfrak{n}}U(\mathfrak{g})$.

Označimo sa φ projektor prostora $U(\mathfrak{g})_0$ na potprostor $U(\mathfrak{h})$ duž njemu komplementarnog potprostora $\mathcal{L}$. Budući da je $\mathcal{L}$ dvostrani ideal u algebri $U(\mathfrak{g})_0$, φ je epimorfizam algebre $U(\mathfrak{g})_0$ na podalgebru $U(\mathfrak{h})$. Taj se epimorfizam zove **Harish–Chandrin homomorfizam** u odnosu na bazu B sistema korijena $R = R(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$. Primijetimo da homomorfizam φ nije neovisan o izboru baze B od R.

Kako je Cartanova podalgebra $\mathfrak{h}$ komutativna Liejeva algebra, njezina univerzalna omotačka algebra $U(\mathfrak{h})$ je upravo simetrična algebra $S(\mathfrak{h})$ nad vektorskim prostorom $\mathfrak{h}$. Nadalje, ta se algebra prirodno identificira s polinomijalnom algebrom $\mathcal{P}(\mathfrak{h}^*)$ nad dualnim prostorom $\mathfrak{h}^*$.

Za svaki $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ definirali smo u odjeljku 3.7. infinitezimalni karakter χ_λ. On je definiran kao unitalni homomorfizam sa centra $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$ univerzalne omotačke algebre $U(\mathfrak{g})$ u polje $\mathbb{C}$ takav da vrijedi

$$\sigma_\lambda(z) = \chi_\lambda(z) I_{M(\lambda)} \qquad \forall z \in \mathfrak{Z}(\mathfrak{g}).$$

Pri tome je $M(\lambda)$ Vermaov modul određen sa λ i sa R_+ i σ_λ je pripadna reprezentacija od $\mathfrak{g}$ i od $U(\mathfrak{g})$ na prostoru $M(\lambda)$.

Budući da je $U(\mathfrak{g})_0$ centralizator od $\mathfrak{h}$ u $U(\mathfrak{g})$, jasno je da je $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g}) \subseteq U(\mathfrak{g})_0$. Prema tome, na svaki element $z \in \mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$ može se primijeniti Harish−Chandrin homomorfizam φ. Tada je $\varphi(z)$ element od $U(\mathfrak{h}) = S(\mathfrak{h})$, dakle, $\varphi(z)$ je polinomijalna funkcija na dualnom prostoru $\mathfrak{h}^*$. Važna je činjenica da je njezina vrijednost u točki $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ je upravo $\chi_\lambda(z)$:

Propozicija 3.9.1. *Neka je $\varphi : U(\mathfrak{g})_0 \to U(\mathfrak{h}) = \mathcal{P}(\mathfrak{h}^*)$ Harish−Chandrin homomorfizam u odnosu na bazu B sistema korijena $R = R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$. Vrijedi*

$$\chi_\lambda(z) = (\varphi(z))(\lambda) \qquad \forall z \in \mathfrak{Z}(\mathfrak{g}) \quad i \quad \forall \lambda \in \mathfrak{h}^*.$$

Dokaz: Neka je $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ i neka je $V \neq \{0\}$ ciklički $U(\mathfrak{g})$−modul s cikličkim vektorom $v \in V_\lambda$ takvim da je $\mathfrak{n}v = \{0\}$ (npr. $V = M(\lambda)$ i $v = 1 \otimes_{U(\mathfrak{b})} 1$.) Za $z \in \mathfrak{Z}(\mathfrak{g}) \subseteq U(\mathfrak{g})_0$ prema tvrdnji (c) u zadatku 3.9.2. vrijedi $z \in U(\mathfrak{h}) \dotplus U(\mathfrak{g})\mathfrak{n}$ i $\varphi(z)$ je upravo komponentan od z u $U(\mathfrak{h})$ u tom rastavu. Drugim riječima, postoje $u_1, \ldots, u_k \in U(\mathfrak{g})$ i $t_1, \ldots, t_k \in \mathfrak{n}$ takvi da je

$$z = \varphi(z) + u_1 t_1 + \cdots + u_k t_k.$$

Po pretpostavci je $t_1 v = \cdots = t_k v = 0$, pa slijedi

$$\chi_\lambda(z) v = zv = \varphi(z)v + u_1 t_1 v + \cdots + u_k t_k v = \varphi(z)v. \tag{3.22}$$

Nadalje, ciklički vektor v je težinski i težina mu je λ. To znači da vrijedi $hv = \lambda(h)v$ $\forall h \in \mathfrak{h}$. Stoga za bilo koji element $h_1^{m_1} \cdots h_\ell^{m_\ell}$ baze od $U(\mathfrak{h})$ vrijedi $h_1^{m_1} \cdots h_\ell^{m_\ell} v = \lambda(h_1)^{m_1} \cdots \lambda(h_\ell)^{m_\ell} v$. Primijetimo sada da uz identifikaciju $U(\mathfrak{h})$ s algebrom $\mathcal{P}(\mathfrak{h}^*)$ polinomijalnih funkcija na $\mathfrak{h}^*$ skalar $\lambda(h_1)^{m_1} \cdots \lambda(h_\ell)^{m_\ell}$ je upravo vrijednost polinomijalne funkcije $h_1^{m_1} \cdots h_\ell^{m_\ell}$ u točki λ :

$$\left(h_1^{m_1} \cdots h_\ell^{m_\ell}\right)(\lambda) = \lambda(h_1)^{m_1} \cdots \lambda(h_\ell)^{m_\ell} \qquad \forall \lambda \in \mathfrak{h}^* \quad \text{i} \quad \forall (m_1, \ldots, m_\ell) \in \mathbb{Z}_+^\ell.$$

Kako je svaka polinomijalna funkcija $u \in U(\mathfrak{h}) = \mathcal{P}(\mathfrak{h}^*)$ linearna kombinacija monoma $h_1^{m_1} \cdots h_\ell^{m_\ell}$, odatle slijedi da za svaki $u \in U(\mathfrak{h})$ vrijedi $uv = u(\lambda)v$. Posebno je $\varphi(z)v = (\varphi(z))(\lambda)v$. Odatle i iz (3.22) slijedi tvrdnja propozicije.

Ovisnost restrikcije Harish−Chandrinog homomorfizma $\varphi|\mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$ o izboru baze B sistema korijena R popravlja se pomoću vrlo jednostavnog automorfizma algebre $U(\mathfrak{h}) = S(\mathfrak{h}) = \mathcal{P}(\mathfrak{h}^*)$. Radi se o automorfizmu $\gamma = \gamma_B$ od $\mathcal{P}(\mathfrak{h}^*)$ koji polinomijalnu funkciju u na $\mathfrak{h}^*$ transformira u funkciju $\lambda \mapsto u(\lambda - \rho)$. Dakle,

$$(\gamma(u))(\lambda) = u(\lambda - \rho), \qquad \lambda \in \mathfrak{h}^*, \quad u \in U(\mathfrak{h}) = \mathcal{P}(\mathfrak{h}^*). \tag{3.23}$$

Štoviše, kompozicija s tim automorfizmom inducira izomorfizam unitalnih algebri sa $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$ na algebru invarijanata $S(\mathfrak{h})^W = \mathcal{P}(\mathfrak{h}^*)^W$:

Teorem 3.9.2. *Neka je γ automorfizam algebre $U(\mathfrak{h}) = \mathcal{P}(\mathfrak{h}^*)$ definiranim sa* (3.23) *i neka je $\varphi : U(\mathfrak{g})_0 \to U(\mathfrak{h})$ Harish−Chandrin homomorfizam u odnosu na bazu B od $R = R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$. Tada je restrikcija $(\gamma \circ \varphi)|\mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$ neovisna o izboru baze B od R i to je izomorfizam unitalne algebre $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$ na algebru $S(\mathfrak{h})^W = \mathcal{P}(\mathfrak{h}^*)^W$ polinomijalnih funkcija na $\mathfrak{h}^*$ invarijantnih u odnosu na Weylovu grupu $W = W(R)$.*

Dokaz: (1) Neka je $\alpha \in B$ i $\lambda \in P_+$. Prema propoziciji 3.7.11. Vermaov modul $M\left(\sigma_\alpha(\lambda+\rho)-\rho\right)$ izomorfan je podmodulu Vermaovog modula $M(\lambda)$. Odatle slijedi da je $\chi_\lambda = \chi_{\sigma_\alpha(\lambda+\rho)-\rho}$. Prema propoziciji 3.9.1. zaključujemo da vrijedi

$$(\varphi(z))(\lambda) = (\varphi(z))\left(\sigma_\alpha(\lambda+\rho)-\rho\right) \qquad \forall z \in \mathfrak{Z}(\mathfrak{g}).$$

Dakle, za svaki $z \in \mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$ polinomijalna funkcija $\varphi(z)$ poprima na skupu dominantnih integralnih težina P_+ iste vrijednosti kao i polinomijalna funkcija $\lambda \mapsto (\varphi(z))\left(\sigma_\alpha(\lambda+\rho)-\rho\right)$.

Uočimo sada da je P_+ Zariski gust skup u $\mathfrak{h}^*$, tj. iz jednakosti $f(\lambda)=g(\lambda)$ za svaki $\lambda \in P_+$ slijedi jednakost polinomijalnih funkcija f i g. Naime, preko baze $\{\lambda_\alpha;\ \alpha \in B\}$ prostor $\mathfrak{h}^*$ identificira se sa $\mathbb{C}^\ell$ i pri tome se P_+ identificira sa $\mathbb{Z}_+^\ell$. Stoga tvrdnja slijedi iz sljedeće generalizacije leme 2.2.21.:

Zadatak 3.9.3. *Neka je $n \in \mathbb{N}$ i neka su $S_1,\dots,S_n$ beskonačni podskupovi polja K. Neka je $f \in \mathcal{P}(K^n) = K[X_1,\dots,X_n]$ polinom takav da je*

$$f(c_1,\dots,c_n) = 0 \qquad \forall (c_1,\dots,c_n) \in S_1 \times \cdots \times S_n.$$

Dokažite da je tada $f = 0$.

Nastavimo sada dokaz teorema 3.9.2. Prema dokazanom i prema zadatku 3.9.3. slijedi da vrijedi

$$(\varphi(z))(\lambda) = (\varphi(z))\left(\sigma_\alpha(\lambda+\rho)-\rho\right) \qquad \forall \lambda \in \mathfrak{h}^*, \quad \forall \alpha \in B \quad \text{i} \quad \forall z \in \mathfrak{Z}(\mathfrak{g}).$$

Zamijenimo li u toj jednakosti λ sa $\lambda-\rho$, nalazimo

$$((\gamma\circ\varphi)(z))(\lambda) = (\varphi(z))(\lambda-\rho) = (\varphi(z))\left(\sigma_\alpha\lambda-\rho\right) = ((\gamma\circ\varphi)(z))\left(\sigma_\alpha\lambda\right) = \left((\gamma\circ\varphi)\circ\sigma_\alpha\right)(\lambda).$$

Prema tome, vrijedi $(\gamma\circ\varphi)(z)\circ\sigma_\alpha = (\gamma\circ\varphi)(z)$ za svaki $\alpha \in B$. Budući da refleksije σ_α, $\alpha \in B$, generiraju čitavu Weylovu grupu W slijedi da vrijedi $(\gamma\circ\varphi)(z) = (\gamma\circ\varphi)(z)\circ\sigma$ za svaki $\sigma \in W$, tj. $(\gamma\circ\varphi)(z) \in \mathcal{P}(\mathfrak{h}^*)^W = S(\mathfrak{h})^W$. Budući da je $z \in \mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$ bio proizvoljan, dokazali smo da je $(\gamma\circ\varphi)\left(\mathfrak{Z}(\mathfrak{g})\right) \subseteq S(\mathfrak{h})^W$.

(2) Označimo sa η izomorfizam algebre $S(\mathfrak{g})^G$ na algebru $S(\mathfrak{h})^W$ iz teorema 3.8.9. Dakle, $\eta = \jmath|S(\mathfrak{g})^G$, gdje je $\jmath : S(\mathfrak{g}) \to S(\mathfrak{h})$ projektor duž ideala J u algebri $S(\mathfrak{g})$ generiran sa $\mathfrak{n} \dotplus \overline{\mathfrak{n}}$.

Nadalje, neka je $\mathrm{Sym} : S(\mathfrak{g}) \to U(\mathfrak{g})$ simetrizacija iz odjeljka 3.6., odnosno, jedinstven linearan operator takav da vrijedi

$$\mathrm{Sym}\left(1_{S(\mathfrak{g})}\right) = 1_{U(\mathfrak{g})} \qquad \text{i} \qquad \mathrm{Sym}(x_1\cdots x_n) = \frac{1}{n!}\sum_{\tau\in\mathcal{S}_n} x_{\tau(1)}\cdots x_{\tau(n)} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{i} \quad \forall x_1,\dots,x_n \in \mathfrak{g}.$$

Pri tome $x_1\cdots x_n$ s lijeve strane označava produkt u algebri $S(\mathfrak{g})$, a $x_{\tau(1)}\cdots x_{\tau(n)}$ s desne strane označava produkt u algebri $U(\mathfrak{g})$. Prema propoziciji 3.6.5. simetrizacija Sym je izomorfizam vektorskih prostora koji je u skladu s graduacijom algebre $S(\mathfrak{g})$ i filtracijom algebre $U(\mathfrak{g})$ na sljedeći način:

$$U_n(\mathfrak{g}) = \mathrm{Sym}\left(S^n(\mathfrak{g})\right) \dotplus U_{n-1}(\mathfrak{g}) \qquad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{3.24}$$

Prema tome, ako sa $(S_n(\mathfrak{g}))_{n\in\mathbb{Z}_+}$ označimo filtraciju algebre $S(\mathfrak{g})$ pridruženu graduaciji $(S^n(\mathfrak{g}))_{n\in\mathbb{Z}_+}$, tj.

$$S_n(\mathfrak{g}) = S^0(\mathfrak{g}) \dotplus \cdots \dotplus S^n(\mathfrak{g}),$$

onda je za svaki $n \in \mathbb{Z}_+$ restrikcija $\mathrm{Sym}|S_n(\mathfrak{g})$ izomorfizam prostora $S_n(\mathfrak{g})$ na prostor $U_n(\mathfrak{g})$.

Označimo sada sa $\Sigma : U(\mathfrak{g}) \to S(\mathfrak{g})$ izomorfizam vektorskih prostora inverzan simetrizaciji; tada je, naravno, restrikcija $\Sigma|U_n(\mathfrak{g})$ izomorfizam sa $U_n(\mathfrak{g})$ na $S_n(\mathfrak{g})$ za svaki $n \in \mathbb{Z}_+$. Neka je $\Theta = \Sigma|\mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$ restrikcija izomorfizma Σ na centar $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$ algebre $U(\mathfrak{g})$. Kao što smo vidjeli u odjeljku 3.6. tada je $\Theta\left(\mathfrak{Z}(\mathfrak{g})\right) = S(\mathfrak{g})^G$.

Iz izabrane baze $\{y_1, \ldots, y_s, h_1, \ldots, h_\ell, x_1, \ldots, x_s\}$ Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ formirajmo sada bazu

$$\{v(q,m,p);\ q,p \in \mathbb{Z}_+^s,\ \ m \in \mathbb{Z}_+^\ell\}$$

prostora $S(\mathfrak{g})$; pri tome smo stavili:

$$v(q,m,p) = y_1^{q_1} \cdots y_s^{q_s} h_1^{m_1} \cdots h_\ell^{m_\ell} x_1^{p_1} \cdots x_s^{p_s}, \qquad q,p \in \mathbb{Z}_+^s \quad m \in \mathbb{Z}_+^\ell.$$

Uz oznake

$$|q| = q_1 + \cdots + q_s, \quad |m| = m_1 + \cdots + m_\ell \quad \text{i} \quad |p| = p_1 + \cdots + p_s \quad \text{za} \quad p,q \in \mathbb{Z}_+^s,\ m \in \mathbb{Z}_+^\ell,$$

tada je za svaki $n \in \mathbb{Z}_+$

$$\{v(q,m,p);\ q,p \in \mathbb{Z}_+^s,\ \ m \in \mathbb{Z}_+^\ell,\ \ |q| + |m| + |p| = n\}$$

baza od $S^n(\mathfrak{g})$, a

$$\{v(q,m,p);\ q,p \in \mathbb{Z}_+^s,\ \ m \in \mathbb{Z}_+^\ell,\ \ |q| + |m| + |p| \leq n\}$$

je baza od $S_n(\mathfrak{g})$. Primijetimo sada da iz (3.24) i iz definicije simetrizacije Sym slijedi da je

$$\mathrm{Sym}(v(q,m,p)) - u(q,m,p) \in U_{|q|+|m|+|p|-1}(\mathfrak{g}), \qquad q,p \in \mathbb{Z}_+^s,\ \ m \in \mathbb{Z}_+^\ell,$$

a odatle je

$$\Sigma(u(q,m,p)) - v(q,m,p) \in S_{|q|+|m|+|p|-1}(\mathfrak{g}), \qquad q,p \in \mathbb{Z}_+^s,\ \ m \in \mathbb{Z}_+^\ell. \tag{3.25}$$

Neka je sada $n \in \mathbb{Z}_+$ i $z \in \mathfrak{Z}(\mathfrak{g}) \cap U_n(\mathfrak{g})$. Tada za neke skalare $c(q,m,p) \in \mathbb{C}$ vrijedi

$$z = \sum_{|q|+|m|+|p| \leq n} c(q,m,p) u(q,m,p).$$

Budući da je $\Theta : \mathfrak{Z}(\mathfrak{g}) \to S(\mathfrak{g})^G$ definirano kao restrikcija $\Sigma|\mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$, iz (3.25) slijedi

$$\Theta(z) - \sum_{|q|+|m|+|p| \leq n} c(q,m,p) v(q,m,p) \in S_{n-1}(\mathfrak{g}),$$

dakle, i

$$\Theta(z) - \sum_{|q|+|m|+|p| = n} c(q,m,p) v(q,m,p) \in S_{n-1}(\mathfrak{g}).$$

Kako je η restrikcija $\jmath|S(\mathfrak{g})^G$ projektora $S(\mathfrak{g})$ na $S(\mathfrak{h})$ duž ideala J u $S(\mathfrak{g})$ generiranog sa $\mathfrak{n} \dotplus \overline{\mathfrak{n}}$, a monom $v(q,m,p)$ nalazi se u idealu J ako (i samo ako) je $|q| + |p| > 0$, zaključujemo da vrijedi

$$\eta\left(\Theta(z)\right) - \sum_{m \in \mathbb{Z}_+^\ell,\, |m| = n} c(0,m,0) v(0,m,0) \in S_{n-1}(\mathfrak{g}).$$

S druge strane je

$$\varphi(z) = \sum_{m \in \mathbb{Z}_+^\ell,\, |m| \leq n} c(0,m,0) u(0,m,0).$$

Uz identifikaciju $U(\mathfrak{h})$ sa $S(\mathfrak{h})$ imamo $u(0,m,0) = v(0,m,0)$. Prema tome, vrijedi

$$\left(\eta \circ \Theta\right)(z) - \varphi(z) \in S_{n-1}(\mathfrak{g}) \qquad \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{i} \quad \forall z \in \mathfrak{Z}(\mathfrak{g}) \cap U_n(\mathfrak{g}). \tag{3.26}$$

(3) Filtracije na algebrama $U(\mathfrak{g})$, $S(\mathfrak{g})$ i $S(\mathfrak{h}) = U(\mathfrak{h})$ induciraju filtracije na algebrama $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$, $S(\mathfrak{g})^G$ i $S(\mathfrak{h})^W$, a iz tih filtriranih algebri dobivamo graduirane algebre $\mathrm{Gr}(\mathfrak{Z}(\mathfrak{g}))$, $\mathrm{Gr}\left(S(\mathfrak{g})^G\right)$ i $\mathrm{Gr}\left(S(\mathfrak{h})^W\right)$. Izomorfizmi Θ i η, dakle i njihova kompozicija $\eta \circ \Theta$, kompatibilni su s filtracijama. Prema tome, iz izomorfizma vektorskih prostora $\eta \circ \Theta : \mathfrak{Z}(\mathfrak{g}) \to S(\mathfrak{h})^W$ prijelazom na graduirane algebre dobivamo izomorfizam vektorskih prostora $\mathrm{Gr}(\eta \circ \Theta) : \mathrm{Gr}(\mathfrak{Z}(\mathfrak{g})) \to \mathrm{Gr}\left(S(\mathfrak{h})^W\right)$.

Iz (3.26) slijedi da je $\mathrm{Gr}(\eta \circ \Theta) = \mathrm{Gr}(\varphi|\mathfrak{Z}(\mathfrak{g}))$. Nadalje, iz definicije automorfizma γ algebre $S(\mathfrak{h})$ vidi se da je $\mathrm{Gr}(\gamma)$ identiteta. Prema tome, $\mathrm{Gr}(\gamma \circ \varphi|\mathfrak{Z}(\mathfrak{g}))$ je izomorfizam vektorskih prostora sa $\mathrm{Gr}(\mathfrak{Z}(\mathfrak{g}))$ na $\mathrm{Gr}\left(S(\mathfrak{h})^W\right)$. Odatle slijedi da je $\gamma \circ \varphi|\mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$ izomorfizam vektorskih prostora sa $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$ na $S(\mathfrak{h})^W$, a kako znamo da je to homomorfizam algebri, zaključujemo da je to izomorfizam algebri.

(4) Neka je $\lambda \in P_+$ i neka je V prost konačnodimenzionalan $U(\mathfrak{g})-$modul s najvećom težinom λ. Tada je χ_λ pripadni infinitezimalni karakter. Neka je $\sigma \in W$. Tada je $\sigma(B)$ baza sistema korijena R. Neka su φ' i γ' homomorfizmi u odnosu na bazu $\sigma(B)$ analogni homomorfizmima φ i γ u odnosu na bazu B. Tada je očito $\sigma\lambda$ najveća težina modula V u odnosu na bazu $\sigma(B)$ od R. Nadalje, $\sigma(R_+)$ je skup pozitivnih korijena u odnosu na bazu $\sigma(B)$, pa slijedi $\rho_{\sigma(B)} = \sigma\rho$.

Neka je $z \in \mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$ proizvoljan. Prema propoziciji 3.9.1. vrijedi $\chi_\lambda(z) = (\varphi(z))(\lambda)$, a prema istoj propoziciji primijenjenoj na bazu $\sigma(B)$ vrijedi $\chi_\lambda(z) = (\varphi'(z))(\sigma\lambda)$. Prema tome, vrijedi

$$(\varphi(z))(\lambda) = (\varphi'(z))(\sigma\lambda).$$

Odatle pomoću dokazanog u (1) nalazimo

$$((\gamma \circ \varphi)(z))(\sigma\lambda + \sigma\rho) = ((\gamma \circ \varphi)(z))(\lambda + \rho) = (\varphi(z))(\lambda) = (\varphi'(z))(\sigma\lambda) = ((\gamma' \circ \varphi')(z))(\sigma\lambda + \sigma\rho).$$

U posljednjoj jednakosti iskoristili smo jednakost $\rho_{\sigma(B)} = \sigma\rho_B = \sigma\rho$, a to je posljedica očigledne činjenice da je $\sigma(R_+)$ skup pozitivnih korijena u odnosu na bazu $\sigma(B)$. Dakle, polinomijalne funkcije $(\gamma \circ \varphi)(z)$ i $(\gamma' \circ \varphi')(z)$ podudaraju se na skupu $\sigma(P_+) + \sigma\rho$. Odatle i iz zadatka 3.9.3. slijedi da se te dvije polinomijalne funkcije podudaraju svuda na $\mathfrak{h}^*$. Time je dokazana neovisnost izomorfizma $(\gamma \circ \varphi)|\mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$ o izboru baze B sistema korijena R.

Izomorfizam $(\gamma \circ \varphi)|\mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$ zove se **Harish−Chandrin izomorfizam** sa $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$ na $S(\mathfrak{h})^W$. Označimo ga sa ω. Prema propoziciji 3.9.1. za infinitezimalni karakter χ_λ i za svaki $z \in \mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$ imamo

$$\chi_\lambda(z) = (\varphi(z))(\lambda) = ((\gamma \circ \varphi)(z))(\lambda + \rho) = (\omega(z))(\lambda + \rho). \tag{3.27}$$

Teorem 3.9.3. *$\lambda \mapsto \chi_\lambda$ je surjekcija sa $\mathfrak{h}^*$ na skup $\mathrm{Hom}(\mathfrak{Z}(\mathfrak{g}), \mathbb{C})$ svih infinitezimalnih karaktera. Nadalje, za $\lambda, \lambda' \in \mathfrak{h}^*$ vrijedi $\chi_\lambda = \chi_{\lambda'}$ ako i samo postoji $\sigma \in W$ takav da je $\lambda' + \rho = \sigma(\lambda + \rho)$.*

Dokaz: Za $\lambda, \lambda' \in \mathfrak{h}^*$ imamo

$$\chi_\lambda(z) = (\omega(z))(\lambda + \rho) \quad \text{i} \quad \chi_{\lambda'}(z) = (\omega(z))(\lambda' + \rho) \qquad \forall z \in \mathfrak{Z}(\mathfrak{g}).$$

Budući da je $\omega(z) \in \mathcal{P}(\mathfrak{h}^*)^W$, iz postojanja $\sigma \in W$ takvog da je $\lambda' + \rho = \sigma(\lambda + \rho)$ slijedi da je $\chi_\lambda = \chi_{\lambda'}$.

Pretpostavimo sada da takav $\sigma \in W$ ne postoji, tj. da su $W-$orbite $W(\lambda + \rho)$ i $W(\lambda' + \rho)$ međusobno disjunktne. Kako su te orbite konačni skupovi, postoji polinomijalna funkcija p iz $\mathcal{P}(\mathfrak{h}^*)$ takva da je $p|W(\lambda + \rho) = 1$ i $p|W(\lambda' + \rho) = 0$. Tada isto svojstvo ima i $W-$invarijantna polinomijalna funkcija

$$\frac{1}{|W|}\sum_{\sigma \in W} \sigma p.$$

Prema tome, možemo pretpostaviti da je $p \in \mathcal{P}(\mathfrak{h}^*)^W$. Neka je $z \in \mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$ takav da je $\omega(z) = p$. Tada imamo

$$\chi_\lambda(z) = (\omega(z))(\lambda + \rho) = p(\lambda + \rho) = 1 \qquad \text{i} \qquad \chi_{\lambda'}(z) = (\omega(z))(\lambda' + \rho) = p(\lambda' + \rho) = 0.$$

Dakle, $\chi_\lambda \neq \chi_{\lambda'}$.

Treba još dokazati da je preslikavanje $\lambda \mapsto \chi_\lambda$ surjekcija sa $\mathfrak{h}^*$ na skup $\mathrm{Hom}(\mathfrak{Z}(\mathfrak{g}), \mathbb{C})$ svih infinitezimalnih karaktera od $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$. Za $\mu \in \mathfrak{h}^*$ označimo sa $\varphi_\mu : \mathcal{P}(\mathfrak{h}^*) \to \mathbb{C}$ evaluaciju u točki μ :

$$\varphi_\mu(f) = f(\mu), \qquad f \in \mathcal{P}(\mathfrak{h}^*).$$

Prema (3.27) vrijedi $\chi_\lambda = \varphi_{\lambda+\rho} \circ \omega$. Budući da je $\omega : \mathfrak{Z}(\mathfrak{g}) \to \mathcal{P}(\mathfrak{h}^*)^W$ izomorfizam unitalnih algebri, jednakost

$$\mathrm{Hom}(\mathfrak{Z}(\mathfrak{g}), \mathbb{C}) = \{\chi_\lambda;\ \lambda \in \mathfrak{h}^*\}$$

ekvivalentna je jednakosti

$$\mathrm{Hom}\left(\mathcal{P}(\mathfrak{h}^*)^W, \mathbb{C}\right) = \{\varphi_\mu|\mathcal{P}(\mathfrak{h}^*)^W;\ \mu \in \mathfrak{h}^*\}.$$

Da bismo tu jednakost dokazali treba nam sljedeći rezultat iz komutativne algebre:

Teorem 3.9.4. *Neka je V konačnodimenzionalan vektorski prostor nad proizvoljnim poljem K. Za $v \in V$ definiramo $\varphi_v \in \mathrm{Hom}(\mathcal{P}(V), K)$ kao evaluaciju u točki v :*

$$\varphi_v(f) = f(v), \qquad f \in \mathcal{P}(V).$$

Tada je

$$\mathrm{Hom}(\mathcal{P}(V), K) = \{\varphi_v;\ v \in V\}.$$

Štoviše, $v \mapsto \varphi_v$ je bijekcija sa V na $\mathrm{Hom}(\mathcal{P}(V), K)$. Nadalje, ako je polje K algebarski zatvoreno, preslikavanje $\varphi \mapsto \mathrm{Ker}\,\varphi$ je bijekcija sa $\mathrm{Hom}(\mathcal{P}(V), K)$ na skup svih maksimalnih ideala u $\mathcal{P}(V)$.

Dokaz: Neka je $\varphi \in \mathrm{Hom}(\mathcal{P}(V), K)$. Tada je φ linearan funkcional na prostoru $\mathcal{P}(V)$ različit od 0, pa je njegova jezgra $\mathrm{Ker}\,\varphi$ potprostor od $\mathcal{P}(V)$ kodimenzije 1. Pretpostavimo da je $\varphi \neq \varphi_0$, tj. da φ nije homomorfizam evaluacije $f \mapsto f(0)$. Tada $V^* \not\subseteq \mathrm{Ker}\,\varphi$, pa slijedi da je $(\mathrm{Ker}\,\varphi) \cap V^*$ potprostor od V^* kodimenzije 1. Stoga postoji baza $\{f_1, \ldots, f_n\}$ od V^* takva da je

$$\varphi(f_1) = 1 \qquad \text{i} \qquad \varphi(f_j) = 0 \quad \text{za} \quad j = 2, \ldots, n.$$

Neka je $\{e_1, \ldots, e_n\}$ baza od V dualna bazi $\{f_1, \ldots, f_n\}$, tj. $f_i(e_j) = \delta_{ij}$. Tada imamo

$$\varphi_{e_1}(f_1) = f_1(e_1) = 1 \qquad \text{i} \qquad \varphi_{e_1}(f_j) = f_j(e_1) = 0 \quad \text{za} \quad j = 2, \ldots, n.$$

To znači da se unitalni homomorfizmi φ i φ_{e_1} podudaraju na skupu $\{f_1, \ldots, f_n\}$. Međutim, taj skup generira unitalnu algebru $\mathcal{P}(V)$, što znači da je $\varphi = \varphi_{e_1}$. Time je dokazano da je $v \mapsto \varphi_v$ surjekcija sa V na $\mathrm{Hom}(\mathcal{P}(V), K)$. No to je i injekcija: ako su $v \neq w$ vektori iz V, onda postoji $f \in V^* \subseteq \mathcal{P}(V)$ takav da je $f(v) \neq f(w)$; to znači da je $\varphi_v(f) \neq \varphi_w(f)$, dakle, $\varphi_v \neq \varphi_w$.

Pretpostavimo sada da je polje K algebarski zatvoreno. Za svaki $\varphi \in \mathrm{Hom}(\mathcal{P}(V), K)$ njegova jezgra $\mathrm{Ker}\,\varphi$ je ideal u $\mathcal{P}(V)$ kodimenzije 1, dakle, to je maksimalan ideal. Za proizvoljan ideal $\mathcal{J}$ u $\mathcal{P}(V)$ označimo sa $\mathcal{V}(\mathcal{J})$ skup svih zajedničkih nultočaka polinoma iz $\mathcal{J}$:

$$\mathcal{V}(\mathcal{J}) = \{v \in V;\ f(v) = 0\ \forall f \in \mathcal{J}\}.$$

Prema Hilbertovom teoremu o nulama tada je skup svih polinoma koji se poništavaju na $\mathcal{V}(\mathcal{J})$ radikal ideala $\mathcal{J}$:

$$\{f \in \mathcal{P}(V);\ f(v) = 0\ \ \forall v \in \mathcal{V}(\mathcal{J})\} = \operatorname{Rad}\mathcal{J} = \{f \in \mathcal{P}(V);\ f^p \in \mathcal{J}\ \text{ za neki }\ p \in \mathbb{N}\}.$$

Ako je $\mathcal{J} \neq \mathcal{P}(V)$, očito je i $\operatorname{Rad}\mathcal{J} \neq \mathcal{P}(V)$ (jer $1^p \notin \mathcal{J}$ ni sa jedan $p \in \mathbb{N}$). To znači da za svaki pravi ideal $\mathcal{J}$ vrijedi $\mathcal{V}(\mathcal{J}) \neq \emptyset$. Posebno, ako je $\mathcal{M}$ maksimalan ideal u $\mathcal{P}(V)$ onda postoji $v \in V$ takav da je $f(v) = 0$ za svaki $f \in \mathcal{M}$. To znači da je $\mathcal{M} \subseteq \operatorname{Ker}\varphi_v$, pa zbog maksimalnosti ideala $\mathcal{M}$ slijedi jednakost $\mathcal{M} = \operatorname{Ker}\varphi_v$. Time smo dokazali da je $\varphi \mapsto \operatorname{Ker}\varphi$ surjekcija sa $\operatorname{Hom}(\mathcal{P}(V), K)$ na skup $\mathfrak{M}$ svih maksimalnih ideala u $\mathcal{P}(V)$, odnosno, da je $v \mapsto \operatorname{Ker}\varphi_v$ surjekcija sa V na $\mathfrak{M}$. No to je i injekcija. Doista, ako je $v \neq v'$ onda postoji $f \in V^* \subseteq \mathcal{P}(V)$ takav da je $f(v) = 0$ i $f(v') = 1$, dakle, $f \in \operatorname{Ker}\varphi_v$ i $f \notin \operatorname{Ker}\varphi_{v'}$, a to znači da je $\operatorname{Ker}\varphi_v \neq \operatorname{Ker}\varphi_{v'}$.

Nastavimo sada dokaz teorema 3.9.3. Treba još dokazati jednakost

$$\operatorname{Hom}\left(\mathcal{P}(\mathfrak{h}^*)^W, \mathbb{C}\right) = \{\varphi_\mu | \mathcal{P}(\mathfrak{h}^*)^W;\ \mu \in \mathfrak{h}^*\}.$$

Drugim riječima, treba još dokazati da za svaki $\psi \in \operatorname{Hom}\left(\mathcal{P}(\mathfrak{h}^*)^W, \mathbb{C}\right)$ postoji $\mu \in \mathfrak{h}^*$ takav da je $\psi = \varphi_\mu | \mathcal{P}(\mathfrak{h}^*)^W$.

Neka je $\psi \in \operatorname{Hom}\left(\mathcal{P}(\mathfrak{h}^*)^W, \mathbb{C}\right)$. Tada je $\mathcal{J} = \operatorname{Ker}\psi$ ideal u $\mathcal{P}(\mathfrak{h}^*)^W$ kodimenzije 1, dakle, to je maksimalan ideal u $\mathcal{P}(\mathfrak{h}^*)^W$. Pretpostavimo da je $\mathcal{J}\mathcal{P}(\mathfrak{h}^*) = \mathcal{P}(\mathfrak{h}^*)$. Prema teoremu 2.2.11. prsten $\mathcal{P}(\mathfrak{h}^*)$ je konačno proširenje potprstena invarijanata $\mathcal{P}(\mathfrak{h}^*)^W$ i, posebno, prema korolaru 2.2.12. $\mathcal{P}(\mathfrak{h}^*)$ je konačno generiran kao $\mathcal{P}(\mathfrak{h}^*)^W-$modul. Neka su $f_1, \ldots, f_n \in \mathcal{P}(\mathfrak{h}^*)$ takvi da je

$$\mathcal{P}(\mathfrak{h}^*) = \mathcal{P}(\mathfrak{h}^*)^W f_1 + \cdots + \mathcal{P}(\mathfrak{h}^*)^W f_n.$$

Sada iz $\mathcal{J}\mathcal{P}(\mathfrak{h}^*) = \mathcal{P}(\mathfrak{h}^*)$ slijedi da su $f_1, \ldots, f_n \in \mathcal{J}\mathcal{P}(\mathfrak{h}^*)^W$, dakle, postoje $g_{ij} \in \mathcal{J}$, $1 \leq i, j \leq n$, takvi da je

$$f_i = \sum_{j=1}^n g_{ij} f_j \qquad \text{za} \quad i = 1, \ldots, n.$$

Sada za $h = \det(I_n - [g_{ij}]) \in \mathcal{P}(\mathfrak{h}^*)^W$ vrijedi $hf_i = 0$ za $i = 1, \ldots, n$. Odatle je $hf = 0$ za svaki $f \in \mathcal{P}(\mathfrak{h}^*)$, pa za $f = 1$ slijedi $h = 0$. No po konstrukciji je $1 = 1 - h \in \mathcal{J}$, a to je nemoguće jer je $\mathcal{J}$ pravi ideal u $\mathcal{P}(\mathfrak{h}^*)^W$. Ova kontradikcija pokazuje da je ideal $\mathcal{J}\mathcal{P}(\mathfrak{h}^*)$, generiran sa $\mathcal{J}$ u $\mathcal{P}(\mathfrak{h}^*)$, pravi, tj. različit od $\mathcal{P}(\mathfrak{h}^*)$. No tada je on sadržan u nekom maksimalnom idealu u $\mathcal{P}(\mathfrak{h}^*)$. Prema teoremu 3.9.4. to znači da je $\operatorname{Ker}\psi = \mathcal{J} \subseteq \operatorname{Ker}\varphi_\mu$ za neki $\mu \in \mathfrak{h}^*$. Imamo $\mathcal{P}(\mathfrak{h}^*)^W = \operatorname{Ker}\psi \dotplus \mathbb{C}$, dakle, proizvoljan $f \in \mathcal{P}(\mathfrak{h}^*)^W$ piše se u obliku $f = g + c$ za $g \in \operatorname{Ker}\psi$ i $c \in \mathbb{C}$. Tada je $\psi(f) = c$, a kako je $\operatorname{Ker}\psi \subseteq \operatorname{Ker}\varphi_\mu$, vrijedi i $\varphi_\mu(f) = c$. To pokazuje da je $\varphi_\mu | \mathcal{P}(\mathfrak{h}^*)^W = \psi$. Time je teorem 3.9.3. u potpunosti dokazan.

3.10 Struktura G−modula harmonijskih polinoma

U ovom smo poglavlju do sada promatrali kompleksnu poluprostu Liejevu algebru $\mathfrak{g}$ i njezinu grupu unutarnjih automorfizama $G = \mathrm{Int}(\mathfrak{g})$. Svi se rezultati uz odgovarajuće evidentne izmjene neposredno generaliziraju na reduktivne Liejeve algebre.

Kompleksna Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ je reduktivna ako i samo ako je njezin izvedeni ideal $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ poluprosta Liejeva algebra. Tada je $\mathfrak{g} = Z(\mathfrak{g}) \dot{+} [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, gdje je $Z(\mathfrak{g})$ oznaka za centar Liejeve algebre $\mathfrak{g}$. Liejeva podalgebra $\mathfrak{h}$ od $\mathfrak{g}$ je Cartanova podalgebra od $\mathfrak{g}$ ako i samo ako ona sadrži centar $Z(\mathfrak{g})$ i presjek $\mathfrak{h} \cap [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ je Cartanova podalgebra od $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$. Korijeni od $\mathfrak{g}$ u odnosu na $\mathfrak{h}$ su upravo korijeni od $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ u odnosu na $\mathfrak{h} \cap [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ prošireni s nulom na $Z(\mathfrak{g})$. Nadalje, za korijen $\alpha \in R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ vrijedi $\mathfrak{g}_\alpha = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]_{\alpha|\mathfrak{h}\cap[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]}$. Stoga možemo identificirati korijene iz $R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ s korijenima iz $R([\mathfrak{g}, \mathfrak{g}], \mathfrak{h} \cap [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}])$.

Za element $x \in \mathfrak{g}$ kažemo da je **poluprost** ako je $\mathrm{ad}\, x$ poluprost operator. Ako je $x = x_c + x_p$ rastav elementa x u odnosu na direktnu sumu $\mathfrak{g} = Z(\mathfrak{g}) \dot{+} [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, onda je x poluprost ako i samo ako je x_p poluprost. Nadalje, kažemo da je $x \in \mathfrak{g}$ **nilpotentan** ako je $x \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ i x je nilpotentan element poluproste Liejeve algebre $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$. Sada se jednostavno vidi da se Jordan−Chevalleyev rastav neposredno generalizira s poluprostih na reduktivne Liejeve algebre: za svaki $x \in \mathfrak{g}$ postoje jedinstven poluprost element x_s i jedinstven nilpotentan element x_n u $\mathfrak{g}$ takvi da vrijedi

$$x = x_s + x_n \qquad \text{i} \qquad [x_s, x_n].$$

Zadatak 3.10.1. *Neka je $\mathfrak{g}$ kompleksna reduktivna Liejeva algebra i neka je π njezina konačno-dimenzionalna reprezentacija na prostoru V. Dokažite da je reprezentacija π ireducibilna ako i samo ako je njezina restrikcija $\pi|[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ ireducibilna i da u tom slučaju postoji linearni funkcional $\varphi \in Z(\mathfrak{g})^*$ takav da je $\pi(z) = \varphi(z) I_V$ za svaki $z \in Z(\mathfrak{g})$.*

Uputa: Koristite Schurovu lemu.

Zadatak 3.10.2. *Neka je $\mathfrak{g}$ kompleksna reduktivna Liejeva algebra i neka je π njezina konačno-dimenzionalna reprezentacija na prostoru V. Dokažite da je reprezentacija π potpuno reducibilna ako i samo ako je svaki operator $\pi(z)$, $z \in Z(\mathfrak{g})$, poluprost (odnosno, dijagonalizabilan).*

Za potpuno reducibilne reprezentacije teorem 3.1.15. se generalizira:

Zadatak 3.10.3. *Neka je $\mathfrak{g}$ kompleksna reduktivna Liejeva algebra i neka je π njezina konačno-dimenzionalna potpuno reducibilna reprezentacija. Dokažite:*

(a) *Ako je element $x \in \mathfrak{g}$ poluprost, onda je operator $\pi(x)$ poluprost.*

(b) *Ako je element $x \in \mathfrak{g}$ nilpotentan, onda je operator $\pi(x)$ nilpotentan.*

(c) *Za svaki $x \in \mathfrak{g}$ vrijedi $\pi(x)_s = \pi(x_s)$ i $\pi(x)_n = \pi(x_n)$.*

Uputa: Koristite teorem 3.1.15. i zadatke 3.10.1. i 3.10.2.

Za svaki $x \in \mathfrak{g}$ očito je $(\mathrm{ad}\, x)|Z(\mathfrak{g}) = 0$. Odatle slijedi $\mathrm{e}^{\mathrm{ad}\, x}|Z(\mathfrak{g}) = I_{Z(\mathfrak{g})}$. Prema tome, za svaki $g \in G = \mathrm{Int}(\mathfrak{g})$ vrijedi $g|Z(\mathfrak{g}) = I_{Z(\mathfrak{g})}$ i prema tome je $g \mapsto g|[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ izomorfizam grupe G na grupu $\mathrm{Int}([\mathfrak{g}, \mathfrak{g}])$. Taj ćemo izomorfizam upotrebljavati kao identifikaciju. Budući da G trivijalno djeluje na $Z(\mathfrak{g})$, očito je $S(Z(\mathfrak{g})) \subseteq S(\mathfrak{g})^G$ i imamo prirodne identifikacije

$$S(\mathfrak{g}) = S(Z(\mathfrak{g})) \otimes S([\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]) \qquad \text{i} \qquad S(\mathfrak{g})^G = S(Z(\mathfrak{g})) \otimes S([\mathfrak{g}, \mathfrak{g}])^G.$$

Sasvim analogne identifikacije imamo i za algebre polinomijalnih funkcija:

$$\mathcal{P}(\mathfrak{g}) = \mathcal{P}(Z(\mathfrak{g})) \otimes \mathcal{P}([\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]) \qquad \text{i} \qquad \mathcal{P}(\mathfrak{g})^G = \mathcal{P}(Z(\mathfrak{g})) \otimes \mathcal{P}([\mathfrak{g}, \mathfrak{g}])^G.$$

Nadalje, $\mathcal{P}(Z(\mathfrak{g}))$ identificira se s podalgebrom $\{f \in \mathcal{P}(\mathfrak{g});\ f|[\mathfrak{g},\mathfrak{g}] = 0\}$ od $\mathcal{P}(\mathfrak{g})$ i analogno se $\mathcal{P}([\mathfrak{g},\mathfrak{g}])$ identificira s podalgebrom $\{g \in \mathcal{P}(\mathfrak{g});\ g|Z(\mathfrak{g}) = 0\}$. Uz te identifikacije u identifikaciji $\mathcal{P}(\mathfrak{g}) = \mathcal{P}(Z(\mathfrak{g}))\otimes\mathcal{P}([\mathfrak{g},\mathfrak{g}])$ preslikavanje $(f,g) \mapsto f\otimes g$ je upravo množenje polinomijalnih funkcija po točkama.

Nadalje, očito je $U(Z(\mathfrak{g})) \subseteq \mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$ i množenje inducira identifikacije

$$U(\mathfrak{g}) = U(Z(\mathfrak{g})) \otimes U([\mathfrak{g},\mathfrak{g}]) \qquad \text{i} \qquad \mathfrak{Z}(\mathfrak{g}) = U(\mathfrak{g})^G = U(Z(\mathfrak{g})) \otimes \mathfrak{Z}([\mathfrak{g},\mathfrak{g}]).$$

Naravno, $U(Z(\mathfrak{g})) = S(Z(\mathfrak{g}))$, jer je centar $Z(\mathfrak{g})$ komutativna Liejeva algebra.

Izaberimo bazu $\{e_1,\dots,e_n\}$ od $\mathfrak{g}$ takvu da je $\{e_1,\dots,e_k\}$ baza od $Z(\mathfrak{g})$. Tada se algebra polinomijalnih funkcija $\mathcal{P}(\mathfrak{g})$ identificira s algebrom polinomijalnih funkcija u koordinatama vektora $x \in \mathfrak{g}$ u odnosu na izabranu bazu. Budući da je $S(Z(\mathfrak{g})) \subseteq S(\mathfrak{g})^G$, vidimo da su $e_1,\dots,e_k \in S_+(\mathfrak{g})^G$. Prema definiciji harmonijskih polinoma vidimo da za svaki $f \in \mathcal{H}_G(\mathfrak{g})$ vrijedi $\partial(e_j)f = 0$ za $j = 1,\dots,k$. Drugim riječima, harmonijski polinomi ne ovise o prvih k varijabli. To znači da je $\mathcal{H}_G(\mathfrak{g}) = \mathcal{H}_G([\mathfrak{g},\mathfrak{g}])$. Posebno, teorem 3.6.15. neposredno se generalizira na reduktivne Liejeve algebre: za kompleksnu reduktivnu Liejevu algebru $\mathfrak{g}$ linearno preslikavanje $\mathcal{P}(\mathfrak{g})^G \otimes \mathcal{H}_G(\mathfrak{g}) \to \mathcal{P}(\mathfrak{g})$ inducirano množenjem je izomorfizam vektorskih prostora.

Killingova forma $B_\mathfrak{g}$ reduktivne nepoluproste Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ nije nedegenerirana jer je $B_\mathfrak{g}|Z(\mathfrak{g}) \times Z(\mathfrak{g}) = 0$; štoviše,

$$Z(\mathfrak{g}) = \operatorname{Rad} B_\mathfrak{g} = \{x \in \mathfrak{g};\ B_\mathfrak{g}(x,y) = 0\ \ \forall y \in \mathfrak{g}\}.$$

Nadalje, $B_\mathfrak{g}|[\mathfrak{g},\mathfrak{g}] = B_{[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]}$. Budući da grupa $G = \operatorname{Int}(\mathfrak{g})$ djeluje trivijalno na $Z(\mathfrak{g})$, očito postoji nedegenerirana $G-$invarijantna simetrična bilinearna forma B na $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$. Takva je svaka forma koju dobivamo proširenjem Killingove forme $B_{[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]}$ bilo kojom nedegeneriranom simetričnom bilinearnom formom na $Z(\mathfrak{g}) \times Z(\mathfrak{g})$. U daljnjem pretpostavljamo da je izabrana takva forma B tj. da je

$$B|[\mathfrak{g},\mathfrak{g}] \times [\mathfrak{g},\mathfrak{g}] = B_{[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]}, \qquad B|[\mathfrak{g},\mathfrak{g}] \times Z(\mathfrak{g}) = 0, \qquad B|Z(\mathfrak{g}) \times Z(\mathfrak{g}) \quad \text{nedegenerirana.}$$

Ta forma prema zadatku 1.2.1. definira izomorfizam graduiranih algebri $\Phi_B : S(\mathfrak{g}) \to \mathcal{P}(\mathfrak{g})$ koji preplíće djelovanja grupe G na $S(\mathfrak{g})$ i na $\mathcal{P}(\mathfrak{g})$, tako da je, posebno,

$$\Phi_B\left(S(\mathfrak{g})^G\right) = \mathcal{P}(\mathfrak{g})^G.$$

Izomorfizam Φ_B dobiven je prirodnim proširenjem izomorfizma $\varphi_B : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}^*$ definiranog nedegeneriranom formom B :

$$B(x,y) = (\varphi_B(x))\,(y), \qquad x,y \in \mathfrak{g}.$$

Kao i prije označimo sa $\mathcal{N}$ skup svih nilpotentnih elemenata od $\mathfrak{g}$. Tada je po definiciji nilpotentnosti $\mathcal{N} \subseteq [\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$, odnosno, $\mathcal{N}$ je skup svih nilpotentnih elemenata poluproste Liejeve algebre $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$. Tada se linearni funkcionali u $\mathcal{N}' = \varphi_B(\mathcal{N})$ poništavaju na $Z(\mathfrak{g})$. Odatle se neposredno generalizira i propozicija 3.6.16.:

$$\mathcal{H}_G(\mathfrak{g}) = \operatorname{span}\{f^m;\ f \in \mathcal{N}',\ \ m \in \mathbb{Z}_+\}.$$

Za bilo koji element $x \in \mathfrak{g}$ označimo kao i prije sa $\mathcal{O}_x$ njegovu $G-$orbitu. Za $c \in \mathbb{C}^*$ tada je očito $\mathcal{O}_{cx} = c\mathcal{O}_x$. Stavimo

$$\mathcal{N}_x = \overline{\bigcup_{c\in\mathbb{C}^*} \mathcal{O}_{cx}} \cap \mathcal{N}.$$

Za svaki $x \in \mathfrak{g}$ očito je $\mathcal{N}_x$ podskup od $\mathcal{N}$ koji je $G-$stabilan, tj. unija $G-$orbita. Element $x \in \mathfrak{g}$ zove se **kvaziregularan** ako je

$$\mathcal{N}_x = \mathcal{N}, \qquad \text{tj.} \quad \mathcal{N} \subseteq \overline{\bigcup_{c \in \mathbb{C}^*} \mathcal{O}_{cx}}.$$

Za bilo koji podskup $A \subseteq \mathfrak{g}$ neka je

$$\mathcal{P}(A) = \{f|A;\ f \in \mathcal{P}(\mathfrak{g})\}.$$

Ako je skup A stabilan u odnosu na djelovanje grupe G, onda je $\mathcal{P}(A)$ $G-$modul u odnosu na djelovanje

$$(g \cdot f)(x) = f(g^{-1}x), \qquad g \in G, \quad f \in \mathcal{P}(A), \quad x \in A.$$

Posebno nas zanima prsten $\mathcal{P}(\mathcal{O}_x)$ za bilo koji $x \in \mathfrak{g}$. Preslikavanje restrikcije

$$\mathcal{P}(\mathfrak{g}) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{O}_x), \qquad f \mapsto f|\mathcal{O}_x, \tag{3.28}$$

očito je epimorfizam $G-$modula.

Teorem 3.10.1. *Neka je $\mathfrak{g}$ kompleksna reduktivna Liejeva algebra. Za $x \in \mathfrak{g}$ neka je*

$$\gamma_x : \mathcal{H}_G(\mathfrak{g}) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{O}_x)$$

linearno preslikavanje koje se dobiva restrikcijom preslikavanja (3.28) *na $\mathcal{H}_G(\mathfrak{g})$. Tada je γ_x epimorfizam $G-$modula. Za svaki kvaziregularan element x preslikavanje γ_x je izomorfizam $G-$modula.*

Dokaz: Imamo $\mathcal{P}(\mathfrak{g}) = \mathcal{P}(\mathfrak{g})^G \otimes \mathcal{H}_G(\mathfrak{g})$, pri čemu je tenzorski produkt induciran množenjem polinomijalnih funkcija po točkama. Svaki $f \in \mathcal{P}(\mathfrak{g})^G$ je konstantan na orbiti $\mathcal{O}_x$. Odatle i iz surjektivnosti $\mathcal{P}(\mathfrak{g}) \to \mathcal{P}(\mathcal{O}_x)$ slijedi surjektivnost od γ_x.

Pretpostavimo sada da je element x kvaziregularan. Neka je $f \in \mathcal{H}_G(\mathfrak{g})$. Budući da je potprostor $\mathcal{H}_G(\mathfrak{g})$ graduiran, možemo pisati $f = \sum_{j=1}^m c_j f_j$, gdje su $c_j \in \mathbb{C}$ i svaki $f_j \in \mathcal{H}_G(\mathfrak{g})$ je homogen stupnja n_j i $f_1, \dots, f_m$ su linearno nezavisni. Prema propoziciji 3.3.15. vrijedi

$$\mathcal{N} = \{x \in \mathfrak{g};\ f(x) = 0\ \ \forall f \in \mathcal{P}_+(\mathfrak{g})^G\} = \{x \in \mathfrak{g};\ f(x) = 0\ \ \forall f \in \mathcal{P}_+(\mathfrak{g})^G \mathcal{P}(\mathfrak{g})\}.$$

Iskoristit ćemo sada prije spomenutu činjenicu da je $\mathcal{P}_+(\mathfrak{g})^G \mathcal{P}(\mathfrak{g})$ prost ideal u $\mathcal{P}(\mathfrak{g})$. Odatle slijedi da je jednak svom radikalu, dakle, prema Hilbertovom teoremu o nulama vrijedi

$$\mathcal{P}_+(\mathfrak{g})^G \mathcal{P}(\mathfrak{g}) = \{f \in \mathcal{P}(\mathfrak{g});\ f|\mathcal{N} = 0\}. \tag{3.29}$$

Odatle i iz direktnog rastava

$$\mathcal{P}(\mathfrak{g}) = \mathcal{P}_+(\mathfrak{g})^G \mathcal{P}(\mathfrak{g}) \dotplus \mathcal{H}_G(\mathfrak{g}) \tag{3.30}$$

(jednakost prije teorema 3.6.15.) slijedi da su restrikcije $f_1|\mathcal{N}, \dots, f_m|\mathcal{N}$ linearno nezavisne. Doista, pretpostavimo da su $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{C}$ takvi da je

$$\sum_{j=1}^m \lambda_j f_j|\mathcal{N} = 0.$$

Budući da se $\sum_{j=1}^m \lambda_j f_j$ poništava na $\mathcal{N}$, iz (3.29) slijedi da je taj polinom sadržan u idealu $\mathcal{P}_+(\mathfrak{g})^G \mathcal{P}(\mathfrak{g})$. No on je linearna kombinacija harmonijskih polinoma pa iz (3.30) slijedi da je jednak 0. Sada iz linearne nezavisnosti $f_1, \dots, f_m$ slijedi $\lambda_1 = \cdots = \lambda_m = 0$.

Neka je $\mathcal{O}$ orbita svih glavnih nilpotentnih elemenata. Prema korolaru 3.5.14. $\mathcal{O}$ je gust podskup od $\mathcal{N}$, pa slijedi i da su restrikcije $f_1|\mathcal{O}, \ldots, f_m|\mathcal{O}$ linearno nezavisne. Argument u dokazu propozicije 3.6.12. pokazuje da za svaki $y \in \mathcal{O}$ postoji otvorena okolina U od y u $\mathfrak{g}$ takva da su restrikcije $f_1|\mathcal{O}_z, \ldots, f_m|\mathcal{O}_z$ linearno nezavisne za svaku točku $z \in U$. Budući da je $y \in \mathcal{N} = \mathcal{N}_x$, postoji $c \in \mathbb{C}^*$ takav da je $\mathcal{O}_{cx} = \mathcal{O}_z$ za neki $z \in U$. Dakle, postoji $c \in \mathbb{C}^*$ takav da su restrikcije $f_1|\mathcal{O}_{cx}, \ldots, f_m|\mathcal{O}_{cx}$ linearno nezavisne. Međutim, polinomijalna funkcija f_j je homogena stupnja n_j pa vrijedi $f_j(cgx) = c^{n_j} f(gx)$ za svaki $g \in G$. Odatle neposredno slijedi da su restrikcije $f_1|\mathcal{O}_x, \ldots, f_m|\mathcal{O}_x$ linearno nezavisne. Doista, pretpostavimo da su $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{C}$ takvi da je

$$\sum_{j=1}^{m} \lambda_j f_j|\mathcal{O}_x = 0.$$

Odatle je

$$0 = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j f_j(gx) = \sum_{j=1}^{m} c^{-n_j} f_j(cgx) \qquad \forall g \in G,$$

a kako je $\mathcal{O}_z = \mathcal{O}_{cx} = \{cgx;\ g \in G\}$, to znači da je

$$\sum_{j=1}^{m} c^{-n_j} \lambda_j f_j|\mathcal{O}_z = 0.$$

Sada iz linearne nezavisnosti restrikcija $f_1|\mathcal{O}_z, \ldots, f_m|\mathcal{O}_z$ slijedi $c^{-n_1}\lambda_1 = \cdots = c^{-n_m}\lambda_m = 0$, dakle, $\lambda_1 = \cdots = \lambda_m = 0$.

Pretpostavimo da je prije izabrani $f \in \mathcal{H}_G(\mathfrak{g})$ u jezgri preslikavanja γ_x, tj. da je $f|\mathcal{O}_x = 0$. Tada iz dokazane linearne nezavisnosti restrikcija $f_1|\mathcal{O}_x, \ldots, f_m|\mathcal{O}_x$ slijedi da su $c_1 = \cdots = c_m = 0$, dakle, $f = 0$. Time je dokazano da je homomorfizam $G-$modula $\gamma_x : \mathcal{H}_G(\mathfrak{g}) \to \mathcal{P}(\mathcal{O}_x)$ ne samo surjektivan nego i injektivan, dakle, izomorfizam.

Označimo sa $\mathcal{Q}$ skup svih kvaziregularnih elemenata u $\mathfrak{g}$. Prema teoremu 3.10.1. $G-$modul $\mathcal{H}_G(\mathfrak{g})$ je izomorfan $G-$modulu $\mathcal{P}(\mathcal{O}_x)$ za svaki $x \in \mathcal{Q}$. Sljedeći nam je cilj na drugi način opisati skup $\mathcal{Q}$ svih kvaziregularnih elemenata u $\mathfrak{g}$.

Prema teoremu 3.5.16. centralizator $\mathfrak{g}^x$ proizvoljnog elementa $x \in \mathfrak{g}$ sadrži $\ell-$dimenzionalnu komutativnu Liejevu podalgebru, gdje je $\ell = \operatorname{rank} \mathfrak{g}$ dimenzija Cartanove podalgebre od $\mathfrak{g}$. Posebno, vrijedi $\dim \mathfrak{g}^x \geq \ell$ za svaki $x \in \mathfrak{g}$. Stavimo

$$\mathcal{R} = \{x \in \mathfrak{g};\ \dim \mathfrak{g}^x = \ell\}.$$

Ovo je malo odstupanje od oznake uvedene u odjeljku 3.8. Tamo smo sa $\mathcal{R}$ označavali skup svih regularnih elemenata. Uz sadašnju oznaku skup svih regularnih elemenata je $\mathcal{R} \cap \mathcal{S}$, gdje je $\mathcal{S}$ skup svih poluprostih elemenata. Element $e \in \mathcal{N}$ je glavni nilpotentni element ako i samo ako je $\dim \mathfrak{g}^e = \ell$. To znači da je $\mathcal{N} \cap \mathcal{R}$ skup svih glavnih nilpotentnih elemenata i znamo da je jedna $G-$orbita $\mathcal{O}_e$ i da je ona povezana, gusta i otvorena u $\mathcal{N}$. Nadalje, primijetimo da je

$$\dim \mathcal{O}_x = \dim G/G^x = \dim G - \dim G^x = \dim \mathfrak{g} - \dim \mathfrak{g}^x. \tag{3.31}$$

Stavimo $n = \dim \mathfrak{g}$ i neka je $e \in \mathcal{N}$ glavni nilpotentni element. Prema prethodnim napomenama vrijedi:

Propozicija 3.10.2. *Za svaku orbitu* $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{N} \setminus \mathcal{O}_e$ *je* $\dim \mathcal{O} < \dim \mathcal{O}_e = n - \ell$.

Za $x \in \mathfrak{g}$ kao i prije sa $x = x_s + x_n$ označimo njegov Jordan−Chevalleyev rastav. Zbog jedinstvenosti tog rastava vrijedi

$$G^x = G^{x_s} \cap G^{x_n}, \qquad \text{dakle i} \qquad \mathfrak{g}^x = \mathfrak{g}^{x_s} \cap \mathfrak{g}^{x_n}.$$

Skup $\mathcal{R}$ može se ovako karakterizirati:

Propozicija 3.10.3. *$\mathcal{R}$ je skup svih $x \in \mathfrak{g}$ takvih da je x_n glavni nilpotentni element reduktivne Liejeve algebre $\mathfrak{g}^{x_s}$.*

Dokaz: Prije svega, primijetimo da je zbog poluprostote elementa x_s Liejeva podalgebra $\mathfrak{g}^{x_s}$ reduktivna i ranga ℓ. Doista, x_s je sadržan u nekoj Cartanovoj podalgebri $\mathfrak{h}$ od $\mathfrak{g}$. Tada je $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}^{x_s}$, pa slijedi da je $\mathfrak{h}$ Cartanova podalgebra od $\mathfrak{g}^{x_s}$, dakle, $\operatorname{rank} \mathfrak{g}^{x_s} = \dim \mathfrak{h} = \ell$. Nadalje, ako je $R = R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$, onda je

$$\mathfrak{g}^{x_s} = \mathfrak{h} \dot{+} \sum_{\alpha \in R,\, \alpha(x_s)=0} \dot{+} \mathfrak{g}_\alpha,$$

odakle se vidi da je $\mathfrak{g}^{x_s}$ reduktivna Liejeva algebra i njezin je sistem korijena $\{\alpha \in R;\ \alpha(x_s) = 0\}$. Tada je x_n nilpotentni element u $\mathfrak{g}^{x_s}$. Nadalje, $\mathfrak{g}^{x_s} \cap \mathfrak{g}^{x_n}$ je centralizator od x_n u $\mathfrak{g}^{x_s}$. Dakle, po definiciji je x_n glavni nilpotentni element od $\mathfrak{g}^{x_s}$ ako i samo ako je $\dim \mathfrak{g}^{x_s} \cap \mathfrak{g}^{x_n} = \ell$. Stoga je prema (3.31) $x \in \mathcal{R}$ ako i samo ako je x_n glavni nilpotentni element od $\mathfrak{g}^{x_s}$.

Propozicija 3.10.4. *Neka je $x = x_s + x_n$ Jordan−Chevalleyev rastav elementa $x \in \mathfrak{g}$. Tada vrijedi*

$$f(x) = f(x_s) \qquad \forall f \in \mathcal{P}(\mathfrak{g})^G.$$

Dokaz: Dokaz je sličan dokazu propozicije 3.3.15. Prije svega, x_n je nilpotentni element reduktivne algebre $\mathfrak{g}^{x_s}$. Prema lemi 3.3.4. (koja se neposredno generalizira na reduktivne Liejeve algebre) postoji $h \in \mathfrak{g}^{x_s}$ takav da je $[h, x_n] = 2x_n$. Tada je

$$\mathrm{e}^{-t \operatorname{ad} h} x_s = x_s \qquad \text{i} \qquad \mathrm{e}^{-t \operatorname{ad} h} x_n = \mathrm{e}^{-2t} x_n \qquad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Odatle je

$$\mathrm{e}^{-t \operatorname{ad} h} x = x_s + \mathrm{e}^{-2t} x_n \qquad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Kako je $\mathrm{e}^{-t \operatorname{ad} h} \in G$, za svaki $f \in \mathcal{P}(\mathfrak{g})^G$ vrijedi

$$f(x) = f\left(\mathrm{e}^{-t \operatorname{ad} h} x\right) = f\left(x_s + \mathrm{e}^{-2t} x_n\right) \qquad \forall t \in \mathbb{R},$$

pa slijedi

$$f(x) = \lim_{t \to +\infty} f\left(x_s + \mathrm{e}^{-2t} x_n\right) = f(x_s).$$

Znamo da je $\mathcal{P}(\mathfrak{g})^G \cong \mathcal{P}(\mathfrak{h})^W$, gdje je $\mathfrak{h}$ Cartanova podalgebra od $\mathfrak{g}$ i W je Weylova grupa sisrtema korijena $R = R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$. Prema tome, postoje algebarski nezavisni homogeni elementi $u_1, \ldots, u_\ell \in \mathcal{P}(\mathfrak{g})^G$ takvi da je $\mathcal{P}(\mathfrak{g})^G = \mathbb{C}[u_1, \ldots, u_\ell]$. Označimo sa Ω skup svih G−orbita u $\mathfrak{g}$. Definiramo preslikavanje

$$u : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathbb{C}^\ell, \qquad u(x) = (u_1(x), \ldots, u_\ell(x)), \quad x \in \mathfrak{g}.$$

Tada je u polinomijalno preslikavanje. Nadalje, u preslikava svaku orbitu $\mathcal{O} \in \Omega$ u točku, pa inducira preslikavanje

$$\eta : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}^\ell.$$

Bilo koji G−stabilan podskup $\mathcal{U} \subseteq \mathfrak{g}$ je unija G−orbita. Stavimo

$$\Omega_{\mathcal{U}} = \{\mathcal{O} \in \Omega;\ \mathcal{O} \subseteq \mathcal{U}\} \qquad \text{i} \qquad \eta_{\mathcal{U}} = \eta|\Omega_{\mathcal{U}} : \Omega_{\mathcal{U}} \longrightarrow \mathbb{C}^\ell.$$

Primjer G−stabilnog podskupa od $\mathfrak{g}$ je skup $\mathcal{S}$ svih poluprostih elemenata u $\mathfrak{g}$. Za taj skup vrijedi:

Propozicija 3.10.5. *Preslikavanje η_S je bijekcija sa Ω_S na $\mathbb{C}^\ell$.*

Za dokaz nam treba jedna pomoćna tvrdnja. Sjetimo se da je element $x \in \mathfrak{g}$ regularan ako je $\mathfrak{g}^x$ Cartanova podalgebra od $\mathfrak{g}$. Svaki je regularan element poluprost (jer je $x \in \mathfrak{g}^x$ i svaki je element Cartanove podalgebre poluprost). Znamo (i lako se vidi) da je element h Cartanove podalgebre $\mathfrak{h}$ regularan ako i samo ako je $\alpha(h) \neq 0$ za svaki $\alpha \in R = R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$.

Lema 3.10.6. *Restrikcija $u_\mathfrak{h} = u|\mathfrak{h}$ je vlastito preslikavanje sa $\mathfrak{h}$ u $\mathbb{C}^\ell$, odnosno, za svaki kompaktan podskup $E \subseteq \mathbb{C}^\ell$ je i njegov invers $u_\mathfrak{h}^{-1}(E)$ kompaktan podskup od $\mathfrak{h}$.*

Dokaz: Neka je π vjerna potpuno reducibilna reprezentacija od $\mathfrak{g}$ na konačnodimenzionalnom kompleksnom prostoru V i $\dim V = m$. Za svaki $k > 0$ izaberimo $r_k > 0$ tako da vrijedi:

Ako je $P = Y^m + \sum_{j=0}^{m-1} c_j Y^j$ normiran polinom u $\mathbb{C}[Y]$ takav da je $|c_j| \leq k$ za $j = 0, \dots, m-1$, onda je $|\lambda| \leq r_k$ za svaku nultočku $\lambda \in \mathbb{C}$ polinoma P.

Lako se vidi da takvi r_k postoje; npr. možemo uzeti $r_k = mk + 1$. Neka su $f_j \in \mathcal{P}(\mathfrak{g})^G$, $j = 0, \dots, m-1$, invarijantni polinomi definirani ovako:

$$\det(Y - \pi(x)) = Y^m + \sum_{j=0}^{m-1} f_j(x) Y^j, \qquad x \in \mathfrak{g}. \tag{3.32}$$

Budući da je $\mathcal{P}(\mathfrak{g})^G = \mathbb{C}[u_1, \dots, u_\ell]$ i $u_1, \dots, u_\ell$ su algebarski nezavisni, postoje jedinstveni polinomi $P_0, \dots, P_{m-1} \in \mathbb{C}[Y_1, \dots, Y_\ell]$ takvi da je $f_j = P_j(u_1, \dots, u_\ell)$ za $j = 0, \dots, m-1$. Promatramo li $\mathbb{C}[Y_1, \dots, Y_\ell]$ kao algebru polinomijalnih funkcija na $\mathbb{C}^\ell$, imamo

$$f_j(x) = P_j(u_\mathfrak{h}(x)) \qquad \forall x \in \mathfrak{h} \quad \text{i za} \quad j = 0, \dots, m-1. \tag{3.33}$$

Neka je sada $E \subseteq \mathbb{C}^\ell$ kompaktan skup. Treba dokazati da je tada $h_\mathfrak{h}^{-1}(E)$ kompaktan podskup od $\mathfrak{h}$. Budući da je preslikavanje $u_\mathfrak{h}$ neprekidno, znamo da je $u_\mathfrak{h}^{-1}(E)$ zatvoren skup, dakle, treba još samo dokazati njegovu ograničenost. Neka je

$$k = \max \{|P_j(\xi)|;\ \xi \in E,\ j = 0, \dots, m-1\}.$$

Sada iz (3.33) slijedi da je $|f_j(x)| \leq k$ za $j = 0, \dots, m-1$ i za svaki $x \in u_\mathfrak{h}^{-1}(E)$. Dakle, ako je $x \in u_\mathfrak{h}^{-1}(E)$ i ako je $\lambda \in \mathbb{C}$ nultočka polinoma (3.32) onda je $|\lambda| \leq r_k$.

Neka je sada $\Delta \subseteq \mathfrak{h}^* \subseteq \mathcal{P}(\mathfrak{h})$ skup svih težina reprezentacije π i stavimo

$$\|x\| = \max \{|\psi(x)|;\ \psi \in \Delta\}, \qquad x \in \mathfrak{h}.$$

Budući da je π vjerna reprezentacija, lako se vidi da je $x \mapsto \|x\|$ norma na prostoru $\mathfrak{h}$. Međutim, za svaki $\psi \in \Delta$ skalar $\lambda = \psi(x)$ je nultočka polinoma (3.32). Prema tome, vrijedi

$$\|x\| \leq r_k \qquad \forall x \in u_\mathfrak{h}^{-1}(E).$$

Time je dokazana i ograničenost skupa $u_\mathfrak{h}^{-1}(E)$.

Dokaz propozicije 3.10.5.: Stavimo $v_j = u_j|\mathfrak{h}$. Tada su $v_1, \dots, v_\ell$ algebarski nezavisni homogeni generatori algebre $\mathcal{P}(\mathfrak{h})^W$. Neka je $e = \{e_1, \dots, e_\ell\}$ baza od $\mathfrak{h}$. Tada se algebra $\mathcal{P}(\mathfrak{h})$ identificira sa $\mathbb{C}[f_1, \dots, f_\ell]$, gdje je $f = \{f_1, \dots, f_\ell\}$ baza od $\mathfrak{h}^*$ dualna bazi $\{e_1, \dots, e_\ell\}$. Označimo sa $\partial_j : \mathcal{P}(\mathfrak{h}) \to \mathcal{P}(\mathfrak{h})$ parcijalnu derivaciju po f_j. Nadalje, neka je

$$J_e = \det [\partial_j v_k] \in \mathcal{P}(\mathfrak{h})$$

Jacobijan preslikavanja $u_{\mathfrak{h}}$ u odnosu na izabranu bazu e od $\mathfrak{h}$. Primijetimo da je $J_e \neq 0$ budući da su $v_1, \dots, v_\ell$ algebarski nezavisni. Ako je $e' = \{e'_1, \dots, e'_\ell\}$ neka druga baza od $\mathfrak{h}$, $f' = \{f'_1, \dots, f'_\ell\}$ njoj dualna baza od $\mathfrak{h}^*$ i $\partial'_j : \mathcal{P}(\mathfrak{h}) \to \mathcal{P}(\mathfrak{h})$ parcijalna derivacija po $j-$toj varijabli uz identifikaciju $\mathcal{P}(\mathfrak{h}) = \mathbb{C}[f'_1, \dots, f'_\ell]$. Tada je

$$\partial'_j v_k = \sum_{i=1}^{\ell} \partial'_j f_i \partial_i v_k, \qquad 1 \leq j, k \leq \ell,$$

dakle, matrica polinoma $\left[\partial'_j v_k\right]$ dobiva se iz matrice $[\partial_j v_k]$ množenjem s lijeva s regularnom konstantnom matricom $\left[\partial'_j f_k\right]$ (to je matrica operatora prijelaza iz baze f' u bazu f). Prema tome, $J_{e'} = c(e', e) J_e$ za neki $c(e', e) \in \mathbb{C}^*$.

Neka je $\alpha \in R$ bilo koji korijen. Izaberimo bazu e od $\mathfrak{h}$ takvu da je u dualnoj bazi f prvi vektor f_1 upravo α. Neka je $f \in \mathcal{P}(\mathfrak{h})^W$. Možemo pisati

$$f = \sum_{j \in \mathbb{Z}_+} P_j(f_2, \dots, f_\ell) f_1^j \qquad \text{(konačna suma).}$$

Imamo $\sigma_\alpha f_1 = \sigma_\alpha \alpha = -\alpha = -f_1$, dakle, iz $\sigma_\alpha f = f$ slijedi da je $P_j(f_2, \dots, f_\ell) = 0$ za neparne j. Prema tome,

$$f = \sum_{j \in \mathbb{Z}_+} P_{2j}(f_2, \dots, f_\ell) f_1^{2j}.$$

Odatle slijedi da je polinom $\partial_1 f$ djeljiv sa $f_1 = \alpha$. Stoga su svi elementi prvog retka u matrici $[\partial_j f_k]$ djeljivi sa α, dakle, determinanta J_e te matrice djeljiva je sa α. To vrijedi za svaki korijen $\alpha \in R$. Za bilo koji izbor pozitivnih korijena R_+ međusobno različiti pozitivni korijeni nisu proporcionalni, dakle, kao elementi prstena $\mathcal{P}(\mathfrak{h})$ oni su relativno prosti. Prema tome, Jacobijan J_e djeljiv je s produktom $\prod_{\alpha \in R_+} \alpha$. Primijetimo sada da je broj pozitivnih korijena $s = |R_+|$ jednak broju (pseudo)refleksija u Weylovoj grupi W. Neka je $d_j = \deg u_j = \deg v_j$ za $j = 1, \dots, \ell$. Prema teoremu 2.3.13. (ili prema tvrdnji (b) korolara 2.5.2.) vrijedi

$$s = (d_1 - 1) + \cdots + (d_\ell - 1).$$

Odatle dobivamo

$$\deg J_e = (d_1 - 1) + \cdots + (d_\ell - 1) = s = \deg \prod_{\alpha \in R_+} \alpha.$$

Odatle slijedi da je

$$J_e = c \prod_{\alpha \in R_+} \alpha \qquad \text{za neki} \quad c \in \mathbb{C}^*.$$

Element $x \in \mathfrak{h}$ je regularan ako i samo ako je $\alpha(x) \neq 0$ za svaki $\alpha \in R_+$. Prema gornjoj jednakosti to je ekvivalentno sa $J_e(x) \neq 0$. To pokazuje da Jacobijan preslikavanja $u_{\mathfrak{h}} : \mathfrak{h} \to \mathbb{C}^\ell$ nije identički jednak nuli. To znači da $u_{\mathfrak{h}}(\mathfrak{h})$ sadrži neprazan Zariski otvoren podskup od $\mathbb{C}^\ell$. No svaki je takav skup gust u $\mathbb{C}^\ell$ u topologiji Zariskog, pa i u običnoj topologiji. Neka je $\xi \in \mathbb{C}^\ell$ proizvoljna točka. Tada postoji niz $(y_j)_{j \in \mathbb{N}}$ u $\mathfrak{h}$ takav da je $\xi = \lim_{j \to \infty} u_{\mathfrak{h}}(y_j)$. Prema lemi 3.10.6. preslikavanje $u_{\mathfrak{h}}$ je vlastito. Budući da članovi konvergentnog niza $(u_{\mathfrak{h}}(y_j))_{j \in \mathbb{N}}$ zajedno s limesom tog niza čine kompaktan podskup od $\mathbb{C}^\ell$, zaključujemo da je niz $(y_j)_{j \in \mathbb{N}}$ sadržan u kompaktnom podskupu od $\mathfrak{h}$, dakle, taj niz ima gomilište $y \in \mathfrak{h}$. Prijelazom na podniz možemo pretpostaviti da je $y = \lim_{j \to \infty} y_j$. Tada je

$$u_{\mathfrak{h}}(y) = \lim_{j \to \infty} u_{\mathfrak{h}}(y_j) = \xi.$$

Budući da je ξ bila proizvoljna točka iz $\mathbb{C}^\ell$, time je dokazano da je preslikavanje $u_{\mathfrak{h}} : \mathfrak{h} \to \mathbb{C}^\ell$ surjektivno. Odatle slijedi da je preslikavanje $\eta_{\mathcal{S}} : \Omega_{\mathcal{S}} \to \mathbb{C}^\ell$ surjektivno.

Da bismo dokazali da je preslikavanje $\eta_{\mathcal{S}} : \Omega_{\mathcal{S}} \to \mathbb{C}^\ell$ injektivno treba pokazati da ako su $x, y \in \mathcal{S}$ i ako je $u(x) = u(y)$, onda su x i y $G-$konjugirani. Budući da je svaki element iz $\mathcal{S}$ konjugiran elementu izabrane Cartanove podalgebre $\mathfrak{h}$, možemo pretpostaviti da su $x, y \in \mathfrak{h}$. Budući da je $\mathcal{P}(\mathfrak{h})^W = \{f|\mathfrak{h};\ f \in \mathcal{P}(\mathfrak{g})^G\}$, treba dokazati da iz $u(x) = u(y)$ slijedi da su $x, y \in \mathfrak{h}$ konjugirani u odnosu na Weylovu grupu W. Neka su $x, y \in \mathfrak{h}$ takvi da je $u(x) = u(y)$ i pretpostavimo da x i y nisu $W-$konjugirani. Tada su Wx i Wy međusobno disjunktni konačni podskupovi od $\mathfrak{h}$, pa postoji polinomijalna funkcija $F \in \mathcal{P}(\mathfrak{h})$ takva da je $F|Wx = 0$, $F|Wy \setminus \{y\} = 0$ i $F(y) = 1$. Sada je

$$P = \sum_{\sigma \in W} \sigma F \in \mathcal{P}(\mathfrak{h})^W$$

i vrijedi $P(x) = 0$ i $P(y) \neq 0$. No to je nemoguće jer $u_1|\mathfrak{h}, \ldots, u_\ell|\mathfrak{h}$ generiraju algebru $\mathcal{P}(\mathfrak{h})^W$. Ova kontradikcija dokazuje da su x i y $W-$konjugirani. No za svaki $\sigma \in W$ prema korolaru 3.8.7. postoji $g \in G$ takav da je $g\mathfrak{h} = \mathfrak{h}$ i $g|\mathfrak{h} = \sigma$. Prema tome, x i y su $G-$konjugirani.

Propozicija 3.10.7. *Preslikavanje $\eta_{\mathcal{R}} : \Omega_{\mathcal{R}} \to \mathbb{C}^\ell$ je bijekcija.*

Dokaz: Neka je $\xi \in \mathbb{C}^\ell$. Prema propoziciji 3.10.5. postoji $y \in \mathcal{S}$ takav da je $u(y) = \xi$. Neka je z bilo koji glavni nilpotentni element od $\mathfrak{g}^y$. Prema propoziciji 3.10.3. tada je $x = y + z \in \mathcal{R}$. Nadalje, budući da je $z \in \mathfrak{g}^y$, $x = y + z$ je Jordan$-$Chevalleyev rastav pa iz propozicije 3.10.4. slijedi da je $f(x) = f(y)$ za svaki $f \in \mathcal{P}(\mathfrak{g})^G$, pa slijedi $u(x) = u(y) = \xi$. To znači da je $\eta_{\mathcal{R}}(\mathcal{O}_x) = \xi$. Dakle, preslikavanje $\eta_{\mathcal{R}} : \Omega_{\mathcal{R}} \to \mathbb{C}^\ell$. je surjektivno.

Da bismo dokazali injektivnost od $\eta_{\mathcal{R}}$ treba pokazati da ako su $x_1, x_2 \in \mathcal{R}$ i ako je $u(x_1) = u(x_2)$ onda su x_1 i x_2 $G-$konjugirani. Neka su $x_1 = y_1 + z_1$ i $x_2 = y_2 + z_2$ Jordan$-$Chevalleyeve dekompozicije. Iz propozicije 3.10.4. slijedi da vrijedi $u(y_1) = u(y_2)$. No tada su po propoziciji 3.10.5. elementi y_1 i y_2 konjugirani. Stoga u daljnjem možemo pretpostavljati da je $y_1 = y_2 = y$. Budući da su po pretpostavci $x_1, x_2 \in \mathcal{R}$, prema propoziciji 3.10.3. z_1 i z_2 su glavni nilpotentni elementi Liejeve algebre $\mathfrak{g}^y$. Kako su glavni nilpotentni elementi reduktivne Liejeve algebre svi međusobno konjugirani unutarnjim automorfizmima, postoji $g' \in \mathrm{Int}\,(\mathfrak{g}^y)$ takav da je $g'z_1 = z_2$. Imamo

$$g' = \mathrm{e}^{\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}^y} v_1} \cdots \mathrm{e}^{\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}^y} v_k}$$

za neki $k \in \mathbb{N}$ i neke $v_1, \ldots, v_k \in \mathfrak{g}^y$. Stavimo sada

$$g = \mathrm{e}^{\mathrm{ad}\, v_1} \cdots \mathrm{e}^{\mathrm{ad}\, v_k}.$$

Tada je $g \in G = \mathrm{Int}(\mathfrak{g})$ i vrijedi $g|\mathfrak{g}^y = g'$, dakle, $gz_1 = z_2$, a vrijedi i $gy = y$, jer su $v_1, \ldots, v_k \in \mathfrak{g}^y$. Dakle, $gx_1 = gy + gz_1 = y + z_2 = x_2$.

Neka je i dalje izabrana neka Cartanova podalgebra $\mathfrak{h}$ od $\mathfrak{g}$, neka je $R = R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ pripadni sistem korijena i neka je izabrana baza B sistema korijena R. Ona određuje skup pozitivnih korijena R_+ i skup negativnih korijena $R_- = -R_+$. Stavimo

$$\mathfrak{n} = \sum_{\alpha \in R_+} \dot{+}\, \mathfrak{g}_\alpha, \qquad \overline{\mathfrak{n}} = \sum_{\alpha \in R_-} \dot{+}\, \mathfrak{g}_\alpha, \qquad \mathfrak{b} = \mathfrak{h} \dot{+} \mathfrak{n}, \qquad \overline{\mathfrak{b}} = \mathfrak{h} \dot{+} \overline{\mathfrak{n}}.$$

Neka je h_0 jedinstven element iz $\mathfrak{h} \cap [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ takav da je

$$\alpha(h_0) = 1 \qquad \forall \alpha \in B.$$

Za svaki $j \in \mathbb{Z}$ stavimo

$$\mathfrak{g}^{(j)} = \{x \in \mathfrak{g};\ (\mathrm{ad}\, h_0)\, x = jx\} \qquad \text{i} \qquad S^{(j)}(\mathfrak{g}) = \left\{v \in S(\mathfrak{g});\ \left(\mathrm{ad}_{S(\mathfrak{g})} h_0\right) v = jv\right\}.$$

Budući da je $\operatorname{ad} h_0$ derivacija Liejeve algebre $\mathfrak{g}$, a njezino proširenje $\operatorname{ad}_{S(\mathfrak{g})} h_0$ je derivacija unitalne algebre $S(\mathfrak{g})$, očito vrijedi:

$$\left[\mathfrak{g}^{(j)}, \mathfrak{g}^{(k)}\right] \subseteq \mathfrak{g}^{(j+k)} \qquad \forall j, k \in \mathbb{Z} \qquad \text{i} \qquad S^{(j)}(\mathfrak{g}) S^{(k)}(\mathfrak{g}) \subseteq S^{(j+k)}(\mathfrak{g}). \tag{3.34}$$

Zadatak 3.10.4. *Dokažite da je*

$$\mathfrak{n} = \sum_{j>0} \dot{+}\, \mathfrak{g}^{(j)}, \qquad \overline{\mathfrak{n}} = \sum_{j<0} \dot{+}\, \mathfrak{g}^{(j)}, \qquad \mathfrak{h} = \mathfrak{g}^{(0)} = \mathfrak{g}^{h_0}, \qquad \mathfrak{b} = \sum_{j\geq 0} \dot{+}\, \mathfrak{g}^{(j)}, \qquad \overline{\mathfrak{b}} = \sum_{j\leq 0} \dot{+}\, \mathfrak{g}^{(j)}.$$

U odjeljku 1.1. za proizvoljan vektorski prostor V nad poljem K karakteristike 0 definirali smo unitalni homomorfizam $\partial : S(V) \to L(\mathcal{P}(V))$ takav da je za bilo koji vektor $x \in V$ linearan operator $\partial(x) : \mathcal{P}(V) \to \mathcal{P}(V)$ definiran kao derivacija duž vektora x:

$$[\partial(x) f] = \left. \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(y + tx) \right|_{t=0}, \qquad f \in \mathcal{P}(V), \quad y \in V.$$

Prema propoziciji 1.1.9. $\partial : S(V) \to L(\mathcal{P}(V))$ je izomorfizam algebre $S(V)$ na algebru $\mathcal{D}(V)$ svih linearnih diferencijalnih operatora na $\mathcal{P}(V)$ s konstantnim koeficijentima. Pomoću preslikavanja ∂ definirali smo bilinearnu formu $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle : S(V) \times \mathcal{P}(V) \to K$,

$$\langle u, f \rangle = [\partial(u) f](0), \qquad u \in S(V), \quad f \in \mathcal{P}(V).$$

Prema propoziciji 1.1.10. ta je bilinearna forma nedegenerirana u odnosu na prvu i na drugu varijablu, takva da je $\left\langle S^k(V), \mathcal{P}^j(V) \right\rangle = 0$ za $k \neq j$ i takva da vrijedi

$$\langle uv, f \rangle = \langle v, \partial(u) f \rangle = \langle u, \partial(v) f \rangle \qquad \forall u, v \in S(V) \quad \text{i} \quad \forall f \in \mathcal{P}(V).$$

Nadalje, ako je G podgrupa od $\mathrm{GL}(V)$, forma $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle$ je invarijantna s obzirom na prirodno definirana djelovanja grupe G automorfizmima unitalnih algebri $S(V)$ i $\mathcal{P}(V)$:

$$\langle a \cdot u, a \cdot f \rangle = \langle u, f \rangle \qquad \forall a \in G, \quad \forall u \in S(V) \quad \text{i} \quad \forall f \in \mathcal{P}(V).$$

Primijenimo to na našu situaciju $V = \mathfrak{g}$ i $G = \mathrm{Int}(\mathfrak{g})$. Iz gornje jednakosti slijedi

$$\left\langle \mathrm{e}^{t \operatorname{ad} x} \cdot u, \mathrm{e}^{t \operatorname{ad} x} f \right\rangle = \langle u, f \rangle \qquad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in \mathfrak{g}, \quad \forall u \in S(\mathfrak{g}) \quad \text{i} \quad \forall f \in \mathcal{P}(\mathfrak{g}).$$

Ako je $f \in \mathcal{P}(\mathfrak{g})^G$, onda je $\mathrm{e}^{t \operatorname{ad} x} \cdot f = f$, pa imamo

$$\left\langle \mathrm{e}^{t \operatorname{ad} x} \cdot u, f \right\rangle = \langle u, f \rangle \qquad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in \mathfrak{g}, \quad \forall u \in S(\mathfrak{g}) \quad \text{i} \quad \forall f \in \mathcal{P}(\mathfrak{g})^G.$$

Deriviranjem po t u nuli odatle slijedi

$$\left\langle \left(\operatorname{ad}_{S(\mathfrak{g})} x\right) u, f \right\rangle = 0 \qquad \forall x \in \mathfrak{g}, \quad \forall u \in S(\mathfrak{g}) \quad \text{i} \quad \forall f \in \mathcal{P}(\mathfrak{g})^G.$$

Prema tome, ako je $u \in \mathrm{Im}\left(\operatorname{ad}_{S(\mathfrak{g})} x\right)$ za neki $x \in \mathfrak{g}$, onda je $\langle u, f \rangle = 0$ za svaki $f \in \mathcal{P}(\mathfrak{g})^G$. Primijetimo sada da je $S^{(j)}(\mathfrak{g}) \subseteq \mathrm{Im}\left(\operatorname{ad}_{S(\mathfrak{g})} h_0\right)$ za svaki $j \neq 0$. Prema tome, vrijedi

Lema 3.10.8. *Ako je $u \in S^{(j)}(\mathfrak{g})$ za $j \neq 0$ onda je $\langle u, f \rangle = 0$ za svaki $f \in \mathcal{P}(\mathfrak{g})^G$.*

Propozicija 3.10.9. *Neka su $y \in \mathfrak{h}$, $z \in \overline{\mathfrak{n}}$ i $x = y + z \in \overline{\mathfrak{b}}$. Tada je $f(x) = f(y)$ za svaki $f \in \mathcal{P}(\mathfrak{g})^G$. Posebno, za prije definirano preslikavanje $u : \mathfrak{g} \to \mathbb{C}^\ell$ vrijedi $u(x) = u(y)$.*

Dokaz: Podalgebra $\mathcal{P}(\mathfrak{g})^G$ je graduirana, pa možemo pretpostaviti da je $f \in \mathcal{P}^k(\mathfrak{g})^G$ za neki $k \in \mathbb{Z}_+$. Za konstantne polinome f tvrdnja je trivijalna, pa možemo pretpostaviti da je $k > 0$. Sada je prema zadatku 3.6.7.

$$k!f(x) = \left\langle x^k, f \right\rangle = \left\langle (y+z)^k, f \right\rangle .$$

Imamo

$$(y+z)^k = y^k + u, \qquad u = \sum_{j=1}^{k} \binom{k}{j} z^j y^{k-j},$$

dakle,

$$k!f(x) = \left\langle y^k, f \right\rangle + \langle u, f \rangle = k!f(y) + \langle u, f \rangle.$$

Međutim, $u \in \overline{\mathfrak{n}} S\left(\overline{\mathfrak{b}}\right)$ i očito vrijedi $\overline{\mathfrak{n}} S\left(\overline{\mathfrak{b}}\right) \subseteq \sum_{j<0} S^{(j)}(\mathfrak{g})$, pa iz leme 3.10.8. slijedi $\langle u, f \rangle = 0$. Time je propozicija dokazana.

Izaberimo kao i ranije za svaki $\alpha \in R$ element $e_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha \setminus \{0\}$. Prema teoremu 3.5.11., primijenjenom na algebru $\overline{\mathfrak{n}}$ umjesto algebre $\mathfrak{n}$, element

$$\sum_{\alpha \in R_+} a_\alpha e_{-\alpha} \in \overline{\mathfrak{n}}$$

je glavni nilpotentni element u $\mathfrak{g}$ ako i samo ako je $a_\alpha \neq 0$ za svaki $\alpha \in B$. Posebno,

$$e = \sum_{\alpha \in B} e_{-\alpha}$$

je glavni nilpotentni element u $\mathfrak{g}$.

Podsjećamo da smo sa $\mathcal{R}$ označili skup svih elemenata $x \in \mathfrak{g}$ takvih da je $\dim \mathfrak{g}^x = \ell$.

Lema 3.10.10. *Vrijedi $e + \mathfrak{b} \subseteq \mathcal{R}$, tj. za $v \in \mathfrak{b}$ i $x = e + v$ je $\dim \mathfrak{g}^x = \ell$.*

Dokaz: Stavimo

$$\mathfrak{a}^{(j)} = \mathfrak{g}^e \cap \mathfrak{g}^{(j)}, \qquad j \in \mathbb{Z}.$$

Budući da je

$$[h_0, e_{-\alpha}] = -\alpha(h_0)e_{-\alpha} = -e_{-\alpha} \qquad \forall \alpha \in B,$$

vrijedi $[h_0, e] = -e$, odnosno, $e \in \mathfrak{g}^{(-1)}$. Odatle i iz (3.34) imamo

$$(\operatorname{ad} e)\mathfrak{g}^{(j)} \subseteq \mathfrak{g}^{(j-1)} \qquad \forall j \in \mathbb{Z}, \tag{3.35}$$

pa slijedi

$$\mathfrak{g}^e = \operatorname{Ker}(\operatorname{ad} e) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \dot{+}\, \mathfrak{a}^{(j)}.$$

Odatle je

$$\ell = \dim \mathfrak{g}^e = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \dim \mathfrak{a}^{(j)}. \tag{3.36}$$

Definirajmo sada padajuću filtraciju prostora $\mathfrak{g}$ ovako:

$$\mathfrak{g}_j = \sum_{k \geq j} \dot{+}\, \mathfrak{g}^{(k)}, \qquad j \in \mathbb{Z}. \tag{3.37}$$

Tada je $\mathfrak{g}_j \supseteq \mathfrak{g}_{j+1}$ za svaki j, $\mathfrak{g}_j = \mathfrak{g}$ za dovoljno male j i $\mathfrak{g}_j = \{0\}$ za dovoljno velike j.

Neka je sada $v \in \mathfrak{b}$ i $x = e + v$. Iz (3.34) slijedi

$$(\operatorname{ad} v)\mathfrak{g}_j \subseteq \mathfrak{g}_j \qquad \forall j \in \mathbb{Z}. \tag{3.38}$$

Filtracija $\mathfrak{g}_j$ od $\mathfrak{g}$ inducira filtraciju $\mathfrak{g}_j^x = \mathfrak{g}_j \cap \mathfrak{g}^x$ od $\mathfrak{g}^x$ i imamo

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} \dim\, \mathfrak{g}_j^x / \mathfrak{g}_{j+1}^x = \dim\, \mathfrak{g}^x. \tag{3.39}$$

Prema definiciji (3.37) je $\mathfrak{g}_j = \mathfrak{g}^{(j)} \dot{+} \mathfrak{g}_{j+1}$ pa imamo izomorfizam $\mathfrak{g}_j/\mathfrak{g}_{j+1} \to \mathfrak{g}^{(j)}$. Restrikcijom tog izomorfizma dolazimo do injekcije

$$p_j : \mathfrak{g}_j^x / \mathfrak{g}_{j+1}^x \longrightarrow \mathfrak{g}^{(j)}.$$

Iz (3.35) i (3.38) neposredno slijedi da je $\operatorname{Im} p_j \subseteq \mathfrak{a}^{(j)}$. Prema tome, vrijedi

$$\dim\, \mathfrak{g}_j^x / \mathfrak{g}_{j+1}^x \leq \dim\, \mathfrak{a}^{(j)} \qquad \forall j \in \mathbb{Z}.$$

Odatle zbog (3.36) i (3.39) dobivamo $\dim\, \mathfrak{g}^x \leq \ell$. Iz teorema 3.5.16. slijedi jednakost $\dim\, \mathfrak{g}^x = \ell$.

Lema 3.10.11. *Za $y \in \mathfrak{h}$ i $x = e + y$ vrijedi $x \in \mathcal{R}$ i $u(x) = u(y)$.*

Dokaz: Budući da je $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{b}$, iz leme 3.10.10. slijedi da je $x \in \mathcal{R}$. Nadalje, kako je $e \in \overline{\mathfrak{n}}$, prema propoziciji 3.10.9. je $u(x) = u(y)$.

Sada možemo dokazati najavljenu karakterizaciju skupa $\mathcal{Q}$ svih kvaziregularnih elemenata:

Teorem 3.10.12. *Skup $\mathcal{Q}$ svih kvaziregularnih elemenata u $\mathfrak{g}$ podudara se sa skupom $\mathcal{R}$ svih elemenata $x \in \mathfrak{g}$ takvih da je $\dim \mathfrak{g}^x = \ell$.*

Dokaz: Neka je $x \in \mathcal{Q}$. To znači da je $\mathcal{N}_x = \mathcal{N}$, odnosno, $\mathcal{N} \subseteq \overline{\bigcup_{c \in \mathbb{C}^*} \mathcal{O}_{cx}}$. Tada je, posebno, glavni nilpotentni element $e \in \mathcal{N}$ limes niza $(x_j)_{j \in \mathbb{N}}$ takvog da je $x_j \in \mathcal{O}_{c_j x}$ za neki niz $(c_j)_{j \in \mathbb{N}}$ u $\mathbb{C}^*$. Stavimo $k = \dim\, \mathfrak{g}^x$. Očito je $\mathfrak{g}^{c_j x} = \mathfrak{g}^x$, dakle, $\dim\, \mathfrak{g}^{c_j x} = k$, a odatle i $\dim\, \mathfrak{g}^{x_j} = k$ za svaki $j \in \mathbb{N}$. Označimo sa $\mathcal{G}_k$ Grasmannian svih $k-$dimenzionalnih potprostora od $\mathfrak{g}$. To je kompaktan topološki prostor pa niz $(\mathfrak{g}^{x_j})_{j \in \mathbb{N}}$ ima u $\mathcal{G}_k$ neko gomilište $\mathfrak{u}$. Prešavši na podniz možemo pretpostaviti da niz $(\mathfrak{g}^{x_j})_{j \in \mathbb{N}}$ konvergira prema $\mathfrak{u}$ u $\mathcal{G}_k$. Neka je $\{e_1, \ldots, e_k\}$ neka baza od $\mathfrak{u}$. Tada za svaki $j \in \mathbb{N}$ možemo izabrati bazu $\{e_1^j, \ldots, e_k^j\}$ od $\mathfrak{g}^{x_j}$ tako da vrijedi $e_i = \lim_{j \to \infty} e_i^j$ za $i = 1, \ldots, k$. Odatle slijedi

$$[e, e_i] = \lim_{j \to \infty} [x_j, e_i^j] = 0 \qquad \text{za} \quad i = 1, \ldots, k.$$

To znači da je $\mathfrak{u} \subseteq \mathfrak{g}^e$. Sada iz $\dim\, \mathfrak{g}^e = \ell$ slijedi $k \leq \ell$. Budući da je prema teoremu 3.5.16. $k \geq \ell$, zaključujemo da je $k = \ell$. Time smo dokazali da je $\dim\, \mathfrak{g}^x = \ell$ za svaki $x \in \mathcal{Q}$, odnosno, da je $\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{R}$.

Obratno, pretpostavimo sada da je $x \in \mathcal{R}$ i dokažimo da je $x \in \mathcal{Q}$, tj. da je $\mathcal{N}_x = \mathcal{N}$. Budući da je $\mathcal{N}_x$ zatvoren $G-$stabilan skup i budući da je orbita $\mathcal{O}$ glavnih nilpotentnih elemenata gusta u $\mathcal{N}$, dovoljno je dokazati da $\mathcal{N}_x$ sadrži (neki) glavni nilpotentan element.

Neka je $\xi = u(x) \in \mathbb{C}^\ell$. Prema propoziciji 3.10.5. postoji $y \in \mathfrak{h}$ takav da je $u(y) = \xi$. Stavimo $x_1 = e + y$. Prema lemi 3.10.11. tada je $x_1 \in \mathcal{R}$ i $u(x_1) = u(y) = u(x)$. Sada iz propozicije 3.10.7. slijedi da je $x_1 \in \mathcal{O}_x$. Zbog homogenosti $u_1, \ldots, u_\ell$ iz $u(x) = u(y)$ slijedi da je $u(cx) = u(cy)$ za svaki $c \in \mathbb{C}$. Prema tome, isti argument pokazuje da je $x_c = e + cy \in \mathcal{O}_{cx}$ za svaki $c \in \mathbb{C}^*$. Budući da je $e = \lim_{c \to 0} x_c$, zbog zatvorenosti $\mathcal{N}_x$ slijedi da je $e \in \mathcal{N}_x$. Dakle, skup $\mathcal{N}_x$ sadrži glavni nilpotentni element e, a to je i trebalo dokazati.

Sljedeći važan teorem navodimo bez dokaza, budući da bi se za njegovo dokazivanje trebalo upustiti u vrlo detaljnu analizu strukture poluprostih grupa:

Teorem 3.10.13. *Neka je $\mathfrak{g}$ kompleksna reduktivna Liejeva algebra, $G = \mathrm{Int}(\mathfrak{g})$ njezina grupa unutarnjih automorfizama i $x \in \mathfrak{g}$ poluprost element. Tada vrijedi:*

(*a*) *Podgrupa $G^x = \{g \in G;\ gx = x\}$ je povezana.*

(*b*) *Orbita $\mathcal{O}_x = Gx$ je Zariski zatvorena u $\mathfrak{g}$, dakle, zatvorena i u odnosu na običnu topologiju.*

Za bilo koju algebarsku višestrukost Y sa $R(Y)$ označavamo algebru svih svuda definiranih racionalnih funkcija na Y. Trebat će nam sljedeći rezultat iz algebarske geometrije koji također navodimo bez dokaza:

Teorem 3.10.14. *Neka je V kompleksan konačnodimenzionalan vektorski prostor i neka je Y njegov povezan Zariski zatvoren podskup. Tada je*

$$R(Y) = \mathcal{P}(Y) = \{f|Y;\ f \in \mathcal{P}(V)\}.$$

Napominjemo da je tvrdnja prethodnog teorema istinita i uz slabiju pretpostavku da je Y povezan otvoren podskup njegovog Zariski zatvarača $\overline{Y}$ i da je $\dim \left(\overline{Y} \setminus Y\right) \leq \dim Y - 2$.

Neka je sada $x \in \mathfrak{g}' = \mathcal{R} \cap \mathcal{S}$. Tada je $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}^x$ Cartanova podalgebra od $\mathfrak{g}$. Nadalje, prema teoremu 3.10.1. linearno preslikavanje

$$\gamma_x : \mathcal{H}_G(\mathfrak{g}) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{O}_x),$$

definirano kao restrikcija epimorfizma $G-$modula $\mathcal{P}(\mathfrak{g}) \to \mathcal{P}(\mathcal{O}_x)$, $f \mapsto f|\mathcal{O}_x$, je izomorfizam $G-$modula. Prema tvrdnji (*b*) teorema 3.10.13. orbita $\mathcal{O}_x$ je Zariski zatvoren podskup od $\mathfrak{g}$. Stoga je prema teoremu 3.10.14. $\mathcal{P}(\mathcal{O}_x) = R(\mathcal{O}_x)$. Nadalje, preslikavanje $g \mapsto gx$ inducira izomorfizam algebarskih višestrukosti $G/G^x \to \mathcal{O}_x$, pa dobivamo izomorfizam algebri ali i $G-$modula $R(G/G^x) \cong R(\mathcal{O}_x) = \mathcal{P}(\mathcal{O}_x)$. Algebra $R(G/G^x)$ identificira se s podalgebrom od $R(G)$ svih racionalnih funkcija na G koje su invarijantne u odnosu na desno djelovanje podgrupe G^x. Pri tome, za bilo koju funkciju $f : G \to \mathbb{C}$ i za $a \in G$ pored lijevog djelovanja

$$(a \cdot f)(b) = f(a^{-1}b), \qquad b \in G,$$

definirano je desno djelovanje

$$(f \cdot a)(b) = f(ba), \qquad b \in G.$$

Još jedan teorem navodimo bez dokaza (dokaz u G. Hochschild, G.D. Mostow, *Representations and representative functions of Lie groups I, II, III*, Annals of Mathematics, $66(1957), 495 - 542$, $68(1958), 295 - 313$, $70(1959), 85 - 100$.)

Teorem 3.10.15. *Neka je $\mathrm{Hol}(G)$ algebra holomorfnih funkcija na povezanoj kompleksnoj algebarskoj grupi G. Tada vrijedi*

$$R(G) = \{f \in \mathrm{Hol}(G);\ \dim \mathrm{span}\{a \cdot f;\ a \in G\} < \infty\} = \{f \in \mathrm{Hol}(G);\ \dim \mathrm{span}\{f \cdot a;\ a \in G\} < \infty\}.$$

Označimo sada sa $\hat{G}$ skup svih klasa ekvivalencije konačnodimenzionalnih ireducibilnih racionalnih reprezentacija kompleksne algebarske grupe G. Za svaki $\lambda \in \hat{G}$ izaberimo reprezentaciju $\nu^\lambda : G \to \mathrm{GL}(V_\lambda)$ iz klase λ. Dualni prostor od V_λ označimo sa W_λ i neka je μ^λ reprezentacija od G na W_λ kontragredijentna reprezentaciji ν^λ; tj. za $a \in G$ operator $\mu^\lambda(a)$ dualan je operatoru $\nu^\lambda(a^{-1})$. Naravno, i reprezentacija μ^λ je ireducibilna.

Ako je M bilo koji $G-$modul s reprezentacijom π, tj. kompleksan vektorski prostor sa zadanim homomorfizmom $\pi : G \to \mathrm{GL}(M)$, za svaku klasu $\lambda \in \hat{G}$ sa $M^{(\lambda)}$ označimo sumu svih konačnodimenzionalnih $G-$podmodula V od M takvih da je subreprezentacija π_V ireducibilna i u klasi λ. Tada je suma potprostora $M^{(\lambda)}$ direktna. Ako je grupa G poluprosta (što jest u slučaju $G = \mathrm{Int}(\mathfrak{g})$, gdje je $\mathfrak{g}$ kompleksna reduktivna Liejeva algebra) po Weylovom teoremu svaka je njezina neprekidna konačnodimenzionalna reprezentacija potpuno reducibilna. Odatle slijedi da je kao $G-$modul u odnosu na lijevo djelovanje

$$R(G) = \sum_{\lambda \in \hat{G}} \dot{+}\, R(G)^{(\lambda)}.$$

Za svaku klasu $\lambda \in \hat{G}$ označimo $d_\lambda = \dim V_\lambda = \dim W_\lambda$, izaberimo bazu $e^\lambda = \{e_1^\lambda, \ldots, e_{d_\lambda}^\lambda\}$ od V_λ i neka je $f^\lambda = \{f_1^\lambda, \ldots, f_{d_\lambda}^\lambda\}$ njoj dualna baza prostora W_λ. Za $a \in G$ označimo sa $\left[g_{ij}^\lambda(a)\right]$ matricu operatora $\mu^\lambda(a)$ bazi f^λ. Tada je, naravno, to ujedno transponirana matrica matrice operatora $\nu^\lambda(a^{-1})$ u bazi e^λ. Dakle, vrijedi

$$\mu^\lambda(a) f_j^\lambda = \sum_{i=1}^{d_\lambda} g_{ij}^\lambda(a) f_i^\lambda, \qquad a \in G, \quad 1 \le j \le d_\lambda,$$

i

$$\nu^\lambda(a) e_i^\lambda = \sum_{j=1}^{d_\lambda} g_{ij}^\lambda(a^{-1}) e_j^\lambda, \qquad a \in G, \quad 1 \le i \le d_\lambda.$$

Teorem 3.10.16. *Za svaku klasu $\lambda \in \hat{G}$ funkcije g_{ij}^λ, $1 \le i, j \le d_\lambda$ su linearno nezavisne i tvore bazu od $R(G)^{(\lambda)}$. Posebno,* $\dim R(G)^{(\lambda)} = d_\lambda^2$, *odnosno, multiplicitet λ u $R(G)$ jednak je d_λ.*

Dokaz: Za proizvoljno izabranu klasu $\lambda \in \hat{G}$ u daljnjem ćemo u pisanju izostavljati oznaku λ, tj. pisat ćemo kraće $\nu, V, \mu, W, d, e_i, f_j, g_{ij}$ umjesto $\nu^\lambda, V_\lambda, \mu^\lambda, W_\lambda, d_\lambda, e_i^\lambda, f_j^\lambda, g_{ij}^\lambda$. Dakle, imamo

$$\mu(a) f_j = \sum_{i=1}^{d} g_{ij}(a) f_i, \qquad a \in G, \quad 1 \le j \le d, \tag{3.40}$$

i

$$\nu(a) e_i = \sum_{j=1}^{d} g_{ij}(a^{-1}) e_j, \qquad a \in G, \quad 1 \le i \le d. \tag{3.41}$$

Za $j \in \{1, \ldots, d\}$ neka je V_j potprostor od $R(G)$ razapet funkcijama $g_{1j}, \ldots, g_{dj}$. Za $1 \le i \le d$ i za $a, b \in G$ imamo

$$(a \cdot g_{ij})(b) = g_{ij}(a^{-1}b) = \sum_{k=1}^{d} g_{ik}(a^{-1}) g_{kj}(b).$$

Odatle se vidi da je linearan operator $A : V \to R(G)$, definiran sa $Ae_i = g_{ij}$, $1 \le i \le d$, preplitanje $G-$modula. Njegova je slika V_j, a kako je reprezentacija ν ireducibilna, jezgra mu je $\{0\}$. Dakle, V_j je $G-$podmodul od $R(G)$ i subreprezentacija na V_j je ekvivalentna reprezentaciji ν, dakle, ireducibilna je i u klasi λ. To znači da je $V_j \subseteq R(G)^{(\lambda)}$, a kako to vrijedi za svaki indeks j, slijedi da su sve funkcije g_{ij} sadržane u $R(G)^{(\lambda)}$, odnosno, da je

$$\mathrm{span}\,\{g_{ij},\ 1 \le i, j \le d\} \subseteq R(G)^{(\lambda)}. \tag{3.42}$$

Neka je sada X $G-$podmodul od $R(G)$ na kome je subreprezentacija ireducibilna i u klasi λ. Tada u X postoji baza $\{h_1, \ldots, h_d\}$ na koju grupa G djeluje upravo kao što reprezentacija ν djeluje na bazu $e = \{e_1, \ldots, e_d\}$. To znači da je

$$a \cdot h_i = \sum_{j=1}^{d} g_{ij}(a^{-1})h_j, \qquad a \in G, \quad 1 \leq i \leq d.$$

Odatle je

$$h_i(a) = \left(a^{-1} \cdot h_i\right)(e) = \sum_{j=1}^{d} g_{ij}(a)h_j(e), \qquad a \in G, \quad 1 \leq i \leq d,$$

odnosno,

$$h_i = \sum_{j=1}^{d} h_j(e)g_{ij}, \qquad 1 \leq i \leq d.$$

Time je dokazano da su funkcije $h_1, \ldots, h_d$ linearne kombinacije funkcija g_{ij}, dakle,

$$X \subseteq \operatorname{span}\{g_{ij};\ 1 \leq i, j \leq d\}.$$

Kako je X bio proizvoljan ireducibilan $G-$podmodul od $R(G)^{(\lambda)}$, zaključujemo da je

$$R(G)^{(\lambda)} \subseteq \operatorname{span}\{g_{ij};\ 1 \leq i, j \leq d\},$$

a odatle i iz (3.42) slijedi jednakost

$$R(G)^{(\lambda)} = \operatorname{span}\{g_{ij};\ 1 \leq i, j \leq d\}.$$

Treba još dokazati linearnu nezavisnost funkcija g_{ij}. U tu svrhu treba nam jedan opći rezultat o tenzorskim produktima ireducibilnih reprezentacijama:

Teorem 3.10.17. *Neka su ν i μ ireducibilne reprezentacije grupa G i H na konačnodimenzionalnim vektorskim prostorima V i W nad algebarski zatvorenim poljem K. Definiramo reprezentaciju $\nu \otimes \mu$ direktnog produkta $G \times H$ na prostoru $V \otimes W$ ovako:*

$$(\nu \otimes \mu)(g, h) = \nu(g) \otimes \mu(h), \qquad (g, h) \in G \times H.$$

Reprezentacija $\nu \otimes \mu$ je ireducibilna.

Za dokaz nam treba

Lema 3.10.18. *Neka je ν ireducibilna reprezentacija grupe G na konbačnodimenzionalnom vektorskom prostoru V nad algebarski zatvorenim poljem K i neka je W konačnodimenzionalan vektorski prostor nad K. Definiramo reprezentaciju $\tilde{\nu}$ grupe G na prostoru $V \otimes W$ sa $\tilde{\nu}(g) = \nu(g) \otimes I_W$, $g \in G$. Neka je U $\tilde{\nu}-$invarijantan potprostor od $V \otimes W$ takav da je subreprezentacija $\tilde{\nu}_U$ ireducibilna. Tada postoji $w \in W$ takav da je*

$$U = V \otimes w = \{v \otimes w;\ v \in V\}.$$

Dokaz: Neka je $\{w_1, w_2, \ldots, w_m\}$ baza vektorskog prostora W. Tada je očito

$$V \otimes W = V \otimes w_1 \dotplus V \otimes w_2 \dotplus \cdots \dotplus V \otimes w_m$$

i za svaki j subreprezentacija $\tilde{\nu}_{V \otimes w_j}$ je ireducibilna i ekvivalentna reprezentaciji π. Kao direktna suma ireducibilnih reprezentacija $\tilde{\nu}$ je potpuno reducibilna reprezentacija. Štoviše, ako je

U $\tilde{\nu}-$invarijantan potprostor od $V \otimes W$, lako se vidi da postoji podskup $\{j_1, j_2, \dots, j_k\}$ skupa $\{1, 2, \dots, m\}$ takav da je

$$V \otimes W = U \dotplus V \otimes w_{j_1} \dotplus V \otimes w_{j_2} \dotplus \cdots \dotplus V \otimes w_{j_k}.$$

Neka je $\{1, 2, \dots, m\} \setminus \{j_1, j_2, \dots, j_k\} = \{i_1, i_2, \dots, i_{m-k}\}$. Tada slijedi

$$\tilde{\nu}_U \simeq \tilde{\nu}_{V \otimes w_{i_1} \dotplus V \otimes w_{i_2} \dotplus \cdots \dotplus V \otimes w_{i_{m-k}}}.$$

Prema tome, ako je subreprezentacija $\tilde{\nu}_U$ ireducibilna, onda je nužno $k = m - 1$ tj. postoji $j \in \{1, 2, \dots, m\}$ takav da je $\tilde{\nu}_U \simeq \tilde{\nu}_{V \otimes w_j} \simeq \pi$. Neka je $\varphi : U \to V$ izomorfizam koji ostvaruje ekvivalenciju reprezentacije $\tilde{\nu}_U$ s reprezentacijom π, tj. takav da je

$$\pi(g) \circ \varphi = \varphi \circ (\pi(g) \otimes I_W)|U.$$

Budući da je $\{w_1, w_2, \dots, w_m\}$ baza vektorskog prostora W, za svaki vektor x iz $V \otimes W$ postoje jedinstveni vektori $v_1, v_2, \dots, v_m \in V$ takvi da je

$$x = v_1 \otimes w_1 + v_2 \otimes w_2 + \cdots + v_m \otimes w_m. \tag{3.43}$$

Posebno, postoje linearni operatori $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m : U \to V$ takvi da je

$$u = \varphi_1(u) \otimes w_1 + \varphi_2(u) \otimes w_2 + \cdots + \varphi_m(u) \otimes w_m \qquad \forall u \in U. \tag{3.44}$$

Za svaki $g \in G$ i $u \in U$ imamo:

$$\varphi_1(\tilde{\nu}_U(g)u) \otimes w_1 + \varphi_2(\tilde{\nu}_U(g)u) \otimes w_2 + \cdots + \varphi_m(\tilde{\nu}_U(g)u) \otimes w_m = \tilde{\nu}_U(g)u = \tilde{\nu}(g)u =$$

$$= \tilde{\nu}(g)[\varphi_1(u) \otimes w_1 + \varphi_2(u) \otimes w_2 + \cdots + \varphi_m(u) \otimes w_m] =$$

$$= \pi(g)\varphi_1(u) \otimes w_1 + \pi(g)\varphi_2(u) \otimes w_2 + \cdots + \pi(g)\varphi_m(u) \otimes w_m.$$

Odatle zbog jedinstvenosti prikaza (3.43) slijedi

$$\varphi_j(\tilde{\nu}_U(g)u) = \pi(g)\varphi_j(u) \qquad \forall u \in U, \quad \forall g \in G, \quad j = 1, 2, \dots, m,$$

odnosno,

$$\varphi_j \circ \tilde{\nu}_U(g) = \pi(g) \circ \varphi_j \qquad \forall g \in G, \quad j = 1, 2, \dots, m.$$

Prema tome, $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m \in \mathrm{Hom}_G(U, V)$. Stoga su $\varphi^{-1} \circ \varphi_1, \varphi^{-1} \circ \varphi_2, \dots, \varphi^{-1} \circ \varphi_m \in \mathrm{End}_G(U)$. Prema Schurovoj lemi postoje $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m \in K$ takvi da je

$$\varphi^{-1} \circ \varphi_j = \lambda_j I_U \quad \text{za} \quad j = 1, 2, \dots, m.$$

Dakle,

$$\varphi_j = \lambda_j \varphi \quad \text{za} \quad j = 1, 2, \dots, m.$$

Stoga prema (3.44) imamo za svaki $u \in U$:

$$u = \lambda_1\varphi(u) \otimes w_1 + \lambda_2\varphi(u) \otimes w_2 + \cdots + \lambda_m\varphi(u) \otimes w_m = \varphi(u) \otimes (\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \cdots + \lambda_m w_m).$$

Kako je φ izomorfizam prostora U na prostor V, slijedi

$$U = V \otimes w \quad \text{za} \quad w = \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \cdots + \lambda_m w_m$$

i time je lema dokazana.

Dokaz teorema 3.10.17.: Neka je $U \neq \{0\}$ potprostor od $V \otimes W$ koji je $\nu \otimes \mu-$invarijantan. Potprostor U očito je $\tilde{\nu}-$invarijantan, gdje je $\tilde{\nu}$ reprezentacija grupe G na prostoru $V \otimes W$ zadana kao u lemi 3.10.18:

$$\tilde{\nu}(g) = \nu(g) \otimes I_W = (\nu \times \mu)(g, e_H), \qquad g \in G.$$

Prema lemi 3.10.18. postoji $w_0 \in W$, $w_0 \neq 0$, takav da $U \supseteq V \otimes w_0$. Za svaki $v \in V$ definiramo potprostor $W(v)$ prostora W ovako:

$$W(v) = \{w \in W;\ v \otimes w \in U\}.$$

Taj je potprostor $\mu-$invarijantan. Doista, kako je potprostor U $\nu \times \mu-$invarijantan, za $h \in H$ i $w \in W(v)$ imamo

$$v \otimes \mu(h)w = (\nu \times \mu)(e_G, h)(v \otimes w) \in U \qquad \Longrightarrow \qquad \mu(h)w \in W(v).$$

Nadalje, $w_0 \in W(v)$, pa slijedi $W(v) \neq \{0\}$ za svaki $v \in V$. Budući da je reprezentacija μ ireducibilna, slijedi $W(v) = W$ za svaki $v \in V$. Dakle, $\{v \otimes w;\ v \in V,\ w \in W\} \subseteq U$, pa slijedi $U = V \otimes W$.

Nastavimo sada dokaz teorema 3.10.16. Reprezentacija $\nu \otimes \mu$ grupe $G \times G$ na prostoru $V \otimes W$ definirana sa

$$(\nu \otimes \mu)(a, b) = \nu(a) \otimes \mu(b), \qquad (a, b) \in G \times G,$$

prema teoremu 3.10.17. je ireducibilna. Za $(a, b) \in G \times G$ definiramo operator

$$\pi(a, b) : R(G) \to R(G), \qquad [\pi(a, b)f](c) = f(a^{-1}cb), \quad f \in R(G),\ \ c \in G,$$

tj. $\pi(a, b)f = a \cdot f \cdot b$. Lako se vidi da je π reprezentacija grupe $G \times G$ na prostoru $R(G)$. Definiramo linearan operator

$$T : V \otimes W \to R(G), \qquad T(e_i \otimes f_j) = g_{ij}, \quad 1 \leq i, j \leq d.$$

Tvrdimo da je T preplitanje reprezentacije $\nu \otimes \mu$ s reprezentacijom π. Doista, za bilo koje $a, b, c \in G$ i za $1 \leq i, j \leq d$ koristeći (3.40) i (3.41) imamo redom

$$[T(\nu \otimes \mu)(a, b)(e_i \otimes f_j)]\,(c) = [T(\nu(a)e_i \otimes \mu(b)f_j)]\,(c) = \sum_{k,\ell=1}^{d} g_{ik}(a^{-1})g_{\ell j}(b)\,[T(e_k \otimes f_\ell)]\,(c) =$$

$$= \sum_{k,\ell=1}^{d} g_{ik}(a^{-1})g_{\ell j}(b)g_{k\ell}(c) = g_{ij}(a^{-1}cb) = [\pi(a, b)g_{ij}]\,(c) = [\pi(a, b)T(e_i \otimes f_j)]\,(c).$$

Zbog proizvoljnosti $c \in G$ i zbog toga što je $\{e_i \otimes f_j;\ 1 \leq i, j \leq d\}$ baza prostora $V \otimes W$ dokazali smo da je

$$T(\nu \otimes \mu)(a, b) = \pi(a, b)T \qquad \forall (a, b) \in G \times G.$$

Dakle, T je preplitanje reprezentacije $\nu \otimes \mu$ s reprezentacijom π grupe $G \times G$. Njegova je slika $\mathrm{span}\,\{g_{ij};\ 1 \leq i, j \leq d\} = R(G)^{(\lambda)}$, a budući da je reprezentacija $\nu \otimes \mu$ ireducibilna, njegova je jezgra $\{0\}$. Prema tome, T je izomorfizam prostora $V \otimes W$ na prostor $R(G)^{(\lambda)}$. Odatle slijedi da su funkcije $g_{ij} = T(e_i \otimes f_j)$ linearno nezavisne.

Time je teorem 3.10.16. u potpunosti dokazan.

Neka je sada F algebarska (dakle, zatvorena Liejeva) podgrupa od G. Funkcije iz $R(G/F)$ identificiraju se s funkcijama iz $R(G)$ koje su konstantne na desnim $F-$klasama, tj.

$$R(G/F) = \{h \in R(G);\ h \cdot b = h \ \ \forall b \in F\}.$$

Tada je $R(G/F)$ $G-$podmodul od $R(G)$ i očito vrijedi

$$R(G/F)^{(\lambda)} = R(G/F) \cap R(G)^{(\lambda)} \qquad \forall \lambda \in \hat{G}.$$

Za $\lambda \in \hat{G}$ neka je W_λ^F potprostor $F-$fiksnih vektora u W_λ :

$$W_\lambda^F = \{f \in W_\lambda;\ \mu^\lambda(a)f = f \ \ \forall a \in F\}.$$

Stavimo $d_\lambda^F = \dim W_\lambda^F$. Neka je kao i prije $\{e_1^\lambda, \ldots, e_{d_\lambda}^\lambda\}$ baza od V_λ. Nadalje, neka je $\{\varphi_1^\lambda, \ldots, \varphi_{d_\lambda^F}^\lambda\}$ baza od W_λ^F. Definiramo funkcije h_{ij} na G ovako

$$h_{ij}(a) = \left[\mu^\lambda(a)\varphi_j^\lambda\right]\left(e_i^\lambda\right), \qquad a \in G, \quad 1 \le i \le d_\lambda, \quad 1 \le j \le d_\lambda^F.$$

Sljedeći je teorem generalizacija teorema 3.10.16. (koji se iz njega dobiva za $F = \{e\}$). To je specijalni slučaj algebarskog Frobeniusovog teorema reciprociteta:

Teorem 3.10.19. *Funkcije h_{ij} su linearno nezavisne i one čine bazu prostora $R(G/F)^{(\lambda)}$. Posebno, $\dim R(G/F)^{(\lambda)} = d_\lambda^F d_\lambda$, odnosno, multiplicitet klase λ u $G-$modulu $R(G/F)$ jednak je d_λ^F.*

Dokaz: Dopunimo li bazu $\{\varphi_1^\lambda, \ldots, \varphi_{d_\lambda^F}^\lambda\}$ od W_λ^F do baze $\{\varphi_1^\lambda, \ldots, \varphi_{d_\lambda}^\lambda\}$ od W_λ, iz teorema 3.10.16. slijedi da su funkcije

$$h_{ij}(a) = \left[\mu^\lambda(a)\varphi_j^\lambda\right]\left(e_i^\lambda\right), \qquad a \in G, \quad 1 \le i,j \le d_\lambda,$$

linearno nezavisne. Prema tome, funkcije h_{ij}, $1 \le i \le d_\lambda$, $1 \le j \le d_\lambda^F$ su linearno nezavisne. Te se funkcije nalaze u $R(G/F)$. Doista, za $a \in G$ i $b \in F$ i za $1 \le i \le d_\lambda$ i $1 \le j \le d_\lambda^F$ imamo

$$\left(h_{ij} \cdot b\right)(a) = h_{ij}(ab) = \left[\mu^\lambda(ab)\varphi_j^\lambda\right]\left(e_i^\lambda\right) = \left[\mu^\lambda(a)\varphi_j^\lambda\right]\left(e_i^\lambda\right) = h_{ij}(a).$$

Nadalje, iz teorema 3.10.16. slijedi da se te funkcije nalaze u potprostoru $R(G)^{(\lambda)}$. Dakle,

$$\operatorname{span}\left\{h_{ij};\ 1 \le i \le d_\lambda,\ 1 \le j \le d_\lambda^F\right\} \subseteq R(G/F)^{(\lambda)}.$$

Treba još dokazati obrnutu inkluziju. Pretpostavimo da je $g \in R(G/F)^{(\lambda)}$, tj. da je $g \in R(G)^{(\lambda)}$ i da vrijedi $g \cdot b = g$ za svaki $b \in F$. Iz teorema 3.10.16. slijedi da je $\{h_{ij};\ 1 \le i,j \le d_\lambda\}$ baza od $R(G)^{(\lambda)}$, pa možemo pisati

$$g = \sum_{i,j=1}^{d_\lambda} c_{ji} h_{ij} \qquad \text{za neke} \quad c_{ji} \in \mathbb{C}.$$

Definiramo linearan operator C na prostoru W_λ koji u bazi $\{\varphi_1^\lambda, \ldots, \varphi_{d_\lambda}^\lambda\}$ ima matricu $[c_{ji}]$, tj. takav da je

$$C\varphi_i^\lambda = \sum_{j=1}^{d_\lambda} c_{ji}\varphi_j^\lambda.$$

Zadatak 3.10.5. *Dokažite da za $b \in F$ iz uvjeta $g \cdot b = g$ slijedi $\left[\mu^\lambda(b) - I\right] C = 0$.*

Prema tome,

$$\operatorname{Im} C \subseteq \bigcap_{b\in F} \operatorname{Ker}\,\left[\mu^\lambda(b) - I\right] = W_\lambda^F.$$

Dakle, $c_{ji} = 0$ za $j > d_\lambda^F$, pa je

$$g = \sum_{i=1}^{d_\lambda} \sum_{j=1}^{d_\lambda^F} c_{ji} h_{ij} \in \operatorname{span}\{h_{ij};\ 1 \le i \le d_\lambda,\ \ 1 \le j \le d_\lambda^F\}.$$

Time je dokazana i obrnuta inkluzija, odnosno, vrijedi jednakost

$$R(G/F)^{(\lambda)} = \operatorname{span}\left\{h_{ij};\ 1 \le i \le d_\lambda,\ \ 1 \le j \le d_\lambda^F\right\}.$$

Iz teorema 3.10.19., teorema 3.10.1. i tvrdnje (b) teorema 3.10.13. neposredno slijedi:

Teorem 3.10.20. *Neka je x regularan element kompleksne reduktivne Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ i neka je $G = \operatorname{Int}(\mathfrak{g})$. Tada je*

$$\mathcal{H}_G(\mathfrak{g}) = \sum_{\lambda\in\hat{G}} \dot{+}\, \mathcal{H}_G(\mathfrak{g})^{(\lambda)} \qquad i \qquad \dim \mathcal{H}_G(\mathfrak{g})^{(\lambda)} = d_\lambda d_\lambda^{G^x}.$$

Drugim riječima, multiplicitet klase $\lambda \in \hat{G}$ u $G-$modulu $\mathcal{H}_G(\mathfrak{g})$ jednak je dimenziji potprostora

$$V_\lambda^{G^x} = \{v \in V_\lambda;\ \nu^\lambda(g)v = v\ \forall g \in G^x\}.$$

Zatvorena podgrupa G^x od G je prema tvrdnji (a) teorema 3.10.13. povezana. Njezina je Liejeva algebra $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}^x$, a kako je x ragularan element, $\mathfrak{h}$ je Cartanova podalgebra od $\mathfrak{g}$ i svaka je Cartanova podalgebra od $\mathfrak{g}$ takva. Iz povezanosti G^x slijedi

$$\nu^\lambda(g)v = v \quad \forall g \in G^x \qquad \Longleftrightarrow \qquad \nu^\lambda(h)v = 0\ \forall h \in \mathfrak{h}.$$

Prema tome, $V_\lambda^{G^x}$ je upravo težinski potprostor od V_λ težine 0. Dakle, teorem 3.10.20. može se i ovako formulirati:

Teorem 3.10.21. *Neka je $\mathfrak{g}$ kompleksna reduktivna Liejeva algebra, $\mathfrak{h}$ njezina Cartanova podalgebra i $G = \operatorname{Int}(\mathfrak{g})$. Tada je multiplicitet klase $\lambda \in \hat{G}$ u $G-$modulu $\mathcal{H}_G(\mathfrak{g})$ jednak multiplicitetu težine 0 u pripadnoj reprezentaciji Liejeve algebre $\mathfrak{g}$.*

Poglavlje 4

K−INVARIJANTE

4.1 Nilpotentne Liejeve algebre operatora

U ovom odjeljku dokazat ćemo generalizacije Fittingove dekompozicije i korijenske dekompozicije linearnog operatora na odgovarajuće dekompozicije vektorskog prostora V u odnosu na nilpotentnu Liejevu podalgebru od $\mathfrak{gl}(V)$.

U daljnjem je V kompleksan konačnodimenzionalan vektorski prostor. Za linearan operator A na prostoru V i za $\lambda \in \mathbb{C}$ stavimo

$$V_{(0)}(A) = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}_+} \mathrm{Ker}\, A^k, \qquad V_*(A) = \bigcap_{k\in\mathbb{Z}_+} \mathrm{Im}\, A^k \qquad \text{i} \qquad V_{(\lambda)}(A) = V_{(0)}(A - \lambda I).$$

Tada je $V_{(\lambda)}(A) \neq \{0\}$ ako i samo ako je $\lambda \in Sp(A)$. Tada imamo:

Teorem 4.1.1. (*a*) *$V_{(0)}(A)$ je najveći $A-$invarijantan potprostor W takav da je $A|W$ nilpotentan operator.*

(*b*) *$V_*(A)$ je najveći $A-$invarijantan potprostor W takav da je $A|W$ regularan operator.*

(*c*) *Vrijedi $V = V_{(0)}(A) \dot{+} V_*(A)$.*

(*d*) *Vrijedi $V = \sum_{\lambda\in Sp(A)} \dot{+}\, V_{(\lambda)}(A)$.*

(*e*) *Vrijedi $V_*(A) = \sum_{\lambda\neq 0} \dot{+}\, V_{(\lambda)}(A)$.*

Rastav u (*c*) zove se **Fittingova dekompozicija** prostora A u odnosu na operator A. Potprostor $V_{(0)}(A)$ zove se **Fittingova** $0-$**komponenta** a potprostor $V_*(A)$ **Fittingova** $*-$**komponenta** prostora V u odnosu na operator A. Rastav u (*d*) zove se **korijenska dekompozicija** prostora V u odnosu na operator A, a za $\lambda \in Sp(A)$ $V_{(\lambda)}(A)$ je **korijenski potprostor** u donosu na operator A i njegovu svojstvenu vrijednost λ. Ako je $P_A \in \mathbb{C}[T]$ svojstveni polinom operatora A i

$$P_A(T) = \prod_{\lambda\in Sp(A)} (T-\lambda)^{n(\lambda)}$$

njegova dekompozicija u linearne faktore, onda je, naravno, $V_{(\lambda)}(A) = \mathrm{Ker}\,(A-\lambda I)^{n(\lambda)}$. Posebno, $V_{(0)}(A) = \mathrm{Ker}\, A^{n(\lambda)}$, dakle, $\dim V_{(0)}(A)$ je kratnost nule kao nultočke svojstvenog polinoma $P_A(T)$.

Neka je sada $\mathfrak{g}$ Liejeva podalgebra od $\mathfrak{gl}(V)$. Ako je $v \in V\setminus\{0\}$ svojstven vektor svih operatora $A \in \mathfrak{g}$, onda za neku funkciju $\alpha : \mathfrak{g} \to \mathbb{C}$ vrijedi

$$Av = \alpha(A)v \qquad \forall A \in \mathfrak{g}.$$

Tada je α jednodimenzionalna reprezentacija od $\mathfrak{g}$, a to znači da je α linearan funkcional na $\mathfrak{g}$ i da je $\alpha([A,B]) = \alpha(A)\alpha(B) - \alpha(B)\alpha(A) = 0 \ \forall A, B \in \mathfrak{g}$, odnosno, $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}] \subseteq \operatorname{Ker}\alpha$. Za svaki takav linearan funkcional α skup svih pripadnih svojstvenih vektora označavamo sa

$$V_\alpha(\mathfrak{g}) = \{v \in V;\ Av = \alpha(A)v \ \forall A \in \mathfrak{g}\}.$$

Ako je $V_\alpha(\mathfrak{g}) \neq \{0\}$, linearni funkcional α zove se **težina** $\mathfrak{g}-$modula V, a $V_\alpha(\mathfrak{g})$ se zove **težinski potprostor** od V u odnosu na $\mathfrak{g}$. Naravno, težinski potprostor je $\mathfrak{g}-$podmodul. Oponašamo sada situaciju s jednim operatorom na prostoru V pa definiramo pripadni **korijenski potprostor**

$$V_{(\alpha)}(\mathfrak{g}) = \{v \in V;\ \forall A \in \mathfrak{g}\ \exists k \in \mathbb{N}\ (A - \alpha(A)I)^k v = 0\}.$$

U stvari, $V_{(\alpha)}(\mathfrak{g})$ je unija rastućeg niza $\mathfrak{g}-$podmodula $\left(V_\alpha^k(\mathfrak{g})\right)_{k\in\mathbb{Z}_+}$ definiranih sa

$$V_\alpha^k(\mathfrak{g}) = \{v \in V;\ (A - \alpha(A)I)^k v = 0\ \forall A \in \mathfrak{g}\} = \bigcap_{A\in\mathfrak{g}} \operatorname{Ker}\left[(A - \alpha(A)I)^k\right],$$

tj.

$$V_\alpha^0(\mathfrak{g}) = \{0\}, \quad V_\alpha^1(\mathfrak{g}) = V_\alpha(\mathfrak{g}), \quad V_\alpha^{k+1}(\mathfrak{g}) = \{v \in V;\ (A - \alpha(A)I)v \in V_\alpha^k(\mathfrak{g})\ \forall x \in \mathfrak{g}\}.$$

Prema tome, svaki $V_{(\alpha)}(\mathfrak{g})$ je $\mathfrak{g}-$podmodul od V. Lako se vidi da za svaki $\alpha \in \mathfrak{g}^*$ vrijedi

$$V_{(\alpha)}(\mathfrak{g}) = \bigcap_{A\in\mathfrak{g}} V_{(\alpha(A))}(A). \tag{4.1}$$

Promatrajmo sada slučaj $\alpha = 0$. To će razmatranje u slučaju nilpotentne Liejeve podalgebre $\mathfrak{g}$ od $\mathfrak{gl}(V)$ voditi na generalizaciju Fittingove dekompozicije prostora V u odnosu na jedan linearan operator. Definiramo induktivno sljedeći padajući niz $\mathfrak{g}-$podmodula $\left(V_*^k(\mathfrak{g})\right)_{k\in\mathbb{Z}_+}$ od V :

$$V_*^0(\mathfrak{g}) = V, \quad V_*^{k+1}(\mathfrak{g}) = \operatorname{span}\{Av;\ A \in \mathfrak{g},\ v \in V_*^k(\mathfrak{g})\}, \quad k \in \mathbb{Z}_+.$$

Dakle,

$$V_*^0(\mathfrak{g}) = V, \qquad V_*^k(\mathfrak{g}) = \operatorname{span}\{A_1 \cdots A_k v;\ A_1, \ldots, A_k \in \mathfrak{g},\ v \in V\}, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{4.2}$$

Lako se vidi da ako za neki $k \in \mathbb{Z}_+$ vrijedi $V_*^k(\mathfrak{g}) = V_*^{k+1}(\mathfrak{g})$ onda je $V_*^m(\mathfrak{g}) = V_*^k(\mathfrak{g})$ za svaki $m \geq k$. Definiramo

$$V_*(\mathfrak{g}) = \bigcap_{k\in\mathbb{Z}_+} V_*^k(\mathfrak{g}).$$

Naravno, zbog konačnodimenzionalnosti je $V_*(\mathfrak{g}) = V_*^k(\mathfrak{g})$ za neki k.

Za generalizaciju Fittingove dekompozicije na nilpotentne Liejeve algebre operatora treba nam:

Zadatak 4.1.1. *Dokažite da za bilo koje $A, B \in \mathfrak{gl}(V)$ i bilo koji $n \in \mathbb{Z}_+$ vrijede sljedeće dvije jednakosti:*

$$A^n B = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} [(\operatorname{ad} A)^j B] A^{n-j}, \tag{4.3}$$

$$BA^n = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} A^{n-j} [(\operatorname{ad} A)^j B]. \tag{4.4}$$

Uputa: Indukcija po $n \in \mathbb{Z}_+$.

Lema 4.1.2. *Neka su $A, B \in \mathfrak{gl}(V)$ takvi da je $(\operatorname{ad} A)^\ell B = 0$ za neki $\ell \in \mathbb{N}$. Tada su Fittingovi potprostori $V_{(0)}(A)$ i $V_*(B)$ u odnosu na operator A invarijantni s obzirom na operator B.*

Dokaz: Za $v \in V_{(0)}(A)$ je $A^k v = 0$ za neki $k \in \mathbb{N}$, pa za $n = \ell + k - 1$ prema (4.3) nalazimo

$$A^n B v = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} [(\operatorname{ad} A)^j B] A^{n-j} v = 0,$$

jer za $j < \ell$ je $n - j \geq k$, pa je $A^{n-j} v = 0$, a za $j \geq \ell$ je $(\operatorname{ad} A)^j B = 0$. Dakle, vrijedi $Bv \in V_{(0)}(A)$.

Neka je sada $v \in V_*(A)$. Neka je $k \in \mathbb{N}$ takav da je $V_*(A) = \operatorname{Im} A^k$. Tada je $V_*(A) = \operatorname{Im} A^n$ za $n = \ell + k - 1 \geq k$, dakle, postoji $w \in V$ takav da je $v = A^n w$. Sada prema (4.4) imamo

$$Bv = BA^n w = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} A^{n-j} [(\operatorname{ad} A)^j B] w = \sum_{j=0}^{\ell-1} (-1)^j \binom{n}{j} A^{n-j} [(\operatorname{ad} A)^j B] w \tag{4.5}$$

jer je $(\operatorname{ad} A)^j B = 0$ za $j \geq \ell$. Međutim, za $j \leq \ell - 1$ vrijedi $n - j = \ell + k - 1 - j \geq k$, pa slijedi $\operatorname{Im} A^{n-j} = V_*(A)$. To znači da su u (4.5) svi članovi u sumi s desne strane elementi od $V_*(A)$. Zaključujemo da je $Bv \in V_*(A)$ i time je dokazano da je i potprostor $V_*(A)$ invarijantan s obzirom na operator B.

Teorem 4.1.3. (**Fittingova dekompozicija za nilpotentne Liejeve algebre operatora**) *Za nilpotentnu Liejevu podalgebru $\mathfrak{g}$ od $\mathfrak{gl}(V)$ vrijedi*

$$V = V_{(0)}(\mathfrak{g}) \dot{+} V_*(\mathfrak{g}).$$

Nadalje,

$$V_*(\mathfrak{g}) = \sum_{A \in \mathfrak{g}} V_*(A).$$

Dokaz: Pretpostavimo najprije da je svaki operator $A \in \mathfrak{g}$ nilpotentan. Tada je $V_{(0)}(A) = V$ za svaki $A \in \mathfrak{g}$, pa je prema (4.1)

$$V_{(0)}(\mathfrak{g}) = \bigcap_{A \in \mathfrak{g}} V_{(0)}(A) = V.$$

Nadalje, tada je $V_*(A) = \{0\}$, pa je i $\sum_{A \in \mathfrak{g}} V_*(A) = \{0\}$. Prema Engelovom teoremu postoji $s \in \mathbb{N}$ takav da je $A_1 \cdots A_s = 0 \ \forall A_1, \ldots, A_s \in \mathfrak{g}$. No tada je prema (4.2) $V_*^s(\mathfrak{g}) = \{0\}$, a odatle slijedi $V_*(\mathfrak{g}) = \{0\}$. Time je teorem dokazan u slučaju da su svi operatori $A \in \mathfrak{g}$ nilpotentni.

Dokaz za opći slučaj provodimo indukcijom u odnosu na $\dim V$. Baza indukcije $\dim V = 1$ je trivijalna, pa prelazimo na korak indukcije: pretpostavljamo da je $\dim V \geq 2$ i da je teorem dokazan za prostore dimenzije manje od $\dim V$. Prema prvom dijelu dokaza možemo pretpostaviti da neki $B \in \mathfrak{g}$ nije nilpotentan, tj. da je $V_{(0)}(B) \neq V$. Imamo Fittingovu dekompoziciju prostora V u odnosu na operator B :

$$V = V_{(0)}(B) \dot{+} V_*(B).$$

Prema lemi 4.1.2. tada su potprostori $V_{(0)}(B)$ i $V_*(B)$ invarijantni u odnosu na sve operatore $A \in \mathfrak{g}$, tj. $V_{(0)}(B)$ i $V_*(B)$ su $\mathfrak{g}-$podmoduli od V. Po pretpostavci indukcije teorem vrijedi za prostor $W = V_{(0)}(B)$ i za nilpotentnu Liejevu podalgebru $\mathfrak{a} = \{A|W;\ A \in \mathfrak{g}\}$ od $\mathfrak{gl}(W)$. Dakle,

$$V_{(0)}(B) = W = W_{(0)}(\mathfrak{a}) \dot{+} W_*(\mathfrak{a}) \qquad \text{i} \qquad W_*(\mathfrak{a}) = \sum_{C \in \mathfrak{a}} W_*(C).$$

Odatle je

$$V = V_{(0)}(B) \dot{+} V_*(B) = W \dot{+} V_*(B) = W_{(0)}(\mathfrak{a}) \dot{+} W_*(\mathfrak{a}) \dot{+} V_*(B).$$

Prema (4.1) imamo

$$V_{(0)}(\mathfrak{g}) = \bigcap_{A\in\mathfrak{g}} V_{(0)}(A) = W \cap \bigcap_{A\in\mathfrak{g}} V_{(0)}(A) = \bigcap_{A\in\mathfrak{g}} \big(W \cap V_{(0)}(A)\big) = \bigcap_{C\in\mathfrak{a}} W_{(0)}(C) = W_{(0)}(\mathfrak{a}),$$

pa iz prethodne jednakosti dobivamo

$$V = V_{(0)}(\mathfrak{g}) \dot{+} W_*(\mathfrak{a}) \dot{+} V_*(B). \tag{4.6}$$

Dokazat ćemo sada da vrijedi

$$W_*(\mathfrak{a}) \dot{+} V_*(B) = \sum_{A\in\mathfrak{g}} V_*(A) = V_*(\mathfrak{g}). \tag{4.7}$$

Odatle i iz (4.6) će slijediti

$$V = V_{(0)}(\mathfrak{g}) \dot{+} V_*(\mathfrak{g}) \qquad \text{i} \qquad V_*(\mathfrak{g}) = \sum_{A\in\mathfrak{g}} V_*(A).$$

Time će biti proveden korak indukcije, odnosno, teorem 4.1.3. će biti u potpunosti dokazan.

Jednakost (4.7) ćemo dokazati tako da dokažemo tri inkluzije:

$$W_*(\mathfrak{a}) \dot{+} V_*(B) \subseteq \sum_{A\in\mathfrak{g}} V_*(A), \tag{4.8}$$

$$\sum_{A\in\mathfrak{g}} V_*(A) \subseteq V_*(\mathfrak{g}) \tag{4.9}$$

i

$$V_*(\mathfrak{g}) \subseteq W_*(\mathfrak{a}) \dot{+} V_*(B). \tag{4.10}$$

Prije svega, očito je

$$W_*(\mathfrak{a}) \dot{+} V_*(B) = \sum_{z\in\mathfrak{a}} W_*(z) + V_*(B) \subseteq \sum_{A\in\mathfrak{g}} V_*(A),$$

dakle, vrijedi (4.8). Nadalje, za svaki $A \in \mathfrak{g}$ očito vrijedi $\operatorname{Im} A^k \subseteq V_*^k(\mathfrak{g})\ \ \forall k \in \mathbb{Z}_+$ pa je

$$V_*(A) = \bigcap_{k\in\mathbb{Z}_+} \operatorname{Im} A^k \subseteq \bigcap_{k\in\mathbb{Z}_+} V_*^k(\mathfrak{g}) = V_*(\mathfrak{g}),$$

a odatle slijedi (4.9). Da dokažemo posljednju inkluziju (4.10), uočimo da se Liejeva algebra $\{A|V_{(0)}(\mathfrak{g});\ A \in \mathfrak{g}\}$ sastoji od nilpotentnih linearnih operatora na $V_{(0)}(\mathfrak{g})$. Prema Engelovom teoremu postoji $s \in \mathbb{N}$ takav da je

$$A_1 \cdots A_s V_{(0)}(\mathfrak{g}) = \{0\} \qquad \forall A_1, \ldots, A_s \in \mathfrak{g}.$$

Stoga zbog (4.6) za proizvoljne $A_1, \ldots, A_s \in \mathfrak{g}$ imamo

$$A_1 \cdots A_s V = A_1 \cdots A_s(V_{(0)}(\mathfrak{g}) \dot{+} W_*(\mathfrak{a}) \dot{+} V_*(B)) \subseteq$$
$$\subseteq A_1 \cdots A_s V_{(0)}(\mathfrak{g}) + A_1 \cdots A_s W_*(\mathfrak{a}) + A_1 \cdots A_s V_*(B) =$$
$$= A_1 \cdots A_s W_*(\mathfrak{a}) + A_1 \cdots A_s V_*(B) \subseteq W_*(\mathfrak{a}) + V_*(B),$$

budući da su $W_*(\mathfrak{a})$ i $V_*(B)$ $\mathfrak{g}$−podmoduli od V. Kako su $A_1, \ldots, A_s \in \mathfrak{g}$ bili proizvoljni, dobivamo

$$V_*(\mathfrak{g}) \subseteq V_*^s(\mathfrak{g}) \subseteq W_*(\mathfrak{a}) \dot{+} V_*(B),$$

odnosno, dokazana je i inkluzija (4.10).

Teorem 4.1.4. *Neka je $\mathfrak{g}$ nilpotentna Liejeva podalgebra od $\mathfrak{gl}(V)$. Tada vrijedi*

$$V = \sum_{\alpha \in \mathfrak{g}^*} \dot{+} V_{(\alpha)}(\mathfrak{g}).$$

Nadalje,

$$V_*(\mathfrak{g}) = \sum_{\alpha \in \mathfrak{g}^* \setminus \{0\}} \dot{+} V_{(\alpha)}(\mathfrak{g}).$$

Dokaz prve tvrdnje provodimo indukcijom po dimenziji prostora V. Baza indukcije $\dim V = 1$ je trivijalna, pa prelazimo na korak indukcije. Dakle, poretpostavljamo da je $\dim V \geq 2$ i da je teorem dokazan za prostore dimenzije manje od $\dim V$. Svaki $A \in \mathfrak{g}$ može se pisati u obliku $A = A_s + A_n$, gdje je A_s dijagonalizabilan a A_n nilpotentan operator na V i $A_s A_n = A_n A_s$. Pokazuje se da je tada $(\operatorname{ad} A)_s = \operatorname{ad} A_s$ i $(\operatorname{ad} A)_n = \operatorname{ad} A_n$. Budući da je $\mathfrak{g}$ Liejeva podalgebra od $\mathfrak{gl}(V)$, ona je potprostor od $\mathfrak{gl}(V)$ koji je $(\operatorname{ad} A)-$invarijantan za svaki $A \in \mathfrak{g}$. Prema teoremu 3.1.4. potprostor $\mathfrak{g}$ je i $(\operatorname{ad} A_s)-$invarijantan i $(\operatorname{ad} A_n)-$invarijantan. Međutim, Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ je nilpotentna, pa je svaki operator $(\operatorname{ad} A)|\mathfrak{g} = \operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} A$, $A \in \mathfrak{g}$, nilpotentan. To znači da je $(\operatorname{ad} A)|\mathfrak{g} = (\operatorname{ad} A_n)|\mathfrak{g}$, odnosno, $(\operatorname{ad} A_s)|\mathfrak{g} = 0$ $\forall A \in \mathfrak{g}$. Drugim riječima, vrijedi $A_s B = B A_s$ $\forall A, B \in \mathfrak{g}$, odnosno, $\{A_s;\ A \in \mathfrak{g}\}$ je skup dijagonalizabilnih operatora koji komutiraju sa svim operatorima iz $\mathfrak{g}$.

Pretpostavimo najprije da za neki $A \in \mathfrak{g}$ operator A_s nije multipl jediničnog operatora, odnosno, da spektar $Sp(A_s)$ nije jednočlan skup. Neka je $Sp(A_s) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\}$ pri čemu je $k \geq 2$ i $\lambda_i \neq \lambda_j$ za $i \neq j$. Tada imamo svojstveni rastav prostora V u odnosu na dijagonalizabilan operator A_s :

$$V = \sum_{j=1}^{k} \dot{+} V_{\lambda_j}(A_s).$$

Budući da operator A_s komutira sa svim operatorima $B \in \mathfrak{g}$, svaki od svojstvenih potprostora $V_{\lambda_j}(A_s)$ je pravi $\mathfrak{g}-$podmodul od V, pa tvrdnja teorema slijedi iz pretpostavke indukcije.

Dakle, dokaz se svodi na situaciju kad je operator A_s skalarni multipl jediničnog operatora za svaki $A \in \mathfrak{g}$. Pripadnu jedinu svojstvenu vrijednost operatora A_s označimo sa $\alpha(A)$. No tada je $\alpha(A)$ jedina svojstvena vrijednost operatora A, pa vrijedi $V = V_{(\alpha(A))}(A)$ za svaki $A \in \mathfrak{g}$. Dokažimo sada da je α linearan funkcional na $\mathfrak{g}$. Homogenost preslikavanja $\alpha : \mathfrak{g} \to K$ je očita: za $A \in \mathfrak{g}$ i $\lambda \in K$ je s jedne strane $Sp(\lambda A) = \{\alpha(\lambda A)\}$, a s druge je $Sp(A) = \{\alpha(A)\}$, pa slijedi $Sp(\lambda A) = \{\lambda \alpha(A)\}$; dakle, $\alpha(\lambda A) = \lambda \alpha(A)$. Dokažimo aditivnost. Neka su $A, B \in \mathfrak{g}$. Neka je $v \neq 0$ vektor iz V koji je svojstven za operator $A + B$, naravno, u odnosu na jedinu njegovu svojstvenu vrijednost $\alpha(A + B)$. Dakle,

$$(A + B)v = \alpha(A + B)v, \quad \text{odnosno,} \quad Av = \alpha(A + B)v - Bv.$$

Odatle je

$$(A - \alpha(A)I)v = -\left(B - [\alpha(A + B) - \alpha(A)]I\right)v,$$

dakle, za svako $k \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$(A - \alpha(A)I)^k v = (-1)^k \left(B - [\alpha(A + B) - \alpha(A)]I\right)^k v.$$

Međutim, $V = V_{(\alpha(A))}(A)$, pa postoji $k \in \mathbb{N}$ takav da je $(A - \alpha(A)I)^k v = 0$. Slijedi

$$\left(B - [\alpha(A + B) - \alpha(A)]I\right)^k v = 0.$$

To znači da je $\alpha(A + B) - \alpha(A)$ svojstvena vrijednost operatora B. Ali $\alpha(B)$ je po pretpostavci jedina svojstvena vrijednost operatora B, pa zaključujemo da je $\alpha(A+B) - \alpha(A) = \alpha(B)$, odnosno,

$\alpha(A+B)=\alpha(A)+\alpha(B)$. Dakle, $\alpha:\mathfrak{g}\to K$ je linearni funkcional i za svako $v\in V$ i svako $A\in\mathfrak{g}$ postoji $k\in\mathbb{N}$ takav da je $(A-\alpha(A)I)^k v=0$. Time je dokazano da je $V=V_{(\alpha)}(\mathfrak{g})$, dakle, dokazana je prva tvrdnja teorema 4.1.4.

Neka je $\alpha\in\mathfrak{g}^*\setminus\{0\}$. Izaberimo $A_0\in\mathfrak{g}$ takav da je $\alpha(A_0)\neq 0$. Tada je

$$V_{(\alpha)}(\mathfrak{g})=\bigcap_{A\in\mathfrak{g}} V_{(\alpha(A))}(A)\subseteq V_{(\alpha(A_0))}(A_0)\subseteq V_*(A_0).$$

No prema teoremu 4.1.3. je $V_*(A)\subseteq V_*(\mathfrak{g})\ \ \forall A\in\mathfrak{g}$. Zaključujemo da je $V_{(\alpha)}(\mathfrak{g})\subseteq V_*(\mathfrak{g})$. Kako to vrijedi za svaki $\alpha\in\mathfrak{g}^*\setminus\{0\}$, dobivamo inkluziju

$$\sum_{\alpha\in\mathfrak{g}^*\setminus\{0\}} V_{(\alpha)}(\mathfrak{g})\subseteq V_*(\mathfrak{g}). \tag{4.11}$$

Prema prvoj tvrdnji teorema je

$$V=V_{(0)}(\mathfrak{g})\dot{+}\sum_{\alpha\in\mathfrak{g}^*\setminus\{0\}}\dot{+}V_{(\alpha)}(\mathfrak{g}),$$

a prema teoremu 4.1.3. je $V=V_{(0)}(\mathfrak{g})\dot{+}V_*(\mathfrak{g})$. To pokazuje je inkluzija u (4.11) zapravo jednakost, odnosno, dokazana je i druga tvrdnja teorema 4.1.4.

Ako je $\mathfrak{h}$ nilpotentna podalgebra neke Liejeve algebre $\mathfrak{g}$, onda je $\mathfrak{g}$ $\mathfrak{h}-$modul u odnosu na restrikciju $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}|\mathfrak{h}$ adjungirane reprezentacije, pa je za svaki linearan funkcional $\alpha\in\mathfrak{h}^*$ (takav da je $[\mathfrak{h},\mathfrak{h}]\subseteq\operatorname{Ker}\alpha$) dobro definiran potprostor $\mathfrak{g}_{(\alpha)}(\mathrm{ad}\,\mathfrak{h})$ od $\mathfrak{g}$. Taj ćemo potprosrtor označavati kraće sa $\mathfrak{g}_{(\alpha)}(\mathfrak{h})$, a pisat ćemo i $\mathfrak{g}_*(\mathfrak{h})$ umjesto $\mathfrak{g}_*(\mathrm{ad}\,\mathfrak{h})$. Imamo tada

$$\mathfrak{g}=\sum_{\alpha\in\mathfrak{h}^*}\dot{+}\,\mathfrak{g}_{(\alpha)}(\mathfrak{h}). \tag{4.12}$$

Nadalje, dokazuje se da vrijedi

$$\left[\mathfrak{g}_{(\alpha)}(\mathfrak{h}),\mathfrak{g}_{(\beta)}(\mathfrak{h})\right]\subseteq\mathfrak{g}_{(\alpha+\beta)}(\mathfrak{h}),\qquad\forall\alpha,\beta\in\mathfrak{h}^*. \tag{4.13}$$

4.2 Unutarnji automorfizmi realne reduktivne Liejeve algebre

U ostaku ovog poglavlja $\mathfrak{g}_0$ je realna reduktivna Liejeva algebra i $G_0 = \mathrm{Int}(\mathfrak{g}_0)$ njezina grupa unutarnjih automorfizama. Tada je $\mathrm{ad}\,\mathfrak{g}_0 \cong [\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_0]$ Liejeva algebra od G_0.

Teorem 4.2.1. (**Cartanova dekompozicija**) *Neka je K_0 neka maksimalna kompaktna podgrupa od G_0. Postoji jedinstven involutivni automorfizam Θ Liejeve grupe G_0 takav da je*

$$K_0 = G_0^{\Theta} = \{k \in G_0;\ \Theta(k) = k\}.$$

Diferencijal od Θ je involutivni automorfizam $\tilde{\vartheta}$ Liejeve algebre $[\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_0] \cong \mathrm{ad}\,\mathfrak{g}_0$. Stavimo

$$\tilde{\mathfrak{p}}_0 = \{x \in [\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_0];\ \tilde{\vartheta}(x) = -x\}, \qquad P_0 = \{\mathrm{e}^{\mathrm{ad}\,x};\ x \in \tilde{\mathfrak{p}}_0\}.$$

Tada je preslikavanje $(k, x) \mapsto k\mathrm{e}^{ad\,x}$ bianalitički difeomorfizam sa $K_0 \times \tilde{\mathfrak{p}}_0$ na G_0. Posebno, P_0 je zatvorena podmnogostrukost od G_0 i $x \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{ad}\,x}$ je bianalitički difeomorfizam sa $\tilde{\mathfrak{p}}_0$ na P_0. Nadalje, Liejeva algebra od K_0, shvaćena kao podalgebra od $[\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_0] \cong \mathrm{ad}\,\mathfrak{g}_0$, je

$$\tilde{\mathfrak{k}}_0 = \{x \in [\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_0];\ \tilde{\vartheta}(x) = x\} \qquad \textit{i vrijedi} \qquad [\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_0] = \tilde{\mathfrak{k}}_0 \dotplus \tilde{\mathfrak{p}}_0.$$

Cartanova dekompozicija realne reduktivne Liejeve algebre $\mathfrak{g}_0$ je uređen par $(\mathfrak{k}_0, \mathfrak{p}_0)$, takav da vrijedi

(*a*) $\mathfrak{k}_0$ je Liejeva podalgebra od $\mathfrak{g}_0$ takva da je $\tilde{\mathfrak{k}}_0 = \mathfrak{k}_0 \cap [\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_0]$ Liejeva algebra neke maksimalne kompaktne podgrupe K_0 od G_0.

(*b*) $\mathfrak{p}_0$ je potprostor od $\mathfrak{g}_0$, takav da uz oznake iz (*a*) i iz teorema 4.2.1. vrijedi $\tilde{\mathfrak{p}}_0 = \mathfrak{p}_0 \cap [\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_0]$.

(*c*) $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{k}_0 \dotplus \mathfrak{p}_0$.

U daljnjem je fiksirana neka Cartanova dekompozicija $(\mathfrak{k}_0, \mathfrak{p}_0)$ od $\mathfrak{g}_0$. Nadalje, sa K_0 označavamo pripadnu maksimalnu kompaktnu podgrupu od G_0 s Liejevom algebrom $\mathrm{ad}\,\mathfrak{k}_0 \cong \mathfrak{k}_0 \cap [\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_0]$. Neka su $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{k}$ i $\mathfrak{p}$ kompleksifikacije od $\mathfrak{g}_0$, $\mathfrak{k}_0$ i $\mathfrak{p}_0$. Iz svojstava (*a*), (*b*) i (*c*) lako se provjerava da vrijedi

$$[\mathfrak{k}, \mathfrak{k}] \subseteq \mathfrak{k}, \qquad [\mathfrak{k}, \mathfrak{p}] \subseteq \mathfrak{p}, \qquad [\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] \subseteq \mathfrak{k}.$$

Dakle, ako je $\vartheta : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ linearno preslikavanje definirano sa $\vartheta|\mathfrak{k} = I_{\mathfrak{k}}$ i $\vartheta|\mathfrak{p} = -I_{\mathfrak{p}}$ onda je ϑ involutivni automorfizam Liejeve algebre $\mathfrak{g}$. Označimo sa $G = \mathrm{Int}(\mathfrak{g})$ grupu automorfizama Lijeve algebre $\mathfrak{g}$. Tada je $\mathrm{ad}\,\mathfrak{g} \cong [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ Liejeva algebra od G, pa G možemo shvaćati kao kompleksifikaciju Liejeve grupe G_0. Ako je $\mathfrak{s}$ realna ili kompleksna Liejeva podalgebra od $\mathfrak{g}$, sa $\exp \mathrm{ad}\,\mathfrak{s}$ ćemo označavati povezanu Liejevu podgrupu od G s Liejevom algebrom $\mathrm{ad}\,\mathfrak{s}$.

Teorem 4.2.2. $\mathfrak{g}_u = \mathfrak{k}_0 \dotplus i\mathfrak{p}_0$ *je realna forma Liejeve algebre* $\mathfrak{g}$ *i* $G_u = \exp \mathrm{ad}\mathfrak{g}_u$ *je maksimalna kompaktna podgrupa od G. Cartanova dekompozicija od G je (realno) bianalitički difeomorfizam $(g, \mathrm{ad}\,x) \mapsto g\mathrm{e}^{\mathrm{ad}\,x}$ sa $G_u \times \mathrm{ad}\,i\mathfrak{g}_u$ na G.*

Kao što smo definirali u prethodnom odjeljku, element $x \in \mathfrak{g}$ zove se **poluprost** ako je operator $\mathrm{ad}\,x$ poluprost, odnosno, dijagonalizabilan. Element $x \in \mathfrak{g}$ zove se **eliptički** ako je poluprost i ako je $Sp(\mathrm{ad}\,x) \subseteq i\mathbb{R}$. Element $x \in \mathfrak{g}$ zove se **realno poluprost** ako je poluprost i ako je $Sp(\mathrm{ad}\,x) \subseteq \mathbb{R}$.

Zadatak 4.2.1. *Dokažite:*

(*a*) *Svaki element $x \in \mathfrak{g}_u$ (i, posebno, svaki element $x \in \mathfrak{k}_0$) je eliptički.*

(*b*) *Svaki element $x \in i\mathfrak{g}_u$ (i, posebno, svaki element $x \in \mathfrak{p}_0$) je realno poluprost.*

Neka je K_ϑ podgrupa svih elemenata $a \in G$ koji komutiraju s automorfizmom ϑ, tj.

$$K_\vartheta = \{a \in G;\ a\vartheta = \vartheta a\}.$$

Tada je K_ϑ zatvorena (dakle, Liejeva) podgrupa od G. Potprostori $\mathfrak{k}$ i $\mathfrak{p}$ očito su K_ϑ−stabilni. Posebno, imamo reprezentaciju

$$K_\vartheta \longrightarrow \mathrm{GL}(\mathfrak{p})$$

grupe K_ϑ na prostoru $\mathfrak{p}$.

Svaki automorfizam $\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ inducira automorfizam $a \mapsto \varphi a \varphi^{-1}$ grupe G. Taj ćemo automorfizam označavati sa $a \mapsto a^\varphi$. Posebno, $a \mapsto a^\vartheta = \vartheta a \vartheta$ je involutivni automorfizam grupe G. Naravno, $K_\vartheta = \{a \in G;\ a^\vartheta = a\}$.

Ako je $\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$, onda za $x \in \mathfrak{g}$ vrijedi $\varphi(\mathrm{ad}\,x)\varphi^{-1} = \mathrm{ad}\,\varphi(x)$. Posebno je $\vartheta(\mathrm{ad}\,x)\vartheta = \mathrm{ad}\,\vartheta(x)$. Nadalje, za $x \in \mathfrak{g}$, za unutarnji automorfizam $a = \mathrm{e}^{\mathrm{ad}\,x}$ i za $\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ imamo

$$a^\varphi = \varphi\left(\mathrm{e}^{\mathrm{ad}\,x}\right)\varphi^{-1} = \mathrm{e}^{\varphi(\mathrm{ad}\,x)\varphi^{-1}} = \mathrm{e}^{\mathrm{ad}\,\varphi(x)}.$$

Neka je u daljnjem $\mathfrak{a}_0$ maksimalna komutativna podalgebra od $\mathfrak{g}_0$ sadržana u $\mathfrak{p}_0$ i neka je $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}$ njezina kompleksifikacija. Stavimo $r_0 = \dim_{\mathbb{C}}(\mathrm{ad}\,\mathfrak{a})$ i $A = \exp \mathrm{ad}\,\mathfrak{a}$. Tada je $A \subseteq G$ kompleksan torus izomorfan sa $(\mathbb{C}^*)^{r_0}$. Dakle, ako stavimo

$$F = \{a \in A;\ a^2 = I_\mathfrak{g}\},$$

onda je F konačna komutativna grupa reda 2^{r_0} izomorfna grupi $\mathbb{Z}_2^{r_0}$.

Stavimo u daljnjem $K = \exp \mathrm{ad}\,\mathfrak{k}$. Tada je očito K komponenta povezanosti jedinice u grupi K_ϑ. Nadalje, K je kompleksifikacija kompaktne grupe $K_0 = \exp \mathrm{ad}\,\mathfrak{k}_0$, dakle, K_0 je maksimalna kompaktna podgrupa od K. Još dva teorema navodimo bez dokaza:

Teorem 4.2.3. *Vrijedi $G_u = KA_uK = \{kak';\ k, k' \in K,\ a \in A_u\}$, gdje je $A_u = \exp \mathrm{ad}\, i\mathfrak{a}_0$.*

Teorem 4.2.4. *U povezanoj poluprostoj grupi maksimalne kompaktne grupe su međusobno konjugirane i svaka je jednaka svom normalizatoru.*

Propozicija 4.2.5. *Vrijedi $F \subseteq K_\vartheta$. Posebno, grupa F normalizira grupu K. Nadalje, vrijedi $K_\vartheta = FK = KF$.*

Dokaz: Budući da je $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}$, imamo $\vartheta(x) = -x$ za svaki $x \in \mathfrak{a}$. Odatle slijedi da je $a^\vartheta = a^{-1}$ za svaki $a \in A$. Ako je $a \in F$, onda je $a^2 = I_\mathfrak{g}$, dakle, $a = a^{-1}$, pa slijedi $a^\vartheta = a$, odnosno, $a \in K_\vartheta$. Time dokazano da je $F \subseteq K_\vartheta$.

Neka je $a \in K_\vartheta$ i neka je $a = b\mathrm{e}^{\mathrm{ad}\,x}$ njegova Cartanova dekompozicija, odnosno, $b \in G_u$ i $x \in i\mathfrak{g}_u$. Tada imamo $a^\vartheta = b^\vartheta \mathrm{e}^{\vartheta(\mathrm{ad}\,x)\vartheta}$, a kako je $a = a^\vartheta$ iz jedinstvenosti Cartanove dekompozicije slijedi

$$b = b^\vartheta \qquad \text{i} \qquad \mathrm{ad}\,x = \vartheta(\mathrm{ad}\,x)\vartheta) = \mathrm{ad}\,\vartheta(x).$$

Odatle slijedi da je $\mathrm{ad}\,x \in \mathrm{ad}\,i\mathfrak{k}_0 \subseteq \mathrm{ad}\,\mathfrak{k}$, dakle, $\mathrm{e}^{\mathrm{ad}\,x} \in K$. Prema teoremu 4.2.3. možemo pisati $b = b_1cb_2$, gdje su $b_1, b_2 \in K$ i $c \in A_u$. Budući da je $b_1^\vartheta = b_1$ i $b_2^\vartheta = b_2$, imamo

$$b_1cb_2 = b = b^\vartheta = b_1^\vartheta c^\vartheta b_2^\vartheta = b_1c^\vartheta b_2.$$

Odatle je $c^\vartheta = c$, a kako je $c \in A_u \subseteq \exp \mathrm{ad}\,\mathfrak{a}$, imamo $c^\vartheta = c^{-1}$. To pokazuje da je

$$c^2 = c^\vartheta c = c^{-1}c = I_\mathfrak{g} \qquad \Longrightarrow \qquad c \in F.$$

Odatle slijedi da je $K_\vartheta = KFK$, a kako F normalizira K, imamo $K_\vartheta = KF = FK$.

Stavimo sada
$$G_{\mathbb{R}} = \{a \in G;\ a\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g}_0\}.$$
Zatvorena podgrupa $G_{\mathbb{R}}$ nije nužno povezana a njezina je komponenta povezanosti $G_0 = \exp \operatorname{ad} \mathfrak{g}_0$. Grupa F u odnosu na grupu $G_{\mathbb{R}}$ igra sličnu ulogu kao i u odnosu na K_ϑ :

Propozicija 4.2.6. *Vrijedi $F \subseteq G_{\mathbb{R}}$, tako da F normalizira komponentu povezanosti G_0. Nadalje, $G_{\mathbb{R}} = FG_0 = G_0F$.*

Dokaz: Neka je $\tau : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ kompleksna konjugacija određena realnom formom $\mathfrak{g}_0$, tj. $\tau|\mathfrak{g}_0 = I_{\mathfrak{g}_0}$ i $\tau|i\mathfrak{g}_0 = -I_{i\mathfrak{g}_0}$. Tada je τ involutivni automorfizam realne Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ i ako je $a \mapsto a^\tau$ odgovarajući automorfizam grupe G, onda je
$$G_{\mathbb{R}} = \{a \in G;\ a^\tau = a\}.$$
Budući da je $\tau|i\mathfrak{a}_0 = -I_{i\mathfrak{a}_0}$ i budući da je $F \subseteq \exp \operatorname{ad} i\mathfrak{a}_0$, imamo $a = a^{-1} = a^\tau$ za svaki $a \in F$. To znači da je $F \subseteq G_{\mathbb{R}}$.

Neka je $a \in G_{\mathbb{R}}$. Tada je $a\mathfrak{k}_0 \subseteq \mathfrak{g}_0$. Prema Cartanovom teoremu o konjugiranosti maksimalnih kompaktnih podgrupa postoji $b \in G_0$ takav da je $ba\mathfrak{k}_0 = \mathfrak{k}_0$. Tada je $ba \in K_\vartheta \cap G_{\mathbb{R}}$, dakle, prema propoziciji 4.2.5. postoji $c \in F$ takav da je $cba \in K \cap G_0$. Prema tome, da bismo dokazali da je $a \in FG_0$, dovoljno je dokazati da je $K \cap G_0 = K_0$, gdje je $K_0 = \exp \operatorname{ad} \mathfrak{k}_0 \subseteq G_0$. Međutim, podgrupa $K \cap G_{\mathbb{R}}$ očito normalizira podgrupu K_0. Budući da je K_0 maksimalna kompaktna podgrupa od K, prema drugoj tvrdnji u teoremu 4.2.4. zaključujemo da vrijedi jednakost $K \cap G_0 = K_0$.

Neka je sada $\mathfrak{h}$ kompleksna nilpotentna podalgebra od $\mathfrak{g}$. Tada prema rezultatima odjeljka 4.1. imamo Fittingovu dekompoziciju
$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{(0)}(\mathfrak{h}) \dotplus \mathfrak{g}_*(\mathfrak{h}),$$
pri čemu su $\mathfrak{g}_{(0)}(\mathfrak{h})$ i $\mathfrak{g}_*(\mathfrak{h})$ $(\operatorname{ad} \mathfrak{h})-$stabilni potprostori, svi operatori u $(\operatorname{ad} \mathfrak{h})|\mathfrak{g}_{(0)}(\mathfrak{h})$ su nilpotentni i sve težine reprezentacije $h \mapsto (\operatorname{ad} h)|\mathfrak{g}_*(\mathfrak{h})$ od $\mathfrak{h}$ su različite od 0. Nadalje, prema (4.13) imamo
$$[\mathfrak{g}_{(0)}(\mathfrak{h}), \mathfrak{g}_{(0)}(\mathfrak{h})] \subseteq \mathfrak{g}_{(0)}(\mathfrak{h}) \qquad \text{i} \qquad [\mathfrak{g}_{(0)}(\mathfrak{h}), \mathfrak{g}_*(\mathfrak{h})] \subseteq \mathfrak{g}_*(\mathfrak{h}).$$
Liejeva podalgebra $\mathfrak{g}_{(0)}(\mathfrak{h})$ i potprostor $\mathfrak{g}_*(\mathfrak{h})$ mogu se karakterizirati tako da postoji neprazan Zariski otvoren podskup $U \subseteq \mathfrak{h}$ takav da je za svaki $x \in U$ operator $(\operatorname{ad} x)|\mathfrak{g}_{(0)}(\mathfrak{h})$ nilpotentan, a operator $(\operatorname{ad} x)|\mathfrak{g}_*(\mathfrak{h})$ je regularan; dakle, za $x \in U$ gornja Fittingova dekompozicija je upravo Fittingova dekompozicija za operator $\operatorname{ad} x$. Zariski otvoren skup U je komplement unije jezgara težina $\neq 0$ reprezentacije $h \mapsto \operatorname{ad} h$ od $\mathfrak{h}$ na $\mathfrak{g}$.

Lema 4.2.7. *Neka je $\mathfrak{h}$ kompleksna nilpotentna Liejeva podalgebra od $\mathfrak{g}$ sadržana u $\mathfrak{p}$. (Napomenimo, da je tada $\mathfrak{h}$ komutativna, jer je $[\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] \subseteq \mathfrak{k}$). Tada su podalgebra $\mathfrak{g}_{(0)}(\mathfrak{h})$ i potprostor $\mathfrak{g}_*(\mathfrak{h})$ $\vartheta-$stabilni, pa vrijedi*
$$\mathfrak{p} = \mathfrak{p} \cap \mathfrak{g}_{(0)}(\mathfrak{h}) \dotplus \mathfrak{p} \cap \mathfrak{g}_*(\mathfrak{h}) \qquad i \qquad \mathfrak{k} = \mathfrak{k} \cap \mathfrak{g}_{(0)}(\mathfrak{h}) \dotplus \mathfrak{k} \cap \mathfrak{g}_*(\mathfrak{h}).$$

Dokaz: Neka je $x \in \mathfrak{h}$ takav da je $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{(0)}(\mathfrak{h}) \dotplus \mathfrak{g}_*(\mathfrak{h})$ Fittingova dekompozicija za operator $\operatorname{ad} x$. Tada je to ujedno Fittingova dekompozicija i za operator $(\operatorname{ad} x)^2$, a kako $(\operatorname{ad} x)^2$ komutira sa ϑ, slijedi tvrdnja.

Za komutativnu podalgebra $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{p}$ očito vrijedi $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}_{(0)}(\mathfrak{h}) \cap \mathfrak{p}$. Takva se podalgebra zove **Cartanov potprostor** od $\mathfrak{p}$ ako vrijedi jednakost $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_{(0)}(\mathfrak{h}) \cap \mathfrak{p}$. Cartanovi potprostori postoje:

Lema 4.2.8. $\mathfrak{a}$ *je Cartanov potprostor od* $\mathfrak{p}$.

Dokaz: Svi operatori iz $\operatorname{ad} \mathfrak{a}$ su dijagonalizabilni i međusobno komutiraju. Odatle slijedi da je $\operatorname{ad}|\mathfrak{a}$ potpuno reducibilna reprezentacija od $\mathfrak{a}$. No tada je $\mathfrak{g}_{(0)}(\mathfrak{a})$ centralizator od $\mathfrak{a}$ u $\mathfrak{g}$. Kako je $\mathfrak{a}$ maksimalna komutativna podalgebra od $\mathfrak{p}$, slijedi $\mathfrak{a} = \mathfrak{g}_{(0)}(\mathfrak{a}) \cap \mathfrak{p}$.

Za svaki $0 \neq x \in \mathfrak{p}$ potprostor $\mathbb{C}x$ je komutativna podalgebra sadržana u $\mathfrak{p}$. Pisat ćemo kraće $\mathfrak{g}_{(0)}(x)$ i $\mathfrak{g}_*(x)$ umjesto $\mathfrak{g}_{(0)}(\mathbb{C}x)$ i $\mathfrak{g}_*(\mathbb{C}x)$. Stavimo

$$q = \min\{\dim \mathfrak{g}_{(0)}(x) \cap \mathfrak{p};\ x \in \mathfrak{p}\} \qquad \text{i} \qquad \mathcal{Q} = \{x \in \mathfrak{p};\ \dim \mathfrak{g}_{(0)}(x) \cap \mathfrak{p} = q\}.$$

Primijetimo da je skup $\mathcal{Q}$ stabilan u odnosu na djelovanje grupe K_ϑ, dakle, i grupe K.

Zadatak 4.2.2. *Dokažite da je* $\dim \mathfrak{g}_{(0)}(x) \cap \mathfrak{p}$ *stupanj najniže neiščezavajuće potencije u svojstvenom polinomu operatora* $(\mathrm{ad}\, x)^2|\mathfrak{p}$.

Prema tome, $\mathcal{Q}$ je neprazan Zariski otvoren podskup od $\mathfrak{p}$, dakle, gust u $\mathfrak{p}$ i povezan.

Za bilo koji $x \in \mathfrak{p}$ iz $[\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] \subseteq \mathfrak{k}$ i $[\mathfrak{k}, \mathfrak{p}] \subseteq \mathfrak{p}$ slijedi da su potprostori $\mathfrak{g}_{(0)}(x) \cap \mathfrak{p}$ i $\mathfrak{g}_*(x) \cap \mathfrak{p}$ invarijantni u odnosu na operator $(\mathrm{ad}\, y)^2$ za svaki $y \in \mathfrak{g}_{(0)}(x) \cap \mathfrak{p}$. Stavimo

$$\mathcal{Q}_x = \{y \in \mathcal{Q} \cap \mathfrak{g}_{(0)}(x);\ \text{operator } (\mathrm{ad}\, y)^2|\,(\mathfrak{g}_*(x) \cap \mathfrak{p}) \text{ je regularan}\}.$$

Lema 4.2.9. *Za svaki* $x \in \mathfrak{p} \setminus \{0\}$ *skup* $\mathcal{Q}_x$ *je neprazan Zariski otvoren podskup od* $\mathfrak{g}_{(0)}(x) \cap \mathfrak{p}$. *Nadalje, skup* $K\mathcal{Q}_x$ *je otvoren* (*u običnom smislu*) *u* $\mathcal{Q}$.

Dokaz: Stavimo

$$P_x = \{y \in \mathfrak{g}_{(0)}(x) \cap \mathfrak{p};\ \text{operator } (\mathrm{ad}\, y)^2|\,(\mathfrak{g}_*(x) \cap \mathfrak{p}) \text{ je regularan}\}.$$

Tada je očito $x \in P_x$, dakle, skup P_x je neprazan. No on je očito Zariski otvoren. Promatrajmo preslikavanje

$$\pi : K \times P_x \longrightarrow \mathfrak{p}, \qquad \pi(a, y) = ay.$$

Lako se provjerava da diferencijal od π u točki (e, y) preslikava tangencijalni prostor $T_{(e,y)}(K \times P_x)$ na $\mathfrak{g}_{(0)}(x) \cap \mathfrak{p} + [y, \mathfrak{k}] \subseteq \mathfrak{p}$. Međutim, $[y, \mathfrak{g}_*(x) \cap \mathfrak{p}] \subseteq \mathfrak{k}$, a budući da je operator $(\mathrm{ad}\, y)^2|\mathfrak{g}_*(x) \cap \mathfrak{p}$ regularan, slijedi $\mathfrak{g}_*(x) \cap \mathfrak{p} \subseteq [y, \mathfrak{k}]$. Prema tome, diferencijal od π u točki (e, y) je surjektivan. No odatle slijedi da je KP_x otvoren podskup od $\mathfrak{p}$. S druge strane, $\mathcal{Q}$ je Zariski otvoren neprazan podskup od $\mathfrak{p}$, dakle, gust je u $\mathfrak{p}$. Slijedi da je $\mathcal{Q} \cap KP_x \neq \emptyset$. Kako je $\mathcal{Q}$ stabilan za djelovanje grupe K, slijedi i da je $\mathcal{Q} \cap P_x \neq \emptyset$. Međutim, očito je $\mathcal{Q} \cap P_x = \mathcal{Q}_x$. Dakle, $\mathcal{Q}_x$ je neprazan podskup od $\mathfrak{g}_{(0)}(x) \cap \mathfrak{p}$. Time je dokazana prva tvrdnja, budući da se lako vidi da je skup $\mathcal{Q}_x$ Zariski otvoren u $\mathfrak{g}_{(0)}(x) \cap \mathfrak{p}$. U ovom zaključivanju možemo zamijeniti P_x sa $\mathcal{Q}_x$, pa slijedi i druga tvrdnja.

Kao što smo definirali u odjeljku 3.10. element $x \in \mathfrak{g}$ zove se **nilpotentan**, ako je $x \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ i operator $\mathrm{ad}\, x$ je nilpotentan. Svaki se element x jedinstveno piše u obliku $x = x_s + x_n$, gdje je x_s poluprost, x_n je nilpotentan i $[x_s, x_n] = 0$ (Jordan−Chevalleyev rastav).

Zadatak 4.2.3. *Neka je* $x \in \mathfrak{p}$. *Dokažite da su* $x_s, x_n \in \mathfrak{p}$.

Uputa: Iskoristite $\vartheta(x) = -x$.

U ovom ćemo poglavlju sa $\mathcal{S}$ označavati skup svih poluprostih elemenata u $\mathfrak{p}$. Taj je skup K_ϑ−stabilan, dakle, i K−stabilan.

Teorem 4.2.10. *Svi su Cartanovi potprostori od* $\mathfrak{p}$ *međusobno* K−*konjugirani* (*dakle, i* K_ϑ−*konjugirani*) *dakle, svi su oblika* $a\mathfrak{a}$ *za neki* $a \in K$. *Element* $x \in \mathfrak{p}$ *je poluprost ako i samo ako je sadržan u nekom Cartanovom potprostoru od* $\mathfrak{p}$. *Posebno,*

$$\mathcal{S} = K\mathfrak{a} = \bigcup_{k \in K} k\mathfrak{a} = \bigcup_{k \in K_\vartheta} k\mathfrak{a}.$$

Dokaz: Neka je $\mathfrak{h}$ bilo koji Cartanov potprostor od $\mathfrak{p}$ i neka $x \in \mathfrak{h}$ takav da je $\mathfrak{g}_{(0)}(x) = \mathfrak{g}_{(0)}(\mathfrak{h})$ i $\mathfrak{g}_*(x) = \mathfrak{g}_*(\mathfrak{h})$. Tada je $\mathfrak{g}_{(0)}(x) \cap \mathfrak{p} = \mathfrak{h}$, dakle, skup $\mathcal{Q}_x \subseteq \mathcal{Q} \cap \mathfrak{h}$ je neprazan. Ako je $y \in \mathcal{Q} \cap \mathfrak{h}$ onda je

$$\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_{(0)}(\mathfrak{h}) \cap \mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{g}_{(0)}(y) \cap \mathfrak{p},$$

dakle, operator $(\operatorname{ad} y)^2$ je nilpotentan na $\mathfrak{h}$. Međutim, za $y \in \mathcal{Q}_x$ operator $(\operatorname{ad} y)^2$ je regularan na $\mathfrak{g}_*(\mathfrak{h}) \cap \mathfrak{p} = \mathfrak{g}_*(x) \cap \mathfrak{p}$. Budući da je $\dim \mathfrak{g}_{(0)}(y) \cap \mathfrak{p} = q$ za svaki $y \in \mathcal{Q}_x$, imamo

$$q = \dim \mathfrak{h}, \qquad \mathcal{Q} \cap \mathfrak{h} = \mathcal{Q}_x \qquad \text{i} \qquad \mathfrak{g}_{(0)}(y) \cap \mathfrak{p} = \mathfrak{h} \quad \forall y \in \mathcal{Q} \cap \mathfrak{h}.$$

Ako je i $\mathfrak{h}_1$ Cartanov potprostor od $\mathfrak{p}$ vrijedi sljedeće „*svojstva presjeka*":

$$K(\mathcal{Q} \cap \mathfrak{h}) \cap K(\mathcal{Q} \cap \mathfrak{h}_1) \neq \emptyset \qquad \Longrightarrow \qquad K(\mathcal{Q} \cap \mathfrak{h}) = K(\mathcal{Q} \cap \mathfrak{h}_1).$$

Doista, $K(\mathcal{Q}\cap\mathfrak{h})\cap K(\mathcal{Q}\cap\mathfrak{h}_1) \neq \emptyset$ znači da je neki element od $\mathcal{Q}\cap\mathfrak{h}$ $K-$konjugiran nekom elementu od $\mathcal{Q} \cap \mathfrak{h}_1$. No tada su prema lemi 4.2.9. $\mathfrak{h}$ i $\mathfrak{h}_1$ $K-$konjugirani, dakle, i presjeci $\mathcal{Q} \cap \mathfrak{h}$ i $\mathcal{Q} \cap \mathfrak{h}_1$ su $K-$konjuguirani, odnosno, vrijedi $K(\mathcal{Q} \cap \mathfrak{h}) = K(\mathcal{Q} \cap \mathfrak{h}_1)$.

Za Cartanov potprostor $\mathfrak{a}$ dokazat ćemo da vrijedi $\mathcal{Q} = K(\mathcal{Q} \cap \mathfrak{a})$. U tu je svrhu dovoljno dokazati da je $\mathfrak{g}_{(0)}(x) \cap \mathfrak{p} = \mathfrak{h}_1$ Cartanov potprostor od $\mathfrak{p}$ za svaki $x \in \mathcal{Q}$. Doista, ako je tako, onda imamo

$$\mathcal{Q} = \bigcup K(\mathcal{Q} \cap \mathfrak{h})$$

gdje se unija uzima preko svih Cartanovih potprostora $\mathfrak{h}$ od $\mathfrak{p}$. Skup $\mathcal{Q}$ je Zariski otvoren, dakle, i povezan, pa je nužno $\mathcal{Q} = K(\mathcal{Q} \cap \mathfrak{a})$. Doista, u suprotnom bismo $\mathcal{Q}$ mogli napisati kao uniju nepraznih disjunktnih otvorenih (u običnoj topologiji) skupova. To slijedi iz malo prije dokazanog svojstva presjeka, budući da je $K(\mathcal{Q} \cap \mathfrak{h})$ prema lemi 4.2.9. otvoren skup (u običnoj topologiji) u $\mathfrak{p}$.

Neka je $x \in \mathcal{Q}$. Da bismo dokazali da je $\mathfrak{g}_{(0)}(x) \cap \mathfrak{p}$ Cartanov potprostor od $\mathfrak{p}$, promotrimo Jordan$-$Chevalleyev rastav $x = x_s + x_n$. Tada je $\mathfrak{g}_{(0)}(x) = \mathfrak{g}_{(0)}(x_s)$ i $\mathfrak{g}_*(x) = \mathfrak{g}_*(x_s)$. No kako je element x_s poluprost, Fittingov potprostor $\mathfrak{g}_{(0)}(x) = \mathfrak{g}_{(0)}(\operatorname{ad} x_s)$ jednak je jezgri operatora $\operatorname{ad} x_s$, odnosno, to je centralizator $\mathfrak{g}^{x_s}$ od x_s u $\mathfrak{g}$. To pokazuje da je $\mathfrak{g}_{(0)}(x)$ reduktivna podalgebra u $\mathfrak{g}$.

Stavimo

$$R = \{y \in \mathfrak{g}_{(0)}(x);\ \text{operator } (\operatorname{ad} y)^2|\left(\mathfrak{g}_{(0)}(x) \cap \mathfrak{p}\right) \text{ nije nilpotentan}\}.$$

Tada je R otvoren skup, pa kako je $\mathcal{Q}_x$ gust u $\mathfrak{g}_{(0)}(x) \cap \mathfrak{p}$, slijedi da je $R \cap \mathcal{Q}_x \neq \emptyset$. To znači da je za svaki $y \in \mathfrak{g}_{(0)}(x) \cap \mathfrak{p}$ operator $(\operatorname{ad} y)|\mathfrak{g}_{(0)}(x)$ nilpotentan. Doista, ako $(\operatorname{ad} y)^2 n$ iščezava na $\mathfrak{g}_{(0)}(x) \cap \mathfrak{p}$, onda $(\operatorname{ad} y)^{2n+1}$ iščezava na $\mathfrak{g}_{(0)}(x) \cap \mathfrak{k}$, pa naša tvrdnja slijedi iz dekompozicije

$$\mathfrak{g}_{(0)}(x) = \mathfrak{g}_{(0)}(x) \cap \mathfrak{p} \dot{+} \mathfrak{g}_{(0)}(x) \cap \mathfrak{k}.$$

Neka je B_x Killingova forma na reduktivnoj podalgebri $\mathfrak{g}_{(0)}(x)$. Budući da je $\vartheta|\mathfrak{k} = I_{\mathfrak{k}}$ i $\vartheta|\mathfrak{p} = -I_{\mathfrak{p}}$, i budući da je forma B_x invarijantna u odnosu na svaki automorfizam Liejeve algebre $\mathfrak{g}_{(0)}(x)$, dakle, posebno, u odnosu na $\vartheta|\mathfrak{g}_{(0)}(x)$, vrijedi

$$B_x(y, v) = 0 \qquad \forall y \in \mathfrak{g}_{(0)}(x) \cap \mathfrak{p} \quad \text{i} \quad \forall v \in \mathfrak{g}_{(0)}(x) \cap \mathfrak{k}.$$

S druge strane, vrijedi

$$B_x(y, z) = 0 \qquad \forall y, z \in \mathfrak{g}_{(0)}(x) \cap \mathfrak{p}.$$

Naime, budući da je operator $(\operatorname{ad} u)|\mathfrak{g}_{(0)}(x)$ nilpotentan za svaki $u \in \mathfrak{g}_{(0)}(x) \cap \mathfrak{p}$, imamo

$$B_x(y + z, y + z) = B_x(y, y) = B_x(z, z) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad B_x(y, z) = 0.$$

Prema tome, presjek $\mathfrak{g}_{(0)}(x) \cap \mathfrak{p}$ je B_x−ortogonalan na čitavu $\mathfrak{g}_{(0)}(x)$, pa po Cartanovom kriteriju slijedi da je sadržan je u radikalu Liejeve algebre $\mathfrak{g}_{(0)}(x)$. No radikal reduktivne Liejeve algebre jednak je njezinom centru. Zaključujemo da je $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_{(0)}(x) \cap \mathfrak{p}$ komutativna Liejeva podalgebra. Budući da je operator $(\operatorname{ad} x)^2|\mathfrak{g}_*(x) \cap \mathfrak{p}$ regularan, slijedi $\mathfrak{g}_*(\mathfrak{h}) \cap \mathfrak{p} = \mathfrak{g}_*(x) \cap \mathfrak{p}$ i $\mathfrak{g}_{(0)}(\mathfrak{h}) \cap \mathfrak{p} = \mathfrak{h}$, a to znači da je $\mathfrak{h}$ Cartanov potprostor od $\mathfrak{p}$.

Sada lema 4.2.8. povlači da su svi Cartanovi potprostori oblika $k\mathfrak{a}$ za neki $k \in K$. Posebno, to znači da je svaki element svakog Cartanovog potprostora od $\mathfrak{p}$ poluprost, odnosno, unija svih Cartanovih potprostora sadržana je u $\mathcal{S}$.

Obratno, pretpostavimo da je $x \in \mathcal{S}$. Za $y \in \mathcal{Q}_x$ presjek $\mathfrak{g}_{(0)}(y) \cap \mathfrak{p}$ je Cartanov potprostor. Budući da je element x poluprost, $\mathfrak{g}_{(0)}(x)$ je centralizator $\mathfrak{g}^x$ od x. Posebno je $[x, y] = 0$, pa slijedi $x \in \mathfrak{g}_{(0)}(y) \cap \mathfrak{p}$. Dakle, svaki $x \in \mathcal{S}$ sadržan je u nekom Cartanovom potprostoru od $\mathfrak{p}$. Time su sve tvrdnje teorema dokazane.

Iz dokaza teorema 4.2.10. neposredno slijedi:

Korolar 4.2.11. $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{p}$ *je Cartanov potprostor od* $\mathfrak{p}$ *ako i samo ako je* $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_{(0)}(x) \cap \mathfrak{p}$ *za neki* $x \in \mathcal{Q}$.

4.3 Nilpotentni elementi

U ovom poglavlju sa $\mathcal{N}$ označavamo skup svih nilpotentnih elemenata u $\mathfrak{p}$.

$S-$trojka (h, x, y) zove se **normalna** $S-$**trojka** ako su $x, y \in \mathfrak{p}$ i $h \in \mathfrak{k}$. TDS$-$podalgebra $\mathfrak{s}$ zove se **normalna TDS$-$podalgebra** ako je $\vartheta\mathfrak{s} = \mathfrak{s}$, ali $\mathfrak{s} \not\subseteq \mathfrak{k}$. Naravno, TDS$-$podalgebra razapeta normalnom $S-$trojkom je normalna TDS$-$podalgebra. Vrijedi i obrat:

Zadatak 4.3.1. *Neka je $\mathfrak{s}$ normalna* TDS$-$*podalgebra. Dokažite da je $\mathfrak{s}$ razapeta normalnom $S-$trojkom.*

Uputa: Koristite činjenicu da su svi automorfizmi TDS$-$algebre unutarnji, pa su svi njezini involutivni automorfizmi različiti od identitete međusobno konjugirani.

Grupa K_ϑ (dakle, i grupa K) djeluje na skupu svih normalnih $S-$trojki, jer za normalnu $S-$trojku (h, x, y) i za $k \in K_\vartheta$ i (kh, kx, ky) je normlana $S-$trojka. Prema Jacobson$-$Morozovljevom teoremu 3.3.7. svaki je nilpotentan element $x \neq 0$ nilpozitivni element neke $S-$trojke. Nadalje, time je definirana bijekcija između svih klasa konjugiranosti nilpotentnih elemenata različitih od nule i svih klasa konjugiranosti TDS$-$podalgebri. U sadašnjoj situaciji imamo analogan (ali ne sasvim isti) rezultat:

Propozicija 4.3.1. *Svaki $0 \neq x \in \mathcal{N}$ je nilpozitivni element neke normalne $S-$trojke (h, x, y). Normalne $S-$trojke (h, x, y) i (h', x', y') su $K_\vartheta-$konjugirane (odnosno, $K-$konjugirane) ako i samo ako su njihovi nilpozitivni elementi x i x' $K_\vartheta-$konjugirani (odnosno, $K-$konjugirani).*

Dokaz: Prema Jacobson$-$Morozovljevom teoremu postoji $S-$trojka (h_0, x, y_0) u $\mathfrak{g}$. Stavimo $h_0 = h + h_1$, gdje je $h \in \mathfrak{k}$ i $h_1 \in \mathfrak{p}$. Tada je

$$2x = [h_0, x] = [h, x] + [h_1, x].$$

Kako je $[h, x] \in [\mathfrak{k}, \mathfrak{p}] \subseteq \mathfrak{p}$ i $[h_1, x] \in [\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] \subseteq \mathfrak{k}$, slijedi $[h, x] = 2x$ i $[h_1, x] = 0$.

Pišemo sada $y_0 = y_1 + y_2$, gdje je $y_1 \in \mathfrak{k}$ i $y_2 \in \mathfrak{p}$. Sada iz

$$h + h_1 = h_0 = [x, y_0] = [x, y_1] + [x, y_2], \qquad [x, y_1] \in [\mathfrak{k}, \mathfrak{p}] \subseteq \mathfrak{p} \qquad \text{i} \qquad [x, y_2] \in [\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] \subseteq \mathfrak{k}$$

slijedi

$$[x, y_1] = h_1 \qquad \text{i} \qquad [x, y_2] = h.$$

Dakle, $h \in \operatorname{Im} \operatorname{ad} x$.

Ujedno je $[h, x] = 2x$ pa prema korolaru 3.3.8. postoji jedinstven $y \in \mathfrak{g}$ takav da je (h, x, y) $S-$trojka. Za taj y pišemo

$$y = y_3 + y_4, \qquad y_3 \in \mathfrak{p}, \quad y_4 \in \mathfrak{k}.$$

Sada iz

$$-2y_3 - 2y_4 = -2y = [h, y] = [h, y_3] + [h, y_4], \qquad [h, y_3] \in [\mathfrak{k}, \mathfrak{p}] \subseteq \mathfrak{p} \qquad \text{i} \qquad [h, y_4] \in [\mathfrak{k}, \mathfrak{k}] \subseteq \mathfrak{k}$$

slijedi

$$[h, y_3] = -2y_3 \qquad \text{i} \qquad [h, y_4] = -2y_4.$$

Nadalje, iz

$$h = [x, y] = [x, y_3] + [x, y_4], \qquad [x, y_3] \in [\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] \subseteq \mathfrak{k} \qquad \text{i} \qquad [x, y_4] \in [\mathfrak{p}, \mathfrak{k}] \subseteq \mathfrak{p}$$

slijedi

$$[x, y_3] = h \qquad \text{i} \qquad [x, y_4] = 0.$$

Posebno, (h, x, y_3) je $S-$trojka. Sada iz jedinstvenosti u korolaru 3.3.8. slijedi da je $y = y_3$. Dakle, $y \in \mathfrak{p}$, odnosno, (h, x, y) je normalna $S-$trojka.

Pretpostavimo sada da su (h, x, y) i (h_1, x, y_1) normalne S−trojke. Stavimo $z = h_1 - h \in \mathfrak{k}$. Tada je $[x, z] = 0$, odnosno, $z \in \mathfrak{k}^x$ (centralizator od x u $\mathfrak{k}$). Iz jednakosti $[h, x] = 2x$ slijedi da je podalgebra $\mathfrak{k}^x$ invarijantna s obzirom na operator $\mathrm{ad}\, h$. Iz teorije reprezentacija TDS−algebri, primijenjene na TDS−podalgebru $\mathfrak{s} = \mathrm{span}\,\{h, x, y\}$ i na njezinu reprezentaciju $\mathrm{ad}|\mathfrak{s}$, znamo da je operator $\mathrm{ad}\, h$ poluprost, pa je i restrikcija $(\mathrm{ad}\, h)|\mathfrak{k}^x$ poluprost, odnosno, dijagonalizabilan operator. Nadalje, iz teorije reprezentacija TDS−algebri znamo da su svojstvene vrijednosti operatora $(\mathrm{ad}\, h)|\mathfrak{k}^x$ nenegativni cijeli brojevi (to su najveće težine reprezentacije $\mathrm{ad}|\mathfrak{s}$). Neka je $\mathfrak{k}^x_+ \subseteq \mathfrak{k}^x$ potprostor razapet svim svojstvenim vektorima operatora $(\mathrm{ad}\, h)|\mathfrak{k}^x$ sa strogo pozitivnim svojstvenim vrijednostima. Tada iz teorije reprezentacija TDS−algebri slijedi

$$\mathfrak{k}^x_+ = \mathfrak{k}^x \cap [x, \mathfrak{g}]$$

(„odbacivanje" trivijalne reprezentacije). Stoga iz $z = h_1 - h = [x, y_1 - y]$ slijedi da je $z \in \mathfrak{k}^x_+$. Budući da je operator $\mathrm{ad}\, h$ derivacija, $\mathfrak{k}^x_+$ je nilpotentna Liejeva algebra. Neka je U povezana Liejeva podgrupa od G s Liejevom algebrom $\mathrm{ad}\,\mathfrak{k}^x_+$. Tada je U unipotentna grupa i ona je zatvorena podgrupa od G prema propoziciji 3.3.11. Prema vrlo netrivijalnom teoremu u M. Rosenlicht, *On quotient varieties and the affine embedding of certain homogeneous spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. 101(1961),221−223, sve su U−orbite zatvorene. Posebno, Uh je zatvoren podskup od $h + \mathfrak{k}^x_+$. Tangencijalni prostor na tu orbitu u točki h jednak je $[h, \mathfrak{k}^x_+]$. Međutim, operator $(\mathrm{ad}\, h)|\mathfrak{k}^x_+$ je regularan, odnosno, $[h, \mathfrak{k}^x_+] = \mathfrak{k}^x_+$. Prema tome, $\dim Uh = \dim \mathfrak{k}^x_+ = \dim (h + \mathfrak{k}^x_+)$, pa slijedi da je orbita Uh i otvorena u $h + \mathfrak{k}^x_+$. Iz povezanosti slijedi da je $Uh = h + \mathfrak{k}^x_+$. Prema tome, postoji $a \in U$ takav da je $ah = h + z = h_1$. Međutim, $U \subseteq K \subseteq K_\vartheta$ i $a(h, x, y) = (h_1, x, ay)$. Dakle, (h_1, x, ay) i (h_1, x, y_1) su S−trojke, pa iz jedinstvenosti u korolaru 3.3.8. slijedi da je $y_1 = ay$. Dakle, $(h_1, x, y_1) = a(h, x, y)$.

Na taj način dobivamo dobro definirano preslikavanje $Kx \mapsto K(h, x, y)$ sa skupa K−orbita u $\mathcal{N} \setminus \{0\}$ u skup klasa K−konjugiranosti normalnih S−trojki i to je očito bijekcija. Isto vrijedi za K_ϑ umjesto K.

Napomena: Prethodna propozicija ne uspostavlja bijekciju između K_ϑ−orbita u $\mathcal{N} \setminus \{0\}$ i skupa klasa K_ϑ−konjugiranosti normalnih TDS−podalgebri, odnosno, nemamo rezultat analogan korolaru 3.3.14. Naime, u normalnoj S−trojki (h, x, y) elementi x i y ne moraju biti K_ϑ−konjugirani. Vidjet ćemo, međutim, da u slučaju glavnog nilpotentnog elementa x oni jesu K_ϑ−konjugirani. To je zapravo glavni razlog zašto se uvodi i promatra podgrupa K_ϑ.

Propozicija 4.3.2. *Normalne S−trojke su K_ϑ−konjugirane (odnosno, K−konjugirane) ako i samo ako su njihovi neutralni elementi K_ϑ−konjugirani (odnosno, K−konjugirani).*

Dokaz: Naravno, ukoliko su (h, x, y) i (h_1, x_1, y_1) normalne S−trojke koje su K_ϑ−konjugirane (odnosno K−konjugirane) onda su njihovi neutralni elementi h i h_1 K_ϑ−konjugirani (odnosno, K−konjugirani. Za dokaz obrata možemo pretpostaviti da je $h = h_1$. Dakle, treba dokazati da ako su (h, x, y) i (h, x_1, y_1) normalne S−trojke, onda su one K−konjugirane.

Neka su $\mathfrak{g}^h$, $\mathfrak{k}^h$ i $\mathfrak{p}^h$ centralizatori od h u $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{k}$ i $\mathfrak{p}$. Kako je $\vartheta h = h$, vrijedi $\mathfrak{g}^h = \mathfrak{k}^h \dotplus \mathfrak{p}^h$. Neka je $K^h \subseteq K$ povezana Liejeva podgrupa od G s Liejevom algebrom $\mathrm{ad}\,\mathfrak{k}^h$. Stavimo

$$\mathfrak{g}^2 = \{z \in \mathfrak{g};\ [h, z] = 2z\}, \qquad \mathfrak{k}^2 = \{z \in \mathfrak{k},\ [h, z] = 2z\}, \qquad \mathfrak{p}^2 = \{z \in \mathfrak{p},\ [h, z] = 2z\}.$$

Tada je $\mathfrak{g}^2 = \mathfrak{k}^2 \dotplus \mathfrak{p}^2$. Sada iz $[\mathfrak{g}^h, \mathfrak{g}^2] \subseteq \mathfrak{g}^2$ i iz $[\mathfrak{k}, \mathfrak{p}] \subseteq \mathfrak{p}$ slijedi da je $[\mathfrak{k}^h, \mathfrak{p}^2] \subseteq \mathfrak{p}^2$. Prema tome, $\mathfrak{p}^2$ je K^h−modul. Definiramo Zariski otvoren podskup od $\mathfrak{p}^2$ ovako:

$$V = \{z \in \mathfrak{p}^2;\ [\mathfrak{k}^h, z] = \mathfrak{p}^2\}.$$

Tvrdimo da su $x, x_1 \in V$ (i, posebno, $V \neq \emptyset$). Doista, imamo $x \in \mathfrak{p}^2$ i iz teorije reprezentacija TDS$-$algebri primijenjene na $\mathfrak{s} = \text{span}\,\{h, x, y\}$ slijedi da je $[x, \mathfrak{g}^h] = \mathfrak{g}^2$ (svaki vektor težine 2 slika je vektora težine 0 pri djelovanju operatora $\operatorname{ad} x$). Međutim, iz $[x, \mathfrak{g}^h] = \mathfrak{g}^2$, $[\mathfrak{p}, \mathfrak{k}] \subseteq \mathfrak{p}$ i $[\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] \subseteq \mathfrak{k}$ i iz $\mathfrak{g}^h = \mathfrak{k}^h \dot{+} \mathfrak{p}^h$ i $\mathfrak{g}^2 = \mathfrak{k}^2 \dot{+} \mathfrak{p}^2$ slijedi $[x, \mathfrak{k}^h] = \mathfrak{p}^2$ (i $[x, \mathfrak{p}^h] = \mathfrak{k}^2$). Dakle, $x \in V$, a analogno je i $x_1 \in V$.

Skup V očito je K^h-stabilan. Za bilo koju točku $z \in V$ tangencijalni prostor na orbitu $K^h z \subseteq V$ u točki z jednak je $[\mathfrak{k}^h, z] = \mathfrak{p}^2$. Odatle slijedi da je orbita $K^h z$ otvorena u V. Međutim, V je povezan skup (v. dokaz leme 3.4.2.) pa zaključujemo da je V jedna K^h-orbita. Budući da su $x, x_1 \in V$, postoji $a \in K^h \subseteq K$ takav da je $x_1 = ax$. Prema tome, $a(h, x, y) = (h, x_1, ay)$. Sada su (h, x_1, ay) i (h, x_1, y_1) $S-$trojke pa iz jedinstvenosti u korolaru 3.3.8. slijedi da je $y_1 = ay$. Dakle, $a(h, x, y) = (h, x_1, y_1)$.

Teorem 4.3.3. *Postoji samo konačno mnogo $K-$orbita (dakle, i $K_\vartheta-$orbita) u $\mathcal{N}$.*

Dokaz: Prema propoziciji 4.3.1. dovoljno je dokazati da ima samo konačno mnogo klasa $K-$konjugiranosti normalnih $S-$trojki. Neka je $H \subseteq \mathfrak{k}$ skup svih neutralnih elemenata normalnih $S-$trojki. Tada je skup H stabilan u odnosu na djelovanje grupe K. Prema propoziciji 4.3.2. dovoljno je dokazati da ima samo konačno mnogo $K-$orbita u H.

Neka je $\mathfrak{h}_\mathfrak{k}$ Cartanova podalgebra od $\mathfrak{k}$, neka je $\mathfrak{h} \supseteq \mathfrak{h}_\mathfrak{k}$ Cartanova podalgebra od $\mathfrak{g}$ i neka je $R = R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ pripadni sistem korijena. Elementi skupa H su poluprosti pa je svaki $h \in H$ $K-$konjugiran nekom elementu $h_1 \in \mathfrak{h}_\mathfrak{k} \subseteq \mathfrak{h}$. Svojstvene vrijednosti operatora $\operatorname{ad} h_1$ su 0 i $\alpha(h_1)$, $\alpha \in R$, a prema teoriji reprezentacija TDS$-$algebri to su sve cijeli brojevi koji su po apsolutnoj vrijednosti $\leq \dim \mathfrak{g}$ (naime, dimenzija ireducibilne reprezentacije TDS$-$algebre je njezina najveća težina plus jedan). Dakle, $|\alpha(h_1)|$ je cijeli broj između 0 i $\dim \mathfrak{g}$ za svaki korijen $\alpha \in R$. Uočimo sada da je $h \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, pa je i $h_1 \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$. Nadalje, budući da je element $z \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \cap \mathfrak{h}$ potpuno određen podacima $\alpha(z)$, $\alpha \in R$, (jer R razapinje dualan prostor od $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \cap \mathfrak{h}$) zaključujemo da je skup

$$\{z \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \cap \mathfrak{h};\ |\alpha(z)| \in \{0, 1, \ldots, \dim \mathfrak{g}\}\ \ \forall \alpha \in R\}$$

konačan. Odatle slijedi da ima samo konačno mnogo $K-$orbita u H.

4.4 Regularni elementi

U daljnjem stavimo

$$s = \dim \mathfrak{p} - \dim \mathfrak{k}.$$

Nadalje, za $x \in \mathfrak{g}$ kao i prije sa $\mathfrak{g}^x$, $\mathfrak{k}^x$ i $\mathfrak{p}^x$ označavamo centralizatore od x u $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{k}$ i $\mathfrak{p}$.

Propozicija 4.4.1. *Vrijedi*

$$\dim \mathfrak{p}^x = s + \dim \mathfrak{k}^x \qquad \forall x \in \mathfrak{p}.$$

Drugim riječima, razlika $\dim \mathfrak{p}^x - \dim \mathfrak{k}^x$ *ne ovisi o* $x \in \mathfrak{p}$.

Dokaz: Neka je B simetrična nedegenerirana $\operatorname{ad}\mathfrak{g}-$invarijantna i $\vartheta-$invarijantna bilinearna forma na $\mathfrak{g}$; takva očito postoji i može se npr. dobiti pogodnim proširenjem Killingove forme od $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$. Zbog $\vartheta-$invarijantnosti od B potprostori $\mathfrak{k}$ i $\mathfrak{p}$ su međusobno $B-$ortogonalni. Za svaki $x \in \mathfrak{p}$ definiramo antisimetričnu bilinearnu formu B_x na $\mathfrak{g}$ ovako:

$$B_x(y, z) = B(x, [z, y]), \qquad y, z \in \mathfrak{g}.$$

Tada je zbog $\operatorname{ad}\mathfrak{g}-$invarijantnosti $B_x(y, z) = B([x, z], y)$ pa zbog nedegeneriranosti vidimo da vrijedi

$$B_x(y, z) = 0 \quad \forall y \in \mathfrak{g} \qquad \Longleftrightarrow \qquad z \in \mathfrak{g}^x.$$

Dakle, B_x definira nedegeneriranu antisimetričnu bilinearnu formu $\tilde{B}_x$ na kvocijentnom prostoru $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}^x$. Posebnom prostor $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}^x$ je nužno parnodimenzionalan. Imamo $\mathfrak{k} \cap \mathfrak{g}^x = \mathfrak{k}^x$ i $\mathfrak{p} \cap \mathfrak{g}^x = \mathfrak{p}^x$, prostore $\mathfrak{k}/\mathfrak{k}^x$ i $\mathfrak{p}/\mathfrak{p}^x$ možemo shvaćati kao potprostre od $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}^x$ i tada je

$$\mathfrak{g}/\mathfrak{g}^x = \mathfrak{k}/\mathfrak{k}^x \dot{+} \mathfrak{p}/\mathfrak{p}^x.$$

Uočimo sada da su potprostori $\mathfrak{k}/\mathfrak{k}^x$ i $\mathfrak{p}/\mathfrak{p}^x$ izpotropni u odnosu na formu $\tilde{B}_x$; naime, potprostori $[\mathfrak{k}, \mathfrak{k}]$ i $[\mathfrak{p}, \mathfrak{p}]$ sadržani su u $\mathfrak{k}$ pa su oba $B-$ortogonalna na x. No za nedegenriranu antisimetričnu bilinearnu formu maksimalni izotropni potprostori imaju dimenziju jednaku polovici dimenzije čitavog prostora. To pokazuje da je $\dim \mathfrak{k}/\mathfrak{k}^x = \dim \mathfrak{p}/\mathfrak{p}^x$. Odatle slijedi tvrdnja:

$$\dim \mathfrak{k} - \dim \mathfrak{k}^x = \dim \mathfrak{p} - \dim \mathfrak{p}^x \qquad \Longrightarrow \qquad \dim \mathfrak{p}^x - \dim \mathfrak{k}^x = s.$$

Time je propozicija 4.4.1. dokazana.

Neka je $\mathfrak{a}$ prije izabrani Cartanov potprostor od $\mathfrak{p}$ i neka je $\mathfrak{m}$ centralizator od $\mathfrak{a}$ u $\mathfrak{k}$. Budući da su elementi od $\mathfrak{a}$ poluprosti i međusobno komutiraju, $\mathfrak{g}$ je potpuno reducibilan $\operatorname{ad}\mathfrak{a}-$modul. Stoga je $\mathfrak{g}_{(0)}(\mathfrak{a})$ centralizator od $\mathfrak{a}$ u $\mathfrak{g}$, pa vrijedi $\mathfrak{m} = \mathfrak{g}_{(0)}(\mathfrak{a}) \cap \mathfrak{k}$. Prema korolaru 4.2.11. postoji $x \in \mathfrak{a}$ takav da je $\mathfrak{k}^x = \mathfrak{m}$ i $\mathfrak{p}^x = \mathfrak{a}$. Prema tome, iz propozicije 4.4.1. neposredno slijedi:

Propozicija 4.4.2. *Vrijedi* $\dim \mathfrak{a} - \dim \mathfrak{m} = s$.

U daljnjem označavamo

$$\mathcal{R} = \{x \in \mathfrak{p};\ \dim \mathfrak{k}^x \leq \dim \mathfrak{k}^y \ \ \forall y \in \mathfrak{p}\}.$$

Elementi skupa $\mathcal{R}$ zovu se **regularni elementi** (od $\mathfrak{p}$). Skup $\mathcal{R}$ svih regularnih elemenata očito je neprazan Zariski otvoren podskup od $\mathfrak{p}$.

Iz jednakosti $\dim \mathfrak{p}^y = s + \dim \mathfrak{k}^y$ i $\dim \mathfrak{g}^y = \dim \mathfrak{p}^y + \dim \mathfrak{k}^y$ za svaki $y \in \mathfrak{p}$ neposredno slijedi

Propozicija 4.4.3. *Vrijedi*

$$\mathcal{R} = \{x \in \mathfrak{p};\ \dim \mathfrak{g}^x \leq \dim \mathfrak{g}^y \ \ \forall y \in \mathfrak{p}\} = \{x \in \mathfrak{p};\ \dim \mathfrak{p}^x \leq \dim \mathfrak{p}^y \ \ \forall y \in \mathfrak{p}\}.$$

Propozicija 4.4.4. *Za $x \in \mathfrak{p}$ sljedeća su četiri svojstva međusobno ekvivalentna:*

(a) $x \in \mathcal{R}$.

(b) $\dim \mathfrak{k}^x = \dim \mathfrak{m}$.

(c) $\dim \mathfrak{p}^x = \dim \mathfrak{a}$.

(d) $\dim \mathfrak{g}^x = \dim \mathfrak{a} + \dim \mathfrak{m}$.

Dokaz: Prije smo definirali skup

$$\mathcal{Q} = \{x \in \mathfrak{p};\ \dim \mathfrak{g}_{(0)}(x) \cap \mathfrak{p} = q\} \qquad \text{gdje je} \qquad q = \min\{\dim \mathfrak{g}_{(0)}(x) \cap \mathfrak{p};\ x \in \mathfrak{p}\}.$$

Kako su $\mathcal{R}$ i $\mathcal{Q}$ neprazni otvoreni podskupovi od $\mathfrak{p}$, vrijedi $\mathcal{R} \cap \mathcal{Q} \neq \emptyset$. Neka je $y \in \mathcal{R} \cap \mathcal{Q}$. Prema korolaru 4.2.11. $\mathfrak{g}_{(0)}(y) \cap \mathfrak{p}$ je Cartanov potprostor od $\mathfrak{p}$. Prema teoremu 4.2.10. vrijedi $\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{S}$, dakle, $\mathfrak{g}_{(0)}(y) \cap \mathfrak{p} = \mathfrak{p}^y$. Stoga je $\dim \mathfrak{p}^y = \dim \mathfrak{a}$. No tada prema propozicijama 4.4.1. i 4.4.2. vrijedi $\dim \mathfrak{k}^y = \dim \mathfrak{m}$. Dakle, vrijedi i $\dim \mathfrak{g}^y = \dim \mathfrak{a} + \dim \mathfrak{m}$. Kako je $y \in \mathcal{R}$, prema propoziciji 4.4.2. imamo

$$x \in \mathcal{R} \iff \dim \mathfrak{k}^x = \dim \mathfrak{m} \iff \dim \mathfrak{p}^x = \dim \mathfrak{a} \iff \dim \mathfrak{g}^x = \dim \mathfrak{a} + \dim \mathfrak{m}.$$

Neposredna je posljedica:

Korolar 4.4.5. *Vrijedi $\mathcal{R} \cap \mathcal{S} = \mathcal{Q}$.*

Propoziciju 4.4.4. možemo izraziti preko $K-$orbita u $\mathfrak{p}$, a i preko $G-$orbita elemenata iz $\mathfrak{p}$:

Propozicija 4.4.6. *Za $x \in \mathfrak{p}$ sljedećih je pet svojstava međusobno ekvivalentno:*

(a) $x \in \mathcal{R}$.

(b) *Kx je $K-$orbita u $\mathfrak{p}$ maksimalnbe dimenzije.*

(c) $\operatorname{codim}_{\mathfrak{p}} Kx = \dim \mathfrak{a}$.

(d) $\dim Gx \leq \dim Gy$ *za svaki* $y \in \mathfrak{p}$.

(e) $\operatorname{codim}_{\mathfrak{g}} Gx = \dim \mathfrak{a} + \dim \mathfrak{m}$.

Dokaz: Ekvivalencija $(a) \Leftrightarrow (b)$ slijedi iz

$$\dim Ky = \dim \mathfrak{k} - \dim \mathfrak{k}^y \qquad \forall y \in \mathfrak{p}.$$

Ekvivalencije $(a) \Leftrightarrow (d)$ i $(a) \Leftrightarrow (e)$ slijede iz propozicija 4.4.3. i 4.4.4. budući da je

$$\dim Gy = \dim \mathfrak{g} - \dim \mathfrak{g}^y \qquad \forall y \in \mathfrak{p}.$$

Prema propoziciji 4.4.1. vrijedi $\dim Kx = \dim \mathfrak{p} - \dim \mathfrak{p}^x$. Dakle, $x \in \mathcal{R}$ ako i samo ako je $\dim Kx = \dim \mathfrak{p} - \dim \mathfrak{a}$. Time je dokazana i ekvivalencija $(a) \Leftrightarrow (c)$.

Napomena: Iako grupa K_ϑ katkada nije povezana, u propoziciji 4.4.6. možemo zamijeniti K sa K_ϑ. Naime, iz propozicije 4.2.5. neposredno slijedi da je svaka $K_\vartheta-$orbita unija konačno mnogo $K-$orbita koje sve imaju istu dimenziju. Dakle, $\dim K_\vartheta x$ je dobro definirano ako stavimo

$$\dim K_\vartheta x = \dim Kx, \qquad x \in \mathfrak{p}.$$

4.5 Restrikcija invarijantnih polinoma na Cartanov potprostor

U ovom ćemo odjeljku djelomično bez dokaza navesti neke rezultate o strukturi grupe $G_0 = \mathrm{Int}(\mathfrak{g}_0)$ unutarnjih automorfizama realne reduktivne Liejeve algebre $\mathfrak{g}_0$; izostavljeni dokazi mogu se naći u mojim predavanjima „*Reprezentacije poluprostih Liejevih grupa*" na doktorskom studiju 2009./2010. (http://web.math.pmf.unizg.hr/∼hrk/nastava/2009-10/RPLG2009_10.pdf). Na temelju tih rezultata izvest ćemo ključan teorem da za Cartanov potprostor $\mathfrak{a}$ od $\mathfrak{p}$ epimorfizam restrikcije $\mathcal{P}(\mathfrak{p}) \to \mathcal{P}(\mathfrak{a})$ inducira izomorfizam algebri invarijantnih polinomijalnih funkcija $\mathcal{P}(\mathfrak{p})^K \to \mathcal{P}(\mathfrak{a})^{W(\Sigma)}$, pri čemu je $\Sigma = R(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$ tzv. sistem restringiranih korijena pridružen paru $(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$, a $W(\Sigma)$ je njegova Weylova grupa.

Budući da za realnu reduktivnu Liejevu algebru $\mathfrak{g}_0$ vrijedi $\mathfrak{g}_0 = Z(\mathfrak{g}_0) \dot{+} [\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_0]$ i $[\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_0]$ je poluprosta Liejeva algebra, grupa $\mathrm{Int}(\mathfrak{g}_0)$ djeluje trivijalno na $Z(\mathfrak{g}_0)$ i $g \mapsto g|[\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_0]$ je izomorfizam grupe $\mathrm{Int}(\mathfrak{g}_0)$ na grupu $\mathrm{Int}([\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_0])$. To pokazuje da u proučavanju strukture grupe $\mathrm{Int}(\mathfrak{g}_0)$ možemo bez smanjenja općenitosti pretpostavljati da je Liejeva algebra $\mathfrak{g}_0$ poluprosta. To u daljnjem i činimo.

Neka je $(\mathfrak{k}_0, \mathfrak{p}_0)$ Cartanova dekompozicija od $\mathfrak{g}_0$. To znači da je $\mathfrak{k}_0$ Liejeva algebra neke maksimalne kompaktne podgrupe K_0 od G_0 i $\mathfrak{p}_0$ je ortogonalni komplement od $\mathfrak{k}_0$ u $\mathfrak{g}_0$ u odnosu na Killingovu formu $B = B_{\mathfrak{g}_0}$. Tada je

$$\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{k}_0 \dot{+} \mathfrak{p}_0, \qquad [\mathfrak{k}_0, \mathfrak{p}_0] \subseteq \mathfrak{p}_0, \qquad [\mathfrak{p}_0, \mathfrak{p}_0] \subseteq \mathfrak{k}_0. \tag{4.14}$$

Nadalje, vrijedi

$$B(x, x) < 0 \quad \forall x \in \mathfrak{k}_0 \setminus \{0\} \qquad \text{i} \qquad B(y, y) > 0 \quad \forall y \in \mathfrak{p}_0 \setminus \{0\}. \tag{4.15}$$

Prema (4.14) linearno preslikavanje $\vartheta : \mathfrak{g}_0 \to \mathfrak{g}_0$, definirano sa $\vartheta|\mathfrak{k}_0 = I_{\mathfrak{k}_0}$ i $\vartheta|\mathfrak{p}_0 = -I_{\mathfrak{p}_0}$, je involutivni automorfizam Liejeve algebre $\mathfrak{g}_0$, tzv. **Cartanova involucija** od $\mathfrak{g}_0$ pridružena Cartanovoj dekompoziciji $(\mathfrak{k}_0, \mathfrak{p}_0)$. Nadalje, prema (4.15) sa

$$(x|y) = -B(x, \vartheta(y)), \qquad x, y \in \mathfrak{g}_0, \tag{4.16}$$

je zadan skalarni produkt na realnom prostoru $\mathfrak{g}_0$. U odnosu na taj skalarni produkt $\mathfrak{g}_0$ je realan unitaran prostor i vrijedi $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{k}_0 \oplus \mathfrak{p}_0$. Naravno, restrikcija tog skalarnog produkta na $\mathfrak{k}_0$ je $-B|\mathfrak{k}_0 \times \mathfrak{k}_0$, a njegova restrikcija na $\mathfrak{p}_0$ je $B|\mathfrak{p}_0 \times \mathfrak{p}_0$.

U daljnjem sa $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{k}$ i $\mathfrak{p}$ označavamo kompleksifikacije od $\mathfrak{g}_0$, $\mathfrak{k}_0$ i $\mathfrak{p}_0$. Tada je $B_{\mathfrak{g}}$ $\mathbb{C}-$bilinearno proširenje od $B = B_{\mathfrak{g}_0}$ pa ćemo tu Killingovu formu označavati također sa B.

Cartanov potprostor od $\mathfrak{p}_0$ je maksimalan element $\mathfrak{a}_0$ u skupu svih Liejevih podalgebri od $\mathfrak{g}_0$ sadržanih u $\mathfrak{p}_0$. Kako je $[\mathfrak{p}_0, \mathfrak{p}_0] \subseteq \mathfrak{k}_0$, svaki je Cartanov potprostor od $\mathfrak{p}_0$ komutativna Liejeva podalgebra od $\mathfrak{p}_0$.

Zadatak 4.5.1. *Dokažite da je potprostor $\mathfrak{a}_0$ od $\mathfrak{p}_0$ Cartanov potprostor od $\mathfrak{p}_0$ ako i samo ako je $\mathfrak{a} = \mathrm{span}_{\mathbb{C}}\mathfrak{a}_0 = \mathfrak{a}_0 \dot{+} i\mathfrak{a}_0$ Cartanov potprostor od $\mathfrak{p}$.*

Ako je $\mathfrak{a}_0$ Cartanov potprostor od $\mathfrak{p}_0$ onda je očito i $k\mathfrak{a}_0$ Cartanov potprostor od $\mathfrak{p}_0$ za svaki $k \in K_0$. Dakle, grupa K_0 djeluje na skupu svih Cartanovih potprostora od $\mathfrak{p}_0$. Štoviše, to je djelovanje tranzitivno:

Teorem 4.5.1. *Ako su $\mathfrak{a}_0$ i $\mathfrak{a}_0'$ Cartanovi potprostori od $\mathfrak{p}_0$, postoji $k \in K_0$ takav da je $\mathfrak{a}_0' = k\mathfrak{a}_0$.*

Dokaz: Fiksirajmo $y \in \mathfrak{a}_0$ i $y' \in \mathfrak{a}_0'$ i definirajmo analitičku funkciju $f : K_0 \to \mathbb{R}$ sa

$$f(k) = B(ky, y'), \qquad k \in K_0.$$

Zbog kompaktnosti K_0 funkcija f ima minimum na K_0, tj. postoji element $k \in K_0$ takav da je $f(k) \leq f(k')\ \forall k' \in K_0$. Sada za $x \in \mathfrak{k}_0$ definiramo analitičku funkciju $\varphi_x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sa

$$\varphi_x(t) = f\left(\mathrm{e}^{t\,\mathrm{ad}\,x}k\right) = B\left(\mathrm{e}^{t\,\mathrm{ad}\,x}ky, y'\right), \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Tada funkcija φ_x ima minimum u nuli, pa joj je derivacija u nuli jednaka nuli:

$$0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}B\left(\mathrm{e}^{t\,\mathrm{ad}\,x}ky, y'\right)\Big|_{t=0} = B\left((\mathrm{ad}\,x)ky, y'\right) = B\left[x, ky], y'\right) =$$

$$= -B\left(ky, [x, y']\right) = B\left(ky, [y', x]\right) = B\left([ky, y'], x\right).$$

Prema tome, $B\left([ky, y'], x\right) = 0\ \forall x \in \mathfrak{k}_0$. Kako je $[ky, y'] \in [\mathfrak{p}_0, \mathfrak{p}_0] \subseteq \mathfrak{k}_0$, a restrikcija $B|\mathfrak{k}_0 \times \mathfrak{k}_0$ je negativno definitna, dakle, nedegenerirana, slijedi da je $[ky, y'] = 0$. Element $y' \in \mathfrak{a}_0'$ bio je proizvoljno odabran pa dobivamo $[ky, \mathfrak{a}_0''] = \{0\}$. Međutim, $\mathfrak{a}_0'$ je Cartanov potprostor od $\mathfrak{p}_0$, dakle, maksimalna komutativna podalgebra od $\mathfrak{p}_0$, pa slijedi da je $ky \in \mathfrak{a}_0'$. Ali i element $y \in \mathfrak{a}_0$ bio je proizvoljno odabran, pa zaključujemo da je $k\mathfrak{a}_0 \subseteq \mathfrak{a}_0'$. Budući da su i $k\mathfrak{a}_0$ i $\mathfrak{a}_0'$ maksimalne Liejeve podalgebre sadržane u $\mathfrak{p}_0$, dobivamo jednakost $k\mathfrak{a}_0 = \mathfrak{a}_0'$.

Cartanov potprostor Liejeve algebre $\mathfrak{g}_0$ je (komutativna) Liejeva podalgebra od $\mathfrak{g}_0$ koja je Cartanov potprostor od $\mathfrak{p}_0$ za neku Cartanovu dekompoziciju $(\mathfrak{k}_0, \mathfrak{p}_0)$ od $\mathfrak{g}_0$. Ako je $\mathfrak{a}_0$ Cartanov potprostor od $\mathfrak{g}_0$, onda je i $g\mathfrak{a}_0$ Cartanov potprostor od $\mathfrak{g}_0$ za svaki $g \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{g}_0)$. Dakle, grupa $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g}_0)$ djeluje na skupu svih Cartanovih potprostora od $\mathfrak{g}_0$. No već podgrupa $G_0 = \mathrm{Int}(\mathfrak{g}_0)$ unutarnjih automorfizama djeluje tranzitivno:

Korolar 4.5.2. *Neka su $\mathfrak{a}_0$ i $\mathfrak{a}_0'$ Cartanovi potprostori od $\mathfrak{g}_0$. Postoji $g \in G_0$ takav da je $\mathfrak{a}_0' = g\mathfrak{a}_0$.*

Zadatak 4.5.2. *Dokažite korolar 4.5.2.*

Uputa: Koristite teorem 4.5.1. i teorem 4.2.1. o Cartanovoj dekompoziciji od G_0 : za bilo koju Cartanovu dekompoziciju $(\mathfrak{k}_0, \mathfrak{p}_0)$ od $\mathfrak{g}_0$ i za maksimalnu kompaktnu podgrupu K_0 od G_0 s Liejevom algebrom $\mathrm{ad}\,\mathfrak{k}_0 \cong \mathfrak{k}_0$ preslikavanje $(k, x) \mapsto k\mathrm{e}^{\mathrm{ad}\,x}$ je bianalitički difeomorfizam (i, posebno, bijekcija) sa $K_0 \times \mathfrak{p}_0$ na G_0.

U daljnjem je fiksirana neka Cartanova dekompozicija $(\mathfrak{k}_0, \mathfrak{p}_0)$ od $\mathfrak{g}_0$ i fiksiran je neki Cartanov potprostor $\mathfrak{a}_0$ od $\mathfrak{p}_0$. Stavimo

$$P_0 = \left\{\mathrm{e}^{\mathrm{ad}\,x};\ x \in \mathfrak{p}_0\right\}.$$

Tada je prema teoremu 4.2.1. P_0 zatvorena podmnogostrukost od G_0 i preslikavanje $x \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{ad}\,x}$ je bianalitički difeomorfizam sa $\mathfrak{p}_0$ na P_0. U daljnjem sa A_0 označavamo povezanu Liejevu podgrupu od G_0 s Liejevom algebrom $\mathrm{ad}\,\mathfrak{a}_0 \cong \mathfrak{a}_0$. Prema rečenom je $A_0 = \left\{\mathrm{e}^{\mathrm{ad}\,h};\ h \in \mathfrak{a}_0\right\}$ zatvorena podgrupa od G_0 i preslikavanje $x \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{ad}\,x}$ je bianalitički difeomorfizam sa $\mathfrak{a}_0$ na A_0. Štoviše, budući da je $\mathrm{e}^{\mathrm{ad}\,(x+y)} = \mathrm{e}^{\mathrm{ad}\,x}\mathrm{e}^{\mathrm{ad}\,y}$ za $x, y \in \mathfrak{a}_0$, to je preslikavanje izoomorfizam aditivne grupe $\mathfrak{a}_0$ na grupu A_0.

Korolar 4.5.3. *Za svaki $x \in \mathfrak{p}_0$ postoje $y \in \mathfrak{a}_0$ i $k \in K_0$ takvi da je $x = ky$. Drugim riječima, vrijedi*

$$\mathfrak{p}_0 = \bigcup_{k \in K_0} k\mathfrak{a}_0.$$

Zadatak 4.5.3. *Dokažite korolar 4.5.3.*

Uputa: Uočite da je $\mathbb{R}x$ Liejeva podalgebra od $\mathfrak{g}_0$ sadržana u $\mathfrak{p}_0$.

Korolar 4.5.4. *Vrijedi*

$$P_0 = \bigcup_{k \in K_0} kA_0k^{-1}.$$

Dokaz: Iz $k\mathfrak{p}_0 = \mathfrak{p}_0\ \forall k \in K_0$ eksponenciranjem slijedi $kP_0k^{-1} = P_0\ \forall k \in K_0$. Posebno, imamo inkluziju

$$\bigcup_{k \in K_0} kA_0k^{-1} \subseteq P_0.$$

Neka je $p \in P_0$ i neka je x jedinstven element iz $\mathfrak{p}_0$ takav da je $p = \mathrm{e}^{\mathrm{ad}\, x}$. Prema korolaru 4.5.3. postpoje $k \in K_0$ i $y \in \mathfrak{a}_0$ takvi da je $x = ky$. Tada za $a = \mathrm{e}^{\mathrm{ad}\, y} \in A_0$ imamo

$$kak^{-1} = k\mathrm{e}^{\mathrm{ad}\, y}k^{-1} = \mathrm{e}^{k(\mathrm{ad}\, y)k^{-1}} = \mathrm{e}^{\mathrm{ad}\, ky} = \mathrm{e}^{\mathrm{ad}\, x} = p.$$

Time je dokazana i obrnuta inkluzija

$$P_0 \subseteq \bigcup_{k \in K_0} kA_0k^{-1}.$$

Korolar 4.5.5. *Vrijedi* $G_0 = K_0A_0K_0 = \{kak';\ a \in A_0,\ \ k, k' \in K_0\}$.

Dokaz: Tvrdnja slijedi neposredno iz korolara 4.5.4. i teorema 4.2.1.:

$$K_0A_0K_0 \subseteq G_0 = K_0P_0 \subseteq K_0K_0A_0K_0 = K_0A_0K_0.$$

Napomenimo da se iz tog korolara relativno jednostavno može dokazati teorem 4.2.3. koji smo naveli u odjeljku 4.2. bez dokaza.

Zadatak 4.5.4. *Dokažite da na realnom unitarnom prostoru* $\mathfrak{g}_0$ *vrijedi:*

(a) *Za svaki* $x \in \mathfrak{p}_0$ *operator* $\mathrm{ad}\, x$ *je hermitski.*

(b) *Za svaki* $x \in \mathfrak{k}_0$ *operator* $\mathrm{ad}\, x$ *je antihermitski.*

(c) *Svaki* $k \in K_0$ *je unitaran* (*tj. ortogonalan*) *operator.*

Posebno, $\{\mathrm{ad}\, h;\ h \in \mathfrak{a}_0\}$ je skup hermitskih operatora koji međusobno komutiraju. Stoga se ti operatori mogu simultano dijagonalizirati. Prema tome, ako za $\lambda \in \mathfrak{a}_0^*$ stavimo

$$\mathfrak{g}_0^\lambda = \{x \in \mathfrak{g}_0;\ [h, x] = \lambda(h)x\ \ \forall h \in \mathfrak{a}_0\}$$

i ako je

$$\Sigma = R(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{a}_0) = \{\lambda \in \mathfrak{a}_0^*;\ \lambda \neq 0\ \text{ i }\ \mathfrak{g}_0^\lambda \neq \{0\}\},$$

onda imamo rastav u direktnu sumu

$$\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g}_0^0 \dotplus \sum_{\lambda \in \Sigma} \dotplus\, \mathfrak{g}_0^\lambda.$$

Elementi $\lambda \in \Sigma$ zovu se **restringirani korijeni** od $\mathfrak{g}_0$ u odnosu na Cartanov potprostor $\mathfrak{a}_0$, a potprostori $\mathfrak{g}_0^\lambda$ zovu se **restringirani korijenski potprostori** od $\mathfrak{g}_0$ u odnosu na $\mathfrak{a}_0$. Potprostor $\mathfrak{g}^0$

je centralizator $C_{\mathfrak{g}_0}(\mathfrak{a}_0)$ od $\mathfrak{a}_0$ u $\mathfrak{g}_0$. Stavimo $\mathfrak{m}_0 = C_{\mathfrak{k}_0}(\mathfrak{a}_0)$. Budući da je $\mathfrak{a}_0$ maksimalna komutativna podalgebra od $\mathfrak{p}_0$, lako se vidi da je $\mathfrak{g}_0^0 = \mathfrak{m}_0 \dot{+} \mathfrak{a}_0$. Dakle, imamo rastav u direktnu sumu

$$\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{m}_0 \dot{+} \mathfrak{a}_0 \dot{+} \sum_{\lambda \in \Sigma} \dot{+} \mathfrak{g}_0^\lambda. \tag{4.17}$$

Definiramo sada zatvorene podgrupe kompaktne grupe K_0 :

$$M_0 = C_{K_0}(\mathfrak{a}_0) = \{k \in K_0;\ k|\mathfrak{a}_0 = I_{\mathfrak{a}_0}\} \qquad \text{i} \qquad M_0' = N_{K_0}(\mathfrak{a}_0) = \{k \in K_0;\ k\mathfrak{a}_0 = \mathfrak{a}_0\}.$$

Tada je M_0 normalna podgrupa od M_0'. Neka je $W(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{a}_0) = M_0'/M_0$ kvocijentna grupa. Elemente od $W(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{a}_0)$ shvaćamo kao (ortogonalne) operatore na realnom unitarnom prostoru $\mathfrak{a}_0$. Drugim riječima

$$W(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{a}_0) = \{k|\mathfrak{a}_0;\ k \in K_0,\ \ k\mathfrak{a}_0 = \mathfrak{a}_0\} = \{k|\mathfrak{a}_0;\ k \in M_0'\}.$$

Na taj način $W(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{a}_0)$ postaje podgrupa ortogonalne grupe $\mathrm{O}(\mathfrak{a}_0)$ realnog unitarnog prostora $\mathfrak{a}_0$.

Teorem 4.5.6. (*a*) *Obje podgrupe M_0 i M_0' imaju istu Liejevu algebru $\mathfrak{m}_0$. Prema tome, kvocijentna grupa $W(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{a}_0)$ je diskretna i kompaktna, dakle, to je konačna grupa.*

(*b*) *$\Sigma = R(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{a}_0)$ je sistem korijena u realnom unitarnom prostoru $\mathfrak{a}_0^*$ i $\sigma \mapsto \left(\sigma^T\right)^{-1}$ je izomorfizam grupe $W(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{a}_0)$ na Weylovu grupu $W(\Sigma)$ sistema korijena Σ.*

(*c*) *Liejeva podalgebra $\mathfrak{m}_0$ je reduktivna u $\mathfrak{g}_0$.*

(*d*) *Svaka maksimalna komutativna podalgebra $\mathfrak{h}_{\mathfrak{m}_0}$ od $\mathfrak{m}_0$ je Cartanova podalgebra od $\mathfrak{m}_0$, a suma $\mathfrak{h}_0 = \mathfrak{h}_{\mathfrak{m}_0} \dot{+} \mathfrak{a}_0$ je Cartanova podalgebra od $\mathfrak{g}_0$.*

(*e*) *Uz oznake iz (d) neka je $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_0^{\mathbb{C}} = \mathfrak{h}_0 \dot{+} i\mathfrak{h}_0$ pripadna Cartanova podalgebra kempllkesifikacije $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0^{\mathbb{C}}$ i neka je $R = R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$. Tada je*

$$\Sigma = R(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{a}_0) = \{\alpha|\mathfrak{a}_0;\ \alpha \in R,\ \ \alpha|\mathfrak{a}_0 \neq 0\}$$

i za svaki $\lambda \in \Sigma$ je

$$\mathfrak{g}_0^\lambda = \mathfrak{g}_o \cap \left(\sum_{\alpha \in R,\, \alpha|\mathfrak{a}_0 = \lambda} \dot{+} \mathfrak{g}_\alpha \right).$$

(*f*) *Uz oznake iz (d) stavimo $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_0^{\mathbb{C}}$, $\mathfrak{h}_{\mathfrak{m}} = \mathfrak{h}_{\mathfrak{m}_0}^{\mathbb{C}}$ i $R_{\mathfrak{m}} = \{\alpha \in\in R;\ \alpha|\mathfrak{a}_0 = 0\}$. Tada je $\alpha \mapsto \alpha|\mathfrak{h}_{\mathfrak{m}}$ bijekcija sa $R_{\mathfrak{m}}$ na $R(\mathfrak{m}, \mathfrak{h}_{\mathfrak{m}})$, za $\alpha \in R_{\mathfrak{m}}$ vrijedi $\mathfrak{g}_\alpha \subseteq \mathfrak{m}$ i*

$$\mathfrak{m} = \mathfrak{h}_{\mathfrak{m}} \dot{+} \sum_{\alpha \in R_{\mathfrak{m}}} \dot{+} \mathfrak{g}_\alpha$$

je korijenski rastav kompleksne reduktivne Liejeve algebre $\mathfrak{m}$ u odnosu na nejzinu Cartanovu podalgebru $\mathfrak{h}_{\mathfrak{m}}$.

Napominjemo da restringirani sistem korijena $\Sigma = R(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{a}_0)$ nije nužno reduciran sistem korijena, tj. moguće je da su λ i 2λ restringirani korijeni.

Za realan konačnodimenzionalan vektorski prostor V_0 sa $\mathcal{P}(V_0)$ označavamo komutativnu unitalnu algebru svih kompleksnih poolinomijalnih funkcija na V_0, tj. unitalnu podalgebru od $\mathbb{C}^{V_0}$ generiranu sa V_0^*. Označimo sa V kompleksifikaciju prostora V_0. Algebra $\mathcal{P}(V_0)$ identificira se s algebrom $\mathcal{P}(V)$ polinomijalnih funkcija na kompleksnom prostoru V. Identifikacija $\mathcal{P}(V) \xrightarrow{\cong} \mathcal{P}(V_0)$ dana je restrikcijom $f \mapsto f|V_0$.

Neka je sada K_0 kompaktna podgrupa od $\mathrm{GL}(V_0)$ i neka je $K \subseteq \mathrm{GL}(V)$ njezina kompleksifikacija. Zbog holomorfnosti polinomijalnih funkcija dokazuje se da je $\mathcal{P}(V)^K = \mathcal{P}(V)^{K_0}$. Posebno, u našoj je situaciji

$$\mathcal{P}(\mathfrak{p})^K = \mathcal{P}(\mathfrak{p})^{K_0} = \mathcal{P}(\mathfrak{p}_0)^{K_0}.$$

Nadalje, Weylova grupa $W = W(\Sigma) \cong W(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{a}_0)$ djeluje na prostoru $\mathfrak{a}_0$, dakle, djeluje automorfizmima na algebri $\mathcal{P}(\mathfrak{a}_0) \cong \mathcal{P}(\mathfrak{a})$:

$$(sf)(h) = f\left(s^{-1}h\right), \qquad s \in W, \quad h \in \mathfrak{a}_0, \quad f \in \mathcal{P}(\mathfrak{a}_0).$$

Sa $\mathcal{P}(\mathfrak{a}_0)^W$ označavamo podalgebru $W-$invarijanata.

Za potprostor W_0 realnog vektorskog prostora V_0 sa $\mathrm{Res}^{V_0}_{W_0}$ označavamo unitalni homomorfizam restrikcije $f \mapsto f|W_0$ sa $\mathcal{P}(V_0)$ u $\mathcal{P}(W_0)$. To je epimorfizam i jezgra mu je $\{f \in \mathcal{P}(V_0);\ f|W_0 = 0\}$. Ako je $\{e_1, \ldots, e_n\}$ baza od V_0 takva da je $\{e_1, \ldots, e_k\}$ baza od W_0 i ako je $\{e_1^*, \ldots, e_n^*\}$ dualna baza od V_0^*, onda se lako vidi da je $\mathrm{Ker}\,\mathrm{Res}^{V_0}_{W_0}$ ideal u $\mathcal{P}(V_0)$ generiran sa $\{e_{k+1}^*, \ldots, e_n^*\}$.

Teorem 4.5.7. $\mathrm{Res}^{\mathfrak{p}_0}_{\mathfrak{a}_0}\big|\,\mathcal{P}(\mathfrak{p}_0)^{K_0}$ *je izomorfizam algebre* $\mathcal{P}(\mathfrak{p}_0)^{K_0}$ *na algebru* $\mathcal{P}(\mathfrak{a}_0)^W$.

Dokaz ćemo podijeliti u nekoliko koraka.

(1) $\mathrm{Res}^{\mathfrak{p}_0}_{\mathfrak{a}_0}\left(\mathcal{P}(\mathfrak{p}_0)^K\right) \subseteq \mathcal{P}(\mathfrak{a}_0)^W$.

Doista, kako je $W = M_0'/M_0$, za $s \in W$ postoji $k \in M_0' \subseteq K_0$ takav da je $s = k|\mathfrak{a}._0$ Stoga za $f \in \mathcal{P}(\mathfrak{p}_0)^{K_0}$ i za svaki $h \in \mathfrak{a}_0$ imamo

$$\left[s\left(\mathrm{Res}^{\mathfrak{p}_0}_{\mathfrak{a}_0} f\right)\right](h) = f\left(s^{-1}h\right) = f\left(k^{-1}h\right) = (kf)(h) = f(h) = \left[\mathrm{Res}^{\mathfrak{p}_0}_{\mathfrak{a}_0} f\right](h).$$

Time je tvrdnja **(1)** dokazana.

(2) *Restrikcija* $\mathrm{Res}^{\mathfrak{p}_0}_{\mathfrak{a}_0}\big|\,\mathcal{P}(\mathfrak{p}_0)^{K_0}$ *je injekcija.*

Neka je $f \in \mathcal{P}(\mathfrak{p}_0)^{K_0}$ u jezgri preslikavanja $\mathrm{Res}^{\mathfrak{p}_0}_{\mathfrak{a}_0}$, tj. $f(h) = 0\ \forall h \in \mathfrak{a}_0$. Neka je $x \in \mathfrak{p}_0$ proizvoljan. Tada je x sadržan u nekom Cartanovom potprostoru od $\mathfrak{p}_0$, pa prema korolaru 4.5.3. postoji $k \in K_0$ takav da je $k^{-1}x \in \mathfrak{a}_0$. Stoga je

$$0 = f\left(k^{-1}x\right) = (kf)(x) = f(x).$$

Kako je $x \in \mathfrak{p}_0$ bio proizvoljan, slijedi $f = 0$. Time je tvrdnja **(2)** dokazana.

(3) *Ako su* $h_1, h_2 \in \mathfrak{a}_0$ *takvi da je* $kh_1 = h_2$ *za neki* $k \in K_0$, *onda postoji* $s \in W$ *takav da je* $sh_1 = h_2$.

Uočimo da su $\mathfrak{a}_0$ i $k\mathfrak{a}_0$ maksimalne komutativne podalgebre u $C_{\mathfrak{g}_0}(h_2) \cap \mathfrak{p}_0$. $C_{\mathfrak{g}_0}(h_2)$ je Liejeva algebra grupe $C_{G_0}(h_2)$, a ova je realna reduktivna grupa koja je $\vartheta-$invarijantna. Dakle, Cartanova dekompozicija od $C_{\mathfrak{g}_0}(h_2)$ je

$$C_{\mathfrak{g}_0}(h_2) = C_{\mathfrak{g}_0}(h_2) \cap \mathfrak{k}_0 \dotplus C_{\mathfrak{g}_0}(h_2) \cap \mathfrak{p}_0$$

i maksimalna kompaktna podgrupa od $C_{G_0}(h_2)$ s Liejevom algebrom $C_{\mathfrak{g}_0}(h_2) \cap \mathfrak{k}_0$ je $C_{G_0}(h_2) \cap K_0$. Sada su $k\mathfrak{a}_0$ i $\mathfrak{a}_0$ Cartanovi potprostori od $C_{\mathfrak{g}_0}(h_2) \cap \mathfrak{p}_0$, pa prema korolaru 4.5.3. primijenjenom na grupu $C_{G_0}(h_2)$ postoji $k' \in C_{G_0}(h_2) \cap K_0$ takav da je $k'k\mathfrak{a}_0 = \mathfrak{a}_0$. Tada je $k'k \in M_0'$ i za pripadni element $s \in W$ vrijedi

$$sh_1 = k'kh_1 = k'h_2 = h_2.$$

Time je tvrdnja **(3)** dokazana.

(4) *Ako su* $h_1, h_2 \in \mathfrak{a}_0$ *takvi da je* $Wh_1 \cap Wh_2 = \emptyset$, *postoji neprekidna funkcija* $\varphi : \mathfrak{p}_0 \to [0, 1]$ *takva da je*

$$\varphi(h_1) = 0, \qquad \varphi(h_2) = 1 \qquad \text{i} \qquad \varphi(kx) = \varphi(x) \quad \forall k \in K_0 \quad \text{i} \quad \forall x \in \mathfrak{p}_0.$$

Doista, prema tvrdnji **(3)** iz pretpostavke $Wh_1 \cap Wh_2 = \emptyset$ slijedi $K_0h_1 \cap K_0h_2 = \emptyset$. Podskupovi K_0h_1 i K_0h_2 od $\mathfrak{p}_0$ su kompaktni, dakle, zatvoreni, pa prema Urisohnovoj lemi postoji neprekidna funkcija $\psi : \mathfrak{p}_0 \to [0, 1]$ takva da je $\psi|K_0h_1 = 0$ i $\psi|K_0h_2 = 1$. Sada definiramo neprekidnu funkciju $\varphi : \mathfrak{p}_0 \to [0, 1]$ sa

$$\varphi(x) = \int_{K_0} \psi(kx)\mathrm{d}\nu(k), \qquad x \in \mathfrak{p}_0,$$

gdje je ν normirana Haarova mjera na K_0. Tada je očito $\varphi(h_1) = 0$ i $\varphi(h_2) = 1$, a zbog desne invarijantnosti mjere ν za svaki $k' \in K_0$ i svaki $x \in \mathfrak{p}_0$ imamo

$$\varphi(k'x) = \int_{K_0} \psi(kk'x)\mathrm{d}\nu(k) = \int_{K_0} \psi(kk'x)\mathrm{d}\nu(k) = \int_{K_0} \psi(kx)\mathrm{d}\nu(k) = \varphi(x).$$

Time je tvrdnja **(4)** dokazana.

(5) *Ako su $h_1, h_2 \in \mathfrak{a}_0$ takvi da je $Wh_1 \cap Wh_2 = \emptyset$, onda postoji $f \in \mathcal{P}(\mathfrak{p}_0)^{K_0}$ takav da je $f(h_1) \neq f(h_2)$.*

Neka je $C = Kh_1 \cup Kh_2$. To je kompaktan podskup od $\mathfrak{p}_0$. Neka je φ neprekidna funkcija iz tvrdnje **(4)**. Prema Stone−Weierstrassovom teoremu postoji polinom $g \in \mathcal{P}(\mathfrak{p}_0)$ takav da je

$$|g(x) - \varphi(x)| < \frac{1}{2} \qquad \forall x \in C.$$

Definiramo $f : \mathfrak{p}_0 \to \mathbb{C}$ sa

$$f(x) = \int_{K_0} g(kx)\mathrm{d}\nu(k), \qquad x \in \mathfrak{p}_0.$$

Zadatak 4.5.5. *Dokažite da je f polinomijalna funkcija na $\mathfrak{p}_0$.*

Zbog K−invarijantnosti mjere ν slijedi da je $f \in \mathcal{P}(\mathfrak{p}_0)^{K_0}$. Napokon, za $i = 1, 2$ imamo

$$f(h_i) - \varphi(h_i) = \int_{K_0} g(kh_i)\mathrm{d}\nu(k) - \varphi(h_i) = \int_{K_0} [g(kh_i) - \varphi(kh_i)]\mathrm{d}\nu(k),$$

dakle,

$$|f(h_i) - \varphi(h_i)| \leq \int_{K_0} |g(kh_i) - \varphi(kh_i)|\mathrm{d}\nu(k) < \frac{1}{2}.$$

Stoga je

$$|f(h_1)| = |f(h_1) - \varphi(h_1)| < \frac{1}{2} \qquad \text{i} \qquad |f(h_2) - 1| = |f(h_2) - \varphi(h_2)| < \frac{1}{2},$$

a odatle slijedi da je $f(h_1) \neq f(h_2)$. Time je i tvrdnja **(5)** dokazana.

(6) Neka je F polje razlomaka integralnog prstena $\mathcal{P}(\mathfrak{a}_0)$ i L polje razlomaka integralnog prstena $\mathcal{J} = \mathrm{Res}^{\mathfrak{p}_0}_{\mathfrak{a}_0}\left(\mathcal{P}(\mathfrak{p}_0)^{K_0}\right)$. Budući da je $\mathcal{J}$ potprsten od $\mathcal{P}(\mathfrak{a}_0)$, L se identificira s potpoljem od F. Neka su $D_j \in \mathcal{P}(\mathfrak{p}_0)$ definirani kao koeficijenti svojstvenog polinoma operatora $\mathrm{ad}\, x = \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}_0} x$, $x \in \mathfrak{p}_0$:

$$\det{(TI_{\mathfrak{g}} - \mathrm{ad}\, x)} = \sum_j D_j(x)T^j, \qquad x \in \mathfrak{p}_0.$$

Za $k \in K_0$ i $x \in \mathfrak{p}_0$ vrijedi

$$\sum_j (kD_j)(x)T^j = \sum_j D_j\left(k^{-1}x\right)T^j = \det\left(TI_{\mathfrak{g}_0} - \mathrm{ad}\, k^{-1}x\right) =$$

$$= \det\left(TI_{\mathfrak{g}_0} - k^{-1}(\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}_0} x)k\right) = \det{(TI_{\mathfrak{g}_0} - \mathrm{ad}\, x)} = \sum_j D_j(x)T^j.$$

Prema tome, vrijedi $kD_j = D_j\ \forall k \in K_0$ i $\forall j$. Dakle, polinomi D_j su elementi od $\mathcal{P}(\mathfrak{p}_0)^{K_0}$. Stavimo $d_j = D_j|\mathfrak{a}_0 \in \mathcal{J}$ i neka je $P \in L[T]$ polinom s koeficijentima d_j :

$$P(T) = \sum_j d_j T^j.$$

Za $h \in \mathfrak{a}_0$ operator $\operatorname{ad} h$ je dijagonalizabilan i pripadni svojstveni rastav prostora $\mathfrak{g}$ je dan sa

$$\mathfrak{g}_0 \ = \ \mathfrak{m}_0 \dotplus \mathfrak{a}_0 \dotplus \sum_{\lambda\in\Sigma} \dotplus\, \mathfrak{g}_0^\lambda;$$

pri tome je

$$\operatorname{ad} h|(\mathfrak{m}_0 \dotplus \mathfrak{a}_0) = 0 \qquad \text{i} \qquad \operatorname{ad} h|\mathfrak{g}_0^\lambda = \lambda(h) I_{\mathfrak{g}_0^\lambda} \quad \text{za} \quad \lambda \in \Sigma.$$

Prema tome je

$$\sum_j d_j(h)T^j = \sum_j D_j(h)T^j = \det\left(TI_{\mathfrak{g}_0} - \operatorname{ad} h\right) = T^{\dim \mathfrak{m}_0 + \dim \mathfrak{a}_0} \prod_{\lambda\in\Sigma} (T - \lambda(h))^{\dim \mathfrak{g}_0^\lambda}, \qquad h \in \mathfrak{a}_0.$$

Dakle, dobivamo razlaganje polinoma $P \in L[T]$ nad poljem $F \supseteq \mathcal{P}(\mathfrak{a}_0) \supseteq \Sigma$:

$$P(T) = T^{\dim \mathfrak{m}_0 + \dim \mathfrak{a}_0} \prod_{\lambda\in\Sigma} (T - \lambda)^{\dim \mathfrak{g}_0^\lambda}.$$

To znači da polje F sadrži polje razlaganja polinoma P. Polje F generirano je nad $\mathbb{C}$, dakle, i nad L, sa $\mathfrak{a}_0^*$, a kako Σ razapinje prostor $\mathfrak{a}_0^*$, zaključujemo da je polje F generirano nad L sa Σ. Drugim riječima, F je upravo polje razlaganja polinoma $P \in L[T]$. To posebno znači da je F Galoisovo proširenje polja L, a tada je

$$L = F^{Gal(F/L)} = \{f \in F;\ \sigma f = f\ \forall \sigma \in Gal(F/L)\},$$

gdje je $Gal(F/L)$ Galoisova grupa proširenja F polja L :

$$Gal(F/L) = \{\sigma \in Aut(F);\ \sigma f = f\ \forall f \in L\}.$$

Svaki element $\sigma \in Gal(F/L)$ permutira korijene polinoma P, pa zaključujemo da je $\sigma(\mathfrak{a}_0^*) = \mathfrak{a}_0^*$. Odatle slijedi $\sigma(\mathcal{P}(\mathfrak{a}_0)) = \mathcal{P}(\mathfrak{a}_0)\ \ \forall \sigma \in Gal(F/L)$.

Označimo sada sa U grupu svih automorfizama unitalne algebre $\mathcal{P}(\mathfrak{a}_0)$ koji ostavljaju elemente od $\mathcal{J}$ fiksnima:

$$U = \{\sigma \in \operatorname{Aut}(\mathcal{P}(\mathfrak{a}_0));\ \sigma f = f\ \forall f \in \mathcal{J}\}.$$

Svaki automorfizam σ prstena $\mathcal{P}(\mathfrak{a}_0)$ jedinstveno se proširuje do automorfizma $\tilde{\sigma}$ polja F i za $\sigma \in U$ je $\tilde{\sigma} \in Gal(F/L)$. Prema tome, vrijedi

$$\mathcal{J} \subseteq \{f \in \mathcal{P}(\mathfrak{a}_0);\ \sigma f = f\ \forall \sigma \in U\} = \mathcal{P}(\mathfrak{a}_0) \cap \{f \in F;\ \tilde{\sigma}\, f = f\ \forall \sigma \in U\} \subseteq \mathcal{P}(\mathfrak{a}_0) \cap L = \mathcal{J}.$$

Stoga je

$$\mathcal{J} = \{f \in \mathcal{P}(\mathfrak{a}_0);\ \sigma f = f\ \forall \sigma \in U\}. \tag{4.18}$$

Za $\sigma \in U$ i $h \in \mathfrak{a}_0$ definiramo unitalni homomorfizam $\varphi_{\sigma,h} : \mathcal{P}(\mathfrak{a}_0) \to \mathbb{C}$ sa $\varphi_{\sigma,h}(f) = (\sigma f)(h)$, $h \in \mathfrak{a}$. Prema Hilbertovom teoremu o nulama postoji $h_1 \in \mathfrak{a}_0$ takav da je $\varphi_{\sigma,h}(f) = f(h_1)$ $\forall f \in \mathcal{P}(\mathfrak{a}_0)$. Za $f \in \mathcal{J}$ je $\sigma f = f$, dakle, vrijedi

$$f(h_1) = \varphi_{\sigma,h}(f) = (\sigma f)(h) = f(h) \qquad \forall f \in \mathcal{J}.$$

Kako je $\mathcal{J} = \left\{g|\mathfrak{a}_0;\ g \in \mathcal{P}(\mathfrak{p}_0)^{K_0}\right\}$, iz tvrdnje **(5)** zaključujemo da je $Wh_1 \cap Wh \neq \emptyset$. Dakle, postoji $s \in W$ takav da je $h_1 = sh$. Ako je $f \in \mathcal{P}(\mathfrak{a}_0)^W$ slijedi da je

$$(\sigma f)(h) = \varphi_{\sigma,h}(f) = f(h_1) = f(sh) = f(h).$$

Budući da je $h \in \mathfrak{a}_0$ bio proizvoljno izabran, zaključujemo da za $f \in \mathcal{P}(\mathfrak{a}_0)^W$ vrijedi $\sigma f = f$ $\forall \sigma \in U$. Prema (4.18) to znači da je $\mathcal{P}(\mathfrak{a}_0)^W \subseteq \mathcal{J} = \mathrm{Res}^{\mathfrak{p}_0}_{\mathfrak{a}_0}\left(\mathcal{P}(\mathfrak{p}_0)^{K_0}\right)$. Zajedno s obrnutom inkluzijom iz tvrdnje **(1)** dobivamo jednakost $\mathcal{P}(\mathfrak{a}_0)^W = \mathrm{Res}^{\mathfrak{p}_0}_{\mathfrak{a}_0}\left(\mathcal{P}(\mathfrak{p}_0)^{K_0}\right)$, a zajedno s injektivnošću iz tvrdnje **(2)** to je upravo tvrdnja teorema.

Budući da je grupa W generirana refleksijama, algebra invarijanata $\mathcal{P}(\mathfrak{a}_0)^W$ generirana je prema Chevalley−Shephard−Toddovom teoremu 2.5.1. sa $r = \dim \mathfrak{a}_0$ homogenih algebarski nezavisnih invarijanata. Odatle i iz teorema 4.5.7. neposredno slijedi:

Teorem 4.5.8. *Postoje homogeni algebarski nezavisni polinomi $u_1, \ldots, u_r \in \mathcal{P}(\mathfrak{p})^K$ takvi da je $\mathcal{P}(\mathfrak{p})^K = \mathbb{C}[u_1, \ldots, u_r]$. Pri tome je r dimenzija Cartanovog potprostora od $\mathfrak{p}$.*

Nadalje, prema teoremu 2.5.1. $\mathcal{P}(\mathfrak{a})$ je slobodan $\mathcal{P}(\mathfrak{a})^W$−modul, pa iz teorema 4.5.7. i iz Bernstein−Luntsovog teorema 1.3.2. slijedi:

Teorem 4.5.9. *$\mathcal{P}(\mathfrak{p})$ je slobodan $\mathcal{P}(\mathfrak{p})^K$−modul.*

Napokon, primjenom propozicije 1.2.4. dobivamo i precizniju informaciju

Teorem 4.5.10. *Linearno preslikavanje $\mathcal{P}(\mathfrak{p})^K \otimes \mathcal{H}_K(\mathfrak{p}) \to \mathcal{P}(\mathfrak{p})$ inducirano množenjem je izomorfizam K−modula.*

4.6 Orbite nilpotentnih elemenata

Algebra polinoma $\mathcal{P}(\mathfrak{p})$ je $K_\vartheta-$modul uz djelovanje

$$(af)(x) = f(a^{-1}x), \qquad f \in \mathcal{P}(\mathfrak{p}), \quad a \in K_\vartheta, \quad x \in \mathfrak{p}.$$

Homogeni potprostori $\mathcal{P}^k(\mathfrak{p})$ su očito $K_\vartheta-$podmoduli. Važna je činjenica da su $K-$invarijante u $\mathcal{P}(\mathfrak{p})$ ujedno $K_\vartheta-$invarijante:

Propozicija 4.6.1. $\mathcal{P}(\mathfrak{p})^K = \mathcal{P}(\mathfrak{p})^{K_\vartheta}$.

Dokaz: Očito je $\mathcal{P}(\mathfrak{p})^{K_\vartheta} \subseteq \mathcal{P}(\mathfrak{p})^K$. Dokažimo obrnutu inkluziju. Neka je $f \in \mathcal{P}(\mathfrak{p})^K$. Prema propoziciji 4.2.5. dovoljno je dokazati da je $af = f$ za svaki $a \in F$. Neka je $a \in F$. Budući da grupa F normalizira grupu K, jasno je da je $af \in \mathcal{P}(\mathfrak{p})^K$. S druge strane, prema teoremu 4.5.7. epimorfizam restrikcije $\mathcal{P}(\mathfrak{p}) \to \mathcal{P}(\mathfrak{a})$ inducira izomorfizam sa $\mathcal{P}(\mathfrak{p})^K$ na $\mathcal{P}(\mathfrak{a})^W$, gdje je W Weylova grupa restringiranog sistema korijena $R(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$. Dakle, da dokažemo da je $af = f$, dovoljno je dokazati da je $(af)|\mathfrak{a} = f|\mathfrak{a}$. No ako je $x \in \mathfrak{a}$, onda je $a^{-1}x = x$ jer je $a \in \exp \operatorname{ad} \mathfrak{a}$. Dakle, za svaki $x \in \mathfrak{a}$ vrijedi $(af)(x) = f(a^{-1}x) = f(x)$. Time je dokazano $(af)|\mathfrak{a} = f|\mathfrak{a}$.

Imamo $\mathcal{P}(\mathfrak{p})^K \cong \mathcal{P}(\mathfrak{a})^W$, dakle, postoji $r = \dim \mathfrak{a}$ algebarski nezavisnih homogenih $K-$invarijantnih polinoma $u_1, \ldots, u_r \in \mathcal{P}(\mathfrak{p})^K$ takvih da je $\mathcal{P}(\mathfrak{p})^K = \mathbb{C}[u_1, \ldots, u_r]$. Tada je očito

$$\mathcal{P}_+(\mathfrak{p})^K = \sum_{j=1}^{r} \mathcal{P}(\mathfrak{p})^K u_j,$$

dakle, ideal u $\mathcal{P}(\mathfrak{p})$ generiran s tim idealom je

$$\mathcal{P}(\mathfrak{p})\mathcal{P}_+(\mathfrak{p})^K = \sum_{j=1}^{r} \mathcal{P}(\mathfrak{p})u_j.$$

Pripadna afina višestrukost je upravo $\mathcal{N}$:

Propozicija 4.6.2.

$$\mathcal{N} = \{x \in \mathfrak{p};\ f(x) = 0 \ \ \forall f \in \mathcal{P}(\mathfrak{p})\mathcal{P}_+(\mathfrak{p})^K\} =$$
$$= \{x \in \mathfrak{p};\ f(x) = 0 \ \ \forall f \in \mathcal{P}_+(\mathfrak{p})^K\} = \{x \in \mathfrak{p};\ u_1(x) = \cdots = u_r(x) = 0\}.$$

Dokaz: Pretpostavimo da je $f(x) = 0$ za svaki $f \in \mathcal{P}_+(\mathfrak{p})^K$. Za $g \in \mathcal{P}_+(\mathfrak{g})^G$ restrikcija $g|\mathfrak{p}$ je očito u $\mathcal{P}_+(\mathfrak{p})^K$, dakle, vrijedi $g(x) = 0$ za svaki $g \in \mathcal{P}_+(\mathfrak{g})^G$. Prema propoziciji 3.3.15., dokazanoj za slučaj poluproste Liejeve algebre $\mathfrak{g}$, zaključujemo da je $\operatorname{ad} x$ nilpotentan operator na $\mathfrak{g}$. Nadalje, vrijedi $x \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$. Doista, kad ne bi bilo tako, postojao bi linearan funkcional $g \in \mathfrak{g}^*$ takav da je $g(x) \neq 0$ i $g|[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = 0$. No tada je $g \in \mathcal{P}^1(\mathfrak{g})^G \subseteq \mathcal{P}_+(\mathfrak{g})^G$, pa je $g(x) \neq 0$ suprotno pretpostavci. Dakle, $x \in \mathcal{N}$.

Pretpostavimo sada da je $x \in \mathcal{N}$. Treba dokazati da je tada $f(x) = 0$ za svaki $f \in \mathcal{P}_+(\mathfrak{p})^K$. Ako je $x = 0$ to je jasno. Pretpostavimo da je $x \neq 0$ i neka je $f \in \mathcal{P}_+(\mathfrak{p})^K$. Tada je $f(kx) = f(x)$ za svaki $k \in K$. Neka je (h, x, y) normalna $S-$trojka koja sadrži x kao nilpozitivan element. Tada je $[h, x] = 2x$ pa slijedi $\mathrm{e}^{t \operatorname{ad} h}x = \mathrm{e}^{2t}x$ za svaki $t \in \mathbb{C}$. Kako je $\mathrm{e}^{t \operatorname{ad} h} \in K$, slijedi

$$f\left(\mathrm{e}^{2t}x\right) = f(x) \quad \forall t \in \mathbb{C}, \qquad \text{tj.} \qquad f(\lambda x) = f(x) \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}^*.$$

Zbog neprekidnosti slijedi

$$f(x) = \lim_{\lambda \to 0} f(\lambda x) = f(0) = 0.$$

Teorem 4.6.3. *$\mathcal{N}$ je zatvoren algebarski podskup od $\mathfrak{p}$ kodimenzije $r(=\dim\mathfrak{a})$. Ako su $\mathcal{N}_1,\dots,\mathcal{N}_k$ ireducibilne komponente od $\mathcal{N}$ onda je $\mathrm{codim}_{\mathfrak{p}}\mathcal{N}_j=r$ za svaki j. Nadalje, svaka je komponenta $\mathcal{N}_j$ $K-$stabilna i sastoji se od konačno mnogo $K-$orbita.*

Za svaki $j\in\{1,\dots,k\}$ presjek $\mathcal{R}\cap\mathcal{N}_j$ je jedna $K-$orbita, odnosno, za svaki $e_j\in\mathcal{R}\cap\mathcal{N}_j$ vrijedi

$$Ke_j=\mathcal{R}\cap\mathcal{N}_j.$$

Orbita Ke_j je Zariski otvoren podskup od $\mathcal{N}_j$, dakle, to je jedina $K-$orbita koja je gusta u $\mathcal{N}_j$ i jedina $K-$orbita u $\mathcal{N}_j$ koja je otvorena. Napokon,

$$\mathcal{R}\cap\mathcal{N}=\bigcup_{j=1}^{k}\mathcal{R}\cap\mathcal{N}_j$$

i taj je skup otvoren i gust u $\mathcal{N}$.

Dokaz: Grupa K je povezana (dakle, ireducibilna). Kako je skup $\mathcal{N}$ $K-$stabilan, slijedi da je svaka komponenta $\mathcal{N}_j$ $K-$stabilna. Budući da prema teoremu 4.3.3. u $\mathcal{N}$ ima samo konačno mnogo $K-$orbita, slijedi i da u svakoj komponenti $\mathcal{N}_j$ ima samo konačno mnogo $K-$orbita. Stoga je svaka komponenta $\mathcal{N}_j$ unija zatvarača $K-$orbita sadržanih u $\mathcal{N}_j$, pa je zbog ireducibilnosti $\mathcal{N}_j=\overline{Ke_j}$ za neki $e_j\in\mathcal{N}_j$. Pokazuje se da je Zariski zatvarač od Ke_j jednak običnom zatvaraču od Ke_j. Nadalje, promatranjem diferencijala preslikavanja $k\mapsto ke_j$ nalazi se da je orbita Ke_j Zariski otvorena u svom zatvaraču $\overline{Ke_j}$.

Prema propoziciji 4.4.6. imamo $\mathrm{codim}_{\mathfrak{p}}Ke_j\geq r$, dakle, $\mathrm{codim}_{\mathfrak{p}}\mathcal{N}_j\geq r$. S druge strane, $\mathcal{N}$ je višestrukost definirana algebarski nezavisnim polinomima $u_1,\dots,u_r$, pa je $\mathrm{codim}_{\mathfrak{p}}\mathcal{N}_j\leq r$. Dakle,

$$\mathrm{codim}_{\mathfrak{p}}\mathcal{N}_j=r\quad \text{i}\quad \mathrm{codim}_{\mathfrak{p}}Ke_j=r\qquad \forall j\in\{1,\dots,r\}.$$

Prema propoziciji 4.4.6. zaključujemo da su $e_1,\dots,e_r\in\mathcal{R}$. Prema tome, vrijedi

$$Ke_j\subseteq\mathcal{R}\cap\mathcal{N}_j\qquad \forall j\in\{1,\dots,r\}.$$

Ali ako je $f_j\in\mathcal{R}\cap\mathcal{N}_j$ onda je, opet po propoziciji 4.4.6. $\mathrm{codim}_{\mathfrak{p}}Kf_j=r$, pa slijedi $Kf_j=Ke_j$. Naime, u suprotnom bi orbita Kf_j bila sadržana u komplementu $\mathcal{N}_j\setminus Ke_,$ a to je nemoguće, jer taj komplement ima kodimenziju u $\mathfrak{p}$ veću od r, jer je orbita Ke_j Zariski otvorena u $\mathcal{N}_j$. Dakle, vrijedi $Ke_j=\mathcal{R}\cap\mathcal{N}_j$, a odatle slijede i preostale tvrdnje.

Elementi od $\mathcal{R}\cap\mathcal{N}$ zovu se **glavni nilpotentni elementi** od $\mathfrak{p}$. Prema teoremu 4.6.3. taj je skup neprazan. **Normalna** TDS$-$podalgebra zove se **glavna normalna** TDS$-$podalgebra ako sadrži glavni nilpotentni element od $\mathfrak{p}$. Prema prethodnom takve TDS$-$podalgebre postoje.

Propozicija 4.6.4. *Ako je $\mathfrak{u}$ glavna normalna* TDS$-$*podalgebra i ako je $0\neq f\in\mathfrak{u}\cap\mathcal{N}$, onda je f glavni nilpotentni element od $\mathfrak{p}$.*

Dokaz: Neka je $0\neq e\in\mathfrak{u}\cap\mathcal{N}$ glavni nilpotentni element od $\mathfrak{p}$. Tada su e i f $G-$konjugirani; naime, svaka dva nilpotentna elementa iz $\mathfrak{u}$ različita od 0 su čak $\exp\mathfrak{u}-$konjugirani. No tada je $\dim\mathfrak{g}^e=\dim\mathfrak{g}^f$, pa po propozicijama 4.4.4. i 4.4.6. slijedi da je $f\in\mathcal{R}$, dakle, f je glavni nilpotentni element od $\mathfrak{p}$.

Normalna $S-$trojka (h,e,f) zove se **glavna normalna $S-$trojka** ako je e glavni nilpotentni element od $\mathfrak{p}$. Prema propoziciji 4.6.4. normalna $S-$trojka (h,e,f) je glavna ako i samo ako je f glavni nilpotentni element od $\mathfrak{p}$, dakle, ako i samo ako je $\mathrm{span}\{h,e,f\}$ glavna normalna TDS$-$podalgebra.

Lema 4.6.5. *Neka je $\mathfrak{u}$ TDS−podalgebra od $\mathfrak{g}$ (ne nužno normalna) i neka je (h, e, f) neka S−trojka koja ju razapinje. Stavimo $h_c = e + f$. Tada u $\mathfrak{u}$ postoji S−trojka (h_c, e_c, f_c). Nadalje, ako je S−trojka (h, e, f) normalna (dakle, $h_c \in \mathfrak{p}$) onda se e_c i f_c mogu izabrati tako da je $f_c = \vartheta e_c$ (dakle, $e_c + f_c \in \mathfrak{k}$); u tom je slučaju takav e_c jedinstven do na faktor ± 1.*

Dokaz: Prvu je tvrdnju dovoljno dokazati u slučaju $\mathfrak{u} = \mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ i za

$$h = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \qquad e = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad f = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Tada je $h_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, dakle, h_c je konjugiran elementu h. Ta konjugacija prevodi S−trojku (h, e, f) u S−trojku (h_c, e_c, f_c) koja je također baza od $\mathfrak{u}$.

Pretpostavimo sada u općem slučaju da je S−trojka (h, e, f) normalna. Kako je $\vartheta h_c = -h_c$, vrijedi $[h_c, \vartheta e_c] = -2\vartheta e_c$. Budući da je $\vartheta \mathfrak{u} = \mathfrak{u}$, slijedi da je $\vartheta e_c = \lambda f_c$ za neki $\lambda \in \mathbb{C}^*$. Neka je $\mu \in \mathbb{C}^*$ takav da je $\mu^2 = \lambda$. Tada je $(h_c, e_c/\mu, \mu f_c)$ S−trojka i $\vartheta(e_c/\mu) = \mu f_c$. S druge strane, ako je $\vartheta e_c = f_c$, onda je $[\alpha e_c, \vartheta(\alpha e_c)] = \alpha^2 h_c = h_c$ ako i samo ako je $\alpha = \pm 1$. Dakle, e_c je jedinstven do na predznak.

Primijetimo da ako je (h, e, f) normalna S−trojka, onda S−trojka (h_c, e_c, f_c) sigurno nije normalna jer je $h_c = e + f \in \mathfrak{p}$.

Teorem 4.6.6. *Ako je $\mathfrak{u}$ glavna normlna TDS−podalgebra onda su svi ireducibilni $(\operatorname{ad} \mathfrak{u})$−podmoduli od $\mathfrak{g}$ neparne dimenzije. Nadalje, ako je $0 \neq y \in \mathfrak{u} \cap \mathcal{S}$, onda je $y \in \mathcal{R}$ (dakle, prema korolaru 4.4.5. $y \in \mathcal{Q}$). Posebno, ako je (h, e, f) normalna S−trojka koja razapinje $\mathfrak{u}$, onda je $h_c = e + f \in \mathcal{R}$.*

Obratno, pretpostavimo da je $\mathfrak{u}$ normalna TDS−podalgebra takva da vrijedi

(*a*) *Svi ireducibilni $(\operatorname{ad} \mathfrak{u})$−podmoduli od $\mathfrak{g}$ su neparne dimenzije.*

(*b*) $\mathfrak{u} \cap \mathcal{S} \cap \mathcal{R} \neq \emptyset$.

Tada je $\mathfrak{u}$ glavna normalna TDS−podalgebra.

Dokaz: Pretpostavimo da je $\mathfrak{u}$ glavna normalna TDS−podalgebra i neka je (h, e, f) normalna S−trojka koja ju razapinje. Ako je V ireducibilan $(\operatorname{ad} \mathfrak{u})$−podmodul od $\mathfrak{g}$, onda je prema teoriji reprezentacija TDS−algebri $\dim \operatorname{Ker}((\operatorname{ad} e)|V) = 1$ (težinski potprostor najveće težine). Nadalje, $\dim \operatorname{Ker}((\operatorname{ad} h)|V)$ je 0 ako je V parne dimenzije, a 1 ako je V nepoarne dimenzije. (Težina nula pojavljuje se s multiplicitetom 0 ili 1 ovisno o tome da li je V parne ili neparne dimenzije.) Dakle,

$$\dim \mathfrak{g}^h \leq \dim \mathfrak{g}^e$$

i pri tome vrijedi znak jednakosti ako i samo ako su svi ireducibilni $(\operatorname{ad} \mathfrak{u})$−podmoduli od $\mathfrak{g}$ neparne dimenzije.

Stavimo $h_c = e + f$. Kao što smo primijetili u lemi 4.6.5. element h_c konjugiran je elementu h, dakle,

$$\dim \mathfrak{g}^h = \dim \mathfrak{g}^{h_c}.$$

Prema propoziciji 4.6.4. vrijedi $e \in \mathcal{R}$, dakle, $\dim \mathfrak{g}^e \leq \dim \mathfrak{g}^{h_c}$ prema propoziciji 4.4.3. Dakle, vrijedi $\dim \mathfrak{g}^e = \dim \mathfrak{g}^{h_c}$, dakle, $h_c \in \mathcal{R}$. Budući da su svaka dva poluprosta elementa neke TDS−algebre različita od nule do na skalar konjugirana, vrijedi $\dim \mathfrak{g}^h = \dim \mathfrak{g}^y$ za bilo koji $0 \neq y \in \mathfrak{u} \cap \mathcal{S}$. No tada je ujedno $y \in \mathcal{R}$ prema propoziciji 4.4.6.

Pretpostavimo sada da je $\mathfrak{u}$ normalna TDS−podalgebra od $\mathfrak{g}$ takva da su svi ireducibilni $(\operatorname{ad} \mathfrak{u})$−podmoduli od $\mathfrak{g}$ neparne dimenzije. Tada imamo $\dim \mathfrak{g}^h = \dim \mathfrak{g}^y$ za bilo koji poluprost $0 \neq h \in \mathfrak{u}$ i za bilo koji nilpotentan $0 \neq y \in \mathfrak{u}$. No ako je $\mathfrak{u}$ normalna i $\mathfrak{u} \cap \mathcal{S} \cap \mathcal{R} \neq \emptyset$, onda iz propozicije 4.6.4. slijedi da je $\mathfrak{u} \cap (\mathcal{N} \cap \mathcal{R}) \neq \emptyset$, dakle, $\mathfrak{u}$ je glavna normalna TDS−podalgebra.

U ostatku teksta rezultate navodimo bez dokaza.

Neka je $\Sigma = R(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$ restringirani sistem korijena pridružen Cartanovom potprostoru $\mathfrak{a}$ od $\mathfrak{p}$. Izaberimo bazu Π tog sistema korijena i neka je Σ_+ pripadni skup pozitivnih korijena u Σ. Označimo sa D pripadnu Weylovu komoru u

$$\mathfrak{a}_{\mathbb{R}} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \cap \{h \in \mathfrak{a};\ \lambda(h) \in \mathbb{R}\ \ \forall \lambda \in \Sigma\},$$

tj.

$$D = \{h \in \mathfrak{a};\ \lambda(h) > 0\ \ \forall \lambda \in \Sigma_+\}.$$

Normalna $S-$**trojka** (h, e, f) zove se **standardna** (u odnosu na Π ili u odnosu na Σ_+) ako je $h_c = e + f \in \overline{D}$. Lako se vidi da vrijedi:

Lema 4.6.7. *Svaka normalna $S-$trojka je $K-$konjugirana nekoj standardnoj normalnoj $S-$trojki.*

Neka je $z \in \mathfrak{a} \cap [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ jedinstven element takav da je $\lambda(z) = 2$ za svaki $\lambda \in \Pi$. Tada je $\lambda(z) \neq 0$ za svaki $\lambda \in \Sigma$ pa je $z \in \mathcal{S} \cap \mathcal{R}$ i $\mathfrak{g}^z = \mathfrak{a} \dotplus \mathfrak{m}$. Sve su svojstvene vrijednosti operatora $\mathrm{ad}\, z$ parni brojevi.

Propozicija 4.6.8. *Standardna normalna $S-$trojka (h, e, f) je glavna ako i samo ako je $h_c = e + f = z$.*

Stavimo

$$\mathfrak{g}^2 = \{y \in \mathfrak{g};\ [z, y] = 2y\} = \sum_{\lambda \in \Pi} \dotplus\, \mathfrak{g}^{\lambda}.$$

Imamo $[\mathfrak{g}^z, \mathfrak{g}^2] \subseteq \mathfrak{g}^2$. Stavimo

$$\hat{\mathfrak{g}}^2 = \{y \in \mathfrak{g}^2;\ [y, \mathfrak{g}^z] = \mathfrak{g}^2\}.$$

Za grupu $G^z = \exp \mathrm{ad}\, \mathfrak{g}^z$ vrijedi $G^z = MA$, gdje je $M = \exp \mathrm{ad}\, \mathfrak{m}$ i $A = \exp \mathrm{ad}\, \mathfrak{a}$. Skupovi $\mathfrak{g}^z$, $\mathfrak{g}^2$ i $\hat{\mathfrak{g}}^2$ su stabilni u odnosu na djelovanje grupe G^z. Analogno kao korolar 3.4.4. i teorem 3.4.5. dokazuje se:

Teorem 4.6.9. *$\hat{\mathfrak{g}}^2$ je neprazan Zariski otvoren podskup od $\mathfrak{g}^2$. Nadalje, $\hat{\mathfrak{g}}^2$ je jedna G^z-orbita, tj. $\hat{\mathfrak{g}}^2 = G^z y$ za bilo koji $y \in \hat{\mathfrak{g}}^2$.*

Za $e \in \mathcal{N}$ vrijedi $e \in \mathcal{R}$ ako i samo ako je e $G-$konjugiran nekom elementu iz $\hat{\mathfrak{g}}^2$. Drugim riječima,

$$\mathcal{N} \cap \mathcal{R} = \mathcal{N} \cap G\hat{\mathfrak{g}}^2.$$

Napokon, ako je (h, e, f) standardna normalna $S-$trojka i $\mathfrak{u}$ njom razapeta TDS*−podalgebra, onda je $\mathfrak{u}$ glavna ako i samo ako je $\mathfrak{u} \cap \hat{\mathfrak{g}}^2 \neq \emptyset$. Preciznije, ako je (h_c, e_c, f_c) baza od $\mathfrak{u}$ dana lemom 4.6.5. onda je $\mathfrak{u}$ glavna ako i samo ako je $e_c \in \hat{\mathfrak{g}}^2$.*

Lako se vidi da vrijedi:

Lema 4.6.10. *Za $a \in A = \exp \mathrm{ad}\, \mathfrak{a}$ i za $y \in \hat{\mathfrak{g}}^2$ vrijedi $ay = y$ ako i samo ako je $a = 1$.*

Odatle se dokazuje da u teoremu 4.6.3. ima samo jedna $K-$orbita u $\mathcal{R} \cap \mathcal{N}$, tj. da su svi glavni nilpotentni elementi $K-$konjugirani:

Teorem 4.6.11. *$\mathcal{R} \cap \mathcal{N}$ je jedna $K-$orbita. Nadalje, svake dvije glavne normalne* TDS*−podalgebre su $K_{\vartheta}-$konjugirane. Također, svake dvije glavne normalne $S-$trojke su $K_{\vartheta}-$konjugirane.*

4.7 Regularne i poluproste orbite

Za svaki element $h \in \mathcal{S}$ Liejeva podalgebra $\mathfrak{g}^h$ je reduktivna u $\mathfrak{g}$ i, posebno, reduktivna je. Tada je $\mathfrak{g}^h = \mathfrak{k}^h \dot{+} \mathfrak{p}^h$ kompleksificirana Cartanova dekompozicija od $\mathfrak{g}^h$. Da bismo to dokazali, treba pokazati da postoji realna forma $\left(\mathfrak{g}^h\right)_0$ od $\mathfrak{g}^h$ koja je $\vartheta-$stabilna, tako da je $\left(\mathfrak{g}^h\right)_0 = \left(\mathfrak{k}^h\right)_0 \dot{+} \left(\mathfrak{p}^h\right)_0$ obična Cartanova dekompozicija. Da bismo to dokazali, možemo pretpostaviti da je $h \in \mathfrak{a}$ (jer svaki element iz $\mathcal{S}$ je $K-$konjugiran nekom elementu iz $\mathfrak{a}$). Ako je $h \in \mathfrak{a}$, možemo pisati $h = u + v$, $u \in \mathfrak{a}_\mathbb{R}$, $v \in i\mathfrak{a}_\mathbb{R}$. Sada uočimo da element $y \in \mathfrak{g}$ komutira sa h ako i samo ako komutira i sa u i sa v. Taj zaključak slijedi ako razvijemo y u skladu s korijenskim rastavom od $\mathfrak{g}$ u odnosu na restringirani sistem korijena $\Sigma = R(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$, budući da restringirani korijeni porimaju realne vrijednosti na $\mathfrak{a}_\mathbb{R}$. Prema tome, podalgebra $\mathfrak{g}^h$ je stabilna u odnosu na konjugaciju definiranu realnom formom $\mathfrak{g}_\mathbb{R}$ od $\mathfrak{g}$. Prema tome, $\left(\mathfrak{g}^h\right)_0 = \mathfrak{g}^h \cap \mathfrak{g}_\mathbb{R}$ je pogodna realna forma od $\mathfrak{g}^h$.

Sve dokazano za Liejevu algebru $\mathfrak{g}$ primjenjivo je i na Liejevu algebru $\mathfrak{g}^h$ za bilo koji $h \in \mathcal{S}$. Tada ćemo sa $\mathcal{N}^h$, $\mathcal{S}^h$ i $\mathcal{R}^h$ označiti odgovarajuće skupove koji su za algebru $\mathfrak{g}$ bili označeni sa $\mathcal{N}$, $\mathcal{S}$ i $\mathcal{R}$.

Koristeći jedinstvenost Jordanove dekompozicije i pomoću činjenice da u svakoj potpuno reducibilnoj reprezentaciji reduktivne Liejeve algebre poluprosti i nilpotentni elementi djeluju kao poluprosti i nilpotentni operator lako se dokazuje:

Lema 4.7.1. *Za $h \in \mathcal{S}$ vrijedi $\mathcal{N}^h = \mathcal{N} \cap \mathfrak{p}^h$ i $\mathcal{S}^h = \mathcal{S} \cap \mathfrak{p}^h$.*

Neka je $h \in \mathcal{S}$. Budući da je prema propoziciji 4.4.1. $\dim \mathfrak{p}^h - \dim \mathfrak{k}^h = \dim \mathfrak{p} - \dim \mathfrak{k}$, broj $s = \dim \mathfrak{p} - \dim \mathfrak{k}$ pridružen rastavu $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \dot{+} \mathfrak{p}$ je ujedno broj pridružen rastavu $\mathfrak{g}^h = \mathfrak{k}^h \dot{+} \mathfrak{p}^h$. Isto vrijedi i za $\dim \mathfrak{a} (= r)$ i za $\dim \mathfrak{m}$. Doista, bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $h \in \mathfrak{a}$, a tada je $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}^h$ očito Cartanov potprostor od $\mathfrak{p}^h$ (za Liejevu algebru $\mathfrak{g}^h$) i $\mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{k}^h$ je centralizator od $\mathfrak{a}$ u $\mathfrak{k}^h$. Nadalje, uočimo da su za svaki $h \in \mathcal{S}$ Cartanovi potprostori od $\mathfrak{p}^h$ točno oni Cartanovi potprostori od $\mathfrak{p}$ koji su sadržani u $\mathfrak{p}^h$. Odatle i iz propozicije 4.4.4. neposredno slijedi:

Propozicija 4.7.2. *Za $h \in \mathcal{S}$ i $y \in \mathfrak{p}^h$ sljedeća su četiri svojstva međusobno ekvivalentna:*

(*a*) $y \in \mathcal{R}^h$.

(*b*) $\dim \left(\mathfrak{p}^h\right)^y = \dim \mathfrak{a}$.

(*c*) $\dim \left(\mathfrak{k}^h\right)^y = \dim \mathfrak{m}$.

(*d*) $\dim \left(\mathfrak{g}^h\right)^y = \dim \mathfrak{a} + \dim \mathfrak{m}$.

Neka je $h \in \mathcal{S}$ i neka $\left(K^{(h)}\right)_\vartheta$ igra ulogu K_ϑ za $\mathfrak{g}^h = \mathfrak{k}^h \dot{+} \mathfrak{p}^h$. Imamo i centralizator $\left(K_\vartheta\right)^h$ od h u grupi K_ϑ. Tada grupa $\left(K^{(h)}\right)_\vartheta$ djeluje samo na $\mathfrak{g}^h$, dok grupa $\left(K_\vartheta\right)^h$ djeluje na cijeloj $\mathfrak{g}$. Centralizator G^h od h u G je povezan, pa restrikcija G^h na $\mathfrak{g}^h$ preslikava grupu G^h na adjungiranu grupu od $\mathfrak{g}^h$. Budući da je $\left(K_\vartheta\right)^h \subseteq G^h$, restrikcija $\left(K_\vartheta\right)^h$ na $\mathfrak{g}^h$ definira homomorfizam

$$\pi_h : \left(K_\vartheta\right)^h \longrightarrow \left(K^{(h)}\right)_\vartheta .$$

Preciznim proučavanjem djelovanja dokazuje se netrivijalna činjenica:

Lema 4.7.3. *Za svaki $h \in \mathcal{S}$ homomorfizam $\pi_h : \left(K_\vartheta\right)^h \to \left(K^{(h)}\right)_\vartheta$ definiran restrikcijom na $\mathfrak{g}^h$ je surjektivan.*

Pomoću algebarski nezavisnih homogenih generatora $u_1, \dots, u_r$ algebre $\mathcal{P}(\mathfrak{p})^K$ $(r = \dim \mathfrak{a})$ definiramo slično kao u odjeljku 3.10. preslikavanje

$$u : \mathfrak{p} \longrightarrow \mathbb{C}^r, \qquad u(x) = \xi = (u_1(x), \dots, u_r(x)), \quad x \in \mathfrak{p}.$$

Označimo sa Ω skup svih $K_\vartheta-$orbita. Preslikavanje u je konstano na svakoj $K_\vartheta-$orbiti, pa definira preslikavanje $\eta : \Omega \to \mathbb{C}^r$. Za bilo koji $K_\vartheta-$invarijantan podskup $\mathcal{U}$ od $\mathfrak{p}$ označimo sa $\Omega_\mathcal{U}$ skup svih $K_\vartheta-$orbita u $\mathcal{U}$ i neka je $\eta_\mathcal{U} = \eta|\Omega_\mathcal{U} : \Omega_\mathcal{U} \to \mathbb{C}^r$.

Teorem 4.7.4. *(a) $\Omega_\mathcal{S}$ je skup svih zatvorenih $K_\vartheta-$orbita u $\mathfrak{p}$.*

(b) Za svaki $x \in \mathcal{S}$ je $Kx = K_\vartheta x$.

(c) Preslikavanje $\eta_\mathcal{S} : \Omega_\mathcal{S} \to \mathbb{C}^r$ je bijekcija.

(d) Neka je $x = x_s + x_n$ Jordanov rastav elementa $x \in \mathfrak{p}$. Tada je $x \in \mathcal{R}$ ako i samo ako je x_n glavni nilpotentni element u $\mathfrak{p}^{x_s}$, tj. ako i samo ako je $x_n \in \mathcal{R}^{x_s} \cap \mathcal{N}^{x_s}$.

(e) Ako su $x = x_s + x_n$ i $y = y_s + y_n$ Jordanovi rastavi elemenata $x, y \in \mathfrak{p}$, onda su x i y $K_\vartheta-$konjugirani ako i samo ako su x_s i y_s $K-$konjugirani.

(f) Preslikavanje $\eta_\mathcal{R} : \Omega_\mathcal{R} \to \mathbb{C}^r$ je bijekcija.

Ovaj se teorem dokazuje pomoću analognih rezultata iz odjeljka 3.10. i to tako da se ti rezultati primijene na posebno konstruiranu reduktivnu podalgebru $\mathfrak{g}^\#$ od $\mathfrak{g}$ u kojoj je $\mathfrak{a}$ Cartanova podalgebra i vrijedi

$$\Sigma^\# = R(\mathfrak{g}^\#, \mathfrak{a}) = \left\{ \lambda \in \Sigma = R(\mathfrak{g}, \mathfrak{a});\ \frac{1}{2}\lambda \notin \Sigma \right\}.$$

Tada je Π baza sistema korijena $\Sigma^\#$ i $W(\Sigma^\#) = W(\Sigma)$. Nadalje, konstrukcija je takva da je $\mathfrak{g}^\#_\mathbb{R} = \mathfrak{g}^\# \cap \mathfrak{g}_\mathbb{R}$ realna forma od $\mathfrak{g}^\#$ i za $\mathfrak{k}^\# = \mathfrak{k} \cap \mathfrak{g}^\#$ i $\mathfrak{p}^\# = \mathfrak{p} \cap \mathfrak{g}^\#$ rastav

$$\mathfrak{g}^\# = \mathfrak{k}^\# \dotplus \mathfrak{p}^\#$$

je kompleksificirana Cartanova dekompozicija od $\mathfrak{g}^\#$. Posebno, vrijedi $\vartheta\mathfrak{g}^\# = \mathfrak{g}^\#$ i $\vartheta^\# = \vartheta|\mathfrak{g}^\#$ je Cartanova involucija pridružena gornjoj Cartanovoj dekompoziciji. Teorija razvijena za $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \dotplus \mathfrak{p}$ primjenjiva je na $\mathfrak{g}^\# = \mathfrak{k}^\# \dotplus \mathfrak{p}^\#$. No ova druga Liejeva algebra je znatno jednostavnija jer je $\mathfrak{g}^\#_\mathbb{R}$ rascjepiva realna forma od $\mathfrak{g}^\#$: njezin Cartanov potprostor $\mathfrak{a}$ je ujedno njezina Cartanova podalgebra. Označimo sa $\mathcal{S}^\#$, $\mathcal{N}^\#$ i $\mathcal{R}^\#$ podskupove od $\mathfrak{p}^\#$ analogne podskupovima $\mathcal{S}$, $\mathcal{N}$ i $\mathcal{R}$ od $\mathfrak{p}$. Važna je činjenica da tada vrijedi $\mathcal{R}^\# = \mathcal{R} \cap \mathfrak{p}^\#$.

4.8 Multipliciteti u $K-$modulu harmonijskih polinoma

Prema teoremu 4.5.10. Linearno preslikavanje $\mathcal{P}(\mathfrak{p})^K \otimes \mathcal{H}_K(\mathfrak{p}) \to \mathcal{P}(\mathfrak{p})$ inducirano množenjem je izomorfizam $K-$modula. Sada se sasvim analogno teoremu 3.10.1. dokazuje:

Teorem 4.8.1. *Za element $x \in \mathfrak{p}$ označimo sa $\mathcal{O}_x$ njegovu $K_\vartheta-$orbitu. Neka je*

$$\gamma_x : \mathcal{H}_K(\mathfrak{p}) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{O}_x)$$

linearno preslikavanje koje se dobiva restrikcijom preslikavanja

$$\mathcal{P}(\mathfrak{p}) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{O}_x), \qquad f \mapsto f|\mathcal{O}_x,$$

na $\mathcal{H}_K(\mathfrak{p})$. Tada je γ_x epimorfizam $K_\vartheta-$modula i za svaki $x \in \mathcal{R}$ to je izomorfizam.

Dakle, kao $K-$modul $\mathcal{H}_K(\mathfrak{p})$ izomorfan je $K-$modulu $\mathcal{P}(\mathcal{O}_x)$ za svaki $x \in \mathcal{R}$. Istim argumentom kao iza teorema 3.10.14. nalazimo da u slučaju $h \in \mathfrak{a} \cap \mathcal{R}$ vrijedi $\mathcal{P}(\mathcal{O}_h) = R(\mathcal{O}_h) \cong R(K/M)$, gdje je

$$M = K^h = \{k \in K;\ kh = h\} = \{k \in K;\ kx = x\ \forall x \in \mathfrak{a}\}$$

centralizator $\mathfrak{a}$ u K. Primijenimo li u ovoj situaciji teorem 3.10.19. dobivamo preciznu strukturu $K-$modula $\mathcal{H}_K(\mathfrak{p})$:

Teorem 4.8.2. *Za $\delta \in \hat{K}$ neka je V_δ ireducibilan $K-$modul iz klase δ. Multiplicitet klase δ u $K-$modulu $\mathcal{H}_K(\mathfrak{p})$ jednak je* $\dim V_\delta^M$*, gdje je V_δ^M potprostor $M-$fiksnih vektora u V_δ :*

$$V_\delta^M = \{v \in V_\delta;\ mv = v\ \ \forall m \in M\}.$$

4.9 $K-$invarijante u omotačkoj algebri

U Harish−Chandrinoj teoriji reprezentacija poluprostih (općenitije, reduktivnih) Liejevih grupa vrlo važnu ulogu ima algebra $U(\mathfrak{g})^K$ svih $K-$invarijanata u $U(\mathfrak{g})$. Veće ja davno postalo jasno da osim u nekim vrlo specijalnim slučajevima ta algebra ima izuzetno kompliciranu strukturu. Ovdje ćemo navesti vrlo značajne Knopove rezultate iz 1990. dobivene prilično netrivijalnim metodama algebarske geometrije.

Označimo sa $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$ centar algebre $U(\mathfrak{g})$ i sa $\mathfrak{Z}(\mathfrak{k})$ centar algebre $U(\mathfrak{k}) \subseteq U(\mathfrak{g})$. To su unitalne podalgebre algebre $U(\mathfrak{g})^K$ i množenje definira unitalni homomorfizam

$$\mu : \mathfrak{Z}(\mathfrak{g}) \otimes \mathfrak{Z}(\mathfrak{k}) \longrightarrow U(\mathfrak{g})^K.$$

Označimo sa $\mathfrak{Z}_0$ njegovu sliku, dakle,

$$\mathfrak{Z}_0 = \operatorname{span}\{ab;\ \ a \in \mathfrak{Z}(\mathfrak{g}),\ \ b \in \mathfrak{Z}(\mathfrak{k})\}.$$

Uočimo da je $\mathfrak{Z}_0$ podalgebra centra algebre $U(\mathfrak{g})^K$.

Kao $K-$modul $U(\mathfrak{g})$ je izomorfan sa $S(\mathfrak{g})$ (a pomoću Killingove forma i sa $\mathcal{P}(\mathfrak{g})$). Imamo analogan homomorfizam algebri

$$\mu' : S(\mathfrak{g})^G \otimes S(\mathfrak{k})^K \longrightarrow S(\mathfrak{g})^K$$

i označimo sa Z_0 njegovu sliku.

Teorem 4.9.1. *Ako je Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ prosta i različita od $\mathfrak{k}$, onda su*

$$\mu : \mathfrak{Z}(\mathfrak{g}) \otimes \mathfrak{Z}(\mathfrak{k}) \to \mathfrak{Z}_0 \qquad i \qquad \mu' : S(\mathfrak{g})^G \otimes S(\mathfrak{k})^K \longrightarrow Z_0$$

izomorfizmi algebri. Nadalje, $\mathfrak{Z}_0$ je centar algebre $U(\mathfrak{g})^K$. Napokon, $U(\mathfrak{g})^K$ je plosnat kao $\mathfrak{Z}_0-$modul i $S(\mathfrak{g})^K$ je plosnat kao Z_0-modul.

Podsjećamo da se za **modul** M nad komutativnim prstenom R kaže da je **plosnat**, ako je funktor $(\,\cdot\,) \otimes_R M$ ekzagtan. Svakako je slobodan modul plosnat ali ima plosnatih modula koji nisu slobodni.

Teorem 4.9.2. *Za prostu Liejevu algebru $\mathfrak{g} \neq \mathfrak{k}$ sljedeća su četiri svojstva međusobno ekvivalentna:*

(*a*) $\mathfrak{Z}_0 = U(\mathfrak{g})^K$.

(*b*) $Z_0 = S(\mathfrak{g})^K$.

(*c*) *Algebra $U(\mathfrak{g})^K$ je komutativna.*

(*d*) $\mathfrak{g}_0 \cong \mathfrak{su}(n,1)$ *za neki* $n \in \mathbb{N}$ *ili* $\mathfrak{g}_0 \cong \mathfrak{so}(n,1)$ *za neki* $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

U tom slučaju $U(\mathfrak{g})$ je slobodan $U(\mathfrak{g})^K-$modul i $S(\mathfrak{g})$ je slobodan $S(\mathfrak{g})^K-$modul.

Bibliografija

[1] D.J. Benson, *Polynomial Invariants of Finite Groups*, Cambridge University Press, Cambridge, 1993.

[2] Joseph Bernstein and Valery Lunts, *A simple proof of Kostant's theorem that $U(\mathfrak{g})$ is free over its center*, American Journal of Mathematics, **118**(1996), 979 – 987.

[3] Nicolas Bourbaki, *Lie Groups and Lie Algebras*, Ch. 1−3, Springer−Verlag, 2nd printing, Berlin−Heidelberg−New York−London−Paris−Tokyo, 1989; Ch. 4−6, Springer−Verlag, Berlin−Heidelberg−New York, 2002; Ch. 7−9, Springer−Verlag, Berlin−Heidelberg, 2005.

[4] Claude Chevalley, *Invariants of finite groups generated by reflections*, American Journal of Mathematics **77**(1955), 778 – 782.

[5] Jacques Dixmier, *Enveloping Algebras*, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1996.

[6] Roe Goodman and Nolan R. Wallach, *Symmetry, Representation, and Invariants*, Springer−Verlag, Heidelberg−London−New York, 2009.

[7] James E. Humphreys, *Introduction to Lie Algebras and Representation Theory*, Springer−Verlag, Berlin−Heidelberg−New York, 1972.

[8] Richard Kane, *Reflection Groups and Invariant Theory*, Springer−Verlag, New York, 2001.

[9] Bertram Kostant, *The principal three−dimensional subgroup and the Betti numbers of a complex simple Lie group*, American Journal of Mathematics, **81**(1959), 973 – 1032.

[10] Bertram Kostant, *Lie ghroup representations on polynomial rings*, American Journal of Mathematics, **86**(1963), 327 – 404.

[11] Bertram Kostant and Stephen Rallis, *Orbits and representations associated with symmetric spaces*, American Journal of Mathematics, **93**(1971), 753 – 809.

[12] Hrvoje Kraljević, *Harish−Chandrini moduli*, 2005.
http://web.math.pmf.unizg.hr/∼hrk/nastava/2004-05/H-Ch_moduli.pdf

[13] Hrvoje Kraljević, *Poluproste Liejeve algebre*, 2008.
http://web.math.pmf.unizg.hr/∼hrk/nastava/2007-08/PLA.pdf

[14] Hrvoje Kraljević, *Realne poluproste Liejeve algebre*, 2009.
http://web.math.pmf.unizg.hr/∼hrk/nastava/2008-09/RPLA2009.pdf

[15] Hrvoje Kraljević, *Reprezentacije poluprostih Liejevih grupa*, 2010.
http://web.math.pmf.unizg.hr/∼hrk/nastava/2009-10/RPLG2009_10.pdf

[16] Anthony W. Knapp, *Lie Groups Beyond an Introduction*, 2nd ed., Birkhäuser, Boston−Basel−Berlin, 2002.

[17] Anthony W. Knapp, *Representations Theory of Semisimple Groups, An Overview Based on Examples*, Princeton Univ. Press, Princeton−Oxford, 1986.

[18] Friedrich Knop *Der Zantralisator einer Liealgebra in einer einhülenden Algebra*, Journal für di reine und angewandte Mathematik, **406**(1990), 5 − 9.

[19] Dragan Miličić, *Lectures on Lie Groups*, www.math.utah.edu/∼milicic/lie.pdf

[20] Larry Smith, *Polynomial Invariants of Finite Groups*, A K Peters, Wellesley, Mass., 1998.