$\mathcal{D}-$MODULI I REPREZENTACIJE

Prof. dr. sc. Hrvoje Kraljević

Predavanja održana u okviru doktorskog studija
na PMF−Matematičkom odjelu Sveučilišta u Zagrebu
u akademskoj godini 2011./2012.

Zagreb, lipanj 2012.

Sadržaj

Poglavlje 1

OPIS PRIMJENE $\mathcal{D}-$MODULA U TEORIJI REPREZENTACIJA

Neka je G_0 povezana poluprosta Liejeva grupa s konačnim centrom i neka je K_0 neka njena maksimalna kompaktna podgrupa. Označimo sa $\mathfrak{g}_0$ i $\mathfrak{k}_0 \subseteq \mathfrak{g}_0$ njihove Liejeve algebre i neka su $\mathfrak{g}$ i $\mathfrak{k}$ njihove kompleksifikacije. Neka je ϑ pripadna Cartanova involucija od $\mathfrak{g}_0$; tj. ϑ je jedinstveni involutivni automorfizam Liejeve algebre $\mathfrak{g}_0$ kojem je $\mathfrak{k}_0$ skup fiksnih točaka. Sa ϑ ćemo označavati i $\mathbb{C}-$linearno proširenje na $\mathfrak{g}$. Tada je ϑ involutivni automorfizam kompleksne Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ i $\mathfrak{k} = \{x \in \mathfrak{g};\ \vartheta(x) = x\}$.

Neka je $K \supseteq K_0$ kompleksifikacija od K_0; to je univerzalni objekt za neprekidne homomorfizme $\varphi_0 : K_0 \longrightarrow H$, gdje je H kompleksna Liejeva grupa: svaki se takav homomorfizam jedinstveno proširuje do homomorfizma kompleksnih Liejevih grupa $\varphi : K \longrightarrow H$. Tada K ima strukturu kompleksne reduktivne algebarske grupe i ako je i H kompleksna algebarska grupa, svaki je takav homomorfizam algebarski.

Neka je π dopustiva reprezentacija od G_0 konačne duljine na Banachovom prostoru $\mathcal{H}$. Kad kažemo da je π "*reprezentacija*" to znači da je π homomorfizam grupe G_0 u grupu $GL(\mathcal{H})$ svih invertibilnih elemenata unitalne algebre $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ svih ograničenih linearnih operatora $\mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ takav da je za svaki vektor $\xi \in \mathcal{H}$ preslikavanje $g \mapsto \pi(g)\xi$ sa G u $\mathcal{H}$ neprekidno. Kad za reprezentaciju π kažemo da je "*konačne duljine*" to znači da postoji konačan niz zatvorenih $\pi(G_0)-$invarijantnih potprostora

$$\{0\} = \mathcal{H}_0 \subseteq \mathcal{H}_1 \subseteq \cdots \subseteq \mathcal{H}_n = \mathcal{H}$$

takav da su pripadne subkvocijentne reprezentacije na $\mathcal{H}_j/\mathcal{H}_{j-1}$, $j = 1, \ldots, n$, sve ireducibilne.

Za reprezentaciju π od G_0 na $\mathcal{H}$ restrikcija $\pi|K_0$ je reprezentacija kompaktne grupe K_0. Neka je $\hat{K}_0$ skup svih klasa ekvivalencije ireducibilnih konačnodimenzionalnih reprezentacija od K_0. Za $\delta \in \hat{K}_0$ označimo sa $\mathcal{H}_\delta$ sumu svih $\pi(K_0)-$invarijantnih konačnodimenzionalnih potprostora V od $\mathcal{H}$ takvih da je pripadna subreprezentacija $(\pi|K_0)_V$ ireducibilna i pripada klasi δ. Tada je svaki potprostor $\mathcal{H}_\delta$, $\delta \in \hat{K}_0$, zatvoren, njihova suma

$$\mathcal{H}_{K_0} = \sum_{\delta \in \hat{K}_0} \mathcal{H}_\delta$$

je direktna i gusta u $\mathcal{H}$ i to je upravo skup svih K_0-konačnih vektora u $\mathcal{H}$. Pri tome za vektor $\xi \in \mathcal{H}$ kažemo da je K_0-*konačan* ako je potprostor

$$\mathrm{span}\{\pi(k);\ k \in K_0\}$$

konačnodimenzionalan. Reprezentacija π zove se "*dopustiva*" ako je svaki potprostor $\mathcal{H}_\delta$, $\delta \in \hat{K}_0$, konačnodimenzionalan. U tom je slučaju za svaki vektor $\xi \in \mathcal{H}_{K_0}$ funkcija $g \mapsto \pi(g)\xi$ ne samo neprekidna nego (realno)analitička. Posebno, ona je diferencijabilna, pa za svaki $x \in \mathfrak{g}_0$ možemo definirati

$$\pi(x)\xi = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\pi(\exp\, tx)\xi\bigg|_{t=0} = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(\pi(\exp\, tx)\xi - \xi).$$

Nadalje, pokazuje se da je na taj način definirana reprezentacija $x \mapsto \pi(x)$ realne Liejeve algebre $\mathfrak{g}_0$ na kompleksnom vektorskom prostoru $\mathcal{H}_{K_0}$. Ona se jedinstveno proširuje do reprezentacije kompleksifikacije $\mathfrak{g}$, a zatim i do reprezentacije njezine univerzalne omotačke algebre $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$. S tom reprezentacijom $\mathcal{H}_{K_0}$ postaje lijevi $\mathcal{U}(\mathfrak{g})-$modul. Očito za svaki zatvoren $\pi(G_0)-$invarijantan potprostor $\mathcal{K}$ od $\mathcal{H}$ vrijedi $\mathcal{K}_{K_0} = \mathcal{K} \cap \mathcal{H}_{K_0}$ i to je $\mathcal{U}(\mathfrak{g})-$podmodul od $\mathcal{H}_{K_0}$. Pokazuje se da je $\mathcal{K} \mapsto \mathcal{K} \cap \mathcal{H}_{K_0}$ bijekcija sa skupa svih zatvorenih $\pi(G_0)-$invarijantnih potprostora od $\mathcal{H}$ na skup svih $\mathcal{U}(\mathfrak{g})-$podmodula od $\mathcal{H}_{K_0}$. Inverzna bijekcija je uzimanje zatvarača $\overline{V}$ $\mathcal{U}(\mathfrak{g})-$podmodula V od $\mathcal{H}_{K_0}$ u Banachovom prostoru $\mathcal{H}$. Posebno, $\mathcal{U}(\mathfrak{g})-$modul $\mathcal{H}_{K_0}$ je konačne duljine (u čisto algebarskom smislu), dakle, on je konačno generiran. Harish$-$Chandra je još prije pedesetak godina dokazao da je svaka ireducibilna unitarna reprezentacija od G_0 na Hilbertovom prostoru dopustiva. Nadalje, dvije su takve reprezentacije π na $\mathcal{H}$ i ρ na $\mathcal{K}$ ekvivalentne pomoću izometričkog izomorfizma $\mathcal{H} \to \mathcal{K}$ ako i samo ako su pripadni $\mathcal{U}(\mathfrak{g})-$moduli $\mathcal{H}_{K_0}$ i $\mathcal{K}_{K_0}$ ekvivalentni (ili izomorfni) u čisto algebarskom smislu. Zbog toga se tako definira i ekvivalencija proizvoljnih dopustivih reprezentacija od G_0 na Banachovim prostorima: one su ekvivalentne (katkada se kaže *infinitezimalno* ekvivalentne) ako su pripadni $\mathcal{U}(\mathfrak{g})-$moduli izomorfni. Pokazuje se da je za ireducibilne reprezentacije to ekvivalentno tzv. Naimarkovoj ekvivalenciji: postoje gusti G_0-invarijantni potprostori $\mathcal{H}_0$ od $\mathcal{H}$ i $\mathcal{K}_0$ od $\mathcal{K}$ i postoji izomorfizam vektorskih prostora $T : \mathcal{H}_0 \to \mathcal{K}_0$ koji je G_0-preplitanje i koji je zatvoren linearan operator iz $\mathcal{H}$ u $\mathcal{K}$.

S druge strane, subreprezentacija od $\pi|K_0$ na bilo kojem kompleksnom konačnodimenzionalnom $\pi|K_0-$invarijantnom potprostoru V od $\mathcal{H}_{K_0}$ je neprekidni homomorfizam grupe K_0 u kompleksnu Liejevu grupu $GL(V)$, prema tome, jedinstveno se proširuje do homomorfizma kompleksnih Liejevih grupa, štoviše, do homomorfizma kompleksnih algebarskih grupa $K \longrightarrow GL(V)$. Na taj način dolazimo do reprezentacije kompleksne algebarske grupe K na kompleksnom vektorskom prostoru $\mathcal{H}_{K_0}$ i ta je reprezentacija algebarska. Pri tome, ako je K kompleksna algebarska grupa i π reprezentacija grupe K na kompleksnom vektorskom prostoru V, kažemo da je reprezentacija π "*algebarska*" ako je V unija konačnodimenzionalnih $\pi(K)-$invarijantnih potprostora V_i, $i \in I$, takvih da je za svaki $i \in I$ preslikavanje $k \mapsto \pi(k)|V_i$ algebarski homomorfizam kompleksnih algebarskih grupa $K \longrightarrow GL(V_i)$.

Na taj način dolazimo do definicije **Harish$-$Chandrinog** $(\mathfrak{g}, K)-$**modula**; to je kompleksan vektorski prostor V sa svojstvima

(a) V je konačno generirani $\mathcal{U}(\mathfrak{g})-$modul.

(b) Na V je zadana algebarska reprezentacija od K.

(c) Djelovanja $\mathfrak{g}$ i K su kompatibilna u sljedećem smislu:

(1) Djelovanje $\mathfrak{k}$ kao Liejeve podalgebre od $\mathfrak{g} \subseteq \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ je upravo diferencijal djelovanja K.

(2) Djelovanje $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ na V, promatrano kao linearno preslikavanje $\mathcal{U}(\mathfrak{g}) \otimes V \longrightarrow V$, je $K-$ekvivarijantno, tj. preplиće reprezentacije od K na $\mathcal{U}(\mathfrak{g}) \otimes V$ i na V; pri tome se djelovanje K na $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ dobiva proširenjem adjungiranog djelovanja K_0 na $\mathfrak{g}_0$: najprije se kompleksifikacijom dobiva djelovanje K_0 na $\mathfrak{g}$, koje se proširuje do djelovanja K na $\mathfrak{g}$, a zatim se to djelovanje jedinstveno proširuje do djelovanja grupe K automorfizmima algebre $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$.

Napominjemo da zapravo u našoj situaciji, kad je $K_0 \subseteq G_0$ povezana, onda je uvjet (2) posljedica uvjeta (1). Ipak se obično navodi zbog generalizacije na slučaj ne nužno povezane reduktivne grupe G_0.

Morfizam Harish−Chandrinih modula je linearno preslikavanje koje preplíće djelovanja $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ i K. (U našoj situaciji svako je $\mathcal{U}(\mathfrak{g})-$preplitanje ujedno i $K-$preplitanje). Na taj način dobivamo kategoriju Harish−Chandrinih modula koju ćemo označavati sa $\mathcal{M}(\mathfrak{g}, K)$; to je Abelova kategorija − u stvari ona je puna potkategorija kategorije $\mathcal{M}(\mathcal{U}(\mathfrak{g}))$ svih lijevih $\mathcal{U}(\mathfrak{g})-$modula.

Neka je $\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$ centar algebre $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ i $\hat{\mathcal{Z}}(\mathfrak{g})$ skup svih unitalnih homomorfizama $\chi : \mathcal{Z}(\mathfrak{g}) \to \mathbb{C}$. Ako je V ireducibilan Harish−Chandrin modul, onda po Dixmierovoj generalizaciji Schurove leme svaki $z \in \mathcal{Z}(\mathfrak{g})$ djeluje na V kao multipl jediničnog operatora $\chi_V(z)I_V$. Tada je, naravno, $\chi_V \in \hat{\mathcal{Z}}(\mathfrak{g})$ i on se zove *infinitezimalni karakter* od V. $\operatorname{Ker}\chi_V$ je anihilator od V u $\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$ i to je ideal u $\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$ kodimenzije 1. Općenito se pokazuje da je dopustiv Harish−Chandrin modul V konačne duljine ako i samo ako je anihilator tog modula u $\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$ ideal konačne kodimenzije.

Prema rečenom problem klasifikacije ireducibilnih dopustivih reprezentacija od G_0 se pridruživanjem $\mathcal{H} \mapsto \mathcal{H}_{K_0}$ svodi na problem klasifikacije ireducibilnih Harish−Chandrinih modula. Taj je problem riješen u nizu opsežnih radova Harish−Chandre, zatim Langlandsa i, napokon, Knappa, Zuckermana i Vogana. U svim se tim radovima izrazito preplíću analitičke i algebarske metode, iako je problem već u starim Harish−Chandrinim radovima sveden na čisto algebarski problem.

Jak motiv za onoga, koji se želi baviti s teorijom reprezentacija, da dobro prouči teoriju $\mathcal{D}-$modula je Beilinson−Bernsteinov teorem o ekvivalenciji potkategorije Harish−Chandrinih modula sa zadanim infinitezimalnim karakterom s jednom precizno opisanom kategorijom zakrenutih (*twisted*) $\mathcal{D}-$modula na višestrukosti zastava Liejeve algebre $\mathfrak{g}$. Pri tome je *višestrukost zastava* kompleksne poluproste Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ skup X svih njezinih Borelovih podalgebri (tj. svih maksimalnih rješivih podalgebri). Kompleksna povezana Liejeva grupa G s Liejevom algebrom $\mathfrak{g}$ tranzitivno djeluje na skupu X. Stoga za bilo koju Borelovu podalgebru $\mathfrak{b} \in X$ preslikavanje $g \mapsto (\operatorname{Ad} g)\mathfrak{b}$ inducira bijekciju kvocijentne mnogostrukosti G/B na X. Pri tome je B stabilizator (ili normalizator) od $\mathfrak{b}$ u grupi G :

$$B = \{g \in G;\ (\operatorname{Ad} g)\mathfrak{b} = \mathfrak{b}\}.$$

Grupa G je algebarska i B je (povezana) zatvorena algebarska podgrupa, pa preko te bijekcije i X dobiva strukturu algebarske višestrukosti (i to glatke). Pokazuje se da je ta višestrukost projektivna (ili potpuna): ona je zatvorena podvišestrukost Grassmannove višestrukosti svih potprostora od $\mathfrak{g}$ dimenzije $m = \dim\, \mathfrak{b}$, $\mathfrak{b} \in X$. S druge strane, Grassmannova je višestrukost izomorfna zatvorenoj podvišestrukosti nekog projektivnog prostora.

Naziv $\mathcal{D}-$moduli upotrebljava se za snopove modula nad nekim snopom algebri diferencijalnih operatora na nekom snopu komutativnih unitalnih algebri na nekom topološkom prostoru X (često ne−Hausdorffovom). U našem je slučaju X (projektivna) algebarska višestrukost svih Borelovih podalgebri od $\mathfrak{g}$ s njenom topologijom Zariskog. Neka je $\mathcal{O}_X$ strukturni snop višestrukosti X.

Budući da je B zatvorena podgrupa od G, X je kao homogeni prostor G/B ne samo algebarska nego i diferencijabilna mnogostrukost (štoviše, kompleksna analitička mnogostrukost). Za svaku točku $x \in X$ diferencijal orbitnog preslikavanja $g \mapsto (\operatorname{Ad} g)x$ definira prirodni morfizam vektorskih svežnjeva s trivijalnog svežnja $X \times \mathfrak{g}$ nad X u tangencijalni svežanj $T(X)$ od X. Uz adjungirano djelovanje G na $\mathfrak{g}$ trivijalni svežanj $X \times \mathfrak{g}$ je $G-$homogen i morfizam $X \times \mathfrak{g} \to T(X)$ je $G-$ekvivarijantan. Jezgra tog morfizma je $G-$homogeni svežanj $\mathcal{B}$ nad X, koji jest lokalno trivijalan, ali nije više trivijalan. Vlakno tog svežnja $\mathcal{B}$ nad točkom $x \in X$ je Borelova podalgebra x koju ćemo u ovoj ulozi označavati sa $\mathfrak{b}_x$. Dakle, $\mathcal{B}$ možemo promatrati kao "*tautološki*" vektorski svežanj Borelovih podalgebri nad mnogostrukosti X. Za $x \in X$ označimo sa $\mathfrak{n}_x = [\mathfrak{b}_x, \mathfrak{b}_x]$

nilpotentni radikal od $\mathfrak{b}_x$. Tada je

$$\mathcal{N} = \{(x,\xi);\ x \in X,\ \xi \in \mathfrak{n}_x\} \subseteq \mathcal{B}$$

$G-$homogeni vektorski podsvežanj od $\mathcal{B}$. Označimo sa $\mathcal{H}$ kvocijentni svežanj $\mathcal{B}/\mathcal{N}$. Nadalje, označimo sa B_x stabilizator točke $x \in X$ u G (odnosno, normalizator podalgebre $\mathfrak{b}_x$). Tada B_x djeluje trivijalno na vlaknu $\mathcal{H}_x$ svežnja $\mathcal{H}$ u točki x. To znači da je $\mathcal{H}$ trivijalni svežanj nad X. Budući da je X projektivna višestrukost, jedini globalni prerezi od $\mathcal{H}$ su konstante. Neka je $\mathfrak{h}$ prostor globalnih prereza od $\mathcal{H}$. Budući da je $\mathcal{H}_x = \mathfrak{b}_x/\mathfrak{n}_x$ komutativna Liejeva algebra za svaku točku $x \in X$, $\mathfrak{h}$ možemo prirodno promatrati kao komutativnu Liejevu algebru. Ta se komutativna Liejeva algebra zove (**apstraktna**) **Cartanova algebra** od $\mathfrak{g}$.

Neka je sada $\mathfrak{c}$ bilo koja Cartanova podalgebra od $\mathfrak{g}$, $R = R(\mathfrak{g},\mathfrak{c})$ sistem korijena para $(\mathfrak{g},\mathfrak{c})$ u dualnom prostoru $\mathfrak{c}^*$ od $\mathfrak{c}$ i R^+ neki izbor pozitivnih korijena u R. Tada $\mathfrak{c}$ i korijenski potprostori $\mathfrak{g}_\alpha$, $\alpha \in R^+$, razapinju Borelovu podalgebru $\mathfrak{b}_x$ za neku točku $x \in X$. Imamo niz lineranih preslikavanja

$$\mathfrak{c} \longrightarrow \mathfrak{b}_x \longrightarrow \mathfrak{b}_x/\mathfrak{n}_x = \mathcal{H}_x$$

i njihova je kompozicija izomorfizam $\mathfrak{c} \longrightarrow \mathcal{H}_x$. S druge strane, i evaluacijsko prelikavanje $\mathfrak{h} \longrightarrow \mathcal{H}_x$ je također izomorfizam. Kompozicijom prethodnog izomorfizma $\mathfrak{c} \longrightarrow \mathcal{H}_x$ s inversom evaluacije $\mathcal{H}_x \longrightarrow \mathfrak{h}$ dobivamo kanonski izomorfizam $\mathfrak{c} \longrightarrow \mathfrak{h}$. Dualno preslikavanje $\mathfrak{h}^* \longrightarrow \mathfrak{c}^*$ je izomorfizam koji zovemo **specijalizacija** u točki $x \in X$. Ona identificira (apstraktni) sistem korijena Σ u $\mathfrak{h}^*$ i skup pozitivnih korijena Σ^+ sa R i R^+. Pokazuje se da Σ i Σ^+ ne ovise o izboru $\mathfrak{c}$ i x. Dakle, konstruirali smo (**apstraktnu**) **Cartanovu trojku** $(\mathfrak{h}^*,\Sigma,\Sigma^+)$. Dualni sistem korijena od Σ u prostoru $\mathfrak{h}$ označavat ćemo sa $\check{\Sigma} = \{\check{\alpha};\ \alpha \in \Sigma\}$.

Neka je $P(\Sigma)$ težinska rešetka u $\mathfrak{h}^*$. Svakoj težini $\lambda \in P(\Sigma)$ pridružujemo $G-$homogeni linearni (tj. jednodimenzionalni) $\mathcal{O}_X-$modul $\mathcal{O}(\lambda)$ na X. Kažemo da je **težina** λ **antidominantna** ako vrijedi $\check{\alpha}(\lambda) \leq 0\ \forall \alpha \in \Sigma^+$.

Pretpostavimo sada da je poluprosta povezana grupa G_0 kompaktna. Tada je $G_0 = K_0$ i G je kompleskifikacija od G_0. U tom su slučaju ireducibilni Harish$-$Chandrini moduli upravo konačnodimenzionalne reprezentacije od G. Zbog jednostavnosti možemo pretpostaviti da je grupa G_0 (dakle, i njena kompleksifikacija G) jednostano povezana. Tada su konačnodimenzionalne reprezentacije od $\mathfrak{g}$ ujedno algebarske reprezentacije od G. Uz opisane oznake i pretpostavke vrijedi:

Teorem 1.0.1. (**Borel$-$Weil**) *Za antidominantnu težinu λ vrijedi:*

(*a*) $H^i(X,\mathcal{O}(\lambda)) = \{0\}$ *za svaki* $i > 0$.

(*b*) *Prostor globalnih prereza* $\Gamma(X,\mathcal{O}(\lambda)) = H^0(X,\mathcal{O}(\lambda))$ *je ireducibilan konačnodimenzionalan $G-$modul s najmanjom težinom λ.*

Sada ćemo opisati Beilinson$-$Bernsteinovu ekvivalenciju kategorija, koja je zapravo generalizacija Borel$-$Weilovog teorema na slučaj nekompaktne G_0.

Neka je $\mathfrak{g}^\circ = \mathcal{O}_X \otimes_{\mathbb{C}} \mathfrak{g}$ snop klica lokalnih prereza trivijalnog svežnja $X \times \mathfrak{g}$. Neka su $\mathfrak{b}^\circ$ i $\mathfrak{n}^\circ$ odgovarajući podsnopovi klica lokalnih prereza svežnjeva $\mathcal{B}$ i $\mathcal{N}$. Diferencijal djelovanja G na X definira prirodni homomorfizam τ Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ u Liejevu algebru vektorskih polja na X. Sada na snopu vektorskih prostora $\mathfrak{g}^\circ$ postoji jedinstvena struktura snopa Liejevih algebri takva da vrijedi

$$[f \otimes \xi, g \otimes \eta] = f\tau(\xi)g \otimes \eta - g\tau(\eta)f \otimes \xi + fg \otimes [\xi,\eta], \qquad f,g \in \mathcal{O}_X, \quad \xi,\eta \in \mathfrak{g}.$$

τ možemo proširiti do prirodnog homomorfizma snopa $\mathfrak{g}^\circ$ u snop Liejevih algebri klica lokalnih vektorskih polja na X. Tada je $\operatorname{Ker}\tau = \mathfrak{b}^\circ$, dakle, $\mathfrak{b}^\circ$ (a time i $\mathfrak{n}^\circ$) je snop ideala u $\mathfrak{g}^\circ$.

Slično, definiramo množenje u snopu $\mathcal{U}^{\circ} = \mathcal{O}_X \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ kao jedinstveno bilinearno preslikavanje $\mathcal{U}^{\circ} \times \mathcal{U}^{\circ} \longrightarrow \mathcal{U}^{\circ}$ za koje vrijedi

$$(f \otimes \xi)(g \otimes \eta) = f\tau(\xi)g \otimes \eta + fg \otimes \xi\eta, \qquad \forall f, g \in \mathcal{O}_X, \quad \forall \xi \in \mathfrak{g}, \quad \forall \eta \in \mathcal{U}(\mathfrak{g}).$$

Na taj način $\mathcal{U}^{\circ}$ postaje snop kompleksnih unitalnih algebri na X. Nadalje, $\mathfrak{g}^{\circ}$ je podsnop Liejevih podalgebri od $\mathcal{U}^{\circ}$ (u odnosu na uobičajen komutator u asocijativnoj algebri). Slijedi da je snop desnih ideala $\mathfrak{n}^{\circ}\mathcal{U}^{\circ}$, generiran sa $\mathfrak{n}^{\circ}$ u $\mathcal{U}^{0}$, zapravo snop dvostranih ideala u $\mathcal{U}^{\circ}$. Dakle, kvocijent $\mathcal{D}_{\mathfrak{h}} = \mathcal{U}^{\circ}/\mathfrak{n}^{\circ}\mathcal{U}^{\circ}$ je snop kompleksnih unitalnih algebri na X.

Prirodni morfizam $\mathfrak{g}^{\circ} \longrightarrow \mathcal{D}_{\mathfrak{h}}$ inducira morfizam snopa Liejevih podalgebri $\mathfrak{b}^{\circ}$ u $\mathcal{D}_{\mathfrak{h}}$ koji iščezava na $\mathfrak{n}^{\circ}$. Dakle, postoji prirodni homomorfizam φ univerzalne omotačke algebre $\mathcal{U}(\mathfrak{h})$ od $\mathfrak{h}$ u algebru globalnih prereza $\Gamma(X, \mathcal{D}_{\mathfrak{h}})$ snopa $\mathcal{D}_{\mathfrak{h}}$. S druge strane, trivijalnost snopa $\mathcal{H}$ i konstantnost njegovih globalnih prereza povlače da je inducirano $G-$djelovanje na $\mathfrak{h}$ trivijalno. Slijedi da φ preslikava $\mathcal{U}(\mathfrak{h})$ u $G-$invarijante $\Gamma(X, \mathcal{D}_{\mathfrak{h}})^G$. Prema tome, za svaki otvoren skup $U \subseteq X$ restrikcija $(\operatorname{Im}\varphi)|U$ sadržana je u centru od $\mathcal{D}_{\mathfrak{h}}(U)$. Može se dokazati da je stvarno φ epimorfizam $\mathcal{U}(\mathfrak{h})$ na $\Gamma(X, \mathcal{D}_{\mathfrak{h}})^G$. Nadalje, prirodni homomorfizam $\mathcal{U}(\mathfrak{g}) \to \Gamma(X, \mathcal{D}_{\mathfrak{h}})$ inducira homomorfizam centra $\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$ od $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ u $\Gamma(X, \mathcal{D}_{\mathfrak{h}})$ i slika tog homomorfizma sadržana je u $\Gamma(X, \mathcal{D}_{\mathfrak{h}})^G = \varphi(\mathcal{U}(\mathfrak{h}))$. Napokon, imamo Harish$-$Chandrin homomorfizam $\gamma : \mathcal{Z}(\mathfrak{g}) \to \mathcal{U}(\mathfrak{h})$ definiran na sljedeći način. Prije svega, za svaku točku $x \in X$ vrijedi $\mathcal{Z}(\mathfrak{g}) \subseteq \mathcal{U}(\mathfrak{b}_x) + \mathfrak{n}_x\mathcal{U}(\mathfrak{g})$, pa prijelazom na kvocijent imamo prirodni homomorfizam

$$\mathcal{Z}(\mathfrak{g}) \longrightarrow \mathcal{U}(\mathfrak{b}_x)/\left(\mathfrak{n}_x\mathcal{U}(\mathfrak{g}) \cap \mathcal{U}(\mathfrak{b}_x)\right) = \mathcal{U}(\mathfrak{b}_x)/\mathfrak{n}_x\mathcal{U}(\mathfrak{b}_x) \cong \mathcal{U}\left(\mathfrak{b}_x/\mathfrak{n}_x\right).$$

Pokazuje se da je kompozicija tog homomorfizma s prirodnim izomorfizmom $\mathcal{U}(\mathfrak{b}_x/\mathfrak{n}_x) \to \mathcal{U}(\mathfrak{h})$ neovisna o izboru točke $x \in X$ i to je upravo Harish$-$Chandrin homomorfizam γ. To znači da je sljedeći homomorfizam algebri komutativan:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{Z}(\mathfrak{g}) & \xrightarrow{\gamma} & \mathcal{U}(\mathfrak{h}) \\ =\downarrow & & \downarrow\varphi \\ \mathcal{Z}(\mathfrak{g}) & \longrightarrow & \Gamma(X, \mathcal{D}_{\mathfrak{h}})^G. \end{array}$$

Sada u $\mathcal{U}(\mathfrak{g}) \otimes_{\mathcal{Z}(\mathfrak{g})} \mathcal{U}(\mathfrak{h})$ možemo na prirodan način uvesti strukturu asocijativne (unitalne) algebre. Tenzorski produkt prirodnog homomorfizma $\mathcal{U}(\mathfrak{g}) \to \Gamma(X, \mathcal{D}_{\mathfrak{h}})$ i prije definiranog homomorfzma $\varphi : \mathcal{U}(\mathfrak{h}) \to \Gamma(X, \mathcal{D}_{\mathfrak{h}})$ definira prirodni homomorfizam unitalnih algebri

$$\Psi : \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \otimes_{\mathcal{Z}(\mathfrak{g})} \mathcal{U}(\mathfrak{h}) \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{D}_{\mathfrak{h}}).$$

Lema 1.0.2. (**Miličić$-$Taylor**) *Ψ je izomorfizam algebri i $H^i(X, \mathcal{D}_{\mathfrak{h}}) = \{0\}$ za $i > 0$.*

Neka je ρ polusuma pozitivnih korijena u Σ. Omotačka algebra $\mathcal{U}(\mathfrak{h})$ od $\mathfrak{h}$ je simetrična algebra na prostorom $\mathfrak{h}$ i prirodno je izomorfna algebri polinomijalnih funkcija na $\mathfrak{h}^*$. Stoga evaluacija u bilo kojoj točki $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ određuje unitalni homomorfizam $\mathcal{U}(\mathfrak{h}) \to \mathbb{C}$. Označimo sa $\varphi_\lambda : \mathcal{U}(\mathfrak{h}) \to \mathbb{C}$ evaluaciju u točki $\lambda + \rho$ i neka je $\mathcal{I}_\lambda = \operatorname{Ker}\varphi_\lambda$. Tada je $\gamma^{-1}(\mathcal{I}_\lambda)$ maksimalni ideal u $\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$ i prema Harish$-$Chandrinom rezultatu vrijedi

$$\gamma^{-1}(\mathcal{I}_\lambda) = \gamma^{-1}(\mathcal{I}_\mu) \qquad \Longleftrightarrow \qquad w\lambda = \mu \quad \text{za neki} \quad w \in W,$$

gdje je W Weylova grupa sistema korijena Σ. Za $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ $\mathcal{I}_\lambda\mathcal{D}_{\mathfrak{h}}$ je snop dvostranih ideala u $\mathcal{D}_{\mathfrak{h}}$; dakle, $\mathcal{D}_\lambda = \mathcal{D}_{\mathfrak{h}}/\mathcal{I}_\lambda\mathcal{D}_{\mathfrak{h}}$ je snop kompleksnih asocijativnih (unitalnih) algebri na X.

U slučaju $\lambda = -\rho$ imamo $\mathcal{I}_{-\rho} = \mathfrak{h}\mathcal{U}(\mathfrak{h})$, dakle, $\mathcal{D}_{-\rho} = \mathcal{U}^o/\mathfrak{b}^o\mathcal{U}^o$ i to je upravo snop diferencijalnih operatora na X. Ako je $\lambda \in P(\Sigma)$, onda je $\mathcal{D}_\lambda$ snop diferencijalnih opoeratora na (invertibilnom) $\mathcal{O}_X-$modulu $\mathcal{O}(\lambda+\rho)$. Općenito je snop algebri $\mathcal{D}_\lambda$ tzv. *zakrenuti snop diferencijalnih operatora* na X. Taj se pojam definira za proizvoljnu glatku kompleksnu algebarsku višestrukost Y na sljedeći način. Neka je $\mathcal{O}_Y$ strukturni snop od Y. Promatramo kategoriju svih uređenih parova $(\mathcal{A}, \iota_\mathcal{A})$, gdje je $\mathcal{A}$ snop kompleksnih unitalnih algebri na Y i $\iota_\mathcal{A} : \mathcal{O}_Y \to \mathcal{A}$ je homomorfizam snopova algebri. Morfizmi u toj kategoriji su homomorfizmi snopova algebri $\alpha : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ takvi da je $\alpha \circ \iota_\mathcal{A} = \iota_\mathcal{B}$. Uređen par $(\mathcal{D}, \iota)$ zove se **zakrenuti snop diferencijalnih operatora** na Y ako Y ima pokrivač otvorenim skupovima $U \subseteq Y$ takvima da je $(\mathcal{D}|U, \iota|U) \cong (\mathcal{D}_U, \iota_U)$.

Neka je Θ $W-$orbita u $\mathfrak{h}^*$ i $\lambda \in \Theta$. Stavimo $\mathcal{J}_\Theta = \gamma^{-1}(\mathcal{I}_\lambda)$. Tada je $\mathcal{J}_\Theta$ maksimalni ideal u $\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$. Neka je $\chi_\lambda \in \hat{\mathcal{Z}}(\mathfrak{g})$ određen sa $\operatorname{Ker}\chi_\lambda = \mathcal{J}_\Theta$. Prirodni homomorfizam $\mathcal{U}(\mathfrak{g}) \to \Gamma(X, \mathcal{D}_\lambda)$ preslikava elemente od $\mathcal{J}_\Theta$ u nul$-$prereze od $\mathcal{D}_\lambda$. Dakle, dobivamo kanonski morfizam

$$\mathcal{U}_\Theta = \mathcal{U}(\mathfrak{g})/\mathcal{J}_\Theta\mathcal{U}(\mathfrak{g}) \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{D}_\lambda).$$

Primijetimo da se kategorija $\mathcal{M}(\mathcal{U}_\Theta)$ identificira s kategorijom $\mathcal{M}(\mathcal{U}(\mathfrak{g}))_\lambda$ u kojoj su objekti $\mathcal{U}(\mathfrak{g})-$moduli s infiniteztimalnim karakterom χ_λ. Korištenjem bilo koje lijeve rezolucije jednodimenzionalnog $\mathfrak{h}-$modula $\mathbb{C}_{\lambda+\rho}$ slobodnim $\mathcal{U}(\mathfrak{h})-$modulima nije teško dokazati da vrijedi:

Teorem 1.0.3. *Morfizam* $\mathcal{U}_\Theta \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{D}_\lambda)$ *je izomorfizam algebri i vrijedi* $H^i(X, \mathcal{D}_\lambda) = \{0\}$ *za svaki* $i > 0$.

Pokazuje se da to znači da se zakrenuti snopovi diferencijalnih operatora $\mathcal{D}_\lambda$ na X mogu shvaćati kao "*snopizirane*" verzije kvocijenata $\mathcal{U}_\Theta$ univerzalne omotačke algebre $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$. To omogućuje da "*lokaliziramo*" $\mathcal{U}_\Theta-$module. Neka je $\mathcal{M}(\mathcal{U}_\Theta)$ kategorija $\mathcal{U}_\Theta-$modula i neka je $\mathcal{M}_{\mathrm{qc}}(\mathcal{D}_\lambda)$ kategorija tzv "*kvazikoherentnih*" $\mathcal{D}_\lambda-$modula na X. Za $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ kažemo da je **antidominantan** ako vrijedi $\check{\alpha}(\lambda) \notin \mathbb{N}$ $\forall \alpha \in \Sigma^+$. To generalizira prije definiran pojam antidominantnosti za težine iz $P(\Sigma)$.

Teorem 1.0.4. (**iščezavanja**) *Neka je* $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ *antidominantan i neka je* $\mathcal{V}$ *kvazikoherentan* $\mathcal{D}_\lambda-$*modul na* X. *Tada je* $H^i(X, \mathcal{V}) = \{0\}$ *za* $i > 0$.

Teorem 1.0.5. (**neiščezavanja**) *Neka je* $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ *antidominantan i regularan i neka je* $\mathcal{V}$ *kvazikoherentan* $\mathcal{D}_\lambda-$*modul takav da je* $\Gamma(X, \mathcal{V}) = \{0\}$. *Tada je* $\mathcal{V} = \{0\}$.

Neka je $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ i neka je Θ njegova $W-$orbita. Imamo desno egzaktan funktor

$$\Delta_\lambda : \mathcal{M}(\mathcal{U}_\Theta) \to \mathcal{M}_{\mathrm{qc}}(\mathcal{D}_\lambda) \quad \text{definiran sa} \quad \Delta_\lambda(V) = \mathcal{D}_\lambda \otimes_{\mathcal{U}_\Theta} V.$$

Δ_λ se zove **funktor lokalizacije**. Pokazuje se da za kvazikoherentan $\mathcal{D}_\lambda-$modul $\mathcal{W}$ vrijedi $\Gamma(X, \mathcal{W}) = \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}_\lambda}(\mathcal{D}_\lambda, \mathcal{W})$, a odatle se izvodi da je funktor Δ_λ lijevo adjungiran funktoru globalnih prereza $\Gamma = \Gamma(X, -)$ sa $\mathcal{M}_{\mathrm{qc}}(\mathcal{D}_\lambda)$ u $\mathcal{M}(\mathcal{U}_\Theta)$:

$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{D}_\lambda}(\Delta_\lambda(V), \mathcal{W}) = \operatorname{Hom}_{\mathcal{U}_\Theta}(V, \Gamma(X, \mathcal{W})), \qquad \forall V \in \operatorname{Ob}\mathcal{M}(\mathcal{U}_\Theta), \quad \forall \mathcal{W} \in \operatorname{Ob}\mathcal{M}_{\mathrm{qc}}(\mathcal{D}_\lambda).$$

Teorem 1.0.6. (**Beilinson$-$Bernsteinova ekvivalencija kategorija**) *Ako je* $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ *antidominantan i regularan, funktor* Δ_λ *je ekvivalencija kategorija s inversom* $\Gamma(X, -)$.

Ovaj se teorem generalizira i na antidominantne λ bez pretpostavke regularnosti. Tada treba $\mathcal{M}_{\mathrm{qc}}(\mathcal{D}_\lambda)$ zamijeniti s kvocijentnom kategorijom $\mathcal{M}_{\mathrm{qc}}(\mathcal{D}_\lambda)$ po potkategoriji svih kvazikoherentnih $\mathcal{D}_\lambda-$modula bez netrivijalnih globalnih prereza, Ova ekvivalencija kategorija omogućuje da prenesemo probleme o $\mathcal{U}_\Theta-$modulima u probleme o $\mathcal{D}_\lambda-$modulima. Korist je toga da se možemo služiti tzv. "*lokalnim*" metodama. Za proučavanje Harish$-$Chandrinih modula uvodi se njihova "*snopozirana*" verzija: **Harish$-$Chandrin snop** je "*koherentan* $\mathcal{D}_\lambda-$modul $\mathcal{V}$ s algebarskim djelovanjem grupe K takvim da su djelovanja $\mathcal{D}_\lambda$ i K na $\mathcal{V}$ kompatibilna:

(1) djelovanje $\mathfrak{k}$ kao Liejeve podalgebre od $\mathfrak{g} \subseteq \mathcal{U}_\Theta = \Gamma(X, \mathcal{D}_\lambda)$ podudara se s diferencijalom djelovanja od K;

(2) djelovanje $\mathcal{D}_\lambda \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{V}$ je $K-$ekvivarijantno.

Morfizmi Harish$-$Chandrinih snopova su $K-$ekvivarijantni morfizmi $\mathcal{D}_\lambda-$modula. Tako dobivamo Abelovu kategoriju $\mathcal{M}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{D}_\lambda, K)$.

Teorem 1.0.7. *Za antidominantan regularan* $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ *funktor* $\Delta_\lambda : \mathcal{M}(\mathcal{U}_\Theta, K) \longrightarrow \mathcal{M}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{D}_\lambda, K)$ *je ekvivalencija kategorija i invers mu je* Γ.

Beilinson$-$Bernsteinov teorem i njegova posljedica 1.0.7. daje sasvim novi geometrijski pogled na teoriju reprezentacija i vodi na klasifikaciju ireducibilnih Harish$-$Chandrinih modula s potpuno algebarskim dokazom (točnije, algebarsko$-$geometrijskim). Namjera nam je da uz detaljno obrađene sve pripreme, koje će uključivati i teoriju snopova i osnove algebarske geometrije, opišemo teoriju $\mathcal{D}-$modula na glatkim algebarskim višestrukostima u dovoljnoj mjeri da bismo mogli precizno iskazati i barem u razumljivoj skici dokazati Beilinson$-$Bernsteinovu ekvivalenciju kategorija i doći do spomenute geometrijske klasifikacije ireducibilnih Harish$-$Chandrinih modula, a možda i dokazati neke značajne posljedice tog pristupa, npr. dokaz Kazhdan$-$Lusztigove slutnje.

Poglavlje 2

ALGEBRE DIFERENCIJALNIH OPERATORA

2.1 Diferencijalni operatori na unitalnoj algebri

U ovom je odjeljku $\mathcal{A}$ komutativna unitalna algebra nad poljem K karakteristike 0. Neka je $\mathrm{End}_K(\mathcal{A})$ unitalna algebra svih endomorfizama (tj. $K-$linearnih operatora) $T : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$.

Za element $a \in \mathcal{A}$ označimo sa $M_a : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ operator množenja s tim elementom:

$$M_a(b) = ab, \qquad a, b \in \mathcal{A}.$$

Naravno, $a \mapsto M_a$ je unitalni homomorfizam algebre $\mathcal{A}$ u algebru $\mathrm{End}_K(\mathcal{A})$.

Lema 2.1.1. *Preslikavanje $a \mapsto M_a$ je izomorfizam algebre $\mathcal{A}$ na podalgebru*

$$\mathrm{End}_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}) = \{T \in \mathrm{End}_K;\ T(ab) = aT(b)\ \forall a, b \in \mathcal{A}\}$$

algebre $\mathrm{End}_K(\mathcal{A})$.

Dokaz: Činjenica da je $M_a \in \mathrm{End}_{\mathcal{A}}(\mathcal{A})$ je očita posljedica komutativnosti algebre $\mathcal{A}$:

$$M_a(bc) = abc = bac = bM_a(c), \qquad a, b, c \in \mathcal{A}.$$

Neka je $T \in \mathrm{End}_{\mathcal{A}}(\mathcal{A})$. Stavimo $a = T(1)$. Tada za bilo koji $b \in \mathcal{A}$ imamo

$$T(b) = T(b1) = bT(1) = ba = ab = M_a(b).$$

Dakle, $T = M_a$, odnosno, homomorfizam $a \mapsto M_a$ je surjekcija sa $\mathcal{A}$ na $\mathrm{End}_{\mathcal{A}}(\mathcal{A})$. To je i injekcija, jer iz $M_a = 0$ slijedi $0 = M_a(1) = a$.

Izomorfizam $a \mapsto M_a$ ćemo upotrebljavati kao identifikaciju algebre $\mathcal{A}$ s podalgebrom $\mathrm{End}_{\mathcal{A}}(\mathcal{A})$. Na taj način $\mathrm{End}_K(\mathcal{A})$ postaje $\mathcal{A}-$modul $-$ u odnosu na množenje $\mathcal{A} \times \mathrm{End}_K(\mathcal{A}) \to \mathrm{End}_K(\mathcal{A})$ dano sa

$$(aT)(b) = aT(b), \qquad T \in \mathrm{End}_K(\mathcal{A}), \quad a, b \in \mathcal{A}.$$

Derivacija algebre $\mathcal{A}$ je operator $D \in \mathrm{End}_K(\mathcal{A})$ sa svojstvom

$$D(ab) = D(a)b + aD(b) \qquad \forall a, b \in \mathcal{A}.$$

Skup svih derivacija algebre $\mathcal{A}$ označavat ćemo sa $\mathrm{Der}(\mathcal{A})$. To je očito potprostor prostora $\mathrm{End}_K(\mathcal{A})$. Algebra $\mathrm{End}_K(\mathcal{A})$ je ne samo asocijativna nego i Liejeva u odnosu na uobičajen komutator $[T, S] = TS - ST$. Lako se vidi da je $\mathrm{Der}(\mathcal{A})$ Liejeva podalgebra te Liejeve algebre.

Lema 2.1.2. *Uz identifikaciju $\mathcal{A}$ s podalgebrom $\mathrm{End}_{\mathcal{A}}(\mathcal{A})$ od $\mathrm{End}_K(\mathcal{A})$ vrijedi*

$$\{T \in \mathrm{End}_K(\mathcal{A});\ [[T,a],b] = 0\ \ \forall a,b \in \mathcal{A}\} = \mathcal{A} \dotplus \mathrm{Der}(\mathcal{A}).$$

Dokaz: Označimo sa $\mathcal{B}$ potprostor svih $T \in \mathrm{End}_K(\mathcal{A})$ sa svojstvom $[[T,a],b] = 0\ \forall a,b \in \mathcal{A}$. Očito je $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$. Nadalje, za $D \in \mathrm{Der}(\mathcal{A})$ i za proizvoljne $a,b \in \mathcal{A}$ vrijedi

$$[D,a](b) = D(ab) - aD(b) = D(a)b.$$

To znači da je $[D,a] = D(a) \in \mathcal{A}$, pa zbog komutativnosti od $\mathcal{A}$ slijedi $[[D,a],b] = 0\ \forall a,b \in \mathcal{A}$. Time je dokazano da je i $\mathrm{Der}(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{B}$.

Za $D \in \mathrm{Der}(\mathcal{A})$ vrijedi

$$D(1) = D(1 \cdot 1) = D(1)1 + 1D(1) = 2D(1) \qquad \Longrightarrow \qquad D(1) = 0.$$

Odatle slijedi $\mathrm{Der}(\mathcal{A}) \cap \mathcal{A} = \{0\}$, odnosno, suma $\mathcal{A} + \mathrm{Der}(\mathcal{A})$ je direktna.

Napokon, neka je $T \in \mathcal{B}$ i stavimo $D = T - T(1)$. Tada je $D \in \mathcal{B}$ i vrijedi $D(1) = 0$, pa za svaki $a \in \mathcal{A}$ imamo

$$[D,a](1) = D(a) - aD(1) = D(a).$$

Nadalje, iz definicije $\mathcal{B}$ i iz $D \in \mathcal{B}$ slijedi da operator $[D,a]$ komutira sa svim $b \in \mathcal{A}$. Stoga za $a,b \in \mathcal{A}$ vrijedi

$$D(ab) = [D,ab](1) = ([D,a]b + a[D,b])(1) = (b[D,a])(1) + (a[D,b])(1) =$$

$$= b[D,a](1) + a[D,b](1) = bD(a) + aD(b).$$

Dakle, dokazali smo da je $D \in \mathrm{Der}(\mathcal{A})$. Kako je $T = D + T(1)$, vidimo da je stvarno direktna suma $\mathcal{A} \dotplus \mathrm{Der}(\mathcal{A})$ jednaka čitavom prostoru $\mathcal{B}$.

Prethodna lema vodi na sljedeću definiciju. Neka je $n \in \mathbb{Z}_+$. Kažemo da je $T \in \mathrm{End}_K(\mathcal{A})$ **diferencijalni operator** na algebri $\mathcal{A}$ **reda** $\leq n$, ako vrijedi

$$[\ldots[[T,a_0,a_1]\ldots,a_n] = 0 \qquad \forall a_0,a_1,\ldots,a_n \in \mathcal{A}.$$

Vektorski potprostor od $\mathrm{End}_K(\mathcal{A})$ svih takvih označavat ćemo sa $\mathrm{Diff}_n(\mathcal{A})$. Tada je $(\mathrm{Diff}_n(\mathcal{A}))_{n\in\mathbb{Z}_+}$ rastući niz potprostora od $\mathrm{End}_K(\mathcal{A})$. Njihova unija je potprostor $-$ vektorski prostor svih diferencijalnih operatora na $\mathcal{A}$ $-$ koji ćemo označavati sa $\mathrm{Diff}(\mathcal{A})$. Uočimo da vrijedi

$$\mathrm{Diff}_n(\mathcal{A}) = \{T \in \mathrm{End}_K(\mathcal{A});\ [T,a] \in \mathrm{Diff}_{n-1}(\mathcal{A})\ \forall a \in \mathcal{A}\}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Štoviše, ako stavimo $\mathrm{Diff}_{-1}(\mathcal{A}) = \{0\}$, onda ta jednakost vrijedi i za $n = 0$, budući da je prema lemi 2.1.1.

$$\mathrm{Diff}_0(\mathcal{A}) = \mathrm{End}_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}) = \mathcal{A}.$$

Prema lemi 2.1.2. je

$$\mathrm{Diff}_1(\mathcal{A}) = \mathcal{A} \dotplus \mathrm{Der}(\mathcal{A}),$$

tj. $\mathrm{Der}(\mathcal{A})$ je direktni komplement od $\mathrm{Diff}_0(\mathcal{A})$ u $\mathrm{Diff}_1(\mathcal{A})$. Općenito stavljamo $\mathrm{Diff}_n(\mathcal{A}) = \{0\}$ za svaki $n < 0$.

Lema 2.1.3. *Ako su $T \in \mathrm{Diff}_n(\mathcal{A})$ i $S \in \mathrm{Diff}_m(\mathcal{A})$, onda je $TS \in \mathrm{Diff}_{n+m}(\mathcal{A})$. Posebno, kako je $\mathrm{Diff}_0(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$, svaki potprostor $\mathrm{Diff}_n(\mathcal{A})$ je $\mathcal{A}$−podmodul od $\mathrm{End}_K(\mathcal{A})$.*

Dokaz: Dokaz provodimo indukcijom po $n+m$. Naravno, možemo pretpostavljati da su $n \geq 0$ i $m \geq 0$. Ako je $n+m=0$, tj. $n=m=0$, onda je tvrdnja trivijalna jer je $\mathrm{Diff}_0(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$. Pretpostavimo sada da je $p > 0$ i da je tvrdnja dokazana ako je $n+m < p$. Neka je $n+m=p$. Za svaki $a \in \mathcal{A}$ imamo

$$[TS, a] = TSa - aTS = TSa - TaS + TaS - aTS = T[S,a] + [T,a]S.$$

Po definiciji diferencijalnih operatora je $[T,a] \in \mathrm{Diff}_{n-1}(\mathcal{A})$ i $[S,a] \in \mathrm{Diff}_{m-1}(\mathcal{A})$. Stoga po pretpostavci indukcije vrijedi

$$T[S,a] \in \mathrm{Diff}_{n+m-1}(\mathcal{A}) \qquad \text{i} \qquad [T,a]S \in \mathrm{Diff}_{n-1+m}(\mathcal{A}).$$

Slijedi

$$[TS, a] \in \mathrm{Diff}_{n+m-1}(\mathcal{A}) \qquad \forall a \in \mathcal{A},$$

a to upravo znači da je $TS \in \mathrm{Diff}_{n+m}(\mathcal{A})$.

Prethodna lema pokazuje da je $\mathrm{Diff}(\mathcal{A})$ unitalna podalgebra od $\mathrm{End}_K(\mathcal{A})$. Zovemo je **algebra diferencijalnih operatora** na algebri $\mathcal{A}$. Nadalje, lema pokazuje da je $(\mathrm{Diff}_m(\mathcal{A}))_{n\in\mathbb{Z}}$ njena rastuća filtracija.

Lema 2.1.4. $[\mathrm{Diff}_n(\mathcal{A}), \mathrm{Diff}_m(\mathcal{A})] \subseteq \mathrm{Diff}_{n+m-1}(\mathcal{A})$ $\forall n, m \in \mathbb{Z}$.

Dokaz: Naravno, možemo pretpostavljati da je $n \geq 0$ i $m \geq 0$. Ponovo dokazujemo indukcijom po $n+m$. Ako je $n+m=0$, tj. $n=m=0$, tvrdnja je trivijalna jer je $\mathrm{Diff}_0(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$ komutativna algebra. Za korak indukcije uočimo da po Jacobijevom identitetu za komutator u asocijativnoj algebri i za $T \in \mathrm{Diff}_n(\mathcal{A})$, $S \in \mathrm{Diff}_m(\mathcal{A})$ i $a \in \mathcal{A}$ imamo

$$[[T,S],a] = [[T,a],S] + [T,[S,a]].$$

Budući da su $[T,a] \in \mathrm{Diff}_{n-1}(\mathcal{A})$ i $[S,a] \in \mathrm{Diff}_{m-1}(\mathcal{A})$, po pretpostavci indukcije oba člana s desne strane leže u $\mathrm{Diff}_{n+m-2}(\mathcal{A})$. Dakle,

$$[[T,S],a] \in \mathrm{Diff}_{n+m-2}(\mathcal{A}) \qquad \forall a \in \mathcal{A},$$

a to znači da je $[T,S] \in \mathrm{Diff}_{n+m-1}(\mathcal{A})$.

Lema 2.1.4. ima za posljedicu da je graduirana algebra $\mathrm{GrDiff}(\mathcal{A})$ komutativna.

Za $n \in \mathbb{N}$ i $T \in \mathrm{Diff}_n(\mathcal{A})$ definiramo preslikavanje $\sigma_n(T) : \mathcal{A}^n \to \mathrm{Diff}(\mathcal{A})$ ovako

$$\sigma_n(T)(a_1, \ldots, a_n) = [[\ldots[[T,a_1],a_2],\ldots,a_{n-1}],a_n].$$

Tada je zapravo $\sigma_n(T)(a_1,\ldots,a_n) \in \mathrm{Diff}_0(\mathcal{A})$, pa možemo $\sigma_n(T)$ promatrati kao preslikavanje sa $\mathcal{A}^n$ u $\mathcal{A}$.

Lema 2.1.5. *Neka je $n \in \mathbb{N}$ i $T \in \mathrm{Diff}_n(\mathcal{A})$., Tada vrijedi:*

(*a*) *$\sigma_n(T) : \mathcal{A}^n \to \mathcal{A}$ je simetrično $K-$multilinearno preslikavanje.*

(*b*) *$\sigma_n(T) = 0$ ako i samo ako je $T \in \mathrm{Diff}_{n-1}(\mathcal{A})$.*

Dokaz: (a) $K-$multilinearnost preslikavanja $\sigma_n(T)$ je evidentna. Treba dokazati simetričnost. Po Jacobijevom identitetu zbog komutativnosti algebre $\mathcal{A}$ imamo

$$[[S,a],b] = [[S,b],a] \qquad \forall S \in \mathrm{Diff}(\mathcal{A}) \quad \text{i} \quad \forall a,b \in \mathcal{A}.$$

Primijenimo li to na $S = [[T,a_1],\ldots,a_{i-1}]$ (odnosno, $S = T$ za $i = 1$), $a = a_i$ i $b = a_{i+1}$, nalazimo

$$\sigma_n(T)(a_1,\ldots,a_i,a_{i+1},\ldots,a_n) = [[\ldots[[\ldots[[T,a_1],a_2],\ldots,a_i],a_{i+1}],\ldots,a_{n-1}],a_n] =$$

$$= [[\ldots[[\ldots[[T,a_1],a_2],\ldots,a_{i+1}],a_i],\ldots,a_{n-1}],a_n] = \sigma_n(T)(a_1,\ldots,a_{i+1},a_i,\ldots,a_n).$$

Budući da transpozicije susjednih indeksa generiraju čitavu grupu permutacija, zaključujemo da je preslikavanje $\sigma_n(T)$ stvarno simetrično.

Tvrdnja (b) izlazi neposredno iz definicije operatora iz $\mathrm{Diff}_{n-1}(\mathcal{A})$.

2.2 Diferencijalni operatori s polinomijalnim koeficijentima

U ovom ćemo odjeljku promatrati slučaj kad je $\mathcal{A}$ algebra polinoma, $\mathcal{A} = K[X_1, \dots, X_n]$. Tada se algebra

$$\mathcal{A}_n = \mathcal{A}_n(K) = \mathrm{Diff}\,(K[X_1, \dots, X_n])$$

zove **algebra diferencijalnih operatora na K^n s polinomijalnim koeficijentima**. Za algebru $\mathcal{A}_n$ upotrebljava se i naziv ($n-$ta) **Weylova algebra** nad poljem K. Za filtracione potprostore po redu diferencijalnih operatora pisat ćemo

$$\mathrm{F}_k\mathcal{A}_n = \mathrm{Diff}_k\,(K[X_1, \dots, X_n])\,.$$

Neka su ∂_i, $1 \le i \le n$, standardne derivacije od $K[X_1, \dots, X_n]$:

$$\partial_i\,(X^\alpha) = \alpha_i X^{\alpha - \varepsilon_i}, \qquad \alpha \in \mathbb{Z}_+^n.$$

Pri tome je ε_i $i-$ti element standardne baze od $\mathbb{Z}_+^n$, tj. $n-$torka koja ima na $i-$tom mjestu 1, a svi su joj ostali elementi 0. Naravno, za $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_+^n$ je

$$X^\alpha = X_1^{\alpha_1} \cdots X_n^{\alpha_n}, \quad \text{a stavljamo i} \quad \partial^\alpha = \partial_1^{\alpha_1} \cdots \partial_n^{\alpha_n}.$$

Budući da su $\partial_i \in \mathrm{Der}\,(K[X_1, \dots, X_n]) \subseteq \mathrm{F}_1\mathcal{A}_n$, prema lemi 2.1.3. je $\partial^\alpha \in \mathrm{F}_{|\alpha|}\mathcal{A}_n$, gdje je kao i prije $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$. Prema tome je

$$\sum_{|\alpha| \le k} P_\alpha \partial^\alpha \in \mathrm{F}_k\mathcal{A}_n$$

za bilo koje polinome $P_\alpha \in K[X_1, \dots, X_n]$.

Lema 2.2.1. $\mathrm{Der}\,(K[X_1, \dots, X_n])$ *je slobodan* $K[X_1, \dots, X_n]-$*modul ranga* n *s bazom* $\{\partial_1, \dots, \partial_n\}$.

Dokaz: Neka je $T \in \mathrm{Der}\,(K[X_1, \dots, X_n])$ i stavimo $P_j = T(X_j) \in K[X_1, \dots, X_n]$. Neka je

$$S = \sum_{j=1}^n P_j \partial_j \in \mathrm{Der}\,(K[X_1, \dots, X_n])\,.$$

Tada je

$$S(X_i) = \sum_{j=1}^n P_j \partial_j(X_i) = P_i = T(X_i).$$

Budući da $X_1, \dots, X_n$ generiraju unitalnu algebru $K[X_1, \dots, X_n]$, slijedi $T = S$. Dakle, $\partial_1, \dots, \partial_n$ generiraju $K[X_1, \dots, X_n]-$modul $\mathrm{Der}\,(K[X_1, \dots, X_n])$.

Napokon, ako su $Q_1, \dots, Q_n \in K[X_1, \dots, X_n]$ takvi da je $\sum_{j=1}^n Q_j \partial_j = 0$, onda je

$$0 = \left(\sum_{j=1}^n Q_j \partial_j\right)(X_i) = \sum_{j=1}^n Q_j \partial_j(X_i) = Q_i \qquad \forall i \in \{1, \dots, n\}.$$

To pokazuje da je $\mathrm{Der}\,(K[X_1, \dots, X_n])$ slobodan $K[X_1, \dots, X_n]-$modul i $\{\partial_1, \dots, \partial_n\}$ mu je baza.

Definirat ćemo sada za svaki $p \in \mathbb{Z}$ preslikavanje $\mathrm{Symb}_p : \mathrm{F}_p\mathcal{A}_n \to K[X_1, \ldots, X_n, \xi_1, \ldots, \xi_n]$, koje se zove $p-$**simbol diferencijalnog operatora**. Neka je $T \in \mathrm{F}_p\mathcal{A}_n$. Za $p < 0$ je $T = 0$ i stavljamo $\mathrm{Symb}_p(T) = 0$. Ako je $p = 0$, onda je $T \in K[X_1, \ldots, X_n]$ i stavljamo $\mathrm{Symb}_p(T) = T$. Za $p \geq 1$ polinom $\mathrm{Symb}_p(T)$ definiramo na sljedeći način. Neka je $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in K^n$. Definiramo linearni polinom

$$\ell_\xi = \sum_{i=1}^{n} \xi_i X_i \in K[X_1, \ldots, X_n]$$

i funkciju

$$\xi \mapsto \frac{1}{p!}\sigma_p(T)(\ell_\xi, \ldots, \ell_\xi) = \frac{1}{p!}[\ldots[[T, \ell_\xi], \ell_\xi], \ldots, \ell_\xi]$$

na K^n s vrijednostima u $K[X_1, \ldots, X_n]$. Ta se funkcija može promatrati kao polinom u $X_1, \ldots, X_n$, $\xi_1, \ldots, \xi_n$ i taj polinom označavamo sa $\mathrm{Symb}_p(T)$. Uočimo da je polinom $\mathrm{Symb}_p(T)$ homogen stupnja p u varijablama $\xi_1, \ldots, \xi_n$. Po definiciji i po lemi 2.1.5. je $\mathrm{Symb}_p(T) = 0$ ako je $T \in \mathrm{F}_{p-1}\mathcal{A}_n$. Dakle, za svaki $p \in \mathbb{Z}$ preslikavanje Symb_p definira $K-$linearno preslikavanje

$$\mathrm{Gr}^p\mathcal{A}_n \longrightarrow K[X_1, \ldots, X_n, \xi_1, \ldots, \xi_n].$$

Direktna suma svih tih preslikavanja daje linearno preslikavanje

$$\mathrm{Symb} : \mathrm{Gr}\,\mathcal{A}_n \longrightarrow K[X_1, \ldots, X_n, \xi_1, \ldots, \xi_n].$$

Teorem 2.2.2. Symb *je izomorfizam* $K-$*algebri.*

Dokaz provodimo u nekoliko koraka. Prvo dokazujemo da je Symb homomorfizam $K-$algebri:

Lema 2.2.3. *Za* $T \in \mathrm{F}_p\mathcal{A}_n$ *i* $S \in \mathrm{F}_q\mathcal{A}_n$ *vrijedi*

$$\mathrm{Symb}_{p+q}(TS) = \mathrm{Symb}_p(T)\mathrm{Symb}_q(S).$$

Dokaz: Za $\xi \in K^n$ definiramo preslikavanje

$$\tau_\xi : \mathcal{A}_n \longrightarrow \mathcal{A}_n, \qquad \tau_\xi(T) = [T, \ell_\xi], \quad T \in \mathcal{A}_n.$$

Tada za $T \in \mathrm{F}_p\mathcal{A}_n$ imamo

$$\mathrm{Symb}_p(T) = \frac{1}{p!}\sigma_p(T)(\ell_\xi, \ldots, \ell_\xi) = \frac{1}{p!}\tau_\xi^p(T).$$

Preslikavanje τ_ξ je derivacija algebre $\mathcal{A}_n$: za $T, S \in \mathcal{A}_n$ imamo

$$\tau_\xi(TS) = [TS, \ell_\xi] = [T, \ell_\xi]S + T[S, \ell_\xi] = \tau_\xi(T)S + T\tau_\xi(S).$$

Indukcijom po $k \in \mathbb{Z}_+$ nalazimo da vrijedi

$$\tau_\xi^k(TS) = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \tau_\xi^{k-j}(T)\tau_\xi^j(S), \qquad T, S \in \mathcal{A}_n, \quad k \in \mathbb{Z}_+.$$

Uzmimo sada da su $T \in \mathrm{F}_p\mathcal{A}_n$ i $S \in \mathrm{F}_q\mathcal{A}_n$. Tada je $\tau_\xi^m(T) = 0$ za $m > p$ i $\tau_\xi^m(S) = 0$ za $m > q$. Stoga za $0 \leq j \leq p + q$ vrijedi $\tau_\xi^{p+q-j}(T) = 0$ za $j < q$ i $\tau_\xi^j(S) = 0$ za $j > q$, pa imamo

$$\tau_\xi^{p+q-j}(T)\tau_\xi^j(S) = \begin{cases} \tau_\xi^p(T)\tau_\xi^q(S) & \text{ako je } j = q \\ 0 & \text{ako je } j \neq q, \end{cases} \qquad 0 \leq j \leq p + q.$$

Dakle,

$$\mathrm{Symb}_{p+q}(TS) = \frac{1}{(p+q)!}\tau_\xi^{p+q}(TS) = \sum_{j=0}^{p+q} \frac{1}{(p+q)!}\binom{p+q}{j}\tau_\xi^{p+q-j}(T)\tau_\xi^j(S) =$$

$$= \frac{1}{p!q!}\tau_\xi^p(T)\tau_\xi^q(S) = \mathrm{Symb}_p(T)\mathrm{Symb}_q(S).$$

Lema 2.2.4. *Ako je*

$$T = \sum_{|\alpha| \leq p} P_\alpha(X_1, \ldots, X_n)\partial^\alpha \in \mathrm{F}_p\mathcal{A}_n,$$

gdje su $P_\alpha \in K[X_1, \ldots, X_n]$, *onda je*

$$\mathrm{Symb}_p(T) = \sum_{|\alpha|=p} P_\alpha(X_1, \ldots, X_n)\xi^\alpha.$$

Posebno, homomorfizam $\mathrm{Symb} : \mathrm{Gr}\,\mathcal{A}_n \to K[X_1, \ldots, X_n, \xi_1, \ldots, \xi_n]$ *je surjektivan.*

Dokaz: Očito je $\mathrm{Symb}_0(X_i) = X_i$ i $\mathrm{Symb}_1(\partial_i) = \xi_i$. Sada pomoću leme 2.2.3. nalazimo da za $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^n$ i za $|\beta| \leq p$ vrijedi

$$\mathrm{Symb}_p(X^\alpha\partial^\beta) = \begin{cases} X^\alpha\xi^\beta & \text{ako je } |\beta| = p \\ 0 & \text{ako je } |\beta| < p. \end{cases}$$

Odatle slijedi tvrdnja leme, jer je preslikavanje $\mathrm{Symb}_p : \mathrm{F}_p\mathcal{A}_n \to K[X_1, \ldots, X_n, \xi_1, \ldots, \xi_n]$ linearno.

Ostaje još da se dokaže injektivnost homomorfizma $\mathrm{Symb} : \mathrm{Gr}\,\mathcal{A}_n \to K[X_1, \ldots, X_n, \xi_1, \ldots, \xi_n]$. To slijedi iz leme:

Lema 2.2.5. $\mathrm{Ker}\,\mathrm{Symb}_p = \mathrm{F}_{p-1}\mathcal{A}_n$.

Dokaz: Već smo uočili da je $\mathrm{F}_{p-1}\mathcal{A}_n \subseteq \mathrm{Ker}\,\mathrm{Symb}_p$. Dokaz obrnute inkluzije provodimo indukcijom po $p \geq 0$. Tvrdnja je trivijalna za $p = 0$: $\mathrm{Symb}_0(P) = P$ za svaki $P \in K[X_1, \ldots, X_n] = \mathrm{F}_0\mathcal{A}_n$. Pretpostavimo da je $p > 0$ i prijeđimo na korak indukcije. Pretpostavimo da je $T \in \mathrm{F}_p\mathcal{A}_n$ takav da je $\mathrm{Symb}_p(T) = 0$. Neka je za $\xi \in K^n$ preslikavanje $\tau_\xi : \mathcal{A}_n \to \mathcal{A}_n$ definirano kao u dokazu leme 2.2.3.:

$$\tau_\xi(S) = [S, \ell_\xi], \qquad \ell_\xi = \xi_1 X_1 + \cdots + \xi_n X_n.$$

Tada za $\lambda \in K$ i $\xi, \eta \in K^n$ imamo $\ell_{\xi+\lambda\eta} = \ell_\xi + \lambda\ell_\eta$, dakle,

$$\tau_{\xi+\lambda\eta}(S) = [S, \ell_{\xi+\lambda\eta}] = [S, \ell_\xi] + \lambda[S, \ell_\eta] = \tau_\xi(S) + \lambda\tau_\eta(S).$$

Budući da elementi ℓ_ξ i ℓ_η algebre $\mathcal{A}_n$ komutiraju, pomoću Jacobijevog identiteta nalazimo da operatori τ_ξ i τ_η komutiraju. Stoga imamo

$$0 = \mathrm{Symb}_p(T)(X_1, \ldots, X_n, \xi_1 + \lambda\eta_1, \ldots, \xi_n + \lambda\eta_n) = \frac{1}{p!}(\tau_\xi + \lambda\tau_\eta)^p(T) = \frac{1}{p!}\sum_{j=0}^{p}\binom{p}{j}\lambda^j\tau_\xi^{p-j}\left(\tau_\eta^j(T)\right).$$

Budući da je polje K beskonačno, zaključujemo da za svaki $j \in \{0, \ldots, p\}$ vrijedi

$$\tau_\xi^{p-j}\left(\tau_\eta^j(T)\right) = 0 \qquad \forall \xi, \eta \in K^n.$$

Posebno,

$$\tau_\xi^{p-1}\left(\tau_\eta(T)\right) = 0 \qquad \forall \xi, \eta \in K^n.$$

To znači da je

$$\mathrm{Symb}_{p-1}([T, \ell_\eta]) = 0 \qquad \forall \eta \in K^n.$$

Kako je $\ell_{\varepsilon_i} = X_i$, slijedi

$$\mathrm{Symb}_{p-1}\left([T, X_i]\right) = 0 \qquad 1 \leq i \leq n.$$

Po pretpostavci indukcije to znači da vrijedi

$$[T, X_i] \in \mathrm{F}_{p-2}\mathcal{A}_n, \qquad 1 \leq i \leq n.$$

Uočimo sada da za $P, Q \in K[X_1, \ldots, X_n]$ imamo

$$[T, PQ] = [T, P]Q + P[T, Q].$$

Odatle slijedi da je red operatora $[T, PQ]$ manji ili jednak većem od redova operatora $[T, P]$ i $[T, Q]$. Budući da elementi $X_1, \ldots, X_n$ generiraju algebru $K[X_1, \ldots, X_n]$, zaključujemo da je

$$[T, P] \in \mathrm{F}_{p-2}\mathcal{A}_n = \mathrm{Diff}_{p-2}\left(K[X_1, \ldots, X_n]\right) \qquad \forall P \in K[X_1, \ldots, X_n].$$

No to upravo znači da je $T \in \mathrm{Diff}_{p-1}\left(K[X_1, \ldots, X_n]\right) = \mathrm{F}_{p-1}\mathcal{A}_n$.

Time je u potpunosti dokazan teorem 2.2.2.

Prsten polinoma $K[X_1, \ldots, X_n, \xi_1, \ldots, \xi_n]$ je Noetherin. Dakle, graduirana algebra $\mathrm{Gr}\,\mathcal{A}_n$ je komutativan Noetherin prsten. Nadalje, za lijevi (ili desni) ideal $\mathcal{I}$ u $\mathcal{A}_n$,

$$\mathrm{Gr}\,\mathcal{I} = \bigoplus_{p \in \mathbb{Z}_+} \left(\mathrm{F}_p\mathcal{A}_n \cap \mathcal{I}\right) / \left(\mathrm{F}_{p-1}\mathcal{A}_n \cap \mathcal{I}\right)$$

je ideal u $\mathrm{Gr}\,\mathcal{A}_n$. Očito vrijedi

$$\mathcal{I} \subseteq \mathcal{J} \qquad \Longrightarrow \qquad \mathrm{Gr}\,\mathcal{I} \subseteq \mathrm{Gr}\,\mathcal{J}.$$

No vrijedi i obrnuta implikacija, jer se iz $\mathrm{Gr}\,\mathcal{I} \subseteq \mathrm{Gr}\,\mathcal{J}$ indukcijom po p lako dokazuje da vrijedi $\mathrm{F}_p\mathcal{A}_n \cap \mathcal{I} \subseteq \mathrm{F}_p\mathcal{A}_n \cap \mathcal{J}$ $\forall p \in \mathbb{Z}$, odakle slijedi $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{J}$. Odatle neposredno slijedi:

Teorem 2.2.6. *Prsten $\mathcal{A}_n$ je i lijevo i desno Noetherin.*

Važna je posljedica teorema 2.2.2. sljedeći korolar:

Korolar 2.2.7. *$\{X^\alpha \partial^\beta;\ \alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^n\}$ je baza vektorskog prostora $\mathcal{A}_n$. Preciznije, za svaki $p \geq 0$ je $\{X^\alpha \partial^\beta;\ \alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^n,\ |\beta| = p\}$ je baza direktnog komplementa od $\mathrm{F}_{p-1}\mathcal{A}_n$ u $\mathrm{F}_p\mathcal{A}_n$.*

Dokaz: Ako je $|\beta| = p$, vrijedi $\mathrm{Symb}_p(X^\alpha \partial^\beta = X^\alpha \xi^\beta$. Stoga druga tvrdnja slijedi iz činjenice da je $\{X^\alpha \xi^\beta;\ \alpha, \beta \in K^n,\ |\beta| = p\}$ baza prostora svih polinoma u $X_1, \ldots, X_n, \xi_1, \ldots, \xi_n$ koji su homogeni stupnja p u varijablama $\xi_1, \ldots, \xi_n$. Iz druge tvrdnje slijedi prva tvrdnja.

Korisna je sljedeća karakterizacija Weylove algebre:

Teorem 2.2.8. *$K-$algebra $\mathcal{A}_n$ je unitalna algebra generirana sa $X_1, \ldots, X_n, \partial_1, \ldots, \partial_n$ uz relacije*

$$[X_i, X_j] = 0, \qquad [\partial_i, \partial_j] = 0, \qquad [\partial_i, X_j] = \delta_{ij}, \qquad 1 \leq i, j \leq n.$$

Drugim riječima, ako je $\mathcal{B}$ unitalna $K-$algebra, preslikavanje $\varphi : \{X_1, \ldots, X_n, \partial_1, \ldots, \partial_n\} \to \mathcal{B}$ proširuje se do unitalnog homomorfizma (očito jednstvenog) algebre $\mathcal{A}_n$ u algebru $\mathcal{B}$ ako i samo ako vrijedi

$$[\varphi(X_i), \varphi(X_j)] = 0, \qquad [\varphi(pa_i), \varphi(\partial_j)] = 0, \qquad [\varphi(\partial_i), \varphi(X_j)] = \delta_{ij}, \qquad \forall i, j \in \{1, \ldots, n\}.$$

Posebno, ako je M vektorski prostor nad poljem K i ako su $A_1, \ldots, A_n, B_1, \ldots, B_n \in \mathrm{End}_K(M)$ operatori koji zadovoljavaju komutacione relacije

$$[A_i, A_j] = 0, \qquad [B_i, B_j] = 0, \qquad [B_i, A_j] = \delta_{ij} I_M, \qquad 1 \leq i, j \leq n,$$

onda na prostoru M postoji jedinstvena struktura lijevog $\mathcal{A}_n-$modula takva da je

$$X_i \cdot m = A_i m, \qquad \partial_i \cdot m = B_i m, \qquad m \in M, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Dokaz: Neka je $\mathcal{C}$ unitalna $K-$algebra generirana elementima $\xi_1, \ldots, \xi_n, \eta_1, \ldots, \eta_n$ i relacijama

$$[\xi_i, \xi_j] = 0, \qquad [\eta_i, \eta_j] = 0, \qquad [\eta_i, \xi_j] = \delta_{ij}, \qquad 1 \leq i, j \leq n.$$

Tada postoji jedinstven unitalni homomorfizam $\varphi : \mathcal{C} \to \mathcal{A}_n$ takav da je $\varphi(\xi_i) = X_i$ i $\varphi(\eta_i) = \partial_i$. Budući da je unitalna algebra $\mathcal{A}_n$ po korolaru 2.2.7. generirana elementima $X_1, \ldots, X_n, \partial_1, \ldots, \partial_n$, homomorfizam φ je surjektivan. Treba još dokazati injektivnost. Neka je $\omega \in \mathcal{C}$ takav da je $\varphi(\omega) = 0$. Iz relacija je jasno da je vektorski prostor $\mathcal{C}$ razapet skupom $\{\xi^\alpha \eta^\beta;\ \alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^n\}$. Stoga postoje $c_{\alpha\beta} \in K$, njih samo konačno mnogo različitih od nule, takvi da je

$$\omega = \sum_{\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^n} c_{\alpha\beta} \xi^\alpha \eta^\beta.$$

Tada je

$$0 = \varphi(\omega) = \sum_{\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^n} c_{\alpha\beta} \varphi\left(\xi^\alpha \eta^\beta\right) = \sum_{\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^n} c_{\alpha\beta} X^\alpha \partial^\beta.$$

Međutim, po korolaru 2.2.7. elementi $X^\alpha \partial^\beta$ su linearno nezavisni, pa slijedi da je $c_{\alpha\beta} = 0$ za sve $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^n$. Dakle, $\omega = 0$ i dokazana je injektivnost homomorfizma φ.

Propozicija 2.2.9. *K je centar algebre $\mathcal{A}_n$.*

Dokaz: Neka je $T \in \mathcal{A}_n$ element centra. Tada je posebno $[T, P] = 0$ za svaki polinom P. To znači da je $T \in \mathrm{Diff}_0(K[X_1, \ldots, X_n]) = K[X_1, \ldots, X_n]$. Nadalje,

$$0 = [\partial_i, T] = \partial_i(T) \quad \text{za} \ \ i = 1, \ldots, n$$

pokazuje da je T konstantni polinom, tj. $T \in K$.

Neka je $\mathcal{A}_n^{\mathrm{o}}$ suprotna algebra od $\mathcal{A}_n$. Pomoću teorema 2.2.8. vidimo da postoji jedinstven izomorfizam $\varphi : \mathcal{A}_n \to \mathcal{A}_n^{\mathrm{o}}$ takav da je

$$\varphi(X_i) = X_i, \qquad \varphi(\partial_i) = -\partial_i, \qquad 1 \leq i \leq n.$$

Tada je φ antiautomorfizam od $\mathcal{A}_n$ i on se zove **glavni antiautomorfizam** Weylove algebre $\mathcal{A}_n$. On je očito involutivan, odnosno, vrijedi $\varphi^2 = I_{\mathcal{A}_n}$.

Postojanje antiautomorfizma između osatlog znači:

Propozicija 2.2.10. *Suprotna algebra $\mathcal{A}_n^{\mathrm{o}}$ izomorfna je algebri $\mathcal{A}_n$.*

Između ostalog to znači da je kategorija $\mathcal{M}^L(\mathcal{A}_n)$ lijevih $\mathcal{A}_n-$modula prirodno izomorfna kategoriji $\mathcal{M}^R(\mathcal{A}_n)$ desnih $\mathcal{A}_n-$modula. Prirodno su izomorfne i pune kategorije konačno generiranih $\mathcal{A}_n-$modula $\mathcal{M}_f^L(\mathcal{A}_n)$ i $\mathcal{M}_f^R(\mathcal{A}_n)$.

Pomoću teorema 2.2.8. vidimo također da postoji jedinstven homomorfizam $\mathcal{F} : \mathcal{A}_n \to \mathcal{A}_n$ takav da je

$$\mathcal{F}(X_i) = \partial_i, \qquad \mathcal{F}(\partial_i) = -X_i, \qquad 1 \leq i \leq n.$$

Očito je $\mathcal{F}$ automorfizam algebre $\mathcal{A}_n$. On se zove **Fourierov automorfizam** od $\mathcal{A}_n$. Njegov kvadrat $\iota = \mathcal{F}^2$ je automorfizam sa svojstvima

$$\iota(X_i) = -X_i, \qquad \iota(\partial_i) = -\partial_i, \qquad 1 \leq i \leq n,$$

dakle,

$$\iota\left(X^\alpha \partial^\beta\right) = (-1)^{|\alpha| + |\beta|} X^\alpha \partial^\beta, \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^n.$$

Naravno, vrijedi $\iota^2 = I_{\mathcal{A}_n}$, odnosno, $\mathcal{F}^4 = I_{\mathcal{A}_n}$.

Osim filtracije $(\mathrm{F}_p\mathcal{A}_n)_{p\in\mathbb{Z}}$ po redu diferencijalnih operatora, Weylova algebra $\mathcal{A}_n$ ima još jednu važnu filtraciju. To je tzv. **Bernsteinova filtracija** $(\mathrm{B}_p\mathcal{A}_n)_{p\in\mathbb{Z}}$ definirana sa

$$\mathrm{B}_p\mathcal{A}_n = span_K\left\{X^\alpha\partial^\beta;\ \alpha,\beta\in\mathbb{Z}_+,\ |\alpha|+|\beta|\le p\right\}.$$

To je rastuća filtracija vektorskog prostora $\mathcal{A}_n$, svi potprostori $\mathrm{B}_p\mathcal{A}_n$ su konačnodimenzionalni i vrijedi

$$\bigcup_{n\in\mathbb{Z}}\mathrm{B_p}\mathcal{A}_n = \mathcal{A}_n, \qquad \mathrm{B}_0\mathcal{A}_n = K, \qquad \mathrm{B}_p\mathcal{A}_n = \{0\} \quad \forall p<0.$$

Lema 2.2.11. *Za bilo koje $p,q\in\mathbb{Z}$ vrijedi:*

(*a*) $(\mathrm{B}_p\mathcal{A}_n)(\mathrm{B}_q\mathcal{A}_n)\subseteq \mathrm{B}_{p+q}\mathcal{A}_n$.

(*b*) $[\mathrm{B}_p\mathcal{A}_n,\mathrm{B}_q\mathcal{A}_n]\subseteq \mathrm{B}_{p+q-2}\mathcal{A}_n$.

Dokaz: Budući da je očito

$$X^\alpha(\mathrm{B}_s\mathcal{A}_n)\partial^\beta \subseteq \mathrm{B}_{s+|\alpha|+|\beta|}\mathcal{A}_n,$$

obje će tvrdnje slijediti ako dokažemo da je

$$\left[\partial^\alpha, X^\beta\right]\in \mathrm{B}_{|\alpha|+|\beta|-2}\mathcal{A}_n.$$

Tu ćemo činjenicu dokazati indukcijom po $|\alpha|$. Za $|\alpha|=0$, tvrdnja je trivijalna. Za $|\alpha|=1$ je $\partial^\alpha=\partial_j$ za neki j, i imamo

$$\left[\partial_j, X^\beta\right] = \partial_j\left(X^\beta\right) = \beta_j X^{\beta-\varepsilon_j}\in \mathrm{B}_{|\beta|-1}\mathcal{A}_n = \mathrm{B}_{1+|\beta|-2}\mathcal{A}_n.$$

Provedimo korak indukcije. Ako je $|\alpha|\ge 2$, za neki j možemo pisati $\partial^\alpha = \partial^{\alpha-\varepsilon_j}\partial_j$, pa imamo redom

$$\begin{aligned}\left[\partial^\alpha, X^\beta\right] &= \left[\partial^{\alpha-\varepsilon_j}\partial_j, X^\beta\right] = \partial^{\alpha-\varepsilon_j}\left[\partial_j, X^\beta\right] + \left[\partial^{\alpha-\varepsilon_j}, X^\beta\right]\partial_j = \\ &= \left[\partial^{\alpha-\varepsilon_j},\left[\partial_j, X^\beta\right]\right] + \left[\partial_j, X^\beta\right]\partial^{\alpha-\varepsilon_j} + \left[\partial^{\alpha-\varepsilon_j}, X^\beta\right]\partial_j.\end{aligned}$$

Odatle i iz pretpostavke indukcije slijedi $\left[\partial^\alpha, X^\beta\right]\in\mathrm{B}_{|\alpha|+|\beta|-2}\mathcal{A}_n$.

Prema tvrdnji (*a*) Bernsteinova filtracija je kompatibilna sa strukturom algebre. Nadalje, iz tvrdnje (*b*) slijedi da je pripadna graduirana algebra

$$\mathrm{Gr_B}\mathcal{A}_n = \oplus_{p\in\mathbb{Z}}\mathrm{Gr}_\mathrm{B}^p\mathcal{A}_n, \qquad \mathrm{Gr}_\mathrm{B}^p\mathcal{A}_n = (\mathrm{B}_p\mathcal{A}_n)/(\mathrm{B}_{p-1}\mathcal{A}_n),$$

komutativna. Za $p\in\mathbb{Z}_+$ definiramo linearno preslikavanje $\Psi_p:\mathrm{B}_p\mathcal{A}_n\to K[X_1,\ldots,X_n,\xi_1,\ldots,\xi_n]$ sa

$$\Psi_p\left(\sum_{|\alpha|+|\beta|\le p} c_{\alpha\beta}X^\alpha\partial^\beta\right) = \sum_{|\alpha|+|\beta|=p} c_{\alpha\beta}X^\alpha\xi^\beta.$$

Budući da je $\{X^\alpha\partial^\beta;\ |\alpha|+|\beta|=p\}$ baza direktnog komplementa od $\mathrm{B}_{p-1}\mathcal{A}_n$ u $\mathrm{B}_p\mathcal{A}_n$, zaključujemo da Ψ_p inducira izomorfizam vektorskog prostora $\mathrm{Gr}_\mathrm{B}^p\mathcal{A}_n$ na prostor $K^p[X_1,\ldots,X_n,\xi_1,\ldots,\xi_n]$ homogenih polinoma stupnja p. I taj izomorfizam označavamo istim znakom Ψ_p. Složeni zajedno ti izomorfizmi daju izomorfizam vektorskih prostora

$$\Psi:\mathrm{Gr_B}\mathcal{A}_n\longrightarrow K[X_1,\ldots,X_n,\xi_1,\ldots,\xi_n].$$

Sada iz tvrdnje (*a*) leme 2.2.11. slijedi

Teorem 2.2.12. Ψ *je izomorfizam unitalnih algebri.*

Uočimo još da i glavni antiautomorfizam i Fourierov automorfizam čuvaju Bernsteinovu filtraciju.

Poglavlje 3

MODULI NAD FILTRIRANIM PRSTENOVIMA

3.1 Hilbertov polinom graduiranog modula

U ovom odjeljku pretpostavljamo da je $\mathcal{A} = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \mathcal{A}^n$ graduiran Noetherin komutativan unitalan prsten. Nadalje, pretpostavljamo da je $1 \in \mathcal{A}^0$, dakle, $\mathcal{A}^0$ je komutativan unitalan prsten, i da je $\mathcal{A}^n = \{0\}$ za $n < 0$.

Lema 3.1.1. *(a) $\mathcal{A}^0$ je Noetherin prsten.*

(b) $\mathcal{A}$ je konačno generirana $\mathcal{A}^0-$algebra.

Dokaz: (a) Stavimo

$$\mathcal{A}_+ = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{A}^n.$$

Tada je $\mathcal{A}_+$ ideal u $\mathcal{A}$ i vrijedi $\mathcal{A}^0 \cong \mathcal{A}/\mathcal{A}_+$. Odatle slijedi tvdrnja.

(b) Neka su $x_1, \ldots, x_s$ homogeni generatori ideala $\mathcal{A}_+$ i stavimo $d_i = \deg x_i$, $1 \le i \le s$. Neka je $\mathcal{B}$ unitalna $\mathcal{A}^0-$podalgebra od $\mathcal{A}$ generirana sa $x_1, \ldots, x_s$. Tvrdnja će slijediti iz $\mathcal{A}^n \subseteq \mathcal{B}$ $\forall n \ge 0$, a to ćemo dokazati indukcijom po $n \ge 0$. Očito je $\mathcal{A}^0 \subseteq \mathcal{B}$. Pretpostavimo da je $n > 0$ i da je dokazano da vrijedi $\mathcal{A}^k \subseteq \mathcal{B}$ za $k < n$. Neka je $y \in \mathcal{A}^n$. Tada je $y \in \mathcal{A}_+$, pa postoje $y_i \in \mathcal{A}^{n-d_i}$, $1 \le i \le s$, takvi da je $y = \sum_{i=1}^s y_i x_i$. Po pretpostavci indukcije su $y_1, \ldots, y_s \in \mathcal{B}$, pa slijedi $y \in \mathcal{B}$.

Uočimo da vrijedi i obrat: iz Noetherinosti prstena $\mathcal{A}^0$ i iz konačne generiranosti $\mathcal{A}$ kao $\mathcal{A}^0-$algebre slijedi Noetherinost prstena $\mathcal{A}$. Doista, prsten $\mathcal{A}^0[X_1, \ldots, X_s]$ je prema Hilbertovom teoremu Noetherin, a svaka konačno generirana $\mathcal{A}^0-$algebra izomorfna je kvocijentu algebre $\mathcal{A}^0[X_1, \ldots, X_s]$ za neki $s \in \mathbb{N}$, a kvocijentna algebra Noetherine algebre je očito Noetherina algebra.

Neka je $M = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} M^n$ konačno generiran graduiran $\mathcal{A}-$modul. Dakle, vrijedi $\mathcal{A}^p M^n \subseteq M^{p+n}$ $\forall p, n \in \mathbb{Z}$. Posebno, svaki M^n je $\mathcal{A}^0-$modul. Nadalje, iz konačne generiranosti $\mathcal{A}-$modula M i iz $\mathcal{A}^n = \{0\}$ za $n < 0$ slijedi da postoji $n_0 \in \mathbb{Z}$ takav da je $M^n = 0$ $\forall n \le n_0$.

Lema 3.1.2. *$\mathcal{A}^0-$modul M^n je konačno generiran za svaki $n \in \mathbb{Z}$.*

Dokaz: Neka su $m_1, \ldots, m_k$ homogeni generatori $\mathcal{A}-$modula M i $\deg m_j = r_j$, $1 \le j \le k$. Za $m \in M^n$ možemo pisati

$$m = \sum_{j=1}^k y_j m_j, \qquad y_j \in \mathcal{A}^{n-r_j}, \quad 1 \le j \le k.$$

Neka su $x_1, \ldots, x_s$ homogeni generatori $\mathcal{A}^0-$algebre $\mathcal{A}$ izabrani kao u dokazu tvrdnje (b) leme 3.1.1. i neka su opet $d_i = \deg\, x_i$, $1 \le i \le s$. Tada postoje $a_{j\alpha} \in \mathcal{A}^0$ takvi da je

$$y_j = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^s,\, |\alpha| = n - r_j} a_{j\alpha} x^\alpha.$$

Pri tome smo za $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_s) \in \mathbb{Z}_+^s$ kao i obično pisali

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_s^{\alpha_s} \qquad \text{i} \qquad |\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_s.$$

Tada je

$$m = \sum_{j=1}^{k} \sum_{|\alpha| = n - r_j} a_{j\alpha} x^\alpha m_j.$$

To pokazuje da je A^0-modul M^n generiran konačnim skupom

$$\bigcup_{j=1}^{k} \{x^\alpha m_j;\ \alpha \in \mathbb{Z}_+^s,\ |\alpha| = n - r_j\}.$$

U daljnjem sa $\mathcal{M}_f(\mathcal{A}^0)$ označavamo kategoriju konačno generiranih $\mathcal{A}^0-$modula. Neka je λ funkcija koja objektima kategorije $\mathcal{M}_f(\mathcal{A}^0)$ pridružuje cijele brojeve; dakle, svakom konačno generiranom $\mathcal{A}^0-$modulu pridružen je $\lambda(M) \in \mathbb{Z}$. Kažemo da je λ **aditivna funkcija**, ako za svaki kratki egzaktni niz u $\mathcal{M}_f(\mathcal{A}^0)$

$$\{0\} \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow \{0\}$$

vrijedi

$$\lambda(M) = \lambda(M') + \lambda(M'').$$

Aditivnost očito povlači $\lambda(\{0\}) = 0$. Nadalje, za $M \cong N$ imamo kratki egzaktni niz

$$\{0\} \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow \{0\} \longrightarrow \{0\}$$

pa slijedi $\lambda(M) = \lambda(N)$. Napokon, indukcijom po $n \in \mathbb{Z}_+$ slijedi

Lema 3.1.3. *Ako je λ aditivna funkcija na objektima kategorije $\mathcal{M}_f(\mathcal{A}^0)$ i ako je*

$$\{0\} \longrightarrow M_0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow M_n \longrightarrow \{0\}$$

egzaktan niz u $\mathcal{M}_f(\mathcal{A}^0)$, onda je

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \lambda(M^i) = 0.$$

Dokaz: Korak indukcije slijedi iz rastava gornjeg egzaktnog niza, uz pretpostavku da je $n \ge 3$, u dva egzaktna niza

$$\{0\} \longrightarrow M_0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow M_{n-2} \longrightarrow M \longrightarrow \{0\}$$

i

$$\{0\} \longrightarrow M \longrightarrow M_{n-1} \longrightarrow M_n \longrightarrow \{0\},$$

pri čemu je

$$M = \mathrm{Im}(M_{n-2} \to M_{n-1}) = \mathrm{Ker}(M_{n-1} \to M_n).$$

Neka je sada $\mathbb{Z}[[t]]$ **prsten formalnih redova potencija** u jednoj varijabli t s koeficijentima u $\mathbb{Z}$. Nadalje, neka je $\mathbb{Z}((t))$ lokalizacija od $\mathbb{Z}[[t]]$ po multiplikativnom podskupu $\{t^n;\ n \in \mathbb{Z}_+\}$. Dakle, $\mathbb{Z}((t))$ je prsten formalnih redova oblika

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n t^n, \qquad a_n \in \mathbb{Z}, \quad \text{skup } \{n \in \mathbb{Z};\ n < 0,\ a_n \neq 0\} \text{ je konačan.}$$

Uočimo da je $\mathbb{Z}((t))$ integralna domena i kao unitalni potprsten sadrži **prsten Laurentovih polinoma** s cjelobrojnim koeficijentima $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$.

Poincaréov red konačno generiranog $\mathcal{A}-$modula M (u odnosu na aditivnu funkciju λ) je

$$P(M,t) = P_\lambda(M,t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \lambda(M^n)t^n \in \mathbb{Z}((t)).$$

Na primjer, neka je $\mathcal{A} = K[X_1, \dots, X_s]$ algebra polinoma u s varijabli nad poljem K koja je graduirana totalnim stupnjem. Tada je $\mathcal{A}^0 = K$, pa su konačno generirani $\mathcal{A}^0-$moduli zapravo konačnodimenzionalni vektorski prostori nad K. Dakle, ako je M konačno generiran graduirani $\mathcal{A}-$modul, onda su M^n konačnodimenzionalni vektorski prostori. Sada Poincaréov red možemo definirati za aditivnu funkciju $\lambda = \dim_K$. Posebno, za sam prsten $\mathcal{A}$, promatran kao $\mathcal{A}-$modul, imamo

$$P(\mathcal{A},t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} (\dim_K \mathcal{A}^n)\, t^n = \sum_{n\in\mathbb{Z}_+} \binom{n+s-1}{s-1} t^n = \frac{1}{(1-t)^n}.$$

Sljedeći teorem pokazuje da Poincaréov red sasvim općenito ima analogan oblik.

Teorem 3.1.4. (**Hilbert, Serre**) *Neka su $x_1, \dots, x_s$ homogeni generatori $\mathcal{A}^0-$algebre $\mathcal{A}$ i neka su $d_i = \deg x_i$, $1 \le i \le s$. Nadalje, neka je λ aditivna funkcija na objektima kategorije $\mathcal{M}_f(\mathcal{A}^0)$. Za svaki konačno generiran graduirani $\mathcal{A}-$modul M vrijedi*

$$f(t) = P_\lambda(M,t) \prod_{i=1}^{s} (1 - t^{d_i}) \in \mathbb{Z}[t, t^{-1}].$$

Dokaz teorema provest ćemo indukcijom po s. Ako je $s = 0$, $\mathcal{A} = \mathcal{A}^0$ i M je konačno generiran $\mathcal{A}^0-$modul. To znači da je $M^n = \{0\}$ za dovoljno velike n. Dakle, skup $\{n \in \mathbb{Z};\ \lambda(M^n) \neq 0\}$ je konačan, pa je $P_\lambda(M,t) \in \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$.

Pretpostavimo sada da je $s > 0$ i da je teorem dokazan za graduirane prstenove $\mathcal{B}$ koji su kao $\mathcal{B}^0-$algebra generirani s manje od s homogenih generatora. Neka je $\varphi : M \to M$ endomorfizam $\mathcal{A}-$modula definiran sa $\varphi(m) = x_s m$. Stavimo

$$K = \operatorname{Ker}\varphi, \qquad I = \operatorname{Im}\varphi, \qquad L = \operatorname{Coker}\varphi = M/I.$$

Tada su K, I i L graduirani $\mathcal{A}-$moduli i imamo egzaktan niz

$$\{0\} \longrightarrow K \longrightarrow M \xrightarrow{\varphi} M \longrightarrow L \longrightarrow \{0\}.$$

Odatle za svaki $n \in \mathbb{Z}$ dobivamo egzaktan niz $\mathcal{A}^0-$modula

$$\{0\} \longrightarrow K^n \longrightarrow M^n \xrightarrow{x_s \cdot} M^{n+d_s} \longrightarrow L^{n+d_s} \longrightarrow \{0\},$$

pa po lemi 3.1.3. imamo

$$\lambda(K^n) - \lambda(M^n) + \lambda(M^{n+d_s}) - \lambda(L^{n+d_s}) = 0,$$

odnosno,

$$\lambda(M^{n+d_s}) - \lambda(M^n) = \lambda(L^{n+d_s}) - \lambda(K^n) \qquad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Odatle imamo redom

$$(1-t^{d_s})P_\lambda(M,t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \lambda(M^n)t^n - \sum_{n\in\mathbb{Z}} \lambda(M^n)t^{n+d_s} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left(\lambda(M^{n+d_s}) - \lambda(M^n)\right) t^{n+d_s} =$$

$$= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left(\lambda(L^{n+d_s}) - \lambda(K^n)\right) t^{n+d_s} = P_\lambda(L,t) - P_\lambda(K,t)t^{d_s}.$$

Međutim, x_s djeluje kao 0 na L i na K, pa se L i K mogu promatrati kao graduirani $\mathcal{A}/x_s\mathcal{A}-$moduli. Promatramo sada $\mathcal{B} = \mathcal{A}/x_s\mathcal{A}$ kao algebru nad $\mathcal{B}^0 = \mathcal{A}^0/(x_s\mathcal{A}\cap\mathcal{A}^0) \cong \mathcal{A}^0$ (naime, očito možemo pretpostaviti da je $d_s > 0$). Tada je jasno da je $\mathcal{B}$ generirana klasama $x_1 + x_s\mathcal{A}, \ldots, x_{s-1} + x_s\mathcal{A}$. Stoga pretpostavka indukcije povlači da vrijedi

$$g(t) = P_\lambda(L,t)\prod_{i=1}^{s-1}(1-t^{d_i}) \in \mathbb{Z}[t,t^{-1}] \qquad \text{i} \qquad h(t) = P_\lambda(K,t)\prod_{i=1}^{s-1}(1-t^{d_i}) \in \mathbb{Z}[t,t^{-1}].$$

Odatle slijedi slijedi tvrdnja teorema za modul M :

$$f(t) = \prod_{i=1}^{s}(1-t^{d_i})P_\lambda(M,t) = g(t) - t^{d_s}h(t) \in \mathbb{Z}[t,t^{-1}].$$

Budući da je Poincaréov red $P_\lambda(M,t)$ racionalna funkcija iz $\mathbb{Z}(t) \subseteq \mathbb{C}(t)$, možemo govoriti o redu njegovog pola u bilo kojoj točki iz $\mathbb{C}$. Označimo sa $d_\lambda(M)$ red pola od $P_\lambda(M,t)$ u točki 1. Laurentov polinom $f(t)$ iz Hilbert$-$Serreovog teorema možemo pisati

$$f(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k t^k, \qquad a_k \in \mathbb{Z},$$

i pri tome je skup $\{k \in \mathbb{Z};\ a_k \neq 0\}$ konačan. Racionalna funkcija $f(t)$ sigurno nema pol u točki $1:$ vrijedi $f(1) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k \in \mathbb{Z}$. Međutim, $f(t)$ može imati 1 kao nultočku. Neka je $p \geq 0$ kratnost točke 1 kao nultočke od f. Pretpostavimo da je 1 stvarno nultočka, tj. da je $p > 0$. Tada možemo pisati

$$f(t) = (1-t)h(t), \qquad h(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k t^k, \quad c_k \in \mathbb{Q},$$

i skup $\{k \in \mathbb{Z};\ c_k \neq 0\}$ je konačan. Imamo

$$a_k = c_k - c_{k-1} \qquad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Stavimo $k_0 = \min\{j \in \mathbb{Z};\ c_j \neq 0\}$. Indukcijom po $k \geq k_0$ iz gornjih jednakosti nalazimo da je $c_k \in \mathbb{Z}$ za svaki $k \in \mathbb{Z}$. Nadalje, točka 1 je nultočka funkcije $h(t)$ kratnosti $p-1$. Ponavljanjem te procedure p puta dolazimo do formule oblika

$$f(t) = (1-t)^p g(t), \qquad g(t) \in \mathbb{Z}[t,t^{-1}], \qquad g(1) \neq 0.$$

U daljnjem ćemo za $N \in \mathbb{Z}$ koristiti oznaku

$$\mathbb{Z}_{\geq N} = \{n \in \mathbb{Z};\ n \geq N\}.$$

Korolar 3.1.5. *Ako je $d_i = 1$ za $1 \leq i \leq s$, (odnosno, ako je $\mathcal{A}^0-$algebra $\mathcal{A}$ generirana sa $\mathcal{A}^1$) onda postoje $N \in \mathbb{Z}_+$ i (jedinstven) polinom $H \in \mathbb{Q}[X]$takvi da vrijedi*

$$\lambda(M^n) = H(n) \qquad \forall n \in \mathbb{Z}_{\geq N}.$$

Stupanj polinoma H je $d_\lambda(M) - 1$.

Dokaz: Uz pretpostavku $d_i = 1\ \forall i$ imamo prema Hilbert−Serreovom teoremu

$$P_\lambda(M,t) = \frac{f(t)}{(1-t)^s}, \qquad f(t) \in \mathbb{Z}[t,t^{-1}].$$

Neka je $p \geq 0$ kratnost točke 1 kao nultočke od $f(t)$. Vidjeli smo da možemo pisati

$$f(t) = (1-t)^p g(t), \qquad g(t) \in \mathbb{Z}[t,t^{-1}], \qquad g(1) \neq 0.$$

Stavimo $d = d_\lambda(M) = s - p$. Tada je

$$P_\lambda(M,t) = \frac{g(t)}{(1-t)^d}, \qquad g(t) = \sum_{k=-N}^{N} a_k t^k.$$

Kako je

$$\frac{1}{(1-t)^d} = \sum_{k\in\mathbb{Z}_+} \binom{d+k-1}{d-1} t^k,$$

nalazimo da je

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \lambda(M^n)t^n = P_\lambda(M,t) = \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}_+} \binom{d+k-1}{d-1} t^k\right)\left(\sum_{k=-N}^{N} a_k t^k\right).$$

Odatle je

$$\lambda(M^n) = \sum_{k=-N}^{N} a_k \binom{d+n-k-1}{d-1} = \sum_{k=-N}^{N} a_k \frac{(n-k+1)(n-k+2)\cdots(n-k+d-1)}{(d-1)!} \qquad \forall n \geq N.$$

Odatle se vidi da se za $n \geq N$ funkcija $n \mapsto \lambda(M^n)$ podudara s polinomom u n stupnja $d-1$ s vodećim članom

$$\left(\sum_{k=-N}^{N} a_k\right) \frac{n^{d-1}}{(d-1)!} = \frac{g(1)}{(d-1)!} n^{d-1} \neq 0.$$

Time je korolar dokazan.

Polinom H iz korolara 3.1.5. zovemo **Hilbertov polinom** od M (u odnosu na λ). Istaknimo da je Hilbertov polinom definiran ukoliko je ispunjen uvjet iz korolara 3.1.5.: prsten $\mathcal{A}$ je promatran kao $\mathcal{A}^0$−algebra generiran sa $\mathcal{A}^1$. Iz dokaza korolara vidi se da je vodeći koeficijent tog polinoma jednak $g(1)/(d-1)!$.

Graduirana algebra $\mathcal{A} = K[X_1,\ldots,X_s]$ je primjer graduiranog prstena koji je kao algebra nad $\mathcal{A}^0 = K$ generiran sa $\mathcal{A}^1$. Imamo

$$\dim_K \mathcal{A}^n = \binom{n+s-1}{s-1} = \frac{n^{s-1}}{(s-1)!} + \text{članovi nižeg stupnja.}$$

Dakle, u ovom je slučaju stupanj Hilbertovog polinoma $\mathcal{A}$−modula $\mathcal{A}$ jednak $s-1$.

Sljedeći nam je cilj karakterizacija polinoma s racionalnim koeficijentima koji u velikim cijelim brojevima poprimaju cjelobrojne vrijednosti. Prema korolaru 3.1.5. takvi su Hilbertovi polinomi.

Promatrat ćemo takve polinome s koeficijentima u bilo kojem proširenju polja $\mathbb{Q}$, tj. u bilo kojem polju K karakteristike 0. Za $s \in \mathbb{Z}_+$ definiramo polinom $\binom{X}{s} \in K[X]$ stupnja s ovako:

$$\binom{X}{0} = 1, \qquad \binom{X}{1} = X, \qquad \binom{X}{s} = \frac{X(X-1)\cdots(X-s+1)}{s!}, \ s \geq 2.$$

Naravno, $\binom{X}{s} \in \mathbb{Q}[X]$ i $s!\binom{X}{s}$ je normiran polinom s cjelobrojnim koeficijentima. Stoga i polinom $X^s - s!\binom{X}{s}$ ima cjelobrojne koeficijente i njegov je stupanj jednak $s-1$. Doista,

$$X^s - s!\binom{X}{s} = X^s - X(X-1)\cdots(X-s+1) = \frac{s(s-1)}{2}X^{s-1} + \text{niže potencije}.$$

Odatle slijedi prva tvrdnja sljedeće leme:

Lema 3.1.6. (a) *Za svaki* $d \in \mathbb{Z}_+$ *je*

$$\left\{\binom{X}{s};\ 0 \leq s \leq d\right\}$$

baza prostora $K_d[X] = \{P \in K[X];\ \deg P \leq d\}$.

(b) *Za polinom*

$$P = c_0\binom{X}{d} + c_1\binom{X}{d-1} + \cdots + c_{d-1}\binom{X}{1} + c_0 \in K_d[X]$$

sljedeća su svojstva međusobno ekvivalentna:

(1) $P(n) \in \mathbb{Z}$ *za svaki* $n \in \mathbb{Z}$.

(2) *Postoji* $N \in \mathbb{Z}$ *takav da je*

$$P(n) \in \mathbb{Z} \qquad \forall n \in \mathbb{Z}_{\geq N}.$$

(3) $c_0, c_1, \ldots, c_d \in \mathbb{Z}$.

Dokaz: (b) Implikacije $(1) \Rightarrow (2)$ i $(3) \Rightarrow (1)$ su evidentne. Implikaciju $(2) \Rightarrow (3)$ dokazujemo indukcijom po $d \geq 0$. Za $d = 0$ ta je implikacija trivijalna. Za korak indukcije uočimo da je

$$P(X+1) - P(X) = \sum_{i=0}^{d} c_i\left[\binom{X+1}{d-i} - \binom{X}{d-i}\right] = \sum_{i=0}^{d-1} c_i\binom{X}{d-1-i}.$$

Sada iz pretpostavke indukcije slijedi da su $c_0, \ldots, c_{d-1} \in \mathbb{Z}$. No tada za $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq N$, imamo i

$$c_d = P(n) - c_0\binom{n}{d} - c_1\binom{n}{d-1} - \cdots - c_{d-1}\binom{n}{1} \in \mathbb{Z}.$$

Time je lema dokazana.

Kažemo da je $F : \mathbb{Z} \to K$ **asimptotski polinomijalna funkcija** ako postoji polinom $P \in K[X]$ takav da za neki $N \in \mathbb{Z}$ vrijedi

$$F(n) = P(n) \qquad \forall n \in \mathbb{Z}_{\geq N}.$$

Očito je tada polinom P jedinstveno određen funkcijom F. On se zove **asimptotski polinom** funkcije F. Vrlo je korisna sljedeća lema

Lema 3.1.7. *Funkcija $F : \mathbb{Z} \to K$ je asimptotski polinomijalna ako i samo ako je funkcija $n \mapsto F(n) - F(n-1)$ asimptotski polinomijalna. Ako je d stupanj asimptotskog polinoma funkcije F onda je $d-1$ stupanj asimptotskog polinoma funkcije $n \mapsto F(n) - F(n-1)$. Ako je a_0 vodeći koeficijent asimptotskog polinoma funkcije F onda je da_0 vodeći koeficijent asimptotskog polinoma funkcije $n \mapsto F(n) - F(n-1)$.*

Dokaz: Ako je funkcija F asimptotski polinomijalna, onda je očito i $n \mapsto F(n) - F(n-1)$ asimptotski polinomijalna funkcija. U tom slučaju označimo sa P asimptotski polinom funkcije F i sa Q asimptotski polinom funkcije $n \mapsto F(n) - F(n-1)$. Ako je

$$P(X) = a_0X^d + a_1X^{d-1} + \cdots + a_{d-1}X + a_d$$

onda je

$$Q(X) = P(X) - P(X-1) = \left[a_0X^d + a_1X^{d-1} + \cdots + a_{d-1}X + a_d\right] -$$
$$- \left[a_0(X-1)^d + a_1(X-1)^{d-1} + \cdots + a_{d-1}(X-1) + a_d\right] = da_0X^{d-1} + \text{niže potencije}.$$

Time su dokazane posljednje dvije tvrdnje leme.

Napokon, pretpostavimo da je funkcija $n \mapsto G(n) = F(n) - F(n-1)$ asimptotski polinomijalna. Neka je Q njezin asimptotski polinom i pretpostavimo da je $\deg Q = d-1$. Neka je $N \in \mathbb{N}$, $N \geq d$, takav da vrijedi

$$G(n) = F(n) - F(n-1) = Q(n) \qquad \forall n \geq N.$$

Prema tvrdnji (a) leme 3.1.6. možemo pisati

$$Q(X+1) = \sum_{i=0}^{d-1} c_i \binom{X}{d-1-i}.$$

Dakle, za $n \geq N+1$ je

$$F(n) = \sum_{k=N+1}^{n} [F(k) - F(k-1)] + F(N) = \sum_{k=N+1}^{n} G(k) + F(N) = \sum_{k=d}^{n} G(k) + C,$$

gdje je $C \in K$ definirano sa

$$C = F(N) - \sum_{k=d}^{N} G(k).$$

Za $n > s \geq 1$ imamo

$$\binom{n}{s} = \sum_{s+1}^{n} \left[\binom{j}{s} - \binom{j-1}{s}\right] + 1 = \sum_{j=s+1}^{n} \binom{j-1}{s-1} + 1 = \sum_{j=s}^{n} \binom{j-1}{s-1}.$$

Prema tome,

$$\sum_{k=d}^{n} Q(k) = \sum_{k=d}^{n} \sum_{i=0}^{d-1} c_i \binom{k-1}{d-1-i} = \sum_{i=0}^{d-1} c_i \left[\sum_{k=d}^{n} \binom{k-1}{d-1-i}\right] =$$

$$= \sum_{i=0}^{d-1} c_i \left[\sum_{k=d-i}^{n} \binom{k-1}{d-1-i}\right] - \sum_{i=0}^{d-1} c_i \left[\sum_{k=d-i}^{d-1} \binom{k-1}{d-1-i}\right] = \sum_{i=0}^{d-1} c_i \binom{n}{d-i} + C',$$

gdje $C' \in K$ definirano sa
$$C' - \sum_{i=0}^{d-1} c_i \left[\sum_{k=d-i}^{d-1} \binom{k-1}{d-1-i} \right].$$
Odatle slijedi da za polinom $P \in K[X]$ stupnja d, definiran sa

$$P(X) = \sum_{i=0}^{d-1} c_i \binom{X}{d-i} + C + C' = \frac{c_0}{d!} X^d + \text{niže potencije},$$

vrijedi
$$F(n) = P(n) \qquad \forall n \geq N+1.$$
Time je lema dokazana.

3.2 Moduli nad lokalnim prstenovima

U ovom ćemo odjeljku promatrati module nad lokalnim prstenovima. **Lokalni prsten** je komutativan unitalan prsten A za koji je $\mathbf{m} = A \setminus A^\times$ ideal. Budući da za svaki ideal $\mathbf{n}$ u A vrijedi $\mathbf{n} \cap A^\times = \emptyset$, vidimo da je A lokalni prsten ako i samo ako u A postoji najveći ideal. Taj ćemo ideal u daljnjem označavati sa $\mathbf{m}$. Tada je $K = A/\mathbf{m}$ polje $-$ zove se **rezidualno polje** lokalnog prstena A.

Lema 3.2.1. (**Nakayama**) *Neka je A lokalni prsten s najvećim idealom $\mathbf{m}$. Ako je $V \neq \{0\}$ konačno generiran $A-$modul, onda je $\mathbf{m}V \neq V$.*

Dokaz: Pretpostavimo da je $\mathbf{m}V = V$. Neka je $\{v_1, \ldots, v_s\}$ minimalni skup generatora $A-$modula V. Vrijedi $v_s \in \mathbf{m}V$, pa vrijedi

$$v_s = \sum_{i=1}^{s} m_i v_i \qquad \text{za neke } m_1, \ldots, m_s \in \mathbf{m}.$$

Odatle je

$$(1 - m_s)v_s = \sum_{i=1}^{m-1} m_i v_i.$$

Međutim, element $1 - m_s$ je invertibilan, pa slijedi

$$v_s = \sum_{i=1}^{s-1} (1 - m_s)^{-1} m_i v_i \in Av_1 + \cdots + Av_{s-1},$$

a odatle je

$$A = Av_1 + \cdots + Av_s = Av_1 + \cdots + Av_{s-1}.$$

No to je suprotno pretpostavci minimalnosti izabranog skupa generatora $A-$modula V. Ova kontradikcija pokazuje da je $\mathbf{m}V \neq V$.

U daljnjem pretpostavljamo da je A **Noetherin lokalni prsten**, $\mathbf{m} = A \setminus A^\times$ njegov najveći ideal i $K = A/\mathbf{m}$ rezidualno polje prstena A. Nadalje, pretpostavljamo da je K **polje karakteristike** 0. Uočimo da je $\mathbf{m}/\mathbf{m}^2$ $A-$modul koji je anihiliran sa $\mathbf{m}$, dakle, $\mathbf{m}/\mathbf{m}^2$ je vektorski prostor nad poljem K.

Propozicija 3.2.2. (*a*) *$\mathbf{m}/\mathbf{m}^2$ je konačnodimenzionalan vektorski prostor nad K.*

(*b*) *Ako su $a_1, \ldots, a_s \in \mathbf{m}$ generatori ideala $\mathbf{m}$, onda klase $a_1 + \mathbf{m}^2, \ldots, a_s + \mathbf{m}^2$ razapinju vektorski prostor $\mathbf{m}/\mathbf{m}^2$.*

(*c*) *Ako su $a_1, \ldots, a_s \in \mathbf{m}$ takvi da je $\{a_1 + \mathbf{m}^2, \ldots, a_s + \mathbf{m}^2\}$ baza vektorskog prostora $\mathbf{m}/\mathbf{m}^2$ nad poljem K, onda elementi $a_1, \ldots, a_s$ generiraju ideal $\mathbf{m}$.*

(*d*) *Minimalni broj generatora ideala $\mathbf{m}$ jednak je $\dim_K(\mathbf{m}/\mathbf{m}^2)$.*

Dokaz: Tvrdnja (*b*) je očigledna, a iz nje odmah slijedi tvrdnja (*a*). Neka je $s = \dim_K(\mathbf{m}/\mathbf{m}^2)$ i neka su $a_1, \ldots, a_s \in \mathbf{m}$ takvi da je $\{a_1 + \mathbf{m}^2, \ldots, a_s + \mathbf{m}^2\}$ baza vektorskog prostora $\mathbf{m}/\mathbf{m}^2$ nad poljem $K = A/\mathbf{m}$. Neka je

$$\mathbf{n} = Aa_1 + \cdots + Aa_s \subseteq \mathbf{m}$$

ideal generiran sa $a_1, \ldots, a_s$. Tada je $\mathbf{n} + \mathbf{m}^2 = \mathbf{m}$, pa je $\mathbf{m}(\mathbf{m}/\mathbf{n}) = \mathbf{m}/\mathbf{n}$. Po Nakayaminoj lemi 3.2.1. zaključujemo da je $\mathbf{m}/\mathbf{n} = \{0\}$, odnosno, $\mathbf{n} = \mathbf{m}$. Time je dokazana tvrdnja (*c*). Tvrdnja (*d*) je neposredna posljedica tvrdnji (*b*) i (*c*).

Svaka uređena $s-$torka $(a_1, \dots, a_s)$ elemenata ideala $\mathbf{m}$ takva da je $(a_1 + \mathbf{m}^2, \dots, a_s + \mathbf{m}^2)$ baza $K-$prostora $\mathbf{m}/\mathbf{m}^2$ zove se **koordinatni sistem** za A.

Očito je $(\mathbf{m}^p)_{p\in\mathbb{Z}_+}$ padajuća filtracija prstena A.

Propozicija 3.2.3. (*a*) *Graduiran prsten*

$$\mathrm{Gr}\, A = \bigoplus_{p\in\mathbb{Z}_+} \mathbf{m}^p/\mathbf{m}^{p+1}$$

je Noetherina $K-$algebra.

(*b*) *Ako je M konačno generiran $A-$modul, onda je $(\mathbf{m}^p M)_{p\in\mathbb{Z}_+}$ padajuća filtracija od M i graduirani* Gr $A-$*modul*

$$\mathrm{Gr}\, M = \bigoplus_{p\in\mathbb{Z}_+} \mathbf{m}^p M/\mathbf{m}^{p+1} M$$

je konačno generiran.

(*c*) *Za svaki $p \in \mathbb{Z}_+$ vektorski prostor* $\mathrm{Gr}^p M = \mathbf{m}^p M/\mathbf{m}^{p+1}M$ *nad poljem K je konačnodimenzionalan.*

Dokaz: (*a*) Neka su $a_1, \dots, a_s$ generatori ideala $\mathbf{m}$. Preslikavanje

$$X_i \mapsto a_i + \mathbf{m}^2 \in \mathbf{m}/\mathbf{m}^2 \subseteq \mathrm{Gr}\, A, \qquad 1 \le i \le s,$$

jedinstveno se proširuje do unitalnog homomorfizma $\varphi : K[X_1, \dots, X_s] \to \mathrm{Gr}\, A$. Dokažimo da je φ epimorfizam. U tu svrhu indukcijom po $p \in \mathbb{Z}_+$ dokazujemo da je $\mathrm{Gr}^p A = \mathbf{m}^p/\mathbf{m}^{p+1} \subseteq \mathrm{Im}(\varphi)$ Baza indukcije $p = 0$ je evidentna, a također i tvrdnja za $p = 1$. Pretpostavimo da je $p \ge 2$ i da smo dokazali da je $\mathrm{Gr}^k A = \mathbf{m}^k/\mathbf{m}^{k+1} \subseteq \mathrm{Im}(\varphi)$ za svaki $k < p$. Tada $\mathrm{Gr}^p A = \mathbf{m}^p/\mathbf{m}^{p+1} \subseteq \mathrm{Im}(\varphi)$ slijedi iz

$$\mathrm{Gr}^p A = \mathbf{m}^p/\mathbf{m}^{p+1} = \mathbf{m}\cdot\mathbf{m}^{p-1}/\mathbf{m}^{p+1} = \left(\mathbf{m}/\mathbf{m}^2\right)\left(\mathbf{m}^{p-1}/\mathbf{m}^p\right) = \left(\mathrm{Gr}^1 A\right)\left(\mathrm{Gr}^{p-1} A\right).$$

To pokazuje da je $K-$algebra Gr A izomorfna kvocijentnoj algebri Noetherine algebre $K[X_1, \dots, X_s]$, dakle, i sama je Noetherina.

(*b*) Iz definicije graduiranog modula Gr M vidi se da je $\mathbf{m}\cdot(\mathrm{Gr}^p M) = \mathrm{Gr}^{p+1} M \ \forall p \in \mathbb{Z}_+$. Dakle, $\mathrm{Gr}^0 M = M/\mathbf{m}M$ generira Gr $A-$modul Gr M. Nadalje, ako su $m_1, \dots, m_r \in M$ generatori $A-$modula M, onda njihove klase $m_1 + \mathbf{m}M, \dots, m_r + \mathbf{m}M$ razapinju vektorski prostor $\mathrm{Gr}^0 M = M/\mathbf{m}M$ nad poljem $K = A/\mathbf{m}$, dakle, generiraju Gr $A-$modul Gr M.

Napokon, tvrdnja (*c*) slijedi iz leme 3.1.2.

Posebno, $A-$moduli $(\mathbf{m}^p M)/(\mathbf{m}^{p+1}M)$ su svi konačne duljine. Duljina modula je očito aditivna funkcija na objektima kategorije konačno generiranih $A-$modula. Sada iz korolara 3.1.5. zaključujemo da je funkcija

$$p \mapsto \mathrm{length}_A\left((\mathbf{m}^p M)/(\mathbf{m}^{p+1}M)\right) = \dim_K\left((\mathbf{m}^p M)/(\mathbf{m}^{p+1}M)\right)$$

asimptotski polinomijalna i njezin asimptotski polinom ima racionalne koeficijente. Slijedi da je funkcija

$$p \mapsto \mathrm{length}_A\left(M/(\mathbf{m}^p M)\right) = \sum_{q=0}^{p-1} \mathrm{length}_A\left((\mathbf{m}^q M)/(\mathbf{m}^{q+1}M)\right)$$

asimptotski polinomijalna i njezin asimptotski polinom ima racionalne koeficijente. Štoviše, prema dokazu korolara 3.1.5. vidimo da je vodeći član oblika $ep^d/d!$, gdje su $e \in \mathbb{Z}^*$ i $d \in \mathbb{Z}_+$. Tada se d zove **dimenzija** $A-$**modula** M i označava $d(M)$, a e se zove **multiplicitet** $A-$**modula** M i označava $e(M)$.

Teorem 3.2.4. (**Artin−Reesova lema**) *Neka je M konačno generiran A−modul i N njegov podmodul. Tada postoji $m_0 \in \mathbb{Z}_+$ takav da je*

$$N \cap \mathbf{m}^{p+m_0} M = \mathbf{m}^p \left(N \cap \mathbf{m}^{m_0} M\right) \qquad \forall p \in \mathbb{Z}_+.$$

Dokaz: Definiramo

$$A^* = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}_+} \mathbf{m}^n = A \oplus \mathbf{m} \oplus \mathbf{m}^2 \oplus \cdots\cdots$$

Budući da je $\mathbf{m}^p \mathbf{m}^q = \mathbf{m}^{p+q}$, A^* ima prirodnu strukturu graduiranog prstena. Neka je $(a_1, \ldots, a_s)$ koordinatni sistem za A. Aditivno preslikavanje

$$\varphi : A[X_1, \ldots, X_s] \longrightarrow A^*,$$

definirano sa

$$\varphi\left(bX^\alpha\right) = ba^\alpha \in \mathbf{m}^{|\alpha|}, \qquad b \in A, \;\; \alpha \in \mathbb{Z}_+^s,$$

očito je epimorfizam prstenova. Dakle, graduirani prsten A^* je Noetherin.

Stavimo sada

$$M^* = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}_+} \mathbf{m}^n M = M \oplus \mathbf{m} M \oplus \mathbf{m}^2 M \oplus \cdots\cdots$$

To je očito graduiran A^*−modul. Kao A^*−modul M^* je generiran sa $\left(M^*\right)^0 = M$. Budući da je M konačno generiran kao A−modul, zaključujemo da je M^* konačno generiran kao A^*−modul. Dakle, M^* je Noetherin A^*−modul, odnosno, svaki je njegov A^*−podmodul konačno generiran.

Za A−podmodul N od M definiramo aditivnu podgrupu N^* od M^* sa

$$N^* = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}_+} (N \cap \mathbf{m}^n M) = N \oplus (N \cap \mathbf{m} M) \oplus (N \cap \mathbf{m}^2 M) \oplus \cdots\cdots$$

Budući da je

$$\mathbf{m}^p (N \cap \mathbf{m}^q M) \subseteq \mathbf{m}^p N \cap \mathbf{m}^{p+q} M \subseteq N \cap \mathbf{m}^{p+q} M,$$

vidimo da je N^* graduirani A^*−podmodul od M^*. Kako je prsten A^* Noetherin, N^* je konačno generiran nad A^*. Dakle, postoji $m_0 \in \mathbb{Z}_+$ takav da $\bigoplus_{n=0}^{m_0} (N \cap \mathbf{m}^n M)$ generira A^*−modul N^*. Tada imamo

$$N^* = \bigoplus_{q=0}^{\infty} (N \cap \mathbf{m}^q M) = \left(\bigoplus_{p=0}^{\infty} \mathbf{m}^p\right) \left(\bigoplus_{n=0}^{m_0} (N \cap \mathbf{m}^n M)\right) = \bigoplus_{q=0}^{\infty} \left(\sum_{p+n=q,\, n \le m_0} \mathbf{m}^p (N \cap \mathbf{m}^n M)\right).$$

Slijedi da za svaki $q \in \mathbb{Z}_+$ vrijedi jednakost

$$N \cap \mathbf{m}^q M = \sum_{p+n=q,\, n \le m_0} \mathbf{m}^p (N \cap \mathbf{m}^n M) = \sum_{n=0}^{\min\{q, m_0\}} \mathbf{m}^{q-n} (N \cap \mathbf{m}^n M).$$

Posebno, za $q = p + m_0$, $p \in \mathbb{Z}_+$, nalazimo

$$N \cap \mathbf{m}^{p+m_0} M = \sum_{n=0}^{m_0} \mathbf{m}^{p+m_0-n} (N \cap \mathbf{m}^n M) = \sum_{n=0}^{m_0} \mathbf{m}^p \mathbf{m}^{m_0-n} (N \cap \mathbf{m}^n M).$$

Međutim, za svaki n, $0 \le n \le m_0$, očito imamo

$$\mathbf{m}^{m_0-n} (N \cap \mathbf{m}^n M) \subseteq N \cap \mathbf{m}^{m_0} M.$$

Dakle, za svaki $p \in \mathbb{Z}_+$ vrijedi

$$N \cap \mathbf{m}^{p+m_0} M \subseteq \mathbf{m}^p (N \cap \mathbf{m}^{m_0} M) \subseteq N \cap \mathbf{m}^{p+m_0} M.$$

Dvije inkluzije daju željenu jednakost

$$N \cap \mathbf{m}^{p+m_0} M = \mathbf{m}^p (N \cap \mathbf{m}^{m_0} M) \qquad \forall p \in \mathbb{Z}_+.$$

Posljedica Artin$-$Reesove leme je **Krullov teorem o presjeku**:

Teorem 3.2.5. *Za konačno generiran $A-$modul M vrijedi*

$$\bigcap_{p \in \mathbb{Z}_+} \mathbf{m}^p M = \{0\}.$$

Posebno,

$$\bigcap_{p \in \mathbb{Z}_+} \mathbf{m}^p = \{0\}.$$

Dokaz: Definiramo $A-$podmodul N od M sa

$$N = \bigcap_{p \in \mathbb{Z}_+} \mathbf{m}^p M.$$

Tada za m_0 iz Artin$-$Reesove leme imamo

$$N = \mathbf{m}^{1+m_0} M \cap N = \mathbf{m}(\mathbf{m}^{m_0} M \cap N) = \mathbf{m} N.$$

Sada iz Nakayamine leme 3.2.1. slijedi $N = \{0\}$.

Propozicija 3.2.6. *Neka je*

$$\{0\} \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow \{0\}$$

egzaktni niz konačno generiranih $A-$modula.

(*a*) $d(M) = \max\{d(M'), d(M'')\}$.

(*b*) *Ako je $d(M') = d(M'')$, onda vrijedi i $e(M) = e(M') + e(M'')$.*

Dokaz: M' možemo promatrati kao podmodul od M. Snabdijemo li M s padajućom filtracijom $(\mathbf{m}^p M)_{p \in \mathbb{Z}_+}$, a M' i M'' s induciranim filtracijama $(M' \cap \mathbf{m}^p M)_{p \in \mathbb{Z}_+}$ i $(\mathbf{m}^p M'')_{p \in \mathbb{Z}_+}$, dobivamo egzaktan niz $\operatorname{Gr} A-$modula

$$\{0\} \longrightarrow \operatorname{Gr} M' \longrightarrow \operatorname{Gr} M \longrightarrow \operatorname{Gr} M'' \longrightarrow \{0\}.$$

Odatle slijedi za svaki $p \in \mathbb{Z}_+$

$$\operatorname{length}_A \left(\mathbf{m}^p M / \mathbf{m}^{p+1} M\right) = \operatorname{length}_A \left((M' \cap \mathbf{m}^p M)/(M' \cap \mathbf{m}^{p+1} M)\right) + \operatorname{length}_A \left(\mathbf{m}^p M'' / \mathbf{m}^{p+1} M''\right).$$

Sumiramo li po p od 0 do $n-1$, dobivamo jednakost

$$\operatorname{length}_A (M / \mathbf{m}^n M) = \operatorname{length}_A (M' / (M' \cap \mathbf{m}^n M)) + \operatorname{length}_A (M'' / \mathbf{m}^n M'').$$

Znamo da je lijeva strana, a također i drugi član s desne strane, asimptotski polinomijalna funkcija od n. Odatle slijedi da je i prvi član s desne strane asimptotski polinomijalna funkcija od n. Međutim, prema Artin$-$Reesovoj lemi (teorem 3.2.4.) za neki $m_0 \in \mathbb{Z}_+$ vrijedi

$$\mathbf{m}^{p+m_0} M' \subseteq M' \cap \mathbf{m}^{p+m_0} M \subseteq \mathbf{m}^p M',$$

a odatle se vidi da asimptotski polinom funkcije $p \mapsto \operatorname{length}_A (M' / (M' \cap \mathbf{m}^p M'))$ ima isti vodeći član kao i asimptotski polinom funkcije $p \mapsto \operatorname{length}_A (M' / \mathbf{m}^p M')$. Odatle slijede obje tvrdnje propozicije.

Korolar 3.2.7. *Neka je* $s = \dim_K (\mathbf{m}/\mathbf{m}^2)$. *Za svaki konačno generiran* $A-$*modul* M *vrijedi* $d(M) \leq s$.

Dokaz: Prema tvrdnji (a) propozicije 3.2.6. dovoljno je dokazati da vrijedi $d(A) \leq s$. To neposredno slijedi iz činjenice da postoji epimorfizam $K[X_1, \ldots, X_s] \to \operatorname{Gr} A$ i iz činjenice da je dimenzija prostora $K_n[X_1, \ldots, X_s]$ polinoma u s varijabli stupnja $\leq n$ polinom u n stupnja s.

Za Noetherin lokalni prsten A kažemo da je **regularan**, ako je $d(A) = \dim_K (\mathbf{m}/\mathbf{m}^2)$.

Teorem 3.2.8. *Neka je* $(a_1, \ldots, a_s)$ *koordinatni sistem za* A. *Sljedeća su dva svojstva međusobno ekvivalentna:*

(a) *Prsten* A *je regularan.*

(b) *Kanonski homomorfizam* $\varphi : K[X_1, \ldots, X_s] \to \operatorname{Gr} A$, *dan sa* $X_i \mapsto a_i + \mathbf{m}^2$, $1 \leq i \leq s$, *je izomorfizam.*

Dokaz: Znamo da je kanonski homomorfizam φ surjektivan. Neka je $I = \operatorname{Ker}(\varphi)$. Dokazat ćemo da je $d(A) = s$ nužan i dovoljan uvjet da φ bude izomorfizam i time će teorem biti dokazan.

Naravno, ako je $I = \{0\}$, tj. ako je φ izomorfizam, onda je $d(A) = d(K[X_1, \ldots, X_s]) = s$. Pretpostavimo sada da je $I \neq \{0\}$. Ideal I je graduiran, pa postoji homogen polinom $f \in I$ stupnja $d > 0$. Neka je $J = (f)$ ideal u $K[X_1, \ldots, X_s]$ generiran sa f. Njegov je Poincaréov red jednak

$$P(J, t) = \frac{t^d}{(1-t)^s}.$$

Stoga je

$$P(K[X_1, \ldots, X_s]/J, t) = P(K[X_1, \ldots, X_s], t) - P(J, t) = \frac{1-t^d}{(1-t)^s} = \frac{1+t+\cdots+t^{d-1}}{(1-t)^{s-1}}.$$

Odatle se vidi da je red pola od $P(K[X_1, \ldots, X_s]/J, t)$ u točki 1 jednak $s-1$. Sada iz korolara 3.1.5. slijedi da je asimptotski polinom funkcije

$$n \mapsto \dim_K (K[X_1, \ldots, X_s]/J)^n$$

stupnja $s-2$. No tada je stupanj asimptotskog polinoma funkcije

$$n \mapsto \dim_K \operatorname{Gr}^n A = \dim_K (K[X_1, \ldots, X_s]/I)^n = \dim_K (K[X_1, \ldots, X_s]/J)^n - \dim_K (I/J)^n$$

manji ili jednak od $s-2$. Ponovna primjena korolara 3.1.5. pokazuje da je $d(A) \leq s-1$.

Teorem 3.2.9. *Regularan lokalni prsten* A *je integralna domena.*

Dokaz: Neka su $a, b \in A \setminus \{0\}$. Prema Krullovom teoremu 3.2.5. postoje $p, q \in \mathbb{Z}_+$ takvi da je $a \in \mathbf{m}^p \setminus \mathbf{m}^{p+1}$ i $b \in \mathbf{m}^q \setminus \mathbf{m}^{q+1}$. Njihove su slike $\overline{a} \in \operatorname{Gr}^p A$ i $\overline{b} \in \operatorname{Gr}^q A$ različite od nule. Prema teoremu 3.2.8. $\operatorname{Gr} A \cong K[X_1, \ldots, X_s]$ je integralna domena, pa slijedi da je $\overline{ab} = \overline{a}\overline{b} \neq 0$. Odatle slijedi $ab \neq 0$ i time je teorem dokazan.

Primjer. Neka je K polje karakteristike 0, $A = K[X_1, \ldots, X_n]$ algebra polinoma u n varijabli s koeficijentima iz K i $\hat{A} = K[[X_1, \ldots, X_s]]$ algebra formalnih redova u n varijabli s koeficijentima iz K. Tada je $\hat{A}$ lokalni prsten i njegov je najveći ideal $\hat{\mathbf{m}}$ generiran sa $X_1, \ldots, X_s$. Drugim riječima, $\hat{\mathbf{m}}$ je ideal svih formalnih redova bez konstantnog člana. Kanonski homomorfizam $K[X_1, \ldots, X_s] \to \operatorname{Gr} \hat{A}$ je očito izomorfizam.

Za bilo koju točku $x \in K^n$ označimo sa $\mathbf{m}_x$ maksimalni ideal u A svih polinoma kojima je x nultočka, odnosno, ideal generiran sa $X_1 - x_1, \dots, X_n - x_n$. Njegov je komplement u A multiplikativan podskup od A. Označimo sa A_x lokalizaciju $(A \setminus \mathbf{m}_x)^{-1} A$. Ona je izomorfna prstenu svih racionalnih funkcija na K^n koje su regularne u točki x (tj. koje nemaju pol u točki x). To je očito Noetherin lokalni prsten i njegov je najveći ideal lokalizacija $\mathbf{n}_x = (A \setminus \mathbf{m}_x)^{-1} \mathbf{m}_x$ ideala $\mathbf{m}_x$. Najveći ideal $\mathbf{n}_x$ u prstenu A_x sastoji se od svih racionalnih funkcija kojima je x nultočka. Automorfizam od A, definiran sa $X_i \mapsto X_i - x_i$, $1 \leq i \leq n$, proširuje se do izomorfizma sa A_0 na A_x. S druge strane, prirodni monomorfizam sa A u $\hat{A}$ proširuje se do monomorfizma sa A_0 u $\hat{A}$. Taj monomorfizam čuva filtracije na tim lokalnim prstenovima i inducira kanonski izomorfizam sa $\operatorname{Gr} A_0$ na $\operatorname{Gr} \hat{A} \cong K[X_1, \dots, X_n]$. Dakle, vrijedi:

Propozicija 3.2.10. *Uz gornje oznake prstenovi A_x, $x \in K^n$, su $n-$dimenzionalni regularni lokani prstenovi.*

3.3 Dimenzija modula nad filtriranim prstenom

U ovom je odjeljku $\mathcal{D}$ proizvoljan unitalan prsten (bez pretpostavke komutativnosti) i neka je $(\mathcal{D}_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ rastuća filtracija od $\mathcal{D}$ aditivnim podgrupama takva da su ispunjeni uvjeti:

(1) Filtracija je **pozitivna**, tj. $\mathcal{D}_n = \{0\}$ za $n < 0$.

(2) Filtracija je **ekshaustivna**, tj. $\mathcal{D} = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \mathcal{D}_n$.

(3) $1 \in \mathcal{D}_0$.

(4) $\mathcal{D}_n\mathcal{D}_m \subseteq \mathcal{D}_{n+m}\ \forall n, m \in \mathbb{Z}$.

(5) $[\mathcal{D}_n, \mathcal{D}_m] \subseteq \mathcal{D}_{n+m-1}\ \forall n, m \in \mathbb{Z}$.

Tada je

$$\operatorname{Gr}\mathcal{D} = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \operatorname{Gr}^n\mathcal{D}, \qquad \operatorname{Gr}^n\mathcal{D} = \mathcal{D}_n/\mathcal{D}_{n-1},$$

unitalan graduiran prsten koji je zbog svojstva (5) filtracije komutativan. Posebno, $\mathcal{D}_0 = \operatorname{Gr}^0\mathcal{D}$ je komutativan unitalan prsten. Dakle, prsten $\operatorname{Gr}\mathcal{D}$ (kao i prsten $\mathcal{D}$) možemo promatrati kao $\mathcal{D}_0-$algebru.

Lema 3.3.1. *Pretpostavimo da uz navedena svojstva* $(1) - (5)$ *filtracija* $(\mathcal{D}_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ *ima i sljedeća dva svojstva:*

(6) *Prsten* $\operatorname{Gr}\mathcal{D}$ *je Noetherin.*

(7) $\operatorname{Gr}^1\mathcal{D}$ *generira unitalnu* $\mathcal{D}_0-$*algebru* $\operatorname{Gr}\mathcal{D}$.

Tada vrijedi:

(a) *Prsten* $\mathcal{D}_0$ *je Noetherin.*

(b) *Vrijedi*

$$\mathcal{D}_n = \underbrace{\mathcal{D}_1\cdots\mathcal{D}_1}_{n\,\text{faktora}} \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

(c) *Vrijedi*

$$\mathcal{D}_n\mathcal{D}_m = \mathcal{D}_{n+m} \qquad \forall n, m \in \mathbb{Z}_+.$$

Dokaz: Tvrdnja (a) slijedi neposredno iz tvrdnje (a) leme 3.1.1., budući da je $\mathcal{D}_0 = \operatorname{Gr}^0\mathcal{D}$.

(b) Zbog leme 3.1.2. možemo izabrati konačno mnogo elemenata $x_1, \ldots, x_s \in \operatorname{Gr}^1\mathcal{D}$ koji generiraju unitalnu $\mathcal{D}_0-$algebru $\operatorname{Gr}\mathcal{D}$. Slijedi

$$\operatorname{Gr}^{n+1}\mathcal{D} = \left(\operatorname{Gr}^1\mathcal{D}\right)(\operatorname{Gr}^n\mathcal{D}) \qquad \forall n \in \mathbb{Z}_+,$$

a odatle se indukcijom po $n \in \mathbb{Z}_+$ izvodi da vrijedi

$$\mathcal{D}_{n+1} = \mathcal{D}_1\mathcal{D}_n \qquad \forall n \in \mathbb{Z}_+.$$

Sada tvrdnja (b) slijedi indukcijom po $n \in \mathbb{N}$.

Napokon, tvrdnja (c) je neposredna posljedica tvrdnje (b).

Primijetimo da obje filtracije Weylove algebre iz odjeljka 2.2., filtracija $(\mathrm{F}_k\mathcal{A}_n)_{k\in\mathbb{Z}}$ po redu diferencijalnih operatora i Bernsteinova filtracija $(\mathrm{B}_k\mathcal{A}_n)_{k\in\mathbb{N}}$ zadovoljavaju uvjete $(1) - (7)$.

U daljnjem pretpostavljamo da filtracija $(\mathcal{D}_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ prstena $\mathcal{D}$ zadovoljava uvjete (1) – (7). Kažemo da je rastuća filtracija $\mathrm{F}M = (\mathrm{F}_n M)_{n\in\mathbb{Z}}$ unitalnog $\mathcal{D}-$modula M **kompatibilna** s filtracijom $(\mathcal{D}_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ ako vrijedi

$$\mathcal{D}_n \mathrm{F}_m M \subseteq \mathrm{F}_{n+m} M \qquad \forall n, m \in \mathbb{Z}.$$

Posebno, tada su aditivne podgrupe $\mathrm{F}_n M$ $\mathcal{D}_0-$podmoduli od M. Nadalje, tada je na prirodan način

$$\mathrm{Gr}\, M = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \mathrm{Gr}^n M, \qquad \mathrm{Gr}^n M = \mathrm{F}_n M/\mathrm{F}_{n-1} M, \quad n \in \mathbb{Z},$$

graduiran $\mathrm{Gr}\,\mathcal{D}-$modul.

Kažemo da je $\mathrm{F}M$ **dobra filtracija** $\mathcal{D}-$modula M (u odnosu na filtraciju $(\mathcal{D}_n)_{n\in\mathbb{N}}$) ako su ispunjena sljedeća četiri uvjeta:

(i) Postoji $n_0 \in \mathbb{Z}$ takav da je $\mathrm{F}_n M = \{0\}$ za svaki $n < n_0$.

(ii) Filtracija $\mathrm{F}M$ je **ekshaustivna**, tj. vrijedi $M = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \mathrm{F}_n M$.

(iii) Za svaki $n \in \mathbb{Z}$ $\mathrm{F}_n M$ je konačno generirani $\mathcal{D}_0-$modul.

(iv) Filtracija $\mathrm{F}M$ je **stabilna**, tj. postoji $m_0 \in \mathbb{Z}$ takav da vrijedi

$$\mathcal{D}_n \mathrm{F}_m M = \mathrm{F}_{n+m} M \qquad \forall n \in \mathbb{Z}_+ \quad \text{i} \quad \forall m \in \mathbb{Z}_{\geq m_0}.$$

Lema 3.3.2. *Neka je* $\mathrm{F}M$ *ekshaustivna filtracija* $\mathcal{D}-$*modula* M *koja je kompatibilna sa* $(\mathcal{D}_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ *i koja je* **Hausdorffova**, *tj. vrijedi* $\bigcap_{n\in\mathbb{Z}} \mathrm{F}_n M = \{0\}$. *Tada su sljedeća dva svojstva međusobno ekvivalentna:*

(a) $\mathrm{F}M$ *je dobra filtracija u odnosu na* $(\mathcal{D}_n)_{n\in\mathbb{Z}}$.

(b) $\mathrm{Gr}\,\mathcal{D}-$*modul* $\mathrm{Gr}\, M$ *je konačno generiran.*

Dokaz: $(a) \Rightarrow (b)$. Neka je $m_0 \in \mathbb{Z}$ takav da vrijedi

$$\mathcal{D}_n \mathrm{F}_{m_0} M = \mathrm{F}_{n+m_0} M \qquad \forall n \in \mathbb{Z}_+.$$

Odatle neposredno slijedi

$$(\mathrm{Gr}^n \mathcal{D})\,(\mathrm{Gr}^{m_0} M) = \mathrm{Gr}^{n+m_0} M \qquad \forall n \in \mathbb{Z}_+.$$

Prema tome, $\bigoplus_{n\leq m_0} \mathrm{Gr}^n M$ generira $\mathrm{Gr}\, M$ kao $\mathrm{Gr}\,\mathcal{D}-$modul. Budući da su po pretpostavci $\mathrm{F}_n M$ konačno generirani $\mathcal{D}_0-$moduli, to su i $\mathrm{Gr}^n M$ konačno generirani $\mathcal{D}_0-$moduli. Kako je $\mathrm{F}_n M = \{0\}$ za sve $n < n_0$, zaključujemo da je $\bigoplus_{n\leq m_0} \mathrm{Gr}^n M$ konačno generiran $\mathcal{D}_0-$modul, a kako on generira $\mathrm{Gr}\,\mathcal{D}-$modul $\mathrm{Gr}\, M$, vidimo da vrijedi (b).

$(b) \Rightarrow (a)$. Iz konačne generiranosti $\mathrm{Gr}\,\mathcal{D}-$modula $\mathrm{Gr}\, M$ slijedi da postoji $n_0 \in \mathbb{Z}$ takav da je $\mathrm{Gr}^n M = \{0\}$ za sve $n < n_0$. Nadalje, prema lemi 3.1.2. svi $\mathrm{Gr}^n M$ su konačno generirani kao $\mathcal{D}_0-$moduli. Iz egzaktnog niza

$$\{0\} \longrightarrow \mathrm{F}_{n-1} M \longrightarrow \mathrm{F}_n M \longrightarrow \mathrm{Gr}^n M \longrightarrow \{0\}$$

slijedi da vrijedi $\mathrm{F}_n M = \mathrm{F}_{n-1} M$ za svaki $n < n_0$. Stoga je $\bigcap_{n\in\mathbb{Z}} \mathrm{F}_n M = \mathrm{F}_{n_0-1} M$. Po pretpostavci je filtracija Hausdorffova, pa slijedi $\mathrm{F}_{n_0-1} M = \{0\}$, a odatle svojstvo slijedi (i) iz definicije dobre filtracije. Svojstvo (ii) (ekshaustivnost) je među osnovnim pretpostavkama. Iz konačne generiranosti svih $\mathcal{D}_0-$modula $\mathrm{Gr}^n M$ indukcijom po n slijedi da su i svi $\mathrm{F}_n M$ konačno generirani kao $\mathcal{D}_0-$moduli, dakle, vrijedi i svojstvo (iii).

Treba još dokazati svojstvo (iv): stabilnost filtracije $\mathrm{F}M$. $\mathrm{Gr}\,\mathcal{D}-$modul $\mathrm{Gr}\,M$ je po pretpostavci konačno generiran. Stoga postoji $m_0 \in \mathbb{Z}$ takav da $\bigoplus_{n\leq m_0} \mathrm{Gr}^n M$ generira $\mathrm{Gr}\,\mathcal{D}-$modul $\mathrm{Gr}\,M$. Neka je $m \geq m_0$. Tada je

$$\mathrm{Gr}^{m+1} M = \bigoplus_{k\leq m_0} \left(\mathrm{Gr}^{m+1-k}\mathcal{D}\right)\left(\mathrm{Gr}^k M\right) =$$

$$= \bigoplus_{k\leq m_0} \left(\mathrm{Gr}^1\mathcal{D}\right)\left(\mathrm{Gr}^{m-k}\mathcal{D}\right)\left(\mathrm{Gr}^k M\right) \subseteq \left(\mathrm{Gr}^1\mathcal{D}\right)\left(\mathrm{Gr}^m M\right) \subseteq \mathrm{Gr}^{m+1} M.$$

Kako se početak i završetak podudaraju, sve inkluzije su jednakosti i, posebno, vrijedi

$$\left(\mathrm{Gr}^1\mathcal{D}\right)\left(\mathrm{Gr}^m M\right) = \mathrm{Gr}^{m+1} M.$$

Odatle je

$$\mathrm{F}_{m+1} M = \mathcal{D}_1 \mathrm{F}_m M + \mathrm{F}_{\mathrm{m}} M = \mathcal{D}_1 \mathrm{F}_m M,$$

pa indukcijom po $n \in \mathbb{Z}_+$ nalazimo

$$\mathrm{F}_{m+n} M = \underbrace{\mathcal{D}_1\mathcal{D}_1\cdots\mathcal{D}_1}_{n \text{ faktora}} \mathrm{F}_m M \subseteq \mathcal{D}_n \mathrm{F}_m M \subseteq \mathrm{F}_{n+m} M.$$

Jednak početak i završetak daje jednakost

$$\mathrm{F}_{m+n} M = \mathcal{D}_n \mathrm{F}_m M \qquad \forall m \geq m_0 \quad \text{i} \quad \forall n \in \mathbb{Z}_+.$$

Time je dokazana i stabilnost.

Odatle neposredno slijedi:

Korolar 3.3.3. $\left(\mathcal{D}_n\right)_{n\in\mathbb{Z}}$ *je dobra filtracija od* $\mathcal{D}$ *promatranog kao lijevi* $\mathcal{D}-$*modul.*

Napomenimo da se iz dokaza leme 3.3.2. vidi da se uvjet stabilnosti (iv) iz definicije dobre filtracije može zamijeniti prividno slabijim uvjetom

(iv') Postoji $m_0 \in \mathbb{Z}$ takav da je $\mathcal{D}_n \mathrm{F}_{m_0} M = \mathrm{F}_{n+m_0} M$ $\forall n \in \mathbb{Z}_+$.

Propozicija 3.3.4. $\mathcal{D}-$*modul* M *dopušta dobru filtraciju ako i samo ako je konačno generiran.*

Dokaz: Pretpostavimo da je $\mathrm{F}M = (\mathrm{F}_n M)_{n\in\mathbb{Z}}$ dobra filtracija od M. Tada je $\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \mathrm{F}_n M = M$ i $\mathrm{F}_{n+m_0} M = \mathcal{D}_n \mathrm{F}_{m_0} M$ za svaki $n \in \mathbb{Z}_+$ i za neki dovoljno veliki $m_0 \in \mathbb{Z}$. To pokazuje da $\mathrm{F}_{m_0} M$ generira $\mathcal{D}-$modul M. Budući da je $\mathrm{F}_{m_0} M$ konačno generiran kao $\mathcal{D}_0-$modul, slijedi da je M konačno generiran kao $\mathcal{D}-$modul.

Pretpostavimo sada da je $\mathcal{D}-$modul M konačno generiran. Tada postoji konačno generiran $\mathcal{D}_0-$podmodul U od M koji generira M kao $\mathcal{D}-$modul. Definiramo filtraciju $\mathrm{F}M$ od M sa

$$\mathrm{F}_n M = \{0\} \quad \text{za} \quad n < 0 \qquad \text{i} \qquad \mathrm{F}_n M = \mathcal{D}_n U \quad \text{za} \quad n \geq 0.$$

Tada je $U = \mathrm{Gr}^0 M$ i za svaki $n \in \mathbb{Z}_+$ imamo

$$\mathrm{Gr}^n M = \mathrm{F}_n M / \mathrm{F}_{n-1} M = (\mathcal{D}_n U)/(\mathcal{D}_{n-1} U) \subseteq (\mathrm{Gr}^n \mathcal{D})\left(\mathrm{Gr}^0 M\right) \subseteq \mathrm{Gr}^n M.$$

Dakle, obje inkluzije su jednakosti i, posebno,

$$\mathrm{Gr}^n M = (\mathrm{Gr}^n \mathcal{D})\left(\mathrm{Gr}^0 M\right) = (\mathrm{Gr}^n \mathcal{D})\, U \qquad \forall n \in \mathbb{Z}_+.$$

Odatle slijedi da je $\mathrm{Gr}\,M$ konačno generiran kao $\mathrm{Gr}\,\mathcal{D}-$modul. Sada iz leme 3.3.2. slijedi da je $\mathrm{F}M$ dobra filtracija od M.

Propozicija 3.3.5. *Prsten $\mathcal{D}$ je i lijevo i desno Noetherin.*

Dokaz: Neka je $\mathcal{L}$ lijevi ideal u prstenu $\mathcal{D}$. Polazna filtracija $(\mathcal{D}_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ od $\mathcal{D}$ inducira filtraciju od $\mathcal{L}$:

$$\mathcal{L}_n = \mathcal{L} \cap \mathcal{D}_n, \qquad n \in \mathbb{Z}.$$

Ta je filtracija kompatibilna sa $(\mathcal{D}_n)_{\in\mathbb{Z}}$ ako $\mathcal{L}$ promatramo kao lijevi $\mathcal{D}-$modul. Graduirani $\mathrm{Gr}\,\mathcal{D}-$modul $\mathrm{Gr}\,\mathcal{L}$ je očito ideal u $\mathrm{Gr}\,\mathcal{D}$, a kako je prsten $\mathrm{Gr}\,\mathcal{D}$ Noetherin, ideal $\mathrm{Gr}\,\mathcal{L}$ je konačno generiran kao $\mathrm{Gr}\,\mathcal{D}-$modul. Dakle, prema lemi 3.3.2. filtracija $(\mathcal{L}_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ je dobra, pa je po propoziciji 3.3.4. $\mathcal{L}$ konačno generiran kao $\mathcal{D}-$modul. Dakle, prsten $\mathcal{D}$ je lijevo Noetherin.

Za dokaz da je prsten $\mathcal{D}$ i desno Noetherin, treba zamijeniti $\mathcal{D}$ sa suprotnim prstenom $\mathcal{D}^{\mathrm{op}}$.

Neka su sada $\mathrm{F}M$ i $\mathrm{F}'M$ dvije filtracije $\mathcal{D}-$modula M koje su obje kompatibilne s filtracijom prstena $\mathcal{D}$. Kažemo da je **filtracija** $\mathrm{F}M$ **finija od filtracije** $\mathrm{F}'M$ i pišemo $\mathrm{F}M \preceq \mathrm{F}'M$ ako postoji $k \in \mathbb{Z}_+$ takav da je

$$\mathrm{F}_nM \subseteq \mathrm{F}'_{n+k}M \qquad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Ako je $\mathrm{F}M \preceq \mathrm{F}'M$ i $\mathrm{F}'M \preceq \mathrm{F}M$ onda kažemo da su $\mathrm{F}M$ i $\mathrm{F}'M$ **ekvivalentne filtracije** i pišemo $\mathrm{F}M \approx \mathrm{F}'M$.

Propozicija 3.3.6. *Neka je $\mathrm{F}M$ dobra filtracija konačno generiranog $\mathcal{D}-$modula M. Filtracija $\mathrm{F}M$ finija je od svake druge ekshaustivne filtracije od M.*

Dokaz: Neka je $m_0 \in \mathbb{Z}_+$ takav da je

$$\mathcal{D}_n\mathrm{F}_{m_0}M \subseteq \mathrm{F}_{n+m_0}M \qquad \forall n \in \mathbb{Z}_+.$$

Neka je $\mathrm{F}'M$ ekshaustivna filtracija $\mathcal{D}-$modula. Budući da je $\mathrm{F}M$ dobra filtracija $\mathcal{D}-$modula M, prema svojstvu (iii) dobre filtracije $\mathcal{D}_0-$modul $\mathrm{F}_{m_0}M$ je konačno generiran. Iz ekshaustivnosti filtracije $\mathrm{F}'M$ slijedi da postoji $p \in \mathbb{Z}$ takav da je $\mathrm{F}_{m_0}M \subseteq \mathrm{F}'_pM$. Nadalje, prema svojstvu (i) dobre filtracije postoji $n_0 \in \mathbb{Z}$ takav da je $\mathrm{F}_{n_0}M = \{0\}$.

Stavimo sada $k = p + |n_0|$. Za $m \le n_0$ imamo, naravno, $\mathrm{F}_mM = \{0\} \subseteq \mathrm{F}'_{m+k}M$. Nadalje, ako je $n_0 < m \le m_0$ onda imamo

$$-|n_0| \le n_0 < m \qquad \text{i} \qquad p = -|n_0| + k < m + k.$$

Dakle,

$$\mathrm{F}_mM \subseteq \mathrm{F}_{m_0}M \subseteq \mathrm{F}'_p \subseteq \mathrm{F}'_{m+k}M.$$

Napokon, za $m > m_0$ imamo $m - m_0 \le m$ (naime, m_0 smo izabrali iz $\mathbb{Z}_+$). Odatle i iz $p \le k$ slijedi

$$\mathrm{F}_mM = \mathcal{D}_{m-m_0}\mathrm{F}_{m_0}M \subseteq \mathcal{D}_m\mathrm{F}'_pM \subseteq \mathrm{F}'_{m+p}M \subseteq \mathrm{F}'_{m+k}M.$$

Time je dokazano da vrijedi $\mathrm{F}_mM \subseteq \mathrm{F}'_{m+k}M$ za svaki $m \in \mathbb{Z}$, odnosno, $\mathrm{F}M \preceq \mathrm{F}'M$.

Iz propozicije 3.3.6. neposredno slijedi:

Korolar 3.3.7. *Svake dvije dobre filtracije konačno generiranog $\mathcal{D}-$modula su ekvivalentne.*

Neka je M konačno generiran $\mathcal{D}-$modul i $\mathrm{F}M$ dobra filtracija od M. Tada je $\mathrm{Gr}\,M$ konačno generiran $\mathrm{Gr}\,\mathcal{D}-$modul, dakle, možemo primijeniti rezultate iz odjeljka 3.1. Neka je λ aditivna funkcija na konačno generiranim $\mathcal{D}_0-$modulima. **Pretpostavljat ćemo da λ poprima vrijednosti** ≥ 0. Zbog svojstva (7) filtracije $(\mathcal{D}_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ možemo na $\mathrm{Gr}\,\mathcal{D}-$modul $\mathrm{Gr}\,M$ primijeniti korolar 3.1.5. Dakle, funkcija

$$n \mapsto \lambda(\mathrm{F}_nM) - \lambda(\mathrm{F}_{n-1}M) = \lambda(\mathrm{Gr}^nM)$$

je asimptotski polinomijalna, odnosno, podudara se s polinomom u n za velike vrijednosti $n \in \mathbb{Z}$. Sada iz leme 3.1.7. slijedi da je i funkcija

$$n \mapsto \lambda(\mathrm{F}_n M)$$

asimptotski polinomijalna, odnosno, podudara se s polinomom u n za velike vrijednosti $n \in \mathbb{Z}$.

Pretpostavimo sada da je $\mathrm{F}'M$ druga dobra filtracija $\mathcal{D}-$modula M. Prema korolaru 3.3.7. $\mathrm{F}M \approx \mathrm{F}'M$, dakle, postoji $k \in \mathbb{Z}_+$ takav da je

$$\mathrm{F}_n M \subseteq \mathrm{F}'_{n+k} M \subseteq \mathrm{F}_{n+2k} M \qquad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Budući da je funkcija λ aditivna i poprima samo nenegativne vrijednosti, zaključujemo da je

$$\lambda(\mathrm{F}_n M) \leq \lambda(\mathrm{F}'_{n+k} M) \leq \lambda(\mathrm{F}_{n+2k} M) \qquad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Odatle slijedi da asimptotski polinomi funkcija $n \mapsto \lambda(\mathrm{F}_n M)$ i $n \mapsto \lambda(\mathrm{F}'_n M)$ imaju jednake vodeće članove. Zajednički stupanj svih asimptotskih polinoma funkcija $n \mapsto \lambda(\mathrm{F}_n M)$ za dobre filtracije $\mathrm{F}M$ označavamo sa $d_\lambda(M)$ i zovemo **dimenzija $\mathcal{D}-$modula** M (u odnosu na aditivnu funkciju λ). Prema lemi 3.1.6. vodeći koeficijent tih polinoma ima oblik $e_\lambda(M)/d_\lambda(M)!$, gdje je $e_\lambda(M) \in \mathbb{N}$. Prirodan broj $e_\lambda(M)$ zove se **multiplicitet $\mathcal{D}-$modula** M (u odnosu na λ.).

Neka je

$$\{0\} \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow \{0\}$$

egzaktan niz konačno generiranih $\mathcal{D}-$modula. Filtracija $\mathrm{F}M$ modula M kompatibilna s filtracijom prstena $\mathcal{D}$ inducira filtracije modula M' i M'' :

$$\mathrm{F}M' = (\mathrm{F}_n M')_{n\in\mathbb{Z}}, \qquad \mathrm{F}_n M' = f^{-1}\left(f(M') \cap \mathrm{F}_n M\right), \quad n \in \mathbb{Z},$$

i

$$\mathrm{F}M'' = (\mathrm{F}_n M'')_{n\in\mathbb{Z}}, \qquad \mathrm{F}_n M'' = g\left(\mathrm{F}_n M\right), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Očito su te filtracije kompatibilne s filtracijom prstena $\mathcal{D}$. Nadalje, niz

$$\{0\} \longrightarrow \mathrm{Gr}\, M' \xrightarrow{\mathrm{Gr}\, f} \mathrm{Gr}\, M \xrightarrow{\mathrm{Gr}\, g} \mathrm{Gr}\, M'' \longrightarrow \{0\}$$

je egzaktan niz $\mathrm{Gr}\,\mathcal{D}-$modula. Ako je $\mathrm{F}M$ dobra filtracija, $\mathrm{Gr}\, M$ je konačno generiran $\mathrm{Gr}\,\mathcal{D}-$modul. Budući da je prsten $\mathrm{Gr}\,\mathcal{D}$ Noetherin, iz gornjeg egzaktnog niza vidi se da su $\mathrm{Gr}\, M'$ i $\mathrm{Gr}\, M''$ konačno generirani $\mathrm{Gr}\,\mathcal{D}-$moduli. Stoga su po lemi 3.3.2. $\mathrm{F}M'$ i $\mathrm{F}M''$ dobre filtracije. Dakle, dokazali smo:

Lema 3.3.8. *Neka je*

$$\{0\} \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow \{0\}$$

egzaktan niz konačno generiranih $\mathcal{D}-$modula. Ako je $\mathrm{F}M$ dobra filtracija od M onda su i inducirane filtracije $\mathrm{F}M'$ i $\mathrm{F}M''$ dobre filtracije.

Primijetimo da je u slučaju $M' \subseteq M$ inducirana filtracija $\mathrm{F}M'$ dana sa $\mathrm{F}_n M' = M' \cap \mathrm{F}_n M$.

Prema prethodnoj diskusiji imamo

$$\lambda\left(\mathrm{Gr}^n M\right) = \lambda\left(\mathrm{Gr}^n M'\right) + \lambda\left(\mathrm{Gr}^n M''\right) \qquad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Odatle indukcijom po n nalazimo da je

$$\lambda\left(\mathrm{F}_n M\right) = \lambda\left(\mathrm{F}_n M'\right) + \lambda\left(\mathrm{F}_n M''\right) \qquad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Odatle neposredno slijedi:

Propozicija 3.3.9. *Neka je*

$$\{0\} \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow \{0\}$$

egzaktan niz konačno generiranih $\mathcal{D}-$modula. Tada vrijedi:

(a) $d_\lambda(M) = \max\{d_\lambda(M'), d_\lambda(M'')\}$.

(b) *Ako je* $d_\lambda(M) = d_\lambda(M') = d_\lambda(M'')$, *onda je* $e_\lambda(M) = e_\lambda(M') + e_\lambda(M'')$.

(c) *Ako je* $d_\lambda(M) = d_\lambda(M') > d_\lambda(M'')$, *onda je* $e_\lambda(M) = e_\lambda(M')$.

(d) *Ako je* $d_\lambda(M) = d_\lambda(M'') > d_\lambda(M')$, *onda je* $e_\lambda(M) = e_\lambda(M'')$.

Pretpostavimo sada da je $\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathcal{D})$ automorfizam sa svojstvom $\varphi(\mathcal{D}_0) = \mathcal{D}_0$. Definiramo funktor $\tilde{\varphi} : \mathcal{M}(\mathcal{D}) \to \mathcal{M}(\mathcal{D})$ koji $\mathcal{D}-$modulu M pridružuje $\mathcal{D}-$modul $\tilde{\varphi}(M)$, koji se kao aditivna gruipa podudara sa M, a djelovanje je dano sa

$$(T, m) \mapsto T \bullet m = \varphi(T)m, \qquad T \in \mathcal{D}, \quad m \in M.$$

Nadalje, ako je $f : M \to M'$ homomorfizam $\mathcal{D}-$modula onda stavljamo $\tilde{\varphi}(f) = f$, jer f je ujedno homomorfizam sa $\tilde{\varphi}(M)$ u $\tilde{\varphi}(M')$; doista, za $T \in \mathcal{D}$ i za $m \in M = \tilde{\varphi}(M)$ vrijedi

$$f(T \bullet m) = f(\varphi(T)m) = \varphi(T)f(m) = T \bullet f(m).$$

Dakle, $M \mapsto \tilde{\varphi}(M)$, $f \mapsto \tilde{\varphi}(f) = f$, je kovarijantan funktor s kategorije $\mathcal{M}(\mathcal{D})$ u samu sebe. U stvari radi se o automorfizmu kategorije $\mathcal{M}(\mathcal{D})$, jer inverzni automorfizam φ^{-1} prstena $\mathcal{D}$ očito definira inverzni funktor funktoru $\tilde{\varphi}$. Uočimo da funktor $\tilde{\varphi}$ ostavlja invarijantnom punu potkategoriju $\mathcal{M}_f(\mathcal{D})$ konačno generiranih $\mathcal{D}-$modula.

Propozicija 3.3.10. *Neka je M konačno generiran $\mathcal{D}-$modul i neka je $\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathcal{D})$. Tada vrijedi* $d_\lambda(\tilde{\varphi}(M)) = d_\lambda(M)$.

Dokaz: $\mathrm{Gr}\,\mathcal{D}$ je konačno generirana unitalna $\mathcal{D}_0-$algebra i po pretpostavci je generirana sa $\mathrm{Gr}^1\mathcal{D}$. Neka su $T_1, \ldots, T_s \in \mathcal{D}_1$ takvi da njihove klase u $\mathrm{Gr}^1\mathcal{D} = \mathcal{D}_1/\mathcal{D}_0$,

$$T_1 + \mathcal{D}_0, \ldots, T_s + \mathcal{D}_0,$$

generiraju unitalnu $\mathcal{D}_0-$algebru $\mathrm{Gr}\,\mathcal{D}$. Postoji $d \in \mathbb{N}$ takav da su $\varphi(T_i) \in \mathcal{D}_d$ za $1 \le i \le s$. Budući da očito $T_1, \ldots, T_s, 1$ generiraju $\mathcal{D}_0-$modul $\mathcal{D}_1$, zaključujemo da je $\varphi(\mathcal{D}_1) \subseteq \mathcal{D}_d$.

Neka je $\mathrm{F}M$ dobra filtracija od M. Definiramo filtraciju $\mathrm{F}\tilde{\varphi}(M)$ modula $\tilde{\varphi}(M)$ ovako:

$$\mathrm{F}_p\tilde{\varphi}(M) = \mathrm{F}_{dp}M, \qquad p \in \mathbb{Z}.$$

Tada je $\mathrm{F}\tilde{\varphi}(M)$ rastuća ekshaustivna filtracija $\mathcal{D}-$modula $\tilde{\varphi}(M)$ konačno generiranim $\mathcal{D}_0-$podmodulima. Dokažimo da je ta filtracija kompatibilna s filtracijom prstena $\mathcal{D}$, tj. da vrijedi

$$\mathcal{D}_n \bullet \mathrm{F}_m\tilde{\varphi}(M) \subseteq \mathrm{F}_{m+n}\tilde{\varphi}(M) \qquad \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{i} \quad \forall m \in \mathbb{Z}.$$

To ćemo dokazati indukcijom po $n \in \mathbb{N}$. Prije svega, za svaki $m \in \mathbb{Z}$ imamo

$$\mathcal{D}_1 \bullet \mathrm{F}_m\tilde{\varphi}(M) = \varphi(\mathcal{D}_1)\mathrm{F}_{dm}M \subseteq \mathcal{D}_d\mathrm{F}_{dm}M \subseteq \mathrm{F}_{d+dm}M = \mathrm{F}_{d(m+1)}M = \mathrm{F}_{m+1}\tilde{\varphi}(M).$$

Pretpostavimo sada da je $n \ge 2$ i da je dokazano da vrijedi

$$\mathcal{D}_{n-1} \bullet \mathrm{F}_m\tilde{\varphi}(M) \subseteq \mathrm{F}_{m+n-1}\tilde{\varphi}(M) \qquad \forall m \in \mathbb{Z}.$$

Budući da je $\mathcal{D}_n = \mathcal{D}_1\mathcal{D}_{n-1}$, nalazimo

$$\mathcal{D}_n \bullet \mathrm{F}_m\tilde{\varphi}(M) = (\mathcal{D}_1\mathcal{D}_{n-1}) \bullet \mathrm{F}_m\tilde{\varphi}(M) = \mathcal{D}_1 \bullet \mathcal{D}_{n-1} \bullet \mathrm{F}_m\tilde{\varphi}(M) \subseteq \mathcal{D}_1 \bullet \mathrm{F}_{m+n-1}\tilde{\varphi}(M) \subseteq \mathrm{F}_{m+n}\tilde{\varphi}(M).$$

Dakle, filtracija $\mathrm{F}\tilde{\varphi}(M)$ $\mathcal{D}-$modula $\tilde{\varphi}(M)$ kompatibilna je s filtracijom prstena $\mathcal{D}$. Neka je sada $\mathrm{F}'\tilde{\varphi}(M)$ bilo koja dobra filtracija $\mathcal{D}-$modula $\tilde{\varphi}(M)$. Prema propoziciji 3.3.6. filtracija $\mathrm{F}'\tilde{\varphi}(M)$ finija je od filtracije $\mathrm{F}\tilde{\varphi}(M)$. Dakle, postoji $k \in \mathbb{Z}_+$ takav da vrijedi

$$\mathrm{F}'_n\tilde{\varphi}(M) \subseteq \mathrm{F}_{n+k}\tilde{\varphi}(M) = \mathrm{F}_{d(n+k)}M \qquad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Za velike vrijednosti $n \in \mathbb{Z}$ funkcija $n \mapsto \lambda(\mathrm{F}_{d(n+k)}M)$ jednaka je polinomu u n s vodećim članom

$$\frac{e_\lambda(M)d^{d_\lambda(M)}}{d_\lambda(M)!}n^{d_\lambda(M)}.$$

Funkcija $n \mapsto \lambda\left(\mathrm{F}'_n\tilde{\varphi}(M)\right)$ jednaka je za velike vrijednosti $n \in \mathbb{Z}$ polinomu u n stupnja $d_\lambda\left(\tilde{\varphi}(M)\right)$. Zaključujemo da je

$$d_\lambda\left(\tilde{\varphi}(M)\right) \leq d_\lambda(M).$$

Ista argumentacija primijenjena na inverzni automorfizam φ^{-1} daje obrnutu nejednakost:

$$d_\lambda(M) = d_\lambda\left(\tilde{\varphi}^{-1}\left(\tilde{\varphi}(M)\right)\right) \leq d_\lambda\left(\tilde{\varphi}(M)\right).$$

Dakle, dokazali smo jednakost $d_\lambda\left(\tilde{\varphi}(M)\right) = d_\lambda(M)$.

Iako su stupnjevi asimptotskih polinoma funkcija $n \mapsto \lambda\left(\mathrm{F}_nM\right)$ i $n \mapsto \lambda\left(\mathrm{F}'_n\tilde{\varphi}(M)\right)$ jednaki, ti polinomi ne moraju biti jednaki. Iz dokaza ne slijedi čak niti da se podudaraju multipliciteti $e_\lambda(M)$ i $e_\lambda\left(\tilde{\varphi}(M)\right)$. Naime, u našem smo dokazu mogli samo zaključiti da vrijedi nejednakost $e_\lambda\left(\tilde{\varphi}(M)\right) \leq e_\lambda(M)d^{d_\lambda(M)}$, gdje je $d \in \mathbb{N}$ takav da je $\varphi(\mathcal{D}_1) \subseteq \mathcal{D}_d$.

Međutim, ako je automorfizam φ od $\mathcal{D}$ takav da je ne samo $\varphi(\mathcal{D}_0) = \mathcal{D}_0$, nego i $\varphi(\mathcal{D}_1) = \mathcal{D}_1$, onda vrijedi $\varphi(\mathcal{D}_n) = \mathcal{D}_n$ za svaki n. U tom se slučaju filtracija $\mathrm{F}\tilde{\varphi}(M)$ modula $\tilde{\varphi}(M)$ definirana u dokazu propozicije 3.3.9. podudara s filtracijom $\mathrm{F}M$ i tada su, naravno, funkcije $n \mapsto \lambda\left(\mathrm{F}_n\tilde{\varphi}(M)\right)$ i $n \mapsto \lambda\left(\mathrm{F}_nM\right)$ jednake, pa vrijedi i $e_\lambda\left(\tilde{\varphi}(M)\right) = e_\lambda(M)$.

Poglavlje 4

SNOPOVI

4.1 Definicije i osnovna svojstva

Snop Abelovih grupa na topološkom prostoru X je uređen par $(\mathcal{F}, \pi)$, pri čemu vrijedi:

$(S1)$ *$\mathcal{F}$ je topološki prostor.*

$(S2)$ *$\pi : \mathcal{F} \to X$ je surjekcija i lokalni homeomorfizam: za svaku točku $f \in \mathcal{F}$ postoje okolina V od f i okolina U od $\pi(f)$ takve da je $\pi|V$ homeomorfizam sa V na U.*

$(S3)$ *Za svaku točku $x \in X$* **vlat** $\mathcal{F}_x = \pi^{-1}(x)$ **nad točkom** *x je Abelova grupa (operaciju zapisujemo aditivno).*

$(S4)$ *Preslikavanje $f \mapsto -f$ sa $\mathcal{F}$ u $\mathcal{F}$ je neprekidno; preslikavanje $(f, g) \mapsto f + g$ sa*

$$\mathcal{F} + \mathcal{F} = \{(f, g) \in \mathcal{F} \times \mathcal{F};\ \pi(f) = \pi(g)\} = \bigcup_{x \in X} \mathcal{F}_x \times \mathcal{F}_x \tag{4.1}$$

u $\mathcal{F}$ je neprekidno.

Obično ćemo snop označavati samo sa $\mathcal{F}$. Ukoliko radimo s više snopova, pripadne lokalne homeomorfizme ćemo obično označavati istim znakom π, a ako bi moglo doći do zabune, za snop $\mathcal{F}$ ćemo pripadni lokalni homeomorfizam označavati sa $\pi_{\mathcal{F}}$.

Ako je A Abelova grupa i X topološki prostor, definiramo tzv. **konstantan snop** $(\mathcal{F}, \pi)$, gdje je $\mathcal{F} = X \times A$ uz diskretnu topologiju na A i $\pi = \mathrm{pr}_1$ je projekcija na prvi faktor. Tada se $\mathcal{F}_x = \{x\} \times A$ identificira s grupom A za svaku točku $x \in X$. Katkada konstantan snop s vlati A označavamo sa A ili sa A_X. Poseban je slučaj nul$-$snop $0 = 0_X = X \times \{0\}$.

Snop prstenova na topološkom prostoru X definira se analogno: u tom je slučaju svaka vlat $\mathcal{F}_x$ unitalni prsten i u aksiomu $(S4)$ zahtijeva se još da je preslikavanje $(f, g) \mapsto fg$ sa $\mathcal{F} + \mathcal{F}$ u $\mathcal{F}$ neprekidno i da je preslikavanje $x \mapsto 1_x$ sa X u $\mathcal{F}$ neprekidno; pri tome je 1_x jedinica u prstenu $\mathcal{F}_x$. Ako je K polje, **snop** $K-$**algebri** je snop prstenova kod kojeg je svaka vlat $\mathcal{F}_x$ unitalna algebra nad poljem K i preslikavanje $f \mapsto \lambda f$ sa $\mathcal{F}$ u $\mathcal{F}$ je neprekidno za svaki $\lambda \in K$. Ako je $\mathcal{F}$ snop prstenova na topološkom prostoru X, **snop** $\mathcal{F}-$**modula** je snop Abelovih grupa $\mathcal{M}$ na X takav da je svaka vlat $\mathcal{M}_x$ unitalni modul nad prstenom $\mathcal{F}_x$ i preslikavanje $(f, m) \mapsto fm$ sa

$$\mathcal{F} + \mathcal{M} = \{(f, m) \in \mathcal{F} \times \mathcal{M};\ \pi_{\mathcal{F}}(f) = \pi_{\mathcal{M}}(m)\} = \bigcup_{x \in X} \mathcal{F}_x \times \mathcal{M}_x. \tag{4.2}$$

u $\mathcal{M}$ je neprekidno.

U daljnjem ćemo samo govoriti **snop na** X i podrazumijevati da se radi ili o snopu Abelovih grupa ili o snopu prstenova ili o snopu $K-$algebri ili o snopu $\mathcal{F}-$modula za neki snop prstenova $\mathcal{F}$.

Neka su $\mathcal{F}$ i $\mathcal{G}$ snopovi (iste vrste) na topološkom prostoru X. Napomenimo da svaki snop Abelovih grupa može promatrati kao snop $\mathbb{Z}-$modula, pri čemu $\mathbb{Z}$ označava konstantan snop definiran prstenom cijelih brojeva. To nam omogućuje da zapravo možemo stalno podrazumijevati da je *snop* zapravo *snop modula.* **Morfizam snopa $\mathcal{F}$ u snop $\mathcal{G}$** je neprekidno preslikavanje $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ sa svojstvom da je za svaku točku $x \in X$ restrikcija $\varphi|\mathcal{F}_x$ homomorfizam sa $\mathcal{F}_x$ u $\mathcal{G}_x$. To posebno znači da vrijedi $\pi_{\mathcal{G}} \circ \varphi = \pi_{\mathcal{F}}$. Na taj način za bilo koju od navedenih algebarskih kategorija $\mathcal{C}$ definirana je kategorija snopova $\mathcal{S}h_X(\mathcal{C})$ na X. Morfizam $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ je bijekcija ako i samo ako je $\varphi_x = \varphi|\mathcal{F}_x$ izomorfizam sa $\mathcal{F}_x$ na $\mathcal{G}_x$ za svaku točku $x \in X$. Zbog lokalne homeomorfnosti preslikavanja $\pi_{\mathcal{F}} : \mathcal{F} \to X$ i $\pi_{\mathcal{G}} : \mathcal{G} \to X$ slijedi da je i inverzno preslikavanje $\varphi^{-1} : \mathcal{G} \to \mathcal{F}$ morfizam snopova. Bijektivni morfizam zove se **izomorfizam snopova**. Kažemo da su $\mathcal{F}$ i $\mathcal{G}$ **izomorfni snopovi** ako postoji izomorfizam $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$.

Neka je $\mathcal{F}$ snop na prostoru X i neka je $U \subseteq X$. **Prerez snopa $\mathcal{F}$ nad skupom** U je neprekidno preslikavanje $s : U \to \mathcal{F}$ takvo da je $\pi \circ s = \mathrm{id}_U$. Drugim riječima, pretpostavljamo da je $s(x) \in \mathcal{F}_x$ za svaku točku $x \in U$. Skup svih prereza snopa $\mathcal{F}$ nad skupom $U \subseteq X$ označavat ćemo sa $\Gamma(U, \mathcal{F})$. Ako je $\mathcal{F}$ snop Abelovih grupa (prstenova, $K-$algebri), s operacijom (operacijama) po točkama je $\Gamma(U, \mathcal{F})$ Abelova grupa (unitalni prsten, unitalna $K-$algebra); ako je $\mathcal{F}$ snop prstenova i $\mathcal{M}$ je $\mathcal{F}-$modul, onda je za svaki podskup $U \subseteq X$ s operacijama po točkama $\Gamma(U, \mathcal{M})$ unitalni modul nad $\Gamma(U, \mathcal{F})$. Ako su $U \subseteq V \subseteq X$ i $s \in \Gamma(V, \mathcal{F})$ onda je restrikcija $s|U \in \Gamma(U, \mathcal{F})$ i $s \mapsto s|U$ je homomorfizam grupa (odnosno, unitalni homomorfizam prstenova ili $K-$algebri).

Lako se vidi da je aksiom $(S2)$ ekvivalentan sljedećem:

$(S2')$ *Za svaki otvoren skup $U \subseteq X$ i svaki $s \in \Gamma(U, \mathcal{F})$, skup $s(U) = \{s(x);\ x \in U\}$ je otvoren u $\mathcal{F}$ i ako je $\mathcal{U}$ baza otvorenih skupova u topološkom prostoru X onda je*

$$\{s(U);\ U \in \mathcal{U},\ s \in \Gamma(U, \mathcal{F})\}$$

baza otvorenih skupova u topološkom prostoru $\mathcal{F}$.

Istaknimo jednu važnu posljedicu aksioma $(S2)$: za svaku točku $x \in X$ i svaki $f \in \mathcal{F}_x$ postoji okolina U točke x i prerez $s \in \Gamma(U, \mathcal{F})$ takvi da je $s(x) = f$. Nadalje, ako su U i V okoline točke x i ako su $s \in \Gamma(U, \mathcal{F})$ i $t \in \Gamma(V, \mathcal{F})$ takvi prerezi da je $s(x) = t(x)$, onda postoji okolina $W \subseteq U \cap V$ točke x takva da je $s|W = t|W$. To zapravo znači da se $\mathcal{F}_x$ može identificirati s induktivnim limesom

$$\lim_{U \ni x} \Gamma(U, \mathcal{F})$$

po skupu okolina U točke x.

Neka je X topološki prostor i neka je $\mathcal{T}(X)$ skup svih otvorenih podskupova od X. Definiramo kategoriju $\mathrm{Op}(X)$ kojoj je $\mathcal{T}(X)$ skup objekata, a za $V, U \in \mathcal{T}(X)$ je

$$\mathrm{Mor}_{\mathrm{Op}(X)}(V, U) = \begin{cases} \text{jednočlan skup} & \text{ako je } V \subseteq U \\ \emptyset & \text{inače.} \end{cases}$$

Ako je $\mathcal{C}$ kategorija, **predsnop na X s vrijednostima u** $\mathcal{C}$ je kontravarijantan funktor sa $\mathrm{Op}(X)$ u $\mathcal{C}$. **Morfizam predsnopova** je morfizam takvih funktora.

Drugim riječima, predsnop imamo ako je svakom $U \in \mathcal{T}(X)$ pridružem objekt $\mathcal{F}_U$ iz kategorije $\mathcal{C}$ i svakom paru $U, V \in \mathcal{T}(X)$, takvom da je $V \subseteq U$, pridružen je homomorfizam $\rho_V^U : \mathcal{F}_U \to \mathcal{F}_V$ i to tako da vrijedi:

$(P1)$ *Za svaki* $U \in \mathcal{T}(X)$ *je* $\rho_U^U = \mathrm{id}_{\mathcal{F}_U}$.

$(P2)$ *Za* $W, V, U \in \mathcal{T}(X)$, *takve da je* $W \subseteq V \subseteq U$, *vrijedi* $\rho_W^U = \rho_W^V \circ \rho_V^U$.

Napomenimo da se ρ_V^U obično zovu **homomorfizmi restrikcije**. Morfizam predsnopa $\left(\mathcal{F}_U, \rho_V^U\right)$ u predsnop $\left(\mathcal{G}_U, \sigma_V^U\right)$ je familija homomorfizama $\tau_U : \mathcal{F}_U \to \mathcal{G}_U$, $U \in \mathcal{T}(X)$, takva da vrijedi

$$\sigma_V^U \circ \tau_U = \tau_V \circ \rho_V^U \qquad \forall U, V \in \mathcal{T}(X),\ V \subseteq U.$$

Tako definiranu **kategoriju predsnopova na** X **s vrijednostima u** kategoriji $\mathcal{C}$ označavamo sa $\mathcal{PS}h_X(\mathcal{C})$ ili samo sa $\mathcal{PS}h_X$, ako se kategorija $\mathcal{C}$ podrazumijeva.

Uzmimo sada da je $\mathcal{C}$ kategorija Abelovih grupa (unitalnih prstenova, unitalnih $K-$algebri) i neka je $\left(\mathcal{F}_U, \rho_V^U\right)$ predsnop na X s vrijednostima u $\mathcal{C}$. Definiramo tada snop $\mathcal{F}$ na X ovako:

(a) Za $x \in X$ stavimo

$$\mathcal{F}_x = \varinjlim_{U \ni x} \mathcal{F}_U \qquad \text{(induktivni limes po otvorenim okolinama točke } x\text{).}$$

Tada za svaku otvorenu okolinu U točke x imamo kanonski homomorfizam $\rho_x^U : \mathcal{F}_U \to \mathcal{F}_x$ i vrijedi $\rho_x^U = \rho_x^V \circ \rho_V^U$ ako je $x \in V \subseteq U$. Sa $\mathcal{F}$ označimo disjunktnu uniju svih $\mathcal{F}_x$, $x \in X$.

(b) Za $U \in \mathcal{T}(X)$ i $t \in \mathcal{F}_U$ stavimo

$$[t, U] = \left\{\rho_x^U(t);\ x \in U\right\}.$$

Sada skup $\mathcal{F}$ snabdijemo topologijom generiranom svim takvim skupovima $[t, U]$. Dakle, $f \in \mathcal{F}_x$ ima kao bazu okolina u topološkom prostoru $\mathcal{F}$ skup

$$\left\{[t, U];\ U \in \mathcal{T}(X) \text{ takav da je } x \in U,\ t \in \mathcal{F}_U \text{ takav da je } \rho_x^U(t) = x\right\}.$$

Direktno se provjerava da je tada $\mathcal{F}$ stvarno snop. Kažemo da je $\mathcal{F}$ **snopizacija predsnopa** $\left(\mathcal{F}_U, \rho_V^U\right)$.

U tom slučaju za svaki $U \in \mathcal{T}(X)$ imamo prirodno definiran homomorfizam $\iota_U : \mathcal{F}_U \to \Gamma(U, \mathcal{F})$ koji elementu $t \in \mathcal{F}_U$ pridružuje prerez $x \mapsto \rho_x^U(t)$ snopa $\mathcal{F}$ nad skupom U.

Propozicija 4.1.1. *Da bi homomorfizam* $\iota_U : \mathcal{F}_U \to \Gamma(U, \mathcal{F})$ *bio injektivan nužno je i dovoljno da bude ispunjen sljedeći uvjet:*

> *Ako za element* $t \in \mathcal{F}_U$ *postoji otvoren pokrivač* $(U_i)_{i \in I}$ *od* U *takav da je* $\rho_{U_i}^U(t) = 0$ *za svaki* $i \in I$, *onda je* $t = 0$.

Dokaz: Ako $t \in \mathcal{F}_U$ zadovoljava taj uvjet, onda vrijedi

$$\rho_x^U(t) = \left(\rho_x^{U_i} \circ \rho_{U_i}^U\right)(t) = \rho_x^{U_i}\left(\rho_{U_i}^U(t)\right) = 0 \qquad \forall i \in I \quad \text{i} \quad \forall x \in U_i.$$

No to znači da je $\iota_U(t) = 0$. Obratno, pretpostavimo da za $t \in \mathcal{F}_U$ vrijedi $\iota_U(t) = 0$. Tada je $\rho_x^U(x) = 0$ za $x \in U$, dakle, po definiciji induktivnog limesa postoji otvorena okolina $U(x)$ točke x takva da je $\rho_{U(x)}^U(t) = 0$. No sada je $(U(x))_{x \in U}$ otvoren pokrivač od U, koji ima svojstvo iz gornjeg uvjeta, pa slijedi $t = 0$.

Propozicija 4.1.2. *Neka je* $U \in \mathcal{T}(X)$ *i pretpostavimo da je homomorfizam* $\iota_V : \mathcal{F}_V \to \Gamma(V, \mathcal{F})$ *injektivan za svaki* $V \in \mathcal{T}(X)$, $V \subseteq U$. *Da bi homomorfizam* $\iota_U : \mathcal{F}_U \to \Gamma(U, \mathcal{F})$ *bio surjektivan (dakle, bijektivan) nužno je i dovoljno da bude zadovoljen sljedeći uvjet:*

Za svaki otvoren pokrivač $(U_i)_{i\in I}$ *od* U *i za svaku familiju* $(t_i)_{i\in I}$, *gdje su* $t_i \in \mathcal{F}_{U_i}$, *takvi da vrijedi*

$$\rho^{U_i}_{U_i\cap U_j}(t_i) = \rho^{U_j}_{U_i\cap U_j}(t_j) \qquad \forall (i,j) \in I \times I,$$

postoji $t \in \mathcal{F}_U$ *takav da je* $\rho^U_{U_i}(t) = t_i \ \ \forall i \in I$.

Dokaz: Uvjet je nužan. Doista, neka je $(t_i)_{i\in I}$ takva familija. Svaki t_i definira prerez $s_i = \iota_{U_i}(t_i) \in \Gamma(U_i, \mathcal{F})$. Sada za bilo koji par $(i,j) \in I \times I$ i za svaku točku $x \in U_i \cap U_j$ imamo

$$s_i(x) = \rho^{U_i}_x(t_i) = \rho^{U_i\cap U_j}_x\left(\rho^{U_i}_{U_i\cap U_j}(t_i)\right) = \rho^{U_i\cap U_j}_x\left(\rho^{U_j}_{U_i\cap U_j}(t_j)\right) = \rho^{U_j}_x(t_j) = s_j(x).$$

To znači da je $s_i|U_i\cap U_j = s_j|U_i\cap U_j$ za svaki par $(i,j) \in I \times I$. Prema tome je sa $s|U_i = s_i$, $i \in I$, dobro definiran prerez $s \in \Gamma(U, \mathcal{F})$. Stavimo sada $t'_i = \rho^U_{U_i}(t)$, $i \in I$. Prerez nad U_i definiran sa $t'_i \in \mathcal{F}_{U_i}$ je upravo s_i, pa slijedi da vrijedi $\iota_{U_i}(t_i - t'_i) = 0$. Zbog pretpostavljene injektivnosti ι_{U_i} slijedi da je $t'_i = t_i$.

Uvjet je i dovoljan. Doista, neka je $s \in \Gamma(U, \mathcal{F})$. Za bilo koju točku $x \in U$ je $s(x) \in \mathcal{F}_x$, pa postoji otvorena okolina $V \subseteq U$ točke x i $v \in \mathcal{F}_V$ takav da je $s(x) = \rho^V_x(v)$. Tada se prerezi $s|V$ i $y \to \rho^V_y(v)$ podudaraju u točki x, pa se podudaraju na nekoj njenoj okolini. To znači da postoje otvoren pokrivač $(U_i)_{i\in I}$ od U i familija $(t_i)_{i\in I}$, $t_i \in \mathcal{F}_{U_i}$, takvi da je $\iota_{U_i}(t_i) = s|U_i \ \ \forall i \in I$. Tada za svaki par $(i,j) \in I \times I$ elementi $\rho^{U_i}_{U_i\cap U_j}(t_i), \rho^{U_j}_{U_i\cap U_j}(t_j) \in \mathcal{F}_{U_i\cap U_j}$ definiraju isti prerez $s|U_i\cap U_j$. Zbog pretpostavljene injektivnosti od $\iota_{U_i\cap U_j}$ ti se elementi podudaraju. Prema uvjetu postoji $t \in \mathcal{F}_U$ takav da je $\rho^U_{U_i}(t) = t_i \ \ \forall i \in I$. Tada je $\iota_U(t)|U_i = s|U_i \ \ \forall i \in I$, dakle, vrijedi $\iota_U(t) = s$.

Iz propozicija 4.1.1. i 4.1.2., a zbog prije navedenih svojstava prereza snopa, neposredno slijedi:

Propozicija 4.1.3. *Ako je* $\mathcal{F}$ *snop na* X, *onda je snop definiran predsnopom* $\left(\Gamma(U,\mathcal{F}), \rho^V_U\right)$, *pri čemu je* ρ^V_U *restrikcija sa* U *na* V, *kanonski izomorfan sa* $\mathcal{F}$.

Neka je $\mathcal{A}$ snop prstenova na X i $\mathcal{F}$ snop $\mathcal{A}-$modula na X. Neka je za svaku točku $x \in X$ zadan unitalni $\mathcal{A}_x-$podmodul $\mathcal{G}_x \subseteq \mathcal{F}_x$. Kažemo da je $\mathcal{G} = \bigcup_{x\in X} \mathcal{G}_x$ **podsnop** (ili $\mathcal{A}-$**podmodul**) od $\mathcal{F}$ ako je $\mathcal{G}$ otvoren podskup od $\mathcal{F}$. Lako se vidi da je taj uvjet ekvivalentan sljedećem uvjetu:

Za svaku točku $x \in X$, *njenu okolinu* U *i prerez* $s \in \Gamma(U, \mathcal{F})$, *takav da je* $s(x) \in \mathcal{G}_x$, *postoji okolina* $V \subseteq U$ *točke* x, *takva da vrijedi* $s(y) \in \mathcal{G}_y \ \ \forall y \in V$.

Ako je $\mathcal{G}$ podsnop od $\mathcal{F}$, onda je jasno da je $\mathcal{G}$ snop na X. Za svaku točku $x \in X$ stavimo $\mathcal{K}_x = \mathcal{F}_x/\mathcal{G}_x$. Snabdijemo disjunktnu uniju $\mathcal{K} = \bigcup_{x\in X} \mathcal{K}_x$ kvocijentnom topologijom topologije od $\mathcal{F}$. Lako se vidi da tako dobivamo snop $\mathcal{A}-$modula. On se zove **kvocijentni snop** snopa $\mathcal{F}$ po podsnopu $\mathcal{G}$ i označava sa $\mathcal{F}/\mathcal{G}$. Moguć je i drugi način konstrukcije kvocijentnog snopa pomoću kvocijentnog predsnopa: za svaki otvoren skup $U \in \mathcal{T}(X)$ stavimo $\mathcal{K}_U = \Gamma(U,\mathcal{F})/\Gamma(U,\mathcal{G})$, a za otvorene skupove $U \subseteq V$ označimo sa $\varphi^V_U : \mathcal{K}_V \to \mathcal{K}_U$ homomorfizam dobiven iz homomorfizma restrikcije $\rho^V_U : \Gamma(V,\mathcal{F}) \to \Gamma(U,\mathcal{F})$ prijelazom na kvocijente. Tada je $\left(\mathcal{K}_U, \varphi^V_U\right)$ predsnop i njegova je snopizacija upravo $\mathcal{K} = \mathcal{F}/\mathcal{G}$.

Po jednoj ili po drugoj definiciji kvocijentnog snopa $\mathcal{K} = \mathcal{F}/\mathcal{G}$ pokazuje se da ako su $x \in X$, U okolina od x i $s \in \Gamma(U, \mathcal{K})$ onda postoji okolina $V \subseteq U$ točke x i $t \in \Gamma(V, \mathcal{F})$ takav da je $s(y) = t(y) + \mathcal{G}_y \ \ \forall y \in V$. No to svojstvo je samo lokalno, a ne i globalno: ako je $U \subseteq X$ otvoren skup, onda imamo samo egzaktan niz

$$\{0\} \longrightarrow \Gamma(U,\mathcal{G}) \longrightarrow \Gamma(U,\mathcal{F}) \longrightarrow \Gamma(U,\mathcal{K}),$$

ali homomorfizam $\Gamma(U,\mathcal{F}) \longrightarrow \Gamma(U,\mathcal{K})$ ne mora biti surjektivan.

Neka je i dalje $\mathcal{A}$ snop prstenova i neka su sada $\mathcal{F}$ i $\mathcal{G}$ snopovi $\mathcal{A}-$modula. Nadalje, neka je $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ homomorfizam, dakle, neprekidno preslikavanje takvo da je za svaku točku $x \in X$ restrikcija $\varphi_x = \varphi|\mathcal{F}_x$ homomorfizam unitalni $\mathcal{A}_x-$modula sa $\mathcal{F}_x$ u $\mathcal{G}_x$. Naravno, homomorfizam se može zadati kao familija homorfizama $(\varphi_x)_{x\in X}$ takva da je preslikavanje $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$, koju ta familija definira, neprekidno. Uvjet neprekidnosti može se i ovako iskazati: ako je s prerez od $\mathcal{F}$ nad skupom $U \subseteq X$, onda je $x \mapsto \varphi_x(s(x))$ prerez od $\mathcal{G}$ nad skupom U; taj prerez označavamo sa $\varphi(s)$ ili sa $\varphi \circ s$. Npr. ako je $\mathcal{G}$ podsnop od $\mathcal{F}$, onda su inkluzija $\mathcal{G} \to \mathcal{F}$ i kvocijentno preslikavanje $\mathcal{F} \to \mathcal{F}/\mathcal{G}$ homomorfizmi (snopova) $\mathcal{A}-$modula.

Propozicija 4.1.4. *Neka je $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ homomorfizam $\mathcal{A}-$modula. Za svaku točku $x \in X$ označimo sa $\mathcal{N}_x$ jezgru homomorfizma φ_x i sa $\mathcal{R}_x$ sliku tog homomorfizma. Tada je $\mathcal{N} = \bigcup_{x\in X} \mathcal{N}_x$ podsnop od $\mathcal{F}$, $\mathcal{R} = \bigcup_{x\in X} \mathcal{R}_x$ je podsnop od $\mathcal{G}$ i φ definira izomorfizam sa $\mathcal{F}/\mathcal{N}$ na $\mathcal{R}$.*

Dokaz: Za svaku točku $x \in X$ je φ_x unitalni homomorfizam sa $\mathcal{F}_x$ u $\mathcal{G}_x$, prema tome, $\mathcal{N}_x$ i $\mathcal{R}_x$ su $\mathcal{A}_x-$podmoduli od $\mathcal{F}_x$ i od $\mathcal{G}_x$ i φ_x definira izomorfizam sa $\mathcal{F}_x/\mathcal{N}_x$ na $\mathcal{R}_x$. Neka je s prerez od $\mathcal{F}$ nad okolinom U točke x takav da je $s(x) \in \mathcal{N}_x$. Tada je $(\varphi \circ s)(x) = 0$, a kako je $\varphi \circ s$ prerez od $\mathcal{G}$ nads U, postoji okolina $V \subseteq U$ točke x takva da je $(\varphi \circ s)(y) = 0 \ \ \forall y \in V$, tj. $s(y) \in \mathcal{N}_y \ \ \forall y \in V$. Time je dokazano da je $\mathcal{N}$ podsnop od $\mathcal{F}$. Pretpostavimo sada da je t prerez od $\mathcal{G}$ nad okolinom U točke x takav da je $t(x) \in \mathcal{R}_x$. Kako je φ_x surjekcija sa $\mathcal{F}_x$ na $\mathcal{R}_x$, postoji okolina $V \subseteq U$ točke x i prerez s od $\mathcal{F}$ nad V takav da je $\varphi_x(s(x)) = t(x)$, odnosno, $(\varphi \circ s)(x) = t(x)$. Tada se prerezi $\varphi \circ s$ i t podudaraju na nekoj okolini $W \subseteq V$ točke x. Tada je $t(y) = (\varphi \circ s)(y) = \varphi_y(s(y)) \in \mathcal{R}_y$ $qfay \in W$. Time smo dokazali da je $\mathcal{R}$ podsnop od $\mathcal{G}$. Napokon, φ očito definira izomorfizam snopova $\Phi : \mathcal{F}/\mathcal{N} \to \mathcal{R}$,

$$\Phi\left(f + \mathcal{N}_x\right) = \varphi_x(f), \qquad x \in X, \quad f \in \mathcal{F}_x.$$

Podsnop $\mathcal{N}$ od $\mathcal{F}$ iz propozicije 4.1.4. zovemo **jezgra** od φ i označavamo $\mathrm{Ker}(\varphi)$; podsnop $\mathcal{R}$ od $\mathcal{G}$ zovemo **slika** od φ i označavamo $\mathrm{Im}(\varphi)$; kvocijentni snop $\mathcal{G}/\mathcal{R}$ zovemo **kojezgra** od φ i označavamo $\mathrm{Coker}(\varphi)$. Homomorfizam φ je injektivan (i tada ga zovemo **monomorfizam**) onda i samo onda ako je svaki φ_x, $x \in X$, injektivan, odnosno, ako je $\mathrm{Ker}(\varphi) = \{0\}$. Homomorfizam φ je surjektivan (i tada ga zovemo **epimorfizam**) ako i samo ako je svaki φ_x surjektivan, odnosno, ako je $\mathrm{Coker}(\varphi) = \{0\}$. Dakle, homomorfizam φ je bijektivan (**izomorfizam**) ako i samo ako je svaki φ_x izomorfizam; tada je inverzno preslikavanje φ^{-1} izomorfizam i $\left(\varphi^{-1}\right)_x = (\varphi_x)^{-1} \ \ \forall x \in X$. Sve definicije vezane uz homomorfizme modula direktno se prenose i na snopove modula. Npr. niz homomorfizama snopova modula zove se **egzaktan** ako se slika svakog od homomorfizama u nizu podudara s jezgrom sljedećeg homomorfizma u tom nizu. Iz prethodnog je jasno da su za svaki homomorfizam snopova modula $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ sljedeća dva niza egzaktna:

$$\{0\} \longrightarrow \mathrm{Ker}(\varphi) \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathrm{Im}(\varphi) \longrightarrow \{0\} \qquad \text{i} \qquad \{0\} \longrightarrow \mathrm{Im}(\varphi) \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow \mathrm{Coker}(\varphi) \longrightarrow \{0\}.$$

Ako je $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ homomorfizam, onda je za svaki podskup $U \subseteq X$ preslikavanje $\varphi_U : s \mapsto \varphi \circ s$ homomorfizam $\Gamma(U, \mathcal{A})-$modula sa $\Gamma(U, \mathcal{F})$ u $\Gamma(U, \mathcal{G})$ i očito je familija $(\varphi_U)_{U\in\mathcal{T}(X)}$ morfizam predsnopova. Obratno, pretpostavimo sada da su snopovi $\mathcal{A}$, $\mathcal{F}$ i $\mathcal{G}$ snopizacije predsnopova $\left(\mathcal{A}_U, \varphi_U^V\right)$, $\left(\mathcal{F}_U, \psi_U^V\right)$ i $\left(\mathcal{G}_U, \chi_U^V\right)$ i da je zadan morfizam predsnopa $\left(\mathcal{F}_U, \psi_U^V\right)$ u predsnop $\left(\mathcal{G}_U, \chi_U^V\right)$, tj. da je za svaki $U \in \mathcal{T}(X)$ zadan $\mathcal{A}_U-$homomorfizam $\varphi_U : \mathcal{F}_U \to \mathcal{G}_U$ takav da vrijedi $\chi_U^V \circ \varphi_V = \varphi_U \circ \psi_U^V$ kad god je $U \subseteq V$. Direktno se provjerava da prijelazom na induktivne limese po usmjerenim skupovima otvorenih okolina svake točke $x \in X$ sistem $(\varphi_U)_{U\in\mathcal{T}(X)}$ definira homomorfizam snopova $\mathcal{A}-$modula $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$.

Neka je $\mathcal{A}$ snop prstenova i $\mathcal{F}$ i $\mathcal{G}$ snopovi $\mathcal{A}-$modula. Za svaki $x \in X$ formiramo $\mathcal{A}_x-$modul $\mathcal{F}_x \oplus \mathcal{G}_x$ i neka je $\mathcal{K}$ disjunktna unija svih $\mathcal{F}_x \oplus \mathcal{G}_x$. $\mathcal{K}$ se može identificirati s podskupom od $\mathcal{F} \times \mathcal{G}$ svih $(f, g) \in \mathcal{F} \times \mathcal{G}$ takvih da je $\pi(f) = \pi(g)$. Uz tu identifikaciju snabdijemo $\mathcal{K}$ s topologijom induciranom sa $\mathcal{F} \times \mathcal{G}$. Tada je $\mathcal{K}$ snop $\mathcal{A}-$modula $-$ zove se **direktna suma** snopova $\mathcal{A}-$modula $\mathcal{F}$ i $\mathcal{G}$ i označava sa $\mathcal{F} \oplus \mathcal{G}$. Svaki prerez od $\mathcal{F} \oplus \mathcal{G}$ nad otvorenim skupu $U \subseteq X$ je oblika $x \mapsto (s(x), t(x))$, gdje je $s \in \Gamma(U, \mathcal{F})$ i $t \in \Gamma(U, \mathcal{G})$. Dakle, $\Gamma(U, \mathcal{A})-$modul $\Gamma(U, \mathcal{F} \oplus \mathcal{G})$ identificira se s direktnom sumom $\Gamma(U, \mathcal{F}) \oplus \Gamma(U, \mathcal{G})$.

Analogno se definira $\mathcal{F}_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{F}_p$ za konačno mnogo snopova $\mathcal{A}-$modula $\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_p$. Ako je $\mathcal{F}_j = \mathcal{F}$ za svaki $j \in \{1, \ldots, p\}$, upotrebljavamo oznaku $\mathcal{F}^p$.

Neka je $(\mathcal{F}_i)_{i \in I}$ bilo kakva familija snopova $\mathcal{A}-$modula. Tada definiramo za svaki $x \in X$ direktnu sumu $\mathcal{A}_x-$modula:

$$\mathcal{K}_x = \bigoplus_{i \in I} (\mathcal{F}_i)_x = \left\{ f \in \prod_{i \in I} (\mathcal{F}_i)_x \, ; \; \{i \in I; \; f(i) \neq 0\} \text{ je konačan skup} \right\}.$$

Neka je $\mathcal{K}$ disjunktna unija svih $\mathcal{K}_x$, $x \in X$. $\mathcal{K}$ možemo identificirati s podskupom od $\prod_{i \in I} \mathcal{F}_i$. S tom identifikacijom i s induciranom topologijom $\mathcal{K}$ je snop $\mathcal{A}-$modula koji označavamo sa $\bigoplus_{i \in I} \mathcal{F}_i$ i zovemo **direktnom sumom familije** $(\mathcal{F}_i)_{i \in I}$. Ako je $\mathcal{F}_i = \mathcal{F}$ za svaki $i \in I$, pišemo $\mathcal{K} = \mathcal{F}^{(I)}$.

Neka je $\mathcal{A}$ snop prstenova, $\mathcal{F}$ snop desnih $\mathcal{A}-$modula i $\mathcal{G}$ snop lijevih $\mathcal{A}-$modula. Za svaki $x \in X$ stavimo $\mathcal{K}_x = \mathcal{F}_x \otimes_{\mathcal{A}_x} \mathcal{G}_x$ i neka je $\mathcal{K}$ disjunktna unija $\mathcal{K}_x$, $x \in X$.

Propozicija 4.1.5. *Na skupu $\mathcal{K}$ postoji jedinstvena struktura snopa Abelovih grupa takva da ako su $U \subseteq X$ otvoren skup, $s \in \Gamma(U, \mathcal{F})$ i $t \in \Gamma(U, \mathcal{G})$, onda je $x \mapsto s(x) \otimes t(x)$ prerez snopa $\mathcal{K}$ nad skupom U. Tako definiran snop Abelovih grupa zove se* **tenzorski produkt snopova $\mathcal{F}$ i $\mathcal{G}$ nad $\mathcal{A}$** *i označava sa $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{G}$. Ako su svi prstenovi $\mathcal{A}_x$ komutativni, $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{G}$ je snop $\mathcal{A}-$modula. Općenitije, ako su i $\mathcal{B}$ i $\mathcal{C}$ snopovi prstenova i ako pretpostavimo da je $\mathcal{F}$ snop $(\mathcal{B} : \mathcal{A})-$bimodula i da je $\mathcal{G}$ snop $(\mathcal{A} : \mathcal{C})-$bimodula, onda je $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{G}$ snop $(\mathcal{B} : \mathcal{C})-$bimodula.*

Dokaz: Ako je $\mathcal{K}$ snabdjeven takvom strukturom snopa i ako su $s_1, \ldots, s_n \in \Gamma(U, \mathcal{F})$ i $t_1, \ldots, t_n \in \Gamma(U, \mathcal{G})$, onda je $x \mapsto \sum_{i=1}^n s_i(x) \otimes t_i(x)$ prerez od $\mathcal{K}$ na U. Ali svaki $h \in \mathcal{K}_x$ se može napisati u obliku $h = \sum_{i=1}^n f_i \otimes g_i$ za neke $f_1, \ldots, f_n \in \mathcal{F}_x$ i neke $g_1, \ldots, g_n \in \mathcal{G}_x$, takle također u obliku $h = \sum_{i=1}^n s_i(x) \otimes t_i(x)$ za neku otvorenu okolinu U od x, za neke $s_1, \ldots, s_n \in \Gamma(U, \mathcal{F})$ i za neke $t_1, \ldots, t_n \in \Gamma(U, \mathcal{G})$. Odatle se vidi da je svaki prerez od $\mathcal{K}$ lokalno jednak prerezu te vrste. To pokazuje jedinstvenost strukture snopa na $\mathcal{K}$ s traženim svojstvom.

Dokažimo sada egzistenciju. Možemo pretpostaviti da su $\mathcal{A}$, $\mathcal{F}$ i $\mathcal{G}$ snopizacije predsnopova $(\mathcal{A}_U, \varphi_U^V)$, $(\mathcal{F}_U, \psi_U^V)$ i $(\mathcal{G}_U, \chi_U^V)$. Stavimo tada $\mathcal{K}_U = \mathcal{F}_U \otimes_{\mathcal{A}_U} \mathcal{G}_U$. Homomorfizmi ψ_U^V i χ_U^V definiraju prijelazom na tenzorski produkt homomorfizam $\eta_U^V : \mathcal{K}_V \to \mathcal{K}_U$. Tenzorski produkt komutira s induktivnim limesom, pa imamo

$$\lim_{U \ni x} \mathcal{K}_U = \left(\lim_{U \ni x} \mathcal{F}_U \right) \otimes_{\lim\limits_{U \ni x} \mathcal{A}_U} \left(\lim_{U \ni x} \mathcal{G}_U \right) = \mathcal{F}_x \otimes_{\mathcal{A}_x} \mathcal{G}_x = \mathcal{K}_x.$$

Snopizacija predsnopa $(\mathcal{K}_U, \eta_U^V)$ se stoga može identificirati sa $\mathcal{K}$ i nalazimo da s tom strukturom snopa $\mathcal{K}$ ima traženo svojstvo. Preostale tvrdnje direktno se provjeravaju.

Uzmimo sada da je $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{F}'$ homomorfizam snopova desnih $\mathcal{A}-$modula (odnosno, $(\mathcal{B} : \mathcal{A})-$bimodula) i da je $\psi : \mathcal{G} \to \mathcal{G}'$ homomorfizam lijevih $\mathcal{A}-$modula (odnosno, $(\mathcal{A} : \mathcal{C})-$bimodula). Tada je za svaki $x \in X$ $\varphi_x \otimes \psi_x$ homomorfizam Abelovih grupa (odnosno, $(\mathcal{B}_x : \mathcal{C}_x)-$bimodula) sa $\mathcal{F}_x \otimes_{\mathcal{A}_x} \mathcal{G}_x$ u $\mathcal{F}'_x \otimes_{\mathcal{A}_x} \mathcal{G}'_x$ i familija $(\varphi_x \otimes \psi_x)_{x \in X}$ definira homomorfizam sa $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{G}$ u $\mathcal{F}' \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{G}'$. Taj se homomorfizam označava sa $\varphi \otimes \psi$. Ako je ψ identiteta, katkada pišemo φ umjesto $\varphi \otimes \mathrm{id}$; analogno, ψ umjesto $\mathrm{id} \otimes \psi$.

Sva uobičajena svojstva tenzorskih produkata modula prenose se na tenzorske produkte snopova. Npr. svaki egzaktan niz

$$\mathcal{F}' \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}'' \longrightarrow 0$$

vodi na egzaktan niz

$$\mathcal{F}' \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{F}'' \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{G} \longrightarrow 0.$$

Nadalje, imamo kanonske izomorfizme

$$\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{A}} (\mathcal{G}_1 \oplus \mathcal{G}_2) \cong \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{G}_1 \oplus \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{G}_2, \qquad \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{A} \cong \mathcal{F},$$

$$(\mathcal{F}_1 \oplus \mathcal{F}_2) \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{G} \cong \mathcal{F}_1 \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{G} \oplus \mathcal{F}_2 \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{G}, \qquad \mathcal{A} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{G} \cong \mathcal{G}.$$

Ako su svi prstenovi $\mathcal{A}_x$ komutativni, vrijedi i

$$\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{G} \cong \mathcal{G} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{F}, \qquad \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{A}} (\mathcal{G} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{K}) \cong (\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{G}) \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{K}.$$

Općenitije, za $(\mathcal{A} : \mathcal{B})-$bimodul $\mathcal{F}$, $(\mathcal{B} : \mathcal{C})-$bimodul $\mathcal{G}$ i $(\mathcal{C} : \mathcal{D})-$bimodul $\mathcal{K}$ imamo kanonski izomorfizam $(\mathcal{A} : \mathcal{D})-$bimodula

$$\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{B}} (\mathcal{G} \otimes_{\mathcal{C}} \mathcal{K}) \cong (\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{B}} \mathcal{G}) \otimes_{\mathcal{C}} \mathcal{K}.$$

Neka je $\mathcal{A}$ snop prstenova i $\mathcal{F}$ i $\mathcal{G}$ snopovi $\mathcal{A}-$modula. Ako je $U \subseteq X$ otvoren skup neka je $\mathcal{K}_U$ aditivna grupa homomorfizama sa $\mathcal{F}_U$ u $\mathcal{G}_U$ (kažemo još "*homomorfizmi sa $\mathcal{F}$ u $\mathcal{G}$ nad U*"). Operacija restrikcije homomofizma definira $\varphi_U^V : \mathcal{K}_V \to \mathcal{K}_U$. Tada je $\left(\mathcal{K}_U, \varphi_U^V\right)$ predsnop Abelovih grupa. Snopizacija tog predsnopa označava se sa $\mathcal{H}om_{\mathcal{A}}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ i zove se **snop klica homomorfizama** sa $\mathcal{F}$ u $\mathcal{G}$. Ako su svi prstenovi $\mathcal{A}_x$ komutativni, $\mathcal{H}om_{\mathcal{A}}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ je snop $\mathcal{A}-$modula.

Element od $\mathcal{H}om_{\mathcal{A}}(\mathcal{F}, \mathcal{G})_x$ je klica homomorfizama sa $\mathcal{F}$ u $\mathcal{G}$ nad okolinom od x i on sasvim nedvojbeno određuje $\mathcal{A}_x-$homomorfizam sa $\mathcal{F}_x$ u $\mathcal{G}_x$. Odatle imamo kanonski homomorfizam grupa

$$\rho_x : \mathcal{H}om_{\mathcal{A}}(\mathcal{F}, \mathcal{G})_x \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}_x}(\mathcal{F}_x, \mathcal{G}_x).$$

Međutim, za razliku od dosadašnjih slučajeva, homomorfizmi ρ_x općenito nisu bijekcije; kasnije ćemo dati jedan dovoljan uvjet da to bude.

Ako su $\varphi : \mathcal{F}' \to \mathcal{F}$ i $\psi : \mathcal{G}' \to \mathcal{G}$ homomorfizmi, na očigledan način definiramo homomorfizam

$$\mathcal{H}om_{\mathcal{A}}(\varphi, \psi) : \mathcal{H}om_{\mathcal{A}}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \longrightarrow \mathcal{H}om_{\mathcal{A}}(\mathcal{F}', \mathcal{G}').$$

Egzaktan niz $0 \longrightarrow \mathcal{G}' \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G}''$ vodi na egzaktan niz

$$0 \longrightarrow \mathcal{H}om_{\mathcal{A}}(\mathcal{F}, \mathcal{G}') \longrightarrow \mathcal{H}om_{\mathcal{A}}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \longrightarrow \mathcal{H}om_{\mathcal{A}}(\mathcal{F}, \mathcal{G}'').$$

Nadalje, imamo kanonske izomorfizme

$$\mathcal{H}om_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}, \mathcal{G}) \cong \mathcal{G}, \qquad \mathcal{H}om_{\mathcal{A}}(\mathcal{F}, \mathcal{G}_1 \oplus \mathcal{G}_2) \cong \mathcal{H}om_{\mathcal{A}}(\mathcal{F}, \mathcal{G}_1) \oplus \mathcal{H}om_{\mathcal{A}}(\mathcal{F}, \mathcal{G}_2),$$

$$\mathcal{H}om_{\mathcal{A}}(\mathcal{F}_1 \oplus \mathcal{F}_2, \mathcal{G}) \cong \mathcal{H}om_{\mathcal{A}}(\mathcal{F}_1, \mathcal{G}) \oplus \mathcal{H}om_{\mathcal{A}}(\mathcal{F}_2, \mathcal{G}).$$

Propozicija 4.1.3. pokazuje da se svaki snop može definirati kao snopizacija nekog predsnopa $\left(\mathcal{F}_U, \varphi_U^V\right)$. Različiti predsnopovi mogu definirati izomorfne snopove. Međutim, ako za predsnop $\left(\mathcal{F}_U, \varphi_U^V\right)$ zahtijevamo da ispunjavaju uvjete iz propozicija 4.1.1. i 4.1.2., onda je (do na izomorfizam) taj predsnop potpuno određen sa $\mathcal{F}$.

Neka je i dalje $\mathcal{F}$ snop na X i $U \subseteq X$. Skup $\pi^{-1}(U) \subseteq \mathcal{F}$ s topologijom induciranom sa $\mathcal{F}$ je očito snop na topološkom prostoru U. Za taj **snop** kažemo da je **induciran snopom** $\mathcal{F}$, a također da je on **restrikcija snopa** $\mathcal{F}$ na potprostor $U \subseteq X$. Označavat ćemo ga sa $\mathcal{F}|U$. Uz određene uvjete snop na X možemo definirati polazeći od snopova na članovima otvorenog pokrivača od X :

Propozicija 4.1.6. *Neka je $\mathfrak{U} = (U_i)_{i\in I}$ otvoren pokrivač topološkog prostora X, neka je za svaki $i \in I$ zadan snop $\mathcal{F}_i$ na U_i i neka je za svaki par $(i,j) \in I \times I$ zadan izomorfizam*

$$\vartheta_{ij} : \mathcal{F}_j|U_i \cap U_j \longrightarrow \mathcal{F}_i|U_i \cap U_j$$

i to tako da vrijedi

$$\vartheta_{ij} \circ \vartheta_{jk} = \vartheta_{ik} \qquad \forall (i,j,k) \in I \times I \times I.$$

Tada postoje snop $\mathcal{F}$ i za svaki $i \in I$ izomorfizam $\eta_i : \mathcal{F}|U_i \to \mathcal{F}_i$ takvi da vrijedi

$$\vartheta_{ij} = \eta_i \circ \eta_j^{-1} \qquad \forall (i,j) \in I \times I.$$

Takvi $\mathcal{F}$ i η_i određeni su jedinstveno do na izomorfizam snopova.

Dokaz: Jedinstvenost do na izomorfizam je očigledna: ako $\mathcal{G}$ i ω_i imaju ista svojstva, onda je $\eta_i^{-1} \circ \omega_i$ izomorfizam sa $\mathcal{G}|U_i$ na $\mathcal{F}|U_i$, a iz njih se dobiva izomorfizam $\mathcal{G} \to \mathcal{F}$.

Dokažimo egzistenciju. Za otvoren skup $U \subseteq X$ definiramo $\mathcal{F}_U$ kao grupu čiji su elementi familije $(s_k)_{k\in I}$, gdje su $s_k \in \Gamma(U \cap U_k, \mathcal{F}_k)$ takvi da vrijedi $s_k = \vartheta_{jk}(s_j)$ na $U \cap U_j \cap U_k$; dakle,

$$\mathcal{F}_U = \left\{(s_k)_{k\in I};\ s_k \in \Gamma\left(U \cap U_k, \mathcal{F}_k\right),\ s_k|U \cap U_j \cap U_k = \vartheta_{jk}\left(s_j\right)|U \cap U_j \cap U_k\ \ \forall (j,k) \in I \times I\right\}.$$

Nadalje, ako su skupovi $U \subseteq V \subseteq X$ otvoreni, definiramo φ_U^V na evidentan način:

$$\varphi_U^V\left((s_k)_{k\in I}\right) = (s_k|U \cap U_k)_{k\in I}.$$

Tada je $\left(\mathcal{F}_U, \varphi_U^V\right)$ predsnop, a njegova je snopizacija traženi snop $\mathcal{F}$. Nadalje, ukoliko je $U \subseteq U_i$, preslikavanje koje familiji $(s_k)_{k\in I} \in \mathcal{F}_U$ pridružuje element $s_i|U \in \Gamma(U, \mathcal{F}_i)$ je zbog uvjeta tranzitivnosti izomorfizam sa $\mathcal{F}_U$ na $\Gamma(U, \mathcal{F}_i)$; na taj način dolazimo do izomorfizma $\eta_i : \mathcal{F}_i|U_i \to \mathcal{F}_i$ koji zadovoljava postavljeni uvjet.

Za snop $\mathcal{F}$ iz propozicije 4.1.6. kažemo da je **snop dobiven lijepljenjem snopova** $\mathcal{F}_i$ pomoću izomorfizama ϑ_{ij}.

Neka je sada Y zatvoren potprostor topološkog prostora X. Kažemo da je **snop** $\mathcal{F}$ na X **koncentriran na** Y, ili da je **snop** $\mathcal{F}$ **nula izvan** Y, ako je $\mathcal{F}_x = 0\ \forall x \in X \setminus Y$.

Propozicija 4.1.7. *Ako je snop $\mathcal{F}$ na X koncentriran na Y, onda je homomorfizam*

$$\rho_Y^X : \Gamma(X, \mathcal{F}) \longrightarrow \Gamma(Y, \mathcal{F}|Y)$$

bijektivan.

Dokaz: Ako je prerez od $\mathcal{F}$ nad X nula na Y, on je svuda nula jer je $\mathcal{F}_x = 0$ za $x \notin Y$. To pokazuje da je homomorfizam ρ_Y^X injektivan. Obratno, neka je s prerez snopa $\mathcal{F}|Y$ nad Y. Proširimo ga do funkcije $\overline{s} : X \to \mathcal{F}$ tako da stavimo $\overline{s}(x) = 0$ za $x \in X \setminus Y$. Preslikavanje $x \mapsto \overline{s}(x)$ je očito neprekidno u svakoj točki skupa $X \setminus Y$. S druge strane, ako je $x \in Y$, postoji prerez s' od $\mathcal{F}$ na okolini U od x takav da je $s'(x) = \overline{s}(x) = s(x)$; kako je po pretpostavci s neprekidan na Y, postoji okolina V od x sadržana u U takva da je $s'(y) = s(y) = \overline{s}(y)$ za svaku točku $y \in V \cap Y$; budući da je $\mathcal{F}_y = 0$ za $y \notin Y$, vrijedi također $s'(y) = \overline{s}(y)$ za $y \in V \setminus (V \cap Y)$; dakle, $\overline{s}$ i s' se podudaraju na V; time je dokazano da je funkcija $\overline{s}$ neprekidna i na okolini skupa Y. To znači da je funkcija $\overline{s}$ svuda neprekidna, odnosno $\overline{s} \in \Gamma(X, \mathcal{F})$. Iz konstrukcije vidimo da je $\rho_Y^X(\overline{s}) = s$. Time je dokazana i surjektivnost homomorfizma ρ_Y^X.

Sljedeća propozicija pokazuje da u tom slučaju restrikcija $\mathcal{F}|Y$ potpuno određuje snop $\mathcal{F}$:

Propozicija 4.1.8. *Neka je Y zatvoren potprostor topološkog prostora Y i neka je $\mathcal{G}$ snop na Y. Stavimo*

$$\mathcal{F}_x = \begin{cases} \mathcal{G}_x & \text{ako je } x \in Y, \\ 0 & \text{ako je } x \in X \setminus Y \end{cases}.$$

Disjunktna unija $\mathcal{F} = \bigcup_{x \in X} \mathcal{F}_x$ na jedinstven se način može snabdjeti strukturom snopa na X tako da bude $\mathcal{F}|Y = \mathcal{G}$.

Dokaz: Neka je $U \subseteq X$ otvoren skup. Ako je $s \in \Gamma(U \cap Y, \mathcal{G})$, produljimo ga do preslikavanja $s : U \to \mathcal{F}$ tako da stavimo $s|U \setminus (U \cap Y) = 0$. Na taj način iz $\Gamma(U \cap Y, \mathcal{G})$ dolazimo do grupe $\mathcal{F}_U$ preslikavanja sa U u $\mathcal{F}$. Propozicija 4.1.7. pokazuje da ako je $\mathcal{F}$ snabdjeven strukturom snopa na X takvom da je $\mathcal{F}|Y = \mathcal{G}$, onda je $\mathcal{F}_U = \Gamma(U, \mathcal{F})$. To dokazuje jedinstvenost takve strukture snopa $\mathcal{F}$. Napokon, snopizacija predsnopa $\left(\mathcal{F}_U, \varphi_U^V\right)$, pri čemu su $\varphi_U^V : \mathcal{F}_V \to \mathcal{F}_U$ homomorfizmi restrikcije, je snop s traženim svojstvima. Time je dokazana i egzistencija.

Kažemo da je **snop $\mathcal{F}$ dobiven produljenjem snopa $\mathcal{G}$ sa 0 izvan** Y. Taj snop označavamo sa $\mathcal{G}^X$ (ili samo sa $\mathcal{G}$, ako nije moguća zabuna).

4.2 Koherentni snopovi modula

U cijelom ovom odjeljku X označava topološki prostor i $\mathcal{A}$ snop prstenova na X. Pretpostavljamo da su svi unitalni prstenovi $\mathcal{A}_x$ komutativni. U daljnjem svi snopovi koje promatramo su snopovi $\mathcal{A}-$modula i svi homomorfizmi su $\mathcal{A}-$homomorfizmi.

Neka je $\mathcal{F}$ snop $\mathcal{A}-$modula i neka su $s_1, \dots, s_p$ prerezi od $\mathcal{F}$ nad otvorenim skupom U. Svakoj uređenoj $p-$torci $(f_1, \dots, f_p)$ elemenata iz $\mathcal{A}_x$ pridružimo element $\sum_{i=1}^p f_i s_i(x) \in \mathcal{F}_x$. Na taj način dobivamo homomorfizam $\varphi : \mathcal{A}^p \to \mathcal{F}$ definiran nad U; preciznije, φ je homomorfizam sa $\mathcal{A}^p|U$ u $\mathcal{F}|U$. Jezgra $\mathcal{R}(s_1, \dots, s_p)$ homomorfizma φ je podsnop od $\mathcal{A}^p|U$ koji se zove **snop relacija među prerezima** s_i; slika od φ je **podsnop** od $\mathcal{F}|U$ **generiran prerezima** s_i. Obratno, svaki homomorfizam $\varphi : \mathcal{A}^p|U \to \mathcal{F}|U$ nad U definira prereze $s_1, \dots, s_p$ od $\mathcal{F}$ nad U ovako:

$$s_1(x) = \varphi_x(1, 0, \dots, 0), \quad \cdots \quad , s_p(x) = \varphi_x(0, \dots, 0, 1), \qquad x \in U.$$

Kažemo da je **snop $\mathcal{A}-$modula $\mathcal{F}$ konačnog tipa** ako je on lokalno generiran s konačno mnogo prereza. Drugim riječima, za svaku točku $x \in X$ treba postojati otvorena okolina U od x i konačno mnogo prereza $s_1, \dots, s_p \in \Gamma(U, \mathcal{F})$ takvi da je za svaku točku $y \in U$ svaki element iz $\mathcal{F}_y$ $\mathcal{A}_y-$linearna kombinacija elemenata $s_1(y), \dots, s_p(y)$. Prema prethodno uvedenoj terminologiji to je isto kao da kažemo da je snop $\mathcal{F}|U$ izomorfan kvocijentnom snopu snopa $\mathcal{A}^p|U$.

Propozicija 4.2.1. *Neka je $\mathcal{F}$ snop konačnog tipa. Ako su $s_1, \dots, s_p$ prerezi od $\mathcal{F}$ nad nekom otvorenom okolinom U od x takvi da $s_1(x), \dots, s_p(x)$ generiraju $\mathcal{A}_x-$modul $\mathcal{F}_x$, onda postoji otvorena okolina $V \subseteq U$ točke x takva da za svaku točku $y \in V$ $s_1(y), \dots, s_p(y)$ generiraju $\mathcal{A}_y-$modul $\mathcal{F}_y$.*

Dokaz: Budući da je snop $\mathcal{A}-$modula $\mathcal{F}$ konačnog tipa, postoji otvorena okolina $V_1 \subseteq U$ točke x i prerezi $t_1, \dots, t_q \in \Gamma(V_1, \mathcal{F})$ takvi da za svaku točku $y \in V_1$ elementi $t_1(y), \dots, t_q(y)$ generiraju $\mathcal{A}_y-$modul $\mathcal{F}_y$. Budući da elementi $s_1(x), \dots, s_p(x)$ generiraju $\mathcal{A}_x-$modul $\mathcal{F}_x$, postoji otvorena okolina $V_2 \subseteq V_1$ točke x i prerezi $f_{ij} \in \Gamma(V_2, \mathcal{A})$, $1 \leq i \leq q$, $1 \leq j \leq p$, takvi da vrijedi

$$t_i(x) = \sum_{j=1}^p f_{ij}(x) s_j(x), \qquad 1 \leq i \leq q.$$

No tada se prerezi s lijeve i desne strane gornje jednakosti podudaraju i na nekoj okolini točke x. Dakle, postoji otvorena okolina $V \subseteq V_2$ točke x takva da vrijedi

$$t_i(y) = \sum_{j=1}^p f_{ij}(y) s_j(y) \qquad \text{za svaku točku} \quad y \in V \quad \text{i za} \quad 1 \leq i \leq q.$$

Odatle slijedi da za svaku točku $y \in V$ elementi $s_1(y), \dots, s_p(y)$ generiraju $\mathcal{A}_y-$modul $\mathcal{F}_y$.

Za **snop $\mathcal{A}-$modula** $\mathcal{F}$ kažemo da je **koherentan** ako vrijedi:

(a) Snop $\mathcal{A}-$modula $\mathcal{F}$ je konačnog tipa.

(b) Ako je $U \subseteq X$ otvoren skup i ako su $s_1, \dots, s_p \in \Gamma(U, \mathcal{F})$, snop relacija $\mathcal{R}(s_1, \dots, s_p)$ je snop $\mathcal{A}|U-$modula konačnog tipa.

Uočimo lokalni karakter dviju definicija $-$ snopa konačnog tipa i koherentnog snopa. Iz tih definicija neposredno slijedi:

Propozicija 4.2.2. *Svaki koherentan snop $\mathcal{F}$ je lokalno izomorfan kojezgri nekog homomorfizma $\varphi : \mathcal{A}^q \to \mathcal{A}^p$. Preciznije, svaka točka $x \in X$ ima otvorenu okolinu U takvu da je za neke $p, q \in \mathbb{N}$ snop $\mathcal{F}_U$ izomorfan kojezgri nekog homomorfizma $\mathcal{A}^q|U \to \mathcal{A}^p|U$.*

Ako snop $\mathcal{F}$ zadovoljava uvjet (b) iz definicije koherentnosti onda i svaki podsnop od $\mathcal{F}$ zadovoljava taj uvjet. Prema tome,

Propozicija 4.2.3. *Svaki podsnop konačnog tipa koherentnog snopa je koherentan snop.*

Teorem 4.2.4. *Neka je $0 \longrightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{G} \xrightarrow{\beta} \mathcal{K} \longrightarrow 0$ egzaktan niz homomorfizama snopova $\mathcal{A}-$modula. Ako su dva od snopova $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ i $\mathcal{K}$ koherentni, onda je i treći koherentan.*

Dokaz: Pretpostavimo da su $\mathcal{G}$ i $\mathcal{K}$ koherentni. To znači da lokalno postoji surjektivni homomorfizam $\gamma : \mathcal{A}^p \to \mathcal{G}$. Neka je $\mathcal{I}$ jezgra od $\beta \circ \gamma$. Budući da je snop $\mathcal{K}$ koherentan, $\mathcal{I}$ je snop konačnog tipa (svojstvo (b)). Dakle, $\gamma(\mathcal{I})$ je snop konačnog tipa, a to prema propoziciji 4.2.3. znači da je koherentan. Međutim, α je izomorfizam snopa $\mathcal{F}$ na snop $\gamma(\mathcal{I})$, pa slijedi da je snop $\mathcal{F}$ koherentan.

Pretpostavimo sada da su $\mathcal{F}$ i $\mathcal{G}$ koherentni. Budući da je snop $\mathcal{G}$ konačnog tipa, i snop $\mathcal{K}$ je konačnog tipa. Dakle, treba dokazati da snop $\mathcal{K}$ zadovoljava uvjet (b) iz definicije koherentnosti. Neka su $s_1, \ldots, s_p$ prerezi od $\mathcal{K}$ nad otvorenom okolinom točke $x \in X$. Tvrdnja koju želimo dokazati je lokalnog karaktera, pa možemo pretpostaviti da postoje lokalni prerezi $s'_1, \ldots, s'_p$ snopa $\mathcal{G}$ takvi da je $s_i = \beta(s'_i)$ za $1 \leq i \leq p$. S druge strane, neka su $n_1, \ldots, n_q$ lokalni prerezi snopa $\mathcal{F}$ nad otvorenom okolinom točke x, takvi da za svaku točku y iz te okoline $n_1(y), \ldots, n_q(y)$ generiraju $\mathcal{A}_y-$modul $\mathcal{F}_y$. Da bi neka $p-$torka $(f_1, \ldots, f_p) \in \mathcal{A}_y^p$ pripadala $\mathcal{R}(s_1, \ldots, s_p)_y$ nužno je i dovoljno da postoje $g_1, \ldots, g_q \in \mathcal{A}_y$ takvi da je

$$\sum_{i=1}^{p} f_i s'_i(y) = \sum_{j=1}^{q} g_j[\alpha(n_j)](y).$$

Snop relacija među prerezima $s'_1, \ldots, s'_p, \alpha(n_1), \ldots, \alpha(n_q)$ je konačnog tipa, budući da smo pretpostavili da je snop $\mathcal{G}$ koherentan. Snop $\mathcal{R}(s_1, \ldots, s_p)$ je slika tog snopa pri kanonskom epimorfizmu $\mathcal{A}^{p+q} \to \mathcal{A}^p$, pa je i taj snop konačnog tipa. Dakle, snop $\mathcal{K}$ je koherentan.

Pretpostavimo napokon da su $\mathcal{F}$ i $\mathcal{K}$ koherentni. Budući da je tvrdnja koju treba dokazati (da je snop $\mathcal{G}$ koherentan) lokalnog tipa, možemo pretpostaviti da je snop $\mathcal{F}$ generiran s konačno mnogo prereza $n_1, \ldots, n_q$ i da je snop $\mathcal{K}$ generiran s konačno mnogo prereza $s_1, \ldots, s_p$. Nadalje, zbog lokalnosti možemo pretpostaviti da postoje prerezi $s'_1, \ldots, s'_p$ od $\mathcal{G}$ takvi da je $s_i = \beta(s'_i)$, $1 \leq i \leq p$. Sada je jasno da prerezi $s'_1, \ldots, s'_p, \alpha(n_1), \ldots, \alpha(n_q)$ generiraju snop $\mathcal{G}$. Dakle, snop $\mathcal{G}$ je konačnog tipa. Neka su sada $t_1, \ldots, t_r$ prerezi od $\mathcal{G}$ nad otvorenom okolinom U točke $x \in X$. Budući da je snop $\mathcal{K}$ koherentan, postoje prerezi f_j^i od $\mathcal{A}$ $(1 \leq i \leq r,\ 1 \leq j \leq s)$, nad otvorenom okolinom $V \subseteq U$ točke x, takvi da

$$(f_1^1, \ldots, f_1^r), (f_2^1, \ldots, f_2^r), \ldots\ldots, (f_s^1, \ldots, f_s^r)$$

generiraju snop relacija između prereza $\beta(t_1), \ldots, \beta(t_r)$. Stavimo

$$u_j = \sum_{i=1}^{r} f_j^i t_i, \qquad 1 \leq j \leq s.$$

Budući da vrijedi

$$\sum_{i=1}^{r} f_j^i \beta(t_i) = 0, \qquad 1 \leq j \leq s,$$

$u_1, \ldots, u_s$ su sadržani u $\alpha(\mathcal{F})$, a kako je snop $\mathcal{F}$ koherentan, snop relacija između $u_1, \ldots, u_s$ generiran je na okolini točke x s konačno mnogo prereza; neka su to

$$(g_1^1, \ldots, g_1^s), \ldots\ldots, (g_t^1, \ldots, g_t^s),$$

gdje su g_k^j prerezi od $\mathcal{A}$ nad okolinom točke x. Tvrdimo da tada

$$\left(\sum_{j=1}^s g_1^j f_j^1, \ldots, \sum_{j=1}^s g_1^j f_j^r\right), \ldots\ldots, \left(\sum_{j=1}^s g_t^j f_j^1, \ldots, \sum_{j=1}^s g_t^j f_j^r\right)$$

generiraju snop relacija $\mathcal{R}(t_1, \ldots, t_r)$ nad nekom otvorenom okolinom $W \subseteq V$ točke x. Doista, ako vrijedi

$$\sum_{i=1}^r f_i t_i = 0 \quad \text{u točki} \quad y \quad \text{za neke} \quad f_1, \ldots, f_r \in \mathcal{A}_y,$$

onda vrijedi

$$\sum_{i=1}^r f_i \beta(t_i) = 0 \quad \text{u točki} \quad y,$$

pa postoje $g_1, \ldots, g_s \in \mathcal{A}_y$ takvi da je

$$f_i = \sum_{j=1}^s g_j f_j^i, \qquad 1 \leq i \leq r.$$

Sada zbog $\sum_{i=1}^r f_i t_i = 0$ slijedi $\sum_{j=1}^s g_j u_j = 0$, a odatle izlazi da je $(g_1, \ldots, g_s)$ linearna kombinacija od

$$(g_1^1, \ldots, g_1^s), \ldots\ldots, (g_t^1, \ldots, g_t^s).$$

Odatle slijedi da je $(f_1, \ldots, f_r)$ linearna kombinacija od

$$\left(\sum_{j=1}^s g_1^j f_j^1, \ldots, \sum_{j=1}^s g_1^j f_j^r\right), \ldots\ldots, \left(\sum_{j=1}^s g_t^j f_j^1, \ldots, \sum_{j=1}^s g_t^j f_j^r\right).$$

Dakle, dokazali smo da je snop relacija $\mathcal{R}(t_1, \ldots, t_r)$ konačno generiran nad okolinom točke x. Time je dokazano i svojstvo (b) snopa $\mathcal{G}$, odnosno, dokazano je da je snop $\mathcal{G}$ koherentan.

Korolar 4.2.5. *Direktna suma konačno mnogo koherentnih snopova je koherentan snop.*

Teorem 4.2.6. *Neka je φ homomorfizam koherentnog snopa $\mathcal{F}$ u koherentan snop $\mathcal{G}$. Jezgra, kojezgra i slika od φ su koherentni snopovi.*

Dokaz: Budući da je snop $\mathcal{F}$ koherentan, snop $\mathrm{Im}(\varphi)$ je konačnog tipa, dakle, po propoziciji 4.2.3. taj je snop koherentan. Primjenom teorema 4.2.4. na egzaktne nizove

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ker}(\varphi) \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathrm{Im}(\varphi) \longrightarrow 0 \qquad \text{i} \qquad 0 \longrightarrow \mathrm{Im}(\varphi) \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow \mathrm{Coker}(\varphi) \longrightarrow 0$$

zaključujemo da su i snopovi $\mathrm{Ker}(\varphi)$ i $\mathrm{Coker}(\varphi)$ koherentni.

Korolar 4.2.7. *Neka su $\mathcal{F}$ i $\mathcal{G}$ koherentni podsnopovi koherentnog snopa $\mathcal{K}$. Tada su i snopovi $\mathcal{F} + \mathcal{G}$ i $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ koherentni.*

Dokaz: Za $\mathcal{F}+\mathcal{G}$ to slijedi iz propozicije 4.2.3. Tvrdnja za $\mathcal{F}\cap\mathcal{G}$ slijedi iz teorema 4.2.6. i iz činjenice da je $\mathcal{F}\cap\mathcal{G}$ jezgra homomorfizma $\mathcal{F}\longrightarrow\mathcal{K}/\mathcal{G}$.

Prema korolaru 4.2.5. direktna suma konačno mnogo koherentnih snopova je koherentan snop. Dokazat ćemo sada analogne rezultate za funktore $\otimes_{\mathcal{A}}$ i $\mathcal{H}om_{\mathcal{A}}$.

Propozicija 4.2.8. *Ako su $\mathcal{F}$ i $\mathcal{G}$ koherentni snopovi, onda je i $\mathcal{F}\otimes_{\mathcal{A}}\mathcal{G}$ koherentan snop.*

Dokaz: Prema propoziciji 4.2.2. snop $\mathcal{F}$ je lokalno izomorfan kojezgri nekog homomorfizma $\varphi:\mathcal{A}^q\to\mathcal{A}^p$. Tada je snop $\mathcal{F}\otimes_{\mathcal{A}}\mathcal{G}$ lokalno izomorfan kojezgri homomorfizma

$$\varphi\otimes\mathrm{id}_{\mathcal{G}}:\mathcal{A}^q\otimes_{\mathcal{A}}\mathcal{G}\to\mathcal{A}^p\otimes_{\mathcal{A}}\mathcal{G}.$$

Međutim, $\mathcal{A}^q\otimes_{\mathcal{A}}\mathcal{G}\cong\mathcal{G}^q$ i $\mathcal{A}^p\otimes_{\mathcal{A}}\mathcal{G}\cong\mathcal{G}^p$. Dakle, prema korolaru 4.2.5. oni su koherentni. Prema teoremu 4.2.6. snop $\mathcal{F}\otimes_{\mathcal{A}}\mathcal{G}$ je koherentan.

Propozicija 4.2.9. *Neka su $\mathcal{F}$ i $\mathcal{G}$ snopovi pri čemu je $\mathcal{F}$ koherentan. Za svaku točku $x\in X$ su $\mathcal{A}_x-$moduli $\mathcal{H}om_{\mathcal{A}}(\mathcal{F},\mathcal{G})_x$ i $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}_x}(\mathcal{F}_x,\mathcal{G}_x)$ izomorfni.*

Dokaz: Dokazat ćemo preciznu tvrdnju da je homomorfizam

$$\rho:\mathcal{H}om_{\mathcal{A}}(\mathcal{F},\mathcal{G})_x\longrightarrow\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}_x}(\mathcal{F}_x,\mathcal{G}_x),$$

definiran na koncu odjeljka 4.1., bijektivan. Neka je $\psi:\mathcal{F}\to\mathcal{G}$ homomorfizam definiran nad okolinom od x koji je nula na $\mathcal{F}_x$. Budući da je $\mathcal{F}$ konačnog tipa, odatle slijedi da je ψ nula na nekoj okolini od x. Tada je klica $\psi_x\in\mathcal{H}om_{\mathcal{A}}(\mathcal{F},\mathcal{G})_x$ jednaka nuli. Time je dokazano da je homomorfizam ρ injektivan. Dokažimo sada da je ρ surjektivan, tj. da za svaki $\mathcal{A}_x-$ homomorfizam $\varphi:\mathcal{F}_x\to\mathcal{G}_x$ postoji homomorfizam $\psi:\mathcal{F}\to\mathcal{G}$ definiran nad okolinom od x takav da je $\psi_x=\varphi$. Neka su U okolina od x i $m_1,\dots,m_p\in\Gamma(U,\mathcal{F})$ takvi da je za svaku točku $y\in U$ $\mathcal{A}_y-$modul $\mathcal{F}_y$ generiran sa $m_1(y),\dots,m_p(y)$. Tada je snop relacija $\mathcal{R}(m_1,\dots,m_p)$, koji je podsnop od $\mathcal{A}^p|U$, konačno generiran. Dakle, postoji okolina $V\subseteq U$ od x i lokalni prerezi $f_j^i\in\Gamma(V,\mathcal{A})$, $1\le i\le p$, $1\le j\le q$, takvi da

$$(f_1^1,\dots,f_1^p),(f_2^1,\dots,f_2^p),\dots\dots,(f_q^1,\dots,f_q^p)$$

generiraju snop $\mathcal{R}(m_1,\dots,m_p)$ nad okolinom V, tj. takvi da za svaku točku $y\in V$

$$(f_1^1(y),\dots,f_1^p(y)),(f_2^1(y),\dots,f_2^p(y)),\dots\dots,(f_q^1(y),\dots,f_q^p(y))$$

generiraju $\mathcal{A}_y-$modul $\mathcal{R}(m_1,\dots,m_p)_y$. Sada su $\varphi(m_1(x)),\dots,\varphi(m_p(x))\in\mathcal{G}_x$, pa postoji okolina $W\subseteq V$ od x i prerezi $n_1,\dots,n_p\in\Gamma(W,\mathcal{G})$ takvi da je $n_i(x)=\varphi(m_i(x))$ za $1\le i\le p$. Stavimo sada

$$p_j=\sum_{i=1}^p f_j^i n_i,\qquad 1\le j\le q.$$

Tada su $p_j\in\Gamma(W,\mathcal{G})$. Nadalje,

$$p_j(x)=\sum_{i=1}^p f_j^i(x)n_i(x)=\sum_{i=1}^p f_j^i(x)\varphi(m_i(x))=\varphi\left(\sum_{i=1}^p f_j^i(x)m_i(x)\right)=0.$$

No tada postoji okolina $T\subseteq W$ točke x takva da je $p_j(y)=0$ za svaku točku $y\in T$ i za $1\le j\le q$. To znači da za svaku točku $y\in T$ i za proizvoljne $f_1,\dots,f_p\in\mathcal{A}_y$ vrijedi implikacija

$$\sum_{i=1}^p f_i m_i(y)=0\qquad\Longrightarrow\qquad\sum_{i=1}^p f_i n_i(y)=0.$$

Dakle, za svaku točku $y \in T$ i za proizvoljan element $m = \sum_{i=1}^{p} f_i m_i(y) \in \mathcal{F}_y$ možemo nedvojbeno definirati

$$\psi_y(m) = \sum_{i=1}^{p} f_i n_i(y) \in \mathcal{G}_y.$$

Tada je očito $\psi_y \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}_y}(\mathcal{F}_y, \mathcal{G}_y)$. Familija ψ_y, $y \in T$, je $\mathcal{A}-$homomorfizam $\psi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ definiran nad T i vrijedi $\psi_x = \varphi$. Time je dokazana i surjektivnost homomorfizma ρ.

Propozicija 4.2.10. *Ako su $\mathcal{F}$ i $\mathcal{G}$ koherentni snopovi onda je i $\mathcal{H}om_{\mathcal{A}}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ koherentan snop.*

Dokaz: Tvrdnja je lokalnog karaktera pa prema propoziciji 4.2.2. možemo pretpostaviti da postoji egzaktan niz snopova $\mathcal{A}-$modula

$$\mathcal{A}^q \longrightarrow \mathcal{A}^p \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow 0.$$

Iz propozicije 4.2.9. sada slijedi da je niz

$$0 \longrightarrow \mathcal{H}om_{\mathcal{A}}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \longrightarrow \mathcal{H}om_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}^p, \mathcal{G}) \longrightarrow \mathcal{H}om_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}^q, \mathcal{G})$$

egzaktan. Međutim, snop $\mathcal{H}om_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}^p, \mathcal{G})$ je izomorfan snopu $\mathcal{G}^p$, dakle, koherentan je. Isto vrijedi i za snop $\mathcal{H}om_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}^q, \mathcal{G})$. Prema teoremu 4.2.6. jezgra homomorfizma

$$\mathcal{H}om_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}^p, \mathcal{G}) \longrightarrow \mathcal{H}om_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}^q, \mathcal{G})$$

je koherentan snop. Zbog egzaktnosti gornjeg niza snop $\mathcal{H}om_{\mathcal{A}}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ izomorfan je toj jezgri, dakle, koherentan je.

Snop prstenova $\mathcal{A}$ može se promatrati kao snop $\mathcal{A}-$modula; ako je taj snop $\mathcal{A}-$modula koherentan, kažemo da je $\mathcal{A}$ **koherentan snop prstenova**. Budući da je $\mathcal{A}-$modul $\mathcal{A}$ očito konačnog tipa, da bi snop prstenova $\mathcal{A}$ bio koherentan treba nam provjera samo svojstva (b) iz definicije koherentnosti. Dakle, $\mathcal{A}$ je koherentan snop prstenova, ako je za svaki otvoren skup $U \subseteq X$ i za bilo koje $m_1, \ldots, m_p \in \Gamma(U, \mathcal{A})$ snop relacija $\mathcal{R}(m_1, \ldots, m_p)$ snop konačnog tipa. Podsjećamo da je

$$\mathcal{R}(m_1, \ldots, m_p)_y = \{(f_1, \ldots, f_p) \in \mathcal{A}_y^p;\ f_1 m_1(y) + \cdots + f_p m_p(y) = 0\}.$$

Kasnije ćemo detaljno proučiti jedan važan primjer koherentnog snopa prstenova: to je strukturni snop $\mathcal{O}_X$ algebarske višestrukosti X. Drugi važan primjer imamo za kompleksnu analitičku višestrukost X. Prema Okinom teoremu snop klica holomorfnih funkcija na X je koherentan.

Ako je $\mathcal{A}$ koherentan snop prstenova vrijedi i obrat propozicije 4.2.2.:

Propozicija 4.2.11. *Ako je $\mathcal{A}$ koherentan snop prstenova, snop $\mathcal{A}-$modula $\mathcal{F}$ je koherentan ako i samo ako je lokalno izomorfan kojezgri homomorfizma $\varphi : \mathcal{A}^q \longrightarrow \mathcal{A}^q$, tj. ako i samo ako svaka točka $x \in X$ ima otvorenu okolinu U takvu da je za neke $p, q \in \mathbb{Z}_+$ snop $\mathcal{A}|U-$modula $\mathcal{F}|U$ izomorfan kojezgri nekog homomorfizma $\mathcal{A}^q|U \longrightarrow \mathcal{A}^p|U$.*

Dokaz: Nužnost je upravo tvrdnja propozicije 4.2.2. Dovoljnost slijedi iz teorema 4.2.6. jer su snopovi $\mathcal{A}^p$ i $\mathcal{A}^q$ koherentni.

Propozicija 4.2.12. *Da bi podsnop od $\mathcal{A}^p$ bi koherentan, nužno je i dovoljno da bude konačnog tipa.*

Dokaz: To je poseban slučaj propozicije 4.2.3.

Korolar 4.2.13. *Snop relacija između konačno mnogo prereza koherentnog snopa je koherentan snop.*

Dokaz: Taj je snop konačnog tipa po samoj definiciji koherentnog snopa.

Propozicija 4.2.14. *Neka je $\mathcal{F}$ koherentan snop $\mathcal{A}-$modula. Za svaku točku $x \in X$ neka je $\mathcal{I}_x$ anihilator $\mathcal{A}_x-$modula $\mathcal{F}_x$. To je ideal u $\mathcal{A}_x$ definiran sa*

$$\mathcal{I}_x = \{a \in \mathcal{A}_x;\ af = 0\ \forall f \in \mathcal{F}_x\}.$$

Tada je $\mathcal{I} = \bigcup_{x\in X} \mathcal{I}_x$ koherentan snop ideala (koji se zove **anihilator snopa** *$\mathcal{F}$).*

Dokaz: Doista, $\mathcal{I}_x$ je jezgra homomorfizma $\mathcal{A}_x \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}_x}(\mathcal{F}_x, \mathcal{F}_x)$; sada treba primijeniti propozicije 4.2.9., 4.2.10. i teorem 4.2.6.

Općenitije, **transporter** $\mathcal{F} : \mathcal{G}$ koherentnog snopa $\mathcal{G}$ u koherentni podsnop $\mathcal{F}$ je koherentan snop ideala. Pri tome je

$$\mathcal{F} : \mathcal{G} = \bigcup_{x\in X} (\mathcal{F} : \mathcal{G})_x, \qquad (\mathcal{F} : \mathcal{G})_x = \{a \in \mathcal{A}_x;\ af \in \mathcal{F}_x\ \forall f \in \mathcal{G}\}.$$

Naime, transporter $\mathcal{F} : \mathcal{G}$ je upravo anihilator kvocijentnog snopa $\mathcal{G}/\mathcal{F}$.

Pojmovi snopa konačnog tipa i koherentnog snopa odnose se na snopove modula nad određenim snopom prstenova $\mathcal{A}$. Kad budemo razmatrali više snopova prstenova, govorit ćemo "*konačnog tipa nad $\mathcal{A}$*" i "*$\mathcal{A}-$koherentan*" ili "*koherentan nad $\mathcal{A}$*" da istaknemo da određen snop promatramo kao snop $\mathcal{A}-$modula.

Teorem 4.2.15. *Neka je $\mathcal{A}$ koherentan snop prstenova, $\mathcal{I}$ koherentan snop ideala u $\mathcal{A}$ i $\mathcal{F}$ snop $\mathcal{A}/\mathcal{I}-$modula. Da bi $\mathcal{F}$ bio $\mathcal{A}/\mathcal{I}-$koherentan nužno je i dovoljno da bude $\mathcal{A}-$koherentan. Posebno, sam $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ je koherentan snop prstenova.*

Dokaz: Jasno je da za snop $\mathcal{F}$ "konačnog tipa nad $\mathcal{A}$" znači potpuno isto što i "konačnog tipa nad $\mathcal{A}/\mathcal{I}$". Nadalje, ako je $\mathcal{F}$ koherentan kao snop $\mathcal{A}-$modula i ako su $s_1, \ldots, s_p$ prerezi od $\mathcal{F}$ nad otvorenim skupom $U \subseteq X$, snop relacija $\mathcal{R}_{\mathcal{A}}(s_1, \ldots, s_p)$ prereza $s_1, \ldots, s_p$ s koeficijentima iz $\mathcal{A}$ je konačnog tipa nad $\mathcal{A}$. Odatle odmah slijedi da je snop relacija $\mathcal{R}_{\mathcal{A}/\mathcal{I}}(s_1, \ldots, s_p)$ prereza $s_1, \ldots, s_p$ s koeficijentima iz $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ konačnog tipa nad $\mathcal{A}/\mathcal{I}$, budući da je očito $\mathcal{R}_{\mathcal{A}/\mathcal{I}}(s_1, \ldots, s_p)$ slika od $\mathcal{R}_{\mathcal{A}}(s_1, \ldots, s_p)$ pri kanonskom epimorfizmu $\mathcal{A}^p \to (\mathcal{A}/\mathcal{I})^p$. Dakle, snop $\mathcal{F}$ je $\mathcal{A}/\mathcal{I}-$koherentan. Posebno, budući da je snop $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ $\mathcal{A}-$koherentan, taj je snop i $\mathcal{A}/\mathcal{I}-$koherentan, odnosno, snop prstenova $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ je koherentan. Obratno, ako pretpostavimo da je snop $\mathcal{F}$ $\mathcal{A}/\mathcal{I}-$koherentan, on je lokalno izomorfan kojezgri nekog homomorfizma $\varphi : (\mathcal{A}/\mathcal{I})^q \to (\mathcal{A}/\mathcal{I})^p$. Budući da je $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ $\mathcal{A}-$koherentan, prema teoremu 4.2.6. snop $\mathcal{F}$ je $\mathcal{A}-$koherentan.

Neka je sada Y zatvoren potprostor topološkog prostora X. Ako je $\mathcal{G}$ snop na Y, sa $\mathcal{G}^X$ označavamo snop na X dobiven produljenjem snopa $\mathcal{G}$ s 0 izvan Y. Ako je $\mathcal{A}$ snop prstenova na Y, $\mathcal{A}^X$ je snop prstenova na X, a ako je $\mathcal{F}$ snop $\mathcal{A}-$modula (dakle, snop na Y), onda je $\mathcal{F}^X$ snop $\mathcal{A}^X-$modula.

Propozicija 4.2.16. *Da bi snop $\mathcal{A}-$modula $\mathcal{F}$ na Y bio konačnog tipa nad $\mathcal{A}$, nužno je i dovoljno da snop $\mathcal{A}^X-$modula $\mathcal{F}^X$ bude konačnog tipa nad $\mathcal{A}^X$.*

Dokaz: Neka je $U \subseteq X$ otvoren skup i $V = U \cap Y$. Svaki homomorfizam $\varphi : \mathcal{A}^p \to \mathcal{F}$ nad V definira homomorfizam $\varphi^X : \left(\mathcal{A}^X\right)^p \to \mathcal{F}^X$ nad U, a vrijedi i obratno. Da bi φ bio surjektivan nužno je i dovoljno da φ^X bude surjektivan. Odatle slijedi tvrdnja.

Ovaj dokaz ujedno dokazuje:

Propozicija 4.2.17. *Da bi snop $\mathcal{F}$ bio $\mathcal{A}-$koherentan, nužno je i dovoljno da snop $\mathcal{F}^X$ bude $\mathcal{A}^X-$koherentan.*

Odatle za $\mathcal{F} = \mathcal{A}$ dobivamo:

Korolar 4.2.18. *Da bi $\mathcal{A}$ bio koherentan snop prstenova, nužno je dovoljno da $\mathcal{A}^X$ bude koherentan snop prstenova.*

4.3 Kohomologija topološkog prostora s vrijednostima u snopu

U ovom odjeljku X označava topološki prostor i $\mathcal{F}$ je snop Abelovih grupa na X. Kad kažemo **pokrivač** od X uvijek podrazumijevamo da se radi o otvorenom pokrivaču.

Neka je I neprazan skup. Za $p \in \mathbb{Z}_+$ neka je $S_p(I) = I^{p+1}$ skup svih uređenih $(p+1)-$torki $s = (i_0, \ldots, i_p)$ elemenata iz I i neka je $S(I)$ disjunktna unija skupova $S_p(I)$. Elementi od $S(I)$ zovu se **simpleksi nad skupom** I. Ako je $s = (i_0, \ldots, i_p) \in S_p(I)$, kažemo da je p **dimenzija simpleksa** s, a $i_0, \ldots, i_p$ zovu se **vrhovi simpleksa** s. Skup svih vrhova simpleksa s označavamo sa $|s|$; dakle, ako je $s = (i_0, \ldots, i_p)$, onda je $|s| = \{i_0, \ldots, i_p\}$. Nadalje, za $p \in \mathbb{Z}_+$ označimo sa $K_p(I)$ slobodnu Abelovu grupu generiranu sa $S_p(I)$, dakle, aditivnu grupu svih formalnih $\mathbb{Z}-$linearnih kombinacija simpleksa dimenzije p. Nadalje, neka

$$K(I) = \bigoplus_{p \in \mathbb{Z}_+} K_p(I)$$

direktna suma svih tih Abelovih grupa.

Za $p, q \in \mathbb{Z}_+$ preslikavanje $h : K_p(I) \to K_q(I)$ zove se **simplicijalni homomorfizam** ako vrijedi:

(*a*) h je homomorfizam grupa.

(*b*) Za svaki simpleks $s \in S_p(I) \subseteq K_p(I)$ vrijedi

$$h(s) = \sum_{s' \in S_q(I),\, |s'| \subseteq |s|} c_s^{s'} s', \qquad c_s^{s'} \in \mathbb{Z}.$$

Naravno, simplicijalni homomorfizam $h : K_p(I) \to K_q(I)$ potpuno je određen svojom restrikcijom $h|S_p(I)$. Nadalje, preslikavanje $h : S_p(I) \to K_q(I)$ proširuje se do simplicijalnog homomorfizma $K_p(I) \to K_q(I)$ (naravno, na jedinstven način) ako i samo ako je za svaki simpleks $s \in S_p(I)$ $h(s)$ $Z-$linearna kombinacija simpleksa $s' \in S_q(I)$ takvih da je $|s'| \subseteq |s|$.

Neka je $\mathfrak{U} = (U_i)_{i \in I}$ pokrivač od X. Za $s = (i_0, \ldots, i_p) \in S_p(I) = I^{p+1}$ stavimo

$$U_s = U_{i_0,\ldots,i_p} = U_{i_0} \cap \cdots \cap U_{i_p}.$$

Za $p \in \mathbb{Z}_+$ $p-$**kolanac od** $\mathfrak{U}$ **s vrijednostima u** $\mathcal{F}$ je preslikavanje f koje svakom simpleksu $s = (i_0, i_1, \ldots, i_p) \in S_p(I)$ pridružuje prerez $f_s = f_{i_0,\ldots,i_p}$ snopa $\mathcal{F}$ nad U_s. Svi $p-$kolanci s obzirom na operacije po točkama tvore Abelovu grupu koju označavamo sa $C^p(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$. Ta je grupa direktni produkt grupa prereza:

$$C^p(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) = \prod_{s \in S_p(I)} \Gamma(U_s, \mathcal{F}).$$

Familiju grupa $(C^p(\mathfrak{U}, \mathcal{F}))_{p \in \mathbb{Z}_+}$ označavamo sa $C(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$. Za $p-$kolanac kažemo i **kolanac stupnja** p ili **kolanac dimenzije** p.

Za $p-$**kolanac** f kažemo da je **alternirajući**, ako vrijedi:

(*a*) Kad god se dva indeksa $i_0, \ldots, i_p$ podudaraju, onda je $f_{i_0,\ldots,i_p} = 0$.

(*b*) Ako je σ permutacija skupa $\{0, \ldots, p\}$ onda je

$$f_{i_{\sigma(0)},\ldots,i_{\sigma(p)}} = \varepsilon_\sigma f_{i_0,\ldots,i_p} \qquad \forall (i_0, \ldots, i_p) \in S_p(I).$$

Pri tome ε_σ označava predznak permutacije σ :

$$\varepsilon_\sigma = \begin{cases} 1 & \text{ako je } \sigma \text{ parna permutacija} \\ -1 & \text{ako je } \sigma \text{ neparna permutacija.} \end{cases}$$

Alternirajući $p-$kolanci tvore podgrupu $C'^p(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ grupe $C^p(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$; familiju grupa $(C'^p(\mathfrak{U}, \mathcal{F}))_{p\in\mathbb{Z}_+}$ označavamo sa $C'(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$.

Neka su sada $p, q \in \mathbb{Z}_+$ i neka je $h : K_p(I) \to K_q(I)$ simplicijalni homomorfizam. Neka su $c_s^{s'} \in \mathbb{Z}$ definirani sa

$$h(s) = \sum_{s'\in S_q(I),\, |s'|\subseteq|s|} c_s^{s'} s', \qquad s \in S_p(I).$$

Nadalje, neka je $f \in C^q(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ kolanac stupnja q. Za svaki simpleks $s \in S_p(I)$ dimenzije p stavimo

$$\left(h^t f\right)_s = \sum_{s'} c_s^{s'} \rho_s^{s'} \left(f_{s'}\right),$$

pri čemu $\rho_s^{s'}$ označava homomorfizam restrikcije $\Gamma(U_{s'}, \mathcal{F}) \to \Gamma(U_s, \mathcal{F})$ (ima smisla jer je $|s'| \subseteq |s|$.) Preslikavanje $s \mapsto (h^t f)_s$ je $p-$kolanac koji označavamo sa $h^t f$. Tada je $f \mapsto h^t f$ homomorfizam grupa

$$h^t : C^q(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \longrightarrow C^p(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$$

i direktno se provjerava da vrijedi

$$(h_1 + h_2)^t = h_1^t + h_2^t, \qquad (h_1 \circ h_2)^t = h_2^t \circ h_1^t, \qquad 1^t = 1.$$

Za svaki $p \in \mathbb{Z}_+$ definiramo simplicijalni homomorfizam

$$\partial_p : K_{p+1}(I) \longrightarrow K_p(I)$$

formulom

$$\partial_p(i_0, \ldots, i_{p+1}) = \sum_{j=0}^{p+1} (-1)^j (i_0, \ldots, \hat{i_j}, \ldots, i_{p+1});$$

pri tome znak ˆ znači kao i obično da simbol ispod tog znaka izostavljamo. Lako se vidi da vrijedi $\partial_{p-1} \circ \partial_p = 0$. Homomorfizam grupa $\partial_p^t : C^p(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \to C^{p+1}(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ označavat ćemo sa d^p. Dakle, po definiciji je

$$(d^p f)_{i_0,\ldots,i_{p+1}} = \sum_{j=0}^{p+1} (-1)^j \rho_j \left(f_{i_0,\ldots,\hat{i_j},\ldots,i_{p+1}}\right),$$

pri čemu ρ_j označava homomorfizam restrikcije

$$\rho_j : \Gamma(U_{i_0,\ldots,\hat{i_j},\ldots,i_{p+1}}, \mathcal{F}) \longrightarrow \Gamma(U_{i_0,\ldots,i_{p+1}}, \mathcal{F}).$$

Budući da je $\partial_{p-1} \circ \partial_p = 0$, imamo $d^p \circ d^{p-1} = 0$. Obično se izostavlja donji i gornji indeks p i piše ∂ umjesto ∂_p i d umjesto d^p. Na taj način je familija grupa $C(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ snabdjevena operatorom koruba koji je čini kompleksom. $q-$tu grupu kohomologije tog kompleksa označavat ćemo sa $H^q(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$. Dakle,

$$H^q(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) = Z^q(\mathfrak{U}, \mathcal{F})/B^q(\mathfrak{U}, \mathcal{F}),$$

pri čemu su

$$Z^q(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) = \mathrm{Ker}\left(d : C^q(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \to C^{q+1}(\mathfrak{U}, \mathcal{F})\right) \quad \text{i} \quad B^q(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) = \mathrm{Im}\left(d : C^{q-1}(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \to C^q(\mathfrak{U}, \mathcal{F})\right).$$

Kao i obično, elementi od $Z^q(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ zovu se $q-$**kociklusi**, a elementi od $B^q(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ $q-$**korubovi** pokrivača $\mathfrak{U}$ s vrijednostima u $\mathcal{F}$.

Propozicija 4.3.1. $H^0(\mathfrak{U},\mathcal{F}) = \Gamma(X,\mathcal{F})$.

Dokaz: $0-$kolanac je familija $(f_i)_{i\in I}$, pri čemu je $f_i \in \Gamma(U_i,\mathcal{F})$. Da bi taj kolanac bio kociklus, nužno je i dovoljno da za svaka dva indeksa $i,j \in I$ bude $f_i - f_j = 0$ na $U_i \cap U_j$. No to je upravo nužno i dovoljno da postoji (i, naravno, jedinstven je) globalni prerez $f \in \Gamma(X,\mathcal{F})$ takav da je $f|U_i = f_i \ \forall i \in I$.

Posebno, to znači da je $H^0(\mathfrak{U},\mathcal{F})$ neovisna o izboru pokrivača $\mathfrak{U}$; to nije tako za ostale grupe $H^q(\mathfrak{U},\mathcal{F})$.

Lako se provjerava da je df alternirajući ako je f alternirajući. Drugim riječima, d ostavlja stabilnim $C'(\mathfrak{U},\mathcal{F})$, pa je to potkompleks od $C(\mathfrak{U},\mathcal{F})$. Grupe kohomologije kompleksa $C'(\mathfrak{U},\mathcal{F})$ označavat ćemo sa $H'^q(\mathfrak{U},\mathcal{F})$.

Propozicija 4.3.2. *Injekcija* $C'(\mathfrak{U},\mathcal{F}) \to C(\mathfrak{U},\mathcal{F})$ *definira izomorfizam grupe* $H'^q(\mathfrak{U},\mathcal{F})$ *na grupu* $H^q(\mathfrak{U},\mathcal{F})$ *za svaki* $q \in \mathbb{Z}_+$.

Dokaz: Snabdijmo skup I linearnim (totalnim) uređajem. Neka je h simplicijalni endomorfizam od $K(I)$ definiran na sljedeći način:

$h((i_0,\ldots,i_q)) = 0$ ako se neki među indeksima $i_0,\ldots,i_q$ podudaraju.

$h((i_0,\ldots,i_q)) = \varepsilon_\sigma(i_{\sigma(0)},\ldots,i_{\sigma(q)})$ ako su indeksi $i_0,\ldots,i_q$ međusobno različiti; pri tome σ označava jedinstvenu permutaciju skupa $\{0,\ldots,q\}$ takvu da je $i_{\sigma(0)} < i_{\sigma(1)} \cdots < i_{\sigma(q)}$.

Neposredno se provjerava da h komutira sa ∂. Nadalje, očito je $h(s) = s$ ako je s dimenzije 0. Sada se indukcijom po $q \in \mathbb{Z}_+$ pokazuje da postoje simplicijalni homomorfizmi $k : K_q(I) \to K_{q+1}(I)$ takvi da vrijedi

$$1 - h = \partial \circ k + k \circ \partial.$$

Prijeđemo li na $C(\mathfrak{U},\mathcal{F})$, dobivamo

$$1 - h^t = k^t \circ d + d \circ k^t.$$

Neposredno se provjerava da je h^t projektor sa $C(\mathfrak{U},\mathcal{F})$ na $C'(\mathfrak{U},\mathcal{F})$. Stoga iz gornje formule tvrdnja slijedi.

Korolar 4.3.3. $H^q(\mathfrak{U},\mathcal{F}) = 0$ *za* $q > \dim \mathfrak{U}$.

Dokaz: Dimenzija pokrivača $\dim \mathfrak{U}$ je definirana kao najmanji $n \in \mathbb{Z}_+$ takav da za bilo koje međusobno različite $U_1,\ldots,U_{n+1} \in \mathfrak{U}$ vrijedi $U_1 \cap \cdots \cap U_{n+1} = \emptyset$, ukoliko takav n postoji, odnosno, $+\infty$ ako takav n ne postoji. Dakle, imamo $U_{i_0,\ldots,i_q} = \emptyset$ za $q > \dim \mathfrak{U}$ ako su indeksi $i_0,\ldots,i_q$ međusobno različiti. Odatle je $C'^q(\mathfrak{U},\mathcal{F}) = 0$, pa slijedi $H^q(\mathfrak{U},\mathcal{F}) = H'^q(\mathfrak{U},\mathcal{F}) = 0$.

Za **pokrivač** $\mathfrak{U} = (U_i)_{i\in I}$ kažemo da je **finiji** od pokrivača $\mathfrak{V} = (V_j)_{j\in J}$, ako postoji preslikavanje $\tau : I \to J$ takvo da je $U_i \subseteq V_{\tau(i)}$ za svaki $i \in I$. Pisat ćemo tada $\mathfrak{U} \prec \mathfrak{V}$. U tom slučaju za $f \in C^q(\mathfrak{V},\mathcal{F})$ stavimo

$$(\tau f)_{i_0,\ldots,i_q} = \rho^{\mathfrak{V}}_{\mathfrak{U}}\left(f_{\tau(i_0),\ldots,\tau(i_q)}\right),$$

pri čemu je $\rho^{\mathfrak{V}}_{\mathfrak{U}}$ homomorfizam restrikcije definiran inkluzijom $U_{i_0,\ldots,i_q} \subseteq V_{\tau(i_0),\ldots,\tau(i_q)}$. Preslikavanje $f \mapsto \tau f$ je homomorfizam grupa sa $C^q(\mathfrak{V},\mathcal{F})$ u $C^q(\mathfrak{U},\mathcal{F})$ definiran za svaki $q \in \mathbb{Z}_+$ i on komutira sa d, dakle, definira homomorfizme

$$\tau^* : H^q(\mathfrak{V},\mathcal{F}) \longrightarrow H^q(\mathfrak{U},\mathcal{F}).$$

Propozicija 4.3.4. *Homomorfizmi $\tau^* : H^q(\mathfrak{V}, \mathcal{F}) \to H^q(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ ovise samo o pokrivačima $\mathfrak{U}$ i $\mathfrak{V}$, a ne i o izboru preslikavanja τ.*

Dokaz: Neka su τ i ω preslikavanja sa I u J takva da je $U_i \subseteq V_{\tau(i)}$ i $U_i \subseteq V_{\omega(i)}$ za svaki $i \in I$. Treba dokazati da je $\tau^* = \omega^*$.

Za $f \in C^q(\mathfrak{V}, \mathcal{F})$ stavimo

$$(kf)_{i_0,\ldots,i_{q-1}} = \sum_{h=0}^{q-1} (-1)^h \rho_h \left(f_{\tau(i_0),\ldots,\tau(i_h),\omega(i_h),\ldots,\omega(i_{q-1})} \right),$$

gdje je ρ_h homomorfizam restrikcije definiran inkluzijom $U_{i_0,\ldots,i_{q-1}} \subseteq V_{\tau(i_0),\ldots,\tau(i_h),\omega(i_h),\ldots,\omega(i_{q-1})}$. Direktno se provjerava da vrijedi

$$dkf - kdf = \omega f - \tau f,$$

a odatle propozicija slijedi.

Dakle, ako je $\mathfrak{U} \prec \mathfrak{V}$, za svaki $q \in \mathbb{Z}_+$ postoji kanonski homomorfizam $H^q(\mathfrak{V}, \mathcal{F}) \to H^q(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$. U daljnjem ćemo taj homomorfizam označavati sa $\sigma_{\mathfrak{U},\mathfrak{V}}$.

Očito je $\prec$ relacija parcijalnog uređaja među pokrivačima od X. Taj je uređaj usmjeren (prema dolje); doista, ako su $\mathfrak{U} = (U_i)_{i \in I}$ i $\mathfrak{V} = (V_j)_{j \in J}$ dva pokrivača, onda je $\mathfrak{W} = (U_i \cap V_j)_{(i,j) \in I \times J}$ pokrivač koji je finiji i od $\mathfrak{U}$ i od $\mathfrak{V}$.

Kažemo da su **pokrivači $\mathfrak{U}$ i $\mathfrak{V}$ ekvivalentni** i pišemo $\mathfrak{U} \approx \mathfrak{V}$ ako vrijedi $\mathfrak{U} \prec \mathfrak{V}$ i $\mathfrak{V} \prec \mathfrak{U}$. Svaki pokrivač $\mathfrak{U}$ ekvivalentan je pokrivaču $\mathfrak{U}'$ čiji je skup indeksa podskup partitivnog skupa $\mathfrak{P}(X)$; doista, za $\mathfrak{U}'$ možemo uzeti skup svih otvorenih podskupova od X koji su elementi pokrivača $\mathfrak{U}$. Dakle, možemo govoriti o skupu klasa ekvivalencije pokrivača; taj je skup parcijalno uređen i usmjeren (prema doolje). Nasuprot tome, ne možemo govoriti o "skupu" svih pokrivača, jer pokrivač je familija čiji skup indeksa može biti bilo koji skup.

Ako je $\mathfrak{U} \prec \mathfrak{V}$, definirali smo za svaki $q \in \mathbb{Z}_+$ i za svaki snop $\mathcal{F}$ sasvim određen homomorfizam grupa

$$\sigma_{\mathfrak{U},\mathfrak{V}} : H^q(\mathfrak{V}, \mathcal{F}) \longrightarrow H^q(\mathfrak{U}, \mathcal{F}).$$

Jasno je da je $\sigma_{\mathfrak{U},\mathfrak{U}}$ identiteta i da je

$$\sigma_{\mathfrak{U},\mathfrak{V}} \circ \sigma_{\mathfrak{V},\mathfrak{W}} = \sigma_{\mathfrak{U},\mathfrak{W}} \qquad \text{ako je} \quad \mathfrak{U} \prec \mathfrak{V} \prec \mathfrak{W}.$$

Posebno, ako su $\mathfrak{U}$ i $\mathfrak{V}$ ekvivalentni uređaji, onda su $\sigma_{\mathfrak{U},\mathfrak{V}}$ i $\sigma_{\mathfrak{V},\mathfrak{U}}$ međusobno inverzni izomorfizmi. Dakle, $H^q(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ ovisi samo o klasi ekvivalencije pokrivača $\mathfrak{U}$.

$q-$**ta grupa kohomologije** topološkog prostora X **s vrijednostima u snopu** $\mathcal{F}$ je induktivni limes grupa $H^q(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ po usmjerenom skupu svih klasa ekvivalencije pokrivača od X i homomorfizmima $\sigma_{\mathfrak{U},\mathfrak{V}}$. Tu grupu označavamo sa $H^q(X, \mathcal{F})$.

Drugim riječima, element od $H^q(X, \mathcal{F})$ je uređen par $(\mathfrak{U}, x)$, gdje je $x \in H^q(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$, uz dogovor da identificiramo dva para $(\mathfrak{U}, x)$ i $(\mathfrak{V}, y)$ ako postoji pokrivač $\mathfrak{W}$ takav da je $\mathfrak{W} \prec \mathfrak{U}$ i $\mathfrak{W} \prec \mathfrak{V}$ i da vrijedi $\sigma_{\mathfrak{W},\mathfrak{U}}(x) = \sigma_{\mathfrak{W},\mathfrak{V}}(y)$ u grupi $H^q(\mathfrak{W}, \mathcal{F})$. Svakom pokrivaču $\mathfrak{U}$ sada su pridruženi kanonski homomorfizmi $\sigma_{\mathfrak{U}} : H^q(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \to H^q(X, \mathcal{F})$.

Ako je prostor X kvazikompaktan (svaki pokrivač ima konačan potpokrivač) onda možemo promatrati samo konačne pokrivače, a ako je X kvaziparakompaktan (svaki pokrivač ima lokalno konačno profinjenje), možemo koristiti samo lokalno konačne pokrivače.

Za $q = 0$ imamo primjenom propozicije 4.3.1.:

Propozicija 4.3.5. $H^0(X, \mathcal{F}) = \Gamma(X, \mathcal{F})$.

Neka je $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ homomorfizam snopova. Ako je $\mathfrak{U}$ pokrivač od X, svakom elementu $f \in C^q(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ pridružimo element $\varphi f \in C^q(\mathfrak{U}, \mathcal{G})$ tako da stavimo

$$(\varphi f)_s = \varphi(f_s).$$

Preslikavanje $f \mapsto \varphi f$ je homomorfizam grupe $C(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ u grupu $C(\mathfrak{U}, \mathcal{G})$ koji komutira s operatorom koruba, dakle definira homomorfizme $\varphi^* : H^q(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \to H^q(\mathfrak{U}, \mathcal{G})$, $q \in \mathbb{Z}_+$. Za $\mathfrak{U} \prec \mathfrak{V}$ je očito $\varphi^* \circ \sigma_{\mathfrak{U},\mathfrak{V}} = \sigma_{\mathfrak{U},\mathfrak{V}} \circ \varphi^*$. Dakle, prijelazom na induktivne limese dolazimo do homomorfizama

$$\varphi^* : H^q(X, \mathcal{F}) \longrightarrow H^q(X, \mathcal{G}), \qquad q \in \mathbb{Z}_+.$$

Za $q = 0$ homomorfizam φ^* je upravo prirodno definirani homomorfizam $\Gamma(X, \mathcal{F}) \to \Gamma(X, \mathcal{G})$.

Pridruživanje $\varphi \mapsto \varphi^*$ očito ima sljedeća svojstva:

$$(\varphi + \psi)^* = \varphi^* + \psi^*, \qquad (\varphi \circ \psi)^* = \varphi^* \circ \psi^*, \qquad 1^* = 1.$$

Dakle, $\mathcal{F} \mapsto H^q(X, \mathcal{F})$, $\varphi \mapsto \varphi^*$ je kovarijantan aditivan funktor za svaki $q \in \mathbb{Z}_+$. Posebno,

$$\mathcal{F} = \mathcal{G}_1 \oplus \mathcal{G}_2 \qquad \Longrightarrow \qquad H^q(X, \mathcal{F}) = H^q(X, \mathcal{G}_1) \oplus H^q(X, \mathcal{G}_2).$$

Neka je $\mathcal{F}$ snop $\mathcal{A}-$modula. Svaki globalni prerez iz $\Gamma(X, \mathcal{A})$ definira endomorfizam od $\mathcal{F}$, dakle i endomorfizam svake grupe $H^q(X, \mathcal{F})$. Slijedi da je svaka grupa $H^q(X, \mathcal{F})$ modul nad prstenom $\Gamma(X, \mathcal{A})$.

Neka je

$$0 \longrightarrow \mathcal{A} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{B} \xrightarrow{\beta} \mathcal{C} \longrightarrow 0$$

kratki egzaktni niz snopova. Ako je $\mathfrak{U}$ pokrivač od X, niz

$$0 \longrightarrow C(\mathfrak{U}, \mathcal{A}) \xrightarrow{\alpha} C(\mathfrak{U}, \mathcal{B}) \xrightarrow{\beta} C(\mathfrak{U}, \mathcal{C})$$

je egzaktan, ali homomorfizam β općenito nije surjektivan. Označimo sa $C_0(\mathfrak{U}, \mathcal{C})$ sliku tog homomorfizma; to je potkompleks od $C(\mathfrak{U}, \mathcal{C})$ i njegove ćemo grupe kohomologije označiti sa $H_0^q(\mathfrak{U}, \mathcal{C})$. Sada egzaktan niz kompleksa vodi na kohomološki egzaktni niz

$$\cdots \longrightarrow H^q(\mathfrak{U}, \mathcal{B}) \longrightarrow H_0^q(\mathfrak{U}, \mathcal{C}) \xrightarrow{d} H^{q+1}(\mathfrak{U}, \mathcal{A}) \longrightarrow H^{q+1}(\mathfrak{U}, \mathcal{B}) \longrightarrow \cdots$$

Neka su sada $\mathfrak{U} = (U_i)_{i \in I}$ i $\mathfrak{V} = (V_j)_{j \in J}$ pokrivači takvi da je $\mathfrak{U} \prec \mathfrak{V}$ i neka je $\tau : I \to J$ preslikavanje takvo da je $U_i \subseteq V_{\tau(i)}$ za svaki $i \in I$. Tada imamo komutativan dijagram

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & C(\mathfrak{V}, \mathcal{A}) & \longrightarrow & C(\mathfrak{V}, \mathcal{B}) & \longrightarrow & C(\mathfrak{V}, \mathcal{C}) \\
 & & \tau \downarrow & & \tau \downarrow & & \tau \downarrow \\
0 & \longrightarrow & C(\mathfrak{U}, \mathcal{A}) & \longrightarrow & C(\mathfrak{U}, \mathcal{B}) & \longrightarrow & C(\mathfrak{U}, \mathcal{C})
\end{array}$$

Taj dijagram pokazuje da τ preslikava $C_0(\mathfrak{V}, \mathcal{C})$ u $C_0(\mathfrak{U}, \mathcal{C})$. Prema tome, dobivamo homomorfizme $\tau^* : H_0^q(\mathfrak{V}, \mathcal{C}) \to H_0^q(\mathfrak{U}, \mathcal{C})$. Nadalje, homomorfizmi τ^* neovisni su o izboru preslikavanja τ : to slijedi iz činjenice da ako je $f \in C_0^q(\mathfrak{V}, \mathcal{C})$, onda je $kf \in C_0^{q-1}(\mathfrak{U}, \mathcal{C})$, uz oznaku iz dokaza propozicije 4.3.4. Na taj način dobivamo kanonske homomorfizme $\sigma_{\mathfrak{U},\mathfrak{V}} : H_0^q(\mathfrak{V}, \mathcal{C}) \to H_0^q(\mathfrak{U}, \mathcal{C})$. Sada se mogu definirati grupe $H_0^q(X, \mathcal{C})$ kao induktivni limesi grupa $H_0^q(\mathfrak{U}, \mathcal{C})$.

Budući da je induktivni limes egzaktnih nizova egzaktni niz, dobivamo:

Propozicija 4.3.6. *Niz*

$$\cdots H^q(X,\mathcal{A}) \xrightarrow{\beta^*} H^q_0(X,\mathcal{C}) \xrightarrow{d} H^{q+1}(X,\mathcal{A}) \xrightarrow{\alpha^*} H^{q+1}(X,\mathcal{B}) \longrightarrow \cdots$$

je egzaktan.

Pri tome d označava homomorfizam koji se dobije prijelazom na limes iz homomorfizama $d : H^q_0(\mathfrak{U},\mathcal{C}) \to H^{q+1}(\mathfrak{U},\mathcal{A})$.

Da bismo mogli primijeniti ovu propoziciju valjalo bi moći usporediti grupe $H^q_0(X,\mathcal{C})$ i $H^q(X,\mathcal{C})$. Injekcija $\mathcal{C}_0(\mathfrak{U},\mathcal{C}) \to C(\mathfrak{U},\mathcal{C})$ definira homomorfizme $H^q_0(\mathfrak{U},\mathcal{C}) \to H^q(\mathfrak{U},\mathcal{C})$, a odatle prijelazom na limes po $\mathfrak{U}$ homomorfizme

$$H^q_0(X,\mathcal{C}) \longrightarrow H^q(X,\mathcal{C}).$$

Propozicija 4.3.7. *Homomorfizam $H^q_0(X,\mathcal{C}) \to H^q(X,\mathcal{C})$ je bijektivan za $q = 0$ i injektivan za $q = 1$.*

Dokažimo najprije lemu:

Lema 4.3.8. *Neka je $\mathfrak{V} = (V_j)_{j\in J}$ pokrivač i neka je $f = (f_j)$ element od $C^0(\mathfrak{V},\mathcal{C})$. Tada postoji pokrivač $\mathfrak{U} = (U_i)_{i\in I}$ i preslikavanje $\tau : I \to J$ takvo da je $U_i \subseteq V_{\tau(i)}$ za svaki $i \in I$ i da je $\tau f \in C^0_0(\mathfrak{U},\mathcal{C})$.*

Dokaz: Za svaku točku $x \in X$ izaberimo indeks $\tau(x) \in J$ takav da je $x \in V_{\tau(x)}$. Budući da je $f_{\tau(x)} \in \Gamma(V_{\tau(x)},\mathcal{C})$, postoji otvorena okolina $U_x \subseteq V_{\tau(x)}$ točke x i lokalni prerez $b_x \in \Gamma(U_x,\mathcal{B})$ takav da je $\beta(b_x) = f_{\tau(x)}$ na U_x. Sada je $(U_x)_{x\in X}$ pokrivač od X i familija (b_x) tvori $0-$kolanac b od $\mathfrak{U}$ s vrijednostima u $\mathcal{B}$. Kako je $\tau f = \beta(b)$, vrijedi $\tau f \in C^0_0(\mathfrak{U},\mathcal{C})$.

Dokažimo sada da je homomorfizam $H^1_0(X,\mathcal{C}) \to H^1(X,\mathcal{C})$ injektivan. Element jezgre tog homomorfizma može se reprezentirati $1-$kociklusom $z = (z_{j_0j_1}) \in C'_0(\mathfrak{V},\mathcal{C})$ takvim da postoji $f = (f_i) \in C^0(\mathfrak{V},\mathcal{C})$ takav da je $df = z$. Primijenimo li lemu 4.3.8. dolazimo do pokrivača $\mathfrak{U}$ takvog da je $\tau f \in C^0_0(\mathfrak{U},\mathcal{C})$. Prema tome, τz je kohomologno nuli u $C_0(\mathfrak{U},\mathcal{C})$, odnosno, njegova je klasa jednaka 0 u $H^1_0(\mathfrak{U},\mathcal{C})$, dakle, i u $H^1_0(X,\mathcal{C})$. Bijektivnost $H^0_0(X,\mathcal{C}) \to H^0(X,\mathcal{C})$ dokazuje se analogno.

Korolar 4.3.9. *Sljedeći je niz egzaktan:*

$$0 \longrightarrow H^0(X,\mathcal{A}) \longrightarrow H^0(X,\mathcal{B}) \longrightarrow H^0(X,\mathcal{C}) \longrightarrow H^1(X,\mathcal{A}) \longrightarrow H^1(X,\mathcal{B}) \longrightarrow H^1(X,\mathcal{C}).$$

Korolar 4.3.10. *Ako je $H^1(X,\mathcal{A}) = 0$, onda je $\Gamma(X,\mathcal{B}) \longrightarrow \Gamma(X,\mathcal{C})$ surjekcija.*

Sjetimo se da je topološki prostor X parakompaktan, ako je Hausdorffov i ako svaki njegov pokrivač ima lokalno konačno profinjenje. Za takav prostor propozicija 4.3.7. proširuje se na sve vrijednosti q :

Propozicija 4.3.11. *Ako je prostor X parakompaktan, kanonski homomorfizam*

$$H^q_0(X,\mathcal{C}) \longrightarrow H^q(X,\mathcal{C})$$

je bijektivan za svaki $q \in \mathbb{Z}_+$.

Ta je propozicija neposredna posljedica sljedeće leme koja je analogna lemi 4.3.8.:

Lema 4.3.12. *Neka je* $\mathfrak{V} = (V_j)_{j\in J}$ *pokrivač i neka je* $f = \left(f_{i_0,\ldots,i_q}\right) \in C^q(\mathfrak{V}, \mathcal{C})$. *Postoji pokrivač* $\mathfrak{U} = (U_i)_{i\in I}$ *i preslikavanje* $\tau : I \longrightarrow J$ *takvi da je* $U_i \subseteq V_{\tau(i)}$ *za svaki* $i \in I$ *i da je* $\tau f \in C_0^q(\mathfrak{U}, \mathcal{C})$.

Dokaz: Budući da je X parakompaktan, možemo pretpostaviti da je pokrivač $\mathfrak{V}$ lokalno konačan. Tada postoji pokrivač $\mathfrak{W} = (W_j)_{j\in J}$ takav da je $\overline{W}_j \subseteq V_j$. Za svaku točku $x \in X$ izaberimo otvorenu okolinu U_x i to tako da vrijedi:

(a) Ako je $x \in V_j$, onda je $U_x \subseteq V_j$; ako je $x \in W_j$ onda je $U_x \in W_j$.

(b) Ako je $U_x \cap W_j \neq \emptyset$, onda je $U_x \subseteq V_j$.

(c) Ako je $x \in V_{j_0,\ldots,j_q}$, postoji lokalni prerez $b \in \Gamma(U_x, \mathcal{B})$ takav da je $\beta(b) = f_{j_0,\ldots,j_q}|U_x$.

Uvjet (c) je ostvariv zbog definicije kvocijentnog snopa i zbog činjenice da je $x \in V_{j_0,\ldots,j_q}$ za samo konačno mnogo skupova $V_{j_0,\ldots,j_q}$. Nakon što smo izabrali U_x, možemo ga smanjiti dovoljno da budu zadovoljeni zahtjevi (a) i (b).

Familija $(U_x)_{x\in X}$ je pokrivač od X. Za svaku točku $x \in X$ izaberimo indeks $\tau(x) \in J$ takav da je $x \in W_{\tau(x)}$. Tvrdimo da je tada $\tau f \in C_0^q(\mathfrak{U}, \mathcal{C})$, odnosno, da je $f_{\tau(x_0),\ldots,\tau(x_q)}$ slika pri preslikavanju β nekog prereza od $\mathcal{B}$ nad $U_{x_0} \cap \cdots \cap U_{x_q}$. Ako je $U_{x_0} \cap \cdots \cap U_{x_q} = \emptyset$, tvrdnja je trivijalna. Ako nije tako, onda vrijedi $U_{x_0} \cap U_{x_k} \neq \emptyset$ za $0 \le k \le q$, a kako je $U_{x_k} \subseteq W_{\tau(x_k)}$, vrijedi $U_{x_0} \cap W_{\tau(x_k)} \neq \emptyset$ za $0 \le k \le q$, što prema (b) znači da je $U_{x_0} \subseteq V_{\tau(x_k)}$ za $0 \le k \le q$. Prema tome, vrijedi $x_0 \in V_{\tau(x_0),\ldots,\tau(x_q)}$. Primijenimo li sada ($c$), vidimo da postoji prerez b od $\mathcal{B}$ nad U_{x_0}, takav da je $\beta(b) = f_{\tau(x_0),\ldots,\tau(x_q)}$ nad U_{x_0}, dakle, pogotovo nad $U_{x_0} \cap \cdots \cap U_{x_q}$. Time je tvrdnja dokazana.

Korolar 4.3.13. *Ako je* X *parakompaktan, imamo egzaktan niz*

$$\cdots \longrightarrow H^q(X,\mathcal{B}) \xrightarrow{\beta^*} H^q(X,\mathcal{C}) \xrightarrow{d} H^{q+1}(X,\mathcal{A})\,] \xrightarrow{\alpha^*} H^{q+1}(X,\mathcal{B}) \longrightarrow \cdots$$

(*Pri tome je operator* d *definiran kao kompozicija izomorfizma* $H^q(X,\mathcal{C}) \to H_0^q(X,\mathcal{C})$ *inverznog izomorfizmu* $H_0^q(X,\mathcal{C}) \longrightarrow H^q(X,\mathcal{C})$ *s operatorom* $d : H_0^q(X,\mathcal{C}) \longrightarrow H^{q+1}(X,\mathcal{A})$).

Taj se niz zove **kohomološki egzaktni niz** definiran zadanim kratkim egzaktnim nizom snopova $0 \longrightarrow \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{C} \longrightarrow 0$. To vrijedi općenitije kad god možemo dokazati da je homomorfizam $H_0^q(X,\mathcal{C}) \longrightarrow H^q(X,\mathcal{C})$ bijektivan. Vidjet ćemo kasnije da jest tako kad je X algebarska višestrukost i kad su $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ i $\mathcal{C}$ snopovi modula nad strukturnim snopom $\mathcal{O}_X$, pri čemu je snop $\mathcal{A}$ koherentan.

Neka je $\mathcal{F}$ snop na prostoru X i neka je Y zatvoren potprostor od X. Kao i prije označimo sa $\mathcal{F}|Y$ restrikciju snopa $\mathcal{F}$ na Y. Ako je $\mathfrak{U} = (U_i)_{i\in I}$ pokrivač od X, onda skupovi $U_i' = U_i \cap Y$ tvore pokrivač od Y. Ako je $f_{i_0,\ldots,i_q}$ prerez snopa $\mathcal{F}$ nad $U_{i_0,\ldots,i_q}$, restrikcija $f_{i_0,\ldots,i_q}$ na $U'_{i_0,\ldots,i_q} = Y \cap U_{i_0,\ldots,i_q}$ je prerez snopa $\mathcal{F}|Y$ nad $U'_{i_0,\ldots,i_q}$. Prema tome, operacija restrikcije daje homomorfizam

$$\rho : C(\mathfrak{U},\mathcal{F}) \longrightarrow C(\mathfrak{U}',\mathcal{F}|Y)$$

koji komutira sa d, dakle, definira homomorfizme

$$\rho^* : H^q(\mathfrak{U},\mathcal{F}) \longrightarrow H^q(\mathfrak{U}',\mathcal{F}|Y), \qquad q \in \mathbb{Z}_+.$$

Ako je $\mathfrak{U} \prec \mathfrak{V}$, onda je $\mathfrak{U}' \prec \mathfrak{V}'$ i vrijedi $\rho^* \circ \sigma_{\mathfrak{U},\mathfrak{V}} = \sigma_{\mathfrak{U}',\mathfrak{V}'} \circ \rho^*$. Prema tome, homomorfizmi ρ^* prijelazom na induktivni limes definiraju homomorfizme

$$\rho^* : H^q(X,\mathcal{F}) \longrightarrow H^q(Y,\mathcal{F}|Y), \qquad q \in \mathbb{Z}_+.$$

Propozicija 4.3.14. *Ako je Y zatvoren potprostor od X i ako je snop $\mathcal{F}$ koncentriran na Y, onda je homomorfizam $\rho^* : H^q(X, \mathcal{F}) \to H^q(Y, \mathcal{F}|Y)$ bijektivan za svaki $q \in \mathbb{Z}_+$.*

Dokaz: Propozicija slijedi iz sljedeće dvije činjenice:

(a) *Svaki pokrivač $\mathfrak{W} = (W_i)_{i\in I}$ od Y je oblika $\mathfrak{U}'$ za neki pokrivač $\mathfrak{U}$ od X.*

Doista, dovoljno je staviti $U_i \cup (X \setminus Y)$, budući da je Y zatvoren podskup od X.

(b) *Za svaki pokrivač $\mathfrak{U}$ od X homomorfizam $\rho : C(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \to C(\mathfrak{U}', \mathcal{F}|Y)$ je bijektivan.*

To slijedi iz propozicije 4.1.7. primijenjene na $U_{i_0,\dots,i_q}$ i na snop $\mathcal{F}$.

Propoziciju 4.3.14. možemo i ovako dokazati: Ako je $\mathcal{G}$ snop na Y i ako je $\mathcal{G}^X$ snop na X dobiven produljenjem snopa $\mathcal{G}$ s nulom izvan Y, onda je $H^q(Y, \mathcal{G}) = H^q(X, \mathcal{G}^X)$ za svaki $q \in \mathbb{Z}_+$; drugim riječima, identifikacija $\mathcal{G}$ sa $\mathcal{G}^X$ je kompatibilna s prijelazom na grupe kohomologije.

U daljnjem namjeravamo doći do dovoljnog uvjeta na pokrivač $\mathfrak{U}$ od X da bi bilo $H^n(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) = H^n(X, \mathcal{F})$ za svaki $n \in \mathbb{Z}_+$.

Dvostruki kompleks je bigraduirana Abelova grupa

$$K = \bigoplus_{p,q\in\mathbb{Z}_+} K^{p,q}$$

snabdjevena s dva endomorfizma d' i d'' sa sljedećim svojstvima:

$$d'K^{p,q} \subseteq K^{p+1,q}, \qquad d''K^{p,q} \subseteq K^{p,q+1}, \qquad d'^2 = d''^2 = 0, \qquad d'd'' + d''d' = 0.$$

Elementi iz $K^{p,q}$ zovu se **bihomogeni bistupnja** (p, q) i **totalnog stupnja** $p+q$. Endomorfizam $d = d' + d''$ zadovoljava $d^2 = 0$ i grupe kohomologije u odnosu na taj operator koruba označavat ćemo sa $H^n(K)$, pri čemu n označava totalni stupanj.

Grupu K možemo promatrati s operatorom koruba d'; kako je d' kompatibilan s bigraduacijom, dobivamo grupe kohomologije koje ćemo označavati sa $H^{p,q}_{\mathrm{I}}(K)$; dakle,

$$H^{p,q}_{\mathrm{I}}(K) = \mathrm{Ker}\left(d' : K^{p,q} \to K^{p+1,q}\right) / \mathrm{Im}\left(d' : K^{p-1,q} \to K^{p,q}\right).$$

S operatorom koruba d'' analogno dobivamo grupe kohomologije $H^{p,q}_{\mathrm{II}}(K)$.

$$H^{p,q}_{\mathrm{II}}(K) = \mathrm{Ker}\left(d'' : K^{p,q} \to K^{p,q+1}\right) / \mathrm{Im}\left(d'' : K^{p,q-1} \to K^{p,q}\right).$$

Stavimo

$$K^q_{\mathrm{II}} = \{x \in K^{0,q};\ d'(x) = 0\} = \mathrm{Ker}\left(d' : K^{0,q} \to K^{1,q}\right), \qquad K_{\mathrm{II}} = \sum_{q\in\mathbb{Z}_+} K^q_{\mathrm{II}},$$

i, analogno,

$$K^p_{\mathrm{I}} = \{x \in K^{p,0};\ d''(x) = 0\} = \mathrm{Ker}\left(d'' : K^{p,0} \to K^{p,1}\right), \qquad K_{\mathrm{I}} = \sum_{p\in\mathbb{Z}_+} K^p_{\mathrm{I}}.$$

Primijetimo da je

$$K^q_{\mathrm{II}} = H^{0,q}_{\mathrm{I}}(K) \qquad \text{i} \qquad K^p_{\mathrm{I}} = H^{p,0}_{\mathrm{II}}(K).$$

K_{II} je potkompleks od K i vrijedi $d|K_{\mathrm{II}} = d''|K_{\mathrm{II}}$.

Propozicija 4.3.15. *Ako je $H_{\mathrm{I}}^{p,q}(K) = 0$ za $p > 0$ i $q \geq 0$, injekcija $K_{\mathrm{II}} \to K$ definira izomorfizam sa $H^n(K_{\mathrm{II}})$ na $H^n(K)$ za svaki $n \geq 0$.*

Dokaz: Zamijenimo li K sa K/K_{II}, dokaz se svodi na situaciju kad je $K_{\mathrm{II}} = 0$. Dakle, treba dokazati da ako je $H_{\mathrm{I}}^{p,q}(K) = 0$ za $p > 0$ i $q \geq 0$ onda je $H^n(K) = 0$ za svaki $n \geq 0$. Stavimo

$$K_h = \bigoplus_{p,q \in \mathbb{Z}_+,\, q \geq h} K^{p,q}.$$

Tada su K_h za $h \in \mathbb{Z}_+$ potkompleksi od K i K_h/K_{h+1} je izomorfan s $\bigoplus_{p \in \mathbb{Z}_+} K^{p,h}$ snabdjevenim s operatorom koruba d'. Dakle, imamo

$$H^n(K_h/K_{h+1}) = H_{\mathrm{I}}^{h,n-h}(K) \qquad \forall n, h.$$

Odatle slijedi $H^n(K_h) = H^n(K_{h+1})$. Budući da je $H^n(K_h) = 0$ za $h > n$, silaznom indukcijom po h nalazimo da je $H^n(K_h) = 0$ za bilo koje n i h. Kako je $K_0 = K$, odatle slijedi tvrdnja.

Neka su $\mathfrak{U} = (U_i)_{i \in I}$ i $\mathfrak{V} = (V_j)_{j \in J}$ dva pokrivača od X. Ako su $s = (i_0, \ldots, i_p) \in S_p(I)$ i $s' = (j_0, \ldots, j_q) \in C_q(J)$, stavimo

$$U_s = U_{i_0,\ldots,i_p} \qquad \text{i} \qquad V_{s'} = V_{j_0,\ldots,j_q}.$$

Nadalje, neka je $\mathfrak{V}_s = (U_s \cap V_j)_{j \in J}$ pokrivač od U_s određen sa $\mathfrak{V}$ i, analogno, $\mathfrak{U}_{s'} = (V_{s'} \cap U_i)_{i \in I}$ pokrivač od $V_{s'}$ određen pokrivačem $\mathfrak{U}$. Definiramo dvostruki kompleks

$$C(\mathfrak{U}, \mathfrak{V}; \mathcal{F}) = \bigoplus_{p,q \in \mathbb{Z}_+} C^{p,q}(\mathfrak{U}, \mathfrak{V}; \mathcal{F}), \qquad C^{p,q}(\mathfrak{U}, \mathfrak{V}; \mathcal{F}) = \prod_{(s,s') \in S_p(I) \times S_q(J)} \Gamma(U_s \cap V_{s'}, \mathcal{F}),$$

Dakle, $f \in C^{p,q}(\mathfrak{U}, \mathfrak{V}; \mathcal{F})$ je sistem $(f_{s,s'})$ prereza od $\mathcal{F}$ nad $U_s \cap V_{s'}$, ili, uz prijašnje oznake, to je sistem

$$f_{i_0,\ldots,i_p;j_0,\ldots,j_q} \in \Gamma(U_{i_0,\ldots,i_p} \cap V_{j_0,\ldots,j_q}, \mathcal{F}), \qquad i_0, \ldots, i_p \in I, \quad j_0, \ldots, j_q \in J.$$

Možemo identificirati

$$C^{p,q}(\mathfrak{U}, \mathfrak{V}; \mathcal{F}) = \prod_{s' \in S_q(J)} C^p(\mathfrak{U}_{s'}, \mathcal{F}).$$

Kako za svaki takav $s' \in S_q(J)$ i za svaki $p \in \mathbb{Z}_+$ imamo operator koruba

$$d : C^p(\mathfrak{U}_{s'}, \mathcal{F}) \to C^{p+1}(\mathfrak{U}_{s'}, \mathcal{F}),$$

dolazimo do homomorfizma

$$d_{\mathfrak{U}} : C^{p,q}(\mathfrak{U}, \mathfrak{V}; \mathcal{F}) \longrightarrow C^{p+1,q}(\mathfrak{U}, \mathfrak{V}; \mathcal{F}).$$

Eksplicitno je $d_{\mathfrak{U}}$ definiran sa

$$(d_{\mathfrak{U}} f)_{i_0,\ldots,i_{p+1};j_0,\ldots,j_q} = \sum_{k=0}^{p+1} (-1)^k \rho_k \left(f_{i_0,\ldots,\hat{i_k},\ldots,i_{p+1};j_0,\ldots,j_q} \right),$$

a ρ_k je homomorfizam restrikcije definiran inkluzijom

$$U_{i_0,\ldots,i_{p+1}} \cap V_{j_0,\ldots,j_q} \subseteq U_{i_0,\ldots,\hat{i_k},\ldots,i_{p+1}} \cap V_{j_0,\ldots,j_q}.$$

Analogno definiramo

$$d_{\mathfrak{V}} : C^{p,q}(\mathfrak{U}, \mathfrak{V}; \mathcal{F}) \longrightarrow C^{p,q+1}(\mathfrak{U}, \mathfrak{V}; \mathcal{F}).$$

Sada je

$$(d_{\mathfrak{V}} f)_{i_0,\dots,i_p;j_0,\dots,j_{q+1}} = \sum_{h=0}^{q+1} (-1)^h \rho_h \left(f_{i_0,\dots,i_p;j_0,\dots,\hat{j}_h,\dots,j_{q+1}} \right),$$

a ρ_h je homomorfizam restrikcije definiran inkluzijom

$$U_{i_0,\dots,i_p} \cap V_{j_0,\dots,j_{q+1}} \subseteq U_{i_0,\dots,i_p} \cap V_{j_0,\dots,\hat{j}_h,\dots,j_{q+1}}.$$

Jasno je da je

$$d_{\mathfrak{U}} d_{\mathfrak{U}} = 0, \qquad d_{\mathfrak{U}} d_{\mathfrak{V}} + d_{\mathfrak{V}} d_{\mathfrak{U}} = 0, \qquad d_{\mathfrak{V}} d_{\mathfrak{V}} = 0.$$

Stavimo sada

$$d' = d_{\mathfrak{U}} \qquad \text{i} \qquad d'' | C^{p,q}(\mathfrak{U}, \mathfrak{V}; \mathcal{F}) = (-1)^p d_{\mathfrak{V}} | C^{p,q}(\mathfrak{U}, \mathfrak{V}; \mathcal{F}).$$

Tada je $C(\mathfrak{U}, \mathfrak{V}; \mathcal{F})$ snabdjeven strukturom dvostrukog kompleksa. Dakle, prijašnje definicije možemo primijeniti na $K = C(\mathfrak{U}, \mathfrak{V}; \mathcal{F})$; grupe i kompleksi koji su bili označeni sa

$$H^n(K), \quad H_{\mathrm{I}}^{p,q}(K), \quad H_{\mathrm{II}}^{p,q}(K), \quad K_{\mathrm{I}}, \quad K_{\mathrm{II}}$$

bit će u ovoj situaciji redom označeni sa

$$H^n(\mathfrak{U}, \mathfrak{V}; \mathcal{F}), \quad H_{\mathrm{I}}^{p,q}(\mathfrak{U}, \mathfrak{V}; \mathcal{F}), \quad H_{\mathrm{II}}^{p,q}(\mathfrak{U}, \mathfrak{V}; \mathcal{F}), \quad C_{\mathrm{I}}(\mathfrak{U}, \mathfrak{V}; \mathcal{F}), \quad C_{\mathrm{II}}(\mathfrak{U}, \mathfrak{V}; \mathcal{F}).$$

Zbog definicije d' i d'' imamo

Propozicija 4.3.16. *Vrijedi*

$$H_{\mathrm{I}}^{p,q}(\mathfrak{U}, \mathfrak{V}; \mathcal{F}) \cong \prod_{s'} H^p(\mathfrak{U}_{s'}, \mathcal{F}),$$

pri čemu je produkt preko svih simpleksa s' od $S(J)$ dimenzije q. Posebno,

$$C_{\mathrm{II}}^q(\mathfrak{U}, \mathfrak{V}; \mathcal{F}) = H_{\mathrm{I}}^{0,q}(\mathfrak{U}, \mathfrak{V}; \mathcal{F}) \cong \prod_{s'} H^0(\mathfrak{U}_{s'}, \mathcal{F}) = C^q(\mathfrak{V}, \mathcal{F}).$$

Označimo sa ι'' pripadni kanonski izomorfizam $C(\mathfrak{V}, \mathcal{F}) \longrightarrow C_{\mathrm{II}}(\mathfrak{U}, \mathfrak{V}; \mathcal{F})$. Ako je $\left(f_{j_0,\dots,j_q}\right)$ element od $C^q(\mathfrak{V}, \mathcal{F})$, imamo, dakle,

$$(\iota'' f)_{i_0;j_0,\dots,j_q} = \rho_{i_0} \left(f_{j_0,\dots,j_q} \right),$$

pri čemu ρ_{i_0} označava homomorfizam restrikcije definiran inkluzijom

$$U_{i_0} \cap V_{j_0,\dots,j_q} \subseteq V_{j_0,\dots,j_q}.$$

Naravno, rezultat analogan propoziciji 4.3.16. vrijedi i za $H_{\mathrm{II}}^{p,q}(\mathfrak{U}, \mathfrak{V}; \mathcal{F})$, pa imamo izomorfizam $\iota' : C(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \to C_{\mathrm{I}}(\mathfrak{U}, \mathfrak{V}; \mathcal{F})$.

Uz prethodne oznake imamo kao neposrednu posljedicu propozicija 4.3.15. i 4.3.16.:

Propozicija 4.3.17. *Pretpostavimo da je $H^p(\mathfrak{U}_{s'}, \mathcal{F}) = 0$ za svaki $p > 0$ i za svaki s'. Tada je homomorfizam $H^n(\mathfrak{V}, \mathcal{F}) \longrightarrow H^n(\mathfrak{U}, \mathfrak{V}; \mathcal{F})$ definiran sa ι'' bijektivan za svaki $n \geq 0$.*

Prije nego što iskažemo sljedeću propoziciju, dokažimo lemu:

Lema 4.3.18. *Neka je $\mathfrak{W} = (W_i)_{i\in I}$ pokrivač prostora Y i neka je $\mathcal{F}$ snop na Y. Ako postoji $i \in I$ takav da je $W_i = Y$, onda je $H^p(\mathfrak{W}, \mathcal{F}) = 0$ za svaki $p > 0$.*

Dokaz: Neka je $\mathfrak{W}'$ pokrivač od Y koji se sastoji od jednog otvorenog skupa Y. Tada je naravno $\mathfrak{W} \prec \mathfrak{W}'$, a pretpostavka na $\mathfrak{W}$ pokazuje da je i $\mathfrak{W}' \prec \mathfrak{W}$. Dakle, pokrivači $\mathfrak{W}$ i $\mathfrak{W}'$ su ekvivalentni, pa slijedi da je $H^p(\mathfrak{W}, \mathcal{F}) = H^p(\mathfrak{W}', \mathcal{F}) = 0$ za $p > 0$.

Propozicija 4.3.19. *Pretpostavimo da je pokrivač $\mathfrak{V}$ finiji od pokrivača $\mathfrak{U}$. Tada je homomorfizam*

$$\iota'' : H^n(\mathfrak{V}, \mathcal{F}) \longrightarrow H^n(\mathfrak{U}, \mathfrak{V}; \mathcal{F})$$

bijektivan za svaki $n \geq 0$. Štoviše, homomorfizam

$$\iota' \circ \iota''^{-1} : H^n(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \longrightarrow H^n(\mathfrak{V}, \mathcal{F})$$

se podudara s prije definiranim homomorfizmom $\sigma_{\mathfrak{V},\mathfrak{U}}$.

Dokaz: Primjenom leme 4.3.18. na $\mathfrak{V} = \mathfrak{U}_{s'}$ i $Y = V_{s'}$ nalazimo da je $H^p(\mathfrak{U}_{s'}, \mathcal{F}) = 0$ za svaki $p > 0$, pa je po propoziciji 4.3.17. homomorfizam

$$\iota'' : H^n(\mathfrak{V}, \mathcal{F}) \longrightarrow H^n(\mathfrak{U}, \mathfrak{V}; \mathcal{F})$$

bijektivan za svaki $n \geq 0$.

Neka je $\tau : J \to I$ preslikavanje takvo da je $V_j \subseteq U_{\tau(j)}$ za svaki $j \in J$. Da dokažemo drugi dio propozicije 4.3.19. treba pokazati da su za svaki $n-$kociklus f iz $C(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ kociklusi $\iota'(f)$ i $\iota''(\tau f)$ kohomologni u $C(\mathfrak{U}, \mathfrak{V}; \mathcal{F})$.

Za svaki $p \in \mathbb{Z}_+$, $0 \leq p \leq n-1$, definiramo $g^p \in C^{p,n-p-1}(\mathfrak{U}, \mathfrak{V}; \mathcal{F})$ formulom

$$g_{i_0,\ldots,i_p;j_0,\ldots,j_{n-p-1}} = \rho_p\left(f_{i_0,\ldots,i_p,\tau(j_0),\ldots,\tau(j_{n-p-1})}\right),$$

gdje je ρ_p homomorfizam restrikcije definiran inkluzijom

$$U_{i_0,\ldots,i_p} \cap V_{j_0,\ldots,j_{n-p-1}} \subseteq U_{i_0,\ldots,i_p,\tau(j_0),\ldots,\tau(j_{n-p-1})}.$$

Direktnim računom (uzevši u obzir da je f kociklus) provjerava se da vrijedi:

$$d''\left(g^0\right) = \iota''(\tau f), \ldots, d''\left(g^p\right) = d'\left(g^{p-1}\right), \ldots, d'\left(g^{n-1}\right) = (-1)^n \iota'(f).$$

Odatle je

$$d\left(g^0 - g^1 + \cdots + (-1)^{n-1} g^{n-1}\right) = \iota''(\tau f) - \iota'(f).$$

Time je dokazano da su $\iota''(\tau f)$ i $\iota'(f)$ kohomologni.

Propozicija 4.3.20. *Pretpostavimo da je pokrivač $\mathfrak{V}$ finiji od pokrivača $\mathfrak{U}$ i da je $H^q(\mathfrak{V}_s, \mathcal{F}) = 0$ za svaki simpleks s od $S(I)$ i za svaki $q > 0$. Tada je homomorfizam*

$$\sigma_{\mathfrak{V},\mathfrak{U}} : H^n(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \longrightarrow H^n(\mathfrak{V}, \mathcal{F})$$

bijektivan za svaki $n \geq 0$.

Dokaz: Primijenimo li propoziciju 4.3.17. uz zamjenu uloga $\mathfrak{U}$ i $\mathfrak{V}$, vidimo da je homomorfizam

$$\iota' : H^n(\mathfrak{V}, \mathcal{F}) \longrightarrow H^n(\mathfrak{U}, \mathfrak{V}; \mathcal{F})$$

bijektivan za svaki $n \geq 0$. Stoga propozicija 4.3.20. slijedi neposredno iz propozicije 4.3.19.

Teorem 4.3.21. *Neka je X topološki prostor, $\mathfrak{U} = (U_i)_{i \in I}$ pokrivač od X i $\mathcal{F}$ snop na X. Pretpostavimo da postoji familija $(\mathfrak{V}^\alpha)_{\alpha \in A}$ pokrivača od X koja ima sljedeća svojstva:*

(a) *Za svaki pokrivač $\mathfrak{W}$ od X postoji $\alpha \in A$ takav da je $\mathfrak{V}^\alpha \prec \mathfrak{W}$.*

(b) *$H^q(\mathfrak{V}^\alpha_s, \mathcal{F}) = 0$ za svaki $\alpha \in A$, svaki simpleks s od $S(I)$ i svaki $q > 0$.*

Tada je homomorfizam $\sigma_{\mathfrak{U}} : H^n(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \to H^n(X, \mathcal{F})$ bijektivan za svaki $n \geq 0$.

Dokaz: Budući da su pokrivači $\mathfrak{V}^\alpha$ proizvoljno fini, možemo pretpostaviti da su svi finiji od $\mathfrak{U}$. U tom je slučaju prema propoziciji 4.3.20. homomorfizam

$$\sigma_{\mathfrak{V}^\alpha, \mathfrak{U}} : H^n(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \longrightarrow H^n(\mathfrak{V}^\alpha, \mathcal{F})$$

bijektivan za svaki $\alpha \in A$ i za svaki $n \geq 0$. Kako su pokrivači $\mathfrak{V}^\alpha$ proizvoljno fini, grupa $H^n(X, \mathcal{F})$ je induktivni limes grupa $H^q(\mathfrak{V}^\alpha, \mathcal{F})$, pa teorem slijedi.

Poglavlje 5

ALGEBARSKE VIŠESTRUKOSTI

5.1 Noetherini topološki prostori

Propozicija 5.1.1. *Za neprazan topološki prostor X sljedeća su tri svojstva međusobno ekvivalentna:*

(a) *X nije unija dvaju zatvorenih pravih podskupova.*

(b) *Svaki neprazan otvoren podskup od X je gust u X.*

(c) *Svaki neprazan otvoren podskup od X je povezan.*

Dokaz: (a) $\Rightarrow$ (b). Neka je skup $U \subseteq X$ otvoren i neprazan. Pretpostavimo da je i skup $V \subseteq X$ otvoren i neprazan. Tada su $X \setminus U$ i $X \setminus V$ zatvoreni pravi podskupovi od X, pa zbog (a) vrijedi $(X \setminus U) \cup (X \setminus V) \neq X$. Uzmemo li komplemente slijedi $U \cap V \neq \emptyset$. Dakle, skup U je gust u X.

(b) $\Rightarrow$ (c). Neka je $U \subseteq X$ neprazan otvoren skup. Pretpostavimo da topološki prostor U nije povezan. Tada postoji neprazan otvoren podskup V od U takav da je i njegov komplement $U \setminus V$ neprazan i otvoren. No ako su V i $U \setminus V$ otvoreni u topološkom prostoru U, onda su oni zbog otvorenosti od U u X otvoreni u u X. No to nije moguće zbog (b).

(c) $\Rightarrow$ (a). Pretpostavimo da je $X = A \cup B$ i da su A i B zatvoreni pravi podskupovi od X. Tada su $U = X \setminus A$ i $V = X \setminus B$ neprazni otvoreni podskupovi od X i vrijedi $U \cap V = \emptyset$. No tada otvoren skup $U \cup V$ nije povezan.

Za **topološki prostor** X sa svojstvima iz propozicije 5.1.1. kažemo da je **ireducibilan**.

Propozicija 5.1.2. (a) *Neprazan potprostor Y topološkog prostora X je ireducibilan ako i samo ako za svaka dva otvorena podskupa U i V od X takva da je $U \cap Y \neq \emptyset$ i $V \cap Y \neq \emptyset$ vrijedi $U \cap V \cap Y \neq \emptyset$.*

(b) *Neprazan potprostor Y topološkog prostora X je ireducibilan ako i samo ako je njegov zatvarač $\overline{Y}$ ireducibilan.*

(c) *Ako je $\varphi : X \to X'$ neprekidno preslikavanje topoloških prostora i ako je X ireducibilan, onda je i $\varphi(X)$ ireducibilan.*

Dokaz: Tvrdnja (a) neposredna je posljedica relativne topologije prostora Y.

Tvrdnja (b) slijedi iz tvrdnje (a). Naime, otvoren podskup od X siječe Y ako i samo ako on siječe njegov zatvarač $\overline{Y}$.

(c) Neka su U i V otvoreni podskupovi od X' koji se sijeku sa $\varphi(X)$. Prema tvrdnji (a) treba dokazati da se i njihov presjek $U \cap V$ siječe sa $\varphi(X)$. Međutim, $\varphi^{-1}(U)$ i $\varphi^{-1}(V)$ su neprazni otvoreni podskupovi od X, a kako je prostor X ireducibilan, vrijedi $\varphi^{-1}(U) \cap \varphi^{-1}(V) \neq \emptyset$. Sada još samo treba primijetiti da je $\varphi\left(\varphi^{-1}(U) \cap \varphi^{-1}(V)\right) \subseteq U \cap V \cap \varphi(X)$.

Jednostavna upotreba Zornove leme pokazuje da je svaki ireducibilan potprostor topološkog prostora X sadržan u maksimalnom ireducibilnom potprostoru od X. Propozicija 5.1.2. pokazuje da su maksimalni ireducibilni potprostori od X zatvoreni. Oni se zovu **ireducibilne komponente** topološkog prostora X. Kako je jednočlan potprostor ireducibilan, jasno je da je svaki topološki prostor unija svojih ireducibilnih komponenata.

Propozicija 5.1.3. *Neprazan otvoren podskup U ireducibilnog topološkog prostora X je i sam ireducibilan topološki prostor.*

Dokaz: Neka je $V \subseteq U$ otvoren neprazan podskup od U. Tada je skup V otvoren u X, dakle, gust u X. No tada je očito V gust u U.

Propozicija 5.1.4. *Neka je X topološki prostor i neka su $V_1, \ldots, V_n$ njegovi neprazni otvoreni podskupovi takvi da je $X = V_1 \cup \cdots \cup V_n$. Da bi prostor X bio ireducibilan nužno je i dovoljno da su svi potprostori V_i ireducibilni i da je $V_i \cap V_j \neq \emptyset$ za svaki par indeksa (i, j).*

Dokaz: Pretpostavimo da je prostor X ireducibilan. Prema propoziciji 5.1.3. svi su potprostori V_i ireducibilni. Nadalje, prema svojstvu (b) iz propozicije 5.1.1. svi su presjeci $V_i \cap V_j$ neprazni.

Pretpostavimo sada da su svi potprostori V_i ireducibilni i da su svi presjeci $V_i \cap V_j$ neprazni. Neka su Y i Z zatvoreni podskupovi od X takvi da je $X = Y \cup Z$. Tada je $V_i = (V_i \cap Y) \cup (V_i \cap Z)$ za svaki i. Zbog ireducibilnosti V_i nužno je ili $V_i = V_i \cap Y$ ili $V_i = V_i \cap Z$. Dakle, za svaki $i \in \{1, \ldots, n\}$ vrijedi ili $V_i \subseteq Y$ ili $Y_i \subseteq Z$. Pretpostavimo da su Y i Z pravi podskupovi od X. Tada postoje indeksi i i j takvi da vrijedi $V_i \not\subseteq Y$ i $V_j \not\subseteq Z$. Prema prethodnom tada je, naravno, $V_i \subseteq Z$ i $V_j \subseteq Y$. Stavimo $T = V_j \setminus (V_i \cap V_j)$. Tada je T zatvoren u V_j i vrijedi $V_j = T \cup (Z \cap V_j)$. Kako je V_j ireducibilan, mora biti ili $T = V_j$, a to bi značilo da je $V_i \cap V_j = \emptyset$, ili $Z \cap V_j = V_j$, što bi značilo $V_j \subseteq Z$. I jedno i drugo je u suprotnosti s pretpostavkama. Ova kontradikcija pokazuje da nije moguće da i Y i Z budu pravi podskupovi od X. Dakle, prostor X je ireducibilan.

Propozicija 5.1.5. *Pretpostavimo da potprostor Y topološkog prostora X ima samo konačno mnogo ireducibilinih komponenata i neka su to $Y_1, \ldots, Y_n$, s tim da je $Y_i \neq Y_j$ za $i \neq j$. Tada su zatvarači $\overline{Y}_1, \ldots, \overline{Y}_n$ ireducibilne komponente zatvarača $\overline{Y}$ i vrijedi $\overline{Y}_i \neq \overline{Y}_j$ za $i \neq j$.*

Dokaz: Prema tvrdnji (b) propozicije 5.1.2. zatvarači $\overline{Y}_1, \ldots, \overline{Y}_n$ su ireducibilni topološki prostori. Nadalje, vrijedi $\overline{Y} = \overline{Y}_1 \cup \cdots \cup \overline{Y}_n$. Neka je Z bilo koja ireducibilna komponenta prostora $\overline{Y}$. Tada je

$$Z = (\overline{Y_1} \cap Z) \cup \cdots \cup (\overline{Y}_n \cap Z),$$

pa iz ireducibilnosti Z slijedi da je $\overline{Y}_j \cap Z = Z$ za neki indeks j, odnosno, da je $Z \subseteq \overline{Y}_j$. Kako je Z ireducibilna komponenta od $\overline{Y}$, dakle, maksimalan element ireducibilnih podskupova od $\overline{Y}$, zaključujemo da je $Z = \overline{Y}_j$. Prema tome, svaka je ireducibilna komponenta od $\overline{Y}$ jednaka nekom od skupova $\overline{Y}_j$.

Za bilo koji indeks i $\overline{Y}_i$ je ireducibilan potprostor od $\overline{Y}$ pa je sadržan u nekoj njegovoj ireducibilnoj komponenti. No tada je prema prethodnom ili $\overline{Y}_i$ ireducibilna komponenta od $\overline{Y}$ ili je $\overline{Y}_i \subseteq \overline{Y}_j$ za neki $j \neq i$. U ovom drugom slučaju bi bilo $Y_i = Y \cap \overline{Y}_i \subseteq Y \cap \overline{Y}_j = Y_j$, a to je nemoguće. Prema tome, svaki od skupova $\overline{Y}_i$ je ireducibilna komponenta od $\overline{Y}$. Nadalje, na isti način iz $\overline{Y}_i = \overline{Y}_j$ slijedi $Y_i \cap Y_j$, dakle, $i = j$.

Za **topološki prostor** X kažemo da je **kvazikompaktan** ako svaki njegov otvoren pokrivač ima konačan potpokrivač.

Lako se dokazuje:

Propozicija 5.1.6. *Za topološki prostor X sljedeća su svojstva međusobno ekvivalentna:*

(a) *Svaki je otvoren podskup od X kvazikompaktan.*

(b) *Svaki rastući niz otvorenih podskupova od X*

$$U_1 \subseteq U_2 \subseteq U_3 \subseteq \cdots\cdots$$

se stabilizira.

(c) *U svakom nepraznom skupu otvorenih podskupova od X barem jedan je član maksimalan u tom skupu u odnosu na inkluziju.*

(d) *Svaki padajući niz zatvorenih podskupova od X*

$$F_1 \supseteq F_2 \supseteq F_3 \supseteq \cdots\cdots$$

se stabilizira.

(e) *U svakom nepraznom skupu zatvorenih podskupova od X barem jedan je član minimalan u tom skupu u odnosu na inkluziju.*

Kažemo da je X **Noetherin topološki prostor** ako on ima svojstva iz propozicije 5.1.6. Iz svojstva (a) neposredno slijedi:

Korolar 5.1.7. *Noetherin topološki prostor je kvazikompaktan.*

Propozicija 5.1.8. *Svaki potprostor Noetherinog topološkog prostora je Noetherin.*

Dokaz: Neka je

$$G_1 \supseteq G_2 \supseteq G_3 \supseteq \cdots\cdots$$

padajući niz zatvorenih podskupova nekog potprostora Y Noetherinog topološkog prostora X. Tada postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je $\overline{G}_m = \overline{G}_n \ \ \forall m \geq n$. Odatle slijedi

$$G_m = Y \cap \overline{G}_m = Y \cap \overline{G}_n = G_n \qquad \forall m \geq n.$$

Dakle, Y je Noetherin topološki prostor.

Propozicija 5.1.9. *Neka je X topološki prostor koji je unija svojih potprostora $Y_1, \ldots, Y_p$, koji su svi Noetherini. Tada je i prostor X Noetherin.*

Dokaz: Neka je

$$F_1 \supseteq F_2 \supseteq F_3 \supseteq \cdots\cdots$$

padajući niz zatvorenih podskupova od X. Budući da je za svaki $i \in \{1, \ldots, p\}$ prostor Y_i Noetherin, padajući niz njegovih zatvorenih podskupova

$$F_1 \cap Y_i \supseteq F_2 \cap Y_i \supseteq F_3 \cap Y_i \supseteq \cdots\cdots$$

se stabilizira, tj. postoji $n_i \in \mathbb{N}$ takav da je $F_m \cap Y_i = F_{n_i} \cap Y_i \ \ \forall m \geq n_i$. Tada za $n = \max\{n_1, \ldots, n_p\}$ i za $m \geq n$ vrijedi $F_m \cap Y_i = F_n \cap Y_i$ za svaki $i \in \{1, \ldots, p\}$. Kako je $X = Y_1 \cup \cdots \cup Y_p$, slijedi da je $F_m = F_n \ \ \forall m \geq n$. Dakle, prostor X je Noetherin.

Propozicija 5.1.10. *Neka je X Noetherin topološki prostor.*

(a) *X ima konačno mnogo ireducibilnih komponenata, npr. $X_1, \ldots, X_n$.*

(b) *Otvoren podskup U od X je gust u X ako i samo ako je $U \cap X_j \neq \emptyset$ za svaki $j \in \{1, \ldots, n\}$.*

(c) *Za svaki $j \in \{1, \ldots, n\}$ skup*

$$X_j' = X_j \setminus \left(\bigcup_{i=1,\, i\neq j}^{n} (X_i \cap X_j) \right) = X \setminus \left(\bigcup_{i=1,\, i\neq j}^{n} X_i \right)$$

je otvoren u X, a njihova unija

$$U_{\mathrm{o}} = X_1' \cup \cdots \cup X_n'$$

je gust podskup od X. Nadalje, skupovi $X_1', \ldots, X_n'$ su ireducibilne komponente od U_{o} i ujedno komponente povezanosti od U_{o}.

Dokaz: (a) Neka je $\mathcal{A}$ skup svih konačnih unija zatvorenih ireducibilnih podskupova od X; podrazumijevamo da je $\emptyset \in \mathcal{A}$; naime, $\emptyset$ je unija praznog skupa zatvorenih ireducibilnih podskupova od X. Pretpostavimo da $X \notin \mathcal{A}$. Neka je $\mathcal{B}$ skup svih zatvorenih podskupova od X koji ne pripadaju $\mathcal{A}$. Tada je skup $\mathcal{B}$ neprazan, pa zbog Noetherina svojstva u tom skupu postoji barem jedan minimalan element Y. Tada je $Y \neq \emptyset$ i Y nije ireducibilan. Prema tome, postoje zatvoreni pravi podskupovi Y_1 i Y_2 od Y takvi da je $Y = Y_1 \cup Y_2$. Zbog minimalnosti Y slijedi da su $Y_1, Y_2 \in \mathcal{A}$. No tada je i $Y = Y_1 \cup Y_2 \in \mathcal{A}$ suprotno izboru Y. Ova kontradikcija pokazuje da je $X \in \mathcal{A}$, tj. X je unija konačno mnogo zatvorenih ireducibilnih podskupova, npr. $X = Z_1 \cup \cdots \cup Z_m$. Neka je sada Y bilo koja ireducibilna komponenta od X. Tada je

$$Y = (Y \cap Z_1) \cup \cdots \cup (Y \cap Z_m).$$

Skupovi $Y \cap Z_j$ su zatvoreni, pa iz ireducibilnosti Y slijedi da je $Y \cap Z_j = Y$ za neki j, odnosno, $Y \subseteq Z_j$. Zbog maksimalnosti Y u skupu svih ireducibilnih podskupova od X zaključujemo da je $Y = Z_j$. Prema tome, maksimalni elementi skupa $\{Z_1, \ldots, Z_m\}$ su upravo sve ireducibilne komponente prostora X. U daljnjem ih označavamo sa $X_1, \ldots, X_n$.

(b) i (c) Pretpostavljamo, naravno, da u numeraciji $X_1, \ldots, X_n$ ireducibilnih komponenata nema ponavljanja. To posebno znači da je

$$X_j' = X \setminus \left(\bigcup_{i=1,\, i\neq j}^{n} X_i \right)$$

neprazan otvoren podskup od X koji je sadržan u X_j. Dakle, vrijedi

$$X_j' = X_j \setminus \left(\bigcup_{i=1,\, i\neq j}^{n} (X_i \cap X_j) \right).$$

Nadalje, X_j' je, kao neprazan otvoren podskup ireducibilnog prostora X_j, gust u X_j.

Ako je U otvoren podskup od X koji je gust u X, onda je njegov presjek sa svakim nepraznim otvorenim podskupom od X neprazan. Posebno, $U \cap X_j' \neq \emptyset$, i, posebno, $U \cap X_j \neq \emptyset$. Obratno, ako je U otvoren podskup od X koji siječe svaki X_j, onda je presjek $U \cap X_j$ gust u X_j. Tada zatvarač $\overline{U}$ sadrži sve ireducibilne komponente X_j, dakle, jednak je X. To upravo znači da je skup U gust u X.

Iz dokazanog slijedi da je otvoren skup U_{o} gust u X. Napokon, kako su skupovi X_j' otvoreni, ireducibilni i međusobno disjunktni, oni su ireducibilne komponente od U_{o} i, ujedno, komponente povezanosti od U_{o}.

Podskup Y topološkog prostora X je **lokalno zatvoren**, ako je Y otvoren u njegovu zatvaraču $\overline{Y}$, ili, ekvivalentno, ako je Y presjek jednog zatvorenog i jednog otvorenog podskupa od X. Zbog ovog drugog opisa jasno je da je presjek dvaju lokalno zatvorenih podskupova i sam lokalno zatvoren. **Konstruktibilan podskup** topološkog prostora X je unija konačno mnogo lokalno zatvorenih podskupova. Komplement lokalno zatvorenog podskupa je unija otvorenog i zatvorenog podskupa, dakle, to je konstruktibilan skup. Odatle slijedi da je komplement konstruktiblnog podskupa konstruktibilan podskup. Prema tome, konstruktibilni podskupovi topološkog prostora X čine Booleovu podalgebru partitivnog skupa $\mathfrak{P}(X)$. Ona je generirana otvorenim podskupovima od X, a također, zatvorenim podskupovima od X.

Propozicija 5.1.11. *Neka su X i Y topološki prostori i $f : X \to Y$ neprekidno preslikavanje.*

(*a*) *Ako je A lokalno zatvoren podskup od Y, onda je $f^{-1}(A)$ lokalno zatvoren podskup od X.*

(*b*) *Ako je A konstruktibilan podskup od Y, onda je $f^{-1}(A)$ konstruktibilan podskup od X.*

Dokaz: Tvrdnje slijede iz činjenica:

- Ako je F zatvoren podskup od Y, onda je $f^{-1}(F)$ zatvoren podskup od X.
- Ako je U otvoren podskup od Y, onda je $f^{-1}(U)$ otvoren podskup od X.
- Za bilo koje podskupove A i B od Y vrijedi

$$f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B) \qquad \text{i} \qquad f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B).$$

Propozicija 5.1.12. *Neka je X Noetherin topološki prostor i neka je Y konstruktibilan podskup od X. Tada Y sadrži otvoren gust podskup zatvarača $\overline{Y}$.*

Dokaz: Pretpostavimo najprije da je topološki potprostor Y ireducibilan. Neka su $L_1, \dots, L_n$ lokalno zatvoreni podskupovi od X takvi da je $Y = L_1 \cup \cdots \cup L_n$. Tada je $\overline{Y} = \overline{L}_1 \cup \cdots \cup \overline{L}_n$. Prema tvrdnji (*b*) propozicije 5.1.2. prostor $\overline{Y}$ je ireducibilan, pa slijedi da je $\overline{Y} = \overline{L}_j$ za neki j. Nadalje, kako je podskup L_j lokalno zatvoren, on je otvoren u svom zatvaraču $\overline{L}_j$. Dakle, L_j je otvoren gust podskup od $\overline{Y} = \overline{L}_j$ koji je sadržan u Y.

Općenito, prema propoziciji 5.1.8. prostor Y je Noetherin, a prema propoziciji 5.1.10. on ima konačno mnogo ireducibilnih komponenata $Y_1, \dots, Y_m$. Sve su te komponente zatvorene u Y, dakle, one su konstruktibilni podskupovi od X. Prema prvom dijelu dokaza svaki Y_j sadrži gust otvoren podskup U_j zatvarača $\overline{Y}_j$. Nadalje, prema propoziciji 5.1.5. $\overline{Y}_1, \dots, \overline{Y}_n$ su ireducibilne komponente od $\overline{Y}$. Stoga je $U_1 \cup \cdots \cup U_m$ otvoren gust podskup od $\overline{Y}$ koji je sadržan u Y.

Kombinatorna dimenzija nepraznog topološkog prostora X je najveći $n \in \mathbb{Z}_+$ (ako takav postoji) takav da postoje zatvoreni ireducibilni podskupovi $F_0, F_1, \dots, F_n$ od X takvi da je

$$F_0 \subsetneq F_1 \subsetneq \cdots\cdots \subsetneq F_n.$$

Tada pišemo $n = \dim X$. Ako takav n ne postoji pišemo $\dim X = +\infty$. Nadalje, stavljamo $\dim \emptyset = -\infty$.

Za točku $x \in X$ stavljamo

$$\dim_x X = \inf \{\dim U;\ U \subseteq X \text{ otvoren},\ x \in U\}.$$

Iz definicija se lako dokazuje:

Propozicija 5.1.13. *Neka je X topološki prostor.*

(a) *Funkcija $x \mapsto \dim_x X$ je odozgo poluneprekidna. Drugim riječima, $\{x \in X;\ \dim_x X \geq n\}$ je otvoren podskup od X za svaki $n \in \mathbb{Z}_+$.*

(b) *Vrijedi*

$$\dim X = \sup \{\dim_x X;\ x \in X\}.$$

(c) *Ako X ima konačno mnogo ireducibilnih komponenata $X_1, \ldots, X_m$, onda je*

$$\dim X = \max \{\dim X_1, \ldots, \dim X_m\}.$$

5.2 Afine algebarske višestrukosti

Neka je $r \in \mathbb{Z}_+$ i $V = K^r$ **afini prostor** dimenzije r nad **algebarski zatvorenim poljem** K. Iako to u većini tvrdnji u ovom poglavlju nije bitno, zbog jednostavnosti, a i zbog toga što će nam u primjenama samo takva situacija biti važna, pretpostavljat ćemo stalno da je K **polje karakteristike** 0.

Za bilo koji podskup $S \subseteq V$ i za bilo koji podskup $\mathcal{P} \subseteq K[T_1, \ldots, T_r]$ definiramo

$$\mathcal{I}(S) = \{P \in K[T_1, \ldots, T_r];\ P(x) = 0\ \forall x \in S\} \qquad \text{i} \qquad \mathcal{V}(\mathcal{P}) = \{x \in V;\ P(x) = 0\ \forall P \in \mathcal{P}\}.$$

Očito je $\mathcal{I}(S)$ ideal u prstenu $K[T_1, \ldots, T_r]$; štoviše, taj je ideal radikalan, tj. jednak je svom radikalu. Pri tome je **radikal ideala** $\mathcal{I}$ u komutativnom prstenu R ideal $\sqrt{\mathcal{I}}$ definiran sa

$$\sqrt{\mathcal{I}} = \{a \in R;\ a^n \in \mathcal{I} \text{ za neki } n \in \mathbb{N}\}.$$

Bez dokaza navodimo **Hilbertov teorem o nulama**:

Teorem 5.2.1. (a) *Ako je $\mathcal{I}$ pravi ideal u $K[T_1, \ldots, T_r]$, onda je $\mathcal{V}(\mathcal{I}) \neq \emptyset$.*

(b) *Za svaki ideal $\mathcal{I}$ u $K[T_1, \ldots, T_r]$ vrijedi $\mathcal{I}(\mathcal{V}(\mathcal{I})) = \sqrt{\mathcal{I}}$.*

Uočimo neka svojstva preslikavanja $\mathcal{I} \mapsto \mathcal{V}(\mathcal{I})$:

Propozicija 5.2.2. (a) $\mathcal{V}(\{0\}) = V = K^r$, $\mathcal{V}(K[T_1, \ldots, T_r]) = \emptyset$.

(b) *Ako je $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{J}$ onda je $\mathcal{V}(\mathcal{J}) \subseteq \mathcal{V}(\mathcal{I})$.*

(c) $\mathcal{V}(\mathcal{I} \cap \mathcal{J}) = \mathcal{V}(\mathcal{I}) \cup \mathcal{V}(\mathcal{J})$.

(d) *Za svaku familiju $(\mathcal{I}_\alpha)_{\alpha \in A}$ ideala u $K[T_1, \ldots, T_r]$ vrijedi*

$$\mathcal{V}\left(\sum_{\alpha \in A} \mathcal{I}_\alpha\right) = \bigcap_\alpha \mathcal{V}(\mathcal{I}_\alpha).$$

Dokaz: Tvrdnje (a) i (b) su evidentne.

(c) Iz (b) slijedi $\mathcal{V}(\mathcal{I}) \subseteq \mathcal{V}(\mathcal{I} \cap \mathcal{J})$ i $\mathcal{V}(\mathcal{J}) \subseteq \mathcal{V}(\mathcal{I} \cap \mathcal{J})$, dakle, $\mathcal{V}(\mathcal{I}) \cup \mathcal{V}(\mathcal{J}) \subseteq \mathcal{V}(\mathcal{I} \cap \mathcal{J})$. S druge strane, zbog $\mathcal{I} \cdot \mathcal{J} \subseteq \mathcal{I} \cap \mathcal{J}$ imamo i obrnutu inkluziju:

$$\mathcal{V}(\mathcal{I} \cap \mathcal{J}) \subseteq \mathcal{V}(\mathcal{I} \cdot \mathcal{J}) \subseteq \mathcal{V}(\mathcal{I}) \cup \mathcal{V}(\mathcal{J}).$$

(d) Neka je $\mathcal{I} = \sum_{\alpha \in A} \mathcal{I}_\alpha$. Budući da je $\mathcal{I}_\alpha \subseteq \mathcal{I}$, iz (b) slijedi da je $\mathcal{V}(\mathcal{I}) \subseteq \mathcal{V}(\mathcal{I}_\alpha)$ $\forall \alpha \in A$, dakle, vrijedi $\mathcal{V}(\mathcal{I}) \subseteq \bigcap_{\alpha \in A} \mathcal{V}(\mathcal{I}_\alpha)$. Pretpostavimo da je $x \in \bigcap_{\alpha \in A} \mathcal{V}(\mathcal{I}_\alpha)$. Neka je $P \in \mathcal{I}$. Tada je $P = P_1 + \cdots + P_m$ za neke $P_1 \in \mathcal{I}_{\alpha_1}, \ldots, P_m \in \mathcal{I}_{\alpha_m}$, pa slijedi $P(x) = P_1(x) + \cdots + P_m(x) = 0$. Dakle, vrijedi i obrnuta inkluzija $\bigcap_{\alpha \in A} \mathcal{V}(\mathcal{I}_\alpha) \subseteq \mathcal{V}(\mathcal{I})$.

Iz (a), (b) i (d) slijedi da postoji topologija na $V = K^r$ čiji su zatvoreni skupovi upravo skupovi $\mathcal{V}(\mathcal{I})$, $\mathcal{I}$ ideal u $K[T_1, \ldots, T_r]$. To je **topologija Zariskog** na afinom prostoru $V = K^r$. Primijetimo da je $\mathcal{I} \mapsto \mathcal{V}(\mathcal{I})$ bijekcija sa skupa svih radikalnih ideala u $K[T_1, \ldots, T_r]$ na skup svih zatvorenih podskupova od V.

Budući da je prsten polinoma $K[T_1, \ldots, T_r]$ Noetherin prsten, svaki ideal $\mathcal{I}$ generiran je s konačno mnogo polinoma $P_1, \ldots, P_n$. Tada je očito

$$\mathcal{V}(\mathcal{I}) = \{x \in V;\ P_j(x) = 0\ \forall j \in \{1, \ldots, n\}\ \}.$$

Za bilo koji podskup S od V skup $\mathcal{V}(\mathcal{I}(S))$ je očito zatvarač skupa S u prostoru V. Posebno, ako je X zatvoren podskup od V, onda je $X = \mathcal{V}(\mathcal{I}(X))$.

Propozicija 5.2.3. *Neka je afini prostor $V = K^r$ snabdjeven topologijom Zariskog.*

(a) *V je Noetherin topološki prostor.*

(b) *Jednočlani podskupovi od V (tj. točke) su zatvoreni skupovi.*

(c) *Zatvoren potprostor X od V je ireducibilan ako i samo ako je $\mathcal{I}(X)$ prost ideal. Posebno, prostor V je ireducibilan.*

Dokaz: (a) Neka je

$$F_1 \supseteq F_2 \supseteq F_3 \supseteq \cdots\cdots$$

padajući niz zatvorenih podskupova od V. Tada je

$$\mathcal{I}(F_1) \subseteq \mathcal{I}(F_2) \subseteq \mathcal{I}(F_3) \subseteq \cdots\cdots$$

rastući niz ideala u Noetherinom prstenu $K[T_1, \ldots, T_r]$, pa postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je $\mathcal{I}(F_m) = \mathcal{I}(F_n)$ $\forall m \geq n$. No tada je $F_m = \mathcal{V}(\mathcal{I}(F_m)) = \mathcal{V}(\mathcal{I}(F_n)) = F_n$ $\forall m \geq n$. Dakle, niz (F_m) se stabilizira i time je dokazano da je topološki prostor V Noetherin.

(b) Neka je $x = (x_1, \ldots, x_r) \in V$. Tada je

$$\mathcal{M}_x = \mathcal{I}(\{x\}) = \{P \in K[T_1, \ldots, T_r];\ P(x) = 0\}$$

maksimalni ideal u $K[T_1, \ldots, T_r]$ generiran s polinomima $T_1 - x_1, \ldots, T_r - x_r$. Slijedi da je $\{x\} = \mathcal{V}(\mathcal{M}_x)$, dakle, $\{x\}$ je zatvoren podskup od V.

(c) Pretpostavimo da je zatvoren potprostor $X \subseteq V$ ireducibilan i neka su $P, Q \in K[T_1, \ldots, T_r]$ takvi da je $PQ \in \mathcal{I}(X)$. Tada je $P(x)Q(x) = 0$ za svaku točku $x \in X$. Dakle, za svaku točku $x \in X$ vrijedi ili $P(x) = 0$, dakle, $x \in X \cap \mathcal{V}(P)$, ili $Q(x) = 0$, dakle, $x \in X \cap \mathcal{V}(Q)$. To znači da je

$$X = (X \cap \mathcal{V}(P)) \cup (X \cap \mathcal{V}(Q)).$$

Kako je po pretpostavci X ireducibilan, vrijedi ili $X \subseteq \mathcal{V}(P)$ ili $X \subseteq \mathcal{V}(Q)$. No to znači da vrijedi ili $P \in \mathcal{I}(X)$ ili $Q \in \mathcal{I}(X)$. Time je dokazano da je ideal $\mathcal{I}(X)$ prost.

Pretpostavimo sada da je $X \subseteq V$ zatvoren potprostor takav da je ideal $\mathcal{I}(X)$ prost. Neka je X unija dvaju zatvorenih podskupova X_1 i X_2 i pretpostavimo da je $X_1 \neq X$. Tada je $\mathcal{I}(X_1) \supsetneq \mathcal{I}(X)$, pa postoji $P \in \mathcal{I}(X_1)$ takav da $P \notin \mathcal{I}(X)$. Za svaki $Q \in \mathcal{I}(X_2)$ umnožak PQ se poništava na X, odnosno, vrijedi $PQ \in \mathcal{I}(X)$. Kako je po pretpostavci ideal $\mathcal{I}(X)$ prost, slijedi $Q \in \mathcal{I}(X)$ $\forall Q \in \mathcal{I}(X_2)$. To znači da je $\mathcal{I}(X_2) = \mathcal{I}(X)$, dakle, $X = X_2$. Time je dokazano da je prostor X je ireducibilan.

Zatvoreni potprostori afinog prostora $V = K^r$ zovu se **algebarski skupovi**. Ako je $X \subseteq V$ algebarski skup, relativna topologija na X inducirana topologijom Zariskog na V zove se **topologija Zariskog** na X. Kao što smo već spomenuli, polinom $P \in K[T_1, \ldots, T_r]$ može se identificirati s $K-$značnom funkcijom $x \mapsto P(x)$ na V. Takve funkcije zovemo **polinomijalne funkcije** na V, a algebru svih takvih označavamo sa $K[V]$. Za algebarski skup $X \subseteq V$ označimo sa $K[X]$ algebru svih restrikcija $P|X$, $P \in K[V]$. Naravno, $P \mapsto P|X$ je epimorfizam s jezgrom $\mathcal{I}(X)$. Dakle, algebra $K[X]$ izomorfna je algebri $K[T_1, \ldots, T_r]/\mathcal{I}(X)$. Očito vrijedi:

(a) $K[X]$ je $K-$algebra konačnog tipa, tj. postoji konačan podskup $\{f_1, \ldots, f_r\} \subseteq K[X]$ takav da je $K[X] = K[f_1, \ldots, f_r]$; drugim riječima, $P \mapsto P(f_1, \ldots, f_r)$ je epimorfizam sa $K[T_1, \ldots, T_r]$ na $K[X]$.

(b) **Algebra** $K[X]$ je **reducirana**, tj. 0 je jedini nilpotentni element od $K[X]$.

$K-$algebra s ta dva svojstva zove se **afina $K-$algebra**. Ako je $\mathcal{A}$ afina $K-$algebra, onda postoji algebarski podskup X nekog afinog prostora K^r takav da je $\mathcal{A} \cong K[X]$. Neka je $\mathcal{A}$ $K-$algebra konačnog tipa i $\{f_1, \ldots, f_r\}$ konačan skup njezinih generatora. Označimo sa $\mathcal{I}$ jezgru epimorfizma $P \mapsto P(f_1, \ldots, f_r)$ sa $K[T_1, \ldots, T_r]$ na $\mathcal{A}$. Tada je očito algebra $\mathcal{A} \cong K[T_1, \ldots, T_r]/\mathcal{I}$ reducirana ako i samo ako je ideal $\mathcal{I}$ radikalan.

Za algebarski podskup $X \subseteq V = K^r$ algebru $K[X]$ zovemo **afina algebra** od X. Sljedeći nam je cilj dokazati da su algebarski skup X i njegova topologija Zariskog potpuno određeni s algebrom $K[X]$.

Ako je $\mathcal{I}$ ideal u $K[X]$ stavimo

$$\mathcal{V}_X(\mathcal{I}) = \{x \in X;\ f(x) = 0\ \forall f \in \mathcal{I}\}.$$

Ako je Y podskup od X, definiramo ideal $\mathcal{I}_X(Y)$ u $K[X]$ ovako:

$$\mathcal{I}_X(Y) = \{f \in K[X];\ f(y) = 0\ \forall y \in Y\}.$$

Za bilo koju afinu $K-$algebru $\mathcal{A}$ označimo sa $\mathrm{Max}(\mathcal{A})$ skup svih maksimalnih ideala u $\mathcal{A}$. Ako je X algebarski podskup od $V = K^r$, za svaku točku $x \in X$ ideal $\mathcal{M}_x = \mathcal{I}_X(\{x\})$ u $K[X]$ je maksimalan; doista, kvocijentna algebra $K[X]/\mathcal{M}_x$ izomorfna je polju K.

Propozicija 5.2.4. *(a) Preslikavanje $x \mapsto \mathcal{M}_x$ je bijekcija sa X na $\mathrm{Max}(K[X])$.*

(b) Za ideal $\mathcal{I}$ u $K[X]$ i za $x \in X$ vrijedi $x \in \mathcal{V}_X(\mathcal{I})$ ako i samo ako je $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{M}_x$.

(c) $\mathcal{I} \mapsto \mathcal{V}_X(\mathcal{I})$ je surjekcija sa skupa svih ideala u $K[X]$ na skup svih zatvorenih podskupova od X.

Dokaz: Budući da je $K[X] \cong K[T_1, \ldots, T_r]/\mathcal{I}(X)$, maksimalni ideali u algebri $K[X]$ su u bijekciji s maksimalnim idealima u $K[T_1, \ldots, T_r]$ koji sadrže $\mathcal{I}(X)$. Ako je $\mathcal{M}$ maksimalni ideal u $K[T_1, \ldots, T_r]$, onda postoji točka $x \in V = K^r$ takva da je $\mathcal{M} = \mathcal{I}(\{x\})$. Odatle slijedi tvrdnja (a). Tvrdnja (b) je očita. Napokon, tvrdnja (c) je neposredna posljedica definicije topologije Zariskog na X.

Time je dokazano da algebra $K[X]$ u potpunosti određuje topološki prostor X.

Neka je i dalje X algebarski skup. Za $f \in K[X]$ stavimo

$$\Omega_X(f) = \{x \in X;\ f(x) \neq 0\} = X \setminus \mathcal{V}_X(fK[X]).$$

To su otvoreni podskupovi od X i vrijedi

$$\Omega_X(fg) = \Omega_X(f) \cap \Omega_X(g), \qquad f, g \in K[X].$$

Posebno,

$$\Omega_X(f^n) = \Omega_X(f), \qquad f \in K[X], \quad n \in \mathbb{N}.$$

$\Omega_X(f)$ zovu se **glavni otvoreni podskupovi** od X.

Lema 5.2.5. *(a) Ako su $f, g \in K[X]$ takvi da je $\Omega_X(f) \subseteq \Omega_X(g)$, onda postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je $f^n \in gK[X]$.*

(b) Glavni otvoreni podskupovi od X tvore bazu topologije od X.

Dokaz: (a) $\Omega_X(f) \subseteq \Omega_X(g)$ ako i samo ako je $\mathcal{V}_X(gK[X]) \subseteq \mathcal{V}_X(fK[X])$, a to je ispunjeno ako i samo ako je $\sqrt{fK[X]} \subseteq \sqrt{gK[X]}$. No to upravo znači da je $f^n \in gK[X]$ za neki $n \in \mathbb{N}$.

Tvrdnja (b) ekvivalentna je tvrdnji da je svaki zatvoren podskup od X presjek skupova oblika $\mathcal{V}_X(fK[X])$, a to je očito iz definicije topologije Zariskog.

Neka je i dalje X algebarski podskup od $V = K^r$. Neka je $x \in X$. Za $K-$značnu funkciju f definiranu na okolini U točke x kažemo da je **regularna u točki** x, ako postoje funkcije $g, h \in K[X]$ i otvorena okolina $V \subseteq U \cap \Omega_X(h)$ točke x takve da je $f(y) = g(y)h(y)^{-1}$ $\forall y \in V$. Ako je U neprazan otvoren podskup od X, kažemo da je $f : U \to K$ **regularna funkcija** na U, ako je ona regularna u svakoj točki iz U. Označimo sa $\mathcal{O}_X(U)$ $K-$algebru regularnih funkcija na U. Ako su $U \subseteq V$ neprazni otvoreni podskupovi od X, restrikcija sa V na U definira homomorfizam $\rho_U^V : \mathcal{O}_X(V) \to \mathcal{O}_X(U)$. Očito je $\left(\mathcal{O}_X(U), \rho_U^V\right)$ predsnop na X sa svojstvima iz propozicija 4.1.1. i 4.1.2. Dakle, za snopizaciju $\mathcal{F}(X)$ tog predsnopa i za svaki otvoren podskup $U \subseteq X$ prirodno definiran homomorfizam $\iota_U : \mathcal{O}_X(U) \to \Gamma(U, \mathcal{F}(X))$ je izomorfizam. Vlat tog snopa nad točkom $x \in X$ označavat ćemo sa $\mathcal{O}_{X,x}$. To je induktivni limes $K-$algebri $\mathcal{O}_X(U)$ po otvorenim okolinama U od x, tj. to je upravo $K-$algebra klica funkcija regularnih u točki x. Primijetimo da je $\mathcal{O}_{X,x}$ lokalni prsten: njegov jedini maksimalni ideal sastoji se od klica funkcija regularnih u točki x koje se poništavaju u točki x.

Afina algebarska višestrukost je algebarski skup X s definiranim snopom $\mathcal{F}(X)$, odnosno, s $K-$algebrom $\mathcal{O}_X(U)$ regularnih funkcija za svaki neprazan otvoren skup $U \subseteq X$. U tom slučaju prirodno je definiran homomorfizam $K-$algebri $\varphi_X : K[X] \to \mathcal{O}_X(X)$. Umjesto **afina algebarska višestrukost** govorit ćemo **afina višestrukost**.

Teorem 5.2.6. *φ_X je izomorfizam.*

Dokaz: Preslikavanje φ je očito injektivno. Treba dokazati surjektivnost. Neka je $f \in \mathcal{O}_X(X)$. Za svaku točku $x \in X$ tada postoji otvorena okolina U_x točke x i funkcije $g_x, h_x \in K[X]$ takve da se h_x ne poništava nigdje na U_x i da vrijedi $f(y) = g_x(y)h_x(y)^{-1}$ za svaku točku $y \in U_x$. Prema tvrdnji (b) leme 5.2.5. možemo pretpostaviti da je $U_x = \Omega_X(a_x)$ za neku funkciju $a_x \in K[X]$. Tada je $\Omega_X(a_x) \subseteq \Omega_X(h_x)$, pa po tvrdnji (a) leme 5.2.5. postoje $k_x \in K[X]$ i $n_x \in \mathbb{N}$ takvi da je

$$a_x^{n_x} = h_x k_x.$$

Prema tome, restrikcija funkcije f na U_x jednaka je $g_x k_x \left(a_x^{n_x}\right)^{-1}$. Budući da je $\Omega_X(a_x) = \Omega_X(a_x^{n_x})$, vidimo da možemo pretpostaviti da je $h_x = a_x$.

Budući da je prostor X kvazikompaktan, postoji konačno mnogo funkcija $h_1, \ldots, h_s \in K[X]$, takvih da je $X = \Omega_X(h_1) \cup \cdots \cup \Omega_X(h_s)$, i funkcije $g_1, \ldots, g_s \in K[X]$, takve da je za svaki $j \in \{1, \ldots, s\}$ restrikcija $f|\Omega_X(h_j)$ jednaka $g_j h_j^{-1}$. Posebno, vrijedi

$$g_i h_i^{-1} | \Omega_X(h_i) \cap \Omega_X(h_j) = g_j h_j^{-1} | \Omega_X(h_i) \cap \Omega_X(h_j) \qquad \forall i, j \in \{1, \ldots, s\}.$$

Nadalje, umnožak $h_i h_j$ iščezava izvan skupa $\Omega_X(h_i) \cap \Omega(h_j)$. To pokazuje da je

$$h_i h_j (g_i h_j - g_j h_i) = 0 \qquad \forall i, j \in \{1, \ldots, s\},$$

tj.

$$g_i h_i h_j^2 = h_i^2 h_j g_j \qquad \forall i, j \in \{1, \ldots, s\}.$$

Budući da skupovi $\Omega_X(h_i) = \Omega_X(h_i^2)$ pokrivaju X, ideal u $K[X]$ generiran sa $h_1^2, \ldots, h_s^2$ jednak je čitavoj algebri $K[X]$. Posebno, postoje funkcije $b_1, \ldots, b_s \in K[X]$ takve da je

$$\sum_{i=1}^{s} b_i h_i^2 = 1.$$

Neka je $x \in \Omega_X(h_j)$. Tada imamo

$$\sum_{i=1}^{s} b_i(x)g_i(x)h_i(x) = h_j(x)^{-2}\sum_{i=1}^{s} b_i(x)g_i(x)h_i(x)h_j(x)^2 =$$

$$= h_j(x)^{-2}\sum_{i=1}^{s} b_i(x)h_i(x)^2 h_j(x)g_j(x) = h_j(x)^{-2}h_j(x)g_j(x) = f(x).$$

Budući da skupovi $\Omega_X(h_j)$ pokrivaju X, slijedi da je

$$f = \varphi_X\left(\sum_{i=1}^{s} b_i g_i h_i\right).$$

Time je dokazana i surjektivnost.

Neka su X i Y afine višestrukosti i neka je $\varphi : X \to Y$ neprekidno preslikavanje. Za otvoren podskup $V \subseteq Y$, skup $\varphi^{-1}(V)$ je otvoren podskup od X. Za funkciju $f : V \to K$ definiramo funkciju $\varphi^* f : \varphi^{-1}(V) \to K$ sa

$$(\varphi^* f)(x) = f(\varphi(x)), \qquad x \in \varphi^{-1}(V).$$

Kažemo da je φ **morfizam afinih višestrukosti** ako je $\varphi^*(\mathcal{O}_Y(V)) \subseteq \mathcal{O}_X(\varphi^{-1}(V))$ za svaki otvoren skup $V \subseteq Y$. Posebno, imamo unitalni homomorfizam $\varphi^* : \mathcal{O}_Y(Y) \to \mathcal{O}_X(X)$, dakle, prema teoremu 5.2.6. unitalni homomorfizam $\varphi^* : K[Y] \to K[X]$. Obratno, pretpostavimo da je zadan unitalni homomorfizam $\psi : K[Y] \to K[X]$. Svaka točka $x \in X$ (odnosno, $y \in Y$) prema prijašnjim razmatranjima može se identificirati s maksimalnim idealom $\mathcal{M}_x$ (odnosno, $\mathcal{M}_y$) svih funkcija iz $K[X]$ (odnosno, $K[Y]$) koje se poništavaju u točki x (odnosno, u točki y). Nadalje, ideal $\mathcal{M}_x$ (odnosno, $\mathcal{M}_y$) potpuno je određen s unitalnim homomorfizmom $\varepsilon_x : K[X] \to K$ (odnosno, $\varepsilon_y : K[Y] \to K$) s jezgrom $\mathcal{M}_x$ (odnosno, $\mathcal{M}_y$). Tako dolazimo do neprekidnog preslikavanja $\psi^+ : X \to Y$. Ono je definirano sa

$$\varepsilon_x \circ \psi = \varepsilon_{\psi^+(x)}, \qquad x \in X.$$

Tada je ψ^+ morfizam afinih višestrukosti takav da je $(\psi^+)^* = \psi$. Obratno, za morfizam afinih višestrukosti $\varphi : X \to Y$ dobiva se da je $(\varphi^*)^+ = \varphi$. Očito je $(\varphi_1 \circ \varphi_2)^* = \varphi_2^* \circ \varphi_1^*$ i $(\psi_1 \circ \psi_2)^+ = = \psi_2^+ \circ \psi_1^+$. Posebno, morfizam afinih višestrukosti $\varphi : X \to Y$ je izomorfizam ako i samo ako je $\varphi^* : K[Y] \to K[X]$ izomorfizam algebri. Na taj način skicirali smo dokaz teorema:

Teorem 5.2.7. *Pridruživanja $X \mapsto K[X]$ i $\varphi \mapsto \varphi^*$ predstavljaju kontravarijantnu ekvivalenciju kategorije afinih višestrukosti na kategoriju unitalnih afinih $K-$algebri.*

Neka su sada X i Y dvije afine višestrukosti (nad istim poljem K). **Produkt** X i Y uređena trojka (Z, p, q), gdje je Z afina višestrukost i $p : Z \to X$ i $q : Z \to Y$ su morfizmi i ispunjeno je sljedeće univerzalno svojstvo:

> *Ako je (Z', p', q') uređena trojka, pri čemu je Z' afina višestrukost i $p' : Z' \to X$ i $q' : Z' \to Y$ su morfizmi, onda postoji jedinstven morfizam $r : Z' \to Z$ takav da je $p' = p \circ r$ i $q' = q \circ r$.*

Kao i obično, lako se dokazuje da je produkt jedinstven ako postoji. Taj jedinstven produkt označavat ćemo sa $X \times Y$. Egzistenciju ćemo dokazati preko uske veze afinih višestrukosti i pripadnih afinih algebri. Ako definiciju pomoću teorema 5.2.7. prebacimo na jezik homomorfizama algebri, vidimo da će upravo biti $K[Z] = K[X] \otimes_K K[Y]$. Stoga egzistenciju dobivamo iz sljedeće leme:

Lema 5.2.8. *Neka su $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ afine $K-$algebre. Tada je i $\mathcal{A}\otimes_K\mathcal{B}$ afina $K-$algebra. Ako su $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ integralne domene, onda je i $\mathcal{A}\otimes_K\mathcal{B}$ integralna domena.*

Dokaz: Neka je

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \otimes b_i$$

nilpotentni element od $\mathcal{A}\otimes_K\mathcal{B}$. Možemo pretpostaviti da su $b_1,\ldots,b_n$ linearno nezavisni nad K. Za bilo koji unitalni homomorfizam $h:\mathcal{A}\to K$ je $h\otimes id_{\mathcal{B}}$ unitalni homomorfizam sa $\mathcal{A}\otimes_K\mathcal{B}$ u $\mathcal{B}$. Prema tome,

$$\sum_{i=1}^{n} h(a_i) b_i$$

je nilpotentan element od $\mathcal{B}$, dakle, zbog pretpostavke o reduciranosti, jednak je nuli. Zbog linearne nezavisnosti $b_1,\ldots,b_n$ slijedi da je $h(a_i)=0$ za svaki i. No to vrijedi za svaki unitalni homomorfizam $h:\mathcal{A}\to K$, pa slijedi da $a_1,\ldots,a_n$ leže u svim maksimalnim idealima u $\mathcal{A}$. Međutim, $\mathcal{A}$ se može identificirati sa $K[T_1,\ldots,T_r]/\mathcal{I}$ za neki $r\in\mathbb{Z}_+$ i neki radikalan ideal $\mathcal{I}$, pa slijedi da su svi a_i jednaki 0. Dakle, 0 je jedini nilpotentni element u $\mathcal{A}\otimes_K\mathcal{B}$.

Izostavljamo dokaz druge tvrdnje. Taj je dokaz sličan dokazu prve tvrdnje, ali nešto složeniji.

Prema tome, vrijedi:

Teorem 5.2.9. *Neka su X i Y afine višestrukosti (nad istim poljem K).*

(a) *Produkt $X\times Y$ u kategoriji afinih višestrukosti postoji i jedinstven je do na izomorfizam.*

(b) *Ako su višestrukosti X i Y ireducibilne, onda je i višestrukost $X\times Y$ ireducibilna.*

$X\times Y$ se kao skup može identificirati s Kartezijevim produktom skupova X i Y. Doista, neka je (Z,p,q) produkt afinih višestrukosti X i Y i neka je $X\times Y$ Kartezijev produkt skupova X i Y. Za svaku točku $y\in Y$ definiramo morfizme $p_y: X\to X$ i $q_y: X\to Y$ sa

$$p_y(x)=x, \qquad q_y(x)=y, \qquad \forall x\in X.$$

Prema univerzalnom svojstvu za svaku točku $y\in Y$ postoji jedinstven morfizam $r_y: X\to Z$ takav da je $p_y=p\circ r_y$ i $q_y=q\circ r_y$. Sada definiramo preslikavanje

$$f: X\times Y\to Z, \qquad f(x,y)=r_y(x), \quad (x,y)\in X\times Y.$$

Jednostavno je dokazati injektivnost. Naime, $f(x,y)=f(x',y')$ znači da je $r_y(x)=r_{y'}(x')$, pa slijedi

$$x=p_y(x)=p(r_y(x))=p(r_{y'}(x'))=p_{y'}(x')=x'$$

i

$$y=q_y(x)=q(r_y(x))=q(r_{y'}(x'))=q_{y'}(x')=y'.$$

Umjesto dokaza surjektivnosti skicirat ćemo konstrukciju, koja ujedno daje drugi dokaz egzistencije produkta u kategoriji afinih višestrukosti. Uzmimo da je X algebarski (tj. Zariski zatvoren) podskup od K^r i da je Y algebarski podskup od K^s. Neka su $\mathcal{I}(X)$ i $\mathcal{I}(Y)$ pripadni radikalni ideali u algebrama $K[T_1,\ldots,T_r]$ i $K[R_1,\ldots,R_s]$:

$$\mathcal{I}(X)=\{P\in K[T_1,\ldots,T_r];\ P(x)=0\ \forall x\in X\},$$

$$\mathcal{I}(Y)=\{Q\in K[R_1,\ldots,R_s];\ Q(y)=0\ \forall y\in Y\}.$$

Neka je $\mathcal{I}$ ideal u $K[T_1, \dots, T_r, R_1, \dots, R_s]$ generiran sa $\mathcal{I}(X) \cup \mathcal{I}(Y)$. Tada je očito

$$X \times Y = \mathcal{V}(\mathcal{I}),$$

dakle, $X \times Y$ je algebarski podskup od K^{r+s}. Pokazuje se da je uz dvije projekcije $p_1 : X \times Y$ i $p_2 : X \times Y \to Y$ uređena trojka $(X \times Y, p_1, p_2)$ produkt od X i Y.

Primijetimo, međutim, da je općenito topologija Zariskog višestrukosti $X \times Y$ finija od produktne topologije dviju topologija Zariskog. Štoviše, ta je topologija striktno finija osim u slučaju kad je jedan od skupova X i Y konačan.

Za polje K (algebarski zatvoreno i karakteristike 0) $K-$**prstenovan prostor** je topološki prostor X zajedno s predsnopom $\left(\mathcal{O}_X(U), \rho_U^V\right)$, pri čemu je za svaki otvoren skup $U \subseteq X$ $\mathcal{O}_X(U)$ unitalna podalgebra algebre neprekidnih funkcija $U \to K$ i za $U \subseteq V$ je $\rho_U^V : \mathcal{O}_X(V) \to \mathcal{O}_X(U)$ homomorfizam restrikcije i vrijedi:

Ako je $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ familija otvorenih podskupova od X i U je njihova unija i ako je za svaki $\alpha \in A$ zadana funkcija $\varphi_\alpha \in \mathcal{O}_X(U_\alpha)$, i to tako da je

$$f_\alpha | U_\alpha \cap U_\beta = f_\beta | U_\alpha \cap U_\beta \qquad \forall \alpha, \beta \in A,$$

onda postoji $f \in \mathcal{O}_X(U)$ takva da je $f|U_\alpha = f_\alpha \ \forall \alpha \in A$.

Primijetimo da je afina višestrukost $K-$prstenovan prostor.

Ako su $(X, \mathcal{O}_X)$ i $Y, \mathcal{O}_Y)$ $K-$prstenovani prostori, **morfizam** prostora $(X, \mathcal{O}_X)$ u prostor $(Y, \mathcal{O}_Y)$ je neprekidno preslikavanje $\varphi : X \to Y$ takvo da je za svaki otvoren podskup $U \subseteq Y$ i za svaku funkciju $f \in \mathcal{O}_Y(U)$ kompozicija $\varphi^*(f) = f \circ \varphi$ funkcija iz $\mathcal{O}_X(\varphi^{-1}(U))$. **Izomorfizam** je homeomorfizam $\varphi : X \to Y$ takav da su i φ i φ^{-1} morfizmi. Proširujemo sada definiciju afine višestrukosti na način da tako zovemo svaki $K-$prstenovani prostor koji je izomorfan afinoj višestrukosti. Uz takvo proširenje afine višestrukosti čine punu potkategoriju kategorije $K-$prstenovanih prostora.

Ako je $(X, \mathcal{O}_X)$ $K-$prstenovan prostor i $Y \subseteq X$ je podskup, onda na topološkom prostoru Y definiramo strukturu $K-$prstenovanog prostora $(Y, \mathcal{O}_X|Y)$ tako da za svaki otvoren podskup U od Y definiramo $(\mathcal{O}_X|Y)(U)$ kao $K-$algebru svih funkcija $f : U \to K$ takvih da postoji familija $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ otvorenih podskupova od X čija unija sadrži U i funkcije $f_\alpha \in \mathcal{O}_X(U_\alpha)$, $\alpha \in A$, takve da je

$$f|U \cap U_\alpha = f_\alpha | U \cap U_\alpha \qquad \forall \alpha \in A.$$

Posebno, ako je U otvoren podskup od X, onda se lako vidi da je $(\mathcal{O}_X|U)(V) = \mathcal{O}_X(V)$ za svaki otvoren podskup V od U.

Propozicija 5.2.10. *Neka je X afina višestrukost i $f \in \mathcal{O}_X(X)$. Tada je*

$$X_f = \{x \in X;\ f(x) \neq 0\}$$

afini otvoren podskup od X, tj. $(X_f, \mathcal{O}_X|X_f)$ je afina višestrukost.

Dokaz: Možemo pretpostaviti da je X algebarski podskup od K^r. Definiramo algebarski podskup Y od K^{r+1} ovako:

$$Y = \{(x, x_{n+1}) \in K^{r+1};\ x \in X,\ 1 - f(x)x_{n+1} = 0\}.$$

Tada je očito preslikavanje sa X_f u Y definirano sa $x \mapsto (x, f(x)^{-1})$ izomorfizam $K-$prstenovanih prostora, kome je invers projekcija $(x, x_{n+1}) \mapsto x$ sa Y na X_f. Dakle, X_f je afina višestrukost.

5.3 Algebarske višestrukosti

Neka je X $K-$pstenovan prostor. **Afini otvoren podskup** od X je otvoren podskup $U \subseteq X$ takav da je $(U, \mathcal{O}_X|U)$ afina višestrukost. **Predvišestrukost** (nad poljem K) je $K-$prstenovan prostor $(X, \mathcal{O}_X)$ takav da je topološki prostor X kvazikompaktan i da ima (konačan) pokrivač sastavljen od afinih otvorenih podskupova. Kategorija predvišestrukosti je puna potkategorija kategorije $K-$prstenovanih prostora. Očito vrijedi:

Propozicija 5.3.1. *Neka je $(X, \mathcal{O}_X)$ predvišestrukost.*

(*a*) *X je Noetherin topološki prostor.*

(*b*) *Ako je prostor X ireducibilan i ako je U afini otvoren podskup od X, onda je prostor U ireducibilan.*

Ukoliko je jasno kako je definiran snop $\mathcal{O}_X$, obično ćemo sam topološki prostor X zvati predvišestrukost.

Pojam produkta u kategoriji predvišestrukosti definira se analogno kao i produkt u kategoriji afinih algebarskih višestrukosti.

Propozicija 5.3.2. *Produkt dviju predvišestrukosti postoji i jedinstven je do na izomorfizam.*

Skica dokaza: Neka su X i Y predvišestrukosti. Tada postoje konačni pokrivači afinim otvorenim podskupovima $\{U_1, \ldots, U_m\}$ od X i $\{V_1, \ldots, V_n\}$ od Y. Kao skup za produkt predvišestrukosti uzimamo Kartezijev produkt $X \times Y$. On je pokriven skupovima $U_i \times V_j$. Na tim skupovima imamo strukture afinih višestrukosti. Za skup $U \subseteq X \times Y$ kažemo da je otvoren ako je $U \cap (U_i \times V_j)$ otvoren u $U_i \times V_j$ za svaki par (i, j). Time je definirana topologija na $X \times Y$. Neka je z točka iz $X \times Y$. Tada je $z \in U_i \times V_j$ za neki par (i, j). Kažemo da je $K-$značna funkcija f, definirana na otvorenoj okolini U točke z regularna u točki z, ako je njena restrikcija $f|U \cap (U_i \times V_j)$ regularna u točki z u odnosu na strukturu afine višestrukosti $U_i \times V_j$. Pokazuje se da je time dobro definirana struktura $K-$prstenovanog prostora $X \times Y$ i da je svaki od skupova $U_i \times V_j$ afini otvoreni podskup. Univerzalno svojstvo dokazuje se svođenjem na univerzalna svojstva za produkte $U_i \times V_j$. Jedinstvenost do na izomorfizam je standardna posljedica univerzalnog svojstva.

Za predvišestrukost X označimo sa Δ_X dijagonalu produkta $X \times X$, tj.

$$\Delta_X = \{(x, x);\ x \in X\},$$

i neka je $\iota : X \to \Delta_X$ bijekcija definirana sa $\iota(x) = (x, x)$. Ako je X afina višestrukost onda je Δ_X zatvoren podskup od $X \times X$. Doista, lako se vidi da vrijedi

$$\Delta_X = \mathcal{V}_{X \times X}(\mathcal{I}), \quad \text{gdje je} \quad \mathcal{I} = \mathrm{Ker}(K[X \times X] = K[X] \otimes_K K[X] \to K[X]),$$

a homomorfizam $K[X] \otimes_K K[X] \to K[X]$ je definiran množenjem. Ideal $\mathcal{I}$ generiran je elementima oblika $f \otimes 1 - 1 \otimes f$, $f \in K[X]$. Budući da je očito $K[X \times X]/\mathcal{I} \cong K[X]$, u ovom slučaju je $\iota : X \to \Delta_X$ homeomorfizam.

Pokrijemo li za proizvoljnu predvišestrukost X dijagonalu Δ_X s otvorenim podskupovima od $X \times X$ oblika $U \times U$, gdje su U afini otvoreni podskupovi od X, slijedi:

Lema 5.3.3. *Preslikavanje $\iota : X \to \Delta_X$ je homeomorfizam za svaku predvišestrukost X.*

Algebarska višestrukost je predvišestrukost X za koju je Δ_X zatvoren podskup produkta $X \times X$. Taj se zahtjev zove **aksiom separacije**. Taj naziv dolazi iz činjenice da je topološki prostor X Hausdorffov ako i samo je dijagonala Δ_X zatvoren podskup od $X \times X$ uz topologiju produkta u kategoriji topoloških prostora. Prema prethodnoj diskusiji vidimo da su afine višestrukosti stvarno algebarske višestrukosti. U daljnjem ćemo umjesto "algebarska višestrukost" govoriti kratko **višestrukost**. Kategorija višestrukosti je puna potkategorija kategorije predvišestrukosti, dakle, puna potkategorija kategorije $K-$prstenovanih prostora. Drugim riječima, ako su X i Y višestrukosti onda je preslikavanje $\varphi : X \to Y$ **morfizam višestrukosti** ako i samo ako je ono neprekidno i za svaki otvoren podskup $U \subseteq Y$ i za svaku funkciju $f \in \mathcal{O}_Y(U)$ kompozicija $\varphi^*(f) = f \circ \varphi$ je funkcija iz $\mathcal{O}_X(\varphi^{-1}(U))$.

Iz činjenice da je svaka višestrukost pokrivena s konačno mnogo afinih otvorenih podskupova neposredno slijedi:

Propozicija 5.3.4. *Ako su X i Y višestrukosti, onda je njihov produkt $X \times Y$ u kategoriji predvišestrukosti višestrukost.*

Propozicija 5.3.5. *Neka je X višestrukost i Y predvišestrukost (nad istim poljem K).*

(*a*) *Ako je $\varphi : Y \to X$ morfizam predvišestrukosti, onda je njegov graf*

$$\Gamma(\varphi) = \{(y, \varphi(y));\ y \in Y\}$$

zatvoren u produktu $Y \times X$.

(*b*) *Ako su $\varphi, \psi : Y \to X$ morfizmi predvišestrukosti koji se podudaraju na gustom podskupu od Y, onda je $\varphi = \psi$.*

Dokaz: (*a*) Promatramo neprekidno preslikavanje

$$Y \times X \longrightarrow X \times X, \qquad (y, x) \mapsto (\varphi(y), x), \quad (y, x) \in Y \times X.$$

Tada je $\Gamma(\varphi)$ totalni invers dijagonale Δ_X pri tom neprekidnom preslikavanju, dakle, zatvoren je.

Za dokaz tvrdnje (*b*) analogno se pokazuje da je skup $\{y \in Y;\ \varphi(y) = \psi(y)\}$ zatvoren u Y.

Propozicija 5.3.6. *Predvišestrukost X je višestrukost ako i samo ako je za svaku predvišestrukost Y i za svaki par morfizama $f, g : Y \to X$ skup*

$$\{y \in Y;\ f(y) = g(y)\}$$

zatvoren u Y.

Dokaz: Ako je X višestrukost, u dokazu propozicije 5.3.5. ustanovili smo da je taj skup zatvoren u Y. Obratno, pretpostavimo da je taj skup zatvoren za svaki par morfizama $f, g : Y \to X$ i za svaku predvišestrukost Y. Stavimo $Y = X \times X$, a za f i g uzmemo projekcije $X \times X \to X$ na prvi i na drugi faktor, tj. $f(x_1, x_2) = x_1$ i $g(x_1, x_2) = x_2$. Tada su f i g morfizmi predvišestrukosti i vrijedi

$$\{y \in Y;\ f(y) = g(y)\} = \{(x_1, x_2) \in X \times X;\ x_1 = x_2\} = \Delta_X,$$

dakle, dijagonala Δ_X je zatvoren podskup od $X \times X$.

Druga tvrdnja sljedeće propozicije daje nam koristan kriterij da bi predvišestrukost bila višestrukost.

Propozicija 5.3.7. (*a*) *Neka je X višestrukost i neka su U i V afini otvoreni podskupovi od X. Tada je i presjek $U \cap V$ afini otvoren podskup od X i skup*

$$\{f|U \cap V;\ f \in \mathcal{O}_X(U)\} \cup \{g|U \cap V;\ g \in \mathcal{O}_X(V)\}$$

generira algebru $\mathcal{O}_X(U \cap V)$.

(*b*) *Neka je X predvišestrukost i $\{U_1, \ldots, U_m\}$ njen pokrivač afinim otvorenim podskupovima. Tada je X višestrukost ako i samo ako je za svaki par indeksa (i, j) presjek $U_i \cap U_j$ afini otvoren podskup od X i skup*

$$\{f|U_i \cap U_j;\ f \in \mathcal{O}_X(U_i)\} \cup \{g|U_i \cap U_j;\ g \in \mathcal{O}_X(U_j)\}$$

generira algebru $\mathcal{O}_X(U_i \cap U_j)$.

Dokaz: (*a*) Skup $\Delta_X \cap (U \times V)$ je zatvoren podskup od $U \times V$. Sada $\iota : X \to \Delta_X$ inducira izomorfizam $K-$prstenovanih prostora $U \cap V \cong \Delta_X \cap (U \times V)$. Prema tome, skup $U \cap V$ je afini otvoren podskup od X, a regularne funkcije na $\Delta_X \cap (U \times V)$ su restrikcije regularnih funkcija na $U \times V$, odnosno funkcija iz $K[U] \otimes_K K[V]$. Druga tvrdnja slijedi iz činjenice da je algebra $K[U] \otimes_K K[V]$ generirana sa $K[U] \otimes 1 \cup 1 \otimes K[V]$.

(*b*) Nužnost uvjeta posljedica je tvrdnje (*a*). Ako je uvjet zadovoljen, za svaki par indeksa (i, j) presjek $\Delta_X \cap (U_i \times U_j)$ je afina višestrukost i njena je algebra regularnih funkcija kvocijent algebre $\mathcal{O}_{X \times X}(U_i \times U_j)$. Odatle slijedi da je presjek $\Delta_X \cap (U_i \times U_j)$ zatvoren u produktu $U_i \times U_j$. No kako produkti $U_i \times U_j$ čine konačan otvoren pokrivač od $X \times X$, dijagonala Δ_X je zatvorena u $X \times X$.

Ne samo da su afine višestrukosti višestrukosti nego vrijedi i mnogo više:

Propozicija 5.3.8. *Ako je X predvišestrukost takva da za svake dvije točke $x_1, x_2 \in X$ postoji afini otvoren podskup $U \subseteq X$ takav da su $x_1, x_2 \in U$ onda je X višestrukost.*

Dokaz: Neka je Y predvišestrukost i $f, g : Y \to X$ morfizmi. Stavimo $Z = \{y \in Y;\ f(y) = g(y)\}$. Za $y \in Y \setminus Z$ stavimo $x_1 = f(y)$ i $x_2 = g(y)$ i neka je U afini otvoren podskup koji sadrži x_1 i x_2. Tada je $V = f^{-1}(U) \cap g^{-1}(U)$ otvoren podskup od Y koji sadrži točku y. Morfizmi f i g preslikavaju V u afinu višestrukost U. Možemo pretpostaviti da je U afina podvišestrukost od K^r za neki r. Sada slijedi da je

$$Z \cap V = \{z \in V;\ f(z) - g(z) = 0\}$$

zatvoren podskup od V. Njegov je komplement $Z \setminus V$ u V otvoren u V, dakle, otvoren u Y. Sada je $y \in Z \setminus V$ i $(Z \setminus V) \cap Z = \emptyset$. To pokazuje da je $Y \setminus Z$ otvoren podskup od Y, dakle, Z je zatvoren podskup od Y. Sada propozicija 5.3.6. pokazuje da je X višestrukost.

5.4 Projektivne višestrukosti

Za $r \in \mathbb{Z}_+$ označimo sa $P^r(K)$ $r-$dimenzionalni projektivni prostor nad K, tj. skup svih jednodimenzionalnih potprostora od K^{r+1}. Taj se skup identificira s kvocijentnim skupom od $K^{r+1} \setminus \{0\}$ u odnosu na relaciju ekvivalencije

$$(\lambda x_0, \ldots, \lambda x_r) \simeq (x_0, \ldots, x_r), \qquad \lambda \in K \setminus \{0\}.$$

Definirat ćemo sada topologiju (Zariskog) na $P^r(K)$, a zatim i strukturu $K-$prstenovanog prostora na $P^r(K)$ uz koju će $P^r(K)$ postati višestrukost. Njene će se zatvorene podvišetrukosti zvati projektivne višestrukosti.

Neka je $f \in K[X_0, \ldots, X_r]$ homogen polinom nekog stupnja k. Tada f doduše ne definira funkciju na $P^r(K)$ osim u trivijalnom slučaju $k = 0$, ali zbog relacije

$$f(\lambda x_0, \ldots, \lambda x_r) = \lambda^k f(x_0, \ldots, x_r)$$

vidimo da je skup nultočaka od f u $K^{r+1} \setminus \{0\}$ unija klasa ekvivalencije iz $P^r(K)$, dakle, definira podskup od $P^r(K)$. Štoviše, skup zajedničkih nultočaka bilo kojeg skupa homogenih polinoma definira podskup od $P^r(K)$. Svaki se takav podskup zove **algebarski podskup** od $P^r(K)$. Kako je prsten $K[X_0, \ldots, x_r]$ Noetherin, jasno je da je svaki algebarski podskup od $P^r(K)$ skup zajedničkih nultočaka konačno mnogo homogenih polinoma. Kao i u slučaju afinog prostora K^r vrijedi:

(*a*) $P^r(K)$ i $\emptyset$ su algebarski podskupovi od $P^r(K)$.

(*b*) Ako su $F_1, \ldots, F_n$ algebarski podskupovi od $P^r(K)$, onda je i njihova unija $F_1 \cup \cdots \cup F_r$ algebarski podskup od $P^r(K)$.

(*c*) Ako je $(F_i)_{i \in I}$ bilo koja familija algebarskih podskupova od $P^r(K)$, onda je i njihov presjek $\bigcap_{i \in I} F_i$ algebarski podskup od $P^r(K)$.

Prema tome, postoji jedinstvena topologija na $P^r(K)$ u odnosu na koju je podskup $F \subseteq P^r(K)$ zatvoren ako i samo ako je F algebarski podskup od $P^r(K)$. Ta se topologija zove **topologija Zariskog** na projektivnom prostoru $P^r(K)$.

Sada ćemo za svaki $k \in \mathbb{Z}$ definirati snop $\mathcal{O}(k)$ na $P^r(K)$. Neka je

$$\pi : K^{r+1} \setminus \{0\} \longrightarrow P^r(K)$$

kvocijentno preslikavanje. Ako je podskup $U \subseteq P^r(K)$ otvoren, onda je očito $\pi^{-1}(U)$ Zariski otvoren u $K^{r+1} \setminus \{0\}$ i to je komplement skupa zajedničkih nultočaka konačno mnogo homogenih polinoma. Za $k \in \mathbb{Z}$ definiramo $\mathcal{O}(k)(U)$ kao prostor regularnih funkcija na $\pi^{-1}(U)$ koje su homogene stupnja k. Očito je $\mathcal{O}(k)$ snop $K-$vektorskih prostora na $P^r(K)$. Nadalje, za $f \in \mathcal{O}(j)(U)$ i $g \in \mathcal{O}(k)(U)$ je $fg \in \mathcal{O}(j+k)(U)$. To znači da je $\bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} \mathcal{O}(k)$ snop graduiranih algebri na $P^r(K)$. Nadalje, $\mathcal{O}(0)$ je snop $K-$algebri i svaki $\mathcal{O}(k)$ je snop $\mathcal{O}(k)-$modula.

Primijetimo da je za otvoren skup $U \subseteq P^r(K)$ regularna funkcija na $\pi^{-1}(U)$, koja je homogena stupnja 0, konstantna na klasama ekvivalencije (na pravcima), dakle, određuje dobro definiranu funkciju na U. Dakle, $\mathcal{O}(0)$ se može shvaćati kao snop $K-$algebri neprekidnih funkcija na $P^r(K)$. Na projektivnom prostoru $P^r(K)$ definiramo strukturu $K-$prstenovanog prostora tako da za strukturni snop uzmemo $\mathcal{O}_{P^r(K)} = \mathcal{O}(0)$.

U ovom odjeljku označavat ćemo sa U_i otvoren podskup od $P^r(K)$ koji je komplement skupa nultočaka $i-$te koordinatne funkcije z_i, $i = 0, \ldots, r$. Definiramo preslikavanje $\varphi_i : U_i \to K^r$ tako da stavimo $\varphi_i \circ \pi = \psi_i$, gdje je $\psi_i : \pi^{-1}(U_i) \to K^r$ definirano sa

$$\psi_i(x_0, \ldots, x_r) = \left(\frac{x_0}{x_i}, \ldots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \ldots, \frac{x_r}{x_i} \right).$$

Preslikavanje φ_i je dobro definirano jer su koordinatne funkcije od ψ_i homogene stupnja 0.

Propozicija 5.4.1. *Preslikavanje $\varphi_i : U_i \to K^r$ je izomorfizam $K-$prstenovanih prostora.*

Dokaz: Možemo uzeti da je $i = 0$. Očito je $\varphi_0 : U_0 \to K^r$ bijekcija s inversom

$$\varphi_0^{-1}(x_1, \dots, x_r) = \pi(1, x_1, \dots, x_r).$$

Da bismo dokazali da je φ_0 homeomorfizam, dokazat ćemo da je podskup od $F \subseteq U_0$ zatvoren u U_0 ako i samo ako je $\varphi_0(F)$ zatvoren podskup od K^r.

Svaki je zatvoren podskup od U_0 unija konačno mnogo skupova oblika $U_0 \cap Z(p)$, gdje je $Z(p) \subseteq P^r(K)$ skup nultočaka homogenog polinoma p. Ako je $x_0 \neq 0$, imamo

$$p(x_0, x_1, \dots, x_r) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad p\left(1, \frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_r}{x_0}\right) = 0.$$

Međutim, funkcija $(x_0, x_1, \dots, x_r) \mapsto p(1, x_1/x_0, \dots, x_r/x_0)$ je polinom komponiran s preslikavanjem ψ_0. To pokazuje da je $\varphi_0(U_0 \cap Z(p))$ zatvoren podskup od K^r. Slijedi da je za svaki zatvoren podskup F od U_0 njegova slika $\varphi_0(F)$ zatvoren podskup od K^r.

Zatvoreni podskupovi od K^r su presjeci skupova nultočaka konačno mnogo polinoma. Neka je $q \in K[X_1, \dots, X_r]$ polinom stupnja k. Definiramo polinom $p \in K[X_0, X_1, \dots, X_r]$ tako da je pripadna funkcija sa K^{r+1} u K dana sa

$$p(x_0, x_1, \dots, x_r) = x_0^k q\left(\frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_r}{x_0}\right), \qquad (x_0, x_1, \dots, x_r) \in K^{r+1}.$$

Iz definicije je jasno da je p homogen polinom stupnja k i da su nultočke od p upravo one točke koje φ_0 preslikava u nultočke od q. Prema tome, totalni invers u odnosu na φ_0 zatvorenog skupa u K^r je zatvoren skup u U_0.

Time je dokazano da je $\varphi_0 : U_0 \to K^r$ homeomorfizam.

Treba još dokazati da φ_0 inducira izomorfizam među snopovima, odnosno, izomorfizam među strukturama $K-$prstenovanih prostora na U_0 i na K^r. Drugim riječima, treba dokazati da je za svaki otvoren podskup $W \subseteq K^r$ preslikavanje $g \mapsto g \circ \varphi_0$ izomorfizam algebre regularnih funkcija na W na algebru homogenih regularnih funkcija na $\varphi_0^{-1}(W)$. Preslikavanje $\psi_0 = \varphi_0 \circ \pi : \pi^{-1}(U_0) \to K^r$ dano je sa

$$\psi_0(x_0, x_1, \dots, x_r) = \left(\frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_r}{x_0}\right).$$

Već smo spomenuli da su koordinatne funkcije od ψ_0 regularne na $\pi^{-1}(U_0)$ i homogene stupnja 0. Odatle slijedi da je $g \mapsto g \circ \varphi_0$ unitalni homomorfizam $K-$algebri sa $\mathcal{O}(W)$ u algebru regularnih homogenih funkcija na $\varphi_0^{-1}(W)$. To je izomorfizam, jer se direktno provjerava da je

$$f \mapsto \tilde{f}, \qquad \tilde{f}(x_1, \dots, x_r) = f(1, x_1, \dots, x_r),$$

i lijevi i desni invers od $g \mapsto g \circ \varphi_0$.

Propozicija 5.4.2. *$K-$prstenovani prostor $P^r(K)$ je višestrukost.*

Dokaz: $\{U_0, U_1, \dots, U_r\}$ je otvoren pokrivač od $P^r(K)$, a prema propoziciji 5.4.1. svaki U_i je kao $K-$prstenovani prostor izomorfan sa K^r, dakle, svaki U_i je afini otvoren podskup od $P^r(K)$. Dakle, $P_r(K)$ je predvišestrukost. Nadalje, za bilo koje dvije točke $p, q \in P^r(K)$ očito možemo izabrati koordinatni sustav u K^{r+1} tako da neki od skupova U_i sadrži i p i q. Drugim riječima, svake dvije točke sadržane su u nekom afinom otvorenom podskupu od $P^r(K)$. Sada tvrdnja slijedi iz propozicije 5.3.8.

Projektivna višestrukost je višestrukost koja je izomorfna podvišestrukosti od $P^r(K)$ za neki $r \in \mathbb{Z}_+$. **Kvaziprojektivna višestrukost** je višestrukost koja je izomorfna otvorenom podskupu projektivne višestrukosti.

Afini prostor K^r izomorfan je otvorenom podskupu od $P^r(K)$. Dakle, K^r je kvaziprojektivna višestrukost. Nadalje, očito je svaka podvišestrukost kvaziprojektivne višestrukosti i sama kvaziprojektivna višestrukost. Prema tome, svaka je afina višestrukost kvaziprojektivna.

Istaknimo još i jedno važno svojstvo snopova $\mathcal{O}(0)-$modula $\mathcal{O}(k)$:

Propozicija 5.4.3. *Za $j, k \in \mathbb{Z}$ množenje definira izomorfizam*

$$\mathcal{O}(j) \otimes_{\mathcal{O}(0)} \mathcal{O}(k) \longrightarrow \mathcal{O}(j+k).$$

Dokaz: Preslikavanje inducirano množenjem $f \otimes g \mapsto fg$ je očito morfizam snopova $\mathcal{O}(0)-$modula sa $\mathcal{O}(j) \otimes_{\mathcal{O}(0)} \mathcal{O}(k)$ u $\mathcal{O}(j+k)$. Treba dokazati da je taj morfizam izomorfizam. Međutim, morfizam snopova je izomorfizam ako i samo ako je on lokalno izomorfizam. Dakle, dovoljno je dokazati da je to izomorfizam na U_i za svaki i. Međutim, $\mathcal{O}(j)|U_i$ (odnosno, $\mathcal{O}(k)|U_i$, $\mathcal{O}(j+k)|U_i$) je slobodan $\mathcal{O}(0)-$modul ranga 1 s generatorom x_i^j (odnosno, x_i^k, x_i^{j+k}). Budući da preslikavanje inducirano množenjem prevodi $x_i^j \otimes x_i^k$ u x_i^{j+k}, tvrdnja slijedi.

Napomenimo, da se snop $\mathcal{G}$ $\mathcal{F}-$modula na topološkom prostoru X, gdje je $\mathcal{F}$ snop $K-$algebri na X, zove **invertibilan** ako postoji snop $\mathcal{F}-$modula $\mathcal{H}$ takav da je $\mathcal{G} \otimes_{\mathcal{F}} \mathcal{H} \cong \mathcal{F}$. Tada se za snop $\mathcal{H}$, koji je također invertibilan, kaže da je invers snopa $\mathcal{G}$. Naravno, klase izomorfnih invertibilnih $\mathcal{F}-$modula čine komutativnu grupu u kojoj je jedinica klasa od $\mathcal{F}$.

Propozicija 5.4.3. ima kao neposrednu posljedicu:

Korolar 5.4.4. *Za svaki $k \in \mathbb{Z}$ snop $\mathcal{O}(k)$ na $P^r(K)$ je invertibilan i $\mathcal{O}(-k)$ je njegov invers.*

Kažemo da je **višestrukost** X **potpuna** ako je za svaku višestrukost Y projekcija $X \times Y \to Y$ zatvoreno preslikavanje, tj. projekcija na Y svakog zatvorenog podskupa od $X \times Y$ je zatvoren podskup od Y. To općenito nije tako. Npr. $\{(x, y) \in K \times K;\ xy = 1\}$ je očito zatvoren podskup od $K \times K = K^2$, ali njegova projekcija na drugu koordinatu je $K \setminus \{0\}$, a to očito nije zatvoren podskup od K. Dakle, afini prostor $K = K^1$ nije potpuna višestrukost.

Propozicija 5.4.5. *(a) Zatvorena podvišestrukost potpune višestrukosti je potpuna višestrukost.*

(b) Produkt dvije potpune višestrukosti je potpuna višestrukost.

(c) Neka je X potpuna višestrukost i neka je $\varphi : X \to Y$ morfizam u višestrukost Y. Tada je slika $\varphi(X)$ zatvorena podvišestrukost od Y. Nadalje, višestrukost $\varphi(X)$ je potpuna.

Skica dokaza: (a) Neka je X potpuna višestrukost, $Z \subseteq X$ njena zatvorena podvišestrukost i Y višestrukost. Iz aksioma separacije dokazuje se da je $Z \times Y$ zatvoren podskup višestrukosti $X \times Y$. Stoga je svaki zatvoren podskup od $Z \times Y$ ujedno zatvoren kao podskup od $X \times Y$, pa je zbog potpunosti višestrukosti X njegova projekcija na Y zatvoren podskup od Y. Dakle, Z je potpuna višestrukost.

(b) Neka su X i Y potpune višestrukosti i Z višestrukost. Neka je F zatvoren podskup višestrukosti $(X \times Y) \times Z = X \times (Y \times Z)$. Njegova je projekcija F' na $Y \times Z$ zatvoren podskup od $Y \times Z$, jer je X potpuna višestrukost. Nadalje, projekcija F'' od F' na Z je zatvoren podskup od Z, jer je Y potpuna višestrukost. Međutim, F'' je upravo projekcija od $F \subseteq (X \times Y) \times Z$ na Z. Kako je višestrukost Z bila proizvoljna, zaključujemo da je produkt $X \times Y$ potpuna višestrukost.

(*c*) Neka je

$$\Gamma(\varphi) = \{(x, \varphi(x));\ x \in X\}$$

graf morfizma φ. Prema tvrdnji (*a*) propozicije 5.3.5. $\Gamma(\varphi)$ je zatvoren podskup od $X \times Y$. Stoga je njegova projekcija na Y zatvoren podskup od Y. Međutim, ta je projekcija upravo slika $\varphi(X)$ morfizma φ.

Neka su sada Z proizvoljna višestrukost, F zatvoren podskup od $\varphi(X) \times Z$ i F' njegova projekcija na Z. Promatrajmo projekcije

$$pr_{13} : X \times Y \times Z \to X \times Z, \qquad pr_{23} : X \times Y \times Z \to Y \times Z.$$

Stavimo

$$F'' = pr_{23}^{-1}(F) \cap (\Gamma(\varphi) \times Z).$$

Kako je $\varphi(X)$ zatvoren podskup od Y, a F je zatvoren kao podskup od $\varphi(X) \times Z$, F je zatvoren kao podskup od $Y \times Z$. Dakle, $pr_{23}^{-1}(F)$ je zatvoren podskup od $X \times Y \times Z$, pa slijedi da je F'' zatvoren podskup od $\Gamma(\varphi) \times Z$. Preslikavanje $x \mapsto (x, \varphi(x))$ je izomorfizam višestrukosti X na graf $\Gamma(\varphi)$ morfizma φ, pa slijedi da je restrikcija $pr_{13}|\Gamma(\varphi) \times Z$ izomorfizam sa $\Gamma(\varphi) \times Z$ na $X \times Z$. Prema tgome, $pr_{13}(F'')$ je zatvoren podskup od $X \times Z$. Kako je F' upravo projekcija skupa $\prime_{13}(F'')$ na Z, i kako je X potpuna višestrukost, zaključujemo da je F' zatvoren podskup od Z. Time je dokazano da je višestrukost $\varphi(X)$ potpuna.

Korolar 5.4.6. *Potpuna afina višestrukost je konačan skup.*

Dokaz: Pretpostavimo da je afina višestrukost X potpuna i ireducibilna. Za $f \in K[X]$ prema tvrdnji (*c*) propozicije 5.4.5. $f(X)$ je ireducibilan zatvoren podskup od K koji je potpuna višestrukost. Primijetili smo da K nije potpuna višestrukost, pa slijedi da je $f(X) \neq K$. Ostali zatvoreni podskupovi od K su konačni skupovi, a kako je višestrukost $f(X)$ ireducibilna, slijedi da je $f(X)$ jednočlan skup. To znači da je $K[X] = K$, dakle, višestrukost X je jednočlan skup. Odatle slijedi tvrdnja, budući da je svaka višestrukost unija konačno mnogo njenih ireducibilnih komponenata.

Teorem 5.4.7. *Svaka projektivna višestrukost je potpuna.*

Skica dokaza: Prema tvrdnji (*a*) propozicije 5.4.5. dovoljno je dokazati da je projektivni prostor $P^r(K)$ potpuna višestrukost, odnosno, da je projekcija $p : P^r(K) \times Y \to Y$ zatvoreno preslikavanje za svaku višestrukost Y. Kako je svaka višestrukost unija konačno mnogo afinih otvorenih podskupova, dokaz se svodi na slučaj kad je Y ireducibilna afina višestrukost. Stavimo tada $\mathcal{A} = K[Y]$ i $\mathcal{S} = \mathcal{A}[T_0, \ldots, T_r]$. Tada $\mathcal{S}$ možemo promatrati kao algebru funkcija na $K^{r+1} \times Y$. Ako je $\mathcal{I}$ homogeni ideal u $\mathcal{S}$, tj. ideal generiran homogenim elementima, stavimo

$$\mathcal{V}^*(\mathcal{I}) = \{([x], y);\ x \in K^{r+1} \setminus \{0\},\ y \in Y,\ f(x, y) = 0\ \forall f \in \mathcal{I}\};$$

pri tome $[x]$ označava točku iz $P^r(K)$ (tj. $1-$dimenzionalni potprostor od K^{r+1}) određenu sa $x \in K^{r+1} \setminus \{0\}$. Pokazuje se da su zatvoreni podskupovi od $P^r(K) \times Y$ upravo skupovi oblika $\mathcal{V}^*(\mathcal{I})$, da je $\mathcal{V}^*(\mathcal{I}) = \emptyset$ ako i samo ako postoji $h \in \mathbb{N}$ takav da je $T_i^h \in \mathcal{I}$ za $i = 0, \ldots, n$, i da je $\mathcal{V}^*(\mathcal{I})$ ireducibilan ako i samo ako je radikal $\sqrt{\mathcal{I}}$ ideala $\mathcal{I}$ prost ideal.

Dakle, treba dokazati da je $p(\mathcal{V}^*(\mathcal{I}))$ zatvoren podskup od Y za svaki pravi prost homogeni ideal $\mathcal{I}$ u $\mathcal{A}[T_0, \ldots, T_r]$, a možemo pretpostaviti i da je $\mathcal{I} \cap \mathcal{A} = \{0\}$. Ustvari tada je $p(\mathcal{V}^*(\mathcal{I})) = Y$, tj. za svaku točku $y \in Y$ postoji točka $[x] \in P^r(K)$ takva da je $([x], y) \in \mathcal{V}^*(\mathcal{I})$. Da to dokažemo, označimo sa $\mathcal{M}$ maksimalan ideal u $\mathcal{A} = K[Y]$ svih funkcija kojima je y nultočka. Tada je $\mathcal{J} = \mathcal{M}\mathcal{S} + \mathcal{I}$ pravi homogeni ideal u $\mathcal{S}$ i treba dokazati da je $\mathcal{V}^*(\mathcal{J}) \neq \emptyset$. Pretpostavimo da je $\mathcal{V}^*(\mathcal{J}) = \emptyset$. Tada postoji $h \in \mathbb{N}$ takav da je $T_i^h \in \mathcal{J}$ za $i = 0, \ldots, r$. Odatle slijedi da za neki $\ell \in \mathbb{N}$ vrijedi $\mathcal{S}^\ell = \mathcal{A}^\ell[T_0, \ldots, T_r] \subseteq \mathcal{J}$. Stavimo $\mathcal{N} = \mathcal{S}^\ell / \mathcal{S}^\ell \cap \mathcal{I}$. Tada slijedi $\mathcal{M}\mathcal{N} = \mathcal{N}$, a odatle je zbog Nakayamine leme $\mathcal{N} = \{0\}$. Odatle slijedi da je $\mathcal{V}^*(\mathcal{I}) = \emptyset$ suprotno pretpostavci. Ova kontradikcija dokazuje da je $\mathcal{V}^*(\mathcal{J}) \neq \emptyset$.

Ako su $X \subseteq P^r(K)$ i $Y \subseteq P^s(K)$ projektivne višestrukosti, njihov je produkt $X \times Y$ višestrukost čiji se skup može identificirati s Kartezijevim produktom skupova X i Y. Međutim, taj se skup ne može jednostavno identificirati sa zatvorenim podskupom nekog projektivnog prostora, pa se direktno ne vidi da je i $X \times Y$ projektivna višestrukost. Štoviše, ne vidi se čak niti da je višetrukost $P^r(K) \times P^s(K)$ projektivna. To ipak jest tako.

Za $(x_0, \ldots, x_n) \in K^{n+1} \setminus \{0\}$ označimo sa $[x_0, \ldots, x_n] \in P^n(K)$ pripadni element projektivnog prostora, tj. 1−dimenzionalni potprostor od K^{n+1} koji sadrži točku $(x_0, \ldots, x_n)$. Definiramo sada $\varphi : P^r(K) \times P^s(K) \to P^q(K)$, gdje je $q = (r+1)(s+1) - 1 = rs + r + s$, ovako:

$$\varphi([x_0, \ldots, x_r], [y_0, \ldots, y_s]) = [x_0y_0, \ldots, x_0y_s, x_1y_0, \ldots, x_1y_s, \ldots\ldots, x_ry_0, \ldots, x_ry_s].$$

Definicija je smislena, tj. ne ovisi o predstavnicima točaka projektivnih prostora. Doista, ako su $(x_0, \ldots, x_r) \sim (x'_0, \ldots, x'_r)$ i $(y_0, \ldots, y_s) \sim (y'_0, \ldots, y'_s)$, onda postoje $\lambda, \mu \in K \setminus \{0\}$ takvi da je $x'_i = \lambda x_i$ za $0 \leq i \leq r$ i $y'_j = \mu y_j$ za $0 \leq j \leq s$; tada je $\lambda\mu \neq 0$ i $x'_i y'_j = \lambda\mu x_i y_j$ za sve parove (i, j).

Propozicija 5.4.8. *Preslikavanje $\varphi : P^r(K) \times P^s(K) \to P^{rs+r+s}(K)$ je morfizam višestrukosti, njegova slika S je zatvorena podvišestrukost od $P^{rs+r+s}(K)$ i φ inducira izomorfizam sa $P^r(K) \times P^s(K)$ na S.*

Dokaz: Neka je U_i afini otvoren podskup od $P^r(K)$ definiran sa $x_i \neq 0$ i, analogno, V_j afini otvoren podskup od $P^s(K)$ definiran sa $y_j \neq 0$. Nadalje, afine koordinate u $K^{rs+r+s+1} = = K^{(r+1)(s+1)}$ označimo sa $z_{(i,j)}$, $0 \leq i \leq r$, $0 \leq j \leq s$, i neka je W_{ij} afini otvoren podskup od $P^{rs+r+s}(K)$ definiran sa $z_{(i,j)} \neq 0$. Identificiramo li U_i sa K^r, V_j sa K^s i W_{ij} sa K^{rs+r+s} na uobičajen način, odmah se vidi da je restrikcija $\varphi|U_i \times V_j$ morfizam sa $U_i \times V_j$ u W_{ij}. Odatle slijedi da je $\varphi : P^r(K) \times P^s(K) \to P^{rs+r+s}(K)$ morfizam. Budući da je prema teoremu 5.4.7. i prema tvrdnji (b) propozicije 5.4.5. višestrukost $P^r(K) \times P^s(K)$ potpuna, iz tvrdnje (c) iste propozicije slijedi da je slika S morfizma φ zatvorena podvišestrukost od $P^{rs+r+s}(K)$. Napokon, da φ inducira izomorfizam višestrukosti $P^r(K) \times P^s(K)$ na višestrukost S slijedi iz sljedeće tri činjenice koje se direktno provjeravaju:

- $\varphi^{-1}(W_{ij}) = U_i \times V_j$.
- Restrikcija φ na svaki $U_i \times V_j$ je injektivna, pa je morfizam φ injektivan.
- Neka je $\tau : W_{ij} \to U_i \times V_j$ preslikavanje definirano sa

  $\tau([z_{(0,0)}, \ldots, z_{(0,s)}, z_{(1,0)}, \ldots, z_{(1,s)}, \ldots\ldots, z_{(r,0)}, \ldots, z_{(r,s)}]) = ([z_{(0,j)}, \ldots, z_{(r,j)}], [z_{(i,0)}, \ldots, z_{(i,s)}])$.

  Tada je τ morfizam takav da je $\tau(\varphi([x], [y]) = ([x], [y])$ za $[x] \in U_i$ i $[y] \in V_j$.

Odatle neposredno slijedi:

Korolar 5.4.9. *Produkt dviju projektivnih višestrukosti je projektivna višestrukost.*

Fiksirajmo sada $n \in \mathbb{N}$. Za $0 \leq r \leq n$ označimo sa E_r vektorski prostor $\bigwedge^r(K^n)$. Ako je $\{e_1, \ldots, e_n\}$ kanonska baza od K^n, kanonsku bazu od E_r čini $N = \binom{n}{r}$ vektora

$$e_H = e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_r},$$

za bilo koji $r-$člani podskup $H = \{i_1, \ldots, i_r\} \subseteq \{1, \ldots, n\}$, gdje su $i_1 < \cdots < i_r$. Tada je $E_0 = K$ i $E_1 = K^n$, a podrazumijevamo da je $E_r = \{0\}$ za $r > n$.

Ako je V potprostor od K^n, onda se $\bigwedge^r(V)$ kanonski identificira s potprostorom od $E_r = \bigwedge^r(K^n)$. Označimo sa $\mathcal{S}_{n,r}$ skup svih $r-$dimenzionalnih potprostora od K^n. Ako je $V \in \mathcal{S}_{n,r}$, onda je $\bigwedge^r(V)$ jednodimenzionalan potprostor od E_r, dakle, predstavlja točku u projektivnom prostoru $P(E_r) = P^{N-1}(K)$. Dakle, imamo preslikavanje $\psi : \mathcal{S}_{n,r} \to P^{N-1}(K)$. Označimo sa $G_{n,r}(K)$ sliku tog preslikavanja. Uočimo da je preslikavanje ψ injektivno. Doista, za potprostore $V, W \in \mathcal{S}_{n,r}$ možemo izabrati bazu $\{v_1, \ldots, v_n\}$ tako da je $\{v_1, \ldots, v_r\}$ baza od V, da je $\{v_s, \ldots, v_r\}$ baza od $V \cap W$ i da je $\{v_s, \ldots, v_{s+r-1}\}$ baza od W. Sada pretpostavka $\psi(V) = \psi(W)$ povlači da su vektori $v_1 \wedge \cdots \wedge v_r$ i $v_s \wedge \cdots \wedge v_{s+r-1}$ proporcionalni. No to je moguće samo ako je $s = 1$, odnosno, ako je $V = W$.

Propozicija 5.4.10. *$G_{n,r}(K)$ je zatvoren podskup od $P^{N-1}(K)$.*

Dokaz: Za $r-$člani podskup H od $\{1, \ldots, n\}$ neka je W_H afini otvoren podskup od $P^{N-1}(K)$ sastavljen od svih pravaca u K^N određenih točkama iz $K^N \setminus \{0\}$ čija je koordinata uz e_H različita od 0. Tada N skupova W_H pokriva $P^{N-1}(K)$, dakle, dovoljno je dokazati da je presjek $G_{n,r} \cap W_H$ zatvoren u W_H za svaki H.

Zbog određenosti možemo uzeti da je $H = \{1, \ldots, r\}$. Pisat ćemo $W = W_H$. Neka su

$$X = span\,\{e_1, \ldots, e_r\} \qquad \text{i} \qquad Y = span\,\{e_{r+1}, \ldots, e_n\}$$

i neka je p projektor K^n na X duž Y, tj. u odnosu na rastav $K^n = X \dotplus Y$. Ako je $\{v_1, \ldots, v_r\}$ baza potprostora $V \in \mathcal{S}_{n,r}$, pišemo $v_i = p(v_i) + y_i$ za neke $y_i \in Y$. Tada imamo

$$\psi(V) \in W \qquad \Longleftrightarrow \qquad p(v_1) \wedge \cdots \wedge p(v_r) \neq 0,$$

a to je ekvivalentno zahtjevu da je $p|V$ izomorfizam sa V na X. Dakle, ako je $\psi(V) \in W$, onda V ima jedinstvenu bazu $\{v_1, \ldots, v_r\}$ oblika

$$v_i = e_i + \sum_{j=r+1}^{n} \alpha_{ij} e_j = e_i + u_i, \qquad 1 \leq i \leq r, \qquad \alpha_{ij} \in K. \tag{5.1}$$

Tada je

$$v_1 \wedge \cdots \wedge v_r = e_1 \wedge \cdots \wedge e_r + \sum_{i=1}^{r} e_1 \wedge \cdots \wedge u_i \wedge \cdots \wedge e_r + w,$$

gdje je w linearna kombinacija vektora e_H takvih da H sadrži barem dva element iz $\{r+1, \ldots, n\}$. Pri tome je koeficijent takvog vektora e_H polinom P_H u varijablama α_{ij} i taj polinom ne ovisi o V. Napokon, imamo

$$e_1 \wedge \cdots \wedge u_i \wedge \cdots \wedge e_r = \sum_{j=r+1}^{n} \varepsilon_{ij} \alpha_{ij} (e_1 \wedge \cdots \wedge e_{i-1} \wedge e_{i+1} \wedge \cdots \wedge e_r \wedge e_j,$$

gdje su $\varepsilon_{ij} \in \{-1, 1\}$. Dakle, skalari α_{ij} potpuno određuju rastav vektora $v_1 \wedge \cdots \wedge v_r$ u bazi $\{e_H;\ H \subseteq \{1, \ldots, n\},\ |H| = r\}$ prostora E_r.

Obratno, uzmimo da je zadano $r(n-r)$ skalara α_{ij} i definiramo vektore $v_1, \ldots, v_r$ formulama (5.1). Tada potprostor V razapet vektorima $v_1, \ldots, v_r$ zadovoljava $V \in \mathcal{S}_{n,r}$ i $\psi(V) \in W$.

Identificiramo li W sa K^{N-1}, dokazano pokazuje da je presjek $W \cap G_{n,r}$ izomorfan grafu morfizma

$$K^{r(n-r)} \longrightarrow K^{N-r(n-r)-1}, \qquad (\alpha_{ij}) \mapsto (P_H(\alpha_{ij}))\,.$$

Dakle, presjek $W \cap G_{n,r}$ je zatvoren u W.

Zatvorena podvišestrukost $G_{n,r}$ projektivnog prostora $P^{N-1}(K)$ zove se **Grassmannova višestrukost** $r-$dimenzionalnih potprostora od K^n. Primijetimo da prethodni dokaz pokazuje da je $U_H = W_H \cap G_{n,r}$ afini otvoren podskup od $G_{n,r}$ koji je izomorfan sa $K^{r(n-r)}$ i ti skupovi pokrivaju $G_{n,r}$.

Propozicija 5.4.11. *Grassmannova višestrukost $G_{n,r}$ je ireducibilna.*

Dokaz: Budući da su izomorfni sa $K^{r(n-r)}$, afini otvoreni podskupovi U_H su ireducibilni topološki prostori. Budući da ti skupovi pokrivaju $G_{n,r}$, za ireducibilnost $G_{n,r}$ dovoljno je dokazati da je $U_H \cap U_J \neq \emptyset$ ako je $H \neq J$. Stavimo

$$H \cap J = \{i_1, \ldots, i_s\}, \qquad H \setminus J = \{j_1, \ldots, j_{r-s}\}, \qquad J \setminus H = \{k_1, \ldots, k_{r-s}\},$$

i neka je potprostor $V \in \mathcal{S}_{n,r}$ definiran sa

$$V = Ke_{i_1} \dotplus \cdots \dotplus Ke_{i_r} \dotplus K(e_{j_1} + e_{k_1}) \dotplus \cdots \dotplus K(e_{j_{r-s}} + e_{k_{r-s}}).$$

Iz dokaza propozicije 5.4.10. vidi se da je tada $\psi(V) \in U_H \cap U_J$.

Zastava u K^n je lanac potprostora

$$\{0\} = V_0 \subseteq V_1 \subseteq \cdots \subseteq V_n = K^n$$

takvih da je $\dim V_j = j$ za $0 \leq j \leq n$. Označimo sa $\mathcal{F}_n$ skup svih zastava u K^n. Tada se $\mathcal{F}_n$ prirodno identificira s podskupom projektivne višestrukosti $G = G_{n,1} \times G_{n,2} \times \cdots \times G_{n,n}$. Slično dokazu propozicije 5.4.10. dokazuje se da je taj podskup od G zatvoren, dakle, $\mathcal{F}_n$ ima strukturu projektivne višestrukosti. I ta je višestrukost ireducibilna. Zove se **višestrukost zastava** u K^n.

5.5 Dimenzija

Ako je E skup, **lanac podskupova duljine** n u E je striktno rastući niz podskupova

$$E_0 \subsetneq E_1 \subsetneq \cdots\cdots \subsetneq E_n.$$

U prvom odjeljku definirali smo **(kombinatornu) dimenziju** $\dim X$ nepraznog topološkog prostora X kao supremum u $\mathbb{Z}_+ \cup \{+\infty\}$ duljina lanaca u X sastavljenih od zatvorenih ireducibilnih podskupova od X. Nadalje, definirali smo **dimenziju** od X **u točki** $x \in X$ ovako:

$$\dim_x X = \inf \{\dim U;\ U \subseteq X \text{ otvoren},\ x \in U\}.$$

Prema iskazanoj propoziciji 5.1.13. funkcija $x \mapsto \dim_x X$ je odozgo poluneprekidna, odnosno, $\{x \in X;\ \dim_x X \geq n\}$ je otvoren podskup od X za svaki $n \in \mathbb{Z}_+$, vrijedi

$$\dim X = \sup \{\dim_x X;\ x \in X\},$$

i ako X ima konačno mnogo ireducibilnih komponenata $X_1, \ldots, X_m$, onda je

$$\dim X = \max \{\dim X_1, \ldots, \dim X_m\}.$$

Neka svojstva kombinatorne dimenzije (iz kojih jednostavno slijede tvrdnje propozicije 5.1.13.) sadržana su u sljedećoj propoziciji:

Propozicija 5.5.1. *Neka je X neprazan topološki prostor.*

(a) *Za $\emptyset \neq Y \subseteq X$ vrijedi* $\dim Y \leq \dim X$.

(b) *Ako je $X = X_1 \cup \cdots \cup X_m$, gdje su $X_1, \ldots, X_m$ neprazni zatvoreni podskupovi od X, onda je*

$$\dim X = \max \{\dim X_1, \ldots, \dim X_m\}.$$

(c) *Ako je $X = X_1 \cup \cdots \cup X_m$, gdje su $X_1, \ldots, X_m$ neprazni otvoreni podskupovi od X, onda je*

$$\dim X = \max \{\dim X_1, \ldots, \dim X_m\}.$$

(d) *Ako je prostor X ireducibilan i* $\dim X < +\infty$, *i ako je Y neprazan zatvoren podskup od X takav da je* $\dim Y = \dim X$, *onda je $Y = X$.*

Dokaz: (a) Neka je $Y_0 \subsetneq Y_1 \subsetneq \cdots \subsetneq Y_n$ lanac ireducibilnih zatvorenih podskupova od Y. Prema tvrdnji (b) propozicije 5.1.2. zatvarač $\overline{Y}_i$ od Y_i u X je ireducibilan. Nadalje, budući da su Y_i zatvoreni kao podskupovi od Y, vrijedi $Y_i = \overline{Y}_i \cap Y$. Odatle slijedi da je $\overline{Y}_{i-1} \subsetneq \overline{Y}_i$ za $i = 1, \ldots, n$. Prema tome, $n \leq \dim X$, pa slijedi $\dim Y \leq \dim X$.

(b) Neka je $Z_0 \subsetneq Z_1 \subsetneq \cdots \subsetneq Z_n$ lanac zatvorenih ireducibilnih podskupova od X. Budući da je Z_n ireducibilan i vrijedi $Z_n = (Z_n \cap X_1) \cup \cdots \cup (Z_n \cap X_m)$, postoji $k \in \{1, \ldots, m\}$ takav da je $Z_n \cap X_k = Z_n$, odnosno, $Z_n \subseteq X_k$. Odatle slijedi da je $\dim X_k \geq n$. Prema tome, vrijedi $\dim X_k \geq \dim X$. S druge strane, prema tvrdnji (a) je $\dim X_j \leq \dim X$ za svaki $j \in \{1, \ldots, m\}$. Odatle tvrdnja slijedi.

(c) Neka je ponovo $Z_0 \subsetneq Z_1 \subsetneq \cdots \subsetneq Z_n$ lanac zatvorenih ireducibilnih podskupova od X. Za neki $k \in \{1, \ldots, m\}$ vrijedi $Z_0 \cap X_k \neq \emptyset$, dakle, $Z_i \cap X_k \neq \emptyset$ za $i = 0, 1, \ldots, n$. Prema propoziciji 5.1.2. $X_k \cap Z_i$ je neprazan otvoren ireducibilan podskup od Z_i za $i = 0, 1, \ldots, n$. Zbog ireducibilnosti topološkog prostora Z_i podskup $Z_i \cap X_k$ je gust u Z_i, odnosno, $\overline{Z_i \cap X_k} = Z_i$ za svaki $i = 0, 1, \dots, n$. Odatle slijedi da je $Z_{i-1} \cap X_k \subsetneq Z_i \cap X_k$ za $i = 1, \dots, n$. Prema tome,

$$Z_0 \cap X_k \subsetneq Z_1 \cap X_k \subsetneq \cdots\cdots \subsetneq Z_n \cap X_k$$

je lanac ireducibilnih zatvorenih podskupova od X_k. Stoga je $\dim X_k \geq n$, pa slijedi da je $\dim X_k \geq \dim X$. No po tvrdnji (a) je $\dim X_j \leq \dim X$ za svaki $j = 1, \dots, m$, pa tvrdnja slijedi.

(d) Neka je $n = \dim Y$ i neka je

$$Y_0 \subsetneq Y_1 \subsetneq \cdots\cdots \subsetneq Y_n$$

lanac ireducibilnih zatvorenih podskupova od Y. Ako je $Y \neq X$, onda je

$$Y_0 \subsetneq Y_1 \subsetneq \cdots\cdots \subsetneq Y_n \subsetneq X$$

lanac ireducibilnih zatvorenih podskupova od X duljine $n + 1$. Dakle, $\dim X > \dim Y$.

Za neprazan konačnodimenzionalan topološki prostor X i za njegov neprazan podskup Y definiramo **kodimenziju** od Y u X :

$$\mathrm{codim}_X Y = \dim X - \dim Y.$$

Za komutativan unitalan prsten $\mathcal{A}$ **lanac prostih ideala duljine** n je niz prostih ideala

$$\mathfrak{p}_0 \subsetneq \mathfrak{p}_1 \subsetneq \cdots\cdots \subsetneq \mathfrak{p}_n.$$

(Krullova) dimenzija prstena $\mathcal{A}$ je supremum $\dim \mathcal{A} \in \mathbb{Z}_+ \cup \{+\infty\}$ duljina lanaca prostih ideala u $\mathcal{A}$. Dakle, $\dim \mathcal{A} = 0$ ako i samo ako su svi prosti ideali u $\mathcal{A}$ maksimalni ideali u $\mathcal{A}$. Posebno, ako je $\mathcal{A}$ polje, onda je $\dim \mathcal{A} = 0$.

Za unitalan komutativan prsten $\mathcal{A}$ sa $\mathrm{Spec}(\mathcal{A})$ označavamo skup svih prostih ideala u $\mathcal{A}$, a sa $\mathrm{Spec}_m(\mathcal{A})$ skup svih minimalnih elemenata od $\mathrm{Spec}(\mathcal{A})$.

Neka je sada $\mathcal{A}$ komutativna unitalna konačno generirana $K-$algebra i neka je $\{x_1, \dots, x_n\}$ neki skup njenih generatora. Tada je algebra $\mathcal{A}$ izomorfna kvocijentu algebre polinoma $K[T_1, \dots, T_n]$, dakle, $\mathcal{A}$ je Noetherin prsten. Ako je k tome $\mathcal{A}$ integralna domena i $\mathrm{Frac}(\mathcal{A})$ njeno polje kvocijenata, onda skup $\{x_1, \dots, x_n\}$ sadrži bazu transcendentnosti polja $\mathrm{Frac}(\mathcal{A})$ nad potpoljem K. Prema tome, $\mathrm{tr\,deg}_K \mathrm{Frac}(\mathcal{A}) \leq n$.

Propozicija 5.5.2. *Neka je $\mathcal{A}$ konačno generirana komutativna unitalna $K-$algebra i neka su $\mathfrak{p} \subsetneq \mathfrak{q}$ prosti ideali u $\mathcal{A}$. Tada je*

$$\mathrm{tr\,deg}_K \mathrm{Frac}(\mathcal{A}/\mathfrak{q}) < \mathrm{tr\,deg}_K \mathrm{Frac}(\mathcal{A}/\mathfrak{p}).$$

Dokaz: Zamijenimo li $\mathcal{A}$ sa $\mathcal{A}/\mathfrak{p}$, možemo pretpostaviti da je $\mathcal{A}$ integralna domena, da je $\mathfrak{p} = \{0\}$ i da je $\mathfrak{q} \neq \{0\}$ prost ideal u $\mathcal{A}$. Neka je $\pi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}/\mathfrak{q}$ kanonski epimorfizam. Nadalje, neka je $\{y_1, \dots, y_r\} \subseteq \mathcal{A}/\mathfrak{q}$ baza transcendentnosti polja $\mathrm{Frac}(\mathcal{A}/\mathfrak{q})$ nad poljem K. Za svaki $i \in \{1, \dots, r\}$ izaberimo $x_i \in \mathcal{A}$ tako da je $y_i = \pi(x_i)$. Tada su $x_1, \dots, x_r$ algebarski nezavisni nad K, pa su sadržani u nekoj bazi transcendentnosti od $\mathcal{A}$ nad K, što znači da je

$$r = \mathrm{tr\,deg}_K \mathrm{Frac}(\mathcal{A}/\mathfrak{q}) \leq \mathrm{tr\,deg}_K \mathrm{Frac}(\mathcal{A}).$$

Pretpostavimo da vrijedi znak jednakosti. To znači da je $\{x_1, \dots, x_r\}$ baza transcendentnosti od $\mathrm{Frac}(\mathcal{A})$ nad K. Epimorfizam π inducira izomorfizam sa $K[x_1, \dots, x_r]$ na $K[y_1, \dots, y_r]$. Nadalje, svaki element polja $\mathrm{Frac}(\mathcal{A})$ je algebarski nad poljem $K(x_1, \ldots, x_r)$. Posebno, svaki $a \in \mathfrak{q}$ je algebarski nad $K(x_1, \ldots, x_r)$, pa postoje polinomi $P_0, \ldots, P_n \in K[T_1, \ldots, T_r]$ takvi da je $P_0 \neq 0$ i da je

$$P_0(x_1, \ldots, x_r) + P_1(x_1, \ldots, x_r)a + \cdots + P_n(x_1, \ldots, x_r)a^n = 0.$$

Primijenimo li π na tu jednakost, slijedi $P_0(y_1, \ldots, y_r) = 0$, a to je suprotno algebarskoj nezavisnosti elemenata $y_1, \ldots, y_r$. Ova kontradikcija dokazuje tvrdnju.

Odatle neposredno slijedi:

Korolar 5.5.3. *Za konačno generiranu komutativnu unitalnu $K-$algebru $\mathcal{A}$ vrijedi*

$$\dim \mathcal{A} \leq \max\{\mathrm{tr\,deg}_K \mathrm{Frac}(\mathcal{A}/\mathfrak{p});\ \mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(\mathcal{A})\} = \max\{\mathrm{tr\,deg}_K \mathrm{Frac}(\mathcal{A}/\mathfrak{p});\ \mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}_m(\mathcal{A})\}.$$

Korolar 5.5.4. *Vrijedi* $\dim K[T_1, \ldots, T_n] = \mathrm{tr\,deg}_K K(T_1, \ldots, T_n) = n.$

Dokaz: Neka je $\mathcal{A} = K[T_1, \ldots, T_n]$. Budući da je $\{T_1, \ldots, T_n\}$ baza transcendentnosti polja $K(T_1, \ldots, T_n)$ nad poljem K, i budući da je $\{0\}$ prost ideal u $\mathcal{A}$, prema korolaru 5.5.3. vrijedi

$$\dim \mathcal{A} \leq \mathrm{tr\,deg}_K K(T_1, \ldots, T_n) = n.$$

S druge strane, neka je $\mathfrak{p}_i$ ideal u $\mathcal{A}$ generiran sa $T_1, \ldots, T_i$. Tada je kvocijentna algebra $\mathcal{A}/\mathfrak{p}_i$ izomorfna algebri $K[T_{i+1}, \ldots, T_n]$, dakle, to je integralna domena. Slijedi da su $\mathfrak{p}_i$ prosti ideali u $\mathcal{A}$. Dakle, imamo lanac prostih ideala u $\mathcal{A}$

$$\{0\} \subsetneq \mathfrak{p}_1 \subsetneq \cdots\cdots \subsetneq \mathfrak{p}_n.$$

To znači da je $\dim \mathcal{A} \geq n$.

Bez dokaza navodimo slabu i jaku verziju **Noetherinog teorema o normalizaciji**:

Teorem 5.5.5. *Neka su $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{A} = K[T_1, \ldots, T_n]$ i $\mathfrak{a}$ pravi ideal u $\mathcal{A}$. Postoje $x_1, \ldots, x_n \in \mathcal{A}$ koji su algebarski nezavisni nad K i takvi da vrijedi:*

(a) *Prsten $\mathcal{A}$ je cio nad potprstenom $\mathcal{B} = K[x_1, \ldots, x_n]$.*

(b) *Ako je $\mathfrak{a} \neq \{0\}$, onda postoji $s \in \{1, \ldots, n\}$ takav da je ideal $\mathfrak{a} \cap \mathcal{B}$ u $\mathcal{B}$ generiran sa $x_1, \ldots, x_s$.*

Teorem 5.5.6. *Neka je $\mathcal{A}$ konačno generirana $K-$algebra i neka je $\mathfrak{a}_1 \subsetneq \mathfrak{a}_2 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{a}_p \neq \mathcal{A}$ lanac ideala u $\mathcal{A}$. Postoje elementi $x_1, \ldots, x_n \in \mathcal{A}$ algebarski nezavisni u $\mathcal{A}$, tj. preslikavanje $P \mapsto P(x_1, \ldots, x_n)$ je izomorfizam algebre $K[T_1, \ldots, T_n]$ na podalgebru $\mathcal{B} = K[x_1, \ldots, x_n]$ od $\mathcal{A}$, takvi da vrijedi:*

(a) *Prsten $\mathcal{A}$ je cio nad potprstenom $\mathcal{B}$ i* $\dim \mathcal{A} = n$.

(b) *Postoje cijeli brojevi $0 \leq h(1) \leq \cdots \leq h(p)$ takvi da je $\mathcal{B} \cap \mathfrak{a}_k = \{0\}$ ako je $h(k) = 0$, a ako je $h(k) > 0$, onda je $\mathcal{B} \cap \mathfrak{a}_k$ ideal u $\mathcal{B}$ generirann sa $\{x_1, \ldots, x_{h(k)}\}$.*

Odatle slijedi pojačanje korolara 5.5.3.:

Korolar 5.5.7. *Za konačno generiranu komutativnu unitalnu $K-$algebru $\mathcal{A}$ vrijedi*

$$\dim \mathcal{A} = \max\{\mathrm{tr\,deg}_K \mathrm{Frac}(\mathcal{A}/\mathfrak{p});\ \mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(\mathcal{A})\} = \max\{\mathrm{tr\,deg}_K \mathrm{Frac}(\mathcal{A}/\mathfrak{p});\ \mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}_m(\mathcal{A})\}.$$

Posebno, ako je $\mathcal{A}$ integralna domena, onda je $\dim \mathcal{A} = \mathrm{tr\,deg}_K \mathrm{Frac}(\mathcal{A})$.

Dokaz: Prema teoremu 5.5.6. prsten $\mathcal{A}$ je cio nad polinomijalnom algebrom $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ i vrijedi $\dim \mathcal{B} = \dim \mathcal{A}$. Nadalje, očito je tada kvocijentni prsten $\mathcal{A}/\mathfrak{p}$ cio nad $\mathcal{B}/(\mathcal{B} \cap \mathfrak{p})$ za svaki ideal $\mathfrak{p}$ u $\mathcal{A}$ i posebno za svaki prost ideal $\mathfrak{p}$. Prema tome, vrijedi

$$\operatorname{tr}\deg_K \operatorname{Frac}(\mathcal{A}/\mathfrak{p}) = \operatorname{tr}\deg_K \operatorname{Frac}(\mathcal{B}/(\mathcal{B} \cap \mathfrak{p})) \leq \operatorname{tr}\deg_K \operatorname{Frac}(\mathcal{B}) \qquad \forall \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(\mathcal{A}).$$

Sada prva tvrdnja slijedi iz korolara 5.5.3. i 5.5.4.

Ako je $\mathcal{A}$ integralna domena, tada je $\{0\}$ jedini element od $\operatorname{Spec}_m(\mathcal{A})$, pa slijedi da je $\dim \mathcal{A} = \operatorname{tr}\deg_K \operatorname{Frac}(\mathcal{A})$.

Propozicija 5.5.8. *Neka je X afina višestrukost i $\mathcal{A}[X]$ njena afina algebra.*

(a) *Vrijedi* $\dim X = \dim \mathcal{A}[X]$.

(b) *Ako je višestrukost X ireducibilna, onda je* $\dim X = \operatorname{tr}\deg_K \operatorname{Frac}(\mathcal{A}[X])$.

Dokaz: Tvrdnja (a) slijedi iz činjenice da je $\mathfrak{p} \mapsto \mathcal{V}(\mathfrak{p})$ bijekcija sa skupa svih prostih ideala u $\mathcal{A}[X]$ na skup svih nepraznih zatvorenih ireducibilnih podskupova od X i vrijedi $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{p}'$ ako i samo ako je $\mathcal{V}(\mathfrak{p}') \subseteq \mathcal{V}(\mathfrak{p})$.

Ako je višestrukost X ireducibilna, onda je algebra $\mathcal{A}[X]$ integralna domena, pa tvrdnja (b) slijedi iz korolara 5.5.7.

U daljnjem će nam trebati pojam racionalnih funkcija na ireducibilnim višestrukostima. Kako bismo taj pojam definirali, uočimo sljedeću jednostavnu činjenicu:

Lema 5.5.9. *Neka je X ireducibilna višestrukost, neka su U i V neprazni otvoreni podskupovi od X i neka su $u : U \to Y$ i $v : V \to Y$ morfizmi u višestrukost Y. Ako postoji neprazan otvoren podskup W od $U \cap V$ takav da je $u|W = v|W$, onda je $u|U \cap V = v|U \cap V$.*

Dokaz: Budući da je X ireducibilna, skup W je gust u X, dakle i u $U \cap V$. No prema propoziciji 5.3.6. skup $\{x \in U \cap V;\ u(x) = v(x)\}$ je zatvoren u $U \cap V$, pa tvrdnja slijedi.

Neka je U neprazan otvoren podskup ireducibilne višestrukosti X i neka je $u : U \to Y$ morfizam u višestrukost Y. Prema lemi 5.5.9. postoji najveći otvoren podskup U_0 od X koji sadrži U i takav da se u proširuje do morfizma sa U_0 u Y. Ukoliko je $U_0 = U$, kažemo da je u **racionalno preslikavanje** iz X. Tada skup U označavamo sa $\mathcal{D}(u)$ i zovemo **domena racionalnog preslikavanja** u. Dakle, morfizam X u Y je racionalno preslikavanje u iz X u Y takvo da je $\mathcal{D}(u) = X$. Prema lemi 5.5.9. svaki se morfizam nepraznog otvorenog podskupa $U \subseteq X$ u višestrukost Y jedinstveno proširuje do racionalnog preslikavanja iz X u Y.

Drugi način definicije racionalnih preslikavanja iz X u Y je sljedeći. Neka je E skup svih uređenih parova (U, u), gdje je U neprazan otvoren podskup od X i $u : U \to Y$ je morfizam. Na skupu E definiramo relaciju ekvivalencije ovako:

$$(U, u) \sim (V, v) \qquad \Longleftrightarrow \qquad u|U \cap V = v|U \cap V.$$

Racionalno preslikavanje iz X u Y je klasa ekvivalencije u E u odnosu na tu relaciju.

Racionalna funkcija na ireducibilnoj višestrukosti X je racionalno preslikavanje iz X u K. Takva je funkcija maksimalno proširenje regularne funkcije na nepraznom otvorenom podskupu od X.

Ako su $f, g \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ i ako je $g \neq 0$, onda je $U = \{x \in X;\ g(x) \neq 0\}$ neprazan otvoren podskup od X, a funkcija $x \mapsto f(x)/g(x)$ je regularna na U jer je regularna na svim afinim otvorenim podskupovima koji su sadržani u U. Stoga se ta funkcija jedinstveno proširuje do racionalne funkcije na X. Važno je istaknuti da se općenito ne dobivaju sve racionalne funkcije na X na taj način.

Skup svih racionalnih funkcija na X označavamo sa $\mathrm{R}(X)$. Taj skup ima prirodno definiranu strukturu komutativne unitalne $K-$algebre: ako su $f, g \in \mathrm{R}(X)$, onda su $f+g$ i fg jedinstvena proširenja regularnih funkcija $x \mapsto f(x)+g(x)$ i $x \mapsto f(x)g(x)$ definiranih na nepraznom otvorenom skupu $\mathcal{D}(f) \cap \mathcal{D}(g)$. Neka je $f \in \mathrm{R}(X) \setminus \{0\}$. Tada je $U = \{x \in \mathcal{D}(f);\ f(x) \neq 0\}$ neprazan otvoren podskup od X i funkcija $x \mapsto 1/f(x)$ je regularna na U. Označimo sa $1/f$ jedinstvenu racionalnu funkciju koja proširuje tu regularnu funkciju. Tada je očito $1/f$ invers od f u prstenu $\mathrm{R}(X)$. Time je dokazano da je $\mathrm{R}(X)$ polje. Ono se zove **polje racionalnih funkcija** na ireducibilnoj višestrukosti X.

Teorem 5.5.10. *Neka je X ireducibilna višestrukost i neka je U afini otvoren podskup od X. Tada je $\Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ integralna domena. Preslikavanje koje funkciji $f \in \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ pridružuje jedinstveno njeno proširenje do racionalne funkcije iz $\mathrm{R}(X)$ je injektivno i jedinstveno se proširuje do izomorfizma sa $\mathrm{Frac}\,(\Gamma(U, \mathcal{O}_X))$ na $\mathrm{R}(X)$.*

Skica dokaza: Budući da je topološki prostor X ireducibilan, prema propoziciji 5.1.3. je i U ireducibilan topološki prostor. Odatle slijedi da je $\Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ integralna domena. Injektivnost preslikavanja $\Gamma(U, \mathcal{O}_X) \to \mathrm{R}(X)$ je posljedica leme 5.5.9. Treba još dokazati da je proširenje tog preslikavanja do monomorfizma $\mathrm{Frac}\,(\Gamma(U, \mathcal{O}_X)) \to \mathrm{R}(X)$ surjektivno. Neka je $h \in \mathrm{R}(X)$. Tada je $\mathcal{D}(h) \cap U$ neprazan otvoren podskup od U. Prema tvrdnji (b) leme 5.2.5. postoji $g \in \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ takva da je $\Omega_U(g) = \{x \in U;\ g(x) \neq 0\} \subseteq \mathcal{D}(h) \cap U$. Tada je $h|\Omega_U(g) \in \Gamma\left(\Omega_U(g), \mathcal{O}_X\right)$, a pomoću tvrdnje (a) leme 5.2.5. pokazuje se da se $\Gamma\left(\Omega_U(g), \mathcal{O}_X\right)$ prirodno identificira s lokalizacijom prstena $\Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ po mutiplikativnom podskupu $\{g^n;\ n \in \mathbb{Z}_+\}$. Prema tome, postoji $m \in \mathbb{Z}_+$ i $f \in \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ takvi da se $h|\Omega_U(g)$ podudara s funkcijom $x \mapsto f(x)/g(x)^m$. Ako su $\tilde{f}$ i $\tilde{g}$ slike od f i g u $\mathrm{R}(X)$, onda je $h = \tilde{f}/\tilde{g}^m$. Time je dokazana tražena surjektivnost.

Prema teoremu 5.5.10. polje $\mathrm{R}(X)$ racionalnih funkcija na ireducibilnoj višestrukosti X može se identificirati s poljem kvocijenata prstena regularnih funkcija $\Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ za bilo koji afini otvoren podskup U od X. Posebno, ako je X ireducibilna afina višestrukost, onda se $\mathrm{R}(X)$ identificira s poljem razlomaka $K(X) = \mathrm{Frac}(K[X])$ pripadne afine algebre $K[X] \cong \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$.

Teorem 5.5.11. *Neka je X ireducibilna višestrukost i W neprazan otvoren podskup od X. Tada je* $\dim X = \dim W < +\infty$ *i vrijedi*

$$\dim X = \operatorname{tr\,deg}_K \mathrm{R}(X).$$

Dokaz: Pretpostavimo najprije da je X afina. Za neprazne afine otvorene podskupove $U, V \subseteq X$ tada je $U \cap V \neq \emptyset$, pa prema tvrdnji (b) leme 5.2.5. postoji $f \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ takva da je $\emptyset \neq \Omega_X(f) \subseteq U \cap V$. Sada je

$$\dim \Omega_X(f) \leq \dim U \leq \dim X \qquad \text{i} \qquad \dim \Omega_X(f) \leq \dim V \leq \dim X.$$

Ali lako se vidi da je $\mathrm{Frac}\,(\Gamma(X, \mathcal{O}_X)) = \mathrm{Frac}\,(\Gamma(\Omega_X(f), \mathcal{O}_X))$ i vrijedi $\Gamma(X, \mathcal{O}_X) \cong K[X]$ i $\Gamma(\Omega_X(f), \mathcal{O}_X) \cong K[\Omega_X(f)]$. Dakle, prema tvrdnji (b) propozicije 5.5.8. slijedi

$$\dim \Omega_X(f) = \dim U = \dim V = \dim X.$$

Svaki neprazan otvoren podskup W od X sadrži afini otvoren podskup U od X i imamo $\dim U \leq \dim W \leq \dim X$, pa iz dokazanog slijedi da je $\dim W = \dim X$.

Pretpostavimo sada da ireducibilna višestrukost X nije afina. Prvi dio dokaza pokazuje da svi afini otvoreni podskupovi od X imaju istu dimenziju. Budući da je X unija konačno mnogo afinih otvorenih podskupova, tvrdnja (c) propozicije 5.5.1. pokazuje da je $\dim X = \dim U$ za svaki afini otvoren podskup U od X. Napokon, ako je W neprazan otvoren podskup od X, onda W sadrži afini otvoren podskup U; sada imamo

$$\dim X = \dim U \leq \dim W \leq \dim X \qquad \Longrightarrow \qquad \dim W = \dim X.$$

Jednakost $\dim X = \operatorname{tr}\deg_K \mathrm{R}(X)$ slijedi iz teorema 5.5.10. i tvrdnje (b) propozicije 5.5.8.

Iz prethodnih razmatranja jasno je da vrijedi:

- Ako je X ireducibilna višestrukost i $\dim X = 0$, onda je X jednočlan skup.
- Ako je X višestrukost i $\dim X = 0$, onda je X konačan skup.
- $\dim K^n = n$.
- Projektivni prostor $P^r(K)$ je ireducibilan i sadrži otvoren podskup izomorfan s K^r. Dakle, $\dim P^r(K) = r$.
- Grasmanova višestrukost $G_{n,r}$ je ireducibilna i sadrži otvoren podskup izomorfan s $K^{r(n-r)}$. Dakle, $\dim G_{n,r} = r(n-r)$.

Propozicija 5.5.12. *Neka je X višestrukost i Y neprazan lokalno zatvoren podskup.*

(a) *Vrijedi* $\dim Y \leq \dim X$.

(b) *Ako je višestrukost X ireducibilna i podskup Y je zatvoren, onda je* $\dim Y = \dim X$ *ako i samo ako je $Y = X$.*

(c) *Vrijedi* $\dim Y = \dim \overline{Y}$.

(d) *Ako je višestrukost X ireducibilna, onda je* $\dim Y = \dim X$ *ako i samo ako je Y otvoren podskup od X.*

Dokaz: Tvrdnje (a) i (b) sadržane su u općoj propoziciji 5.5.1.

(c) Neka su $Y_1, \ldots, Y_n$ ireducibilne komponente od Y. Prema propoziciji 5.1.5. tada su $\overline{Y}_1, \ldots, \overline{Y}_n$ ireducibilne komponente od $\overline{Y}$. Budući da su Y_i zatvoreni podskupovi od Y, oni su lokalno zatvoreni u X. Dakle, Y_i je otvoren podskup od $\overline{Y}_i$, pa je $\dim Y_i = \dim \overline{Y}_i$. Stoga tvrdnja slijedi iz propozicije 5.1.13. (ili iz tvrdnje (b) propozicije 5.5.1.).

(d) Možemo pisati $Y = F \cap U$, gdje je U otvoren, a F zatvoren podskup od X. Tada je $\dim Y \leq \dim F \leq \dim X$. Sada iz tvrdnje (b) i iz teorema 5.5.11. slijedi da je $\dim X = \dim Y$ ako i samo ako je $Y = U$ otvoren.

Propozicija 5.5.13. *Ako su X i Y ireducibilne višestrukosti, onda je*

$$\dim (X \times Y) = \dim X + \dim Y.$$

Skica dokaza: Tvrdnja (b) teorema 5.2.9. ima za posljedicu da je produkt $X \times Y$ ireducibilna višestrukost. Nadalje, ako su $U \subseteq X$ i $V \subseteq Y$ afini otvoreni podskupovi, onda je $U \times V$ afini otvoren podskup od $X \times Y$. Prema tome, možemo pretpostaviti da su višetsrukosti X i Y afine. Neka su $m = \dim X$ i $n = \dim Y$. Prema tvrdnji (b) propozicije 5.5.8. i prema Noetherinom teoremu o normalizaciji 5.5.6. algebre $K[X]$ i $K[Y]$ imaju unitalne podalgebre $\mathcal{A}_0 \cong K[T_1, \ldots, T_m]$ i $\mathcal{B}_0 \cong K[T_{m+1}, \ldots, T_{m+n}]$ takve da je algebra $K[X]$ generirana nad $\mathcal{A}_0$ s konačno mnogo elemenata $f_1, \ldots, f_r$ koji su algebarski nad poljem razlomaka $\mathrm{Frac}(\mathcal{A}_0)$ i algebra $K[Y]$ je generirana nad $\mathcal{B}_0$ s konačno mnogo elemenata $g_1, \ldots, g_s$ koji su algebarski nad poljem razlomaka $\mathrm{Frac}(\mathcal{B}_0)$. Budući da je $K[X\times Y]=K[X]\otimes_K K[Y]$, ta algebra sadrži kao podalgebru $\mathcal{A}_0\otimes\mathcal{B}_0$, koja je izomorfna algebri $K[T_1,\dots,T_{m+n}$, dakle, polje razlomaka $\mathrm{Frac}(\mathcal{A}_0\otimes_K\mathcal{B}_0)$ izomorfno je polju racionalnih funkcija $K(T_1,\dots,T_{m+n})$. Nadalje, elementi $f_1\otimes 1,\dots,f_r\otimes 1, 1\otimes g_1,\dots,1\otimes g_s$ su algebarski nad poljem $\mathrm{Frac}(\mathcal{A}_0\otimes_K\mathcal{B}_0)$ i generiraju polje $\mathrm{Frac}(K[X\times Y])\cong \mathrm{R}(X\times Y)$ nad poljem $\mathrm{Frac}(\mathcal{A}_0\otimes_K\mathcal{B}_0)\cong$ $\cong K(T_1,\dots,T_{m+n})$. Dakle, $\mathrm{R}(X\times Y)$ je algebarsko proširenje polja $K(T_1,\dots,T_{m+n})$. Slijedi

$$\dim(X\times Y)=\mathrm{tr\,deg}_K\mathrm{R}(X\times Y)=\mathrm{tr\,deg}_K K(T_1,\dots,T_{m+n})=m+n=\dim X+\dim Y.$$

Korolar 5.5.14. *Neka je $\pi : K^{r+1}\setminus\{0\}\to P^r(K)$ kanonski epimorfizam i neka je X zatvorena ireducibilna podvišestrukost od $P^r(K)$. Tada je*

$$\dim \pi^{-1}(X)=1+\dim X.$$

Dokaz: Uz oznake iz odjeljka 5.3. za neki $i\in\{0,\dots,r\}$ je $X\cap U_i\neq\emptyset$. Lako se vidi da je $\pi^{-1}(X\cap U_i)$ izomorfno produktu $(X\cap U_i)\times(K\setminus\{0\})$. Stoga tvrdnja slijedi iz propozicije 5.5.13.

Za višestrukost kažemo da ima **čistu dimenziju** ili da je **ekvidimenzionalna**, ako sve njene ireducibilne komponente imaju istu dimenziju.

Za višestrukost X i za $f\in\Gamma(X,\mathcal{O}_X)$ označimo sa $\mathcal{V}(f)$ zatvorenu podvišestrukost nultočaka funkcije f :

$$\mathcal{V}(f)=\{x\in X;\ f(x)=0\}.$$

Nadalje, za $f_1,\dots,f_r\in\Gamma(X,\mathcal{O}_X)$ definiramo

$$\mathcal{V}(f_1,\dots,f_r)=\mathcal{V}(f_1)\cap\cdots\cap\mathcal{V}(f_r)=\{x\in X;\ f_1(x)=\cdots=f_r(x)=0\}.$$

Lema 5.5.15. $\mathcal{V}(f)=\emptyset$ *ako i samo ako je f invertibilan element prstena* $\Gamma(X,\mathcal{O}_X)$.

Dokaz: Jedan je smjer evidentan: ako je f invertibilan element prstena $\Gamma(X,\mathcal{O}_X)$, onda je $\mathcal{V}(f)=\emptyset$. Obratno, pretpostavimo da je $\mathcal{V}(f)=\emptyset$. Tada za svaki afini otvoren podskup U od X vrijedi $\mathcal{V}(f|U)=\emptyset$, pa je $f|U$ invertibilan element prstena $\Gamma(U,\mathcal{O}_X)=\Gamma(U,\mathcal{O}_U)$. Označimo sa g_U invers od $f|U$. Za dva afina otvorena podskupa U i V od X tada vrijedi $g_U|U\cap V=g_V|U\cap V$, jer su i jedna i druga restrikcija inversi restrikcije $f|U\cap V$. Stoga postoji $g\in\Gamma(X,\mathcal{O}_X)$ takva da je $g|U=g_U$ za svaki afini otvoren podskup U od X. Tada je $(fg)|U=1$ za svaki U, dakle, $fg=1$.

U daljnjem nam treba tzv. **Krullov teorem o glavnom idealu** koji navodimo bez dokaza. Za prost ideal $\mathfrak{p}$ u prstenu $\mathcal{A}$ sa $\mathcal{A}_{\mathfrak{p}}$ označavamo lokalizaciju u odnosu na $\mathfrak{p}$, tj. prsten razlomaka od $\mathcal{A}$ u odnosu na multiplikativni skup $\mathcal{A}\setminus\mathfrak{p}$. Definiramo **visinu prostog ideala** $\mathfrak{p}$: $\mathrm{ht}\,\mathfrak{p}=\dim\mathcal{A}_{\mathfrak{p}}$. Lako se vidi da je $\mathrm{ht}\,\mathfrak{p}$ supremum duljina lanaca prostih ideala

$$\mathfrak{p}_0\subsetneq\mathfrak{p}_1\subsetneq\cdots\cdots\subsetneq\mathfrak{p}_r$$

takvih da je $\mathfrak{p}_r=\mathfrak{p}$. Nadalje, ako je $\mathcal{A}$ integralna domena, onda za svaki prost ideal $\mathfrak{p}$ u $\mathcal{A}$ vrijedi

$$\mathrm{ht}\,\mathfrak{p}+\dim(\mathcal{A}/\mathfrak{p})=\dim\mathcal{A}.$$

Posebno, ako su $\mathfrak{p}\subseteq\mathfrak{q}$ prosti ideali u integralnoj domeni $\mathcal{A}$, onda je

$$\mathrm{ht}\,\mathfrak{q}=\mathrm{ht}\,\mathfrak{p}+\mathrm{ht}\,\mathfrak{q}/\mathfrak{p}.$$

Teorem 5.5.16. *Neka su $\mathcal{A}$ konačno generirana $K-$algebra, $x\in\mathcal{A}$ neinvertibilan element i $\mathfrak{p}$ minimalni element skupa prostih ideala u $\mathcal{A}$ koji sadrže element x. Tada je* $\mathrm{ht}\,\mathfrak{p}\le 1$. *Ako element x nije djelitelj nule onda je* $\mathrm{ht}\,\mathfrak{p}=1$.

Geometrijska verzija tog teorema je

Teorem 5.5.17. *Neka je X ireducibilna višestrukost i neka je $f \neq 0$ neinvertibilni element od $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$. Tada je $\mathcal{V}(f)$ podvišestrukost od X čiste dimenzije* $\dim X - 1$.

Skica dokaza: Prema lemi 5.5.15. je $\mathcal{V}(f) \neq \emptyset$. Neka su $Y_1, \ldots, Y_r$ ireducibilne komponente od $\mathcal{V}(f)$. Neka je $y \in Y_1$ točka takva da je $y \notin Y_2 \cup \cdots \cup Y_r$. Budući da je $Y_2 \cup \cdots \cup Y_r$ zatvoren skup, postoji afini otvoren podskup U od X takav da je $y \in U$ i da je presjek $U \cap \mathcal{V}(f) = U \cap Y_1$ ireducibilan. Tada prema teoremu 5.5.11. vrijedi $\dim U \cap Y_1 = \dim Y_1$ i $\dim U = \dim X$. Prema tome, možemo pretpostaviti da je X ireducibilna afina višestrukost, dakle, $\Gamma(X, \mathcal{O}_X) \cong K[X]$ je integralna domena, i $f \in K[X]$ je neinvertibilan element različit od nule. Tada je $\mathfrak{p} = \sqrt{\mathcal{A}f}$ prost ideal, pa tvrdnja slijedi iz teorema 5.5.16.

Primijetimo da u slučaju kad višestrukost X nije ireducibilna, višestrukost $\mathcal{V}(f)$ ne mora biti ekvidimenzionalna. Npr. uzmimo $\mathcal{V}(T_1T_2) \subseteq K^2$ i neka je f restrikcija na X funkcije

$$(x_1, x_2) \mapsto x_1(x_1 + x_2 + 1).$$

Tada $\mathcal{V}(f)$ ima dvije ireducibilne komponente, jedna od njih je pravac, a druga je točka.

Korolar 5.5.18. *Neka je X zatvorena ireducibilna podvišestrukost projektivnog prostora $P^r(K)$ i* $\dim X \geq 1$. *Za bilo koji nekonstantni homogeni polinom $P \in K[T_0, \ldots, T_r]$ hiperploha $\mathcal{V}(P)$, definirana sa $P(x_0, \ldots, x_r) = 0$, ima neprazan presjek sa X. Ako $\mathcal{V}(P)$ ne sadrži X, onda je $X \cap \mathcal{V}(P)$ podvišestrukost čiste dimenzije* $\dim X - 1$.

Skica dokaza: Neka je $\pi : K^{r+1} \setminus \{0\} \to P^r(K)$ kanonski epimorfizam, $C = \pi^{-1}(X)$ i $\overline{C}$ zatvarač od C u K^{r+1}. Prema korolaru 5.5.14. tada je $\dim \overline{C} \geq 2$ i $0 \in \overline{C}$ je nultočka od P. Dakle, restrikcija $P|\overline{C}$ je neinvertibilna. Neka je C' skup nultočaka od P u $\overline{C}$. Prema teoremu 5.5.17. C' je višestrukost čiste dimenzije $\dim C' \geq \dim X \geq 1$. Slijedi $C' \cap (K^{r+1} \setminus \{0\}) \neq \emptyset$, dakle, $\pi(C' \setminus \{0\}) = \mathcal{V}(P) \cap X \neq \emptyset$. Sada se može dokazati da ako $\mathcal{V}(P)$ ne sadrrži X, onda je za svaki od afinih otvorenih podskupova U_i od $P^r(K)$ presjek $\mathcal{V}(P) \cap U_i)$ izomorfan produktu $(\pi(C' \setminus \{0\}) \cap U_i) \times (K \setminus \{0\}$. Odatle tvrdnja slijedi.

Propozicija 5.5.19. *Neka je X ireducibilna višestrukost i neka su $f_1, \ldots, f_n \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$. Tada za svaku ireducibilnu komponentu Y višestrukosti $\mathcal{V}(f_1, \ldots, f_n)$ vrijedi* $\operatorname{codim}_X Y \leq n$.

Dokaz provodimo indukcijom po n. Baza indukcije $n = 1$ je upravo teorem 5.5.17. Neka je $n > 1$. Postoji ireducibilna komponenta Y' od $\mathcal{V}(f_1, \ldots, f_{n-1})$ takva da je $Y \subseteq Y'$. Dakle,

$$Y \subseteq Y' \cap \mathcal{V}(f_n) \subseteq \mathcal{V}(f_1, \ldots, f_n).$$

Prema tome, Y je ireducibilna komponenta od $Y' \cap \mathcal{V}(f_n)$. Po pretpostavci indukcije vrijedi $\operatorname{codim}_X Y' \leq n - 1$. Napokon, ako je $f_n|Y' = 0$, onda je $Y = Y'$. U suprotnom prema teoremu 5.5.17. vrijedi $\dim Y = \dim Y' - 1$. U oba slučaja slijedi $\operatorname{codim}_X Y \leq n$.

Istaknimo da se u propoziciji 5.5.19. ne tvrdi da je višestrukost $\mathcal{V}(f_1, \ldots, f_n)$ ekvidimenzionalna. Nadalje, može se dogoditi da svaka ireducibilna komponenta od $\mathcal{V}(f_1, \ldots, f_n)$ ima kodimenziju u X striktno manju od n.

Propozicija 5.5.20. *Neka je X zatvorena ireducibilna višestrukost od $P^r(K)$ i neka su $P_1, \ldots, P_n$ nekonstantni homogeni polinomi u $K[T_0, \ldots, T_r]$. Neka je $\mathcal{V}(P_1, \ldots, P_n)$ skup zajedničkih nultočaka od $P_1, \ldots, P_n$ u X.*

(*a*) *Za svaku ireducibilnu komponentu* Y *od* $\mathcal{V}(P_1, \ldots, P_n)$ *vrijedi* $\mathrm{codim}_X Y \leq n$.

(*b*) *Ako je* $\dim X \geq n$, *onda je* $\mathcal{V}(P_1, \ldots, P_n) \neq \emptyset$.

Dokaz: Tvrdnja (*a*) slijedi iz propozicije 5.5.19. primijenjene na $\pi^{-1}(X)$, a drugu tvrdnju dobivamo indukcijom iz korolara 5.5.18.

Korolar 5.5.21. *Ako je* $q < r$, *jedini morfizmi sa* $P^r(K)$ *u* $P^q(K)$ *su konstante.*

Skica dokaza: Prema propoziciji 5.5.20. ako su $P_1, \ldots, P_n \in K[T_0, \ldots, T_r]$ nekonstantni homogeni polinomi i $n < r$, onda je $\mathcal{V}(P_1, \ldots, P_n) \neq \emptyset$. Sada se tvrdnja izvodi iz opisa morfizama $P^r(K) \to P^q(K)$ u homogenim koordinatama.

5.6 Tangencijalni prostor. Glatke točke

Neka je $P \in K[T_1, \ldots, T_r]$ i $x \in K^r$. Definiramo $D_x(P) \in K[T_1, \ldots, T_r]$ ovako:

$$D_x(P) = (\partial_1 P)(x)T_1 + \cdots + (\partial_r P)(x)T_r.$$

Preslikavanje $P \mapsto D_x(P)$ je linearno i za $P, Q \in K[T_1, \ldots, T_r]$ vrijedi

$$D_x(PQ) = P(x)D_x(Q) + Q(x)D_x(P). \tag{5.2}$$

Neka je $X \subseteq K^r$ zatvorena podvišestrukost, $\mathfrak{a} = \mathcal{I}(X)$ pridruženi radikalni ideal u $K[T_1, \ldots, T_r]$ i $x = (x_1, \ldots, x_r) \in X$. Označimo sa $\mathfrak{n}_x = \mathcal{I}_X(\{x\})$ maksimalni ideal u $K[X] = K[T_1, \ldots, T_r]/\mathfrak{a}$ određen točkom x. Nadalje, neka je $\mathfrak{a}'_x$ ideal u $K[T_1, \ldots, T_r]$ generiran sa $\{D_x(P);\ P \in \mathfrak{a}\}$. Prema (5.2) ako polinomi $P_1, \ldots, P_n$ generiraju ideal $\mathfrak{a}$, onda homogeni polinomi prvog stupnja $D_x(P_1), \ldots, D_x(P_n)$ generiraju ideal $\mathfrak{a}'_x$. **Tangencijalni prostor** na višestrukost X u točki $x \in X$ definiramo sa

$$\mathrm{Tan}_x(X) = \mathcal{V}(\mathfrak{a}'_x) = \{y \in K^r;\ (D_x(P))(y) = 0\ \forall P \in \mathfrak{a}\}.$$

Primijetimo da iz činjenice da su $D_x(P)$ homogeni polinomi prvog stupnja slijedi da je $\mathrm{Tan}_x(X)$ potprostor vektorskog prostora K^r. Nadalje, ako je potprostor $\{D_x(P);\ P \in \mathfrak{a}\}$ prostora $K^1[T_1, \ldots, T_r]$ dimenzije q, onda je $\dim \mathrm{Tan}_x(X) = r - q$. Neka je $\{Q_1, \ldots, Q_q\}$ baza prostora $\{D_x(P);\ P \in \mathfrak{a}\}$. Tada polinomi $Q_1, \ldots, Q_q, T_1, \ldots, T_r$ razapinju prostor $K^1[T_1, \ldots, T_r]$, pa postoje indeksi $1 \leq i_1 < \cdots < i_{r-q} \leq r$ takvi da je $\{Q_1, \ldots, Q_r, T_{i_1}, \ldots, T_{i_{r-q}}\}$ baza od $K^1[T_1, \ldots, T_r]$. Odatle slijedi da se kvocijentna algebra $K[T_1, \ldots, T_r]/\mathfrak{a}'_x$ može identificirati sa $K[T_{i_1}, \ldots, T_{i_{r-q}}]$. Kako je to inegralna domena, zaključujemo da je ideal $\mathfrak{a}'_x$ prost. Nadalje, algebra regularnih funkcija na $\mathrm{Tan}_x(X)$ je $K[T_1, \ldots, T_r]/\mathfrak{a}'_x \cong K[T_{i_1}, \ldots, T_{i_{r-q}}]$.

Neka je sada $L \subseteq K^r$ pravac kroz točku x i neka je $v = (v_1, \ldots, v_r) \in K^r$ vektor koji određuje pravac L :

$$L = \{x + tv;\ t \in K\}.$$

Neka su $P_1, \ldots, P_n$ generatori ideala $\mathfrak{a}$. Tada je očito

$$L \cap X = \{x + tv;\ P_j(x + tv) = 0 \text{ za } j = 1, \ldots, n\}.$$

Drugim riječima, $L \cap X$ se dobiva rješavanjem sljedećeg sistema jednadžbi u varijabli t :

$$P_1(x + tv) = \cdots = P_n(x + tv) = 0. \tag{5.3}$$

Za $1 \leq j \leq n$ imamo

$$P_j(x + tv) = t\sum_{i=1}^{r}(\partial_i P_j)(x)v_i + t^2 Q_j(t),$$

gdje su $Q_j \in K[T]$. Dakle, $t = 0$ je "višestruka nultočka" sistema (5.3) ako i samo ako vrijedi

$$(\partial_1 P_j)(x)v_1 + \cdots + (\partial_r P_j)(x)v_r = 0 \qquad \text{za} \quad 1 \leq j \leq n,$$

odnosno, ako i samo ako je $v \in \mathrm{Tan}_x(X)$.

Neka su sada $P, Q \in K[T_1, \ldots, T_r]$ takvi da je $P - Q \in \mathfrak{a}$. Po definiciji prostora $\mathrm{Tan}_x(X)$ restrikcija $D_x(P) - D_x(Q)$ na $\mathrm{Tan}_x(X)$ je nula. Stoga možemo definirati linearno preslikavanje $\overline{D}_x : K[X] \to (\mathrm{Tan}_x(X))^*$ ovako

$$\overline{D}_x(f) = D_x(F)|\mathrm{Tan}_x(X), \qquad F \in K[T_1, \ldots, T_r], \quad f = F + \mathfrak{a} \in K[X] = K[T_1, \ldots, T_r]/\mathfrak{a}.$$

Očito je preslikavanje $\overline{D}_x : K[X] \to (\mathrm{Tan}_x(X))^*$ surjektivno. Nadalje, budući da je $K[X] = K \dot{+} \mathfrak{n}_x$ i $\overline{D}_x(\lambda) = 0$ za svaki $\lambda \in K$, $\overline{D}_x$ inducira linearnu surjekciju

$$d_x : \mathfrak{n}_x \longrightarrow (\mathrm{Tan}_x(X))^*.$$

Propozicija 5.6.1. $\mathrm{Ker}(d_x) = \mathfrak{n}_x^2$. *Dakle, d_x inducira izomorfizam vektorskog prostora $\mathfrak{n}_x/\mathfrak{n}_x^2$ na vektorski prostor* $(\mathrm{Tan}_x(X))^*$.

Dokaz: Neka je $\mathcal{N}_x$ maksimalni ideal u $K[T_1,\ldots,T_r]$ određen točkom x :

$$\mathcal{N}_x = K[T_1,\ldots,T_r](T_1 - x_1) + \cdots + K[T_1,\ldots,T_r](T_r - x_r).$$

Tada je $\mathfrak{a} \subseteq \mathcal{N}_x$ i $\mathfrak{n}_x = \mathcal{N}_x/\mathfrak{a}$. Sada iz (5.2) slijedi da je $\mathfrak{n}_x^2 \subseteq \mathrm{Ker}(d_x)$.

Pretpostavimo da je $f \in \mathrm{Ker}(d_x)$ i neka je $F \in \mathcal{N}_x$ predstavnik od f. Kako je $\mathcal{I}(\mathrm{Tan}_x(X)) = \mathfrak{a}'_x$, postoje $F_1,\ldots,F_s \in \mathfrak{a}$ i $\lambda_1,\ldots,\lambda_s \in K$ takvi da je

$$D_x(F) = \lambda_1 D_x(F_1) + \cdots + \lambda_s D_x(F_s).$$

Stavimo $G = F - \lambda_1 F_1 - \cdots - \lambda_s F_s$. Budući da su $F_1,\ldots,F_s \in \mathfrak{a}$, G je također predstavnik od f. Nadalje, vrijedi $G(x) = 0$ i $D_x(G) = 0$, dakle,

$$(\partial_1 G)(x) = \cdots = (\partial_r G)(x) = 0.$$

Sada iz Taylorove formule vidimo da je G sadržano u idealu generiranom sa $(T_i - x_i)(T_j - x_j)$, $1 \le i,j \le r$. No taj je ideal upravo $\mathcal{N}_x^2$. Kako je G predstavnik od f, slijedi da je $f \in \mathfrak{n}_x^2$.

Dakle, tangencijalni prostor $\mathrm{Tan}_x(X)$ prirodno se identificira s vektorskim prostorom $(\mathfrak{n}_x/\mathfrak{n}_x^2)^*$. Da bismo odatle dobili prirodnu definiciju tangencijalnih prostora za proizvoljnu višestrukost, potrebne su nam još neke činjenice.

Neka je X višestrukost i $\mathcal{O}_X$ njen strukturni snop. Za $x \in X$ označimo sa $\mathcal{O}_{X,x}$ vlat snopa X nad točkom x. Tada je $\mathcal{O}_{X,x}$ komutativna $K-$algebra svih klica regularnih funkcija $f \in \Gamma(U,\mathcal{O}_X)$, gdje su U otvorene okoline točke x. Za $f \in \Gamma(U,\mathcal{O}_X)$, neka je f_x klica te funkcije u točki x. Napokon, primijetimo da je za svaku klicu $s \in \mathcal{O}_{X,x}$ dobro definirana njezina vrijednost $s(x)$ u točki x : to je vrijednost u točki x bilo koje regularne funkcije $f \in \Gamma(U,\mathcal{O}_X)$ takve da je $f_x = s$.

Primijetimo da ako je $U \subseteq X$ otvoren skup i $x \in U$, onda je $\mathcal{O}_{X,x} = \mathcal{O}_{U,x}$.

Pretpostavimo sada da je višestrukost X ireducibilna. Tada se svaka regularna funkcija na otvorenoj okolini točke x jedinstveno proširuje do racionalne funkcije f na X i $x \in \mathcal{D}(f)$. Nadalje, ako su f i g racionalne funkcije na X takve da je $x \in \mathcal{D}(f) \cap \mathcal{D}(g)$, i ako je $f_x = g_x$, onda se f i g podudaraju na nekoj otvorenoj okolini točke x, dakle, vrijedi $f = g$. To pokazuje da se $\mathcal{O}_{X,x}$ može identificirati s potprstenom od $R(X)$ racionalnih funkcija definiranih u točki x. Kako je višestrukost X ireducibilna, $R(X)$ je polje, pa je prsten $\mathcal{O}_{X,x}$ integralna domena. Ako je U otvoren podskup od X, onda je

$$\Gamma(U,\mathcal{O}_X) = \bigcap_{x\in U} \mathcal{O}_{X,x}.$$

Propozicija 5.6.2. *Neka je X višestrukost, $\mathcal{O}_X$ njen strukturni snop i $x \in X$.*

(*a*) *$\mathcal{O}_{X,x}$ je lokalni ideal i njegov jedini maksimalni ideal $\mathfrak{m}_{X,x}$ je skup svih klica regularnih funkcija kojima je x nultočka. Nadalje, polje $\mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_{X,x}$ je izomorfno polju K.*

(*b*) *Neka je U afini otvoren podskup od X koji sadrži točku x. Stavimo $\mathcal{A} = \Gamma(U,\mathcal{O}_X)$ i neka je $\mathfrak{n}$ maksimalni ideal u $\mathcal{A}$ svih funkcija kojima je x nultočka. Tada je prsten $\mathcal{O}_{X,x}$ izomorfan lokalizaciji $\mathcal{A}_{\mathfrak{n}}$. Posebno, postoji prirodna bijekcija sa skupa svih prostih ideala u $\mathcal{O}_{X,x}$ na skup zatvorenih ireducibilnih podskupova od U koji sadrže točku x.*

(*c*) *Prsten $\mathcal{O}_{X,x}$ je Noetherin.*

Dokaz: (a) Neka je $\rho : \mathcal{O}_{X,x} \to K$ unitalni homomorfizam definiran sa $\rho(s) = s(x)$. Taj je homomorfizam netrivijalan, dakle, surjektivan. Prema tome, $\mathfrak{m}_{X,x} = \mathrm{Ker}(\rho)$ je maksimalni ideal u $\mathcal{O}_{X,x}$ i polje $\mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_{X,x}$ je izomorfno polju K.

Neka je $s \in \mathcal{O}_{X,x} \setminus \mathfrak{m}_{X,x}$ i neka je (U, f) predstavnik klice s, pri čemu je U afini otvoren podskup od X, $x \in U$ i $f \in \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$. Tada je $x \in \Omega_U(f) = \{y \in U;\ f(y) \neq 0\}$. Funkcija f je invertibilna u $\Gamma(\Omega_U(f), \mathcal{O}_U) = \Gamma(\Omega_U(f), \mathcal{O}_X)$, pa slijedi da je klica s invertibilan element prstena $\mathcal{O}_{X,x}$. Dakle, $\mathcal{O}_{X,x} \setminus \mathfrak{m}_{X,x}$ je grupa invertibilnih elemenata prstena $\mathcal{O}_{X,x}$. Time je dokazano da je prsten $\mathcal{O}_{X,x}$ lokalan i $\mathfrak{m}_{X,x}$ je njegov najveći ideal.

(b) Neka je $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{O}_{X,x}$ homomorfizam definiran sa $\varphi(f) = f_x$. Ako je $f(x) \neq 0$, tj. ako je $f \notin \mathfrak{n}$, onda je $\varphi(f)$ invertibilan zbog (a). No tada se φ jedinstveno proširuje do homomorfizma $\mathcal{A}_{\mathfrak{n}} \to \mathcal{O}_{X,x}$.

Neka je $s \in \mathcal{O}_{X,x}$. Prema tvrdnji (b) leme 5.2.5. postoji glavni otvoren podskup $\Omega_U(f)$ od U koji sadrži točku x. Neka je $g \in \Gamma(\Omega_U(f), \mathcal{O}_X)$ predstavnik klice s. Kako je $x \in \Omega_U(f)$, vrijedi $f \in \mathcal{A} \setminus \mathfrak{n}$. Nadalje, ako je $y \in \Omega_U(f)$, onda je $g(y) = h(y)/f(y)^n$ za neki $n \in \mathbb{N}$ i $h \in \mathcal{A}$. Dakle, vrijedi $\psi(h/f^n) = s$. Time je dokazano da je homomorfizam ψ surjektivan.

Neka je $g \in \mathrm{Ker}(\psi)$. Tada postoje $h \in \mathcal{A}$ i $f \in \mathcal{A} \setminus \mathfrak{n}$ takvi da je $g = h/f$. Sada iz $\psi(g) = 0$ slijedi da je $\varphi(h) = 0$. Stoga postoji $t \in \mathcal{A} \setminus \mathfrak{n}$ takva da je $h|\Omega_U(t) = 0$. Tada je $ht = 0$, pa slijedi da je $g = (ht)/(ft) = 0$. Time je dokazana injektivnost homomrfizma ψ.

Dakle, $\psi : \mathcal{A}_{\mathfrak{n}} \to \mathcal{O}_{X,x}$ je izomorfizam. Time je dokazana tvrdnja (b).

Tvrdnja (c) slijedi iz opće činjenice da je za svaki Noetherin prsten $\mathcal{A}$ i za svaki multiplikativan podskup S od $\mathcal{A}$ prsten razlomaka $S^{-1}\mathcal{A}$ Noetherin prsten.

Vratimo se sada na zatvorenu podvišestrukost $X \subseteq K^r$ i $x \in X$. Prema propoziciji 5.6.2. preslikavanje $\varphi : K[X] \to \mathcal{O}_{X,x}$ definirano sa $\varphi(f) = f_x$, definira izomorfizam $\psi : K[X]_{\mathfrak{n}_x} \to \mathcal{O}_{X,x}$. Nadalje, lako se vidi da su vektorski prostori $\mathfrak{n}_x/\mathfrak{n}_x^2$ i $\mathfrak{n}_x K[X]_{\mathfrak{n}_x}/\mathfrak{n}_x^2 K[X]_{\mathfrak{n}_x}$ izomorfni. Dakle, vrijedi:

Propozicija 5.6.3. *Vektorski prostori* $\mathrm{Tan}_x(X)$ *i* $\left(\mathfrak{m}_{X,x}/\mathfrak{m}_{X,x}^2\right)^*$ *su izomorfni.*

Prema tome, za proizvoljnu višestrukost X i točku $x \in X$ prirodno je definirati **tangencijalni prostor** na X u točki x kao vektorski prostor

$$T_x(X) = \left(\mathfrak{m}_{X,x}/\mathfrak{m}_{X,x}^2\right)^*.$$

Neka je $\rho : \mathfrak{m}_{X,x} \to \mathfrak{m}_{X,x}/\mathfrak{m}_{X,x}^2$ kvocijentno preslikavanje. Sjetimo se da je $\mathcal{O}_{X,x} = K \dotplus \mathfrak{m}_{X,x}$ i evaluacija klica $s \mapsto s(x)$ je upravo projektor $\mathcal{O}_{X,x}$ na K duž $\mathfrak{m}_{X,x}$.

Preko evaluacije možemo K shvaćati kao $\mathcal{O}_{X,x}-$modul: $s \cdot \lambda = s(x)\lambda$, $s \in \mathcal{O}_{X,x}$, $\lambda \in K$. $K-$**derivacija** sa $\mathcal{O}_{X,x}$ u K je $K-$linearno preslikavanje $\delta : \mathcal{O}_{X,x} \to K$ sa svojstvom

$$\delta(st) = s(x)\delta(t) + t(x)\delta(s), \qquad s, t \in \mathcal{O}_{X,x}.$$

Skup svih takvih je vektorski prostor koji označavamo sa $\mathrm{Der}_x(\mathcal{O}_{X,x}, K)$.

Neka je sada $\lambda \in T_x(X) = \left(\mathfrak{m}_{X,x}/\mathfrak{m}_{X,x}^2\right)^*$. Definiramo $L_\lambda : \mathcal{O}_{X,x} \to K$ ovako:

$$L_\lambda|K = 0, \qquad L_\lambda|\mathfrak{m}_{X,x} = \lambda \circ \rho.$$

Propozicija 5.6.4. *Preslikavanje* $\lambda \mapsto L_\lambda$ *je izomorfizam vektorskog prostora* $T_x(X)$ *na vektorski prostor* $\mathrm{Der}_x(\mathcal{O}_{X,x}, K)$.

Dokaz: Neka je $s \in \mathcal{O}_{X,x}$. Tada je $s - s(x) \in \mathfrak{m}_{X,x}$, pa imamo

$$L_\lambda(s) = L_\lambda(s - s(x)) = (\lambda \circ \rho)(s - s(x)) = \lambda\left(s - s(x) + \mathfrak{m}_{X,x}^2\right).$$

Odatle i iz $st - s(x)t(x) = (s - s(x))t + s(x)(t - t(x))$ slijedi

$$L_\lambda(st) = s(x)L_\lambda(t) + t(x)L_\lambda(s), \qquad s,t \in \mathcal{O}_{X,x}.$$

Dakle, $L_\lambda \in \mathrm{Der}_x(\mathcal{O}_{X,x}, K)$ za svaki $\lambda \in T_x(X)$. Očito je preslikavanje $\lambda \mapsto L_\lambda$ linearno. Nadalje, kako je $\rho : \mathfrak{m}_{X,x} \to \mathfrak{m}_{X,x}/\mathfrak{m}_{X,x}^2$ surjekcija, preslikavanje $\lambda \mapsto L_\lambda$ je injektivno. Treba još dokazati surjektivnost. Neka je $\delta \in \mathrm{Der}_x(\mathcal{O}_{X,x}, K)$. Ako je s klica u točki x konstantne funkcije 1, onda je

$$\delta(s) = \delta(ss) = s(x)\delta(s) + s(x)\delta(s) = 2\delta(s).$$

Dakle, vrijedi $\delta(s) = 0$. Nadalje, ako su $s,t \in \mathcal{O}_{X,x}$ takvi da je $s(x) = t(x) = 0$, onda je $\delta(st) = 0$. To pokazuje da je $\delta|\mathfrak{m}_{X,x}^2 = 0$. To znači da postoji linearan funkcional λ na $\mathfrak{m}_{X,x}/\mathfrak{m}_{X,x}^2$ takav da je $\delta|\mathfrak{m}_{X,x} = \lambda \circ \rho$. No tada je $\delta = L_\lambda$, pa je dokazana i surjektivnost.

Dakle, tangencijalni prostor $T_x(X)$ možemo identificirati s prostorom $\mathrm{Der}_x(\mathcal{O}_{X,x}, K)$.

Neka je sada U afini otvoren podskup od X koji sadrži točku x. Definiramo $K-$**derivaciju algebre** $K[U]$ **u točki** x kao $K-$linearno preslikavanje $\Delta : K[U] \to K$ sa svojstvom

$$\Delta(fg) = f(x)\Delta(g) + g(x)\Delta(f), \qquad f,g \in K[U].$$

Neka je $\mathrm{Der}_x(K[U], K)$ vektorski prostor svih takvih. Za $\delta \in \mathrm{Der}_x(\mathcal{O}_{X,x}, K)$ definiramo preslikavanje $\Delta_\delta : K[U] \to K$ sa

$$\Delta_\delta(f) = \delta(f_x), \qquad f \in K[U].$$

Tada je očito $\delta \mapsto \Delta_\delta$ linearno preslikavanje sa $\mathrm{Der}_x(\mathcal{O}_{X,x}, K)$ u $\mathrm{Der}_x(K[U], K)$.

Propozicija 5.6.5. *$\delta \mapsto \Delta_\delta$ je izomorfizam prostora $\mathrm{Der}_x(\mathcal{O}_{X,x}, K)$ na prostor $\mathrm{Der}_x(K[U], K)$.*

Dokaz: Budući da je $\mathcal{O}_{X,x} = \{f_x;\ f \in K[U]\}$, preslikavanje je injektivno. Treba još dokazati surjektivnost. Neka je $\Delta \in \mathrm{Der}_x(K[U], K)$. Ako je $g \in K[U]$ takva da je $g_x = 0$, onda postoji $f \in K[U]$ takva da je $f(x) \neq 0$ i $fg = 0$. Tada je

$$0 = \Delta(fg) = f(x)\Delta(g) + g(x)\Delta(f) = f(x)\Delta(g).$$

Odatle slijedi da je $\Delta(g) = 0$. Neka je sada $s \in \mathcal{O}_{X,x}$. Tada postoji $f \in K[U]$ takva da je $f(x) = 0$ i s je klica neke funkcije g/f na $\Omega_U(f)$. Pretpostavimo da je ujedno s klica neke funkcije g_1/f_1 na $\Omega_U(f_1)$, pri čemu je $f_1(x) = 0$. Tada je klica funkcije $gf_1 - g_1 f$ u točki x jednaka nuli, dakle ta je funkcija identički jednaka nuli na nekoj okolini točke x. No prema prethodnom tada je $\Delta(gf_1 - g_1 f) = 0$, pa slijedi

$$g(x)\Delta(f_1) - f(x)\Delta(g_1) = g_1(x)\Delta(f) - f_1(x)\Delta(g).$$

Odatle direktnim računom nalazimo da je

$$f_1(x)^2[f(x)\Delta(g) - g(x)\Delta(f)] = f(x)^2[f_1(x)\Delta(g_1) - g_1(x)\Delta(f_1)].$$

Odatle slijedi da ako je $h = g/f$ definirana na $\Omega_U(f)$, pri čemu su $f,g \in K[U]$ i $f(x) \neq 0$, onda možemo definirati linearan funkcional $\delta : \mathcal{O}_{X,x} \to K$ tako da stavimo

$$\delta(h_x) = f(x)^{-2}[f(x)\Delta(g) - g(x)\Delta(f)].$$

Tada se provjerava da je $\delta \in \mathrm{Der}_x(\mathcal{O}_{X,x}, K)$ i da je $\Delta_\delta = \Delta$.

Odatle neposredno slijedi:

Korolar 5.6.6. *Ako je U afini otvoren podskup višestrukosti X koji sadrži točku x, onda se $T_x(X)$ prirodno identificira sa $T_x(U)$.*

Neka su X i Y višestrukosti, $u : X \to Y$ morfizam višestrukosti i $x \in X$. Tada u inducira lokalni homomorfizam $K-$algebri $u_x : \mathcal{O}_{Y,u(x)} \to \mathcal{O}_{X,x}$. Očito je $u_x\left(\mathfrak{m}_{Y,u(x)}\right) \subseteq \mathfrak{m}_{X,x}$, dakle i $u_x\left(\mathfrak{m}^2_{Y,u(x)}\right) \subseteq \mathfrak{m}^2_{X,x}$. Prema tome, u_x inducira linearno preslikavanje

$$u^x : \mathfrak{m}_{Y,u(x)}/\mathfrak{m}^2_{Y,u(x)} \longrightarrow \mathfrak{m}_{X,x}/\mathfrak{m}^2_{X,x}.$$

Njemu dualan operator

$$T_x(u) : T_x(X) \longrightarrow T_{u(x)}(Y)$$

zove se **diferencijal morfizma** u **u točki** x. Lako se vidi da ako je i $v : Y \to Z$ morfizam višestrukosti, onda vrijedi

$$T_x(v \circ u) = T_{u(x)}(v) \circ T_x(u).$$

Neka je u daljnjem $y = u(x)$ i neka su

$$\vartheta_x : T_x(X) \longrightarrow \mathrm{Der}_x(\mathcal{O}_{X,x}, K) \qquad \text{i} \qquad \vartheta_y : T_y(Y) \longrightarrow \mathrm{Der}_y(\mathcal{O}_{Y,y}, K)$$

izomorfizmi iz propozicije 5.6.4. Neka je $T'_x(u) : \mathrm{Der}_x(\mathcal{O}_{X,x}, K) \to \mathrm{Der}_y(\mathcal{O}_{Y,y}, K)$ jedinstven linearan operator sa svojstvom $T'_x(u) \circ \vartheta_x = \vartheta_y \circ T_x(u)$. Nadalje, neka su $\rho_x : \mathfrak{m}_{X,x} \to \mathfrak{m}_{X,x}/\mathfrak{m}^2_{X,x}$ i $\rho_y : \mathfrak{m}_{Y,y} \to \mathfrak{m}_{Y,y}/\mathfrak{m}^2_{Y,y}$ kanonski epimorfizmi. Ako je $\lambda \in T_x(X)$ i $\mu = T_x(u)(\lambda)$, onda imamo

$$\vartheta_x(\lambda)|K = 0, \qquad \vartheta_x(\lambda)|\mathfrak{m}_{X,x} = \lambda \circ \rho_x, \qquad \vartheta_y(\mu)|K = 0, \qquad \vartheta_y(\mu)|\mathfrak{m}_{Y,y} = \mu \circ \rho_y.$$

Budući da je $\mu = \lambda \circ u^x$ i $u^x \circ \rho_y = \rho_x \circ (u_x|\mathfrak{m}_{Y,y})$, nalazimo

$$\vartheta_y(\mu)|\mathfrak{m}_{Y,y} = \lambda \circ u^x \circ \rho_y = \lambda \circ \rho_x \circ (u_x|\mathfrak{m}_{Y,y}).$$

Prema tome,

$$T'_x(u) : \mathrm{Der}_x(\mathcal{O}_{X,x}, K) \longrightarrow \mathrm{Der}_y(\mathcal{O}_{Y,y}, K) \quad \text{je preslikavanje} \quad \delta \mapsto \delta \circ u_x. \tag{5.4}$$

Neka su sada V afina otvorena okolina točke $y = u(x)$ u Y i U afina otvorena okolina točke x u X takve da je $u(U) \subseteq V$. Označimo sa

$$\alpha_x : \mathrm{Der}_x(\mathcal{O}_{X,x}, K) \longrightarrow \mathrm{Der}_x(K[U], K) \qquad \text{i} \qquad \alpha_y : \mathrm{Der}_y(\mathcal{O}_{Y,y}, K) \longrightarrow \mathrm{Der}_y(K[V], K)$$

izomorfizme iz propozicije 5.6.5. Nadalje, neka je $T''_x(u) : \mathrm{Der}_x(K[U], K) \to \mathrm{Der}_y(K[V], K)$ jedinstveno $K-$linearno preslikavanje takvo da je $\alpha_y \circ T'_x(u) = T''_x(u) \circ \alpha_x$. Sada za $\delta \in \mathrm{Der}_x(\mathcal{O}_{X,x}, K)$ i za $g \in K[V]$ zbog propozicije 5.6.5. i zbog (5.4) imamo

$$\left(\alpha_y \circ T'_x(u)(\delta)\right)(g) = \left(\alpha_y \circ \delta \circ u_x\right)(g) = (\delta \circ u_x)(g_y) = \delta\left((g \circ u)_x\right) = \alpha_x(\delta)(g \circ u).$$

Pri tome je g_y klica funkcije g u točki y. Označimo li sa $u^* : K[V] \to K[U]$ homomorfizam algebri pridružen morfizmu višestrukosti $u|U : U \to V$, tj. $u^*(g) = g \circ u|U$, dokazano je sljedeće:

$$T''_x(u) : \mathrm{Der}_x(K[U], K) \longrightarrow \mathrm{Der}_y(K[V], K) \quad \text{je preslikavanje} \quad \Delta \mapsto \Delta \circ u^*. \tag{5.5}$$

U daljnjem ćemo i umjesto $T'_x(u)$ i umjesto $T''_x(u)$ kraće pisati $T_x(u)$.

Uzmimo sada da su $X = K^m$ i $Y = K^n$. Tada su

$$K[X] = K[T_1, \dots, T_m], \quad K[Y] = K[S_1, \dots, S_n], \quad \mathrm{Tan}_x(X) = K^m, \quad \mathrm{Tan}_y(Y) = K^n.$$

Neka su $P_1, \dots, P_n \in K[X]$ koordinatna preslikavanja morfizma $u : X \to Y$, tj.

$$u(x) = (P_1(x), \dots, P_n(x)), \qquad x \in X.$$

Imamo izomorfizme

$$\beta_x : \mathrm{Der}_x(K[X], K) \longrightarrow \mathrm{Tan}_x(X) = K^m, \qquad \Delta \mapsto (\Delta(T_1), \dots, \Delta(T_m)),$$

i

$$\beta_y : \mathrm{Der}_y(K[Y], K) \longrightarrow \mathrm{Tan}_y(Y) = K^n, \qquad \tilde{\Delta} \mapsto (\tilde{\Delta}(S_1), \dots, \tilde{\Delta}(S_n)).$$

Neka je $F_x(u) : K^m \to K^n$ jedinstven linearan operator takav da je $F_x(u) \circ \beta_x = \beta_y \circ T_x(u)$. Tada za $Q \in K[Y]$ i $\Delta \in \mathrm{Der}_x(K[X], K)$ imamo redom

$$(T_x(u)(\Delta)) = \Delta(Q \circ u) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial (Q \circ u)}{\partial T_i}(x)\Delta(T_i) =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial Q}{\partial S_j}(u(x)) \frac{\partial P_j}{\partial T_i}(x) \right) \Delta(T_i) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial Q}{\partial S_j}(y) \left(\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial P_j}{\partial T_i}(x)\Delta(T_i) \right).$$

Dakle,

$$F_x(u) : K^m \longrightarrow K^n \quad \text{je preslikavanje} \quad (v_1, \dots, v_m) \mapsto \left(\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial P_1}{\partial T_i}(x) v_i, \dots, \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial P_n}{\partial T_i}(x) v_i \right).$$

Neka je $M_x(u) = [a_{ij}] \in M_{n,m}(K)$ matrica operatora $F_x(u)$ u stndardnim bazama od K^m i K^n. Tada je

$$a_{ij} = \frac{\partial P_j}{\partial T_i}(x), \qquad 1 \le i \le m, \quad 1 \le j \le n.$$

Pretpostavimo sada da je X zatvorena podvišestrukost od $Y = K^n$ i neka je $j : X \to Y$ kanonska injekcija. Stavimo $\mathfrak{a} = \mathcal{I}(X) \subseteq K[Y] = K[T_1, \dots, T_n]$ i za $1 \le i \le n$ neka je t_i slika od T_i u $K[X] = K[Y]/\mathfrak{a}$.

Neka je $v = (v_1, \dots, v_n) \in Y$. Ako je $v \in \mathrm{Tan}_x(X)$ i $P \in \mathfrak{a}$, onda znamo da je

$$(\partial_1 P)(x)v_1 + \cdots + (\partial_n P)(x)v_n = 0.$$

Dakle, možemo definirati element $\Delta_v \in \mathrm{Der}_x(K[X], K)$ tako da za $f \in K[X]$ i za predstavnika P od f u $K[Y]$ stavimo

$$\Delta_v(f) = (\partial_1 P)(x)v_1 + \cdots + (\partial_n P)(x)v_n.$$

Obratno, neka je zadano $\Delta \in \mathrm{Der}_x(K[X], K)$. Tada za $P \in K[Y]$ imamo

$$\Delta(P(t_1, \dots, t_n)) = (\partial_1 P)(x)\Delta(t_1) + \cdots + (\partial_n P)(x)\Delta(t_n).$$

Posebno, ako je $P \in \mathfrak{a}$, onda je $\Delta(P(t_1, \dots, t_n)) = 0$. Prema tome, preslikavanje

$$\gamma_x : \mathrm{Der}_x(K[X], K) \longrightarrow \mathrm{Tan}_x(X), \qquad \Delta \mapsto (\Delta(t_1, \dots, \Delta(t_n)),$$

je izomorfizam.

Neka je $G_x(j) : \mathrm{Tan}_x(X) \to \mathrm{Tan}_y(Y)$ jedinstveno linearno preslikavanje takvo da vrijedi $G_x(j) \circ \gamma_x = \beta_y \circ \mathrm{Tan}_x(j)$. Iz prethodnih razmatranja vidi se da je $G_x(j)$ kanonska injekcija $\mathrm{Tan}_x(X)$ u $\mathrm{Tan}_y(Y) = K^n$.

Neka su sada X i Y zatvorene podvišestrukosti od K^m i K^n i neka su $j_1 : X \to K^m$ i $j_2 : Y \to K^n$ kanonske injekcije. Za morfizam $u : X \to Y$ postoje (ne nužno jedinstveni) $P_1, \ldots, P_n \in K[T_1, \ldots, T_m]$ takvi da je

$$u(z) = (P_1(z), \ldots, P_n(z)) \qquad \forall z \in X.$$

Definiramo morfizam

$$v : K^m \longrightarrow K^n, \qquad z \mapsto (P_1(z), \ldots, P_n(z)).$$

Tada je $j_2 \circ u = v \circ j_1$ i dobivamo komutativan dijagram

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Tan}_x(X) & \xrightarrow{H_x(u)} & \mathrm{Tan}_y(Y) \\
\gamma_x \uparrow & & \uparrow \gamma_y \\
\mathrm{Der}_x(K[X], K) & \xrightarrow{T_x(u)} & \mathrm{Der}_y(K[Y], K) \\
T_x(j_1) \downarrow & & \downarrow T_y(j_2) \\
\mathrm{Der}_x(K[T_1, \ldots, T_m], K) & \xrightarrow{T_x(v)} & \mathrm{Der}_y(K|S_1, \ldots, S_n], K).
\end{array}$$

Pri tome je $H_x(u) : \mathrm{Tan}_x(X) \to \mathrm{Tan}_y(Y)$ jedinstveno linearno preslikavanje takvo da vrijedi $H_x(u) \circ \gamma_x = \gamma_y \circ T_x(u)$. Dakle, $H_x(u)$ je linearno preslikavanje

$$(v_1, \ldots, v_m) \mapsto \left(\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial P_1}{\partial T_i}(x) v_i, \ldots, \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial P_n}{\partial T_i}(x) v_i \right).$$

Posebno, ako je $\ell : K^m \to K^n$ linearno preslikavanje, čija je matrica $[a_{ij}]$ u kanonskim bazama dana sa

$$a_{ij} = \frac{\partial P_i}{\partial T_j}(x),$$

onda je $\ell(\mathrm{Tan}_x(X)) \subseteq \mathrm{Tan}_y(Y)$ i $\ell(v) = H_x(u)(v)$ za sve $v \in \mathrm{Tan}_x(X)$.

Propozicija 5.6.7. *Neka je X podvišestrukost višestrukosti Y, $j : X \to Y$ kanonska injekcija i $x \in X$. Tada je diferencijal $T_x(j) : T_x(X) \to T_x(Y)$ injektivan.*

Dokaz: X je lokalno zatvoren podskup od Y, pa postoje zatvoren podskup F i otvoren podskup U od Y takvi da je $X = F \cap U$. Neka su $j_1 : X \to U$ i $j_2 : U \to Y$ kanonske injekcije. Budući da je $j = j_2 \circ j_1$, imamo $T_x(j) = T_x(j_2) \circ T_x(j_1)$. Prema prijašnjim razmatranjima znamo da je $T_x(j_2)$ izomorfizam. Dakle, dokaz se svodi na slučaj kad je X zatvorena podvišestrukost od Y. Prešavši na afinu otvorenu okolinu točke x možemo pretpostaviti da je višestrukost Y afina i da je $K[X] = K[Y]/\mathfrak{a}$, gdje je $\mathfrak{a}$ radikalan ideal u $K[Y]$. Ako je $\varphi : K[Y] \to K[X] = K[Y]/\mathfrak{a}$ kanonski epimorfizam, onda je $T_x(j)$ preslikavanje sa $\mathrm{Der}_x(K[X], K)$ u $\mathrm{Der}_x(K[Y], K)$ dano sa $\Delta \mapsto \Delta \circ \varphi$. Sada iz surjektivnosti φ slijedi injektivnost $T_x(j)$.

Neka su sada U i V afine višestrukosti i $(x, y) \in U \times V$. Algebra $K[U \times V]$ identificira se s tenzorskim produktom $K[U] \otimes_K K[V]$. Pri toj identifikaciji za funkcije $f \in K[U]$ i $g \in K[V]$ elementu $f \otimes g \in K[U] \otimes_K K[V]$ odgovara funkcija $(u, v) \mapsto f(u)g(v)$, $(u, v) \in U \times V$.

Neka su sada $D \in \mathrm{Der}_x(K[U], K)$ i $D' \in \mathrm{Der}_y(K[V], K)$. Definiramo linearno preslikavanje

$$\vartheta_{D,D'} : K[U \times V] \longrightarrow K, \qquad \vartheta_{D,D'}(f \otimes g) = D(f)g(y) + f(x)D'(g), \quad f \in K[U],\ g \in K[V].$$

Direktno se provjerava da je $\vartheta_{D,D'} \in \mathrm{Der}_{(x,y)}(K[U \times V], K)$. Dakle, imamo linearno preslikavanje

$$\vartheta : \mathrm{Der}_x(K[U], K) \times \mathrm{Der}_y(K[V], K) \longrightarrow \mathrm{Der}_{(x,y)}(K[U \times V], K), \qquad (D, D') \mapsto \vartheta_{D,D'}.$$

Propozicija 5.6.8. *Preslikavanje* $\vartheta : \mathrm{Der}_x(K[U], K) \times \mathrm{Der}_y(K[V], K) \longrightarrow \mathrm{Der}_{(x,y)}(K[U \times V], K)$ *je izomorfizam.*

Dokaz: Injektivnost slijedi iz

$$\vartheta_{D,D'}(f \otimes 1) = D(f) \qquad \text{i} \qquad \vartheta_{D,D'}(1 \otimes g) = D'(g).$$

Neka je $\Delta \in \mathrm{Der}_{(x,y)}(K[U \times V], K)$. Definiramo $D : K[U] \to K$ i $D' : K[V] \to K$ sa

$$D(f) = \Delta(f \otimes 1), \quad f \in K[U], \qquad D'(g) = \Delta(1 \otimes g), \quad g \in K[V].$$

Tada su $D \in \mathrm{Der}_x(K[U], K)$ i $D' \in \mathrm{Der}_y(K[V], K)$. Nadalje, kako je $(f \otimes g) = (f \otimes 1)(1 \otimes g)$, iz definicija D i D' i iz činjenice da je Δ $K-$derivacija neposredno slijedi da je $\vartheta_{D,D'} = \Delta$. Time je dokazana i surjektivnost.

Propozicija 5.6.9. *Neka su X i Y višestrukosti i $(x, y) \in X \times Y$. Nadalje, neka su*

$$j : X \times \{y\} \to X \times Y \qquad i \qquad j' : \{x\} \times Y \to X \times Y$$

kanonske injekcije. Tada je preslikavanje

$$T_{(x,y)}(X \times \{y\}) \times T_{(x,y)}(\{x\} \times Y) \longrightarrow T_{(x,y)}(X \times Y), \qquad (D, D') \mapsto T_{(x,y)}(j)(D) + T_{(x,y)}(j')(D'),$$

izomorfizam. Posebno, prostori $T_x(X) \times T_y(Y)$ i $T_{(x,y)}(X \times Y)$ su izomorfni.

Dokaz: Tvrdnja se pomoću korolara 5.6.6. svodi na slučaj kad su X i Y afine višestrukosti. U tom slučaju tvrdnja se dobiva iz propozicije 5.6.8. jer vrijedi

$$T_{(x,y)}(j)(D) = \vartheta_{D,0} \qquad \text{i} \qquad T_{(x,y)}(j')(D') = \vartheta_{0,D'}.$$

Propozicija 5.6.10. *Neka je X višestrukost, $x \in X$ i Y bilo koja ireducibilna komponenta od X koja sadrži točku x. Tada je* $\dim T_x(X) \geq \dim Y$.

Skica dokaza: Zbog propozicije 5.6.7. i korolara 5.6.6. možemo pretpostaviti da je X ireducibilna afina višestrukost (dakle, $Y = X$.) Neka je kao i prije $\mathfrak{n}_x$ ideal u $K[X]$ svih regularnih funkcija kojima je x nultočka. Tada znamo da su prostori $\mathfrak{n}_x/\mathfrak{n}_x^2$ i $\mathfrak{m}_{X,x}/\mathfrak{m}_{X,x}^2$ izomorfni. Stoga je dovoljno dokazati da vrijedi $\dim \mathfrak{n}_x/\mathfrak{n}_x^2 \geq \dim X$.

Neka su $f_1, \ldots, f_r \in \mathfrak{n}_x$ takvi da njihove klase $f_1+\mathfrak{n}_x^2, \ldots, f_r+\mathfrak{n}_x^2$ tvore bazu vektorskog prostora $\mathfrak{n}_x/\mathfrak{n}_x^2$. Prema propoziciji 3.2.2. tada je

$$\mathfrak{n}_x = K[X]f_1 + \cdots + K[X]f_r.$$

Promatrajmo morfizam

$$u : X \longrightarrow K^r, \qquad y \mapsto (f_1(y), \ldots, f_r(y)).$$

Ako je $u(y) = 0$, tada je $\mathfrak{n}_x \subseteq \mathfrak{n}_y$, a odatle je $\mathfrak{n}_x = \mathfrak{n}_y$ (jer $\mathfrak{n}_x$ i $\mathfrak{n}_y$ su kodimenzije 1 u $K[X]$), pa slijedi $y = x$.

Za $y \in X$ označimo sa $e(y)$ maksimum dimenzija ireducibilnih komponenata od $u^{-1}(u(y))$ koje sadrže y. Pomoću tvrdnje (a) propozicije 5.1.3. može se dokazati da je funkcija $y \mapsto e(y)$ odozgo poluneprekidna. Posebno, skup $\{y \in X;\ e(y) \geq 1\}$ je zatvoren, a to znači da je skup $U = \{y \in X;\ e(y) = 0\}$ otvorena okolina točke x u X. Neka je $v : U \to K^r$ restrikcija morfizma u. Tada je $\dim v^{-1}(z) = 0$ za svaku točku $z \in v(U)$. Odatle slijedi

$$\dim X = \dim U \leq \dim K^r = r = \dim \mathfrak{n}_x/\mathfrak{n}_x^2.$$

Neka je X ireducibilna višestrukost. Kažemo da je $x \in X$ **glatka točka višestrukosti** X, ako je $\dim T_x(X) = \dim X$. Kažemo da je X **glatka višestrukost** ako su sve njezine točke glatke. Umjesto "glatka točka" upotrebljava se i naziv "prosta točka", a umjesto "glatka višestrukost" kaže se i "nesingularna višestrukost".

Ako višestrukost X nije ireducibilna, točka $x \in X$ se zove glatka točka, ako je $\dim T_x(X)$ jednaka maksimumu dimenzija ireducibilnih komponenata od X koje sadrže točku x. Nadalje, X se zove glatka višestrukost, ako joj je svaka točka glatka.

Očito je afini prostor K^r glatka višestrukost. Nadalje, projektivni prostor $P^r(K)$ je također glatka višestrukost, jer svaka točka $x \in P^r(K)$ ima afinu otvorenu okolinu koja je izomorfna prostoru K^r. Na isti način vidi se i da su Grassmannove višestrukosti $G_{n,r}$, a također i višestrukosti zastava $\mathcal{F}_n$ glatke višestrukosti.

Bez dokaza navodimo:

Propozicija 5.6.11. *Neka je x glatka točka ireducibilne višestrukosti X. Tada je $\mathcal{O}_{X,x}$ faktorijalan prsten. Posebno, taj je prsten cijelozatvoren (u njegovom polju razlomaka).*

Propozicija 5.6.12. *Neka je X ireducibilna afina višestrukost, $x \in X$ glatka točka i $\mathfrak{n}_x$ pripadni maksimalni ideal u $K[X]$. Neka su $f_1, \ldots, f_r \in \mathfrak{n}_x$ takvi da je $\{f_1 + \mathfrak{n}_x^2, \ldots, f_r + \mathfrak{n}_x^2\}$ baza vektorskog prostora $\mathfrak{n}_x/\mathfrak{n}_x^2$. Tada su $f_1, \ldots, f_r$ algebarski nezavisni i predstavljaju bazu trenscendentnosti polja racionalnih funkcija $R(X)$ nad poljem K.*

Skica dokaza: Promatrajmo morfizam

$$u : X \longrightarrow K^r, \qquad y \mapsto (f_1(y), \ldots, f_r(y)).$$

Pretpostavimo da postoji nenul polinom $P \in K[T_1, \ldots, T_r]$ takav da je $P(f_1, \ldots, f_r) = 0$. Tada je $Cl(u(X)) \subseteq \mathcal{V}(P)$, pa iz korolara 5.5.18. slijedi $\dim Cl(u(X)) \leq r - 1$. Kao u dokazu propozicije 5.6.10. pokazuje se da odatle slijedi $\dim X \leq r - 1$, a to je suprotno pretpostavci da je

$$r = \dim \mathfrak{n}_x/\mathfrak{n}_x^2 = \dim T_x(X) = \dim X.$$

Dakle, $f_1, \ldots, f_r$ su algebarski nezavisni. Posljednja tvrdnja slijedi iz teorema 5.5.10. i iz općih svojstava baza transcendentnosti proširenja L polja K :

- svaki skup $S \subseteq L$ koji je algebarski nezavisan nad poljem K je podskup neke baze transcendentnosti polja L nad poljem K,
- posebno, ako je $r = \operatorname{tr} \deg_K L$ konačan i ako je $S \subseteq L$ skup koji je algebarski nezavisan nad K i ima r elemenata, onda je S baza transcendentnosti od L nad K.

Neka je X ireducibilna višestrukost, $x \in X$ i U afina otvorena okolina točke x. Označimo sa Ω_U $K[U]-$modul svih derivacija algebre $K[U]$. Bez dokaza navodimo:

Teorem 5.6.13. *Neka je X ireducibilna višestrukost i* $\dim X = n$.

(a) Glatka točka $x \in X$ ima afinu otvorenu okolinu U takvu da je Ω_U slobodan $K[U]-$modul ranga n.

(b) Skup svih glatkih točaka u X je neprazan otvoren podskup od X (dakle, gust u X).

Ako višestrukost X nije ireducibilna, ali je ekvidimenzionalna, a također, ako je X disjunktna unija svojih ireducibilnih komponenata, onda iz tvrdnje (b) teorema 5.6.13 neposredno slijedi da je skup svih glatkih točaka u X otvoren gust podskup od X.

Morfizam višestrukosti $u : X \to Y$ zove se **dominantan**, ako je njegova slika $u(X)$ gusta u Y. Sljedeći je teorem posljedica teorema 5.6.13.; navodimo ga također bez dokaza:

Teorem 5.6.14. *Neka je $u : X \to Y$ morfizam ireducibilnih višestrukosti.*

(a) *Pretpostavimo da postoje glatke točke $x \in X$ i $y \in Y$ takve da je $y = u(x)$ i da je operator $T_x(u) : T_x(X) \to T_y(Y)$ surjektivan. Tada je morfizam u dominantan.*

(b) *Pretpostavimo da je morfizam u dominantan. Postoji neprazan otvoren podskup U od X takav da je za svaku točku $x \in U$ njena slika $u(x)$ glatka točka višestrukosti i da je operator $T_x(u) : T_x(X) \to T_{u(x)}(Y)$ surjektivan.*

5.7 Koherentni i kvazikoherentni algebarski snopovi

Teorem 5.7.1. *Neka je X višestrukost. Strukturni snop $\mathcal{O}_X$ je koherentan snop prstenova na X.*

Skica dokaza: Pretpostavimo najprije da je $X = K^r$. Neka je $x \in X$, U otvorena okolina točke x i $f_1, \dots, f_p \in \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ prerezi snopa $\mathcal{O}_X$ nad U. Dakle, f_i su racionalne funkcije regularne u svakoj točki skupa U. Treba dokazati da je snop relacija $\mathcal{R}(f_1, \dots, f_p)$ konačnog tipa nad $\mathcal{O}_X|U$. Snop relacija $\mathcal{R}(f_1, \dots, f_p)$ je podsnop od $(\mathcal{O}_X|U)^p$ i njegova je vlat nad točkom $y \in U$

$$\mathcal{R}(f_1, \dots, f_p)_y = \{(g_1, \dots, g_p) \in \mathcal{O}_y^p;\ g_1 f_1(y) + \dots + g_p f_p(y) = 0\}.$$

Svojstvo "konačnog tipa" je po definiciji lokalno, pa možemo zamijenivši U s manjom okolinom pretpostaviti da je svaka funkcija f_i oblika P_i/Q, gdje su $P_1, \dots, P_p, Q$ polinomi i $Q(y) \neq 0\ \forall y \in U$. Ako je $y \in U$ i $(g_1, \dots, g_p) \in \mathcal{R}(f_1, \dots, f_p)_y$, onda vrijedi $\sum_{i=1}^p g_i f_i = 0$ ne samo u točki y nego i na nekoj okolini od y. Klice g_i možemo pisati u obliku $g_i = R_i/S$, gdje su $R_1, \dots, R_p, S$ polinomi i $S(y) \neq 0$. Sada očito imamo ekvivalenciju

$$\sum_{i=1}^p g_i f_i = 0 \text{ na okolini od } y \qquad \Longleftrightarrow \qquad \sum_{i=1}^p R_i P_i = 0 \text{ na okolini od } y.$$

Kako su R_i i P_i polinomi, ovo posljednje ekvivalentno je sa $\sum_{i=1}^p R_i P_i = 0$. No prsten polinoma je Noetherin, pa je modul relacija među polinomima $P_1, \dots, P_p$ modul konačnog tipa. Dakle, snop relacija $\mathcal{R}(f_1, \dots, f_p)$ je konačnog tipa. Dakle, strukturni snop $\mathcal{O}_{K^r}$ je koherentan snop prstenova na K^r.

Pretpostavimo sada da je X afina višestrukost, odnosno, zatvoren podskup od K^r. Za svaku točku $x \in K^r$ označimo sa $\mathcal{J}_x(X)$ ideal u $\mathcal{O}_x = \mathcal{O}_{K^r,x}$ sastavljen od svih $f \in \mathcal{O}_x$ čija je restrikcija na X jednaka nuli na okolini točke x. To posebno znači da je $\mathcal{J}_x(X) = \mathcal{O}_x$ ako je $x \in K^r \setminus X$. Sada je $\mathcal{J}(X) = \bigcup_{x \in K^r} \mathcal{J}_x(X)$ podsnop snopa $\mathcal{O} = \mathcal{O}_{K^r}$ i to je snop $\mathcal{O}-$modula. Dokazat ćemo sada da je snop $\mathcal{J}(X)$ koherentan snop $\mathcal{O}-$modula. Neka je

$$I(X) = \{P \in K[T_1, \dots, T_r];\ P(x) = 0\ \forall x \in X\}$$

radikalni ideal pridružen algebarskom skupu X. Pokazuje se da vrijedi $\mathcal{J}_x(X) = I(X)\mathcal{O}_{X,x}$ za svaku točku $x \in X$, a to vrijedi i za svaku točku $x \in K^r \setminus X$. Ideal $I(X)$ generiran je s konačno mnogo elemenata, pa slijedi da je snop $\mathcal{O}-$modula $\mathcal{J}(X)$ konačnog tipa. Budući da je snop prstenova $\mathcal{O}$ koherentan, prema propozicijama 4.2.3. i 4.2.12. snop $\mathcal{O}-$modula $\mathcal{J}(X)$ je koherentan.

Neka je sada X proizvoljna višestrukost. Budući da je svojstvo koherentnosti lokalno, možemo pretpostaviti da je X afina višestrukost, odnosno, zatvorena podvišestrukost afinog prostora K^r. Prema dokazanom, $\mathcal{J}(X)$ je koherentan snop ideala na K^r. Sada iz teorema 4.2.15. slijedi da je $\mathcal{O}/\mathcal{J}(X)$ koherentan snop prstenova na X. Taj je snop prstenova nula izvan X, a njegova restrikcija na X je upravo $\mathcal{O}_X$. Prema korolaru 4.2.18. $\mathcal{O}_X$ je koherentan snop prstenova na X.

Sada iz propozicije 4.2.11. neposredno slijedi

Korolar 5.7.2. *Neka je X algebarska višestrukost. Snop $\mathcal{O}_X-$modula $\mathcal{F}$ je koherentan ako i samo ako je on lokalno izomorfan kojezgri homomorfizma $\mathcal{O}_X^q \to \mathcal{O}_X^p$, tj. ako i samo ako svaka točka $x \in X$ ima otvorenu okolinu U takvu da je za neke $p, q \in \mathbb{Z}_+$ snop $\mathcal{O}_U-$modula $\mathcal{F}|U$ izomorfan kojezgri nekog homomorfizma $\mathcal{O}_U^q \to \mathcal{O}_U^p$.*

Neka je X višestrukost. **Algebarski snop** na višestrukosti X je snop $\mathcal{O}_X-$modula. Algebarski snop $\mathcal{F}$ na X zove se **kvazikoherentan**, ako je on lokalno izomorfan kojezgri homomorfizma $\mathcal{O}_X^{(I)} \to \mathcal{O}_X^{(J)}$, odnosno, preciznije, ako svaka točka $x \in X$ ima otvorenu okolinu U takvu da je za neke neprazne skupove I i J restrikcija $\mathcal{F}|U$ izomorfna kojezgri nekog homomorfizma $\mathcal{O}_U^{(I)} \to \mathcal{O}_U^{(J)}$.

Pojam kvazikoherentnog algebarskog snopa usko je vezan uz pojam lokalizacije. Razmotrimo prvo slučaj afine višestrukosti, tj. zatvorene podvišestrukosti X afinog prostora K^r. Kao i prije označimo sa $K[X]$ algebru restrikcija na X polinomijalnih funkcija na K^r, dakle, $K[X] = K[T_1, \dots, T_r]/I(X)$. Neka je $f \in K[X]$ i $\Omega_X(f)$ pripadni glavni otvoren podskup od X :

$$\Omega_X(f) = \{x \in X;\ f(x) \neq 0\}.$$

Razmatranjima sličnim onima iz odjeljka 5.2. pokazat ćemo da se algebra $\mathcal{O}_X(\Omega_X(f))$ regularnih funkcija na $\Omega_X(f)$ može identificirati s lokalizacijom $K[X]_f$ algebre $K[X]$ u odnosu na multiplikativni skup $\{f^n;\ n \in \mathbb{Z}_+\}$:

Propozicija 5.7.3. *Neka je X zatvorena podvišestrukost afinog prostora K^r i $K[X]$ pripadna afina algebra, tj. restrikcija polinoma iz $K[T_1, \dots, T_r]$ na X. Za svaku funkciju $f \in K[X]$ algebra $\mathcal{O}_X(\Omega_X(f))$ regularnih funkcija na $\Omega_X(f)$ izomorfna je lokalizaciji $K[X]_f$ algebre $K[X]$ po multiplikativnom skupu $\{f^n;\ n \in \mathbb{Z}_+\}$. Posebno, $\mathcal{O}_X(X) \cong K[X]$.*

Dokaz: Restrikcija na $\Omega_X(f)$ definira prirodni homomorfizam $K[X]_f \to \mathcal{O}_X(\Omega_X(f))$. Pretpostavimo da $g/f^k \in K[X]_f$ određuje nulprerez od $\mathcal{O}_X$ nad $\Omega_X(f)$. To znači da je $g|\Omega_X(f) = 0$. To opet znači da je $gf = 0$ u algebri $K[X]$. No tada je $g/f^k = 0$ u lokalizaciji $K[X]_f$. To pokazuje da je prirodni homomorfizam restrikcije $K[X]_f \to \mathcal{O}_X(\Omega_X(f))$ injektivan.

Dokažimo sada posljednju tvrdnju, da je taj homomorfizam i surjektivan za $f = 1$, tj. za $\Omega_X(f) = X$. Očito su restrikcije polinoma iz $K[T_1, \dots, T_r]$ na X regularne funkcije na X. Prema tome, $K[X] \subseteq \mathcal{O}_X(X)$. Pretpostavimo sada da je $h \in \mathcal{O}_X(X)$. Tada možemo izabrati otvoren pokrivač $(U_i)_{i\in I}$ od X takav da za svaki $i \in I$ vrijedi $h|U_i = p_i/q_i$, gdje su $p_i, g_i \in K[X]$ i g_i nema nultočaka u U_i. Zbog Noetherinosti od X možemo pretpostaviti da je $I = \{1, \dots, n\}$. Nadalje, budući da glavni otvoreni podskupovi tvore bazu topologije, možemo uzeti da je za svaki $i \in I$ $U_i = \Omega_X(g_i)$, $g_i \in K[X]$. U stvari, možemo uzeti da je $g_i = q_i$; doista, ako nije tako, to možemo postići zamjenom p_i i q_i sa sp_i i sq_i za neki $s \in K[X]$. Uvjeti da razlomci p_i/q_i, $i \in I$, definiraju globalni prerez su $p_i/q_i = p_j/q_j$ na $\Omega_X(q_i) \cap \Omega_X(q_j)$ za bilo koje $i, j \in I$. To znači da je $p_iq_j - p_jq_i = 0$ na $\Omega_X(q_i) \cap \Omega_X(q_j)$. Odatle slijedi da je $q_iq_j(p_iq_j - p_jq_i) = 0$ svuda na X. Stavimo sada $p_i' = p_iq_i$ i $q_i' = q_i^2$ za svaki $i \in I$. Tada je $p_i'/q_i' = p_i/q_i$ na $\Omega_X(q_i) = \Omega_X(q_i')$ i za svaki par $i, j \in I$ u $K[X]$ vrijedi jednakost $p_i'q_j' = p_j'q_i'$. Budući da funkcije q_i' nemaju zajedničkih nultočaka u X (jer $\{\Omega_X(q_1'), \dots, \Omega_X(q_n')\}$ je pokrivač od X), vrijedi

$$K[X]q_1' + \cdots + K[X]q_n' = K[X].$$

Stoga postoje $g_i \in K[X]$ takve da je $\sum_{i=1}^n g_iq_i' = 1$. Stavimo sada $h' = \sum_{i=1}^n g_ip_i' \in K[X]$. Tada za svaki $j \in I$ imamo

$$q_j'h' = \sum_{i=1}^n g_iq_j'p_i' = \sum_{i=1}^n g_ip_j'q_i' = p_j' \sum_{i=1}^n g_iq_i' = p_j'.$$

Odatle na $\Omega_X(q_j') = \Omega_X(q_j)$ slijedi jednakost $h' = p_j'/q_j' = p_j/q_j = h$. Dakle, $h' = h$, i time je dokazano da je $K[X] \to \mathcal{O}_X(X)$ i surjekcija, dakle, izomorfizam.

Treba još dokazati surjektivnost $K[X]_f \to \mathcal{O}_X(\Omega_X(f))$. U tu svrhu treba samo primijeniti dokazanu surjektivnost na zatvorenu podvišestrukost X_f od K^{r+1} koja se iz $\Omega_X(f)$ dobiva preslikavanjem $z \mapsto (z, f(z)^{-1})$; naime, znamo da je tada preslikavanje $z \mapsto (z, f(z)^{-1})$ izomorfizam višestrukosti sa $\Omega_X(f)$ na X_f. Kompozicija tog preslikavanja s polinomijalnom funkcijom na K^{r+1} je funkcija oblika g/f^k, gdje je g polinomijalna funkcija na K^r. Time je dokazano da je homomorfizam $K[X]_f \to \mathcal{O}_X(\Omega_X(f))$ surjektivan.

Ako je $\mathcal{A}$ snop prstenova na topološkom prostoru X i ako su $\mathcal{M}$ i $\mathcal{N}$ snopovi $\mathcal{A}-$modula na X, u odjeljku 4.1. definirali smo tenzorski produkt $\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{N}$. Ako je sada A fiksni (komutativan unitalan) prsten i $\mathcal{M}$ i $\mathcal{N}$ su snopovi $A-$modula na X, možemo definirati tenzorski produkt $\mathcal{M} \otimes_A \mathcal{N}$, a također i tenzorski produkt $M \otimes_A \mathcal{N}$ $A-$modula M sa snopom $A-$modula $\mathcal{N}$ na X. Ti su snopovi definirani kao snopovi klica prereza očitih predsnopova $(\mathcal{M}(U) \otimes_A \mathcal{N}(U))_{U\in\mathcal{T}(X)}$, odnosno, $(M \otimes_A \mathcal{N}(U))_{U\in\mathcal{T}(X)}$. Pretpostavimo sada da je $\mathcal{A}$ snop prstenova na X i stavimo $A = \mathcal{A}(X) = \Gamma(X, \mathcal{A})$. Neka je M $A-$modul. Tada je $\mathcal{A} \otimes_A M$ ne samo snop $A-$modula, nego i snop $\mathcal{A}-$modula na X. Taj se snop zove **lokalizacija modula** M **na** X. To je snop klica predsnopa $(\mathcal{A}(U) \otimes_A M)_{U\in\mathcal{T}(X)}$. Očito je $M \mapsto \mathcal{A} \otimes_A M$ kovarijantan funktor iz kategorije $A-$modula u kategoriju snopova $\mathcal{A}-$modula na X. Sasvim općenito taj funktor nema naročito dobra svojstva. Međutim, u slučaju kvazikoherentnih algebarskih snopova on ima izuzetno lijepa svojstva: on je egzaktan i vrijedi $M \cong \Gamma(X, \mathcal{A}_A M)$, štoviše, $M \mapsto \mathcal{A} \otimes_A M$ je ekvivalencija kategorija s inversom $\Gamma(X, \cdot)$.

Promotrimo slučaj afine višestrukosti X. Možemo uzeti da je X zatvorena podvišestrukost afinog prostora K^r i tada je $\mathcal{O}_X(X) = K[X] = K[T_1, \ldots, T_r]/I(X)$. Za $K[X]-$modul M stavimo

$$\tilde{M} = \mathcal{O}_X \otimes_{K[X]} M.$$

Kao što smo spomenuli, to je snop klica prereza predsnopa

$$U \mapsto M(U) = \mathcal{O}_X(U) \otimes_{K[X]} M.$$

Glavni otvoreni podskupovi $\Omega_X(f)$, $f \in K[X]$, čine bazu topologije od X, dakle, snop $\tilde{M}$ određen je restrikcijom predsnopa $U \mapsto M(U)$ na skupove oblika $U = \Omega_X(f)$.

Propozicija 5.7.4. *Neka su X afina višestrukost, M $K[X]-$modul i $f \in K[X]$. Tada postoji prirodan izomorfizam $M(\Omega_X(f)) \to M_f$, gdje je M_f lokalizacija modula M u odnosu na multiplikativan skup $\{f^n;\ n \in \mathbb{Z}_+\}$.*

Dokaz: Lokalizacija od M u odnosu na multiplikativan skup $\{f^n;\ n \in \mathbb{Z}_+\}$ sastoji se od klasa ekvivalencije izraza oblika m/f^k gdje su $m \in M$ i $k \in \mathbb{Z}_+$. Pri tome su m/f^k i n/f^j ekvivalentni ako i samo ako postoji $p \in \mathbb{Z}_+$ takav da je $f^p(f^j m - f^k n) = 0$. Uočimo da je to ujedno lokalizacija od M u odnosu na multiplikativni skup koji se sastoji od svih funkcija iz $K[X]$ koje nemaju nultočaka u $\Omega_X(f)$. To je posljedica Hilbertovog teorema o nulama: ako funkcija $g \in K[X]$ nema nultočaka u $\Omega_X(f)$, onda je f u radikalu glavnog ideala $K[X]g$, tj. vrijedi $f^k = hg$ za neki $k \in \mathbb{Z}_+$ i neki $h \in K[X]$. Odatle slijedi da multiplikativni skupovi $\{f^n;\ n \in \mathbb{Z}_+\} \subseteq \{g \in K[X];\ g(x) \neq 0\ \forall x \in \Omega_X(f)\}$ vode na istu lokalizaciju od M.

Znamo da je prsten $\mathcal{O}_X(\Omega_X(f))$ lokalizacija $K[X]_f$ prstena $K[X]$ u odnosu na multiplikativni skup $\{f^n;\ n \in \mathbb{Z}_+\}$. Očito postoji jedinstven homomorfizam

$$M(\Omega_X(f)) = \mathcal{O}_X(\Omega_X(f)) \otimes_{K[X]} M \longrightarrow M_f$$

takav da

$$\left(g/f^k\right) \otimes m \mapsto (gm)/f^k, \qquad g \in K[X], \quad k \in \mathbb{Z}_+,$$

a također i jedinstven homomorfizam

$$M_f \longrightarrow M(\Omega_X(f)) \quad \text{takav da} \quad m/f^k \mapsto \left(1/f^k\right) \otimes m, \quad m \in M, \quad k \in \mathbb{Z}_+.$$

Ta su dva homomorfizma međusobno inverzna:

$$m/f^k \mapsto \left(1/f^k\right) \otimes m \mapsto 1m/f^k = m/f^k,$$

$$\left(g/f^k\right) \otimes m \mapsto (gm)/f^k \mapsto \left(1/f^k\right) \otimes gm = \left(g/f^k\right) \otimes m.$$

Odatle neposredno slijedi:

Korolar 5.7.5. *Ako je X afina višestrukost i $M = K[X]$, onda je $\tilde{M} = \mathcal{O}_X$.*

Propozicija 5.7.6. *Neka je X afina višestrukost.*

(a) *Za svaku funkciju $f \in K[X]$ funktor $M \mapsto M(\Omega_X(f))$ je egzaktan.*

(b) *Funktor lokalizacije $M \mapsto \tilde{M}$ je egzaktan.*

Dokaz: (a) Iz definicije $M(U) = \mathcal{O}_X(U) \otimes_{K[X]} M$ je očito da je taj funktor desno egzaktan. Treba još dokazati lijevu egzaktnost, tj. da je za podmodul N od M homomorfizam

$$N(\Omega_X(f))) \to M(\Omega_X(f))$$

injektivan. Prema propoziciji 5.7.4. imamo $M(\Omega_X(f)) = M_f$ i $N(\Omega_X(f)) = N_f$. Neka je n/f^k predstavnik elementa od N_f i pretpostavimo da on predstavlja nulu u modulu M_f. To znači da je $f^p n = 0$ za neki $p \in \mathbb{Z}_+$. Ali ako ta jednakost vrijedi u modulu M, ona vrijedi i u podmodulu N. Dakle, n/f^k predstavlja nulu i u modulu N_f.

Tvrdnja (b) neposredna je posljedica tvrdnje (a) jer glavni otvoreni skupovi $\Omega_X(f)$ tvore bazu topologije prostora X.

Propozicija 5.7.7. *Neka je W afini otvoren podskup afine višestrukosti X i neka M $K[X]-$modul i $\tilde{M}$ njegova lokalizacija na X. Tada je restrikcija $\tilde{M}|W$ izomorfna lokalizaciji $\mathcal{O}_X(W)-$modula $M(W)$ na W.*

Dokaz: Svaki otvoren podskup U od W je otvoren u X i imamo

$$\mathcal{O}_X(U) \otimes_{\mathcal{O}_X(W)} M(W) = \mathcal{O}_X(U) \otimes_{\mathcal{O}_X(W)} \mathcal{O}_X(W) \otimes_{K[X]} M \cong \mathcal{O}_X(U) \otimes_{K[X]} M = M(U).$$

To pokazuje da su $\tilde{M}|W$ i lokalizacija od $M(W)$ na W snopovi klica prereza izomorfnih predsnopova na W.

Propozicija 5.7.8. *Neka su X afina višestrukost, M $K[X]-$modul i $\tilde{M}$ njegova lokalizacija na X.*

(a) *Za svaku funkciju $f \in K[X]$ homomorfizam $M_f = M(\Omega_X(f)) \to \tilde{M}(\Omega_X(f))$ je izomorfizam.*

(b) *$M \mapsto \tilde{M}(X)$ je izomorfizam.*

Dokaz: Svaki glavni otvoren podskup $\Omega_X(f)$ je prema propoziciji 5.2.10. afina višestrukost, dakle, to je afini otvoren podskup od X. Iz propozicija 5.7.4. i 5.7.7. slijedi da je restrikcija $\tilde{M}|\Omega_X(f)$ izomorfna lokalizaciji $\tilde{M}_f$ od M_f na $\Omega_X(f)$. To pokazuje da tvrdnja (a) slijedi iz tvrdnje (b) (koja je zapravo poseban slučaj tvrdnje (a) za $f = 1$).

Dokažimo tvrdnju (b). Dokaz je vrlo sličan dokazu propozicije 5.7.3. Pretpostavimo da $m \in M$ određuje nulprerez snopa $\tilde{M}$. To znači da možemo pokriti X s konačno mnogo otvorenih skupova $U_1, \ldots, U_n$ takvih da je za svaki indeks i slika od m u $M(U_i)$ jednaka nuli. Možemo pretpostaviti da za svaki i postoji funkcija $q_i \in K[X]$ takva da je $U_i = \Omega_X(q_i)$. Tada jednakost nuli u $M(U_i)$ znači da postoji $k_i \in \mathbb{Z}_+$ takav da je $q_i^{k_i} m = 0$. Budući da je $\{U_1, \ldots, U_n\}$ pokrivač od X, funkcije $q_1, \ldots, q_n$ (dakle, ni funkcije $q_1^{k_1}, \ldots, q_n^{k_n}$) nemaju zajedničkih nultočaka u X, pa kao i u dokazu propozicije 5.7.3. zaključujemo da postoje funkcije $g_1, \ldots, g_n \in K[X]$ takve da je $\sum_{i=1}^n g_i q_i^{k_i} = 1$. No tada slijedi

$$m = 1m = \sum_{i=1}^n g_i q_i^{k_i} m = 0.$$

Prema tome, homomorfizam $M \to \tilde{M}(X)$ je injektivan.

Pretpostavimo sada da je $s \in \tilde{M}(X)$. Možemo pokriti X s glavnim otvorenim podskupovima $\Omega_X(q_1), \ldots, \Omega_X(q_n)$, takvima da je za svaki indeks i restrikcija $s|\Omega_X(q_i)$ slika u $\tilde{M}(\Omega_X(q_i))$ elementa oblika m_i/q_i. Budući da ti elementi predstavljaju globalni prerez, možemo pretpostaviti da je

$$(m_i/q_i)|\Omega_X(q_i) \cap \Omega_X(q_j) = (m_j/q_j)|\Omega_X(q_i) \cap \Omega_X(q_j) \qquad \forall i, j.$$

Međutim, vrijedi $\Omega_X(q_i) \cap \Omega_X(q_j) = \Omega_X(q_i q_j)$, pa gornje jednakosti znače da za neki $k \in \mathbb{Z}_+$ u modulu M vrijedi

$$(q_i q_j)^k (q_j m_i - q_i m_j) = 0 \qquad \forall i, j.$$

Ako zamijenimo $q_i^k m_i$ sa m_i i q_i^{k+1} sa q_i, onda se razlomci m_i/q_i ne mijenjaju a gornje jednakosti u M postaju

$$q_j m_i - q_i m_j = 0 \qquad \forall i, j.$$

Kao i prije postoje funkcije $g_1, \ldots, g_n \in K[X]$ takve da vrijedi $\sum_{i=1}^n g_i q_i = 1$. Stavimo sada $m = \sum_{i=1}^n g_i m_i$. Tada za svaki indeks j imamo

$$q_j m = q_j \sum_{i=1}^n g_i m_i = \sum_{i=1}^n g_i q_j m_i = \sum_{i=1}^n g_i q_i m_j = 1 m_j = m_j.$$

Dakle, tako definiran element $m \in M$ ima u $M(\Omega_X(q_j))$ sliku m_j/q_j. Prema tome, prerez s je slika od m pri preslikavanju $M \to \tilde{M}(X)$. Time je dokazano da je homomorfizam $M \to \tilde{M}(X)$ i surjektivan, dakle, izomorfizam.

Prema teoremu 5.7.1. strukturni snop $\mathcal{O}_X$ višestrukosti X je koherentan. Odatle slijedi da je direktna suma konačno mnogo snopova $\mathcal{O}_X$ koherentan algebarski snop, a proizvoljna direktna suma snopova $\mathcal{O}_X$ je kvazikoherentan algebarski snop na X.

Lema 5.7.9. *Neka su X afina višestrukost, $f \in \mathcal{O}_X(X) = K[X]$ i $\mathcal{F}$ kvazikoherentan algebarski snop na X.*

(*a*) *Ako je $s \in \mathcal{F}(X)$ i $s|\Omega_X(f) = 0$, onda postoji $k \in \mathbb{Z}_+$ takav da je $f^k s = 0$.*

(*b*) *Ako je $t \in \mathcal{F}(\Omega_X(f))$, postoji $k \in \mathbb{Z}_+$ takav da je $f^k t$ restrikcija na $\Omega_X(f)$ globalnog prereza iz $\mathcal{F}(X)$.*

(*c*) *Prirodni homomorfizam $\mathcal{F}(X)_f \to \mathcal{F}(\Omega_X(f))$ definiran restrikcijom je izomorfizam.*

Dokaz: (*a*) X možemo pokriti afinim otvorenim podskupovima na kojima je $\mathcal{F}$ lokalizacija modula. Prema propoziciji 5.7.7. ako je $\mathcal{F}$ lokalizacija modula na nekom afinom otvorenom podskupu U od X, onda je $\mathcal{F}$ lokalizacija modula i na svakom afinom otvorenom podskupu od U. Prema tome, možemo odabrati $g_1, \ldots, g_n \in K[X]$ bez zajedničkih nultočaka u X (tako da je $\{\Omega_X(g_1), \ldots, \Omega_X(g_n)\}$ pokrivač od X) i $\mathcal{O}_X(\Omega_X(g_i))-$module M_i takve da je $\mathcal{F}|\Omega_X(g_i) \cong \tilde{M}_i$ za svaki i. Ako je $s \in \mathcal{F}(X)$, onda za svaki i možemo prema propoziciji 5.7.8. restrikciju $s_i = s|\Omega_X(g_i) \in \tilde{M}_i(\Omega_X(g_i))$ promatrati kao element od M_i. Ako je $s|\Omega_X(f) = 0$, onda je $s_i|\Omega_X(f) \cap \Omega_X(g_i) = 0$ za svaki i. Budući da je $\Omega_X(f) \cap \Omega_X(g_i) = \Omega_X(f g_i)$, prema propoziciji 5.7.3. slijedi da je slika od s_i u lokalizaciji $(M_i)_f$ jednaka nuli. Slijedi $f^k s_i = 0$ u M_i za neki $k \in \mathbb{Z}_+$ i za svaki i. (Naime, pokrivač je konačan, pa možemo izabrati isti $k \in \mathbb{Z}_+$ za svaki i). Tada je $f^k s$ globalni prerez od $\mathcal{F}$ čija je restrikcija na svaki član otvorenog pokrivača jednaka nuli. Dakle, $f^k s = 0$.

(*b*) Pretpostavimo sada da je $t \in \mathcal{F}(\Omega_X(f))$. Ponovnim korištenjem propozicija 5.7.8. i 5.7.3. zaključujemo da se za svaki indeks i restrikcija $t|\Omega_X(f) \cap \Omega_X(g_i)$ može promatrati kao element od

$(M_i)_f$. Dakle, za svaki indeks i restrikcija $t|\Omega_X(fg_i)$ podudara s razlomkom kome je u brojniku $m_i \in M_i$ a nazivnik mu je potencija od f. Stoga postoji $p \in \mathbb{Z}_+$ takav da za svaki i vrijedi $m_i|\Omega_X(fg_i) = f^p t|\Omega_X(fg_i)$. Sada su t_i i t_j za bilo koje i i j prerezi od $\mathcal{F}$ čije se restrikcije na $\Omega_X(fg_ig_j)$ podudaraju (jer su tamo obje jednake restrikciji od $f^p t$). Prema tvrdnji (a) postoji $q \in \mathbb{Z}_+$ takav da je $f^q(t_i - t_j) = 0$ na $\Omega_X(g_ig_j)$ i možemo izabrati isti q za sve parove i, j. Ali to znači da se za bilo koje i i j prerezi $f^q t_i$ nad $\Omega_X(g_i)$ i $f^q t_j$ nad $\Omega_X(g_j)$ podudaraju na presjeku $\Omega_X(g_i) \cap \Omega_X(g_j) = \Omega_X(g_ig_j)$. Prema tome, ti prerezi definiraju globalni prerez $s \in \mathcal{F}(X)$. Sada je $s|\Omega_X(f) = f^{p+q}t$. Time je dokazana tvrdnja (b).

Napokon, tvrdnja (c) neposredna je posljedica tvrdnji (a) i (b).

Propozicija 5.7.10. *Neka su X afina višestrukost, $\mathcal{F}$ kvazikoherentan snop na X i $M = \mathcal{F}(X)$. Tada je prirodni homomorfizam snopova $\mathcal{O}_X-$modula $\tilde{M} \to \mathcal{F}$ izomorfizam. Nadalje, $\mathcal{F}$ je koherentan ako i samo ako je modul M konačno generiran.*

Dokaz: Neka je $\mathcal{Q}$ skup svih glavnih otvorenih podskupova $\Omega_X(f)$ takvih da je $\mathcal{F}|\Omega_X(f)$ lokalizacija $\mathcal{O}_X(\Omega_X(f))-$modula. Prema propoziciji 5.7.7. ako je $\Omega_X(g) \subseteq \Omega_X(f)$ i ukoliko je $\Omega_X(f) \in \mathcal{Q}$, onda je i $\Omega_X(g) \in \mathcal{Q}$. To pokazuje da skupovi u $\mathcal{Q}$ čine bazu topologije od X.

Prema propoziciji 5.7.8. za $\Omega_X(f) \in \mathcal{Q}$ restrikcija $\mathcal{F}|\Omega_X(f)$ je lokalizacija modula $\mathcal{F}(\Omega_X(f))$. Nadalje, prema lemi 5.7.9. imamo izomorfizam $M_f = \mathcal{F}(X)_f \to \mathcal{F}(\Omega_X(f))$. Dakle, $\mathcal{F}|\Omega_X(f)$ je lokalizacija modula M_f na $\Omega_X(f)$.

Iz propozicija 5.7.8. i 5.7.7. slijedi da je da se lokalizacija $\tilde{M}_f$ od M_f na $\Omega_X(f)$ može identificirati s restrikcijom $\tilde{M}|\Omega_X(f)$. Dakle, na svakom skupu $\Omega_X(f) \in \mathcal{Q}$ imamo izomorfizam $\tilde{M}|\Omega_X(f) \to \mathcal{F}|\Omega_X(f)$ definiran kao kompozicija izomorfizama $\tilde{M}|\Omega_X(f) \to \tilde{M}_f$ i $\tilde{M}_f \to \mathcal{F}|\Omega_X(f)$. Ti izomorfizmi očito komutiraju s restrikcijom sa $\Omega_X(f)$ na $\Omega_X(g)$ ako je $\Omega_X(g) \subseteq \Omega_X(f)$. Budući da je $\mathcal{Q}$ baza topologije od X, time je definiran izomorfizam snopova $\mathcal{O}_X-$modula $\tilde{M} \to \mathcal{F}$.

Ako je modul M konačno generiran, tada je $\mathcal{F}$ koherentan snop budući da je izomorfan lokalizaciji konačno generiranog modula. S druge strane, ako je snop $\mathcal{F}$ koherentan, tada je lokalno on lokalizacija konačno generiranog modula. To znači da se X može pokriti s konačno mnogo glavnih otvorenih podskupova $\Omega_X(f_i)$ takvih da je za svaki indeks i restrikcija $\mathcal{F}|\Omega_X(f_i)$ lokalizacija konačno generiranog modula, a taj je nužno modul M_{f_i}. Budući da funkcije f_i nemaju zajedničkih nultočaka u X (jer skupovi $\Omega_X(f_i)$ pokrivaju X), standardnom se metodom pokazuje da je tada modul M konačno generiran.

Korolar 5.7.11. *Snop $\mathcal{O}_X-$modula $\mathcal{F}$ na algebarskoj višestrukosti X je kvazikoherentan ako i samo ako je za svaki afini otvoren podskup $U \subseteq X$ restrikcija $\mathcal{F}|U$ lokalizacija $\mathcal{O}_X(U)-$modula $\mathcal{F}(U)$.*

Dokaz: Uvjet je dovoljan jer kvazikoherentnost je lokalno svojstvo. Pretpostavimo da je $\mathcal{F}$ kvazikoherentan i da je $U \subseteq X$ afini otvoren podskup. Prema propoziciji 5.7.7. restrikcija $\mathcal{F}|U$ je kvazikoherentan snop. Sada je prema propoziciji 5.7.10. $\mathcal{F}|U$ lokalizacija $\mathcal{O}_X(U)-$modula $\mathcal{F}(U)$.

Tvrdnje propozicija 5.7.8. i 5.7.10. možemo iskazati ovako:

Teorem 5.7.12. *Neka je X afina višestrukost. Tada je funktor $M \mapsto \tilde{M}$ ekvivalencija kategorija s kategorije $\mathcal{O}_X(X)-$modula na kategoriju kvazikoherentnih snopova $\mathcal{O}_X-$modula na X i njen je kvaziinvers* $\Gamma(X, \cdot)$. *Restrikcija tog funktora na potkategoriju konačno generiranih $\mathcal{O}_X(X)-$modula je ekvivalencija na kategoriju koherentnih snopova $\mathcal{O}_X-$modula.*

Ako je $\mathcal{A}$ snop prstenova na X i $\mathcal{M}$ je snop $\mathcal{A}-$modula na X, onda za skup $\{g_1, \ldots, g_k\}$ prereza iz $\mathcal{M}(X)$ kažemo da generira $\mathcal{M}$ nad $\mathcal{A}$, ako je homomorfizam snopova $\mathcal{A}-$modula $\mathcal{A}^k \to \mathcal{M}$, dan sa $(f_1, \ldots, f_k) \mapsto \sum_{i=1}^k f_i g_i$ surjektivan.

Korolar 5.7.13. *Ako je $\mathcal{M}$ koherentan snop $\mathcal{O}_X$−modula na višestrukosti X i $U \subseteq X$ je afini otvoren podskup, onda je restrikcija $\mathcal{M}|U$ generirana nad $\mathcal{O}_U$ s konačno mnogo prereza iz $\mathcal{M}(U)$.*

Dokaz: Snop $\mathcal{M}|U$ je koherentan snop, dakle, on je lokalizacija nekog konačno generiranog $\mathcal{O}_X(U)$−modula M. Neka je $\{m_1, \ldots, m_k\}$ skup generatora modula M. Tada je homomorfizam modula $\mathcal{O}_X(U)^k \to M$, dan sa

$$(f_1, \ldots, f_k) \mapsto \sum_{i=1}^{k} f_i m_i,$$

surjektivan. Budući da je prema tvrdnji (b) propozicije 5.7.6. funktor lokalizacije egzaktan, slika tog homomorfizma pri funktoru lokalizacije je surjektivni morfizam. Ako je g_i prerez od $\tilde{M} = \mathcal{M}|U$ određen sa m_i, slijedi da skup prereza $\{g_1, \ldots, g_k\}$ generira $\mathcal{M}|U$ nad $\mathcal{O}_U$.

Poglavlje 6

MODULI NAD WEYLOVOM ALGEBROM

U ovom ćemo poglavlju proučiti module nad Weylovom algebrom $D(n)$ svih diferencijalnih operatora na K^n s polinomijalnim koeficijentima, tj. algebre $\mathrm{Diff}(K[X_1, \ldots, X_n])$. U cijelom poglavlju K je algebarski zatvoreno polje karakteristike 0. Naravno, kako je algebra polinoma $\mathcal{A} = K[X_1, \ldots, X_n]$ podalgebra od $D(n)$, svaki $D(n)-$modul je ujedno $\mathcal{A}-$modul, pa ćemo najprije proučiti $\mathcal{A}-$module.

6.1 Moduli nad algebrom polinoma

U ovom je odjeljku $\mathcal{A} = K[X_1, \ldots, X_n]$. Algebru $\mathcal{A}$ možemo filtrirati i graduirati ukupnim stupnjem polinoma:

$$\mathcal{A}_m = \left\{ \sum_{\alpha\in\mathbb{Z}_+^n,\, |\alpha|\leq m} c_\alpha X^\alpha;\ c_\alpha \in K \right\}, \qquad \mathcal{A}^m = \left\{ \sum_{\alpha\in\mathbb{Z}_+^n,\, |\alpha|=m} c_\alpha X^\alpha;\ c_\alpha \in K \right\}.$$

Jasno je da vrijedi

$$\mathcal{A}_m = \mathcal{A}^m \dotplus \mathcal{A}_{m-1}.$$

Prema tome, u odnosu na filtraciju $(\mathcal{A}_m)_{m\in\mathbb{Z}_+}$ možemo identificirati $\mathrm{Gr}\,\mathcal{A}$ sa $\mathcal{A}$. Očito filtracija $(\mathcal{A}_m)_{m\in\mathbb{Z}_+}$ zadovoljava uvjete (1) – (7) odjeljka 3.3.

Budući da je $\mathcal{A}_0 = K$, konačno generirani $\mathcal{A}_0-$moduli su konačnodimenzionalni vektorski prostori nad poljem. Za aditivnu funkciju λ možemo uzeti $\dim_K$. Dimenziju i multiplicitet konačno generiranog $\mathcal{A}-$modula M u odnosu na aditivnu funkciju $\lambda = \dim_K$ označavat ćemo bez indeksa λ, odnosno, sa $d(M)$ i $e(M)$.

Promatramo li $\mathcal{A}$ kao lijevi $\mathcal{A}-$modul, imamo za svaki $p \in \mathbb{Z}_+$

$$\dim_K \mathcal{A}^p = \binom{n+p}{n} = \frac{p^n}{n!} + \text{ članovi nižeg stupnja u } p.$$

Dakle, $d(\mathcal{A}) = n$ i $e(\mathcal{A}) = 1$. Nadalje, za svaki konačno generirani $\mathcal{A}-$modul M postoji egzaktan niz

$$\{0\} \longrightarrow N \longrightarrow \mathcal{A}^d \longrightarrow M \longrightarrow \{0\},$$

gdje je d broj članova nekog konačnog podskupa od M koji generira $\mathcal{A}-$modul M, a $\mathcal{A}^d$ ovdje označava slobodan $\mathcal{A}-$modul ranga d, odnosno, $d-$struki Kartezijev produkt $\mathcal{A} \times \cdots \times \mathcal{A}$. Dakle, prema propoziciji 3.3.9. vrijedi $d(M) \leq n$.

Razmotrit ćemo sada geometrijsku interpretaciju broja $d(M)$. Neka je $x \in K^n$ i označimo sa $\mathbf{m}_x$ maksimalni ideal u $\mathcal{A}$ svih polinoma kojima je točka x nultočka. Dakle, $\mathbf{m}_x$ je ideal generiran s elementima $X_1 - x_1, \ldots, X_n - x_n$. Neka je $\mathcal{A}_x = (\mathcal{A} \setminus \mathbf{m}_x)^{-1}\mathcal{A}$ lokalizacija od $\mathcal{A}$ u točki x. Algebra $\mathcal{A}_x$ prirodno se identificira s algebrom svih racionalnih funkcija $K^n \longrightarrow K$ koje nemaju pol u točki x. Prema propoziciji 3.2.10. algebre $\mathcal{A}_x$ su $n-$dimenzionalni regularni lokalni prstenovi. Najveći ideal u $\mathcal{A}_x$ je

$$\mathbf{n}_x = (\mathbf{m}_x)_x = (\mathcal{A} \setminus \mathbf{m}_x)^{-1}\,\mathbf{m}_x$$

i on se identificira s idealom svih racionalnih funkcija $K^n \longrightarrow K$ koje imaju nultočku u točki x.

Neka je M $\mathcal{A}-$modul. Njegova lokalizacija u točki x

$$M_x = (\mathcal{A} \setminus \mathbf{m}_x)^{-1}\,M$$

je $\mathcal{A}_x-$modul. Definiramo **nosač modula** M kao skup

$$\mathrm{supp}(M) = \{x \in K^n;\ M_x \neq \{0\}\,\}.$$

Lema 6.1.1. *Neka je*

$$\{0\} \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow \{0\}$$

egzaktan niz $\mathcal{A}-$modula. Tada je

$$\mathrm{supp}(M) = \mathrm{supp}(M') \cup \mathrm{supp}(M'').$$

Dokaz: Zbog egzaktnosti funktora lokalizacije, za svaku točku $x \in K^n$ je

$$\{0\} \longrightarrow M'_x \longrightarrow M_x \longrightarrow M''_x \longrightarrow \{0\}$$

je egzaktan niz $\mathcal{A}_x-$modula. Dakle, $M_x \neq \{0\}$ ako i samo ako je ili $M'_x \neq \{0\}$ ili $M''_x \neq \{0\}$. To je upravo tvrdnja leme.

U definiciji nosača $\mathcal{A}-$modula M nismo pretpostavljali da je M konačno generiran. Ako jest, onda o nosaču možemo reći više.

Za ideal $I \subseteq \mathcal{A}$ stavimo kao i obično

$$\mathcal{V}(I) = \{x \in K^n;\ f(x) = 0\ \ \forall f \in I\}.$$

Propozicija 6.1.2. *Neka je M konačno generiran $\mathcal{A}-$modul i*

$$I = \mathrm{ann}_{\mathcal{A}}(M) = \{f \in \mathcal{A};\ fm = 0\ \ \forall m \in M\}$$

njegov anihilator u $\mathcal{A}$. Tada je $\mathrm{supp}(M) = \mathcal{V}(I)$.

Dokaz ćemo provesti indukcijom po broju generatora od $M \neq \{0\}$. Pretpostavimo najprije da je $M \neq \{0\}$ generiran jednim svojim elementom $\neq 0$, tj. da je modul M ciklički. Tada je $M \cong \mathcal{A}/I$ za neki ideal I u $\mathcal{A}$. Ideal I je anihilator generatora od M, a kako je algebra $\mathcal{A}$ komutativna, ideal I je anihilator modula M. Identificiramo li M sa $\mathcal{A}/I$ imamo $M_x = (\mathcal{A}/I)_x = \mathcal{A}_x/I_x$. Neka je $x \in \mathcal{V}(I)$. Tada je $I \subseteq \mathbf{m}_x$ i $I_x \subseteq \mathbf{n}_x$. Dakle, $I_x \neq \mathcal{A}_x$, pa slijedi $M_x = (\mathcal{A}/I)_x \neq \{0\}$, odnosno, $x \in \mathrm{supp}(M)$. Pretpostavimo sada da $x \notin I$. Tada postoji $f \in I$ takav da je $f(x) \neq 0$, tj. $f \notin \mathbf{m}_x$. To znači da je element f invertibilan u lokalnom prstenu $\mathcal{A}_x$, pa $f \in I_x$ povlači da je $I_x = \mathcal{A}_x$. Dakle, $M_x = (\mathcal{A}/I)_x = \{0\}$, odnosno, $x \notin \mathrm{supp}(M)$. Dakle, dokazano je da vrijedi $\mathcal{V}(I) = \mathrm{supp}(M)$, odnosno, proveden je dokaz baze indukcije.

Provedimo sada korak indukcije. Neka je $p \geq 2$ i pretpostavimo da je tvrdnja dokazana za $\mathcal{A}-$module s manje od p generatora. Neka je $\{m_1, \ldots, m_p\}$ skup generatora modula M. Neka je M' podmodul generiran sa $\{m_1, \ldots, m_{p-1}\}$. Tada imamo egzaktan niz

$$\{0\} \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow \{0\},$$

pri čemu je M'' ciklički $\mathcal{A}-$modul. Prema lemi 6.1.1. vrijedi

$$\text{supp}(M) = \text{supp}(M') \cup \text{supp}(M'').$$

Po pretpostavci indukcije imamo

$$\text{supp}(M) = V(I') \cup V(I'' =), \qquad I' = \text{ann}_{\mathcal{A}}(M'), \quad I'' = \text{ann}_{\mathcal{A}}(M'').$$

Očito vrijedi $I'I'' \subseteq I = \text{ann}_{\mathcal{A}}(M)$. Nadalje, $I \subseteq I'$ i $I \subseteq I''$. Dakle, vrijedi

$$I'I'' \subseteq I \subseteq I' \cap I'',$$

pa slijedi

$$\mathcal{V}(I') \cup \mathcal{V}(I'') \subseteq \mathcal{V}(I' \cap I'') \subseteq \mathcal{V}(I) \subseteq \mathcal{V}(I'I'').$$

Neka je $x \notin \mathcal{V}(I') \cup \mathcal{V}(I'')$. Tada postoje $f \in I'$ i $g \in I''$ takvi da je $f(x) \neq 0$ i $g(x) \neq 0$. Tada je $(fg)(x) = f(x)g(x) \neq 0$, pa je $x \notin \mathcal{V}(I'I'')$. To pokazuje da je $\mathcal{V}(I'I'') \subseteq \mathcal{V}(I') \cup \mathcal{V}(I'')$. Odatle slijedi da su sve gornje inkluzije zapravo jednakosti, pa posebno vrijedi $\text{supp}(M) = \mathcal{V}(I)$.

Neposredna je posljedica:

Korolar 6.1.3. *Neka je M konačno generiran $\mathcal{A}-$modul. Tada je njegov nosač* $\text{supp}(M)$ *Zariski zatvoren podskup od K^n.*

U dokazima sljedeća dva ključna teorema trebat će nam sljedeća lema:

Lema 6.1.4. *Neka je B Noetherin komutativan prsten i $M \neq \{0\}$ konačno generiran $B-$modul. Tada postoji konačna filtracija $B-$podmodulima*

$$\{0\} = M_0 \subseteq M_1 \subseteq \cdots \subseteq M_{n-1} \subseteq M_n = M$$

takva da je $M_i/M_{i-1} \cong B/J_i$, $1 \leq i \leq n$, pri čemu su $J_1, \ldots, J_n$ prosti ideali u B.

Dokaz: Za $x \in M$ stavimo

$$\text{ann}(x) = \{a \in B;\ ax = 0\}.$$

Neka je $\mathcal{S}$ slup svih ideala $\text{ann}(x)$, $x \in M \setminus \{0\}$. Budući da je B Noetherin prsten, skup $\mathcal{S}$ ima maksimalne elemente. Neka je $I = \text{ann}(x)$ jedan od njih. Tvrdimo da je tada I prost ideal u B. Doista, $ab \in I$ znači da je $abx = 0$. Pretpostavimo da je $b \notin I$, tj. $bx \neq 0$. Tada je $I \subseteq \text{ann}(bx)$. Zbog maksimalnosti od I zaključujemo da je $\text{ann}(x) = I$. No kako je $abx = 0$, slijedi da je $a \in \text{ann}(x) = I$. Time smo dokazali da je I prost ideal.

Prema dokazanom postoji $x \in M \setminus \{0\}$ takav da je ideal $I = \text{ann}(x)$ prost. Naravno tada je podmodul $Bx \cong B/I$.

Neka je sada $\mathcal{F}$ skup svih $B-$podmodula N od M koji imaju filtraciju $B-$podmodulima oblika

$$\{0\} = N_0 \subseteq N_1 \subseteq \cdots \subseteq N_k = N$$

takvu da je $N_i/N_{i-1} \cong B/J_i$ za neke proste ideale $J_1, \ldots, J_k$. Budući da je M Noetherin modul, skup $\mathcal{F}$ sadrži maksimalan element L. Prtetpostavimo da je $L \neq M$. Tada bismo imali egzaktan niz

$$\{0\} \longrightarrow L \longrightarrow M \longrightarrow L' \longrightarrow \{0\}$$

i prema prvom dijelu dokaza L' bi postojao podmodul N' izomorfan sa B/J' za neki prost ideal J'. Međutim, to je u suprotnosti s maksimalnošću od L. Ova kontradikcija pokazuje da je $L = M$ i time je lema dokazana.

Teorem 6.1.5. *Neka je M konačno generiran $\mathcal{A}-$modul. Tada je $d(M) = \dim \operatorname{supp}(M)$.*

Taj teorem ima i lokalnu verziju. Lokalizacija $\mathcal{A}_x$ od $\mathcal{A}$ u točki $x \in K^n$ je Noetherin lokalni prsten. Njegov najveći ideal $\mathbf{n}_x$ je ideal generiran polinomima $X_i - x_i$, $1 \leq i \leq n$, i slike tih generatora u $\mathbf{n}_x/\mathbf{n}_x^2$ razapinju ga kao vektorski prostor nad K. Dakle, $\{X_i - x_i;\ 1 \leq i \leq n\}$ je koordinatni sistem prstena $\mathcal{A}_x$. Za bilo koji konačno generirani $\mathcal{A}-$modul M njegova lokalizacija M_x u točki x je konačno generiran $\mathcal{A}_x-$modul, dakle, dobro je definirana njegova dimenzija $d(M_x)$.

Teorem 6.1.6. *Neka je M konačno generiran $\mathcal{A}-$modul i neka je x točka iz K^n. Tada je $d(M_x) = \dim_x(\operatorname{supp}(M))$.*

Dokazivat ćemo simultano teoreme 6.1.5. i 6.1.6. Prije svega primijetimo da ako imamo egzaktan niz $A-$modula

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$$

i ako teoremi 6.1.5. i 6.1.6. vrijede za module M' i M'', onda po propoziciji 3.3.9. i po lemi 6.1.1. vrijedi

$$d(M) = \max\{d(M'), d(M'')\} = \max\{\dim \operatorname{supp}(M'), \dim \operatorname{supp}(M'')\} =$$
$$= \dim(\operatorname{supp}(M') \cup \operatorname{supp}(M'')) = \dim \operatorname{supp}(M).$$

Nadalje, za svaki $x \in \operatorname{supp}(M)$ zbog egzaktnosti funktora lokalizacije imamo egzaktan niz

$$0 \longrightarrow M'_x \longrightarrow M_x \longrightarrow M''_x \longrightarrow 0.$$

Stoga po propoziciji 3.2.6. i po lemi 6.1.1. vrijedi

$$d(M_x) = \max\{d(M'_x), d(M''_x)\} = \max\{\dim_x(\operatorname{supp}(M'), \dim_x(\operatorname{supp}(M''))\} =$$
$$= \dim_x(\operatorname{supp}(M') \cup \operatorname{supp}(M'')) = \dim_x(\operatorname{supp}(M)).$$

Dakle, ako teoremi 6.1.5. i 6.1.6. vrijede za module M' i M'', onda oni vrijede i za modul M.

Pretpostavimo li da su teoremi 6.1.5. i 6.1.6. dokazani za sve module oblika $M = \mathcal{A}/J$, gdje je J prost ideal u $\mathcal{A}$, onda prema prethodnoj primjedbi i pomoću leme 6.1.4. indukcijom po duljini filtracije iz te leme zaključujemo da teoremi 6.1.5. i 6.1.6. vrijede za sve konačno generirane $\mathcal{A}-$module.

Dakle, ostalo nam je da dokažemo dva teorema u slučaju kad je $M = \mathcal{A}/J$, gdje je J prost ideal u $\mathcal{A}$.

Pretpostavimo najprije da je vektorski prostor $\mathcal{A}/J$ konačnodimenzionalan. Tada je $\mathcal{A}/J$ integralna domena koja je integralna (cijela) nad poljem K. Dakle, $\mathcal{A}/J$ je polje koje je algebarsko proširenje od K. Budući da je po pretpostavci polje K algebarski zatvoreno, vrijedi $\mathcal{A}/J = K$, odnosno, ideal J je maksimalan. Po Hilbertovom teoremu o nulama je $\operatorname{supp}(M) = \mathcal{V}(J)$ jedna točka $x \in K^n$, dakle, $\dim \operatorname{supp}(M) = 0$. S druge strane, budući da je M_x jednodimenzionalan vektorski prostor, vrijedi $d(M_x) = 0$. Dakle, oba teorema su istinita za takav modul $M = \mathcal{A}/J$.

Pretpostavimo sada da ideal J nije konačne kodimenzije u $\mathcal{A}$. Tada, posebno, J nije maksimalan ideal. Neka je $J_1 \supsetneq J$ prost ideal i neka je $f \in J_1 \setminus J$. Tada je $J \subsetneq (f) + J \subseteq J_1$. Dakle, A/J_1

je kvocijent od $A/((f)+J)$ i $A/((f)+J)$ je kvocijent od A/J. Nadalje, $A/((f)+J) = M/fM$. Neka je $F : M \to M$ endomorfizam $A-$modula M definiran sa $F(m) = fm$. Ako je $g + J \in \operatorname{Ker} F$, onda imamo

$$0 = f(g+J) = fg + J \qquad \Longrightarrow \qquad fg \in J.$$

Budući da je ideal J prost i $f \notin J$, slijedi $g \in J$, odnosno, $g + J = 0$. Prema tome, homomorfizam F je injektivan. Dakle, imamo egzaktan niz $A-$modula

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{F} M \longrightarrow M/fM \longrightarrow 0.$$

Iz propozicije 3.3.9. slijedi da je $d(M/fM) \leq d(M)$. Kad bi bilo $d(M/fM) = d(M)$, imali bismo k tome prema istoj propoziciji da je $e(M) = e(M) + e(M/fM)$, dakle, $e(M/fM) = 0$. No to je moguće samo ako je $d(M/fM) = 0$, pa bi slijedilo da je $d(M) = 0$, a to bi značilo da je modul M konačnodimenzionalan, suprotno pretpostavci. Prema tome, nužno je $d(M/fM) < d(M)$. Budući da je $\mathcal{A}/J_1$ kvocijent od M/fM, slijedi da je $d(\mathcal{A}/J_1)) < d(\mathcal{A}/J)$.

Neka je $x \in \mathcal{V}(J_1)$. Lokalizacijom u točki x dobivamo egzaktan niz $\mathcal{A}_x-$modula

$$0 \longrightarrow M_x \xrightarrow{\tilde{F}} M_x \longrightarrow M_x/fM_x \longrightarrow 0,$$

pri čemu je homomorfizam $\tilde{F} : M_x \to M_x$ množenje sa f. Prema propoziciji 3.2.6. vrijedi $d(M_x/fM_x) \leq d(M_x)$. Kad bi bilo $d(M_x/fM_x) = d(M_x)$, imali bismo $e(M_x) = e(M_x) + e(M_x/fM_x)$, tj. $e(M_x/fM_x) = 0$. To je moguće samo ako je $d(M_x/fM_x) = 0$. Međutim, to bi povlačilo $\mathbf{m}_x(M_x/fM_x) = M_x/fM_x$, a to prema Nakayaminoj lemi 3.2.1. znači da je $M_x/fM_x = 0$. Odatle bi slijedilo da je množenje sa f surjektivno sa M_x na M_x, a kako je $f \in \mathbf{m}_x$, to bi po Nakayaminoj lemi povlačilo da je $M_x = 0$, suprotno pretpostavci. Ova kontradikcija pokazuje da je nužno $d(M_x/fM_x) < d(M_x)$. Budući da je $\mathcal{A}/J_1$ kvocijent od M/fM, slijedi $d\left((\mathcal{A}/J_1)_x\right) < d\left((\mathcal{A}/J)_x\right)$.

Neka je sada

$$Z_0 = \{x\} \subsetneqq Z_1 \subsetneqq \cdots \subsetneqq Z_{n-1} \subsetneqq Z_n = K^n$$

maksimalan lanac nepraznih ireducibilnih zatvorenih podskupova od K^n. Tada je

$$I(Z_0) = \mathbf{m}_x \supsetneqq I(Z_1) \supsetneqq \cdots \supsetneqq Z(I_{n-1}) \supsetneqq I(Z_n) = \{0\}$$

maksimalan lanac prostih ideala u $\mathcal{A}$. Po dokazanom imamo sljedeći niz striktnih nejednakosti

$$0 \leq d\left(\mathcal{A}/I(Z_0)\right) < d\left(\mathcal{A}/I(Z_1)\right) < \cdots < d\left(\mathcal{A}/I(Z_{n-1})\right) < d\left(\mathcal{A}/I(Z_n)\right) = d(\mathcal{A}) = n$$

a prema propoziciji 3.2.10. i

$$0 \leq d\left((\mathcal{A}/I(Z_0))_x\right) < d\left((\mathcal{A}/I(Z_1))_x\right) < \cdots < d\left((\mathcal{A}/I(Z_{n-1}))_x\right) < d\left((\mathcal{A}/I(Z_n))_x\right) = d(\mathcal{A}) = n.$$

Odatle slijedi da je

$$d\left((\mathcal{A}/I(Z_J))_x\right) = d\left(\mathcal{A}/I(Z_J)\right) = j = \dim\, Z_j. \qquad 0 \leq j \leq n.$$

Međutim, svaki se zatvoren ireducibilan podskup Z može smjestiti u maksimalan lanac. Stoga slijedi da je

$$d\left((\mathcal{A}/I(Z))_x\right) = d(\mathcal{A}(I(Z)) = \dim\, Z$$

za svaki zatvoren ireducibilan podskup $Z \subseteq K^n$ i svaki $x \in Z$. S druge strane, to povlači da je

$$d\left((\mathcal{A}/J)_x\right) = d(\mathcal{A}/J) = \dim\, \mathcal{V}(J)$$

za svaki prost ideal J u $\mathcal{A}$ i svaki $x \in V(J)$. Prema propoziciji 6.1.2. time su teoremi 6.1.5. i 6.1.6. dokazani.

Teoremi 6.1.5. i 6.1.6. imaju sljedeću neposrednu posljedicu:

Korolar 6.1.7. *Neka je M konačno generiran $\mathcal{A}-$modul. Tada je*

$$d(M) = \max\{d(M_x);\ x \in \operatorname{supp}(M)\}.$$

Na koncu dokažimo još jedan rezultat koji ćemo trebati kasnije.

Propozicija 6.1.8. *Neka je I ideal u $\mathcal{A}$. Tada je* $\dim \mathcal{V}(I) = \dim \mathcal{V}(\operatorname{Gr} I)$.

Dokaz: Kratki egzaktni niz $\mathcal{A}-$modula

$$0 \longrightarrow I \longrightarrow \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}/I \longrightarrow 0,$$

pri čemu su moduli snabdjeveni s filtracijama induciranim prirodnom filtracijom od $\mathcal{A}$, vodi na kratki egzaktni niz graduiranih $\mathcal{A}-$modula

$$0 \longrightarrow \operatorname{Gr} I \longrightarrow \mathcal{A} \longrightarrow \operatorname{Gr} \mathcal{A}/I \longrightarrow 0.$$

Dakle, imamo

$$\dim_K F_p(\mathcal{A}/I) = \sum_{q=0}^{p} [\dim_K F_q(\mathcal{A}/I) - \dim_K F_{q-1}(\mathcal{A}/I)] = \sum_{q=0}^{p} \dim_K \operatorname{Gr}^p(\mathcal{A}/I) =$$

$$= \sum_{q=0}^{p} [\dim_K \operatorname{Gr}^p \mathcal{A} - \dim_K \operatorname{Gr}^p I] = \dim_K F_p\mathcal{A} - \dim_K F_p(\operatorname{Gr} I) = \dim_K F_p(\mathcal{A}/\operatorname{Gr} I).$$

Dakle, $d(\mathcal{A}/I) = d(\mathcal{A}/\operatorname{Gr} I)$. Sada tvrdnja slijedi iz teorema 6.1.5. i 6.1.6.

6.2 Dimenzija modula nad Weylovom algebrom

U ovom ćemo odjeljku pročiti kategoriju modula nad prstenovima $D(n)$ diferencijalnih operatora s polinomijalnim koeficijentima. Označimo sa $\mathcal{M}^L(D(n))$ i $\mathcal{M}^R(D(n))$ kategorije lijevih i desnih $D(n)-$modula. To su Abelove kategorije. Glavni antiautomorfizam φ od $D(n)$ definira egzaktan funktor iz kategorije $\mathcal{M}^R(D(n))$ u kategoriju $\mathcal{M}^L(D(n))$, koji preslikava modul M u njemu **transponirani modul** M^t koji se podudara sa M kao vektorski prostor a djelovanje $D(n)$ je dano sa $(T, m) \mapsto m\varphi(T)$. Analogan funktor definiran je i iz kategorije $\mathcal{M}^L(D(n))$ u kategoriju $\mathcal{M}^R(D(n))$. Jasno je da su ta dva funktora međusobno inverzne ekvivalencije kategorija. Ako sa $\mathcal{M}^L_f(D(n))$ i $\mathcal{M}^R_f(D(n))$ označimo pune potkategorije konačno generiranih $D(n)-$modula, ti funktori induciraju i njihovu ekvivalenciju. Zbog toga ćemo u daljnjem proučavati samo lijeve $D(n)-$module i pisati $\mathcal{M}(D(n))$ i $\mathcal{M}_f(D(n))$ umjesto $\mathcal{M}^L(D(n))$ i $\mathcal{M}^L_f(D(n))$ (osim kad želimo eksplicitno istaknuti da radimo s desnim modulima). Budući da je $D(n)$ Noetherin prsten, puna potkategorija $\mathcal{M}_f(D(n))$ od $\mathcal{M}(D(n))$ je zatvorena u odnosu na uzimanje podmodula, kvocijentnih modula i proširenja, dakle, posebno, i odnosu na (konačne) direktne sume.

Promatrajmo najprije $D(n)$ kao algebru snabdjevenu Bernsteinovom filtracijom $(D_p(n))_{p\in\mathbb{Z}}$. Imamo $D_0(n) = K$, pa možemo definirati dimenziju modula iz $\mathcal{M}_f(D(n))$ u odnosu na aditivnu funkciju $\dim_K$ na kategoriji konačnodimenzionalnih vektorskih prostora nad K. Ta se dimenzija $d(M)$ i multiplicitet $e(M)$ konačno generiranog $D(n)-$modula zovu **Bernsteinova dimenzija** i **Bernsteinov multiplicitet**. Budući da glavni antiautomorfizam čuva Bernsteinov filtraciju, imamo $d(M) = d(M^t)$ i $e(M) = e(M^t)$ za bilo koji konačno generiran $D(n)-$modul M.

Za svaki konačno generirani $D(n)-$modul M imamo egzaktan niz oblika

$$D(n)^p \longrightarrow M \longrightarrow 0.$$

Dakle, vrijedi $d(M) \leq d(D(n))$. To zajedno s teoremom 2.2.12. i s činjenicom koju smo ustanovili na početku odjeljka 6.1. daje

Lema 6.2.1. *Za svaki konačno generirani $D(n)-$modul M vrijedi $d(M) \leq 2n$.*

Primjer: Promotrimo algebru $D(1)$ polinomijalnih diferencijalnih operatora u jednoj varijabli. Neka je $M \neq \{0\}$ konačno generirani $D(1)-$modul. Tada je njegova Bernsteinova dimenzija 0, 1 ili 2. $d(M) = 0$ bi povlačilo da je za svaku dobru filtraciju FM od M funkcija $p \mapsto \dim_K F_pM$ konstantna za velike $p \in \mathbb{Z}$. Budući da je filtracija FM ekshaustivna, to bi značilo da je prostor M konačnodimenzionalan. Označimo sa $\pi(X)$ i $\pi(\partial)$ linearne operatore na M inducirane djelovanjem X i ∂. Tada je $[\pi(X), \pi(\partial)] = I_M$. Uzmemo li trag obje strane, slijedi da je $\dim_K M = 0$, suprotno pretpostavci da je $M \neq \{0\}$. Dakle, $d(M)$ je ili 1 ili 2.

Glavni rezultat teorije dimenzije $D(n)-$modula je generalizacija prethodnog primjera:

Teorem 6.2.2. (**Bernsteinova nejednakost**) *Ako je $M \neq \{0\}$ konačno generiran $D(n)-$modul, onda je $d(M) \geq n$.*

Dokaz: Budući da je M konačno generiran $D(n)-$modul, prema propoziciji 3.3.4. možemo ga snabdjeti dobrom filtracijom FM. Uz pomak indeksa očito možemo pretpostaviti da je $F_0M \neq \{0\}$ i $F_pM = \{0\}$ za $p < 0$.

Za svaki $p \in \mathbb{Z}_+$ promatramo linearno preslikavanje $D_p(n) \longrightarrow Hom_K(F_pM, F_{2p}M)$ koje elementu $T \in D_p(n)$ pridružuje linearan operator $m \mapsto Tm$. Tvrdimo da je to preslikavanje injektivno. To je očito za $p \leq 0$. Pretpostavimo da je $p \geq 1$ i da tvrdnja vrijedi za $p - 1$. Neka je $T \in D_p(n)$ takav da je $Tm = 0$ $\forall m \in F_pM$. Tada za svaki $v \in F_{p-1}M$ i za $1 \leq i \leq n$ imamo $X_iv \in F_pM$ i $\partial_iv \in F_pM$, dakle,

$$[X_i, T]v = X_iTv - TX_iv = 0 \qquad \text{i} \qquad [\partial_i, T]v = \partial_iTv - T\partial_iv = 0.$$

Nadalje, prema tvrdnji (b) leme 2.2.11. vrijedi $[X_i, T], [\partial_i, T] \in D_{p-1}(n)$. Po pretpostavci indukcije to povlači da je $[X_i, T] = [\partial_i, T] = 0$ za $1 \leq i \leq n$. Prema tome, T je u centru algebre $D(n)$, pa po propoziciji 2.2.9. slijedi da je $T = 0$. Time je dokazana injektivnost linearnog prelikavanja $D_p(n) \longrightarrow Hom_K(F_pM, F_{2p}M)$.

Stoga vrijedi

$$\dim_K D_p(n) \leq \dim_K Hom_K(F_p(n), F_{2p}M) = (\dim_K F_pM) \cdot (\dim_K F_{2p}M) \qquad \forall p \in \mathbb{Z}.$$

S druge strane, za velike $p \in \mathbb{Z}$ lijeva je strana polinom u p stupnja $2n$ s pozitivnim vodećim koeficijentom, a desna je strana za velike $p \in \mathbb{Z}$ polinom u p stupnja $2d(M)$ s pozitivni vodećim koeficijentom. To je moguće samo ako je $d(M) \geq n$.

U sljedećem ćemo odjeljku ustanoviti geometrijsku interpretaciju Bernsteinove dimenzije.

Ako je M $D(n)-$modul, možemo definirati njegov **Fourierov transformat** $\mathcal{F}(M)$, koji se kao vektorski prostor podudara sa M, a djelovanje je dano sa $(T, m) \mapsto \mathcal{F}(T)m$. Fourierova transformacija je automorfizam kategorije $\mathcal{M}(D(n))$ i inducira automorfizam kategorije $\mathcal{M}_f(D(n))$. Iz činjenice da Fourierov automorfizam čuva Bernsteinovu filtraciju (ili iz propozicije 3.3.10.) zaključujemo da vrijedi:

Lema 6.2.3. *Neka je M konačno generiran $D(n)-$modul. Tada je $d(\mathcal{F}(M)) = d(M)$. Nadalje, vrijedi i $e(\mathcal{F}(M)) = e(M)$.*

Druga tvrdnja slijedi iz razmatranja nakon dokaza propozicije 3.3.10. budući da vrijedi $\mathcal{F}(D_1(n)) = D_1(n)$.

6.3 Karakteristična višestrukost

U ovom ćemo odjeljku proučavati jednu invarijantu konačno generiranih $D(n)-$modula geometrijske vrste. Ta će invarijanta biti konstruirana pomoću filtracije $FD(n)$ po redu diferencijalnog operatora, a ne pomoću Bernsteinove filtracije. Za razliku od Bernsteinove filtracije, filtracija po redu ima smisla za prstenove (točnije, snopove prstenova) diferencijalnih operatora na proizvoljnoj glatkoj višestrukosti.

U daljnjem ćemo pisati $K[X]$ umjesto $K[X_1, \ldots, X_n]$. Prije svega, budući da je $K[X]$ podalgebra od $D(n)$, svaki $D(n)-$modul M može se promatrati i kao $K[X]-$modul, pa možemo promatrati i njegov nosač $\operatorname{supp}(M) \subseteq K^n$.

Propozicija 6.3.1. *Neka je M konačno generiran $D(n)-$modul. Tada je* $\operatorname{supp}(M)$ *zatvorena podvišestrukost od K^n.*

Dokaz: Izaberimo dobru filtraciju FM od M. Za $x \in K^n$ vrijedi $M_x = 0$ ako i samo ako je $(F_pM)_x = 0$ za svaki $p \in \mathbb{Z}$. Zbog egzaktnosti funktora lokalizacije, to je ekvivalentno sa $(\operatorname{Gr} M)_x = 0$. Neka je I_p anihilator $K[X]-$modula $\operatorname{Gr}^p M$, $p \in \mathbb{Z}$. Budući da je $\operatorname{Gr}^p M$ konačno generiran $K[X]-$modul, prema propoziciji 6.1.2. vrijedi $\operatorname{supp}(\operatorname{Gr}^p M) = \mathcal{V}(I_p)$. To povlači da je

$$\operatorname{supp}(M) = \bigcup_{p \in \mathbb{Z}} \mathcal{V}(I_p).$$

Neka su $m_1, \ldots, m_s$ homogeni generatori $\operatorname{Gr} D(n)-$modula $\operatorname{Gr} M$. Tada anihilator I elemenata $m_1, \ldots, m_s$ u $K[X]$ anihilira cijeli $\operatorname{Gr} M$. Prema tome, postoji konačan podskup $S \subseteq \mathbb{Z}$ takav da je

$$\bigcap_{p \in S} I_p = I \subseteq I_q \qquad \forall q \in \mathbb{Z}.$$

Odatle slijedi

$$\bigcup_{p \in S} \mathcal{V}(I_p) = \mathcal{V}(I) \supseteq \mathcal{V}(I_q) \qquad \forall q \in \mathbb{Z}.$$

Dakle, $\operatorname{supp}(M) = \mathcal{V}(I)$.

Razmotrimo sada bilo koji filtrirani prsten D s filtracijom FD koja zadovoljava $(1)-(7)$ iz 3.3. Neka je M konačno generiran $D-$modul i FM dobra filtracija od M. Tada je $\operatorname{Gr} M$ graduirani $\operatorname{Gr} D-$modul. Neka je I anihilator od $\operatorname{Gr} M$ u $\operatorname{Gr} D$. To je očito graduirani ideal u $\operatorname{Gr} D$, pa je i njegov radikal $rad(I)$ graduirani ideal. Općenito ideal I ovisi o izboru dobre filtracije na M, ali vrijedi:

Lema 6.3.2. *Neka je M konačno generiran $D-$modul i neka su FM i $F'M$ dvije dobre filtracije od M. Neka su I i I' anihilatori pripadnih* $\operatorname{Gr} D-$*modula* $\operatorname{Gr} M$ *i* $\operatorname{Gr}' M$. *Tada je $rad(I) = rad(I')$.*

Dokaz: Neka je $T \in rad(I) \cap \operatorname{Gr}^p D$. Tada postoji $s \in \mathbb{Z}_+$ takav da je $T^s \in I$. Neka je $Y \in F_pD$ predstavnik od T, tj. $T = Y + F_{p-1}D$. Tada je $Y^s F_q M \subseteq F_{q+sp-1}M$ $\forall q \in \mathbb{Z}$. Indukcijom nalazimo da je $Y^{ms} F_q M \subseteq F_{q+msp-m}M$ $\forall m \in \mathbb{N}$ i $\forall q \in \mathbb{Z}$. S druge strane, prema korolaru 3.3.7. filtracije FM i $F'M$ su ekvivalentne. Dakle, postoji $\ell \in \mathbb{Z}_+$ takav da je $F_qM \subseteq F'_{q+\ell}M \subseteq F_{q+2\ell}M$ $\forall q \in \mathbb{Z}$. Stoga imamo

$$Y^{ms} F'_q M \subseteq Y^{ms} F_{q+\ell} M \subseteq F_{q+\ell+msp-m} M \subseteq F'_{q+2\ell+msp-m} M \qquad \forall m \in \mathbb{Z} \quad \text{i} \quad \forall q \in \mathbb{Z}.$$

Uzmemo li $m > 2\ell$, slijedi da je $Y^{ms} F'_q M \subseteq F'_{q+msp-1}M$ $\forall q \in \mathbb{Z}$. No to znači da je $T^{ms} \in I'$, dakle, $T \in rad(I')$. Time je dokazano da je $rad(I) \subseteq rad(I')$. Zamijenimo li uloge I i I', dobivamo i obrnutu inkluziju, dakle, vrijedi jednakost $rad(I) = rad(I')$.

Dakle, radikal anihilatora $\operatorname{Gr} D(n)-$modula $\operatorname{Gr} M$ neovisan je o izboru dobre filtracije na M. Taj ideal zovemo **karakteristični ideal** od M i označavamo $J(M)$.

Tu konstrukciju sada primijenimo na $D(n)$. Budući da je prema teoremu 2.2.2.

$$\operatorname{Gr} D(n) = K[X, \xi] = K[X_1, \ldots, X_n, \xi_1, \ldots, \xi_n],$$

možemo definirati zatvoreni algebarski skup

$$Ch(M) = \mathcal{V}(J(M)) \subseteq K^{2n}.$$

Ta se afina algebarska višestrukost zove **karakteristična višestrukost** modula M.

Budući da je $J(M)$ ideal koji je homogen u odnosu na posljednjih n varijabli, imamo:

Lema 6.3.3. *Karakteristična višestrukost $Ch(M)$ konačno generiranog $D(n)-$modula M ima sljedeće svojstvo:*

$$(x, \xi) \in Ch(M) \qquad \Longrightarrow \qquad (x, \lambda\xi) \in Ch(M) \quad \forall \lambda \in K.$$

Zbog toga kažemo da je $Ch(M)$ **konična višestrukost**.

Propozicija 6.3.4. *Neka je*

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$$

egzaktan niz konačno generiranih $D(n)-$modula. Tada je

$$Ch(M) = Ch(M') \cup Ch(M'').$$

Dokaz: Neka je FM dobra filtracija od M. Ona inducira filtraciju FM' na M' i filtraciju FM'' na M''. Prema lemi 3.3.8. znamo da su to dobre filtracije. Nadalje, imamo egzaktan niz

$$0 \longrightarrow \operatorname{Gr} M' \longrightarrow \operatorname{Gr} M \longrightarrow \operatorname{Gr} M'' \longrightarrow 0$$

konačno generiranih $K[X, \xi]-$modula i njihovi nosači su prema propoziciji 6.1.2. karakteristične višestrukosti $D(n)-$modula M', M i M''. Stoga tvrdnja slijedi iz leme 6.1.1.

Sljedeća dva rezultata bacaju nešto svjetla na vezu između karakteristične višestrukosti i nosača konačno generiranog $D(n)-$modula.

Neka $\pi : K^{2n} \to K^n$ označava projekciju $\pi(x, \xi) = x$.

Propozicija 6.3.5. *Za konačno generiran $D(n)-$modul M vrijedi $\pi(Ch(M)) = \operatorname{supp}(M)$.*

Dokaz: Neka su $m_1, \ldots, m_s$ homogeni generatori $K[X, \xi]-$modula $\operatorname{Gr} M$. Kao u dokazu propozicije 6.3.1. nalazimo da za anihilator I od $m_1, \ldots, m_s$ u $K[X]$ vrijedi $\operatorname{supp}(M) = \mathcal{V}(I)$. S druge strane, anihilator J od $m_1, \ldots, m_s$ u $K[X, \xi]$ je ideal koji je homogen u $\xi_1, \ldots, \xi_n$ i vrijedi

$$I = K[X] \cap J \qquad \text{i} \qquad Ch(M) = \mathcal{V}(J).$$

Dakle, vrijedi

$$x \in \mathcal{V}(I) = \operatorname{supp}(M) \qquad \Longleftrightarrow \qquad (x, 0) \in \mathcal{V}(J) = Ch(M).$$

Budući da je $Ch(M)$ konična višestrukost, tvrdnja slijedi.

Neka je M konačno generiran $D(n)-$modul. Definiramo **singularni nosač** od M sa

$$\operatorname{sing\,supp}(M) = \{x \in K^n;\ (x, \xi) \in Ch(M) \text{ za neki } \xi \neq 0\}.$$

Očito je $\operatorname{sing\,supp}(M) \subseteq \operatorname{supp}(M)$.

Lema 6.3.6. *Neka je M konačno generiran $D(n)-$modul. Tada je* $\operatorname{sing\,supp}(M)$ *zatvorena podvišestrukost od* $\operatorname{supp}(M)$.

Dokaz: Neka je $p : K^n \setminus \{0\} \to P^{n-1}(K)$ prirodna projekcija: za $\xi \in K^n \setminus \{0\}$ $p(\xi)$ je pravac u K^n kroz ishodište određen sa ξ :

$$p(\xi) = \{\lambda\xi;\ \lambda \in K\}.$$

Tada preslikavanje

$$1_{K^n} \times p : K^n \times (K^n \setminus \{0\}) \longrightarrow K^n \times P^{n-1}(K)$$

projicira $Ch(M) \setminus (K^n \times \{0\})$ na zatvorenu podvišestrukost od $K^n \times P^{n-1}(K)$ koja je određena idealom $J(M) \subseteq K[X, \xi]$, koji je homogen u varijablama $\xi_1, \ldots, \xi_n$. Projekcija na prvi faktor $K^n \times P^{n-1}(K)$ preslikava tu zatvorenu podvišestrukost na $\operatorname{sing\,supp}(M)$. Budući da je $P^{n-1}(K)$ potpuna višestrukost, projekcija $K^n \times P^{n-1}(K) \to K^n$ je zatvoreno preslikavanje. Dakle, skup $\operatorname{sing\,supp}(M)$ je zatvoren.

Temeljni rezultat o karakterističnim višestrukostima je sljedeći teorem. On daje geometrijski opis Bernsteinove dimenzije.

Teorem 6.3.7. *Neka je M konačno generiran $D(n)-$modul. Tada je*

$$\dim Ch(M) = d(M).$$

Za dokaz nam je potrebna određena priprema. U daljnjem je $K[X] = K[X_1, \ldots, X_n]$ i $K[X, \xi] = K[X_1, \ldots, X_n, \xi_1, \ldots, \xi_n]$. Za $\mathrm{t} = (t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{N}^n$ definiramo graduaciju $\mathrm{Gr}^{(\mathbf{t})}K[X]$ na sljedeći način:

$$\mathrm{Gr}^{(\mathbf{t})}_m K[X] = span_K \{X^\alpha;\ \alpha \in \mathbb{Z}^n_+ \text{ takav da je } t_1\alpha_1 + \cdots + t_n\alpha_n = m\}.$$

Drugim riječima, za svaki $i \in \{1, \ldots, n\}$ polinom X_i proglašavamo polinomom stupnja t_i. Na taj način $K[X]$ postaje graduirani prsten. Definiramo pripadnu filtraciju $F^{(\mathbf{t})}K[X]$:

$$F^{(\mathbf{t})}_p K[X] = \sum_{m \leq p} \mathrm{Gr}^{(\mathbf{t})} K[X] = span_K \{X^\alpha;\ \alpha \in \mathbb{Z}^n_+ \text{ takav da je } t_1\alpha_1 + \cdots + t_n\alpha_n \leq p\}.$$

Ako sa $FK[X]$ označimo standardnu filtraciju od $K[X]$ stupnjem polinoma i ako stavimo $t = \max\{t_i;\ 1 \leq i \leq n\}$, onda imamo

$$F^{(\mathbf{t})}_p K[X] \subseteq F_p K[X] \subseteq F^{(\mathbf{t})}_{tp} K[X] \qquad \forall p \in \mathbb{Z}.$$

Neka je I ideal u $K[X]$ i promotrimo egzaktni niz $K[X]-$modula

$$0 \longrightarrow I \longrightarrow K[X] \longrightarrow K[X]/I \longrightarrow 0$$

s filtracijama induciranim filtracijama od $K[X]$. Tada imamo

$$F^{(\mathbf{t})}_p (K[X]/I) \subseteq F_p(K[X]/I) \subseteq F^{(\mathbf{t})}_{tp}(K[X]/I) \qquad \forall p \in \mathbb{Z}.$$

Neposredna je posljedica sljedeća lema:

Lema 6.3.8. *Za svaki $p \in \mathbb{Z}$ vrijedi*

$$\dim_K F^{(\mathbf{t})}_p (K[X]/I) \leq \dim_K F_p(K[X]/I) \leq \dim_K F^{(\mathbf{t})}_{tp}(K[X]/I).$$

Neka je sada $s \in \mathbb{N}$. Definiramo filtraciju $F^{(s)}D(n)$ od $D(n)$ sa

$$F_m^{(s)}D(n) = span_K \{X^\alpha \partial^\beta;\ \alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^n,\ |\alpha| + s|\beta| \le m\}, \qquad m \in \mathbb{Z}.$$

Tada je $F^{(1)}D(n)$ upravo Bernsteinova filtracija od $D(n)$. Za svaki $s \in \mathbb{N}$ filtracija $F^{(s)}D(n)$ ima svojstva $(1) - (3)$ filtracija prstenova iz 3.3. U daljnjem sa $\operatorname{ord} T$ označavamo red diferencijalnog operatora $T \in D(n)$. Tada vrijedi

$$T \in F_m^{(s)}D(n) \quad \Longleftrightarrow \quad \exists\, p, q \in \mathbb{Z} \text{ takvi da je } T \in F_p^{(1)}D(n),\ \operatorname{ord} T \le q \text{ i } m = p + (s-1)q.$$

Neka su $T \in F_m^{(s)}D(n)$ i $S \in F_{m'}^{(s)}D(n)$ i neka su $p, p', q, q' \in \mathbb{Z}$ takvi da je

$$T \in F_p^{(1)}D(n),\ \operatorname{ord} T \le q,\ m = p + (s-1)q, \quad S \in F_{p'}^{(1)}D(n),\ \operatorname{ord} S \le q',\ m' = p' + (s-1)q'.$$

Tada je $\operatorname{ord} TS \le q + q'$, $TS \in F_{p+p'}^{(1)}D(n)$ i vrijedi $m + m' = (p+p') + (s-1)(q+q')$. Prema tome je $TS \in F_{m+m'}^{(s)}D(n)$. Dakle, filtracija $F^{(s)}D(n)$ zadovoljava i uvjet (4) iz 3.3., odnosno, to je filtracija algebre $D(n)$. Na analogan način provjerava se da vrijedi i (5), dakle, pripadna graduirana algebra $\mathrm{Gr}^{(s)}D(n)$ je komutativna. Nadalje, graduirana algebra $\mathrm{Gr}^{(s)}D(n)$ izomorfna je algebri $K[X, \xi]$ s graduacijom $\left(\mathrm{Gr}_p^{(\mathbf{s})}K[X,\xi]\right)_{p \in \mathbb{Z}}$ za $\mathbf{s} = (1, \ldots, 1, s, \ldots, s)$. Označimo pripadnu graduiranu algebru sa $\mathrm{Gr}^{(s)}K[X,\xi]$ i neka je $F^{(s)}K[X,\xi]$ njoj pridružena filtracija.

Imamo

$$F_p^{(s)}D(n) \subseteq F_p^{(1)}D(n) \subseteq F_{sp}^{(s)}D(n) \qquad \forall p \in \mathbb{Z}.$$

Neka je L lijevi ideal u $D(n)$. Promatramo egzaktan niz $D(n)-$modula

$$0 \longrightarrow L \longrightarrow D(n) \longrightarrow D(n)/L \longrightarrow 0$$

s snabdjevenih filtracijama koje su inducirane filtracijama od $D(n)$. Tada imamo

$$F_p^{(s)}(D(n)/L) \subseteq F_p^{(1)}(D(n)/L) \subseteq F_{sp}^{(s)}(D(n)/L) \qquad \forall p \in \mathbb{Z}.$$

Odatle slijedi analogon leme 6.3.8.:

Lema 6.3.9. *Za svaki $p \in \mathbb{Z}$ vrijedi*

$$\dim_K F_p^{(s)}(D(n)/L) \le \dim_K F_p^{(1)}(D(n)/L) \le \dim_K F_{sp}^{(s)}(D(n)/L)$$

Lema 6.3.10. *Neka je L lijevi ideal u $D(n)$. Tada je*

$$d(D(n)/L) = \dim \mathcal{V}(\mathrm{Gr}^{(s)}L) \qquad \forall s \in \mathbb{N}.$$

Dokaz: Egzaktni niz

$$0 \longrightarrow L \longrightarrow D(N) \longrightarrow D(n)/L \longrightarrow 0,$$

u kome je $D(n)$ snabdjeven filtracijom $F^{(s)}D(n)$, a L i $D(n)/L$ induciranim filtracijama $F^{(s)}L$ i $F^{(s)}(D(n)/L)$, vodi na egzaktan niz

$$0 \longrightarrow \mathrm{Gr}^{(s)}L \longrightarrow \mathrm{Gr}^{(s)}D(n) \longrightarrow \mathrm{Gr}^{(s)}(D(n)/L) \longrightarrow 0$$

graduiranih $\mathrm{Gr}^{(s)}D(n)-$modula. Odatle za svaki $p \in Z$ nalazimo

$$\dim_K F_p^{(s)}(D(n)/L) = \sum_{q=0}^{p} \left[\dim_K F_q^{(s)}(D(n)/L) - \dim_K F_{q-1}^{(s)}(D(n)/L)\right] = \sum_{q=0}^{p} \dim_K \mathrm{Gr}_q^{(s)}(D(n)/L) =$$

$$= \sum_{q=0}^{p} \left[\dim_K \mathrm{Gr}_q^{(s)} D(n) - \dim_K \mathrm{Gr}_q^{(s)} L\right] = \sum_{q=0}^{p} \left[\dim_K \mathrm{Gr}_q^{(\mathbf{s})} K[X,\xi] - \dim_K \mathrm{Gr}_q^{(s)} L\right] =$$

$$= \sum_{q=0}^{p} \dim_K \mathrm{Gr}_q^{(\mathbf{s})} \left(K[X,\xi]/\mathrm{Gr}^{(s)} L\right) = \dim_K F_p^{(\mathbf{s})} \left(K[X,\xi]/\mathrm{Gr}^{(s)} L\right).$$

Odatle i iz lema 6.3.8. i 6.3.9. slijedi

$$\dim_K F_p^{(1)}(D(n)/L) \leq \dim_K F_{sp}^{(s)}(D(n)/L) =$$

$$= \dim_K F_{sp}^{(\mathbf{s})}(K[X,\xi]/\mathrm{Gr}^{(s)}/L) \leq \dim_K F_{sp}(K[X,\xi]/\mathrm{Gr}^{(s)} L)$$

i

$$\dim_K F_p(K[X,\xi]/\mathrm{Gr}^{(s)} L) \leq \dim_K F_{sp}^{(\mathbf{s})}(K[X,\xi]/\mathrm{Gr}^{(s)} L) =$$

$$= \dim_K K_{sp}^{(s)}(K[X,\xi]/\mathrm{Gr}^{(s)} L) \leq \dim_K F_{sp}^{(1)}(D(n)/L).$$

Budući da su funkcije $p \mapsto \dim_K F_p^{(1)}(D(n)/L)$ i $p \mapsto \dim_K F_p(K[X,\xi]/\mathrm{Gr}^s L)$ za velike vrijednosti $p \in \mathbb{Z}$ predstavljene polinomima u p, ti polinomi moraju imati jednake stupnjeve. Odatle slijedi $d(D(n)/L) = d(K[X,\xi]/\mathrm{Gr}^{(s)} L)$, a to je prema teoremu 6.1.5. i propoziciji 6.1.2. jednako $\dim \mathcal{V}(\mathrm{Gr}^{(s)} L)$.

Za $s \in \mathbb{N}$ i $T \in F_p^{(s)} D(n)$ neka je $\sigma_p^{(s)}(T)$ klasu od T u $\mathrm{Gr}_p^{(s)} D(n) \subseteq \mathrm{Gr}^{(s)} D(n) = K[X,\xi]$. Dakle,

$$\sigma_p^{(s)} : F_p^{(s)} D(n) \longrightarrow \mathrm{Gr}_p^{(s)} D(n) = F_p^{(s)} D(n)/F_{p-1}^{(s)} D(n)$$

je kvocijentno preslikavanje. Nadalje, za prirodnu filtraciju od $K[X,\xi]$ po ukupnom stupnju polinoma, sa σ_p označavamo preslikavanje koje polinomu stupnja p pridružuje njegovu homogenu komponentu stupnja p.

Primjer: Neka je $D = D(1)$ i neka je $T \in D$ dan sa $T = x^3\partial + \partial^2$. Tada je red od T jednak 2 i $\mathrm{Symb}(T) = \xi^2$. Dakle, $\sigma_2(\mathrm{Symb}(T)) = \xi^2$. S druge strane, imamo

$$\sigma_4^{(1)}(T) = x^3\xi, \quad \sigma_5^{(2)}(T) = x^3\xi, \quad \sigma_6^{(3)} = cx^3\xi + \xi^2, \quad \sigma_{2s}^{(s)}(T) = \xi^2 \quad \text{za } s > 3.$$

Dakle, u ovom primjeru za velike vrijednosti s $\sigma^{(s)}(T)$ postaje jednak $\sigma(\mathrm{Symb}(T))$. To vrijedi i općenito:

Lema 6.3.11. *Neka je T diferencijalni operator iz $D(n)$ reda $\leq m$ takav da mu je simbol $\mathrm{Symb}_m(T)$ polinom stupnja p. Tada postoji $s_0 \in \mathbb{N}$ takav da vrijedi*

$$\sigma_p(\mathrm{Symb}_m(T)) = \sigma_{p+(s-1)m}^{(s)}(T) \qquad \forall s \geq s_0.$$

Dokaz: Po pretpostavci je T konačna suma oblika

$$T = \sum_{\alpha,\beta\in\mathbb{Z}_+^n,\, |\beta|\leq m} c_{\alpha\beta} X^\alpha \partial^\beta.$$

Neka je q_0 takav da je $c_{\alpha\beta} = 0$ ako je $|\alpha| > q_0$. Tada je

$$\mathrm{Symb}_m(T) = \sum_{\alpha,\beta\in\mathbb{Z}_+^n,\, |\beta|=m} c_{\alpha\beta} X^\alpha \xi^\beta,$$

to je polinom stupnja p i njegova homogena komponenta stupnja p je

$$\sigma_p\left(\mathrm{Symb}_m(T)\right) = \sum_{|\alpha|=p-m,\,|\beta|=m} c_{\alpha\beta} X^\alpha \xi^\beta.$$

S druge strane, imamo $X^\alpha \partial^\beta \in F^{(s)}_{|\alpha|+s|\beta|}D(n)$. Pretpostavimo da je $c_{\alpha\beta} \neq 0$. Tada imamo sljedeće tri mogućnosti:

(*i*) $|\beta| = m$ i $|\alpha| = p - m$; tada je $X^\alpha \partial^\beta \in F_{p+(s-1)m}D(n)$.

(*ii*) $\beta| = m$ i $|\alpha| < p - m$; tada je $X^\alpha \partial^\beta \in F^{(s)}_{p+(s-1)m-1}D(n)$.

(*iii*) $m \geq 1$, $|\beta| < m$ i $|\alpha| \leq q_0$; tada je $X^\alpha \partial^\beta \in F^{(s)}_{q_0+s(m-1)}D(n)$. U ovom je slučaju

$$q_0 + s(m-1) = q_0 + sm - s = q_0 + m - s + (s-1)m.$$

Dakle, ako je $s \geq s_0 = q_0 + m - p + 1$, onda je $q_0 + s(m-1) \leq p + (s-1)m - 1$. Dakle, i u tom je slučaju $X^\alpha \partial^\beta \in F_{p+(s-1)m-1}D(n)$.

Dakle, za $s \geq s_0$ imamo

$$\sigma^{(s)}_{p+(s-1)m}(T) = \sigma^{(s)}_{p+(s-1)m}\left(\sum_{|\alpha|=p-m,\,|\beta|=m} c_{\alpha\beta} X^\alpha \partial^\beta\right) = \sum_{|\alpha|=p-m,\,|\beta|=m} c_{\alpha\beta} X^\alpha \xi^\beta = \sigma_p\left(\mathrm{Symb}_m(T)\right).$$

Time je lema dokazana.

Posebno, ako je L lijevi ideal u $D(n)$, imamo ovakvu posljedicu:

Korolar 6.3.12. *Neka je L lijevi ideal u $D(n)$. Tada postoji $s_0 \in \mathbb{Z}_+$ takav da je*

$$\mathrm{Gr}(\mathrm{Gr}\,L) = \mathrm{Gr}^{(s)}L \qquad \forall s \geq s_0.$$

Dokaz: Budući da je L konačno generiran, postoje $T_1, \ldots, T_q \in L$ koji taj ideal generiraju:

$$L = D(n)T_1 + \cdots + D(n)T_q.$$

Tada njihovi simboli $\mathrm{Symb}(T_1), \ldots, \mathrm{Symb}(T_q)$ generiraju ideal $\mathrm{Gr}\,L$ u $\mathrm{Gr}\,D(n)$, a elementi $\sigma^{(s)}(T_1), \ldots, \sigma^{(s)}(T_q)$ generiraju ideal $\mathrm{Gr}^{(s)}L$ u $\mathrm{Gr}^{(s)}D(n) = K[X,\xi]$. Nadalje, polinomi $\sigma\left(\mathrm{Symb}(T_1)\right), \ldots, \sigma\left(\mathrm{Symb}(T_q)\right)$ generiraju ideal $\mathrm{Gr}(\mathrm{Gr}\,L)$ u $K[X,\xi]$. Stoga tvrdnja slijedi iz leme 6.3.11.

Dokaz teorema 6.3.7.: Pretpostavimo najprije da je $M = D(n)/L$ za neki lijevi ideal L u $D(n)$. Prema lemi 6.3.10. tada je $d(M) = \dim \mathcal{V}(\mathrm{Gr}(\mathrm{Gr}\,L))$. Prema propoziciji 6.1.8. vrijedi

$$\dim \mathcal{V}(\mathrm{Gr}(\mathrm{Gr}\,L)) = \dim \mathcal{V}(\mathrm{Gr}\,L).$$

S druge strane, egzaktni niz lijevih $D(n)-$modula

$$0 \longrightarrow L \longrightarrow D(n) \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

vodi na egzaktni niz $K[X,\xi]-$modula (naime, $\mathrm{Gr}\,D(n) = K[X,\xi]$)

$$0 \longrightarrow \mathrm{Gr}\,L \longrightarrow \mathrm{Gr}\,D(n) \longrightarrow \mathrm{Gr}\,M \longrightarrow 0.$$

Dakle, $\mathrm{Gr}\,M \cong K[X,\xi]/(\mathrm{Gr}\,L)$ i anihilator od $\mathrm{Gr}\,M$ jednak je $\mathrm{Gr}\,L$. Dakle, po definiciji $\mathcal{V}(\mathrm{Gr}\,L)$ je karakteristična višestrukost od M. To dokazuje jednakost u ovom slučaju.

Da dokažemo opći slučaj, koristimo indukciju po broju generatora modula M. Ako M ima $q \geq 2$ generatora, možemo formirati egzaktni niz

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0,$$

u kojem modul M' ima $q-1$ generatora, a modul M'' je ciklički, odnosno, izomorfan modulu oblika $D(n)/L$, gdje je L lijevi ideal u $D(n)$. Prema prvom dijelu dokaza je $d(M'') = \dim\, Ch(M'')$. Nadalje, po pretpostavci indukcije je $d(M') = \dim\, Ch(M')$. Sada pomoću propozicija 3.3.9. i 6.3.4. imamo

$$d(M) = \max\{d(M'), d(M'')\} = \max\{\dim\, Ch(M'), \dim\, Ch(M'')\} =$$
$$= \dim\left(Ch(M') \cup Ch(M'')\right) = \dim\, Ch(M).$$

Time je teorem 6.3.7. dokazan.

Kombinacijom teorema 6.3.7. i Bernsteinovog teorema 6.2.2. dobivamo:

Teorem 6.3.13. *Neka je $M \neq \{0\}$ konačno generiran $D(n)-$modul. Tada je* $\dim\, Ch(M) \geq n$.

6.4 Holonomni moduli

Kažemo da je $D(n)-$modul M **holonoman** $D(n)-$**modul** ako je konačno generiran i ako je $\dim Ch(M) \leq n$. Prema teoremu 6.3.13., ako je $M \neq \{0\}$ konačno generiran $D(n)-$modul, onda je $\dim Ch(M) \geq n$. Dakle, holonomni moduli su oni koji imaju najmanje moguće karakteristične višestrukosti, odnosno, modul M je holonoman ako je ili $M = \{0\}$, ili je $\dim Ch(M) = n$.

Teorem 6.4.1. (a) *Holonomni moduli su konačne duljine.*

(b) *Podmoduli, kvocijentni moduli i proširenja holonomnih modula su holonomni moduli.*

Dokaz: Tvrdnja (b) slijedi neposredno iz tvrdnje (a) propozicije 3.3.9.

(a) Neka je $M \neq \{0\}$ holonoman $D(n)-$modul, tj. $\dim Ch(M) = n$. Prema teoremu 6.3.7. vrijedi $d(M) = n$. Budući da je modul M konačno generiran i $D(n)$ je Noetherin prsten, modul M je Noetherin, pa postoji maksimalan $D(n)-$podmodul $M' \neq M$. Tada imamo egzaktan niz

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M/M' \longrightarrow 0.$$

Prema (b) M' i M/M' su holonomni moduli, a k tome je M/M' ireducibilan. Ako je $M' \neq \{0\}$, iz tvrdnje (b) propozicije 3.3.9. slijedi $e(M') < e(M)$. Indukcijom po $e(M)$ zaključujemo da je modul M konačne duljine.

Dakle, puna potkategorija $\mathcal{H}ol(D(n))$ kategorije $\mathcal{M}_f(D(n))$ je zatvorena u odnosu na uzimanje podmodula, kvocijenata i proširenja. Štoviše, ona je potkategorija pune potkategorije $\mathcal{M}_{fl}(D(n))$ od $\mathcal{M}_f(D(n))$ modula konačne duljine. Može se dokazati da je $\mathcal{H}ol(D(n))$ prava potkategorija od $\mathcal{M}_{fl}(D(n))$ ako je $n > 1$.

Primijetimo još da funktori transponiranja i Fourierove transformacije preslikavaju holonomne module u holonomne module.

Primjer 1: Neka je $\mathcal{O}_n = K[X] = K[X_1, \ldots, X_n]$. Tada je $\mathcal{O}_n \cong D(n)/(D(n)(\partial_1, \ldots, \partial_n))$, gdje je

$$D(n)(\partial_1, \ldots, \partial_n) = D(n)\partial_1 + \cdots + D(n)\partial_n$$

lijevi ideal u $D(n)$ generiran sa $\{\partial_1, \ldots, \partial_n\}$. To je konačno generiran (štoviše, ciklički) $D(n)-$modul. Stavimo

$$F_p\mathcal{O}_n = \{0\} \quad \text{za} \quad p < 0 \qquad \text{i} \qquad F_p\mathcal{O}_n = \mathcal{O}_n \quad \text{za} \quad p \geq 0.$$

Tada je filtracija $F\mathcal{O}_n$ dobra filtracija u odnosu na filtraciju od $D(n)$ pomoću reda diferencijalnih operatora. Pripadni graduirani modul $\operatorname{Gr}\mathcal{O}_n$ dan je sa

$$\operatorname{Gr}^p\mathcal{O}_n = \{0\} \quad \text{za} \quad p \neq 0 \qquad \text{i} \qquad \operatorname{Gr}^0\mathcal{O}_n = \mathcal{O}_n = K[X].$$

Dakle, anihilator od $\operatorname{Gr}\mathcal{O}_n$ jednak je idealu u $K[X, \xi]$ generiranom sa $\xi_1, \ldots, \xi_n$. To povlači da je $Ch(\mathcal{O}_n) = K^n \times \{0\} \subseteq K^{2n}$. Posebno $\dim Ch(\mathcal{O}_n) = n$, pa je $\mathcal{O}_n$ holonoman $D(n)-$modul. Nadalje, $\operatorname{supp}(\mathcal{O}_n) = K^n$ i projekcija $\pi : K^{2n} \to K^n$ je bijekcija sa $Ch(\mathcal{O}_n)$ na $\operatorname{supp}(\mathcal{O}_n)$.

Diferenciranjem se vidi da svaki $D(n)-$podmodul od $\mathcal{O}_n$ različit od $\{0\}$ sadrži konstante, dakle, jednak je cijelom modulu $\mathcal{O}_n$. Dakle, $D(n)-$modul $\mathcal{O}_n$ je ireducibilan.

Primjer 2: Promotrimo sada $\Delta_n = \mathcal{F}(\mathcal{O}_n)$. Imamo $\Delta_n \cong D(n)/(D(n)(X_1, \ldots, X_n))$, gdje je

$$D(n)(X_1, \ldots, X_n) = D(n)X_1 + \cdots + D(n)X_n$$

lijevi ideal u $D(n)$ generiran sa $\{X_1, \ldots, X_n\}$. Naravno, Δ_n je holonoman i ireducibilan. Neka je $\delta \in \Delta_n$ vektor koji odgovara vektoru $1 \in \mathcal{O}_n$. Tada je $X_i\delta = 0$ za $1 \leq i \leq n$. δ je ciklički vektor $D(n)-$modula Δ_n, pa je Δ_n razapet sa $\delta^{(\alpha)} = \partial^\alpha \delta$, $\alpha \in \mathbb{Z}_+$. Neka je $F\Delta_n$ filtracija zadana ovako:

$$F_p\Delta_n = \{0\} \quad \text{za} \quad p < 0 \qquad \text{i} \qquad F_p\Delta_n = span_K\{\delta^{(\alpha)};\ \alpha \in \mathbb{Z}_+^n,\ |\alpha| \leq p\} \quad \text{za} \quad p \geq 0.$$

Po definiciji Fourierovog automorfizma imamo

$$\partial_j \delta^{(\alpha)} = \delta^{(\alpha+\varepsilon_j)}, \qquad X_j\delta^{(\alpha)} = -\alpha_j \delta^{(\alpha-\varepsilon_j)}, \qquad \alpha \in \mathbb{Z}_+^n, \quad 1 \leq j \leq n.$$

Prema tome, $F_p\Delta_n$ su $K[X]-$podmoduli od Δ_n. Nadalje,

$$\partial_j F_p\Delta_n \subseteq F_{p+1}\Delta_n, \qquad p \in \mathbb{Z}, \quad 1 \leq j \leq n.$$

Dakle, $F\Delta_n$ je ekshaustivna Hausdorffova filtracija od Δ_n kompatibilna s filtracijom od $D(n)$ po redu diferencijalnih operatora. Neka je $\overline{\delta}^{(\alpha)}$ klasa od $\delta^{(\alpha)}$ u $\mathrm{Gr}^{|\alpha|}\Delta_n$. Tada je

$$\mathrm{Gr}^p\Delta_n = span_K\{\overline{\delta}^{(\alpha)};\ \alpha \in \mathbb{Z}_+^n,\ |\alpha| = p\}.$$

U $K[X,\xi]-$modulu $\mathrm{Gr}\,\Delta_n$ očito X_i djeluju kao 0, a ξ preslikava $\overline{\delta}^{(\alpha)}$ u $\overline{\delta}^{(\alpha+\varepsilon_i)}$. Dakle, $\overline{\delta}$ generira $\mathrm{Gr}\,\Delta_n$ kao $K[X,\xi]-$modul, pa je $F\Delta_n$ dobra filtracija. Nadalje, anihilator $K[X,\xi]-$modula $\mathrm{Gr}\,\Delta_n$ je ideal generiran sa $X_1, \ldots, X_n$. Dakle, karakteristična višestrukost je $Ch(\Delta_n) = \{0\} \times K^n \subseteq K^{2n}$. Kao i za $\mathcal{O}_n$ nalazimo da je $\mathrm{supp}(\Delta_n) = \{0\} \times K^n$. Dakle, sada je projekcija na drugi faktor $Ch(\Delta_n) \to \mathrm{supp}(\Delta_n)$ bijekcija.

Važan je sljedeći jednostavan kriterij holonomnosti:

Propozicija 6.4.2. *Neka je M $D(n)-$modul i FM ekshaustivna filtracija od M kompatibilna s Bernsteinovom filtracijom od $D(n)$. Ako je*

$$\dim_K F_pM \leq \frac{c}{n!}p^n + (\textit{članovi nižeg stupnja u } p) \qquad \forall p \in \mathbb{Z}_+,$$

onda je M holonoman $D(n)-$modul duljine $\leq c$. Posebno, $D(n)-$modul M je konačno generiran.

Dokaz: Neka je N konačno generiran $D(n)-$podmodul od M. Tada FM inducira ekshaustivnu filtraciju na N (koja je, naravno, kompatibilna s Bernsteinovom filtracijom od $D(n)$). Prema propozicijama 3.3.4. i 3.3.6. postoji dobra filtracija $F'N$ i postoji $s \in \mathbb{Z}_+$ takvi da vrijedi $F'_pN \subseteq F_{p+s}N$ $\forall p \in \mathbb{Z}$. Slijedi

$$\dim_K F'_pN \leq \dim_K F_{p+s}N \leq \dim_K F_{p+s}M$$

dakle,

$$\dim_K F'_pN \leq \frac{c}{n!}p^n + (\text{članovi nižeg stupnja u } p) \qquad \forall p \in \mathbb{Z}_+.$$

Odatle slijedi da je $d(N) \leq n$, pa je modul N je holonoman, a slijedi i $e(N) \leq c$. Prema tome svaki se rastući niz konačno generiranih $D(n)-$podmodula od M stabilizira. No to znači da je $D(n)-$modul M konačne duljine $\leq c$, holonoman i konačno generiran.

Primjer 3: Neka je $n = 1$ i $D = D(1)$. Neka je $E = X\partial$ i stavimo

$$L_\alpha = D(E - \alpha), \qquad M_\alpha = D/L_\alpha, \qquad \alpha \in K.$$

Proučit ćemo familiju $D-$modula M_α, $\alpha \in K$.

Iz činjenice da je $\{X^n\partial^m;\ n, m \in \mathbb{Z}_+\}$ baza vektorskog prostora D i iz $\partial X = X\partial + 1$ pokazuje se da je $\{X^pE^q;\ p, q \in \mathbb{Z}_+\} \cup \{\partial^pE^q;\ p, q, \in \mathbb{Z}_+\}$ baza od D. Nadalje,

$$L_\alpha = span(\{X^pE^q(E - \alpha);\ p, q \in \mathbb{Z}_+\} \cup \{\partial^pE^q(E - \alpha);\ p, q \in \mathbb{N}\}).$$

Dakle,

$$M_\alpha = span(\{X^p + L_\alpha;\ p \in \mathbb{Z}_+\} \cup \{\partial^p + L_\alpha;\ p \in \mathbb{N}\} = span\{m_n;\ n \in \mathbb{Z}\},$$

gdje smo stavili

$$m_n = \begin{cases} X^n + L_\alpha & \text{za } n \geq 0 \\ \partial^n + E_\alpha & \text{za } n < 0 \end{cases}.$$

Imamo

$$[E, X] = X\partial X - X^2\partial = X \qquad \text{i} \qquad [E, \partial] = X\partial^2 - \partial X\partial = -\partial,$$

dakle,

$$EX = X(E + 1) \qquad \text{i} \qquad E\partial = \partial(E - 1).$$

Odatle slijedi da je $Em_n = (\alpha + n)m_n$ za svaki $n \in \mathbb{Z}$. To pokazuje da su m_n, $n \in \mathbb{Z}$, linearno nezavisni. Dakle, $\{m_n;\ n \in \mathbb{Z}\}$ je baza od M_α.

Fourierov transformat od M_α izomorfan je kvocijentu

$$D/D(-\partial X + \alpha) = D/D(X\partial + \alpha + 1) = M_{-\alpha-1}.$$

Pretpostavimo najprije da je $\alpha \notin \mathbb{Z}$. Tada je E izomorfizam sa M_α na M_α. Odatle slijedi da je $XM_\alpha = M_\alpha$. Budući da X preslikava svojstven vektor od E sa svojstvenom vrijednošću $\alpha + n$ u svojstven vektor sa svojstvenom vrijednošću $\alpha + n + 1$, zaključujemo da je X na prostoru M_α ne samo surjektivan nego i injektivan. Nadalje, postoje $c_n \in K^*$, $n \in \mathbb{Z}$, takvi da za vektore $v_n = c_n m_n$ (koji čine bazu od M_α) vrijedi

$$Ev_n = (\alpha + n)v_n, \qquad Xv_n = v_{n+1}, \qquad n \in \mathbb{Z}.$$

Nadalje, za svaki $n \in \mathbb{Z}$ imamo

$$\partial v_n = \partial X v_{n-1} = [\partial, X]v_{n-1} + Ev_{n-1} = (\alpha + n)v_{n-1}.$$

Dakle, djelovanje operatora E, X, ∂ na vektore baze v_n je

$$Ev_n = (\alpha + n)v_n, \qquad Xv_n = v_{n+1}, \qquad \partial v_n = (\alpha + n)v_{n-1}, \qquad n \in \mathbb{Z}.$$

Odatle se vidi da je

$$M_\alpha \cong M_{\alpha+p} \qquad \forall p \in \mathbb{Z}.$$

Neka je $N \neq \{0\}$ $D-$podmodul od M. Tada je $EN \subseteq N$ pa slijedi da je $v_n \in N$ za neki $n \in \mathbb{Z}$. Djelovanjem X i ∂ nalazimo da N sadrži sve vektori v_n, $n \in \mathbb{Z}$, odnosno, $N = M_\alpha$. Dakle, M_α su ireducibilni $D-$moduli.

Definiramo filtraciju FM_α modula M_α ovako:

$$F_pM_\alpha = \{0\} \quad \text{ako je } p < 0, \qquad F_pM_\alpha = span\,\{v_n;\ |n| \leq p\} \quad \text{ako je } p \geq 0.$$

Tada je FM_α rastuća ekshaustivna Hausdorffova filtracija prostora M_α vektorskim potprostorima. Nadalje, vrijedi

$$XF_pM_\alpha \subseteq F_{p+1}M_\alpha \qquad \text{i} \qquad \partial F_pM_\alpha \subseteq F_{p+1}M_\alpha \qquad \forall p \in \mathbb{Z}.$$

Dakle, filtracija FM_α kompatibilna je s Bernsteinovom filtracijom od D. Budući da je $\dim_K F_pM_\alpha = 2p + 1$ za $p \geq 0$, prema propoziciji 6.4.2. moduli M_α su holonomni.

Mogli smo module M_α definirati tako da na bazi $\{v_n;\ n \in \mathbb{Z}\}$ zadamo djelovanje X i ∂ sa $Xv_n = v_{n+1}$, $\partial v_n = (\alpha + n)v_{n-1}$; jednostavno se provjerava relacija $[\partial, X] = 1$, dakle, definicija je smislena. Trivijalna je i ekvivalencija $M_\alpha \cong M_{\alpha+p}$ $\forall p \in \mathbb{Z}$: ta je ekvivalencija ostvarena sa $v_n \mapsto v_{n+p}$.

Da izračunamo karakterističnu višestrukost od M_α, definiramo drugačiju filtraciju FM_α :

$$F_nM_\alpha = \{0\} \quad \text{za} \quad n < 0; \qquad F_nM_\alpha = span\,\{v_p;\ p \geq -n\} \quad \text{za} \quad n \geq 0.$$

To je ekshaustivna Hausdorffova filtracija $K[X]-$podmodulima od M_α. Budući da vrijedi $\partial F_pM_\alpha = F_{p+1}M_\alpha$, to je dobra filtracija u odnosu na filtraciju od D redom diferencijalnih operatora. U graduiranom modulu $\mathrm{Gr}\,M_\alpha$ imamo:

$$\mathrm{Gr}^pM_\alpha = \{0\} \text{ za } \quad p < 0; \quad \mathrm{Gr}^0M_\alpha = span\,\{v_n;\ n \geq 0\}; \quad \mathrm{Gr}^pM_\alpha = K\cdot(v_{-p}+F_{p-1}M_\alpha) \text{ za } \quad p > 0.$$

Dakle, X djeluje kao 0 na Gr^pM_α za $p \neq 0$, a simbol ξ od ∂ djeluje kao 0 na Gr^0M_α i preslikava Gr^pM_α na $\mathrm{Gr}^{p+1}M_\alpha$ za $p > 0$. Slijedi da je anihilator od $\mathrm{Gr}\,M_\alpha$ ideal u $K[X,\xi]$ generiran sa $X\xi$. Dakle, karakteristična višestrukost je unija pravaca $\{X = 0\} \cup \{\xi = 0\}$ u K^2. Posebno, $Ch(M_\alpha)$ nije ireducibilna višestrukost, iako je modul M_α ireducibilan.

Pretpostavimo sada da je $\alpha \in \mathbb{Z}$. Tada su sve svojstvene vrijednosti od E cijeli brojevi. Ako je $Ev = mv$, $m \in \mathbb{Z}$, $m \neq 0$, onda je $E\partial v = (m-1)\partial v$ i $X\partial v = mv \neq 0$. Dakle, X preslikava svojstven potprostor za svojstvenu vrijednost $q \neq -1$ na svojstven potprostor za svojstvenu vrijednost $q+1$.

Pretpostavimo najprije da je $\alpha = -n < 0$. Klasa od X^{n-1} je svojstven vektor od E za svojstvenu vrijednost -1. Dakle, X preslikava svojstven potprostor za svojstvenu vrijednost -1 na svojstven potprostor za svojstvenu vrijednost 0. Stoga u tom slučaju možemo izabrati bazu $\{v_m;\ m \in \mathbb{Z}\}$ tako da bude

$$Xv_m = v_{m+1} \qquad \forall m \in \mathbb{Z}.$$

Tada je

$$\partial v_m = \partial Xv_{m-1} = [\partial, X]v_{m-1} + Ev_{m-1} = mv_{m-1} \qquad \forall m \in \mathbb{Z}.$$

Dakle, svi moduli M_{-n}, $n \in \mathbb{N}$, su međusobno izomorfni. Stavimo $N_{-n} = span\,\{v_m;\ m \in \mathbb{Z}_+\}$. To je $D-$podmodul izomorfan modulu $\mathcal{O}_1$ iz primjera 1. Posebno, modul M_{-n} je reducibilan. Vrijedi $Xv_{-1} \in N_{-n}$. Dakle, klasa $\delta \in L_{-n} = M_{-n}/N_{-n}$ od v_{-1} zadovoljava $X\delta = 0$. Spektar restrikcije $E|L_{-n}$ jednak je $-\mathbb{N}$. Za $m \in \mathbb{Z}_+$ je $\delta^{(m)} = \partial^m\delta \neq 0$ svojstven vektor za svojstvenu vrijednost $-(m+1)$, dakle, proporcionalan je klasi od $v_{-(m+1)}$. Imamo

$$X\delta^{(m)} = X\partial\delta^{(m-1)} = -m\partial^{(m-1)} \qquad \forall m > 0.$$

Dakle, modul L_{-n} izomorfan je modulu Δ_1 iz primjera 2. Prema tome, imamo egzaktan niz

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_1 \longrightarrow M_{-n} \longrightarrow \Delta_1 \longrightarrow 0$$

i on nije rascjepiv. Podsjećamo: $M_{-n} \cong M_{-1}\ \forall n \in \mathbb{N}$.

Pomoću Fourierove transformacije vidimo da su $D-$moduli M_n za $n \in \mathbb{Z}_+$ svi ekvivalentni sa M_0. Nadalje, imamo nerascjepiv egzaktan niz

$$0 \longrightarrow \Delta_1 \longrightarrow M_n \longrightarrow \mathcal{O}_1 \longrightarrow 0.$$

Budući da su moduli $\mathcal{O}_1$ i Δ_1 holonomni, kao što smo vidjeli u primjerima 1. i 2., prema tvrdnji (b) teorema 6.4.1. vidimo da su moduli M_n, $n \in \mathbb{Z}$, holonomni. Nadalje, prema propoziciji 6.3.4. dobivamo

$$Ch(M_n) = Ch(\mathcal{O}_1) \cup Ch(\Delta_1) \qquad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Prema primjerima 1. i 2. obje karakteristične višestrukosti $Ch(M_0)$ i $Ch(M_{-1})$ jednake su uniji pravaca $\{X = 0\} \cup \{\xi = 0\}$ u K^2.

Iz primjera 3. vidi se da karakteristična višestrukost ne određuje odgovarajući $D-$modul. Nadalje, karakteristična višestrukost ireducibilnog holonomnog $D-$modula nije nužno ireducibilna.

Sada ćemo generalizirati konstrukciju modula M_{-1} iz primjera 3. Neka je M $D(n)-$modul i $P \in K[X]$. Na lokalizaciji M_P od M možemo definirati $K-$linearne operatore ∂_i, $1 \leq i \leq n$, sa

$$\partial_i \left(\frac{m}{P^p} \right) = -p\partial_i(P)\frac{m}{P^{p+1}} + \frac{\partial_i m}{P^p}, \qquad m \in M, \quad p \in \mathbb{Z}_+.$$

Direktna provjera pokazuje da je

$$[\partial_i, \partial_j] \left(\frac{m}{P^p} \right) = 0 \qquad \text{i} \qquad [\partial_i, X_j] \left(\frac{m}{P^p} \right) = \delta_{ij} \left(\frac{m}{P^p} \right).$$

Prema teoremu 2.2.8. na taj je način na M_P definirana struktura $D(n)-$modula.

Propozicija 6.4.3. *Neka je M holonoman $D(n)-$modul i $P \in K[X]$. Tada je i M_P holonoman $D(n)-$modul.*

Dokaz: Možemo pretpostaviti da je $P \neq 0$. Neka je FM dobra filtracija od M u odnosu na Bernsteinovu filtraciju od $D(n)$ takva da je $F_pM = \{0\}$ za $p < 0$. Neka je $m = \deg P$. Definiramo filtraciju FM_P potprostorima od M_P ovako:

$$F_pM_P = \{0\} \quad \text{za } p < 0; \qquad F_pM_P = \left\{ \frac{v}{P^p};\ v \in F_{(m+1)p}M \right\}, \quad \text{za } p \geq 0.$$

Neka je $w \in F_pM_P$, $p \geq 0$. Tada je za neki $v \in F_{(m+1)p}M$

$$w = \frac{v}{P^p} = \frac{Pv}{P^{p+1}}.$$

Budući da je

$$Pv \in F_{(m+1)p+m}M \subseteq F_{(m+1)(p+1)}M,$$

filtracija FM_P je rastuća.

Neka je $v \in F_qM$. Tada je

$$\frac{v}{P^p} = \frac{P^s v}{P^{p+s}} \qquad \forall s \in \mathbb{Z}_+.$$

Nadalje, $P^s v \in F_{q+sm}M$ i vrijedi

$$(m+1)(p+s) - (q+sm) = s + (m+1)p - q \geq 0 \quad \text{ako je} \quad s \geq q - (m+1)p.$$

Dakle,

$$P^s v \in F_{q+sm}M \subseteq F_{(m+1)(p+s)}M \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{v}{P^p} \in F_{p+s}M_P.$$

Prema tome, filtracija FM_P je ekshaustivna. Treba još dokazati da je ta filtracija kompatibilna s Bernsteinovom filtracijom od $D(n)$. Imamo

$$v \in F_{(m+1)p}M \quad \Longrightarrow \quad X_iPv \in F_{(m+1)(p+1)} \quad \Longrightarrow \quad X_i\frac{v}{P^p} = \frac{X_iPv}{P^{p+1}} \in F_{p+1}M_P.$$

Nadalje,

$$-p\partial_i(P)v + P\partial_i v \in F_{(m+1)(p+1)}M \quad \Longrightarrow \quad \partial_i \left(\frac{v}{P^p} \right) = \frac{-p\partial_i(P)v + P\partial_i v}{P^{p+1}} \in F_{p+1}M_P.$$

Time je tvrdnja dokazana. Budući da za svaki $p \in \mathbb{Z}_+$ vrijedi

$$\dim_K F_pM_P \leq \dim_K F_{(m+1)p}M \leq e(M)(m+1)^n \frac{p^n}{n!} + \text{niže potencije od } p,$$

prema propoziciji 6.4.2. zaključujemo da je $D(n)-$modul M_P holonoman.

Korolar 6.4.4. *Za $P \in K[X]$, $D(n)-$modul $K[X]_P$ je holonoman.*

6.5 Vanjski tenzorski produkti

U daljnjem je $X = K^n$, $Y = K^m$ i $X \times Y = K^n \times K^m = K^{n+m}$. Nadalje, sa D_X, D_Y i $D_{X\times Y}$ označavamo pripadne algebre polinomijalnih diferencijalnih operatora. Definiramo algebru $D_X \hat{\otimes} D_Y$: kao vektorski prostor to je $D_X \otimes D_Y$, a množenje je zadano tako da bude

$$(T \otimes S)(T' \otimes S') = TT' \otimes SS', \qquad T, T' \in D_X, \quad S, S' \in D_Y.$$

To je **vanjski tenzorski produkt algebri** D_X i D_Y. Očito:

Lema 6.5.1. $D_X \hat{\otimes} D_Y = D_{X\times Y}$.

Ako je M D_X-modul i N je D_Y-modul, definiramo $D_{X\times Y}-$modul $M \hat{\otimes} N$: kao vektorski prostor to je $M \otimes_K N$, a djelovanje je takvo da je

$$(T \otimes S)(m \otimes n) = Tm \otimes Sn, \qquad T \in D_X, \quad S \in D_Y, \quad m \in M, \quad n \in N.$$

Očito vrijedi:

Lema 6.5.2. *Ako su moduli M i N konačno generirani, onda je i modul $M \hat{\otimes} N$ konačno generiran.*

Glavni nam je cilj dokazati sljedeći trezultat:

Teorem 6.5.3. *Neka su M konačno generiran D_X-modul i N konačno generiran D_Y-modul. Tada je $d(M \hat{\otimes} N) = d(M) + d(N)$.*

Neposredna je posljedica:

Korolar 6.5.4. *Ako su moduli M i N holonomni, onda je i modul $M \hat{\otimes} N$ holonoman.*

Neka su D_X i D_Y snabdjeveni s Bernsteinovim filtracijama i neka su M i N konačno generirani moduli nad D_X i D_Y snabdjeveni dobrim filtracijama FM i FN. Definiramo **produktnu filtraciju** na $M \hat{\otimes} N$ sa

$$F_j(M \hat{\otimes} N) = \sum_{p+q=j} F_p M \otimes_K F_q N, \qquad j \in \mathbb{Z}.$$

Očito se produktna filtracija na $D_X \hat{\otimes} D_Y = D_{X\times Y}$ podudara s Bernsteinovom filtracijom. Odatle slijedi da je $F(M \hat{\otimes} N)$ ekshaustivna Hausdorffova filtracija od $M \hat{\otimes} N$ kompatibilna s Bernsteinovom filtracijom. Da dokažemo da je ta filtracija dobra, treba nam sljedeća lema iz linearne algebre.

Lema 6.5.5. *Neka su M, M', N i N' vektorski prostori nad K i neka su $\varphi : M \to M'$ i $\psi : N \to N'$ linearni operatori. Oni definiraju linearan operator $\varphi \otimes \psi : M \otimes_K N \to M' \otimes N'$. Vrijedi:*

(*a*) $\operatorname{Im} \varphi \otimes \psi = \operatorname{Im} \varphi \otimes \operatorname{Im} \psi$.

(*b*) $\operatorname{Ker} \varphi \otimes \psi = \operatorname{Ker} \varphi \otimes_K N + M \otimes_K \operatorname{Ker} \otimes_K N$.

Dokaz: Tvrdnja (a) je jasna iz definicije. Prema tvrdnji (a) u dokazu tvrdnje (b) možemo pretpostaviti da su φ i ψ surjektivni. Tada imamo kratke egzaktne nizove

$$0 \longrightarrow M'' \longrightarrow M \xrightarrow{\varphi} M' \longrightarrow 0 \qquad \text{i} \qquad 0 \longrightarrow N'' \longrightarrow N \xrightarrow{\psi} N' \longrightarrow 0$$

gdje su $M'' = \operatorname{Ker}\varphi$ i $N'' = \operatorname{Ker}\psi$. Imamo $\varphi \otimes \psi = (\varphi \otimes I_{N'})(I_M \otimes \psi)$. Budući da je desno tenzoriranje sa N' egzaktno, prvi egzaktni niz vodi na egzaktni niz

$$0 \longrightarrow M'' \otimes_K N' \longrightarrow M \otimes_K N' \stackrel{\varphi \otimes I_{N'}}{\longrightarrow} M' \otimes_K N' \longrightarrow 0.$$

Dakle,

$$\operatorname{Ker}(\varphi \otimes I_{N'}) = M'' \otimes N' = \operatorname{Ker}\varphi \otimes_K N'.$$

Odatle slijedi da za $z \in M \otimes_K N$ vrijedi

$$z \in \operatorname{Ker}\varphi \otimes \psi \qquad \Longleftrightarrow \qquad (I_M \otimes \psi)(z) \in (\operatorname{Ker}\varphi) \otimes_K N'.$$

Lijevo tenzoriranje s M je egzaktno, pa drugi egzaktni niz vodi na egzaktan niz

$$0 \longrightarrow M \otimes_K N'' \longrightarrow M \otimes_K N \stackrel{I_M \otimes \psi}{\longrightarrow} M \otimes_K N' \longrightarrow 0.$$

Odatle slijedi da se $\operatorname{Ker}\varphi \otimes_K N$ surjektivno preslikava na $\operatorname{Ker}\varphi \otimes_K N'$ i

$$\operatorname{Ker} I_M \otimes \psi = M \otimes_K N'' = M \otimes_K (\operatorname{Ker}\psi).$$

Dakle, vrijedi

$$z \in \operatorname{Ker}\varphi \otimes \psi \qquad \Longleftrightarrow \qquad z \in \operatorname{Ker}\varphi \otimes_K N + M \otimes_K \operatorname{Ker}\psi.$$

Time je lema 6.5.5. dokazana.

Dokaz teorema 6.5.3.: Prije svega opisat ćemo $\operatorname{Gr}(M\hat{\otimes}N)$. Neka je $j \in \mathbb{Z}$. Ako je $p+q=j$, imamo dobro definirano linearno preslikavanje sa $F_pM \otimes_K F_qN$ u $F_j(M\hat{\otimes}N)$. Odatle imamo dobro definirano linearno preslikavanje sa $F_pM \otimes_K F_qN$ u $\operatorname{Gr}^j(M\hat{\otimes}N)$. Prema lemi 6.5.5. jezgra prirodnog preslikavanja sa $F_pM \otimes_K F_qN$ u $\operatorname{Gr}^pM \otimes_K \operatorname{Gr}^qN$ jednaka je $F_{p-1}M \otimes_K F_qN + F_p \otimes_K F_{q-1}N$, dakle, sadržana je u $F_{j-1}(M\hat{\otimes}N)$. Prema tome, linearno preslikavanje sa $F_pM \otimes_K F_qN$ u $\operatorname{Gr}^j(M\hat{\otimes}N)$ faktorizira se kroz $\operatorname{Gr}^p \otimes_K \operatorname{Gr}^qN$. To vodi na linearno preslikavanje

$$\pi : \bigoplus_{p+q=j} \operatorname{Gr}^pM \otimes_K \operatorname{Gr}^qN \longrightarrow \operatorname{Gr}^j(M\hat{\otimes}N).$$

Po konstrukciji je jasno da je preslikavanje π surjektivno. Nadalje, restrikcija $\pi|\operatorname{Gr}^pM \otimes_K \operatorname{Gr}^qN$ je injektivna. Neka je $X_{p,q}$ slika te restrikcije. Budući da je

$$F_{p-1}M \otimes_K F_qN + F_pM \otimes_K F_{q-1}N = (F_pM \otimes_K F_qN) \cap \left(\sum_{\substack{p'+q'=j \\ p' \neq p,\ q' \neq q}} F_{p'}M \otimes_K F_{q'}N \right),$$

dobivamo

$$X_{p,q} \cap \left(\sum_{\substack{p'+q'=j \\ p' \neq p,\ q' \neq q}} X_{p',q'} \right) = \{0\}.$$

To pokazuje da je preslikavanje π izomorfizam. Prema tome,

$$\operatorname{Gr}^j(M\hat{\otimes}N) = \bigoplus_{p+q=j} \operatorname{Gr}^pM \otimes_K \operatorname{Gr}^qN \qquad \forall j \in \mathbb{Z}.$$

Definiramo li analogno vanjski produkt algebri $(\mathrm{Gr}\, D_X)\hat{\otimes}(\mathrm{Gr}\, D_Y)$ s graduacijom po totalnom stupnju, nalazimo da je $(\mathrm{Gr}\, M)\hat{\otimes}(\mathrm{Gr}\, N) = \mathrm{Gr}\, D_{X\times Y}$. Nadalje, $(\mathrm{Gr}\, M)\hat{\otimes}(\mathrm{Gr}\, N)$ postaje graduirani $\mathrm{Gr}\, D_{X\times Y}-$modul koji je prema prethodnoj diskusiji izomorfan modulu $\mathrm{Gr}\,(M\hat{\otimes}N)$. Budući da su filtracije FM i FN dobre, $\mathrm{Gr}\, M$ i $\mathrm{Gr}\, N$ su prema lemi 3.3.2. konačno generirani moduli nad $\mathrm{Gr}\, D_X$ i $\mathrm{Gr}\, D_Y$. Prema analogonu leme 6.5.2. $\mathrm{Gr}\,(M\hat{\otimes}N)$ je konačno generiran $\mathrm{Gr}\, D_{X\times Y}-$modul. Dakle, produktna filtracija je dobra filtracija od $M\hat{\otimes}N$.

Neka su

$$P(M,t) = \sum_{p\in\mathbb{Z}} \dim_K(\mathrm{Gr}^p M)t^p \qquad \text{i} \qquad P(N,t) = \sum_{q\in\mathbb{Z}} \dim_K(\mathrm{Gr}^q N)t^q$$

Poincaréovi redovi od $\mathrm{Gr}\, M$ i $\mathrm{Gr}\, N$. Tada imamo redom

$$P(M,t)P(N,t) = \sum_{p\in\mathbb{Z}}\sum_{q\in\mathbb{Z}} \dim_K(\mathrm{Gr}^p M)(\dim_K(\mathrm{Gr}^q N) = \sum_{j\in\mathbb{Z}}\left(\sum_{p+q=j} \dim_K(\mathrm{Gr}^p M)(\mathrm{Gr}^q N)\right)t^j =$$

$$= \sum_{j\in\mathbb{Z}}\left(\sum_{p+q=j} \dim_K\left(\mathrm{Gr}^p M \otimes_K \mathrm{Gr}^q N\right)\right)t^j = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \dim_K \mathrm{Gr}^j(M\hat{\otimes}N)t^j = P(M\hat{\otimes}N,t),$$

odnosno, to je upravo Poincaréov red od $M\hat{\otimes}N$. Dakle, red pola od $P(M\hat{\otimes}N,t)$ u točki 1 jednak je sumi redova polova od $P(M,T)$ i $P(N,t)$ u točki 1. Sada korolar 3.3.3. povlači tvrdnju teorema 6.5.3.

Tvrdnju teorema 6.5.3. možemo dobiti i pomoću karakterističnih višestrukosti. Promatrajmo D_X, D_Y i $D_{X\times Y}$ kao prstenove filtrirane redom diferencijalnih operatora. Neka su M i N konačno generirani moduli nad D_X i D_Y s dobrim filtracijama FM i FN. Kao malo prije definiramo (i u ovom slučaju dobru) filtraciju $F(M\hat{\otimes}N)$ modula $M\hat{\otimes}N$. Neka je I anihilator od $\mathrm{Gr}\, M$ u $\mathrm{Gr}\, D_X = K[X,\xi]$ i J anihilator od $\mathrm{Gr}\, N$ u $\mathrm{Gr}\, D_Y = K[Y,\eta]$. Pomoću leme 6.5.5. nalazimo da je anihilator od $\mathrm{Gr}\,(M\hat{\otimes}N)$ u prstenu $\mathrm{Gr}\, D_{X\times Y} = (\mathrm{Gr}\, D_X)\hat{\otimes}(\mathrm{Gr}\, D_Y) = K[X,Y,\xi,\eta]$ generiran slikama ideala I i J u tom prstenu. Dakle, vrijedi:

Teorem 6.5.6. *Ako su M i N konačno generirani moduli nad D_X i D_Y, onda je*

$$Ch(M\hat{\otimes}N) = q(Ch(M)\times Ch(N)).$$

Pri tome je $q : K^{2n}\times K^{2m} \to K^{2(n+m)}$ izomorfizam dan sa

$$q(x_1,\ldots,x_n,\xi_1,\ldots,\xi_n,y_1,\ldots,y_m,\eta_1,\ldots,\eta_m) = (x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_m,\xi_1,\ldots,\xi_n,\eta_1,\ldots,\eta_m).$$

Odatle slijedi

$$\dim Ch(M\hat{\otimes}N) = \dim Ch(M) + \dim Ch(N),$$

pa zbog teorema 6.3.7. dobivamo drugi dokaz teorema 6.5.3.

Korištenjem dokaza propozicije 6.3.1. i argumentacijom kao u prethodnom dokazu, ili korištenjem propozicije 6.3.5., zaključujemo da vrijedi:

Propozicija 6.5.7. *Neka su M i N konačno generirani moduli nad D_X i D_Y. Tada je*

$$\mathrm{supp}(M\hat{\otimes}N) = \mathrm{supp}(M)\times\mathrm{supp}(N).$$

6.6 Inverzne slike

Stavimo kao i prije $X = K^n$ i $Y = K^m$. Algebre regularnih funkcija $K[X]$ i $K[Y]$ na višestrukostima X i Y identificiraju se s algebrama polinoma $K[X_1, \ldots, X_n]$ i $K[Y_1, \ldots, Y_m]$.

Neka je $F : X \to Y$ polinomijalno preslikavanje i neka su $F_1, \ldots, F_m \in K[X]$ njegove koordinatne funkcije. Tada F definira homomorfizam unitalnih algebri

$$\varphi_F : K[Y] \longrightarrow K[X], \qquad \varphi_F(P) = P \circ F, \quad P \in K[Y].$$

Pomoću tog homomorfizma možemo $K[X]$ promatrati kao $K[Y]-$modul. Stoga možemo definirati funktor

$$F^* : \mathcal{M}(K[Y]) \longrightarrow \mathcal{M}(K[X]), \qquad F^*(N) = K[X] \otimes_{K[Y]} N.$$

To je desno egzaktni kontravarijantni funktor i zove se **funktor inverzne slike** pridružen polinomijalnom preslikavanje F.

Tu ćemo konstrukciju sada proširiti na $D-$module. Neka su kao i u 6.5. D_X i D_Y algebre polinomijalnih diferencijalnih operatora na X i na Y. Ako je N lijevi D_Y-modul, on je ujedno $K[Y]-$modul i želimo definirati strukturu lijevog D_X-modula na $F^*(N)$. (Kao što smo istaknuli na početku odjeljka 6.2., funktor transponiranja je involutivna ekvivalencija između kategorije lijevih $D-$modula i kategorije desnih $D-$modula; stoga će svi rezultati biti primjenjivi i na desne module.) Prvo promotrimo bilinearno preslikavanje

$$K[X] \times N \longrightarrow K[X] \otimes_{K[Y]} N, \qquad (P, v) \mapsto \partial_{X_i}(P) \otimes v + \sum_{j=1}^{m} P\partial_{X_i}(F_j) \otimes \partial_{Y_j} v.$$

Budući da za svaki $Q \in K[Y]$ vrijedi

$$\partial_{X_i}[P(Q \circ F)] \otimes v + \sum_{j=1}^{m} P(Q \circ F)\partial_{X_i}(F_j) \otimes \partial_{Y_j} v =$$

$$= \partial_{X_i}(P) \otimes Qv + \sum_{j=1}^{m} P(\partial_{Y_j}(Q) \circ F)\partial_{X_i}(F_j) \otimes v + \sum_{j=1}^{m} P(Q \circ F)\partial_{X_i}(F_j) \otimes \partial_{Y_j} v =$$

$$= \partial_{X_i}(P) \otimes Qv + \sum_{j=1}^{m} P\partial_{X_i}(F_j) \otimes \left(\partial_{Y_j}(Q)v + Q\partial_{Y_j} v\right) =$$

$$= \partial_{X_i}(P) \otimes Qv + \sum_{j=1}^{m} P\partial_{X_i}(F_j) \otimes \partial_{Y_j}(Qv),$$

gornje bilinearno preslikavanje faktorizira se kroz linearni endomorfizam od $F^*(N) = K[X] \otimes_{K[Y]} N$ koji ćemo označiti također sa ∂_{X_i}. Dakle,

$$\partial_{X_i}(P \otimes v) = \partial_{X_i}(P) \otimes v + \sum_{j=1}^{m} P\partial_{X_i}(F_j) \otimes \partial_{Y_j} v, \qquad P \in K[X], \quad v \in N.$$

Direktno se provjerava da vrijedi

$$[\partial_{X_i}, \partial_{X_j}](P \otimes v) = 0 \qquad \text{i} \qquad [\partial_{X_i}, X_j](P \otimes v) = \delta_{ij}(P \otimes v).$$

Dakle, po teoremu 2.2.8. na $F^*(N)$ je definirana struktura lijevog D_X-modula.

Ta se struktura može opisati i na drugi način. Neka je

$$D_{X \to Y} = F^*(D_Y) = K[X] \otimes_{K[Y]} D_Y.$$

Kao što je opisano, $D_{X\to Y}$ ima strukturu lijevog D_X-modula. Ali $D_{X\to Y}$ ima i strukturu desnog D_Y-modula pomoću množenja s desna na D_Y. Dakle, $D_{X\to Y}$ je $(D_X : D_Y)-$bimodul. Sada za svaki D_Y-modul N imamo

$$F^*(N) = K[X] \otimes_{K[Y]} N = K[X] \otimes_{K[Y]} D_Y \otimes_{D_Y} N = D_{X\to Y} \otimes_{D_Y} N,$$

a djelovanje od D_X na $F^*(N)$ dano je djelovanjem na prvi faktor u posljednjem izrazu. Taj D_X-modul označavamo sa $F^+(N)$ i zovemo **inverznom slikom** D_Y-modula N pri polinomijalnom preslikavanju F.

Neka je For_X (odnosno, For_Y) zaboravni funktor s kategorije $\mathcal{M}(D_X)$ (odnosno, s kategorije $\mathcal{M}(D_Y)$) u kategoriju $\mathcal{M}(K[X])$ (odnosno, u kategoriju $\mathcal{M}(K[Y])$). Tada komutira sljedeći dijagram funktora:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}(D_Y) & \xrightarrow{F^+} & \mathcal{M}(D_X) \\ \mathrm{For}_Y \downarrow & & \downarrow \mathrm{For}_X \\ \mathcal{M}(K[Y]) & \xrightarrow{F^*} & \mathcal{M}(K[X]) \end{array}$$

Tvrdimo da analogna tvrdnja stoji i za lijevo izvedene funktore, tj. da vrijedi:

Propozicija 6.6.1. *Za svaki $i \in \mathbb{Z}$ sljedeći dijagram funktora komutira:*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}(D_Y) & \xrightarrow{L^iF^+} & \mathcal{M}(D_X) \\ \mathrm{For}_Y \downarrow & & \downarrow \mathrm{For}_X \\ \mathcal{M}(K[Y]) & \xrightarrow{L^iF^*} & \mathcal{M}(K[X]) \end{array}$$

Dokaz: Neka je $F^\bullet$ lijeva rezolucija D_Y-modula N sa slobodnim D_Y-modulima. Budući da je slobodan D_Y-modul prema korolaru 2.2.7. ujedno slobodan $K[Y]-$modul, imamo

$$\mathrm{For}_X(L^iF^+(N)) = \mathrm{For}_X(H^i(F^+(F^\bullet))) = H^i(\mathrm{For}_X(F^+(F^\bullet))) = H^i(F^*(\mathrm{For}_Y F^\bullet)) = L^iF^*(\mathrm{For}_Y N).$$

Želimo sada proučiti ponašanje izvedenih inverznih slika za kompozicije morfizama.

Teorem 6.6.2. *Neka su $X = K^n$, $Y = K^n$, $Z = K^p$ i neka su $F : X \to Y$ i $G : Y \to Z$ polinomijalna preslikavanja. Tada je funktor inverzne slike $(G \circ F)^+ : \mathcal{M}(D_Z) \to \mathcal{M}(D_X)$ izomorfan kompoziciji $F^+ \circ G^+$.*

Dokaz: Promotrimo prvo situaciju s modulima nad prstenovima polinoma (odnosno, regularnih funkcija). Za svaki D_Z-modul N imamo

$$(G \circ F)^*(N) = K[X] \otimes_{K[Z]} N = K[X] \otimes_{K[Y]} K[Y] \otimes_{K[Z]} N = F^*(G^*(N)).$$

Treba još provjeriti djelovanja operatora ∂_{X_i}. Za $P \in K[X]$ i $v \in N$ imamo redom

$$\partial_{X_i}(P \otimes v) = \partial_{X_i}(P \otimes (1 \otimes v)) = \partial_{X_i}(P) \otimes (1 \otimes v) + \sum_{j=1}^{m} P\partial_{X_i}(F_j) \otimes \partial_{Y_j}(1 \otimes v) =$$

$$= \partial_{X_i}(P) \otimes v + \sum_{j=1}^{m} P\partial_{X_i}(F_j) \otimes \left(\sum_{k=1}^{p} \partial_{Y_j}(G_k) \otimes \partial_{z_k} v\right) =$$

$$= \partial_{X_i}(P) \otimes v + \sum_{k=1}^{p} P \sum_{j=1}^{m} \partial_{X_i}(F_j)(\partial_{Y_j}(G_k) \circ F) \otimes \partial_{z_k} v =$$

$$= \partial_{X_i}(P) \otimes v + \sum_{k=1}^{p} P \partial_{X_i}(G_k \circ F) \otimes \partial_{z_k} v.$$

Dakle, D_X-djelovanja se podudaraju.

Korolar 6.6.3. *Uz oznake i pretpostavke teorema 6.6.2. je* $D_{X\to Z} = D_{X\to Y} \otimes_{D_Y} D_{Y\to Z}$.

Dokaz: Prema teoremu 6.6.2. imamo

$$D_{X\to Y} = (G\circ F)^+(D_Z) = F^+(G^+(D_Z)) = F^+(D_{Y\to Z}) = D_{X\to Y} \otimes_{D_Y} D_{Y\to Z}.$$

Sada ćemo pobliže razmotriti dva jednostavna primjera. Neka je $\pi : X\times Y \to Y$ projekcija, $\pi(x,y) = y$. Imamo

$$K[X\times Y] = K[X]\hat{\otimes}K[Y] = K[X] \otimes_K K[Y].$$

Dakle, za $K[Y]-$modul N imamo

$$\pi^*(N) = K[X\times Y] \otimes_{K[Y]} N = K[X] \otimes_K K[Y] \otimes_{K[Y]} N = K[X] \otimes_K N,$$

dakle, $\pi^*(N) = K[X]\hat{\otimes}N$ kao modul nad $K[X\times Y] = K[X]\hat{\otimes}K[Y]$. Ako je N ne samo $K[Y]-$modul, nego D_Y-modul, odmah se vidi da se i djelovanja operatora $\partial_{X_i}, \partial_{Y_j}$ podudaraju, dakle, vrijedi $\pi^+(N) = K[X]\hat{\otimes}N$. Iz teorema 6.5.3. i korolara 6.5.4. neposredno slijedi:

Propozicija 6.6.4. *Neka je* $\pi : X\times Y \to Y$ *projekcija na drugi faktor. Tada vrijedi:*

(a) $\pi^+ : \mathcal{M}(D_Y) \to \mathcal{M}(D_{X\times Y})$ *je egzaktan funktor.*

(b) *Za svaki lijevi* D_Y-*modul* N *je* $\pi^+(N) = K[X]\hat{\otimes}N$.

(c) *Ako je* N *konačno generiran* D_Y-*modul, onda je* $\pi^+(N)$ *konačno generiran* $D_{X\times Y}-$*modul.*

(d) *Za svaki konačno generiran lijevi* D_Y-*modul* N *je* $d(\pi^+(N)) = d(N) + n$. *Posebno,* N *je holonoman* D_Y-*modul ako i samo ako je* $\pi^+(N)$ *holonoman* $D_{X\times Y}-$*modul.*

Drugi se primjer odnosi na kanonsku injekciju $\iota : X \to X\times Y$, $\iota(x) = (x,0)$. Tada imamo jednakosti $(D_X : D_{X\times Y})-$bimodula:

$$D_{X\to X\times Y} = \iota^*(D_{X\times Y}) = K[X] \otimes_{K[X]\hat{\otimes}K[Y]} (D_X\hat{\otimes}D_Y) = D_X\hat{\otimes}D_Y/((Y_1,\dots,Y_m)D_Y).$$

Pri tome je $(Y_1,\dots,Y_m)D_Y$ desni ideal u D_Y generiran sa $Y_1,\dots,Y_m$. Nadalje, lijevo djelovanje D_X je lijevo množenje prvog faktora, a desno djelovanje $D_{X\times Y}$ je desno množenje kvocijenta po desnom idealu.

Pretpostavimo da je $m = 1$. Tada imamo egzaktan niz

$$0 \longrightarrow D_Y \xrightarrow{Y_1} D_Y \longrightarrow D_Y/Y_1D_Y \longrightarrow 0.$$

Pri tome je $\xrightarrow{Y_1}$ oznaka za desno množenje sa Y_1. Tenzoriranjem slijeva sa D_X dobivamo kratki egzaktni niz

$$0 \longrightarrow D_{X\times Y} \xrightarrow{Y_1} D_{X\times Y} \longrightarrow D_{X\to X\times Y} \longrightarrow 0$$

lijevih D_X-modula za lijevo množenje i desnih $D_{X\times Y}-$modula za desno množenje. Dakle, možemo promatrati prva dva člana tog egzaktnog niza kao lijevu rezoluciju od $D_{X\to X\times Y}$ sa

$(D_X : D_{X\times Y})-$bimodulima koji su slobodni kao desni $D_{X\times Y}-$moduli. Prema tome, za lijevi $D_{X\times Y}-$modul N kohomologija kompleksa

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{Y_1} N \longrightarrow 0$$

izračunava (lijevo) izvedene inverzne slike. Posebno, vrijedi:

Lema 6.6.5. *Neka je* $\dim Y = 1$ *i* $\iota : X \to X\times Y$ *kanonska injekcija. Za svaki lijevi* $D_{X\times Y}-$*modul* N *vrijedi:*

(*a*) $\iota^+(N) = \operatorname{Coker} Y_1$.

(*b*) $L^{-1}\iota^+(N) = \operatorname{Ker} Y_1$.

(*c*) $L^p\iota^+(N) = 0$ *ako je* $p \neq 0$ *i* $p \neq -1$.

Posebno, lijeva kohomološka dimenzija od ι^+ *je* ≤ 1.

Posljednja tvrdnja ima generalizaciju za proizvoljan Y.

Lema 6.6.6. *Neka je* $\iota : X \to X \times Y$ *kanonska injekcija. Lijeva kohomološka dimenzija od* ι^+ *je* $\leq \dim Y$.

Skicu dokaza provodimo indukcijom po $\dim Y$. Baza indukcije je posljednja tvrdnja leme 6.6.5. Pretpostavimo da je $m = \dim Y \geq 2$ i prikažimo Y kao $Y' \times Y''$, gdje je $Y' = K^{m-1}$ i $Y'' = K$. Neka su

$$\iota' : X \longrightarrow X \times Y' \qquad \text{i} \qquad \jmath : X \times Y' \longrightarrow X \times Y' \times Y'' = X \times Y$$

kanonske inkluzije. Tada je $\iota = \jmath \circ \iota'$. Prema lemi 6.6.5. lijeva kohomološka dimenzija od $\jmath^+$ je ≤ 1, a po pretpostavci indukcije lijeva kohomološka dimenzija od ι'^+ je $\leq \dim Y' = m - 1$. Pomoću teorema 6.6.2. i nekih općih Grothendieckovih rezultata o spektralnim nizovima pokazuje se da izvedene inverzne slike $L^{-p}\iota^+$ iščezavaju za $p \geq m - 1 + 1 = m = \dim Y$.

Neka je sada $F : X \to X$ polinomijalni izomorfizam i G njegov invers. Tada je preslikavanje $\alpha : K[X] \to K[X]$ definirano sa $\alpha(f) = f \circ F$ automorfizam unitalne algebre $K[X]$ čiji invers β je dan sa $\beta(f) = f \circ G$. Ako je M $K[X]-$modul, $F^*(M)$ je kao vektorski prostor izomorfan prostoru M, a izomorfizam je dan sa $\varphi : m \mapsto 1 \otimes m$. S druge strane, za $f \in K[X]$ imamo

$$f\varphi(m) = f \otimes m = f \circ G \circ F \otimes m = 1 \otimes (f \circ G)m = \varphi(\beta(f)m) \qquad \forall m \in M.$$

Dakle, $K[X]-$modul $F^*(M)$ izomorfan je kao vektorski prostor prostoru M na kome je struktura $K[X]-$modula zadana sa $(f, m) \mapsto \beta(f)m$, $f \in K[X]$, $m \in M$.

Sada želimo analogan opis $F^+(M)$, ako je M ne samo $K[X]-$modul, nego lijevi D_X-modul. Prije svega nam treba proširenje automorfizma β algebre $K[X]$ do automorfizma algebre D_X.

Neka je $T \in D_X$ diferencijalni operator na X i stavimo

$$[\tilde{\beta}(T)](f) = \beta(T(\alpha(f))), \qquad f \in K[X].$$

Očito je $\tilde{\beta}(T)$ $K-$linearan endomorfizam od $K[X]$. Nadalje, $T \mapsto \tilde{\beta}(T)$ je $K-$linearno preslikavanje sa D_X u $End_K(K[X])$. Nadalje, za $T, S \in D_X$ i za svaku $f \in K[X]$ imamo

$$[\tilde{\beta}(TS)](f) = \beta(TS(\alpha(f))) = \beta(T(\alpha(\beta(S(\alpha(f)))))) = \beta(T(\alpha([\tilde{\beta}(S)](f)))) = [\tilde{\beta}(T)]([\tilde{\beta}(S)](f)).$$

Dakle, $\tilde{\beta} : D_X \to End_K(K[X])$ je homomorfizam $K-$algebri (očito unitalni). Za $g \in K[X] \subseteq D_X$ imamo

$$[\tilde{\beta}(g)](f) = \beta(g\alpha(f)) = \beta(g)f \qquad \forall f \in K[X],$$

što pokazuje da je homomorfizam $\tilde{\beta}$ proširenje automorfizma β. To povlači da je $\tilde{\beta}(T) \in D_X$ za $T \in D_X$. Dakle, $\tilde{\beta}$ je automorfizam od D_X koji proširuje automorfizam β od $K[X]$. U daljnjem ćemo pisati β umjesto $\tilde{\beta}$.

Neka je $1 \leq i \leq n$. Tada imamo za svaki $f \in K[X]$

$$[\beta(\partial_i)](f) = \beta(\partial_i(\alpha(f))) = \beta(\partial_i(f \circ F)) = \beta\left(\sum_{j=1}^{n}(\partial_j(f) \circ F)\partial_i(F_j)\right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n}(\partial_i(F_j) \circ G)\partial_j(f) = \left(\sum_{j=1}^{n}\beta(\partial_i(F_j))\partial_j\right)(f).$$

Prema tome,

$$\beta(\partial_i) = \sum_{j=1}^{n}\beta(\partial_i(F_j))\partial_j.$$

Promotrimo sada bimodul $D_{X\to X}$ pridružen polinomijalnom preslikavanju F. Linearno preslikavanje $\varphi : f \otimes T \mapsto \beta(f)T$ identificira taj bimodul sa D_X. Pri toj identifikaciji obje strukture desnih D_X-modula dane su desnim množenjem. S druge strane, za $T \in D_X$ imamo

$$\varphi(\partial_i(1 \otimes T)) = \varphi\left(\sum_{j=1}^{n}\partial_i(F_j) \otimes \partial_j(T)\right) = \sum_{j=1}^{n}\beta(\partial_i(F_j))\partial_j(T) = \beta(\partial_i)\varphi(1 \otimes T).$$

Prema tome, $(D_X : D_X)-$bimodul $D_{X\to X}$ izomorfan je prostoru D_X na kome slijeva D_X djeluje kompozicijom β s lijevim množenjem, a zdesna D_X djeluje desnim množenjem. To povlači da je $F^+(M)$ izomorfan prostoru M s novom strukturom D_X-modula danom sa $(T, m) \mapsto \beta(T)m$, $T \in D_X$, $m \in M$. Dakle, uz primjenu propozicije 3.3.10. dobivamo:

Lema 6.6.7. *Neka je $F : X \to X$ polinomijalni izomorfizam.*

(*a*) *Neka je M lijevi D_X-modul. Tada se $F^+(M)$ podudara kao vektorski prostor sa M a djelovanje D_X dano je sa $(T, m) \mapsto \beta(T)m$.*

(*b*) *Funktor $F^+ : \mathcal{M}(D_X) \to \mathcal{M}(D_X)$ je egzaktan.*

(*c*) *Funktor F^+ preslikava konačno generirane D_X-module u konačno generirane D_X-module i za svaki takav M je $d(F^+(M)) = d(M)$. Posebno, F^+ preslikava holonomne D_X-module u holonomne D_X-module.*

Posljednja se tvrdnja može učiniti preciznijom opisom karakteristične višestrukosti $Ch(F^+(M))$ za konačno generiran lijevi D_X-modul M. Prije svega, iz prethodnih računa vidi se da automorfizam β od D_X inducira automorfizam $\mathrm{Gr}\,\beta$ od $\mathrm{Gr}\,D_X = K[X, \xi]$ definiran sa

$$X_i \mapsto \beta(X_i) = G_i, \qquad \xi_i \mapsto \sum_{j=1}^{n}\beta(\partial_i(F_j))\xi_j = \sum_{j=1}^{n}(\partial_i(F_j) \circ G)\xi_j, \qquad 1 \leq i \leq n.$$

Tu ćemo konstrukciju opisati na geometrijski način. Ako je $x = (x_1, \ldots, x_n)$ točka iz $X = K^n$, identificiramo kotangencijalni prostor $T_x^*(X)$ na X u točki x sa samim prostorom K^n putem preslikavanja $df(x) \mapsto ((\partial_1 f)(x), \dots, (\partial_n f)(x))$. Dakle, kotangencijalni svežanj $T^*(X)$ može se identificirati sa K^{2n} putem preslikavanja

$$(x, df(x)) \mapsto (x_1, \dots, x_n, (\partial_1 f)(x), \dots, (\partial_n f)(x)).$$

Neka je $F : X \to X$ polinomijalni izomorfizam i G njegov invers. Tada G preslikava točku x u točku $G(x)$, a F preslikava točku $G(x)$ u točku x. Njihovi su diferencijali $T_x(G)$ i $T_{G(x)}(F)$ međusobno inverzni izomorfizmi između tangencijalnih prostora $T_x(X)$ i $T_{G(x)}(X)$. Dakle, njima dualni operatori $T_x(G)^* : T^*_{G(x)}(X) \longrightarrow T^*_x(X)$ i $T_{G(x)}(F)^* : T^*_x(X) \longrightarrow T^*_{G(x)}(X)$ su međusobno inverzni izomorfizmi. To znači da možemo definirati automorfizam γ kotangencijalnog svežnja $T^*(X)$ sa $(x, \xi) \mapsto (G(x), T_{G(x)}(F)^*\xi)$, $x \in X$, $\xi \in T^*_x(X)$. Ako identificiramo $T^*(X)$ sa K^{2n} dobivamo $(\mathrm{Gr}\,\beta)(P) = P \circ \gamma$ za $P \in K[X, \xi]$.

Neka je M konačno generiran lijevi D_X-modul s dobrom filtracijom FM. Tada možemo realizirati $F^+(M)$ kao prostor M s prije opisanim djelovanjem. Tada je FM dobra filtracija i za $F^+(M)$. Dakle, $\mathrm{Gr}\,F^+(M)$ može se identificirati s prostorom $\mathrm{Gr}\,M$ s djelovanjem

$$(Q, m) \mapsto [(\mathrm{Gr}\,\beta)(Q)]m, \qquad Q \in K[X, \xi], \quad m \in \mathrm{Gr}\,M.$$

Dakle, Q je u anihilatoru od $\mathrm{Gr}\,F^+(NM)$ ako i samo ako je $(\mathrm{Gr}\,\beta)(Q)$ u anihilatoru od $\mathrm{Gr}\,M$. Prema tome, vrijedi

$$(x, \xi) \in Ch(F^+(M)) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \gamma^{-1}(x, \xi) \in Ch(M).$$

Time smo dokazali:

Lema 6.6.8. *Za konačno generiran D_X-modul M vrijedi $Ch(F^+(M)) = \gamma(Ch(M))$.*

Napokon, to nam omogućuje ocjenu lijeve kohomološke dimenzije funktora inverzne slike.

Teorem 6.6.9. *Neka je $X = K^n$, $Y = K^m$ i $F : X \to Y$ polinomijalno preslikavanje. Lijeva kohomološka dimenzija od F^+ je $\leq \dim Y$.*

Dokaz: Neka su $\iota : X \to X \times Y$ i $\pi : X \times Y \to Y$ kanonske injekcija i projekcija. Neka je $\Phi : X \times Y \to X \times Y$ polinomijalno preslikavanje zadano sa $\Phi(x, y) = (x, y + F(x))$. Tada je $F = \pi \circ \Phi \circ \iota$ i Φ je polinomijalni izomorfizam. Njemu inverzan izomorfizam Ψ dan je sa $\Psi(x, y) = (x, y - F(x))$.

Prema teoremu 6.6.2. imamo $F^+ = \iota^+ \circ \Phi^+ \circ \pi^+$. Nadalje, prema propoziciji 6.6.4. i lemi 6.6.7. funktori π^+ i Φ^+ su egzaktni. Dakle, $L^q F^+ = L^q \iota^+ \circ \Phi^+ \circ \pi^+ \;\; \forall q \in \mathbb{Z}$. Prema lemi 6.6.6. slijedi da je $L^q F^+ = 0$ za $q < -\dim Y$.

6.7 Direktne slike

Neka su kao i u prošlom odjeljku $X = K^n$, $Y = K^m$ i $F : X \to Y$ polinomijalno preslikavanje. Kompozicija sa F definira prirodni homomorfizam algebri $\hat{F} : K[Y] \to K[X]$. Taj homomorfizam određuje funktor $F_* : \mathcal{M}(K[X]) \to \mathcal{M}(K[Y])$. Za svaki $K[X]-$modul M definiramo $F_*(M)$ kao $K[Y]-$modul koji se kao vektorski prostor podudara sa M, a djelovanje je dano sa $(f, m) \mapsto \hat{F}(f)m$, $f \in K[Y]$, $m \in M$. Funktor F_* zove se **funktor direktne slike**. Naravno, F_* je egzaktan funktor.

Nažalost, ako je M lijevi D_X-modul, njegova direktna slika $F_*(M)$ ne dopušta općenito strukturu D_Y-modula. Npr. ako promatrao inkluziju $\iota : X \to Y$ za $X = \{0\}$ i $Y = K$, onda je $D_X = K[X] = K$, a $D_Y = D(1)$. Kategorija D_X-modula je kategorija vektorskih prostora nad K. Prema primjeru u odjeljku 6.2. direktna slika konačno generiranog D_X-modula M (0dnosno, konačnodimenzionalnog vektorskog prostora) ne može imati strukturu D_Y-modula. Dakle, funktor direktne slike za $D-$module neće biti vezan s funktorom direktne slike za module nad algebrama regularnih funkcija, kao što je to slučaj s inverznim slikama.

Ako primijenimo transponiranje na oba djelovanja na $D_{X\to Y}$, dobivamo $(D_Y : D_X)-$bimodul koji ćemo označavati sa $D_{Y\leftarrow X}$. To omogućuje za svaki lijevi D_X-modul M definiciju lijevog D_Y-modula

$$F_+(M) = D_{Y\leftarrow X} \otimes_{D_X} M.$$

Tada je $F_+ : \mathcal{M}(D_X) \to \mathcal{M}(D_Y)$ desno egzaktni funktor. On se zove **funktor direktne slike**.

Teorem 6.7.1. *Neka je $X = K^n$, $Y = K^m$ i $Z = K^p$ i neka su $F : X \to Y$ i $G : Y \to Z$ polinomijalna preslikavanja. Funktor direktne slike $(G \circ F)_+ : \mathcal{M}(D_X) \to \mathcal{M}(D_Z)$ izomorfan je kompoziciji $G_+ \circ F_+$.*

Dokaz: Za svaki lijevi D_X-modul M prema korolaru 6.6.3. imamo

$$(G \circ F)_+(M) = D_{Z\leftarrow X} \otimes_{D_X} M = (D_{Z\leftarrow Y} \otimes_{D_Y} D_{Y\leftarrow X}) \otimes_{D_X} M =$$
$$= D_{Z\leftarrow Y} \otimes_{D_Y} (D_{Y\leftarrow X} \otimes_{D_X} M) = D_{Z\leftarrow Y} \otimes_{D_Y} F_+(M) = G_+(F_+(M)).$$

Promotrimo sada jednostavan primjer. Neka je $\iota : X \to X \times Y$ kanonska injekcija. Tada je

$$D_{X\to X\times Y} = \iota^+(D_{X\times Y}) = \iota^+(D_X \hat{\otimes} D_Y) = D_X \hat{\otimes} D_Y/((Y_1, \dots, Y_m)D_Y)$$

pa transponiranjem slijedi

$$D_{X\times X\leftarrow X} = D_X \hat{\otimes} D_Y/(D_Y(Y_1, \dots, Y_m)).$$

Pri tome je $D_Y(Y_1, \dots, Y_m)$ lijevi ideal u D_Y generiran sa $Y_1, \dots, Y_m$. Prema tome, za svaki lijevi D_X-modul M vrijedi

$$\iota_+(M) = M \hat{\otimes} D_Y/(D_Y(Y_1, \dots, Y_m)).$$

Nadalje, modul $D_Y/(D_Y(Y_1, \dots, Y_m))$ je izomorfan modulu Δ_m iz primjera 2. odjeljka 6.4.

Propozicija 6.7.2. *Neka je $\iota : X \to X \times Y$ kanonska injekcija.*

(a) $\iota_+ : \mathcal{M}(D_X) \to \mathcal{M}(D_{X\times Y})$ je egzaktan funktor.

(b) Za svaki lijevi D_X-modul M je $\iota_+(M) = M \hat{\otimes} D_Y/(D_Y(Y_1, \dots, Y_m))$.

(c) Ako je M konačno generiran D_X-modul, onda je $\iota_+(M)$ konačno generiran $D_{X\times Y}-$modul.

(d) Za svaki konačno generirani D_X-modul M je $d(\iota_+(M)) = d(M)+m$. Posebno, M je holonoman D_X-modul ako i samo ako je $\iota_+(M)$ holonoman $D_{X\times Y}-$modul.

Dokaz: Već smo dokazali (b), a (a) neposredno slijedi. Kao što smo vidjeli u primjeru 2. odjeljka 6.4. $D_Y/(D_Y(Y_1,\ldots,Y_m))$ je ireducibilan holonoman D_Y-modul, pa tvrdnja (c) slijedi iz leme 6.5.2. Da dokažemo (d) primjetimo da je po teoremu 6.5.3.

$$d(\iota_+(M)) = d(M) + d(D_Y/(D_Y(Y_1,\ldots,Y_m))).$$

Kako je modul $D_Y/(D_Y(Y_1,\ldots,Y_m)$ holonoman, tj. $d(D_Y/(D_Y(Y_1,\ldots,Y_m))) = m$, tvrdnja ($d$) je dokazana.

Proučimo sada funktor direktne slike za kanonsku projekciju $\pi : X\times Y \to Y$.

Promotrimo najprije slučaj $\dim X = 1$, tj. $X = K$. Tada je

$$D_{X\times Y\to Y} = \pi^+(D_Y) = (D_X/D_X\partial)\hat{\otimes} D_Y.$$

Transponiranjem dobivamo

$$D_{Y\leftarrow X\times Y} = (D_X/\partial D_X)\hat{\otimes} D_Y.$$

Imamo egzaktan niz $(D_Y : D_{X\times Y})-$bimodula

$$0 \longrightarrow D_{X\times Y} \xrightarrow{\partial} D_{X\times Y} \longrightarrow D_{Y\leftarrow X\times Y} \longrightarrow 0,$$

pri čemu $\xrightarrow{\partial}$ predstavlja množenje sa ∂ slijeva. To je očito lijeva rezolucija od $D_{Y\leftarrow X\times Y}$ sa slobodnim desnim $D_{X\times Y}-$modulima, dakle, za bilo koji lijevi $D_{X\times Y}-$modul M možemo lijevo izvedene funktore $L^q\pi_+$ računati iz kompleksa

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow M \xrightarrow{\partial} M \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots$$

Slijedi $L^q\pi_+(M) = 0$ ako je $q \notin \{0,-1\}$. Dakle, dokazali smo:

Lema 6.7.3. *Neka je* $\dim X = 1$ *i neka je* $\pi : X\times Y \to Y$ *kanonska projekcija. Za svaki lijevi* $D_{X\times Y}-$*modul* M *vrijedi:*

(a) $\pi_+(M) = \operatorname{Coker}\partial_1$.

(b) $L^{-1}\pi_+(M) = \operatorname{Ker}\partial_1$.

(c) $L^q\pi_+(M) = 0$ *za* $q \notin \{0,-1\}$.

Posebno, lijeva kohomološka dimenzija od π_+ *je* ≤ 1.

Posljednja tvrdnja ima sljedeću generalizaciju za proizvoljan X :

Lema 6.7.4. *Neka je* $\pi : X\times Y \to Y$ *kanonska projekcija. Lijeva kohomološka dimenzija od* π_+ *je* $\leq \dim X$.

Skica dokaza: Neka je $X' = \{x_n = 0\} \subseteq X$ i neka je $\pi' : X'\times Y \to Y$ kanonska projekcija. Nadalje, neka je $\pi'' : X\times Y \to X'\times Y$ kanonska projekcija. Tada je $\pi = \pi'\circ\pi''$. Sada se tvrdnja dokazuje indukcijom analogno dokazu leme 6.6.6.

Neka je $F : X \to X$ polinomijalni izomorfizam i G njegov invers. Kao u odjeljku 6.6. definiramo automorfizme α i β od D_X. Tamo smo identificirali bimodul $D_{X\to X}$ pridružen preslikavanju F sa D_X snabdjevenim s običnim desnim množenjem i s lijevim množenjem komponiranim s automorfizmom β. Primijenimo li na to automorfizam α dobivamo D_X koji je snabdjeven s običnim lijevim množenjem i s desnim množenjem komponiranim sa α. Primijenimo li glavni antiautomorfizam dobivamo da je bimodul $D_{X \leftarrow X}$ izomorfan sa D_X s djelovanjima danim s lijevim množenjem komponiranim sa α i s običnim desnim množenjem. To povlači da je za svaki lijevi D_X−modul njegova direktna slika $F_+(M)$ izomorfna s vektorskim prostorom M na kome je djelovanje dano sa $(T, m) \mapsto \alpha(T)m$. Posebno, $F_+(M) = G^+(M)$.

Dakle, iz leme 6.6.7. neposredno dobivamo:

Lema 6.7.5. *Neka je $F : X \to X$ polinomijalni izomorfizam i G njegov invers.*

(a) *Za lijevi D_X−modul M modul $F_+(M)$ se podudara s vektorskim prodtorom M na kome je djelovanje zadano sa $(T, m) \mapsto \alpha(T)m$.*

(b) *Funktor $F_+ : \mathcal{M}(D_X) \to \mathcal{M}(D_X)$ je egzaktan.*

(c) *Funktor F_+ preslikava konačno generirane D_X−module u konačno generiarne D_X−module. Za konačno generirani D_X−modul M je $d(F_+(M)) = d(M)$. Posebno, F_+ preslikava holonomne module u holonomne module.*

Osim toga, $F_+ = G^+$ i $F^+ = G_+$ i ti su funktori međusobno inverzne ekvivalencije kategorija.

Kao u prethodnom odjeljku to nam omogućuje ocjenu lijeve kohomološke dimenzije funktora direktne slike.

Teorem 6.7.6. *Neka su $X = K^n$, $Y = K^m$ i $F : X \to Y$ polinomijalno preslikavanje. Lijeva kohomološka dimenzija funktora F_+ je $\leq \dim X$.*

Dokaz: Kao u dokazu teorema 6.6.9. koristimo konstrukciju preko grafa, tj. $F = \pi \circ \Phi \circ \iota$, gdje su

$$\pi : X \times Y, \qquad \iota : X \to X \times Y \qquad \text{i} \qquad \Phi : X \times Y \to X \times Y$$

redom kanoska projekcija, kanonska injekcija i polinomijalni izomorfizam definiran sa $\Phi(x, y) = (x, y + F(x))$. Prema teoremu 6.7.1. vrijedi $F_+ = \pi_+ \circ \Phi_+ \circ \iota_+$. Nadalje, prema tvrdnji (a) propozicije 6.7.2. i prema tvrdnji (b) leme 6.7.5. funktori ι_+ i Φ_+ su egzaktni. Dakle, $L^q F_+ = L^q \pi_+ \circ \Phi_+ \circ \iota_+$ za svaki $q \in \mathbb{Z}$. Sada iz leme 6.7.4. slijedi da je $L^q F_+ = 0$ za $q < -\dim X$.

6.8 Kashiwarin teorem

Neka je $X = K^n$ i $Y = \{X_n = 0\} \subseteq X$. Stavimo još $Z = \{X_1 = \cdots = X_{n-1} = 0\} \cong K$. Tada je $X = Y \times Z$ i $D_X = D_Y \hat{\otimes} D_Z$. Za D_X-modul M stavimo

$$\Gamma_{[Y]}(M) = \{m \in M;\ X_n^p m = 0 \text{ za neki } p \in \mathbb{N}\}.$$

Lema 6.8.1. (a) *$\Gamma_{[Y]}(M)$ je D_X-podmodul od M.*

(b) supp $\big(\Gamma_{[Y]}(M)\big) \subseteq Y$.

(c) *Ako je N D_X-podmodul od M takav da je* supp$(N) \subseteq Y$, *onda je $N \subseteq \Gamma_{[Y]}(M)$.*

Dokaz: (a) Neka je $m \in \Gamma_{[Y]}(M)$. Tada očito vrijedi

$$X_i m \in \Gamma_{[Y]}(M) \quad \text{za} \quad 1 \leq i \leq n \qquad \text{i} \qquad \partial_j m \in \Gamma_{[Y]}(M) \quad \text{za} \quad 1 \leq j < n.$$

Treba još dokazati da je $\partial_n m \in \Gamma_{[Y]}(M)$. Imamo

$$X_n^{j+1}\partial_n m = [X_n^{j+1}, \partial_n]m + \partial_n X_n^{j+1} m = -(j+1)X_n^j m + \partial_n X_n^{j+1} m \qquad \forall j \in \mathbb{N}.$$

Dakle, ako je $X_n^j m = 0$, onda je $X_n^{j+1}\partial_n m = 0$.

(b) Ako $x \notin Y$, onda $X_n \notin \mathbf{m}_x$ pa je lokalizacija $\Gamma_{[Y]}(M)_x = 0$.

(c) Neka je $m \in N$ i označimo sa N' $K[X]-$podmodul generiran sa m. Tada je supp$(N') \subseteq Y$. Budući da je N' konačno generiran, prema propoziciji 6.1.2. njegov je nosač jednak višestrukosti $\mathcal{V}(I)$ određenoj s njegovim anihilatorom I u $K[X]$. Prema Hilbertovom teoremu o nulama vidimo da je $rad(I) \supseteq (X_n)$. To povlači da je $X_n^j N' = 0$ za neki $j \in \mathbb{N}$, pa je posebno $m \in \Gamma_{[Y]}(M)$.

Dakle, $\Gamma_{[Y]}(M)$ je najveći D_X-podmodul od M čiji je nosač sadržan u Y.

Množenje sa X_n definira D_Y-endomorfizam od M. Neka je

$$M_0 = \operatorname{Ker} X_n \subseteq \Gamma_{[Y]}(M) \qquad \text{i} \qquad M_1 = \operatorname{Coker} X_n = M/X_n M.$$

Neka je $\iota : Y \to X$ kanonska injekcija. Kao što smo ustanovili u lemi 6.6.5., vrijedi

$$\iota^+(M) = M_1, \qquad L^{-1}\iota^+(M) = M_0$$

i sve ostale izvedene inverzne slike od M iščezavaju.

Promotrimo bilinearno preslikavanje $D_X \times M_0 \to M$, definirano djelovanjem od D_X. Ono se faktorizira kroz linearno preslikavanje $D_X \otimes_{D_Y} M_0 \to M$. Nadalje, po definiciji M_0 to linearno preslikavanje iščezava na slici od $D_X X_n \otimes_{D_Y} M_0$ u $D_X \otimes_{D_Y} M_0$. Kao što smo primijetili u 6.7.

$$D_{X \leftarrow Y} = D_Y \hat{\otimes} D_Z / D_Z X_n = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}_+} \partial_n^j D_Y.$$

Dakle, linearno preslikavanje množenja $D_X \otimes_{D_Y} M_0 \to M$ inducira prirodni homomorfizam D_X-modula

$$\iota_+(M_0) = D_{X \leftarrow Y} \otimes_{D_Y} M_0 \longrightarrow M.$$

Njegova je slika očito sadržana u $\Gamma_{[Y]}(M)$. Nije teško provjeriti da je to zapravo morfizam funktora $\iota_+ \circ L^{-1}\iota^+ \longrightarrow \Gamma_{[Y]}$.

Ključni rezultat ovog odjeljka je sljedeća lema:

Lema 6.8.2. *D_X-homomorfizam $\iota_+(M)_0 \longrightarrow \Gamma_{[Y]}(M)$ je izomorfizam D_X-modula.*

Dokaz: Prvo dokazujemo da je homomorfizam surjektivan. Tvrdimo da je

$$\{m \in M;\ X_n^p m = 0\} \subseteq D_X \cdot M_0 \qquad \forall p \in \mathbb{N}.$$

Tvrdnju dokazujemo indukcijom. To je jasno za $p = 1$. Ako je $p > 1$ i $X_n^p m = 0$, onda je

$$0 = \partial_n X_n m = X_n^{p-1}(pm + X_n \partial_n m),$$

pa je po pretpostavci indukcije

$$pm + X_n \partial_n m \in D_X \cdot M_0.$$

Nadalje, po pretpostavci indukcije je $X_n m \in D_X \cdot M_0$. Dakle,

$$(p-1)m = pm + [X_n, \partial_n]m = pm + X_n \partial_n m - \partial_n X_n m \in D_X \cdot M_0.$$

Dakle, $m \in D_X \cdot M_0$. Time je dokazana gornja tvrdnja, dakle, dokazana je surjektivnost promatranog homomorfizma.

Dokažimo sada injektivnost. Prema prethodnoj diskusiji imamo

$$\iota_+(M_0) = D_{X \leftarrow Y} \otimes_{D_Y} M_0 = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}_+} \partial_n^j M_0.$$

Neka je $(m_0, \partial_n m_1, \ldots, \partial_n^q m_q, 0, \ldots)$ element te direktne sume različit od nule s minimalnim mogućim q koji se preslikava u 0, tj.

$$m_0 + \partial_n m_1 + \cdots + \partial_n^q m_q = 0.$$

Tada imamo

$$0 = \left(\sum_{j=0}^{q} \partial_n^j m_j \right) = \sum_{j=1}^{q} [X_n, \partial_n^j] m_j = -\sum_{j=1}^{q} j \partial_n^{j-1} m_j,$$

a to je u suprotnosti s minimalnošću q. Ova kontradikcija pokazuje da je jezgra promatranog homomorfizma nula.

Korolar 6.8.3. $X_n \Gamma_{[Y]}(M) = \Gamma_{[Y]}(M)$.

Dokaz: Prema lemi 6.8.2. svaki element od $\Gamma_{[Y]}(M)$ može se zapisati kao konačna suma oblika

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}_+} \partial_n^j m_j, \qquad m_j \in M_0.$$

Tvrdnja slijedi iz jednakosti

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}_+} \partial_n^j m_j = -X_n \sum_{j \in \mathbb{Z}_+} \frac{1}{j+1} \partial_n^{j+1} m_j.$$

Korolar 6.8.4. *Neka je M D_X-modul.*

(a) *$\Gamma_{[Y]}(M)$ je konačno generiran D_X-modul ako i samo ako je M_0 konačno generiran D_Y-modul.*

(b) *$d\left(\Gamma_{[Y]}(M)\right) = d(M_0) + 1$.*

Posebno, $\Gamma_{[Y]}(M)$ je holonoman ako i samo ako je $M_0 = L^{-1}\iota^+(M)$ holonoman.

Dokaz: (a) Iz leme 6.8.2. i iz tvrdnje (c) propozicije 6.7.2. slijedi da je D_X-modul $\Gamma_{[Y]}(M)$ konačno generiran ako je D_Y-modul M_0 konačno generiran. Pretpostavimo sada da je D_X-modul $\Gamma_{[Y]}(M)$ konačno generiran. Neka je N_j, $j \in \mathbb{N}$, rastući niz D_Y-podmodula od M_0. Oni generiraju rastući niz D_X-podmodula od $\Gamma_{[Y]}(M)$

$$\iota_+(N_j) = \bigoplus_{p\in\mathbb{Z}_+} \partial_n^p N_j, \qquad j \in \mathbb{N}.$$

Kako je D_X lijevo Noetherin prsten, konačno generiran D_X-modul $\Gamma_{[Y]}(M)$ je Noetherin, pa se niz $(\iota_+(N_j))_{j\in\mathbb{N}}$ stabilizira. Budući da je N_j jezgra od X_n u $\iota_+(N_j)$, i niz $(N_j)_{j\in\mathbb{N}}$ se stabilizira. Dakle, D_X-modul M_0 je Noetherin i, posebno, konačno generiran.

Tvrdnja (b) slijedi iz leme 6.8.2. i tvrdnje (d) propozicije 6.7.2.

Korolar 6.8.5. *Ako je M holonoman D_X-modul, onda je M_0 holonoman D_Y-modul.*

Dokaz: Ako je M holonoman, onda je i podmodul $\Gamma_{[Y]}(M)$ holonoman. Dakle, tvrdnja slijedi iz posljednje tvrdnje korolara 6.8.4.

Neka je $\mathcal{M}_Y(D_X)$ puna potkategorija od $\mathcal{M}(D_X)$, čiji objekti su D_X-moduli M takvi da je $\mathrm{supp}(M) \subseteq Y$. Označimo sa $\mathcal{M}_{f,Y}(D_X)$ i $\mathcal{H}ol_Y(D_X)$ odgovarajuće potkategorije konačno generiranih i holonomnih modula. Prema lemi 6.8.1. vrijedi $M = \Gamma_{[Y]}(M)$ za svaki modul iz $\mathcal{M}_Y(D_X)$. Prema lemama 6.6.5. i 6.8.3. vidimo da je $\iota^+(M) = 0$ za svaki modul M u $\mathcal{M}_Y(D_X)$. Dakle, $L^{-1}\iota^+$ je egzaktan funktor iz $\mathcal{M}_Y(D_X)$ u $\mathcal{M}(D_Y)$. S druge strane ι_+ definira egzaktan funktor u suprotnom smjeru i po lemi 6.8.2. kompozicija $\iota_+ \circ L^{-1}\iota^+$ je izomorfna identičnom funktoru kategorije $\mathcal{M}_Y(D_X)$. Nadalje, očito je kompozicija $L^{-1}\iota^+ \circ \iota_+$ izomorfna identičnom funktoru kategorije $\mathcal{M}(D_Y)$.

To vodi na sljedeći fundamentalni rezultat:

Teorem 6.8.6. (**Kashiwara**) *Funktor direktne slike ι_+ definira ekvivalenciju kategorije $\mathcal{M}(D_Y)$ (odnosno, $\mathcal{M}_f(D_Y)$, $\mathcal{H}ol(D_Y)$) s kategorijom $\mathcal{M}_Y(D_X)$ (odnosno, $\mathcal{M}_{f,Y}(D_X)$, $\mathcal{H}ol_Y(D_X)$). Njemu je inverzna ekvivalencija funktor $L^{-1}\iota^+$.*

Dokaz: Ostaje za dokazati samo tvrdnje u zagradama. No to slijedi neposredno iz korolara 6.8.4.

6.9 Sačuvanje holonomnosti

U ovom ćemo odjeljku dokazati da funktori direktne i inverzne slike čuvaju holonomnost. Počinjemo s jednostavnim kriterijem holonomnosti.

Neka su $X = K^n$, $Y = K^m$ i $F : X \to Y$ polinomijalno preslikavanje. Prvo ćemo iskoristiti konstrukciju pomoću grafa da reduciramo problem na specijalna preslikavanja. Kao u dokazu teorema 6.6.9. i 6.7.6. imamo komutativan dijagram

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{F} & Y \\ \iota \downarrow & & \uparrow \pi \\ X \times Y & \xrightarrow{\Phi} & X \times Y \end{array}$$

gdje su $\iota : X \to X \times Y$ kanonska injekcija, $\Phi : X \times Y \to X \times Y$ polinomijalni izomorfizam i $\pi : X \times Y \to Y$ kanonska projekcija:

$$\iota(x) = (x, 0), \qquad \Phi(x, y) = (x, y + F(x)), \qquad \pi(x, y) = y, \qquad x \in X, \quad y \in Y.$$

Prema propoziciji 6.6.4. znamo da je π^+ egzaktan funktor koji preslikava holonomne module u holonomne module. Prema propoziciji 6.7.2. znamo da je ι_+ ekzaktan funktor koji preslikava holonomne module u holonomne module. Nadalje, prema lemama 6.6.7. i 6.7.5. znamo da su Φ^+ i Φ_+ egzaktni funktori koji preslikavaju holonomne module u holonomne module.

Dakle, ostaje da se prouče izvedeni funktori od ι^+ i od π_+.

Prvo promatramo ulaganje $\iota : X \to X \times Y$.

Lema 6.9.1. *Neka je N holonoman $D_{X\times Y}-$modul. Tada su D_X-moduli $L^q\iota^+(N)$, $q \in \mathbb{Z}$, holonomni.*

Dokaz: Budući da su prema tvrnji (b) teorema 6.4.1. podmoduli, kvocijentni moduli i proširenja holonomnih modula holonomni moduli, kao u dokazu leme 6.6.6. pomoću argumenta spektralnog niza možemo dokaz reducirati na slučaj $\dim Y = 1$. U tom slučaju označimo sa y prirodnu koordinatu na Y i promotrimo homomorfizam D_X-modula $N \xrightarrow{y} N$ definiran djelovanjem y. Tada prema lemi 6.6.5. imamo

$$\iota^+(N) = \operatorname{Coker} y, \qquad L^{-1}\iota^+(N) = \operatorname{Ker} y, \qquad L^q\iota^+(N) = 0 \quad \text{za} \quad q \notin \{0, -1\}.$$

Nadalje, prema korolaru 6.8.4. ako je N holonoman onda je i $L^{-1}\iota^+(N)$ holonoman.

Dakle, preostaje još slučaj $\iota^+(N)$, a to je sadržaj sljedeće leme:

Lema 6.9.2. *Ako je N holonoman $D_{X\times Y}-$modul, onda je $\iota^+(N)$ holonoman D_X-modul.*

Dokaz: Neka je $\overline{N} = N/\Gamma_{[X]}(N)$. Tada imamo kratki egzaktni niz

$$0 \longrightarrow \Gamma_{[X]}(N) \longrightarrow N \longrightarrow \overline{N} \longrightarrow 0.$$

Budući da je ι^+ desno egzaktni funktor, dobivamo egzaktan funktor

$$\iota^+\left(\Gamma_{[X]}(N)\right) \longrightarrow \iota^+(N) \longrightarrow \iota^+(\overline{N}) \longrightarrow 0.$$

S druge strane, prema korolaru 6.8.3. imamo $\iota^+\left(\Gamma_{[X]}(N)\right) = 0$. Dakle, prirodno preslikavanje $\iota^+(N) \longrightarrow \iota^+(\overline{N})$ je izomorfizam.

Neka je $\overline{v} \in \Gamma_{[X]}(\overline{N}) \subseteq \overline{N}$ i neka je $v \in N$ predstavnik klase $\overline{v}$. Tada za dovoljno veliki $p \in \mathbb{Z}_+$ vrijedi $y^p\overline{v} = 0$. To znači da je $y^p v \in \Gamma_{[X]}(N)$, pa postoji $q \in \mathbb{Z}_+$ takav da je $y^{p+q}v = 0$. Dakle, $v \in \Gamma_{[X]}(N)$, odnosno $\overline{v} = 0$. Time je dokazano da je $\Gamma_{[X]}(\overline{N}) = 0$.

Osim toga, ako je N holonoman $D_{X\times Y}-$modul, onda je $\overline{N}$, kao njegov kvocijent, također holonoman $D_{X\times Y}-$modul.

Dakle, možemo od početka pretpostaviti da je $\Gamma_{[X]}(N) = 0$. To znači da je djelovanje y na N injektivno, pa se N uranja u lokalizaciju N_y. Promatramo egzaktan niz

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow N_y \longrightarrow L \longrightarrow 0.$$

Budući da je po pretpostavci N holonoman $D_{X\times Y}-$modul, prema propoziciji 6.4.3. znamo da je i N_y holonoman $D_{X\times Y}-$modul. Prema tome i kvocijent L je holonoman $D_{X\times Y}-$modul. Prema provedenom dijelu dokaza leme 6.9.1. $L^{-1}\iota^+(L)$ je holonoman D_X-modul.

Primjenom dugog egzaktnog niza za funktor inverzne slike od ι na naš kratki egzaktni niz dobivamo egzaktni niz

$$\cdots \longrightarrow L^{-1}\iota^+(N_y) \longrightarrow L^{-1}\iota^+(L) \longrightarrow \iota^+(N) \longrightarrow \iota^+(N_y) \longrightarrow \iota^+(L) \longrightarrow 0.$$

Budući da je djelovanje y na N_y invertibilno, iz tvrdnji (a) i (b) leme 6.6.5. dobivamo

$$\iota^+(N_y) = L^{-1}\iota^+(N_y) = 0.$$

Dakle, $\iota^+(N) \cong L^{-1}\iota^+(L)$. Budući da znamo da je D_X-modul $L^{-1}\iota^+(L)$ holonoman, slijedi da je $\iota^+(N)$ holonoman D_X-modul.

Prema tome, zbog teorema 6.6.2. dobivamo:

Teorem 6.9.3. *Neka je $F : X \to Y$ polinomijalno preslikavanje i M holonoman D_Y-modul. Tada su $L^qF^+(M)$, $q \in \mathbb{Z}$, holonomni D_X-moduli.*

Prelazimo na proučavanje direktnih slika od π.

Lema 6.9.4. *Neka je M holonoman $D_{X\times Y}-$modul. Tada su D_Y-moduli $L^q\pi_+(M)$, $q \in \mathbb{Z}$, holonomni.*

Skica dokaza: Budući da su prema tvrdnji (b) teorema 6.4.1. podmoduli, kvocijentni moduli i proširenja holonomnih modula holonomni moduli, kao u dokazima lema 6.6.6. i 6.7.4. pomoću argumenta spektralnog niza možemo svesti dokaz na slučaj $\dim X = 1$. U tom slučaju označimo sa ∂ operator deriviranja po varijabli x od X i promotrimo homomorfizam D_Y-modula $M \xrightarrow{\partial} M$. Prema lemi 6.7.3. imamo

$$\pi_+(M) = \operatorname{Coker}\partial, \qquad L^{-1}\pi_+(M) = \operatorname{Ker}\partial, \qquad L^q\pi_+(M) = 0 \quad \text{za} \quad q \notin \{0, -1\}.$$

Primjenom Fourierove transformacije dobivamo kompleks

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathcal{F}(M) \xrightarrow{x} \mathcal{F}(M) \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots$$

koji izračunava $\mathcal{F}\left(L^\bullet\pi_+(M)\right)$. Argumentima iz dokaza leme 6.9.2. vidimo da taj kompleks izračunava kohomologije inverzne slike kanonske inkluzije $\jmath : Y \to X \times Y$, $\jmath(y) = (0, y)$. Prema lemi 6.9.1. njene su kohomologije holonomne, pa su i moduli $\mathcal{F}\left(L^q\pi_+(M)\right)$ holonomni. Prema lemi 6.2.3. zaključujemo da su D_Y-moduli $L^q\pi_+(M)$, $q \in \mathbb{Z}$, holonomni.

Dakle, pomoću teorema 6.7.1. dobivamo:

Teorem 6.9.5. *Neka je $F : X \to Y$ polinomijalno preslikavanje i M holonoman D_X-modul. Tada su D_Y-moduli $L^qF_+(M)$, $q \in \mathbb{Z}$, holonomni.*

Primjedba: Tvrdnje analogne onima u lemi 6.9.4. i teoremu 6.9.5., uz zamjenu svojstva holonomnosti sa svojstvom konačne generiranosti, ne stoje. Npr. ako uzmemo $X = \{0\}$, $Y = K$ i $\iota : X \to Y$, inverzna slika $\iota^+(D_Y)$ je beskonačnodimenzionalan vektorski prostor nad K. Analogno, za $\pi : Y \to X$ modul $\pi_+(D_Y)$ je beskonačnodimenzionalan vektorski prostor nad K.

Poglavlje 7

SNOPOVI DIFERENCIJALNIH OPERATORA

U cijelom poglavlju K označava algebarski zatvoreno polje karakteristike 0. Nadalje, koristit ćemo oznake

$$\mathbb{Z}^n_{+,\leq p} = \{\alpha \in \mathbb{Z}^n_+;\ |\alpha| \leq p\}, \qquad \mathbb{Z}^n_{+,p} = \{\alpha \in \mathbb{Z}^n_+;\ |\alpha| = p\}, \qquad p \in \mathbb{Z}_+.$$

7.1 Diferencijalni operatori na višestrukostima

Kao i prije za $n \in \mathbb{Z}_+$ sa $D(n)$ označavamo Weylovu algebru svih diferencijalnih operatora na K^n s polinomijalnim koeficijentima. Za $T \in D(n)$ sa $\operatorname{ord} T$ označavamo red diferencijalnog operatora T. Neka je $(D_p(n))_{p\in\mathbb{Z}_+}$ filtracija redom diferencijalnih operatora:

$$D_p(n) = \{T \in D(n);\ \operatorname{ord} T \leq p\}, \qquad p \in \mathbb{Z}_+.$$

Filtracioni potprostori $D_p(n)$ su slobodni $K[X_1, \ldots, X_n]-$podmoduli od $D(n)$ konačnog ranga s bazom $\{\partial^\alpha;\ \alpha \in \mathbb{Z}^n_{+,p}\}$.

Lema 7.1.1. *Neka je $p \in \mathbb{Z}_+$ i neka su zadani $P_\alpha \in K[X_1, \ldots, X_n]$, $\alpha \in \mathbb{Z}^n_{+,\leq p}$. Postoji diferencijalni operator $T \in D_p(n)$ takav da je $T(X^\alpha) = P_\alpha$ za svaki $\alpha \in \mathbb{Z}_{+,\leq p}$.*

Dokaz provodimo indukcijom po p. Ako je $p = 0$, tvrdnja je trivijalna: Uzimamo $T = P_0$. Pretpostavimo da je $p > 0$ i da je tvrdnja dokazana za $p - 1$. Po pretpostavci indukcije postoji $T' \in D_{p-1}(n)$ takav da vrijedi $T'(X^\alpha) = P_\alpha$ za sve $\alpha \in \mathbb{Z}^n_{+,\leq p-1}$. Stavimo

$$Q_\alpha = T'(X^\alpha) \in K[X_1, \ldots, X_n], \qquad \alpha \in \mathbb{Z}_{+,p}.$$

Očito vrijedi

$$\partial^\beta(X^\alpha) = 0 \quad \text{za} \quad \beta \in \mathbb{Z}^n_{+,p},\ \alpha \in \mathbb{Z}^n_{+,\leq p-1}, \qquad \text{i} \qquad \partial^\beta(X^\alpha) = \alpha!\delta_{\alpha\beta} \quad \text{za} \quad \alpha, \beta \in \mathbb{Z}^n_{+,p}.$$

Dakle, ako definiramo $T'' \in D_p(n)$ sa

$$T'' = \sum_{\beta\in\mathbb{Z}^n_{+,p}} \frac{P_\beta - Q_\beta}{\beta!}\,\partial^\beta,$$

onda je $T''(X^\alpha) = 0$ za $\alpha \in \mathbb{Z}^n_{+,\leq p-1}$, a za $\alpha \in \mathbb{Z}^n_{+,p}$ imamo

$$T''(X^\alpha) = \sum_{\beta\in\mathbb{Z}^n_{+,p}} \frac{P_\beta - Q_\beta}{\beta!}\,\partial^\beta(X^\alpha) = P_\alpha - Q_\alpha.$$

Prema tome, za operator $T = T' + T'' \in D_p(n)$ imamo

$$T(X^\alpha) = T'(X^\alpha) = P_\alpha \qquad \text{za} \quad \alpha \in \mathbb{Z}^n_{+,leqp-1}$$

i

$$T(X^\alpha) = T'(X^\alpha) + T''(X^\alpha) = Q_\alpha + P_\alpha - Q_\alpha = P_\alpha \qquad \text{za} \quad \alpha \in \mathbb{Z}^n_{+,p}.$$

Neka je sada X afina višestrukost, $\mathcal{O}_X$ njezin strukturni snop i $K[X] = \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ algebra globalnih prereza tog snopa, tj. njena afina algebra, odnosno, algebra svih regularnih funkcija na X. Nadalje, sa $D(X) = \mathrm{Diff}(K[X])$ označimo algebru diferencijalnih operatora na algebri $K[X]$. Ta se algebra zove **algebra diferencijalnih operatora na afinoj višestrukosti** X. Njena filtracija $(D_p(X))_{p\in\mathbb{Z}_+}$ redom diferencijalnih operatora definirana je sa $D_p(X) = \mathrm{Diff}_p(K[X])$, odnosno, induktivno sa

$$D_0(X) = End_{K[X]}(K[X]) = K[X], \qquad D_p(X) = \{T \in D(X);\ [T, f] \in D_{p-1}(X)\ \forall f \in K[X]\}.$$

Ako je X afini prostor K^n, onda je $K[X] = K[X_1, \ldots, X_n]$ i $D(X) = D(n)$. Općenito, afinu višestrukost X možemo realizirati kao Zariski zatvoren podskup afinog prostora K^n za neki $n \in \mathbb{Z}_+$. Neka je tada $I(X)$ ideal svih polinoma $P \in K[X_1, \ldots, X_n]$ koji se poništavaju na X. Tada imamo identifikaciju $K[X] = K[X1, \ldots, X_n]/I(X)$. Neka je $r : K[X_1, \ldots, X_n] \to K[X]$ kvocijentni epimorfizam, tj. homomorfizam restrikcije polinomijalnih funkcija na K^n na višetsrukost X. Stavimo

$$A(X) = \{T \in D(n);\ T(I(X)) \subseteq I(X)\}.$$

Tada je $A(X)$ unitalna podalgebra od $D(n)$. Neka je $(A_p(X))_{p\in\mathbb{Z}_+}$ filtracija na $A(X)$ inducirana filtracijom redom diferencijalnih operatora, tj. $A_p(X) = A(X) \cap D_p(n)$. Svaki operator $T \in A(X)$ inducira prijelazom na kvocijent po $I(X)$ linearni endomorfizam $\varphi(T)$ algebre $K[X] = K[X_1, \ldots, X_n]/I(X)$. Očito je $\varphi : A(X) \to End_K(K[X])$ unitalni homomorfizam algebri. Algebra polinoma $K[X_1, \ldots, X_n]$, shvaćena kao podalgebra od $D(n)$, očito je podalgebra od $A(X)$ i imamo komutativan dijagram

$$\begin{array}{ccc} K[X_1, \ldots, X_n] & \xrightarrow{r} & K[X] \\ \downarrow & & \downarrow \\ A(X) & \xrightarrow{\varphi} & End_K(K[X]). \end{array}$$

Posebno, za svaki polinom $P \in K[X_1, \ldots, X_n]$ operator $\varphi(P)$ je množenje funkcijom $r(P) = P|X \in K[X]$. Neka je $T \in A_p(X)$ i neka su $f_0, \ldots, f_p \in K[X]$. Nadalje, neka su $P_0, \ldots, P_p \in K[X_1, \ldots, X_n]$ takvi da je $r(P_j) = f_j$ za $0 \leq j \leq p$, (naime, r je epimorfizam). Tada imamo

$$[[\cdots[[\varphi(T), f_0], f_1], \cdots, f_{p-1}], f_p] = \varphi([[\cdots[[T, P_0], P_1], \cdots, P_{p-1}], P_p]) = 0.$$

To pokazuje da je $\varphi(T)$ diferencijalni operator reda $\leq p$ na algebri $K[X]$, odnosno, $\varphi(T) \in D_p(X)$. Prema tome, φ je unitalni homomorfizam algebre $A(X)$ u algebru $D(X)$ koji je kompatibilan s filtracijama, $\varphi(A_p(X)) \subseteq D_p(X)$.

Stavimo

$$J(X) = \operatorname{Ker}\varphi = \{T \in D(n);\ T(K[X_1, \ldots, X_n]) \subseteq I(X)\}.$$

Kako je φ homomorfizam algebri, $J(X)$ je dvostrani ideal u $A(X)$.

Lema 7.1.2. *Za $T \in D(n)$ sljedeća su dva svojstva međusobno ekvivalentna:*

(*a*) $T \in J(X)$.

(*b*) $T = \sum_\alpha P_\alpha \partial^\alpha$, *gdje su* $P_\alpha \in I(X)$.

Dokaz: (*b*) $\Rightarrow$ (*a*). Pretpostavimo da je $T = \sum_\alpha P_\alpha \partial^\alpha$, gdje su $P_\alpha \in I(X)$. Dakle, ako te polinome promatramo kao funkcije na K^n, onda je $P_\alpha | X = 0$. Za proizvoljan $P \in K[X_1, \ldots, X_n]$ imamo

$$T(P) = \sum_\alpha P_\alpha \partial^\alpha(P),$$

pa slijedi $T(P)|X = 0$, odnosno, $T(P) \in I(X)$. Prema tome, $T \in J(X)$.

(*a*) $\Rightarrow$ (*b*). Pretpostavimo da je $T \in J(X)$. Možemo ga prikazati u obliku $\sum_\alpha P_\alpha \partial^\alpha$ za neke $P_\alpha \in K[X_1, \ldots, X_n]$. Tada je $P_0 = T(1) \in I(X)$. Neka je $m \geq 1$ i pretpostavimo da smo dokazali da je $P_\alpha \in I(X)$ za svaki $\alpha \in \mathbb{Z}^n_{+,\leq m-1}$. Tada je

$$T' = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^n_{+,\leq m-1}} P_\alpha \partial^\alpha \in J(X), \quad \text{dakle i} \quad T'' = T - T' \in J(X).$$

Za $\beta \in \mathbb{Z}^n_{+,m}$ imamo

$$I(X) \ni T''(X^\beta) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^n_{+,m}} P_\alpha \partial^\alpha (X^\beta) = \beta! P_\beta,$$

odakle je $P_\beta \in I(X)$. Prema tome, indukcijom po $|\alpha|$ slijedi da su svi $P_\alpha \in I(X)$.

Označimo sa D kvocijentnu algebru $A(X)/J(X)$. Filtracija $(A_p(X))_{p \in \mathbb{Z}_+}$ po redu diferencijalnih operatora inducira kvocijentnu filtraciju $(D_p)_{p \in \mathbb{Z}_+}$ algebre D. Budući da je $J(X) = \operatorname{Ker} \varphi$, homomorfizam φ prijelazom na kvocijent po $J(X)$ definira monomorfizam $\Phi : D \to D(X)$ koji je kompatibilan s filtracijama tih algebri, $\Phi(D_p) \subseteq D_p(X)$.

Propozicija 7.1.3. $\Phi : D \to D(X)$ *je izomorfizam. Štoviše, vrijedi* $\Phi(D_p) = D_p(X)$ $\forall p \in \mathbb{Z}_+$.

Dokaz: Najprije ćemo dokazati tvrdnju: *ako su* $p \in \mathbb{Z}_+$, $T \in D_p(X)$ *i* $S \in D_p(n)$, *onda vrijedi implikacija*:

$$T(r(X^\alpha)) = r(S(X^\alpha)) \quad \forall \alpha \in \mathbb{Z}^n_{+,\leq p} \qquad \Longrightarrow \qquad T \circ r = r \circ S.$$

Dokaz te tvrdnje provodimo indukcijom po p. Ako je $p = 0$, nema se što dokazivati. Pretpostavimo da je $p > 0$ i da je tvrdnja dokazana za $p - 1$. Neka su $T \in D_p(X)$ i $S \in D_p(n)$ takvi da vrijedi

$$T(r(X^\alpha)) = r(S(X^\alpha)) \quad \forall \alpha \in \mathbb{Z}^n_{+,\leq p}.$$

Za $1 \leq j \leq n$ i za $\alpha \in \mathbb{Z}^n_{+,\leq p-1}$ tada imamo

$$[T, r(X_j)](r(X^\alpha)) = T(r(X_j X^\alpha)) - r(X_j) T(r(X^\alpha)) = r(S(X_j X^\alpha)) - r(X_j S(X^\alpha)) = r([S, X_j](X^\alpha)).$$

Budući da su $[T, r(X_j)] \in D_{p-1}(X)$ i $[S, X_j] \in D_{p-1}(n)$, po pretpostavci indukcije zaključujemo da vrijedi

$$[T, r(X_j)] \circ r = r \circ [S, X_j], \qquad 1 \leq j \leq n.$$

Sada za svaki $\alpha \in \mathbb{Z}^n_+$ i svaki $j \in \{1, \ldots, n\}$ imamo

$$T(r(X_j X^\alpha)) = [T, \rho(X_j)](r(X^\alpha)) + r(X_j) T(r(X^\alpha)) = ([T, r(X_j)] \circ r)(X^\alpha) + r(X_j) T(r(X^\alpha)) =$$

$$= (r \circ [S, X_j])(X^\alpha) + r(X_j) T(r(X^\alpha)) = r(S(X_j X^\alpha)) - r(X_j) r(S(X^\alpha)) + r(X_j) T(r(X^\alpha)).$$

Prema tome, vrijedi

$$(T\circ r)(X_jX^\alpha)-(r\circ S)(X_jX^\alpha)=r(X_j)[(T\circ r)(X^\alpha)-(r\circ S)(X^\alpha)] \qquad \forall\alpha\in\mathbb{Z}_+^n \text{ i } \forall j\in\{1,\dots,n\}.$$

Odavde indukcijom po $|\alpha|$ slijedi da je $(T\circ r)(X^\alpha)=(r\circ S)(X^\alpha)\ \forall\alpha\in\mathbb{Z}_+^n$, a to znači da je $T\circ r=r\circ S$. Time je gornja tvrdnja dokazana.

Neka je $T\in D_p(X)$. Za svaki $\alpha\in\mathbb{Z}^n_{+,\le p}$ je $T(r(X^\alpha))$ regularna funkcija na X, što znači da za svaki $\alpha\in\mathbb{Z}^n_{+,\le p}$ postoji polinom $P_\alpha\in K[X_1,\dots,X_n]$ takav da je $T(r(X^\alpha))=r(P_\alpha)$. Prema lemi 7.1.2. postoji $S\in D_p(n)$ takav da vrijedi $S(X^\alpha)=P_\alpha\ \forall\alpha\in\mathbb{Z}^n_{+,\le p}$. Tada je

$$T(r(X^\alpha))=r(P_\alpha)=r(S(X^\alpha)) \qquad \forall\alpha\in\mathbb{Z}^n_{+,\le p},$$

pa iz dokazane tvrdnje slijedi $T\circ r=r\circ S$. Posebno, vrijedi $r(S(I(X)))=T(r(I(X)))=0$, dakle, $S\in A_p(X)$. Nadalje, $T\circ r=r\circ S$ znači da je $\varphi(S)=T$, dakle, $\Phi(S+J(X))=T$. Time je dokazana surjektivnost, štoviše, i $\Phi(D_p)=D_p(X)\ \forall p\in\mathbb{Z}_+^n$.

Korolar 7.1.4. *Neka je X afina višestrukost. Za svaki $p\in\mathbb{Z}_+$ filtracioni potprostor $D_p(X)$ je konačno generiran $K[X]-$modul i za lijevo i za desno množenje.*

Dokaz: Možemo pretpostaviti da je X zatvoren podskup od K^n. Prema korolaru 2.2.7. ta tvrdnja vrijedi za $X=K^n$. Budući da je $K[X_1,\dots,X_n]$ Noetherin prsten, $A_p(X)=A(X)\cap D_p(n)$ je konačno generiran $K[X_1,\dots,X_n]-$modul i za lijevo i za desno množenje. Stoga je D_p konačno generiran $K[X]-$modul i za lijevo i za desno množenje. Sada tvrdnja slijedi iz propozicije 7.1.3.

Neka je $f\in K[X]$, $f\neq 0$, i neka je $X_f=\Omega_X(f)=\{x\in X;\ f(x)\neq 0\}$ pripadni glavni otvoren skup u X. Tada je X_f afina višestrukost i prema teoremu 5.2.6. imamo identifikaciju $K[X_f]=K[X]_f$ (lokalizacija algebre $K[X]$ mo multiplikativnom skupu $\{f^k;\ k\in\mathbb{Z}_+\}$). Neka je $r_f:K[X]\to K[X_f]$ homomorfizam restrikcije.

Propozicija 7.1.5. *Neka je $T\in D_p(X)$. Tada postoji jedinstven operator $\overline{T}\in D_p(X_f)$ takav sljedeći dijagram komutira:*

$$\begin{array}{ccc} K[X] & \xrightarrow{T} & K[X] \\ r_f\downarrow & & r_f\downarrow \\ K[X_f] & \xrightarrow{\overline{T}} & K[X_f]. \end{array}$$

Za **dokaz jedinstvenosti** operatora $\overline{T}$ dovoljno je dokazati lemu:

Lema 7.1.6. *Neka je $S\in D(X_f)$ takav da je $S(g)=0$ za svaku funkciju $g\in r_f(K[X])$. Tada je $S=0$.*

Dokaz provodimo indukcijom po $\operatorname{ord}S$. Ako je $\operatorname{ord}S=0$, onda je $S\in K[X_f]$, pa je tvrdnja trivijalna jer je $r_f(K[X])\neq\{0\}$. Pretpostavimo da je $\operatorname{ord}S=p\geq 1$ i da je tvrdnja dokazana za operatore reda manjeg od p. Sada je $S'=[S,f]\in D_{p-1}(X_f)$ i vrijedi $S'(g)=0$ za svaku funkciju $g\in r_f(K[X])$. Po pretpostavci indukcije tada je $S'=0$. To znači da S komutira sa f. Neka je $h\in K[X_f]$. Tada postoji $m\in\mathbb{Z}_+$ takav da je $f^mh\in r_f(K[X])$. Slijedi $f^mS(h)=S(f^mh)=0$. No budući da je f^m invertibilni element algebre $K[X_f]$, zaključujemo da je $S(h)=0$. Dakle, $S=0$.

Dokaz egzistencije operatora $\overline{T}$. Najprije promatramo slučaj $X=K^n$. Budući da je unitalna algebra $D(n)$ generirana sa X_j, ∂_j, $1\leq j\leq n$, dovoljno je dokazati egzistenciju $\overline{T}$ za $T=\partial_j$.

Međutim, ∂_j je derivacija algebre $K[X_1, \dots, X_n]$ koja se jedinstveno produljuje do derivacije ∂_j polja racionalnih funkcija $K(X_1, \dots, X_n)$ i vrijedi

$$\partial_j \left(\frac{g}{f^m} \right) = \frac{\partial_j(g)f - mg\partial_j(f)}{f^{m+1}}, \qquad g \in K[X_1, \dots, X_n], \quad m \in \mathbb{Z}_+.$$

Dakle, tako proširen operator ∂_j inducira derivaciju algebre $K[X_1, \dots, X_n]_f = K[K^n]_f = K[(K^n)_f]$ i za tu derivaciju $\overline{T}$ očito dijagram iz tvrdnje propozicije komutira. Time je egzistencija dokazana u slučaju $X = K^n$.

Dokažimo sada egzistenciju $\overline{T}$ u općem slučaju. Možemo pretpostaviti da je X zatvoren podskup nekog afinog prostora K^n. Neka je polinom $P \in K[X_1, \dots, X_n]$ takav da je $f = P|X$. Neka je $U = (K^n)_P$ − afini otvoren podskup od K^n koji je komplement skupa nultočaka polinoma P. Tada je $X \cap U = X_f$. Prema propoziciji 7.1.3. postoji $S \in A_p(X) = A(X) \cap D_p(n)$ takav da je $\Phi(S) = T$. Taj se diferencijalni operator S proširuje do diferencijalnog operatora $\overline{S}$ na U reda $\leq p$. Sada nam treba:

Lema 7.1.7. *Za svaki $S \in A(X)$ vrijedi $\overline{S}\,(I(X)_P) \subseteq I(X)_P$.*

Dokaz: Tvrdnju dokazujemo indukcijom po $\operatorname{ord} S$. Ako je $\operatorname{ord} S = 0$, tvrdnja je očita. Pretpostavimo da je $\operatorname{ord} S = p \geq 1$ i da tvrdnja dokazana za operatore reda manjeg od p. Sada je $S' = [S, P] \in A(X)$ i $\operatorname{ord} S' \leq p - 1$. Dakle, po pretpostavci indukcije vrijedi $\overline{S'}\,(I(X)_P) \subseteq I(X)_P$. Neka je $Q \in I(X)$. Tada je

$$\overline{S} \left(\frac{Q}{P^m} \right) = \overline{S'} \left(\frac{Q}{P^{m+1}} \right) + P\overline{S} \left(\frac{Q}{P^{m+1}} \right),$$

pa po pretpostavci indukcije nalazimo da je

$$\overline{S} \left(\frac{Q}{P^{m+1}} \right) - \frac{1}{P}\overline{S} \left(\frac{Q}{P^m} \right) \in I(X)_P \qquad \forall m \in \mathbb{Z}_+.$$

Odatle indukcijom po $m \in \mathbb{Z}_+$ zaključujemo da je $\overline{S}\left(\frac{Q}{P^m}\right) \in I(X)_P$ za svaki $Q \in I(X)$ i svaki $m \in \mathbb{Z}_+$. Time je lema dokazana.

Nastavljamo **dokaz egzistencije.** Prema lemi 7.1.7. operator $\overline{S}$ inducira linearan endomorfizam od $K[X_1, \dots, X_n]_P / I(X)_P = K[X]_f = K[X_f]$. Kao i prije nalazimo da je to diferencijalni operator na X_f koji se na $r_f(K[X])$ podudara sa T. Time je konstruiran $\overline{T}$ i proveden je dokaz egzistencije.

Neka je X afina višestrukost i $f \in K[X]$, $f \neq 0$. Tada prema propoziciji 7.1.5. imamo dobro definirano preslikavanje restrikcije $\rho_f : D(X) \to D(X_f)$. Zbog jedinstvenosti u propozciji 2.1.5. imamo:

Propozicija 7.1.8. *Preslikavanje $\rho_f : D(X) \to D(X_f)$ je unitalni homomorfizam filtriranih algebri.*

Posebno, ρ_f je homomorfizam $K[X]$−modula i za lijevo i za desno množenje.

Propozicija 7.1.9. *Neka je $D(X)_f$ lokalizacija od $D(X)$ promatranog kao $K[X]$−modul u odnosu na množenje slijeva. Homomorfizam ρ_f inducira izomorfizam $\beta_f : D(X)_f \to D(X_f)$.*

Dokaz: Pretpostavimo najprije da je X_f gusto u X. (To je, naravno, uvijek tako ako je višestrukost X ireducibilna, ali općenito ne mora biti). U tom je slučaju homomorfizam restrikcije $r_f : K[X] \to K[X_f]$ injektivan. Dakle, ako je $T \in D(X)$ takav da je

$$\beta_f \left(\frac{T}{f^m} \right) = \frac{\overline{T}}{f^m} = 0,$$

onda za svaku funkciju $g \in K[X]$ postoji $s \in \mathbb{Z}_+$ takav da je $f^s T(g) = 0$. No tada je $T(g) = 0$ za svaki $g \in K[X]$, odnosno, $T = 0$. Time je dokazano da je homomorfizam β_f injektivan.

Da dokažemo da je homomorfizam β_f surjektivan, dovoljno je dokazati sljedeću tvrdnju:

Za svaki $T \in D(X_f)$ postoji $m \in \mathbb{Z}_+$ takav da je $(f^m T)(K[X]) \subseteq K[X]$.

Tu ćemo tvrdnju dokazati indukcijom po $\operatorname{ord} T$. Ako je $\operatorname{ord} T = 0$, tvrdnja je trivijalna. Pretpostavimo da je $p = \operatorname{ord} T \geq 1$ i da je tvrdnja dokazana za operatore nižeg reda. Neka su $g_1, \ldots, g_n$ generatori unitalne $K-$algebre $K[X]$. Po pretpostavci indukcije postoji $m \in \mathbb{Z}_+$ takav da je

$$f^m T(1) \in K[X] \qquad \text{i} \qquad f^m [T, g_j](K[X]) \subseteq K[X], \qquad 1 \leq j \leq n.$$

Odatle za svaku funkciju $h \in K[X]$ takvu da je $f^m T(h) \in K[X]$ slijedi

$$f^m T(g_j h) = f^m [T, g_j](h) + f^m g_j T(h) \in K[X].$$

Kako je po pretpostavci $f^m T(1)$, odavde indukcijom po duljini $|\alpha|$ monoma $g_1^{\alpha_1} \cdots g_n^{\alpha_n}$ zaključujemo da vrijedi $f^m T(K[X]) \subseteq K[X]$.

Dakle, dokazana je gornja tvrdnja, a time je dokazano da je $\beta_f : D(X)_f \to D(X_f)$ izomorfizam ukoliko je X_f gusto u X.

Razmotrimo sada slučaj kad X_f nije gusto u X. Dokažimo tvrdnju:

Postoji $f' \in K[X]$ takav da je $X_f \cap X_{f'} = \emptyset$ i da je unija $X_f \cup X_{f'}$ gusta u X.

Prije svega, ako X_f nije gusto u X, onda postoji funkcija $a_1 \in K[X] \setminus \{0\}$ takva da je $a_1 | X_f = 0$. To znači da je $X_f \cap X_{a_1} = \emptyset$ i $X_{f+a_1} = X_f \cup X_{a_1}$. Ako X_{f+a_1} nije gusto u X, možemo naći funkciju $a_2 \in K[X] \setminus \{0\}$ takvu da je $a_2 | X_{f+a_1} = 0$; tada je $x_{f+a_1} \cap X_{a_2} = \emptyset$ i $X_{f+a_1+a_2} = X_f \cup X_{a_1} \cup X_{a_2}$. Ta se konstrukcija ne može nastaviti u nedogled, jer je X Noetherin topološki prostor. Dakle, nakon konačno mnogo koraka dolazimo do funkcija $a_1, \ldots, a_s \in K[X] \setminus \{0\}$ takvih da su $X_f, X_{a_1}, \ldots, X_{a_s}$ međusobno disjunktni i da im je unija gusta u X. Tada treba samo uzeti $f' = a_1 + \cdots + a_s$.

Sada tvrdimo da je $D(X_{f+f'}) = D(X_f) \oplus D(X_{f'})$. Očito vrijedi $K[X_{f+f'}] = K[X_f] \oplus K[X_{f'}]$. Neka su $\chi, \chi' \in K[X_{f+f'}]$ karakteristične funkcije skupova X_f i $X_{f'}$. Sada tvrdimo da vrijedi

$$[T, \chi] = [T, \chi'] = 0 \qquad \forall T \in D(X_{f+f'}).$$

Tu tvrdnju dokazujemo indukcijom po $\operatorname{ord} T$. Ako je $\operatorname{ord} T = 0$, tvrdnja je trivijalna, jer T je funkcija. Pretpostavimo da je $p = \operatorname{ord} T = p \geq 1$ i da je tvrdnja dokazana za operatore nižeg reda. Po indukciji tvrdnja vrijedi za $[T, \chi] \in D_{p-1}(X_{f+f'})$. Dakle,

$$0 = [[T, \chi], \chi'] = T\chi\chi' - \chi T \chi' - \chi' T \chi + \chi' \chi T = -\chi T \chi' - \chi' T \chi,$$

budući da je $\chi\chi' = 0$. Dakle, vrijedi

$$\chi T \chi' = -\chi' T \chi.$$

Pomožimo li to zdesna sa χ, dobivamo $\chi' T \chi = 0$, pa slijedi i $\chi T \chi' = 0$. Dakle,

$$T\chi = (\chi + \chi') T \chi = \chi T \chi \qquad \text{i} \qquad \chi' T \chi' T(\chi + \chi') = \chi' T \chi'.$$

Zamjenom uloga χ i χ' dobivamo da je također

$$\chi T = \chi T \chi \qquad \text{i} \qquad T\chi' = \chi' T \chi'.$$

No to znači da je $\chi T = T \chi$ i $\chi' T = T \chi'$, odnosno, $[T, \chi] = [T, \chi'] = 0$. Odatle za svaki $g \in K[X_f]$ nalazimo

$$T(g) = T(\chi g) = \chi T(g) \in K[X_f].$$

Dakle, $T(K[X_f]) \subseteq K[X_f]$ i, analogno, $T(K[X_{f'}]) \subseteq K[X_{f'}]$. Dakle, T inducira diferencijalne operatore S i S' na X_f i $X_{f'}$ i $T = S \oplus S'$.

Prema prvom dijelu dokaza $\beta_{f+f'} : D(X)_{f+f'} \to D(X_f) \oplus D(X_{f'})$ je izomorfizam. Lokaliziramo li u odnosu na χ dobivamo da je $\beta_f : D(X)_f \to D(X_f)$ izomorfizam.

Neka je U otvoren podskup od X. Označimo sa $\mathcal{P}(U)$ skup svih glavnih otvorenih podskupova od X sadržanih u U. Skup $\mathcal{P}(U)$ parcijalno uredimo inkluzijom. Tada je skup $\mathcal{P}(U)$ usmjeren jer presjek dvaju glavnih otvorenih skupova je i sam glavni otvoren skup. Ako su $V, W \in \mathcal{P}(U)$ i $V \subseteq W$, imamo prirodni homorfizam restrikcije $r_V^W : D(W) \to D(V)$. Tada je $\big(D(V), r_V^W\big)$ inverzni sistem algebri. Označimo sa $\mathcal{D}_X(U)$ njegov inverzni limes. Tada je $\mathcal{D}_X : U \mapsto \mathcal{D}_X(U)$ predsnop algebri na X, za koji se iz definicije direktno provjerava da zadovoljava uvjete iz propozicija 4.1.1. i 4.1.2. Dakle, $\mathcal{D}_X$ je snop algebri na X. Nadalje, to je snop $\mathcal{O}_X-$modula i za lijevo množenje i za desno množenje. Snop $\mathcal{D}_X$ zove se **snop lokalnih diferencijalnih operatora** na afinoj višestrukosti X.

Teorem 7.1.10. *Neka je X afina višestrukost i $\mathcal{D}_X$ snop lokalnih diferencijalnih operatora na X. Tada za svaki afini otvoren podskup $U \subseteq X$ vrijedi $\Gamma(U, \mathcal{D}_X) = D(U)$.*

Dokaz: Tvrdnja je jasna ako je U glavni otvoren podskup od X. Neka je U bilo koji afini otvoren podskup od X. Neka je funkcija $f \in K[X]$ takva da je $X_f \subseteq U$. Stavimo li $g = f|U$, vrijedi $U_g = X_f$. To povlači da je

$$\Gamma(U_g, \mathcal{D}_U) = D(U_g) = D(X_f) = \Gamma(X_f, \mathcal{D}_X).$$

Te su jednakosti zapravo izomorfizmi koji su kompatibilni s homomorfizmima restrikcije. Budući da glavni otvoreni poskupovi $\{X_f;\ f \in K[X]\}$ tvore bazu topologije od X, oni koji su sadržani u U tvore bazu topologije od U. Nadalje, budući da su $\mathcal{D}_X|U$ i $\mathcal{D}_U$ snopovi na U koji se podudaraju na bazi topologije od U, zaključujemo da su ti snopovi jednaki. Dakle, $\Gamma(U, \mathcal{D}_X) = \Gamma(U, \mathcal{D}_U) = D(U)$.

Neka je sada X proizvoljna višestrukost nad poljem K. Za svaki otvoren skup $U \subseteq X$ označimo sa $\mathcal{B}(U)$ skup svih afinih otvorenih podskupova od U i taj skup parcijalno uredimo inkluzijom. Ako su $V, W \in \mathcal{B}(U)$ i $V \subseteq W$, imamo prirodni unitalni homomorfizam restrikcije $r_V^W : D(W) \to D(V)$. Tada je ponovo $\big(D(V), r_V^W\big)_{V,W \in \mathcal{B}(U),\, V \subseteq W}$ inverzni sistem algebri. Označimo sa $\mathcal{D}_X(U)$ njegov inverzni limes. Tada je $\mathcal{D}_X : U \mapsto \mathcal{D}_X(U)$ predsnop algebri na X, koji također zadovoljava uvjete iz propozicija 4.1.1. i 4.1.2., dakle, to je snop algebri na X. Nadalje, to je snop $\mathcal{O}_X-$modula i za lijevo množenje i za desno množenje. Snop $\mathcal{D}_X$ zove se **snop lokalnih diferencijalnih operatora** na višestrukosti X.

Neka je $U \subseteq X$ otvoren skup i $T \in \mathcal{D}_X(U)$. Kažemo da je diferencijalni operator T reda $\leq p$ ako je za svaki afini otvoren podskup $V \subseteq U$ diferencijalni operator $r_U^V(T)$ reda $\leq p$. Time je definirana rastuća filtracija $F\mathcal{D}_X(U)$ od $\mathcal{D}_X(U)$.

Lema 7.1.11. *Filtracija $F\mathcal{D}_X(U)$ algebre $\mathcal{D}_X(U)$ je ekshaustivna.*

Dokaz: Neka je $T \in \mathcal{D}_X(U)$. Budući da je topološki prostor U kvazikompaktan, možemo naći konačan pokrivač $(U_j)_{1 \leq j \leq s}$ od U sastavljen od afinih otvorenih podskupova. Neka je $p \in \mathbb{Z}_+$ takav da je $\operatorname{ord} r_{U_j}^U(T) \leq p$ za $1 \leq j \leq s$. Neka je V proizvoljan afini otvoren podskup od U i $S = r_V^U(T)$. Neka su $f_0, \ldots, f_p \in K[V]$. Tada je

$$R = [\cdots[[S, f_0], f_1], \ldots, f_p] \in \mathcal{D}_X(V)$$

i njegove su restrikcije na $V \cap U_j$ jednake nuli za $1 \leq j \leq s$. To povlači da je $R = 0$. Time je dokazano da je $\operatorname{ord} S \leq p$, a kako je V bio proizvoljan afini otvoren podskup od U, zaključujemo da je $T \in F_p\mathcal{D}_X(U)$.

Dakle, filtracija $F\mathcal{D}_X(U)$ zadovoljava uvjete $(1) - (5)$ iz odjeljka 3.3. Na taj način dobivamo filtraciju $F\mathcal{D}_X$ snopa $\mathcal{D}_X$ lokalnih diferencijalnih operatora na X potsnopovima vektorskih prostora nad poljem K. Tu filtraciju zovemo **filtracijom po redu diferencijalnih operatora.** Za svaki afini otvoren skup $U \subseteq X$ vrijedi $F_p\mathcal{D}_X(U) = D_p(U)$ za svaki $p \in \mathbb{Z}_+$. Dakle, možemo promatrati pripadni snop graduiranih algebri $\operatorname{Gr}\mathcal{D}_X$. To je snop komutativnih algebri i $\operatorname{Gr}^0\mathcal{D}_X = \mathcal{O}_X$.

Teorem 7.1.12. *Za svaku višestrukost X vrijedi:*

(*a*) *Snop $\mathcal{D}_X$ je kvazikoherentan $\mathcal{O}_X-$modul i za lijevo množenje i za desno množenje.*

(*b*) *Snopovi $F_p\mathcal{D}_X$, $p \in \mathbb{Z}_+$, su koherentni $\mathcal{O}_X-$moduli i za lijevo množenje i za desno množenje.*

(*c*) *Snopovi $\operatorname{Gr}^p\mathcal{D}_X$, $p \in \mathbb{Z}_+$, su koherentni $\mathcal{O}_X-$moduli.*

Dokaz: Budući da su sve tvrdnje lokalne, možemo pretpostaviti da je višestrukost X afina. Tada za lijevo nmnoženje tvrdnja (a) slijedi iz propozicije 7.1.8., tvrdnja (b) za lijevo množenje slijedi iz leme 2.1.3., a tvrdnja (c) slijedi iz tvrdnje (b) za lijevo množenje. Međutim, lijevo i desno množenje na $\operatorname{Gr}^p\mathcal{D}_X$ definiraju istu strukturu $\mathcal{O}_X-$modula, pa je

$$0 \longrightarrow F_{p-1}\mathcal{D}_X \longrightarrow F_p\mathcal{D}_X \longrightarrow \operatorname{Gr}^p\mathcal{D}_X \longrightarrow 0$$

kratki egzaktni niz $\mathcal{O}_X-$modula i za lijevo množenje i za desno množenje. Stoga indukcijom po p zaključujemo da tvrdnja (b) vrijedi i za desno množenje. Nadalje, kako je filtracija $(F_p\mathcal{D}_X)_{p\in\mathbb{Z}_+}$ snopa $\mathcal{D}_X$ ekshaustivna, tvrdnja (a) za desno množenje slijedi iz tvrdnje (b).

7.2 Tangencijalni i kotangencijalni snop

Neka je X i dalje proizvoljna višestrukost. Za afini otvoren podskup $U \subseteq X$ stavimo $\mathcal{T}_X(U) = \mathrm{Der}(K[U])$. Prema tvrdnji ($b$) leme 2.1.2. imamo $D_1(U) = K[U] \oplus \mathcal{T}_X(U)$. Neka je V afini otvoren podskup od U. Tada za svaki $T \in \mathcal{T}_X(U)$ imamo $[r_V^U(T)](1) = T(1) = 0$. Dakle, $r_V^U(T) \in \mathcal{T}_X(V)$, pa vidimo da su homomorfizmi restrikcije komaptibilni s tim rastavom u direktnu sumu,. To znači da je pridruživanje $U \mapsto \mathcal{T}_X(U)$ predsnop na bazi $\mathcal{B}$ topologije od X sastavljenoj od svih afinih otvorenih podskupova od X. Odgovarajući predsnop na X označavamo sa $\mathcal{T}_X$. Budući da je $F_1\mathcal{D}_X = \mathcal{O}_X \oplus \mathcal{T}_X$ i budući da su $F_1\mathcal{D}_X$ i $\mathcal{O}_X$ snopovi, zaključujemo da je i $\mathcal{T}_X$ snop na X. Zovemo ga **tangencijalnim snopom** višestrukosti X. Njegovi se lokalni prerezi nad otvorenim skupom $U \subseteq X$ zovu **lokalna vektorska polja** na U. Tangencijalni snop ima strukturu lijevog $\mathcal{O}_X-$modula i kao takav je izomorfan snopu $\mathrm{Gr}^1\mathcal{D}_X$. Iz tvrdnje ($c$) teorema 7.1.12. neposredno slijedi:

Propozicija 7.2.1. *Tangencijalni snop $\mathcal{T}_X$ višestrukosti X je koherentan snop $\mathcal{O}_X-$modula.*

Uočimo da $\mathcal{T}_X$ nije snop $\mathcal{O}_X-$modula za množenje zdesna. Nadalje, ako su T i T' dva lokalna vektorska polja na otvorenom skupu $U \subseteq X$, onda je i njihov komutator $[T, T']$ lokalno vektorsko polje na U. Dakle, $\mathcal{T}_X$ je snop Liejevih algebri nad poljem K na prostoru X.

Za točku $x \in X$ kao i prije sa $\mathcal{O}_{X,x}$ označavamo vlat strukturnog snopa $\mathcal{O}_X$ iznad točke x. To je lokalni prsten i njegov najveći ideal označavamo sa $\mathfrak{m}_{X,x}$. Prema rezultatima odjeljka 5.6. kvocijentni prostor $\mathfrak{m}_{X,x}/\mathfrak{m}_{X,x}^2$ je konačnodimenzionalan. Tangencijalni prostor $T_x(X)$ na višestrukost X u točki x definirali smo kao dualni prostor $\left(\mathfrak{m}_{X,x}/\mathfrak{m}_{X,x}^2\right)^*$. Sam prostor $\mathfrak{m}_{X,x}/\mathfrak{m}_{X,x}^2$ označavat ćemo sa $T_x^*(X)$ i zvati **kotangencijalni prostor na višestrukost X u točki x**. Prema propoziciji 5.6.10. vrijedi $\dim T_x(X) \geq \dim_x X$ za svaku točku $x \in X$; u stvari, prema toj propoziciji je $\dim T_x(X) \geq \dim Y$ za svaku ireducibilnu komponentu Y višestrukosti X koja sadrži točku x, no prema rezultatima odjeljka 5.5. supremum $\dim Y$ po svim takvim Y je upravo $\dim_x X$. Prema korolaru 5.6.6. ako je U afina otvorena okolina točke $x \in X$, onda se $T_x(X)$ prirodno identificira sa $T_x(U)$. Nadalje, ako je X afina višestrukost realizirana kao zatvoren podskup afinog prostora K^m i $I(X)$ pripadni radikalni ideal u $K[X_1, \ldots, X_m]$, onda se prema propoziciji 5.6.3. tangencijalni prostor $T_x(X)$ može identificirati sa sljedećim potprostorom vektorskog prostora K^n :

$$\mathrm{Tan}_x(X) = \left\{ (\xi_1, \ldots, \xi_n);\ \sum_{j=1}^{m} \xi_j(\partial_j P)(x) = 0\ \forall P \in I(X) \right\}.$$

U 5.6. definirali smo pojam glatke točke višestrukosti X : to je točka $x \in X$ takva da je $\dim T_x(X) = \dim_x X$. Prema tvrdnji (b) teorema 5.6.13. skup svih glatkih točaka višestrukosti X je otvoren podskup od X koji je gust u X. Ta se tvrdnja izvodi iz tvrdnje (a) istog teorema prema kojoj svaka glatka točka $x \in X$ ima afinu otvorenu okolinu U takvu da je lijevi $K[U]-$modul $\mathrm{Der}(K[U])$ svih lokalnih vektorskih polja na U slobodan $K[U]-$modul konačnog ranga i taj je rang upravo $\dim_x X = \dim T_x(X)$. Dokaz tog teorema izostavili smo, a isti dokaz zapravo daje sljedeću jaču tvrdnju:

Teorem 7.2.2. *Neka je X višestrukost, x njena glatka točka i $n = \dim_x X$. Tada postoje otvorena afina okolina U od x, regularne funkcije $f_1, \ldots, f_n \in K[U]$ i lokalna vektorska polja $D_1, \ldots, D_n$ na U takvi da je $D_i(f_j) = \delta_{ij}$ za $1 \leq i, j \leq n$. Tada je $\{D_1, \ldots, D_n\}$ baza $K[U]-$modula $\mathcal{T}_X(U) = \mathrm{Der}(K[U])$ svih lokalnih vektorskih polja na U. Nadalje, ako je afina višestrukost U ireducibilna, funkcije $f_1, \ldots, f_n$ su algebarski nezavisne i tvore bazu transcendentnosti polja $R(U)$ racionalnih funkcija na U nad poljem K. U tom slučaju vrijedi i $[D_j, D_k] = 0$ za $j \neq k$.*

Takva $2n-$torka $(f_1, \ldots, f_n, D_1, \ldots, D_n)$ zove se **koordinatni sistem** na $U \subseteq X$.

Glatka točka višestrukosti X sadržana je u jedinstvenoj ireducibilnoj komponenti od X. Višestrukost je glatka ako su joj sve točke glatke. Tada je svaka točka sadržana u jedinstvenoj ireducibilnoj komponenti. Prema tome, vrijedi:

Teorem 7.2.3. *Ireducibilne komponente glatke višestrukosti su međusobno disjunktne i one su ujedno komponente povezanosti te višestrukosti.*

Neka je X višestrukost i $x \in X$. Za $f \in \mathcal{O}_{X,x}$ vrijedi $f - f(x) \in \mathfrak{m}_{X,x}$. Sliku tog elementa u kvocijentu $T_x^*(X) = \mathfrak{m}_{X,x}/\mathfrak{m}_{X,x}^2$ označimo sa $df(x)$.

Lema 7.2.4. *Preslikavanje $d : \mathcal{O}_{X,x} \to T_x^*(X)$, $f \mapsto df(x)$, je linearno i zadovoljava*

$$d(fg)(x) = f(x)dg(x) + g(x)df(x) \qquad \forall f, g \in \mathcal{O}_{X,x}.$$

Dokaz: Budući da je $(f - f(x))(g - g(x)) \in \mathfrak{m}_{X,x}^2$, imamo direktno iz definicije

$$d(fg)(x) = fg - f(x)g(x) + \mathfrak{m}_x^2 = fg - f(x)g(x) - (f - f(x))(g - g(x)) + \mathfrak{m}_{X,x}^2 =$$

$$= f(x)(g - g(x)) + g(x)(f - f(x)) + \mathfrak{m}_{X,x}^2 = f(x)dg(x) + g(x)df(x).$$

Npr. ako je $X = K^n$, onda za $x \in X$ i za svaku klicu $f \in K[X_1, \dots, X_n]_x$ imamo

$$df(x) = \sum_{j=1}^{n} (\partial_j f)(x) dX_j(x).$$

To pokazuje da je $\{dX_1(x), \dots, dX_n(x)\}$ baza vektorskog prostora $T_x^*(K^n)$. To je u skladu s činjenicom poznatom iz odjeljka 6.5. da je preslikavanje koje vektoru $(\xi_1, \dots, \xi_n)$ pridružuje tangencijalni vektor $f \mapsto \sum_j \xi_j (\partial_j f)(x)$ izomorfizam sa $K^n = \mathrm{Tan}_x(K^n)$ na tangencijalni prostor $T_x(K^n)$.

Za točku x višestrukosti X označimo sa $\mathcal{T}_{X,x}$ vlat tangencijalnog snopa $\mathcal{T}_X$ nad točkom x. Svaki element $D \in \mathcal{T}_{X,x}$ određuje derivaciju $f \mapsto D(f)(x)$ lokalnog prstena $\mathcal{O}_{X,x}$. Element $f \in \mathfrak{m}_{X.x}^2$ je suma produkata elemenata iz $\mathfrak{m}_{X,x}$, dakle, vrijedi $D(f)(x) \in \mathfrak{m}_{X,x}$. Nadalje, za $f \in \mathcal{O}_{X,x}$ je

$$D(f)(x) = D(f - f(x))(x)$$

i rezultat ovisi samo o $df(x)$. To znači da se preslikavanje $f \mapsto D(f)(x)$ faktorizira kroz $T_x^*(X)$ i definira tangencijalni vektor $D(x) \in T_x(X)$ takav da je

$$D(x)(df(x)) = D(f)(x) \qquad \forall f \in \mathcal{O}_{X,x}.$$

Dakle, konstruirali smo kanonsko linearno preslikavanje $D \mapsto D(x)$ sa $\mathcal{T}_{X,x}$ u $T_x(X)$. Bilinearno preslikavanje sa $\mathcal{O}_{X,x} \times \mathcal{T}_{X,x}$, u $T_x(X)$ definirano sa

$$(f, D) \mapsto f(x)D(x), \qquad f \in \mathcal{O}_{X,x}, \quad D \in \mathcal{T}_{X,x},$$

poništava se na $\mathfrak{m}_{X,x} \times \mathcal{T}_{X,x}$, dakle, dobivamo bilinearno preslikavanje

$$\Phi : \mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_{X,x} \times \mathcal{T}_{X,x} \to T_x(X), \qquad \Phi(f + \mathfrak{m}_{X,x}, D) = f(x)D(x), \quad f \in \mathcal{O}_{X,x},\ D \in \mathcal{T}_{X,x}.$$

Za $f, g \in \mathcal{O}_{X,x}$ i $D \in \mathcal{T}_{X,x}$ imamo

$$\Phi(g(f + \mathfrak{m}_{X,x}), D) = \Phi(gf + \mathfrak{m}_{X,x}, D) = f(x)g(x)D(x) = f(x)(gD)(x) = \Phi(f + \mathfrak{m}_{X,x}, gD).$$

To pokazuje da se preslikavanje Φ faktorizira kroz linearno preslikavanje sa $(\mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_{X,x}) \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} \mathcal{T}_{X,x}$ u $T_x(X)$.

Propozicija 7.2.5. *Neka je x glatka točka višestrukosti X. Tada je kanonsko linearno preslikavanje $(\mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_{X,x}) \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} \mathcal{T}_{X,x} \to T_x(X)$ izomorfizam vektorskih prostora.*

Dokaz: Neka je $n = \dim_x X$. Prema teoremu 7.2.2. $\mathcal{T}_{X,x}$ je slobodan $\mathcal{O}_{X,x}-$modul. Preciznije, postoje $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{O}_{X,x}$ i $D_1, \dots, D_n \in \mathcal{T}_{X,x}$ takvi da je $D_i(f_j) = \delta_{ij}$, $1 \le i, j \le n$, i da je $\{D_1, \dots, D_n\}$ baza $\mathcal{O}_{X,x}-$modula $\mathcal{T}_{X,x}$. Tada slike od $D_1, \dots, D_n$ u $(\mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_{X,x}) \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} \mathcal{T}_{X,x}$ čine bazu tog vektorskog prostora nad K. Nadalje, $D_i(x)$ zadovoljavaju $D_i(x)(df_j(x)) = \delta_{ij}$, $1 \le i, j \le n$, dakle, linearno su nezavisni. Budući da je zbog glatkoće točke x tangencijalni prostor $T_x(X)$ $n-$dimenzionalan, zaključujemo da je $\{D_1(x), \dots, D_n(x)\}$ baza od $T_x(X)$. Prema tome, kanonsko preslikavanje $(\mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_{X,x}) \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} \mathcal{T}_{X,x} \to T_x(X)$ prevodi bazu u bazu, dakle, to je izomorfizam vektorskih prostora.

Za glatku višestrukost X stavimo $T(X) = \{(x, \xi);\ x \in X,\ \xi \in T_x(X)\}$. Želimo definirati prirodnu strukturu višestrukosti na skupu $T(X)$.

Pretpostavimo prvo da je tangencijalni snop $\mathcal{T}_X$ na X slobodan $\mathcal{O}_X-$modul i neka je $\{T_1, \dots, T_n\}$ njegova baza. Tada imamo bijekciju

$$\varphi : X \times K^n \longrightarrow T(X), \qquad \varphi(x, \xi_1, \dots, \xi_n) = \left(x, \sum_{j=1}^{n} \xi_j T_j(x)\right).$$

Strukturu višestrukosti na $T(X)$ definiramo zahtjevom da je φ izomorfizam. Ta definicija ne ovisi o izboru baze $\{T_1, \dots, T_n\}$ $\mathcal{O}_X-$modula $\mathcal{T}_X$. Doista, neka je $\{T'_1, \dots, T'_n\}$ također baza $\mathcal{O}_X-$modula $\mathcal{T}_X$ i neka je $\varphi' : X \times K^n \to T(X)$ odgovarajuća bijekcija. Tada postoji regularna matrica $Q \in M_n(\Gamma(X, \mathcal{O}_X))$ takva da vrijedi

$$T'_i = \sum_{j=1}^{n} Q_{ji} T_j, \qquad 1 \le i, j \le n.$$

Tada je

$$\varphi'(x, \xi_1, \dots, \xi_n) = \left(x, \sum_{i=1}^{n} \xi_i T'_i(x)\right) = \left(x, \sum_{i,j=1}^{n} \xi_i Q_{ji}(x) T_j(x)\right) = \varphi(x, Q(x)(\xi_1, \dots, \xi_n)).$$

To pokazuje da je φ' izomorfizam višestrukosti ako i samo ako je φ izomorfizam.

Razmotrimo sada proizvoljnu glatku višestrukost X. Prema teoremu 7.2.2. postoji pokrivač $(U_1, \dots, U_s)$ od X afinim otvorenim podskupovima takav da je $\mathcal{T}_X|U_j = \mathcal{T}_{U_j}$ slobodan $\mathcal{O}_{U_j}-$modul za $1 \le j \le s$. Tada je $T(X)$ unija $T(U_j)$, $1 \le j \le s$, i prethodna diskusija pokazuje da svaki $T(U_j)$ ima prirodnu strukturu višestrukosti. Nadalje, budući da su te strukture neovisne o izboru baze, slijedi da se strukture, koje na presjeku $T(U_i) \cap T(U_j) = T(U_i \cap U_j)$ induciraju $T(U_i)$ i $T(U_j)$, podudaraju. Na taj način dolazimo do strukture višestrukosti na $T(X)$. S tom se strukturom $T(X)$ zove **tangencijalni svežanj** od X. Imamo prirodna preslikavanja $\iota : X \to T(X)$ i $\pi : T(X) \to X$ definirana sa $\iota(x) = (x, 0)$ i $\pi(x, \xi) = x$, $x \in X$, $\xi \in T_x(X)$. To su morfizmi višestrukosti i očito vrijedi:

Propozicija 7.2.6. *Neka je X glatka višestrukost.*

(a) *Tangencijalni svežanj $T(X)$ je glatka višestrukost i $\dim_{(x,\xi)} T(X) = 2 \dim_x X$ za svaku točku $(x, \xi) \in T(X)$.*

(b) *Fibracija $\pi : T(X) \to X$ je lokalno trivijalna, tj. svaka točka $x \in X$ ima okolinu U takvu da je $\pi^{-1}(U) \cong U \times K^n$ za neki $n \in \mathbb{Z}_+$.*

Analogno, za glatku višestrukost X možemo definirati snop $\mathcal{O}_X$−modula $\mathcal{T}_X^* = \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{T}_X, \mathcal{O}_X)$ na X. Budući da je $\mathcal{T}_X$ lokalno slobodan modul konačnog ranga, takav je i $\mathcal{T}_X^*$. Nadalje, Ako sa $\mathcal{T}_{X,x}^*$ označimo vlat snopa $\mathcal{T}_X^*$ u točki x, vektorski prostor $(\mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_{X,x}) \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} \mathcal{T}_{X,x}^*$ prirodno je izomorfan kotangencijalnom prostoru $T_x^*(X)$. Neka je $U \subseteq X$ otvoren skup i $f \in \mathcal{O}_X(U)$. Funkcija f definira element

$$df \in \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{T}_X, \mathcal{O}_X)(U) = \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X(U)}(\mathcal{T}_X(U), \mathcal{O}_X(U)) \quad \text{zadan sa} \quad (df)(T) = T(f), \;\; T \in \mathcal{T}_X(U).$$

df se zove **diferencijal** od f. Imamo

$$(df)(T)(x) = T(f)(x) = T(x)(df(x)) \qquad \forall x \in U.$$

Dakle, $df(x)$ možemo promatrati kao element od $T_x^*(X)$ određen lokalnim prerezom df.

Ako je $(f_1, \ldots, f_n, D_1, \ldots, D_n)$ koordinatni sistem na dovoljno malom afinom otvorenom skupu U, tada je $\{D_1, \ldots, D_n)$ baza slobodnog $\mathcal{O}_X(U)$−modula $\mathcal{T}_X(U)$. Sada iz $df_i(D_j) = \delta_{ij}$ slijedi da je $(df_1, \ldots, df_n)$ baza slobodnog $\mathcal{O}_X(U)$−modula $\mathcal{T}_X^*(U)$.

Kao i kod konstrukcije tangencijalnog svežnja možemo definirati

$$T^*(X) = \{(x, \omega);\; x \in X,\; \omega \in T_x^*(X)\}$$

i na taj skup možemo uvesti strukturu višestrukosti takvu da je na svakom dovoljno malom afinom otvorenom skupu $U \subseteq X$, s koordinatnim sistemom $(f_1, \ldots, f_n, D_1, \ldots, D_n)$, $\{df_1, \ldots, df_n\}$ baza slobodnog $\mathcal{O}_X(U)$−modula $\mathcal{T}_X^*(U)$ i imamo izomorfizam

$$\varphi^* : U \times K^n \longrightarrow T^*(U) \subseteq T^*(X) \qquad \text{dan sa} \quad \varphi^*(x, \xi_1, \ldots, \xi_n) = \left(x, \sum_{j=1}^{n} \xi_j df_j(x)\right).$$

Ta se višestrukost $T^*(X)$ zove **kotangencijalni svežanj** od X. Imamo prirodne morfizme $\iota^* : X \to T^*(X)$ i $\pi^* : T^*(X) \to X$ dane sa $\iota^*(x) = (x, 0)$ i $\pi^*(x, \omega) = x$. Analogno propoziciji 7.2.6. imamo

Propozicija 7.2.7. *Neka je X glatka višestrukost.*

(a) *Kotangencijalni svežanj $T^*(X)$ je glatka višestrukost i $\dim_{(x,\omega)} T^*(X) = 2 \dim_x X$ za svaku točku $(x, \omega) \in T^*(X)$.*

(b) *Fibracija $\pi^* : T^*(X) \to X$ je lokalno trivijalna, tj. svaka točka $x \in X$ ima okolinu U takvu da je $\pi^{-1}(U) \cong U \times K^n$ za neki $n \in \mathbb{Z}_+$.*

Sljedeće razmatranje pokazuje da "*Taylorov red*" klice regularne funkcije u regularnoj točki potpuno određuje tu klicu.

Za glatku točku x višestrukosti X prsten $\mathcal{O}_{X,x}$ je regularan lokalni prsten. Ako je $n = \dim_x X$, na dovoljno maloj afinoj otvorenoj okolini U od x imamo koordinatni sistem $(f_1, \ldots, f_n, D_1, \ldots, D_n)$ takav da je $f_1(x) = \cdots = f_n(x) = 0$ i da je $\{D_1(x), \ldots, D_n(x)\}$ baza vektorskog prostora $T_x(X)$. Tada je $\{df_1(x), \ldots, df_n(x)\}$ njoj dualna baza od $T_x^*(X)$ i klase od $f_1, \ldots, f_n$ su koordinatni sistem u regularnom lokanom prstenu $\mathcal{O}_{X,x}$. Dakle, imamo prirodni homomorfizam

$$K[X_1, \ldots, X_n] \longrightarrow \mathcal{O}_{X,x}, \qquad P \mapsto P(f_1, \ldots, f_n).$$

Slika bilo kojeg polinoma kome 0 nije nultočka (tj. polinoma s konstantnim članom različitim od nule) je invertibilan element prstena $\mathcal{O}_{X,x}$. Dakle, gornji se homomorfizam produljuje do homomorfizma lokalnih prstenova

$$\varphi : \mathcal{A} = K[X_1, \ldots, X_n]_0 \longrightarrow \mathcal{O}_{X,x}.$$

Budući da je lokalni prsten $\mathcal{O}_{X,x}$ regularan, prema teoremu 3.2.8. $\operatorname{Gr}\varphi : \operatorname{Gr}\mathcal{A} \to \operatorname{Gr}\mathcal{O}_{X,x}$ je izomorfizam. Budući da je filtracija od $\mathcal{A}$ Hausdorffova, zaključujemo da je homomorfizam $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{O}_{X,x}$ injektivan. Dakle, možemo ga upotrijebiti kao identifikaciju i promatrati $\mathcal{A}$ kao potprsten od $\mathcal{O}_{X,x}$. Kompozicija $\mathcal{A} \to \mathcal{O}_{X,x} \to \mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_{X,x} \cong K$ je surjektivna (jer je $K-$linearna i netrivijalna). Dakle, jezgra tog homomorfizma $\mathcal{A} \cap \mathfrak{m}_{X,x}$ je jedinstven maksimalan ideal $\mathfrak{m}$ od $\mathcal{A}$; naravno, $\mathfrak{m}$ je skup svih razlomaka u $\mathcal{A} = K[X_1, \ldots, X_n]_0$ kojima je 0 nultočka brojnika. Slijedi $\mathfrak{m}^p \subseteq \mathcal{A} \cap \mathfrak{m}^p_{X,x}$ za svaki $p \in \mathbb{Z}_+$. Dakle, za svaki $p \in \mathbb{Z}_+$ imamo prirodni homomorfizam $\mathcal{A}/\mathfrak{m}^p \to \mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}^p_{X,x}$ i sljedeći je dijagram za svaki $p \in \mathbb{Z}_+$ komutativan:

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \operatorname{Gr}^p\mathcal{A} & \longrightarrow & \mathcal{A}/\mathfrak{m}^{p+1} & \longrightarrow & \mathcal{A}/\mathfrak{m}^p & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \operatorname{Gr}^p\mathcal{O}_{X,x} & \longrightarrow & \mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}^{p+1}_{X,x} & \longrightarrow & \mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}^p_{X,x} & \longrightarrow & 0.
\end{array}$$

Budući da su reci egzaktni i lijeva je vertikalna strelica izomorfizam, ako je desna vertikalna strelica izomorfizam, onda je i srednja vertikalna strelica izomorfizam. Stoga indukcijom zaključujemo da je $\mathcal{A}/\mathfrak{m}^p \to \mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}^p_{X,x}$ izomorfizam za svaki $p \in \mathbb{Z}_+$. To znači da je $\mathfrak{m}^p = \mathcal{A} \cap \mathfrak{m}^p_{X,x}$ za svaki $p \in \mathbb{Z}_+$. Nadalje, vrijedi $\mathcal{A} + \mathfrak{m}^p_{X,x} = \mathcal{O}_{X,x}$ za svaki $p \in \mathbb{Z}_+$. Dakle, $\mathcal{A}$ je gust u $\mathcal{O}_{X,x}$ u odnosu na $\mathfrak{m}_{X,x}-$adičku topologiju i ta topologija inducira na $\mathcal{A}$ upravo $\mathfrak{m}-$adičku topologiju. Odatle slijedi da su upotpunjenja od $\mathcal{A}$ i od $\mathcal{O}_{X,x}$ izomorfna. Upotpunjenje $\hat{\mathcal{A}}$ od $\mathcal{A}$ je prsten formalnih redova $K[[X_1, \ldots, X_n]]$, pa slijedi da se prsten $\mathcal{O}_{X,x}$ može identificirati s potprstenom od $K[[X_1, \ldots, X_n]]$.

Neka je $\hat{\mathfrak{m}}$ maksimalni ideal u prstenu $\hat{\mathcal{A}} = K[[X_1, \ldots, X_n]]$:

$$\hat{\mathfrak{m}} = \left\{ F;\ F = \sum_{|\alpha| \geq 1} a_\alpha X^\alpha \right\}.$$

Tada je

$$\hat{\mathfrak{m}}^p = \left\{ F;\ \sum_{|\alpha| \geq p} a_\alpha X^\alpha \right\}.$$

Neka su $\overline{X}_1, \ldots, \overline{X}_n$ slike od $X_1, \ldots, X_n$ u $\hat{\mathfrak{m}}/\hat{\mathfrak{m}}^2$. Odmah se vidi fda je tada $\left(\overline{X}_1, \ldots, \overline{X}_n\right)$ koordinatni sistem lokalnog prstena $\hat{\mathcal{A}}$. Nadalje, prirodni homomorfizam $K\left[\overline{X}_1, \ldots, \overline{X}_n\right] \to \operatorname{Gr}\hat{\mathcal{A}}$ je izomorfizam. Dakle, $\hat{\mathcal{A}} = K[[X_1, \ldots, X_n]]$ je regularan lokalni prsten.

Očito imamo $\mathfrak{m} = \mathcal{A} \cap \hat{\mathfrak{m}}$ i $\mathfrak{m}^p \subseteq \hat{\mathfrak{m}}^p$ za svaki $p \in \mathbb{Z}_+$. Prirodna inkluzija $\mathcal{A}$ u $\hat{\mathcal{A}}$ inducira izomorfizam $\operatorname{Gr}\mathcal{A}$ na $\operatorname{Gr}\hat{\mathcal{A}}$. Dakle, kao i malo prije za svaki $p \in \mathbb{Z}_+$ imamo komutativan dijagram s egzaktnim recima u kome je lijeva vertikalna strelica izomorfizam:

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \operatorname{Gr}^p\mathcal{A} & \longrightarrow & \mathcal{A}/\mathfrak{m}^{p+1} & \longrightarrow & \mathcal{A}/\mathfrak{m}^p & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \operatorname{Gr}^p\hat{\mathcal{A}} & \longrightarrow & \hat{\mathcal{A}}/\hat{\mathfrak{m}}^{p+1} & \longrightarrow & \hat{\mathcal{A}}/\hat{\mathfrak{m}}^p & \longrightarrow & 0.
\end{array}$$

Odatle ponovo indukcijom zaključujemo da je $\mathfrak{m}^p = \mathcal{A} \cap \hat{\mathfrak{m}}^p$, tj.

$$\mathfrak{m}^p = \left\{ f \in \mathcal{A};\ f = \sum_{|\alpha| \geq p} a_\alpha X^\alpha \right\} \qquad \forall p \in \mathbb{Z}_+.$$

Neka je T lokalno vektorsko polje na U. Tada ono inducira derivaciju T_x od $\mathcal{O}_{X,x}$. Indukcijom po p nalazimo da je $T_x\left(\mathfrak{m}_{X,x}^p\right) \subseteq \mathfrak{m}_{X,x}^{p-1}$ za svaki $p \in \mathbb{N}$. Dakle, preslikavanje T_x je neprekidno u $\mathfrak{m}_{X,x}-$adičkoj topologiji od $\mathcal{O}_{X,x}$, pa se produljuje do neprekidne derivacije $\mathfrak{m}_{X,x}-$adičkog upotpunjenja od $\mathcal{O}_{X,x}$. S druge strane, presten polinoma $K[X_1, \ldots, X_n]$ gust je u prstenu formalnih redova potencija $K[[X_1, \ldots, X_n]]$, dakle, svaka neprekidna derivacija prstena $K[[X_1, \ldots, X_n]]$ potpuno je određena svojim djelovanjem na $X_1, \ldots, X_n$. Budući da je $D_i(f_j) = \delta_{ij}$ za $1 \leq i, j \leq n$, slijedi da pri opisanom izomorfizmu derivacija D_i odgovara derivaciji ∂_i za $1 \leq i \leq n$.

Svaki se formalni red potencija $F \in K[[X_1, \ldots, X_n]]$ može zapisati kao Taylorov red

$$F = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^n} \frac{(\partial^\alpha F)(0)}{\alpha!} X^\alpha.$$

To zajedno s prethodnom diskusijom neposredno povlači:

Propozicija 7.2.8. *Neka je x glatka točka višestrukosti X i $(f_1, \ldots, f_n, D_1, \ldots, D_n)$ koordinatni sistem na afinoj otvorenoj okolini točke x. Za svaku $f \in \mathcal{O}_{X,x}$ i za svaki $p \in \mathbb{Z}_+$ sljedeća su svojstva međusobno ekvivalentna:*

(*a*) $f \in \mathfrak{m}_{X,x}^p$.

(*b*) $(D^\alpha f)(x) = 0 \;\; \forall \alpha \in \mathbb{Z}_{+,\leq p-1}^n$.

Posebno, vrijedi $(D^\alpha f)(x) = 0 \;\; \forall \alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ ako i samo ako je $f = 0$.

7.3 Snopovi diferencijalnih operatora na glatkim višestrukostima

U cijelom ovom odjeljku X je glatka višestrukost nad algebarski zatvorenim poljem karakteristike 0, $\mathcal{D}_X$ je snop lokalnih diferencijalnih operatora na X, $F\mathcal{D}_X = (F_p\mathcal{D}_X)_{p\in\mathbb{Z}}$ filtracija po redu diferencijalnih operatora, $\operatorname{Gr}\mathcal{D}_X$ odgovarajući snop graduiranih algebri na X.

Opisat ćemo najprije strukturu od $\operatorname{Gr}\mathcal{D}_X$. Neka je U afini otvoren podskup od X. Tada je, po definiciji, $\Gamma(U,\mathcal{D}_X) = \mathcal{D}_X(U) = D(U) = \operatorname{Diff}(K[U])$. Kao u odjeljku 2.1. za svaki $p \in \mathbb{Z}_+$ i za svaki $T \in D_p(U)$ definiramo preslikavanje

$$\sigma_p(T) : K[U]^p \longrightarrow K[U], \qquad \sigma_p(T)(f_1,\dots,f_p) = [[\cdots[[T,f_1],f_2]\cdots,f_{p-1}],f_p].$$

Prema lemi 2.1.5. to je preslikavanje simetrično i multilinearno i $\sigma_p(T) = 0$ ako je $T \in D_{p-1}(U)$. Nadalje, za svaki $1 \le i \le p$ i za $f_1,\dots,f_{i-1},f_{i+1},\dots,f_p \in K[U]$ preslikavanje

$$f \mapsto \sigma_p(T)(f_1,\dots,f_{i-1},f,f_{i+1},\dots,f_p)$$

je lokalno vektorsko polje na U. Da to dokažemo, zbog simetričnosti možemo pretpostaviti da je $i = p$. Očito je to diferencijalni operator na U reda ≤ 1 koji iščezava na konstantama, odnosno, na funkcijama iz $K[U]$. Kako je prema lemi 2.1.2. $D_1(U) = K[U] \oplus \operatorname{Der}(K[U])$, to je stvarno lokalno vektorsko polje na U. To ima za posljedicu da $\sigma_p(T)(f_1,\dots,f_p)(x)$ ovisi samo o diferencijalima $df_i(x)$ od f_i, $1 \le i \le p$, u točki x. Dakle, možemo definirati funkciju $\operatorname{Symb}_p(T)$ na kotangencijalnom svežnju $T^*(U)$ od U sa

$$\operatorname{Symb}_p(T)(x,\omega) = \frac{1}{p!}\sigma_p(T)(f,\dots,f)(x), \quad \text{gdje je } f \in K[U] \text{ takva da je } df(x) = \omega.$$

Lema 7.3.1. (*a*) *Funkcija* $\operatorname{Symb}_p(T)$ *je regularna na* $T^*(U)$.

(*b*) *Za svaku točku* $x \in U$ *funkcija* $\omega \mapsto \operatorname{Symb}_p(T)(x,\omega)$ *je homogeno polinomijalno preslikavanje stupnja* p *na prostoru* $T_x^*(X)$.

Dokaz: Budući da su obje tvrdnje lokalne, možemo pretpostaviti da je U dovoljno malen afini otvoren skup na kome postoji koordinatni sustav $(f_1,\dots,f_n,D_1,\dots,D_n)$ i takav da je preslikavanje

$$(x,\xi_1,\dots,\xi_n) \mapsto \left(x, \sum_{i=1}^n \xi_i df_i(x)\right),$$

izomorfizam algebarskih višestrukosti sa $U \times K^n$ na $T^*(U)$. Budući da je evidentno

$$(x,\xi_1,\dots,\xi_n) \mapsto \frac{1}{p!}\sigma_p(T)\left(\sum \xi_i f_i,\dots,\sum \xi_i f_i\right)(x)$$

regularna funkcija na $U \times K^n$, tvrdnja (a) slijedi. Tvrdnja (b) je evidentna.

Funkcija $\operatorname{Symb}_p(T)$ zove se $p-$**simbol diferencijalnog operatora** T.

Neka je $\pi : T^*(X) \to X$ prirodna projekcija definirana sa $\pi(x,\omega) = x$ za $x \in X$ i $\omega \in T_x^*(X)$. Budući da je π lokalno trivijalna fibracija i da je $T_x^*(X)$ vlakno te filtracije nad točkom $x \in X$, vidimo da prirodna graduacija po stupnju homogenih polinomijalnih funkcija na $T_x^*(X)$ uvodi strukturu snopa graduiranih algebri nad snopom direktne slike $\pi_*\left(\mathcal{O}_{T^*(X)}\right)$. Preslikavanje Symb_p definira morfizam snopa $F_p\mathcal{D}_X$ u $\operatorname{Gr}^p\pi_*\left(\mathcal{O}_{T^*(X)}\right)$ i taj ćemo morfizam označiti istim znakom Symb_p. Taj morfizam iščezava na podsnopu $F_{p-1}\mathcal{D}_X$, dakle, on određuje morfizam snopa $\operatorname{Gr}^p\mathcal{D}_X$ u $p-$tu homogenu komponentu $\operatorname{Gr}^p\pi_*\left(\mathcal{O}_{T^*(X)}\right)$ snopa $\pi_*\left(\mathcal{O}_{T^*(X)}\right)$. Neka je $\operatorname{Symb} : \operatorname{Gr}\mathcal{D}_X \to \operatorname{Gr}\pi_*\left(\mathcal{O}_{T^*(X)}\right)$ odgovarajući morfizam snopova graduiranih algebri.

Teorem 7.3.2. *Preslikavanje* $\mathrm{Symb} : \mathrm{Gr}\,\mathcal{D}_X \to \mathrm{Gr}\,\pi_*\left(\mathcal{O}_{T^*(X)}\right)$ *je izomorfizam snopova graduiranih* $\mathcal{O}_X-$*algebri.*

Dokaz ovog teorema sastoji se od nekoliko koraka. Prvo dokazujemo da je Symb morfizam snopova $K-$algebri.

Lema 7.3.3. *Neka je* U *otvoren podskup od* X, $T \in F_p\mathcal{D}_X(U)$ *i* $S \in F_q\mathcal{D}_X(U)$. *Tada je*

$$\mathrm{Symb}_{p+q}(TS) = \mathrm{Symb}_p(T)\mathrm{Symb}_q(S).$$

Dokaz: Neka je $f \in \mathcal{O}_X(U)$ i definiramo preslikavanje $\tau : \mathcal{D}_X(U) \to \mathcal{D}_X(U)$ sa $\tau(T) = [T, f]$. Tada je

$$\tau(TS) = [TS, f] = [T, f]S + T[S, f] = \tau(T)S + T\tau(T).$$

Drugim riječima, preslikavanje τ je derivacija algebre $\mathcal{D}_X(U)$. Stoga za svaki $k \in \mathbb{Z}_+$ vrijedi

$$\tau^k(TS) = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \tau^{k-i}(T)\tau^i(S).$$

Prema tome, ako fiksiramo $x \in X$ i $\omega \in T^*_x(X)$ i regularnu funkciju f na okolini točke x takvu da je $\omega = df(x)$, onda imamo

$$\mathrm{Symb}_{p+q}(TS)(x, \omega) = \frac{1}{(p+q)!}\sigma_{p+q}(T)(f, \cdots, f)(x) = \frac{1}{(p+q)!}\tau^{p+q}(TS)(x) =$$

$$= \frac{1}{(p+q)!}\left(\sum_{i=0}^{p+q}\binom{p+q}{i}\tau^{p+q-i}(T)\tau^i(S)\right)(x).$$

Budući da je $T \in F_p\mathcal{D}_X(U)$, vrijedi $\tau^k(T) = 0$ za $k > p$, dakle, $\tau^{p+q-i}(T) = 0$ za $i < q$. Nadalje, kako je $S \in F_q\mathcal{D}_X(U)$, vrijedi $\tau^i(S) = 0$ za $i > q$. Dakle, u posljednjoj sumi ostaje samo član za $i = q$, pa dobivamo

$$\mathrm{Symb}_{p+q}(TS)(x, \omega) = \frac{1}{(p+q)!}\binom{p+q}{q}\tau^p(T)(x)\tau^q(S)(x) =$$

$$= \frac{1}{p!}\tau^p(T)(x) \cdot \frac{1}{q!}\tau^q(S)(x) = \mathrm{Symb}_p(T)(x, \omega)\mathrm{Symb}_q(S)(x, \omega).$$

Time je lema dokazana.

Budući da je fibracija $\pi : T^*(X) \to X$ lokalno trivijalna, nulta homogena komponenta snopa $\pi_*\left(\mathcal{O}_{T^*(X)}\right)$ graduiranih algebri jednaka je $\mathcal{O}_X$ i preslikavanje Symb_0 je identiteta. Prema tome, posljedica leme 7.3.3. je ne samo da je Symb morfizam snopova graduiranih $K-$algebri, nego je to morfizam snopova graduiranih $\mathcal{O}_X-$algebri.

Prva homogena komponenta $\mathrm{Gr}^1\pi_*\left(\mathcal{O}_{T^*(X)}\right)$ od $\mathrm{Gr}\,\pi_*\left(\mathcal{O}_{T^*(X)}\right)$ je prirodno izomorfna $\mathcal{T}_X$. Nadalje,

$$\mathrm{Symb}_1(x, df(x)) = [T, f](x) = T(f)(x) = T(x)(df(x))$$

za svako vektorsko polje T i svaku regularnu funkciju f na okolini točke x. Budući da vrijedi $F_1\mathcal{D}_X = \mathcal{O}_X \oplus \mathcal{T}_X$, zaključujemo da je Symb_1 izomorfizam snopa $\mathrm{Gr}^1\mathcal{D}_X$ na prvu homogenu komponentu snopa $\pi_*\left(\mathcal{O}_{T^*(X)}\right)$. Zbog lokalne trivijalnosti fibracije π, snop $\mathrm{Gr}\,\pi_*\left(\mathcal{O}_{T^*(X)}\right)$ graduiranih algebri generiran je s nultom i prvom svojom homogenom komponentom. Odatle slijedi da je preslikavanje $\mathrm{Symb} : \mathrm{Gr}\,\mathcal{D}_X \to \mathrm{Gr}\,\pi_*\left(\mathcal{O}_{T^*(X)}\right)$ surjektivno. Treba još dokazati da je i injektivno, tj. da mu je jezgra 0.

Lema 7.3.4. *Neka je $T \in F_p\mathcal{D}_X(U)$. Tada je $\mathrm{Symb}_p(T) = 0$ ako i samo ako je $T \in F_{p-1}\mathcal{D}_X(U)$.*

Dokaz: Tvrdnja je lokalna pa možemo pretpostaviti da je U afini otvoren podskup od X. Tvrdnju dokazujemo indukcijom po p. Tvrdnja je evidentna ako je $p = 0$. Pretpostavimo da je $p > 0$ i da je tvrdnja dokazana za niže redove diferencijalnih operatora. Fiksirajmo $f \in \mathcal{O}_X(U)$. Tada je $[T, f] \in F_{p-1}\mathcal{D}_X(U)$. Neka je $x \in U$ i $\omega \in T_x^+(X)$. Stavimo $\eta = df(x)$. Budući da okolinu U točke x možemo smanjiti ako je potrebno, možemo pretpostaviti da je $\omega = dg(x)$ za neku $g \in \mathcal{O}_X(U)$. Za $h \in \mathcal{O}_X(U)$ definiramo preslikavanje $\tau_h : \mathcal{D}_X(U) \to \mathcal{D}_X(U)$ sa $\tau_h(T) = [T, h]$. Preslikavanje $h \mapsto \tau_h$ je očito linearno pa za proizvoljan $\lambda \in K$ imamo $\tau_{f+\lambda g}(T) = \tau_f(T) + \lambda\tau_g(T)$. Budući da zbog Jacobijevog identiteta preslikavanja τ_f i τ_g komutiraju, nalazimo za svaki $k \in \mathbb{Z}_+$:

$$\tau_{f+\lambda g}^k(T) = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \lambda^i \tau_g^{k-i}\left(\tau_f^i(T)\right).$$

Ako pretpostavimo da je $\mathrm{Symb}_p(T) = 0$, onda funkcija

$$\lambda \mapsto \mathrm{Symb}_p(T)(x, \eta + \lambda\omega) = \frac{1}{p!}\tau_{f+\lambda g}^p(T)(x)$$

iščezava identički na K. Kako je polje K beskonačno, svi koeficijenti tog polinoma su jednaki nuli, odnosno, vrijedi

$$\tau_g^{p-i}\left(\tau_f^i(T)\right) = 0 \qquad \text{za} \quad 0 \le i \le p.$$

Odatle je

$$\mathrm{Symb}_{p-1}([T, f])(x, \omega) = \frac{1}{(p-1)!}\tau_g^{p-1}\left([T, f]\right)(x) = \frac{1}{(p-1)!}\tau_g^{p-1}\left(\tau_f(T)\right) = 0.$$

To vrijedi za svaki $\omega \in T_x^*(X)$, a i točka $x \in U$ je bila proizvoljna. Dakle, $\mathrm{Symb}_{p-1}([T, f]) = 0$. Po pretpostavci indukcije zaključujemo da je $[T, f] \in F_{p-2}\mathcal{D}_X(U)$. No kako je $f \in \mathcal{O}_X(U)$ bila proizvoljna, to znači da je $T \in F_{p-1}\mathcal{D}_X(U)$.

Time je teorem 7.3.2. dokazan.

Propozicija 7.3.5. *Snop $\mathcal{D}_X$ lokalnih diferencijalnih operatora na glatkoj višestrukosti X je lokalno slobodan $\mathcal{O}_X-$modul za lijevo (i za desno) množenje. Preciznije, svaka točka $x \in X$ ima otvorenu afinu okolinu U s koordinatnim sistemom $(f_1, \ldots, f_n, D_1, \ldots, D_n)$ takvima da vrijedi:*

(a) $D^\alpha D^\beta = D^{\alpha+\beta}\ \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^n$.

(b) $\{D^\alpha;\ \alpha \in \mathbb{Z}_{+,\le p}^n\}$ *je baza slobodnog $\mathcal{O}_X(U)-$modula $F_p\mathcal{D}_X(U)$ u odnosu na lijevo (i u odnosu na desno) množenje.*

(c) $\{D^\alpha;\ \alpha \in \mathbb{Z}_+^n\}$ *je baza slobodnog $\mathcal{O}_X(U)-$modula $\mathcal{D}_X(U)$ u odnosu na lijevo (i u odnosu na desno) množenje.*

Dokaz: Neka je U afina otvorena okolina točke x i $(f_q, \ldots, f_n, D_1, \ldots, D_n)$ koordinatni sistem na U kao u teoremima 5.6.13. i 7.2.2. Tada je $[D_i, D_j] = 0$ za bilo koje $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, odakle neposredno slijedi (a).

Neka je $\xi_i = \mathrm{Symb}_1(D_i)$ za $1 \le i \le n$. Tada je $\pi_*\left(\mathcal{O}_{T^*(X)}\right)(U)$ slobodan $\mathcal{O}_X(U)-$modul s bazom $\{\xi^\alpha;\ \alpha \in \mathbb{Z}_+^n\}$ i njegove su homogene komponente slobodni $\mathcal{O}_X(U)-$moduli. Iz egzaktnog niza

$$0 \longrightarrow F_{p-1}\mathcal{D}_X \longrightarrow F_p\mathcal{D}_X \longrightarrow \mathrm{Gr}^p\mathcal{D}_X \longrightarrow 0$$

i iz teorema 7.3.2. indukcijom po $p \in \mathbb{Z}_+$ zaključujemo da je $F_p\mathcal{D}_X(U)$ slobodan $\mathcal{O}_X(U)-$modul generiran sa $\{D^\alpha;\ \alpha \in \mathbb{Z}^n_{+,\leq p}\}$. Pretpostavimo sada da je

$$\sum_{|\alpha|\leq p} f_\alpha D^\alpha = 0.$$

Uzmemo li $p-$ti simbol tog diferencijalnog operatora, slijedi da je $f_\alpha = 0$ ako je $|\alpha| = p$. Odatle indukcijom na dolje zaključujemo da su sve funkcije f_α jednake nuli. To dokazuje linearnu nezavisnost nad $\mathcal{O}_X(U)$ generatora D^α, $|\alpha| \leq p$, $\mathcal{O}_X(U)-$modula $F_p\mathcal{D}_X(U)$. Odatle slijede tvrdnje (b) i (c).

Propozicija 7.3.6. *Neka je X glatka afina višestrukost.*

(a) $\operatorname{Gr} D(X)$ *je Noetherin prsten.*

(b) $\operatorname{Gr} D(X)$ *je unitalna $K[X]-$algebra generirana sa* $\operatorname{Gr}^1 D(X)$.

Dokaz: Budući da je fibracija $\pi : T^*(X) \to X$ lokalno trivijalna i vlakna su vektorski prostori, slijedi da je π afini morfizam. To znači da je $T^*(X)$ afina višestrukost. Dakle,

$$\operatorname{Gr} D(X) = \Gamma(X, \operatorname{Gr} \mathcal{D}_X) \cong \Gamma\left(X, \pi_*\left(\mathcal{O}_{T^*(X)}\right)\right) = \Gamma\left(T^*(X), \mathcal{O}_{T^*(X)}\right) = K\left[T^*(X)\right]$$

je konačno generirana $K-$algebra i Noetherin prsten. Nadalje, budući da je $\pi_*\left(\mathcal{O}_{T^*(X)}\right)$ generirana kao $\mathcal{O}_X-$algebra sa svojom homogenom komponentom stupnja 1, prirodni homomorfizam

$$\pi_*\left(\mathcal{O}_{T^*(X)}\right)_1 \otimes_{\mathcal{O}_X} \pi_*\left(\mathcal{O}_{T^*(X)}\right)_p \longrightarrow \pi_*\left(\mathcal{O}_{T^*(X)}\right)_{p+1}$$

je surjektivan za svaki $p \in \mathbb{Z}_+$. Budući da je višestrukost X afina, to povlači da je odgovarajući homomorfizam globalnih prereza surjektivan. Dakle, $\operatorname{Gr} D(X)$ kao unitalna $K[X]-$algebra generirana je sa $\operatorname{Gr}^1 D(X)$.

Teorem 7.3.7. *Neka je X glatka afina višestrukost.*

(a) *$D(X)$ je lijevo i desno Noetherin prsten.*

(b) *Prsten $D(X)$ generiran je sa $K[X]$ i s globalnim vektorskim poljima na X.*

Dokaz: Prema propoziciji 7.3.6. $D(X)$ je filtrirani prsten koji zadovoljava uvjete $(1)-(7)$ iz odjeljka 3.3. Stoga (a) slijedi iz propozicije 3.3.5.

(b) Označimo sa A potprsten od $D(X)$ generiran sa $K[X]$ i s globalnim vektorskim poljima na X. Neka je FA inducirana filtracija na A i $\operatorname{Gr} A$ pripadni graduiran prsten. Tada imamo injektivni homomorfizam $\operatorname{Gr} A \to \operatorname{Gr} D(X)$. Prema tvrdnji (b) propozicije 7.3.6. taj je homomorfizam i surjektivan. Odatle slijedi da je $A = D(X)$.

Poglavlje 8

MODULI NAD SNOPOVIMA DIFERENCIJALNIH OPERATORA

8.1 Koherentnost i kvazikoherentnost za $\mathcal{D}_X-$module

Neka je $\mathcal{A}$ snop unitalnih prstenova na topološkom prostoru X. Sa $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ označavamo kategoriju snopova (lijevih) $\mathcal{A}-$modula na X. Neka je $A = \Gamma(X, \mathcal{A})$ unitalni prsten globalnih prereza od $\mathcal{A}$ i neka je $\mathcal{M}(A)$ kategorija $A-$modula. Tada imamo prirodni aditivni **funktor globalnih prereza** $\Gamma = \Gamma(X, -) : \mathcal{M}(\mathcal{A}) \to \mathcal{M}(A)$. Nadalje, imamo prirodni izomorfizam funktora $Hom_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}, -)$ u funktor Γ koji za svaki $\mathcal{A}-$modul $\mathcal{V}$ preslikava morfizam $T : \mathcal{A} \to \mathcal{V}$ u $T(1_X) \in \Gamma(X, \mathcal{V})$. Definiramo i **funktor lokalizacije** $\Delta : \mathcal{M}(A) \to \mathcal{M}(\mathcal{A})$ sa

$$\Delta(V) = \mathcal{A} \otimes_A V.$$

Tada je Δ aditivni desno egzaktni funktor i lako se vidi da vrijedi

$$Hom_{\mathcal{A}}\left(\mathcal{A} \otimes_A V, \mathcal{W}\right) = Hom_A\left(V, Hom_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}, \mathcal{W})\right) \qquad \forall V \in \mathcal{M}(A) \quad \text{i} \quad \forall \mathcal{W} \in \mathcal{M}(\mathcal{A}).$$

Kako se $Hom_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}, -)$ identificira s funktorom Γ, to znači da vrijedi

$$Hom_{\mathcal{A}}(\Delta(V), \mathcal{W})) = Hom_A(V, \Gamma(\mathcal{W})) \qquad \forall V \in \mathcal{M}(A) \quad \text{i} \quad \forall \mathcal{W} \in \mathcal{M}(\mathcal{A}),$$

odnosno, funktor lokalizacije Δ je lijevo adjungiran funktoru globalnih prereza Γ. Posebno, imamo morfizme adjungiranosti iz identuičnog funktora $id_{\mathcal{M}(A)}$ na kategoriji $\mathcal{M}(A)$ u funktor $\Gamma \circ \Delta$ i morfizme adjungiranosti iz funktora $\Delta \circ \Gamma$ u funktor identitete $id_{\mathcal{M}(\mathcal{A})}$ na kategoriji $\mathcal{M}(\mathcal{A})$.

Neka je u daljnjem X višestrukost i $\mathcal{A} = \mathcal{O}_X$ njen strukturni snop. Sada ulogu A ima prsten regularnih funkcija $R(X) = \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ na X. Ako je višestrukost X afina, $R(X)$ identificira se s afinom algebrom $K[X]$. Iz definicije kvazikoherentnosti (snopova) $\mathcal{O}_X-$modula pokazuje se da je za afinu višestrukost X snop $\mathcal{O}_X-$modula $\mathcal{V} \in \mathcal{M}(\mathcal{O}_X)$ kvazikoherentan ako i samo ako postoji $K[X]-$modul V takav da je $\mathcal{V} \cong \Delta(V) = \mathcal{O}_X \otimes_{K[X]} V$. Punu potkategoriju od $\mathcal{M}(\mathcal{O}_X)$ svih kvazikoherentnih $\mathcal{O}_X-$modula označavamo sa $\mathcal{M}_{\mathrm{qc}}(\mathcal{O}_X)$.

Teorem 8.1.1. (**J. P. Serre**) *Za afinu višestrukost X funktor lokalizacije*

$$\Delta : \mathcal{M}(K[X]) \to \mathcal{M}_{\mathrm{qc}}(\mathcal{O}_X)$$

je ekvivalencija kategorija i funktor globalnih prereza

$$\Gamma : \mathcal{M}_{\mathrm{qc}}(\mathcal{O}_X) \to \mathcal{M}(K[X])$$

je njezin kvaziinvers.

Neka je $\mathcal{D}_X$ snop diferencijalnih operatora na višestrukosti X. Tada imamo prirodni homomorfizam $\iota : \mathcal{O}_X \to \mathcal{D}_X$ snopova unitalnih prstenova. On definira zaboravni funktor iz kategorije $\mathcal{M}(\mathcal{D}_X)$ u kategoriju $\mathcal{M}(\mathcal{O}_X)$. Kažemo da je $\mathcal{D}_X-$**modul** $\mathcal{V}$ **kvazikoherentan** ako je on kvazikoherentan ako $\mathcal{O}_X-$modul. Sa $\mathcal{M}_{\mathrm{qc}}(\mathcal{D}_X)$ označavamo punu potkategoriju od $\mathcal{M}(\mathcal{D}_X)$ svih kvazikoherentnih $\mathcal{D}_X-$modula.

Neka je X afina višestrukost i $D_X = \Gamma(X, \mathcal{D}_X)$ prsten globalnih diferencijalnih operatora na X. Posljedica je Serreovog teorema da je funktor $\Gamma : \mathcal{M}_{\mathrm{qc}}(\mathcal{D}_X) \to \mathcal{M}(D_X)$ egzaktan. Imamo sljedeći analogon Serreovog teorema:

Teorem 8.1.2. *Ako je X afina višestrukost, funktor globalnih prereza $\Gamma : \mathcal{M}_{\mathrm{qc}}(\mathcal{D}_X) \to \mathcal{M}(D_X)$ je ekvivalencija kategorija i njegov je kvaziinvers funktor lokalizacije $\Delta : \mathcal{M}(D_X) \to \mathcal{M}_{\mathrm{qc}}(\mathcal{D}_X)$.*

Pretpostavimo sada da je X glatka afina višestrukost. Tada je D_X Noetherin prsten. Označimo sa $\mathcal{M}_f(D_X)$ punu potkategoriju od $\mathcal{M}(D_X)$ svih konačno generiranih D_X-modula. Kažemo da je $\mathcal{V} \in \mathcal{M}(\mathcal{D}_X)$ **koherentan** $\mathcal{D}_X-$**modul** ako je $\mathcal{V} \cong \Delta(V)$ za neki $V \in \mathcal{M}_f(D_X)$. Označino sa $\mathcal{M}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{D}_X)$ punu potkategoriju od $\mathcal{M}(\mathcal{D}_X)$ svih koherentnih $\mathcal{D}_X-$modula. Neposredna posljedica teorema 8.1.2. je

Teorem 8.1.3. *Za glatku afinu višestrukost $\Gamma : \mathcal{M}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{D}_X) \to \mathcal{M}_f(D_X)$ je ekvivalencija kategorija s kvaziinversom $\Delta : \mathcal{M}_f(D_X) \to \mathcal{M}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{D}_X)$.*

Vrijedi:

Propozicija 8.1.4. *Za glatku afinu višestrukost X kvazikoherentan $\mathcal{D}_X-$modul $\mathcal{V}$ je koherentan ako i samo ako svaka točka $x \in X$ ima otvorenu okolinu U takvu da za neke $p, q \in \mathbb{Z}_+$ postoji egzaktan niz oblika*

$$\mathcal{D}_U^p \longrightarrow \mathcal{D}_U^q \longrightarrow \mathcal{V}|U \longrightarrow 0.$$

U daljnjem je stalno X proizvoljna glatka višestrukost. Kažemo da je $\mathcal{V}$ **koherentan** $\mathcal{D}_X-$**modul** ako je on kvazikoherentan i ima svojstvo iz propozicije 8.1.4.: svaka točka $x \in X$ ima otvorenu okolinu U takvu da za neke $p, q \in \mathbb{Z}_+$ postoji egzaktan niz

$$\mathcal{D}_U^p \longrightarrow \mathcal{D}_U^q \longrightarrow \mathcal{V}|U \longrightarrow 0.$$

Očito je kvazikoherentan $\mathcal{D}_X-$modul $\mathcal{V}$ koherentan ako i samo ako je $\mathcal{V}|U$ koherentan $\mathcal{D}_U-$modul za svaku afini otvoren podskup U od X. Štoviše, dovoljno je da postoji konačan pokrivač od X takvim skupovima.

Za glatku višestrukost X sa $\mathcal{M}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{D}_X)$ označavamo punu potkategoriju od $\mathcal{M}_{\mathrm{qc}}(\mathcal{D}_X)$ svih koherentnih $\mathcal{D}_X-$modula. Općenito je nosač $\mathrm{supp}(\mathcal{F})$ snopa modula $\mathcal{F}$ bio definiran kao komplement najvećeg otvorenog podskupa $U \subseteq X$ takvog da je $\mathcal{F}|U = 0$. Iz definicije je jasno da je $\mathrm{supp}(\mathcal{F})$ zatvarač skupa $\{x \in X;\ \mathcal{F}_x \neq 0\}$. No za koherentan $\mathcal{D}_X-$modul na glatkoj višestrukosti pokazuje se da je posljednji skup zatvoren, odnosno, vrijedi:

Propozicija 8.1.5. *Neka je $\mathcal{V}$ koherentan $\mathcal{D}_X-$modul na glatkoj višestrukosti X. Tada je*

$$\mathrm{supp}(\mathcal{V}) = \{x \in X;\ \mathcal{V}_x \neq 0\}.$$

Kažemo da je kvazikoherentan $\mathcal{D}_X-$**modul** $\mathcal{V}$ **ireducibilan** ako je $\mathcal{V} \neq 0$ i ako su 0 i $\mathcal{V}$ jedini kvazikoherentni $\mathcal{D}_X-$podmoduli od $\mathcal{V}$. Tada se lako vidi da je za svaki otvoren podskup $U \subseteq X$ ili $\mathcal{V}|U = 0$ ili je $\mathcal{V}|U$ ireducibilan $\mathcal{D}_U-$modul. Odatle se dokazuje:

Teorem 8.1.6. *Neka je $\mathcal{V}$ ireducibilan $\mathcal{D}_X-$modul.*

(*a*) *$\mathcal{V}$ je koherentan $\mathcal{D}_X-$modul.*

(*b*) $\mathrm{supp}(\mathcal{V})$ *je ireducibilna zatvorena podvišestrukost.*

Za kvazikoherentan $\mathcal{D}_X$−modul $\mathcal{V}$ kažemo da je **konačne duljine** ako postoji konačna filtracija

$$0 = \mathcal{V}_0 \subsetneq \mathcal{V}_1 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathcal{V}_n = \mathcal{V}$$

s kvazikoherentnim $\mathcal{D}_X$−podmodulima takvima da je $\mathcal{V}_p/\mathcal{V}_{p-1}$ ireducibilan $\mathcal{D}_X$−modul za sve $p = 1, \ldots, .$ Pokazuje se da tada broj n ne ovisi o izboru takve filtracije. Taj se broj označava $\ell(\mathcal{V})$ i zove **duljina** od $\mathcal{V}$.

Teorem 8.1.7. (*a*) *Svaki kvazikoherentan $\mathcal{D}_X$−modul konačne duljine je koherentan.*

(*b*) *Za kvazikoherentan $\mathcal{D}_X$−modul $\mathcal{V}$ sljedeća su tri svojstva međusobno ekvivalentna:*

(1) *Modul $\mathcal{V}$ je konačne duljine.*

(2) *Za svaki otvoren skup $U \subseteq X$ restrikcija $\mathcal{V}|U$ je $\mathcal{D}_U$−modul konačne duljine.*

(3) *Postoji otvoren pokrivač $\{U_1, \ldots, U_s\}$ od X takav da je restrikcija $\mathcal{V}|U_j$ $\mathcal{D}_{U_j}$−modul konačne duljine za $1 \leq j \leq s$.*

(*c*) *Ako je $\mathcal{V}$ $\mathcal{D}_X$−modul konačne duljine, za svaki otvoren skup $U \subseteq X$ vrijedi $\ell(\mathcal{V}|U) \leq \ell(\mathcal{V})$.*

8.2 Karakteristične višestrukosti

Generalizirat ćemo pojam karakteristične višestrukosti na proizvoljne koherentne $\mathcal{D}_X-$module na glatkoj višestrukosti X. Najprije pretpostavljamo da je X glatka afina višestrukost. Na algebri diferencijalnih operatora D_X koristimo fektraciju redom diferencijalnog operatora. Kotangencijalni svežanj $T^*(X)$ je glatka afina višestrukost. Kao u dokazu teorema 7.3.2. dobivaju se identifikacije

$$\operatorname{Gr} D_X = \Gamma(X, \operatorname{Gr} \mathcal{D}_X) = \Gamma(X, \operatorname{Gr} \pi_*(\mathcal{O}_{T^*(X)})) = \Gamma(T^*(X), \mathcal{O}_{T^*(X)}) = K[T^*(X)].$$

Neka je V konačno generirani D_X-modul. Tada V ima dobru filtraciju i uz gornju identifikaciju pripadni graduirani modul $\operatorname{Gr} V$ je konačno generirani $K[T^*(X)]-$modul. Neka je I njegov anihilator u $K[T^*(X)]$. Radikal $J(V)$ ideala I ne ovisi o izboru dobre filtracije na V i zove se **karakteristični ideal** modula V, a njegov skup nultočaka u $T^*(X)$ označava se $Ch(V)$ i zove **karakteristična višestrukost** D_X-modula V.

Neka je sada $\mathcal{V}$ koherentan $\mathcal{D}_X-$modul na glatkoj afinoj višestrukosti X. Tada sa $Ch(\mathcal{V})$ označavamo karakterističnu višestrukost D_X-modula $\Gamma(X, \mathcal{V})$. $Ch(\mathcal{V})$ se zove **karakteristična višestrukost $\mathcal{D}_X-$modula $\mathcal{V}$**.

Propozicija 8.2.1. *Ako je $\mathcal{V}$ koherentan $\mathcal{D}_X-$modul na glatkoj afinoj višestrukosti X i ako je $U \subseteq X$ afini otvoren podskup onda je*

$$Ch(\mathcal{V}|U) = Ch(\mathcal{V}) \cap \pi^{-1}(U),$$

pri čemu je $\pi : T^*(X) \to X$ kanonstka fibracija.

Pomoću ove propozicije dokazuje se:

Propozicija 8.2.2. *Neka je X glatka višestrukost i $\mathcal{V}$ koherentan $\mathcal{D}_X-$modul. Tada postoji jedinstvena zatvorena podvišestrukost $Ch(\mathcal{V})$ kotangencijalnog svežnja $T^*(X)$ takva da za svaki afini otvoren podskup $U \subseteq X$ vrijedi $Ch(\mathcal{V}|U) = Ch(\mathcal{V}) \cap \pi^{-1}(U)$.*

Dokazuje se da je

$$Ch(\mathcal{V}) = \bigcup_U Ch(\mathcal{V}|U),$$

gdje se unija uzima preko svih afinih otvorenih podskupova $U \subseteq X$, a jednaka je uniji po članovima bilo kojeg konačnog pokrivača od X afinim otvorenim podskupovima. Ta se zatvorena podvišestrukost $Ch(\mathcal{V})$ od $T^*(X)$ zove **karakteristična višestrukost** koherentnog $\mathcal{D}_X-$modula $\mathcal{V}$.

Teorem 8.2.3. *Karakteristična višestrukost $Ch(\mathcal{V})$ koherentnog $\mathcal{D}_X-$modula $\mathcal{V}$ na glatkoj višestrukosti X je konička podvišestrukost od $T^*(X)$, odnosno, vrijedi*

$$(x, \omega) \in Ch(\mathcal{V}) \qquad \Longrightarrow \qquad (x, \lambda\omega) \in Ch(\mathcal{V}) \quad \forall \lambda \in K.$$

Nadalje, $\pi(Ch(\mathcal{V})) = \operatorname{supp}(\mathcal{V})$.

Poglavlje 9

DIREKTNE I INVERZNE SLIKE

9.1 Bimodul $\mathcal{D}_{X\to Y}$

Neka su $\mathcal{V}$ i $\mathcal{W}$ $\mathcal{O}_X-$moduli na višestrukosti X. $K-$linearni morfizam $T : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ zove se **diferencijalni morfizam reda** $\leq p$, $p \in \mathbb{Z}_+$, ako za svaki otvoren skup $U \subseteq X$ i svaku $(p+1)-$torku regularnih funkcija $f_0, \ldots, f_p \in R(U)$ vrijedi $[\cdots[[T, f_0], f_1], \cdots, f_n] = 0$ na U. Neka je $\mathrm{Diff}_p(\mathcal{V}, \mathcal{W})$ prostor takvih i neka je $\mathrm{Diff}(\mathcal{V}, \mathcal{W})$ njihova unija. Stavljamo $\mathrm{Diff}_p(\mathcal{V}, \mathcal{W}) = 0$ za $p < 0$. To je generalizacija pojma diferencijalnog operatora na X : ako je $\mathcal{V} = \mathcal{W} = \mathcal{O}_X$, diferencijalni morfizam je isto što i diferencijalni operator na X. Kao i za diferencijalne operatore dokazuje se:

$$T \in \mathrm{Diff}_p(\mathcal{V}, \mathcal{W}), \quad S \in \mathrm{Diff}_q(\mathcal{W}, \mathcal{U}) \qquad \Longrightarrow \qquad TS \in \mathrm{Diff}_{p+q}(\mathcal{V}, \mathcal{U}).$$

Definiramo na očigledan način i **snop** $\mathcal{D}iff(\mathcal{V}, \mathcal{W})$ **lokalnih diferencijalnih morfizama** sa $\mathcal{V}$ u $\mathcal{W}$. Svi diferencijalni endomorfizmi $\mathcal{O}_X-$modula $\mathcal{V}$ tvore unitalnu filtriranu algebru $\mathrm{Diff}(\mathcal{V}) = \mathrm{Diff}(\mathcal{V}, \mathcal{V})$, a lokalni diferencijalni endomorfizmi tvore snop filtriranih algebri $\mathcal{D}iff(\mathcal{V})$.

Neka je $\varphi : X \to Y$ morfizam glatkih višestrukosti. Stavimo $\mathcal{D}_{X\to Y} = \varphi^*(\mathcal{D}_Y)$. To je $\mathcal{O}_X-$modul, a također i desni $\varphi^{-1}(\mathcal{D}_Y)-$modul za množenje zdesna. Neka je $\mathcal{C}$ snop svih lokalnih diferencijalnih endomorfizama $\mathcal{O}_X-$modula $\mathcal{D}_{X\to Y}$ koji su ujedno $\varphi^{-1}(\mathcal{D}_Y)-$endomorfizmi. $\mathcal{C}$ je snop algebri i možemo ga filtrirati s filtracijom induciranom iz $(\mathrm{Diff}_p(\mathcal{D}_{X\to Y}))_{p\in\mathbb{Z}}$. $\mathcal{O}_X$ je prirodno podsnop od $\mathcal{C}$. Tangencijalni snop $\mathcal{T}_Y$ je $\mathcal{O}_Y-$podmodul od $\mathcal{D}_Y$. Neka je $\mathcal{J}_Y$ snop lijevih ideala u $\mathcal{D}_Y$ generiran sa $\mathcal{T}_Y$. Pomoću lokalnog koordinatnog sistema pokazuje se da je tada

$$\mathcal{D}_{X\to Y} = \mathcal{O}_X \oplus \varphi^*(\mathcal{J}_Y).$$

Označimo sa $\alpha : \mathcal{D}_{X\to Y} \to \mathcal{O}_X$ odgovarajući projektor. Pokazuje se da je $\varphi^*(\mathcal{J}_Y)$ $\mathcal{C}-$podmodul od $\mathcal{D}_{X\to Y}$. Stoga i kvocijentni snop $\mathcal{D}_{X\to Y}/\varphi^*(\mathcal{J}_Y)$ ima strukturu $\mathcal{C}-$modula. Pokazuije se da je kompozicija prirodnog monomorfizma $\mathcal{O}_X \to \mathcal{D}_{X\to Y}$ s kvocijentnim epimorfizmom sa $\mathcal{D}_{X\to Y}$ na $\mathcal{D}_{X\to Y}/\varphi^*(\mathcal{J}_Y)$ izomorfizam $\mathcal{O}_X-$modula. Taj izomorfizam definira morfizam $\gamma : \mathcal{C} \to End_K(\mathcal{O}_X)$ snopova algebri dan za svaki afini otvoren podskup $U \subseteq X$ sa

$$\gamma_U(S)(f) = \alpha(S(f \otimes 1)), \qquad f \in \mathcal{O}_X(U), \quad S \in \mathcal{C}(U).$$

Teorem 9.1.1. *Slika od γ je u $\mathcal{D}_X$ i $\gamma : \mathcal{C} \to \mathcal{D}_X$ je izomorfizam snopova filtriranih algebri.*

Prema tome, $\mathcal{D}_{X\to Y}$ možemo shvaćati kao snop $(\mathcal{D}_X : \mathcal{D}_Y)-$bimodula: lijevo djelovanje od $\mathcal{D}_X$ je lijevo množenje, a desno djelovanje od $\mathcal{D}_Y$ je djelovanje $\varphi^{-1}(\mathcal{D}_Y)$.

Propozicija 9.1.2. *Neka su $\varphi : X \to Y$ i $\psi : Y \to Z$ morfizmi glatkih višestrukosti. Tada su kao snopovi bimodula*

$$\mathcal{D}_{X\to Z} = \mathcal{D}_{X\to Y} \otimes_{\varphi^{-1}(\mathcal{D}_Y)} \varphi^{-1}(\mathcal{D}_{Y\to Z}).$$

9.2 Funktori inverzne i direktne slike

Neka je $\varphi : X \to Y$ morfizam glatkih višestrukosti. Definiramo **funktor inverzne slike** φ^+ iz kategorije $\mathcal{M}^L(\mathcal{D}_Y)$ lijevih $\mathcal{D}_Y-$modula u kategoriju $\mathcal{M}^L(\mathcal{D}_X)$ lijevih $\mathcal{D}_X-$modula ovako:

$$\varphi^+(\mathcal{V}) = \mathcal{D}_{X\to Y} \otimes_{\varphi^{-1}(\mathcal{D}_Y)} \varphi^{-1}(\mathcal{V}).$$

Budući da je funktor φ^{-1} egzaktan i budući da je funktor $\mathcal{D}_{X\to Y} \otimes_{\varphi^{-1}(\mathcal{D}_Y)} (\bullet)$ desno egzaktan, slijedi da je funktor φ^+ desno egzaktan.

Ako je U otvoren podskup od X i $\iota : U \to X$ kanonska inkluzija, onda je $\mathcal{D}_{U\to X} = \mathcal{D}_U$. Odatle je $\iota^+(\mathcal{V}) = \iota^{-1}\mathcal{V} = \mathcal{V}|U$. Dakle, inverzna slika od ι je funktor restrikcije $\mathcal{V} \mapsto \mathcal{V}|U$; posebno, u tom je slučaju funktor ι^+ egzaktan.

Propozicija 9.2.1. *Lijeva kohomološka dimenzija funktora φ^+ je konačna. Preciznije, za $p < -2\dim Y$ je $L^p\varphi^+ = 0$.*

Odatle slijedi da se lijevo izvedeni funktor $L\varphi^+$ između odozgo ograničenih kompleksa

$$D^-\left(\mathcal{M}^L(\mathcal{D}_Y)\right) \to D^-\left(\mathcal{M}^L(\mathcal{D}_X)\right)$$

može proširiti do funktora između kategorija neograničenih kompleksa

$$L\varphi^+ : D\left(\mathcal{M}^L(\mathcal{D}_Y)\right) \to D\left(\mathcal{M}^L(\mathcal{D}_X)\right).$$

Teorem 9.2.2. *Sljedeći dijagrama funktora komutira do na izomorfizam:*

$$\begin{array}{ccc} D\left(\mathcal{M}^L(\mathcal{D}_Y)\right) & \xrightarrow{L\varphi^+} & D\left(\mathcal{M}^L(\mathcal{D}_X)\right) \\ \downarrow & & \downarrow \\ D\left(\mathcal{M}(\mathcal{O}_Y)\right) & \xrightarrow{L\varphi^*} & D\left(\mathcal{M}(\mathcal{O}_X)\right). \end{array}$$

Pri tome vertikalne strelice označavaju zaboravne funktore s lijevih $\mathcal{D}_Y-$modula u $\mathcal{O}_Y-$module i s lijevih $\mathcal{D}_X-$modula u $\mathcal{O}_X-$module.

Odatle se izvodi:

Teorem 9.2.3. *Neka je $\mathcal{V}^\bullet$ kompleks lijevih $\mathcal{D}_Y-$modula takav da su moduli kohomologije $H^p(\mathcal{V}^\bullet)$ kvazikoherentni za sve $p \in \mathbb{Z}$. Tada su moduli kohomologije $H^p(L\varphi^+(\mathcal{V}^\bullet))$ kvazikoherentni lijevi $\mathcal{D}_X-$moduli za sve $p \in \mathbb{Z}$.*

Teorem 9.2.4. *Neka su $\varphi : X \to Y$ i $\psi : Y \to Z$ morfizmi glatkih višestrukosti. Tada je $\varphi^+ \circ \psi^+ = (\psi \circ \varphi)^+$. Štoviše, egzaktni funktori $L\varphi^+ \circ L\psi^+$ i $L(\psi\circ\varphi)^+$ iz $D\left(\mathcal{M}^L(\mathcal{D}_Z)\right)$ u $D\left(\mathcal{M}^L(\mathcal{D}_X)\right)$ su izomorfni.*

Analogni rezultati dokazuju se za slučaj desnih $\mathcal{D}-$modula za funktor direktne slike φ_+ koji se definira kao tenzorski produkt zdesna sa $\mathcal{D}_{X\to Y}$.

9.3 Bernsteinova nejednakost

Za zatvoren podskup Y višestrukosti X definiramo

$$\dim_Y X = \sup\{\dim_x X;\ x \in Y\}.$$

Teorem 9.3.1. *Neka je Y glatka zatvorena podvišestrukost glatke višestrukosti X i $\iota : Y \to X$ kanonska inkluzija. Za svaki koherentan desni $\mathcal{D}_Y-$modul $\mathcal{V}$ desni $\mathcal{D}_X-$modul $\iota_+(\mathcal{V})$ također je koherentan i vrijedi*

$$Ch(\iota_+(\mathcal{V})) = \{(x,\omega) \in T^*(X);\ (x, p_x(\omega)) \in Ch(\mathcal{V})\},$$

pri čemu je za $x \in Y$ $p_x : T^*_x(X) \to T^*_x(Y)$ prirodna projekcija. Posebno, vrijedi

$$\dim_{\pi_X^{-1}(x)} Ch(\iota_+(\mathcal{V})) = \dim_{\pi_Y^{-1}(x)} Ch(\mathcal{V}) + \mathrm{codim}_x Y \qquad \forall x \in Y.$$

Za netrivijalan koherentan $\mathcal{D}_X-$modul $\mathcal{V}$ na glatkoj višestrukosti X i za točku $x \in X$ pišemo

$$\mathrm{holdef}_x(\mathcal{V}) = \dim_{\pi_X^{-1}(x)} Ch(\mathcal{V}) - \dim_x X.$$

Taj se broj zove **holonomni defekt** modula $\mathcal{V}$ u točki x. Za svaku točku $x \notin \mathrm{supp}(\mathcal{V})$ je očito holonomni defekt jednak $-\dim_x X$.

Korolar 9.3.2. *Ako je Y glatka zatvorena podvišestrukost glatke višestrukosti X, za svaki netrivijalan koherentan desni $\mathcal{D}_Y-$modul $\mathcal{V}$ i za svaku točku $x \in Y$ vrijedi*

$$\mathrm{holdef}_x(\mathcal{V}) = \mathrm{holdef}_x(\iota_+(\mathcal{V})).$$

Teorem 9.3.3. (**Bernsteinova nejednakost**) *Neka je $\mathcal{V}$ koherentan $\mathcal{D}_X-$modul na glatkoj višestrukosti $\mathcal{V}$. Tada za svaku točku $x \in \mathrm{supp}(\mathcal{V})$ vrijedi*

$$\dim_{\pi_X^{-1}(x)} Ch(\mathcal{V}) \geq \dim_x X.$$

9.4 Kashiwarin teorem

Propozicija 9.4.1. *Neka je Y glatka zatvorena podvišestrukost glatke višestrukosti X i $\iota : Y \to X$ prirodna inkluzija. Funktor direktne slike $\iota_+ : \mathcal{M}^R(\mathcal{D}_Y) \to \mathcal{M}^R(\mathcal{D}_X)$ je egzaktan i ima desno adjungirani funktor $\iota^! : \mathcal{M}^R(\mathcal{D}_X) \to \mathcal{M}^R(\mathcal{D}_Y)$.*

Ako je Z glatka zatvorena podvišestrukost od Y, i $\jmath : Z \to Y$ kanonska inkluzija, tada je

$$(\iota \circ \jmath)_+ = \iota_+ \circ \jmath_+,$$

pa zbog jedinstvenosti adjungiranih funktora (do na izomorfizam) slijedi

$$(\iota \circ \jmath)^! \cong \jmath^! \circ \iota^!.$$

Dosta složenim proučavanjem kompozicija $\iota^! \circ \iota_+$ i $\iota_+ \circ \iota^!$ dokazuje se sljedeći **Kashiwarin teorem**. Pri tome sa

$$\mathcal{M}^R_{\mathrm{qc},Y}(\mathcal{D}_X), \qquad \mathcal{M}^R_{\mathrm{coh},Y}(\mathcal{D}_X) \qquad \text{i} \qquad \mathcal{H}ol^R_Y(\mathcal{D}_X)$$

označavamo redom pune potkategorije od

$$\mathcal{M}^R_{\mathrm{qc}}(\mathcal{D}_X), \qquad \mathcal{M}^R_{\mathrm{coh}}(\mathcal{D}_X) \qquad \text{i} \qquad \mathcal{H}ol^R_Y(\mathcal{D}_X)$$

svih modula u tim kategorijama koji imaju nosač sadržan u Y.

Teorem 9.4.2. (*a*) *Funktor $\iota_+ : \mathcal{M}^R_{\mathrm{qc}}(\mathcal{D}_Y) \to \mathcal{M}^R_{\mathrm{qc}}(\mathcal{D}_X)$ je ekvivalencija kategorije $\mathcal{M}^R_{\mathrm{qc}}(\mathcal{D}_Y)$ s kategorijom $\mathcal{M}^R_{\mathrm{qc},Y}(\mathcal{D}_X)$. Njen je kvaziinvers funktor $\iota^!$.*

(*b*) *Ta ekvivalencija inducira ekvivalenciju $\mathcal{M}^R_{\mathrm{coh}}(\mathcal{D}_Y)$ sa $\mathcal{M}^R_{\mathrm{coh},Y}(\mathcal{D}_X)$ koja čuva holonomni defekt. Posebno, ta ekvivalencija inducira ekvivalenciju $\mathcal{H}ol^R(\mathcal{D}_Y)$ sa $\mathcal{H}ol^R_Y(\mathcal{D}_X)$.*

9.5 Holonomni $\mathcal{D}-$moduli

Neka je X glatka višestrukost s kotangencijalnim svežnjem $T^*(X)$ i pripadnom fibracijom $\pi_X : T^*(X) \to X$. Za svaki koherentan $\mathcal{D}_X-$modul $\mathcal{V}$ njegova je karakteristična višestrukost $Ch(\mathcal{V})$ zatvorena podvišestrukost od $T^*(X)$ koja se pri preslikavanju π_X projicira na nosač $\operatorname{supp}(\mathcal{V})$ od $\mathcal{V}$. Imamo tada Bernsteinovu nejednakost

$$\dim_{\pi_X^{-1}(x)} Ch(\mathcal{V}) \geq \dim_x X \qquad \forall x \in \operatorname{supp}(\mathcal{V}).$$

Kažemo da je koherentan $\mathcal{D}_X-$modul $\mathcal{V}$ **holonoman $\mathcal{D}_X-$modul** ako vrijedi

$$\dim_{\pi_X^{-1}(x)} Ch(\mathcal{V}) = \dim_x X \qquad \forall x \in \operatorname{supp}(\mathcal{V}).$$

Sa $\mathcal{H}ol(\mathcal{D}_X)$ označavamo punu potkategoriju od $\mathcal{M}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{D}_X)$ svih holonomnih $\mathcal{D}_X-$modula.

Teorem 9.5.1. *Neka je X glatka višestrukost i*

$$0 \longrightarrow \mathcal{V}_1 \longrightarrow \mathcal{V}_2 \longrightarrow \mathcal{V}_3 \longrightarrow 0$$

kratki egzaktni niz koherentnih $\mathcal{D}_X-$modula. Tada je modul $\mathcal{V}_2$ holonoman ako i samo ako su moduli $\mathcal{V}_1$ i $\mathcal{V}_3$ holonomni.

Propozicija 9.5.2. *Neka je Y glatka zatvorena podvišestrukost glatke višestrukosti i $\iota : Y \to X$ kanonska inkluzija. $\mathcal{D}_Y-$modul $\mathcal{V}$ je holonoman ako i samo ako je $\mathcal{D}_X-$modul $\iota_+(\mathcal{V})$ holonoman.*

Budući da je „*biti konačne duljine*” lokalnog karaktera, za dokaz tvrdnji vezanih uz taj pojam uvijek možemo pretpostavljati da se radi o afinoj višestrukosti. Za takvu višestrukost imamo inkluziju $\iota : X \to K^n$ za neki $n \in \mathbb{Z}_+$. Na taj način se iz propozicije 9.5.2. dokazuje

Teorem 9.5.3. *Svaki je holonoman $\mathcal{D}_X-$modul na glatkoj višestrukosti X konačne duljine.*

9.6 Klasifikacija ireducibilnih holonomnih modula

$\mathcal{D}_X-$modul na glatkoj višestrukosti X zove se **koneksija** ako je on koherentan kao $\mathcal{O}_X-$modul.

Teorem 9.6.1. *Neka je X ireducibilna (tj. povezana) glatka višestrukost i $\mathcal{V} \neq 0$ koherentan $\mathcal{D}_X-$modul. Sljedeća su četiri svojstva međusobno ekvivalentna:*

(a) *$\mathcal{V}$ je koneksija.*

(b) *Karakteristična višestrukost $Ch(\mathcal{V})$ sadržana je u nul−prerezu kotangencijalnog svežnja $T^*(X)$.*

(c) *Karakteristična višestrukost $Ch(\mathcal{V})$ jednaka je nul−prerezu kotangencijalnog svežnja $T^*(X)$.*

(d) *$\mathcal{V}$ je lokalno slobodan $\mathcal{O}_X-$modul konačnog ranga.*

U dokazu implikacije $(a) \Rightarrow (d)$ pokazuje se da ako je višestrukost X dovoljno mala i sadržana u K^n onda možemo naći bazu $s_1, \ldots, s_q$ slobodnog $\mathcal{O}_X-$modula $\mathcal{V}$. Neka je $\Psi : \mathcal{O}_X^q \to \mathcal{V}$ odgovarajući izomorfizam $\mathcal{O}_X-$modula:

$$\Psi(f_1, \ldots, f_q) = \sum_{j=1}^{q} f_j s_j.$$

Neka su $A_j = (A_j k\ell)$ za $1 \leq j \leq n$ kvadratne matrice $q \times q$ s koeficijentima u $R(X)$ definirane sa

$$D_j s_k = \sum_{\ell=1}^{q} A_{jk\ell} s_\ell, \qquad 1 \leq j \leq n, \quad 1 \leq k \leq q.$$

Tada se računom pokazuje da je

$$\Psi^{-1} \circ D_j \circ \Psi = D_j + A_j, \qquad 1 \leq j \leq n.$$

Kako je $[D_i, D_j] = 0$, dobivamo

$$D_j(A_i) - D_i(A_j) = [A_i, A_j], \qquad 1 \leq i, j \leq n.$$

Prema tome, koneksije lokalno odgovaraju upravo klasičnom pojmu integrabilnih koneksija.

Klasifikacija ireducibilnih holonomnih $\mathcal{D}_X-$modula bazira se na sljedećem rezultatu:

Propozicija 9.6.2. *Neka je U otvoren podskup glatke povezane višestrukosti X s inkluzijom $\iota : U \to X$ i neka je $\mathcal{V}$ ireducibilan holonoman $\mathcal{D}_U-$modul. Tada postoji jedinstven ireducibilan $\mathcal{D}_X-$podmodul $\mathcal{W}$ od $\iota_+(\mathcal{V})$ i vrijedi $\mathcal{W}|U$. Ireducibilan holonoman $\mathcal{D}_X-$modul $\mathcal{W}$ takav da je $\mathcal{W}|U \cong \mathcal{V}$ jedinstven je do na izomorfizam i* $\operatorname{supp}(\mathcal{W})$ *je zatvarač od* $\operatorname{supp}(\mathcal{V})$ *u X.*

Neka je sada V povezana glatka podvišestrukost od X i $\jmath : V \to X$ prirodna inkluzija. Neka je τ ireducibilna koneksija na V. Tada je direktna slika

$$\mathcal{I}(V, \tau) = \jmath_+(\tau)$$

holonoman $\mathcal{D}_X-$modul. On se zove **standardan $\mathcal{D}_X-$modul pridružen paru** (V, τ). Njegov je nosač prema propoziciji 9.6.2. zatvarač $\overline{V}$ od V u X. Budući da je V lokalno zatvoren podskup od X, postoji otvoren podskup U od X takav da je V zatvorena podvišestrukost od U. Neka su $\jmath_U : V \to U$ i $\iota : U \to X$ inkluzije. Tada je $j = \iota \circ \jmath_U$, pa imamo

$$\mathcal{I}(V, \tau) = \jmath_+(\tau) = \iota_+\left((\jmath_U)_+(\tau)\right).$$

Prema Kashiwarinom teoremu direktna slika $(\jmath_U)_+(\tau)$ je ireducibilan holonoman $\mathcal{D}_U-$modul s nosačem V. Prema propoziciji 9.6.2. on se proširuje do ireducibilnog holonomnog $\mathcal{D}_X-$modula koji je jedinstven ireducibilan podmodul od $\mathcal{I}(V,\tau)$. Označimo taj ireducibilan $\mathcal{D}_X-$modul sa $\mathcal{L}(V,\tau)$. Taj se modul zove **ireducibilan $\mathcal{D}_X-$modul pridružen paru** (V,τ). Prema propoziciji 9.6.2. vrijedi $\mathrm{supp}(\mathcal{L}(V,\tau)) = \overline{V}$. Za kvocijentni modul $\mathcal{Q} = \mathcal{I}(V,\tau)/\mathcal{L}(V,\tau)$ imamo kratki egzaktni niz

$$0 \longrightarrow \mathcal{L}(V,\tau) \longrightarrow \mathcal{I}(V,\tau) \longrightarrow \mathcal{Q} \longrightarrow 0.$$

Stavimo $U = X \setminus \left(\overline{V} \setminus V\right)$. To je otvoren podskup od X i V je zatvoren u U. Iz gornjeg niza slijedi da je $\mathcal{Q}|U = 0$. To znači da je $\mathrm{supp}(\mathcal{Q}) \subseteq X \setminus U = \overline{V} \setminus V$. Dakle, vrijedi:

Propozicija 9.6.3. *Neka je $\mathcal{I}(V,\tau)$ standardni $\mathcal{D}_X-$modul pridružen paru (V,τ). Tada on sadrži jedinstven ireducibilan podmodul $\mathcal{L}(V,\tau)$. Nosač od $\mathcal{L}(V,\tau)$ je $\overline{V}$, a nosač kvocijenta $\mathcal{L}(V,\tau)/\mathcal{L}(V,\tau)$ sadržan je u $\overline{V} \setminus V$.*

Teorem 9.6.4. (*a*) *Neka je $\mathcal{V}$ ireducibilan holonoman $\mathcal{D}_X-$modul. Tada postoji ireducibilna otvorena glatka afina podvišestrukost V nosača* $\mathrm{supp}(\mathcal{V})$ *i ireducibilna koneksija τ na V takve da je $\mathcal{V} \cong \mathcal{L}(V,\tau)$.*

(*b*) *Neka su V i V' ireducibilne glatke afine podvišestrukosti od X i τ i τ' ireducibilne koneksije na njima. Tada vrijedi $\mathcal{L}(V,\tau) \cong \mathcal{L}(V',\tau')$ ako i samo ako su zadovoljena sljedeća dva uvjeta:*

(1) $\overline{V} = \overline{V'}$.

(2) *Postoji neprazna otvorena afina podvišestrukost V'' od $V \cap V'$ takva da je $\tau|V'' \cong \tau'|V''$.*

Poglavlje 10

KLASIFIKACIJA HARISH–CHANDRINIH MODULA

10.1 Beilinson–Bernsteinova ekvivalencija kategorija

U ovom poglavlju G_0 je povezana poluprosta Liejeva grupa s konačnim centrom, K_0 neka njena maksimalna kompaktna podgrupa, $\mathfrak{g}_0$ i $\mathfrak{k}_0$ njihove Liejeve algebre, $\mathfrak{g}$ i $\mathfrak{k}$ njihove kompleksifikacije, ϑ pripadna kompleksificirana Cartanova involucija, tj. jedinstveni involutivni automorfizam Liejeve algebre $\mathfrak{g}$, takav da mu je $\mathfrak{k}$ skup fiksnih točaka. Nadalje, $K \supseteq K_0$ kompleksna reduktivna algebarska grupa koja je kompleksifikacija grupe K_0.

Podsjetimo se nekih definicija iz uvodnog 1. poglavlja. Reprezentacija π grupe K na kompleksnom vektorskom prostoru V zove se **algebarska reprezentacija** ako je V unija konačnodimenzionalnih $\pi(K)-$invarijantnih potprostora W takvih da preslikavanje $k \mapsto \pi(k)|W$ algebarski homomorfizam kompleksnih algebarskih grupa $K \longrightarrow \mathrm{GL}(W)$. **Harish–Chandrin** $(\mathfrak{g}, K)-$**modul** je kompleksan vektorski prostor V sa svojstvima:

(a) V je konačno generirani $\mathcal{U}(\mathfrak{g})-$modul.

(b) Na V je zadana algebarska reprezentacija od K.

(c) Djelovanja $\mathfrak{g}$ i K su kompatibilna, tj. djelovanje $\mathfrak{k}$ kao Liejeve podalgebre od $\mathfrak{g} \subseteq \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ je upravo diferncijal djelovanja K.

Kategorija $\mathcal{M}(\mathfrak{g}, K)$ Harish–Chandrinih modula je puna potkategorija kategorije lijevih $\mathcal{U}(\mathfrak{g})-$modula i to je Abelova kategorija.

Harish–Chandrin modul V je **dopustiv** ako je potprostor V_δ konačnodimenzionalan za svaku klasu $\delta \in \hat{K}_0 = \hat{K}$. Dopustiv Harish–Chandrin modul je konačne duljine ako i samo ako je njegov anihilator u centru $\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$ od $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ ideal u $\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$ konačne kodimenzije u $\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$.

Neka je X **višestrukost zastava**, tj. skup svih Borelovih (maksimalnih rješivih) podalgebri od $\mathfrak{g}$. Ako je k dimenzija Borelovih podalgebri, onda je stvarno X zatvorena podvišestrukost projektivne višestrukosti $G_k(\mathfrak{g})$ svih $k-$dimenzionalnih potprostora od $\mathfrak{g}$. Naime, zahtjev da je potprostor $\mathfrak{b}$ Liejeva podalgebra od $\mathfrak{g}$ iskazuje se algebarskim jednakostima, a također i zahtjev da je Liejeva podalgebra rješiva.

Neka je G kompleksna povezana Liejeva grupa s Liejevom algebrom $\mathfrak{g}$. Tada G preko Ad–djelovanja na $\mathfrak{g}$ tranzitivno djeluje na višestrukosti X. Dakle, za bilo koju Borelovu podalgebru $\mathfrak{b} \in X$ preslikavanje $g \mapsto (\mathrm{Ad}\, g)\mathfrak{b}$ inducira bijekciju kvocijentne mnogostrukosti (i kvocijentne algebarske višestrukosti) G/B na X. Pri tome je B stabilizator od $\mathfrak{b}$ u grupi G :

$$B = \{g \in G;\ (\mathrm{Ad}\, g)\mathfrak{b} = \mathfrak{b}\}.$$

Budući da glatke točke čine neprazan skup u X, zbog tranzitivnosti G slijedi da su sve točke od X glatke, tj. da je X glatka višestrukost. Budući da je mnogostrukost i višestrukost X povezana, slijedi i da je ta višestrukost ireducibilna.

Za svaku točku $x \in X$ uočimo diferencijal orbitnog preslikavanja $g \mapsto (\mathrm{Ad}\, g)x$. Ti diferencijali definiraju morfizam trivijalnog vektorskog svežnja $X \times \mathfrak{g}$ nad X u tangencijalni svežanj $T(X)$ od X. Uz Ad$-$djelovanje G na X i na $\mathfrak{g}$ taj je morfizam $X \times \mathfrak{g} \to T(X)$ $G-$ekvivarijantan. Jezgra tog morfizma je $G-$homogeni svežanj $\mathcal{B}$ nad X, za koji se pokazuje da jest lokalno trivijalan, ali općenito nije više trivijalan. Vlakno tog svežnja $\mathcal{B}$ nad točkom $x \in X$ je Borelova podalgebra x koju ćemo u ovoj ulozi označavati sa $\mathfrak{b}_x$. Dakle, $\mathcal{B}$ je svežanj Borelovih podalgebri nad mnogostrukosti X.

Za $x \in X$ stavimo $\mathfrak{n}_x = [\mathfrak{b}_x, \mathfrak{b}_x]$ $-$ to je nilpotentni radikal od $\mathfrak{b}_x$. Tada je

$$\mathcal{N} = \{(x,\xi);\ x \in X,\ \xi \in \mathfrak{n}_x\} \subseteq \mathcal{B}$$

$G-$homogeni vektorski podsvežanj od $\mathcal{B}$. Označimo sa $\mathcal{H}$ kvocijentni svežanj $\mathcal{B}/\mathcal{N}$. Nadalje, neka je B_x stabilizator točke $x \in X$ u G $-$ to je normalizator podalgebre $\mathfrak{b}_x$. Tada B_x djeluje trivijalno na vlaknu $\mathcal{H}_x$ svežnja $\mathcal{H}$ nad točkom $\mathcal{H}$. Odatle slijedi da je $\mathcal{H}$ trivijalni svežanj nad X. Kako je X projektivna višestrukost, jedini globalni prerezi od $\mathcal{H}$ su konstante. Neka je $\mathfrak{h}$ prostor globalnih prereza od $\mathcal{H}$. Budući da je $\mathcal{H}_x = \mathfrak{b}_x/\mathfrak{n}_x$ komutativna Liejeva algebra za svaku točku $x \in X$, $\mathfrak{h}$ možemo promatrati kao komutativnu Liejevu algebru - ona se zove (**apstraktna**) **Cartanova algebra** od $\mathfrak{g}$.

Neka je sada $\mathfrak{c}$ bilo koja Cartanova podalgebra od $\mathfrak{g}$, $R(\mathfrak{g},\mathfrak{c})$ sistem korijena para $(\mathfrak{g},\mathfrak{c})$ u dualnom prostoru $\mathfrak{c}^*$ od $\mathfrak{c}$ i $R^+(\mathfrak{g},\mathfrak{c})$ neki izbor pozitivnih korijena u $R(\mathfrak{g},\mathfrak{c})$. Tada je potpuno određena točka $x \in X$ takva da je

$$\mathfrak{b}_x = \mathfrak{c} \dotplus \sum_{\alpha \in R^+(\mathfrak{g},\mathfrak{c})} \dotplus\, \mathfrak{g}_\alpha.$$

Sada imamo linearna preslikavanja

$$\mathfrak{c} \longrightarrow \mathfrak{b}_x \longrightarrow \mathfrak{b}_x/\mathfrak{n}_x = \mathcal{H}_x$$

i njihova je kompozicija izomorfizam $\mathfrak{c} \longrightarrow \mathcal{H}_x$. S druge strane, i evaluacijsko preslikavanje $\mathfrak{h} \longrightarrow \mathcal{H}_x$ je također izomorfizam. Kompozicijom prethodnog izomorfizma $\mathfrak{c} \longrightarrow \mathcal{H}_x$ s inversom evaluacije $\mathcal{H}_x \longrightarrow \mathfrak{h}$ dobivamo izomorfizam $\mathfrak{c} \longrightarrow \mathfrak{h}$. Dualno preslikavanje $\mathfrak{h}^* \longrightarrow \mathfrak{c}^*$ je izomorfizam koji zovemo **specijalizacija u točki** $x \in X$. Inverzni izomorfizam prevodi sistem korijena $R(\mathfrak{g},\mathfrak{c})$ u sistem korijena Σ u prostoru $\mathfrak{h}^*$, a slika od $R^+(\mathfrak{g},\mathfrak{c})$ je neki skup Σ^+ pozitivnih korijena u Σ. Pokazuje se da Σ i Σ^+ ne ovise o izboru $\mathfrak{c}$ i $R^+(\mathfrak{g},\mathfrak{c})$ (odnosno, izbora točke $x \in X$ takve da je $\mathfrak{c} \subseteq \mathfrak{b}_x$). Na taj način konstruirali smo (**apstraktnu**) **Cartanovu trojku** $(\mathfrak{h}^*, \Sigma, \Sigma^+)$.

Neka je sada $\mathfrak{g}^o = \mathcal{O}_X \otimes_{\mathbb{C}} \mathfrak{g}$ snop klica lokalnih prereza trivijalnog svežnja $X \times \mathfrak{g}$. Neka su $\mathfrak{b}^o$ i $\mathfrak{n}^o$ odgovarajući podsnopovi klica lokalnih prereza svežnjeva $\mathcal{B}$ i $\mathcal{N}$. Diferencijal djelovanja grupe G na X definira prirodni homomorfizam τ Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ u Liejevu algebru vektorskih polja na X. Sada se pokazuje da na snopu vektorskih prostora $\mathfrak{g}^o$ postoji jedinstvena struktura snopa Liejevih algebri takva da vrijedi

$$[f \otimes \xi, g \otimes \eta] = f\tau(\xi)g \otimes \eta - g\tau(\eta)f \otimes \xi + fg \otimes [\xi,\eta], \qquad f,g \in \mathcal{O}_X, \quad \xi,\eta \in \mathfrak{g}.$$

τ se proširuje do prirodnog homomorfizma snopa $\mathfrak{g}^o$ u snop Liejevih algebri klica lokalnih vektorskih polja na X. Tada je $\mathrm{Ker}\,\tau = \mathfrak{b}^o$, dakle, $\mathfrak{b}^o$ (a time i $\mathfrak{n}^o$) je snop ideala u $\mathfrak{g}^o$.

Slično, definiramo množenje u snopu $\mathcal{U}^o = \mathcal{O}_X \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ klica lokalnih prereza trivijalnog svežnja $X \times \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ kao jedinstveno bilinearno preslikavanje $\mathcal{U}^o \times \mathcal{U}^o \longrightarrow \mathcal{U}^o$ za koje vrijedi

$$(f \otimes \xi)(g \otimes \eta) = f\tau(\xi)g \otimes \eta + fg \otimes \xi\eta, \qquad \forall f, g \in \mathcal{O}_X, \quad \forall \xi \in \mathfrak{g}, \quad \forall \eta \in \mathcal{U}(\mathfrak{g}).$$

Na taj način $\mathcal{U}^o$ postaje snop kompleksnih unitalnih algebri na X. Nadalje, $\mathfrak{g}^o$ je podsnop Liejevih algebri od $\mathcal{U}^o$ u odnosu na uobičajen komutator u asocijativnoj algebri. Budući da je $\mathfrak{n}^o$ snop ideala u snopu Liejevih algebri $\mathfrak{g}^o$, slijedi da je snop desnih ideala $\mathfrak{n}^o\mathcal{U}^o$, generiran sa $\mathfrak{n}^o$ u $\mathcal{U}^o$, zapravo snop dvostranih ideala u $\mathcal{U}^o$. Dakle, kvocijent $\mathcal{D}_{\mathfrak{h}} = \mathcal{U}^o/\mathfrak{n}^o\mathcal{U}^o$ je snop kompleksnih unitalnih algebri na X. Prirodni morfizam $\mathfrak{g}^o \longrightarrow \mathcal{D}_{\mathfrak{h}}$ inducira morfizam snopa Liejevih podalgebri $\mathfrak{b}^o$ u $\mathcal{D}_{\mathfrak{h}}$ koji iščezava na $\mathfrak{n}^o$. Dakle, postoji prirodni homomorfizam φ univerzalne omotačke algebre $\mathcal{U}(\mathfrak{h})$ od $\mathfrak{h}$ (a to je zapravo simetrična algebra $S(\mathfrak{h})$) u algebru globalnih prereza $\Gamma(X, \mathcal{D}_{\mathfrak{h}})$ snopa $\mathcal{D}_{\mathfrak{h}}$.

Trivijalnost svežnja $\mathcal{H}$ i konstantnost njegovih globalnih prereza povlače da je inducirano djelovanje grupe G na $\mathfrak{h}$ trivijalno. Odatle slijedi da je slika homomorfizma $\varphi : \mathcal{U}(\mathfrak{h}) \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{D}_{\mathfrak{h}})$ sadržana u $G-$invarijantama $\Gamma(X, \mathcal{D}_{\mathfrak{h}})^G$. To znači da je za svaki otvoren skup $U \subseteq X$ restrikcija $(\operatorname{Im} \varphi)|U$ sadržana u centru od $\mathcal{D}_{\mathfrak{h}}(U)$. Pokazuje se da je stvarno φ epimorfizam $\mathcal{U}(\mathfrak{h})$ na $\Gamma(X, \mathcal{D}_{\mathfrak{h}})^G$. Nadalje, prirodni homomorfizam $\mathcal{U}(\mathfrak{g}) \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{D}_{\mathfrak{h}})$ inducira homomorfizam centra $\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$ od $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ u $\Gamma(X, \mathcal{D}_{\mathfrak{h}})$ i slika tog homomorfizma sadržana je u $\Gamma(X, \mathcal{D}_{\mathfrak{h}})^G = \varphi(\mathcal{U}(\mathfrak{h}))$.

Napokon, imamo Harish–Chandrin homomorfizam $\gamma : \mathcal{Z}(\mathfrak{g}) \to \mathcal{U}(\mathfrak{h})$ definiran na sljedeći način. Za svaku točku $x \in X$ vrijedi $\mathcal{Z}(\mathfrak{g}) \subseteq \mathcal{U}(\mathfrak{b}_x) + \mathfrak{n}_x\mathcal{U}(\mathfrak{g})$, pa prijelazom na kvocijent imamo prirodni homomorfizam

$$\mathcal{Z}(\mathfrak{g}) \longrightarrow \mathcal{U}(\mathfrak{b}_x)/(\mathfrak{n}_x\mathcal{U}(\mathfrak{g}) \cap \mathcal{U}(\mathfrak{b}_x)) = \mathcal{U}(\mathfrak{b}_x)/\mathfrak{n}_x\mathcal{U}(\mathfrak{b}_x) \cong \mathcal{U}(\mathfrak{b}_x/\mathfrak{n}_x).$$

Pokazuje se da je kompozicija tog homomorfizma s prirodnim izomorfizmom $\mathcal{U}(\mathfrak{b}_x/\mathfrak{n}_x) \longrightarrow \mathcal{U}(\mathfrak{h})$ neovisna o izboru točke $x \in X$ i to je upravo Harish–Chandrin homomorfizam γ. Prema tome, sljedeći je dijagram homomorfizama algebri komutativan:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{Z}(\mathfrak{g}) & \xrightarrow{\gamma} & \mathcal{U}(\mathfrak{h}) \\ = \downarrow & & \downarrow \varphi \\ \mathcal{Z}(\mathfrak{g}) & \longrightarrow & \Gamma(X, \mathcal{D}_{\mathfrak{h}})^G. \end{array}$$

U tenzorski produkt $\mathcal{U}(\mathfrak{g}) \otimes_{\mathcal{Z}(\mathfrak{g})} \mathcal{U}(\mathfrak{h})$ možemo na prirodan način uvesti strukturu unitalne algebre. Sada tenzorski produkt prirodnog homomorfizma $\mathcal{U}(\mathfrak{g}) \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{D}_{\mathfrak{h}})$ i prije definiranog homomorfizma $\varphi : \mathcal{U}(\mathfrak{h}) \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{D}_{\mathfrak{h}})$ definira homomorfizam unitalnih algebri

$$\Psi : \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \otimes_{\mathcal{Z}(\mathfrak{g})} \mathcal{U}(\mathfrak{h}) \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{D}_{\mathfrak{h}}) = H^0(X, \mathcal{D}_{\mathfrak{h}}).$$

Vrijedi:

Lema 10.1.1. (**D. Miličić – J. Taylor**) *Ψ je izomorfizam algebri. Nadalje, za svaki $i > 0$ vrijedi $H^i(X, \mathcal{D}_{\mathfrak{h}}) = \{0\}$.*

Neka je

$$\rho = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \Sigma^+} \alpha.$$

Kako je $\mathfrak{h}$ komutativna Liejeva algebra, omotačka algebra $\mathcal{U}(\mathfrak{h})$ podudara sa sa simetričnom algebrom $S(\mathfrak{h})$ a ova je prirodno izomorfna s algebrom $\mathcal{P}(\mathfrak{h}^*)$ polinomijalnih funkcija na $\mathfrak{h}^*$. Evaluacija u bilo kojoj točki $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ određuje unitalni homomorfizam $\mathcal{U}(\mathfrak{h}) \longrightarrow \mathbb{C}$. Označimo sa $\varphi_\lambda : \mathcal{U}(\mathfrak{h}) \longrightarrow \mathbb{C}$

evaluaciju u točki $\lambda + \rho$ i neka je $\mathcal{I}_\lambda = \operatorname{Ker} \varphi_\lambda$. Tada je $\gamma^{-1}(\mathcal{I}_\lambda)$ maksimalni ideal u $\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$ i prema Harish−Chandrinom teoremu vrijedi

$$\gamma^{-1}(\mathcal{I}_\lambda) = \gamma^{-1}(\mathcal{I}_\mu) \qquad \Longleftrightarrow \qquad w\lambda = \mu \quad \text{za neki} \quad w \in W.$$

gdje je $W = W(\Sigma)$ sistema korijena Σ. Sada je $\mathcal{I}_\lambda \mathcal{D}_\mathfrak{h}$ za svaki $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ snop dvostranih ideala u $\mathcal{D}_\mathfrak{h}$; dakle, $\mathcal{D}_\lambda = \mathcal{D}_\mathfrak{h}/\mathcal{I}_\lambda \mathcal{D}_\mathfrak{h}$ je snop kompleksnih unitalnih algebri na X.

U slučaju $\lambda = -\rho$ imamo $\mathcal{I}_{-\rho} = \mathfrak{h}\mathcal{U}(\mathfrak{h})$, dakle, $\mathcal{D}_{-\rho} = \mathcal{U}^o/\mathfrak{b}^o\mathcal{U}^o$ i to je upravo snop $\mathcal{D}_X$ diferencijalnih operatora na X. Općenito je $\mathcal{D}_\lambda$ tzv. „*zakrenuti snop diferencijalnih operatora*" na X. Taj se pojam definira za proizvoljnu glatku višestrukost Y na sljedeći način. Neka je $\mathcal{O}_Y$ strukturni snop od Y. Promatramo kategoriju svih uređenih parova $(\mathcal{A}, \iota_\mathcal{A})$, gdje je $\mathcal{A}$ snop kompleksnih unitalnih algebri na Y i $\iota_\mathcal{A} : \mathcal{O}_Y \to \mathcal{A}$ je morfizam snopova algebri. Morfizmi u toj kategoriji su morfizmi snopova unitalni algebri $\alpha : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ takvi da je $\alpha \circ \iota_\mathcal{A} = \iota_\mathcal{B}$. Jedan objekt u toj kategoriji je par $(\mathcal{D}_Y, \iota_Y)$, gdje je $\mathcal{D}_Y$ snop diferencijalnih operatora na Y i $\iota_Y : \mathcal{O}_Y \to \mathcal{D}_Y$ je kanonski morfizam. Objekt $(\mathcal{D}, \iota)$ u toj kategoriji zove se **zakrenuti snop diferencijalnih operatora** na Y ako Y ima (konačan) pokrivač otvorenim skupovima U takvima da je $(\mathcal{D}|U, \iota|U) \cong (\mathcal{D}_U, \iota_U)$.

Neka je Θ $W-$orbita u $\mathfrak{h}^*$ i $\lambda \in \Theta$. Stavimo $\mathcal{J}_\Theta = \gamma^{-1}(\mathcal{I}_\lambda)$. Tada je $\mathcal{J}_\Theta$ maksimalni ideal u $\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$. Neka je $\chi_\lambda \in Hom(\mathcal{Z}(\mathfrak{g}), \mathbb{C})$ određen sa $\operatorname{Ker} \chi_\lambda = \mathcal{J}_\Theta$. Prirodni homomorfizam $\mathcal{U}(\mathfrak{g}) \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{D}_\lambda)$ preslikava elemente od $\mathcal{J}_\Theta$ u nul−prereze od $\mathcal{D}_\lambda$. Stoga dobivamo kanonski homorfizam

$$\mathcal{U}_\Theta = \mathcal{U}(\mathfrak{g})/\mathcal{J}_\Theta \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{D}_\lambda).$$

Kategorija $\mathcal{M}(\mathcal{U}_\Theta)$ identificira se s kategorijom $\mathcal{M}(\mathcal{U}(\mathfrak{g}))_\lambda$ u kojoj su objekti lijevi $\mathcal{U}(\mathfrak{g})-$moduli s infinitezimalnim karakterom χ_λ.

Teorem 10.1.2. *Homomorfizam* $\mathcal{U}_\Theta \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{D}_\lambda)$ *je izomorfizam unitalnih algebri. Nadalje, za svaki* $i > 0$ *vrijedi* $H^i(X, \mathcal{D}_\lambda) = \{0\}$.

Skica dokaza: Neka je $\mathbb{C}_{\lambda+\rho}$ jednodimenzionalni $\mathfrak{h}-$modul određen sa $\lambda + \rho$. Nadalje, neka je

$$\cdots \longrightarrow F^{-p} \longrightarrow \cdots \longrightarrow F^{-1} \longrightarrow F^0 \longrightarrow \mathbb{C}_{\lambda+\rho} \longrightarrow 0$$

lijeva rezolucija tog modula sa slobodnim $\mathcal{U}(\mathfrak{h})-$modulima. Tenzoriranjem sa $\mathcal{D}_\mathfrak{h}$ nad $\mathcal{U}(\mathfrak{h})$ dobivamo

$$\cdots \longrightarrow \mathcal{D}_\mathfrak{h} \otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{h})} F^{-p} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \mathcal{D}_\mathfrak{h} \otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{h})} F^{-1} \longrightarrow \mathcal{D}_\mathfrak{h} \otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{h})} F^0 \longrightarrow \mathcal{D}_\mathfrak{h} \otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{h})} \mathbb{C}_{\lambda+\rho} \longrightarrow 0.$$

Budući da je $\mathcal{D}_\mathfrak{h}$ lokalno $\mathcal{U}(\mathfrak{h})-$slobodan, gornji niz je egzaktan. Dakle, prema lemi 10.1.1. to je lijeva rezolucija snopa $\mathcal{D}_\mathfrak{h} \otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{h})} \mathbb{C}_{\lambda+\rho} = \mathcal{D}_\lambda$ sa $\Gamma(X, -)-$acikličkim snopovima. To povlači da sve više kohomologije od $\mathcal{D}_\lambda$ iščezavaju. Nadalje, pomoću prve tvrdnje leme 10.1.1. dobivamo egzaktan niz

$$\cdots \longrightarrow \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \otimes_{\mathcal{Z}(\mathfrak{g})} F^{-p} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \otimes_{\mathcal{Z}(\mathfrak{g})} F^{-1} \longrightarrow \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \otimes_{\mathcal{Z}(\mathfrak{g})} F^0 \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{D}_\lambda) \longrightarrow 0.$$

Odatle slijedi $\mathcal{U}_\Theta = \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \otimes_\Theta \mathbb{C}_{\lambda+\rho} = \Gamma(X, \mathcal{D}_\lambda)$.

Dakle, zakrenuti snopovi diferencijalnih operatora $\mathcal{D}_\lambda$ na X mogu se shvaćati kao „*snopizirane*" verzije kvocijenata $\mathcal{U}_\Theta$ omotačke algebre $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$. To će nam omogućiti da „*lokaliziramo*" module nad $\mathcal{U}_\Theta$. Označimo sa $\mathcal{M}(\mathcal{U}_\Theta)$ kategoriju lijevih $\mathcal{U}_\Theta-$modula. Nadalje, neka je $\mathcal{M}_{\text{qc}}(\mathcal{D}_\lambda)$ kategorija kvazikoherentnih $\mathcal{D}_\lambda-$modula na X. Ako je $\mathcal{V}$ kvazikoherentan $\mathcal{D}_\lambda-$modul, njegovi globalni prerezi $\Gamma(X, \mathcal{V}) = H^0(X, \mathcal{V})$, a i više kohomologije $H^p(X, \mathcal{D}_\lambda)$, su moduli nad $\Gamma(X, \mathcal{D}_\lambda) = \mathcal{U}_\Theta$. Dakle, imamo funktore

$$H^p(X, -) : \mathcal{M}_{\text{qc}}(\mathcal{D}_\lambda) \longrightarrow \mathcal{M}(\mathcal{U}_\Theta), \qquad p \in \mathbb{Z}_+.$$

Da bismo iskazali generalizaciju Borel–Weilovog teorema na nekompaktne grupe treba nam još definicija jednog pojma. Označimo sa $\check{\Sigma} = \{\check{\alpha};\ \alpha \in \Sigma\}$ dualni sistem korijena od Σ u prostoru $\mathfrak{h}^{**} = \mathfrak{h}$; pri tome je $\check{\alpha}(\alpha) = 2$ za svaki $\alpha \in \Sigma$. Kažemo da je linearan funkcional $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ **antidominantan** ako vrijedi

$$\check{\alpha}(\lambda) \notin \mathbb{N} \qquad \forall \alpha \in \Sigma^+.$$

Nadalje, λ je **regularan** ako je

$$\check{\alpha}(\lambda) \neq 0 \qquad \forall \alpha \in \Sigma.$$

Teorem 10.1.3. *Neka je $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ antidominantan i neka je $\mathcal{V}$ kvazikoherentan $\mathcal{D}_\lambda$–modul na višestrukosti zastava X.*

(*a*) (**Teorem iščezavanja**) *Za svaki $i > 0$ vrijedi $H^i(X, \mathcal{V}) = 0$. Posebno, funktor*

$$\Gamma(X, -) : \mathcal{M}_{\mathrm{qc}}(\mathcal{D}_\lambda) \longrightarrow \mathcal{M}(\mathcal{U}_\Theta)$$

je egzaktan.

(*b*) (**Teorem neiščezavanja**) *Ako je k tome λ regularan i $\mathcal{V} \neq 0$, onda je $\Gamma(X, \mathcal{V}) \neq 0$.*

Korolar 10.1.4. *Ako je $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ antidominantan i regularan, onda je svaki kvazikoherentan $\mathcal{D}_\lambda$–modul $\mathcal{V}$ generiran svojim globalnim prerezima.*

Dokaz: Neka $\mathcal{W}$ označava $\mathcal{D}_\lambda$–podmodul od $\mathcal{V}$ generiran svim globalnim prerezima. Tada imamo egzaktan niz $\mathcal{U}_{]\Theta}$–modula

$$0 \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{W}) \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{V}) \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{V}/\mathcal{W}) \longrightarrow 0.$$

Budući da je $\Gamma(X, \mathcal{W}) \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{V})$ izomorfizam, slijedi da je $\Gamma(X, \mathcal{V}/\mathcal{W}) = 0$. Sada iz tvrdnje ($b$) teorema 10.1.3. slijedi da je $\mathcal{V}/\mathcal{W} = 0$. To znači da je $\mathcal{V} = \mathcal{W}$, odnosno, da je $\mathcal{V}$ generiran svojim globalnim prerezima.

Neka je $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ i neka je Θ njegova W–orbita. Tada definiramo desno egzaktan kovarijantan tzv. **funktor lokalizacije** $\Delta_\lambda : \mathcal{M}(\mathcal{U}_\Theta) \longrightarrow \mathcal{M}_{\mathrm{qc}}(\mathcal{D}_\lambda)$ sa

$$\Delta_\lambda(V) = \mathcal{D}_\lambda \otimes_{\mathcal{U}_\Theta)} V.$$

Budući da za svaki kvazikoherentan $\mathcal{D}_\lambda$–modul $\mathcal{W}$ vrijedi

$$\Gamma(X, \mathcal{W}) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_\lambda}(\mathcal{D}_\lambda, \mathcal{W}),$$

funktor lokalizacije Δ_λ je lijevo adjungiran funktoru globalnih prereza $\Gamma = \Gamma(X, -)$, tj. vrijedi

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_\lambda}(\Delta_\lambda(V), \mathcal{W}) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{U}_\Theta}(V, \Gamma(X, \mathcal{W})) \qquad \forall V \in \mathcal{M}(\mathcal{U}_\Theta) \quad \mathrm{i} \quad \forall \mathcal{W} \in \mathcal{M}_{\mathrm{qc}}(\mathcal{D}_\lambda).$$

Posebno, postoji morfizam φ identičnog funktora na kategoriji $\mathcal{M}(\mathcal{U}_\Theta)$ u funktor $\Gamma \circ \Delta_\lambda)$. On je za svaki $V \in \mathcal{M}(\mathcal{U}_\Theta)$ dan prirodnim homorfizmom $\varphi_V : V \longrightarrow \Gamma\left(X, \Delta_\lambda(V)\right)$.

Lema 10.1.5. *Neka je $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ antidominantan. Tada je za svaki $V \in \mathcal{M}(\mathcal{U}_\Theta)$ prirodni homomorfizam φ_V izomorfizam.*

Dokaz: Ako je $V = \mathcal{U}_\Theta$, to slijedi iz teorema 10.1.2. Nadalje, prema tvrdnji (a) teorema 10.1.3. u toj je situaciji funktor Γ egzaktan. To povlači da je funktor $\Gamma \circ \Delta_\lambda$ desno egzaktan. Za proizvoljan $\mathcal{U}_\Theta$−modul V postoje skupovi I i J i egzaktan niz

$$(\mathcal{U}_\Theta)^{(J)} \longrightarrow (\mathcal{U}_\Theta)^{(I)} \longrightarrow V \longrightarrow 0.$$

Dobivamo komutativan dijagram

$$\begin{array}{ccccccc}
(\mathcal{U}_\Theta)^{(J)} & \longrightarrow & (\mathcal{U}_\Theta)^{(I)} & \longrightarrow & V & \longrightarrow & 0 \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
\Gamma\left(X, \Delta_\lambda\left(\mathcal{U}_\Theta\right)\right)^{(J)} & \longrightarrow & \Gamma\left(X, \Delta_\lambda\left(\mathcal{U}_\Theta\right)\right)^{(I)} & \longrightarrow & \Gamma\left(X, \Delta_\lambda(V)\right) & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

s egzaktnim recima. Nadalje, prve su dvije vertikalne strelice izomorfizmi. Slijedi da je i treća vertikalna strelica izomorfizam.

Adjungiranost dvaju funktora daje i morfizam ψ funktora $\Delta_\lambda \circ \Gamma$ u identični funktor na kategoriji $\mathcal{M}_{\mathrm{qc}}(\mathcal{D}_\lambda)$. On je za svaki kvazikoherentan $\mathcal{D}_\lambda$−modul $\mathcal{V}$ dan prirodnim morfizmom

$$\psi_{\mathcal{V}} : \Delta_\lambda(\Gamma(X, \mathcal{V})) = \mathcal{D}_\lambda \otimes_{\mathcal{U}_\Theta} \Gamma(X, \mathcal{V}) \longrightarrow \mathcal{V}.$$

Pretpostavimo da je λ ne samo antidominantan nego i regularan. Tada je prema korolaru 10.1.4. $\psi_{\mathcal{V}}$ epimorfizam. Neka je $\mathcal{K} = \operatorname{Ker} \psi_{\mathcal{V}}$. Tada imamo egzaktan niz kvazikoherentnih $\mathcal{D}_\lambda$−modula

$$0 \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{K}) \longrightarrow \Gamma\left(X, \Delta_\lambda(\Gamma(X, \mathcal{V}))\right) \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{V}) \longrightarrow 0.$$

Prema lemi 10.1.5. imamo $\Gamma(X, \mathcal{K}) = 0$. Sada iz tvrdnje (b) teorema 10.1.3. slijedi da je $\mathcal{K} = 0$. Dakle, $\psi_{\mathcal{V}}$ je izomorfizam. To povlači sljedeći teorem poznat pod nazivom **Beilinson−Bernsteinova ekvivalencija kategorija**:

Teorem 10.1.6. *Neka je $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ antidominantan i regularan. Tada je funktor lokalizacije*

$$\Delta_\lambda : \mathcal{M}(\mathcal{U}_\Theta) \longrightarrow \mathcal{M}_{\mathrm{qc}}(\mathcal{D}_\lambda)$$

ekvivalencija kategorija. Njezin kvaziinvers je funktor globalnih prereza $\Gamma = \Gamma(X, -)$.

Ovaj se teorem generalizira i na na slučaj antidominantnih λ bez pretpostavke regularnosti. Tada treba kategoriju $\mathcal{M}_{\mathrm{qc}}(\mathcal{D}_\lambda)$ zamijeniti s kvocijentnom kategorijom po punoj potkategoriji svih kvazikoherentnih $\mathcal{D}_\lambda$−modula bez netrivijalnih globalnih prereza.

Beilinson−Bernsteinova ekvivalencija kategorija omogućuje nam da prenesemo probleme o $\mathcal{U}_\Theta$−modulima (tj. $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$−modulima s infinitezimalnim karakterom χ_λ) u probleme o $\mathcal{D}_\lambda$−modulima, u kojima se možemo služiti tzv. „*lokalnim*” metodama. Za proučavanje Harish−Chandrinih modula uvodi se njihova „*snopizirana*” verzija: **Harish−Chandrin snop** je koherentan $\mathcal{D}_\lambda$−modul $\mathcal{V}$ s algebarskim djelovanjem grupe K takvim da su djelovanja $\mathcal{D}_\lambda$ i K kompatibilna:

(1) Djelovanje $\mathfrak{k}$ kao Liejeve podalgebre od $\mathfrak{g} \subseteq \mathcal{U}_\Theta = \Gamma(X, \mathcal{D}_\lambda)$ podudara se s diferencijalom djelovanja od K.

(2) Djelovanje $\mathcal{D}_\lambda \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{V}$ je K−ekvivarijantno.

Morfizmi Harish−Chandrinih snopova su K−ekvivarijantni morfizmi $\mathcal{D}_\lambda$−modula. Tako dobivamo Abelovu kategoriju koju označavamo sa $\mathcal{M}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{D}_\lambda, K)$. Iz čisto formalnih razloga Beilinson−Bernsteinova ekvivalencija kategorija prelazi u njenu K−ekvivarijantnu verziju:

Teorem 10.1.7. *Neka je $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ antidominantan i regularan. Tada je funktor lokalizacije*

$$\Delta_\lambda : \mathcal{M}(\mathcal{U}_\Theta, K) \longrightarrow \mathcal{M}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{D}_\lambda, K)$$

ekvivalencija kategorija čiji je kvaziinvers funktor globalnih prereza $\Gamma(X, -)$.

10.2 $K-$orbite na višestrukosti zastava

U ovom ćemo odjeljku proučiti djelovanje grupe K na višestrukosti zastava X. Budući da centar grupe G djeluje trivijalno na X, **možemo pretpostavljati da je** $G = \mathrm{Int}(\mathfrak{g})$. Kao i prije sa ϑ označavamo Cartanovu involuciju od $\mathfrak{g}$ kojoj je $\mathfrak{k}$ skup fiksnih točaka. Istim znakom ϑ označavamo i jedinstven involutivni automorfizam grupe G kome je diferencijal upravo Cartanova involucija $\vartheta : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$.

Definiramo djelovanje grupe G na $X \times X$ ovako:

$$g(x, y) = (gx, \vartheta(g)y), \qquad x, y \in X, \quad g \in G.$$

Propozicija 10.2.1. *Grupa G djeluje na $X \times X$ s konačno mnogo orbita.*

Dokaz: Fiksirajmo točku $y \in X$. Neka je B_y Borelova podgrupa od G koja odgovara točki y, tj.

$$B_y = \{g \in G;\ gy = y\} = \{g \in G;\ (Ad\, g)\mathfrak{b}_y = \mathfrak{b}_y\}.$$

Stavimo $B = \vartheta(B_y)$. Uočimo sada da svaka $G-$orbita u $X \times X$ siječe $X \times \{y\}$; to je neposredna posljedica činjenice da G djeluje tranzitivno na X. Neka je $y \in X$ i neka je Q $G-$orbita točke $(x, y) \in X \times X$:

$$Q = \{(gx, \vartheta(g)y);\ g \in G\}.$$

Tada zbog involutivnosti ϑ imamo

$$Q \cap (X \times \{y\}) = \{(gx, y);\ g \in G,\ \vartheta(g)y = y\} =$$

$$= \{(gx, y);\ g \in G,\ \vartheta(g) \in B_y\} = \{(gx, y);\ g \in \vartheta(B_y)\} = Bx \times \{y\}.$$

Prema Bruhatovom teoremu Borelova podgrupa B djeluje na X s konačno mnogo orbita. Odatle slijedi tvrdnja propozicije.

Propozicija 10.2.2. *Grupa K djeluje na višestrukosti X s konačno mnogo orbita.*

Dokaz: Neka je Δ dijagonala u $X \times X$. Prema propoziciji 10.2.1. Δ je disjunktna unija konačno mnogo ireducibilnih podvišestrukosti od kojih je svaka ireducibilna komponenta presjeka $G-$orbite u $X \times X$ sa Δ. Te su podvišestrukosti $K-$invarijantne, dakle, svaka je od njih unija $K-$orbita. Neka je V jedna od tih podvišestrukosti i neka je Q $K-$orbita neke točke $(x, x) \in V$. Tangencijalni prostor $T_x(X)$ identificira se sa $\mathfrak{g}/\mathfrak{b}_x$. Neka je $p_x : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}/\mathfrak{b}_x$ kvocijentno preslikavanje. Imamo i identifikaciju $T_{(x,x)}(X \times X) = \mathfrak{g}/\mathfrak{b}_x \times \mathfrak{g}/\mathfrak{b}_x$. Promatramo orbitno preslikavanje $f : G \to X \times X$ definirano sa $f(g) = g(x, x) = (gx, \vartheta(g)x)$. Njegov diferencijal u $1 \in G$ je linearan operator $\xi \mapsto (p_x(\xi), p_x(\vartheta(\xi)))$ sa $\mathfrak{g}$ u $\mathfrak{g}/\mathfrak{b}_x \times \mathfrak{g}/\mathfrak{b}_x$. Sada je tangencijalni prostor $T_{(x,x)}(V)$ sadržan u presjeku slike tog diferencijala s dijagonalom u tangencijalnom prostoru $T_{(x,x)}(X \times X)$, tj.

$$T_{(x,x)}(V) \subseteq \{(p_x(\xi), p_x(\xi));\ \xi \in \mathfrak{g} \text{ takav da je } p_x(\xi) = p_x(\vartheta(\xi))\} =$$

$$= \{(p_x(\xi), p_x(\xi));\ \xi \in \mathfrak{k}\} = T_{(x,x)}(Q).$$

Obrnuta je inkluzija očita jer je $Q \subseteq V$. Dakle, imamo jednakost, a to znači da je $K-$orbita Q otvorena u V. Zbog ireducibilnosti V slijedi da je V $K-$orbita. Time je tvrdnja dokazana.

Propozicija 10.2.3. *Neka su $\mathfrak{b}$ Borelova podalgebra od $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{n} = [\mathfrak{b}, \mathfrak{b}]$ i $N = \exp \mathfrak{n}$ povezana (i jednostavno povezana) zatvorena podgrupa od G s Liejevom algebrom $\mathfrak{n}$.*

(a) *$\mathfrak{b}$ sadrži $\vartheta-$stabilnu Cartanovu odalgebru od $\mathfrak{g}$.*

(b) *Ako su* $\mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2 \subseteq \mathfrak{b}$ *dvije* $\vartheta-$*stabilne Cartanove podalgebre od* $\mathfrak{g}$, *postoji* $k \in K \cap N$ *takav da je* $(Ad\, k)\mathfrak{c}_1 = \mathfrak{c}_2$.

Dokaz: (a) $\vartheta(\mathfrak{b})$ je također Borelova podalgebra od $\mathfrak{g}$ pa presjek $\mathfrak{b}\cap\vartheta(\mathfrak{b})$ sadrži neku Cartanovu podalgebru $\mathfrak{d}$ od $\mathfrak{g}$. Tada je i $\vartheta(\mathfrak{d})$ Cartanova podalgebra od $\mathfrak{g}$, dakle, i $\mathfrak{d}$ i $\vartheta(\mathfrak{d})$ su Cartanove podalgebre od $\mathfrak{b}\cap\vartheta(\mathfrak{b})$. Dakle, one su konjugirane s nekim $n = \exp\xi$ za neki

$$\xi \in [\mathfrak{b}\cap\vartheta(\mathfrak{b}), \mathfrak{b}\cap\vartheta(\mathfrak{b})] \subseteq \mathfrak{n}\cap\vartheta(\mathfrak{n}).$$

Primijenimo li ϑ na jednakost $\vartheta(\mathfrak{d}) = (Ad\, n)\mathfrak{d}$, dobivamo $\mathfrak{d} = (Ad\,\vartheta(n))\vartheta(\mathfrak{d})$, pa slijedi

$$\mathfrak{d} = (Ad\,\vartheta(n))(Ad\, n)\mathfrak{d} = (Ad\,\vartheta(n)n)\mathfrak{d}.$$

Prema tome, element $\vartheta(n)n \in N\cap\vartheta(N)$ normalizira $\mathfrak{d}$. Dakle, jednak je 1, odnosno, vrijedi $\vartheta(n) = n^{-1}$. No tada je

$$\exp\,\vartheta(\xi) = \vartheta(n) = n^{-1} = \exp(-\xi).$$

Budući da je eksponencijalno preslikavanje na $\mathfrak{n}\cap\vartheta(\mathfrak{n})$ injektivno, slijedi $\vartheta(\xi) = -\xi$. Dakle, element $m = \exp(\frac{1}{2}\xi)$ zadovoljava $m^2 = n$ i

$$\vartheta(m) = \vartheta\left(\exp\left(\frac{1}{2}\xi\right)\right) = \exp\left(\vartheta\left(\frac{1}{2}\xi\right)\right) = \exp\left(-\frac{1}{2}\xi\right) = m^{-1}.$$

Stavimo $\mathfrak{c} = (Ad\, m)\mathfrak{d}$. Tada je $\mathfrak{c}\subseteq\mathfrak{b}$ i vrijedi

$$\vartheta(\mathfrak{c}) = \vartheta((Ad\, m)\mathfrak{d}) = (Ad\,\vartheta(m))\vartheta(\mathfrak{d}) = (Ad\, m^{-1})(Ad\, n)\mathfrak{d} = (Ad\, m)\mathfrak{d} = \mathfrak{c}.$$

Dakle, Cartanova podalgebra $\mathfrak{c}\subseteq\mathfrak{b}$ je $\vartheta-$stabilna.

(b) Kao u (a) postoji $n \in N\cap\vartheta(N)$ takav da je $\mathfrak{c}_2 = (Ad\, n)\mathfrak{c}_1$. Primijenimo li ϑ, dobivamo $\mathfrak{c}_2 = (Ad\,\vartheta(n))\mathfrak{c}_1$, dakle, $(Ad\, n^{-1}\vartheta(n))\mathfrak{c} = \mathfrak{c}$. Odatle kao u (a) zaključujemo da je $n^{-1}\vartheta(n) = 1$, odnosno, $\vartheta(n) = n$. Ako je $n = \exp\xi$ za $\xi\in\mathfrak{n}$, imamo $\vartheta(\xi) = \xi$, dakle, $\xi \in \mathfrak{k}\cap\mathfrak{n}$. Prema tome, $n \in K\cap N$.

Neka je $\mathfrak{c}$ $\vartheta-$stabilna Cartanova podalgebra od $\mathfrak{g}$ i $k \in K$. Tada je $(Ad\, k)\mathfrak{c}$ također $\vartheta-$stabilna Cartanova podalgebra od $\mathfrak{g}$. Dakle, grupa K djeluje na skupu svih $\vartheta-$stabilnih Cartanovih podalgebri od $\mathfrak{g}$.

Prema propoziciji 10.2.3. svakoj Borelovoj podalgebri $\mathfrak{b}$ možemo pridružiti klasu $K-$konjugiranosti $\vartheta-$stabilnih Cartanovih podalgebri od $\mathfrak{g}$. Drugim riječima, imamo prirodnu surjekciju s višestrukosti zastava X na skup svih klasa $K-$konjugiranosti $\vartheta-$stabilnih Cartanovih podalgebri od $\mathfrak{g}$. To je preslikavanje očito konstantno na $K-$orbitama u X, dakle, svakoj $K-$orbiti u X možemo pridružiti jedinstvenu klasu $K-$konjugiranosti $\vartheta-$stabilnih Cartanovih podalgebri od $\mathfrak{g}$. Budući da je prema propoziciji 10.2.2. broj $K-$orbita u X konačan, dokazali smo:

Propozicija 10.2.4. *Skup klasa* $K-$*konjugiranosti* $\vartheta-$*stabilnih Cartanovih podalgebri od* $\mathfrak{g}$ *je konačan.*

Neka su u daljnjem Q neka $K-$orbita u X, $x \in Q$, $\mathfrak{c}$ $\vartheta-$stabilna Cartanova podalgebra od $\mathfrak{g}$ sadržana u $\mathfrak{b}_x$ i $R = R(\mathfrak{g},\mathfrak{c}) \subseteq \mathfrak{c}^*$ pripadni sistem korijena. Tada ϑ inducira involutivni automorfizam sistema korijena R. Neka je R^+ skup pozitivnih korijena u R određen sa $\mathfrak{b}_x$. Invers preslikavanja specijalizacije Cartanove trojke $(\mathfrak{h}^*, \Sigma, \Sigma^+)$ u Cartanovu trojku $(\mathfrak{c}^*, R, R^+)$ prevodi ϑ u involutivni automorfizam sistema korijena Σ. Jasno je da ta involucija u $\mathrm{Aut}(\Sigma)$ ovisi samo o $K-$orbiti Q, a ne i o izboru točke $x \in Q$. Tu involuciju označavamo sa ϑ_Q. Neka je $\mathfrak{h} = \mathfrak{t}_Q \oplus \mathfrak{a}_Q$

dekompozicija $\mathfrak{h}$ u svojstvene potprostore od ϑ_Q za svojstvene vrijednosti 1 i -1. Preslikavanje specijalizacije prevodi tu dekompoziciju u dekompoziciju $\mathfrak{c} = \mathfrak{t} \oplus \mathfrak{a}$ u svojstvene potprostore od ϑ za svojstvene vrijednosti 1 i -1. $\mathfrak{t}$ se zove **toroidalni dio**, a $\mathfrak{a}$ **vektorski dio** (ili **rascjepivi dio**) od $\mathfrak{c}$. Razliku $\dim \mathfrak{t} - \dim \mathfrak{a}$ zovemo **signatura** Cartanove podalgebre $\mathfrak{c}$. Ona je definirana za svaku $\vartheta-$stabilnu Cartanovu podalgebru $\mathfrak{c}$ i očito je konstantna na svakoj klasi $K-$konjugiranosti takvih Cartanovih podalgebri. Kažemo da je $\vartheta-$stabilna Cartanova podalgebra **maksimalno toroidalna** (odnosno, **maksimalno vektorska**) ako je njena signatura maksimalna (odnosno, minimalna) među svim $\vartheta-$stabilnim Cartanovim podalgebrama. Sve su maksimalno toroidalne $\vartheta-$stabilne Cartanove podalgebre $K-$konjugirane; takodjer, sve su maksimalno vektorske $\vartheta-$stabilne Cartanove podalgebre $K-$konjugirane.

Za korijen $\alpha \in \Sigma$ kažemo da je $Q-$**imaginaran** ako je $\vartheta_Q\alpha = \alpha$, $Q-$**realan** ako je $\vartheta_Q\alpha = -\alpha$ i $Q-$**kompleksan** ako je $\vartheta_Q\alpha \neq \pm\alpha$. Skup svih $Q-$imaginarnih ($Q-$realnih, $Q-$kompleksnih) korijena u Σ označavat ćemo sa $\Sigma_{Q,I}$ ($\Sigma_{Q,\mathbb{R}}$, $\Sigma_{Q,\mathbb{C}}$). Preslikavanje specijalizacije prevodi te skupove korijena u imaginarne, realne i kompleksne korijene u $R \subseteq \mathfrak{c}^*$.

Stavimo

$$D_+(Q) = \{\alpha \in \Sigma^+;\ \vartheta_Q\alpha \in \Sigma^+,\ \vartheta_Q\alpha \neq \alpha\}.$$

Taj je skup korijena očito ϑ_Q-invarijantan i sastoji se od $Q-$kompleksnih pozitivnih korijena. Svaka se ϑ_Q-orbita u $D_+(Q)$ sastoji od dva korijena, dakle, broj $d(Q) = \operatorname{Card} D_+(Q)$ je paran. Komplement skupa $D_+(Q)$ u skupu svih pozitivni $Q-$kompleksnih korijena je

$$D_-(Q) = \{\alpha \in \Sigma^+;\ -\vartheta_Q\alpha \in \Sigma^+,\ \vartheta_Q\alpha \neq -\alpha\}.$$

Za imaginaran korijen $\alpha \in R$ vrijedi $\vartheta\alpha = \alpha$, dakle, korijenski potprostor $\mathfrak{g}_\alpha$ je $\vartheta-$invarijantan. Stoga na njemu ϑ djeluje ili kao 1 ili kao -1. U prvom slučaju je $\mathfrak{g}_\alpha \subseteq \mathfrak{k}$ i tada se α zove **kompaktan imaginaran** korijen, a u drugom slučaju je $\mathfrak{g}_\alpha \not\subseteq \mathfrak{k}$ i tada se α zove **nekompaktan imaginaran** korijen. Označimo te skupove sa R_{CI} i R_{NI}. Slike tih skupova u Σ pri preslikavanju specijalizacije označimo sa $\Sigma_{Q,CI}$ i $\Sigma_{Q,NI}$.

Iz korijenskog rastava Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ neposredno dobivamo:

Lema 10.2.5. (*a*) *Liejeva algebra $\mathfrak{k}$ je direktna suma $\mathfrak{t}$, korijenskih potprostora $\mathfrak{g}_\alpha$ za $\alpha \in R_{CI}$, i svojstvenih potprostora operatora ϑ za svojstvenu vrijednost 1 u $\mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{g}_{\vartheta\alpha}$ za realne i kompleksne korijene α.*

(*b*) *Liejeva algebra $\mathfrak{k} \cap \mathfrak{b}_x$ je direktna suma $\mathfrak{t}$, korijenskih potprostora $\mathfrak{g}_\alpha$ za $\alpha \in R^+ \cap R_{CI}$, i svojstvenih potprostora operatora ϑ za svojstvenu vrijednost 1 u $\mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{g}_{\vartheta\alpha}$ za kompleksne korijene $\alpha \in R^+$ takve da je $\vartheta\alpha \in R^+$.*

Tangencijalni prostor na orbitu Q u točki x može se identificirati sa $\mathfrak{k}/(\mathfrak{k} \cap \mathfrak{b}_x)$, pa prema lemi 10.2.5. imamo

$$\dim Q = \dim \mathfrak{k} - \dim (\mathfrak{k} \cap \mathfrak{b}_x) = \operatorname{Card} \Sigma_{Q,CI} + \frac{1}{2} (\operatorname{Card} \Sigma_{Q,\mathbb{R}} + \operatorname{Card} \Sigma_{Q,\mathbb{C}}) - \frac{1}{2} \operatorname{Card} \Sigma_{Q,CI} - \frac{1}{2} d(Q).$$

Time je dokazana

Lema 10.2.6. *Za $K-$orbitu Q u X vrijedi*

$$\dim Q = \frac{1}{2} (\operatorname{Card} \Sigma_{Q,CI} + \operatorname{Card} \Sigma_{Q,\mathbb{R}} + \operatorname{Card} \Sigma_{Q,\mathbb{C}} - d(Q)).$$

Budući da se $D_+(Q)$ sastoji od najviše polovice svih $Q-$kompleksnih korijena, odatle slijedi da vrijedi

$$\frac{1}{2} \left(\operatorname{Card} \Sigma_{Q,CI} + \operatorname{Card} \Sigma_{Q,\mathbb{R}} + \frac{1}{2} \operatorname{Card} \Sigma_{Q,\mathbb{C}} \right) \leq \dim Q \leq \frac{1}{2} (\operatorname{Card} \Sigma_{Q,CI} + \operatorname{Card} \Sigma_{Q,\mathbb{R}} + \operatorname{Card} \Sigma_{Q,\mathbb{C}}).$$

Minimalna vrijednost pripada tzv. **Zuckermanovim orbitama** pridruženim Cartanovoj podalgebri $\mathfrak{c}$. Maksimalna vrijednost pripada tzv. **Langlandsovim orbitama** pridruženim $\mathfrak{c}$. Može se dokazati da obje vrste orbita postoje za svaku $\vartheta-$stabilnu Cartanovu podalgebru $\mathfrak{c}$. One obje ovise samo o klasi $K-$konjugiranosti od $\mathfrak{c}$.

Budući da je višestrukost X glatka i povezana, dakle, ireducibilna, ona ima jedinstvenu otvorenu $K-$orbitu. Njena je dimenzija $\frac{1}{2}\operatorname{Card}\Sigma$ i prema prethodnim formulama ona odgovara Langlandsovoj orbiti pridruženoj klasi $K-$konjugiranosti $\vartheta-$stabilnih Cartanovih podalgebri bez nekompaktnih imaginarnih korijena. Odatle slijedi:

Korolar 10.2.7. *Otvorena $K-$orbita u X je Langlandsova orbita pridružena klasi $K-$konjugiranosti maksimalno vektorskih $\vartheta-$stabilnih Cartanovih podalgebri od $\mathfrak{g}$.*

Sljedeća propozicija karakterizira drugu krajnost $-$ zatvorene $K-$orbite:

Propozicija 10.2.8. *$K-$orbita u X je zatvorena ako i samo ako se sastoji od $\vartheta-$stabilnih Borelovih podalgebri.*

Dokaz: Promatramo prije definirano djelovanje G na $X \times X$. Neka je Δ dijagonala od $X \times X$ i $(x,x) \in \Delta$. Označimo sa B_x Borelovu podgrupu od G određenu sa $\mathfrak{b}_x$. Tada je stabilizator točke (x,x) u G jednak $B_x \cap \vartheta(B_x)$. Dakle, ako je Liejeva algebra $\mathfrak{b}_x$ od B_x $\vartheta-$stabilna, stabilizator od (x,x) u G jednak je B_x. Stoga je $G-$orbita točke (x,x) zatvorena. Neka je C komponenta povezanosti presjeka te orbite s dijagonalom Δ koja sadrži točku (x,x). Tada je C zatvorena. Prema korespondenciji iz dokaza propozicije 10.2.2. C odgovara $K-$orbiti točke x pri dijagonalnom ulaganju $X \to X \times X$.

Za dokaz obrata, pretpostavimo da je Q zatvorena $K-$orbita u X i neka je $x \in Q$. Tada je stabilizator od x u K rješiva parabolička podgrupa, dakle, to je Borelova podgrupa od K. Prema lemi 10.2.5. imamo

$$\dim Q = \frac{1}{2}(\dim \mathfrak{k} - \dim \mathfrak{t}) = \frac{1}{2}\left(\operatorname{Card}\Sigma_{Q,CI} + \frac{1}{2}\left(\operatorname{Card}\Sigma_{Q,\mathbb{C}} + \operatorname{Card}\Sigma_{Q,\mathbb{R}}\right)\right).$$

Usporedimo li to s formulom u lemi 10.2.6., dobivamo

$$\operatorname{Card}\Sigma_{Q,\mathbb{R}} + \operatorname{Card}\Sigma_{Q,,\mathbb{C}} = 2d(Q).$$

Budući da se $D_+(Q)$ sastoji od najviše polovice svih $Q-$kompleksnih korijena, vidimo da nema $Q-$realnih korijena i svi pozitivni $Q-$kompleksni korijeni leže u $D_+(Q)$. Prema tome, sve Borelove podalgebre $\mathfrak{b}_x$, $x \in Q$, su $\vartheta-$stabilne.

Korolar 10.2.9. *Zatvorene $K-$orbite u X su upravo Zuckermanove orbite pridružene maksimalno toroidalnim Cartanovim podalgebrama od $\mathfrak{g}$ (koje su sve međusobno $K-$konjugirane).*

10.3 Klasifikacija ireducibilnih Harish−Chandrinih snopova

U ovom ćemo odjeljku upotrijebiti Beilinson−Bernsteinovu ekvivalenciju kategorija da bismo klasificirali ireducibilne Harish−Chandrine snopove. Prije svega dokazujemo:

Teorem 10.3.1. *Harish−Chandrini snopovi su holonomni $\mathcal{D}_\lambda$−moduli. Posebno, oni su konačne duljine.*

Za dokaz najprije dokazujemo dvije leme.

Lema 10.3.2. *Svaki Harish−Chandrin snop $\mathcal{V}$ ima dobru filtraciju $\mathrm{F}\mathcal{V}$ koja se sastoji od K−homogenih koherentnih $\mathcal{O}_X$−modula.*

Dokaz: Pomaknemo li sa $\mathcal{O}(\mu)$ za dovoljno negativan $\mu \in P(\Sigma)$ možemo pretpostaviti da je λ antidominanten i regularan. U tom je slučaju zbog Beilinson−Bernsteinove ekvivalencije kategorija $\mathcal{V} = \mathcal{D}_\lambda \otimes_{\mathcal{U}_\Theta} V$, gdje je $V = \Gamma(X, \mathcal{V})$. Budući da je V algebarski K−modul i konaqv cno generiran $\mathcal{U}_\Theta$−modul, postoji konačnodimenzionalan K−podmodul U koji generira V kao $\mathcal{U}_\Theta$−modul. Tada su $\mathrm{F}_p\mathcal{D}_\lambda \otimes_{\mathbb{C}} Z$, $p \in \mathbb{Z}_+$, K−homogeni koherentni $\mathcal{O}_X$−moduli. Budući da je prirodno preslikavanje $\mathrm{F}_p\mathcal{D}_\lambda \otimes_{\mathbb{C}} U \to \mathcal{V}$ K−ekvivarijantno, slika $\mathrm{F}_p\mathcal{V}$ je K−homogen koherentan $\mathcal{O}_X$−podmodul od $\mathcal{V}$ za svaki $p \in \mathbb{Z}_+$.

Tada je $\mathrm{F}\,\mathcal{V} = (\mathrm{F}_p\mathcal{V})_{p\in\mathbb{Z}_+}$ filtracija $\mathcal{D}_\lambda$−modula $\mathcal{V}$ K−homogenim koherentnim $\mathcal{O}_X$−modulima koja je kompatibilna s fltracijom od $\mathcal{D}_\lambda$.

Budući da je $\mathcal{V}$ generiran svojim globalnim prerezima, da bismo dokazali da je ta filtracija ekshaustivna dovoljno je dokazati da svaki globalni prerez v od $\mathcal{V}$ leži u $\mathrm{F}_p\mathcal{V}$ za dovoljno veliki p. Budući da je V generiran sa U kao $\mathcal{U}_\Theta$−modul, postoje $T_i \in \mathcal{U}_\Theta$, $u_i \in U$, $1 \leq i \leq m$, takvi da je $v = \sum_{i=1}^m T_i u_i$. Sada postoji $p \in \mathbb{Z}_+$ takav da su svi T_i, $1 \leq i \leq m$, globalni prerzi od $\mathrm{F}_p\mathcal{D}_\lambda$. Odatle slijedi da je $v \in \mathrm{F}_p\mathcal{V}$.

Napokon, po konstrukciji od $\mathrm{F}\,\mathcal{V}$ očito vrijedi $(\mathrm{F}_p\mathcal{D}_\lambda)(\mathrm{F}_q\mathcal{V}) = \mathrm{F}_{p+q}\mathcal{V}$ za sve $p, q \in \mathbb{Z}_+$. Dakle, $\mathrm{F}\,\mathcal{V}$ je dobra filtracija.

Za drugu lemu trebaju nam još neki pojmovi. Neka je Y glatka višestrukost i Z njena glatka podvišestrukost. Tada definiramo tzv. **konormalnu višestrukost** od Z u Y. To je glatka podvišestrukost $N_Z(Y)$ od $T^*(Y)$ definirana sa

$$N_Z(Y) = \{(z, \omega) \in T^*(Y);\ z \in Z,\ \omega \in T^*_z(Y),\ \omega | T_z(Z) = 0\}.$$

Budući da je dimenzija prostora svih linearnih funkcionala iz $T^*_z(Y)$ koje iščezavaju na $T_z(Z)$ jednaka $\dim T_z(Y) - \dim T_z(Z)$, a to je zbog glatkoće Y i Z jednako $\dim Y - \dim Z$, slijedi da je $\dim N_Z(Y) = \dim Y$.

Neka je $\lambda \in \mathfrak{h}^*$. Vidjeli smo ranije da je $\mathrm{Gr}\,\mathcal{D}_\lambda = \pi_* \left(\mathcal{O}_{T^*(X)}\right)$, pri čemu je $\pi : T^*(X) \to X$ prirodna projekcija. Svaki $\xi \in \mathfrak{g}$ određuje globalni prerez od $\mathcal{D}_\lambda$ reda ≤ 1, dakle, globalni prerez od $\mathrm{F}_1\mathcal{D}_\lambda$. Simbol tog prereza je globalni prerez od $\pi_* \left(\mathcal{O}_{T^*(X)}\right)$ koji ne ovisi o λ. Za svaku točku $x \in X$ diferencijal u $1 \in G$ orbitnog preslikavanja $f_x : G \to X$, danog sa $f_x(g) = gx$, $g \in G$, preslikava Liejevu algebru $\mathfrak{g}$ na tangencijalni prostor $T_x(X)$ na X u toj točki x. Jezgra tog preslikavanja je $\mathfrak{b}_x$. Dakle, diferencijal $T_1(f_x)$ od f_x u $1 \in G$ identificira $\mathfrak{g}/\mathfrak{b}_x$ sa $T_x(X)$. Simbol globalnog prereza određenog sa ξ je funkcija $(x, \omega) \mapsto \omega\left(T_1(f_x)(\xi)\right)$, $x \in X$, $\omega \in T^*_x(X)$.

Neka je $\mathcal{J}_K$ ideal (tj. snop ideala) u $\mathcal{O}_X$−algebri $\pi_* \left(\mathcal{O}_{T^*(X)}\right)$ generiran simbolima prerezima pridruženih elementima od $\mathfrak{k}$. Nadalje, neka je $\mathcal{N}_K$ skup nultočaka tog ideala u $T^*(X)$.

Lema 10.3.3. *Višestrukost $\mathcal{N}_K$ je unija konormalnih višestrukosti $N_Q(X)$ za sve K−orbite Q u X. Njena je dimenzija jednaka* $\dim X$.

Dokaz: Neka je $x \in X$ i neka je Q $K-$orbita kroz točku x. Tada je

$$\mathcal{N}_K \cap T_x^*(X) = \{\omega \in T_x^*(X);\ \omega | T_1(f_x)(\mathfrak{k}) = 0\} = \{\omega \in T_x^*(X);\ \omega | T_x(Q) = 0\} = N_Q(X) \cap T_x^*(X).$$

Dakle, $\mathcal{N}_K$ je unija svih $N_Q(X)$.

Za svaku $K-$orbitu Q u X njena konormalna višestrukost $N_Q(X)$ ima dimenziju jednaku dim X. Budući da je broj $K-$orbita u X konačan, $\mathcal{N}_K$ je konačna unija podvišestrukosti koje sve imaju dimenziju dim X, dakle, dim $\mathcal{N}_K =$ dim X.

Sada vidimo da je teorem 10.3.1. neposredna posljedica sljedeće propozicije:

Propozicija 10.3.4. *Neka je $\mathcal{V}$ Harish−Chandrin snop. Tada je karakteristična višestrukost* $\mathrm{Char}(\mathcal{V})$ *od $\mathcal{V}$ zatvorena podvišestrukost od $\mathcal{N}_K$.*

Dokaz: Prema lemi 10.3.2 . $\mathcal{V}$ ima dobru filtraciju $\mathrm{F}\,\mathcal{V}$ koja se sastoji od $K-$homogenih koherentnih $\mathcal{O}_X-$modula. Dakle, globalni prerezi od $\mathcal{D}_\lambda$ koji odgovaraju elementima od $\mathfrak{k}$ preslikavaju $\mathrm{F}_p\mathcal{V}$ u sama sebe za svaki $p \in \mathbb{Z}_+$. Dakle, njihovi simboli anihiliraju $\mathrm{Gr}\,\mathcal{V}$, pa je $\mathcal{I}_K$ sadržan u anihilatoru $\mathrm{Gr}\,\mathcal{V}$ u $\pi_*\left(\mathcal{O}_{T^*(X)}\right)$. Odatle slijedi da je karakteristična višestrukost $\mathrm{Char}(\mathcal{V})$ zatvorena podvišestrukost od $\mathcal{N}_K$.

Sada želimo opisati sve ireducibilne Harish−Chandrine snopove. Prije svega dokažimo:

Lema 10.3.5. *Neka je $\mathcal{V}$ ireducibilan Harish−Chandrin snop. Tada je njegov nosač* $\mathrm{supp}(\mathcal{V})$ *zatvarač neke $K-$orbite Q u X.*

Dokaz: Budući da je grupa K povezana, Harish−Chandrin snop $\mathcal{V}$ je ireducibilan ako i samo je ireducibilan kao $\mathcal{D}_\lambda-$modul. Da bismo to dokazali, zakretanjem sa $\mathcal{O}(\mu)$ za dovoljno negativan μ možemo pretpostaviti da je λ antidominantan i regularan. U tom je slučaju tvrdnja neposredna posljedica Beilinson−Bernsteinove ekvivalencije kategorija.

Dakle, $\mathrm{supp}(\mathcal{V})$ je ireducibilna zatvorena podvišestrukost od X. Budući da je ona $K-$invarijantna, ona je unija $K-$orbita. Budući da ima samo konačno mnogo $K-$orbita, postoji $K-$orbita Q u $\mathrm{supp}(\mathcal{V})$ takva da je dim $Q =$ dim $\mathrm{supp}(\mathcal{V})$. Tada je $\overline{Q}$ zatvoren ireducibilan podskup od $\mathrm{supp}(\mathcal{V}$ i vrijedi dim $\overline{Q} =$ dim $\mathrm{supp}(\mathcal{V})$. Odatle slijedi $\overline{Q} = \mathrm{supp}(\mathcal{V})$.

Neka je $\mathcal{V}$ ireducibilan Harish−Chandrin snop i Q pripadna $K-$orbita u X čiji je zatvarač $\overline{Q}$ jednak nosaču $\mathrm{supp}(\mathcal{V})$. Stavimo $X' = X \setminus \partial Q$. Tada je X' otvorena podvišestrukost od X i Q je zatvorena podvišestrukost od X'. Restrikcija $\mathcal{V}|X'$ je i dalje ireducibilna. Neka su $\iota : Q \to X$, $\iota' : Q \to X'$ i $\jmath : X' \to X$ inkluzije. Tada je $\iota = \jmath \circ \iota'$. Restrikcija $\mathcal{V}|X'$ je ireducibilan snop čiji je nosač sadržan u Q. Budući da je Q glatka podvišestrukost od X', prema Kashiwarinoj ekvivalenciji kategorija vrijedi $\iota'_+(\tau) = \mathcal{V}|X'$ za $\tau = \iota^!(\mathcal{V})$. Nadalje, τ je ireducibilan $(\mathcal{D}_\lambda^\iota, K)-$modul. Budući da je prema teoremu 10.3.1. $\mathcal{V}$ holonoman, τ je holonoman $\mathcal{D}_\lambda^\iota-$modul s nosačem jednakim Q. Odatle slijedi da postoji otvoren podskup U od Q takav da je $\tau|U$ koneksija. Budući da K djeluje tranzitivno na Q, zaključujemo da je τ $K-$homogena koneksija na Q.

Prema tome, svakom ireducibilnom Harish−Chandrinom snopu $\mathcal{V}$ pridružen je par (Q, τ) koji se satoji od $K-$orbite Q i ireducibilne $K-$homogene koneksije τ na Q i koji su takvi da vrijedi:

(*a*) $\mathrm{supp}(\mathcal{V}) = \overline{Q}$.

(*b*) $\iota^!(\mathcal{V}) = \tau$.

Kažemo da je (Q, τ) **standardni par** pridružen $\mathcal{V}$.

Neka je Q bilo koja $K-$orbita u X i neka je τ ireducibilna $K-$homogena koneksija na Q u $\mathcal{M}_{\text{coh}}(\mathcal{D}^{\iota}_{\lambda}, K)$. Tada je $\mathcal{I}(Q,\tau) = \iota_+(\tau)$ $(\mathcal{D}_\lambda, K)-$modul nadalje, on je holonoman, dakle, koherentan. Prema tome, $\mathcal{I}(Q,\tau)$ je Harish−Chandrin snop. Kažemo da je to **standardni Harish−−Chandrin snop** pridružen paru (Q,τ).

Lema 10.3.6. *Neka je Q $K-$orbita u X i neka je τ ireducibilna $K-$homogena koneksija na Q. Tada standardni Harish−Chandrin snop $\mathcal{I}(Q,\tau)$ sadrži jedinstven ireducibilan Harish−Chandrin podsnop.*

Dokaz: Vrijedi

$$\mathcal{I}(Q,\tau) = \iota_+(\tau) = \jmath_+\left(\iota_+(\tau)\right) = \jmath_.\left(\iota_+(\tau)\right),$$

pri čemu je $\jmath_.$ funktor direktne slike. Dakle, $\mathcal{I}(Q,\tau)$ nema prereze s nosačem u ∂Q. Prema tome, svaki $\mathcal{D}_\lambda-$podmodul $\mathcal{U} \neq 0$ od $\mathcal{I}(Q,\tau)$ ima restrikciju $\mathcal{U}|X \neq 0$. Po Kashiwarinoj ekvivalenciji kategorija $\iota_+(\tau)$ je ireducibilan $\mathcal{D}_\lambda|X-$modul. Dakle, $\mathcal{U}|X = \mathcal{I}(Q,\tau)|X$. Slijedi da za svaka dva $\mathcal{D}_\lambda-$podmodula $\mathcal{U} \neq 0$ i $\mathcal{U} \neq 0$ od $\mathcal{I}(Q,\tau)$ vrijedi $\mathcal{U} \cap \mathcal{U} \neq 0$. Budući da je $\mathcal{I}(Q,\tau)$ konačne duljine, on ima minimalni $\mathcal{D}_\lambda-$podmodul, a prema dokazanom takav je jedinstven. Budući da je jedinstven, on mora biti $K-$ekvivarijantan, dakle, to je Harish−Chandrin podsnop.

Označimo sa $\mathcal{L}(Q,\tau)$ jedinstven ireducibilan Harish−Chandrin podsnop od $\mathcal{I}(Q,\tau)$.

Teorem 10.3.7. (**Beilinson−Bernstein**)

(*a*) *Ako je (Q,τ) standardni par pridružen ireducibilnom Harish−Chandrinom snopu $\mathcal{V}$, onda je $\mathcal{V} \cong \mathcal{L}(Q,\tau)$.*

(*b*) *Neka su Q i Q' $K-$orbite u X i neka su τ i τ' ireducibilne $K-$homogene koneksije na Q i na Q'. Tada vrijedi $\mathcal{L}(Q,\tau) \cong \mathcal{L}(Q',\tau')$ ako i samo ako je $Q = Q'$ i $\tau \cong \tau'$.*

Dokaz: (*a*) Kao što smo prije primijetili, vrijedi $\mathcal{V}|X' \cong \iota'_+(\tau)$. Prema univerzalnom svojstvu od $\jmath_.$ postoji netrivijalan morfizam $\mathcal{V} \to \mathcal{I}(Q,\tau) = \jmath_.\left(\iota'_+(\tau)\right)$ koji proširuje taj izomorfizam. Budući da je $\mathcal{V}$ ireducibilan, jezgra tog izomorfizma je 0. Prema lemi 10.3.6. slika mu je $\mathcal{L}(Q,\tau)$.

(*b*) Budući da je $\overline{Q} = \text{supp}(\mathcal{L}(Q,\tau)$, očito $\mathcal{L}(Q,\tau) \cong \mathcal{L}(Q,\tau)$ povlači $Q = Q$. Druga tvrdnja slijedi iz formule $\tau = \iota^!(\mathcal{L}(Q,\tau))$.

Iz konstrukcije je očito da je nosač kvocijenta $\mathcal{I}(Q,\tau)/\mathcal{L}(Q,\tau)$ sadržan u rubu ∂Q orbite Q. Posebno, ako je orbita Q zatvorena, snop $\mathcal{I}(Q,\tau)$ je ireducibilan.

10.4 Klasifikacija ireducibilnih Harish−Chandrinih modula

U ovom ćemo odjeljku opisati kako se iz klasifikacije ireducibilnih Harish−Chandrinih snopova dolazi do klasifikacije ireducibilnih Harish−Chandrinih modula.

Za $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ kažemo da je **strogo antidominantan** ako vrijedi

$$\operatorname{Re} \check{\alpha}(\lambda) \leq 0 \qquad \forall \alpha \in \Sigma^+.$$

Svaki strogo antidominantan λ je ujedno antidominantan.

Neka je V ireducibilan Harish−Chandrin modul. Možemo promatrati V kao ireducibilan objekt u $\mathcal{M}(\mathcal{U}_\Theta, K)$. Fiksirajmo strogo antidominantan $\lambda \in \Theta$. Prema Beilinson−Bernsteinovoj ekvivalenciji kategorija postoji jedinstven ireducibilan $\mathcal{D}_\lambda$−modul $\mathcal{V}$ takav da je $\Gamma(X, \mathcal{V}) = V$. Budući da je taj $\mathcal{D}_\lambda$−modul nužno Harish−Chandrin snop, on je oblika $\mathcal{L}(Q, \tau)$ za neku K−orbitu Q u X i za neku ireducibilnu K−homogenu koneksiju τ na Q kompatibilnu sa $\lambda + \rho$. Dakle, postoji jedinstven par (Q, τ) takav da je $\Gamma(X, \mathcal{L}(Q, \tau)) = V$. Ako je λ k tome regularan, ta korespondencija daje parametrizaciju klasa ekvivalencije ireducibilnih Harish−Chandrinih modula pomoću svih parova (Q, τ). Međutim, ako λ nije regularan, neki od parova (Q, τ) odgovaraju ireducibilnim Harish−Chandrinim snopovima $\mathcal{L}(Q, \tau)$ takvima da je $\Gamma(X, \mathcal{L}(Q, \tau)) = 0$. Dakle, da bismo došli do precizne formulacije za ovu vrstu klasifikacije ireducibilnih Harish−Chandrinih modula, moramo utvrditi nužne i dovoljne uvjete za neiščezavanje globalnih prereza ireducibilnih Harish−Chandrinih snopova $\mathcal{L}(Q, \tau)$.

Za svaki korijen $\alpha \in \Sigma$ imamo $\check{\alpha}(\lambda + \vartheta_Q \lambda) \in \mathbb{R}$. Posebno, ako je α Q−imaginaran, onda je $\check{\alpha}(\lambda) \in \mathbb{R}$.

Neka je $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ strogo antidominantan. Stavimo

$$\Sigma_0 = \{\alpha \in \Sigma;\ \operatorname{Re} \check{\alpha}(\lambda) = 0\}.$$

Neka je Π baza sistema korijena Σ određena sa Σ^+. Stavimo $\Sigma_0^+ = \Sigma_0 \cap \Sigma^+$ i $\Pi_0 = \Pi \cap \Sigma_0$. Budući da je λ strogo antidominantan, Π_0 je baza sistema korijena Σ_0 (u prostoru *span* Σ_0) određena skupom pozitivnih korijena Σ_0^+. Stavimo sada $\Sigma_1 = \Sigma_0 \cap \vartheta_Q(\Sigma_0)$; dakle, Σ_1 je najveći ϑ_Q−invarijantan podsistem korijena od Σ_0. Nadalje, neka je

$$\Sigma_2 = \{\alpha \in \Sigma_1;\ \check{\alpha}(\lambda) = 0\}.$$

I taj je podsistem ϑ_Q−invarijantan. Stavimo $\Sigma_2^+ = \Sigma_2 \cap \Sigma^+$ i neka je Π_2 odgovarajuća baza sistema korijena Σ_2. Tada je jasno da vrijedi $\Pi_0 \cap \Sigma_2 \subseteq \Pi_2$, ali općenito ne vrijedi znak jednakosti.

Sljedeći teorem dokazan je u još uvijek neobjavljenom članku H. Hecht, D. Miličić, W. Schmid, J. A. Wolf, *Localization and standard modules for real semisimple Lie groups II: Irreducibility, vanishing theorems and classification* − taj se tekst može pronaći na web−stranici W. Schmida.

Teorem 10.4.1. *Neka je $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ strogo antidominantan. Neka je Q K−orbita u X i neka je τ ireducibilna K−homogena koneksija na Q kompatibilna s $\lambda + \rho$. Tada je $\Gamma(X, \mathcal{L}(Q, \tau)) \neq 0$ ako i samo ako su ispunjena sljedeća tri uvjeta:*

(a) *U skupu Π_2 nema kompatnih Q−imaginanrih korijena.*

(b) *Za svaki pozitivan Q−kompleksan korijen α takav da je $\check{\alpha}(\lambda) = 0$ korijen $\vartheta_Q \alpha$ je također pozitivan*

(c) *Za svaki Q−realan korijen α takav da je $\check{\alpha}(\lambda) = 0$ koneksija τ zadovoljava izvjestan uvjet SL_2−pariteta u odnosu na α.*