LIEJEVE ALGEBRE

Prof. dr. sc. Hrvoje Kraljević

Predavanja održana u okviru diplomskog studija Teorijska matematika
na PMF−Matematičkom odjelu Sveučilišta u Zagrebu
u ljetnom semestru akademske godine 2011./2012.

Zagreb, 2012.

Sadržaj

Poglavlje 1

OSNOVNI POJMOVI

1.1 Definicije, osnovna svojstva i primjeri

Osim ako posebno ne naglasimo, u cijelom kolegiju je polje K, nad kojim promatramo vektorske prostore i algebre, algebarski zatvoreno i karakteristike 0.

Algebra je vektorski prostor $\mathcal{A}$ s bilinearnom operacijom $\mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$, $(a, b) \mapsto ab$, $a, b \in \mathcal{A}$, koju obično zovemo **množenje**. Bilinearnost naravno znači **biaditivnost** ili **obostranu distributivnost** i $K-$**bihomogenost**:

$$a(b + c) = ab + ac, \qquad (a + b)c = ac + bc, \qquad \forall a, b, c \in \mathcal{A}$$

$$\lambda(ab) = (\lambda a)b = a(\lambda b), \qquad \forall a, b \in \mathcal{A}, \quad \forall \lambda \in K.$$

Jedinica u algebri $\mathcal{A}$ je element $e \in \mathcal{A}$ sa svojstvom

$$ea = ae = a \qquad \forall a \in \mathcal{A}.$$

Ako jedinica u algebri $\mathcal{A}$ postoji ona je jedinstvena i tada kažemo da je $\mathcal{A}$ **algebra s jedinicom**.

Za algebru $\mathcal{A}$ kažemo da je **asocijativna**, ukoliko vrijedi zakon asocijativnosti:

$$(ab)c = a(bc), \qquad a, b, c \in \mathcal{A}.$$

Unitalna algebra je asocijativna algebra s jedinicom. Držat ćemo se dogovora da naziv *unitalna algebra* podrazumijeva da se radi o *asocijativnoj* algebri, iako to nije standardno pravilo u literaturi.

Potprostor $\mathcal{B}$ algebre $\mathcal{A}$ zove se **podalgebra** od $\mathcal{A}$ ako vrijedi

$$a, b \in \mathcal{B} \qquad \Longrightarrow \qquad ab \in \mathcal{B}.$$

Ako je $\mathcal{B}$ podalgebra algebre $\mathcal{A}$ s jedinicom e, kažemo da je $\mathcal{B}$ **podalgebra s jedinicom**. Naravno, može se dogoditi da je $\mathcal{B}$ podalgebra s jedinicom $e_{\mathcal{B}}$ ali da $e_{\mathcal{B}}$ nije jedinica algebre $\mathcal{A}$. Tada se $\mathcal{B}$ ne zove podalgebra s jedinicom.

Lijevi ideal u algebri $\mathcal{A}$ je potprostor $\mathcal{L}$ od $\mathcal{A}$ takav da vrijedi

$$a \in \mathcal{A}, \quad b \in \mathcal{L} \qquad \Longrightarrow \qquad ab \in \mathcal{I}.$$

Desni ideal u algebri $\mathcal{A}$ je potprostor $\mathcal{R}$ od $\mathcal{A}$ takav da vrijedi

$$a \in \mathcal{A}, \quad b \in \mathcal{R} \qquad \Longrightarrow \qquad ba \in \mathcal{R}.$$

Naravno, svaki bilo lijevi bilo desni ideal je i podalgebra. **Obostrani ideal** u algebri $\mathcal{A}$ je potprostor $\mathcal{I}$ od $\mathcal{A}$ koji je i lijevi i desni ideal. Ako je $\mathcal{I}$ obostrani ideal u algebri $\mathcal{A}$ onda na kvocijentnom vektorskom prostoru $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ možemo definirati množenje sa

$$(a+\mathcal{I})(b+\mathcal{I}) = ab+\mathcal{I}, \qquad a,b \in \mathcal{A}.$$

Tako dobivena algebra zove se **kvocijentna algebra**. Ako je $\mathcal{A}$ algebra s jedinicom e onda je i kvocijentna algebra $\mathcal{A}/cI$ algebra s jedinicom i njena je jedinica $e+\mathcal{I}$. Ako je $\mathcal{A}$ asocijativna algebra, onda je i kvocijentna algebra $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ asocijativna.

Neka su $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ algebre nad istim poljem K. Preslikavanje $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ zove se **homomorfizam algebri** ako je φ linearan operator sa svojstvom

$$\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b) \qquad \forall a,b \in \mathcal{A}.$$

Skup svih homomorfizama $\mathcal{A}$ u $\mathcal{B}$ označavat ćemo sa $Hom(\mathcal{A},\mathcal{B})$. Kompozicija homomorfizama algebri ponovo je homomorfizam algebri; tj. ako su $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ i $\mathcal{C}$ algebre onda vrijedi

$$\varphi \in Hom(\mathcal{A},\mathcal{B}), \quad \psi \in Hom(\mathcal{B},\mathcal{C}) \qquad \Longrightarrow \qquad \psi \circ \varphi \in Hom(\mathcal{A},\mathcal{C}).$$

Homomorfizam $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ zove se **epimorfizam** ako je surjekcija, **monomorfizam** ako je injekcija, **izomorfizam** ako je i jedno i drugo, tj. bijekcija. Kompozicija epimorfizama je epimorfizam, kompozicija monomorfizama je monomorfizam, pa je i kompozicija izomorfizama izomorfizam. Nadalje, inverzno preslikavanje $\varphi^{-1} : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ izomorfizma $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ je također izomorfizam. Napokon, identiteta $I_\mathcal{A}$ na algebri $\mathcal{A}$ ($I_\mathcal{A}(a) = a \ \forall a \in \mathcal{A}$) je izomorfizam $\mathcal{A}$ na $\mathcal{A}$. Prema tome, izomorfizmi definiraju relaciju ekvivalencije, koja se zove **izomorfnost algebri**: kažemo da je algebra $\mathcal{A}$ **izomorfna** algebri $\mathcal{B}$, i tada pišemo $\mathcal{A} \simeq \mathcal{B}$, ako postoji izomorfizam $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$.

Homorfizam algebre $\mathcal{A}$ u samu sebe zove se **endomorfizam** algebre $\mathcal{A}$. Umjesto $Hom(\mathcal{A},\mathcal{A})$ pišemo $End(\mathcal{A})$. Očito je za svaku algebru $\mathcal{A}$ uz kompoziciju kao operaciju množenja $End(\mathcal{A})$ monoid s jedinicom $I_\mathcal{A}$. Endomorfizam algere $\mathcal{A}$ koji je ujedno bijekcija, tj. izomorfizam, zove se **automorfizam** algebre $\mathcal{A}$. Skup svih automorfizama od $\mathcal{A}$ označavamo $Aut(\mathcal{A})$; to je upravo grupa svih invertibilnih elemenata monoida $End(\mathcal{A})$.

Ako je $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ homomorfizam algebri, onda je njegova jezgra $\operatorname{Ker}\varphi = \{a \in \mathcal{A};\ \varphi(a) = 0\}$ obostrani ideal u algebri $\mathcal{A}$ i njegova slika $\operatorname{Im}\varphi = \varphi(\mathcal{A}) = \{\varphi(a);\ a \in \mathcal{A}\}$ je podalgebra od $\mathcal{B}$. Nadalje, preslikavanje $\Phi : \mathcal{A}/\operatorname{Ker}\varphi \to \operatorname{Im}\varphi = \varphi(\mathcal{A})$, definirano sa $\Phi(a+\operatorname{Ker}\varphi) = \varphi(a),\ a \in \mathcal{A}$, je izomorfizam kvocijentne algebre $\mathcal{A}/\operatorname{Ker}\varphi$ na podalgebru $\operatorname{Im}\varphi$ algebre $\mathcal{B}$.

Neka je $\mathcal{A}$ algebra nad poljem K. Linearan operator $D : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ zove se **derivacija algebre** $\mathcal{A}$ ako vrijedi

$$D(ab) = D(a)b + aD(b) \qquad \forall a,b \in \mathcal{A}.$$

Skup svih derivacija algebre $\mathcal{A}$ označavat ćemo sa $Der(\mathcal{A})$. Primijetimo da je $Der(\mathcal{A})$ potprostor vektorskog prostora $L(\mathcal{A}) = L(\mathcal{A},\mathcal{A})$ svih linearnih operatora $\mathcal{A} \to \mathcal{A}$. Prostor $L(\mathcal{A})$ je unitalna algebra, ali $Der(\mathcal{A})$ općenito nije podalgebra, budući da kompizicija derivacija ne mora biti (i obično nije) derivacija. Međutim, vrijedi:

Propozicija 1.1.1. *Ako je $\mathcal{A}$ algebra i $D,E \in Der(\mathcal{A})$ onda je $DE - ED \in Der(\mathcal{A})$.*

Zadatak 1.1.1. *Dokažite propoziciju 1.1.1.*

Liejeva algebra nad poljem K je algebra $\mathfrak{g}$, u kojoj se množenje obično označava sa $(x,y) \mapsto [x,y]$ i zove **komutator**, ukoliko su ispunjena sljedeća dva uvjeta:

$(L1)$ $[x,x] = 0 \ \ \forall x \in \mathfrak{g}$.

$(L2)$ $[x,[y,z]]+[y,[z,x]]+[z,[x,y]]=0 \;\; \forall x,y,z \in \mathcal{A}$.

Svojstvo $(L2)$ zove se **Jacobijev identitet**. Budući da pretpostavljamo da je polje K karakteristike 0, aksiom $(L1)$ ekvivalentan je aksiomu

$(L32')$ $[x,y]=-[y,x] \;\; \forall x,y \in \mathfrak{g}$.

Zbog svojstva antikomutativnosti $(L1')$ kod Liejevih algebri nema razlike među lijevim i desnim idealima, pa kažemo samo **ideal**. Ako je $\mathfrak{i}$ ideal u Liejevoj algebri $\mathfrak{g}$, kvocijentna algebra je također Liejeva algebra.

Važan primjer Liejevih algebri dobiva se iz asocijativnih algebri:

Zadatak 1.1.2. *Neka je $\mathcal{A}$ asocijativna algebra. Definiramo*

$$[x,y]=xy-yx, \qquad x,y \in \mathcal{A}.$$

Dokažite da s operacijom $[\,\cdot\,,\,\cdot\,]$ $\mathcal{A}$ postaje Liejeva algebra.

Liejevu algebru iz zadatka 1.1.2. označavat ćemo sa $Lie(\mathcal{A})$. Ako je $\mathfrak{g}$ Liejeva algebra i $\mathcal{A}$ asocijativna algebra onda ćemo preslikavanje $\varphi : \mathfrak{g} \to \mathcal{A}$, koje je homomorfizam Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ u Liejevu algebru $Lie(\mathcal{A})$, zvati **Liejev morfizam** Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ u asocijativnu algebru $\mathcal{A}$. Posebni slučaj je kad je $\mathcal{A}$ zapravo asocijativna algebra $L(V)$ svih linearnih operatora na vektorskom prostoru V. U tom se slučaju Liejev morfizam $\pi : \mathfrak{g} \to L(V)$ zove **reprezentacija** Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ na vektorskom prostoru V. Dakle, reprezentacija Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ (nad poljem K) na vektorskom prostoru V (nad poljem K) je preslikavanje π koje svakom elementu $x \in \mathfrak{g}$ pridružuje linearan operator $\pi(x) : V \to V$ i vrijedi:

$$\pi(x+y)=\pi(x)+\pi(y), \quad \pi(\lambda x)=\lambda\pi(x), \quad \pi([x,y])=\pi(x)\pi(y)-\pi(y)\pi(x), \quad \forall x,y \in \mathfrak{g},\ \forall \lambda \in K.$$

Istaknimo, da je prema propoziciji 1.1.1. za svaku (ne nužno asocijativnu) algebru $\mathcal{A}$ skup svih derivacija $Der(\mathcal{A})$ Liejeva podalgebra Liejeve algebre $Lie(L(\mathcal{A}))$.

Mi ćemo se u ovom kolegiju gotovo isključivo baviti konačnodimenzionalnim Liejevim algebrama. Međutim, vektorski prostori koje ćemo promatrati (pa ni asocijativne algebre) ne će uvijek biti konačnodimenzionalni.

Neka je V konačnodimenzionalan vektorski prostor nad poljem K i $n = \dim V$. Liejevu algebru $Lie(L(V))$ označavat ćemo sa $\mathfrak{gl}(V)$. Naravno, $\dim \mathfrak{gl}(V) = n^2$. Izaberemo li bazu prostora V dobivam izomorfizam Liejeve algebre $\mathfrak{gl}(V)$ s Liejevom algebrom $Lie(M_n(K))$ svih kvadratnih matrica $n \times n$; ova posljednja se obično označava $\mathfrak{gl}(n,K)$. **Linearna Liejeva algebra** je bilo koja Liejeva podalgebra od $\mathfrak{gl}(V)$ za konačnodimenzionalan vektorski prostor V. Dakle, linearna Liejeva algebra izomorfna je Liejevoj podalgebri od $\mathfrak{gl}(n,K)$. Napomenimo, da se Liejeva algebra $\mathfrak{gl}(V)$, pa i $\mathfrak{gl}(n,K)$, često zove **opća linearna Liejeva algebra**.

Lako je zapisati tablicu množenja Liejeve algebre $\mathfrak{gl}(n,K)$. Naime, ako sa e_{ij} označimo $n \times n$ matricu kojoj su svi elementi 0 osim broja 1 na presjecištu $i-$tog retka i $j-$tog stupca, onda je $e_{ij}e_{k\ell} = \delta_{jk}e_{i\ell}$, pa imamo

$$[e_{ij}, e_{k\ell}] = \delta_{jk}e_{i\ell} - \delta_{i\ell}e_{kj}.$$

Razmotrimo sada neke serije linearnih Liejevih algebri, koje se obično zovu **klasične Liejeve algebre**.

1. Za konačnodimenzionalan prostor V sa $\mathfrak{sl}(V)$ označavamo skup svih linearnih operatora kojima je trag jednak nuli; analogno, sa $\mathfrak{sl}(n,K)$ označavamo skup svih matrica $n \times n$ traga

0. Budući da je trag komutatora dvaju operatora, odnosno, dviju matrica, uvijek jednak nuli $\mathfrak{sl}(V)$ je Liejeva podalgebra od $\mathfrak{gl}(V)$ i $\mathfrak{sl}(n,K)$ je Liejeva podalgebra od $\mathfrak{gl}(n,K)$. Ta se Liejeva algebra zove se **specijalna linearna Liejeva algebra**. Trag je netrivijalni linearni funkcional na prostoru $\mathfrak{gl}(V)$ (odnosno, na prostoru $\mathfrak{gl}(n,K)$) i $\mathfrak{sl}(V)$ (odnosno, $\mathfrak{sl}(n,K)$) je njegova jezgra. Dakle, $\dim \mathfrak{sl}(V) = \dim \mathfrak{sl}(n,K) = n^2-1$. Lako je napisati bazu od $\mathfrak{sl}(n,K)$: to je npr.

$$\{e_{ij};\ i,j\in\{1,\dots,n\}\ i\neq j\}\cup\{h_i=e_{ii}-e_{i+1,i+1};\ i\in\{1,\dots,n-1\}\}.$$

Tu ćemo bazu zvati *standardna baza od* $\mathfrak{sl}(n,K)$.

2. Neka je V vektorski prostor nad poljem K i neka je $F: V\times V\to K$ nedegenerirana bilinearna forma na V koja je antisimetrična, tj.

$$F(v,w)=-F(w,v)\qquad \forall v,w\in V.$$

Nedegeneriranost znači da vrijedi

$$v\in V,\quad F(v,w)=0\quad \forall w\in V\qquad\Longrightarrow\qquad v=0.$$

Zadatak 1.1.3. *Neka je F nedegenerirana antisimetrična bilinearna forma na konačnodimenzionalnom vektorskom prostoru V. Dokažite da je tada dimenzija prostora V paran broj $2n$ i da postoji baza $\{e_1,\dots,e_{2n}\}$ od V takva da vrijedi:*

$$v=\sum_{i=1}^{2n}\alpha_ie_i,\quad w=\sum_{i=1}^{2n}\beta_ie_i\qquad\Longrightarrow\qquad F(v,w)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\beta_{n+i}-\sum_{i=1}^{n}\alpha_{n+i}\beta_i.$$

Stavimo

$$\mathfrak{sp}(V)=\{x\in\mathfrak{gl}(V);\ F(x(v),w)+F(v,x(w))=0\ \ \forall v,w\in V\}.$$

Zadatak 1.1.4. (*a*) *Dokažite da je $\mathfrak{sp}(V)$ Liejeva podalgebra od $\mathfrak{gl}(V)$ sadržana u $\mathfrak{sl}(V)$ i da je ta Liejeva algebra izomorfna Liejevoj algebri matrica*

$$\mathfrak{sp}(2n,K)=\{x\in\mathfrak{gl}(2n,K);\ sx=-x^ts\},\quad \textit{gdje je}\quad s=\begin{bmatrix}0 & I_n\\ -I_n & 0\end{bmatrix},$$

pri čemu je I_n oznaka za jediničnu matricu $n\times n$.

(*b*) *Dokažite da je*

$$\mathfrak{sp}(2n,K)=\left\{\begin{bmatrix}a & b\\ c & -a^t\end{bmatrix};\ a,b,c\in M_n(n,K),\ b=b^t,\ c=c^t\right\},$$

pri čemu je g^t oznaka za transponiranu matricu matrice g.

(*c*) *Dokažite da je* $\dim \mathfrak{sp}(2n,K)=2n^2+n$.

Liejeve algebre $\mathfrak{sp}(V)$ i $\mathfrak{sp}(2n,K)$ zovu se **simplektičke Liejeve algebre**.

3. Neka je sada V konačnodimenzionalan vektorski prostor nad poljem K i $F: V\times V\to K$ nedegenerirana bilinearna forma na V koja je simetrična, tj.

$$F(v,w)=F(w,v)\qquad\forall v,w\in V.$$

Stavimo

$$\mathfrak{o}(V)=\{x\in\mathfrak{gl}(V);\ F(xv,w)+F(v,xw)=0\quad\forall v,w\in V\}.$$

Zadatak 1.1.5. (*a*) *Dokažite da je* $\mathfrak{o}(V)$ *Liejeva podalgebra od* $\mathfrak{gl}(V)$ *sadržana u* $\mathfrak{sl}(V)$.

(*b*) *Dokažite da je* $\dim\,\mathfrak{o}(V) = \dfrac{n(n-1)}{2}$, $n = \dim V$.

(*c*) *Ukoliko je* $n = \dim V$ *neparan broj,* $n = 2k+1$, *dokažite da u* V *postoji baza* $\{e_0, e_1, \ldots, e_{2k}\}$ *takva da je*

$$v = \sum_{i=0}^{2k} \alpha_i e_i, \quad w = \sum_{i=0}^{2k} \beta_i e_i \qquad \Longrightarrow \qquad F(v,w) = \alpha_0\beta_0 + \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \beta_{k+i} + \sum_{i=1}^{k} \alpha_{k+i}\beta_i.$$

Nadalje, dokažite da je Liejeva algebra $\mathfrak{o}(V)$ *izomorfna Liejevoj algebri matrica*

$$\mathfrak{o}(2k+1,K) = \{x \in \mathfrak{gl}(2k+1,K);\ sx = -x^t s\}, \quad \textit{gdje je} \quad s = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_k \\ 0 & I_k & 0 \end{bmatrix}.$$

(*d*) *Ukoliko je* n *paran broj,* $n = 2k$, *dokažite da u* V *postoji baza* $\{e_1, \ldots, e_{2n}\}$ *takva da je*

$$v = \sum_{i=1}^{2k} \alpha_i e_i, \quad w = \sum_{i=1}^{2k} \beta_i e_i \qquad \Longrightarrow \qquad F(v,w) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \beta_{k+i} + \sum_{i=1}^{k} \alpha_{k+i}\beta_i.$$

Nadalje, dokažite da je Liejeva algebra $\mathfrak{o}(V)$ *izomorfna Liejevoj algebri matrica*

$$\mathfrak{o}(2k,K) = \{x \in \mathfrak{gl}(2k,K);\ sx = -x^t s\}, \quad \textit{gdje je} \quad s = \begin{bmatrix} 0 & I_k \\ I_k & 0 \end{bmatrix}.$$

Liejeve algebre $\mathfrak{o}(V)$ i $\mathfrak{o}(n,K)$ zovu se **ortogonalne Liejeve algebre**. Zajednički naziv za specijalne linearne Liejeve algebre, simplektičke Liejeve algebre i ortogonalne Liejeve algebre je **klasične Liejeve algebre**.

Navedimo još nekoliko Liejevih algebri matrica s kojima ćemo se susretati. Sa $\mathfrak{t}(n,K)$ označavamo Liejevu algebru svih **gornje trokutastih matrica** $n \times n$:

$$\mathfrak{t}(n,K) = \{a = [\alpha_{ij}] \in \mathfrak{gl}(n,K);\ \alpha_{ij} = 0 \quad \text{ako je} \quad i > j\}.$$

Nadalje, $\mathfrak{n}(n,K)$ je Liejeva algebra svih **striktno gornje trokutastih matrica** $n \times n$:

$$\mathfrak{n}(n,K) = \{a = [\alpha_{ij}] \in \mathfrak{gl}(n,K);\ \alpha_{ij} = 0 \quad \text{ako je} \quad i \geq j\}.$$

Napokon, $\mathfrak{d}(n,K)$ označava Liejevu algebru svih **dijagonalnih matrica** $n \times n$:

$$\mathfrak{d}(n,K) = \{a = [\alpha_{ij}] \in \mathfrak{gl}(n,K);\ \alpha_{ij} = 0 \quad \text{ako je} \quad i \neq j\}.$$

Očito je

$$\dim\,\mathfrak{t}(n,K) = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \dim\,\mathfrak{n}(n,K) = \frac{n(n-1)}{2}, \quad \dim\,\mathfrak{d}(n,K) = n.$$

Nadalje, vrijedi

$$\mathfrak{t}(n,K) = \mathfrak{d}(n,K) \dot{+} \mathfrak{n}(n,K), \quad [\mathfrak{d}(n,K), \mathfrak{d}(n,K)] = \{0\}, \quad [\mathfrak{d}(n,K), \mathfrak{n}(n,K)] = \mathfrak{n}(n,K),$$

dakle,

$$[\mathfrak{t}(n,K), \mathfrak{t}(n,K)] = \mathfrak{n}(n,K).$$

Pri tome, za bilo koju Liejevu algebru $\mathfrak{g}$ i za bilo koje podskupove $A, B \subseteq \mathfrak{g}$ sa $[A, B]$ označavamo potprostor od $\mathfrak{g}$ razapet svim elementima oblika $[a, b]$, $a \in A$, $b \in B$:

$$[A, B] = span_K \{[a, b];\ a \in A,\ b \in B\}.$$

Kao što smo već spomenuli, za svaku algebru $\mathcal{A}$ njene derivacije tvore Liejevu podalgebru $Der(\mathcal{A})$ od $\mathfrak{gl}(\mathcal{A})$. Posebno je tako u slučaju Liejeve algebre $\mathfrak{g}$. Tada je

$$Der(\mathfrak{g}) = \{D \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{g});\ D([x, y]) = [D(x), y] + [x, D(y)] \quad \forall x, y \in \mathfrak{g}\}.$$

Za bilo koji element $x \in \mathfrak{g}$ definiramo preslikavanje $ad\, x : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ na sljedeći način:

$$(ad\, x)(y) = [x, y], \qquad y \in \mathfrak{g}.$$

Iz bilinearnosti preslikavanja $(x, y) \mapsto [x, y]$ neposredno slijedi da su svi operatori $ad\, x$ linearni i da je $ad : \mathfrak{g} \to L(\mathfrak{g}),\ x \mapsto ad\, x$, linearno preslikavanje. Štoviše, vrijedi:

Propozicija 1.1.2. *Za svaku Liejevu algebru $\mathfrak{g}$ preslikavanje ad je homomorfizam Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ u Liejevu algebru $Der(\mathfrak{g})$. Posebno, ad je reprezentacija Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ na vektorskom prostoru $\mathfrak{g}$.*

Dokaz: Iz Jacobijevog identiteta $(L2)$ i iz antikomutativnosti $(L1')$ imamo redom za bilo koje $x, y, z \in \mathfrak{g}$

$$(ad\, x)([y, z]) = [x, [y, z]] = -[z, [x, y]] - [y, [z, x]] = [[x, y], z] + [y, [x, z]] = [(ad\, x)(y), z] + [y, (ad\, x)(z)],$$

što pokazuje da je $ad\, x \in Der(\mathfrak{g})$. Nadalje, koristeći ista pravila izvodimo i

$$(ad\,[x, y])(z) = [[x, y], z] = -[z, [x, y]] = [x, [y, z]] + [y, [z, x]] =$$

$$= [x, [y, z]] - [y, [x, z]] = (ad\, x)((ad\, y)(z)) - (ad\, y)((ad\, x)(z)),$$

dakle,

$$ad\,[x, y] = (ad\, x)(ad\, y) - (ad\, y)(ad\, x) = [ad\, x, ad\, y],$$

što pokazuje da je $ad : \mathfrak{g} \to Der(\mathfrak{g})$ homomorfizam Liejevih algebri, i, posebno, ad je reprezentacija Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ na vektorskom prostoru $\mathfrak{g}$.

Derivacije Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ oblika $ad\, x$ za neki $x \in \mathfrak{g}$ zovu se **unutarnje derivacije** Liejeve algebre. Svi ostali elementi od $Der(\mathfrak{g})$ zovu se **vanjske derivacije** Liejeve algebre $\mathfrak{g}$.

Propozicija 1.1.3. *Skup $ad\, \mathfrak{g}$ svih unutarnjih derivacija Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ je ideal u Liejevoj algebri $Der(\mathfrak{g})$.*

Dokaz: Za $x, y \in \mathfrak{g}$ i $D \in Der(\mathfrak{g})$ imamo

$$[D, ad\, x](y) = D([x, y]) - [x, D(y)] = [D(x), y] + [x, D(y)] - [x, D(y)] = [D(x), y] = (ad\, D(x))(y).$$

Dakle, $[D, ad\, x] = ad\, D(x) \in ad\, \mathfrak{g}$.

Primijetimo da je jezgra homomorfizma $ad : \mathfrak{g} \to Der(\mathfrak{g})$, koja je naravno ideal u Liejevoj algebri $\mathfrak{g}$, jednaka

$$Z(\mathfrak{g}) = \{x \in \mathfrak{g};\ ad\, x = 0\} = \{x \in \mathfrak{g};\ [x, y] = 0\ \forall y \in \mathfrak{g}\}.$$

Taj se ideal u $\mathfrak{g}$ zove **centar** Liejeve algebre $\mathfrak{g}$. Liejeva algebra $Z(\mathfrak{g})$ ima svojstvo da je u njoj komutator trivijalan: $[x, y] = 0\ \forall x, y \in Z(\mathfrak{g})$. Općenito, za Liejevu algebru $\mathfrak{g}$ kažemo da je **komutativna** ili **Abelova** ako je $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \{0\}$, tj. $[x, y] = 0\ \forall x, y \in \mathfrak{g}$. Naravno, Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ je komutativna ako i samo ako je $Z(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}$. Ako je V bilo koji vektorski prostor, onda uz definiciju $[x, y] = 0\ \forall x, y \in V$ prostor V postaje komutativna Liejeva algebra.

Neka je $\mathfrak{g}$ konačnodimenzionalna Liejeva algebra i $\{e_1, \ldots, e_n\}$ baza vektorskog prostora $\mathfrak{g}$. Tada možemo pisati

$$[e_i, e_j] = \sum_{k=1}^{n} c_{i,j,k} e_k, \qquad c_{i,j,k} \in K, \quad 1 \leq i, j, k \leq n.$$

Skalari $c_{i,j,k}$ zovu se **strukturne konstante** Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ u odnosu na bazu $\{e_1, \ldots, e_n\}$. Iz svojstava $(L1)$ i $(L2)$ jednostavno se izvodi koji su nužni i dovoljni uvjeti da bi zadanih n^3 skalara mogli biti strukturne konstante:

Zadatak 1.1.6. *Neka je V vektorski prostor nad poljem K, $\{e_1, \ldots, e_n\}$ baza od V i $c_{i,j,k} \in K$, $i, j, k \in \{1, \ldots, n\}$. Dokažite da na V postoji struktura Liejeve algebre takva da vrijedi*

$$[e_i, e_j] = \sum_{k=1}^{n} c_{i,j,k} e_k \qquad \forall i, j \in \{1, \ldots, n\}$$

ako i samo ako skalari $c_{i,j,k}$ zadovoljavaju

$$c_{i,i,k} = 0 \qquad \forall i, k \in \{1, \ldots, n\},$$

$$c_{i,j,k} + c_{j,i,k} = 0 \qquad \forall i, j, k \in \{1, \ldots, n\},$$

$$\sum_{k=1}^{n} (c_{i,j,k} c_{k,\ell,m} + c_{j,\ell,k} c_{k,i,m} + c_{\ell,i,k} c_{k,j,m}) = 0 \qquad \forall i, j, \ell, m \in \{1, \ldots, n\}.$$

Neka je $\mathfrak{g}$ Liejeva algebra i $S \subseteq \mathfrak{g}$ bilo koji podskup. Stavljamo

$$C_{\mathfrak{g}}(S) = \{x \in \mathfrak{g};\ [x, y] = 0 \quad \forall y \in S\}.$$

Zadatak 1.1.7. *Dokažite da je $C_{\mathfrak{g}}(S)$ Liejeva podalgebra Liejeve algebre $\mathfrak{g}$.*

Uputa: Koristite Jacobijev identitet.

Liejeva algebra $C_{\mathfrak{g}}(S)$ zove se **centralizator** skupa S u Liejevoj algebri $\mathfrak{g}$. Očito vrijedi $Z(\mathfrak{g}) = C_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g})$.

Neka je sada $\mathfrak{h}$ Liejeva podalgebra od $\mathfrak{g}$. Tada definiramo

$$N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) = \{x \in \mathfrak{g};\ [x, \mathfrak{h}] \subseteq \mathfrak{h}\}.$$

Zadatak 1.1.8. (*a*) *Dokažite da je $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$ Liejeva podalgebra od $\mathfrak{g}$ koja sadrži $\mathfrak{h}$ i da je $\mathfrak{h}$ ideal u $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$.*

(*b*) *Dokažite da je $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$ je najveća Liejeva podalgebra od $\mathfrak{g}$ sa svojstvom iz (a) : ako je $\mathfrak{k}$ Liejeva podalgebra od $\mathfrak{g}$ koja sadrži $\mathfrak{h}$ i ako je $\mathfrak{h}$ ideal u $\mathfrak{k}$, onda je $\mathfrak{k} \subseteq N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$.*

Liejeva algebra $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$ zove se **normalizator** od $\mathfrak{h}$ u Liejevoj algebri $\mathfrak{g}$.

1.2 Reprezentacije i moduli

Ako je S skup, $S-$**modul nad poljem** K je vektorski prostor V nad poljem sa zadanim preslikavanjem $S \times V \to V$, $(s,v) \mapsto sv$, takvim da je $v \mapsto sv$, $v \in V$, linearan operator na prostoru V $\forall s \in S:$

$$s(\alpha v + \beta w) = \alpha sv + \beta sw, \qquad \forall \alpha, \beta \in K, \quad \forall v, w \in V, \quad \forall s \in S.$$

Reprezentacija skupa S na vektorskom prostoru V je preslikavanje $\pi : S \to L(V)$. Naravno, $S-$moduli i reprezentacije od S su u biti jedno te isto: ako je π reprezentacija od S na prostoru V onda je sa $sv = \pi(s)v$, $s \in S$, $v \in V$, zadano preslikavanje $S \times V \to V$ koje V čini $S-$modulom; s druge strane, ako je V $S-$modul, onda je sa $\pi(s)v = sv$, $s \in S$, $v \in V$, zadana reprezentacija π skupa S na prostoru V.

U daljnjem je V $S-$modul nad poljem K i π pripadna reprezentacija skupa S na prostoru V. $S-$**podmodul** od V je potprostor $W \subseteq V$ takav da je $sw \in W$ $\forall s \in S$ i $\forall w \in W$. Naravno, s restrikcijom preslikavanja $(s,v) \to sv$ sa $S \times V \to V$ na $S \times W \to W$ i sam W postaje $S-$modul. Potprostor W od V je $S-$podmodul ako i samo ako je taj potprostor invarijantan s obzirom na sve operatore $\pi(s)$, $s \in S$. Reprezentacija pridružena $S-$podmodulu W označava se π_W i zove **subreprezentacija** reprezentacije π. **Pravi** $S-$**podmodul** od V je $S-$podmodul W koji je različit od V. W je **netrivijalan** $S-$**podmodul** od V ako je $W \neq V$ i $V \neq \{0\}$. **Maksimalan** $S-$**podmodul** od V je pravi $S-$podmodul od V koji nije pravi $S-$podmodul nijednog pravog $S-$podmodula od V. Za pripadnu subreprezentaciju kažemo da je **maksimalna subreprezentacija** od π.

Presjek bilo kojeg skupa $S-$podmodula od V je očito $S-$podmodul od V. Ako je T podskup $S-$modula V, postoji najmanji $S-$podmodul od V koji sadrži skup T : to je presjek svih $S-$podmodula koji sadrže skup T. Taj se $S-$podmodul označava sa ST i za njega kažemo da je **generiran skupom** T. Očito je

$$ST = span_K(T \cup \{s_1 \cdots s_n v;\ n \in \mathbb{N},\ s_1, \ldots, s_n \in S,\ v \in T\}).$$

Ako je W $S-$podmodul $S-$modula V, kvocijentni vektorski prostor V/W možemo snabdjeti strukturom $S-$modula ovako:

$$s(v + W) = sv + W, \qquad s \in S, \quad v \in V.$$

S tom se strukturom V/W zove **kvocijentni** $S-$**modul** ($S-$modula V po $S-$podmodulu W). Pripadna reprezentacija označava se sa $\pi_{V/W}$ i zove **kvocijentna reprezentacija** reprezentacije π. Kvocijentni $S-$modul $S-$podmodula od V ili, ekvivalentno, $S-$podmodul kvocijentnog $S-$modula od V, zove se **subkvocijentni** $S-$**modul** ili kraće **subkvocijent** $S-$modula V. Dakle, subkvocijent od V je $S-$modul oblika W/U, gdje su W i U $S-$podmoduli od V i $U \subseteq W$. Pripadna reprezentacija označava se sa $\pi_{W/U}$ i zove **subkvocijentna reprezentacija** ili **subkvocijent** reprezentacije π.

Ako su V i W $S-$moduli nad poljem K, $S-$**homomorfizam** (ili homomorfizam $S-$modula) V u W je linearan operator $A : V \to W$ sa svojstvom

$$Asv = sAv \qquad \forall s \in S \quad \text{i} \quad \forall v \in V.$$

Skup svih $S-$homomorfizama V u W označavamo sa $Hom_S(V,W)$ i to je potprostor prostora $L(V,W)$ svih linearnih operatora sa V u W. Ako su π i ρ pripadne reprezentacije od S na prostorima V i W $S-$homomorfizmi se zovu i **preplitanja** reprezentacije π s reprezentacijom ρ. Surjektivni (odn., injektivni, bijektivni) $S-$homomorfizam zove se $S-$**epimorfizam** (odn., $S-$**monomorfizam**, $S-$**izomorfizam**). Kažemo da je $S-$modul V **izomorfan** $S-$modulu W ako postoji $S-$izomorfizam sa V na W, tj. ako u $Hom_S(V,W)$ postoji bijekcija. Kako je kompozicija $S-$izomorfizama $S-$izomorfizam, relacija izomorfnosti među $S-$modulima je tranzitivna. Ona je i simetrična jer invers $S-$izomorfizma je $S-$izomorfizam. Napokon, kako je identiteta I_V na V izomorfizam $S-$modula V sa samim sobom, izomorfnost $S-$modula je relacija ekvivalencije.

Vrijede sljedeća dva standardna rezultata o izomorfizmima:

Teorem 1.2.1. *Ako je $A : V \to W$ homomorfizam $S-$modula onda je* $\operatorname{Ker} A$ *$S-$podmodul od V,* $\operatorname{Im} A$ *je $S-$podmodul od W i sa*

$$v + \operatorname{Ker} A \mapsto Av, \qquad v \in V,$$

je zadan izomorfizam $S-$modula sa $V/(\operatorname{Ker} A)$ na $\operatorname{Im} A$.

Suma bilo kojeg skupa $S-$podmodula od V je $S-$podmodul od V. Posebno, ako su W i U $S-$podmoduli od V onda je i $W \dotplus U$ $S-$podmodul od V.

Teorem 1.2.2. *Ako su W i U $S-$podmoduli $S-$modula V, onda je sa*

$$w + (W \cap U) \mapsto w + U, \qquad w \in W,$$

zadan izomorfizam $S-$modula $W/(W \cap U)$ na $S-$modul $(W + U)/U$.

Kažemo da je V **prost $S-$modul** ako je $V \neq \{0\}$ i V nema netrivijalnih $S-$podmodula; tj. V i $\{0\}$ su jedini $S-$podmoduli od V. U tom se slučaju pripadna **reprezentacija** zove **ireducibilna**. Kažemo da je π **reducibilna reprezentacija** ako ona nije ireducibilna. V je **poluprost** $S-$modul, ako za svaki $S-$podmodul W od V postoji $S-$podmodul U od V takav da je $V = W \dotplus U$. Za pripadnu reprezentaciju u tom slučaju kažemo da je **potpuno reducibilna**.

Propozicija 1.2.3. *Ako je W $S-$podmodul poluprostog $S-$modula V, onda su $S-$moduli W i V/W poluprosti.*

Zadatak 1.2.1. *Dokažite propoziciju 1.2.3.*

Lema 1.2.4. *Svaki poluprost $S-$modul $V \neq \{0\}$ ima prost $S-$podmodul.*

Dokaz: Neka je $v \in V$, $v \neq 0$. Primjenom Zornove leme lako se vidi da skup $\mathcal{S}$ svih $S-$podmodula koji ne sadrže vektor v ima bar jedan maksimalni element W u odnosu na inkluziju. Kako je V poluprost, postoji $S-$podmodul U takav da je $V = W \dotplus U$. Tada je $U \neq \{0\}$, jer $v \notin W$. Pretpostavimo da je U' netrivijalan podmodul od U. Prema teoremu 1.2.1. U je poluprost pa on ima podmodul U'' takav da je $U = U' \dotplus U''$. Kako je W maksimalan podmodul sa svojstvom $v \notin W$, vrijedi $v \in W \dotplus U'$ i $v \in W \dotplus U''$. No tada slijedi da je $v \in (W \dotplus U') \cap (W \dotplus U'') = W$ suprotno svojstvu od W. Ova kontradikcija pokazuje da U nema netrivijalnih podmodula, odnosno, $S-$modul U je prost.

Teorem 1.2.5. *Sljedeća su tri svojstva $S-$modula V međusobno ekvivalentna:*

(*a*) *Modul V je poluprost.*

(*b*) *Modul V je suma svojih prostih podmodula.*

(*c*) *Modul V je direktna suma nekog skupa svojih prostih podmodula.*

Dokaz: $(a) \Rightarrow (b)$. Neka je V poluprost i neka je W suma svih njegovih prostih podmodula. Tada je $V = W \dotplus U$ za neki podmodul U. Prema lemi 1.2.4. ako je $U \neq \{0\}$ onda U sadrži neki prost podmodul Z. No po definiciji W tada je $Z \subseteq W$, a to je nemoguće. Ova kontradikcija pokazuje da je $U = \{0\}$, tj. $W = V$.

$(b) \Rightarrow (c)$. Pretpostavimo da je V suma svojih prostih podmodula. Primjenom Zornove leme nalazimo da postoji maksimalan skup $\mathcal{S}$ prostih podmodula u odnosu na svojstvo da im je suma direktna. Neka je $W = \sum \mathcal{S}$. Pretpostavimo da je $W \neq V$. Tada postoji prost podmodul U od V takav da $U \subsetneq W$. Tada je $U \cap W \neq U$, dakle, $U \cap W = \{0\}$. Odatle slijedi da je suma $\sum(\mathcal{S} \cup \{U\})$ direktna i vrijedi $\mathcal{S} \subsetneq \mathcal{S} \cup \{U\}$, a to je nemoguće zbog izbora $\mathcal{S}$. Ova kontradikcija pokazuje da je $W = V$.

$(c) \Rightarrow (a)$. Pretpostavimo da je V direktna suma skupa $\mathcal{S}$ prostih podmodula od V i neka je W podmodul od V. Primjenom Zornove leme nalazimo da u skupu svih podmodula U od V takvih da je $U \cap W = \{0\}$ postoji bar jedan maksimalan element U. Za svaki $Z \in \mathcal{S}$ tada ne može biti $Z \cap (W \dotplus U) = \{0\}$; u protivnom bi $U \dotplus Z$ bio podmodul od V sa svojstvom $(U \dotplus Z) \cap W = \{0\}$ i imali bismo da je $U \subsetneq U \dotplus Z$, a to je suprotno izboru podmodula U. Kako je Z prost i $Z \cap (W \dotplus U) \neq \{0\}$, vrijedi $Z = Z \cap (W \dotplus U)$, tj. $Z \subseteq W \dotplus U$. Kako to vrijedi za svaki $Z \in \mathcal{S}$, slijedi $V = \sum \mathcal{S} \subseteq W \dotplus U$, odnosno, $V = W \dotplus U$.

Sokl $S-$**modula** V je suma svih njegovih prostih $S-$podmodula. Očito je sokl od V najveći poluprost $S-$podmodul od V.

Za $S-$modul V pišemo $End_S(V)$ umjesto $Hom_S(V, V)$. $End_S(V)$ je unitalna podalgebra od $L(V)$.

Teorem 1.2.6. (**Schurova lema**) *Neka su V i W prosti $S-$moduli nad poljem K.*

(a) *Ako je $Hom_S(V, W) \neq \{0\}$, $S-$moduli V i W su izomorfni.*

(b) *Unitalna algebra $End_S(V)$ je tijelo, tj. svaki $A \in End_S(V) \setminus \{0\}$ je invertibilan.*

(c) (**Dixmier**) *Ako je* dim V *manja od* $Card\, K$, *posebno ako je prostor V konačnodimenzionalan, onda je $End_S(V) = \{\lambda I_V;\ \lambda \in K\}$.*

Dokaz: (a) Pretpostavimo da je $A \in Hom_S(V, W) \setminus \{0\}$. Tada je $\operatorname{Ker} A$ $S-$podmodul od V:

$$v \in \operatorname{Ker} A, \quad s \in S \qquad \Longrightarrow \qquad Asv = sAv = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad sv \in \operatorname{Ker} A.$$

Kako je $A \neq 0$, vrijedi $\operatorname{Ker} A \neq V$, a kako je V prost $S-$modul, zaključujemo da je $\operatorname{Ker} A = \{0\}$, odnosno, A je injekcija. Nadalje, $\operatorname{Im} A$ je $S-$podmodul od W:

$$s \in S, \quad w \in \operatorname{Im} A, \quad v \in V \quad \text{takav da je} \quad w = Av \qquad \Longrightarrow \qquad sw = sAv = Asv \in \operatorname{Im} A.$$

Kako je $A \neq 0$ to je $\operatorname{Im} A \neq \{0\}$. Budući da je W prost $S-$modul, slijedi $\operatorname{Im} A = W$. Dakle, A je i surjekcija, dakle, izomorfizam.

(b) Iz dokaza tvrdnje (a) vidi se da je svaki $A \in End_S(V) \setminus \{0\}$ invertibilan.

(c) Neka je $A \in L(V)$. Dokazat ćemo da je tada njegov spektar

$$Sp(A) = \{\lambda \in K;\ A - \lambda I_V \notin GL(V)\}$$

neprazan. Pretpostavimo suprotno da je operator $A - \lambda I_V$ invertibilan za svaki $\lambda \in K$. Tada je operator $P(A)$ invertibilan za svaki polinom $P \in K[T] \setminus \{0\}$. Dakle, ako je $R = P/Q$ racionalna funkcija, možemo definirati $R(A) = P(A)Q(A)^{-1}$. Tako smo došli do linearnog preslikavanja $R \mapsto$

$R(A)$ polja $K(T)$ racionalnih funkcija jedne varijable u $L(V)$. Neka je $v \in V$, $v \neq 0$. Tada je $R \mapsto R(A)v$ injektivan linearan operator sa $K(T)$ u V. No to je nemoguće jer je dimenzija prostora $K(T)$ veća ili jednaka $Card\, K$. To slijedi iz linearne nezavisnosti skupa

$$\left\{ \frac{1}{T-\lambda};\ \lambda \in K \right\}. \tag{1.1}$$

Doista, neka su $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$ međusobno različiti i pretpostavimo da su $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K \setminus \{0\}$ takvi da je

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\alpha_j}{T-\lambda_j} = 0.$$

Pomnožimo li tu jednakost s umnoškom $(T-\lambda_1)\cdots(T-\lambda_n)$, dobivamo

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j Q_j = 0, \tag{1.2}$$

gdje su $Q_j \in K[T]$ zadani sa

$$Q_j = (T-\lambda_1)\cdots(T-\lambda_{j-1})(T-\lambda_{j+1})\cdots(T-\lambda_n).$$

Budući da su $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ međusobno različiti, vrijedi $Q_k(\lambda_k) \neq 0$, a očito je $Q_k(\lambda_j) = 0$ za $j \neq k$. Evaluacija jednakosti (1.2) u točki λ_k stoga daje $\alpha_k Q_k(\lambda_k) = 0$, dakle, $\alpha_k = 0$. Kako to vrijedi za svaki $k \in \{1, \ldots, n\}$, zaključujemo da su racionalne funkcije

$$\frac{1}{T-\lambda_1}, \ldots, \frac{1}{T-\lambda_n}$$

linearno nezavisne. To pokazuje da je svaki konačan podskup skupa (1.1) linearno nezavisan, a to upravo znači da je skup (1.1) linearno nezavisan.

Tako smo došli do kontradikcije $\dim V \geq Card\, K$. Ova kontradikcija pokazuje da je $Sp(A) \neq \emptyset$ za svaki $A \in L(V)$, odnosno, za svaki $A \in L(V)$ postoji $\lambda \in K$ takav da operator $A - \lambda I_V$ nije invertibilan. Posebno, ako je $A \in End_S(V)$, onda je i $A - \lambda I_V \in End_S(V)$, pa iz neinvertibilnosti i iz tvrdnje (b) slijedi da je $A - \lambda I_V = 0$, odnosno, $A = \lambda I_V$.

Ako skup S ima strukturu unitalne ili Liejeve algebre, i s tom strukturom ga označimo sa $\mathcal{S}$, među svim $S-$modulima uočit ćemo one koji nose odgovarajuću dodatnu strukturu i takve ćemo zvati $\mathcal{S}-$modulima:

- Ako je $\mathcal{A}$ unitalna algebra nad poljem K s jedinicom e, $\mathcal{A}-$modul nad poljem K je vektorski prostor nad K koji je modul nad skupom $\mathcal{A}$ i vrijedi $(a+b)v = av + bv$, $(\lambda a)v = \lambda av$, $(ab)v = a(bv)$ i $ev = v$ $\forall a, b \in \mathcal{A}$, $\forall \lambda \in k$ i $\forall v \in V$.

- Ako je $\mathfrak{g}$ Liejeva algebra nad poljem K, $\mathfrak{g}-$modul nad poljem K je vektorski prostor V nad poljem K koji je modul nad skupom $\mathfrak{g}$ i vrijedi $(a+b)v = av + bv$, $(\lambda a)v = \lambda av$ i $[a, b]v = a(bv) - b(av)$ $\forall a, b \in \mathfrak{g}$, $\forall \lambda \in k$ i $\forall v \in V$.

Pripadne reprezentacije zovu se reprezentacije te strukture:

- **Reprezentacija unitalne algebre** $\mathcal{A}$ nad poljem K na vektorskom prostoru V nad K je homomorfizam unitalnih algebri $\pi : \mathcal{A} \to L(V)$.

- **Reprezentacija Liejeve algebre** $\mathfrak{g}$ nad poljem K na vektorskom prostoru V nad poljem K je homomorfizam Liejevih algebri $\pi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$.

1.3 Fittingova, korijenska i Jordanova dekompozicija

Neka je A linearan operator na ne nužno konačnodimenzionalnom vektorskom prostoru V nad poljem K. Promatrat ćemo sljedeće monotone (rastući i padajući) nizove potprostora od V :

$$\{0\} = \operatorname{Ker} A^0 \subseteq \operatorname{Ker} A \subseteq \operatorname{Ker} A^2 \subseteq \cdots\cdots \qquad \text{i} \qquad V = \operatorname{Im} A^0 \supseteq \operatorname{Im} A \supseteq \operatorname{Im} A^2 \supseteq \cdots\cdots$$

Lema 1.3.1. (a) *Ako je* $\operatorname{Ker} A^k = \operatorname{Ker} A^{k+1}$ *za neki* $k \in \mathbb{Z}_+$ *onda je* $\operatorname{Ker} A^k = \operatorname{Ker} A^m$ $\forall m \geq k$.

(b) *Ako je* $\operatorname{Im} A^k = \operatorname{Im} A^{k+1}$ *za neki* $k \in \mathbb{Z}_+$ *onda je* $\operatorname{Im} A^k = \operatorname{Im} A^m$ $\forall m \geq k$.

Dokaz: (a) Dovoljno je dokazati da je $\operatorname{Ker} A^{k+1} \supseteq \operatorname{Ker} A^{k+2}$. Neka je $v \in \operatorname{Ker} A^{k+2}$. Tada je $Av \in \operatorname{Ker} A^{k+1} = \operatorname{Ker} A^k$, pa slijedi $A^{k+1}v = 0$, odnosno, $v \in \operatorname{Ker} A^{k+1}$.

(b) Analogno, dovoljno je dokazati da je $\operatorname{Im} A^{k+1} \subseteq \operatorname{Im} A^{k+2}$. Neka je $v \in \operatorname{Im} A^{k+1}$ i neka je $w \in V$ takav da je $v = A^{k+1}w$. Sada je $A^k w \in \operatorname{Im} A^k = \operatorname{Im} A^{k+1}$, pa postoji $u \in V$ takav da je $A^k w = A^{k+1}u$. Slijedi $v = AA^k w = AA^{k+1}u = A^{k+2}u \in \operatorname{Im} A^{k+2}$.

Prema lemi 1.3.1. niz $(\operatorname{Ker} A^k)_{k\in\mathbb{Z}_+}$ je striktno rastući dok se na nekom mjestu ne stabilizira. Ako se to dogodi, najmanji $k \in \mathbb{Z}_+$ takav da je $\operatorname{Ker} A^k = \operatorname{Ker} A^{k+1}$ označavmo sa $asc(A)$. Ako takav $k \in \mathbb{Z}_+$ ne postoji, pišemo $asc(A) = +\infty$. Isto tako, niz $(\operatorname{Im} A^k)_{k\in\mathbb{Z}_+}$ je striktno padajući dok se na nekom mjestu ne stabilizira. Ako se to dogodi, najmanji $k \in \mathbb{Z}_+$ takav da je $\operatorname{Im} A^k = \operatorname{Im} A^{k+1}$ označavamo sa $desc(A)$. Ako takav $k \in \mathbb{Z}_+$ ne postoji, pišemo $desc(A) = +\infty$.

Teorem 1.3.2. *Pretpostavimo da za linearan operator* $A : V \to V$ *vrijedi* $p = asc(A) < +\infty$ *i* $q = desc(A) < +\infty$. *Tada je:*

(a) $p = q$.

(b) $V = \operatorname{Ker} A^p \dotplus \operatorname{Im} A^p$.

(c) *Operator* $A|\operatorname{Ker} A^p$ *je nilpotentan indeksa* p.

(d) *Ako je* W *potprostor od* V *koji je* $A-$*invarijantan i ako je operator* $A|W$ *nilpotentan, onda je* $W \subseteq \operatorname{Ker} A^p$.

(e) *Operator* $A|\operatorname{Im} A^p$ *je invertibilan, tj. element grupe* $GL(\operatorname{Im} A^p)$.

(f) *Ako je* W *potprostor od* V *sa svojstvom* $AW = W$, *onda je* $W \subseteq \operatorname{Im} A^p$.

Dokaz: (a) Pretpostavimo da je $p > q \geq 0$ i neka je $v \in \operatorname{Ker} A^p \setminus \operatorname{Ker} A^{p-1}$. Dakle, $A^p v = 0$ i $A^{p-1}v \neq 0$. Po pretpostavci je $q \leq p-1$, dakle, vrijedi $\operatorname{Im} A^{p-1} = \operatorname{Im} A^p$. Stoga postoji $w \in V$ takav da je $A^{p-1}v = A^p w$. Tada je $A^{p+1}w = A^p v = 0$, dakle, $w \in \operatorname{Ker} A^{p+1} = \operatorname{Ker} A^p$. Slijedi $0 = A^p w = A^{p-1}v$ suprotno izboru vektora v. Ova kontradikcija pokazuje da je pretpostavka $p > q$ nemoguća, odnosno, dokazano je da je $p \leq q$.

Pretpostavimo sada da je $q > p \geq 0$ i neka je $v \in (\operatorname{Im} A^{q-1}) \setminus (\operatorname{Im} A^q)$. Neka je $w \in V$ takav da je $A^{q-1}w = v$. Stavimo $u = Av$. Tada je $u = A^q w \in \operatorname{Im} A^q = \operatorname{Im} A^{q+1}$, pa postoji $x \in V$ takav da je $u = A^{q+1}x$. Stavimo $y = Ax - w$. Tada je $A^q y = A^{q+1}x - A^q w = u - u = 0$. Dakle, $y \in \operatorname{Ker} A^q$. Po pretpostavci je $q - 1 \geq p$, dakle, $\operatorname{Ker} A^{q-1} = \operatorname{Ker} A^q$, pa slijedi $y \in \operatorname{Ker} A^{q-1}$. To znači da je $0 = A^{q-1}y = A^q x - A^{q-1}w = A^q x - v$. No to je nemoguće, jer po pretpostavci $v \notin \operatorname{Im} A^q$. Ova kontradikcija pokazuje da je pretpostavka $q > p$ nemoguća, odnosno, dokazana je i obrnuta nejednakost $p \geq q$.

(b) Neka je $v \in (\operatorname{Ker} A^p) \cap (\operatorname{Im} A^p)$ i neka je $u \in V$ takav da je $v = A^p u$. Tada je $0 = A^p v = A^{2p}u$, dakle, $u \in \operatorname{Ker} A^{2p} = \operatorname{Im} A^p$, a odatle slijedi da je $v = A^p u = 0$. Time je dokazano da je

$(\operatorname{Ker} A^p) \cap (\operatorname{Im} A^p) = \{0\}$, odnosno, suma potprostora $\operatorname{Ker} A^p$ i $\operatorname{Im} A^p$ je direktna. Neka je sada $v \in V$ proizvoljan. Tada je $A^p v \in \operatorname{Im} A^p = \operatorname{Im} A^{2p}$, pa postoji $u \in V$ takav da je $A^p v = A^{2p} u$. Stavimo sada $w = v - A^p u$. Tada je $v = w + A^p u$, gdje je $A^p u \in \operatorname{Im} A^p$ i $A^p w = A^p v - A^{2p} u = 0$, dakle, $w \in \operatorname{Ker} A^p$. Time je dokazano da je direktna suma $\operatorname{Ker} A^p \dotplus \operatorname{Im} A^p$ jednaka čitavom prostoru V.

Tvrdnja (c) je očita.

(d) Ako je $AW \subseteq W$ i $(A|W)^k = 0$, onda je $W \subseteq \operatorname{Ker} A^k \subseteq \operatorname{Ker} A^p$.

(e) Stavimo $W = \operatorname{Im} A^p$. Tada je $AW = \operatorname{Im} A^{p+1} = \operatorname{Im} A^p = W$, dakle, $A|W$ je surjekcija W na W. Nadalje, $\operatorname{Ker} A|W = (\operatorname{Ker} A) \cap W \subseteq (\operatorname{Ker} A^p) \cap W = \{0\}$. Dakle, $A|W$ je i injekcija.

(f) Iz $AW = W$ slijedi da je $W = A^p W \subseteq \operatorname{Im} A^p$.

Uz pretpostavke teorema 1.3.2. broj $p = q$ zove se **nil$-$indeks operatora** A, a rastav

$$V = \operatorname{Ker} A^p \dotplus \operatorname{Im} A^p$$

zove se **Fittingova dekompozicija** prostora V u odnosu na operator A. Pisat ćemo

$$V_{(0)}(A) = \operatorname{Ker} A^p \qquad \text{i} \qquad V_*(A) = \operatorname{Im} A^p.$$

Potprostor $V_{(0)}(A)$ zove se **Fittingova** $0-$**komponenta**, a potprostor $V_*(A)$ **Fittingova** $*-$**komponenta prostora** V u odnosu na operator A. Restrikcija $A|V_{(0)}(A)$ zove se **Fittingova** $0-$**komponenta operatora** A i označava sa $A_{(0)}$, a restrikcija $A|V_*(A)$ zove se **Fittingova** $*-$**komponenta operatora** A i označava sa A_*.

Sve ovo ima smisla samo ako je $asc(A) < +\infty$ i $desc(A) < +\infty$. To je sigurno ispunjeno ako je prostor V konačnodimenzionalan.

Zadatak 1.3.1. *Neka je A linearan operator na konačnodimenzionalnom prostoru V. Dokažite jednakost $asc(A) = desc(A)$ pomoću teorema o rangu i defektu.*

Neka je sada A linearan operator na konačnodimenzionalnom prostoru V nad poljem K i $\mu_A \in K[T]$ njegov minimalan polinom. Rastav polinoma μ_A na relativno proste faktore tada vodi na rastav prostora V na $A-$invarijantne potprostore:

Teorem 1.3.3. *Neka je A linearan operator na konačnodimenzionalnom prostoru V nad poljem K i $\mu_A \in K[T]$ njegov minimalan polinom. Pretpostavimo da su $\mu_1, \ldots, \mu_s$ normirani polinomi takvi da su μ_i i μ_j relativno prosti ako je $i \neq j$ i da je $\mu_A = \mu_1 \cdots \mu_s$. Stavimo $V_j = \operatorname{Ker} \mu_j(A)$, $j = 1, \ldots, s$. Tada vrijedi:*

(a) *Vrijedi $V = V_1 \dotplus \cdots \dotplus V_s$.*

(b) *Za svaki $j \in \{1, \ldots, s\}$ potprostor V_j je $A-$invarijantan i μ_j je minimalni operator restrikcije $A_j = A|V_j$.*

(c) *Za $j \in \{1, \ldots, s\}$ stavimo $\nu_j = \mu_1 \cdots \mu_{j-1}\mu_{j+1} \cdots \mu_s$, tj. $\mu_A = \mu_j \nu_j$. Tada je $V_j = \operatorname{Im} \nu_j(A)$.*

(d) *Ako je W $A-$invarijantan potprostor od V onda je*

$$W = \sum_{j=1}^{s} \dotplus W \cap V_j.$$

Dokaz: Ako je polinom P relativno prost sa svakim od polinoma $P_1, \ldots, P_k$ onda je P relativno prost s njihovim produktom $P_1 \cdots P_k$. Odatle vidimo da je dokaz teorema dovoljno provesti u slučaju $s = 2$.

Dakle, pretpostavljamo da je $\mu_A = \mu_1\mu_2$, gdje su μ_1 i μ_2 relativno prosti normirani polinomi, i stavljamo $V_1 = \operatorname{Ker} \mu_1(A)$ i $V_2 = \operatorname{Ker} \mu_2(A)$. Budući da operatori $\mu_1(A)$ i $\mu_2(A)$ komutiraju s operatorom A, potprostori V_1 i V_2 su $A-$invarijantni. Kako su μ_1 i μ_2 relativno prosti, postoje polinomi $P, Q \in K[T]$ takvi da je $\mu_1 P + \mu_2 Q = 1$. Tada vrijedi

$$v = \mu_1(A)P(A)v + \mu_2(A)Q(A)v \qquad \forall v \in V. \tag{1.3}$$

Za $v \in V$ stavimo $v_1 = \mu_2(A)Q(A)v$ i $v_2 = \mu_1(A)P(A)v$. Tada je $\mu_1(A)v_1 = \mu_A(A)Q(A)v = 0$, pa je $v_1 \in V_1$. Analogno je $v_2 \in V_2$. Iz (1.3) slijedi da je $v = v_1 + v_2$. Time je dokazano da je $V = V_1 + V_2$. Ako je $v \in V_1 \cap V_2$, onda je $\mu_1(A)v = \mu_2(A)v = 0$, pa iz (1.3) slijedi da je $v = 0$. Dakle, suma je direktna: $V = V_1 \dot{+} V_2$. Time je dokazana tvrdnja (a).

Već smo spomenuli da su potprostori V_1 i V_2 $A-$invarijatni. Stavimo $A_1 = A|V_1$ i $A_2 = A|V_2$. Za svaki $v \in V_1$ je $\mu_1(A_1)v = \mu_1(A)v = 0$. To pokazuje da je $\mu_1(A_1) = 0$, pa slijedi da je polinom μ_1 djeljiv s minimalnim polinomom μ_{A_1} operatora A_1. Stavimo sada $S = \mu_{A_1}\mu_2$. Za $v \in V_1$ tada je $S(A)v = S(A_1)v = \mu_{A_1}(A_1)\mu_2(A_1)v = 0$, a za $v \in V_2$ je $\mu_2(A)v = 0$, pa je također $S(A)v = 0$. Kako je prostor V suma potprostora V_1 i V_2, zaključujemo da je $S(A) = 0$. Tada je polinom S djeljiv s minimalnim polinomom μ_A, dakle, $\mu_{A_1}\mu_2 = S = \mu_A R = \mu_1\mu_2 R$ za neki polinom R. Slijedi $\mu_{A_1} = \mu_1 R$, odnosno, polinom μ_{A_1} djeljiv je s polinomom μ_1. Kako su polinomi μ_{A_1} i μ_1 normirani, slijedi $\mu_{A_1} = \mu_1$. Analogno se dokazuje da je $\mu_{A_2} = \mu_2$. Time je dokazana tvrdnja (b).

Napokon, za $v \in V_1$ iz (1.3) slijedi da je $v = \mu_2(A)Q(A)v \in \operatorname{Im} \mu_2(A)$. Dakle, $V_1 \subseteq \operatorname{Im} \mu_2(A)$. S druge strane, neka je $v \in \operatorname{Im} \mu_2(A)$ i neka je $w \in V$ takav da je $v = \mu_2(A)w$. Tada je $\mu_1(A)v = \mu_A(A)w = 0$, odnosno, $v \in V_1$. Time je dokazana i obrnuta inkluzija $\operatorname{Im} \mu_2(A) \subseteq V_1$. Dakle, $V_1 = \operatorname{Im} \mu_2(A)$. Analogno je $V_2 = \operatorname{Im} \mu_1(A)$. Time je dokazana tvrdnja (c).

Neka je sada W $A-$invarijantan potprostor prostora V. Za $v \in W$ prema (1.3) je $v = v_1 + v_2$, gdje su $v_1 = \mu_2(A)Q(A)v$ i $v_2 = \mu_1(A)P(A)v$. No tada je $v_1 \in W \cap V_1$ i $v_2 \in W \cap V_2$. Time smo dokazali da je $W \subseteq W \cap V_1 \dot{+} W \cap V_2$. Kako je obrnuta inkluzija očigledna, vrijedi jednakost $W = W \cap V_1 \dot{+} W \cap V_2$. Time je i tvrdnja (d) dokazana.

Korolar 1.3.4. *Neka je A linearan operator na konačnodimenzionalnom prostoru V i μ_A njegov minimalan polinom. Pretpostavimo da je 0 nultočka polinoma μ_A kratnosti $k \in \mathbb{Z}_+$, tj. $\mu_A(T) = T^k\nu(T)$ za neki polinom ν takav da je $\nu(0) \neq 0$ (uključen je i slučaj kad 0 nije nultočka od μ_A : tada je $k = 0$ i $\nu = \mu_A$). Tada je*

$$V_{(0)}(A) = \operatorname{Ker} A^k \qquad i \qquad V_*(A) = \operatorname{Ker} \nu(A).$$

Dokaz: Tada su polinomi T^k i ν relativno prosti, pa prema tvrdnji (a) teorema 1.3.3. vrijedi $V = V_1 \dot{+} V_2$, gdje su $V_1 = \operatorname{Ker} A^k$ i $V_2 = \operatorname{Ker} \nu(A)$. Očito je operator $A|V_1$ nilpotentan, pa prema tvrdnji (d) teorema 1.3.2. vrijedi $V_1 \subseteq V_{(0)}(A)$. Nadalje, prema tvrdnji (b) teorema 1.3.3. je ν minimalni polinom restrikcije $A|V_2$. Kako je 0 nije nultočka od ν, zaključujemo da je operator $A|V_2$ invertibilan. Sada iz tvrdnje (f) teorema 1.3.2. zaključujemo da je $V_2 \subseteq V_*(A)$. Dakle, imamo

$$V = V_1 \dot{+} V_2, \qquad V_1 \subseteq V_{(0)}(A), \qquad V_2 \subseteq V_*(A) \qquad \text{i} \qquad V = V_{(0)}(A) \dot{+} V_*(A).$$

Odatle slijedi $V_1 = V_{(0)}(A)$ i $V_2 = V_*(A)$, a to je upravo tvrdnja korolara.

Neka je A linearan operator na vektorskom prostoru V. Kažemo da je A **poluprost operator** ako je $\{A\}-$modul V poluprost, odnosno, ako za svaki $A-$invarijantan potprostor W postoji $A-$invarijantan potprostor U takav da je $V = W \dot{+} U$. Prema teoremu 1.2.5. to je ispunjeno ako i samo ako je V suma svojih prostih $\{A\}-$podmodula, odnosno, direktna suma nekih svojih prostih $\{A\}-$podmodula.

Propozicija 1.3.5. *Linearan operator A na konačnodimenzionalnom vektorskom prostoru V poluprost je ako i samo ako je dijagonalizabilan, tj. ako i samo ako postoji baza prostora V u odnosu na koju operator A ima dijagonalnu matricu.*

Dokaz: Prema tvrdnji (c) Schurove leme (teorem 1.2.6.) prost $\{A\}-$podmodul je nužno jednodimenzionalan, dakle, razapet svojstvenim vektorom operatora A. Odatle slijedi propozicija.

Prema tome, za poluprost operator A na konačnodimenzionalnom prostoru V vrijedi

$$V = \sum_{\lambda \in Sp(A)} \dot{+} V_\lambda(A).$$

Pri tome smo sa $V_\lambda(A)$ označili svojstveni potprostor operatora A za svojstvenu vrijednost λ :

$$V_\lambda(A) = \{v \in V;\ Av = \lambda v\} = \mathrm{Ker}\,(\lambda I - A).$$

Definiramo sada **korijenski potprostor** $V_{(\lambda)}(A)$ kao Fittingovu $0-$komponentu prostora V u odnosu na operator $\lambda I - A$:

$$V_{(\lambda)}(A) = V_{(0)}(A - \lambda I) = \bigcup_{k \geq 0} \mathrm{Ker}\,(A - \lambda I)^k = \{v \in V;\ \exists k \in \mathbb{Z}_+ \text{ takav da je } (A - \lambda I)^k v = 0\}.$$

Teorem 1.3.6. *Neka je A linearan operator na konačnodimenzionalnom prostoru V.*

(a) *Vrijedi*

$$V = \sum_{\lambda \in Sp(A)} \dot{+} V_{(\lambda)}(A). \tag{1.4}$$

(b) *Ako je W $A-$invarijantan potprostor od V onda je*

$$W = \sum_{\lambda \in Sp(A)} \dot{+} W \cap V_{(\lambda)}(A).$$

(c) *Za $\lambda \in Sp(A)$ je*

$$V_*(A - \lambda I) = \sum_{\mu \in Sp(A) \setminus \{\lambda\}} \dot{+} V_{(\mu)}(A). \tag{1.5}$$

Dokaz: (a) Neka je μ_A minimalni polinom operatora A i $Sp(A) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_s\}$ njegov spektar, pri čemu je $\lambda_i \neq \lambda_j$ za $i \neq j$. Tada vrijedi

$$\mu_A(T) = (T - \lambda_1)^{p_1} \cdots (T - \lambda_s)^{p_s}$$

za neke prirodne brojeve $p_1, \ldots, p_s$. Polinomi $(T - \lambda_i)^{p_i}$ i $(T - \lambda_j)^{p_j}$ su normirani i relativno prosti za $i \neq j$. Prema tvrdnji (a) i teorema 1.3.3. tada je

$$V = \sum_{j=1}^{s} \dot{+} \mathrm{Ker}\,(A - \lambda_j I)^{p_j}, \tag{1.6}$$

a prema tvrdnji $b)$ istog teorema svaki potprostor $\mathrm{Ker}\,(A - \lambda_j I)^{p_j}$ je $A-$invarijantan i minimalni polinom pripadne restrikcije operatora A je $(T - \lambda_j)^{p_j}$.

Za $i \in \{1, \ldots, s\}$ očito je $\mathrm{Ker}\,(A - \lambda_i)^{p_i} \subseteq V_{(\lambda_i)}(A)$. S druge strane, $V_{(\lambda_i)}(A)$ je $A-$invarijantan potprostor od V pa je po tvrdnji (d) teorema 1.3.3. potprostor $V_{(\lambda_i)}$ direktna suma presjeka $V_{(\lambda_i)} \cap (\text{Ker}\,(A-\lambda_j I)^{p_j})$ za $j = 1, \ldots, s$. Neka je $j \neq i$ i neka je $v \in V_{(\lambda_i)}(A) \cap (\text{Ker}\,(A-\lambda_j I)^{p_j})$. Tada vrijedi $(A-\lambda_j I)^{p_j} v = 0$ i za neki $k \in \mathbb{N}$ je $(A-\lambda_i I)^k v = 0$. Polinomi $(T-\lambda_j)^{p_j}$ i $(T-\lambda_i I)^k$ su relativno prosti, pa postoje polinomi $R, S \in K[T]$ takvi da je $R(T)(T-\lambda_j)^{p_j} + S(T)(T-\lambda_i I)^k = 1$. Tada je

$$v = R(A)(A-\lambda_j I)^{p_j} v + S(A)(A-\lambda_i I)^k v = 0.$$

Time je dokazano da je $V_{(\lambda_i)}(A) \cap (\text{Ker}\,(A-\lambda_j I)^{p_j}) = \{0\}$ za $j \neq i$. Zaključujemo da je $V_{(\lambda_i)}(A) = V_{(\lambda_i)}(A) \cap (\text{Ker}\,(A-\lambda_i I)^{p_i})$, a to zajedno s inkluzijom $\text{Ker}\,(A-\lambda_i I)^{p_i} \subseteq V_{(\lambda_i)}(A)$ daje jednakost $V_{(\lambda_i)}(A) = \text{Ker}\,(A-\lambda_i I)^{p_i}$. Prema tome, (1.6) je upravo jednakost (1.4).

Tvrdnja (b) slijedi neposredno iz tvrdnje (d) teorema 1.3.3.

(c) Za bilo koji $i \in \{1, \ldots, s\}$ minimalni polinom operatora $B = A - \lambda_i I$ jednak je $\mu_A(T+\lambda_i)$. Imamo

$$\mu_B(T) = \mu_A(T+\lambda_i) = T^{p_i}\nu(T), \quad \text{gdje je} \quad \nu(T) = \prod_{j\neq i}(T+\lambda_i-\lambda_j)^{p_j}.$$

Vrijedi

$$\nu(0) = \prod_{j\neq i}(\lambda_i-\lambda_j)^{p_j} \neq 0.$$

Prema korolaru 1.3.4 . slijedi

$$V_*(A-\lambda_i I) = V_*(B) = \text{Ker}\,\nu(B).$$

Ali prema tvrdnji (b) teorema 1.3.3. ν je minimalni polinom restrikcije $C = B|(\text{Ker}\,\nu(B))$, pa po tvrdnji (a) teorema 1.3.3. primijenjenog na operator C i na rastav njegovog minimalnog polinoma

$$\nu(T) = \prod_{j\neq i}(T+\lambda_i-\lambda_j)^{p_j}$$

u relativno proste normirane faktore zaključujemo da je

$$V_*(A-\lambda_i I) = \sum_{j\neq i} \dot{+}\, \text{Ker}\,(B+\lambda_i I-\lambda_j I)^{p_j} = \sum_{j\neq i} \dot{+}\, \text{Ker}\,(A-\lambda_j I)^{p_j} = \sum_{j\neq i} \dot{+}\, V_{(\lambda_j)}(A).$$

No to je upravo jednakost (1.5) za $\lambda = \lambda_i$.

Rastav (1.4) zove se **korijenska dekompozicija** ili **korijenski rastav** prostora V u odnosu na operator A.

Korolar 1.3.7. *Operator A na konačnodimenzionalnom vektorskom prostoru V poluprost je ako i samo ako su sve nultočke njegovog minimalnog polinoma μ_A jednostruke.*

Dokaz: Ako polinom μ_A ima sve nultočke jednostruke, onda iz teorema 1.3.3. i teorema 1.3.6. slijedi da je

$$V = \sum_{\lambda\in Sp(A)} \dot{+}\, V_\lambda(A),$$

a to znači da je operator A dijagonalizabilan, odnosno, poluprost. Obratno, ako je A poluprost, odnosno, dijagonalizabilan, onda vrijedi gornji rastav. Tada za polinom P definiran sa

$$P(T) = \prod_{\lambda\in Sp(A)}(T-\lambda)$$

vrijedi $P(A) = 0$. Tada je očito $P = \mu_A$, dakle, minimalni polinom μ_A ima sve nultočke jednostruke.

Teorem 1.3.8. *Neka je A linearan operator na konačnodimenzionalnom vektorskom prostoru V.*

(a) *Postoje jedinstven poluprost operator A_s i jedinstven nilpotentan operator A_n na prostoru V takvi da je $A = A_s + A_n$ i $A_s A_n = A_n A_s$.*

(b) *Ako je B linearan operator na prostoru V koji komutira s operatorom A onda B komutira i s operatorima A_s i A_n.*

(c) *Ako je W $A-$invarijantan potprostor od V onda je W A_s-invarijantan i A_n-invarijantan. Nadalje, tada je $(A|W)_s = A_s|W$ i $(A|W)_n = A_n|W$.*

Dokaz: Imamo korijenski rastav (1.4) prostora V u odnosu na operator A. Definiramo operatore A_s i A_n na prostoru V ovako:

$$A_s|V_{(\lambda)}(A) = \lambda I_{V_{(\lambda)}}, \quad \lambda \in Sp(A), \qquad A_n = A - A_s.$$

Očito je tada $Sp(A_s) = Sp(A)$ i $V_\lambda(A_s) = V_{(\lambda)}(A)$ za svaki $\lambda \in Sp(A)$. Prema tome, operator A_s je poluprost. Nadalje, operator A_s komutira s operatorom A, dakle, i operator A_n komutira s operatorom A. Za $\lambda \in Sp(A)$ vrijedi $(A - \lambda I)^p|V_{(\lambda)}(A) = 0$, gdje je p kratnost nultočke λ u minimalnom polinomu μ_A operatora A. Po definiciji operatora A_s i A_n imamo

$$(A - \lambda I)|V_{(\lambda)}(A) = (A - A_s)|V_{(\lambda)}(A) = A_n|V_{(\lambda)}(A).$$

To pokazuje da je $(A_n)^p|V_{(\lambda)}(A) = 0$. Dakle, ako je k maksimum kratnosti nultočaka minimalnog polinoma μ_A, onda je $(A_n)^k|V_{(\lambda)}(A) = 0 \; \forall \lambda \in Sp(A)$, pa slijedi $(A_n)^k = 0$. Dakle, operator A_n je nilpotentan. Napokon, kako A_s komutira sa A, A_s komutira i sa $A_n = A - A_s$. Time je dokazana egzistencija u tvrdnji (a).

Dokazat ćemo sada da za definirane operatore A_s i A_n vrijedi tvrdnja (b). Doista, neka je B linearan operator na prostoru V koji komutira s operatorom A. Neka je $v \in V_{(\lambda)}(A)$ za neki $\lambda \in Sp(A)$. Tada je $(A - \lambda I)^k v = 0$ za neki $k \in \mathbb{N}$. No tada je $(A - \lambda I)^k Bv = B(A - \lambda I)^k v = 0$, dakle, $Bv \in V_{(\lambda)}(A)$. Slijedi $A_s Bv = \lambda Bv = B\lambda v = BA_s v$. Prema tome, vrijedi

$$A_s B|V_{(\lambda)}(A) = BA_s|V_{(\lambda)}(A) \qquad \forall \lambda \in Sp(A).$$

Kako je V suma potprostora $V_{(\lambda)}(A)$, $\lambda \in Sp(A)$, zaključujemo da vrijedi $A_s B = BA_s$. No tada B komutira i sa $A_n = A - A_s$.

Dokažimo sada jedinstvenost u tvrdnji (a). Neka su S poluprost i N nilpotentan operator na prostoru V takvi da je $A = S + N$ i $SN = NS$. Tada operatori S i N komutiraju s operatorom A, pa prema tvrdnji (b) oni komutiraju s operatorima A_s i A_n. Sada iz $A = A_s + A_n = S + N$ slijedi $A_s - S = N - A_n$. Označimo taj operator sa C. Budući da su operatori A_s i S poluprosti oni su dijagonalizabilni, a kako komutiraju i njihova razlika C je dijagonalizabilan operator. S druge strane, operator C je razlika nilpotentnih operatora koji komutiraju pa i sam nilpotentan. Stoga je $Sp(C) = \{0\}$, a kako je C dijagonalizabilan, slijedi $C = 0$. Dakle, $S = A_s$ i $N = A_n$, odnosno, dokazana je i jedinstvenost u tvrdnji (a).

(c) Neka je W $A-$invarijantan potprostor od V. Prema tvrdnji (b) teorema 1.3.6 . tada je

$$W = \sum_{\lambda \in Sp(A)} \dot{+}\, W \cap V_{(\lambda)}(A).$$

Međutim, svaki $V_{(\lambda)}(A)$ je svojstven potprostor operatora A_s, pa je svaki njegov potprostor, posebno, presjek $W \cap V_{(\lambda)}(A)$, A_s-invarijantan. Stoga je i suma W tih presjeka A_s-invarijantan potprostor od V. Kako je $A_n = A - A_s$, potprostor W je i A_n-invarijantan.

Napokon, operator $A_s|W$ je poluprost, operator $A_n|W$ je nilpotentan, oni komutiraju i vrijedi $A|W = A_s|W + A_n|W$. Stoga iz jedinstvenosti u tvrdnji (a), primijenjenoj na operator $A|W$, slijedi $(A|W)_s = A_s|W$ i $(A|W)_n = A_n|W$.

Operator A_s iz teorema 1.3.8. zove se **poluprosti dio** operatora A, a operator A_n zove se **nilpotentni dio** operatora A. Rastav $A = A_s + A_n$ zove se **Jordanov rastav** ili **Jordanova dekompozicija** operatora A.

Treba nam sada jedan opći rezultat iz teorije komutativnih prstenova:

Teorem 1.3.9. (**Kineski teorem o ostacima**) *Neka je R unitalan komutativni prsten i $I_1, \ldots, I_n$ ideali u R takvi da je $I_i + I_j = R$ za $i \neq j$. Za proizvoljne $x_1, \ldots, x_n \in R$ postoji $x \in R$ takav da je $x - x_j \in I_j$ za $j = 1, \ldots, n$.*

Dokaz provodimo indukcijom po $n \geq 2$.

Pretpostavimo najprije da je $n = 2$. Dakle, neka su I_1, I_2 su ideali u R takvi da je $R = I_1 + I_2$ i neka su $x_1, x_2 \in R$. Tada postoje $a_1 \in I_1$ i $a_2 \in I_2$ takvi da je $a_1 + a_2 = 1$. Stavimo $x = x_1 a_2 + x_2 a_1$. Tada je

$$x - x_1 = x - x_1 a_2 + x_1 a_2 - x_1 = x_2 a_1 + x_1(a_2 - 1) = x_2 a_1 - x_1 a_1 = (x_2 - x_1) a_1 \in I_1$$

i, analogno, $x - x_2 \in I_2$. Time je teorem dokazan za $n = 2$.

Neka je sada $n \geq 3$ proizvoljan, $I_1, \ldots, I_n$ ideali u R i $x_1, \ldots, x_n \in R$. Fiksirajmo sada $i \in \{1, \ldots, n\}$. Tada je $I_i + I_j = R$ za $j \neq i$, pa postoje $a_j \in I_i$ i $b_j \in I_j$ takvi da je $a_j + b_j = 1$. Tada je

$$1 = (a_1 + b_1) \cdots (a_{i-1} + b_{i-1})(a_{i+1} + b_{i+1}) \cdots (a_n + b_n).$$

Riješimo li se s desne strane te jednakosti zagrada, dobivamo da je

$$1 = c + d \qquad \text{gdje je} \quad c = b_1 \cdots b_{i-1} b_{i+1} \cdots b_n \in \bigcup_{j \neq i} I_j \quad \text{i} \quad d = 1 - c \in I_i.$$

Odatle slijedi da je

$$I_i + \bigcap_{j \neq i} I_j = R$$

pa prema dokazanoj tvrdnji teorema za $n = 2$ slijedi da postoji $y_i \in R$ takav da je

$$y_i - 1 \in I_i \qquad \text{i} \qquad y_i = y_i - 0 \in \bigcap_{j \neq i} I_j.$$

Stavimo sada $x = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$. Za bilo koji $i \in \{1, \ldots, n\}$ tada je $y_j \in I_i$ za svaki $j \neq i$, dakle,

$$x - x_i y_i = x_1 + \cdots + x_{i-1} y_{i-1} + x_{i+1} y_{i+1} + \cdots + x_n y_n \in I_i. \tag{1.7}$$

Nadalje,

$$x_i y_i - x_i = x_i (y_i - 1) \in I_i. \tag{1.8}$$

Iz (1.7) i (1.8) slijedi $x - x_i = (x - x_i y_i) + (x_i y_i - x_i) \in I_i$.

Teorem 1.3.10. *Neka je A linearan operator na konačnodimenzionalnom vektorskom V. Tada postoje polinomi $P, Q \in K[T]$ takvi da je $P(0) = Q(0) = 0$, $P(A) = A_s$ i $Q(A) = A_n$.*

Dokaz: Neka je $Sp(A) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_s\}$, pri čemu je $\lambda_i \neq \lambda_j$ za $i \neq j$. Tada imamo rastav minimalnog polinoma μ_A operatora A,

$$\mu_A(T) = (T - \lambda_1)^{p_1} \cdots (T - \lambda_s)^{p_s}$$

za neke prirodne brojeve $p_1, \ldots, p_s$. Neka je I_j ideal u prstenu $K[T]$ generiran polinomom $(T-\lambda_j)^{p_j}$. Za $i \neq j$ polinomi $(T-\lambda_i)^{p_i}$ i $(T-\lambda_j)^{p_j}$ relativno prosti, pa postoje polinomi $R, S \in K[T]$ takvi da je $R(T)(T-\lambda_i)^{p_i} + S(T)(T-\lambda_j)^{p_j} = 1$. Odatle slijedi da je $I_i + I_j = K[T]$. Nadalje, ako $0 \notin Sp(A)$ neka je $I_0 = TK[T]$ ideal u $R[T]$ generiran polinomom T. Tada su polinomi T i $(T-\lambda_i)^{p_i}$ relativno prosti pa vrijedi i $I_0 + I_i = K[T]$ za svaki $i \in \{1, \ldots, s\}$. Prema tome, zadovoljene su pretpostavke Kineskog teorema o ostacima, pa postoji polinom $P \in K[T]$ takav da je

$$P - \lambda_j \in I_j \quad \text{za} \quad j = 1, \ldots, s \quad \text{i} \quad P = P - 0 \in I_0.$$

Stavimo $Q = T - P$. Tada su $P, Q \in I_0$, pa vrijedi $P(0) = Q(0) = 0$. Nadalje, stavimo $S = P(A)$ i $N = Q(A)$. Tada operatori S i N komutiraju i vrijedi $A = S + N$. Dakle, svaki od potprostora $V_{(\lambda_j)}(A)$ je $S-$invarijantan. Kako je $P - \lambda_j \in I_j$ postoji polinom $R_j \in K[T]$ takav da je

$$P(T) - \lambda_j = R_j(T)(T - \lambda_j)^{p_j}, \qquad \text{dakle} \qquad S - \lambda_j I = R_j(A)(A - \lambda_j I)^{p_j}.$$

Prema dokazu teorema 1.3.6. vrijedi $V_{(\lambda_j)}(A) = \operatorname{Ker}(A - \lambda_j I)^{p_j}$. Zaključujemo da je

$$(S - \lambda_j I)|V_{(\lambda_j)}(A) = 0, \quad \text{tj.} \quad S|V_{(\lambda_j)}(A) = \lambda_j I_{V_{(\lambda_j)}(A)} = A_s|V_{(\lambda_j)}(A).$$

Kako to vrijedi za svaki j, slijedi da je $S = A_s$. Tada je i $A_n = I - A_s = I - S = N = Q(A)$.

Propozicija 1.3.11. *Za linearan operator A na konačnodimenzionalnom vektorskom prostoru V definiramo linearan operator $ad\,A$ na prostoru $\mathfrak{gl}(V) = L(V)$ sa $(ad\,A)B = AB - BA$, $B \in \mathfrak{gl}(V)$.*

(*a*) *Ako je linearan operator A poluprost, onda je i operator $ad\,A$ poluprost.*

(*b*) *Ako je linearan operator A nilpotentan, onda je i operator $ad\,A$ nilpotentan.*

(*c*) *Za linearan operator A na prostoru V vrijedi $(ad\,A)_s = ad\,A_s$ i $(ad\,A)_n = ad\,A_n$.*

Dokaz: (*a*) Neka je $\{e_1, \ldots, e_n\}$ baza prostora V sastavljena od svojstvenih vektora operatora A,

$$Ae_j = \lambda_j e_j, \qquad j = 1, \ldots, n$$

Neka je $\{E_{ij};\ i, j = 1, \ldots, n\}$ pripadna baza od $\mathfrak{gl}(V)$; tj. E_{ij} su linearni operatori na V zadani sa

$$E_{ij} e_k = \delta_{jk} e_i, \qquad i, j, k = 1, \ldots, n.$$

Tada se lako vidi da je

$$(ad\,A)E_{ij} = (\lambda_i - \lambda_j)E_{ij}, \qquad i, j = 1, \ldots, n.$$

Dakle, operator $ad\,A$ je dijagonalizabilan, odnosno, poluprost.

(*b*) Definiramo linearne operatore L_A i R_A na prostoru $\mathfrak{gl}(V)$ pomoću lijevog i desnog množenja s operatorom A :

$$L_A B = AB, \qquad R_A B = BA, \qquad B \in \mathfrak{gl}(V).$$

Tada je $ad\,A = L_A - R_A$ i operatori L_A i R_A komutiraju. Prema tome, ako je $k \in \mathbb{N}$ takav da je $A^k = 0$, dakle, i $(L_A)^k = (R_A)^k = 0$, onda je

$$(ad\,A)^{2k-1} = (L_A - R_A)^{2k-1} = \sum_{j=0}^{2k-1} (-1)^j \binom{2k-1}{j} (L_A)^{2k-1-j} (R_A)^j = 0,$$

jer ili je $j \geq k$ ili je $2k - 1 - j \geq k$. Dakle, operator $ad\,A$ je nilpotentan.

(*c*) Prema (*a*) i (*b*) operator $ad\,A_s$ je poluprost i operator $ad\,A_n$ je nilpotentan. Budući da operatori A_s i A_n komutiraju, operatori $ad\,A_s$ i $ad\,A_n$ također komutiraju. Napokon, vrijedi $ad\,A = ad\,A_s + ad\,A_n$, pa iz jedinstvenosti u tvrdnji (*a*) teorema 1.3.8. slijedi da je $(ad\,A)_s = ad\,A_s$ i $(ad\,A)_n = ad\,A_n$.

Propozicija 1.3.12. *Neka je $\mathcal{A}$ konačnodimenzionalna algebra i $D \in Der(\mathcal{A})$. Tada su $D_s, D_n \in Der(\mathcal{A})$.*

Dokaz: Kako je $Der(\mathcal{A})$ vektorski prostor i $D_n = D - D_s$, dovoljno je dokazati da je $D_s \in Der(\mathcal{A})$. Imamo

$$\mathcal{A} = \sum_{\lambda \in Sp(D)} \dot{+} \mathcal{A}_{(\lambda)}(D) \tag{1.9}$$

i vrijedi $Sp(D_s) = Sp(D)$ i $D_s|\mathcal{A}_{(\lambda)} = \lambda I_{\mathcal{A}_{(\lambda)}}$.

Zadatak 1.3.2. *Indukcijom po $n \in \mathbb{N}$ dokažite da za bilo koje $\lambda, \mu \in K$ i $x, y \in \mathcal{A}$ vrijedi*

$$(D - (\lambda + \mu)I_{\mathcal{A}})^n(xy) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \left((D - \lambda I_{\mathcal{A}})^{n-j}x\right) \left((D - \mu I_{\mathcal{A}})^j y\right).$$

Za $\lambda, \mu \in K$ i za $x \in \mathcal{A}_{(\lambda)}(D)$ i $y \in \mathcal{A}_{(\mu)}(D)$ iz jednakosti u zadatku 1.3.2 slijedi $xy \in \mathcal{A}_{(\lambda+\mu)}(D)$. Stoga je $D_s x = \lambda x$, $D_s y = \mu y$ i

$$D_s(xy) = (\lambda + \mu)xy = (\lambda x)y + x(\mu y) = (D_s x)y + x(D_s y).$$

Sada iz (1.9) slijedi da jednakost $D_s(xy) = (D_s x)y + x(D_s y)$ vrijedi za sve $x, y \in \mathcal{A}$, odnosno, $D_s \in Der(\mathcal{A})$.

Dokazat ćemo još jednu tehničku tvrdnju o dovoljnom uvjetu za nilpotentnost linearnog operatora koja će nam kasnije trebati.

Lema 1.3.13. *Neka je V konačnodimenzionalan vektorski prostor i neka su $X \subseteq Y$ potprostori od $\mathfrak{gl}(V)$ i*

$$\mathfrak{a} = \{A \in \mathfrak{gl}(V);\ [A, Y] \subseteq X\}.$$

Ako za $A \in \mathfrak{a}$ vrijedi $\mathrm{Tr}\, AB = 0\ \forall B \in \mathfrak{a}$, onda je operator A nilpotentan.

Dokaz: Treba dokazati da za takav operator A vrijedi $A_s = 0$. Neka je $\{e_1, \ldots, e_n\}$ baza od V sastavljena od svojstvenih vektora operatora A_s i neka su $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K$ pripadne svojstvene vrijednosti: $A_s e_j = \alpha_j e_j$. Neka je L vektorski potprostor od K nad poljem $\mathbb{Q}$ racionalnih brojeva razapet sa $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$. Cilj nam je dokazati da je $L = \{0\}$, jer će to značiti da je $A_s = 0$. Kako je L konačnodimenzionalan vektorski prostor, dovoljno je dokazati da je njegov dualni prostor L^* jednak $\{0\}$, tj. da je nul−funkcional jedini $\mathbb{Q}$−linearni funkcional $f : L \to \mathbb{Q}$.

Neka je $f : L \to \mathbb{Q}$ $\mathbb{Q}$−linearni funkcional. Neka je $B \in \mathfrak{gl}(V)$ zadan sa

$$Be_j = f(\alpha_j)e_j, \qquad j = 1, \ldots, n.$$

Neka je kao i prije $\{E_{ij};\ i, j = 1, \ldots, n\}$ baza prostora $\mathfrak{gl}(V)$ dobivena iz baze $\{e_1, \ldots, n\}$ prostora V :

$$E_{ij}e_k = \delta_{jk}e_i, \qquad i, j, k = 1, \ldots, n.$$

Kao što smo vidjeli u dokazu propozicije 1.3.11. tada je

$$(ad\, A_s)E_{ij} = (\alpha_i - \alpha_j)E_{ij} \qquad \text{i} \qquad (ad\, B)E_{ij} = (f(\alpha_i) - f(\alpha_j))E_{ij}. \tag{1.10}$$

Neka je sada $R \in K[T]$ Lagrangeov interpolacioni polinom definiran podacima

$$\{0\} \cup \{\alpha_i - \alpha_j;\ i, j = 1, \ldots, n\} \qquad \text{i} \qquad \{0\} \cup \{f(\alpha_i) - f(\alpha_j);\ i, j = 1, \ldots, n\},$$

tj. polinom najnižeg stupnja takav da je

$$R(0) = 0, \qquad R(\alpha_i - \alpha_j) = f(\alpha_i) - f(\alpha_j), \quad i, j = 1, \ldots, n.$$

Pri tome nema dvojbe ili kontradikcije u definiciji polinoma R budući da iz $\alpha_i - \alpha_j = \alpha_k - \alpha_\ell$ za neke i, j, k, ℓ zbog $\mathbb{Q}-$linearnosti od f slijedi da je i $f(\alpha_i) - f(\alpha_j) = f(\alpha_k) - f(\alpha_\ell)$. Iz jednakosti (1.10) vidi se da vrijedi $R(ad\, A_s) = ad\, B$.

Prema tvrdnji (c) propozicije 1.3.11. znamo da je $ad\, A_s$ poluprosti dio operatora $ad\, A$, pa prema teoremu 1.3.10. primijenjenom na operator $ad\, A$ operator $ad\, A_s$ polinom u operatoru $ad\, A$ bez konstantnog člana. Dakle, operator $ad\, B$ je polinom u operatoru $ad\, A$ bez konstantnog člana. Po pretpostavici operator $ad\, A$ preslikava potprostor Y u potprostor X. Slijedi da i operator $ad\, B$ prelikava potprostor Y u potprostor X. Dakle, vrijedi $B \in \mathfrak{a}$. Po pretpostavci je stoga $\mathrm{Tr}\, AB = 0$. Možemo pretpostaviti da smo bazu $\{e_1, \ldots, e_n\}$ numerirali tako da u njoj operator A ima gornje trokutastu matricu s elementima $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ na dijagonali. Tada operator AB ima gornje trokutastu matricu i na dijagonali su mu elementi $f(\alpha_1)\alpha_1, \ldots, f(\alpha_n)\alpha_n$. Dakle, $\mathrm{Tr}\, AB = 0$ znači da je

$$\sum_{i=1}^{n} f(\alpha_i)\alpha_i = 0.$$

Lijeva strana je $\mathbb{Q}-$linearna kombinacija elemenata $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in L$. Primijenimo li na gornju jednakost $\mathbb{Q}-$linearan funkcional f, slijedi

$$\sum_{i=1}^{n} f(\alpha_i)^2 = 0.$$

Kako su svi $f(\alpha_i)$ racionalni brojevi, slijedi da su svi jednaki nuli. Dakle, $f = 0$, budući da $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ razapinju L nad $\mathbb{Q}$.

1.4 Bilinearne forme

Neka su V i W vektorski prostori nad istim poljem K. **Bilinearna forma** na $V \times W$ je preslikavanje $F : V \times W \to K$ koje je bilinearno, tj. linearno je u prvoj varijabli

$$F(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2, w) = \alpha_1 F(v_1, w) + \alpha_2 F(v_2, w) \qquad \forall \alpha_1, \alpha_2 \in K, \quad \forall v_1, v_2 \in V, \quad \forall w \in W,$$

i u drugoj varijabli

$$F(v, \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2) = \alpha_1 F(v, w_1) + \alpha_2 F(v, w_2) \qquad \forall \alpha_1, \alpha_2 \in K, \quad \forall v \in V, \quad \forall w_1, w_2 \in W.$$

Naravno, tada vrijedi

$$F\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i, \sum_{j=1}^{m} \beta_j w_j\right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \alpha_i \beta_j F(v_i, w_j)$$

$$\forall n, m \in \mathbb{N}, \quad \forall \alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_m \in K, \quad \forall v_1, \ldots, v_n \in V, \quad \forall w_1, \ldots, w_m \in W.$$

Skup svih bilinearnih formi $V \times W \to K$ označavamo sa $L(V \times W, K)$ i to je vektorski prostor nad K s operacijama

$$(F + G)(v, w) = F(v, w) + G(v, w), \qquad (\alpha F)(v, w) = \alpha F(v, w),$$

$$F, G \in L(V \times W, K), \quad \alpha \in K, \quad v \in V, \quad w \in W.$$

Za formu F kažemo da je **slijeva nedegenerirana** ako vrijedi

$$v \in V, \quad F(v, w) = 0 \quad \forall w \in W \qquad \Longrightarrow \qquad v = 0,$$

a **zdesna nedegenerirana** ako vrijedi

$$w \in W, \quad F(v, w) = 0 \quad \forall v \in V \qquad \Longrightarrow \qquad w = 0.$$

Kažemo da je forma F **nedegenerirana** ako je nedegenerirana i slijeva i zdesna.

U daljnjem promatramo isključivo bilinearne forme na konačnodimenzionalnim vektorskim prostorima. Ako je $e = \{e_1, \ldots, e_n\}$ baza vektorskog prostora V i $f = \{f_1, \ldots, f_m\}$ baza vektorskog prostora W **matrica bilinearne forme** $F : V \times W \to K$ **u paru baza** (e, f) je matrica $F(e, f)$ tipa $n \times m$ čiji je matrični element na mjestu (i, j) jednak $F(e_i, f_j)$. Očito je $F \mapsto F(e, f)$ izomorfizam vektorskog prostora $L(V \times W, K)$ svih bilinearnih formi $V \times W \to K$ na vektorski prostor $M_{n,m}(K)$ svih matrica formata $n \times m$ s koeficijentima iz K.

Propozicija 1.4.1. *Neka je $e = \{e_1, \ldots, e_n\}$ baza vektorskog prostora V, $f = \{f_1, \ldots, f_m\}$ baza vektorskog prostora W i $F \in L(V \times W, K)$.*

(a) *Forma F je slijeva nedegenerirana ako i samo ako je rang matrice $F(e, f)$ jednak n.*

(b) *Forma F je zdesna nedegenerirana ako i samo ako je rang matrice $F(e, f)$ jednak m*

(c) *Ako je $n = m$, tj.* $\dim V = \dim W$, *forma F je slijeva nedegenerirana ako i samo ako je ona zdesna nedegenerirana. To je ispunjeno ako i samo ako je matrica forme F u nekom (u svakom) paru baza regularna.*

(d) *Ako je forma F nedegenerirana onda je $n = m$.*

Dokaz: (a) Pretpostavimo da je forma F slijeva nedegenerirana. Neka je $F_i \in M_{1,m}(K)$ $i-$ti redak matrice $F(e,f)$, tj.

$$F_i = [F(e_i, f_1) \quad F(e_i, f_2) \quad \cdots \quad F(e_i, f_m)], \qquad i = 1, 2, \dots, n.$$

Neka su $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in K$ takvi da je

$$\lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2 + \cdots + \lambda_n F_n = 0. \tag{1.11}$$

To znači da vrijedi

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i F(e_i, f_j) = 0 \qquad \forall j \in \{1, 2, \dots, m\}.$$

Slijedi da za vektor

$$v = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \cdots + \lambda_n e_n \in V \tag{1.12}$$

vrijedi

$$F(v, f_j) = 0 \qquad \forall j \in \{1, 2, \dots, m\}. \tag{1.13}$$

Kako je $\{f_1, f_2, \dots, f_m\}$ baza prostora W, zaključujemo da je $F(v, w) = 0 \ \forall w \in W$. Budući da je forma F po pretpostavci slijeva nedegenerirana, slijedi $v = 0$, a odatle je $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$. Time je dokazano da su reci $F_1, F_2, \dots, F_n$ matrice $F(e,f)$ linearno nezavisni. Dakle, rang te matrice jednak je n.

Obratno, pretpostavimo da je rang matrice $F(e,f)$ jednak n. To znači da su reci $F_1, F_2, \dots, F_n$ te matrice linearno nezavisni. Neka je $v \in V$ takav da je $F(v, w) = 0 \ \forall w \in W$. Tada, posebno, vrijedi (1.13). Neka je (1.12) prikaz vektora v u bazi e. Tada iz (1.13) slijedi (1.11), a kako su reci $F_1, F_2, \dots, F_n$ matrice $F(e,f)$ linearno nezavisni, slijedi da je $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$, odnosno, $v = 0$. Time je dokazano da je forma F slijeva nedegenerirana.

Tvrdnja (b) dokazuje se potpuno analogno tvrdnji (a) promatranjem stupaca matrice $F(e,f)$, a tvrdnje (c) i (d) neposredne su posljedice tvrdnji (a) i (b).

Propozicija 1.4.2. *Neka su V i W konačnodimenzionalni vektorski prostori nad poljem K i neka je $F : V \times W \to K$ nedegenerirana bilinearna forma.*

(a) *Za svaki linearan funkcional $\varphi \in V^*$ postoji jedinstven vektor $w \in W$ takav da je*

$$\varphi(v) = F(v, w) \qquad \forall v \in V.$$

Tako definirano preslikavanje $\varphi \mapsto w$ je izomorfizam prostora V^* na prostor W.

(b) *Za svaki linearan funkcional $\psi \in W^*$ postoji jedinstven vektor $v \in V$ takav da je*

$$\psi(w) = F(v, w) \qquad \forall w \in W.$$

Tako definirano preslikavanje $\psi \mapsto v$ je izomorfizam prostora W^* na prostor V.

(c) *Za svaki linearan operator $A : V \to V$ postoji jedinstven linearan operator $A^F : W \to W$ takav da vrijedi*

$$F(Av, w) = F(v, A^F w) \qquad \forall v \in V \quad i \quad \forall w \in W.$$

Preslikavanje $A \mapsto A^F$ je izomorfizam prostora $L(V)$ na prostor $L(W)$ i vrijedi

$$(A_1 A_2)^F = A_2^F A_1^F \qquad \forall A_1, A_2 \in L(V).$$

(*d*) *Za svaki linearan operator* $B : W \to W$ *postoji jedinstven linearan operator* ${}^F B : V \to V$ *takav da vrijedi*

$$F(v, Bw) = F({}^F Bv, w) \qquad \forall v \in V \quad i \quad w \in W.$$

Preslikavanje $B \mapsto {}^F B$ *je izomorfizam prostora* $L(W)$ *na prostor* $L(V)$ *i vrijedi*

$${}^F(B_1 B_2) = {}^F B_2 {}^F B_1 \qquad \forall B_1, B_2 \in L(W).$$

(*e*) *Izmorfizmi* $A \mapsto A^F$ *sa* $L(V)$ *na* $L(W)$ *i* $B \mapsto {}^F B$ *sa* $L(W)$ *na* $L(V)$ *su međusobno inverzni.*

Dokaz: (*a*) Za $w \in W$ definiramo preslikavanje $\varphi_w : V \to K$ sa

$$\varphi_w(v) = F(v, w), \qquad v \in V.$$

Zbog linearnosti forme F u prvoj varijabli φ_w je linearan funkcional na prostoru V, tj. $\varphi_w \in V^*$. Nadalje, iz linearnosti forme F u drugoj varijabli slijedi da je preslikavanje $w \mapsto \varphi_w$ sa W u V^* linearno. Iz nedegeneriranosti forme F (zdesna) slijedi da je to preslikavanje injektivno:

$$\varphi_w = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad F(v, w) = \varphi_w(v) = 0 \quad \forall v \in V \qquad \Longrightarrow \qquad w = 0.$$

Po teoremu o rangu i defektu primijenjenom na operator $w \mapsto \varphi_w$ slijedi da je njegov rang jednak $\dim W$. Međutim, po tvrdnji (*d*) propozicije 1.4.1. to je jednako $\dim V$, dakle, $\dim V^*$. Prema tome, preslikavanje $w \mapsto \varphi_w$ je izomorfizam prostora W na prostor V^*.

Tvrdnja (*b*) dokazuje se sasvim analogno ili primjenom tvrdnje (*a*) na formu $F^0 \in L(W \times V, K)$ definiranu sa $F^0(w, v) = F(v, w)$, $v \in V$, $w \in W$.

(*c*) Neka je $A \in L(V)$. Za $w \in W$ definiramo $\psi_w \in V^*$ sa

$$\psi_w(v) = F(Av, w), \qquad v \in V.$$

Prema tvrdnji (*a*) postoji jedinstven vektor iz W, koji ćemo označiti sa $A^F(w)$, takav da je

$$F(Av, w) = \psi_w(v) = F(v, A^F(w)) \qquad \forall v \in V.$$

Iz linearnosti forme F u drugoj varijabli slijedi linearnost preslikavanja $A^F : W \to W$. Time je dokazana egzistencija u tvrdnji (*c*). Jedinstvenost slijedi iz nedegeneriranosti forme F zdesna: ako i $B \in L(W)$ ima svojstvo da je $F(Av, w) = F(v, Bw)$ $\forall v \in V$ i $\forall w \in W$, onda za $w \in W$ i za svaki $v \in V$ vrijedi $F(v, A^F w - Bw) = 0$, pa slijedi $A^F w - Bw = 0$, a to zbog proizvoljnosti vektora $w \in W$ znači $B = A^F$.

Preslikavanje $A \mapsto A^F$ sa $L(V)$ u $L(W)$ je očito linearno. Nadalje, ono je injektivno, jer imamo sljedeći niz implikacija

$$A^F = 0 \;\Rightarrow\; F(Av, w) = F(v, A^F w) = 0 \; \forall v \in V \text{ i } \forall w \in W \;\Rightarrow\; Av = 0 \; \forall v \in V \;\Rightarrow\; A = 0;$$

pri tome smo kod druge implikacije koristili nedegeneriranost forme F slijeva. Budući da je $\dim V = \dim W$, vrijedi $\dim L(V) = \dim L(W)$, pa je po teoremu o rangu i defektu preslikavanje $A \mapsto A^F$ izomorfizam sa $L(V)$ na $L(W)$.

Napokon, za $A_1, A_2 \in L(V)$ imamo za proizvoljne $v \in V$ i $w \in W$:

$$F(v, (A_1 A_2)^F w) = F(A_1 A_2 v, w) = F(A_2 v, A_1^F w) = F(v, A_2^F A_1^F w).$$

Odatle i iz nedegeneriranosti forme F zdesna slijedi $(A_1 A_2)^F = A_2^F A_1^F$.

Tvrdnja (*d*) dokazuje se sasvim analogno.

(*e*) Za $A \in L(V)$ i za proizvoljne $v \in V$ i $w \in W$ imamo

$$F(Av, w) = F(v, A^F w) = F\left({}^F\!\left(A^F\right) v, w\right).$$

Odatle i iz nedegeneriranosti forme F slijeva slijedi ${}^F\!\left(A^F\right) = A$. Sasvim analogno za svaki $B \in L(W)$ nalazimo da je $({}^F B)^F = B$. Time je dokazano da su izomorfizmi $A \mapsto A^F$ i $B \mapsto {}^F B$ međusobno inverzni.

Neka je $F \in L(V \times W, K)$ bilinearna forma. Za potprostor X prostora V definiramo njegov **desni** $F-$**ortogonal** ${}^{\perp}X$:

$$ {}^{\perp}X = \{w \in W;\ F(x,w) = 0\ \ \forall x \in X\}. $$

To je očito potprostor od W. Analogno, za svaki potprostor Y prostora W definiramo njegov **lijevi** $F-$**ortogonal**. To je potprostor $Y^{\perp}$ od V zadan sa

$$ Y^{\perp} = \{v \in V;\ F(v,y) = 0\ \ \forall y \in Y\}. $$

Desni $F-$ortogonal ${}^{\perp}V$ čitavog prostora V zove se **desni radikal forme** F; analogno, $W^{\perp}$ je **lijevi radikal forme** F. Forma F je zdesna nedegenerirana ako i samo ako je njen desni radikal ${}^{\perp}V$ jednak $\{0\}$, a slijeva nedegenerirana ako i samo ako je njen lijevi radikal $W^{\perp}$ jednak $\{0\}$.

Propozicija 1.4.3. *Neka je $F \in L(V \times W, K)$ nedegenerirana bilinearna forma. Za svaki potprostor X od V i svaki potprostor Y od W vrijede jednakosti*

$$ \dim {}^{\perp}X = \dim V - \dim X \qquad i \qquad \dim Y^{\perp} = \dim W - \dim Y. $$

Dokaz: Neka je $w \mapsto \varphi_w$ izomorfizam sa W na V^* iz dokaza tvrdnje (a) propozicije 1.4.2., tj.

$$ \varphi_w(v) = F(v,w), \qquad v \in V, \quad w \in W. $$

Tada vrijedi

$$ w \in {}^{\perp}X \qquad \Longleftrightarrow \qquad \varphi_w \in X^0 = \{\varphi \in V^*;\ \varphi(x) = 0\ \ \forall x \in X\}. $$

Dakle, $w \mapsto \varphi_w$ je izomorfizam sa ${}^{\perp}X$ na X^0. No tada je $\dim {}^{\perp}X = \dim X^0 = \dim V - \dim X$. Sasvim analogno dokazuje se i druga jednakost.

Neka su $e = \{e_1, \ldots, e_n\}$ i $e' = (e'_1, \ldots, e'_n)$ baze prostora V i $f = (f_1, \ldots, f_m)$ i $f' = (f'_1, \ldots, f'_m)$ baze prostora W. Nadalje, neka su $A \in GL(V)$ operator koji povezuje bazu e s bazom e' i $B \in GL(W)$ operator koji povezuje bazu f s bazom f' :

$$ Ae_i = e'_i, \quad i = 1, \ldots, n, \qquad Bf_j = f'_j, \quad j = 1, \ldots, m. $$

Označimo sa $A(e) = [\alpha_{ip}]$ matricu operatora A u bazi e i sa $B(f) = [\beta_{jq}]$ matricu operatora B u bazi f :

$$ e'_p = Ae_p = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ip} e_i, \quad p = 1, \ldots, n, \qquad f'_q = Af_q = \sum_{j=1}^{m} \beta_{jq} f_j, \quad q = 1, \ldots, m. $$

Tada imamo za bilo koje $p \in \{1, \ldots, n\}$ i $q \in \{1, \ldots, m\}$:

$$ F(e'_p, f'_q) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \alpha_{ip} \beta_{jq} F(e_i, f_j). $$

To pokazuje da je

$$ F(e', f') = A(e)^t F(e, f) B(f). $$

Pri tome za bilo koju matricu $C \in M_{k\ell}(K)$ sa $C^t \in M_{\ell k}(K)$ označavamo njoj transponiranu matricu. Kako su matrice $A(e)$ (dakle i $A(e)^t$) i $B(f)$ regularne, iz ove se jednakosti vidi da je rang matrice $F(e, f)$ jednak rangu matrice $F(e', f')$. Drugim riječima, rang matrice bilinearne forme F ne ovisi o izboru baza u prostorima V i W. Taj se rang zove **rang bilinearne forme** F i označava sa $r(F)$.

Propozicija 1.4.4. *Neka su V i W konačnodimenzionalni vektorski prostori nad istim poljem K i $F \in L(V \times W, K)$ bilinearna forma.*

(a) *Neka su X i Y potprostori od V i W takvi da je $V = W^\perp \dotplus X$ i $W = {}^\perp V \dotplus Y$. Tada je restrikcija $F|X \times Y$ nedegenerirana bilinearna forma.*

(b) *Vrijedi* $\dim V = \dim W^\perp + r(F)$ *i* $\dim W = \dim {}^\perp V + r(F)$.

Dokaz: (a) Pretpostavimo da je $x \in X$ takav da je $F(x, y) = 0\ \ \forall y \in Y$. Budući da vrijedi i $F(x, y) = 0\ \ \forall y \in {}^\perp V$, i budući da je $W = {}^\perp V \dotplus Y$, slijedi da je $F(x, y) = 0\ \ \forall y \in W$. No tada je $x \in W^\perp$, a kako je $X \cap W^\perp = \{0\}$, zaključujemo da je $x = 0$. To pokazuje da je forma $F|X \times Y$ slijeva nedegenerirana. Sasvim analogno dokazuje se da je ta forma i zdesna nedegenerirana.

(b) Izaberimo potprostore X od V i Y od W takve da je $V = W^\perp \dotplus X$ i $W = {}^\perp V \dotplus Y$. Zbog nedegeneriranosti forme $F|X \times Y$, prema tvrdnji (d) propozicije 1.4.1. vrijedi $\dim X = \dim Y$; taj broj označimo sa r i neka su $n = \dim V$ i $m = \dim W$. Izaberimo sada bazu $\{e_1, \ldots, e_r\}$ od X, bazu $\{e_{r+1}, \ldots, e_n\}$ od $W^\perp$, bazu $\{f_1, \ldots, f_r\}$ od Y i bazu $\{f_{r+1}, \ldots, f_m\}$ od ${}^\perp V$. Tada je $\{e_1, \ldots, e_n\}$ baza prostora V i $\{f_1, \ldots, f_m\}$ je baza od W. U tom paru baza forma F ima matricu kojoj je u gornjem lijevom $r \times r$ bloku matrica nedegenerirane forme $F|X \times Y$, dakle, matrica iz $GL(r, K)$, a svi su ostali elementi te matrice 0. To pokazuje da je $r(F) = r$, a odatle je

$$r(F) = \dim X = \dim V - \dim W^\perp \qquad \text{i} \qquad r(F) = \dim Y = \dim W - \dim {}^\perp V.$$

Propozicija 1.4.5. *Neka je $F \in L(V \times V, K)$ nedegenerirana simetrična ili antisimetrična bilinearna forma i neka je U potprostor od V. Sljedeća su svojstva međusobno ekvivalentna:*

(a) *Restrikcija $F|U \times U$ je nedegenerirana.*

(b) $V = U \dotplus U^\perp$.

(c) $U \cap U^\perp = \{0\}$.

(d) *Restrikcija $F|U^\perp \times U^\perp$ je nedegenerirana.*

Dokaz: Prije svega, uočimo da za simetričnu ili antisimetričnu formu $F \in L(V \times V, K)$ za svaki potprostor U od V vrijedi $U^\perp = {}^\perp U$. Kako je forma F nedegenerirana, po propoziciji 1.4.3. za svaki potprostor U od V vrijedi $\dim V = \dim U + \dim U^\perp$. Prema tome, svojstva ($b$) i ($c$) su međusobno ekvivalentna. Iz tih svojstava slijedi svojstvo (a). Doista, ako je $u \in U$ takav da je $F(u, x) = 0\ \ \forall x \in U$, onda zbog ($b$) vrijedi $F(u, x) = 0\ \ \forall x \in V$, pa zbog nedegeneriranosti forme F slijedi $u = 0$. Pretpostavimo sada da vrijedi svojstvo (a). Tada je očito $U \cap U^\perp = \{0\}$, tj. vrijedi (c). Time je dokazano da su svojstva (a), (b) i (c) međusobno ekvivalentna.

Za svaki potprostor U od V je očito $U \subseteq \left(U^\perp\right)^\perp$. Nadalje, iz propozicije 1.4.3. primijenjene najprije na potprostor $X = U^\perp$ a zatim na potprostor $X = U$ dobivamo

$$\dim \left(U^\perp\right)^\perp = \dim V - \dim U^\perp = \dim V - (\dim V - \dim U) = \dim U.$$

Dakle, za svaki potprostor U od V je $U = \left(U^\perp\right)^\perp$. Primijenimo li dokazano na potprostor $U^\perp$ nalazimo da je svojstvo (d) ekvivalentno npr. svojstvu (c).

Poglavlje 2

NEKE KLASE LIEJEVIH ALGEBRI

2.1 Nilpotentne Liejeve algebre

Osim ako bude u nekom posebnom slučaju izričito navedeno, **u cijelom ćemo kolegiju promatrati samo konačnodimenzionalne Liejeve algebre**, naravno, i dalje nad algebarski zatvorenim poljem karakteristike 0.

Strukturu Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ proučavat ćemo prije svega razmatranjem tzv. **adjungirane reprezentacije** $x \mapsto ad\,x = ad_{\mathfrak{g}}x$, $x \in \mathfrak{g}$, Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ na vektorskom prostoru $\mathfrak{g}$. Preko te reprezentacije Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ postaje $\mathfrak{g}-$modul. Uočimo da su ideali u Liejevoj algebri $\mathfrak{g}$ upravo $\mathfrak{g}-$podmoduli $\mathfrak{g}-$modula $\mathfrak{g}$. U ovom ćemo odjeljku proučiti Liejeve algebre kod kojih su svi operatori adjungirane reprezentacije nilpotentni. Takve nazivamo **nilpotentne Liejeve algebre**. Dakle, $\mathfrak{g}$ je nilpotentna Liejeva algebra ako je operator $ad\,x : y \mapsto [x, y]$, $y \in \mathfrak{g}$, nilpotentan $\forall x \in \mathfrak{g}$. Svaka je komutativna Liejeva algebra naravno nilpotentna. Niz drugih primjera nilpotentnih Liejevih algebri dobivamo na temelju sljedeće propozicije:

Propozicija 2.1.1. *Neka je V konačnodimenzionalan vektorski prostor. Ako je $\mathfrak{g}$ Liejeva podalgebra od $\mathfrak{gl}(V)$ koja se sastoji od nilpotentnih operatora, onda je $\mathfrak{g}$ nilpotentna Liejeva algebra.*

Dokaz: Neka je $\mathfrak{g}$ Liejeva podalgebra od $\mathfrak{gl}(V)$ koja se sastoji od nilpotentnih operatora. Prema tvrdnji (b) propozicije 1.3.11. $ad_{\mathfrak{gl}(V)}\,A$ je nilpotentan operator na prostoru $\mathfrak{gl}(V)$ za svaki $A \in \mathfrak{g}$. No tada je restrikcija $(ad_{\mathfrak{gl}(V)}\,A)|\mathfrak{g} = ad_{\mathfrak{g}}\,A$ nilpotentan operator za svaki $A \in \mathfrak{g}$. Dakle, $\mathfrak{g}$ je nilpotentna Liejeva algebra.

Propozicija 2.1.2. *Neka je $\mathfrak{g}$ nilpotentna Liejeva algebra, $\mathfrak{h}$ njena podalgebra i $\mathfrak{j}$ ideal u $\mathfrak{g}$. Tada su Liejeve algebre $\mathfrak{h}$ i $\mathfrak{g}/\mathfrak{j}$ nilpotentne.*

Dokaz: Za $x \in \mathfrak{h}$ operator $ad_{\mathfrak{h}}\,x$ je restrikcija na $\mathfrak{h}$ nilpotentnog operatora $ad_{\mathfrak{g}}\,x$, dakle, $ad_{\mathfrak{h}}\,x$ je nilpotentan. Dakle, Liejeva algebra $\mathfrak{h}$ je nilpotentna. Neka je $\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}/\mathfrak{j}$ kanonski epimorfizam koji elementu $x \in \mathfrak{g}$ pridružuje njegovu klasu $x + \mathfrak{j}$ u $\mathfrak{g}/\mathfrak{j}$. Neka je $y \in \mathfrak{g}/\mathfrak{j}$ i neka $x \in \mathfrak{g}$ takav da je $y = \varphi(x)$. Tada se direktno provjerava da vrijedi $(ad_{\mathfrak{g}/\mathfrak{j}}\,y) \circ \varphi = \varphi \circ (ad_{\mathfrak{g}}\,x)$. Odatle je za svaku potenciju $(ad_{\mathfrak{g}/\mathfrak{j}}\,y)^m \circ \varphi = \varphi \circ (ad_{\mathfrak{g}}\,x)^m$. Dakle, ako je $m \in \mathbb{N}$ takav da je $(ad_{\mathfrak{g}}\,x)^m = 0$, onda je $(ad_{\mathfrak{g}/\mathfrak{j}}\,y)^m \circ \varphi = 0$, a odatle je $(ad_{\mathfrak{g}/\mathfrak{j}}\,y)^m = 0$ jer je $\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}/\mathfrak{j}$ surjekcija. Dakle, kvocijentna Liejeva algebra $\mathfrak{g}/\mathfrak{j}$ je nilpotentna.

Neka je π reprezentacija Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ na vektorskom prostoru V. Kažemo da je π **nil−reprezentacija** ako su svi operatori $\pi(x)$, $x \in \mathfrak{g}$, nilpotentni. Centralni rezultat u teoriji nilpotentnih Liejevih algebri je **Engelov teorem:**

Teorem 2.1.3. *Neka je π nil−reprezentacija Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ na konačnodimenzionalnom vektorskom prostoru $V \neq \{0\}$. Tada postoji $v \in V \setminus \{0\}$ takav da je $\pi(x)v = 0$ $\forall x \in \mathfrak{g}$.*

Dokaz: Neka je $\mathfrak{a} = \operatorname{Ker}\pi$. Tada π inducira vjernu (tj. injektivnu) reprezentaciju kvocijentne algebre $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$. Kako su svi operatori iz $\operatorname{Im}\pi$ nilpotentni, prema tvrdnji (b) propozicije 2.1.1. Liejeva algebra $\operatorname{Im}\pi$, dakle, i njoj izomorfna Liejeva algebra $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$, je nilpotentna. To pokazuje da nije smanjenje općenitosti ako pretpostavimo da je Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ nilpotentna. U daljnjem to pretpostavljamo i provodimo dokaz indukcijom po $\dim\mathfrak{g}$. Za $\dim\mathfrak{g} = 1$ tvrdnja je trivijalna, jer svaki nilpotentan operator poništava neki vektor $\neq 0$. Pretpostavimo da je $n \geq 2$ i da je teorem dokazan za nilpotentne Liejeve algebre dimenzije $< n$. Neka je $\dim\mathfrak{g} = n$. Označimo sa $\mathcal{G}$ skup svih Liejevih podalgebri $\mathfrak{h}$ od $\mathfrak{g}$ takvih da je $0 < \dim\mathfrak{h} < n$. Tada je $Kx \in \mathcal{G}$ za svaki $x \in \mathfrak{g} \setminus \{0\}$, dakle, skup $\mathcal{G}$ je neprazan. Neka je $\mathfrak{h} \in \mathcal{G}$ takva da je $\dim\mathfrak{h} \geq \dim\mathfrak{h}'$ $\forall\mathfrak{h}' \in \mathcal{G}$. Tvrdimo da tada $\mathfrak{h}$ ideal u $\mathfrak{g}$ dimenzije $n-1$. Da to dokažemo, promatrajmo vektorski prostor $W = \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$. Ako je $x \in \mathfrak{h}$, $ad\,x$ je nilpotentan operator na $\mathfrak{g}$ u odnosu na koji je potprostor $\mathfrak{h}$ invarijantan. Stoga $ad\,x$ inducira nilpotentan operator $\rho(x)$ na kvocijentnom prostoru W. Sada je ρ nil$-$reprezentacija Liejeve algebre $\mathfrak{h}$ na prostoru $W \neq \{0\}$. Po pretpostavci indukcije postoji $w \in W \setminus \{0\}$ takav da je $\rho(x)w = 0$ $\forall x \in \mathfrak{h}$. Neka je $y \in \mathfrak{g} \setminus \mathfrak{h}$ takav da je $w = y + \mathfrak{h}$. Iz $\rho(x)w = 0$ slijedi da je $[x, y] \in \mathfrak{h}$ $\forall x \in \mathfrak{h}$. To pokazuje da je $Ky \dotplus \mathfrak{h}$ Liejeva podalgebra od $\mathfrak{g}$ u kojoj je $\mathfrak{h}$ ideal. Međutim, zbog izbora $\mathfrak{h}$ zaključujemo da je $\mathfrak{g} = Ky \dotplus \mathfrak{h}$. Dakle, stvarno je $\dim\mathfrak{h} = n - 1$ i $\mathfrak{h}$ je ideal u $\mathfrak{g}$. Sada iz pretpostavke indukcije slijedi da je potprostor

$$V' = \{v \in V;\ \pi(x)v = 0\ \forall x \in \mathfrak{h}\}$$

prostora V različit od $\{0\}$. Neka je i dalje $y \in \mathfrak{g}$ takav da je $\mathfrak{g} = Ky \dotplus \mathfrak{h}$. Za $v \in V'$ i $x \in \mathfrak{h}$ imamo

$$\pi(x)\pi(y)v = \pi(y)\pi(x)v + \pi([x, y])v = 0$$

jer je $[x, y] \in \mathfrak{h}$. To pokazuje da je $\pi(y)V' \subseteq V'$. Kako je operator $\pi(y)$ nilpotentan, postoji $v \in V' \setminus \{0\}$ takav da je $\pi(y)v = 0$. No tada je $\pi(x)v = 0$ $\forall x \in \mathfrak{g}$.

Engelov teorem 2.1.3. ima sljedeću važnu posljedicu:

Teorem 2.1.4. *Neka je π nil$-$reprezentacija Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ na konačnodimenzionalnom vektorskom prostoru $V \neq \{0\}$. Stavimo*

$$V_0 = \{0\}, \qquad V_i = \{v \in V;\ \pi(x)v \in V_{i-1}\ \forall x \in \mathfrak{g}\}, \quad i \geq 1.$$

(a) *Za neki $s \leq \dim V$ vrijedi $V_0 \subsetneq V_1 \subsetneq \cdots \subsetneq V_s = V$.*

(b) *Ako su $x_1, \ldots, x_s \in \mathfrak{g}$, onda je $\pi(x_1)\cdots\pi(x_s) = 0$.*

(c) *Postoji baza od V u odnosu na koju svaki operator $\pi(x)$, $x \in \mathfrak{g}$, ima striktno gornje trokutastu matricu.*

Dokaz: (a) Prema Engelovom teoremu 2.1.3. vrijedi $V_1 \neq \{0\}$. Ako je $V_1 \neq V$, primjena Engelovog teorema na kvocijentnu reprezentaciju π_{V/V_1}, koja je također nil$-$reprezentacija, pokazuje da je $V_2 \supsetneq V_1$. Ako je $V_2 \neq V$, promatramo kvocijentnu reprezentaciju π_{V/V_2}. Kako je dimenzija prostora V konačna, nakon $s \leq \dim V$ koraka dobivamo $V_s = V$.

Tvrdnja (b) je neposredna posljedica definicije potprostora V_i i tvrdnje (a).

Napokon, ako je $n_i = \dim V_i$ izaberemo bazu $\{v_1, \ldots, v_n\}$ od V takvu da je

$$V_i = span\,\{v_1, \ldots, v_{n_i}\}, \qquad i = 1, \ldots, s.$$

U odnosu na tu bazu svaki operator $\pi(x)$, $x \in \mathfrak{g}$, ima striktno gornje trokutastu matricu; štoviše, te matrice imaju na dijagonali redom nul$-$blokove formata $(n_i - n_{i-1}) \times (n_i - n_{i-1})$, $i = 1, \ldots, s$.

Budući da su ideali u Liejevoj algebri upravo invarijantni potprostori u odnosu na adjungiranu reprezentaciju, neposredna primjena teorema 2.1.4. daje sljedeći ključni rezultat o strukturi nilpotentnih Liejevih algebri:

Teorem 2.1.5. *Neka je* $\mathfrak{g} \neq \{0\}$ *nilpotentna Liejeva algebra. Stavimo*

$$\mathfrak{g}_0 = \{0\}, \qquad \mathfrak{g}_i = \{x \in \mathfrak{g};\ [x, \mathfrak{g}] \subseteq \mathfrak{g}_{i-1}\}, \quad i \geq 1.$$

(*a*) *Postoji* $s \leq \dim \mathfrak{g}$ *takav da je* $\mathfrak{g}_0 \subsetneq \mathfrak{g}_1 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{g}_s = \mathfrak{g}$.

(*b*) $\mathfrak{g}_i$ *su ideali u* $\mathfrak{g}$.

(*c*) *Za* $x_1, \ldots, x_s \in \mathfrak{g}$ *je* $(ad\, x_1) \cdots (ad\, x_s) = 0$.

(*d*) *Postoji baza u* $\mathfrak{g}$ *u odnosu na koju svi operatori* $ad\, x$, $x \in \mathfrak{g}$, *imaju striktno gornje trokutastu matricu.*

Uočimo da za proizvoljnu Liejevu algebru $\mathfrak{g}$ možemo induktivno definirati rastući niz ideala $\mathfrak{g}_i$, $i \in \mathbb{Z}_+$, kao u teoremu 2.1.5.:

$$\mathfrak{g}_0 = \{0\}, \qquad \mathfrak{g}_i = \{x \in \mathfrak{g};\ [x, \mathfrak{g}] \subseteq \mathfrak{g}_{i-1}\}, \quad i \in \mathbb{N}.$$

Tada je posebno

$$\mathfrak{g}_1 = \{x \in \mathfrak{g};\ [x, y] = 0\ \forall y \in \mathfrak{g}\} = Z(\mathfrak{g})$$

centar Liejeve algebre $\mathfrak{g}$. Nadalje, neka $\pi_i : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}/\mathfrak{g}_{i-1}$ kanonski epimorfizam. Tada je

$$\mathfrak{g}_i = \{x \in \mathfrak{g};\ \pi_i([x, y]) = 0\ \forall y \in \mathfrak{g}\} = \{x \in \mathfrak{g};\ [\pi_i(x), \pi_i(y)] = 0\ \forall y \in \mathfrak{g}\} =$$

$$= \{x \in \mathfrak{g};\ \pi_i(x) \in Z(\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_{i-1})\} = \pi_i^{-1}(Z(\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_{i-1})).$$

Dakle, $\mathfrak{g}_i$ je totalni invers u $\mathfrak{g}$ centra kvocijentne algebre $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_{i-1}$. Zbog toga se ovako definiran rastući niz ideala

$$\{0\} = \mathfrak{g}_0 \subseteq \mathfrak{g}_1 \subseteq \mathfrak{g}_2 \subseteq \cdots\cdots$$

zove se **centralni uzlazni niz** u algebri $\mathfrak{g}$. Očito se zbog konačne dimenzije taj niz stabilizira na nekom mjestu. Prema teoremu 2.1.5. za nilpotentnu Liejevu algebru $\mathfrak{g}$ postoji s takav da je $\mathfrak{g}_s = \mathfrak{g}$. S druge strane, ako pretpostavimo da za Liejevu algebru $\mathfrak{g}$ postoji s takav da je $\mathfrak{g}_s = \mathfrak{g}$, onda očito vrijedi tvrdnja (*c*) teorema 2.1.5. i, posebno, $(ad\, x)^s = 0\ \forall x \in \mathfrak{g}$. Zaključujemo da je Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ nilpotentna.

Definiramo sada za proizvoljnu Liejevu algebru $\mathfrak{g}$ tzv. **centralni silazni niz** ideala

$$\mathfrak{g}^0 = \mathfrak{g}, \qquad \mathfrak{g}^i = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^{i-1}] \quad i \geq 1.$$

Tada je očito $\mathfrak{g}^i \subseteq \mathfrak{g}^{i-1}$, dakle, radi se o padajućem nizu ideala. Ako je $\mathfrak{g}$ nilpotentna i $\mathfrak{g}_s = \mathfrak{g}$, onda vrijedi $\mathfrak{g}^i \subseteq \mathfrak{g}_{s-i}$. Doista,

$$\mathfrak{g}^1 = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_s] \subseteq \mathfrak{g}_{s-1},$$

a iz pretpostavke $\mathfrak{g}^i \subseteq \mathfrak{g}_{s-i}$ za neki i imamo korak indukcije

$$\mathfrak{g}^{i+1} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^i] \subseteq [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_{s-i}] \subseteq \mathfrak{g}_{s-i-1} = \mathfrak{g}_{s-(i+1)}.$$

Posebno, dobivamo da je $\mathfrak{g}^s \subseteq \mathfrak{g}_0 = \{0\}$, dakle, $\mathfrak{g}^s = \{0\}$. Obratno, pretpostavimo da je $\mathfrak{g}^s = \{0\}$ za neki s. Za $x \in \mathfrak{g}$ je $(ad\, x)\mathfrak{g}^i \subseteq \mathfrak{g}^{i+1}$, pa slijedi $(ad\, x)^s\mathfrak{g} = (ad\, x)^s\mathfrak{g}^0 \subseteq \mathfrak{g}^s = \{0\}$. Dakle, $(ad\, x)^s = 0$ $\forall x \in \mathfrak{g}$, pa zaključujemo da je Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ nilpotentna. Time smo dokazali:

Teorem 2.1.6. *Za Liejevu algebru $\mathfrak{g}$ sljedeća su tri svojstva međusobno ekvivalentna:*

(a) *Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ je nilpotentna.*

(b) *Postoji $p \in \mathbb{N}$ takav da je $\mathfrak{g}_p = \mathfrak{g}$.*

(c) *Postoji $q \in \mathbb{N}$ takav da je $\mathfrak{g}^q = \{0\}$.*

Korolar 2.1.7. *Neka je $\mathfrak{g}$ Liejeva algbera takva da je kvocijentna Liejeva algebra $\mathfrak{g}/Z(\mathfrak{g})$ nilpotentna. Tada je i Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ nilpotentna.*

Zadatak 2.1.1. *Dokažite korolar 2.1.7.*

Uputa: Koristite karakterizaciju (b) u teoremu 2.1.6. za nilpotentnost Liejeve algebre. Druga je mogućnost, da dokažete da za $x \in \mathfrak{g}$ iz nilpotentnosti operatora $ad_{\mathfrak{g}/Z(\mathfrak{g})}(x + Z(\mathfrak{g}))$ slijedi nilpotentnost operatora $ad_{\mathfrak{g}}\, x$.

Korolar 2.1.8. *Ako je $\mathfrak{g} \neq \{0\}$ nilpotentna Liejeva algebra, onda je $Z(\mathfrak{g}) \neq \{0\}$.*

Dokaz: U protivnom se centralni uzlazni niz stabilizira na prvom koraku, tj. $\mathfrak{g}_j = \{0\}\ \forall j$, a to je nemoguće po karakterizaciji (b) u teoremu 2.1.6.

Dokažimo još jednu posljedicu Engelovog teorema 2.1.3.:

Korolar 2.1.9. *Neka je $\mathfrak{g} \neq \{0\}$ nilpotentna Liejeva algebra i neka je $\mathfrak{h}$ maksimalna prava Liejeva podalgebra od $\mathfrak{g}$. Tada je $\mathfrak{h}$ ideal u $\mathfrak{g}$ kodimenzije* 1.

Dokaz: $\mathfrak{g}$ promatramo kao $\mathfrak{h}-$modul u odnosu na reprezentaciju $x \mapsto ad_{\mathfrak{g}}\, x$, $x \in \mathfrak{h}$. Kako je $\mathfrak{h}$ Liejeva podalgebra od $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$ je $\mathfrak{h}-$podmodul od $\mathfrak{g}$. Promatrajmo kvocijentni $\mathfrak{h}-$modul $\mathfrak{g}/\mathfrak{h} \neq \{0\}$ i označimo pripadnu kvocijentnu reprezentaciju od $\mathfrak{h}$ sa π :

$$\pi(x)(y + \mathfrak{h}) = [x, y] + \mathfrak{h}, \qquad x \in \mathfrak{h}, \quad y \in \mathfrak{g}.$$

Tada je operator $\pi(x)$ nilpotentan za svaki $x \in \mathfrak{h}$, pa po Engelovom teoremu postoji $\eta \in \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ različit od nule takav da je $\pi(x)\eta = 0\ \forall x \in \mathfrak{h}$. Neka je $y \in \mathfrak{g}$ predstavnik od η u $\mathfrak{g}$, tj. $\eta = y + \mathfrak{h}$. Tada $y \notin \mathfrak{h}$, jer je $\eta \neq 0$. Sada $\pi(x)\eta = 0\ \forall x \in \mathfrak{h}$ znači da je $[x, y] \in \mathfrak{h}$ za svaki $x \in \mathfrak{h}$. Odatle slijedi da je $\mathfrak{k} = Ky \dotplus \mathfrak{h}$ Liejeva podalgebra od $\mathfrak{g}$, a kako je po pretpostavci $\mathfrak{h}$ maksimalna prava podalgebra, zaključujemo da je $\mathfrak{k} = \mathfrak{g}$. Dakle, $\dim \mathfrak{h} = \dim \mathfrak{g} - 1$, a iz $[y, \mathfrak{h}] \subseteq \mathfrak{h}$ slijedi da je $\mathfrak{h}$ ideal u $\mathfrak{g}$.

Proučit ćemo sada nilpotentne ideale u proizvoljnoj Liejevoj algebri $\mathfrak{g}$. U tu svrhu najprije ćemo ustanoviti neka svojstva reprezentacija od $\mathfrak{g}$ i njihovih restrikcija na ideale u $\mathfrak{g}$.

Lema 2.1.10. *Neka je $\mathfrak{g}$ Liejeva algebra, π ireducibilna reprezentacija od $\mathfrak{g}$ na konačnodimenzionalnom vektorskom prostoru V i $\mathfrak{h}$ ideal u $\mathfrak{g}$. Ako je operator $\pi(y)$ nilpotentan za svaki $y \in \mathfrak{h}$, onda je $\mathfrak{h} \subseteq \operatorname{Ker} \pi$, tj. $\pi(y) = 0\ \forall y \in \mathfrak{h}$.*

Dokaz: Neka je

$$W = \{v \in V;\ \pi(y)v = 0\ \ \forall y \in \mathfrak{h}\}.$$

Prema Engelovom teoremu 2.1.3. vrijedi $W \neq \{0\}$. Nadalje, prostor W je $\pi-$invarijantan. Doista, za $w \in W$, $x \in \mathfrak{g}$ i $y \in \mathfrak{h}$ je $[y, x] \in \mathfrak{h}$ pa je $\pi(y)w = \pi([y, x])w = 0$. Slijedi

$$\pi(y)\pi(x)w = \pi([y, x])w + \pi(x)\pi(y)w = 0.$$

Kako je $y \in \mathfrak{h}$ bio proizvoljan, zaključujemo da je stvarno $\pi(x)w \in W$. Budući da je reprezentacija π ireducibilna, slijedi $W = V$, odnosno, $\pi(y) = 0\ \forall y \in \mathfrak{h}$.

Za proizvoljnu reprezentaciju π Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ na konačnodimenzionalnom vektorskom prostoru V **kompozicioni niz** je konačan niz $\pi-$invarijantnih potrostora $(V_0, V_1, \ldots, V_n)$ od V takvih da je

$$\{0\} = V_0 \subseteq V_1 \subseteq \cdots\cdots \subseteq V_n = V$$

i da su sve subkvocijentne reprezentacije $\pi_{V_i/V_{i-1}}$, $i = 1, \ldots, n$ ireducibilne. Očito je da za svaku konačnodimenzionalnu reprezentaciju postoji bar jedan kompozicioni niz.

Za svaku konačnodimenzionalnu reprezentaciju π definiramo simetričnu bilinearnu formu B_π na $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ sa

$$B_\pi(x, y) = \operatorname{Tr} \pi(x)\pi(y), \qquad x, y \in \mathfrak{g}.$$

B_π se zove **forma pridružena reprezentaciji** π.

Zadatak 2.1.2. *Dokažite da vrijedi* $B_\pi([x, y], z) = B_\pi(x, [y, z])\ \ \forall x, y, z \in \mathfrak{g}$.

Uputa: Iskoristite činjenicu da za operatore A, B na konačnodimenzionalnom vektorskom prostoru vrijedi $\operatorname{Tr} AB = \operatorname{Tr} BA$.

Lema 2.1.11. *Neka je $\mathfrak{g}$ Liejeva algebra, $\mathfrak{h}$ ideal u $\mathfrak{g}$, π reprezentacija od $\mathfrak{g}$ na konačnodimenzionalnom vektorskom prostoru V i $(V_0, V_1, \ldots, V_n)$ kompozicioni niz u V u odnosu na reprezentaciju π. Sljedeća su dva svojstva međusobno ekvivalentna:*

(*a*) *Za svaki $y \in \mathfrak{h}$ operator $\pi(y)$ je nilpotentan.*

(*b*) *Za svaki $y \in \mathfrak{h}$ i svaki $i \in \{1, \ldots, n\}$ vrijedi $\pi(y)V_i \subseteq V_{i-1}$.*

U tom slučaju je $B_\pi(x, y) = 0\ \ \forall x \in \mathfrak{g}$ i $\forall y \in \mathfrak{h}$.

Dokaz: Ako vrijedi (b) onda je očito $\pi(y)^n = 0$, dakle, vrijedi (a).

Pretpostavimo da vrijedi (a). Tada je operator $\pi_{V_i/V_{i-1}}(y)$ nilpotentan za svaki $y \in \mathfrak{h}$ i svaki $i \in \{1, \ldots, n\}$. Međutim, subkvocijentne reprezentacije $\pi_{V_i/V_{i-1}}$ su ireducibilne, pa po lemi 2.1.10. imamo $\pi_{V_i/V_{i-1}}(y) = 0\ \forall y \in \mathfrak{h}$, odnosno, vrijedi (b).

Pretpostavimo sada da su ispunjena svojstva (a) i (b). Za $x \in \mathfrak{g}$ i $y \in \mathfrak{h}$ je $\pi(y)V_i \subseteq V_{i-1}$, dakle, $\pi(x)\pi(y)V_i \subseteq \pi(x)V_{i-1} \subseteq V_{i-1}$. To pokazuje da je operator $\pi(x)\pi(y)$ nilpotentan za svaki $x \in \mathfrak{g}$ i svaki $y \in \mathfrak{h}$. Posebno, $B_\pi(x, y) = \operatorname{Tr} \pi(x)\pi(y) = 0$.

Propozicija 2.1.12. *Neka je $\mathfrak{g}$ Liejeva algebra, π reprezentacija od $\mathfrak{g}$ na konačnodimenzionalnom vektorskom prostoru $V \neq \{0\}$ i $(V_0, V_1, \ldots, V_n)$ kompozicioni niz u V u odnosu na π.*

(*a*) *U skupu svih ideala $\mathfrak{h}$ u $\mathfrak{g}$, takvih da je operator $\pi(y)$ nilpotentan za svaki $y \in \mathfrak{h}$, postoji najveći element $\mathfrak{n}_\pi$.*

(*b*) *Vrijedi $\mathfrak{n}_\pi = \{y \in \mathfrak{g};\ \pi(y)V_i \subseteq V_{i-1}\ \ \forall i \in \{1, \ldots, n\}\}$.*

(*c*) *Vrijedi $B_\pi(x, y) = \operatorname{Tr} \pi(x)\pi(y) = 0\ \ \forall x \in \mathfrak{g}$ i $\forall y \in \mathfrak{n}_\pi$.*

Dokaz: Stavimo

$$\mathfrak{n}_\pi = \{y \in \mathfrak{g};\ \pi(y)V_i \subseteq V_{i-1}\ \ \forall i \in \{1, \ldots, n\}\}.$$

Očito je $\mathfrak{n}_\pi$ potprostor od $\mathfrak{g}$. Nadalje, za $x \in \mathfrak{g}$ je $\pi(x)V_i \subseteq V_i$ za svaki i. Dakle, za $x \in \mathfrak{g}$ i $y \in \mathfrak{n}_\pi$ je

$$\pi(x)\pi(y)V_i \subseteq \pi(x)V_{i-1} \subseteq V_{i-1} \qquad \text{i} \qquad \pi(y)\pi(x)V_i \subseteq \pi(y)V_i \subseteq V_{i-1}.$$

Slijedi

$$\pi([x, y])V_i \subseteq \pi(x)\pi(y)V_i + \pi(y)\pi(x)V_i \subseteq V_{i-1},$$

a kako to vrijedi za svaki $i \in \{1, \ldots, n\}$, zaključujemo da je $[x, y] \in \mathfrak{n}_\pi$. To pokazuje da je $\mathfrak{n}_\pi$ ideal u Liejevoj algebri $\mathfrak{g}$. Sada iz leme 2.1.11. slijedi da je operator $\pi(y)$ nilpotentan za svaki $y \in \mathfrak{n}_\pi$. Također, iz iste leme slijedi da $\mathfrak{n}_\pi$ sadrži svaki ideal $\mathfrak{h}$ u $\mathfrak{g}$ sa svojstvom da je operator $\pi(y)$ nilpotentan za svaki $y \in \mathfrak{h}$ i da je $B_\pi(x, y) = 0 \ \forall x \in \mathfrak{g}$ i $\forall y \in \mathfrak{n}_\pi$.

Ideal $\mathfrak{n}_\pi$ iz propozicije 2.1.12. zove se **najveći ideal nilpotencije** reprezentacije π. Uočimo da jednakost (b) vrijedi za svaki kompozicioni niz reprezentacije π. Ideal $\mathfrak{n}_\pi$ sadrži jezgru $\operatorname{Ker}\pi$ reprezentacije π i jednak joj je ako je reprezentacija π potpuno reducibilna, ali ne i općenito. Nadalje, važno je uočiti da se $\mathfrak{n}_\pi$ sastoji od elemenata $y \in \mathfrak{g}$ sa svojstvom da je operator $\pi(y)$ nilpotentan, ali ne moraju svi takvi elementi biti sadržani u $\mathfrak{n}_\pi$. Ideal $\mathfrak{n}_\pi$ je samo najveći ideal sadržan u skupu (koji najčešće nije niti potprostor od $\mathfrak{g}$)

$$\mathcal{N}_\pi = \{y \in \mathfrak{g};\ \text{operator } \pi(y) \text{ je nilpotentan}\}.$$

Zadatak 2.1.3. *Neka je $\mathfrak{g}$ Liejeva algebra i $\mathfrak{h}$ ideal u $\mathfrak{g}$. Dokažite da je ideal $\mathfrak{h}$ je nilpotentna Liejeva algebra ako i samo ako je operator $ad_\mathfrak{g}\, y$ nilpotentan za svaki $y \in \mathfrak{h}$.*

Uputa: Uočite da za svaki $y \in \mathfrak{h}$ vrijedi $ad_\mathfrak{h}\, y = (ad_\mathfrak{g}\, y)|\mathfrak{h}$ i $(ad_\mathfrak{g}\, y)\mathfrak{g} \subseteq \mathfrak{h}$.

Zbog tvrdnje u prethodnom zadatku primjena propozicije 2.1.12. na adjungiranu reprezentaciju $ad_\mathfrak{g}$ Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ ima za posljedicu:

Propozicija 2.1.13. *Neka je $\mathfrak{g}$ Liejeva algebra i neka je $(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_1, \ldots, \mathfrak{g}_n)$ bilo koji kompozicioni niz prostora $\mathfrak{g}$ u odnosu na adjungiranu reprezentaciju $ad_\mathfrak{g}$.*

(*a*) *U skupu svih nilpotentnih ideala u Liejevoj algebri $\mathfrak{g}$ postoji najveći element $\mathfrak{n}$.*

(*b*) *Vrijedi $\mathfrak{n} = \{y \in \mathfrak{g};\ [y, \mathfrak{g}_i] \subseteq \mathfrak{g}_{i-1} \text{ za } i = 1, \ldots, n\}$.*

(*c*) *Vrijedi $B_{ad_\mathfrak{g}}(x, y) = \operatorname{Tr}(ad_\mathfrak{g}\, x)(ad_\mathfrak{g}\, y) = 0 \ \forall x \in \mathfrak{g}$ i $\forall y \in \mathfrak{n}$.*

Ideal $\mathfrak{n}$ iz propozicije 2.1.13. zove se **najveći nilpotentni ideal** u Liejevoj algebri $\mathfrak{g}$. Katkada se u literaturi taj ideal zove nilradikal od $\mathfrak{g}$, no uobičajenije je da se nilradikalom od $\mathfrak{g}$ zove presjek $\mathfrak{s}$ jezgara svih ireducibilnih konačnodimenzionalnih reprezentacija od $\mathfrak{g}$. Taj ideal $\mathfrak{s}$ je nilpotentan, kao takav je sadržan u $\mathfrak{n}$, a sadržan je i u najvećem idealu nilpotencije svake konačnodimenzionalne reprezentacije od $\mathfrak{g}$.

Zadatak 2.1.4. *Pronađite primjer Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ s najvećim nilpotentnim idealom $\mathfrak{n}$ takve da u kvocijentnoj Liejevoj algebri $\mathfrak{g}/\mathfrak{n}$ postoje nilpotentni ideali različiti od $\{0\}$.*

Forma $B_{ad_\mathfrak{g}}$ na $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ pridružena adjungiranoj reprezentaciji $ad_\mathfrak{g}$ obično se označava sa $B_\mathfrak{g}$. Ona se zove **Killingova forma** Liejeve algebre $\mathfrak{g}$.

Propozicija 2.1.14. *Neka je $\mathfrak{g}$ Liejeva algebra i $\mathfrak{n}$ njen najveći nilpotentni ideal. Za svaki automorfizam $\varphi \in Aut(\mathfrak{g})$ vrijedi $\varphi(\mathfrak{n}) = \mathfrak{n}$.*

Zadatak 2.1.5. *Dokažite propoziciju 2.1.14.*

Uputa: Dokažite da je $\varphi(\mathfrak{n})$ nilpotentni ideal u $\mathfrak{g}$.

2.2 Rješive Liejeve algebre. Radikal

Za Liejevu algebru $\mathfrak{g}$ ideal $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ zove se **izvedeni ideal**. To je prvi netrivijalni član centralnog silaznog niza definiranog u odjeljku 2.1. Definiramo sada još jedan silazni niz ideala: to je tzv. **izvedeni niz** $\left(\mathfrak{g}^{(k)}\right)_{k\in\mathbb{Z}_+}$ u Liejevoj algebri $\mathfrak{g}$ definiran induktivno sa

$$\mathfrak{g}^{(0)}=\mathfrak{g},\qquad \mathfrak{g}^{(k+1)}=\left[\mathfrak{g}^{(k)},\mathfrak{g}^{(k)}\right],\quad k\in\mathbb{Z}_+.$$

$\mathfrak{g}^{(k)}$ se zove $k-$**ti izvedeni ideal** Liejeve algebre $\mathfrak{g}$. Kažemo da je $\mathfrak{g}$ **rješiva Liejeva algebra** ako postoji $k\in\mathbb{Z}_+$ takav da je $\mathfrak{g}^{(k)}=\{0\}$. Naravno, za svaki $k\in\mathbb{Z}_+$ je $\mathfrak{g}^{(k)}\subseteq\mathfrak{g}^k$, pa prema karakterizaciji (c) u teoremu 2.1.6. vidimo da je svaka nilpotentna Liejeva rješiva.

Zadatak 2.2.1. *Dokažite da je Liejeva algebra $\mathfrak{t}(n,K)$ rješiva i da je Liejeva algebra $\mathfrak{n}(n,K)$ nilpotentna.*

Teorem 2.2.1. *Neka je $\mathfrak{g}$ Liejeva algebra, $\mathfrak{h}$ njena podalgebra i $\mathfrak{a}$ i $\mathfrak{b}$ ideali u $\mathfrak{g}$.*

(a) *Ako je Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ rješiva, onda su i Liejeve algebre $\mathfrak{h}$ i $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ rješive.*

(b) *Ako su Liejeve algebre $\mathfrak{a}$ i $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ rješive, onda je i Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ rješiva.*

(c) *Ako su ideali $\mathfrak{a}$ i $\mathfrak{b}$ rješivi, onda je i ideal $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}$ rješiv.*

Dokaz: (a) Očito je $\mathfrak{h}^{(k)}\subseteq\mathfrak{g}^{(k)}$, pa iz rješivosti $\mathfrak{g}$ slijedi rješivost $\mathfrak{h}$. Nadalje, neka je $\varphi:\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ kvocijentni epimorfizam, $\varphi(x)=x+\mathfrak{a},\ x\in\mathfrak{g}$. Indukcijom lako slijedi da je tada $(\mathfrak{g}/\mathfrak{a})^{(k)}=\varphi(\left(\mathfrak{g}^{(k)}\right)$ $\forall k\geq 0$, pa ponovo iz rješivosti $\mathfrak{g}$ slijedi rješivost $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$.

(b) Pretpostavimo da su $m,n\geq 0$ takvi da je $(\mathfrak{g}/\mathfrak{a})^{(n)}=\{0\}$ i $\mathfrak{a}^{(m)}=\{0\}$. Uz oznaku $\varphi:\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ kao u (a) imamo tada $\varphi\left(\mathfrak{g}^{(n)}\right)=(\mathfrak{g}/\mathfrak{a})^{(n)}=\{0\}$. Dakle, $\mathfrak{g}^{(n)}\subseteq\operatorname{Ker}\varphi=\mathfrak{a}$. Kako je očito $\left(\mathfrak{g}^{(j)}\right)^{(k)}=\mathfrak{g}^{(j+k)}$ $\forall j,k\geq 0$, slijedi

$$\mathfrak{g}^{(n+m)}=\left(\mathfrak{g}^{(n)}\right)^{(m)}\subseteq\mathfrak{a}^{(m)}=\{0\};$$

Dakle, Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ je rješiva.

(c) Standardni algebarski teorem (analogan teoremu 1.2.2.) daje izomorfizam $x+\mathfrak{a}\mapsto x+\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b}$, $x\in\mathfrak{b}$, Liejeve algebre $(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})/\mathfrak{a}$ na Liejevu algebru $\mathfrak{b}/(\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b})$. Kako je Liejeva algebra $\mathfrak{b}$ po pretpostavci rješiva, iz (a) slijedi da je i kvocijentna algebra $\mathfrak{b}/(\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b})$ rješiva. Dakle i $(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})/\mathfrak{a}$ je rješiva Liejeva algebra, a kako je i Liejeva algebra $\mathfrak{a}$ rješiva, iz (b) zaključujemo da je $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}$ rješiva Liejeva algebra.

Pomoću tvrdnje (c) teorema 2.2.1. zaključujemo da u svakoj Liejevoj algebri $\mathfrak{g}$ postoji najveći rješivi ideal, tj. rješivi ideal koji sadrži svaki drugi rješivi ideal u $\mathfrak{g}$. Taj ideal označavat ćemo sa $Rad(\mathfrak{g})$ i zvati **radikal Liejeve algebre** $\mathfrak{g}$.

Teorem 2.2.2. *Za svaku Liejevu algebru $\mathfrak{g}$ vrijedi $Rad\,(\mathfrak{g}/Rad(\mathfrak{g}))=\{0\}$.*

Dokaz: Neka je $\varphi:\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}/Rad(\mathfrak{g})$ kvocijentni epimorfizam i neka je $\mathfrak{a}=\varphi^{-1}\left(Rad\,(\mathfrak{g}/Rad(\mathfrak{g}))\right)$. To je ideal u Liejevoj algebri $\mathfrak{g}$. Tada je $\mathfrak{a}/Rad(\mathfrak{g})=\varphi(\mathfrak{a})=Rad\,(\mathfrak{g}/Rad(\mathfrak{g}))$ rješiva Liejeva algebra, a također je $Rad(\mathfrak{g})$ rješiva Liejeva algebra. Prema tvrdnji (c) propozicije 1.2.1. ideal $\mathfrak{a}$ je rješiva Liejeva algebra. No tada po definiciji radikala vrijedi $\mathfrak{a}\subseteq Rad(\mathfrak{g})$. Kako je $Rad(\mathfrak{g})=\operatorname{Ker}\varphi$, zaključujemo da je $Rad\,(\mathfrak{g}/Rad(\mathfrak{g}))=\varphi(\mathfrak{a})=\{0\}$.

Engelov teorem 2.1.3. generalizira se na rješive Liejeve algebre operatora:

Teorem 2.2.3. (**Sophus Lie**) *Neka je $V \neq \{0\}$ konačnodimenzionalan vektorski prostor i $\mathfrak{g}$ neka rješiva podalgebra Liejeve algebre $\mathfrak{gl}(V)$. Tada postoji vektor $v \in V$, $v \neq 0$, koji je svojstven za svaki operator $x \in \mathfrak{g}$.*

Dokaz ćemo provesti indukcijom u odnosu na $\dim \mathfrak{g}$. Baza indukcije $\dim \mathfrak{g} = 0$ je trivijalna. Pretpostavimo sada da je $\dim \mathfrak{g} \geq 1$ i da je teorem dokazan za sve konačnodimenzionalne vektorske prostore W i sve rješive Liejeve podalgebre od $\mathfrak{gl}(W)$ čija je dimenzija manja od $\dim \mathfrak{g}$. Dokaz ćemo provesti u nekoliko koraka.

(1) Budući da je Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ rješiva, vrijedi $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \neq \mathfrak{g}$. Neka je $\mathfrak{h}$ potprostor od $\mathfrak{g}$ kodimenzije 1 koji sadrži $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$. Tada je $[\mathfrak{g}, \mathfrak{h}] \subseteq [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \subseteq \mathfrak{h}$, dakle, $\mathfrak{h}$ je ideal. Kako je $\dim \mathfrak{h} = \dim \mathfrak{g} - 1 < < \dim \mathfrak{g}$, po pretpostavci indukcije postoji $v \in V$, $v \neq 0$, koji je svojstven vektor svih operatora $y \in \mathfrak{h}$. Za $y \in \mathfrak{h}$ označimo sa $\lambda(y) \in K$ pripadnu svojstvenu vrijednost:

$$yv = \lambda(y)v, \qquad y \in \mathfrak{h}.$$

Očito je $\lambda : \mathfrak{h} \to K$ linearan funkcional. Stavimo sada

$$W = \{w \in V;\ yw = \lambda(y)w\ \forall y \in \mathfrak{h}\}.$$

Tada je $W \neq \{0\}$ potprostor od V.

(2) Dokažimo sada da je potprostor W invarijantan s obzirom na sve operatore $x \in \mathfrak{g}$. Neka je $x \in \mathfrak{g}$ i $0 \neq w \in W$. Neka je n najmanji prirodan broj takav da su vektori $w, xw, \ldots, x^n w$ linearno zavisni. To naravno znači da su vektori $w, xw, \ldots, x^{n-1}w$ linearno nezavisni. Definiramo potprostore

$$W_0 = \{0\}, \qquad W_j = span_K\{w, xw, \ldots, x^{j-1}w\}, \quad j \in \mathbb{N}.$$

Tada očito vrijedi

$$\dim W_j = j \quad \text{za} \quad 0 \leq j \leq n \qquad \text{i} \qquad xW_{j-1} \subseteq W_j \quad \forall j \in \mathbb{N}.$$

Nadalje, kako je $x^n w$ linearna kombinacija vektora $w, xw, \ldots, x^{n-1}w$, lako se vidi da je $W_m = W_n$ $\forall m \geq n$. Posebno, potprostor W_n je invarijantan s obzirom na operator x.

Dokazat ćemo sada da vrijedi

$$yx^j w - \lambda(y)x^j w \in W_j \qquad \forall y \in \mathfrak{h} \quad \text{i} \quad \forall j \in \mathbb{Z}_+. \tag{2.1}$$

Dokaz provodimo indukcijom u odnosu na $j \in \mathbb{Z}_+$. Prije svega, za $j = 0$ po definiciji potprostora W imamo $yw = \lambda(y)w$, dakle, $yw - \lambda(y)w = 0 \in W_0$, odnosno, baza indukcije je dokazana. Provedimo sada korak indukcije. Neka je $j \geq 1$ i pretpostavimo da je dokazano da vrijedi

$$yx^{j-1}w - \lambda(y)x^{j-1}w \in W_{j-1} \qquad \forall y \in \mathfrak{h}.$$

Fiksirajmo sada bilo koji $y \in \mathfrak{h}$. Tada je i $[y, x] \in \mathfrak{h}$, pa imamo

$$yx^{j-1}w = \lambda(y)x^{j-1}w + u \quad \text{i} \quad [y,x]x^{j-1}w = \lambda([y,x])x^{j-1}w + v \quad \text{za neke } u, v \in W_{j-1}.$$

Odatle je

$$yx^j w = yxx^{j-1}w = xyx^{j-1}w + [y,x]x^{j-1}w = \lambda(y)x^j w + xu + \lambda([y,x])x^{j-1}w + v,$$

dakle,

$$yx^j w - \lambda(y)x^j w = xu + \lambda([y,x])x^{j-1}w + v \in W_j,$$

budući da je $W_{j-1} \subseteq W_j$ i $xW_{j-1} \subseteq W_j$. Time je korak indukcije proveden i (2.1) je dokazano.

Iz (2.1) slijedi da je svaki od potprostora W_j invarijantan s obzirom na svaki operator $y \in \mathfrak{h}$. Nadalje, (2.1) pokazuje da za $y \in \mathfrak{h}$ restrikcija $y|W_n$ ima u bazi $\{w, x(w), \ldots, x^{n-1}(w)\}$ gornje trokutastu matricu u kojoj su svi dijagonalni elementi jednaki $\lambda(y)$. Prema tome je

$$\mathrm{Tr}\ (y|W_n) = n\lambda(y) \qquad \forall y \in \mathfrak{h}.$$

Posebno, vrijedi

$$\mathrm{Tr}\ ([x,y]|W_n) = n\lambda([x,y]) \qquad \forall y \in \mathfrak{h}.$$

Međutim, potprostor W_n je invarijantan s obzirom na x i s obzirom na svaki $y \in \mathfrak{h}$; stoga je $[x,y]|W_n = [x|W_n, y|W_n]$, pa slijedi da je gornji trag jednak nuli. Budući da je po pretpostavci K polje karakteristike 0, slijedi $\lambda([x,y]) = 0\ \ \forall y \in \mathfrak{h}$. Stoga imamo

$$yxw = xyw - [x,y]w = x(\lambda(y)w) - \lambda([x,y])w = \lambda(y)xw \qquad \Longrightarrow \qquad xw \in W.$$

Kako su $w \in W$ i $x \in \mathfrak{g}$ bili proizvoljno odabrani, zaključujemo da je potprostor W invarijantan s obzirom na svaki operator $x \in \mathfrak{g}$.

(3) Za $z \in \mathfrak{g} \setminus \mathfrak{h}$ je $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \dotplus Kz$. Budući da je potprostor $W \neq \{0\}$ invarijatan s obzirom na operator z, postoje $v \in W$, $v \neq 0$, i $\alpha \in K$ takvi da je $zv = \alpha v$. Sada za bilo koji $x \in \mathfrak{g}$ imamo $x = y + \beta z$ za neke $y \in \mathfrak{h}$ i $\beta \in K$ pa slijedi

$$xv = yv + \beta zv = \lambda(y)v + \beta\alpha v = (\lambda(y) + \beta\alpha)v.$$

Dakle, vektor v je svojstven za sve operatore $x \in \mathfrak{g}$. Time je teorem 2.2.3. u potpunosti dokazan.

Zastava u konačnodimenzionalnom vektorskom prostoru V je konačan rastući niz potprostora

$$\{0\} = V_0 \subseteq V_1 \subseteq \cdots \subseteq V_n = V$$

takav da je $\dim V_j = j$ za svaki j.

Teorem 2.2.4. *Neka je V konačnodimenzionalan vektorski prostor i $\mathfrak{g}$ neka rješiva Liejeva podalgebra od $\mathfrak{gl}(V)$. Tada $\mathfrak{g}$ stabilizira neku zastavu u prostoru V. Drugim riječima, postoji baza prostora V u kojoj svi operatori $x \in \mathfrak{g}$ imaju gornje trokutaste matrice.*

Dokaz: Ovaj teorem slijedi neposredno iz teorema 2.2.3. indukcijom po $\dim V$. U koraku indukcije, uz oznake iz dokaza prethodnog teorema, s vektorskog prostora V prelazimo na kvocijentni prostor V/Kv. Kako je $\dim(V/Kv) = \dim V - 1 < \dim V$, po pretpostavci indukcije postoji zastava $(W_0, W_1, \ldots, W_{n-1})$ u prostoru V/Kv ($W_0 = \{0\}$, $W_{n-1} = V/Kv$) koju stabiliziraju svi operatori koje na kvocijentu V/Kv induciraju operatori $x \in \mathfrak{g}$. Neka je $\pi : V \to V/Kv$ kvocijentno preslikavanje. Stavimo $V_0 = \{0\}$ i $V_j = \pi^{-1}(W_{j-1})$ za $j = 1, \ldots, n$. Tada se lako vidi da $\mathfrak{g}$ stabilizira zastavu $(V_0, V_1, \ldots, V_n)$ u prostoru V.

Korolar 2.2.5. *Neka je $\mathfrak{g}$ rješiva Liejeva algebra i π njena reprezentacija na konačnodimenzionalnom vektorskom prostoru V. Tada u V postoji zastava invarijantna s obzirom na sve operatore $\pi(x)$, $x \in \mathfrak{g}$.*

Dokaz: Treba samo primijetiti da je Liejeva podalgebra $\mathrm{Im}\,\pi = \pi(\mathfrak{g})$ od $\mathfrak{gl}(V)$ izomorfna kvocijentnoj Liejevoj algebri $\mathfrak{g}/(\mathrm{Ker}\,\pi)$, a ova je prema tvrdnji (a) propozicije 1.2.1. rješiva.

Potprostor Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ koji je invarijantan s obzirom na sve operatore $ad\,x$, $x \in \mathfrak{g}$, je ideal u $\mathfrak{g}$. Dakle, iz korolara 2.2.5. primijenjenog na reprezentaciju ad neposredno slijedi

Korolar 2.2.6. *Neka je* $\mathfrak{g}$ *konačnodimenzionalna rješiva Liejeva algebra. Tada u* $\mathfrak{g}$ *postoje ideali* $\mathfrak{j}_k$, $k = 0, 1, \ldots, n = \dim \mathfrak{g}$, *takvi da je*

$$\{0\} = \mathfrak{j}_0 \subseteq \mathfrak{j}_1 \subseteq \cdots \subseteq \mathfrak{j}_n = \mathfrak{g} \qquad i \qquad \dim \mathfrak{j}_k = k \quad \forall k.$$

Teorem 2.2.7. *Liejeva algebra* $\mathfrak{g}$ *je rješiva ako i samo ako je njen izvedeni ideal* $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ *nilpotentna Liejeva algebra. U tom slučaju za svaki* $x \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ *operator* $ad\, x$ *je nilpotentan.*

Dokaz: Pretpostavimo najprije da je Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ rješiva i izaberimo zastavu ideala $(\mathfrak{j}_0, \mathfrak{j}_1, \ldots, \mathfrak{j}_n)$ kao u tvrdnji korolara 2.2.6. Uzmimo sada $x_k \in \mathfrak{j}_k \setminus \mathfrak{j}_{k-1}$ za $k = 1, \ldots, n$. Tada je $\{x_1, \ldots, x_n\}$ baza od $\mathfrak{g}$. Matrice operatora $ad\, x$, $x \in \mathfrak{g}$, pripadaju Liejevoj algebri $\mathfrak{t}(n, K)$. Slijedi da matrice operatora $ad\, y$, $y \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, pripadaju Liejevoj algebri $[\mathfrak{t}(n, K), \mathfrak{t}(n, K)] = \mathfrak{n}(n, K)$. To pokazuje da je $ad\, y = ad_{\mathfrak{g}}\, y$ nilpotentan operator za svaki $y \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$. Prema zadatku 2.1.3. slijedi da je izvedeni ideal $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ nilpotentna Liejeva algebra.

Obratno, pretpostavimo sada da je $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ nilpotentna Liejeva algebra. Tada je ujedno ideal $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ rješiva Liejeva algebra. Nadalje, kvocijentna Liejeva algebra $\mathfrak{g}/[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ je komutativna, dakle, također rješiva. Sada iz tvrdnje (b) teorema 2.2.1. slijedi da je Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ rješiva.

Svaki od sljedeća dva teorema zove se **Cartanov kriterij rješivosti**.

Teorem 2.2.8. *Neka je* V *konačnodimenzionalan vektorski prostor i* $\mathfrak{g}$ *Liejeva podalgebra od* $\mathfrak{gl}(V)$ *sa svojstvom*

$$\mathrm{Tr}\, xy = 0 \qquad \forall x \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \quad i \quad \forall y \in \mathfrak{g}.$$

Tada je Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ *rješiva.*

Dokaz: Primijenit ćemo lemu 1.3.13. na prostor V i na sljedeće potprostore X i Y od $\mathfrak{gl}(V)$:

$$X = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}], \qquad Y = \mathfrak{g}.$$

Tada uz oznaku iz leme 1.3.13. imamo

$$\mathfrak{a} = \{x \in \mathfrak{gl}(V);\ [x, \mathfrak{g}] \subseteq [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]\}.$$

Očito je $\mathfrak{g} \subseteq \mathfrak{a}$. Pretpostavka je da je $\mathrm{Tr}\, xy = 0$ $\forall x \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ i $\forall y \in \mathfrak{g}$. Želimo ustanoviti da je svaki operator $x \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ nilpotentan. Ta će činjenica slijediti iz leme 1.3.13. ako dokažemo da je $\mathrm{Tr}\, xy = 0$ $\forall x \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ i $\forall y \in \mathfrak{a}$ a ne samo da je $\mathrm{Tr}\, xy = 0$ $\forall x \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ i $\forall y \in \mathfrak{g}$.

Svaki $x \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ je suma elemenata oblika $[x_1, x_2]$, gdje su $x_1, x_2 \in \mathfrak{g}$. S druge strane, za $y \in \mathfrak{a}$ imamo

$$\mathrm{Tr}\, [x_1, x_2]y = \mathrm{Tr}\, x_1[x_2, y] = \mathrm{Tr}\, [x_2, y]x_1,$$

a to je jednako nuli jer po definiciji od $\mathfrak{a}$ je $[x_2, y] \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$. Time je dokazano da je svaki $x \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ nilpotentan. Sada iz teorema 1.2.6. slijedi da je Liejeva algebra $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ nilpotentna. Dakle, prema teoremu 2.2.7. Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ je rješiva.

U odjeljku 2.1. definirali smo **Killingovu formu** Liejeve algebre $\mathfrak{g}$: to je simetrična bilinearna forma $B_{\mathfrak{g}} : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to K$ dana sa

$$B_{\mathfrak{g}}(x, y) = \mathrm{Tr}\, (ad\, x)(ad\, y), \qquad x, y \in \mathfrak{g}.$$

Teorem 2.2.9. *Liejeva algebra* $\mathfrak{g}$ *rješiva je ako i samo ako vrijedi*

$$B_{\mathfrak{g}}(x, y) = 0 \qquad \forall x \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \quad i \quad \forall y \in \mathfrak{g}.$$

Dokaz: Primijenimo li teorem 2.2.8. na Liejevu podalgebru $ad\,\mathfrak{g}$ Liejeve algebre $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$, zaključujemo da je Liejeva algebra $ad\,\mathfrak{g}$ rješiva. Međutim, kako je $\mathrm{Ker}\,ad = Z(\mathfrak{g})$, Liejeva algebra $ad\,\mathfrak{g}$ izomorfna je kvocijentnoj Liejevoj algebri $\mathfrak{g}/Z(\mathfrak{g})$, dakle, ta je kvocijentna Liejeva algebra rješiva. Budući da je Liejeva algebra $Z(\mathfrak{g})$ komutativna, ona je i rješiva, pa po tvrdnji (b) teorema 2.2.1. slijedi da je i Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ rješiva.

Pretpostavimo sada da je $\mathfrak{g}$ rješiva Liejeva algebra. Primijenimo li korolar 2.2.5. na reprezentaciju $\pi = ad_{\mathfrak{g}}$ Liejeve algebre $\mathfrak{g}$, zaključujemo da postoji baza Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ u kojoj svi operatori $ad_{\mathfrak{g}}\,y,\ y \in \mathfrak{g}$, imaju gornje trokutaste matrice. Kako je $ad_{\mathfrak{g}}\,[\mathfrak{g},\mathfrak{g}] = [ad_{\mathfrak{g}}\,\mathfrak{g}, ad_{\mathfrak{g}}\,\mathfrak{g}]$, slijedi da svi operatori $ad_{\mathfrak{g}}\,x,\ x \in [\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ imaju u toj bazi striktno gornje trokutaste matrice. No tada za svaki $x \in [\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ i svaki $y \in \mathfrak{g}$ umnožak $(ad_{\mathfrak{g}}\,x)\,(ad_{\mathfrak{g}}\,y)$ ima u toj bazi striktno gornje trokutastu matricu, pa mu je trag jednak nuli. To znači da vrijedi

$$B_{\mathfrak{g}}(x,y) = 0 \qquad \forall x \in [\mathfrak{g},\mathfrak{g}] \quad \text{i} \quad \forall y \in \mathfrak{g}.$$

2.3 Proste i poluproste Liejeve algebre

Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ je **poluprosta** ako je njen radikal $Rad(\mathfrak{g}) = \{0\}$. To znači da je su poluproste Liejeve algebre one koje ne sadrže rješive ideale različite od $\{0\}$. Primijetimo da je prema teoremu 2.2.2. za svaku Liejevu algebru $\mathfrak{g}$ kvocijentna algebra $\mathfrak{g}/Rad(\mathfrak{g})$ poluprosta.

Propozicija 2.3.1. *Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ je poluprosta ako i samo ako ona ne sadrži nijedan komutativni ideal različit od $\{0\}$.*

Dokaz: Budući da su komutativni ideali ujedno rješivi ideali, jedan smjer je jasan: poluprosta Liejeva algebra ne sadrži nijedan komutativni ideal različit od $\{0\}$. Pretpostavimo sada da Liejeva algebra $\mathfrak{g} \neq \{0\}$ zadovoljava taj uvjet, tj. da ne sadrži nijedan komutativni ideal različit od $\{0\}$. Pretpostavimo da $\mathfrak{g}$ nije poluprosta. Tada ona sadrži rješivi ideal $\mathfrak{a} \neq \{0\}$. Neka je $k \in \mathbb{N}$ takav da je $\mathfrak{a}^{(k-1)} \neq \{0\}$ i $\mathfrak{a}^{(k)} = \{0\}$. Kako je $\left[\mathfrak{a}^{(k-1)}, \mathfrak{a}^{(k-1)}\right] = \mathfrak{a}^{(k)} = \{0\}$, ideal $\mathfrak{a}^{(k-1)} \neq \{0\}$ je komutativan suprotno pretpostavci. Ova kontradikcija pokazuje da je pretpostavka da $\mathfrak{g}$ nije poluprosta pogrešna. Time je i drugi smjer dokazan.

Liejevu algebra $\mathfrak{g}$ je **prosta** ako ona nije komutativna i ne sadrži nijedan netrivijalni ideal. Zahtjev nekomutativnosti znači da isključujemo slučajeve $\mathfrak{g} = \{0\}$ i $\dim \mathfrak{g} = 1$. Naravno, svaka je prosta Liejeva algebra poluprosta.

Važna karakterizacija poluprostote Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ dobiva se pomoću njene Killingove forme $B_\mathfrak{g}$. U tu svrhu dokažimo najprije osnovna svojstva Killingove forme:

Propozicija 2.3.2. *Za svaku Liejevu algebru $\mathfrak{g}$ vrijedi:*

(*a*) $B_\mathfrak{g}(\varphi(x), \varphi(x)) = B_\mathfrak{g}(x, y) \;\; \forall x, y \in \mathfrak{g}$ *i* $\forall \varphi \in Aut(\mathfrak{g})$.

(*b*) $B_\mathfrak{g}(Dx, y) + B_\mathfrak{g}(x, Dy) = 0 \;\; \forall x, y \in \mathfrak{g}$ *i* $\forall D \in Der(\mathfrak{g})$.

(*c*) $B_\mathfrak{g}([x, y], z) = B_\mathfrak{g}(x, [y, z]) \;\; \forall x, y, z \in \mathfrak{g}$.

(*d*) *Ako je $\mathfrak{a}$ ideal u $\mathfrak{g}$ onda je $B_\mathfrak{a} = B_\mathfrak{g}|\mathfrak{a} \times \mathfrak{a}$.*

Dokaz: (*a*) Za $\varphi \in Aut(\mathfrak{g})$ i $x, y \in \mathfrak{g}$ vrijedi

$$(ad\, \varphi(x))y = [\varphi(x), y] = \varphi\left([x, \varphi^{-1}y]\right) = \left(\varphi \circ (ad\, x) \circ \varphi^{-1}\right) y.$$

Dakle, vrijedi $ad\, \varphi(x) = \varphi \circ (ad\, x) \circ \varphi^{-1}$, pa imamo

$$B_\mathfrak{g}(\varphi(x), \varphi(y)) = \mathrm{Tr}\,(ad\, \varphi(x))(ad\, \varphi(y)) = \mathrm{Tr}\,(\varphi \circ (ad\, x)(ad\, y) \circ \varphi^{-1}) = \mathrm{Tr}\,(ad\, x)(ad\, y) = B_\mathfrak{g}(x, y).$$

(*b*) U dokazu propozicije 2.1.3. vidjeli smo da za derivaciju $D \in Der(\mathfrak{g})$ vrijedi $ad\, Dx = [D, ad\, x]$ za svaki $x \in \mathfrak{g}$. Stoga za proizvoljne $x, y \in \mathfrak{g}$ imamo redom

$$B_\mathfrak{g}(Dx, y) + B_\mathfrak{g}(x, Dy) = \mathrm{Tr}\,(ad\, Dx)(ad\, y) + \mathrm{Tr}\,(ad\, x)(ad\, Dy) =$$

$$= \mathrm{Tr}\,[D, ad\, x](ad\, y) + \mathrm{Tr}\,(ad\, x)[D, ad\, y] =$$

$$= \mathrm{Tr}\, D(ad\, x)(ad\, y) - \mathrm{Tr}\,(ad\, x)D(ad\, y) + \mathrm{Tr}\,(ad\, x)D(ad\, y) - \mathrm{Tr}\,(ad\, x)(ad\, y)D = 0,$$

jer za linearne operatore A, B, C je $\mathrm{Tr}\, ABC = \mathrm{Tr}\, BCA$.

Tvrdnja (*c*) slijedi neposrednom primjenom tvrdnje (*b*) na unutarnju derivaciju $D = ad\, y$.

(d) Uočimo sljedeću činjenicu iz linearne algebre: *ako je W potprostor konačnodimenzionalnog vektorskog prostora V i ako je $A : V \to V$ linearan operator čija je slika sadržana u W onda je* $\mathrm{Tr}\, A = \mathrm{Tr}\,(A|W)$. Doista, da to dokažemo dovoljno je izabrati bazu $\{e_1, \dots, e_k\}$ od W i dopuniti je do baze $\{e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_n\}$ od V. U toj bazi matrica operatora A ima matricu u kojoj je donjih $n-k$ redaka nula, a u gornjem lijevom kvadratu formata $k \times k$ je upravo matrica restrikcije $A|W$ u bazi $\{e_1, \dots, e_k\}$. Primijenimo sada tu činjenicu na situaciju $V = \mathfrak{g}$, $W = \mathfrak{a}$ i $A = (ad_{\mathfrak{g}}\, x)(ad_{\mathfrak{g}}\, y)$, gdje su x, y proizvoljni elementi ideala $\mathfrak{a}$. Kako je očito $(ad_{\mathfrak{g}}\, x)|\mathfrak{a} = ad_{\mathfrak{a}}\, x$, $(ad_{\mathfrak{g}}\, y)|\mathfrak{a} = ad_{\mathfrak{a}}\, y$ i $(ad_{\mathfrak{g}}\, x)(ad_{\mathfrak{g}}\, y)|\mathfrak{a} = ((ad_{\mathfrak{g}}\, x)|\mathfrak{a})\,((ad_{\mathfrak{g}}\, y)|\mathfrak{a})$, dobivamo

$$B_{\mathfrak{g}}(x, y) = \mathrm{Tr}\,(ad_{\mathfrak{g}}\, x)(ad_{\mathfrak{g}}\, y) = \mathrm{Tr}\,(ad_{\mathfrak{a}}\, x)(ad_{\mathfrak{a}}\, y) = B_{\mathfrak{a}}(x, y).$$

Najavljena karakterizacija poluprostote je:

Teorem 2.3.3. *Liejeva algebra $\mathfrak{g} \neq \{0\}$ je poluprosta ako i samo ako je njena Killingova forma $B_{\mathfrak{g}}$ nedegenerirana, tj. vrijedi implikacija*

$$B_{\mathfrak{g}}(x, y) = 0 \quad \forall y \in \mathfrak{g} \qquad \Longrightarrow \qquad x = 0.$$

Dokaz: Pretpostavimo da je $\mathfrak{g} \neq \{0\}$ poluprosta Liejeva algebra. Stavimo

$$\mathfrak{r} = \{x \in \mathfrak{g};\ B_{\mathfrak{g}}(x, y) = 0 \ \ \forall y \in \mathfrak{g}\}. \tag{2.2}$$

Treba dokazati da je $\mathfrak{r} = \{0\}$. $\mathfrak{r}$ je očito potprostor od $\mathfrak{g}$. Nadalje, iz tvrdnje (c) propozicije 2.3.2. slijedi da je $\mathfrak{r}$ ideal u $\mathfrak{g}$. Doista, ako su $x \in \mathfrak{r}$ i $y \in \mathfrak{g}$, onda za svaki $z \in \mathfrak{g}$ vrijedi

$$B_{\mathfrak{g}}([x, y], z) = B_{\mathfrak{g}}(x, [y, z]) = 0,$$

dakle, $[x, y] \in \mathfrak{r}$. Po definiciji $\mathfrak{r}$ je $B_{\mathfrak{g}}|\mathfrak{r} \times \mathfrak{g} = 0$, dakle i $B_{\mathfrak{g}}|\mathfrak{r} \times \mathfrak{r} = 0$, a to prema tvrdnji ($d$) propozicije 2.3.2. znači da je $B_{\mathfrak{r}} = 0$. No tada iz Cartanovog kriterija rješivosti (teorem 2.2.9.) slijedi da je ideal $\mathfrak{r}$ rješiv. Dakle, $\mathfrak{r} \subseteq Rad(\mathfrak{g})$. Ali Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ je po pretpostavci poluprosta, tj. $Rad(\mathfrak{g}) = \{0\}$, pa slijedi $\mathfrak{r} = \{0\}$.

Pretpostavimo sada da je Killingova forma $B_{\mathfrak{g}}$ nedegenerirana, tj. da je ideal $\mathfrak{r}$ definiran sa (2.2) jednak $\{0\}$. Neka je $\mathfrak{a}$ komutativni ideal u $\mathfrak{g}$. Za $x \in \mathfrak{a}$ i bilo koji $y \in \mathfrak{g}$ operator $(ad\, x)(ad\, y)$ ima sliku sadržanu u $\mathfrak{a}$, pa njegov kvadrat $((ad\, x)(ad\, y))^2$ ima sliku sadržanu u $[\mathfrak{a}, \mathfrak{a}] = \{0\}$. Dakle, operator $(ad\, x)(ad\, y)$ je nilpotentan, pa mu je trag jednak 0. Dakle, za svaki $x \in \mathfrak{a}$ vrijedi $B_{\mathfrak{g}}(x, y) = 0 \ \forall y \in \mathfrak{g}$. Time je dokazano da je $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{r}$. Ali po pretpostavci je $\mathfrak{r} = \{0\}$, pa je i $\mathfrak{a} = \{0\}$. Time smo dokazali da Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ ne sadrži nijedan komutativni ideal različit od $\{0\}$, a to prema propoziciji 2.3.1. znači da je Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ poluprosta.

Zadatak 2.3.1. *Uočite da drugi dio dokaza vrijedi i bez pretpostavke da je polje karakteristike* 0. *Razmatranjem primjera $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(3, K)/Z(\mathfrak{sl}(3, K))$ za polje K karakteristike* 3 *pokažite da obrnuta implikacija u teoremu 2.3.3. općenito ne vrijedi, tj. da je ta Liejeva algebra poluprosta, ali njena Killingova forma je degenerirana.*

Ako su $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2, \dots, \mathfrak{g}_k$ Liejeve algebre nad poljem K onda je očito da se na sljedeći način u Kartezijev produkt $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_2 \times \cdots \times \mathfrak{g}_k$ uvodi struktura Liejeve algebre:

$$[(x_1, x_2, \dots, x_k), (y_1, y_2, \dots, y_k)] = ([x_1, y_1], [x_2, y_2], \dots, [x_k, y_k]), \qquad x_j, y_j \in \mathfrak{g}_j, \quad j = 1, 2, \dots, k.$$

Ta se Liejeva algebra zove **direktni produkt Liejevih algebri** $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2, \dots, \mathfrak{g}_k$. Primijetimo da je tada za svaki j

$$\underbrace{\{0\} \times \cdots \times \{0\}}_{j-1} \times \mathfrak{g}_j \times \underbrace{\{0\} \times \cdots \times \{0\}}_{k-j} = \{(\underbrace{0, \dots, 0}_{j-1}, x, \underbrace{0, \dots, 0}_{k-j});\ x \in \mathfrak{g}_j\}$$

ideal u Liejevoj algebri $\mathfrak{g}$ koji je kao Liejeva algebra izomorfan $\mathfrak{g}_j$. Nadalje, kao vektorski prostor $\mathfrak{g}$ je direktna suma tih ideala.

Pretpostavimo sada da je $\mathfrak{g}$ Liejeva algebra i da su $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_k$ ideali u $\mathfrak{g}$ takvi da je

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{a}_1 \dotplus \mathfrak{a}_2 \dotplus \cdots \dotplus \mathfrak{a}_k.$$

Tada za $i \neq j$ imamo

$$[\mathfrak{a}_i, \mathfrak{a}_j] \subseteq \mathfrak{a}_i \cap \mathfrak{a}_j = \{0\}.$$

Stoga za $x_j, y_j \in \mathfrak{a}_j$, $j = 1, 2, \ldots, k$, vrijedi

$$[x_1 + x_2 + \cdots + x_k, y_1 + y_2 + \cdots + y_k] = [x_1, y_1] + [x_2, y_2] + \cdots + [x_k, y_k].$$

To pokazuje da je Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ izomorfna direktnom produktu $\mathfrak{a}_1 \times \mathfrak{a}_2 \times \cdots \times \mathfrak{a}_k$.

Propozicija 2.3.4. *Neka je $\mathfrak{g}$ poluprosta Liejeva algebra i neka je $\mathfrak{a}$ ideal u $\mathfrak{g}$.*

(a) *$\mathfrak{a}$ je poluprosta Liejeva algebra.*

(b) *$\mathfrak{a}^\perp = \{x \in \mathfrak{g};\ B_\mathfrak{g}(x, y) = 0\ \ \forall y \in \mathfrak{a}\}$ je ideal u $\mathfrak{g}$.*

(c) *Vrijedi $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \dotplus \mathfrak{a}^\perp$.*

Dokaz: (b) Za $x \in \mathfrak{a}^\perp$, $y \in \mathfrak{g}$ i $z \in \mathfrak{a}$ vrijedi $[y, z] \in \mathfrak{a}$, dakle, prema tvrdnji (c) propozicije 2.3.2. vrijedi

$$B_\mathfrak{g}([x, y], z) = B_\mathfrak{g}(x, [y, z]) = 0.$$

To pokazuje da je

$$[x, y] \in \mathfrak{a}^\perp \qquad \forall x \in \mathfrak{a}^\perp \quad \text{i} \quad \forall y \in \mathfrak{g}.$$

Dakle, potprostor $\mathfrak{a}^\perp$ je ideal u Liejevoj algebri $\mathfrak{g}$.

(c) Zbog nedegeneriranosti forme $B_\mathfrak{g}$ vrijedi $\dim \mathfrak{a} + \dim \mathfrak{a}^\perp = \dim \mathfrak{g}$. Nadalje, Cartanov kriterij (teorem 2.2.9.) primijenjen na Liejevu algebru $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{a}^\perp$ pokazuje da je ta Liejeva algebra rješiva. Međutim, $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{a}^\perp$ je ideal u $\mathfrak{g}$, a kako je Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ poluprosta, zaključujemo da je $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{a}^\perp = \{0\}$. Uz jednakost dimenzija to nam daje $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \dotplus \mathfrak{a}^\perp$.

(a) Iz tvrdnje (c) i iz nedegeneriranosti forme $B_\mathfrak{g}$ slijedi da je i njena restrikcija $B_\mathfrak{g}|\mathfrak{a} \times \mathfrak{a}$ nedegenerirana. No prema tvrdnji (d) propozicije 2.3.2. ta je restrikcija upravo Killingova forma $B_\mathfrak{a}$ Liejeve algebre $\mathfrak{a}$. Prema teoremu 2.3.3. Liejeva algebra $\mathfrak{a}$ je poluprosta.

Teorem 2.3.5. *Za poluprostu Liejevu algebru $\mathfrak{g}$ vrijedi $\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$.*

Dokaz: Stavimo

$$\mathfrak{a} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]^\perp = \{x \in \mathfrak{g},\ B_\mathfrak{g}(x, [y, z]) = 0\ \ \forall y, z \in \mathfrak{g}\}.$$

Prema tvrdnji (b) propozicije 2.3.4. $\mathfrak{a}$ je ideal u $\mathfrak{g}$. Nadalje, prema tvrdnji (d) propozicije 2.3.2. Killingova forma od $\mathfrak{a}$ je restrikcija $B_\mathfrak{g}|\mathfrak{a} \times \mathfrak{a}$. Stoga za $x \in \mathfrak{a}$ i $y \in [\mathfrak{a}, \mathfrak{a}] \subseteq [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ imamo

$$B_\mathfrak{a}(x, y) = B_\mathfrak{g}(x, y) = 0.$$

Sada po Cartanovom kriteriju rješivosti (teorem 2.2.9.) zaključujemo da je ideal $\mathfrak{a}$ rješiv. Kako je Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ poluprosta, slijedi $\mathfrak{a} = \{0\}$. Sada iz tvrdnje (c) propozicije 2.3.4. slijedi da je $\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$.

Korolar 2.3.6. *Neka je π reprezentacija poluproste Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ na konačnodimenzionalnom vektorskom prostoru V. Tada je $\pi(\mathfrak{g}) \subseteq \mathfrak{sl}(V) = \{A \in \mathfrak{gl}(V);\ \operatorname{Tr} A = 0\}$.*

Dokaz: Tvrdnja slijedi neposredno iz teorema 2.3.5.:

$$\pi(\mathfrak{g}) = \pi([\mathfrak{g},\mathfrak{g}]) = [\pi(\mathfrak{g}),\pi(\mathfrak{g})] \subseteq [\mathfrak{gl}(V),\mathfrak{gl}(V)] \subseteq \mathfrak{sl}(V).$$

Odatle očito slijedi:

Korolar 2.3.7. *Neka je π reprezentacija poluproste Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ na jednodimenzionalnom vektorskom prostoru V. Tada je $\pi(x) = 0$ $\forall x \in \mathfrak{g}$.*

Teorem 2.3.8. *Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ je poluprosta ako i samo ako je ona izomorfna direktnom produktu prostih Liejevih algebri. Ako je $\mathfrak{g} \neq \{0\}$ poluprosta Liejeva algebra i $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \dot{+} \mathfrak{g}_2 \dot{+} \cdots \dot{+} \mathfrak{g}_k$, pri čemu su $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2, \ldots, \mathfrak{g}_k$ prosti ideali u $\mathfrak{g}$ i ako je $\mathfrak{a} \neq \{0\}$ ideal u $\mathfrak{g}$ onda postoje $1 \leq i_1 < \cdots < i_\ell \leq k$ takvi da je $\mathfrak{a} = \mathfrak{g}_{i_1} \dot{+} \cdots \dot{+} \mathfrak{g}_{i_\ell}$. Posebno, $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2, \ldots, \mathfrak{g}_k$ su jedini prosti ideali u $\mathfrak{g}$.*

Dokaz: Pretpostavimo da je $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \dot{+} \mathfrak{g}_2 \dot{+} \cdots \dot{+} \mathfrak{g}_k$, pri čemu su $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2, \ldots, \mathfrak{g}_k$ prosti ideali u $\mathfrak{g}$. Neka je $x \in \mathfrak{g}$ takav da je $B_\mathfrak{g}(y,x) = 0$ $\forall y \in \mathfrak{g}$. Imamo

$$x = x_1 + x_2 + \cdots + x_k \quad \text{za neke} \quad x_1 \in \mathfrak{g}_1, x_2 \in \mathfrak{g}_2, \ldots, x_k \in \mathfrak{g}_k.$$

Za $j \in \{1,2,\ldots,k\}$ i $y \in \mathfrak{g}_j$ imamo $[y,\mathfrak{g}_i] = \{0\}$ za $i \neq j$, tj. $(ad\, y)|\mathfrak{g}_i = 0$. To pokazuje da je $B_\mathfrak{g}(y,x_i) = 0$ za $i \neq j$. Prema tome, imamo

$$B_{\mathfrak{g}_j}(y,x_j) = B_\mathfrak{g}(y,x_j) = \sum_{i=1}^{k} B_\mathfrak{g}(y,x_i) = B_\mathfrak{g}(y,x) = 0 \qquad \forall y \in \mathfrak{g}_j.$$

Kako je Liejeva algebra $\mathfrak{g}_j$ prosta, dakle i poluprosta, pomoću teorema 2.3.3. zaključujemo da je $x_j = 0$. Kako je $j \in \{1,2,\ldots,k\}$ bio proizvoljan, slijedi $x = 0$. Time je dokazano da je Killingova forma $B_\mathfrak{g}$ nedegenerirana, odnosno, po teoremu 2.3.3. Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ je poluprosta.

Pretpostavimo sada da je u toj situaciji $\mathfrak{a} \neq \{0\}$ ideal u $\mathfrak{g}$. Za bilo koji $j \in \{1,2,\ldots,k\}$ tada je $[\mathfrak{a},\mathfrak{g}_j]$ ideal u $\mathfrak{g}_j$, a kako je $\mathfrak{g}_j$ prosta Liejeva algebra, mora biti ili $[\mathfrak{a},\mathfrak{g}_j] = \mathfrak{g}_j$ ili $[\mathfrak{a},\mathfrak{g}_j] = \{0\}$. S druge strane, prema tvrdnji (a) propozicije 2.3.4. $\mathfrak{a}$ je poluprosta Liejeva algebra. Stoga je po teoremu 2.3.5. $\mathfrak{a} = [\mathfrak{a},\mathfrak{a}]$. S druge strane, očito je $[\mathfrak{a},\mathfrak{a}^\perp] = \{0\}$. Stoga je po tvrdnji (c) propozicije 2.3.4. $[\mathfrak{a},\mathfrak{g}] = [\mathfrak{a},\mathfrak{a} \dot{+} \mathfrak{a}^\perp] = [\mathfrak{a},\mathfrak{a}] = \mathfrak{a}$. Dakle,

$$\mathfrak{a} = [\mathfrak{a},\mathfrak{g}] = [\mathfrak{a},\mathfrak{g}_1 \dot{+} \mathfrak{g}_2 \dot{+} \cdots \dot{+} \mathfrak{g}_k] = [\mathfrak{a},\mathfrak{g}_1] \dot{+} [\mathfrak{a},\mathfrak{g}_2] \dot{+} \cdots \dot{+} [\mathfrak{a},\mathfrak{g}_k].$$

Kako je za svaki j ili $[\mathfrak{a},\mathfrak{g}_j] = \mathfrak{g}_j$ ili $[\mathfrak{a},\mathfrak{g}_j] = \{0\}$, slijedi da je za neke $1 \leq i_1 < \cdots < i_\ell \leq k$

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{g}_{i_1} \dot{+} \cdots \dot{+} \mathfrak{g}_{i_\ell}.$$

Pretpostavimo sada da je $\mathfrak{g} \neq \{0\}$ proizvoljna poluprosta Liejeva algebra. Ako $\mathfrak{g}$ nije prosta, u $\mathfrak{g}$ postoji ideal $\mathfrak{a}$ različit i od $\{0\}$ i od $\mathfrak{g}$. Tada je po propoziciji 2.3.4. $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \dot{+} \mathfrak{a}^\perp$ i ideali $\mathfrak{a}$ i $\mathfrak{a}^\perp$ su poluproste Liejeve algebre. Indukcijom po dim $\mathfrak{g}$ slijedi da postoje prosti ideali $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2, \ldots, \mathfrak{g}_k$ takvi da je $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \dot{+} \mathfrak{g}_2 \dot{+} \cdots \dot{+} \mathfrak{g}_k$.

Time je teorem u potpunosti dokazan.

Teorem 2.3.9. *Neka je $\mathfrak{g}$ poluprosta Liejeva algebra. Tada je svaka njena derivacija unutarnja, tj. $ad\,\mathfrak{g} = Der(\mathfrak{g})$.*

Dokaz: Kako je $\mathfrak{g}$ poluprosta, njena je Killingova forma $B = B_\mathfrak{g}$ nedegenerirana. Prema tvrdnji (a) propozicije 1.4.2. odatle slijedi da za svaki linearni funkcional $f \in \mathfrak{g}^*$ postoji jedinstven element $y \in \mathfrak{g}$ takav da je $f(x) = B(x,y)$ $\forall x \in \mathfrak{g}$. Neka je $D \in Der(\mathfrak{g})$. Definiramo linearan funkcional $f \in \mathfrak{g}^*$ sa $f(x) = \mathrm{Tr}\,(ad\,x)D$, $x \in \mathfrak{g}$. Neka je $y \in \mathfrak{g}$ takav da je $f(x) = B(x,y)$ $\forall x \in \mathfrak{g}$, tj. da je

$$\mathrm{Tr}\,(ad\,x)D = B(x,y) \qquad \forall x \in \mathfrak{g}.$$

Neka je E derivacija od $\mathfrak{g}$ definirana sa $E = D - ad\, y$. Tada je

$$\mathrm{Tr}\, E(ad\, x) = \mathrm{Tr}\, D(ad\, x) - \mathrm{Tr}\,(ad\, y)(ad\, x) = \mathrm{Tr}\,(ad\, x)D - B(x, y) = 0 \qquad \forall x \in \mathfrak{g}.$$

Prema dokazu propozicije 1.1.3. znamo da je $ad\, Ex = [E, ad\, x]$ $\forall x \in \mathfrak{g}$. Prema tome, za proizvoljne $x, z \in \mathfrak{g}$ imamo redom

$$B(Ex, z) = \mathrm{Tr}\,(ad\, Ex)(ad\, z) = \mathrm{Tr}\,[E, ad\, x](ad\, z) = \mathrm{Tr}\,(E(ad\, x)(ad\, z) - (ad\, x)E(ad\, z)) =$$

$$= \mathrm{Tr}\,(E(ad\, x)(ad\, z) - E(ad\, z)(ad\, x)) = \mathrm{Tr}\, E[ad\, x, ad\, z] = \mathrm{Tr}\, E(ad\,[x, z]) = 0.$$

Kako je forma B nedegenerirana, odatle slijedi $Ex = 0$. Budući da je $x \in \mathfrak{g}$ bio proizvoljan, zaključujemo da je $E = 0$, a to znači da je $D = ad\, y$.

Sjetimo se sada Jordanove dekompozicije linearnih operatora. Prema teoremu 1.3.8. za svaki linearan operator A na konačnodimenzionalnom vektorskom prostoru V postoje jedinstveni poluprost operator A_s i nilpotentan operator A_n takvi da je $A = A_s + A_n$ i $A_s A_n = A_n A_s$. Nadalje, prema teoremu 1.3.10. postoje polinomi P i Q takvi da je $P(0) = Q(0) = 0$, $A_s = P(A)$ i $A_n = Q(A)$.

Neka je sada $\mathfrak{g}$ poluprosta Liejeva algebra i $x \in \mathfrak{g}$. Reći ćemo da je element x **poluprost** ako je operator $ad\, x$ poluprost, a **nilpotentan** ako je operator $ad\, x$ nilpotentan. Za svaki $x \in \mathfrak{g}$ je $ad\, x = (ad\, x)_s + (ad\, x)_n$. Nadalje, prema propoziciji 1.3.12. operatori $(ad\, x)_s$ i $(ad\, x)_n$ su derivacije Liejeve algebre $\mathfrak{g}$. Sada iz teorema 2.3.9. slijedi da postoje $x_{(s)}, x_{(n)} \in \mathfrak{g}$ takvi da je $(ad\, x)_s = ad\, x_{(s)}$ i $(ad\, x)_n = ad\, x_{(n)}$. Nadalje, kako je $\mathrm{Ker}\, ad = Z(\mathfrak{g}) = \{0\}$, ti su elementi $x_{(s)}$ i $x_{(n)}$ jedinstveni. Napomenimo da je po definiciji tada $x_{(s)}$ poluprost elemet od $\mathfrak{g}$ i $x_{(n)}$ je nilpotentan element od $\mathfrak{g}$. Nadalje, vrijedi

$$ad\,[x_{(s)}, x_{(n)}] = [ad\, x_{(s)}, ad\, x_{(n)}] = [(ad\, x)_s, (ad\, x)_n] = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad [x_{(s)}, x_{(n)}] = 0.$$

$x_{(s)}$ se zove **poluprost dio** a $x_{(n)}$ **nilpotentan dio** elemeta $x \in \mathfrak{g}$. Pretpostavimo sada da su s poluprost i n nilpotentan element od $\mathfrak{g}$ takvi da je $x = s + n$ i $[s, n] = 0$. Tada je $ad\, s$ poluprost operator na $\mathfrak{g}$ i $ad\, n$ je nilpotentan operator na $\mathfrak{g}$ i vrijedi $ad\, x = ad\, s + ad\, n$ i $[ad\, s, ad\, n] = 0$. Slijedi $ad\, s = (ad\, x)_s = ad\, x_{(s)}$ i $ad\, n = (ad\, x)_n = ad\, x_{(n)}$, dakle, $s = x_{(s)}$ i $n = x_{(n)}$. Time smo dokazali:

Teorem 2.3.10. (**Jordan−Chevalleyeva dekompozicija**) *Neka je $\mathfrak{g}$ poluprosta Liejeva algebra i $x \in \mathfrak{g}$. Postoje jedinstven poluprost element $x_{(s)}$ i jedinstven nilpotentan element $x_{(n)}$ Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ takvi da je $x = x_{(s)} + x_{(n)}$ i $[x_{(s)}, x_{(n)}] = 0$. Nadalje, postoje polinomi P i Q takvi da je $P(0) = Q(0) = 0$, $ad\, x_{(s)} = P(ad\, x)$ i $ad\, x_{(n)} = Q(ad\, x)$.*

2.4 Weylov teorem potpune reducibilnosti

U ovom ćemo odjeljku promatrati konačnodimenzionalne reprezentacije poluprostih Liejevih algebri. Za reprezentaciju π Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ na konačnodimenzionalnom vektorskom prostoru V definiramo formu $B_\pi : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to K$ ovako:

$$B_\pi(x, y) = \operatorname{Tr} \pi(x)\pi(y), \qquad x, y \in \mathfrak{g}.$$

Očito je B_π bilinearna simetrična forma na $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$. Ona se zove **forma na $\mathfrak{g}$ pridružena reprezentaciji π**.

Propozicija 2.4.1. *Neka je $\mathfrak{g}$ Liejeva algebra, π njena reprezentacija na konačnodimenzionalnom vektorskom prostoru V i B_π pridružena forma na $\mathfrak{g}$.*

(a) *Forma B_π je* **invarijantna**, *tj.*

$$B_\pi([x, y], z) = B_\pi(x, [y, z]) \qquad \forall x, y, z \in \mathfrak{g}.$$

(b) *Ako je $\mathfrak{a}$ ideal u $\mathfrak{g}$, onda je i*

$$\mathfrak{a}^\pi = \{x \in \mathfrak{g};\ B_\pi(x, y) = 0\ \ \forall y \in \mathfrak{g}\}$$

ideal u $\mathfrak{g}$.

(c) *Ako je forma B_π nedegenerirana i ako je $\mathfrak{a}$ ideal u $\mathfrak{g}$, onda je ideal $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{a}^\pi$ komutativan.*

Dokaz: (a) Za $x, y, z \in \mathfrak{g}$ zbog svojstava traga umnoška linearnih operatora imamo redom:

$$B_\pi([x, y], z) = \operatorname{Tr} \pi([x, y])\pi(z) = \operatorname{Tr} \pi(x)\pi(y)\pi(z) - \operatorname{Tr} \pi(y)\pi(x)\pi(z) =$$

$$= \operatorname{Tr} \pi(x)\pi(y)\pi(z) - \operatorname{Tr} \pi(x)\pi(z)\pi(y) = \operatorname{Tr} \pi(x)\pi([y, z]) = B_\pi(x, [y, z]).$$

Tvrdnja (b) dokazuje se sasvim analogno tvrdnji (b) propozicije 2.3.4. Za $x \in \mathfrak{a}^\pi$, $y \in \mathfrak{g}$ i $z \in \mathfrak{a}$ prema tvrdnji (a) imamo $B_\pi([x, y], z) = B_\pi(x, [y, z]) = 0$. To pokazuje da je $[\mathfrak{a}^\pi, \mathfrak{g}] \subseteq \mathfrak{a}^\pi$, odnosno, potprostor $\mathfrak{a}^\pi$ je ideal u Liejevoj algebri $\mathfrak{g}$.

(c) Za $x, y \in \mathfrak{a} \cap \mathfrak{a}^\pi$ i svaki $z \in \mathfrak{g}$ imamo $[y, z] \in \mathfrak{a}$ i $x \in \mathfrak{a}^\pi$, pa zbog (a) vrijedi $B_\pi([x, y], z) = = B_\pi(x, [y, z]) = 0$. To pokazuje da je $[x, y] \in \mathfrak{g}^\pi\ \ \forall x, y \in \mathfrak{a} \cap \mathfrak{a}^\pi$. Kako je forma B_π po pretpostavci nedegenerirana, vrijedi $\mathfrak{g}^\pi = \{0\}$, a to znači da je ideal $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{a}^\pi$ komutativan.

Propozicija 2.4.2. *Neka je π vjerna konačnodimenzionalna reprezentacija poluproste Liejeve algebre $\mathfrak{g}$. Tada je forma pridružena forma B_π nedegenerirana.*

Dokaz: Prema tvrdnji (b) propozicije 2.4.1. $\mathfrak{g}^\pi$ je ideal u $\mathfrak{g}$. Neka je V prostor reprezentacije π. Budući da je reprezentacija π po pretpostavci vjerna, možemo pretpostaviti da je $\mathfrak{g} \subseteq \mathfrak{gl}(V)$ i da je π identiteta. Za $x, y \in \mathfrak{g}^\pi$ tada je

$$\operatorname{Tr} xy = B_\pi(x, y) = 0.$$

Sada iz Cartanovog kriterija rješivosti (teorem 2.2.8.) slijedi da je ideal $\mathfrak{g}^\pi$ rješiv. Kako je $\mathfrak{g}$ poluprosta, slijedi $\mathfrak{g}^\pi = \{0\}$, odnosno, forma B_π je nedegenerirana.

Propozicija 2.4.3. *Neka je π vjerna reprezentacija poluproste Liejeve algebre $\mathfrak{g} \neq \{0\}$ na konačnodimenzionalnom vektorskom prostoru V i B_π pridružena (nedegenerirana) forma. Neka je $\{x_1, \ldots, x_n\}$ baza od $\mathfrak{g}$ i neka je $\{y_1, \ldots, y_n\}$ njoj biortogonalna baza u odnosu na formu B_π, dakle, takva da je*

$$B_\pi(x_i, y_j) = \delta_{ij} \qquad \forall i, j \in \{1, \ldots, n\}.$$

Definiramo linearan operator $C_\pi : V \to V$ sa

$$C_\pi = \sum_{i=1}^{n} \pi(x_i)\pi(y_i).$$

(*a*) *Operator C_π neovisan je o izboru baze $\{x_1, \ldots, x_n\}$.*

(*b*) *Vrijedi $C_\pi \pi(x) = \pi(x) C_\pi$ $\forall x \in \mathfrak{g}$, tj. $C_\pi \in End_{\mathfrak{g}}(V)$.*

(*c*) $\operatorname{Tr} C_\pi = \dim \mathfrak{g}$.

(*d*) *Ako je reprezentacija π ireducibilna, onda je*

$$C_\pi = \frac{\dim \mathfrak{g}}{\dim V} I_V.$$

Dokaz: (*a*) Neka je $\{x'_1, \ldots, x'_n\}$ druga baza od $\mathfrak{g}$ i $\{y'_1, \ldots, y'_n\}$ njoj biortogonalna baza od $\mathfrak{g}$ u odnosu na formu B_π. Neka su $A = [\alpha_{ij}]_{i,j=1}^n$ i $B = [\beta_{ij}]_{i,j=1}^n$ matrice veze između parova tih baza:

$$x'_j = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} x_i, \qquad y'_j = \sum_{i=1}^{n} \beta_{ij} y_i, \qquad j = 1, \ldots, n.$$

Tada za bilo koje $j, k \in \{1, \ldots, n\}$ imamo

$$\delta_{jk} = B_\pi(x'_j, y'_k) = \sum_{i,\ell=1}^{n} \alpha_{ij}\beta_{\ell k} B_\pi(x_i, y_\ell) = \sum_{i,\ell=1}^{n} \alpha_{ij}\beta_{\ell k}\delta_{i\ell} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij}\beta_{ik}.$$

To pokazuje da je B transponirana matrica inverzne matrice od A. Stoga vrijedi i

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ji}\beta_{ki} = \delta_{jk} \qquad \forall j, k \in \{1, \ldots, n\}.$$

Slijedi

$$\sum_{i=1}^{n} \pi(x'_i)\pi(y'_i) = \sum_{i,j,k=1}^{n} \alpha_{ji}\beta_{ki}\pi(x_j)\pi(y_k) = \sum_{j,k=1}^{n} \delta_{jk}\pi(x_j)\pi(y_k) = \sum_{j=1}^{n} \pi(x_j)\pi(y_j) = C_\pi.$$

Time je dokazano da je definicija operatora C_π neovisna o izboru baze $\{x_1, \ldots, x_n\}$ od $\mathfrak{g}$.

(*b*) Neka je sada $x \in \mathfrak{g}$ i neka su λ_{ij} i μ_{ij} matrični elementi operatora $ad\,x$ u bazama $\{x_1, \ldots, x_n\}$ i $\{y_1, \ldots, y_n\}$:

$$[x, x_j] = \sum_{i=1}^{n} \lambda_{ij} x_i, \qquad [x, y_j] = \sum_{i=1}^{n} \mu_{ij} y_i, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Tada zbog tvrdnje (*a*) propozicije 2.4.1. imamo redom za bilo koje $i, k \in \{1, \ldots, n\}$:

$$\lambda_{ki} = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ji}\delta_{jk} = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ji} B_\pi(x_j, y_k) = B_\pi([x, x_i], y_k) =$$

$$= -B_\pi(x_i, [x, y_k]) = -\sum_{j=1}^{n} \mu_{jk} B_\pi(x_i, y_j) = -\sum_{j=1}^{n} \mu_{jk}\delta_{ij} = -\mu_{ik}.$$

Zadatak 2.4.1. *Dokažite da linearne operatore A, B, C na vektorskom prostoru V vrijedi*

$$[A, BC] = [A, B]C + B[A, C].$$

Formulu iz prethodnog zadatka iskoristit ćemo za operatore $A = \pi(x)$, $B = \pi(x_i)$ i $C = \pi(y_i)$. Zbog dokazane jednakosti $\mu_{ji} = -\lambda_{ij}$ imamo redom

$$[\pi(x), C_\pi] = \sum_{i=1}^{n}[\pi(x), \pi(x_i)\pi(y_i)] = \sum_{i=1}^{n}([\pi(x), \pi(x_i)]\pi(y_i) + \pi(x_i)[\pi(x), \pi(y_i)]) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}(\pi([x, x_i])\pi(y_i) + \pi(x_i)\pi([x, y_i])) = \sum_{i,j=1}^{n}(\lambda_{ij}\pi(x_j)\pi(y_i) + \mu_{ji}\pi(x_i)\pi(y_j)) =$$

$$= \sum_{i,j}\lambda_{ji}\pi(x_j)\pi(y_i) - \sum_{i,j=1}^{n}\lambda_{ij}\pi(x_i)\pi(y_j) = 0.$$

Time je dokazana tvrdnja (b).

(c) Imamo

$$\operatorname{Tr} C_\pi = \sum_{i=1}^{n}\operatorname{Tr}\pi(x_i)\pi(y_i) = \sum_{i=1}^{n}B_\pi(x_i, y_i) = n = \dim\mathfrak{g}.$$

(d) Zbog tvrdnje (c) Schurove leme (teorem 1.2.6.) iz dokazane tvrdnje (b) slijedi da je $C_\pi = \lambda I_V$ za neki $\lambda \in K$. Sada je prema tvrdnji (c)

$$\lambda \dim V = \operatorname{Tr}\lambda I_V = \operatorname{Tr} C_\pi = \dim\mathfrak{g} \quad \Longrightarrow \quad \lambda = \frac{\dim\mathfrak{g}}{\dim V}.$$

Operator C_π iz prethodnog teorema zove se **Casimirov operator reprezentacije** π. Ukoliko reprezentacija π nije vjerna, ali nije trivijalna, tj. $\pi \neq 0$, možemo je promatrati kao vjernu reprezentaciju poluproste Liejeve algebre $\mathfrak{g}/(\operatorname{Ker}\pi)$. Pripadni Casimirov operator ponovo označavamo sa C_π i zovemo Casimirovim operatorom reprezentacije π.

Zadatak 2.4.2. *Dokažite da su Liejeve algebre $\mathfrak{sl}(2, K)$ i $\mathfrak{sl}(3, K)$ proste i izračunajte Casimirove operatore*

(a) *adjungirane reprezentacije $ad_\mathfrak{g}$ Liejeve algebre $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2, K)$;*

(b) *standardne reprezentacije Liejeve algebre $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(3, K)$ na prostoru $M_{3,1}(K) \cong K^3$.*

Dokazat ćemo sada centralni rezultat ovog odjeljka, jedan od fundamentalnih rezultata teorije poluprostih Liejevih algebri, tzv. **Weylov teorem o potpunoj reducibilnosti:**

Teorem 2.4.4. *Svaka konačnodimenzionalna reprezentacija poluproste Liejeve algebre je potpuno reducibilna.*

Dokaz: Neka je π reprezentacija poluproste Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ na konačnodimenzionalnom vektorskom prostoru V i neka je W $\pi-$invarijantan potprostor. Treba dokazati da postoji $\pi-$invarijantan potprostor U od V takav da je $V = W \dotplus U$.

Pretpostavimo najprije da je W potprostor od V kodimenzije 1. Prema korolaru 2.3.7. tada je $\pi_{V/W}(x) = 0 \ \forall x \in \mathfrak{g}$, odnosno, vrijedi

$$\pi(x)V \subseteq W \qquad \forall x \in \mathfrak{g}. \tag{2.3}$$

Pretpostavimo dalje da je subreprezentacija $\sigma = \pi_W$ ireducibilna. Ako je $\sigma = 0$, tj. $\sigma(x) = 0$ $\forall x \in \mathfrak{g}$, onda iz (2.3) za proizvoljne $x, y \in \mathfrak{g}$ slijedi da je $\pi(x)\pi(y) = \sigma(x)\pi(y) = 0$. No tada je zbog teorema 2.3.5.

$$\pi(\mathfrak{g}) = \pi([\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]) = [\pi(\mathfrak{g}), \pi(\mathfrak{g})] = span\,\{\pi(x)\pi(y) - \pi(y)\pi(x);\ x, y \in \mathfrak{g}\} = \{0\},$$

pa je svaki direktni komplement od W u V $\pi-$invarijantan. Ukoliko je pak $\sigma \neq 0$, prema tvrdnji (d) propozicije 2.4.3. tada je

$$C_\pi|W = C_\sigma = \lambda I_W, \qquad \lambda = \frac{\dim\,\mathfrak{g}}{\dim\,W} \neq 0.$$

Kako je zbog (2.3) $C_\pi V \subseteq W$, zaključujemo da je

$$C_\pi V = \operatorname{Im} C_\pi = W.$$

Odatle slijedi da je $\operatorname{Ker} C_\pi$ jednodimenzionalan potprostor od V koji je direktni komplement od W. No taj je potprostor $\pi-$invarijantan zbog tvrdnje (c) propozicije 2.4.3.

U općem slučaju kad subreprezentacija $\sigma = \pi_W$ nije nužno ireducibilna dokaz egzistencije $\pi-$invarijantnog direktnog komplementa od W u V dokazujemo indukcijom u odnosu na dim V. Baza indukcije $(\dim, V = 1, W = \{0\})$ je trivijalna. Provedimo korak indukcije i pretpostavimo da je tvrdnja dokazana za prostore manje dimenzije (i dalje, naravno, uz pretpostavku da je potprostor W kodimenzije 1 u V). Ako subreprezentacija σ nije ireducibilna, neka je $T \neq \{0\}$ $\pi-$invarijantan potprostor od W takav da je subreprezentacija $\pi_T = \sigma_T$ ireducibilna; naravno, tada je i $T \neq W$. Promatrajmo sada kvocijentnu reprezentaciju $\pi_{V/T}$. Tada je W/T potprostor od V/T kodimenzije 1 koji je $\pi_{V/T}-$invarijantan. Kako je dim $V/T <$ dim V, po pretpostavci indukcije postoji jednodimenzionalni $\pi_{V/T}-$invarijantan potprostor Z' od V/T takav da je $V/T = W/T \dotplus Z'$. Neka je Z totalni invers od Z' u V u odnosu na kvocijentno preslikavanje $V \to V/T$:

$$Z = \{v \in V;\ v + T \in Z'\}.$$

Tada je potprostor Z od V očito $\pi-$invarijantan. Nadalje, vrijedi dim $Z/T = 1$ i $Z \cap W = T$. Zbog korolara 2.3.7. je $\pi(x)Z \subseteq T\ \ \forall x \in \mathfrak{g}$. Kako je dim $Z =$ dim $T + 1 <$ dim $W + 1 =$ dim V, po pretpostavci indukcije postoji jednodimenzionalan π_Z-invarijantan potprostor U od Z takav da je $Z = T \dotplus U$. No tada je U $\pi-$invarijantan potprostor od V i vrijedi $V = W \dotplus U$.

Napustimo sada dodatnu pretpostavku dim $V/W = 1$. Neka je ω reprezentacija Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ na prostoru $\mathfrak{gl}(V)$ svih linearnih operatora na V definirana sa

$$\omega(x)A = [\pi(x), A] = \pi(x)A - A\pi(x), \qquad x \in \mathfrak{g}, \quad A \in \mathfrak{gl}(V).$$

Uočimo sada sljedeća dva potprostora M i N od $\mathfrak{gl}(V)$:

$$M = \{A \in \mathfrak{gl}(V);\ AV \subseteq W \text{ i } A|W = \lambda I_W \text{ za neki } \lambda \in K\},$$

$$N = \{A \in \mathfrak{gl}(V);\ AV \subseteq W \text{ i } A|W = 0\}.$$

Očito je N potprostor od M i dim $M/N = 1$. Dokažimo da su ti potprostori $\omega-$invarijantni. Neka je $A \in M$ i neka je $\lambda \in K$ takav da je $A|W = \lambda I_W$. Za $x \in\in \mathfrak{g}$ tada je $\pi(x)W \subseteq W$. Stoga za proizvoljan $v \in V$ i $w \in W$ imamo

$$[\pi(x), A]v = \pi(x)Av - A\pi(x)v \in W$$

i

$$[\pi(x), A]w = \pi(x)Aw - A\pi(x)w = \lambda\pi(x)w - \lambda\pi(x)w = 0.$$

To znači da je $\omega(x)A = [\pi(x), A] \in N \ \ \forall A \in M$. To pokazuje da su i M i njegov potprostor N $\omega-$invarijantni. Primijenimo sada dokazano na reprezentaciju ω_M i ω_M-invarijantan potprostor N kodimenzije 1. Slijedi da postoji jednodimenzionalan $\omega-$invarijantan potprostor P od M takav da je $M = N \dotplus P$. Prema korolaru 2.3.7. tada je $\omega_P(x) = 0 \ \forall x \in \mathfrak{g}$. To znači da je $[\pi(x), A] = 0$ $\forall A \in P$ i $\forall x \in \mathfrak{g}$, odnosno, $P \subseteq End_{\mathfrak{g}}(V)$. Za $A \in P \setminus \{0\}$ je $AV \subseteq W$ i $A|W = \lambda I_W$ za neki $\lambda \neq 0$. Možemo $A \in P$ izabrati tako da je $\lambda = 1$, tj. da je $A|W = I_W$. No to znači da je A projektor prostora V na potprostor W. Tada za $U = \operatorname{Ker} A$ vrijedi $V = W \dotplus U$. Nadalje, potprostor $U = \operatorname{Ker} A$ je $\pi-$invarijantan jer je $A \in End_{\mathfrak{g}}(V)$, odnosno, jer je $\pi(x)A = A\pi(x) \ \ \forall x \in \mathfrak{g}$.

Važna je posljedica Weylovog teorema o potpunoj reducibilnosti da se za poluprostu Liejevu podalgebru $\mathfrak{g}$ od $\mathfrak{gl}(V)$ Jordan$-$Chevalleyeva dekompozicija elementa $x \in \mathfrak{g}$ podudara sa Jordanovom dekompozicijom linearnog operatora x :

Teorem 2.4.5. *Neka je V konačnodimenzionalan vektorski prostor i neka je $\mathfrak{g}$ poluprosta Liejeva podalgebra od $\mathfrak{gl}(V)$. Neka je $x \in \mathfrak{g}$ i neka su x_s i x_n poluprost i nilpotentan dio linearnog operatora x. Tada vrijedi $x_s = x_{(s)}$ i $x_n = x_{(n)}$ tj. $x = x_s + x_n$ je Jordan$-$Chevalleyeva dekompozicija od x u poluprostoj Liejevoj algebri $\mathfrak{g}$.*

Dokaz: Prvi nam je cilj dokazati da su $x_s, x_n \in \mathfrak{g}$. Kako je

$$\left(ad_{\mathfrak{gl}(V)}\, x\right) \mathfrak{g} = [x, \mathfrak{g}] \subseteq \mathfrak{g},$$

iz tvrdnje (c) teorema 1.3.8. (ili iz teorema 1.3.10.) slijedi da je i

$$\left(ad_{\mathfrak{gl}(V)}\, x\right)_s \mathfrak{g} \subseteq \mathfrak{g} \qquad \text{i} \qquad \left(ad_{\mathfrak{gl}(V)}\, x\right)_n \mathfrak{g} \subseteq \mathfrak{g}.$$

S druge strane, prema tvrdnji (c) propozicije 1.3.11. vrijedi

$$\left(ad_{\mathfrak{gl}(V)}\, x\right)_s = ad_{\mathfrak{gl}(V)}\, x_s \qquad \text{i} \qquad \left(ad_{\mathfrak{gl}(V)}\, x\right)_n = ad_{\mathfrak{gl}(V)}\, x_n.$$

Zaključujemo da vrijedi

$$\left(ad_{\mathfrak{gl}(V)}\, x_s\right) \mathfrak{g} \subseteq \mathfrak{g} \quad \text{i} \quad \left(ad_{\mathfrak{gl}(V)}\, x_n\right) \mathfrak{g} \subseteq \mathfrak{g}, \qquad \text{odnosno,} \quad [x_s, \mathfrak{g}] \subseteq \mathfrak{g} \quad \text{i} \quad [x_n, \mathfrak{g}] \subseteq \mathfrak{g}.$$

Drugim riječima, operatori $x_s, x_n \in \mathfrak{gl}(V)$ su elementi normalizatora

$$\mathfrak{n} = N_{\mathfrak{gl}(V)}(\mathfrak{g}) = \{y \in \mathfrak{gl}(V);\ [y, \mathfrak{g}] \subseteq \mathfrak{g}\}$$

Liejeve podalgebre $\mathfrak{g}$ u Liejevoj algebri $\mathfrak{gl}(V)$. Tvrdnja $x_s, x_n \in \mathfrak{g}$ bila bi dokazana kada bismo znali da je $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}$. Nažalost, to nikada nije istina: naime, po teoremu 2.3.5. je

$$\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \subseteq [\mathfrak{gl}(V), \mathfrak{gl}(V)] = \mathfrak{sl}(V),$$

a očito je jedinični operator $I = I_V$ element od $\mathfrak{n}$, ali ne i od $\mathfrak{sl}(V)$, dakle, ne i od $\mathfrak{g}$.

Označimo sada sa $Inv_{\mathfrak{g}}(V)$ skup svih $\mathfrak{g}-$invarijantnih potprostora od V. Za svaki $W \in Inv_{\mathfrak{g}}(V)$ definiramo

$$\mathfrak{a}_W = \{y \in \mathfrak{gl}(V);\ yW \subseteq W \ \text{ i } \ \operatorname{Tr}(y|W) = 0\}.$$

Lako se vidi da je $\mathfrak{a}_W$ Liejeva podalgebra od $\mathfrak{gl}(V)$. Nadalje, za svaki $W \in Inv_{\mathfrak{g}}(V)$ preslikavanje $x \mapsto x|W$, $x \in \mathfrak{g}$, je reprezentacija poluproste Liejeve algebre $\mathfrak{g}$, pa po korolaru 2.3.6. vrijedi $\operatorname{Tr}(x|W) = 0 \ \ \forall x \in \mathfrak{g}$. Prema tome,

$$\mathfrak{g} \subseteq \mathfrak{a}_W \qquad \forall W \in Inv_{\mathfrak{g}}(V).$$

Stavimo sada
$$\mathfrak{g}^* = \mathfrak{n} \cap \bigcap_{W \in Inv_{\mathfrak{g}}(V)} \mathfrak{a}_W.$$
Tada je $\mathfrak{g}^*$ Liejeva podalgebra od $\mathfrak{n}$ koja sadrži $\mathfrak{g}$. Ako je $W \in Inv_{\mathfrak{g}}(V)$, onda po već spomenutoj tvrdnji (c) teorema 1.3.8. (ili po teoremu 1.3.10.) vrijedi $x_sW \subseteq W$ i $x_nW \subseteq W$. Nadalje, operator x_n je nilpotentan, pa je i restrikcija $x_n|W$ nilpotentan operator i, posebno, $\mathrm{Tr}\,(x_n|W) = 0$. Kako je $\mathrm{Tr}\,(x|W) = 0$ i $x_s = x - x_n$, vrijedi i $\mathrm{Tr}\,(x_s|W) = 0$. Dakle, za svaki $W \in Inv_{\mathfrak{g}}(V)$ vrijedi $x_s, x_n \in \mathfrak{a}_W$. Zaključujemo da su $x_s, x_n \in \mathfrak{g}^*$.

Prema tome, dokaz tvrdnje $x_s, x_n \in \mathfrak{g}$ bit će potpun ako pokažemo da je $\mathfrak{g}^* = \mathfrak{g}$. U tu svrhu poslužit će nam Weylov teorem 2.4.4. o potpunoj reducibilnosti. Taj ćemo teorem primijeniti na dvije reprezentacije poluproste Liejeve algebre $\mathfrak{g}$: na restrikciju $ad_{\mathfrak{g}^*}|\mathfrak{g}$ adjungirane reprezentacije Liejeve algebre $\mathfrak{g}^*$ i na identičnu reprezentaciju $x \mapsto x$, $x \in \mathfrak{g}$, na prostoru V. Prije svega, $\mathfrak{g}$ je potprostor od $\mathfrak{g}^*$ koji je $ad_{\mathfrak{g}^*}|\mathfrak{g}-$invarijantan, pa postoji potprostor $\mathfrak{b}$ od $\mathfrak{g}^*$ takav da je $\mathfrak{g}^* = \mathfrak{g} \dot{+} \mathfrak{b}$ i da je $\mathfrak{b}$ invarijantan u odnosu na reprezentaciju $ad_{\mathfrak{g}^*}|\mathfrak{g}$, tj. da je $[\mathfrak{g}, \mathfrak{b}] \subseteq \mathfrak{b}$. Međutim, vrijedi i $[\mathfrak{g}, \mathfrak{b}] \subseteq [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^*] \subseteq [\mathfrak{g}, \mathfrak{n}] \subseteq \mathfrak{g}$. Kako je $\mathfrak{g} \cap \mathfrak{b} = \{0\}$, zaključujemo da je $[\mathfrak{g}, \mathfrak{b}] = \{0\}$, odnosno, subreprezentacija reprezentacije $ad_{\mathfrak{g}^*}|\mathfrak{g}$ na invarijantnom potprostoru $\mathfrak{b}$ je trivijalna. Neka je sada W bilo koji $\mathfrak{g}-$invarijantan potprostor od V, tj. $W \in Inv_{\mathfrak{g}}(V)$, takav da je pripadna subreprezentacija $x \mapsto x|W$, $x \in \mathfrak{g}$, ireducibilna. Neka je $y \in \mathfrak{b}$. Tada je $y \in \mathfrak{g}^*$, dakle, $b \in \mathfrak{a}_W$. Posebno, potprostor W invarijantan je s obzirom na operator y. Kako je $[\mathfrak{b}, \mathfrak{g}] = \{0\}$, iz tvrdnje (c) Schurove leme (teorem 1.2.6.) slijedi da je $y|W = \lambda I_W$ za neki $\lambda \in K$. Međutim, po definiciji je $\mathfrak{a}_W \supseteq \mathfrak{b}$, pa vrijedi $\mathrm{Tr}\,(y|W) = 0$, dakle, $\lambda \cdot \dim W = 0$. Budući da je K polje karakteristike 0, zaključujemo da je $\lambda = 0$. To pokazuje da je $y|W = 0$. To vrijedi za svaki $W \in Inv_{\mathfrak{g}}(V)$ takav da je reprezentacija $x \mapsto x|W$ od $\mathfrak{g}$ ireducibilna. Po Weylovom teoremu 2.2.4. V je direktna suma takvih potprostora W, pa zaključujemo da je $y = 0$. Kako je $y \in \mathfrak{b}$ bio proizvoljan, slijedi $\mathfrak{b} = \{0\}$, odnosno, $\mathfrak{g}^* = \mathfrak{g}$. Time je dokazana prva tvrdnja teorema 2.4.5.:
$$x \in \mathfrak{g} \qquad \Longrightarrow \qquad x_s, x_n \in \mathfrak{g}.$$

Imamo
$$ad_{\mathfrak{g}}\, x = ad_{\mathfrak{g}}\, x_s + ad_{\mathfrak{g}}\, x_n \qquad \text{i} \qquad [ad_{\mathfrak{g}}\, x_s, ad_{\mathfrak{g}}\, x_n] = ad_{\mathfrak{g}}\,[x_s, x_n] = 0.$$
Po tvrdnji (a) propozicije 1.3.11. operator $ad_{\mathfrak{gl}(V)}\, x_s$ je poluprost, pa je i njegova restrikcija $ad_{\mathfrak{g}}\, x = \left(ad_{\mathfrak{gl}(V)}\, x\right)|\mathfrak{g}$ poluprost operator. Na isti način iz tvrdnje (b) iste propozicije slijedi da je operator $ad_{\mathfrak{g}}\, x_n$ nilpotentan. Zbog jedinstvenosti Jordanove dekompozicije linearnog operatora $ad_{\mathfrak{g}}\, x$ slijedi
$$ad_{\mathfrak{g}}\, x_s = (ad_{\mathfrak{g}}\, x)_s = ad_{\mathfrak{g}}\, x_{(s)} \qquad \text{i} \qquad ad_{\mathfrak{g}}\, x_n = (ad_{\mathfrak{g}}\, x)_n = ad_{\mathfrak{g}}\, x_{(n)}.$$
Iz injektivnosti preslikavanja $ad_{\mathfrak{g}}$ slijedi $x_s = x_{(s)}$ i $x_n = x_{(n)}$.

Zbog teorema 2.4.5. poluprosti i nilpotentni dio elementa x poluproste Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ označavat ćemo sa x_s i x_n umjesto sa $x_{(s)}$ i $x_{(n)}$.

Teorem 2.4.6. *Neka je π konačnodimenzionalna reprezentacija poluproste Liejeve algebre $\mathfrak{g}$.*

(a) *Ako je element $x \in \mathfrak{g}$ poluprost, onda je operator $\pi(x)$ poluprost.*

(b) *Ako je element $x \in \mathfrak{g}$ nilpotentan, onda je operator $\pi(x)$ nilpotentan.*

(c) *Za svaki $x \in \mathfrak{g}$ je $\pi(x)_s = \pi(x_s)$ i $\pi(x)_n = \pi(x_n)$.*

Zadatak 2.4.3. *Dokažite teorem 2.4.6.*

Uputa: Uočite da je Liejeva podalgebra $\pi(\mathfrak{g})$ od $\mathfrak{gl}(V)$ izomorfna kvocijentnoj Liejevoj algebri $\mathfrak{g}/(\mathrm{Ker}\,\pi)$, dakle, poluprosta. Sada primijenite teorem 2.4.5. na tu poluprostu Liejevu podalgebru od $\mathfrak{gl}(V)$ za dokaz tvrdnje (c). Zatim iz tvrdnje (c) dokažite tvrdnje (a) i (b).

Zadatak 2.4.4. *Neka je $\mathfrak{g}$ poluprosta Liejeva algebra i $D \in Der(\mathfrak{g})$. Za $x \in \mathfrak{g}$ definiramo linearan operator $\pi(x)$ na prostoru $K \times \mathfrak{g}$ sa*

$$\pi(x)(\lambda, y) = (0, \lambda Dx + [x, y]), \qquad \lambda \in K, \quad x, y \in \mathfrak{g}.$$

Dokažite da je π reprezentacija Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ na prostoru $K \times \mathfrak{g}$ i da je $\{0\} \times \mathfrak{g}$ $\pi-$invarijantni potprostor od $K \times \mathfrak{g}$. Primijenite Weylov teorem o potpunoj reducibilnosti da dokažete da je $D \in ad_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g})$, tj. da na drugi način dokažete teorem 2.3.9.

Poglavlje 3

TEŽINE I KORIJENI

3.1 Nilpotentne Liejeve algebre operatora

Neka je V konačnodimenzionalan vektorski prostor (nad poljem algebarski zatvorenim poljem K karakteristike 0) i neka je x linearan operator na prostoru V. Prisjetimo se nekih rezultata iz odjeljka 1.3. Prije svega, imamo Fittingovu dekompoziciju prostora V u odnosu na operator x (teorem 1.3.2.):

$$V = V_{(0)}(x) \dot{+} V_*(x), \qquad V_{(0)}(x) = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}_+} \operatorname{Ker} x^k, \quad V_*(x) = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \operatorname{Im} x^k. \tag{3.1}$$

Pri tome je naravno za neki $p \in \mathbb{N}$ $V_{(0)}(x) = \operatorname{Ker} x^p$ i $V_*(x) = \operatorname{Im} x^p$.

Nadalje, za $\lambda \in Sp(x)$ definirali smo pripadni svojstveni potprostor i korijenski potprostor od V u odnosu na operator x :

$$V_\lambda(x) = \{v \in V;\ xv = \lambda v\} = \operatorname{Ker}(\lambda I - x) \qquad \text{i} \qquad V_{(\lambda)}(x) = V_{(0)}(\lambda I - x) = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}_+} \operatorname{Ker}(\lambda I - x)^k.$$

Korijenski potprostori $V_{(\lambda)}(x)$ čine direktnu sumu i ta je direktna suma jednaka čitavom prostoru V :

$$V = \sum_{\lambda \in Sp(x)} \dot{+} V_{(\lambda)}(x). \tag{3.2}$$

U ovom ćemo odjeljku generalizirati te rezultate na slučaj kad imamo ne samo jedan operator nego Liejevu podalgebru $\mathfrak{g}$ od $\mathfrak{gl}(V)$ koja je nilpotentna.

Neka je $\mathfrak{g}$ Liejeva podalgebra od $\mathfrak{gl}(V)$. Ako je $v \in V \setminus \{0\}$ svojstven vektor svih operatora $x \in \mathfrak{g}$, onda za neku funkciju $\alpha : \mathfrak{g} \to K$ vrijedi

$$xv = \alpha(x)v \qquad \forall x \in \mathfrak{g}.$$

Tada je α jednodimenzionalna reprezentacija od $\mathfrak{g}$, a to znači da je α linearan funkcional na $\mathfrak{g}$ i da je $\alpha([x, y]) = \alpha(x)\alpha(y) - \alpha(y)\alpha(x) = 0\ \forall x, y \in \mathfrak{g}$, odnosno, $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \subseteq \operatorname{Ker} \alpha$. Za svaki takav linearan funkcional α skup svih pripadnih svojstvenih vektora označavamo sa

$$V_\alpha(\mathfrak{g}) = \{v \in V;\ xv = \alpha(x)v\ \forall x \in \mathfrak{g}\}.$$

Ako je $V_\alpha(\mathfrak{g}) \neq \{0\}$, linearni funkcional α zove se **težina** $\mathfrak{g}-$modula V, a $V_\alpha(\mathfrak{g})$ se zove **težinski potprostor** od V. Naravno, težinski potprostor je $\mathfrak{g}-$podmodul. Oponašamo sada situaciju s jednim operatorom na prostoru V pa definiramo pripadni **korijenski potprostor**

$$V_{(\alpha)}(\mathfrak{g}) = \{v \in V;\ \forall x \in \mathfrak{g}\ \exists k \in \mathbb{N} \text{ takav da je } (x - \alpha(x)I)^k v = 0\}.$$

U stvari, $V_{(\alpha)}(\mathfrak{g})$ je unija rastućeg niza $\mathfrak{g}-$podmodula $\left(V_\alpha^k(\mathfrak{g})\right)_{k\in\mathbb{Z}_+}$ definiranih sa

$$V_\alpha^k(\mathfrak{g}) = \{v \in V;\ (x-\alpha(x)I)^k v = 0\ \forall x \in \mathfrak{g}\} = \bigcap_{x\in\mathfrak{g}} \mathrm{Ker}\ \left[(x-\alpha(x)I)^k\right],$$

tj.

$$V_\alpha^0(\mathfrak{g}) = \{0\}, \quad V_\alpha^1(\mathfrak{g}) = V_\alpha(\mathfrak{g}), \quad V_\alpha^{k+1}(\mathfrak{g}) = \{v \in V;\ (x-\alpha(x)I)v \in V_\alpha^k(\mathfrak{g})\ \forall x \in \mathfrak{g}\}.$$

Prema tome, svaki $V_{(\alpha)}(\mathfrak{g})$ je $\mathfrak{g}-$podmodul od V.

Imamo sljedeću generalizaciju tvrdnje (a) leme 1.3.1.:

Lema 3.1.1. *Neka je $\mathfrak{g}$ Liejeva podalgebra od $\mathfrak{gl}(V)$ i $\alpha \in \mathfrak{g}^*$. Ako za neki $k \in \mathbb{Z}_+$ vrijedi $V_\alpha^k(\mathfrak{g}) = V_\alpha^{k+1}(\mathfrak{g})$ onda je $V_\alpha^k(\mathfrak{g}) = V_\alpha^m(\mathfrak{g})\ \forall m \geq k$.*

Dokaz: Dovoljno je dokazati da iz $V_\alpha^k(\mathfrak{g}) = V_\alpha^{k+1}(\mathfrak{g})$ slijedi $V_\alpha^{k+1}(\mathfrak{g}) = V_\alpha^{k+2}(\mathfrak{g})$. Ustvari, zbog toga što je $V_\alpha^{k+1}(\mathfrak{g}) \subseteq V_\alpha^{k+2}(\mathfrak{g})$ dovoljno je dokazati inkluziju $V_\alpha^{k+2}(\mathfrak{g}) \subseteq V_\alpha^{k+1}(\mathfrak{g})$. Dakle, neka je $v \in V_\alpha^{k+2}(\mathfrak{g})$. Tada je $(x-\alpha(x))v \in V_\alpha^{k+1}(\mathfrak{g})\ \forall x \in \mathfrak{g}$. Po pretpostavci je $V_\alpha^{k+1}(\mathfrak{g}) = V_\alpha^k(\mathfrak{g})$, pa imamo $(x-\alpha(x))v \in V_\alpha^k(\mathfrak{g})$, a to znači da je $v \in V_\alpha^{k+1}(\mathfrak{g})$. Time je dokazana inkluzija $V_\alpha^{k+2}(\mathfrak{g}) \subseteq V_\alpha^{k+1}(\mathfrak{g})$.

Lema 3.1.2. *Za Liejevu podalgebru $\mathfrak{g}$ od $\mathfrak{gl}(V)$ i $\alpha \in \mathfrak{g}^*$ vrijedi*

$$V_{(\alpha)}(\mathfrak{g}) = \bigcap_{x\in\mathfrak{g}} V_{(\alpha(x))}(x).$$

Dokaz: Doista

$$V_{(\alpha)}(\mathfrak{g}) = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}_+} V_\alpha^k(\mathfrak{g}) = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}_+}\bigcap_{x\in\mathfrak{g}} \mathrm{Ker}\ \left[(x-\alpha(x)I)^k\right] = \bigcap_{x\in\mathfrak{g}}\bigcup_{k\in\mathbb{Z}_+} \mathrm{Ker}\ \left[(x-\alpha(x)I)^k\right] = \bigcap_{x\in\mathfrak{g}} V_{(\alpha(x))}(x).$$

Promatrat ćemo sada slučaj $\alpha = 0$. To će razmatranje u slučaju nilpotentne Liejeve podalgebre $\mathfrak{g}$ od $\mathfrak{gl}(V)$ voditi na generalizaciju Fittingove dekompozicije (3.1) prostora V u odnosu na jedan linearan operator. Definiramo induktivno sljedeći padajući niz $\mathfrak{g}-$podmodula $\left(V_*^k(\mathfrak{g})\right)_{k\in\mathbb{Z}_+}$ od V :

$$V_*^0(\mathfrak{g}) = V, \quad V_*^{k+1}(\mathfrak{g}) = span\,\{xv;\ x \in \mathfrak{g},\ v \in V_*^k(\mathfrak{g})\}, \quad k \in \mathbb{Z}_+.$$

Dakle,

$$V_*^0(\mathfrak{g}) = V, \qquad V_*^k(\mathfrak{g}) = span\,\{x_1 \cdots x_k v;\ x_1,\ldots,x_k \in \mathfrak{g},\ v \in V\}, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{3.3}$$

I tvrdnja (b) leme 1.3.1. se generalizira:

Lema 3.1.3. *Neka je $\mathfrak{g}$ Liejeva podalgebra od $\mathfrak{gl}(V)$. Ako za neki $k \in \mathbb{Z}_+$ vrijedi $V_*^k(\mathfrak{g}) = V_*^{k+1}(\mathfrak{g})$, onda je $V_*^k(\mathfrak{g}) = V_*^m(\mathfrak{g})\ \forall m \geq k$.*

Dokaz: Kao kod leme 3.1.1. dovoljno je dokazati da iz jednakosti $V_*^k(\mathfrak{g}) = V_*^{k+1}(\mathfrak{g})$ slijedi jednakost $V_*^{k+1}(\mathfrak{g}) = V_*^{k+2}(\mathfrak{g})$. No to je očigledno:

$$V_*^{k+1}(\mathfrak{g}) = span\,\{xv;\ x \in \mathfrak{g},\ v \in V_*^k(\mathfrak{g})\} = span\,\{xv;\ x \in \mathfrak{g},\ v \in V_*^{k+1}(\mathfrak{g})\} = V_*^{k+2}(\mathfrak{g}).$$

Za Liejevu podalgebru $\mathfrak{g}$ od $\mathfrak{gl}(V)$ definiramo

$$V_*(\mathfrak{g}) = \bigcap_{k\in\mathbb{Z}_+} V_*^k(\mathfrak{g}).$$

Naravno, zbog konačnodimenzionalnosti je $V_*(\mathfrak{g}) = V_*^k(\mathfrak{g})$ za neki k.

Za generalizaciju Fittingove dekompozicije na nilpotentne Liejeve algebre operatora trebaju nam sljedeće dvije leme.

Lema 3.1.4. *Za bilo koje $x, y \in \mathfrak{gl}(V)$ i bilo koji $n \in \mathbb{Z}_+$ vrijede sljedeće dvije jednakosti:*

$$x^n y = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} [(ad\, x)^j y] x^{n-j}, \tag{3.4}$$

$$y x^n = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} x^{n-j} [(ad\, x)^j y]. \tag{3.5}$$

Dokaz se provodi indukcijom po $n \in \mathbb{Z}_+$. Baza indukcije $n = 0$ je trivijalna za obje tvrdnje. Pretpostavimo da za neki $n \in \mathbb{Z}_+$ vrijedi (3.4). Sada ćemo jednakost

$$xab = abx + [x, ab] = abx + [x, a]b + a[x, b] \qquad \forall x, a, b \in \mathfrak{gl}(V)$$

primijeniti na slučaj $a = (ad\, x)^j y$ i $b = x^{n-j}$. Tada je $[x, a] = (ad\, x)^{j+1} y$ i $[x, b] = 0$, pa imamo

$$x[(ad\, x)^j y] x^{n-j} = [(ad\, x)^j y] x^{n-j+1} + [(ad\, x)^{j+1} y] x^{n-j},$$

pa nalazimo

$$x^{n+1} y = x x^n y = x \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} [(ad\, x)^j y] x^{n-j} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} [(ad\, x)^j y] x^{n-j+1} + \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} [(ad\, x)^{j+1} y] x^{n-j} =$$

$$= \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} [(ad\, x)^j y] x^{n+1-j} + \sum_{j=1}^{n+1} \binom{n}{j-1} [(ad\, x)^j y] x^{n+1-j} =$$

$$= y x^{n+1} + \sum_{j=1}^{n} \left(\binom{n}{j} + \binom{n}{j-1} \right) [(ad\, x)^j y] x^{n+1-j} + (ad\, x)^{n+1} y = \sum_{j=0}^{n+1} \binom{n+1}{j} [(ad\, x) j y] x^{n+1-j}.$$

Time je proveden korak indukcije i jednakost (3.4) je dokazana.

Zadatak 3.1.1. *Dokažite jednakost* (3.5).

Lema 3.1.5. *Neka su $x, y \in \mathfrak{gl}(V)$ takvi da je $(ad\, x)^\ell y = 0$ za neki $\ell \in \mathbb{N}$. Tada su Fittingovi potprostori $V_{(0)}(x)$ i $V_*(x)$ u odnosu na operator x invarijantni s obzirom na operator y.*

Dokaz: Za $v \in V_{(0)}(x)$ je $x^k v = 0$ za neki $k \in \mathbb{N}$, pa za $n = \ell + k - 1$ prema (3.4) nalazimo

$$x^n y v = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} [(ad\, x)^j y] x^{n-j} v = 0,$$

jer za $j < \ell$ je $n - j \geq k$, pa je $x^{n-j} v = 0$, a za $j \geq \ell$ je $(ad\, x)^j y = 0$. Dakle, vrijedi $yv \in V_{(0)}(x)$.

Neka je sada $v \in V_*(x)$. Neka je $k \in \mathbb{N}$ takav da je $V_*(x) = \operatorname{Im} x^k$. Tada je $V_*(x) = \operatorname{Im} x^n$ za $n = \ell + k - 1 \geq k$, dakle, postoji $w \in V$ takav da je $v = x^n w$. Sada prema (3.5) imamo

$$yv = y x^n w = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} x^{n-j} [(ad\, x)^j y] w = \sum_{j=0}^{\ell-1} (-1)^j \binom{n}{j} x^{n-j} [(ad\, x)^j y] w \tag{3.6}$$

jer je $(ad\, x)^j y = 0$ za $j \geq \ell$. Međutim, za $j \leq \ell - 1$ vrijedi $n - j = \ell + k - 1 - j \geq k$, pa slijedi $\operatorname{Im} x^{n-j} = V_*(x)$. To znači da su u (3.6) svi članovi u sumi s desne strane elementi od $V_*(x)$. Zaključujemo da je $yv \in V_*(x)$ i time je dokazano da je i potprostor $V_*(x)$ invarijantan s obzirom na operator y.

Teorem 3.1.6. (**Fittingova dekompozicija za nilpotentne Liejeve algebre operatora**) *Za nilpotentnu Liejevu podalgebru* $\mathfrak{g}$ *od* $\mathfrak{gl}(V)$ *vrijedi*

$$V = V_{(0)}(\mathfrak{g}) \dotplus V_*(\mathfrak{g}).$$

Nadalje,

$$V_*(\mathfrak{g}) = \sum_{x\in\mathfrak{g}} V_*(x).$$

Dokaz: Pretpostavimo najprije da je svaki operator $x \in \mathfrak{g}$ nilpotentan. Tada je $V_{(0)}(x) = V$ za svaki $x \in \mathfrak{g}$, pa je prema lemi 3.1.2.

$$V_{(0)}(\mathfrak{g}) = \bigcap_{x\in\mathfrak{g}} V_{(0)}(x) = V.$$

Nadalje, tada je $V_*(x) = \{0\}$, pa je i $\sum_{x\in\mathfrak{g}} V_*(x) = \{0\}$. Prema Engelovom teoremu, odnosno, prema njegovoj posljedici 2.1.4., postoji $s \in \mathbb{N}$ takav da je $x_1 \cdots x_s = 0\ \forall x_1, \ldots, x_s \in \mathfrak{g}$. No tada je prema (3.3) $V_*^s(\mathfrak{g}) = \{0\}$, a odatle slijedi $V_*(\mathfrak{g}) = \{0\}$. Time je teorem dokazan u slučaju da su svi operatori $x \in \mathfrak{g}$ nilpotentni.

Dokaz za opći slučaj provodimo indukcijom u odnosu na $\dim V$. Baza indukcije $\dim V = 1$ je trivijalna, pa prelazimo na korak indukcije: pretpostavljamo da je $\dim V \geq 2$ i da je teorem dokazan za prostore dimenzije manje od $\dim V$. Prema prvom dijelu dokaza možemo pretpostaviti da neki $y \in \mathfrak{g}$ nije nilpotentan, tj. da je $V_{(0)}(y) \neq V$. Imamo Fittingovu dekompoziciju prostora V u odnosu na operator y :

$$V = V_{(0)}(y) \dotplus V_*(y).$$

Prema lemi 3.1.5. tada su potprostori $V_{(0)}(y)$ i $V_*(y)$ invarijantni u odnosu na sve operatore $x \in \mathfrak{g}$, tj. $V_{(0)}(y)$ i $V_*(y)$ su $\mathfrak{g}-$podmoduli od V. Po pretpostavci indukcije teorem vrijedi za prostor $W = V_{(0)}(y)$ i za nilpotentnu Liejevu podalgebru $\mathfrak{a} = \{x|W;\ x \in \mathfrak{g}\}$ od $\mathfrak{gl}(W)$. Dakle,

$$V_{(0)}(y) = W = W_{(0)}(\mathfrak{a}) \dotplus W_*(\mathfrak{a}) \qquad \text{i} \qquad W_*(\mathfrak{a}) = \sum_{z\in\mathfrak{a}} W_*(z).$$

Dakle,

$$V = V_{(0)}(y) \dotplus V_*(y) = W \dotplus V_*(y) = W_{(0)}(\mathfrak{a}) \dotplus W_*(\mathfrak{a}) \dotplus V_*(y).$$

Prema lemi 3.1.3. imamo

$$V_{(0)}(\mathfrak{g}) = \bigcap_{x\in\mathfrak{g}} V_{(0)}(x) = W \cap \bigcap_{x\in\mathfrak{g}} V_{(0)}(x) = \bigcap_{x\in\mathfrak{g}} \big(W \cap V_{(0)}(x)\big) = \bigcap_{z\in\mathfrak{a}} W_{(0)}(z) = W_{(0)}(\mathfrak{a}),$$

pa iz prethodne jednakosti dobivamo

$$V = V_{(0)}(\mathfrak{g}) \dotplus W_*(\mathfrak{a}) \dotplus V_*(y). \tag{3.7}$$

Dokazat ćemo sada da vrijedi

$$W_*(\mathfrak{a}) \dotplus V_*(y) = \sum_{x\in\mathfrak{g}} V_*(x) = V_*(\mathfrak{g}). \tag{3.8}$$

Odatle i iz (3.7) će slijediti

$$V = V_{(0)}(\mathfrak{g}) \dotplus V_*(\mathfrak{g}) \qquad \text{i} \qquad V_*(\mathfrak{g}) = \sum_{x\in\mathfrak{g}} V_*(x).$$

Time će biti proveden korak indukcije, odnosno, teorem 3.1.6. će biti u potpunosti dokazan.

Jednakost (3.8) ćemo dokazati tako da dokažemo tri inkluzije:

$$W_*(\mathfrak{a}) \dotplus V_*(y) \subseteq \sum_{x\in\mathfrak{g}} V_*(x), \tag{3.9}$$

$$\sum_{x\in\mathfrak{g}} V_*(x) \subseteq V_*(\mathfrak{g}) \tag{3.10}$$

i

$$V_*(\mathfrak{g}) \subseteq W_*(\mathfrak{a}) \dotplus V_*(y). \tag{3.11}$$

Prije svega, očito je

$$W_*(\mathfrak{a}) \dotplus V_*(y) = \sum_{z\in\mathfrak{a}} W_*(z) + V_*(y) \subseteq \sum_{x\in\mathfrak{g}} V_*(x),$$

dakle, vrijedi (3.9). Nadalje, za svaki $x \in \mathfrak{g}$ očito vrijedi $\operatorname{Im} x^k \subseteq V_*^k(\mathfrak{g})$ $\forall k \in \mathbb{Z}_+$ pa je

$$V_*(x) = \bigcap_{k\in\mathbb{Z}_+} \operatorname{Im} x^k \subseteq \bigcap_{k\in\mathbb{Z}_+} V_*^k(\mathfrak{g}) = V_*(\mathfrak{g}),$$

a odatle slijedi (3.10). Da dokažemo posljednju inkluziju (3.11), uočimo da se Liejeva algebra $\{x|V_{(0)}(\mathfrak{g});\ x \in \mathfrak{g}\}$ sastoji od nilpotentnih linearnih operatora na $V_{(0)}(\mathfrak{g})$. Prema posljedici 2.1.4. Engelovog teorema postoji $s \in \mathbb{N}$ takav da je

$$x_1 \cdots x_s V_{(0)}(\mathfrak{g}) = \{0\} \qquad \forall x_1, \ldots, x_s \in \mathfrak{g}.$$

Stoga zbog (3.7) za proizvoljne $x_1, \ldots, x_s \in \mathfrak{g}$ imamo

$$\begin{aligned} x_1 \cdots x_s V &= x_1 \cdots x_s (V_{(0)}(\mathfrak{g}) \dotplus W_*(\mathfrak{a}) \dotplus V_*(y)) \subseteq \\ &\subseteq x_1 \cdots x_s V_{(0)}(\mathfrak{g}) + x_1 \cdots x_s W_*(\mathfrak{a}) + x_1 \cdots x_s V_*(y) = \\ &= x_1 \cdots x_s W_*(\mathfrak{a}) + x_1 \cdots x_s V_*(y) \subseteq W_*(\mathfrak{a}) + V_*(y), \end{aligned}$$

budući da su $W_*(\mathfrak{a})$ i $V_*(y)$ $\mathfrak{g}-$podmoduli od V. Kako su $x_1, \ldots, x_s \in \mathfrak{g}$ bili proizvoljni, dobivamo

$$V_*(\mathfrak{g}) \subseteq V_*^s(\mathfrak{g}) \subseteq W_*(\mathfrak{a}) \dotplus V_*(y),$$

odnosno, dokazana je i inkluzija (3.11).

Teorem 3.1.7. *Neka je V konačnodimenzionalan vektorski prostor i $\mathfrak{g}$ nilpotentna Liejeva podalgebra od $\mathfrak{gl}(V)$. Tada vrijedi*

$$V = \sum_{\alpha\in\mathfrak{g}^*} \dotplus V_{(\alpha)}(\mathfrak{g})$$

i

$$V_*(\mathfrak{g}) = \sum_{\alpha\in\mathfrak{g}^*\setminus\{0\}} \dotplus V_{(\alpha)}(\mathfrak{g}).$$

Dokaz prve tvrdnje provodimo indukcijom po dimenziji prostora V. Baza indukcije $\dim V = 1$ je trivijalna, pa prelazimo na korak indukcije. Dakle, poretpostavljamo da je $\dim V \geq 2$ i da je teorem dokazan za prostore dimenzije manje od $\dim V$. Svaki $x \in \mathfrak{g}$ može se pisati u obliku $x = x_s + x_n$, gdje je x_s dijagonalizabilan a x_n nilpotentan operator na V i $x_s x_n = x_n x_s$. Prema propoziciji 1.3.11. tada je $(ad\, x)_s = ad\, x_s$ i $(ad\, x)_n = ad\, x_n$. Budući da je $\mathfrak{g}$ Liejeva podalgebra od $\mathfrak{gl}(V)$, ona je potprostor od $\mathfrak{gl}(V)$ koji je $(ad\, x)-$invarijantan za svaki $x \in \mathfrak{g}$. Iz tvrdnje (c) teorema 1.3.8. slijedi da je potprostor $\mathfrak{g}$ i $(ad\, x_s)-$invarijantan i $(ad\, x_n)-$invarijantan potprostor od $\mathfrak{gl}(V)$. Međutim, Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ je nilpotentna, pa je svaki operator $(ad\,x)|\mathfrak{g} = ad_{\mathfrak{g}}\,x$, $x \in \mathfrak{g}$, nilpotentan. To znači da je $(ad\,x)|\mathfrak{g} = (ad\,x_n)|\mathfrak{g}$, odnosno, $(ad\,x_s)|\mathfrak{g} = 0\ \ \forall x \in \mathfrak{g}$. Drugim riječima, vrijedi $x_s y = y x_s\ \ \forall x, y \in \mathfrak{g}$, odnosno, $\{x_s;\ x \in \mathfrak{g}\}$ je skup dijagonalizabilnih operatora koji komutiraju sa svim operatorima iz $\mathfrak{g}$.

Pretpostavimo najprije da za neki $x \in \mathfrak{g}$ operator x_s nije multipl jediničnog operatora, odnosno, da spektar $Sp(x_s)$ nije jednočlan skup. Neka je $Sp(x_s) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\}$ pri čemu je $k \geq 2$ i $\lambda_i \neq \lambda_j$ za $i \neq j$. Tada imamo svojstveni rastav prostora V u odnosu na dijagonalizabilan operator x_s :

$$V = \sum_{j=1}^{k} \dot{+}\, V_{\lambda_j}(x_s).$$

Budući da operator x_s komutira sa svim operatorima $y \in \mathfrak{g}$, svaki od svojstvenih potprostora $V_{\lambda_j}(x_s)$ je pravi $\mathfrak{g}-$podmodul od V, pa tvrdnja teorema slijedi iz pretpostavke indukcije.

Dakle, dokaz se svodi na situaciju kad je operator x_s skalarni multipl jediničnog operatora za svaki $x \in \mathfrak{g}$. Pripadnu jedinu svojstvenu vrijednost operatora x_s označimo sa $\alpha(x)$. No tada je $\alpha(x)$ jedina svojstvena vrijednost operatora x, pa vrijedi $V = V_{(\alpha(x))}(x)$ za svaki $x \in \mathfrak{g}$. Dokažimo sada da je α linearan funkcional na $\mathfrak{g}$. Homogenost preslikavanja $\alpha : \mathfrak{g} \to K$ je očita: za $x \in \mathfrak{g}$ i $\lambda \in K$ je s jedne strane $Sp(\lambda x) = \{\alpha(\lambda x)\}$, a s druge je $Sp(x) = \{\alpha(x)\}$, pa slijedi $Sp(\lambda x) = \{\lambda\alpha(x)\}$; dakle, $\alpha(\lambda x) = \lambda\alpha(x)$. Dokažimo aditivnost. Neka su $x, y \in \mathfrak{g}$. Neka je $v \neq 0$ vektor iz V koji je svojstven za operator $x + y$, naravno, u odnosu na jedinu njegovu svojstvenu vrijednost $\alpha(x + y)$. Dakle,

$$(x + y)v = \alpha(x + y)v, \quad \text{odnosno}, \quad xv = \alpha(x + y)v - yv.$$

Odatle je

$$(x - \alpha(x)I)v = -\left(y - [\alpha(x + y) - \alpha(x)]I\right)v,$$

dakle, za svako $k \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$(x - \alpha(x)I)^k v = (-1)^k \left(y - [\alpha(x + y) - \alpha(x)]I\right)^k v.$$

Međutim, $V = V_{(\alpha(x))}(x)$, pa postoji $k \in \mathbb{N}$ takav da je $(x - \alpha(x)I)^k v = 0$. Slijedi

$$\left(y - [\alpha(x + y) - \alpha(x)]I\right)^k v = 0.$$

To znači da je $\alpha(x + y) - \alpha(x)$ svojstvena vrijednost operatora y. Ali $\alpha(y)$ je po pretpostavci jedina svojstvena vrijednost operatora y, pa zaključujemo da je $\alpha(x + y) - \alpha(x) = \alpha(y)$, odnosno, $\alpha(x + y) = \alpha(x) + \alpha(y)$. Dakle, $\alpha : \mathfrak{g} \to K$ je linearni funkcional i za svako $v \in V$ i svako $x \in \mathfrak{g}$ postoji $k \in \mathbb{N}$ takav da je $(x - \alpha(x)I)^k v = 0$. Time je dokazano da je $V = V_{(\alpha)}(\mathfrak{g})$, dakle, dokazana je prva tvrdnja teorema 3.1.7.

Neka je $\alpha \in \mathfrak{g}^* \setminus \{0\}$. Izaberimo $x_0 \in \mathfrak{g}$ takav da je $\alpha(x_0) \neq 0$. Tada je

$$V_{(\alpha)}(\mathfrak{g}) = \bigcap_{x \in \mathfrak{g}} V_{(\alpha(x))}(x) \subseteq V_{(\alpha(x_0))}(x_0) \subseteq V_*(x_0).$$

No prema teoremu 3.1.6. je $V_*(x) \subseteq V_*(\mathfrak{g})\ \ \forall x \in \mathfrak{g}$. Zaključujemo da je $V_{(\alpha)}(\mathfrak{g}) \subseteq V_*(\mathfrak{g})$. Kako to vrijedi za svaki $\alpha \in \mathfrak{g}^* \setminus \{0\}$, dobivamo inkluziju

$$\sum_{\alpha \in \mathfrak{g}^* \setminus \{0\}} V_{(\alpha)}(\mathfrak{g}) \subseteq V_*(\mathfrak{g}). \tag{3.12}$$

Prema prvoj tvrdnji teorema je

$$V = V_{(0)}(\mathfrak{g}) \dot{+} \sum_{\alpha \in \mathfrak{g}^* \setminus \{0\}} \dot{+} V_{(\alpha)}(\mathfrak{g}),$$

a prema teoremu 3.1.6. je $V = V_{(0)}(\mathfrak{g}) \dot{+} V_*(\mathfrak{g})$. To pokazuje je inkluzija u (3.12) zapravo jednakost, odnosno, dokazana je i druga tvrdnja teorema 3.1.7.

Ako je $\mathfrak{n}$ nilpotentna podalgebra neke Liejeve algebre $\mathfrak{g}$, onda je $\mathfrak{g}$ $\mathfrak{n}-$modul u odnosu na restrikciju $ad_{\mathfrak{g}}|\mathfrak{n}$ adjungirane reprezentacije, pa je za svaki linearan funkcional $\alpha \in \mathfrak{n}^*$ (takav da je $[\mathfrak{n},\mathfrak{n}] \subseteq \operatorname{Ker}\alpha$) dobro definiran potprostor $\mathfrak{g}_{(\alpha)}(\mathfrak{n})$ od $\mathfrak{g}$ i vrijedi $[\mathfrak{n},\mathfrak{g}_{(\alpha)}(\mathfrak{n})] \subseteq \mathfrak{g}_{(\alpha)}(\mathfrak{n})$. Prema teoremu 3.1.7. vrijedi

$$\mathfrak{g} = \sum_{\alpha\in\mathfrak{n}^*} \dot{+}\, \mathfrak{g}_{(\alpha)}(\mathfrak{n}).$$

Teorem 3.1.8. *Neka je V konačnodimenzionalan $\mathfrak{g}-$modul i $\mathfrak{n}$ nilpotentna Liejeva podalgebra od $\mathfrak{g}$. Tada za bilo koje $\alpha,\beta \in \mathfrak{n}^*$ vrijedi $\mathfrak{g}_{(\alpha)}(\mathfrak{n})V_{(\beta)}(\mathfrak{n}) \subseteq V_{(\alpha+\beta)}(\mathfrak{n})$.*

Dokaz ćemo provesti pomoću sljedeće konstrukcije:

Lema 3.1.9. *Neka je $\mathfrak{g}$ Liejeva algebra i V konačnodimenzionalan $\mathfrak{g}-$modul. Na vektorskom prostoru $\mathfrak{g}^V = \mathfrak{g}\times V$ definiramo operaciju $[\,\cdot\,,\,\cdot\,] : \mathfrak{g}^V \times \mathfrak{g}^V \to \mathfrak{g}^V$ ovako:*

$$[(x,v),(y,w)] = ([x,y], xw - yv), \qquad x,y\in\mathfrak{g}, \quad v,w\in V.$$

(a) Uz tako definiranu operaciju $\mathfrak{g}^V$ je Liejeva algebra.

(b) $x \mapsto (x,0)$ je izomorfizam Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ na Liejevu podalgebru $\mathfrak{g}\times\{0\} = \{(x,0);\ x\in\mathfrak{g}\}$ od $\mathfrak{g}^V$.

(c) $\{0\}\times V = \{(0,v);\ v\in V\}$ je komutativni ideal u Liejevoj algebri $\mathfrak{g}^V$.

(d) $v\mapsto (0,v)$ je izomorfizam prostora V na prostor $\{0\}\times V$.

(e) Za svaki $x\in\mathfrak{g}$ preslikavanje $D_x : \mathfrak{g}^V \to \mathfrak{g}^V$, definirano sa $D_x(y,v) = ([x,y], xv)$, $(x,v)\in\mathfrak{g}^V$, je derivacija Liejeve algebre $\mathfrak{g}^V$ i $x\mapsto D_x$ je homomorfizam Liejevih algebri sa $\mathfrak{g}$ u $Der\left(\mathfrak{g}^V\right)$.

Dokaz: (a) Dokažimo najprije da je definirana operacija linearna u prvoj varijabli: za bilo koje $\alpha_1,\alpha_2\in K$, $x_1,x_2,y\in\mathfrak{g}$ i $v_1,v_2,w\in V$ imamo redom

$$[\alpha_1(x_1,v_1)+\alpha_2(x_2,v_2),(y,w)] = [(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2,\alpha_1v_1+\alpha_2v_2),(y,w)] =$$
$$= ([\alpha_1x_1+\alpha_2x_2,y],(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2)w - y(\alpha_1v_1+\alpha_2v_2)) =$$
$$= (\alpha_1[x_1,y]+\alpha_2[x_2,y],\alpha_1x_1w+\alpha_2x_2w-\alpha_1yv_1-\alpha_2yv_2) =$$
$$= (\alpha_1[x_1,y]+\alpha_2[x_2,y],\alpha_1(x_1w-yv_1)+\alpha_2(x_2w-yv_2)) =$$
$$= \alpha_1([x_1,y],x_1w-yv_1)+\alpha_2([x_2,y],x_2w-yv_2) = \alpha_1[(x_1,v_1),(y,w)]+\alpha_2[(x_2,v_2),(y,w)].$$

Time je dokazana linearnost operacije $[\,\cdot\,,\,\cdot\,]$ na $\mathfrak{g}^V$ u prvoje varijabli. Nadalje, vrijedi

$$[(x,v),(x,v)] = ([x,x],xv-xv) = (0,0) = 0,$$

dakle i

$$[(x,v),(y,w)] = -[(y,w),(x,v)].$$

Odatle slijedi da je operacija $[\,\cdot\,,\,\cdot\,]$ na $\mathfrak{g}^V$ linearna i u drugoj varijabli. Napokon, vrijedi Jacobijev identitet: za $x,y,z\in\mathfrak{g}$ i $u,v,w\in V$ imamo

$$[(x,u),[(y,v),(z,w)]] + [(y,v),[(z,w),(x,u)]] + [(z,w),[(x,u),(y,v)]] =$$
$$= [(x,u),([y,z],yw-zv)] + [(y,v),([z,x],zu-xw)] + [(z,w),([x,y],xv-yu)] =$$
$$= ([x,[y,z]],xyw-xzv-[y,z]u) + ([y,[z,x]],yzu-yxw-[z,x]v) + ([z,[x,y]],zxv-zyu-[x,y]w) =$$
$$= ([x,[y,z]]+[y,[z,x]]+[z,[x,y]],xyw-xzv-yzu+zyu+yzu-yxw-zxv+xzv+zxv-zyu-xyw+yxw) = 0.$$

Time je dokazana tvrdnja (a).

Zadatak 3.1.2. *Dokažite preostale tvrdnje (b), (c), (d) i (e) leme 3.1.9.*

Dokaz teorema 3.1.8.: Na temelju leme 3.1.9. možemo identificirati Liejevu algebru $\mathfrak{g}$ s podalgebrom $\mathfrak{g} \times \{0\}$ Liejeve algebre $\mathfrak{g}^V$ i prostor V s komutativnim idealom $\{0\} \times V$ u Liejevoj algebri $\mathfrak{g}^V$. Uz te identifikacije je $\mathfrak{g}^V = \mathfrak{g} \dot{+} V$, a za $x \in \mathfrak{g}$ derivacija D_x Liejeve algebre $\mathfrak{g}^V$ iz tvrdnje (e) leme 3.1.9. je dana svojim restrikcijama na potprostore $\mathfrak{g}$ i V ovako:

$$D_x|\mathfrak{g} = ad_{\mathfrak{g}}\, x, \qquad D_x|V = x\,\cdot\,.$$

Neka je u daljnjem $x \in \mathfrak{n}$. Budući da su potprostori $\mathfrak{g}$ i V invarijantni s obzirom na operator D_x, za svaki $\lambda \in Sp(D_x)$ vrijedi

$$\left(\mathfrak{g}^V\right)_{(\lambda)}(D_x) = \mathfrak{g}_{(\lambda)}(ad_{\mathfrak{g}}\, x) \dot{+} V_{(\lambda)}(x).$$

Nadalje, iz dokaza propozicije 1.3.12., preciznije iz jednakosti u zadatku 1.3.2. primijenjene na Liejevu algebru $\mathfrak{g}^V$ i na njenu derivaciju D_x, za bilo koje $\lambda, \mu \in K$ vrijedi

$$\left[\left(\mathfrak{g}^V\right)_{(\lambda)}(D_x), \left(\mathfrak{g}^V\right)_{(\mu)}(D_x)\right] \subseteq \left(\mathfrak{g}^V\right)_{(\lambda+\mu)}(D_x).$$

Kako je V ideal u Liejevoj algebri $\mathfrak{g}^V$, odatle slijedi

$$\mathfrak{g}_{(\lambda)}(ad_{\mathfrak{g}}\, x)V_{(\mu)}(x) = \left[\mathfrak{g}_{(\lambda)}(ad_{\mathfrak{g}}\, x) \times \{0\}, \{0\} \times V_{(\mu)}(x)\right] \subseteq$$

$$\subseteq \left[\left(\mathfrak{g}^V\right)_{(\lambda)}(D_x), \left(\mathfrak{g}^V\right)_{(\mu)}(D_x)\right] \cap V \subseteq \left(\mathfrak{g}^V\right)_{(\lambda+\mu)}(D_x) \cap V = V_{(\lambda+\mu)}(x).$$

Napokon, kako za linearne funkcionale $\alpha, \beta \in \mathfrak{n}^*$ vrijedi

$$\mathfrak{g}_{(\alpha)}(\mathfrak{n}) = \bigcap_{x \in \mathfrak{n}} \mathfrak{g}_{(\alpha(x))}(ad_{\mathfrak{g}}\, x) \qquad \text{i} \qquad V_{(\beta)}(\mathfrak{n}) = \bigcap_{x \in \mathfrak{n}} V_{(\beta(x))}(x),$$

dobivamo

$$\mathfrak{g}_{(\alpha)}(\mathfrak{n})V_{(\beta)}(\mathfrak{n}) \subseteq \mathfrak{g}_{(\alpha(x))}(ad_{\mathfrak{g}}\, x)V_{(\beta(x))}(x) \subseteq V_{(\alpha(x)+\beta(x))}(x) = V_{((\alpha+\beta)(x))}(x) \qquad \forall x \in \mathfrak{n},$$

pa slijedi

$$\mathfrak{g}_{(\alpha)}(\mathfrak{n})V_{(\beta)}(\mathfrak{n}) \subseteq \bigcap_{x \in \mathfrak{n}} V_{((\alpha+\beta)(x))}(x) = V_{(\alpha+\beta)}(\mathfrak{n}).$$

Korolar 3.1.10. *Neka je $\mathfrak{n}$ nilpotentan ideal u Liejevoj algebri $\mathfrak{g}$ i neka je V konačnodimenzionalan $\mathfrak{g}-$modul. Za svaki linearan funkcional $\alpha \in \mathfrak{n}^*$ tada je $V_{(\alpha)}(\mathfrak{n})$ $\mathfrak{g}-$podmodul od V.*

Zadatak 3.1.3. *Dokažite korolar 3.1.10.*

3.2 Cartanove podalgebre

Cartanova podalgebra Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ je izvjesna nilpotentna podalgebra, koja je pogodno smještena u $\mathfrak{g}$, tako da rastav $\mathfrak{g}$ u sumu korijenskih potprostora daje grubi opis operacije $[\cdot\,,\,\cdot]$ u $\mathfrak{g}$. Definicija je sljedeća: **Cartanova podalgebra** Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ je nilpotentna podalgebra $\mathfrak{h}$ od $\mathfrak{g}$ takva da je $\mathfrak{h} = N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$.

Zadatak 3.2.1. *Neka je $\mathfrak{h}$ Cartanova podalgebra Liejeve algebre $\mathfrak{g}$. Dokažite da je $\mathfrak{h}$ Cartanova podalgebra svake Liejeve podalgebre od $\mathfrak{g}$ koja sadrži $\mathfrak{h}$.*

Propozicija 3.2.1. *Cartanova podalgebra Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ je maksimalna nilpotentna podalgebra od $\mathfrak{g}$.*

Dokaz: Pretpostavimo da je $\mathfrak{k}$ nilpotentna podalgebra od $\mathfrak{g}$ i da je $\mathfrak{h} \subsetneq \mathfrak{k}$. Tada je $x \mapsto ad_{\mathfrak{k}}\, x$ nil−reprezentacija od $\mathfrak{h}$ na prostoru $\mathfrak{k}$. Potprostor $\mathfrak{h}$ od $\mathfrak{k}$ je invarijantan s obzirom na tu reprezentaciju. Slijedi da je kvocijentna reprezentacija π od $\mathfrak{h}$ na prostoru $\mathfrak{k}/\mathfrak{h}$, zadana sa

$$\pi(x)(y + \mathfrak{h}) = [x, y] + \mathfrak{h}, \qquad x \in \mathfrak{h}, \quad y \in \mathfrak{k},$$

nil−reprezentacija. Prema Engelovom teoremu 2.1.3. postoji $v \in \mathfrak{k}/\mathfrak{h}$, $v \neq 0$, takav da je $\pi(x)v = 0$ $\forall x \in \mathfrak{h}$. No tada je $v = y + \mathfrak{h}$ za neki $y \in \mathfrak{k} \setminus \mathfrak{h}$ i vrijedi $[\mathfrak{h}, y] \subseteq \mathfrak{h}$, odnosno, $y \in N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$. To je nemoguće jer je $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$. Ova kontradikcija dokazuje propoziciju.

Propozicija 3.2.2. *Neka je $\mathfrak{h}$ nilpotentna podalgebra Liejeve algebre $\mathfrak{g}$.*

(*a*) *Vrijedi $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) \subseteq \mathfrak{g}_{(0)}(\mathfrak{h})$.*

(*b*) *$\mathfrak{h}$ je Cartanova podalgebra od $\mathfrak{g}$ ako i samo ako je $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_{(0)}(\mathfrak{h})$.*

Dokaz: (*a*) Imamo prema definiciji

$$\mathfrak{g}_{(0)}(\mathfrak{h}) = \{x \in \mathfrak{g};\ \forall h \in \mathfrak{h},\ \exists k \in \mathbb{N},\ (ad\, h)^k x = 0\}.$$

Za $x \in N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$ je $(ad\, h)x = [h, x] \in \mathfrak{h}$ za svaki $h \in \mathfrak{h}$. Kako je $\mathfrak{h}$ nilpotentna Liejeva algebra, svaki operator $ad_{\mathfrak{h}}\, h = (ad\, h)|\mathfrak{h}$, $h \in \mathfrak{h}$, je nilpotentan. Dakle, za svaki $h \in \mathfrak{h}$ postoji $k \in \mathbb{N}$ takav da je $(ad\, h)^k|\mathfrak{h} = 0$. No tada je $(ad\, h)^{k+1}x = (ad\, h)^k[h, x] = 0$, pa slijedi $x \in \mathfrak{g}_{(0)}(\mathfrak{h})$. Dakle, $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) \subseteq \mathfrak{g}_{(0)}(\mathfrak{h})$.

(*b*) Budući da je $\mathfrak{h} \subseteq N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$, prema tvrdnji (*a*) iz $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_{(0)}(\mathfrak{h})$ slijedi da je $\mathfrak{h} = N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$, tj. $\mathfrak{h}$ je Cartanova podalgebra od $\mathfrak{g}$.

Pretpostavimo sada da je $\mathfrak{h}$ Cartanova podalgebra od $\mathfrak{g}$, ali da je $\mathfrak{h} \neq \mathfrak{g}_{(0)}(\mathfrak{h})$. Za svaki $h \in \mathfrak{h}$ operator $(ad\, h)|\mathfrak{g}_{(0)}(\mathfrak{h})$ je nilpotentan. Stoga je nilpotentan i operator $\pi(h)$ koji $(ad\, h)|\mathfrak{g}_{(0)}(\mathfrak{h})$ definira na kvocijentnom prostoru $V = \mathfrak{g}_{(0)}(\mathfrak{h})/\mathfrak{h}$:

$$\pi(h)(x + \mathfrak{h}) = [x, h] + \mathfrak{h}, \qquad x \in \mathfrak{g}_{(0)}(\mathfrak{h}).$$

Dakle, π je nil−reprezentacija Liejeve algebre $\mathfrak{h}$ na prostoru $V \neq \{0\}$. Prema Engelovom teoremu 2.1.3. postoji $v \in V \setminus \{0\}$ takav da je $\pi(h)v = 0$ $\forall h \in \mathfrak{h}$. Tada je $v = x + \mathfrak{h}$ za neki $x \in \mathfrak{g}_{(0)}(\mathfrak{h}) \setminus \mathfrak{h}$ i vrijedi $[h, x] \in \mathfrak{h}$ $\forall h \in \mathfrak{h}$. No tada je $x \in N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$, suprotno pretpostavci da $x \notin \mathfrak{h}$. Ova kontradikcija pokazuje da za Cartanovu podalgebru $\mathfrak{h}$ vrijedi $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_{(0)}(\mathfrak{h})$.

Iz propozicije 3.2.2. i iz teorema 3.1.6. i 3.1.7. neposredno slijedi

Korolar 3.2.3. *Neka je $\mathfrak{h}$ Cartanova podalgebra Liejeve algebre $\mathfrak{g}$. Tada je*

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \dotplus \mathfrak{g}_*(\mathfrak{h}) \qquad i \qquad \mathfrak{g}_*(\mathfrak{h}) = \sum_{\alpha \in \mathfrak{h}^* \setminus \{0\}} \dotplus \mathfrak{g}_{(\alpha)}(\mathfrak{h}).$$

Zadatak 3.2.2. *Neka je $\mathfrak{h}$ nilpotentna podalgebra Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ takva da je podalgebra $\mathfrak{g}_{(0)}(\mathfrak{h})$ nilpotentna. Dokažite da je tada $\mathfrak{g}_{(0)}(\mathfrak{h})$ Cartanova podalgebra od $\mathfrak{g}$.*

Zadatak 3.2.3. *Neka je $\mathfrak{g}$ Liejeva algebra, $\mathfrak{r}$ njen radikal i $\mathfrak{h}$ Cartanova podalgebra od $\mathfrak{g}$. Dokažite da je tada $\mathfrak{r} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{r}] + \mathfrak{h} \cap \mathfrak{r}$.*

Uputa: Uočite da je $\mathfrak{r}/[\mathfrak{g}, \mathfrak{r}]$ centar kvocijentne Liejeve algebre $\mathfrak{g}/[\mathfrak{g}, \mathfrak{r}]$ i da slika od $\mathfrak{h}$ u kvocijentu $\mathfrak{g}/[\mathfrak{g}, \mathfrak{r}]$ sadrži $\mathfrak{r}/[\mathfrak{g}, \mathfrak{r}]$.

Zadatak 3.2.4. *Neka je $\mathfrak{g}$ Liejeva algebra, V konačnodimenzionalan $\mathfrak{g}-$modul i $\mathfrak{g}^V = \mathfrak{g} \times V$ Liejeva algebra iz leme 3.1.9. Nadalje, neka je $\mathfrak{h}$ Cartanova podalgebra od $\mathfrak{g}$. Dokažite da je $\mathfrak{h} \times V_{(0)}(\mathfrak{h})$ Cartanova podalgebra od $\mathfrak{g}^V$.*

Za Cartanovu podalgebru $\mathfrak{h}$ Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ stavljamo

$$R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) = \{\alpha \in \mathfrak{h}^*;\ \mathfrak{g}_{(\alpha)}(\mathfrak{h}) \neq \{0\},\ \alpha \neq 0\}.$$

Taj se skup linearnih funkcionala na $\mathfrak{h}$ zove **sistem korijena Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ u odnosu na Cartanovu podalgebru $\mathfrak{h}$**. Njegovi elementi su **korijeni** od $\mathfrak{g}$ u odnosu na $\mathfrak{h}$, a za $\alpha \in \{0\} \cup R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ kažemo da je $\mathfrak{g}_{(\alpha)} = \mathfrak{g}_{(\alpha)}(\mathfrak{h})$ pripadni **korijenski potprostor**. Prema korolaru 3.2.3. imamo tzv. **korijenski rastav Liejeve algebre $\mathfrak{g}$** :

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \dotplus \sum_{\alpha \in R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})} \dotplus \mathfrak{g}_{(\alpha)}.$$

Teorem 3.2.4. *Neka je $\mathfrak{h}$ Cartanova podalgebra Liejeve algebre $\mathfrak{g}$.*

(*a*) *Za $\alpha, \beta \in \{0\} \cup R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ vrijedi $[\mathfrak{g}_{(\alpha)}, \mathfrak{g}_{(\beta)}] \subseteq \mathfrak{g}_{(\alpha+\beta)}$.*

(*b*) *Ako su $\alpha, \beta \in \{0\} \cup R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ takvi da je $0 \neq \alpha + \beta \notin R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$, onda je $[\mathfrak{g}_{(\alpha)}, \mathfrak{g}_{(\beta)}] = \{0\}$.*

(*c*) *Za $\alpha, \beta \in \{0\} \cup R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ takve da je $\alpha + \beta \neq 0$ vrijedi $B_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g}_{(\alpha)}, \mathfrak{g}_{(\beta)}) = \{0\}$.*

Dokaz: Tvrdnja (a) je neposredna posljedica teorema 3.1.8. a tvrdnja (b) slijedi iz tvrdnje (a) jer ako $\alpha + \beta \notin \{0\} \cup R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$, onda je $\mathfrak{g}_{(\alpha+\beta)} = \{0\}$.

(c) Neka su $x \in \mathfrak{g}_{(\alpha)}$ i $y \in \mathfrak{g}_{(\beta)}$. Prema tvrdnji ($a$) linearan operator $(ad\, x)(ad\, y)$ preslikava svaki potprostor u korijenskom rastavu Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ u odnosu na $\mathfrak{h}$ u neki drugi potprostor u tom rastavu. Dakle, ako izaberemo bazu u $\mathfrak{g}$ sastavljenu od baza svih korijenskih potprostora, matrica operatora $(ad\, x)(ad\, y)$ u toj bazi ima nule na dijagonali. Stoga mu je trag jednak nuli, a to znači da je $B_{\mathfrak{g}}(x, y) = 0$.

Za linearan operator A na $n-$dimenzionalnom vektorskom prostoru V označimo sa $P_A(T)$ njegov svojstveni polinom, a njegove koeficijente sa $-\sigma_1(A), \ldots, -\sigma_n(A)$:

$$P_A(T) = \det(T\, I_V - A) = T^n - \sigma_1(A) T^{n-1} - \cdots - \sigma_{n-1}(A) T - \sigma_n(A).$$

Tada vrijede tzv. *Newtonove formule*:

$$\sigma_1(A) = \operatorname{Tr} A, \qquad j\sigma_j(A) = \operatorname{Tr} A^j - \sigma_1(A) \operatorname{Tr} A^{j-1} - \ldots - \sigma_{j-1}(A) \operatorname{Tr} A, \quad 1 < j \leq n.$$

Uočimo da je operator A nilpotentan ako i samo ako je $P_A(T) = T^n$, a po Newtonovim formulama to je ispunjeno ako i samo ako je $\mathrm{Tr}\, A^j = 0$ za $j = 1, \ldots, n$. Dimenzija Fittingovog potprostora $V_{(0)}(A)$ u odnosu na operator A jednaka je kratnosti 0 kao nultočke polinoma $P_A(T)$. Dakle, $\dim V_*(A) = \max\{j;\ \sigma_j(A) \neq 0\}$.

Neka je i dalje V $n-$dimenzionalan vektorski prostor nad poljem K. Skup K^V svih funkcija sa V u K je unitalna komutativna algebra u odnosu operacije po točkama:

$$(f+g)(v) = f(v) + g(v), \quad (\lambda f)(v) = \lambda f(v), \quad (fg)(v) = f(v)g(v), \quad f, g \in K^V,\ \lambda \in K,\ v \in V.$$

Označimo sa $\mathcal{P}(V)$ unitalnu podalgebru od K^V generiranu skupom V^* svih linearnih funkcionala na V. Dakle, $\mathcal{P}(V)$ je skup svih linearnih kombinacija produkata linearnih funkcionala. Izaberemo li bazu $\{f_1, \ldots, f_n\}$ od V^*, vidimo da algebru $\mathcal{P}(V)$ možemo identificirati s algebrom polinoma $K[f_1, \ldots, f_n]$.

Neka je sada $\mathfrak{g}$ $n-$dimenzionalna Liejeva algebra. Definiramo **rang** $r(\mathfrak{g})$ **Liejeve algebre** $\mathfrak{g}$ kao minimum dimenzija Fittingovih potprostora $\mathfrak{g}_{(0)}(ad\, x)$ za $x \in \mathfrak{g}$:

$$r(\mathfrak{g}) = \min\{\dim \mathfrak{g}_{(0)}(ad\, x);\ x \in \mathfrak{g}\}.$$

Naravno, zbog Fittingovih dekompozicija za operatore $ad\, x$, $x \in \mathfrak{g}$, imamo

$$r(\mathfrak{g}) = n - \max\{\dim \mathfrak{g}_*(ad\, x);\ x \in \mathfrak{g}\}.$$

Za svaki $x \in \mathfrak{g}$ operator $ad\, x$ ima nulu u spektru jer je $(ad\, x)x = 0$. Dakle, $\mathfrak{g}_{(0)}(ad\, x) \neq \{0\}$. Prema tome, za Liejevu algebru $\mathfrak{g} \neq \{0\}$ je $r(\mathfrak{g}) \geq 1$. Element $x \in \mathfrak{g}$ zove se **regularan** ako je

$$\dim \mathfrak{g}_{(0)}(ad\, x) = r(\mathfrak{g}).$$

Skup svih regularnih elemenata Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ označavat ćemo sa $\mathfrak{g}'$.

Za $x \in \mathfrak{g}$ svojstveni polinom $P_{ad\, x}$ operatora $ad\, x$ označavat ćemo kraće sa P_x, a njegove kofficijente sa $-\sigma_j(x)$. Dakle,

$$P_x(T) = \det(T\, I_{\mathfrak{g}} - ad\, x) = T^n - \sum_{j=1}^{n} \sigma_j(x) T^{n-j}.$$

Prema Newtonovim formulama je

$$\sigma_1(x) = \mathrm{Tr}\,(ad\, x), \qquad j\sigma_j(x) = \mathrm{Tr}\,(ad\, x)^j - \sum_{i=1}^{j-1} \sigma_i(x) \mathrm{Tr}\,(ad\, x)^{j-i}, \quad 1 < j \leq n.$$

Iz tih se formula vidi da su sve funkcije $\sigma_j : \mathfrak{g} \to K$ polinomijalne.

Ako je $\ell = r(\mathfrak{g})$, onda je 0 barem $\ell-$struka nultočka polinoma P_x i postoji $x \in \mathfrak{g}$ takav da je ona točno $\ell-$struka. To znači da su $\sigma_j \equiv 0$ za $n - \ell + 1 \leq j \leq n$ i $\sigma_{n-\ell} \not\equiv 0$. Dakle,

$$P_x(T) = T^n - \sum_{j=1}^{n-\ell} \sigma_j(x) T^{n-j}, \qquad \sigma_{n-\ell} \not\equiv 0.$$

Nadalje,

$$\mathfrak{g}' = \{x \in \mathfrak{g};\ \sigma_{n-\ell}(x) \neq 0\}.$$

Propozicija 3.2.5. *Neka je* $\varphi : \mathfrak{g}_1 \to \mathfrak{g}_2$ *epimorfizam Liejevih algebri.*

(*a*) $\varphi(\mathfrak{g}_1') \subseteq \mathfrak{g}_2'$.

(*b*) *Ako je* $\mathrm{Ker}\,\varphi \subseteq Z(\mathfrak{g}_1)$, *onda je* $\varphi(\mathfrak{g}_1') = \mathfrak{g}_2'$.

(*c*) $r(\mathfrak{g}_1) \geq r(\mathfrak{g}_2)$.

Dokaz: Stavimo $r(\mathfrak{g}_1) = r_1$, $\rho(\mathfrak{g}_2) = r_2$, $\dim \mathfrak{g}_1 = n$ i $\dim \mathfrak{g}_2 = m$, dakle, $\dim \mathrm{Ker}\,\varphi = n - m$. Za $x \in \mathfrak{g}$ svojstveni polinomi P_x, $P_{\varphi(x)}$ i Q operatora $ad\,x$, $ad\,\varphi(x)$ i $(ad\,x)|\mathrm{Ker}\,\varphi$ imaju oblik

$$P_x(T) = T^n - \sum_{j=1}^{n-r_1} \sigma_j(x) T^{n-j}, \qquad P_{\varphi(x)}(T) = T^m - \sum_{i=1}^{m-r_2} \tau_i(x) T^{m-i},$$

$$Q(T) = T^{n-m} - \sum_{k=1}^{n-m-p} \omega_k(x) T^{n-m-k},$$

gdje su $\sigma_j, \tau_i, \omega_k \in \mathcal{P}(\mathfrak{g}_1)$ i vrijedi $\sigma_{n-r_1} \neq 0$ i $\tau_{m-r_2} \neq 0$, a i p je izabran tako da je $\omega_{n-m-p} \neq 0$. Izaberemo li bazu $e = \{e_1, \ldots, e_n\}$ od $\mathfrak{g}_1$ tako da je $e' = \{e_{m+1}, \ldots, e_n\}$ baza od $\mathrm{Ker}\,\varphi$, onda je $e'' = \{\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_m)\}$ baza od $\mathfrak{g}_2$. Tada φ inducira izomorfizam sa $\mathfrak{g}_1/(\mathrm{Ker}\,\varphi)$ na $\mathfrak{g}_2$, koji za $x \in \mathfrak{g}_1$ prevodi operator induciran sa $ad\,x$ na kvocijentnom prostoru $\mathfrak{g}_1/(\mathrm{Ker}\,\varphi)$ u operator $ad\,\varphi(x)$ (jer je φ homomorfizam Liejevih algebri). Odatle slijedi da je u bazi e matrica operatora $ad\,x$ oblika $\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & C \end{bmatrix}$, gdje je A matrica operatora $ad\,\varphi(x)$ u bazi e'', a C je matrica operatora $(ad\,x)|\mathrm{Ker}\,\varphi$ u bazi e'. Odatle slijedi da je $P_x = P_{\varphi(x)} Q$, pa imamo $n - r_1 = m - r_2 + n - m - p$, tj. $r_1 = r_2 + p$, i $\sigma_{n-r_1}(x) = \tau_{m-r_2}(x)\omega_{n-m-p}(x)$ $\forall x \in \mathfrak{g}_1$. Iz $r_1 = r_2 + p$ slijedi da je $r_1 \geq r_2$, a to je tvrdnja (*c*). Nadalje, ako je $x \in \mathfrak{g}_1'$, onda je $\sigma_{n-r_1}(x) \neq 0$, pa slijedi da je $\tau_{m-r_2}(x) \neq 0$, dakle, $\varphi(x) \in \mathfrak{g}_2'$. Time je dokazana tvrdnja (*a*). Napokon, pretpostavimo da je $\mathrm{Ker}\,\varphi \subseteq Z(\mathfrak{g}_1)$. Tada je $(ad\,x)|\mathrm{Ker}\,\varphi = 0$ za svaki $x \in \mathfrak{g}_1$, pa slijedi da je $Q(T) = T^{n-m}$. Tada je $\sigma_{n-r_1}(x) = \tau_{m-r_2}(x)$, dakle, $x \in \mathfrak{g}_1'$ ako i samo ako je $\varphi(x) \in \mathfrak{g}_2'$. Time je dokazana i tvrdnja (*c*).

Propozicija 3.2.6. *Neka je* $\mathfrak{k}$ *podalgebra Liejeve algebre* $\mathfrak{g}$. *Tada je* $\mathfrak{g}' \cap \mathfrak{k} \subseteq \mathfrak{k}'$.

Dokaz: Za $x \in \mathfrak{k}$ vrijedi $(ad_{\mathfrak{k}}\,x = (ad_{\mathfrak{g}}\,x)|\mathfrak{k}$. Neka je $A(x)$ operator na kvocijentnom prostoru $\mathfrak{g}/\mathfrak{k}$ induciran sa $ad_{\mathfrak{g}}\,x$:

$$A(x)(y + \mathfrak{k}) = (ad_{\mathfrak{g}}\,x)y + \mathfrak{k} = [x, y] + \mathfrak{k}, \qquad y \in \mathfrak{g}.$$

Za svaki $x \in \mathfrak{k}$ neka su $d_0(x)$ i $d_1(x)$ dimenzije Fittingovih nul−komponenti operatora $ad_{\mathfrak{k}}\,x$ i $A(x)$:

$$d_0(x) = \dim\,\mathfrak{k}_{(0)}(ad_{\mathfrak{k}}\,x), \qquad d_1(x) = \dim\,(\mathfrak{g}/\mathfrak{k})_{(0)}(A(x)).$$

Nadalje, neka su

$$c_0 = \min\{d_0(x);\ x \in \mathfrak{k}\} \qquad \text{i} \qquad c_1 = \min\{d_1(x);\ x \in \mathfrak{k}\}.$$

Tada za neke polinomijalne funkcije $P_0, P_1 \in \mathcal{P}(\mathfrak{k}) \setminus \{0\}$ vrijedi

$$d_0(x) = c_0 \iff P_0(x) \neq 0 \qquad \text{i} \qquad d_1(x) = c_1 \iff P_1(x) \neq 0.$$

Stavimo sada

$$S = \{x \in \mathfrak{k};\ d_0(x) = c_0 \quad \text{i} \quad d_1(x) = c_1\} = \{x \in \mathfrak{k};\ P_0(x) \neq 0 \neq P_1(x)\} = \{x \in \mathfrak{k};\ P(x) \neq 0\}$$

gdje je $P = P_0P_1 \in \mathcal{P}(\mathfrak{k})\setminus\{0\}$. Budući da je polje k beskonačno, skup S je neprazan. Svaki element od S je regularan u $\mathfrak{k}$. Nadalje, za svaki $x \in \mathfrak{k}$ je $\mathfrak{k}_{(0)}(ad_{\mathfrak{k}}\, x) \subseteq \mathfrak{g}_{(0)}(ad_{\mathfrak{g}}\, x)$ i budući da je $\mathfrak{k}_{(0)}(ad_{\mathfrak{k}}\, x)$ potprostor od $\mathfrak{g}$ koji je $(ad_{\mathfrak{g}}\, x)-$invarijantan, vrijedi $(\mathfrak{g}/\mathfrak{k})_{(0)}(A(x)) = \mathfrak{g}_{(0)}(ad_{\mathfrak{g}}\, x)/\mathfrak{k}_{(0)}(ad_{\mathfrak{k}}\, x)$. Prema tome,

$$S = \{x \in \mathfrak{k};\ \dim \mathfrak{g}_{(0)}(ad_{\mathfrak{g}}\, x) \quad \text{je minimalna}\}.$$

Odatle slijedi da je svaki $x \in \mathfrak{g}' \cap \mathfrak{k}$ sadržan u S,. Dakle, $\mathfrak{g}' \cap \mathfrak{k} \subseteq S \subseteq \mathfrak{k}'$.

Napomena: Za Liejevu podalgebru $\mathfrak{k}$ od $\mathfrak{g}$ skup $\mathfrak{g}' \cap \mathfrak{k}$ ne mora biti neprazan. Ali ako jest neprazan, onda je on upravo jednak skupu S iz dokaza prethodne propozicije.

Teorem 3.2.7. *(a) Za $x \in \mathfrak{g}'$ Fittingov potprostor*

$$\mathfrak{g}_{(0)}(ad\, x) = \{y \in \mathfrak{g};\ \exists k \in \mathbb{N}\ (ad\, x)^k y = 0\}$$

je Cartanova podalgebra od $\mathfrak{g}$.

(b) Ako je $\mathfrak{h}$ Cartanova podalgebra od $\mathfrak{g}$ i $x \in \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}'$, onda je $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_{(0)}(ad\, x)$. Posebno, ako su $\mathfrak{h}_1$ i $\mathfrak{h}_2$ Cartanove podalgebre i ako je $\mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{h}_2 \cap \mathfrak{g}' \neq \emptyset$, onda je $\mathfrak{h}_1 = \mathfrak{h}_2$.

Dokaz: (a) Neka je $x \in \mathfrak{g}'$ i stavimo $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_{(0)}(ad\, x)$. Tada je očito $\mathfrak{h}_{(0)}(ad_{\mathfrak{h}}\, x) = \mathfrak{h}$. Po propoziciji 3.2.6. vrijedi $x \in \mathfrak{h}'$. To znači da je $r(\mathfrak{h}) = \dim \mathfrak{h}$, pa slijedi da je Liejeva algebra $\mathfrak{h}$ nilpotentna. Nadalje, imamo

$$\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_{(0)}(ad\, x) \supseteq \mathfrak{g}_{(0)}(\mathfrak{h}) \supseteq \mathfrak{h}.$$

Dakle, $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_{(0)}(\mathfrak{h})$, a to prema tvrdnji (b) propozicije 3.2.2. znači da je $\mathfrak{h}$ Cartanova podalgebra od $\mathfrak{g}$.

(b) Neka je $\mathfrak{h}$ Cartanova podalgebra od $\mathfrak{g}$ i pretpostavimo da je $x \in \mathfrak{g}' \cap \mathfrak{h}$. Tada je prema (a) $\mathfrak{g}_{(0)}(ad\, x)$ Cartanova podalgebra od $\mathfrak{g}$. No kako je $\mathfrak{h}$ nilpotentna Liejeva algebra, operator $(ad\, x)|\mathfrak{h}$ je nilpotentan. Odatle slijedi da je $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}_{(0)}(ad\, x)$, dakle, $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_{(0)}(ad\, x)$.

Posebno su važne Cartanove podalgebre poluproste Liejeve algebre. U tom slučaju one se mogu na drugi vrlo upotrebljiv način karakterizirati:

Teorem 3.2.8. *Neka je $\mathfrak{h}$ Liejeva podalgebra poluproste Liejeve algebre $\mathfrak{g}$. Tada je $\mathfrak{h}$ Cartanova podalgebra od $\mathfrak{g}$ ako i samo ako su ispunjena sljedeća dva uvjeta*

(a) $\mathfrak{h}$ je maksimalna komutativna podalgebra od $\mathfrak{g}$.

(b) Svaki element $h \in \mathfrak{h}$ je poluprost.

U tom je slučaju restrikcija $B_{\mathfrak{g}}|\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}$ Killingove forme nedegenerirana.

Dokaz: Neka je $\mathfrak{h}$ Cartanova podalgebra od $\mathfrak{g}$ i neka je $x \in \mathfrak{g}' \cap \mathfrak{h}$. Takav x postoji po tvrdnji (c) teorema 3.2.5. a po tvrdnji (b) istog teorema tada je

$$\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_{(0)}(ad\, x) = \{h \in \mathfrak{g};\ \exists k \in \mathbb{N}\ (ad\, x)^k h = 0\}.$$

Neka je x_s poluprosti dio elementa x. Tada je $(ad\, x)x_s = [x, x_s] = 0$, dakle, $x_s \in \mathfrak{h}$. Nadalje, operatori $ad\, x$ i $ad\, x_s$ imaju isti svojstveni polinom, pa slijedi da je element x_s regularan. No tada je $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_{(0)}(ad\, x_s)$, a kako je $ad\, x_s$ poluprost, njegov korijenski potprostor $\mathfrak{g}_{(0)}(ad\, x_s)$ jednak je njegovom svojstvenom potprostoru $\mathfrak{g}_0(ad\, x_s)$, tj.

$$\mathfrak{h} = \{y \in \mathfrak{g};\ (ad\, x_s)y = 0\} = \{y \in \mathfrak{g};\ [x_s, y] = 0\} = Z_{\mathfrak{g}}(x_s).$$

Sada je prema Fittingovoj dekompoziciji u odnosu na operator $ad\,x_s$

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \dotplus \mathfrak{g}_*(ad\,x_s).$$

a kako je operator $ad\,x_s$ poluprost, vrijedi

$$\mathfrak{g}_*(ad\,x_s) = \mathrm{Im}\,(ad\,x_s) = [x_s, \mathfrak{g}].$$

Dakle, vrijedi

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \dotplus [x_s, \mathfrak{g}].$$

Sada za $h \in \mathfrak{h}$ i $y \in \mathfrak{g}$ imamo po tvrdnji (c) propozicije 2.3.2.

$$B_\mathfrak{g}(h, [x_s, y]) = B_\mathfrak{g}([h, x_s], y) = 0.$$

To pokazuje da je $B_\mathfrak{g}(\mathfrak{h}, [x_s, \mathfrak{g}]) = \{0\}$. Kako je forma $B_\mathfrak{g}$ nedegenerirana, iz propozicije 1.4.5. slijedi da je restrikcija $B_\mathfrak{g}|\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}$ nedegenerirana.

Liejeva algebra $\mathfrak{h}$ je nilpotentna, dakle, rješiva. Prema korolaru 2.2.5. postoji baza u $\mathfrak{g}$ u odnosu na koju svi operatori $ad\,h$, $h \in \mathfrak{h}$, imaju gornje trokutaste matrice. Pretpostavimo sada da je neki $x \in \mathfrak{h}$ nilpotentan. Onda $ad\,x$ u toj bazi ima striktno gornje trokutastu matricu pa za svaki $h \in \mathfrak{h}$ produkt $(ad\,x)(ad\,h)$ ima striktno gornje trokutastu matricu. No tada mu je trag jednak nuli, tj.

$$B_\mathfrak{g}(x, h) = \mathrm{Tr}\,(ad\,x)(ad\,h) = 0 \qquad \forall h \in \mathfrak{h}.$$

Kako je forma $B_\mathfrak{g}|\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}$ nedegenerirana, slijedi $x = 0$. To pokazuje da u $\mathfrak{h}$ nema nilpotentnih elemenata različitih od 0. No kako za $x \in \mathfrak{h}$ vrijedi $x_s \in \mathfrak{h}$, to je i $x_n = x - x_s \in \mathfrak{h}$, dakle, $x_n = 0$. To pokazuje da su svi elementi Cartanove podalgebre $\mathfrak{h}$ poluprosti. Time je dokazano da svaka Cartanova podalgebra $\mathfrak{h}$ ima svojstvo (b).

Dokažimo sada da je Liejeva algebra $\mathfrak{h}$ komutativna. Neka je $x \in \mathfrak{h}$ proizvoljan. Kako je operator $ad\,x$ poluprost, njegova restrikcija $(ad\,x)|\mathfrak{h} = ad_\mathfrak{h}\,x$ je također poluprost operator, dakle, dijagonalizabilan. Treba dokazati da je $ad_\mathfrak{h}\,x = 0$, a to će slijediti ako dokažemo da operator $ad_\mathfrak{h}\,x$ nema svojstvenih vrijednosti različitih od 0. Pretpostavimo suprotno da postoji $0 \neq \lambda \in Sp(ad_\mathfrak{h}\,x)$ i neka je $y \in \mathfrak{h} \setminus \{0\}$ pripadni svojstveni vektor:

$$(ad_\mathfrak{h}\,x)y = [x, y] = \lambda y.$$

No tada je

$$(ad_\mathfrak{h}\,y)x = [y, x] = -\lambda y \neq 0.$$

S druge strane, operator $ad_\mathfrak{h}\,y$ je dijagonalizabilan, pa se x može napisati kao suma njegovih svojstvenih vektora. Kako je $(ad_\mathfrak{h}\,y)x \neq 0$, među tim svojstvenim vektorima postoje neki sa svojstvenom vrijednošću $\neq 0$. Drugim riječima, postoji $k \in \mathbb{N}$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $x_0 \in \mathfrak{h}$ i $x_1, \ldots, x_k \in \mathfrak{h} \setminus \{0\}$ takvi da je

$$x = x_0 + x_1 + \cdots + x_k, \qquad [y, x_0] = 0, \qquad [y, x_j] = \alpha_j x_j \quad \text{za } j = 1, \ldots, k.$$

Slijedi

$$-\lambda y = (ad_\mathfrak{h}\,y)x = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_k x_k \qquad \Longrightarrow \qquad \alpha_1 x_1 + \cdots \alpha_k x_k + \lambda y = 0.$$

No to je nemoguće jer su $x_1, \ldots, x_k, y$ svojstveni vektori operatora $ad_\mathfrak{h}\,y$ za međusobno različite svojstvene vrijednosti i kao takvi su linearno nezavisni. Ova kontradikcija dokazuje tvrdnju $ad_\mathfrak{h}\,x = 0$, a kako je $x \in \mathfrak{h}$ bio proizvoljan, slijedi da je Liejeva algebra $\mathfrak{h}$ komutativna.

Napokon, prema propoziciji 3.2.1. $\mathfrak{h}$ je maksimalna nilpotentna podalgebra od $\mathfrak{g}$. Kako je svaka komutativna Liejeva algebra nilpotentna, slijedi da je $\mathfrak{h}$ maksimalna komutativna podalgebra, tj. vrijedi svojstvo (a).

Pretpostavimo sada da je $\mathfrak{h}$ podalgebra Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ sa svojstvima (a) i (b). Tada je $h \mapsto ad\, h$ potpuno reducibilna reprezentacija od $\mathfrak{h}$, dakle, postoji $(ad\, \mathfrak{h})-$invarijantan potprostor $\mathfrak{k}$ od $\mathfrak{g}$ takav da je $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \dotplus \mathfrak{k}$. Pretpostavimo sada da $\mathfrak{h}$ nije Cartanova podalgebra od $\mathfrak{g}$. Tada je $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) \neq \mathfrak{h}$, dakle, postoji $y \in \mathfrak{g} \setminus \mathfrak{h}$ takav da je $[y, \mathfrak{h}] \subseteq \mathfrak{h}$. Pišemo sada $y = z + u$, $z \in \mathfrak{h}$, $u \in \mathfrak{k}$, $u \neq 0$. Tada je $[z, \mathfrak{h}] = \{0\}$, jer je $\mathfrak{h}$ komutativna, pa iz $[y, \mathfrak{h}] \subseteq \mathfrak{h}$ slijedi $[u, \mathfrak{h}] \subseteq \mathfrak{h}$. S druge strane je $[u, \mathfrak{h}] \subseteq [\mathfrak{k}, \mathfrak{h}] \subseteq \mathfrak{k}$, jer je $\mathfrak{k}$ $(ad\, \mathfrak{h})-$invarijantan potprostor, pa slijedi $[u, \mathfrak{h}] \subseteq \mathfrak{h} \cap \mathfrak{k} = \{0\}$. No to je nemoguće jer je $u \neq 0$ i pretpostavili smo da je $\mathfrak{h}$ maksimalna komutativna podalgebra od $\mathfrak{g}$. Ova kontradikcija pokazuje da je pretpostavka da $\mathfrak{h}$ nije Cartanova podalgebra bila pogrešna. Time je teorem u potpunosti dokazan.

Prema tome, za poluprostu Liejevu algebru $\mathfrak{g}$ i njenu Cartanovu podalgebru $\mathfrak{h}$ operatori $ad\, h$, $h \in \mathfrak{h}$ su svi poluprosti, odnosno, dijagonalizabilni, i međusobno komutiraju. To znači da se mogu simultano dijagonalizirati. Posebno, svaki korijenski potprostor $\mathfrak{g}_{(\alpha)}(\mathfrak{h})$ podudara se sa simultanim svojstvenim potprostorom $\mathfrak{g}_\alpha$. Dakle, korijenski rastav poluproste Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ u odnosu na Cartanovu podalgebru $\mathfrak{h}$ ima oblik

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \dotplus \sum_{\alpha \in R} \dotplus \, \mathfrak{g}_\alpha, \quad \mathfrak{g}_\alpha = \{x \in \mathfrak{g};\ [h, x] = \alpha(h)x \ \forall h \in \mathfrak{h}\}, \quad R = \{\alpha \in \mathfrak{h}^*;\ \alpha \neq 0,\ \mathfrak{g}_\alpha \neq \{0\}\}.$$

U 5. poglavlju vidjet ćemo da je svaki korijenski potprostor $\mathfrak{g}_\alpha$ jednodimenzionalan i da sistem korijena $R = R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) \subseteq \mathfrak{h}^*$ ima značajna geometrijska svojstva. Štoviše, vidjet ćemo da sistem korijena do na izomorfizam jedinstveno određuje poluprostu Liejevu algebru.

Zadatak 3.2.5. *Neka je $\mathfrak{h}$ skup svih dijagonalnih matrica u Liejevoj algebri $\mathfrak{sl}(n, K)$. Dokažite da je $\mathfrak{h}$ Cartanova podalgebra od $\mathfrak{sl}(n, K)$.*

Zadatak 3.2.6. *Neka je $\mathfrak{h}$ skup svih dijagonalnih matrica u Liejevoj algebri $\mathfrak{o}(n, K)$. Dokažite da je $\mathfrak{h}$ Cartanova podalgebra od $\mathfrak{o}(n, K)$.*

Zadatak 3.2.7. *Neka je $\mathfrak{h}$ skup svih dijagonalnih matrica u Liejevoj algebri $\mathfrak{sp}(2n, K)$. Dokažite da je $\mathfrak{h}$ Cartanova podalgebra od $\mathfrak{sp}(2n, K)$.*

Zadatak 3.2.8. *Neka je $\{x, y, z\}$ baza vektorskog prostora $\mathfrak{g}$ nad poljem K i neka je bilinearna binarna operacija na $\mathfrak{g}$ zadana sa*

$$[x, y] = y, \qquad [x, z] = z, \qquad [y, z] = 0.$$

(a) Dokažite da je $\mathfrak{g}$ Liejeva algebra.

(b) Dokažite da nijedna Cartanova podalgebra od $\mathfrak{g}$ nije sadržana u komutativnom idealu $\mathfrak{a} = Ky \dotplus Kz$.

(c) Dokažite da su sve Cartanove podalgebre od $\mathfrak{g}$ jednodimenzionalne.

3.3 Trodimenzionalna prosta Liejeva algebra

Kao i do sada, K je algebarski zatvoreno polje karakteristike 0. U ovom ćemo odjeljku proučiti Liejevu algebru $\mathfrak{sl}(2, K)$ svih kvadratnih matrica drugog reda s tragom nula i njene konačnodimenzionalne reprezentacije. Dakle,

$$\mathfrak{sl}(2, K) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix};\ a, b, c \in K \right\}.$$

To je trodimenzionalna prosta Liejeva algebra i jednu njenu bazu čine matrice

$$x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad y = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad h = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Te matrice zadovoljavaju komutacione relacije

$$[h, x] = 2x, \qquad [h, y] = -2y, \qquad [x, y] = h.$$

Lako se vidi da svaka trodimenzionalna prosta Liejeva algebra nad poljem K ima bazu čiji elementi zadovoljavaju gornje komutacione relacije. Proste trodimenzionalne Liejeve algebre zvat ćemo **TDS−algebre** (prema engleskom *three−dimensional simple*), a baza $\{x, y, h\}$ takve algebre koja zadovoljava gornje komutacione relacije zove se **standardna baza**.

Zadatak 3.3.1. *Neka je $\mathfrak{g}$ trodimenzionalna Liejeva algebra nad poljem K. Dokažite da je $\mathfrak{g}$ poluprosta ako i samo ako je $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{g}$ i da je u tom slučaju $\mathfrak{g}$ prosta i izomorfna Liejevoj algebri $\mathfrak{sl}(2, K)$.*

Neka je u daljnjem $\mathfrak{g}$ TDS−algebra nad poljem K i $\{x, y, h\}$ njena standardna baza. Uočimo da je operator $ad\,h$ dijagonalizabilan: baza $\{x, y, h\}$ sastavljena je od svojstvenih vektora operatora $ad\,h$. Prema tome, operator $ad\,h$ je poluprost, odnosno, element h je poluprost. Nadalje, vidi se da vrijedi $(ad\,x)^3 = (ad\,y)^3 = 0$, dakle, elementi x i y su nilpotentni. Neka je u daljnjem π reprezentacija Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ na konačnodimenzionalnom vektorskom prostoru V nad poljem K i stavimo

$$X = \pi(x), \qquad Y = \pi(y), \qquad H = \pi(h).$$

Prema tvrdnjama (a) i (b) teorema 2.4.6. operator H je poluprost, tj. dijagonalizabilan, a operatori X i Y su nilpotentni. Elementi spektra $Sp(H)$ operatora H zovu se **težine reprezentacije** π. Za težinu λ pripadni svojstveni potprostor

$$V_\lambda = V_\lambda(H) = \{v \in V;\ Hv = \lambda v\}$$

je **težinski potprostor** a njegovi su elementi **težinski vektori** težine λ. Kako je operator H dijagonalizabilan, imamo rastav u direktnu sumu

$$V = \sum_{\lambda \in Sp(H)} \dot{+}\, V_\lambda.$$

Zadatak 3.3.2. *Dokažite da uz uvedene oznake vrijedi*

$$XV_\lambda \subseteq V_{\lambda+2} \qquad i \qquad YV_\lambda \subseteq V_{\lambda-2} \qquad \forall \lambda \in K.$$

Uputa: Primijenite teorem 3.1.8. ili komutacione relacije $HX - XH = 2X$ i $HY - YH = -2Y$.

Težinski vektor $v \neq 0$ zove se **primitivni vektor** reprezentacije π ako je $Xv = 0$. Primitivni vektori očito postoje jer je operator X nilpotentan.

Lema 3.3.1. *Neka je v primitivni vektor težine* λ, *tj.* $0 \neq v \in V_\lambda$ *i* $Xv = 0$. *stavimo*

$$v_{-1} = 0, \quad v_0 = v, \quad v_j = \frac{1}{j!} Y^j v, \quad j \in \mathbb{N}.$$

Tada vrijedi:

$$Hv_j = (\lambda - 2j)v_j, \quad Xv_j = (\lambda - j + 1)v_{j-1}, \quad Yv_j = (j+1)v_{j+1}, \quad j \in \mathbb{Z}_+. \tag{3.13}$$

Dokaz: Treća jednakost slijedi neposredno iz definicije vektora v_j, a prva iz $Y^j V_\lambda \subseteq V_{\lambda-2j}$. Drugu jednakost dokazujemo indukcijom po $j \in \mathbb{Z}_+$. Za $j = 0$ jednakost vrijedi zbog izbora vektora v :

$$Xv_0 = Xv = 0 = (\lambda - 0 + 1)v_{-1}.$$

Za korak indukcije pretpostavimo da je $j \in \mathbb{Z}_+$ i da je jednakost $Xv_j = (\lambda - j + 1)v_{j-1}$ dokazana. Prema trećoj jednakosti je $Yv_j = (j+1)v_{j+1}$ i $Yv_{j-1} = jv_j$. Stoga zbog $XY = YX + H$ imamo redom

$$(j+1)Xv_{j+1} = XYv_j = YXv_j + Hv_j = (\lambda - j + 1)Yv_{j-1} + (\lambda - 2j)v_j =$$
$$= [j(\lambda - j + 1) + \lambda - 2j]v_j = (j+1)(\lambda - j)v_j.$$

No to znači da je

$$Xv_{j+1} = [\lambda - (j+1) + 1]v_{(j+1)-1},$$

odnosno, proveden je korak indukcije za dokaz druge jednakosti u (3.13).

Zadržimo pretpostavke i oznake iz leme 3.3.1. Prema prvoj jednakosti u (3.13) vektori v_j su svojstveni vektori operatora H za međusobno različite svojstvene vrijednosti. Prema tome, svi oni koji su $\neq 0$ su linearno nezavisni. Budući da je prostor V konačnodimenzionalan, postoji $m \in \mathbb{Z}_+$ takav da je $v_m \neq 0$ i $v_{m+1} = 0$. Sada formule (3.13) pokazuju da je potprostor $span\,\{v_0, \dots, v_m\}$ $\pi-$invarijantan i $(m+1)-$dimenzionalan. Pretpostavimo li da je reprezentacija π ireducibilna, zaključujemo da je $\{v_0, \dots, v_m\}$ baza prostora V. Napokon, kako je $v_{m+1} = 0$, druga jednakost u (3.13) za $j = m+1$ daje

$$0 = Xv_{m+1} = (\lambda - m)v_m,$$

a kako je $v_m \neq 0$, zaključujemo da je $\lambda - m = 0$, odnosno, $\lambda = m$.

Obratno, neka je $m \in \mathbb{Z}_+$ i pretpostavimo da je V $(m+1)-$dimenzionalan kompleksan vektorski prostor s bazom $\{v_0, \dots, v_m\}$. Neka su X, Y i H linearni operatori na prostoru V zadani svojim djelovanjem na izabranu bazu:

$$\begin{gathered} Hv_j = (m - 2j)v_j, \qquad 0 \leq j \leq m, \\ Xv_0 = 0, \qquad Xv_j = (m - j + 1)v_{j-1}, \quad 0 < j \leq m, \\ Yv_j = (j+1)v_{j+1}, \quad 0 \leq j < m, \qquad Yv_m = 0. \end{gathered} \tag{3.14}$$

Direktni račun daje:

$$[H,X]v_0 = HXv_0 - XHv_0 = -mXv_0 = 0 = 2Xv_0;$$

$$\text{za } 1 \leq j \leq m: \quad [H,X]v_j = HXv_j - XHv_j = (m - j + 1)Hv_{j-1} - (m - 2j)Xv_j =$$
$$= (m - j + 1)(m - 2j + 2)v_{j-1} - (m - 2j)(m - j + 1)v_{j-1} = 2(m - j + 1)v_{j-1} = 2Xv_j;$$
$$\text{za } 0 \leq j < m: \quad [H,Y]v_j = HYv_j - YHv_j = (j+1)Hv_{j+1} - (m - 2j)Yv_j =$$
$$= (j+1)(m - 2j - 2)v_{j+1} - (m - 2j)(j+1)v_{j+1} = -2(j+1)v_{j+1} = -2Yv_j;$$
$$[H,Y]v_m = HYv_m - YHv_m = mYv_m = 0 = -2Yv_m;$$

$$[X,Y]v_0 = XYv_0 - YXv_0 = Xv_1 = mv_0 = Hv_0;$$

$$\text{za } 0 < j < m: \quad [X,Y]v_j = XYv_j - Yxv_j = (j+1)Xv_{j+1} - (m-j+1)Yv_{j-1} =$$

$$= (j+1)(m-j)v_j - (m-j+1)jv_j = (m-2j)v_j = Hv_j;$$

$$[X,Y]v_m = XYv_m - YXv_m = -Yv_{m-1} = -mv_m = Hv_m.$$

Time je dokazano da operatori X, Y i H zadovoljavaju komutacione relacije

$$[H,X] = 2X, \qquad [H,Y] = -2Y, \qquad [X,Y] = H.$$

No tada je sa

$$\pi(\alpha x + \beta y + \gamma h) = \alpha X + \beta Y + \gamma H, \qquad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C},$$

zadana reprezentacija π Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ na prostoru V. Ta je reprezentacija ireducibilna. Doista, pretpostavimo da je $W \neq \{0\}$ potprostor od V koji je $\pi-$invarijantan, tj. koji je invarijantan s obzirom na operatore X, Y i H. Tada W sadrži neki svojstven vektor operatora H. Kako su vektori baze $v_0, \ldots, v_m$ svojstveni vektori od H s međusobno različitim svojstvenim vrijednostima $m, m-2, \ldots, -m+2, -m$, zaključujemo da je $v_j \in W$ za neki $j \in \{0, \ldots, m\}$. Iz druge formule u (3.14) slijedi da su tada $v_0, \ldots, v_{j-1} \in W$, a iz treće da su i $v_{j+1}, \ldots, v_m \in W$. Dakle, nužno je $W = V$ i time je dokazana ireducibilnost reprezentacije π.

Na taj način dokazali smo:

Teorem 3.3.2. *Neka je* $\mathfrak{g}$ *TDS−algebra nad poljem* K *sa standardnom bazom* $\{x, y, h\}$.

(*a*) *Za svaki* $m \in \mathbb{Z}_+$ *postoji do na ekvivalenciju jedinstvena ireducibilna* $(m+1)-$*dimenzionalna reprezentacija* π_m *Liejeve algebre* $\mathfrak{g}$.

(*b*) *Težine reprezentacije* π_m *su* $m, m-2, \ldots, -m+2, -m$ *i svaki je težinski potprostor jednodimenzionalan.*

(*c*) *Postoji do na skalarni multipl* $\neq 0$ *jedinstven primitivni vektor reprezentacije* π_m *i njegova težina je* m.

(*d*) *Postoji baza* $\{v_0, \ldots, v_m\}$ *prostora reprezentacije* π_m *na koju operatori* $H = \pi_m(h)$, $X = \pi_m(x)$ *i* $Y = \pi_m(y)$ *djeluju po formulama* (3.14).

Zadatak 3.3.3. *Neka je* $\mathfrak{g}$ *TDS−algebra i* $\{x, y, h\}$ *njena standardna baza. Nadalje, neka je za* $m \in \mathbb{Z}_+$ $K^m[X,Y]$ *prostor homogenih polinoma u dvije varijable* X *i* Y *stupnja* m. *Dokažite da na prostor* $K^m[X,Y]$ *postoji reprezentacija* π^m *od* $\mathfrak{g}$ *takva da je*

$$\pi^m(x)P = X\frac{\partial P}{\partial Y}, \qquad \pi^m(y)P = -Y\frac{\partial P}{\partial X}, \qquad \pi(h)P = X\frac{\partial P}{\partial X} - Y\frac{\partial P}{\partial Y}, \qquad P \in K^m[X,Y].$$

Nadalje, dokažite da je $\pi^m \cong \pi_m$.

Teorem 3.3.3. *Neka je* π *reprezentacija TDS−algebre* $\mathfrak{g}$ *nad poljem* K *sa standardnom bazom* $\{x, y, h\}$ *na konačnodimenzionalnom prostoru* V.

(*a*) *Sve su težine reprezentacije* π *cijeli brojevi.*

(*b*) *Za svaki* $j \in \mathbb{Z}_+$ *vrijedi* $\dim V_j = \dim V_{-j}$.

(c) *Ako je* $V = X_1 \dotplus \cdots \dotplus X_s$ *rastav prostora* V *u direktnu sumu* $\pi-$*invarijantnih potprostora takvih da je svaka subreprezentacija* π_{X_i} *ireducibilna, onda je* $s = \dim V_0 + \dim V_1$. *Preciznije,* $\dim V_0$ *je broj indeksa* $i \in \{1,\dots,s\}$ *takvih da je potprostor* X_i *neparne dimenzije, a* $\dim V_1$ *je broj indeksa* $i \in \{1,\dots,s\}$ *takvih da je potprostor* X_i *parne dimenzije.*

Dokaz: Prema Weylovom teoremu 2.4.4. o potpunoj reducibilnosti postoji rastav

$$V = X_1 \dotplus \cdots \dotplus X_s,$$

gdje su svi potprostori X_i $\pi-$invarijantni i sve subreprezentacije π_{X_i} su ireducibilne. Svaka od tih subreprezentacija je prema teoremu 3.3.2. ekvivalentna nekoj od reprezentacija π_m čije su sve težine cijeli brojevi. Odatle neposredno slijedi tvrdnja (a), a i tvrdnja (b). Napokon, u svakoj neparnodimenzionalnoj ireducibilnoj reprezentaciji težinski potprostor za težinu 0 je jednodimenzionalan, a 1 nije težina, dok je s druge strane u svakoj parnodimenzionalnoj ireducibilnoj reprezentaciji težinski potprostor za težinu 1 jednodimenzionalan, a 0 nije težina. Odatle slijedi tvrdnja (c).

Činjenica da vrijedi $\dim V_j = \dim V_{-j}$ za prostor V bilo koje konačnodimenzionalne reprezentacije π slijedi i kao posljedica lako provjerljive činjenice da je sa

$$\tau : \alpha x + \beta y + \gamma h \mapsto -\alpha y - \beta x - \gamma h$$

zadan automorfizam Liejeve algebre $\mathfrak{g}$, tj. njen izomorfizam na samu sebe, i pri tom automorfizmu element h prelazi u $-h$. Napomenimo da se taj automorfizam τ može eksplicitno konstruirati pomoću adjungirane reprezentacije. U slučaju proizvoljne konačnodimenzionalne reprezentacije ista konstrukcija vodi na izomorfizam svakog težinskog potprostora V_j na težinski potprostor V_{-j}. U tu svrhu uočimo da su za svaku konačnodimenzionalnu reprezentaciju π na prostoru V operatori $\pi(x)$ i $\pi(y)$ nilpotentni, pa su dobro definirani operatori

$$\mathrm{e}^{\pi(x)} = \sum_{k\in\mathbb{Z}_+} \frac{1}{k!}\pi(x)^k \qquad \text{i} \qquad \mathrm{e}^{\pi(y)} = \sum_{k\in\mathbb{Z}_+} \frac{1}{k!}\pi(y)^k.$$

Nadalje, kao što ćemo vidjeti u zadatku 4.2.2., to su elementi grupe $GL(V)$.

Može se dokazati da vrijedi:

Propozicija 3.3.4. *Neka je* π *konačnodimenzionalna reprezentacija TDS−algebre* $\mathfrak{g}$ *nad poljem* K *sa standardnom bazom* $\{x, y, h\}$ *na vektorskom prostoru* V. *Za operator* $A_\pi \in GL(V)$ *definiran sa*

$$A_\pi = \mathrm{e}^{\pi(x)}\mathrm{e}^{-\pi(y)}\mathrm{e}^{\pi(x)}$$

i za svaku težinu j *reprezentacije* π *vrijedi*

$$A_\pi V_j = V_{-j}.$$

Nadalje, ako je

$$\tau = A_{ad} = \mathrm{e}^{ad\,x}\mathrm{e}^{-ad\,y}\mathrm{e}^{ad\,x}$$

onda je τ *automorfizam Liejeve algebre* $\mathfrak{g}$ *i vrijedi* $\tau(\alpha x + \beta y + \gamma h) = -\alpha y - \beta x - \gamma h$. *Napokon, za svaku konačnodimenzionalnu reprezentaciju* π *od* $\mathfrak{g}$ *vrijedi*

$$A_\pi \pi(z) A_\pi^{-1} = \pi(\tau(z)) \qquad \forall z \in \mathfrak{g}.$$

Zadatak 3.3.4. *Neka je* $\mathfrak{g}$ *TDS−algebra i* $\{x, y, h\}$ *njena standardna baza. Za* $\lambda \in K$ *označimo sa* $V(\lambda)$ *beskonačnodimenzionalan vektorski prostor s bazom* $\{e_n;\ n \in \mathbb{Z}_+\}$.

(a) *Dokažite da postoji jedinstvena reprezentacija* π^λ *Liejeve algebre* $\mathfrak{g}$ *na prostoru* $V(\lambda)$ *takva da uz oznaku* $e_{-1} = 0$ *vrijedi:*

$$\pi^\lambda(h)e_n = (\lambda - 2n)e_n, \qquad \pi^\lambda(x)e_n = (\lambda - n + 1)e_{n-1}, \qquad \pi^\lambda(y)e_n = -(n+1)e_{n+1}, \qquad n \in \mathbb{Z}_+.$$

(b) *Dokažite da je u slučaju* $\lambda \notin \mathbb{Z}_+$ *reprezentacija* π^λ *iz* (a) *ireducibilna.*

(c) *Neka je* $\lambda \in \mathbb{Z}_+$ *i neka je* V' *potprostor od* $V(\lambda)$ *razapet sa* $\{e_n;\ n > \lambda\}$. *Dokažite da je potprostor* V' $\pi^\lambda-$*invarijantan, da je pripadna subreprezentacija* $\left(\pi^\lambda\right)_{V'}$ *ekvivalentna reprezentaciji* $\pi^{-\lambda-2}$ *i da je kvocijentna reprezentacija* $\left(\pi^\lambda\right)_{V(\lambda)/V'}$ *ireducibilna* $(\lambda + 1)-$*dimenzionalna reprezentacija od* $\mathfrak{g}$.

(d) *Dokažite da je u slučaju* $\lambda \in \mathbb{Z}_+$ *potprostor* V' *iz* (c) *jedini* $\pi^\lambda-$*invarijantan potprostor od* $V(\lambda)$ *različit od* $\{0\}$ *i od* $V(\lambda)$.

Zadatak 3.3.5. *Neka je* $\mathfrak{g}$ *TDS*$-$*algebra i* $\{x, y, h\}$ *njena standardna baza. Neka je* E *beskonačnodimenzionalan vektorski prostor s bazom* $\{e_n;\ n \in \mathbb{Z}\}$ *i neka su* $\alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta_1, \gamma_0, \gamma_1 \in K$. *Dokažite da postoji reprezentacija* π *od* $\mathfrak{g}$ *na* E *takva da vrijedi*

$$\pi(h)e_n = (\gamma_0 + n\gamma_1)e_n, \qquad \pi(x)e_n = (\alpha_0 + n\alpha_1)e_{n-1}, \qquad \pi(y)e_n = (\beta_0 + n\beta_1)e_n, \qquad n \in \mathbb{Z},$$

ako i samo ako vrijedi

$$\alpha_1\beta_1 = 1, \qquad \gamma_1 = -2 \qquad i \qquad \alpha_0\beta_1 + \alpha_1\beta_0 + \gamma_0 = 0.$$

Koji su nužni i dovoljni uvjeti da bi reprezentacija π *bila ireducibilna?*

3.4 Korijenski rastav poluproste Liejeve algebre

U ovom odjeljku $\mathfrak{g}$ je poluprosta Liejeva algebra nad algebarski zatvorenim poljem K karakteristike 0 i $\mathfrak{h}$ njena Cartanova podalgebra. Označavat ćemo sa R pripadni sistem korijena $R(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$. Proučit ćemo sada pobliže korijenski rastav od $\mathfrak{g}$ u odnosu na $\mathfrak{h}$:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \dotplus \sum_{\alpha\in R} \dotplus \mathfrak{g}_\alpha, \qquad \mathfrak{g}_\alpha = \{x \in \mathfrak{g};\ [h,x] = \alpha(h)x\ \ \forall h \in \mathfrak{h}\}. \tag{3.15}$$

Neka je $B = B_\mathfrak{g}$ Killingova forma Liejeve algebre $\mathfrak{g}$. Prema teoremu 3.2.8. restrikcija $B|\mathfrak{h}\times\mathfrak{h}$ je nedegenerirana. Zbog toga po propoziciji 1.4.2. dobro je definiran izomorfizam $\lambda \mapsto t_\lambda$ dualnog prostora $\mathfrak{h}^*$ na prostor $\mathfrak{h}$ sa svojstvom

$$\lambda(h) = B(h, t_\lambda) \qquad \forall h \in \mathfrak{h}.$$

Teorem 3.4.1. *(a)* $\mathfrak{h}^* = span\, R$.

(b) $R = -R$, *tj.* $\alpha \in R \iff -\alpha \in R$.

(c) Za $\alpha \in R$, $x \in \mathfrak{g}_\alpha$ *i* $y \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ *vrijedi*

$$[x, y] = B(x, y)t_\alpha.$$

(d) Za svaki $\alpha \in R$ *je* $\alpha(t_\alpha) = B(t_\alpha, t_\alpha) \neq 0$.

(e) Za svaki $\alpha \in R$ *je* $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}] = Kt_\alpha$, *tj.* $\dim\,[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}] = 1$.

(f) Za svaki $\alpha \in R$ *postoji jedinstven* $h_\alpha \in [\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}]$ *takav da je* $\alpha(h_\alpha) = 2$. *Vrijedi*

$$h_\alpha = \frac{2}{B(t_\alpha, t_\alpha)} t_\alpha = -h_{-\alpha}.$$

(g) Za $\alpha \in R$ *i* $x_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha \setminus \{0\}$ *postoji* $y_\alpha \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ *takav da je* $[x_\alpha, y_\alpha] = h_\alpha$. *Tada je* $\{x_\alpha, y_\alpha, h_\alpha\}$ *standardna baza TDS−podalgebre* $\mathfrak{s}_\alpha$ *od* $\mathfrak{g}$.

Dokaz: (*a*) Pretpostavimo da je $\mathfrak{h}^* \neq span\, R$. Tada postoji $h \in \mathfrak{h} \setminus \{0\}$ takav da je $\alpha(h) = 0$ $\forall \alpha \in R$. To znači da je $[h, \mathfrak{g}_\alpha] = \{0\}$ $\forall \alpha \in R$. Kako je i $[h, \mathfrak{h}] = \{0\}$, iz korijenskog rastava (3.15) slijedi da je $[h, \mathfrak{g}] = \{0\}$, odnosno, $h \in Z(\mathfrak{g})$. No to je nemoguće jer je za poluprostu Liejevu algebru $\mathfrak{g}$ centar $Z(\mathfrak{g})$ jednak $\{0\}$. Ova kontradikcija dokazuje da je $\mathfrak{h}^* = span\, R$.

(*b*) Neka je $\alpha \in R$ i pretpostavimo da $-\alpha \notin R$. Prema tvrdnji (*c*) teorema 3.2.4. slijedi da je $B(\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta) = \{0\}$ $\forall \beta \in R$, a također i $B(\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{h}) = \{0\}$. Sada iz korijenskog rastava (3.15) zaključujemo da je $B(\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}) = \{0\}$, a to je nemoguće zbog nedegeneriranosti Killingove forme B. Ova kontradikcija dokazuje da je nužno $-\alpha \in R$.

(*c*) Neka su $\alpha \in R$, $x \in \mathfrak{g}_\alpha$, $y \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ i $h \in \mathfrak{h}$. Zbog svojstava Killingove forme B imamo redom

$$B(h, [x, y]) = B([h, x], y) = \alpha(h)B(x, y) = B(h, t_\alpha)B(x, y) = B(h, B(x, y)t_\alpha).$$

Kako je $B(x, y)t_\alpha \in \mathfrak{h}$ i kako je restrikcija $B|\mathfrak{h}\times\mathfrak{h}$ nedegenerirana, zbog proizvoljnosti elementa $h \in \mathfrak{h}$ zaključujemo da vrijedi $[x, y] = B(x, y)t_\alpha$.

(*e*) Tvrdnja (*c*) pokazuje da je ili $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}] = \{0\}$ ili je $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}] = Kt_\alpha$. Neka je $x \in \mathfrak{g}_\alpha \setminus \{0\}$. Kad bi bilo $B(x, \mathfrak{g}_{-\alpha}) = \{0\}$, kao u dokazu tvrdnje (*b*) mogli bismo zaključiti da je $B(x, \mathfrak{g}) = \{0\}$. No to je nemoguće zbog nedegeneriranosti Killingove forme B. Prema tome, postoji $y \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ takav da je $B(x, y) \neq 0$. Prema tvrdnji (*c*) slijedi da je $[x, y] \neq 0$. To dokazuje da je $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}] \neq \{0\}$, dakle, $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}] = Kt_\alpha$.

(d) Pretpostavimo da je $\alpha(t_\alpha) = 0$. To znači da je

$$[t_\alpha, x] = [t_\alpha, y] = 0 \qquad \forall x \in \mathfrak{g}_\alpha \quad \text{i} \quad \forall y \in \mathfrak{g}_{-\alpha}.$$

Kao u dokazu tvrdnje (e) možemo izabrati $x \in \mathfrak{g}_\alpha$ i $y \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ tako da bude $B(x, y) \neq 0$. Pomnožimo li jednog od njih pogodnim skalarom, vdimo da možemo pretpostaviti da je $B(x, y) = 1$. Tada prema tvrdnji (c) imamo $[x, y] = t_\alpha$. Slijedi da je $\mathfrak{s} = span\,\{x, y, t_\alpha\}$ trodimenzionalna rješiva Liejeva podalgebra od $\mathfrak{g}$. Budući da je $ad_\mathfrak{g}$ vjerna reprezentacija od $\mathfrak{g}$, Liejeva algebra $\mathfrak{s}$ izomorfna je Liejevoj podalgebri $ad_\mathfrak{g}\,\mathfrak{s}$ od $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$. Prema teoremu 2.2.4. postoji baza od $\mathfrak{g}$ u kojoj svi operatori $ad_\mathfrak{g}\,s$, $s \in \mathfrak{s}$, imaju gornje trokutaste matrice. No tada su svi operatori $ad_\mathfrak{g}\,s$, $s \in [\mathfrak{s}, \mathfrak{s}]$, nilpotentni. Kako je $t_\alpha = [x, y] \in [\mathfrak{s}, \mathfrak{s}]$ slijedi da je t_α nilpotentan element od $\mathfrak{g}$. No to je nemoguće jer je element $t_\alpha \neq 0$ poluprost. Ova kontradikcija pokazuje da je $\alpha(t_\alpha) \neq 0$.

Tvrdnja (f) slijedi neposredno iz tvrdnji (d) i (e).

Za $x_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha \setminus \{0\}$ je $B(x_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}) \neq \{0\}$, pa zbog tvrdnje (e) možemo izabrati $y_\alpha \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ tako da bude

$$B(x_\alpha, y_\alpha) = \frac{2}{B(t_\alpha, t_\alpha)}.$$

Prema tvrdnji (c) i uz oznaku h_α iz tvrdnje (f) tada je $[x_\alpha, y_\alpha] = h_\alpha$. Nadalje, kako je $\alpha(h_\alpha) = 2$, imamo $[h_\alpha, x_\alpha] = 2x_\alpha$ i $[h_\alpha, y_\alpha] = -2y_\alpha$. Dakle, $\mathfrak{s}_\alpha = span\,\{x_\alpha, y_\alpha, h_\alpha\}$ je TDS$-$podalgebra od $\mathfrak{g}$ i $\{x_\alpha, y_\alpha, h_\alpha\}$ je njena standardna baza.

Primijenit ćemo sada rezultate prethodnog odjeljka na TDS$-$podalgebre $\mathfrak{s}_\alpha$ od $\mathfrak{g}$ i na njenu reprezentaciju $ad_\mathfrak{g}|\mathfrak{s}_\alpha$ na prostoru $\mathfrak{g}$.

Teorem 3.4.2. (a) *Za svaki* $\alpha \in R$ *je* $\dim \mathfrak{g}_\alpha = 1$.

(b) *Za svaki* $\alpha \in R$ *je* $K\alpha \cap R = \{\alpha, -\alpha\}$.

(c) *Ako su* $\alpha, \beta \in R$, *onda je* $\beta(h_\alpha) \in \mathbb{Z}$ *i* $\beta - \beta(h_\alpha)\alpha \in R$.

(d) *Ako su* $\alpha, \beta \in R$ *takvi da je i* $\alpha + \beta \in R$, *onda je* $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] = \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$.

(e) *Neka su* $\alpha, \beta \in R$ *takvi da je* $\beta \neq \pm\alpha$ *i neka su*

$$q = \max\{j \in \mathbb{Z}_+;\ \beta + j\alpha \in R\} \quad i \quad r = \max\{j \in \mathbb{Z}_+;\ \beta - j\alpha \in R\}.$$

Tada za $j \in \mathbb{Z}$ *vrijedi* $\beta + j\alpha \in R$ *ako i samo ako je* $-r \leq j \leq q$. *Nadalje, vrijedi* $\beta(h_\alpha) = r - q$.

(f) *Liejeva algebra* $\mathfrak{g}$ *generirana je sa* $\cup_{\alpha \in R}\mathfrak{g}_\alpha$.

Dokaz: Neka je $\alpha \in R$. Prema tvrdnji (g) teorema 3.4.1. možemo izabrati $x_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$ i $y_\alpha \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ tako da je $\mathfrak{s}_\alpha = span\,\{x_\alpha, y_\alpha, h_\alpha\}$ TDS$-$podalgebra od $\mathfrak{g}$ i da je $\{x_\alpha, y_\alpha, h_\alpha\}$ njena standardna baza. Promatrat ćemo reprezentaciju $\rho = ad_\mathfrak{g}|\mathfrak{s}_\alpha$ TDS$-$algebre $\mathfrak{s}_\alpha$ na prostoru $\mathfrak{g}$. Stavimo sada

$$J = \{c \in K;\ c\alpha \in R\}, \quad \text{dakle,} \quad K\alpha \cap R = \{c\alpha;\ c \in J\},$$

i neka je

$$V = \mathfrak{h} \dotplus \sum_{c \in J} \dotplus\, \mathfrak{g}_{c\alpha}.$$

Tada je V $\rho-$invarijantan potprostor od $\mathfrak{g}$. Neka je $\pi = \rho_V$ pripadna subreprezentacija reprezentacije ρ Liejeve algebre $\mathfrak{s}_\alpha$. Prema tvrdnji (a) teorema 3.3.3. sve težine te reprezentacije su cijeli brojevi. Te težine su 0 i $c\alpha(h_\alpha) = 2c$ za $c \in J$. Odatle slijedi da je $2c \in \mathbb{Z}$ za svaki $c \in J$, odnosno, da je $J \subseteq \frac{1}{2}\mathbb{Z}$.

Kao i prije sa V_n označimo težinski potprostor reprezentacije π za težinu $n \in \mathbb{Z}$. Prema tvrdnji (c) teorema 3.3.3. znamo da je broj ireducibilnih konstituenata reprezentacije π jednak $\dim V_0 + \dim V_1$. Štoviše, iz tvrdnje (b) teorema 3.3.2. znamo da su težine neke ireducibilne reprezentacije ili sve parne ili sve neparne. Dakle, $\dim V_0$ je broj ireducibilnih konstituenata reprezentacije π s parnim težinama, a $\dim V_1$ je broj ireducibilnih konstituenata od π s neparnim težinama.

Primijetimo sada da je $V_0 = \mathfrak{h}$. Prema tome, broj ireducibilnih konstituenata reprezentacije π s parnim težinama jednak je $\ell = \dim \mathfrak{h}$. Te je ireducibilne konstituente vrlo lako eksplicitno naći. Prije svega, $(\ell-1)-$dimenzionalni potprostor $\operatorname{Ker}\alpha = \{h \in \mathfrak{h};\ \alpha(h) = 0\}$ je očito $\pi-$invarijantan i na njemu je subreprezentacija od π trivijalna; dakle, u njoj je sadržano $\ell - 1$ ireducibilnih konstituenata od π s parnim težinama (tj. s jedinom težinom 0). Još jedan $\pi-$invarijantan potprostor od V s ireducibilnom subreprezentacijom i s parnim težinama je $\mathfrak{s}_\alpha$: težine su $2, 0, -2$. Time smo došli do ukupno ℓ ireducibilnih konstituenata od π s parnim težinama, što znači ta takvih više nema. Odatle slijedi da $n\alpha \notin R$ za $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$. Drugim riječima, vrijedi $J \cap \mathbb{Z} = \{1, -1\}$. Posebno, $2\alpha \notin R$. Odatle možemo zaključiti i da $\frac{1}{2}\alpha \notin R$; doista, kad bi $\beta = \frac{1}{2}\alpha$ bio korijen, onda bi to prema dokazanom značilo da $\alpha = 2\beta$ nije korijen. Dakle, $\frac{1}{2} \notin J$, a to znači da je $V_1 = \{0\}$. Prema tome, u reprezentaciji π uopće nema ireducibilnih konstituenata s neparnim težinama. Zaključujemo da je $V = \mathfrak{h} \dot{+} \mathfrak{s}_\alpha$. To ima za posljedicu da je $\mathfrak{g}_\alpha = Kx_\alpha$, odnosno, $\dim \mathfrak{g}_\alpha = 1$. Nadalje, slijedi da je $J \subseteq \mathbb{Z}$, odnosno, vrijedi $J = \{1, -1\}$ ili $K\alpha \cap R = \{\alpha, -\alpha\}$. Time su dokazane tvrdnje (a) i (b).

Neka su sada $\alpha, \beta \in R$. Tada je $\beta(h_\alpha)$ jedna od težina reprezentacije $\rho = ad_{\mathfrak{g}}|\mathfrak{s}_\alpha$, pa iz tvrdnje (a) teorema 3.3.3. slijedi da je $\beta(h_\alpha) \in \mathbb{Z}$. Time je dokazana prva tvrdnja u (c).

Pretpostavimo sada da je $\beta \neq \pm\alpha$ i stavimo

$$X = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \dot{+}\, \mathfrak{g}_{\beta + j\alpha}.$$

Tada je očito X $\rho-$invarijantan potprostor od $\mathfrak{g}$. Kako je $\alpha(h_\alpha) = 2$, sve težine pripadne subreprezentacije $\pi = \rho_X$ su oblika $\beta(h_\alpha) + 2j$ za $j \in \mathbb{Z}$, dakle, ili su sve parne ili su sve neparne. Nadalje, svaki je težinski potprostor je jednodimenzionalan, pa je ili $\dim X_0 = 1$ i $\dim X_1 = 0$ ili je $\dim X_0 = 0$ i $\dim X_1 = 1$. U oba slučaja je $\dim X_0 + \dim X_1 = 1$, a to prema tvrdnji (c) teorema 3.3.3. znači da je reprezentacija $\pi = \rho_X$ Liejeve algebre $\mathfrak{s}_\alpha$ ireducibilna. Najveća je težina $\beta(h_\alpha) + 2q$, a najmanja $\beta(h_\alpha) - 2r$. Prema tvrdnji (b) teorema 3.3.2. vrijedi

$$\beta(h_\alpha) - 2r = -(\beta(h_\alpha) + 2q),$$

a odatle je $2\beta(h_\alpha) = 2r - 2q$, odnosno, $\beta(h_\alpha) = r - q$. Nadalje, iz iste tvrdnje vidimo da su težine reprezentacije $\pi = \rho_X$ upravo svi brojevi oblika $\beta(h_\alpha) + 2j$ za $j = -r, -r+1, \ldots, q-1, q$. To znači da je $\mathfrak{g}_{\beta + j\alpha} \neq \{0\}$, tj. $\beta + j\alpha \in R$, ako i samo ako je $j \in \mathbb{Z}$ i $-r \leq j \leq q$. Time je dokazana tvrdnja (e).

Odatle slijedi i druga tvrdnja tvrdnja u (c) za $\beta \neq \pm\alpha$. Doista, vrijedi $-r \leq -(r-q) \leq q$, dakle,

$$\beta - \beta(h_\alpha)\alpha = \beta - (r-q)\alpha \in R.$$

Ako je $\beta = \alpha$, onda je $\beta(h_\alpha) = 2$, pa je

$$\beta - \beta(h_\alpha)\alpha = \alpha - 2\alpha = -\alpha \in R.$$

Napokon, ako je $\beta = -\alpha$, onda je $\beta(h_\alpha) = -2$, pa je opet

$$\beta - \beta(h_\alpha)\alpha = -\alpha + 2\alpha = \alpha \in R.$$

Time je tvrdnja (c) u potpunosti dokazana.

Neka su sada $\alpha, \beta \in R$ takvi da je i $\alpha + \beta \in R$. Uz prethodne oznake iz tvrdnje (e) tada je $q \geq 1$. Iz teorije reprezentacija TDS$-$algebre $\mathfrak{s}_\alpha$ znamo da za svaku težinu n ireducibilne reprezentacije $\pi = \rho_X$ manju od najveće vrijedi $\pi(x_\alpha)X_n = X_{n+2}$. Posebno je $\pi(x_\alpha)X_0 = X_2$, odnosno, $(ad_\mathfrak{g}\, x_\alpha)\mathfrak{g}_\beta = \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$, ili $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] = \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$. Time je dokazana tvrdnja (d).

Napokon, budući da je $\lambda \mapsto t_\lambda$ izomorfizam prostora $\mathfrak{h}^*$ na prostor $\mathfrak{h}$, iz tvrdnje (a) teorema 3.4.1. slijedi da $\{t_\alpha;\ \alpha \in R\}$ razapinje $\mathfrak{h}$. To prema tvrdnji (e) teorema 3.4.1. znači da je

$$\mathfrak{h} = \sum_{\alpha \in R} [\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}]$$

(naravno, ovo nije direktna suma). Odatle slijedi tvrdnja (f).

Kako je restrikcija Killingove forme $B|\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}$ nedegenerirana, mogli smo definirati izomorfizam $\lambda \mapsto t_\lambda$ prostora $\mathfrak{h}^*$ na prostor $\mathfrak{h}$ i to ovako:

$$\lambda(h) = B(h, t_\lambda) \qquad \forall h \in \mathfrak{h}.$$

Prenesimo sada pomoću tog izomorfizma bilinearnu formu $B|\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}$ na $\mathfrak{h}^* \times \mathfrak{h}^*$. Tu ćemo bilinearnu formu na $\mathfrak{h}^* \times \mathfrak{h}^*$ označavati sa $(\,\cdot\,|\,\cdot\,)$. Dakle,

$$(\lambda|\mu) = B(t_\lambda, t_\mu) = \operatorname{Tr}(ad_\mathfrak{g}\, t_\lambda)(ad_\mathfrak{g}\, t_\mu) = \lambda(t_\mu) = \mu(t_\lambda), \qquad \lambda, \mu \in \mathfrak{h}^*.$$

Prema tvrdnji (a) teorema 3.4.1. skup R razapinje čitav prostor $\mathfrak{h}^*$. Prema tome, postoji baza prostora $\mathfrak{h}^*$ sastavljena od korijena.

Propozicija 3.4.3. *Neka je $B = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell\} \subseteq R$ baza prostora $\mathfrak{h}^*$. Tada je $R \subseteq span_\mathbb{Q} B$, odnosno, svaki korijen $\gamma \in R$ je $\mathbb{Q}-$linearna kombinacija korijena $\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell$.*

Dokaz: Neka je $\gamma \in R$. Tada, naravno, vrijedi

$$\gamma = \sum_{i=1}^{\ell} c_i \alpha_i \qquad \text{za neke } c_1, \ldots, c_\ell \in K.$$

Odatle slijedi

$$(\gamma|\alpha_j) = \sum_{i=1}^{\ell} (\alpha_i|\alpha_j) c_i, \qquad j = 1, \ldots, \ell.$$

Za svako $j \in \{1, \ldots, \ell\}$ pomnožimo gornju jednakost sa $\dfrac{2}{(\alpha_j|\alpha_j)}$. Tako dobivamo sljedeći sistem od ℓ linearnih algebarskih jednadžbi sa ℓ nepoznanica $c_1, \ldots, c_\ell$:

$$2\frac{(\gamma|\alpha_j)}{(\alpha_j|\alpha_j)} = \sum_{i=1}^{\ell} 2\frac{(\alpha_i|\alpha_j)}{(\alpha_j|\alpha_j)} c_i, \qquad j = 1, \ldots, \ell. \tag{3.16}$$

Primijetimo sada da su svi koeficijenti u tom sustavu jednadžbi cijeli brojevi. Doista, za proizvoljne $\alpha, \gamma \in R$ prema tvrdnji (c) teorema 3.4.2. vrijedi $\gamma(h_\alpha) \in \mathbb{Z}$, a po tvrdnji (f) teorema 3.4.1. je

$$h_\alpha = \frac{2}{B(t_\alpha, t_\alpha)} t_\alpha = \frac{2}{(\alpha|\alpha)} t_\alpha.$$

Odatle je

$$2\frac{(\gamma|\alpha)}{(\alpha|\alpha)} = 2\frac{\gamma(t_\alpha)}{(\alpha|\alpha)} = \gamma\left(\frac{2}{(\alpha|\alpha)} t_\alpha\right) = \gamma(h_\alpha) \in \mathbb{Z} \qquad \forall \alpha, \beta \in R.$$

Time je dokazano da su svi koeficijenti sustava (3.16), tj.

$$2\frac{(\gamma|\alpha_j)}{(\alpha_j|\alpha_j)} \quad \text{za } j = 1, \ldots, \ell \qquad \text{i} \qquad 2\frac{(\alpha_i|\alpha_j)}{(\alpha_j|\alpha_j)} \quad \text{za } i, j = 1, \ldots, \ell,$$

cijeli brojevi.

Forma $(\cdot|\cdot)$ na $\mathfrak{h}^* \times \mathfrak{h}^*$ je nedegenerirana, pa je njena matrica u bilo kojoj bazi regularna. Posebno, matrica $[(\alpha_i|\alpha_j)]_{i,j=1}^{\ell}$ je regularna. No tada je regularna i matrica koja se iz nje dobije množenjem svakog retka nekim skalarom različitim od nule. Prema tome, matrica sistema (3.16)

$$\left[2\frac{(\alpha_i|\alpha_j)}{(\alpha_j|\alpha_j)}\right]_{i,j=1}^{\ell} \in M_\ell(\mathbb{Z}) \subseteq M_\ell(\mathbb{Q})$$

je regularna. Stoga je njoj inverzna matrica element od $M_\ell(\mathbb{Q})$, a odatle slijedi da su svi skalari $c_1, \ldots, c_\ell$ racionalni brojevi.

U daljnjem pretpostavljamo da je K polje $\mathbb{C}$ kompleksnih brojeva. U stvari, sljedećih nekoliko tvrdnji u odgovarajućoj formi vrijede i za proizvoljno algebraski zatvoreno polje karakteristike 0, međutim, same formulacije (a i dokazi) su jednostavnije u slučaju polja $\mathbb{C}$.

Teorem 3.4.4. (a) *Realan prostor $\mathfrak{h}^*(R) = span_{\mathbb{R}}\, R$ je realna forma prostora $\mathfrak{h}^*$ i realan prostor $\mathfrak{h}(R) = span_{\mathbb{R}}\,\{h_\alpha;\ \alpha \in R\}$ je realna forma prostora $\mathfrak{h}$. Nadalje, $\mathfrak{h}^*(R)$ se identificira s dualnim prostorom $\mathfrak{h}(R)^*$ prostora $\mathfrak{h}(R)$.*

(b) *Vrijedi*

$$(\lambda|\lambda) > 0 \qquad \forall \lambda \in \mathfrak{h}^*(R) \setminus \{0\},$$

odnosno, restrikcija forme $(\cdot|\cdot)$ na $\mathfrak{h}^*(R) \times \mathfrak{h}^*(R)$ je skalarni produkt na realnom vektorskom prostoru $\mathfrak{h}^*(R)$.

(c) *Restrikcija Killingove forme B na $\mathfrak{h}(R) \times \mathfrak{h}(R)$ je skalarni produkt na realnom prostoru $\mathfrak{h}(R)$.*

Dokaz: (a) Iz propozicije 3.4.3. slijedi da je $span_{\mathbb{Q}}(B) = span_{\mathbb{Q}}(R)$ za svaku bazu B prostora $\mathfrak{h}^*$ sadržanu u R. No tada je i $span_{\mathbb{R}}\, B = span_{\mathbb{R}}\, R = \mathfrak{h}^*(R)$ za takvu bazu od $\mathfrak{h}^*$. No to znači da je jedna baza realnog prostora $\mathfrak{h}^*(R)$ ujedno baza kompleksnog prostora $\mathfrak{h}^*$, dakle, $\mathfrak{h}^*(R)$ je realna forma od $\mathfrak{h}^*$. Ostatak dokaza tvrdnje (a) ostavljamo za zadatak:

Zadatak 3.4.1. *Neka je B baza od $\mathfrak{h}^*$ sadržana u R. Dokažite:*

(a) *$\{h_\alpha;\ \alpha \in B\}$ je baza od $\mathfrak{h}$.*

(b) *$span_{\mathbb{Q}}\,\{h_\alpha;\ \alpha \in B\} = span_{\mathbb{Q}}\,\{h_\alpha;\ \alpha \in R\}$.*

(c) *$\lambda \mapsto \lambda|\mathfrak{h}(R)$ je izomorfizam realnog prostora $\mathfrak{h}^*(R)$ na dualni prostor realnog prostora $\mathfrak{h}(R)$.*

Dokažimo sada tvrdnju (b) teorema 3.4.4. Neka je $\{h_1, \ldots, h_\ell\}$ baza od $\mathfrak{h}$. Za svaki $\alpha \in R$ izaberimo $x_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha \setminus \{0\}$. Tada je prema korijenskom rastavu od $\mathfrak{g}$ skup

$$\{h_1, \ldots, h_\ell\} \cup \{x_\alpha;\ \alpha \in R\}$$

baza vektorskog prostora $\mathfrak{g}$. Za svaki $h \in \mathfrak{h}$ operator $ad\, h$ ima u toj bazi dijagonalnu matricu koja na dijagonali ima ℓ nula i brojeve $\alpha(h)$, $\alpha \in R$. Prema tome, za $h, k \in \mathfrak{h}$ je

$$B(h,k) = \mathrm{Tr}\,(ad\, h)(ad\, k) = \sum_{\alpha \in R} \alpha(h)\alpha(k).$$

Stoga za $\lambda \in \mathfrak{h}^*(R) \setminus \{0\}$ vrijedi

$$(\lambda|\lambda) = B(t_\lambda, t_\lambda) = \sum_{\alpha \in R} \alpha(t_\lambda)^2.$$

Neka je opet B baza od $\mathfrak{h}^*$ sadržana u R. Tada je prema zadatku 3.4.1. $\{h_\beta;\ \beta \in B\}$ baza realnog prostora $\mathfrak{h}(R)$ pa imamo

$$t_\lambda = \sum_{\beta \in B} c_\beta h_\beta \quad \text{za neke } c_\beta \in \mathbb{R}.$$

Odatle dobivamo za svaki $\alpha \in R$:

$$\alpha(t_\lambda) = \sum_{\beta \in B} c_\beta \alpha(h_\beta) \in \mathbb{R} \qquad \Longrightarrow \qquad \alpha(t_\lambda)^2 \geq 0.$$

Nadalje, kako R razapinje $\mathfrak{h}^*$ i $t_\lambda \neq 0$, za neki $\alpha \in R$ je $\alpha(t_\lambda) \neq 0$, dakle, $\alpha(t_\lambda)^2 > 0$. Odatle je

$$(\lambda|\lambda) = \sum_{\alpha \in R} \alpha(t_\lambda)^2 > 0.$$

Zadatak 3.4.2. *Dokažite tvrdnju* (c) *teorema 3.4.4.*

Za bilo koji vektor $\lambda \neq 0$ realnog unitarnog prostora $\mathfrak{h}^*(R)$ označimo sa σ_λ ortogonalnu refleksiju protora $\mathfrak{h}^*(R)$ u odnosu na hiperravninu $\lambda^\perp$. Operator σ_λ zoveme **refleksija u odnosu na** λ. Ako $\mu \in \mathfrak{h}^*(R)$ prikažemo u obliku $\mu = c\lambda + \nu$ za jedinstvene $c \in \mathbb{C}$ i $\nu \perp \lambda$ onda je

$$\sigma_\lambda \mu = -c\lambda + \nu.$$

Tada je $(\mu|\lambda) = c(\lambda|\lambda)$, dakle,

$$c = \frac{(\mu|\lambda)}{(\lambda|\lambda)} \qquad \text{i} \qquad \nu = \mu - \frac{(\mu|\lambda)}{(\lambda|\lambda)}\lambda.$$

Prema tome, formula za refleksiju unitarnog prostora $\mathfrak{h}^*(R)$ u odnosu na $\lambda \in \mathfrak{h}^*(R)$ je

$$\sigma_\lambda \mu = \mu - 2\frac{(\mu|\lambda)}{(\lambda|\lambda)}\lambda.$$

Propozicija 3.4.5. *Za svaki* $\alpha \in R$ *je* $\sigma_\alpha R = R$.

Dokaz: Neka su $\alpha, \beta \in R$. Prema tvrdnji (c) teorema 3.4.2. tada vrijedi $\beta - \beta(h_\alpha)\alpha \in R$. Nadalje, u dokazu propozicije 3.4.3. vidjeli smo da je

$$\beta(h_\alpha) = 2\frac{(\beta|\alpha)}{(\alpha|\alpha)}.$$

Prema tome,

$$\sigma_\alpha \beta = \beta - 2\frac{(\beta|\alpha)}{(\alpha|\alpha)}\alpha = \beta - \beta(h_\alpha)\alpha \in R.$$

Time je dokazano da je $\sigma_\alpha R \subseteq R$, a kako je σ_α^2 jedinični operator, zaključujemo da je $\sigma_\alpha R = R$.

Propozicija 3.4.6. (a) *Ako su* $\alpha, \beta \in R$ *takvi da je* $(\alpha|\beta) < 0$ *onda je* $\alpha + \beta \in R$.

(b) *Ako su* $\alpha, \beta \in R$ *takvi da je* $(\alpha|\beta) > 0$ *onda je* $\alpha - \beta \in R$.

Dokaz: (a) Iz $(\alpha|\beta) < 0$ slijedi $\beta(h_\alpha) = 2\dfrac{(\beta|\alpha)}{(\alpha|\alpha)} < 0$, pa uz oznake iz tvrdnje (e) teorema 3.4.2. imamo $r - q < 0$, dakle, $q > 0$. No tada je prema toj tvrdnji $\alpha + \beta \in R$.

Tvrdnja (b) dobiva se sasvim analogno, a slijedi i neposredno iz tvrdnje (a) zamjenom β sa $-\beta$, jer znamo da je $-R = R$.

Poglavlje 4

KONJUGIRANOST CARTANOVIH PODALGEBRI

4.1 Polinomijalna preslikavanja i topologija Zariskog

U ovom odjeljku promatramo isključivo konačnodimenzionalne vektorske prostore (nad algebarski zatvorenim poljem K karakteristike 0). U odjeljku 3.2. definirali smo algebru polinomijalnih funkcija $\mathcal{P}(V)$ na vektorskom prostoru V kao unitalnu podalgebru algebre K^V svih funkcija sa V u K generiranu s dualnim prostorom V^*. Uočili smo da se $\mathcal{P}(V)$ može identificirati s algebrom polinoma $K[f_1, \dots, f_n]$ za bilo koju bazu $\{f_1, \dots, f_n\}$ dualnog prostora V^*. Važno je uočiti da odatle slijedi da je prsten $\mathcal{P}(V)$ integralna domena: ako su $f, g \in \mathcal{P}(V) \setminus \{0\}$ onda je i $fg \neq 0$. Kažemo da je **polinomijalna funkcija** $f \in \mathcal{P}(V)$ **homogena stupnja** $k \in \mathbb{Z}_+$, ako vrijedi

$$f(\lambda v) = \lambda^k f(v) \qquad \forall v \in V \quad \text{i} \quad \forall \lambda \in K.$$

Skup svih homogenih polinomijalnih funkcija stupnja k označavamo sa $\mathcal{P}^k(V)$. To je potprostor od $\mathcal{P}(V)$ i čitava algebra $\mathcal{P}(V)$ je direktna suma tih potprostora:

$$\mathcal{P}(V) = \sum_{k \in \mathbb{Z}_+} \dot{+} \mathcal{P}^k(V).$$

Očito vrijedi

$$\mathcal{P}^0(V) = K, \qquad \mathcal{P}^k(V) = span\,\{g_1 \cdots g_k;\ g_1, \dots, g_k \in V^*\}.$$

Za $f \in \mathcal{P}(V)$ stavimo

$$V_f = \{v \in V;\ f(v) \neq 0\}.$$

Za svaku polinomijalnu funkciju f osim nul$-$funkcije skup V_f je očito neprazan. Definiramo tzv. **topologiju Zariskog** na V kao topologiju čija je baza otvorenih skupova $\{V_f;\ f \in \mathcal{P}(V)\}$. Dakle, $U \subseteq V$ je **Zariski otvoren** podskup od V ako za svaku točku $v \in U$ postoji $f \in \mathcal{P}(V)$ takav da je $v \in V_f \subseteq U$. Definicija ima smisla jer skup $\{V_f;\ f \in \mathcal{P}(V)\}$ zadovoljava uvjete nužne da bi mogao biti baza otvorenih skupova za neku topologiju, jer je $\emptyset = V_0$ i konačan presjek skupova oblika V_f je ponovo skup takvog oblika:

$$V_{f_1} \cap \cdots \cap V_{f_m} = V_{f_1 \cdots f_m}.$$

Propozicija 4.1.1. *Svaka je točka $\{v\}$ zatvoren skup u odnosu na topologiju Zariskog.*

Dokaz: Ako je $w \in V \setminus \{v\}$, postoji linearan funkcional $g \in V^*$ takav da je $g(v) \neq g(w)$. Tada za $f = g - g(v)$ vrijedi $f(v) = 0$ i $f(w) \neq 0$. Dakle, $w \in V_f \subseteq V \setminus \{v\}$. Time je dokazano da je skup $V \setminus \{v\}$ Zariski otvoren, što znači da je skup $\{v\}$ Zariski zatvoren.

Međutim, topologija Zariskog nije Hausdorffova topologija, štoviše vrlo je daleko od tog svojstva:

Propozicija 4.1.2. *Ako su U_1 i U_2 Zariski otvoreni neprazni podskupovi vektorskog prostora V onda je $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$. Svaki neprazan Zariski otvoren podskup od V je Zariski gust u V.*

Dokaz: Izaberimo nekonstantne polinomijalne funkcije $f_1, f_2 \in \mathcal{P}(V)$ takve da je $V_{f_1} \subseteq U_1$ i $V_{f_2} \subseteq U_2$. Tada je

$$V_{f_1 f_2} = V_{f_1} \cap V_{f_2} \subseteq U_1 \cap U_2.$$

Umnožak $f_1 f_2$ je nekonstantna polinomijalna funkcija, pa vrijedi $V_{f_1 f_2} \neq \emptyset$. Dakle, $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$. Time je dokazana i druga tvrdnja. Naime, ako je U neprazan Zariski otvoren podskup od V, prema dokazanom njegov komplement $V \setminus U$ ne sadrži nijedan neprazan Zariski otvoren skup, a to upravo znači da je skup U gust u V u odnosu na topologiju Zariskog.

Za vektorske prostore V i W kažemo da je $F : V \to W$ **polinomijalno preslikavanje** ako je $\varphi \circ F \in \mathcal{P}(V)$ za svaki $\varphi \in W^*$.

Propozicija 4.1.3. *Za preslikavanje $F : V \to W$ sljedeća su svojstva međusobno ekvivalentna:*

(*a*) *F je polinomijalno preslikavanje.*

(*b*) *Za svaku bazu $\{w_1, \ldots, w_m\}$ od W vrijedi*

$$F(v) = \sum_{i=1}^{m} F_i(v) w_i, \qquad v \in V, \qquad \textit{za neke} \quad F_1, \ldots, F_m \in \mathcal{P}(V). \tag{4.1}$$

(*c*) *Za neku bazu $\{w_1, \ldots, w_m\}$ od W vrijedi* (3.13).

Dokaz: $(a) \Rightarrow (b)$. Neka je $\{w_1, \ldots, w_m\}$ baza od W i neka je $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_m\}$ dualna baza od W^*. Tada za svaki $v \in V$ imamo

$$F(v) = \sum_{i=1}^{m} \varphi_i(F(v)) w_i = \sum_{i=1}^{m} (\varphi_i \circ F)(v) w_i$$

i $\varphi_1 \circ F, \ldots, \varphi_m \circ F \in \mathcal{P}(V)$.

Implikacija $(b) \Rightarrow (c)$ je trivijalna.

$(c) \Rightarrow (a)$. Pretpostavimo da je $\{w_1, \ldots, w_m\}$ baza od W i da vrijedi (3.13). Tada za proizvoljne $\varphi \in W^*$ i $v \in V$ imamo

$$(\varphi \circ F)(v) = \varphi(F(v)) = \sum_{i=1}^{m} F_i(v) \varphi(w_i).$$

Dakle, $\varphi \circ F = \varphi(w_1) F_1 + \cdots + \varphi(w_m) F_m \in \mathcal{P}(V)$.

Skup svih polinomijalnih preslikavanja $F : V \to W$ označavat ćemo sa $\mathcal{P}(V, W)$. To je očito vektorski prostor. Štoviše, $\mathcal{P}(V, W)$ je unitalni modul nad unitalnom algebrom $\mathcal{P}(V)$ u odnosu na množenje po točkama:

$$(fF)(v) = f(v) F(v), \qquad v \in V, \quad f \in \mathcal{P}(V), \quad F \in \mathcal{P}(V, W).$$

Propozicija 4.1.4. *Ako su V, W i U vektorski prostori i ako su $F \in \mathcal{P}(V, W)$ i $G \in \mathcal{P}(W, U)$, onda je $G \circ F \in \mathcal{P}(V, U)$.*

Dokaz: Pretpostavimo prvo da je $U = K$, tj. da je $G \in \mathcal{P}(W)$. Tada je G suma produkata oblika $\varphi_1 \cdots \varphi_k$, gdje su $\varphi_1, \ldots, \varphi_k \in W^*$. Za svaki takav produkt i za $v \in V$ imamo

$$[(\varphi_1 \cdots \varphi_k) \circ F](v) = (\varphi_1 \cdots \varphi_k)(F(v)) = (\varphi_1(F(v)) \cdots (\varphi_k(F(v)) =$$

$$= (\varphi_1 \circ F)(v) \cdots (\varphi_k \circ F)(v) = [(\varphi_1 \circ F) \cdots (\varphi_k \circ F)](v).$$

Nadalje, kako je F polinomijalno preslikavanje, svaka od funkcija $\varphi_j \circ F$ je polinomijalna, pa je i njihov produkt polinomijalna funkcija na V.

U općem slučaju za $F \in \mathcal{P}(V, W)$, $G \in \mathcal{P}(W, U)$ i $\varphi \in U^*$ imamo $\varphi \circ (G \circ F) = (\varphi \circ G) \circ F$. Nadalje, kako je $\varphi \circ G \in \mathcal{P}(W)$, prema prvom dijelu dokaza je $(\varphi \circ G) \circ F \in \mathcal{P}(V)$. Dakle, $\varphi \circ (G \circ F) \in \mathcal{P}(V)\ \ \forall \varphi \in U^*$, a to znači da je preslikavanje $G \circ F : V \to U$ polinomijalno.

Propozicija 4.1.5. *Svako polinomijalno preslikavanje $F \in \mathcal{P}(V, W)$ je neprekidno u odnosu na topologije Zariskog na V i W.*

Dokaz: Neka je $U \subseteq W$ Zariski otvoren podskup. Treba dokazati da je

$$F^{-1}(U) = \{v \in V;\ F(v) \in U\}$$

Zariski otvoren podskup od V. Neka je $v \in F^{-1}(U)$. Tada je $F(v) \in U$, pa zbog otvorenosti od U u W u topologiji Zariskog postoji $g \in \mathcal{P}(W)$ takva da je $F(v) \in W_g \subseteq U$. To znači da je

$$g(F(v)) \neq 0 \qquad \text{i} \qquad g(w) = 0 \quad \forall w \in W \setminus U.$$

Stavimo $f = g \circ F$. Tada je prema propoziciji 4.1.4. $f \in \mathcal{P}(V)$ i po konstrukciji je $f(v) \neq 0$, odnosno, $v \in V_f$. Nadalje, za $v' \in V \setminus F^{-1}(U)$ vrijedi $F(v') \in W \setminus U$, pa je

$$f(v') = (g \circ F)(v') = g(F(v') = 0.$$

To znači da je $v \in V_f \subseteq F^{-1}(U)$, odnosno, zbog proizvoljnosti točke $v \in F^{-1}(U)$ dokazano je da je $F^{-1}(U)$ Zariski otvoren podskup od V.

Kao i u slučaju polinomijalnih funkcija, za **polinomijalno preslikavanje** $F : V \to W$ kažemo da je **homogeno** stupnja $k \in \mathbb{Z}_+$ ako vrijedi

$$F(\lambda v) = \lambda^k F(v) \qquad \forall \lambda \in K \quad \text{i} \quad \forall v \in V.$$

Označit ćemo sa $\mathcal{P}^k(V, W)$ skup svih homogenih polinomijalnih preslikavanja sa V u W stupnja $k \in \mathbb{Z}_+$. Tada su očito $\mathcal{P}^k(V, W)$ potprostori vektorskog prostora $\mathcal{P}(V, W)$. Nadalje, vrijedi $\mathcal{P}^k(V)\mathcal{P}^\ell(V, W) \subseteq \mathcal{P}^{k+\ell}(V, W)$.

Propozicija 4.1.6. *Za vektorske prostore V, W i U vrijedi:*

(*a*) *Za $F \in \mathcal{P}^k(V, W)$ i $G \in \mathcal{P}^\ell(W, U)$ je $G \circ F \in \mathcal{P}^{k\ell}(V, U)$.*

(*b*) $\mathcal{P}^k(V, W) = \{F \in \mathcal{P}(V, W);\ \varphi \circ F \in \mathcal{P}^k(V)\ \forall \varphi \in W^*\}$.

(*c*) *$\mathcal{P}^1(V, W)$ je prostor $L(V, W)$ svih linearnih operatora sa V u W.*

(*d*)

$$\mathcal{P}(V, W) = \sum_{k \in \mathbb{Z}_+} \dot{+}\, \mathcal{P}^k(V, W).$$

Dokaz: (a) Ako su $F \in \mathcal{P}^k(V, W)$ i $G \in \mathcal{P}^\ell(W, U)$ onda za $\lambda \in K$ i $v \in V$ vrijedi

$$(G \circ F)(\lambda v) = G(F(\lambda v)) = G(\lambda^k F(v)) = (\lambda^k)^\ell G(F(v)) = \lambda^{k\ell}(G \circ F)(v).$$

Dakle, $G \circ F \in \mathcal{P}^{k\ell}(V, U)$.

(b) Prema (a) za svaki $\varphi \in W^* = \mathcal{P}^1(W)$ i za $F \in \mathcal{P}^k(V, W)$ vrijedi $\varphi \circ F \in \mathcal{P}^k(V)$. Obratno, pretpostavimo sada da je $\varphi \circ F \in \mathcal{P}^k(V)$ za svaki $\varphi \in W^*$. Za proizvoljne $\lambda \in K$ i $v \in V$ tada vrijedi

$$\varphi(F(\lambda v) - \lambda^k F(v)) = \varphi(F(\lambda v)) - \lambda^k \varphi(F(v)) = (\varphi \circ F)(\lambda v) - \lambda^k (\varphi \circ F)(v) = 0 \qquad \forall \varphi \in W^*.$$

Dakle,

$$F(\lambda v) - \lambda^k F(v) = 0, \qquad \text{tj.} \quad F(\lambda v) = \lambda^k F(v), \qquad \forall \lambda \in K \quad \text{i} \quad \forall v \in V.$$

To znači da je $F \in \mathcal{P}^k(V, W)$.

(c) Za $\varphi \in W^*$ i $A \in L(V, W)$ je $\varphi \circ A \in V^* \subseteq \mathcal{P}(V)$. To znači da je $A \in \mathcal{P}(V, W)$. Nadalje, $A(\lambda v) = \lambda A(v)$ za svaki $\lambda \in K$ i svaki $v \in V$. Dakle, $L(V, W) \subseteq \mathcal{P}^1(V, W)$. Neka je sada $F \in \mathcal{P}^1(V, W)$. Prema (a) tada je $\varphi \circ F \in \mathcal{P}^1(V) = V^*$ za svaki $\varphi \in W^*$. Stoga za proizvoljne $v, v' \in V$ i $\varphi \in W^*$ imamo

$$\varphi(F(v + v') - F(v) - F(v')) = \varphi(F(v + v')) - \varphi(F(v)) - \varphi(F(v')) =$$

$$= (\varphi \circ F)(v + v') - (\varphi \circ F)(v) - (\varphi \circ F)(v') = 0.$$

Odatle slijedi da je $F(v + v') = F(v) + F(v')$ $\forall v, v' \in V$. Dakle, preslikavanje $F : V \to W$ je aditivno, a kako je i homogeno, zaključujemo da je $F \in L(V, W)$. Time je dokazana i obrnuta inkluzija $\mathcal{P}^1(V, W) \subseteq L(V, W)$, odnosno, imamo jednakost $\mathcal{P}^1(V, W) = L(V, W)$.

(d) Neka je $F \in \mathcal{P}(V, W)$. Izaberimo bazu $\{w_1, \ldots, w_m\}$ od W i neka su $F_1, \ldots, F_m \in \mathcal{P}(V, W)$ takvi da vrijedi

$$F(v) = \sum_{i=1}^m F_i(v) w_i \qquad \forall v \in V.$$

Tada se svaka polinomijalna funkcija F_i može pisati kao suma homogenih polinomijalnih funkcija:

$$F_i = \sum_{k \in \mathbb{Z}_+} F_{ik}, \qquad F_{ik} \in \mathcal{P}^k(V) \quad \text{za} \quad k \in \mathbb{Z}_+ \quad \text{i} \quad i = 1, \ldots, m.$$

Naravno, u svakoj od gornjih suma svi su članovi nula osim konačno mnogo njih. Za svaki $k \in \mathbb{Z}_+$ definiramo preslikavanje $F_{(k)} : V \to W$ sa

$$F_{(k)}(v) = \sum_{i=1}^m F_{ik}(v) w_i, \qquad v \in V.$$

Tada je

$$F = \sum_{k \in \mathbb{Z}_+} F_{(k)}.$$

Po propoziciji 4.1.3. sva preslikavanja $F_{(k)}$ su polinomijalna. Nadalje, kako je polinomijalna funkcija F_{ki} homogena stupnja k, imamo za $\lambda \in K$ i $v \in V$:

$$F_{(k)}(\lambda v) = \sum_{i=1}^m F_{ik}(\lambda v) w_i = \sum_{i=1}^m \lambda^k F_{ik}(v) w_i = \lambda^k F_{(k)}(v).$$

Prema tome, $F_{(k)} \in \mathcal{P}^k(V,W)$ za svaki $k \in \mathbb{Z}_+$. Time je dokazano da je $\mathcal{P}(V,W)$ suma potprostora $\mathcal{P}^k(V,W)$, $k \in \mathbb{Z}_+$. Dokažimo da je ta suma direktna. Neka su $k_1,\dots,k_p \in \mathbb{Z}_+$ međusobno različiti i neka su $F_i \in \mathcal{P}^{k_i}(V,W) \setminus \{0\}$ za $i = 1,\dots,p$. Pretpostavimo da za neke $\lambda_1,\dots,\lambda_p \in K$ vrijedi

$$\lambda_1 F_1 + \cdots + \lambda_p F_p = 0.$$

Tada je za svaki $\varphi \in W^*$

$$0 = \varphi \circ (\lambda_1 F_1 + \cdots + \lambda_p F_p) = \lambda_1(\varphi \circ F_1) + \cdots \lambda_p(\varphi \circ F_p).$$

Prema tvrdnji (b) vrijedi $\varphi\circ F_i \in \mathcal{P}^{k_i}(V)$. Budući da je $\mathcal{P}(V)$ direktna suma potprostora $\mathcal{P}^k(V)$, slijedi da za svaki $i \in \{1,\dots,p\}$ vrijedi ili $\lambda_i = 0$ ili $\varphi\circ F_i = 0$. Kako su sva polinomijalna preslikavanja F_i različita od 0, za svaki $i \in \{1,\dots,p\}$ postoji $\varphi \in W^*$ takav da je $\varphi \circ F_i \neq 0$. Zaključujemo da su svi λ_i jednaki 0. Time je dokazano da je suma potprostora $\mathcal{P}^k(V,W)$ direktna.

Dakle, svako polinomijalno preslikavanje $F : V \to W$ možemo na jedinstven pisati u obliku

$$F = \sum_{k\in\mathbb{Z}_+} F_k, \qquad \text{gdje su} \quad F_k \in \mathcal{P}^k(V,W).$$

Naravno, u gornjoj je sumi samo konačno mnogo članova različito od 0. Prostor $\mathcal{P}^0(V,W)$ identificira se s prostorom W, tako da se svaki vektor $w \in W$ identificira s konstantnom funkcijom na V, koja ima tu vrijednost w. Uz tu identifikaciju očito je $F_0 = F(o)$ i taj se vektor iz W zove **konstantni član polinomijalnog preslikavanja** F.

Linearan operator $F_1 \in \mathcal{P}^1(V,W) = L(V,W)$ zovemo **diferencijal polinomijalnog preslikavanja** F **u točki** $0 \in V$. Općenitije, za proizvoljan vektor $v \in V$ promatramo preslikavanje $F_v : V \to W$ definirano sa

$$F_v(v') = F(v+v'), \qquad v' \in V.$$

Tada je očito $F_v \in \mathcal{P}(V,W)$. Diferencijal od F_v u točki 0 zove se **diferencijal polinomijalnog preslikavanja** F **u točki** v. Taj ćemo linearan operator sa V u W označavati sa D_vF; drugi je naziv za taj linearan operator **tangencijalno preslikavanje** polinomijalnog preslikavanja F u točki v. Dakle, imamo

$$F(v+v') = F(v)+(D_vF)(v')+\sum_{k\geq 2}(D_v^{(k)}F)(v'), \qquad v' \in V, \qquad \text{gdje su } D_v^{(k)}F \in \mathcal{P}^k(V,W) \text{ za } k \geq 2.$$

Neka je $F \in \mathcal{P}(V,W)$. Tada za svaku polinomijalnu funkciju $f \in \mathcal{P}(W)$ vrijedi $f \circ F \in \mathcal{P}(V)$.

Propozicija 4.1.7. *Za* $F \in \mathcal{P}(V,W)$ *preslikavanje* $\Phi_F : \mathcal{P}(W) \to \mathcal{P}(V)$ *definirano sa*

$$\Phi_F(f) = f \circ F, \qquad f \in \mathcal{P}(W),$$

je unitalni homomorfizam unitalnih algebri.

Zadatak 4.1.1. *Dokažite propoziciju 4.1.7.*

Kažemo da je $F \in \mathcal{P}(V,W)$ **dominantno polinomijalno preslikavanje** ako je pridruženi homomorfizam $\Phi_F : \mathcal{P}(W) \to \mathcal{P}(V)$ injektivan. Općenito, jezgra homomorfizma Φ_F je skup svih polinomijalnih funkcija $f \in \mathcal{P}(W)$ takvih da je $f|F(V) \equiv 0$, a to zbog propozicije 4.1.5. znači da je funkcija f jednaka nuli svuda na Zariski zatvaraču skupa $F(V)$. Prema tome, vrijedi:

Propozicija 4.1.8. *Polinomijalno preslikavanje* $F \in \mathcal{P}(V,W)$ *je dominantno ako i samo ako je njegova slika* $\operatorname{Im} F = F(V)$ *Zariski gusta u* W.

Propozicija 4.1.9. *Neka je $F \in \mathcal{P}(V, W)$ dominantno polinomijalno preslikavanje. Za svaki neprazan otvoren podskup U od V njegova slika $F(U)$ sadrži neprazan otvoren podskup od W.*

Dokaz: Dovoljno je dokazati da za svaku polinomijalnu funkciju $f \in \mathcal{P}(V) \setminus \{0\}$ skup $F(V_f)$ sadrži neprazan otvoren podskup od W, odnosno, da postoji polinomijalna funkcija $g \in \mathcal{P}(W) \setminus \{0\}$ takva da je $W_g \subseteq F(V_f)$. To će slijediti iz sljedećeg vrlo netrivijalnog teorema iz **komutativne algebre**:

Teorem 4.1.10. *Neka je $\mathcal{A}$ komutativna unitalna algebra koja je integralna domena (tj. ne postoje $a, b \in \mathcal{A} \setminus \{0\}$ takvi da je $ab = 0$). Nadalje, neka je $\mathcal{B}$ unitalna podalgebra od $\mathcal{A}$ nad kojom je $\mathcal{A}$ konačno generirana. Tada za svaki $a \in \mathcal{A} \setminus \{0\}$ postoji $b \in \mathcal{B} \setminus \{0\}$ takav da se svaki unitalni homomorfizam $\varphi : \mathcal{B} \to K$ sa svojstvom $\varphi(b) \neq 0$ produljuje do unitalnog homomorfizma $\psi : \mathcal{A} \to K$ sa svojstvom $\psi(a) \neq 0$.*

Za unitalnu algebru $\mathcal{A}$, njenu unitalnu podalgebru $\mathcal{B}$ i elemente $a_1, \ldots, a_n \in \mathcal{A}$ sa $\mathcal{B}[a_1, \ldots, a_n]$ označavamo unitalnu podalgebru od $\mathcal{A}$ generiranu sa $\mathcal{B} \cup \{a_1, \ldots, a_n\}$. Tada je $\mathcal{B}[a_1, \ldots, a_n]$ slika unitalnog homomorfizma $P \mapsto P(a_1, \ldots, a_n)$ algebre $\mathcal{B}[T_1, \ldots, T_n]$ (algebre polinoma u n varijabli s koeficijentima iz $\mathcal{B}$) u algebru $\mathcal{A}$. Ako postoji $n \in \mathbb{N}$ i elementi $a_1, \ldots, a_n \in \mathcal{A}$ takvi da je $\mathcal{A} = \mathcal{B}[a_1, \ldots, a_n]$, onda kažemo da je **algebra $\mathcal{A}$ konačno generirana nad podalgebrom $\mathcal{B}$**.

Za element $a \in \mathcal{A}$ kažemo da je **algebarski nad podalgebrom** $\mathcal{B}$ ako postoji polinom $P \in \mathcal{B}[T] \setminus \{0\}$ takav da je $P(a) = 0$. To znači da epimorfizam $P \mapsto P(a)$ sa $\mathcal{B}[T]$ na $\mathcal{B}[a]$ nije injektivan, nego mu je jezgra

$$\mathcal{J}_a = \{P \in \mathcal{B}[T];\ P(a) = 0\}$$

ideal u algebri $\mathcal{B}[T]$ različit od $\{0\}$. U protivnom, tj. u slučaju da je $P \mapsto P(a)$ izomorfizam sa $\mathcal{B}[T]$ na $\mathcal{B}[a]$, kažemo da je element a **transcendentan nad algebrom** $\mathcal{B}$. Naravno, ako je $\mathcal{K}$ polje razlomaka integralne domene $\mathcal{A}$ i $\mathcal{L}$ potpolje generirano sa $\mathcal{B}$, onda je element $a \in \mathcal{A}$ algebarski (odnosno, transcendentan) nad podalgebrom $\mathcal{B}$ ako i samo je on algebarski (odnosno, transcendentan) nad poljem $\mathcal{L}$. Znamo da je skup $\mathcal{M}$ svih elemenata polja $\mathcal{K}$ algebarskih nad potpoljem $\mathcal{L}$ polje. Odatle slijedi da je skup $\mathcal{M} \cap \mathcal{A}$ svih elemenata iz $\mathcal{A}$ koji su algebarski nad podalgebrom $\mathcal{B}$ podalgebra od $\mathcal{A}$. Naravno, ta podalgebra sadrži podalgebru $\mathcal{B}$: za svaki element $b \in \mathcal{B}$ polinom $P = T - b \in \mathcal{B}[T]$ je različit od nule i vrijedi $P(b) = 0$.

Prije dokaza teorema 4.1.10. dokazat ćemo jedno svojstvo ideala u prstenu $\mathcal{B}[T]$. Ukoliko je $\mathcal{B}$ polje, znamo da je $\mathcal{B}[T]$ prsten glavnih ideala: svaki ideal $\mathcal{J}$ u prstenu $\mathcal{B}[T]$ je glavni tj. oblika

$$\mathcal{J} = \mathcal{B}[T]P = \{QP;\ Q \in \mathcal{B}[T]\} = \{Q \in \mathcal{B}[T];\ P|Q\}$$

za neki polinom $P \in \mathcal{J}$. Ako je $\mathcal{J} \neq \{0\}$, P je naravno polinom najnižeg stupnja u skupu polinoma $\mathcal{J} \setminus \{0\}$. Ako $\mathcal{B}$ nije polje nego samo integralna domena, imamo nešto slabiji rezultat:

Lema 4.1.11. *Neka je $\mathcal{B}$ integralna domena i neka je $\mathcal{J} \neq \{0\}$ ideal u prstenu $\mathcal{B}[T]$. Nadalje, neka je $P \in \mathcal{J} \setminus \{0\}$ polinom sa svojstvom*

$$\deg P = \min\{\deg Q;\ Q \in \mathcal{J} \setminus \{0\}\}$$

i neka mu je $c \in \mathcal{B}$ vodeći koeficijent (tj. koeficijent uz $T^{\deg P}$). Tada za svaki $Q \in \mathcal{J}$ postoji $k \in \mathbb{Z}_+$ takav da je polinom $c^k Q$ djeljiv s polinomom P u prstenu $\mathcal{B}[T]$.

Dokaz ćemo provesti indukcijom po $\deg Q$. Naravno, za $\deg Q < \deg P$, tvrdnja je trivijalna. Neka je $\deg Q = \deg P$ i neka je $a \in \mathcal{B}$ vodeći koeficijent od Q. Tada je $R = cQ - aP \in \mathcal{J}$ i vrijedi $\deg R < \deg P$, pa zbog minimalnosti $\deg P$ zaključujemo da je $R = 0$. Prema tome, $cQ = aP$, što znači da je cQ djeljiv s polinomom P u prstenu $\mathcal{B}[T]$. Pretpostavimo sada da je

$\deg Q = m > k = \deg P$ i da je lema dokazana za polinome stupnja manjeg od m. Označimo ponovo sa a vodeći koeficijent od Q. Tada je $R = cQ - aT^{m-k}P \in \mathcal{J}$ i $\deg R < m$, pa po pretpostavci indukcije postoje $j \in \mathbb{Z}_+$ i $A \in \mathcal{B}[T]$ takvi da je $c^j R = AP$. Slijedi

$$c^{j+1}Q = c^j R + ac^j T^{m-k}P = AP + ac^j T^{m-k}P = \left(ac^j T^{m-k} + A\right) P,$$

dakle, polinom $c^{j+1}Q$ djeljiv je s polinomom P u prstenu $\mathcal{B}[T]$. Time je korak indukcije proveden, odnosno, lema je dokazana.

U daljnjem za unitalnu algebru $\mathcal{A}$ nad poljem K sa $Hom(\mathcal{A}, K)$ označavamo skup svih unitalnih homomorfizama sa $\mathcal{A}$ u K. Ako je $\varphi \in Hom(\mathcal{A}, K)$ i $P \in \mathcal{A}[T]$ sa P^φ označavamo polinom iz $K[T]$ dobiven primjenom homomorfizma φ na koeficijente polinoma P :

$$P = a_n T^n + a_{n-1}T^{n-1} + \cdots + a_1 T + a_0 \quad \Longrightarrow \quad P^\varphi = \varphi(a_n)T^n + \varphi(a_{n-1})T^{n-1} + \cdots + \varphi(a_1)T + \varphi(a_0).$$

Naravno, $P \mapsto P^\varphi$ je unitalni homomorfizam sa $\mathcal{A}[T]$ u $K[T]$ i njegova restrikcija na $\mathcal{A}$ se podudara sa φ. Nadalje, za $a \in \mathcal{A}$ i $P \in \mathcal{A}[T]$ vrijedi $\varphi(P(a)) = P^\varphi(\varphi(a))$.

Dokaz teorema 4.1.10.: Po pretpostavci postoje $u_1, \ldots, u_n \in \mathcal{A}$ takvi da je $\mathcal{A} = \mathcal{B}[u_1, \ldots, u_n]$. Dokaz ćemo provesti indukcijom po n.

Pretpostavimo da je $n = 1$, tj. da je $\mathcal{A} = \mathcal{B}[u]$ za neki $u \in \mathcal{A}$. Razmotrimo najprije slučaj kad je element u transcendentan nad $\mathcal{B}$, tj. kad je $P \mapsto P(u)$ izomorfizam sa $\mathcal{B}[T]$ na $\mathcal{A}$. Neka je $a \in \mathcal{A} \setminus \{0\}$ i neka je $P \in \mathcal{B}[T]$ takav da je $a = P(u)$. Označimo sa b vodeći koeficijent polinoma P. Polinom $P^\varphi \in K[T]$ ima u polju K najviše $\deg P$ nultočaka, pa postoji skalar $\lambda \in K$ takav da je $P^\varphi(\lambda) \neq 0$. Definiramo sada preslikavanje $\psi : \mathcal{A} \to K$ sa

$$\psi(Q(u)) = Q^\varphi(\lambda), \qquad Q \in \mathcal{B}[T].$$

Kako je evaluaciji u točki λ unitalni homomorfizam sa $K[T]$ u K, a $Q \mapsto Q^\varphi$ je unitalni homomorfizam sa $\mathcal{B}[T] \simeq \mathcal{A}$ u $K[T]$, vidimo da je $\psi \in Hom(\mathcal{A}, K)$. Za $c \in \mathcal{B}$ vrijedi $\psi(c) = \varphi(c)$, dakle, $\psi|\mathcal{B} = \varphi$. Nadalje, $\psi(a) = \psi(P(u)) = P^\varphi(\lambda) \neq 0$. Time je tvrdnja dokazana u slučaju trenscendentnosti elementa u nad podalgebrom $\mathcal{B}$.

Pretpostavimo sada da je element u algebarski nad $\mathcal{B}$, dakle, da je ideal

$$\mathcal{J}_u = \{P \in \mathcal{B}[T];\ P(u) = 0\}$$

u algebri $\mathcal{B}[T]$ različit od $\{0\}$. Tada je i element a algebarski nad $\mathcal{B}$, tj. i ideal

$$\mathcal{J}_a = \{P \in \mathcal{B}[T];\ P(a) = 0\}$$

u algebri $\mathcal{B}[T]$ je različit od nule. Neka je $P \in \mathcal{J}_u \setminus \{0\}$ polinom najmanjeg stupnja u $\mathcal{J}_u \setminus \{0\}$ i neka je $Q \in \mathcal{J}_a \setminus \{0\}$ polinom najmanjeg stupnja u $\mathcal{J}_a \setminus \{0\}$. Označimo sa c vodeći koeficijent polinoma P i neka je $d = Q(0)$. Dokazatćemo da element $b = cd$ ima traženo svojstvo.

Neka je $\varphi \in Hom(\mathcal{B}, K)$ takav da je $\varphi(b) \neq 0$. Tada je naravno $\varphi(c) \neq 0$ i $\varphi(d) \neq 0$. Pretpostavimo sada da je $\psi \in Hom(\mathcal{A}, K)$ bilo koje proširenje homomorfizma φ. Tada iz $Q(a) = 0$ slijedi $0 = \psi(Q(a)) = Q^\varphi(\psi(a))$. Kad bi bilo $\psi(a) = 0$, imali bismo $0 = Q^\varphi(0) = \varphi(Q(0)) = \varphi(d)$, a to nije tako. Prema tome, za svako proširenje $\psi \in Hom(\mathcal{A}, K)$ homomorfizma φ vrijedi $\psi(a) \neq 0$.

Dakle, treba dokazati da homomorfizam φ ima bilo kakvo proširenje $\psi \in Hom(\mathcal{A}, K)$. Neka je $\lambda_0 \in K$ nultočka polinoma $P^\varphi \in K[T]$. Definiramo $\Phi \in Hom(\mathcal{B}[T], K)$ kao kompoziciju homomorfizma $R \mapsto R^\varphi$ sa $\mathcal{B}[T]$ u $K[T]$ i evaluacije u točki λ_0 :

$$\Phi(R) = R^\varphi(\lambda_0), \qquad R \in \mathcal{B}[T].$$

Ideal $\mathcal{J}_u$ u prstenu $\mathcal{B}[T]$ je jezgra epimorfizma $R \mapsto R(u)$ sa $\mathcal{B}[T]$ na $\mathcal{A} = \mathcal{B}[u]$. Dokazat ćemo sada da je $\mathcal{J}_u \subseteq \operatorname{Ker}\Phi$. Neka je $R \in \mathcal{J}_u$. Po lemi 4.1.11. postoji $k \in \mathbb{Z}_+$ takav da je polinom $c^k R$ djeljiv s polinomom P u prstenu $\mathcal{B}[T]$, tj. postoji $S \in \mathcal{B}[T]$ takav da je $c^k R = PS$. Sada imamo

$$\varphi(c)^k R^\varphi(\lambda_0) = \left(c^k R\right)^\varphi(\lambda_0) = (PS)^\varphi(\lambda_0) = \left(P^\varphi S^\varphi\right)(\lambda_0) = P^\varphi(\lambda_0) S^\varphi(\lambda_0) = 0,$$

jer je λ_0 nultočka polinoma P^φ. Kako je $\varphi(c) \neq 0$, zaključujemo da je $0 = R^\varphi(\lambda_0) = \Phi(R)$, dakle, $R \in \operatorname{Ker}\Phi$.

Kako je $\mathcal{J}_u \subseteq \operatorname{Ker}\Phi$, prijelazom na kvocijent Φ definira homomorfizam sa $\mathcal{B}[T]/\mathcal{J}_u \simeq \mathcal{A}$ u K. Dakle, postoji $\psi \in Hom(\mathcal{A}, K)$ takav da je

$$\psi(R(u)) = R^\varphi(\lambda_0), \qquad R \in \mathcal{B}[T].$$

Za proizvoljan $x \in \mathcal{B}$ neka je $R \in \mathcal{B}[T]$ konstantan polinom x. Tada je

$$\psi(x) = \psi(R(u)) = R^\varphi(\lambda_0) = \varphi(x).$$

Dakle, $\psi(x) = \varphi(x)$ za svaki $x \in \mathcal{B}$, odnosno, homomorfizam $\psi : \mathcal{A} \to K$ je proširenje homomorfizma $\varphi : \mathcal{B} \to K$.

Time je teorem dokazan za $n = 1$, odnosno, dokazana je baza indukcije. Prijeđimo sada na korak indukcije. Neka je $n \geq 2$, pretpostavimo da je teorem dokazan za algebre generirane nad podalgebrom $\mathcal{B}$ s manje od n elemenata i neka je $\mathcal{A} = \mathcal{B}[u_1, \ldots, u_n]$. Stavimo $\mathcal{C} = \mathcal{B}[u_1, \ldots, u_{n-1}]$. Tada je $\mathcal{A} = \mathcal{C}[u_n]$, pa prema prvom dijelu dokaza za dani element $a \in \mathcal{A} \setminus \{0\}$ postoji $c \in \mathcal{C}$ takav da se svaki $\chi \in Hom(\mathcal{C}, K)$ takav da je $\chi(c) \neq 0$ proširuje do $\psi \in Hom(\mathcal{A}, K)$ takvog da je $\psi(a) \neq 0$. Nadalje, po pretpostavci indukcije postoji $b \in \mathcal{B} \setminus \{0\}$ takav da se svaki $\varphi \in Hom(\mathcal{B}, K)$ takav da je $\varphi(b) \neq 0$ proširuje do $\chi \in Hom(\mathcal{C}, K)$ takvog da je $\chi(c) \neq 0$, a taj se opet proširuje do $\psi \in Hom(\mathcal{A}, K)$ takvog da je $\psi(a) \neq 0$. Time je i korak indukcije proveden.

Za dokaz propozicije 4.1.9. treba nam još sljedeća jednostavna činjenica:

Teorem 4.1.12. *Neka je V konačnodimenzionalan vektorski prostor nad proizvoljnim poljem K. Za $v \in V$ definiramo $\varphi_v \in Hom(\mathcal{P}(V), K)$ kao evaluaciju u točki v :*

$$\varphi_v(P) = P(v), \qquad P \in \mathcal{P}(V).$$

Tada je

$$Hom(\mathcal{P}(V), K) = \{\varphi_v;\ v \in V\}.$$

Štoviše, $v \mapsto \varphi_v$ je bijekcija sa V na $Hom(\mathcal{P}(V), K)$.

Dokaz: Neka je $\varphi \in Hom(\mathcal{P}(V), K)$ proizvoljan. Tada je φ linearan funkcional na prostoru $\mathcal{P}(V)$ različit od 0, pa je njegova jezgra $\operatorname{Ker}\varphi$ potprostor od $\mathcal{P}(V)$ kodimenzije 1. Pretpostavimo da je $f \neq \varphi_0$, tj. da φ nije homomorfizam evaluacije $P \mapsto P(0)$. Tada $V^* \not\subseteq \operatorname{Ker}\varphi$, pa slijedi da je $(\operatorname{Ker}\varphi) \cap V^*$ potprostor od V^* kodimenzije 1. No tada postoji baza $\{f_1, \ldots, f_n\}$ od V^* takva da je

$$\varphi(f_1) = 1 \qquad \text{i} \qquad \varphi(f_j) = 0 \quad \text{za} \quad j = 2, \ldots, n.$$

Neka je $\{e_1, \ldots, e_n\}$ baza od V dualna bazi $\{f_1, \ldots, f_n\}$, tj. $f_i(e_j) = \delta_{ij}$. Tada imamo

$$\varphi_{e_1}(f_1) = f_1(e_1) = 1 \qquad \text{i} \qquad \varphi_{e_1}(f_j) = f_j(e_1) = 0 \quad \text{za} \quad j = 2, \ldots, n.$$

To znači da se unitalni homomorfizmi φ i φ_{e_1} podudaraju na skupu $\{f_1, \ldots, f_n\}$. Međutim, taj skup generira unitalnu algebru $\mathcal{P}(V)$, što znači da je $\varphi = \varphi_{e_1}$. Time je dokazano da je $v \mapsto \varphi_v$ surjekcija sa V na $Hom(\mathcal{P}(V), K)$. No to je i injekcija: ako su $v \neq w$ vektori iz V, onda postoji $f \in V^* \subseteq \mathcal{P}(V)$ takav da je $f(v) \neq f(w)$; to znači da je $\varphi_v(f) \neq \varphi_w(f)$, dakle, $\varphi_v \neq \varphi_w$.

Prijeđimo sada na **dokaz propozicije 4.1.9.** Primijetimo da je algebra $\mathcal{A} = \mathcal{P}(V)$ integralna domena koja je konačno generirana nad K : doista, ona je kao unitalna algebra generirana s bilo kojom bazom dualnog prostora V. Prema tome, ona je konačno generirana nad svakom svojom unitalnom podalgebrom. Slika $\mathcal{B} = \operatorname{Im}\Phi_F$ homomorfizma Φ_F je unitalna podalgebra od $\mathcal{A}$ i po pretpostavci je $\Phi_F : \mathcal{P}(W) \to \mathcal{B}$ izomorfizam unitalnih algebri. Neka je $P \in \mathcal{P}(V)\setminus\{0\} = \mathcal{A}\setminus\{0\}$. Prema teoremu 4.1.10. tada postoji $b \in \mathcal{B} \setminus \{0\} = \Phi_F(\mathcal{P}(W) \setminus \{0\})$ takav da vrijedi:

$$\forall\varphi \in Hom(\mathcal{B}, K) \quad \text{t.d.} \quad \varphi(b) \neq 0 \quad \exists\psi \in Hom(\mathcal{B}, K) \quad \text{t.d.} \quad \psi|\mathcal{B} = \varphi \quad \text{i} \quad \psi(P) \neq 0. \tag{4.2}$$

Neka je $Q \in \mathcal{P}(W)$ jedinstven element takav da je $b = \Phi_F(Q) = Q \circ F$. Sada (3.14) postaje:

$$\forall\varphi \in Hom(\mathcal{B}, K) \text{ t.d. } (\varphi \circ \Phi_F)(Q) \neq 0 \ \exists\psi \in Hom(\mathcal{A}, K) \text{ t.d. } \psi|\mathcal{B} = \varphi \text{ i } \psi(P) \neq 0. \tag{4.3}$$

Φ_F je izomorfizam unitalnih algebri sa $\mathcal{P}(W)$ na $\mathcal{B}$, pa po teoremu 4.1.12. vrijedi

$$\{\varphi \circ \Phi_F;\ \varphi \in Hom(\mathcal{A}, K)\} = Hom(\mathcal{P}(W), K) = \{\varphi_w;\ w \in W\}.$$

Po istom teoremu je i

$$Hom(\mathcal{B}, K) = Hom(\mathcal{P}(V), K) = \{\varphi_v;\ v \in V\}.$$

Prema tome, (3.15) se može ovako zapisati:

$$\forall w \in W \quad \text{t.d.} \quad \varphi_w(Q) \neq 0 \quad \exists v \in V \quad \text{t.d.} \quad \varphi_v \circ \Phi_F = \varphi_w \quad \text{i} \quad \varphi_v(P) \neq 0. \tag{4.4}$$

Kako je $\varphi_v(P) = P(v)$ i $\varphi_w(Q) = Q(w)$, (3.16) poprima oblik

$$\forall w \in W \quad \text{t.d.} \quad Q(w) \neq 0 \quad \exists v \in V \quad \text{t.d.} \quad \varphi_v \circ \Phi_F = \varphi_w \quad \text{i} \quad P(v) \neq 0. \tag{4.5}$$

Pogledajmo sada što znači jednakost $\varphi_v \circ \Phi_F = \varphi_w$. Budući da W^* generira cijelu unitalnu algebru $\mathcal{P}(W)$ imamo sljedeći niz ekvivalencija

$$\varphi_v \circ \Phi_F = \varphi_w \iff (\varphi_v \circ \Phi_F)(h) = \varphi_w(h)\ \forall h \in W^* \iff \varphi_v(\Phi_F(h)) = \varphi_w(h)\ \forall h \in W^* \iff$$

$$\iff \varphi_v(h \circ F) = \varphi_w(h)\ \forall h \in W^* \iff h(F(v)) = h(w)\ \forall h \in W^* \iff F(v) = w.$$

Dakle, (3.17) postaje

$$\forall w \in W \quad \text{t.d.} \quad Q(w) \neq 0 \quad \exists v \in V \quad \text{t.d} \quad F(v) = w \quad \text{i} \quad P(v) \neq 0,$$

odnosno, uz prije uvedene oznake

$$W_Q = \{w \in W;\ Q(w) \neq 0\} \qquad \text{i} \qquad V_P = \{v \in V;\ P(v) \neq 0\}$$

dobivamo

$$\forall w \in W_Q \quad \exists v \in V_P \quad \text{t.d.} \quad F(v) = w.$$

No to upravo znači da je $W_Q \subseteq F(V_P)$, a to je i trebalo dokazati.

Propozicija 4.1.13. *Ako za $F \in \mathcal{P}(V, W)$ postoji $v \in V$ takav da je diferencijal D_vF surjekcija sa V na W, onda je polinomijalno preslikavanje F dominantno.*

Dokaz: Pomoću translacija u prostoru V za vektor $-v$ i u prostoru W za vektor $-F(v)$ možemo pretpostaviti da je $v = 0$ i $F(v) = 0$. Dakle, $F : V \to W$ je polinomijalno preslikavanje takvo da je $F(0) = 0$ i da mu je diferencijal u nuli D_0F surjekcija sa V na W. Dakle, možemo pisati

$$F = D_0F + \sum_{j\geq 2} F_k \quad \text{za neke} \quad F_j \in \mathcal{P}^j(V, W).$$

Pretpostavimo da preslikavanje F nije dominantno. To znači da postoji $g \in \mathcal{P}(W) \setminus \{0\}$ takva da je $g \circ F = 0$. Tada je $g(0) = g(F(0)) = (g \circ F)(0) = 0$, pa za neki $m \in \mathbb{N}$ imamo

$$g = \sum_{k\geq m} g_k \quad \text{za neke} \quad g_k \in \mathcal{P}^k(W) \quad \text{i} \quad g_m \neq 0.$$

Sada je

$$0 = g \circ F = \left(\sum_{k\geq m} g_k\right) \circ \left(D_0F + \sum_{j\geq 2} F_j\right) = g_m \circ D_0F + \sum_{k>m} g_k \circ D_0F + \sum_{k\geq m}\sum_{j\geq 2} g_k \circ F_j.$$

Prema tvrdnji (a) propozicije 4.1.6. imamo $g_m \circ D_0F \in \mathcal{P}^m(V)$, $g_k \circ D_0F \in \mathcal{P}^k(V)$ za $k > m$ i $g_k \circ F_j \in \mathcal{P}^{kj}(V)$ za $k \geq m$ i $j \geq 2$. Prema tome,

$$0 = g_m \circ D_0F + h \quad \text{gdje je} \quad h \in \sum_{\ell>m} \dot{+} \mathcal{P}^\ell(V).$$

Odatle slijedi $g_m \circ D_0F = 0$, a kako je po pretpostavci $D_0F : V \to W$ surjekcija, zaključujemo da je $g_m = 0$. No to je suprotno pretpostavci. Ova kontradikcija dokazuje propoziciju.

4.2 Konjugiranost Cartanovih podalgebri

Za Liejevu algebru $\mathfrak{g}$ sa $Aut(\mathfrak{g})$ označavamo grupu automorfizama od $\mathfrak{g}$, tj. podgrupu od $GL(\mathfrak{g})$ svih izomorfizama vektorskog prostora $\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ takvih da vrijedi

$$\varphi([x, y]) = [\varphi(x), \varphi(y)] \qquad \forall x, y \in \mathfrak{g}.$$

Neka je sada V konačnodimenzionalan vektorski prostor i $A : V \to V$ nilpotentan linearan operator. Tada definiramo operator $\mathrm{e}^A : V \to V$ ovako

$$\mathrm{e}^A = \sum_{k \in \mathbb{Z}_+} \frac{1}{k!} A^k.$$

Kako je A nilpotentan, gornja je suma konačna i definicija operatora e^A je smislena.

Zadatak 4.2.1. *Neka su $A, B : V \to V$ nilpotentni linearni operatori koji komutiraju, tj. $AB = BA$. Dokažite da je tada operator $A + B$ nilpotentan i da vrijedi*

$$\mathrm{e}^A \mathrm{e}^B = \mathrm{e}^{A+B}.$$

Uputa: Uočite da za komutirajuće operatore A i B vrijedi binomni poučak

$$(A + B)^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} A^j B^{k-j},$$

i odatle zaključite da je $A + B$ nilpotentan. Zatim u izračunavanju e^{A+B} iskoristite svojstva binomnih koeficijenata.

Zadatak 4.2.2. *Dokažite da je za svaki nilpotentan operator $A : V \to V$ operator e^A izomorfizam V na V, tj. da je $\mathrm{e}^A \in GL(V)$.*

Uputa: Iskoristite prethodni zadatak za $B = -A$.

Zadatak 4.2.3. *Ako je x $ad-$nilpotetan element Liejeve algebre $\mathfrak{g}$, dokažite da je $\mathrm{e}^{ad\,x} \in Aut(\mathfrak{g})$.*

Uputa: Dokažite indukcijom po k da za svaku derivaciju D Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ vrijedi Leibnitzova formula

$$D^k[y, z] = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} [D^j y, D^{k-j} z], \qquad k \in \mathbb{Z}_+, \quad y, z \in \mathfrak{g}.$$

To možete dobiti i kao specijalan slučaj formule u zadatku 1.3.2. Sada to primijenite na derivaciju $D = ad\,x$ da pokažete da vrijedi

$$\mathrm{e}^{ad\,x}[y, z] = \left[\mathrm{e}^{ad\,x} y, \mathrm{e}^{ad\,x} z\right], \qquad y, z \in \mathfrak{g}.$$

Podgrupa od $Aut(\mathfrak{g})$ generirana skupom $\{\mathrm{e}^{ad\,x};\ x \in \mathfrak{g}\ ad-\text{nilpotentan}\}$ označava se sa $Int(\mathfrak{g})$ i njeni se elementi zovu **unutarnji automorfizmi** od $\mathfrak{g}$.

Zadatak 4.2.4. *Dokažite da je $Int(\mathfrak{g})$ normalna podgrupa grupe $Aut(\mathfrak{g})$, tj. da za svaki automorfizam $\varphi \in Aut(\mathfrak{g})$ vrijedi $\varphi Int(\mathfrak{g}) \varphi^{-1} = Int(\mathfrak{g})$.*

Definirat ćemo sada još jednu normalnu podgrupu od $Aut(\mathfrak{g})$ sadržanu u $Int(\mathfrak{g})$. Neka je $\mathfrak{h}$ Cartanova podalgebra Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ i $R = R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ skup svih korijena od $\mathfrak{g}$ u odnosu na $\mathfrak{h}$. Imamo tada korijenski rastav

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \dotplus \sum_{\lambda \in R} \dotplus\, \mathfrak{g}_{(\lambda)}(\mathfrak{h}).$$

Za $\lambda \in R$ i $x \in \mathfrak{g}_{(\lambda)}(\mathfrak{h})$ operator $ad\,x$ je nilpotentan. Sa $\mathcal{E}_{\mathfrak{h}}(\mathfrak{g})$ označavamo podgrupu od $Int(\mathfrak{g})$ generiranu sa

$$\left\{ \mathrm{e}^{ad\,x};\ x \in \mathfrak{g}_{(\lambda)}(\mathfrak{h}),\ \lambda \in R \right\}.$$

Zadatak 4.2.5. *Dokažite da za svaki automorfizam $\varphi \in Aut(\mathfrak{g})$ i za svaku Cartanovu podalgebru $\mathfrak{h}$ od $\mathfrak{g}$ vrijedi $\varphi \mathcal{E}_{\mathfrak{h}}(\mathfrak{g}) \varphi^{-1} = \mathcal{E}_{\varphi(\mathfrak{h})}(\mathfrak{g})$.*

Lema 4.2.1. *(a) Skup $\mathfrak{h}' = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}'$ je Zariski otvoren podskup od $\mathfrak{h}$ gust u $\mathfrak{h}$ u topologiji Zariskog. Nadalje,*

$$\mathfrak{h}' = \{x \in \mathfrak{h};\ \mathfrak{g}_{(0)}(ad\,x) = \mathfrak{g}_{(0)}(\mathfrak{h})\} = \{x \in \mathfrak{h};\ \lambda(x) \neq 0\ \ \forall \lambda \in R\}.$$

(b) Neka je $R = R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_r\}$ gdje su $\lambda_i \neq \lambda_j$ za $i \neq j$ i neka je preslikavanje

$$F : \mathfrak{h} \times \mathfrak{g}_{(\lambda_1)}(\mathfrak{h}) \times \cdots \times \mathfrak{g}_{(\lambda_r)}(\mathfrak{h}) \to \mathfrak{g}$$

zadano sa

$$F(h, x_1, \ldots, x_r) = \mathrm{e}^{ad\,x_1} \cdots \mathrm{e}^{ad\,x_r} h.$$

Preslikavanje F je dominantno polinomijalno preslikavanje.

Dokaz: Tvrdnja (a) je očigledna.

Ako je $n = \dim \mathfrak{g}$, za svaki nilpotentan linearan operator $A : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ je $A^n = 0$. Prema tome, za svaki $x_j \in \mathfrak{g}_{(\lambda_j)}(\mathfrak{h})$ je

$$\mathrm{e}^{ad\,x_j} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} (ad\,x_j)^k.$$

dakle to je polinom u operatoru $ad\,x_j$. Odatle naravno slijedi da je F polinomijalno preslikavanje.

Neka je sada $h_0 \in \mathfrak{h}'$ i neka je DF diferencijal preslikavanja F u točki $(h_0, 0, \ldots, 0)$. Za $h \in \mathfrak{h}$ imamo

$$F(h_0 + h, 0, \ldots, 0) = h_0 + h \qquad \Longrightarrow \qquad (DF)(h, 0, \ldots, 0) = h.$$

Time je dokazano da je $\mathfrak{h} \subseteq \operatorname{Im} DF$. Nadalje, za $x \in \mathfrak{g}_{(\lambda_1)}(\mathfrak{h})$ imamo

$$F(h_0, x, 0, \ldots, 0) = \mathrm{e}^{ad\,x} h_0 = h_0 + (ad\,x)h_0 + \frac{1}{2!}(ad\,x)^2 h_0 + \cdots + \frac{1}{(n-1)!}(ad\,x)^{n-1} h_0.$$

Odatle je

$$(DF)(0, x, 0, \ldots, 0) = (ad\,x)h_0 = -(ad\,h_0)x.$$

Kako je $\lambda_1(h_0) \neq 0$, vrijedi $(ad\,h_0)\mathfrak{g}_{(\lambda_1)}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{g}_{(\lambda_1)}(\mathfrak{h})$, pa slijedi da je $\mathfrak{g}_{(\lambda_1)}(\mathfrak{h}) \subseteq \operatorname{Im} DF$. Analogno vrijedi $\mathfrak{g}_{(\lambda_i)}(\mathfrak{h}) \subseteq \operatorname{Im} DF$ za svaki i, pa zbog korijenskog rastava zaključujemo da je operator DF surjektivan. Prema propoziciji 4.1.13. F je dominantno polinomijalno preslikavanje.

Propozicija 4.2.2. *Neka su $\mathfrak{h}_1$ i $\mathfrak{h}_2$ Cartanove podalgebre od $\mathfrak{g}$. Tada postoje $\varphi_1 \in \mathcal{E}_{\mathfrak{h}_1}(\mathfrak{g})$ i $\varphi_2 \in \mathcal{E}_{\mathfrak{h}_2}(\mathfrak{g})$ takvi da je $\varphi_1(\mathfrak{h}_1) = \varphi_2(\mathfrak{h}_2)$.*

Dokaz: Prema lemi 4.2.1. i propoziciji 4.1.9. skupovi $\mathcal{E}_{\mathfrak{h}_1}(\mathfrak{g})\mathfrak{h}_1'$ i $\mathcal{E}_{\mathfrak{h}_2}(\mathfrak{g})\mathfrak{h}_2'$ sadrže Zariski otvorene Zariski guste podskupove od $\mathfrak{g}$. Stoga je $\mathcal{E}_{\mathfrak{h}_1}(\mathfrak{g})\mathfrak{h}_1' \cap \mathcal{E}_{\mathfrak{h}_2}(\mathfrak{g})\mathfrak{h}_2' \neq \emptyset$. To znači da postoje $\varphi_1 \in \mathcal{E}_{\mathfrak{h}_1}(\mathfrak{g})$, $\varphi_2 \in \mathcal{E}_{\mathfrak{h}_2}(\mathfrak{g})$, $h_1 \in \mathfrak{h}_1'$ i $h_2 \in \mathfrak{h}_2'$ takvi da je $\varphi_1(h_1) = \varphi_2(h_2)$. Tada je za $i = 1, 2$:

$$\varphi_i(\mathfrak{h}_i) = \varphi_i(\mathfrak{g}_{(0)}(\mathfrak{h}_i)) = \varphi_i(\mathfrak{g}_{(0)}(ad\, h_i)) = \mathfrak{g}_{(0)}(\varphi_i(ad\, h_i)\varphi_i^{-1}) = \mathfrak{g}_{(0)}(ad\, \varphi_i(h_i))$$

pa slijedi $\varphi_1(\mathfrak{h}_1) = \varphi_2(\mathfrak{h}_2)$.

Korolar 4.2.3. *Za bilo koje dvije Cartanove podalgebre $\mathfrak{h}_1$ i $\mathfrak{h}_2$ od $\mathfrak{g}$ vrijedi $\mathcal{E}_{\mathfrak{h}_1}(\mathfrak{g}) = \mathcal{E}_{\mathfrak{h}_2}(\mathfrak{g})$.*

Dokaz: Izaberimo φ_1 i φ_2 kao u propoziciji 4.2.2. Primjenom zadatka 4.2.5. nalazimo

$$\mathcal{E}_{\mathfrak{h}_1}(\mathfrak{g}) = \varphi_1\mathcal{E}_{\mathfrak{h}_1}(\mathfrak{g})\varphi_1^{-1} = \mathcal{E}_{\varphi_1(\mathfrak{h}_1)}(\mathfrak{g}) = \mathcal{E}_{\varphi_2(\mathfrak{h}_2)}(\mathfrak{g}) = \varphi_2\mathcal{E}_{\mathfrak{h}_2}(\mathfrak{g})\varphi_2^{-1} = \mathcal{E}_{\mathfrak{h}_2}(\mathfrak{g}).$$

Zbog ovog korolara umjesto $\mathcal{E}_{\mathfrak{h}}(\mathfrak{g})$ pisat ćemo samo $\mathcal{E}(\mathfrak{g})$.

Teorem 4.2.4. *$\mathcal{E}(\mathfrak{g})$ je normalna podgrupa od $Aut(\mathfrak{g})$ koja djeluje tranzitivno na skupu svih Cartanovih podalgebri od $\mathfrak{g}$. Drugim riječima, za Cartanove podalgebre $\mathfrak{h}_1$ i $\mathfrak{h}_2$ postoji $\varphi \in \mathcal{E}(\mathfrak{g})$ takav da je $\mathfrak{h}_2 = \varphi(\mathfrak{h}_1)$.*

Dokaz: Neka je $\mathfrak{h}$ Cartanova podalgebra od $\mathfrak{g}$ i $\varphi \in Aut(\mathfrak{g})$. Tada je i $\varphi(\mathfrak{h})$ Cartanova podalgebra od $\mathfrak{g}$, pa prema zadatku 4.2.5. i korolaru 4.2.3. imamo

$$\varphi\mathcal{E}(\mathfrak{g})\varphi^{-1} = \varphi\mathcal{E}_{\mathfrak{h}}(\mathfrak{g})\varphi^{-1} = \mathcal{E}_{\varphi(\mathfrak{h})}(\mathfrak{g}) = \mathcal{E}(\mathfrak{g}).$$

To pokazuje da je $\mathcal{E}(\mathfrak{g})$ normalna podgrupa od $Aut(\mathfrak{g})$.

Neka su $\mathfrak{h}_1$ i $\mathfrak{h}_2$ Cartanove podalgebre od $\mathfrak{g}$. Prema propoziciji 4.2.2. postoje $\varphi_1 \in \mathcal{E}_{\mathfrak{h}_1}(\mathfrak{g}) = \mathcal{E}(\mathfrak{g})$ i $\varphi_2 \in \mathcal{E}_{\mathfrak{h}_2}(\mathfrak{g}) = \mathcal{E}(\mathfrak{g})$ takvi da je $\varphi_1(\mathfrak{h}_1) = \varphi_2(\mathfrak{h}_2)$. Tada je $\varphi = \varphi_2^{-1}\varphi_1 \in \mathcal{E}(\mathfrak{g})$ i vrijedi $\mathfrak{h}_2 = \varphi(\mathfrak{h}_1)$.

Napomenimo na kraju da se pojam Cartanove podalgebre Liejeve algebre definira na isti način i u slučaju kad polje nije algebarski zatvoreno: Cartanova podalgebra Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ je nilpotentna podalgebra $\mathfrak{h}$ od $\mathfrak{g}$ takva da je $\mathfrak{h} = N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$. U slučaju proizvoljnog polja ne moraju sve Cartanove podalgebre biti konjugirane. Međutim, može se dokazati da za proizvoljno polje (karakteristike 0) u $\mathfrak{g}$ postoji samo konačno mnogo klasa $Int(\mathfrak{g})-$konjugiranosti Cartanovih podalgebri.

Poglavlje 5

STRUKTURA POLUPROSTIH LIEJEVIH ALGEBRI

U ovom poglavlju promatrat ćemo i potpuno klasificirati kompleksne poluproste Liejeve algebre. Klasifikacija se bazira na geometrijskim svojstvima sistema korijena. U tu svrhu najprije ćemo pojam sistema korijena proučiti neovisno od Liejevih algebri.

Kao i u završnom dijelu odjeljka 3.4. svi rezultati o poluprostim Liejevim algebrama u ovom poglavlju mogu se dokazati i u slučaju proizvoljnog algebarski zatvorenog polja K karakteristike 0, ali formulacije i dokazi nešto su jednostavniji u slučaju polja $\mathbb{C}$ kompleksnih brojeva.

5.1 Sistemi korijena

U ovom odjeljku promatrat ćemo konačne podskupove konačnodimenzionalnog realnog unitarnog vektorskog prostora koji imaju neka od svojstava sistema korijena kompleksne poluproste Liejeve algebre.

U cijelom odjeljku V je **konačnodimenzionalan realan unitaran prostor**. Nadalje, za $x \in V$ sa σ_x označavamo ortogonalnu refleksiju prostora V u odnosu na x, tj.

$$\sigma_x v = v - 2\frac{(v|x)}{(x|x)}x, \qquad v \in V; \qquad \text{dakle,} \quad \sigma_x x = -x \quad \text{i} \quad \sigma_x v = v \quad \text{za} \quad v \perp x.$$

Sistem korijena u prostoru V je konačan podskup R od V sa sljedećim svojstvima:

(1) $0 \notin R$ i R razapinje prostor V.

(2) Za $\alpha, \beta \in R$ je $2\dfrac{(\beta|\alpha)}{(\alpha|\alpha)} \in \mathbb{Z}$.

(3) Za svaki $\alpha \in R$ je $\sigma_\alpha R = R$.

(4) Ako su $\alpha, \beta \in R$ takvi da je $(\alpha|\beta) < 0$, onda je $\alpha + \beta \in R \cup \{0\}$.

(5) Za $\alpha \in R$ i $c \in \mathbb{R}$ vrijedi $c\alpha \in R$ ako i samo ako je $c = 1$ ili $c = -1$.

U ovom sustavu aksioma ima suvišnih. U stvari, može se dokazati da je (4) posljedica prva tri aksioma. Nadalje, može se dokazati da bez pretpostavke (5) za svaki $\alpha \in R$ nužno vrijedi

$$\mathbb{R}\alpha \cap R \subseteq \left\{ \pm\frac{1}{2}\alpha, \pm\alpha, \pm 2\alpha \right\}.$$

Dakle, aksiom (5) ekvivalentan je aksiomu

(5′) $\alpha \in R \implies 2\alpha \notin R$.

Neka je R sistem korijena u prostoru V i R' sistem korijena u prostoru V'. **Izomorfizam sistema korijena** R na sistem korijena R' je izometrički izomorfizam unitarnih prostora $\varphi : V \to V'$ takav da je $R' = \varphi R$. Nadalje, **automorfizam sistema korijena** R je izomorfizam R na R, tj. ortogonalan operator $\tau : V \to V$ takav da je $\tau R = R$. Sa $Aut(R)$ označavamo skup svih automorfizama sistema korijena R. Tada je $Aut(R)$ podgrupa grupe $O(V)$ svih ortogonalnih operatora na prostoru V. Grupa $Aut(R)$ je konačna jer je R konačan podskup od V koji razapinje V, dakle, ako je $A : V \to V$ linearan operator takav da je $AR = R$, onda je A potpuno određen svojom restrikcijom $A|R$, a ta je restrikcija permutacija konačnog skupa R.

Prema (3) za svaki $\alpha \in R$ je $\sigma_\alpha \in Aut(R)$. Sa $W(R)$ označavamo podgrupu od $Aut(R)$ generiranu sa $\{\sigma_\alpha;\ \alpha \in R\}$. Ta se podgrupa zove **Weylova grupa sistema korijena** R.

Propozicija 5.1.1. (*a*) *Ako je φ izomorfizam sistema korijena R u prostoru V na sistem korijena R' u prostoru V' onda je $\sigma_{\varphi\alpha}\varphi = \varphi\sigma_\alpha$ za svaki $\alpha \in R$.*

(*b*) *Ako je $\tau \in Aut(R)$ i $\alpha \in R$ onda je $\sigma_{\tau\alpha} = \tau\sigma_\alpha\tau^{-1}$.*

(*c*) *$W(R)$ je normalna podgrupa grupe $Aut(R)$.*

(*d*) *Za $\alpha, \beta \in R$ vrijedi $\sigma_{\sigma_\beta\alpha} = \sigma_\beta\sigma_\alpha\sigma_\beta$.*

Zadatak 5.1.1. *Dokažite propoziciju 5.1.1.*

Uputa: Za tvrdnju (*a*) koristite formulu za refleksije σ_α i $\sigma_{\varphi\alpha}$ i činjenicu da je φ izometrički izomorfizam sa V na V'.

Neka je R sistem korijena u prostoru V. Vektor $x \in V$ zove se **regularan** u odnosu na R, ako je $(\alpha|x) \neq 0\ \forall\alpha \in R$. Skup V^{reg} svih regularnih vektora je komplement unije hiperravnina $\alpha^\perp$, $\alpha \in R$. Komponente povezanosti skupa V^{reg} zovu se **Weylove komore** u V u odnosu na sistem korijena R. Za $x \in V^{\mathrm{reg}}$ stavimo

$$R_+(x) = \{\alpha \in R;\ (\alpha|x) > 0\} \qquad \text{i} \qquad R_-(x) = \{\alpha \in R;\ (\alpha|x) < 0\} = -R_+(x).$$

Tada je $R = R_+(x) \cup R_-(x)$ i $R_+(x) \cap R_-(x) = \emptyset$. Ako su $x, y \in V^{\mathrm{reg}}$ u istoj Weylovoj komori onda zbog neprekidnosti funkcija $z \mapsto (\alpha|z)$, $\alpha \in R$, očito vrijedi $R_\pm(x) = R_\pm(y)$. Za Weylovu komoru C pisemo $R_\pm(C) = R_\pm(x)$ za bilo koji $x \in C$.

Propozicija 5.1.2. *Za podskup R_+ od R vrijedi $R_+ = R_+(C)$ za neku Weylovu komoru C ako i samo ako ima sljedeća dva svojstva:*

(*a*) *$R = R_+ \cup (-R_+)$ i $R_+ \cap (-R_+) = \emptyset$,*

(*b*) *za $\alpha, \beta \in R_+$ takve da je $\alpha + \beta \in R$ vrijedi $\alpha + \beta \in R_+$,*

Zadatak 5.1.2. *Dokažite propoziciju 5.1.2.*

Uputa: Za dokaz dovoljnosti uvjeta (*a*) i (*b*) dokažite da iz tih uvjeta slijedi da je skup $\{x \in V;\ (\alpha|x) > 0\ \forall\alpha \in R_+\}$ neprazan.

Neka je C Weylova komora. Za $\alpha \in R$ kažemo da je **prost korijen** u odnosu na C ako je $\alpha \in R_+(C)$ i ne postoje $\beta, \gamma \in R_+(C)$ takvi da je $\alpha = \beta + \gamma$. Skup svih prostih korijena u odnosu na Weylovu komoru C označavamo sa $B(C)$.

Teorem 5.1.3. *Neka je C Weylova komora u V u odnosu na sistem korijena R.*

(*a*) *$B(C)$ je baza vektorskog prostora V.*

(*b*) *Za međusobno različite $\alpha, \beta \in B(C)$ vrijedi $(\alpha|\beta) \leq 0$.*

(*c*) *Svaki $\beta \in R$ ima prikaz*

$$\beta = \pm \sum_{\alpha \in B(C)} c_\alpha \alpha, \quad \text{gdje su } c_\alpha \in \mathbb{Z}_+.$$

(*d*) *Vrijedi*

$$R_+(C) = \left\{ \beta \in R; \ \beta = \sum_{\alpha \in B(C)} c_\alpha \alpha \ \text{gdje su } c_\alpha \in \mathbb{Z}_+ \right\}.$$

Dokaz: Neka je $x \in C$. Ako je $\alpha \in R_+(C) \setminus B(C)$, postoje $\beta, \gamma \in R_+(C)$ takvi da je $\alpha = \beta + \gamma$. Stoga je $(\alpha|x) > (\beta|x)$ i $(\alpha|x) > (\gamma|x)$. Budući da je skup $R_+(C)$ konačan, odatle lako slijedi da je

$$R_+(C) = \left\{ \beta \in R; \ \beta = \sum_{\alpha \in B(C)} c_\alpha \alpha \ \text{za neke } c_\alpha \in \mathbb{Z}_+ \right\}.$$

Time je dokazano (d), a budući da je R disjunktna unija $R_+(C)$ i $R_-(C) = -R_+(C)$, slijedi i tvrdnja (c).

Pretpostavimo da su $\alpha, \beta \in B(C)$ takvi da je $(\alpha|\beta) > 0$. Prema (4) tada vrijedi $\alpha - \beta, \beta - \alpha \in R \cup \{0\}$. Budući da su $\alpha, \beta \in B(C)$ i $\alpha = \beta + (\alpha - \beta)$ i $\beta = \alpha + (\beta - \alpha)$, zaključujemo da $\alpha - \beta \notin R_+(C)$ i $\beta - \alpha \notin R_+(C)$. To znači da je $\alpha - \beta = 0$, tj. $\alpha = \beta$. Time je dokazana tvrdnja (b).

Budući da skup R razapinje prostor V, iz (c) slijedi da $B(C)$ razapinje V. Treba još dokazati linearnu nezavisnost skupa $B(C)$. Pretpostavimo da je

$$\sum_{\alpha \in B(C)} c_\alpha \alpha = 0 \qquad \text{za neke } c_\alpha \in \mathbb{R}.$$

Stavimo sada

$$\gamma = \sum_{\alpha \in B(C),\, c_\alpha > 0} c_\alpha \alpha \qquad \text{i} \qquad \delta = \sum_{\alpha \in B(C),\, c_\alpha < 0} c_\alpha \alpha.$$

Tada je prema tvrdnji (b)

$$(\gamma|\delta) = \sum_{\alpha, \beta \in B(C),\, c_\alpha > 0,\, c_\beta < 0} c_\alpha c_\beta (\alpha|\beta) \geq 0.$$

Stoga imamo

$$0 = (\gamma + \delta|\gamma + \delta) = (\gamma|\gamma) + (\delta|\delta) + 2(\gamma|\delta) \geq (\gamma|\gamma) + (\delta|\delta),$$

a odatle slijedi $\gamma = \delta = 0$. Sada je za $x \in C$

$$0 = (\gamma|x) = \sum_{\alpha \in B(C),\, c_\alpha > 0} c_\alpha (\alpha|x),$$

a budući da je $(\alpha|x) > 0$ za svaki $\alpha \in B(C)$, zaključujemo da je $\{\alpha \in B(C); \ c_\alpha > 0\} = \emptyset$. Analogno iz $\delta = 0$ slijedi da je i $\{\alpha \in B(C); \ c_\alpha < 0\} = \emptyset$. To pokazuje da je $c_\alpha = 0 \ \forall \alpha \in B(C)$. Time je dokazano da je skup $B(C)$ linearno nezavisan, dakle, baza prostora V, odnosno, dokazana je tvrdnja (a).

Propozicija 5.1.4. *Za svaki $\alpha \in R$ postoji Weylova komora C takva da je $\alpha \in B(C)$.*

Dokaz: Neka je P ortogonalni projektor prostora V na potprostor $\alpha^\perp$. Dakle, $\operatorname{Ker} P = \mathbb{R}\alpha$. Tada je

$$\{P\beta;\ \beta \in R,\ \beta \notin \mathbb{R}\alpha\} = \{P\beta;\ \beta \in R \setminus \{\alpha, -\alpha\}\,\}$$

konačan podskup potprostora $\alpha^\perp$ koji ne sadrži 0. Stoga postoji $y \in \alpha^\perp$ takav da je $(P\beta|y) \neq 0$ za svaki $\beta \in R\setminus\{\alpha,-\alpha\}$. Budući da je P ortogonalni projektor na $\alpha^\perp$ i $y \in \alpha^\perp$, to znači da je $(\beta|y) \neq 0$ za svaki $\beta \in R\setminus\{\alpha,-\alpha\}$. Tada su $\{(\alpha|\alpha)+|(\beta|\alpha)|;\ \beta \in R\setminus\{\alpha,-\alpha\}\,\}$ i $\{|(\beta|y)|;\ \beta \in R\setminus\{\alpha,-\alpha\}\,\}$ dva konačna skupa strogo pozitivnih brojeva, možemo izabrati $c > 0$ tako da bude

$$c(\alpha|\alpha) + c|(\beta|\alpha)| < |(\beta|y)| \qquad \forall \beta \in R \setminus \{\alpha, -\alpha\}.$$

Tada za $x = y + c\alpha$ vrijedi $(\pm\alpha|x) = \pm c(\alpha|\alpha) \neq 0$ i

$$\beta \in R \setminus \{\alpha, -\alpha\} \qquad \Longrightarrow \qquad (\beta|x) = (\beta|y) + c(\beta|\alpha) \neq 0.$$

Dakle, $x \in V^{\mathrm{reg}}$. Neka je C Weylova komora koja sadrži x. Sada je

$$(\alpha|x) = (\alpha|y) + c(\alpha|\alpha) = c(\alpha|\alpha) > 0,$$

dakle, $\alpha \in R_+(x) = R_+(C)$. Nadalje, ako je $\beta \in R_+(C) \setminus \{\alpha\}$, onda imamo

$$(\beta|x) = |(\beta|x)| = |(\beta|y) + c(\beta|\alpha)| \geq |(\beta|y)| - c|(\beta|\alpha)| > c(\alpha|\alpha) = (\alpha|x).$$

To pokazuje da ne postoje $\beta, \gamma \in R_+(C)$ takvi da je $\alpha = \beta + \gamma$, a to znači da je $\alpha \in B(C)$.

Proučit ćemo sada moguće geometrijske odnose između dva neproporcionalna korijena $\alpha, \beta \in R$. Pretpostavimo da je $\|\alpha\| \geq \|\beta\|$. Eventualnom zamjenom β sa $-\beta$ možemo postići da bude $(\alpha|\beta) \leq 0$. Označimo sa $\vartheta \in \langle 0, \pi \rangle$ kut između vektora α i β. Tada imamo

$$2\frac{(\beta|\alpha)}{(\alpha|\alpha)} \cdot 2\frac{(\alpha|\beta)}{(\beta|\beta)} = 4\frac{(\alpha|\beta)^2}{\|\alpha\|^2\|\beta\|^2} = 4(\cos\vartheta)^2 < 4.$$

Budući da su $n(\beta,\alpha) = 2\dfrac{(\beta|\alpha)}{(\alpha|\alpha)}$ i $n(\alpha,\beta) = 2\dfrac{(\alpha|\beta)}{(\beta|\beta)}$ cijeli brojevi ≤ 0 i $|n(\beta,\alpha)| \leq |n(\alpha,\beta)|$, sve mogućnosti su prikazane u sljedećoj tablici:

	$n(\beta,\alpha)$	$n(\alpha,\beta)$	$\dfrac{\|\alpha\|^2}{\|\beta\|^2}$	$\cos\vartheta$	ϑ
1.	0	0		0	$\frac{\pi}{2}$ ili 90°
2.	-1	-1	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$ ili 120°
3.	-1	-2	2	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$ ili 135°
4.	-1	-3	3	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{5\pi}{6}$ ili 150°

Propozicija 5.1.5. *Ako su $\alpha, \beta \in R$ i $(\alpha|\beta) < 0$, onda je $(\alpha|\alpha) + (\beta|\beta) + 4(\alpha|\beta) \leq 0$.*

Dokaz: Slučaj $\alpha = -\beta$ je trivijalan. Pretpostavimo da je $\alpha \neq -\beta$. Tada su α i β neproporcionalni i možemo pretpostaviti da je $\|\alpha\| \geq \|\beta\|$. Iz tablice mogućnosti vidimo da je tada

$$\frac{(\alpha|\alpha)}{(\beta|\beta)} + 2\frac{(\alpha|\beta)}{(\beta|\beta)} = 0 \qquad \text{i} \qquad \frac{(\beta|\beta)}{(\beta|\beta)} + 2\frac{(\alpha|\beta)}{(\beta|\beta)} \leq 0.$$

Zbrojimo li i pomnožimo sa $(\beta|\beta)$ dobivamo traženu nejednakost.

Ako je C Weylova komora i $\tau \in Aut(R)$, očito je i $\tau(C)$ Weylova komora. Posebno, Weylova grupa $W(R)$ djeluje na skupu svih Weylovih komora.

Teorem 5.1.6. (*a*) *Weylova grupa $W(R)$ djeluje tranzitivno na skupu svih Weylovih komora.*

(*b*) *Za svaku Weylovu komoru C Weylova grupa $W(R)$ generirana je skupom $\{\sigma_\alpha;\ \alpha \in B(C)\}$.*

Dokaz: Neka je C Weylova komora i neka je W' podgrupa od $W(R)$ generirana skupom $\{\sigma_\alpha;\ \alpha \in B(C)\}$. Neka je i D Weylova komora. Izaberimo $\sigma \in W'$ tako da broj elemenata $|\sigma(R_+(D)) \cap R_+(C)|$ bude najveći mogući. Pretpostavimo da je $\sigma(R_+(D)) \neq R_+(C)$. Tada očito $B(C)$ nije sadržano u $\sigma(R_+(D))$, pa postoji $\alpha \in B(C)$ takav da $\alpha \notin \sigma(R_+(D))$. Tvrdimo da je tada $\sigma_\alpha(R_+(C) \setminus \{\alpha\}) = R_+(C) \setminus \{\alpha\}$. Doista, neka je $\gamma \in R_+(C) \setminus \{\alpha\}$. Tada je

$$\gamma = \sum_{\beta \in B(C)} c_\beta \beta \qquad \text{za neke} \quad c_\beta \in \mathbb{Z}_+$$

i sigurno je $c_\beta > 0$ za neki $\beta \neq \alpha$. Nadalje,

$$\sigma_\alpha \gamma = \gamma - 2\frac{(\gamma|\alpha)}{(\alpha|\alpha)}\alpha = \sum_{\beta \in B(C)} d_\beta \beta \qquad \text{i} \qquad d_\beta = c_\beta \quad \text{za} \quad \beta \neq \alpha.$$

Prema tome, za neki $\beta \in B(C)$ je $d_\beta > 0$, a to prema teoremu 5.1.3. znači da je $\sigma_\alpha \gamma \in R_+(C) \setminus \{\alpha\}$. Odatle slijedi da presjek $\sigma_\alpha \sigma(R_+(D)) \cap R_+(C)$ sadrži skup $(\sigma(R_+(D)) \cap R_+(C)) \cup \{\alpha\}$, a to je nemoguće zbog izbora elementa $\sigma \in W'$, tj. zbog maksimalnosti broja $|\sigma(R_+(D)) \cap R_+(C)|$. Ova kontardikcija pokazuje da je $\sigma(R_+(D)) = R_+(C)$. To znači da je $\sigma(D) = C$. Time je dokazano da grupa W' djeluje tranzitivno na skupu svih Weylovih komora.

Ostaje još da se dokaže da je $W' = W(R)$. Neka je $\alpha \in R$. Prema propoziciji 5.1.4. postoji Weylova komora D takva da je $\alpha \in B(D)$. Izaberimo $\sigma \in W'$ tako da bude $\sigma(D) = C$, dakle, $\sigma(B(D)) = B(C)$. Tada je $\sigma\alpha = \beta \in B(C)$, a prema tvrdnji (*b*) propozicije 5.1.1. je $\sigma_\beta = \sigma_{\sigma\alpha} = \sigma\sigma_\alpha\sigma^{-1}$. Odatle je $\sigma_\alpha = \sigma^{-1}\sigma_\beta\sigma \in W'$. Dakle, skup $\{\sigma_\alpha;\ \alpha \in R\}$ sadržan je u grupi W', a kako taj skup generira čitavu grupu $W(R)$, zaključujemo da je $W' = W(R)$.

Napominjemo da se može dokazati da Weylova grupa $W(R)$ djeluje *prosto tranzitivno* na skupu svih Weylovih komora, tj. da za Weylove komore C i D postoji jedinstven $\sigma \in W(R)$ takav da je $\sigma(D) = C$.

Zadržimo oznake

$$n(\alpha, \beta) = 2\frac{(\alpha|\beta)}{(\beta|\beta)}, \qquad \alpha, \beta \in R.$$

Tada je

$$\sigma_\alpha \beta = \beta - n(\beta, \alpha)\alpha, \qquad \alpha, \beta \in R.$$

Teorem 5.1.7. *Neka su R i R' sistemi korijena u realnim prostorima V i V' i neka je C Weylova komora u V u odnosu na R i C' Weylova komora u V' u odnosu na R'. Svaka bijekcija $\varphi : B(C) \to B(C')$, takva da je $n(\varphi\alpha, \varphi\beta) = n(\alpha, \beta)$ $\forall \alpha, \beta \in B(C)$ i da je $\|\varphi\alpha\| = \|\alpha\|$ $\forall \alpha \in B(C)$ jedinstveno se proširuje do izomorfizma sistema korijena R na sistem korijena R'. Obratno, ako je φ izomorfizam sistema korijena R na sistem korijena R' onda vrijedi $n(\varphi\alpha, \varphi\beta) = n(\alpha, \beta)$ $\forall \alpha, \beta \in R$.*

Dokaz: Pretpostavimo prvo da je φ izomorfizam sistema korijena R na sistem korijena R'. Tada je $\varphi : V \to V'$ izometrički izomorfizam, tj. $(\varphi x, \varphi y) = (x|y)$ $\forall x, y \in V$. Posebno, za korijene $\alpha, \beta \in R$ imamo

$$n(\varphi\alpha, \varphi\beta) = 2\frac{(\varphi\alpha|\varphi\beta)}{(\varphi\beta|\varphi\beta)} = 2\frac{(\alpha|\beta)}{(\beta|\beta)} = n(\alpha, \beta).$$

Pretpostavimo sada da je $\varphi : B(C) \to B(C')$ bijekcija takva da vrijedi $n(\varphi\alpha, \varphi\beta) = n(\alpha, \beta)$ $\forall \alpha, \beta \in B(C)$ i $\|\varphi\alpha\| = \|\alpha\|$ $\forall \alpha \in B(C)$. Neka je istim znakom φ označen jedinstven izomorfizam sa V na V' koji proširuje tu bijekciju. Tada za $\alpha, \beta \in B(C)$ imamo

$$\sigma_{\varphi\alpha}\varphi\beta = \varphi\beta - n(\varphi\beta, \varphi\alpha)\varphi\alpha = \varphi(\beta - n(\beta, \alpha)\alpha) = \varphi\sigma_\alpha\beta.$$

Budući da je $B(C)$ baza od V, odatle slijedi da je $\sigma_{\varphi\alpha}\varphi = \varphi\sigma_\alpha$, odnosno, $\sigma_{\varphi\alpha} = \varphi\sigma_\alpha\varphi^{-1}$. Zbog tvrdnje (b) teorema 5.1.6. slijedi $W(R') = \varphi W(R)\varphi'$.

Za $\alpha \in R$ prema propoziciji 5.1.4. i prema tvrdnji (a) teorema 5.1.6. postoji $\sigma \in W(R)$ takav da je $\sigma\alpha \in B(C)$. Sada je

$$\varphi\alpha = (\varphi\sigma^{-1}\varphi^{-1})(\varphi\sigma\alpha) \in R'$$

jer je $\varphi\sigma^{-1}\varphi^{-1} \in W(R')$. Prema tome, $\varphi(R) \subseteq R'$. Analogno vrijedi i $\varphi^{-1}(R') \subseteq R$, a iz te dvije inkluzije slijedi jednakost $\varphi(R) = R'$.

Napokon, iz $n(\varphi\alpha, \varphi\beta) = n(\alpha, \beta)$ i $\|\varphi\beta\| = \|\beta\|$ slijedi $(\varphi\alpha|\varphi\beta) = (\alpha|\beta)$ $\forall \alpha, \beta \in B(C)$. Kako je $B(C)$ baza prostora V, odatle se pomoću Gramm$-$Schmidtovog postupka dokazuje da izomorfizam $\varphi : V \to V'$ prevodi ortonormiranu bazu prostora V (dobivenu ortonormiranjem baze $B(C)$ Gramm$-$Schmidtovim postupkom) prevodi u ortonormiranu bazu prostora V' (dobivenu Gramm$-$Scmidtovim postupkom iz baze $B(C')$. Dakle, φ je izometrija, što znači da je φ izomorfizam sistema korijena R na sistem korijena R'.

Za korijene $\alpha, \beta \in R$ kažemo da su jedan drugome **susjedi** ako je $\alpha \neq \pm\beta$ i $(\alpha|\beta) \neq 0$. Za podskup S od R **lanac** u S je konačan niz $(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ elemenata iz S takvih da su α_{i-1} i α_i susjedi za $i = 1, \ldots, m$. Poskup $S \subseteq R$ je **povezan** ako za svaka dva njegova međusobno različita elementa α i β postoji lanac $(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ u S takav da je $\alpha_0 = \alpha$ i $\alpha_m = \beta$. Na povezanom podskupu S od R možemo definirati metriku ovako:

$$d_S(\alpha, \beta) = \min\{m \in \mathbb{N};\ \text{postoji lanac } (\alpha_0, \ldots, \alpha_m) \text{ takav da je } \alpha_0 = \alpha \text{ i } \alpha_m = \beta\}, \quad \alpha \neq \beta,$$

$$d_S(\alpha, \alpha) = 0.$$

Propozicija 5.1.8. *Neka je $S \neq \emptyset$ povezan podskup od R. Postoji $\beta \in S$ takav da je $S \setminus \{\beta\}$ povezan.*

Dokaz: Možemo pretpostaviti da skup S ima barem dva elementa. Izaberimo $\alpha, \beta \in S$ tako da udaljenost $d_S(\alpha, \beta)$ bude maksimalna. Tvrdimo da je tada skup $S \setminus \{\beta\}$ povezan. Doista, neka je $\gamma \in S \setminus \{\beta\}$ i neka je $(\alpha_0, \ldots, \alpha_m)$ lanac u S takav da je $\alpha_0 = \alpha$, $\alpha_m = \gamma$ i $m = d_S(\alpha, \gamma)$. Tada je $m \leq d_S(\alpha, \beta)$, dakle, $\alpha_i \neq \beta$ $\forall i \in \{0, \ldots, m\}$. Dakle, $(\alpha_0, \ldots, \alpha_m)$ je lanac u $S \setminus \{\beta\}$.

Za povezan skup $S \subseteq R$ korijen $\beta \in S$ je **ekstreman** ako je skup $S \setminus \{\beta\}$ povezan. **Standardan podskup** od R je podskup $S \subseteq R_+(C)$ za neku Weylovu komoru C takav da je $(\alpha|\beta) \leq 0$ $\forall \alpha, \beta \in S$, $\alpha \neq \beta$. Prema tvrdnji (b) teorema 5.1.3. za Weylovu komoru C baza $B(C)$ je standardni podskup od R. Sasvim analogno dokazu linearne nezavisnosti od $B(C)$ dokazuje se:

Propozicija 5.1.9. *Svaki standardni podskup od R je linearno nezavisan.*

Propozicija 5.1.10. *Neka je S povezan standardni podskup od R. Tada je*

$$\beta_S = \sum_{\alpha \in S} \alpha \in R.$$

Ako su svi korijeni $\alpha \in S$ iste duljine, onda je $\|\beta_S\| = \|\alpha\|$ za $\alpha \in S$.

Dokaz: Pretpostavimo da prva tvrdnja nije istinita i neka je S kontraprimjer s najmanjim mogućim brojem elemenata; naravno, $|S| \geq 2$. Neka je β ekstremni korijen iz S. Tada je skup $T = S \setminus \{\beta\}$ standardan, pa je po pretpostavci $\beta_T \in R$. Nadalje, iz pretpostavke slijedi da je $(\beta_T, \beta) < 0$. Sada iz aksioma (4) sistema korijena slijedi da je $\beta_S = \beta_T + \beta \in R \cup \{0\}$. Kako zbog linearne nezavisnosti skupa S vrijedi $\beta_S \neq 0$, zaključujemo da je $\beta_S \in R$. Ova kontradikcija dokazuje prvu tvrdnju.

Pretpostavimo sada da su svi korijeni iz S iste duljine d i da druga tvrdnja nije istinita. Neka je ponovo S kontraprimjer s najmanjim mogućim brojem elemenata. Za ekstremni korijen $\beta \in S$ i za $T = S \setminus \{\beta\}$ je tada $\|\beta_T\| = \|\beta\| = d$. Kako je opet $(\beta_T|\beta) < 0$, iz tablice na str. 90 zbog $\|\beta_T\| = \|\beta\|$ slijedi

$$2\frac{(\beta_T|\beta)}{(\beta_T|\beta_T)} = 2\frac{(\beta_T|\beta)}{(\beta|\beta)} = -1.$$

Odatle je $2(\beta_T|\beta) = -(\beta|\beta) = -d^2$, dakle,

$$\|\beta_S\|^2 = (\beta_T + \beta|\beta_T + \beta) = (\beta_T|\beta_T) = (\beta|\beta) + (\beta_T|\beta_T) + 2(\beta_T|\beta) = d^2 + d^2 - d^2 = d^2.$$

Ova kontradikcija dokazuje drugu tvrdnju.

Neka je C Weylova komora. Za $\beta \in R$ definiramo **nivo korijena** β u odnosu na C : to je prirodan broj $\ell_C(\beta)$ zadan ovako:

$$\beta = \sum_{\alpha \in B(C)} c_\alpha \alpha \qquad \Longrightarrow \qquad \ell_C(\beta) = \sum_{\alpha \in B(C)} |c_\alpha|.$$

Dakle, za $\beta \in R_+(C)$ je $\ell_C(\beta) = \sum_{\alpha \in B(C)} c_\alpha$, a za $\beta \in R_-(C)$ je $\ell_C(\beta) = \ell_C(-\beta)$. Nadalje, definiramo **nosač korijena** β u odnosu na C :

$$Supp_C(\beta) = \{\alpha \in B(C);\ c_\alpha \neq 0\}.$$

Propozicija 5.1.11. *Za $\beta \in R_+(C) \setminus B(C)$ postoji $\alpha \in Supp_C(\beta)$ takav da je $\beta - \alpha \in R_+(C)$. Za svaki takav α je $\ell_C(\beta) = \ell_C(\beta - \alpha) + 1$.*

Dokaz: Iz $(\beta|\beta) > 0$ slijedi da je $(\beta|\alpha) > 0$ za neki $\alpha \in Supp_C(\beta)$. Za takav α prema tvrdnji (b) propozicije 3.4.6. razlika $\beta - \alpha$ je korijen. Neki od koeficijenata korijena $\beta - \alpha$ u rastavu po bazi $B(C)$ je pozitivan, pa slijedi da je $\beta - \alpha \in R_+(C)$. Posljednja je tvrdnja trivijalna.

Propozicija 5.1.12. *Za svaki korijen β nosač $Supp_C(\beta)$ je povezan.*

Dokaz: Pretpostavimo da tvrdnja nije istinita i neka je $\beta \in R_+(C)$ kontraprimjer s najmanjim nivoom $\ell_C(\beta)$. Budući da $Supp_C(\beta)$ nije povezan, vrijedi $Supp_C(\beta) = S_1 \cup S_2$, gdje su S_1 i S_2 neprazni i disjunktni i vrijedi $(\alpha_1|\alpha_2) = 0$ za bilo koje $\alpha_1 \in S_1$ i $\alpha_2 \in S_2$. Budući da je $(\beta|\beta) > 0$ i svi koeficijenti c_α u prikazu β pomoću baze $B(C)$ su ≥ 0, postoji $\gamma \in Supp_C(\beta)$ takav da je $(\beta|\gamma) > 0$. Tada je prema tvrdnji (b) propozicije 3.4.6. $\beta - \gamma \in R_+(C)$. Možemo pretpostaviti da je $\gamma \in S_1$. Budući da je $\ell_C(\beta - \gamma) < \ell_C(\beta)$, po pretpostavci indukcije nosač $Supp_C(\beta - \gamma)$ je povezan. Međutim, očito je

$$Supp_C(\beta - \gamma) = (S_1 \setminus \{\gamma\}) \cup S_2.$$

Iz povezanosti nosača $Supp_C(\beta - \gamma)$ slijedi da je $S_1 \setminus \{\gamma\} = \emptyset$, tj. $S_1 = \{\gamma\}$, i $c_\gamma = 1$. Dakle,

$$\beta = \gamma + \sum_{\alpha \in S_2} c_\alpha \alpha.$$

Prema aksiomima sistema korijena $\sigma_\gamma \beta$ je korijen. Nadalje, za svaki $\alpha \in S_2$ je $(\gamma|\alpha) = 0$, dakle, $\sigma_\gamma \alpha = \alpha$. Slijedi

$$\sigma_\gamma \beta = \sigma_\gamma \gamma + \sum_{\alpha \in S_2} c_\alpha \sigma_\gamma \alpha = -\gamma + \sum_{\alpha \in S_2} c_\alpha \alpha.$$

Dobivena jednakost u suprotnosti je s tvrdnjom (c) teorema 5.1.3. Ova kontradikcija dokazuje propoziciju.

Neka je R sistem korijena u prostoru V. Podskup R' od R zove se **podsistem** od R, ako za potprostor $V' = span\, R'$ vrijedi $R' = R \cap V'$. Primijetimo da je tada R' sistem korijena u prostoru V' : naime, za $\alpha \in V'$ je $\sigma_\alpha V' = V'$, pa posebno za $\alpha \in R'$ vrijedi

$$\sigma_\alpha R' = \sigma_\alpha(R \cap V') = \sigma_\alpha R \cap \sigma_\alpha V' = R \cap V' = R'.$$

Za podsistem R'' od R kažemo da je **komplementaran** podsistemu R', ako je $R'' = R \setminus R'$ i vrijedi $V = V' \dotplus V''$ za $V' = span\, R'$ i $V'' = span\, R''$. Podsistem R' zove se **direktni faktor** od R ako je $R \setminus R'$ podsistem od R komplementaran podsistemu R'. Za direktni faktor R' od R kažemo da je **netrivijalan** ako je $R' \neq \emptyset$ i $R' \neq R$. Kažemo da je R **ireducibilan sistem korijena** ako je $R \neq \emptyset$ i R ne sadrži nijedan netrivijalan direktni faktor.

Propozicija 5.1.13. *Ako su R' i R'' komplementarni podsistemi od R, onda su potprostori $V' = span\, R'$ i $V'' = span\, R''$ međusobno ortogonalni, tj. $V = V' \oplus V''$.*

Zadatak 5.1.3. *Dokažite propoziciju 5.1.13.*

Uputa: Koristite činjenicu da je za $\alpha \in R'$ pripadna refleksija σ'_α prostora V' upravo restrikcija $\sigma_\alpha|V'$ refleksije σ_α prostora V u odnosu na α. Uočite da iz $\sigma_\alpha R = R$ i $\sigma_\alpha R' = R'$ slijedi $\sigma_\alpha R'' = R''$. Zatim koristite formulu za refleksiju σ_α da dokažete da je $\alpha \perp V''$.

Korolar 5.1.14. *Ako je neka baza sistema korijena R povezana, sve su baze od R povezane i R je ireducibilan sistem korijena.*

Zadatak 5.1.4. *Dokažite koroolar 5.1.14.*

Uputa: Za dokaz prve tvrdnje koristite tvrdnju (a) teorema 5.1.6. i činjenicu da su svi $\sigma \in W(R)$ ortogonalni operatori na V. Za dokaz ireducibilnosti sistema korijena R, iz pretpostavke neireducibilnosti od R konstruirajte bazu od R za koju nepovezanost slijedi iz propozicije 5.1.13.

Propozicija 5.1.15. *Neka su R_1 i R_2 direktni faktori sistema korijena R. Tada su $R_1 \cup R_2$ i $R_1 \cap R_2$ direktni faktori od R.*

Dokaz: Neka su R'_1 i R'_2 podsistemi od R komplementarni podsistemima R_1 i R_2. Stavimo

$$V_1 = span\, R_1, \qquad V_2 = span\, R_2, \qquad V'_1 = span\, R'_1, \qquad V'_2 = span\, R'_2.$$

Tvrdimo da su $R_1 \cap R_2$ i $R'_1 \cup R'_2$ međusobno komplementarni podsistemi od R i da vrijedi

$$span\,(R_1 \cap R_2) = V_1 \cap V_2 \qquad \text{i} \qquad span\,(R'_1 \cup R'_2) = V'_1 + V'_2.$$

Prije svega, iz $R = R_1 \cup R'_1$ i $R = R_2 \cup R'_2$, slijedi

$$R = (R_1 \cup R'_1) \cap (R_2 \cup R'_2) = (R_1 \cap R_2) \cup (R_1 \cap R'_2) \cup (R'_1 \cap R_2) \cup (R'_1 \cap R'_2) \subseteq (R_1 \cap R_2) \cup (R'_1 \cup R'_2),$$

dakle, vrijedi

$$R = (R_1 \cap R_2) \cup (R'_1 \cup R'_2).$$

S druge strane, kako je $R_1 \cap R'_1 = \emptyset$ i $R_2 \cap R'_2 = \emptyset$, imamo

$$(R_1 \cap R_2) \cap (R'_1 \cup R'_2) = (R_1 \cap R_2 \cap R'_1) \cup (R_1 \cap R_2 \cap R'_2) = \emptyset.$$

Što se tiče potprostora razapetih s ta dva komplementarna podskupa od R, imamo

$$span\,(R'_1 \cup R'_2) = span\, R'_1 \, + \, span\, R'_2 = V'_1 + V'_2.$$

Nadalje,

$$V_1 \cap V_2 = (span\, R_1) \cap (span\, R_2) \supseteq span\,(R_1 \cap R_2).$$

Prema tome, vrijedi

$$V = span\, R = span\,(R_1 \cap R_2) + span\,(R'_1 \cup R'_2) sub (V_1 \cap V_2) + (V'_1 + V'_2),$$

dakle,

$$V = (V_1 \cap V_2) + (V'_1 + V'_2).$$

Dokažimo da je ta suma direktna. Prije svega, iz

$$\dim V \le \dim\,(V_1 \cap V_2) + \dim\,(V'_1 + V'_2) \qquad \text{i} \qquad \dim\,(V'_1 + V'_2) = \dim V'_1 + \dim V'_2 - \dim\,(V'_1 \cap V'_2)$$

slijedi

$$\dim V \le \dim\,(V_1 \cap V_2) - \dim\,(V'_1 \cap V'_2) + \dim V'_1 + \dim V'_2. \tag{5.1}$$

Zamijenimo li uloge R_1 i R_2 sa R'_1 i R'_2 dobivamo i nejednakost

$$\dim V \le \dim\,(V'_1 \cap V'_2) - \dim\,(V_1 \cap V_2) + \dim V_1 + \dim V_2.$$

Kako je $\dim V = \dim V_1 + \dim V'_1 = \dim V_2 + \dim V'_2$, imamo $\dim V_1 = \dim V - \dim V'_1$ i $\dim V_2 = \dim V - \dim V'_2$, pa iz prethodne nejednakosti dobivamo

$$\dim V \le \dim\,(V'_1 \cap V'_2) - \dim\,(V_1 \cap V_2) + 2 \dim V - \dim V'_1 - \dim V'_2,$$

odnosno,

$$\dim V \ge \dim\,(V_1 \cap V_2) - \dim\,(V'_1 \cap V'_2) + \dim V'_1 + \dim V'_2.$$

Dakle, u (5.1) vrijedi znak jednakosti, pa slijedi

$$\dim V = \dim\,(V_1 \cap V_2) + \dim V'_1 + \dim V'_2 - \dim\,(V'_1 \cap V'_2) = \dim\,(V_1 \cap V_2) + \dim\,(V'_1 + V'_2).$$

Time je dokazano da je

$$V = (V_1 \cap V_2) \dotplus (V_1' + V_2').$$

Treba još dokazati da je $span\,(R_1 \cap R_2) = V_1 \cap V_2$, a ne samo $span\,(R_1 \cap R_2) \subseteq V_1 \cap V_2$. Pretpostavimo da je $v \in V_1 \cap V_2$ ortogonalan na sve korijene $\alpha \in R_1 \cap R_2$. Kako je

$$(V_1 \cap V_2)^\perp = V_1^\perp + V_2^\perp = V_1' + V_2' = span\,(R_1' \cup R_2'),$$

slijedi da je v ortogonalan i na sve korijene iz $R_1' \cup R_2'$. Sada iz $R = (R_1 \cap R_2) \cup (R_1' \cup R_2')$ zaključujemo da je v ortogonalan na sve korijene iz R. Kako je $V = span\,R$, slijedi $v = 0$. Time je dokazano da je $span\,(R_1 \cap R_2) = V_1 \cap V_2$.

To pokazuje da su $R_1 \cap R_2$ i $R_1' \cup R_2'$ međusobno komplementarni podskupovi od R i da je

$$V = span\,(R_1 \cap R_2) \dotplus span\,(R_1' \cup R_2').$$

Drugim riječima, $R_1 \cap R_2$ i $R_1' \cup R_2'$ su međusobno komplementarni podsistemi od R. Posebno, $R_1 \cap R_2$ je direktni faktor od R. Također je $R_1' \cup R_2'$ direktni faktor od R, a zamjenom uloge R_1 i R_2 sa R_1' i R_2' zaključujemo da je $R_1 \cup R_2$ direktni faktor od R.

Za podskup S od R stavimo

$$V_S = span\,S \qquad \text{i} \qquad R_S = R \cap V_S.$$

Očito je za svaki podskup S od R tako definiran skup R_S podsistem od R koji sadrži S. Štoviše, R_S je najmanji podsistem od R koji sadrži skup S.

Teorem 5.1.16. *Neka je $B = B(C)$ baza sistema korijena R u odnosu na neku Weyalovu komoru C. Neka su $B_1, \dots, B_s$ sve različite komponente povezanosti od B. Tada su $R_{B_1}, \dots, R_{B_s}$ svi ireducibilni direktni faktori od R i vrijedi*

$$R = R_{B_1} \cup \cdots \cup R_{B_s} \quad (\textit{disjunktna unija}) \quad \textit{i} \quad V = V_{B_1} \oplus \cdots \oplus V_{B_s}.$$

Dokaz: Kako je B baza prostora V i skupovi $B_1, \dots, B_s$ su međusobno ortogonalni, vrijedi

$$V = V_{B_1} \oplus \cdots \oplus V_{B_s}.$$

Za svaki korijen $\beta \in R$ njegov je nosač $Supp_C(\beta)$ prema propoziciji 5.1.12. povezan. To znači da je $Supp_C(\beta) \subseteq B_j$ za neki $j \in \{\ , \dots, s\}$. Tada je $\beta \in R_{B_j}$. To pokazuje da je

$$R = R_{B_1} \cup \cdots \cup R_{B_s} \tag{5.2}$$

i ta je unija disjunktna jer su potprostori $V_{B_1}, \dots, V_{B_s}$ međusobno ortogonalni. Dakle, svaki podsistem R_{B_j} je direktni faktor od R. Očito je B_j baza sistema korijena R_{B_j} (u odnosu na Weylovu komoru $C \cap V_{B_j}$). Kako je skup B_j povezan, prema korolaru 5.1.14. svaki je podsistem R_{B_j} ireducibilan.

Neka je sada R' bilo koji ireducibilan direktni faktor od R. Tada je za svaki $j \in \{1, \dots, s\}$ prema propoziciji 5.1.15. $R' \cap R_{B_j}$ direktni faktor od R i vrijedi $span\,(R' \cap R_{B_j}) = (span\,R') \cap (span\,R_{B_j})$. Odatle slijedi da je $R' \cap R_{B_j}$ direktni faktor od R_{B_j}, a kako je sistem korijena R_{B_j} ireducibilan, vrijedi ili $R' \cap R_{B_j} = \emptyset$ ili $R' \cap R_{B_j} = R_{B_j}$. Sada iz (5.2) slijedi da je $R' = R_{B_j}$ za neki $j \in \{1, \dots, s\}$. Time je dokazano da su $R_{B_1}, \dots, R_{B_s}$ svi ireducibilni direktni faktori od R.

Teorem 5.1.16. ima sljedeće dvije neposredne posljedice:

Korolar 5.1.17. *Uz oznake iz teorema 5.1.16. ako su $\alpha \in R_{B_i}$ i $\beta \in R_{B_j}$ za neke $i \neq j$, onda $\alpha + \beta \notin R$.*

Korolar 5.1.18. *Sistem korijena $R \neq \emptyset$ je ireducibilan ako i samo ako je svaka njegova baza povezana.*

Definirali smo standardan podskup sistema korijena R kao podskup $S \subseteq R_+(C)$ za neku Weylovu komoru C takav da je $(\alpha|\beta) \leq 0\ \forall \alpha, \beta \in S$, $\alpha \neq \beta$. Klasificirat ćemo sada sve standardne podskupove sistema korijena tako da svakom pridružimo određen dijagram i zatim klasificiramo sve takve dijagrame. Budući da su baze sistema korijena standardni podskupovi, na taj način ćemo doći do klasifikacije svih ireducibilnih sistema korijena.

Ciklus u sistemu korijena R je standardni podskup $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ od R takav da je $n \geq 3$ i vrijedi $(\alpha_i|\alpha_{i+1}) < 0$ za $i = 1, \ldots, n-1$ i $(\alpha_n|\alpha_1) < 0$. Broj n zove se tada **duljina ciklusa**.

Propozicija 5.1.19. *U sistemu korijena nema ciklusa.*

Dokaz: Neka je $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ ciklus u sistemu korijena R. Stavimo $\alpha = \alpha_3 + \cdots + \alpha_n$. Prema propoziciji 5.1.10. α je korijen. Nadalje, kako je $(\alpha_i|\alpha_j) \leq 0$ za $i \neq j$, iz $(\alpha_2|\alpha_3) < 0$ slijedi $(\alpha_2|\alpha) < 0$, a iz $(\alpha_n|\alpha_1) < 0$ slijedi $(\alpha|\alpha_1) < 0$. To pokazuje da je $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha\}$ ciklus. Prema tome, za nepostojanje ciklusa je dovoljno dokazati da ne postoji ciklus duljine 3.

Pretpostavimo, dakle, da je $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ ciklus u R.

Zadatak 5.1.5. *Dokažite da za korijen $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$ vrijedi $(\alpha|\alpha) \leq 0$.*

Uputa: Izračunajte $2(\alpha|\alpha)$ i koristite propoziciju 5.1.5.

Naravno, to je nemoguće, jer su po propoziciji 5.1.9. vektori $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ linearno nezavisni. Ova kontradikcija dokazuje propoziciju.

Propozicija 5.1.20. *Neka je S standardni podskup od R i $\beta \in S$. Tada je β susjed najviše trima korijenima iz S.*

Dokaz: Pretpostavimo da su $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ međusobno različiti korijeni iz S koji su susjedi korijenu β. Tada je $(\beta|\alpha_j) < 0$ za svaki $j = 1, 2, 3, 4$. Budući da u R nema ciklusa, nužno je $(\alpha_i|\alpha_j) = 0$ za $i \neq j$. Stavimo sada

$$\alpha = 2\beta + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4.$$

Tada je

$$(\alpha|\alpha) = 4(\beta|\beta) + \sum_{i=1}^{4}(\alpha_i|\alpha_i) + \sum_{i=1}^{4}(\beta|\alpha_i) = \sum_{i=1}^{4}[(\beta|\beta) + (\alpha_i|\alpha_i) + 4(\beta|\alpha_i)]$$

a to je prema propoziciji 5.1.5. ≤ 0. No to je nemoguće, jer su vektori $\beta, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ linearno nezavisni, pa je $\alpha \neq 0$.

Neka je S standardni podskup od R i S' neprazan povezan podskup od S. Definiramo tada skup

$$S/S' = (S \setminus S') \cup \{\beta_{S'}\}.$$

Pri tome podsjećamo da je

$$\beta_{S'} = \sum_{\alpha \in S'} \alpha.$$

Uočimo da je S/S' također standardni podskup od R. Naime, ako je C Weylova komora takva da je $S \subseteq R_+(C)$, onda je $\beta_{S'} \in R_+(C)$, dakle, $S/S' \subseteq R_+(C)$. Nadalje, za $\alpha \in S \setminus S'$ i $\alpha' \in S'$ je $(\alpha|\alpha') \leq 0$, dakle, vrijedi $(\alpha|\beta_{S'}) \leq 0$.

Propozicija 5.1.21. *Neka je S' neprazan povezan podskup standardnog podskupa S od R. Korijen $\alpha \in S \setminus S'$ je susjed nekom korijenu $\alpha' \in S'$ ako i samo ako je α susjed korijenu $\beta_{S'}$. Posebno, S je povezan ako i samo ako je S/S' povezan.*

Dokaz: Tvrdnja je očita, jer je

$$(\alpha|\beta_{S'}) = \sum_{\alpha' \in S'} (\alpha|\alpha') \qquad \text{i} \qquad (\alpha|\alpha') \leq 0 \quad \forall \alpha' \in S'.$$

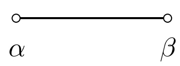
Propozicija 5.1.22. *Neka je S povezan standardni podskup od R. Tada je najviše jedan korijen $\beta \in S$ susjed trima različitim korijenima iz S.*

Dokaz: Pretpostavimo da su β i β' različiti korijeni iz S i da je svaki od njih susjed trima različitim korijenima iz S. Neka je $(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ lanac minimalne duljine koji povezuje $\beta = \alpha_0$ sa $\beta' = \alpha_m$. Stavimo $S' = \{\beta, \alpha_1, \ldots, \alpha_{m-1}, \beta'\}$. Tada je S' povezan podskup od S. Budući da nema ciklusa u S', korijen β nije susjed nijednom korijenu iz S' različitom od α_1. Isto tako, korijen β' nije susjed nijednom korijenu iz S' osim α_{m-1}. Stoga postoje međusobno različiti korijeni $\beta_1, \beta_2 \in S \setminus S'$ koji su susjedi korijenu β i međusobno različiti korijeni $\beta_1', \beta_2' \in S \setminus S'$ koji su susjedi korijenu β'. Ponovo zbog nepostojanja ciklusa sva četiri korijena $\beta_1, \beta_2, \beta_1'$ i β_2' su međusobno različita. No tada su prema propoziciji 5.1.21. svi oni susjedi korijenu $\beta_{S'} \in S/S'$, a to je nemoguće zbog propozicije 5.1.20. Ova kontradikcija pokazuje da ne postoje dva različita korijena u S koji su svaki susjedi trima različitim korijenima iz S, odnosno, propozicija je dokazana.

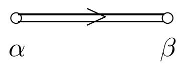
Svakom standardnom podskupu S od R pridružujemo njegov **Dynkinov dijagram** $D(S)$ na sljedeći način: vrhovi od $D(S)$ su korijeni iz S; dva različita vrha α i β iz $D(S)$ su spojena sa $n(\alpha, \beta)n(\beta, \alpha)$ spojnica (dakle, ili među njima nema spojnice ili ima jedna, dvije ili tri spojnice); ako su vrhovi α i β spojeni i ti korijeni nisu iste duljine (dakle, vrhovi su spojeni s dvije ili s tri spojnice) to se označuje znakom strelice od duljeg prema kraćem korijenu. U četiri moguća slučaja iz tablice na str. 90 za standardni dvočlani skup $S = \{\alpha, \beta\}$ sa $\|\alpha\| \geq \|\beta\|$ Dynkinovi dijagrami su sljedeći:

1. : 

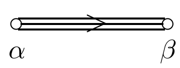
$n(\beta, \alpha) = 0, \quad n(\alpha, \beta) = 0, \quad \vartheta = 90^o;$

2. : 

$n(\beta, \alpha) = -1, \quad n(\alpha, \beta) = -1, \quad \|\alpha\| = \|\beta\|, \quad \vartheta = 120^o;$

3. : 

$n(\beta, \alpha) = -1, \quad n(\alpha, \beta) = -2, \quad \|\alpha\| = \sqrt{2}\|\beta\|, \quad \vartheta = 135^o;$

4. : 

$n(\beta, \alpha) = -1, \quad n(\alpha, \beta) = -3, \quad \|\alpha\| = \sqrt{3}\|\beta\|, \quad \vartheta = 150^o.$

Dynkinov dijagram standardnog skupa korijena S bez označenih strelica je običan graf i on se zove **Coxeterov graf** od S. Označavat ćemo ga sa $Cox(S)$. Kažemo da je Dynkinov dijagram $D(S)$ povezan, ako je graf $Cox(S)$ povezan, odnosno, ako je standardan skup korijena S povezan. **Komponente povezanosti** od $D(S)$ su $D(S_1), \ldots, D(S_n)$, gdje su $S_1, \ldots, S_n$ komponente povezanosti od S.

Ako su S i T standardni skupovi korijena, **izomorfizam Dynkinovih dijagrama** sa $D(S)$ na $D(T)$ je bijekcija $f : S \to T$ koja čuva broj spojnica između vrhova (tj. broj spojnica između α i β iz S jednak je broju spojnica između $f(\alpha)$ i $f(\beta)$) i koja čuva orijentaciju (tj. ako su $\alpha, \beta \in S$

spojeni s dvije ili tri spojnice u $D(S)$ onda je $\|\alpha\| > \|\beta\|$ ako i samo ako je $\|f(\alpha)\| > \|f(\beta)\|$). Odmah se vidi da je bijekcija $f : S \to T$ izomorfizam sa $D(S)$ na $D(T)$ ako i samo ako je $n(\alpha,\beta) = n(f(\alpha), f(\beta))$ $\forall \alpha,\beta \in S$.

Propozicija 5.1.23. *Neka je S' povezan podskup standardnog skupa korijena S takav da $Cox(S')$ nema dvostrukih ni trostrukih spojnica. Tada se $D(S/S')$ dobiva iz $D(S)$ tako da se S' stegne u jednu točku $\beta_{S'}$.*

Dokaz: Prema propoziciji 5.1.21. korijen $\alpha \in S \setminus S'$ je susjed korijenu $\beta_{S'}$ ako i samo ako je α susjed nekom korijenu α' iz S'. Budući da nema ciklusa, takav $\alpha' \in S'$ je jedinstven. Svojstvo od S' da $D(S')$ nema dvostrukih ni trostrukih spojnica znači da su svi korijeni iz S' međusobno iste duljine. Prema propoziciji 5.1.10. tada i korijen $\beta_{S'}$ ima tu istu duljinu. Kako je $(\alpha|\beta_{S'}) = (\alpha|\alpha')$ (jer $(\alpha|\alpha'') = 0$ $\forall \alpha'' \in S' \setminus \{\alpha'\}$) nalazimo da je $n(\alpha,\beta_{S'}) = n(\alpha,\alpha')$ i $n(\beta_{S'},\alpha) = n(\alpha',\alpha)$. Dakle, orijentacija i broj spojnica između α i α' u $D(S)$ jednak je orijentaciji i broju spojnica između α i $\beta_{S'}$ u $D(S/S')$. Time je propozicija dokazana.

Sada ćemo pojačati propoziciju 5.1.20.

Propozicija 5.1.24. *Neka je S standardni skup korijena. Za svaki $\beta \in S$ ukupan broj spojnica između β i njegovih susjeda u S je najviše tri.*

Dokaz: Neka su $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ svi međusobno različiti susjedi od β u S (narvano, prema propoziciji 5.1.20. je $n \le 3$). Budući da u S nema ciklusa, vrijedi $(\alpha_i|\alpha_j) = 0$ za $i \ne j$. Odatle slijedi da je $\sigma_{\alpha_i}\alpha_j = \alpha_j$ za $i \ne j$ i da refleksije $\sigma_{\alpha_1},\ldots,\sigma_{\alpha_n}$ međusobno komutiraju. Neka je $\sigma \in W(R)$ njihov produkt, $\sigma = \sigma_{\alpha_1}\cdots\sigma_{\alpha_n}$, i stavimo $\gamma = \sigma\beta$. Tada je

$$\gamma = \beta - \sum_{i=1}^{n} n(\beta,\alpha_i)\alpha_i,$$

pa slijedi

$$n(\gamma,\beta) = 2\frac{(\gamma|\beta)}{(\beta|\beta)} = 2 - \sum_{i=1}^{n} n(\beta,\alpha_i)2\frac{(\alpha_i|\beta)}{(\beta|\beta)} = 2 - \sum_{i=1}^{n} n(\beta,\alpha_i)n(\alpha_i,\beta) = 2 - \sum_{i=1}^{n} m_i,$$

gdje je $m_i = n(\beta,\alpha_i)(\alpha_i,\beta)$ broj spojnica vrhova α_i i β u $Cox(S)$. Dakle,

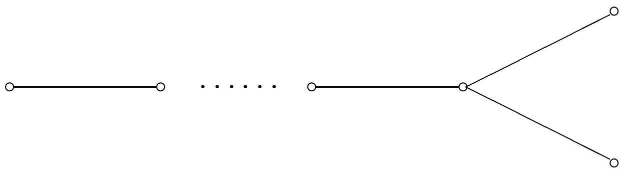
$$\sum_{i=1}^{n} m_i = 2 - n(\gamma,\beta) \le 2 + |n(\gamma,\beta)|.$$

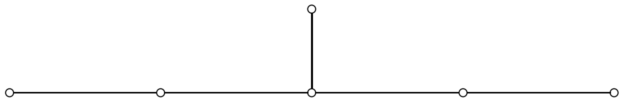
Međutim, operator $\sigma \in W(R)$ je ortogonalan pa korijeni β i $\gamma = \sigma\beta$ imaju istu duljinu. Sada iz tablice na str. 90 slijedi da je $|n(\gamma,\beta)| \le 1$, dakle,

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \le 3.$$

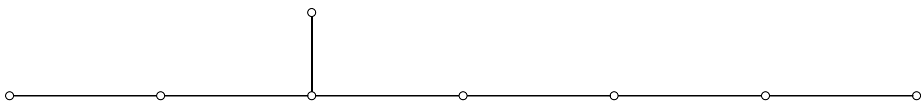
Teorem 5.1.25. *Neka je S povezan standardan skup korijena takav da u njegovom Dynkinovom dijagramu $D(S)$ nema ni dvostrukih ni trostrukih spojnica (tj. svi korijeni u S imaju istu duljinu). Tada je $D(S)$ izomorfan jednom od sljedećih dijagrama:*

A_ℓ : ($\ell \geq 1$ točaka)

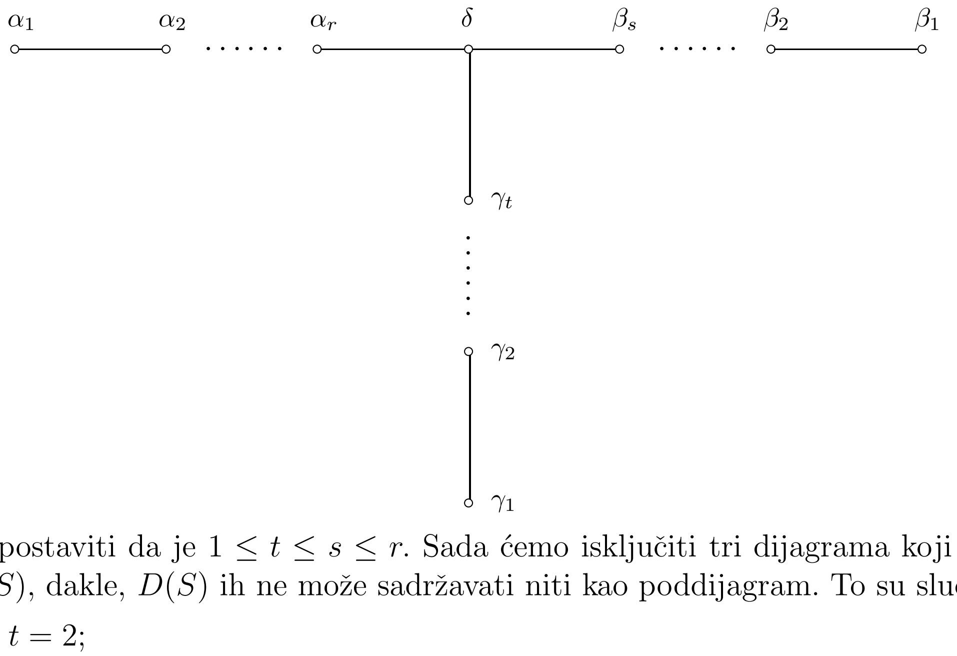
D_ℓ :  ($\ell \geq 4$ točaka)

E_6 : 

E_7 : 

E_8 : 

Dokaz: Označimo sa ℓ broj elemenata skupa S, tj. broj vrhova u Dynkinovom dijagramu $D(S)$. Možemo pretpostaviti da su duljine svih korijena u S jednake 1. Pretpostavimo da $D(S)$ nije izomorfan dijagarmu A_ℓ. Tada prema propozicijama 5.1.20. i 5.1.22. postoji jedinstven $\delta \in S$ koji ima tri susjeda u S; broj susjeda svih ostalih vrhova je jedan ili dva. To znači da je dijagram $D(S)$ sljedećeg oblika:



Možemo pretpostaviti da je $1 \leq t \leq s \leq r$. Sada ćemo isključiti tri dijagrama koji ne mogu biti izomorfni $D(S)$, dakle, $D(S)$ ih ne može sadržavati niti kao poddijagram. To su slučajevi

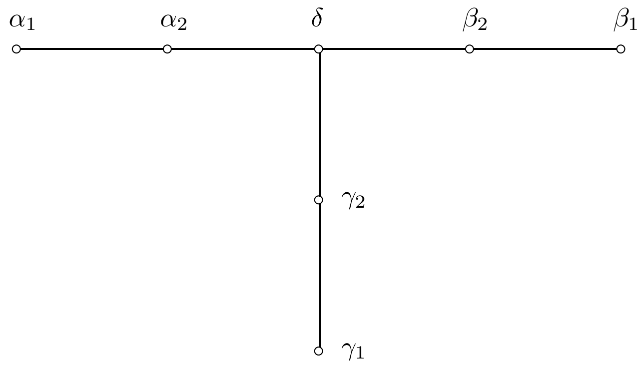
(1) $r = s = t = 2$;

(2) $r = s = 3$, $t = 1$;

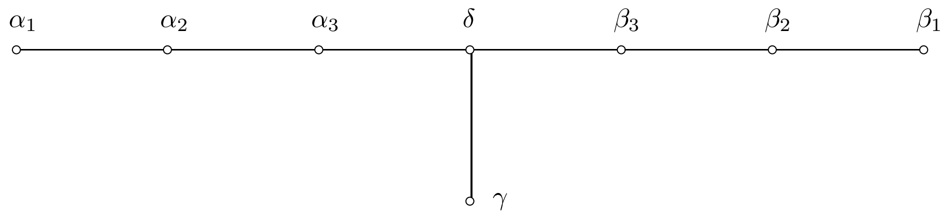
(3) $r = 5$, $s = 2$, $t = 1$.

Dakle, radi se o dijagramima:

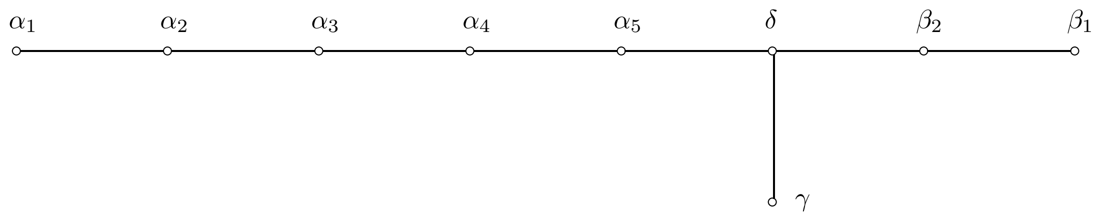
(1)



(2)



(3)



U svakom od ovih slučajeva definiramo vektor $v \neq 0$ ovako:

(1) $v = \alpha_1 + 2\alpha_2 + \beta_1 + 2\beta_2 + \gamma_1 + 2\gamma_2 + 3\delta$;

(2) $v = \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + \beta_1 + 2\beta_2 + 3\beta_3 + 2\gamma + 4\delta$;

(3) $v = \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + 4\alpha_4 + 5\alpha_5 + 2\beta_1 + 4\beta_2 + 3\gamma + 6\delta$.

Uzmemo li u obzir da su svi korijeni duljine 1, a da su svi skalarni produkti susjednih korijena jednaki $-\frac{1}{2}$, direktnim računom provjeravamo da u svakom od ova tri slučaja vrijedi $(v|v) = 0$. To je, naravno, nemoguće i ova kontradikcija pokazuje da su stvarno navedena tri dijagrama nemoguća.

Sada zaključujemo da je nužno $t = 1$; doista, kad bi bilo $t \geq 2$, dijagram $D(S)$ bi imao poddijagram tipa (1), a to je nemoguće. Nadalje, nužno je $s \leq 2$; doista, kad bi bilo $s \geq 3$, dijagram $D(S)$ bi imao poddijagram tipa (2). Napokon, ako je $s = 2$ onda je nužno $r \leq 4$; doista, kad bi bilo $s = 2$ i $r \geq 5$, dijagram $D(S)$ bi imao poddijagram tipa (3), što je također nemoguće. To pokazuje da su (osim A_ℓ, $\ell \geq 1$) preostale jedino sljedeće mogućnosti:

(a) $t = s = 1$, $r \geq 1$; tada je $\ell \geq 4$ i dijagram je tipa D_ℓ.

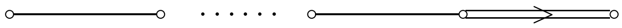
(b) $t = 1$, $s = r = 2$; tada je $\ell = 6$ i dijagram je tipa E_6.

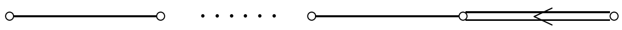
(c) $t = 1$, $s = 2$, $r = 3$; tada je $\ell = 7$ i dijagram je tipa E_7.

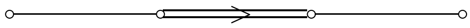
(d) $t = 1$, $s = 2$, $r = 4$; tada je $\ell = 8$ i dijagram je tipa E_8.

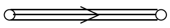
Time je teorem 5.1.25. dokazan.

Teorem 5.1.26. *Neka je S povezan standardni skup korijena takav da se u njegovom Dynkinovom dijagramu $D(S)$ pojavljuje dvostruka ili trostruka spojnica. Tada je $D(S)$ izomorfan jednom od sljedećih dijagrama:*

B_ℓ :  ($\ell \geq 2$ točaka)

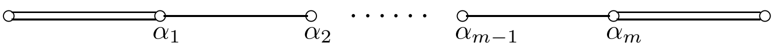
C_ℓ :  ($\ell \geq 3$ točaka)

F_4 : 

G_2 : 

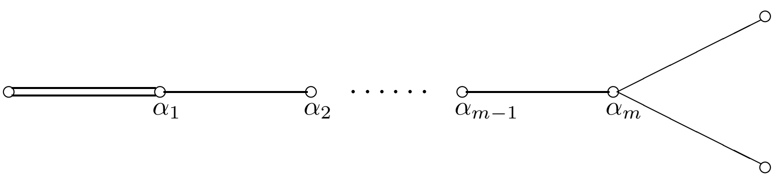
Dokaz: Ukoliko $D(S)$ sadrži trostruku spojnicu, onda prema propoziciji 5.1.24. nijedan od dvaju vrhova koji su spojeni trostrukom spojnicom nema drugih susjeda. Kako je S povezan, to znači da osim ta dva uopće nema drugih vrhova u $D(S)$. Dakle, $D(S)$ je izomorfan dijagramu koji je u iskazu teorema označen sa G_2.

Pretpostavimo sada da $D(S)$ nema trostrukih spojnica, ali ima barem jednu dvostruku spojnicu. U daljnjem privremeno zanemarimo strelice, odnosno promatramo Coxeterove grafove. Uočimo da $Cox(S)$ ne može sadržavati podgraf sljedećih dvaju oblika:



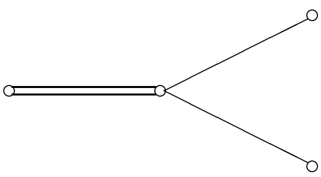
$(m \geq 1)$

i

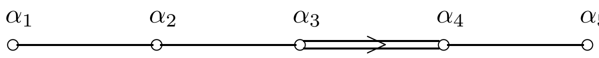


$(m \geq 1)$

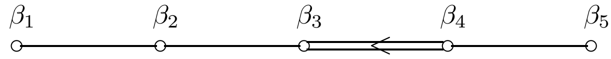
Doista, pretpostavimo da $Cox(S)$ sadrži jedan od ta dva podgrafa. Stavimo $S' = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}$. Tada $Cox(S/S')$ sadrži kao podgraf

 ili 

a i jedno i drugo je nemoguće zbog propozicije 5.1.24. Prema tome, zaključujemo da je $D(S)$ izomorfan dijagramu tipa B_ℓ, C_ℓ ili F_4 ili da sadrži poddijagram jednog od sljedećih dvaju oblika:



ili



Isključit ćemo sada te dvije mogućnosti i to ponovo tako da konstruiramo vektore v i w različite od 0 takve da je $(v|v) = 0$ i $(w|w) = 0$. To su vektori

$$v = \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + 4\alpha_4 + 2\alpha_5 \qquad \text{i} \qquad w = \beta_1 + 2\beta_2 + \beta_3 + 2\beta_4 + \beta_5.$$

Možemo uzeti da su u oba slučaja kraći vektori duljine 1. Dakle,

$$(\alpha_1|\alpha_1) = (\alpha_2|\alpha_2) = (\alpha_3|\alpha_3) = 2, \quad (\alpha_4|\alpha_4) = (\alpha_5|\alpha_5) = 1,$$

$$(\beta_1|\beta_1) = (\beta_2|\beta_2) = (\beta_3|\beta_3) = 1, \quad (\beta_4|\beta_4) = (\beta_5|\beta_5) = 2.$$

Kad znamo duljine i broj spojnica susjednih vektora γ i δ, iz tablice na str. 90 možemo izračunati njihov skalarni produkt

$$(\gamma|\delta) = \|\gamma\| \cdot \|\delta\| \cdot \cos\vartheta.$$

Ako su oba korijena duljine 1, spojeni su s jednom spojnicom i tada je $(\gamma|\delta) = -\frac{1}{2}$. Ako su oba korijena duljine $\sqrt{2}$, također su spojeni s jednom spojnicom, no tada je $(\gamma|\delta) = -1$. Napokon, ako je jedan korijen duljine 1, a drugi duljine $\sqrt{2}$, tada su spojeni s dvije spojnice pa dobivamo $(\gamma|\delta) = -1$. Dakle,

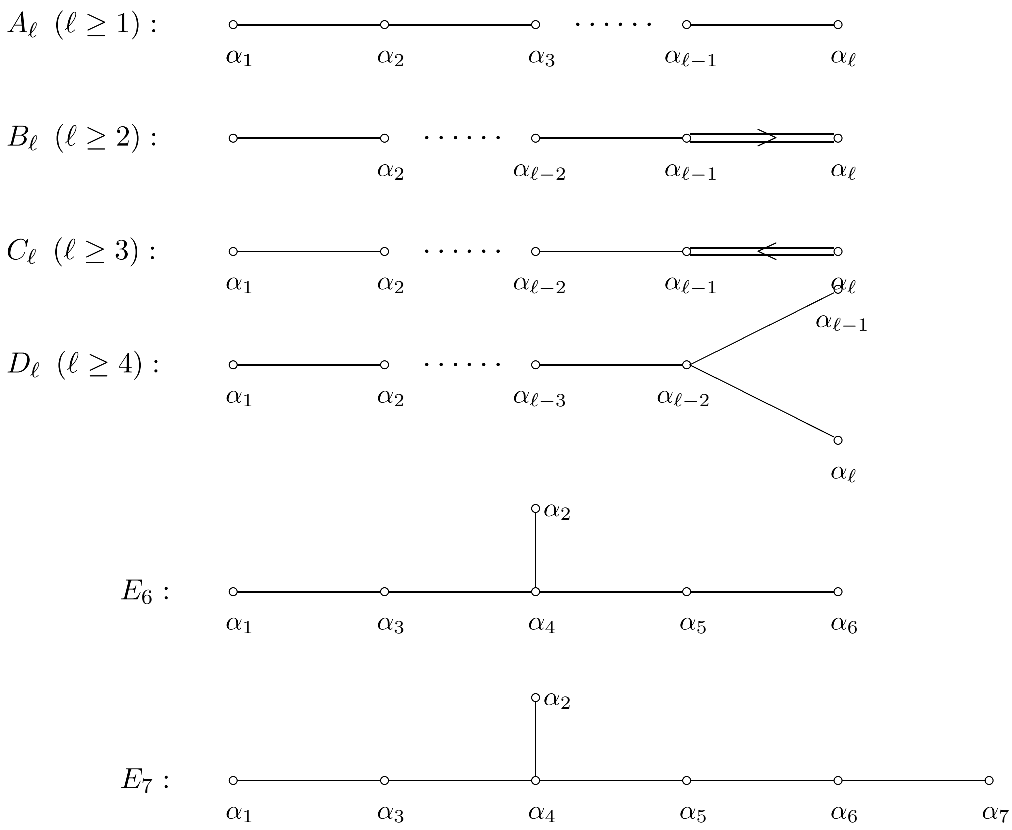
$$(\alpha_1|\alpha_2) = -1, \quad (\alpha_2|\alpha_3) = -1, \quad (\alpha_3|\alpha_4) = -1, \quad (\alpha_4|\alpha_5) = -\frac{1}{2},$$

$$(\beta_1|\beta_2) = -\frac{1}{2}, \quad (\beta_2|\beta_3) = -\frac{1}{2}, \quad (\beta_3|\beta_4) = -1, \quad (\beta_4|\beta_5) = -1.$$

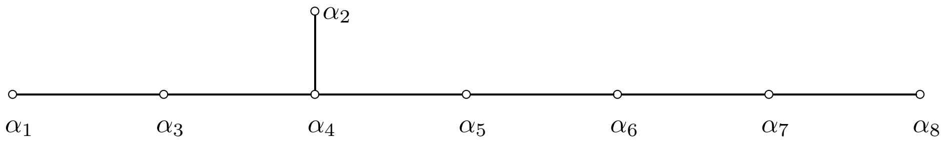
Odatle direktnim računom nalazimo $(v|v) = (w|w) = 0$. Time je teorem 5.1.26. dokazan.

Teoremi 5.1.25. i 5.1.26. daju sve moguće klase izomorfizama Dynkinovih dijagrama povezanih standardnih skupova korijena. Baza ireducibilnog sistema korijena je standardan povezan skup korijena, pa teoremi 5.1.25. i 5.1.26. određuju sve moguće klase izomorfizama Dynkinovih dijagrama ireducibilnih sistema korijena. Ireducibilan sistem korijena R u realnom unitarnom prostoru V smatratćemo izomorfnim sa istim sistemom korijena ali s drugim skalarnim produktom u V. Nije teško dokazati da su svi skalarni produkti u V u odnosu na koje je R sistem korijena u V međusobno proporcionalni. Odatle slijedi da su brojevi $n(\alpha,\beta)$ neovisni o tome koji smo skalarni produkt u V izabrali. Uz takvo proširenje pojma izomorfnosti ireducibilnih sistema korijena iz teorema 5.1.7. slijedi da su ireducibilni sistemi korijena R i R' izomorfni ako i samo su njihovi Dynkinovi dijagrami izomorfni. Na taj način dobivamo klasifikaciju mogućih ireducibilnih sistema korijena:

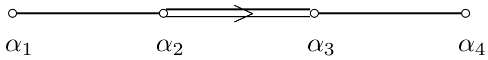
Teorem 5.1.27. *Ako je R ireducibilan sistem korijena u $\ell-$dimenzionalnom realnom unitarnom prostoru, onda je njegov Dynkinov dijagram jedan od sljedećih:*



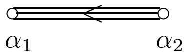
E_8 :



F_4 :



G_2 :



Svaki od Dynkinovih dijagrama iz teorema 5.1.27. stvarno pripada nekom ireducibilnom reduciranom sistemu korijena. To ćemo ustanoviti eksplicitnim konstrukcijama.

U daljnjem je $\mathbb{R}^n$ realan unitaran prostor svih uređenih $n-$torki realnih brojeva sa standardnim skalarnim produktom

$$(x|y) = \xi_1\eta_1 + \xi_2\eta_2 + \cdots + \xi_n\eta_n, \qquad x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n), y = (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Nadalje, $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ označava standardnu ortonormiranu bazu u $\mathbb{R}^n$: e_j ima $j-$tu koordinatu 1, a ostale 0. Aditivna podgrupa od $\mathbb{R}^n$ generirana s tom bazom je $\mathbb{Z}^n$.

Sada ćemo redom za svaki Dynkinov dijagram sa ℓ vrhova:

(1) definirati realan unitaran prostor V dimenzije ℓ; to će uvijek biti ili $\mathbb{R}^\ell$ ili određeni potprostor od $\mathbb{R}^n$ za neki $n > \ell$;

(2) zadati konačan skup $R \subseteq V$, za koji se direktno može provjeriti da je sistem korijena u realnom unitarnom prostoru V;

(3) zadati jednu bazu $B = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell\}$ sistema korijena R;

(4) zapisati pripadni skup pozitivnih vektora R_+;

(5) napisati pripadnu tzv. Cartanovu matricu $[n(\alpha_i, \alpha_j)]_{i,j=1}^{\ell}$.

Također, u slučajevima A_ℓ, B_ℓ, C_ℓ i D_ℓ potpuno ćemo opisati Weylovu grupu $W = W(R)$. U svim slučajevima navest ćemo broj korijena $|R|$ i red Weylove grupe $|W|$.

Tip A_ℓ $(\ell \geq 1)$**:** V je ortogonalni komplement vektora $e_1 + \cdots + e_{\ell+1}$ u prostoru $\mathbb{R}^{\ell+1}$:

$$V = \{x \in \mathbb{R}^{\ell+1};\ (x|e_1 + \cdots + e_{\ell+1}) = 0\} = \{x = (\xi_1, \ldots, \xi_{\lambda+1}) \in \mathbb{R}^{\ell+1};\ \xi_1 + \cdots + \xi_{\ell+1} = 0\}.$$

Nadalje,

$$R = \{\alpha \in \mathbb{Z}^{\ell+1} \cap V;\ (\alpha|\alpha) = 2\} = \{\alpha_{ij} = e_i - e_j;\ i, j = 1, \ldots, \ell+1,\ i \neq j\};$$

$$B = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell\}, \qquad \alpha_i = \alpha_{i,i+1} = e_i - e_{i+1}; \qquad R_+ = \{\alpha_{ij};\ 1 \leq i < j \leq \ell+1\}.$$

Prikazi pozitivnih korijena pomoću korijena iz baze B su:

$$\alpha_{ij} = \alpha_i + \cdots + \alpha_{j-1}, \qquad 1 \leq i < j \leq \ell+1.$$

Cartanova matrica je:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Refleksija σ_{α_i} zamjenjuje indekse i i $i+1$ a ostale ostavlja na miru:

$$\sigma_{\alpha_i}(\xi_1,\ldots,\xi_i,\xi_{i+1},\ldots,\xi_{\ell+1}) = (\xi_1,\ldots,\xi_{i+1},\xi_i,\ldots,\xi_{\ell+1}).$$

Prema tome, σ_{α_i} odgovara transpoziciji $(i,i{+}1)$ u grupi $\mathcal{S}_{\ell+1}$ svih permutacija skupa $\{1,\ldots,\ell{+}1\}$. Budući da te transpozicije generiraju čitavu grupu $\mathcal{S}_{\ell+1}$, zaključujemo da je Weylova grupa izomorfna grupi $\mathcal{S}_{\ell+1}$. Napokon, $|R| = \ell(\ell+1)$ i $|W| = (\ell+1)!$.

Tip B_ℓ $(\ell \geq 2)$**:** Sada stavljamo

$$V = \mathbb{R}^\ell, \qquad R = \{\alpha \in \mathbb{Z}^\ell;\ (\alpha|\alpha) \in \{1,2\}\} = \{\pm e_i;\ 1 \leq i \leq \ell\} \cup \{\pm e_i \pm e_j;\ i,j = 1,\ldots,\ell,\ i \neq j\};$$

$$B = \{\alpha_1,\ldots,\alpha_\ell\}, \qquad \alpha_i = e_i - e_{i+1} \quad \text{za} \quad 1 \leq i \leq \ell-1, \qquad \alpha_\ell = e_\ell;$$

$$R_+ = \{e_i;\ i = 1,\ldots,\ell\} \cup \{e_i \pm e_j;\ 1 \leq i < j \leq \ell\}.$$

Prikazi pozitivnih korijena pomoću korijena iz baze B su:

$$e_i = \alpha_i + \cdots + \alpha_\ell \quad \text{za} \quad 1 \leq i \leq \ell;$$

$$e_i - e_j = \alpha_i + \cdots + \alpha_{j-1} \quad \text{za} \quad 1 \leq i < j \leq \ell;$$

$$e_i + e_j = \alpha_i + \ldots + \alpha_{j-1} + 2\alpha_j + \cdots 2\alpha_\ell \quad \text{za} \quad 1 \leq i < j \leq \ell.$$

Cartanova matrica je:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Weylova grupa W djeluje na bazu $(e_1,\ldots,e_\ell)$ od V permutacijama uz množenje nekih članova sa -1. Dakle, W je izomorfna semidirektnom produktu grupe $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^\ell$ i grupe permutacija $\mathcal{S}_\ell$, pri čemu je $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^\ell$ normalna podgrupa, a na njoj djeluje grupa permutacija $\mathcal{S}_\ell$. Napokon, $|R| = 2\ell^2$ i $|W| = 2^\ell \ell!$.

Tip C_ℓ $(\ell \geq 3)$**:** Sada uzimamo:

$$V = \mathbb{R}^\ell, \qquad R = \{\pm 2e_i;\ 1 \leq i \leq \ell\} \cup \{\pm e_i \pm e_j;\ i,j = 1\ldots,\ell,\ i \neq j\},$$

$$B = \{\alpha_1,\ldots,\alpha_\ell\}, \qquad \alpha_i = e_i - e_{i+1} \quad \text{za} \quad 1 \leq i \leq \ell-1, \qquad \alpha_\ell = 2e_\ell;$$

$$R_+ = \{2e_i;\ 1 \leq i \leq \ell\} \cup \{e_i \pm e_j;\ 1 \leq i < j \leq \ell\}.$$

Prikazi pozitivnih korijena pomoću korijena iz baze B su:

$$2e_i = 2\alpha_i + \cdots + 2\alpha_{\ell-1} + \alpha_\ell;$$

$$e_i - e_j = \alpha_i + \cdots + \alpha_{j-1} \quad \text{za} \quad 1 \leq i < j \leq \ell;$$

$$e_i + e_j = \alpha_i + \cdots + \alpha_{j-1} + 2\alpha_j + \cdots + 2\alpha_{\ell-1} + \alpha_\ell \quad \text{za} \quad 1 \leq i < j \leq \ell.$$

Cartanova matrica je transponirana Cartanovoj matrici sistema tipa B_ℓ :

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Weylova grupa za ovaj tip podudara se s Weylovom grupom za tip B_ℓ, i isti su brojevi $|R| = 2\ell^2$ i $|W| = 2^\ell \ell!$.

Tip D_ℓ $(\ell \geq 4)$**:** Sada je

$$V = \mathbb{R}^\ell, \qquad R = \{\alpha \in \mathbb{Z}^\ell;\ (\alpha|\alpha) = 2\} = \{\pm e_i \pm e_j;\ i, j = 1, \ldots, \ell,\ i \neq j\}.$$

Jedna baza $B = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell\}$ od R je dana sa

$$\alpha_i = e_i - e_{i+1} \quad \text{za} \quad 1 \leq i \leq \ell - 1, \qquad \alpha_\ell = e_{\ell-1} + e_\ell.$$

Tada je

$$R_+ = \{e_i \pm e_j;\ 1 \leq i < j \leq \ell\}.$$

Prikazi pozitivnih korijena pomoću korijena iz baze B su:

$$e_i - e_j = \alpha_i + \cdots + \alpha_{j-1} \quad \text{za} \quad 1 \leq i < j \leq \ell;$$

$$e_i + e_j = \alpha_i + \cdots + \alpha_{j-1} + 2\alpha_j + \cdots + 2\alpha_{\ell-2} + \alpha_{\ell-1} + \alpha_\ell, \quad \text{za} \quad 1 \leq i > j \leq \ell - 2;$$

$$e_i + e_{\ell-1} = \alpha_i + \cdots + \alpha_\ell \quad \text{za} \quad 1 \leq i \leq \ell - 2;$$

$$e_i + e_\ell = \alpha_i + \cdots + \alpha_{\ell-2} + \alpha_\ell \quad \text{za} \quad 1 \leq i \leq \ell - 2; \qquad e_{\ell-1} + e_\ell = \alpha_\ell.$$

Cartanova matrica je

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Weylova grupa je grupa permutacija vektora $e_1, \ldots, e_\ell$ uz paran broj promjena predznaka. Dakle, W je izomorfna semidirektnom produktu $(\mathbb{Z}/2Z)^{\ell-1}$ i $\mathcal{S}_\ell$. Napokon, $|R| = 2\ell(\ell-1)$ i $|W| = 2^{\ell-1}\ell!$.

Tip E_ℓ $(\ell = 6, 7, 8)$: Napisat ćemo samo V, R i $B = \{\alpha_1, \dots, \alpha_8\}$ za E_8. Sistemi korijena E_6 i E_7 dobivaju se tako da se uzmu potprostori V' i V'' od V razapeti s prvih 6, odnosno, s prvih 7 vektora baze B; traženi sistemi korijena su tada $R \cap V'$ i $R \cap V''$.

Za E_8 uzimamo $V = \mathbb{R}^8$. Zatim stavimo

$$I = \mathbb{Z}^8 + \mathbb{Z}\frac{1}{2}e, \qquad \text{gdje je} \quad e = e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + e_5 + e_6 + e_7 + e_8,$$

i neka je J aditivna podgrupa od I dana sa

$$J = \left\{ \sum_{i=1}^{8} c_i e_i + \frac{c}{2} e;\ c_i, c \in \mathbb{Z},\ c + \sum_{i=1}^{8} c_i \in 2\mathbb{Z} \right\}.$$

Sada je

$$R = \{\alpha \in J;\ (\alpha|\alpha) = 2\} =$$

$$= \{\pm e_i \pm e_j;\ i, j \in \{1, \dots, 8\},\ i \neq j\} \cup \left\{ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{8} (-1)^{k_i} e_i;\ k_i \in \{0, 1\},\ \sum_{i=1}^{8} k_i \in 2\mathbb{Z} \right\}.$$

Jedna baza $B = \{\alpha_1, \dots, \alpha_8\}$ sistema korijena R dana je sa

$$\alpha_1 = e_1 + e_8 - \frac{1}{2}e = \frac{1}{2}(e_1 - e_2 - e_3 - e_4 - e_5 - e_6 - e_7 + e_8), \quad \alpha_2 = e_1 + e_2, \quad \alpha_3 = e_2 - e_1,$$

$$\alpha_4 = e_3 - e_2, \quad \alpha_5 = e_4 - e_3, \quad \alpha_6 = e_5 - e_4, \quad \alpha_7 = e_6 - e_5, \quad \alpha_8 = e_7 - e_6.$$

Cartanove matrice za E_6, E_7 i E_8, njihovi brojevi korijena $|R|$ i redovi $|W|$ pripadnih Weylovih grupa su:

$$E_6 : \qquad \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix},$$

$$|R| = 72, \qquad |W| = 2^7 \cdot 3^4 \cdot 5 = 544.320.$$

$$E_7 : \qquad \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix},$$

$$|R| = 126, \qquad |W| = 2^{10} \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7 = 30.481.920.$$

$$E_8: \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix},$$

$$|R| = 240, \qquad |W| = 2^{14} \cdot 3^5 \cdot 5^2 \cdot 7 = 7.315.660.800.$$

Tip F_4: Sada je $V = \mathbb{R}^4$. Nadalje, promatramo diskretnu aditivnu podgrupu $I = \mathbb{Z}^4 + \frac{1}{2}\mathbb{Z}e$ od $\mathbb{R}^4$, gdje je $e = e_1 + e_2 + e_3 + e_4$, i stavimo

$$R = \{\alpha \in I;\ (\alpha|\alpha) \in \{1, 2\}\}.$$

Tada je

$$R = \{\pm e_i;\ i = 1, 2, 3, 4\} \cup \{\pm(e_i - e_j);\ 1 \leq i < j \leq 4\} \cup \left\{\frac{1}{2}(\pm e_1 \pm e_2 \pm e_3 \pm e_4)\right\}.$$

Jedna je baza $B = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$, gdje je

$$\alpha_1 = e_2 - e_3, \qquad \alpha_2 = e_3 - e_4, \qquad \alpha_3 = e_4, \qquad \alpha_4 = \frac{1}{2}(e_1 - e_2 - e_3 - e_4).$$

Pozitivni korijeni u odnosu na tu bazu su:

$$R_+ = \{e_i;\ i = 1, 2, 3, 4\} \cup \{e_i - e_j;\ 1 \leq i < j \leq 4\} \cup \left\{\frac{1}{2}(e_1 \pm e_2 \pm e_3 \pm e_4)\right\}.$$

Cartanova matrica i brojevi $|R|$ i $|W|$ su:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad |R| = 48, \qquad |W| = 2^7 \cdot 3^2 = 1152.$$

Tip G_2: Za V uzimamo ortogonalni komplement od $e = e_1 + e_2 + e_3$ u $\mathbb{R}^3$, tj.

$$V = \{\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in \mathbb{R}^3;\ \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 0\}.$$

Sistem korijena je $R = \{\alpha \in \mathbb{Z}^3 \cap V;\ (\alpha|\alpha) \in \{2, 6\}\}$, tj.

$$R = \{\pm(e_1 - e_2), \pm(e_2 - e_3), \pm(e_1 - e_3), \pm(2e_1 - e_2 - e_3), \pm(2e_2 - e_1 - e_3), \pm(2e_3 - e_1 - e_2)\}.$$

Jedna je baza $B = \{\alpha_1, \alpha_2\}$, gdje su $\alpha_1 = e_1 - e_2$ i $\alpha_2 = -2e_1 + e_2 + e_3$. Tada je

$$R_+ = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2, 2\alpha_1 + \alpha_2, 3\alpha_1 + \alpha_2, 3\alpha_1 + 2\alpha_2\} =$$

$$= \{e_1 - e_2, -e_1 + e_3, -e_2 + e_3, -2e_1 + e_2 + e_3, e_1 - 2e_2 + e_3, -e_1 - e_2 + 2e_3\}.$$

Cartanova matrica i brojevi $|R|$ i $|W|$ su:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}, \qquad |R| = |W| = 12.$$

5.2 Klasifikacija kompleksnih prostih Liejevih algebri

Za svaki ireducibilan sistem korijena R postoji kompleksna prosta Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ takva da je za svaku njenu Cartanovu podalgebru $\mathfrak{h}$ pripadni sistem korijena $R(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ izomorfan sistemu korijena R. Štoviše, dvije proste kompleksne Liejeve algebre su izomorfne ako i samo ako su njihovi sistemi korijena izomorfni. To je posljedica sljedećeg općeg teorema koji navodimo bez dokaza:

Teorem 5.2.1. (**Serre–ov teorem egzistencije**) *Neka je R sistem korijena u realnom unitarnom prostoru V. Tada postoji poluprosta kompleksna Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ i njena Cartanova podalgebra $\mathfrak{h}$ takve da je sistem korijena R izomorfan sistemu korijena $R(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ u realnom prostoru $\mathfrak{h}(R) = span_{\mathbb{R}}\, R(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$. Ako izaberemo bazu $B = \{\alpha_1,\dots,\alpha_\ell\}$ sistema korijena R i stavimo $c_{ij} = n(\alpha_i,\alpha_j)$, ta se Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ može realizirati kao Liejeva algebra generirana sa 3ℓ generatora $\{h_i, x_i, y_i;\ 1 \le i \le \ell\}$ i s relacijama:*

$(S1)$ $[h_i,h_j] = 0$ *za sve* $i,j = 1,\dots,\ell$.

$(S2)$ $[x_i,y_i] = h_i$, $[x_i,y_j] = 0$ *za* $i,j = 1,\dots,\ell$, $i \neq j$.

$(S3)$ $[h_i,x_j] = c_{ji}x_j$, $[h_i,y_j] = -c_{ji}y_j$ *za sve* $i,j = 1,\dots,\ell$.

(S_{ij}^+) $(ad\, x_i)^{-c_{ji}+1}(x_j) = 0$ *za* $i,j = 1,\dots,\ell$.

(S_{ij}^-) $(ad\, y_i)^{-c_{ji}+1}(y_j) = 0$ *za* $i,j = 1,\dots,\ell$.

Drugim riječima, ako je $\mathfrak{l}$ bilo koja Liejeva algebra i ako je $f : \{h_i, x_i, y_i;\ 1 \le i \le \ell\} \to \mathfrak{l}$ preslikavanje sa svojstvom da slike $H_i = f(h_i)$, $X_i = f(x_i)$, $Y_i = f(y_i)$ zadovoljavaju gornje relacije u Liejevoj algebri $\mathfrak{l}$, odnosno, da vrijedi

1. $[H_i,H_j] = 0$ *za sve* $i,j = 1,\dots,\ell$,
2. $[X_i,Y_i] = h_i$, $[X_i,Y_j] = 0$ *za* $i,j = 1,\dots,\ell$, $i \neq j$,
3. $[H_i,X_j] = c_{ji}X_j$, $[H_i,Y_j] = -c_{ji}Y_j$ *za sve* $i,j = 1,\dots,\ell$,
4. $(ad_{\mathfrak{l}}\, X_i)^{-c_{ji}+1}(X_j) = 0$ *za* $i,j = 1,\dots,\ell$,
5. $(ad_{\mathfrak{l}}\, Y_i)^{-c_{ji}+1}(Y_j) = 0$ *za* $i,j = 1,\dots,\ell$,

onda se f jedinstveno proširuje do homomorfizma $F : \mathfrak{g} \to \mathfrak{l}$.

Prema tome, klasifikacija ireducibilnih sistema korijena iz prethodnog odjeljka daje klasifikaciju prostih kompleksnih Liejevih algebri: klase izomorfnosti su pridružene Dynkinovim dijagramima A_ℓ, $\ell \ge 1$, B_ℓ, $\ell \ge 2$, C_ℓ, $\ell \ge 3$, D_ℓ, $\ell \ge 4$, E_ℓ, $\ell = 6,7,8$, F_4 i G_2. U ovom odjeljku vidjet ćemo da primjeri matričnih Liejevih algebri iz odjeljka 1.1. numerirani sa **1.**, **2.**, **3.** i **4.** predstavljaju upravo proste Liejeve algebre sa četiri beskonačne serije Dynkinovih dijagrama. Te se Liejeve algebre zovu **klasične kompleksne proste Liejeve algebre**. Preostalih pet vrsta s Dynkinovim dijagramima E_6, E_7, E_8, F_4 i G_2 zovu se **izuzetne kompleksne proste Liejeve algebre**.

Proučimo sada pobliže svaki od primjera iz odjeljka 1.1.

1. Promatramo Liejevu algebru matrica $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(\ell+1,\mathbb{C}) = \{x \in \mathfrak{gl}(\ell+1,\mathbb{C});\ Tr\, x = 0\}$ za $\ell \in \mathbb{N}$, tzv. **specijalnu linearnu Liejevu algebru**. Neka je $\mathfrak{h}$ skup svih dijagonalnih matrica u $\mathfrak{g}$. Tada je $\mathfrak{h}$ Cartanova podalgebra od $\mathfrak{g}$ i

$$R(\mathfrak{g},\mathfrak{h}) = \{\alpha_{ij};\ 1 \le i,j \le \ell+1,\ i \neq j\},$$

gdje je

$$\alpha_{ij}(\mathrm{diag}(c_1,\ldots,c_{\ell+1})) = c_i - c_j.$$

Nadalje, $\mathfrak{g}_{\alpha_{ij}}$ je potprostor svih matrica $x = [x_{pq}] \in \mathfrak{g}$ takvih da je $x_{pq} = 0$ ako je $p \neq i$ ili $q \neq j$. Dakle, $\mathfrak{g}_{\alpha_{ij}} = \mathit{span}\,\{e_{ij}\}$. Pri tome je u ovom i daljnjim primjerima e_{ij} oznaka za kvadratnu matricu formata $(\ell+1)\times(\ell+1)$ koja ima 1 na presjecištu $i-$tog retka i $j-$tog stupca, a svi ostali su joj elementi jednaki 0. Tada je $h_{\alpha_{ij}} = e_{ii} - e_{jj} = [e_{ij}, e_{ji}]$. Nadalje, korijenski potprostor $\mathfrak{g}_{\alpha_{ij}}$ razapet je matricom e_{ij}.

2. Neka je sada $\mathfrak{g}$ **simplektička Liejeva algebra**:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}(2\ell,\mathbb{C}) = \{x \in \mathfrak{gl}(2\ell,\mathbb{C});\ sx = -x^t s\}, \quad \text{gdje je} \quad s = \begin{bmatrix} 0 & I_\ell \\ -I_\ell & 0 \end{bmatrix}.$$

Pri tome je I_ℓ oznaka za jediničnu matricu $\ell-$tog reda.

Ako proizvoljnu matricu $x \in \mathfrak{gl}(2\ell,\mathbb{C})$ pišemo pomoću kvadratnih blokova $\ell-$tog reda kao $x = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, onda se lako vidi da je $x \in \mathfrak{g}$ ako i samo ako je $d = -a^t$, $b^t = b$ i $c^t = c$. Dakle,

$$\mathfrak{g} = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & -a^t \end{bmatrix};\ a,b,c \in \mathfrak{gl}(\ell,\mathbb{C}),\ b = b^t,\ c = c^t \right\}.$$

Primijetimo da je $\mathfrak{sp}(2,\mathbb{C}) = \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$, dakle, nove primjere dobivamo samo za $\ell \geq 2$.

Neka je $\mathfrak{h}$ skup svih dijagonalnih matrica u $\mathfrak{g}$, tj.

$$\mathfrak{h} = \{\mathrm{diag}(c_1,\ldots,c_\ell,-c_1,\ldots,-c_\ell);\ c_1,\ldots,c_\ell \in \mathbb{C}\}.$$

Tada je $\mathfrak{h}$ Cartanova podalgebra od $\mathfrak{g}$ i pripadni sistem korijena je

$$R(\mathfrak{g},\mathfrak{h}) = \{\pm\alpha_i;\ 1 \leq i \leq \ell\} \cup \{\beta_{ij};\ 1 \leq i,j \leq \ell,\ i \neq j\} \cup \{\pm\gamma_{ij};\ 1 \leq i < j \leq \ell\},$$

uz oznake

$$\alpha_i(\mathrm{diag}(c_1,\ldots,c_\ell,-c_1,\ldots,-c_\ell)) = 2c_i, \qquad 1 \leq i \leq \ell;$$
$$\beta_{ij}(\mathrm{diag}(c_1,\ldots,c_\ell,-c_1,\ldots,-c_\ell)) = c_i - c_j, \qquad 1 \leq i,j \leq \ell, \quad i \neq j;$$
$$\gamma_{ij}(\mathrm{diag}(c_1,\ldots,c_\ell,-c_1,\ldots,-c_\ell)) = c_i + c_j, \qquad 1 \leq i < j \leq \ell.$$

Nadalje, tada je

$$h_{\alpha_i} = -h_{-\alpha_i} = e_{ii} - e_{\ell+i,\ell+i}, \qquad 1 \leq i \leq \ell,$$
$$h_{\beta_{ij}} = e_{ii} - e_{jj} - e_{\ell+i,\ell+i} + e_{\ell+j,\ell+j}, \qquad 1 \leq i,j \leq \ell, \quad i \neq j, \quad -\beta_{ij} = \beta_{ji},$$
$$h_{\gamma_{ij}} = -h_{-\gamma_{ij}} = e_{ii} + e_{jj} - e_{\ell+i,\ell+i} - e_{\ell+j,\ell+j}, \qquad 1 \leq i < j \leq \ell.$$

Korijenski potprostori su $\mathfrak{g}_\alpha = \mathit{span}\,\{e_\alpha\}$, $\alpha \in R(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$, gdje su bazni vektori korijenskih potprostora e_α dani sa

$$e_{\alpha_i} = e_{i,\ell+i}, \qquad e_{-\alpha_i} = e_{\ell+i,i}, \qquad 1 \leq i \leq \ell,$$
$$e_{\beta_{ij}} = e_{ij} - e_{\ell+j,\ell+i}, \qquad 1 \leq i,j \leq \ell, \quad i \neq j, \quad -\beta_{ij} = \beta_{ji},$$
$$e_{\gamma_{ij}} = e_{i,\ell+j} + e_{j,\ell+i}, \qquad e_{-\gamma_{ij}} = e_{\ell+i,j} + e_{\ell+j,i}, \qquad 1 \leq i < j \leq \ell.$$

3. Promatramo sada **ortogonalnu Liejevu algebru neparnog reda**:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{o}(2\ell+1,\mathbb{C}) = \{x \in \mathfrak{gl}(2\ell+1,\mathbb{C});\ sx = -x^t s\}, \qquad \text{gdje je} \quad s = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_\ell \\ 0 & I_\ell & 0 \end{bmatrix}.$$

Proizvoljnu matricu $x \in \mathfrak{gl}(2\ell+1,\mathbb{C})$ zapišimo u blok−formi u skladu s blokovima u gornjoj matrici s :

$$x = \begin{bmatrix} \alpha & f & g \\ h^t & a & b \\ k^t & c & d \end{bmatrix}, \qquad \alpha \in \mathbb{C}, \quad f,g,h,k \in \mathbb{C}^\ell, \quad a,b,c,d \in \mathfrak{gl}(\ell,\mathbb{C}),$$

pri čemu smo $\mathbb{C}^\ell$ identificirali s prostorom $M_{\ell,1}(\mathbb{C})$ jednorednih matrica duljine ℓ. Tada vrijedi $x \in \mathfrak{o}(2\ell+1,\mathbb{C})$ ako i samo ako je $\alpha = 0$, $d = -a^t$, $b^t = -b$, $c^t = -c$, $h = -g$ i $k = -f$. Dakle,

$$\mathfrak{g} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & f & g \\ -g^t & a & b \\ -f^t & c & -a^t \end{bmatrix};\ f,g \in \mathbb{C}^\ell,\ a,b,c \in \mathfrak{gl}(\ell,\mathbb{C}),\ b^t = -b,\ c^t = -c \right\}.$$

Neka je $\mathfrak{h}$ skup svih dijagonalnih matrica iz $\mathfrak{g}$, tj.

$$\mathfrak{h} = \{\mathrm{diag}(0,c_1,\ldots,c_\ell,-c_1,\ldots,-c_\ell);\ c_1,\ldots,c_\ell \in \mathbb{C}\}.$$

Tada je $\mathfrak{h}$ Cartanova podalgebra od $\mathfrak{g}$ i pripadni sistem korijena je

$$R(\mathfrak{g},\mathfrak{h}) = \{\pm\alpha_i;\ 1 \le i \le \ell\} \cup \{\beta_{ij};\ 1 \le i,j \le \ell,\ i \ne j\} \cup \{\pm\gamma_{ij};\ 1 \le i < j \le \ell\},$$

uz oznake

$$\alpha_i(\mathrm{diag}(0,c_1,\ldots,c_\ell,-c_1,\ldots,-c_\ell)) = c_i, \qquad 1 \le i \le \ell;$$
$$\beta_{ij}(\mathrm{diag}(0,c_1,\ldots,c_\ell,-c_1,\ldots,-c_\ell)) = c_i - c_j, \qquad 1 \le i,j \le \ell, \quad i \ne j;$$
$$\gamma_{ij}(\mathrm{diag}(0,c_1,\ldots,c_\ell,-c_1,\ldots,-c_\ell)) = c_i + c_j, \qquad 1 \le i < j \le \ell.$$

Koristimo i dalje uobičajenu oznaku e_{ij} za matricu s jedinicom na presjecištu $i-$tog retka i $j-$tog stupca i s nulom na svim ostalim mjestima, s tim da se sada indeksi i,j kreću skupom $\{0,1,\ldots,2\ell\}$. Tada je

$$h_{\alpha_i} = -h_{-\alpha_i} = 2e_{ii} - 2e_{\ell+i,\ell+i}, \qquad 1 \le i \le \ell,$$
$$h_{\beta_{ij}} = e_{ii} - e_{jj} - e_{\ell+i,\ell+i} + e_{\ell+j,\ell+j}, \qquad 1 \le i,j \le \ell, \quad i \ne j, \quad -\beta_{ij} = \beta_{ji},$$
$$h_{\gamma_{ij}} = -h_{-\gamma_{ij}} = e_{ii} + e_{jj} - e_{\ell+i,\ell+i} - e_{\ell+j,\ell+j}, \qquad 1 \le i < j \le \ell.$$

Korijenski potprostori su $\mathfrak{g}_\alpha = \mathit{span}\,\{e_\alpha\}$, $\alpha \in R(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$, gdje su bazni vektori korijenskih potprostora e_α dani sa

$$e_{\alpha_i} = e_{i,0} - e_{0,\ell+i}, \qquad e_{-\alpha_i} = e_{0,i} - e_{\ell+i,0}, \qquad 1 \le i \le \ell,$$
$$e_{\beta_{ij}} = e_{ij} - e_{\ell+j,\ell+i}, \qquad 1 \le i,j \le \ell, \quad i \ne j, \quad -\beta_{ij} = \beta_{ji},$$
$$e_{\gamma_{ij}} = e_{j,\ell+i} - e_{i,\ell+j}, \qquad e_{-\gamma_{ij}} = e_{\ell+i,j} - e_{\ell+j,i}, \qquad 1 \le i < j \le \ell.$$

Napomenimo još da se lako dokazuje da je Liejeva algebra $\mathfrak{o}(3,\mathbb{C})$ izomorfna Liejevoj algebri $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$, te da je Liejeva algebra $\mathfrak{o}(5,\mathbb{C})$ izomorfna Liejevoj algebri $\mathfrak{sp}(4,\mathbb{C})$.

4. Na koncu promatramo **ortogonalnu Liejevu algebru parnog reda**:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{o}(2\ell,\mathbb{C}) = \{x \in \mathfrak{gl}(2\ell,\mathbb{C});\ sx = -x^t s\}, \qquad \text{gdje je} \quad s = \begin{bmatrix} 0 & I_\ell \\ I_\ell & 0 \end{bmatrix}.$$

Proizvoljnu matricu $x \in \mathfrak{gl}(2\ell,\mathbb{C})$ zapišimo u blok−formi:

$$x = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \qquad a,b,c,d \in \mathfrak{gl}(\ell,\mathbb{C}).$$

Tada je $x \in \mathfrak{g}$ ako i samo ako je $d = -a^t$, $b^t = -b$ i $c^t = -c$. Dakle,

$$\mathfrak{g} = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & -a^t \end{bmatrix};\ a, b, c \in \mathfrak{gl}(\ell, \mathbb{C}),\ b^t = -b,\ c^t = -c \right\}.$$

Neka je ponovo $\mathfrak{h}$ skup svih dijagonalnih matrica iz $\mathfrak{g}$, tj.

$$\mathfrak{h} = \{\mathrm{diag}(c_1, \ldots, c_\ell, -c_1, \ldots, -c_\ell);\ c_1, \ldots, c_\ell \in \mathbb{C}\}.$$

Tada je $\mathfrak{h}$ Cartanova podalgebra od $\mathfrak{g}$ i pripadni sistem korijena je

$$R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) = \{\beta_{ij};\ 1 \le i, j \le \ell,\ i \neq j\} \cup \{\pm\gamma_{ij};\ 1 \le i < j \le \ell\},$$

uz oznake

$$\beta_{ij}(\mathrm{diag}(c_1, \ldots, c_\ell, -c_1, \ldots, -c_\ell)) = c_i - c_j, \qquad 1 \le i, j \le \ell, \quad i \neq j;$$
$$\gamma_{ij}(\mathrm{diag}(c_1, \ldots, c_\ell, -c_1, \ldots, -c_\ell)) = c_i + c_j, \qquad 1 \le i < j \le \ell.$$

Sada je

$$h_{\beta_{ij}} = e_{ii} - e_{jj} - e_{\ell+i,\ell+i} + e_{\ell+j,\ell+j}, \qquad 1 \le i, j \le \ell, \quad i \neq j, \quad -\beta_{ij} = \beta_{ji},$$
$$h_{\gamma_{ij}} = -h_{-\gamma_{ij}} = e_{ii} + e_{jj} - e_{\ell+i,\ell+i} - e_{\ell+j,\ell+j}, \qquad 1 \le i < j \le \ell.$$

Korijenski potprostori su $\mathfrak{g}_\alpha = span\,\{e_\alpha\}$, $\alpha \in R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$, gdje su bazni vektori korijenskih potprostora e_α dani sa

$$e_{\beta_{ij}} = e_{ij} - e_{\ell+j,\ell+i}, \qquad 1 \le i, j \le \ell, \quad i \neq j, \quad -\beta_{ij} = \beta_{ji},$$
$$e_{\gamma_{ij}} = e_{i,\ell+j} - e_{j,\ell+i}, \qquad e_{-\gamma_{ij}} = e_{\ell+j,i} - e_{\ell+i,j}, \qquad 1 \le i < j \le \ell.$$

Napomenimo da Liejeve algebre $\mathfrak{o}(2, \mathbb{C})$ i $\mathfrak{o}(4, \mathbb{C})$ nisu proste: $\mathfrak{o}(2, \mathbb{C})$ je komutativna, a $\mathfrak{o}(4, \mathbb{C})$ je direktna suma dvaju prostih ideala koji su oba izomorfni Liejevoj algebri $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$. Nadalje, pokazuje se da je Liejeva algebra $\mathfrak{o}(6, \mathbb{C})$ izomorfna Liejevoj algebri $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$. Napokon, nema drugih međusobnih izomorfizama osim ovih koje smo naveli: proste Liejeve algebre iz četiriju serija $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$, $n \ge 2$, $\mathfrak{o}(2\ell{+}1, \mathbb{C})$, $\ell \ge 2$, $\mathfrak{sp}(2\ell, \mathbb{C})$, $\ell \ge 3$, $\mathfrak{o}(2\ell, \mathbb{C})$, $\ell \ge 4$, sve su međusobno neizomorfne.

Proučit ćemo sada pobliže sistem korijena $R = R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ za svaku klasičnu kompleksnu prostu Liejevu algebru $\mathfrak{g}$ i izabranu Cartanovu podalgebru $\mathfrak{h}$ i posebno, ustanoviti njihove Dynkinove dijagrame. Na realnim međusobno dualnim prostorima $\mathfrak{h}(R) = span_{\mathbb{R}}\,\{h_\alpha;\ \alpha \in R\}$ i $\mathfrak{h}^*(R) = span_{\mathbb{R}}\, R$ imamo skalarne produkte inducirane Killingovom formom $B_\mathfrak{g}$. Skalarne produkte među korijenima zbog određivanja brojeva $n(\alpha, \beta)$ bit će nam znatno lakše računati pomoću elemenata $h_\alpha \in \mathfrak{h}(R)$. Podsjetimo se da je za $\alpha \in R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ sa h_α označen jedinstven element iz $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}]$ takav da je $\alpha(h_\alpha) = 2$ i da vrijedi

$$h_\alpha = \frac{2}{B_\mathfrak{g}(t_\alpha, t_\alpha)}\, t_\alpha,$$

pri čemu je $\lambda \mapsto t_\lambda$ izomorfizam sa $\mathfrak{h}^*$ na $\mathfrak{h}$ induciran nedegeneriranom restrikcijom Killingove forme $B_\mathfrak{g}|\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}$:

$$\lambda(h) = B_\mathfrak{g}(h, t_\lambda) \qquad \forall h \in \mathfrak{h}.$$

Tim izomorfizmom prenesen je skalarni produkt $B_\mathfrak{g}|\mathfrak{h}(R) \times \mathfrak{h}(R)$ na prostor $\mathfrak{h}^*(R)$:

$$(\lambda|\mu) = B_\mathfrak{g}(t_\lambda, t_\mu) = \lambda(t_\mu) = \mu(t_\lambda), \qquad \lambda, \mu \in \mathfrak{h}^*(R).$$

Za $\alpha \in R$ imamo

$$B_\mathfrak{g}(h_\alpha, h_\alpha) = \frac{4}{B_\mathfrak{g}(t_\alpha, t_\alpha)^2}\, B_\mathfrak{g}(t_\alpha, t_\alpha) = \frac{4}{B_\mathfrak{g}(t_\alpha, t_\alpha)},$$

dakle,

$$t_\alpha = \frac{1}{2}\, B_{\mathfrak{g}}(t_\alpha, t_\alpha) h_\alpha = \frac{1}{2}\, \frac{4}{B_{\mathfrak{g}}(h_\alpha, h_\alpha)}\, h_\alpha = \frac{2}{B_{\mathfrak{g}}(h_\alpha, h_\alpha)}\, h_\alpha.$$

Stoga za $\alpha, \beta \in R$ nalazimo

$$(\alpha|\beta) = B_{\mathfrak{g}}(t_\alpha, t_\beta) = 4\frac{B_{\mathfrak{g}}(h_\alpha, h_\beta)}{B_{\mathfrak{g}}(h_\alpha, h_\alpha) B_{\mathfrak{g}}(h_\beta, h_\beta)}$$

i, posebno,

$$(\alpha|\alpha) = \frac{4}{B_{\mathfrak{g}}(h_\alpha, h_\alpha)}.$$

Odatle je

$$n(\alpha, \beta) = 2\, \frac{(\alpha|\beta)}{(\beta|\beta)} = 2\, \frac{B_{\mathfrak{g}}(h_\alpha, h_\beta)}{B_{\mathfrak{g}}(h_\alpha, h_\alpha) B_{\mathfrak{g}}(h_\beta, h_\beta)}\, B_{\mathfrak{g}}(h_\beta, h_\beta) = 2\, \frac{B(h_\alpha, h_\beta)}{B(h_\alpha, h_\alpha)} \tag{5.3}$$

i

$$\frac{\|\alpha\|^2}{\|\beta\|^2} = \frac{B_{\mathfrak{g}}(h_\beta, h_\beta)}{B_{\mathfrak{g}}(h_\alpha, h_\alpha)}. \tag{5.4}$$

U daljnjem ćemo za svaku od klasičnih kompleksnih prostih Liejevih algebri $\mathfrak{g}$ i izabranu Cartanovu podalgebru $\mathfrak{h}$ odrediti Dynkinov dijagram pripadnog sistema korijena $R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$. U tu svrhu mogli bismo koristiti opisani skalarni produkt $(\,\cdot\,|\,\cdot\,)$ na prostoru $\mathfrak{h}^*(R)$, odnosno, skalarni produkt $B_{\mathfrak{g}}|\mathfrak{h}(R) \times \mathfrak{h}(R)$ na prostoru $\mathfrak{h}(R)$. Međutim, mnogo je jednostavnije koristiti jedan drugi skalarni produkt, tj. onaj koji se dobije iz simetrične bilinearne forme na $\mathfrak{g}$ definirane pomoću traga matrica, a ne traga operatora adjungirane reprezentacije na prostoru $\mathfrak{g}$. Naime, ako je $\mathfrak{g}$ Liejeva podalgebra od $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$, definiramo simetričnu bilinearnu formu $A_{\mathfrak{g}} : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathbb{C}$ sa

$$A_{\mathfrak{g}}(x, y) = \operatorname{Tr} xy, \qquad x, y \in \mathfrak{g}. \tag{5.5}$$

Ta je forma uvijek nedegenerirana, a u slučaju da je $\mathfrak{g}$ prosta Liejeva podalgebra od $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$, ona je proporcionalna Killingovoj formi. To je posljedica činjenice da forma $A_{\mathfrak{g}}$ ima isto svojstvo invarijantnosti s obzirom na adjungiranu reprezentaciju $z \mapsto ad\, z$ od $\mathfrak{g}$ kao i Killingova forma $B_{\mathfrak{g}}$. Doista, za bilo koje $x, y, z \in \mathfrak{g}$ imamo redom

$$A_{\mathfrak{g}}((ad\, z)x, y) + A_{\mathfrak{g}}(x, (ad\, z)y) = \operatorname{Tr}\left([z, x]y + x[z, y]\right) =$$

$$= \operatorname{Tr}\left(zxy - xzy + xzy - xyz\right) = \operatorname{Tr} zxy - \operatorname{Tr} xyz = 0.$$

Propozicija 5.2.2. *Neka je $\mathfrak{g}$ prosta kompleksna Liejeva algebra i neka je $A : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathbb{C}$ bilinearna forma invarijantna s obzirom na adjungiranu reprezentaciju $z \mapsto ad\, z$, $z \in \mathfrak{g}$, tj. takva da je*

$$A((ad\, z)x, y) + A(x, (ad\, z)y) = 0 \qquad \forall x, y, z \in \mathfrak{g}.$$

Tada postoji $c \in \mathbb{C}$ takav da je $A(x, y) = cB_{\mathfrak{g}}(x, y)$ $\forall x, y \in \mathfrak{g}$.

Dokaz: Budući da je bilinearna forma $B_{\mathfrak{g}}$ nedegenerirana, iz propozicije 1.4.2. pokazuje se da postoji jedinstven linearan operator $T : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ takav da je

$$A(x, y) = B_{\mathfrak{g}}(Tx, y) \qquad \forall x, y \in \mathfrak{g}.$$

Za $x, y, z \in \mathfrak{g}$ imamo redom

$$B_{\mathfrak{g}}(T(ad\, z)x, y) = A((ad\, z)x, y) = -A(x, (ad\, z)y) = -B_{\mathfrak{g}}(Tx, (ad\, z)y) = B_{\mathfrak{g}}((ad\, z)Tx, y).$$

Sada iz nedegeneriranosti Killingove forme $B_{\mathfrak{g}}$ slijedi $T(ad\,z) = (ad\,z)T\ \ \forall z \in \mathfrak{g}$. Dakle, T je preplitanje reprezentacije ad sa samom sobom. Međutim, kako je Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ prosta, reprezentacija ad je ireducibilna. Prema tvrdnji (c) Schurove leme (teorem 1.2.6.) postoji $c \in \mathbb{C}$ takav da je $T = cI_{\mathfrak{g}}$. Dakle, $A(x,y) = B_{\mathfrak{g}}(Tx,y) = B_{\mathfrak{g}}(cx,y) = cB_{\mathfrak{g}}(x,y)$.

Odredit ćemo sada eksplicitno faktor proporcionalnosti u slučaju klasičnih prostih Liejevih algebri:

Propozicija 5.2.3. *Neka je $\mathfrak{g}$ klasična prosta kompleksna Liejeva algebra, tj. $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$, $n \geq 2$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}(n,\mathbb{C})$, $n \in 2\mathbb{N}$, ili $\mathfrak{g} = \mathfrak{o}(n,\mathbb{C})$, $n = 3$ ili $n \geq 5$. Tada je bilinearna forma $A_{\mathfrak{g}} : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathbb{C}$ definirana sa* (5.5) *proporcionalna Killingovoj formi $B_{\mathfrak{g}}$ i faktori proporcionalnosti su u tri slučaja jednaki $\frac{1}{2n}$ za $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$, $\frac{1}{(n+2)}$ za $\mathfrak{sp}(n,\mathbb{C})$ i $\frac{1}{n-2}$ za $\mathfrak{o}(n,\mathbb{C})$ Dakle,*

(a) $B_{\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})}(x,y) = 2n\,Tr\,xy,\ \ \forall x,y \in \mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$.

(b) $B_{\mathfrak{sp}(n,\mathbb{C})}(x,y) = (n+2)Tr\,xy,\ \ \forall x,y \in \mathfrak{sp}(n,\mathbb{C})$.

(c) $B_{\mathfrak{o}(n,\mathbb{C})}(x,y) = (n-2)Tr\,xy,\ \ \forall x,y \in \mathfrak{o}(n,\mathbb{C})$.

Dokaz: Prva tvrdnja neposredna je posljedica propozicije 5.2.2. Dakle, u svakom od tri slučaja vrijedi $A_{\mathfrak{g}}(x,y) = cB_{\mathfrak{g}}(x,y)$, $\forall x,y \in \mathfrak{g}$, gdje je $c \in \mathbb{C}$. Da bismo izračunali c, dovoljno je izračunati $A_{\mathfrak{g}}(x,x)$ i $B_{\mathfrak{g}}(x,x)$ za zgodno izabrani $x \in \mathfrak{g}$. Provedimo to za svaki od slučajeva. U njima ćemo upotrebljavati uvedene oznake za korijene i korijenske vektore.

1. $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(\ell+1)$, $\ell \in \mathbb{N}$. Izaberimo $x = h_{\alpha_1} = e_{11} - e_{22}$. Tada je $A_{\mathfrak{g}}(x,x) = \mathrm{Tr}\,x^2 = 2$. Nadalje, svi elementi baze

$$\{e_{ii} - e_{i+1,i+1};\ 1 \leq i \leq \ell\} \cup \{e_{ij};\ 1 \leq i,j \leq \ell+1,\ i \neq j\}$$

Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ su svojstveni vektori operatora $ad\,x$:

$$(ad\,x)(e_{ii} - e_{i+1,i+1}) = 0, \qquad \text{za} \quad 1 \leq i \leq \ell;$$

$$(ad\,x)e_{12} = 2e_{12}; \qquad (ad\,x)e_{21} = -2e_{21};$$

$$(ad\,x)e_{1i} = e_{1i}, \quad (ad\,x)e_{i1} = -e_{i1}, \qquad \text{za} \quad 3 \leq i \leq \ell+1;$$

$$(ad\,x)e_{2i} = -e_{2i}, \quad (ad\,x)e_{i2} = e_{i2} \qquad \text{za} \quad 3 \leq i \leq \ell+1;$$

$$(ad\,x)e_{ij} = 0 \qquad \text{za} \quad i \neq j \quad \text{i} \quad \{i,j\} \cap \{1,2\} = \emptyset.$$

Prema tome,

$$B_{\mathfrak{g}}(x,x) = \mathrm{Tr}\,(ad\,x)^2 = 2 \cdot 4 + 4(\ell-1) = 4(\ell+1).$$

Dakle, u ovom je slučaju

$$c = \frac{2}{4(\ell+1)} = \frac{1}{2(\ell+1)}.$$

2. $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}(2\ell,\mathbb{C})$, $\ell \in \mathbb{N}$. U ovom slučaju biramo $x = h_{\alpha_1} = e_{11} - e_{\ell+1,\ell+1}$. Ponovo je $A_{\mathfrak{g}}(x,x) = \mathrm{Tr}\,x^2 = 2$. Operator $ad\,x$ ima u bazi

$$\{h_{\alpha_i};\ 1 \leq i \leq \ell\} \cup \{e_{\alpha_i};\ 1 \leq i \leq \ell\}\{e_{\beta ij};\ 1 \leq i,j \leq \ell,\ i \neq j\} \cup \{e_{\pm\gamma_{ij}};\ 1 \leq i < j \leq \ell\}$$

Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ dijagonalnu matricu:

$$(ad\,x)h_{\alpha_i} = 0, \qquad \text{za} \quad 1 \leq i \leq \ell;$$

$$(ad\,x)e_{\alpha_1} = 2e_{\alpha_1}; \qquad (ad\,x)e_{-\alpha_1} = -2e_{-\alpha_1};$$
$$(ad\,x)e_{\alpha_i} = (ad\,x)e_{-\alpha_i} = 0 \quad \text{za} \quad 2 \le i \le \ell;$$
$$(ad\,x)e_{\beta_{1i}} = e_{\beta_{1i}}, \quad (ad\,x)e_{\beta_{i1}} = -e_{\beta_{i1}} \quad \text{za} \quad 2 \le i \le \ell;$$
$$(ad\,x)e_{\beta_{ij}} = 0 \quad \text{za} \quad 2 \le i, j \le \ell, \quad i \ne j;$$
$$(ad\,x)e_{\gamma_{1i}} = e_{\gamma_{1i}}, \quad (ad\,x)e_{-\gamma_{1i}} = -e_{-\gamma_{1i}}, \quad \text{za} \quad 2 \le i \le \ell;$$
$$(ad\,x)e_{\gamma_{ij}} = (ad\,x)e_{-\gamma_{ij}} = 0 \quad \text{za} \quad 2 \le i < j \le \ell.$$

Prema tome,
$$B_{\mathfrak{g}}(x,x) = 2 \cdot 4 + 4(\ell - 1) = 4(\ell + 1).$$

Dakle,
$$c = \frac{2}{4(\ell+1)} = \frac{1}{2(\ell+1)} = \frac{1}{2\ell+2}.$$

3. $\mathfrak{g} = \mathfrak{o}(2\ell+1, \mathbb{C})$, $\ell \in \mathbb{N}$. Biramo $x = \frac{1}{2}h_{\alpha_1} = e_{11} - e_{\ell+1,\ell+1}$. Ponovo je $A_{\mathfrak{g}}(x,x) = \operatorname{Tr} x^2 = 2$. Sada operator $ad\,x$ djeluje na vektore baze

$$\{h_{\alpha_i};\ 1 \le i \le \ell\} \cup \{e_{\alpha_i};\ 1 \le i \le \ell\} \cup \{e_{\beta ij};\ 1 \le i, j \le \ell,\ i \ne j\} \cup \{e_{\pm\gamma_{ij}};\ 1 \le i < j \le \ell\}$$

Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ ovako:
$$(ad\,x)h_{\alpha_i} = 0, \qquad \text{za} \quad 1 \le i \le \ell;$$
$$(ad\,x)e_{\alpha_1} = e_{\alpha_1}; \qquad (ad\,x)e_{-\alpha_1} = -e_{-\alpha_1};$$
$$(ad\,x)e_{\alpha_i} = (ad\,x)e_{-\alpha_i} = 0 \quad \text{za} \quad 2 \le i \le \ell;$$
$$(ad\,x)e_{\beta_{1i}} = e_{\beta_{1i}}, \quad (ad\,x)e_{\beta_{i1}} = -e_{\beta_{i1}} \quad \text{za} \quad 2 \le i \le \ell;$$
$$(ad\,x)e_{\beta_{ij}} = 0 \quad \text{za} \quad 2 \le i, j \le \ell, \quad i \ne j;$$
$$(ad\,x)e_{\gamma_{1i}} = e_{\gamma_{1i}}, \quad (ad\,x)e_{-\gamma_{1i}} = -e_{-\gamma_{1i}}, \quad \text{za} \quad 2 \le i \le \ell;$$
$$(ad\,x)e_{\gamma_{ij}} = (ad\,x)e_{-\gamma_{ij}} = 0 \quad \text{za} \quad 2 \le i < j \le \ell.$$

Prema tome,
$$B_{\mathfrak{g}}(x,x) = 2 + 4(\ell - 1) = 2(2\ell - 1).$$

Dakle,
$$c = \frac{2}{2(2\ell-1)} = \frac{1}{2\ell-1} = \frac{1}{(2\ell+1)-2}.$$

4. $\mathfrak{g} = \mathfrak{o}(2\ell, \mathbb{C})$, $\ell \in \mathbb{N}$, $\ell \ge 3$. Biramo $x = h_{\beta_{12}} = e_{11} - e_{22} - e_{\ell+1,\ell+1} + e_{\ell+2,\ell+2}$. Sada je $A_{\mathfrak{g}}(x,x) = \operatorname{Tr} x^2 = 4$. Nadalje, operator $ad\,x$ djeluje na vektore baze

$$\{h_{\beta_{i,\ell+i}};\ 1 \le i \le \ell\} \cup \{e_{\beta ij};\ 1 \le i, j \le \ell,\ i \ne j\} \cup \{e_{\pm\gamma_{ij}};\ 1 \le i < j \le \ell\}$$

Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ ovako:
$$(ad\,x)h_{\beta_{i,\ell+i}} = 0 \quad \text{za} \quad 1 \le i \le \ell;$$
$$(ad\,x)e_{\beta_{12}} = 2e_{\beta_{12}}, \qquad (ad\,x)e_{\beta_{21}} = -2e_{\beta_{21}};$$
$$(ad\,x)e_{\beta_{1i}} = e_{\beta_{1i}}, \quad (ad\,x)e_{\beta_{2i}} = -e_{\beta_{2i}}, \quad \text{za} \quad 3 \le i \le \ell;$$
$$(ad\,x)e_{\beta_{i1}} = -e_{\beta_{i1}}, \quad (ad\,x)e_{\beta_{i2}} = e_{\beta_{i2}}, \quad \text{za} \quad 3 \le i \le \ell;$$
$$(ad\,x)e_{\beta_{ij}} = 0 \quad \text{za} \quad 3 \le i, j \le \ell, \quad i \ne j;$$
$$(ad\,x)e_{\gamma_{12}} = (ad\,x)e_{-\gamma_{12}} = 0;$$

$$(ad\,x)e_{\gamma_{1i}} = e_{\gamma_{1i}}, \quad (ad\,x)e_{\gamma_{2i}} = -e_{\gamma_{2i}}, \quad \text{za} \quad 3 \leq i \leq \ell;$$
$$(ad\,x)e_{-\gamma_{1i}} = -e_{-\gamma_{1i}}, \quad (ad\,x)e_{-\gamma_{2i}} = e_{-\gamma_{2i}} \quad \text{za} \quad 3 \leq i \leq \ell;$$
$$(ad\,x)e_{\gamma_{ij}} = (ad\,x)e_{-\gamma_{ij}} = 0 \quad \text{za} \quad 3 \leq i < j \leq \ell.$$

Prema tome,

$$B_{\mathfrak{g}}(x,x) = 2 \cdot 4 + 8(\ell - 2) = 8(\ell - 1).$$

Dakle,

$$c = \frac{4}{8(\ell-1)} = \frac{1}{2(\ell-1)} = \frac{1}{2\ell-2}.$$

Time je propozicija 5.2.3. u potpunosti dokazana.

Napomena. Direktnim računom lako se vidi da (c) vrijedi i za $n = 2$ i $n = 4$ iako pripadne Liejeve algebre nisu proste: $\mathfrak{o}(2,\mathbb{C})$ je komutativna, a $\mathfrak{o}(4,\mathbb{C})$ je direktna suma dvaju prostih ideala, koji su oba izomorfni sa $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$.

Posljedica je propozicije 5.2.3. da se u slučaju kad je $\mathfrak{g}$ klasična prosta kompleksna Liejeva algebra umjesto skalarnog produkta, induciranog na $\mathfrak{h}(R)$ i na njegovu dualu $\mathfrak{h}^*(R)$ Killingovom formom $B_{\mathfrak{g}}$, možemo koristiti skalarnim produktom, induciranim bilinearnom formom $A_{\mathfrak{g}}(x,y) = \operatorname{Tr} xy,\ x,y \in \mathfrak{g}$. U daljnjem ćemo upravo te skalarne produkte i na $\mathfrak{h}^*(R)$ i na $\mathfrak{h}(R)$ označavati sa $(\,\cdot\,|\,\cdot\,)$, a pripadne norme sa $\|\cdot\|$. Sada formule (5.3) i (5.4) prelaze u

$$n(\alpha,\beta) = 2\,\frac{(h_\alpha|h_\beta)}{(h_\alpha|h_\alpha)} \qquad \text{i} \qquad \frac{\|\alpha\|^2}{\|\beta\|^2} = \frac{\|h_\beta\|^2}{\|h_\alpha\|^2}. \tag{5.6}$$

Sada ćemo identificirati Dynkinove dijagrame klasičnih prostih kompleksnih Liejevih algebri. I dalje upotrebljavamo uvedene oznake za četiri serije klasičnih Liejevih algebri.

Specijalna linearna Liejeva algebra $\mathfrak{sl}(\ell+1,\mathbb{C})$, $\ell \geq 1$

Stavimo $\alpha_i = \alpha_{i,i+1}$, $1 \leq i \leq \ell$. Lako se vidi da je tada

$$\alpha_{ij} = \alpha_i + \cdots + \alpha_{j-1}, \qquad 1 \leq i < j \leq \ell + 1,$$

$$\alpha_{ij} = -\alpha_{ji} = -\alpha_j - \cdots - \alpha_{i-1}, \qquad 1 \leq j < i \leq \ell + 1.$$

To pokazuje da je $B = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell\}$ baza sistema korijena $R = R(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$. Pripadni skup pozitivnih korijena je $R_+ = \{\alpha_{ij}; 1 \leq i < j \leq \ell+1\}$.

Odredimo sada Dynkinov dijagram sistema korijena R. Najprije računamo skalarne produkte $(h_{\alpha_i}|h_{\alpha_j})$, $1 \leq i,j \leq \ell$:

$$(h_{\alpha_i}|h_{\alpha_i}) = \operatorname{Tr}(e_{ii} - e_{i+1,i+1})^2 = \operatorname{Tr}(e_{ii} + e_{i+1,i+1}) = 2$$

$$\left(h_{\alpha_i}|h_{\alpha_{i+1}}\right) = \operatorname{Tr}(e_{ii} - e_{i+1,i+1})(e_{i+1,i+1} - e_{i+2,i+2}) = \operatorname{Tr}(-e_{i+1,i+1}) = -1 \quad \text{za} \quad 1 \leq i \leq \ell - 1;$$
$$\left(h_{\alpha_i}|h_{\alpha_j}\right) = \operatorname{Tr}(e_{ii} - e_{i+1,i+1})(e_{jj} - e_{j+1,j+1}) = 0 \quad \text{ako je} \quad 1 \leq i,j \leq \ell, \quad |i-j| \geq 2.$$

Odatle i iz (5.6) nalazimo

$$n(\alpha_i,\alpha_{i+1}) = 2\,\frac{\left(h_{\alpha_{i+1}}|h_{\alpha_i}\right)}{(h_{\alpha_i}|h_{\alpha_i})} = 2\,\frac{-1}{2} = -1 = n(\alpha_{i+1},\alpha_i) \quad 1 \leq i \leq \ell - 1,$$

i

$$n(\alpha_i,\alpha_j) = 0 \qquad \text{ako je } |i-j| \geq 2.$$

To pokazuje da je Dynkinov dijagram sistema korijena $R(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ tipa A_ℓ.

Ortogonalna Liejeva algebra $\mathfrak{o}(2\ell+1,\mathbb{C})$, $\ell \geq 2$

Stavimo $\delta_i = \beta_{i,i+1}$ za $1 \leq i \leq \ell-1$ i $\delta_\ell = \alpha_\ell$. Tada nalazimo

$$\alpha_i = \delta_i + \cdots + \delta_\ell, \qquad 1 \leq i \leq \ell,$$

$$\beta_{ij} = \delta_i + \cdots + \delta_{j-1}, \qquad 1 \leq i < j \leq \ell,$$

$$\gamma_{ij} = \delta_i + \cdots + \delta_{j-1} + 2\delta_j + \cdots + 2\delta_\ell, \qquad 1 \leq i < j \leq \ell.$$

Dakle, $\{\delta_1, \cdots, \delta_\ell\}$ je baza sistema korijena $R = R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ i skup pozitivnih korijena u odnosu na tu bazu je

$$R_+ = \{\alpha_i;\ 1 \leq i \leq \ell\} \cup \{\beta_{ij};\ 1 \leq i < j \leq \ell\} \cup \{\gamma_{ij};\ 1 \leq i < j \leq \ell\}.$$

Odredimo sada Coxeterov graf i Dynkinov dijagram od R. Imamo

$$h_{\delta_i} = e_{ii} - e_{i+1,i+1} - e_{\ell+i,\ell+i} + e_{\ell+i+1,\ell+i+1} \quad \text{za} \quad 1 \leq i \leq \ell-1 \quad \text{i} \quad h_{\delta_\ell} = 2e_{\ell\ell} - 2e_{2\ell,2\ell}$$

pa je

$$(h_{\delta_i}|h_{\delta_i}) = \mathrm{Tr}\,(e_{ii} - e_{i+1,i+1} - e_{\ell+i,\ell+i} + e_{\ell+i+1,\ell+i+1})^2 = 4 \quad \text{za } 1 \leq i \leq \ell-1,$$

$$(h_{\delta_\ell}|h_{\delta_\ell}) = \mathrm{Tr}\,(2e_{\ell\ell} - 2e_{2\ell,2\ell})^2 = 8,$$

$$\big(h_{\delta_i}|h_{\delta_{i+1}}\big) = \mathrm{Tr}\,(e_{ii} - e_{i+1,i+1} - e_{\ell+i,\ell+i} + e_{\ell+i+1,\ell+i+1})(e_{i+1,i+1} - e_{i+2,i+2} - e_{\ell+i+1,\ell+i+1} + e_{\ell+i+2,\ell+i+2}) =$$
$$= \mathrm{Tr}\,(-e_{i+1,i+1} - e_{\ell+i+1,\ell+i+1}) = -2 \quad \text{za} \quad 1 \leq i \leq \ell-2,$$

$$\big(h_{\delta_{\ell-1}}|h_{\delta_\ell}\big) = \mathrm{Tr}\,(e_{\ell-1,\ell-1} - e_{\ell\ell} - e_{2\ell-1,2\ell-1} + e_{2\ell,2\ell})(2e_{\ell\ell} - 2e_{2\ell,2\ell}) = \mathrm{Tr}\,(-2e_{\ell\ell} - 2e_{2\ell,2\ell}) = -4.$$

Svi ostali međusobni skalarni produkti vektora baze h_{δ_i} jednaki su nuli, jer su produkti tih matrica jednaki nuli. Odatle imamo prema (5.6)

$$n(\delta_i, \delta_{i+1}) = 2\frac{\big(h_{\delta_{i+1}}|h_{\delta_i}\big)}{(h_{\delta_i}|h_{\delta_i})} = 2\frac{-2}{4} = -1 = n(\delta_{i+1}, \delta_i) \quad \text{za} \quad 1 \leq i \leq \ell-2,$$

$$n(\delta_{\ell-1}, \delta_\ell) = 2\frac{\big(h_{\delta_\ell}|h_{\delta_{\ell-1}}\big)}{\big(h_{\delta_{\ell-1}}|h_{\delta_{\ell-1}}\big)} = 2\frac{-4}{4} = -2,$$

$$n(\delta_\ell, \delta_{\ell-1}) = 2\frac{\big(h_{\delta_{\ell-1}}|h_{\delta_\ell}\big)}{(h_{\delta_\ell}|h_{\delta_\ell})} = 2\frac{-4}{8} = -1.$$

Nadalje, $n(\delta_i, \delta_j) = 0$ ako je $|i-j| \geq 2$. Dakle,

$$n(\delta_i, \delta_{i+1})n(\delta_{i+1}, \delta_i) = 1 \qquad \text{za} \quad 1 \leq i \leq \ell-2; \qquad n(\delta_{\ell-1}, \delta_\ell)n(\delta_\ell, \delta_{\ell-1}) = 2.$$

Prema tome, u Coxeterovom grafu spojeni su samo vrhovi δ_i i δ_{i+1} za $1 \leq i \leq \ell-1$ i to s jednom linijom za $1 \leq i \leq \ell-2$ i s dvije linije za $i = \ell-1$. Nadalje, omjeri kvadrata duljina korijena $\delta_{\ell-1}$ i δ_ℓ su prema (5.6) :

$$\frac{\|\delta_{\ell-1}\|^2}{\|\delta_\ell\|^2} = \frac{\|h_{\delta_\ell}\|^2}{\big\|h_{\delta_{\ell-1}}\big\|^2} = \frac{8}{4} = 2.$$

Dakle, korijen $\delta_{\ell-1}$ dulji je od korijena δ_ℓ, pa je u Dynkinovom dijagramu strelica usmjerena od vrha $\delta_{\ell-1}$ prema vrhu δ_ℓ. To znači da je Dynkinov dijagram sistema korijena $R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ tipa B_ℓ.

Simplektička Liejeva algebra $\mathfrak{sp}(2\ell,\mathbb{C})$, $\ell \geq 2$

Stavimo kao i u prethodnom primjeru $\delta_i = \beta_{i,i+1}$ za $1 \leq i \leq \ell - 1$ i $\delta_\ell = \alpha_\ell$. Tada je

$$\alpha_i = 2\delta_i + \cdots + 2\delta_{\ell-1} + \delta_\ell, \qquad 1 \leq i \leq \ell,$$

$$\beta_{ij} = \delta_i + \cdots + \delta_{j-1}, \qquad 1 \leq i < j \leq \ell,$$

$$\gamma_{ij} = \delta_i + \cdots + \delta_{j-1} + 2\delta_j + \cdots + 2\delta_{\ell-1} + \delta_\ell, \qquad 1 \leq i < j \leq \ell.$$

Dakle, $\{\delta_1, \cdots, \delta_\ell\}$ je baza sistema korijena $R = R(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ i skup pozitivnih korijena u odnosu na tu bazu je

$$R_+ = \{\alpha_i;\ 1 \leq i \leq \ell\} \cup \{\beta_{ij};\ 1 \leq i < j \leq \ell\} \cup \{\gamma_{ij};\ 1 \leq i < j \leq \ell\}.$$

Izračunajmo sada skalarne produkte $\left(h_{\delta_i}|h_{\delta_j}\right)$. Imamo

$$h_{\delta_i} = e_{ii} - e_{i+1,i+1} - e_{\ell+i,\ell+i} + e_{\ell+i+1,\ell+i+1} \quad \text{za} \quad 1 \leq i \leq \ell - 1; \qquad h_{\delta_\ell} = e_{\ell\ell} - e_{2\ell,2\ell}.$$

Prema tome, za $1 \leq i \leq \ell - 1$ je

$$(h_{\delta_i}|h_{\delta_i}) = \mathrm{Tr}\,(e_{ii} - e_{i+1,i+1} - e_{\ell+i,\ell+i} + e_{\ell+i+1,\ell+i+1})^2 = \mathrm{Tr}\,(e_{ii} + e_{i+1,i+1} + e_{\ell+i,\ell+i} + e_{\ell+i+1,\ell+i+1}) = 4,$$

a

$$(h_{\delta_\ell}|h_{\delta_\ell}) = \mathrm{Tr}\,(e_{\ell\ell} - e_{2\ell,2\ell})^2 = \mathrm{Tr}\,(e_{\ell\ell} + e_{2\ell,2\ell}) = 2.$$

Dakle, kvadrati duljina vektora baze $h_{\delta_1}, \ldots, h_{\delta_{\ell-1}}$ su međusobno jednaki kao i u prethodnom primjeru, ali sada je kvadrat duljine vektora h_{δ_ℓ} upola manji. Prema (5.6) duljine korijena $\delta_1, \ldots, \delta_{\ell-1}$ su jednake a kvadrat duljine korijena δ_ℓ je dvostruko veći od kvadrata duljina ostalih. Odredimo među kojim vrhovima postoje spojnice. Imamo

$$\left(h_{\delta_i}|h_{\delta_{i+1}}\right) = \mathrm{Tr}\,(e_{ii} - e_{i+1,i+1} - e_{\ell+i,\ell+i} + e_{\ell+i+1,\ell+i+1})(e_{i+1,i+1} - e_{i+2,i+2} - e_{\ell+i+1,\ell+i+1} + e_{\ell+i+2,\ell+i+2}) =$$

$$= \mathrm{Tr}\,(-e_{i+1,i+1} - e_{\ell+i+1,\ell+i+1}) = -2 \quad \text{za} \quad 1 \leq i \leq \ell - 2,$$

$$\left(h_{\delta_{\ell-1}}|h_{\delta_\ell}\right) = \mathrm{Tr}\,(e_{\ell-1,\ell-1} - e_{\ell\ell} - e_{2\ell-1,2\ell-1} + e_{2\ell,2\ell})(e_{\ell\ell} - e_{2\ell,2\ell}) = \mathrm{Tr}\,(-e_{\ell\ell} - e_{2\ell,2\ell}) = -2.$$

Svi ostali međusobni skalarni produkti vektora baze h_{δ_i} jednaki su nuli, jer su produkti tih matrica jednaki nuli. Prema (5.6) imamo

$$n(\delta_i, \delta_{i+1}) = 2\frac{\left(h_{\delta_{i+1}}|h_{\delta_i}\right)}{(h_{\delta_i}|h_{\delta_i})} = 2\frac{-2}{4} = -1 = n(\delta_{i+1}, \delta_i) \quad \text{za} \quad 1 \leq i \leq \ell - 2,$$

$$n(\delta_{\ell-1}, \delta_\ell) = 2\frac{\left(h_{\delta_\ell}|h_{\delta_{\ell-1}}\right)}{\left(h_{\delta_{\ell-1}}|h_{\delta_{\ell-1}}\right)} = 2\frac{-2}{4} = -1,$$

$$n(\delta_\ell, \delta_{\ell-1}) = 2\frac{\left(h_{\delta_{\ell-1}}|h_{\delta_\ell}\right)}{(h_{\delta_\ell}|h_{\delta_\ell})} = 2\frac{-2}{2} = -2.$$

Dakle,

$$n(\delta_i, \delta_{i+1})n(\delta_{i+1}, \delta_i) = 1 \qquad \text{za} \quad 1 \leq i \leq \ell - 2; \qquad n(\delta_{\ell-1}, \delta_\ell)n(\delta_\ell, \delta_{\ell-1}) = 2.$$

Prema tome, Coxeterov graf je isti kao i u prethodnom slučaju. Međutim, sada je korijen δ_ℓ dulji od korijena $\delta_{\ell-1}$, pa je strelica u Dynkinovom dijagramu okrenuta suprotno: od δ_ℓ prema $\delta_{\ell-1}$. Dakle, Dynkinov dijagram sistema korijena $R(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ je tipa C_ℓ.

Ortogonalna Liejeva algebra $\mathfrak{o}(2\ell,\mathbb{C})$, $\ell \geq 3$

Sada stavimo $\alpha_i = \beta_{i,i+1}$ za $q \leq i \leq \ell-1$ i $\alpha_\ell = \gamma_{\ell-1,\ell}$. Tada je

$$\beta_{ij} = \alpha_i + \cdots + \alpha_{j-1} \qquad 1 \leq i < j \leq \ell,$$

$$\gamma_{ij} = \alpha_i + \cdots + \alpha_{j-1} + 2\alpha_j + \cdots + 2\alpha_{\ell-2} + \alpha_{l-1} + \alpha_\ell, \qquad 1 \leq i < j \leq \ell.$$

Dakle, $\{\alpha_1,\ldots,\alpha_\ell\}$ je baza sistema korijena $R = R(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ i pripadni skup pozitivnih korijena je

$$R_+ = \{\beta_{ij};\ 1 \leq i < j \leq \ell\} \cup \{\gamma_{ij};\ 1 \leq i < j \leq \ell\}.$$

Imamo

$$h_{\alpha_i} = h_{\beta_{i,i+1}} = e_{ii} - e_{i+1,i+1} - e_{\ell+i,\ell+i} + e_{\ell+i+1,\ell+i+1} \quad \text{za} \quad 1 \leq i \leq \ell-1,$$
$$h_{\alpha_\ell} = h_{\gamma_{\ell-1,\ell}} = e_{\ell-1,\ell-1} + e_{\ell\ell} - e_{2\ell-1,2\ell-1} - e_{2\ell,2\ell}.$$

Prema tome, za $1 \leq i \leq \ell-1$ je

$$(h_{\alpha_i}|h_{\alpha_i}) = \mathrm{Tr}\,(e_{ii}-e_{i+1,i+1}-e_{\ell+i,\ell+i}+e_{\ell+i+1,\ell+i+1})^2 = \mathrm{Tr}\,(e_{ii}+e_{i+1,i+1}+e_{\ell+i,\ell+i}+e_{\ell+i+1,\ell+i+1}) = 4,$$

$$(h_{\alpha_\ell}|h_{\alpha_\ell}) = \mathrm{Tr}\,(e_{\ell-1,\ell-1} + e_{\ell\ell} - e_{2\ell-1,2\ell-1} - e_{2\ell,2\ell})^2 = \mathrm{Tr}\,(e_{\ell-1,\ell-1} + e_{\ell\ell} + e_{2\ell-1,2\ell-1} + e_{2\ell,2\ell}) = 4.$$

Dakle, prema (5.6) u ovom su slučaju duljine svih vektora izabrane baze od R iste duljine. Odredimo sada spojnice među vrhovima. Imamo za $1 \leq i \leq \ell-2$

$$\left(h_{\alpha_i}|h_{\alpha_{i+1}}\right) = \mathrm{Tr}\,(e_{ii}-e_{i+1,i+1}-e_{\ell+i,\ell+i}+e_{\ell+i+1,\ell+i+1})(e_{i+1,i+1}-e_{i+2,i+2}-e_{\ell+i+1,\ell+i+1}+e_{\ell+i+2,\ell+i+2}) =$$

$$= \mathrm{Tr}\,(-e_{i+1,i+1} - e_{\ell+i+1,\ell+i+1}) = -2.$$

Nadalje,

$$\left(h_{\alpha_{\ell-2}}|h_{\alpha_\ell}\right) = \mathrm{Tr}\,(e_{\ell-2,\ell-2} - e_{\ell-1,\ell-1} - e_{2\ell-2,2\ell-2} + e_{2\ell-1,2\ell-1})(e_{\ell-1,\ell-1} + e_{\ell\ell} - e_{2\ell-1,2\ell-1} - e_{2\ell,2\ell}) =$$

$$= \mathrm{Tr}\,(-e_{\ell-1,\ell-1} - e_{2\ell-1,2\ell-1}) = -2$$

ali

$$\left(h_{\alpha_{\ell-1}}|h_{\alpha_\ell}\right) = \mathrm{Tr}\,(e_{\ell-1,\ell-1} - e_{\ell,\ell} - e_{2\ell-1,2\ell-1} + e_{2\ell,2\ell})(e_{\ell-1,\ell-1} + e_{\ell\ell} - e_{2\ell-1,2\ell-1} - e_{2\ell,2\ell}) =$$

$$= \mathrm{Tr}\,(e_{\ell-1,\ell-1} - e_{\ell\ell} + e_{2\ell-1,2\ell-1} - e_{2\ell,2\ell})) = 0.$$

Svi ostali međusobni skalarni produkti elemenata h_{α_i} jednaki su nuli jer su svi međusobni produkti tih matrica jednaki nuli. Sada pomoću (5.6) dobivamo

$$n(\alpha_i,\alpha_{i+1}) = 2\frac{\left(h_{\alpha_{i+1}}|h_{\alpha_i}\right)}{(h_{\alpha_i}|h_{\alpha_i})} = 2\frac{-2}{4} = -1 = n(\alpha_{i+1},\alpha_i), \quad \text{za} \quad 1 \leq i \leq \ell-2,$$

$$n(\alpha_{\ell-2},\alpha_\ell) = 2\frac{\left(h_{\alpha_\ell}|h_{\alpha_{\ell-2}}\right)}{\left(h_{\alpha_{\ell-2}}|h_{\alpha_{\ell-2}}\right)} = 2\frac{-2}{4} = -1 = n(\alpha_\ell,\alpha_{\ell-2}).$$

To znači da je Coxeterov graf sistema korijena $R(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ (a time i Dynkinov dijagram jer su svi korijeni iste duljine) tipa D_ℓ.

Bibliografija

[1] N. Bourbaki, *Lie Groups and Lie Algebras*, Ch. 1−3, Springer−Verlag, 2nd printing, Berlin−Heidelberg−New York−London−Paris−Tokyo, 1989; Ch. 4−6, Springer−Verlag, Berlin−Heidelberg−New York, 2002; Ch. 7−9, Springer−Verlag, Berlin−Heidelberg, 2005.

[2] R. Carter, G. Segal, I. Macdonald, *Lectures on Lie Groups and Lie Algebras*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1995.

[3] K. Erdmann and M.J. Wildon, *Introduction to Lie Algebras*, Springer−Verlag, London, 2006.

[4] W.A. de Graaf, *Lie Algebras: Theory and Algorithms*, North−Holland, Elsevier, Amsterdam−Lausanne−New York−Oxford−Shannon−Singapore−Tokyo, 2000.

[5] B.C. Hall, *Lie Groups, Lie Algebras, and Representations, An Elementary Introduction*, Springer−Verlag, New York, 2004.

[6] J.E. Humphreys, *Introduction to Lie Algebras and Representation Theory*, Springer−Verlag, Berlin−Heidelberg−New York, 1972.

[7] N. Jacobson, *Lie Algebras*, Dover Publications, New York, 1979.

[8] V.S. Varadarajan, *Lie Groups, Lie Algebras, and Their Representations*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1974.

[9] H. Weyl, *The Classical Groups, Their Invariants and Representations*, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1997.

[10] D.J. Winter, *Abstract Lie Algebras*, Dover Publications, Inc., Mineola, N.Y., 2008.