ODABRANA POGLAVLJA TEORIJE REPREZENTACIJA

Prof. dr. sc. Hrvoje Kraljević

Predavanja održana na PMF−Matematičkom odjelu
Sveučilišta u Zagrebu
u zimskom semestru akademske godine 2011./2012.

Zagreb, 2011.

Sadržaj

Poglavlje 1

Osnovni pojmovi teorije reprezentacija

1.1 Reprezentacije i moduli

Ako su V i W vektorski prostori nad poljem K sa $L(V,W)$ ćemo označavati skup svih linearnih operatora $A : V \to W$. $L(V,W)$ je vektorski prostor nad poljem K s operacijama

$$(A+B)v = Av + Bv, \qquad (\lambda A)v = \lambda Av, \qquad A, B \in L(V,W), \quad \lambda \in K, \quad v \in V.$$

Pisat ćemo $L(V) = L(V,V)$ i to je asocijativna algebra uz operaciju množenja

$$(AB)v = A(Bv), \qquad A, B \in L(V), \quad v \in V.$$

Jedinični operator $I = I_V$ ($Iv = v\ \forall v \in V$) je jedinica u algebri $L(V)$. Grupu avih inveribilnih elemenata algebre $L(V)$, tj. grupu svih izomorfizama sa V na V, označavat ćemo sa $\mathrm{GL}(V)$.

Mi ćemo se u ovom kolegiju baviti reprezentacijama nekoliko vrsta algebarskih struktura $-$ grupa, asocijativnih algebri, unitalnih algebri i Liejevih algebri. No najprije ćemo definirati pojam reprezentacije skupa bez ikakve algebarske strukture i s tim usko vezan pojam modula nad skupom.

Neka je S skup. $S-$**modul nad poljem** K je vektorski prostor V nad poljem K sa zadanim preslikavanjem $S \times V \to V$, $(s,v) \mapsto sv$, takvim da je $v \mapsto sv$, $v \in V$, linearan operator na prostoru V $\forall s \in S$:

$$s(\alpha v + \beta w) = \alpha sv + \beta sw, \qquad \forall \alpha, \beta \in K, \quad \forall v, w \in V, \quad \forall s \in S.$$

Reprezentacija skupa S na vektorskom prostoru V je preslikavanje $\pi : S \to L(V)$. Naravno, $S-$moduli i reprezentacije od S su u biti jedno te isto: ako je π reprezentacija od S na prostoru V onda je sa $sv = \pi(s)v$, $s \in S$, $v \in V$, zadano preslikavanje $S \times V \to V$ koje V čini $S-$modulom; s druge strane, ako je V $S-$modul, onda je sa $\pi(s)v = sv$, $s \in S$, $v \in V$, zadana reprezentacija π skupa S na prostoru V.

U daljnjem je V $S-$modul nad poljem K i π pripadna reprezentacija skupa S na prostoru V. $S-$**podmodul** od V je potprostor $W \subseteq V$ takav da je $sw \in W$ $\forall s \in S$ i $\forall w \in W$. Naravno, s restrikcijom domene preslikavanja $(s,v) \to sv$ sa $S \times V$ na $S \times W$ i kodomene tog preslikavanja sa V na W i sam W postaje $S-$modul. Potprostor W od V je $S-$podmodul ako i samo ako je taj potprostor invarijantan s obzirom na sve operatore $\pi(s)$, $s \in S$. Reprezentacija pridružena $S-$podmodulu W označava se π_W i zove **subreprezentacija** reprezentacije π. **Pravi** $S-$**podmodul** od V je $S-$podmodul W koji je različit od V. W je **netrivijalan** $S-$**podmodul** od V ako je $W \neq V$ i $W \neq \{0\}$. **Maksimalan** $S-$**podmodul** od V je pravi $S-$podmodul od

V koji nije pravi $S-$podmodul nijednog pravog $S-$podmodula od V. Drugim riječima, maksimalan $S-$podmodul od V je svaki maksimalan element skupa svih pravih podmodula od V parcijalno uređenog inkluzijom. Za pripadnu subreprezentaciju kažemo da je **maksimalna subreprezentacija** od π.

Presjek bilo kojeg skupa $S-$podmodula od V je očito $S-$podmodul od V. Ako je Σ podskup $S-$modula V, postoji najmanji $S-$podmodul od V koji sadrži skup Σ : to je presjek svih $S-$podmodula koji sadrže skup Σ. Za taj $S-$podmodul kažemo da je **generiran skupom** Σ. On je očito jednak

$$span_K(\Sigma \cup \{s_1 \cdots s_n v;\ n \in \mathbb{N},\ s_1, \ldots, s_n \in S,\ v \in \Sigma\}).$$

Ako je W $S-$podmodul $S-$modula V, kvocijentni vektorski prostor V/W možemo snabdjeti strukturom $S-$modula ovako:

$$s(v + W) = sv + W, \qquad s \in S, \quad v \in V.$$

S tom strukturom V/W se zove **kvocijentni** $S-$**modul** ($S-$modula V po $S-$podmodulu W). Pripadna reprezentacija označava se sa $\pi_{V/W}$ i zove **kvocijentna reprezentacija** reprezentacije π. Kvocijentni $S-$modul $S-$podmodula od V ili, ekvivalentno, $S-$podmodul kvocijentnog $S-$modula od V, zove se **subkvocijentni** $S-$**modul**, ili kraće **subkvocijent**, $S-$modula V. Dakle, subkvocijent od V je $S-$modul oblika W/U, gdje su W i U $S-$podmoduli od V i $U \subseteq W$. Pripadna reprezentacija označava se sa $\pi_{W/U}$ i zove **subkvocijentna reprezentacija** ili **subkvocijent** reprezentacije π.

Ako su V i W $S-$moduli nad poljem K, $S-$**homomorfizam** (ili homomorfizam $S-$modula) V u W je linearan operator $A : V \to W$ sa svojstvom

$$Asv = sAv \qquad \forall s \in S \quad \text{i} \quad \forall v \in V.$$

Skup svih $S-$homomorfizama V u W označavamo sa $Hom_S(V, W)$ i to je potprostor prostora $L(V, W)$ svih linearnih operatora sa V u W. Ako su π i ρ pripadne reprezentacije od S na prostorima V i W, $S-$homomorfizmi se zovu i **preplitanja** reprezentacije π s reprezentacijom ρ. Surjektivni (odn., injektivni, bijektivni) $S-$homomorfizam zove se $S-$epimorfizam (odn., $S-$monomorfizam, $S-$izomorfizam). Kažemo da je $S-$modul V izomorfan $S-$modulu W ako postoji $S-$izomorfizam sa V na W, tj. ako u $Hom_S(V, W)$ postoji bijekcija. Kako je kompozicija $S-$homomorfizama $S-$homomorfizam, očito je relacija izomorfnosti među $S-$modulima tranzitivna. Ona je i simetrična jer invers $S-$izomorfizma je $S-$izomorfizam. Napokon, identiteta I_V na V je izomorfizam $S-$modula V sa samim sobom. Prema tome, izomorfnost $S-$modula je relacija ekvivalencije.

Vrijede sljedeća dva standardna rezultata:

Teorem 1.1.1. *Ako je $A : V \to W$ homomorfizam $S-$modula onda je* $\operatorname{Ker} A$ *$S-$podmodul od V,* $\operatorname{Im} A$ *je $S-$podmodul od W i sa*

$$v + \operatorname{Ker} A \mapsto Av, \qquad v \in V,$$

je zadan izomorfizam $S-$modula sa $V/(\operatorname{Ker} A)$ na $\operatorname{Im} A$.

Zadatak 1.1.1. *Dokažite teorem 1.1.1.*

Suma bilo kojeg skupa $S-$podmodula od V je $S-$podmodul od V. Posebno, ako su W i U $S-$podmoduli od V onda je i $W + U$ $S-$podmodul od V.

Teorem 1.1.2. *Ako su W i U $S-$podmoduli $S-$modula V, onda je sa*

$$w + (W \cap U) \mapsto w + U, \qquad w \in W,$$

zadan izomorfizam $S-$modula $W/(W \cap U)$ na $S-$modul $(W + U)/U$.

Zadatak 1.1.2. *Dokažite teorem 1.1.2.*

Kažemo da je $S-$**modul** V **prost** ako je $V \neq \{0\}$ i V nema netrivijalnih $S-$podmodula; tj. V i $\{0\}$ su jedini $S-$podmoduli od V. U tom se slučaju pripadna **reprezentacija** zove **ireducibilna**. Kažemo da je π **reducibilna reprezentacija** ako ona nije ireducibilna. V je **poluprost** $S-$**modul**, ako za svaki $S-$podmodul W od V postoji $S-$podmodul U od V takav da je $V = W \dotplus U$. Za pripadnu reprezentaciju u tom slučaju kažemo da je **potpuno reducibilna**.

Propozicija 1.1.3. *Ako je W $S-$podmodul poluprostog $S-$modula V, onda su $S-$moduli W i V/W poluprosti.*

Dokaz: Neka je X $S-$podmodul od W. Tada je X ujedno $S-$podmodul od V, pa po pretpostavci postoji $S-$podmodul Y od V takav da je $V = X \dotplus Y$. Sada je $Z = Y \cap W$ $S-$podmodul od W i očito vrijedi $W = X \dotplus Z$. Time smo dokazali da je $S-$modul W poluprost.

Neka je sada X $S-$podmodul kvocijentnog modula V/W. Stavimo

$$Y = \{y \in V;\ y + W \in X\}.$$

Tada je Y potprostor prostora V koji je $S-$podmodul od V. Doista, ako su $s \in S$ i $y \in Y$, onda je $y + W \in X$, pa iz činjenice da je X $S-$podmodul od V/W slijedi $s(y + W) \in X$. Međutim, po definiciji strukture $S-$modula na kvocijentnom prostoru V/W vrijedi $s(y + W) = sy + W$. To pokazuje da je $sy \in Y$. Kako su $s \in S$ i $y \in Y$ bili proizvoljni, dokazali smo da je Y $S-$podmodul od V. Budući da je $S-$modul V poluprost, postoji $S-$podmodul Z od V takav da je $V = Y \dotplus Z$. Stavimo sada

$$U = \{z + W;\ z \in Z\}.$$

Tada je U potprostor kvocijentnog prostora V/W i to je $S-$podmodul od V/W : za $s \in S$ i $u \in U$ i za $z \in Z$ takav da je $u = z + W$ vrijedi $sz \in Z$, jer je Z $S-$podmodul od V, pa vrijedi $su = s(z+W) = sz+W \in U$. Dokažimo sada da je $V/W = X \dotplus U$. Prije svega, proizvoljan vektor $v \in V$ može se napisati u obliku $v = y + z$, $y \in Y$, $z \in Z$. Tada je $v + W = (y + W) + (z + W)$ i vrijedi $y+W \in X$ i $z+W \in U$. To pokazuje da je $V/W = X + U$. Neka je sada $u \in X \cap U$. Budući da je $u \in U$, postoji $z \in Z$ takav da je $u = z + W$. No tada je $z + W \in X$, pa slijedi $z \in Y$. Dakle, $z \in Z \cap Y = \{0\}$, tj. $z = 0$, a to znači da je $u = z + W$ nulvektor u kvocijentnom prostoru V/W. Prema tome, suma je direktna: $V/W = X \dotplus U$. Time je dokazano da je i kvocijentni $S-$modul V/W poluprost.

Propozicija 1.1.4. *Svaki poluprost $S-$modul $V \neq \{0\}$ ima prost $S-$podmodul.*

Dokaz: Neka je $v \in V$, $v \neq 0$. Neka je $\mathcal{S}$ skup svih $S-$podmodula od V koji ne sadrže vektor v. Uz relaciju inkluzije $\mathcal{S}$ postaje parcijalno uređen skup. On je neprazan jer je $\{0\} \in \mathcal{S}$. Primjenom Zornove leme lako se vidi da skup $\mathcal{S}$ ima bar jedan maksimalni element W. Kako je $S-$modul V poluprost, postoji $S-$podmodul U takav da je $V = W \dotplus U$. Tada je $U \neq \{0\}$, jer $v \notin W$. Pretpostavimo da je U' netrivijalan podmodul od U. Prema propoziciji 1.1.3. $S-$modul U je poluprost pa on ima $S-$podmodul U'' takav da je $U = U' \dotplus U''$. Kako je W maksimalan $S-$podmodul od V sa svojstvom $v \notin W$, vrijedi $v \in W \dotplus U'$ i $v \in W \dotplus U''$. No tada slijedi da je $v \in (W \dotplus U') \cap (W \dotplus U'') = W$ suprotno svojstvu od W. Ova kontradikcija pokazuje da U nema netrivijalnih $S-$podmodula, odnosno, $S-$modul U je prost.

Teorem 1.1.5. *Sljedeća su tri svojstva $S-$modula V međusobno ekvivalentna:*

(a) *Modul V je poluprost.*

(b) *Modul V je suma svojih prostih podmodula.*

(c) *Modul V je direktna suma nekog skupa svojih prostih podmodula.*

Dokaz: $(a) \Rightarrow (b)$. Neka je V poluprost i neka je W suma svih njegovih prostih podmodula. Tada je $V = W \dotplus U$ za neki podmodul U. Prema propoziciji 1.1.4. ako je $U \neq \{0\}$ onda U sadrži neki prost podmodul Z. No po definiciji W tada je $Z \subseteq W$, a to je nemoguće. Ova kontradikcija pokazuje da je $U = \{0\}$, tj. $W = V$.

$(b) \Rightarrow (c)$. Pretpostavimo da je V suma svojih prostih podmodula. Primjenom Zornove leme nalazimo da postoji maksimalan skup $\mathcal{S}$ prostih podmodula čija je suma direktna. Neka je $W = \sum \mathcal{S}$. Pretpostavimo da je $W \neq V$. Tada postoji prost podmodul U od V takav da $U \subsetneq W$. Tada je $U \cap W \neq U$, dakle, $U \cap W = \{0\}$. Odatle slijedi da je suma $\sum(\mathcal{S} \cup \{U\})$ direktna i vrijedi $\mathcal{S} \subsetneq \mathcal{S} \cup \{U\}$, a to je nemoguće zbog izbora $\mathcal{S}$. Ova kontradikcija pokazuje da je $W = V$.

$(c) \Rightarrow (a)$. Pretpostavimo da je V direktna suma skupa $\mathcal{S}$ prostih podmodula od V i neka je W podmodul od V. Primjenom Zornove leme nalazimo da u skupu svih podmodula U od V takvih da je $U \cap W = \{0\}$ postoji bar jedan maksimalan element U. Neka je $Z \in \mathcal{S}$. Tvrdimo da je tada $Z \cap (W \dotplus U) \neq \{0\}$. Doista, u protivnom bi $U \dotplus Z$ bio podmodul od V sa svojstvom $(U \dotplus Z) \cap W = \{0\}$ i imali bismo da je $U \subsetneq U \dotplus Z$, a to je suprotno izboru podmodula U. Kako je Z prost i $Z \cap (W \dotplus U) \neq \{0\}$, vrijedi $Z \cap (W \dotplus U) = Z$, tj. $Z \subseteq W \dotplus U$. Kako to vrijedi za svaki $Z \in \mathcal{S}$, slijedi $V = \sum \mathcal{S} \subseteq W \dotplus U$, odnosno, $V = W \dotplus U$.

Sokl $S-$modula V je suma svih njegovih prostih $S-$podmodula. Očito je sokl od V najveći poluprost $S-$podmodul od V.

Za $S-$modul V pisat ćemo $End_S(V)$ umjesto $Hom_S(V, V)$. $End_S(V)$ je unitalna podalgebra unitalne algebre $L(V) = L(V, V)$ svih linearnih operatora na prostoru V.

Teorem 1.1.6. (**Schurova lema**) *Neka su V i W prosti $S-$moduli nad poljem K.*

(a) *Svaki element $A \in Hom_S(V, W) \setminus \{0\}$ je izomorfizam. Posebno, ako je $Hom_S(V, W) \neq \{0\}$, onda su $S-$moduli V i W izomorfni.*

(b) *Unitalna algebra $End_S(V)$ je tijelo, tj. svaki $A \in End_S(V) \setminus \{0\}$ je invertibilan.*

(c) *Ako je polje K algebarski zatvoreno i ako je* $\dim V$ *manja od* $Card\, K$, *posebno, ako je prostor V konačnodimenzionalan, onda je $End_S(V) = \{\lambda I_V;\ \lambda \in K\}$.*

Dokaz: (a) Pretpostavimo da je $A \in Hom_S(V, W) \setminus \{0\}$. Tada je $\operatorname{Ker} A$ $S-$podmodul od V :

$$v \in \operatorname{Ker} A,\ s \in S \quad \Longrightarrow \quad Asv = sAv = 0 \quad \Longrightarrow \quad sv \in \operatorname{Ker} A.$$

Kako je $A \neq 0$, vrijedi $\operatorname{Ker} A \neq V$, a kako je V prost $S-$modul, zaključujemo da je $\operatorname{Ker} A = \{0\}$, odnosno, A je injekcija. Nadalje, $\operatorname{Im} A$ je $S-$podmodul od W :

$$s \in S, \quad w \in \operatorname{Im} A, \quad v \in V \quad \text{takav da je} \quad w = Av \quad \Longrightarrow \quad sw = sAv = Asv \in \operatorname{Im} A.$$

Kako je $A \neq 0$ to je $\operatorname{Im} A \neq \{0\}$. Budući da je W prost $S-$modul, slijedi $\operatorname{Im} A = W$. Prema tome, A je i surjekcija, dakle, izomorfizam.

(b) Iz tvrdnje (a) slijedi da je svaki $A \in End_S(V) \setminus \{0\}$ invertibilan.

(c) Neka je $A \in L(V)$. Dokazat ćemo da je tada njegov spektar

$$Sp(A) = \{\lambda \in K;\ A - \lambda I_V \notin \mathrm{GL}(V)\}$$

neprazan. Naravno, ta je činjenica trivijalna ako je prostor V konačnodimenzionalan, jer je polje K po pretpostavci algebarski zatvoreno. Dokažimo tu činjenicu u općem slučaju uz iskazanu pretpostavku $\dim V < Card(K)$. Pretpostavimo suprotno da je spektar $Sp(A)$ prazan, tj. da je operator $A-\lambda I_V$ invertibilan za svaki $\lambda \in K$. Tada je operator $P(A)$ invertibilan za svaki polinom $P \in K[T]\setminus\{0\}$. Dakle, ako je $R = P/Q$ racionalna funkcija, možemo definirati $R(A) = P(A)Q(A)^{-1}$. Tako dolazimo do linearnog preslikavanja $R \mapsto R(A)$ prostora $K(T)$ racionalnih funkcija jedne varijable nad poljem K u prostor $L(V)$. Neka je $v \in V$, $v \neq 0$. Tada je $R \mapsto R(A)v$ injektivan linearan operator sa $K(T)$ u V. Odatle slijedi da je $\dim K(T) \leq \dim V$.

Uočimo sada da je skup

$$\left\{\frac{1}{T-\lambda};\ \lambda \in K\right\} \tag{1.1}$$

linearno nezavisan. Doista, u suprotnom bi postojali međusobno različiti $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$ i $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K \setminus \{0\}$ takvi da je

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\alpha_j}{T-\lambda_j} = 0.$$

Množenjem te jednakosti s umnoškom $(T-\lambda_1)\cdots(T-\lambda_n)$ dobivamo

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j Q_j(T) = 0, \qquad \text{gdje je} \quad Q_j(T) = (T-\lambda_1)\cdots(T-\lambda_{j-1})(T-\lambda_{j+1})\cdots(T-\lambda_n).$$

Sada je $Q_i(\lambda_j) = 0$ za $i \neq j$ i $Q_i(\lambda_i) = (\lambda_i-\lambda_1)\cdots(\lambda_i-\lambda_{i-1})(\lambda_i-\lambda_{i+1})\cdots(\lambda_i-\lambda_n) \neq 0$. Stoga za proizvoljan indeks $i \in \{1, \ldots, n\}$ vrijedi

$$0 = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j Q_j(\lambda_i) = \alpha_i Q_i(\lambda_i),$$

a to je nemoguće jer je $\alpha_i \neq 0$ i $Q_i(\lambda_i) \neq 0$. Time je dokazana linearna nezavisnost skupa (1.1). Odatle slijedi da je $Card\, K \leq \dim K(T)$, pa iz prije utvrđene nejednakosti $\dim K(T) \leq \dim V$ zaključujemo da je $Card\, K \leq \dim V$, a to je suprotno pretpostavci. Ova kontradikcija pokazuje da za svaki $A \in L(V)$ postoji $\lambda \in K$ takav da operator $A - \lambda I_V$ nije invertibilan. Sada iz tvrdnje (c) Schurove leme (teorem 1.1.6.) slijedi da je $A - \lambda I_V = 0$, dakle, $A = \lambda I_V$.

Neka je sada zadana familija $S-$modula $(V_i)_{i\in I}$ i neka je za $i \in I$ sa π_i označena pripadna reprezentacija od S na prostoru V_i. Tada na direktnoj sumi

$$\coprod_{i\in I} V_i = \left\{f : I \to \bigcup_{i\in I} V_i;\ f(i) \in V_i\ \ \forall i \in I,\ \text{skup}\ \{i \in I;\ f(i) \neq 0\}\ \text{je konačan}\right\}$$

definiramo reprezentaciju π od S na sljedeći način:

$$(\pi(s)f)(i) = \pi_i(s)f(i), \qquad s \in S, \quad i \in I.$$

π se zove **direktna suma reprezentacija** π_i. Uz pripadnu strukturu $S-$modula V se zove **direktna suma $S-$modula** V_i.

Naravno, ako je W $S-$modul i ako su V_i, $i \in I$, $S-$podmoduli od W takvi da je prostor W direktna suma potprostora V_i, $i \in I$, onda je $S-$modul W izomorfan direktnoj sumi V familije $S-$modula $(V_i)_{i\in I}$, a izomorfizam sa V na W dan je sa

$$f \mapsto \sum_{i\in I} f(i), \qquad f \in V = \coprod_{i\in I} V_i.$$

Drugim riječima, reprezentacija od S na prostoru W ekvivalentna je direktnoj sumi familije reprezentacija $(\pi_{V_i})_{i\in I}$.

Zadatak 1.1.3. *Neka je S skup i neka je V $S-$modul.*

(a) *Neka su W i U $S-$podmoduli od V takvi da je $V = W \dotplus U$. Dokažite da je tada $V/W \simeq U$.*

(b) *Neka su A, B i C $S-$podmoduli od V takvi da je $V = A \dotplus B = A \dotplus C$. Dokažite da je tada $B \simeq C$.*

U slučaju konačnodimenzionalnog $S-$modula teorem 1.1.5. se može ovako iskazati:

Teorem 1.1.7. *Neka je V konačnodimenzionalan $S-$modul. Sljedeća su tri svojstva međusobno ekvivalentna:*

(a) *Modul V je poluprost.*

(b) *Postoji familija $(V_i)_{i\in I}$ prostih $S-$podmodula od V takva da je*

$$V = \sum_{i\in I} V_i.$$

(c) *Postoje prosti podmoduli $V_1, V_2, \ldots, V_n$ od V takvi da je*

$$V = V_1 \dotplus V_2 \dotplus \cdots \dotplus V_n.$$

U situaciji iz tvrdnje (c) prethodnog teorema neka je π oznaka za reprezentaciju od S na prostoru V i neka je za svaki $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ izabrana neka baza $e^{(j)} = \left\{e_1^{(j)}, e_2^{(j)}, \ldots, e_{m_j}^{(j)}\right\}$ potprostora V_j. Nadalje, neka je e oznaka za bazu prostora V koja je dobivena iz tih baza:

$$e = \left\{e_1^{(1)}, e_2^{(1)}, \ldots, e_{m_1}^{(1)}, e_1^{(2)}, e_2^{(2)}, \ldots, e_{m_2}^{(2)}, \ldots\ldots, e_1^{(n)}, e_2^{(n)}, \ldots, e_{m_n}^{(n)}\right\}.$$

Za $s \in S$ označimo sa $\pi(s)[e]$ matricu operatora $\pi(s)$ u bazi e, a za $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ neka je $\pi_{V_j}(s)[e^{(j)}]$ oznaka za matricu operatora $\pi_{V_j}(s) = \pi(s)|V_j$ u bazi $e^{(j)}$. Tada se lako vidi da je $\pi(s)[e]$ blok$-$dijagonalna matrica:

$$\pi(s)[e] = \begin{bmatrix} \pi_{V_1}(s)[e^{(1)}] & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \pi_{V_2}(s)[e^{(2)}] & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \pi_{V_n}(s)[e^{(n)}] \end{bmatrix}, \qquad s \in S.$$

Zadatak 1.1.4. *Neka su V i W $S-$moduli nad istim poljem K. Ako je X $S-$podmodul od W tada prostor $Hom_S(V, X)$ možemo na prirodan način identificirati s potprostorom*

$$\{A \in Hom_S(V, W);\ \mathrm{Im}\, A \subseteq X\}$$

prostora $Hom_S(V, W)$. Ukoliko je $W = X_1 \dotplus X_2 \dotplus \cdots \dotplus X_n$, pri čemu su X_i $S-$podmoduli od W dokažite da uz spomenutu identifikaciju prostora $Hom_S(V, X_i)$ s potprostorima od $Hom_S(V, W)$ vrijedi

$$Hom_S(V, W) = Hom_S(V, X_1) \dotplus Hom_S(V, X_2) \dotplus \cdots \dotplus Hom_S(V, X_n).$$

Zadatak 1.1.5. *Neka su V i W $S-$moduli nad istim poljem K.*

(*a*) *Ako je X $S-$podmodul od V, konstruirajte izomorfizam prostora $Hom_S(V/X,W)$ s potprostorom*
$$\{A \in Hom_S(V,W);\ A|X = 0\}$$
prostora $Hom_S(V,W)$.

(*b*) *Ako je $V = X_1 \dot{+} X_2 \dot{+} \cdots \dot{+} X_n$, gdje su X_i, $1 \leq i \leq n$, $S-$podmoduli od V, definirajmo potprostore $\mathcal{X}_i$ prostora $L(V,W)$ ovako:*
$$\mathcal{X}_i = \{A \in L(V,W);\ A|X_j = 0 \text{ za } j \neq i,\ A|X_i \in Hom_S(X_i,W)\}.$$
Dokažite da je svaki $\mathcal{X}_i$ potprostor prostora $Hom_S(V,W)$ i da je
$$Hom_S(V,W) = \mathcal{X}_1 \dot{+} \mathcal{X}_2 \dot{+} \cdots \dot{+} \mathcal{X}_n.$$

Teorem 1.1.8. *Neka su V i W konačnodimenzionalni $S-$moduli nad algebarski zatvorenim poljem K pri čemu je $S-$modul V poluprost, a $S-$modul W prost. Neka je $V = V_1 \dot{+} V_2 \dot{+} \cdots \dot{+} V_n$, pri čemu je svaki od potprostora V_i prost $S-$podmodul od V. Tada je*
$$|\{i \in \{1,2,\ldots,n\};\ V_i \simeq W\}| = \dim Hom_S(W,V) = \dim Hom_S(V,W).$$
(*Pri tome $|S|$ označava broj elemenata konačnog skupa S*).

Dokaz: Prema zadatku 1.1.4. vrijedi
$$Hom_S(W,V) = Hom_S(W,V_1) \dot{+} Hom_S(W,V_2) \dot{+} \cdots \dot{+} Hom_S(W,V_n). \tag{1.2}$$
Nadalje, prema Schurovoj lemi (teorem 1.1.6.) vrijedi
$$\dim Hom_S(W,V_i) = \begin{cases} 1 & \text{ako je } V_i \simeq W \\ \\ 0 & \text{ako je } V_i \not\simeq W. \end{cases}$$
Odatle i iz (1.2) slijedi jednakost $\dim Hom_S(W,V) = |\{i \in \{1,2,\ldots,n\};\ V_i \simeq W\}|$. Sasvim analogno, pomoću zadatka 1.1.5. dobivamo $\dim Hom_S(V,W) = |\{i \in \{1,2,\ldots,n\};\ V_i \simeq W\}|$.

U najvećem dijelu ovog kolegija bavit ćemo se isključivo s reprezentacijama na kompleksnim i na realnim vektorskim prostorima. Ako je k tome prostor unitaran, uz određene uvjete imamo potpunu reducibilnost reprezentacije, odnosno poluprostotu pripadnog modula.

Teorem 1.1.9. *Neka je π konačnodimenzionalna reprezentacija skupa S na realnom ili kompleksnom unitarnom prostoru V. Pretpostavimo da vrijedi $\pi(S)^* = \pi(S)$, tj. da je adjungiranje operatora $A \mapsto A^*$ permutacija skupa operatora reprezentacije $\pi(S) = \{\pi(s);\ s \in S\}$. Tada je reprezentacija π potpuno reducibilna.*

Dokaz: Neka je X $\pi-$invarijantan potprostor od V. Prema teoremu o ortogonalnoj projekciji tada je
$$V = X \dot{+} X^\perp \qquad \text{gdje je} \quad X^\perp = \{v \in V;\ (v|x) = 0\ \forall x \in X\}.$$
Neka je $v \in X^\perp$ i neka je $a \in \mathcal{A}$. Po pretpostavci postoji $b \in \mathcal{A}$ takav da je $\pi(a) = \pi(b)^*$. Sada za proizvoljan $x \in X$ imamo $\pi(b)x \in X$, dakle, $(\pi(a)v|x) = (v|\pi(b)x) = 0$. Dakle,
$$v \in X^\perp \qquad \Longrightarrow \qquad \pi(a)v \in X^\perp \quad \forall a \in \mathcal{A},$$
i time je dokazano da je reprezentacija π potpuno reducibilna.

1.2 Grupe i algebre

Ako je G grupa, grupovnu operaciju najčešće ćemo označavati bez ikakvoga znaka $(a,b) \mapsto ab$, $a,b \in G$ a jedinicu grupe G označavat ćemo sa e (ili sa e_G).

Asocijativnu algebru s jedinicom zvat ćemo **unitalna algebra**. Ako je $\mathcal{A}$ unitalna algebra, njenu ćemo jedinicu označavati sa $e_{\mathcal{A}}$. Neka su $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ unitalne algebre. Homomorfizam algebri $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ sa svojstvom $\varphi(e_{\mathcal{A}}) = e_{\mathcal{B}}$ zvat ćemo **unitalni homomorfizam**.

Liejeva algebra nad poljem K je vektorski prostor $\mathfrak{g}$ na kome je zadana bilinearna binarna operacija $(x,y) \mapsto [x,y]$ sa sljedeća dva svojstva:

(LA1) $[x,x] = 0 \ \forall x \in \mathfrak{g}$ (antikomutativnost);

(LA2) $[x,[y,z]] + [y,[z,x]] + [z,[x,y]] = 0 \ \forall x,y,z \in \mathfrak{g}$ (Jacobijev identitet).

Naravno, iz (LA1) slijedi $[x,y] = -[y,x] \ \forall x,y \in \mathfrak{g}$.

Zadatak 1.2.1. *Neka je $\mathcal{A}$ asocijativna algebra. Stavimo*

$$[x,y] = xy - yx, \qquad x,y \in \mathcal{A}.$$

Dokažite da $\mathcal{A}$ uz tako definiranu operaciju $(x,y) \mapsto [x,y]$ postaje Liejeva algebra.

Zbog definicije u zadatku 1.2.1. operacija $(x,y) \mapsto [x,y]$ u bilo kojoj Liejevoj algebri $\mathfrak{g}$ obično se zove **komutator**.

Posebno, za vektorski prostor V asocijativna algebra $L(V)$ postaje Liejeva algebra uz komutator

$$[A,B] = AB - BA, \qquad A,B \in L(V).$$

Kada imamo na umu strukturu Liejeve algebre umjesto $L(V)$ pisat ćemo $\mathfrak{gl}(V)$.

Ako skup S ima strukturu grupe, asocijativne algebre, unitalne algebre ili Liejeve algebre, i s tom strukturom ga označimo sa $\mathcal{S}$, među svim $S-$modulima uočit ćemo one koji nose odgovarajuću dodatnu strukturu i takve ćemo zvati $\mathcal{S}-$modulima:

- Ako je G grupa, $G-$modul nad poljem K je vektorski prostor V nad poljem K koji je modul nad skupom G i vrijedi

  $$(ab)v = a(bv) \quad \forall a,b \in G \quad \text{i} \quad \forall v \in V \qquad \text{i} \qquad e_G v = v \quad \forall v \in V.$$

  Tada je svaki operator $v \mapsto av$, $a \in G$, invertibilan i njegov je invers $v \mapsto a^{-1}v$.

- Ako je $\mathcal{A}$ asocijativna algebra nad poljem k i K je proširenje polja k, $\mathcal{A}-$modul nad poljem K je vektorski prostor nad K koji je modul nad skupom $\mathcal{A}$ i vrijedi

  $$(a+b)v = av + bv, \quad (\lambda a)v = \lambda av \quad \text{i} \quad (ab)v = a(bv) \qquad \forall a,b \in \mathcal{A}, \quad \forall \lambda \in k \quad \text{i} \quad \forall v \in V.$$

- Ako je $\mathcal{A}$ unitalna algebra, pored prethodnog zahtijevamo još da je

  $$e_{\mathcal{A}} v = v \qquad \forall v \in V.$$

- Ako je $\mathfrak{g}$ Liejeva algebra nad poljem k i K proširenje polja k, $\mathfrak{g}-$modul nad poljem K je vektorski prostor V nad poljem K koji je modul nad skupom $\mathfrak{g}$ i vrijedi

  $$(a+b)v = av+bv, \quad (\lambda a)v = \lambda av \quad \text{i} \quad [a,b]v = a(bv)-b(av) \qquad \forall a,b \in \mathfrak{g}, \quad \forall \lambda \in k \quad \text{i} \quad \forall v \in V.$$

Pripadne reprezentacije zovu se reprezentacije te strukture:

- **Reprezentacija grupe** G na vektorskom prostoru V nad poljem K je homomorfizam grupa $\pi : G \to \mathrm{GL}(V)$. Drugim riječima, reprezentacija G na V je preslikavanje $\pi\colon G \to L(V)$ takvo da vrijedi
$$\pi(ab) = \pi(a)\pi(b) \quad \forall a, b \in G, \qquad \pi(e) = I.$$
- **Reprezentacija asocijativne algebre** $\mathcal{A}$ nad poljem k na vektorskom prostoru V nad poljem $K \supseteq k$ je homomorfizam asocijativnih $k-$algebri $\pi : \mathcal{A} \to L(V)$. Dakle, reprezentacija $\mathcal{A}$ na V je preslikavanje $\pi\colon \mathcal{A} \to L(V)$ takvo da vrijedi
$$\pi(\alpha x + \beta y) = \alpha\pi(x) + \beta\pi(y), \qquad \pi(xy) = \pi(x)\pi(y), \qquad \forall x, y \in \mathcal{A},\ \forall \alpha, \beta \in k.$$
- **Reprezentacija unitalne algebre** $\mathcal{A}$ nad k na vektorskom prostoru V nad $K \supseteq k$ je homomorfizam unitalnih $k-$algebri $\pi : \mathcal{A} \to L(V)$. Drugim riječima, reprezentacija unitalne algebre $\mathcal{A}$ na prostoru V je reprezentacija asocijativne algebre $\mathcal{A}$ takva da vrijedi
$$\pi\left(e_{\mathcal{A}}\right) = I.$$
- **Reprezentacija Liejeve algebre** $\mathfrak{g}$ nad poljem k na vektorskom prostoru V nad poljem $K \supseteq k$ je homomorfizam Liejevih $k-$algebri $\pi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$. Dakle, reprezentacija $\mathfrak{g}$ na V je preslikavanje $\pi\colon \mathfrak{g} \to L(V)$ takvo da vrijedi
$$\pi(\alpha x + \beta y) = \alpha\pi(x) + \beta\pi(y), \qquad \pi([x, y]) = \pi(x)\pi(y) - \pi(y)\pi(x), \qquad \forall x, y \in \mathfrak{g},\ \forall \alpha, \beta \in k.$$

U svakom od ta četiri slučaja vektorski prostor V zovemo **prostorom reprezentacije** π. Ako je prostor V konačnodimenzionalan, **reprezentacija** π zove se **konačnodimenzionalna** i tada se prirodan broj (ili nula) $d(\pi) = \dim V$ zove **dimenzija reprezentacije** π.

Ako je reprezentacija π injektivni homomorfizam, kažemo da je π **vjerna reprezentacija**. Ako se radi o reprezentaciji grupe G, onda je jezgra
$$H = \mathrm{Ker}\,\pi = \{a \in G;\ \pi(a) = I\}$$
bilo koje reprezentacije π normalna podgrupa grupe G i prijelazom na kvocijent dobivamo vjernu reprezentaciju $\tilde{\pi}$ kvocijentne grupe G/H :
$$\tilde{\pi}(aH) = \pi(a), \qquad aH \in G/H.$$
Slično, ako se radi o reprezentaciji asocijativne, unitalne ili Liejeve algebre $\mathcal{A}$, onda je jezgra
$$\mathcal{I} = \mathrm{Ker}\,\pi = \{a \in \mathcal{A};\ \pi(a) = 0\}$$
reprezentacije π ideal u toj algebri $\mathcal{A}$ i prijelazom na kvocijent dobivamo vjernu reprezentaciju asocijativne, unitalne ili Liejeve kvocijentne algebre $\mathcal{A}/\mathcal{I}$:
$$\tilde{\pi}(a + \mathcal{I}) = \pi(x), \qquad x + \mathcal{I} \in \mathcal{A}/\mathcal{I}.$$

Važna je primjena teorema 1.1.9. na tzv. **unitarnu reprezentaciju** π **grupe** G, tj. takvu da je svaki operator reprezentacije $\pi(g)$, $g \in G$, unitaran:
$$\pi(g)^* = \pi\left(g^{-1}\right) \qquad \forall g \in G.$$

Druga je važna primjena tog teorema na tzv. **antihermitsku reprezentaciju** π **realne Liejeve algebre** $\mathfrak{g}$ na realnom ili kompleksnom unitarnom prostoru V, tj. takvu da je svaki operator reprezentacije $\pi(x)$, $x \in \mathfrak{g}$, antihermitski:

$$\pi(x)^* = -\pi(x) \qquad \forall x \in \mathfrak{g}.$$

U tim slučajevima iz teorema 1.1.9. neposredno slijedi:

Teorem 1.2.1. *Neka je V konačnodimenzionalan realan ili kompleksan unitaran prostor i neka je π ili unitarna reprezentacija grupe G ili antihermitska reprezentacija realne Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ na prostoru V. Tada je reprezentacija π potpuno reducibilna.*

Zadatak 1.2.2. *Neka je S_n simetrična grupa reda n tj. grupa svih permutacija skupa $\{1, 2, \ldots, n\}$ i neka je V $n-$dimenzionalan vektorski prostor nad poljem K s bazom $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$. Za $\sigma \in S_n$ neka je $\pi(\sigma) \in L(V)$ definiran sa*

$$\pi(\sigma)e_i = e_{\sigma(i)}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Dokažite da je π vjerna reprezentacija grupe S_n na prostoru V.

Zadatak 1.2.3. *Neka je V realan ili kompleksan konačnodimenzionalan vektorski prostor i neka je π neprekidna reprezentacija aditivne grupe $\mathbb{R}$ na prostoru V :*

$$\pi(t+s) = \pi(t)\pi(s), \quad t, s \in \mathbb{R}; \qquad \pi(0) = I.$$

(*a*) *Dokažite da je preslikavanje $\pi : \mathbb{R} \to L(V)$ diferencijabilno.*

(*b*) *Dokažite da za*

$$A = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\pi(t)\bigg|_{t=0} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(\pi(t) - I)$$

vrijedi

$$\pi(t) = e^{tA}.$$

Pri tome je za $B \in L(V)$ operator e^B definiran konvergentnim redom

$$e^B = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} B^k.$$

Uputa za (*a*) Uočite da iz neprekidnosti preslikavanja π slijedi da je

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \int_0^t \pi(t)\mathrm{d}t = \pi(0) = I.$$

Odatle zaključite da postoji $\alpha > 0$ takav da je operator

$$B = \int_0^{\alpha} \pi(t)\mathrm{d}t$$

regularan. Zatim dokažite da vrijedi

$$\pi(s) = B^{-1} \int_s^{s+\alpha} \pi(t)\mathrm{d}t \qquad \forall s \in \mathbb{R}.$$

Zadatak 1.2.4. *Pretpostavimo da je u zadatku 1.2.2. K polje karakteristike* 0. *Dokažite da su tada*

$$W = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i;\ \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n \in K,\ \sum_{i=1}^{n} \xi_i = 0 \right\} \qquad i \qquad U = Ku, \qquad \text{gdje je} \quad u = \sum_{i=1}^{n} e_i,$$

$\pi-$invarijantni potprostori i da je $V = W \dotplus U$. Nadalje, dokažite da je reprezentacija π_W ireducibilna.

Uputa za drugu tvrdnju: Neka je $\{0\} \neq X \subseteq W$ π_W-invarijantan potprostor. Ako je $x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \cdots + \xi_n e_n \in X$ i $x \neq 0$ tada $x \notin U$ pa postoje $i \neq j$ takvi da je $\xi_i \neq \xi_j$. Sada izračunajte $\pi(\sigma_{ij})x - x$, gdje je $\sigma_{ij} \in S_n$ transpozicija $\sigma_{ij}(i) = j$, $\sigma_{ij}(j) = i$, $\sigma_{ij}(k) = k$ za $k \neq i$ i $k \neq j$. Zaključite da je $e_i - e_j \in X$, a zatim djelovanjem $\pi(\sigma)$, $\sigma \in S_n$, da su $e_p - e_q \in X$ za sve $p, q \in \{1, 2, \dots, n\}$. Odatle zaključite da je $X = W$.

Zadatak 1.2.5. *Neka je $\mathcal{P}$ vektorski prostor svih polinomijalnih funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$.*

(*a*) *Dokažite da je sa*

$$[\pi(t)f](s) = f(s-t), \quad t, s \in \mathbb{R}, \quad f \in \mathcal{P},$$

zadana reprezentacija π aditivne grupe $\mathbb{R}$ na prostoru $\mathcal{P}$.

(*b*) *Dokažite da su*

$$\mathcal{P}_n = \{f \in \mathcal{P};\ \deg f \leq n\}, \qquad n \in \mathbb{Z}_+,$$

svi netrivijalni $\pi-$invarijantni potprostori od $\mathcal{P}$.

(*c*) *Dokažite da je svaka subreprezentacija $\pi_{\mathcal{P}_n}$, $n \in \mathbb{Z}_+$, neprekidna i da je operator*

$$A = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \pi_{\mathcal{P}_n}(t) \bigg|_{t=0}$$

dan sa $Af = f'$.

To znači da formalno možemo pisati $\pi(t) = \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}}$.

Neka je π reprezentacija grupe G na vektorskom prostoru V. Stavimo

$$V^G = \{v \in V;\ \pi(a)v = v\ \ \forall a \in G\}.$$

Vektori iz V^G zovu se $G-$**invarijante** reprezentacije π. Potprostor $G-$invarijanata V^G je očito $\pi-$invarijantan, odnosno, to je $G-$podmodul. Štoviše, svaki potprostor od V^G je $\pi-$invarijantan.

Neka su π i ρ reprezentacije grupe G na vektorskim prostorima V i W nad istim poljem K. Na prostoru linearnih operatora $L(V, W)$ tada možemo definirati reprezentaciju τ grupe G na sljedeći način:

$$\tau(a)(A) = \rho(a) A \pi(a^{-1}), \qquad A \in L(V, W), \quad a \in G.$$

Tada je očito $Hom_G(V, W)$ upravo $\tau-$invarijantan potprostor $L(V, W)^G$ svih $G-$invarijanata reprezentacije τ.

Neka je sada π reprezentacija Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ na vektorskom prostoru V. Tada se $\mathfrak{g}-$**invarijantama** zovu vektori $\pi-$invarijantnog potprostora

$$V^{\mathfrak{g}} = \{v \in V;\ \pi(x)v = 0\ \ \forall x \in \mathfrak{g}\}$$

Slično kao kod grupa, ako su π i ρ reprezentacije Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ na vektorskim prostorima V i W na prostoru $L(V,W)$ možemo definirati reprezentaciju τ od $\mathfrak{g}$ na sljedeći način:

$$\tau(x)(A) = \rho(x)A - A\pi(x), \qquad A \in L(V,W), \quad x \in \mathfrak{g}.$$

Tada je $Hom_{\mathfrak{g}}(V,W)$ upravo $\tau-$invarijantan potprostor $L(V,W)^{\mathfrak{g}}$ svih $\mathfrak{g}-$invarijanata reprezentacije τ.

Neka je π reprezentacija grupe G na vektorskom prostoru V nad poljem K. Na dualnom prostoru $V' = L(V,K)$ definiramo tzv. **kontragredijentnu** reprezentaciju π^t reprezentacije π :

$$\pi^t(a)f = f \circ \pi(a^{-1}), \qquad \text{tj.} \qquad (\pi^t(a)f)(v) = f(\pi(a^{-1})v), \qquad a \in G, \quad v \in V, \quad f \in V'.$$

Analogno, ako je π reprezentacija Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ na vektorskom prostoru V tada se na dualnom prostoru V' kontragredijentna reprezentacija π^t reprezentacije π definira ovako:

$$\pi^t(x)f = -f \circ \pi(x), \qquad \text{tj.} \qquad (\pi^t(x)f)(v) = -f(\pi(x)v), \qquad x \in \mathfrak{g}, \quad v \in V, \quad f \in V'.$$

Ovdje se u stvari radi o prethodnim konstrukcijama za trivijalnu reprezentaciju ρ grupe G na jednodimenzionalnom prostoru $W = K$ ($\rho(a) = 1$ $\forall a \in G$), odnosno, za trivijalnu reprezentaciju ρ Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ na jednodimenzionalnom prostoru $W = K$ ($\rho(x) = 0$ $\forall x \in \mathfrak{g}$).

Teorem 1.2.2. *Neka je π ireducibilna konačnodimenzionalna reprezentacija grupe G ili Liejeve algebre $\mathfrak{g}$. Tada je njoj kontragredijentna reprezentacija π^t također ireducibilna.*

Dokaz: Pretpostavimo da se radi o reprezentaciji grupe G. Neka je $U \subseteq V'$ π^t-invarijantan potprostor. Tada je njegov anihilator

$$U^\circ = \{x \in V;\ f(x) = 0 \quad \forall f \in U\}$$

potprostor od V koji je $\pi-$invarijantan:

$$x \in U^\circ,\ a \in G,\ f \in U \qquad \Longrightarrow \qquad f(\pi(a)x) = (\pi^t(a^{-1})f)(x) = 0,$$

jer je $\pi^t(a^{-1})f \in U$. Dakle,

$$x \in U^\circ,\ a \in G \qquad \Longrightarrow \qquad \pi(a)x \in U^\circ.$$

Kako je reprezentacija π ireducibilna, slijedi da je ili $U^\circ = \{0\}$ ili $U^\circ = V$. Znamo da je

$$\dim V' = \dim V \qquad \text{i} \qquad \dim U^\circ = \dim V - \dim U.$$

Dakle, ili je $\dim U = \dim V'$, tj. $U = V'$, ili je $\dim U = 0$, tj. $U = \{0\}$. Time je dokazano da je reprezentacija π^t ireducibilna.

1.3 Grupovna algebra

Neka je G grupa i K polje. Sa $K[G]$ ćemo označavati vektorski prostor svih funkcija $\varphi : G \to K$ za koje je nosač

$$\mathrm{Supp}(\varphi) = \{a \in G;\ \varphi(a) \neq 0\}$$

konačan skup. Za $a \in G$ definiramo $\delta_a \in K[G]$ sa

$$\delta_a(b) = \begin{cases} 1 & \text{ako je } b = a \\ 0 & \text{ako je } b \neq a \end{cases}.$$

Tada je očito $\{\delta_a;\ a \in G\}$ baza vektorskog prostora $K[G]$ nad poljem K : za svaku funkciju $\varphi \in K[G]$ je

$$\varphi = \sum_{a \in G} \varphi(a)\delta_a. \tag{1.3}$$

Za $\varphi, \psi \in K[G]$ definiramo njihovu **konvoluciju** $\varphi * \psi : G \to K$ na sljedeći način:

$$(\varphi * \psi)(a) = \sum_{b \in G} \varphi(b)\psi(b^{-1}a), \qquad a \in G.$$

Gornja suma je dobro definirana jer je samo konačno mnogo njenih članova različito od nule.

Propozicija 1.3.1. *(a) Za $\varphi, \psi \in K[G]$ je $\varphi * \psi \in K[G]$.*

(b) Konvolucija $(\varphi, \psi) \mapsto \varphi * \psi$ definira na $K[G]$ strukturu unitalne algebre. Jedinica u algebri $K[G]$ je δ_e.

(c) Za $a, b \in G$ vrijedi $\delta_a * \delta_b = \delta_{ab}$.

Zadatak 1.3.1. *Dokažite propoziciju 1.3.1.*

Unitalna algebra $K[G]$ zove se **grupovna algebra** grupe G nad poljem K. Primijetimo da se za konačnu grupu G prostor $K[G]$ sastoji od svih funkcija sa G u K. U tom slučaju je $\dim K[G] = |G|$. Ako je grupa G beskonačna, prostor $K[G]$ je beskonačnodimenzionalan.

Teorem 1.3.2. *(a) Neka je π reprezentacija grupe G na vektorskom prostoru V nad poljem K. Za $\varphi \in K[G]$ definiramo $\tilde{\pi}(\varphi) : V \to V$ relacijom*

$$\tilde{\pi}(\varphi) = \sum_{a \in G} \varphi(a)\pi(a).$$

Tada je $\varphi \mapsto \tilde{\pi}(\varphi)$ reprezentacija unitalne algebre $K[G]$ na vektorskom prostoru V.

(b) Neka je ρ reprezentacija unitalne algebre $K[G]$ na vektorskom prostoru V nad poljem K. Za $a \in G$ definiramo $\hat{\rho}(a) : V \to V$ relacijom

$$\hat{\rho}(a) = \rho(\delta_a).$$

Tada je $a \mapsto \hat{\rho}(a)$ reprezentacija grupe G na vektorskom prostoru V.

(c) Preslikavanja $\pi \mapsto \tilde{\pi}$ iz (a) i $\rho \mapsto \hat{\rho}$ iz (b) su međusobno inverzna. Tj. ako je π reprezentacija od G onda je $\hat{\tilde{\pi}} = \pi$, a ako je ρ reprezentacija od $K[G]$ onda je $\tilde{\hat{\rho}} = \rho$.

(*d*) *Uz oznaku iz* (*a*) *potprostor* X *prostora* V *je* $\pi-$*invarijantan ako i samo ako je on* $\tilde{\pi}-$*invarijantan.*

(*e*) *Neka su* π *i* ρ *reprezentacije grupe* G *na vektorskim prostorima* V *i* W *nad poljem* K *i* $\tilde{\pi}$ *i* $\tilde{\rho}$ *pripadne reprezentacije unitalne algebre* $K[G]$ *kao u* (*a*)*. Tada je*

$$Hom_G(V,W) = Hom_{K[G]}(V,W).$$

Posebno, reprezentacije π *i* ρ *grupe* G *su ekvivalentne ako i samo ako su ekvivalentne pripadne reprezentacije* $\tilde{\pi}$ *i* $\tilde{\rho}$ *unitalne algebre* $K[G]$.

Dokaz: (*a*) Očito je preslikavanje $\varphi \mapsto \tilde{\pi}(\varphi)$ linearno. Nadalje, za $\varphi, \psi \in K[G]$ imamo

$$\tilde{\pi}(\varphi * \psi) = \sum_{a\in G}(\varphi * \psi)(a)\pi(a) = \sum_{a\in G}\left(\sum_{b\in G}\varphi(b)\psi(b^{-1}a)\right)\pi(a) = \sum_{b\in G}\varphi(b)\left(\sum_{a\in G}\psi(b^{-1}a)\pi(a)\right).$$

Za svako fiksno $b \in G$ u unutarnjoj sumi s desne strane izvršimo zamjenu sumacije po $a \in G$ sumacijom po $c = b^{-1}a$ (dakle, $a = bc$):

$$\sum_{a\in G}\psi(b^{-1}a)\pi(a) = \sum_{c\in G}\psi(c)\pi(bc) = \sum_{c\in G}\psi(c)\pi(b)\pi(c) = \pi(b)\sum_{c\in G}\psi(c)\pi(c) = \pi(b)\tilde{\pi}(\psi).$$

Dakle,

$$\tilde{\pi}(\varphi * \psi) = \sum_{b\in G}\varphi(b)\pi(b)\tilde{\pi}(\psi) = \tilde{\pi}(\varphi)\tilde{\pi}(\psi).$$

Time je dokazano da je $\varphi \mapsto \tilde{\pi}(\varphi)$ reprezentacija asocijativne algebre $K[G]$ na prostoru V. Nadalje, za svaki $a \in G$ vrijedi

$$\tilde{\pi}(\delta_a) = \sum_{b\in G}\delta_a(b)\pi(b) = \pi(a).$$

Posebno je $\tilde{\pi}(\delta_e) = \pi(e) = I_V$. Dakle, $\varphi \mapsto \tilde{\pi}(\varphi)$ je reprezentacija unitalne algebre $K[G]$ na prostoru V.

(*b*) Prema tvrdnji (*c*) propozicije 1.3.1. imamo

$$\hat{\rho}(ab) = \rho(\delta_{ab}) = \rho(\delta_a * \delta_b) = \rho(\delta_a)\rho(\delta_b) = \hat{\rho}(a)\hat{\rho}(b), \qquad \hat{\rho}(e) = \hat{\rho}(\delta_e) = I_V.$$

Dakle, $a \mapsto \hat{\rho}(a)$ je reprezentacija grupe G na vektorskom prostoru V.

(*c*) Za reprezentaciju π grupe G i za $a \in G$ imamo

$$\hat{\tilde{\pi}}(a) = \tilde{\pi}(\delta_a) = \sum_{b\in G}\delta_a(b)\pi(b) = \pi(a).$$

Dakle, vrijedi $\hat{\tilde{\pi}} = \pi$. Nadalje, ako je ρ reprezentacija unitalne algebre $K[G]$ i $\varphi \in K[G]$, onda zbog (1.3) imamo

$$\tilde{\hat{\rho}}(\varphi) = \sum_{a\in G}\varphi(a)\hat{\rho}(a) = \sum_{a\in G}\varphi(a)\rho(\delta_a) = \rho\left(\sum_{a\in G}\varphi(a)\delta_a\right) = \rho(\varphi).$$

Dakle, vrijedi $\tilde{\hat{\rho}} = \rho$.

(*d*) Pretpostavimo da je potprostor X prostora V $\pi-$invarijantan, tj. invarijantan s obzirom na sve operatore $\pi(a)$, $a \in G$. Kako je prema definiciji reprezentacije $\tilde{\pi}$ operator $\tilde{\pi}(\varphi)$, $\varphi \in K[G]$, linearna kombinacija operatora $\pi(a)$, $a \in G$, slijedi da je potprostor X invarijantan s obzirom na sve operatore $\tilde{\pi}(\varphi)$, $\varphi \in K[G]$, tj. potprostor X je $\tilde{\pi}-$invarijantan.

Obratno, pretpostavimo da je potprostor X prostora V $\tilde{\pi}-$invarijantan, tj. invarijantan s obzirom na sve operatore $\tilde{\pi}(\varphi)$, $\varphi \in K[G]$. Kako je prema (c) $\pi(a) = \tilde{\pi}(\delta_a)$, neposredno slijedi da je potprostor X invarijantan s obzirom na sve operatore $\pi(a)$, $a \in G$, tj. potprostor X je $\pi-$invarijantan.

(e) Neka je $A \in Hom_G(V,W)$, tj. $A\pi(a) = \rho(a)A \ \forall a \in G$. Tada za $\varphi \in K[G]$ imamo

$$A\tilde{\pi}(\varphi) = A\sum_{a\in G}\varphi(a)\pi(a) = \sum_{a\in G}\varphi(a)A\pi(a) = \sum_{a\in G}\varphi(a)\rho(a)A = \tilde{\rho}(\varphi)A.$$

Dakle, $A \in Hom_{K[G]}(V,W)$ i time je dokazana inkluzija $Hom_G(V,W) \subseteq Hom_{K[G]}(V,W)$. Da dokažemo obrnutu inkluziju pretpostavimo da je $A \in Hom_{K[G]}(V,W)$ i neka je $a \in G$. Tada je prema (c) $\pi(a) = \tilde{\pi}(\delta_a)$ i $\rho(a) = \tilde{\rho}(\delta_a)$ pa imamo

$$A\pi(a) = A\tilde{\pi}(\delta_a) = \tilde{\rho}(\delta_a)A = \rho(a)A.$$

Dakle, $A \in Hom_G(V,W)$ i time je dokazana obrnuta inkluzija $Hom_{K[G]}(V,W) \subseteq Hom_G(V,W)$.

Zbog tvrdnji prethodnog teorema izostavljat ćemo oznake $\tilde{}$ i $\hat{}$. Dakle, ako je π reprezentacija grupe G onda ćemo s istim znakom π označavati reprezentaciju unitalne algebre $K[G]$ definiranu sa

$$\pi(\varphi) = \sum_{a\in G}\varphi(a)\pi(a), \qquad \varphi \in K[G].$$

Analogno, ako je π reprezentacija unitalne algebre $K[G]$ onda ćemo s istim znakom π označavati reprezentaciju grupe G definiranu sa

$$\pi(a) = \pi(\delta_a), \qquad a \in G.$$

Za $a \in G$ definiramo linearne operatore $\lambda(a), \rho(a) : K[G] \to K[G]$ na sljedeći način:

$$(\lambda(a)\varphi)(b) = \varphi\left(a^{-1}b\right), \qquad (\rho(a)\varphi)(b) = \varphi(ba), \qquad \varphi \in K[G],\ b \in G.$$

Propozicija 1.3.3. *(a) λ i ρ su reprezentacije grupe G na vektorskom prostoru $K[G]$.*

(b) Za $\varphi, \psi \in K[G]$ vrijedi $\lambda(\varphi)\psi = \varphi * \psi$ i $\rho(\varphi)\psi = \psi * \check{\varphi}$, gdje je funkcija $\check{\varphi} \in K[G]$ definirana sa $\check{\varphi}(a) = \varphi\left(a^{-1}\right)$, $a \in G$.

(c) Potprostor $X \neq K[G]$ je $\lambda-$invarijantan ako i samo ako je X lijevi ideal u algebri $K[G]$.

(d) Potprostor $X \neq K[G]$ je $\rho-$invarijantan ako i samo ako je X desni ideal u algebri $K[G]$.

Zadatak 1.3.2. *Dokažite propoziciju 1.3.3.*

Uputa: Za tvrdnju (b) pomoću definicija izračunajte $(\lambda(\varphi)\psi)(a)$, $(\varphi * \psi)(a)$, $(\rho(\varphi)\psi)(a)$ i $(\psi * \check{\varphi})(a)$ za bilo koji $a \in G$. Za tvrdnje (c) i (d) koristite tvrdnju (b).

Reprezentacija λ zove se **lijeva regularna reprezentacija** grupe G nad poljem K. ρ je **desna regularna reprezentacija** grupe G nad poljem K.

Zadatak 1.3.3. *Dokažite da je $\lambda \simeq \rho$.*

Uputa: Uz oznaku iz tvrdnje (b) propozicije 1.3.3. izomorfizam T prostora $K[G]$ na samog sebe koji daje ekvivalenciju tih dviju reprezentacija dan je sa $T\varphi = \check{\varphi}$.

1.4 Tenzorski produkt

Razmotrit ćemo sada jednu važnu konstrukciju u teoriji reprezentacija, a to je tenzorski produkt.

Neka su V i W vektorski prostori nad poljem K. **Tenzorski produkt** prostora V i W je uređen par (T, φ), gdje je T vektorski prostor nad K, φ je bilinearno preslikavanje sa $V \times W$ u T i vrijedi tzv. *univerzalno svojstvo*:

> *Ako je S vektorski prostor nad K i $\psi : V \times W \to S$ je bilinearno preslikavanje, onda postoji jedinstven linearan operator $\chi : T \to S$ takav da je $\psi = \chi \circ \varphi$.*

Teorem 1.4.1. *Neka su V i W vektorski prostori nad poljem K.*

(a) *Postoji tenzorski produkt prostora V i W.*

(b) *Ako su (T, φ) i (S, ψ) tenzorski produkti prostora V i W, onda postoji jedinstven izomorfizam $\chi : T \to S$ takav da je $\psi = \chi \circ \varphi$.*

Dokaz: (a) Neka je $\mathcal{T}$ skup svih funkcija $f : V \times W \to K$ za koje je skup

$$\operatorname{Supp} f = \{(v, w) \in V \times W;\ f(v, w) \neq 0\}$$

konačan. $\mathcal{T}$ je vektorski prostor s operacijama definiranim po točkama:

$$(f+g)(v, w) = f(v, w) + g(v, w), \quad (\lambda f)(v, w) = \lambda f(v, w), \quad \lambda \in K, \quad f, g \in \mathcal{T}, \quad (v, w) \in V \times W.$$

Za $(x, y) \in V \times W$ definiramo $f_{(x,y)} \in \mathcal{T}$ ovako:

$$f_{(x,y)}(v, w) = \begin{cases} 1 & \text{ako je } v = x \text{ i } w = y \\ 0 & \text{ako je } v \neq x \text{ ili } w \neq y \end{cases}$$

Tada je $\{f_{(x,y)};\ (x, y) \in V \times W\}$ baza vektorskog prostora $\mathcal{T}$. Neka je $\mathcal{J}$ potprostor od $\mathcal{T}$ razapet skupom

$$\{f_{(\alpha x_1 + x_2, \beta y_1 + y_2)} - \alpha\beta f_{(x_1,y_1)} - \alpha f_{(x_1,y_2)} - \beta f_{(x_2,y_1)} - f_{(x_2,y_2)};\ \alpha, \beta \in K,\ x_1, x_2 \in V,\ y_1, y_2 \in W\}.$$

Neka je $T = \mathcal{T}/\mathcal{J}$ i neka je $\varphi : V \times W \to T$ definirano sa

$$\varphi(v, w) = f_{(v,w)} + \mathcal{J}.$$

Iz definicije potprostora $\mathcal{J}$ slijedi da je preslikavanje φ bilinearno. Dokazat ćemo da je par (T, φ) tenzorski produkt prostora V i W. Neka je S vektorski prostor i $\psi : V \times W \to S$ bilinearno preslikavanje. Definiramo tada linearan operator $X : \mathcal{T} \to S$ njegovim djelovanjem na bazi $\{f_{(x,y)};\ x \in V,\ y \in W\}$:

$$X f_{(x,y)} = \psi(x, y), \qquad (x, y) \in V \times W.$$

Iz bilinearnosti preslikavanja ψ slijedi da je potprostor $\mathcal{J}$ sadržan u jezgri operatora X, pa prijelazom na kvocijent dolazimo do linearnog operatora $\chi : T \to S$:

$$\chi(f + \mathcal{J}) = X f, \qquad f \in \mathcal{T}.$$

Tada za $(x, y) \in V \times W$ nalazimo:

$$(\chi \circ \varphi)(x, y) = \chi(\varphi(x, y)) = \chi(f_{(x,y)} + \mathcal{J}) = X f_{(x,y)} = \psi(x, y).$$

Dakle, vrijedi $\chi \circ \varphi = \psi$. Treba još dokazati da je takav χ jedinstven. No to je očigledno, jer je $\{f_{(x,y)};\ x \in V,\ y \in W\}$ baza prostora $\mathcal{T}$, dakle, skup $\{f_{(x,y)} + \mathcal{J};\ x \in V,\ y \in W\}$ razapinje čitav kvocijentni prostor $T = \mathcal{T}/\mathcal{J}$.

(b) Budući da su (T, φ) i (S, ψ) tenzorski produkti prostora V i W postoje jedinstveni linearni operatori $\chi : T \to S$ i $\omega : S \to T$ takvi da je $\psi = \chi \circ \varphi$ i $\varphi = \omega \circ \psi$. Tada je

$$(\omega \circ \chi) \circ \varphi = \omega \circ (\chi \circ \varphi) = \omega \circ \psi = \varphi = I_T \circ \varphi.$$

Zbog jedinstvenosti u univerzalnom svojstvu para (T, φ) slijedi $\omega \circ \chi = I_T$. Sasvim analogno nalazimo da je $\chi \circ \omega = I_S$. Dakle, $\chi : T \to S$ je izomorfizam.

Time je teorem u potpunosti dokazan.

U daljnjem (T, φ) je tenzorski produkt vektorskih prostora V i W. Pisat ćemo tada

$$T = V \otimes W \qquad \text{i} \qquad v \otimes w = \varphi(v, w), \quad v \in V, w \in W.$$

Uz takve oznake bilinearnost φ ima za posljedicu:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i\right) \otimes \left(\sum_{j=1}^{m} \beta_j w_j\right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \alpha_i \beta_j v_i \otimes w_j$$

za $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m \in K$, $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$, $w_1, w_2, \ldots, w_m \in W$.

Teorem 1.4.2. *Neka je $\{v_i;\ i \in I\}$ baza vektorskog prostora V i $\{w_j;\ j \in J\}$ baza vektorskog prostora W. Tada je $\{v_i \otimes w_j;\ i \in I,\ j \in J\}$ baza njihovog tenzorskog produkta $V \otimes W$.*

Dokaz: Zbog jedinstvenosti izomorfizma između bilo koja dva tenzorska produkta prostora V i W (tvrdnja (b) teorema 1.4.1.) možemo pretpostaviti da su $T = V \otimes W$ i φ upravo oni koji su konstruirani u dokazu tvrdnje (a) teorema 1.4.1. Neka je $t \in T$ i neka je $f \in \mathcal{T}$ takva da je $t = f + \mathcal{J}$. Tada za neke $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n) \in V \times W$ i za neke $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in K$ vrijedi:

$$f = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k f_{(x_k, y_k)}.$$

Nadalje, kako su $\{v_i;\ i \in I\}$ i $\{w_j;\ j \in J\}$ baze vektorskih prostora V i W, imamo

$$x_k = \sum_{i \in I} \beta_{ik} v_i \qquad \text{i} \qquad y_k = \sum_{j \in J} \gamma_{jk} w_j,$$

gdje je u svakoj od tih suma samo konačno mnogo članova različito do nule. Tada je

$$f - \sum_{k=1}^{n} \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \alpha_k \beta_{ik} \gamma_{jk} f_{(v_i, w_k)} \in \mathcal{J}.$$

Stoga je

$$t = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \alpha_k \beta_{ik} \gamma_{jk} v_i \otimes w_j$$

i time smo dokazali da skup $\{v_i \otimes w_j;\ i \in I,\ j \in J\}$ razapinje prostor $T = V \otimes W$.

Treba još dokazati da je taj skup linearno nezavisan. U tu svrhu za par $(p, q) \in I \times J$ definiramo bilinearno preslikavanje $\psi_{pq} : V \times W \to K$ formulom:

$$\psi_{pq}\left(\sum_{i \in I} \alpha_i v_i, \sum_{j \in J} \beta_j w_j\right) = \alpha_p \beta_q.$$

Neka je $\chi_{pq} : V \otimes W \to K$ jedinstven linearan funkcional takav da je $\psi_{pq} = \chi_{pq} \circ \varphi$, tj.

$$\psi_{pq}(v, w) = \chi_{pq}(v \otimes w), \qquad v \in V, \quad w \in W.$$

Tada vrijedi:

$$\chi_{pq}(v_i \otimes w_j) = \psi_{pq}(v_i, w_j) = \delta_{pi}\delta_{qj}.$$

Odatle neposredno slijedi da su vektori $v_i \otimes w_j$ linearno nezavisni.

Posebno, ako su vektorski prostori V i W konačnodimenzionalni onda je

$$\dim V \otimes W = (\dim V) \cdot (\dim W).$$

Zadatak 1.4.1. *Neka su V i W vektorski prostori nad istim poljem K.*

(a) *Neka su $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$ linearno nezavisni i neka su $w_1, w_2, \ldots, w_m \in W$ linearno nezavisni. Dokažite da su $v_i \otimes w_j \in V \otimes W$ $(1 \leq i \leq n,\ 1 \leq j \leq m)$ linearno nezavisni.*

(b) *Neka je $a \in V \otimes W$, $a \neq 0$. Dokažite da postoje $n \in \mathbb{N}$, linearno nezavisni $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$ i linearno nezavisni $w_1, w_2, \ldots, w_n \in W$ takvi da je*

$$a = v_1 \otimes w_1 + v_2 \otimes w_2 + \cdots + v_n \otimes w_n.$$

Potpuno analogno tenzorskom produktu $V \otimes W$ definira se tenzorski produkt $V_1 \otimes V_2 \otimes \cdots \otimes V_n$ više od dva vektorska prostora. Jedina je razlika što se umjesto bilinearnih preslikavanja definiranih na $V \times W$ promatraju preslikavanja definirana na $V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_n$ koja su multilinearna, tj. linearna u svakoj varijabli kad se ostalih $n-1$ varijabli fiksiraju.

Tenzorski produkt je do na izomorfizam asocijativan i u skladu s višestrukim tenzorskim produktima:

Zadatak 1.4.2. *Neka su V, W i U vektorski prostori nad istim poljem K. Dokažite da postoje jedinstveni linearni operatori*

$$A : (V \otimes W) \otimes U \to V \otimes (W \otimes U) \qquad i \qquad B : (V \otimes W) \otimes U \to V \otimes W \otimes U$$

takvi da je

$$A[(v \otimes w) \otimes u] = v \otimes (w \otimes u) \qquad i \qquad B[(v \otimes w) \otimes u] = v \otimes w \otimes u \qquad \forall v \in V,\ w \in W,\ u \in U.$$

Nadalje, dokažite da su A i B izomorfizmi vektorskih prostora.

Neka su sada V_1, V_2, W_1 i W_2 vektorski prostori nad istim poljem K i neka su $A_1 \in L(V_1, W_1)$ i $A_2 \in L(V_2, W_2)$. Tada je

$$(v_1, v_2) \mapsto A_1 v_1 \otimes A_2 v_2, \qquad v_1 \in V_1,\ v_2 \in V_2,$$

bilinearno preslikavanje s Kartezijevog produkta $V_1 \times V_2$ u vektorski prostor $W_1 \otimes W_2$. Zbog univerzalnog svojstva postoji jedinstven linearan operator $B : V_1 \otimes V_2 \to W_2 \otimes W_2$ takav da je $B(v_1 \otimes v_2) = A_1 v_1 \otimes A_2 v_2$ za svaki $v_1 \in V_1$ i svaki $v_2 \in V_2$. Taj ćemo operator označavati znakom $A_1 \underline{\otimes} A_2$. Dakle,

$$(A_1 \underline{\otimes} A_2)(v_1 \otimes v_2) = A_1 v_1 \otimes A_2 v_2, \qquad v_1 \in V_1,\ v_2 \in V_2.$$

Teorem 1.4.3. *Neka su V_1, V_2, W_1 i W_2 vektorski prostori nad poljem K. Postoji jedinstveno linearno preslikavanje $\Phi : L(V_1, W_1) \otimes L(V_2, W_2) \to L(V_1 \otimes V_2, W_1 \otimes W_2)$ takvo da je*

$$\Phi(A_1 \otimes A_2) = A_1 \underline{\otimes} A_2 \qquad \forall A_1 \in L(V_1, W_1) \quad i \quad \forall A_2 \in L(V_2, W_2).$$

Ako su vektorski prostori V_1, V_2, W_1 i W_2 konačnodimenzionalni onda je Φ izomorfizam.

Dokaz: Postojanje i jedinstvenost takvog linearnog preslikavanja Φ slijede iz univerzalnog svojstva tenzorskog produkta, jer je preslikavanje $(A_1, A_2) \mapsto A_1 \underline{\otimes} A_2$ sa $L(V_1, W_1) \times L(V_2, W_2)$ u $L(V_1 \otimes V_2, W_1 \otimes W_2)$ očigledno bilinearno.

Pretpostavimo sada da su vektorski prostori V_1, V_2, W_1 i W_2 konačnodimenzionalni. Tada imamo jednakost dimenzija:

$$\dim L(V_1, W_1) \otimes L(V_2, W_2) = (\dim L(V_1, W_1)) \cdot (\dim L(V_2, W_2)) =$$

$$= (\dim V_1) \cdot (\dim W_1) \cdot (\dim V_2) \cdot (\dim W_2) = (\dim V_1 \otimes V_2) \cdot (\dim W_1 \otimes W_2) = \dim L(V_1 \otimes V_2, W_1 \otimes W_2).$$

Stoga je za dokaz da je Φ izomorfizam dovoljno dokazati da je Φ injekcija.

Neka je $C \in L(V_1, W_1) \otimes L(V_2, W_2)$ takav da je $\Phi(C) = 0$. Neka su redom $\{e_1, \ldots, e_n\}$, $\{f_1, \ldots, f_m\}$, $\{g_1, \ldots, g_p\}$ i $\{h_1, \ldots, h_q\}$ baze vektorskih prostora V_1, V_2, W_1 i W_2. Definiramo operatore $E_{ik} \in L(V_1, W_1)$ za $1 \leq i \leq p$, $1 \leq k \leq n$ i $F_{j\ell} \in L(V_2, W_2)$ za $1 \leq j \leq q$, $1 \leq \ell \leq m$ ovako:

$$E_{ik} e_r = \delta_{kr} g_i \quad (1 \leq r \leq n), \qquad F_{j\ell} f_s = \delta_{\ell s} h_j \quad (1 \leq s \leq m).$$

Znamo da je tada $\{E_{ik};\ 1 \leq i \leq p, 1 \leq k \leq n\}$ baza vektorskog prostora $L(V_1, W_1)$ i da je $\{F_{j\ell};\ 1 \leq j \leq q, 1 \leq \ell \leq m\}$ baza vektorskog prostora $L(V_2, W_2)$. Stoga je prema teoremu 1.4.2. $\{E_{ik} \otimes F_{j\ell};\ 1 \leq i \leq p, 1 \leq k \leq n, 1 \leq j \leq q, 1 \leq \ell \leq m\}$ baza vektorskog prostora $L(V_1, W_1) \otimes L(V_2, W_2)$. Stoga postoje $\alpha_{ikj\ell} \in K$ takvi da je

$$C = \sum_{i=1}^{p} \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{q} \sum_{\ell=1}^{m} \alpha_{ikj\ell} E_{ik} \otimes F_{j\ell}.$$

Sada za $r \in \{1, 2, \ldots, n\}$ i $s \in \{1, 2, \ldots, m\}$ imamo redom

$$0 = (\Phi(C))(e_r \otimes f_s) = \sum_{i=1}^{p} \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{q} \sum_{\ell=1}^{m} \alpha_{ikj\ell} (\Phi(E_{ik} \otimes F_{j\ell}))(e_r \otimes f_s) =$$

$$= \sum_{i=1}^{p} \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{q} \sum_{\ell=1}^{m} \alpha_{ikj\ell} (E_{ik} \underline{\otimes} F_{j\ell})(e_r \otimes f_s) = \sum_{i=1}^{p} \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{q} \sum_{\ell=1}^{m} \alpha_{ikj\ell} (E_{ik} e_r \otimes F_{j\ell} f_s) =$$

$$= \sum_{i=1}^{p} \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{q} \sum_{\ell=1}^{m} \alpha_{ikj\ell} \delta_{kr} \delta_{\ell s} g_i \otimes h_j = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{q} \alpha_{irjs} g_i \otimes h_j.$$

Međutim, vektori $g_i \otimes h_j$ tvore bazu u vektorskom prostoru $W_1 \otimes W_2$ pa su linearno nezavisni. Slijedi da je $\alpha_{irjs} = 0$ za $i = 1, 2, \ldots, p$ i $j = 1, 2, \ldots, q$. Kako su $r \in \{1, 2, \ldots, n\}$ i $s \in \{1, 2, \ldots, m\}$ bili proizvoljni, slijedi da su svi koeficijenti α_{irjs} jednaki nuli. Dakle, $C = 0$ i time je injektivnost preslikavanja Φ dokazana.

Zbog teorema 1.4.3. u slučaju konačnodimenzionalnih prostora ćemo pomoću preslikavanja Φ identificirati vektorske prostore $L(V_1, W_1) \otimes L(V_2, W_2)$ i $L(V_1 \otimes V_2, W_1 \otimes W_2)$. Dakle,

$$(A_1 \otimes A_2)(v_1 \otimes v_2) = A_1 v_1 \otimes A_2 v_2, \qquad A_1 \in L(V_1, W_1), \quad A_2 \in L(V_2, W_2), \quad v_1 \in V_1, \quad v_2 \in V_2.$$

Unatoč opasnosti od pogrešnog tumačenja pisat ćemo $A_1 \otimes A_2$ umjesto $A_1 \underline{\otimes} A_2$ i onda kad neki od promatranih vektorskih prostora nije konačnodimenzionalan.

Zadatak 1.4.3. *Neka su V_1, V_2, W_1, W_2, U_1 i U_2 vektorski prostori nad poljem K i $A \in L(V_1, W_1)$, $B \in L(W_1, U_1)$, $C \in L(V_2, W_2)$ i $D \in L(W_2, U_2)$. Dokažite da je tada*

$$(B \otimes D)(A \otimes C) = BA \otimes DC.$$

Neka su sada π i ρ reprezentacije grupa G i H na vektorskim prostorima V i W nad poljem K. Formiramo Kartezijev (tj. direktan) produkt grupa $G \times H$ i tenzorski produkt vektorskih prostora $V \otimes W$ i za $(g, h) \in G \times H$ definiramo operator $(\pi \times \rho)(g, h) = \pi(g) \otimes \rho(h)$, tj.

$$(\pi \times \rho)(g, h)(v \otimes w) = \pi(g)v \otimes \rho(h)w, \qquad g \in G,\ h \in H,\ v \in V,\ w \in W.$$

Kako je očito $I_V \otimes I_W = I_{V \otimes W}$, iz zadatka 1.4.3. slijedi da je $\pi \times \rho$ reprezentacija grupe $G \times H$ na prostoru $V \otimes W$. Ta se reprezentacija zove **vanjski tenzorski produkt reprezentacija** π i ρ.

Ako je $H = G$, tj. ako su π i ρ reprezentacije grupe G onda možemo promatrati restrikciju reprezentacije $\pi \times \rho$ na podgrupu

$$\Delta(G) = \{(g, g);\ g \in G\}$$

grupe $G \times G$. Očito je $g \mapsto (g, g)$ izomorfizam grupe G na grupu $\Delta(G)$. Stoga restrikciju $(\pi \times \rho)|\Delta(G)$ možemo shvaćati kao reprezentaciju grupe G. Ta reprezentacija grupe G zove se **tenzorski produkt reprezentacija** π i ρ i označava $\pi \otimes \rho$. Dakle:

$$(\pi \otimes \rho)(g) = \pi(g) \otimes \rho(g), \qquad g \in G.$$

Provest ćemo sada sličnu konstrukciju za reprezentacije Liejevih algebri. Neka su π i ρ reprezentacije Liejevih algebri $\mathfrak{g}$ i $\mathfrak{h}$ na vektorskim prostorima V i W ($\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$, V i W su svi definirani nad istim poljem K). Kartezijev produkt $\mathfrak{g} \times \mathfrak{h}$ je Liejeva algebra nad K uz komutator definiran sa

$$[(x_1, y_1), (x_2, y_2)] = ([x_1, x_2], [y_1, y_2]), \qquad x_1, x_2 \in \mathfrak{g}, \quad y_1, y_2 \in \mathfrak{h}.$$

Za $(x, y) \in \mathfrak{g} \times \mathfrak{h}$ definiramo linearan operator $(\pi \times \rho)(x, y)$ na tenzorskom produktu $V \otimes W$ na sljedeći način:

$$(\pi \times \rho)(x, y) = \pi(x) \otimes I_W + I_V \otimes \rho(y),$$

tj.

$$(\pi \times \rho)(x, y)(v \otimes w) = \pi(x)v \otimes w + v \otimes \rho(y)w, \quad x \in \mathfrak{g},\ y \in \mathfrak{h},\ v \in V,\ w \in W.$$

Zadatak 1.4.4. *Dokažite da je na opisani način definirana reprezentacija $\pi \times \rho$ Liejeve algebre $\mathfrak{g} \times \mathfrak{h}$ na vektorskom prostoru $V \otimes W$.*

Reprezentacija $\pi \times \rho$ zove se **vanjski tenzorski produkt reprezentacija** π i ρ Liejevih algebri $\mathfrak{g}$ i $\mathfrak{h}$.

Neka je sada $\mathfrak{g} = \mathfrak{h}$, tj. π i ρ su reprezentacije Liejeve algebre $\mathfrak{g}$. Analogno kao kod grupa možemo promatrati restrikciju reprezentacije $\pi \times \rho$ na Liejevu podalgebru

$$\Delta(\mathfrak{g}) = \{(x, x);\ x \in \mathfrak{g}\}.$$

Sada je $x \mapsto (x, x)$ izomorfizam Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ na Liejevu algebru $\Delta(\mathfrak{g})$ pa restrikciju $(\pi \times \rho)|\Delta(\mathfrak{g})$ možemo shvaćati kao reprezentaciju Liejeve algebre $\mathfrak{g}$. Ta se reprezentacija od $\mathfrak{g}$ zove **tenzorski produkt reprezentacija** π i ρ Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ i označava sa $\pi \otimes \rho$. Dakle,

$$(\pi \otimes \rho)(x) = \pi(x) \otimes I_W + I_V \otimes \rho(x), \qquad x \in \mathfrak{g}.$$

Zadatak 1.4.5. *Neka su π i ρ reprezentacije grupa G i H (odnosno, Liejevih algebri $\mathfrak{g}$ i $\mathfrak{h}$ nad poljem K) na vektorskim prostorima V i W nad poljem K.*

(*a*) *Dokažite da postoji jedinstven linearan operator $\Psi : V' \otimes W \to L(V, W)$ takav da je*

$$[\Psi(f \otimes w)](v) = f(v)w, \qquad v \in V, \quad f \in V', \quad w \in W.$$

(*b*) *Dokažite da je Ψ iz (a) izomorfizam vektorskog prostora $V' \otimes W$ na vektorski prostor $L(V, W)$.*

(*c*) *Dokažite da izomorfizam Ψ iz (a) reprezentaciju $\pi^t \times \rho$ grupe $G \times H$ (odnosno, Liejeve algebre $\mathfrak{g} \times \mathfrak{h}$) prevodi u reprezentaciju τ na prostoru $L(V, W)$ zadanu sa:*

$$\tau(g, h)(A) = \rho(h)A\pi(g^{-1}), \qquad A \in L(V, W), \quad g \in G, \quad h \in H,$$

(*odnosno*

$$\tau(x, y)(A) = \rho(y)A - A\pi(x), \qquad A \in L(V, W), \quad x \in \mathfrak{g}, \quad y \in \mathfrak{h}).$$

Zadatak 1.4.6. *Neka su π i ρ konačnodimenzionalne reprezentacije grupa G i H (odnosno, Liejevih algebri $\mathfrak{g}$ i $\mathfrak{h}$) takve da je reprezentacija $\pi \times \rho$ grupe $G \times H$ (odnosno, Liejeve algebre $\mathfrak{g} \times \mathfrak{h}$) ireducibilna. Dokažite da su tada reprezentacije π i ρ ireducibilne.*

Tvrdnja zadatka 1.4.6. ima obrat ako je polje algebarski zatvoreno. Dokažimo najprije lemu:

Lema 1.4.4. *Neka je π ireducibilna reprezentacija grupe G (odnosno, Liejeve algebre $\mathfrak{g}$) na konačnodimenzionalnom vektorskom prostoru V nad algebarski zatvorenim poljem K i neka je W konačnodimenzionalan vektorski prostor nad K. Definiramo reprezentaciju $\tilde{\pi}$ grupe G (odnosno, Liejeve algebre $\mathfrak{g}$) na prostoru $V \otimes W$ sa $\tilde{\pi}(g) = \pi(g) \otimes I_W$. Neka je U $\tilde{\pi}-$invarijantan potprostor od $V \otimes W$ takav da je reprezentacija $\tilde{\pi}_U$ ireducibilna. Tada postoji $w \in W$ takav da je*

$$U = V \otimes w = \{v \otimes w;\ v \in V\}.$$

Dokaz: Pretpostavljat ćemo da se radi o reprezentaciji grupe; dokaz za reprezentaciju Liejeve algebre je sasvim analogan.

Neka je $\{w_1, w_2, \ldots, w_m\}$ baza vektorskog prostora W. Tada je očito

$$V \otimes W = V \otimes w_1 \dot{+} V \otimes w_2 \dot{+} \cdots \dot{+} V \otimes w_m$$

i za svaki j subreprezentacija $\tilde{\pi}_{V \otimes w_j}$ je ireducibilna i ekvivalentna reprezentaciji π. Neka je U $\tilde{\pi}-$invarijantan potprostor od $V \otimes W$. Prema implikaciji $(c) \Rightarrow (a)$ u teoremu 1.1.5. postoji podskup $\{j_1, j_2, \ldots, j_k\}$ skupa $\{1, 2, \ldots, m\}$ takav da je

$$V \otimes W = U \dot{+} V \otimes w_{j_1} \dot{+} V \otimes w_{j_2} \dot{+} \cdots \dot{+} V \otimes w_{j_k}.$$

Neka je $\{1, 2, \ldots, m\} \setminus \{j_1, j_2, \ldots, j_k\} = \{i_1, i_2, \ldots, i_{m-k}\}$. Tada prema zadatku 1.1.3.(b) imamo:

$$\tilde{\pi}_U \simeq \tilde{\pi}_{V \otimes w_{i_1} \dot{+} V \otimes w_{i_2} \dot{+} \cdots \dot{+} V \otimes w_{i_{m-k}}}.$$

Prema tome, ako je $\tilde{\pi}_U$ ireducibilna, onda je nužno $k = m - 1$ tj. postoji $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$ takav da je $\tilde{\pi}_U \simeq \tilde{\pi}_{V \otimes w_j} \simeq \pi$. Neka je $\varphi : U \to V$ izomorfizam koji ostvaruje ekvivalenciju reprezentacije $\tilde{\pi}_U$ s reprezentacijom π, tj. takav da je

$$\pi(g) \circ \varphi = \varphi \circ (\pi(g) \otimes I_W)|U.$$

Budući da je $\{w_1, w_2, \ldots, w_m\}$ baza vektorskog prostora W iz teorema 1.4.2. lako slijedi da za svaki vektor x iz $V \otimes W$ postoje jedinstveni vektori $v_1, v_2, \ldots, v_m \in V$ takvi da je

$$x = v_1 \otimes w_1 + v_2 \otimes w_2 + \cdots + v_m \otimes w_m. \tag{1.4}$$

Posebno, postoje linearni operatori $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m : U \to V$ takvi da je

$$u = \varphi_1(u) \otimes w_1 + \varphi_2(u) \otimes w_2 + \cdots + \varphi_m(u) \otimes w_m \qquad \forall u \in U.$$

Za svaki $g \in G$ i $u \in U$ imamo:

$$\varphi_1(\tilde{\pi}_{\mathrm{U}}(g)u) \otimes w_1 + \varphi_2(\tilde{\pi}_{\mathrm{U}}(g)u) \otimes w_2 + \cdots + \varphi_m(\tilde{\pi}_{\mathrm{U}}(g)u) \otimes w_m = \tilde{\pi}_{\mathrm{U}}(g)u = \tilde{\pi}(g)u =$$

$$= \tilde{\pi}(g)[\varphi_1(u) \otimes w_1 + \varphi_2(u) \otimes w_2 + \cdots + \varphi_m(u) \otimes w_m] =$$
$$= \pi(g)\varphi_1(u) \otimes w_1 + \pi(g)\varphi_2(u) \otimes w_2 + \cdots + \pi(g)\varphi_m(u) \otimes w_m.$$

Odatle zbog jedinstvenosti prikaza (1.4) slijedi

$$\varphi_j(\tilde{\pi}_{\mathrm{U}}(g)u) = \pi(g)\varphi_j(u) \qquad \forall u \in U, \quad \forall g \in G, \quad j = 1, 2, \ldots, m,$$

odnosno,

$$\varphi_j \circ \tilde{\pi}(g) = \pi(g) \circ \varphi_j \qquad \forall g \in G, \quad j = 1, 2, \ldots, m.$$

Prema tome, $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m \in Hom_G(U, V)$. Stoga su $\varphi^{-1} \circ \varphi_1, \varphi^{-1} \circ \varphi_2, \ldots, \varphi^{-1} \circ \varphi_m \in End_G(U)$. Prema tvrdnji (c) Schurove leme (teorem 1.1.6.) postoje $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m \in K$ takvi da je

$$\varphi^{-1} \circ \varphi_j = \lambda_j I_U \quad \text{za} \quad j = 1, 2, \ldots, m.$$

Dakle,

$$\varphi_j = \lambda_j \varphi \quad \text{za} \quad j = 1, 2, \ldots, m.$$

Slijedi za svaki $u \in U$:

$$u = \lambda_1\varphi(u) \otimes w_1 + \lambda_2\varphi(u) \otimes w_2 + \cdots + \lambda_m\varphi(u) \otimes w_m = \varphi(u) \otimes (\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \cdots + \lambda_m w_m).$$

Kako je φ izomorfizam prostora U na prostor V, slijedi

$$U = V \otimes w \quad \text{za} \quad w = \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \cdots + \lambda_m w_m$$

i time je lema dokazana.

Teorem 1.4.5. *Neka su π i ρ konačnodimenzionalne ireducibilne reprezentacije grupa G i H (odnosno, Liejevih algebri $\mathfrak{g}$ i $\mathfrak{h}$) na vektorskim prostorima V i W nad algebarski zatvorenim poljem K. Tada je reprezentacija $\pi \times \rho$ grupe $G \times H$ (odnosno, Liejeve algebre $\mathfrak{g} \times \mathfrak{h}$) ireducibilna.*

Dokaz: Pretpostavljamo da se radi o reprezentacijama grupa. Neka je $U \neq \{0\}$ potprostor od $V \otimes W$ koji je $\pi \times \rho-$invarijantan. Potprostor U očito je $\tilde{\pi}-$invarijantan, gdje je $\tilde{\pi}$ reprezentacija grupe G na prostoru $V \otimes W$ zadana kao u lemi 1.4.4:

$$\tilde{\pi}(g) = \pi(g) \otimes I_W = (\pi \times \rho)(g, e_H), \qquad g \in G.$$

Prema lemi 1.4.4. postoji $w_0 \in W$, $w_0 \neq 0$, takav da $U \supseteq V \otimes w_0$. Za svaki $v \in V$ definiramo potprostor $W(v)$ prostora W ovako:

$$W(v) = \{w \in W;\ v \otimes w \in U\}.$$

Taj je potprostor $\rho-$invarijantan. Doista, kako je potprostor U $\pi \times \rho-$invarijantan, za $h \in H$ i $w \in W(v)$ imamo

$$v \otimes \rho(h)w = (\pi \times \rho)(e_G, h)(v \otimes w) \in U \qquad \Longrightarrow \qquad \rho(h)w \in W(v).$$

Nadalje, $w_0 \in W(v)$, pa slijedi $W(v) \neq \{0\}$ za svaki $v \in V$. Budući da je reprezentacija ρ ireducibilna, slijedi $W(v) = W$ za svaki $v \in V$. Dakle, $\{v \otimes w;\ v \in V,\, w \in W\} \subseteq U$, a odatle i iz teorema 1.4.2. slijedi $U = V \otimes W$.

Zadatak 1.4.7. *Dokažite teorem 1.4.5. u slučaju reprezentacija Liejevih algebri.*

Pretpostavka o algebarskoj zatvorenosti polja K je bitna, kao što pokazuje:

Zadatak 1.4.8. *Neka je $\mathbb{H}$ tijelo kvaterniona, G multiplikativna grupa $\mathbb{H} \setminus \{0\}$ i H multiplikativna grupa $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Neka je π reprezentacija grupe G na četverodimenzionalnom realnom vektorskom prostoru $\mathbb{H}$ definirana pomoću množenja*

$$\pi(\alpha)\beta = \alpha\beta, \qquad \alpha \in G, \quad \beta \in \mathbb{H}$$

i neka je ρ analogno definirana reprezentacija grupe H na dvodimenzionalnom realnom vektorskom prostoru $\mathbb{C}$. Dokažite da su reprezentacije π i ρ ireducibilne, ali da je reprezentacija $\pi \times \rho$ grupe $G \times H$ reducibilna.

1.5 Proširenje polja skalara

Neka je V vektorski prostor nad poljem k i neka je K proširenje polja k. Tada je K ujedno vektorski prostor nad poljem k, pa možemo formirati tenzorski produkt $K \otimes V$ i to je vektorski prostor nad poljem k. Definirat ćemo sada na aditivnoj grupi $W = K \otimes V$ strukturu vektorskog prostora nad poljem K. Za proizvoljan $\alpha \in K$ neka je $\psi_\alpha : K \times V \to W$ preslikavanje definirano ovako:

$$\psi_\alpha(\beta, v) = \alpha\beta \otimes v, \qquad \beta \in K, \quad v \in V.$$

Tada je preslikavanje ψ_α očito $k-$bilinearno, pa prema univerzalnom svojstvu tenzorskog produkta $W = K \otimes V$ postoji jedinstven $k-$linearan operator $\varphi_\alpha : W \to W$ takav da vrijedi

$$\varphi_\alpha(\beta \otimes v) = \alpha\beta \otimes V \qquad \forall \beta \in K \quad \text{i} \quad \forall v \in V.$$

Definiramo sada preslikavanje $(\alpha, w) \mapsto \alpha w$ sa $K \times W$ u W ovako:

$$\alpha w = \varphi_\alpha(w), \qquad \alpha \in K, \quad w \in W.$$

Zadatak 1.5.1. *Dokažite da uz tako definirano preslikavanje $K \times W \to W$ aditivna grupa $W = K \otimes V$ postaje vektorski prostor nad K, odnosno, da vrijedi*

(a) $\alpha(w + u) = \alpha v + \alpha u \ \forall \alpha \in K$ *i* $\forall w, u \in W$.

(b) $(\alpha + \beta)w = \alpha w + \beta w \ \forall \alpha, \beta \in K$ *i* $\forall w \in W$.

(c) $(\alpha\beta)w = \alpha(\beta w) \ \forall \alpha, \beta \in K$ *i* $\forall w \in W$.

(d) $1w = w \ \forall w \in W$.

Tako dobiven vektorski prostor nad K označavat ćemo sa V^K. Kažemo da je vektorski prostor V^K dobiven iz vektorskog prostora V **proširenjem polja skalara** sa k na K.

Teorem 1.5.1. *Neka je V vektorski prostor nad poljem k i neka je K proširenje polja k.*

(a) *$v \mapsto 1 \otimes v$ je injektivno $k-$linearno preslikavanje sa V u $V^K = K \otimes V$.*

U daljnjem preslikavanje iz (a) shvaćamo kao identifikaciju prostora V s $k-$potprostorom od V^K.

(b) *Vrijedi sljedeće univerzalno svojstvo:*

> *Ako je U vektorski prostor nad poljem K, svaki $k-$linearan operator $V \to U$ jedinstveno se proširuje do $K-$linearnog operatora $V^K \to U$.*

(c) *Ako je podskup $S \subseteq V$ linearno nezavisan nad k, on je kao podskup od V^K linearno nezavisan nad K.*

(d) *Ako podskup $S \subseteq V$ razapinje vektorski prostor V nad poljem k, onda S razapinje vektorski prostor V^K nad poljem K:*

$$V = span_k(S) \qquad \Longrightarrow \qquad V^K = span_K(S).$$

(e) *Ako je B baza vektorskog prostora V nad poljem k, onda je B baza vektorskog prostora V^K nad poljem K.*

Dokaz: (a) Za $\alpha, \beta \in k$ i $v, u \in V$ imamo

$$1 \otimes (\alpha v + \beta u) = 1 \otimes \alpha v + 1 \otimes \beta u = \alpha \otimes v + \beta \otimes u = \alpha(1 \otimes v) + \beta(1 \otimes u).$$

To pokazuje da je preslikavanje $v \mapsto 1 \otimes v$ sa V u V^K linearno nad poljem k. Pretpostavimo li da su $v, u \in V$ takvi da je $1 \otimes v = 1 \otimes u$, onda je $1 \otimes (v - u) = 0$. Kad bi bilo $v \neq u$, tj. $v - u \neq 0$, jednočlani podskupovi $\{1\} \subseteq K$ i $\{v - u\} \subseteq V$ bili bi linearno nezavisni nad k, pa bi prema tvrdnji (a) zadatka 1.4.1. i jednočlan skup $\{1 \otimes (v - u)\} = \{0\} \subseteq V^K$ bio linearno nezavisan nad k, a to je apsurdno. Ova kontradikcija pokazuje da je nužno $v = u$, i time je dokazana injektivnost preslikavanja $v \mapsto 1 \otimes v$.

(b) Neka je U vektorski prostor nad poljem K i neka je $A : V \to U$ $k-$linearan operator. Definiramo preslikavanje $B : K \times V \to U$ ovako:

$$B(\alpha, v) = \alpha A v, \qquad \alpha \in K, \quad v \in V.$$

Tada je očito B $k-$bilinearno preslikavanje, pa po univerzalnom svojstvu tenzorskog produkta $V^K = K \otimes V$ postoji $k-$linearan operator $C : V^K \to U$ takav da je

$$C(\alpha \otimes v) = B(\alpha, v) = \alpha A v \qquad \forall \alpha \in K \quad \text{i} \quad \forall v \in V.$$

Tada uz identifikaciju prostora V s $k-$potprostorom $1 \otimes V$ od V^K operator C proširuje operator A. Doista, za svaki $v \in V$ imamo

$$Cv = C(1 \otimes v) = 1Av = Av.$$

Nadalje, operator $C : V^K \to U$ je ne samo $k-$linearan, nego $K-$linearan. Doista, za $\alpha, \beta \in K$ i $v \in V$ imamo

$$C(\beta(\alpha \otimes v)) = C(\beta\alpha \otimes v) = \beta\alpha A v = \beta C(\alpha \otimes v),$$

a budući da skup $\{\alpha \otimes v;\ \alpha \in K,\ v \in V\}$ prema teoremu 1.4.2. razapinje nad poljem k čitav prostor $V^K = K \otimes V$, zaključujemo da je operator homogen nad poljem K, a kako je i aditivan, slijedi da je $K-$linearan.

Napokon, jedinstvenost $K-$linearnog proširenja operatora A slijedi iz činjenice da $V = 1 \otimes V$ razapinje prostor V^K nad poljem K.

Budući da je svaki linearno nezavisan podskup vektorskog prostora sadržan u nekoj bazi tog prostora, tvrdnja (c) slijedi iz tvrdnje (e). Nadalje, svaki podskup vektorskog prostora koji ga razapinje sadrži neku bazu tog vektorskog prostora, dakle i tvrdnja (d) slijedi iz tvrdnje (e).

Stoga treba još dokazati tvrdnju (e). Neka je B baza vektorskog prostora nad poljem k. Nadalje, neka je $C \subseteq K$ neka baza polja K promatranog kao vektorski prostor nad poljem k. Prema teoremu 1.4.2. tada je $C \otimes B = \{\alpha \otimes v;\ \alpha \in C,\ v \in B\}$ baza prostora $V^K = K \otimes V$ nad poljem k. Neka su sada $v_1, \ldots, v_n$ međusobno različiti elementi od B i dokažimo da su oni linearno nezavisni ne samo nad poljem k nego i nad poljem K. Pretpostavimo da su $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K$ takvi da vrijedi

$$0 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (1 \otimes v_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \otimes v_i.$$

Svaki α_i može se prikazati kao $k-$linearna kombinacija elemenata od C. Dakle, postoje međusobno različiti elementi $\gamma_1, \ldots, \gamma_m \in C$ i elementi $\beta_{ji} \in k$, $j = 1, \ldots, m$, $i = 1, \ldots, n$, takvi da je

$$\alpha_i = \sum_{j=1}^{m} \beta_{ji} \gamma_j, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Slijedi

$$0 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \otimes v_i = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \beta_{ji} \gamma_j \otimes v_i.$$

No budući da su vektori $\gamma_j \otimes v_i$ linearno nezavisni nad poljem k, zaključujemo da su nužno $\beta_{ji} = 0$ za sve $j = 1, \ldots, m$ i $i = 1, \ldots, n$. Slijedi $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$ i time je dokazana linearna nezavisnost vektora $v_1, \ldots, v_n$ nad poljem K. Kako su vektori $v_1, \ldots, v_n \in B$ bili proizvoljni, zaključujemo da je skup B linearno nezavisan nad poljem K.

Treba još dokazati da skup B razapinje vektorski prostor V^K nad poljem K. Neka je $w \in V^K$ proizvoljan. Uz oznaku iz prethodnog odlomka skup $C \otimes B = \{\alpha \otimes v;\ \alpha \in C,\ v \in B\}$ je baza vektorskog prostora V^K nad poljem k, pa postoje $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in C$, $v_1, \ldots, v_n \in B$ i $\beta_{ji} \in k$ za $j = 1, \ldots, m$ i $i = 1, \ldots, n$ takvi da vrijedi

$$w = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} \beta_{ji} \alpha_j \otimes v_i.$$

Odatle uz oznake

$$\gamma_i = \sum_{j=1}^{m} \beta_{ji} \alpha_i \in K, \qquad i = 1, \ldots, n,$$

slijedi

$$w = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i \otimes v_i = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i (1 \otimes v_i) = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i v_i.$$

Dakle, skup B razapinje prostor V^K nad poljem K.

Time je teorem u potpunosti dokazan.

Dualna konstrukcija proširenju polja skalara sa k na K je **suženje polja skalara** sa K na k : ako je W vektorski prostor nad proširenjem K polja k, možemo ga shvaćati kao vektorski prostor nad poljem k tako da zaboravimo da znamo vektore iz W množiti i sa skalarima iz $K \setminus k$. Taj se $k-$vektorski prostor označava sa W_k. Primijetimo da ove dvije konstrukcije (tj. proširenje polja skalara i suženje polja skalara) nisu međusobno inverzne. Npr. ako je $k = \mathbb{R}$ i $K = \mathbb{C}$, i ako je V konačnodimenzionalan realan vektorski prostor, a W konačnodimenzionalan kompleksan vektorski prostor, onda je

$$\dim_{\mathbb{C}} V^{\mathbb{C}} = \dim_{\mathbb{R}} V \qquad \text{i} \qquad \dim_{\mathbb{R}} W_{\mathbb{R}} = 2 \dim_{\mathbb{C}} W,$$

dakle,

$$\dim_{\mathbb{R}} \left(V^{\mathbb{C}}\right)_{\mathbb{R}} = 2 \dim_{\mathbb{R}} V \qquad \text{i} \qquad \dim_{\mathbb{C}} \left(W_{\mathbb{R}}\right)^{\mathbb{C}} = 2 \dim_{\mathbb{C}} W.$$

Neka su sada V_1 i V_2 vektorski prostori nad poljem k, K proširenje polja k i $A : V_1 \to V_2$ $k-$linearan operator. Tada možemo A promatrati i kao $k-$linearan operator sa V_1 u V_2^K, pa se on po univerzalnom svojstvu iz tvrdnje (b) teorema 1.5.1. jedinstveno proširuje do $K-$linearnog operatora $A^K : V_1^K \to V_2^K$. Ponovna primjena univerzalnog svojstva iz tvrdnje (b) teorema 1.5.1. ali sada na $k-$linearno preslikavanje $A \mapsto A^K$ prostora $L_k(V_1, V_2)$ u prostor $L_K\left(V_1^K, V_2^K\right)$ pokazuje da se to preslikavanje jedinstveno proširuje do $K-$linearnog preslikavanja prostora $L_k(V_1, V_2)^K = K \otimes L_k(V_1, V_2)$ u prostor $L_K\left(V_1^K, V_2^K\right)$.

Zadatak 1.5.2. * *Dokažite da je preslikavanje* $L_k(V_1, V_2)^K \to L_K\left(V_1^K, V_2^K\right)$ *opisano u prethodnom odlomku izomorfizam vektorskih prostora nad poljem* K.

Neka je sada π reprezentacija skupa S na vektorskom prostoru V nad poljem k i neka je K proširenje polja k. Za svaki $s \in S$ $k-$linearan operator $\pi(s) \in L(V)$ prema prethodnom razmatranju jedinstveno se proširuje do $K-$linearnog operatora $\pi(s)^K \in L\left(V^K\right)$. Sada je sa $\pi^K(s) = \pi(s)^K$, $s \in S$, definirana reprezentacija skupa S na vektorskom prostoru V^K nad poljem K. Za reprezentaciju π^K kažemo da je dobivena iz reprezentacije π proširenjem polja skalara sa k na K.

Propozicija 1.5.2. *Neka je S ne samo skup, nego jedna od sljedeće četiri algebarske strukture: grupa, asocijativna algebra nad poljem k, unitalna algebra nad poljem k, Liejeva algebra nad poljem k. Nadalje, neka je π reprezentacija algebarske strukture S na vektorskom prostoru V nad poljem k i neka je K proširenje polja k. Tada je reprezentacija π^K skupa S, dobivena iz reprezentacije π proširenjem polja skalara sa k na K, reprezentacija algebarske strukture S.*

Dokaz: (1) Ako je S algebra nad poljem k (bilo asocijativna, bilo unitalna, bilo Liejeva) preslikavanje $\pi^K : S \to L_K\left(V^K\right)$ je $k-$linearno jer je to kompozicija $k-$linearnog preslikavanja $\pi : S \to L_k(V)$ s $k-$linearnim preslikavanjem $A \mapsto A^K$ sa $L_k(V)$ u $L_K\big(V^K\big)$.

(2) Ako je S grupa ili asocijativna algebra nad k ili unitalna algebra nad k, za $x, y \in S$ imamo

$$\pi^K(x)\pi^K(y) = \pi(x)^K\pi(y)^K = (\pi(x)\pi(y))^K = (\pi(xy))^K = \pi^K(xy).$$

(3) Ako je S grupa ili unitalna algebra i ako je e jedinica u S, imamo

$$\pi^K(e) = \pi(e)^K = (I_V)^K = I_{V^K}.$$

(4) Napokon, ako je S Liejeva algebra nad k, za $x, y \in S$ imamo

$$\pi^K([x,y]) = \pi([x,y])^K = (\pi(x)\pi(y) - \pi(y)\pi(x))^K =$$

$$= \pi(x)^K\pi(y)^K - \pi(y)^K\pi(x)^K = \pi^K(x)\pi^K(y) - \pi^K(y)\pi^K(x).$$

Tvrdnja propozicije za grupu slijedi iz (2) i (3), za asocijativnu algebru nad k iz (1) i (2), za unitalnu algebru nad k iz (1), (2) i (3), a za Liejevu algebru nad k iz (1) i (4).

Zadatak 1.5.3. *Neka su V, W i U vektorski prostori nad poljem k, neka je K proširenje polja k i neka je $A : V \times W \to U$ $k-$bilinearan operator. Dokažite da se A jedinstveno proširuje do $K-$bilinearnog operatora $A^K : V^K \times W^K \to U^K$.*

Posebno, ako je $\mathcal{A}$ algebra nad poljem k onda se množenje $\mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ jeidnstveno proširuje do $K-$bilinearnog preslikavanja sa $\mathcal{A}^K \times \mathcal{A}^K \to \mathcal{A}^K$ i s tako definiranim množenjem $\mathcal{A}^K$ postaje algebra nad poljem K. Tada kažemo da je algebra $\mathcal{A}^K$ dobivena iz algebre $\mathcal{A}$ proširenjem polja skalara sa k na K. Ako je $\mathcal{I}$ ideal (lijevi, desni ili obostrani) u $k-$algebri $\mathcal{A}$ onda se lako vidi da je $\mathcal{I}^K$ ideal iste vrste u algebri $\mathcal{A}^K$. Ako je ideal $\mathcal{I}$ obostrani, lako se vidi da se kvocijentna algebra $\mathcal{A}^K/\mathcal{I}^K$ može identificirati s algebrom $(\mathcal{A}/\mathcal{I})^K$. Nadalje, homomorfizam $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ $k-$algebri jedinstveno se proširuje do homomorfizma $K-$algebri $\varphi^K : \mathcal{A}^K \to \mathcal{B}^K$ i pridruživanje $\varphi \to \varphi^K$ je injekcija sa $Hom_k(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ u $Hom_K\big(\mathcal{A}^K, \mathcal{B}^K\big)$. Ta se injekcija može upotrijebiti kao identifikacija skupa $Hom_k(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ s podskupom $\big\{\psi \in Hom_K\big(\mathcal{A}^K, \mathcal{B}^K\big);\ \psi(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{B}\big\}$ skupa $Hom_K\big(\mathcal{A}^K, \mathcal{B}^K\big)$.

Zadatak 1.5.4. *Neka je $\mathcal{A}$ asocijativna, unitalna ili Liejeva algebra nad poljem k, π reprezentacija algebre $\mathcal{A}$ na vektorskom prostoru V nad poljem k i K proširenje polja k. Dokažite:*

(a) *Algebra $\mathcal{A}^K$ nad poljem K je iste vrste kao $\mathcal{A}$: asocijativna, unitalna ili Liejeva.*

(b) *Reprezentacija π^K algebre $\mathcal{A}$ na prostoru V^K jedinstveno se proširuje do reprezentacije algebre $\mathcal{A}^K$.*

Poglavlje 2

Reprezentacije konačnih grupa

2.1 Relacije ortogonalnosti

U cijelom ovom poglavlju G označava konačnu grupu s jedinicom e. Broj elemenata grupe G, tj. **red grupe** G, označavat ćemo sa $|G|$. Općenitije, za svaki konačan skup S sa $|S|$ označavamo broj elemenata skupa S.

Neka je π reprezentacija grupe G na vektorskom prostoru V. Neka je $v \in V$, $v \neq 0$. Tada je potprostor razapet skupom $\{\pi(a)v;\ a \in G\}$ očito $\pi-$invarijantan. Odatle slijedi da je svaka ireducibilna reprezentacija grupe G konačnodimenzionalna i dimenzija joj nije veća od $|G|$.

Svi vektorski prostori koje ćemo promatrati u ovom poglavlju, osim djelomično u posljednjem odjeljku 2.8., su konačnodimenzionalni i kompleksni.

Teorem 2.1.1. *Neka je π reprezentacija grupe G na vektorskom prostoru V.*

(*a*) *Reprezentacija π je potpuno reducibilna.*

(*b*) *Na vektorskom prostoru V postoji skalarni produkt u odnosu na koji je π unitarna reprezentacija.*

Dokaz: (*b*) Neka je $\langle\cdot|\cdot\rangle$ bilo koji skalarni produkt na prostoru V. Definiramo preslikavanje $(x, y) \mapsto (x|y)$ sa $V \times V$ u $\mathbb{C}$ na sljedeći način:

$$(x|y) = \sum_{a\in G}\langle\pi(a)x|\pi(a)y\rangle, \qquad x, y \in V.$$

Tada je očito $x \mapsto (x|y)$ linearan funkcional na V za svaki $y \in V$. Također je očito da vrijedi $(y|x) = \overline{(x|y)}$ za bilo koje $x, y \in V$. Nadalje, za $x \in V$ vrijedi

$$(x|x) = \sum_{a\in G}\langle\pi(a)x|\pi(a)x\rangle \geq 0$$

jer je $\langle\cdot|\cdot\rangle$ skalarni produkt na V. Nadalje, iz $(x|x) = 0$ slijedi $\langle\pi(a)x|\pi(a)x\rangle = 0$ za svaki $a \in G$. Posebno za jedinicu e grupe G nalazimo $0 = \langle\pi(e)x|\pi(e)x\rangle = \langle x|x\rangle$, pa slijedi $x = 0$. Time je dokazano da je $(\cdot|\cdot)$ skalarni produkt na vektorskom prostoru V.

Neka je $b \in G$. Tada je $a \mapsto ab$ bijekcija sa G na G pa za proizvoljne vektore $x, y \in V$ imamo

$$(\pi(b)x|\pi(b)y) = \sum_{a\in G}\langle\pi(a)\pi(b)x|\pi(a)\pi(b)y\rangle = \sum_{a\in G}\langle\pi(ab)x|\pi(ab)y\rangle = \sum_{a\in G}\langle\pi(a)x|\pi(a)y\rangle = (x|y).$$

Prema tome, reprezentacija π je unitarna s obzirom na skalarni produkt $(\cdot|\cdot)$.

Tvrdnja (*a*) slijedi neposredno iz tvrdnje (*b*) zbog teorema 1.2.1.

Propozicija 2.1.2. *Neka su π i ρ reprezentacije od G na prostorima V i W. Za $A \in L(V,W)$ stavimo*

$$A^0 = \frac{1}{|G|} \sum_{a \in G} \rho\left(a^{-1}\right) A\pi(a).$$

Tada je $A \mapsto A^0$ projektor prostora $L(V,W)$ na potprostor $Hom_G(V,W)$.

Dokaz: Očito je $A \mapsto A^0$ linearan operator sa $L(V,W)$ u $L(V,W)$. Za $A \in L(V,W)$ i $b \in G$ nalazimo

$$\rho(b)A^0 = \frac{1}{|G|} \sum_{a \in G} \rho(b)\rho\left(a^{-1}\right) A\pi(a) = \frac{1}{|G|} \sum_{a \in G} \rho\left(ba^{-1}\right) A\pi(a) = \frac{1}{|G|} \sum_{a \in G} \rho\left(\left(ab^{-1}\right)^{-1}\right) A\pi(a).$$

U ovoj zadnjoj sumi promijenimo varijablu sumacije i stavimo $c = ab^{-1}$, dakle, $a = cb$. Kako je $a \mapsto ab^{-1}$ bijekcija sa G na G, slijedi

$$\rho(b)A^0 = \frac{1}{|G|} \sum_{c \in G} \rho\left(c^{-1}\right) A\pi(cb) = \frac{1}{|G|} \sum_{c \in G} \rho\left(c^{-1}\right) A\pi(c)\pi(b) = A^0\pi(b).$$

Dakle, $A^0 \in Hom_G(V,W)$, tj. dokazali smo da je područje vrijednosti linearnog operatora $A \mapsto A^0$ sadržano u $Hom_G(V,W)$. Napokon, za $A \in Hom_G(V,W)$ je $A\pi(a) = \rho(a)A$ za svaki $a \in G$, dakle,

$$A^0 = \frac{1}{|G|} \sum_{a \in G} \rho\left(a^{-1}\right) A\pi(a) = \frac{1}{|G|} \sum_{a \in G} \rho\left(a^{-1}\right) \rho(a)A = \frac{1}{|G|} \sum_{a \in G} A = A.$$

Dakle, $A \mapsto A^0$ je projektor prostora $L(V,W)$ na potprostor $Hom_G(V,W)$.

Ako su u propoziciji 2.1.2. reprezentacije π i ρ ireducibilne, možemo primijeniti Schurovu lemu (teorem 1.1.6.) pa dobivamo

Teorem 2.1.3. *Neka su π i ρ ireducibilne reprezentacije grupe G na prostorima V i W.*

(*a*) *Ako π i ρ nisu ekvivalentne, onda je za svaki $A \in L(V,W)$*

$$\sum_{a \in G} \rho\left(a^{-1}\right) A\pi(a) = 0.$$

(*b*) *Za svaki $A \in L(V)$ vrijedi*

$$\sum_{a \in G} \pi\left(a^{-1}\right) A\pi(a) = \frac{|G|}{\dim V} (\mathrm{Tr}\, A) I_V.$$

Zadatak 2.1.1. *Pomoću Schurove leme i propozicije 2.1.2. dokažite teorem 2.1.3.*

Teorem 2.1.4. *Uz pretpostavke teorema 2.1.3. neka je $e = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ baza vektorskog prostora V i $f = \{f_1, f_2, \ldots, f_m\}$ baza vektorskog prostora W i neka su $\pi_{ij}(a)$ elementi matrice operatora $\pi(a)$ u bazi e i $\rho_{k\ell}(a)$ elementi matrice operatora $\rho(a)$ u bazi f. Tada vrijedi*

$$\sum_{a \in G} \pi_{ij}(a)\rho_{k\ell}\left(a^{-1}\right) = 0, \qquad \forall i,j \in \{1,2,\ldots,n\} \quad i \quad \forall k,\ell \in \{1,2,\ldots,m\}$$

i

$$\sum_{a \in G} \pi_{ij}(a)\pi_{rs}\left(a^{-1}\right) = \frac{|G|}{n} \delta_{is}\delta_{jr}, \qquad \forall i,j,r,s \in \{1,2,\ldots,n\}.$$

Dokaz: Neka su $\ell \in \{1,2,\ldots,m\}$ i $i \in \{1,2,\ldots,n\}$ proizvoljni i neka je $A \in L(V,W)$ zadan na bazi e sa

$$Ae_r = \delta_{ir} f_\ell, \qquad r = 1,2,\ldots,n.$$

Tada je prema tvrdnji (a) teorema 2.1.3. za svaki $j \in \{1,2,\ldots,n\}$

$$0 = \sum_{a\in G} \rho\left(a^{-1}\right) A\pi(a)e_j = \sum_{a\in G}\sum_{r=1}^{n} \pi_{rj}(a)\rho\left(a^{-1}\right) Ae_r = \sum_{a\in G}\sum_{r=1}^{n} \pi_{rj}(a)\delta_{ir}\rho\left(a^{-1}\right) f_\ell =$$

$$= \sum_{a\in G} \pi_{ij}(a) \sum_{k=1}^{m} \rho_{k\ell}\left(a^{-1}\right) f_k = \sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{a\in G} \pi_{ij}(a)\rho_{k\ell}\left(a^{-1}\right)\right) f_k.$$

Budući da su $f_1, f_2, \ldots, f_m$ linearno nezavisni slijedi prva tvrdnja teorema.

Za dokaz druge tvrdnje na analogan način primijenimo tvrdnju (b) teorema 2.1.3. Neka su $i, s \in \{1,2,\ldots,n\}$ proizvoljni i neka je $A \in L(V)$ zadan na bazi e sa

$$Ae_p = \delta_{ip} e_s, \qquad p = 1,2,\ldots,n.$$

Tada je $\operatorname{Tr} A = \delta_{is}$ pa zbog tvrdnje (b) teorema 2.1.3. za svaki $j \in \{1,2,\ldots,n\}$ imamo redom

$$\frac{|G|}{n}\delta_{is}e_j = \frac{|G|}{n}(\operatorname{Tr} A) I_V e_j = \sum_{a\in G} \pi\left(a^{-1}\right) A\pi(a)e_j = \sum_{a\in G}\sum_{p=1}^{n} \pi_{pj}(a)\pi\left(a^{-1}\right) Ae_p =$$

$$= \sum_{a\in G}\sum_{p=1}^{n} \delta_{ip}\pi_{pj}(a)\pi\left(a^{-1}\right) e_s = \sum_{a\in G} \pi_{ij}(a) \sum_{r=1}^{n} \pi_{rs}\left(a^{-1}\right) e_r = \sum_{r=1}^{n}\left(\sum_{a\in G} \pi_{ij}(a)\pi_{rs}\left(a^{-1}\right)\right) e_r.$$

Dakle,

$$\sum_{r=1}^{n}\left(\sum_{a\in G} \pi_{ij}(a)\pi_{rs}\left(a^{-1}\right)\right) e_r = \frac{|G|}{n}\delta_{is}e_j = \sum_{r=1}^{n} \frac{|G|}{n}\delta_{is}\delta_{jr}e_r,$$

a odatle zbog linearne nezavisnosti vektora $e_1, e_2, \ldots, e_n$ dobivamo drugu tvrdnju teorema.

Promatrajmo sada prostor $\mathbb{C}[G]$ svih kompleksnoznačnih funkcija na grupi G. To je unitaran prostor uz skalarni produkt definiran sa

$$(\varphi|\psi) = \frac{1}{|G|}\sum_{a\in G} \varphi(a)\overline{\psi(a)}, \qquad \varphi, \psi \in \mathbb{C}[G].$$

Kao posljedicu teorema 2.1.4. dobivamo tzv. **relacije ortogonalnosti**:

Teorem 2.1.5. *Neka su π i ρ neekvivalentne ireducibilne unitarne reprezentacije grupe G na prostorima V i W. Neka su $e = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ i $f = \{f_1, f_2, \ldots, f_m\}$ ortonormirane baze u prostorima V i W. Neka su $\pi_{ij}(a)$ matrični elementi operatora $\pi(a)$ u bazi e i $\rho_{k\ell}(a)$ matrični elementi operatora $\rho(a)$ u bazi f. Tada vrijedi*

$$(\pi_{ij}|\rho_{k\ell}) = 0 \qquad \forall i,j \in \{1,2,\ldots,n\} \quad i \quad \forall k,\ell \in \{1,2,\ldots,m\}$$

i

$$(\pi_{ij}|\pi_{sr}) = \frac{1}{n}\delta_{is}\delta_{jr} \qquad \forall i,j,r,s \in \{1,2,\ldots,n\}.$$

Dokaz: Tvrdnje slijede neposredno iz dviju tvrdnji teorema 2.1.4., budući da su matrice unitarnih operatora $\pi(a)$ i $\rho(a)$ u ortonormiranim bazama unitarne, tj. vrijedi

$$\pi_{rs}(a^{-1}) = \overline{\pi_{sr}(a)} \qquad \text{i} \qquad \rho_{k\ell}(a^{-1}) = \overline{\rho_{\ell k}(a)}.$$

2.2 Karakter reprezentacije

Neka je π reprezentacija grupe G na vektorskom prostoru V. Definiramo funkciju $\chi_\pi : G \to \mathbb{C}$ ovako:

$$\chi_\pi(a) = \operatorname{Tr} \pi(a), \qquad a \in G.$$

Funkcija χ_π zove se **karakter reprezentacije** π.

Propozicija 2.2.1. *Karakter χ_π reprezentacije π grupe G na vektorskom prostoru V ima svojstva:*

(a) $\chi_\pi(e) = \dim V$.

(b) $\chi_\pi(a^{-1}) = \overline{\chi_\pi(a)}$, $a \in G$.

(c) $\chi_\pi(ab) = \chi_\pi(ba)$, $a, b \in G$.

Dokaz: Tvrdnja (a) slijedi neposredno iz činjenice da je $\pi(e) = I_V$.

(b) Prema tvrdnji (b) teorema 2.1.1. možemo pretpostaviti da je prostor V unitaran i da je reprezentacija π unitarna. Neka je $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ ortonormirana baza u V. Operator $\pi(a)$ je unitaran i pa je njegov inverzni operator $\pi(a^{-1})$ njemu adjungiran. Stoga su i matrice tih operatora u bazi e međusobno adjungirane. Posebno, dijagonalni elementi matrice operatora $\pi(a^{-1})$ su kompleksno konjugirani dijagonalnim elementima matrice operatora $\pi(a)$. Kako je trag operatora suma dijagonalnih elemenata matrice tog operatora u bilo kojoj bazi, slijedi tvrdnja.

Tvrdnja (c) je neposredna posljedica jednakosti $\operatorname{Tr} AB = \operatorname{Tr} BA$ za bilo koje $A, B \in L(V)$, jer je $\pi(ab) = \pi(a)\pi(b)$ i $\pi(ba) = \pi(b)\pi(a)$.

Propozicija 2.2.2. *Neka je π reprezentacija grupe G na vektorskom prostoru V i neka su $V_1, V_2, \ldots, V_s$ $\pi-$invarijantni potprostori takvi da je*

$$V = V_1 \dot{+} V_2 \dot{+} \cdots \dot{+} V_s.$$

Tada vrijedi

$$\chi_\pi = \chi_{\pi_{V_1}} + \chi_{\pi_{V_2}} + \cdots + \chi_{\pi_{V_s}}.$$

Zadatak 2.2.1. *Dokažite propoziciju 2.2.2.*

Propozicija 2.2.3. *Neka su π i ρ reprezentacije grupe G. Tada je*

$$\chi_{\pi \otimes \rho} = \chi_\pi \chi_\rho.$$

Zadatak 2.2.2. *Dokažite propoziciju 2.2.3.*

Teorem 2.2.4. *Neka su π i ρ ireducibilne reprezentacije grupe G. Tada vrijedi*

$$(\chi_\pi | \chi_\rho) = \begin{cases} 1 & \text{ako je} \quad \pi \simeq \rho \\ 0 & \text{ako je} \quad \pi \not\simeq \rho \end{cases}$$

Dokaz: Zbog tvrdnje (b) teorema 2.1.1. možemo pretpostavljati da su reprezentacije π i ρ unitarne.

Pretpostavimo najprije da reprezentacije π i ρ nisu ekvivalentne. Neka je $\{e_1, \ldots, e_n\}$ ortonormirana baza prostora reprezentacije π i neka je $[\pi_{ij}(a)]_{i,j=1}^n$ matrica operatora $\pi(a)$, $a \in G$, u toj bazi. Analogno, neka je $\{f_1, \ldots, f_m\}$ ortonormirana baza prostora reprezentacije ρ i neka je $[\rho_{k\ell}(a)]_{k,\ell=1}^m$

matrica operatora $\rho(a)$, $a \in G$, u toj bazi. Trag linearnog operatora je suma dijagonalnih elemenata njegove matrice u bilo kojoj bazi, pa imamo

$$\chi_\pi(a) = \sum_{i=1}^{n} \pi_{ii}(a) \qquad \text{i} \qquad \chi_\rho(a) = \sum_{k=1}^{m} \rho_{kk}(a) \qquad \text{za} \quad a \in G.$$

Sada iz prve tvrdnje teorema 2.1.5. slijedi

$$(\chi_\pi|\chi_\rho) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}(\pi_{ii}|\rho_{kk}) = 0.$$

Pretpostavimo sada da su reprezentacije π i ρ ekvivalentne. Tada je očito $\chi_\rho = \chi_\pi$, jer su u nekim bazama matrice operatora $\pi(a)$ i $\rho(a)$ jednake. Dakle, treba dokazati da je $(\chi_\pi|\chi_\pi) = 1$. Uz oznaku iz prethodnog odlomka i uz primjenu druge tvrdnje teorema 2.1.5. dobivamo

$$(\chi_\pi|\chi_\pi) = \sum_{i,j=1}^{n}(\pi_{ii}|\pi_{jj}) = \frac{1}{n}\sum_{i,j=1}^{n}\delta_{ij} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} 1 = 1.$$

Time je teorem u potpunosti dokazan.

Teorem 2.2.5. *Neka je π reprezentacija grupe G na vektorskom prostoru V i neka su $V_1, V_2, \ldots, V_s$ $\pi-$invarijantni potprostori takvi da je*

$$V = V_1 \dotplus V_2 \dotplus \cdots \dotplus V_s$$

i da su sve subreprezentacije π_{V_j} ireducibilne. Neka je ρ ireducibilna reprezentacija od G. Tada je skalarni produkt $(\chi_\pi|\chi_\rho)$ jednak broju indeksa $j \in \{1, 2, \ldots, s\}$ takvih da je $\pi_{V_j} \simeq \rho$.

Dokaz: Prema propoziciji 2.2.2. vrijedi

$$(\chi_\pi|\chi_\rho) = \sum_{j=1}^{s}(\chi_{\pi_{V_j}}|\chi_\rho).$$

Tvrdnja slijedi neposredno iz te jednakosti, jer je prema teoremu 2.2.4.

$$(\chi_{\pi_{V_j}}|\chi_\rho) = \begin{cases} 1 & \text{ako je} \quad \pi_{V_j} \simeq \rho \\ 0 & \text{ako je} \quad \pi_{V_j} \not\simeq \rho \end{cases}$$

Korolar 2.2.6. *Neka su π i σ reprezentacije grupe G. Tada je $\pi \simeq \sigma$ ako i samo ako je $\chi_\pi = \chi_\sigma$.*

Zadatak 2.2.3. *Dokažite korolar 2.2.6.*

U daljnjem ćemo sa $\hat{G}$ označavati skup svih klasa ekvivalencije ireducibilnih reprezentacija grupe G (na kompleksnim vektorskim prostorima). Iz teorema 2.2.5. slijedi da broj potprostora V_i u rastavu prostora reprezentacije π na kojima se subreprezentacija π_{V_i} nalazi u danoj klasi $\alpha \in \hat{G}$ ne ovisi o izboru takvog rastava. Taj se broj zove **multiplicitet** ili **kratnost** ireducibilne klase $\alpha \in \hat{G}$ u reprezentaciji π. Taj ćemo broj označavati sa $m(\pi, \alpha)$.

Nadalje, za $\alpha \in \hat{G}$ označimo sa χ_α karakter bilo koje reprezentacije iz klase α. Prema teoremu 2.2.4. karakteri χ_α, $\alpha \in \hat{G}$, čine ortonormiran skup u vektorskom prostoru $\mathbb{C}[G]$, a kako je taj prostor konačnodimenzionalan, zaključujemo da je skup $\hat{G}$ konačan. Štoviše, budući da je $\dim \mathbb{C}[G] = |G|$, vrijedi $|\hat{G}| \leq |G|$.

Teorem 2.2.7. *Neka je π reprezentacija grupe G na vektorskom prostoru $V \neq \{0\}$. Tada je $(\chi_\pi|\chi_\pi) \in \mathbb{N}$ i reprezentacija π je ireducibilna ako i samo ako je $(\chi_\pi|\chi_\pi) = 1$.*

Dokaz: Uz uvedene oznake imamo

$$\chi_\pi = \sum_{\alpha \in \hat{G}} m(\pi, \alpha)\chi_\alpha$$

a odatle zbog ortonormiranosti karaktera χ_α slijedi

$$(\chi_\pi|\chi_\pi) = \sum_{\alpha \in \hat{G}} \sum_{\beta \in \hat{G}} m(\pi, \alpha)m(\pi, \beta)(\chi_\alpha|\chi_\beta) = \sum_{\alpha \in \hat{G}} m(\pi, \alpha)^2.$$

Dakle, $(\chi_\pi|\chi_\pi) \in \mathbb{N}$ i taj je broj jednak 1 ako i samo ako je $\chi_\pi = \chi_\alpha$ za neki $\alpha \in \hat{G}$.

2.3 Dekompozicija regularne reprezentacije

U daljnjem ćemo za $\alpha \in \hat{G}$ sa $d(\alpha)$ označavati dimenziju reprezentacija u klasi α.

Lijevu i desnu regularnu reprezentaciju grupe G na prostoru $\mathbb{C}[G]$, definirane u prvom poglavlju, označavat ćemo u daljnjem sa λ_G i ρ_G. Podsjetimo se da je

$$(\lambda_G(a)\varphi)(b) = \varphi(a^{-1}b), \qquad (\rho_G(a)\varphi)(b) = \varphi(ba), \qquad a, b \in G.$$

Nadalje, prema zadatku 1.3.3. reprezentacije λ_G i ρ_G su ekvivalentne, a ekvivalenciju ostvaruje izomorfizam $T : \mathbb{C}[G] \to \mathbb{C}[G]$ dan sa

$$T\varphi = \check{\varphi}, \qquad \check{\varphi}(a) = \varphi\left(a^{-1}\right), \qquad \varphi \in \mathbb{C}[G], \quad a \in G.$$

Zadatak 2.3.1. *Dokažite da su reprezentacije λ_G i ρ_G u odnosu na uvedeni skalarni produkt na prostoru $\mathbb{C}[G]$ unitarne i da je gore definirani operator T unitaran.*

Teorem 2.3.1. (*a*) *Karakter regularne reprezentacije dan je sa*

$$\chi_{\lambda_G}(a) = \begin{cases} |G| & \text{ako je} \quad a = e \\ 0 & \text{ako je} \quad a \neq e. \end{cases}$$

(*b*) *Za svaku klasu $\alpha \in \hat{G}$ je $m(\lambda_G, \alpha) = d(\alpha)$.*
(*c*) *Vrijedi*

$$\sum_{\alpha \in \hat{G}} d(\alpha)^2 = |G|.$$

Dokaz: (*a*) Upotrijebit ćemo prije uvedenu bazu $\{\delta_c;\ c \in G\}$ prostora $\mathbb{C}[G]$:

$$\delta_c(b) = \delta_{c,b} = \begin{cases} 1 & \text{za} \quad b = c \\ 0 & \text{za} \quad b \neq c. \end{cases}$$

Za $a, b, c \in G$ imamo

$$(\lambda_G(a)\delta_c)(b) = \delta_c(a^{-1}b) = \delta_{c,a^{-1}b} = \delta_{ac,b} = \delta_{ac}(b).$$

Dakle,

$$\lambda_G(a)\delta_c = \delta_{ac}, \qquad a, c \in G.$$

Odavde se vidi da ako je $a \neq e$ onda su u matrici operatora $\lambda_G(a)$ u toj bazi svi dijagonalni elementi jednaki nuli. Dakle, trag tog operatora jednak je 0, tj. $\chi_{\lambda_G}(a) = 0$. Naravno, $\lambda_G(e) = I_{\mathbb{C}[G]}$ pa je $\chi_{\lambda_G}(e) = \dim\, \mathbb{C}[G] = |G|$.

(*b*) Prema teoremu 2.2.5., prema tvrdnji (*a*) propozicije 2.2.1 i prema dokazanoj tvrdnji (*a*) imamo

$$m(\lambda_G, \alpha) = (\chi_{\lambda_G}|\chi_\alpha) = \frac{1}{|G|}\sum_{a \in G} \chi_{\lambda_G}(a)\overline{\chi_\alpha(a)} = \frac{1}{|G|}|G|\overline{\chi_\alpha(e)} = d(\alpha).$$

(*c*) Prema dokazanoj tvrdnji (*b*) imamo

$$\chi_{\lambda_G} = \sum_{\alpha \in \hat{G}} d(\alpha)\chi_\alpha$$

pa zbog tvrdnje (*a*) slijedi

$$|G| = \chi_{\lambda_G}(e) = \sum_{\alpha \in \hat{G}} d(\alpha)\chi_\alpha(e) = \sum_{\alpha \in \hat{G}} d(\alpha)^2.$$

Tvrdnja (c) teorema 2.3.1. može nam poslužiti da ustanovimo da li određene pronađene međusobno neekvivalentne ireducibilne reprezentacije grupe G predstavljaju predstavnike svih klasa $\alpha \in \hat{G}$: to jest tako ako i samo ako je suma kvadrata njihovih dimenzija jednaka $|G|$. Kasnije ćemo ustanoviti još jednu činjenicu o odnosu dimenzija $d(\alpha)$ ireducibilnih reprezentacija i reda $|G|$ grupe G : broj $|G|$ djeljiv je s $d(\alpha)$ za svaku $\alpha \in \hat{G}$.

Prema tvrdnji (b) teorema 2.3.1. u dekompoziciji regularne reprezentacije konačne grupe G u direktnu sumu ireducibilnih reprezentacija za svaku klasu $\alpha \in \hat{G}$ točno $d(\alpha)$ reprezentacija iz te dekompozicije nalazi se u klasi α. To će biti i posljedica preciznog opisa strukture grupovne algebre $\mathbb{C}[G]$ koji ćemo dobiti u odjeljku 2.5.

2.4 Centralne funkcije

Sljedeći nam je cilj odrediti broj elemenata skupa $\hat{G}$. U tu svrhu trebamo definirati nekoliko pojmova u vezi s grupom G.

Funkcija $\varphi \in \mathbb{C}[G]$ zove se **centralna** ako vrijedi $\varphi(ab) = \varphi(ba)\ \forall a, b \in G$. Prema tvrdnji (c) propozicije 2.2.1. karakter bilo koje reprezentacije grupe G je centralna funkcija na G. Skup svih centralnih funkcija na grupi G označavat ćemo sa $\mathbb{C}_c[G]$. Očito je $\mathbb{C}_c[G]$ potprostor vektorskog prostora $\mathbb{C}[G]$.

Podsjetimo se da smo odjeljku 1.3. uspostavili bijektivnu vezu između reprezentacija grupe G (u ovom slučaju na kompleksnim vektorskim prostorima) i reprezentacija unitalne algebre $\mathbb{C}[G]$. Dogovorili smo se da ćemo odgovarajuće reprezentacije tih dvaju objekata označavati istim znakom. Veze između reprezentacije π od G i pripadne reprezentacije od $\mathbb{C}[G]$ su sljedeće:

$$\pi(\varphi) = \sum_{a \in G} \varphi(a)\pi(a), \quad \varphi \in \mathbb{C}[G]; \qquad\qquad \pi(a) = \pi(\delta_a), \quad a \in G.$$

Propozicija 2.4.1. *Neka je π ireducibilna reprezentacija grupe G na prostoru V dimenzije n i neka je $\varphi \in \mathbb{C}_c[G]$. Tada je*

$$\pi(\varphi) = \lambda I_V \qquad \textit{gdje je} \qquad \lambda = \frac{1}{n}\sum_{a \in G} \varphi(a)\chi_\pi(a) = \frac{|G|}{n}(\chi_\pi|\overline{\varphi}).$$

Dokaz: Za $b \in G$ imamo redom

$$\pi(\varphi)\pi(b) = \sum_{a \in G} \varphi(a)\pi(ab) = \sum_{a \in G} \varphi(ab^{-1})\pi(a) = \sum_{a \in G} \varphi(b^{-1}a)\pi(a) = \sum_{a \in G} \varphi(a)\pi(ba) = \pi(b)\pi(\varphi).$$

Sada iz tvrdnje (c) Schurove leme (teorem 1.1.6.) slijedi da je $\pi(\varphi) = \lambda I_V$ za neki $\lambda \in \mathbb{C}$. Slijedi

$$n\lambda = \operatorname{Tr} \pi(\varphi) = \sum_{a \in G} \varphi(a) \operatorname{Tr} \pi(a) = \sum_{a \in G} \varphi(a)\chi_\pi(a)$$

i time je propozicija dokazana.

Teorem 2.4.2. $\{\chi_\alpha;\ \alpha \in \hat{G}\}$ *je ortonormirana baza prostora* $\mathbb{C}_c[G]$.

Dokaz: Znamo da su χ_α ortonormirani i da leže u potprostoru $\mathbb{C}_c[G]$. Neka je $\varphi \in \mathbb{C}_c[G]$, $\varphi \perp \chi_\alpha\ \forall \alpha \in \hat{G}$. Za bilo koju ireducibilnu reprezentaciju π grupe G na prostoru V dimenzije n definiramo operator $\pi(\overline{\varphi})$ na prostoru V ovako:

$$\pi(\overline{\varphi}) = \sum_{a \in G} \overline{\varphi(a)}\pi(a).$$

Prema propoziciji 2.4.1. tada je $\pi(\overline{\varphi}) = \lambda I_V$, gdje je

$$\lambda = \frac{|G|}{n}(\chi_\pi|\varphi)$$

a to je jednako 0 jer je $\chi_\pi = \chi_\alpha$ ako je $\pi \in \alpha$ i jer smo pretpostavili da je $\varphi \perp \chi_\alpha$ za svaki $\alpha \in \hat{G}$. Dakle, $\pi(\overline{\varphi}) = 0$ za svaku ireducibilnu reprezentaciju π. Kako je svaka reprezentacija direktna suma ireducibilnih reprezentacija, slijedi da je za svaku reprezentaciju π

$$\pi(\overline{\varphi}) = \sum_{a \in G} \overline{\varphi(a)}\pi(a) = 0.$$

Posebno, $\lambda_G(\overline{\varphi}) = 0$. Upotrijebit ćemo sada bazu $\{\delta_a;\ a \in G\}$ prostora $\mathbb{C}[G]$ iz dokaza teorema 2.3.1. Primijenimo operator $0 = \lambda_G(\overline{\varphi})$ na funkciju δ_e :

$$0 = \lambda_G(\overline{\varphi})\delta_e = \sum_{a\in G} \overline{\varphi(a)}\lambda_G(a)\delta_e = \sum_{a\in G} \overline{\varphi(a)}\delta_a.$$

Budući da su δ_a, $a \in G$, linearno nezavisni, slijedi $\varphi(a) = 0\ \forall a \in G$ tj. $\varphi = 0$.

Na taj način dokazali smo da je ortogonalni komplement potprostora razapetog sa $\{\chi_\alpha;\ \alpha \in \hat{G}\}$ u prostoru $\mathbb{C}_c[G]$ jednak $\{0\}$. Time je teorem dokazan.

Zadatak 2.4.1. *Neka su G i H konačne grupe. Pomoću teorema 2.2.7., 2.3.1. i 2.4.2. dokažite da je $(\pi, \rho) \mapsto \pi \times \rho$ bijekcija sa skupa $\hat{G} \times \hat{H}$ na skup svih klasa ekvivalencije ireducibilnih reprezentacija grupe $G \times H$.*

Posljedica teorema 2.4.2. je da je broj $|\hat{G}|$ klasa ekvivalencije ireducibilnih reprezentacija grupe G jednak dimenziji vektorskog prostora $\mathbb{C}_c[G]$ svih centralnih funkcija na grupi G. Sada ćemo na drugi način odrediti dimenziju vektorskog prostora $\mathbb{C}_c[G]$.

Za element $a \in G$ kažemo da je **konjugiran** elementu $b \in G$ ako postoji $c \in G$ takav da je $a = c^{-1}bc$. Lako se vidi da je konjugiranost relacija ekvivalencije na grupi G pa je G disjunktna unija svojih klasa konjugiranosti.

Propozicija 2.4.3. (*a*) *Funkcija $\varphi \in \mathbb{C}[G]$ je centralna ako i samo ako je ona konstantna na svakoj klasi konjugiranosti u grupi G.*

(*b*) *Neka su $C_1, C_2, \ldots, C_s$ sve klase konjugiranosti u grupi G. Za svaki $j \in \{1, 2, \ldots, s\}$ definiramo funkciju φ_j na grupi G ovako:*

$$\varphi_j(a) = \begin{cases} 1 & \text{ako} \quad a \in C_j \\ 0 & \text{ako} \quad a \in G \setminus C_j \end{cases}$$

(drugim riječima φ_j je karakteristična funkcija podskupa $C_j \subseteq G$). Tada je

$$\{\varphi_j;\ j = 1, 2, \ldots, s\}$$

baza vektorskog prostora $\mathbb{C}_c[G]$. Posebno, $\dim \mathbb{C}_c[G] = s$.

Zadatak 2.4.2. *Dokažite propoziciju 2.4.3.*

Napomenimo da je baza u tvrdnji (*b*) propozicije 2.4.3. očito ortogonalna, jer su klase konjugiranosti međusobno disjunktne. Nadalje, kvadrat norme funkcije φ_j jednak je kvocijentu broja $|C_j|$ elemenata u klasi konjugiranosti C_j i reda $|G|$ grupe G. Dakle,

$$\left\{ \sqrt{\frac{|G|}{|C_j|}}\varphi_j;\ j = 1, 2, \ldots, s \right\}$$

je ortonormirana baza od $\mathbb{C}_c[G]$.

Iz propozicije 2.4.3. i iz teorema 2.4.2. neposredno slijedi:

Teorem 2.4.4. *Broj $|\hat{G}|$ klasa ekvivalencije ireducibilnih reprezentacija konačne grupe G jednak je broju klasa konjugiranosti u grupi G.*

Teorem 2.4.5. *Neka je G konačna grupa. Sljedeća su tri svojstva međusobno ekvivalentna:*

(a) *Grupa G je komutativna.*

(b) *Svaka ireducibilna kompleksna reprezentacija grupe G je jednodimenzionalna.*

(c) $|\hat{G}| = |G|$.

Dokaz: Neka je za svaku klasu $\alpha \in \hat{G}$ $d(\alpha)$ dimenzija reprezentacija u klasi α. Prema tvrdnji (c) teorema 2.3.1. tada je

$$|G| = \sum_{\alpha\in\hat{G}} d(\alpha)^2.$$

Odatle neposredno slijedi da je $|\hat{G}| = |G|$ ako i samo ako je $d(\alpha) = 1 \ \forall\alpha \in \hat{G}$. Dakle, $(b) \iff (c)$.

Grupa G je komutativna ako i samo ako je $b^{-1}ab = a \ \forall a, b \in G$, tj. ako i samo ako je svaka klasa konjugiranosti u grupi G jednočlan skup. Kako je broj klasa konjugiranosti u grupi G prema teoremu 2.4.4. jednak $|\hat{G}|$, slijedi ekvivalencija $(a) \iff (c)$.

Dokazat ćemo sada precizniji oblik teorema 2.4.5. U svakoj grupi G sa $[G, G]$ označavamo podgrupu generiranu svim elementima oblika $aba^{-1}b^{-1}$, $a, b \in G$. Ta se podgrupa zove **komutatorska podgrupa** grupe G.

Zadatak 2.4.3. *Dokažite da je komutatorska podgrupa $[G, G]$ normalna podgrupa grupe G i da je kvocijentna grupa $G/[G, G]$ komutativna. Nadalje, dokažite da je $[G, G]$ najmanja takva podgrupa, odnosno, da vrijedi: ako je H normalna podgrupa od G takva da je kvocijentna grupa G/H komutativna, onda je $[G, G] \subseteq H$.*

Zadatak 2.4.4. *Dokažite da je komutatorska podgrupa $[G, G]$ sadržana u jezgri svakog homomorfizma grupe G u komutativnu grupu.*

Teorem 2.4.6. *Broj jednodimenzionalnih reprezentacija konačne grupe G na kompleksnom vektorskom prostoru jednak je indeksu podgrupe $[G, G]$ u grupi G, odnosno redu kvocijentne grupe $G/[G, G]$:*

$$\left|\{\alpha \in \hat{G};\ d(\alpha) = 1\}\right| = |G/[G, G]| = \frac{|G|}{|[G, G]|}.$$

Dokaz: Neka je $A = G/[G, G]$ i neka je $\kappa : G \to A$ kvocijentni epimorfizam. Budući da je grupa A komutativna, prema teoremu 2.4.5. svaka $\beta \in \hat{A}$ je jednodimenzionalna. Stoga je i reprezentacija $\beta \circ \kappa$ grupe G jednodimenzionalna, dakle, ireducibilna. Na taj način imamo očito injektivno preslikavanje $\beta \mapsto \beta \circ \kappa$ sa $\hat{A}$ u $\{\alpha \in \hat{G};\ d(\alpha) = 1\}$. To je preslikavanje i surjektivno. Doista, ako je α jednodimenzionalna reprezentacija grupe G, onda je njena slika $\operatorname{Im}\alpha$ komutativna grupa. Iz zadatka 2.4.4. slijedi da je $[G, G] \subseteq \operatorname{Ker}\alpha$. Prijelazom na kvocijent dolazimo do reprezentacije $\beta \in \hat{A}$ takve da je $\alpha = \beta \circ \kappa$.

Odatle i iz teorema 2.4.5. primijenjenog na grupu A dobivamo:

$$\left|\{\alpha \in \hat{G};\ d(\alpha) = 1\}\right| = |\hat{A}| = |A| = |G/[G, G]| = \frac{|G|}{|[G, G]|}.$$

Neka je π reprezentacija grupe G na prostoru V i neka je $e = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ baza prostora V. Za $a \in G$ označimo sa $\pi_{ij}(a)$ elemente matrice operatora $\pi(a)$ u bazi e. Tada su $\pi_{ij} \in \mathbb{C}[G]$. Označimo sa $\mathbb{C}_\pi[G]$ potprostor od $\mathbb{C}[G]$ razapet funkcijama π_{ij}, $1 \le i, j \le n$. Taj potprostor očito ne ovisi o izboru baze e prostora V. Nadalje, ako su π i ρ ekvivalentne reprezentacije, onda je $\mathbb{C}_\pi[G] = \mathbb{C}_\rho[G]$. Ako je $\alpha \in \hat{G}$ i ako je $\pi \in \alpha$ pisat ćemo $\mathbb{C}_\alpha[G] = \mathbb{C}_\pi[G]$.

Teorem 2.4.7. *Neka je G konačna grupa.*

(a) *Vrijedi*

$$\mathbb{C}[G] = \bigoplus_{\alpha \in \hat{G}} \mathbb{C}_\alpha[G].$$

(b) *Neka $\pi^\alpha \in \alpha$ djeluje na vektorskom prostoru V_α, neka je $e^\alpha = \{e_1^\alpha, e_2^\alpha, \ldots, e_{d(\alpha)}^\alpha\}$ baza prostora V_α i neka su $\pi_{ij}^\alpha(a)$ elementi matrice operatora $\pi^\alpha(a)$ u bazi e^α ($a \in G,\ 1 \leq i, j \leq d(\alpha)$). Tada je $\{\pi_{ij}^\alpha;\ 1 \leq i, j \leq d(\alpha)\}$ baza potprostora $\mathbb{C}_\alpha[G]$ i $\{\pi_{ij}^\alpha;\ \alpha \in \hat{G},\ 1 \leq i, j \leq d(\alpha)\}$ je baza prostora $\mathbb{C}[G]$.*

(c) *Ako su reprezentacije π^α u (b) unitarne i ako su baze e^α ortonormirane, onda je*

$$\{\sqrt{d(\alpha)}\,\pi_{ij}^\alpha;\ \alpha \in \hat{G},\ 1 \leq i, j \leq d(\alpha)\}$$

ortonormirana baza u unitarnom prostoru $\mathbb{C}[G]$.

Dokaz: Tvrdnje (a) i (b) slijede iz tvrdnje (c) jer za $\alpha \in \hat{G}$ i za bilo koji izbor reprezentacije π^α i baze e^α funkcije π_{ij}^α razapinju potprostor $\mathbb{C}_\alpha[G]$.

Dokažimo tvrdnju (c). Operatori $\pi^\alpha(a)$ su unitarni, dakle operatori $\pi^\alpha(a)$ i $\pi^\alpha(a^{-1})$ su međusobno adjungirani. Kako je baza e^α ortonormirana, matrice tih operatora u toj bazi su međusobno adjungirane. To znači da vrijedi:

$$\pi_{ij}^\alpha\left(a^{-1}\right) = \overline{\pi_{ji}^\alpha(a)}, \qquad 1 \leq i, j \leq d(\alpha), \quad \alpha \in \hat{G}, \quad a \in G.$$

Sada iz teorema 2.1.4 neposredno slijedi:

$$\sum_{a \in G} \pi_{ij}^\alpha(a)\overline{\pi_{sr}^\beta(a)} = \frac{|G|}{d(\alpha)}\delta_{\alpha\beta}\delta_{is}\delta_{jr}, \qquad \alpha, \beta \in \hat{G},\ i, j \in \{1, 2, \ldots, d(\alpha)\},\ r, s \in \{1, 2, \ldots, d(\beta)\}.$$

Prema definiciji skalarnog produkta u prostoru $\mathbb{C}[G]$ to znači da je

$$(\pi_{ij}^\alpha|\pi_{sr}^\beta) = \frac{1}{d(\alpha)}\delta_{\alpha\beta}\delta_{is}\delta_{jr}, \qquad \alpha, \beta \in \hat{G},\ i, j \in \{1, 2, \ldots, d(\alpha)\},\ r, s \in \{1, 2, \ldots, d(\beta)\}.$$

Iz gornjih relacija vidimo da je

$$\{\sqrt{d(\alpha)}\pi_{ij}^\alpha;\ \alpha \in \hat{G},\ 1 \leq i, j \leq d(\alpha)\}$$

ortonormiran skup. Broj elemenata tog skupa je

$$\sum_{\alpha \in \hat{G}} d(\alpha)^2,$$

a to je prema tvrdnji (c) teorema 2.3.1. jednako $|G| = \dim\, \mathbb{C}[G]$. Dakle, radi se o ortonormiranoj bazi unitarnog prostora $\mathbb{C}[G]$.

Zadatak 2.4.5. *Za simetričnu grupu S_3 (grupu permutacija skupa $\{1, 2, 3\}$) pronađite sve klase konjugiranosti, konstruirajte za svaku $\alpha \in \hat{S}_3$ unitarnu reprezentaciju $\pi^\alpha \in \alpha$ i konstruirajte ortonormiranu bazu prostora $\mathbb{C}_c[S_3]$ iz teorema 2.4.2. i prostora $\mathbb{C}[S_3]$ iz tvrdnje (c) teorema 2.4.7. Napokon, izračunajte matricu unitarnog operatora na prostoru $\mathbb{C}_c[S_3]$ koji prevodi bazu iz teorema 2.4.2. u bazu koja se dobije normiranjem ortogonalne baze iz tvrdnje (b) propozicije 2.4.3.*

2.5 Struktura grupovne algebre $\mathbb{C}[G]$

Propozicija 2.5.1. *Potprostor $\mathbb{C}_c[G] = \{\varphi \in \mathbb{C}[G];\ \varphi(ab) = \varphi(ba)\ \forall a \in G\}$ svih centralnih funkcija je centar algebre $\mathbb{C}[G]$, tj.*

$$\mathbb{C}_c[G] = \{\varphi \in \mathbb{C}[G];\ \varphi \star \psi = \psi \star \varphi\ \forall \psi \in \mathbb{C}[G]\}.$$

Dokaz: Neka je $\varphi \in \mathbb{C}_c[G]$ i $\psi \in \mathbb{C}[G]$. Tada imamo redom

$$(\varphi \star \psi)(a) = \sum_{b \in G} \varphi(b)\psi\left(b^{-1}a\right) = \sum_{b \in G} \varphi\left(b^{-1}\right)\psi(ba) = \sum_{b \in G} \varphi\left(\left(ba^{-1}\right)^{-1}\right)\psi(b) =$$

$$= \sum_{b \in G} \psi(b)\varphi\left(ab^{-1}\right) = \sum_{b \in G} \psi(b)\varphi\left(b^{-1}a\right) = (\psi \star \varphi)(a).$$

Dakle, za svaku centralnu funkciju φ vrijedi $\varphi \star \psi = \psi \star \varphi\ \forall \psi \mathbb{C}[G]$.

Pretpostavimo sada da je funkcija φ iz centra algebre $\mathbb{C}[G]$, tj. takva da je $\varphi \star \psi = \psi \star \varphi$ $\forall \psi \mathbb{C}[G]$. Tada posebno za svaki $a \in G$ vrijedi $\varphi \star \delta_a = \delta_a \star \varphi$. Međutim,

$$(\varphi \star \delta_a)(b) = \sum_{c \in G} \varphi(c)\delta_a\left(c^{-1}b\right) = \sum_{c \in G} \varphi(c)\delta_{a,c^{-1}b} = \varphi\left(ba^{-1}\right),$$

$$(\delta_a \star \varphi)(b) = \sum_{c \in G} \delta_a(c)\varphi\left(c^{-1}b\right) = \sum_{c \in G} \delta_{a,c}\varphi\left(c^{-1}b\right) = \varphi\left(a^{-1}b\right).$$

Dakle, $\varphi\left(ba^{-1}\right) = \varphi\left(a^{-1}b\right)\ \forall a, b \in G$ a to znači da je $\varphi \in \mathbb{C}_c[G]$.

Proučit ćemo sada pobliže strukturu algebre $\mathbb{C}[G]$ i to tako da ustanovimo pravila konvolucije elemenata pogodno izabrane baze od $\mathbb{C}[G]$. Prema teoremu 2.4.7. znamo da bazu od $\mathbb{C}[G]$ čine matrični elementi ireducibilnih reprezentacija grupe G. Kao i prije za svaku klasu $\alpha \in \hat{G}$ izaberimo iz te klase jednu ireducibilnu reprezentaciju π^α grupe G na vektorskom prostoru V_α. Neka je $d(\alpha) = \dim V_\alpha$ i izaberimo za svaku klasu $\alpha \in \hat{G}$ bazu $e^\alpha = \{e_1^\alpha, e_2^\alpha, \ldots, e_{d(\alpha)}^\alpha\}$ prostora V_α. Nadalje, označimo sa $\pi_{ij}^\alpha(a)$ elemente matrice operatora $\pi^\alpha(a)$ u bazi e^α. Prema tvrdnji (b) teorema 2.4.7.

$$\{\pi_{ij}^\alpha;\ \alpha \in \hat{G},\ i,j \in \{1,2,\ldots,d(\alpha)\}\}$$

je baza vektorskog prostora $\mathbb{C}[G]$. Nadalje, za $\alpha \in \hat{G}$ sa χ_α je označen karakter reprezentacije π^α :

$$\chi_\alpha(a) = \sum_{i=1}^{d(\alpha)} \pi_{ii}^\alpha(a), \qquad a \in G.$$

Propozicija 2.5.2. *Vrijedi*

$$\pi_{ij}^\alpha \star \pi_{k\ell}^\beta = \frac{|G|}{d(\alpha)}\delta_{\alpha,\beta}\delta_{jk}\pi_{i\ell}^\alpha.$$

Zadatak 2.5.1. *Pomoću teorema 2.1.4. dokažite propoziciju 2.5.2.*

Teorem 2.5.3. (a) *Potprostori $\mathbb{C}_\alpha[G]$, $\alpha \in \hat{G}$, su obostrani ideali u algebri $\mathbb{C}[G]$.*

(b) *Za funkcije*

$$\chi^\alpha = \frac{d(\alpha)}{|G|}\chi_\alpha, \qquad \alpha \in \hat{G},$$

vrijedi

$$\chi^\alpha \star \varphi = \varphi \star \chi^\alpha = \begin{cases} \varphi & \textit{ako je} \quad \varphi \in \mathbb{C}_\alpha[G] \\ 0 & \textit{ako je} \quad \varphi \in \mathbb{C}_\beta[G],\ \beta \in \hat{G},\ \beta \neq \alpha. \end{cases}$$

Posebno, funkcija χ^α je jedinica u algebri $\mathbb{C}_\alpha[G]$ i vrijedi $\chi^\alpha \star \chi^\beta = \delta_{\alpha\beta}\chi^\alpha$.

Dokaz: Prema teoremu 2.4.7.

$$\{\pi_{ij}^{\alpha};\ 1 \leq i, j \leq d(\alpha)\}$$

je baza potprostora $\mathbb{C}_\alpha[G]$, a

$$\{\pi_{k\ell}^{\beta};\ \beta \in \hat{G},\ 1 \leq k, \ell \leq d(\beta)\}$$

je baza čitave algebre $\mathbb{C}[G]$. Dakle, ako su $\varphi \in \mathbb{C}_\alpha[G]$ i $\psi \in \mathbb{C}[G]$ možemo pisati

$$\varphi = \sum_{i,j=1}^{d(\alpha)} \lambda_{ij} \pi_{ij}^{\alpha} \qquad \text{i} \qquad \psi = \sum_{\beta \in \hat{G}} \sum_{k,\ell=1}^{d(\beta)} \mu_{k\ell}^{\beta} \pi_{k\ell}^{\beta}$$

za neke $\lambda_{ij}, \mu_{k\ell}^{\beta} \in \mathbb{C}$. Stoga je prema propoziciji 2.5.2.

$$\varphi \star \psi = \sum_{\beta \in \hat{G}} \sum_{i,j=1}^{d(\alpha)} \sum_{k,\ell=1}^{d(\beta)} \lambda_{ij} \mu_{k\ell}^{\beta} \pi_{ij}^{\alpha} \star \pi_{k\ell}^{\beta} =$$

$$= \frac{|G|}{d(\alpha)} \sum_{\beta \in \hat{G}} \sum_{i,j=1}^{d(\alpha)} \sum_{k,\ell=1}^{d(\beta)} \lambda_{ij} \mu_{k\ell}^{\beta} \delta_{\alpha,\beta} \delta_{jk} \pi_{i\ell}^{\alpha} = \frac{|G|}{d(\alpha)} \sum_{i,j,\ell=1}^{d(\alpha)} \lambda_{ij} \mu_{j\ell}^{\alpha} \pi_{i\ell}^{\alpha} \in \mathbb{C}_\alpha[G]$$

i sasvim analogno

$$\psi \star \varphi = \sum_{\beta \in \hat{G}} \sum_{i,j=1}^{d(\alpha)} \sum_{k,\ell=1}^{d(\beta)} \lambda_{ij} \mu_{k\ell}^{\beta} \pi_{k\ell}^{\beta} \star \pi_{ij}^{\alpha} =$$

$$= \frac{|G|}{d(\alpha)} \sum_{\beta \in \hat{G}} \sum_{i,j=1}^{d(\alpha)} \sum_{k,\ell=1}^{d(\beta)} \lambda_{ij} \mu_{k\ell}^{\beta} \delta_{\alpha,\beta} \delta_{i\ell} \pi_{kj}^{\alpha} = \frac{|G|}{d(\alpha)} \sum_{i,j,k=1}^{d(\alpha)} \lambda_{ij} \mu_{ki}^{\alpha} \pi_{kj}^{\alpha} \in \mathbb{C}_\alpha[G]$$

Time je dokazano da je $\mathbb{C}_\alpha[G]$ obostrani ideal u algebri $\mathbb{C}[G]$.

(b) Funkcije χ^α su centralne, pa prema propoziciji 2.5.1. vrijedi $\chi^\alpha \star \varphi = \varphi \star \chi^\alpha$. Nadalje, iz propozicije 2.5.2. slijedi da za $\alpha, \beta \in \hat{G}$ i za $i, j \in \{1, 2, \ldots, d(\beta)\}$ imamo

$$\chi^\alpha \star \pi_{ij}^{\beta} = \frac{d(\alpha)}{|G|} \sum_{k=1}^{d(\alpha)} \pi_{kk}^{\alpha} \star \pi_{ij}^{\beta} = \delta_{\alpha\beta} \sum_{k=1}^{d(\alpha)} \delta_{ki} \pi_{kj}^{\alpha} = \delta_{\alpha\beta} \pi_{ij}^{\alpha}.$$

Kako je $\{\pi_{ij}^{\beta};\ 1 \leq i, j \leq d(\beta)\}$ baza potprostora $\mathbb{C}_\beta[G]$, tvrdnja slijedi.

2.6 Osnovna redukcija reprezentacije

Neka su u daljnjem χ^α, $\alpha \in \hat{G}$, centralne funkcije definirane u tvrdnji (b) teorema 2.5.3:

$$\chi^\alpha = \frac{d(\alpha)}{|G|}\chi_\alpha.$$

Prema tom teoremu vrijedi:

$$\chi^\alpha \star \chi^\beta = 0, \quad \alpha, \beta \in \hat{G},\ \alpha \neq \beta; \qquad\qquad \chi^\alpha \star \chi^\alpha = \chi^\alpha, \quad \alpha \in \hat{G};$$

$$\chi^\alpha \star \pi^\beta_{ij} = 0, \quad \alpha, \beta \in \hat{G},\ \alpha \neq \beta,\ 1 \leq i, j \leq d(\beta); \qquad \chi^\alpha \star \pi^\alpha_{ij} = \pi^\alpha_{ij}, \quad \alpha \in \hat{G},\ 1 \leq i, j \leq d(\alpha).$$

Nadalje, kako je χ^α jedinica algebre $\mathbb{C}_\alpha[G]$, zbog tvrdnje (a) teorema 2.4.7. slijedi da je suma tih funkcija jedinica algebre $\mathbb{C}[G]$. Dakle,

$$\sum_{\alpha \in \hat{G}} \chi^\alpha = 1_{\mathbb{C}[G]} = \delta_e.$$

Neka je sada π reprezentacija grupe G na vektorskom prostoru V. Promatrajmo operatore $\pi\left(\overline{\chi^\alpha}\right)$, $\alpha \in \hat{G}$. Tada je

$$\pi\left(\overline{\chi^\alpha}\right)^2 = \pi\left(\overline{\chi^\alpha}\right)\pi\left(\overline{\chi^\alpha}\right) = \pi\left(\overline{\chi^\alpha} \star \overline{\chi^\alpha}\right) = \pi\left(\overline{\chi^\alpha \star \chi^\alpha}\right) = \pi\left(\overline{\chi^\alpha}\right).$$

Dakle, operatori $\pi\left(\overline{\chi^\alpha}\right)$ su projektori. Označimo sa V_α sliku projektora $\pi\left(\overline{\chi^\alpha}\right)$:

$$V_\alpha = \{v \in V;\ \pi\left(\overline{\chi^\alpha}\right)v = v\}.$$

Budući da vrijedi

$$\sum_{\alpha \in \hat{G}} \pi\left(\overline{\chi^\alpha}\right) = \pi\left(\sum_{\alpha \in \hat{G}} \overline{\chi^\alpha}\right) = \pi\left(1_{\mathbb{C}[G]}\right) = I_V$$

i

$$\pi\left(\overline{\chi^\alpha}\right)\pi\left(\overline{\chi^\beta}\right) = \pi\left(\overline{\chi^\alpha \star \chi^\beta}\right) = 0 \quad \text{ako je} \quad \alpha \neq \beta,$$

zaključujemo da je

$$V = \sum_{\alpha \in \hat{G}} V_\alpha \qquad\qquad \text{(direktna suma)}.$$

Budući da su $\overline{\chi^\alpha}$ centralne funkcije, potprostori V_α su $\pi-$invarijantni. Gornji rastav prostora V zove se **osnovna redukcija reprezentacije** π.

Razmotrimo sada što predstavljaju potprostori V_α, $\alpha \in \hat{G}$, u osnovnoj redukciji reperezentacije π. Neka je W $\pi-$invarijantan potprostor od V takav da je subreprezentacija π_W ireducibilna. Neka je $\alpha \in \hat{G}$ klasa ekvivalencije te ireducibilne reprezentacije. Tada je $\chi_{\pi_W} = \chi_\alpha$. Budući da je χ^α centralna funkcija, prema propoziciji 2.4.1. vrijedi

$$\pi\left(\overline{\chi^\alpha}\right)|W = \pi_W\left(\overline{\chi^\alpha}\right) = \lambda I_W,$$

gdje je

$$\lambda = \frac{|G|}{d(\alpha)}(\chi_{\pi_W}|\chi^\alpha) = (\chi_\alpha|\chi_\alpha) = 1.$$

Dakle, $\pi\left(\overline{\chi^\alpha}\right)|W = I_W$, što znači da je $W \subseteq V_\alpha$.

Na taj način dokazali smo:

Teorem 2.6.1. *Neka je π reprezentacija grupe G na prostoru V.*

(*a*) *Za $\alpha \in \hat{G}$ operator*

$$\pi\left(\overline{\chi^\alpha}\right) = \frac{d(\alpha)}{|G|} \sum_{a \in G} \overline{\chi_\alpha(a)} \pi(a)$$

je projektor.

(*b*) *Vrijedi*

$$\sum_{\alpha \in \hat{G}} \pi\left(\overline{\chi^\alpha}\right) = I_V.$$

Drugim riječima, ako je V_α područje vrijednosti projektora $\pi\left(\overline{\chi^\alpha}\right)$, onda je

$$V = \sum_{\alpha \in \hat{G}} V_\alpha \qquad \text{(direktna suma)}.$$

(*c*) *Ako je $W \leq V$ $\pi-$invarijantan potprostor takav da je subreprezentacija π_W ireducibilna i ako je $\alpha \in \hat{G}$ klasa ekvivalencije reprezentacije π_W, onda je $W \subseteq V_\alpha$.*

(*d*) *Neka je*

$$V = V_1 \dot{+} V_2 \dot{+} \cdots \dot{+} V_s$$

rastav prostora V u direktnu sumu $\pi-$invarijantnih potprostora takvih da su sve subreprezentacije π_{V_i} ireducibilne. Suma svih potprostora V_i takvih da je subreprezentacija π_{V_i} u klasi $\alpha \in \hat{G}$ ne ovisi o gornjem rastavu i jednaka je području vrijednosti V_α projektora $\pi(\overline{\chi^\alpha})$.

Teorem 2.6.2. *Neka su $\pi^i : G \to \mathrm{GL}(V_i)$, $1 \leq i \leq s$, međusobno neekvivalentne ireducibilne reprezentacije grupe G. Pomoću pripadnih reprezentacija grupovne algebre $\pi^i : \mathbb{C}[G] \to L(V_i)$ definiramo homomorfizam algebri*

$$\pi : \mathbb{C}[G] \to L(V_1) \times L(V_2) \times \cdots \times L(V_s), \qquad \pi(\varphi) = (\pi_1(\varphi), \pi_2(\varphi), \ldots, \pi_s(\varphi)), \quad \varphi \in \mathbb{C}[G].$$

Homomorfizam π je surjektivan.

Dokaz: Pretpostavimo da homomorfizam π nije surjektivan. Tada je slika $\pi(\mathbb{C}[G])$ tog homomorfizma pravi potprostor prostora $\prod_i L(V_i)$, pa slijedi da postoji netrivijalni linearni funkcional f na prostoru $\prod_i L(V_i)$ koji se poništava na $\pi(\mathbb{C}[G])$. Za svaki $a \in G$ je $\pi^i(a) = \pi^i(\delta_a)$, gdje je $\delta_a \in \mathbb{C}[G]$ definirana sa $\delta_a(b) = \delta_{a,b}$. Dakle, vrijedi

$$f(\pi^1(a), \pi^2(a), \ldots, \pi^s(a)) = 0 \qquad \forall a \in G.$$

Za svaki $i \in \{1, 2, \ldots, s\}$ izaberimo bazu $e^i = \{e_1^i, e_2^i, \ldots, e_{n_i}^i\}$ prostora V_i i neka su $\pi_{jk}^i(a)$ elementi matrice operatora $\pi^i(a)$ u bazi e^i. Neka je za svaki i $\{E_{jk}^i;\ 1 \leq j, k \leq n_i\}$ pridružena baza prostora $L(V_i)$:

$$E_{jk}^i e_\ell^i = \delta_{k\ell} e_j^i, \qquad 1 \leq j, k, \ell \leq n_i; \quad 1 \leq i \leq s.$$

Stavimo

$$\lambda_{jk}^i = f(\underbrace{0, \ldots, 0}_{i-1}, E_{jk}^i, \underbrace{0, \ldots, 0}_{s-i}), \qquad 1 \leq j, k \leq n_i, \quad 1 \leq i \leq s.$$

Tada imamo

$$\pi^i(a) = \sum_{j,k=1}^{n_i} \pi_{jk}^i(a) E_{jk}^i, \qquad a \in G, \quad 1 \leq i \leq s,$$

pa iz jednakosti $f(\pi^1(a), \pi^2(a), \ldots, \pi^s(a)) = 0 \ \forall a \in G$ slijedi

$$\sum_{i=1}^{s} \sum_{j,k=1}^{n_i} \lambda_{jk}^i \pi_{jk}^i(a) = 0 \qquad \forall a \in G.$$

Međutim, prema tvrdnji (b) teorema 2.4.7. funkcije π_{jk}^i $(1 \leq j,k \leq n_i,\ 1 \leq i \leq s)$ su linearno nezavisne, pa slijedi $\lambda_{jk}^i = 0 \ \forall i,j,k$. Dakle, $f = 0$ suprotno pretpostavci. Ova kontradikcija dokazuje da je pretpostavka da homomorfizam π nije surjektivan bila pogrešna. Time je teorem dokazan.

Iz prethodnog teorema neposredno slijedi:

Korolar 2.6.3. *Neka je π ireducibilna reprezentacija grupe G na prostoru V. Tada je*

$$L(V) = \pi(\mathbb{C}[G]) = \{\pi(\varphi);\ \varphi \in \mathbb{C}[G]\}.$$

Nadalje, vrijedi:

Korolar 2.6.4. *Pretpostavimo da su reprezentacije π^i u teoremu 2.6.2. predstavnici svih klasa ekvivalencije $\hat{G}$. Tada je homomorfizam π u tvrdnji tog teorema izomorfizam algebre $\mathbb{C}[G]$ na algebru $L(V_1) \times L(V_2) \times \cdots \times L(V_s)$.*

Zadatak 2.6.1. *Dokažite korolar 2.6.4.*

Zadatak 2.6.2. *Uz oznake i pretpostavke teorema 2.6.2. za svaki $i \in \{1, 2, \ldots, s\}$ neka je $\alpha_i \in \hat{G}$ klasa ekvivalencije reprezentacije π^i. Nadalje, neka je $\hat{G} \setminus \{\alpha_1, \ldots, \alpha_s\} = \{\beta_1, \ldots, \beta_r\}$. Dokažite da je tada*

$$\operatorname{Ker} \pi = \sum_{j=1}^{r} \mathbb{C}_{\beta_j}[G]$$

i da je restrikcija homomorfizma π na podalgebru

$$\sum_{i=1}^{s} \mathbb{C}_{\alpha_i}[G]$$

unitalni izomorfizam te unitalne algebre na algebru $L(V_1) \times L(V_2) \times \cdots \times L(V_s)$.

Teorem 2.6.5. *Neka su π i ρ reprezentacije grupe G na prostorima V i W. Tada je*

$$\dim\, Hom_G(V, W) = \dim\, Hom_G(W, V) = (\chi_\pi | \chi_\rho) = \sum_{\alpha \in \hat{G}} m(\pi, \alpha) m(\rho, \alpha).$$

Dokaz: Neka je $V = X_1 \dotplus X_2 \dotplus \cdots \dotplus X_n$ pri čemu su $X_1, X_2, \cdots, X_n$ $\pi-$invarijantni potprostori od V takvi da su subreprezentacije $\pi_{X_1}, \pi_{X_2}, \ldots, \pi_{X_n}$ ireducibilne. Prema zadatku 1.1.5. tada vrijedi

$$\dim\, Hom_G(V, W) = \sum_{i=1}^{n} \dim\, Hom_G(X_i, W).$$

Nadalje, neka je $W = Y_1 \dotplus Y_2 \dotplus \cdots \dotplus Y_m$ pri čemu su $Y_1, Y_2, \ldots, Y_m$ $\rho-$invarijantni potprostori od W takvi da su subreprezentacije $\rho_{Y_1}, \rho_{Y_2}, \ldots, \rho_{Y_m}$ ireducibilne. Prema zadatku 1.1.4. tada je za svaki $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$

$$\dim\, Hom_G(X_i, W) = \sum_{j=1}^{m} \dim\, Hom_G(X_i, Y_j).$$

Iz prethodne dvije jednakosti slijedi

$$\dim\ Hom_G(V,W) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \dim\ Hom_G(X_i, Y_j).$$

Primjenom Schurove leme (teorem 1.1.6.) i teorema 2.2.4. slijedi

$$\dim\ Hom_G(X_i, Y_j) = \left\{ \begin{array}{lll} 1 & & \text{ako je } \pi_{X_i} \simeq \rho_{Y_j} \\ & & \\ 0 & & \text{ako je } \pi_{X_i} \not\simeq \rho_{Y_j} \end{array} \right\} = \left(\chi_{\pi_{X_i}} \middle| \chi_{\rho_{Y_j}}\right).$$

Budući da prema propoziciji 2.2.2. vrijedi

$$\chi_\pi = \sum_{i=1}^{n} \chi_{\pi_{X_i}} \qquad \text{i} \qquad \chi_\rho = \sum_{j=1}^{m} \chi_{\rho_{Y_j}}$$

iz gornjih jednakosti nalazimo

$$\dim\ Hom_G(V,W) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \left(\chi_{\pi_{X_i}} \middle| \chi_{\rho_{Y_j}}\right) = \left(\sum_{i=1}^{n} \chi_{\pi_{X_i}} \middle| \sum_{j=1}^{m} \chi_{\rho_{Y_j}}\right) = (\chi_\pi | \chi_\rho).$$

Napokon, kao u dokazu teorema 2.2.7. imamo

$$\chi_\pi = \sum_{\alpha\in\hat{G}} m(\pi,\alpha)\chi_\alpha \qquad \text{i} \qquad \chi_\rho = \sum_{\beta\in\hat{G}} m(\rho,\beta)\chi_\beta$$

pa zbog ortonormiranosti karaktera χ_α, $\alpha \in \hat{G}$, slijedi

$$(\chi_\pi|\chi_\rho) = \sum_{\alpha\in\hat{G}}\sum_{\beta\in\hat{G}} m(\pi,\alpha)m(\rho,\beta)(\chi_\alpha|\chi_\beta) = \sum_{\alpha\in\hat{G}} m(\pi,\alpha)m(\rho,\alpha).$$

Time smo dokazali da je

$$\dim\ Hom_G(V,W) = (\chi_\pi|\chi_\rho) = \sum_{\alpha\in\hat{G}} m(\pi,\alpha)m(\rho,\alpha).$$

No odatle je $(\chi_\pi|\chi_\rho) = (\chi_\rho|\chi_\pi)$, pa slijedi i

$$\dim\ Hom_G(V,W) = \dim\ Hom_G(W,V).$$

2.7 Svojstva djeljivosti

Cilj je ovog odjeljka da dokažemo da je red $|G|$ grupe G djeljiv s dimenzijom $d(\alpha)$ svake ireducibilne reprezentacije od G. U tu svrhu trebaju nam neki pojmovi i činjenice iz opće algebre.

Neka je R proizvoljan unitalan prsten. Jedinicu prstena R označavat ćemo sa 1. Nadalje, za $m \in \mathbb{N}$ istim znakom m označavamo element prstena R koji se dobije zbrajanjem m primjeraka jedinice prstena R, a sa $-m$ njemu suprotan element prstena R. Na taj način definiran je unitalni homomorfizam prstenova $\mathbb{Z} \to R$. Ujedno, na taj način svaki unitalan prsten možemo shvaćati kao $\mathbb{Z}-$modul i lijevi i desni budući da je slika homomorfizma $\mathbb{Z} \to R$ sadržana u centru prstena R.

Neka je sada R komutativan unitalan prsten. Za element $x \in R$ kažemo da je **cio** (nad $\mathbb{Z}$) ako postoji $n \in \mathbb{N}$ i $m_1, m_2, \ldots, m_n \in \mathbb{Z}$ takvi da je

$$x^n + m_1 x^{n-1} + \cdots + m_{n-1} x + m_n = 0.$$

Zadatak 2.7.1. *Dokažite da je element $x \in \mathbb{Q}$ cio nad $\mathbb{Z}$ ako i samo ako je $x \in \mathbb{Z}$.*

Uputa: Napišite x kao razlomak $\pm\frac{p}{q}$ s relativno prostim $p, q \in \mathbb{N}$, a zatim pomoću svojstava djeljivosti dokažite da je $q = 1$.

Za $x \in R$ označimo sa $\mathbb{Z}[x]$ unitalan potprsten od R generiran elementom x. Drugim riječima, $\mathbb{Z}[x]$ je $\mathbb{Z}-$podmodul od R generiran sa $\{1, x, x^2, \ldots\}$.

Propozicija 2.7.1. *Neka je R komutativan unitalan prsten i $x \in R$. Sljedeća su tri svojstva međusobno ekvivalentna:*

(a) *Element x je cio nad $\mathbb{Z}$.*

(b) *$\mathbb{Z}[x]$ je konačno generiran kao $\mathbb{Z}-$modul, tj. postoje $y_1, y_2, \ldots, y_n \in \mathbb{Z}[x]$ takvi da je $\mathbb{Z}[x] = \mathbb{Z}y_1 + \mathbb{Z}y_2 + \cdots + \mathbb{Z}y_n$.*

(c) *$\mathbb{Z}[x]$ je sadržan u nekom potprstenu $S \subseteq R$ koji je konačno generiran kao $\mathbb{Z}-$modul.*

Dokaz: Iz (a) slijedi

$$x^n = -m_1 x^{n-1} - \cdots - m_{n-1} x - m_n \quad \text{za neki} \quad n \in \mathbb{N} \quad \text{i za neke} \quad m_1, m_2, \ldots, m_n \in \mathbb{Z},$$

a odatle množenjem sa x^{k-n} dobivamo

$$x^k = -m_1 x^{k-1} - \cdots - m_{n-1} x^{k-n+1} - m_n x^{k-n} \qquad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Odatle indukcijom nalazimo da je $x^k \in \mathbb{Z}1 + \mathbb{Z}x + \mathbb{Z}x^2 + \cdots + \mathbb{Z}x^{n-1}$ $\forall k \in \mathbb{N}$. Dakle, vrijedi

$$\mathbb{Z}[x] = \mathbb{Z}1 + \mathbb{Z}x + \mathbb{Z}x^2 + \cdots + \mathbb{Z}x^{n-1},$$

što pokazuje da je $\mathbb{Z}[x]$ konačno generiran kao $\mathbb{Z}-$modul. Time je dokazano da iz (a) slijedi (b).

Očito iz (b) slijedi (c).

Pretpostavimo sada da vrijedi (c) i neka su $y_1, y_2, \ldots, y_n \in S$ takvi da je

$$S = \mathbb{Z}y_1 + \mathbb{Z}y_2 + \cdots + \mathbb{Z}y_n.$$

Tada posebno postoje $a_{ij} \in \mathbb{Z}$ takvi da je

$$xy_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j, \qquad 1 \leq i \leq n.$$

Zadatak 2.7.2. *Dokažite da odatle slijedi* $(\det A)y_i = 0\ \forall i$, *gdje je* A *matrica iz* $M_n(R)$ *s elementima* $\delta_{ij}x - a_{ij}$.

Kako je $1 \in \mathbb{Z}[x] \subseteq S$ postoje $b_1, b_2, \dots, b_n \in \mathbb{Z}$ takvi da je $1 = b_1y_1 + b_2y_2 + \cdots + b_ny_n$. Slijedi

$$\det A = (\det A)1 = b_1(\det A)y_1 + b_2(\det A)y_2 + \cdots + b_n(\det A)y_n = 0.$$

Međutim, $\det A = 0$ je upravo jednakost oblika $x^n + m_1x^{n-1} + \cdot + m_{n-1}x + m_n = 0$ za neke $m_1, m_2, \dots, m_n \in \mathbb{Z}$, dakle x je cio nad $\mathbb{Z}$. Time je dokazano da iz (c) slijedi (a).

Propozicija 2.7.2. *Cijeli elementi komutativnog unitalnog prstena* R *tvore potprsten.*

Dokaz: Neka su x i y cijeli elementi prstena R. Treba dokazati da su tada $x - y$ i xy cijeli elementi prstena R. Neka je $\mathbb{Z}[x, y]$ unitalan potprsten od R generiran skupom $\{x, y\}$. Prema dokazu implikacije $(a) \implies (b)$ u propoziciji 2.7.1.za neke $n, m \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\mathbb{Z}[x] = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}x + \mathbb{Z}x^2 + \cdots \mathbb{Z}x^{n-1} \qquad \text{i} \qquad \mathbb{Z}[y] = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}y + \mathbb{Z}y^2 + \cdots + \mathbb{Z}y^{m-1}. \tag{2.1}$$

Dokažimo da vrijedi

$$\mathbb{Z}[x, y] = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} \mathbb{Z}x^iy^j.$$

Očito vrijedi

$$\sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} \mathbb{Z}x^iy^j \subseteq \mathbb{Z}[x, y].$$

Da dokažemo obrnutu inkluziju neka je $a \in \mathbb{Z}[x, y]$. Tada postoje $k, \ell \in \mathbb{N}$ i $a_{ij} \in \mathbb{Z}$, $0 \le i \le k$, $0 \le j \le \ell$, takvi da je

$$a = \sum_{i=0}^{k} \sum_{j=0}^{\ell} a_{ij}x^iy^j.$$

Međutim, prema (2.1) vrijedi

$$x^i \in \sum_{p=0}^{n-1} \mathbb{Z}x^p \qquad \text{i} \qquad y^j \in \sum_{q=0}^{m-1} \mathbb{Z}y^q \qquad \forall i, j \ge 0,$$

pa možemo pretpostaviti da je $k = n - 1$ i $\ell = m - 1$. Kako je $a \in \mathbb{Z}[x, y]$ bio proizvoljan, dokazali smo obrnutu inkluziju

$$\mathbb{Z}[x, y] \subseteq \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} \mathbb{Z}x^iy^j.$$

Dokazana jednakost pokazuje da je $\mathbb{Z}[x, y]$ konačno generiran $\mathbb{Z}-$podmodul od R. Kako su $\mathbb{Z}[x-y]$ i $\mathbb{Z}[xy]$ sadržani u $\mathbb{Z}[x, y]$, prema propoziciji 2.7.1. slijedi da su $x-y$ i xy cijeli, pa je time propozicija dokazana.

Propozicija 2.7.3. *Neka je* χ *karakter reprezentacije* π *grupe* G. *Tada je za svaki* $a \in G$ *broj* $\chi(a) \in \mathbb{C}$ *cio nad* $\mathbb{Z}$.

Dokaz: $\chi(a)$ je suma svojstvenih vrijednosti operatora $\pi(a)$. Ako je $|G| = n$ onda je $a^n = e$, dakle, $\pi(a)^n = \pi(a^n) = I$. Slijedi da su sve svojstvene vrijednosti operatora $\pi(a)$ $n-$ti korijeni iz jedinice, dakle ti su kompleksni brojevi cijeli nad $\mathbb{Z}$. Prema propoziciji 2.7.2. slijedi da je i $\chi(a)$ cio nad $\mathbb{Z}$.

Propozicija 2.7.4. *Neka je π ireducibilna reprezentacija grupe G dimenzije d. Neka je χ karakter reprezentacije π i neka je K neka klasa konjugiranosti u grupi G. Tada je broj*

$$\frac{1}{d}\sum_{a\in K}\chi(a)$$

cio nad $\mathbb{Z}$.

Dokaz: Neka je φ karakteristična funkcija skupa K. Tada znamo da je $\varphi \in \mathbb{C}_c[G]$. No zapravo je $\varphi \in \mathbb{Z}_c[G]$, pri čemu je $\mathbb{Z}[G]$ potprsten od $\mathbb{C}[G]$ svih funkcija $\psi : G \to \mathbb{Z}$ i $\mathbb{Z}_c[G]$ je centar tog prstena. Prsten $\mathbb{Z}_c[G]$ je komutativan i očito je konačno generiran kao $\mathbb{Z}-$modul. Prema propoziciji 2.7.1. slijedi da su svi elementi tog prstena cijeli nad $\mathbb{Z}$. Posebno, φ je cio nad $\mathbb{Z}$. Operator $\pi(\varphi)$ komutira sa svim operatorima $\pi(a)$, $a \in G$, pa po tvrdnji (c) Schurove leme (teorem 1.1.6.) slijedi da je $\pi(\varphi) = \lambda I$ za neki $\lambda \in \mathbb{C}$. Budući da je $\psi \mapsto \pi(\psi)$ homomorfizam algebri, slijedi da je broj λ cio nad $\mathbb{Z}$. Sada računanjem traga nalazimo:

$$\lambda = \frac{1}{d}\mathrm{Tr}\,\pi(\varphi) = \frac{1}{d}\mathrm{Tr}\left(\sum_{a\in G}\varphi(a)\pi(a)\right) = \frac{1}{d}\mathrm{Tr}\left(\sum_{a\in K}\pi(a)\right) = \frac{1}{d}\sum_{a\in K}\chi(a).$$

Time je propozicija dokazana.

Teorem 2.7.5. *Neka je G grupa reda $|G| = n$ i neka je π njena ireducibilna reprezentacija dimenzije d. Tada je n djeljiv sa d.*

Dokaz: Neka je χ karakter reprezentacije π. Prema teoremu 2.2.4. tada je $(\chi|\chi) = 1$. Prema definiciji skalarnog produkta i prema tvrdnji (b) propozicije 2.2.1. nalazimo

$$1 = (\chi|\chi) = \frac{1}{n}\sum_{a\in G}\overline{\chi(a)}\chi(a) = \frac{1}{n}\sum_{a\in G}\chi\left(a^{-1}\right)\chi(a).$$

Neka su $C_1, C_2, \ldots, C_s$ sve klase konjugiranosti u grupi G. Slijedi

$$\frac{n}{d} = \frac{1}{d}\sum_{i=1}^{s}\sum_{a\in C_i}\chi\left(a^{-1}\right)\chi(a).$$

Funkcija χ je centralna, dakle konstantna na svakoj klasi konjugiranosti. Stoga je i $\chi\left(a^{-1}\right)$ neovisan o izboru elementa $a \in C_i$; označimo taj broj sa χ_i. Slijedi

$$\frac{n}{d} = \sum_{i=1}^{s}\chi_i\frac{1}{d}\sum_{a\in C_i}\chi(a).$$

Prema propoziciji 2.7.3. brojevi $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_s$ su cijeli nad $\mathbb{Z}$. Nadalje, prema propoziciji 2.7.4. i brojevi

$$\frac{1}{d}\sum_{a\in C_i}\chi(a), \qquad 1 \le i \le s,$$

su cijeli nad $\mathbb{Z}$. Stoga pomoću propozicije 2.7.2. zaključujemo da je n/d cio nad $\mathbb{Z}$, a odatle i iz zadatka 2.7.1. slijedi da je n djeljiv sa d.

Teorem 2.7.6. *Neka je C centar grupe G. Tada je red kvocijentne grupe $|G/C|$ djeljiv s dimenzijom svake ireducibilne reprezentacije grupe G.*

Dokaz: Neka je π ireducibilna reprezentacija grupe G dimenzije d. Stavimo $|G| = n$ i $|C| = m$. Za bilo koji $k \in \mathbb{N}$ je tada $\pi \times \pi \times \cdots \times \pi$ (k faktora) ireducibilna reprezentacija grupe $G \times G \times \cdots \times G$ (k faktora). Prema Schurovoj lemi za svaki $x \in C$ operator $\pi(x)$ djeluje kao množenje nekim kompleksnim brojem $\lambda(x)$. Centar grupe $G \times G \times \cdots \times G$ je $C \times C \times \cdots \times C$ i za svaki $(x_1, x_2, \ldots, x_k) \in C \times C \times \cdots \times C$ operator

$$(\pi \times \pi \times \cdots \times \pi)(x_1, x_2, \ldots, x_k) = \pi(x_1) \otimes \pi(x_2) \otimes \cdots \otimes \pi(x_k)$$

djeluje kao množenje kompleksnim brojem $\lambda(x_1)\lambda(x_2)\cdots\lambda(x_k) = \lambda(x_1x_2\cdots x_k)$. Neka je H sljedeća podgrupa grupe $C \times C \times \cdots \times C$:

$$H = \{(x_1, x_2, \ldots, x_k) \in C \times C \times \cdots \times C;\ x_1x_2\cdots x_k = e\}.$$

Tada je $|H| = m^{k-1}$ i ta grupa je sadržana u jezgri reprezentacije $\pi \times \pi \times \cdots \times \pi$. Prijelazom na kvocijent dobivamo reprezentaciju ρ grupe $(G \times G \times \cdots \times G)/H$:

$$\rho(gH) = (\pi \times \pi \times \cdots \times \pi)(g), \qquad g \in G \times G \times \cdots \times G.$$

Očito je reprezentacija ρ ireducibilna. Njena je dimenzija jednaka d^k. Prema teoremu 2.7.5. taj broj dijeli red grupe $(G \times G \times \cdots \times G)/H$, a red te grupe jednak je n^k/m^{k-1}. Dakle, za svaki $k \in \mathbb{N}$ postoji $p_k \in \mathbb{N}$ takav da je

$$\frac{n^k}{m^{k-1}} = d^k p_k.$$

Uz oznaku

$$\alpha = \frac{n}{md}$$

imamo

$$\alpha^k = \frac{p_k}{m}, \quad p_k \in \mathbb{N}.$$

Budući da to vrijedi za svaki $k \in \mathbb{N}$, zaključujemo da je $\mathbb{Z}[\alpha] \subseteq \mathbb{Z}\frac{1}{m}$. Odatle je $m\mathbb{Z}[\alpha] \subseteq \mathbb{Z}$. Sada nam treba jedna jednostavna činjenica o podgrupama aditivne grupe $\mathbb{Z}$:

Zadatak 2.7.3. *Neka je $\mathcal{A} \neq \{0\}$ aditivna podgrupa grupe $\mathbb{Z}$. Tada vrijedi $\mathcal{A} = p\mathbb{Z} = \{pq;\ q \in \mathbb{Z}\}$ za jedinstven $p \in \mathbb{N}$.*

Kako je $m\mathbb{Z}[\alpha]$ aditivna podgrupa grupe $\mathbb{Z}$, iz prethodnog zadatka slijedi da je $m\mathbb{Z}[\alpha] = p\mathbb{Z}$ za neki $p \in \mathbb{N}$. Dakle, vrijedi

$$\mathbb{Z}[\alpha] = \mathbb{Z}\frac{p}{m}.$$

To pokazuje da je $\mathbb{Z}[\alpha]$ konačno generiran $\mathbb{Z}-$modul. Prema propoziciji 2.7.1. slijedi da je broj α cio nad $\mathbb{Z}$, a kako je $\alpha \in \mathbb{Q}$, prema zadatku 2.7.1. to znači da je $\alpha \in \mathbb{Z}$. Dakle, red $\frac{n}{m}$ grupe G/C djeljiv je sa d.

2.8 Kompleksne, realne i kvaternionske reprezentacije

U ovom odjeljku promatrat ćemo neko vrijeme **proizvoljne a ne samo konačnodimenzionalne** kompleksne vektorske prostore. Dakle, neka je V vektorski prostor nad $\mathbb{C}$. Preslikavanje $C : V \to V$ zove se **kompleksna konjugacija** ako je ono antilinearno i involutivno:

$$C(\alpha v + \beta w) = \overline{\alpha} Cv + \overline{\beta} Cw, \qquad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \quad \forall v, w \in V,$$

$$C^2 = I_V, \qquad \text{tj.} \quad C(Cv) = v \qquad \forall v \in V.$$

Zadatak 2.8.1. *Neka je V kompleksan vektorski prostor i $C : V \to V$ kompleksna konjugacija i neka su*

$$V_{re} = \{v \in V;\ Cv = v\}, \qquad V_{im} = \{v \in V;\ Cv = -v\}.$$

Dokažite:

(*a*) *V_{re} i V_{im} su realni potprostori od V i vrijedi $V_{im} = iV_{re}$.*

(*b*) *Promatramo li V kao prostor nad $\mathbb{R}$ vrijedi $V = V_{re} \dot{+} V_{im}$.*

(*c*) *Ako je $\{v_j;\ j \in I\}$ baza realnog prostora V_{re} onda je to ujedno baza kompleksnog prostora V.*

Zadatak 2.8.2. *Ako je V kompleksan vektorski prostor i W realan potprostor od V takav da je $V = W \dot{+} iW$, dokažite da je sa*

$$C(w_1 + iw_2) = w_1 - iw_2, \qquad w_1, w_2 \in W,$$

zadana kompleksna konjugacija na prostoru V.

Zadatak 2.8.3. *Dokažite da na svakom kompleksnom vektorskom prostoru postoji kompleksna konjugacija.*

Propozicija 2.8.1. *Neka su C i D kompleksne konjugacije kompleksnog vektorskog prostora V.*

(*a*) *Postoji $T \in \mathrm{GL}(V)$ takav da je $DT = TC$, tj. $D = TCT^{-1}$.*

(*b*) *Za operatore $Q = DC$ i $R = CD$ vrijedi $Q, R \in \mathrm{GL}(V)$ i $D = QC = CR$.*

Dokaz: (*a*) Neka su $V_{re}^C = \{v \in V;\ Cv = v\}$ i $V_{re}^D = \{v \in V;\ Dv = v\}$. Prema (*c*) u zadatku 2.8.1. svaka baza realnog prostora V_{re}^C ili realnog prostora V_{re}^D ujedno je baza kompleksnog prostora V. Budući da bilo koje dvije baze vektorskog prostora imaju isti kardinalni broj, možemo izabrati baze od V_{re}^C i od V_{re}^D indeksirane istim skupom. Dakle, neka je $\{v_j;\ j \in I\}$ baza realnog prostora V_{re}^C i neka je $\{w_j;\ j \in I\}$ baza realnog prostora V_{re}^D. Budući da su to baze kompleksnog prostora V postoji jedinstven $T \in \mathrm{GL}(V)$ takav da je

$$Tv_j = w_j \qquad \forall j \in I.$$

Tada imamo za svaki $j \in I$

$$DTv_j = Dw_j = w_j = Tv_j = TCv_j,$$

dakle, $DT = TC$.

(*b*) Budući da su C i D antilinearne bijekcije sa V na V jasno je da su operatori Q i R linearne bijekcije sa V na V, dakle, $Q, R \in \mathrm{GL}(V)$. Nadalje,

$$QC = DCC = DC^2 = D \qquad \text{i} \qquad CR = CCD = C^2D = D.$$

Promatrat ćemo sada neko vrijeme reprezentacije i module u općenitom kontekstu iz odjeljka 1.1. Neka je, dakle, S skup i neka je π reprezentacija skupa S na kompleksnom vektorskom prostoru V. Za kompleksnu konjugaciju C prostora V i za svaki $s \in S$ definiramo operator $\pi^C(s) : V \to V$ ovako:

$$\pi^C(s) = C\pi(s)C, \qquad s \in S.$$

Budući da je operator $\pi(s)$ linearan, a C antilinearan, očito je operator $\pi^C(s)$ linearan. Dakle, preslikavanje $\pi^C : s \mapsto \pi^C(s)$, $s \in S$, je reprezentacija skupa S na prostoru V. Za reprezentaciju π^C kažemo da je **kompleksno konjugirana** reprezentaciji π (u odnosu na kompleksnu konjugaciju C prostora V). Ta reprezentacija do na ekvivalenciju ne ovisi o izboru kompleksne konjugacije C prostora V :

Propozicija 2.8.2. *Neka je π reprezentacija skupa S na kompleksnom vektorskom prostoru V i neka su C i D kompleksne konjugacije na prostoru V. Tada su reprezentacije π^C i π^D ekvivalentne.*

Dokaz: Prema tvrdnji (b) propozicije 2.8.1. za $Q = DC \in \mathrm{GL}(V)$ vrijedi $D = QC$, dakle i $D = D^{-1} = C^{-1}Q^{-1} = CQ^{-1}$. Stoga za svaki $s \in S$ imamo

$$\pi^D(s) = D\pi(s)D = QC\pi(x)CQ^{-1} = Q\pi^C(s)Q^{-1}.$$

Dakle, $\pi^D \simeq \pi^C$.

Propozicija 2.8.3. *Neka skup S ima jednu od sljedeće četiri algebarske strukture: grupa, realna asocijativna algebra, realna unitalna algebra, realna Liejeva algebra. Ako je π reprezentacija algebarske strukture S na kompleksnom vektorskom prostoru V i ako je C kompleksna konjugacija prostora V, onda je i π^C reprezentacija algebarske strukture S.*

Dokaz: (1) Ako je S realna algebra (bilo asocijativna, bilo unitalna, bilo Liejeva) preslikavanje $\pi^C : S \to L(V)$ očito linearno nad poljem $\mathbb{R}$. Doista, za $x, y \in S$ i $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ imamo

$$\pi^C(\alpha x + \beta y) = C\pi(\alpha x + \beta y)C = C(\alpha\pi(x) + \beta\pi(y))C = \alpha C\pi(x)C * \beta C\pi(y)C = \alpha\pi^C(x) + \beta\pi^C(y).$$

(2) Ako je S grupa ili asocijativna algebra ili unitalna algebra, za $x, y \in S$ imamo

$$\pi^C(x)\pi^C(y) = C\pi(x)CC\pi(y)C = C\pi(xy)C = \pi^C(xy).$$

(3) Ako je S grupa ili unitalna algebra i e jedinica u S, imamo

$$\pi^C(e) = C\pi(e)C = CI_VC = CC = I_V.$$

(4) Napokon, ako je S Liejeva algebra, za $x, y \in S$ imamo

$$\pi^C([x,y]) = C\pi([x,y])C = C(\pi(x)\pi(y) - \pi(y)\pi(x))C = C\pi(x)\pi(y)C - C\pi(y)\pi(x)C =$$
$$= C\pi(x)CC\pi(y)C - C\pi(y)CC\pi(x)C = \pi^C(x)\pi^C(y) - \pi^C(y)\pi^C(x).$$

Tvrdnja slijedi za grupu iz (2) i (3), za realnu asocijativnu algebru iz (1) i (2), za realnu unitalnu algebru iz (1), (2) i (3), a za realnu Liejevu algebru iz (1) i (4).

Za reprezentaciju π skupa S na kompleksnom vektorskom prostoru V kažemo da je **samokonjugirana** ako je ona ekvivalentna reprezentaciji π^C za neku (a tada prema propoziciji 2.8.2. za svaku) kompleksnu konjugaciju C prostora V. Naravno, direktna suma samokonjugiranih reprezentacija je samokonjugirana reprezentacija. S druge strane, moguće je da direktna suma reprezentacija koje nisu samokonjugirane bude samokonjugirana. Naime, za svaku reprezentaciju π direktna suma $\pi \dotplus \pi^C$ je samokonjugirana. Stoga ćemo pojam samokonjugiranosti promatrati samo za ireducibilne reprezentacije.

Za ireducibilnu reprezentaciju π skupa S na kompleksnom vektorskom prostoru V kažemo da je **realna reprezentacija**, ako postoji kompleksna konjugacija C prostora V takva da je realan potprostor $V_{re}^C = \{v \in V;\ Cv = v\}$ invarijantan u odnosu na sve operatore $\pi(s)$, $s \in S$. Drugim riječima, reprezentacija π je realna ako i samo ako postoji reprezentacija σ od S na realnom vektorskom prostoru W takva da je kompleksifikacija od σ ekvivalentna reprezentaciji π.

Propozicija 2.8.4. *Svaka je realna reprezentacija samokonjugirana.*

Dokaz: Neka je C kompleksna konjugacija prostora V takva da je realan potprostor V_{re}^C invarijantan s obzirom na sve operatore $\pi(s)$, $s \in S$. Kako je $V = V_{re}^C \dot{+} iV_{re}^C$, za proizvoljan vektor $v \in V$ postoje jedinstveni vektori $v_1, v_2 \in V_{re}^C$ takvi da je $v = v_1 + iv_2$. Tada za svaki $s \in S$ vrijedi $\pi(s)v_1, \pi(s)v_2 \in V_{re}^C$, odnosno, $C\pi(s)v_1 = \pi(s)v_1$ i $C\pi(s)v_2 = \pi(s)v_2$. Stoga imamo

$$\pi^C(s)v = C\pi(s)C(v_1 + iv_2) = C\pi(s)(v_1 - iv_2) = C(\pi(s)v_1 - i\pi(s)v_2) =$$

$$= C\pi(s)v_1 + iC\pi(s)v_2 = \pi(s)v_1 + i\pi(s)v_2 = \pi(s)v.$$

To pokazuje da je $\pi^C = \pi$.

Ireducibilna reprezentacija skupa S na kompleksnom vektorskom prostoru V koja nije samokonjugirana zove se **kompleksna reprezentacija**. Ireducibilna samokonjugirana reprezentacija skupa S na kompleksnom vektorskom prostoru V koja nije realna zove se **kvaternionska reprezentacija**. Da takve reprezentacije postoje pokazuje primjer u sljedećem zadatku:

Zadatak 2.8.4. *Neka je* $\mathbb{H} = \{\alpha + i\beta + j\gamma + k\delta;\ \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}\}$ *tijelo kvaterniona i neka je* $G = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$ *− to je osmočlana multiplikativna grupa. Neka je* $V = \mathbb{C}^2$ *identificiran s prostorom* $M_{2,1}(\mathbb{C})$ *jednostupčanih matrica visine* 2, *tako da se* $L(V)$ *identificira s algebrom* $M_2(\mathbb{C})$ *kvadratnih matrica drugog reda, a grupa* $\mathrm{GL}(V)$ *sa* $GL_2(\mathbb{C})$.

(*a*) *Dokažite da je sa*

$$\pi(\pm 1) = \pm I_2, \quad \pi(\pm i) = \pm \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}, \quad \pi(\pm j) = \pm \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \pi(\pm k) = \pm \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix},$$

zadana ireducibilna reprezentacija grupe G *na kompleksnom vektorskom prostoru* V.

(*b*) *Dokažite da je reprezentacija* π *samokonjugirana.*

(*c*) *Dokažite da reprezentacija* π *nije realna.*

Uputa: (*b*) Pokažite da za standardno kompleksno konjugiranje C od V, tj. $C \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{\alpha} \\ \overline{\beta} \end{bmatrix}$, vrijedi

$$\pi^C(x) = \pi(k)\pi(x)\pi(k)^{-1} \qquad \forall x \in G.$$

Za (*c*) treba dokazati da ne postoji baza prostora V u kojoj su matrice svih operatora $\pi(x)$, $x \in G$, realne. Iz pretpostavke da takva baza postoji izvedite kontradikciju računanjem u toj bazi i u standardnoj bazi od $V = M_{2,1}(\mathbb{C})$ tragova operatora $\pi(x)$ i tragova umnožaka $\pi(x)\pi(y)$ za $x \neq y$, $x, y \in \{i, j, k\}$.

Teorem 2.8.5. *Neka je π ireducibilna reprezentacija skupa S na kompleksnom prostoru V.*

(*a*) *Reprezentacija π je samokonjugirana ako i samo ako postoji antilinearna bijekcija $L : V \to V$ takva da je*
$$\pi(s)L = L\pi(s) \qquad \forall s \in S.$$

(*b*) *Ako vrijedi (a), operator L jedinstven je do na multipl $\lambda \in \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$.*

(*c*) *Ako je reprezentacija π realna, za svaki takav L vrijedi $L^2 = \alpha I_V$, pri čemu je $\alpha > 0$.*

(*d*) *Ako je reprezentacija π kvaternionska, za svaki takav L vrijedi $L^2 = \alpha I_V$, pri čemu je $\alpha < 0$.*

Dokaz: (*a*) Pretpostavimo da je reprezentacija π samokonjugirana, tj. da su za neko kompleksno konjugiranje C prostora V reprezentacije π i π^C ekvivalentne. Neka $T \in \mathrm{GL}(V)$ ostvaruje tu ekvivalenciju, tj.
$$T\pi(s) = \pi^C(s)T \qquad \forall s \in S.$$
To znači da je
$$T\pi(s) = C\pi(s)CT \qquad \forall s \in S.$$
Pomnožimo li tu jednakost slijeva sa $C^{-1} = C$, dobivamo
$$CT\pi(s) = \pi(s)CT \qquad \forall s \in S.$$
Odatle slijedi tvrdnja, budući da je $L = CT$ očito antilinearna bijekcija sa V na V.

Obratno, pretpostavimo da za neku antilinearnu bijekciju $L : V \to V$ vrijedi
$$\pi(s)L = L\pi(s) \qquad \forall s \in S.$$
Neka je C kompleksno konjugiranje prostora V. Tada je operator $T = CL$ linearan i bijekcija sa V na V, dakle, $T \in \mathrm{GL}(V)$. Tada je $T^{-1} = L^{-1}C^{-1} = L^{-1}C$, pa za $s \in S$ imamo:
$$T\pi(s)T^{-1} = CL\pi(s)L^{-1}C = C\pi(s)LL^{-1}C = C\pi(s)C = \pi^C(s).$$
Dakle, $\pi \simeq \pi^C$, odnosno, reprezentacija π je samokonjugirana.

(*b*) Neka su L i L' antilinearne bijekcije sa V na V takve da je
$$\pi(s)L = L\pi(s) \quad \text{i} \quad \pi(s)L' = L'\pi(s) \qquad \forall s \in S.$$
Tada je i
$$\pi(s)L^{-1} = L^{-1}\pi(s) \qquad \forall s \in S.$$
Sada je $T = L'L^{-1}$ linearna bijekcija sa V na V i vrijedi za svaki $s \in S :$
$$T\pi(s) = L'L^{-1}\pi(s) = L'\pi(s)L^{-1} = \pi(s)L'L^{-1} = \pi(s)T.$$
Budući da je po pretpostavci reprezentacija π ireducibilna, iz tvrdnje (*c*) Schurove leme (teorem 1.1.6.) slijedi da je $T = \lambda I_V$ za neki $\lambda \in \mathbb{C}^*$. Množenjem te jednakosti zdesna sa L slijedi $L' = \lambda L$.

S druge strane, ako je L antilinearna bijekcija sa V na V takva da vrijedi $\pi(s)L = L\pi(s)$ $\forall s \in S$, za $\lambda \in \mathbb{C}^*$ je i $L' = \lambda L$ antilinearna bijekcija sa V na V i vrijedi za svaki $s \in S :$
$$\pi(s)L' = \pi(s)\lambda L = \lambda\pi(s)L = \lambda L\pi(s) = L'\pi(s).$$

(c) i (d) Prije svega, primijetimo da je L^2 linearna bijekcija sa V na V koja komutira sa svim operatorima $\pi(s)$, pa kako je reprezentacija π ireducibilna, po tvrdnji (c) Schurove leme (teorem 1.1.6.) za neki $\alpha \in \mathbb{C}^*$ vrijedi $L^2 = \alpha I_V$. Nadalje, imamo

$$\alpha L = \alpha I_V L = L^2 L = L^3 = LL^2 = L(\alpha I_V) = \overline{\alpha} L I_V = \overline{\alpha} L,$$

a to znači da je $\alpha = \overline{\alpha}$, odnosno, $\alpha \in \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Prema tome, ili je $\alpha > 0$ ili je $\alpha < 0$.

Pretpostavimo najprije da je $\alpha > 0$. Stavimo

$$C = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} L.$$

Tada je C antilinearna involucija na V, odnosno, C je kompleksno konjugiranje prostora V. Budući da operator C komutira sa svim operatorima $\pi(s)$, $s \in S$, slijedi da je realni potprostor $V_{re}^C = \{v \in V;\ Cv = v\}$ invarijantan s obzirom na sve te operatore $\pi(s)$. Kako je $V = V_{re}^C \dotplus iV_{re}^C$, zaključujemo da je reprezentacija π realna.

Pretpostavimo sada da je reprezentacija π realna. To znači da je za neku kompleksnu konjugaciju C prostora V realni potprostor V_{re}^C invarijantan s obzirom na sve operatore $\pi(s)$, $s \in S$. Tada svi operatori $\pi(s)$ komutiraju sa C. Doista, za svaki $v \in V$ postoje jedinstveni $v_1, v_2 \in V_{re}^C$ takvi da je $v = v_1 + iv_2$, pa imamo slično kao u dokazu propozicije 2.8.3.:

$$C\pi(s)v = C\pi(s)(v_1 + iv_2) = C(\pi(s)v_1 + i\pi(s)v_2) = C\pi(s)v_1 - iC\pi(s)v_2 =$$

$$= \pi(s)v_1 - i\pi(s)v_2 = \pi(s)(v_1 - iv_2) = \pi(s)C(v_1 + iv_2) = \pi(s)Cv.$$

Prema tvrdnji (b) vrijedi $L = \lambda C$ za neki $\lambda \in \mathbb{C}^*$. Sada imamo

$$\alpha I_V = L^2 = \lambda C \lambda C = |\lambda|^2 C^2 = |\lambda|^2 I_V \qquad \Longrightarrow \qquad \alpha = |\lambda|^2 > 0.$$

Na taj način dokazali smo da je reprezentacija π realna ako i samo ako je $\alpha > 0$. Naravno, odatle slijedi da je reprezentacija π kvaternionska ako i samo ako je $\alpha < 0$.

Objasnit ćemo sada naziv *kvaternionska reprezentacija.*

Prije svega, polje $\mathbb{C}$ kompleksnih brojeva možemo shvaćati kao potpolje tijela kvaterniona $\mathbb{H}$ ako identificiramo $i \in \mathbb{C}$ sa $i \in \mathbb{H}$. Stoga se svaki lijevi vektorski prostor V nad tijelom $\mathbb{H}$ može shvaćati i kao vektorski prostor nad $\mathbb{C}$. Promatrajmo na tom kompleksnom prostoru V operator $J : V \to V$ definiran kao množenje sa $j \in \mathbb{H}$ na kvaternionskom prostoru V :

$$Jv = jv, \qquad v \in V.$$

Taj operator J očito je aditivan

$$J(v_1 + v_2) = Jv_1 + Jv_2, \qquad v_1, v_2 \in V.$$

Nadalje, neka je $\lambda = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Budući da u tijelu $\mathbb{H}$ vrijedi $ij = k = -ji$, imamo

$$j\lambda = j\alpha + ji\beta = j\alpha - k\beta = j\alpha - ij\beta = \alpha j - i\beta j = (\alpha - i\beta)j = \overline{\lambda} j.$$

Prema tome, za $\lambda \in \mathbb{C}$ i $v \in V$ vrijedi

$$J(\lambda v) = j(\lambda v) = (j\lambda)v = (\overline{\lambda} j)v = \overline{\lambda}(jv) = \overline{\lambda} Jv.$$

Time je dokazano da je operator J na kompleksnom prostoru V antilinearan. Nadalje, kako je $j^2 = -1$, vrijedi $J^2 = -I_V$.

Pretpostavimo sada da je zadan kompleksan vektorski prostor V i na njemu antilinearan operator J takav da je $J^2 = -I_V$. U tijelu $\mathbb{H}$ vrijedi $ij = k$, pa za svaki kvaternion $\alpha + i\beta + j\gamma + k\delta$, $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$, imamo

$$\alpha + i\beta + j\gamma + k\delta = (\alpha + i\beta) + (\gamma + i\delta)j = \lambda + \mu j \qquad \text{za} \quad \lambda = \alpha + i\beta, \mu = \gamma + i\delta \in \mathbb{C}.$$

Prema tome, svaki se kvaternion na jedinstven način može napisati kao $\lambda + \mu j$ za $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$. Definiramo sada na prostoru V lijevo množenje kvaternionima ovako

$$(\lambda + \mu j)v = \lambda v + \mu J v, \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{C}, \quad v \in V.$$

Zadatak 2.8.5. *Dokažite da je na taj način na V definirana struktura lijevog vektorskog prostora nad tijelom $\mathbb{H}$.*

Uputa: Lako se vidi da je tako definirano lijevo množenje $\mathbb{H} \times V \to V$ distributivno i u odnosu na zbrajanje u $\mathbb{H}$ i u odnosu na zbrajanje u V i zadovoljava $1v = v \ \forall v \in V$. Treba još samo eksplicitno provjeriti da za bilo koje $\xi = \lambda + \mu j, \eta = \sigma + \tau j \in \mathbb{H}$, gdje su $\lambda, \mu, \sigma, \tau \in \mathbb{C}$, i za svaki vektor $v \in V$ vrijedi $\xi(\eta v) = (\xi\eta)v$. Pri tome se koristi jednakost $\lambda j = j\overline{\lambda} \ \forall \lambda \in \mathbb{C}$.

Na taj način ustanovili smo da se kvaternionski lijevi vektorski prostori mogu identificirati s uređenim parovima (V, J), gdje je V komplesan vektorski prostor i $J : V \to V$ je antilinearan operator takav da je $J^2 = -I_V$.

Ako je $\mathcal{A}$ grupa (odnosno, asocijativna algebra nad $\mathbb{R}$, unitalna algebra nad $\mathbb{R}$ ili Liejeva algebra nad $\mathbb{R}$) **reprezentacija na kvaternionskom lijevom vektorskom prostoru** V definira se analogno kao reprezentacija na realnom ili kompleksnom vektorskom prostoru: to je homomorfizam π grupe $\mathcal{A}$ u grupu $\mathrm{GL}(V)$ (odnosno, homomorfizam asocijativne algebre $\mathcal{A}$ u algebru $L(V)$, unitalni homomorfizam unitalne algebre $\mathcal{A}$ u unitalnu algebru $L(V)$ ili homomorfizam Liejeve algebre $\mathcal{A}$ u Liejevu algebru $L(V)$). Naravno, $L(V)$ označava skup $L_{\mathbb{H}}(V)$ svih $\mathbb{H}-$linearnih operatora $A : V \to V$. Ako kvaternionski prostor V shvatimo kao par (V, J), gdje je V kompleksan vektorski prostor a $J : V \to V$ antilinearan operator takav da je $J^2 = -I_V$, onda je

$$L_{\mathbb{H}}(V) = \{A \in L_{\mathbb{C}}(V);\ AJ = JA\}.$$

Prema tome, reprezentacija π od $\mathcal{A}$ na kompleksnom prostoru V je reprezentacija na kvaternionskom prostoru (V, J) ako i samo ako vrijedi

$$\pi(x)J = J\pi(x) \qquad \forall x \in \mathcal{A}.$$

Neka je sada π ireducibilna reprezentacija od $\mathcal{A}$ na kompleksnom vektorskom prostoru V koja je kvaternionska, tj. samokonjugirana i ne realna. Prema teoremu 2.8.5. postoji antilinearna bijekcija $L : V \to V$ takva da je

$$\pi(x)L = L\pi(x) \qquad \forall x \in \mathcal{A}, \qquad L^2 = -\alpha I_V, \quad \alpha > 0.$$

Stavimo tada

$$J = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} L.$$

Tada je preslikavanje $J : V \to V$ antilinearno i vrijedi $J^2 = -I_V$. Drugim riječima, (V, J) je kvaternionski lijevi vektorski prostor. Budući da L komutira sa svim operatorima $\pi(x)$, $x \in \mathcal{A}$, to vrijedi i za J :

$$\pi(x)J = J\pi(x) \qquad \forall x \in \mathcal{A}.$$

Zaključujemo:

Korolar 2.8.6. *Neka je π ireducibilna kvaternionska reprezentacija od $\mathcal{A}$ na kompleksnom prostoru V. Tada na V postoji struktura kvaternionskog lijevog vektorskog prostora takva da su svi operatori $\pi(x)$ $\mathbb{H}-$linearni, tj. da je π reprezentacija od $\mathcal{A}$ na kvaternionskom lijevom vektorskom prostoru.*

Primijetimo da ireducibilna reprezentacija od $\mathcal{A}$ na kvaternionskom lijevom vektorskom prostoru V ne mora biti ireducibilna ako je promatramo kao reprezentaciju na kompleksnom prostoru V. Na primjer, neka je χ reprezentacija od $\mathcal{A}$ na jednodimenzionalnom kompleksnom prostoru $\mathbb{C}$ i $\overline{\chi}$ njoj kompleksno konjugirana reprezentacija na $\mathbb{C}$. Neka je na kompleksnom prostoru $V = \mathbb{C}\times\mathbb{C}$ zadana reprezentacija $\pi = (\chi, \overline{\chi})$, tj.

$$\pi(x)(\alpha,\beta) = \left(\chi(x)\alpha, \overline{\chi(x)}\beta\right), \qquad (\alpha,\beta)\in V, \quad x \in \mathcal{A}.$$

Definiramo $J : V \to V$ sa

$$J(\alpha,\beta) = \left(\overline{\beta}, -\overline{\alpha}\right), \qquad (\alpha,\beta)\in V.$$

Tada je operator J antilinearan i vrijedi $J^2 = -I_V$, dakle, J definira strukturu kvaternionskog lijevog vektorskog prostora na V. Za $x \in \mathcal{A}$ i $(\alpha,\beta) \in V$ imamo

$$\pi(x)J(\alpha,\beta) = \pi(x)\left(\overline{\beta}, -\overline{\alpha}\right) = \left(\chi(x)\overline{\beta}, -\overline{\chi(x)}\overline{\alpha}\right) = \left(\overline{\overline{\chi(x)}\beta}, -\overline{\chi(x)\alpha}\right) =$$

$$= J\left(\chi(x)\alpha, \overline{\chi(x)}\beta\right) = J\pi(x)(\alpha,\beta).$$

Dakle,

$$\pi(x)J = J\pi(x) \qquad \forall x \in \mathcal{A},$$

odnosno, π je reprezentacija od $\mathcal{A}$ na kvaternionskom lijevom vektorskom prostoru V. Budući da je $\dim_{\mathcal{H}} V = 1$, ta je reprezentacija ireducibilna, iako očito nije ireducibilna kao reprezentacija na kompleksnom vektorskom prostoru $\mathbb{C}$.

Razmotrimo sada posebno reprezentacije konačne grupe G. Za klasu $\alpha \in \hat{G}$ označimo sa $\overline{\alpha}$ klasu kompleksno konjugiranih reprezentacija od reprezentacija u klasi α. Dakle, reprezentacije u klasi α su samokonjugirane ako je $\alpha = \overline{\alpha}$, a kompleksne ako je $\alpha \neq \overline{\alpha}$.

Da li je ireducibilna reprezentacija kompleksna, realna ili kvaternionska može se vidjeti iz njenog karaktera:

Teorem 2.8.7. (**Frobenius−Schur**) *Neka je χ karakter ireducibilne reprezentacije π konačne grupe G na kompleksnom vektorskom prostoru V. Tada je*

$$\sum_{a\in G}\chi\left(a^2\right) = \begin{cases} |G| & \text{ako je } \pi \text{ realna,} \\ 0 & \text{ako je } \pi \text{ kompleksna,} \\ -|G| & \text{ako je } \pi \text{ kvaternionska.} \end{cases}$$

Dokaz: Možemo pretpostaviti da je reprezentacija π unitarna. Neka je $n = \dim V$ i neka su $\pi_{ij}(a)$ matrični elementi operatora $\pi(a)$ u nekoj ortonormiranoj bazi $\{e_1,\ldots,e_n\}$. Tada imamo

$$\chi\left(a^2\right) = \sum_{i=1}^{n}\pi_{ii}\left(a^2\right) = \sum_{i,j=1}^{n}\pi_{ij}(a)\pi_{ji}(a),$$

dakle,

$$\sum_{a\in G}\chi\left(a^2\right) = \sum_{i,j=1}^{n}\left(\sum_{a\in G}\pi_{ij}(a)\pi_{ji}(a)\right). \tag{2.2}$$

Pretpostavimo najprije da je reprezentacija π realna. Bazu $\{e_1, \ldots, e_n\}$ mogli smo odabrati tako da matrice svih operatora $\pi(a)$ budu realne. Dakle, $\pi_{ji}(a) = \overline{\pi_{ji}(a)}$ i iz (2.2) pomoću relacija ortogonalnosti (teorem 2.1.5.) nalazimo

$$\sum_{a\in G} \chi\left(a^2\right) = \sum_{i,j=1}^{n} |G| \left(\frac{1}{|G|} \sum_{a\in G} \pi_{ij}(a)\overline{\pi_{ji}(a)} \right) = |G| \sum_{i,j=1}^{n} (\pi_{ij}|\pi_{ji}) = \frac{|G|}{n} \sum_{i,j=1}^{n} \delta_{ij} = |G|.$$

Pretpostavimo sada da je reprezentacija π kompleksna. Neka je $C : V \to V$ kompleksno konjugiranje određeno bazom $\{e_1, \ldots, e_n\}$:

$$C\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \overline{\alpha_i} e_i.$$

Pripadnu kompleksno konjugiranu reprezentaciju π^C označimo sa ρ i neka su $\rho_{ij}(a)$ matrični operatora $\rho(a)$ u bazi $\{e_1, \ldots, e_n\}$. Imamo

$$\sum_{j=1}^{n} \rho_{ji}(a)e_j = \rho(a)e_i = C\pi(a)Ce_i = C\pi(a)e_i = C\left(\sum_{j=1}^{n} \pi_{ji}(a)e_j\right) = \sum_{j=1}^{n} \overline{\pi_{ji}(a)}e_j.$$

Dakle, vrijedi $\pi_{ji}(a) = \overline{\rho_{ji}(a)}$, a budući da ireducibilne reprezentacije π i ρ nisu ekvivalentne, iz (2.2) ponovo pomoću teorema 2.1.5. nalazimo

$$\sum_{a\in G} \chi\left(a^2\right) = \sum_{i,j} |G| \left(\frac{1}{|G|} \sum_{a\in G} \pi_{ij}(a)\overline{\rho_{ji}(a)} \right) = |G| \sum_{i,j=1}^{n} (\pi_{ij}|\rho_{ji}) = 0.$$

Napokon, pretpostavimo da je reprezentacija π kvaternionska. Prema teoremu 2.8.5. i prema razmatranju prije iskaza korolara 2.8.6. postoji antilinearno preslikavanje $J : V \to V$ takvo da vrijedi

$$\pi(a)J = J\pi(a) \qquad \forall a \in G \qquad \text{i} \qquad J^2 = -I_V.$$

Odatle je $\pi(a) = -\pi(a)J^2 = -J\pi(a)J$, tj vrijedi

$$\pi(a) = -J\pi(a)J \qquad \forall a \in G. \tag{2.3}$$

Možemo pretpostavljati da antilinearan operator J ima sljedeće svojstvo:

$$(Jx|y) = -(Jy|x) \qquad \forall x, y \in V. \tag{2.4}$$

Doista, ako nije tako, definiramo novi skalarni produkt $\langle\cdot|\cdot\rangle$ na sljedeći način:

$$\langle x|y\rangle = (x|y) + (Jy|Jx), \qquad x, y \in V.$$

Provjerimo svojstva skalarnog produkta:

(1) Pozitivnost:
$$\langle x|x\rangle = (x|x) + (Jx|Jx) \geq 0.$$

(2) Definitnost:
$$x \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad \langle x|x\rangle = (x|x) + (Jx|Jx) \geq (x|x) > 0.$$

(3) Linearnost u prvoj varijabli:

$$\langle \alpha x+\beta y|z\rangle = (\alpha x+\beta y|z)+(Jz|J(\alpha x+\beta y)) =$$

$$= \alpha(x|z)+\beta(y|z)+(Jz|\overline{\alpha}Jx+\overline{\beta}Jy) = \alpha(x|z)+\beta(y|z)+\alpha(Jz|Jx)+\beta(Jz|Jy) =$$

$$= \alpha[(x|z)+(Jz|Jx)]+\beta[(y|z)+(Jz|Jy)] = \alpha\langle x|z\rangle+\beta\langle y|z\rangle.$$

(4) Hermitska simetrija:

$$\langle y|x\rangle = (y|x)+(Jx|Jy) = \overline{(x|y)}+\overline{(Jy|Jx)} = \overline{\langle x|y\rangle}.$$

Nadalje, provjerimo da je i u odnosu na novi skalarni produkt reprezentacija π unitarna: za $x,y\in V$ i za $a\in G$, budući da operatori J i $\pi(a)$ komutiraju, imamo

$$\langle \pi(a)x|\pi(a)y\rangle = (\pi(a)x|\pi(a)y)+(J\pi(a)y|J\pi(a)x) =$$

$$= (\pi(a)x|\pi(a)y)+(\pi(a)Jy|\pi(a)Jx) = (x|y)+(Jy|Jx) = \langle x|y\rangle.$$

Napokon, u odnosu na novi skalarni produkt operator J ima traženo svojstvo, jer zbog $J^2=-I_V$ imamo za $x,y\in V$:

$$\langle Jx|y\rangle = (Jx|y)+(Jy|J^2x) = -(Jx|J^2y)-(Jy|x) = -[(Jy|x)+(Jx|J^2y)] = -\langle Jy|x\rangle.$$

Neka su α_{ij} matrični elementi antilinearnog operatora J u bazi $\{e_1,\ldots,e_n\}$:

$$Je_j = \sum_{i=1}^{n}\alpha_{ij}e_i, \qquad j=1,\ldots,n.$$

Sada je

$$\sum_{j=1}^{n}\pi_{ji}(a)e_j = \pi(a)e_i = -J\pi(a)Je_i = -J\pi(a)\sum_{k=1}^{n}\alpha_{ki}e_k =$$

$$= -J\sum_{k,\ell=1}^{n}\alpha_{ki}\pi_{\ell k}(a)e_\ell = -\sum_{j,k,\ell=1}^{n}\overline{\alpha_{ki}}\,\overline{\pi_{\ell k}(a)}\alpha_{j\ell}e_j,$$

pa dobivamo

$$\pi_{ji}(a) = -\sum_{k,\ell=1}^{n}\overline{\pi_{\ell k}(a)}\,\overline{\alpha_{ki}}\alpha_{j\ell}, \qquad 1\le i,j\le n, \quad a\in G. \tag{2.5}$$

Sada iz (2.2) i (2.5) pomoću teorema 2.1.5. nalazimo

$$\sum_{a\in G}\chi\left(a^2\right) = -|G|\sum_{i,j=1}^{n}\left(\frac{1}{|G|}\sum_{a\in G}\pi_{ij}(a)\sum_{k,\ell=1}^{n}\overline{\pi_{\ell k}(a)}\,\overline{\alpha_{ki}}\alpha_{j\ell}\right) = -|G|\sum_{i,j,k,\ell=1}^{n}(\pi_{ij}|\pi_{\ell k})\overline{\alpha_{ki}}\alpha_{j\ell} =$$

$$= -\frac{|G|}{n}\sum_{i,j,k,\ell=1}^{n}\delta_{i\ell}\delta_{jk}\overline{\alpha_{ki}}\alpha_{j\ell} = -\frac{|G|}{n}\sum_{i,j=1}^{n}\overline{\alpha_{ji}}\alpha_{ji} = -\frac{|G|}{n}\sum_{i,j=1}^{n}|\alpha_{ji}|^2.$$

Iz (2.3) i (2.4) nalazimo

$$\alpha_{ij} = (Je_j|e_i) = -(Je_i|e_j) = -\alpha_{ji}.$$

Odatle zbog $J^2 = -I_V$ dobivamo

$$\sum_{k=1}^{n} \delta_{kj} e_k = e_j = -J^2 e_j = -J \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} e_i = -\sum_{i=1}^{n} \overline{\alpha_{ij}} J e_i = -\sum_{i,k=1}^{n} \overline{\alpha_{ij}} \alpha_{ki} e_k = \sum_{i,k=1}^{n} \overline{\alpha_{ji}} \alpha_{ki} e_k,$$

dakle,

$$\sum_{i=1}^{n} \overline{\alpha_{ji}} \alpha_{ki} = \delta_{kj}, \qquad 1 \leq j, k \leq n,$$

i, posebno,

$$\sum_{i=1}^{n} |\alpha_{ji}|^2 = 1, \qquad 1 \leq j \leq n.$$

Prema tome,

$$\sum_{a \in G} \chi\left(a^2\right) = -\frac{|G|}{n} \sum_{i,j=1}^{n} |\alpha_{ji}|^2 = -\frac{|G|}{n} \sum_{j=1}^{n} 1 = -|G|.$$

Time je Frobenius−Schurov teorem u potpunosti dokazan.

Naravno, ako je ireducibilna reprezentacija konačne grupe realna (kompleksna, kvaternionska) onda je takva i svaka reprezentacija koja je njoj ekvivalentna. Stoga možemo govoriti o realnim, kompleksnim i kvaternionskim klasama ekvivalencije ireducibilnih reprezentacija. Za konačnu grupu G označimo sa $\hat{G}_r$ ($\hat{G}_c$, $\hat{G}_h$) skup svih realnih (kompleksnih, kvaternionskih) klasa u $\hat{G}$. Za $\alpha \in \hat{G}$ definiramo

$$c_\alpha = \begin{cases} 1 & \text{ako je } \alpha \in \hat{G}_r, \\ 0 & \text{ako je } \alpha \in \hat{G}_c, \\ -1 & \text{ako je } \alpha \in \hat{G}_h. \end{cases}$$

Nadalje, za $b \in G$ definiramo $\mathcal{S}(b)$ kao broj elemenata $a \in G$ takvih da je $a^2 = b$:

$$\mathcal{S}(b) = \left|\left\{a \in G;\ a^2 = b\right\}\right|.$$

Korolar 2.8.8. *Uz uvedene oznake vrijedi*

$$\mathcal{S}(b) = \sum_{\alpha \in \hat{G}} c_\alpha \chi_\alpha(b), \qquad b \in G. \tag{2.6}$$

Posebno,

$$\mathcal{S}(e) = \sum_{\alpha \in \hat{G}_r} d(\alpha) - \sum_{\alpha \in \hat{G}_h} d(\alpha).$$

Dokaz: Prije svega, uočimo da je funkcija $\mathcal{S}$ na G konstantna na svakoj klasi konjugiranosti u G, tj. $\mathcal{S}$ je centralna funkcija. Prema teoremu 2.4.2. imamo

$$\mathcal{S}(b) = \sum_{\alpha \in \hat{G}} (\mathcal{S}|\chi_\alpha) \chi_\alpha(b). \tag{2.7}$$

Nadalje, prema Frobenius−Schurovom teoremu 2.8.7. nalazimo

$$(\mathcal{S}|\chi_\alpha) = \frac{1}{|G|} \sum_{b \in G} \mathcal{S}(b) \overline{\chi_\alpha(b)} = \frac{1}{|G|} \sum_{a \in G} \overline{\chi_\alpha\left(a^2\right)} = \overline{c_\alpha} = c_\alpha.$$

Uvrstimo li to u (2.7) slijedi (2.6).

Klasa konjugiranosti C u grupi G zove se **ambivalentna** ako vrijedi

$$a \in C \qquad \Longleftrightarrow \qquad a^{-1} \in C.$$

Teorem 2.8.9. *Broj ambivalentnih klasa konjugiranosti u grupi G jednak je broju samokonjugiranih klasa u $\hat{G}$, tj. $|\hat{G}_r| + |\hat{G}_h|$, i taj je broj jednak*

$$\frac{1}{|G|}\sum_{a\in G}\mathcal{S}(a)^2.$$

Dokaz: Budući da karakteri χ_α, $\alpha \in \hat{G}$, tvore ortonormiranu bazu u prostoru centralnih funkcija, prema korolaru 2.8.8. imamo

$$\frac{1}{|G|}\sum_{a\in G}\mathcal{S}(a)^2 = (\mathcal{S}|\mathcal{S}) = \sum_{\alpha\in\hat{G}} c_\alpha^2.$$

Budući da je $c_\alpha^2 = 1$ ako je α realna ili kvaternionska (dakle, samokonjugirana) a 0 ako nije, dobivena suma jednaka je broju samokonjugiranih reprezentacija.

S druge strane, ako je χ karakter ireducibilne reprezentacije π, karakter kompleksno konjugirane reprezentacije je $\overline{\chi}$, pa imamo

$$\frac{1}{|G|}\sum_{a\in G}\chi(a)^2 = (\chi|\overline{\chi}) = \begin{cases} 1 & \text{ako je } \pi \text{ samokonjugirana} \\ 0 & \text{ako } \pi \text{ nije samokonjugirana.}\end{cases}$$

Označimo sada sa $C_1, \ldots, C_s$ sve klase konjugiranosti u grupi G i stavimo

$$\chi_{\alpha,j} = \chi_\alpha(a), \qquad a \in C_j,\ \alpha \in \hat{G},\ j \in \{1, \ldots, s\}.$$

Prema gornjoj formuli broj samokonjugiranih klasa u $\hat{G}$ jednak je

$$\frac{1}{|G|}\sum_{\alpha\in\hat{G},\, a\in G}\chi_\alpha(a)^2 = \sum_{j=1}^{s}\frac{|C_j|}{|G|}\sum_{\alpha}\left(\chi_{\alpha,j}\right)^2. \tag{2.8}$$

Izrazit ćemo sada činjenicu da je skup $\{\chi_\alpha;\ \alpha \in \hat{G}\}$ ortonormiran pomoću brojeva $\chi_{\alpha,i}$:

$$\delta_{\alpha\beta} = (\chi_\alpha|\chi_\beta) = \frac{1}{|G|}\sum_{a\in G}\chi_\alpha(a)\overline{\chi_\beta(a)} = \frac{1}{|G|}\sum_{j=1}^{s}|C_j|\chi_{\alpha,j}\overline{\chi_{\beta,j}}.$$

Broj elemenata u skupu $\hat{G}$ jednak je broju klasa konjugiranosti u G pa taj skup možemo numerirati od 1 do s : $\hat{G} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_s\}$. Gornja jednakost se stoga može pisati ovako:

$$\frac{1}{|G|}\sum_{j=1}^{s}|C_j|\chi_{\alpha_i,j}\overline{\chi_{\alpha_k,j}} = \delta_{ik},$$

odnosno, uz oznaku

$$u_{ij} = \sqrt{\frac{|C_j|}{|G|}}\chi_{\alpha_i,j}, \qquad 1 \le i,j \le s,$$

imamo

$$\sum_{j=1}^{s} u_{ij}\overline{u_{kj}} = \delta_{ik}, \qquad 1 \le i,k \le s.$$

To znači da je $s \times s$ matrica U s elementima u_{ij} unitarna, $UU^* = I$. No tada je i $U^*U = I$, odnosno,

$$\sum_{i=1}^{s} u_{ij}\overline{u_{ik}} = \delta_{jk}, \qquad 1 \le j,k \le s.$$

To znači da je

$$\sum_{i=1}^{s} \frac{\sqrt{|C_j| \cdot |C_k|}}{|G|} \chi_{\alpha_i,j} \overline{\chi_{\alpha_i,k}} = \delta_{jk},$$

ili

$$\sum_{\alpha \in \hat{G}} \chi_{\alpha,j} \overline{\chi_{\alpha,k}} = \frac{|G|}{\sqrt{|C_j| \cdot |C_k|}} \delta_{jk}, \qquad 1 \leq j, k \leq s.$$

Prema tvrdnji (b) propozicije 2.2.1. vrijedi $\overline{\chi_\alpha(a)} = \chi_\alpha\left(a^{-1}\right)$. Za dano $j \in \{1, \ldots, s\}$ skup C_j^{-1} je neka od klasa konjugiranosti, dakle, $C_j^{-1} = C_k$ za neki $k \in \{1, \ldots, s\}$. To znači da je $\overline{\chi_{\alpha,k}} = \chi_{\alpha,j}$, $\alpha \in \hat{G}$. Prema tome,

$$\sum_{\alpha \in \hat{G}} (\chi_{\alpha,j})^2 = \frac{|G|}{\sqrt{|C_j| \cdot |C_k|}} \delta_{jk} = \begin{cases} \frac{|G|}{|C_j|} & \text{ako je } C_j^{-1} = C_j \\ 0 & \text{ako je } C_j^{-1} \neq C_j. \end{cases}$$

Odatle i iz (2.8) nalazimo da je broj samokonjugiranih klasa u $\hat{G}$ jednak

$$\sum_{1 \leq j \leq s, C_j = C_j^{-1}} 1 = \left|\left\{j;\ 1 \leq j \leq s,\ C_j = C_j^{-1}\right\}\right|.$$

Dakle, broj $|\hat{G}_r| + |\hat{G}_h|$ samokonjugiranih klasa u $\hat{G}$ jednak je broju ambivalentnih klasa konjugiranosti u grupi G.

Teorem 2.8.9. ima neobičnu posljedicu:

Korolar 2.8.10. *Ako je broj $|G|$ neparan, trivijalna jednodimenzionalna reprezentacija je jedina ireducibilna samokonjugirana reprezentacija. Sve ostale ireducibilne reprezentacije su kompleksne. Nadalje, tada je $\{e\}$ jedina ambivalentna klasa konjugiranosti u grupi G.*

Dokaz: Stavimo $|G| = n$. Tada je $a^n = e$, dakle, $a^{n+1} = a \ \forall a \in G$. Budući da je n neparan, $k = \frac{1}{2}(n+1)$ je prirodan broj. Dakle, imamo $\left(a^k\right)^2 = a^{2k} = a$, pa zaključujemo da je $\mathcal{S}(a) \geq 1$ $\forall a \in G$. S druge strane, skupovi $\{b \in G;\ b^2 = a\}$ za različite $a \in G$ su očigledno disjunktni, pa slijedi da su svi oni jednočlani, odnosno, vrijedi $\mathcal{S}(a) = 1 \ \forall a \in G$. Prema tome je

$$\frac{1}{|G|} \sum_{a \in G} \mathcal{S}(a)^2 = 1,$$

pa tvrdnje slijede iz teorema 2.8.9.

Poglavlje 3

Inducirane reprezentacije

Neka je G grupa i H podgrupa grupe G. Za svaku reprezentaciju π grupe G na vektorskom prostoru V restrikcija $\pi|H$ je reprezentacija grupe H na istom prostoru V. U određenim situacijama može biti važno prikazati tu reprezentaciju od H kao direktnu sumu ireducibilnih reprezentacija te grupe, tj. pronaći multiplicitete $m(\pi|H,\beta)$ za $\beta \in \hat{H}$. Preciznije, može se postaviti problem pronalaženja $\pi|H-$invarijantnih potprostora $V_1, V_2, \ldots, V_s$ takvih da je $V = V_1 \dotplus V_2 \dotplus \cdots \dotplus V_s$ i da su sve subreprezentacije $(\pi|H)_{V_j}$, $1 \le j \le s$, ireducibilne reprezentacije grupe H.

U ovom ćemo se poglavlju baviti jednom obrnutom konstrukcijom: polazeći od reprezentacije ρ podgrupe H definirat ćemo tzv. *induciranu reprezentaciju* $\pi = Ind_H^G\,\rho$ grupe G. Nadalje, pobliže ćemo proučiti vezu između reprezentacija ρ i π, a također i odnos između dviju konstrukcija: induciranja s podgrupe i restrikcije na podgrupu.

3.1 Definicija inducirane reprezentacije

Neka je G konačna grupa i H njena podgrupa. Neka je ρ reprezentacija grupe H na (konačnodimenzionalnom kompleksnom) vektorskom prostoru W. Neka je

$$V = \{f : G \to W;\ f(hg) = \rho(h)f(g)\ \forall h \in H \text{ i } \forall g \in G\}.$$

Tada je očito V vektorski prostor $-$ to je potprostor prostora W^G svih funkcija sa G u W. Za $a \in G$ i za $f \in V$ neka je $\pi(a)f$ funkcija sa G u W definirana pomoću desnog pomaka $g \mapsto ga$:

$$[\pi(a)f](g) = f(ga) \qquad g \in G.$$

Tada je $\pi(a)f \in V$; doista, za svaki $g \in G$ i svaki $h \in H$ imamo

$$[\pi(a)f](hg) = f(hga) = \rho(h)f(ga) = \rho(h)[\pi(a)f](g).$$

Nadalje, tako definiran operator $\pi(a) : V \to V$ očito je linearan. Napokon, $a \mapsto \pi(a)$ je reprezentacija grupe G na prostoru V :

$$[\pi(e)f](g) = f(ge) = f(g) \qquad \Longrightarrow \qquad \pi(e) = I_V;$$

$$[\pi(ab)f](g) = f(gab) = [\pi(b)f](ga) = [\pi(a)\pi(b)f](g) \qquad \Longrightarrow \qquad \pi(ab) = \pi(a)\pi(b).$$

Za tako definiranu reprezentaciju π grupe G kažemo da je **inducirana** reprezentacijom ρ podgrupe H i pišemo

$$\pi = Ind_H^G\,\rho \qquad \text{i} \qquad V = Ind_H^G\,W.$$

Proučimo prije svega prostor $V = Ind_H^G W$. Ako je poznata vrijednost $w_0 = f(a)$ funkcije $f \in V$ u nekoj točki $a \in G$ onda su poznate vrijednosti te funkcije u svim točkama pripadne lijeve $H-$klase $Ha = \{ha;\ h \in H\}$:

$$f(ha) = \rho(h)w_0, \qquad h \in H.$$

Dakle, ako su $\{a_1, a_2, \ldots, a_s\}$ predstavnici svih lijevih $H-$klasa u G tako da imamo

$$G = Ha_1 \cup Ha_2 \cup \cdots \cup Ha_s \qquad \text{(disjunktna unija)},$$

tada je $f \in V$ potpuno određena ako su zadane vrijednosti $f(a_1), f(a_2), \ldots, f(a_s) \in W$, a te se vrijednosti mogu zadati proizvoljno. Dakle, za svaku $s-$torku $(w_1, w_2, \ldots, w_s) \in W^s$ postoji jedna i samo jedna funkcija $f \in V$ takva da je $f(a_j) = w_j$ za $j = 1, 2, \ldots, s$. Ona je zadana formulom

$$f(ha_j) = \rho(h)w_j, \qquad h \in H, \quad j = 1, 2, \ldots, s.$$

Doista, ako je $f \in V$ i $f(a_j) = w_j$ onda za svaki $h \in H$ imamo $f(ha_j) = \rho(h)f(a_j) = \rho(h)w_j$, dakle, takva je funkcija jedinstvena jer je G unija $H-$klasa $Ha_1, Ha_2, \ldots, Ha_s$. Nadalje, ako definiramo funkciju $f : G \to W$ gornjom formulom, onda je ta funkcija element prostora V. Doista, neka su $g \in G$ i $h \in H$ proizvoljni. Tada postoji jedinstven $j \in \{1, 2, \ldots, s\}$ takav da je $g \in Ha_j$, pa postoji jedinstven $h' \in H$ takav da je $g = h'a_j$. Tada je

$$f(hg) = f(hh'a_j) = \rho(hh')w_j = \rho(h)\rho(h')w_j = \rho(h)f(h'a_j) = \rho(h)f(g).$$

Stoga je stvarno $f \in V$. Napokon, prema definiciji funkcija f zadovoljava $f(a_j) = w_j$ za $j = 1, 2, \ldots, s$.

Zadatak 3.1.1. *Dokažite da je opisano preslikavanje* $(w_1, w_2, \ldots, w_s) \mapsto f$ *izomorfizam vektorskog prostora* W^s *na vektorski prostor* $V = Ind_H^G W$.

Zadatak 3.1.2. *Neka je* $\{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$ *baza vektorskog prostora* W. *Za* $1 \le i \le s$ *i* $1 \le j \le m$ *definiramo funkciju* $f_{ij} : G \to W$ *na sljedeći način:*

$$f_{ij}(ha_k) = \left\{ \begin{array}{ll} \pi(h)e_j & \textit{ako je} \quad k = i \\ 0 & \textit{ako je} \quad k \ne i \end{array} \right\}, \qquad h \in H, \quad k \in \{1, 2, \ldots, s\}.$$

Dokažite da je tada $\{f_{ij};\ 1 \le i \le s,\ 1 \le j \le m\}$ *baza vektorskog prostora* $V = Ind_H^G W$.

Napomenimo da se broj lijevih $H-$klasa u grupi G, koji je jednak broju desnih $H-$klasa $aH = \{ah;\ h \in H\}$ u grupi G, obično označava sa $(G:H)$ i zove **indeks podgrupe** H **u grupi** G. Iz zadatka 3.1.1. ili iz zadatka 3.1.2. neposredno slijedi:

Propozicija 3.1.1. *Neka je* ρ *reprezentacija podgrupe* H *grupe* G *na prostoru* W. *Tada je dimenzija inducirane reprezentacije* $\pi = Ind_H^G \rho$ *jednaka umnošku dimenzije reprezentacije* ρ *s indeksom* $(G:H)$ *podgrupe* H *u grupi* G :

$$\dim Ind_H^G W = (\dim W)(G:H).$$

Zadatak 3.1.3. *Neka je* π *reprezentacija grupe* G. *Dokažite da je* $Ind_G^G \pi \simeq \pi$.

Zadatak 3.1.4. *Neka je* ρ_0 *jednodimenzionalna reprezentacija trivijalne podgrupe* $H = \{e\}$ *grupe* G. *Dokažite da je tada inducirana reprezentacija* $Ind_H^G \rho_0$ *ekvivalentna desnoj regularnoj reprezentaciji* ρ_G *grupe* G.

3.2 Teorem imprimitiviteta

Proučimo sada pobliže strukturu inducirane reprezentacije. Neka je H podgrupa grupe G i neka je ρ reprezentacija grupe H na prostoru W. Neka je

$$V = Ind_H^G W = \{f : G \to W;\ f(hg) = \rho(h)f(g)\ \forall h \in H \text{ i } \forall g \in G\}$$

prostor inducirane reprezentacije $\pi = Ind_H^G \rho$:

$$[\pi(a)f](g) = f(ga), \qquad f \in V, \quad a, g \in G.$$

Za $w \in W$ definiramo funkciju $f_w : G \to W$ na sljedeći način:

$$f_w(g) = \begin{cases} \rho(g)w & \text{ako je} \quad g \in H \\ 0 & \text{ako je} \quad g \in G \setminus H. \end{cases}$$

Tada je $f_w \in V$. Doista, za $h \in H$ i $g \in G$ vrijedi $g \in H$ ako i samo ako je $hg \in G$, dakle,

$$f_w(hg) = \left\{ \begin{array}{cc} \rho(hg)w & \text{ako je} \quad g \in H \\ 0 & \text{ako je} \quad g \in G \setminus H \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{cc} \rho(h)\rho(g)w & \text{ako je} \quad g \in H \\ 0 & \text{ako je} \quad g \in G \setminus H \end{array} \right\} =$$

$$= \rho(h) \left\{ \begin{array}{cc} \rho(g)w & \text{ako je} \quad g \in H \\ 0 & \text{ako je} \quad g \in G \setminus H \end{array} \right\} = \rho(h)f_w(g)$$

Očito je $w \mapsto f_w$ linearan operator prostora W u prostor V. Označimo taj linearan operator sa A. Dakle,

$$(Aw)(g) = \begin{cases} \rho(g)w & \text{ako je} \quad g \in H \\ 0 & \text{ako je} \quad g \in G \setminus H. \end{cases}$$

Primijetimo da je operator A injektivan, jer iz $Aw = 0$ slijedi $0 = (Aw)(e) = \rho(e)w = w$.

Za $g \in G$ i $h \in H$ imamo $g \in H$ ako i samo ako je $gh \in H$, dakle, imamo redom

$$(A\rho(h)w)(g) = \left\{ \begin{array}{cc} \rho(g)\rho(h)w & \text{ako je} \quad g \in H \\ 0 & \text{ako je} \quad g \in G \setminus H \end{array} \right\} =$$

$$= \left\{ \begin{array}{cc} \rho(gh)w & \text{ako je} \quad g \in H \\ 0 & \text{ako je} \quad g \in G \setminus H \end{array} \right\} = (Aw)(gh) = (\pi(h)Aw)(g).$$

Dakle, vrijedi $A\rho(h) = \pi(h)A\ \forall h \in H$. Drugim riječima, vrijedi $A \in Hom_H(W, V)$, pri čemu na prostoru W imamo reprezentaciju ρ grupe H a na prostoru V restrikciju $\pi|H$ inducirane reprezentacije $\pi = Ind_H^G \rho$. Označimo li sa X područje vrijednosti operatora A onda je X $\pi|H-$invarijantan potprostor od V i pripadna subreprezentacija $(\pi|H)_X$ je ekvivalentna reprezentaciji ρ.

Na taj način dokazali smo:

Lema 3.2.1. *Neka je ρ reprezentacija podgrupe H grupe G na prostoru W i neka je $\pi = Ind_H^G \rho$ i $V = Ind_H^G W$. Tada je sa*

$$(Aw)(g) = \left\{ \begin{array}{cc} \rho(g)w & \textit{ako je} \quad g \in H \\ 0 & \textit{ako je} \quad g \in G \setminus H \end{array} \right\}, \qquad g \in G, \quad w \in W,$$

definiran injektivan linearan operator $A : W \to V$ i vrijedi $A \in Hom_H(W, V)$. Ako je $X \subseteq V$ područje vrijednosti operatora A, onda je X $\pi|H-$invarijantan potprostor od V i pripadna subreprezentacija $(\pi|H)_X$ grupe H ekvivalentna je reprezentaciji ρ.

Lema 3.2.2. *Neka su $a_1, a_2, \ldots, a_s \in G$ predstavnici svih lijevih $H-$klasa $Ha = \{ha;\ h \in H\}$ u grupi G tako da imamo disjunktnu uniju*

$$G = Ha_1 \cup Ha_2 \cup \cdots \cup Ha_s.$$

Uz uvedene oznake tada vrijedi

$$V = \pi(a_1)^{-1}X \dotplus \pi(a_2)^{-1}X \dotplus \cdots \dotplus \pi(a_s)^{-1}X.$$

Dokaz: Za svaki $j \in \{1, 2, \ldots, s\}$ neka $f_j \neq 0$ funkcija iz $\pi(a_j)^{-1}X$. Kako je $X = AW$, postoje vektori $w_1, w_2, \ldots, w_s \in W \setminus \{0\}$ takvi da je $f_j = \pi(a_j)^{-1}Aw_j$ za $j = 1, 2, \ldots, s$. Imamo za $g \in G$ i za $j \in \{1, 2, \ldots, s\}$

$$f_j(g) = (\pi(a_j)^{-1}Aw_j)(g) = (Aw_j)(ga_j^{-1}),$$

a to je različito od nule ako i samo ako je $ga_j^{-1} \in H$, tj. ako i samo ako je $g \in Ha_j$. To znači da su skupovi $S_j = \{g \in G;\ f_j(g) \neq 0\}$ međusobno disjunktni, odakle slijedi linearna nezavisnost funkcija $f_1, f_2, \ldots, f_m$. Time je dokazano da potprostori $\pi(a_1)^{-1}X, \pi(a_2)^{-1}X, \ldots, \pi(a_s)^{-1}X$ čine direktnu sumu. No dimenzija direktne sume je suma dimenzija, pa je

$$\dim\left(\pi(a_1)^{-1}X \dotplus \pi(a_2)^{-1}X \dotplus \cdots \dotplus \pi(a_s)^{-1}X\right) = \sum_{j=1}^{s} \dim\, \pi(a_j)^{-1}X = s\cdot\dim\, X = (G\!:\!H)\cdot\dim W,$$

a to je prema propoziciji 3.1.1. jednako dimenziji prostora V. Dakle, direktna suma potprostora $\pi(a_j)^{-1}X$ jednaka je čitavom vektorskom prostoru V. Time je lema 3.2.2. dokazana.

Lema 3.2.3. *Uz uvedene oznake stavimo*

$$X_i = \pi(a_i)^{-1}X, \qquad i = 1, 2, \ldots, s.$$

Svaki operator $\pi(a)$, za $a \in G$, permutira među sobom potprostore X_j, $1 \leq j \leq s$. Preciznije, ako su $a \in G$ i $j \in \{1, 2, \ldots, s\}$ tada postoji jedinstven $k \in \{1, 2, \ldots, s\}$ takav da je $a_k a a_j^{-1} \in H$ i za takav k vrijedi

$$\pi(a)X_j = X_k.$$

Nadalje, ovo permutiranje potprostora X_j, $1 \leq j \leq s$, je tranzitivno, odnosno, za $1 \leq j \leq s$ i $1 \leq k \leq s$ postoji $a \in G$ takav da je $\pi(a)X_j = X_k$.

Dokaz: Neka su $a \in G$ i $j \in \{1, 2, \ldots, s\}$. Tada se element $a_j a^{-1}$ nalazi u jedinstvenoj lijevoj $H-$klasi u grupi G, odnosno, postoji jedinstven $k \in \{1, 2, \ldots, s\}$ takav da je $a_j a^{-1} \in Ha_k$. To znači da postoji jedinstven k takav da je $a_j a^{-1} a_k^{-1} \in H$, odnosno, ekvivalentno, jedinstven k takav da je $a_k a a_j^{-1} = \left(a_j a^{-1} a_k^{-1}\right)^{-1} \in H$.

Budući da je potprostor X $\pi|H-$invarijantan, za takav k imamo

$$X = \pi\left(a_k a a_j^{-1}\right) X = \pi(a_k)\pi(a)\pi(a_j)^{-1}X \qquad \Rightarrow \qquad \pi(a)\pi(a_j)^{-1}X = \pi(a_k)^{-1}X,$$

tj. vrijedi $\pi(a)X_j = X_k$.

Napokon, neka su $j, k \in \{1, 2, \ldots, s\}$ proizvoljni. Tada za $a = a_k^{-1}a_j$ vrijedi $aa_j^{-1} = a_k^{-1}$. Odatle je $\pi(a)\pi(a_j)^{-1} = \pi(a_k)^{-1}$, pa slijedi

$$\pi(a)X_j = \pi(a)\pi(a_j)^{-1}X = \pi(a_k)^{-1}X = X_k,$$

i time je lema 3.2.3. dokazana.

Ovakva struktura prostora reprezentacije π karakteristična je za inducirane reprezentacije. Naime, vrijedi tzv. **teorem imprimitiviteta**:

Teorem 3.2.4. *Neka je π reprezentacija grupe G na prostoru V i neka postoji rastav prostora V u direktnu sumu potprostora*

$$V = X_1 \dot{+} X_2 \dot{+} \cdots \dot{+} X_s$$

sa sljedeća dva svojstva:

(*a*) *Operatori $\pi(a)$, $a \in G$, permutiraju potprostore X_j, tj. ako su $a \in G$ i $j \in \{1, 2, \dots, s\}$, onda je $\pi(a)X_j = X_k$ za neki $k \in \{1, 2, \dots, s\}$.*

(*b*) *Permutiranje u (a) je tranzitivno, tj. za bilo koje $j, k \in \{1, 2, \dots, s\}$ postoji $a \in G$ takav da je $\pi(a)X_j = X_k$.*

Neka je

$$H = \{h \in G;\ \pi(h)X_1 = X_1\} \qquad \textit{i za} \quad h \in H \quad \textit{neka je} \quad \rho(h) = \pi(h)|X_1.$$

Tada je H podgrupa od G, ρ je reprezentacija grupe H na prostoru X_1 i vrijedi $\pi \simeq Ind_H^G\,\rho$.

Zadatak 3.2.1. *Dokažite teorem 3.2.4.*

Uputa: (1) Dokažite da je H podgrupa od G i da je ρ reprezentacija grupe H na prostoru X_1.

(2) Neka je $a_1 = e$ i neka su $a_2, \dots, a_s \in G$ izabrani tako da je $\pi(a_j)X_j = X_1$ za svaki j. Dokažite da su tada $a_1, a_2, \dots, a_s$ predstavnici svih lijevih $H-$klasa u grupi G, tj. da je

$$G = Ha_1 \cup Ha_2 \cup \cdots \cup Ha_s \qquad\qquad \text{(disjunktna unija)}.$$

(3) Neka je $X = Ind_H^G\,X_1$ i $\omega = Ind_H^G\,\rho$. Definiramo za $x_j \in X_j$ funkciju $A_jx_j : G \to X_1$ na sljedeći način:

$$(A_jx_j)(g) = \begin{cases} \pi(g)x_j & \text{ako je} \quad g \in Ha_j \\ 0 & \text{ako je} \quad g \in G \setminus Ha_j \end{cases}$$

Nadalje, definiramo operator $A : V \to X_1^G$ kao direktnu sumu operatora A_j :

$$A(x_1 + x_2 + \cdots + x_s) = A_1x_1 + A_2x_2 + \cdots + A_sx_s, \qquad x_1 \in X_1, \quad x_2 \in X_2, \quad \dots \quad x_s \in X_s.$$

Dokažite da je A linearan operator sa V u X, da je A injektivan, a računom dimenzija da je A i surjektivan.

(4) Dokažite da je $\omega(g)A = A\pi(g)$ za svaki $g \in G$.

3.3 Karakter inducirane reprezentacije

Izračunat ćemo sada karakter χ_π reprezentacije $\pi = Ind_H^G \rho$ inducirane reprezentacijom ρ podgrupe H i to u terminima karaktera χ_ρ reprezentacije ρ.

Upotrijebit ćemo prije uvedene oznake

$$A \in Hom_H(W,V), \qquad (Aw)(g) = \left\{ \begin{array}{ccc} \rho(g)w & \text{ako je} & g \in H \\ 0 & \text{ako je} & g \in G \setminus H \end{array} \right\}, \qquad g \in G, \quad w \in W;$$

$$X = AW = \{Aw;\ w \in W\};$$

$$G = Ha_1 \cup Ha_2 \cup \cdots \cup Ha_s \qquad \text{(disjunktna unija);}$$

$$X_j = \pi(a_j)^{-1}X, \qquad j = 1, 2, \ldots, s.$$

Treba izračunati karakter reprezentacije π tj. trag operatora $\pi(a)$, $a \in G$. Prema lemi 3.2.2. je

$$V = X_1 \dotplus X_2 \dotplus \cdots \dotplus X_s,$$

a prema lemi 3.2.3. je

$$\pi(a)X_j = X_k \qquad \text{ako su } a \in G \text{ i } j,k \in \{1,2,\ldots,s\} \text{ takvi da je } a_k^{-1}aa_j \in H.$$

Trag operatora je suma dijagonalnih elemenata matrice tog operatora u bilo kojoj bazi vektorskog prostora. Sastavimo li bazu prostora V od baza u potprostorima X_j, vidimo da dijagonalni matrični element operatora $\pi(a)$ koji odgovara elementu te baze iz potprostora X_j može biti različit od nule samo ako je $\pi(a)X_j = X_j$, tj. samo ako je $a_jaa_j^{-1} \in H$. Dakle, imamo

$$\chi_\pi(a) = \mathrm{Tr}\,\pi(a) = \sum_{\substack{1 \le j \le s \\ a_jaa_j^{-1} \in H}} \mathrm{Tr}\,(\pi(a)|X_j)\,.$$

Treba još izračunati trag restrikcije operatora $\pi(a)$ na potprostor X_j za svaki j takav da je $a_jaa_j^{-1} \in H$. Definiramo operator $A_j : W \to X_j$ kao kompoziciju izomorfizama $A : W \to X$ i $\pi(a_j)^{-1} : X \to X_j$:

$$A_j = \pi(a_j)^{-1}A, \qquad j \in \{1,2,\ldots,s\}.$$

Prema definiciji operatora A tada za $w \in W$ i za $g \in G$ imamo

$$(A_jw)(g) = (\pi(a_j)^{-1}Aw)(g) = (Aw)\left(ga_j^{-1}\right).$$

Prema lemi 3.2.1. znamo da je $A \in Hom_H(W,V)$, tj. da je $A\rho(h) = \pi(h)A\ \forall h \in H$. Stoga imamo za $a \in G$ i za $j \in \{1,2,\ldots,s\}$ takve da je $h = a_jaa_j^{-1} \in H$:

$$(\pi(a)A_jw)(g) = (A_jw)(ga) = (Aw)(gaa_j^{-1}) = (Aw)(ga_j^{-1}h) = (\pi(h)Aw)(ga_j^{-1}) =$$

$$= (A\rho(h)w)(ga_j^{-1}) = (\pi(a_j)^{-1}A\rho(h)w)(g) = (A_j\rho(h)w)(g).$$

Na taj način dokazali smo da je $\pi(a)A_j = A_j\rho(h)$, gdje je $h = a_jaa_j^{-1}$. Odatle je

$$\pi(a)|X_j = A_j\rho\left(a_jaa_j^{-1}\right)A_j^{-1}, \quad \text{ako je} \quad a_jaa_j^{-1} \in H.$$

Tada je

$$\mathrm{Tr}\,(\pi(a)|X_j) = \mathrm{Tr}\,\left(A_j\rho\left(a_jaa_j^{-1}\right)A_j^{-1}\right) = \mathrm{Tr}\,\rho\left(a_jaa_j^{-1}\right) = \chi_\rho\left(a_jaa_j^{-1}\right).$$

Na taj način dokazali smo:

Teorem 3.3.1. *Neka je ρ reprezentacija podgrupe H grupe G i neka je $\pi = Ind_H^G\,\rho$. Tada za karaktere χ_ρ i χ_π tih reprezentacija vrijedi:*

$$\chi_\pi(a) = \sum_{\substack{1 \le j \le s \\ a_j a a_j^{-1} \in H}} \chi_\rho\left(a_j a a_j^{-1}\right), \qquad a \in G.$$

3.4 Frobeniusov teorem reciprociteta

Dokazat ćemo sada tzv. **Frobeniusov teorem reciprociteta** koji daje mogućnost analize inducirane reprezentacije.

Teorem 3.4.1. *Neka je π reprezentacija grupe G na vektorskom prostoru V i ρ reprezentacija njene podgrupe H na vektorskom prostoru W.*

(a) *Postoji izomorfizam vektorskog prostora $Hom_H(V,W)$ na vektorski prostor $Hom_G(V, Ind_H^G W)$.*

(b) *Ako su reprezentacije π i ρ ireducibilne, onda je multiplicitet reprezentacije π u induciranoj reprezentaciji $Ind_H^G \rho$ jednak multiplicitetu reprezentacije ρ u restrikciji reprezentacije π na podgrupu H :*
$$m(Ind_H^G \rho, \pi) = m(\pi|H, \rho).$$

Dokaz: Neka je $\omega = Ind_H^G \rho$ reprezentacija grupe G inducirana reprezentacijom ρ na prostoru $X = Ind_H^G W$:
$$X = \{f : G \to W;\ f(hg) = \rho(h)f(g)\ \forall h \in H \text{ i } \forall g \in G\},$$
$$[\omega(a)f](g) = f(ga), \qquad a, g \in G, \quad f \in X.$$
Neka je $A \in Hom_H(V,W)$, tj. $A : V \to W$ je linearan operator takav da je
$$\rho(h)A = A\pi(h) \qquad \forall h \in H.$$
Za $v \in V$ definiramo funkciju $F_{A,v} : G \to W$ ovako:
$$F_{A,v}(g) = A\pi(g)v, \qquad g \in G.$$
Tada je $F_{A,v}$ funkcija iz prostora X, jer za bilo koje $h \in H$ i $g \in G$ imamo redom
$$F_{A,v}(hg) = A\pi(hg)v = A\pi(h)\pi(g)v = \rho(h)A\pi(g)v = \rho(h)F_{A,v}(g).$$
Očito je preslikavanje $v \mapsto F_{A,v}$ linearan operator sa V u X. Taj operator označimo sa $\Phi(A)$. Dakle, $\Phi(A) : V \to X$ je linearan operator definiran na sljedeći način:
$$[\Phi(A)v](g) = A\pi(g)v, \qquad v \in V, \quad g \in G.$$
Za svaki $A \in Hom_H(V,W)$ vrijedi $\Phi(A) \in Hom_G(V,X)$. Doista, za $v \in V$ i $a, g \in G$ imamo
$$[\omega(a)\Phi(A)v](g) = [\Phi(A)v](ga) = A\pi(ga)v = A\pi(g)\pi(a)v = [\Phi(A)\pi(a)v](g).$$
Kako to vrijedi za svaki element $g \in G$ i svaki vektor $v \in V$, zaključujemo da je
$$\omega(a)\Phi(A) = \Phi(A)\pi(a) \qquad \forall a \in G,$$
tj. dokazano je da je $\Phi(A) \in Hom_G(V,X)$.

Očito je $A \mapsto \Phi(A)$ linearno preslikavanje sa $Hom_H(V,W)$ u $Hom_G(V,X)$. Da dokažemo da je to izomorfizam vektorskih prostora, konstruirat ćemo inverzno preslikavanje sa $Hom_G(V,X)$ u $Hom_H(V,W)$. Za $B \in Hom_G(V,X)$ definiramo linearan operator $\Psi(B) : V \to W$ ovako:
$$\Psi(B)v = (Bv)(e), \qquad v \in V.$$
Dokažimo da je $\Psi(B) \in Hom_H(V,W)$. Za $v \in V$ i $h \in H$ imamo
$$\Psi(B)\pi(h)v = (B\pi(h)v)(e) = (\omega(h)Bv)(e) = (Bv)(h) = (Bv)(he) = \rho(h)(Bv)(e) = \rho(h)\Psi(B)v.$$

Pri tome je druga jednakost posljedica činjenice da je $B \in Hom_G(V, X)$, treća jednakost slijedi iz definicije reprezentacije $\omega = Ind_H^G \rho$, a peta jednakost slijedi iz činjenice da je $Bv \in X$. Dakle, vrijedi

$$\Psi(B)\pi(h) = \rho(h)\Psi(B) \qquad \forall h \in H,$$

što znači da je $\Psi(B) \in Hom_H(V, W)$.

Za $B \in Hom_G(V, X)$, $v \in V$ i $g \in G$ imamo redom

$$[\Phi(\Psi(B))v](g) = \Psi(B)\pi(g)v = (B\pi(g)v)(e) = (\omega(g)Bv)(e) = (Bv)(g).$$

Kako to vrijedi za svaki $g \in G$ i svaki $v \in V$, vidimo da je $\Phi(\Psi(B)) = B \ \forall B \in Hom_G(V, X)$, dakle, $\Phi \circ \Psi$ je identiteta na prostoru $Hom_G(V, X)$.

Za $A \in Hom_H(V, W)$ i $v \in V$ imamo

$$(\Psi(\Phi(A))v = (\Phi(A)v)(e) = Av,$$

što pokazuje da je $\Psi(\Phi(A)) = A$ za svaki $A \in Hom_H(V, W)$, odnosno, $\Psi \circ \Phi$ je identiteta na prostoru $Hom_H)V, W)$.

Time smo dokazali da su $\Phi : Hom_H(V, W) \to Hom_G(V, X)$ i $\Psi : Hom_G(V, X) \to Hom_H(V, W)$ međusobno inverzni izomorfizmi i time je tvrdnja (a) dokazana.

(b) Prema dokazanoj tvrdnji (a) imamo

$$\dim Hom_H(V, W) = \dim Hom_G(V, X).$$

Međutim, ako je reprezentacija π grupe G ireducibilna, iz teorema 2.6.5. primijenjenog na reprezentacije $Ind_H^G \rho$ na prostoru $X = Ind_H^G W$ i π na prostoru V slijedi

$$\dim Hom_G(V, X) = m(Ind_H^G \rho, \pi).$$

Nadalje, ako je reprezentacija ρ grupe H ireducibilna, iz istog teorema 2.6.5. primijenjenog na reprezentacije $\pi|H$ na prostoru V i ρ na prostoru W slijedi

$$\dim Hom_H(V, W) = m(\pi|H, \rho).$$

Ako su i π i ρ ireducibilne, gornje tri jednakosti daju $m(Ind_H^G \rho, \pi) = m(\pi|H, \rho)$ i time je tvrdnja (b) dokazana.

3.5 Teorem o induciranju u etapama

Dokazat ćemo sada tzv. **teorem o induciranju u etapama**, čija tvrdnja se može tumačiti kao tranzitivnost operacije induciranja:

Teorem 3.5.1. *Neka su $K \subseteq H$ podgrupe grupe G i neka je σ reprezentacija grupe K. Tada je*

$$Ind_H^G\, Ind_K^H\, \sigma \simeq Ind_K^G\, \sigma.$$

Dokaz: Neka je U prostor reprezentacije σ. Označimo sa W prostor reprezentacije $\rho = Ind_K^H\, \sigma$:

$$W = \{f : H \to U;\ f(kh) = \sigma(k)f(h)\ \forall k \in K \text{ i } \forall h \in H\},$$

$$[\rho(x)f](h) = f(hx), \quad h, x \in H, \quad f \in W.$$

Sa V označimo prostor reprezentacije $\pi = Ind_H^G\, \rho = Ind_H^G\, Ind_K^H\, \sigma$:

$$V = \{F : G \to W;\ F(hg) = \rho(h)F(g)\ \forall h \in H \text{ i } \forall g \in G\},$$

$$[\pi(a)F](g) = F(ga), \quad a, g \in G, \quad F \in V.$$

Napokon, neka je X prostor reprezentacije $\omega = Ind_K^G\, \sigma$:

$$X = \{\varphi : G \to U;\ \varphi(kg) = \sigma(k)\varphi(g)\ \forall k \in K \text{ i } \forall g \in G\},$$

$$[\omega(a)\varphi](g) = \varphi(ga), \quad a, g \in G, \quad \varphi \in X.$$

Neka je $\varphi \in X$. Definiramo funkciju $T\varphi : G \to U^H$ formulom

$$[(T\varphi)(g)](h) = \varphi(hg), \qquad g \in G, \quad h \in H.$$

Tada za $k \in K$, $h \in H$ i $g \in G$ imamo

$$[(T\varphi)(g)](kh) = \varphi(khg) = \sigma(k)\varphi(hg) = \sigma(k)[(T\varphi)(g)](h).$$

To pokazuje da je $(T\varphi)(g) \in W$ za svaki $g \in G$. Dakle, $T\varphi$ je funkcija sa G u W. Nadalje, za $h, x \in H$ i za $g \in G$ imamo zbog definicije reprezentacije ρ :

$$[(T\varphi)(hg)](x) = \varphi(xhg) = [(T\varphi)(g)](xh) = [\rho(h)(T\varphi)(g)](x), \qquad \text{tj.} \qquad (T\varphi)(gh) = \rho(h)(T\varphi)(g).$$

To pokazuje da je $T\varphi \in V$. Dakle, T je preslikavanje prostora X u prostor V. Očito je T linearan operator.

Za $\varphi \in X$, $a, g \in G$ i $h \in H$ imamo:

$$[(T\omega(a)\varphi)(g)](h) = (\omega(a)\varphi)(hg) = \varphi(hga) = [(T\varphi)(ga)](h).$$

Budući da to vrijedi za svaki $h \in H$, za svaki $g \in G$ i za svaku funkciju $\varphi \in X$ imamo redom

$$(T\omega(a)\varphi)(g) = (T\varphi)(ga) = [\pi(a)T\varphi](g) \quad \Rightarrow \quad T\omega(a)\varphi = \pi(a)T\varphi \quad \Rightarrow \quad T\omega(a) = \pi(a)T.$$

Treba još samo dokazati da je $T : X \to V$ izomorfizam vektorskih prostora. U tu svrhu definirat ćemo linearan operator $S : V \to X$ i dokazati da je S invers od T. Za $F \in V$ definiramo preslikavanje $SF : G \to U$ na sljedeći način:

$$(SF)(g) = [F(g)](e), \qquad g \in G.$$

Treba dokazati da je $SF \in X$. Prije svega, F je funkcija iz V pa vrijedi $F(hg) = \rho(h)F(g)$ za svaki $h \in H$ i svaki $g \in G$. Kako je $K \subseteq H$, vrijedi $F(kg) = \rho(k)F(g)$ za svaki $k \in K$ i svaki $g \in G$. Nadalje, za svaki $g \in G$ je $F(g) \in W$ pa za svaki $k \in K$ i svaki $h \in H$ vrijedi $[F(g)](kh) = \sigma(k)[F(g)](h)$, a odatle za $h = e$ slijedi $[F(g)](k) = \sigma(k)[F(g)](e)$. Dakle, za $k \in K$ i $g \in G$ imamo redom

$$(SF)(kg) = [F(kg)](e) = [\rho(k)F(g)](e) = [F(g)](k) = \sigma(k)[F(g)](e) = \sigma(k)(SF)(g).$$

Time je dokazano da je $SF \in X$ za svaku funkciju $F \in V$, dakle, S je linearan operator sa V u X. Sada za $F \in V$, $g \in G$ i $h \in H$ imamo

$$[(TSF)(g)](h) = (SF)(hg) = [F(hg)](e) = [\rho(h)F(g)](e) = [F(g)](h).$$

Budući da to vrijedi za svaki $h \in H$ i svaki $g \in G$, zaključujemo da je $TSF = F\ \forall F \in V$, tj. $TS = I_V$. Napokon, za $\varphi \in X$ i svaki $g \in G$ imamo

$$(ST\varphi)(g) = [(T\varphi)(g)](e) = \varphi(g).$$

Dakle, $ST\varphi = \varphi\ \forall \varphi \in X$, tj. $ST = I_X$. Prema tome, S je invers operatora T, što dokazuje da je T izomorfizam prostora X na prostor V.

3.6 Restrikcija inducirane reprezentacije

Neka je H podgrupa grupe G. Za svaki $g \in G$ tada je $g^{-1}Hg$ također podgrupa grupe G. Za tu podgrupu kažemo da je **konjugirana** podgrupi H. Ako je ρ reprezentacija grupe H na prostoru W onda na istom prostoru imamo reprezentaciju ρ^g konjugirane podgrupe $g^{-1}Hg$:

$$\rho^g(k) = \rho\left(gkg^{-1}\right), \qquad k \in g^{-1}Hg.$$

Propozicija 3.6.1. *Uz gornje oznake je* $Ind_H^G\,\rho \simeq Ind_{g^{-1}Hg}^G\,\rho^g$.

Dokaz: Neka su $\pi = Ind_H^G\,\rho$ i $\pi^g = Ind_{g^{-1}Hg}^G\,\rho^g$ i neka su V i V^g prostori tih dviju induciranih reprezentacija:

$$V = \{f : G \to W;\ f(ha) = \rho(h)f(a)\ \forall h \in H \text{ i } \forall a \in G\},$$

$$V^g = \{F : G \to W;\ F(ka) = \rho^g(k)F(a)\ \forall k \in g^{-1}Hg \text{ i } \forall a \in G\},$$

$$(\pi(a)f)(b) = f(ba), \qquad (\pi^g(a)F)(b) = F(ba), \qquad f \in V, \quad F \in V^g, \quad a, b \in G.$$

Za funkciju $f \in V$ definiramo funkciju $Af : G \to W$ na sljedeći način:

$$(Af)(a) = f(ga), \qquad a \in G.$$

Tada je $Af \in V^g$. Doista, ako su $k \in g^{-1}Hg$ i $a \in G$, onda je $gkg^{-1} \in H$, pa imamo

$$(Af)(ka) = f(gka) = f\left(\left(gkg^{-1}\right)(ga)\right) = \rho\left(gkg^{-1}\right) f(ga) = \rho^g(k)(Af)(a).$$

Očito je $A : V \to V^g$ linearan operator. Sasvim analogno imamo linearan operator $B : V^g \to V$ definiran sa

$$(BF)(a) = F\left(g^{-1}a\right), \qquad a \in G.$$

Tada je

$$(ABF)(a) = (BF)(ga) = F\left(g^{-1}ga\right) = F(a), \qquad F \in V^g, \quad a \in G,$$

$$(BAf)(a) = (Af)\left(g^{-1}a\right) = f\left(gg^{-1}a\right) = f(a), \qquad f \in V, \quad a \in G.$$

Dakle, A i B su međusobno inverzni izomorfizmi vektorskih prostora. Napokon, izomorfizam $A : V \to V^g$ ostvaruje ekvivalenciju reprezentacija π i π^g, jer za $a, b \in G$ i za $f \in V$ vrijedi:

$$(A\pi(a)f)(b) = (\pi(a)f)(gb) = f(gba) = (Af)(ba) = (\pi^g(a)Af)(b).$$

Neka su H i K podgrupe grupe G i ρ reprezentacija grupe H na vektorskom prostoru W. Neka je $\pi = Ind_H^G\,\rho$ inducirana reprezentacija grupe G na prostoru

$$V = Ind_H^G\,W = \{f : G \to W;\ f(hg) = \rho(h)f(g)\ \forall h \in H \text{ i } \forall g \in G\}.$$

Analizirat ćemo sada restrikciju inducirane reprezentacije π na podgrupu K. Označimo sa $H\backslash G/K$ skup svih duplih $(H\!:\!K)-$klasa u grupi G, tj. skup svih podskupova oblika

$$HgK = \{hgk;\ h \in H,\ k \in K\}.$$

Duple $(H : K)-$klase su klase ekvivalencije za relaciju ekvivalencije na grupi G definiranu na sljedeći način:

$$a \sim b \qquad \Longleftrightarrow \qquad b = hak \quad \text{za neke} \quad h \in H \quad \text{i} \quad k \in K.$$

Nadalje, za $g \in G$ označimo sa K_g podgrupu $K \cap g^{-1}Hg$ grupe K i sa ρ_g reprezentaciju grupe K_g definiranu pomoću reprezentacije ρ na sljedeći način:

$$\rho_g(k) = \rho\left(gkg^{-1}\right), \qquad k \in K_g = K \cap g^{-1}Hg.$$

Lema 3.6.2. *Ako $g, g' \in G$ pripadaju istoj duploj $(H:K)-$klasi, tj. ako je $HgK = Hg'K$, onda su inducirane reprezentacije $Ind_{K_g}^K \rho_g$ i $Ind_{K_{g'}}^K \rho_{g'}$ grupe K ekvivalentne.*

Zadatak 3.6.1. *Dokažite lemu 3.6.2.*

Uputa: Ako je $g' = hgk$ za neke $h \in H$ i $k \in K$, dokažite da je $K_{g'} = k^{-1}K_g k$ i da za $x \in K_{g'}$ vrijedi $\rho_{g'}(x) = \rho(h)\rho_g(kxk^{-1})\rho(h)^{-1}$, tj. da uz oznaku upotrijebljenu u propoziciji 3.6.1. vrijedi $\rho_{g'}(x) = \rho(h)(\rho_g)^k(x)\rho(h)^{-1}$. Zaključite da su reprezentacije $\rho_{g'}$ i $(\rho_g)^k$ grupe $K_{g'} = k^{-1}K_g k$ ekvivalentne. Zatim primijenite propoziciju 3.6.1.

Teorem 3.6.3. *Neka su K i H podgrupe grupe G i neka je ρ reprezentacija grupe H. Neka su $a_1, a_2, \ldots, a_s$ predstavnici svih duplih $(H:K)-$klasa u grupi G tako da je*

$$G = Ha_1K \cup Ha_2K \cup \cdots \cup Ha_sK \qquad \textit{(disjunktna unija).}$$

Za $j \in \{1, 2, \ldots, s\}$ neka je ρ_j reprezentacija grupe $K_j = K \cap a_j^{-1}Ha_j$ definirana sa

$$\rho_j(k) = \rho\left(a_j k a_j^{-1}\right), \qquad k \in K_j$$

i neka je

$$\pi_j = Ind_{K_j}^K \rho_j, \qquad 1 \le j \le s.$$

Tada je restrikcija $\left(Ind_H^G \rho\right)|K$ ekvivalentna direktnoj sumi reprezentacija $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_s$.

Dokaz: Neka je W prostor reprezentacije ρ i neka je $V = Ind_H^G W$ prostor inducirane reprezentacije $\pi = Ind_H^G \rho$. U ovom nas teoremu zanima samo restrikcija $\pi|K$.

Označimo sa V_j potprostor prostora V svih funkcija $f \in V$ takvih da je $f(g) = 0$ za svaki $g \in G \setminus Ha_jK$. Za $k \in K$ i $g \in G$ je $[\pi(k)f](g) = f(gk)$ i očito je $g \in Ha_jK$ ako i samo ako je $gk \in Ha_jK$. To pokazuje da su potprostori $V_1, V_2, \ldots, V_s$ $(\pi|K)-$invarijantni. Nadalje, očito je

$$V = V_1 \dot{+} V_2 \dot{+} \cdots \dot{+} V_s.$$

Treba još dokazati da je subreprezentacija $(\pi|K)_{V_j}$ ekvivalentna induciranoj reprezentaciji $\pi_j = Ind_{K_j}^K \rho_j$.

Za $f \in V_j$ definiramo funkciju $A_jf : K \to W$ na sljedeći način:

$$(A_jf)(k) = f(a_jk), \qquad k \in K.$$

Dokažimo da je tada $A_jf \in X_j = Ind_{K_j}^K W$, gdje se uzima da je ρ_j reprezentacija od K_j na W. Doista, za $k \in K$ i za $x \in K_j$ je $a_jxa_j^{-1} \in H$, pa zbog činjenice da je $f \in V_j \subseteq V = Ind_H^G W$ imamo

$$(A_jf)(xk) = f(a_jxk) = f\left(a_jxa_j^{-1}a_jk\right) = \rho\left(a_jxa_j^{-1}\right)f(a_jk) = \rho_j(x)(A_jf)(k).$$

Dakle, A_j je preslikavanje sa V_j u X_j i očito je taj operator linearan. Dokažimo da operator A_j prepliće reprezentacije $(\pi|K)_{V_j}$ i $\pi_j = Ind_{K_j}^K \rho_j$. Doista, za $x, k \in K$ i za $f \in V_j$ imamo

$$(A_j(\pi|K)_{V_j}(x)f)(k) = (A_j\pi(x)f)(k) = (\pi(x)f)(a_jk) = f(a_jkx) = (A_jf)(kx) = (\pi_j(x)A_jf)(k).$$

Dakle,

$$A_j(\pi|K)_{V_j}(x) = \pi_j(x)A_j, \qquad \forall x \in K.$$

Treba još samo dokazati da su $A_j : V_j \to X_j$ izomorfizmi vektorskih prostora.

Prije svega dokažimo da su svi operatori A_j injekcije. Doista, ako je $f \in V_j$ takva da je $A_j f = 0$, onda prema definiciji operatora A_j imamo

$$f(a_j k) = 0 \qquad \forall k \in K.$$

Kako je $f \in V_j \subseteq V = Ind_H^G W$, odatle za svaki $h \in H$ i svaki $k \in K$ imamo

$$f(ha_j k) = \rho(h) f(a_j k) = 0.$$

Dakle, funkcija f jednaka je nuli u svakoj točki duple $(H:K)-$klase Ha_jK. Prema definiciji V_j slijedi da je funkcija f jednaka nuli svuda na G. Time je dokazano da je $A_j : V_j \to X_j$ injekcija za svaki j.

Dokažimo sada surjektivnost. Neka je $\varphi \in X_j = Ind_{K_j}^K W$. Dakle, φ je funkcija sa K u W sa svojstvom

$$\varphi(xk) = \rho_j(x)\varphi(k) = \rho\left(a_j x a_j^{-1}\right)\varphi(k), \qquad \forall x \in K_j = K \cap a_j^{-1} H a_j, \quad \forall k \in K.$$

Definiramo sada funkciju $f : G \to W$ na sljedeći način:

$$f(g) = \begin{cases} \rho(h)\varphi(k) & \text{ako je } \; g = ha_jk \; \text{ za neke } \; h \in H \text{ i } k \in K \\ 0 & \text{ako je } \; g \in G \setminus Ha_jK. \end{cases}$$

Treba prije svega vidjeti da je definicija smislena, tj. da ne ovisi o prikazu elementa $g \in Ha_jK$ u obliku ha_jk, $h \in H$, $k \in K$. Doista, neka su $h, h' \in H$ i $k, k' \in K$ takvi da je $ha_jk = h'a_jk'$. Tada je

$$x = k'k^{-1} = a_j^{-1} h'^{-1} h a_j \in K \cap a_j^{-1} H a_j = K_j,$$

pa zbog svojstva funkcije φ imamo

$$\rho(h')\varphi(k') = \rho(h')\varphi(xk) = \rho(h')\rho\left(a_j x a_j^{-1}\right)\varphi(k) = \rho(h')\rho\left(h'^{-1}h\right)\varphi(k) = \rho(h)\varphi(k).$$

Time je dokazana neovisnost definicije funkcije f o prikazu elementa $g \in Ha_jK$ u obliku ha_jk, $h \in H$, $k \in K$. Iz definicije je odmah jasno da je $f \in V$ a budući da je jednaka nuli izvan duple $(H:K)-$klase Ha_jK slijedi da je $f \in V_j$. Napokon,

$$(A_j f)(k) = f(a_j k) = \varphi(k) \quad \forall k \in K \qquad \Longrightarrow \qquad A_j f = \varphi.$$

Time je dokazano da je A_j i surjekcija sa V_j na X_j, odnosno, teorem 3.6.3. je u potpunosti dokazan.

3.7 Tenzorski produkt induciranih reprezentacija

Teorem 3.7.1. *Neka su H_1 i H_2 podgrupe konačnih grupa G_1 i G_2 i neka su ρ_1 i ρ_2 njihove reprezentacije. Tada je $Ind_{H_1\times H_2}^{G_1\times G_2}(\rho_1\times\rho_2)\simeq(Ind_{H_1}^{G_1}\rho_1)\times(Ind_{H_2}^{G_2}\rho_2)$.*

Dokaz: Neka su W_1 i W_2 prostori reprezentacija ρ_1 i ρ_2. Označimo sa V_1, V_2 i V prostore induciranih reprezentacija $\pi_1=Ind_{H_1}^{G_1}\rho_1$, $\pi_2=Ind_{H_2}^{G_2}\rho_2$ i $\pi=Ind_{H_1\times H_2}^{G_1\times G_2}(\rho_1\times\rho_2)$:

$$V_1=\{\varphi:G_1\to W_1;\ \varphi(h_1g_1)=\rho_1(h_1)\varphi(g_1)\ \forall h_1\in H_1 \text{ i } \forall g_1\in G_1\},$$

$$V_2=\{\psi:G_2\to W_2;\ \psi(h_2g_2)=\rho_2(h_2)\psi(g_2)\ \forall h_2\in H_2 \text{ i } \forall g_2\in G_2\},$$

$$V=\{F:G_1\times G_2\to W_1\otimes W_2;\ F(h_1g_1,h_2g_2)=[\rho_1(h_1)\otimes\rho_2(h_2)]F(g_1,g_2)$$
$$\forall h_1\in H_1,\ \forall h_2\in H_2,\ \forall g_1\in G_1 \text{ i } \forall g_2\in G_2\}.$$

Za $\varphi\in V_1$ i $\psi\in V_2$ definiramo funkciju $A(\varphi,\psi):G_1\times G_2\to W_1\otimes W_2$ na sljedeći način:

$$A(\varphi,\psi)(g_1,g_2)=\varphi(g_1)\otimes\psi(g_2).$$

Tada se lako provjeri da je $A(\varphi,\psi)\in V$ i da je preslikavanje $A:V_1\times V_2\to V$ bilinearno. Stoga postoji jedinstven linearan operator $B:V_1\otimes V_2\to V$ takav da je

$$B(\varphi\otimes\psi)=A(\varphi,\psi),\quad \text{tj.}\quad B(\varphi\otimes\psi)(g_1,g_2)=\varphi(g_1)\otimes\psi(g_2),\quad \varphi\in V_1,\ \psi\in V_2,\ g_1\in G_1,\ g_2\in G_2.$$

Zadatak 3.7.1. (a) *Zgodnim izborom baza u V_1 i V_2, a time i u $V_1\otimes V_2$, dokažite da je B injekcija, a zatim računom dimenzija dokažite da je B i surjekcija, dakle, izomorfizam vektorskog prostora $V_1\otimes V_2$ na vektorski prostor V.*

(b) *Dokažite da je*

$$B(\pi_1\times\pi_2)(g_1,g_2)=\pi(g_1,g_2)B\qquad \forall(g_1,g_2)\in G_1\times G_2.$$

Time je teorem 3.7.1. dokazan.

Ako grupu G identificiramo s podgrupom $\{(a,a);\ a\in G\}$ grupe $G\times G$, i ako su π i ω reprezentacije grupe G onda je njihov tenzorski produkt $\pi\otimes\omega$ restrikcija vanjskog produkta $\pi\times\omega$ na tu podgrupu od $G\times G$. Odgovarajućom primjenom teorema 3.7.1., leme 3.6.2. i teorema 3.6.3. dobivamo sljedeći teorem koji navodimo bez dokaza i koji daje analizu tenzorskog produkta induciranih reprezentacija $(Ind_H^G\rho)\otimes(Ind_K^G\sigma)=\left[\left(Ind_H^G\rho\right)\times\left(Ind_K^G\sigma\right)\right]|G\simeq\left(Ind_{H\times K}^{G\times G}\rho\times\sigma\right)|G$:

Teorem 3.7.2. *Neka su H i K podgrupe konačne grupe G i neka su ρ i σ reprezentacije grupa H i K. Za $a,b\in G$ neka su podgrupa $G_{a,b}$ i njene reprezentacije $\rho_{a,b}$ i $\sigma_{a,b}$ zadane na sljedeći način:*

$$G_{a,b}=a^{-1}Ha\cap b^{-1}Kb,\qquad \rho_{a,b}(x)=\rho\left(axa^{-1}\right),\qquad \sigma_{a,b}(x)=\sigma\left(bxb^{-1}\right).$$

(a) *Ako su $a,b,c,d\in G$ takvi da je $Hab^{-1}K=Hcd^{-1}K$ tada vrijedi*

$$Ind_{G_{a,b}}^G(\rho_{a,b}\otimes\sigma_{a,b})\simeq Ind_{G_{c,d}}^G(\rho_{c,d}\otimes\sigma_{c,d}).$$

(b) *Neka su $a_1,a_2,\ldots,a_s$ predstavnici svih duplih $(H:K)-$klasa u grupi G. Tada je tenzorski produkt $\pi\otimes\omega$ induciranih reprezentacija $\pi=Ind_H^G\rho$ i $\omega=Ind_K^G\sigma$ ekvivalentan direktnoj sumi reprezentacija $\tau_j=Ind_{G_{a_j,e}}^G(\rho_{a_j,e}\otimes\sigma_{a_j,e})$, $j=1,2,\ldots,s$.*

3.8 Ireducibilnost inducirane reprezentacije

Dokazat ćemo sada kriterij ireducibilnosti inducirane reprezentacije $Ind_H^G \rho$. U tu svrhu koristit ćemo se teoremom 3.6.3. u situaciji $H = K$, dakle za restrikciju $\left(Ind_H^G \rho\right)|H$. Za iskaz *Mackeyevog teorema* o kriteriju ireducibilnosti inducirane reprezentacije treba nam pojam disjunktnosti reprezentacija. Za reprezentacije π i ω grupe G kažemo da su **disjunktne** ako one nemaju ekvivalentnih ireducibilnih subreprezentacija.

Zadatak 3.8.1. *Neka su π i ω reprezentacije grupe G na prostorima V i W i neka su χ_π i χ_ω njihovi karakteri. Dokažite da su sljedeća svojstva međusobno ekvivalentna:*

(a) *Reprezentacije π i ω su disjunktne.*

(b) $Hom_G(V, W) = \{0\}$.

(c) $Hom_G(W, V) = \{0\}$.

(d) $m(\pi, \alpha)m(\omega, \alpha) = 0 \ \forall \alpha \in \hat{G}$.

(e) $(\chi_\pi|\chi_\omega) = 0$.

Teorem 3.8.1. *Neka je ρ reprezentacija podgrupe H grupe G i neka je $\pi = Ind_H^G \rho$. Za $a \in G \setminus H$ neka su H_a podgrupa od H i ρ_a njena reprezentacija definirane sa:*

$$H_a = H \cap aHa^{-1}, \qquad \rho_a(x) = \rho\left(a^{-1}xa\right), \quad x \in H_a.$$

Reprezentacija π grupe G je ireducibilna ako i samo ako su ispunjena sljedeća dva uvjeta:

(a) *Reprezentacija ρ grupe H je ireducibilna.*

(b) *Za svaki element $a \in G \setminus H$ reprezentacije $\rho|H_a$ i ρ_a grupe H_a su disjunktne.*

Dokaz: Prema teoremu 2.2.7. reprezentacija π je ireducibilna ako i samo ako je $(\chi_\pi|\chi_\pi)_G = 1$, gdje je χ_π karakter reprezentacije π a $(\cdot|\cdot)_G$ je prije uvedeni skalarni produkt na prostoru $\mathbb{C}[G]$:

$$(\varphi|\psi)_G = \frac{1}{|G|}\sum_{a\in G}\varphi(a)\overline{\psi(a)}, \qquad \varphi, \psi \in \mathbb{C}[G].$$

Sada imamo redom zbog teorema 2.6.5. i zbog tvrdnje (a) teorema 3.4.1:

$$(\chi_\pi|\chi_\pi)_G = \dim\, Hom_G(V, V) = \dim\, Hom_H(V, W) = (\chi_{\pi|H}|\chi_\rho)_H.$$

Neka su $a_1, a_2, \ldots, a_s$ predstavnici svih duplih $(H\!:\!H)-$klasa u grupi G tako da imamo disjunktnu uniju

$$G = Ha_1H \cup Ha_2H \cup \cdots \cup Ha_sH.$$

Prema teoremu 3.6.3. restrikcija $\pi|H$ je ekvivalentna direktnoj sumi reprezentacija $Ind_{H_{a_1}}^H \rho_{a_1}$, $Ind_{H_{a_2}}^H \rho_{a_2}, \ldots, Ind_{H_{a_s}}^H \rho_{a_s}$. Stoga imamo dalje

$$(\chi_\pi|\chi_\pi)_G = \sum_{i=1}^{s}\dim\, Hom_H(Ind_{H_{a_i}}^H W_i, W),$$

pri čemu smo sa W_i označili prostor W na kome djeluje reprezentacija ρ_{a_i} grupe H_{a_i}. Za svaki i ponovnom primjenom teorema 3.4.1. i teorema 2.6.5. nalazimo

$$\dim\, Hom_H(Ind_{H_{a_i}}^H W_i, W) = \dim\, Hom_H(W, Ind_{H_{a_i}}^H W_i) = \dim\, Hom_{H_{a_i}}(W, W_i),$$

Dakle,

$$(\chi_\pi|\chi_\pi)_G = \sum_{i=1}^{s} \dim\, Hom_{H_{a_i}}(W, W_i).$$

Pri izboru predstavnika duplih $(H:H)-$klasa možemo uzeti da je $a_1 = e$ i da su $a_2, \dots, a_s \in G \setminus H$. Tada je $H_{a_1} = H_e = H$ i $\rho_{a_1} = \rho_e = \rho$. Dakle,

$$(\chi_\pi|\chi_\pi)_G = \dim\, Hom_H(W, W) + \sum_{i=2}^{s} \dim\, Hom_{H_{a_i}}(W, W_i).$$

Odatle se vidi da je $(\chi_\pi|\chi_\pi)_G = 1$ ako i samo ako je $\dim\, Hom_H(W, W) = 1$ i $Hom_{H_{a_i}}(W_i, W) = \{0\}$ za $i = 2, \dots, s$. Kako je $G \setminus H = Ha_2H \cup \dots \cup Ha_sH$ zbog sljedećeg zadatka vidimo da to upravo znači da je reprezentacija π ireducibilna ako i samo ako vrijedi (a) i (b).

Zadatak 3.8.2. *Uz oznake teorema 3.8.1. dokažite da su za $a, b \in G$ takve da je $HaH = HbH$ reprezentacije $\rho|H_a$ i ρ_a grupe H_a disjunktne ako i samo ako su reprezentacije $\rho|H_b$ i ρ_b grupe H_b disjunktne.*

Uputa: Primijenite lemu 3.6.2. i tvrdnju (a) teorema 3.4.1. ili dokažite da ako je $a = hbh'$, tada je $H_a = hH_bh^{-1}$ i $\rho_a(x) = \rho(h')^{-1}\rho_b\,(h^{-1}xh)\,\rho(h')$, a zatim direktno konstruirajte izomorfizam prostora $Hom_{H_a}(W, W_a)$ na prostor $Hom_{H_b}(W, W_b)$, pri čemu je W_a (odnosno, W_b) prostor W na kome djeluje reprezentacija ρ_a grupe H_a (odnosno, reprezentacija ρ_b grupe H_b).

Korolar 3.8.2. *Neka je H normalna podgrupa grupe G i ρ reprezentacija grupe H. Reprezentacija $Ind_H^G\,\rho$ je ireducibilna ako i samo ako je ρ ireducibilna i za svaki $a \in G \setminus H$ vrijedi $\rho \not\simeq \rho_a$, pri čemu je ρ_a reprezentacija od H definirana konjugiranjem reprezentacije ρ :*

$$\rho_a(h) = \rho\left(a^{-1}ha\right), \qquad h \in H.$$

Dokaz: Doista, tada je $H_a = H$ za svaki a.

3.9 Induciranje za grupovne algebre

U ovoj točki opisat ćemo konstrukciju inducirane reprezentacije u terminima grupovnih algebri. Naime, prema teoremu 1.2.2. reprezentacija π grupe G na vektorskom prostoru V daje reprezentaciju unitalne grupovne algebre $\mathbb{C}[G]$ na istom prostoru za koju smo se dogovorili da ćemo je označavati istim znakom π :

$$\pi(\varphi) = \sum_{a\in G} \varphi(a)\pi(a), \qquad \varphi \in \mathbb{C}[G].$$

Također, reprezentacija ρ podgrupe H grupe G na prostoru W je ujedno reprezentacija unitalne grupovne algebre $\mathbb{C}[H]$:

$$\rho(\psi) = \sum_{b\in H} \psi(b)\rho(b), \qquad \psi \in \mathbb{C}[H].$$

Opisat ćemo sada na koji se način reprezentacija $\pi = Ind_H^G\,\rho$ promatrana kao reprezentacija unitalne algebre $\mathbb{C}[G]$ dobiva iz reprezentacije ρ promatrane kao reprezentaciju unitalne algebre $\mathbb{C}[H]$.

Prije svega, uočimo da se $\mathbb{C}[H]$ može promatrati kao unitalna podalgebra od $\mathbb{C}[G]$.

Propozicija 3.9.1. *Za $\psi \in \mathbb{C}[H]$ definiramo funkciju $\Phi(\psi) \in \mathbb{C}[G]$ na sljedeći način:*

$$[\Phi(\psi)](a) = \begin{cases} \psi(a) & \textit{ako je } a \in H \\ \\ 0 & \textit{ako je } a \in G \setminus H, \end{cases} \qquad a \in G.$$

Preslikavanje Φ je unitalni monomorfizam unitalne algebre $\mathbb{C}[H]$ u unitalnu algebru $\mathbb{C}[G]$.

Dokaz: Očito je preslikavanje $\Phi : \mathbb{C}[H] \to \mathbb{C}[G]$ linearno. Nadalje, za $\psi_1, \psi_2 \in \mathbb{C}[H]$ konvolucija funkcija $\Phi(\psi_1)$ i $\Phi(\psi_2)$ na grupi G dana je za $a \in G$ sa

$$[\Phi(\psi_1) * \Phi(\psi_2)](a) = \sum_{b\in G} [\Phi(\psi_1)](b)[\Phi(\psi_2)]\left(b^{-1}a\right).$$

Kako je $[\Phi(\psi_1)](b) = 0$ za $b \in G \setminus H$ i $[\Phi(\psi_1)](b) = \psi_1(b)$ za $b \in H$, nalazimo za $a \in G$

$$[\Phi(\psi_1) * \Phi(\psi_2)](a) = \sum_{b\in H} \psi_1(b)[\Phi(\psi_2)]\left(b^{-1}a\right).$$

Ako je $b \in H$ i $a \in G \setminus H$ onda je $b^{-1}a \in G \setminus H$ pa je $[\Phi(\psi_2)]\left(b^{-1}a\right) = 0$. Stoga je

$$[\Phi(\psi_1) * \Phi(\psi_2)](a) = 0 \qquad \forall a \in G \setminus H.$$

S druge strane, ako je $b \in H$ i $a \in H$ onda je $b^{-1}a \in H$ pa je $[\Phi(\psi_2)]\left(b^{-1}a\right) = \psi_2\left(b^{-1}a\right)$. Stoga je

$$[\Phi(\psi_1) * \Phi(\psi_2)](a) = \sum_{b\in H} \psi_1(b)\psi_2\left(b^{-1}a\right) = (\psi_1 * \psi_2)(a) \qquad \forall a \in H,$$

pri čemu je $\psi_1 * \psi_2$ oznaka za konvoluciju na grupi H. Iz prethodne dvije jednakosti slijedi

$$[\Phi(\psi_1) * \Phi(\psi_2)](a) = \left\{ \begin{array}{ll} (\psi_1 * \psi_2)(a) & \text{ako je } a \in H \\ \\ 0 & \text{ako je } a \in G \setminus H \end{array} \right\} = [\Phi(\psi_1 * \psi_2)](a) \qquad \forall a \in G.$$

Time je dokazano da je $\Phi(\psi_1 * \psi_2) = \Phi(\psi_1) * \Phi(\psi_2)$ $\forall \psi_1, \psi_2 \in \mathbb{C}[H]$, tj. Φ je homomorfizam algebre $\mathbb{C}[H]$ u algebru $\mathbb{C}[G]$. Taj je homomorfizam očito injektivan, tj. to je monomorfizam. Napokon, monomorfizam Φ je unitalan jer je očito $\Phi\left(\delta_e^H\right) = \delta_e^G$, gdje su δ_e^H i δ_e^G jedinice u algebrama $\mathbb{C}[H]$ i $\mathbb{C}[G]$:

$$\delta_e^H(b) = \begin{cases} 1 & \text{ako je } b = e \\ 0 & \text{ako je } b \neq e \end{cases}, \qquad \delta_e^G(a) = \begin{cases} 1 & \text{ako je } a = e \\ 0 & \text{ako je } a \neq e \end{cases}, \qquad b \in H, \quad a \in G.$$

Zadatak 3.9.1. *Dokažite da je preslikavanje $\Psi : \mathbb{C}[G] \to \mathbb{C}[H]$ definirano kao restrikcija sa G na H, tj.*

$$\Psi(\varphi) = \varphi|H, \qquad \varphi \in \mathbb{C}[G],$$

lijevi invers homomorfizma $\Phi : \mathbb{C}[H] \to \mathbb{C}[G]$ iz propozicije 3.9.1. Da li je Ψ homomorfizam algebri?

Monomorfizam Φ iz propozicije 3.9.1. shvaćat ćemo kao identifikaciju. Na taj način $\mathbb{C}[H]$ postaje unitalna podalgebra od $\mathbb{C}[G]$. Funkcija $\psi \in \mathbb{C}[H]$ identificira se s funkcijom na G koja se na H podudara sa ψ a na $G \setminus H$ je jednaka nuli.

Neka je sada $\varphi \in \mathbb{C}[G]$ i neka je $\psi \in \mathbb{C}[H]$ identificirana na opisani način s funkcijom iz $\mathbb{C}[G]$. Kako je $\psi|G \setminus H = 0$, vrijedi za $a \in G$

$$(\psi * \varphi)(a) = \sum_{b \in G} \psi(b)\varphi\left(b^{-1}a\right) = \sum_{b \in H} \psi(b)\varphi(\left(b^{-1}a\right).$$

Nadalje, zamjenom varijable sumacije $b \mapsto ab$, a zatim $b \mapsto b^{-1}$, nalazimo za $a \in G$

$$(\varphi * \psi)(a) = \sum_{b \in G} \varphi(b)\psi\left(b^{-1}a\right) = \sum_{b \in G} \varphi(ab)\psi\left(b^{-1}\right) =$$

$$= \sum_{b \in G} \varphi\left(ab^{-1}\right)\psi(b) = \sum_{b \in H} \varphi\left(ab^{-1}\right)\psi(b).$$

Dakle, imamo sljedeće formule za konvoluciju funkcija iz $\mathbb{C}[G]$ zdesna, odnosno slijeva, s funkcijama iz $\mathbb{C}[H]$:

$$(\psi * \varphi)(a) = \sum_{b \in H} \psi(b)\varphi\left(b^{-1}a\right) = \sum_{b \in H} \psi\left(b^{-1}\right)\varphi(ba), \qquad \psi \in \mathbb{C}[H], \quad \varphi \in \mathbb{C}[G], \quad a \in G; \tag{3.1}$$

$$(\varphi * \psi)(a) = \sum_{b \in H} \varphi\left(ab^{-1}\right)\psi(b) = \sum_{b \in H} \varphi(ab)\psi\left(b^{-1}\right), \qquad \varphi \in \mathbb{C}[G], \quad \psi \in \mathbb{C}[H], \quad a \in G. \tag{3.2}$$

U daljnjem ćemo se koristiti s pojmom modula nad prstenom. Ako je R prsten (ne nužno komutativan), **lijevi modul nad prstenom** R ili **lijevi** R**−modul** je aditivna Abelova grupa V za koju je zadano lijevo množenje elementima prstena R, tj. zadano je preslikavanje $R \times V \to V$, $(\varphi, v) \mapsto \varphi v$, sa svojstvima:

(*i*) $(\varphi_1 + \varphi_2)v = \varphi_1 v + \varphi_2 v$ $\forall \varphi_1, \varphi_2 \in R$ i $\forall v \in V$;

(*ii*) $\varphi(v_1 + v_2) = \varphi v_1 + \varphi v_2$ $\forall \varphi \in R$ i $\forall v_1, v_2 \in V$;

(*iii*) $(\varphi_1\varphi_2)v = \varphi_1(\varphi_2 v)$ $\forall \varphi_1, \varphi_2 \in R$ i $\forall v \in V$.

Ako je prsten R unitalan s jedinicom 1_R, **lijevi** R**−modul** V se zove **unitalan**, ako vrijedi i

(*iv*) $1_R v = v$ $\forall v \in V$.

Ako su V i W lijevi $R-$moduli, preslikavanje $A : V \to W$ zove se **homomorfizam $R-$modula** ili **$R-$homomorfizam** ako je preslikavanje A aditivno

$$A(v_1 + v_2) = A(v_1) + A(v_2) \qquad \forall v_1, v_2 \in V$$

i ako vrijedi

$$A(\varphi v) = \varphi A(v) \qquad \forall \varphi \in R \quad \text{i} \quad \forall v \in V.$$

Skup svih $R-$homomorfizama modula V u modul W označavat ćemo sa $Hom_R(V, W)$. Taj je skup aditivna grupa uz zbrajanje definirano po točkama:

$$(A + B)(v) = A(v) + B(v), \qquad A, B \in Hom_R(V, W), \quad v \in V.$$

Reprezentacije unitalne algebre $\mathcal{A}$ u uskoj su vezi s unitalnim lijevim $\mathcal{A}-$modulima:

Propozicija 3.9.2. *Neka je $\mathcal{A}$ unitalna algebra nad poljem K s jedinicom $1_{\mathcal{A}}$.*

(a) *Neka je π reprezentacija unitalne algebre $\mathcal{A}$ na vektorskom prostoru V nad poljem K. Za $\varphi \in \mathcal{A}$ i $v \in V$ stavimo $\varphi v = \pi(\varphi)v$. Tada je V unitalan lijevi modul nad unitalnim prstenom $\mathcal{A}$.*

(b) *Neka je V unitalan lijevi modul nad unitalnim prstenom $\mathcal{A}$. Za $\lambda \in K$ i $v \in V$ definiramo $\lambda v = (\lambda 1_{\mathcal{A}})v$. Tada V postaje vektorski prostor nad poljem K. Nadalje, ako za $\varphi \in \mathcal{A}$ definiramo $\pi(\varphi) : V \to V$ sa $\pi(\varphi)v = \varphi v$, $v \in V$, tada je svaki $\pi(\varphi)$ linearan operator na vektorskom prostoru V i $\pi : \mathcal{A} \to L(V)$ je reprezentacija unitalne algebre $\mathcal{A}$.*

(c) *Ako su π i ρ reprezentacije unitalne algebre $\mathcal{A}$ na vektorskim prostorima V i W onda je preslikavanje $A : V \to W$ preplitanje reprezentacija π i ρ ako i samo ako je to homomorfizam lijevih $\mathcal{A}-$modula V u W. Posebno, svaki $\mathcal{A}-$homomorfizam je linearan operator s vektorskog prostora V u vektorski prostor W.*

Zadatak 3.9.2. *Dokažite propoziciju 3.9.2.*

Sasvim analogno lijevim modulima definira se i pojam **desnog modula nad prstenom S** ili **desnog $S-$modula**. To je aditivna Abelova grupa V na kojoj je definirano desno množenje elemntima iz S, tj. zadano je preslikavanje $V \times S \to V$, $(v, \psi) \mapsto v\psi$, sa svojstvima.

(i') $v(\psi_1 + \psi_2) = v\psi_1 + v\psi_2$ $\forall \psi_1, \psi_2 \in S$ i $\forall v \in V$;

(ii') $(v_1 + v_2)\psi = v_1\psi + v_2\psi$ $\forall \psi \in S$ i $\forall v_1, v_2 \in V$;

(iii') $v(\psi_1\psi_2) = (v\psi_1)\psi_2$ $\forall \psi_1, \psi_2 \in S$ i $\forall v \in V$.

Ako je prsten S unitalan s jedinicom 1_S, **desni $S-$modul** V se zove **unitalan**, ako vrijedi i

(iv') $v1_S = v$ $\forall v \in V$.

Ako su R i S prstenovi, **$(R, S)-$bimodul** je aditivna Abelova grupa na kojoj je zadano lijevo množenje elementima iz R i desno množenje elementima iz S, tj. zadana su preslikavanja $(\varphi, v) \mapsto \varphi v$ sa $R \times V$ u V i $(v, \psi) \mapsto v\psi$ sa $V \times S$ u V takva da vrijede (i), (ii), (iii), (i'), (ii') i (iii') i dva množenja međusobno komutiraju, tj. vrijedi

(v) $(\varphi v)\psi = \varphi(v\psi)$ $\forall \varphi \in R$, $\forall \psi \in S$ i $\forall v \in V$.

Ako su prsteni R i S unitalni i ako vrijede (iv) i (iv'), tj. ako je V unitalan kao lijevi $R-$modul i kao desni $S-$modul, V se zove **unitalan $(R, S)-$bimodul**.

U daljnjem ćemo promatrati samo unitalne prstenove. Umjesto *unitalan lijevi* (odnosno, *desni*) *modul* govorit ćemo kraće *lijevi* (odnosno, *desni*) *modul.* Također, *bimodul* će značiti *unitalni bimodul.*

Generalizirat ćemo sada pojam tenzorskog produkta za module nad prstenovima. Neka su R prsten, V desni $R-$modul i W lijevi $R-$modul. Ako je Z aditivna Abelova grupa, preslikavanje $\chi : V \times W \to Z$ zove se $R-$**bimorfizam** ako je to preslikavanje biaditivno

$$\chi(v_1 + v_2, w) = \chi(v_1, w) + \chi(v_2, w) \qquad \forall v_1, v_2 \in V \quad \text{i} \quad \forall w \in W,$$

$$\chi(v, w_1 + w_2) = \chi(v, w_1) + \chi(v, w_2) \qquad \forall v \in V \quad \text{i} \quad \forall w_1, w_2 \in W$$

i ako vrijedi

$$\chi(v\varphi, w) = \chi(v, \varphi w) \qquad \forall v \in V, \quad \forall w \in W \quad \text{i} \quad \forall \varphi \in R.$$

Tenzorski produkt V i W je uređen par (T, χ), gdje T aditivna Abelova grupa i $\chi : V \times W \to T$ $R-$bimorfizam, koji ima *univerzalno svojstvo*:

> Ako je Z aditivna Abelova grupa i $\psi : V \times W \to Z$ $R-$bimorfizam, postoji jedinstven homomorfizam grupa $\Psi : T \to Z$ takav da je $\psi = \Psi \circ \chi$, tj. $\psi(v, w) = \Psi(\chi(v, w))$ $\forall v \in V$ i $\forall w \in W$.

Sasvim analogno kao i za tenzorski produkt vektorskih prostora dokazuje se teorem o egzistenciji i jedinstvenosti (do na izomorfizam) tenzorskog produkta modula:

Teorem 3.9.3. *Neka su R (unitalan) prsten, V (unitalan) desni $R-$modul i W (unitalan) lijevi $R-$modul.*

(a) *Postoji tenzorski produkt (T, χ) modula V i W.*

(b) *Ako su (T, χ) i (T', χ') tenzorski produkti modula V i W, onda postoji jedinstven izomorfizam grupa $\Phi : T \to T'$ takav da je $\chi' = \Phi \circ \chi$.*

Uobičajeno je da se tenzorski produkt modula V i W označava sa $V \otimes_R W$ podrazumijevajući da je pripadni $R-$bimorfizam dan sa $(v, w) \mapsto v \otimes_R w$. U slučaju modula nemamo analogon s teoremom 1.3.2. jer u modulima općenito ne postoji analogon baze. No može se dokazati:

Teorem 3.9.4. *Ako su R prsten, V desni $R-$modul i W lijevi $R-$modul, Abelova grupa $V \otimes_R W$ generirana je skupom $\{v \otimes_R w;\ v \in V,\ w \in W\}$. Štoviše, ako skup $T \subseteq V$ generira desni $R-$modul V i ako skup $S \subseteq W$ generira lijevi $R-$modul W onda skup $\{v \otimes_R w;\ v \in T,\ w \in S\}$ generira grupu $V \otimes_R W$.*

Ako desni $R-$modul V i/ili lijevi $R-$modul W imaju dodatnu strukturu, ona se prenosi na tenzorski produkt $V \otimes_R W$:

Teorem 3.9.5. *Neka su R, S i T prstenovi.*

(a) *Neka je V $(R, S)-$bimodul i W lijevi $S-$modul. Tada na Abelovoj grupi $V \otimes_S W$ postoji jedinstvena struktura lijevog $R-$modula takva da vrijedi*

$$\varphi(v \otimes_S w) = (\varphi v) \otimes_S w \qquad \forall (v, w) \in V \times W \quad i \quad \forall \varphi \in R.$$

(b) *Neka je V desni $R-$modul i W $(R, S)-$bimodul. Tada na Abelovoj grupi $V \otimes_R W$ postoji jedinstvena struktura desnog $S-$modula takva da vrijedi*

$$(v \otimes_R w)\psi = v \otimes_R (w\psi) \qquad \forall (v, w) \in V \times W \quad i \quad \forall \psi \in S.$$

(c) *Neka je V $(R,S)-$bimodul i W $(S,T)-$bimodul. Tada na Abelovoj grupi $V \otimes_S W$ postoji jedinstvena struktura $(R,T)-$bimodula takva da vrijedi*

$$\varphi(v \otimes_S w)\chi = (\varphi v) \otimes_S (w\chi) \qquad \forall (v,w) \in V \times W, \quad \forall \varphi \in R \quad i \quad \forall \chi \in T.$$

Nadalje, do na izomorfizam vrijedi i svojstvo asocijativnosti:

Teorem 3.9.6. *Neka su R, S i T prstenovi i neka su V desni $R-$modul, W $(R,S)-$bimodul i U lijevi $S-$modul. Tada postoji jedinstven homomorfizam aditivnih grupa*

$$\Phi : (V \otimes_R W) \otimes_S U \to V \otimes_R (W \otimes_S U)$$

takav da vrijedi

$$\Phi((v \otimes_R w) \otimes_S u) = v \otimes_R (w \otimes_S u) \qquad \forall (v,w,u) \in V \times W \times U.$$

Φ je izomorfizam grupa. Ako je V ne samo desni $R-$modul nego $(T,R)-$bimodul onda je Φ izomorfizam lijevih $T-$modula, a ako je U ne samo lijevi $S-$modul nego $(S,T)-$bimodul onda je Φ izomorfizam desnih $T-$modula.

Sljedeća dva teorema daju i izomorfizme grupa (odnosno, modula) homomorfizama.

Teorem 3.9.7. *Neka su R, S i T prstenovi i neka su V desni $R-$modul, W $(R,S)-$bimodul i U desni $S-$modul. Postoji jedinstven homomorfizam aditivnih grupa*

$$\Phi : Hom_S(V \otimes_R W, U) \to Hom_R(V, Hom_S(W,U))$$

takav da vrijedi

$$\{[\Phi(F)](v)\}(w) = F(v \otimes_R w) \qquad \forall F \in Hom_S(V \otimes_R W, U), \quad \forall v \in V \quad i \quad \forall w \in W.$$

Pri tome je $Hom_S(X,Y)$ oznaka za aditivnu grupu homomorfizama desnih $S-$modula X i Y, $Hom_R(X,Y)$ je oznaka za aditivnu grupu homomorfizme desnih $R-$modula X i Y, a aditivna grupa $Hom_S(W,U)$ ima strukturu desnog $R-$modula preko sljedećeg desnog množenja elementima iz R :

$$(G\varphi)(w) = G(\varphi w), \qquad G \in Hom_S(W,U), \quad \varphi \in R, \quad w \in W.$$

Φ je izomorfizam grupe $Hom_S(V \otimes_R W, U)$ na grupu $Hom_R(V, Hom_S(W,U))$.

Ako je U ne samo desni $S-$modul nego $(T,S)-$bimodul, onda se mogu definirati strukture lijevih $T-$modula na aditivnim grupama $Hom_S(V \otimes_R W, U)$ i $Hom_R(V, Hom_S(W,U))$ preko sljedećih lijevih množenja elementima iz T :

$$(\chi F)(x) = \chi F(x), \qquad \chi \in T, \quad F \in Hom_S(V \otimes_R W, U), \quad x \in V \otimes_R W,$$

$$[(\chi G)(v)](w) = \chi\{[G(v)](w)\}, \qquad \chi \in T, \quad G \in Hom_R(V, Hom_S(W,U)), \quad v \in V, \quad w \in W.$$

U tom slučaju je Φ izomorfizam lijevih $T-$modula.

Ako je V ne samo desni $R-$modul nego $(T,R)-$bimodul, onda se mogu definirati strukture desnih $T-$modula na aditivnim grupama $Hom_S(V \otimes_R W, U)$ i $Hom_R(V, Hom_S(W,U))$ preko sljedećih desnih množenja elementima it T :

$$(F\chi)(x) = F(\chi x), \qquad \chi \in T, \quad F \in Hom_S(V \otimes_R W, U), \quad x \in V \otimes_R W,$$

$$(G\chi)(v) = G(\chi v), \qquad \chi \in T, \quad G \in Hom_R(V, Hom_S(W,U)), \quad v \in V.$$

U tom slučaju je Φ izomorfizam desnih $T-$modula.

Teorem 3.9.8. *Neka su R, S i T prstenovi i neka su V lijevi $R-$modul, W $(S,R)-$bimodul i U lijevi $S-$modul. Postoji jedinstven homomorfizam aditivnih grupa*

$$\Phi : Hom_S(W \otimes_R V, U) \to Hom_R(V, Hom_S(W, U))$$

takav da vrijedi

$$\{[\Phi(F)](v)\}(w) = F(w \otimes_R v) \qquad \forall F \in Hom_S(W \otimes_R V, U), \quad \forall v \in V \quad i \quad \forall w \in W.$$

Pri tome je $Hom_S(X,Y)$ oznaka za aditivnu grupu homomorfizama lijevih $S-$modula X i Y, $Hom_R(X,Y)$ je oznaka za aditivnu grupu homomorfizama lijevih $R-$modula X i Y, a aditivna grupa $Hom_S(W,U)$ ima strukturu lijevog $R-$modula preko sljedećeg lijevog množenja elementima iz R :

$$(\varphi G)(w) = G(w\varphi), \qquad \varphi \in R, \quad G \in Hom_S(W,U), \quad w \in W.$$

Φ je izomorfizam grupe $Hom_S(W \otimes_R V, U)$ na grupu $Hom_R(V, Hom_S(W,U))$.

Ako je U ne samo lijevi $S-$modul nego $(S,T)-$bimodul, onda se mogu definirati strukture lijevih $T-$modula na aditivnim grupama $Hom_S(W \otimes_R V, U)$ i $Hom_R(V, Hom_S(W,U))$ preko sljedećih lijevih množenja elementima iz T :

$$(\chi F)(x) = F(x)\chi, \qquad \chi \in T, \quad F \in Hom_S(W \otimes_R V, U), \quad x \in W \otimes_R V,$$

$$\{[(\chi G)](v)\}(w) = \{[G(v)](w)\}\chi, \qquad \chi \in T, \quad G \in Hom_R(V, Hom_S(W,U)), \quad v \in V, \quad w \in W.$$

U tom slučaju je Φ izomorfizam lijevih $T-$modula.

Ako je V ne samo lijevi $R-$modul nego $(R,T)-$bimodul, onda se mogu definirati strukture lijevih $T-$modula na aditivnim grupama $Hom_S(W \otimes_R V, U)$ i $Hom_R(V, Hom_S(W,U))$ preko sljedećih lijevih množenja elementima iz T :

$$(\chi F)(x) = F(x\chi), \qquad \chi \in T, \quad F \in Hom_S(W \otimes_R V, U), \quad x \in W \otimes_R V,$$

$$(\chi G)(v) = G(v\chi), \qquad \chi \in T, \quad G \in Hom_R(V, Hom_S(W,U)), \quad v \in V.$$

U tom slučaju je Φ izomorfizam lijevih $T-$modula.

Neka je sada R prsten i S potprsten. Ako je V lijevi (odnosno, desni) $R-$modul onda možemo suziti operaciju množenja elementima prstena na potprsten S. Na taj način iz lijevog (odnosno, desnog) $R-$modula V dolazimo do lijevog (odnosno, desnog) $S-$modula koji se kao aditivna grupa podudara sa V. Ta se konstrukcija zove **suženje prstena skalara**.

S druge strane, neka je V lijevi $S-$modul. Prsten R možemo shvaćati kao $(R,S)-$bimodul, pa možemo formirati tenzorski produkt $R \otimes_S V$. Prema tvrdnji (a) teorema 3.9.5. $R \otimes_S V$ je lijevi $R-$modul i vrijedi

$$\varphi(\psi \otimes_S v) = (\varphi\psi) \otimes_S v \qquad \forall \varphi, \psi \in R \quad \text{i} \quad \forall v \in V.$$

Analogno, ako je V desni $S-$modul, R možemo shvaćati kao $(S,R)-$bimodul pa prema tvrdnji (b) teorema 3.9.5. $V \otimes_S R$ ima strukturu desnog $R-$modula i vrijedi

$$(v \otimes_S \varphi)\psi = v \otimes_S (\varphi\psi) \qquad \forall \varphi, \psi \in R \quad \text{i} \quad \forall v \in V.$$

Ove konstrukcije zovu se **proširenja prstena skalara**.

Zadatak 3.9.3. *Neka je R unitalni prsten i neka je V lijevi (odnosno, desni) unitalni $R-$modul. Promatramo R kao $(R,R)-$bimodul i definiramo lijevi (odnosno, desni) $R-$modul $R \otimes_R V$ (odnosno, $V \otimes_R R$). Dokažite da je taj modul izomorfan modulu V.*

Uputa: Promatrajte preslikavanje $\Phi : V \to R \otimes_R V$ definirano sa

$$\Phi(v) = 1_R \otimes_R v, \qquad v \in V,$$

i dokažite da je Φ homomorfizam lijevih $R-$modula. Zatim promatrajte preslikavanje

$$\psi : R \times V \to V \qquad \text{definirano sa} \quad \psi(\alpha, v) = \alpha v, \quad \alpha \in R, \quad v \in V,$$

i dokažite da je ψ $(R,R)-$bimorfizam. Napokon, dokažite da je pripadni homomorfizam lijevih $R-$modula

$$\Psi : R \otimes_R V \to V, \qquad \text{takav da je} \quad \Psi(\alpha \otimes_R v) = \alpha v, \quad \alpha \in R, \quad v \in V,$$

inverzno preslikavanje od Φ.

Neka je sada G konačna grupa i H njena podgrupa i neka je ρ reprezentacija grupe H na (konačnodimenzionalnom kompleksnom) vektorskom prostoru W. Neka je $\pi = Ind_H^G\, \rho$ inducirana reprezentacija grupe G na prostoru $V = Ind_H^G\, W$:

$$V = \{f : G \to W;\ f(hg) = \rho(h)f(g)\ \forall h \in H \text{ i } \forall g \in G\}, \qquad [\pi(a)f](g), \quad f \in V,\ a, g \in G.$$

Cilj nam je ustanoviti da je induciranje zapravo proširenje prstena skalara, tj. da je V kao lijevi $\mathbb{C}[G]-$modul izomorfan lijevom $\mathbb{C}[G]-$modulu $\mathbb{C}[G] \otimes_{\mathbb{C}[H]} V$:

Teorem 3.9.9. *Uz uvedene oznake lijevi $\mathbb{C}[G]-$modul V je izomorfan modulu $\mathbb{C}[G] \otimes_{\mathbb{C}[H]} W$.*

Dokaz: Definiramo bilinearno preslikavanje χ sa $\mathbb{C}[G] \times W$ u prostor W^G svih funkcija sa G u W :

$$[\chi(\varphi, w)](a) = \frac{1}{|H|} \sum_{b \in H} \varphi\left(a^{-1}b\right) \rho(b)w, \qquad \varphi \in \mathbb{C}[G], \quad w \in W, \quad a \in G,$$

gdje kao i obično $|H|$ označava broj elemenata grupe H. Za $\varphi \in \mathbb{C}[G]$, $w \in W$, $a \in G$ i $h \in H$ imamo

$$[\chi(\varphi, w)](ha) = \frac{1}{|H|} \sum_{b \in H} \varphi\left(a^{-1}h^{-1}b\right) \rho(b)w = \frac{1}{|H|} \sum_{b \in H} \varphi\left(a^{-1}b\right) \rho(hb)w =$$

$$= \frac{1}{|H|} \sum_{b \in H} \varphi\left(a^{-1}b\right) \rho(h)\rho(b)w = \rho(h)\frac{1}{|H|} \sum_{b \in H} \varphi\left(a^{-1}b\right) \rho(b)w = \rho(h)[\chi(\varphi, w)](a).$$

Pri tome, druga jednakost posljedica je zamjene varijable sumacije $b \mapsto hb$. Time je dokazano da je $\chi(\varphi, w) \in V$, tj. χ je preslikavanje sa $\mathbb{C}[G] \times W$ u V. Dokažimo da je χ $\mathbb{C}[H]-$bimorfizam, tj. da vrijedi

$$\chi(\varphi * \psi, w) = \chi(\varphi, \psi w) = \chi(\varphi, \rho(\psi)w) \qquad \forall \varphi \in \mathbb{C}[G], \quad \forall \psi \in \mathbb{C}[H], \quad \forall w \in W,$$

pri čemu je

$$\rho(\psi)w = \sum_{b \in H} \psi(b)\rho(b)w, \qquad \psi \in \mathbb{C}[H], \quad w \in W.$$

Doista, neka su $\varphi \in \mathbb{C}[G]$, $\psi \in \mathbb{C}[H]$, $w \in W$ i $a \in G$. Tada prema formuli (3.2), zatim zamjenom varijable sumacije $c \mapsto b^{-1}c$, pa zamjenom redoslijeda dviju sumacija, pa zamjenom druge varijable sumacije $b \mapsto cb$, imamo redom

$$[\chi(\varphi * \psi, w)](a) = \frac{1}{|H|} \sum_{b \in H} (\varphi * \psi)\left(a^{-1}b\right) \rho(b)w = \frac{1}{|H|} \sum_{b \in H} \left[\sum_{c \in H} \varphi\left(a^{-1}bc\right) \psi\left(c^{-1}\right)\right] \rho(b)w =$$

$$= \frac{1}{|H|} \sum_{b \in H} \left[\sum_{c \in H} \varphi\left(a^{-1}c\right) \psi\left(c^{-1}b\right) \right] \rho(b)w = \frac{1}{|H|} \sum_{c \in H} \varphi\left(a^{-1}c\right) \left[\sum_{b \in H} \psi\left(c^{-1}b\right) \rho(b)w \right] =$$

$$= \frac{1}{|H|} \sum_{c \in H} \varphi\left(a^{-1}c\right) \left[\sum_{b \in H} \psi(b)\rho(cb)w \right] = \frac{1}{|H|} \sum_{c \in H} \varphi\left(a^{-1}c\right) \left[\sum_{b \in H} \psi(b)\rho(c)\rho(b)w \right] =$$

$$= \frac{1}{|H|} \sum_{c \in H} \varphi\left(a^{-1}c\right) \rho(c) \left[\sum_{b \in H} \psi(b)\rho(b)w \right] = \frac{1}{|H|} \sum_{c \in H} \varphi\left(a^{-1}c\right) \rho(c)\rho(\psi)w = [\chi(\varphi, \rho(\psi)w)](a).$$

Time je dokazano da je $\chi : \mathbb{C}[G] \times W \to V$ $\mathbb{C}[H]-$bimorfizam. Po definiciji tenzorskog produkta nad prstenom postoji jedinstven homomorfizam aditivnih grupa $X : \mathbb{C}[G] \otimes_{\mathbb{C}[H]} W \to V$ takav da vrijedi

$$X\left(\varphi \otimes_{\mathbb{C}[H]} w\right) = \chi(\varphi, w) \qquad \forall \varphi \in \mathbb{C}[G] \quad \text{i} \quad \forall w \in W,$$

tj.

$$\left[X\left(\varphi \otimes_{\mathbb{C}[H]} w\right)\right](a) = \sum_{b \in H} \varphi\left(a^{-1}b\right) \rho(b)w \qquad \forall \varphi \in \mathbb{C}[G], \quad \forall w \in W \quad \text{i} \quad \forall a \in G.$$

Budući da je preslikavanje χ bilinearno (nad $\mathbb{C}$) odmah se vidi da je X linearan operator sa vektorskog prostora $\mathbb{C}(G) \otimes_{\mathbb{C}[H]} W$ u vektorski prostor V.

Dokažimo da je X homomorfizam lijevih $\mathbb{C}[G]-$modula, tj. da vrijedi

$$X(\varphi' * \varphi \otimes_{\mathbb{C}[H]} w) = \pi(\varphi')X(\varphi \otimes_{\mathbb{C}[H]} w) \qquad \forall \varphi', \varphi \in \mathbb{C}[G] \quad \text{i} \quad \forall w \in W, \tag{3.3}$$

pri čemu je $\pi = Ind_H^G \rho$, tj.

$$[\pi(\varphi')f](a) = \sum_{g \in G} \varphi'(g)[\pi(g)f](a) = \sum_{g \in G} \varphi'(g)f(ag), \qquad \varphi' \in \mathbb{C}[G], \quad f \in V, \quad a \in G.$$

Doista, za $\varphi', \varphi \in \mathbb{C}[G]$, $w \in W$ i $a \in G$ imamo

$$\left[X\left(\varphi' * \varphi \otimes_{\mathbb{C}[H]} w\right)\right](a) = \frac{1}{|H|} \sum_{b \in H} (\varphi' * \varphi)\left(a^{-1}b\right) \rho(b)w =$$

$$= \frac{1}{|H|} \sum_{b \in H} \left[\sum_{g \in G} \varphi'(g)\varphi\left(g^{-1}a^{-1}b\right) \right] \rho(b)w = \sum_{g \in G} \varphi^{-1}(g) \left[\frac{1}{|H|} \sum_{b \in H} \varphi\left((ag)^{-1}b\right) \rho(b)w \right] =$$

$$= \sum_{g \in G} \varphi' \left[X\left(\varphi \otimes_{\mathbb{C}[H]} w\right)\right](ag) = \sum_{g \in G} \varphi'(g) \left[\pi(g)X\left(\varphi \otimes_{\mathbb{C}[H]} w\right)\right](a) = \left[\pi(\varphi')X\left(\varphi \otimes_{\mathbb{C}[H]} w\right)\right](a),$$

a kako je $a \in G$ bio proizvoljan, slijedi (3.3).

Treba još dokazati da je linearan operator X izomorfizam vektorskih prostora. U tu svrhu konstruirat ćemo inverzno preslikavanje $Y : V \to \mathbb{C}[G] \otimes_{\mathbb{C}[H]} W$. Neka je $\{w_1, w_2, \ldots, w_m\}$ baza vektorskog prostora W. Za $f \in V$ definiramo funkcije $f_1, f_2, \ldots, f_m \in \mathbb{C}[G]$ kao koordinatne funkcije od f u izabranoj bazi:

$$f(a) = \sum_{j=1}^{m} f_j(a)w_j, \qquad a \in G.$$

Neka su $\rho_{kj}(b)$ matrični elementi operatora $\rho(b)$ u bazi $\{w_1, w_2, \ldots, w_m\}$:

$$\rho(b)w_k = \sum_{j=1}^{m} \rho_{jk}(b)w_j, \qquad b \in H, \quad k \in \{1, 2, \ldots, m\}.$$

Budući da je $f \in V$, za $a \in G$ i $b \in H$ vrijedi $f(ba) = \rho(b) f(a)$, pa imamo redom:

$$\sum_{j=1}^{m} f_j(ba) w_j = \sum_{k=1}^{m} f_k(a) \rho(b) w_k = \sum_{k=1}^{m} f_k(a) \left[\sum_{j=1}^{m} \rho_{jk}(b) w_j \right] = \sum_{j=1}^{m} \left[\sum_{k=1}^{m} \rho_{jk}(b) f_k(a) \right] w_j.$$

Odatle slijedi

$$f_j(ba) = \sum_{k=1}^{m} \rho_{jk}(b) f_k(a), \qquad f \in V, \quad a \in G, \quad b \in H, \quad j \in \{1, 2, \dots, m\}. \tag{3.4}$$

Za $f \in V$ definiramo $Yf \in \mathbb{C}[G] \otimes_{\mathbb{C}[H]} W$ ovako:

$$Yf = \sum_{j=1}^{m} \check{f}_j \otimes_{\mathbb{C}[H]} w_j, \qquad \check{f}_j(a) = f_j\left(a^{-1}\right), \quad a \in G.$$

Očito je $Y : V \to \mathbb{C}[G] \otimes_{\mathbb{C}[H]} W$ linearan operator. Zbog (3.4) imamo za $f \in V$ i $a \in G$:

$$(XYf)(a) = \sum_{j=1}^{m} \left[X\left(\check{f}_j \otimes_{\mathbb{C}[H]} w_j\right) \right](a) = \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{|H|} \sum_{b \in H} \check{f}_j\left(a^{-1} b\right) \rho(b) w_j =$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{|H|} \sum_{b \in H} f_j\left(b^{-1} a\right) \sum_{k=1}^{m} \rho_{kj}(b) w_k = \frac{1}{|H|} \sum_{b \in H} \sum_{k=1}^{m} \left[\sum_{j=1}^{m} \rho_{kj}(b) f_j\left(b^{-1} a\right) \right] w_k =$$

$$= \frac{1}{|H|} \sum_{b \in H} \sum_{k=1}^{m} f_k(a) w_k = \sum_{k=1}^{m} f_k(a) w_k = f(a).$$

Budući da to vrijedi za svaki $a \in G$, zaključujemo da je $XYf = f$, a kako je funkcija $f \in V$ bila proizvoljna, nalazimo

$$XY = I_V. \tag{3.5}$$

Promatrajmo sada kompoziciju operatora $YX : \mathbb{C}[G] \otimes_{\mathbb{C}[H]} W \to \mathbb{C}[G] \otimes_{\mathbb{C}[H]} W$. Za proizvoljno izabrane $\varphi \in \mathbb{C}[G]$ i $k \in \{1, 2, \dots, m\}$ stavimo

$$f = X\left(\varphi \otimes_{\mathbb{C}[H]} w_k\right) \in V.$$

Tada za $a \in G$ imamo

$$f(a) = \frac{1}{|H|} \sum_{b \in H} \varphi\left(a^{-1} b\right) \rho(b) w_k = \frac{1}{|H|} \sum_{b \in H} \varphi\left(a^{-1} b\right) \sum_{j=1}^{m} \rho_{jk}(b) w_j.$$

Dakle, koordinatne funkcije od f dane su sa

$$f_j(a) = \frac{1}{|H|} \sum_{b \in H} \varphi\left(a^{-1} b\right) \rho_{jk}(b), \qquad a \in G, \quad j \in \{1, 2, \dots, m\}.$$

Slijedi

$$YX\left(\varphi \otimes_{\mathbb{C}[H]} w\right) = Yf = \sum_{j=1}^{m} \check{f}_j \otimes_{\mathbb{C}[H]} w_j$$

i

$$\check{f}_j(a) = f_j\left(a^{-1}\right) = \frac{1}{|H|} \sum_{b \in H} \varphi(ab) \rho_{jk}(b), \qquad a \in G, \quad j \in \{1, 2, \dots, m\}.$$

Nadalje, funkcije ρ_{jk}, a i $\check{\rho}_{jk}$, su elementi algebre $\mathbb{C}[H]$, pa pomoću formule (3.2) nalazimo

$$\check{f}_j(a) = \frac{1}{|H|}\sum_{b\in H}\varphi(ab)\check{\rho}_{jk}\left(b^{-1}\right) = \frac{1}{|H|}\left(\varphi * \check{\rho}_{jk}\right)(a),$$

tj.

$$\check{f}_j = \frac{1}{|H|}\varphi * \check{\rho}_{jk}, \qquad j \in \{1, 2, \dots, m\}.$$

U tenzorskom produktu $\mathbb{C}[G] \otimes_{\mathbb{C}[H]} W$ vrijedi $\varphi * \check{\rho}_{jk} \otimes_{\mathbb{C}[H]} w_j = \varphi \otimes_{\mathbb{C}[H]} \rho\left(\check{\rho}_{jk}\right) w_j$, pa nalazimo

$$YX\left(\varphi \otimes_{\mathbb{C}[H]} w_k\right) = \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{|H|}\varphi * \check{\rho}_{jk} \otimes_{\mathbb{C}[H]} w_j = \varphi \otimes_{\mathbb{C}[H]} \frac{1}{|H|}\sum_{j=1}^{m} \rho\left(\check{\rho}_{jk}\right) w_j.$$

Nadalje,

$$\rho\left(\check{\rho}_{jk}\right) w_j = \sum_{b\in H}\check{\rho}_{jk}(b)\rho(b)w_j = \sum_{b\in H}\rho_{jk}\left(b^{-1}\right)\sum_{\ell=1}^{m}\rho_{\ell j}(b)w_\ell = \sum_{\ell=1}^{m}\left[\sum_{b\in H}\rho_{\ell j}(b)\rho_{jk}\left(b^{-1}\right)\right] w_\ell.$$

Primijenimo li drugu formulu u teoremu 2.1.4. na reprezentaciju ρ grupe H, dobivamo

$$\sum_{b\in H}\rho_{\ell j}(b)\rho_{jk}\left(b^{-1}\right) = \frac{|H|}{m}\delta_{\ell k}, \qquad \ell \in \{1, 2, \dots, m\},$$

pa slijedi

$$\rho\left(\check{\rho}_{jk}\right) w_j = \sum_{\ell=1}^{m}\frac{|H|}{m}\delta_{\ell k}w_\ell = \frac{|H|}{m}w_k \qquad \forall j \in \{1, 2, \dots, m\}.$$

Stoga nalazimo

$$YX\left(\varphi \otimes_{\mathbb{C}[H]} w_k\right) = \varphi \otimes_{\mathbb{C}[H]} \frac{1}{|H|}\sum_{j=1}^{m}\frac{|H|}{m}w_k = \varphi \otimes_{\mathbb{C}[H]} w_k.$$

Budući da skup

$$\left\{\varphi \otimes_{\mathbb{C}[H]} w_k;\ \varphi \in \mathbb{C}[G],\ k \in \{1, 2, \dots, m\}\right\}$$

razapinje vektorski prostor $\mathbb{C}[G] \otimes_{\mathbb{C}[H]} W$, slijedi da je

$$YX = I_{\mathbb{C}[G]\otimes_{\mathbb{C}[H]}W}. \tag{3.6}$$

(3.5) i (3.6) pokazuju da je Y inverzan operator operatora X. Dakle, X je izomorfizam prostora $\mathbb{C}[G] \otimes_{\mathbb{C}[H]} W$ na prostor V i time je teorem 3.9.9. u potpunosti dokazan.

Interpretacija inducirane reprezentacije kao tenzorskog produkta nad grupovnom algebrom podgrupe omogućuje da na jednostavniji način dokažemo neke teoreme o induciranim reprezentacijama.

Prije svega, tu je teorem 3.5.1. o induciranju u etapama koji se svodi na asocijativnost tenzorskog produkta iskazan u teoremu 3.9.6. Naime, ako su $K \subseteq H$ podgrupe grupe G i ako je σ reprezentacija grupe K na prostoru W, onda uz shvaćanje prostora reprezentacije grupe kao lijevi modul nad grupovnom algebrom te grupe i korištenjem zadatka 3.9.3. nalazimo

$$Ind_H^G\left(Ind_K^H W\right) = \mathbb{C}[G] \otimes_{\mathbb{C}[H]} \left(\mathbb{C}[H] \otimes_{\mathbb{C}[K]} W\right) \simeq$$

$$\simeq \left(\mathbb{C}[G] \otimes_{\mathbb{C}[H]} \mathbb{C}[H]\right) \otimes_{\mathbb{C}[K]} W \simeq \mathbb{C}[G] \otimes_{\mathbb{C}[K]} W = Ind_K^G W.$$

Drugi je primjer jednostavniji dokaz Frobeniusovog teorema reciprociteta (teorem 3.4.1.). U tom slučaju radi se o neposrednoj primjeni teorema 3.9.8. Naime, ako je ρ reprezentacija podgrupe H grupe G na prostoru W i ako je π reprezentacija grupe G na prostoru V, onda nalazimo

$$Hom_G\left(Ind_H^G W, V\right) = Hom_{\mathbb{C}[G]}\left(\mathbb{C}[G] \otimes_{\mathbb{C}[H]} W, V\right) \simeq$$

$$\simeq Hom_{\mathbb{C}[H]}\left(W, Hom_{\mathbb{C}[G]}(\mathbb{C}[G], V)\right) \simeq Hom_{\mathbb{C}[H]}(W, V) = Hom_H(W, V).$$

Tvrdnja (a) Frobeniusovog teorema reciprociteta odavde neposredno slijedi, jer prema prvoj jednakosti u teoremu 2.6.5. imamo

$$Hom_G\left(V, Ind_H^G W\right) \simeq Hom_G\left(Ind_H^G W, V\right) \qquad \text{i} \qquad Hom_H(V, W) \simeq Hom_H(W, V).$$

Pri gornjem izvodu koristili smo jednostavnu činjenicu sadržanu sljedećem zadatku:

Zadatak 3.9.4. *Neka je R unitalni prsten i V unitalni lijevi $R-$modul. Dokažite da je tada $Hom_R(R, V) \simeq V$.*

Uputa: Dokažite da je $\Phi : \psi \mapsto \psi(1_R)$ homomorfizam lijevih $R-$modula sa $Hom_R(R, V)$ u V. Zatim konstruirajte njemu inverzni homomorfizam $V \to Hom_R(R, V)$.

Poglavlje 4

Reprezentacije kompaktnih grupa

4.1 Kompaktne grupe i invarijantni integral

Topološka grupa je grupa G koja je ujedno Hausdorffov topološki prostor i za koju su preslikavanja množenja

$$(a,b) \mapsto ab \qquad \text{sa} \quad G \times G \quad \text{u} \quad G$$

i invertiranja

$$a \mapsto a^{-1} \qquad \text{sa} \quad G \quad \text{u} \quad G$$

neprekidna. Ekvivalentno se može zahtijevati neprekidnost samo jednog preslikavanja

$$(a,b) \mapsto ab^{-1} \qquad \text{sa} \quad G \times G \quad \text{u} \quad G.$$

Ako je topološki prostor G kompaktan, takva se topološka grupa zove **kompaktna grupa**.

Ako je G topološka grupa s jedinicom e, za svaki $a \in G$ definiramo lijevi i desni pomak $\lambda_a : G \to G$ i $\rho_a : G \to G$ sa

$$\lambda_a(x) = ax, \qquad \rho_a(x) = xa^{-1}, \qquad x \in G.$$

Ta su preslikavanja neprekidne bijekcije. Nadalje, očito vrijedi

$$\lambda_a \circ \lambda_b = \lambda_{ab} \qquad \text{i} \qquad \rho_a \circ \rho_b = \rho_{ab}.$$

Budući da je $\lambda_e = \rho_e = id_G$, slijedi da su i inverzna preslikavanja pomaci:

$$(\lambda_a)^{-1} = \lambda_{a^{-1}}, \qquad (\rho_a)^{-1} = \rho_{a^{-1}}.$$

Prema tome, pomaci λ_a i ρ_a su homeomorfizmi sa G na G. Posljedica je da je topološka struktura topološke grupe *uniformnog tipa*: okoline svake točke jednako "*izgledaju*". Naime, ako je $\mathcal{V}$ skup svih otvorenih okolina jedinice e onda pomoću λ_a dobivamo sve okoline točke $\lambda_a(e) = a$, odnosno,

$$a\mathcal{V} = \{aV;\ V \in \mathcal{V}\}$$

je skup svih otvorenih okolina točke $a \in G$. Sasvim analogno, i

$$\mathcal{V}a = \{Va;\ V \in \mathcal{V}\}$$

je skup svih otvorenih okolina točke $a \in G$. Kako je i invertiranje $a \mapsto a^{-1}$ homeomorfizam sa G na G, slijedi da je $\mathcal{V}^{-1} = \mathcal{V}$, tj. V je otvorena okolina od e ako i samo ako je $V^{-1} = \{a^{-1};\ a \in V\}$

otvorena okolina od e. Okolina jedinice V zove se **simetrična** ako je $V = V^{-1}$. Očito svaka okolina U jedinice sadrži simetričnu okolinu jedinice: takva je okolina $U \cap U^{-1}$. Budući da je množenje $(a, b) \mapsto ab$ neprekidno sa $G \times G$ u G i posebno u točki (e, e), za svaku okolinu U od e postoje okoline V_1 i V_2 od e takve da je $V_1V_2 = \{ab;\ a \in V_1,\ b \in V_2\} \subseteq U$. Tada okolina jedinice $V = V_1 \cap V_2$ zadovoljava $V^2 = VV \subseteq U$. Analogno, za svaki prirodan broj n i svaku okolinu U od e postoji okolina V od e takva da je

$$V^n = \underbrace{VV \cdots V}_{n} = \{a_1a_2 \cdots a_n;\ a_1, a_2, \ldots, a_n \in V\} \subseteq U.$$

Nadalje, iz neprekidnosti preslikavanja $(a, b) \mapsto ab^{-1}$ slijedi da za svaku okolinu U od e postoji okolina V od e takva da je

$$VV^{-1} = \{ab^{-1};\ a, b \in V\} \subseteq U.$$

U daljnjem promatramo samo kompaktne grupe. Ako je G kompaktna grupa tada je skup $C(G)$ svih neprekidnih funkcija $f : G \to \mathbb{C}$ komutativna asocijativna algebra u odnosu na operacije po točkama:

$$(f + g)(a) = f(a) + g(a), \quad (\lambda f)(a) = \lambda f(a), \quad (fg)(a) = f(a)g(a), \quad f, g \in C(G),\ \lambda \in \mathbb{C},\ a \in G.$$

To je unitalna algebra: jedinica je konstantna funkcija $1(a) = 1\ \forall a \in G$. $C(G)$ je Banachova algebra u odnosu na maksimum normu

$$\|f\|_\infty = \max\{|f(a)|;\ a \in G\}.$$

Uniformna struktura topologije na G omogućuje definiciju uniformne neprekidnosti: kažemo da je funkcija $f : G \to \mathbb{C}$ **uniformno neprekidna** ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji otvorena okolina V jedinice e takva da vrijedi

$$x, y \in G, \quad x^{-1}y \in V \qquad \Longrightarrow \qquad |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

U stvari, takve su sve funkcije u $C(G)$:

Propozicija 4.1.1. *Neka je G kompaktna grupa i $f \in C(G)$. Tada je funkcija f uniformno neprekidna.*

Dokaz: Neka je $\varepsilon > 0$. Iz neprekidnosti funkcije f u točki $a \in G$ slijedi da postoji otvorena okolina W_a od e takva da vrijedi

$$b \in aW_a \qquad \Longrightarrow \qquad |f(b) - f(a)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Za svaki $a \in G$ možemo izabrati okolinu V_a od e takvu da je $V_aV_a^{-1} \subseteq W_a$. Tada je $\{aV_a;\ a \in G\}$ otvoren pokrivač od G, pa zbog kompaktnosti slijedi da postoji konačan skup $A \subseteq G$ takav da je

$$G = \bigcup_{a \in A} aV_a.$$

Definiramo sada okolinu V od e kao presjek $V_a,\ a \in A$:

$$V = \bigcap_{a \in A} V_a.$$

Neka su sada $x, y \in G$ takvi da je $x^{-1}y \in V$. Izaberimo $a \in A$ tako da je $y \in aV_a$. Tada je $y \in aW_a$, pa vrijedi

$$|f(y) - f(a)| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{4.1}$$

Nadalje, imamo

$$x^{-1}y \in V \quad \Longrightarrow \quad x \in yV^{-1} \subseteq aV_aV_a^{-1} \subseteq aW_a,$$

pa vrijedi i

$$|f(x) - f(a)| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{4.2}$$

Iz (4.1) i (4.2) slijedi $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Zadatak 4.1.1. *Neka je $f \in C(G)$ i $\varepsilon > 0$. Dokažite da postoji otvorena okolina V jedinice e takva da vrijedi*

$$x, y \in G, \quad yx^{-1} \in V \qquad \Longrightarrow \qquad |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Važne zaključke o konačnim grupama i njihovim reprezentacijama dobili smo korištenjem "*usrednjenja*" po grupi, odnosno, sumacijom vrijednosti funkcije po svim elementima grupe i dijeljenjem s brojem elemenata. To ne možemo provoditi na beskonačnim grupama, ali u slučaju kompaktnih grupa imamo vrlo korisnu zamjenu za usrednjenje, a to je tzv. *invarijatni integral.* Naziv **integral** na kompaktnoj grupi G upotrebljava se za svaki pozitivan linearan funkcional $M : C(G) \to \mathbb{C}$. *Pozitivnost* znači

$$f \in C(G), \quad f(x) \geq 0 \quad \forall x \in G \qquad \Longrightarrow \qquad M(f) \geq 0.$$

Propozicija 4.1.2. *Svaki integral M na G je neprekidan linearan funkcional na Banachovom prostoru $C(G)$ s normom $\|M\| = M(1)$. Štoviše, vrijedi*

$$|M(f)| \leq M(|f|) \leq M(1)\|f\|_\infty \qquad \forall f \in C(G).$$

Dokaz: Naravno, iz pozitivnosti od M slijedi da za realne neprekidne funkcije $f, g : G \to \mathbb{R}$ iz $f \leq g$ slijedi $M(f) \leq M(g)$. Neka je $f \in C(G)$. Možemo pisati

$$M(f) = r\mathrm{e}^{i\varphi}, \quad r \geq 0, \ \varphi \in \mathbb{R}.$$

Označimo sa g i h realni i imaginarni dio funkcije $\mathrm{e}^{-i\varphi}f$. Dakle, $g, h : G \to \mathbb{R}$ su neprekidne funkcije i $\mathrm{e}^{-i\varphi}f = g + ih$. Sada imamo redom

$$|M(f)| = r = M(\mathrm{e}^{-i\varphi}f) = M(g) + iM(h) = M(g) \leq M(|g|) \leq M(|f|).$$

Dakle, drugu nejednakost $|M(f)| \leq M(1)\|f\|_\infty$ dovoljno je dokazati za nenegativne funkcije f. Međutim, ako je $f \in C(G)$ i $f(x) \geq 0 \ \forall x \in G$, onda je funkcija f svuda manja ili jednaka od konstantne funkcije $\|f\|_\infty$, pa slijedi

$$M(f) \leq M(\|f\|_\infty) = M(\|f\|_\infty 1) = M(1)\|f\|_\infty.$$

Time je dokazano da je funkcional M neprekidan, odnosno, ograničen i da je $\|M\| \leq M(1)$. Međutim, konstantna funkcija 1 ima normu jednaku 1 pa dobivamo i obrnutu nejednakost

$$M(1) \leq \|M\| \cdot \|1\|_\infty = \|M\|.$$

Lijevi i desni pomaci na grupi G prenose se na funkcije na grupi $G:$ ako je $f \in C(G)$ i $a \in G$ definiramo funkcije $\lambda_a f = f \circ \lambda_{a^{-1}}$ i $\rho_a f = f \circ \rho_{a^{-1}}$, tj.

$$(\lambda_a f)(x) = f(a^{-1}x), \qquad (\rho_a f)(x) = f(xa), \qquad x \in G.$$

Integral M na grupi G zove se **lijevoinvarijantan** ako vrijedi $M(\lambda_a f) = M(f) \ \forall a \in G$ i $\forall f \in C(G)$ i, analogno, **desnoinvarijantan** ako je $M(\rho_a f) = M(f) \ \forall a \in G$ i $\forall f \in C(G)$. Cilj nam je da dokažemo da netrivijalni takvi integrali postoje, a dobit ćemo i rezultat o jedinstvenosti (do na konstantni faktor > 0). Štoviše, jedinstvenost do na faktor proširuje se na proizvoljne neprekidne lijevo ili desnoinvarijantne linearne funkcionale na $C(G)$. U svrhu dokaza tih činjenica, potrebna su nam neka razmatranja o konveksnim kompaktnim podskupovima Banachovog prostora i jedan teorem o fiksnoj točki na takvim skupovima.

Ako je V vektorski prostor, podskup K od V zove se konveksan ako vrijedi

$$v, w \in K, \quad 0 \leq t \leq 1 \qquad \Longrightarrow \qquad (1-t)v + tw \in K.$$

Dakle, zajedno sa svake svoje dvije točke K sadrži ravni segment između te dvije točke. Očito je presjek konveksnih skupova ponovo konveksan skup. Stoga za proizvoljan skup $S \subseteq V$ postoji najmanji konveksan skup koji ga sadrži: to je presjek svih konveksnih podskupova od V koji sadrže S. Taj se skup označava sa $\mathrm{Co}(S)$ i zove **konveksna ljuska** skupa S.

Zadatak 4.1.2. *Dokažite da za konveksan skup $K \subseteq V$, $v_1, v_2, \ldots, v_n \in K$ i $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}_+$ takve da je $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = 1$ vrijedi $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n \in K$.*

Općenito, ako su $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}_+$ takvi da je $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = 1$, vektor

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k v_k$$

se zove **konveksna kombinacija** vektora $v_1, v_2, \ldots, v_n$. Dakle, prema zadatku 4.1.2. konveksna kombinacija vektora iz nekog konveksnog skupa K je vektor iz K. Štoviše, formiranjem konveksnih kombinacija dobiva se konveksna ljuska bilo kojeg nepraznog skupa:

Zadatak 4.1.3. *Neka je S neprazan podskup vektorskog prostora V. Dokažite da je $\mathrm{Co}(S)$ skup svih konveksnih kombinacija vektora iz S :*

$$\mathrm{Co}(S) = \left\{ \sum_{k=1}^{n} \alpha_k v_k;\ n \in \mathbb{N},\, v_1, v_2, \ldots, v_n \in S,\, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}_+,\ \sum_{k=1}^{n} \alpha_k = 1 \right\}.$$

Promatrajmo sada konveksne skupove u normiranom prostoru.

Zadatak 4.1.4. *Neka X normiran prostor. Dokažite:*

(a) *Ako je $K \subseteq X$ konveksan i njegov zatvarač je konveksan.*

(b) *Za svaki skup $S \subseteq X$ postoji najmanji zatvoren konveksan skup koji ga sadrži.*

Najmanji zatvoren konveksan skup koji sadrži zadani podskup S normiranog prostora X zove se **zatvorena konveksna ljuska** skupa S i označava $\overline{\mathrm{Co}}(S)$.

Teorem 4.1.3. (**Kakutani**) *Neka je X normiran prostor, $K \subseteq X$ neprazan konveksan kompaktan podskup i G podgrupa grupe izometrija prostora X. Pretpostavimo da je $AK \subseteq K$ za svaki $A \in G$. Tada postoji $x \in K$ takav da je $Ax = x \ \ \forall A \in G$.*

Dokaz ćemo provesti korištenjem sljedećeg **Hausdorffovog teorema** koji je varijanta Zornove leme:

Teorem 4.1.4. *Svaki neprazan parcijalno uređen skup sadrži maksimalan lanac.*

Dokaz teorema 4.1.4. Neka je $\mathcal{S}$ skup svih lanaca u parcijalno uređenom skupu S. Skup $\mathcal{S}$ je neprazan, jer za svaki $x \in S$ je $\{\{x\}\}$ lanac u S. Nadalje, skup $\mathcal{S}$ je parcijalno uređen inkluzijom. Dokažimo da $\mathcal{S}$ zadovoljava uvjet Zornove leme. Neka je $\mathcal{L}$ lanac u $\mathcal{S}$, tj. lanac lanaca u S. Formiramo podskup M od S kao uniju svih lanaca $L \in \mathcal{L}$. Tada je M lanac u S. Doista, ako su $x, y \in M$, onda postoje $L, L' \in \mathcal{L}$ takvi da je $x \in L$ i $y \in L'$. Budući da je $\mathcal{L}$ lanac u odnosu na inkluziju, vrijedi ili $L' \subseteq L$ ili $L \subseteq L'$. Pretpostavimo npr. da je $L' \subseteq L$. Tada su $x, y \in L$, a kako je L lanac u odnosu na uređaj $\leq$ u S, vrijedi ili $x \leq y$ ili $y \leq x$. Time je dokazano da je M lanac u S, tj. da je $M \in \mathcal{S}$. Kako je očito $L \subseteq M \ \ \forall L \in \mathcal{L}$, zaključujemo da je M gornja ograda lanca $\mathcal{L}$. Time je dokazano da $\mathcal{S}$ zadovoljava uvjet Zornove leme, pa slijedi da parcijalno uređen skup $\mathcal{S}$ ima barem jedan maksimalan element, a to je onda očito maksimalan lanac u S.

Dokaz teorema 4.1.3. Neka je Ω skup svih nepraznih kompaktnih konveksnih podskupova $H \subseteq K$ takvih da je $AH \subseteq H \ \ \forall A \in G$. Tada je $\Omega \neq \emptyset$, jer je $K \in \Omega$. Nadalje, Ω je parcijalno uređen inkluzijom. Prema Hausdorffovom teoremu Ω sadrži neki maksimalan lanac Ω_0. Definiramo tada

$$H_0 = \bigcap_{H \in \Omega_0} H.$$

Dokažimo najprije da je skup H_0 neprazan. Dosta, pretpostavimo suprotno, tj. da je $H_0 = \emptyset$. Za svaki $H \in \Omega_0$, skup $K \setminus H$ je otvoren podskup od K i vrijedi

$$\bigcup_{H \in \Omega_0} (K \setminus H) = K \setminus \left(\bigcap_{H \in \Omega_0} H \right) = K \setminus H_0 = K.$$

Dakle, $\{K \setminus H;\ H \in \Omega_0\}$ je otvoren pokrivač od K. Kako je K kompaktan, postoji konačno mnogo članova $H_1, H_2, \ldots, H_n \in \Omega_0$ takvih da je $\{K \setminus H_1, K \setminus H_2, \ldots, K \setminus H_n\}$ pokrivač od K. Dakle,

$$K = \bigcup_{i=1}^{n} (K \setminus H_i) = K \setminus (H_1 \cap H_2 \cap \cdots \cap H_n) \qquad \Longrightarrow \qquad H_1 \cap H_2 \cap \cdots \cap H_n = \emptyset.$$

Kako je Ω_0 lanac, za neki $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ je $H_i \supseteq H_j$ za svaki i, pa slijedi da je $H_j = \emptyset$. No to je nemoguće jer je $H_j \in \Omega_0 \subseteq \Omega$, a Ω se po definiciji sastoji od nepraznih skupova. Ova kontradikcija pokazuje da je pretpostavka $H_0 = \emptyset$ nemoguća, pa zaključujemo da je $H_0 \neq \emptyset$. Naravno, kako su svi operatori $A \in G$ izometrije, iz $AH = H \ \ \forall H \in \Omega_0$ slijedi $AH_0 = H_0$. Dakle, $H_0 \in \Omega$.

Sljedeći nam je cilj dokazati da je skup H_0 jednočlan. To će slijediti iz tvrdnje:

Ako skup $H \in \Omega$ nije jednočlan, onda postoji $H_1 \in \Omega$ takav da je $H_1 \subsetneq H$.

Dokažimo tu tvrdnju. Stavimo

$$H - H = \{x - y;\ x, y \in H\}.$$

Budući da skup H nije jednočlan, to je $H - H \neq \{0\}$, pa postoji $r > 0$ takav da

$$H - H \not\subseteq K(0, r) = \{x \in X;\ \|x\| < r\}.$$

S druge strane, skup $H - H$ je kompaktan, dakle, ograničen, pa postoji $s > 0$, dakle, nužno $s > r$, takav da je $H - H \subseteq K(0, s)$. Stavimo

$$t = \inf \{s \in \mathbb{R}_+;\ H - H \subseteq K(0, s)\}.$$

Tada je, naravno, $t \geq r$ i očito vrijede sljedeće relacije:

$$AK(0, s) = K(0, s) \qquad \forall s > 0 \quad \text{i} \quad \forall A \in G, \tag{4.3}$$

$$H - H \subseteq K(0, s) \qquad \forall s > t, \tag{4.4}$$

$$H - H \not\subseteq \overline{K}(0, s) = \{x \in X;\ \|x\| \leq s\} \qquad \forall s < t. \tag{4.5}$$

Budući da je skup H kompaktan, postoje $x_1, x_2, \ldots, x_n \in H$ takvi da je

$$H \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} K\left(x_i, \frac{t}{2}\right). \tag{4.6}$$

Stavimo tada

$$H_1 = H \cap \bigcap_{y \in H} \overline{K}\left(y, \left(1 - \frac{1}{4n}\right) t\right).$$

H_1 je kao presjek konveksnih skupova i sam konveksan. Nadalje, H_1 je zatvoren podskup kompaktnog skupa H, dakle, H_1 je kompaktan. Dokažimo da je H_1 neprazan. Neka je

$$x_0 = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n).$$

Kako je H konveksan, vrijedi $x_0 \in H$. Nadalje, neka je $y \in H$ proizvoljan. Tada zbog (4.6) postoji $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ takav da je $y \in K\left(x_j, \frac{t}{2}\right)$, tj.

$$\|y - x_j\| < \frac{t}{2}. \tag{4.7}$$

Nadalje, za $i \neq j$ zbog $y, x_i \in H$ imamo $y - x_i \in H - H$, a budući da je $\left(1 + \frac{1}{4n}\right) t > t$, zbog (4.4) je $y - x_i \in K\left(0, \left(1 + \frac{1}{4n}\right) t\right)$, odnosno

$$\|y - x_i\| < \left(1 + \frac{1}{4n}\right) t \qquad \forall i \neq j. \tag{4.8}$$

Sada iz (4.8) i (4.9) nalazimo

$$\|y - x_0\| = \left\| y - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k \right\| = \frac{1}{n}\left\| \sum_{k=1}^{n} (y - x_k) \right\| \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \|y - x_k\| <$$

$$< \frac{1}{n}\left[\frac{1}{2} + (n-1)\left(1 + \frac{1}{4n}\right)\right] t = \frac{4n^2 - n - 1}{4n^2} t < \frac{4n^2 - n}{4n^2} t = \left(1 - \frac{1}{4n}\right) t.$$

Drugim riječima, vrijedi $x_0 \in K\left(y, \left(1 - \frac{1}{4n}\right) t\right)$ za svaki $y \in H$, odnosno, $x_0 \in H_1$. Time je dokazano da je $H_1 \neq \emptyset$. Dakle, H_1 je neprazan zatvoren konveksan podskup od H.

Nadalje, svaki $A \in G$ je izometrija, pa za svaki $y \in H$ vrijedi

$$A\overline{K}\left(y, \left(1 - \frac{1}{4n}\right) t\right) = \overline{K}\left(Ay, \left(1 - \frac{1}{4n}\right) t\right),$$

a kako je $AH = H$ zaključujemo da je $AH_1 = H_1$. Time je dokazano da je $H_1 \in \Omega$.

Očito je $H_1 \subseteq H$. Zbog (4.5) postoje $x, y \in H$ takvi da

$$x - y \notin \overline{K}\left(0, \left(1 - \frac{1}{4n}\right) t\right) \quad \Longrightarrow \quad x \notin \overline{K}\left(y, \left(1 - \frac{1}{4n}\right) t\right) \quad \Longrightarrow \quad x \notin H_1.$$

To pokazuje da vrijedi $H_1 \subsetneq H$. Time je iskazana tvrdnja dokazana.

Sada zbog maksimalnosti lanca Ω_0 zaključujemo da je skup H_0 jednočlan, $H_0 = \{x\}$. Kako je $AH_0 = H_0$, imamo $Ax = x \ \forall A \in G$. Time je Kakutanijev teorem dokazan.

Napomenimo da se Kakutanijev teorem može dokazati i pod znatno općentijim pretpostavkama: X ne mora biti normiran, nego je dovoljno da bude lokalno konveksan topološki vektorski prostor; u tom slučaju, naravno, besmislen je zahtjev da su elementi grupe G izometrije; zaključak Kakutanijevog teorema vrijedi uz pretpostavku da je grupa linearnih operatora G ekvikontinuirana.

Vratimo se sada na kompaktnu grupu G. Prostor $C(G)$ je Banachov i očito su svi operatori λ_a, ρ_a, $a \in G$, na tom prostoru izometrije:

$$\|\lambda_a f\|_\infty = \|\rho_a f\|_\infty = \|f\|_\infty \qquad \forall a \in G \quad \text{i} \quad \forall f \in C(G). \tag{4.9}$$

Za $f \in C(G)$ stavimo

$$K_\ell(f) = Co\,\{\lambda_a f;\ a \in G\}, \qquad \overline{K}_\ell(f) = Cl(K_\ell(f)) = \overline{Co}\,\{\lambda_a f;\ a \in G\},$$

$$K_r(f) = Co\,\{\rho_a f;\ a \in G\}, \qquad \overline{K}_r(f) = Cl(K_r(f)) = \overline{Co}\,\{\rho_a f;\ a \in G\}.$$

Teorem 4.1.5. *Za svaku funkciju $f \in C(G)$ skupovi $\overline{K}_\ell(f)$ i $\overline{K}_r(f)$ su kompaktni.*

Taj ćemo teorem dokazati korištenjem poznatog kriterija kompaktnosti za skupove neprekidnih funkcija na kompaktnom topološkom prostoru:

Teorem 4.1.6. (**Arzelà−Ascoli**) *Neka je K kompaktan topološki prostor i S podskup Banachovog prostora $C(K)$. Skup S je relativno kompaktan ako i samo ako je on ograničen, tj. za neki $M > 0$ vrijedi*

$$\|f\|_\infty \le M \qquad \forall f \in S,$$

i ekvikontinuiran u svakoj točki $x \in K$, tj. za svaki $\varepsilon > 0$ postoji okolina V točke x takva da vrijedi

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon \qquad \forall y \in V \quad i \quad \forall f \in S.$$

Dokaz teorema 4.1.5. Ako su $a_1, a_2, \ldots, a_n \in G$ i $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}_+$ takvi da je $\sum\limits_{i=1}^n \alpha_i = 1$, onda zbog (4.9) imamo

$$\left\| \sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda_{a_i} f \right\|_\infty \le \sum_{i=1}^n \alpha_i \, \|\lambda_{a_i} f\|_\infty = \sum_{i=1}^n \alpha_i \|f\|_\infty = \|f\|_\infty.$$

Dakle, $\|g\|_\infty \le \|f\|_\infty \ \forall g \in K_\ell(f)$, odnosno, skup $K_\ell(f)$ je ograničen. Nadalje, neka je $\varepsilon > 0$. Budući da je prema propoziciji 4.1.1. funkcija f uniformno neprekidna, postoji otvorena okolina V jedinice e u grupi G takva da vrijedi

$$x, y \in G, \quad x^{-1}y \in V \qquad \Longrightarrow \qquad |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Za bilo koji $a \in G$ i takve x, y imamo $\left(a^{-1}x\right)^{-1}\left(a^{-1}y\right) = x^{-1}y \in V$, pa je

$$|(\lambda_a f)(x) - (\lambda_a f)(y)| = \left| f\left(a^{-1}x\right) - f\left(a^{-1}y\right) \right| < \varepsilon. \tag{4.10}$$

Neka je $g \in K_\ell(f)$. Neka su $n \in \mathbb{N}$, $a_1, a_2, \ldots, a_n \in G$ i $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}_+$ takvi da je

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1, \qquad g = \sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda_{a_i} f.$$

Zbog (4.10) iz $x^{-1}y \in V$ slijedi

$$|g(x) - g(y)| = \left| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left[(\lambda_{a_i} f)(x) - (\lambda_{a_i} f)(y) \right] \right| \leq \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left| (\lambda_{a_i} f)(x) - (\lambda_{a_i} f)(y) \right| < \varepsilon \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = \varepsilon.$$

Time je dokazano da je skup $K_\ell(f)$ ekvikontinuiran. Prema Arzelà–Ascolijevom teoremu, skup $K_\ell(f)$ je relativno kompaktan, pa slijedi da je njegov zatvarač $\overline{K}_\ell(f)$ kompaktan. Dokaz za $\overline{K}_r(f)$ sasvim je analogan, jedino što se umjesto propozicije 4.1.1. koristi analogna tvrdnja iz zadatka 4.1.1.

Teorem 4.1.7. *Na svakoj kompaktnoj grupi G postoji integral $I : C(G) \to \mathbb{C}$ sa sljedećim svojstvima:*

(a) *lijeva invarijantnost: $I(\lambda_a f) = I(f)$ $\forall a \in G$ i $\forall f \in C(G)$.*

(b) *desna invarijantnost: $I(\rho_a f) = I(f)$ $\forall a \in G$ i $\forall f \in C(G)$.*

(c) *invarijantnost na invertiranje: $I(\check{f}) = I(f)$ $\forall f \in C(G)$, gdje je $\check{f}(a) = f(a^{-1})$, $a \in G$.*

(d) *normiranost: $I(1) = 1$.*

(e) *regularnost: Ako je $f \in C(G)$, $f(a) \geq 0$ $\forall a \in G$ i $f \not\equiv 0$ onda je $I(f) > 0$.*

Integral sa svojstvima (a) i (d) je jedinstven, a također i integral sa svojstvima (b) i (d). Štoviše, ako je $\Phi : C(G) \to \mathbb{C}$ neprekidni linearni funkcional takav da vrijedi ili $\Phi(\lambda_a f) = \Phi(f)$ $\forall a \in G$ i $\forall f \in C(G)$ ili $\Phi(\rho_a f) = \Phi(f)$ $\forall a \in G$ i $\forall f \in C(G)$ tada je $\Phi = \lambda I$ za neki $\lambda \in \mathbb{C}$.

Dokaz: Uočimo da je $\{\lambda_a;\ a \in G\}$ podgrupa grupe izometrija Banachovog prostora $C(G)$. Neka je $f \in C(G)$ i $g \in K_\ell(f)$. Za neke $n \in \mathbb{N}$, $a_1, a_2, \ldots, a_n \in G$ i $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}_+$ je tada

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1 \qquad \text{i} \qquad g = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda_{a_i} f.$$

Sada za svaki $a \in G$ imamo

$$\lambda_a g = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda_a \lambda_{a_i} f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda_{a a_i} f \in K_\ell(f).$$

Dakle vrijedi $\lambda_a K_\ell(f) \subseteq K_\ell(f)$ $\forall a \in G$, a iz neprekidnosti operatora λ_a slijedi $\lambda_a \overline{K}_\ell(f) \subseteq \overline{K}_\ell(f)$ $\forall a \in G$. Prema teoremu 4.1.5. skup $\overline{K}_\ell(f)$ je kompaktan, pa prema Kakutanijevom teoremu 4.1.3. postoji $g \in \overline{K}_\ell(f)$ takva da je $\lambda_a g = g$ $\forall a \in G$. No to znači da za svaki $a \in G$ imamo $g(a) = (\lambda_a g)(a) = g(e)$, tj. funkcija g je konstantna. Time je dokazano da je $\overline{K}_\ell(f) \cap \mathbb{C} \neq \emptyset$. Sasvim analogno, korištenjem grupe izometrija $\{\rho_a;\ a \in G\}$ i kompaktnost skupa $\overline{K}_r(f)$ dobivamo da je i $\overline{K}_r(f) \cap \mathbb{C} \neq \emptyset$.

Dokazat ćemo sada da je $\overline{K}_\ell(f) \cap \mathbb{C} = \overline{K}_r(f) \cap \mathbb{C}$ i da je to jednočlan skup. Neka su $\alpha \in \overline{K}_\ell(f) \cap \mathbb{C}$, $\beta \in \overline{K}_r(f) \cap \mathbb{C}$ i $\varepsilon > 0$. Tada postoje $g \in K_\ell(f)$ i $h \in K_r(f)$ takvi da je

$$\|\alpha - g\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{i} \qquad \|\beta - h\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{4.11}$$

Neka su $n, m \in \mathbb{N}$, $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_m \in G$ i $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m \in \mathbb{R}_+$ takvi da je

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = \sum_{j=1}^{m} \beta_j = 1, \qquad g = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda_{a_i^{-1}} f \qquad \text{i} \qquad h = \sum_{j=1}^{m} \beta_j \rho_{b_j} f.$$

Tada iz (4.11) slijedi

$$\left|\alpha - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(a_i x)\right| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \forall x \in G \tag{4.12}$$

i

$$\left|\beta - \sum_{j=1}^{m} \beta_j f(x b_j)\right| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \forall x \in G. \tag{4.13}$$

Sada u (4.12) uvrstimo $x = b_j$ za $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$, pa dobivamo

$$\left|\alpha - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(a_i b_j)\right| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \forall j \in \{1, 2, \ldots, m\}. \tag{4.14}$$

Imamo

$$\left|\alpha - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \alpha_i \beta_j f(a_i b_j)\right| = \left|\sum_{j=1}^{m} \beta_j \left(\alpha - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(a_i b_j)\right)\right| \leq \sum_{j=1}^{m} \beta_j \left|\alpha - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(a_i b_j)\right|,$$

a kako je $\sum_{j=1}^{m} \beta_j = 1$, zbog (4.14) dobivamo

$$\left|\alpha - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \alpha_i \beta_j f(a_i b_j)\right| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{4.15}$$

Sasvim analogno, uvrštavanjem $x = a_i$, $1 \leq i \leq n$, iz (4.13) dobivamo

$$\left|\beta - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \alpha_i \beta_j f(a_i b_j)\right| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{4.16}$$

Iz (4.15) i (4.16) slijedi $|\alpha - \beta| < \varepsilon$, a kako je $\varepsilon > 0$ bio proizvoljan, zaključujemo da je $\alpha = \beta$.

Time je dokazano da za svaku funkciju $f \in C(G)$ vrijedi $\overline{K}_\ell(f) \cap \mathbb{C} = \overline{K}_r(f) \cap \mathbb{C}$ i da je to jednočlan skup. Taj jedini član označimo sa $I(f)$. Dakle, $I(f) \in \mathbb{C}$ je jedina konstanta koja se može uniformno aproksimirati funkcijama iz $K_\ell(f)$ i ujedno jedina konstanta koja se može uniformno aproksimirati funkcijama iz $K_r(f)$.

Dokažimo sada svojstva preslikavanja $I : C(G) \to \mathbb{C}$.

Prije svega, ako je $f \in C(G)$ i $f(x) \geq 0$ $\forall x \in G$ onda za svaki $a \in G$ vrijedi $(\lambda_a f)(x) \geq 0$ $\forall x \in G$, pa isto vrijedi i za svaku konveksnu kombinaciju $g \in K_\ell(f) : g(x) \geq 0$ $\forall x \in G$. Funkcija koja se može uniformno aproksimirati nenegativnim funkcijama i sama je nenegativna, pa slijedi $g(x) \geq 0$ $\forall x \in G$ za svaku funkciju $g \in \overline{K}_\ell(G)$. Odatle slijedi $I(f) \geq 0$. Time je dokazana pozitivnost preslikavanja $I : C(G) \to \mathbb{C}$:

$$f \in C(G), \quad f(x) \geq 0 \quad \forall x \in G \qquad \Longrightarrow \qquad I(f) \geq 0. \tag{4.17}$$

Neka je $f \in C(G)$ i $\alpha \in \mathbb{C}$. Za $a \in G$ je $\lambda_a(\alpha f) = \alpha \lambda_a f$, a odatle je

$$K_\ell(\alpha f) = \alpha K_\ell(f) = \{\alpha g;\ g \in K_\ell(f)\} \qquad \Longrightarrow \qquad \overline{K}_\ell(\alpha f) = \alpha \overline{K}_\ell(f) = \{\alpha g;\ g \in \overline{K}_\ell(f)\}.$$

Slijedi

$$I(\alpha f) = \alpha I(f), \qquad f \in C(G), \quad \alpha \in \mathbb{C}. \tag{4.18}$$

Dokažimo sada aditivnost preslikavanja $I : C(G) \to \mathbb{C}$. Neka su $f, g \in C(G)$ i neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljno izabran. Konstanta $I(f)$ se može uniformno aproksimirati funkcijama iz $K_\ell(f)$, pa postoje $n \in \mathbb{N}$, $a_1, a_2, \ldots, a_n \in G$ i $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}_+$ takvi da je

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1 \qquad \text{i} \qquad \left| I(f) - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(a_i x) \right| < \frac{\varepsilon}{3} \qquad \forall x \in G. \tag{4.19}$$

Stavimo

$$h = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda_{a_i^{-1}} g, \quad \text{tj.} \qquad h(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i g(a_i x), \quad x \in G.$$

Tada je $h \in K_\ell(g)$, pa slijedi $K_\ell(h) \subseteq K_\ell(g)$, dakle i $\overline{K}_\ell(h) \subseteq \overline{K}_\ell(g)$, a odatle je $I(g) = I(h)$. Ta se konstanta može uniformno aproksimirati funkcijama iz $K_\ell(h)$, pa postoje $m \in \mathbb{N}$, $b_1, b_2, \ldots, b_m \in G$ i $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m \in \mathbb{R}_+$ takvi da je

$$\sum_{j=1}^{m} \beta_j = 1 \qquad \text{i} \qquad \left| I(g) - \sum_{j=1}^{m} \beta_j h(b_j x) \right| < \frac{\varepsilon}{3} \qquad \forall x \in G,$$

odnosno, zbog definicije funkcije h,

$$\left| I(g) - \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \alpha_i \beta_j g(a_i b_j x) \right| < \frac{\varepsilon}{3} \qquad \forall x \in G. \tag{4.20}$$

U (4.19) umjesto x uvrstimo $b_j x$, $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$. Dobivamo

$$\left| I(f) - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(a_i b_j x) \right| < \frac{\varepsilon}{3} \qquad \forall x \in G,$$

a odatle

$$\left| I(f) - \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \alpha_i \beta_j f(a_i b_j x) \right| = \left| \sum_{j=1}^{m} \beta_j \left(I(f) - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(a_i b_j x) \right) \right| \leq$$

$$\leq \sum_{j=1}^{m} \beta_j \left| I(f) - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(a_i x) \right| < \sum_{j=1}^{m} \beta_j \frac{\varepsilon}{3} = \frac{\varepsilon}{3}.$$

Dakle,

$$\left| I(f) - \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \alpha_i \beta_j f(a_i b_j x) \right| < \frac{\varepsilon}{3} \qquad \forall x \in G. \tag{4.21}$$

Iz (4.20) i (4.21) nejednakost trokuta daje

$$\left| I(f) + I(g) - \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \alpha_i \beta_j (f+g)(a_i b_j x) \right| < \frac{2\varepsilon}{3} \qquad \forall x \in G. \tag{4.22}$$

Konstanta $I(f+g)$ može se uniformno aproksimirati funkcijama iz $K_r(f+g)$, pa postoje $p \in \mathbb{N}$, $c_1, c_2, \ldots, c_p \in G$ i $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_p \in \mathbb{R}_+$ takvi da je

$$\left| I(f+g) - \sum_{k=1}^{p} \gamma_k (f+g)(x c_k) \right| < \frac{\varepsilon}{3} \qquad \forall x \in G.$$

Uvrstimo li $x = a_i b_j$, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$, dobivamo

$$\left| I(f+g) - \sum_{k=1}^{p} \gamma_k (f+g)(a_i b_j c_k) \right| < \frac{\varepsilon}{3}, \qquad 1 \le i \le n, \quad 1 \le j \le m,$$

a odatle zbog $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \alpha_i \beta_j = 1$

$$\left| I(f+g) - \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{p} \alpha_i \beta_j \gamma_k (f+g)(a_i b_j c_k) \right| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{4.23}$$

Nadalje, kako je $\sum_{k=1}^{p} \gamma_k = 1$, iz nejednakosti (4.22) za $x = c_k$, $k = 1, 2, \ldots, p$, slijedi

$$\left| I(f) + I(g) - \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{p} \alpha_i \beta_j \gamma_k (f+g)(a_i b_j c_k) \right| < \frac{2\varepsilon}{3}. \tag{4.24}$$

Iz (4.23) i (4.24) nejednakost trokuta daje $|I(f) + I(g) - I(f+g)| < \varepsilon$, a kako je $\varepsilon > 0$ bio proizvoljan, dobivamo aditivnost:

$$I(f+g) = I(f) + I(g), \qquad f, g \in C(G). \tag{4.25}$$

Prema (4.17), (4.18) i (4.25) preslikavanje $I : C(G) \to \mathbb{C}$ je integral na G.

Dokažimo sada iskazana svojstva $(a) - (e)$ integrala I.

Za $a, b \in G$ i $f \in C(G)$ je $\lambda_b(\lambda_a f) = \lambda_{ba} f$, pa zaključujemo da je $K_\ell(\lambda_a f) = K_\ell(f)$. Odatle slijedi (a).

Sasvim analogno imamo $K_r(\rho_a f) = K_r(f)$, pa vrijedi i (b).

Za konstantnu funkciju 1 je očito $K_\ell(1) = \{1\}$, dakle vrijedi i (d).

Neka je $f \in C(G)$, $f(x) \ge 0 \ \ \forall x \in G$ i $f \ne 0$. Tada je za neki $r > 0$ skup

$$V = \{x \in G;\ f(x) > r\}$$

neprazan i otvoren, pa je $\{aV;\ a \in G\}$ otvoren pokrivač od G. Zbog kompaktnosti od G postoje $a_1, a_2, \ldots, a_n \in G$ takvi da je

$$G = a_1 V \cup a_2 V \cup \cdots \cup a_n V.$$

Stavimo

$$g = \sum_{i=1}^{n} \lambda_{a_i} f.$$

Za $x \in G$ postoji $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ takav da je $x \in a_i V$, tj. $x = a_i y$ za neki $y \in V$. Tada je $(\lambda_{a_i} f)(x) = f(a_i^{-1} x) = f(y) > r$, a odatle i $g(x) > r$. Prema tome, $g(x) > r \ \ \forall x \in G$, pa slijedi $I(g) \ge r$. Međutim, zbog lijeve invarijantnosti integrala I iz definicije funkcije g slijedi $I(g) = nI(f)$. Zaključujemo da je $I(f) = \frac{1}{n} I(G) \ge \frac{r}{n} > 0$ i time je dokazano svojstvo (e).

Pretpostavimo sada da je $\Phi : C(G) \to \mathbb{C}$ neprekidni linearni funkcional koji je lijevoinvarijantan, tj. takav da vrijedi

$$\Phi(\lambda_a f) = \Phi(f) \qquad \forall f \in C(G) \quad \text{i} \quad \forall a \in G.$$

Za $f \in C(G)$ postoji niz $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ u $K_\ell(f)$ koji uniformno konvergira prema konstanti $I(f)$. Zbog lijeve invarijatnosti funkcionala Φ vrijedi $\Phi(f_n) = \Phi(f)$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Sada zbog neprekidnosti od Φ dobivamo

$$\Phi(f) = \lim_{n \to \infty} \Phi(f_n) = \Phi\left(\lim_{n \to \infty} f_n \right) = \Phi(I(f)) = \Phi(I(f)1) = I(f)\Phi(1).$$

Time je dokazano da je $\Phi = \Phi(1)I$. Sasvim analogno dokazuje se tvrdnja i za desnoinvarijantan neprekidan linearan funkcional Φ.

Ostaje još da dokažemo svojstvo (c). Stavimo $\Phi(f) = I(\check{f})$, $f \in C(G)$. Tada je Φ neprekidan linearan funkcional na $C(G)$. Nadalje, imamo za $a, x \in G$ i $f \in C(G)$

$$(\rho_a \check{f})(x) = \check{f}(xa) = f(a^{-1}x^{-1}) = (\lambda_a f)(x^{-1}) = (\lambda_a f)\check{}(x),$$

dakle,

$$\Phi(\lambda_a f) = I((\lambda_a f)\check{}) = I(\rho_a \check{f}) = I(\check{f}) = \Phi(f).$$

Prema dokazanom je $\Phi(f) = \Phi(1)I(f)$. Međutim, $\Phi(1) = I(1) = 1$. Time je dokazano i (c).

U teoriji integracije pokazuje se da je svaki pozitivni funkcional na prostoru $C(G)$ oblika $f \mapsto \int_G f(x)\mathrm{d}\mu(x)$ za neku pozitivnu Borelovu mjeru μ. Dakle, integral I iz prethodnog teorema se može tako pisati:

$$I(f) = \int_G f(x)\mathrm{d}\mu(x), \qquad f \in C(G).$$

μ se zove **Haarova mjera** na grupi G. U integralnom zapisu svojstva integrala I izgledaju ovako

$$\int_G f(ax)\mathrm{d}\mu(x) = \int_G f(xa)\mathrm{d}\mu(x) = \int_G f\left(x^{-1}\right)\mathrm{d}\mu(x) = \int_G f(x)\mathrm{d}\mu(x), \qquad \forall f \in C(G), \quad \forall a \in G,$$

$$f \in C(G), \quad f(x) \geq 0 \quad \forall x \in G, \quad f \not\equiv 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \int_G f(x)\mathrm{d}\mu(x) > 0.$$

Haarova mjera μ ima sljedeća svojstva invarijantnosti:

$$\mu(aA) = \mu(Aa) = \mu\left(A^{-1}\right) = \mu(A), \qquad A \subseteq G \quad \text{izmjeriv}, \quad a \in G.$$

Nadalje, iz svojstva (d) u teoremu 4.1.7. slijedi da je mjera μ normirana, tj. $\mu(G) = 1$, a iz (e) slijedi da je $\mu(A) > 0$ za svaki izmjeriv skup $A \subseteq G$ s nepraznom nutrinom i, posebno, za svaki neprazan otvoren skup $A \subseteq G$.

4.2 Reprezentacije na Hilbertovim prostorima

Neka je $\mathcal{H}$ Hilbertov prostor. Sa $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ ćemo označavati unitalnu C^*-algebru svih ograničenih linearnih operatora $A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$. Za grupu svih invertibilnih elemenata algebre $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ upotrebljavat ćemo oznaku $\mathcal{G}\ell(\mathcal{H})$, a za njenu podgrupu svih unitarnih operatora oznaku $\mathcal{U}(\mathcal{H})$:

$$\mathcal{G}\ell(\mathcal{H}) = \{A \in \mathcal{B}(\mathcal{H});\ \exists B \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) \quad \text{takav da je} \quad AB = BA = I_{\mathcal{H}}\},$$

$$\mathcal{U}(\mathcal{H}) = \{U \in \mathcal{B}(\mathcal{H});\ UU^* = U^*U = I_{\mathcal{H}}\}.$$

Reprezentacija kompaktne grupe G na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$ je homomorfizam π grupe G u grupu $\mathcal{G}\ell(\mathcal{H})$ takav da je preslikavanje $(x, \xi) \mapsto \pi(x)\xi$ sa $G \times \mathcal{H}$ u $\mathcal{H}$ neprekidno. **Reprezentacija** π zove se **unitarna** ako je $\pi(x) \in \mathcal{U}(\mathcal{H})\ \ \forall x \in G$. Invarijatni integral na grupi G omogućuje dokaz analogona tvrdnje (b) teorema 2.1.1.:

Teorem 4.2.1. *Neka je π reprezentacija kompaktne grupe G na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$. Tada na $\mathcal{H}$ postoji skalarni produkt, ekvivalentan originalnom skalarnom produktu, u odnosu na koji je reprezentacija π unitarna.*

Dokaz: Neka je I invarijantni integral na grupi G i neka je $(\,\cdot\,|\,\cdot\,)$ skalarni produkt na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$. Za $\xi, \eta \in \mathcal{H}$ funkcija $\varphi_{\xi,\eta} : G \to \mathbb{C}$, zadana sa $\varphi_{\xi,\eta}(x) = (\pi(x)\xi|\pi(x)\eta)$, $x \in G$, je neprekidna. Stavimo

$$\langle \xi|\eta \rangle = I(\varphi_{\xi,\eta}).$$

Zapisano pomoću Haarove mjere μ pridružene integralu I definicija preslikavanja $\langle\,\cdot\,|\,\cdot\,\rangle$ sa $cH \times \mathcal{H}$ u $\mathbb{C}$ je sljedeća:

$$\langle \xi|\eta \rangle = \int_G (\pi(x)\xi|\pi(x)\eta) \mathrm{d}\mu(x), \qquad \xi, \eta \in \mathcal{H}.$$

Očito je to preslikavanje seskvilinearno. Nadalje, ono ima hermitsku simetriju. Doista, za $\xi, \eta \in \mathcal{H}$ funkcija $\varphi_{\eta,\xi}$ je kompleksno konjugirana funkciji $\varphi_{\xi,\eta}$, a integral I poprima realne vrijednosti na realnim funkcijama, pa vrijedi $I(\overline{\varphi}) = \overline{I(\varphi)}$; dakle,

$$\langle \eta|\xi \rangle = I(\varphi_{\eta,\xi}) = I(\overline{\varphi_{\xi,\eta}}) = \overline{I(\varphi_{\xi,\eta})} = \overline{\langle \xi|\eta \rangle}.$$

Za $\xi \in \mathcal{H}$ funkcija $\varphi_{\xi,\xi}$ je nenegativna, pa vrijedi

$$\langle \xi, \xi \rangle = I(\varphi_{\xi,\xi}) \geq 0.$$

Nadalje, ako je $\xi \neq 0$ vrijedi $\varphi_{\xi,\xi}(e) = (\xi|\xi) > 0$, dakle, funkcija $\varphi_{\xi,\xi}$ nije identički jednaka nuli, pa iz svojstva (e) teorema 4.1.7. slijedi $\langle \xi|\xi \rangle = I(\varphi_{\xi,\xi}) > 0$. Time je dokazano da je $\langle\,\cdot\,|\,\cdot\,\rangle$ skalarni produkt na vektorskom prostoru $\mathcal{H}$.

Zadatak 4.2.1. *Dokažite da su operatori $\pi(x)$, $x \in G$, po normi uniformno ograničeni, tj. da postoji $C > 0$ takav da je $\|\pi(x)\| \leq C\ \ \forall x \in G$. Pokažite da tada vrijedi i $\|\pi(x)\xi\| \geq C^{-1}\|\xi\|$ $\forall x \in G$ i $\forall \xi \in \mathcal{H}$.*

Uputa: Za svako $\xi \in \mathcal{H}$ funkcija $x \mapsto \pi(x)\xi$ sa G u $\mathcal{H}$ je neprekidna, dakle, zbog kompaktnosti od G, ograničena. Sada koristite teorem uniformne ograničenosti za familije operatora na Banachovom prostoru.

Zadatak 4.2.2. *Dokažite da je gore definirani skalarni produkt $\langle\,\cdot\,|\,\cdot\,\rangle$ na prostoru $\mathcal{H}$ ekvivalentan originalnom skalarnom produktu $(\,\cdot\,|\,\cdot\,)$, tj. da postoje $m > 0$ i $M > 0$ takvi da je*

$$m(\xi|\xi) \leq \langle \xi|\xi \rangle \leq M(\xi|\xi) \qquad \forall \xi \in \mathcal{H}.$$

Uputa: Koristite zadatak 4.2.1.

Zadatak 4.2.3. *Dokažite da su u odnosu na novi skalarni produkt* $\langle \cdot | \cdot \rangle$ *svi operatori* $\pi(x)$, $x \in G$, *unitarni, tj. da je*

$$\langle \pi(x)\xi | \pi(x)\eta \rangle = \langle \xi | \eta \rangle \qquad \forall x \in G \quad i \quad \forall \xi, \eta \in \mathcal{H}.$$

Zbog toga ćemo u daljnjem promatrati isključivo unitarne reprezentacije kompaktne grupe G.

Da bi homomorfizam $\pi : G \to \mathcal{U}(\mathcal{H})$ bio unitarna reprezentacija kompaktne grupe G na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$ dovoljan je znatno slabiji uvjet neprekidnosti:

Propozicija 4.2.2. *Neka je* G *kompaktna grupa i* $\mathcal{H}$ *Hilbertov prostor i neka je* $\pi : G \to \mathcal{U}(\mathcal{H})$ *homomorfizam grupa. Sljedeća su tri svojstva međusobno ekvivalentna:*

(a) π *je unitarna reprezentacija od* G *na Hilbertovom prostoru* $\mathcal{H}$.

(b) *Za svaki* $\xi \in \mathcal{H}$ *realna funkcija* $x \mapsto Re\,(\pi(x)\xi|\xi)$ *je neprekidna u jedinici* e *grupe* G.

(c) *Postoji skup* $S \subseteq \mathcal{H}$ *koji razapinje gust potprostor u* $\mathcal{H}$ *takav da je za bilo koje vektore* $\xi, \eta \in S$ *kompleksna funkcija* $x \mapsto (\pi(x)\xi|\eta)$ *neprekidna u jedinici* e *grupe* G.

Dokaz: Očito iz (a) slijedi (c).
Pretpostavimo sada da vrijedi (c). Neka je

$$\mathcal{H}_1 = \{\xi \in \mathcal{H};\ \text{funkcija } x \mapsto (\pi(x)\xi|\eta) \text{ je neprekidna u točki } e\ \forall \eta \in S\}.$$

Očito je $\mathcal{H}_1$ potprostor od $\mathcal{H}$. Budući da $\mathcal{H}_1$ sadrži S, zaključujemo da je $\mathcal{H}_1$ gust potprostor od $\mathcal{H}$.
Za $\xi \in \mathcal{H}$, $\zeta \in \mathcal{H}_1$, $\eta \in S$ i $x \in G$ vrijedi

$$|(\pi(x)\xi|\eta) - (\xi|\eta)| \leq |(\pi(x)(\xi - \zeta)|\eta)| + |(\pi(x)\zeta|\eta) - (\zeta|\eta)| + |(\zeta - \xi|\eta)|,$$

pa zaključujemo da je

$$|(\pi(x)\xi|\eta) - (\xi|\eta)| \leq 2\|\xi - \zeta\| \cdot \|\eta\| + |(\pi(x)\zeta|\eta) - (\zeta|\eta)|, \qquad \xi \in \mathcal{H},\ \eta \in S,\ \zeta \in \mathcal{H}_1,\ x \in G. \tag{4.26}$$

Neka su sada $\xi \in \mathcal{H}$, $\eta \in S$, $\eta \neq 0$, i $\varepsilon > 0$. Izaberimo $\zeta \in \mathcal{H}_1$ tako da bude $\|\xi - \zeta\| \leq \dfrac{\varepsilon}{3\|\eta\|}$.
Nadalje, neka je U okolina od e u G takva da vrijedi

$$x \in U \qquad \Longrightarrow \qquad |(\pi(x)\zeta|\eta) - (\zeta|\eta)| \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Odatle i iz (4.28) slijedi

$$x \in U \qquad \Longrightarrow \qquad |(\pi(x)\xi|\eta) - (\xi|\eta)| \leq 2\frac{\varepsilon}{3\|\eta\|} \cdot \|\eta\| + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Dakle, preslikavanje $x \mapsto (\pi(x)\xi|\eta)$ je neprekidno u točki e. Budući da je vektor $\eta \in S \setminus \{0\}$ bio proizvoljan, zaključujemo da je $\xi \in \mathcal{H}_1$. Time je dokazano da je $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}$, odnosno da je preslikavanje $x \mapsto (\pi(x)\xi|\eta)$ neprekidno u točki e za svaki $\xi \in \mathcal{H}$ i svaki $\eta \in S$.
Stavimo sada

$$\mathcal{H}_2 = \{\eta \in \mathcal{H};\ \text{funkcija } x \mapsto (\pi(x)\xi|\eta) \text{ je neprekidna u točki } e\ \forall \xi \in \mathcal{H}\}.$$

Sasvim analogno nalazimo da je $\mathcal{H}_2 = \mathcal{H}$.

Prema tome, preslikavanje $x \mapsto (\pi(x)\xi|\eta)$ je neprekidno u točki e za svaka dva vektora $\xi, \eta \in \mathcal{H}$. Odatle slijedi (b).

Napokon, pretpostavimo da vrijedi (b). Neka su $\xi_0 \in \mathcal{H}$, $x_0 \in G$ i $\varepsilon > 0$. Vrijednost funkcije $x \mapsto \mathrm{Re}\,(\pi(x)\pi(x_0)\xi_0|\pi(x_0)\xi_0)$ u točki e jednaka je $\|\xi_0\|^2$. Po pretpostavci ta je funkcija neprekidna u točki e pa postoji okolina U od e takva da vrijedi

$$y \in U \qquad \Longrightarrow \qquad \|\xi_0\|^2 - \mathrm{Re}\,(\pi(y)\pi(x_0)\xi_0|\pi(x_0)\xi_0) < \frac{\varepsilon^2}{8}.$$

Za $x \in Ux_0$ (tj. $xx_0^{-1} \in U$) i za $\xi \in \mathcal{H}$ takav da je $\|\xi - \xi_0\| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ imamo redom

$$\|\pi(x)\xi - \pi(x_0)\xi_0\| \le \|\pi(x)\xi - \pi(x)\xi_0\| + \|\pi(x)\xi_0 - \pi(x_0)\xi_0\| =$$

$$= \|\xi - \xi_0\| + \sqrt{(\pi(x)\xi_0|\pi(x)\xi_0) + (\pi(x_0)\xi_0|\pi(x_0)\xi_0) - 2\mathrm{Re}\,(\pi(x)\xi_0|\pi(x_0)\xi_0)} =$$

$$= \|\xi - \xi_0\| + \sqrt{2\left[\|\xi_0\|^2 - \mathrm{Re}\,(\pi(xx_0^{-1})\pi(x_0)\xi_0|\pi(x_0)\xi_0)\right]} < \frac{\varepsilon}{2} + \sqrt{2\frac{\varepsilon^2}{8}} = \varepsilon.$$

Time je dokazano da je preslikavanje $(x, \xi) \mapsto \pi(x)\xi$ neprekidno u svakoj točki $(x_0, \xi_0) \in G \times \mathcal{H}$, odnosno, vrijedi (a).

Neka je π unitarna reprezentacija kompaktne grupe G na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$. Nadalje, neka je I invarijantni integral na grupi G iz teorema 4.1.7. i μ pripadna (normirana) Haarova mjera. Za $f \in C(G)$ i $\xi, \eta \in \mathcal{H}$ kompleksna funkcija $\varphi_{f,\xi,\eta} : a \mapsto f(a)(\pi(a)\xi|\eta)$ na grupi G je neprekidna. Stoga na nju možemo primijeniti integral I. Primijetimo da je preslikavanje

$$(\xi, \eta) \mapsto I(\varphi_{f,\xi,\eta}) = \int_G f(a)(\pi(a)\xi|\eta)\mathrm{d}\mu(a)$$

sa $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ u $\mathbb{C}$ seskvilinearno. Nadalje, vrijedi

$$|\varphi_{f,\xi,\eta}(a)| \le \|f\|_\infty \cdot \|\xi\| \cdot \|\eta\|, \qquad f \in C(G),\ \xi, \eta \in \mathcal{H}.$$

Prema propoziciji 4.1.2. nalazimo

$$|I(\varphi_{f,\xi,\eta})| \le \max\{|f(a)(\pi(a)\xi|\eta)|;\ a \in G\} \le \|f\|_\infty \cdot \|\xi\| \cdot \|\eta\|, \qquad f \in C(G),\ \xi, \eta \in \mathcal{H}. \tag{4.27}$$

Prema tome, postoji ograničen linearan operator na prostoru $\mathcal{H}$, koji ćemo označiti sa $\pi(f)$, takav da je

$$(\pi(f)\xi|\eta) = I(\varphi_{f,\xi,\eta}) = \int_G f(a)(\pi(a)\xi|\eta)\mathrm{d}\mu(a), \qquad \xi, \eta \in \mathcal{H}. \tag{4.28}$$

Očito je tako definirano preslikavanje $f \mapsto \pi(f)$ sa $C(G)$ u $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ linearno. Nadalje, iz (4.27) slijedi da je

$$\|\pi(f)\| \le \|f\|_\infty \qquad \forall f \in C(G),$$

dakle, preslikavanje $f \mapsto \pi(f)$ je neprekidno.

Za $f, g \in C(G)$ definiramo funkciju $f * g : G \to \mathbb{C}$ tako da njena vrijednost u točki a bude vrijednost integrala I na neprekidnoj funkciji $b \mapsto f(ab^{-1})g(b)$, tj. pisano pomoću integrala po Haarovoj mjeri μ :

$$(f * g)(a) = \int_G f(ab^{-1})g(b)\mathrm{d}\mu(b).$$

Zadatak 4.2.4. *Dokažite da je* $f * g \in C(G)$ *i* $\|f * g\|_\infty \le \|f\|_\infty \|g\|_\infty$.

Binarna operacija $(f, g) \mapsto f * g$ sa $C(G) \times C(G)$ u $C(G)$ zove se **konvolucija na kompaknoj grupi** G.

Zadatak 4.2.5. *Neka je* Φ *neprekidni linearni funkcional na Banachovom prostoru* $C(G)$. *Dokažite da vrijedi Fubinijev teorem za neprekidne funkcije dvije varijable: ako je* $F : G \times G \to \mathbb{C}$ *neprekidna funkcija i* $a \in G$ *definiramo funkcije* $F_a, F^a \in C(G)$ *sa* $F_a(b) = F(a, b)$, $F^a(b) = F(b, a)$, $b \in G$; *tada su funkcije* φ_F *i* φ^F *definirane sa* $\varphi_F(a) = \Phi(F_a)$ *i* $\varphi^F(a) = \Phi(F^a)$ *neprekidne i vrijedi* $\Phi(\varphi_F) = \Phi(\varphi^F)$.

Uputa: Dokaz neprekidnosti funkcija φ_F i φ^F može se provesti korištenjem uniformne neprekidnosti funkcije F. Dokaz jednakosti provedite najprije za funkcije oblika $F(a, b) = f(a)g(b)$, $f, g \in C(G)$, a zatim iskoristite Stone−Weierstrassov teorem da dokažete da takve funkcije razapinju gust potprostor od $C(G \times G)$.

Posebno, za invarijatni integral I pisan pomoću Haarove mjere μ tvrdnja zadatka 4.2.5. znači:

$$\int_G \left[\int_G F(a, b) \mathrm{d}\mu(a) \right] \mathrm{d}\mu(b) = \int_G \left[\int_G F(a, b) \mathrm{d}\mu(b) \right] \mathrm{d}\mu(a), \qquad F \in C(G \times G).$$

Zadatak 4.2.6. *Dokažite da je s konvolucijom* $C(G)$ *Banachova algebra. Dokažite da je ta algebra unitalna ako i samo je grupa* G *konačna.*

Uputa: Za dokaz asocijativnosti konvolucije iskoristite zadatak 4.2.5.

Zadatak 4.2.7. *Neka je* π *unitarna reprezentacija kompaktne grupe* G *na Hilbertovom prostoru* $\mathcal{H}$ *i neka je za* $f \in C(G)$ *pomoću* (4.28) *definiran operator* $\pi(f)$.

(*a*) *Dokažite da je* $f \mapsto \pi(f)$ *homomorfizam algebre* $C(G)$ *u algebru* $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, *tj. da je*

$$\pi(f * g) = \pi(f)\pi(g), \qquad f, g \in C(G).$$

(*b*) *Dokažite da je* $\pi(f)^* = \pi(f^*)$, $f \in C(G)$, *pri čemu je* $f^*(a) = \overline{f(a^{-1})}$, $a \in G$.

(*c*) *Dokažite da je zatvoren potprostor* $\mathcal{K}$ *od* $\mathcal{H}$ *invarijantan s obzitom na sve operatore* $\pi(a)$, $a \in G$, *ako i samo ako je* $\mathcal{K}$ *invarijantan s obzirom na sve operatore* $\pi(f)$, $f \in C(G)$.

Uputa: U (*b*) i (*c*) koristite sljedeću činjenicu:

Zadatak 4.2.8. *Neka je* $\mathcal{V}$ *skup svih otvorenih okolina jedinice* e *u kompaktnoj grupi* G. *Skup* $\mathcal{V}$ *je usmjeren u odnosu na uređaj obrnut od inkluzije. Za svaku* $V \in \mathcal{V}$ *moguće je izabrati nenegativnu funkciju* $g_V \in C(G)$ *čiji je nosač*

$$Supp\, g_V = Cl(\{a \in G;\ g_V(a) \neq 0\})$$

sadržan u V *i koja ima svojstvo da je* $I(g_V) = 1$. *Dokažite da za svaku* $f \in C(G)$ *hipernizovi* $(f * g_V)_{V \in \mathcal{V}}$ *i* $(g_V * f)_{V \in \mathcal{V}}$ *konvergiraju prema* f *u Banachovom prostoru* $C(G)$, *tj. da za svaku* $f \in C(G)$ *i za svaki* $\varepsilon > 0$ *postoji* $V_0 \in \mathcal{V}$ *takva da vrijedi:*

$$V \in \mathcal{V},\ V \subseteq V_0 \qquad \|f - g_V * f\|_\infty < \varepsilon \quad i \quad \|f - f * g_V\|_\infty < \varepsilon.$$

Zadatak 4.2.9. *Neka je* $(g_V)_{V \in \mathcal{V}}$ *hiperniz iz prethodnog zadatka i neka je* π *unitarna reprezentacija od* G *na Hilbertovom prostoru* $\mathcal{H}$. *Dokažite da tada za svaki* $\xi \in \mathcal{H}$ *hiperniz* $(\pi(g_V)\xi)_{V \in \mathcal{V}}$ *u Hilbertovom prostoru* $\mathcal{H}$ *konvergira prema* ξ, *tj. da za svaki* $\xi \in \mathcal{H}$ *i svaki* $\varepsilon > 0$ *postoji* $V_0 \in \mathcal{V}$ *takva da vrijedi*

$$V \in \mathcal{V},\, V \subseteq V_0 \qquad \Longrightarrow \qquad \|\pi(g_V)\xi - \xi\| < \varepsilon.$$

Zadatak 4.2.10. *Korištenjem činjenice da je $C(G)$ gust potprostor Banachovog prostora $L_1(G)$ svih klasa integrabilnih funkcija u odnosu na Haarovu mjeru μ ili korištenjem nekog od topoloških teorema egzistencije neprekidnih funkcija na Hausdorffovom kompatnom topološkom prostoru dokažite konstataciju iz zadatka 4.2.8.: ako je V otvorena okolina jedinice e u grupi G onda postoji nenegativna funkcija $g \in C(G)$ takva da je*

$$Supp\, g = Cl(\{a \in G;\ g(a) \neq 0\}) \subseteq V \qquad i \qquad I(g) = 1.$$

Uputa: Karakteristična funkcija χ_U nepraznog otvorenog skupa U je integrabilna funkcija na G i $I(\chi_U) = \mu(U) > 0$ zbog regularnosti mjere μ. Nadalje, koristite svojstva okolina jedinice e u G s početka odjeljka 4.1.

Za $f, g \in C(G)$ stavimo

$$(f|g) = I(f\overline{g}) = \int_G f(a)\overline{g(a)}\mathrm{d}\mu(a).$$

Lako se vidi da je na taj način definiran skalarni produkt na vektorskom prostoru $C(G)$. Hilbertov prostor koji je upotpunjenje tog unitarnog prostora označavamo sa $L_2(G)$.

Za $a \in G$ ponovo promatramo lijevi i desni pomak λ_a i ρ_a na $C(G)$:

$$(\lambda_a f)(x) = f(a^{-1}x), \qquad (\rho_a f)(x) = f(xa), \qquad f, g \in C(G),\ a, x \in G.$$

Znamo da su $a \to \lambda_a$ i $a \to \rho_a$ homomorfizmi grupe G u grupu izometrija Banachovog prostora $C(G)$ na samoga sebe.

Zadatak 4.2.11. (*a*) *Dokažite da su preslikavanja $(a, f) \mapsto \lambda_a f$ i $(a, f) \mapsto \rho_a f$ sa $G \times C(G)$ u $C(G)$ neprekidna.*

(*b*) *Dokažite da se operatori λ_a i ρ_a jedinstveno proširuju sa $C(G)$ do neprekidnih operatora $\lambda(a)$ i $\rho(a)$ na Hilbertovom prostoru $L_2(G)$ i da su λ i ρ unitarne reprezentacije kompaktne grupe G na Hilbertovom prostoru $L_2(G)$.*

(*c*) *Dokažite da postoji unitaran operator U na $L_2(G)$ takav da je $(Uf)(a) = f(a^{-1})$ za $f \in C(G)$ i $a \in G$ i da vrijedi $U\lambda(a) = \rho(a)U$ i $U\rho(a) = \lambda(a)U$ za svaki $a \in G$.*

Za unitarne reprezentacije λ i ρ i za $f \in C(G)$ tada su definirani ograničeni operatori $\lambda(f)$ i $\rho(f)$ na Hilbertovom prostoru $L_2(G)$ i znamo da su $f \mapsto \lambda(f)$ i $f \mapsto \rho(f)$ neprekidni homomorfizmi Banachove algebre $C(G)$ u Banachovu algebru $\mathcal{B}(L_2(G))$ i vrijedi $\lambda(f)^* = \lambda(f^*)$ i $\rho(f)^* = \rho(f^*)$, gdje je $f^*(a) = \overline{f(a^{-1})}$.

Zadatak 4.2.12. *Dokažite da vrijedi*

$$\lambda(f)g = f * g, \qquad \rho(f)g = g * \check{f}, \qquad \forall f, g \in C(G).$$

Pri tome je kao i prije $\check{f}(a) = f(a^{-1})$.

Promatrajući realizaciju prostora $L_2(G)$ kao prostora klasa ekvivalencije $\mu-$izmjerivih funkcija $\varphi : G \to \mathbb{C}$ takvih da je funkcija $a \mapsto |\varphi(a)|^2$ integrabilna, pri čemu za dvije $\mu-$izmjerive funkcije $\varphi, \psi : G \to \mathbb{C}$ kažemo da su ekvivalentne ako $\mu(\{a \in G;\ \varphi(a) \neq \psi(a)\}) = 0$, može se dokazati da ne samo za neprekidnu funkciju g nego i za predstavnika φ bilo koje klase u $L_2(G)$ vrijede formule iz zadatka 4.2.12.:

$$(\lambda(f)\varphi)(a) = (f * \varphi)(a) = \int_G f(b)\varphi(b^{-1}a)\mathrm{d}\mu(b),$$

$$(\rho(f)\varphi)(a) = (\varphi * \check{f})(a) = \int_G \varphi(b)\check{f}(b^{-1}a)\mathrm{d}\mu(b) = \int_G \varphi(ab)f(b)\mathrm{d}\mu(b)$$

i da su konvolucije $f * \varphi$ i $\varphi * \check{f}$ neprekidne funkcije. Štoviše, pokazuje se da se konvolucija $\varphi * \psi$ može definirati i ako su obje funkcije φ i ψ predstavnici klasa iz $L_2(G)$ i da je to ponovo neprekidna funkcija na G. Posebno vrijedi:

Propozicija 4.2.3. *Neka su $\xi \in L_2(G)$ i $f \in C(G)$. Tada su $\lambda(f)\xi \in C(G)$ i $\rho(f)\xi \in C(G)$.*

Odatle dobivamo sljedeću činjenicu koja će biti ključna u dokazu Peter$-$Weylovog teorema u sljedećem odjeljku.

Propozicija 4.2.4. *Neka je $X \neq \{0\}$ zatvoren potprostor Hilbertovog prostora $L_2(G)$ koji je invarijantan s obzirom na sve operatore $\lambda(a)$ ili s obzirom na sve operatore $\rho(a)$, $a \in G$. Tada je $X \cap C(G) \neq \{0\}$.*

Dokaz: Pretpostavimo da je zatvoren potprostor $X \neq \{0\}$ Hilbertovog prostora $L_2(G)$ invarijantan s obzirom na sve operatore $\lambda(a)$, $a \in G$. Tada je prema tvrdnji (c) zadatka 4.2.7. $\lambda(f)\xi \in X$ za svaki $\xi \in X$ i svaku funkciju $f \in C(G)$. Prema zadatku 4.2.9. postoje $\xi \in X$ i $f \in C(G)$ takvi da je $\lambda(f)\xi \neq 0$. Tada je $\lambda(f)\xi \in X$, a prema propoziciji 4.2.3. je $\lambda(f)\xi \in C(G)$. Time je tvrdnja propozicije dokazana u slučaju $\lambda-$invarijantnosti potprostora X. U slučaju $\rho-$invarijantnosti dokaz je potpuno analogan.

4.3 Peter−Weylov teorem

O ovom odjeljku je G kompaktna grupa. Primijetimo da je karakter χ_π konačnodimenzionalne neprekidne reprezentacije kompaktne grupe G na prostoru V neprekidna funkcija na G za koju vrijede tvrdnje propozicija 2.2.1., 2.2.2. i 2.2.3.:

$$\chi_\pi(e) = \dim V, \qquad \chi_\pi\left(a^{-1}\right) = \overline{\chi_\pi(a)} \quad a \in G, \qquad \chi_\pi(ab) = \chi_\pi(ba) \quad a, b \in G;$$

$$V = V_1 \dot{+} V_2 \dot{+} \cdots \dot{+} V_s, \quad V_1, V_2, \ldots, V_s \quad \pi - \text{invarijatni} \qquad \Longrightarrow \qquad \chi_\pi = \chi_{\pi_{V_1}} + \chi_{\pi_{V_2}} + \cdots + \chi_{\pi_{V_s}};$$

$$\chi_{\pi \otimes \rho} = \chi_\pi \chi_\rho.$$

Nadalje, potpuno analogno kao u poglavlju 2. dokazuje se sljedeći analogon propozicije 2.1.2.:

Propozicija 4.3.1. *Neka su π i ρ neprekidne reprezentacije kompaktne grupe G na konačnodimenzionalnim prostorima V i W. Za $A \in L(V, W)$ stavimo*

$$A^0 = \int_G \rho\left(a^{-1}\right) A \pi(a) \mathrm{d}\mu(a)$$

(*integral operatorske funkcije definiran je pomoću bilo kojih baza u V i W i pomoću integrala skalarnih funkcija*). *Tada je $A \mapsto A^0$ projektor prostora $L(V, W)$ na potprostor $Hom_G(V, W)$.*

Odatle pomoću Schurove leme neposredno slijedi analogon teorema 2.1.3. i 2.1.4.:

Teorem 4.3.2. *Neka su π i ρ neekvivalentne ireducibilne neprekidne reprezentacije kompaktne grupe G na konačnodimenzionalnim prostorima V i W.*

(*a*) *Za svaki $A \in L(V, W)$*

$$\int_G \rho\left(a^{-1}\right) A \pi(a) = 0.$$

(*b*) *Za svaki $A \in L(V)$ vrijedi*

$$\int_G \pi\left(a^{-1}\right) A \pi(a) \mathrm{d}\mu(a) = \frac{\operatorname{Tr} A}{\dim V} I_V.$$

Korolar 4.3.3. *Uz pretpostavke teorema 4.3.2. neka je $e = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ baza vektorskog prostora V i $f = \{f_1, f_2, \ldots, f_m\}$ baza vektorskog prostora W. Nadalje, neka su $\pi_{ij}(a)$ elementi matrice operatora $\pi(a)$ u bazi e i $\rho_{k\ell}(a)$ elementi matrice operatora $\rho(a)$ u bazi f. Tada vrijedi*

$$\int_G \pi_{ij}(a) \rho_{k\ell}\left(a^{-1}\right) \mathrm{d}\mu(a) = 0, \qquad \forall i, j \in \{1, 2, \ldots, n\} \quad \text{i} \quad \forall k, \ell \in \{1, 2, \ldots, m\},$$

$$\int_G \pi_{ij}(a) \pi_{rs}\left(a^{-1}\right) \mathrm{d}\mu(a) = \frac{1}{n} \delta_{is} \delta_{jr}, \qquad \forall i, j, r, s \in \{1, 2, \ldots, n\}.$$

Na prostoru $C(G)$ definiran je skalarni produkt pomoću invarijatnog funkcionala i upotpunjenje tog unitarnog prostora označili smo sa $L_2(G)$. Iz korolara 4.3.3. neposredno slijedi

Teorem 4.3.4. *Neka su π i ρ neprekidne ireducibilne konačnodimenzionalne reprezentacije kompaktne grupe G. Tada je*

$$(\chi_\pi | \chi_\rho) = \begin{cases} 1 & \textit{ako je} \quad \pi \simeq \rho \\ 0 & \textit{ako je} \quad \pi \not\simeq \rho. \end{cases}$$

Sada se sasvim analogno dokazu teorema 2.2.5. dokazuje

Teorem 4.3.5. *Neka je π neprekidna reprezentacija grupe G na konačnodimenzionalnom vektorskom prostoru V i neka su $V_1, V_2, \ldots, V_s$ $\pi-$invarijantni potprostori takvi da je*

$$V = V_1 \dotplus V_2 \dotplus \cdots \dotplus V_s$$

i da su sve subreprezentacije π_{V_j} ireducibilne. Neka je ρ neprekidna konačnodimenzionalna ireducibilna reprezentacija od G. Tada je skalarni produkt $(\chi_\pi|\chi_\rho)$ jednak broju indeksa $j \in \{1, \ldots, s\}$ takvih da je $\pi_{V_j} \simeq \rho$.

Korolar 4.3.6. *Neka su π i σ neprekidne konačnodimenzionalne reprezentacije grupe G. Tada je $\pi \simeq \sigma$ ako i samo ako je $\chi_\pi = \chi_\sigma$.*

U daljnjem ćemo za kompaktnu grupu G sa $\hat{G}$ označavati skup svih klasa ekvivalencije neprekidnih ireducibilnih konačnodimenzionalnih reprezentacija grupe G. Kao i u poglavlju 4. definiramo multiplicitet $m(\pi, \alpha)$ ireducibilne klase $\alpha \in \hat{G}$ u neprekidnoj konačnodimenzionalnoj reprezentaciji π i sasvim analogno dokazima teorema 2.2.7. i 2.6.5. dokazuje se

Teorem 4.3.7. *Neka su π i ρ neprekidne reprezentacije na konačnodimenzionalnim prostorima V i W. Tada je*

$$(\chi_\pi|\chi_\rho) = \dim\, Hom_G(V, W) = \dim\, Hom_G(W, V) = \sum_{\alpha \in \hat{G}} m(\pi, \alpha) m(\rho, \alpha).$$

Reprezentacija π je ireducibilna ako i samo ako je $(\chi_\pi|\chi_\pi) = 1$.

Neka je π neprekidna reprezentacija kompaktne grupe G na konačnodimenzionalnom prostoru V i neka je $e = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ baza prostora V. Za $a \in G$ označimo sa $\pi_{ij}(a)$ elemente matrice operatora $\pi(a)$ u bazi e. Tada su $\pi_{ij} \in C(G)$ i sa $C_\pi(G)$ označimo potprostor od $C(G)$ razapet funkcijama π_{ij}, $1 \leq i, j \leq n$. Taj potprostor ne ovisi o izboru baze e prostora V. Ako su π i ρ ekvivalentne neprekidne konačnodimenzionalne reprezentacije od G, onda je $C_\pi(G) = C_\rho(G)$. Za $\alpha \in \hat{G}$ i $\pi \in \alpha$ pišemo $C_\alpha(G) = C_\pi(G)$.

Sada za svaku klasu $\alpha \in \hat{G}$ izaberimo neku unitarnu reprezentaciju π^α na V^α i neku ortonormiranu bazu $e^\alpha = \{e_1^\alpha, e_2^\alpha, \ldots, e_{d(\alpha)}^\alpha\}$ ($d(\alpha) = \dim V^\alpha$) i neka su $\pi_{ij}^\alpha(a)$ elementi matrice operatora $\pi^\alpha(a)$ u bazi e^α. Analogno kao teorem 2.4.7. dokazuje se

Teorem 4.3.8. *Skup $\{\sqrt{d(\alpha)}\pi_{ij}^\alpha;\ \alpha \in \hat{G},\ 1 \leq i, j \leq d(\alpha)\}$ je ortonormiran u unitarnom prostoru $C(G)$ i $\{\pi_{ij}^\alpha;\ 1 \leq i, j \leq d(\alpha)\}$ je baza potprostora $C_\alpha(G)$. Posebno,*

$$\dim\, C_\alpha(G) = d(\alpha)^2 \qquad i \qquad C_\alpha(G) \perp C_\beta(G) \quad ako\ je \quad \alpha \neq \beta.$$

U stvari, vrijedi sljedeći teorem:

Teorem 4.3.9. (Peter−Weyl) $\{\sqrt{d(\alpha)}\pi_{ij}^\alpha;\ \alpha \in \hat{G},\ 1 \leq i, j \leq d(\alpha)\}$ *je ortonormirana baza Hilbertovog prostora $L_2(G)$.*

Dokaz ovog teorema relativno je jednostavna posljedica Stone−Weierstrassovog teorema ukoliko je grupa G matrična, odnosno, ukoliko ima vjernu konačnodimenzionalnu neprekidnu reprezentaciju. Označimo sa $\mathcal{C}(G)$ potprostor od $C(G)$ razapet matričnim elementima neprekidnih konačnodimenzionalnih reprezentacija od G. Naravno, $\mathcal{C}(G)$ je direktna suma potprostora $C_\alpha(G)$, $\alpha \in \hat{G}$. Ako su f i g matrični elementi neprekidnih konačnodimenzionalnih reprezentacija π i ρ od

G, onda je njihov produkt fg matrični element reprezentacije $\pi\otimes\rho$, koja je također konačnodimenzionalna i neprekidna. Stoga je $fg\in\mathcal{C}(G)$ pa slijedi da je $\mathcal{C}(G)$ podalgebra Banachove algebre $C(G)$. Nadalje, kompleksno konjugirane reprezentacije imaju kompleksno konjugirane matrične elementi, pa slijedi da je algebra $\mathcal{C}(G)$ zatvorena u odnosu na kompleksno konjugiranje. Napokon, budući da postoji vjerna konačnodimenzionalna neprekidna reprezentacija od G, za $a,b\in G$, $a\neq b$, postoji $f\in\mathcal{C}(G)$ takva da je $f(a)\neq f(b)$. Drugim riječima, algebra $\mathcal{C}(G)$ razlikuje točke. Sada iz Stone−Weierstrassovog teorema slijedi da je $\mathcal{C}(G)$ gusta u $C(G)$ u odnosu na normu $\|\cdot\|_\infty$. Kako je

$$\|f\|_2\leq\|f\|_\infty\qquad\forall f\in C(G)$$

slijedi da je $\mathcal{C}(G)$ gusto u $C(G)$ i u odnosu na normu $\|\cdot\|_2$, a kako je $C(G)$ gusto u $L_2(G)$ u odnosu na $\|\cdot\|_2$, slijedi da je $\mathcal{C}(G)$ gust potprostor Hilbertovog prostora $L_2(G)$. Ortonormiran skup $\{\sqrt{d(\alpha)}\pi^\alpha_{ij};\ \alpha\in\hat{G},\ 1\leq i,j\leq d(\alpha)\}$ je baza vektorskog prostora $\mathcal{C}(G)$, pa zaključujemo da je to ortonormirana baza od $L_2(G)$.

Dokažimo sada Peter−Weylov teorem i u slučaju kad ne znamo ima li kompaktna grupa G ima vjernu konačnodimenzionalnu neprekidnu reprezentaciju. Ponovo je $\mathcal{C}(G)$ podalgebra Banachove algebre $C(G)$ zatvorena u odnosu na kompleksno konjugiranje, samo sada ne znamo da li $\mathcal{C}(G)$ razlikuje točke od G. Označimo sa Y zatvarač potprostora $\mathcal{C}(G)$ u Hilbertovom prostoru $L_2(G)$. Svaki od potprostora $C_\alpha(G)$ invarijantan je u odnosu na sve operatore $\lambda(a)$ i $\rho(a)$, pa slijedi da je i $\mathcal{C}(G)$, dakle i njegov zatvarač Y invarijantan u odnosu na sve te operatore. Pretpostavimo da je $Y\neq L_2(G)$. Tada je njegov ortogonalni komplement $X=Y^\perp=\mathcal{C}(G)^\perp$ različit od $\{0\}$. Kako je $\lambda(a)^*=\lambda(a^{-1})$ i $\rho(a)^*=\rho(a^{-1})$, zatvoren potprostor X od $L_2(G)$ također je invarijantan s obzirom na sve operatore $\lambda(a)$ i $\rho(a)$, $a\in G$. Prema propoziciji 4.2.4. tada je $X\cap C(G)\neq\{0\}$. Neka je $F_1\in X\cap C(G)$, $F_1\neq 0$. Invarijantnost prostora $X\cap C(G)$ u odnosu na lijeve (i desne) pomake pokazuje da možemo pretpostaviti da je $F_1(e)\neq 0$, a množenjem skalarom možemo postići da je $F_1(e)=1$. Stavimo sada

$$F_2(a)=\int_G F_1(bab^{-1})\mathrm{d}\mu(b).$$

To je neprekidna funkcija na grupi G i vrijedi $F_2(cac^{-1})=F_2(a)\ \forall a,c\in G$. Nadalje, $F_2(e)=F_1(e)=1$. Za $f\in\mathcal{C}(G)$ zbog Fubinijevog teorema za neprekidne funkcije (zadatak 4.2.5.) i zbog invarijantnosti integrala u odnosu na pomake imamo

$$(F_2|f)=\int_G F_2(a)\overline{f(a)}\mathrm{d}\mu(a)=\int_G\left[\int_G F_1(bab^{-1})\overline{f(a)}\mathrm{d}\mu(b)\right]\mathrm{d}\mu(a)=$$

$$=\int_G\left[\int_G F_1(bab^{-1})\overline{f(a)}\mathrm{d}\mu(a)\right]\mathrm{d}\mu(b)=\int_G\left[\int_G F_1(a)\overline{f(b^{-1}ab)}\mathrm{d}\mu(a)\right]\mathrm{d}\mu(b).$$

Međutim, imamo $f(b^{-1}ab)=(\lambda(b)\rho(b)f)(a)$ i funkcija $g_b=\lambda(b)\rho(b)f$ je također u $\mathcal{C}(G)$ za svaki $b\in G$. Stoga je $(F_1|g_b)=0$ za svaki $b\in G$, pa slijedi

$$(F_2|f)=\int_G(F_1|g_b)\mathrm{d}\mu(b)=0.$$

Budući da je $f\in\mathcal{C}(G)$ bila proizvoljna, slijedi da je $F_2\in X\cap C(G)$.

Za matrične elemente unitarne reprezentacije vrijedi $\pi_{ij}(a)=\overline{\pi_{ji}(a^{-1})}$, pa zaključujemo da iz $f\in\mathcal{C}(G)$ slijedi $f^*\in\mathcal{C}(G)$. Stoga je i $F_2^*\in X\cap C(G)$, dakle i $F=F_2+F_2^*\in X\cap C(G)$. Tada vrijedi

$$F(e)=2>0,\quad F(cac^{-1})=F(a),\quad \text{tj.}\quad F(ca)=F(ac),\quad \text{i}\quad F(a^{-1})=\overline{F(a)},\quad a,c\in G.$$

Definiramo operator $T : C(G) \to C(G)$ sa

$$(Tf)(a) = \int_G F(a^{-1}b)f(b)\mathrm{d}\mu(b), \qquad f \in C(G).$$

Tada iz teorije integralnih operatora slijedi da je T kompaktan operator koji se proširuje do kompkatnog operatora $T : L_2(G) \to L_2(G)$. Nadalje, kako je $F(e) \neq 0$, vrijedi $T \neq 0$, a iz $F = F^*$ slijedi da je operator T hermitski. No tada operator T ima neku svojstvenu vrijednost $\tau \in \mathbb{R}$, $\tau \neq 0$ i pripadni svojstveni potprostor

$$V = \{\xi \in L_2(G);\ T\xi = \tau\xi\}$$

je konačnodimenzionalan. Nadalje, pomoću propozicije 4.2.3. pokazuje se da je $TL_2(G) \subseteq C(G)$, dakle, $V \subseteq C(G)$. Za $f \in V$ i $a, b \in G$ imamo

$$(T\lambda(a)f)(b) = \int_G F(b^{-1}c)(\lambda(a)f)(c)\mathrm{d}\mu(c) = \int_G F(b^{-1}c)f(a^{-1}c)\mathrm{d}\mu(c) =$$

$$= \int_G F(b^{-1}ac)f(c)\mathrm{d}\mu(c) = (Tf)(a^{-1}b) = \tau f(a^{-1}b) = \tau(\lambda(a)f)(b).$$

Dakle, $T(\lambda(a)f) = \tau(\lambda(a)f)$, pa zaključujemo da je $\lambda(a)f \in V$. Time je dokazano da je potprostor V invarijantan s obzirom na sve operatore $\lambda(a)$, $a \in G$. No tada V sadrži neki potprostor $W \neq \{0\}$ koji je $\lambda-$invarijantan i takav da je subreprezentacija $\pi = \lambda_W$ ireducibilna. Neka je $\{f_1, \ldots, f_n\}$ ortonormirana baza od W. Matrični elementi operatora $\pi(a) = \lambda_W(a)$ u toj bazi su

$$\pi_{ij}(a) = (\lambda(a)f_j|f_i) = \int_G f_j(a^{-1}b)\overline{f_i(b)}\mathrm{d}\mu(b).$$

Po definiciji imamo $\pi_{ij} \in \mathcal{C}(G)$, dakle $\pi_{ij} \perp X$. Posebno, imamo redom

$$0 = (F|\pi_{ii}) = \int_G F(a)\overline{\pi_{ii}(a)}\mathrm{d}\mu(a) = \int_G \left[\int_G F(a)\overline{f_i(a^{-1}b)}f_i(b)\mathrm{d}\mu(b)\right]\mathrm{d}\mu(a) =$$

$$= \int_G \left[\int_G F(a)\overline{f_i(a^{-1}b)}f_i(b)\mathrm{d}\mu(a)\right]\mathrm{d}\mu(b) = \int_G \left[\int_G F(ba^{-1})\overline{f_i(a)}f_i(b)\mathrm{d}\mu(a)\right]\mathrm{d}\mu(b) =$$

$$= \int_G \left[\int_G F(a^{-1}b)f_i(b)\mathrm{d}\mu(b)\right]\overline{f_i(a)}\mathrm{d}\mu(a) = \int_G (Tf_i)(a)\overline{f_i(a)}\mathrm{d}\mu(a) = \tau\|f_i\|^2,$$

što je u suprotnosti sa $\tau \neq 0$ i $f_i \neq 0$. Ova kontradikcija dokazuje da je $X = \{0\}$, tj. da je $\mathcal{C}(G)$ gusto u Hilbertovom prostoru $L_2(G)$.

Poglavlje 5

Reprezentacije nekih matričnih grupa

5.1 Reprezentacije grupa $\mathrm{SO}(2)$ i $\mathrm{O}(2)$

U ovom odjeljku proučit ćemo konačnodimenzionalne reprezentacije grupe $\mathrm{O}(2)$ svih realnih ortogonalnih matrica drugog reda

$$\mathrm{O}(2) = \{A \in M_2(\mathbb{R});\ AA^t = A^tA = I\}$$

i njene podgrupe

$$\mathrm{SO}(2) = \{A \in \mathrm{O}(2);\ \det A = 1\}.$$

Promatrano geometrijski, grupa $\mathrm{SO}(2)$ predstavlja grupu svih rotacija ravnine oko neke fiksne točke (ishodište) a $\mathrm{O}(2)$ je grupa svih rotacija ravnine oko ishodišta i svih refleksija s obzirom na pravce kroz ishodište. Lako se vidi da je

$$\mathrm{SO}(2) = \{u(\varphi);\ \varphi \in \mathbb{R}\}, \qquad \text{gdje je} \quad u(\varphi) = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix},$$

$$\mathrm{O}(2) = \mathrm{SO}(2) \cup \{v(\varphi);\ \varphi \in \mathbb{R}\}, \qquad \text{gdje je} \quad v(\varphi) = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{bmatrix}.$$

Matrica $u(\varphi)$ predstavlja rotaciju ravnine oko ishodišta za kut φ, a $v(\varphi)$ refleksiju s obzirom na pravac kroz ishodište koji zatvara s pozitivnim dijelom abscise kut $\varphi/2$. Imamo

$$u(\varphi)u(\psi) = u(\varphi + \psi)$$

dakle, grupa $\mathrm{SO}(2)$ je komutativna. U stvari, preslikavanje $\varphi \mapsto u(\varphi)$ je epimorfizam aditivne grupe $\mathbb{R}$ s jezgrom $2\pi\mathbb{Z}$, dakle, grupa $\mathrm{SO}(2)$ je izomorfna kvocijentnoj grupi $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. Nadalje, lako se izračuna da je

$$u(\varphi)v(\psi) = v(\varphi - \psi), \qquad v(\psi)u(\varphi) = v(\psi - \varphi), \qquad v(\varphi)v(\psi) = u(\varphi - \psi).$$

Odatle se vidi da grupa $\mathrm{O}(2)$ nije komutativna, da je $\mathrm{SO}(2)$ normalna podgrupa od $\mathrm{O}(2)$ i da je kvocijentna grupa $\mathrm{O}(2)/\mathrm{SO}(2)$ izomorfna dvočlanoj multiplikativnoj grupi $\{1, -1\}$. Ako sa T označimo refleksiju u odnosu na abscisu, tj.

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

onda se lako provjerava da je

$$v(\varphi) = u(\varphi)T = Tu(-\varphi), \qquad \varphi \in \mathbb{R},$$

dakle, I i T su predstavnici dvije $\mathrm{SO}(2)-$klase u grupi $\mathrm{O}(2)$.

Dakle, $e^{i\varphi} \mapsto u(\varphi)$ je bijekcija jedinične kružnice $S = \{\lambda \in \mathbb{C};\ |\lambda| = 1\}$ u kompleksnoj ravnini na grupu SO(2) i pomoću te bijekcije uvodimo topologiju na grupu SO(2). Na taj način SO(2) postaje kompaktna grupa. Nadalje, i grupa O(2) je kompaktna preko bijekcije sa $S \times \{I, T\}$ na O(2). Prostor $C(\mathrm{SO}(2))$ može se identificirati s prostorom $C(S)$ svih neprekidnih funkcija $f : S \to \mathbb{C}$, odnosno s prostorom svih neprekidnih funkcija $F : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ koje su periodičke s periodom 2π. Nadalje, prostor $C(\mathrm{O}(2))$ se može identificirati s prostorom svih uređenih parova (f_1, f_2) (odnosno, (F_1, F_2)) takvih funkcija.

Zadatak 5.1.1. *Dokažite da su uz te identifikacije invarijantni integrali na grupama* SO(2) *i* O(2) *dani sa*

$$I(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f\left(\mathrm{e}^{i\varphi}\right) \mathrm{d}\varphi, \qquad f \in C(S);$$

$$I(f) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} F_1(\varphi)\mathrm{d}\varphi + \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} F_2(\varphi)\mathrm{d}\varphi, \qquad f = (F_1, F_2) \in C(S) \times C(S).$$

Proučit ćemo sada neprekidne konačnodimenzionalne reprezentacije grupe SO(2), tj. preslikavanja $\pi : \mathrm{SO}(2) \to L(V)$ takva da je

$$\pi(u(\varphi))\pi(u(\psi)) = \pi(u(\varphi)u(\psi)) = \pi(u(\varphi + \psi)), \qquad \varphi, \psi \in \mathbb{R},$$

i takva da je $\varphi \mapsto \pi(u(\varphi))$ neprekidno sa $\mathbb{R}$ u $L(V)$. Tada je $\varphi \mapsto \pi(u(\varphi))$ neprekidna konačnodimenzionalna reprezentacija aditivne grupe $\mathbb{R}$, pa prema zadatku 1.2.3. vrijedi:

(*a*) Preslikavanje $\varphi \mapsto \pi(u(\varphi))$ sa $\mathbb{R}$ u $L(V)$ je diferencijabilno.

(*b*) Ako stavimo

$$A = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varphi} \pi(u(\varphi))\bigg|_{\varphi=0}$$

onda je

$$\pi(u(\varphi)) = e^{\varphi A} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varphi^k}{k!} A^k$$

pri čemu red konvergira u odnosu na bilo koju normu prostora $L(V)$ i to uniformno na svakom ograničenom podskupu od $\mathbb{R}$.

Pretpostavimo sada da je V konačnodimenzionalan vektorski prostor i da je $A \in L(V)$. Tada je sa

$$\pi(\varphi) = \mathrm{e}^{\varphi A}, \qquad \varphi \in \mathbb{R},$$

zadana neprekidna reprezentacija aditivne grupe $\mathbb{R}$ na prostoru V. Da bi π predstavljala reprezentaciju grupe SO(2) na vektorskom prostoru V nužno je i dovoljno da linearni operator A bude takav da je $\pi(\varphi + 2\pi) = \pi(\varphi)\ \forall \varphi \in \mathbb{R}$, tj. da je $e^{2\pi A} = I$.

Svaka je neprekidna konačnodimenzionalna reprezentacija grupe SO(2) direktna suma ireducibilnih subreprezentacija. Nadalje, kako je grupa SO(2) komutativna, prema Schurovoj lemi svaka je njena konačnodimenzionalna ireducibilna reprezentacija π jednodimenzionalna. Dakle, postoji $\lambda \in \mathbb{C}$ takav da je

$$\pi(u(\varphi)) = e^{\lambda\varphi}, \qquad \varphi \in \mathbb{R}.$$

Periodičnost povlači da mora biti $e^{2\pi\lambda} = 1$ a to je ispunjeno ako i samo ako je $\lambda = in$ za neki $n \in \mathbb{Z}$. Obratno, ako je $n \in \mathbb{Z}$ onda je sa

$$\pi_n(u(\varphi)) = e^{in\varphi}, \qquad \varphi \in \mathbb{R},$$

zadana jednodimenzionalna (dakle, ireducibilna) neprekidna reprezentacija grupe SO(2). Prema tome, ako identificiramo reprezentaciju π_n s njenom klasom ekvivalencije, imamo

Teorem 5.1.1. *Za* $G = \mathrm{SO}(2)$ *je* $\hat{G} = \{\pi_n;\ n \in \mathbb{Z}\}$.

Naravno, za jednodimenzionalnu reprezentaciju karakter je jednak samoj reprezentaciji i teorem 4.3.4. u ovom slučaju daje dobro poznate relacije ortogonalnosti za funkcije $e^{in\varphi}$:

$$(\pi_n|\pi_m) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{in\varphi}e^{-im\varphi}\mathrm{d}\varphi = \delta_{nm}.$$

Nadalje, u ovom je slučaju Peter−Weylov teorem upravo osnovni teorem teorije Fourierovih redova: funkcije π_n tvore ortonormiranu bazu Hilbertovog prostora $L_2(S)$ sa skalarnim produktom

$$(f|g) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi)\overline{g(\varphi)}\mathrm{d}\varphi, \qquad f, g \in L_2(S).$$

Odredimo sada neprekidne konačnodimenzionalne ireducibilne reprezentacije grupe O(2). Ako je π takva reprezentacija na prostoru V tada je njena restrikcija $\pi|\mathrm{SO}(2)$ potpuno reducibilna. Neka je W neki $\pi|\mathrm{SO}(2)-$invarijantni jednodimenzionalni potprostor od V i neka je $n \in \mathbb{Z}$ takav da je $(\pi|\mathrm{SO}(2))_W \simeq \pi_n$:

$$\pi(u(\varphi))w = e^{in\varphi}w, \qquad w \in W, \quad \varphi \in \mathbb{R}.$$

Za $w \in W$ i $\varphi \in \mathbb{R}$ imamo $u(\varphi)T = Tu(-\varphi)$, dakle,

$$\pi(u(\varphi))\pi(T)w = \pi(T)\pi(u(-\varphi))w = e^{-in\varphi}\pi(T)w.$$

Prema tome, potprostor $\pi(T)W$ je također $\pi|\mathrm{SO}(2)-$invarijantan i $(\pi|\mathrm{SO}(2))_{\pi(T)W} \simeq \pi_{-n}$. Ako je $n \neq 0$, tada su π_n i π_{-n} neekvivalentne ireducibilne reprezentacije grupe SO(2), pa je tada suma potprostora W i $\pi(T)W$ direktna. Ta je suma očito $\pi-$invarijantna, dakle

$$V = W \dot{+} \pi(T)W.$$

Pretpostavimo sada da je $n = 0$. Tada je također suma $W + \pi(T)W$ $\pi-$invarijantna, dakle jednaka V. Međutim, tada je $\pi(a) = I_V$ za svaki $a \in \mathrm{SO}(2)$, tj. podgrupa SO(2) je sadržana u jezgri reprezentacije π. Prijelazom na kvocijent $\mathrm{O}(2)/\mathrm{SO}(2) \simeq \{e, T\}$ dobivamo ireducibilnu reprezentaciju komutativne dvočlane grupe $\{e, T\}$. Slijedi da je tada $\dim V = 1$ i vrijedi ili $\pi(T) = 1$ ili $\pi(T) = -1$.

Teorem 5.1.2. *Za* $G = \mathrm{O}(2)$ *je*

$$\hat{G} = \{\rho_0, \rho_0^-\} \cup \{\rho_n;\ n \in \mathbb{N}\}.$$

Pri tome je ρ_0 *trivijalna jednodimenzionalna reprezentacija*

$$\rho_0(a) = 1 \qquad \forall a \in G,$$

ρ_0^- *je jednodimenzionalna reprezentacija zadana sa*

$$\rho_0^-(a) = 1 \quad i \quad \rho_0^-(Ta) = -1 \qquad za\ a \in \mathrm{SO}(2),$$

a za $n \in \mathbb{N}$ *je* ρ_n *reprezentacija od* G *na dvodimenzionalnom prostoru* V *s bazom* $\{e_1, e_2\}$ *u kojoj operatori reprezentacije imaju matrice*

$$\rho_n(u(\varphi)) = \begin{bmatrix} e^{in\varphi} & 0 \\ 0 & e^{-in\varphi} \end{bmatrix}, \qquad \rho_n(T) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Tvrdnje ovoga teorema sve su dokazane osim činjenice da su gornjim formulama stvarno definirane neprekidne ireducibilne reprezentacije grupe O(2).

Zadatak 5.1.2. *Dokažite da su gornjim formulama definirane neprekidne ireducibilne reprezentacije* ρ_0^-, ρ_n, $n \in \mathbb{N}$, *grupe* O(2).

5.2 Reprezentacije grupa SO(3) i SU(2)

Za svaki prirodan broj n definiramo grupe

$$\mathrm{O}(n) = \{A \in M_n(\mathbb{R});\ AA^t = A^tA = I_n\}, \qquad \mathrm{SO}(n) = \{A \in \mathrm{O}(n);\ \det A = 1\},$$

$$\mathrm{U}(n) = \{A \in M_n(\mathbb{C});\ AA^* = A^*A = I_n\}, \qquad \mathrm{SU}(n) = \{A \in \mathrm{U}(n);\ \det A = 1\}.$$

U odnosu na bilo koju normu na prostoru kvadratnih matrica to su očito zatvoreni podskupovi od $M_n(\mathbb{R})$, odnosno od $M_n(\mathbb{C})$. Nadalje, ti su podskupovi ograničeni, dakle, to su kompaktni topološki prostori. Matrični elementi umnoška AB su polinomi matričnih elemenata matrica A i B. Označimo li sa G bilo koju od definiranih grupa, zaključujemo da je preslikavanje množenja $(A, B) \mapsto AB$ neprekidno sa $G \times G$ u G. Nadalje, za $A \in G$ je $A^{-1} = A^*$, pa vidimo da je preslikavanje invertiranja $A \mapsto A^{-1}$ neprekidno sa G u G. Na taj način smo ustanovili da je svaka od gore definiranih grupa kompaktna topološka grupa.

Zadatak 5.2.1. *Matricu $A \in \mathrm{SO}(3)$ identificiramo s linearnim operatorom $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ koji u standardnoj bazi $e = \{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\}$, $\vec{e_1}= (1,0,0), \vec{e_2}= (0,1,0), \vec{e_3}= (0,0,1)$, ima matricu A. Uz standardnu geometrijsku interpretaciju prostora $\mathbb{R}^3$ s trodimenzionalnim Euklidovim prostorom dokažite da je* $\mathrm{SO}(3)$ *skup svih rotacija oko osi kroz ishodište.*

Uputa: Iz $\det A = 1$ dokažite da je 1 svojstvena vrijednost od A.

Cilj nam je sada doći do neke parametrizacije grupe $G = \mathrm{SO}(3)$. Neka je $A \in G$. Tada je sa

$$\vec{e_j}' = A\,\vec{e_j}, \qquad j = 1, 2, 3,$$

definirana desna ortonormirana baza $e' = \{\vec{e_1}', \vec{e_2}', \vec{e_3}'\}$ od $\mathbb{R}^3$. Neka su koordinate vektora $\vec{x}$ u bazi e označene sa (ξ, η, ζ) a u bazi e' sa (ξ', η', ζ'). Pretpostavimo najprije da se ravnine $\xi\eta$ i $\xi'\eta'$ ne podudaraju i neka je p pravac kroz ishodište koji je presjek tih ravnina (taj se pravac zove *čvorna linija* rotacije A). Neka je $\vartheta \in \langle 0, \pi\rangle$ kut između vektora $\vec{e_3}$ i $\vec{e_3}'$. Orijentaciju čvorne linije p izaberemo tako da rotacija oko pravca p za kut ϑ u smjeru suprotnom od smjera kazaljke na satu ako gledamo s pozitivne strane pravca p prevodi os ζ u os ζ'. Neka je $\vec{f_1}$ pozitivno orijentirani jedinični vektor pravca p. Neka je $\varphi_1 \in [0, 2\pi\rangle$ kut između vektora $\vec{e_1}$ i vektora $\vec{f_1}$ i neka je $\varphi_2 \in [0, 2\pi\rangle$ kut između vektora $\vec{f_1}$ i vektora $\vec{e_1}'$. Označimo sa $A(\varphi_1)$ rotaciju oko $\vec{e_3}$ za kut φ_1. Ta rotacija prevodi vektor $\vec{e_1}$ u vektor $\vec{f_1}$, vektor $\vec{e_2}$ u vektor $\vec{f_2}$ koji leži u $\xi\eta-$ravnini (tj. u ravnini određenoj vektorima $\vec{e_1}$ i $\vec{e_2}$), i vektor $\vec{e_3}$ u vektor $\vec{f_3}=\vec{e_3}$. Tada je $f = (\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ pozitivno orijentirana (tj. desna) ortonormirana baza od $\mathbb{R}^3$. Sada označimo sa $B(\vartheta)$ rotaciju oko $\vec{f_1}$ za kut ϑ. Ta rotacija prevodi bazu f u desnu ortonormiranu bazu $g = (\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$, gdje je $\vec{g_1}=\vec{f_1}$, $\vec{g_2}$ je vektor koji leži u $\xi'\eta'-$ravnini (tj. ravnini određenoj vektorima $\vec{e_1}'$ i $\vec{e_2}'$) i $\vec{g_3}=\vec{e_3}'$. Napokon, sa $C(\varphi_2)$ označimo rotaciju oko $\vec{g_3}=\vec{e_3}'$ za kut φ_2. Ta rotacija prevodi bazu g u desnu ortonormiranu bazu $h = (\vec{h_1}, \vec{h_2}, \vec{h_3})$. Kako je $\vec{h_1}= C(\varphi_2)\,\vec{g_1}=\vec{e_1}'$ i $\vec{h_3}= C(\varphi_2)\,\vec{e_3}'=\vec{e_3}'$ to je i $\vec{h_2}=\vec{e_2}'$. Dakle, $h = e'$, tj. $C(\varphi_2)$ prevodi bazu g u bazu e'. To znači da je

$$A\,\vec{e_j}=\vec{e_j}'= C(\varphi_2)B(\vartheta)A(\varphi_1)\,\vec{e_j} \qquad j = 1, 2, 3,$$

pa slijedi

$$A = C(\varphi_2)B(\vartheta)A(\varphi_1). \tag{5.1}$$

Ta je jednakost izvedena uz pretpostavku da se $\xi'\eta'-$ravnina ne podudara sa $\xi\eta-$ravninom, tj. da potprostor razapet vektorima $\vec{e_1}$ i $\vec{e_2}$ nije inverijantan s obzirom na rotaciju A. Međutim, ista formula vrijedi i ako je taj potprostor invarijantan s obzirom na A. U tom slučaju je ili $\vec{e_3}' = A\vec{e_3} = \vec{e_3}$ ili $\vec{e_3}' = A\vec{e_3} = -\vec{e_3}$. U prvom slučaju je A rotacija oko $\vec{e_3}$ pa možemo uzeti $\vartheta = 0$ i $\varphi_2 = 0$, a sa φ_1 označimo kut rotacije A oko $\vec{e_3}$. U drugom slučaju označimo sa $B(\pi)$ rotaciju oko $\vec{e_1}$ za kut π. Tada je $B(\pi)\vec{e_3} = -\vec{e_3}$, dakle, $B(\pi)A\vec{e_3} = \vec{e_3}$. To znači da je $B(\pi)A$ rotacija oko $\vec{e_3}$ za neki kut φ_1, tj. $B(\pi)A = A(\varphi_1)$, a kako je $B(\pi)^{-1} = B(\pi)$, opet imamo

$$A = C(\varphi_2)B(\vartheta)A(\varphi_1) \qquad \text{za} \quad \varphi_2 = 0 \quad \text{i} \quad \vartheta = \pi.$$

Na taj način dokazali smo da svaka rotacija $A \in \mathrm{SO}(3)$ ima oblik (5.1) uz $\varphi_1, \varphi_2 \in [0, 2\pi\rangle$ i $\vartheta \in [0, \pi]$. Pri tome je ϑ jedinstveno određen s rotacijom A, a ako je $\vartheta \in \langle 0, \pi\rangle$ onda su i φ_1 i φ_2 jedinstveno određeni. Ako je $\vartheta = 0$ onda φ_1 i φ_2 nisu jedinstveno određeni ali je $\varphi_1 + \varphi_2$ jedinstveno određen. Napokon, ako je $\vartheta = \pi$ onda također φ_1 i φ_2 nisu jedinstveno određeni, ali je njihova razlika $\varphi_1 - \varphi_2$ jedinstveno određena.

Za linearan operator T i za bilo koju bazu $h = \left(\vec{h_1}, \vec{h_2}, \vec{h_3}\right)$ označimo sa $T[h]$ matricu operatora T u bazi h. Matrični elementi τ_{ij} te matrice dani su sa

$$T\vec{h_j} = \sum_{i=1}^{3} \tau_{ij}\vec{h_i}, \qquad j = 1, 2, 3.$$

Nadalje, ako je $h' = \left(\vec{h_1}', \vec{h_2}', \vec{h_3}'\right)$ druga baza onda sa $T[h', h]$ označimo matricu operatora T u paru baza (h, h'); matrični elementi σ_{ij} te matrice dani su sa

$$T\vec{h_j} = \sum_{i=1}^{3} \sigma_{ij}\vec{h_i}', \qquad j = 1, 2, 3.$$

Naravno, $T[h] = T[h, h]$. Nadalje, ako su (h, h') i (k, k') dva para baza i ako su U i V operatori prijelaza iz baze h u bazu k, odnosno, iz baze h' u bazu k', tj.

$$U\vec{h_j} = \vec{k_j}, \qquad V\vec{h_j}' = \vec{k_j}', \qquad j = 1, 2, 3,$$

onda je

$$T[k', k] = V[h']^{-1}T[h', h]U[h].$$

Prikažimo sada matricu $A[e]$ pomoću parametara $\varphi_1, \varphi_2, \vartheta$. Naravno, vrijedi

$$A[e] = C(\varphi_2)[e]B(\vartheta)[e]A(\varphi_1)[e].$$

Nadalje, iz definicije rotacija $A(\varphi_1), B(\vartheta)$ i $C(\varphi_2)$ imamo

$$A(\varphi_1)[e] = \begin{bmatrix} \cos\varphi_1 & -\sin\varphi_1 & 0 \\ \sin\varphi_1 & \cos\varphi_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B(\vartheta)[f] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ 0 & \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{bmatrix}$$

$$\text{i} \qquad C(\varphi_2)[g] = \begin{bmatrix} \cos\varphi_2 & -\sin\varphi_2 & 0 \\ \sin\varphi_2 & \cos\varphi_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Operator prijelaza iz baze e u bazu f je $A(\varphi_1)$, a operator prijelaza iz baze f u bazu g je $B(\vartheta)$. Stoga je

$$B(\vartheta)[f] = A(\varphi_1)[e]^{-1}B(\vartheta)[e]A(\varphi_1)[e] \qquad \Longrightarrow \qquad B(\vartheta)[e] = A(\varphi_1)[e]B(\vartheta)[f]A(\varphi_1)[e]^{-1}.$$

Slično, za rotaciju $C(\varphi_2)$ imamo

$$C(\varphi_2)[g] = B(\vartheta)[f]^{-1}C(\varphi_2)[f]B(\vartheta)[f] \qquad \Longrightarrow \qquad C(\varphi_2)[f] = B(\vartheta)[f]C(\varphi_2)[g]B(\vartheta)[f]^{-1}$$

i

$$C(\varphi_2)[f] = A(\varphi_1)[e]^{-1}C(\varphi_2)[e]A(\varphi_1)[e] \qquad \Longrightarrow \qquad C(\varphi_2)[e] = A(\varphi_1)[e]C(\varphi_2)[f]A(\varphi_1)[e]^{-1}$$

pa slijedi

$$C(\varphi_2)[e] = A(\varphi_1)[e]B(\vartheta)[f]C(\varphi_2)[g]B(\vartheta)[f]^{-1}A(\varphi_1)[e]^{-1}.$$

Iz tih formula nalazimo

$$A = A(\varphi_1)[e]B(\vartheta)[f]C(\varphi_2)[g]B(\vartheta)[f]^{-1}A(\varphi_1)[e]^{-1}A(\varphi_1)[e]B(\vartheta)[f]A(\varphi_1)[e]^{-1}A(\varphi_1)[e],$$

a odatle je

$$A = A(\varphi_1)[e]B(\vartheta)[f]C(\varphi_2)[g].$$

Množenjem jednostavnih matrica $A(\varphi_1)[e], B(\vartheta)[f]$ i $C(\varphi_2)[g]$ nalazimo eksplicitni prikaz proizvoljne rotacije $A \in \mathrm{SO}(3)$ pomoću parametara φ_1, φ_2 i ϑ :

$$A[e] = \begin{bmatrix} \cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \cos\vartheta\sin\varphi_1\sin\varphi_2 & -\cos\varphi_1\sin\varphi_2 - \cos\vartheta\sin\varphi_1\cos\varphi_2 & \sin\vartheta\sin\varphi_1 \\ \sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \cos\vartheta\cos\varphi_1\sin\varphi_2 & -\sin\varphi_1\sin\varphi_2 + \cos\vartheta\cos\varphi_1\cos\varphi_2 & -\sin\vartheta\cos\varphi_1 \\ \sin\vartheta\sin\varphi_2 & \sin\vartheta\cos\varphi_2 & \cos\vartheta \end{bmatrix}.$$

Ovako definirani parametri φ_1, φ_2 i ϑ zovu se **Eulerovi kutovi rotacije** $A \in \mathrm{SO}(3)$. Oni potpuno određuju rotaciju A. U daljnjem identificiramo rotaciju A s matricom $A[e]$ i ako su $\varphi_1, \varphi_2, \vartheta$ njeni Eulerovi kutovi, pišemo $A = A(\varphi_1, \varphi_2, \vartheta)$. Matrični elementi rotacije su trigonometrijske, dakle, analitičke, funkcije njenih Eulerovih parametara.

Zadatak 5.2.2. *Koristeći* $A^{-1} = A^t$ *za* $A \in \mathrm{SO}(3)$ *dokažite da je*

$$A(\varphi_1, \varphi_2, \vartheta)^{-1} = A(\pi - \varphi_2, \pi - \varphi_1, \vartheta).$$

Na taj način grupa SO(3) parametrizirana je s tri realna parametra $\varphi_1, \varphi_2 \in [0, 2\pi]$ i $\vartheta \in [0, \pi]$, dakle, elementi grupe SO(3) dovedeni su u vezu s kvadrom $[0, 2\pi] \times [0, 2\pi] \times [0, \pi]$ u $\mathbb{R}^3$; pri tome je $\varphi_1 = 0$ ekvivalentno sa $\varphi_1 = 2\pi$ i $\varphi_2 = 0$ je ekvivalentno sa $\varphi_2 = 2\pi$. Stoga je govoriti o funkciji na grupi SO(3) isto kao govoriti o funkciji Eulerovih kuteva:

$$f(A) = f(A(\varphi_1, \varphi_2, \vartheta)) = f(\varphi_1, \varphi_2, \vartheta), \qquad \varphi_1, \varphi_2 \in \mathbb{R}, \quad \vartheta \in [0, \pi],$$

s tim da je

$$f(\varphi_1 + 2\pi, \varphi_2, \vartheta) = f(\varphi_1, \varphi_2 + 2\pi, \vartheta) = f(\varphi_1, \varphi_2, \vartheta).$$

Neprekidna funkcija na grupi SO(3) je neprekidna funkcija Eulerovih kutova. U tom smislu možemo govoriti i o diferencijabilnim i analitičkim funkcijama na grupi SO(3) misleći pri tome na diferencijabilne i analitičke funkcije Eulerovih kutova.

Neka je $C(\mathrm{SO}(3))$ vektorski prostor svih kompleksnih neprekidnih funkcija na grupi SO(3). Za $f \in C(\mathrm{SO}(3))$ definiramo $I(f) \in \mathbb{C}$ sa

$$I(f) = \frac{1}{8\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} f(\varphi_1, \varphi_2, \vartheta) \sin\vartheta \, \mathrm{d}\vartheta \, \mathrm{d}\varphi_1 \, \mathrm{d}\varphi_2 =$$
$$= \frac{1}{8\pi^2} \int_0^{2\pi} \left[\int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\pi} f(\varphi_1, \varphi_2, \vartheta) \sin\vartheta \, \mathrm{d}\vartheta \right) \mathrm{d}\varphi_1 \right] \mathrm{d}\varphi_2.$$

Teorem 5.2.1. *Ovako definirano preslikavanje $I : C(\mathrm{SO}(3)) \to \mathbb{C}$ je invarijantni integral na grupi* SO(3).

Zadatak 5.2.3. *Dokažite teorem 5.2.1.*

Uputa: Dovoljno je dokazati npr. lijevu invarijantnost. Budući da je svaka matrica iz SO(3) produkt matrica oblika

$$A = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{i} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\beta & -\sin\beta \\ 0 & \sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix}$$

Dovoljno je dokazati lijevu invarijantnost u odnosu na mnozenje takvim matricama. Za matricu A radi se samo o pomaku varijable φ_1 za α, a u slučaju matrice B treba računati Jacobijan transformacije varijabli integracije $\varphi_1, \varphi_2, \vartheta$.

Uspostavit ćemo sada vezu između grupa SU(2) i SO(3).

Zadatak 5.2.4. *Dokažite da je*

$$\mathrm{SU}(2) = \left\{ A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\overline{\beta} & \overline{\alpha} \end{bmatrix};\ \alpha, \beta \in \mathbb{C},\ |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \right\}$$

i, posebno, da je SU(2) *kao topološki prostor homeomorfna s jediničnom sferom*

$$S^3 = \{(x_0, x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^4;\ x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$$

u četverodimenzionalnom euklidskom prostoru R^4.

Uputa: Iskoristite jednakosti $AA^* = I_2$ i $\det A = 1$ da dokažete da za matricu

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{C})$$

vrijedi $A \in \mathrm{SU}(2)$ ako i samo ako je

$$\alpha\overline{\gamma} + \beta\overline{\delta} = 0, \qquad |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1, \qquad |\gamma|^2 + |\delta|^2 = 1, \qquad \alpha\delta - \beta\gamma = 1,$$

te da su te jednakosti ekvivalentne sa

$$\gamma = -\overline{\beta}, \qquad \delta = \overline{\alpha}, \qquad |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1.$$

Neka je H_2 realan vektorski prostor svih hermitskih matrica u $M_2(\mathbb{C})$ s tragom 0. Neka je $\Phi : R^3 \to M_2(\mathbb{C})$ definirano sa

$$\Phi(x, y, z) = \begin{bmatrix} -z & x + iy \\ x - iy & z \end{bmatrix}, \qquad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

Očito je tada Φ izomorfizam realnih vektorskih prostora sa $\mathbb{R}^3$ na H_2. Nadalje vrijedi

$$-\det \Phi(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2, \qquad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3. \tag{5.2}$$

Za $A \in \mathrm{SU}(2)$ i $H \in H_2$ je $(AHA^*)^* = AHA^*$ i $\mathrm{Tr}\, AHA^* = \mathrm{Tr}\, A^*AH = \mathrm{Tr}\, H = 0$, dakle, $AHA^* \in H_2$. Očito je $H \mapsto AHA^*$ linearan operator na realnom vektorskom prostoru H_2. Pomoću izomorfizma $\Phi : \mathbb{R}^3 \to H_2$ dolazimo do linearnog operatora na prostoru $\mathbb{R}^3$ koji ćemo označiti sa $\sigma(A)$. Dakle, ako $\mathbb{R}^3$ identificiramo sa prostorom jednostupčanih matrica $M_{31}(\mathbb{R})$, a time prostor linearnih operatora $L(\mathbb{R}^3)$ sa prostorom matrica $M_3(\mathbb{R})$, onda imamo:

$$A \begin{bmatrix} -z & x+iy \\ x-iy & z \end{bmatrix} A^* = \begin{bmatrix} -z' & x'+iy' \\ x'-iy' & z' \end{bmatrix} \qquad \Longrightarrow \qquad \sigma(A) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}.$$

Propozicija 5.2.2. *$A \mapsto \sigma(A)$ je epimorfizam grupe $\mathrm{SU}(2)$ na grupu $\mathrm{SO}(3)$ s jezgrom*

$$\mathrm{Ker}\, \sigma = \{I_2, -I_2\}, \qquad I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Dokaz: Prije svega, ako je $A \in \mathrm{SU}(2)$, onda je $\det AHA^* = |\det A|^2(\det H) = \det H$, pa iz (5.2) slijedi da je $\sigma(A)$ ortogonalan operator, tj. uz gornju identifikaciju je $\sigma(A) \in \mathrm{O}(3)$. Preslikavanje $A \mapsto \sigma(A)$ je neprekidno, pa je i preslikavanje $A \mapsto \det \sigma(A)$ neprekidno. No kako je $\sigma(A) \in \mathrm{O}(3)$ to je $\det \sigma(A) \in \{1, -1\}$. Dakle, $A \mapsto \det \sigma(A)$ je neprekidno preslikavanje sa $\mathrm{SU}(2)$ u $\{1,-1\}$, pa slijedi da je to konstantno preslikavanje. Kako je $\sigma(I_2) = I_3$ i $\det I_3 = 1$ zaključujemo da je $\det \sigma(A) = 1$ $\forall A \in \mathrm{SU}(2)$. Dakle, σ je preslikavanje sa $\mathrm{SU}(2)$ u $\mathrm{SO}(3)$. Za $A, B \in \mathrm{SU}(2)$ i za $H \in H_2$ imamo $A(BHB^*)A^* = (AB)H(AB)^*$, a odatle slijedi da je $\sigma(AB) = \sigma(A)\sigma(B)$. Dakle, $\sigma : \mathrm{SU}(2) \to \mathrm{SO}(3)$ je homomorfizam grupa.

Neka je $A \in \mathrm{SU}(2)$ i $H \in H_2$. Tada je

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\overline{\beta} & \overline{\alpha} \end{bmatrix}, \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \quad |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1.$$

Nadalje, neka su $(x,y,z) = \Phi^{-1}(H) \in \mathbb{R}^3$ i $(x',y',z') = \Phi^{-1}(AHA^*) \in \mathbb{R}^3$. Imamo

$$A^* = \begin{bmatrix} \overline{\alpha} & -\beta \\ \overline{\beta} & \alpha \end{bmatrix},$$

dakle

$$\begin{bmatrix} -z' & x'+iy' \\ x'-iy' & z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\overline{\beta} & \overline{\alpha} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -z & x+iy \\ x-iy & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{\alpha} & -\beta \\ \overline{\beta} & \alpha \end{bmatrix}.$$

Odatle direktnim računom slijedi

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(\alpha^2 + \overline{\alpha}^2 - \beta^2 - \overline{\beta}^2) & \frac{i}{2}(\alpha^2 - \overline{\alpha}^2 + \beta^2 - \overline{\beta}^2) & \overline{\alpha}\overline{\beta} + \alpha\beta \\ \frac{i}{2}(\overline{\alpha}^2 - \alpha^2 + \beta^2 - \overline{\beta}^2 & \frac{1}{2}(\alpha^2 + \overline{\alpha}^2 + \beta^2 + \overline{\beta}^2) & i(\overline{\alpha}\overline{\beta} - \alpha\beta) \\ -\overline{\alpha}\beta - \alpha\overline{\beta} & i(\overline{\alpha}\beta - \alpha\overline{\beta}) & |\alpha|^2 - |\beta|^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix},$$

a to znači da je

$$\sigma\left(\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\overline{\beta} & \overline{\alpha} \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(\alpha^2 + \overline{\alpha}^2 - \beta^2 - \overline{\beta}^2) & \frac{i}{2}(\alpha^2 - \overline{\alpha}^2 + \beta^2 - \overline{\beta}^2) & \overline{\alpha}\overline{\beta} + \alpha\beta \\ \frac{i}{2}(\overline{\alpha}^2 - \alpha^2 + \beta^2 - \overline{\beta}^2 & \frac{1}{2}(\alpha^2 + \overline{\alpha}^2 + \beta^2 + \overline{\beta}^2) & i(\overline{\alpha}\overline{\beta} - \alpha\beta) \\ -\overline{\alpha}\beta - \alpha\overline{\beta} & i(\overline{\alpha}\beta - \alpha\overline{\beta}) & |\alpha|^2 - |\beta|^2 \end{bmatrix}. \tag{5.3}$$

Odatle, ponovo direktnim računom nalazimo

$$\sigma\left(\begin{bmatrix} e^{i\frac{\varphi}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\varphi}{2}} \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

i

$$\sigma\left(\begin{bmatrix} \cos\frac{\vartheta}{2} & -i\sin\frac{\vartheta}{2} \\ -i\sin\frac{\vartheta}{2} & \cos\frac{\vartheta}{2} \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ 0 & \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{bmatrix}.$$

Kako je svaki element grupe SO(3) produkt triju matrica takvog tipa, zaključujemo da je σ epimorfizam.

Treba još samo izračunati jezgru tog epimorfizma:

Zadatak 5.2.5. *Pomoću eksplicitne formule* (5.3) *dokažite da je jezgra od* σ *jednaka* $\{I_2, -I_2\}$.

Eksplicitne formule iz dokaza propozicije 5.2.2. omogućuju nam da i grupu SU(2) parametriziramo pomoću Eulerovih parametara. Uz prijašnje oznake imali smo u grupi SO(3)

$$A(\varphi_1,\varphi_2,\vartheta) = \begin{bmatrix} \cos\varphi_1 & -\sin\varphi_1 & 0 \\ \sin\varphi_1 & \cos\varphi_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ 0 & \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\varphi_2 & -\sin\varphi_2 & 0 \\ \sin\varphi_2 & \cos\varphi_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Prema dokazu propozicije 5.2.2. imamo $A(\varphi_1,\varphi_2,\theta) = \sigma(B(\varphi_1,\varphi_2,\vartheta))$, gdje je

$$B(\varphi_1,\varphi_2,\vartheta) = \begin{bmatrix} e^{i\frac{\varphi_1}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\varphi_1}{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\frac{\vartheta}{2} & -i\sin\frac{\vartheta}{2} \\ -i\sin\frac{\vartheta}{2} & \cos\frac{\vartheta}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{i\frac{\varphi_2}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\varphi_2}{2}} \end{bmatrix}$$

Zadatak 5.2.6. *Dokažite da je*

$$B(\varphi_1,\varphi_2,\vartheta) = \begin{bmatrix} e^{i\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}}\cos\frac{\vartheta}{2} & -ie^{i\frac{\varphi_1-\varphi_2}{2}}\sin\frac{\vartheta}{2} \\ -ie^{-i\frac{\varphi_1-\varphi_2}{2}}\sin\frac{\vartheta}{2} & e^{-i\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}}\cos\frac{\vartheta}{2} \end{bmatrix}$$

i da vrijedi

$$B(\varphi_1+4\pi,\varphi_2,\vartheta) = B(\varphi_1,\varphi_2+4\pi,\vartheta) = B(\varphi_1+2\pi,\varphi_2+2\pi,\vartheta) = B(\varphi_1,\varphi_2,\vartheta).$$

Zadatak 5.2.7. *Dokažite da je*

$$\mathrm{SU}(2) = \{B(\varphi_1,\varphi_2,\vartheta);\ \varphi_1,\varphi_2 \in [0,4\pi\rangle,\ \vartheta \in [0,\pi]\}.$$

Nadalje, dokažite da u prikazu elementa $A \in \mathrm{SU}(2)$ *u obliku* $A = B(\varphi_1,\varphi_2,\vartheta)$ *vrijedi:*

(*a*) *Parametar* $\vartheta \in [0,\pi]$ *jedinstveno je određen.*

(*b*) *Ako je* $0 < \vartheta < \pi$ *onda postoje točno dva para* $(\varphi_1,\varphi_2),(\varphi_1',\varphi_2') \in [0,4\pi\rangle \times [0,4\pi\rangle$ *takva da je* $A = B(\varphi_1,\varphi_2,\vartheta) = B(\varphi_1',\varphi_2',\vartheta)$.

(*c*) *Vrijedi* $B(\varphi_1,\varphi_2,0) = B(\varphi_1',\varphi_2',0)$ *ako i samo ako je* $\varphi_1+\varphi_2 \equiv \varphi_1'+\varphi_2' \pmod{4\pi}$.

(*d*) *Vrijedi* $B(\varphi_1,\varphi_2,\pi) = B(\varphi_1',\varphi_2',\pi)$ *ako i samo ako je* $\varphi_1-\varphi_2 \equiv \varphi_1'-\varphi_2' \pmod{4\pi}$.

Iz propozicije 5.2.2. neposredno slijedi:

Propozicija 5.2.3. *Ako je* π *reprezentacija grupe* SO(3) *onda je* $\pi \circ \sigma$ *reprezentacija grupe* SU(2). *Za reprezentaciju* ρ *grupe* SU(2) *postoji reprezentacija* π *grupe* SO(3) *takva da je* $\rho = \pi \circ \sigma$ *ako i samo ako je* $\rho(-I_2)$ *jedinični operator.*

Prema zadacima 5.2.6. i 5.2.7. grupa SU(2) parametrizirana je s tri realna parametra $\varphi_1, \varphi_2 \in [0, 4\pi]$ i $\vartheta \in [0, \pi]$. Pri tome je $\varphi_1 = 0$ ekvivalentno sa $\varphi_1 = 4\pi$, $\varphi_2 = 0$ je ekvivalentno sa $\varphi_2 = 4\pi$ i (φ_1, φ_2) je ekvivalentno sa $(\varphi_1 + 2\pi, \varphi_2 + 2\pi)$, sa $(\varphi_1 + 2\pi, \varphi_2 - 2\pi)$, sa $(\varphi_1 - 2\pi, \varphi_2 + 2\pi)$, odnosno sa $(\varphi_1 - 2\pi, \varphi_2 - 2\pi)$. Govoriti o funkciji na SU(2) je isto kao govoriti o funkciji varijabli $\varphi_1, \varphi_2, \vartheta$:

$$f(B(\varphi_1, \varphi_2, \vartheta)) = f(\varphi_1, \varphi_2, \vartheta), \qquad \varphi_1, \varphi_2 \in \mathbb{R}, \quad \vartheta \in [0, \pi],$$

s tim da je

$$f(\varphi_1 + 4\pi, \varphi_2, \vartheta) = f(\varphi_1, \varphi_2 + 4\pi, \vartheta) = f(\varphi_1 + 2\pi, \varphi_2 + 2\pi, \vartheta) = f(\varphi_1, \varphi_2, \vartheta).$$

Neka je $C(\mathrm{SU}(2))$ vektorski prostor svih kompleksnih neprekidnih funkcija na grupi SU(2). Za $f \in C(\mathrm{SU}(2))$ definiramo $I(f) \in \mathbb{C}$ sa

$$I(f) = \frac{1}{32\pi^2} \int_0^{4\pi} \int_0^{4\pi} \int_0^{\pi} f(\varphi_1, \varphi_2, \vartheta) \sin\vartheta \, \mathrm{d}\varphi_1 \, \mathrm{d}\varphi_2 \, \mathrm{d}\vartheta.$$

Analogno teoremu 5.2.1. vrijedi

Teorem 5.2.4. *Ovako definirano preslikavanje* $I : C(\mathrm{SU}(2)) \to \mathbb{C}$ *je invarijantni integral na grupi* SU(2).

Proučit ćemo sada neprekidne konačnodimenzionalne reprezentacije grupe SU(2). Cilj nam je konstruirati predstavnike svih klasa ekvivalencije neprekidnih konačnodimenzionalnih reprezentacija te grupe jer je svaka neprekidna konačnodimenzionalna reprezentacija od SU(2) potpuno reducibilna, dakle, prostor takve reprezentacije je direktna suma invarijantnih potprostora takvih da su pripadne subreprezentacije ireducibilne.

Analiza neprekidnih konačnodimenzionalnih reprezentacija grupe SU(2) najjednostavnije se provodi pomoću pripadnih reprezentacija njene *Liejeve algebre*. Pri tome se **Liejeva algebra** $\mathfrak{su}(2)$ grupe SU(2) definira na sljedeći način:

$$\mathfrak{su}(2) = \{A \in M_2(\mathbb{C});\ e^{tA} \in \mathrm{SU}(2)\ \forall t \in \mathbb{R}\}.$$

Zadatak 5.2.8. *Dokažite da za svaku matricu* $A \in M_n(\mathbb{C})$ *vrijedi*

$$\det\left(e^{A}\right) = e^{Tr\,A}.$$

Uputa: Iskoristite činjenicu da je svaka kvadratna matrica slična gornjetrokutastoj matrici.

Zadatak 5.2.9. *Pomoću zadatka 5.2.8. dokažite da je* $\mathfrak{su}(2)$ *skup svih antihermitskih matrica u* $M_2(\mathbb{C})$ *s tragom* 0.

Prema zadatku 5.2.9. $\mathfrak{su}(2)$ je trodimenzionalan realan vektorski prostor i vrijedi

$$A, B \in \mathfrak{su}(2) \qquad \Longrightarrow \qquad [A, B] = AB - BA \in \mathfrak{su}(2).$$

Dakle, $\mathfrak{su}(2)$ je doista Liejeva algebra − trodimenzionalna realna Liejeva algebra.

Neka je ρ neprekidna konačnodimenzionalna reprezentacija grupe $\mathrm{SU}(2)$ na prostoru V. Za $A \in \mathfrak{su}(2)$ je tada $t \mapsto \rho\left(e^{tA}\right)$ neprekidna reprezentacija aditivne grupe $\mathbb{R}$ na prostoru V, pa prema zadatku 1.2.3. možemo definirati linearan operator $\tilde{\rho}(A)$ na prostoru V sa

$$\tilde{\rho}(A) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\rho\left(e^{tA}\right)\Big|_{t=0}$$

i tada je

$$\rho\left(e^{tA}\right) = e^{t\tilde{\rho}(A)}.$$

Na taj način svakoj neprekidnoj konačnodimenzionalnoj reprezentaciji ρ grupe $\mathrm{SU}(2)$ na prostoru V pridruženo je preslikavanje $\tilde{\rho} : \mathfrak{su}(2) \to L(V)$.

Teorem 5.2.5. *Neka su ρ i ω neprekidne konačnodimenzionalne reprezentacije grupe* $\mathrm{SU}(2)$ *na prostorima V i U.*

(a) *$\tilde{\rho}$ je reprezentacija Liejeve algebre $\mathfrak{su}(2)$ tj. $\mathbb{R}-$linearno preslikavanje sa $\mathfrak{su}(2)$ u $L(V)$ takvo da je*

$$\tilde{\rho}([A,B]) = [\tilde{\rho}(A), \tilde{\rho}(B)] \qquad \forall A, B \in \mathfrak{su}(2).$$

(b) *Potprostor W prostora V je $\rho-$invarijantan ako i samo ako je $\tilde{\rho}-$invarijantan.*

(c) *Reprezentacija ρ grupe* $\mathrm{SU}(2)$ *je ireducibilna ako i samo ako je reprezentacija $\tilde{\rho}$ Liejeve algebre $\mathfrak{su}(2)$ ireducibilna.*

(d) $Hom_{\mathrm{SU}(2)}(V,U) = Hom_{\mathfrak{su}(2)}(V,U)$.

(e) *Reprezentacije ρ i ω grupe* $\mathrm{SU}(2)$ *su ekvivalentne ako i samo ako su reprezentacije $\tilde{\rho}$ i $\tilde{\omega}$ Liejeve algebre $\mathfrak{su}(2)$ ekvivalentne.*

Za dokaz tvrdnje (a) treba nam sljedeća propozicija:

Propozicija 5.2.6. (a) *Postoji otvorena okolina $\mathcal{U}$ nule u realnom vektorskom prostoru $\mathfrak{su}(2)$ i otvorena okolina $\mathcal{V}$ jedinice u grupi* $\mathrm{SU}(2)$ *takve da je eksponencijalno preslikavanje $exp : A \mapsto e^A$ difeomorfizam sa $\mathcal{U}$ na $\mathcal{V}$ (tj. homeomorfizam takav da su preslikavanja $exp|\mathcal{U}$ i $(exp|\mathcal{U})^{-1}$ klase C^∞).*

(b) *Postoji otvorena okolina $\mathcal{U}'$ točke $(0,0,0)$ u prostoru $\mathbb{R}^3$ i otvorena okolina $\mathcal{V}'$ jedinice u grupi* $\mathrm{SU}(2)$ *takve da je za bazu*

$$A_1 = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad A_3 = \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}$$

realnog prostora $\mathfrak{su}(2)$ preslikavanje $(y_1, y_2, y_3) \mapsto e^{y_1A_1}e^{y_2A_2}e^{y_3A_3}$ difeomorfizam sa $\mathcal{U}'$ na $\mathcal{V}'$.

Dokaz: (a) Identificirat ćemo grupu $\mathrm{SU}(2)$ s jediničnom sferom

$$S^3 = \{(x_0, x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^4;\ x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^3 = 1\}$$

euklidskog prostora $\mathbb{R}^4$ kao u zadatku 5.2.4. tako da točku $(x_0, x_1, x_2, x_3) \in S^3$ identificiramo s matricom

$$\begin{bmatrix} x_0 + ix_1 & x_2 + ix_3 \\ -x_2 + ix_3 & x_0 - ix_1 \end{bmatrix} \in \mathrm{SU}(2).$$

Tada se jedinica I_2 u grupi $\mathrm{SU}(2)$ identificira s točkom $(1,0,0,0) \in S^3$. Nadalje, otvorena okolina $\mathcal{W}$ jedinice u grupi $\mathrm{SU}(2)$ definirana sa

$$\mathcal{W} = \left\{ \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\overline{\beta} & \overline{\alpha} \end{bmatrix} \in \mathrm{SU}(2);\ \mathrm{Re}\,\alpha > 0 \right\}$$

identificira se sa sljedećom otvorenom okolinom točke $(1,0,0,0)$ na sferi S^3 :

$$\{(x_0,x_1,x_2,x_3) \in S^3;\ x_0 > 0\}.$$

Ta se okolina identificira s otvorenom jediničnom kuglom $K = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3;\ x_1^2+x_2^2+x_3^2 < 1\}$ u euklidskom prostoru $\mathbb{R}^3$ pomoću difeomorfizma

$$(x_1,x_2,x_3) \mapsto \left(\sqrt{1-x_1^2-x_2^2-x_3^2}\,, x_1,x_2,x_3 \right),$$

odnosno,

$$(x_1,x_2,x_3) \mapsto \begin{bmatrix} \sqrt{1-x_1^2-x_2^2-x_3^2}+ix_1 & x_2+ix_3 \\ -x_2+ix_3 & \sqrt{1-x_1^2-x_2^2-x_3^2}-ix_1 \end{bmatrix},$$

sa K na $\mathcal{W}$. Pri tom difeomorfizmu jedinica u grupi $\mathrm{SU}(2)$ identificira se s točkom $0 = (0,0,0)$. Inverzna identifikacija je

$$\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\overline{\beta} & \overline{\alpha} \end{bmatrix} \mapsto (\mathrm{Im}\,\alpha, \mathrm{Re}\,\beta, \mathrm{Im}\,\beta).$$

S druge strane, realan trodimenzionalan vektorski prostor $\mathfrak{su}(2)$ identificira se s euklidskim prostorom $\mathbb{R}^3$ pomoću baze $\{A_1,A_2,A_3\}$ u $\mathfrak{su}(2)$. Dakle, točka $y=(y_1,y_2,y_3) \in \mathbb{R}^3$ identificira se s matricom

$$A(y) = \begin{bmatrix} iy_1 & y_2+iy_3 \\ -y_2+iy_3 & -iy_1 \end{bmatrix} \in \mathfrak{su}(2).$$

Zadatak 5.2.10. *Uz gornju oznaku dokažite indukcijom po n da je*

$$A(y)^{2n} = (-1)^n \|y\|^{2n} I_2, \qquad A(y)^{2n+1} = (-1)^n \|y\|^{2n} A(y), \qquad y \in \mathbb{R}^3, \quad \|y\| = \sqrt{y_1^2+y_2^2+y_3^2}.$$

Izvedite odatle da za $y \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ vrijedi

$$e^{A(y)} = (\cos\|y\|)I_2 + \frac{\sin\|y\|}{\|y\|}A(y) = \begin{bmatrix} \cos\|y\| + i\frac{y_1}{\|y\|}\sin\|y\| & \frac{y_2+iy_3}{\|y\|}\sin\|y\| \\ \frac{-y_2+iy_3}{\|y\|}\sin\|y\| & \cos\|y\| - i\frac{y_1}{\|y\|}\sin\|y\| \end{bmatrix}.$$

Definiramo sada otvorenu okolinu L nule u $\mathbb{R}^3$

$$L = \{y \in \mathbb{R}^3;\ e^{A(y)} \in \mathcal{W}\}.$$

Zbog zadatka 5.2.10. i uz uvedenu identifikaciju okoline $\mathcal{W}$ s otvorenom jediničnom kuglom K u $\mathbb{R}^3$ imamo

$$L = \{y \in \mathbb{R}^3; \cos\|y\| > 0\} = \left\{ y \in \mathbb{R}^3;\ \|y\| < \frac{\pi}{2} \text{ ili } \frac{4n-1}{2}\pi < \|y\| < \frac{4n+1}{2}\pi \text{ za neki } n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Neka je M komponenta povezanosti skupa L koja sadrži nulu, tj. otvorena kugla u $\mathbb{R}^3$ oko nule radijusa $\pi/2$:

$$M = \left\{ y \in \mathbb{R}^3;\ \|y\| < \frac{\pi}{2} \right\}$$

Prema zadatku 5.2.10. uz ove identifikacije preslikavanje $\exp : A \mapsto e^A$ restringirano na otvorenu kuglu M je $C^\infty-$preslikavanje sa M u K zadano sa $0 \mapsto 0$ i

$$y = (y_1, y_2, y_3) \mapsto \left(\frac{y_1}{\|y\|} \sin \|y\|, \frac{y_2}{\|y\|} \sin \|y\|, \frac{y_3}{\|y\|} \sin \|y\| \right) = \frac{\sin \|y\|}{\|y\|} y \quad \text{za} \quad y \neq 0.$$

Prema teoremu o inverznoj funkciji iz teorije funkcija više realnih varijabli tvrdnja (a) će biti dokazana ako pokažemo da je Jacobijeva matrica tog preslikavanja u nuli regularna. To slijedi iz sljedećeg zadatka:

Zadatak 5.2.11. *Dokažite da je Jacobijeva matrica preslikavanja* $0 \mapsto 0$, *i* $y \mapsto \dfrac{\sin \|y\|}{\|y\|} y$ *za* $y \neq 0$ *u točki* $y \in M \setminus \{(0,0,0)\}$ *jednaka*

$$\frac{\sin \|y\|}{\|y\|} I_3 + \left(\frac{\cos \|y\|}{\|y\|^2} - \frac{\sin \|y\|}{\|y\|^3} \right) \begin{bmatrix} y_1^2 & y_1 y_2 & y_1 y_3 \\ y_1 y_2 & y_2^2 & y_2 y_3 \\ y_1 y_3 & y_2 y_3 & y_3^2 \end{bmatrix},$$

te da je Jacobijeva matrica tog preslikavanja u točki $y = (0,0,0)$ *jednaka jediničnoj matrici* I_3.

Time je tvrdnja (a) propozicije 5.2.6. dokazana.

Tvrdnja (b) dokazuje se sasvim analogno. Prije svega, imamo

$$e^{y_1 A_1} e^{y_2 A_2} e^{y_3 A_3} = \begin{bmatrix} e^{iy_1} & 0 \\ 0 & e^{-iy_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos y_2 & \sin y_2 \\ -\sin y_2 & \cos y_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos y_3 & i \sin y_3 \\ i \sin y_3 & \cos y_3 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} e^{iy_1}(\cos y_2 \cos y_3 + i \sin y_2 \sin y_3) & e^{iy_1}(\sin y_2 \cos y_3 + i \cos y_2 \sin y_3) \\ e^{-iy_1}(-\sin y_2 \cos y_3 + i \cos y_2 \sin y_3) & e^{-iy_1}(\cos y_2 \cos y_3 - i \sin y_2 \sin y_3) \end{bmatrix}.$$

Ta se matrica za male vrijednosti parametara y_1, y_2, y_3 kao u (a) identificira s točkom

$$(x_1(y_1, y_2, y_3), x_2(y_1, y_2, y_3), x_3(y_1, y_2, y_3)) \in \mathbb{R}^3,$$

gdje je

$$x_1(y_1, y_2, y_3) = \cos y_1 \sin y_2 \sin y_3 + \sin y_1 \cos y_2 \cos y_3,$$
$$x_2(y_1, y_2, y_3) = \cos y_1 \sin y_2 \cos y_3 - \sin y_1 \cos y_2 \sin y_3,$$
$$x_3(y_1, y_2, y_3) = \sin y_1 \sin y_2 \cos y_3 + \cos y_1 \cos y_2 \sin y_3.$$

Jednostavan račun pokazuje da je Jacobijeva matrica preslikavanja

$$(y_1, y_2, y_3) \mapsto (x_1(y_1, y_2, y_3), x_2(y_1, y_2, y_3), x_3(y_1, y_2, y_3))$$

u točki $(0,0,0)$ jednaka jediničnoj matrici I_3. Odatle slijedi tvrdnja (b) i time je propozicija 5.2.6. dokazana.

Dokaz teorema 5.2.5: (a) Za $A \in \mathfrak{su}(2)$ i za $\lambda \in \mathbb{R}$ imamo

$$\tilde{\rho}(\lambda A) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \rho\left(e^{t\lambda A}\right)\Big|_{t=0} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} e^{t\lambda \tilde{\rho}(A)}\Big|_{t=0} = \lambda \tilde{\rho}(A).$$

Dakle, vrijedi

$$\tilde{\rho}(\lambda A) = \lambda\tilde{\rho}(A) \qquad \forall A \in \mathfrak{su}(2) \quad \text{i} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}. \tag{5.4}$$

Neka su $\mathcal{U}'$ otvorena okolina nule u $\mathfrak{su}(2)$ i $\mathcal{V}'$ otvorena okolina jedinice u grupi $\mathrm{SU}(2)$ iz propozicije 5.2.6., pri čemu je prostor $\mathfrak{su}(2)$ identificiran s prostorom $\mathbb{R}^3$ pomoću baze $\{A_1, A_2, A_3\}$. Zbog (5.4) za dokaz linearnosti preslikavanja $\tilde{\rho}$ dovoljno je dokazati da vrijedi

$$\tilde{\rho}(A+B) = \tilde{\rho}(A) + \tilde{\rho}(B)$$

za sve $A, B \in \mathcal{U}'$ takve da su $A+B \in \mathcal{U}'$. Izaberimo takve A i B. Tada prema tvrdnji (b) propozicije 5.2.6. postoje $\varepsilon > 0$ i $C^\infty-$funkcije $\omega_1, \omega_2, \omega_3 : \langle -\varepsilon, \varepsilon\rangle \to \mathbb{R}$ takve da je

$$e^{tA}e^{tB}e^{-t(A+B)} = e^{\omega_1(t)A_1}e^{\omega_2(t)A_2}e^{\omega_3(t)A_3}, \qquad t \in \langle -\varepsilon, \varepsilon\rangle.$$

Imamo

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}e^{tA}e^{tB}e^{-t(A+B)}\Big|_{t=0} = \left(Ae^{tA}e^{tB}e^{-t(A+B)} + e^{tA}Be^{tB}e^{-t(A+B)} + e^{tA}e^{tB}(A+B)e^{-t(A+B)}\right)\Big|_{t=0} =$$

$$= A + B - (A+B) = 0.$$

S druge strane, zbog $\omega_1(0) = \omega_2(0) = \omega_3(0) = 0$ imamo

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}e^{\omega_1(t)A_1}e^{\omega_2(t)A_2}e^{\omega_3(t)A_3}\Big|_{t=0} = \dot{\omega}_1(0)A_1 + \dot{\omega}_2(0)A_2 + \dot{\omega}_3(0)A_3,$$

gdje smo stavili

$$\dot{\omega}_j(0) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\omega_j(t)\Big|_{t=0}, \qquad j = 1, 2, 3.$$

Prema tome je

$$\dot{\omega}_1(0)A_1 + \dot{\omega}_2(0)A_2 + \dot{\omega}_3(0)A_3 = 0,$$

a kako su A_1, A_2 i A_3 linearno nezavisni, slijedi da je

$$\dot{\omega}_1(0) = \dot{\omega}_2(0) = \dot{\omega}_3(0) = 0. \tag{5.5}$$

S druge strane, kako je ρ reprezentacija grupe $\mathrm{SU}(2)$ i kako vrijedi

$$\rho\left(e^{sC}\right) = e^{s\tilde{\rho}(C)} \qquad \forall C \in \mathfrak{su}(2) \quad \text{i} \quad \forall s \in \mathbb{R},$$

dobivamo

$$\rho\left(e^{tA}e^{tB}e^{-t(A+B)}\right) = \rho\left(e^{tA}\right)\rho\left(e^{tB}\right)\rho\left(e^{-t(A+B)}\right) = e^{t\tilde{\rho}(A)}e^{t\tilde{\rho}(B)}e^{-t\tilde{\rho}(A+B)}$$

i

$$\rho\left(e^{\omega_1(t)A_1}e^{\omega_2(t)A_2}e^{\omega_3(t)A_3}\right) = \rho\left(e^{\omega_1(t)A_1}\right)\rho\left(e^{\omega_2(t)A_2}\right)\rho\left(e^{\omega_3(t)A_3}\right) = e^{\omega_1(t)\tilde{\rho}(A_1)}e^{\omega_2(t)\tilde{\rho}(A_2)}e^{\omega_3(t)\tilde{\rho}(A_3)}.$$

Dakle, vrijedi

$$e^{t\tilde{\rho}(A)}e^{t\tilde{\rho}(B)}e^{-t\tilde{\rho}(A+B)} = e^{\omega_1(t)\tilde{\rho}(A_1)}e^{\omega_2(t)\tilde{\rho}(A_2)}e^{\omega_3(t)\tilde{\rho}(A_3)}, \qquad t \in \langle -\varepsilon, \varepsilon\rangle.$$

Deriviramo sada obje strane ove jednakosti po varijabli t i zatim uvrstimo $t = 0$. Analogni račun kao malo prije daje uzevši u obzir (5.5),

$$\tilde{\rho}(A) + \tilde{\rho}(B) - \tilde{\rho}(A+B) = \dot{\omega}_1(0)\tilde{\rho}(A_1) + \dot{\omega}_2(0)\tilde{\rho}(A_2) + \dot{\omega}_3(0)\tilde{\rho}(A_3) = 0.$$

Time je dokazano da vrijedi $\tilde{\rho}(A+B)=\tilde{\rho}(A)+\tilde{\rho}(B)$ ako su $A,B\in\mathcal{U}'$ takve da je $A+B\in\mathcal{U}'$. Dakle, dokazana je $\mathbb{R}-$linearnost preslikavanja $\tilde{\rho}:\mathfrak{su}(2)\to L(V)$.

Treba još dokazati da vrijedi

$$\tilde{\rho}\left([A,B]\right)=[\tilde{\rho}(A),\tilde{\rho}(B)],\qquad A,B\in\mathfrak{su}(2).$$

Zbog (5.4) dovoljno je tu jednakost dokazati u situaciji kad su $A,B\in\mathcal{U}'$ takvi da je $[A,B]\in\mathcal{U}'$. Slično kao prije zaključujemo da postoje $\varepsilon>0$ i $C^\infty-$funkcije $\omega_1,\omega_2,\omega_3:[0,\varepsilon\rangle\to\mathbb{R}$ takve da je

$$e^{\sqrt{t}A}e^{\sqrt{t}B}e^{-\sqrt{t}A}e^{-\sqrt{t}B}e^{-t[A,B]}=e^{\omega_1(t)A_1}e^{\omega_2(t)A_2}e^{\omega_3(t)A_3},\qquad t\in[0,\varepsilon\rangle. \tag{5.6}$$

Kako je lijeva strana jednaka I_2 za $t=0$ i u ovom slučaju je $\omega_1(0)=\omega_2(0)=\omega_3(0)=0$.

Neka su sada T i S proizvoljni linearni operatori na konačnodimenzionalnom vektorskom prostoru. Tada je za $t\geq 0$

$$e^{\sqrt{t}T}e^{\sqrt{t}S}e^{-\sqrt{t}T}e^{-\sqrt{t}S}=$$

$$=(I+\sqrt{t}T+\frac{t}{2}T^2+\cdots)(I+\sqrt{t}S+\frac{t}{2}S^2+\cdots)(I-\sqrt{t}T+\frac{t}{2}T^2+\cdots)(I-\sqrt{t}S+\frac{t}{2}S^2+\cdots)=$$

$$I+\sqrt{t}(T+S-T-S)+t\left(\frac{1}{2}T^2+\frac{1}{2}S^2+\frac{1}{2}T^2+\frac{1}{2}S^2+TS-T^2-TS-ST-S^2+TS\right)+$$

$$+t^{3/2}\left(\frac{1}{6}T^3+\frac{1}{6}S^3-\frac{1}{6}T^3-\frac{1}{6}S^3+\frac{1}{2}T^2S-\frac{1}{2}T^3-\frac{1}{2}T^2S+\frac{1}{2}TS^2-\frac{1}{2}S^2T-\frac{1}{2}S^3+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}T^3+\frac{1}{2}ST^2-\frac{1}{2}T^2S+\frac{1}{2}TS^2+\frac{1}{2}S^3-\frac{1}{2}TS^2-TST-TS^2+T^2S+STS\right)+\cdots\cdots=$$

$$=I+t[T,S]+\frac{1}{2}t^{3/2}\left([T,[T,S]]+[S,[T,S]]\right)+\cdots\cdots.$$

Odatle slijedi

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}e^{\sqrt{t}T}e^{\sqrt{t}S}e^{-\sqrt{t}T}e^{-\sqrt{t}S}\bigg|_{t=0}=[T,S]. \tag{5.7}$$

Stoga imamo

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}e^{\sqrt{t}A}e^{\sqrt{t}B}e^{-\sqrt{t}A}e^{-\sqrt{t}B}e^{-t[A,B]}\bigg|_{t=0}=[A,B]-[A,B]=0.$$

Nadalje, isti račun kao i prije daje

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}e^{\omega_1(t)A_1}e^{\omega_2(t)A_2}e^{\omega_3(t)A_3}\bigg|_{t=0}=\dot{\omega}_1(0)A_1+\dot{\omega}_2(0)A_2+\dot{\omega}_3(0)A_3,$$

dakle,

$$\dot{\omega}_1(0)=\dot{\omega}_2(0)=\dot{\omega}_2(0)=0. \tag{5.8}$$

Primjenimo sada ρ na obje strane jednakosti (5.6). Kao i prije dobivamo jednakost

$$e^{\sqrt{t}\tilde{\rho}(A)}e^{\sqrt{t}\tilde{\rho}(B)}e^{-\sqrt{t}\tilde{\rho}(A)}e^{-\sqrt{t}\tilde{\rho}(B)}e^{-t\tilde{\rho}([A,B])}=e^{\omega_1(t)\tilde{\rho}(A_1)}e^{\omega_2(t)\tilde{\rho}(A_2)}e^{\omega_3(t)\tilde{\rho}(A_3)}.$$

Sada zbog (5.7) i (5.8) dobivamo redom

$$[\tilde{\rho}(A),\tilde{\rho}(B)]-\tilde{\rho}\left([A,B]\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}e^{\sqrt{t}\tilde{\rho}(A)}e^{\sqrt{t}\tilde{\rho}(B)}e^{-\sqrt{t}\tilde{\rho}(A)}e^{-\sqrt{t}\tilde{\rho}(B)}e^{-t\tilde{\rho}([A,B])}\bigg|_{t=0}=$$

$$=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}e^{\omega_1(t)\tilde{\rho}(A_1)}e^{\omega_2(t)\tilde{\rho}(A_2)}e^{\omega_3(t)\tilde{\rho}(A_3)}\bigg|_{t=0}=\dot{\omega}_1(0)\tilde{\rho}(A_1)+\dot{\omega}_2(0)\tilde{\rho}(A_2)+\dot{\omega}_3(0)\tilde{\rho}(A_3)=0.$$

Time je dokazano da vrijedi i

$$\tilde{\rho}([A,B]) = [\tilde{\rho}(A), \tilde{\rho}(B)], \qquad A, B \in \mathfrak{su}(2),$$

odnosno, tvrdnja (a) je u potpunosti dokazana.

(b) Pretpostavimo da je potprostor W $\rho-$invarijantan. Za $A \in \mathfrak{su}(2)$ je tada $e^{tA} \in \mathrm{SU}(2)$ za svaki $t \in \mathbb{R}$, dakle vrijedi

$$\rho\left(e^{tA}\right) w \in W \qquad \forall t \in \mathbb{R} \quad \text{i} \quad \forall w \in W.$$

Međutim, imamo

$$\rho\left(e^{tA}\right) = e^{t\tilde{\rho}(A)},$$

dakle, vrijedi

$$e^{t\tilde{\rho}(A)} w \in W \qquad \forall t \in \mathbb{R} \quad \text{i} \quad \forall w \in W.$$

Odatle je za svaki $w \in W$

$$\tilde{\rho}(A)w = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} e^{t\tilde{\rho}(A)} w \bigg|_{t=0} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(e^{t\tilde{\rho}(A)}w - w) \in W,$$

jer je svaki potprostor konačnodimenzionalnog prostora zatvoren. Time je dokazano da je potprostor W invarijantan s obzirom na sve operatore $\tilde{\rho}(A)$, $A \in \mathfrak{su}(2)$.

Pretpostavimo sada da je potprostor W invarijantan s obzirom na sve operatore $\tilde{\rho}(A)$, $A \in \mathfrak{su}(2)$. Tada opet zbog zatvorenosti potprostora W imamo za svaki $w \in W$ i za svaki $A \in \mathfrak{su}(2)$:

$$\rho\left(e^{A}\right) w = e^{\tilde{\rho}(A)} w = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \tilde{\rho}(A)^k w \in W.$$

Dakle, potprostor W je invarijantan s obzirom na sve operatore $\rho\left(e^{A}\right)$, $A \in \mathfrak{su}(2)$. Međutim, vidjeli smo da se svaki element grupe $\mathrm{SU}(2)$ može pisati kao

$$B(\varphi_1, \varphi_2, \vartheta) = \begin{bmatrix} e^{i\frac{\varphi_1}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\varphi_1}{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\frac{\vartheta}{2} & -i\sin\frac{\vartheta}{2} \\ -i\sin\frac{\vartheta}{2} & \cos\frac{\vartheta}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{i\frac{\varphi_2}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\varphi_2}{2}} \end{bmatrix} = e^{i\frac{\varphi_1}{2}A_1} e^{-i\frac{\vartheta}{2}A_3} e^{i\frac{\varphi_2}{2}A_1}.$$

Dakle, svaki element B grupe $\mathrm{SU}(2)$ može se napisati kao produkt elemenata oblika e^A, $A \in \mathfrak{su}(2)$. Prema tome, potprostor W je invarijantan s obzirom na sve operatore $\rho(B)$, $B \in \mathrm{SU}(2)$.

Tvrdnja (c) neposredna je posljedica tvrdnje (b).

(d) Neka je $T \in Hom_{\mathrm{SU}(2)}(V,U)$, tj. $T \in L(V,U)$ je takav da vrijedi $T\rho(B) = \omega(B)T$ za svaki $B \in \mathrm{SU}(2)$. Tada za svaki $A \in \mathfrak{su}(2)$ i za svaki $t \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$Te^{t\tilde{\rho}(A)} = T\rho\left(e^{t}A\right) = \omega\left(e^{tA}\right)T = e^{t\tilde{\omega}(A)}T.$$

Deriviranjem po varijabli t u točki $t = 0$ slijedi $T\tilde{\rho}(A) = \tilde{\omega}(A)T$, dakle, $T \in Hom_{\mathfrak{su}(2)}(V,W)$.

Pretpostavimo sada da je $T \in Hom_{\mathfrak{su}(2)}(V,U)$, tj. $T \in L(V,U)$ je takav da je $T\tilde{\rho}(A) = \tilde{\omega}(A)T$, $\forall A \in \mathfrak{su}(2)$. Tada za svaki k vrijedi $T\tilde{\rho}(A)^k = \tilde{\omega}(A)^k T$, dakle,

$$T\rho\left(e^{A}\right) = Te^{\tilde{\rho}(A)} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} T\tilde{\rho}(A)^k = \lim_{k\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \tilde{\omega}(A)^k T = e^{\tilde{\omega}(A)}T = \omega\left(e^{A}\right)T.$$

Kako je svaki $B \in \mathrm{SU}(2)$ produkt elemenata oblika e^A, $A \in \mathfrak{su}(2)$, slijedi $T\rho(B) = \omega(B)T$, $\forall B \in \mathrm{SU}(2)$. Dakle, $T \in Hom_{\mathrm{SU}(2)}(V,U)$ i time je tvrdnja (d) dokazana.

Napokon, tvrdnja (e) neposredna je posljedica tvrdnje (d).

Proučit ćemo sada konačnodimenzionalne reprezentacije Liejeve algebre $\mathfrak{su}(2)$, tj. $\mathbb{R}-$linearna preslikavanja $\pi : \mathfrak{su}(2) \to L(V)$, za konačnodimenzionalan kompleksan vektorski prostor V, takva da je $\pi([A,B]) = [\pi(A), \pi(B)]\ \forall A, B \in \mathfrak{su}(2)$. U daljnjem upotrebljavamo prije uvedene oznake

$$A_1 = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad A_3 = \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}.$$

$\{A_1, A_2, A_3\}$ je baza realnog vektorskog prostora $\mathfrak{su}(2)$ i vrijedi

$$[A_1, A_2] = 2A_3, \qquad [A_2, A_3] = 2A_1, \qquad [A_3, A_1] = 2A_2.$$

Zadatak 5.2.12. *Dokažite da operacija komutiranja $[A,B] = AB - BA$ u $L(V)$ ili u $M_n(\mathbb{C})$ ima svojstva*

$$[A, BC] = [A,B]C + B[A,C] \qquad i \qquad [A,[B,C]] = [[A,B],C] + [B,[A,C]] \qquad \forall A, B, C.$$

Zadatak 5.2.13. *Ako je π reprezentacija Liejeve algebre $\mathfrak{su}(2)$, dokažite da linearni operatori*

$$H = -i\pi(A_1), \qquad X = \frac{1}{2}\pi(A_2) - \frac{i}{2}\pi(A_3) \qquad i \qquad Y = -\frac{1}{2}\pi(A_2) - \frac{i}{2}\pi(A_3)$$

zadovoljavaju

$$[H, X] = 2X, \qquad [H, Y] = -2Y, \qquad [X, Y] = H.$$

Nadalje, dokažite da za operator

$$C = H^2 - 2H + 4XY = H^2 + 2H + 4YX$$

vrijedi

$$[\pi(A), C] = 0 \qquad \forall A \in \mathfrak{su}(2)$$

Teorem 5.2.7. *Za svaki $n \in \mathbb{N}$ postoji točno jedna klasa ekvivalencije ireducibilnih reprezentacija Liejeve algebre $\mathfrak{su}(2)$ dimenzije n. Ako je π takva, postoji baza $\{e_0, e_1, \ldots, e_{n-1}\}$ prostora reprezentacije π na koju operatori $H = -i\pi(A_1)$, $X = \frac{1}{2}\pi(A_2) - \frac{i}{2}\pi(A_3)$ i $Y = -\frac{1}{2}\pi(A_2) - \frac{i}{2}\pi(A_3)$ djeluju na sljedeći način:*

$$\begin{array}{lll} He_j = (2j - n + 1)e_j & za \quad j = 0, 1, \ldots, n-1; & \\ Xe_j = e_{j+1} & za \quad j = 0, 1, \ldots, n-2, & Xe_{n-1} = 0; \\ Ye_j = j(n-j)e_{j-1} & za \quad j = 1, 2, \ldots, n-1, & Ye_0 = 0. \end{array}$$

Dokaz: Pretpostavimo da je π ireducibilna reprezentacija Liejeve algebre $\mathfrak{su}(2)$ na konačnodimenzionalnom prostoru V i neka su $H, X, Y, C \in L(V)$ operatori iz zadatka 5.2.13. Neka je α svojstvena vrijednost operatora H i $x \neq 0$ pripadni svojstveni vektor, $Hx = \alpha x$. Tada nalazimo

$$HYx = (HY - YH + YH)x = [H, Y]x + YHx = -2Yx + \alpha Yx = (\alpha - 2)Yx.$$

Odatle indukcijom po k slijedi

$$HY^k x = (\alpha - 2k)Y^k x.$$

Doista, ako pretpostavimo da je $HY^{k-1}x = (\alpha - 2k + 2)Y^{k-1}x$, onda pomoću zadatka 5.2.12. imamo

$$HY^k x = HYY^{k-1}x = ([H,Y] + YH)Y^{k-1}x = -2YY^{k-1}x + Y(\alpha - 2k + 2)Y^{k-1}x = (\alpha - 2k)Y^k x.$$

Odatle zaključujemo da postoji $k \in \mathbb{N}$ takav da je $Y^k x = 0$. Doista, kad bi bilo $Y^k x \neq 0\ \forall k$ onda bi $\alpha - 2k$ bila svojstvena vrijednost od H za svaki $k \in \mathbb{N}$, a to je nemoguće zbog toga što je prostor

V konačnodimenzionalan. Neka je, dakle, $k \in \mathbb{N}$ takav da je $e = Y^{k-1}x \neq 0$ i $Y^k x = 0$. Tada je e svojstveni vektor operatora H i vrijedi $Ye = 0$.

Na taj način dokazali smo da postoje $\lambda \in \mathbb{C}$ i $e \in V$, $e \neq 0$, takvi da je

$$He = \lambda e \qquad \text{i} \qquad Ye = 0.$$

Sada slično kao malo prije slijedi da je

$$HX^j e = (\lambda + 2j)X^j e \qquad \forall j \in \mathbb{N}.$$

Stoga postoji $k \geq 0$ takav da je $X^k e \neq 0$ i $X^{k+1}e = 0$. Stavimo tada

$$e_j = X^j e, \qquad j = 0, 1, \ldots, k$$

Tada je

$$Xe_j = e_{j+1} \qquad \text{za} \qquad 0 \leq j \leq k-1 \qquad \text{i} \qquad Xe_k = 0.$$

Nadalje

$$He_j = (\lambda + 2j)e_j \qquad \text{za} \qquad 0 \leq j \leq k.$$

Po zadatku 5.2.13. operator C komutira sa svim operatorima reprezentacije π. Sada iz tvrdnje (c) Schurove leme (teorem 1.1.6.) slijedi $C = \beta I_V$ za neki $\beta \in \mathbb{C}$. Sada je

$$\beta e = Ce = (H^2 - 2H + 4XY)e = (\lambda^2 - 2\lambda)e.$$

Dakle, $\beta = \lambda^2 - 2\lambda$, tj. $Cx = (\lambda^2 - 2\lambda)x\ \forall x \in V$. Sada za $j \in \{1, 2, \ldots, k\}$ imamo

$$(\lambda^2 - 2\lambda)e_{j-1} = Ce_{j-1} = (H^2 + 2H + 4YX)e_{j-1} = H^2 e_{j-1} + 2He_{j-1} + 4YXe_{j-1} =$$

$$= (\lambda + 2j - 2)^2 e_{j-1} + 2(\lambda + 2j - 2)e_{j-1} + 4Ye_j,$$

odakle je

$$Ye_j = \frac{1}{4}\left(\lambda^2 - 2\lambda - (\lambda + 2j - 2)^2 - 2(\lambda + 2j - 2)\right)e_{j-1} = -j(\lambda + j - 1)e_{j-1}.$$

Iz dobivenih jednakosti nalazimo

$$(\lambda + 2k)e_k = He_k = [X, Y]e_k = XYe_k - YXe_k = XYe_k = -k(\lambda + k - 1)Xe_{k-1} = -k(\lambda + k - 1)e_k$$

pa slijedi

$$\lambda + 2k = -k\lambda - k^2 + k \qquad \Longrightarrow \qquad \lambda = -k.$$

Sve u svemu, imamo formule djelovanja operatora H, X i Y na vektore e_j :

$$\begin{array}{lll} He_j = (2j - k)e_j & \text{za} \quad j = 0, 1, \ldots, k; & \\ Xe_j = e_{j+1} & \text{za} \quad j = 0, 1, \ldots, k-1, & Xe_k = 0; \\ Ye_j = j(k - j + 1)e_{j-1} & \text{za} \quad j = 1, 2, \ldots, k, & Ye_0 = 0. \end{array}$$

Vektori $e_0, e_1, \ldots, e_k$ su linearno nezavisni, jer su to svojstveni vektori operatora H za međusobno različite svojstvene vrijednosti. Gornje formule pokazuju da je potprostor W razapet vektorima $e_0, e_1, \ldots, e_k$ invarijantan s obzirom na operatore H, X i Y. Kako je

$$\pi(A_1) = iH, \qquad \pi(A_2) = X - Y, \qquad \pi(A_3) = iX + iY,$$

slijedi da je potprostor W invarijantan s obzirom na operatore $\pi(A_1)$, $\pi(A_2)$ i $\pi(A_3)$, a kako je $\{A_1, A_2, A_3\}$ baza od $\mathfrak{su}(2)$, zaključujemo da je potprostor W invarijantan s obzirom na $\pi(A)$ za sve $A \in \mathfrak{su}(2)$, tj. W je $\pi-$invarijantan. Kako je po pretpostavci reprezentacija π ireducibilna, slijedi $W = V$. Dakle, $\{e_0, e_1, \dots, e_k\}$ je baza prostora V. Dakle, ako je $\dim V = n$, onda je $k = n - 1$ pa dobivamo upravo formule iz iskaza teorema.

Na taj način dokazali smo da ako je π $n-$dimenzionalna ireducibilna reprezentacija Liejeve algebre $\mathfrak{su}(2)$, onda postoji baza $\{e_0, e_1, \dots, e_{n-1}\}$ prostora reprezentacije na koju operatori

$$H = -i\pi(A_1), \qquad X = \frac{1}{2}\pi(A_2) - \frac{i}{2}\pi(A_3), \qquad Y = -\frac{1}{2}\pi(A_2) - \frac{i}{2}\pi(A_3)$$

djeluju po formulama iz iskaza teorema.

Neka je sada V $n-$dimenzionalni vektorski prostor s bazom $\{e_0, e_1, \dots, e_{n-1}\}$ i neka su operatori $H, X, Y \in L(V)$ zadani formulama iz iskaza teorema. Tada se direktnim računom provjerava da vrijedi

$$[H, X] = 2X, \qquad [H, Y] = -2Y, \qquad [X, Y] = H.$$

Definiramo sada operatore $B_1, B_2, B_3 \in L(V)$ sljedećim formulama:

$$B_1 = iH, \qquad B_2 = X - Y, \qquad B_3 = iX + iY.$$

Tada se provjerava da vrijedi

$$[B_1, B_2] = 2B_3, \qquad [B_2, B_3] = 2B_1, \qquad [B_3, B_1] = 2B_2,$$

a odatle slijedi da je sa

$$\pi(\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \alpha_3 A_3) = \alpha_1 B_1 + \alpha_2 B_2 + \alpha_3 B_3, \qquad \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R},$$

zadana reprezentacija π Liejeve algebre $\mathfrak{su}(2)$ na vektorskom prostoru V. Treba još dokazati da je tako definirana reprezentacija π ireducibilna. Neka je $W \neq \{0\}$ $\pi-$invarijantni potprostor prostora V. Tada je W invarijantan s obzirom na operator H, pa slijedi da u potprostoru W postoji svojstven vektor operatora H. Slijedi da je $e_j \in W$ za neki $j \in \{0, 1, \dots, n-1\}$. Sada iz formula djelovanja operatora X i iz činjenice da je potprostor W invarijantan s obzirom na X slijedi da su $e_{j+1}, \dots, e_{n-1} \in W$. Analogno, iz formula djelovanja operatora Y i iz činjenice da je potprostor W invarijantan s obzirom na operator Y slijedi da su i $e_{j-1}, \dots, e_0 \in W$. Dakle, $\{e_0, e_1, \dots, e_{n-1}\} \subseteq W$, pa zaključujemo da je $W = V$. Dakle, reprezentacija π je ireducibilna.

Napokon, ako su π i σ ireducibilne reprezentacije Liejeve algebre $\mathfrak{su}(2)$ na prostorima V i W i ako je $\dim V = \dim W = n - 1$, onda prema prvom dijelu dokaza postoji baza $\{e_0, e_1, \dots, e_{n-1}\}$ prostora V takva da za operatore $H = -i\pi(A_1)$, $X = \frac{1}{2}\pi(A_2) - \frac{i}{2}\pi(A_3)$ i $Y = -\frac{1}{2}\pi(A_2) - \frac{i}{2}\pi(A_3)$ vrijede formule iz iskaza teorema. Iz istog razloga postoji baza $\{f_0, f_1, \dots, f_{n-1}\}$ prostora W na koju operatori $H' = -i\sigma(A_1)$, $X' = \frac{1}{2}\sigma(A_2) - \frac{i}{2}\sigma(A_3)$ i $Y' = -\frac{1}{2}\sigma(A_2) - \frac{i}{2}\sigma(A_3)$ djeluju na isti način:

$$\begin{array}{lll} H'f_j = (2j - n + 1)f_j & \text{za} \quad j = 0, 1, \dots, n-1; & \\ X'f_j = f_{j+1} & \text{za} \quad j = 0, 1, \dots, n-2, & X'f_{n-1} = 0; \\ Y'f_j = j(n-j)f_{j-1} & \text{za} \quad j = 1, 2, \dots, n-1, & Y'f_0 = 0. \end{array}$$

Neka je $T : V \to W$ izomorfizam vektorskih prostora zadan sa $Te_j = f_j$, $j = 0, 1, \dots, n-1$. Tada očito vrijedi

$$TH = H'T, \qquad TX = X'T, \qquad TY = Y'T.$$

Imamo

$$\pi(A_1) = iH, \quad \pi(A_2) = X - Y, \quad \pi(A_3) = iX + iY,$$

$$\sigma(A_1) = iH', \quad \sigma(A_2) = X' - Y', \quad \sigma(A_3) = iX' + iY'$$

pa iz gornjih jednakosti slijedi

$$T\pi(A_j) = \sigma(A_j)T \qquad \text{za} \qquad j = 1, 2, 3.$$

Kako je $\{A_1, A_2, A_3\}$ baza realnog vektorskog prostora $\mathfrak{su}(2)$ i kako su π i σ $\mathbb{R}-$linearna preslikavanja, zaključujemo da je

$$T\pi(A) = \sigma(A)T \qquad \forall A \in \mathfrak{su}(2).$$

Time je dokazano da su ireducibilne reprezentacije π i σ ekvivalentne čim imaju istu dimenziju. Dakle, teorem 5.2.7. u potpunosti je dokazan.

A priori nije jasno da je svaka ireducibilna konačnodimenzionalna reprezentacija Liejeve algebre $\mathfrak{su}(2)$ oblika $\tilde{\rho}$ za neku neprekidnu ireducibilnu reprezentaciju ρ grupe SU(2). Sada ćemo za svaki prirodan broj n konstruirati $n-$dimenzionalnu neprekidnu ireducibilnu reprezentaciju grupe SU(2).

Neka je $\mathcal{P}$ vektorski prostor svih polinoma dvije varijable s kompleksnim koeficijentima. Za svaku matricu $A \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$ definiramo linearan operator $\pi(A)$ na prostoru $\mathcal{P}$ na sljedeći način:

$$(\pi(A)P)(x, y) = P(\alpha x + \gamma y, \beta x + \delta y), \qquad A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{C}).$$

Lako se provjeri da je tada $\pi(AB) = \pi(A)\pi(B)$, $A, B \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$, i da je $\pi(I_2) = I_{\mathcal{P}}$. Dakle, π je reprezentacija grupe $\mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$ na vektorskom prostoru $\mathcal{P}$. Označimo sa $\mathcal{P}_n$ potprostor od $\mathcal{P}$ svih homogenih polinoma stupnja n. Tada je $\dim \mathcal{P}_n = n+1$ jer ako stavimo $P_{n,k}(x, y) = x^k y^{n-k}$ onda je očito $\{P_{n,0}, P_{n,1}, \ldots, P_{n,n}\}$ baza od $\mathcal{P}_n$. Nadalje, jasno je da je $\mathcal{P}_n$ $\pi-$invarijantan potprostor od $\mathcal{P}$ i da je subreprezentacija $\pi_{\mathcal{P}_n}$ neprekidna. Označimo sa π_n restrikciju te subreprezentacije na podgrupu SU(2) grupe $\mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$. Dakle,

$$(\pi_n(A)P)(x, y) = P(\alpha x - \overline{\beta} y, \beta x + \overline{\alpha} y), \qquad A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\overline{\beta} & \overline{\alpha} \end{bmatrix} \in \mathrm{SU}(2).$$

Izračunajmo sada operatore $\tilde{\pi}_n(A_1)$, $\tilde{\pi}_n(A_2)$ i $\tilde{\pi}_n(A_3)$. Imamo

$$e^{tA_1} = \begin{bmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{-it} \end{bmatrix}, \qquad e^{tA_2} = \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix} \qquad \text{i} \qquad e^{tA_3} = \begin{bmatrix} \cos t & i \sin t \\ i \sin t & \cos t \end{bmatrix}.$$

Stoga je za $P \in \mathcal{P}_n$

$$\left(\pi_n \left(e^{tA_1}\right) P\right)(x, y) = P\left(e^{it}x, e^{-it}y\right),$$
$$\left(\pi_n \left(e^{tA_2}\right) P\right)(x, y) = P(x \cos t - y \sin t, x \sin t + y \cos t),$$
$$\left(\pi_n \left(e^{tA_3}\right) P\right)(x, y) = P(x \cos t + iy \sin t, ix \sin t + y \cos t).$$

Odatle dobivamo

$$(\tilde{\pi}_n(A_1)P)(x, y) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} P\left(e^{it}x, e^{-it}y\right)\bigg|_{t=0} = ix\frac{\partial}{\partial x}P(x, y) - iy\frac{\partial}{\partial y}P(x, y),$$

$$(\tilde{\pi}_n(A_2)P)(x, y) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} P(x \cos t - y \sin t, x \sin t + y \cos t)\bigg|_{t=0} = -y\frac{\partial}{\partial x}P(x, y) + x\frac{\partial}{\partial y}P(x, y),$$

$$(\tilde{\pi}_n(A_3)P)(x,y) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}P(x\cos t + iy\sin t, ix\sin t + y\cos t)\Big|_{t=0} = iy\frac{\partial}{\partial x}P(x,y) + ix\frac{\partial}{\partial y}P(x,y).$$

Stavimo kao i prije

$$H = -i\tilde{\pi}_n(A_1), \qquad X = \frac{1}{2}\tilde{\pi}_n(A_2) - \frac{i}{2}\tilde{\pi}_n(A_3) \qquad \text{i} \qquad Y = -\frac{1}{2}\tilde{\pi}_n(A_2) - \frac{i}{2}\tilde{\pi}_n(A_3).$$

Prema gornjem računu tada imamo na prostoru $\mathcal{P}_n$:

$$H = x\frac{\partial}{\partial x} - y\frac{\partial}{\partial y}, \qquad X = x\frac{\partial}{\partial y} \qquad \text{i} \qquad Y = y\frac{\partial}{\partial x}.$$

Ti operatori na bazu $\{P_{n,k};\ k = 0, 1, \ldots, n\}$ prostora $\mathcal{P}_n$ $(P_{n,k}(x,y) = x^k y^{n-k})$ djeluju na sljedeći način:

$$HP_{n,k} = (2k-n)P_{n,k}, \qquad XP_{n,k} = (n-k)P_{n,k+1} \qquad \text{i} \qquad YP_{n,k} = kP_{n,k-1}.$$

Posebno, vidimo da su vektori baze svojstveni vektori operatora H za međusobno različite svojstvene vrijednosti.

Pretpostavimo sada da je $W \neq \{0\}$ π_n−invarijantan potprostor od $\mathcal{P}_n$. Tada je prema tvrdnji (b) teorema 5.2.5. potprostor W $\tilde{\pi}_n$−invarijantan, dakle, W je invarijantan s obzirom na operatore H, X i Y. Slijedi da W sadrži neki od svojstvenih vektora $P_{n,k}$ operatora H. Kako je W invarijantan i s obzirom na operator X, slijedi da W sadrži i vektore $P_{n,k+1}, P_{n,k+2}, \ldots, P_{n,n}$, a zbog invarijantnosti s obzirom na operator Y sadrži i vektore $P_{n,k-1}, P_{n,k-2}, \ldots, P_{n,0}$. To znači da W sadrži sve vektore baze, odnosno, vrijedi $W = \mathcal{P}_n$. Time je dokazana tvrdnja (a) sljedećeg teorema:

Teorem 5.2.8. (a) *Reprezentacije* π_n, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, *grupe* SU(2) *su ireducibilne.*

(b) *Ako je* π *konačnodimenzionalna neprekidna ireducibilna reprezentacija grupe* SU(2) *na prostoru* V *i* $\dim V = n$ *onda je* $\pi \simeq \pi_{n-1}$.

Dokaz tvrdnje (b). Prema tvrdnji (c) teorema 5.2.5. $\tilde{\pi}$ i $\tilde{\pi}_{n-1}$ su ireducibilne reprezentacije Liejeve algebre $\mathfrak{su}(2)$ na prostorima V i $\mathcal{P}_{n-1}$. Nadalje, $\dim V = n = \dim \mathcal{P}_{n-1}$. Iz teorema 5.2.7. slijedi da je $\tilde{\pi} \simeq \tilde{\pi}_{n-1}$. Sada pomoću tvrdnje ($e$) teorema 5.2.5. zaključujemo da je $\pi \simeq \pi_{n-1}$.

Zadatak 5.2.14. *Konstruirajte bazu* $\{e_0, e_1, \ldots, e_n\}$ *prostora* $\mathcal{P}_n$ *takvu da operatori*

$$H = -i\tilde{\pi}_n(A_1), \qquad X = \frac{1}{2}\tilde{\pi}_n(A_2) - \frac{i}{2}\tilde{\pi}_n(A_3), \qquad Y = -\frac{1}{2}\tilde{\pi}_n(A_2) - \frac{i}{2}\tilde{\pi}_n(A_3)$$

djeluju kao u teoremu 5.2.7:

$$\begin{array}{lll} He_j = (2j-n)e_j & \text{za} \ \ j = 0, 1, \ldots, n; & \\ Xe_j = e_{j+1} & \text{za} \ \ j = 0, 1, \ldots, n-1, & Xe_n = 0; \\ Ye_j = j(n-j+1)e_{j-1} & \text{za} \ \ j = 1, 2, \ldots, n, & Ye_0 = 0. \end{array}$$

Teorem 5.2.9. *Svaka neprekidna konačnodimenzionalna ireducibilna reprezentacija grupe* SO(3) *je neparne dimenzije. Za svaki neparan prirodan broj* n *postoji točno jedna klasa ekvivalencije neprekidnih ireducibilnih konačnodimenzionalnih reprezentacija grupe* SO(3) *dimenzije* n.

Dokaz: Izračunajmo $\pi_n(-I_2)$ za reprezentacije π_n grupe SU(2) konstruirane prije iskaza teorema 5.2.8. Za $P \in \mathcal{P}$ imamo po definiciji reprezentacije π_n :

$$[\pi_n(-I_2)P](x,y) = P(-x,-y) = (-1)^n P(x,y).$$

Dakle,

$$\pi_n(-I_2) = (-1)^n I_{\mathcal{P}_n}.$$

Prema propoziciji 5.2.3. reprezentacija π_n grupe $\mathrm{SU}(2)$ nastaje iz reprezentacije kvocijentne grupe $\mathrm{SU}(2)/\{I_2, -I_2\} \simeq \mathrm{SO}(3)$ ako i samo ako je $\pi_n(-I_2) = I_{\mathcal{P}_n}$, dakle ako i samo ako je $(-1)^n = 1$, tj. ako i samo ako je n paran broj, a to znači ako i samo ako je dimenzija reprezentacije π_n neparna.

Zadatak 5.2.15. *Neka su π i σ neprekidne reprezentacije grupe* $\mathrm{SU}(2)$ *na konačnodimenzionalnim prostorima V i W. Dokažite da za svaki $A \in \mathfrak{su}(2)$ vrijedi*

$$(\pi \otimes \sigma)\tilde{}(A) = \tilde{\pi}(A) \otimes I_W + I_V \otimes \tilde{\sigma}(A).$$

Zadatak 5.2.16. *Neka su π i σ konačnodimenzionalne neprekidne ireducibilne reprezentacije grupe* $\mathrm{SU}(2)$ *na vektorskim prostorima V i W i neka je* $\dim V = n+1 \geq k+1 = \dim W$. *Dokažite da postoje $\pi \otimes \sigma-$invarijatni potprostori U_j, $j = n-k, n-k+2, n-k+4, \ldots, n+k-2, n+k$, takvi da je* $\dim U_j = j+1$ *i da su sve subreprezentacije $(\pi \otimes \sigma)_{U_j}$ ireducibilne. Dakle,*

$$\pi_n \otimes \pi_k \simeq \pi_{n-k} \dot{+} \pi_{n-k+2} \dot{+} \pi_{n-k+4} \dot{+} \cdots\cdots \pi_{n+k-2} \dot{+} \pi_{n+k}.$$

Uputa: Prema teoremu 5.2.7. postoji baza $\{e_0, e_1, \ldots, e_n\}$ prostora V i baza $\{f_0, f_1, \ldots, f_k\}$ prostora W koje su sastavljene od svojstvenih vektora operatora $H' = -i\pi(A_1)$, odnosno $H'' = -i\sigma(A_1)$, i da vrijedi

$$\begin{aligned} H'e_j &= (2j-n)e_j \qquad \text{za} \quad j = 0, 1, \ldots, n; \\ H''f_i &= (2i-k)f_i \qquad \text{za} \quad i = 0, 1, \ldots, k; \end{aligned}$$

Iz zadatka 5.2.15. slijedi da za operator $H = -i(\pi \otimes \sigma)(A_1)$ vrijedi $H = H' \otimes I_W + I_V \otimes H''$. Odatle izvedite da je

$$H(e_j \otimes f_i) = (2j + 2i - n - k)(e_j \otimes f_i), \qquad 0 \leq j \leq n, \quad 0 \leq i \leq k.$$

Budući da je $\{e_j \otimes f_i;\ 0 \leq j \leq n,\ 0 \leq i \leq k\}$ baza prostora $U = V \otimes W$, zaključite da je spektar operatora H jednak $Sp(H) = \{-n-k, -n-k+2, \ldots, n+k-2, n+k\}$ i da je za $\ell \in Sp(H)$

$$\{e_j \otimes f_i;\ 0 \leq j \leq n, 0 \leq i \leq k,\ \ell = 2j + 2i - n - k\}$$

baza svojstvenog potprostora $Z_\ell = \{u \in U;\ Hu = \ell u\}$ operatora H za svojstvenu vrijednost ℓ. Odredite dimenzije potprostora Z_ℓ, a odatle pomoću potpune reducibilnosti izvedite tvrdnju.

U sljedeća tri zadatka σ_n je neprekidna ireducibilna reprezentacija grupe $\mathrm{SU}(2)$ dimenzije n i χ_n je njen karakter. Napomenimo da je $\sigma_n \simeq \pi_{n-1}$ uz oznake iz teorema 5.2.8.

Zadatak 5.2.17. *Neka je $B \in \mathrm{SU}(2)$ takva da je $\sigma(B)$ rotacija oko osi kroz ishodište u $\mathbb{R}^3$ za kut $\varphi \in [0, 2\pi\rangle$ ($\sigma : \mathrm{SU}(2) \to \mathrm{SO}(3)$ je epimorfizam iz propozicije 5.2.2.). Dokažite da je tada*

$$\chi_n(B) = \frac{\sin\left(\frac{n\varphi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)}.$$

Uputa: Dokažite da je tada element B u grupi $\mathrm{SU}(2)$ konjugiran sa $C = e^{\varphi A_1}$ ili sa $D = e^{(\varphi+2\pi)A_1}$. Zatim izračunajte trag operatora $\pi_n(C)$ i $\pi_n(D)$ koristeći bazu iz teorema 5.2.7.

Zadatak 5.2.18. *Riješite zadatak 5.2.16. koristeći zadatak 5.2.17. i jednakost $\chi_{\sigma_n \otimes \sigma_k} = \chi_n \cdot \chi_k$.*

Zadatak 5.2.19. *Neka je V prostor reprezentacije σ_n i $S, A : V \otimes V \to V \otimes V$ jedinstveni linearni operatori sa svojstvima $S(v \otimes w) = v \otimes w + w \otimes v$ i $A(v \otimes w) = v \otimes w - w \otimes v$, $\forall v, w \in V$. Dokažite da su njihova područja vrijednosti $R(S)$ i $R(A)$ $\sigma_n \otimes \sigma_n-$invarijantni potprostori i da vrijedi $V \otimes V = R(S) \dot{+} R(A)$. Pronađite rastav dviju subreprezentacija $(\sigma_n \otimes \sigma_n)_{R(S)}$ i $(\sigma_n \otimes \sigma_n)_{R(A)}$ u direktnu sumu ireducibilnih.*

5.3 Sferni harmonici

Promatrat ćemo sada funkcije na jediničnoj sferi S^2 u $\mathbb{R}^3$:

$$S^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3;\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}.$$

Polarne koordinate (r, ϑ, φ), $r \geq 0$, $\vartheta \in [0, \pi]$, $\varphi \in [0, 2\pi\rangle$, na prostoru $\mathbb{R}^3$ zadane su sa

$$x_1 = r \sin\vartheta \cos\varphi, \qquad x_2 = r \sin\vartheta \sin\varphi, \qquad x_3 = r \cos\vartheta.$$

Ako iz $\mathbb{R}^3$ izuzmemo npr. pozitivni dio treće osi, prijelaz s Kartezijevih na polarne koordinate je klase C^∞. Standardni integral na $\mathbb{R}^3$ u polarnim koordinatama postaje

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} F \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 \mathrm{d}x_3 = \int_0^{+\infty}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} F r^2 \sin\vartheta \mathrm{d}r \mathrm{d}\vartheta \mathrm{d}\varphi.$$

Odatle dobivamo koordinate (ϑ, φ), $\vartheta \in [0, \pi]$, $\varphi \in [0, 2\pi\rangle$, na sferi S^2, i integral na S^2 koji normiramo tako da površina sfere S^2 bude jednaka 1 :

$$f \mapsto \frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} f(\vartheta, \varphi) \sin\vartheta \mathrm{d}\vartheta \mathrm{d}\varphi.$$

Neka je $L_2(S^2)$ Hilbertov prostor (klasa) kvadratno integrabilnih kompleksnoznačnih funkcija na sferi S^2 sa skalarnim produktom

$$(f|g) = \frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} f(\vartheta, \varphi)\overline{g(\vartheta, \varphi)} \sin\vartheta \mathrm{d}\vartheta \mathrm{d}\varphi.$$

Laplaceov operator ili **Laplasijan** Δ je diferencijalni operator na $\mathbb{R}^3$ definiran sa

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}.$$

Prijelazom na polarne koordinate dobivamo

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\Delta_{S^2}, \tag{5.9}$$

gdje je Δ_{S^2} tzv. **sferni Laplasijan**:

$$\Delta_{S^2} = \frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2} + \cot\vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} + \frac{1}{(\sin\vartheta)^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}. \tag{5.10}$$

Svaka matrica $A \in \mathrm{SO}(3)$ djeluje kao rotacija prostora $\mathbb{R}^3$. Za funkciju $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{C}$ i za $A \in \mathrm{SO}(3)$ definiramo funkciju $\rho(A)f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{C}$ sa

$$(\rho(A)f)(x) = f(A^{-1}x), \qquad x \in \mathbb{R}^3.$$

Tada očito vrijedi

$$\rho(A)\rho(B)f = \rho(AB)f \qquad \forall A, B \in \mathrm{SO}(3) \quad \text{i za svaku funkciju} \quad f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{C}.$$

Restrikcije operatora $\rho(A)$ na invarijantne potprostore funkcija označavat ćemo također sa $\rho(A)$; npr. na prostoru $L_2(\mathbb{R}^3)$ ili na njegovim gustim potprostorima $C_0(\mathbb{R}^3)$ i $C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$.

Uvest ćemo sada pojam harmonijskih polinoma i vidjeti da se restrikcijama operatora $\rho(A)$, $A \in \mathrm{SO}(3)$, na prostore homogenih harmonijskih polinoma dobivaju sve ireducibilne konačnodimenzionalne reprezentacije grupe $\mathrm{SO}(3)$.

Harmonijska funkcija je funkcija $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{C}$ koja je klase C^2 i vrijedi

$$\Delta f = 0.$$

Za svaki $\ell \in \mathbb{Z}_+$ označimo sa $\mathcal{P}^\ell$ kompleksan vektorski prostor svih homogenih kompleksnoznačnih polinoma na $\mathbb{R}^3$ stupnja ℓ. Nadalje, neka je $\mathcal{H}^\ell$ potprostor od $\mathcal{P}^\ell$ svih **harmonijskih polinoma** tj. svih $P \in \mathcal{P}^\ell$ takvih da je $\Delta P = 0$.

Zadatak 5.3.1. *Dokažite da je*

$$\dim \mathcal{P}^\ell = \frac{(\ell+1)(\ell+2)}{2}.$$

Zadatak 5.3.2. *Dokažite da je za svaki* $\ell \in \mathbb{Z}_+$ $\Delta|\mathcal{P}^\ell$ *surjekcija sa* $\mathcal{P}^\ell$ *na* $\mathcal{P}^{\ell-2}$. *Pri tome podrazumijevamo da je* $\mathcal{P}^{-1} = \mathcal{P}^{-2} = \{0\}$.

Uputa: Dokažite direktnim računom da su polinomi oblika $x \mapsto x_3^{q_3}$, $x \mapsto x_1 x_3^{q_3}$ i $x \mapsto x_2 x_3^{q_3}$, $q_3 \in \mathbb{Z}_+$, u slici operatora $\Delta|\mathcal{P}$. Zatim pomoću formule

$$\Delta(x_1^{q_1} x_2^{q_2} x_3^{q_3}) = q_1(q_1-1)x_1^{q_1-2}x_2^{q_2}x_3^{q_3} + q_2(q_2-1)x_1^{q_1}x_2^{q_2-2}x_3^{q_3} + q_3(q_3-1)x_1^{q_1}x_2^{q_2}x_3^{q_3-2}$$

dokažite da iz surjektivnosti $\Delta|\mathcal{P}^\ell : \mathcal{P}^\ell \to \mathcal{P}^{\ell-2}$ slijedi surjektivnost $\Delta|\mathcal{P}^{\ell+2} : \mathcal{P}^{\ell+2} \to \mathcal{P}^\ell$. Napokon, uočite da je tvrdnja trivijalna za $\ell = 0$ i $\ell = 1$.

Zadatak 5.3.3. *Dokažite da je* $\dim \mathcal{H}^\ell = 2\ell + 1$ $\forall \ell \in \mathbb{Z}_+$.

Uputa: Iskoristite zadatke 5.3.1. i 5.3.2.

Ako je $P \in \mathcal{P}$ i $A \in \mathrm{SO}(3)$ očito je i $\rho(A)P \in \mathcal{P}$. Štoviše, ako je $P \in \mathcal{P}^\ell$ i $A \in \mathrm{SO}(3)$, onda je i $\rho(A)P \in \mathcal{P}^\ell$. Iz definicije ρ jasno je da je za svaki $P \in \mathcal{P}^\ell$ preslikavanje $A \mapsto \rho(A)P$ sa $\mathrm{SO}(3)$ u $\mathcal{P}^\ell$ neprekidno. Prema tome, $A \mapsto \rho(A)|\mathcal{P}^\ell$ je reprezentacija grupe $\mathrm{SO}(3)$ na konačnodimenzionalnom prostoru $\mathcal{P}^\ell$.

Propozicija 5.3.1. *Potprostor* $\mathcal{H}^\ell$ *od* $\mathcal{P}^\ell$ *je* $\rho-$*invarijantan.*

Dokaz: Neka je $A \in \mathrm{SO}(3)$ i neka su α_{ij} matrični elementi matrice A. Za točku $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ označimo sa $y = (y_1, y_2, y_3)$ točku $A^{-1}x$, dakle,

$$y_k = \sum_{j=1}^3 \alpha_{jk} x_j.$$

Za funkciju $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{C}$ klase C^2 i za $1 \le i \le 3$ imamo

$$\frac{\partial}{\partial x_i} f(A^{-1}x) = \frac{\partial}{\partial x_i} f\left(\sum_{j=1}^3 \alpha_{j1}x_j, \sum_{j=1}^3 \alpha_{j2}x_j, \sum_{j=1}^3 \alpha_{j3}x_j\right) = \sum_{k=1}^3 \alpha_{ik} \frac{\partial}{\partial y_k} f(y_1, y_2, y_3).$$

Odavde je

$$\Delta f(A^{-1}x) = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} f(A^{-1}x) = \sum_{i,j,k=1}^3 \alpha_{ij}\alpha_{ik} \frac{\partial^2}{\partial y_j \partial y_k} f(y_1, y_2, y_3).$$

Međutim, A je ortogonalna matrica pa je

$$\sum_{i=1}^3 \alpha_{ik}\alpha_{ij} = \delta_{kj}.$$

Slijedi

$$\Delta f(A^{-1}x) = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial^2 f}{\partial y_j^2}(y) = (\Delta f)(A^{-1}x).$$

Prema tome, ako je P harmonijski polinom, onda je za svaku $A \in \mathrm{SO}(3)$ polinom $\rho(A)P = P \circ A^{-1}$ također harmonijski.

Subreprezentaciju $A \mapsto \rho(A)|\mathcal{H}^\ell$ označavat ćemo sa ρ^ℓ.

Propozicija 5.3.2. *Reprezentacija ρ^ℓ grupe* $\mathrm{SO}(3)$ *je ireducibilna za svaki $\ell \in \mathbb{Z}_+$. Ta je reprezentacija ekvivalentna reprezentaciji $\pi_{2\ell}$ iz odjeljka* 4.2.

Dokaz: Lako se vidi da je homogeni polinom $P_\ell(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + ix_2)^\ell$ stupnja ℓ harmonijski. Neka je $\sigma : \mathrm{SU}(2) \to \mathrm{SO}(3)$ epimorfizam iz odjeljka 5.2. Promatrajmo reprezentaciju $\rho^\ell \circ \sigma$ grupe $\mathrm{SU}(2)$ na prostoru $\mathcal{H}^\ell$. Tada je

$$\sigma\left(\begin{bmatrix} \mathrm{e}^{it} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-it} \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \cos 2t & -\sin 2t & 0 \\ \sin 2t & \cos 2t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

pa nalazimo

$$(\rho^\ell \circ \sigma)\left(\begin{bmatrix} \mathrm{e}^{it} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-it} \end{bmatrix}\right) P_\ell = \mathrm{e}^{-2i\ell t} P_\ell.$$

Odatle slijedi da je P_ℓ svojstveni vektor operatora

$$(\rho^\ell \circ \sigma)\left(\begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\rho^\ell \circ \sigma)\left(\begin{bmatrix} \mathrm{e}^{it} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-it} \end{bmatrix}\right)\Bigg|_{t=0}$$

sa svojstvenom vrijednošću $-2i\ell$, dakle, svojstveni vektor operatora

$$H = -i(\rho^\ell \circ \sigma)\left(\begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}\right)$$

sa svojstvenom vrijednošću -2ℓ. Prema teoremu 5.2.7. u rastavu reprezentacije $\rho^\ell \circ \sigma$ u direktnu sumu ireducibilnih reprezentacija pojavljuje se $(2\ell+1)-$dimenzionalna reprezentacija $\pi_{2\ell}$. No kako je $\dim \mathcal{H}^\ell = 2\ell + 1$, slijedi tvrdnja propozicije.

Na taj način realizirali smo sve ireducibilne reprezentacije grupe $\mathrm{SO}(3)$ na prostorima homogenih harmonijskih polinoma na $\mathbb{R}^3$.

Propozicija 5.3.3. *Za svaki $\ell \geq 2$ je*

$$\mathcal{P}_\ell = \mathcal{H}_\ell \dot{+} r^2 \mathcal{P}^{\ell-2}.$$

Pri tome za polinom P r^2P označava polinom $(x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)P(x_1, x_2, x_3)$.

Dokaz: Očito je preslikavanje $P \mapsto r^2P$ injektivno. Prema tome je $\dim r^2\mathcal{P}^{\ell-2} = \dim \mathcal{P}^{\ell-2}$. Iz zadataka 5.3.1. i 5.3.3. znamo da je

$$\dim \mathcal{P}^\ell = \dim \mathcal{H}^\ell + \dim \mathcal{P}^{\ell-2}.$$

Prema tome, treba samo dokazati da je $\mathcal{H}^\ell \cap r^2\mathcal{P}^{\ell-2} = \{0\}$.

Zadatak 5.3.4. *Dokažite da za svaki* $P \in \mathcal{P}^\ell$ *vrijedi* **Eulerov identitet**:

$$(x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + x_3 \frac{\partial}{\partial x_3})P = \ell P.$$

Zadatak 5.3.5. *Pomoću zadatka 5.3.4. dokažite da za svaki* $P \in \mathcal{P}^\ell$ *i svaki* $k \in \mathbb{N}$ *vrijedi*

$$\Delta(r^{2k}P) = 2k(2\ell + 2k + 1)r^{2k-2}P + r^{2k}\Delta P.$$

Pretpostavimo da postoji $P \in \mathcal{H}^\ell \cap r^2\mathcal{P}^{\ell-2}$ različit od nule. Neka je $k \in \mathbb{N}$ najveći takav da postoji $Q \in \mathcal{P}^{\ell-2k}$ takav da je $P = r^{2k}Q$. Tada po zadatku 5.3.5. imamo

$$0 = \Delta P = \Delta(r^{2k}Q) = 2k(2\ell + 2k + 1)r^{2k-2}Q + r^{2k}\Delta Q.$$

Odatle je

$$Q = -\frac{r^2}{2k(2\ell + 2k + 1)}\,\Delta Q.$$

To znači da je polinom Q u prstenu polinoma $\mathcal{P}$ djeljiv sa r^2, a to je nemoguće po izboru k. Ova kontradikcija pokazuje da je $\mathcal{H}^\ell \cap r^2\mathcal{P}^{\ell-2} = \{0\}$.

Odatle neposredno slijedi:

Korolar 5.3.4. *Vrijedi*

$$\mathcal{P}^\ell = \begin{cases} \mathcal{H}^\ell \dotplus r^2\mathcal{H}^{\ell-2} \dotplus \cdots \dotplus r^\ell\mathcal{H}^0 & \textit{ako je} \quad \ell \quad \textit{paran} \\ \\ \mathcal{H}^\ell \dotplus r^2\mathcal{H}^{\ell-2} \dotplus \cdots \dotplus r^{\ell-1}\mathcal{H}^1 & \textit{ako je} \quad \ell \quad \textit{neparan.} \end{cases}$$

Uočimo sada da je homogeni polinom na $\mathbb{R}^3$ potpuno određen svojom restrikcijom na jediničnu sferu S^2. **Sferni harmonici** su funkcije na sferi S^2 koje su restrikcije harmonijskih polinoma. Za svaki $\ell \in \mathbb{Z}_+$ stavimo

$$\tilde{\mathcal{H}}^\ell = \{P|S^2;\ P \in \mathcal{H}^\ell\}.$$

Tada je $\tilde{\mathcal{H}}^\ell$ $(2\ell+1)-$dimenzionalan vektorski prostor. Njegove elemente zovemo **homogeni sferni harmonici stupnja** ℓ. Naravno, sferni harmonici su neprekidne funkcije na sferi S^2. Dakle, $\tilde{\mathcal{H}}^\ell$ su potprostori od $C(S^2)$, a time i od $L_2(S^2)$. Nadalje, označimo sa $\tilde{\mathcal{P}}^\ell$ potprostor od $C(S^2) \subseteq L_2(S^2)$ koji se sastoji od restrikcija homogenih polinoma $P \in \mathcal{P}^\ell$. Prema korolaru 5.3.4. imamo

$$\tilde{\mathcal{P}}^\ell = \tilde{\mathcal{H}}^\ell \dotplus \tilde{\mathcal{H}}^{\ell-2} \dotplus \cdots \tag{5.11}$$

pri čemu je posljednji član $\tilde{\mathcal{H}}^0$ ako je ℓ paran, a $\tilde{\mathcal{H}}^1$ ako je ℓ neparan.

Preko izomorfizma restrikcije na prostor $\tilde{\mathcal{H}}^\ell$ s prostora $\mathcal{H}^\ell$ prenosimo reprezentaciju ρ^ℓ koju ćemo i dalje označavati sa ρ^ℓ. Te su reprezentacije unitarne u odnosu na skalarni produkt iz Hilbertovog prostora $L_2(S^2)$ jer je mjera μ invarijantna u odnosu na rotacije.

Zadatak 5.3.6. *Neka je*

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_3 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

standardna baza Liejeve algebre $\mathfrak{so}(3)$. Dokažite da za svaku $f \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ vrijedi

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\rho\left(e^{tB_1}\right) f\right)(x)\Big|_{t=0} = \left(x_3\frac{\partial}{\partial x_2} - x_2\frac{\partial}{\partial x_3}\right) f(x),$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\rho\left(e^{tB_2}\right) f\right)(x)\Big|_{t=0} = \left(x_1\frac{\partial}{\partial x_3} - x_3\frac{\partial}{\partial x_1}\right) f(x),$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\rho\left(e^{tB_3}\right) f\right)(x)\Big|_{t=0} = \left(x_2\frac{\partial}{\partial x_1} - x_1\frac{\partial}{\partial x_2}\right) f(x).$$

Zadatak 5.3.7. *Iz zadatka 5.3.6. izvedite da za reprezentaciju ρ^ℓ na prostoru $\tilde{\mathcal{H}}^\ell$ u polarnim koordinatama na S^2 vrijedi*

$$\rho^\ell(B_1) = \sin\varphi\frac{\partial}{\partial\vartheta} + \cos\varphi\cot\vartheta\frac{\partial}{\partial\varphi},$$
$$\rho^\ell(B_2) = -\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\vartheta} + \sin\varphi\cot\vartheta\frac{\partial}{\partial\varphi},$$
$$\rho^\ell(B_3) = -\frac{\partial}{\partial\varphi}.$$

Budući da su reprezentacije ρ^ℓ unitarne, gornji operatori su antihermitski. Definiramo hermitske operatore množenjem sa i.

$$J_1 = i\rho^\ell(B_1) = i\left(\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\vartheta} + \cos\varphi\cot\vartheta\frac{\partial}{\partial\varphi}\right),$$
$$J_2 = i\rho^\ell(B_2) = i\left(-\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\vartheta} + \sin\varphi\cot\vartheta\frac{\partial}{\partial\varphi}\right),$$
$$J_3 = i\rho^\ell(B_3) = -i\frac{\partial}{\partial\varphi}. \tag{5.12}$$

Nadalje, kao i u odjeljku 5.2. definiramo operatore

$$J_\pm = J_1 \pm iJ_2 = \mathrm{e}^{\pm i\varphi}\left(\pm\frac{\partial}{\partial\vartheta} + i\cot\vartheta\frac{\partial}{\partial\varphi}\right). \tag{5.13}$$

Nadalje, definiramo Casimirov operator (također hermitski)

$$C = J_1^2 + J_2^2 + J_3^2 = J_+J_- + J_3^2 - J_3.$$

Zadatak 5.3.8. *Dokažite da za $\ell \in \mathbb{Z}_+$ na prostoru $\tilde{\mathcal{H}}^\ell$ vrijedi $C = -\Delta_{S^2}$, tj.*

$$\Delta_{S^2} = \rho^\ell(B_1)^2 + \rho^\ell(B_2)^2 + \rho^\ell(B_3)^2.$$

Za $P \in \mathcal{P}^\ell$ možemo u polarnim koordinatama pisati

$$P(r,\vartheta,\varphi) = r^\ell Y(\vartheta,\varphi), \qquad \text{gdje je} \quad Y \in \tilde{\mathcal{P}}^\ell.$$

Pomoću formule (5.9) nalazimo da je

$$\Delta P = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \Delta_{S^2} Y = -\ell(\ell+1)Y.$$

To pokazuje da je

$$\Delta_{S^2}|\tilde{\mathcal{H}}^\ell = -\ell(\ell+1)I_{\tilde{\mathcal{H}}^\ell}.$$

Drugim riječima, da je prostor $\tilde{\mathcal{H}}^\ell$ sadržan u svojstvenom potprostoru operatora Δ_{S^2} za svojstvenu vrijednost $-\ell(\ell+1)$. Primijetimo da je $\ell(\ell+1) \neq \ell'(\ell'+1)$ ako su $\ell, \ell' \in \mathbb{Z}_+$ i $\ell \neq \ell'$. Prema tome, prostori $\tilde{\mathcal{H}}^\ell$ sadržani su u svojstvenim potprostorima operatora Δ_{S^2} za različite svojstvene vrijednosti.

Zadatak 5.3.9. *Dokažite da za svake dvije funkcije f, g iz sume prostora $\tilde{\mathcal{H}}^\ell$, $\ell \in \mathbb{Z}_+$, vrijedi*

$$(\Delta_{S^2} f|g) = (f|\Delta_{S^2} g)$$

Uputa: Koristite zadatak 5.3.8.

Zadatak 5.3.10. *Pomoću zadatka 5.3.9. dokažite da su potprostori $\tilde{\mathcal{H}}^\ell$ međusobno ortogonalni u Hilbertovom prostoru $L_2(S^2)$.*

Teorem 5.3.5. *Vrijedi*

$$L_2(S^2) = \bigoplus_{\ell \in \mathbb{Z}_+} \tilde{\mathcal{H}}^\ell.$$

Dokaz: Već znamo da su potprostori $\tilde{\mathcal{H}}^\ell$ međusobno ortogonalni. Budući da je prostor neprekidnih funkcija $C(S^2)$ gust u $L^2(S^2)$, da dokažemo tvrdnju dovoljno je dokazati da je svaka neprekidna funkcija na S^2 uniformni limes suma funkcija iz $\tilde{\mathcal{H}}^\ell$, $\ell \in \mathbb{Z}_+$. Prema Weierstrassovom teoremu svaka je neprekidna funkcija na S^2 uniformni limes niza restrikcija polinoma. No svaka restrikcija homogenog polinoma na S^2 je prema (5.11) suma funkcija iz $\tilde{\mathcal{H}}^\ell$, $\ell \in \mathbb{Z}_+$. Odatle slijedi tvrdnja.

Iz teorema 5.3.5. neposredno slijedi

Korolar 5.3.6. *$\tilde{\mathcal{H}}^\ell$ je svojstveni potprostor operatora Δ_{S^2} za svojstvenu vrijednost $-\ell(\ell+1)$.*

Konstruirat ćemo sada jednu ortonormiranu bazu $\{Y^\ell_m;\ m \in \mathbb{Z},\ -\ell \leq m \leq \ell\}$ prostora sfernih harmonika $\tilde{\mathcal{H}}^\ell$. Stavimo za $\ell, m \in \mathbb{Z}_+$ i $m \leq \ell$

$$Y^\ell_m(\vartheta, \varphi) = \gamma^\ell_m Z^\ell_m(\vartheta) \mathrm{e}^{im\varphi},$$

gdje je

$$Z^\ell_m(\vartheta) = (\sin\vartheta)^m Q^\ell_m(\cos\vartheta), \qquad Q^\ell_m(x) = \frac{\mathrm{d}^{\ell+m}}{\mathrm{d}x^{\ell+m}}(1-x^2)^\ell,$$

a γ^ℓ_m je realan broj

$$\gamma^\ell_m = \frac{(-1)^{\ell+m}}{2^\ell \ell!}\sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}}\sqrt{\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}}.$$

Za $-\ell \leq m < 0$ stavimo

$$Y^\ell_m = (-1)^m \overline{Y^\ell_{-m}}.$$

Neka su u daljnjem J_3, J_+, J_- diferencijalni operatori na $C^\infty(S^2)$ zadani tako da se podudaraju s operatorima (5.12) i (5.13) na pojedinim prostorima $\tilde{\mathcal{H}}^\ell$, tj.

$$J_3 = -i\frac{\partial}{\partial\varphi}, \qquad J_\pm = \mathrm{e}^{\pm i\varphi}\left(\pm\frac{\partial}{\partial\vartheta} + i\cot\vartheta\frac{\partial}{\partial\varphi}\right),$$

i neka je

$$C = J_+J_- + J_3^2 - J_3.$$

Tada znamo da se na prostoru restrikcija polinoma operator C podudara sa $-\Delta_{S^2}$.

Zadatak 5.3.11. *Dokažite formule*

$$J_+Y^\ell_m = \sqrt{(\ell-m)(\ell+m+1)}Y^\ell_{m+1}, \tag{5.14}$$

$$J_-Y^\ell_m = \sqrt{(\ell+m)(\ell-m+1)}Y^\ell_{m-1}, \tag{5.15}$$

$$J_3Y^\ell_m = mY^\ell_m, \tag{5.16}$$

$$CY^\ell_m = \ell(\ell+1)Y^\ell_m. \tag{5.17}$$

Zadatak 5.3.12. *Dokažite da su funkcije* Y_m^ℓ, $-\ell \leq m \leq \ell$, *elementi potprostora* $\tilde{\mathcal{H}}^\ell$.

Uputa: Iskoristite formulu (5.17) i korolar 5.3.6.

Zadatak 5.3.13. *Dokažite da su funkcije* Y_m^ℓ *i* $Y_{m'}^\ell$ *za* $m \neq m'$ *međusobno ortogonalne.*

Uputa: Iskoristite formulu (5.16) i hermitičnost operatora J_3 na prostoru $\tilde{\mathcal{H}}^\ell$.

Budući da je dimenzija prostora $\tilde{\mathcal{H}}^\ell$ jednaka $2\ell+1$, zaključujemo da je $\{Y_m^\ell;\ -\ell \leq m \leq \ell\}$ baza ortogonalna prostora $\tilde{\mathcal{H}}^\ell$. Dokazat ćemo sada da su svi ti vektori Y_m^ℓ jedinični. Prije svega, operatori J_+ i J_- na prostoru $\tilde{\mathcal{H}}^\ell$ su međusobno adjungirani. Sada iz formula (5.14) i (5.15) nalazimo za $-\ell < m \leq \ell$:

$$\sqrt{(\ell+m)(\ell-m+1)}(Y_m^\ell|Y_m^\ell) = (J_+Y_{m-1}^\ell|Y_m^\ell) = (Y_{m-1}^\ell|J_-Y_m^\ell) = \sqrt{(\ell+m)(\ell-m+1)}(Y_{m-1}^\ell|Y_{m-1}^\ell).$$

Odatle se vidi da su svi vektori Y_m^ℓ iste norme. Stoga je dovoljno dokazati da je jedan od njih jedinični, npr. Y_ℓ^ℓ. Polinom Q_ℓ^ℓ je konstanta $(-1)^\ell(2\ell)!$, pa je

$$Y_\ell^\ell(\vartheta,\varphi) = (-1)^\ell\gamma_\ell^\ell(2\ell)!(\sin\vartheta)^\ell \mathrm{e}^{i\ell\varphi}.$$

Stoga je

$$(Y_\ell^\ell|Y_\ell^\ell) = \gamma_\ell \mathcal{I}_\ell,$$

gdje je

$$\gamma_\ell = 2\pi\left(\gamma_\ell^\ell(2\ell)!\right)^2$$

i

$$\mathcal{I}_\ell = \int_0^\pi (\sin\vartheta)^{2\ell+1}\mathrm{d}\vartheta.$$

Imamo $\mathcal{I}_0 = 2$ i $\gamma_0 = \frac{1}{2}$, dakle, $(Y_0^0|Y_0^0) = 1$. Supstitucijom $x = \cos\vartheta$ integral $\mathcal{I}_\ell$ poprima oblik

$$\mathcal{I}_\ell = \int_{-1}^1 (1-x^2)^\ell \mathrm{d}x.$$

Zadatak 5.3.14. *Parcijalnom integracijom dokažite da je*

$$\mathcal{I}_{\ell+1} = \mathcal{I}_\ell - \frac{1}{2\ell+2}\mathcal{I}_{\ell+1}.$$

Odatle je $(2\ell+3)\mathcal{I}_{\ell+1} = (2\ell+2)\mathcal{I}_\ell$. Lako se vidi da je $(2\ell+2)\gamma_{\ell+1} = (2\ell+3)\gamma_\ell$. Slijedi

$$(Y_{\ell+1}^{\ell+1}|Y_{\ell+1}^{\ell+1}) = \gamma_{\ell+1}\mathcal{I}_{\ell+1} = \gamma_\ell\mathcal{I}_\ell = (Y_\ell^\ell|Y_\ell^\ell).$$

Odatle indukcijom po ℓ zaključujemo da su svi vektori Y_ℓ^ℓ jedinični. Prema tome, svi vektori Y_m^ℓ su jedinični. Dakle, $\{Y_m^\ell;\ -\ell \leq m \leq \ell\}$ je ortonormirana baza prostora $\tilde{\mathcal{H}}^\ell$. Iz teorema 5.3.5. sada neposredno slijedi:

Teorem 5.3.7. *Sferni harmonici* Y_m^ℓ, $\ell \in \mathbb{Z}_+$, $-\ell \leq m \leq \ell$, *tvore ortonormiranu bazu Hilbertovog prostora* $L_2(S^2)$.

Napomena: Legendreovi polinomi definirani su sa

$$P_\ell(x) = \frac{(-1)^\ell}{2^\ell \ell!}\frac{\mathrm{d}^\ell}{\mathrm{d}x^\ell}(1-x^2)^\ell, \qquad \ell \in \mathbb{Z}_+,$$

a **Legendreove funkcije** $P_{\ell,m}$ $\ell, m \in \mathbb{Z}_+$, su funkcije na segmentu $[-1,1]$ definirane sa

$$P_{\ell,m}(x) = (-1)^m \sqrt{(1-x^2)^m} \frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m} P_\ell(x) = \frac{(-1)^{\ell+m}}{2^\ell \ell!} \sqrt{(1-x^2)^m} \frac{\mathrm{d}^{\ell+m}}{\mathrm{d}x^{\ell+m}} (1-x^2)^\ell.$$

Direktnim računom nalazimo da za $\ell \in \mathbb{Z}_+$ i $0 \leq m \leq \ell$ vrijedi

$$Y^\ell_m(\vartheta, \varphi) = \gamma_{\ell,m} P_{\ell,m}(\cos\vartheta) \mathrm{e}^{im\varphi}.$$

Zadatak 5.3.15. *Dokažite da vrijedi*

$$\int_{-1}^{1} P_{\ell,m}(x) P_{\ell',m}(x) \mathrm{d}x = 0 \qquad za \quad \ell \neq \ell'.$$

Izračunajte integral za $\ell = \ell'$.

Zadatak 5.3.16. *Dokažite da postoje* $\alpha(\ell,m), \beta(\ell,m) \in \mathbb{C}$ *takvi da je*

$$(\cos\vartheta) Y^\ell_m(\vartheta,\varphi) = \alpha(\ell,m) Y^{\ell+1}_m(\vartheta,\varphi) + \beta(\ell,m) Y^{\ell-1}_m(\vartheta,\varphi).$$

Napomena: Može se dokazati da vrijedi tzv. **adicioni teorem** za sferne harmonike:

$$\frac{4\pi}{2\ell+1} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \overline{Y^\ell_m(\vartheta,\varphi)} Y^\ell_m(\vartheta',\varphi) = P_\ell(\cos(\vartheta - \vartheta')).$$

Bibliografija

[1] H. Boerner, *Group Representations*, Springer−Verlag, Berlin, 1955.

[2] A.J. Coleman, *Induced Representations with Applications to S_n and* GL(n), Queens Univ. No.4, Kingston, Ontario, 1966.

[3] A.J. Coleman, *Induced and Subduced Representations*, u *Group Theory and its Applications* ed. M. Loebl, Academic Press, New York, 1968.

[4] C. Curtis, I. Reiner, *Representation Theory of Finite Groups and Associative Algebras*, Interscience Publishers, New York, 1962.

[5] W. Feit, *Characters of Finite Groups*, W.A. Benjamin Publishers, New York, 1967.

[6] F.G. Frobenius, *Gesammelte Abhandlungen*, Bd. III., Springer−Verlag, Berlin, 1969.

[7] W. Fulton, J. Harris, *Representation Theory. A First Course*, Springer−Verlag, New York, 2004.

[8] R. Goodman, N.R. Wallach, *Representations and Invariants of the Classical Groups*, Cambridge University Press, Cambridge, 2003.

[9] M. Hall, *The Theory of Groups*, Macmillan, New York, 1959.

[10] M. Hamermesh, *Group Theory and its Application to Physical Problems*, Addison−Wesley Publ. Co., Reading − Palo Alto − London, 1964.

[11] A.W. Knapp, *Representation Theory of Semisimple Groups. An Overview Based on Examples*, Princeton University Press, Princeton − Oxford, 2001.

[12] Y. Kosmann−Schwarzbah, *Groups and Symmetries. From Finite Groups to Lie Groups*, Springer−Verlag, New York − Dordrecht − Heidelberg − London, 2009.

[13] S. Kurepa, *Konačno dimenzionalni vektorski prostori i primjene*, Sveučilišna naklada Liber, Zagreb, 1976.

[14] D.E. Littlewood, *The Theory of Group Characters*, Oxford Univ. Press, Oxford, 1950.

[15] J.S. Lomont, *Applications of Finite Groups*, Academic Press, New York, 1959.

[16] G.W. Mackey, *Induced representations of groups*, American Journal of Mathematics, 73(1951), 576−592.

[17] C. Procesi, *Lie Groups. An Approach through Invariants and Representations*, Springer−Verlag, New York, 2007.

[18] L. Pukanszky, *Leçons sur les représentations des groupes*, Dunod, Paris, 1967.

[19] J.−P. Serre, *Linear Representations of Finite Groups*, Springer−Verlag, New York − Heidelberg − Berlin, 1977.

[20] B. Simon, *Representations of Finite and Compact Groups*, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1996.

[21] E.B. Vinberg, *Lineinie predstavlenija grupp*, (na ruskom) Nauka, Moskva, 1985.

[22] S.H. Weintraub, *Representation Theory of Finite Groups: Algebra and Arithmetic*, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2003.

[23] H. Weyl, *The Theory of Groups and Quantum Mechanics*, Princeton Univ. Press, Princeton, 1931.

[24] H. Weyl, *The Classical Groups*, Princeton University Press, Princeton, 1946.

[25] E.P. Wigner, *Group Theory and its Applications to the Quantum Mechanics*, Academic Press, New York, 1959.