VON NEUMANNOVE ALGEBRE

Prof. dr. sc. Hrvoje Kraljević

Predavanja održana na PMF−Matematičkom odjelu
Sveučilišta u Zagrebu
u ljetnom semestru akademske godine 2011./2012.

Zagreb, 2012.

Sadržaj

1 Osnovni pojmovi **5**

1.1 Algebre . . . 5
1.2 Normirane i Banachove algebre . . . 9
1.3 C^*−algebre . . . 16

2 OGRANIČENI OPERATORI NA HILBERTOVOM PROSTORU **19**

2.1 Norma hermitskog operatora . . . 19
2.2 Pozitivni operatori . . . 22
2.3 Parcijalne izometrije i polarna forma . . . 28
2.4 Spektralni teorem . . . 33
2.5 Hilbert−Schmidtovi operatori . . . 37
2.6 Nuklearni operatori . . . 46

3 OSNOVNA SVOJSTVA VON NEUMANNOVIH ALGEBRI **53**

3.1 Komutant i bikomutant . . . 53
3.2 Hermitski i unitarni operatori u von Neumannovoj algebri . . . 55
3.3 Projektori u von Neumannovoj algebri . . . 57
3.4 Homomorfizmi . . . 64
3.5 Ortogonalne sume . . . 67

4 TEOREMI GUSTOĆE **69**

4.1 Topologije na algebrama operatora . . . 69
4.2 Linearni funkcionali na algebrama operatora . . . 75
4.3 Teorem o bikomutantu . . . 77
4.4 Von Neumannov teorem gustoće . . . 79
4.5 Teorem gustoće Kaplanskog . . . 83

5 POZITIVNI FUNKCIONALI **85**

5.1 Pozitivni funkcionali na $*$−algebrama operatora . . . 85
5.2 Normalni pozitivni funkcionali na von Neumannovoj algebri . . . 89
5.3 Normalna pozitivna linearna preslikavanja . . . 91
5.4 Nosač normalnog pozitivnog funkcionala . . . 92
5.5 Polarna forma linearnog funkcionala . . . 94

Poglavlje 1

Osnovni pojmovi

1.1 Algebre

U cijelom kolegiju termin **algebra** označava kompleksnu asocijativnu algebru. Dakle, algebra je vektorski prostor $\mathcal{A}$ nad poljem $\mathbb{C}$ kompleksnih brojeva na kojem je zadana asocijativna binarna operacija $(a, b) \mapsto ab$ sa $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$ u $\mathcal{A}$ koja je bihomogena u odnosu na množenje skalarima i distributivna i slijeva i zdesna s obzirom na zbrajanje u $\mathcal{A}$:

$$a(bc) = (ab)c, \qquad \lambda(ab) = (\lambda a)b = a(\lambda b), \qquad a(b + c) = ab + ac,$$

$$(a + b)c = ac + bc, \qquad a, b, c \in \mathcal{A},\ \lambda \in \mathbb{C}.$$

Jedinica u algebri $\mathcal{A}$ je element $e \in \mathcal{A}$ takav da je

$$ea = ae = a \qquad \forall a \in \mathcal{A}.$$

Ako jedinica postoji, ona je jedinstvena i označavat ćemo je sa e ili sa 1 ili sa I. **Unitalna algebra** je algebra u kojoj postoji jedinica. Ako je $\mathcal{A}$ unitalna algebra sa $\mathcal{A}^\times$ označavamo grupu invertibilnih elemenata algebre $\mathcal{A}$:

$$\mathcal{A}^\times = \{a \in \mathcal{A};\ \exists a^{-1} \in \mathcal{A} \text{ takav da je } aa^{-1} = a^{-1}a = e\}.$$

Potprostor $\mathcal{B}$ algebre $\mathcal{A}$ zove se **podalgebra** ako vrijedi

$$a, b \in \mathcal{B} \qquad \Longrightarrow \qquad ab \in \mathcal{B}.$$

Naravno, tada je $\mathcal{B}$ algebra s obzirom na iste operacije (ili, točnije, s obzirom na operacije koje su definirane kao restrikcije operacija algebre $\mathcal{A}$). Ako je $\mathcal{A}$ unitalna algebra, $\mathcal{B}$ se zove **unitalna podalgebra** ako sadrži jedinicu algebre $\mathcal{A}$. Napomenimo da je moguće da je $\mathcal{B}$ unitalna algebra, ali da $\mathcal{B}$ nije unitalna podalgebra algebre $\mathcal{A}$: naime, moguće je da $\mathcal{B}$ ima jedinicu, ali da ta jedinica nije jednaka jedinici u algebri $\mathcal{A}$.

Ako su $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ algebre, preslikavanje $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ se zove **homomorfizam algebri** ako je φ linearno i multiplikativno:

$$\varphi(\lambda a + \mu b) = \lambda\varphi(a) + \mu\varphi(b) \qquad \text{i} \qquad \varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b) \qquad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{C},\ \forall a, b \in \mathcal{A}.$$

Ako su $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ unitalne algebre s jedinicama $e_\mathcal{A}$ i $e_\mathcal{B}$ i ako vrijedi $\varphi(e_\mathcal{A}) = e_\mathcal{B}$ onda se φ zove **unitalni homomorfizam**. Injektivni homomorfizam zove se **monomorfizam**, surjektivni homomorfizam zove se **epimorfizam**, a bijektivni homomorfizam je **izomorfizam algebri**. Za algebre $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ kažemo da su **izomorfne** ako postoji izomorfizam $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$. Očito je izomorfnost algebri relacija ekvivalencije.

Primjer unitalne algebre je algebra $\mathbb{C}[T]$ polinoma u jednoj varijabli nad poljem $\mathbb{C}$. To je skup svih nizova $(\alpha_n)_{n\geq 0}$ kompleksnih brojeva, takvih da je samo konačno članova različito do nule: $\exists m$ takav da vrijedi $\alpha_n = 0 \ \forall n > m$. Zbrajanje u $\mathbb{C}[T]$ i množenje skalarom definirani su po komponentama: $(\alpha_n) + (\beta_n) = (\alpha_n + \beta_n)$, $\lambda(\alpha_n) = (\lambda\alpha_n)$, a množenje na sljedeći način:

$$(\alpha_n)(\beta_n) = (\gamma_n), \qquad \text{gdje je} \qquad \gamma_n = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \beta_{n-k}.$$

$\mathbb{C}[T]$ je komutativna algebra i vrijedi $\mathbb{C}[T]^\times = \mathbb{C}^\times = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Obično pišemo $(0, 1, 0, \ldots) = T$. Tada je za bilo koji prirodan broj n $T^n = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots)$, tj. niz u kome su svi članovi nula osim jedinice na mjestu $n+1$. Uz dogovor $T^0 = (1, 0, \ldots)$ (to je jedinica u algebri $\mathbb{C}[T]$), polinom $P = (\alpha_n)$, za koji je $\alpha_n = 0$ za svaki $n > m$, možemo ovako zapisati:

$$P = P(T) = \alpha_0 + \alpha_1 T + \alpha_2 T^2 + \ldots + \alpha_m T^m = \sum_{n=0}^{m} \alpha_n T^n.$$

Ako je $\mathcal{A}$ unitalna algebra s jedinicom e, $x \in \mathcal{A}$ i $P \in \mathbb{C}[T]$ kao gore onda pišemo:

$$P(x) = \alpha_0 e + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \ldots + \alpha_m x^m = \sum_{n=0}^{m} \alpha_n x^n.$$

Očito je $P \mapsto P(x)$ unitalni homomorfizam algebri $\Phi_x \colon \mathbb{C}[T] \to \mathcal{A}$. Njegova je slika najmanja unitalna podalgebra od $\mathcal{A}$ koja sadrži x; to je potprostor od $\mathcal{A}$ razapet svim potencijama $\{e, x, x^2, \ldots\}$ elementa x.

Ako je $\mathcal{A}$ unitalna algebra i $x \in \mathcal{A}$ definiramo **spektar** elementa x kao skup

$$\sigma(x) = \sigma_{\mathcal{A}}(x) = \{\lambda \in \mathbb{C};\ x - \lambda e \notin \mathcal{A}^\times\}.$$

Uočimo neke evidentne činjenice. Ako je algebra trivijalna, $\mathcal{A} = \{0\}$, onda je 0 jedinica u toj algebri, pa je $\mathcal{A}^\times = \mathcal{A} = \{0\}$. Stoga je u tom slučaju $\sigma_{\mathcal{A}}(0) = \emptyset$. Ako je algebra netrivijalna, $\mathcal{A} \neq \{0\}$, onda je $\sigma(\lambda e) = \{\lambda\}$ za svaki $\lambda \in \mathbb{C}$.

Propozicija 1.1.1. *Neka je $\mathcal{A}$ unitalna algebra.*

(*a*) *Za $x \in \mathcal{A}$ i za $P \in \mathbb{C}[T]$ vrijedi:*

$$\sigma(P(x)) = P(\sigma(x)) = \{P(\lambda);\ \lambda \in \sigma(x)\}.$$

(*b*) *Za $x \in \mathcal{A}^\times$ vrijedi:*

$$\sigma\left(x^{-1}\right) = \sigma(x)^{-1} = \{\lambda^{-1};\, \lambda \in \sigma(x)\}.$$

Dokaz: (*a*) Neka je $\lambda \in \sigma(x)$. Definiramo $Q = P - P(\lambda)$. Tada je $Q(\lambda) = 0$, pa postoji $R \in \mathbb{C}[T]$, takav da je

$$P(T) - P(\lambda) = (T - \lambda)R(T).$$

Primijenimo li na tu jednakost homomorfizam Φ_x slijedi:

$$P(x) - P(\lambda)e = (x - \lambda e)R(x).$$

Pretpostavimo da je $P(x) - P(\lambda)e \in \mathcal{A}^\times$ i stavimo $a = (P(x) - P(\lambda)e)^{-1}$. Slijedi

$$e = a\,(P(x) - P(\lambda)e) = aR(x)(x - \lambda e) = (x - \lambda e)aR(x).$$

Odatle slijedi da je $x - \lambda e \in \mathcal{A}^\times$, a to je suprotno pretpostavci $\lambda \in \sigma(x)$. Dakle, pretpostavka $P(x) - P(\lambda)e \in \mathcal{A}^\times$ je bila pogrešna, pa zaključujemo da je $P(x) - P(\lambda)e \notin \mathcal{A}^\times$, tj. $P(\lambda) \in \sigma(P(x))$. Time je dokazana inkluzija $P(\sigma(x)) \subseteq \sigma(P(x))$.

Dokažimo sada obrnutu inkluziju. Neka je $\mu \in \sigma(P(x))$. Polje $\mathbb{C}$ je algebarski zatvoreno, pa ako je m stupanj polinoma P, postoje skalari $\alpha \neq 0$ i $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ takvi da je

$$P(T) - \mu = \alpha \cdot (T - \lambda_1) \cdots (T - \lambda_m).$$

Za svaki $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$ tada je $P(\lambda_j) - \mu = 0$, tj. $\mu = P(\lambda_j)$. Primijenimo li na gornju jednakost homomorfizam Φ_x dobivamo

$$P(x) - \mu e = \alpha \cdot (x - \lambda_1 e) \cdots (x - \lambda_m e).$$

Kako je $\mu \in \sigma(P(x))$ to vrijedi $P(x) - \mu e \notin \mathcal{A}^\times$ pa slijedi da postoji $j \in \{1, \ldots, m\}$ takav da $x - \lambda_j e \notin \mathcal{A}^\times$, tj. $\lambda_j \in \sigma(x)$. No tada je $\mu = P(\lambda_j) \in P(\sigma(x))$. Time je dokazana i obrnuta inkluzija $\sigma(P(x)) \subseteq P(\sigma(x))$, dakle jednakost $\sigma(P(x)) = P(\sigma(x))$.

(*b*) Neka je $\lambda \in \sigma(x)$, tj. $\lambda e - x$ nije invertibilan. Imamo

$$\lambda e - x = -\lambda(\lambda^{-1} e - x^{-1})x,$$

odakle se vidi da $\lambda^{-1} e - x^{-1}$ nije invertibilan, dakle $\lambda^{-1} \in \sigma\left(x^{-1}\right)$. Time je dokazano da iz $\lambda \in \sigma(x)$ slijedi $\lambda^{-1} \in \sigma(x^{-1})$, tj. dokazana je inkluzija $\sigma(x)^{-1} \subseteq \sigma\left(x^{-1}\right)$. Zamjena uloga x i x^{-1} daje $\sigma\left(x^{-1}\right)^{-1} \subseteq \sigma(x)$, odnosno dobivamo obrnutu inkluziju $\sigma\left(x^{-1}\right) \subseteq \sigma(x)^{-1}$.

Zadatak 1.1.1. *Neka je $\mathcal{A} \neq \{0\}$ unitalna algebra i neka je element $x \in \mathcal{A}$ nilpotentan. Dokažite da je tada $\sigma(x) = \{0\}$.*

Zadatak 1.1.2. *Neka je $\varphi \colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ unitalni homomorfizam unitalnih algebri i neka je $x \in \mathcal{A}$. Dokažite da je tada $\sigma_{\mathcal{B}}(\varphi(x)) \subseteq \sigma_{\mathcal{A}}(x)$.*

Neka je $\mathcal{A}$ unitalna algebra. Stavimo

$$R(x, \lambda) = (\lambda e - x)^{-1}, \qquad x \in \mathcal{A},\ \lambda \in \mathbb{C} \setminus \sigma(x)$$

Funkcija $\lambda \mapsto R(x, \lambda)$ sa $\mathbb{C} \setminus \sigma(x)$ u $\mathcal{A}$ zove se **rezolventa** elementa x.

Zadatak 1.1.3. *Neka je $\mathcal{A}$ unitalna algebra.*

(*a*) *Dokažite da za $x \in \mathcal{A}$ i $\lambda, \mu \in \mathbb{C} \setminus \sigma(x)$ vrijedi*

$$(\lambda - \mu) R(x, \lambda) R(x, \mu) = R(x, \mu) - R(x, \lambda).$$

Posebno, $R(x, \lambda)$ i $R(x, \mu)$ komutiraju.

(*b*) *Dokažite da za $x, y \in \mathcal{A}$ i $\lambda \in \mathbb{C} \setminus (\sigma(x) \cup \sigma(y))$ vrijedi*

$$R(y, \lambda)(y - x) R(x, \lambda) = R(y, \lambda) - R(x, \lambda).$$

Lijevi ideal u algebri $\mathcal{A}$ je potprostor $\mathcal{L}$ od $\mathcal{A}$ takav da vrijedi:

$$x \in \mathcal{L} \ \text{ i } \ a \in \mathcal{A} \qquad \Longrightarrow \qquad ax \in \mathcal{L}.$$

Analogno, **desni ideal** je potprostor $\mathcal{R}$ od $\mathcal{A}$ sa svojstvom:

$$x \in \mathcal{R} \ \text{ i } \ a \in \mathcal{A} \qquad \Longrightarrow \qquad xa \in \mathcal{R}.$$

Ako je $\mathcal{J}$ i lijevi i desni ideal, $\mathcal{J}$ se zove **obostrani ideal**, a katkada i samo **ideal**. Dakle, obostrani ideal je potprostor $\mathcal{J}$ od $\mathcal{A}$ takav da vrijedi:

$$x \in \mathcal{J} \quad \text{i} \quad a \in \mathcal{A} \qquad \Longrightarrow \qquad xa \in \mathcal{J} \quad \text{i} \quad ax \in \mathcal{J}.$$

Ako je $\mathcal{A}$ unitalna algebra, primijetimo da za lijevi, desni ili obostrani ideal $\mathcal{J} \neq \mathcal{A}$ vrijedi $e \notin \mathcal{J}$. Štoviše, ako je $\mathcal{J}$ lijevi, desni ili obostrani ideal različit od $\mathcal{A}$ onda $\mathcal{J}$ ne sadrži nijedan invertibilni element, tj. $\mathcal{J} \cap \mathcal{A}^\times = \emptyset$.

Neka je $\mathcal{J}$ obostrani ideal u algebri $\mathcal{A}$. U kvocijentni vektorski prostor $\mathcal{A}/\mathcal{J}$ uvodimo operaciju množenja na sljedeći način:

$$(x + \mathcal{J})(y + \mathcal{J}) = xy + \mathcal{J}, \qquad x, y \in \mathcal{A}.$$

Iz činjenice da je $\mathcal{J}$ obostrani ideal slijedi da ta definicija ima smisla, tj. ne ovisi o izboru predstavnika x i y klasa kvocijentnog prostora. Doista, ako je $x + \mathcal{J} = x' + \mathcal{J}$ i $y + \mathcal{J} = y' + \mathcal{J}$ (tj. $x - x' \in \mathcal{J}$ i $x - x' \in \mathcal{J}$) onda je

$$xy - x'y' = x(y - y') + (x - x')y' \in \mathcal{J},$$

dakle, $xy + \mathcal{J} = x'y' + \mathcal{J}$. S tako definiranim množenjem $\mathcal{A}/\mathcal{J}$ postaje algebra i zove se **kvocijentna algebra** algebre $\mathcal{A}$ po idealu $\mathcal{J}$. Kvocijentno preslikavanje $\pi\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}/\mathcal{J}$, koje element algebre $\mathcal{A}$ preslikava u njegovu klasu modulo $\mathcal{J}$ ($\pi(x) = x + \mathcal{J}$), je surjektivni homomorfizam algebri. Ako je e jedinica u algebri $\mathcal{A}$, njegova je klasa $\pi(e) = e + \mathcal{J}$ jedinica u kvocijentnoj algebri $\mathcal{A}/\mathcal{J}$. Napomenimo da je moguće da je $\mathcal{A}$ algebra bez jedinice, ali da je $\mathcal{A}/\mathcal{J}$ unitalna algebra.

1.2 Normirane i Banachove algebre

Normirana algebra je algebra $\mathcal{A}$ nad poljem $\mathbb{C}$ kompleksnih brojeva, na kojoj je zadana norma $x \mapsto \|x\|$ sa svojstvom

$$\|xy\| \leq \|x\| \cdot \|y\| \qquad \forall x, y \in \mathcal{A}.$$

Ako je u odnosu na zadanu normu prostor $\mathcal{A}$ potpun (odnosno, ako je to Banachov prostor), $\mathcal{A}$ se zove **Banachova algebra**.

Primijetimo da je operacija množenja $(x, y) \mapsto xy$ neprekidna kao preslikavanje sa $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$ u $\mathcal{A}$. Dokaz je sljedeći:

$$\|xy - ab\| = \|(x-a)(y-b) + a(y-b) + (x-a)b\| \leq \|x-a\| \cdot \|y-b\| + \|a\| \cdot \|y-b\| + \|x-a\| \cdot \|b\|.$$

Neka je $\mathcal{A}$ normirana algebra i $\mathcal{J}$ zatvoren obostrani ideal u $\mathcal{A}$. Tada znamo da je sa

$$\|x + \mathcal{J}\| = \inf\{\|x + y\|;\ y \in \mathcal{J}\}, \qquad x \in \mathcal{A},$$

zadana norma na kvocijentnom prostoru $\mathcal{A}/\mathcal{J}$. S tom normom kvocijentna algebra $\mathcal{A}/\mathcal{J}$ postaje normirana algebra. Doista, ako su $x_1, x_2 \in \mathcal{A}$, onda iz činjenice da je $\mathcal{J}$ obostrani ideal slijedi da je $x_1y_2 + y_1x_2 + y_1y_2 \in \mathcal{J}$ za bilo koje $y_1, y_2 \in \mathcal{J}$. Stoga imamo:

$$\|(x_1 + \mathcal{J})(x_2 + \mathcal{J})\| = \|x_1x_2 + \mathcal{J}\| = \inf\{\|x_1x_2 + y\|;\ y \in \mathcal{J}\} \leq$$

$$\leq \inf\{\|x_1x_2 + y_1x_2 + x_1y_2 + y_1y_2\|;\ y_1, y_2 \in \mathcal{J}\} =$$

$$= \inf\{\|(x_1 + y_1)(x_2 + y_2)\|;\ y_1, y_2 \in \mathcal{J}\} \leq \{\|x_1 + y_1\| \cdot \|x_2 + y_2\|;\ y_1, y_2 \in \mathcal{J}\} =$$

$$= \inf\{\|x_1 + y_1\|;\ y_1 \in \mathcal{J}\} \cdot \inf\{\|x_2 + y_2\|;\ y_2 \in \mathcal{J}\} = \|x_1 + \mathcal{J}\| \cdot \|x_2 + \mathcal{J}\|.$$

Ako je X normiran prostor i $B(X)$ algebra svih ograničenih linearnih operatora $A\colon X \to X$, tada je sa

$$\|A\| = \sup\{\|Ax\|;\ x \in X,\ \|x\| = 1\}, \qquad A \in B(X),$$

zadana norma na prostoru $B(X)$, i taj je normiran prostor Banachov ako i samo ako je prostor X Banachov. Očito vrijedi $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$ za bilo koje operatore $A, B \in B(X)$, dakle $B(X)$ je s definiranom normom normirana algebra. To je unitalna algebra: jedinica je jedinični operator I. U toj algebri jedinica ima normu 1: $\|I\| = 1$.

Neka je $\mathcal{A}$ normirana algebra. Za $x \in \mathcal{A}$ definiramo linearne operatore $L_x\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ i $R_x\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ sa

$$L_xy = xy, \qquad R_xy = yx, \qquad y \in \mathcal{A}.$$

Operatori L_x i R_x su ograničeni, jer je $\|L_xy\| \leq \|x\| \cdot \|y\|$ i $\|R_xy\| \leq \|x\| \cdot \|y\|$. Odatle se vidi da vrijedi:

$$\|L_x\| \leq \|x\|, \qquad \|R_x\| \leq \|x\|, \qquad x \in \mathcal{A}. \tag{1.1}$$

Preslikavanja $x \mapsto L_x$ i $x \mapsto R_x$ sa $\mathcal{A}$ u $B(\mathcal{A})$ su očito linearna i vrijedi $L_{xy} = L_xL_y$ i $R_{xy} = R_yR_x$. Dakle, $x \mapsto L_x$ je homomorfizam algebre $\mathcal{A}$ u algebru $B(\mathcal{A})$, a $x \mapsto R_x$ je homomorfizam suprotne algebre $\mathcal{A}^0$ u algebru $B(\mathcal{A})$. Zbog gornjih nejednakosti ti su homomorfizmi neprekidni. Ako je e jedinica u algebri $\mathcal{A}$ onda za svaki $x \in \mathcal{A}$ vrijedi $L_xe = x = R_xe$. Dakle, u tom su slučaju homomorfizmi $x \mapsto L_x$ i $x \mapsto R_x$ injektivni. Stoga su sa

$$\|x\|_l = \|L_x\| \qquad \text{i} \qquad \|x\|_r = \|R_x\|, \qquad x \in \mathcal{A},$$

definirane norme $\|\cdot\|_l$ i $\|\cdot\|_r$ na $\mathcal{A}$ u odnosu na koje su $\mathcal{A}$ i $\mathcal{A}^0$ normirane algebre. Kako je $\|x\| \leq \|L_x\| \cdot \|e\|$ i $\|x\| \leq \|R_x\| \cdot \|e\|$, zbog (1.1) vidimo da vrijedi

$$\|x\|_l \leq \|x\| \leq \|e\| \cdot \|x\|_l, \qquad \|x\|_r \leq \|x\| \leq \|e\| \cdot \|x\|_r, \qquad x \in \mathcal{A}.$$

Dakle, svaka od normi $\|\cdot\|_l$ i $\|\cdot\|_r$ na prostoru $\mathcal{A}$ ekvivalentna je polaznoj normi $\|\cdot\|$. Prema tome, dokazali smo:

Propozicija 1.2.1. *Neka je $\mathcal{A}$ normirana unitalna algebra s jedinicom e. Na prostoru $\mathcal{A}$ postoji ekvivalentna norma u odnosu na koju je $\mathcal{A}$ normirana algebra i e ima normu jednaku* 1.

Zbog ove propozicije ubuduće ćemo uvijek pretpostavljati da u unitalnoj normiranoj algebri $\mathcal{A}$ vrijedi $\|e\| = 1$. Napomenimo da iz gornjih nejednakosti slijedi: ako je $\mathcal{A}$ unitalna normirana algebra u kojoj vrijedi $\|e\| = 1$, onda je $\|x\|_l = \|x\|_r = \|x\|$, $\forall x \in \mathcal{A}$.

Neka je K kompaktan Hausdorffov topološki prostor i neka je $C(K)$ skup svih neprekidnih funkcija $f\colon K \to \mathbb{C}$. S operacijama definiranim po točkama:

$$(f+g)(t) = f(t) + g(t), \qquad (\lambda f)(t) = \lambda f(t), \qquad (fg)(t) = f(t)g(t), \qquad t \in K,$$

$C(K)$ je komutativna unitalna algebra; jedinica e je konstantna funkcija $e(t) = 1$ $\forall t \in K$. Algebra $C(K)$ je Banachova uz normu

$$\|f\| = \max\{|f(t)|;\ t \in K\}.$$

Neka je $\mathcal{A}$ normirana algebra. Broj

$$\nu(x) = \inf\{\|x^n\|^{\frac{1}{n}};\, n \in \mathbb{N}\}$$

nazivamo **spektralni radijus** elementa $x \in \mathcal{A}$. Dakle, spektralni radijus je funkcija ν sa $\mathcal{A}$ u $\mathbb{R}_+$.

Teorem 1.2.2. *Neka je $\mathcal{A}$ normirana algebra. Za svaki $x \in \mathcal{A}$ niz $(\|x^n\|^{\frac{1}{n}})_{n\in\mathbb{N}}$ je konvergentan i limes mu je spektralni radijus od x :*

$$\lim_{n\to\infty} \|x^n\|^{\frac{1}{n}} = \nu(x).$$

Dokaz: Za izabrani $x \in \mathcal{A}$ stavimo $\nu = \nu(x)$. Neka je $\varepsilon > 0$. Neka je $m \in \mathbb{N}$ takav da vrijedi

$$\|x^m\|^{\frac{1}{m}} \leq \nu + \varepsilon, \qquad \text{tj.} \qquad \|x^m\| \leq (\nu+\varepsilon)^m.$$

Za svaki prirodan broj n označimo s $p_n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ kvocijent, a s $q_n \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$ ostatak pri dijeljenju n sa m : $n = p_n m + q_n$. Tada je

$$1 = \frac{p_n m}{n} + \frac{q_n}{n}, \qquad n \in \mathbb{N}$$

pa zbog ograničenosti funkcije $n \mapsto q_n$ slijedi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{q_n}{n} = 0 \qquad \text{i} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{p_n m}{n} = 1.$$

Imamo redom

$$\|x^n\| = \|(x^m)^{p_n} x^{q_n}\| \leq \|x^m\|^{p_n} \cdot \|x\|^{q_n} \leq (\nu+\varepsilon)^{p_n m} \cdot \|x\|^{q_n},$$

pa slijedi

$$\|x^n\|^{\frac{1}{n}} \leq (\nu+\varepsilon)^{\frac{p_n m}{n}} \cdot \|x\|^{\frac{q_n}{n}}.$$

Pustimo li u toj nejednakosti da n teži u ∞, nalazimo da vrijedi:

$$\limsup \|x^n\|^{\frac{1}{n}} \le \lim_{n\to\infty} [(\nu+\varepsilon)^{\frac{p_n m}{n}} \cdot \|x\|^{\frac{q_n}{n}}] = \nu + \varepsilon.$$

Budući da je $\varepsilon > 0$ bio proizvoljan, iz ove nejednakosti slijedi

$$\limsup \|x^n\|^{\frac{1}{n}} \le \nu = \inf \|x^n\|^{\frac{1}{n}} \le \liminf \|x^n\|^{\frac{1}{n}}.$$

Dakle,

$$\nu(x) = \limsup \|x^n\|^{\frac{1}{n}} = \liminf \|x^n\|^{\frac{1}{n}},$$

što ima za posljedicu da je niz brojeva $(\|x^n\|^{\frac{1}{n}};\ n \in \mathbb{N})$ konvergentan i da mu je limes jednak $\nu(x)$.

Zadatak 1.2.1. *Neka je $\mathcal{A}$ normirana algebra. Dokažite da vrijedi:*

(*a*) $0 \le \nu(x) \le \|x\|,\ \ \forall x \in \mathcal{A}$.

(*b*) $\nu(\lambda x) = |\lambda| \cdot \nu(x),\ \ \forall x \in \mathcal{A},\ \forall \lambda \in \mathbb{C}$.

(*c*) $\nu(xy) = \nu(yx),\ \ \forall x, y \in \mathcal{A}$.

(*d*) $\nu(x^k) = [\nu(x)]^k,\ \ \forall x \in \mathcal{A},\ \forall k \in \mathbb{N}$.

(*e*) *Ekvivalentne norme daju isti spektralni radijus.*

Propozicija 1.2.3. *Neka je $\mathcal{A}$ normirana unitalna algebra. Tada je preslikavanje invertiranja $x \mapsto x^{-1}$ neprekidno sa $\mathcal{A}^\times$ u $\mathcal{A}^\times$.*

Zadatak 1.2.2. *Dokažite propoziciju 1.2.3.*

Uputa: Dokažite da za $a \in \mathcal{A}^\times$, za $r = \frac{1}{2\cdot\|a^{-1}\|}$ i za $x \in \mathcal{A}^\times \cap K(a,r)$ vrijedi

$$\|x^{-1} - a^{-1}\| \le 2 \cdot \|a^{-1}\|^2 \cdot \|a - x\|.$$

Teorem 1.2.4. *Neka je $\mathcal{A}$ Banachova algebra s jedinicom e.*

(*a*) *Ako je $a \in \mathcal{A}$ i $\nu(a) < 1$, onda je $e - a \in \mathcal{A}^\times$ i vrijedi*

$$(e-a)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n = e + a + a^2 + a^3 + \cdots,$$

pri čemu taj red konvergira apsolutno.

(*b*) *Ako je $a \in \mathcal{A}$ i $\|a\| < 1$, onda je $e - a \in \mathcal{A}^\times$.*

(*c*) *Grupa $\mathcal{A}^\times$ je otvoren podskup od $\mathcal{A}$.*

Dokaz: Prema Hadamardovom teoremu radijus konvergencije reda potencija $\sum \|a^n\|\lambda^n$ u $\mathbb{C}$ jednak je

$$r = \frac{1}{\limsup \|a^n\|^{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{\nu(a)} > 1.$$

Odavde slijedi da red $\sum \|a^n\|\lambda^n$ konvergira za $\lambda = 1$. Drugim riječima, red $\sum \|a^n\|$ konvergira, odnosno red $\sum a^n$ konvergira apsolutno. Budući da je po pretpostavci prostor $\mathcal{A}$ potpun, red $\sum a^n$ konvergira. Označimo njegovu sumu sa x, a parcijalne sume sa x_n :

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} a^n, \qquad x_n = e + a + a^2 + \cdots + a^{n-1}, \qquad x = \lim_{n\to\infty} x_n.$$

Imamo

$$(e-a)x_n = x_n(e-a) = e - a^n.$$

Budući da red $\sum \|a^n\|$ konvergira, imamo $\lim \|a^n\| = 0$, dakle i $\lim a^n = 0$. Pustimo li u gornjoj jednakosti da n teži u ∞, dobivamo

$$(e-a)x = x(e-a) = e$$

što pokazuje da je element $e - a$ invertibilan i $(e-a)^{-1} = x$.

Tvrdnja (b) slijedi neposredno iz tvrdnje (a), jer je $\nu(a) \le \|a\|$.

(c) Neka je $a \in \mathcal{A}^\times$. Neka je

$$x \in K\Big(a, \frac{1}{\|a^{-1}\|}\Big), \qquad \text{tj.} \qquad x \in \mathcal{A} \qquad \text{i} \qquad \|a - x\| < \frac{1}{\|a^{-1}\|}.$$

Stavimo $y = e - a^{-1}x$. Tada je

$$\|y\| = \|e - a^{-1}x\| = \|a^{-1}(a-x)\| \le \|a^{-1}\| \cdot \|a - x\| < 1.$$

Stoga je prema dokazanoj tvrdnji (b) $a^{-1}x = e - y \in \mathcal{A}^\times$. Kako je $a \in \mathcal{A}^\times$ to je i $x = a(a^{-1}x) \in \mathcal{A}^\times$. Tako smo dokazali da je

$$K\Big(a, \frac{1}{\|a^{-1}\|}\Big) \subseteq \mathcal{A}^\times, \qquad \forall a \in \mathcal{A}^\times.$$

Dakle, $\mathcal{A}^\times$ je otvoren podskup od $\mathcal{A}$.

Teorem 1.2.5. *Neka $\mathcal{A}$ unitalna Banachova algebra.*

(a) *Ako je $x_0 \in \mathcal{A}$ lijevo (odnosno, desno) invertibilan, ako je y neki njegov lijevi (odnosno, desni) invers i ako je $x \in \mathcal{A}$ takav da je $\|x_0 - x\| < \frac{1}{\|y\|}$, onda je x lijevo (odnosno, desno) invertibilan.*

(b) *Neka je $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergentan niz lijevo (odnosno, desno) invertibilnih elemenata algebre $\mathcal{A}$ i neka je za $n \in \mathbb{N}$ y_n neki lijevi (odnosno, desni) invers od x_n. Pretpostavimo da je skup $\{y_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ ograničen. Tada je element $x = \lim_{n\to\infty} x_n$ lijevo (odnosno, desno) invertibilan.*

Dokaz: (a) Imamo $yx_0 = e$, pa je

$$\nu(e - yx) = \nu(y(x_0 - x)) \le \|y(x_0 - x)\| \le \|y\| \cdot \|x_0 - x\| < 1.$$

Prema teoremu 1.2.4. element $e - (e - yx) = yx$ je invertibilan. Neka je $z = (yx)^{-1}$. Tada je $zyx = e$, što pokazuje da je x lijevo invertibilan. Dokaz u slučaju desno invertibilnog elementa x_0 sasvim je analogan: dokaže se da je $\nu(e - xy) < 1$, dakle xy je invertibilan; ako je $z = (xy)^{-1}$, slijedi $xyz = e$, dakle yz je desni invers od x.

(b) Neka je $M > 0$ takav da je $\|y_n\| \le M$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Kako je $x = \lim_n x_n$ postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je $\|x_n - x\| < \frac{1}{M}$. Tada je $\|x_n - x\| < \frac{1}{\|y_n\|}$, pa zbog tvrdnje (a) slijedi da je x lijevo (odnosno, desno) invertibilan.

Time je teorem u potpunosti dokazan.

Neka je Ω otvoren podskup od $\mathbb{C}$ i X Banachov prostor. **Funkcija** $f\colon \Omega \to X$ zove se **analitička** na Ω ako za svaku točku $\lambda_0 \in \Omega$ postoji $r > 0$ i postoje vektori $x_0, x_1, x_2, \dots$ u X takvi da je:

$$f(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^n x_n \qquad \forall \lambda \in K(\lambda_0, r).$$

Teorem 1.2.6. *Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ otvoren skup, X Banachov prostor i $f\colon \Omega \to X$. Sljedeća su četiri svojstva međusobno ekvivalentna:*

(*a*) *Funkcija f je analitička na Ω.*

(*b*) *Za svaki $\lambda_0 \in \Omega$ postoji*

$$f'(\lambda_0) = \lim_{\lambda \to \lambda_0} \frac{f(\lambda) - f(\lambda_0)}{\lambda - \lambda_0}.$$

(*c*) *Ako su $\lambda_0 \in \Omega$ i $r > 0$ takvi da je $K(\lambda_0, r) \subseteq \Omega$, onda postoje vektori $x_n \in X$, $n \in \mathbb{N}$, takvi da je*

$$f(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^n x_n \qquad \forall \lambda \in K(\lambda_0, r).$$

U gornjem redu konvergencija je apsolutna.

(*d*) *Za svaki $\chi \in X'$ kompleksna funkcija $\lambda \mapsto \chi(f(\lambda))$ je analitička na Ω.*

Dokaz ovog teorema izostavljamo. Napominjemo da se međusobna ekvivalentnost svojstava (a), (b) i (c) dokazuje potpuno analogno kao i ekvivalentnost takvih svojstava za skalarnu funkciju $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$. Za dokaz ekvivalentnosti tvrdnje (d) s tvrdnjom (a) koristi se Hahn−Banachov teorem i njegova posljedica, koje također navodimo bez dokaza:

Teorem 1.2.7. (**Hahn−Banach**) *Neka je X normiran prostor, Y potprostor i $\varphi \in Y'$. Tada postoji $\Phi \in X'$ takav da je $\Phi|Y = \varphi$ i da vrijedi $\|\Phi\| = \|\varphi\|$. Drugim riječima, svaki neprekidni linearni funkcional na potprostoru normiranog prostora može se proširiti na čitav prostor bez povećanja norme.*

Korolar 1.2.8. *Neka je X normiran prostor i $x \in X$. Postoji $\varphi \in X'$ takav da je $\varphi(x) = \|x\|$ i $\|\varphi\| = 1$.*

Teorem 1.2.9. *Neka je $\mathcal{A}$ unitalna Banachova algebra i $x \in \mathcal{A}$.*

(*a*) *$\sigma(x)$ je neprazan kompaktan podskup od $\mathbb{C}$.*

(*b*) $\nu(x) = \max\{|\lambda|;\ \lambda \in \sigma(x)\}$.

(*c*) *Rezolventa $\lambda \mapsto R(x, \lambda)$ je analitička funkcija sa $\mathbb{C} \setminus \sigma(x)$ u $\mathcal{A}$. Ako su $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ i $r > 0$ takvi da je $K(\lambda_0, r) \subseteq \mathbb{C} \setminus \sigma(x)$, onda vrijedi:*

$$R(x, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (\lambda - \lambda_0)^n R(x, \lambda_0)^{n+1} \qquad \lambda \in K(\lambda_0, r).$$

Nadalje,

$$R(x, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda^{n+1}} x^n \qquad \text{ako je} \quad |\lambda| > \nu(x).$$

Posebno, $\lim_{\lambda \to \infty} R(x, \lambda) = 0$.

Dokaz: Neka je $\lambda_0 \in \mathbb{C}\backslash\sigma(x)$. Stavimo $y = x - \lambda_0 e$. Tada je $y \in \mathcal{A}^\times$. Neka je $\lambda \in K\left(\lambda_0, \frac{1}{\|y^{-1}\|}\right)$. Imamo

$$\lambda e - x = (\lambda - \lambda_0)e - y = -y[e - (\lambda - \lambda_0)y^{-1}].$$

Nadalje, $\|(\lambda - \lambda_0)y^{-1}\| = |\lambda - \lambda_0| \cdot \|y^{-1}\| < 1$, pa iz teorema 1.2.4. slijedi da je $e - (\lambda - \lambda_0)y^{-1} \in \mathcal{A}^\times$, dakle prema gornjoj jednakosti $\lambda e - x \in \mathcal{A}^\times$. To pokazuje da je $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \sigma(x)$, dakle otvoren krug $K\left(\lambda_0, \frac{1}{\|y^{-1}\|}\right)$ je sadržan u $\mathbb{C} \setminus \sigma(x)$. Zaključujemo da je skup $\mathbb{C} \setminus \sigma(x)$ otvoren, odnosno, $\sigma(x)$ je zatvoren. Nadalje, iz teorema 1.2.4. slijedi:

$$R(x, \lambda) = (\lambda e - x)^{-1} = -y^{-1}[e - (\lambda - \lambda_0)y^{-1}]^{-1} = -y^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}(\lambda - \lambda_0)^n y^{-n} = -\sum_{n=0}^{\infty}(\lambda - \lambda_0)^n y^{-n-1}.$$

Međutim, $y^{-1} = (x - \lambda_0 e)^{-1} = -R(x, \lambda_0)$, pa slijedi

$$R(x, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\lambda - \lambda_0)^n R(x, \lambda_0)^{n+1}.$$

Time je dokazano da je funkcija $\lambda \mapsto R(x, \lambda)$ analitička na otvorenom skupu $\mathbb{C} \setminus \sigma(x)$. Nadalje, dokazano je da vrijedi prva jednakost u tvrdnji (c) za $r = \frac{1}{\|x - \lambda_0 e\|^{-1}}$. Prema teoremu 1.2.6., ako je $r > 0$ takav da je $K(\lambda_0, r) \subseteq \mathbb{C} \setminus \sigma(x)$ onda postoje elementi $a_n \in \mathcal{A}$ takvi da je

$$R(x, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty}(\lambda - \lambda_0)^n a_n \qquad \forall \lambda \in K(\lambda_0, r).$$

Usporedimo li taj red potencija s redom potencija kojeg smo dobili za $\lambda \in K\left(\lambda_0, \frac{1}{\|x - \lambda_0 e\|^{-1}}\right)$ nalazimo da je $a_n = (-1)^n R(x, \lambda_0)^{n+1}$ $\forall n$. Drugim riječima, dokazana je prva jednakost u tvrdnji (c) za bilo koji $r > 0$ takav da je $K(\lambda_0, r) \subseteq \mathbb{C} \setminus \sigma(x)$.

Za $|\lambda| > \nu(x)$ imamo redom:

$$\nu\left(\tfrac{1}{\lambda}x\right) = \tfrac{1}{|\lambda|}\nu(x) < 1 \quad \Longrightarrow \quad e - \tfrac{1}{\lambda}x \in \mathcal{A}^\times \quad \Longrightarrow \quad \lambda e - x \in \mathcal{A}^\times \quad \Longrightarrow \quad \lambda \in \mathbb{C} \setminus \sigma(x).$$

Dakle, $\{\lambda \in \mathbb{C};\ |\lambda| > \nu(x)\} \subseteq \mathbb{C} \setminus \sigma(x)$, tj. $\sigma(x)$ je sadržan u zatvorenom krugu $\overline{K}(0, \nu(x))$ oko nule radijusa $\nu(x)$. Time je dokazana tvrdnja (a) osim činjenice da je spektar neprazan. Nadalje, po teoremu 1.2.4. za takve λ vrijedi

$$R(x, \lambda) = (\lambda e - x)^{-1} = \frac{1}{\lambda}\left(e - \frac{1}{\lambda}x\right)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\lambda^{n+1}}x^n.$$

Time je dokazana i druga jednakost u tvrdnji (c).

Dokažimo sada da je $\sigma(x) \neq \emptyset$. Pretpostavimo suprotno da je $\sigma(x) = \emptyset$. Tada je funkcija $\lambda \mapsto R(x, \lambda)$ analitička na $\mathbb{C}$ i zbog (c) vrijedi $\lim_{\lambda \to \infty} R(x, \lambda) = 0$. Tada je za svaki $\varphi \in \mathcal{A}'$ skalarna funkcija $\lambda \mapsto \varphi(R(x, \lambda))$ analitička na $\mathbb{C}$ i ograničena, a to prema Liouvilleovom teoremu ima za posljedicu da je ona konstantna. Kako joj je limes u beskonačnosti jednak nuli zaključujemo da je $\varphi(R(x, \lambda)) = 0$ $\forall \varphi \in \mathcal{A}'$. Slijedi $R(x, \lambda) \equiv 0$, a to je nemoguće. Ova kontradikcija pokazuje da je $\sigma(x) \neq \emptyset$ i time je tvrdnja (a) u potpunosti dokazana.

Treba još dokazati tvrdnju (b). Ako je $\nu(x) = 0$ onda iz

$$\sigma(x) \subseteq \overline{K}(0, \nu(x)) = \{0\}$$

i iz $\sigma(x) \neq \emptyset$ slijedi $\sigma(x) = \{0\}$, dakle tvrdnja (b) je u tom slučaju istinita. Pretpostavimo sada da je $\nu(x) > 0$. Znamo da je $\sigma(x) \subseteq \overline{K}(0, \nu(x))$, pa je za dokaz tvrdnje (b) dovoljno dokazati $\sigma(x) \nsubseteq K(0, \nu(x))$. Pretpostavimo suprotno, tj. $\sigma(x) \subseteq K(0, \nu(x))$. Kako je $\sigma(x)$ zatvoren, postoji r, $0 < r < \nu(x)$, takav da je $\sigma(x) \subseteq \overline{K}(0, r)$. Tada za $|\lambda| > r$ vrijedi

$$R(x, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda^{n+1}} x^n.$$

U tom je redu konvergencija apsolutna, a to ima za posljedicu da red

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|x^n\|}{\lambda^{n+1}}$$

konvergira za svaki $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| > r$. Zamijenimo sada kompleksnu varijablu i stavimo $\mu = \frac{1}{\lambda}$. Slijedi da je skalarna funkcija

$$F(\mu) = \sum_{n=0}^{\infty} \|x^n\| \mu^{n+1}$$

analitička na krugu $K(0, \frac{1}{r})$. Prema tome, za radijus konvergencije R gornjeg reda potencija vrijedi $R \geq \frac{1}{r}$. Međutim, radijus konvergencije je po Cauchy$-$Hadamardovoj formuli jednak

$$R = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \|x^n\|^{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{\nu(x)}.$$

Odatle je

$$\frac{1}{\nu(x)} \geq \frac{1}{r}, \quad \text{odnosno,} \quad r \geq \nu(x),$$

a to je suprotno pretpostavci $r < \nu(x)$. Ova kontradikcija pokazuje da je tvrdnja (b) istinita i u slučaju $\nu(x) > 0$.

Teorem 1.2.10. (**Geljfand$-$Mazur**) *Neka je $\mathcal{A}$ unitalna Banachova algebra. Ako je $\mathcal{A}^\times = \mathcal{A} \setminus \{0\}$, tj. ako je $\mathcal{A}$ tijelo, onda je $\mathcal{A} = \mathbb{C}e$.*

Dokaz: Neka je $x \in \mathcal{A}$. Prema tvrdnji (a) teorema 1.2.9. $\sigma(x) \neq \emptyset$. Neka je $\lambda \in \sigma(x)$. Tada $\lambda e - x \notin \mathcal{A}^\times = \mathcal{A} \setminus \{0\}$, dakle $\lambda e - x = 0$, odnosno $x = \lambda e$.

1.3 C^*-algebre

Neka je $\mathcal{A}$ algebra. **Involucija** na $\mathcal{A}$ je preslikavanje $*: \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ takvo da vrijedi

(a) $(x^*)^* = X,\ \forall x \in \mathcal{A}.$

(b) $(x+y)^* = x^* + y^*,\ \forall x, y \in \mathcal{A}.$

(c) $(\lambda x)^* = \overline{\lambda} x^*,\ \forall x \in \mathcal{A},\ \forall \lambda \in \mathbb{C}.$

(d) $(xy)^* = y^* x^*,\ \forall x, y \in \mathcal{A}.$

$*-$**algebra** je algebra na kojoj je zadana involucija. Zbog (a) je očito da je involucija uvijek bijekcija sa $\mathcal{A}$ na $\mathcal{A}$. Nadalje, ako je $\mathcal{A}$ unitalna algebra s jedinicom e i ako je $x \to x^*$ involucija na $\mathcal{A}$, tada je nužno $e^* = e$. Doista, iz svojstava (a) i (d) odmah se vidi da je e^* jedinica u algebri $\mathcal{A}$, pa je jednakost $e^* = e$ posljedica jedinstvenosti jedinice.

Najjednostavniji primjer involucije na algebri je kompleksno konjugiranje $\lambda \to \overline{\lambda}$ na algebri $\mathbb{C}$. Pomoću kompleksnog konjugiranja definira se i involucija na komutativnoj algebri $C(K)$ za kompaktan topološki prostor K :

$$f^*(t) = \overline{f(t)} \qquad t \in K \quad \text{ili} \quad t \in \Omega.$$

Još jedan važan primjer involucije je adjungiranje na Banachovoj algebri $B(\mathcal{H})$ svih ograničenih linearnih operatora na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$: za $A \in B(\mathcal{H})$ je A^* jedinstven linearan operator sa svojstvom

$$(A\xi|\eta) = (\xi|A^*\eta) \qquad \forall \xi, \eta \in \mathcal{H}.$$

Neka je u daljnjem $\mathcal{A}$ $*-$algebra. Element $x \in \mathcal{A}$ zove se **hermitski**, ako je $x^* = x$, a **antihermitski** ako je $x^+ = -x$. Nadalje, kažemo da je element x **normalan** ako vrijedi $xx^* = x^*x$. Napokon, ako je $\mathcal{A}$ unitalna $*-$algebra, element $x \in \mathcal{A}$ zove se **unitaran**, ako je $x^*x = xx^* = e$, tj. ako je $x \in \mathcal{A}^\times$ i $x^{-1} = x^*$. Naravno, hermitski, antihermitski i unitarni elementi su normalni. Hermitski elementi tvore realan potprostor prostora $\mathcal{A}$; taj ćemo realan vektorski prostor označavati sa $\mathcal{A}_h$. Skup svih antihermitskih elemenata je $i\mathcal{A}_h$ i vrijedi $\mathcal{A} = \mathcal{A}_h \dotplus i\mathcal{A}_h$. Doista, za svaki $x \in \mathcal{A}$ postoje jedinstveni hermitski elementi x_1 i x_2 takvi da je $x = x_1 + ix_2$. Ti su elementi dani sa

$$x_1 = \frac{1}{2}(x + x^*), \qquad x_2 = \frac{1}{2i}(x - x^*).$$

Primijetimo da je

$$xx^* = x_1^2 + x_2^2 + i(x_2x_1 - x_1x_2), \qquad x^*x = x_1^2 + x_2^2 - i(x_2x_1 - x_1x_2),$$

dakle, x je normalan ako i samo ako x_1 i x_2 komutiraju.

Ako je $\mathcal{A}$ unitalna $*-$algebra, odmah se vidi da je $x \in \mathcal{A}$ invertibilan ako i samo ako je x^* invertibilan i vrijedi $(x^*)^{-1} = (x^{-1})^*$. Budući da je $(\lambda e - x)^* = \overline{\lambda} e - x^*$, slijedi da je

$$\sigma(x^*) = \overline{\sigma(x)} = \{\overline{\lambda};\ \lambda \in \sigma(x)\}.$$

Normirana $*-$algebra je normirana algebra $\mathcal{A}$ na kojoj je zadana involucija $x \mapsto x^*$ sa svojstvom da je

$$\|x^*\| = \|x\| \qquad \forall x \in \mathcal{A}.$$

Ako je $\mathcal{A}$ i potpuna, tj. Banachova zove se **Banachova $*-$algebra**. U prije navedenim primjerima $\mathbb{C}$, $C(K)$ i $B(\mathcal{H})$ involucija ima traženo svojstvo, dakle, sve su to Banachove $*-$algebre.

$\mathcal{A}$ se zove C^*-**algebra** ako je:

(a) $\mathcal{A}$ $*-$algebra;

(b) $\mathcal{A}$ Banachova algebra;

(c) $\|x^*x\| = \|x\|^2 \quad \forall x \in \mathcal{A}$.

Banachove $*-$algebre $C(K)$ za kompaktan topološki prostor K i $B(\mathcal{H})$ za Hilbertov prostor $\mathcal{H}$ su C^*-algebre. To je očito za algebru $C(K)$, a za algebru $B(\mathcal{H})$ to ćemo dokazati u prvom odjeljku sljedećeg poglavlja.

Propozicija 1.3.1. *Neka je $\mathcal{A}$ C^*-algebra i $x \in \mathcal{A}$. Tada je $\|x^*\| = \|x\|$.*

Zadatak 1.3.1. *Dokažite propoziciju 1.3.1.*

Propozicija 1.3.2. *Neka je $\mathcal{A}$ unitalna C^*-algebra i $x \in \mathcal{A}$.*

(a) *Ako je x hermitski, onda je $\sigma(x) \subseteq \mathbb{R}$.*

(b) *Ako je x unitaran, onda je $\sigma(x) \subseteq S = \{\lambda \in \mathbb{C};\ |\lambda| = 1\}$.*

Zadatak 1.3.2. *Dokažite propoziciju 1.3.2.*

Uputa: Najprije dokažite tvrdnju (b) i to pomoću tvrdnje (b) teorema 1.2.9., pomoću propozicije 1.3.1. i pomoću tvrdnje (b) propozicije 1.1.1. Zatim za hermitski element $x \in \mathcal{A}$ definirajte element $u \in \mathcal{A}$ na sljedeći način:

$$u = \mathrm{e}^{ix} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} x^n.$$

(Definicija elementa u ima smisla jer gornji red konvergira apsolutno, pa kako je algebra $\mathcal{A}$ potpuna taj red konvergira u $\mathcal{A}$). Zatim dokažite da je element u unitaran. Napokon, pomoću jednakosti

$$\lambda^n e - x^n = (\lambda e - x)(\lambda^{n-1}e + \lambda^{n-2}x + \cdots + \lambda x^{n-2} + x^{n-1}) = (\lambda^{n-1}e + \lambda^{n-2}x + \cdots + \lambda x^{n-2} + x^{n-1})(\lambda e - x),$$

dokažite da iz $\lambda \in \sigma(x)$ slijedi $\mathrm{e}^{i\lambda} \in \sigma(u)$, te iskoristite dokazanu tvrdnju (b).

Poglavlje 2

OGRANIČENI OPERATORI NA HILBERTOVOM PROSTORU

2.1 Norma hermitskog operatora

Ako su X i Y normirani prostori, linearan operator $A : X \to Y$ je neprekidan u nekoj točki $x_0 \in X$ ako i samo ako je on ograničen tj. postoji $M \geq 0$ takav da vrijedi

$$\|Ax\| \leq M\|x\| \qquad \forall x \in X. \tag{2.1}$$

U tom je slučaju operator neprekidan u svakoj točki $x_0 \in X$, štoviše, zbog linearnosti on je uniformno neprekidan, jer očito vrijedi

$$\|Ax_1 - Ax_2\| \leq M\|x_1 - x_2\| \qquad \forall x_1, x_2 \in X.$$

Skup svih ograničenih operatora sa X u Y označavamo sa $B(X, Y)$, a u slučaju $X = Y$ pišemo kraće $B(X)$. $B(X, Y)$ je normiran prostor u odnosu na $A \mapsto \|A\|$, pri čemu je $\|A\|$ infimum svih brojeva $M \geq 0$ za koje vrijedi (2.1). Uzimanjem infimuma po svim takvim M u nejednakosti (2.1) vidimo da je zapravo $\|A\|$ minimum svih takvih $M \geq 0$, tj. vrijedi

$$\|Ax\| \leq \|A\|\|x\| \qquad \forall x \in X.$$

Naravno, u gornjoj nejednakosti $\|\cdot\|$ označava tri različite stvari: $\|Ax\|$ je norma vektora Ax u normiranom prostoru Y, $\|x\|$ je norma vektora x u normiranom prostoru Y, $\|A\|$ je upravo uvedena norma operatora A u normiranom prostoru $B(X, Y)$. Pokazuje se da je normiran prostor $B(X, Y)$ potpun, tj. Banachov, ako i samo ako je prostor Y Banachov. Posebno, ako je $Y = \mathbb{C}$, linearni operatori $\varphi : X \to \mathbb{C}$ zovu se linearni funkcionali i zbog potpunosti $\mathbb{C}$ prostor svih ograničenih linearnih funkcionala $B(X, \mathbb{C})$ je Banachov. Taj se prostor zove **dualni prostor** ili **dual** prostora X i obično označava X'.

Iz definicije ograničenosti i norme operatora lako se vidi da u slučaju tri normirana prostora X, Y i Z i ograničenih linearnih operatora $B : X \to Y$ i $A : Y \to Z$, kompozicija $AB : X \to Z$ je također ograničen operator i vrijedi

$$\|AB\| \leq \|A\|\|B\|.$$

Posebno, kao što smo već spomenuli, $B(X)$ je normirana algebra. Ta je algebra unitalna $-$ jedinica je jedinični operator I na prostoru X i očito je $\|I\| = 1$.

Primijetimo još da u slučaju normiranih prostora X i Y za operator $A \in B(X, Y)$ vrijedi

$$\|A\| = \sup\{\|Ax\|;\ x \in X,\ \|x\| \leq 1\}.$$

Mi ćemo se u ovom kolegiju baviti Banachovom algebrom $B(\mathcal{H})$, gdje je $\mathcal{H}$ Hilbertov prostor, i njenim podalgebrama. Iz korolara 1.2.8. Hahn–Banachovog teorema 1.2.7. slijedi da za svaki vektor $\xi \in \mathcal{H}$ vrijedi

$$\|\xi\| = \max\{|\varphi(\xi)|;\ \varphi \in \mathcal{H}',\ \|\varphi\| \leq 1\}.$$

Međutim, za Hilbertov prostor $\mathcal{H}$ po Rieszovom teoremu za svaki neprekidan linearni funkcional $\varphi \in \mathcal{H}'$ postoji jedinstven vektor $\eta \in \mathcal{H}$ takav da je $\varphi(\xi) = (\xi|\eta)$ $\forall \xi \in \mathcal{H}$, i tada je $\|\varphi\| = \|\eta\|$. Prema tome, za proizvoljan vektor $\xi \in \mathcal{H}$ vrijedi

$$\|\xi\| = \max\{|(\xi|\eta)|;\ \eta \in \mathcal{H},\ \|\eta\| \leq 1\}.$$

Odatle neposredno slijedi da za svaki $A \in B(\mathcal{H})$ vrijedi jednakost

$$\|A\| = \sup\{|(A\xi|\eta)|;\ \xi, \eta \in \mathcal{H},\ \|\xi\| \leq 1,\ \|\eta\| \leq 1\}. \tag{2.2}$$

Pomoću Rieszovog teorema o neprekidnim linearnim fukcionalima dokazuje se da za Hilbertove prostore $\mathcal{H}$ i $\mathcal{K}$ za svaki $A \in B(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ postoji jedinstven $A^* \in B(\mathcal{K}, \mathcal{H})$ takav da vrijedi

$$(A\xi|\eta) = (\xi|A^*\eta) \qquad \forall \xi \in \mathcal{H} \quad \text{i} \quad \forall \eta \in \mathcal{K}.$$

Nadalje, $A \mapsto A^*$ je antilinearna bijekcija sa $B(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ na $B(\mathcal{K}, \mathcal{H})$ i vrijedi

$$\|A^*\| = \|A\|; \quad (AB)^* = B^*A^*,\ A \in B(\mathcal{K}, \mathcal{L}),\ B \in B(\mathcal{H}, \mathcal{K}); \quad A^{**} = A; \quad I^* = I,\ I = I_{\mathcal{H}} \in B(\mathcal{H}).$$

Posebno, kao što smo već primijetili, $B(\mathcal{H})$ je Banachova $*-$algebra.

Operator $A \in B(\mathcal{H})$ zove se **hermitski** ako je $A^* = A$. Skup svih hermitskih operatora u $B(\mathcal{H})$ označavamo sa $B_h(\mathcal{H})$ i to je realan potprostor od $B(\mathcal{H})$ takav da je $B(\mathcal{H}) = B_h(\mathcal{H}) \dot{+} iB_h(\mathcal{H})$.

Propozicija 2.1.1. *Za Hilbertov prostor $\mathcal{H}$ i za hermitski operator $A \in B_h(\mathcal{H})$ vrijedi*

$$\|A\| = \sup\{|(A\xi|\xi)|;\ \xi \in \mathcal{H},\ \|\xi\| \leq 1\}. \tag{2.3}$$

Dokaz: Desnu strane gornje jednakosti označimo sa M. Pomoću CSB–nejednakosti imamo

$$|(A\xi|\xi)| \leq \|A\xi\|\|\xi\| \leq \|A\|\|\xi\|^2 \qquad \forall \xi \in \mathcal{H}.$$

Odatle slijedi da je $M \leq \|A\|$.

Dokažimo obrnutu nejednakost. Neka su $\xi, \eta \in \mathcal{H}$, $\|\xi\| \leq 1$, $\|\eta\| \leq 1$. Tada je

$$(A(\xi + \eta)|\xi + \eta) - (A(\xi - \eta)|\xi - \eta) = 4\,\mathrm{Re}\,(A\xi|\eta).$$

Kako za svaki $\zeta \in \mathcal{H}$ vrijedi $|(A\zeta|\zeta)| \leq M\|\zeta\|^2$, iz gornje jednakosti primjenom jednakosti paralelograma izvodimo:

$$4|(\mathrm{Re}\,(A\xi|\eta)| \leq |(A(\xi + \eta)|\xi + \eta)| + |(A(\xi - \eta)|\xi - \eta)| \leq$$
$$\leq M\left(\|\xi + \eta\|^2 + \|\xi - \eta\|^2\right) = 2M\left(\|\xi\|^2 + \|\eta\|^2\right) \leq 4M.$$

Dakle, vrijedi

$$|\mathrm{Re}\,(A\xi|\eta)| \leq M, \qquad \xi, \eta \in \mathcal{H},\ \|\xi\| \leq 1,\ \|\eta\| \leq 1.$$

Za bilo kako izabrane $\xi, \eta \in \mathcal{H}$, takve da je $\|\xi\| \leq 1$ i $\|\eta\| \leq 1$, neka je $\lambda \in \mathbb{C}$ takav da je $|\lambda| = 1$ i $|(A\xi|\eta)| = \lambda(A\xi|\eta)$. Tada zbog dokazane nejednakosti primijenjene na vektore $\lambda\xi$ i η nalazimo da vrijedi

$$|(A\xi|\eta)| = \lambda(A\xi|\eta) = (A(\lambda\xi)|\eta) = |\mathrm{Re}\,(A(\lambda\xi)|\eta)| \leq M.$$

Kako su $\xi, \eta \in \mathcal{H}$ bili proizvoljni vektori norme ≤ 1, iz jednakosti (2.2) slijedi $\|A\| \leq M$. Iz dvije nejednakosti zaključujemo da je $\|A\| = M$ i time je propozicija dokazana.

Budući da je za svaki $A \in B(\mathcal{H})$ operator A^*A hermitski, iz propozicije 2.1.1. nalazimo da za svaki $A \in B(\mathcal{H})$ vrijedi

$$\|A^*A\| = \sup\{|(A^*A\xi|\xi)|;\ \|\xi\| \le 1\} = \sup\{|(A\xi|A\xi)|;\ \|\xi\| \le 1\} = \sup\{\|A\xi\|^2;\ \|\xi\| \le 1\} = \|A\|^2.$$

Dakle, kao što smo već spomenuli, $B(\mathcal{H})$ je C^*-algebra.

Operator $A \in B(\mathcal{H})$ zove se **normalan** ako je $AA^* = A^*A$.

Propozicija 2.1.2. *Neka je $\mathcal{H}$ Hilbertov prostor.*

(a) *Ako je $A \in B_h(\mathcal{H})$ takav da je $(A\xi|\xi) = 0 \ \ \forall \xi \in \mathcal{H}$, onda je $A = 0$.*

(b) *Operator $A \in B(\mathcal{H})$ je normalan ako i samo ako je $\|A\xi\| = \|A^*\xi\| \ \ \forall \xi \in \mathcal{H}$.*

(c) *Ako je operator $A \in B(\mathcal{H})$ normalan, onda je $N(A) = N(A^*)$.*

Dokaz: Tvrdnja (a) je neposredna posljedica propozicije 2.1.1.
(b) Pretpostavimo da je operator A normalan. Tada za svaki $\xi \in \mathcal{H}$ imamo

$$\|A\xi\|^2 = (A\xi|A\xi) = (A^*A\xi|\xi) = (AA^*\xi|\xi) = (A^*\xi|A^*\xi) = \|A^*\xi\|^2.$$

Obratno, pretpostavimo da vrijedi $\|A\xi\| = \|A^*\xi\|$ za svaki $\xi \in \mathcal{H}$. Tada za svaki $\xi \in \mathcal{H}$ imamo

$$((A^*A - AA^*)\xi|\xi) = (A^*A\xi|\xi) - (AA^*\xi|\xi) = \|A\xi\|^2 - \|A^*\xi\|^2 = 0.$$

Kako je operator $A^*A - AA^*$ herimitski, iz tvrdnje (a) slijedi $A^*A - AA^* = 0$, odnosno, $AA^* = A^*A$.
Napokon, tvrdnja (c) neposredna je posljedica tvrdnje (b).

2.2 Pozitivni operatori

Neka je $\mathcal{H}$ Hilbertov prostor. Operator $A \in B(\mathcal{H})$ zove se **pozitivan** ako je

$$A = A^* \qquad \text{i} \qquad (A\xi|\xi) \geq 0 \quad \forall \xi \in \mathcal{H}.$$

Skup svih hermitskih operatora u $B(\mathcal{H})$ označavat ćemo sa $B_h(\mathcal{H})$, a skup svih pozitivnih sa $B_+(\mathcal{H})$. Za $A \in B_+(\mathcal{H})$ pišemo $A \geq 0$. Nadalje, za $A, B \in B_h(\mathcal{H})$ pišemo $A \leq B$ (ili $B \geq A$) ako je $B - A \geq 0$, tj. ako je $(A\xi|\xi) \leq (B\xi|\xi)$ $\forall \xi \in \mathcal{H}$. Očito je $B_+(\mathcal{H})$ konveksan konus u realnom vektorskom prostoru $B_h(\mathcal{H})$, tj. vrijedi:

$$A, B \in B_+(\mathcal{H}) \quad \text{i} \quad \lambda \in \mathbb{R},\ \lambda \geq 0 \qquad \Longrightarrow \qquad A + B \in B_+(\mathcal{H}) \quad \text{i} \quad \lambda A \in B_+(\mathcal{H}).$$

Nadalje, $B_h(\mathcal{H})$ je s relacijom $\leq$ parcijalno uređen skup.

Zadatak 2.2.1. *Dokažite da je svaki ortogonalni projektor P, tj. operator $P \in B(\mathcal{H})$ takav da je $P^2 = P = P^*$, pozitivan i da vrijedi $P \leq I$. Nadalje, ako su P i Q ortogonalni projektori na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$, dokažite da su sljedeća četiri svojstva međusobno ekvivalentna:*

(*a*) $P \leq Q$.

(*b*) $PQ = QP = P$.

(*c*) $R(P) \subseteq R(Q)$.

(*d*) $N(Q) \subseteq N(P)$.

Ako je $A \in B(\mathcal{H})$ onda je $A^*A \in B_h(\mathcal{H})$ i za svaki $\xi \in \mathcal{H}$ vrijedi

$$(A^*A\xi|\xi) = (A\xi|A\xi) = \|A\xi\|^2 \geq 0,$$

dakle, $A^*A \in B_+(\mathcal{H})$. Posebno, ako je $A \in B_h(\mathcal{H})$ onda je $A^2 \in B_+(\mathcal{H})$.

Za svaki $A \in B_+(\mathcal{H})$ preslikavanje $(\xi, \eta) \mapsto (A\xi|\eta)$ je pozitivno semidefinitna hermitska forma, pa za nju vrijedi CSB$-$nejednakost:

$$|(A\xi|\eta)|^2 \leq (A\xi|\xi)(A\eta|\eta) \qquad \forall \xi, \eta \in \mathcal{H}. \tag{2.4}$$

Dokazat ćemo sada analogon teorema o konvergentnosti ograničenih monotonih nizova u $\mathbb{R}$.

Teorem 2.2.1. *Neka je $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz u $B_h(\mathcal{H})$ koji je rastući, tj. $A_n \leq A_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ i ograničen, tj.*

$$M = \sup\{\|A_n\|;\ n \in \mathbb{N}\} < +\infty.$$

Tada postoji $A \in B_h(\mathcal{H})$ takav da je

$$A\xi = \lim_{n\to\infty} A_n\xi \qquad \forall \xi \in \mathcal{H} \tag{2.5}$$

i vrijedi $A_n \leq A$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Dokaz: Za svaki $\xi \in \mathcal{H}$ niz realnih brojeva $((A_n\xi|\xi))_{n\in\mathbb{N}}$ je rastući i ograničen. Dakle, taj je niz konvergentan u $\mathbb{R}$. Za $m \geq n$ je $A_m - A_n \geq 0$ pa nejednakost (2.4) primijenjena na operator $A_m - A_n$ daje za proizvoljne vektore $\xi, \eta \in \mathcal{H}$:

$$|((A_m - A_n)\xi|\eta)|^2 \leq ((A_m - A_n)\xi|\xi)((A_m - A_n)\eta|\eta) \leq 2M[(A_m\xi|\xi) - (A_n\xi|\xi)]\|\eta\|^2.$$

Uvrstimo li $\eta = (A_m - A_n)\xi$, slijedi

$$\|A_m\xi - A_n\xi\|^2 \leq 2M[(A_m\xi|\xi) - (A_n\xi|\xi)].$$

Budući da je niz $((A_n\xi|\xi))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergentan u $\mathbb{R}$ iz gornje nejednakosti slijedi da je $(A_n\xi)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyjev niz u $\mathcal{H}$. Kako je prostor $\mathcal{H}$ Hilbertov, dakle potpun, sa (2.5) je definiran linearan operator $A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$. Nadalje, vrijedi

$$\|A_n\xi\| \leq M\|\xi\| \quad \forall\xi \in \mathcal{H} \qquad \text{i} \qquad (A_n\xi|\eta) = (\xi|A_n\eta) \quad \forall\xi, \eta \in \mathcal{H},$$

a odatle, kada pustimo da n teži u ∞, dobivamo

$$\|A\xi\| \leq M\|\xi\| \quad \forall\xi \in \mathcal{H} \qquad \text{i} \qquad (A\xi|\eta) = (\xi|A\eta) \quad \forall\xi, \eta \in \mathcal{H}.$$

Dakle, $A \in B_h(\mathcal{H})$. Napokon, kada u nejednakosti

$$(A_n\xi|\xi) \leq (A_m\xi|\xi) \qquad \text{za} \quad n \leq m$$

pustimo da m teži u ∞, dobivamo

$$(A_n\xi|\xi) \leq (A\xi|\xi) \qquad \forall\xi \in \mathcal{H} \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad \text{tj.} \qquad A_n \leq A \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Time je teorem dokazan.

Naravno, zamjenom A_n sa $-A_n$ vidimo da analogna tvrdnja vrijedi i za padajuće ograničene nizove hermitskih operatora. Nadalje, naglasimo da se u teoremu 2.2.1. **ne tvrdi** da je operator A limes niza $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ u odnosu na normu $\|\cdot\|$ prostora $B(\mathcal{H})$, nego samo da vrijedi (2.5).

Korolar 2.2.2. *Neka je $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monotoni niz ortogonalnih projektora na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$. Tada je sa*

$$P\xi = \lim_{n\to\infty} P_n\xi \qquad \xi \in \mathcal{H} \tag{2.6}$$

definiran ortogonalan projektor na prostoru $\mathcal{H}$. Nadalje, ako je niz $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ padajući, onda je

$$R(P) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} R(P_n) \qquad i \qquad N(P) = Cl\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} N(P_n)\right)$$

a ako je taj niz rastući, onda je

$$N(P) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} N(P_n) \qquad i \qquad R(P) = Cl\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} R(P_n)\right).$$

Dokaz: Pretpostavimo najprije da je niz $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rastući. Za svaki ortogonalni projektor $P \neq 0$ je $\|P\| = 1$. Dakle, niz $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zadovoljava uvjete teorema 2.2.1. Prema tome, sa (2.6) definiran je operator $P \in B_h(\mathcal{H})$. Sada iz $P_n^2 = P_n$ $\forall n$ slijedi $P^2 = P$. Dakle, P je ortogonalni projektor. Nadalje, prema teoremu 2.2.1. je $P_n \leq P$ $\forall n \in \mathbb{N}$, a to prema zadatku 2.2.1. znači da je $N(P) \subseteq N(P_n)$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Odatle

$$N(P) \subseteq \bigcap_{n\in\mathbb{N}} N(P_n).$$

Obrnuta inkluzija slijedi neposredno iz (2.6).

Iz jednakosti za jezgre slijedi i jednakost za područja vrijednosti. Naime, za svaki ortogonalni projektor Q vrijedi $N(Q) = R(Q)^{\perp}$ i $R(Q) = N(Q)^{\perp}$. Nadalje, za vektorski potprostor $\mathcal{K}$ Hilbertovog prostora $\mathcal{H}$ vrijedi $Cl(\mathcal{K}) = \mathcal{K}^{\perp\perp}$. Posebno, za zatvoren potprostor Z je $Z = Z^{\perp\perp}$. Stoga imamo redom

$$R(P)^{\perp} = N(P) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} N(P_n) = \left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} N(P_n)\right)^{\perp\perp} = \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} N(P_n)^{\perp}\right)^{\perp},$$

pa slijedi

$$R(P) = \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} N(P_n)^{\perp}\right)^{\perp\perp} = Cl\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} R(P_n)\right).$$

Iz jednakosti dokazanih za rastuće nizove ortogonalnih projektora odmah slijede analogne jednakosti za padajuće nizove, jer za svaki ortogonalan projektor Q je i $I-Q$ ortogonalan projektor i vrijedi $R(I-Q) = N(Q)$ i $N(I-Q) = R(Q)$.

Zadatak 2.2.2. *Neka je $(P_t)_{t\in\mathbb{R}}$ rastuća familija ortogonalnih projektora na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$, tj. $P_t \le P_s$ za $t < s$. Dokažite da tada za svaki $\xi \in \mathcal{H}$ i za svaki $t \in \mathbb{R}$ postoje limesi*

$$P_{t-0}\xi = \lim_{s\nearrow t} P_s\xi \qquad i \qquad P_{t+0}\xi = \lim_{s\searrow t} P_s\xi.$$

Nadalje, dokažite da su P_{t-0} i P_{t+0} ortogonalni projektori i da je $P_{t-0} \le P_t \le P_{t+0}$.

Teorem 2.2.3. *Za $A \in B_+(\mathcal{H})$ postoji jedinstven $B \in B_+(\mathcal{H})$ takav da je $B^2 = A$. Ako je $C \in B(\mathcal{H})$ takav da je $CA = AC$, onda je $CB = BC$.*

Dokaz: Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $\|A\| \le 1$. Tada je

$$0 \le (A\xi|\xi) \le (\xi|\xi) \qquad \forall \xi \in \mathcal{H},$$

dakle, vrijedi $0 \le A \le I$. Stavimo $D = I - A \in B_+(\mathcal{H})$ i induktivno definiramo niz operatora $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$E_1 = 0, \qquad E_{n+1} = \frac{1}{2}(D + E_n^2), \quad n \in \mathbb{N}. \tag{2.7}$$

Tada su svi $E_n \in B_+(\mathcal{H})$. Nadalje, svaki E_n je polinom operatora D, pa možemo pisati

$$E_n = p_n(D), \qquad E_{n+1} - E_n = q_n(D),$$

gdje su p_n i q_n polinomi definirani induktivno sa

$$p_1(\lambda) = 0, \qquad p_{n+1}(\lambda) = \frac{1}{2}(\lambda + p_n(\lambda)^2), \qquad q_n(\lambda) = p_{n+1}(\lambda) - p_n(\lambda).$$

Iz te se definicije vidi da su svi koeficijenti polinoma p_n, $n \in \mathbb{N}$, nenegativni brojevi. Dokazat ćemo sada da su i koeficijenti polinoma q_n, $n \in \mathbb{N}$, nenegativni brojevi. Tu činjenicu dokazujemo indukcijom po $n \in \mathbb{N}$. Tvrdnja je očita za $n = 1$ jer je $q_1(\lambda) = \frac{1}{2}\lambda$. Provedimo sada korak indukcije. Pretpostavimo da su za neki $n \ge 2$ svi koeficijenti polinoma q_{n-1} nenegativni. Imamo

$$q_n(\lambda) = p_{n+1}(\lambda) - p_n(\lambda) = \frac{1}{2}[\lambda + p_n(\lambda)^2] - \frac{1}{2}[\lambda + p_{n-1}(\lambda)^2] = \frac{1}{2}[p_n(\lambda)^2 - p_{n-1}(\lambda)^2] =$$

$$= \frac{1}{2}[p_n(\lambda) + p_{n-1}(\lambda)][p_n(\lambda) - p_{n-1}(\lambda)] = \frac{1}{2}[p_n(\lambda) + p_{n-1}(\lambda)]q_{n-1}(\lambda).$$

Odatle slijedi da i polinom q_n ima sve koeficijente nenegativne.

Uočimo sada da za polinom p, kome su svi koeficijenti nenegativni, i za svaki $B \in B_+(\mathcal{H})$, vrijedi $p(B) \in B_+(\mathcal{H})$. Stoga iz dokazanog slijedi

$$E_n \geq 0 \qquad \text{i} \qquad E_n \leq E_{n+1} \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Iz $0 \leq A \leq I$ slijedi $0 \leq D \leq I$, pa je $\|D\| \leq 1$. Odatle i iz (2.7) indukcijom jednostavno slijedi da je $\|E_n\| \leq 1$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Sada teorem 2.2.1. povlači da postoji $E \in B_+(\mathcal{H})$ takav da vrijedi

$$E\xi = \lim_{n\to\infty} E_n\xi \quad \forall \xi \in \mathcal{H}, \qquad \|E\| \leq 1 \qquad \text{i} \qquad E_n \leq E \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Imamo

$$E\xi = \lim_{n\to\infty} p_n(D)\xi$$

pa slijedi da operator E komutira sa svakim operatorom s kojim komutira D, dakle i sa svakim operatorom s kojim komutira A. Posebno, E komutira sa svim operatorima E_n, pa nalazimo za $\xi \in \mathcal{H}$:

$$\|E^2\xi - E_n^2\xi\| = \|(E + E_n)(E - E_n)\xi\| \leq \|E + E_n\| \cdot \|E\xi - E_n\xi\| \leq 2\|E\xi - E_n\xi\|.$$

Pustimo li da n teži k ∞, nalazimo da je

$$E^2\xi = \lim_{n\to\infty} E_n^2\xi \qquad \forall \xi \in \mathcal{H}.$$

Pustimo sada da u jednakosti

$$E_{n+1}\xi = \frac{1}{2}(D\xi + E_n^2\xi) \qquad \forall \xi \in \mathcal{H}$$

n teži u ∞. Dobivamo

$$E\xi = \frac{1}{2}(D\xi + E^2\xi) \qquad \forall \xi \in \mathcal{H}.$$

Odatle je

$$E^2 - 2E = -D \qquad \Longrightarrow \qquad (I - E)^2 = I - 2E + E^2 = I - D = A.$$

Dakle, operator $B = I - E$ ima svojstvo $B^2 = A$. Nadalje, za svaki $\xi \in \mathcal{H}$ vrijedi

$$(B\xi|\xi) = (\xi|\xi) - (E\xi|\xi) \geq \|\xi\|^2 - \|E\| \cdot \|\xi\|^2 \geq 0, \quad \text{jer je } \|E\| \leq 1.$$

Prema tome, $B \in B_+(\mathcal{H})$. Time je dokazana egzistencija, a dokazano je i da konstruirani operator $B = I - E$ komutira sa svakim operatorom C koji komutira sa A.

Dokažimo sada jedinstvenost. Neka je i $B_1 \in B_+(\mathcal{H})$ takav da je $B_1^2 = A$. Operator B_1 komutira sa $B_1^2 = A$, dakle komutira i sa B. Neka je $\xi \in \mathcal{H}$. Tada za $\eta = (B_1 - B)\xi$ imamo

$$(B_1\eta|\eta) + (B\eta|\eta) = ((B_1 + B)(B_1 - B)\xi|\eta) = ((B_1^2 - B^2)\xi|\eta) = ((A - A)\xi|\eta) = 0.$$

Kako su $(B_1\eta|\eta) \geq 0$ i $(B\eta|\eta) \geq 0$, odatle slijedi da je

$$(B_1\eta|\eta) = (B\eta|\eta) = 0.$$

Prema dokazanom postoje operatori $F_1, F \in B_+(\mathcal{H})$ takvi da je $F_1^2 = B_1$ i $F^2 = B$. Stoga je

$$\|F_1\eta\|^2 = (F_1\eta|F_1\eta) = (F_1^2\eta|\eta) = (B_1\eta|\eta) = 0 \quad \text{i} \quad \|F\eta\|^2 = (F\eta|F\eta) = (F^2\eta|\eta) = (B\eta|\eta) = 0.$$

Zaključujemo da je $F_1\eta = F\eta = 0$, pa slijedi

$$B_1\eta = F_1^2\eta = 0 \qquad \text{i} \qquad B\eta = F^2\eta = 0.$$

Odatle je

$$\|\eta\|^2 = (\eta|(B_1 - B)\xi) = ((B_1 - B)\eta|\xi) = 0,$$

odnosno, $0 = \eta = B_1\xi - B\xi$. Drugim riječima, vrijedi $B_1\xi = B\xi$, a kako je $\xi \in \mathcal{H}$ bio proizvoljan, zaključujemo da je $B_1 = B$. Time je i jedinstvenost dokazana.

Jedinstveni operator $B \in B_+(\mathcal{H})$ takav da je $B^2 = A$ zove se **drugi korijen** iz operatora $A \in B_+(\mathcal{H})$. Pisat ćemo

$$B = \sqrt{A}.$$

Zadatak 2.2.3. *Neka su $A, B \in B_+(\mathcal{H})$ takvi da je $A^2 = B^2$. Dokažite da je tada $A = B$.*

Zadatak 2.2.4. *Neka su $A, B \in B_+(\mathcal{H})$. Dokažite da je $AB \in B_+(\mathcal{H})$ ako i samo ako je $AB = BA$.*

Zadatak 2.2.5. *Neka operatori $A, B, C \in B_h(\mathcal{H})$ međusobno komutiraju i pretpostavimo da je $A \leq B$ i $C \geq 0$. Dokažite da je tada $AC \leq BC$.*

Proučit ćemo sada vezu između dvaju operatora $A_1, A_2 \in B_h(\mathcal{H})$ takvih da je $A_1^2 = A_2^2$ i $A_1A_2 = A_2A_1$, bez pretpostavke da su A_1 i A_2 pozitivni.

Propozicija 2.2.4. *Neka su $A_1, A_2 \in B_h(\mathcal{H})$ takvi da je $A_1^2 = A_2^2$ i $A_1A_2 = A_2A_1$. Neka je P ortogonalni projektor prostora $\mathcal{H}$ na potprostor*

$$N(A_1 - A_2) = \{\xi \in \mathcal{H};\ A_1\xi = A_2\xi\}.$$

Tada vrijedi:

(*a*) *Ako $C \in B(\mathcal{H})$ komutira s $A_1 - A_2$ onda C komutira s P.*

(*b*) *$N(A_1) \subseteq R(P)$, tj. $A_1\xi = 0 \implies P\xi = \xi$.*

(*c*) *$A_1 = (2P - I)A_2$ i $A_2 = (2P - I)A_1$.*

Dokaz: (*a*) Neka je $\mathcal{K} = R(P) = N(A_1 - A_2)$. Neka operator $C \in B(\mathcal{H})$ komutira s operatorom $A_1 - A_2$. Za $\eta \in \mathcal{K}$ tada imamo

$$(A_1 - A_2)C\eta = C(A_1 - A_2)\eta = 0 \qquad \implies \qquad C\eta \in \mathcal{K}.$$

Dakle, vrijedi $CP\xi \in \mathcal{K}\ \forall \xi \in \mathcal{H}$, pa slijedi $PCP\xi = CP\xi\ \forall\xi \in \mathcal{H}$, odnosno, $PCP = CP$. Kako je operator $A_1 - A_2$ hermitski, to i operator C^* komutira sa $A_1 - A_2$, pa vrijedi i $PC^*P = C^*P$. Odatle adjungiranjem zbog $P^* = P$ slijedi $PCP = PC$. Prema tome je $PC = PCP = CP$.

(*b*) Iz $A_1\xi = 0$ slijedi

$$\|A_2\xi\|^2 = (A_2\xi|A_2\xi) = (A_2^2\xi|\xi) = (A_1^2\xi|\xi) = 0 \qquad \implies \qquad A_2\xi = 0 \qquad \implies$$

$$\implies \qquad \xi \in N(A_1 - A_2) = R(P) \qquad \implies \qquad P\xi = \xi.$$

(*c*) Zbog (*b*) imamo za svaki $\xi \in \mathcal{H}$:

$$(A_1 - A_2)(A_1 + A_2)\xi = (A_1^2 - A_2^2)\xi = 0 \qquad \implies \qquad (A_1 + A_2)\xi \in N(A_1 - A_2) = R(P),$$

pa slijedi $P(A_1 + A_2)\xi = (A_1 + A_2)\xi\ \forall\xi \in \mathcal{H}$. Dakle,

$$P(A_1 + A_2) = A_1 + A_2. \tag{2.8}$$

Nadalje, za $\xi \in \mathcal{H}$ je $P\xi \in R(P) = N(A_1 - A_2)$, pa kako prema (a) P komutira sa $A_1 - A_2$, slijedi $P(A_1 - A_2)\xi = (A_1 - A_2)P\xi = 0$. Dakle,

$$P(A_1 - A_2) = 0. \tag{2.9}$$

Zbrajanjem i oduzimanjem jednakosti (2.8) i (2.9) dobivamo

$$A_2 = (2P - I)A_1 \qquad \text{i} \qquad A_1 = (2P - I)A_2.$$

Teorem 2.2.5. *Za $A \in B_h(\mathcal{H})$ stavimo*

$$A_+ = \frac{1}{2}\left(\sqrt{A^2} + A\right) \qquad i \qquad A_- = \frac{1}{2}\left(\sqrt{A^2} - A\right).$$

Neka je P ortogonalni projektor prostora $\mathcal{H}$ na potprostor $N(A_-)$. Tada vrijedi:

- (a) $A_+, A_- \in B_+(\mathcal{H})$ *i* $A = A_+ - A_-$.
- (b) *Vrijedi* $PA = P\sqrt{A^2} = A_+$, $(P - I)A = -(P - I)\sqrt{A^2} = A_-$ *i* $N(A) \subseteq R(P)$.
- (c) *Operator* $C \in B(\mathcal{H})$ *komutira s operatorom* A *ako i samo ako* C *komutira sa* A_+, A_- *i* P.

Dokaz: (c) Ako operator C komutira sa A, onda C komutira i sa A^2, dakle, prema teoremu 2.2.3. i sa $\sqrt{A^2}$. Odatle slijedi da C komutira sa A_+ i sa A_-. No tada je potprostor $R(P) = N(A_-)$ invarijantan s obzirom na operator C. Kako je A hermitski, i C^* komutira sa A, dakle, potprostor $R(P)$ je invarijantan i s obzirom na C^*. Odatle, kao u dokazu tvrdnje (a) propozicije 2.2.4. slijedi $CP = PCP = PC$.

Obratno, ako C komutira sa A_+, A_- i P, onda C komutira i sa $A = A_+ - A_-$.

(b) Operator A komutira sa A^2, dakle i sa $\sqrt{A^2}$. Odatle slijedi da operatori A_+ i A_- komutiraju. Nadalje, iz tvrdnje (c) propozicije 2.2.4. primijenjene na operatore $A_1 = A$ i $A_2 = \sqrt{A^2}$, nalazimo da je $\sqrt{A^2} = (2P - I)A = 2PA - A$ i $A = (2P - I)\sqrt{A^2} = 2P\sqrt{A^2} - \sqrt{A^2}$, dakle,

$$PA = \frac{1}{2}\left(\sqrt{A^2} + A\right) = A_+ \qquad \text{i} \qquad P\sqrt{A^2} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{A^2} + A\right) = A_+.$$

Odatle je

$$(P - I)A = PA - A = A_+ - A = A_- \qquad \text{i} \qquad (P - I)\sqrt{A^2} = P\sqrt{A^2} - \sqrt{A^2} = A_+ - \sqrt{A^2} = -A_-.$$

Napokon, ako je $A\xi = 0$, onda je $A^2\xi = 0$, pa slijedi

$$\left\|\sqrt{A^2}\xi\right\|^2 = \left(\sqrt{A^2}\xi \middle| \sqrt{A^2}\xi\right) = (A^2\xi|\xi) = 0,$$

dakle i $\sqrt{A^2}\xi = 0$. Odatle je $\xi \in N(A_-) = R(P)$.

(a) Jasno je da je $A = A_+ - A_-$. Treba još dokazati da su $A_+, A_- \in B_+(\mathcal{H})$. Međutim, P, $I - P$ i $\sqrt{A^2}$ su pozitivni operatori koji međusobno komutiraju, pa pomoću zadatka 2.2.4. zaključujemo da su i $A_+ = P\sqrt{A^2}$ i $A_- = (I - P)\sqrt{A^2}$ pozitivni.

Operatori A_+ i A_- iz teorema 2.2.5. zovu se **pozitivni** i **negativni dio** operatora $A \in B_h(\mathcal{H})$.

Zadatak 2.2.6. *Dokažite da za $A, B \in B_h(\mathcal{H})$ vrijedi*

$$A \leq B \quad i \quad B \leq A \qquad \Longleftrightarrow \qquad A = B.$$

Zadatak 2.2.7. *Neka su $A, B \in B_+(\mathcal{H})$ takvi da je $A \leq B$ i $AB = BA$. Dokažite da je tada $\sqrt{A} \leq \sqrt{B}$ i $A^n \leq B^n$ $\forall n \in \mathbb{N}$.*

Zadatak 2.2.8. *Dokažite da za svaki $A \in B_h(\mathcal{H})$ postoji jedinstven $B \in B_h(\mathcal{H})$ takav da je $B^3 = A$.*

2.3 Parcijalne izometrije i polarna forma

Propozicija 2.3.1. *Za Hilbertove prostore $\mathcal{H}$ i $\mathcal{K}$ i za operator $A \in B(\mathcal{H},\mathcal{K})$ vrijedi:*

$$N(A) = R(A^*)^\perp, \qquad N(A^*) = R(A)^\perp, \qquad N(A)^\perp = Cl(R(A^*)), \qquad N(A^*)^\perp = Cl(R(A)).$$

Posebno, ako je $A \in B_h(\mathcal{H})$, onda je

$$N(A) = R(A)^\perp \qquad i \qquad N(A)^\perp = Cl(R(A)).$$

Dokaz: Zamjenom A sa A^* vidimo da su prva i druga jednakost ekvivalentne, a također su treća i četvrta jednakost ekvivalentne. Nadalje, za svaki potprostor X Hilbertovog prostora vrijedi $Cl(X) = X^{\perp\perp}$, pa vidimo da su prva i treća jednakost ekvivalentne, a također i druga i četvrta. Prema tome, dovoljno je dokazati samo jednu od tih jednakosti. Imamo npr.:

$$\xi \in N(A) \iff A\xi = 0 \iff (A\xi|\eta) = 0 \quad \forall \eta \in \mathcal{K} \iff$$
$$\iff (\xi|A^*\eta) = 0 \quad \forall \eta \in \mathcal{K} \iff (\xi|\zeta) = 0 \quad \forall \zeta \in R(A^*) \iff \xi \in R(A^*)^\perp.$$

Teorem 2.3.2. *Neka su $\mathcal{H}$ i $\mathcal{K}$ Hilbertovi prostori i $V \in B(\mathcal{H},\mathcal{K})$. Sljedeća su svojstva međusobno ekvivalentna:*

(a) *$V^*V \in B(\mathcal{H})$ je projektor.*

(b) *$VV^* \in B(\mathcal{K})$ je projektor.*

(c) *Postoji zatvoren potprostor $\mathcal{H}_1$ od $\mathcal{H}$ takav da vrijedi*

$$\|V\xi\| = \|\xi\| \quad \forall \xi \in \mathcal{H}_1 \qquad i \qquad V\xi = 0 \quad \forall \xi \in \mathcal{H}_1^\perp.$$

(d) *Postoji zatvoren potprostor $\mathcal{K}_1$ od $\mathcal{K}$ takav da vrijedi*

$$\|V^*\eta\| = \|\eta\| \quad \forall \eta \in \mathcal{K}_1 \qquad i \qquad V^*\eta = 0 \quad \forall \eta \in \mathcal{K}_1^\perp.$$

U tom slučaju, $R(V)$ je zatvoren potprostor od $\mathcal{K}$, $R(V^*)$ je zatvoren potprostor od $\mathcal{H}$, V^*V je (ortogonalan) projektor prostora $\mathcal{H}$ na potprostor $R(V^*)$ duž potprostora $N(V)$, i VV^* je (ortogonalan) projektor prostora $\mathcal{K}$ na potprostor $R(V)$ duž potprostora $N(V^*)$. Nadalje, restrikcija $V|R(V^*)$ je izometrički izomorfizam Hilbertovog prostora $R(V^*)$ na Hilbertov prostor $R(V)$.

Dokaz: Pretpostavimo najprije da je $P = V^*V$ projektor. Tada je $P^* = P$, dakle, P je ortogonalni projektor i vrijedi $\mathcal{H} = R(P) \oplus N(P)$. Stavimo $\mathcal{H}_1 = R(P)$. Tada imamo

$$\xi \in \mathcal{H}_1 \implies P\xi = \xi \implies V^*V\xi = \xi \implies$$
$$\implies \|V\xi\|^2 = (V\xi|V\xi) = (V^*V\xi|\xi) = (\xi|\xi) = \|\xi\|^2 \implies \|V\xi\| = \|\xi\|$$

i

$$\xi \perp \mathcal{H}_1 \implies \xi \in R(P)^\perp = N(P) \implies P\xi = 0 \implies$$
$$\implies \|V\xi\|^2 = (V^*V\xi|\xi) = (P\xi|\xi) = 0 \implies V\xi = 0.$$

Time je dokazano da iz (a) slijedi (c).

Pretpostavimo sada da je $\mathcal{H}_1$ zatvoren potprostor od $\mathcal{H}$ takav da vrijedi

$$\|V\xi\| = \|\xi\| \quad \forall \xi \in \mathcal{H}_1 \qquad \text{i} \qquad V\xi = 0 \quad \forall \xi \in \mathcal{H}_1^\perp.$$

Neka je P ortogonalni projektor na $\mathcal{H}_1$. Za proizvoljan $\xi \in \mathcal{H}$ pišemo $\xi = \eta + \zeta$, $\eta \in \mathcal{H}_1$, $\zeta \in \mathcal{H}_1^\perp$. Tada imamo

$$(V^*V\xi|\xi) = (V\xi|V\xi) = (V\eta|V\eta) = (\eta|\eta) = (\eta|\xi) = (P\xi|\xi).$$

Dakle, $((V^*V - P)\xi|\xi) = 0 \; \forall \xi \in \mathcal{H}$, a kako je operator $V^*V - P$ hermitski, iz tvrdnje (a) propozicije 2.1.2. slijedi $V^*V - P = 0$. Dakle, $V^*V = P$ je projektor. Time je dokazano da iz (c) slijedi (a).

Dakle, vrijedi $(a) \iff (c)$, a zamjenom V sa V^* odatle dobivamo i $(b) \iff (d)$.

Iz dokaza $(a) \implies (c)$ vidi se da je $N(P) = N(V)$, pa iz propozicije 2.3.1. nalazimo

$$R(P) = N(P)^\perp = N(V)^\perp = Cl(R(V^*)).$$

Nadalje, za $\xi \in R(P)$ je $\xi = P\xi = V^*V\xi \in R(V^*)$, pa zaključujemo da je zapravo $R(P) = R(V^*)$. Dakle, ako vrijede (a) i (c) onda je $R(V^*)$ zatvoren potprostor od $\mathcal{H}$. Sasvim analogno, ako vrijede (b) i (d) onda je $R(V)$ zatvoren potprostor.

Pretpostavimo ponovo da vrijedi (a), dakle i (c) za $\mathcal{H}_1 = R(P) = R(V^*)$ i $P = V^*V$. Tada je očito $R(V) = V\mathcal{H}_1$ i restrikcija $V|\mathcal{H}_1$ je izometrija sa $\mathcal{H}_1 = R(V^*)$ na $V\mathcal{H}_1 = R(V)$. Time je dokazano da iz (a) slijedi zadnja tvrdnja teorema. Nadalje, odatle slijedi da je i $R(V)$ zatvoren potprostor od $\mathcal{K}$. Napokon, stavimo $Q = VV^*$. Tada je očito $N(V^*) \subseteq N(Q)$. Nadalje,

$$\eta \in N(Q) \quad \implies \quad Q\eta = 0 \quad \implies \quad VV^*\eta = 0 \quad \implies$$

$$\implies \quad \|V^*\eta\|^2 = (V^*\eta|V^*\eta) = (VV^*\eta|\eta) = 0 \quad \implies \quad V^*\eta = 0 \quad \implies \quad \eta \in N(V^*).$$

Time je dokazana obrnuta inkluzija $N(Q) \subseteq N(V^*)$, dakle, vrijedi $N(V^*) = N(Q)$. Kako je $R(V)$ zatvoren potprostor od $\mathcal{K}$, pomoću propozicije 2.3.1. nalazimo

$$R(V) = N(V^*)^\perp = N(Q)^\perp \qquad \text{i} \qquad N(V^*) = R(V)^\perp.$$

Dakle,

$$\mathcal{K} = N(V^*) \oplus R(V).$$

Neka su sada $\eta \in R(V)$ i $\zeta \in N(V^*) = N(Q)$. Tada je $\eta \in VR(V^*)$, tj. postoji $\xi \in R(V^*)$ takav da je $\eta = V\xi$. Označimo ponovo $P = V^*V$. Vidjeli smo da je to ortogonalan projektor i da je $R(P) = R(V^*)$. Dakle, $P\xi = \xi$, pa imamo

$$Q\eta = VV^*\eta = VV^*V\xi = VP\xi = V\xi = \eta \qquad \text{i} \qquad Q\zeta = 0.$$

Time je dokazano da je $Q = VV^*$ projektor. Dakle, dokazali smo da iz (a) slijedi (b). Sasvim analogno, iz (b) slijedi (a).

Time su sve tvrdnje teorema dokazane.

Ako su $\mathcal{H}$ i $\mathcal{K}$ Hilbertovi prostori, operator $V \in B(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ koji ima svojstva $(a) - (d)$ iz teorema 2.3.2. zove se **parcijalna izometrija** sa $\mathcal{H}$ u $\mathcal{K}$. Jasno je da je tada V^* parcijalna izometrija sa $\mathcal{K}$ u $\mathcal{H}$.

Teorem 2.3.3. *Neka su $\mathcal{H}$ i $\mathcal{K}$ Hilbertovi prostori i $A \in B(\mathcal{H}, \mathcal{K})$. Neka je $H = \sqrt{A^*A}$ i $K = \sqrt{AA^*}$. Tada postoje parcijalne izometrije V i W sa $\mathcal{H}$ u $\mathcal{K}$ takve da vrijedi*

$$A = VH = KW.$$

Ako je $\mathcal{H} = \mathcal{K}$ i ako je A normalan operator, možemo uzeti da je $V = W$ unitaran operator na $\mathcal{H}$ koji komutira sa svakim operatorom $B \in B(\mathcal{H})$, takvim da je $BA = AB$ i $BA^* = A^*B$.

Dokaz: Prema propoziciji 2.3.1. je

$$\mathcal{H} = N(H) \oplus Cl(R(H)).$$

Neka je P ortogonalni projektor prostora $\mathcal{H}$ na potprostor $Cl(R(H))$ (dakle, duž potprostora $N(H)$). Imamo $N(H) = N(A)$, dakle, za bilo koje $\xi, \eta \in \mathcal{H}$ vrijedi

$$H\xi = H\eta \qquad \Longleftrightarrow \qquad A\xi = A\eta. \tag{2.10}$$

Definirat ćemo sada operator

$$V_1 : R(H) \longrightarrow R(A)$$

na sljedeći način. Za $\eta \in R(H)$ izaberemo $\xi \in \mathcal{H}$ takav da je $\eta = H\xi$. Tada stavljamo $V_1\eta = A\xi$. Zbog (2.10) V_1 je dobro definiran linearan operator i očito vrijedi $R(V_1) = R(A)$. Neka su sada $\eta, \eta' \in R(H)$ i neka su $\xi, \xi' \in \mathcal{H}$ takvi da je $\eta = H\xi$ i $\eta' = H\xi'$. Tada imamo

$$(V_1\eta|V_1\eta') = (A\xi|A\xi') = (A^*A\xi|\xi') = (H^2\xi|\xi') = (H\xi|H\xi') = (\eta|\eta').$$

Dakle, V_1 je izometrički izomorfizam sa $R(H)$ na $R(A)$. Proširenjem po neprekidnosti dolazimo do izometričkog izomorfizma V_2 sa $Cl(R(H))$ na $Cl(R(A))$. Napokon, stavimo $V = V_2P \in B(\mathcal{H}, \mathcal{K})$. Tada je V izometrija na zatvorenom potprostoru $Cl(R(H))$, a na njegovom ortogonalnom komplementu $N(H) = N(P)$ je restrikcija operatora V jednaka nuli. Prema teoremu 2.3.2. zaključujemo da je V parcijalna izometrija sa $\mathcal{H}$ u $\mathcal{K}$. Nadalje, jasno je da je $R(V) = Cl(R(A))$ i prema dokazu teorema 2.3.2. je $V^*V = P$.

Sada za proizvoljan $\xi \in \mathcal{H}$ imamo $PH\xi = H\xi$, dakle,

$$VH\xi = V_2PH\xi = V_2H\xi = V_1H\xi = A\xi.$$

Time je dokazano da je $A = VH$. Primijenimo li dokazano na operator $A^* \in B(\mathcal{K}, \mathcal{H})$, zaključujemo da postoji parcijalna izometrija U sa $\mathcal{K}$ u $\mathcal{H}$, takva da je $A^* = UK$. No tada je $A = KU^*$ i $U^* = W$ je prema teoremu 2.3.2. parcijalna izometrija sa $\mathcal{H}$ u $\mathcal{K}$.

Pretpostavimo napokon da je $\mathcal{H} = \mathcal{K}$ i da je operator $A \in B(\mathcal{H})$ normalan. Naravno, tada je $H = K$. Nadalje, iz tvrdnje (c) propozicije 2.1.2. vrijedi $N(A^*) = N(A) = N(H)$, a odatle i iz propozicije 2.3.1. je $Cl(R(A)) = Cl(R(A^*)) = Cl(R(H))$. Dakle, V_2 je izometrički izomorfizam sa $Cl(R(H))$ na $Cl(R(H))$, a to znači da je V_2 unitaran operator na Hilbertovom prostoru $Cl(R(H))$. Kako je

$$\mathcal{H} = Cl(R(H)) \oplus N(H),$$

linearan operator $U : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ definiran sa $U(\eta + \zeta) = V_2\eta + \zeta$ za $\eta \in Cl(R(H))$ i $\zeta \in N(H)$ je unitaran. Očito je $A = UH$.

Neka je sada $B \in B(\mathcal{H})$ operator koji komutira sa A i sa A^*. Tada B komutira i sa A^*A, dakle, i sa H. Za proizvoljan $\xi \in \mathcal{H}$ imamo

$$BU(H\xi) = BA\xi = AB\xi = UHB\xi = UB(H\xi).$$

Dakle,

$$BU\eta = UB\eta \qquad \forall \eta \in R(H). \tag{2.11}$$

S druge strane, za $\eta \in N(H)$ je $U\eta = \eta$. Nadalje, kako B komutira sa H to je potprostor $N(H)$ invarijantan s obzirom na operator B, dakle vrijedi $B\eta \in N(H)$ za svaki $\eta \in N(H)$. Dakle,

$$BU\eta = B\eta = UB\eta \qquad \forall \eta \in N(H). \tag{2.12}$$

Kako je $\mathcal{H} = N(H) \oplus Cl(R(H))$, iz (2.11) i (2.12) slijedi $UB = BU$. Napokon, operatori B i H komutiraju, jer imamo

$$H^2 = A^*A = AA^* = UHHU^* \qquad \Longrightarrow \qquad UH^2 = H^2U \qquad \Longrightarrow \qquad UH = HU.$$

Prikazi operatora $A \in B(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ iz teorema 2.3.3. zovu se **polarne forme** ili **polarne dekompozicije** operatora A.

Promatrajmo sada operatore iz $B(\mathcal{H})$ za neki Hilbertov prostor $\mathcal{H}$. Za $A \in B(\mathcal{H})$ operator $\sqrt{A^*A}$ obično se označava sa $|A|$ i zove **apsolutna vrijednost operatora** $|A|$.

Propozicija 2.3.4. *Neka je $A \in B(\mathcal{H})$. Operator $|A|$ je jedinstven pozitivan operator sa svojstvom*

$$\|A\xi\| = \||A|\xi\| \qquad \forall \xi \in \mathcal{H}.$$

Dokaz: Operator $|A|$ stvarno ima takvo svojstvo:

$$\|A\xi\|^2 = (A\xi|A\xi) = (A^*A\xi|\xi) = (|A|^2\xi|\xi) = (|A|\xi||A|\xi) = \||A|\xi\|^2.$$

Ako $S \geq 0$ ima svojstvo da je $\|A\xi\| = \|S\xi\|$ za svaki $\xi \in \mathcal{H}$, onda imamo

$$(S^2\xi|\xi) = (S\xi|S\xi) = \|S\xi\|^2 = \|A\xi\|^2 = (A\xi|A\xi) = (A^*A\xi|\xi).$$

Odatle je $((S^2 - A^*A)\xi|\xi) = 0$ za svaki $\xi \in \mathcal{H}$, a kako je operator $S^2 - A^*A$ hermitski, prema tvrdnji (a) propozicije 2.1.2. taj je operator jednak 0. Dakle, $S^2 = A^*A$, pa zbog jedinstvenosti pozitivnog drugog korijena i pozitivnog operatora slijedi $S = \sqrt{A^*A}$.

Zadatak 2.3.1. *Ako je operator $A \in B(\mathcal{H})$ invertibilan, dokažite da je parcijalna izometrija U u njegovoj polarnoj dekompoziciji $A = U|A|$ jedinstvena i da je U unitaran operator.*

Zadatak 2.3.2. *Neka je $A \in B_h(\mathcal{H})$ i $\|A\| \leq 1$. Dokažite da je tada operator $U = A + i\sqrt{I - A^2}$ unitaran i da vrijedi $A = \frac{1}{2}(U + U^*)$.*

Lema 2.3.5. *Neka je $A \in B(\mathcal{H})$ i $\|A\| < 1$. Tada za svaki unitaran operator U postoje unitarni operatori U_1 i V_1 takvi da je $U + A = U_1 + V_1$.*

Dokaz: Pretpostavimo najprije da je $U = I$. Budući da je $\|A\| < 1$, prema tvrdnji (b) teorema 1.2.4. operator $I + A$ je invertibilan. Prema zadatku 2.3.1. u njegovoj polarnoj dekompoziciji $I + A = V|I + A|$ operator V je unitaran. Nadalje, vrijedi

$$\||I + A|\| = \|I + A\| \leq 2,$$

pa iz zadatka 2.3.2. primijenjenog na operator $\frac{1}{2}|I + A|$ slijedi da postoji unitaran operator W takav da je $I + A = W + W^*$. Stavimo li $U_1 = VW$ i $V_1 = VW^*$, nalazimo

$$I + A = V|I + A| = V(W + W^*) = U_1 + V_1.$$

Sa proizvoljan unitaran operator U imamo

$$\|U^*A\|^2 = \|(U^*A)^*U^*A\| = \|A^*UU^*A\| = \|A^*A\| = \|A\|^2,$$

dakle $\|U^*A\| < 1$. Iz dokazanog slijedi da postoje unitarni operatori U_2 i V_2 takvi da je $I + U^*A = U_2 + V_2$. Sada za unitarne operatore $U_1 = UU_2$ i $V_1 = UV_2$ vrijedi $U + A = U_1 + V_1$.

Propozicija 2.3.6. (**Russo−Dye−Gardnerov teorem**) *Neka je $A \in B(\mathcal{H})$ i $\|A\| < 1$ i neka je $n \in \mathbb{N}$ takav da je $\|A\| < 1 - \frac{2}{n}$. Tada postoje unitarni operatori $U_1, \ldots, U_n$ takvi da je*

$$A = \frac{1}{n}(U_1 + \cdots + U_n).$$

Dokaz: Iz pretpostavke slijedi da je $\|nA\| < n-2$. Stavimo

$$B = \frac{1}{n-1}(nA - I).$$

Tada je

$$\|B\| = \frac{1}{n-1}\|nA - I\| \le \frac{1}{n-1}(\|nA\| + \|I\|) < \frac{1}{n-1}(n-2+1) = 1.$$

Sada ćemo na operator B primijeniti lemu 2.3.5. $(n-1)$ puta i dobiti unitarne operatore $V_1, \ldots, V_{n-2}$ i $U_1, \ldots, U_n$ tako da je redom

$$nA = (n-1)B + I = (n-2)B + (B+I) = (n-2)B + (V_1 + U_1) = (n-3)B + (B+V_1) + U_1 =$$

$$= (n-3)B + (V_2 + U_2) + U_1 = (n-4)B + (B+V_2) + U_2 + U_1 = (n-4)B + (V_3 + U_3) + U_2 + U_1 = \cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots = (B + V_{n-2}) + U_{n-2} + \cdots + U_1 = U_n + U_{n-1} + U_{n-2} + \cdots + U_1.$$

Dakle, vrijedi

$$A = \frac{1}{n}(U_1 + \cdots + U_n).$$

Primijetimo da iz zadatka 2.3.2. slijedi da je svaki operator iz $B(\mathcal{H})$ linearna kombinacija unitarnih operatora (dovoljno ih je 4). Russo−Dye−Gardnerov teorem je puno precizniji: on pokazuje da je svaki operator iz otvorene jedinične kugle u $B(\mathcal{H})$ konveksna linearna kombinacija unitarnih operatora, štoviše, srednja vrijednost konačno mnogo unitarnih operatora. Tvrdnja ne vrijedi za sve operatore na jediničnoj lopti $\|A\| = 1$, npr. ne vrijedi za izometriju, tj. za operator A takav da je $\|A\xi\| = \|\xi\| \ \forall \xi \in \mathcal{H}$, koja nije unitaran operator:

Zadatak 2.3.3. *Dokažite da je svaka izometrija A ekstremna točka zatvorene jedinične kugle u $B(\mathcal{H})$, tj. da iz $A = tB + (1-t)C$, gdje su $\|B\| \le 1$, $\|C\| \le 1$ i $0 < t < 1$, slijedi $A = B = C$. Izvedite odatle da za neunitarnu izometriju A ni za jedan $n \in \mathbb{N}$ ne postoje unitarni operatori $U_1, \ldots, U_n$ takvi da je*

$$A = \frac{1}{n}(U_1 + \cdots + U_n).$$

Uputa: Prvo dokažite da je svaki jedinični vektor u $\mathcal{H}$ ekstremna točka zatvorene jedinične kugle $\{\xi \in \mathcal{H};\ \|\xi\| \le 1\}$. Zatim uočite da za jedinični vektor $\xi \in \mathcal{H}$ vrijedi $A\xi = tB\xi + (1-t)C\xi$ i da su $\|B\xi\| \le 1$ i $\|C\xi\| \le 1$. Za dokaz druge tvrdnje stavite $B = U_1$, $C = \frac{1}{n-1}(U_2 + \cdots + U_n)$ i $t = \frac{1}{n}$.

2.4 Spektralni teorem

U daljnjem je A hermitski operator na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$. Za $\lambda \in \mathbb{R}$ tada je i operator $\lambda I - A$ hermitski. Sa E_λ ćemo označavati ortogonalni projektor prostora $\mathcal{H}$ na potprostor $N((\lambda I - A)_-)$. Prema tvrdnji (b) teorema 2.2.5. tada je $N(\lambda I - A) \subseteq R(E_\lambda)$, dakle, vrijedi

$$A\xi = \lambda\xi \qquad \Longrightarrow \qquad E_\lambda \xi = \xi.$$

Funkcija $\lambda \mapsto E_\lambda$ zove se **spektralna funkcija hermitskog operatora** A.

Teorem 2.4.1. (**Spektralni teorem**) *Neka je A hermitski operator na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$ i neka je $\lambda \mapsto E_\lambda$ njegova spektralna funkcija.*

(a) *Za $C \in B(\mathcal{H})$ vrijedi $AC = CA$ ako i samo ako vrijedi $E_\lambda C = CE_\lambda$ $\forall \lambda \in \mathbb{R}$.*

(b) *Za $\lambda \leq \mu$ vrijedi $E_\lambda \leq E_\mu$, tj. $E_\lambda E_\mu = E_\mu E_\lambda = E_\lambda$.*

(c) *Za svaki vektor $\xi \in \mathcal{H}$ funkcija $\lambda \mapsto E_\lambda \xi$ sa $\mathbb{R}$ u $\mathcal{H}$ je zdesna neprekidna, tj. za svaki $\lambda \in \mathbb{R}$ vrijedi*

$$\lim_{\mu \searrow \lambda} E_\mu \xi = E_\lambda \xi.$$

(d) *Stavimo*

$$m = \inf\{(A\xi|\xi);\ \xi \in \mathcal{H},\ \|\xi\| = 1\} \qquad i \qquad M = \sup\{(A\xi|\xi);\ \xi \in \mathcal{H},\ \|\xi\| = 1\}.$$

Tada vrijedi

$$\lambda < m \quad \Longrightarrow \quad E_\lambda = 0 \qquad i \qquad \lambda \geq M \quad \Longrightarrow \quad E_\lambda = I.$$

(e) *Neka su m, M kao u (d), neka su $a < m$ i $b \geq M$ i neka je P particija segmenta $[a, b]$:*

$$a = \lambda_0 < \lambda_1 < \cdots \lambda_{n-1} < \lambda_n = b.$$

Tada vrijedi

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_{k-1}(E_{\lambda_k} - E_{\lambda_{k-1}}) \leq A \leq \sum_{k=1}^{n} \lambda_k (E_{\lambda_k} - E_{\lambda_{k-1}}). \tag{2.13}$$

Nadalje, ako su $\mu_k \in [\lambda_{k-1}, \lambda_k]$ i $\delta(P) = \max\{\lambda_k - \lambda_{k-1};\ 1 \leq k \leq n\}$, onda vrijedi

$$\left\| A - \sum_{k=1}^{n} \mu_k (E_{\lambda_k} - E_{\lambda_{k-1}}) \right\| \leq \delta(P). \tag{2.14}$$

Dokaz: (a) Neka je $C \in B(\mathcal{H})$ takav da je $CA = AC$ i neka je $\lambda \in \mathbb{R}$. Tada je

$$C(\lambda I - A) = (\lambda I - A)C,$$

pa iz tvrdnje (c) teorema 2.2.5. slijedi $CE_\lambda = E_\lambda C$. Na taj način dokazali smo da vrijedi

$$CA = AC \qquad \Longrightarrow \qquad CE_\lambda = E_\lambda C \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

Obrnuta implikacija u (a) bit će neposredna posljedica tvrdnje (e). No već iz dokazanog slijedi da je

$$E_\lambda E_\mu = E_\mu E_\lambda \qquad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

(*b*) Neka je $\lambda < \mu$. Stavimo $P = E_\lambda(I - E_\mu)$. Budući da operatori E_λ i E_μ međusobno komutiraju, iz definicije slijedi $E_\lambda P = PE_\lambda = P$, odnosno, $P \leq E_\lambda$. Iz definicije je također $(I - E_\mu)P = P(I - E_\mu) = P$, pa imamo i $P \leq I - E_\mu$. Prema prvom dijelu tvrdnje (*b*) u teoremu 2.2.5., primijenjenom na operator $\lambda I - A$, nalazimo da vrijedi

$$E_\lambda(\lambda I - A) = (\lambda I - A)E_\lambda = (\lambda I - A)_+ \geq 0, \tag{2.15}$$

a prema drugom dijelu iste tvrdnje, primijenjenom na operator $\mu I - A$, dobivamo

$$(I - E_\mu)(\mu I - A) = (\mu I - A)(I - E_\mu) = -(\mu I - A)_- \leq 0. \tag{2.16}$$

Za $\eta \in R(P)$ je $P\eta = \eta$, dakle i $E_\lambda \eta = \eta$ i $(I - E_\mu)\eta = \eta$, pa nalazimo

$$((\lambda I - A)\eta|\eta) = ((\lambda I - A)E_\lambda\eta|\eta) \geq 0 \qquad \text{i} \qquad ((\mu I - A)\eta|\eta) = ((\mu I - A)(I - E_\mu)\eta|\eta) \leq 0.$$

Oduzmemo li prvu od tih dviju nejednakosti od druge, slijedi $(\mu - \lambda)(\eta|\eta) \leq 0$, a kako je $\mu > \lambda$ slijedi $(\eta|\eta) \leq 0$, dakle, $(\eta|\eta) = 0$, odnosno, $\eta = 0$. Time je dokazano da je $R(P) = \{0\}$, tj. $P = 0$. Dakle, vrijedi $E_\lambda = E_\lambda E_\mu = E_\mu E_\lambda$, odnosno, $E_\lambda \leq E_\mu$.

(*c*) Za $\lambda < \mu$ i za poluotvoren interval $\Delta = \langle \lambda, \mu]$ stavimo $E(\Delta) = E_\mu - E_\lambda$. Tada je

$$E_\mu E(\Delta) = E_\mu^2 - E_\mu E_\lambda = E_\mu - E_\lambda = E(\Delta)$$

i

$$(I - E_\lambda)E(\Delta) = E_\mu - E_\lambda - E_\mu E_\lambda + E_\lambda^2 = E_\mu - E_\lambda - E_\lambda + E_\lambda = E(\Delta).$$

Dakle, zbog nejednakosti (2.15) i (2.16) i zbog zadatka 2.2.6. vrijedi

$$(\mu I - A)E(\Delta) = (\mu I - A)E_\mu \cdot E(\Delta) \geq 0 \qquad \text{i} \qquad (\lambda I - A)E(\Delta) = (\lambda I - A)(I - E_\lambda) \cdot E(\Delta) \leq 0,$$

a odatle slijedi

$$\lambda E(\Delta) \leq AE(\Delta) \leq \mu E(\Delta). \tag{2.17}$$

Funkcija $\lambda \mapsto E_\lambda$ je rastuća i svi operatori E_λ su ortogonalni projektori. Prema zadatku 2.2.2. za svaki $\lambda \in \mathbb{R}$ i za svaki vektor $\xi \in \mathcal{H}$ postoji limes zdesna $E_{\lambda+0}\xi = \lim\limits_{\mu \searrow \lambda} E_\mu \xi$ i $E_{\lambda+0}$ je ortogonalni projektor takav da je $E_{\lambda+0} \geq E_\lambda$. Dakle, operator $Q = E_{\lambda+0} - E_\lambda$ je ortogonalni projektor. Zbog (2.17) za svaki $\xi \in \mathcal{H}$ imamo $\lambda(E(\Delta)\xi|\xi) \leq (E(\Delta)A\xi|\xi) \leq \mu(E(\Delta)\xi|\xi)$, pa ako pustimo da $\mu \searrow \lambda$, dobivamo $\lambda(Q\xi|\xi) \leq (QA\xi|\xi) \leq \lambda(Q\xi|\xi)\ \ \forall \xi \in \mathcal{H}$. Odavde je

$$((QA - \lambda Q)\xi|\xi) = 0 \qquad \forall \xi \in \mathcal{H}. \tag{2.18}$$

Hermitski operatori A i Q komutiraju, pa imamo $(QA - \lambda Q)^* = AQ - \lambda Q = QA - \lambda Q$. Stoga iz (2.18) i iz tvrdnje (*a*) propozicije 2.1.2. slijedi

$$AQ = QA = \lambda Q. \tag{2.19}$$

Neka je $\xi \in \mathcal{H}$ i $\eta = Q\xi$. Tada zbog (2.19) imamo $A\eta = \lambda\eta$, tj. $\eta \in N(\lambda I - A) \subseteq R(E_\lambda)$. Time je dokazano $E_\lambda \eta = \eta$, odnosno, $E_\lambda Q\xi = Q\xi$, a kako je vektor $\xi \in \mathcal{H}$ bio proizvoljan, slijedi

$$E_\lambda Q = Q. \tag{2.20}$$

S druge strane je $E_\lambda(E_\mu - E_\lambda) = 0$ za $\mu > \lambda$, pa slijedi

$$E_\lambda Q = 0. \tag{2.21}$$

Iz (2.20) i (2.21) dobivamo $Q = 0$, tj. $E_{\lambda+0} = E_\lambda$. Time je dokazano da je za svaki vektor $\xi \in \mathcal{H}$ funkcija $\lambda \mapsto E_\lambda \xi$ zdesna neprekidna u svakoj točki iz $\mathbb{R}$.

(d) Neka je $\mu > M$ i za $\xi \in \mathcal{H}$ stavimo $\eta = (I - E_\mu)\xi$. Tada je $(I - E_\mu)\eta = \eta$, pa pomoću (2.16) nalazimo $\mu(\eta|\eta) - (A\eta|\eta) = ((\mu I - A)\eta|\eta) = ((\mu I - A)(I - E_\mu)\eta|\eta) \leq 0$. Odatle je $\mu(\eta|\eta) \leq (A\eta|\eta) \leq M(\eta|\eta)$. Kako je $\mu > M$, slijedi $\eta = 0$, odnosno, $E_\mu\xi = \xi$. Međutim, vektor $\xi \in \mathcal{H}$ je bio proizvoljan, pa zaključujemo da je $E_\mu = I$. Odavde i iz (c) zaključujemo da $E_\lambda = I$ vrijedi za $\lambda \geq M$.

Neka je sada $\lambda < m$ i za $\xi \in \mathcal{H}$ stavimo $\eta = E_\lambda\xi$. Tada je $E_\lambda\eta = \eta$, pa pomoću (2.15) nalazimo

$$\lambda(\eta|\eta) - (A\eta|\eta) = (((\lambda I - A)\eta|\eta) = ((\lambda I - A)E_\lambda\eta|\eta) \geq 0.$$

Odatle je

$$\lambda(\eta|\eta) \geq (A\eta|\eta) \geq m(\eta|\eta).$$

Kako je $\lambda < m$, slijedi $\eta = 0$, odnosno, $E_\lambda\xi = 0$. Zbog proizvoljnosti vektora $\xi \in \mathcal{H}$ zaključujemo da je $E_\lambda = 0$ za $\lambda < m$.

(e) Za zadanu particiju P segmenta $[a, b]$ ($a < m$, $M < b$) stavimo $\Delta_k = \langle\lambda_{k-1}, \lambda_k]$ i , kao u dokazu tvrdnje (c), $E(\Delta_k) = E_{\lambda_k} - E_{\lambda_{k-1}}$. Sada iz (2.17) dobivamo

$$\lambda_{k-1}E(\Delta_k) \leq AE(\Delta_k) \leq \lambda_k E(\Delta_k). \tag{2.22}$$

Nadalje, zbog tvrdnje (d) imamo

$$\sum_{k=1}^{n} E(\Delta_k) = E_b - E_a = I, \tag{2.23}$$

pa iz (2.22) sumiranjem po k od 1 do n dobivamo

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_{k-1}E(\Delta_k) \leq A \leq \sum_{k=1}^{n} \lambda_k E(\Delta_k), \tag{2.24}$$

odnosno, vrijedi (2.13).

Neka su sada $\mu_k \in [\lambda_{k-1}, \lambda_k]$ proizvoljni. Tada je očito

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_{k-1}E(\Delta_k) \leq \sum_{k=1}^{n} \mu_k E(\Delta_k) \leq \sum_{k=1}^{n} \lambda_k E(\Delta_k),$$

dakle, i

$$-\sum_{k=1}^{n} \lambda_k E(\Delta_k) \leq -\sum_{k=1}^{n} \mu_k E(\Delta_k) \leq -\sum_{k=1}^{n} \lambda_{k-1}E(\Delta_k).$$

Zbrajanjem tih nejednakosti sa (2.24) dobivamo

$$-\sum_{k=1}^{n}(\lambda_k - \lambda_{k-1})E(\Delta_k) \leq A - \sum_{k=1}^{n} \mu_k E(\Delta_k) \leq \sum_{k=1}^{n}(\lambda_k - \lambda_{k-1})E(\Delta_k). \tag{2.25}$$

Zadatak 2.4.1. *Neka su $B \in B_+(\mathcal{H})$ i $C \in B_h(\mathcal{H})$ takvi da je $-B \leq C \leq B$. Dokažite da je tada $\|C\| \leq \|B\|$.*

Uputa: Koristite propoziciju 2.1.2.

Pomoću tog zadatka iz (2.25) slijedi

$$\left\| A - \sum_{k=1}^{n} \mu_k E(\Delta_k) \right\| \leq \left\| \sum_{k=1}^{n}(\lambda_k - \lambda_{k-1})E(\Delta_k) \right\|. \tag{2.26}$$

Za svaki $k \in \{1, 2 \ldots, n\}$ vrijedi $0 < \lambda_k - \lambda_{k-1} \leq \delta(P)$, pa zbog (2.23) imamo

$$0 \leq \sum_{k=1}^{n} (\lambda_k - \lambda_{k-1}) E(\Delta_k) \leq \delta(P) \sum_{k=1}^{n} E(\Delta_k) = \delta(P) I.$$

Odatle i iz (2.26) pomoću zadatka 2.4.1. slijedi

$$\left\| A - \sum_{k=1}^{n} \mu_k E(\Delta_k) \right\| \leq \delta(P), \tag{2.27}$$

odnosno, vrijedi (2.14).

Preostaje nam još da dokažemo drugu implikaciju u tvrdnji (a). Pretpostavimo da je $C \in B(\mathcal{H})$ takav da je $CE_\lambda = E_\lambda C \; \forall \lambda \in \mathbb{R}$. Tada uz oznake iz dokaza tvrdnje (e) vrijedi $CE(\Delta_k) = E(\Delta_k)C$ za svaki k. Stavimo

$$B = \sum_{k=1}^{n} \mu_k E(\Delta_k).$$

Tada je $BC = CB$ i prema (2.27) je $\|A - B\| \leq \delta(P)$. Stoga je

$$\|AC - CA\| = \|(AC - BC) + (CB - CA)\| \leq \|(A - B)C\| + \|C(B - A)\| \leq 2\|C\| \cdot \|A - B\| \leq 2\delta(P)\|C\|.$$

Budući da to vrijedi za svaku particiju P segmenta $[a, b]$ ($a < m$ i $M \leq b$), zaključujemo da je $AC = CA$.

Zbog nejednakosti (2.14) obično se piše

$$A = \int_a^b \lambda \mathrm{d} E_\lambda.$$

Može se dokazati da za svaku neprekidnu funkciju $f : \sigma(A) \to \mathbb{C}$, proširenu bilo kako do neprekidne funkcije sa $[a, b]$ u $\mathbb{C}$, vrijedi

$$f(A) = \int_a^b f(\lambda) \mathrm{d} E_\lambda.$$

Nadalje, pridruživanje $f \mapsto f(A)$ je $*-$homomorfizam algebre $C(\sigma(A))$ u algebru $B(\mathcal{H})$ koje ima svojstvo monotonosti: ako za realne funkcije f i g vrijedi $f(\lambda) \leq g(\lambda) \; \forall \lambda \in \sigma(A)$, onda je $f(A) \leq g(A)$.

Nadalje, spektralna funkcija sadrži precizne informacije o spektru ograničenog hermitskog operatora. Naime, može se dokazati:

Teorem 2.4.2. *Neka je $A \in B_h(\mathcal{H})$ i neka je $\lambda \mapsto E_\lambda$ njegova spektralna funkcija.*

(a) *Za $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ vrijedi $\lambda_0 \notin \sigma(A)$ ako i samo ako je funkcija $\lambda \mapsto E_\lambda$ konstantna na nekoj okolini od λ_0, tj. ako postoji $\varepsilon > 0$ takav da je $E_\lambda = E_\mu$ za sve $\lambda, \mu \in [\lambda_0 - \varepsilon, \lambda_0 + \varepsilon]$.*

(b) *$\lambda_0 \in \sigma(A)$ je svojstvena vrijednost operatora A ako i samo ako funkcija $\lambda \mapsto E_\lambda$ ima prekid u točki λ_0, tj. ako samo ako je $E_{\lambda_0} \neq E_{\lambda_0 - 0}$. Tada je $E_{\lambda_0} - E_{\lambda_0 - 0}$ ortogonalni projektor na pripadni svojstveni potprostor $\{\xi \in \mathcal{H};\; A\xi = \lambda_0 \xi\}$.*

2.5 Hilbert−Schmidtovi operatori

Neka su $\mathcal{H}$ i $\mathcal{K}$ Hilbertovi prostori. $A \in B(\mathcal{H},\mathcal{K})$ se zove **Hilbert−Schmidtov operator** ako postoji ortonormirana baza $(e_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ u $\mathcal{H}$ takva da je skup $\{\alpha \in \mathcal{A};\ Ae_\alpha \neq 0\}$ konačan ili prebrojiv i da vrijedi

$$\sum_{\alpha\in\mathcal{A}} \|Ae_\alpha\|^2 < +\infty. \tag{2.28}$$

Skup svih Hilbert−Schmidtovih operatora sa $\mathcal{H}$ u $\mathcal{K}$ označavat ćemo sa $B_2(\mathcal{H},\mathcal{K})$. Pisat ćemo $B_2(\mathcal{H},\mathcal{H}) = B_2(\mathcal{H})$.

Teorem 2.5.1. *Neka je $A \in B_2(\mathcal{H},\mathcal{K})$.*

(*a*) *Za svaku ortonormiranu bazu $(e_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ prostora $\mathcal{H}$ skup $\{\alpha \in \mathcal{A};\ Ae_\alpha \neq 0\}$ je konačan ili prebrojiv i vrijedi* (2.28).

(*b*) *Za bilo koje dvije ortonormirane baze $(e_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ i $(e'_{\alpha'})_{\alpha'\in\mathcal{A}'}$ prostora $\mathcal{H}$ vrijedi*

$$\sum_{\alpha\in\mathcal{A}} \|Ae_\alpha\|^2 = \sum_{\alpha'\in\mathcal{A}'} \|Ae'_{\alpha'}\|^2.$$

(*c*) *Vrijedi $A^* \in B_2(\mathcal{H},\mathcal{K})$ i za bilo koje ortonormirane baze $(e_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ od $\mathcal{H}$ i $(f_\beta)_{\beta\in\mathcal{B}}$ od $\mathcal{K}$ vrijedi*

$$\sum_{\alpha\in\mathcal{A}} \|Ae_\alpha\|^2 = \sum_{\beta\in\mathcal{B}} \|A^* f_\beta\|^2. \tag{2.29}$$

Dokaz: Neka je $(e_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ ortonormirana baza prostora $\mathcal{H}$ za koju je $\mathcal{A}' = \{\alpha \in \mathcal{A};\ Ae_\alpha \neq 0\}$ konačan ili prebrojiv skup i za koju vrijedi (2.28). Nadalje, neka je $(f_\beta)_{\beta\in\mathcal{B}}$ bilo koja ortonormirana baza prostora $\mathcal{K}$. Dokazat ćemo da je tada skup $\{\beta \in \mathcal{B};\ A^* f_\beta \neq 0\}$ konačan ili prebrojiv i da vrijedi (2.29). Odatle uz zamjenu uloga A i A^* slijede sve tri tvrdnje teorema.

Za dokaz teorema 2.5.1. koristit ćemo tvrdnje (*a*), (*d*) i (*e*) sljedećeg općeg teorema o ortonormiranim podskupovima unitarnih prostora:

Teorem 2.5.2. *Neka je S ortonormiran podskup unitarnog prostora X.*

(*a*) *Za svaki $x \in X$ skup $\{e \in S;\ (x|e) \neq 0\}$ je konačan ili prebrojiv.*

(*b*) *Za svaki $x \in X$ vrijedi* **Besselova nejednakost***:*

$$\sum_{e\in S} |(x|e)|^2 \leq \|x\|^2.$$

(*c*) *Vektor $x \in X$ je u zatvaraču $Cl([S])$ potprostora $[S]$ razapetog skupom S ako i samo ako vrijedi* **Parsevalova jednakost***:*

$$\sum_{e\in S} |(x|e)|^2 = \|x\|^2.$$

(*d*) *Za svaki $x \in Cl([S])$ vrijedi*

$$x = \sum_{e\in S} (x|e)e.$$

(*e*) *Za* $x, y \in Cl([S])$ *vrijedi*

$$(x|y) = \sum_{e \in S} (x|e)(e|y);$$

pri tome je red s desne strane apsolutno konvergentan (*a jednakost se također zove Parsevalova*).

Dokaz teorema 2.5.2.: Dokazat ćemo najprije sljedeću lemu:

Lema 2.5.3. *Neka je* F *konačan ortonormiran podskup unitarnog prostora* X *i neka je* $x \in X$. *Stavimo*

$$y = \sum_{e \in F} (x|e)e.$$

(*a*) *Vrijedi*

$$\|x - y\| < \|x - z\| \qquad \forall z \in [F] \setminus \{y\}.$$

Drugim riječima, vektor y *je jedinstvena najbolja aproksimacija vektora* x *vektorima iz potprostora* $[F]$.

(*b*) *Vrijedi*

$$\sum_{e \in F} |(x|e)|^2 \leq \|x\|^2,$$

pri čemu vrijedi znak jednakosti ako i samo ako je $x \in [F]$.

Dokaz leme 2.5.3.: Stavimo $F = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$. To je ortonormirana baza prostora $[F]$. Imamo

$$y = \sum_{k=1}^{n} (x|e_k)e_k.$$

Svaki vektor $z \in [F]$ može se napisati u obliku

$$z = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k.$$

Koristeći linearnost skalarnog produkta u prvom i antilinearnost u drugom argumentu dobivamo:

$$0 \leq \|x - z\|^2 = \left(x - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k \middle| x - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k \right) =$$

$$= (x|x) - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k (e_k|x) - \sum_{k=1}^{n} \overline{\alpha_k} (x|e_k) + \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k|^2 =$$

$$= \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |(x|e_k)|^2 + \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k - (x|e_k)|^2.$$

Ta je vrijednost striktno najmanja točno onda kad je posljednja suma jednaka nuli, a to znači $\alpha_k = (x|e_k)$ za svaki k, odnosno $z = y$. Time je dokazana tvrdnja (a). No slijedi i nejednakost u tvrdnji (b), jer za $z = y$ imamo:

$$0 \leq \|x - y\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |(x|e_k)|^2.$$

Znak jednakosti vrijedi ako i samo ako je $x = y$, odnosno, ako i samo ako je $x \in [F]$. Time je lema 2.5.3. u potpunosti dokazana.

Prijeđimo sada na **dokaz teorema 2.5.2.** (a) Za izabrani $x \in X$ i za svaki prirodan broj n definiramo podskup S_n od S :

$$S_n = \left\{ e \in S;\ |(x|e)| \geq \frac{1}{n} \right\}.$$

Neka je F konačan podskup od S_n. Prema tvrdnji (b) leme 2.5.3. imamo:

$$\|x\|^2 \geq \sum_{e \in F} |(x|e)|^2 \geq \frac{|F|}{n^2}.$$

Dakle, broj elemenata $|F|$ bilo kojeg konačnog podskupa F skupa S_n ne može biti veći od $n^2\|x\|^2$. Slijedi da je svaki od skupova S_n konačan. Sada tvrdnja (a) slijedi iz evidentne skupovne jednakosti:

$$\{e \in S;\ (x|e) \neq 0\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} S_n.$$

Iz leme 2.5.3. i iz tvrdnje (a) slijedi tvrdnja (b). Doista, neka je $S_0 = \{e \in S;\ (x|e) \neq 0\}$. Ako S_0 nije konačan skup, prema tvrdnji (a) skup S_0 je prebrojivo beskonačan, pa mu elemente možemo numerirati prirodnim brojevima: $S_0 = \{e_n;\ n \in \mathbb{N}\}$. Tada je

$$\sum_{e \in S} |(x|e)|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |(x|e_n)|^2.$$

Kad bi to bilo veće od $\|x\|^2$, onda bismo imali

$$\sum_{k=1}^{n} |(x|e_k)|^2 > \|x\|^2 \qquad \text{za neki prirodan broj } n.$$

No to je nemoguće zbog tvrdnje (b) leme 2.5.3. Time je dokazana tvrdnja (b).

Pretpostavimo sada da je $x \in \mathrm{Cl}([S])$. Neka je $\varepsilon > 0$. Tada postoji $z \in [S]$ takav da je $\|x - z\| < \varepsilon$. Vektor z je linearna kombinacija vektora iz S, dakle postoji konačan skup $F \subseteq S$ takav da je $z \in [F]$. Prema tvrdnji (a) leme 2.5.3. slijedi:

$$\left\| x - \sum_{e \in F} (x|e)e \right\|^2 < \varepsilon^2.$$

Prema dokazu leme 2.5.3. lijeva strana ove nejednakosti jednaka je $\|x\|^2 - \sum_{e \in F} |(x|e)|^2$. Prema tome,

$$\forall \varepsilon > 0 \ \text{ postoji konačan skup } F \subseteq S \text{ takav da je } \qquad \|x\|^2 - \sum_{e \in F} |(x|e)|^2 < \varepsilon^2.$$

Kako je očito

$$\|x\|^2 - \sum_{e \in S} |(x|e)|^2 \leq \|x\|^2 - \sum_{e \in F} |(x|e)|^2,$$

zaključujemo da vrijedi

$$0 \leq \|x\|^2 - \sum_{e \in S} |(x|e)|^2 < \varepsilon^2 \qquad \forall \varepsilon > 0,$$

pa slijedi Parsevalova jednakost. Dakle, dokazali smo da Parsevalova jednakost vrijedi za svaki $x \in \mathrm{Cl}([S])$.

Pretpostavimo sada da za neki $x \in X$ vrijedi Parsevalova jednakost. Prema dokazanoj tvrdnji (a) možemo pisati

$$S_0 = \{e \in S;\ (x|e) \neq 0\} = \{e_n;\ n \in \mathbb{N}\}. \tag{2.30}$$

Za $n \in \mathbb{N}$ stavimo

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} (x|e_k)e_k.$$

Tada imamo prema dokazu leme 2.5.3.

$$\|x - x_n\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |(x|e_k)|^2.$$

Iz Parsevalove jednakosti slijedi da desna strana teži k nuli kada n teži u ∞. To pokazuje da je $x = \lim x_n$ i posebno $x \in \mathrm{Cl}([S])$. Time je dokazana tvrdnja (c), a slijedi i tvrdnja (d) jer za $x \in \mathrm{Cl}([S])$ imamo redom:

$$x = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} (x|e_k)e_k = \sum_{n=1}^{\infty} (x|e_n)e_n = \sum_{e\in S} (x|e)e.$$

Dokažimo još tvrdnju (e). Neka su $x, y \in \mathrm{Cl}([S])$. Imamo

$$2|(x|e)(e|y)| \leq |(x|e)|^2 + |(y|e)|^2,$$

pa zbog konvergencije redova u Besselovim nejednakostima za vektore x i y zaključujemo da red $\sum (x|e)(e|y)$ apsolutno konvergira. Nadalje, uz oznaku (2.30) imamo zbog tvrdnje (d) i zbog neprekidnosti skalarnog produkta:

$$(x|y) = \Big(\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} (x|e_k)e_k \Big| y \Big) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} (x|e_k)(e_k|y) = \sum_{n=1}^{\infty} (x|e_n)(e_n|y) = \sum_{e\in S} (x|e)(e|y).$$

Time je teorem 2.5.2. u potpunosti dokazan.

Primijetimo da iz teorema 2.5.2. slijedi da je za Hilbertov prostor $\mathcal{H}$, za njegovu ortonormiranu bazu S i za bilo koji vektor $\xi \in \mathcal{H}$ skup $\{e \in S;\ (\xi|e) \neq 0\}$ konačan ili prebrojiv i da vrijedi

$$\xi = \sum_{e\in S} (\xi|e)e.$$

Nadalje, ako su $\xi, \eta \in \mathcal{H}$, onda je

$$(\xi|\eta) = \sum_{e\in S} (\xi|e)(e|\eta)$$

i pri tome red konvergira apsolutno. Posebno je

$$\|\xi\|^2 = \sum_{e\in S} |(\xi|e)|^2.$$

Vratimo sa sada na **dokaz teorema 2.5.1.** Prema tvrdnji (a) teorema 2.5.2. za svaki vektor $\eta \in \mathcal{K}$ skup $\{\beta \in \mathcal{B};\ (\eta|f_\beta) \neq 0\}$ je konačan ili prebrojiv, a prema tvrdnji (d) vrijedi

$$\eta = \sum_{\beta\in\mathcal{B}} (\eta|f_\beta)f_\beta.$$

Prema tome za svaki $\alpha \in \mathcal{A}$ skup $\mathcal{B}_\alpha = \{\beta \in \mathcal{B};\ (Ae_\alpha|f_\beta) \neq 0\}$ je konačan ili prebrojiv i vrijedi

$$Ae_\alpha = \sum_{\beta\in\mathcal{B}} (Ae_\alpha|f_\beta)f_\beta.$$

Naravno, za $\alpha \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{A}'$ je $Ae_\alpha = 0$, pa vrijedi $\mathcal{B}_\alpha = \emptyset$. Stavimo

$$\mathcal{B}' = \bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}} \mathcal{B}_\alpha = \bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}'} \mathcal{B}_\alpha.$$

Budući da je skup $\mathcal{A}'$ po pretpostavci konačan ili prebrojiv, zaključujemo da je skup $\mathcal{B}'$ konačan ili prebrojiv.

Neka je $\beta \in \mathcal{B} \setminus \mathcal{B}'$. Tada vrijedi $\beta \notin \mathcal{B}_\alpha\ \forall\alpha \in \mathcal{A}$, pa slijedi

$$(e_\alpha|A^*f_\beta) = (Ae_\alpha|f_\beta) = 0 \quad \forall\alpha \in \mathcal{A} \qquad \Longrightarrow \qquad A^*f_\beta = 0.$$

Prema tome, skup $\{\beta \in \mathcal{B};\ A^*f_\beta \neq 0\}$ sadržan je u konačnom ili prebrojivom skupu $\mathcal{B}'$, pa je i sam konačan ili prebrojiv.

Budući da su $\{e_\alpha\}$ i $\{f_\beta\}$ ortonormirane baze u $\mathcal{H}$ i $\mathcal{K}$, prema tvrdnjama (d) i (e) teorema 2.5.2. imamo

$$Ae_\alpha = \sum_{\beta\in\mathcal{B}} (Ae_\alpha|f_\beta)f_\beta, \qquad \|Ae_\alpha\|^2 = \sum_{\beta\in\mathcal{B}} |(Ae_\alpha|f_\beta)|^2,$$

$$A^*f_\beta = \sum_{\alpha\in\mathcal{A}} (A^*f_\beta|e_\alpha)e_\alpha, \qquad \|A^*f_\beta\|^2 = \sum_{\alpha\in\mathcal{A}} |(A^*f_\beta|e_\alpha)|^2 = \sum_{\alpha\in\mathcal{A}} |(Ae_\alpha|f_\beta)|^2.$$

Budući da svi redovi u sljedećem računu imaju sve članove ≥ 0, pa je zamjena u redoslijedu dvostrukih suma dozvoljena, nalazimo

$$\sum_{\beta\in\mathcal{B}} \|A^*f_\beta\|^2 = \sum_{\beta\in\mathcal{B}}\sum_{\alpha\in\mathcal{A}} |(A^*f_\beta|e_\alpha)|^2 = \sum_{\alpha\in\mathcal{A}}\sum_{\beta\in\mathcal{B}} |(Ae_\alpha|f_\beta)|^2 = \sum_{\alpha\in\mathcal{A}} \|Ae_\alpha\|^2.$$

Time su dokazane sve tri tvrdnje teorema.

Za Hilbertove prostore $\mathcal{H}$ i $\mathcal{K}$ i za $A \in B_2(\mathcal{H},\mathcal{K})$ stavljamo

$$\|A\|_2 = \left(\sum_{\alpha\in\mathcal{A}} \|Ae_\alpha\|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

za bilo koju ortonormiranu bazu $(e_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ prostora $\mathcal{H}$. Prema tvrdnji (c) teorema 2.5.1. vrijedi

$$\|A\|_2 = \|A^*\|_2.$$

U daljnjem sa $F(\mathcal{H},\mathcal{K})$ označavamo potprostor od $B(\mathcal{H},\mathcal{K})$ svih operatora konačnog ranga, tj. s konačnodimenzionalnim područjem vrijednosti. Jasno je da je umnožak operatora konačnog ranga s bilo kojim ograničenim operatorom (slijeva ili zdesna) ponovo operator konačnog ranga.

Teorem 2.5.4. *Neka su $\mathcal{H}$, $\mathcal{K}$ i $\mathcal{L}$ Hilbertovi prostori.*

(a) *$B_2(\mathcal{H},\mathcal{K})$ je potprostor prostora $B(\mathcal{H},\mathcal{K})$ i $\|\cdot\|_2$ je norma u odnosu na koju je prostor $B_2(\mathcal{H},\mathcal{K})$ potpun.*

(b) *Za $A \in B_2(\mathcal{H},\mathcal{K})$ vrijedi $\|A\| \leq \|A\|_2$.*

(*c*) *$F(\mathcal{H},\mathcal{K})$ je potprostor od $B_2(\mathcal{H},\mathcal{K})$, koji je gust u odnosu na normu $\|\cdot\|_2$.*

(*d*) *Ako su $A \in B_2(\mathcal{H},\mathcal{K})$ i $B \in B(\mathcal{K},\mathcal{L})$ onda je $BA \in B_2(\mathcal{H},\mathcal{L})$ i vrijedi*

$$\|BA\|_2 \leq \|B\| \cdot \|A\|_2.$$

(*e*) *Ako su $A \in B(\mathcal{H},\mathcal{K})$ i $B \in B_2(\mathcal{K},\mathcal{L})$ onda je $BA \in B_2(\mathcal{H},\mathcal{L})$ i vrijedi*

$$\|BA\|_2 \leq \|B\|_2 \cdot \|A\|.$$

(*f*) *$B_2(\mathcal{H})$ je obostrani ideal u algebri $B(\mathcal{H})$ i to je Banachova algebra u odnosu na normu $\|\cdot\|_2$.*

(*g*) *Prostor $B_2(\mathcal{H},\mathcal{K})$ je Hilbertov sa skalarnim produktom*

$$(A|B) = \sum_{\alpha\in\mathcal{A}} (Ae_\alpha|Be_\alpha), \qquad A, B \in B_2(\mathcal{H},\mathcal{K}),$$

za bilo koju ortonormiranu bazu $(e_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ prostora $\mathcal{H}$. Gornji red konvergira apsolutno i suma mu ne ovisi o izboru ortonormirane baze $(e_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ prostora $\mathcal{H}$.

Dokaz: (*b*) Neka je $A \in B_2(\mathcal{H},\mathcal{K})$ i neka je $\varepsilon > 0$. Po definicije norme $\|\cdot\|$ na prostoru $B(\mathcal{H},\mathcal{K})$ postoji jedinični vektor $\xi \in \mathcal{H}$ takav da je

$$\|A\|^2 < \varepsilon + \|A\xi\|^2.$$

Neka je $(e_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ ortonormirana baza prostora $\mathcal{H}$ koja sadrži vektor ξ. Sada nalazimo

$$\|A\|^2 < \varepsilon + \|A\xi\|^2 \leq \varepsilon + \sum_{\alpha\in\mathcal{A}} \|Ae_\alpha\|^2 = \varepsilon + \|A\|_2^2.$$

Budući da je $\varepsilon > 0$ bio proizvoljan, slijedi $\|A\| \leq \|A\|_2$.

(*a*) Pretpostavljat ćemo da su prostori $\mathcal{H}$ i $\mathcal{K}$ beskonačnodimenzionalni; ako je neki od njih konačnodimenzionalan, dokaz se samo neznatno razlikuje u notaciji: umjesto nekih beskonačnih suma pojavljuju se konačne sume. Neka su $A, B \in B_2(\mathcal{H},\mathcal{K})$, neka je $(e_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ ortonormirana baza od $\mathcal{H}$ i neka je $(f_\beta)_{\beta\in\mathcal{B}}$ ortonormirana baza od $\mathcal{K}$. Tada postoji prebrojiv skup $\mathcal{A}' \subseteq \mathcal{A}$ takav da je $Ae_\alpha = Be_\alpha = 0$ za $\alpha \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{A}'$, dakle i $(A+B)e_\alpha = 0$ za $\alpha \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{A}'$. Prema tome, skup $\{\alpha \in \mathcal{A};\ (A+B)e_\alpha \neq 0\}$ je konačan ili prebrojiv.

Budući da je unija prebrojivo mnogo prebrojivih skupova prebrojiv skup, zaključujemo da postoji prebrojiv skup $\mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B}$ takav da je $(Ae_\alpha|f_\beta) = (Be_\alpha|f_\beta) = 0$ za svaki $\alpha \in \mathcal{A}'$ i za svaki $\beta \in \mathcal{B}\backslash\mathcal{B}'$. Oznake sada možemo promijeniti tako da je $\mathcal{A}' = \mathcal{B}' = \mathbb{N}$. Dakle, imamo $Ae_\alpha = Be_\alpha = 0$ $\forall\alpha \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{A}'$. Nadalje,

$$Ae_i = \sum_{j\in\mathbb{N}} (Ae_i|f_j)f_j, \qquad Be_i = \sum_{j\in\mathbb{N}} (Be_i|f_j)f_j, \qquad \forall i \in \mathbb{N},$$

dakle,

$$\|Ae_i\|^2 = \sum_{j\in\mathbb{N}} |(Ae_i|f_j)|^2, \qquad \|Be_i\|^2 = \sum_{j\in\mathbb{N}} |(Be_i|f_j)|^2, \qquad \|(A+B)e_i\|^2 = \sum_{j\in\mathbb{N}} |(Ae_i|f_j)+(Be_i|f_j)|^2.$$

Stoga je

$$\|A\|_2 = \left(\sum_{(i,j)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} |(Ae_i|f_j)|^2\right)^{\frac{1}{2}}, \qquad \|B\|_2 = \left(\sum_{(i,j)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} |(Be_i|f_j)|^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

pa primjenom nejednakosti trokuta u Hilbertovom prostoru $\ell_2(\mathbb{N}\times\mathbb{N})$ dobivamo

$$\left(\sum_{i\in\mathbb{N}}\|(A+B)e_i\|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{(i,j)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}|(Ae_i|f_j)+(Be_i|f_j)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \le$$

$$\le \left(\sum_{(i,j)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}|(Ae_i|f_j)|^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{(i,j)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}|(Be_i|f_j)|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \|A\|_2+\|B\|_2.$$

Prema tome je $A+B\in B_2(\mathcal{H},\mathcal{K})$ i vrijedi

$$\|A+B\|_2 \le \|A\|_2+\|B\|_2.$$

Budući da očito vrijedi

$$A\in B_2(\mathcal{H},\mathcal{K}) \qquad \Longrightarrow \qquad \lambda A\in B_2(\mathcal{H},\mathcal{K}) \quad \forall\lambda\in\mathbb{C},$$

zaključujemo da je $B_2(\mathcal{H},\mathcal{K})$ potprostor prostora $B(\mathcal{H},\mathcal{K})$ i da $\|\cdot\|_2$ zadovoljava nejednakost trokuta. Ostala svojstva norme su očigledna:

$$\|A\|_2\ge 0;$$

$$\|A\|_2=0 \qquad \Longrightarrow \qquad Ae_\alpha=0 \quad \forall\alpha\in\mathcal{A} \qquad \Longrightarrow \qquad A=0;$$

$$\|\lambda A\|_2=\left(\sum_{\alpha\in\mathcal{A}}\|\lambda Ae_\alpha\|^2\right)^{\frac{1}{2}} = |\lambda|\cdot\|A\|_2.$$

Dakle, $\|\cdot\|_2$ je norma na vektorskom prostoru $B_2(\mathcal{H},\mathcal{K})$.

Treba još dokazati da je prostor $B_2(\mathcal{H},\mathcal{K})$ u odnosu na normu $\|\cdot\|_2$ potpun. Neka je $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz u $B_2(\mathcal{H},\mathcal{K})$ koji je Cauchyjev u odnosu na normu $\|\cdot\|_2$. Zbog tvrdnje (b) vidimo da je taj niz Cauchyjev i u odnosu na normu $\|\cdot\|$. Budući da je prostor $B(\mathcal{H},\mathcal{K})$ potpun u odnosu na normu $\|\cdot\|$, postoji $A\in B(\mathcal{H},\mathcal{K})$ takav da vrijedi

$$\lim_{n\to\infty}\|A_n-A\|=0. \tag{2.31}$$

Budući da je niz $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyjev u odnosu na normu $\|\cdot\|_2$, za svaki $\varepsilon>0$ postoji $n(\varepsilon)\in\mathbb{N}$ takav da vrijedi

$$n,m\ge n(\varepsilon) \qquad \Longrightarrow \qquad \|A_n-A_m\|_2\le\varepsilon. \tag{2.32}$$

Cauchyjev niz je uvijek ograničen, pa postoji $M>0$ takav da je

$$\|A_n\|_2\le M \qquad \forall n\in\mathbb{N}. \tag{2.33}$$

Neka je $(e_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ ortonormirana baza od $\mathcal{H}$. Budući da je unija prebrojivo mnogo prebrojivih skupova prebrojiv skup, postoji prebrojiv skup $\mathcal{A}'\subseteq\mathcal{A}$ takav da vrijedi

$$A_ne_\alpha=0 \qquad \forall\alpha\in\mathcal{A}\setminus\mathcal{A}' \text{ i } \forall n\in\mathbb{N}.$$

Sada za $\alpha\in\mathcal{A}\setminus\mathcal{A}'$ zbog (2.31) nalazimo

$$Ae_\alpha=\lim_{n\to\infty}A_ne_\alpha=0.$$

Dakle, skup $\{\alpha\in\mathcal{A};\ Ae_\alpha\ne 0\}$ je sadržan u prebrojivom skupu $\mathcal{A}'$ pa slijedi da je taj skup konačan ili prebrojiv.

U daljnjem pretpostavljamo da je $\mathcal{A}' = \mathbb{N}$. Zbog (2.33) za $n, k \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\sum_{i=1}^{k} \|A_n e_i\|^2 \leq \sum_{i\in\mathbb{N}} \|A_n e_i\|^2 = \|A_n\|_2^2 \leq M^2.$$

Sada zbog (2.31) nalazimo da za $k \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\sum_{i=1}^{k} \|Ae_i\|^2 = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{k} \|A_n e_i\|^2 \leq M^2.$$

Budući da to vrijedi za svaki $k \in \mathbb{N}$, slijedi

$$\sum_{\alpha\in\mathcal{A}} \|Ae_\alpha\|^2 = \sum_{i\in\mathbb{N}} \|Ae_i\|^2 \leq M^2 < +\infty.$$

Time smo dokazali da je $A \in B_2(\mathcal{H}, \mathcal{K})$.

Napokon, zbog (2.32) za svako $k \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$n, m \geq n(\varepsilon) \qquad \Longrightarrow \qquad \sum_{i=1}^{k} \|(A_n - A_m)e_i\|^2 \leq \varepsilon^2.$$

Pustimo li da n teži u $+\infty$, odatle nalazimo

$$m \geq n(\varepsilon) \qquad \Longrightarrow \qquad \sum_{i=1}^{k} \|(A - A_m)e_i\|^2 \leq \varepsilon^2,$$

pa zbog proizvoljnosti $k \in \mathbb{N}$ zaključujemo

$$m \geq n(\varepsilon) \qquad \Longrightarrow \qquad \sum_{i\in\mathbb{N}} \|(A - A_m)e_i\|^2 \leq \varepsilon^2 \qquad \Longrightarrow \qquad \|A - A_m\|_2 \leq \varepsilon.$$

Time je potpunost prostora $B_2(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ u odnosu na normu $\|\cdot\|_2$ dokazana.

(c) Očito je $F(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ potprostor od $B_2(\mathcal{H}, \mathcal{K})$. Neka je $A \in B_2(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ i neka je $(e_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ ortonormirana baza prostora $\mathcal{H}$. Možemo pretpostaviti da je $\mathbb{N} \subseteq \mathcal{A}$ i da je $Ae_\alpha = 0\ \forall \alpha \in \mathcal{A} \setminus \mathbb{N}$. Tada je

$$\|A\|_2^2 = \sum_{i\in\mathbb{N}} \|Ae_i\|^2.$$

Iz konvergencije gornjeg reda slijedi da za svaki $n \in \mathbb{N}$ postoji $p(n) \in \mathbb{N}$ takav da vrijedi

$$\sum_{i=p(n)+1}^{\infty} \|Ae_i\|^2 \leq \frac{1}{n^2}. \tag{2.34}$$

Sada za $n \in \mathbb{N}$ definiramo $A_n \in F(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ sa

$$A_n\xi = \sum_{i=1}^{p(n)} (\xi|e_i)Ae_i, \qquad \xi \in \mathcal{H},$$

odnosno, sa

$$A_n e_i = \begin{cases} Ae_i & \text{za } 1 \leq i \leq p(n) \\ 0 & \text{za } i > p(n). \end{cases}$$

Tada je

$$(A - A_n)e_i = \begin{cases} 0 & \text{za } 1 \leq i \leq p(n) \\ \\ Ae_i & \text{za } i > p(n). \end{cases}$$

Prema tome, zbog (2.34) nalazimo

$$\|A - A_n\|_2 = \left(\sum_{i \in \mathbb{N}} \|(A - A_n)e_i\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{i=p(n)+1}^{\infty} \|Ae_i\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{1}{n}.$$

To znači da je

$$\lim_{n \to \infty} \|A - A_n\|_2 = 0$$

i time je dokazano da je potprostor $F(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ gust u prostoru $B_2(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ u odnosu na normu $\| \cdot \|_2$.

Zadatak 2.5.1. *Dokažite tvrdnju* (*d*) *teorema 2.5.4.*

Zadatak 2.5.2. *Dokažite tvrdnju* (*e*) *teorema 2.5.4.*

Zadatak 2.5.3. *Dokažite tvrdnju* (*f*) *teorema 2.5.4.*

Zadatak 2.5.4. *Dokažite tvrdnju* (*g*) *teorema 2.5.4.*

Uputa: Apsolutna konvergencija slijedi iz $|(Ae_\alpha | Be_\alpha)| \leq \frac{1}{2} \left(\|Ae_\alpha\|^2 + \|Be_\alpha\|^2 \right).$

2.6 Nuklearni operatori

Propozicija 2.6.1. *Neka su $\mathcal{H}$ i $\mathcal{K}$ Hilbertovi prostori i neka su $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz u $\mathcal{H}$ i $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz u $\mathcal{K}$ takvi da vrijedi*

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \|\alpha_n\| \cdot \|\beta_n\| < +\infty. \tag{2.35}$$

Tada je formulom

$$A\xi = \sum_{n\in\mathbb{N}} (\xi|\alpha_n)\beta_n \qquad \xi \in \mathcal{H} \tag{2.36}$$

zadan operator $A \in B(\mathcal{H}, \mathcal{K})$, red u (2.36) *apsolutno konvergira i vrijedi*

$$\|A\| \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \|\alpha_n\| \cdot \|\beta_n\|. \tag{2.37}$$

Dokaz: Iz (2.35) pomoću CSB−nejednakosti slijedi

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \|(\xi|\alpha_n)\beta_n\| = \sum_{n\in\mathbb{N}} |(\xi|\alpha_n)| \cdot \|\beta_n\| \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \|\xi\| \cdot \|\alpha_n\| \cdot \|\beta_n\| = \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} \|\alpha_n\| \cdot \|\beta_n\| \right) \cdot \|\xi\| < +\infty.$$

Odatle se vidi da red u (2.36) apsolutno konvergira, dakle i konvergira u $\mathcal{K}$, da je sa (2.36) zadan operator $A \in B(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ i da vrijedi (2.37).

Neka su $\mathcal{H}$ i $\mathcal{K}$ Hilbertovi prostori i neka je $A : \mathcal{H} \to \mathcal{K}$ linearan operator. A se zove **nuklearan operator** ako postoje nizovi vektora $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ u $\mathcal{H}$ i $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ u $\mathcal{K}$ takvi da vrijede (2.35) i (2.36). Skup svih nuklearnih operatora sa $\mathcal{H}$ u $\mathcal{K}$ označavat ćemo sa $B_1(\mathcal{H}, \mathcal{K})$. Naravno, ako je $A \in B_1(\mathcal{H}, \mathcal{K})$, moguće je da postoji više parova nizova (α_n) i (β_n) takvih da vrijede (2.35) i (2.36). Za $A \in B_1(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ stavljamo

$$\|A\|_1 = \inf \sum_{n\in\mathbb{N}} \|\alpha_n\| \cdot \|\beta_n\|,$$

gdje se infimum uzima po svim parovima nizova (α_n) i (β_n) takvih da vrijede (2.35) i (2.36).

Teorem 2.6.2. *Neka su $\mathcal{H}$, $\mathcal{K}$ i $\mathcal{L}$ Hilbertovi prostori.*

(*a*) *Vrijedi $B_1(\mathcal{H}, \mathcal{K}) \subseteq B_2(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ i*

$$\|A\|_2 \leq \|A\|_1 \qquad \forall A \in B_1(\mathcal{H}, \mathcal{K}). \tag{2.38}$$

(*b*) *Ako je $A \in B_1(\mathcal{H}, \mathcal{K})$, tada je $A^* \in B_1(\mathcal{K}, \mathcal{H})$ i $\|A^*\|_1 = \|A\|_1$.*

(*c*) *Ako su $A \in B_2(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ i $B \in B_2(\mathcal{K}, \mathcal{L})$ onda je $BA \in B_1(\mathcal{H}, \mathcal{L})$ i $\|BA\|_1 \leq \|B\|_2 \cdot \|A\|_2$.*

(*d*) *Ako su $A \in B(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ i $B \in B_1(\mathcal{K}, \mathcal{L})$ onda je $BA \in B_1(\mathcal{H}, \mathcal{L})$ i $\|BA\|_1 \leq \|B\|_1 \cdot \|A\|$.*

(*e*) *Ako su $A \in B_1(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ i $B \in B(\mathcal{K}, \mathcal{L})$ onda je $BA \in B_1(\mathcal{H}, \mathcal{L})$ i $\|BA\|_1 \leq \|B\| \cdot \|A\|_1$.*

(*f*) *$B_1(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ je potprostor od $B(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ i $\|\cdot\|_1$ je norma na prostoru $B_1(\mathcal{H}, \mathcal{K})$.*

Dokaz: (*a*) Pretpostavimo da je $A \in B_1(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ i neka su $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ i $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nizovi u $\mathcal{H}$ i u $\mathcal{K}$ takvi da vrijede (2.35) i (2.36). Stavimo

$$M = \sum_{n\in\mathbb{N}} \|\alpha_n\| \cdot \|\beta_n\|.$$

Prema propoziciji 2.6.1. tada je $A \in B(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ i vrijedi (2.37).

Neka je sada $(e_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ ortonormirana baza prostora $\mathcal{H}$. Za svaki $\alpha \in \mathcal{A}$ imamo

$$Ae_\alpha = \sum_{n\in\mathbb{N}} (e_\alpha|\alpha_n)\beta_n. \tag{2.39}$$

Stavimo

$$\mathcal{A}_n = \{\alpha \in \mathcal{A};\ (e_\alpha|\alpha_n) \neq 0\}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Prema tvrdnji (a) teorema 2.5.2. svaki od skupova $\mathcal{A}_n$, $n \in \mathbb{N}$, je konačan ili prebrojiv. Dakle, i njihova unija $\mathcal{A}'$ je konačan ili prebrojiv skup. Sada se iz (2.39) vidi da je $Ae_\alpha = 0\ \forall\alpha \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{A}'$. Dakle, možemo pretpostaviti da je $\mathbb{N} \subseteq \mathcal{A}$ i da vrijedi

$$Ae_\alpha = 0 \qquad \forall\alpha \in \mathcal{A} \setminus \mathbb{N} \qquad \text{i} \qquad Ae_m = \sum_{n\in\mathbb{N}} (e_m|\alpha_n)\beta_n \qquad \forall m \in \mathbb{N}.$$

Odatle slijedi

$$\sum_{\alpha\in\mathcal{A}} \|Ae_\alpha\|^2 = \sum_{m\in\mathbb{N}} \|Ae_m\|^2 = \sum_{m\in\mathbb{N}} \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} (e_m|\alpha_n)\beta_n \middle| Ae_m \right) = \sum_{m\in\mathbb{N}} \sum_{n\in\mathbb{N}} (e_m|\alpha_n) \left(\beta_n \middle| \sum_{k\in\mathbb{N}} (e_m|\alpha_k)\beta_k \right) =$$

$$= \sum_{m,n,k\in\mathbb{N}} (\alpha_k|e_m)(e_m|\alpha_n)(\beta_n|\beta_k) = \sum_{n,k\in\mathbb{N}} \left(\sum_{m\in\mathbb{N}} (\alpha_k|e_m)(e_m|\alpha_n) \right) (\beta_n|\beta_k) = \sum_{n,k\in\mathbb{N}} (\alpha_k|\alpha_n)(\beta_n|\beta_k) \leq$$

$$\leq \sum_{n,k\in\mathbb{N}} |(\alpha_k|\alpha_n)| \cdot |(\beta_n|\beta_k)| \leq \sum_{n,k\in\mathbb{N}} \|\alpha_k\| \cdot \|\alpha_n\| \cdot \|\beta_n\| \cdot \|\beta_k\| = \left(\sum_{k\in\mathbb{N}} \|\alpha_k\| \cdot \|\beta_k\| \right) \cdot \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} \|\alpha_n\| \cdot \|\beta_n\| \right) = M^2.$$

Čitamo li gornje jednakosti i nejednakosti obrnutim redom vidimo da su sve zamjene redoslijeda sumacije dozvoljene. Zaključujemo da je $A \in B_2(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ i da vrijedi

$$\|A\|_2 \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \|\alpha_n\| \cdot \|\beta_n\|$$

za bilo koje nizove $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ u $\mathcal{H}$ i $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ u $\mathcal{K}$ takve da vrijede (2.35) i (2.36). Dakle, $\|A\|_2$ je manje ili jednako infimumu po svim takvim parovima nizova, tj. vrijedi (2.38).

(b) Pretpostavimo da je $A \in B_1(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ i neka su (α_n) i (β_n) nizovi u $\mathcal{H}$ i u $\mathcal{K}$ takvi da vrijede (2.35) i (2.36). Stavimo ponovo

$$M = \sum_{n\in\mathbb{N}} \|\alpha_n\| \cdot \|\beta_n\|.$$

Tada je za svaki $\eta \in \mathcal{K}$

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \|(\eta|\beta_n)\alpha_n\| \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \|\eta\| \cdot \|\beta_n\| \cdot \|\alpha_n\| = M\|\eta\|.$$

Prema tome, možemo definirati $B \in B(\mathcal{K}, \mathcal{H})$ sa

$$B\eta = \sum_{n\in\mathbb{N}} (\eta|\beta_n)\alpha_n, \qquad \eta \in \mathcal{K}.$$

Naravno, tada je $B \in B_1(\mathcal{K}, \mathcal{H})$. Nadalje, za $\xi \in \mathcal{H}$ i $\eta \in \mathcal{K}$ imamo

$$(A\xi|\eta) = \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} (\xi|\alpha_n)\beta_n \middle| \eta \right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} (\xi|\alpha_n)(\beta_n|\eta)$$

i

$$(\xi|B\eta) = \left(\xi \,\middle|\, \sum_{n\in\mathbb{N}}(\eta|\beta_n)\alpha_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \overline{(\eta|\beta_n)}(\xi|\alpha_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}}(\xi|\alpha_n)(\beta_n|\eta).$$

Dakle, $(A\xi|\eta) = (\xi|B\eta)$ i time je dokazano $B = A^*$. Nadalje, iz dokaza je jasno da je

$$\|A^*\|_1 = \inf \sum_{n\in\mathbb{N}} \|\alpha_n\|\cdot\|\beta_n\| = \|A\|_1.$$

(c) Neka su $A \in B_2(\mathcal{H},\mathcal{K})$ i $B \in B_2(\mathcal{K},\mathcal{L})$. Neka su $(e_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ i $(f_\beta)_{\beta\in\mathcal{B}}$ ortonormirane baze u Hilbertovim prostorima $\mathcal{H}$ i $\mathcal{K}$. Kao i u više sličnih situacija do sada možemo pretpostavljati da je $\mathbb{N} \subseteq \mathcal{A}$ i $\mathbb{N} \subseteq \mathcal{B}$ i da je

$$Ae_\alpha = 0 \qquad \forall\alpha \in \mathcal{A}\setminus\mathbb{N}, \qquad Bf_\beta = 0 \qquad \forall\beta \in \mathcal{B}\setminus\mathbb{N} \qquad \text{i} \qquad A\xi = \sum_{n\in\mathbb{N}}(A\xi|f_n)f_n \qquad \forall\xi \in \mathcal{H}.$$

Stavimo $\alpha_n = A^*f_n \in \mathcal{H}$ i $\beta_n = Bf_n \in \mathcal{L}$ za $n \in \mathbb{N}$. Tada je za svaki $\xi \in \mathcal{H}$

$$BA\xi = \sum_{n\in\mathbb{N}}(A\xi|f_n)Bf_n = \sum_{n\in\mathbb{N}}(\xi|A^*f_n)Bf_n = \sum_{n\in\mathbb{N}}(\xi|\alpha_n)\beta_n.$$

Nadalje, vrijedi

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \|\alpha_n\|^2 = \sum_{n\in\mathbb{N}} \|A^*f_n\|^2 = \|A^*\|_2^2 = \|A\|_2^2 < +\infty$$

i

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \|\beta_n\|^2 = \sum_{n\in\mathbb{N}} \|Bf_n\|^2 = \|B\|_2^2 < +\infty.$$

Prema tome, nizovi brojeva $(\|\alpha_n\|)_{n\in\mathbb{N}}$ i $(\|\beta_n\|)_{n\in\mathbb{N}}$ su elementi Hilbertovog prostora ℓ_2 i vrijedi

$$\big\|(\|\alpha_n\|)_{n\in\mathbb{N}}\big\|_{\ell_2} = \|A\|_2 \qquad \text{i} \qquad \big\|(\|\beta_n\|)_{n\in\mathbb{N}}\big\|_{\ell_2} = \|B\|_2.$$

Odatle, primjenom CSB−nejednakosti u prostoru ℓ_2 nalazimo

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \|\alpha_n\|\cdot\|\beta_n\| = \big((\|\alpha_n\|)_{n\in\mathbb{N}}\big|\,(\|\beta_n\|)_{n\in\mathbb{N}}\big) \le \big\|(\|\alpha_n\|)_{n\in\mathbb{N}}\big\|_{\ell_2}\cdot\big\|(\|\beta_n\|)_{n\in\mathbb{N}}\big\|_{\ell_2} = \|A\|_2\cdot\|B\|_2 < +\infty.$$

Dakle, $BA \in B_1(\mathcal{H},\mathcal{L})$ i budući da se norma $\|\cdot\|_1$ dobiva kao infimum po parovima nizova u $\mathcal{H}$ i u $\mathcal{L}$ vrijedi $\|BA\|_1 \le \|B\|_2\cdot\|A\|_2$.

(d) Neka je $A \in B_1(\mathcal{H},\mathcal{K})$ i $B \in B(\mathcal{K},\mathcal{L})$. Neka su (α_n) i (β_n) nizovi u $\mathcal{H}$ i u $\mathcal{K}$ takvi da vrijedi (2.35) i (2.36). Tada imamo za svaki $\xi \in \mathcal{H}$

$$BA\xi = \sum_{n\in\mathbb{N}}(\xi|\alpha_n)B\beta_n$$

i

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \|\alpha_n\|\cdot\|B\beta_n\| \le \|B\| \sum_{n\in\mathbb{N}} \|\alpha_n\|\cdot\|\beta_n\| < +\infty.$$

Time je dokazano da je $BA \in B_1(\mathcal{H},\mathcal{L})$. Nadalje, iz gornje nejednakosti slijedi

$$\|BA\|_1 \le \|B\| \sum_{n\in\mathbb{N}} \|\alpha_n\|\cdot\|\beta_n\|,$$

za bilo koje nizove (α_n) u $\mathcal{H}$ i (β_n) u $\mathcal{K}$ takve da vrijede (2.35) i (2.36). Budući da je norma $\|A\|_1$ infimum po svim takvim parovima nizova, zaključujemo da je $\|BA\|_1 \le \|B\|\cdot\|A\|_1$.

(e) Neka su sada $A \in B(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ i $B \in B_1(\mathcal{K}, \mathcal{L})$. Prema ($b$) je tada

$$B^* \in B_1(\mathcal{L}, \mathcal{K}) \qquad \text{i} \qquad \|B^*\|_1 = \|B\|_1.$$

Dakle, prema (d) je

$$A^*B^* \in B_1(\mathcal{L}, \mathcal{H}) \qquad \text{i} \qquad \|A^*B^*\|_1 \leq \|A^*\| \cdot \|B^*\|_1 = \|B\|_1 \cdot \|A\|.$$

Zbog (b) odatle slijedi da je

$$BA = (A^*B^*)^* \in B_1(\mathcal{H}, \mathcal{L}) \qquad \text{i} \qquad \|BA\|_1 = \|A^*B^*\|_1 \leq \|B\|_1 \cdot \|A\|.$$

Neka su sada $A, B \in B_1(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ i neka su $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$. Neka su $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ i $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nizovi u $\mathcal{H}$ i $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ i $(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nizovi u $\mathcal{K}$ takvi da za svaki $\xi \in \mathcal{H}$ vrijedi

$$A\xi = \sum_{n\in\mathbb{N}} (\xi|\alpha_n)\beta_n, \qquad \sum_{n\in\mathbb{N}} \|\alpha_n\| \cdot \|\beta_n\| < +\infty, \tag{2.40}$$

$$B\xi = \sum_{n\in\mathbb{N}} (\xi|\gamma_n)\delta_n, \qquad \sum_{n\in\mathbb{N}} \|\gamma_n\| \cdot \|\delta_n\| < +\infty. \tag{2.41}$$

Tada je

$$(\lambda A + \mu B)\xi = \sum_{n\in\mathbb{N}} (\xi|\alpha_n)\lambda\beta_n + \sum_{n\in\mathbb{N}} (\xi|\gamma_n)\mu\delta_n$$

i

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \|\alpha_n\| \cdot \|\lambda\beta_n\| + \sum_{n\in\mathbb{N}} \|\gamma_n\| \cdot \|\mu\delta_n\| = |\lambda| \sum_{n\in\mathbb{N}} \|\alpha_n\| \cdot \|\beta_n\| + |\mu| \sum_{n\in\mathbb{N}} \|\gamma_n\| \cdot \|\delta_n\| < +\infty.$$

Dakle, $\lambda A + \mu B \in B_1(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ i time je dokazano da je $B_1(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ potprostor prostora $B(\mathcal{H}, \mathcal{K})$.

Nadalje, za $A \in B_1(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ je očito $\|A\|_1 \geq 0$ i $\|A\|_1 = 0$ ako i samo ako je $A = 0$. Također, očito za $\lambda \in \mathbb{C}$ vrijedi $\|\lambda A\|_1 = |\lambda| \cdot \|A\|_1$. Napokon, dokažimo i nejednakost trokuta. Neka su $A, B \in B_1(\mathcal{H}, \mathcal{K})$. Imamo

$$\|A + B\|_1 \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \|\alpha_n\| \cdot \|\beta_n\| + \sum_{n\in\mathbb{N}} \|\gamma_n\| \cdot \|\delta_n\|$$

za sve nizove (α_n) u $\mathcal{H}$ i (β_n) u $\mathcal{K}$ takve da vrijedi (2.40) i sve nizove (γ_n) u $\mathcal{H}$ i (δ_n) u $\mathcal{K}$ takve da vrijedi (2.41). Uzmemo li ovdje infimum po svim takvim parovima nizova (α_n) i (β_n), dobivamo

$$\|A + B\|_1 \leq \|A\|_1 + \sum_{n\in\mathbb{N}} \|\gamma_n\| \cdot \|\delta_n\|,$$

a odatle, uzimajući infimum po svim takvim parovima nizova (γ_n) i (δ_n) slijedi

$$\|A + B\|_1 \leq \|A\|_1 + \|B\|_1.$$

Teorem 2.6.3. *Neka su $\mathcal{H}$ i $\mathcal{K}$ Hilbertovi prostori.*

(a) *Neka je $A \in B(\mathcal{H}, \mathcal{K})$. Tada je $A \in B_1(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ ako i samo ako za svaki par ortonormiranih nizova $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ u $\mathcal{H}$ i $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ u $\mathcal{K}$ vrijedi*

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} |(Ae_n|f_n)| < +\infty. \tag{2.42}$$

U tom slučaju je

$$\|A\|_1 = \sup \sum_{n\in\mathbb{N}} |(Ae_n|f_n)|, \tag{2.43}$$

gdje se supremum uzima preko svih parova ortonormiranih nizova (e_n) i (f_n) u $\mathcal{H}$ i u $\mathcal{K}$.

(*b*) *Ako je* $A \in B_1(\mathcal{H},\mathcal{K})$ *onda je za svaki par ortonormiranih familija* $(e_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ *u* $\mathcal{H}$ *i* $(f_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ *u* $\mathcal{K}$ *skup*

$$\{\alpha \in \mathcal{A};\ (Ae_\alpha|f_\alpha) \neq 0\}$$

konačan ili prebrojiv i vrijedi

$$\sum_{\alpha\in\mathcal{A}} |(Ae_\alpha|f_\alpha)| < +\infty.$$

Dokaz: (*a*) Pretpostavimo da je $A \in B_1(\mathcal{H},\mathcal{K})$ i neka su $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ i $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nizovi u $\mathcal{H}$ i u $\mathcal{K}$ takvi da vrijede (2.35) i (2.36). Nadalje, neka su $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ i $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ortonormirani nizovi u $\mathcal{H}$ i u $\mathcal{K}$. Tada imamo redom

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} |(Ae_n|f_n)| = \sum_{n\in\mathbb{N}} \left|\sum_{k\in\mathbb{N}} (e_n|\alpha_k)(\beta_k|f_n)\right| \leq \sum_{n\in\mathbb{N}}\sum_{k\in\mathbb{N}} |(\alpha_k|e_n)|\cdot|(\beta_k|f_n)| \leq$$

$$\leq \sum_{k\in\mathbb{N}} \left[\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} |(\alpha_k|e_n)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} |(\beta_k|f_n)|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right] \leq \sum_{k\in\mathbb{N}} \|\alpha_k\|\cdot\|\beta_k\|.$$

Dakle, vrijedi

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} |(Ae_n|f_n)| \leq \sum_{k\in\mathbb{N}} \|\alpha_k\|\cdot\|\beta_k\|$$

za svaki par nizova $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}}$ u $\mathcal{H}$ i $(\beta_k)_{k\in\mathbb{N}}$ takav da vrijede (2.35) i (2.36). Uzmemo li infimum po svim takvim parovima nizova, nalazimo da je

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} |(Ae_n|f_n)| \leq \|A\|_1. \tag{2.44}$$

Time je dokazana implikacija $A \in B_1(\mathcal{H},\mathcal{K}) \implies$ (2.44) za svaki par ortonormiranih nizova $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ u $\mathcal{H}$ i $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ u $\mathcal{K}$.

Pretpostavimo sada da je $A \in B(\mathcal{H},\mathcal{K})$ takav da za svaki par ortonormiranih nizova $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ u $\mathcal{H}$ i $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ u $\mathcal{K}$ vrijedi (2.42). Prema teoremu 2.3.3. možemo pisati $A = VH$, gdje je V parcijalna izometrija sa $\mathcal{H}$ u $\mathcal{K}$ i $H = \sqrt{A^*A}$. Nadalje, prema dokazu teorema 2.3.3. možemo uzeti da je restrikcija $V|Cl(R(H))$ izometrija, a znamo i da je $P = V^*V$ ortogonalni projektor prostora $\mathcal{H}$ na potprostor $Cl(R(H))$. Neka je $(e_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ ortonormirana baza Hilbertovog prostora $Cl(R(H))$. Stavimo $f_\alpha = Ve_\alpha$, $\alpha \in \mathcal{A}$. Kako je $V|Cl(R(H))$ izometrija, slijedi da je $(f_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ ortonormirana familija u prostoru $\mathcal{K}$. Dokažimo da je skup $\{\alpha \in \mathcal{A};\ (Ae_\alpha|f_\alpha) \neq 0\}$ konačan ili prebrojiv. Pretpostavimo suprotno da je taj skup neprebrojiv. Tada je, naravno,

$$\sum_{\alpha\in\mathcal{A}} |(Ae_\alpha|f_\alpha)| = +\infty.$$

To znači da za svaki $n \in \mathbb{N}$ postoji konačan podskup $S_n \subseteq \mathcal{A}$ takav da je

$$\sum_{\alpha\in S_n} |(Ae_{qa}|f_\alpha)| \geq n.$$

Tada je skup $S = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} S_n$ konačan ili prebrojiv i vrijedi

$$\sum_{\alpha\in S} |(Ae_\alpha|f_\alpha)| = +\infty.$$

No to je suprotno pretpostavci. Time je dokazano da je skup $\{\alpha \in \mathcal{A};\ (Ae_\alpha|f_\alpha) \neq 0\}$ konačan ili prebrojiv. Slijedi

$$+\infty > \sum_{\alpha\in\mathcal{A}} |(Ae_\alpha|f_\alpha)| = \sum_{\alpha\in\mathcal{A}} |(VHe_\alpha|Ve_\alpha)| = \sum_{\alpha\in\mathcal{A}} |(PHe_\alpha|e_\alpha)| = \sum_{\alpha\in\mathcal{A}} |(He_\alpha|e_\alpha)|.$$

Neka je sada $K = \sqrt{H}$. Tada je $N(K) = N(H)$ dakle i $Cl(R(K)) = Cl(R(H))$. Izaberimo sada ortonormiranu bazu $(e_\beta)_{\beta\in\mathcal{B}}$ potprostora $N(K)$, s tim da je $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \emptyset$. Za $\mathcal{C} = \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ je tada $(e_\gamma)_{\gamma\in\mathcal{C}}$ ortonormirana baza od $\mathcal{H}$ i vrijedi

$$\sum_{\gamma\in\mathcal{C}} \|Ke_\gamma\|^2 = \sum_{\alpha\in\mathcal{A}} \|Ke_\alpha\|^2 = \sum_{\alpha\in\mathcal{A}} |(He_\alpha|e_\alpha)| < +\infty.$$

Dakle, $K \in B_2(\mathcal{H})$. Prema tvrdnji (c) teorema 2.6.2. tada je $H = K^2 \in B_1(\mathcal{H})$, a tada iz tvrdnje (d) istog teorema slijedi da je $A = VH \in B_1(\mathcal{H}, \mathcal{K})$.

Time je dokazana i obrnuta implikacija u tvrdnji (a). Dakle, operator $A \in B(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ je nuklearan ako i samo ako za svaki par ortonormiranih nizova $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ u $\mathcal{H}$ i $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ u $\mathcal{K}$ vrijedi (2.44). Nadalje, u prvom dijelu dokaza pokazali smo da za svaki takav par ortonormiranih nizova vrijedi nejednakost (2.44).

(b) Neka je $A \in B_1(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ i neka je $(e_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ ortonormirana familija u $\mathcal{H}$ i $(f_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ ortonormirana familija u $\mathcal{K}$. Pretpostavimo suprotno da je skup

$$\{\alpha \in \mathcal{A};\ (Ae_\alpha|f_\alpha) \neq 0\}$$

neprebrojiv. Tada postoji $k \in \mathbb{N}$ takav da je skup

$$\left\{\alpha \in \mathcal{A};\ |(Ae_\alpha|f_\alpha)| \geq \frac{1}{k}\right\}$$

beskonačan. No to znači da postoje ortonormirani nizovi $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ u $\mathcal{H}$ i $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ u $\mathcal{K}$ takvi da je

$$|(Ae_n|f_n)| \geq \frac{1}{k} \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

No to je u suprotnosti sa (2.44). Ova kontradikcija pokazuje da vrijedi (b).

Zadatak 2.6.1. *Neka su $\mathcal{H}$ i $\mathcal{K}$ Hilbertovi prostori. Dokažite da je $F(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ gust potprostor od $B_1(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ u odnosu na normu $\|\cdot\|_1$.*

Zadatak 2.6.2. *Neka su $\mathcal{H}$ i $\mathcal{K}$ Hilbertovi prostori. Dokažite da je prostor $B_1(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ potpun u odnosu na nuklearnu normu $\|\cdot\|_1$.*

Zadatak 2.6.3. *Neka je $\mathcal{H}$ Hilbertov prostor.*

(a) *Dokažite da je operator $A \in B(\mathcal{H})$ nuklearan ako samo ako je za svaku ortonormiranu bazu $(e_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ skup $\{\alpha \in \mathcal{A};\ (Ae_\alpha|e_\alpha) \neq 0\}$ konačan ili prebrojiv i red*

$$\sum_{\alpha\in\mathcal{A}} (Ae_\alpha|e_\alpha) \tag{2.45}$$

konvergira. Dokažite da u tom slučaju red (2.45) apsolutno konvergira.

(b) *Dokažite da za $A \in B_1(\mathcal{H})$ suma reda u (2.45) ne ovisi o izboru ortonormirane baze $(e_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ prostora $\mathcal{H}$.*

Za $A \in B_1(\mathcal{H})$ i za bilo koju ortonormiranu bazu $(e_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ od $\mathcal{H}$ sumu reda (2.45) zovemo **trag nuklearnog operatora** A i označavamo $\operatorname{Tr} A$:

$$\operatorname{Tr} A = \sum_{\alpha\in\mathcal{A}} (Ae_\alpha|e_\alpha), \qquad (e_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}} \quad \text{ortonormirana baza od } \mathcal{H}.$$

Za nuklearne operatore sa $\mathcal{H}$ u $\mathcal{H}$ često se upotrebljava i naziv **operatori s tragom**.

Zadatak 2.6.4. *Neka je $\mathcal{H}$ Hilbertov prostor. Dokažite:*

(*a*) $\operatorname{Tr} : A \mapsto \operatorname{Tr} A$ *je neprekidan linearan funkcional na Banachovom prostoru* $(B_1(\mathcal{H}), \|\cdot\|_1)$.

(*b*) *Norma funkcionala* Tr *jednaka je* 1, *tj. vrijedi*

$$|\operatorname{Tr} A| \leq \|A\|_1 \qquad \forall A \in B_1(\mathcal{H})$$

i dostiže se jednakost za neki $A \neq 0$.

(*c*) *Vrijedi*

$$\operatorname{Tr} A^* = \overline{\operatorname{Tr} A} \qquad \forall A \in B_1(\mathcal{H}).$$

Zadatak 2.6.5. *Neka je $\mathcal{H}$ Hilbertov prostor i neka su $A, B \in B(\mathcal{H})$ takvi da su $AB, BA \in B_1(\mathcal{H})$. Dokažite da je tada*

$$\operatorname{Tr} AB = \operatorname{Tr} BA.$$

Zadatak 2.6.6. *Neka je $\mathcal{H}$ Hilbertov prostor i $A \in B_1(\mathcal{H})$. Dokažite da je tada*

$$|\operatorname{Tr} A| \leq \operatorname{Tr} \sqrt{A^*A}.$$

Zadatak 2.6.7. *Neka je $\mathcal{H}$ Hilbertov prostor i za $A \in B(\mathcal{H})$ definiramo $f_A : B_1(\mathcal{H}) \to \mathbb{C}$ sa*

$$f_A(B) = \operatorname{Tr} AB, \qquad B \in B_1(\mathcal{H}).$$

Dokažite da je $A \mapsto f_A$ izometrički izomorfizam sa Banachovog prostora $(B(\mathcal{H}), \|\cdot\|)$ na dualni prostor Banachovog prostora $(B_1(\mathcal{H}), \|\cdot\|_1)$. Drugim riječima dokažite da je

$$|f_A(B)| \leq \|A\| \cdot \|B\|_1 \qquad \forall A \in B(\mathcal{H}) \quad i \quad B \in B_1(\mathcal{H}),$$

da je

$$\|A\| = \sup\{|f_A(B)|;\ B \in B_1(\mathcal{H}),\ \|B\|_1 \leq 1\},$$

i da za svaki neprekidan linearan funkcional f na Banachovom prostoru $(B_1(\mathcal{H}), \|\cdot\|_1)$ postoji jedinstven $A \in B(\mathcal{H})$ takav da je $f = f_A$.

Poglavlje 3

OSNOVNA SVOJSTVA VON NEUMANNOVIH ALGEBRI

3.1 Komutant i bikomutant

Neka je $\mathcal{H}$ Hilbertov prostor i $B(\mathcal{H})$ algebra ograničenih linearnih operatora na $\mathcal{H}$. Jedinični operator na $\mathcal{H}$ označavamo sa $I = I_{\mathcal{H}}$. Za podskup $\mathcal{M} \subseteq B(\mathcal{H})$ označimo sa $\mathcal{M}'$ **komutant** skupa $\mathcal{M}$ u $B(\mathcal{H})$:

$$\mathcal{M}' = \{T \in B(\mathcal{H});\ TA = AT\ \ \forall A \in \mathcal{M}\}.$$

Tada je očito $\mathcal{M}$ unitalna podalgebra od $B(\mathcal{H})$.

Zadatak 3.1.1. *Dokažite da je $B(\mathcal{H})' = \mathbb{C}I$.*

Uputa: Najprije dokažite da je svaki vektor iz $\mathcal{H}$ svojstven vektor operatora $T \in B(\mathcal{H})'$.

Za podskup $\mathcal{M} \subseteq B(\mathcal{H})$ pišemo $\mathcal{M}'' = (\mathcal{M}')'$. Ta se unitalna podalgebra od $B(\mathcal{H})$ zove **bikomutant** skupa $\mathcal{M}$ u $B(\mathcal{H})$. Pišemo još $\mathcal{M}^{(1)} = \mathcal{M}'$, $\mathcal{M}^{(2)} = \mathcal{M}''$, i induktivno $\mathcal{M}^{(n+1)} = \left(\mathcal{M}^{(n)}\right)'$ za $n \in \mathbb{N}$.

Zadatak 3.1.2. *Dokažite da za svaki podskup $\mathcal{M} \subseteq B(\mathcal{H})$ vrijedi*

$$\mathcal{M}' = \mathcal{M}^{(2k+1)} \qquad i \qquad \mathcal{M} \subseteq \mathcal{M}'' = \mathcal{M}^{(2k)} \qquad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Uputa: Uočite da iz $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}$ slijedi $\mathcal{M}' \supseteq \mathcal{N}'$. Zatim primijetite da je $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{M}''$ i da je $\mathcal{M}^{(3)} = (\mathcal{M}')'' = (\mathcal{M}'')'$.

Ako je $\mathcal{M}^* = \mathcal{M}$, onda je očito $\mathcal{M}'$ $*-$podalgebra od $B(\mathcal{H})$. **Von Neumannova algebra** na prostoru $\mathcal{H}$ je $*-$podalgebra $\mathcal{A}$ od $B(\mathcal{H})$ takva da je $\mathcal{A} = \mathcal{A}''$. Iz zadatka 3.1.1. slijedi da je $B(\mathcal{H})$ von Neumannova algebra. Nadalje, ako je $\mathcal{A}$ von Neumannova algebra onda je prema zadatku 3.1.2. i njen komutant $\mathcal{A}'$ von Neumannova algebra. Očito svaka von Neumannova algebra na $\mathcal{H}$ sadrži algebru $\mathbb{C}I$.

Neka je $\mathcal{M}$ $*-$invarijantan podskup od $B(\mathcal{H})$. Tada je $\mathcal{M}''$ von Neumannova algebra koja sadrži $\mathcal{M}$. Nadalje, ako je $\mathcal{A}$ von Neumannova algebra koja sadrži $\mathcal{M}$, onda je $\mathcal{A}' \subseteq \mathcal{M}'$, dakle, $\mathcal{A} = \mathcal{A}'' \supseteq \mathcal{M}''$. Prema tome, $\mathcal{M}''$ je najmanja von Neumannova algebra koja sadrži $\mathcal{M}$. Neka je sada $\mathcal{M}$ proizvoljan podskup od $B(\mathcal{H})$. Najmanji $*-$invarijantan podskup od $B(\mathcal{H})$ koji sadrži $\mathcal{M}$ je $\mathcal{N} = \mathcal{M} \cup \mathcal{M}^*$. Svaka von Neumannova algebra koja sadrži $\mathcal{M}$ sadrži i $\mathcal{N}$. Dakle, postoji najmanja von Neumannova algebra koja sadrži $\mathcal{M}$: to je $\mathcal{N}''$. Za tu algebru kažemo da je **von Neumannova algebra generirana skupom $\mathcal{M}$**.

Propozicija 3.1.1. *Neka je $(\mathcal{A}_j)_{j\in J}$ familija von Neumannovih algebri na $\mathcal{H}$. Tada je $\mathcal{A} = \bigcap_{j\in J} \mathcal{A}_j$ von Neumannova algebra i njen komutant $\mathcal{A}'$ je von Neumannova algebra generirana s unijom komutanata $\bigcup_{j\in J} \mathcal{A}'_j$.*

Dokaz: Vrijedi $T \in \mathcal{A}$ ako i samo ako je $T \in \mathcal{A}_j = \mathcal{A}''_j$ za svaki $j \in J$, tj. ako i samo ako komutira sa svakim elementom unije $\bigcup_{j\in J} \mathcal{A}'_j$. Prema tome,

$$\mathcal{A} = \left(\bigcup_{j\in J} \mathcal{A}'_j\right)'.$$

Kako je $\bigcup_{j\in J} \mathcal{A}'_j$ $*-$invarijantan podskup od $B(\mathcal{H})$, slijedi da je $\mathcal{A}$ von Neumannova algebra. Napokon, iz gornje jednakosti nalazimo da je

$$\mathcal{A}' = \left(\bigcup_{j\in J} \mathcal{A}'_j\right)''$$

a time je dokazana druga tvrdnja.

Centar $\mathcal{Z}$ von Neumannove algebre $\mathcal{A}$ je $\mathcal{A}\cap\mathcal{A}'$, a to je ujedno centar von Neumannove algebre $\mathcal{A}'$. Dakle, $\mathcal{Z}$ je (komutativna) von Neumannova algebra i njegov je komutant $\mathcal{Z}'$ von Neumannova algebra generirana sa $\mathcal{A} \cup \mathcal{A}'$.

Faktor je von Neumannova algebra $\mathcal{A}$ čiji je centar $\mathbb{C}I$. Ekvivalentno tome je da je $\mathcal{A}'$ faktor, a ujedno tome da je $B(\mathcal{H})$ von Neumannova algebra generirana sa $\mathcal{A}\cup\mathcal{A}'$. Naravno, algebra $B(\mathcal{H})$ je faktor.

Dakle, faktori su von Neumannove algebre koje imaju najmanji mogući centar. Suprotni ekstrem su komutativne von Neumannove algebre. Ako je $\mathcal{A}$ komutativna von Neumannova algebra, ona je sastavljena od normalnih operatora. Neka je sada $\mathcal{M}$ skup normalnih operatora sa svojstvom

$$AB = BA \quad \text{i} \quad AB^* = B^*A \qquad \forall A, B \in \mathcal{M}.$$

Tada svi elementi od $\mathcal{N} = \mathcal{M} \cup \mathcal{M}^*$ međusobno komutiraju. Odatle je $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{N}'$, dakle, $\mathcal{N}'' \subseteq \mathcal{N}'$. To pokazuje da je von Neumannova algebra $\mathcal{N}''$ generirana sa $\mathcal{M}$ komutativna.

3.2 Hermitski i unitarni operatori u von Neumannovoj algebri

Za bilo koju $*-$podalgebru $\mathcal{A}$ od $B(\mathcal{H})$ označimo sa $\mathcal{A}_h$ skup svih njenih hermitskih elemenata. Jasno je da je $\mathcal{A}$, promatrana kao realni vektorski prostor, direktna suma $\mathcal{A}_h$ i $i\mathcal{A}_h$. Nadalje, sa $\mathcal{A}_+ = \mathcal{A} \cap B_+(\mathcal{H})$ označavamo skup svih pozitivnih operatora u $\mathcal{A}_h$. Za $A \in B_+(\mathcal{H})$ sa $\sqrt{A}$ označavamo jedinstven pozitivan operator čiji je kvadrat jednak A. Nadalje, za $A \in B_h(\mathcal{H})$ kao i prije označavamo

$$|A| = \sqrt{A^2}, \qquad A_+ = \frac{1}{2}(|A| + A), \qquad A_- = \frac{1}{2}(|A| - A).$$

Propozicija 3.2.1. *Neka je $\mathcal{A}$ von Neumannova algebra na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$ i neka je $A \in \mathcal{A}_h$.*

(a) Ako je $A \in \mathcal{A}_+$ onda je $\sqrt{A} \in \mathcal{A}_+$.

(b) Vrijedi $|A|, A_+, A_- \in \mathcal{A}_+$.

(c) Neka je $\lambda \mapsto E_\lambda$ spektralna funkcija operatora A. Tada je $E_\lambda \in \mathcal{A}$ za svaki $\lambda \in \mathbb{R}$.

Dokaz: Prema teoremu 2.2.3. za pozitivan operator $A \in \mathcal{A}$ operator $\sqrt{A}$ komutira sa svim operatorima koji komutiraju sa A, dakle, komutira sa svim operatorima $C \in \mathcal{A}'$. To znači da je $\sqrt{A} \in \mathcal{A}'' = \mathcal{A}$. Time je dokazana tvrdnja (a). Tvrdnje (b) i (c) slijede sasvim analogno iz tvrdnje (d) teorema 2.2.5. i iz tvrdnje (a) spektralnog teorema 2.4.1.

U daljnjem će riječ **projektor** uvijek označavati ortogonalni projektor na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$, odnosno, operator $P \in B(\mathcal{H})$ takav da je $P^* = P = P^2$. Tada je $\mathcal{H} = R(P) \oplus N(P)$. Budući da su 0 i I jedini projektori u $B(\mathcal{H})'$, iz tvrdnje (c) propozicije 3.2.1. slijedi $B(\mathcal{H})' = \mathbb{C}I$, tj. tvrdnja zadatka 3.1.1.

Korolar 3.2.2. *Neka je $\mathcal{A}$ von Neumannova algebra. Tada je*

$$\mathcal{A}_+ = \{S^*S;\ S \in \mathcal{A}\}.$$

Dokaz: Naravno, ako je $S \in \mathcal{A}$, onda je $S^*S \in B_+(\mathcal{H}) \cap \mathcal{A} = \mathcal{A}_+$. Obratno, ako je $A \in \mathcal{A}_+$, onda je prema tvrdnji (a) propozicije 3.2.1. $S = \sqrt{A} \in \mathcal{A}$, i vrijedi $S^*S = S^2 = A$.

Sa $\mathcal{U}(\mathcal{A})$ označavamo grupu svih unitarnih operatora u von Neumannovoj algebri $\mathcal{A}$.

Propozicija 3.2.3. *Za svaku von Neumannovu algebru $\mathcal{A}$ vrijedi $\mathcal{A} = span\,\mathcal{U}(\mathcal{A})$.*

Dokaz: Tvrdnja neposredno slijedi iz zadatka 2.3.2. i tvrdnje (b) propozicije 3.2.1.

Neposredna je posljedica:

Korolar 3.2.4. *Za svaku von Neumannovu algebru $\mathcal{A}$ vrijedi $\mathcal{A} = \mathcal{U}(\mathcal{A})''$.*

Nekad je zgodniji sljedeći iskaz iste činjenice, koji jasno ističe činjenicu da je svaki operator, koji je na "unitarno invarijantan način" izgrađen iz operatora von Neumannove algebre $\mathcal{A}$, i sam element te algebre:

Korolar 3.2.5. *Za von Neumannovu algebru $\mathcal{A}$ vrijedi*

$$\mathcal{A} = \{A \in B(\mathcal{H});\ UAU^{-1} = A\ \ \forall U \in \mathcal{U}(\mathcal{A}')\}.$$

Dokaz: Doista, zahtjev $UAU^{-1} = A \ \forall U \in \mathcal{U}(\mathcal{A}')$ ekvivalentan je sa $A \in \mathcal{U}(\mathcal{A}')'$. Dakle, zbog korolara 3.2.4. imamo

$$\mathcal{A} \subseteq \{A \in B(\mathcal{H});\ UAU^{-1} = A \ \forall U \in \mathcal{U}(\mathcal{A}')\} = \mathcal{U}(\mathcal{A}')' = \mathcal{U}(\mathcal{A}')''' = (\mathcal{A}')' = \mathcal{A}'' = \mathcal{A}.$$

Zadatak 3.2.1. *Neka je $\mathcal{A}$ von Neumannova algebra i neka je $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ odozgo ograničen rastući niz u $\mathcal{A}_h$. Označimo sa A jedinstven operator iz $B(\mathcal{H})$ sa svojstvom*

$$A\xi = \lim_{n\to\infty} A_n\xi \qquad \forall \xi \in \mathcal{H}$$

(v. teorem 2.2.1.). Dokažite da je tada $A \in \mathcal{A}_h$.

3.3 Projektori u von Neumannovoj algebri

Za von Neumannovu algebru $\mathcal{A}$ sa $\mathcal{P}(\mathcal{A})$ označavat ćemo skup svih projektora u $\mathcal{A}$.

Propozicija 3.3.1. *Neka je $\mathcal{A}$ von Neumannova algebra. Tada je $\mathcal{A}$ generirana sa $\mathcal{P}(\mathcal{A})$, tj. $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\mathcal{A})''$.*

Dokaz: Očito je $\mathcal{P}(\mathcal{A})'' \subseteq \mathcal{A}'' = \mathcal{A}$. Neka je sada $A \in \mathcal{A}$ i $B \in \mathcal{P}(\mathcal{A})'$. Tvrdimo da tada A i B komutiraju. Dovoljno je to dokazati za $A \in \mathcal{A}_h$. Tada prema tvrdnji (c) propozicije 3.2.1. svi spektralni projektori E_λ od A leže u $\mathcal{P}(\mathcal{A})$, dakle, $B \in \mathcal{P}(\mathcal{A})'$ komutira sa svim projektorima E_λ. No tada prema tvrdnji (a) teorema 2.4.1. B komutira s operatorom A. Na taj način dokazali smo i obrnutu inkluziju $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{A})''$.

Za zatvoren potprostor X od $\mathcal{H}$ ortogonalni projektor na potprostor X (duž ortogoanlnog komplementa $X^\perp$) označavat ćemo sa P_X. Za $A \in B(\mathcal{H})$ potprostor X je invarijantan s obzirom na A i na A^* ako i samo ako vrijedi $AP_X = P_X A$. Prema tome, za $*-$podalgebru $\mathcal{A}$ od $B(\mathcal{H})$ vrijedi

$$AX \subseteq X \quad \forall A \in \mathcal{A} \qquad \Longleftrightarrow \qquad P_X \in \mathcal{A}'.$$

Propozicija 3.3.2. *Neka je $\mathcal{A}$ von Neumannova algebra na $\mathcal{H}$ i neka je $A \in \mathcal{A}$. Stavimo $X = N(A)$ i $Y = Cl(R(A))$. Tada su $P_X, P_Y \in \mathcal{A}$.*

Dokaz: Za svaki $B \in \mathcal{A}'$ zatvoreni potprostori $X = N(A)$ i $Y = Cl(R(A))$ su $B-$invarijantni. Prema prethodnoj napomeni vrijedi $P_X, P_Y \in \mathcal{A}'' = \mathcal{A}$.

Prema dokazu teorema 2.3.3. za operator $A \in B(\mathcal{H})$ postoji polarni rastav $A = V|A|$ takav da je restrikcija $V|Cl(R(A))$ parcijalne izometrije V izometrički izomorfizam sa $Cl(R(|A|))$ na $Cl(R(A))$, a $V|N(A) = 0$; pri tome je $N(A) = N(|A|) = R(|A|)^\perp$. Očito je takva parcijalna izometrija jedinstvena. Takav ćemo rastav zvati **kanonski polarni rastav** operatora A.

Propozicija 3.3.3. *Neka je $\mathcal{A}$ von Neumannova algebra na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$. Za operator $A \in \mathcal{A}$ neka je $A = V|A|$ njegov kanonski polarni rastav. Tada je $V \in \mathcal{A}$.*

Dokaz: Prema propoziciji 2.3.1. je $|A| \in \mathcal{A}$. Stavimo $X = Cl(R(|A|))$ i $Y = Cl(R(A))$. Prema propoziciji 3.3.2. vrijedi $P_X, P_Y \in \mathcal{A}$. V je jedinstvena parcijalna izometrija takva da je $V|X$ izometrički izomorfizam sa X na Y i $V|X^\perp = 0$. Iz dokaza teorema 2.3.3. znamo da je to svojstvo ekvivalentno sa $V^*V = P_X$ i $VV^* = P_Y$. Prema korolaru 3.2.5. vrijedi $V \in \mathcal{A}$ ako i samo ako je $UVU^{-1} = V$ za svaki $U \in \mathcal{U}(\mathcal{A}')$. Prema tome, da bismo dokazali da je $V \in \mathcal{A}$, treba dokazati da je $VU = UV$ za svaki $U \in \mathcal{U}(\mathcal{A}')$.

Dakle, neka je $U \in \mathcal{U}(\mathcal{A}')$. Stavimo $W = U^*VU$. Tada je W parcijalna izometrija, a kako su $P_X, P_Y \in \mathcal{A}$, nalazimo:

$$W^*W = U^*V^*UU^*VU = U^*V^*VU = U^*P_XU = P_X,$$

$$WW^* = U^*VUU^*V^*U = U^*VV^*U = U^*P_YU = P_Y,$$

$$A = U^*AU = U^*V|A|U = U^*VU|A| = W|A|.$$

Dakle, W je parcijalna izometrija sa svojstvima $W^*W = P_X$, $WW^* = P_Y$ i $A = W|A|$. No takva je jedinstvena i jednaka V. Dakle, $W = U^*VU = V$, odnosno, $VU = UV$. Time je propozicija dokazana.

Ako je $\mathcal{P}$ bilo koji skup projektora na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$. Tada u skupu $\mathcal{P}(B(\mathcal{H}))$ postoji jedinstven $P = \inf \mathcal{P}$ i $Q = \sup \mathcal{P}$ u odnosu na uređaj $\leq$ na skupu $\mathcal{P}(B(\mathcal{H}))$ koji se prema zadatku 2.2.1. može karakterizirati na četiri ekvivalentna načina:

$$E \leq F \quad \iff \quad (E\xi|\xi) \leq (F\xi|\xi) \quad \forall \xi \in \mathcal{H} \quad \iff \quad EF = FE = E \quad \iff$$
$$\iff \quad R(E) \subseteq R(F) \quad \iff \quad N(F) \subseteq N(E).$$

Dakle, $P = \inf \mathcal{P}$ je projektor takav da je $P \leq E$ za svaki $E \in \mathcal{P}$ i ako je P' projektor takav da vrijedi $P' \leq E$ za svaki $E \in \mathcal{P}$, onda vrijedi i $P' \leq P$. Taj jedinstven projektor P je očito onaj sa svojstvom

$$R(P) = \bigcap_{E \in \mathcal{P}} R(E),$$

a ujedno je

$$N(P) = Cl\left(span \bigcup_{E \in \mathcal{P}} N(E)\right).$$

Analogno, $Q = \sup \mathcal{P}$ je projektor takav da je $E \leq Q$ za svaki $E \in \mathcal{P}$ i ako je Q' projektor takav da vrijedi $E \leq Q'$ za svaki $E \in \mathcal{P}$, onda vrijedi i $Q \leq Q'$. Taj jedinstven projektor Q je očito onaj sa svojstvom

$$N(Q) = \bigcap_{E \in \mathcal{P}} N(E),$$

a ujedno je

$$R(Q) = Cl\left(span \bigcup_{E \in \mathcal{P}} R(E)\right).$$

Propozicija 3.3.4. *Neka je $\mathcal{A}$ von Neumannova algebra na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$ i neka je $\mathcal{P}$ neki skup projektora iz $\mathcal{A}$. Tada su* $\inf \mathcal{P}$ *i* $\sup \mathcal{P}$ *projektori iz $\mathcal{A}$.*

Dokaz: Stavimo $P = \inf \mathcal{P}$. Neka je $U \in \mathcal{U}(\mathcal{A}')$. Tada U komutira sa svakim projektorom $E \in \mathcal{P}$. To znači da je za svaki $E \in \mathcal{P}$ potprostor $R(E)$ invarijantan s obzirom na U i na U^*. No tada je i potprostor $R(P) = \bigcap_{E \in \mathcal{P}} R(E)$ invarijantan s obzirom na U i na U^*. To opet znači da vrijedi $UP = PU$. Budući da je $U \in \mathcal{U}(\mathcal{A}')$ bio proizvoljan, prema korolaru 3.2.5. nalazimo da je $P \in \mathcal{A}$. Dokaz za $Q = \sup \mathcal{P}$ potpuno je analogan.

Za proizvoljan podskup $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{H}$ i za $*-$podalgebru $\mathcal{A}$ od $B(\mathcal{H})$ stavimo

$$X_{\mathcal{S}}^{\mathcal{A}} = Cl(span\,\{A\xi;\ A \in \mathcal{A},\ \xi \in \mathcal{S}\}).$$

Pripadni projektor označimo sa $E_{\mathcal{S}}^{\mathcal{A}} = P_{X_{\mathcal{S}}^{\mathcal{A}}}$. Budući da je očito zatvoren potprostor $X_{\mathcal{S}}^{\mathcal{A}}$ invarijantan s obzirom na sve operatore iz $\mathcal{A}$, imamo $E_{\mathcal{S}}^{\mathcal{A}} \in \mathcal{A}'$. Ako je $\mathcal{S}$ jednočlan skup $\{\xi\}$ pisat ćemo $X_{\xi}^{\mathcal{A}} (= Cl(\mathcal{A}\xi))$ i $E_{\xi}^{\mathcal{A}}$. Projektori oblika $E_{\xi}^{\mathcal{A}}$ zovu se **ciklički projektori** u $\mathcal{A}'$. Kažemo da je **skup** $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{H}$ **ciklički podskup** za $*-$podalgebru $\mathcal{A}$ od $B(\mathcal{H})$, ako unija područja vrijednosti $R(A)$, $A \in \mathcal{A}$, razapinje gust potprostor od $\mathcal{H}$, odnosno, ako je $X_{\mathcal{S}}^{\mathcal{A}} = \mathcal{H}$. Nadalje, kažemo da je skup $\mathcal{S}$ **separirajući podskup** za $*-$algebru $\mathcal{A}$ ako vrijedi

$$A \in \mathcal{A}, \quad A\xi = 0 \quad \forall \xi \in \mathcal{S} \qquad \Longrightarrow \qquad A = 0.$$

Ako je $\mathcal{S}$ jednočlan skup $\{\xi\}$, upotrebljavamo nazive **ciklički vektor** za $\mathcal{A}$ (to znači da vrijedi $Cl(\mathcal{A}\xi) = \mathcal{H}$) odnosno, **separirajući vektor** za $\mathcal{A}$ (dakle, za $A \in \mathcal{A}$ iz $A\xi = 0$ slijedi $A = 0$).

Propozicija 3.3.5. *Neka je $\mathcal{A}$ unitalna $*-$podalgebra od $B(\mathcal{H})$ i neka je $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{H}$. Tada je $X_{\mathcal{S}}^{\mathcal{A}}$ najmanji među svim zatvorenim potprostorima Y od $\mathcal{H}$ takvima da je $\mathcal{S} \subseteq Y$ i $P_Y \in \mathcal{A}'$.*

Dokaz: Očito $Y = X_{\mathcal{S}}^{\mathcal{A}}$ ima ta dva svojstva. Pretpostavimo da je Y zatvoren potprostor od $\mathcal{H}$ s ta dva svojstva, tj. takav da je $\mathcal{S} \subseteq Y$ i $P_Y \in \mathcal{A}'$. Tada je potprostor Y invarijantan s obzirom na sve operatore iz $\mathcal{A}$, pa posebno vrijedi $A\xi \in Y$ za svaki $\xi \in \mathcal{S}$ i svaki $A \in \mathcal{A}$. No tada je zatvarač potprostora razapetog svim takvim vektorima $A\xi$ sadržan u Y, odnosno, vrijedi $X_{\mathcal{S}}^{\mathcal{A}} \subseteq Y$.

Propozicija 3.3.6. *Neka je $\mathcal{A}$ unitalna $*-$podalgebra od $B(\mathcal{H})$ i $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{H}$. Tada je skup $\mathcal{S}$ ciklički za $\mathcal{A}$ ako i samo ako je $\mathcal{S}$ separirajući za $\mathcal{A}'$.*

Dokaz: Pretpostavimo da je skup $\mathcal{S}$ separirajući za $\mathcal{A}'$. Očito je $E_{\mathcal{S}}^{\mathcal{A}}\xi = \xi$ za svaki $\xi \in \mathcal{S}$, dakle, $\left(I - E_{\mathcal{S}}^{\mathcal{A}}\right)\xi = 0$ za svaki $\xi \in \mathcal{S}$. Kako je $E_{\mathcal{S}}^{\mathcal{A}} \in \mathcal{A}'$, to je i $I - E_{\mathcal{S}}^{\mathcal{A}} \in \mathcal{A}'$, pa je po pretpostavci $I - E_{\mathcal{S}}^{\mathcal{A}} = 0$, dakle, $E_{\mathcal{S}}^{\mathcal{A}} = I$. No to znači da je $X_{\mathcal{S}}^{\mathcal{A}} = \mathcal{H}$, odnosno, skup $\mathcal{S}$ je ciklički za $\mathcal{A}$.

Pretpostavimo sada da je skup $\mathcal{S}$ ciklički za $\mathcal{A}$, tj. da je $X_{\mathcal{S}}^{\mathcal{A}} = \mathcal{H}$. Neka je $B \in \mathcal{A}'$ takav da je $B\mathcal{S} = \{0\}$. Tada za svaki $A \in \mathcal{A}$ vrijedi $BA\mathcal{S} = AB\mathcal{S} = \{0\}$. Odatle slijedi da je $BX_{\mathcal{S}}^{\mathcal{A}} = \{0\}$, dakle, $B = 0$. Prema tome, skup $\mathcal{S}$ je separirajući za $\mathcal{A}'$.

Primijenimo li tu tvrdnju na komutant von Neumannove algebre, neposredno slijedi:

Korolar 3.3.7. *Neka je $\mathcal{A}$ von Neumannova algebra na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$. Tada je skup $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{H}$ separirajući za $\mathcal{A}$ ako i samo ako je ciklički za $\mathcal{A}'$.*

Neka je $\mathcal{H}$ Hilbertov prostor i $A \in B(\mathcal{H})$. Projektor E_A na potprostor $N(A)^{\perp}$ zove se **nosač operatora** A. Za svaki $\xi \in \mathcal{H}$ vrijedi $\xi - E_A\xi \in N(A)^{\perp\perp} = N(A)$, dakle, vrijedi $A(I - E_A) = 0$, odnosno, $A = AE_A$. Neka je sada E proizvoljan projektor sa svojstvom $A = AE$. Tada za svaki $\xi \in \mathcal{H}$ vrijedi $A(I - E)\xi = 0$. To znači da je $N(E) = R(I - E) \subseteq N(A) = R(E_A)^{\perp} = N(E_A)$. Prema tome, vrijedi $E_A \leq E$. Na taj način dokazali smo:

Propozicija 3.3.8. *Nosač E_A operatora $A \in B(\mathcal{H})$ je najmanji projektor E sa svojstvom $AE = A$.*

Budući da je $Cl(R(A)) = N(A^*)^{\perp}$, nosač E_{A^*} adjungiranog operatora A^* je projektor na $Cl(R(A))$.

Neka je $\mathcal{A}$ von Neumannova algebra, $\mathcal{Z}$ njen centar i $A \in \mathcal{A}$. Za svaki $E \in \mathcal{P}(\mathcal{Z})$ takav da je $AE = A$ vrijedi i $A^*E = (EA)^* = (AE)^* = A^*$. Dakle,

$$F = \inf\{E \in \mathcal{P}(\mathcal{Z});\ E_A \leq E\} = \inf\{E \in \mathcal{P}(\mathcal{Z});\ E_{A^*} \leq E\}.$$

Taj se projektor zove **centralni nosač** operatora $A \in \mathcal{A}$ i označava sa F_A. Naravno, on je određen algebrom $\mathcal{A}$ a ne samo njenim elementom A. Kao što smo vidjeli, $F_A = F_{A^*}$.

Zadatak 3.3.1. *Neka je $\mathcal{A}$ von Neumannova algebra, $\mathcal{Z}$ njen centar i $A \in \mathcal{A}$. Ukoliko je $E \in \mathcal{P}(\mathcal{Z})$ takav da je $AE = 0$, dokažite da je $F_AE = 0$, odnosno, da su projektori E i F_A su međusobno ortogonalni.*

Propozicija 3.3.9. *Neka je $\mathcal{A}$ von Neumannova algebra na $\mathcal{H}$, $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{H}$ i $Y = X_{\mathcal{S}}^{\mathcal{A}}$. Tada je $X_Y^{\mathcal{A}'} = X_{\mathcal{S}}^{\mathcal{Z}'}$.*

Dokaz: Budući da je $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{Z}'$, vrijedi $Y \subseteq X_{\mathcal{S}}^{\mathcal{Z}'}$. Nadalje, kako je $\mathcal{A}' \subseteq \mathcal{Z}'$, potprostor $X_{\mathcal{S}}^{\mathcal{Z}'}$ je $\mathcal{A}'-$invarijantan, pa slijedi $X_Y^{\mathcal{A}'} \subseteq X_{\mathcal{S}}^{\mathcal{Z}'}$.

Dokažimo sada obrnutu inkluziju. Uočimo da zatvoren potprostor $Z = X_{\mathcal{S}}^{\mathcal{Z}'}$ sadrži $\mathcal{S}$ i vrijedi $P_Z \in \mathcal{Z}'' = \mathcal{Z}$. Neka je sada Z proizvoljan zatvoren potprostor koji sadrži $\mathcal{S}$ i vrijedi $P_Z \in \mathcal{Z}$. Za $\xi \in \mathcal{S}$ i $A \in \mathcal{Z}'$ vrijedi $P_ZA\xi = AP_Z\xi = A\xi$. To pokazuje da je $\mathcal{Z}'\mathcal{S} \subseteq Z$, dakle, vrijedi $X_{\mathcal{S}}^{\mathcal{Z}'} \subseteq Z$. Time smo dokazali da je $X_{\mathcal{S}}^{\mathcal{Z}'}$ najmanji među svim zatvorenim potprostorima Z koji sadrže $\mathcal{S}$ i vrijedi $P_Z \in \mathcal{Z}$. Prema tome, obrnuta inkluzija $X_{\mathcal{S}}^{\mathcal{Z}'} \subseteq X_Y^{\mathcal{A}'}$ bit će dokazana ako pokažemo da potprostor $Z = X_Y^{\mathcal{A}'}$ ima svojstva $\mathcal{S} \subseteq Z$ i $P_Z \in \mathcal{Z}$. Jasno je da je $\mathcal{S} \subseteq Z$. Nadalje, $P_Z = E_Y^{\mathcal{A}'}$. Dakle, treba još dokazati da je $E_Y^{\mathcal{A}'} \in \mathcal{Z}$. Kako je $\mathcal{Z} = \mathcal{A} \cap \mathcal{A}'$, pripadnost projektora $E_Y^{\mathcal{A}'}$ centru $\mathcal{Z}$ ekvivalentna je invarijantnosti potprostora $X_Y^{\mathcal{A}'}$ u odnosu na $\mathcal{A}$ i u odnosu na $\mathcal{A}'$. No po definiciji taj je potprostor $\mathcal{A}'-$invarijantan. Neka su $\xi \in Y$, $B \in \mathcal{A}'$ i $A \in \mathcal{A}$. Tada je $A(B\xi) = B(A\xi) \in BY$. To pokazuje da je $A(\mathcal{A}'\xi) \subseteq X_Y^{\mathcal{A}'}$, dakle, i $AX_Y^{\mathcal{A}'} \subseteq X_Y^{\mathcal{A}'}$. Time je dokazana i $\mathcal{A}-$invarijantnost potprostora $X_Y^{\mathcal{A}'}$.

Korolar 3.3.10. *Neka je $\mathcal{A}$ von Neumannova algebra na prostoru $\mathcal{H}$ i neka je Y zatvoren potprostor od $\mathcal{H}$ takav da je $P_Y \in \mathcal{A}$. Tada je $E_Y^{\mathcal{A}}$ centralni nosač od P_Y.*

Dokaz: Budući da operatori iz $\mathcal{A}'$ komutiraju s projektorom P_Y, potprostor Y je $\mathcal{A}'-$invarijantan. To znači da je $X_Y^{\mathcal{A}'} = Y$. Odatle i iz propozicije 3.3.9. slijedi da je $X_Y^{\mathcal{A}} = X_Y^{\mathcal{Z}'}$. Dakle, $X_Y^{\mathcal{A}}$ je najmanji među svim zatvorenim potprostorima Z od $\mathcal{H}$ koji sadrže Y i imaju svojstvo $P_Z \in \mathcal{Z}$. Time je tvrdnja dokazana.

Kao neposrednu posljedicu propozicije 3.3.9. i korolara 3.3.10. dobivamo:

Korolar 3.3.11. *Neka su $\mathcal{A}$ von Nemannova algebra na $\mathcal{H}$, $\mathcal{Z}$ njen centar i $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{H}$. Tada je $E_{\mathcal{S}}^{\mathcal{Z}'}$ centralni nosač od $E_{\mathcal{S}}^{\mathcal{A}'} \in \mathcal{A}$ i ujedno centralni nosač od $E_{\mathcal{S}}^{\mathcal{A}} \in \mathcal{A}'$.*

Teorem 3.3.12. *Neka je $\mathcal{A}$ von Neumannova algebra na prostoru $\mathcal{H}$. Tada su sljedeća dva svojstva međusobno ekvivalentna:*

(a) $\mathcal{A}$ je faktor.

(b) Ako su $A, B \in \mathcal{A} \setminus \{0\}$ onda postoji $C \in \mathcal{A}$ takav da je $ACB \neq 0$.

Dokaz: $(b) \Rightarrow (a)$. Ako $\mathcal{A}$ nije faktor, onda prema propoziciji 3.3.1. u $\mathcal{Z}$ postoji projektor P takav da je $0 \neq P \neq I$. Tada su P i $I-P$ operatori iz $\mathcal{A} \setminus \{0\}$ i za svaki $C \in \mathcal{A}$ vrijedi $PC(I-P) = (P(I-P)C = 0$.

$(a) \Rightarrow (b)$. Pretpostavimo da postoje $A, B \in \mathcal{A} \setminus \{0\}$ takvi da je $ACB = 0$ $\forall C \in \mathcal{A}$. Neka je $Y = Cl(R(B))$ i $P = E_Y^{\mathcal{A}}$. Prema korolaru 3.3.11. tada je $P \neq 0$ projektor iz $\mathcal{Z}$. Nadalje, za svaki $C \in \mathcal{A}$ operator A poništava se na $CB\mathcal{H}$, dakle, poništava se na CY. Odatle slijedi da se A poništava na $X_Y^{\mathcal{A}}$. Odatle slijedi da je $AP = 0$. To pokazuje da je $P \neq I$. Dakle, $\mathcal{Z} \neq \mathbb{C}I$, odnosno, $\mathcal{A}$ nije faktor.

Ustanovit ćemo još neka svojstva centralnog nosača F_A elementa A von Neumannove algebre $\mathcal{A}$ na prostoru $\mathcal{H}$.

Propozicija 3.3.13. *Neka je $\mathcal{A}$ von Neumannova algebra na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$ s centrom $\mathcal{Z}$. Označimo sa F_A centralni nosač elementa $A \in \mathcal{A}$.*

(a) Za $A \in \mathcal{A}$ je $F_A = \inf\{P \in \mathcal{P}(\mathcal{Z});\ AP = A\}$.

(b) Za $A \in \mathcal{A}$ neka je P projektor na potprostor $N(A)^\perp = Cl(R(A^*))$ i neka je Q projektor na potprostor $N(A^*)^\perp = Cl(R(A))$. Tada je

$$F_A = F_{A^*} = F_{A^*A} = F_{AA^*} = F_P = F_Q.$$

(c) Ako je E projektor iz $\mathcal{A}$, onda je

$$R(F_E) = X_{R(E)}^{\mathcal{A}} = Cl\,(span\,\{A\xi;\ A \in \mathcal{A},\ \xi \in R(E)\})$$

Dokaz: Tvrdnja (a) slijedi neposredno iz definicije centralnog nosača, budući da je za projektor P jednakost $AP = A$ ekvivalentna sa $E_A \leq P$.

(b) Već znamo da je $F_A = F_{A^*}$. Nadalje, ako je $E \in \mathcal{P}(\mathcal{Z})$, onda očito iz $AE = A$ (dakle, i $A^*E = A^*$) slijedi $AA^*E = AA^*$ i $A^*AE = A^*A$. Prema tome, vrijedi

$$F_A = F_{A^*} \leq F_{AA^*} \qquad \text{i} \qquad F_A = F_{A^*} \leq F_{A^*A}.$$

S druge strane, pretpostavimo da je $E \in \mathcal{P}(\mathcal{Z})$ takav da je $AA^*E = AA^*$. Za $\xi \in \mathcal{H}$ tada imamo

$$\|EA^*\xi\|^2 = (EA^*\xi|A^*\xi) = (AA^*E\xi|\xi) = (AA^*\xi|\xi) = (A^*\xi|A^*\xi) = \|A^*\xi\|^2.$$

To znači da iz $AA^*E = AA^*$ slijedi da je $R(A^*) \subseteq R(E)$, dakle, $EA^* = A^*E = A^*$. Prema tome, vrijedi i obrnuta nejednakost

$$F_{AA^*} \leq F_{A^*} = F_A, \qquad \text{dakle, i} \quad F_{A^*A} \leq F_A = F_{A^*}.$$

Time su dokazane jednakosti

$$F_A = F_{A^*} = F_{A^*A} = F_{AA^*}.$$

Ako je $E \in \mathcal{P}(\mathcal{Z})$ takav da je $PE = P$ onda zbog $PA^* = A^*$ slijedi $EA^* = EPA^* = PA^* = A^*$. Odatle je $AE = A$. Dakle, vrijedi $F_A \leq F_P$. Primijenimo li to na A^* dobivamo i $F_{A^*} \leq F_Q$. Pretpostavimo sada da je $E \in \mathcal{P}(\mathcal{Z})$ takav da je $AE = A$. To znači da je $R(A) \subseteq R(E)$. Dakle, kako je Q projektor na $Cl(R(A))$, vrijedi $R(Q) = Cl(R(A)) \subseteq R(E)$, a to znači da je $Q \leq E$, odnosno, $QE = Q$. Vrijedi i nejednakost $F_Q \leq F_A = F_{A^*}$, a analogno i $F_P \leq F_{A^*} = F_A$. Time su dokazane i preostale dvije jednakosti u tvrdnji (b).

(c) Označimo sa P projektor na potprostor $X^{\mathcal{A}}_{R(E)}$. Budući da je taj potprostor $\mathcal{A}-$invarijantan, vrijedi $P \in \mathcal{A}'$. No taj je potprostor i $\mathcal{A}'-$invarijantan. Doista, potprostor $R(E)$ je $\mathcal{A}'-$invarijantan, pa za $A' \in \mathcal{A}'$, $A \in \mathcal{A}$ i $\xi \in R(E)$ vrijedi $A'\xi \in R(E)$, dakle,

$$A'A\xi = AA'\xi \in X^{\mathcal{A}}_{R(E)}.$$

Budući da vektori $A\xi$, $A \in \mathcal{A}$, $\xi \in R(E)$, razapinju gusti potprostor od $X^{\mathcal{A}}_{R(E)}$, slijedi $\mathcal{A}'-$invarijantnost od $X^{\mathcal{A}}_{R(E)}$. No tada je $P \in \mathcal{A}'' = \mathcal{A}$. To pokazuje da je $P \in \mathcal{A} \cap \mathcal{A}' = \mathcal{Z}$. Očito je $E \leq P$, dakle, vrijedi $F_E \leq P$. S druge strane, ako je $Q \in \mathcal{P}(\mathcal{Z})$ takav da je $EQ = E$, onda za $A \in \mathcal{A}$ i $\xi \in R(E)$ imamo

$$QA\xi = AQE\xi = AE\xi = A\xi.$$

Odatle slijedi da je $X^{\mathcal{A}}_{R(E)} \subseteq R(Q)$, dakle, $P \leq Q$. Odatle slijedi $P \leq F_E$.

Za $A \in B(\mathcal{H})$ i za $E \in \mathcal{P}(B(\mathcal{H}))$ definiramo operator $A_E \in B(R(E))$ sa

$$A_E\xi = EA\xi, \qquad \xi \in R(E).$$

A_E se katkada zove **kompresija operatora** A **na potprostor** $R(E)$. Ako je $\mathcal{A}$ von Neumannova algebra na $\mathcal{H}$ stavimo

$$\mathcal{A}_E = \{A_E;\ A \in \mathcal{A}\}.$$

Općenito $\mathcal{A}_E$ ne mora biti algebra. Ali ako je $E \in \mathcal{P}(\mathcal{A})$ ili $E \in \mathcal{P}(\mathcal{A}')$, to jest tako:

Propozicija 3.3.14. (a) *Ako je $E \in \mathcal{P}(\mathcal{A})$, onda je $\mathcal{A}_E$ von Neumannova algebra na prostoru $R(E)$ i vrijedi $(\mathcal{A}_E)' = (\mathcal{A}')_E$. Nadalje, preslikavanje $A \mapsto A_E$ je $*-$izomorfizam sa $E\mathcal{A}E$ na $\mathcal{A}_E$.*

(b) *Ako je $E \in \mathcal{P}(\mathcal{A}')$ onda je $\mathcal{A}_E$ von Neumannova algebra na prostoru $R(E)$ i $(\mathcal{A}_E)' = (\mathcal{A}')_E$.*

(c) *Ako je $\mathcal{Z}$ centar od $\mathcal{A}$ i ako je $E \in \mathcal{P}(\mathcal{A}) \cup \mathcal{P}(\mathcal{A}')$ onda je $\mathcal{Z}_E$ centar od $\mathcal{A}_E$.*

Dokaz: (a) Očito su $\mathcal{A}_E$ i $(\mathcal{A}')_E$ $*-$podalgebre od $B(R(E))$ koje sadrže jedinični operator $I_{R(E)}$. Ako su $A' \in \mathcal{A}'$ i $A \in \mathcal{A}$, onda za svaki $\xi \in R(E)$ imamo

$$(\mathcal{A}')_E\, A_E\xi = EA'EAE\xi = EA'AE\xi = EAA'E\xi = EAEA'E\xi = A_E\, (A')_E\, \xi.$$

To pokazuje da je $(\mathcal{A}')_E \subseteq (\mathcal{A}_E)'$.

Pretpostavimo sada da je U unitarni element von Nemannove algebre $(\mathcal{A}_E)'$ na prostoru $R(E)$. Ako su $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$ i $\xi_1, \ldots, \xi_n \in R(E)$, onda imamo redom

$$\left\|\sum_{j=1}^{n} A_j U\xi_j\right\|^2 = \sum_{i,j=1}^{n}(A_iU\xi_i|A_jU\xi_j) = \sum_{i,j=1}^{n}\big((EA_j^*A_iE)U\xi|U\xi_j\big) =$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n}\big(U(EA_j^*A_iE)\xi_i|U\xi_j\big) = \sum_{i,j=1}^{n}(EA_j^*A_iE\xi_i|\xi_j) = \left\|\sum_{j=1}^{n} A_{:}j\xi_j\right\|^2.$$

To pokazuje da postoji jedinstvena linearna izometrija W s potprostora

$$Y = X_{R(E)}^{\mathcal{A}} = Cl(span\,\{A\xi;\ A \in \mathcal{A},\ \xi \in R(E)\})$$

u prostor $\mathcal{H}$ takva da vrijedi

$$W\sum_{j=1}^{n} A_j\xi_j = \sum_{j=1}^{n} A_jU\xi_j \qquad \forall A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A} \quad \text{i} \quad \forall \xi_1, \ldots, \xi_n \in R(E).$$

Produljenjem W na čitav prostor $\mathcal{H}$ tako da stavimo $W|Y^\perp = 0$, dobivamo parcijalnu izometriju na prostoru $\mathcal{H}$. Prema tvrdnji (c) propozicije 3.3.13. projektor na $Y = X_{R(E)}^{\mathcal{A}}$ je centralni nosač F_E projektora E. Prema tome, svaki $A \in \mathcal{A}$ komutira sa F_E, dakle i s projektorom $I - F_E$ na $Y^\perp$. Stoga za svaki $A \in \mathcal{A}$ imamo

$$WA(I - F_E) = W(I - F_E)A = 0 = AW(I - F_E) \qquad \Longrightarrow \qquad WA|Y^\perp = AW|Y^\perp.$$

S druge strane, za $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$ i za $\xi_1, \ldots, \xi_n \in R(E)$ imamo

$$WA\sum_{j=1}^{n} A_j\xi_j = W\sum_{j=1}^{n} AA_j\xi_j = \sum_{j=1}^{n} AA_jU\xi_j = A\sum_{j=1}^{n} A_jU\xi_j = AW\sum_{j=1}^{n} A_j\xi_j.$$

To znači da je i $WA|Y = AW|Y$. Sve u svemu, imamo $WA = AW$ za svaki $A \in \mathcal{A}$, dakle, $W \in \mathcal{A}'$.

Za $\xi \in R(E)$ imamo po definiciji $W\xi = U\xi$. Odatle slijedi da je $W_E = U$. Drugim riječima, za svaki unitaran operator iz $(\mathcal{A}_E)'$ vrijedi $U \in (\mathcal{A}')_E$. Budući da je prema propoziciji 3.2.3. von Neumannova algebra $(\mathcal{A}_E)'$ razapeta sa svojim unitarnim elementima, slijedi da je $(\mathcal{A}_E)' \subseteq (\mathcal{A}')_E$.

Dvije inkluzije dokazuju jednakost $(\mathcal{A}_E)' = (\mathcal{A}')_E$.

Neka je sada $T \in (\mathcal{A}_E)''$ i proširimo T na čitav prostor $\mathcal{H}$ s nulom na $R(E)^\perp = N(E)$. Neka je $A' \in \mathcal{A}'$. Tada znamo da je $(A')_E \in (\mathcal{A}_E)'$ (i tako se dobivaju svi elementi od $(\mathcal{A}_E)'$). Sada za $\xi \in R(E)$ zbog $T = TE$ imamo

$$TA'\xi = (TE)A'\xi = TEA'\xi = T\,(A')_E\,\xi = (A')_E\,T\xi = EA'T\xi = A'T\xi.$$

Dakle, vrijedi $TA'|R(E) = A'T|R(E)$ za svaki $A' \in \mathcal{A}'$. S druge strane imamo $T(I - E) = 0$, dakle,

$$TA'(I - E) = T(I - E)A' = 0 = A'T(I - E).$$

No to znači da je i $TA'|N(A) = A'T|N(E)$ za svaki $A' \in \mathcal{A}'$. Time je dokazano da vrijedi $TA' = A'T$ za svaki $A' \in \mathcal{A}'$, odnosno, $T \in \mathcal{A}'' = \mathcal{A}$. Dakle, vrijedi

$$\mathcal{A}_E = (\mathcal{A}'')_E = ((\mathcal{A}')_E)' = (\mathcal{A}_E)'',$$

odnosno, dokazali smo da je $\mathcal{A}_E$ von Neumannova algebra na prostoru $R(E)$.

Zadatak 3.3.2. *Dokažite preostali dio tvrdnje* (a), *tj. da je* $A \mapsto A_E$ $*-$*izomorfizam sa* $E\mathcal{A}E$ *na* $\mathcal{A}_E$.

Zadatak 3.3.3. *Dokažite tvrdnju* (b) *propozicije 3.3.14.*

Dokaz tvrdnje (c) propozicije 3.3.14.: Iz (a) i (b) slijedi da je centar $\mathcal{Z}(\mathcal{A}_E)$ von Neumannove algebre $\mathcal{A}_E$ jednak $\mathcal{A}_E \cap (\mathcal{A}')_E$. Odatle je jasno da je $\mathcal{Z}_E \subseteq \mathcal{Z}(\mathcal{A}_E)$. Obratno, uzmimo da je $C \in \mathcal{Z}(\mathcal{A}_E) = \mathcal{A}_E \cap (\mathcal{A}')_E$. Prema tvrdnji (a) postoji jedinstven $A \in E\mathcal{A}E$ takav da je $C = A_E$. Kako je $C \in (\mathcal{A}')_E = (\mathcal{A}_E)'$, slijedi da je $A \in \mathcal{A}'$. Dakle, $A \in \mathcal{Z}$ i $C = A_E$. Time je dokazano $C \in \mathcal{Z}_E$, odnosno, dokazana je i obrnuta inkluzija $\mathcal{Z}(\mathcal{A}_E) \subseteq \mathcal{Z}_E$.

Napomenimo da prema prethodnoj propoziciji možemo kratko pisati $\mathcal{A}'_E$ za $(\mathcal{A}')_E = (\mathcal{A}_E)'$ ukoliko je $E \in \mathcal{P}(\mathcal{A})$ ili $E \in \mathcal{P}(\mathcal{A}')$.

Kažemo da je $\mathcal{A}$ $\sigma-$**konačna von Neumannova algebra** ako u njoj ne postoji neprebrojiv skup međusobno ortogonalnih projektora. To svojstvo očito ima svaka von Neumannova algebra na separabilnom Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$.

Propozicija 3.3.15. *Neka je* $\mathcal{A}$ *von Neumannova algebra na Hilbertovom prostoru* $\mathcal{H}$. *Tada je* $\mathcal{A}$ $\sigma-$*konačna ako i samo ako postoji prebrojiv podskup od* $\mathcal{H}$ *koji je separirajući za* $\mathcal{A}$.

Dokaz: Neka je $\mathcal{S}$ prebrojiv podskup od $\mathcal{H}$ koji je separirajući za $\mathcal{A}$. Neka je $(E_j)_{j\in J}$ familija međusobno ortogonalnih projektora iz $\mathcal{A}$. Iz tvrdnje (a) teorema 2.5.1. slijedi da je za svaki $\xi \in \mathcal{S}$ skup $\{j \in J;\ E_j\xi \neq 0\}$ konačan ili prebrojiv. Dakle, i unija J' tih skupova je konačan ili prebrojiv skup. Kako je skup $\mathcal{S}$ separirajući za $\mathcal{A}$, vrijedi $E_j = 0$ ako i samo ako je $E_j\mathcal{S} = \{0\}$. Dakle, vrijedi $J' = \{j \in J;\ E_j \neq 0\}$. Time je dokazano da je algebra $\mathcal{A}$ $\sigma-$konačna.

Pretpostavimo sada da je $\mathcal{A}$ $\sigma-$konačna von Neumannova algebra. Primjenom Zornove leme lako se vidi da postoji maksimalan podskup $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{H}$ takav da su projektori $E_\xi^{\mathcal{A}'}$, $\xi \in \mathcal{S}$, međusobno ortogonalni. Sada iz $\sigma-$konačnosti od $\mathcal{A}$ slijedi da je skup $\mathcal{S}$ konačan ili prebrojiv. Nadalje, iz maksimalnosti od $\mathcal{S}$ slijedi da je

$$\sup\{E_\xi^{\mathcal{A}'};\ \xi \in \mathcal{S}\} = \sum_{\xi\in\mathcal{S}} E_\xi^{\mathcal{A}'} = I.$$

To upravo znači da je $E_{\mathcal{S}}^{\mathcal{A}'} = I$, tj. $X_{\mathcal{S}}^{\mathcal{A}}{}' = \mathcal{H}$. Dakle, prebrojiv skup $\mathcal{S}$ je ciklički za $\mathcal{A}'$, a to po korolaru 3.3.7. znači da je skup $\mathcal{S}$ separirajući za $\mathcal{A}$.

3.4 Homomorfizmi

Neka su $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ von Neumannove algebre. Preslikavanje $\Phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ zove se **homomorfizam von Neumannovih algebri** ako je Φ homomorfizam $*-$algebri, tj. ako je Φ linearno preslikavanje i vrijedi

$$\Phi(AB) = \Phi(A)\Phi(B) \qquad \text{i} \qquad \Phi(A^*) = \Phi(A)^* \qquad \forall A, B \in \mathcal{A}.$$

Linearno preslikavanje $\Phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ zove se **antihomomorfizam von Neumannovih algebri** ako vrijedi

$$\Phi(AB) = \Phi(B)\Phi(A) \qquad \text{i} \qquad \Phi(A^*) = \Phi(A)^* \qquad \forall A, B \in \mathcal{A}.$$

Propozicija 3.4.1. *Neka je $\Phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ homomorfizam ili antihomomorfizam von Neumannovih algebri. Tada vrijedi:*

(*a*) $\Phi(\mathcal{A}_+) \subseteq \mathcal{B}_+$.

(*b*) $\Phi(\mathcal{P}(\mathcal{A})) \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{B})$.

(*c*) *Za svaki $A \in \mathcal{A}$ vrijedi $\|\Phi(A)\| \leq \|A\|$. Ako je homomorfizam Φ injektivan, onda je $\|\Phi(A)\| = \|A\|$ $\forall A \in \mathcal{A}$.*

(*d*) *Za $A \in \mathcal{A}_+$ vrijedi $\Phi(\sqrt{A}) = \sqrt{\Phi(A)}$.*

Dokaz: Pretpostavljamo da je Φ homomorfizam. Dokaz za antihomomorfizam potpuno je analogan.

(*a*) Ako je $A \in \mathcal{A}_+$, prema korolaru 3.2.2. vrijedi $A = S^*S$ za neki $S \in \mathcal{A}$. Tada je

$$\Phi(A) = \Phi(S)^*\Phi(S) \in \mathcal{B}_+.$$

(*b*) Za $E \in \mathcal{P}(\mathcal{A})$ je $E^* = E = E^2$, a odatle je $\Phi(E)^* = \Phi(E) = \Phi(E)^2$, dakle, $\Phi(E) \in \mathcal{P}(\mathcal{B})$.

(*c*) Za $A \in \mathcal{A}$ imamo $A^*A \leq \|A\|^2 I$, odnosno, $\|A\|^2 I - A^*A \in \mathcal{A}_+$. Prema (*a*) tada je

$$\Phi(\|A\|^2 I - A^*A) = \|A\|^2\Phi(I) - \Phi(A)^*\Phi(A) \in \mathcal{B}_+,$$

dakle, $\Phi(A)^*\Phi(A) \leq \|A\|^2\Phi(I) \leq \|A\|^2 I$, jer je prema (*b*) $\Phi(I)$ projektor u $\mathcal{B}$. Odatle je

$$\|\Phi(A)\|^2 = \|\Phi(A)^*\Phi(A)\| \leq \|A\|^2.$$

Time je dokazana prva tvrdnja u (*c*).

Za dokaz druge tvrdnje treba nam jedna jednostavna činjenica o preslikavanju spektra:

Zadatak 3.4.1. *Neka su $\mathcal{A}$ unitalna algebra, $x \in \mathcal{A}$ i P polinom s kompleksnbim koeficijentima. Dokažite da je tada*

$$\sigma(P(x)) = P(\sigma(x)) = \{P(\lambda);\ \lambda \in \sigma(x)\}.$$

Uputa: Za dokaz inkluzije $\sigma(P(x)) \subseteq P(\sigma(x))$ rastavite polinoma $P - \lambda_0$ u linearne faktore,

$$P(\lambda) - \lambda_0 = \alpha(\lambda - \lambda_1)\cdots(\lambda - \lambda_n),$$

zamijenite u toj jednakosti λ sa x i upotrijebite činjenicu da ako umnožak nekih elemenata iz $\mathcal{A}$ nije invertibilan, onda nužno neki od faktora nije invertibilan.

Pretpostavimo sada da je homomorfizam Φ injektivan i da postoji $A \in \mathcal{A}$ takav da vrijedi $\|\Phi(A)\| < \|A\|$. Budući da je $\|A^*A\| = \|A\|^2$, možemo pretpostaviti da je $A \in \mathcal{A}_+$. Norma hermitskog operatora jednaka je njegovom spektralnom radijusu. Prema tome, postoji neprekidna funkcija $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ takva da je $f(0) = 0$, $f|\sigma(\Phi(A)) = 0$, ali $f|\sigma(A) \neq 0$. Neka je (P_n) niz realnih polinoma realne varijable takvih da je $P_n(0) = 0$ i da restrikcije $P_n|\sigma(A)$ uniformno konvergiraju prema restrikciji $f|\sigma(A)$. Očito je $P_n(\Phi(A)) = \Phi(P_n(A))$. Nadalje, prema zadatku 3.4.1. vrijedi

$$\sigma(P_n(A)) = P_n(\sigma(A)) \qquad \text{i} \qquad \sigma(P_n(\Phi(A)) = P_n(\sigma(\Phi(A)).$$

Odatle slijedi da spektralni radijusi, (dakle, norme) niza hermitskih operatora $P_n(\Phi(A))$ konvergiraju prema nuli. To znači da je

$$\lim_{n\to\infty} \Phi(P_n(A)) = 0.$$

S druge strane, niz operatora $(P_n(A))$ je Cauchyjev u Banachovom prostoru $\mathcal{A}$. Doista, neka je $\varepsilon > 0$. Zbog uniformne konvergencije niza $P_n|\sigma(A)$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da vrijedi

$$n, m \geq n_0 \qquad \Longrightarrow \qquad |P_n(\lambda) - P_m(\lambda)| \leq \varepsilon \quad \forall \lambda \in \sigma(A).$$

Za takve n i m spektar operatora $P_n(A) - P_m(A)$, koji je jednak $\{P_n(\lambda) - P_m(\lambda);\ \lambda \in \sigma(A)\}$, sadržan je u $[-\varepsilon, \varepsilon]$. To znači da je spektralni radijus operatora $P_n(A) - P_m(A)$, koji je jednak njegovoj normi, manji ili jednak od ε. Time je dokazano da je niz $(P_n(A))$ Cauchyjev, dakle, konvergentan u Banachovom prostoru $\mathcal{A}$. Označimo sa B njegov limes. Zbog dokazane neprekidnosti homomorfizma Φ tada je

$$\Phi(B) = \lim_{n\to\infty} \Phi(P_n(A)) = 0.$$

S druge strane, $B \neq 0$. Doista, uniformno konvergentan niz funkcija $P_n|\sigma(A)$ ne konvergira prema nuli, prema tome, postoje $\lambda \in \sigma(A)$, $\varepsilon > 0$ i $n_0 \in \mathbb{N}$ takvi da je $|P_n(l)| \geq \varepsilon$ za svaki $n \geq n_0$. Za sve takve n je

$$\|P_n(A)\| = \nu(P_n(A)) \geq |P_n(\lambda)| \geq \varepsilon.$$

Tada je i $\|B\| \geq \varepsilon > 0$, dakle, $B \neq 0$. Dokazano je u kontradikciji s injektivnošću homomorfizma Φ.

(d) Prema (a) $\Phi(\sqrt{A})$ je pozitivan operator i vrijedi $\Phi(\sqrt{A})^2 = \Phi(A)$. Odatle zaključujemo da je $\Phi(\sqrt{A}) = \sqrt{\Phi(A)}$.

Ako je (anti)homomorfizam $\Phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ bijektivan, onda je i Φ^{-1} (anti)homomorfizam. Kažemo tada da je Φ **algebarski (anti)izomorfizam** sa $\mathcal{A}$ na $\mathcal{B}$. Ako takav postoji kažemo da su von Neumannove algebre $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ **algebarski (anti)izomorfne**.

Uzmimo sada da su $\mathcal{H}$ i $\mathcal{K}$ Hilbertovi prostori i neka je $U : \mathcal{H} \to \mathcal{K}$ izometrički izomorfizam. Ako je $\mathcal{A}$ von Neumannova algebra na prostoru $\mathcal{H}$, definiramo preslikavanje $\Phi : \mathcal{A} \to B(\mathcal{K})$ sa $\Phi(A) = UAU^{-1}$, $A \in \mathcal{A}$. Tada je Φ algebarski izomorfizam von Neumannove algebre $\mathcal{A}$ na neku von Neumannovu algebru $\mathcal{B}$ na prostoru $\mathcal{K}$. Takav se izomorfizam zove **prostorni izomorfizam**.

Slično, ako je $V : \mathcal{H} \to \mathcal{K}$ antilinearna izometrija sa $\mathcal{H}$ na $\mathcal{K}$, onda je sa $\Psi(A) = VA^*V^{-1}$ zadan antiizomorfizam sa $\mathcal{A}$ na neku von Neumannovu algebru na prostoru $\mathcal{K}$. Takav se antiizomorfizam zove **prostorni antiizomorfizam**.

Ako je $\Phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ (anti)homomorfizam von Neumannovih algebri, onda je prema tvrdnji (c) preslikavanje Φ neprekidno. Posebno, jezgra $\mathfrak{m} = \mathrm{Ker}(\Phi)$ je zatvoren obostrani ideal u $\mathcal{A}$ i Φ definira izomorfizam $*-$algebri sa $\mathcal{A}/\mathfrak{m}$ na $\mathrm{Im}(\Phi)$. Uočimo još neke činjenice o idealima u von Neumannovim algebrama.

Neka je $\mathcal{A}$ von Neumannova algebra. Ako je $\mathfrak{m}$ lijevi (odnosno, desni) ideal u $\mathcal{A}$, onda je $\mathfrak{m}^* = \{A^*;\ A \in \mathfrak{m}\}$ desni (odnosno, lijevi) ideal u $\mathcal{A}$. Dakle, lijevi (odnosno, desni) ideal $\mathfrak{m}$ sa svojstvom $\mathfrak{m}^* = \mathfrak{m}$ je obostrani ideal. U stvari, svojstvo $\mathfrak{m}^* = \mathfrak{m}$ vrijedi za svaki obostrani ideal u von Neumannovoj algebri:

Propozicija 3.4.2. *Neka je* $\mathfrak{m}$ *lijevi (odnosno, desni) ideal u von Neumannovoj algebri* $\mathcal{A}$.

(*a*) *Za* $A \in \mathcal{A}$ *vrijedi* $A \in \mathfrak{m}$ *ako i samo ako je* $|A| \in \mathfrak{m}$.

(*b*) *Ideal* $\mathfrak{m}$ *je obostrani ako i samo ako je* $\mathfrak{m}^* = \mathfrak{m}$.

Dokaz: Dokaz provodimo za lijeve ideale. Dokaz za desne ideale potpuno je analogan i predmet je zadatka 3.4.2.

(*a*) Neka je $A = V|A|$ kanonski polarni rastav operatora A. Prema propoziciji 3.3.3. vrijedi $V \in \mathcal{A}$. Dakle, očito iz $|A| \in \mathfrak{m}$ slijedi $A \in \mathfrak{m}$. Za dokaz obrnute implikacije treba samo uočiti da je $|A| = V^*A$; doista, V^*V je projektor na $Cl(R(|A|))$, pa vrijedi $V^*V|A| = |A|$.

(*b*) Već smo uočili da je lijevi ideal $\mathfrak{m}$ sa svojstvom $\mathfrak{m}^* = \mathfrak{m}$ obostrani ideal. Pretpostavimo sada da je $\mathfrak{m}$ obostrani ideal i neka je $A \in \mathfrak{m}$. Neka je $A = V|A|$ kanonski polarni rastav od A. Prema tvrdnji (*a*) tada je $|A| \in \mathfrak{m}$. Nadalje, imamo $A^* = |A|V^*$, pa kako je $\mathfrak{m}$ i desni ideal, slijedi $A^* \in \mathfrak{m}$. Time smo dokazali inkluziju $\mathfrak{m}^* \subseteq \mathfrak{m}$. Primjenom adjungiranja slijedi i obrnuta inkluzija $\mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{m}^*$.

Zadatak 3.4.2. *Dokažite propoziciju 3.4.2. za desne ideale.*

3.5 Ortogonalne sume

Ako je $(\mathcal{H}_i)_{i\in I}$ bilo kakva familija Hilbertovih prostora definiramo $\bigoplus_{i\in I}\mathcal{H}_i$ kao potprostor Kartezijevog produkta $\prod_{i\in I}\mathcal{H}_i$ svih familija $(\xi_i)_{i\in I}$, $\xi_i\in\mathcal{H}_i$, takvih da je skup $\{i\in I;\ \xi_i\neq 0\}$ konačan ili prebrojiv i da vrijedi

$$\sum_{i\in I}\|\xi_i\|^2<+\infty.$$

Zadatak 3.5.1. *Dokažite da je $\bigoplus_{i\in I}\mathcal{H}_i$ Hilbertov prostor sa skalarnim produktom*

$$\big((\xi_i)_{i\in I}\big|\,(\eta_i)_{i\in I}\big)=\sum_{i\in I}(\xi_i|\eta_i).$$

Uputa: Imitirajte dokaz činjenice da je ℓ_2 Hilbertov prostor.

Zadatak 3.5.2. *Neka su $A_i\in B(\mathcal{H}_i)$, $i\in I$, takvi da je* $\sup\{\|A_i\|;\ i\in I\}<+\infty$. *Dokažite da je tada sa*

$$A\,(\xi_i)_{i\in I}=(A_i\xi_i)_{i\in I}$$

definiran ograničen linearan operator na prostoru $\mathcal{H}=\bigoplus_{i\in I}\mathcal{H}_i$ i da je

$$\|A\|=\sup\{\|A_i\|;\ i\in I\}.$$

Operator A iz zadatka 3.5.2. obično se označava sa $\bigoplus_{i\in I}A_i$.

Propozicija 3.5.1. *Neka je $(\mathcal{H}_i)_{i\in I}$ familija Hilbertovih prostora i neka je za svaki $i\in I$ zadana von Neumannova algebra $\mathcal{A}_i$ na prostoru $\mathcal{H}_i$. Stavimo*

$$\mathcal{A}=\bigoplus_{i\in I}\mathcal{A}_i=\left\{\bigoplus_{i\in I}A_i;\ A_i\in\mathcal{A}_i,\ \ \sup\{\|A_i\|;\ i\in I\}<+\infty\right\}.$$

Tada je $\mathcal{A}$ von Neumannova algebra na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}=\bigoplus_{i\in I}\mathcal{H}_i$ i vrijedi $\mathcal{A}'=\bigoplus_{i\in I}\mathcal{A}_i'$.

Dokaz: Očito je $\mathcal{A}$ $*-$podalgebra od $B(\mathcal{H})$. Pretpostavimo da je $C\in\mathcal{A}'$. Svaki $\mathcal{H}_j$ možemo identificirati sa zatvorenim potprostorom od $\mathcal{H}$ svih familija $(\xi_i)_{i\in I}$ takvih da je $\xi_i=0$ ako je $i\neq j$. Neka je E_j projektor prostora $\mathcal{H}$ na potprostor $\mathcal{H}_j$. Tada je očito $E_j=\bigoplus_{i\in I}A_i$, gdje je $A_i=0$ za $i\neq j$ i $A_j=I_{\mathcal{H}_j}$. Prema tome, svi projektori E_i, $i\in I$, su elementi od $\mathcal{A}$. Stoga operator C komutira sa svim tim projektorima. To znači da su svi potprostori $\mathcal{H}_i$ invarijantni s obzirom na operator C. Označimo sa $C_i\in B(\mathcal{H}_i)$ restrikciju operatora C na potprostor $\mathcal{H}_i$. Tada je očito $C=\bigoplus_{i\in I}C_i$. Neka je $j\in I$ i $A\in\mathcal{A}_j$. Definiramo familiju $(A_i)_{i\in I}$ tako da stavimo $A_i=0$ za $i\neq j$ i $A_j=A$. Tada je $\bigoplus_{i\in I}A_i\in\mathcal{A}$, dakle, taj operator komutira s operatorom C. No odatle očito slijedi da je $C_jA=AC_j$. Kako to vrijedi za svaki $A\in\mathcal{A}_j$, zaključujemo da je $C_j\in\mathcal{A}_j'$. To pokazuje da je $C\in\bigoplus_{i\in I}\mathcal{A}_i'$. Time je dokazana inkluzija $\mathcal{A}'\subseteq\bigoplus_{i\in I}\mathcal{A}_i'$. No obrnuta inkluzija je očigledna pa slijedi jednakost. Primijenimo li dokazano na algebru $\mathcal{A}'=\bigoplus_{i\in I}\mathcal{A}_i'$ slijedi da je

$$\mathcal{A}''=\bigoplus_{i\in I}\mathcal{A}_i''=\bigoplus_{i\in I}\mathcal{A}_i=\mathcal{A}.$$

Time je dokazano da je $\mathcal{A}$ von Neumannova algebra na prostoru $\mathcal{H}$.

Neka je i dalje kao u dokazu propozicije 3.5.1. E_j projektor prostora $\mathcal{H}=\bigoplus_{i\in I}\mathcal{H}_i$ na zatvoren potprostor $\mathcal{H}_j$. Za $T\in B(\mathcal{H})$ definiramo operatore $T_{ij}\in B(\mathcal{H}_j,\mathcal{H}_i)$ sa $T_{ij}=E_iT|\mathcal{H}_j$. Tada matrica $[T_{ij}]_{i,j\in I}$ potpuno određuje operator T. Obično ćemo tu matricu identificirati s operatorom T.

Zadatak 3.5.3. *Neka je $T = [T_{ij}]_{i,j\in I} \in B(\mathcal{H})$ i $A = \bigoplus_{i\in I} A_i \in \bigoplus_{i\in I} B(\mathcal{H}_i)$. Dokažite da vrijedi $TA = AT$ ako i samo ako je $T_{ij}A_j = A_iT_{ij}$ $\forall i, j \in I$.*

Razmotrimo sada posebno slučaj kad je I bilo kakav neprazan skup, $\mathcal{H}$ je Hilbertov prostor i $\mathcal{H}_i = \mathcal{H}$ za svaki $i \in I$. Tada se Hilbertov prostor $\bigoplus_{i\in I} \mathcal{H}_i$ označava sa $\mathcal{H}^{(I)}$. Taj se prostor identificira s prostorom svih funkcija $i \mapsto \xi_i$ sa I u $\mathcal{H}$ kojima je nosač konačan ili prebrojiv i vrijedi $\sum_{i\in I} \|\xi_i\|^2 < +\infty$. U tom slučaju za $A \in B(\mathcal{H})$ stavimo $A^{(I)} = \bigoplus_{i\in I} A_i$, gdje su $A_i = A$ $\forall i \in I$.

Zadatak 3.5.4. *Neka je $\mathcal{H}$ Hilbertov prostor, I neprazan skup, $A \in B(\mathcal{H})$ i $T = [T_{ij}]_{i,j\in I} \in B(\mathcal{H})$. Dokažite da je $A^{(I)}T = TA^{(I)}$ ako i samo ako je $AT_{ij} = T_{ij}A$ $\forall i \in I$.*

Ako je $\mathcal{S}$ bilo koji podskup algebre $B(\mathcal{H})$ i I neprazan skup, stavimo

$$\mathcal{S}^{(I)} = \{A^{(I)};\ A \in \mathcal{S}\}.$$

Lema 3.5.2. *Uz uvedenu oznaku vrijedi $\left[\mathcal{S}^{(I)}\right]'' = [\mathcal{S}'']^{(I)}$.*

Dokaz: Neka je $T = [T_{ij}] \in \left[\mathcal{S}^{(I)}\right]''$ i neka su $p \neq q$ proizvoljni elementi iz I. Označimo sa E_{pq} operator iz $B\left(\mathcal{H}^{(I)}\right)$ u čijoj matrici su sve nule osim na mjestu (p, q) na kome je jedinični operator $I_{\mathcal{H}}$:

$$(E_{pq})_{ij} = \delta_{ip}\delta_{jq}I_{\mathcal{H}}.$$

Tada je očito $E_{pq} \in \left[\mathcal{S}^{(I)}\right]'$, pa T komutira s tim operatorom. Računanje s matricama pokazuje da to znači da je $T_{pp} = T_{qq}$ i $T_{pq} = T_{qp} = 0$. To pokazuje da su svi nedijagonalni elementi matrice od T jednaki nuli a svi su dijagonalni elementi međusobno jednaki $-$ označimo ih sa S. Tada je $T = S^{(I)}$ i očito je $T \in \left[\mathcal{S}^{(I)}\right]''$ ako i samo ako je $S \in \mathcal{S}''$. Time je lema dokazana.

Neposredna je posljedica leme 3.5.2. i zadatka 3.5.4.:

Propozicija 3.5.3. *Neka $\mathcal{A}$ von Neumannova algebra na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$ i neka je I neprazan skup. Tada je $\mathcal{A}^{(I)}$ von Neumannova algebra na prostoru $\mathcal{H}^{(I)}$ i vrijedi*

$$\left[\mathcal{A}^{(I)}\right]' = \left\{T = [T_{ij}] \in B\left(\mathcal{H}^{(I)}\right);\ T_{ij} \in \mathcal{A}'\ \forall i, j \in I\right\}.$$

Poglavlje 4

TEOREMI GUSTOĆE

4.1 Topologije na algebrama operatora

Topologija na algebri $B(\mathcal{H})$ ograničenih linearnih operatora na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$ zadana normom operatora obično se zove **uniformna topologija** na $B(\mathcal{H})$. Svaka von Neumannova algebra na prostoru $\mathcal{H}$ zatvoren je potprostor od $B(\mathcal{H})$ u odnosu na tu topologiju. U ovom ćemo odjeljku definirati i usporediti nekoliko drugih prirodnih topologija na vektorskom prostoru $B(\mathcal{H})$. Važna je činjenica da je von Neumannova algebra zatvoren potprostor od $B(\mathcal{H})$ u odnosu na svaku od tih topologija, a posebno je važna činjenica da zatvorenost unitalne $*-$podalgebre od $B(\mathcal{H})$ u odnosu na bilo koju od tih topologija povlači da algebra von Neumannova.

Linearni topološki prostor je kompleksan vektorski prostor V na kome je zadana topologija takva da je zbrajanje $(v, w) \mapsto v + w$ neprekidno preslikavanje sa $V \times V$ u V i da je množenje skalarom $(\lambda, v) \mapsto \lambda v$ neprekidno preslikavanje sa $\mathbb{C} \times V$ u V. Kažemo da je V **lokalno konveksan** prostor, ili da je topologija na linearnom topološkom prostoru lokalno konveksna ako konveksni otvoreni skupovi u V tvore bazu topologije. Za to je dovoljno da konveksne okoline nule čine bazu okolina nule, tj. da svaka okolina nule sadrži konveksnu okolinu nule. Naravno, ako je V normiran prostor, njegova je topologija lokalno konveksna jer otvorene kugle su konveksni skupovi. **Polunorma** na vektorskom prostoru V je preslikavanje $p : V \to \mathbb{R}_+$ koje ima svojstva norme osim definitnosti:

Pozitivna homogenost: $p(\lambda v) = |\lambda| p(v) \ \ \forall \lambda \in \mathbb{C}$ i $\forall v \in V$.

Nejednakost trokuta: $p(v + w) \leq p(v) + p(w) \ \ \forall v, w \in V$.

Ako je $\mathcal{P}$ neki skup polunormi na vektorskom prostoru V, za $v_0 \in V$, za $p_1, \ldots, p_n \in \mathcal{P}$ i za $\varepsilon > 0$ definiramo skup

$$U(v_0; p_1, \ldots, p_n; \varepsilon) = \{v \in V;\ p_j(v - v_0) < \varepsilon \ \text{ za } \ j = 1, \ldots, n\}.$$

Zadatak 4.1.1. *Uz uvedenu oznaku dokažite:*

(a) *Skupovi $U(v_0; p_1, \ldots, p_n; \varepsilon)$ su konveksni.*

(b) *Skupovi $U(v_0; p_1, \ldots, p_n; \varepsilon)$, $n \in \mathbb{N}$, $p_1, \ldots, p_n \in \mathcal{P}$, $\varepsilon > 0$, čine bazu okolina točke v_0 za jedinstvenu topologiju na V. Za tu topologiju kažemo da je* **topologija zadana skupom polunormi** $\mathcal{P}$.

(c) *S topologijom iz (b) V je lokalno konveksan prostor.*

(*d*) *Prostor V je Hausdorffov ako i samo ako vrijedi:*

$$v \in V,\ p(v) = 0\ \forall p \in \mathcal{P} \qquad \Longrightarrow \qquad v = 0.$$

Zadatak 4.1.2. *Neka je V lokalno konveksan prostor na kome je topologija zadana skupom $\mathcal{P}$ polunormi na V i neka je T topološki prostor. Dokažite:*

(*a*) *Preslikavanje $f : X \mapsto V$ je neprekidno u točki $t_0 \in T$ ako i samo ako je funkcija $t \mapsto p(f(t))$ sa T u $\mathbb{R}$ neprekidna u točki t_0 za svaku polunormu $p \in \mathcal{P}$.*

(*b*) *Preslikavanje $f : V \mapsto X$ je neprekidno u točki $v_0 \in V$ ako i samo ako za svaku okolinu U točke $f(v_0)$ u T postoje $n \in \mathbb{N}$, $p_1, \ldots, p_n \in \mathcal{P}$ i $\varepsilon > 0$ takvi da vrijedi*

$$v \in V,\ p_j(v - v_0) < \varepsilon \text{ za } j = 1, \ldots, n \qquad \Longrightarrow \qquad f(v) \in U.$$

Zadatak 4.1.3. *Neka su V i W lokalno konveksni prostori na kojima su topologije zadane skupovima polunormi $\mathcal{P}$ na V i $\mathcal{Q}$ na W. Dokažite da su za linearan operator $A : V \to W$ sljedeća svojstva međusobno ekvivalentna:*

(*a*) *A je neprekidan u nekoj točki $v_0 \in V$.*

(*b*) *A je neprekidan svuda na V.*

(*c*) *Za svaku polunormu $q \in \mathcal{Q}$ postoje $n \in \mathbb{N}$, $p_1, \ldots, p_n \in \mathcal{P}$ i $M > 0$ takvi da vrijedi:*

$$q(Av) \leq M \max\{p_1(v), \ldots, p_n(v)\} \qquad \forall v \in V.$$

Posebno, linearan funkcional $f : V \to \mathbb{C}$ neprekidan je ako i samo ako postoje $p_1, \ldots, p_n \in \mathcal{P}$ i $M > 0$ takvi da vrijedi

$$|f(v)| \leq M \max\{p_1(v), \ldots, p_n(v)\} \qquad \forall v \in V.$$

Važna je činjenica da i u slučaju lokalno konveksnih prostora vrijedi **Hahn−Banachov teorem** koji navodimo bez dokaza:

Teorem 4.1.1. *Neka je V lokalno konveksan prostor i W potprostor. Svaki se neprekidan linearan funkcional na prostoru W može proširiti do neprekidnog linearnog funkcionala na V.*

Ovaj teorem ima važnu posljedicu o geometriji konveksnih podskupova u lokalno konveksnom prostorima. U tu svrhu je prirodnije promatrati prostore nad poljem $\mathbb{R}$ realnih brojeva. Primijetimo da svaki lokalno konveksan prostor V nad poljem $\mathbb{C}$ suženjem polja skalara na $\mathbb{R}$ postaje lokalno konveksan prostor $V_{\mathbb{R}}$ nad poljem $\mathbb{R}$. Nadalje, $\mathbb{C}-$linearan funkcional $f : V \to \mathbb{C}$ neprekidan je ako i samo ako su $g = \mathrm{Re}\, f$ i $h = \mathrm{Im}\, f$ neprekidni $\mathbb{R}-$linearni funkcionali $V_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$.

Za svaki neprekidan $\mathbb{R}-$linearan funkcional $f : V \to \mathbb{R}$ i za svaki $c \in \mathbb{R}$ stavimo

$$V_{f,c} = \{v \in V;\ f(v) \leq c\}.$$

Takvi su skupovi zatvoreni i zovu se **zatvoreni poluprostori** u prostoru V. Svaki je zatvoren poluprostor očito konveksan skup. Pomoću Hahn−Banachovog teorema izvodi se sljedeći teorem o zatvaraču konveksnog podskupa lokalno konveksnog prostora, koji također navodimo bez dokaza:

Teorem 4.1.2. *Neka je V lokalno konveksan prostor i S njegov konveksan podskup. Tada je zatvarač od S jednak presjeku svih zatvorenih poluprostora koji sadrže skup S.*

Odatle neposredno slijedi za nas važna činjenica:

Korolar 4.1.3. *Neka je V vektorski prostor i τ i σ dvije lokalno konveksne topologije na V takve da je linearni funkcional f na prostoru V $\tau-$neprekidan ako i samo ako je on $\sigma-$neprekidan. Tada je za svaki konveksan podskup od V njegov $\tau-$zatvarač jednak njegovom $\sigma-$zatvaraču.*

Ako su τ i σ topologije na skupu T kažemo da je topologija τ **jača** od σ ako ima "više otvorenih skupova", odnosno, ako je svaki otvoren podskup topološkog prostora (T,σ) ujedno otvoren podskup topološkog prostora (T,τ). Ekvivalentno, identiteta $1_T : T \to T$ je neprekidno preslikavanje sa (T,τ) u (T,σ). Ako je topološki prostor Hausdorffov, njegova je topologija potpuno određena s konvergencijom hipernizova. Ako su i τ i σ Hausdorffove topologije na skupu T, svojstvo da je topologija τ jača od topologije σ može se ekvivalentno i ovako iskazati: svaki konvergentan hiperniz $(t_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ u topološkom prostoru (T,τ) je konvergentan i u topološkom prostoru (T,σ) i vrijedi

$$\tau-\lim_{\lambda\in\Lambda} t_\lambda = \sigma-\lim_{\lambda\in\Lambda} t_\lambda.$$

U daljnjem je $\mathcal{H}$ Hilbertov prostor i $B(\mathcal{H})$ algebra ograničenih linearnih operatora na prostoru $\mathcal{H}$. Definirat ćemo sada četiri (lokalno konveksne) topologije na prostoru $B(\mathcal{H})$

1. Slaba topologija na $B(\mathcal{H})$ je lokalno konveksna topologija određena skupom polunormi $\{p_{\xi,\eta};\ \xi,\eta\in\mathcal{H}\}$, gdje je

$$p_{\xi,\eta}(A) = |(A\xi|\eta)|, \qquad A\in B(\mathcal{H}).$$

Tu ćemo topologiju označavati znakom w. Bazu okolina nule čine skupovi

$$U_w\left(0;(\xi_1,\eta_1),\ldots,(\xi_m,\eta_m);\varepsilon\right) = \{A\in B(\mathcal{H});\ |(A\xi_j|\eta_j)|<\varepsilon \text{ za } j=1,\ldots,m\},$$

$$m\in\mathbb{N},\quad \xi_1,\ldots,\xi_m,\eta_1,\ldots,\eta_m\in\mathcal{H},\quad \varepsilon>0.$$

Primijetimo da nam je za opis slabe topologije dovoljan skup polunormi $\{p_{\xi,\xi};\ \xi\in\mathcal{H}\}$. To slijedi iz tzv. **polarizacijske jednakosti**:

$$4(A\xi|\eta) = (A(\xi+\eta)|\xi+\eta) - (A(\xi-\eta)|\xi-\eta) + i(A(\xi+i\eta)|\xi+i\eta) - i(A(\xi-i\eta)|\xi-i\eta).$$

Slaba topologija na $B(\mathcal{H})$ je najslabija među svim topologijama na $B(\mathcal{H})$ za koje su sva preslikavanja $A\mapsto(A\xi|\eta)$, $\xi,\eta\in\mathcal{H}$, sa $B(\mathcal{H})$ u $\mathbb{C}$ neprekidna.

Slaba topologija na $B(\mathcal{H})$ očito je Hausdorffova i u skladu je sa strukturom vektorskog prostora (preslikavanja $(A,B)\mapsto A+B$ sa $B(\mathcal{H})_w\times B(\mathcal{H})_w$ u $B(\mathcal{H})_w$ i $(\lambda,A)\mapsto\lambda A$ sa $\mathbb{C}\times B(\mathcal{H})_w$ u $B(\mathcal{H})_w$ su neprekidna), ali nije u skladu sa strukturom algebre: iako su za svaki $B\in B(\mathcal{H})$ preslikavanja $A\mapsto AB$ i $A\mapsto BA$ sa $B(\mathcal{H})_w$ u $B(\mathcal{H})_w$ neprekidna, vidjet ćemo u propoziciji 4.1.5. da u slučaju beskonačnodimenzionalnog prostora $\mathcal{H}$ preslikavanje $(A,B)\mapsto AB$ sa $B(\mathcal{H})_w\times B(\mathcal{H})_w$ u $B(\mathcal{H})_w$ nije neprekidno. Međutim, adjungiranje $A\mapsto A^*$ sa $B(\mathcal{H})_w$ u $B(\mathcal{H})_w$ jest neprekidno, jer vrijedi $p_{\xi,\eta}(A-A_0)=p_{\eta,\xi}(A^*-A_0^*)$.

2. Jaka topologija na $B(\mathcal{H})$ je lokalno konveksna topologija određena skupom polunormi $\{p_\xi;\ \xi\in\mathcal{H}\}$, gdje je

$$p_\xi(A) = \|A\xi\|, \qquad A\in B(\mathcal{H}).$$

Tu ćemo topologiju označavati znakom s. Bazu okolina nule čine skupovi

$$U_s\left(0;\xi_1,\ldots,\xi_m;\varepsilon\right) = \{A\in B(\mathcal{H});\ \|A\xi_j\|<\varepsilon \text{ za } j=1,\ldots,m\},$$

$$m\in\mathbb{N},\quad \xi_1,\ldots,\xi_m,\in\mathcal{H},\quad \varepsilon>0.$$

To je najslabija među svim topologijama na $B(\mathcal{H})$ za koje su sva preslikavanja $A \mapsto A\xi$, $\xi \in \mathcal{H}$, sa $B(\mathcal{H})$ u $\mathcal{H}$ neprekidna. I ova je topologija u skladu sa strukturom vektorskog prostora, ali kao što ćemo vidjeti u propoziciji 4.1.5. ne i algebre, ako je prostor $\mathcal{H}$ beskonačnodimenzionalan. Štoviše, adjungiranje $A \mapsto A^*$ nije neprekidno sa $B(\mathcal{H})_s$ u $B(\mathcal{H})_s$, ako je prostor $\mathcal{H}$ beskonačnodimenzionalan. Tu je činjenicu jednostavno dokazati. Uzmimo da je $\{e_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ ortonormiran skup u $\mathcal{H}$ i neka su operatori A_n definirani sa $A_n\xi = (\xi|e_n)e_1$. Iz $\lim_{n\to\infty}(\xi|e_n) = 0$ slijedi $s-\lim_{n\to\infty} A_n = 0$. Međutim, imamo $A_n^* e_1 = e_n$, pa slijedi da niz $(A_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$ ne konvergira nuli u odnosu na jaku topologiju. To između ostalog pokazuje da se jaka i slaba topologija ne podudaraju.

Propozicija 4.1.4. *Jaka topologija na $B(\mathcal{H})$ jača je od slabe topologije na $B(\mathcal{H})$. Drugim riječima, svaka slaba okolina nule sadrži neku jaku okolinu nule.*

Dokaz: Neka su $\xi_1, \ldots, \xi_m, \eta_1, \ldots, \eta_m \in \mathcal{H}$ i $\varepsilon > 0$. Možemo pretpostaviti da nisu svi vektori $\eta_1, \ldots, \eta_m$ jednaki 0; naime, u suprotnom je $U_w(0; (\xi_1, \eta_1), \ldots, (\xi_m, \eta_m); \varepsilon) = B(\mathcal{H})$. Stavimo sada

$$\delta = \frac{\varepsilon}{\max\{\|\eta_1\|, \ldots, \|\eta_m\|\}}.$$

Za $A \in U_s(0; \xi_1, \ldots, \xi_m; \delta)$ imamo

$$|(A\xi_j|\eta_j)| \leq \|A\xi_j\|\|\eta_j\| < \delta \max\{\|\eta_1\|, \ldots, \|\eta_m\|\} = \varepsilon.$$

To pokazuje da je $U_s(0; \xi_1, \ldots, \xi_m; \delta) \subseteq U_w(0; (\xi_1, \eta_1), \ldots, (\xi_m, \eta_m); \varepsilon)$, pa je propozicija dokazana.

Propozicija 4.1.5. *Neka je $\mathcal{H}$ beskonačnodimenzionalan Hilbertov prostor. Tada množenje $(A, B) \mapsto AB$ nije ni slabo ni jako neprekidno, tj. nije neprekidno sa $B(\mathcal{H})_w \times B(\mathcal{H})_w$ u $B(\mathcal{H})_w$ niti sa $B(\mathcal{H})_s \times B(\mathcal{H})_s$ u $B(\mathcal{H})_s$.*

Dokaz: Možemo pretpostaviti da je prostor $\mathcal{H}$ separabilan, odnosno, da ima prebrojivu ortonormiranu bazu $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$. U protivnom izaberemo ortonormiran niz $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ i promatramo podalgebru svih operatora iz $B(\mathcal{H})$ za koje je zatvoren potprostor određen s tim nizom invarijantan, a na ortogonalnom komplementu su nula.

Definiramo niz operatora $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ovako:

$$A_n = S^n, \qquad Se_n = e_{n-1} \quad \text{za} \quad n \geq 2, \qquad Se_1 = 0.$$

Za proizvoljan $\xi \in \mathcal{H}$ imamo

$$\xi = \sum_{k\in\mathbb{N}} (\xi|e_k)e_k \qquad \text{i} \qquad \sum_{k\in\mathbb{N}} |(\xi|e_k)|^2 < +\infty.$$

Odatle je

$$\|A_n\xi\|^2 = \left\|\sum_{k\in\mathbb{N}} (\xi|e_k)A_n e_k\right\|^2 = \left\|\sum_{k>n} (\xi|e_k)e_{k-n}\right\|^2 = \sum_{k>n} |(\xi|e_k)|^2,$$

a to teži k nuli kada n teži u ∞. To pokazuje da niz $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jako konvergira prema nuli, dakle, prema propoziciji 4.1.4. i slabo konvergira prema nuli. Tada i niz $(A_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$ slabo konvergira prema nuli. Međutim, lako se vidi da je $A_n^* e_k = e_{k+n}$ za svaki n i svaki k. Odatle slijedi da je operator A_n^* izometrija; doista, za svaki $\xi \in \mathcal{H}$ imamo

$$\|A_n^*\xi\|^2 = \left\|\sum_{k\in\mathbb{N}} (\xi|e_k)e_{k+n}\right\|^2 = \sum_{k\in\mathbb{N}} |(\xi|e_k)|^2 = \|\xi\|^2.$$

Posebno, vidimo da niz $(A_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$ ne konvergira jako prema nuli.

Uočimo sada da je $A_n A_n^* e_k = A_n e_{k+n} = e_k$ za svaki k i svaki n, dakle, vrijedi $A_n A_n^* = I$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. To pokazuje da iako nizovi $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ i $(A_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiraju slabo prema nuli, niz produkata $(A_n A_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$ ne konvergira slabo prema nuli. Time je dokazano da množenje nije neprekidno sa $B(\mathcal{H})_w \times B(\mathcal{H})_w$ u $B(\mathcal{H})_w$.

Isti niz poslužit će nam i za dokaz iste tvrdnje za jaku topologiju. Neka je $\xi \in \mathcal{H}$ jedinični vektor i neka $0 < \varepsilon < 1$. Promatrat ćemo jaku okolinu nule $U_s(0; \xi; \varepsilon)$. Definiramo sada operatore

$$A_{n,\delta} = \frac{1}{\delta} A_n, \qquad B_{n,\delta} = \delta A_n^*, \qquad n \in \mathbb{N}, \quad \delta > 0.$$

Tada imamo

$$\|A_{n,\delta} B_{n,\delta} \xi\| = \|A_n A_n^* \xi\| = \|\xi\| = 1 > \varepsilon \qquad \Longrightarrow \qquad A_{n,\delta} B_{n,\delta} \notin U_s(0; \xi; \varepsilon).$$

Sada za bilo koje dvije jake okoline nule $U_s(0; \xi_1, \ldots, \xi_p; \varepsilon_1)$ i $U_s(0; \eta_1, \ldots, \eta_q; \varepsilon_2)$ izaberimo

$$0 < \delta < \frac{\varepsilon_2}{\max\{\|\eta_1\|, \ldots, \|\eta_q\|\}}.$$

Iskoristit ćemo sada činjenicu da su svi operatori A_n^* izometrije. Zbog toga za svaki $n \in \mathbb{N}$ i za $k = 1, \ldots, q$ imamo

$$\|B_{n,\delta} \eta_k\| = \delta \|A_n^* \eta_k\| = \delta \|\eta_k\| < \frac{\varepsilon_2}{\max\{\|\eta_1\|, \ldots, \|\eta_q\|\}} \|\eta_k\| \leq \varepsilon_2.$$

To pokazuje da je $B_{n,\delta} \in U_s(0; \eta_1, \ldots, \eta_q; \varepsilon_2)$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. S druge strane, budući da niz $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jako konvergira prema nuli, postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je

$$\|A_n \xi_k\| < \varepsilon_1 \delta, \qquad 1 \leq k \leq p.$$

Tada je

$$\|A_{n,\delta} \xi_k\| < \varepsilon_1, \qquad 1 \leq k \leq p, \qquad \text{tj.} \quad A_{n,\delta} \in U_s(0; \xi_1, \ldots, \xi_p; \varepsilon_1).$$

Dakle, u bilo koje dvije jake okoline nule pronašli smo operatore $A_{n,\delta}$ i $B_{n\delta}$ takve da njihov produkt $A_{n,\delta} B_{n,\delta}$ nije u zadanoj jakoj okolini nule $U_s(0; \xi; \varepsilon)$. Time je dokazano da preslikavanje $(A, B) \mapsto AB$ nije jako neprekidno u točki $(0, 0)$.

Za definicije preostalih dviju topologiju upotrebljavamo Hilbertov prostor $\mathcal{H}^{(\mathbb{N})}$ uveden u odjeljku 3.5. To je prostor svih nizova $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vektora iz $\mathcal{H}$ takvih da je $\sum_{n\in\mathbb{N}} \|\xi_n\|^2 < +\infty$. To je Hilbertov prostor u odnosu na skalarni produkt

$$\big((\xi_n)_{n\in\mathbb{N}} \big| (\eta_n)_{n\in\mathbb{N}}\big) = \sum_{n\in\mathbb{N}} (\xi_n | \eta_n).$$

3. Ultraslaba topologija na $B(\mathcal{H})$ je lokalno konveksna topologija određena skupom polunormi $\left\{p_{(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}, (\eta_n)_{n\in\mathbb{N}}};\ (\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}, (\eta_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{H}^{(\mathbb{N})}\right\}$, gdje je

$$p_{(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}, (\eta_n)_{n\in\mathbb{N}}}(A) = \left| \sum_{n\in\mathbb{N}} (A\xi_n | \eta_n) \right|, \qquad A \in B(\mathcal{H}).$$

4. Ultrajaka topologija na $B(\mathcal{H})$ je lokalno konveksna topologija određena skupom polunormi $\left\{p_{(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}};\ (\xi_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{H}^{(\mathbb{N})}\right\}$, gdje je

$$p_{(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}}(A) = \sqrt{\sum_{n\in\mathbb{N}} \|A\xi_n\|^2}, \qquad A \in B(\mathcal{H}).$$

Očito su te topologije Hausdorffove.

Propozicija 4.1.6. (*a*) *Ultrajaka topologija jača je od ultraslabe topologije.*

(*b*) *Ultraslaba topologija jača je od slabe topologije.*

(*c*) *Ultrajaka topologija jača je od jake topologije.*

Zadatak 4.1.4. *Dokažite propoziciju 4.1.6.*

Uputa: Dokaz tvrdnje (*a*) analogan je dokazu propozicije 4.1.4. Za tvrdnje (*b*) i (*c*) koristite činjenicu da je za svaki $\xi \in \mathcal{H}$ niz $(\xi_k)_{k\in\mathbb{N}}$, definiran sa $\xi_1 = \xi$, $\xi_k = 0$ za $k > 0$, element prostora $\mathcal{H}^{(\mathbb{N})}$.

Za ultraslabu topologiju upotrebljavat ćemo oznaku uw, a za ultrajaku us.

Zadatak 4.1.5. (*a*) *Dokažite da je preslikavanje $A \mapsto A^*$ ultraslabo neprekidno, ali da u slučaju beskonačnodimenzionalnog prostora $\mathcal{H}$ to preslikavanje nije ultrajako neprekidno.*

(*b*) *Dokažite da u slučaju beskonačnodimenzionalnog prostora $\mathcal{H}$ množenje $(A, B) \mapsto AB$ nije ultraslabo neprekidno, odnosno, da nije neprekidno sa $B(\mathcal{H})_{uw} \times B(\mathcal{H})_{uw}$ u $B(\mathcal{H})_{uw}$.*

(*c*) *Dokažite da u slučaju beskonačnodimenzionalnog prostora $\mathcal{H}$ množenje $(A, B) \mapsto AB$ nije ultrajako neprekidno, odnosno, da nije neprekidno sa $B(\mathcal{H})_{us} \times B(\mathcal{H})_{us}$ u $B(\mathcal{H})_{us}$.*

Uputa: Koristite iste operatore A_n, A_n^*, $A_{n,\delta}$ i $B_{n,\delta}$ kao u dokazu propozicije 4.1.5. Neki se dokazi mogu pojednostavniti primjenom propozicija 4.1.5. i 4.1.6.

Propozicija 4.1.7. *Neka je $\mathcal{H}$ Hilbertov prostor i $S \subseteq B(\mathcal{H})$ ograničen podskup.*

(*a*) *Jaka i ultrajaka topologija podudaraju se na S.*

(*b*) *Slaba i ultraslaba topologija podudaraju se na S.*

Dokaz: (*a*) Možemo pretpostaviti da je S zatvorena jedinična kugla $\{A \in B(\mathcal{H});\ \|A\| \leq 1\}$. Budući da znamo da je ultrajaka topologija jača od jake topologije na $B(\mathcal{H})$, dakle, i na S, dovoljno je dokazati da za svaku ultrajaku okolinu $\mathcal{U}$ nule u $B(\mathcal{H})$ postoji jaka okolina $\mathcal{U}_1$ nule u $B(\mathcal{H})$ takva da je $\mathcal{U}_1 \cap S \subseteq \mathcal{U}$. Za ultrajaku okolinu $\mathcal{U}$ nule u $B(\mathcal{H})$ postoji niz $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ u $\mathcal{H}$ takav da vrijedi $\sum_{n=1}^{\infty} \|\xi_n\|^2 < +\infty$ i da za $A \in B(\mathcal{H})$ nejednakost $\sum_{n=1}^{\infty} \|A\xi_n\|^2 \leq 1$ povlači da je $A \in \mathcal{U}$. Neka je $m \in \mathbb{N}$ takav da vrijedi $\sum_{n=m+1}^{\infty} \|\xi_n\|^2 \leq \frac{1}{2}$. Stavimo

$$\mathcal{U}_1 = \left\{ A \in B(\mathcal{H});\ \|A\xi_1\|^2 + \cdots + \|A\xi_m\|^2 \leq \frac{1}{2} \right\}.$$

Tada je $\mathcal{U}_1$ jaka okolina nule u $B(\mathcal{H})$. Nadalje, ako je $A \in S \cap \mathcal{U}_1$, onda je

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|A\xi_n\|^2 \leq \sum_{n=1}^{m} \|A\xi_n\|^2 + \|A\|^2 \sum_{n=m+1}^{\infty} \|\xi_n\|^2 \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

Dakle, $A \in \mathcal{U}$ i time smo dokazali da je $S \cap \mathcal{U}_1 \subseteq \mathcal{U}$.

Zadatak 4.1.6. *Dokažite tvrdnju (b) propozicije 4.1.7.*

Budući da je $\|A\xi\|^2 = (A^*A\xi|\xi)$, očito vrijedi:

Propozicija 4.1.8. *Hiperniz $(A_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ u $B(\mathcal{H})$ jako (odnosno, ultrajako) konvergira nuli ako samo ako hiperniz $(A_\lambda^* A_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ slabo (odnosno, ultra slabo) konvergira nuli.*

4.2 Linearni funkcionali na algebrama operatora

Neka je $\mathcal{H}$ Hilbertov prostor. Tada je $\mathcal{B} = B(\mathcal{H})$ Banachov prostor u odnosu na operatorsku normu. Označimo sa $\mathcal{B}^*$ njegov dual, tj. prostor svih ograničenih linearnih funkcionala $f : \mathcal{B} \to \mathbb{C}$. To je Banachov prostor u odnosu na normu

$$\|f\| = \sup\{|f(A)\|;\ A \in \mathcal{B},\ \|A\| \le 1\}.$$

U prethodnom odjeljku definirali smo još četiri lokalno konveksne topologije na prostoru $\mathcal{B}$, slabu (w), jaku (s), ultraslabu (uw) i ultrajaku (us). Pripadne prostore neprekidnih linearnih funkcionala označavat ćemo sa $\mathcal{B}_w^*$, $\mathcal{B}_s^*$, $\mathcal{B}_{uw}^*$ i $\mathcal{B}_{us}$. Sve su četiri topologije slabije od uniformne topologije na $\mathcal{B}$ definirane normom. Odatle i iz propozicija 4.1.4. i 4.1.6. slijedi

$$\mathcal{B}_w^* \subseteq \mathcal{B}_{uw}^* \subseteq \mathcal{B}_{us}^* \subseteq \mathcal{B}^* \qquad \text{i} \qquad \mathcal{B}_w^* \subseteq \mathcal{B}_s^* \subseteq \mathcal{B}_{us}^* \subseteq \mathcal{B}^*.$$

Za $\xi, \eta \in \mathcal{H}$ definiramo linearni fukcional $\omega_{\xi,\eta} : \mathcal{B} \to \mathbb{C}$ sa

$$\omega_{\xi,\eta}(A) = (A\xi|\eta), \qquad A \in \mathcal{B}.$$

Sve su ti linearni funkcionali očito slabo neprekidni, tj. elementi od $\mathcal{B}_w^*$. Štoviše, vrijedi

Propozicija 4.2.1. *Vrijedi $\mathcal{B}_w^* = \mathcal{B}_s^*$ i taj je prostor skup svih suma konačno mnogo funkcionala oblika $\omega_{\xi,\eta}$.*

Dokaz: Označimo sa X skup svih suma konačno mnogo funkcionala oblika $\omega_{\xi,\eta}$. To je vektorski prostor, budući da je $c\omega_{\xi,\eta} = \omega_{c\xi,\eta}$ za $c \in \mathbb{C}$ i $\xi, \eta \in \mathcal{H}$. Imamo inkluzije $X \subseteq \mathcal{B}_w^* \subseteq \mathcal{B}_s^*$, pa treba još dokazati da je $\mathcal{B}_s^* \subseteq X$.

Pretpostavimo da je $f \in \mathcal{B}_s^*$. Prema zadatku 4.1.3. postoje $M > 0$ i vektori $\xi_1, \ldots, \xi_n \in \mathcal{H}$ takvi da vrijedi

$$|f(A)| \le M \max\{\|A\xi_1\|, \ldots, \|A\xi_n\|\} \qquad \forall A \in \mathcal{B}.$$

Odatle slijedi

$$|f(A)| \le M \sum_{j=1}^n \|A\xi_j\| \le M\sqrt{n}\sqrt{\sum_{j=1}^n \|A\xi_j\|^2} \qquad \forall A \in \mathcal{B}.$$

Promatramo sada Hilbertov prostor $\mathcal{H}^{(n)} = \mathcal{H} \times \cdots \times \mathcal{H}$ (n faktora) sa skalarnim produktom

$$((\alpha_1, \ldots, \alpha_n)|(\beta_1, \ldots, \beta_n)) = \sum_{j=1}^n (\alpha_j|\beta_j), \qquad (\alpha_1, \ldots, \alpha_n), (\beta_1, \ldots, \beta_n) \in \mathcal{H}^{(n)}.$$

Neka je $\mathcal{K} = \{(A\xi_1, \ldots, A\xi_n);\ A \in \mathcal{B}\}$; to je očito potprostor od $\mathcal{H}^{(n)}$. Ako je $(A\xi_1, \ldots, A\xi_n) = 0$, iz bilo koje od gornjih nejednakosti slijedi da je $f(A) = 0$. Prema tome, možemo definirati linearan funkcional F na prostoru $\mathcal{K}$ sa

$$F((A\xi_1, \ldots, A\xi_n)) = f(A), \qquad A \in \mathcal{B}.$$

Imamo za svaki $A \in \mathcal{B}$

$$|F((A\xi_1, \ldots, A\xi_n))| = |f(A)| \le M\sqrt{n}\sqrt{\sum_{j=1}^n \|A\xi_j\|^2} = M\sqrt{n}\|(A\xi_1, \ldots, A\xi_n)|.$$

To pokazuje da je F ograničen linearan funkcional na potprostoru $\mathcal{K}$, pa se on po Hahn−Banachovom teoremu proširuje do ograničenog linearnog funkcionala na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}^{(n)}$. Taj prošireni funkcional također označimo sa F. Prema Rieszovom teoremu o ograničenim linearnim funkcionalima na Hilbertovom prostoru postoji vektor $(\eta_1, \ldots, \eta_n) \in \mathcal{H}^{(n)}$ takav da je

$$F((\alpha_1, \ldots, \alpha_n)) = ((\alpha_1, \ldots, \alpha_n)|(\eta_1, \ldots, \eta_n)) = \sum_{j=1}^{n} (\alpha_j|\eta_j) \qquad \forall (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathcal{H}^{(n)}.$$

No tada je za svaki $A \in \mathcal{B}$

$$f(A) = F((A\xi_1, \ldots, A\xi_n)) = \sum_{j=1}^{n} (A\xi_j, \eta_j),$$

dakle, vrijedi

$$f = \sum_{j=1}^{n} \omega_{\xi_j,\eta_j} \in X.$$

Time je propozicija dokazana.

Analogna je situacija i sa ultraslabo i ultrajako neprekidnim linearnim funkcionalima na $\mathcal{B}$. Za bilo koje $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}, (\eta_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{H}^{(\mathbb{N})}$ definiramo linearan funkcional $\omega_{(\xi_n),(\eta_n)} \in \mathcal{B}^*_{uw}$ sa

$$\omega_{(\xi_n),(\eta_n)}(A) = \sum_{n\in\mathbb{N}} (A\xi_n|\, \eta_n), \qquad A \in \mathcal{B}.$$

Primijetimo da je u ovom slučaju skup svih takvih linearnih funkcionala vektorski prostor. Doista, ako su $(\alpha_n), (\beta_n), (\gamma_n), (\delta_n) \in \mathcal{H}^{(\mathbb{N})}$, definiramo nizove (ξ_n) i (η_n) ovako

$$\xi_{2n} = \alpha_n, \qquad \xi_{2n+1} = \beta_n, \qquad \eta_{2n} = \gamma_n, \qquad \eta_{2n+1} = \delta_n, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Tada su $(\xi_n), (\eta_n) \in \mathcal{H}^{(\mathbb{N})}$ i vrijedi $\omega_{(\alpha_n),(\beta_n)} + \omega_{(\gamma_n),(\delta_n)} = \omega_{(\xi_n),(\eta_n)}$.

Zadatak 4.2.1. *Dokažite da je $\mathcal{B}^*_{uw} = \mathcal{B}^*_{us}$ i da se taj prostor podudara sa skupom svih funkcionala oblika $\omega_{(\xi_n),(\eta_n)}$, $(\xi_n), (\eta_n) \in \mathcal{H}^{(\mathbb{N})}$.*

Uputa: Imitirajte dokaz propozicije 4.2.1. Dokaz je u ovom slučaju u jednom detalju jednostavniji. Naime, analogno kao što smo ustanovili da je suma konačno mnogo linearnih funkcionala oblika $\omega_{(\xi_n),(\eta_n)}$ ponovo linearan funkcional tog oblika, zaključujemo da je suma kvadrata konačno mnogo polunormi $p_{(\xi_n)}$ također kvadrat takve polunorme. Stoga se ne mora u dokazu promatrati Hilbertov prostor $\left[\mathcal{H}^{(\mathbb{N})}\right]^{(n)}$, nego se može sve obaviti pomoću Hilbertovog prostora $\mathcal{H}^{(\mathbb{N})}$.

Sada zbog propozicije 4.2.1. i zadatka 4.2.1. iz korolara 4.1.3. neposredno slijedi:

Propozicija 4.2.2. *Neka je S konveskan podskup od $\mathcal{B}$. Tada se slabi zatvarač od S podudara s jakim zatvaračem od S. Također, ultraslabi zatvarač od S podudara se s ultrajakim zatvaračem od S.*

4.3 Teorem o bikomutantu

Neka je kao i prije $\mathcal{H}$ Hilbertov prostor i $\mathcal{B} = B(\mathcal{H})$ algebra svih ograničenih operatora na $\mathcal{H}$. Uočimo najprije jednu jednostavnu činjenicu:

Propozicija 4.3.1. *Za svaki podskup $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{B}$ algebra $\mathcal{S}'$ je slabo zatvorena, dakle, i jako zatvorena i ultraslabo zatvorena i ultrajako zatvorena i uniformno zatvorena.*

Dokaz: Tvrdnja je jednostavna posljedica činjenice da su za svaki fiksni $B \in \mathcal{S}$ preslikavanja $A \mapsto AB$ i $A \mapsto BA$ slabo neprekidna, tj. neprekidna sa $\mathcal{B}_w$ u $\mathcal{B}_w$. Doista, ako je $(A_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ slabo konvergentan hiperniz u $\mathcal{B}$ sa slabim limesom A, onda vrijedi

$$\lim_{\lambda\in\Lambda}(A_\lambda\xi|\eta) = (A\xi|\eta) \qquad \forall\xi,\eta\in\mathcal{H}$$

No tada je i

$$\lim_{\lambda\in\Lambda}(A_\lambda B\xi|\eta) = (AB\xi|\eta) \qquad \forall\xi,\eta\in\mathcal{H} \qquad \Longrightarrow \qquad AB = w - \lim_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda B.$$

Analogno, budući da je $(BA_\lambda\xi|\eta) = (A_\lambda\xi|B^*\eta)$ i $(BA\xi|\eta) = (A\xi|B^*\eta)$, vrijedi i

$$\lim_{\lambda\in\Lambda}(BA_\lambda\xi|\eta) = (BA\xi|\eta) \qquad \forall\xi,\eta\in\mathcal{H} \qquad \Longrightarrow \qquad BA = w - \lim_{\lambda\in\Lambda} BA_\lambda.$$

Time je propozicija dokazana.

Budući da je von Neumannova algebra jednaka svom bikomutantu, odatle neposredno slijedi:

Korolar 4.3.2. *Svaka von Neumannova algebra na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$ je slabo zatvorena, dakle, i jako zatvorena i ultraslabo zatvorena i ultrajako zatvorena i uniformno zatvorena.*

Svaka podalgebra $\mathcal{A}$ od $\mathcal{B}$ je ujedno potprostor, dakle, konveksan podskup od $\mathcal{B}$. Prema propoziciji njen slabi zatvarač je ujedno njen jaki zatvarač. (Također, njen ultraslabi zatvarač je ujedno njen ultrajaki zatvarač). No ako je $\mathcal{A}$ unitalna $*-$podalgebra, jaki (tj. slabi) zatvarač može se opisati potpuno algebarski. To je **teroem o bikomutantu:**

Teorem 4.3.3. *Neka je $\mathcal{A}$ unitalna $*-$podalgebra od $\mathcal{B}$. Tada je $\mathcal{A}''$ jaki (slabi) zatvarač od $\mathcal{A}$.*

Dokaz: Neka je $\mathcal{C}$ jaki zatvarač od $\mathcal{A}$. Tada je $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{A}''$ jer je algebra $\mathcal{A}''$ jako zatvorena. Neka je $T \in \mathcal{A}''$ i neka je $n \in \mathbb{N}$. Ako je $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathcal{H}^{(n)}$, onda je potprostor $\mathcal{K} = Cl(\mathcal{A}^{(n)}\xi)$ od $\mathcal{H}^{(n)}$ $\mathcal{A}^{(n)}-$invarijantan. Kako je $\mathcal{A}$ $*-$algebra i ortogonalni komplement od $\mathcal{K}$ je $\mathcal{A}^{(n)}-$invarijantan potprostor. Dakle, ako je P projektor $\mathcal{H}^{(n)}$ na $\mathcal{K}$, vrijedi $P \in \left[\mathcal{A}^{(n)}\right]'$. Prema lemi 3.5.2. slijedi da je $T^{(n)}P = PT^{(n)}$. No to znači da su potprostor $\mathcal{K}$ i njegov ortogonalni komplement invarijantni u odnosu na operator $T^{(n)}$. Posebno, vrijedi $T^{(n)}\xi \in \mathcal{K} = Cl(\mathcal{A}^{(n)}\xi)$ i to za svaki $n \in \mathbb{N}$ i za svaki $\xi \in \mathcal{H}^{(n)}$. Da bismo odatle zaključili da je $T \in \mathcal{C}$, trebaju nam još neki pojmovi i činjenice.

Za bilo koji potprostor $\mathcal{S}$ od $\mathcal{B}$ (ne nužno zatvoren) definiramo tzv. **pridružen potprostor**

$$\operatorname{Ref}\mathcal{S} = \{T \in \mathcal{B};\ T\xi \in Cl(\mathcal{S}\xi)\ \ \forall\xi\in\mathcal{H}\}.$$

Propozicija 4.3.4. *Neka je $\mathcal{S}$ potprostor od $\mathcal{B}$.*

(*a*) Ref $\mathcal{S}$ *je jako zatvoren potprostor od $\mathcal{B}$.*

(b) $\operatorname{Ref}\operatorname{Ref}\mathcal{S} = \operatorname{Ref}\mathcal{S}$.

(c) *Vrijedi* $\operatorname{Ref}\mathcal{S}^* = (\operatorname{Ref}\mathcal{S})^*$. *Pri tom za svaki podskup* $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ *sa* $\mathcal{A}^*$ *označavamo skup* $\{A^*;\ A \in \mathcal{A}\}$.

Dokaz: (b) Očito uvijek vrijedi $\mathcal{S} \subseteq \operatorname{Ref}\mathcal{S}$. Odatle slijedi $\operatorname{Ref}\mathcal{S} \subseteq \operatorname{Ref}\operatorname{Ref}\mathcal{S}$. Neka je sada $T \in \operatorname{Ref}\operatorname{Ref}\mathcal{S}$. Neka je $\xi \in \mathcal{H}$ proizvoljan. Tada vrijedi $T\xi \in Cl((\operatorname{Ref}\mathcal{S})\xi)$. Prema tome, postoji niz (A_n) u $\operatorname{Ref}\mathcal{S}$ takav da je $T\xi = \lim A_n\xi$. Kako je svaki $A_n \in \operatorname{Ref}\mathcal{S}$, vrijedi $A_n\xi \in Cl(\mathcal{S}\xi)$. Prema tome, vrijedi $T\xi \in Cl(\mathcal{S}\xi)$. Kako je $\xi \in \mathcal{H}$ bio proizvoljan, zaključujemo da je $T \in \operatorname{Ref}\mathcal{S}$. Time je dokazana i obrnuta inkluzija $\operatorname{Ref}\operatorname{Ref}\mathcal{S} \subseteq \operatorname{Ref}\mathcal{S}$.

Zadatak 4.3.1. *Dokažite tvrdnje* (a) *i* (c) *propozicije 4.3.4.*

Propozicija 4.3.5. *Neka je* $\mathcal{S}$ *potprostor od* $\mathcal{B}$. *Tada je jaki zatvarač od* $\mathcal{S}$ *jednak*

$$\{T \in \mathcal{B};\ T^{(n)} \in \operatorname{Ref}\mathcal{S}^{(n)}\ \forall n \in \mathbb{N}\}.$$

Dokaz: Označimo sa $\mathcal{T}$ gore definiran skup i neka je $\mathcal{R}$ jaki zatvarač od $\mathcal{S}$.

Zadatak 4.3.2. *Dokažite da potprostor* $\mathcal{T}$ *jako zatvoren.*

Budući da očito vrijedi $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}$, slijedi da je i $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{T}$. Neka je $T \in \mathcal{T}$. Da bismo dokazali da je $T \in \mathcal{R}$, treba dokazati da za proizvoljne $\xi_1, \ldots, \xi_n j \in \mathcal{H}$ i za proizvoljan $\varepsilon > 0$ postoji $S \in \mathcal{S}$ takav da je $T\xi_j - S\xi_j\| < \varepsilon$ za $j = 1, \ldots, n$. No to znači da za svaki $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathcal{H}^{(n)}$ treba dokazati da je $T^{(n)}\xi \in Cl(\mathcal{S}^{(n)}\xi)$. No to jest tako po definiciji skupa $\mathcal{T}$. Time je dokazana i obrnuta inkluzija $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{R}$.

Sada možemo završiti dokaz teorema o bikomutantu. Dokazali smo da za svaki $T \in \mathcal{A}''$ i svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $T^{(n)} \in \operatorname{Ref}\mathcal{A}^{(n)}$. Prema propoziciji 4.3.5. to znači da je bikomutant $\mathcal{A}''$ sadržan u jakom zatvaraču $\mathcal{C}$ od $\mathcal{A}$. Time je dokazana i obrnuta inkluzija $\mathcal{A}'' \subseteq \mathcal{C}$.

4.4 Von Neumannov teorem gustoće

U ovom i u sljedećem odjeljku za svaki realan ili kompleksan normiran prostor X sa X_1 ćemo označavati zatvorenu jediničnu kuglu $\overline{K}_X(0,1) = \{x \in X;\ \|x\| \leq 1\}$ u X. Općenito, ako je potprostor Y normiranog prostora X gust u X, ne mora jedinična kugla Y_1 biti gusta u X_1. U ovom ćemo odjeljku vidjeti da to ipak vrijedi ako se radi o $*-$podalgebrama algebre $\mathcal{B} = B(\mathcal{H})$ i to za bilo koju od uvedene četiri lokalno konveksne topologije, slabu, jaku, ultraslabu ili ultrajaku.

Prije svega, treba nam nekoliko pomoćnih tvrdnji. U daljnjem je $\mathcal{H}$ Hilbertov prostor i $\mathcal{B} = B(\mathcal{H})$. Sjetimo se oznake

$$X_{\mathcal{S}}^{\mathcal{T}} = Cl(span\{T\xi;\ T \in \mathcal{T},\ \xi \in \mathcal{S}\}, \qquad \mathcal{S} \subseteq \mathcal{H}, \quad \mathcal{T} \subseteq \mathcal{B}.$$

Za jednočlan skup $\{\xi\}$, $\xi \in \mathcal{H}$, pišemo kraće $X_\xi^{\mathcal{T}}$ umjesto $X_{\{\xi\}}^{\mathcal{T}}$. Ako je $\mathcal{A}$ podalgebra od $\mathcal{B}$, onda je očito $X_\xi^{\mathcal{A}} = Cl(\mathcal{A}\xi)$.

Lema 4.4.1. *Neka je $\mathcal{A}$ $*-$podalgebra od $\mathcal{B} = B(\mathcal{H})$. Stavimo*

$$X = X_{\mathcal{H}}^{\mathcal{A}} = Cl(span\{A\xi;\ A \in \mathcal{A},\ \xi \in \mathcal{H}\}).$$

i neka je P projektor na X. Tada je

$$X^\perp = \{\xi \in \mathcal{H};\ A\xi = 0\ \forall A \in \mathcal{A}\}.$$

Nadalje, vrijedi $A = PA = AP$ za svaki $A \in \mathcal{A}$ i, posebno, $P \in \mathcal{A}'$.

Dokaz: Za $T \in \mathcal{B}$ označimo kao i obično sa $N(T)$ njegovu jezgru i sa $R(T)$ njegovu sliku. Tada znamo da je $N(T) = R(T^*)^\perp$. Budući da je $\mathcal{A}$ $*-$algebra, slijedi da je

$$X^\perp = (span\{A\xi;\ A \in \mathcal{A},\ \xi \in \mathcal{H}\})^\perp = \left(\bigcup_{A\in\mathcal{A}} R(A)\right)^\perp = \bigcap_{A\in\mathcal{A}} R(A)^\perp =$$

$$= \bigcap_{A\in\mathcal{A}} N(A) = \{\xi \in \mathcal{H};\ A\xi = 0\ \forall A \in \mathcal{A}\}.$$

Budući da je $I - P$ projektor na $X^\perp$, slijedi da je $A(I - P) = 0$, dakle, $A = AP$ za svaki $A \in \mathcal{A}$. Kako je $\mathcal{A}$ $*-$algebra, imamo i $A^* = A^*P$ za svaki $A \in \mathcal{A}$, a odatle adjungiranjem slijedi $A = PA$ za svaki $A \in \mathcal{A}$.

Lema 4.4.2. *Neka je $\mathcal{A}$ $*-$podalgebra od $\mathcal{B} = B(\mathcal{H})$ takva da je $X_{\mathcal{H}}^{\mathcal{A}} = \mathcal{H}$. Tada za svaki $\xi \in \mathcal{H}$ vrijedi $\xi \in X_\xi^{\mathcal{A}}$.*

Dokaz: Neka je $\xi \in \mathcal{H}$ i neka je P projektor na $X_\xi^{\mathcal{A}}$. Stavimo $\eta = P\xi$ i $\zeta = \xi - \eta$. Tada je $A\xi \in X_\xi^{\mathcal{A}}$ za svaki $A \in \mathcal{A}$. Nadalje, $X_\xi^{\mathcal{A}}$ je očito $\mathcal{A}-$invarijantan, pa vrijedi i $A\eta \in X_\xi^{\mathcal{A}}$ za svaki $A \in \mathcal{A}$. Dakle, imamo i $A\zeta \in X_\xi^{\mathcal{A}}$ za svaki $A \in \mathcal{A}$. No $\zeta \perp X_\xi^{\mathcal{A}}$, pa imamo

$$0 = (A^*A\zeta|\zeta) = \|A\zeta\|^2 \quad \forall A \in \mathcal{A} \qquad \Longrightarrow \qquad A\zeta = 0 \quad \forall A \in \mathcal{A}.$$

Prema lemi 4.4.1. to znači da je $\zeta \perp X_{\mathcal{H}}^{\mathcal{A}}$, a kako je po pretpostavci $X_{\mathcal{H}}^{\mathcal{A}} = \mathcal{H}$, zaključujemo da je $\zeta = 0$. To znači da je $\xi = \eta = P\xi \in X_\xi^{\mathcal{A}}$.

Lema 4.4.3. *Neka je $\mathcal{A}$ $*-$podalgebra od $\mathcal{B}$ takva da je $X_{\mathcal{H}}^{\mathcal{A}} = \mathcal{H}$. Tada je $\mathcal{A}''$ ultrajaki zatvarač od $\mathcal{A}$.*

Dokaz: Neka su $S \in \mathcal{A}''$ i $\xi \in \mathcal{H}$. Budući da je $X_\xi^\mathcal{A}$ zatvoren potprostor od $\mathcal{H}$ koji je $\mathcal{A}-$invarijantan, svaki operator $A \in \mathcal{A}$ komutira s projektorom $E_\xi^\mathcal{A}$ na $X_\xi^\mathcal{A}$. To znači da je $E_\xi^\mathcal{A} \in \mathcal{A}'$, pa komutira sa S. Posebno, potprostor $X_\xi^\mathcal{A}$ je $S-$invarijantan. Prema lemi 4.4.2. je $\xi \in X_\xi^\mathcal{A}$, pa slijedi i $S\xi \in X_\xi^\mathcal{A}$. To znači da postoji niz (T_n) u $\mathcal{A}$ takav da je $S\xi = \lim_n T_n\xi$.

Budući da je $\mathcal{A}''$ ultrajako zatvorena podalgebra od $\mathcal{B}$ koja sadrži $\mathcal{A}$, treba dokazati da je $\mathcal{A}''$ sadržana u ultrajakom zatvaraču od $\mathcal{A}$. Neka je $S \in \mathcal{A}''$ i neka je $(\xi_n) \in \mathcal{H}^{(\mathbb{N})}$. Treba dokazati da za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $T \in \mathcal{A}$ takav da je $p_{(\xi_n)}(S - T) < \varepsilon$, tj. da je $\sum_{n\in\mathbb{N}} \|(S - T)\xi_n\|^2 < \varepsilon^2$. Za $A \in \mathcal{B}$ označimo kao i ranije sa $A^{(\mathbb{N})}$ operator iz $B(\mathcal{H}^{(\mathbb{N})})$ definiran sa $A^{(\mathbb{N})}(\xi_n) = (A\xi_n)$. Prema propoziciji 3.5.1. vrijedi $S^{(\mathbb{N})} \in \left(\mathcal{A}^{(\mathbb{N})}\right)''$.

Zadatak 4.4.1. *Dokažite da iz* $X_\mathcal{H}^\mathcal{A} = \mathcal{H}$ *slijedi* $X_{\mathcal{H}^{(\mathbb{N})}}^{\mathcal{A}^{(\mathbb{N})}} = \mathcal{H}^{(\mathbb{N})}$.

Uputa: Dokažite da $X_{\mathcal{H}^{(\mathbb{N})}}^{\mathcal{A}^{(\mathbb{N})}}$ sadrži svaki od potprostora

$$\{0\} \oplus \cdots \oplus \{0\} \oplus \mathcal{H} \oplus \{0\} \oplus \{0\} \oplus \cdots\cdots .$$

Sada prema prvom dijelu dokaza znamo da je $S^{(\mathbb{N})}(\xi_n)$ limes u $\mathcal{H}^{(\mathbb{N})}$ niza oblika $\left(T_k^{(\mathbb{N})}(\xi_n)\right)$, gdje je (T_k) niz u $\mathcal{A}$. Odatle slijedi da je $\lim_{k\to\infty} p_{(\xi_n)}(S - T_k) = 0$.

U odjeljku 4.2. vidjeli smo da se jako neprekidni linearni funkcionali na $\mathcal{B}$ podudaraju sa slabo neprekidnim linearnim funkcionalima i to su upravo konačne sume linearnih funkcionala oblika $\omega_{\xi,\eta}(A) = (A\xi|\eta)$ (propozicija 4.2.1.) Slično, ultrajako neprekidni funkcionali podudaraju se s ultrajako neprekidnim funkcionalima i to su upravo beskonačne sume $\sum_n \omega_{\xi_n,\eta_n}$, gdje su $(\xi_n), (\eta_n) \in \mathcal{H}^{(\mathbb{N})}$ (zadatak 4.2.1.) Trebat će nam još i sljedeći jači rezultat o linearnim funkcionalima:

Teorem 4.4.4. *Neka je* $\mathcal{M}$ *ultraslabo* (*dakle, i ultrajako*) *zatvoren potprostor od* $\mathcal{B}$ *i neka je* $\varphi : \mathcal{M} \to \mathbb{C}$ *linearni funkcional. Sljedeća su svojstva međusobno ekvivalentna:*

(*a*) φ *je ultraslabo neprekidan.*

(*b*) φ *je ultrajako neprekidan.*

(*c*) *Restrikcija* $\varphi|\mathcal{M}_1$ *je slabo neprekidna.*

(*d*) *Restrikcija* $\varphi|\mathcal{M}_1$ *je jako neprekidna.*

(*e*) *Restrikcija* $\varphi|\mathcal{M}_1$ *je ultraslabo neprekidna.*

(*f*) *Restrikcija* $\varphi|\mathcal{M}_1$ *je ultrajako neprekidna.*

Dokaz: Zbog Hahn−Banachovog teorema neprekidan linearan funkcional na $\mathcal{M}$ produljuje se do neprekidnog linearnog funkcionala na $\mathcal{B}$ (za bilo koju od lokalno konveksnih topologija na $\mathcal{B}$). Prema tome, iz zadatka 4.2.1. slijedi $(a) \Leftrightarrow (b)$ (i to su upravo restrikcije funkcionala oblika $\sum_n \omega_{\xi_n,\eta_n}$, gdje su $(\xi_n), (\eta_n) \in \mathcal{H}^{(\mathbb{N})}$). Nadalje, očito vrijedi $(a) \Rightarrow (e)$ i $(b) \Rightarrow (f)$. Iz propozicije 4.1.7. slijedi $(c) \Leftrightarrow (e)$ i $(d) \Leftrightarrow (f)$. Prema tome, ostaje još da se dokaže npr. implikacija $(f) \Rightarrow (b)$. To slijedi iz sljedećeg teorema koji je u uskoj vezi s teoremom 4.1.2. i koji također navodimo bez dokaza:

Teorem 4.4.5. *Linearni funkcional na zatvorenom potprostoru lokalno konveksnog prostora je neprekidan ako i samo ako mu je jezgra zatvoren potprostor.*

Naime, iz ultrajake neprekidnosti restrikcije $\varphi|\mathcal{M}_1$ slijedi da je $(\operatorname{Ker}\varphi)\cap\mathcal{M}_1$ ultrajako zatvoren podskup od $\mathcal{M}_1$, a odatle slijedi da je potprostor $\operatorname{Ker}\varphi$ ultrajako zatvoren, dakle, φ je ultrajako neprekidan.

Teorem 4.4.6. *Neka je $\mathcal{A}$ $*-$podalgebra od $\mathcal{B}$.*

(a) *Sljedećih je osam svojstava međusobno ekvivalentno:*

- $(a1)$ *$\mathcal{A}$ je slabo zatvorena.*
- $(a2)$ *$\mathcal{A}_1$ je slabo zatvorena.*
- $(a3)$ *$\mathcal{A}$ je jako zatvorena.*
- $(a4)$ *$\mathcal{A}_1$ je jako zatvorena.*
- $(a5)$ *$\mathcal{A}$ je ultraslabo zatvorena.*
- $(a6)$ *$\mathcal{A}_1$ je ultraslabo zatvorena.*
- $(a7)$ *$\mathcal{A}$ je ultrajako zatvorena.*
- $(a8)$ *$\mathcal{A}_1$ je ultrajako zatvorena.*

(b) *Pretpostavimo da su ispunjena svojstva iz (a). Neka je $X = X_{\mathcal{H}}^{\mathcal{A}}$ i neka je P projektor na X. Tada je P najveći projektor u $\mathcal{A}$ i algebra $\mathcal{A}$ je unitalna s jedinicom P, tj. vrijedi $PA = AP = A$ za svaki $A \in \mathcal{A}$. Nadalje, $\mathcal{A}'' = \{\lambda I_{\mathcal{H}} + A;\ \lambda \in \mathbb{C},\ A \in \mathcal{A}\}$.*

Dokaz: (a) Zbog propozicije 4.2.2. vrijedi $(a1) \Leftrightarrow (a3)$, $(a2) \Leftrightarrow (a4)$, $(a5) \Leftrightarrow (a7)$ i $(a6) \Leftrightarrow (a8)$. Nadalje, zbog ekvivalencija u teoremu 4.4.4. i zbog teorema 4.1.2. slijedi da su $(a2)$, $(a4)$, $(a5)$, $(a6)$, $(a7)$ i $(a8)$ međusobno ekvivalentni. Očito vrijedi $(a1) \Rightarrow (a2)$. Dakle, dokaz tvrdnje (a) bit će potpun kad dokažemo da vrijedi npr. $(a7) \Rightarrow (a1)$.

(b) Prema lemi 4.4.1. P je jedinica algebre $\mathcal{A}$. Potprostori X i $X^{\perp}$ su $\mathcal{A}-$invarijantni i $\mathcal{A}|X^{\perp} = \{0\}$. Dakle, $A \mapsto A|X$ je izomorfizam algebre $\mathcal{A}$ na slabo zatvorenu $*-$podalgebru $\mathcal{C}$ od $B(X)$ koja sadrži jedinicu I_X. Prema teoremu 4.3.4. $\mathcal{C}$ je von Neumannova algebra na X, tj. $\mathcal{C} = \mathcal{C}''$. Operatori iz $\mathcal{A}'$ ostavljaju invarijantnim potprostore X i $X^{\perp}$, jer komutiraju sa P. Restrikcija takvog operatora na X je očito element algebre $\mathcal{C}'$, a restrikcija na X' može biti bilo kakva. Dakle, u odnosu na rastav $\mathcal{H} = X \oplus X^{\perp}$ imamo

$$\mathcal{A}' = \left\{ \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & T \end{bmatrix};\ C \in \mathcal{C}',\ T \in B(X^{\perp}) \right\}.$$

Budući da je $\mathfrak{c}'' = \mathcal{C}$ i $B(X^{\perp})' = \{\lambda I_{X^{\perp}};\ \lambda \in \mathbb{C}\}$, odatle slijedi

$$\mathcal{A}'' = \left\{ \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & \lambda I_{X^{\perp}} \end{bmatrix};\ C \in \mathcal{C},\ \lambda \in \mathbb{C} \right\} = \{A + \lambda I_{\mathcal{H}};\ A \in \mathcal{A},\ \lambda \in \mathbb{C}\}.$$

Time je tvrdnja (b) dokazana.

Pretpostavimo da vrijedi $(a7)$, tj. da je $\mathcal{A}$ ultrajako zatvorena. Neka je $S \in \mathcal{B}$ u slabom zatvaraču od $\mathcal{A}$. Tada je, naravno, $S \in \mathcal{A}''$, dakle, $S = T + \lambda I_{\mathcal{H}}$ za neki $T \in \mathcal{A}$ i neki $\lambda \in \mathbb{C}$. Nadalje, iz $AP = P\ \ \forall A \in \mathcal{A}$ slijedi da je

$$S = SP = TP + \lambda P \in \mathcal{A}.$$

Dakle, $\mathcal{A}$ je slabo zatvorena, tj. vrijedi $(a1)$. Time je dokazana još preostala implikacija $(a7) \Rightarrow (a1)$ u dokazu tvrdnje (a).

Odatle i iz leme 4.4.3. neposredno slijedi pojačanje teorema o bikomutantu:

Korolar 4.4.7. *Neka je $\mathcal{A}$ $*-$podalgebra od $\mathcal{B}$ takva da je $X_{\mathcal{H}}^{\mathcal{A}} = \mathcal{H}$. Tada je von Neumannova algebra $\mathcal{A}''$ zatvarač od $\mathcal{A}$ u odnosu na svaku od četiri topologije: slabu, jaku, ultraslabu i ultrajaku.*

Korolar 4.4.8. *Neka je $\mathcal{A}$ $*-$podalgebra od $\mathcal{B}$ takva da je $X_{\mathcal{H}}^{\mathcal{A}} = \mathcal{H}$. $\mathcal{A}$ je von Neumannova algebra ako i samo ako je $\mathcal{A}$ zatvorena u odnosu na bilo koju od četiri topologije, a također ako i samo ako je jedinična kugla $\mathcal{A}_1$ zatvorena u odnosu na bilo koju od četiri topologije.*

Korolar 4.4.9. *Neka je $\mathcal{A}$ von Neumannova algebra na $\mathcal{H}$ i neka je $\mathcal{M}$ ultraslabo zatvoren lijevi ideal u $\mathcal{A}$. Tada je $\mathcal{M}$ slabo zatvoren. Nadalje, postoji jedinstven projektor $E \in \mathcal{A}$ takav da je $\mathcal{M} = \{A \in \mathcal{A};\ A = AE\}$. Ako je ideal $\mathcal{M}$ dvostrani, projektor E leži u centru od $\mathcal{A}$.*

Dokaz: Stavimo $\mathcal{N} = \mathcal{M} \cap \mathcal{M}^*$. Tada je $\mathcal{N}$ ultraslabo zatvorena $*-$podalgebra od $\mathcal{B}$ (sadržana u $\mathcal{A}$). Neka je E najveći projektor u $\mathcal{N}$. Stavimo $\mathcal{L} = \{A \in \mathcal{A};\ AE = A\}$. Budući da je $E \in \mathcal{M}$ i $\mathcal{M}$ je lijevi ideal, slijedi $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{M}$. Neka je $A \in \mathcal{M}$ i $A = W|A|$ njegova kanonska polarna dekompozicija. Tada je $|A| = W^*A \in \mathcal{M}$, a kako je $|A|$ hermitski, slijedi $|A| \in \mathcal{N}$. Sada iz leme 4.4.1. slijedi da je $|A|E = |A|$, a odatle je $AE = W|A|E = W|A| = A$. Dakle, $A \in \mathcal{L}$ i dokazana je obrnuta inkluzija $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{L}$. Dakle, $\mathcal{M} = \{A \in \mathcal{A};\ AE = A\}$. Ako je i F projektor iz $\mathcal{A}$ takav da je $\mathcal{M} = \mathcal{A}F$, tj. $\mathcal{M} = \{A \in \mathcal{A};\ AF = A\}$, onda je posebno $E = EF$, dakle, $E \leq F$, a također je $F = FE$, dakle, $F \leq E$. Prema tome, $F = E$ i time je jedinstvenost od E dokazana. Napokon, ako je $\mathcal{M}$ dvostrani ideal, onda je $\mathcal{M} = U\mathcal{M}U^{-1}$ za svaki $U \in \mathcal{U}(\mathcal{A})$. Odatle slijedi $E = UEU^{-1}$, odnosno, $EU = UE$ za svaki $U \in \mathcal{A}$. No unitarni operatori razapinju $\mathcal{A}$, pa slijedi da je $E \in \mathcal{A}'$, dakle, $E \in \mathcal{A} \cap \mathcal{A}'$.

Korolar 4.4.10. *Neka je von Neumannova algebra $\mathcal{A}$ na $\mathcal{H}$ faktor. Tada je svaki dvostrani ideal u $\mathcal{A}$ različit od $\{0\}$ ultrajako gust u $\mathcal{A}$.*

Dokaz: Neka je $\mathcal{M} \neq \{0\}$ dvostrani ideal u $\mathcal{A}$. Njegov ultrajaki zatvarač $\mathcal{N}$ je ujedno njegov ultraslabi zatvarač, dakle, to je ultraslabo zatvoren dvostrani ideal u $\mathcal{A}$. No tada prema korolaru za najveći projektor E u $\mathcal{N}$ vrijedi $\mathcal{N} = \{A \in \mathcal{A};\ AE = A\}$. Kako je $\mathcal{A}$ faktor i $E \neq 0$ prema korolaru 4.4.9. leži u centru od $\mathcal{A}$, slijedi $E = I$. No to znači da je $\mathcal{N} = \mathcal{A}$.

Korolar 4.4.11. *Neka je $\mathcal{A}$ von Neumannova algebra, $\mathcal{M}$ dvostrani ideal u $\mathcal{A}$ i $\mathcal{L}$ njegov slabi zatvarač. Za svaki $A \in \mathcal{L}_+$ postoji rastući hiperniz u $\mathcal{M}_+$ takav da je A njegov supremum.*

Dokaz: Pomoću Zornove leme pokazuje se postoji maksimalan podskup $\mathcal{T}$ od $\mathcal{M}_+$ takav da za svaki konačan podskup $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}$ vrijedi

$$T_{\mathcal{S}} = \sum_{T \in \mathcal{S}} T \leq A.$$

Uredimo li skup $\mathcal{F}$ svih konačnih podskupova od $\mathcal{T}$ inkluzijom, $(T_{\mathcal{S}})_{\mathcal{S} \in \mathcal{F}}$ je hiperniz u $\mathcal{M}_+$. Njegov supremum B je element od $\mathcal{L}_+$ sa svojstvom $B \leq A$. Stavimo $C = A - B \in \mathcal{L}_+$. Neka je E najveći projektor u $\mathcal{L}$. Kako je $\mathcal{L}$ slabi zatvarač od $\mathcal{M}$, postoji hiperniz (D_i) u $\mathcal{M}$ koji slabo konvergira prema E. No tada hiperniz $(\sqrt{C} D_i \sqrt{C})$ slabo konvergira prema $\sqrt{C} E \sqrt{C} = C$. Dakle, ako je $C \neq 0$, postoji $D \in \mathcal{M}$ takav da je $\sqrt{C} D \sqrt{C} \neq 0$. Možemo pretpostaviti da je $D \in \mathcal{M}_+$ i da je $0 \leq D \leq I$. No tada $\sqrt{C} D \sqrt{C} \leq C$ i $\sqrt{C} D \sqrt{C} \in \mathcal{M}_+$. To je u suprotnosti s maksimalnošću skupa $\mathcal{T}$: naime, tada bi $\mathcal{T} \cup \{\sqrt{C} D \sqrt{C}\}$ bio striktno veći podskup od $\mathcal{M}_+$ s traženim svojstvom. Ova kontradikcija pokazuje da je $C = 0$, odnosno,

$$A = B = \sup \{T_{\mathcal{S}};\ \mathcal{S} \in \mathcal{F}\}.$$

Napomenimo da ekvivalencija $(a2) \Leftrightarrow (a5)$ ne vrijedi za proizvoljan potprostor $\mathcal{A}$ od $\mathcal{B}$ ako je prostor $\mathcal{H}$ beskonačnodimenzionalan. To slijedi iz činjenice da postoje ultraslabo neprekidni linearni funkcionali koji nisu slabo neprekidni.

4.5 Teorem gustoće Kaplanskog

Teorem 4.5.1. *Neka su $\mathcal{A}$ i $\mathcal{C}$ $*-$podalgebre od $\mathcal{B} = B(\mathcal{H})$ takve da je $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{C}$ i da je $\mathcal{A}$ jako gusta u $\mathcal{C}$. Tada je $\mathcal{A}_1$ jako gusto u $\mathcal{C}_1$, a također je $(\mathcal{A}_h)_1$ jako gusto u $(\mathcal{C}_h)_1$.*

Dokaz: Možemo pretpostaviti da su $\mathcal{A}$ i $\mathcal{C}$ uniformno zatvorene (zatvorene u odnosu na normu), tj. C^*-podalgebre od $\mathcal{B}$, budući da je $\mathcal{A}_1$ uniformno gusto u jediničnoj kugli uniformnog zatvarača od $\mathcal{A}$, a također je $(\mathcal{A}_h)_1$ uniformno gusto u jediničnoj kugli uniformnog zatvarača od $(\mathcal{A}_h)_1$. (Naravno, isto vrijedi i za $\mathcal{C}$ i $\mathcal{C}_h$).

Neka je $S \in \mathcal{C}_h$. Tada je S u jakom zatvaraču od $\mathcal{A}$, a to je ujedno slabi zatvarač od $\mathcal{A}$. Budući da je preslikavanje $A \mapsto \frac{1}{2}(A + A^*)$ slabo neprekidno i ostavlja S fiksnim, slijedi da je S u slabom zatvaraču od $\mathcal{A}_h$. No to je ujedno jaki zatvarač od $\mathcal{A}_h$. Dakle, $\mathcal{A}_h$ je jako gusto u $\mathcal{C}_h$.

Pretpostavimo sada da je $\|S\| \leq 1$, tj. $S \in (\mathcal{C}_h)_1$. Funkcija

$$f(t) = \frac{2t}{1+t^2}, \qquad t \in \mathbb{R},$$

je neprekidna, striktno rastuća na $[-1, 1]$ i preslikava segment $[-1, 1]$ na samog sebe. Prema tome, i $g = f^{-1}$ je takva funkcija. Stavimo sada $R = g(S)$. Tada je $R \in (\mathcal{C}_h)_1$ i $S = f(R) = 2R(I+R^2)^{-1}$. Za proizvoljan $A \in \mathcal{A}_h$ stavimo $B = 2A(I + A^2)^{-1}$. Budući da je $|f(t)| \leq 1$ za svaki $t \in \mathbb{R}$, slijedi da je $B \in (\mathcal{A}_h)_1$. Nadalje,

$$\frac{1}{2}(B - S) = (1 + A^2)^{-1} \left[A(I + R^2) - (I + A^2)R\right] (I + R^2)^{-1} =$$

$$= (I + A^2)^{-1}(A - R)(I + R^2)^{-1} + (I + A^2)^{-1}A(R - A)R(I + R^2)^{-1} =$$

$$= (I + A^2)^{-1}(A - R)(I + R^2)^{-1} + \frac{1}{4}B(R - A)S.$$

Ako A jako konvergira prema R (a takav hiperniz u $\mathcal{A}_h$ možemo odabrati jer smo dokazali da je $\mathcal{A}_h$ jako gusto $\mathcal{C}_h$), onda iz gornje jednakosti slijedi da B jako konvergira prema S, budući da vrijedi

$$\left\|(I + A^2)^{-1}\right\| \leq 1 \qquad \text{i} \qquad \|B\| \leq 1.$$

Prema tome, kugla $(\mathcal{A}_h)_1$ je jako gusta u kugli $(\mathcal{C}_h)_1$.

Da dokažemo jaku gustoću $\mathcal{A}_1$ u $\mathcal{C}_1$, konstruiramo Hilbertov prostor $\mathcal{H}^{(2)} = \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$. Možemo identificirati $\tilde{\mathcal{B}} = B\left(\mathcal{H}^{(2)}\right)$ sa

$$M_2(B(\mathcal{H})) = \left\{T = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix};\ T_{11}, T_{12}, T_{21}, T_{22} \in B(\mathcal{H})\right\}.$$

Neka je

$$\tilde{\mathcal{A}} = M_2(\mathcal{A}) \qquad \text{i} \qquad \tilde{\mathcal{C}} = M_2(\mathcal{C}).$$

Zadatak 4.5.1. *Dokažite da su $\tilde{\mathcal{A}}$ i $\tilde{\mathcal{C}}$ $*-$podalgebre od $\tilde{\mathcal{B}}$ i da je $\tilde{\mathcal{A}}$ jako gusta u $\tilde{\mathcal{C}}$.*

Neka je $S \in \mathcal{C}_1$. Definiramo

$$\tilde{S} = \begin{bmatrix} 0 & S^* \\ S & 0 \end{bmatrix} \in \tilde{\mathcal{C}}.$$

Zadatak 4.5.2. *Dokažite da je $\tilde{S} \in (\tilde{\mathcal{C}}_h)_1$.*

Prema dokazanom postoji hiperniz operatora $T = [T_{ij}]$ u $(\tilde{\mathcal{A}}_h)_1$ koji jako konvergira prema $\tilde{S}$. No tada je očito hiperniz operatora T_{21} sadržan u $\mathcal{A}_1$ i jako konvergira prema S.

Korolar 4.5.2. *Neka je $\mathcal{A}$ C^*−podalgebra od $\mathcal{B} = B(\mathcal{H})$ i neka je $\varphi : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ linearan funkcional. Stavimo $\mathcal{A}_{+1} = \mathcal{A}_+ \cap \mathcal{A}_1$. Ako je restrikcija $\varphi|\mathcal{A}_{+1}$ jako neprekidna u nuli, onda je funkcional φ ultraslabo i ultrajako neprekidan.*

Dokaz: Preslikavanja $T \mapsto T_+$ i $T \mapsto T_-$ sa $(\mathcal{A}_h)_1$ u $\mathcal{A}_{+1}$ su jako neprekidna u nuli, budući da je $\|T_+\xi\| \leq \|T\xi\|$ i $\|T_-\xi\| \leq \|T\xi\|$ za svaki $\xi \in \mathcal{H}$. Budući da je $T = T_+ - T_-$, slijedi da je restrikcija $\varphi|\,(\mathcal{A}_h)_1$ jako neprekidna u nuli.

Neka je D zatvoren konveksan podskup od $\mathbb{C}$. Tada je $\varphi^{-1}(D) \cap (\mathcal{A}_h)_1$ jako zatvoren konveksan podskup od $(\mathcal{A}_h)_1$. Prema propoziciji 4.2.2. slabi zatvarač skupa $\varphi^{-1}(D) \cap (\mathcal{A}_h)_1$ je ujedno jaki zatvarač tog skupa. Dakle, skup $\varphi^{-1}(D) \cap (\mathcal{A}_h)_1$ je slabo zatvoren u $(\mathcal{A}_h)_1$. Komplement bilo kojeg otvorenog kvadrata $U \subseteq \mathbb{C}$ je unija četiri zatvorene poluravnine. Odatle slijedi da je $\varphi^{-1}(U) \cap (\mathcal{A}_h)_1$ slabo otvoren u $(\mathcal{A}_h)_1$. To pokazuje da je restrikcija $\varphi|\,(\mathcal{A}_h)_1$ svuda slabo neprekidna. Budući da su $T \mapsto \frac{1}{2}(T + T^*)$ i $T \mapsto \frac{1}{2i}(T - T^*)$ slabo neprekidna preslikavanja sa $\mathcal{A}_1$ u $(\mathcal{A}_h)_1$, slijedi da je restrikcija $\varphi|\mathcal{A}_1$ slabo neprekidna. Sve to možemo provesti za svaku zatvorenu kuglu $\mathcal{A}_r = \{A \in \mathcal{A};\ \|A\| \leq r\}$, $r > 0$. Dakle, restrikcija $\varphi|\mathcal{A}_r$ je slabo neprekidna za svaki $r > 0$. Neka je $\mathcal{C}$ slabi zatvarač od $\mathcal{A}$. Tada je prema teoremu 4.5.1. kugla $\mathcal{A}_r$ slabo gusta u $\mathcal{C}_r$. Prema tome, restrikcija $\varphi|\mathcal{A}_r$ jedinstveno se proširuje do slabo neprekidne funkcije $\psi_r : \mathcal{C}_r \to \mathbb{C}$. Tada očito vrijedi $\psi_r|\mathcal{C}_s = \psi_s$ za $0 < s < r$. Dakle, dobivamo slabo neprekidnu funkciju $\psi : \mathcal{C} \to \mathbb{C}$ takvu da je $\psi|\mathcal{C}_r = \psi_r$ za svaki $r > 0$, dakle, $\psi|\mathcal{A} = \varphi$. Iz linearnosti φ slijedi linearnost ψ. Dakle, ψ je linearan fukcional na $\mathcal{C}$ takav da je restrikcija $\psi|\mathcal{C}_1$ slabo neprekidna. Međutim, tada je prema teoremu 4.4.4. funkcional ψ ultraslabo i ultrajako neprekidan. Dakle, i $\varphi = \psi|\mathcal{A}$ je ultraslabo i ultrajako neprekidan linearan funkcional.

Poglavlje 5

POZITIVNI FUNKCIONALI

5.1 Pozitivni funkcionali na $*-$algebrama operatora

U ovom je odjeljku $\mathcal{H}$ Hilbertov prostor i $\mathcal{A}$ unitalna $*-$podalgebra od $B(\mathcal{H})$. Nadalje, $\mathcal{A}_h = \mathcal{A} \cap B_h(\mathcal{H})$, $\mathcal{A}_+ = \mathcal{A} \cap B_+(\mathcal{H})$.

Pozitivan funkcional na $\mathcal{A}$ je linearan funkcional $\varphi : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ takav da je

$$\varphi(A) \geq 0 \qquad \forall A \in \mathcal{A}_+.$$

Propozicija 5.1.1. *Neka je $\varphi : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ pozitivan funkcional. Tada vrijedi:*

(*a*) *$\varphi(\mathcal{A}_h) \subseteq \mathbb{R}$ i $\varphi(A^*) = \overline{\varphi(A)}$ za svaki $A \in \mathcal{A}$.*

(*b*) *Vrijedi $|\varphi(A^*B)|^2 \leq \varphi(A^*A)\varphi(B^*B)$.*

(*c*) *Funkcional φ je ograničen i $\|\varphi\| = \varphi(I)$.*

(*d*) *Za svaki $B \in \mathcal{A}$ funkcional $A \mapsto \varphi(B^*AB)$ je pozitivan i norma mu je $\varphi(B^*B)$.*

Zadatak 5.1.1. *Dokažite propoziciju 5.1.1.*

Kažemo da je **pozitivan fukcional** φ na $\mathcal{A}$ **vjeran** ako za $A \in \mathcal{A}_+$ vrijedi $\varphi(A) = 0$ ako i samo ako je $A = 0$.

Za linearne funkcionale $\varphi, \psi : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ pišemo $\varphi \geq \psi$ ili $\psi \leq \varphi$ ako je funkcional $\varphi - \psi$ pozitivan.

U odjeljku 4.2. za vektore $\xi, \eta \in \mathcal{H}$ definirali smo linearni funkcional $\omega_{\xi,\eta}$ na $B(\mathcal{H})$, dakle, i na $\mathcal{A}$, sa $\omega_{\xi,\eta}(A) = (A\xi|\eta)$. Nadalje, za $(\xi_n), (\eta_n) \in \mathcal{H}^{(\mathbb{N})}$ definirali smo linearni funkcional $\omega_{(\xi_n),(\eta_n)}$ na $B(\mathcal{H})$, dakle, i na $\mathcal{A}$, sa $\omega_{(\xi_n),(\eta_n)}(A) = \sum_{n\in\mathbb{N}}(A\xi_n|\eta_n)$, tj. $\omega_{(\xi_n),(\eta_n)} = \sum_{n\in\mathbb{N}}\omega_{\xi_n,\eta_n}$. Uočimo da je za svaki $\xi \in \mathcal{H}$ funkcional $\omega_\xi = \omega_{\xi,\xi}$ pozitivan. Također, za svaki $(\xi_n) \in \mathcal{H}^{(\mathbb{N})}$ funkcional $\omega_{(\xi_n)} = \omega_{(\xi_n),(\xi_n)}$ je pozitivan.

Propozicija 5.1.2. *Neka je ψ pozitivan funkcional na $\mathcal{A}$ i neka je $\xi \in \mathcal{H}$ vektor takav da je $\psi \leq \omega_\xi|\mathcal{A}$. Tada postoji $T \in \mathcal{A}'$ takav da je $0 \leq T \leq I$ i $\psi = \omega_{T\xi}|\mathcal{A}$.*

Dokaz: Prema tvrdnji (*b*) propozicije 5.1.1. za $A, B \in \mathcal{A}$ vrijedi

$$|\psi(B^*A)|^2 \leq \psi(A^*A)\psi(B^*B) \leq \omega_\xi(A^*A)\omega_\xi(B^*B) = \|A\xi\|^2\|B\xi\|^2.$$

To posebno pokazuje da za $A, A', B, B' \in \mathcal{A}$, takve da je $A\xi = A'\xi$ i $B\xi = B'\xi$, vrijedi $\psi(B^*A) = \psi(B'^*A')$. To znači da na potprostoru $\mathcal{A}\xi$ od $\mathcal{H}$ možemo definirati seskvilinearnu formu $\langle \cdot | \cdot \rangle$ sa

$$\langle A\xi | B\xi \rangle = \psi(B^*A), \qquad A, B \in \mathcal{A}.$$

Nadalje, zbog tvrdnje (a) propozicije 5.1.1. ta je forma hermitska, tj. $\langle B\xi|A\xi\rangle = \overline{\langle A\xi|B\xi\rangle}$, i zbog pozitivnosti ψ ona je pozitivno semidefinitna. Nadalje, zbog gornje nejednakosti ta je forma ograničena i norma joj je ≤ 1. Stoga je možemo jedinstveno produljiti do ograničene hermitske pozitivno semidefinitne forme na Hilbertovom prostoru $X = Cl(\mathcal{A}\xi)$, koju i dalje označavamo sa $\langle\cdot|\cdot\rangle$, i ona je i dalje norme ≤ 1. Tada postoji hermitski operator S_0 na Hilbertovom prostoru X takav da je $0 \leq S_0 \leq I_X$ i da je

$$\langle\eta|\zeta\rangle = (S_0\eta|\zeta) \qquad \forall\eta,\zeta \in X.$$

Tada je, posebno,

$$\psi(B^*A) = \langle A\xi|B\xi\rangle = (S_0A\xi|B\xi) \qquad \forall A, B \in \mathcal{A}.$$

Za $A, B, C \in \mathcal{A}$ imamo

$$(S_0CA\xi|B\xi) = \psi\left(B^*CA\right) = \psi\left((C^*B)^*A)\right) = \left(S_0A\xi|\, C^*B\xi\right) = (CS_0A\xi|B\xi).$$

To pokazuje da vrijedi $S_0(C|X) = (C|X)S_0$ za svaki $C \in \mathcal{A}$. Neka je P projektor $\mathcal{H}$ na potprostor X. Neka je $S \in B(\mathcal{H})$ definiran sa $S\eta = S_0P\eta$. Drugim riječima, $S|X = S_0$ i $S|X^\perp = 0$. Tada je operator S hermitski i vrijedi $0 \leq S \leq I$. Nadalje, iz $S_0(C|X) = (C|X)S_0$ za svaki $C \in \mathcal{A}$ neposredno slijedi da je $S \in \mathcal{A}'$. Neka je $T = \sqrt{S} \in \mathcal{A}'$. Tada je $0 \leq T \leq I$ i za svaki $A \in \mathcal{A}$ imamo

$$\psi(A) = \psi(I^*A) = (S_0A\xi|\xi) = (SA\xi|\xi) = (T^2A\xi|\xi) = (AT\xi|T\xi) = \omega_{T\xi}(A).$$

Korolar 5.1.3. *Ako su $\xi, \eta \in \mathcal{H}$ takvi da je linearan funkcional $\omega_{\xi,\eta}|\mathcal{A}$ na $\mathcal{A}$ pozitivan, onda postoji $\zeta \in \mathcal{H}$ takav da je $\omega_{\xi,\eta}|\mathcal{A} = \omega_\zeta|\mathcal{A}$.*

Dokaz: Za svaki $A \in \mathcal{A}_+$ imamo

$$\omega_{\xi+\eta}(A) \geq \omega_{\xi+\eta}(A) - \omega_{\xi-\eta}(A) = (A(\xi+\eta|\xi+\eta) - (A(\xi-\eta)|\xi-\eta) = 4(A\xi|\eta) = 4\omega_{\xi,\eta}(A).$$

To znači da je $4\omega_{\xi,\eta}|\mathcal{A} \leq \omega_{\xi+\eta}|\mathcal{A}$. Sada iz propozicije 5.1.2. slijedi da postoji $T \in \mathcal{A}'$ takav da za $\zeta = T(\xi+\eta)$ vrijedi $\omega_{\xi,\eta}|\mathcal{A} = \omega_\zeta|\mathcal{A}$.

Lema 5.1.4. *Neka su $\mathcal{H}$, $\mathcal{K}$ i $\mathcal{L}$ Hilbertovi prostori, $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ i $\mathcal{C}$ unitalne $*-$podalgebre od $B(\mathcal{H})$, $B(\mathcal{K})$ i $B(\mathcal{L})$ i $\Phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ i $\Psi : \mathcal{A} \to \mathcal{C}$ surjektivni $*-$homomorfizmi. Pretpostavimo da postoje $\eta \in \mathcal{K}$ i $\zeta \in \mathcal{L}$ takvi da je $\mathcal{B}\eta$ gusto u $\mathcal{K}$ i da je $\mathcal{C}\zeta$ gusto u $\mathcal{L}$ i da vrijedi $(\Phi(A)\eta|\eta) = (\Psi(A)\zeta|\zeta)$ za svaki $A \in \mathcal{A}$. Tada postoji izometrički izomorfizam $U : \mathcal{K} \to \mathcal{L}$ takav da je $U\mathcal{B}U^{-1} = \mathcal{C}$ i da je $U\Phi(A)U^{-1} = \Psi(A)$ za svaki $A \in \mathcal{A}$.*

Dokaz: Za svaki $A \in \mathcal{A}$ imamo

$$\|\Phi(A)\eta\|^2 = (\Phi(A^*A)\eta|\eta) = (\Psi(A^*A)\zeta|\zeta) = \|\Psi(A)\zeta\|^2.$$

Odatle slijedi da postoji linearna izometrija $U : \mathcal{B}\eta \to \mathcal{C}\zeta$ takva da je

$$U\Phi(A)\eta = \Psi(A)\zeta \qquad \forall A \in \mathcal{A}.$$

Tada se U jedinstveno proširuje do izometričkog izomorfizma sa $\mathcal{K} = Cl(\mathcal{B}\eta)$ na $\mathcal{L} = Cl(\mathcal{C}\zeta)$, koji označimo također sa U. Za svaki $A, B \in \mathcal{A}$ tada vrijedi

$$\Psi(A)U\Phi(B)\eta = \Psi(A)\Psi(B)\zeta = \Psi(AB)\zeta = U\Phi(AB)\zeta = U\Phi(A)\Phi(B)\zeta.$$

Kako je $\Phi(\mathcal{A})\eta = \mathcal{B}\eta$ gusto u $\mathcal{K}$, slijedi $\Psi(A)U = U\Phi(A)$ za svaki $A \in \mathcal{A}$, odnosno, $\Psi(A) = = U\Phi(A)U^{-1}$ za svaki $A \in \mathcal{A}$. Odatle imamo i

$$U\mathcal{B}U^{-1} = U\Phi(\mathcal{A})U^{-1} = \Psi(\mathcal{A}) = \mathcal{C}.$$

Lema 5.1.5. *Za svaki pozitivan funkcional φ na $\mathcal{A}$ postoje Hilbertov prostor $\mathcal{K}$, linearan operator $\Gamma : \mathcal{A} \to \mathcal{K}$ s gustom slikom i ograničen unitalan $*-$homomorfizam $\Phi : \mathcal{A} \to B(\mathcal{K})$ takvi da za $\eta = \Gamma(I_{\mathcal{H}}) \in \mathcal{K}$ vrijedi*

$$\Gamma(A) = \Phi(A)\eta \qquad i \qquad \varphi(A) = (\Phi(A)\eta|\eta) \qquad \forall A \in \mathcal{A}.$$

Ako je funkcional φ vjeran, onda je vektor η separirajući za $\Phi(\mathcal{A})$.

Dokaz: Definiramo preslikavanje $(\,\cdot\,|\,\cdot\,)$ sa $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$ u $\mathbb{C}$ sa

$$(A|B) = \varphi(B^*A).$$

To je prema propoziciji 5.1.1. pozitivno semidefinitan hermitski funkcional. Nadalje, zbog tvrdnje (b) te propozicije vrijedi

$$\{A \in \mathcal{A};\ \varphi(A^*A) = 0\} = \{A \in \mathcal{A};\ \varphi(B^*A) = 0\ \forall B \in \mathcal{A}\}.$$

Odatle se vidi da je taj skup $\mathcal{M}$ potprostor od $\mathcal{A}$, štoviše, to je lijevi ideal u $\mathcal{A}$. Sada možemo definirati skalarni produkt na kvocijentnom prostoru $\mathcal{A}/\mathcal{M}$ sa

$$(A + \mathcal{M}|B + \mathcal{M}) = (A|B) = \varphi(B^*A), \qquad A, B \in \mathcal{A}.$$

Neka je $\mathcal{K}$ upotpunjenje tog unitarnog prostora. Definiramo $\Gamma : \mathcal{A} \to \mathcal{K}$ kao kvocijentno preslikavanje

$$\Gamma(A) = A + \mathcal{M}.$$

Tada je Γ linearno preslikavanje s gustom slikom $\mathcal{A}/\mathcal{M}$. Za $A \in \mathcal{A}$ definiramo linearni operator $\Phi(A) : \mathcal{A}/\mathcal{M} \to \mathcal{A}/\mathcal{M}$ sa

$$\Phi(A)(B + \mathcal{M}) = AB + \mathcal{M}, \qquad B \in \mathcal{A}.$$

To je preslikavanje dobro definirano jer je $\mathcal{M}$ lijevi ideal u $\mathcal{A}$. Nadalje, za $A, B \in \mathcal{A}$ koristeći tvrdnju (d) propozicije 5.1.1. imamo

$$\|\Phi(A)(B + \mathcal{M})\|^2 = (\Phi(A)(B + \mathcal{M})|\Phi(A)(B + \mathcal{M})) = (AB|AB) =$$
$$= \varphi(B^*A^*AB) \leq \|A^*A\|\varphi(B^*B) = \|A\|^2\|B + \mathcal{M}\|^2.$$

To pokazuje da je za svaki $A \in \mathcal{A}$ linearni operator $\Phi(A)$ ograničen i vrijedi $\|\Phi(A)\| \leq \|A\|$. Stoga se $\Phi(A)$ jedinstveno proširuje do operatora iz $B(\mathcal{K})$, koji ćemo i također označavati sa $\Phi(A)$. Iz definicije je jasno da je $\Phi : \mathcal{A} \to B(\mathcal{K})$ ograničen unitalan homomorfizam norme ≤ 1. Nadalje, to je $*-$homomorfizam, jer za $A, B, C \in \mathcal{A}$ imamo

$$(\Phi(A^*)(B + \mathcal{M})|C + \mathcal{M}) = (A^*B + \mathcal{M}|C + \mathcal{M}) = \varphi(C^*A^*B) = \varphi\left((AC)^*B\right) =$$
$$= (B + \mathcal{M}|AC + \mathcal{M}) = (B + \mathcal{M}|\Phi(A)(C + \mathcal{M}) \qquad \Longrightarrow \qquad \Phi(A^*) = \Phi(A)^*.$$

Napokon, za $A \in \mathcal{A}$ vrijedi

$$\Gamma(A) = A + \mathcal{M} = \Phi(A)(I_{\mathcal{H}} + \mathcal{M}) = \Phi(A)\Gamma(I_{\mathcal{H}}) = \Phi(A)\eta$$

i

$$(\Phi(A)\eta|\eta) = (A + \mathcal{M}|I + \mathcal{M}) = (A|I) = \varphi(A).$$

Ako je φ vjeran, onda je $\mathcal{M} = \{0\}$. Stoga $\Phi(A)\eta = 0$ povlači $\Gamma(A) = 0$, dakle, $A \in \mathcal{M}$, pa slijedi $A = 0$.

Lema 5.1.4. pokazuje da su prostor $\mathcal{K}$, vektor η i preslikavanje $\Phi : \mathcal{A} \to B(\mathcal{K})$ u lemi 5.1.5. jedinstveni do na izometrički izomorfizam.

Propozicija 5.1.6. *Neka je φ ograničen linearan funkcional na $\mathcal{A}$ takav da je $\varphi(I) = \|\varphi\|$. Tada je funkcional φ pozitivan.*

Dokaz: Možemo pretpostaviti da je $\varphi(I) = \|\varphi\| = 1$. Neka je $A \in \mathcal{A}_+$ i pretpostavimo da $\varphi(A) \ngeq 0$. Tada postoji $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ i $\rho > 0$ takav da je

$$\sigma(A) \subseteq \overline{K}(\lambda_0, \rho) \qquad \text{ali} \qquad \varphi(A) \notin \overline{K}(\lambda_0, \rho).$$

Tada je spektar normalnog operatora $A - \lambda_0 I$ sadržan u $\overline{K}(0, \rho)$, a kako je spektralni radijus normalnog operatora jednak njegovoj normi, slijedi da je $\|A - \lambda_0 I\| \leq \rho$. Stoga imamo

$$|\varphi(A) - \lambda_0| = |\varphi(A) - \lambda_0 \varphi(I)| = |\varphi(A - \lambda_0 I)| \leq \|\varphi\| \cdot \|A - \lambda_0 I\| = \|A - \lambda_0 I\| \leq \rho.$$

No to je u suprotnosti s izborom kruga $\overline{K}(\lambda_0, \rho)$. Ova kontradikcija dokazuje tvrdnju propozicije.

5.2 Normalni pozitivni funkcionali na von Neumannovoj algebri

Neka je $\mathcal{A}$ von Neumannova algebra na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$. **Pozitivan funkcional** φ na $\mathcal{A}$ zove se **normalan** ako za svaki rastući hiperniz $(A_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ u $\mathcal{A}_+$ sa supremumom $A \in \mathcal{A}_+$ vrijedi $\varphi(A) = \sup\{\varphi(A_\lambda);\ \lambda \in \Lambda\}$.

Zadatak 5.2.1. *Neka su φ i ψ pozitivni funkcionali na von Neumannovoj algebri $\mathcal{A}$ takvi da je $\varphi \le \psi$ i da je ψ normalan. Dokažite da je tada φ također normalan.*

Zadatak 5.2.2. *Neka je φ normalan pozitivan funkcional na von Neumannovoj algebri $\mathcal{A}$ i $B \in \mathcal{A}$. Dokažite da je tada pozitivan funkcional $A \mapsto \varphi(B^*AB)$ također normalan.*

Lema 5.2.1. *Neka su $\mathcal{A}$ von Neumannova algebra na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$, $A \in \mathcal{A}_+$ i φ i ψ normalni pozitivni funkcionali na $\mathcal{A}$ takvi da je $\varphi(A) < \psi(A)$. Tada postoji $0 \ne B \in \mathcal{A}_+$ takav da je $B \le A$ i da za svaki $0 \ne C \in \mathcal{A}_+$ takav da je $C \le B$ vrijedi $\varphi(C) < \psi(C)$.*

Dokaz: Neka je
$$\mathcal{S} = \{B \in \mathcal{A}_+;\ B \le A,\ \varphi(B) \ge \psi(B)\}.$$
Taj je skup parcijalno uređen relacijom $\le$ među operatorima. Primjenom Zornove leme dobiva se da u skupu $\mathcal{S}$ postoji bar jedan maksimalan element B_1. Tada je $\varphi(B_1) \ge \psi(B_1)$ i $B_1 \le A$. Stavimo $B = A - B_1$. Tada je $0 \ne B \in \mathcal{A}_+$ i $B \le A$. Nadalje, ako je $0 \ne C \in \mathcal{A}_+$ takav da je $C \le B$, tada je $C + B_1 \le A$, $B_1 \le C + B_1$ i $C + B_1 \ne B_1$. Zbog maksimalnosti B_1 slijedi da je $\varphi(C + B_1) < \psi(C + B_1)$, pa slijedi $\varphi(C) < \psi(C)$.

Teorem 5.2.2. *Pozitivan linearan funkcional φ na von Neumannovoj algebri $\mathcal{A}$ je normalan ako i samo ako je ultraslabo (tj. ultrajako) neprekidan. Svaki ultraslabo (tj. ultrajako) neprekidan linearan funkcional na $\mathcal{A}$ je linearna kombinacija normalnih pozitivnih funkcionala na $\mathcal{A}$.*

Dokaz: Zbog Hahn$-$Banachovog teorema za lokalno konveksan prostor $B(\mathcal{H})$ s ultraslabom topologijom i zbog zadatka 4.2.1. skup svih ultraslabo (tj. ultrajako) neprekidnih funkcionala na $\mathcal{A}$ je skup svih restrikcija $\omega_{(\xi_n),(\eta_n)}|\mathcal{A}$, gdje su $(\xi_n),(\eta_n) \in \mathcal{H}^{(\mathbb{N})}$. Tada je $\omega_{(\xi_n),(\eta_n)}(A) = = \left(A^{(\mathbb{N})}(\xi_n)\middle|\,(\eta_n)\right)$. Stoga iz korolara 5.1.3. slijedi da ako je ultraslabo neprekidan funkcional $\omega_{(\xi_n),(\eta_n)}|\mathcal{A}$ pozitivan, onda postoji $(\zeta_n) \in \mathcal{H}^{(\mathbb{N})}$ takav da je $\omega_{(\xi_n),(\eta_n)}|\mathcal{A} = \omega_{(\zeta_n)}|\mathcal{A}$. Pri tome je $\omega_{(\zeta_n)} = \omega_{(\zeta_n),(\zeta_n)}$. No takav funkcional je normalan: ako je $A = \sup\{A_\lambda;\ \lambda \in \Lambda\}$, onda je $(A\zeta_n|\zeta_n) = \lim_{\lambda\in\Lambda}(A_\lambda\zeta_n|\zeta_n)$ za svaki n, pa slijedi da je
$$\omega_{(\zeta_n),(\zeta_n)}(A) = \lim_{\lambda\in\Lambda}\omega_{(\zeta_n),(\zeta_n)}(A_\lambda) = \sup\{\omega_{(\zeta_n),(\zeta_n)}(A_\lambda);\ \lambda \in \Lambda\}.$$
Obratno, pretpostavimo da je φ normalan pozitivan funkcional na $\mathcal{A}$. Stavimo
$$\mathcal{S} = \{B \in \mathcal{A}_+;\ B \le I,\ \text{funkcional } A \mapsto \varphi(AB) \text{ je ultraslabo neprekidan}\}.$$
Dokažimo da taj parcijalno uređen skup zadovoljava uvjet Zornove leme. Neka je $\{B_\lambda;\ \lambda \in \Lambda\}$ linearno uređen rastući podskup od $\mathcal{S}$. Stavimo $B = \sup\{B_\lambda;\ \lambda \in \Lambda\}$. Tada za svaki $A \in \mathcal{A}_1$ i svaki $\lambda \in \Lambda$ imamo
$$|\varphi(A(B - B_\lambda))|^2 \le \varphi(A(B - B_\lambda)A^*)\varphi(B - B_\lambda) \le \varphi(I)\varphi(B - B_\lambda).$$
Prva nejednakost dobiva se primjenom tvrdnje (b) propozicije 5.1.1. na operatore $A\sqrt{B - B_\lambda}$ i $\sqrt{B - B_\lambda}$, a druga slijedi iz tvrdnje (d) iste propozicije. To pokazuje da vrijedi
$$\varphi(AB) = \lim_{\lambda\in\Lambda}\varphi(AB_\lambda)$$

i to uniformno u odnosu na $A \in \mathcal{A}_1$. Odatle slijedi da je restrikcija funkcionala $A \mapsto \varphi(AB)$ na jediničnu kuglu $\mathcal{A}_1$ ultraslabo neprekidna. Sada iz teorema 4.4.4. slijedi da je funkcional $A \mapsto \varphi(AB)$ ultraslabo neprekidan. Dakle, vrijedi $B \in \mathcal{S}$ i time je dokazano da parcijalno uređen skup $\mathcal{S}$ zadovoljava uvjet Zornove leme. Prema tome, skup $\mathcal{S}$ sadrži bar jedan maksimalan element B. Pretpostavimo da je $B \neq I$ i stavimo $C = I - B$. Nadalje, neka je $\zeta \in \mathcal{H}$ takav da je $\varphi(C) < (C\zeta|\zeta)$. Prema lemi 5.2.1. postoji $D \in \mathcal{A}_+$ takav da je $0 \neq D \leq C$ i takav da je $\varphi(T) < (T\zeta|\zeta)$ za svaki $0 \neq T \in \mathcal{A}_+$ takav da je $T \leq D$. Sada imamo za svaki $0 \neq A \in \mathcal{A}$

$$DA^*AD \leq \|A^*A\|D^2 = \|A\|^2 D^2 \leq \|A\|^2\|D\|D.$$

Dakle, operator

$$T = \frac{1}{\|A\|^2\|D\|} DA^*AD \in \mathcal{A}_+$$

zadovoljava $T \leq D$. Odatle dobivamo da je $\varphi(T) \leq (T\zeta|\zeta)$, odnosno,

$$|\varphi(AD)|^2 \leq \varphi(I)\varphi(DA^*AD) \leq \varphi(I)(DA^*AD\zeta|\zeta) = \varphi(I)\|AD\zeta\|^2.$$

To pokazuje da je funkcional $A \mapsto \varphi(AD)$ jako neprekidan, dakle, i ultrajako (tj. ultraslabo) neprekidan. Stoga je i $A \mapsto \varphi(A(B + D))$ ultraslabo neprekidan. No to se protivi maksimalnosti od B. Ova kontradikcija pokazuje da je $B = I$, a to znači da je funkcional φ ultraslabo neprekidan.

Zadatak 5.2.3. *Dokažite drugu tvrdnju teorema 5.2.2.: svaki ultraslabo (ultrajako) neprekidan linearan funkcional na von Neumannovoj algebri je linearna kombinacija normalnih pozitivnih funkcionala.*

5.3 Normalna pozitivna linearna preslikavanja

Neka su $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ von Neumannove algebre. Za **linearno preslikavanje** $\Phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ kažemo da je **pozitivno**, ako je $\Phi(\mathcal{A}_+) \subseteq \mathcal{B}_+$. Primijetimo da su $*-$homomorfizmi i $*-$antihomomorfizmi pozitivna linearna preslikavanja.

Zadatak 5.3.1. *Neka je $\Phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ pozitivno linearno preslikavanje von Neumannovih algebri. Dokažite da je tada $\Phi(A^*) = \Phi(A)^*$ za svaki $A \in \mathcal{A}$.*

Pozitivno linearno preslikavanje $\Phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ je **normalno**, ako za svaki rastući hiperniz $(A_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ u $\mathcal{A}$ sa supremumom $A \in \mathcal{A}$ hiperniz $(\Phi(A_\lambda))_{\lambda\in\Lambda}$ ima supremum $\Phi(A)$.

Teorem 5.3.1. *Neka su $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ von Neumannove algebre i $\Phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ normalno pozitivno linearno preslikavanje. Tada je Φ ultraslabo neprekidno, dakle, njegove restrikcije na ograničene podskupove od $\mathcal{A}$ su slabo neprekidne. Nadalje, ako postoji $M > 0$ takav da vrijedi $\Phi(A^*)\Phi(A) \leq M\Phi(A^*A)$ (a taj je uvjet ispunjen ako je algebra $\mathcal{B}$ komutativna) onda je Φ ultrajako neprekidan, dakle, njegove su restrikcije na ograničene podskupove od $\mathcal{A}$ jako neprekidne.*

Dokaz: Za svaki normalan pozitivan linearan funkcional φ na $\mathcal{B}$ kompozicija $\varphi\circ\Phi$ je normalan pozitivan linearan funkcional na $\mathcal{A}$. Odatle i iz teorema 5.2.2. slijedi da je linearan funkcional $\varphi\circ\Phi$ na $\mathcal{A}$ ultraslabo neprekidan za svaki ultraslabo neprekidan linearan funkcional φ na $\mathcal{B}$. To ima za posljedicu da je preslikavanje Φ ultraslabo neprekidno.

Pretpostavimo sada da postoji $M > 0$ takav da je $\Phi(A^*)\Phi(A) \leq M\Phi(A^*A)$ za svaki $A \in \mathcal{A}$. Pretpostavimo da je $(A_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ hiperniz u $\mathcal{A}$ koji ultrajako konvergira prema nuli. Tada hiperniz $(A_\lambda^*A_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ ultraslabo konvergira prema nuli, pa hiperniz $(\Phi(A_\lambda^*A_\lambda))_{\lambda\in\Lambda}$ u $\mathcal{B}$ ultraslabo konvergira prema nuli. Sada iz pretpostavke slijedi da i hiperniz $(\Phi(A_\lambda^*)\Phi(A_\lambda))_{\lambda\in\Lambda}$ ultraslabo konvergira prema nuli. No to znači da hiperniz $(\Phi(A_\lambda))_{\lambda\in\Lambda}$ ultrajako konvergira prema nuli.

Napokon, ako je algebra $\mathcal{B}$ komutativna tada se slično dokazu propozicije 3.4.1. može dokazati da vrijedi
$$\Phi(B^*A)^*\Phi(B^*A) \leq \Phi(B^*B)\Phi(A^*A) \qquad \forall A \in \mathcal{A}.$$
Odavde za $B = I$ i za $M = \|\Phi(I)\|$ dobivamo $\Phi(A^*)\Phi(A) \leq \Phi(I)\Phi(A^*A) \leq M\Phi(A^*A)$.

Korolar 5.3.2. *Neka je $\Phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ bijektivni $*-$homomorfizam von Neumannovih algebri. Tada su Φ i Φ^{-1} ultraslabo i ultrajako neprekidni, a njihove restrikcije na ograničene skupove su slabo i jako neprekidne.*

Dokaz: Tvrdnje slijede neposredno iz teorema 5.3.1. budući da su $\Phi|\mathcal{A}_+$ i $\Phi^{-1}|\mathcal{B}_+$ izomorfizmi parcijalno uređenih skupova i budući da je $\Phi(A)^*\Phi(A) = \Phi(A^*A)$.

Korolar 5.3.3. *Neka je $\Phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ unitalan normalan homomorfizam ili antihomomorfizam von Neumannovih algebri. Tada je $\Phi(\mathcal{A})$ von Neumannova algebra.*

Dokaz: Prema teoremu 5.3.1. Φ je ultraslabo neprekidan. Dakle, $\operatorname{Ker}\Phi$ je ultraslabo zatvoren dvostrani ideal u $\mathcal{A}$. Sada se iz korolara 4.4.9. izvodi da je se $\mathcal{A}$ može identificirati s Kartezijevim produktom von Neumannovih algebri $\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$ takvim da Φ iščezava na $\mathcal{A}_1$, a na $\mathcal{A}_2$ je injektivan. Time se dokaz svodi na slučaj kad je homomorfizam (ili antihomomorfizam) Φ injektivan. No tada je prema tvrdnji (c) propozicije 3.4.1. Φ izometrija. Pokazuje se da je jedinična kugla u algebri $B(\mathcal{H})$ ultraslabo kompaktna. No tada je jedinična kugla $\mathcal{A}_1$ svake von Neumannove algebre $\mathcal{A}$ ultraslabo kompaktna; naime, po teoremu 4.4.6. $\mathcal{A}_1$ je ultraslabo zatvorena. Tada je i $\Phi(\mathcal{A})_1 = \Phi(\mathcal{A}_1)$ ultraslabo kompaktna, dakle, ultraslabo zatvorena, pa iz teorema 4.4.6. slijedi da je $\Phi(\mathcal{A})$ von Neumannova algebra.

5.4 Nosač normalnog pozitivnog funkcionala

Propozicija 5.4.1. *Neka je φ normalan pozitivan linearni funkcional na von Neumannovoj algebri $\mathcal{A}$. Skup $\{Q \in \mathcal{P}(\mathcal{A});\ \varphi(Q) = 0\}$ ima najveći element P. Vrijedi $\varphi(AP) = \varphi(PA) = 0$ za svaki $A \in \mathcal{A}$.*

Dokaz: Neka je $\mathcal{M} = \{A \in \mathcal{A};\ \varphi(A^*A) = 0\}$. Prema tvrdnji (b) propozicije 5.1.1. tada je ujedno $\mathcal{M} = \{A \in \mathcal{A};\ \varphi(B^*A) = 0\ \forall B \in \mathcal{A}\}$. Prema tome, $\mathcal{M}$ je lijevi ideal u $\mathcal{A}$, koji je prema teoremu 5.2.2. ultraslabo zatvoren. Egzistencija najvećeg projektora $P \in \mathcal{P}(\mathcal{A})$ takvog da je $\varphi(P) = 0$ slijedi iz korolara 4.4.9. Sada za $A \in \mathcal{A}$ imamo

$$|\varphi(AP)|^2 \le \varphi(AA^*)\varphi(P) = 0 \qquad \text{i} \qquad |\varphi(PA)|^2 \le \varphi(A^*A)\varphi(P) = 0.$$

Ako je P projektor iz propozicije 5.4.1., projektor $I - P$ zove se **nosač funkcionala** φ. Kažemo da su dva normalna pozitivna funkcionala φ i ψ **međusobno singularna** ako su njihovi nosači međusobno ortogonalni. U daljnjem za normalan pozitivan funkcional φ njegov nosač označavamo sa E_φ. Tada je $\varphi(A) = \varphi(E_\varphi A E_\varphi)$ za svaki $A \in \mathcal{A}$, pa vidimo da φ definira vjeran normalan pozitivan funkcional na von Neumannovoj algebri $\mathcal{A}_{E_\varphi}$ na Hilbertovom prostoru $R(E_\varphi)$. Posebno, funkcional φ je vjeran ako i samo ako je $E_\varphi = I$.

Neka je sada $(\xi_n) \in \mathcal{H}^{(\mathbb{N})}$. Za projektor $P \in \mathcal{P}(\mathcal{A})$ vrijedi $\omega_{(\xi_n)}(P) = 0$ ako i samo ako je $P\xi_n = 0$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. To pokazuje da je nosač od $\omega_{(\xi_n)}$ projektor $E^{\mathcal{A}'}_{\{\xi_n;\, n\in\mathbb{N}\}}$. Posebno, $\omega_{(\xi_n)}$ je vjeran ako i samo ako je skup $\{\xi_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ separirajući za $\mathcal{A}$. Odatle slijedi da je von Neumannova algebra $\mathcal{A}$ $\sigma-$konačna ako i samo ako na $\mathcal{A}$ postoji vjeran normalan pozitivan funkcional. Doista, prema propoziciji 3.3.15. za $\sigma-$konačnu von Neumannovu algebru postoji prebrojiv separirajući skup $\{\xi_n;\ n \in \mathbb{N}\}$. Možemo pretpostaviti da je $(\xi_n) \in \mathcal{H}^{(\mathbb{N})}$ i tada je funkcional $\omega_{(\xi_n)}$ vjeran.

Propozicija 5.4.2. *Neka je φ normalan pozitivan linearan funkcional na von Neumannovoj algebri $\mathcal{A}$. Za hiperniz $(A_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ u $\mathcal{A}$ sljedeća su dva svojstva međusobno ekvivalentna:*

(a) $\lim_{\lambda\in\Lambda} \varphi(A_\lambda^* A_\lambda) = 0.$

(b) $s - \lim_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda E_\varphi = 0.$

Dokaz: Prema lemi 5.1.5. postoje Hilbertov prostor $\mathcal{K}$, linearan operator $\Gamma : \mathcal{A} \to \mathcal{K}$ s gustom slikom i ograničen unitalan $*-$homomorfizam $\Phi : \mathcal{A} \to B(\mathcal{K})$ takvi da za vektor $\eta = \Phi(I_\mathcal{H}) \in \mathcal{K}$ vrijedi

$$\Gamma(A) = \Phi(A)\eta \qquad \text{i} \qquad \varphi(A) = (\Phi(A)\eta|\eta) \qquad \forall A \in \mathcal{A}.$$

Nadalje, prema korolaru 5.3.3. slika $\mathcal{B} = \Phi(\mathcal{A})$ je von Neumannova algebra na $\mathcal{K}$. Pretpostavimo najprije da je Φ injektivan, tj. izomorfizam sa $\mathcal{A}$ na $\mathcal{B}$. Stavimo $F = E^{\mathcal{B}'}_\eta$ i $F_1 = I_\mathcal{K} - F$. Neka je $E_1 \in \mathcal{P}(\mathcal{A})$ takav da je $\Phi(E_1) = F_1$. Tada je E_1 najveći projektor u $\mathcal{A}$ takav da je $0 = (\Phi(E_1)\eta|\eta) = \varphi(E_1)$. Dakle, $E_\varphi = I_\mathcal{H} - E_1$, pa je $\Phi(E_\varphi) = F$.

Prema korolaru 5.3.2. hiperniz $(A_\lambda E_\varphi)_{\lambda\in\Lambda}$ jako konvergira prema nuli ako i samo ako hiperniz $(\Phi(A_\lambda E_\varphi))_{\lambda\in\Lambda} = (\Phi(A_\lambda)F)_{\lambda\in\Lambda}$ jako konvergira prema nuli, a to znači da vrijedi

$$\lim_{\lambda\in\Lambda} \|\Phi(A_\lambda)B'\eta\| = 0 \qquad \forall B' \in \mathcal{B}'.$$

No to je ekvivalentno konvergenciji prema nuli hiperniza

$$\|\Phi(A_\lambda)\eta\|^2 = (\Phi(A_\lambda^* A_\lambda)\eta|\eta) = \varphi(A_\lambda^* A_\lambda).$$

Time je tvrdnja dokazana u slučaju da je homomorfizam Φ injektivan.

U općem slučaju je jezgra od Φ ultraslabo zatvoren dvostrani ideal u $\mathcal{A}$, a već smo vidjeli da se tada $\mathcal{A}$ može identificirati s Kartezijevim produktom von Neumannovih algebri $\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$ takvim da je Φ nula na $\mathcal{A}_1$, a injektivan na $\mathcal{A}_2$. Time se dokaz svodi na već dokazani slučaj.

Propozicija 5.4.3. *Neka su φ i ψ normalni pozitivni linearni funkcionali na von Neumannovoj algebri $\mathcal{A}$. Sljedeća su tri svojstva međusobno ekvivalentna:*

(a) *Za $A \in \mathcal{A}_+$ jednakost $\varphi(A) = 0$ povlači jednakost $\psi(A) = 0$.*

(b) $E_\psi \leq E_\varphi$.

(c) *Topologija na $\mathcal{A}_1$ definirana polunormom $A \mapsto \sqrt{\varphi(A^*A)}$ jača je od topologije definirane polunormom $A \mapsto \sqrt{\psi(A^*A)}$.*

Dokaz: Implikacija $(b) \Rightarrow (c)$ slijedi iz propozicije 5.4.2. Implikacija $(c) \Rightarrow (a)$ je očigledna. Napokon, pretpostavimo da vrijedi (a). Imamo $\varphi(I - E_\varphi) = 0$, pa slijedi $\psi(I - E_\varphi) = 0$. Odatle je $I - E_\varphi \leq I - E_\psi$, a to znači da je $E_\psi \leq E_\varphi$.

5.5 Polarna forma linearnog funkcionala

Ako je f linearan funkcional na algebri $\mathcal{A}$, za $x \in \mathcal{A}$ definiramo linearne funkcionale $x \cdot f$ i $f \cdot x$ na $\mathcal{A}$ ovako:

$$(x \cdot f)(y) = f(yx) \qquad \text{i} \qquad (f \cdot x)(y) = f(xy) \qquad \text{za} \quad y \in \mathcal{A}.$$

Očito vrijedi $x \cdot (y \cdot f) = (xy) \cdot f$ i $(f \cdot x) \cdot y = f \cdot (xy)$.

Ako je $\mathcal{A}$ $*-$algebra za linearan funkcional f na $\mathcal{A}$ definiramo linearan funkcional f^* sa

$$f^*(y) = \overline{f(y^*)}, \qquad y \in \mathcal{A}.$$

Tada vrijedi $(x \cdot f)^* = f^* \cdot x^*$. **Funkcional** f zove se **hermitski** ako je $f = f^*$.

Zadatak 5.5.1. *Dokažite:*

(a) *Ako je $\mathcal{A}$ normirana algebra i linearan funkcional f na $\mathcal{A}$ je ograničen, onda su za svaki $x \in \mathcal{A}$ funkcionali $x \cdot f$ i $f \cdot x$ su ograničeni i vrijedi $\|x \cdot f\| \leq \|x\|\|f\|$ i $\|f \cdot x\| \leq \|f\|\|x\|$.*

(b) *Ako je φ ultraslabo neprekidan funkcional na von Neumanovoj algebri $\mathcal{A}$, onda su za svaki $A \in \mathcal{A}$ funkcionali $A \cdot \varphi$ i $\varphi \cdot A$ ultraslabo neprekidni.*

Lema 5.5.1. *Neka je $\mathcal{H}$ Hilbertov prostor, $\mathcal{A}$ unitalna C^*-podalgebra od $B(\mathcal{H})$ i T ekstremna točka jedinične kugle $\mathcal{A}_1$. Tada je T^*T projektor.*

Dokaz se provodi pomoću **teorema o Geljfandovoj transformaciji**, koji navodimo bez dokaza:

Teorem 5.5.2. *Neka je $\mathcal{B}$ unitalna komutativna C^*-algebra. Tada je $X = Hom(\mathcal{B}, \mathbb{C})$ u odnosu na slabu topologiju duala $\mathcal{B}^*$ od $\mathcal{B}$ kompaktan skup. Nadalje, ako za $x \in \mathcal{B}$ definiramo funkciju $\hat{x} : X \to \mathbb{C}$ sa $\hat{x}(\chi) = \chi(x)$, $\chi \in X$, onda je tzv. Geljfandova transformacija $x \mapsto \hat{x}$ izometrički $*-$izomorfizam sa $\mathcal{B}$ na $C(X)$.*

Imamo $\|T\| = 1$, dakle, $\|T^*T\| = 1$. Neka je $\mathcal{B}$ unitalna C^*-algebra generirana sa I i T^*T. Neka je $X = Hom(\mathcal{B}, \mathbb{C})$ i neka je $\varphi : \mathcal{B} \to C(X)$ Geljfandov izomorfizam, tj. $\varphi(A) = \hat{A}$, za $A \in \mathcal{B}$. Stavimo $f = \varphi(\sqrt{T^*T})$ i $g = f^2$. Tada je $f = \overline{f}$ i $0 \leq g \leq 1$. Pretpostavimo da postoji $\chi \in X$ takav da je $0 < g(\chi) < 1$. Tada postoji neprekidna nenegativna funkcija h na X takva da vrijedi

$$gh \neq 0, \qquad \sup\, g(1+h)^2 = \sup\, g(1-h)^2 = 1;$$

takva je, naime, svaka dovoljno mala fukcija h koja je 0 izvan dovoljno male okoline točke χ. Neka je $U = \varphi^{-1}(h)$. Tada je $U^* = U$ i

$$\|T^*T(I+U)^2\| = \|T^*T(I-U^2)\| = 1.$$

Prema tome, vrijedi $T(I+U) \in \mathcal{A}_1$ i $T(I-U) \in \mathcal{A}_1$. Nadalje, kako je $T = \frac{1}{2}T(I+U) + \frac{1}{2}T(I-U)$, zbog ekstremalnosti od T slijedi da je $T = T(I+U) = T(I-U)$. No odatle slijedi da je $TU = 0$, dakle, $gh = 0$, suprotno pretpostavci. Ova kontradikcija pokazuje da funkcija g poprima samo vrijednosti 0 i 1. No tada je $g^2 = g$, dakle, T^*T je projektor.

Za von Neumannovu algebru $\mathcal{A}$ prostor $\mathcal{A}_w^* = \mathcal{A}_s^*$ svih slabo (i jako) neprekidnih linearnih funkcionala je potprostor dualnog prostora $\mathcal{A}^*$ od $\mathcal{A}$ koji općenito nije zatvoren. Sa $\mathcal{A}_*$ označavamo zatvarač (po normi) od $\mathcal{A}_w^*$ u $\mathcal{A}^*$. Taj se prostor zove **predual** von Neumannove algebre $\mathcal{A}$. Ako sa $\mathcal{A}^\perp$ označimo anihilator od $\mathcal{A}$ u $B(\mathcal{H})^*$, onda se $\mathcal{A}_*$ prirodno identificira s kvocijentnim Banachovim prostorom $B(\mathcal{H})_*/\mathcal{A}^\perp$.

Lema 5.5.3. *Neka je $\mathcal{A}$ von Neumannova algebra na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$, $E \in \mathcal{P}(\mathcal{A})$ i $f \in \mathcal{A}_*$. Tada vrijedi:*

(*a*) $\|f\|^2 \geq \|f \cdot E\|^2 + \|f \cdot (I - E)\|^2$.

(*b*) *Ako je $\|f\| = \|f \cdot E\|$, onda je $f = f \cdot E$.*

Dokaz: Tvrdnja (b) slijedi neposredno iz tvrdnje (a).

Dokažimo (a). Neka je $\varepsilon > 0$. Predual $\mathcal{A}_*$ identificira se s kvocijentnim prostorom $B(\mathcal{H})_*/\mathcal{A}^{\perp}$. Prema tome, postoji $g \in B(\mathcal{H})_*$ takav da je $g|\mathcal{A} = f$ i $\|g\| \leq \|f\| + \varepsilon$. Ako dokažemo da vrijedi

$$\|g\|^2 \geq \|g \cdot E\|^2 + \|g \cdot (I - E)\|^2,$$

slijedit će

$$(\|f\| + \varepsilon)^2 \geq \|f \cdot E\|^2 + \|f \cdot (I - E)\|^2,$$

pa će zbog proizvoljnosti $\varepsilon > 0$ tvrdnja biti dokazana. Dakle, dokaz se svodi na slučaj $\mathcal{A} = B(\mathcal{H})$. Budući da su slabo neprekidni linearni funkcionali po normi gusti u $\mathcal{A}_*$, dovoljno je tvrdnju dokazati za slabo neprekidan f. No tada prema propoziciji 4.2.1. postoje vektori $\xi_1, \ldots, \xi_n, \eta_1, \ldots, \eta_n$ iz $\mathcal{H}$ takvi da je

$$f = \sum_{j=1}^{n} \omega_{\xi_j, \eta_j}.$$

Gramm$-$Schmidtovim postupkom ortonormiranja zaključujemo da postoje ortonormirani vektori $\xi_1, \ldots, \xi_n$, ortonormirani vektori $\eta_1, \ldots, \eta_n$ i nenegativni realni brojevi $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ takvi da je

$$f = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \omega_{\xi_j, \eta_j}.$$

Zadatak 5.5.2. *Dokažite da je $\|f\| = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n$.*

Za svaki $A \in \mathcal{A} = B(\mathcal{H})$ imamo

$$(f \cdot E)(A) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j (A\xi_j | E\eta_j) \qquad \text{i} \qquad (f \cdot (I - E))(A) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j (A\xi_j | (I - E)\eta_j).$$

Odatle je

$$\|f \cdot E\|^2 + \|f \cdot (I - E)\|^2 \leq \left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \|E\eta_j\| \right)^2 + \left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \|(I - E)\eta_j\| \right)^2 =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^2 \left(\|E\eta_j\|^2 + \|(I - E)\eta_j\|^2 \right) + 2 \sum_{1 \leq j < k \leq n} \lambda_j \lambda_k \left(\|E\eta_j\| \|E\eta_k\| + \|(I - E)\eta_j\| \|(I - E)\eta_k\| \right) \leq$$

$$\leq \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^2 + 2 \sum_{1 \leq j < k \leq n} \lambda_j \lambda_k = \left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \right)^2 = \|f\|^2.$$

Lema 5.5.4. *Neka je $\mathcal{H}$ Hilbertov prostor i $\mathcal{A}$ unitalna $*-$podalgebra od $B(\mathcal{H})$. Neka su $f \in \mathcal{A}^*$, φ pozitivan linearan funkcional na $\mathcal{A}$ i $S \in \mathcal{A}_1$ takvi da je $\varphi \cdot S = f$ i $\|\varphi\| = \|f\|$. Ako je $T \in \mathcal{A}_1$ takav da je $f \cdot T \geq 0$ i $\|f \cdot T\| = \|f\|$, onda je $f \cdot T = \varphi$.*

Dokaz: Možemo pretpostaviti da je $\|\varphi\| = \|f\| = 1$. Primijenimo li lemu 5.1.5. na $\mathcal{A}$ i φ, dolazimo do Hilbertovog prostora $\mathcal{K}$, vektora $\eta \in \mathcal{K}$ i unitalnog $*-$homomorfizma $\Phi : \mathcal{A} \to B(\mathcal{K})$ takvih da vrijedi

$$\varphi(A) = (\Phi(A)\eta|\eta), \qquad A \in \mathcal{A}.$$

Tada nalazimo

$$(\eta|\Phi(T^*S^*)\eta) = (\Phi(ST)\eta|\eta) = \varphi(ST) = (\varphi \cdot S)(T) = f(T) = (f \cdot T)(I) = \|f \cdot T\| = 1.$$

Kako je $(\eta|\eta) = \varphi(I) = \|\varphi\| = 1$, prema teoremu o CSB$-$nejednakosti slijedi da su vektori η i $\Phi(T^*S^*)\eta$ proporcionalni. Međutim, kako je $\|T^*S^*\| \le 1$, slijedi $\Phi(T^*S^*)\eta = \eta$. Sada za svaki $A \in \mathcal{A}$ imamo

$$(f \cdot T)(A) = f(TA) = \varphi(STA) = (\Phi(STA)\eta|\eta) = (\Phi(A)\eta|\Phi(T^*S^*)\eta) = (\Phi(A)\eta|\eta) = \varphi(A).$$

Dakle, vrijedi $f \cdot T = \varphi$.

Teorem 5.5.5. *Neka je $\mathcal{A}$ von Neumannova algebra i $f \in \mathcal{A}_*$.*

(a) *Postoji par (φ, U) sa sljedećim svojstvima:*

   (1) *φ je normalan pozitivan funkcional na $\mathcal{A}$ i $\|\varphi\| = \|f\|$.*

   (2) *U je parcijalna izometrija u $\mathcal{A}$ čiji je završni projektor E_φ.*

   (3) *$f = \varphi \cdot U$ i $\varphi = f \cdot U^*$.*

(b) *Ako je φ' normalan pozitivan funkcional na $\mathcal{A}$ i U' parcijalna izometrija u $\mathcal{A}$ čiji je završni projektor $E_{\varphi'}$, i ako vrijedi $f = \varphi' \cdot U'$ i $\varphi' = f \cdot U'^*$, onda je $\varphi' = \varphi$ i $U' = U$.*

Dokaz: Možemo pretpostaviti da je $\|f\| = 1$. Neka je $\mathcal{A}_2 = \{T \in \mathcal{A}_1;\ f(T) = 1\}$. Budući da je kugla $\mathcal{A}_1$ ultraslabo kompaktna i f je ultraslabo neprekidan, postoji $T \in \mathcal{A}_1$ takav da je $|f(T)| = 1$. Pomnožimo li T s odgovarajućim skalarom modula 1, zaključujemo da je $\mathcal{A}_2 \neq \emptyset$. Nadalje, $\mathcal{A}_2$ je konveksan skup koji je ultraslabo zatvoren u $\mathcal{A}_1$, dakle, $\mathcal{A}_2$ je ultraslabo kompaktan. Stoga postoji ekstremna točka $V \in \mathcal{A}_2$. Tada je ujedno V ekstremna točka od $\mathcal{A}_1$. Doista, ako su $S, T \in \mathcal{A}_1$ takvi da je $V = \frac{1}{2}(S + T)$, imamo $|f(S)| \le 1$, $|f(T)| \le 1$ i $1 = f(V) = \frac{1}{2}(f(S) + f(T))$, pa slijedi $f(S) = f(T) = 1$, odnosno, $S, T \in \mathcal{A}_2$. No tada slijedi $S = T = V$, jer je V ekstremna točka od $\mathcal{A}_2$. Prema lemi 5.5.1. V^*V je projektor, odnosno, V je parcijalna izometrija.

Stavimo $\varphi = f \cdot V$. Tada je

$$\|\varphi\| \le \|f\|\|V\| \le 1.$$

Kako je $\varphi(I) = f(V) = 1$, prema propoziciji 5.1.6. funkcional φ je pozitivan, norme 1 i normalan jer je ultraslabo neprekidan. Neka je $E = E_\varphi$. Tada je

$$\varphi(V^*V) = f(VV^*V) = f(V) = 1,$$

dakle, $V^*V \ge E$. Stavimo $U = EV^*$. Tada je $UU^* = E(V^*V)E = E$, dakle, U je parcijalna izometrija sa završnim projektorom E. Nadalje, za svaki $T \in \mathcal{A}$ imamo

$$(f \cdot U^*)(T) = f(U^*T) = f(VET) = \varphi(ET) = \varphi(T) \qquad \Longrightarrow \qquad \varphi = f \cdot U^*.$$

Stavimo $U^*U = F$. Tada je $\|f \cdot F\| \le 1$ i

$$(f \cdot F)(U^*) = f(U^*UU^*) = f(U^*) = f(VE) = \varphi(E) = 1.$$

Odatle je $\|f \cdot F\| = 1 = \|f\|$, dakle, po tvrdnji (b) leme 5.5.3. vrijedi $f \cdot F = f$. Stoga za svaki $T \in \mathcal{A}$ imamo

$$(\varphi \cdot U)(T) = \varphi(UT) = f(U^*UT) = f(FT) = (f \cdot F)(T) = f(T) \qquad \Longrightarrow \qquad \varphi \cdot U = f.$$

Time je dokazana tvrdnja (a).

Neka φ' i U' budu kao u (b). Tada je

$$\|U'^*\| \leq 1, \qquad f \cdot U'^* \geq 0, \qquad \|\varphi'\| = \|f \cdot U'^*\| \leq \|f\| = \|\varphi' \cdot U'\| \leq \|\varphi'\|.$$

Dakle, u gornjem slijedu su sve nejednakosti zapravo jednakosti. Posebno je $\|f \cdot U'^*\| = \|f\|$. Prema lemi 5.5.4., primijenjenoj na $S = U$ i $T = U'^*$, slijedi da je $\varphi = f \cdot U'^* = \varphi'$.

Treba još dokazati da je $U = U'$. Stavimo $X = UU'^*$. Tada je

$$\varphi(X) = (\varphi \cdot U)(U'^*) = f(U'^*) = (f \cdot U'^*)(I) = \varphi(I) = 1.$$

No tada je i $\varphi(X^*) = 1$, dakle, $1 = \varphi(X)^" \leq \varphi(XX^*) \leq 1$, pa slijedi $\varphi(XX^*) = 1$. Odatle je

$$\varphi((E - X)(E - X)^*) = \varphi(E) - \varphi(X) - \varphi(X^*) + \varphi(XX^*) = 1 - 1 - 1 + 1 = 0.$$

Vrijedi $EXE = X$ budući da su završni projektori od U i od U' majorizirani sa E. Budući da je φ vjeran na $E\mathcal{A}E$, slijedi $X = E$. Za $\xi \in R(E)$ imamo

$$\|U(U'^*\xi)\| = \|E\xi\| = \|\xi\| \qquad \Longrightarrow \qquad \|U(U'^*\xi)\| \geq \|U'^*\xi\|.$$

Odatle slijedi $U'^*\xi \in R(F)$, gdje je $F = U^*U$ početni projektor od U. Budući da je $U|R(F)$ izometrija sa $R(F)$ na $R(E)$, za $\xi \in \mathcal{H}$ imamo implikaciju

$$UU'^*\xi = \xi = UU^*\xi \qquad \Longrightarrow \qquad U'^*\xi = U^*\xi.$$

Nadalje, U^* i U'^* iščezavaju na $R(E)^\perp$, pa zaključujemo da je $U'^* = U$, dakle, $U' = U$.

Uz oznake iz teorema 5.5.5. kažemo da je φ **apsolutna vrijednost funkcionala** f i pišemo $\varphi = |f|$. Nadalje, jednakost $f = |f| \cdot U$ se zove **polarna dekompozicija funkcionala** f.

Propozicija 5.5.6. *Neka je $f \in \mathcal{A}_*$ i neka je $f = |f| \cdot U$ polarna dekompozicija od f. Tada je $|f^*| = U^* \cdot |f| \cdot U$ i $f^* = |f^*| \cdot U^*$ je polarna dekompozicija od f^*.*

Dokaz: Budući da je UU^* nosač od $|f|$, vrijedi $|f| \cdot UU^* = |f|$, pa imamo

$$f^* = (|f| \cdot U)^* = U^* \cdot |f| = U^* \cdot |f| \cdot UU^*. \tag{5.1}$$

Jasno je da je $U^* \cdot |f| \cdot U$ normalni pozitivni funkcional na $\mathcal{A}$. Ako je G bilo koji projektor iz $\mathcal{A}$, onda imamo ekvivalenciju

$$(U^* \cdot |f| \cdot U)(G) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad |f|(UGU^*) = 0.$$

Sjetimo se pojma nosača operatora $A \in B(\mathcal{H})$: to je ortogonalni projektor E_A na potprostor $N(A)^\perp = Cl(R(A^*))$. Za svaki operator A očito je nosač od UAU^* majoriziran s nosačem od $|f|$. Kako za projektor G vrijedi $UGU^* = (UG)(UG)^*$, gornje svojstvo $|f|(UGU^*) = 0$ ekvivalentno je sa $UG = 0$, dakle, i sa $U^*UG = 0$. Odatle slijedi da je

$$E_{U^*} \cdot |f| \cdot U = U^*U. \tag{5.2}$$

Napokon, iz (5.1) slijedi

$$f^* \cdot U = U^* \cdot |f| \cdot U. \tag{5.3}$$

Zadatak 5.5.3. *Pomoću tvrdnje (b) teorema 5.5.5. i pomoću* (5.1), (5.2) *i* (5.3) *dokažite propoziciju 5.5.6.*

Lema 5.5.7. *Neka je $\mathcal{A}$ $*-$podalgebra od $B(\mathcal{H})$ i neka je φ pozitivan funkcional na $\mathcal{A}$. Ako je operator $S \in \mathcal{A}$ takav da je funkcional $\varphi \cdot S$ hermitski, onda vrijedi*

$$|(\varphi \cdot S)(T)| \leq \|S\|\varphi(T) \qquad \forall T \in \mathcal{A}_+.$$

Dokaz: Po pretpostavci je $(\varphi \cdot S)(T^*) = \overline{(\varphi \cdot S)(T)}$ za svaki $T \in \mathcal{A}$. Kako je $\overline{\varphi(A)} = \varphi(A^*)$, to znači da vrijedi

$$\varphi(ST^*) = \varphi(T^*S^*) \qquad \forall T \in \mathcal{A}. \tag{5.4}$$

Dakle, ako je $T \in \mathcal{A}_+$, imamo

$$|\varphi(ST)| = \left|\varphi\left(S\sqrt{T}\sqrt{T}\right)\right| \leq \sqrt{\varphi(STS^*)}\sqrt{\varphi(T)}.$$

Primjenom (5.4) imamo

$$\varphi(STS^*) = (\varphi\left((TS^*)^*S^*\right) = \varphi\left(S(TS^*)^*\right) = \varphi(S^2T).$$

Prema tome, vrijedi

$$|\varphi(ST)| \leq \sqrt{\varphi(S^2T)}\sqrt{\varphi(T)} \qquad \forall T \in \mathcal{A}_+.$$

Analogno dobivamo

$$\varphi(S^2T) \leq \sqrt{\varphi(S^4T)}\sqrt{\varphi(T)} \qquad \forall T \in \mathcal{A}_+.$$

Korak po korak dolazimo do nejednakosti

$$\varphi(S^{2^n}T) \leq \sqrt{\varphi(S^{2^{n+1}}T)}\sqrt{\varphi(T)} \qquad \forall T \in \mathcal{A}_+ \quad \text{i} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Odatle indukcijom po n dobivamo

$$|\varphi(ST)| \leq \varphi(S^{2^n}T)^{\frac{1}{2^n}}\varphi(T)^{\frac{1}{2}}\varphi(T)^{\frac{1}{4}}\cdots\varphi(T)^{\frac{1}{2^n}}.$$

Stoga za svaki $T \in \mathcal{A}_+$ i za svaki $n \in \mathbb{N}$ imamo

$$|\varphi(ST)| \leq \|\varphi\|^{\frac{1}{2^n}}\|T\|^{\frac{1}{2^n}}\|S\|\varphi(T)^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}}$$

Budući da je

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n} = 0 \qquad \text{i} \qquad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right) = 1,$$

prijelazom na limes $n \to \infty$ dobivamo tvrdnju leme.

Teorem 5.5.8. *Neka je $\mathcal{A}$ von Neumannova algebra i neka su φ i ψ normalni pozitivni funkcionali na $\mathcal{A}$ takvi da je $\varphi \leq \psi$. Tada postoji $T_0 \in \mathcal{A}$ takav da je $0 \leq T_0 \leq I$ i da vrijedi $\varphi(T) = \psi(T_0TT_0)$ za svaki $T \in \mathcal{A}$.*

Dokaz: Pretpostavimo najprije da je funkcional ψ vjeran. Prema lemi 5.1.5. i korolaru 5.3.3. možemo zamijeniti von Neumannovu algebru s njoj izomorfnom von Neumannovom algebrom (označimo je ponovo sa $\mathcal{A}$) takvom da postoji separirajući vektor ξ takav da je $\psi(T) = (T\xi|\xi)$ za svaki $T \in \mathcal{A}$. Prema propoziciji 5.1.2. postoji $T_0' \in \mathcal{A}'$ takav da je $0 \leq T_0' \leq I$ i da vrijedi

$$\varphi(T) = (TT_0'\xi|T_0'\xi) \qquad \forall T \in \mathcal{A}. \tag{5.5}$$

Definiramo sada funkcional φ' na $\mathcal{A}'$ tako da stavimo

$$\varphi'(T') = (T'\xi|\xi), \qquad T' \in \mathcal{A}'. \tag{5.6}$$

Neka je $f' = \varphi' \cdot T_0'$, tj.

$$f'(T') = \varphi'(T_0'^* T') = (T_0'^* T'\xi|\xi) = (T'\xi|T_0'\xi), \qquad T' \in \mathcal{A}'. \tag{5.7}$$

Neka je $f' = |f'| \cdot U_0'$ polarna dekompozicija od f'. Prema propoziciji 5.5.6. tada je

$$|f'| = f' \cdot U_0'^* = \varphi' \cdot T_0'^* U_0'^*.$$

Primijenimo li lemu 5.5.7. na $\mathcal{A}'$, φ' i operator $T_0'^* U_0'^*$, dobivamo

$$|f'| \leq \|T_0'^* U_0'^*\| \varphi' \leq \varphi'.$$

Primijenimo li propoziciju 5.1.2. na $\mathcal{A}'$, zaključujemo da postoji $T_0 \in \mathcal{A}'' = \mathcal{A}$ takav da je $0 \leq T_0 \leq I$ i da vrijedi

$$|f'|(T') = (T'\sqrt{T_0}\xi|\sqrt{T_0}\xi) \qquad \forall T' \in \mathcal{A}'. \tag{5.8}$$

Prema (5.6), (5.8) i (5.9) imamo

$$(T'\xi|U_0'T_0'\xi) = (T_0'^* U_0'^* T'\xi|\xi) = |f'|(T') = (T'\sqrt{T_0}\xi|\sqrt{T_0}\xi) = (T'\xi|T_0\xi). \tag{5.9}$$

Nadalje, iz (5.6), (5.7) i (5.8) slijedi

$$(T'\xi|U_0'^* U_0'T_0'\xi) = (T_0'^* U_0'^* U_0'T'\xi|\xi) = |f'|(U_0'T') = (|f'| \cdot U_0')(T') = f'(T') = (T'\xi|T_0'\xi). \tag{5.10}$$

Kako je vektor ξ separirajući za $\mathcal{A}$, on je ciklički za $\mathcal{A}'$, pa iz (5.10) i (5.11) slijedi

$$U_0'T_0'\xi = T_0\xi \qquad \text{i} \qquad U_0'^* U_0'T_0'\xi = T_0'\xi.$$

Odatle i iz (5.5) nalazimo da za svaki $T \in \mathcal{A}$ vrijedi

$$\varphi(T) = (TT_0'\xi|T_0'\xi) = (TU_0'^* U_0'T_0'\xi|T_0'\xi) = (TU_0'T_0'\xi|U_0'T_0'\xi) = (TT_0\xi|T_0\xi) = (T_0TT_0\xi|\xi) = \psi(T_0TT_0).$$

Time je teorem dokazan uz dodatnu pretpostavku da je funkcional ψ vjeran. U općem slučaju označimo sa E nosač od ψ. Tada je restrikcija ψ na $E\mathcal{A}E$ vjerna, pa prema dokazanom postoji $T_0 \in \mathcal{A}$ takav da je

$$0 \leq T_0 \leq I, \qquad T_0E = ET_0 = T_0 \qquad \text{i} \qquad \varphi(T) = \psi(T_0TT_0) \qquad \forall T \in E\mathcal{A}E.$$

Budući da je $0 \leq \varphi(I-E) \leq \psi(I-E) = 0$, nosač od φ majoriziran je sa E. Stoga za svaki $T \in \mathcal{A}$ imamo

$$\varphi(T) = \varphi(ETE) = \psi(T_0ETET_0) = \psi(T_0TT_0).$$

Teorem 5.5.9. *Neka je $\mathcal{A}$ von Neumannova algebra i neka je f ultraslabo neprekidan hermitski linearan funkcional na $\mathcal{A}$.*

(a) *Postoji jedinstven par (φ, φ') međusobno singularnih normalnih pozitivnih funkcionala na $\mathcal{A}$ takvih da je $f = \varphi - \varphi'$.*

(b) *Vrijedi $|f| = \varphi + \varphi'$.*

(c) *Ako su E i E' nosači od φ i φ', vrijedi:*

(1) *$E + E'$ je nosač od $|f|$.*

(2) *$\varphi = f \cdot E$ i $\varphi' = -\varphi \cdot E'$.*

(3) *$f = |f| \cdot (E - E')$ je polarna dekompozicija od f.*

Dokaz: Neka je $f = |f| \cdot U$ polarna dekompozicija od f. Budući da je $f = f^*$, zbog jedinstvenosti polarne dekompozicije iz propozicije 5.5.6. slijedi da je $U = U^*$. Operator $U^2 = U^*U$ je projektor, pa slijedi da je spektar od U sadržan u $\{-1, 0, 1\}$. Odatle slijedi da je $U = E_1 - E_2$, gdje su E_1 i E_2 međusobno ortogonalni projektori iz $\mathcal{A}$. Iz propozicije 5.5.6. slijedi i

$$|f| = U \cdot |f| \cdot U = (E_1 - E_2) \cdot |f| \cdot (E_1 - E_2). \tag{5.11}$$

Međutim, $|f|$ ima nosač $U^2 = E_1 + E_2$, dakle, vrijedi

$$|f| = (E_1 + E_2) \cdot |f| \cdot (E_1 + E_2). \tag{5.12}$$

Zbrajanjem (5.11) i (5.12) dobivamo

$$|f| = E_1 \cdot |f| \cdot E_1 + E_2 \cdot |f| \cdot E_2,$$

pa slijedi

$$E_1 \cdot |f| = |f| \cdot E_1 = E_1 \cdot |f| \cdot E_1, \qquad E_2 \cdot |f| = |f| \cdot E_2 = E_2 \cdot |f| \cdot E_2$$

i

$$f = |f| \cdot U = |f| \cdot (E_1 - E_2) = E_1 \cdot |f| \cdot E_1 - E_2 \cdot |f| \cdot E_2.$$

Kako su $\varphi = E_1 \cdot |f| \cdot E_1$ i $\varphi' = E_2 \cdot |f| \cdot E_2$ međusobno singularni normalni pozitivni funkcionali, dokazana je egzistencija u tvrdnji (a), a također da za te funkcionale φ i φ' vrijede tvrdnje (b) i (c).

Pretpostavimo sada da su φ i φ' međusobno singularni normalni pozitivni funkcionali takvi da je $f = \varphi - \varphi'$. Neka su E i E' nosači od φ i φ'. Da bi za projektor D iz $\mathcal{A}$ vrijedilo $(\varphi + \varphi')(D) = 0$ nužno je i dovoljno da bude $\varphi(D) = \varphi'(D) = 0$, odnosno, da bude $DE = DE' = 0$. Slijedi da je $E + E'$ nosač od $\varphi + \varphi'$. Nadalje, $E - E'$ je parcijalna izometrija kojoj je $E + E'$ i početni i završni projektor. Sada za svaki $T \in \mathcal{A}$ imamo

$$((\varphi + \varphi') \cdot (E_1 - E_2))(T) = (\varphi + \varphi')(ET - E'T) = \varphi(ET) - \varphi'(E'T) = \varphi(T) - \varphi'(T) = f(T)$$

i

$$(f \cdot (E_1 - E_2)^*)(T) = (\varphi - \varphi')(ET - E'T) = \varphi(ET) + \varphi'(E'T) = \varphi(T) + \varphi'(T) = (\varphi + \varphi')(T).$$

Iz tvrdnje (b) teorema 5.5.5. slijedi da je $|f| = \varphi + \varphi'$ i $U = E - E'$. Sada je iz jednakosti $f = \varphi - \varphi'$ i $|f| = \varphi + \varphi'$ očigledna jedinstvenost u tvrdnji (a).

Propozicija 5.5.10. *Normalni pozitivni funkcionali φ i φ' na von Neumannovoj algebri $\mathcal{A}$ su međusobno singularni ako i samo ako je $\|\varphi - \varphi'\| = \|\varphi\| + \|\varphi'\|$.*

Dokaz: Ako su φ i φ' međusobno singularni normalni pozitivni funkcionali, onda je prema teoremu 5.5.9. $|\varphi - \varphi'| = \varphi + \varphi'$, pa imamo

$$\|\varphi - \varphi'\| = \|\varphi + \varphi'\| = (\varphi + \varphi')(I) = \varphi(I) + \varphi'(I) = \|\varphi\| * \|\varphi'\|.$$

Pretpostavimo sada da vrijedi $\|\varphi - \varphi'\| = \|\varphi\| + \|\varphi'\|$. Budući da je $\varphi - \varphi'$ slabo neprekidan na jediničnoj kugli $\mathcal{A}_1$, a ta je kugla slabo kompaktna, postoji $T \in \mathcal{A}$ takav da je

$$\|T\| \leq 1 \qquad \text{i} \qquad (\varphi - \varphi')(T) = \|\varphi\| + \|\varphi'\|.$$

Zamijenimo li T sa $\frac{1}{2}(T+T^*)$, vidimo da možemo pretpostaviti da je operator T hermitski. Neka su T_+ i T_- pozitivni i negativni dio od T. Tada imamo

$$\varphi(T_+)+\varphi'(T_-)-\varphi(T_-)-\varphi'(T_+)=(\varphi-\varphi')(T)=\|\varphi\|+\|\varphi'\|.$$

Kako je

$$\varphi_+)\leq\|\varphi\|,\qquad \varphi'(T_-)\leq\|\varphi'\|\qquad \text{i}\qquad -\varphi(T_-)-\varphi'(T_+)\leq 0,$$

zaključujemo da je

$$\varphi(T_+)=\|\varphi\|\qquad \text{i}\qquad \varphi'(T_-)=\|\varphi'\|.$$

Neka su E i E' nosači od T_+ i T_-. Imamo

$$\|\varphi\|=\varphi(T_+)\leq\varphi(E)\leq\|\varphi\|.$$

Stoga je $\varphi(I)=\|\varphi\|=\varphi(E)$, odnosno, vrijedi $\varphi(I-E)=0$. To znači da E majorizira nosač od φ. Slično se vidi da E' majorizira nosač od φ'. Budući da je $EE'=0$, slijedi da su φ i φ' međusobno singularni.

Bibliografija

[1] William Arveson, *An Invitation to C^*-algebras*, Springer−Verlag, New York − Heidelberg − Berlin, 1976.

[2] George Bachman, Lawrence Narici, *Functional Analysis*, Academic Press, New York − San Francisco − London, 1966.

[3] John B. Conway, *A Course in Operator Theory*, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 20000.

[4] Kenneth R. Davidson, *C^*-algebras by Examples*, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1996.

[5] Jacques Dixmier, *C^*-algebras*, North−Holland Publishing Company, Amsterdam − New York − Oxford, 1977.

[6] Jacques Dixmier, *Von Neumann Algebras*, North Holland Publishing Company, Amsterdam − New York − Oxford, 1981.

[7] Richard V. Kadison, John R. Ringrose, *Fundamentals of the Theory of Operator Algebras, Volume I: Elementary Theory*, Academic Press, San Diego, California, 1983.

[8] Richard V. Kadison, John R. Ringrose, *Fundamentals of the Theory of Operator Algebras, Volume II: Advanced Theory*, Academic Press, San Diego, California, 1983.

[9] Richard V. Kadison, John R. Ringrose, *Fundamentals of the Theory of Operator Algebras, Volume III: Elementary Theory - An Exercise Approach*, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1991.

[10] Richard V. Kadison, John R. Ringrose, *Fundamentals of the Theory of Operator Algebras, Volume IV: Advanced Theory - An Exercise Approach*, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1991.

[11] Gerard J. Murphy, *C^*-algebras and operator theory*, Academic Press, Boston − San Diego − New York, 1990.

[12] Mark A. Naimark, *Normed rings*, P. Noordhoff N.V., Groningen, 1964.

[13] Walter Rudin, *Functional Analysis*, McGraw - Hill Book Company, New York, 1973.

[14] Masamichi Takesaki, *Theory of Operator Algebras I*, Springer, New York − Heidelberg − Berlin, 1979.

[15] Angus E. Taylor, David C. Day *Introduction to Functional Analysis*, John Wiley & Sons, New York − Chichester − Brisbane − Toronto, 1980.

[16] David M. Topping, *Lectures on Von Neumann Algebras*, Van Nostrand, London, 1971.