ODABRANA POGLAVLJA TEORIJE ANALITIČKIH FUNKCIJA

Prof. dr. sc. Hrvoje Kraljević

Predavanja održana na PMF−Matematičkom odjelu Sveučilišta u Zagrebu
u zimskom semestru akademske godine 2010./2011.

Zagreb, 2010.

Sadržaj

Poglavlje 1

Holomorfne funkcije

Za $a \in \mathbb{C}$ i $r > 0$ upotrebljavat ćemo oznake

$$K(a,r) = \{z \in \mathbb{C};\ |z-a| < r\}, \qquad \overline{K}(a,r) = \{z \in \mathbb{C};\ |z-a| \le r\},$$

$$K^*(a,r) = \{z \in \mathbb{C};\ 0 < |z-a| < r\}, \qquad S(a,r) = \{z \in \mathbb{C};\ |z-a| = r\}.$$

Ti se skupovi redom zovu **otvoren krug**, **zatvoren krug**, **punktirani krug** i **kružnica** sa središtem u točki a i radijusom r.

Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ otvoren skup i neka je zadana funkcija $f : \Omega \to \mathbb{C}$. Ako za točku $z_0 \in \Omega$ postoji

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

onda kažemo da je funkcija f **derivabilna u točki** z_0. U tom slučaju taj limes označavamo sa $f'(z_0)$ i zovemo **derivacija funkcije** f **u točki** z_0. Ako je funkcija f derivabilna u svakoj točki $z_0 \in \Omega$ kažemo da je **funkcija** f **holomorfna** na Ω. Tada se funkcija $f' : \Omega \to \mathbb{C}$ zove **derivacija funkcije** f.

Za otvoren skup $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ skup svih holomorfnih funkcija na Ω označavat ćemo sa $\mathcal{H}(\Omega)$. Uz operacije po točkama $\mathcal{H}(\Omega)$ je komutativna asocijativna unitalna algebra nad poljem $\mathbb{C}$ i vrijedi

$$(f+g)' = f' + g', \qquad (\lambda f)' = \lambda f', \qquad (fg)' = f'g + fg', \qquad f, g \in \mathcal{H}(\Omega), \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Ako su $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ i $g \in \mathcal{H}(\Omega_1)$, pri čemu je $\Omega_1 \subseteq \mathbb{C}$ otvoren skup takav da je $f(\Omega) \subseteq \Omega_1$, tada je $h = g \circ f \in \mathcal{H}(\Omega)$ i vrijedi

$$h'(z) = g'(f(z))f'(z), \qquad z \in \Omega.$$

Ako je $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ takva da je $f(z) \neq 0\ \forall z \in \Omega$ tada je $\dfrac{1}{f} \in \mathcal{H}(\Omega)$ i

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(z) = -\frac{f'(z)}{f(z)^2}, \qquad z \in \Omega.$$

Uz identifikaciju $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$, $x + iy = (x, y)$, $x, y \in \mathbb{R}$, funkciju $f : \Omega \to \mathbb{C}$ možemo shvaćati kao preslikavanje sa $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ u $\mathbb{R}^2$, odnosno, kao uređen par funkcija (u, v) dvije realne varijable:

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y), \qquad z = x + iy \in \Omega.$$

Kao i obično pišemo $u = \mathrm{Re}\, u$ i $v = \mathrm{Im}\, f$. Derivabilnost funkcije $f : \Omega \to \mathbb{C}$ u točki $z_0 = x_0 + iy_0$ može se iskazati pomoću svojstava dviju funkcija u i v. U tu svrhu, podsjetimo se da za otvoren skup $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ i za realnu funkciju $w : \Omega \to \mathbb{R}$ dviju realnih varijabli kažemo da je **diferencijabilna u točki** $(x_0, y_0) \in \Omega$ ako postoje $A, B \in \mathbb{R}$ takvi da vrijedi

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{w(x,y) - w(x_0,y_0) - A(x-x_0) - B(y-y_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2 - (y-y_0)^2}} = 0.$$

Tada se brojevi A i B zovu **parcijalne derivacije funkcije** w **u točki** (x_0, y_0) i pišemo

$$A = \frac{\partial w}{\partial x}(x_0, y_0), \qquad B = \frac{\partial w}{\partial y}(x_0, y_0).$$

Teorem 1.1. *Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ otvoren skup, $f : \Omega \to \mathbb{C}$, i $u = Re\, f$ i $v = Im\, f$ pripadne dvije funkcije dviju realnih varijabli. Za $z_0 = x_0 + iy_0 \in \Omega$, $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$, sljedeća su dva svojstva međusobno ekvivalentna:*

(a) *Funkcija f derivabilna je u točki z_0.*

(b) *Funkcije u i v diferencijabilne su u točki (x_0, y_0) i vrijede tzv.* **Cauchy−Riemannove jednadžbe***:*
$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0), \qquad \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0).$$

Nadalje, tada je

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) - i\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) =$$
$$= \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) - i\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0).$$

Teorem 1.2. *Neka je $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ niz u $\mathbb{C}$ i stavimo*

$$R = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} |c_n|^{1/n}}.$$

(a) *Za $a \in \mathbb{C}$ i $z \in K(a, R)$ red*
$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$$
konvergira apsolutno. Taj red i red apsolutnih vrijednosti konvergiraju uniformno na $\overline{K}(a, r)$ za svaki $r < R$.

(b) *Za $a \in \mathbb{C}$ i $z \in \mathbb{C} \setminus \overline{K}(a, R)$ red u (a) ne konvergira u $\mathbb{C}$.*

(c) *Ako definiramo funkciju $f : K(a, R) \to \mathbb{C}$ kao sumu reda u (a) tada je $f \in \mathcal{H}(K(a, R))$ i vrijedi*
$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} nc_n(z-a)^{n-1}, \qquad z \in K(a, R).$$

(d) *Za funkciju f iz (c) vrijedi $f' \in \mathcal{H}(K(a, R))$ i induktivno $f^{(k)} = \left(f^{(k-1)}\right)' \in \mathcal{H}(K(a, R))$. Nadalje,*
$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} c_n(z-a)^{n-k}, \qquad k \in \mathbb{N}, \quad z \in K(a, R).$$

Teorem 1.3. *Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ otvoren skup i $f \in \mathcal{H}(\Omega)$.*

(a) *Vrijedi $f' \in \mathcal{H}(\Omega)$ i induktivno $f^{(n)} = \left(f^{(n-1)}\right)' \in \mathcal{H}(\Omega)$, $\forall n \in \mathbb{N}$.*

(b) *Neka su $a \in \Omega$ i $r > 0$ takvi da je $K(a,r) \subseteq \Omega$. Stavimo*

$$c_0 = f(a), \qquad c_1 = f'(a), \qquad c_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(a), \quad n \geq 2.$$

Tada je

$$r \leq \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} |c_n|^{1/n}}$$

i vrijedi

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n \qquad \forall z \in K(a,r).$$

Teorem 1.4. *Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ otvoren skup i $f : \Omega \to \mathbb{C}$ neprekidna funkcija. Pretpostavimo da je $a \in \Omega$ i da je funkcija f holomorfna na skupu $\Omega \setminus \{a\}$. Tada je $f \in \mathcal{H}(\Omega)$.*

Krivulja u otvorenom skupu $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ je neprekidno preslikavanje $\gamma : [a,b] \to \Omega$ pri čemu je $-\infty < a < b < +\infty$. Skup $\gamma^* = \{\gamma(t);\ a \leq t \leq b\}$ zove se **trag krivulje** γ. $\gamma(a)$ je **početak**, a $\gamma(b)$ **svršetak** krivulje γ. Krivulja γ je **zatvorena** ako je $\gamma(a) = \gamma(b)$. **Put** u Ω je po dijelovima neprekidno diferencijabilna krivulja u Ω. Dakle, put u Ω je krivulja $\gamma : [a,b] \to \Omega$ takva da postoje $t_0 = a < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = b$ takvi da je restrikcija $\gamma|[t_{j-1}, t_j]$ neprekidno diferencijabilna funkcija za $j = 1, 2, \ldots, n$; u točkama $t_1, \ldots, t_{n-1}$ lijeva i desna derivacija od γ postoje, ali se ne moraju podudarati. **Petlja** je zatvorena krivulja koja je put.

Za svaki podskup $S \subseteq \mathbb{C}$ sa $C(S)$ ćemo označavati skup svih neprekidnih funkcija sa S u $\mathbb{C}$. $C(S)$ je kompleksan vektorski prostor. Ako je skup S kompaktan, sa

$$\|f\|_S = \max\{|f(s)|;\ s \in S\}$$

je zadana norma na prostoru $C(S)$.

Neka je $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ put i $f \in C(\gamma^*)$. Definiramo

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\mathrm{d}t.$$

Nadalje, definiramo **duljinu puta** γ sa

$$\ell(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)|\mathrm{d}t.$$

Zadatak 1.1. *Neka je $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ put i $\varphi : [c,d] \to [a,b]$ neprekidno diferencijabilna monotono rastuća bijekcija. Stavimo $\gamma_1 = \gamma \circ \varphi$. Dokažite da je*

$$\gamma_1^* = \gamma^*, \qquad \ell(\gamma_1) = \ell(\gamma), \qquad \int_{\gamma_1} f(z)\mathrm{d}z = \int_\gamma f(z)\mathrm{d}z \quad \forall f \in C(\gamma^*).$$

Zadatak 1.2. *Neka je $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ put i $f \in C(\gamma^*)$. Dokažite da je*

$$\left|\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z\right| \leq \ell(\gamma)\|f\|_{\gamma^*}.$$

Neka je Δ trokut u $\mathbb{C}$, tj. najmanji konveksan skup koji sadrži zadane tri nekolinearne točke u $\mathbb{C}$. Tada ćemo sa $\partial\Delta$ označavati pozitivno orijentirani rub trokuta Δ.

Teorem 1.5. (**Cauchyjev i Morerin teorem**) *Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ otvoren skup i $f \in C(\Omega)$. Funkcija f je holomorfna na Ω ako i samo ako za svaki zatvoren trokut $\Delta \subseteq \Omega$ vrijedi*

$$\int_{\partial\Delta} f(z)\mathrm{d}z = 0.$$

Zadatak 1.3. *Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ otvoren skup i neka su f i f_n, $n \in \mathbb{N}$, funkcije sa Ω u $\mathbb{C}$. Dokažite da su sljedeća tri svojstva međusobno ekvivalentna:*

(*a*) *Za svaki kompaktan skup $K \subseteq \Omega$ niz restrikcija $(f_n|K)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira uniformno prema restrikciji $f|K$.*

(*b*) *Ako su $a \in \Omega$ i $r > 0$ takvi da je $\overline{K}(a,r) \subseteq \Omega$ tada niz restrikcija $(f_n|\overline{K}(a,r))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira uniformno prema restrikciji $f|\overline{K}(a,r)$.*

(*c*) *Za svaku točku $a \in \Omega$ postoji $r > 0$ takav da je $K(a,r) \subseteq \Omega$ i da niz restrikcija $(f_n|K(a,r))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira uniformno prema restrikciji $f|K(a,r)$.*

U situaciji iz zadatka 1.3. reći ćemo da niz funkcija (f_n) **konvergira lokalno uniformno** na Ω prema funkciji f. Ako su sve funkcije f_n, $n \in \mathbb{N}$, neprekidne na Ω, tada iz svojstva (c) lako slijedi da je i funkcija f neprekidna na Ω.

Teorem 1.6. (**Weierstrass**) *Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ otvoren skup i neka je $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz u $\mathcal{H}(\Omega)$ koji na Ω lokalno uniformno konvergira prema funkciji $f : \Omega \to \mathbb{C}$. Tada je $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Nadalje, niz derivacija $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira lokalno uniformno na Ω prema derivaciji f'.*

Teorem 1.7. *Neka je γ put u $\mathbb{C}$ i $g \in C(\gamma^*)$. Stavimo*

$$f(z) = \int_\gamma \frac{g(\zeta)}{\zeta - z}\mathrm{d}\zeta, \qquad z \in \mathbb{C} \setminus \gamma^*.$$

Tada je $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus \gamma^*)$ i za $k \in \mathbb{N}$ i $z \in \mathbb{C} \setminus \gamma^*$ vrijedi

$$f^{(k)}(z) = k! \int_\gamma \frac{g(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}}\mathrm{d}\zeta.$$

Teorem 1.8. (**Liouville**) *Neka je funkcija $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ ograničena. Tada je funkcija f konstantna.*

Neka je γ petlja u $\mathbb{C}$. Definiramo funkciju $Ind_\gamma : \mathbb{C} \setminus \gamma^* \to \mathbb{C}$ sa

$$Ind_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{\zeta - z}\mathrm{d}\zeta.$$

$Ind_\gamma(z)$ zove se **indeks** točke z u odnosu na petlju γ (katkada se kaže da je to indeks petlje γ u odnosu na točku z).

Teorem 1.9. *Neka je γ petlja u $\mathbb{C}$ i $\Omega = \mathbb{C} \setminus \gamma^*$.*

(*a*) *$Ind_\gamma(z) \in \mathbb{Z}$ $\forall z \in \Omega$.*

(*b*) *Ind_γ je konstanta na svakoj komponenti povezanosti skupa Ω.*

(*c*) *Ind_γ je nula na neograničenoj komponenti povezanosti skupa Ω.*

Napomenimo da je skup γ^* kompaktan pa skup Ω ima točno jednu neograničenu komponentu povezanosti.

Dokaz: (a) Neka je $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ i neka je $S \subseteq [a,b]$ (konačan) skup svih točaka u kojima γ nije neprekidno diferencijabilna. Neka je $z \in \Omega$. Definiramo funkciju $\varphi : [a,b] \to \mathbb{C}$ sa

$$\varphi(t) = \mathrm{e}^{\int_a^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s)-z} \mathrm{d}s}.$$

Tada se lako vidi da vrijedi

$$\varphi'(t) = \varphi(t)\frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-z}, \qquad t \in [a,b] \setminus S. \tag{1.1}$$

Definiramo $\psi : [a,b] \to \mathbb{C}$ sa

$$\psi(t) = \frac{\varphi(t)}{\gamma(t)-z}.$$

Tada je funkcija ψ neprekidna i za $t \in [a,b] \setminus S$ pomoću (1.1) nalazimo

$$\psi'(t) = \varphi'(t) \cdot \frac{1}{\gamma(t)-z} - \varphi(t) \cdot \frac{\gamma'(t)}{(\gamma(t)-z)^2} = 0.$$

Zaključujemo da je funkcija ψ konstantna na svakom otvorenom intervalu sadržanom u skupu $[a,b] \setminus S$. Budući da je funkcija ψ neprekidna, slijedi da je ψ konstantna na $[a,b]$. Posebno,

$$\frac{\varphi(a)}{\gamma(a)-z} = \psi(a) = \psi(b) = \frac{\varphi(b)}{\gamma(b)-z}.$$

Međutim, $\gamma(a) = \gamma(b)$ pa slijedi

$$\varphi(b) = \varphi(a).$$

Kako je očito $\varphi(a) = 1$, slijedi

$$1 = \varphi(b) = \mathrm{e}^{2\pi i Ind_\gamma(z)},$$

a odatle je $Ind_\gamma(z) \in \mathbb{Z}$.

(b) Po teoremu 1.7. je $Ind_\gamma \in H(\Omega)$. Posebno, funkcija Ind_γ je neprekidna na Ω. Budući da je neprekidna slika povezanog skupa povezan skup, tvrdnja (b) slijedi iz tvrdnje (a).

(c) Neka je z točka u neograničenoj komponenti skupa Ω takva da je

$$|\zeta - z| > \frac{\ell(\gamma)}{2\pi} \qquad \forall \zeta \in \gamma^*.$$

Sada pomoću zadatka 1.2. slijedi $|Ind_\gamma(z)| < 1$, pa iz (a) zaključujemo da je $Ind_\gamma(z) = 0$. Zbog (b) Ind_γ je nula na cijeloj neograničenoj komponenti od Ω.

Zadatak 1.4. *Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ otvoren skup i $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Definiramo funkciju $g : \Omega \times \Omega \to \mathbb{C}$ na sljedeći način:*

$$g(z,w) = \begin{cases} \dfrac{f(z)-f(w)}{z-w} & w \neq z \\ \\ f'(z) & w = z \end{cases}$$

Dokažite da je tada funkcija g neprekidna i da je za svaku točku $w \in \Omega$ funkcija $z \mapsto g(z,w)$ holomorfna na Ω.

Uputa: Za $a \in \Omega$ i $\varepsilon > 0$ zbog neprekidnosti funkcije f' možemo izabrati $r > 0$ takav da je $K(a,r) \subseteq \Omega$ i da vrijedi

$$\zeta \in K(a,r) \qquad \Longrightarrow \qquad |f'(\zeta) - f'(a)| \leq \varepsilon.$$

Sada dokažite da za bilo koje $z, w \in K(a,r)$ (bilo različite, bilo jednake) vrijedi

$$g(z,w) = \int_0^1 f'(\gamma(t))\mathrm{d}t \qquad \text{za} \qquad \gamma(t) = (1-t)z + tw, \quad t \in [0,1].$$

Odatle dokažite neprekidnost funkcije g u točki (a,a). Za drugu tvrdnju koristite teorem 1.4.

Sada ćemo malo generalizirati pojam indeksa. Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ otvoren skup. **Lanac** u Ω je bilo koja (neuređena) $n-$torka $\Gamma = [\gamma_1, \ldots, \gamma_n]$ putova u Ω. U tom slučaju pišemo $\Gamma^* = \gamma_1^* \cup \cdots \cup \gamma_n^*$ i za funkciju $f \in C(\Gamma^*)$ definiramo

$$\int_\Gamma f(z)\mathrm{d}z = \sum_{j=1}^n \int_{\gamma_j} f(z)\mathrm{d}z.$$

Ako je svaki γ_j petlja, lanac Γ se zove **ciklus**. Za ciklus Γ u $\mathbb{C}$ definiramo indeks bilo koje točke $z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma^*$ u odnosu na Γ :

$$Ind_\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{1}{\zeta - z}\mathrm{d}\zeta = \sum_{j=1}^n Ind_{\gamma_j}(z).$$

Očigledno tvrdnje teorema 1.9. vrijede i ako u njegovu iskazu petlju γ zamijenimo bilo kojim ciklusom Γ u $\mathbb{C}$.

Teorem 1.10. (**Globalni Cauchyjev teorem**) *Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ otvoren skup i $f \in \mathcal{H}(\Omega)$.*

(*a*) *Neka je Γ ciklus u Ω takav da je $Ind_\Gamma(\alpha) = 0 \ \forall \alpha \in \mathbb{C} \setminus \Omega$. Tada je*

$$\int_\Gamma f(z)\mathrm{d}z = 0 \qquad i \qquad Ind_\Gamma(z) f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(w)}{w-z}\mathrm{d}w \quad \forall z \in \Omega \setminus \Gamma^*.$$

(*b*) *Neka su Γ_1 i Γ_2 ciklusi u Ω takvi da je $Ind_{\Gamma_1}(\alpha) = Ind_{\Gamma_2}(\alpha) \ \forall \alpha \in \mathbb{C} \setminus \Omega$. Tada je*

$$\int_{\Gamma_1} f(z)\mathrm{d}z = \int_{\Gamma_2} f(z)\mathrm{d}z.$$

Dokaz: (*a*) Definiramo $g : \Omega \times \Omega \to \mathbb{C}$ kao u zadatku 1.4. Tada je g neprekidna funkcija, pa možemo definirati $h : \Omega \to \mathbb{C}$ sa

$$h(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma g(z,w)\mathrm{d}w, \qquad z \in \Omega.$$

Kako je funkcija g neprekidna na $\Omega \times \Omega$, ona je uniformno neprekidna na svakom kompaktnom podskupu od $\Omega \times \Omega$. Dakle, ako je $z_0 \in \Omega$ i ako je $(z_n)_{b \in \mathbb{N}}$ niz u Ω takav da je $z_0 = \lim_{n\to\infty} z_n$, tada je

$$g(z_0, w) = \lim_{n\to\infty} g(z_n, w) \qquad \text{uniformno u odnosu na} \quad w \in \Gamma^*.$$

Odatle slijedi

$$h(z_0) = \lim_{n\to\infty} h(z_n).$$

Time je dokazano da je funkcija h neprekidna na Ω.

Neka je Δ trokut u Ω. Tada je

$$\int_{\partial\Delta} h(z)\mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Delta}\left[\int_\Gamma g(z,w)\mathrm{d}w\right]\mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi i}\int_\Omega\left[\int_{\partial\Delta} g(z,w)\mathrm{d}z\right]\mathrm{d}w = 0,$$

jer je prema zadatku 1.4. funkcija $z \mapsto g(z,w)$ holomorfna na Ω za svaku točku $w \in \Omega$ i zbog Cauchyjevog teorema 1.5. Sada prema Morerinom teoremu 1.5. zaključujemo da je $h \in \mathcal{H}(\Omega)$.

Stavimo

$$\Omega_1 = \{z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma^*;\ Ind_\Gamma(z) = 0\}.$$

Očito je Ω_1 otvoren skup. Po pretpostavci je $\mathbb{C} \setminus \Omega \subseteq \Omega_1$, tj. $\Omega \cup \Omega_1 = \mathbb{C}$. Definiramo funkciju $h_1 : \Omega_1 \to \mathbb{C}$ sa

$$h_1(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(w)}{w-z}\mathrm{d}w, \qquad z \in \Omega_1.$$

Prema teoremu 1.7. vrijedi $h_1 \in \mathcal{H}(\Omega_1)$. Za $z \in \Omega \cap \Omega_1$ imamo

$$h(z) = h_1(z) - f(z)Ind_\Gamma(z) = h_1(z).$$

To pokazuje da postoji $\varphi \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ takva da je $\varphi|\Omega = h$ i $\varphi|\Omega_1 = h_1$.

Zbog tvrdnje (c) teorema 1.9. Ω_1 sadrži neograničenu komponentu skupa $\mathbb{C} \setminus \Gamma^*$. Stoga imamo

$$\lim_{|z|\to\infty} \varphi(z) = \lim_{|z|\to\infty} h_1(z) = 0.$$

To pokazuje da je funkcija φ ograničena na $\mathbb{C}$, pa je prema Liouvilleovom teoremu 1.8. ta funkcija konstantna, dakle svuda jednaka nuli. Posebno je $h(z) = 0\ \forall z \in \Omega$. Odatle za $z \in \Omega \setminus \Gamma^*$ imamo

$$0 = h(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(w)}{w-z}\mathrm{d}w - f(z)Ind_\Gamma(z).$$

Time je druga jednakost u (a) dokazana.

Neka je $a \in \Omega \setminus \Gamma^*$. Stavimo $F(z) = (z-a)f(z)$, $z \in \Omega$. Tada je $F \in \mathcal{H}(\Omega)$ i primjenom dokazane jednakosti na funkciju F nalazimo

$$\int_\Gamma f(z)\mathrm{d}z = \int_\Gamma \frac{F(z)}{z-a}\mathrm{d}z = 2\pi i F(a)Ind_\Gamma(a) = 0,$$

jer je $F(a) = 0$. Time je i prva jednakost u (a) dokazana.

(b) Neka je $-\Gamma_2$ ciklus sastavljen od suprotnih petlji iz Γ_2 i neka je Γ unija ciklusa Γ_1 i $-\Gamma_2$. Tada očito vrijedi

$$\int_\Gamma = \int_{\Gamma_1} - \int_{\Gamma_2},$$

pa slijedi da je $Ind_\Gamma(\alpha) = 0\ \forall \alpha \in \mathbb{C} \setminus \Omega$. Prema (a) tada imamo za svaku $f \in \mathcal{H}(\Omega)$:

$$0 = \int_\Gamma f(z)\mathrm{d}z = \int_{\Gamma_1} f(z)\mathrm{d}z - \int_{\Gamma_2} f(z)\mathrm{d}z.$$

Dakle,

$$\int_{\Gamma_1} f(z)\mathrm{d}z = \int_{\Gamma_2} f(z)\mathrm{d}z.$$

Time je teorem u potpunosti dokazan.

Budući da znamo da je Ind_γ nula na neograničenoj komponenti skupa $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$, indeks se vrlo jednostavno računa u svakoj komponenti, jer se može pokazati da indeks poraste za 1 kada iz jedne u drugu komponentu povezanosti skupa $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$ dolazimo prelazeći put γ zdesna na lijevo.

Zadatak 1.5. *Neka su $a, b \in \mathbb{C}$, $b \neq 0$, i neka je $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ zadana sa*

$$\gamma(t) = a + b\mathrm{e}^{it};$$

tj. γ je pozitivno orijentirana kružnica sa središtem u točki a i radijusom $|b|$. Direktnim računom dokažite da je $Ind_\gamma(z) = 1$ $\forall z \in K(a, |b|)$.

Neprazan otvoren povezan skup u $\mathbb{C}$ zove se **područje**.

Teorem 1.11. (**Teorem jedinstvenosti**) *Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ područje, $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ i $f \not\equiv 0$. Tada skup svih nultočaka*

$$N(f) = f^{-1}(0) = \{z \in \Omega;\ f(z) = 0\}$$

nema gomilišta u skupu Ω. Dakle, ako su $f, g \in \mathcal{H}(\Omega)$ takve da skup $\{z \in \Omega;\ f(z) = g(z)\}$ ima gomilište u Ω onda je $f \equiv g$.

Teorem 1.12. (**Princip maksimuma modula**) *Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ područje i neka je $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ nekonstantna funkcija. Tada ne postoji točka $z_0 \in \Omega$ takva da je*

$$|f(z_0)| \geq |f(z)| \qquad \forall z \in \Omega.$$

Teorem 1.13. (**Teorem o inverznoj funkciji**) *Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ otvoren skup, $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ i neka je točka $z_0 \in \Omega$ takva da je $f'(z_0) \neq 0$. Tada postoji otvorena okolina $V \subseteq \Omega$ točke z_0 takva da je $f(V)$ otvoren skup i da je restrikcija $f|V$ bijekcija sa V na $f(V)$. Nadalje, inverzna funkcija te bijekcije je holomorfna na $f(V)$.*

Dokaz: Funkcija $g : \Omega \times \Omega \to \mathbb{C}$ definirana u zadatku 1.4. je neprekidna. Stoga postoji otvorena okolina $V \subseteq \Omega$ točke z_0 takva da vrijedi

$$\left| \frac{f(z_1) - f(z_2)}{z_1 - z_2} \right| \geq \frac{1}{2}|f'(z_0)| \qquad \forall z_1, z_2 \in V.$$

Prema tome vrijedi

$$z_1, z_2 \in V \qquad \Longrightarrow \qquad |f(z_1) - f(z_2)| \geq \frac{1}{2}|f'(z_0)| \cdot |z_1 - z_2|. \tag{1.2}$$

Budući da je $f'(z_0) \neq 0$, odatle slijedi da je $f|V$ injekcija. Također slijedi da je $|f'(z)| \geq \frac{1}{2}|f'(z_0|$ $\forall z \in V$. Posebno je $f'(z) \neq 0$ $\forall z \in V$.

Dokažimo sada da je skup $f(V)$ otvoren. Neka je $\zeta \in V$. Neka je $r > 0$ takav da je $\overline{K}(\zeta, r) \subseteq V$. Prema (1.2) postoji $\delta > 0$ takav da vrijedi

$$\left| f\left(\zeta + r\mathrm{e}^{it}\right) - f(\zeta) \right| \geq 2\delta \qquad \forall t \in \mathbb{R}. \tag{1.3}$$

Neka je $\alpha \in \mathbb{C} \setminus f(V)$. Definiramo funkciju $h : V \to \mathbb{C}$ sa

$$h(z) = \frac{1}{\alpha - f(z)}, \qquad z \in V.$$

Tada je $h \in \mathcal{H}(V)$. Nadalje, prema zadatku 1.5. i prema drugoj jednakosti u tvrdnji (a) Cauchy-jevog teorema 1.10. vrijedi

$$h(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{h(w)}{w - \zeta} \mathrm{d}w,$$

gdje je $\gamma : [0, 2\pi] \to V$ definirana sa

$$\gamma(t) = \zeta + r\mathrm{e}^{it}, \qquad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Odatle pomoću zadatka 1.2. i pomoću nejednakosti (1.3) nalazimo

$$\frac{1}{|\alpha - f(\zeta)|} = |h(\zeta)| \leq \max\left\{|h(\zeta + r\mathrm{e}^{it}|;\ 0 \leq t \leq 2\pi\right\} \leq \frac{1}{2\delta - |\alpha - f(\zeta)|}.$$

Odatle je $|\alpha - f(\zeta)| \geq \delta$ za svaki $\alpha \in \mathbb{C} \setminus f(V)$. Prema tome, vrijedi

$$|\alpha - f(\zeta)| < \delta \qquad \Longrightarrow \qquad \alpha \in f(V).$$

Drugim riječima, dokazali smo da je $K(f(\zeta), \delta) \subseteq f(V)$. Kako je točka $\zeta \in V$ bila proizvoljna, zaključujemo da je skup $f(V)$ otvoren.

Stavimo $U = f(V)$ i neka je $\varphi : U \to V$ inverzna funkcija bijekcije $f|V$ sa V na U. Neka je $u_0 \in U$ i stavimo $z_0 = \varphi(u_0) \in V$, tj. $u_0 = f(z_0)$. Za proizvoljnu $z \in V$ i $u = f(z) \in U$ imamo

$$\frac{\varphi(u) - \varphi(u_0)}{u - u_0} = \frac{z - z_0}{f(z) - f(z_0)}.$$

Kada u teži prema u_0, tada z teži prema z_0 zbog $(*)$. Budući da je $f'(z_0) \neq 0$, iz gornje jednakosti slijedi da postoji limes kada u teži prema u_0 :

$$\frac{1}{f'(z_0)} = \lim_{u \to u_0} \frac{\varphi(u) - \varphi(u_0)}{u - u_0}.$$

Time je dokazano da je funkcija φ holomorfna na U.

Teorem 1.14. (**Weierstrassov pripremni teorem**) *Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ područje i $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ nekonstantna funkcija. Neka je $z_0 \in \Omega$ i $w_0 = f(z_0)$ tako da je z_0 nultočka funkcije $f - w_0$. Pretpostavimo da je $m \in \mathbb{N}$ kratnost z_0 kao nultočke funkcije $f - w_0$. Postoji otvorena okolina $V \subseteq \Omega$ točke z_0 i postoji funkcija $\varphi \in \mathcal{H}(V)$ takve da vrijedi:*

(*a*) $f(z) = w_0 + [\varphi(z)]^m \ \forall z \in V$;

(*b*) $\varphi'(z) \neq 0 \ \forall z \in V$ *i* φ *je bijekcija sa* V *na* $K(0, r)$ *za neki* $r > 0$.

Napomena: Prema tome, f je $m : 1$ preslikavanje sa $V \setminus \{z_0\}$ na $K^*(w_0, r^m)$. Posebno, svaka točka $w_0 \in f(\Omega)$ je unutarnja točka skupa $f(\Omega)$, tj. skup $f(\Omega)$ je otvoren.

Dokaz: Iz teorema jedinstvenosti 1.11. slijedi da možemo pretpostaviti da je $\Omega = K(z_0, \delta)$ i da vrijedi $f(z) \neq w_0 \ \forall z \in K^*(z_0, \delta)$. Iz Taylorovog reda za funkciju $f - w_0$ slijedi da je

$$f(z) = w_0 + (z - z_0)^m g(z), \qquad z \in \Omega,$$

gdje je $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ i $g(z) \neq 0 \ \forall z \in \Omega$. Prema tome je $\dfrac{g'}{g} \in \mathcal{H}(\Omega)$, pa možemo pisati Taylorov red te funkcije oko točke z_0 :

$$\frac{g'(z)}{g(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \qquad z \in \Omega.$$

Definiramo $h \in \mathcal{H}(\Omega)$ sa

$$h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (z - z_0)^{n+1}, \qquad z \in \Omega.$$

Definicija je smislena jer je radijus konvergencije gornjeg reda potencija jednak radijusu konvergencije Taylorovog reda funkcije $\dfrac{g'}{g}$:

$$\limsup_{n \to \infty} \left| \frac{a_n}{n+1} \right|^{\frac{1}{n+1}} = \limsup_{n \to \infty} (n+1)^{-\frac{1}{n+1}} \left(|a_n|^{\frac{1}{n}} \right)^{\frac{n}{n+1}} = \limsup_{n \to \infty} |a_n|^{\frac{1}{n}},$$

budući da je

$$\lim_{n \to \infty} (n+1)^{-\frac{1}{n+1}} = 1 \qquad \text{i} \qquad \lim_{n \to \infty} \frac{n}{n+1} = 1.$$

Prema tvrdnji (c) teorema 1.2. imamo $h' = \dfrac{g'}{g}$, a odatle je

$$\left(g \cdot \mathrm{e}^{-h}\right)' = 0.$$

Dakle, funkcija $g \cdot \mathrm{e}^{-h}$ je konstantna, tj. postoji $\alpha \in \mathbb{C}$ takva da je $g = \alpha \mathrm{e}^{h}$. Kako je $g \neq 0$ to je $\alpha \neq 0$. Neka je $\beta \in \mathbb{C}$ takav da je $\alpha = \beta^m$. Definiramo funkciju $\varphi \in \mathcal{H}(\Omega)$ ovako:

$$\varphi(z) = \beta(z - z_0)\mathrm{e}^{\frac{h(z)}{m}}.$$

Tada je

$$\varphi(z)^m = \alpha(z - z_0)^m \mathrm{e}^{h(z)} = (z - z_0)^m g(z) = f(z) - w_0, \qquad z \in \Omega.$$

Nadalje, $\varphi(z_0) = 0$ i $\varphi'(z_0) = \beta \mathrm{e}^{\frac{h(z_0)}{m}} \neq 0$. Po teoremu 1.13. o inverznoj funkciji skup V s traženim svojstvima postoji.

Prema napomeni prije dokaza teorema 1.14. imamo

Korolar 1.1. *Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ područje i $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ nekonstantna funkcija. Tada je $f(\Omega)$ područje.*

Teorem 1.15. *Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ područje i neka je funkcija $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ injektivna. Tada je $f'(z) \neq 0$ $\forall z \in \Omega$ i $f^{-1} \in \mathcal{H}(f(\Omega))$.*

Zadatak 1.6. *Dokažite teorem 1.15.*

Uputa: Upotrijebite teorem 1.14. da dokažete da iz $f'(z) = 0$ slijedi da funkcija f nije injektivna na nekoj okolini točke z. Za drugu tvrdnju upotrijebite teorem 1.13.

Teorem 1.16. (**Schwarzova lema**) *Neka je $f \in \mathcal{H}(K(0,1))$ takva da je $f(0) = 0$ i $|f(z)| \leq 1$ $\forall z \in K(0,1)$. Tada vrijedi $|f(z)| \leq |z|$ $\forall z$ i $|f'(0)| \leq 1$. Ako je $|f(z)| = |z|$ za neku točku $z \neq 0$ ili ako je $|f'(0)| = 1$ onda postoji $\alpha \in \mathbb{C}$ takav da je $|\alpha| = 1$ i $f(z) = \alpha z$ $\forall z \in K(0,1)$.*

Dokaz: Prema zadatku 1.4. funkcija $g : K(0,1) \to \mathbb{C}$ definirana sa

$$g(z) = \begin{cases} \dfrac{f(z)}{z} & z \neq 0 \\ \\ f'(0) & z = 0 \end{cases}$$

holomorfna je na $K(0,1)$.

Na kružnici $|z| = r < 1$ vrijedi $|g(z)| \leq \dfrac{1}{r}$. Odatle pomoću principa maksimuma modula (teorem 1.12.) zaključujemo da vrijedi:

$$|z| \leq r \qquad \Longrightarrow \qquad |g(z)| \leq \frac{1}{r}.$$

Pustimo li da r teži prema 1 slijedi

$$|g(z)| \leq 1 \qquad \forall z \in K(0,1),$$

a to upravo daje nejednakosti koje treba dokazati. Ukoliko za neku točku $z \in K(0,1)$ vrijedi $|g(z)| = 1$, tada pomoću principa maksimuma modula nalazimo da je g konstanta modula 1.

Poglavlje 2

Izolirani singulariteti

Za kompleksnu funkciju f kompleksne varijable kažemo da ima **izoliran singularitet** u točki z_0 (ili da joj je točka z_0 izolirani singularitet), ako postoji $r > 0$ takav da je funkcija f holomorfna na punktiranom krugu $K^*(z_0, r)$, ali nije holomorfna na čitavom krugu $K(z_0, r)$. Dakle, jedna je mogućnost da funkcija f uopće nije definirana u točki z_0 (tj. točka z_0 nije u domeni $\mathcal{D}(f)$ funkcije f), ili je $z_0 \in \mathcal{D}(f)$ ali f nije holomorfna ni na jednoj otvorenoj okolini te točke.

Ako je tako i ako se funkcija f može definirati (ili redefinirati) u točki z_0 tako da ona postane holomorfna na čitavom krugu $K(z_0, r)$, onda se kaže da je singularitet z_0 **uklonjiv**. Nužan uvjet da bi singularitet z_0 bio uklonjiv jest da funkcija f ima limes u točki z_0; tada je taj limes jedina vrijednost funkcije f u točki z_0 uz koju funkcija f može postati holomorfna na okolini od z_0. Tada je funkcija f nužno ograničena na $K^*(z_0, \rho)$ za neki $\rho > 0$ (u stvari, za svaki $\rho < r$). Važna je činjenica da je zapravo taj na prvi pogled slabi zahtjev ne samo nužan nego i dovoljan za uklonjivost izoliranog singulariteta.

Teorem 2.1. *Izolirani singularitet z_0 funkcije f je uklonjiv ako i samo ako postoji $\rho > 0$ takav da je funkcija f definirana i ograničena na punktiranom krugu $K^*(z_0, \rho)$.*

Zadatak 2.1. *Dokažite dovoljnost uvjeta u teoremu 2.1.*

Uputa: Dokažite da iz ograničenosti funkcije $f|K^*(z_0, \rho)$ slijedi da je funkcija h definirana na $K(z_0, \rho)$ sa

$$h(z) = \begin{cases} 0 & \text{ako je} \quad z = z_0 \\ (z - z_0)^2 f(z) & \text{ako je} \quad z \in K^*(z_0, \rho), \end{cases}$$

holomorfna na $K(z_0, \rho)$. Zatim dokažite da Taylorov red funkcije h oko točke z_0 ima prva dva koeficijenta jednaka nuli, tj. da je

$$h(z) = \sum_{n=2}^{\infty} c_n (z - z_0)^n.$$

Zatim definirajte $f(z_0) = c_2$ i pomoću teorema 1.3. dokažite da je uz tu definiciju funkcija f holomorfna na $K(z_0, \rho)$.

Uzmimo sada da je z_0 neuklonjiv izolirani singularitet funkcije f. Promatrajmo tada niz funkcija

$$(z - z_0)f(z), \quad (z - z_0)^2 f(z), \quad (z - z_0)^3 f(z), \quad \cdots\cdots$$

Tada je z_0 izolirani singularitet svih tih funkcija. Ako je taj singularitet uklonjiv za funkciju $(z - z_0)^m f(z)$ za neki $m \in \mathbb{N}$, tada je on uklonjiv i za $(z - z_0)^n f(z)$ $\forall n \geq m$. U tom slučaju za

z_0 kažemo da je **pol** funkcije f. Kažemo da je z_0 **pol reda** m ako je singularitet z_0 uklonjiv za funkciju $(z-z_0)^m f(z)$, ali neuklonjiv za funkciju $(z-z_0)^{m-1}f(z)$. U tom slučaju ožito vrijedi

$$\lim_{z\to z_0} |f(z)| = +\infty.$$

Ako izolirani singularitet z_0 nije niti uklonjiv niti pol, onda kažemo da je z_0 **bitni singularitet** funkcije f.

Teorem 2.2. *Neka je z_0 bitni singularitet funkcije f i neka je $r>0$ takav da je $K^*(z_0,r)\subseteq \mathcal{D}(f)$. Tada je skup $f(K^*(z_0,r))$ gust u $\mathbb{C}$; dakle, za svaku točku $w\in\mathbb{C}$ postoji niz $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ u $K^*(z_0,r)$ takav da vrijedi*

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z_0 \qquad i \qquad \lim_{n\to\infty} f(z_n) = w.$$

Posebno, ne postoji niti konačan niti beskonačan

$$\lim_{z\to z_0} |f(z)|.$$

Dokaz: Pretpostavimo da skup $f(K^*(z_0,r))$ nije gust u $\mathbb{C}$. Tada postoji $w\in\mathbb{C}$ i $\rho>0$ takvi da je $K(w,\rho)\cap f(K^*(z_0,r))=\emptyset$. To znači da vrijedi

$$|f(z)-w|\geq \rho \qquad \forall z\in K^*(z_0,r). \tag{2.1}$$

Definiramo sada $g: K^*(z_0,r)\to\mathbb{C}$ sa

$$g(z)=\frac{1}{f(z)-w}, \qquad z\in K^*(z_0,r).$$

Tada je $g\in\mathcal{H}(K^*(z_0,r))$ i zbog (2.1) vrijedi

$$|g(z)|\leq \frac{1}{\rho} \qquad \forall z\in K^*(z_0,r).$$

Prema teoremu 2.1. točka z_0 je uklonjiv singularitet funkcije g, tj. funkcija g se proširuje do funkcije iz $\mathcal{H}(K(z_0,r))$.

Sada imamo dvije mogućnosti. Pretpostavimo prvo da z_0 nije nultočka tako proširene funkcije g. Iz neprekidnosti funkcije g u točki z_0 slijedi da tada postoje $\varepsilon>0$ i $0<\delta\leq r$ takvi da je

$$|g(z)|\geq\varepsilon \qquad \forall z\in K(z_0,\delta).$$

Odatle slijedi

$$|f(z)|-|w|\leq|f(z)-w|\leq\frac{1}{\varepsilon} \qquad \Longrightarrow \qquad |f(z)|\leq|w|+\frac{1}{\varepsilon} \quad \forall z\in K^*(z_0,\delta),$$

a prema teoremu 2.1. tada je z_0 uklonjivi singularitet funkcije f, što je suprotno pretpostavci u teoremu.

Ostaje nam još mogućnost da je $g(z_0)=0$. Uzmimo da je z_0 nultočka funkcije g kratnosti $m\in\mathbb{N}$. Tada možemo pisati $g(z)=(z-z_0)^m h(z)$, gdje je $h\in\mathcal{H}(K(z_0,r))$ i $h(z_0)\neq 0$. Izaberemo sada $0<\delta\leq r$ tako da h nema nultočaka u krugu $K(z_0,\delta)$. Tada je sa

$$k(z)=\frac{1}{h(z)}, \qquad z\in K(z_0,\delta),$$

definirana funkcija $k \in \mathcal{H}(K(z_0,\delta))$. Sada slijedi

$$(z-z_0)^m f(z) = (z-z_0)^m w + k(z), \qquad z \in K^*(z_0,\delta),$$

što pokazuje da je točka z_0 pol funkcije f. Kako je i to isključeno pretpostavkom teorema, zaključujemo da je pretpostavka da $f(K^*(z_0,r))$ nije gusta u $\mathbb{C}$ nemoguća i time je teorem dokazan.

Proširena kompleksna ravnina definira se kao skup $\overline{C} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Topologija od $\overline{C}$ definirana je tako da se na skupu $\mathbb{C}$ ona podudara s topologijom kompleksne ravnine i da je baza okolina točke ∞ sastavljena od skupova

$$\overline{C} \setminus \overline{K}(0,r) = \{\infty\} \cup K(0,r,+\infty) = \{\infty\} \cup \{z \in \mathbb{C};\ |z| > r\}, \qquad r \in \mathbb{R}, \quad r \geq 0.$$

Ta se topologija može i geometrijski opisati:

Zadatak 2.2. *Neka je S sfera promjera 1 u $\mathbb{R}^3$ zadana sa*

$$S = \left\{ (\xi,\eta,\zeta) \in \mathbb{R}^3;\ \xi^2 + \eta^2 + \left(\zeta - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \right\}.$$

Definiramo bijekciju $\Phi : \overline{\mathbb{C}} \to S$ na sljedeći način: (a) $\Phi(\infty) = N = (0,0,1)$ ("sjeverni pol"); (b) ako je $z \in \mathbb{C}$, točka $\Phi(z)$ definirana je kao presjecište pravca u $\mathbb{R}^3$ određenog točkama $N = (0,0,1)$ i $(Re\, z, Im\, z, 0)$ s punktiranom sferom $S \setminus \{N\}$. Dokažite da je tada

$$\Phi(z) = \left(\frac{Re\, z}{1+|z|^2}, \frac{Im\, z}{1+|z|^2}, \frac{|z|^2}{1+|z|^2} \right), \qquad z \in \mathbb{C}.$$

Nadalje, dokažite da je bijekcija Φ homeomorfizam sa $\overline{\mathbb{C}}$ na S, tj. da su preslikavanja $\Phi : \overline{\mathbb{C}} \to S$ i $\Phi^{-1} : S \to \overline{\mathbb{C}}$ neprekidna.

Primijetimo da niz $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ teži prema točki ∞ ako i samo ako niz apsolutnih vrijednosti $(|z_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ teži prema $+\infty$. Ako je z_0 izolirani singularitet funkcije $f \in \mathcal{H}(K^*(z_0,r))$ onda se ta funkcija proširuje do neprekidne funkcije sa $K(z_0,r)$ u $\overline{\mathbb{C}}$ ako i samo ako je z_0 ili uklonjiv singularitet ili pol funkcije f.

Bez dokaza navodimo:

Teorem 2.3. (**Laurentov razvoj**) *Neka su $0 \leq r < R \leq +\infty$ i neka je $f \in \mathcal{H}(K(z_0,r,R))$, gdje je $K(z_0,r,R)$ otvoren "kružni prsten"*

$$K(z_0,r,R) = \{z \in \mathbb{C};\ r < |z-z_0| < R\}.$$

Tada postoje jedinstveni $c_n \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{Z}$, takvi da vrijedi

$$f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n (z-z_0)^n \qquad \forall z \in K(z_0,r,R).$$

Taj red konvergira apsolutno na $K(z_0,r,R)$ i red apsolutnih vrijednosti konvergira uniformno na svakom zatvorenom kružnom vijencu

$$\overline{K}(z_0,\delta,\rho) = \{z \in \mathbb{C};\ \delta \leq |z-z_0| \leq \rho\}$$

za $r < \delta < \rho < R$. Nadalje, ako je γ pozitivno orijentirana kružnica sa središtem u točki z_0 i radijusom ρ, $r < \rho < R$, onda je

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} \mathrm{d}z, \qquad n \in \mathbb{Z}.$$

Taj je teorem primjenjiv posebno na situaciju kad je $r = 0$. Tada je funkcija f definirana i holomorfna na skupu $K(z_0, 0, R) = K^*(z_0, R)$, dakle, točka z_0 je izolirani singularitet funkcije f. U tom slučaju koeficijent c_{-1} u gornjem Laurentovom razvoju zove se **reziduum** funkcije f u točki z_0 i pišemo

$$Res(f, z_0) = c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(z)\mathrm{d}z.$$

Teorem 2.4. (**Teorem o reziduumima**) *Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ otvoren skup, $a_1, \ldots, a_n$ međusobno različite točke iz Ω, $f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus \{a_1, \ldots, a_n\})$ i neka je Γ ciklus u $\Omega \setminus \{a_1, \ldots, a_n\}$ takav da vrijedi*

$$Ind_\Gamma(\alpha) = 0 \qquad \forall \alpha \in \mathbb{C} \setminus \Omega.$$

Tada je

$$\int_\Gamma f(z)\mathrm{d}z = 2\pi i \sum_{j=1}^n Res(f, a_j) Ind_\Gamma(a_j).$$

Dokaz: Za svaki $j \in \{1, \ldots, n\}$ izaberemo $r_j > 0$ takav da je

$$K(a_j, r_j) \subseteq \Omega \setminus (\Gamma^* \cup \{a_1, \ldots, a_{j-1}, a_{j+1}, \ldots, a_n\})$$

i neka je γ_j pozitivno orijentirana kružnica sa središtem u točki a_j i radijusom ρ_j, $0 < \rho_j < r_j$. Stavimo $k_j = Ind_\Gamma(a_j)$. Nadalje, neka je $\Omega_1 = \Omega \setminus \{a_1, \ldots, a_n\}$ i $\Gamma = [\delta_1, \ldots, \delta_m]$, gdje su δ_i petlje u Ω_1. Za bilo koju petlju γ i za cijeli broj k sa γ^k označimo petlju dobivenu $k-$strukim obilaskom petlje γ; preciznije, ako je $k = 0$, γ^k je konstanta; ako je $k > 0$, γ^k je $k-$struki obilazak petlje γ; a ako je $k < 0$, γ^k je $|k|-$struki obilazak suprotne petlje. Naravno,

$$\int_{\gamma^k} f(z)\mathrm{d}z = k \int_\gamma f(z)\mathrm{d}z, \qquad \text{dakle} \qquad Ind_{\gamma^k}(a) = k \cdot Ind_\gamma(a) \quad \forall a \in \mathbb{C} \setminus \gamma^*. \tag{2.2}$$

Definiramo sada novi ciklus Γ_1 u Ω_1 :

$$\Gamma_1 = [\delta_1, \ldots, \delta_m, \gamma_1^{-k_1}, \ldots, \gamma_n^{-k_n}]$$

Sada se iz (2.2) lako provjerava da vrijedi

$$Ind_{\Gamma_1}(\alpha) = 0 \qquad \forall \alpha \in \mathbb{C} \setminus \Omega_1 = (\mathbb{C} \setminus \Omega) \cup \{a_1, \ldots, a_n\}.$$

Stoga iz prve jednakosti u tvrdnji (a) globalnog Cauchyjevog teorema 1.10. slijedi

$$0 = \int_{\Gamma_1} f(z)\mathrm{d}z = \int_\Gamma f(z)\mathrm{d}z - \sum_{j=1}^n k_j \int_{\gamma_j} f(z)\mathrm{d}z.$$

Odatle je

$$\int_\Gamma f(z)\mathrm{d}z = \sum_{j=1}^n k_j \int_{\gamma_j} f(z)\mathrm{d}z = 2\pi i \sum_{j=1}^n Res(f, a_j) Ind_\Gamma(a_j).$$

Zadatak 2.3. *Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ otvoren skup i neka je $a \in \Omega$ nultočka funkcije $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ kratnosti $m \in \mathbb{N}$. Dokažite da je tada točka a pol prvog reda funkcije $\frac{f'}{f}$ i da je*

$$Res\left(\frac{f'}{f}, a\right) = m.$$

Odatle izvedite da ako je a pol funkcije g reda m onda je a pol prvog reda funkcije $\frac{g'}{g}$ i

$$Res\left(\frac{g'}{g}, a\right) = -m.$$

Uputa: Za prvu tvrdnju zapišite f u obliku $f(z) = (z-a)^m h(z)$, a za drugu tvrdnju promatrajte funkciju $f = \dfrac{1}{g}$.

Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ otvoren skup, $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ i $S \subseteq \Omega$. Tada sa $N(f;S)$ označavamo sumu kratnosti svih nultočaka funkcije f u skupu S − to je cijeli broj ≥ 0 ili $+\infty$.

Za ciklus $\Gamma = [\gamma_1, \ldots, \gamma_n]$ u Ω i za $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ definiramo ciklus $f \circ \Gamma$ u $\mathbb{C}$:

$$f \circ \Gamma = [f \circ \gamma_1, \ldots, f \circ \gamma_n].$$

Teorem 2.5. *Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ otvoren skup, $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ i Γ ciklus u Ω takav da vrijedi*

$$Ind_\Gamma(\alpha) = 0 \qquad \forall \alpha \in \mathbb{C} \setminus \Omega.$$

Neka su $\Omega_1, \ldots, \Omega_k$ sve ograničene komponente skupa $\mathbb{C} \setminus \Gamma^*$ koje su sadržane u Ω i sa $Ind_\Gamma(\Omega_j)$ označimo $Ind_\Gamma(z)$ za bilo koju točku $z \in \Omega_j$. Tada za svaku točku $w \in \mathbb{C} \setminus (f \circ \Gamma)^*$ (tj. takvu da je $f(\zeta) \neq w \ \ \forall \zeta \in \Gamma^*$) vrijedi

$$\sum_{j=1}^{k} Ind_\Gamma(\Omega_j) \cdot N(f-w;\Omega_j) = Ind_{f\circ\Gamma}(w).$$

Dokaz: Neka je $\Gamma = [\gamma_1, \ldots, \gamma_n]$ pri čemu su $\gamma_j : [a_j, b_j] \to \Omega$ petlje. Za $j \in \{1, \ldots, k\}$ neka su $z_{j1}, \ldots, z_{jn_j}$ sve nultočke funkcije $f - w$ u skupu Ω_j i neka je m_{ji} kratnost nultočke z_{ji}. Tada je

$$Ind_\Gamma(z_{ji}) = Ind_\Gamma(\Omega_j) \qquad \text{i} \qquad N(f-w;\Omega_j) = \sum_{i=1}^{n_j} m_{ji},$$

a prema zadatku 2.2. imamo

$$Res\left(\frac{f'}{f-w}, z_{ji}\right) = m_{ji}.$$

Dakle,

$$\begin{aligned}
Ind_{f\circ\Gamma}(w) &= \frac{1}{2\pi i}\sum_{j=1}^{k}\int_{f\circ\gamma_j}\frac{1}{z-w}\mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi i}\sum_{j=1}^{k}\int_{a_j}^{b_j}\frac{(f\circ\gamma_j)'(t)}{(f\circ\gamma_j)(t)-w}\mathrm{d}t = \\
&= \frac{1}{2\pi i}\sum_{j=1}^{k}\int_{a_j}^{b_j}\frac{f'(\gamma_j(t))}{f(\gamma_j(t))-w}\gamma_j'(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi i}\sum_{j=1}^{k}\int_{\gamma_j}\frac{f'(z)}{f(z)-w}\mathrm{d}z = \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f'(z)}{f(z)-w}\mathrm{d}z = \sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j} Res\left(\frac{f'}{f-w}, z_{ji}\right) Ind_\Gamma(z_{ji}) = \\
&= \sum_{j=1}^{k} Ind_\Gamma(\Omega_j)\left(\sum_{i=1}^{n_j} m_{ji}\right) = \sum_{j=1}^{k} Ind_\Gamma(\Omega_j)\cdot N(f-w;\Omega_j).
\end{aligned}$$

Naročito je primjenjiv sljedeći specijalni slučaj ovog općeg teorema:

Korolar 2.1. *Neka $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ otvoren skup i $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Neka je γ petlja u Ω, takva da $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$ ima dvije komponente, da je ograničena komponenta D tog skupa sadržana u Ω i da vrijedi $Ind_\gamma(D) \neq 0$. Neka je $\delta = f \circ \gamma$. Tada vrijedi*

$$N(f-w;D) = \frac{Ind_\delta(w)}{Ind_\gamma(D)} \qquad \forall w \in \mathbb{C} \setminus \delta^*.$$

Za dokaz dosta općenite verzije Rouchéovog teorema treba nam sljedeća lema prema kojoj se $Ind_\gamma(z)$ ne mijenja ako se petlja γ malo promijeni (ne prelazeći točku z).

Lema 2.1. *Neka su $\gamma_1, \gamma_2 : [a,b] \to \mathbb{C}$ petlje i neka je točka $z \in \mathbb{C}$ takva da vrijedi*

$$|\gamma_1(t) - \gamma_2(t)| < |\gamma_1(t) - z| \qquad \forall t \in [a,b].$$

Tada je $z \in \mathbb{C} \setminus (\gamma_1^* \cup \gamma_2^*)$ i vrijedi

$$Ind_{\gamma_1}(z) = Ind_{\gamma_2}(z).$$

Dokaz: Iz gornje nejednakost je očito da $z \notin \gamma_1^*$ i $z \notin \gamma_2^*$. Definiramo $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ sa

$$\gamma(t) = \frac{\gamma_2(t) - z}{\gamma_1(t) - z}.$$

Tada je γ petlja i iz pretpostavljene nejednakosti slijedi

$$|1 - \gamma(t)| < 1 \qquad \forall t \in [a,b].$$

To znači da je $\gamma^* \subseteq K(1,1)$. Prema tome, 0 se nalazi u neograničenoj komponenti skupa $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$. Prema tvrdnji ($c$) teorema 1.9. vrijedi $Ind_\gamma(0) = 0$. Međutim, iz definicije petlje γ direktnim računom nalazimo da je $Ind_\gamma(0) = Ind_{\gamma_2}(z) - Ind_{\gamma_1}(z)$.

Odatle ćemo sada izvesti Rouchéov teorem koji uspoređuje broj nultočaka funkcija koje se ne razlikuju mnogo na rubu područja.

Teorem 2.6. (**Rouchéov teorem**) *Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ otvoren skup, $f, g \in \mathcal{H}(\Omega)$, γ petlja u Ω takva da skup $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$ ima dvije komponente, da je ograničena komponenta D tog skupa sadržana u Ω i da je $Ind_\gamma(D) \neq 0$. Pretpostavimo da vrijedi*

$$|f(z) - g(z)| < |f(z)| \qquad \forall z \in \gamma^*.$$

Tada je

$$N(f; D) = N(g; D).$$

Dokaz: Stavimo $\gamma_1 = f \circ \gamma$ i $\gamma_2 = g \circ \gamma$. Tada vrijedi

$$|\gamma_1(t) - \gamma_2(t)| < |\gamma_1(t)| \qquad \forall t$$

pa pomoću leme 2.1. slijedi

$$Ind_{\gamma_1}(0) = Ind_{\gamma_2}(0).$$

Odatle i iz korolara 2.1. slijedi tvrdnja teorema.

Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ otvoren skup. **Meromorfna funkcija** na Ω je holomorfna funkcija f na skupu $\Omega \setminus P$, pri čemu je P podskup od Ω bez gomilišta u skupu Ω, takva da je svaka točka $a \in P$ ili uklonjiv singularitet ili pol funkcije f. Meromorfnu funkciju možemo shvaćati i kao neprekidnu funkciju $f : \Omega \to \overline{\mathbb{C}}$, takvu da skup $f^{-1}(\infty)$ nema gomilišta u skupu Ω i da je restrikcija $f|(\Omega \setminus f^{-1}(\infty))$ holomorfna funkcija.

Zadatak 2.4. *Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ otvoren skup i f meromorfna funkcija na Ω. Neka je Γ ciklus u Ω takav da nijedna točka $a \in \Gamma^*$ nije ni nultočka ni pol funkcije f i da je $Ind_\Gamma(\alpha) = 0\ \forall \alpha \in \mathbb{C} \setminus \Omega$. Dokažite da tada vrijedi tzv.* **princip argumenta***:*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\, \mathrm{d}z = \sum_{k=1}^{n} p_k Ind_\Gamma(a_k) - \sum_{j=1}^{m} q_j Ind_\Gamma(b_j),$$

pri čemu su $\{a_1, \ldots, a_n\}$ sve nultočke od f s kratnostima $\{p_1, \ldots, p_n\}$ i $\{b_1, \ldots, b_m\}$ svi polovi od f s redovima $\{q_1, \ldots, q_m\}$ sadržani u ograničenim komponentama od $\mathbb{C} \setminus \{\Gamma^*\}$.

Uputa: Primijenite teorem 2.4. i zadatak 2.3.

Poglavlje 3

Neka globalna svojstva područja

U ovom poglavlju definirat ćemo nekoliko globalnih svojstava područja u kompleksnoj ravnini. Dokazat ćemo da su sva ta svojstva međusobno ekvivalentna.

Područje $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ zove se **primitivno** ako za svaku funkciju $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ postoji funkcija $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ takva da je $g'(z) = f(z)\ \forall z \in \Omega$. Primijetimo da nisu sva područja primitivna:

Zadatak 3.1. *Dokažite da za $a \in \mathbb{C}$ područja $K^*(a, r),\ r > 0,$ ni $\mathbb{C} \setminus \{a\}$ nisu primitivna.*

Uputa: Dokažite da ne postoji $f \in \mathcal{H}(K^*(a, r))$ takva da je

$$f'(z) = \frac{1}{z-a} \qquad \forall z \in K^*(a, r).$$

Područje $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ zove se **Cauchyjevo** ako u njemu vrijedi Cauchyjev teorem, odnosno, ako za svaku petlju γ u Ω i za svaku $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ vrijedi

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = 0.$$

Propozicija 3.1. *Područje $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ je Cauchyjevo ako i samo ako za svaku petlju γ u Ω i za svaku točku $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \Omega$ vrijedi $Ind_\gamma(\alpha) = 0$.*

Dokaz: Pretpostavimo da vrijedi $Ind_\gamma(\alpha) = 0$ za svaku petlju γ u Ω i za svaku točku $\alpha \in \mathbb{C}\setminus\Omega$. Tada je prema prvoj formuli u tvrdnji (a) teorema 1.10. područje Ω Cauchyjevo.

Pretpostavimo sada da je područje Ω Cauchyjevo. Neka je $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \Omega$ i neka je γ petlja u Ω. Tada je sa

$$f(z) = \frac{1}{z-\alpha}, \qquad z \in \Omega,$$

definirana funkcija $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, pa kako je po pretpostavci područje Ω Cauchyjevo vrijedi

$$0 = \int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = \int_\gamma \frac{1}{z-\alpha}\mathrm{d}z = 2\pi i Ind_\gamma(\alpha).$$

Time je propozicija dokazana.

Propozicija 3.2. *Područje $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ je Cauchyjevo ako i samo ako je ono primitivno.*

Dokaz: Pretpostavimo da je područje $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ Cauchyjevo i neka je $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Fiksirajmo točku $a \in \Omega$. Ako su γ_1 i γ_2 dva puta u Ω od točke a do točke $z \in \Omega$, tada je put γ dobiven slaganjem puta γ_1 i suprotnog puta $-\gamma_2$ od puta γ_2 petlja, pa vrijedi

$$0 = \int_\gamma f(\zeta)\mathrm{d}\zeta = \int_{\gamma_1} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta - \int_{\gamma_2} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta.$$

To pokazuje da možemo definirati funkciju $g : \Omega \to \mathbb{C}$ na sljedeći način:

$$g(z) = \int_\gamma f(\zeta) \mathrm{d}\zeta \qquad \text{gdje je } \gamma \text{ put u } \Omega \text{ od točke } a \text{ do točke } z \in \Omega.$$

Neka je z_0 proizvoljna točka u Ω i neka je γ_0 put u Ω od točke a do točke z_0. Nadalje, neka je $r > 0$ takav da je $K(z_0, r) \subseteq \Omega$. Za $z \in K(z_0, r)$ neka je γ_z put u Ω koji je složen od puta γ_0 i ravnog segmenta $[z_0, z]$ od točke z_0 do točke z. Tada je

$$\frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0} = \frac{1}{z - z_0} \left(\int_{\gamma_z} f(\zeta) \mathrm{d}\zeta - \int_{\gamma_0} f(\zeta) \mathrm{d}\zeta \right) = \frac{1}{z - z_0} \int_{[z_0, z]} f(\zeta) \mathrm{d}\zeta.$$

Ravni segment $[z_0, z]$ od točke z_0 do točke z možemo parametrizirati na sljedeći način:

$$\delta(t) = tz + (1 - t)z_0, \qquad 0 \leq t \leq 1.$$

Tada je $\delta'(t) = z - z_0$ $\forall t$, dakle

$$\frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0} = \int_0^1 f(tz + (1 - t)z_0) \mathrm{d}t,$$

odnosno,

$$\frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0} - f(z_0) = \int_0^1 [f(z_0 + t(z - z_0)) - f(z_0)] \mathrm{d}t, \qquad z \in K(z_0, r).$$

Odavde zbog neprekidnosti funkcije f u točki z_0 lako slijedi da je

$$f(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0}.$$

Kako je točka $z_0 \in \Omega$ bila proizvoljna, time je dokazano da je $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ i $g' = f$. Kako je funkcija $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ bila proizvoljna, dokazali smo da je područje Ω primitivno.

Pretpostavimo sada da je područje $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ primitivno. Neka je $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ i neka je $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ takva da je $g' = f$. Za proizvoljan put $\gamma : [a, b] \to \Omega$ tada imamo

$$\int_\gamma f(z) \mathrm{d}z = \int_a^b g'(\gamma(t))\gamma'(t) \mathrm{d}t = \int_a^b \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} g(\gamma(t)) \mathrm{d}t = g(\gamma(b)) - g(\gamma(a)).$$

Ako je γ petlja, tj. $\gamma(a) = \gamma(b)$, slijedi

$$\int_\gamma f(z) \mathrm{d}z = 0.$$

Dakle, područje Ω je Cauchyjevo.

Propozicija 3.3. *Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ područje takvo da je svaka komponenta povezanosti skupa $\mathbb{C} \setminus \Omega$ neograničena. Tada je područje Ω Cauchyjevo.*

Dokaz: Neka je γ petlja u Ω. Kako je $(\mathbb{C} \setminus \Omega) \subseteq (\mathbb{C} \setminus \gamma^*)$, svaka komponenta povezanosti skupa $\mathbb{C} \setminus \Omega$ sadržana je u nekoj komponenti povezanosti skupa $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$. Budući da je po pretpostavci svaka komponenta povezanosti skupa $\mathbb{C} \setminus \Omega$ neograničena, i budući da skup $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$ ima točno jednu neograničenu komponentu povezanosti, zaključujemo da je čitav skup $\mathbb{C} \setminus \Omega$ sadržan u neograničenoj komponenti skupa $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$. Prema tvrdnji (c) teorema 1.9. vrijedi $Ind_\gamma(\alpha) = 0$ $\forall \alpha \in \mathbb{C} \setminus \Omega$. Sada iz propozicije 3.1. slijedi da je područje Ω Cauchyjevo.

Zadatak 3.2. *Za skup $S \subseteq \mathbb{C}$ kažemo da je* **zvjezdast** *ako postoji točka $a \in S$ takva da je za svaku točku $z \in S$ ravni segment $[a, z]$ sadržan u S. Dokažite da je svako zvjezdasto područje $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ Cauchyjevo.*

Uputa: Dokažite da je svaka komponenta skupa $\mathbb{C} \setminus \Omega$ neograničena.

Dovoljan uvjet iz propozicije 3.3. postaje znatno jednostavniji ako kompleksnu ravninu $\mathbb{C}$ uronimo u proširenu kompleksnu ravninu $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$:

Zadatak 3.3. *Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ područje. Dokažite da je svaka komponenta povezanosti skupa $\mathbb{C} \setminus \Omega$ neograničena ako i samo ako je skup $\overline{\mathbb{C}} \setminus \Omega$ povezan.*

Uputa: Dokažite da je za svaku neograničenu komponentu povezanosti K skupa $\mathbb{C} \setminus \Omega$ skup $K \cup \{\infty\}$ povezan, a odatle izvedite povezanost skupa $\overline{\mathbb{C}} \setminus \Omega$ ukoliko je svaka komponenta povezanosti skupa $\mathbb{C} \setminus \Omega$ neograničena. Nadalje, dokažite da je svaka ograničena komponenta povezanosti skupa $\mathbb{C} \setminus \Omega$ ujedno komponenta povezanosti skupa $\overline{\mathbb{C}} \setminus \Omega$. Odatle izvedite da u slučaju postojanja ograničene komponente povezanosti skupa $\mathbb{C}\setminus\Omega$ skup $\overline{\mathbb{C}}\setminus\Omega = (\mathbb{C}\setminus\Omega)\cup\{\infty\}$ nije povezan.

Za područje $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ kažemo da ima **svojstvo logaritma** ako za svaku $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, takvu da je $N(f) = \emptyset$, tj. takvu da je $f(z) \neq 0$ $\forall z \in \Omega$, postoji funkcija $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ takva da je $f(z) = \mathrm{e}^{g(z)}$ $\forall z \in \Omega$. Za prirodan broj $n \geq 2$ kažemo da područje Ω ima **svojstvo $n-$tog korijena** ako za svaku $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, takvu da je $N(f) = \emptyset$, postoji $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ takva da je $f(z) = [g(z)]^n$ $\forall z \in \Omega$.

Propozicija 3.4. (a) *Primitivno područje ima svojstvo logaritma.*

(b) *Područje sa svojstvom logaritma ima svojstvo $n-$tog korijena za svaki prirodan broj $n \geq 2$.*

Dokaz: (a) Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ primitivno područje i neka je $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ funkcija bez nultočaka. Tada je $f'/f \in \mathcal{H}(\Omega)$, pa postoji funkcija $G \in \mathcal{H}(\Omega)$ takva da je $G' = f'/f$. Tada je

$$\left(f\mathrm{e}^{-G}\right)' = f'\mathrm{e}^{-G} - fG'\mathrm{e}^{-G} = 0,$$

dakle, funkcija $f\mathrm{e}^{-G}$ je konstanta $\alpha \in \mathbb{C}$. Kako f nema nultočaka, to je $\alpha \neq 0$, pa postoji $\beta \in \mathbb{C}$ takvo da je $\alpha = \mathrm{e}^{\beta}$. Za $g = \beta + G \in \mathcal{H}(\Omega)$ dobivamo $f = \mathrm{e}^{g}$.

(b) Pretpostavimo da je Ω područje sa svojstvom logaritma i neka je $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ funkcija bez nultočaka. Neka je $h \in \mathcal{H}(\Omega)$ takva da je $f = \mathrm{e}^{h}$. Stavimo

$$g(z) = \mathrm{e}^{\frac{h(z)}{n}}, \qquad z \in \Omega.$$

Tada je $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ i vrijedi $f(z) = [g(z)]^n$ $\forall z \in \Omega$.

Zadatak 3.4. *Dokažite da za područje $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ i za $a \in \Omega$ područje $\Omega \setminus \{a\}$ nije primitivno i da nema svojstvo $n-$tog korijena ni za jedan prirodan broj $n \geq 2$.*

Neka su $\gamma, \delta : [a, b] \to \Omega$ krivulje u području Ω, takve da je $\gamma(a) = \delta(a) = z_1$ i $\gamma(b) = \delta(b) = z_2$. **Homotopija** u Ω od krivulje γ do krivulje δ je neprekidno preslikavanje $H : [a, b] \times [0, 1] \to \Omega$ takva da je

$$\begin{aligned} H(t,0) &= \gamma(t) \quad \forall t \in [a,b]; & H(t,1) &= \delta(t) \quad \forall t \in [a,b]; \\ H(a,s) &= z_1 \quad \forall s \in [0,1]; & H(b,s) &= z_2 \quad \forall s \in [0,1]. \end{aligned}$$

Kažemo da su **krivulje** γ i δ **homotopne u** Ω, ako postoji homotopija u Ω od krivulje γ do krivulje δ. Ako su γ i δ putovi koji su homotopni u Ω, može se dokazati da postoji homotopija H u Ω od γ do δ takva da je za svaki $s \in [0, 1]$ krivulja $\gamma_s(t) = H(s, t)$ put.

Ako je $\gamma : [a, b] \to \Omega$ petlja u području Ω, kažemo da je ona nul$-$homotopna u Ω ako je ona homotopna u Ω s konstantnom petljom $\delta(t) = \gamma(a) = \gamma(b)$ $\forall t \in [a, b]$. Područje $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ zove se **jednostavno povezano** ako je svaka petlja u Ω nul$-$homotopna u Ω. Budući da se homotopija neke petlje s konstantnom petljom može shvaćati kao kontinuirano "stezanje" te petlje u točku, za očekivati je da će područje Ω biti jednostavno povezano ako i samo ako njegov komplement $\mathbb{C} \setminus \Omega$ "nema rupa", tj. ako nijedna komponenta povezanosti od $\mathbb{C} \setminus \Omega$ nije ograničena. Doista, to je ekvivalencija (b) $\Leftrightarrow$ (d) u sljedećem teoremu:

Teorem 3.1. *Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ područje. Tada je sljedećih deset svojstava međusobno ekvivalentno:*

(a) *Područje Ω homeomorfno je jediničnom krugu $K(0,1)$.*

(b) *Područje Ω je jednostavno povezano.*

(c) *Za svaku petlju γ u Ω i za svaku točku $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \Omega$ vrijedi $Ind_\gamma(\alpha) = 0$.*

(d) *Svaka komponenta skupa $\mathbb{C} \setminus \Omega$ je neograničena.*

(e) *Skup $\overline{\mathbb{C}} \setminus \Omega$ je povezan.*

(f) *Područje Ω je Cauchyjevo.*

(g) *Područje Ω je primitivno.*

(h) *Područje Ω ima svojstvo logaritma.*

(i) *Za svaki prirodan broj $n \geq 2$ područje Ω ima svojstvo $n-$tog korijena.*

(j) *Za neki prirodan broj $n \geq 2$ područje Ω ima svojstvo $n-$tog korijena.*

Dokažimo najprije lemu:

Lema 3.1. *Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ otvoren skup i $K \subseteq \Omega$ kompaktan skup. Tada postoji ciklus Γ u $\Omega \setminus K$ takav da je $Ind_\Gamma(\alpha) = 0 \ \forall \alpha \in \mathbb{C} \setminus \Omega$ i $Ind_\Gamma(a) = 1 \ \forall a \in K$.*

Dokaz: Skupovi K i $\mathbb{C} \setminus \Omega$ su disjunktni, K je kompaktan i $\mathbb{C} \setminus \Omega$ je zatvoren. Stoga je

$$d = \inf \{|z - w|; \ z \in K, \, w \in \mathbb{C} \setminus \Omega\} > 0.$$

(Ukoliko je $\Omega = \mathbb{C}$, za d uzimamo bilo koji pozitivan broj.) Neka je

$$\Sigma = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} (p_n \cup q_n),$$

gdje su p_n i q_n pravci

$$p_n = \left\{ z \in \mathbb{C}; \ \operatorname{Re} z = \frac{nd}{2} \right\}, \qquad q_n = \left\{ z \in \mathbb{C}; \ \operatorname{Im} z = \frac{nd}{2} \right\}.$$

Dakle, Σ je mreža u $\mathbb{C}$, koja se sastoji od ekvidistantnih pravaca udaljenih za $\frac{d}{2}$ paralelnih s realnom odnosno s imaginarnom osi. Na taj način ravnina $\mathbb{C}$ pokrivena je mrežom zatvorenih kvadrata Q sa stranicama duljine $\frac{d}{2}$. Za svaki od tih kvadrata Q označimo sa ∂Q njegov pozitivno orijentiran rub.

Za $a \in K \setminus \Sigma$ označimo sa Q_a jedini kvadrat iz konstruirane mreže, unutar kojega se točka a nalazi. Točka a nalazi se tada u neograničenoj komponenti skupa $\mathbb{C} \setminus \partial Q$ za svaki $Q \neq Q_a$ iz naše mreže. Prema tvrdnji (c) teorema 1.9. imamo

$$Ind_{\partial Q}(a) = 0 \qquad \forall Q \neq Q_a. \tag{3.1}$$

Zadatak 3.5. *Dokažite da je*

$$Ind_{\partial Q_a}(a) = 1. \tag{3.2}$$

Uputa: Izaberite $r > 0$ takav da je zatvoren krug $\overline{K}(a,r)$ sadržan u nutrini kvadrata Q_a. Zatim konstruirajte petlje γ_1 i γ_2 takve da je

$$\int_{\partial Q_a} - \int_{S(a,r)} = \int_{\gamma_1} + \int_{\gamma_2}$$

($S(a,r)$ ovdje označava pozitivno orijentiranu kružnicu sa središtem a i radijusom r), i takve da je točka a sadržana u neograničenoj komponenti od $\mathbb{C} \setminus \gamma_1^*$ i u neograničenoj komponenti od $\mathbb{C} \setminus \gamma_2^*$. Zatim koristite tvrdnju (c) teorema 1.9. i zadatak 1.5.

Neka su sada $Q_1, \ldots, Q_n$ svi zatvoreni kvadrati iz izabrane mreže koji se sijeku sa skupom K (njih ima konačno mnogo, jer je skup K kompaktan, dakle ograničen). Neka su $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{4n}$ orijentirani segmenti koji su, redom, glatki dijelovi petlji $\partial Q_1, \ldots, \partial Q_n$; dakle, pozitivno orijentirani rub ∂Q_j kvadrata Q_j satoji se od $\gamma_{4j-3}, \gamma_{4j-2}, \gamma_{4j-1}$ i γ_{4j}. Definiramo ciklus $\Gamma' = [\partial Q_1, \ldots, \partial Q_n]$. Prema (3.1) i (3.2) imamo

$$Ind_{\Gamma'}(a) = 1 \qquad \forall a \in K \setminus \Sigma. \tag{3.3}$$

Stranice svih promatranih kvadrata su duljine $\frac{d}{2}$ i zatvoreni kvadrati $Q_1, \ldots, Q_n$ sijeku se sa skupom K. Budući da je d udaljenost skupa K od skupa $\mathbb{C} \setminus \Omega$, nijedan od tih kvadrata ne siječe se sa skupom $\mathbb{C} \setminus \Omega$; doista, ako su $z_1, z_2 \in Q_j$, onda je

$$|z_1 - z_2| \le \frac{d}{2} \cdot \sqrt{2} < d,$$

pa ne može biti $z_1 \in K$ i $z_2 \in \mathbb{C} \setminus \Omega$. Prema tome, $Q_j \subseteq \Omega$ i, posebno, Γ' je ciklus u Ω. Nadalje, svaka točka $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \Omega$ nalazi se izvan svakog od kvadrata $Q_1, \ldots, Q_n$, pa vrijedi

$$Ind_{\Gamma'}(\alpha) = 0 \qquad \forall \alpha \in \mathbb{C} \setminus \Omega. \tag{3.4}$$

Neka je sada Γ lanac koji se dobije iz lanca $\Gamma'' = [\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{4n}]$ izostavljanjem svih onih segmenata γ_j koji se sijeku sa skupom K. Drugim riječima, izostavljaju se sve one stranice kvadrata $Q_1, \ldots, Q_n$ koje se prilikom integracije duž ciklusa γ' prolaze u oba smjera. Jasno je da se segmenti u Γ mogu poredati tako da to bude ciklus. Nadalje, tada je $\Gamma^* \cap K = \emptyset$. Budući da je $\Gamma^* \subseteq \Gamma'^* \subseteq \Omega$, zaključujemo da je Γ ciklus u $\Omega \setminus K$.

Iz konstrukcije je jasno da je

$$\int_{\Gamma} = \int_{\Gamma''} = \int_{\Gamma'}.$$

Odatle i iz (3.4) slijedi da je

$$Ind_{\Gamma}(\alpha) = 0 \qquad \forall \alpha \in \mathbb{C} \setminus \Omega,$$

a iz (3.3) slijedi da je

$$Ind_{\Gamma}(a) = 1 \qquad \forall a \in K \setminus \Sigma.$$

Uzmimo sada da je $a \in K \cap \Sigma$. Imamo dvije mogućnosti:

(1) Točka a ne nalazi se u vrhu nijednog od kvadrata $Q_1, \ldots, Q_n$. Tada se točka a nalazi na stranici točno dvaju od tih kvadrata; možemo pretpostaviti da je numeracija takva da se a nalazi na stranicama kvadrata Q_1 i Q_2 i da su to stranice γ_4 i γ_5. Tada je $Q = Q_1 \cup Q_2$ zatvoreni pravokutnik i njegov pozitivno orijentirani rub ∂Q sastoji se od orijentiranih segmenata $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_6, \gamma_7, \gamma_8$. Točka a nalazi se unutar pravokutnika Q i izvan kvadrata $Q_3, \ldots, Q_n$, pa vrijedi

$$Ind_{\partial Q}(a) = 1, \qquad Ind_{\partial Q_j}(a) = 0, \quad 3 \le j \le n.$$

Dakle, ako definiramo ciklus $\Gamma_1 = [\partial Q, \partial Q_3, \ldots, \partial Q_n]$, imamo

$$Ind_{\Gamma_1}(a) = 1.$$

Prije konstruirani ciklus Γ može se dobiti iz ciklusa Γ_1 izostavljanjem onih segmenata γ_j, $1 \leq j \leq 4n$, $j \neq 4$, $j \neq 5$, koji se sijeku sa skupom K, odnosno onih za koje je i suprotan segment u Γ_1. Tada je

$$\int_{\Gamma_1} = \int_{\Gamma}$$

pa zaključujemo da je za takvu točku a

$$Ind_\Gamma(a) = 1.$$

(2) Točka a nalazi se u vrhu točno četiriju kvadrata i možemo pretpostaviti da je numeracija takva da su to kvadrati Q_1, Q_2, Q_3 i Q_4. Nadalje, uzmimo da je numeracija stranica tih kvadrata takva da je točka a svršetak segmenata $\gamma_3, \gamma_7, \gamma_{11}$ i γ_{15} i da je ona početak segmenata $\gamma_4, \gamma_8, \gamma_{12}$ i γ_{16}. Neka je $Q = Q_1 \cup Q_2 \cup Q_3 \cup Q_4$. Tada je Q kvadrat sa stranicama duljine d i njegov pozitivno orijentirani rub ∂Q sastoji se od segmenata $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_5, \gamma_6, \gamma_9, \gamma_{10}, \gamma_{13}$ i γ_{14}. Sasvim analogno kao malo prije nalazimo da je

$$Ind_{\partial Q}(a) = 1, \qquad Ind_{\partial Q_j}(a) = 0, \quad 5 \leq j \leq n,$$

pa za ciklus $\Gamma_2 = [\partial Q, \partial Q_5, \ldots, \partial Q_n]$ imamo

$$Ind_\Gamma(a) = Ind_{\Gamma_2}(a) = 1.$$

Time je lema dokazana.

Dokaz teorema 3.1. Prema propozicijama 3.1., i 3.2. vrijede ekvivalencije $(c) \Leftrightarrow (f) \Leftrightarrow (g)$, a prema zadatku 3.3. imamo ekvivalenciju $(d) \Leftrightarrow (e)$. Prema propozicijama 3.3. i 3.4. vrijede implikacije $(d) \Rightarrow (f)$ i $(g) \Rightarrow (h) \Rightarrow (i)$. Implikacija $(i) \Rightarrow (j)$ je trivijalna. Budući da je jedinični krug $K(0,1)$ jednostavno povezano područje, vrijedi $(a) \Rightarrow (b)$. Prema klasičnom Cauchyjevom teoremu vrijedi $(b) \Rightarrow (f)$.

Pretpostavimo da ne vrijedi (e) tj. da je $\overline{\mathbb{C}} \setminus \Omega$ nepovezan skup. Budući da je taj skup zatvoren u $\overline{\mathbb{C}}$, postoje neprazni zatvoreni podskupovi A i B od $\overline{\mathbb{C}}$ takvi da je $A \cap B = \emptyset$ i $A \cup B = \overline{\mathbb{C}} \setminus \Omega$. Ω je podskup od $\mathbb{C}$, dakle, $\infty \notin \Omega$. To znači da $\infty \in A \cup B$. Zbog određenosti uzmimo da je $\infty \in B$. Skup $\overline{\mathbb{C}}$ je kompaktan, dakle i svaki njegov zatvoren podskup je kompaktan. Posebno, skup A je kompaktan i sadržan je u otvorenom skupu $\Omega_1 = \overline{\mathbb{C}} \setminus B \subseteq \mathbb{C}$. Prema lemi 3.1. postoji ciklus Γ u $\Omega_1 \setminus A = \Omega$, takav da je

$$Ind_\Gamma(a) = 1 \qquad \forall a \in A.$$

Neka su $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ petlje u Ω takve da je $\Gamma = [\gamma_1, \ldots, \gamma_n]$. Tada za bilo koju zadanu točku $a \in A$ vrijedi

$$Ind_{\gamma_1}(a) + \cdots + Ind_{\gamma_n}(a) = 1,$$

pa slijedi da je $Ind_{\gamma_j}(a) \neq 0$ za neki $j \in \{1, \ldots, n\}$. Kako je tada $a \in \mathbb{C} \setminus \Omega$, vidimo da ne vrijedi (c). Time je dokazana implikacija $(c) \Rightarrow (e)$.

Dokaz će biti potpun, ako još dokažemo da iz (j) slijedi (a). Pretpostavimo da vrijedi (j) tj. da za neki prirodan broj $n \geq 2$ područje Ω ima svojstvo $n-$tog korijena. U sljedećem poglavlju bit će dokazano da tada uz dodatni uvjet $\Omega \neq \mathbb{C}$ vrijedi tzv. Riemannov teorem da postoji bijekcija Φ sa Ω na otvoren jedinični krug $K(0,1)$ takva da su funkcije Φ i Φ^{-1} holomorfne. Tada su te funkcije neprekidne, pa je Φ homeomorfizam. Napokon, ako je $\Omega = \mathbb{C}$, tada homeomorfizam $\Phi : \mathbb{C} \to K(0,1)$ možemo eksplicitno napisati:

$$\Phi(z) = \frac{z}{1+|z|}, \qquad z \in \mathbb{C}; \qquad \Phi^{-1}(w) = \frac{w}{1-|w|}, \qquad w \in K(0,1).$$

Time je teorem 3.1. dokazan (uz pretpostavku da nam je poznat gore spomenuti Riemannov teorem).

Poglavlje 4

Kompaktnost skupova holorfnih funkcija

Da bismo dokazali najavljeni Riemannov teorem potreban nam je niz teorema o nekim svojstvima skupova funkcija $S \subseteq \mathcal{H}(\Omega)$.

Zadatak 4.1. *Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ otvoren skup i neka je $S \subseteq \mathcal{H}(\Omega)$. Dokažite da su sljedeća tri svojstva skupa S holomorfnih funkcija međusobno ekvivalentna:*

(*a*) *Za svaki kompaktan skup $K \subseteq \Omega$ postoji $M > 0$ takav da vrijedi*

$$|f(z)| \leq M \qquad \forall z \in K, \quad \forall f \in S.$$

(*b*) *Za svaku točku $a \in \Omega$ i za svaki $r > 0$ takav da je $\overline{K}(a,r) \subseteq \Omega$ postoji $M > 0$ takav da vrijedi*

$$|f(z)| \leq M \qquad \forall z \in \overline{K}(a,r), \quad \forall f \in S.$$

(*c*) *Za svaku točku $a \in \Omega$ postoje $r > 0$ i $M > 0$ takvi da vrijedi $K(a,r) \subseteq \Omega$ i*

$$|f(z)| \leq M \qquad \forall z \in K(a,r), \quad \forall f \in S.$$

Ukoliko su ispunjeni međsubno ekvivalentni uvjeti iz tog zadatka kažemo da je skup funkcija S **lokalno uniformno ograničen** na Ω.

Propozicija 4.1. *Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ otvoren skup i neka je skup holomorfnih funkcija $S \subseteq \mathcal{H}(\Omega)$ lokalno uniformno ograničen. Tada je i skup njihovih derivacija $S' = \{f';\ f \in S\}$ lokalno uniformno ograničen.*

Dokaz: Neka je a točka iz Ω i neka je $R > 0$ takav da je $\overline{K}(a,R) \subseteq \Omega$. Po pretpostavci tada postoji $M > 0$ takav da vrijedi:

$$|f(z)| \leq M \qquad \forall z \in \overline{K}(a,R), \quad \forall f \in S. \tag{4.1}$$

Neka je $r = R/2$ i $z \in K(a,r)$. Tada je $\overline{K}(z,r) \subseteq \overline{K}(a,R) \subseteq \Omega$, dakle za svaku funkciju $f \in S$ možemo pisati

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} \mathrm{d}\zeta$$

gdje je γ pozitivno orijentirana kružnica $S(z,r)$:

$$\gamma(t) = z + r\mathrm{e}^{it}, \qquad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Dakle,

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{f(z+re^{it})}{(re^{it})^2} ire^{it}\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi r}\int_0^{2\pi} f(z+re^{it})e^{-it}\mathrm{d}t.$$

Odatle je zbog (4.1)

$$|f'(z)| \leq \frac{1}{2\pi r}\cdot M \cdot 2\pi = \frac{M}{r} = \frac{2M}{R}.$$

Budući da gornja nejednakost vrijedi za sve $f \in S$ i za sve točke $z \in K(a,r)$, zbog proizvoljnosti točke $a \in \Omega$ zaključujemo da skup S' ima svojstvo (c) iz zadatka 4.1. Dakle, skup funkcija S' je lokalno uniformno ograničen na Ω.

Za skup $S \subseteq \mathcal{H}(\Omega)$ kažemo da je **relativno kompaktan**, ako svaki niz $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ u S ima lokalno uniformno konvergentan podniz $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$; ako je pri tome i limes

$$\lim_{k\to\infty} f_{n_k}$$

uvijek sadržan u S, za skup S kažemo da je **kompaktan**.

Sasvim analogno kao u zadatku 4.1 dokazuje se da su sljedeća tri svojstva skupa funkcija $S \subseteq \mathcal{H}(\Omega)$ međusobno ekvivalentna:

(a) *Za svaki kompaktan skup $K \subseteq \Omega$ i za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takav da vrijedi*

$$z_1, z_2 \in K, \quad |z_1 - z_2| < \delta, \quad f \in S \qquad \Longrightarrow \qquad |f(z_1) - f(z_2)| < \varepsilon.$$

(b) *Za svaki zatvoren krug $\overline{K}(a,r) \subseteq \Omega$ i za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takav da vrijedi*

$$z_1, z_2 \in \overline{K}(a,r), \quad |z_1 - z_2| < \delta, \quad f \in S \qquad \Longrightarrow \qquad |f(z_1) - f(z_2)| < \varepsilon.$$

(c) *Za svaku točku $a \in \Omega$ postoji $r > 0$ takav da je $K(a,r) \subseteq \Omega$ i takav da za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takav da vrijedi*

$$z_1, z_2 \in K(a,r), \quad |z_1 - z_2| < \delta, \quad f \in S \qquad \Longrightarrow \qquad |f(z_1) - f(z_2)| < \varepsilon.$$

Ako su ti uvjeti ispunjeni za skup S kažemo da je **lokalno ekvikontinuiran** na Ω.

Teorem 4.1. *Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ otvoren skup i neka je skup holomorfnih funkcija $S \subseteq \mathcal{H}(\Omega)$ lokalno uniformno ograničen. Tada je skup S lokalno ekvikontinuiran na Ω.*

Dokaz: Neka je $K \subseteq \Omega$ kompaktan skup i neka je d udaljenost skupa K od skupa $\mathbb{C} \setminus \Omega$:

$$d = d(K, \mathbb{C}\setminus\Omega) = \min\{|z_1 - z_2|;\ z_1 \in K,\ z_2 \in \mathbb{C}\setminus\Omega\} > 0$$

(ako je $\Omega = \mathbb{C}$ za d možemo uzeti bilo koji pozitivan broj). Stavimo tada

$$L = \left\{z \in \mathbb{C};\ d(z,K) \leq \frac{d}{2}\right\}.$$

Tada je L kompaktan skup sadržan u Ω. Prema propoziciji 4.1. tada postoji $M > 0$ takav da vrijedi

$$|f'(z)| \leq M, \qquad \forall z \in L, \quad \forall f \in S.$$

Neka je $\varepsilon > 0$. Stavimo $\delta = \min\left\{\frac{d}{2}, \frac{\varepsilon}{M}\right\}$. Neka su $z_1, z_2 \in K$ takve da je $|z_1 - z_2| < \delta$ i neka je $f \in S$. Tada je $\gamma(t) = (1-t)z_1 + tz_2$, $0 \le t \le 1$, ravni segment u L od točke z_1 do točke z_2, pa nalazimo

$$|f(z_2) - f(z_1)| = \left|\int_\gamma f'(\zeta)\mathrm{d}\zeta\right| \le M|z_2 - z_1| < M \cdot \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon.$$

Time je teorem dokazan, jer su kompaktan skup $K \subseteq \Omega$ i $\varepsilon > 0$ bili proizvoljni.

Sljedeći teorem pokazuje da u slučaju lokalno uniformno ograničenog niza funkcija lokalno uniformna konvergencija slijedi iz obične konvergencije po točkama, pa čak i samo na gustom skupu točaka.

Teorem 4.2. (**Vitali**) *Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ otvoren skup, $\Sigma \subseteq \Omega$ gust skup u Ω, i $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz u $\mathcal{H}(\Omega)$ koji je lokalno uniformno ograničen i takav da je za svaku točku $z \in \Sigma$ niz $(f_n(z))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergentan u $\mathbb{C}$. Tada niz $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira lokalno uniformno na Ω prema funkciji $f \in \mathcal{H}(\Omega)$.*

Dokaz: Neka je K kompaktan podskup od Ω i neka je $\varepsilon > 0$. Stavimo ponovo

$$d = d(K, \mathbb{C} \setminus \Omega) = \min\{|z_1 - z_2|;\ z_1 \in K,\ z_2 \in \mathbb{C} \setminus \Omega\} > 0$$

i definiramo ponovo kompaktan podskup L od Ω sa

$$L = \left\{z \in \mathbb{C};\ d(z, K) < \frac{d}{2}\right\}.$$

Po teoremu 4.1. postoji $\delta > 0$ (uzimamo da je $2\delta \le d$) takav da vrijedi

$$z, z' \in L, \quad |z - z'| < \delta, \quad n \in \mathbb{N} \qquad \Longrightarrow \qquad |f_n(z) - f_n(z')| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{4.2}$$

Budući da je skup K kompaktan, postoje točke $z_1, \ldots, z_N \in K$ takve da je

$$K \subseteq K\left(z_1, \frac{\delta}{2}\right) \cup \cdots \cup K\left(z_N, \frac{\delta}{2}\right) \subseteq L.$$

Budući da je skup Σ gust u Ω, za svako $j \in \{1, \ldots, N\}$ vrijedi $\Sigma \cap K\left(z_j, \frac{\delta}{2}\right) \neq \emptyset$, pa možemo izabrati $\zeta_j \in \Sigma \cap K\left(z_j, \frac{\delta}{2}\right)$. Po pretpostavci možemo izabrati $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da vrijedi

$$n, m \ge n_0, \quad j \in \{1, \ldots, N\} \qquad \Longrightarrow \qquad |f_n(\zeta_j) - f_m(\zeta_j)| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{4.3}$$

Uzmimo sada proizvoljnu točku $z \in K$. Za neko $j \in \{1, \ldots, N\}$ je tada $z \in K\left(z_j, \frac{\delta}{2}\right)$, dakle, imamo $|z - \zeta_j| < \delta$. Kako je

$$|f_n(z) - f_m(z)| \le |f_n(z) - f_n(\zeta_j)| + |f_n(\zeta_j) - f_m(\zeta_j)| + |f_m(\zeta_j) - f_m(z)|,$$

pomoću (4.2) i (4.3) nalazimo

$$n, m \ge n_0 \qquad \Longrightarrow \qquad |f_n(z) - f_m(z)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \tag{4.4}$$

(4.4) pokazuje da je za svaku točku $z \in K$ niz $(f_n(z))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergentan u $\mathbb{C}$. Kako je kompaktan skup $K \subseteq \Omega$ bio proizvoljan, slijedi da je taj niz konvergentan u $\mathbb{C}$ za svaku točku $z \in \Omega$. Definiramo funkciju $f : \Omega \to \mathbb{C}$ sa

$$f(z) = \lim_{n\to\infty} f_n(z), \qquad z \in \Omega.$$

Sada iz (4.4) slijedi

$$n \geq n_0, \quad z \in K \qquad \Longrightarrow \qquad |f_n(z) - f(z)| \leq \varepsilon.$$

Prema tome, niz funkcija $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira lokalno uniformno na Ω prema funkciji f. Zbog Weierstrassovog teorema 1.6. vrijedi $f \in \mathcal{H}(\Omega)$.

Teorem 4.3. (**Montelov princip kompaktnosti**) *Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ otvoren skup i neka je skup $S \subseteq \mathcal{H}(\Omega)$ lokalno uniformno ograničen. Tada je skup S relativno kompaktan.*

Dokaz: Neka $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz u S. Izaberimo prebrojiv gust skup $\Sigma \subseteq \Omega$ i numerirajmo mu točke prirodnim brojevima:

$$\Sigma = \{z_n;\ n \in \mathbb{N}\}.$$

Niz kompleksnih brojeva $(f_n(z_1))_{n\in\mathbb{N}}$ je ograničen pa prema Bolzano−Weierstrassovom teoremu postoji podniz $(f_{n,1})_{n\in\mathbb{N}}$ niza $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ takav da je niz $(f_{n,1}(z_1))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergentan u $\mathbb{C}$. Sada je niz kompleksnih brojeva $(f_{n,1}(z_2))_{n\in\mathbb{N}}$ ograničen pa postoji podniz $(f_{n,2})_{n\in\mathbb{N}}$ niza $(f_{n,1})_{n\in\mathbb{N}}$ takav da je niz $(f_{n,2}(z_2))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergentan u $\mathbb{C}$. Budući da je tada $(f_{n,2}(z_1))_{n\in\mathbb{N}}$ podniz konvergentnog niza $(f_{n,1}(z_1))_{n\in\mathbb{N}}$, to je i niz $(f_{n,2}(z_1))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergentan u $\mathbb{C}$. Nastavljajući na taj način vidimo da za svaki $m \in \mathbb{N}$ možemo izabrati podniz $(f_{n,m+1})_{n\in\mathbb{N}}$ niza $(f_{n,m})_{n\in\mathbb{N}}$ takav da je niz brojeva $(f_{n,m+1}(z_{m+1}))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergentan. Za bilo koje $j \in \mathbb{N}$ je $(f_{n,n}(z_j))_{n\in\mathbb{N},n\geq j}$ podniz niza $(f_{n,j}(z_j))_{n\in\mathbb{N}}$. Prema tome za svaki $j \in \mathbb{N}$ niz brojeva $(f_{n,n}(z_j))_{n\in\mathbb{N}}$ je konvergentan.

Time je dokazano da podniz $(f_{n,n})_{n\in\mathbb{N}}$ niza $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zadovoljava pretpostavke Vitalijevog teorema 4.2. Prema tom teoremu niz $(f_{n,n})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira lokalno uniformno na Ω prema nekoj funkciji $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Budući da je $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bio proizvoljan niz u S, time je dokazano da je skup S relativno kompaktan.

Zadatak 4.2. *Dokažite Vitalijev teorem 4.2. za područje $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ uz slabiju pretpostavku da je $\Sigma \subseteq \Omega$ skup koji ima bar jedno gomilište u skupu Ω.*

Uputa: Po Montelovom principu kompaktnosti (teorem 4.3) izaberite lokalno uniformno konvergentan podniz $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niza $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Iz pretpostavke da niz $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne konvergira lokalno uniformno prema funkciji $g = \lim_{n\to\infty} g_n$ pomoću dokazanog Vitalijevog teorema 4.2. zaključite da postoji točka $a \in \Omega$ takva da niz $(f_n(a))_{n\in\mathbb{N}}$ ima dva različita gomilišta $w_1 = g(a)$ i w_2. Zatim dokažite da postoji lokalno uniformno konvergentan podniz $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niza $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ takav da za $h = \lim_{n\to\infty} h_n$ vrijedi $h(a) = w_2$. Na kraju iskoristite teorem jedinstvenosti 1.11. za funkcije g i h da dođete do kontradikcije.

Teorem 4.4. (**Hurwitz**) *Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ otvoren skup i neka je $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz u $\mathcal{H}(\Omega)$ koji lokalno uniformno na Ω konvergira prema nekoj funkciji $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Neka je $z_0 \in \Omega$ izolirana nultočka funkcije f. Tada za svaki $r > 0$ takav da je $K(z_0, r) \subseteq \Omega$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svako $n \geq n_0$ funkcija f_n ima nultočku u skupu $K(z_0, r)$.*

Dokaz: Neka je $\rho > 0$ takav da je $\overline{K}(z_0, \rho) \subseteq \Omega$ i da je $f(z) \neq 0\ \forall z \in \overline{K}(z_0, \rho) \setminus \{z_0\}$. Neka je γ pozitivno orijentirana kružnica sa središtem u točki z_0 i radijusom ρ. Stavimo

$$\mu = \min\{|f(z)|;\ z \in \gamma^*\} > 0.$$

Kružnica γ^* je kompaktan skup sadržan u Ω, pa kako po pretpostavci niz $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira prema funkciji f lokalno uniformno na Ω, to niz restrikcija $(f_n|\gamma^*)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira uniformno prema restrikciji $f|\gamma^*$. Zbog toga postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da vrijedi

$$z \in \gamma^*, \quad n \geq n_0 \qquad \Longrightarrow \qquad |f_n(z) - f(z)| < \mu.$$

To znači da za svaki $n \geq n_0$ vrijedi

$$|f_n(z) - f(z)| < |f(z)| \qquad \forall z \in \gamma^*.$$

Prema Rouchéovom teoremu 2.6. odatle za svaki $n \geq n_0$ slijedi

$$N(f_n; K(z_0, \rho)) = N(f; K(z_0, \rho)) > 0.$$

Time je teorem dokazan.

Teorem 4.5. *Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ područje i neka je $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz injektivnih funkcija u $\mathcal{H}(\Omega)$. Pretpostavimo da niz $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lokalno uniformno na Ω konvergira prema nekoj nekonstantnoj funkciji f. Tada je funkcija f injektivna.*

Dokaz: Pretpostavimo suprotno i neka su $z_1, z_2 \in \Omega$ takve da je $z_1 \neq z_2$ i $f(z_1) = f(z_2)$. Definiramo niz $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ i funkciju g u $\mathcal{H}(\Omega)$ na sljedeći način:

$$g_n(z) = f_n(z) - f_n(z_2), \qquad g(z) = f(z) - f(z_2), \qquad z \in \Omega.$$

Neka je $0 < r \leq |z_1 - z_2|$ takav da je $K(z_1, r) \subseteq \Omega$. Tada niz $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira lokalno uniformno na Ω prema funkciji g i vrijedi $g(z_1) = 0$. Budući da je funkcija f nekonstantna, po teoremu jedinstvenosti 1.11. točka z_1 je izolirana nultočka funkcije g. Prema Hurwitzovom teoremu 4.4. postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za $n \geq n_0$ funkcija g_n ima nultočku u krugu $K(z_1, r)$. Za takav n i za neko $z_3 \in K(z_1, r)$ tada je $g_n(z_3) = 0$, tj. $f_n(z_3) = f_n(z_2)$. No to je nemoguće, jer je po pretpostavci funkcija f_n injektivna i jer je $z_2 \notin K(z_1, r)$, dakle, $z_3 \neq z_2$. Ova kontradikcija pokazuje da je pretpostavka o neinjektivnosti funkcije f bila pogrešna.

Trebat će nam još jedno svojstvo neprekidnog preslikavanja definiranog na kompaktnom skupu funkcija. Pri tome za otvoren skup $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ i za proizvoljan skup funkcija $S \subseteq \mathcal{H}(\Omega)$ kažemo da je preslikavanje $J : S \to \mathbb{C}$ **neprekidno** na S ako za svaku funkciju $f \in S$ i za svaki niz $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ u S koji konvergira lokalno uniformno na Ω prema funkciji f vrijedi

$$J(f) = \lim_{n\to\infty} J(f_n).$$

Sljedeća propozicija daje još jednu analogiju prostora holomorfnih funkcija $\mathcal{H}(\Omega)$ i Euklidskog prostora.

Propozicija 4.2. *Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ otvoren skup, neka je skup funkcija $S \subseteq \mathcal{H}(\Omega)$ kompaktan i neka je preslikavanje $J : S \to \mathbb{C}$ neprekidno. Tada postoji $f_0 \in S$ takva da vrijedi*

$$|J(f_0)| \geq |J(f)| \qquad \forall f \in S.$$

Drugim riječima, neprekidno preslikavanje na kompaktnom skupu holomorfnih funkcija dostiže svoj supremum.

Dokaz: Stavimo
$$A=\sup\{|J(f)|;\ f\in S\}\le+\infty.$$
Neka je $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz u S takav da je
$$A=\lim_{n\to\infty}|J(f_n)|.$$
Budući da je po pretpostavci S kompaktan podskup od $\mathcal{H}(\Omega)$, postoji $f_0\in S$ i podniz $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ niza $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ koji lokalno uniformno na Ω konvergira prema f_0. Zbog neprekidnosti preslikavanja J nalazimo da je
$$A=\lim_{k\to\infty}|J(f_{n_k})|=|J(f_0)|<+\infty.$$

Sljedećih nekoliko zadataka daje drugačiji opis topologije prostora holomorfnih funkcija $\mathcal{H}(\Omega)$.

Zadatak 4.3. *Neka je $\Omega\subseteq\mathbb{C}$ neprazan otvoren skup. Za $n\in\mathbb{N}$ stavimo*
$$K_n=\left\{z\in\mathbb{C};\ |z|\le n,\ d(z,\mathbb{C}\setminus\Omega)\ge\frac{1}{n}\right\}.$$
Dokažite da tada vrijedi:

(a) *Skup K_n je kompaktan za svaki $n\in\mathbb{N}$.*

(b) *Za svaki $n\in\mathbb{N}$ nutrina skupa K_n je*
$$Int(K_n)=\left\{z\in\mathbb{C};\ |z|<n,\ d(z,\mathbb{C}\setminus\Omega)>\frac{1}{n}\right\}.$$

(c) *Za svaki $n\in\mathbb{N}$ je $K_n\subseteq Int(K_{n+1})$.*

(d) $\Omega=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}K_n$.

(e) *Za svaki $n\in\mathbb{N}$ svaka komponenta povezanosti skupa $\overline{\mathbb{C}}\setminus K_n$ sadrži neku komponentu povezanosti skupa $\overline{\mathbb{C}}\setminus\Omega$.*

Dokažite da ako je $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz kompaktnih skupova takvih da vrijedi (c) i (d), tada vrijedi i

(f) *Za svaki kompaktan skup $K\subseteq\Omega$ postoji $n\in\mathbb{N}$ takav da je $K\subseteq K_n$.*

Zadatak 4.4. *Neka je $\Omega\subseteq\mathbb{C}$ neprazan otvoren skup i neka je $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz kompaktnih skupova sa svojstvima (c) i (d) iz zadatka 4.3. Za $n\in\mathbb{N}$ i za $f\in\mathcal{H}(\Omega)$ stavimo*
$$\|f\|_n=\max\{|f(z)|;\ z\in K_n\}.$$
Dokažite da je preslikavanje $d:\mathcal{H}(\Omega)\times\mathcal{H}(\Omega)\to\mathbb{R}$ definirano sa
$$d(f,g)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\frac{\|f-g\|_n}{1+\|f-g\|_n},\qquad f,g\in\mathcal{H}(\Omega),$$
metrika na skupu $\mathcal{H}(\Omega)$, tj. da vrijedi

(a) $d(f,g)\ge0\quad\forall f,g\in\mathcal{H}(\Omega)$.

(b) *Za $f,g\in\mathcal{H}(\Omega)$ vrijedi $d(f,g)=0$ ako i samo ako je $f=g$.*

(c) $d(f,g)=d(g,f)\quad\forall f,g\in\mathcal{H}(\Omega)$.

(d) $d(f,g)\le d(f,h)+d(h,g)\quad\forall f,g,h\in\mathcal{H}(\Omega)$.

Zadatak 4.5. *Neka je* $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ *otvoren skup i neka je* d *metrika na skupu* $\mathcal{H}(\Omega)$ *iz zadatka 4.4. Dokažite da vrijedi:*

(a) *Niz* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *u* $\mathcal{H}(\Omega)$ *konvergira lokalno uniformno na* Ω *prema funkciji* $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ *ako i samo ako niz* $(d(f_n, f))_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergira prema nuli.*

(b) *Dokažite da je metrički prostor* $(\mathcal{H}(\Omega), d)$ *potpun, tj. da u njemu vrijedi Cauchyjev kriterij konvergencije: niz* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *u* $\mathcal{H}(\Omega)$ *je konvergentan u odnosu na metriku* d *(tj. zbog (a) lokalno uniformno konvergentan) ako i samo ako vrijedi:*

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \exists n_0 \in \mathbb{N} \qquad \text{takav da} \qquad n, m \geq n_0 \qquad \Longrightarrow \qquad d(f_n, f_m) < \varepsilon.$$

Zadatak 4.6. *U metričkom prostoru* $\mathcal{H}(\Omega)$ *topologija se uvodi na uobičajen način: skup* $S \subseteq \mathcal{H}(\Omega)$ *zove se otvoren ako za svaku* $f_0 \in S$ *postoji* $r > 0$ *takav da je*

$$K(f_0, r) = \{f \in \mathcal{H}(\Omega);\ d(f_0, f) < r\} \subseteq S;$$

skup $T \subseteq \mathcal{H}(\Omega)$ *zove se zatvoren ako je njegov komplement* $\mathcal{H}(\Omega) \setminus T$ *otvoren. Dokažite da je skup* $S \subseteq \mathcal{H}(\Omega)$ *kompaktan (u smislu definicije na str. 32) ako i samo ako za svaku familiju* $(U_i)_{i\in I}$ *otvorenih skupova u* $\mathcal{H}(\Omega)$ *takvu da je*

$$S \subseteq \bigcup_{i\in I} U_i$$

postoje $i_1, i_2, \ldots, i_n \in I$ *takvi da je*

$$S \subseteq U_{i_1} \cup U_{i_2} \cup \cdots \cup U_{i_n},$$

dakle, ako i samo ako svaki otvoren pokrivač od S *sadrži konačan potpokrivač.*

Poglavlje 5

Meromorfne funkcije

Prije svega, proširit ćemo definiciju meromorfne funkcije s konca drugog poglavlja na funkcije definirane na otvorenim podskupovima proširene kompleksne ravnine $\overline{\mathbb{C}}$. Uočimo da je skup $\Omega \subseteq \overline{\mathbb{C}}$ je otvoren, ako i samo ako za svaku točku $a \in \Omega$ postoji $r > 0$ takav da je $K(a,r) \subseteq \Omega$. Pri tome je oznaka $K(a,r)$ proširena i na slučaj $a = \infty$ ovako:

$$K(\infty, r) = \overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{K}(0,r) = \{\infty\} \cup \{z \in \mathbb{C};\ |z| > r\} = \{\infty\} \cup K(0, r, +\infty).$$

Proširit ćemo najprije pojam holomorfnosti i pojam izoliranog singulariteta na funkcije definirane na otvorenim podskupovima od $\overline{\mathbb{C}}$. Ako je f kompleksnoznačna funkcija definirana na skupu $\mathcal{D}(f) \subseteq \overline{\mathbb{C}}$, kažemo da funkcija f ima izoliran singularitet u točki ∞ ako postoji $r > 0$ takav da je skup

$$K^*(\infty, r) = K(\infty, r) \setminus \{\infty\} = K(0; r, +\infty) = \{z \in \mathbb{C};\ |z| > r\}$$

sadržan u $\mathcal{D}(f)$ i da je restrikcija $f|K^*(\infty, r)$ holomorfna. U tom slučaju teorem 2.3. o Laurentovom razvoju daje

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n z^n \qquad \forall z \in K^*(\infty, r).$$

Tada je funkcija $g : K^*(0, 1/r) \to \mathbb{C}$ definirana redom

$$g(z) = f\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n z^{-n}, \qquad 0 < |z| < \frac{1}{r},$$

holomorfna na skupu $K^*(0, 1/r)$. Proučavanje funkcije f u okolini točke ∞ svodi se na proučavanje funkcije g u okolini točke 0. U vezi s tim imamo analogne nazive za vrste izoliranog singulariteta u točki ∞ :

(a) Ako je $c_n = 0$ za svaki $n \in \mathbb{N}$, onda vrijedi

$$f(z) = c_0 + \frac{c_{-1}}{z} + \frac{c_{-2}}{z^2} + \cdots \qquad \Longrightarrow \qquad \lim_{z \to \infty} f(z) = c_0$$

i

$$g(z) = c_0 + c_{-1} z + c_{-2} z^2 + \cdots \qquad \Longrightarrow \qquad \lim_{z \to 0} g(z) = c_0.$$

U tom slučaju kažemo da je **točka** ∞ **uklonjiv singularitet** funkcije f; ako je k tome $\infty \in \mathcal{D}(f)$ i vrijedi $f(\infty) = c_0$, kažemo da je funkcija f holomorfna u točki ∞ (preciznije, na okolini $K(\infty, r)$ točke ∞). Ako je k tome $c_0 = 0$, kažemo da je **točka** ∞ **nultočka** funkcije f. U slučaju da funkcija f nije identički jednaka nuli na okolini točke ∞, onda postoji $m \in \mathbb{N}$ takav da je

$$c_0 = c_{-1} = \cdots = c_{-m+1} = 0, \qquad c_m \neq 0.$$

Tada kažemo da je točka ∞ $m-$**struka nultočka** funkcije f.

(*b*) Ako postoji $m \in \mathbb{N}$ takav da je $c_m \neq 0$ i $c_k = 0$ za svako $k > m$, onda kažemo da je **točka** ∞ **pol** $m-$**tog reda** za funkciju f. U tom je slučaju

$$g(z) = \frac{c_m}{z^m} + \cdots + \frac{c_{-1}}{z} + c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots ,$$

pa funkcija g ima pol $m-$tog reda u nuli. Tako npr. polinom stupnja m

$$P(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_m z^m \qquad (a_m \neq 0)$$

ima pol $m-$tog reda u točki ∞.

(*c*) Ako je $c_k \neq 0$ za beskonačno mnogo prirodnih brojeva k, kažemo da je **točka** ∞ **bitni singularitet** za fukciju f.

U vezi s uvedenom terminologijom proširujemo pojam holomorfnosti na funkcije $f : \Omega \to \mathbb{C}$, pri čemu je Ω otvoren podskup od $\overline{\mathbb{C}}$ (dakle, može sadržavati i točku ∞). Dakle, ako je Ω otvoren podskup od $\overline{\mathbb{C}}$ koji sadrži točku ∞, za funkciju $f : \Omega \to \mathbb{C}$ kažemo da je holomorfna na Ω, ako vrijedi:

(*a*) Restrikcija $f|\Omega \setminus \{\infty\}$ je holomorfna.

(*b*) Točka ∞ je uklonjiv singularitet funkcije f.

(*c*) $f(\infty) = \lim\limits_{z \to \infty} f(z)$.

U tom slučaju Laurentov razvoj funkcije f oko točke ∞ ima oblik

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}_+} c_n z^{-n}$$

i vrijedi $f(\infty) = c_0$.

Uz ovako proširen pojam holomorfnosti Liouvilleov teorem 1.8. može se i ovako formulirati:

Teorem 5.1. (**Liouville**) *Konstante su jedine holomorfne funkcije na* $\overline{\mathbb{C}}$.

Zadatak 5.1. *Dokažite teorem 5.1.*

Novo shvaćanje tipa izoliranog singulariteta dobivamo pomoću pojma neprekidnosti $\overline{\mathbb{C}}-$značnih funkcija s domenom u $\overline{\mathbb{C}}$. Ako je $S \subseteq \overline{\mathbb{C}}$, $f : S \to \overline{\mathbb{C}}$ i $a \in S$, kažemo da je funkcija f neprekidna u točki a ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takvo da vrijedi

$$z \in K(a, \delta) \cap S \qquad \Longrightarrow \qquad f(z) \in K(f(a), \varepsilon).$$

To zapravo znači da postoji $\lim\limits_{z \to a} f(z)$ i jednak je $f(a)$. Funkcija f neprekidna je na skupu S ako je neprekidna u svakoj točki skupa S. Ukoliko je $S \subseteq \mathbb{C}$ i $f(S) \subseteq \mathbb{C}$ ova se definicija neprekidnosti podudara s neprekidnošću kompleksne funkcije kompleksne varijable.

Uzmimo sada da je $a \in \overline{\mathbb{C}}$ uklonjiv singularitet funkcije f. Tada je za neki $r > 0$ funkcija f definirana i holomorfna na punktiranom krugu $K^*(a, r)$. Definiramo li $f(a) = \lim\limits_{z \to a} f(z)$, tada očito f postaje neprekidna funkcija sa $K(a, r)$ u $\mathbb{C}$. Neka je sada $a \in \overline{\mathbb{C}}$ pol funkcije f. Stavimo li $f(a) = \infty$, proširena funkcija f neprekidna je sa $K(a, r)$ u $\overline{\mathbb{C}}$. Napokon, ako je $a \in \overline{\mathbb{C}}$ bitni singularitet funkcije f, onda ne postoji ni konačan ni beskonačan $\lim\limits_{z \to a} |f(z)|$, pa ne postoji $\lim\limits_{z \to a} f(z)$ u $\overline{\mathbb{C}}$. Stoga se f ne može proširiti do neprekidne funkcije sa $K(a, r)$ u $\overline{\mathbb{C}}$.

Prema tome, ukoliko sve točke proširene kompleksne ravnine $\overline{\mathbb{C}}$ smatramo ravnopravnima, onda se uz ovako proširene definicije gubi razlika između pojma pola i pojma uklonjivog singulariteta.

Neka je $\Omega \subseteq \overline{\mathbb{C}}$ neprazan otvoren skup. Za funkciju f kažemo da je **meromorfna** na Ω, ako postoji skup $P \subseteq \Omega$ takav da vrijedi:

(a) Skup P nema gomilišta u skupu Ω; drugim riječima, za svaku točku $a \in \Omega$ postoji $r > 0$ takav da je $K^*(a,r) \cap P = \emptyset$.

(b) Funkcija f je definirana i holomorfna na skupu $\Omega \setminus P$.

(c) Svaka točka $a \in P$ je pol funkcije f.

Ekvivalentno, meromorfna funkcija na otvorenom skupu $\Omega \subseteq \overline{\mathbb{C}}$ je neprekidna funkcija $f : \Omega \to \overline{\mathbb{C}}$ takva da skup $P = f^{-1}(\{\infty\})$ nema gomilišta u skupu Ω i da je restrikcija $f|(\Omega \setminus P)$ holomorfna.

Racionalna funkcija

$$f(z) = \frac{a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n}{b_0 + b_1 z + \cdots + b_m z^m} \qquad (a_n \neq 0,\ b_m \neq 0)$$

je primjer meromorfne funkcije na $\overline{\mathbb{C}}$. Ako je $n > m$, onda je točka ∞ pol funkcije f reda $n - m$. Ako je $n < m$, onda je točka ∞ $(m-n)-$struka nultočka funkcija f. Napokon, ako je $n = m$, onda je

$$f(\infty) = \lim_{z \to \infty} f(z) = \frac{a_n}{b_n} \neq 0.$$

Ostali singulariteti funkcije f nalaze se među korijenima jednadžbe

$$b_0 + b_1 z + \cdots + b_m z^m = 0$$

i ti su singulariteti polovi. Prema tome, racionalna funkcija je meromorfna funkcija na $\overline{\mathbb{C}}$. To su upravo sve meromorfne funkcije na $\overline{\mathbb{C}}$:

Teorem 5.2. *Ako je $f \neq 0$ meromorfna funkcija na $\overline{\mathbb{C}}$, onda je f racionalna funkcija.*

Dokaz: Budući da je točka ∞ ili pol ili uklonjiv singularitet funkcije f, postoji $r > 0$ takav da je funkcija f holomorfna na skupu $K^*(\infty, r)$. Komplement tog skupa je zatvoren krug $\overline{K}(0,r)$, dakle, kompaktan skup. Kako polovi funkcije f nemaju gomilišta i kako po Bolzano$-$Weierstrassovom teoremu svaki beskonačan podskup kompaktnog skupa ima gomilište, zaključujemo da funkcija f ima u krugu $\overline{K}(0,r)$ samo konačno mnogo polova. Prema tome, funkcija f ima polove u nekim točkama $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$ i eventualno u točki ∞. Glavni dio Laurentovog razvoja funkcije f u okolini točke z_k je funkcija oblika

$$R_k(z) = \sum_{j=1}^{p_k} c_{j,k}(z - z_k)^{-j} \qquad (k = 1, \ldots, n)$$

a u okolini točke ∞ oblika

$$R_\infty(z) = \sum_{j=1}^{p} c_j z^j.$$

Funkcija

$$R(z) = \sum_{k=1}^{n} R_k(z) + R_\infty(z)$$

je racionalna, a funkcija

$$g(z) = f(z) - R(z)$$

je holomorfna barem tamo gdje i funkcija f, odnosno, na skupu $\mathbb{C} \setminus \{z_1, \ldots, z_n\}$. U okolini točke z_k glavni dijelovi Laurentovog razvoja za funkcije f i R su isti. To znači da je glavni dio Laurentovog razvoja funkcije g oko točke z_k jednak je nuli i to vrijedi za svaki $k = 1, \dots, n$. Prema tome, točke $z_1, \dots, z_n$ su uklonjivi singulariteti funkcije g, a isto vrijedi i za točku ∞. Dakle, funkcija g proširuje se do holomorfne funkcije na $\overline{\mathbb{C}}$. Prema Liouvilleovom teoremu 5.1. zaključujemo da je funkcija g identički jednaka nekoj konstanti $c_0 \in \mathbb{C}$. Zaključujemo da je

$$f(z) = g(z) + R(z) = c_0 + c_1 z + \cdots + c_p z^p + \sum_{k=1}^{n} R_k(z),$$

dakle, f je racionalna funkcija.

Uočimo da dokaz teorema 5.2. ujedno daje dokaz mogućnosti tzv. *rastava racionalne funkcije na parcijalne razlomke.*

Teoremom 5.2. potpuno su opisane meromorfne funkcije na $\overline{\mathbb{C}}$. Sljedeći nam je cilj da u zadovoljavajućoj mjeri opišemo meromorfne funkcije na $\mathbb{C}$.

Neka je f meromorfna funkcija na $\mathbb{C}$. Pretpostavimo najprije da f ima samo konačno mnogo polova u $\mathbb{C}$ i neka su to točke $z_1, \dots, z_n$. Označimo li opet kao u dokazu teorema 5.2. sa $R_k(z)$ glavni dio Laurentovog razvoja funkcije f oko točke z_k, dobivamo da je funkcija

$$g(z) = f(z) - \sum_{k=1}^{n} R_k(z)$$

holomorfna na $\mathbb{C} \setminus \{z_1, \dots, z_k\}$ i da su točke $z_1, \dots, z_n$ uklonjivi singulariteti te funkcije. Dakle, funkcija g proširuje se do holomorfne funkcije na cijeloj kompleksnoj ravnini $\mathbb{C}$, tj. do cijele funkcije. Prema tome, funkcija f se može napisati u obliku

$$f(z) = g(z) + \sum_{k=1}^{n} R_k(z), \tag{5.1}$$

pri čemu je $R_k(z)$ glavni dio Laurentovog razvoja funkcije f oko pola z_k, a g je cijela funkcija.

Formulom (5.1) prikazana je meromorfna funkcija f na $\mathbb{C}$ kojoj su zadani polovi $z_1, \dots, z_n$ i odgovarajući glavni dijelovi $R_1, \dots, R_n$ Laurentovih razvoja. *Postavlja se pitanje kako prikazati proizvoljnu meromorfnu funkciju f na $\mathbb{C}$, ako su zadani njezini polovi $z_1, z_2, \dots, z_n, \dots$ i odgovarajući dijelovi Laurentovih razvoja $R_1, R_2, \dots, R_n, \dots$.* Primijetimo da tada vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} |z_n| = +\infty, \qquad \text{odnosno,} \qquad \lim_{n\to\infty} z_n = \infty. \tag{5.2}$$

Doista, neka je $R > 0$ proizvoljno odabran. Zatvoren krug $\overline{K}(0, R)$ je kompaktan skup, a skup polova $\{z_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ funkcije f nema gomolište u $\mathbb{C}$. Bolzano$-$Weierstarssov teorem pokazuje da je samo konačno mnogo polova z_n sadržano u krugu $\overline{K}(0, R)$. Prema tome, postoji prirodan broj N takav da vrijedi

$$n \geq N \qquad \Longrightarrow \qquad |z_n| > R.$$

Kako je R bio proizvoljno odabran pozitivan realan broj, dokazali smo (5.2).

Prije rješavanja postavljenog problema prikaza meromorfnih funkcija na $\mathbb{C}$ s beskonačno mnogo polova, razmotrimo jedan primjer: *kako prikazati meromorfnu funkciju f, koja ima polove u točkama $z_n = n$, $n \in \mathbb{N}$, s glavnim dijelovima Laurentovih razvoja $\dfrac{1}{z-n}$?* Prva je pomisao da se u (5.1) konačna suma zamijeni beskonačnim redom, a to vodi na red

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{z-n}.$$

Međutim, taj red divergira npr. za $z = 0$, a može se lako dokazati da divergira za svaku točku $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{N}$. To pokazuje da je ideja da se u (5.1) suma zamijeni redom neupotrebljiva bez nekih modifikacija.

Primijetimo da je

$$\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n} = \frac{z}{n(z-n)}.$$

Pomoću te jednakosti može se pokazati (a to će biti zadatak 5.2.) da red

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n} \right)$$

konvergira svuda na $\mathbb{C} \setminus \mathbb{N}$ prema meromorfnoj funkciji kojoj je $\mathbb{N}$ skup svih polova i u točki $z = n \in \mathbb{N}$ glavni dio njenog Laurentovog razvoja je $\dfrac{1}{z-n}$. Ovaj je primjer izvor Mittag−Lefflerove ideje da se pokuša od svakog glavnog dijela Laurentovog razvoja R_k oduzeti pogodno izabrani polinom P_k tako da red $\sum(R_k - P_k)$ konvergira.

Da bismo tu Mittag−Lefflerovu ideju proveli i riješili postavljen problem, korisno je uvesti pojam lokalno uniformne konvergencije za redove meromorfnih funkcija. Neka je $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz meromorfnih funkcija na $\mathbb{C}$. Kažemo da **red meromorfnih funkcija**

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} R_n(z) \tag{5.3}$$

konvergira lokalno uniformno na $\mathbb{C}$, ako za svako $r > 0$ postoji prirodan broj m takav za $n \geq m$ funkcija R_n nema polova u zatvorenom krugu $\overline{K}(0, r)$ i da red

$$\sum_{n\in\mathbb{N},\, n\geq m} R_n(z) \tag{5.4}$$

konvergira uniformno na tom krugu.

Propozicija 5.1. *Pretpostavimo da red meromorfnih funkcija* (5.3) *konvergira lokalno uniformno na* $\mathbb{C}$. *Neka je* P *skup svih polova u* $\mathbb{C}$ *svih funkcija* R_n, $n \in \mathbb{N}$. *Tada skup* P *nema gomilišta u* $\mathbb{C}$ *i postoji meromorfna funkcija* h *na* $\mathbb{C}$ *čiji su polovi sadržani u skupu* P *i za koju vrijedi*

$$h(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}} R_n(z) \qquad \forall z \in \mathbb{C} \setminus P.$$

Dokaz: Uzmimo proizvoljno $r > 0$. Po pretpostavci postoji prirodan broj m takav da za $n \geq m$ funkcija R_n nema polova u zatvorenom krugu $\overline{K}(0, r)$ i da na tom krugu red (5.4) uniformno konvergira. Kako su funkcije R_n, $n \geq m$, holomorfne na $K(0, r$, prema Weierstrassovom teoremu 1.6. suma reda (5.4) je holomorfna funkcija na krugu $K(0, r)$. Prema tome, funkcija

$$h(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}} R_n(z) = R_1(z) + \cdots + R_{m-1}(z) + \sum_{n\in\mathbb{N},\, n\geq m} R_n(z)$$

je holomorfna na krugu $K(0, r)$, osim eventualno u polovima funkcija $R_1, \ldots, R_{m-1}$, kojih ima ukupno konačno mnogo u tom krugu, čak i u zatvorenom krugu $\overline{K}(0, r)$. Također se vidi da je skup $P \cap \overline{K}(0, r)$ konačan. Kako je $r > 0$ bio proizvoljno odabran, zaključujemo da skup P nema gomilišta u $\mathbb{C}$. Također, zbog proizvoljnosti $r > 0$ dokazana je i druga tvrdnja propozicije.

Zadatak 5.2. *Dokažite da red*

$$\sum_{n\in\mathbb{N}}\left(\frac{1}{z-n}+\frac{1}{n}\right)$$

konvergira lokalno uniformno na skupu $\mathbb{C}\setminus\mathbb{N}$ *i predstavlja meromorfnu funkciju koja u točki* $z=n$ *ima pol prvog reda s reziduumom* 1, *odnosno, da je glavni dio njezinog Laurentovog razvoja oko točke* $z=n$ *jednak* $\frac{1}{z-n}$.

Ključan korak u dokazu Mittag–Lefflerovog teorema o meromorfnim funkcijama na $\mathbb{C}$ sadržan je u sljedećoj propoziciji:

Propozicija 5.2. *Neka su* R_n, $n\in\mathbb{N}$, *meromorfne funkcije na* $\mathbb{C}$. *Pretpostavimo da funkcija* R_n *nema polova u krugu* $\overline{K}(0,r_n)$ *i da vrijedi*

$$0<r_1\le r_2\le\cdots\cdots \qquad i \qquad \lim_{n\to\infty} r_n=+\infty. \tag{5.5}$$

Tada postoje polinomi P_n, $n\in\mathbb{N}$, *takvi da red meromorfnih funkcija*

$$\sum_{n\in\mathbb{N}}(R_n(z)-P_n(z)) \tag{5.6}$$

konvergira lokalno uniformno na $\mathbb{C}$.

Dokaz: Taylorov red funkcije R_n oko nule

$$R_n(z)=\sum_{m\in\mathbb{Z}_+}c_{n,m}z^m$$

konvergira uniformno na zatvorenom krugu $\overline{K}(0,r_n)$ $(n\in\mathbb{N})$. Izaberimo sada niz brojeva $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ takav da je $\varepsilon_n>0$ za svaki $n\in\mathbb{N}$ i da red $\sum_{n\in\mathbb{N}}\varepsilon_n$ konvergira. Za svako $n\in\mathbb{N}$ tada postoji prirodan broj m_n takav da vrijedi

$$\left|R_n(z)-\sum_{m=0}^{m_n}c_{n,m}z^m\right|\le\varepsilon_n \qquad \forall z\in\overline{K}(0,r_n).$$

Definiramo polinome

$$P_n(z)=\sum_{m=0}^{m_n}c_{n,m}z^m, \qquad z\in\mathbb{C}, \quad n\in\mathbb{N}.$$

Neka je sada $r>0$ proizvoljno odabran. Za neki $N\in\mathbb{N}$ tada je zbog (5.5) $r_N\ge r$. Stoga po pretpostavci za $n\ge N$ funkcija $R_n(z)-P_n(z)$ nema polova u zatvorenom krugu $\overline{K}(0,r)$. Nadalje, za svaku točku $z\in\overline{K}(0,r)$ i za $n\ge N$ tada vrijedi $|R_n(z)-P_n(z)|\le\varepsilon_n$, pa slijedi da red apsolutnih vrijednosti

$$\sum_{n\in\mathbb{N},\,n\ge N}|R_n(z)-P_n(z)|$$

konvergira uniformno na $\overline{K}(0,r)$. Time je propozicija dokazana.

Sljedeći teorem pokazuje da postoji meromorfna funkcija na $\mathbb{C}$ koja ima polove u unaprijed zadanim točkama i oko tih točaka ima unaprijed zadane glavne dijelove Laurentovih razvoja:

Teorem 5.3. (**Mittag–Leffler**) *Neka su* z_n, $n \in \mathbb{N}$, *međusobno različiti kompleksni brojevi takvi da je* $\lim_{n\to\infty} z_n = \infty$. *Neka su* Q_n, $n \in \mathbb{N}$, *nekonstantni polinomi takvi da je* $Q_n(0) = 0$. *Postoje polinomi* P_n, $n \in \mathbb{N}$, *takvi da red racionalnih funkcija*

$$f(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \left[Q_n\left(\frac{1}{z-z_n}\right) - P_n(z)\right] \tag{5.7}$$

konvergira lokalno uniformno na $\mathbb{C}$. *Funkcija* f *je meromorfna na* $\mathbb{C}$, $\{z_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ *je skup svih njezinih polova u* $\mathbb{C}$ *i za svako* $n \in \mathbb{N}$ *je* $Q_n\left(1/(z - z_n)\right)$ *glavni dio Laurentovog razvoja od* f *oko pola* z_n.

Dokaz: Možemo uzeti da su točke z_n numerirane tako da vrijedi

$$|z_1| \le |z_2| \le |z_3| \le \cdots\cdots$$

Pretpostavimo najprije da je $z_1 \neq 0$. Tada je $z_n \neq 0$ za svaki n. Stavimo li

$$R_n(z) = Q_n\left(\frac{1}{z-z_n}\right) \qquad \text{i} \qquad r_n = \frac{|z_n|}{2}$$

ispunjeni su uvjeti propozicije 5.2., pa postoje polinomi P_n, $n \in \mathbb{N}$, takvi da red racionalnih funkcija (5.7) konvergira lokalno uniformno na $\mathbb{C}$. Prema propoziciji 5.1. funkcija f je meromorfna na $\mathbb{C}$ i polovi su joj sadržani u skupu $\{z_n;\ n \in \mathbb{N}\}$.

Jedini pol funkcije $Q_n\left(1/(z - z_n)\right) - P_n(z)$ je točka z_n i $|z_n| = 2r_n > r_n$. Prema tome, za dani prirodan broj n funkcije $Q_k\left(1/(z - z_k)\right) - P_k(z)$, $k \ge n$, nemaju polova u zatvorenom krugu $\overline{K}(0, r_n)$ i red

$$\sum_{k\in\mathbb{N},\, k\ge n} \left[Q_k\left(\frac{1}{z-z_k}\right) - P_k(z)\right] \tag{5.8}$$

konvergira uniformno na tom krugu. Stoga je suma tog reda holomorfna funkcija na otvorenom krugu $K(0, r_n)$. Odatle slijedi da se polovi funkcije f u krugu $K(0, r_n)$ podudaraju s polovima funkcije

$$\left[Q_1\left(\frac{1}{z-z_1}\right) - P_1(z)\right] + \cdots + \left[Q_{n-1}\left(\frac{1}{z-z_{n-1}}\right) - P_{n-1}(z)\right] \tag{5.9}$$

u tom krugu, a to je skup $\{z_k;\ 1 \le k \le n-1,\ |z_k| < r_n\}$. Neka je $k \in \{1, \ldots, n-1\}$ takav da je $|z_k| < r_n$. Kako je funkcija (5.8) holomorfna na krugu $K(0, r_n)$, glavni dio Laurentovog razvoja funkcije f oko točke z_k jednak je glavnom dijelu Laurentovog razvoja funkcije (5.9) oko te točke. No budući da su funkcije

$$Q_j\left(\frac{1}{z-z_j}\right) - P_j(z), \qquad j \neq k,$$

holomorfne u okolini točke z_k, taj je glavni dio jednak $Q_k\left(1/(z - z_k)\right)$. Time je teorem dokazan u slučaju $z_1 \neq 0$.

Ako je $z_1 = 0$, onda je $z_n \neq 0$ za svako $n \ge 2$, pa provedeni dokaz daje meromorfnu funkciju

$$h(z) = \sum_{n\in\mathbb{N},\, n\ge 2} \left[Q_n\left(\frac{1}{z-z_n}\right) - P_n(z)\right],$$

čiji je skup polova $\{z_n;\ n \in \mathbb{N},\ n \ge 2\}$ i u točki z_n, $n \ge 2$, ima glavni dio Laurentovog razvoja jednak $Q_n\left(1/(z - z_n)\right)$. Stavimo li $P_1(z) = 0$, onda je $f(z) = h(z) + Q_1(1/z)$ i tvrdnje teorema su ispunjene.

Iz Mittag–Lefflerovog teorema slijedi najavljeni rezultat o prikazu meromorfne funkcije analognom sa (5.1) :

Teorem 5.4. *Neka je h meromorfna funkcija na $\mathbb{C}$ i neka su z_n, $n \in \mathbb{N}$, svi njezini polovi ($z_n \neq z_m$ za $n \neq m$), i neka je $R_n(z)$ glavni dio Laurentovog razvoja funkcije h oko točke z_n, $n \in \mathbb{N}$. Tada postoji cijela fukcija g i polinomi P_n, $n \in \mathbb{N}$, takvi da je*

$$h(z) = g(z) + \sum_{n\in\mathbb{N}} (R_n(z) - P_n(z)) \qquad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \{z_n;\ n \in \mathbb{N}\}, \tag{5.10}$$

i da red u (5.10) *konvergira lokalno uniformno na $\mathbb{C}$.*

Dokaz: Prema teoremu 5.3. postoje polinomi P_n, $n \in \mathbb{N}$, takvi da red racionalnih funkcija

$$f(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}} (R_n(z) - P_n(z))$$

konvergira lokalno uniformno na $\mathbb{C}$. Nadalje, funkcija f je meromorfna na $\mathbb{C}$, ima iste polove kao i funkcija h i oko svakog od tih polova ima isti glavni dio Laurentovog razvoja kao i funkcija h. Funkcija $g = h - f$ je holomorfna na $\mathbb{C} \setminus \{z_n;\ n \in \mathbb{N}\}$. Za svaki $n \in \mathbb{N}$ glavni dio Laurentovog razvoja funkcije g oko točke z_n jednak je 0, a to znači da je z_n uklonjiv singularitet za funkciju g. Prenma tome, funkcija g proširuje se do holomorfne funkcije na $\mathbb{C}$, tj. do cijele funkcije. Napokon, iz definicije funkcije g neposredno slijedi (5.10).

Neka je f meromorfna funkcija na $\mathbb{C}$ kojoj su polovi u točkama $z_0, z_1, z_2, \ldots$ i neka je za svaki $n \in \mathbb{Z}_+$ $Q_n\left(1/(z - z_n)\right)$ glavni dio Laurentovog razvoja dunkcije f oko točke z_n; pri tome je Q_n polinom s konstantnim članom 0. Uzimat ćemo u daljnjem da je $z_0 = 0$, bez obzira na to da li je 0 stvarno pol od f ili nije; ako 0 nije pol od f, stavljamo $Q_0 = 0$. Nadalje, pretpostavljat ćemo da je numeracija polova provedena tako da je

$$0 = |z_0| < |z_1| \leq |z_2| \leq \cdots\cdots \qquad \text{i, naravno,} \qquad \lim_{n\to\infty} |z_n| = +\infty.$$

Prema teoremu 5.4. postoje polinomi P_n, $n \geq 0$, i cijela funkcija g takvi da vrijedi

$$f(z) = g(z) + \sum_{n\in\mathbb{Z}_+} \left[Q_n\left(\frac{1}{z - z_n}\right) - P_n(z) \right]. \tag{5.11}$$

U preostalom dijelu ovog poglavlja opisat ćemo i na primjerima ilustrirati tzv. **Cauchyjevu metodu**, koja u mnogim slučajevima omogućuje da se eksplicitno izračunaju polinomi P_n i to uz funkciju $g = 0$.

Primijetimo najprije da se u svakom slučaju može pretpoostaviti da je $g = 0$. Doista, g je cijela funkcija, pa imamo njen razvoj u Taylorov red na cijeloj kompleksnoj ravnini:

$$g(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}_+} a_n z^n, \qquad z \in \mathbb{C}. \tag{5.12}$$

Pri tome red konvergira apsolutno i lokalno uniformno na $\mathbb{C}$. Nadalje, iz dokaza propozicije 5.2. vidljivo je da red u (5.11) konvergira apsolutno. Kod apsolutno konvergentnih redova redoslijed sumanada može se po volji mijenjati bez utjecaja na rezultat. Zamijenimo sada u (5.11) polinom $P_n(z)$ s polinomom $P_n(z) - a_n z^n$ i taj novi polinom opet označimo sa $P_n(z)$. Sada iz (5.11) i (5.12) dobivamo

$$f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}_+} \left[Q_n\left(\frac{1}{z - z_n}\right) - P_n(z) \right]. \tag{5.13}$$

Opisat ćemo sada Cauchyjevu metodu određivanja polinoma P_n u (5.13). Za svaki $n \geq 0$ izaberimo pozitivno orijentiranu konturu Γ_n s unutarnjim područjem D_n, tako da je

$$Cl(D_n) = D_n \cup \Gamma_n^* \subseteq D_{n+1} \qquad \forall n \geq 0 \tag{5.14}$$

i

$$\bigcup_{n\in\mathbb{Z}_+} D_n = \mathbb{C}. \tag{5.15}$$

Nadalje, konture Γ_n biramo tako da vrijedi

$$0 = z_0 \in D_0, \qquad z_n \in D_n \setminus Cl(D_{n-1}) \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{5.16}$$

Fiksirajmo sada neki prirodan broj m. Za $n \in \mathbb{N}$ i $z \in D_n$ stavimo

$$R_n(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_n} f(\zeta)\left[\frac{1}{\zeta - z} - \frac{1}{\zeta} - \frac{z}{\zeta^2} - \cdots - \frac{z^{m-1}}{\zeta^m}\right] \mathrm{d}\zeta. \tag{5.17}$$

Neka je $z \in D_n$ i $z \neq z_k$ za $0 \leq k \leq n$. Dokazat ćemo sada sljedeće tri tvrdnje:

(1) *Reziduum funkcije* $\zeta \mapsto \dfrac{f(\zeta)}{\zeta - z}$ *u točki* $\zeta = z_k$ $(0 \leq k \leq n)$ *jednak je*

$$-Q_k\left(\frac{1}{z - z_k}\right).$$

(2) *Reziduum funkcije* $\zeta \mapsto f(\zeta)\left(-\dfrac{1}{\zeta} - \dfrac{z}{\zeta^2} - \cdots - \dfrac{z^{m-1}}{\zeta^m}\right)$ *u točki* $\zeta = z_k$ $(0 \leq k \leq n)$ *je polinom stupnja* $\leq m-1$ *u varijabli* z; *taj polinom označit ćemo sa* $P_k(z)$.

(3) *Reziduum podintegralne funkcije u* (5.17) *u točki* $\zeta = z$ *jednak je* $f(z)$.

Budući da su polovi podintegralne funkcije u (5.17) točke $z, z_0, z_1, \ldots, z_n$, iz tvrdnji **(1)**, **(2)** i **(3)** i iz teorema o reziduumima 2.4. slijedi

$$R_n(z) = f(z) - \sum_{k=0}^{n}\left[Q_k\left(\frac{1}{z - z_k}\right) - P_k(z)\right]. \tag{5.18}$$

Ukoliko se pokaže da vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} R_n(z) = 0, \tag{5.19}$$

onda iz (5.18) dobivamo traženi prikaz meromorfne funkcije f :

$$f(z) = \sum_{k\in\mathbb{Z}_+}\left[Q_k\left(\frac{1}{z - z_k}\right) - P_k(z)\right]. \tag{5.20}$$

Ako je k tome konvergencija u (5.19) lokalno uniformna u odnosu na $z \in \mathbb{C}$, onda i red racionalnih funkcija u (5.20) konvergira lokalno uniformno na $\mathbb{C}$.

Dokaz tvrdnje (1): Za izabrano $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$ pišemo

$$Q_k(\lambda) = \sum_{j=1}^{p} c_j \lambda^j.$$

Laurentov razvoj funkcije f u okolini točke $\zeta = z_k$ ima oblik

$$f(\zeta) = \sum_{j=1}^{p} \frac{c_j}{(\zeta - z_k)^j} + \sum_{j\in\mathbb{Z}_+} a_j(\zeta - z_k)^j. \tag{5.21}$$

Nadalje, u okolini točke $\zeta = z_k$ vrijedi

$$\frac{1}{\zeta - z} = -\sum_{i\in\mathbb{Z}_+} \frac{(\zeta - z_k)^i}{(z - z_k)^{i+1}}. \tag{5.22}$$

Iz (5.21) i (5.22) slijedi

$$\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = -\sum_{i\in\mathbb{Z}_+}\sum_{j=1}^{p} c_j \frac{(\zeta - z_k)^{i-j}}{(z - z_k)^{i+1}} - \sum_{i,j\in\mathbb{Z}_+} a_j \frac{(\zeta - z_k)^{i+j}}{(z - z_k)^{i+1}}.$$

Prema tome, reziduum funkcije $\zeta \mapsto \dfrac{f(\zeta)}{\zeta - z}$ u točki $\zeta = z_k$, odnosno, koeficijent uz $(\zeta - z_k)^{-1}$ u Laurentovom razvoju te funkcije, jednak je

$$-\sum_{j=1}^{p} c_j \frac{1}{(z - z_k)^j} = -Q_k\left(\frac{1}{z - z_k}\right).$$

Dokaz tvrdnje (2): Ako je $k > 0$, u okolini točke $\zeta = z_k$ imamo sljedeće Taylorove razvoje

$$\frac{1}{\zeta^q} = \sum_{i\in\mathbb{Z}_+} (-1)^i \binom{q+i-1}{i} z_k^{-q-i}(\zeta - z_k)^i, \qquad q = 1, \ldots, m.$$

Odavde i iz (5.21) nalazimo

$$f(\zeta)\left[-\frac{1}{\zeta} - \frac{z}{\zeta^2} - \cdots - \frac{z^{m-1}}{\zeta^m}\right] = -\sum_{q=1}^{m} z^{q-1} \sum_{i\in\mathbb{Z}_+}\sum_{j=1}^{p} c_j(-1)^i \binom{q+i-1}{i} z_k^{-q-i}(\zeta - z_k)^{i-j} -$$

$$-\sum_{q=1}^{m} z^{q-1} \sum_{i,j\in\mathbb{Z}_+} a_j(-1)^i \binom{q+i-1}{i} z_k^{-q-i}(\zeta - z_k)^{i+j}.$$

Prema tome, traženi reziduum jednak je

$$P_k(z) = \sum_{q=1}^{m} z^{q-1} \left[\sum_{j=1}^{p} (-1)c_j \binom{q+j-2}{j-1} z_k^{-q-j+1}\right],$$

dakle, polinom stupnja $\leq m - 1$ u varijabli z.

Neka je sada $k = 0$. Iz (5.21) u slučaju $k = 0$ ($z_0 = 0$) dobivamo

$$f(\zeta)\left[-\frac{1}{\zeta} - \frac{z}{\zeta^2} - \cdots - \frac{z^{m-1}}{\zeta^m}\right] = -\sum_{q=1}^{m}\sum_{j=1}^{p} c_j z^{q-1}\zeta^{-j-q} - \sum_{q=1}^{m}\sum_{j\in\mathbb{Z}_+} a_j z^{q-1}\zeta^{j-q},$$

pa je reziduum gornje funkcije u točki $\zeta = z_0 = 0$ jednak

$$P_0(z) = -\sum_{j=0}^{m-1} a_j z^j, \tag{5.23}$$

dakle, opet polinom stupnja $\leq m - 1$ u varijabli z.

Dokaz tvrdnje (3): Budući da je $z \neq 0$, funkcija $\zeta \mapsto -\dfrac{1}{\zeta} - \dfrac{z}{\zeta^2} - \cdots - \dfrac{z^{m-1}}{\zeta^m}$ holomorfna je na okolini točke $\zeta = z$, a kako je i $z \neq z_k$ za $1 \leq k \leq n$, i funkcija f je holomorfna na okolini točke $\zeta = z$. Prema tome, reziduum podintegralne funkcije u (5.17) u točki $\zeta = z$ jednak je reziduumu funkcije $\zeta \mapsto \dfrac{f(\zeta)}{\zeta - z}$ u toj točki. Dakle, taj je reziduum jednak

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\mathrm{d}\zeta,$$

gdje je γ pozitivno orijentirana kružnica oko točke z, koja je dovoljno mala da se unutar nje i na njoj ne nalazi nijedna od točaka $z_0, z_1, \ldots, z_n$. No prema Cauchyjevoj integralnoj formuli gornji je integral jednak $f(z)$. Time je i tvrdnja **(3)** dokazana.

U vezi s određivanjem polinoma P_k primijetimo sljedeće. Za svako $k \geq 1$ izaberimo pozitivno orijentiranu kružnicu γ_k sa središtem u točki z_k, koja je dovoljno malena tako da se unutar nje i na njoj ne nalazi nijedna od točaka z_j, $j \neq k$. Kako je

$$\frac{1}{\zeta - z} - \frac{1}{\zeta} - \frac{z}{\zeta^2} - \cdots - \frac{z^{m-1}}{\zeta^m} = \frac{z^m}{\zeta^m}\cdot\frac{1}{\zeta - z}, \tag{5.24}$$

iz tvrdnji **(1)** i **(2)** slijedi

$$Q_k\left(\frac{1}{z - z_k}\right) - P_k(z) = -\frac{z^m}{2\pi i}\int_{\gamma_k}\frac{f(\zeta)}{\zeta^m(\zeta - z)}\mathrm{d}\zeta.$$

Razvoj funkcije s desne strane te jednakosti po potencijama od z sadrži samo članove s potencijama $\geq m$. Kako je P_k polinom stupnja $\leq m - 1$, $P_k(z)$ jednako je sumi prvih m članova Taylorovog razvoja funkcije $z \mapsto Q\left(1/(z - z_k)\right)$ oko nule:

$$Q_k\left(\frac{1}{z - z_k}\right) = \sum_{j\in\mathbb{Z}_+} b_j z^j \qquad \Longrightarrow \qquad P_k(z) = \sum_{j=0}^{m-1} b_j z^j. \tag{5.25}$$

Za $k = 0$ već smo vidjeli (formula (5.23)) da vrijedi

$$f(z) = Q_0\left(\frac{1}{z}\right) + \sum_{j\in\mathbb{Z}_+} a_j z^j \qquad \Longrightarrow \qquad P_0(z) = -\sum_{j=0}^{m-1} a_j z^j. \tag{5.26}$$

Analizirajmo sada uz koje uvjete vrijedi (5.19). Imamo prema (5.24) i (5.17)

$$R_n(z) = \frac{z^m}{2\pi i}\int_{\Gamma_n}\frac{f(\zeta)}{\zeta^{m+1}(1 - z/\zeta)}\mathrm{d}\zeta.$$

Dakle, vrijedi

$$|R_n(z)| \leq \frac{1}{2\pi}|z|^m \ell(\Gamma_n) A_n B_n(z), \tag{5.27}$$

gdje je $\ell(\Gamma_n)$ duljina konture Γ_n i

$$A_n = \max\left\{|f(\zeta)\zeta^{-m-1}|;\ \zeta \in \Gamma_n^*\right\}, \qquad B_n(z) = \max\left\{\left|1 - \frac{z}{\zeta}\right|^{-1};\ \zeta \in \Gamma_n^*\right\}. \tag{5.28}$$

Neka je $R > 0$. Iz (5.14) i (5.15) slijedi da postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da $\overline{K}(0, R) \subseteq D_n\ \ \forall n \geq n_0$. Dakle, za $\zeta \in \Gamma_n^*$ i $n \geq n_0$ vrijedi $|\zeta| > R$. To pokazuje da je

$$\lim_{n\to\infty} B_n(z) = 1,$$

i konvergencija je lokalno uniformna u odnosu na $z \in \mathbb{C}$.

Prema tome, ako smo konture Γ_n izabrali tako da vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} \ell(\Gamma_n) A_n = 0, \tag{5.29}$$

onda iz (5.27) slijedi da vrijedi (5.19) i da je konvergencija lokalno uniformna u odnosu na $z \in \mathbb{C}$.

Primijetimo napokon da su u razvoju (5.20) svi polinomi P_k stupnja $\leq m - 1$. Odatle se vidi da Cauchyjeva metoda nije primjenjiva na sve meromorfne funkcije.

Ilustrirat ćemo Cauchyjevu metodu na dva primjera.

Primjer 1. $f(z) = \dfrac{\pi}{\sin \pi z}$. Funkcija f ima polove prvog reda u točkama $k \in \mathbb{Z}$. Stavimo

$$z_0 = 0, \quad z_{2k-1} = k, \quad z_{2k} = -k, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Kako je

$$\lim_{z\to k} (z - k)\frac{\pi}{\sin \pi z} = (-1)^k,$$

glavni dijelovi Laurentovih razvoja funkcije f jednaki su

$$Q_{2k}\left(\frac{1}{z+k}\right) = \frac{(-1)^k}{z+k}, \qquad k \geq 0; \qquad Q_{2k-1}\left(\frac{1}{z-k}\right) = \frac{(-1)^k}{z-k}, \qquad k \geq 1. \tag{5.30}$$

Izaberimo za Γ_{2k} pozitivno orijentirani rub kvadrata s vrhovima

$$\pm(k + 1/2) \pm i(k + 1/2), \qquad k \geq 0,$$

a za Γ_{2k-1} pozitivno orijentirani rub pravokutnika s vrhovima

$$(k + 1/2) \pm i(k + 1/2), \quad -(k - 1/2) \pm i(k + 1/2), \qquad k \geq 1.$$

Primijetimo da konture Γ_n, $n \geq 0$, zapravo ne zadovoljavaju uvjet (5.14), nego je $Cl(D_n) \subseteq D_{n+2}$, ali to očigledno ne narušava valjanost metode.

Za točku $\zeta = \pm(k + 1/2) + iy$, $-k - 1/2 \leq y \leq k + 1/2$, tj. za točku na jednoj od dviju vertikalnih stranica kvadrata Γ_{2k}, imamo

$$\sin |\pi\zeta| = |\cos \pi i y| = 1 + \frac{1}{2!}\pi^2 y^2 + \frac{1}{4!}\pi^4 y^4 + \cdots \geq 1,$$

pa nalazimo da vrijedi

$$\left|\frac{\pi}{\sin \pi\zeta}\right| \leq \pi. \tag{5.31}$$

Neka je sada ζ točka na jednoj od dviju horizontalnih stranica kvadrata Γ_{2k}, tj. $\zeta = x \pm i(k+1/2)$, $-k - 1/2 \leq x \leq k + 1/2$. Tada imamo

$$|\sin \pi\zeta| = \frac{1}{2}\left|\mathrm{e}^{\pi i x \mp \pi(k+1/2)} - \mathrm{e}^{-\pi o i x \pm \pi(k+1/2)}\right| \geq \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\pi(k+1/2)} - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\pi(k+1/2)} \longrightarrow +\infty \quad \text{za} \quad k \to \infty.$$

Prema tome, za dovoljno veliko k vrijedi nejednakost (5.31) za svaku točku $\zeta \in \Gamma_{2k}^*$. Sasvim analogno pokazuje se da (5.31) vrijedi i za $\zeta \in \Gamma_{2k-1}^*$ (za dovoljno veliko k).

Za $\zeta \in \Gamma_{2k}^*$ je očito $|\zeta| \geq k + 1/2$. Budući da je $\ell(\Gamma_{2k}) = 8(k+1/2)$, uz oznaku (5.28) imamo zbog (5.31) :

$$\ell(\Gamma_{2k})A_{2k} \leq 8(k+1/2)\pi(k+1/2)^{-m-1} = 8\pi(k+1/2)^{-m}. \tag{5.32}$$

Sasvim analogno nalazimo da vrijedi

$$\ell(\Gamma_{2k-1})A_{2k-1} \leq 2\pi(4k+1)(k-1/2)^{-m-1}. \tag{5.33}$$

Iz (5.32) i (5.33) vidimo da vrijedi (5.29) već za $m = 1$.

Stoga izabiremo $m = 1$. Tada će polinomi P_n, $n \geq 0$, biti stupnja 0, odnosno, to će biti konstante. Za $k \geq 1$ imamo prema (5.30) :

$$Q_{2k}\left(\frac{1}{z+k}\right) = (-1)^k \left[\frac{1}{k} - \frac{z}{k^2} - \cdots\right] \quad \text{i} \quad Q_{2k-1}\left(\frac{1}{z-k}\right) = (-1)^{k+1}\left[\frac{1}{k} + \frac{z}{k^2} + \cdots\right].$$

Sada pomoću (5.25) dobivamo

$$P_{2k}(z) = (-1)^k \frac{1}{k}, \qquad P_{2k-1}(z) = (-1)^{k+1}\frac{1}{k}, \qquad k \geq 1. \tag{5.34}$$

Budući da je funkcija $f(\zeta) = \dfrac{\pi}{\sin \pi\zeta}$ neparna, u razvoju (5.26) je $a_0 = 0$, $a_2 = 0$, ..., pa slijedi

$$P_0(z) = -a_0 = 0. \tag{5.35}$$

Zbog (5.30), (5.34) i (5.35) formula (5.20) u našem slučaju poprima oblik:

$$\frac{\pi}{\sin \pi z} = \frac{1}{z} + \sum_{k\in\mathbb{Z},\, k\neq 0} (-1)^k \left[\frac{1}{z-k} + \frac{1}{k}\right]. \tag{5.36}$$

Budući da je

$$\left[\frac{1}{z-k} + \frac{1}{k}\right] + \left[\frac{1}{z+k} - \frac{1}{k}\right] = \frac{2z}{z^2-k^2},$$

iz formule (5.36) dobivamo

$$\frac{\pi}{\sin \pi z} = \frac{1}{z} + \sum_{k\in\mathbb{N}} (-1)^k \frac{2z}{z^2-k^2}. \tag{5.37}$$

Primjer 2. $f(z) = \pi \operatorname{ctg} \pi z$. Opet su točke $z = k \in \mathbb{Z}$ polovi prvog reda funkcije f. Sada su glavni dijelovi Laurentovih razvoja

$$Q_{2k}\left(\frac{1}{z+k}\right) = \frac{1}{z+k}, \quad k \geq 0; \qquad Q_{2k-1}\left(\frac{1}{z-k}\right) = \frac{1}{z-k}, \quad k \geq 1. \tag{5.38}$$

Konture Γ_n, $n \geq 0$, izabiremo jednako kao u primjeru **1.** Na vertikalnim stranicama kvadrata Γ_{2k} za točku $\zeta = \pm(k+1/2) + iy$, $-k - 1/2 \leq y \leq k + 1/2$, imamo

$$|\pi \operatorname{ctg} \pi\zeta| = \pi \left|\frac{\sin \pi i y}{\cos \pi i y}\right| = \pi \frac{|\mathrm{e}^{-\pi y} - \mathrm{e}^{\pi y}|}{\mathrm{e}^{\pi y} + \mathrm{e}^{-\pi y}}.$$

Na horizontalnim stranicama $\zeta = x \pm i(k+1/2)$, $-k - 1/2 \leq x \leq k + 1/2$, imamo

$$|\pi \operatorname{ctg} \pi\zeta| = \pi \frac{|\mathrm{e}^{\pi i\zeta} + \mathrm{e}^{-\pi i\zeta}|}{|\mathrm{e}^{\pi i\zeta} - \mathrm{e}^{-\pi i\zeta}|} \leq \pi \frac{\mathrm{e}^{\pi(k+1/2)} + \mathrm{e}^{-\pi(k+1/2)}}{\mathrm{e}^{\pi(k+1/2)} - \mathrm{e}^{-\pi(k+1/2)}} \leq 2\pi$$

za dovoljno velike k. Analogne ocjene dobivaju se i za točke $\zeta \in \Gamma^*_{2k-1}$, pa slijedi da za dovoljno velike n vrijedi

$$|\pi \operatorname{ctg} \pi\zeta| \leq 2\pi \qquad \forall \zeta \in \Gamma^*_n.$$

Odavde se dobiva

$$\ell(\Gamma_{2k})A_{2k} \leq 16\pi(k+1/2)^{-m} \qquad \text{i} \qquad \ell(\Gamma_{2k-1})A_{2k-1} \leq 4\pi(4k+1)(k-1/2)^{-m-1}$$

za dovoljno velike k, pa opet možemo uzeti da je $m = 1$.

Sličnim računom kao u primjeru **1.** dobivamo

$$P_{2k}(z) = \frac{1}{k}, \qquad P_{2k-1}(z) = -\frac{1}{k}, \qquad k \geq 1,$$

a iz neparnosti funkcije $z \mapsto \pi \operatorname{ctg} \pi z$ slijedi

$$P_0(z) = 0.$$

Prema tome je

$$\pi \operatorname{ctg} \pi z = \frac{1}{z} + \sum_{k \in \mathbb{Z},\, k \neq 0} \left[\frac{1}{z-k} + \frac{1}{k} \right], \tag{5.39}$$

odnosno,

$$\pi \operatorname{ctg} \pi z = \frac{1}{z} + \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{2z}{z^2 - k^2}. \tag{5.40}$$

Sasvim analogno dobivaju se i sljedeći Mittag–Lefflerovi razvoji:

$$\frac{\pi}{\cos \pi z} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^n \left[\frac{1}{z-n+1/2} + \frac{1}{n-1/2} \right] = 2\sum_{n \in \mathbb{N}} (-1)^n \left[\frac{n-1/2}{z^2-(n-1/2)^2} + \frac{1}{n-1/2} \right] \tag{5.41}$$

i

$$\pi \operatorname{tg} \pi z = -\sum_{n \in \mathbb{Z}} \left[\frac{1}{z-n+1/2} + \frac{1}{n-1/2} \right] = -\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{2z}{z^2-(n-1/2)^2}. \tag{5.42}$$

Zadatak 5.3. *Dokažite formule* (5.41) *i* (5.42).

Zadatak 5.4. *Dokažite formule*

$$\left(\frac{\pi}{\sin \pi z}\right)^2 = \sum_{z \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(z-n)^2} = \left(\frac{\pi}{\sin \pi z}\right)^2 = \frac{1}{z^2} + 2\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{z^2+n^2}{(z^2-n^2)^2}$$

i

$$\left(\frac{\pi}{\cos \pi z}\right)^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(z-n+1/2)^2} = 2\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{z^2+(n-1/2)^2}{(z^2-(n-1/2)^2)^2}.$$

Uputa: Derivirajte formule (5.40) i (5.42) i iskoristite činjenicu da je po Weierstrassovom teoremu 1.6. kod deriviranja lokalno uniformno konvergentnog reda holomorfnih funkcija dopušteno deriviranje član po član.

Zadatak 5.5. *Dokažite da vrijedi:*

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} (-1)^n \frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}, \qquad \sum_{n \in \mathbb{N}} (-1)^n \frac{1}{9n^2-1} = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{9}\sqrt{3}, \qquad \sum_{n \in \mathbb{N}} (-1)^n \frac{1}{16n^2-1} = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{8}\sqrt{2},$$

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{2}, \qquad \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{9n^2-1} = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{18}\sqrt{3}, \qquad \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{16n^2-1} = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{8}.$$

Uputa: U formule (5.37) i (5.40) uvrstite $z = 1/2$, $z = 1/3$ i $z = 1/4$.

Poglavlje 6

Grupa automorfizama području

Neka su Ω_1 i Ω_2 područja u $\mathbb{C}$. Holomorfna bijekcija $\varphi : \Omega_1 \to \Omega_2$ zove se **izomorfizam područja Ω_1 na područje Ω_2**. Zbog određenih geometrijskih svojstava takvih preslikavanja (čuvanje kuteva) umjesto naziva *izomorfizam* katkada se upotrebljava naziv **konformna ekvivalencija**.

Zadatak 6.1. *Neka je $\varphi : \Omega_1 \to \Omega_2$ izomorizam područja u $\mathbb{C}$. Dokažite:*

(*a*) *Ako područje Ω_1 ima svojstvo logaritma, tada i područje Ω_2 ima svojstvo logaritma.*

(*b*) *Ako područje Ω_1 ima svojstvo $n-$tog korijena $(n \geq 2)$, tada i područje Ω_2 ima svojstvo $n-$tog korijena.*

Pojam izomorfizma na očigledan se način proširuje i na područja u proširenoj kompleksnoj ravnini $\overline{\mathbb{C}}$: ako su Ω_1 i Ω_2 područja u $\overline{\mathbb{C}}$, izomorfizam područja Ω_1 na područje Ω_2 je neprekidna bijekcija $\varphi : \Omega_1 \to \Omega_2$ takva da je restrikcija $\varphi|[\Omega_1 \setminus \varphi^{-1}(\{\infty\})]$ holomorfna funkcija. Ako takvo preslikavanje φ postoji, kažemo da je **područje Ω_1 izomorfno području Ω_2**. Izomorfnost je relacija ekvivalencije na skupu svih područja u $\overline{\mathbb{C}}$: identiteta na području Ω je izomorfizam tog područja na samo sebe; ako je $\varphi : \Omega_1 \to \Omega_2$ izomorfizam područja, onda se pomoću teorema o inverznoj funkciji (teorem 1.13.) lako vidi da je i inverzno preslikavanje $\varphi^{-1} : \Omega_2 \to \Omega_1$ izomorfizam područja; ako su $\varphi : \Omega_1 \to \Omega_2$ i $\psi : \Omega_2 \to \Omega_3$ izomorfizmi područja, onda je očito i njihova kompozicija $\psi \circ \varphi : \Omega_1 \to \Omega_3$ izomorfizam područja.

Izomorfizam φ područja Ω u $\overline{\mathbb{C}}$ na samo sebe zove se **automorfizam područja** Ω. Skup svih automorfizama područja Ω označavamo sa $Aut(\Omega)$. To je grupa u odnosu na kompoziciju i ona se zove **grupa automorfizama područja** Ω.

Neka je $\varphi : \Omega_1 \to \Omega_2$ izomorfizam područja u $\overline{\mathbb{C}}$. Skup $\varphi^{-1}(\{\infty\})$ je neprazan ako i samo ako je $\infty \in \Omega_2$, a u tom je slučaju taj skup jednočlan, budući da je φ po pretpostavci bijekcija. Pretpostavimo da je $\infty \in \Omega_2$ i da je $\varphi^{-1}(\{\infty\}) = \{z_0\}$, gdje je $z_0 \in \mathbb{C}$. Tada je točka z_0 izolirani singularitet funkcije φ i zbog neprekidnosti preslikavanja $\varphi : \Omega_1 \to \overline{\mathbb{C}}$ vrijedi

$$\lim_{z \to z_0} \varphi(z) = \infty, \qquad \text{dakle} \quad \lim_{z \to z_0} |\varphi(z)| = +\infty.$$

Prema tome, točka z_0 je pol funkcije φ. Tada je točka z_0 nultočka funkcije $\dfrac{1}{\varphi}$. Iz injektivnosti preslikavanja φ, dakle, i $\dfrac{1}{\varphi}$, i iz Weierstrassovog pripremnog teorema 1.14. slijedi da je točka z_0 nužno jednostruka nultočka od $\dfrac{1}{\varphi}$. No to znači da je z_0 pol funkcije φ prvog reda. Prema tome, za $r > 0$ takav da je $K(z_0, r) \subseteq \Omega_1$, funkcija φ se na punktiranom krugu $K^*(z_0, r)$ prikazuje

Laurentovim redom oblika

$$\varphi(z) = \frac{a}{z - z_0} + \sum_{n \in \mathbb{Z}_+} a_n (z - z_0)^n, \qquad 0 < |z - z_0| < r, \qquad a \neq 0.$$

Druga je mogućnost da je $\varphi^{-1}(\{\infty\}) = \{\infty\}$. Definiramo tada područje Ω_1' u $\overline{\mathbb{C}}$ sa

$$\Omega_1' = \{1/z;\ z \in \Omega_1\}.$$

Pri tome, naravno, podrazumijevamo da je

$$1/\infty = 0 \qquad \text{i} \qquad 1/0 = \infty.$$

Tada je $z \mapsto 1/z$ izomorfizam područja Ω_1 na područje Ω_1', a ujedno i izomorfizam područja Ω_1' na područje Ω_1. Kompozicija ovog drugog s izomorfizmom $\varphi : \Omega_1 \to \Omega_2$ daje izomorfizam $\psi : \Omega_1' \to \Omega_2$. Dakle,

$$\psi(z) = \varphi(1/z), \qquad z \in \Omega_1'.$$

Sada je $\psi^{-1}(\{\infty\}) = \{0\}$. Prema prethodnom razmatranju ako je $r > 0$ takav da je $K(0, r) \subseteq \Omega_1'$ onda se funkcija ψ na punktiranom krugu $K^*(0, r)$ prikazuje Laurentovim redom oblika

$$\psi(z) = \frac{a}{z} + \sum_{n \in \mathbb{Z}_+} a_n z^n, \qquad 0 < |z| < r, \qquad a \neq 0.$$

Odatle zamjenom $z \mapsto 1/z$ dobivamo da se funkcija φ na skupu $K^*(\infty, 1/r) = K(0, 1/r, +\infty) = \mathbb{C} \setminus \overline{K}(0, 1/r)$ prikazuje redom oblika

$$\varphi(z) = az + \sum_{n \in \mathbb{Z}_+} \frac{a_n}{z^n}, \qquad |z| > \frac{1}{r}, \qquad a \neq 0.$$

U ovom nam je poglavlju cilj odrediti grupe automorfizama za nekoliko značajnih područja: za čitavu proširenu kompleksnu ravninu $\overline{\mathbb{C}}$, za kompleksnu ravninu $\mathbb{C}$, za jedinični krug $K(0, 1)$ i za gornju poluravninu $\mathbb{C}_+ = \{z \in \mathbb{C};\ \operatorname{Im} z > 0\}$. Sve te grupe automorfizama bit će sastavljene od tzv. Möbiusovih transformacija, koje ćemo sada definirati.

Neka je $GL(2, \mathbb{C})$ grupa svih invertibilnih kvadratnih matrica drugog reda nad poljem $\mathbb{C}$. Za $A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \in GL(2, \mathbb{C})$ definiramo preslikavanje $\omega_A : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ sa

$$\omega_A(z) = \begin{cases} \dfrac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} & \text{ako je } z \in \mathbb{C} \setminus \left\{-\dfrac{\delta}{\gamma}\right\} \\[2ex] \infty & \text{ako je } z = -\dfrac{\delta}{\gamma} \\[2ex] \dfrac{\alpha}{\gamma} & \text{ako je } z = \infty, \end{cases}$$

ako je $\gamma \neq 0$; ukoliko je $\gamma = 0$, a tada je nužno $\alpha \neq 0$ i $\delta \neq 0$, onda je ω_A afina transformacija kompleksne ravnine $\mathbb{C}$ s fiksnom točkom ∞ :

$$\omega_A(z) = \begin{cases} \dfrac{\alpha}{\delta} z + \dfrac{\beta}{\delta} & \text{ako je } z \in \mathbb{C} \\[2ex] \infty & \text{ako je } z = \infty. \end{cases}$$

Preslikavanja ω_A, $A \in GL(2, \mathbb{C})$ zovu se **Möbiusove transformacije**. Skup svih Möbiusovih transformacija označavat ćemo sa $\mathcal{M}$. Uočimo da je svaka Möbiusova transformacija element grupe $Aut(\overline{\mathbb{C}})$.

Propozicija 6.1. *Za $A, B \in GL(2,\mathbb{C})$ vrijedi $\omega_A \circ \omega_B = \omega_{AB}$. Drugim riječima, $\mathcal{M}$ je grupa s obzirom kompoziciju, tzv.* **Möbiusova grupa**, *i $A \mapsto \omega_A$ je epimorfizam grupe $GL(2,\mathbb{C})$ na grupu $\mathcal{M}$. Jezgra tog epimorfizma je $\{\lambda I_2;\ \lambda \in \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}\}$, gdje je $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Nadalje, $A \mapsto \omega_A$ je epimorfizam grupe $SL(2,\mathbb{C}) = \{A;\ \det(A) = 1\}$ na grupu $\mathcal{M}$ s jezgrom $\{I_2, -I_2\}$.*

Dokaz: Za $A, B \in GL(2,\mathbb{C})$,

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},$$

imamo

$$AB = \begin{bmatrix} \alpha a + \beta c & \alpha b + \beta d \\ \gamma a + \delta c & \gamma b + \delta d \end{bmatrix}.$$

Pretpostavimo da je $\gamma \neq 0$ i $c \neq 0$. Ako je $z \in \mathbb{C}$, $z \neq -\dfrac{d}{c}$ i $\dfrac{az+b}{cz+d} \neq -\dfrac{\delta}{\gamma}$, onda direktan račun daje:

$$(\omega_A \circ \omega_B)(z) = \omega_A\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = \frac{\alpha\dfrac{az+b}{cz+d} + \beta}{\gamma\dfrac{az+b}{cz+d} + \delta} = \frac{\alpha(az+b) + \beta(cz+d)}{\gamma(az+b) + \delta(cz+d)} =$$

$$= \frac{(\alpha a + \beta c)z + (\alpha b + \beta d)}{(\gamma a + \delta c)z + (\gamma b + \delta d)} = \omega_{AB}(z).$$

Zbog neprekidnosti preslikavanja $\omega_A, \omega_B : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ jednakost slijedi i za isključene točke iz $\mathbb{C}$, kao i za točku $z = \infty$. Dakle, vrijedi $\omega_A \circ \omega_B = \omega_{AB}$.

Zadatak 6.2. *Dokažite jednakost $\omega_A \circ \omega_B = \omega_{AB}$ u slučajevima $\gamma = 0$ ili $c = 0$ ili oboje.*

Time je dokazano da je $\mathcal{M}$ grupa i da je $A \mapsto \omega_A$ epimorfizam grupe $GL(2,\mathbb{C})$ na Möbiusovu grupu $\mathcal{M}$. Odredimo jezgru tog epimorfizma, tj. skup svih $A \in GL(2,\mathbb{C})$ takvih da je ω_A identiteta. Očito je ω_A identiteta ako i samo ako je $\alpha z + \beta = z(\gamma z + \delta)$ $\forall z \in \mathbb{C}$. Za $z = 0$ odatle slijedi da je nužno $\beta = 0$. Sada dobivamo jednakost $\alpha z = z(\gamma z + \delta)$ $\forall z \in \mathbb{C}$, a odatle je $\alpha = \gamma z + \delta$ $\forall z \in \mathbb{C}$. Dakle, $\gamma = 0$ i $\alpha = \delta$, a to znači da je $A = \alpha I_2$.

Napokon, za $A \in GL(2,\mathbb{C})$ i za $\varepsilon \in \mathbb{C}$ takav da je $\varepsilon^{-2} = \det A$ imamo $\varepsilon A \in SL(2,\mathbb{C})$ i $\omega_A = \omega_{\varepsilon A}$. To pokazuje da je $A \mapsto \omega_A$ epimorfizam i sa grupe $SL(2,\mathbb{C})$ na grupu $\mathcal{M}$, a jezgra mu je $\{I_2, -I_2\}$: vrijedi $\lambda I_2 \in SL(2,\mathbb{C})$ ako i samo ako je $\lambda = \pm 1$. Time je propozicija 6.1. u potpunosti dokazana.

Označimo sa $\mathcal{A}$ grupu svih afinih transformacija kompleksne ravnine $\mathbb{C}$, tj. grupu svih izomorfizama područja $\omega \in Aut(\mathbb{C})$ oblika

$$\omega(z) = az + b, \qquad z \in \mathbb{C}, \qquad \text{gdje su} \quad a \in \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}, \quad b \in \mathbb{C}.$$

Očito možemo $\mathcal{A}$ identificirati s grupom svih Möbiusovih transformacija s fiksnom točkom ∞, tj. sa $\{\omega \in \mathcal{M};\ \omega(\infty) = \infty\}$. Preciznije, vrijedi $\mathcal{A} = \{\omega|\mathbb{C};\ \omega \in \mathcal{M},\ \omega(\infty) = \infty\}$.

Teorem 6.1. $Aut(\mathbb{C}) = \mathcal{A}$.

Dokaz: Očito je $\mathcal{A}$ podgrupa grupe $Aut(\mathbb{C})$. Neka je $\omega \in Aut(\mathbb{C})$. Tada je ω cijela funkcija, pa je možemo pisati u obliku svuda konvergentnog reda potencija:

$$\omega(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}_+} a_n z^n, \qquad z \in \mathbb{C}.$$

Definiramo sada holomorfnu funkciju $\varphi \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^*)$, $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, sa

$$\varphi(z) = \omega\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{n \in \mathbb{Z}_+} a_n z^{-n}, \qquad z \in \mathbb{C}^*. \tag{6.1}$$

Točka 0 je izolirani singularitet funkcije φ. Kad bi 0 bio bitni singularitet funkcije φ, po teoremu 2.2. skup $A = \{\varphi(z);\ 0 < |z| < 1\}$ bio bi gust u $\mathbb{C}$. S druge strane, funkcija φ je nekonstantna (štoviše, φ je injekcija, jer je ω bijekcija sa $\mathbb{C}$ na $\mathbb{C}$), pa je skup $B = \{\varphi(z);\ |z| > 1\}$ prema korolaru 1.1. područje, tj. to je neprazan otvoren skup. Kako je A gust u $\mathbb{C}$, slijedi da je $A \cap B \neq \emptyset$. Dakle, postoje točke $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $|z_1| < 1$, $|z_2| > 1$, takve da je $\varphi(z_1) = \varphi(z_2)$. No to je u suprotnosti s injektivnosti funkcije φ. Ova kontradikcija pokazuje da 0 nije bitni singularitet funkcije φ.

Prema tome, 0 je ili pol ili uklonjivi singularitet od φ, pa u redu potencija (6.1) ima samo konačno mnogo koeficijenata različitih od nule. To znači da je funkcija ω polinom. Zbog injektivnosti polinom ω ima točno jednu nultočku $\alpha \in \mathbb{C}$, dakle, vrijedi $\omega(z) = a(z-\alpha)^n$ za neki $a \in \mathbb{C}^*$ i $n \in \mathbb{N}$. Ponovo zbog injektivnosti zaključujemo da je $n = 1$. No to znači da je $\omega \in \mathcal{A}$. Time je teorem dokazan.

Teorem 6.2. $Aut\left(\overline{\mathbb{C}}\right) = \mathcal{M}$, *tj. Möbiusova grupa je grupa svih automorfizama proširene kompleksne ravnine* $\overline{\mathbb{C}}$.

Dokaz: Već znamo da je Möbiusova grupa $\mathcal{M}$ podgrupa grupe $Aut\left(\overline{\mathbb{C}}\right)$. Neka je $\omega \in Aut\left(\overline{\mathbb{C}}\right)$. Neka je $a \in \overline{\mathbb{C}}$ takva točka da je $\omega(a) = \infty$. Sada izaberimo $\varphi \in \mathcal{M}$ tako da bude $\varphi(a) = \infty$. Npr.

$$\varphi(z) = \frac{1}{z-a}, \qquad \text{tj.} \quad \varphi = \omega_A, \quad \text{gdje je} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -a \end{bmatrix}.$$

Stavimo $\psi = \omega \circ \varphi^{-1}$. Tada je $\psi \in Aut\left(\overline{\mathbb{C}}\right)$ i vrijedi $\psi(\infty) = \infty$. Dakle, restrikcija $\psi|\mathbb{C}$ je automorfizam od $\mathbb{C}$. Prema teoremu 6.1. ψ je afina transformacija i, posebno, $\psi \in \mathcal{M}$. Slijedi $\omega = \psi \circ \varphi \in \mathcal{M}$. Time je teorem dokazan.

Teorem 6.3. (*a*) $Aut(K(0,1)) = \{\omega|K(0,1);\ \omega \in \mathcal{M},\ \omega(K(0,1)) = K(0,1)\}$. *Nadalje, Möbiusova transformacija* $\omega \in \mathcal{M}$ *ima svojstvo* $\omega(K(0,1)) = K(0,1)$ *ako i samo ako je*

$$\omega(z) = \lambda\frac{z-\alpha}{1-\overline{\alpha}z}, \qquad \text{za neke} \quad \lambda \in S(0,1) \quad i \quad \alpha \in K(0,1). \tag{6.2}$$

(*b*) *Vrijedi* $Aut(K(0,1)) = \{\omega_A|K(0,1);\ A \in SU(1,1)\}$, *gdje je* $SU(1,1)$ *podgrupa od* $SL(2,\mathbb{C})$ *definirana sa*

$$SU(1,1) = \{A \in SL(2,\mathbb{C});\ A\Gamma A^* = \Gamma\}, \qquad \Gamma = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

odnosno,

$$SU(1,1) = \left\{\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \overline{\beta} & \overline{\alpha} \end{bmatrix};\ \alpha, \beta \in \mathbb{C},\ |\alpha|^2 - |\beta|^2 = 1\right\}.$$

Dokaz: Stavimo $\mathcal{G} = \{\omega;\ \omega \in \mathcal{M},\ \omega(K(0,1)) = K(0,1)\}$. Tada je očito $\mathcal{G}$ podgrupa Möbiusove grupe $\mathcal{M}$. Nadalje, za $\omega \in \mathcal{G}$ vrijedi $\omega|K(0,1) \in Aut(K(0,1))$, dakle, $\{\omega|K(0,1);\ \omega \in \mathcal{G}\}$ je podgrupa grupe $Aut(K(0,1))$.

Označimo sa $\mathcal{H}$ skup svih Möbiusovih transformacija ω definiranih formulom oblika (6.2). Neka je $\omega \in \mathcal{H}$ zadana formulom (6.2) za neke $\alpha \in K(0,1)$ i $\lambda \in S(0,1)$. Tada za $z \in \mathbb{C}$ imamo sljedeći niz ekvivalencija:

$$\omega(z) \in K(0,1) \iff \left|\frac{z-\alpha}{1-\overline{\alpha}z}\right| < 1 \iff |z-\alpha|^2 < |1-\overline{\alpha}z|^2 \iff$$

$$\iff (z-\alpha)(\overline{z}-\overline{\alpha}) < (1-\overline{\alpha}z)(1-\alpha\overline{z}) \iff$$

$$\iff |z|^2 - \alpha\overline{z} - \overline{\alpha}z + |\alpha|^2 < 1 - \alpha\overline{z} - \overline{\alpha}z + |\alpha|^2|z|^2 \iff |z|^2 + |\alpha|^2 < 1 + |\alpha|^2|z|^2 \iff$$

$$\iff 1 - |\alpha|^2 - |z|^2 + |\alpha|^2|z|^2 > 0 \iff \left(1-|\alpha|^2\right)\left(1-|z|^2\right) > 0 \iff$$

$$\iff 1 - |z|^2 > 0 \iff |z| < 1 \iff z \in K(0,1).$$

To pokazuje da je $\omega(K(0,1)) = K(0,1)$, odnosno, $\omega \in \mathcal{G}$. Time smo dokazali da je $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{G}$.

Primijetimo sada da je $\mathcal{H}$ podgrupa Möbiusove grupe $\mathcal{M}$:

Zadatak 6.3. *Za $\alpha \in K(0,1)$ i $\lambda \in S(0,1)$ označimo sa $\omega_{\lambda,\alpha}$ njima definiran element od $\mathcal{H}$:*

$$\omega_{\lambda,\alpha}(z) = \lambda\frac{z-\alpha}{1-\overline{\alpha}z}.$$

Dokažite da tada za bilo koje $\alpha \in K(0,1)$ i $\lambda \in S(0,1)$ vrijedi

$$(\omega_{\lambda,\alpha})^{-1} = \omega_{\overline{\lambda},-\lambda\alpha}$$

i da za bilo koje $\alpha, \beta \in K(0,1)$ i $\lambda, \mu \in S(0,1)$ vrijedi

$$\omega_{\lambda,\alpha} \circ \omega_{\mu,\beta} = \omega_{\nu,\gamma}$$

gdje su

$$\nu = \lambda\mu\frac{1+\alpha\overline{\beta}\overline{\mu}}{1+\overline{\alpha}\beta\mu} \in S(0,1) \quad i \quad \gamma = \frac{\beta+\alpha\overline{\mu}}{1+\alpha\overline{\beta}\overline{\mu}} = \overline{\mu}\frac{\alpha+\mu\beta}{1+\overline{\mu}\overline{\beta}\alpha} = (\omega_{\mu,\beta})^{-1}(\alpha) \in K(0,1)$$

Posebno, $\mathcal{H}$ je podgrupa Möbiusove grupe $\mathcal{M}$.

Neka je sada $\varphi \in Aut(K(0,1))$. Neka je točka $\alpha \in K(0,1)$ takva da je $\varphi(\alpha) = 0$. Uz oznaku iz zadatka 6.3. stavimo $\omega = \omega_{1,\alpha}$, tj.

$$\omega(z) = \frac{z-\alpha}{1-\overline{\alpha}z}.$$

Tada je $\omega(\alpha) = 0$, pa element $\psi = \varphi \circ (\omega|K(0,1))^{-1} \in Aut(K(0,1))$ ima svojstvo $\psi(0) = 0$. Nadalje, kako je $\psi(K(0,1)) = K(0,1)$, vrijedi $|\psi(z)| < 1$ za svaku točku $z \in K(0,1)$. Sada iz Schwarzove leme (teorem 1.16.) slijedi

$$|\psi(z)| \leq |z| \qquad \forall z \in K(0,1). \tag{6.3}$$

Kako i $\psi^{-1} \in Aut(K(0,1))$ ima svojstvo $\psi^{-1}(0) = 0$, vrijedi i

$$|\psi^{-1}(z)| \leq |z| \qquad \forall z \in K(0,1),$$

odnosno,

$$|z| \leq |\psi(z)| \qquad \forall z \in K(0,1). \tag{6.4}$$

Iz (6.3) i (6.4) slijedi da je

$$|\psi(z)| = |z| \qquad \forall z \in K(0,1),$$

a to po Schwarzovoj lemi znači da je za neki $\lambda \in S(0,1)$

$$\psi(z) = \lambda z \qquad \forall z \in K(0,1).$$

Međutim, vrijedi $\psi \circ (\omega|K(0,1))^{-1}$, dakle, $\varphi = \psi \circ \omega|K(0,1)$, odnosno,

$$\psi(z) = \lambda \frac{z-\alpha}{1-\overline{\alpha}z}.$$

Prema tome je $\psi = \omega_{\lambda,\alpha}|K(0,1)$. Time smo dokazali da vrijedi

$$Aut(K(0,1)) \subseteq \{\omega|K(0,1);\ \omega \in \mathcal{H}\}.$$

Odatle i iz prije dokazanog dobivamo

$$Aut(K(0,1)) \subseteq \{\omega|K(0,1);\ \omega \in \mathcal{H}\} \subseteq \{\omega|K(0,1);\ \omega \in \mathcal{G}\} \subseteq Aut(K(0,1),$$

pa slijedi tvrdnja (a).

(b) Prema posljednjoj tvrdnji propozicije 6.1. iz (a) slijedi

$$Aut(K(0,1)) = \{\omega_A|K(0,1);\ A \in SL(2,\mathbb{C}),\ \omega_A(K(0,1)) = K(0,1)\}.$$

Ostatak dokaza tvrdnje (b) sadržan je u zadatku:

Zadatak 6.4. *Dokažite da za $A \in SL(2,\mathbb{C})$ vrijedi $\omega_A(K(0,1)) = K(0,1)$ ako i samo ako je $A \in SU(1,1)$.*

Uputa: Prema dokazu tvrdnje (a) vrijedi $\omega_A(K(0,1)) = K(0,1)$ ako i samo ako je $\omega_A = \omega_{\lambda,\alpha}$ za neke $\lambda \in S(0,1)$ i $\alpha \in K(0,1)$, odnosno, ako i samo ako je $\omega_A = \omega_B$ za

$$B = \begin{bmatrix} \lambda & -\alpha\lambda \\ -\overline{\alpha} & 1 \end{bmatrix}.$$

To znači da je AB^{-1} u jezgri epimorfizma $C \mapsto \omega_C$, odnosno, prema propoziciji 6.1. vrijedi $A = \mu B$ za neki $\mu \in \mathbb{C}^*$. Sada iskoristite jednakost $\det A = 1$ da dokažete da vrijedi

$$A = \begin{bmatrix} \frac{e^{-i\frac{\varphi}{2}}}{\sqrt{1-|\alpha|^2}} & \frac{\alpha e^{-i\frac{\varphi}{2}}}{\sqrt{1-|\alpha|^2}} \\ -\frac{\overline{\alpha} e^{i\frac{\varphi}{2}}}{\sqrt{1-|\alpha|^2}} & \frac{e^{i\frac{\varphi}{2}}}{\sqrt{1-|\alpha|^2}} \end{bmatrix},$$

gdje je $\varphi \in \mathbb{R}$ takav da je

$$e^{i\varphi} = \lambda^2 \left(1 - |\alpha|^2\right).$$

Teorem 6.4. *Za gornju poluravninu $\mathbb{C}_+ = \{z \in \mathbb{C};\ \operatorname{Im} z > 0\}$ vrijedi*

$$Aut(\mathbb{C}_+) = \{\omega|\mathbb{C}_+;\ \omega \in \mathcal{M},\ \omega(\mathbb{C}_+) = \mathbb{C}_+\} = \{\omega_A|\mathbb{C}_+;\ A \in SL(2,\mathbb{R})\}.$$

Zadatak 6.5. *Dokažite teorem 6.4.*

Uputa: Dokažite da je za Möbiusovu transformaciju $\omega \in \mathcal{M}$ zadanu sa

$$\omega(z) = \frac{z-i}{z+i}, \qquad \text{tj.} \qquad \omega = \omega_B \quad \text{za} \quad B = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1-i & -1-i \\ 1-i & 1+i \end{bmatrix} \in SL(2,\mathbb{C}),$$

restrikcija $\omega|\mathbb{C}_+$ izomorfizam područja $\mathbb{C}_+$ na područje $K(0,1)$. Sada iskoristite tvrdnju (b) teorema 6.3. da zaključite da je

$$Aut(\mathbb{C}_+) = \omega^{-1} \circ Aut(K(0,1)) \circ \omega = \{\omega_{B^{-1}AB}|\mathbb{C}_+;\ A \in SU(1,1)\},$$

a zatim dokažite da je $B^{-1}SU(1,1)B = SL(2,\mathbb{R})$.

Zadatak 6.6. *Neka su $\alpha, \beta, \gamma, a, b, c \in \overline{\mathbb{C}}$ takvi da je $\alpha \neq \beta \neq \gamma \neq \gamma$ i $a \neq b \neq c \neq a$. Dokažite da postoji jedinstvena Möbiusova transformacija $\omega \in \mathcal{M}$ takva da je $\omega(\alpha) = a$, $\omega(\beta) = b$ i $\omega(\gamma) = c$.*

Uputa: Egzistenciju dokažite najprije u slučaju kad je $a = 0$, $b = 1$ i $c = \infty$. Za jedinstvenost dokažite da je identiteta jedina Möbiusova transformacija koja ima barem tri fiksne točke.

Poglavlje 7

Riemannov teorem

Teorem 7.1. *Ako je* $\Omega \subsetneq \mathbb{C}$ *područje sa svojstvom* $n-$*tog korijena za neki* $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, *onda je područje* Ω *izomorfno otvorenom jediničnom krugu* $K(0,1)$.

Dokaz: Neka je S skup svih holomorfnih injekcija $\psi : \Omega \to K(0,1)$. Prema Montelovom principu kompaktnosti (teorem 4.3.) skup $S \subseteq \mathcal{H}(\Omega)$ je relativno kompaktan.

Svojstvo $n-$tog korijena ključno je da bismo dokazali da je skup S neprazan. Neka je $w \in \mathbb{C} \backslash \Omega$. Tada je funkcija $z \mapsto z - w$ holomorfna i bez nultočaka u Ω, dakle postoji funkcija $\varphi \in \mathcal{H}(\Omega)$ takva da je $[\varphi(z)]^n = z - w$ $\forall z \in \Omega$. Očito je φ injekcija. Prema napomeni iza iskaza teorema 1.14. skup $\varphi(\Omega)$ je otvoren. Nadalje, $0 \notin \varphi(\Omega)$, pa postoje $a \in \mathbb{C}$ i $r > 0$ ($r < |a|$) takvi da je $K(a,r) \subseteq \varphi(\Omega)$. Neka je sada $\alpha \in \mathbb{C}$ takvo da je $\alpha \neq 1$ i $\alpha^n = 1$.

Tvrdimo da je tada

$$|\alpha\varphi(z) - a| \geq r \qquad \forall z \in \Omega. \tag{7.1}$$

Pretpostavimo suprotno, tj. da za neku točku $z_1 \in \Omega$ vrijedi $|\alpha\varphi(z_1) - a| < r$. Tada je

$$\alpha\varphi(z_1) \in K(a,r) \subseteq \varphi(\Omega),$$

pa postoji točka $z_2 \in \Omega$ takva da je $\varphi(z_2) = \alpha\varphi(z_1) \neq 0$. Tada je

$$[\varphi(z_2)]^n = \alpha^n[\varphi(z_1)]^n = [\varphi(z_1)]^n, \qquad \text{tj.} \qquad z_2 - w = z_1 - w.$$

No to je nemoguće jer je $\varphi(z_2) \neq \varphi(z_1)$. Time je dokazano da vrijedi (7.1).

Stoga možemo definirati $\psi \in \mathcal{H}(\Omega)$ formulom

$$\psi(z) = \frac{\rho}{\alpha\varphi(z) - a}, \qquad z \in \Omega,$$

pri čemu je $0 < \rho < r$. Tada je $\psi \in S$, dakle je $S \neq \emptyset$.

Neka su u daljnjem fiksirani točka $a \in \Omega$ i funkcija $\varphi_1 \in S$. Budući da je φ_1 injekcija, prema teoremu 1.15. je $\varphi_1'(a) \neq 0$. Stavimo

$$S_1 = \{\varphi \in S;\ |\varphi'(a)| \geq |\varphi_1'(a)|\}.$$

Taj je skup funkcija kao podskup relativno kompaktnog skupa S i sam relativno kompaktan. Dokazat ćemo sada da je skup S_1 kompaktan. Po definiciji kompaktnosti treba dokazati da je S_1 zatvoren u odnosu na lokalno uniformnu konvergenciju, tj. da je limes lokalno uniformno konvergentnog niza funkcija iz S_1 također funkcija iz S_1.

Dakle, neka je $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lokalno uniformno konvergentan niz funkcija iz S_1 i neka je $f = \lim_{n\to\infty} f_n$. Prema Weierstrassovom teoremu 1.6. tada vrijedi

$$|f'(a)| = \lim_{n\to\infty} |f_n'(a)| \geq |\varphi_1'(a)| > 0.$$

Posebno, funkcija f je nekonstantna, pa je prema teoremu 4.5. funkcija f injektivna. Za $z \in \Omega$ imamo zbog $f_n(\Omega) \subseteq K(0,1)$

$$|f(z)| = \lim_{n\to\infty} |f_n(z)| \leq 1.$$

Dakle, $f(\Omega) \subseteq \overline{K}(0,1)$. Međutim prema napomeni iza iskaza teorema 1.14. skup $f(\Omega)$ je otvoren. Stoga je $f(\Omega) \subseteq K(0,1)$. Time je dokazano da je $f \in S$, a kako smo već vidjeli da je $|f'(a)| \geq |\varphi_1'(a)|$, to je $f \in S_1$. Time je dokazano da je skup S_1 kompaktan.

Definiramo sada preslikavanje $J : S_1 \to \mathbb{C}$ sa $J(f) = f'(a)$. Prema Weierstrassovom teoremu 1.6. preslikavanje J je neprekidno, pa prema propoziciji 4.2. postoji funkcija $\varphi \in S_1$ takva da je $|J(\varphi)| \geq |J(f)|\ \forall f \in S_1$. To znači da je

$$|\varphi'(a)| \geq |f'(a)| \qquad \forall f \in S_1,$$

a tada je i

$$|\varphi'(a)| \geq |f'(a)| \qquad \forall f \in S. \tag{7.2}$$

Za $\alpha \in K(0,1)$ označimo sa $f_\alpha \in Aut(K(0,1))$ preslikavanje definirano sa

$$f_\alpha(z) = \frac{z-\alpha}{1-\overline{\alpha}z}, \qquad z \in K(0,1).$$

Zadatak 7.1. *Dokažite da vrijedi*

$$(f_\alpha)^{-1} = f_{-\alpha}, \qquad f_\alpha(\alpha) = 0, \qquad f_\alpha'(\alpha) = \frac{1}{1-|\alpha|^2}, \qquad f_\alpha(0) = -\alpha, \qquad f_\alpha'(0) = 1-|\alpha|^2.$$

Dokazat ćemo sada da je $\varphi(a) = 0$. Pretpostavimo da nije tako i stavimo $\alpha = \varphi(a) \neq 0$. Definiramo $\psi \in S$ sa $\psi = f_\alpha \circ \varphi$. Tada imamo

$$|\psi'(a)| = |f_\alpha'(\alpha)| \cdot |\varphi'(a)| = \frac{|\varphi'(a)|}{1-|\alpha|^2} > |\varphi'(a)|.$$

No to je u suprotnosti sa (7.2). Ova kontradikcija pokazuje da vrijedi $\varphi(a) = 0$.

Dokazat ćemo sada da je φ ne samo injekcija Ω u $K(0,1)$ nego i surjekcija. Pretpostavimo suprotno i neka je $\beta \in K(0,1) \setminus \varphi(\Omega)$. Tada je $\beta \neq 0$ jer je $0 \in \varphi(\Omega)$ (naime, $\varphi(a) = 0$). Budući da je β jedina nultočka funkcije f_β, funkcija $f_\beta \circ \varphi \in \mathcal{H}(\Omega)$ nema nultočaka u Ω. Prema pretpostavci o području Ω (svojstvo $n-$tog korijena) postoji funkcija $\psi \in \mathcal{H}(\Omega)$ takva da vrijedi

$$[\psi(z)]^n = f_\beta(\varphi(z)) \qquad \forall z \in \Omega.$$

Imamo

$$\varphi \in S \qquad \Longrightarrow \qquad f_\beta \circ \varphi \in S \qquad \Longrightarrow \qquad \psi \in S.$$

Stavimo $\gamma = \psi(a) \in K(0,1)$. Prema zadatku 7.1. tada je

$$\gamma^n = f_\beta(\varphi(a)) = f_\beta(0) = -\beta.$$

Stavimo

$$f = f_\gamma \circ \psi \in S.$$

Nadalje, neka je funkcija $\omega \in \mathcal{H}(K(0,1))$ definirana sa

$$\omega(z) = z^n, \qquad z \in K(0,1).$$

Prema zadatku 7.1. tada je $\psi = f_{-\gamma} \circ f$, dakle

$$f_\beta \circ \varphi = \omega \circ \psi = \omega \circ f_{-\gamma} \circ f.$$

Odatle je

$$\varphi = g \circ f, \qquad \text{gdje je} \qquad g = f_{-\beta} \circ \omega \circ f_{-\gamma} \in \mathcal{H}(K(0,1)).$$

Imamo $|g(z)| < 1$ za svako $z \in K(0,1)$ i prema zadatku 7.1. je

$$g(0) = f_{-\beta}(f_{-\gamma}(0)^n) = f_{-\beta}(\gamma^n) = f_{-\beta}(-\beta) = 0.$$

To znači da funkcija g zadovoljava uvjetima Schwarzove leme (teorem 1.16.). Preslikavanja $f_{-\beta}$ i $f_{-\gamma}$ su bijekcije sa $K(0,1)$ na $K(0,1)$, a ω nije bijekcija sa $K(0,1)$ na $K(0,1)$. Slijedi da funkcija g nije bijekcija sa $K(0,1)$ na $K(0,1)$. Schwarzova lema stoga povlači da je $|g'(0)| < 1$. Imamo

$$f(a) = f_\gamma(\psi(a)) = f_\gamma(\gamma) = 0 \quad \text{i} \quad \varphi = g \circ f \qquad \Longrightarrow \qquad \varphi'(a) = g'(f(a))f'(a) = g'(0)f'(a).$$

Odatle je

$$|\varphi'(a)| = |g'(0)| \cdot |f'(a)| < |f'(a)|.$$

No to je u suprotnosti sa (7.2).

Ova kontradikcija dokazuje da je φ surjekcija sa Ω na $K(0,1)$. Kako je $\varphi \in S$, φ je izomorfizam područja Ω na krug $K(0,1)$.

Primjedba. Iz dokaza teorema 7.1. vidi se da za bilo koju točku $a \in \Omega$ postoji funkcija $\varphi \in \mathcal{H}(\Omega)$ koja je izomorfizam područja Ω na krug $K(0,1)$ i vrijedi $\varphi(a) = 0$. Ta je funkcija onaj element skupa S na kome preslikavanje $f \mapsto |f'(a)|$ dostiže svoj maksimum. Takva funkcija nije jedinstvena, ali pomoću Schwarzove leme nije teško dokazati da je ona određena do na multipl modula 1, odnosno do na rotaciju kruga $K(0,1)$ oko središta.

Dokazani teorem 7.1. upotpunjuje dokaz teorema 3.1. Posebno, uvjet teorema 7.1. ispunjen je ako i samo ako je područje Ω jednostavno povezano. Dakle, možemo iskazati Riemannov teorem u njegovom uobičajenom obliku:

Teorem 7.2. (**B. Riemann**) *Svako jednostavno povezano područje $\Omega \subsetneq \mathbb{C}$ izomorfno je otvorenom jediničnom krugu $K(0,1)$.*

Zadatak 7.2. *Dokažite da za funkciju g iz dokaza teorema 7.1. vrijedi*

$$g'(0) = -n\gamma^{n-1}\frac{1-|\gamma|^2}{1-|\gamma|^{2n}}.$$

Izvedite iz toga da je $|g'(0)| < 1$.

Zadatak 7.3. *Neka je $\Omega \subsetneq \mathbb{C}$ jednostavno povezano područje koje je simetrično s obzirom na realnu os, tj.*

$$z \in \Omega \qquad \Longleftrightarrow \qquad \overline{z} \in \Omega.$$

Neka je f izomorfizam Ω na $K(0,1)$ takav da za $a = f^{-1}(0)$ vrijedi $a \in \mathbb{R}$ i $f'(a) > 0$. Dokažite da je tada ili $f(\Omega \cap \mathbb{C}_+) \subseteq \mathbb{C}_+$ ili $f(\Omega \cap \mathbb{C}_+) \subseteq \mathbb{C}_-$. Pri tome su $\mathbb{C}_+$ i $\mathbb{C}_-$ gornja i donja poluravnina:

$$\mathbb{C}_+ = \{z \in \mathbb{C};\ \operatorname{Im} z > 0\}, \qquad \mathbb{C}_- = -\mathbb{C}_+ = \{z \in \mathbb{C};\ \operatorname{Im} z < 0\}.$$

Zadatak 7.4. *Neka je $E = \{z \in \mathbb{C};\ Re\, z > 0\}$ i neka je $f : E \to \mathbb{C}$ holomorfna injekcija takva da je $f(E) \subseteq E$. Uz pretpostavku da postoji $x_0 > 0$ takav da je $f(x_0) = x_0$ dokažite da je $|f'(x_0)| \leq 1$.*

Zadatak 7.5. *Neka su $\Omega_1 \subsetneq \mathbb{C}$ i $\Omega_2 \subsetneq \mathbb{C}$ jednostavno povezana područja i neka je f izomorfizam Ω_1 na Ω_2. Neka je $a \in \Omega_1$ i $\alpha = f(a) \in \Omega_2$. Dokažite da za svaku holomorfnu injekciju $g : \Omega_1 \to \Omega_2$ takvu da je $g(a) = \alpha$ vrijedi $|g'(a)| \leq |f'(a)|$.*

Poglavlje 8

Aproksimacija pomoću racionalnih funkcija

U ovom poglavlju dokazat ćemo sljedeći teorem o mogućnosti aproksimacije holomorfnih funkcija pomoću racionalnih funkcija:

Teorem 8.1. (**C. Runge**) *Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ otvoren skup i neka je E zatvoren podskup od $\overline{\mathbb{C}} \setminus \Omega$ koji siječe svaku komponentu od $\overline{\mathbb{C}} \setminus \Omega$. Za svaku funkciju $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ postoji niz racionalnih funkcija $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ kojima svi polovi leže u skupu E takav da niz restrikcija $(f_n|\Omega)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira prema funkciji f lokalno uniformno na Ω.*

Pri tome za točku ∞ kažemo da je pol racionalne funkcije f ako je

$$f = \frac{P}{Q}, \qquad \text{gdje su } P \text{ i } Q \text{ polinomi i } \deg P > \deg Q.$$

U tom slučaju kažemo da je točka ∞ pol funkcije f reda $\deg P - \deg Q$.

U slučaju da je u Rungeovom teoremu skup $\overline{\mathbb{C}} \setminus \Omega$ povezan (a to za područje Ω znači da je jednostavno povezano), možemo uzeti $E = \{\infty\}$. Budući da je racionalna funkcija s jedinim polom u točki ∞ u stvari polinom, iz Rungeovog teorema neposredno slijedi:

Teorem 8.2. *Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ otvoren skup, takav da je skup $\overline{\mathbb{C}} \setminus \Omega$ povezan, i neka je $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Tada postoji niz polinoma $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ takav da niz restrikcija $(P_n|\Omega)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira prema funkciji f lokalno uniformno na Ω.*

Rungeov teorem 8.1. dokazat ćemo pomoću dvije leme, a plan dokaza je ovakav. Najprije ćemo dokazati da se za zadani kompaktan skup $K \subseteq \Omega$ restrikcija $f|K$ može po volji točno aproksimirati pomoću restrikcije $g|K$ racionalne funkcije g koja ima polove izvan K. Zatim ćemo $g|K$ aproksimirati restrikcijom $h|K$ druge racionalne funkcije h koja ima polove u skupu E. Napokon, da dođemo do traženog niza racionalnih funkcija, poslužit ćemo se nizom kompaktnih skupova iz zadatka 4.3.

Lema 8.1. *Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ otvoren skup, $K \subseteq \Omega$ kompaktan skup, $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ i $\varepsilon > 0$. Postoji racionalna funkcija g s polovima u skupu $\Omega \setminus K$ takva da vrijedi*

$$|f(z) - g(z)| \leq \varepsilon \qquad \forall z \in K.$$

Dokaz: Prema lemi 3.1. postoji ciklus Γ u $\Omega \setminus K$ takav da vrijedi

$$Ind_\Gamma(\alpha) = 0 \qquad \forall \alpha \in \mathbb{C} \setminus \Omega, \qquad\qquad Ind_\Gamma(a) = 1 \qquad \forall a \in K.$$

Prema drugoj formuli u tvrdnji (a) globalnog Cauchyjevog teorema 1.10. tada vrijedi

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \mathrm{d}\zeta, \qquad z \in K. \tag{8.1}$$

Neka je $\Gamma = [\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n]$, gdje su $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ petlje u $\Omega \backslash K$. Fiksirajmo sada $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ i zbog jednostavnijih oznaka stavimo $\gamma = \gamma_j$. Neka je γ definirana na segmentu $[a, b]$ i neka je

$$r = d(\gamma^*, K) = \min\{|\gamma(t) - z|;\ t \in [a, b],\, z \in K\} > 0.$$

Tada vrijedi

$$t \in [a, b], \quad z \in K \qquad \Longrightarrow \qquad |\gamma(t) - z| \geq r. \tag{8.2}$$

Izaberimo realan broj $M > 0$ takav da vrijedi:

$$t \in [a, b], \quad z \in K \qquad \Longrightarrow \qquad |z| \leq M, \quad |\gamma(t)| \leq M \quad \text{i} \quad |f(\gamma(t))| \leq M. \tag{8.3}$$

Sada za $s, t \in [a, b]$ i $z \in K$ zbog (8.2) i (8.3) imamo redom

$$\left| \frac{f(\gamma(t))}{\gamma(t) - z} - \frac{f(\gamma(s))}{\gamma(s) - z} \right| \leq \frac{1}{r^2} |f(\gamma(t))\gamma(s) - f(\gamma(s))\gamma(t) - z[f(\gamma(t)) - f(\gamma(s))]| =$$

$$= \frac{1}{r^2} |f(\gamma(t))[\gamma(s) - \gamma(t)] + [f(\gamma(s)) - f(\gamma(t))]\gamma(t) - z[f(\gamma(t)) - f(\gamma(s))]| \leq$$

$$\leq \frac{1}{r^2} |f(\gamma(t))| \cdot |\gamma(s) - \gamma(t)| + \frac{1}{r^2} |\gamma(t)| \cdot |f(\gamma(s)) - f(\gamma(t))| + \frac{|z|}{r^2} |f(\gamma(s)) - f(\gamma(t))| \leq$$

$$\leq \frac{M}{r^2} |\gamma(s) - \gamma(t)| + \frac{2M}{r^2} |f(\gamma(s)) - f(\gamma(t))|.$$

Kako su funkcije γ i $f \circ \gamma$ uniformno neprekidne na segmentu $[a, b]$, gornja nejednakost pokazuje da možemo izabrati particiju $a = c_0 < c_1 < \cdots < c_m = b$ takvu da vrijedi

$$\left| \frac{f(\gamma(t))}{\gamma(t) - z} - \frac{f(\gamma(c_{k-1}))}{\gamma(c_{k-1}) - z} \right| \leq \frac{2\pi\varepsilon}{n\ell(\gamma)}, \qquad z \in K, \quad c_{k-1} \leq t \leq c_k, \quad k \in \{1, 2, \ldots, m\}. \tag{8.4}$$

Možemo uzeti da su sve restrikcije $\gamma|[c_{k-1}, c_k]$ neprekidno diferencijabilne.

Definiramo sada racionalnu funkciju g_j sa

$$g_j(z) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^{m} f(\gamma(c_{k-1})) \frac{\gamma(c_k) - \gamma(c_{k-1})}{\gamma(c_{k-1}) - z}.$$

Funkcija g_j ima polove $\gamma(c_0), \gamma(c_1), \ldots, \gamma(c_{m-1}) \in \gamma^*$, dakle, izvan K. Pomoću (8.4) nalazimo da za $z \in K$ vrijedi

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \mathrm{d}\zeta - g_j(z) \right| = \frac{1}{2\pi} \left| \sum_{k=1}^{m} \int_{c_{k-1}}^{c_k} \left[\frac{f(\gamma(t))}{\gamma(t) - z} - \frac{f(\gamma(c_{k-1}))}{\gamma(c_{k-1}) - z} \right] \gamma'(t) \mathrm{d}t \right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{m} \int_{c_{k-1}}^{c_k} \left| \frac{f(\gamma(t))}{\gamma(t) - z} - \frac{f(\gamma(c_{k-1}))}{\gamma_{c_{k-1}} - z} \right| \cdot |\gamma'(t)| \mathrm{d}t \leq \frac{\varepsilon}{n\ell(\gamma)} \sum_{k=1}^{m} \int_{c_{k-1}}^{c_k} |\gamma'(t)| \mathrm{d}t.$$

Međutim,

$$\sum_{k=1}^{m} \int_{c_{k-1}}^{c_k} |\gamma'(t)| \mathrm{d}t = \ell(\gamma),$$

pa slijedi

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_j} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \mathrm{d}\zeta - g_j(z) \right| \leq \frac{\varepsilon}{n}, \qquad z \in K. \tag{8.5}$$

Istu konstrukciju provedemo za svaki $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ i stavimo $g = g_1 + g_2 + \cdots + g_n$. Tada je g racionalna funkcija s polovima u skupu γ^*, dakle, izvan K. Iz (8.1) i (8.5) slijedi za svaku točku $z \in K$:

$$|f(z) - g(z)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \mathrm{d}\zeta - g(z) \right| \leq \sum_{j=1}^{n} \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_j} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \mathrm{d}\zeta - g_j(z) \right| \leq \sum_{j=1}^{n} \frac{\varepsilon}{n} = \varepsilon.$$

Time je lema dokazana.

Kao što smo napomenuli, sljedeći korak u dokazu Rungeovog teorema jest da dokažemo da se funkcija g može na skupu K po volji dobro aproksimirati drugom racionalnom funkcijom kojoj su polovi u skupu E. U tu svrhu razmatrat ćemo najprije racionalne funkcije s jednim polom.

Lema 8.2. *Neka je $K \subseteq \mathbb{C}$ kompaktan skup i neka se točke $a, b \in \overline{C}$ nalaze u istoj komponenti skupa $\overline{\mathbb{C}} \setminus K$. Neka je g racionalna funkcija kojoj je jedini pol u točki a i neka je $\varepsilon > 0$. Postoji racionalna funkcija h kojoj je jedini pol u točki b, takva da je*

$$|g(z) - h(z)| \leq \varepsilon \qquad \forall z \in K. \tag{8.6}$$

Dokaz je podijeljen u četiri koraka.

(a) Uzmimo najprije da su $a, b \in \mathbb{C} \setminus K$, tj. da je $a \neq \infty$ i $b \neq \infty$ i da vrijedi

$$|a - b| < d(b, K) = \min \{|b - z|;\ z \in K\}.$$

Neka je $\rho = \dfrac{|a - b|}{d(b, K)}$. Tada je $0 \leq \rho < 1$ i imamo

$$\left| \frac{a - b}{z - b} \right| \leq \rho \qquad \forall z \in K. \tag{8.7}$$

Budući da racionalna funkcija g ima jedini pol u točki a, to postoji $n \in \mathbb{N}$ i polinom P stupnja $\leq n$ takvi da je

$$g(z) = \frac{P(z)}{(z - a)^n}.$$

Iz (8.7) slijedi da za svaku točku $z \in K$ vrijedi

$$g(z) = \frac{P(z)}{(z - b)^n} \cdot \left(\frac{z - b}{z - a} \right)^n = \frac{P(z)}{(z - b)^n} \cdot \left(1 - \frac{a - b}{z - b} \right)^{-n} = \frac{P(z)}{(z - b)^n} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k + n - 1}{k} \left(\frac{a - b}{z - b} \right)^k$$

i pri tome red konvergira uniformno u odnosu na $z \in K$. Stoga postoji $m \in \mathbb{N}$ takav da za racionalnu funkciju

$$h(z) = \frac{P(z)}{(z - b)^n} \cdot \sum_{k=0}^{m} \binom{k + n - 1}{k} \left(\frac{a - b}{z - b} \right)^k,$$

kojoj je očito jedini pol u točki b, vrijedi (8.6).

(b) I dalje pretpostavljamo da su $a, b \in \mathbb{C} \setminus K$. Ograničene komponente povezanosti skupa $\mathbb{C} \setminus K$ ujedno su komponente povezanosti skupa $\overline{\mathbb{C}} \setminus K$. Neka je Ω jedina neograničena komponenta povezanosti skupa $\mathbb{C} \setminus K$. Tada skup Ω sadrži $\mathbb{C} \setminus K(0,r) = \{z \in \mathbb{C};\ |z| \geq r\}$ za neki $r > 0$, pa slijedi da je skup $\Omega \cup \{\infty\}$ povezan; dakle, $\Omega \cup \{\infty\}$ je komponenta povezanosti skupa $\overline{\mathbb{C}} \setminus K$. Budući da se po pretpostavci točke a i b nalaze u istoj komponenti povezanosti skupa $\overline{\mathbb{C}} \setminus K$, iz ovog razmatranja izlazi da se točke a i b nalaze u istoj komponenti povezanosti skupa $\mathbb{C} \setminus K$. Stoga postoji put $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C} \setminus K$ takav da je $\gamma(0) = a$ i $\gamma(1) = b$. Tada je $\gamma^* \cap K = \emptyset$ pa slijedi

$$r = d(\gamma^*, K) = \min\{|\gamma(t) - z|;\ t \in [0,1],\ z \in K\} > 0. \tag{8.8}$$

Izaberimo particiju $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1$ takvu da je

$$|\gamma(t_{j-1}) - \gamma(t_j)| < r, \qquad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{8.9}$$

Iz (8.8) i (8.9) slijedi da za točke $a_j = \gamma(t_j)$, $j = 0, 1, \ldots, n$, vrijedi

$$|a_{j-1} - a_j| < d(a_j, K), \qquad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Prema (a) možemo naći redom racionalne funkcije $h_0 = g, h_1, \ldots, h_n$, takve da je a_j jedini pol od h_j i da vrijedi

$$|h_{j-1}(z) - h_j(z)| \leq \frac{\varepsilon}{n}, \qquad z \in K, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Budući da je $h_0 = g$ odatle slijedi da za svako $z \in K$ vrijedi

$$|g(z) - h_n(z)| = \left|\sum_{j=1}^{n} [h_{j-1}(z) - h_j(z)]\right| \leq \sum_{j=1}^{n} |h_{j-1}(z) - h_j(z)| \leq \varepsilon.$$

Napokon, racionalna funkcija h_n ima jedini pol u točki $a_n = \gamma(t_n) = \gamma(1) = b$.

(c) Uzmimo sada da je $a \in \mathbb{C} \setminus K$ i $b = \infty$. Tada se točka a nalazi u komponenti povezanosti skupa $\overline{\mathbb{C}} \setminus K$ koja sadrži točku ∞, dakle, prema razmatranju u (b), u neograničenoj komponenti povezanosti Ω skupa $\mathbb{C} \setminus K$. Izaberimo točku $c \in \Omega$ takvu da je

$$c \neq 0 \qquad \text{i} \qquad |c| \geq 2|z| \quad \forall z \in K. \tag{8.10}$$

Prema (b) postoji racionalna funkcija f, koja ima jedini pol u točki c, takva da je

$$|g(z) - f(z)| \leq \frac{\varepsilon}{2} \qquad \forall z \in K. \tag{8.11}$$

Tada je

$$f(z) = \frac{P(z)}{(z-c)^n}, \qquad n \in \mathbb{N}, \quad P \quad \text{polinom stupnja } \leq n.$$

Prema (8.10) je

$$\left|\frac{z}{c}\right| \leq \frac{1}{2} \qquad \forall z \in K.$$

Stoga za $z \in K$ imamo

$$f(z) = \frac{P(z)}{(z-c)^n} = (-1)^n \frac{P(z)}{c^n} \cdot \left[1 - \frac{z}{c}\right]^{-n} = (-c)^{-n} P(z) \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+n-1}{k} c^{-k} z^k$$

i pri tome red konvergira uniformno u odnosu na $z \in K$. Dakle, postoji $m \in \mathbb{N}$ takav da za polinom

$$h(z) = (-c)^{-n} P(z) \sum_{k=0}^{m} \binom{k+n-1}{k} c^{-k} z^k$$

vrijedi

$$|f(z) - h(z)| \leq \frac{\varepsilon}{2} \qquad \forall z \in K.$$

Odavde i iz (8.11) slijedi (8.6) i h je polinom, dakle, racionalna funkcija s jedinim polom u točki $b = \infty$.

(d) Uzmimo napokon da je $a = \infty$, dakle, g je polinom, i $b \in \mathbb{C} \setminus K$. Neka je

$$\varphi(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{z-b}, & z \in \mathbb{C} \setminus \{b\} \\ \infty & z = b \\ 0 & z = \infty. \end{cases}$$

Tada je φ homeomorfizam sa $\overline{\mathbb{C}}$ na $\overline{\mathbb{C}}$. Stoga je $\varphi(K) = K_1$ kompaktan podskup od $\mathbb{C}$ i točke $\varphi(a) = \varphi(\infty) = 0$ i $\varphi(b) = \infty$ se nalaze u istoj komponenti povezanosti $\varphi(\Omega \cup \{\infty\})$ skupa $\overline{\mathbb{C}} \setminus K_1$. Nadalje, $g \circ \varphi^{-1}$ je racionalna funkcija, kojoj je jedini pol u točki $\varphi(a) = 0$. Prema (c) postoji racionalna funkcija f, kojoj je jedini pol u točki $\varphi(b) = \infty$, tj. polinom, takva da je

$$|g(\varphi^{-1}(z)) - f(z)| \leq \varepsilon \qquad \forall z \in K_1. \tag{8.12}$$

Stavimo li $h = f \circ \varphi$, onda je h racionalna funkcija kojoj je jedini pol u točki $\varphi^{-1}(\infty) = b$, i iz (8.12) slijedi (8.6).

Dokaz Rungeovog teorema 8.1: Neka je $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz kompaktnih skupova iz zadatka 4.3. Neka je $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ padajući niz strogo pozitivnih realnih brojeva koji konvergira prema 0.

Fiksirajmo $n \in \mathbb{N}$. Prema lemi 8.1. postoji racionalna funkcija g_n s polovima u skupu $\Omega \setminus K_n$ takva da vrijedi

$$|f(z) - g_n(z)| \leq \frac{\varepsilon_n}{2} \qquad \forall z \in K_n. \tag{8.13}$$

Neka su $a_1, \ldots, a_m$ svi polovi funkcije g_n Tada za svako $j \in \{1, \ldots, m\}$ postoji racionalna funkcija r_j, kojoj je jedini pol u točki a_j, tako da je $g_n = r_1 + \cdots + r_m$. Za dano $j \in \{1, \ldots, m\}$ komponenta povezanosti skupa $\overline{\mathbb{C}} \setminus K_n$ koja sadrži točku a_j sadrži neku komponentu skupa $\overline{\mathbb{C}} \setminus \Omega$, dakle, po pretpostavci sadrži i neku točku $b_j \in E$. Po lemi 8.2. postoji racionalna funkcija h_j, kojoj je jedini pol u točki b_j, takva da vrijedi

$$|r_j(z) - h_j(z)| \leq \frac{\varepsilon_n}{2m} \qquad \forall z \in K_n. \tag{8.14}$$

Sada je $f_n = h_1 + \cdots + h_m$ racionalna funkcija kojoj su polovi $b_1, \ldots, b_m \in E$ i iz (8.14) slijedi

$$|g_n(z) - f_n(z)| \leq \sum_{j=1}^{m} |r_j(z) - h_j(z)| \leq m \cdot \frac{\varepsilon_n}{2m} = \frac{\varepsilon_n}{2} \qquad \forall z \in K_n. \tag{8.15}$$

Iz (8.13) i (8.15) slijedi

$$|f(z) - f_n(z)| \leq \varepsilon_n \qquad \forall z \in K_n. \tag{8.16}$$

Tako dolazimo do niza racionalnih funkcija $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ kojima su svi polovi sadržani u skupu E i vrijedi (8.16) za svako $n \in \mathbb{N}$. Neka je sada $K \subseteq \Omega$ proizvoljan kompaktan skup. Prema tvrdnjama (e) i (c) iz zadatka 4.3. postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $K \subseteq K_n$ za svako $n \geq n_0$. Sada iz (8.16) slijedi

$$|f(z) - f_n(z)| \leq \varepsilon_n \qquad \forall z \in K \quad \text{i} \quad \forall n \geq n_0. \tag{8.17}$$

Budući da niz $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira prema 0, (8.17) pokazuje da niz restrikcija $(f_n|K)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira uniformno prema restrikciji $f|K$. Kako je $K \subseteq \Omega$ bio proizvoljan kompaktan skup, zaključujemo da niz $(f_n|\Omega)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira lokalno uniformno prema funkciji f. Time je Rungeov teorem dokazan.

Zadatak 8.1. *Neka je*

$$\Omega = K(0,1), \qquad \Omega_1 = K^*(0,1) = \{z \in \mathbb{C};\ 0 < |z| < 1\}$$

i za neke $0 < r < R < 1$

$$K = \overline{K}(0; r, R) = \{z \in \mathbb{C};\ r \leq |z| \leq R\}.$$

Dokažite da postoji funkcija $f \in \mathcal{H}(\Omega_1)$ *takva da ni za jedan niz* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *u* $\mathcal{H}(\Omega)$ *niz restrikcija* $(f_n|K)_{n\in\mathbb{N}}$ *ne konvergira uniformno prema restrikciji* $f|K$.

Iz teorema 8.2. dobivamo još jednu karakterizaciju jednostavno povezanih područja:

Teorem 8.3. *Područje* $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ *je jednostavno povezano ako i samo ako za svaku funkciju* $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ *postoji niz polinoma* $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *takav da niz restrikcija* $(P_n|\Omega)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergira lokalno uniformno prema funkciji* f.

Dokaz: Ako je područje Ω jednostavno povezano, prema teoremu 3.1. skup $\overline{\mathbb{C}} \setminus \Omega$ je povezan, pa prema teoremu 8.2. postoji niz polinoma $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ takav da niz restrikcija $(P_n|\Omega)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira lokalno uniformno prema funkciji f.

Dokažimo sada obrnutu implikaciju. Neka je $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ i neka je $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz polinoma takav da niz restrikcija $(P_n|\Omega)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira lokalno uniformno prema funkciji f. Neka je $\gamma : [a,b] \to \Omega$ petlja u Ω. Svaki polinom P_n ima primitivnu funkciju Q_n (polinom čiji je stupanj za 1 veći od stupnja polinoma P_n). Neka je $a = c_0 < c_1 < \cdots < c_m = b$ particija segmenta $[a,b]$ takva da su sve restrikcije $\gamma|[c_{j-1}, c_j]$ $(1 \leq j \leq m)$ neprekidno diferencijabilne. Sada imamo redom

$$\int_\gamma P_n(z)\mathrm{d}z = \int_\gamma Q_n'(z)\mathrm{d}z = \sum_{j=1}^{m} \int_{c_{j-1}}^{c_j} Q_n'(\gamma(t))\gamma'(t)\mathrm{d}t =$$

$$\sum_{j=1}^{m} \int_{c_{j-1}}^{c_j} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} Q_n(\gamma(t))\mathrm{d}t = \sum_{j=1}^{m} [Q_n(\gamma(c_j)) - Q_n(\gamma(c_{j-1}))] = Q_n(\gamma(b)) - Q_n(\gamma(a)) = 0.$$

Budući da niz restrikcija $(P_n|\gamma^*)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira uniformno prema restrikciji $f|\gamma^*$, slijedi

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = 0.$$

Time je dokazano da je područje Ω Cauchyjevo, pa prema teoremu 3.1. zaključujemo da je ono jednostavno povezano.

Poglavlje 9

Cijele funkcije

Ako je $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ područje i $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ holomorfna funkcija na Ω koja nije identički jednaka nuli, onda prema teoremu jedinstvenosti 1.11. njen skup nultočaka

$$N(f) = \{a \in \Omega;\ f(a) = 0\}$$

nema gomilišta su skupu Ω. Posebno, svaka je nultočka $a \in N(f)$ izolirana i ima svoju kratnost. Ako je $m \in \mathbb{N}$ kratnost nultočke a onda možemo pisati $f(z) = (z-a)^m g(z)$, gdje je $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ i $g(a) \neq 0$. Štoviše, tada je $N(g) = N(f) \setminus \{a\}$ i kratnost točke $b \in N(g)$ kao nultočke od g jednaka je kratnosti te točke kao nultočke od f. Pretpostavimo sada da funkcija $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ ima konačno mnogo nultočaka i neka je $N(f) = \{a_1, \ldots, a_n\}$, pri čemu je $a_i \neq a_j$ za $i \neq j$. Nadalje, neka je m_j kratnost točke a_j kao nultočke funkcije f. Tada slijedi da je

$$f(z) = (z-a_1)^{m_1} \cdots (z-a_n)^{m_n}\, F(z), \qquad F \in \mathcal{H}(\Omega),$$

i pri tome funkcija F nema nultočaka.

U ovom ćemo poglavlju promatrati slučaj $\Omega = \mathbb{C}$, tj. slučaj cijele funkcije f. Pretpostavimo, dakle, da je f cijela funkcija s konačno mnogo nultočaka $a_1, \ldots, a_n$. Zbog jednostavnijeg pisanja pretpostavimo da su sve nultočke jednostruke i da 0 nije nultočka, $f(0) \neq 0$. Gornja se formula tada može zapisati ovako:

$$f(z) = h(z)\left(1 - \frac{z}{a_1}\right) \cdots \left(1 - \frac{z}{a_n}\right), \qquad z \in \mathbb{C},$$

pri čemu je h cijela funkcija bez nultočaka. Međutim, područje $\mathbb{C}$ je jednostavno povezano, pa ima svojstvo logaritma. To znači da postoji cijela funkcija g takva da je $h(z) = \mathrm{e}^{g(z)}$. Prema tome, dobivamo formulu oblika

$$f(z) = \mathrm{e}^{g(z)} \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{z}{a_k}\right), \qquad z \in \mathbb{C}. \tag{9.1}$$

Ako je sada f cijela funkcija s beskonačno mnogo nultočaka, iz činjenice da skup nultočaka $N(f)$ nema gomilišta u $\mathbb{C}$ slijedi da je taj skup prebrojivo beskonačan, tj. može se numerirati prirodnim brojevima: $N(f) = \{a_k;\ k \in \mathbb{N}\}$. Naravno, numeraciju izabiremo tako da je $a_i \neq a_j$ za $i \neq j$. Pretpostavljamo i dalje da su sve nultočke jednostruke i da 0 nije među njima, $f(0) \neq 0$. Formula (9.1) sada upućuje na to da ispitamo mogućnost zapisa funkcije f u obliku

$$f(z) = \mathrm{e}^{g(z)} \prod_{k \in \mathbb{N}} \left(1 - \frac{z}{a_k}\right), \qquad z \in \mathbb{C}, \tag{9.2}$$

pri čemu je g cijela funkcija. Pitanje konvergencije beskonačnog produkta u (9.2) možemo pokušati logaritmiranjem svesti na pitanje konvergencije beskonačnog reda

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \operatorname{Ln}\left(1-\frac{z}{a_k}\right). \tag{9.3}$$

Pri tome sa Ln označavamo tzv. **glavnu granu logaritamske funkcije**: za kompleksan broj $z \neq 0$ sa $\operatorname{Ln} z$ označavamo kompleksan broj $\ln|z| + i\alpha$, gdje je $\alpha \in \langle -\pi, \pi]$ takav da je $a = |a|e^{i\alpha}$. Naravno, tada je $z = e^{\operatorname{Ln} z}$ za svaki $z \in \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Međutim, red (9.3) obično divergira. Taj se nedostatak može ispraviti na sljedeći način. Za danu točku $z \in \mathbb{C}$ i za $k \in \mathbb{N}$ takav da je $|z| < |a_k|$ imamo

$$\operatorname{Ln}\left(1-\frac{z}{a_k}\right) = -\frac{z}{a_k} - \frac{1}{2}\left(\frac{z}{a_k}\right)^2 - \frac{1}{3}\left(\frac{z}{a_k}\right)^3 - \cdots\cdots \tag{9.4}$$

Da bismo umjesto reda (9.3) došli do konvergentnog reda, izostavimo određen broj članova u (9.4), tj. promatramo polinom

$$p_k(z) = \frac{z}{a_k} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{a_k}\right)^2 + \cdots + \frac{1}{n_k}\left(\frac{z}{a_k}\right)^{n_k}$$

gdje je $n_k \in \mathbb{N}$. Sada je

$$\operatorname{Ln}\left(1-\frac{z}{a_k}\right) + p_k(z) = -\frac{1}{n_k+1}\left(\frac{z}{a_k}\right)^{n_k+1} - \cdots\cdots .$$

Pogodnim izborom brojeva n_k može se postići da red

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \left[\operatorname{Ln}\left(1-\frac{z}{a_k}\right) + p_k(z)\right]$$

konvergira. Eksponenciranjem dobivamo

$$\exp\left\{\sum_{k\in\mathbb{N}} \left[\operatorname{Ln}\left(1-\frac{z}{a_k}\right) + p_k(z)\right]\right\} = \prod_{k\in\mathbb{N}} \exp\left[\operatorname{Ln}\left(1-\frac{z}{a_k}\right) + p_k(z)\right] = \prod_{k\in\mathbb{N}} \left(1-\frac{z}{a_k}\right) e^{p_k(z)}.$$

Ovaj formalni račun pokazuje da umjesto (9.2) treba očekivati faktorizaciju oblika

$$f(z) = e^{g(z)} \prod_{k\in\mathbb{N}} \left(1-\frac{z}{a_k}\right) e^{p_k(z)},$$

odnosno, u slučaju da je 0 $m-$struka nultočka,

$$f(z) = z^m e^{g(z)} \prod_{k\in\mathbb{N}} \left(1-\frac{z}{a_k}\right) e^{p_k(z)}. \tag{9.5}$$

Iz definicije polinoma $p_k(z)$ vidi se da je

$$\left(1-\frac{z}{a_k}\right) e^{p_k(z)} = E_{n_k}\left(\frac{z}{a_k}\right),$$

gdje su E_n, $n \in \mathbb{N}$, cijele funkcije definirane sa

$$E_n(z) = (1-z)e^{z+\frac{z^2}{2}+\cdots+\frac{z^n}{n}}.$$

Uz tu oznaku (9.5) poprima oblik

$$f(z) = z^m \mathrm{e}^{g(z)} \prod_{k\in\mathbb{N}} E_{n_k}\left(\frac{z}{a_k}\right). \tag{9.6}$$

Ukoliko nultočke a_k nisu sve jednostruke, onda umjesto (9.6) možemo očekivati faktorizaciju oblika

$$f(z) = z^m \mathrm{e}^{g(z)} \prod_{k\in\mathbb{N}} \left[E_{n_k}\left(\frac{z}{a_k}\right)\right]^{m_k}. \tag{9.7}$$

Formulom (9.7) dana je tzv. **Weierstrassova faktorizacija cijele funkcije** f. Ona će biti precizirana i dokazana u ovom poglavlju. Pored toga dokazat ćemo i neke druge činjenice o cijelim funkcijama koje spadaju u krug ideja vezanih uz faktorizaciju (9.7).

9.1 Beskonačni produkti

Pojam beskonačnog produkta kompleksnih brojeva uvodi se na sličan način kao i pojam reda kompleksnih brojeva. Neka je $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ niz kompleksnih brojeva. **Produkt niza** $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ je uređen par nizova $((a_k),(p_k))$, gdje je $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ niz tzv. **parcijalnih produkata** niza (a_k), definiran sa

$$p_1 = a_1, \qquad p_2 = a_1 a_2, \qquad \dots \qquad p_k = a_1 \cdots a_k \qquad \dots\dots$$

Taj beskonačni produkt označava se sa

$$\prod_{k=1}^{\infty} a_k \qquad \text{ili} \qquad \prod_{k\in\mathbb{N}} a_k. \tag{9.8}$$

Za a_k kažemo da je **opći član** beskonačnog produkta (9.8). U analogiji s definicjom konvergencije reda mogli bismo pokušati konvergenciju beskonačnog produkta (9.8) definirati ovako: *produkt* (9.8) *konvergira, ako niz parcijalnih produkata* (p_k) *konvergira*; *ako je* p *limes niza* (p_k), *onda pišemo*:

$$p = \prod_{k=1}^{\infty} a_k.$$

No takva definicija ima dva nedostatka:

(*a*) Ako je $a_m = 0$ za neki prirodan broj m, onda je $p_k = 0$ za $k \geq m$, pa beskonačni produkt konvergira i $p = 0$ bez obzira na ponašanje niza $(a_k)_{k\geq m}$.

(*b*) Ako postoji $0 < \varepsilon < 1$ i $k_0 \in \mathbb{N}$ takvi da je $|a_k| \leq \varepsilon\ \forall k \geq k_0$, onda je $|p_k| \leq |p_{k_0}|\varepsilon^{k-k_0}$ za $k \geq k_0$ pa vidimo da niz parcijalnih produkata konvergira k nuli. Dakle, takav je beskonačan produkt jednak 0 iako nijedan od članova niza (a_k) ne mora biti jednak 0.

Da bi se izbjegli takvi nedostaci, tj. da bi se postiglo da limes parcijalnih produkata odražava svojstva svih ili gotovo svih članova niza, modificirat ćemo definiciju konvergencije beskonačnih produkata na sljedeći način. Kažemo da **beskonačni produkt** (9.8) **konvergira** ako postoji prirodan broj m takav da je $a_k \neq 0\ \forall k > m$ i da niz

$$q_1 = a_{m+1}, \quad q_2 = a_{m+1}a_{m+2}, \quad \dots, \quad q_n = a_{m+1}\cdots a_{m+n}, \quad \dots$$

konvergira kompleksnom broju $q \neq 0$. Tada broj

$$p = a_1 \cdots a_m q$$

nazivamo **produktom beskonačnog niza** (a_k). Iz te je definicije jasno da je produkt beskonačnog niza jednak nuli ako i samo ako je bar jedan član tog niza jednak nuli.

Napomenimo da je u vezi s beskonačnim produktima uobičajeno prisutna dvojba u označavanju, jednako kao i u vezi s redovima: naime, sa (9.8) se označava beskonačni produkt niza $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$, dakle, uređen par $((a_k)_{k\in\mathbb{N}},(p_k)_{k\in\mathbb{N}})$ niza (a_k) i pripadnog niza parcijalnih produkata, a u slučaju konvergentnog beskonačnog produkta također i vrijednost tog produkta, odnosno, limes p niza parcijalnih produkata.

Ako niz $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvegira prema $p\neq 0$, onda i niz $(p_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira prema p, pa slijedi da $a_{n+1}=p_{n+1}/p_n$ konvergira prema 1. Dakle, kod konvergentnog beskonačnog produkta opći član teži prema 1. Zbog toga se obično opći član piše u obliku $a_k=1+u_k$. Tada konvergencija beskonačnog produkta

$$\prod_{k\in\mathbb{N}}(1+u_k) \tag{9.9}$$

povlači da u_k teži prema nuli.

Propozicija 9.1. *Neka je* $1+u_k\neq 0$ *za svako* $k\in\mathbb{N}$. *Beskonačni produkt* (9.9) *konvergira ako i samo ako konvergira red*

$$\sum_{k\in\mathbb{N}}\mathrm{Ln}\,(1+u_k) \tag{9.10}$$

i u tom je slučaju

$$\prod_{k\in\mathbb{N}}(1+u_k)=\exp\left[\sum_{k\in\mathbb{N}}\mathrm{Ln}\,(1+u_k)\right]. \tag{9.11}$$

Dokaz: Pretpostavimo najprije da red (9.10) konvergira i da mu je suma s. Sa

$$s_n=\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Ln}\,(1+u_k)$$

označimo $n-$tu parcijalnu sumu reda (9.10). Tada je $p_n=\mathrm{e}^{s_n}$, pa iz $s=\lim_{n\to\infty}s_n$ slijedi da niz (p_n) konvergira i da mu je limes e^s. To znači da beskonačni produkt (9.9) konvergira i da vrijedi (9.11).

Pretpostavimo sada da beskonačni produkt (9.9) konvergira. Kako je $1+u_k\neq 0$ za svako $k\in\mathbb{N}$, zaključujemo da niz parcijalnih produkata (p_n) konvergira prema $p\neq 0$. Stavimo

$$1+u_k=|1+u_k|\mathrm{e}^{i\alpha_k},\qquad -\pi<\alpha_k\leq\pi. \tag{9.12}$$

Budući da $1+u_k$ teži prema 1, slijedi da α_k teži prema 0. Stavimo sada

$$p_n=|p_n|\mathrm{e}^{i\varphi_n}, \tag{9.13}$$

pri čemu je $-\pi<\varphi_n\leq\pi$ ako nije $p<0$, odnosno, $0\leq\varphi_n<2\pi$ ako je $p<0$. Nadalje, stavimo

$$p=|p|\mathrm{e}^{i\varphi},\qquad -\pi<\varphi\leq\pi. \tag{9.14}$$

Ako neki podniz ograničenog niza (φ_n) konvergira broju φ_0, onda je očito $\varphi_0=\varphi+2k\pi$ za neki $k\in\mathbb{Z}$. Sada iz (9.13) i (9.14) slijedi da mora biti $k=0$. Dakle, $\varphi_0=\varphi$. To znači da je φ jedino gomilište niza (φ_n). Prema tome, niz (φ_n) je konvergentan i limes mu je φ.

Iz (9.12) slijedi

$$p_n=|p_n|\mathrm{e}^{i(\alpha_1+\cdots+\alpha_n)},$$

pa iz (9.13) dobivamo

$$\varphi_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k + 2\pi m_n,$$

gdje su $m_n \in \mathbb{Z}$. Odavde je

$$\varphi_{n+1} - \varphi_n = \alpha_{n+1} + 2\pi(m_{n+1} - m_n).$$

Kada n teži prema ∞, onda $\varphi_{n+1} - \varphi_n$ teži prema 0 i α_{n+1} teži prema 0. Slijedi da $m_{n+1} - m_n$ teži prema 0, a kako su m_n cijeli brojevi, zaključujemo da postoji prirodan broj n_0 takav da je $m_{n+1} = m_n$ za $n \geq n_0$. Prema tome, za neki cijeli broj m vrijedi

$$\varphi_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k + 2\pi m \qquad \forall n \geq n_0.$$

Stoga za $n \geq n_0$ dobivamo

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \ln|1 + u_k| + i\sum_{k=1}^{n} \alpha_k = \ln|p_n| + i\varphi_n - 2\pi i m.$$

Budući da su nizovi $(\ln|p_n|)$ i (φ_n) konvergentni, slijedi da je i niz (s_n) konvergentan, odnosno, red (9.10) konvergira.

Lema 9.1. *Neka je $1 + u_k \neq 0$ za svako $k \in \mathbb{N}$. Konvergencija jednog od redova*

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} |u_k|, \qquad \sum_{k\in\mathbb{N}} |\mathrm{Ln}\,(1 + u_k)|, \qquad \sum_{k\in\mathbb{N}} \ln\,(1 + |u_k|)$$

povlači konvergenciju preostala dva reda.

Dokaz: Ako neki od navedenih redova konvergira, onda očito niz (u_k) konvergira prema 0. Odatle i iz

$$\lim_{z\to 0} \frac{\mathrm{Ln}\,(1+z)}{z} = 1$$

slijedi da za svako $\varepsilon > 0$ postoji prirodan broj $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da vrijedi

$$n \geq n_0 \qquad \Longrightarrow \qquad |\mathrm{Ln}\,(1 + u_n) - u_n| \leq \varepsilon|u_n|.$$

Odavde za $n \geq n_0$ dobivamo

$$|u_n| \leq |u_n - \mathrm{Ln}\,(1 + u_n)| + |\mathrm{Ln}\,(1 + u_n)| \leq \varepsilon|u_n| + |\mathrm{Ln}\,(1 + u_n)|,$$

odnosno,

$$|\mathrm{Ln}\,(1 + u_n)| \leq |\mathrm{Ln}\,(1 + u_n) - u_n| + |u_n| \leq (1 + \varepsilon)|u_n|.$$

Prema tome, vrijedi

$$n \geq n_0 \qquad \Longrightarrow \qquad (1 - \varepsilon)|u_n| \leq |\mathrm{Ln}\,(1 + u_n)| \leq (1 + \varepsilon)|u_n|.$$

To pokazuje da red $\sum$ Ln $(1 + u_n)|$ konvergira ako i samo ako red $\sum |u_n|$ konvergira. Kako je

$$|\mathrm{Ln}\ (1 + |u_n|)| = \mathrm{Ln}\ (1 + |u_n|) = \ln\ (1 + |u_n|)\,,$$

iz dokazanog slijedi da je konvergencija reda $\sum \ln\ (1 + |u_n|)$ također ekvivalentna konvergenciji $\sum |u_n|$.

Prema lemi 9.1. apsolutna konvergencija reda $\sum$ Ln $(1+u_k)$ ekvivalentna je konvergenciji reda $\sum$ ln $(1+|u_k|) = \sum$ Ln $(1+|u_k|)$, a prema propoziciji 9.1. konvergencija reda $\sum$ Ln $(1+|u_k|)$ ekvivalentna je konvergenciji beskonačnog produkta

$$\prod_{k\in\mathbb{N}} (1+|u_k|)\,. \tag{9.15}$$

To upućuje na sljedeću definiciju: kažemo da **beskonačni produkt** (9.9) **apsolutno konvergira** ako beskonačni produkt (9.15) konvergira.

Konvergencija beskonačnog produkta (9.15) povlači konvergenciju reda

$$\sum \mathrm{Ln}\;(1+|u_k|) = \sum \ln\;(1+|u_k|)\,,$$

a to prema lemi 9.1. povlači apsolutnu konvergenciju, dakle i konvergenciju, reda $\sum$ Ln $(1+u_k)$; no tada iz propozicije 9.1. slijedi da beskonačni produkt (9.9) konvergira. Prema tome, apsolutna konvergencija beskonačnog produkta povlači njegovu konvergenciju. Ovo je zaključivanje provedeno uz dodatnu pretpostavku da je $1+u_k \neq 0\ \ \forall k\in\mathbb{N}$. Pretpostavimo sada samo da beskonačni produkt (9.15) konvergira, odnosno, da beskonačni produkt (9.9) apsolutno konvergira. Tada niz apsolutnih vrijednosti $(|u_k|)$ konvergira prema 0, pa postoji prirodan broj $m\in\mathbb{N}$ takav da je $1+u_k\neq 0\ \ \forall k\geq m$. Kako je

$$\sum_{k\in\mathbb{N},\,k\geq m} |u_k| \leq \sum_{k\in\mathbb{N}} |u_k| < +\infty,$$

beskonačni produkt

$$\prod_{k\in\mathbb{N},\,k\geq m} (1+u_k)$$

apsolutno konvergira, dakle i konvergira. Prema tome, i u općem slučaju apsolutna konvergencija beskonačnog produkta (9.9) povlači njegovu konvergenciju.

Pretpostavljamo i dalje da beskonačni produkt (9.15) konvergira i neka je $\sigma:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ proizvoljna bijekcija (tj. permutacija). Konvergencija produkta (9.15) povlači apsolutnu konvergenciju reda $\sum$ Ln $(1+u_k)$. Kod apsolutno konvergentnih redova smijemo po volji promijeniti redoslijed članova i to bez utjecaja na sumu reda. To znači da i red $\sum$ Ln $(1+u_{\sigma(k)})$ apsolutno konvergira i vrijedi

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \mathrm{Ln}\,(1+u_{\sigma(k)}) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \mathrm{Ln}\,(1+u_k). \tag{9.16}$$

Slijedi da beskonačni produkt $\prod(1+u_{\sigma(k)})$ apsolutno konvergira, a iz (9.16) i iz propozicije 9.1. dobivamo

$$\prod_{k\in\mathbb{N}} (1+u_{\sigma(k)}) = \prod_{k\in\mathbb{N}} (1+u_k). \tag{9.17}$$

Dakle, dokazali smo sljedeću propoziciju:

Propozicija 9.2. *Ako beskonačni produkt* (9.9) *apsolutno konvergira, onda on i konvergira. U tom se slučaju redoslijed faktora može po volji mijenjati bez utjecaja na vrijednost produkta: za svaku permutaciju* $\sigma:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ *vrijedi* (9.17).

Ova propozicija ukazuje na korisnost uvedenog pojma apsolutne konvergencije beskonačnog produkta. Sljedeći zadatak pokazuje da zahtjev da beskonačni produkt $\prod|1+u_k|$ konvergira ne povlači da beskonačni produkt (9.9) konvergira:

Zadatak 9.1. *Dokažite da u slučajevima* $u_k = i/k$ *i* $u_k = i-1$ *beskonačni produkt* $\prod|1+u_k|$ *konvergira, ali beskonačni produkt* $\prod(1+u_k)$ *ne konvergira.*

Zadatak 9.2. *Ustanovite da li sljedeći produkti konvergiraju i da li apsolutno konvergiraju:*

(*a*) $\prod_{n\in\mathbb{N}} (1 - (-1)^n/n)$;

(*b*) $\prod_{n\in\mathbb{N}} (1 + n^{-p})$, $p \in \mathbb{R}$.

Rješenja: (*a*) Konvergira, ali ne apsolutno. (*b*) Ne konvergira za $p \leq 1$; apsolutno konvergira za $p > 1$.

Zadatak 9.3. *Dokažite da beskonačni produkt* $\prod \cos z_n$ *apsolutno konvergira ako je* $\sum |z_n|^2 < +\infty$.

Zadatak 9.4. *Dokažite da je*

$$\prod_{n\in\mathbb{Z}_+} \left(1 + z^{2^n}\right) = \frac{1}{1-z}, \qquad z \in K(0,1).$$

Zadatak 9.5. *Neka je niz* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *definiran sa*

$$u_{2n-1} = \frac{1}{\sqrt{n}}, \qquad u_{2n} = \frac{1}{n} - \frac{1}{\sqrt{n}}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Dokažite da redovi $\sum u_n$ *i* $\sum u_n^2$ *divergiraju ali da produkt* $\prod (1 + u_n)$ *konvergira.*

Dokazat ćemo još jednu jednostavnu tvrdnju o beskonačnim produktima koja u mnogim slučajevima olakšava izračunavanje vrijednosti konvergentnog beskonačnog produkta:

Propozicija 9.3. *Pretpostavimo da produkt* (9.9) *konvergira. Neka je* $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *strogo rastući niz prirodnih brojeva i stavimo* $k_0 = 0$ *i*

$$1 + v_n = \left(1 + u_{k_{n-1}+1}\right) \cdots (1 + u_{k_n}), \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Tada beskonačni produkt $\prod (1 + v_n)$ *konvergira i vrijedi*

$$\prod_{n\in\mathbb{N}} (1 + v_n) = \prod_{k\in\mathbb{N}} (1 + u_k). \tag{9.18}$$

Ako beskonačni produkt (9.9) *apsolutno konvergira, onda i beskonačni produkt* $\prod (1+v_n)$ *apsolutno konvergira.*

Dokaz: Brojevi $q_n = (1 + v_1) \cdots (1 + v_n)$ tvore podniz niza (p_n), $p_n = (1 + u_1) \cdots (1 + u_n)$, pa vrijedi jednakost (9.18), odnosno,

$$\lim_{n\to\infty} q_n = \lim_{n\to\infty} p_n.$$

Ako je prirodan broj $m \in \mathbb{N}$ takav da je

$$\prod_{k\in\mathbb{N},\, k\geq m} (1 + u_k) \neq 0,$$

onda za $j \in \mathbb{N}$ takav da je $k_j \geq m$ vrijedi

$$\prod_{n\in\mathbb{N},\, n>j} (1 + v_n) = \prod_{k\in\mathbb{N},\, k>k_j} (1 + u_k) \neq 0.$$

To pokazuje da beskonačni produkt $\prod(1+v_n)$ konvergira i da vrijedi (9.18). Napokon, posljednja tvrdnja je posljedica leme 9.1., propozicije 9.2. i očigledne nejednakosti

$$|\mathrm{Ln}\,(1+v_n)| \leq \left|\mathrm{Ln}\,\left(1+u_{k_{n-1}+1}\right)\right| + \cdots + |\mathrm{Ln}\,(1+u_{k_n})|\,.$$

Kod proučavanja beskonačnih produkata korisne su sljedeće nejednakosti:

$$(1+|a_1|)\cdots(1+|a_n|) \leq \mathrm{e}^{|a_1|+\cdots+|a_n|}, \tag{9.19}$$

$$|[(1+a_1)\cdots(1+a_n)]-1| \leq (1+|a_1|)\cdots(1+|a_n|)-1. \tag{9.20}$$

Nejednakost (9.19) slijedi neposredno iz očiglednih nejednakosti

$$1+|a_j| \leq \mathrm{e}^{|a_j|}, \qquad j=1,\ldots,n.$$

Nejednakost (9.20) dokazuje se matematičkom indukcijom. Baza indukcije je trivijalna, a za korak indukcije stavimo

$$A_k = (1+a_1)\cdots(1+a_k) \qquad \text{i} \qquad A_k^* = (1+|a_1|)\cdots(1+|a_k|)\,.$$

Sada iz pretpostavke indukcije $|A_k - 1| \leq A_k^* - 1$ slijedi

$$|A_{k+1}-1| = |A_k(1+a_{k+1})-1| = |(A_k-1)(1+a_{k+1})+a_{k+1}| \leq$$

$$\leq |A_k-1|\,(1+|a_{k+1}|)+|a_{k+1}| \leq (A_k^*-1)\,(1+|a_{k+1}|)+|a_{k+1}| = A_{k+1}^*-1.$$

Time je korak indukcije proveden, pa je nejednakost (9.20) dokazana.

Razmotrimo sada beskonačne produkte čiji su članovi kompleksnoznačne funkcije na nekom nepraznom skupu S. Neka su $u_k : S \to \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{N}$, proizvoljne funkcije. Kažemo da **beskonačni produkt**

$$\prod_{k\in\mathbb{N}}(1+u_k) \tag{9.21}$$

konvergira na skupu S (donosno, da **apsolutno konvergira na skupu** S) ako za svako $s \in S$ beskonačni produkt kompleksnih brojeva

$$\prod_{k\in\mathbb{N}}(1+u_k(s)) \tag{9.22}$$

konvergira (odnosno, apsolutno konvergira). U tom slučaju za funkciju $p : S \to \mathbb{C}$, definiranu sa

$$p(s) = \lim_{n\to\infty} p_n(s), \qquad p_n(s) = \prod_{k=1}^{n}(1+u_k(s)), \qquad s \in \Sigma, \tag{9.23}$$

pišemo

$$p = \prod_{k\in\mathbb{N}}(1+u_k). \tag{9.24}$$

Kažemo da **beskonačni produkt funkcija** (9.21) **konvergira uniformno na skupu** S ako on konvergira na S i ako niz funkcija (p_n) konvergira uniformno na S. Ako je $S = \Omega \subseteq \mathbb{C}$ otvoren skup, onda kažemo da **beskonačni produkt funkcija** (9.21) **konvergira lokalno uniformno na** Ω ako on konvergira na Ω i ako niz funkcija (p_n) konvergira lokalno uniformno na Ω.

Teorem 9.1. *Neka je $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ niz ograničenih kompleksnoznačnih funkcija definiranih na nepraznom skupu S takvih da red*

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} |u_k(s)| \tag{9.25}$$

konvergira uniformno na S. Tada beskonačni produkt funkcija

$$\prod_{k\in\mathbb{N}} (1+u_k)$$

konvergira apsolutno i uniformno na S.

Dokaz: Konvergencija reda (9.25) prema lemi 9.1. povlači apsolutnu konvergenciju (pa i konvergenciju) beskonačnog produkta (9.22) za svaki $s \in S$. Treba još dokazati uniformnu konvergenciju niza funkcija (p_n). Izaberimo $m \in \mathbb{N}$ tako da bude

$$\sum_{n\in\mathbb{N},\, n>m} |u_n(s)| \leq 1 \qquad \forall s \in S. \tag{9.26}$$

Kako je svaka funkcija u_n po pretpostavci ograničena na skupu S, postoji realan broj $M > 0$ takav da je

$$|u_1(s)| + \cdots + |u_m(s)| \leq M \qquad \forall s \in S. \tag{9.27}$$

Sada za proizvoljno odabrano $\varepsilon > 0$ postoji prirodan broj $q \in \mathbb{N}$, $q \geq m$, takav da vrijedi

$$\sum_{k\in\mathbb{N},\, k>q} |u_k(s)| \leq \delta \qquad \forall s \in S, \tag{9.28}$$

gdje je broj $\delta > 0$ odabran tako da bude

$$\mathrm{e}^{\delta} \leq 1 + \varepsilon \mathrm{e}^{-M-1}. \tag{9.29}$$

Sada zbog (9.19), (9.20) i (9.26) – (9.29) imamo redom za $n > j \geq q$:

$$|p_n(s) - p_j(s)| = |p_j(s)| \cdot |\,(1+u_{j+1}(s)) \cdots (1+u_n(s)) - 1| \leq$$

$$\leq |p_j(s)| \cdot [(1+|u_{j+1}(s)|) \cdots (1+|u_n(s)|) - 1] \leq |p_j(s)| \cdot \left[\mathrm{e}^{|u_{j+1}(s)|+\cdots+|u_n(s)|} - 1\right] \leq$$

$$\leq (1+|u_1(s)|) \cdots (1+|u_j(s)|) \left(\mathrm{e}^{\delta} - 1\right) \leq \mathrm{e}^{|u_1(s)|+\cdots|u_j(s)|} \left(\mathrm{e}^{\delta} - 1\right) \leq \mathrm{e}^{M+1} \left(\mathrm{e}^{\delta} - 1\right) \leq \varepsilon.$$

Dakle je $|p_n(s) - p_j(s)| \leq \varepsilon$ za svako $s \in S$ i za $n < j \leq q$. Pustimo li u toj nejednakosti da n teži u ∞, dobivamo:

$$j \geq q \qquad \Longrightarrow \qquad |p(s) - p_j(s)| \leq \varepsilon \quad \forall s \in S.$$

Time je dokazano da niz funkcija (p_n) uniformno na S konvergira prema funkciji p.

Ako je $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ otvoren skup za funkciju $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ i za $z_0 \in \Omega$ označavat ćemo sa $m(g; z_0)$ kratnost točke z_0 kao nultočke od g; to ima smisla ukoliko funkcija g nije identički jednaka nuli na komponenti povezanosti skupa Ω koja sadrži točku z_0. Pri tome podrazumijevamo da je $m(g; z_0) = 0$ ako je $g(z_0) \neq 0$.

Teorem 9.2. *Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ područje i neka je $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz funkcija iz $\mathcal{H}(\Omega)$ od kojih nijedna nije identički jednaka nuli. Pretpostavimo da red funkcija*

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} |f_n(z) - 1| \tag{9.30}$$

konvergira lokalno uniformno. Tada beskonačni produkt funkcija $\prod f_n$ *konvergira apsolutno i lokalno uniformno na* Ω *prema funkciji* $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. *Nadalje, za svaku točku* $z_0 \in \Omega$ *vrijedi*

$$m(f; z_0) = \sum_{n\in\mathbb{N}} m(f_n; z_0). \tag{9.31}$$

Pri tome u redu s desne strane formule (9.31) *samo je konačno mnogo članova različito od* 0.

Dokaz: Stavimo li $u_n(z) = f_n(z) - 1$, prva tvrdnja slijedi neposredno iz teorema 9.1. i iz Weierstrassovog teorema 1.6. o lokalno uniformnoj konvergenciji holomorfnih funkcija. Naime, za svaki kompaktan skup $K \subseteq \Omega$ funkcije $u_n|K$ su neprekidne, dakle i ograničene, a red

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} |u_n(z)|$$

konvergira uniformno na K.

Neka je $z_0 \in \Omega$. Izaberimo zatvoren krug $K = \overline{K}(z_0, r) \subseteq \Omega$. Po pretpostavci red (9.30) konvergira uniformno na K. Prema tome, postoji prirodan broj $q \in \mathbb{N}$ takav da je $f_n(z) \neq 0$ za svaku točku $z \in K$ i svaki $n > q$. Stavimo

$$g(z) = \prod_{n\in\mathbb{N},\, n>q} f_n(z).$$

Tada je $g(z) \neq 0$, tj. $m(g; z) = 0 \;\; \forall z \in K$. Kako je

$$f(z) = f_1(z) \cdots f_q(z) g(z),$$

za svaku točku $z \in K$, a posebno za točku $z = z_0$, imamo

$$m(f; z) = m(f_1; z) + \cdots + m(f_q; z) + m(g; z) = \sum_{n\in\mathbb{N}} m(f_n; z).$$

Time je teorem 9.2. u potpunosti dokazan.

Zadatak 9.6. (*a*) *Dokažite da produkt*

$$\prod_{n\in\mathbb{N}} \frac{n^2 z - 1}{n^2 z + 1}$$

apsolutno konvergira za $\operatorname{Re} z \geq 0$, $z \neq 0$. *Da li taj produkt konvergira za* $\operatorname{Re} z < 0$?

(*b*) *Dokažite produkt iz* (*a*) *konvergira lokalno uniformno, ali ne uniformno na otvorenom polukrugu* $\{z \in \mathbb{C};\; \operatorname{Re} z > 0,\; 0 < |z| < 1\}$.

(*c*) *Dokažite da je funkcija* f *definirana produktom iz* (*a*) *na desnoj poluravnini* $\operatorname{Re} z > 0$ *holomorfna i da je* $|f(z)| < 1$. *Koje su nultočke te funkcije?*

Zadatak 9.7. *Neka je* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *niz u* $K(0,1)$ *takav da je* $a_n \neq 0 \;\; \forall n \in \mathbb{N}$ *i da vrijedi*

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} (1 - |a_n|) < +\infty.$$

Dokažite da je sa

$$B(z) = \prod_{n\in\mathbb{N}} \frac{|a_n|}{a_n} \cdot \frac{a_n - z}{1 - \overline{a}_n z}$$

definirana ograničena holomorfna funkcija na $K(0,1)$ *i da vrijedi*

$$N(B) = \{a_n;\; n \in \mathbb{N}\} \qquad i \qquad m(B; z_0) = |\{n \in \mathbb{N};\; a_n = z_0\}, \quad z_0 \in K(0,1).$$

Funkcija B *zove se* **Blaschkeov produkt**.

Ako je $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ područje i ako $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ nije identički jednaka nuli, onda znamo da je $1/f$ meromorfna funkcija na Ω kojoj je $N(f) = \{z \in \Omega;\ f(z) = 0\}$ skup svih polova i red pola $z_0 \in N(f)$ funkcije $1/f$ jednak je $m(f; z_0)$. Nadalje, prema zadatku 2.3. kvocijent f'/f je meromorfna funkcija na Ω, $N(f)$ joj je skup svih polova, svi su ti polovi prvog reda i vrijedi

$$Res\left(\frac{f'}{f}; z_0\right) = m(f; z_0).$$

Teorem 9.3. *Pretpostavimo da su ispunjeni uvjeti teorema 9.2. i neka je*

$$f = \prod_{n\in\mathbb{N}} f_n.$$

Tada je

$$\frac{f'}{f} = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{f_n'}{f_n}, \tag{9.32}$$

pri čemu red s desne strane formule (9.32) *konvergira lokalno uniformno na* $\Omega \setminus N(f)$.

Dokaz: Prije svega primijetimo da je

$$N(f) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} N(f_n).$$

Prema tome, svaki član reda s desne strane formule (9.32) je holomorfna funkcija na području $\Omega \setminus N(f)$.

Neka je K proizvoljan kompaktan podskup područja $\Omega \setminus N(f)$. Stavimo

$$\eta = \min\{|f(z)|;\ z \in K\} > 0. \tag{9.33}$$

Za $n \in \mathbb{N}$ neka je

$$F_n = \prod_{k=1}^{n} f_k = f_1 \cdots f_n.$$

Prema teoremu 9.2. niz funkcija (F_n) konvergira lokalno uniformno na Ω prema funkciji f, dakle, niz restrikcija $(F_n|K)$ konvergira uniformno prema restrikciji $f|K$. Stoga postoji prirodan broj $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da vrijedi

$$n \geq n_0 \qquad \Longrightarrow \qquad |f(z) - F_n(z)| \leq \frac{\eta}{2} \quad \forall z \in K. \tag{9.34}$$

Imamo

$$|F_n(z)| = |f(z) - (f(z) - F_n(z))| \geq |f(z)| - |f(z) - F_n(z)|,$$

pa iz (9.33) i (9.34) slijedi

$$n \geq n_0 \qquad \Longrightarrow \qquad |F_n(z)| \geq \frac{\eta}{2} \quad \forall z \in K. \tag{9.35}$$

Neka je $M > 0$ takav da vrijedi

$$|f(z)| \leq M \qquad \text{i} \qquad |f'(z)| \leq M \qquad \forall z \in K. \tag{9.36}$$

Neka je sada $\varepsilon > 0$ proizvoljno odabrano. Prema Weierstrassovom teoremu 1.6. niz derivacija (F_n') konvergira prema derivaciji f' uniformno na K. Stoga možemo odabrati prirodan broj $n_1 \geq n_0$ takav da vrijedi

$$n \geq n_1 \qquad \Longrightarrow \qquad |F_n(z) - f(z)| \leq \frac{\varepsilon\eta^2}{4M} \quad \text{i} \quad |F_n'(z) - f'(z)| \leq \frac{\varepsilon\eta^2}{4M} \quad \forall z \in K. \tag{9.37}$$

Sada iz (9.33) – (9.37) slijedi za $n \geq n_1$ i $z \in K$:

$$\left|\frac{F_n'(z)}{F_n(z)} - \frac{f'(z)}{f(z)}\right| = \frac{|F_n'(z)f(z) - F_n(z)f'(z)|}{|F_n(z)f(z)|} \leq$$

$$\leq \frac{|F_n'(z) - f'(z)| \cdot |f(z)| + |f'(z)| \cdot |f(z) - F_n(z)|}{|F_n(z)f(z)|} \leq \frac{2}{\eta^2}\left[\frac{\varepsilon\eta^2}{4M} \cdot M + M \cdot \frac{\varepsilon\eta^2}{4M}\right] = \varepsilon.$$

Prema tome, niz (F_n'/F_n) konvergira prema f'/f lokalno unifomrno na $\Omega \setminus N(f)$. Međutim,

$$\frac{F_n'}{F_n} = \frac{f_1'}{f_1} + \cdots + \frac{f_n'}{f_n},$$

a to je upravo $n-$ta parcijalna suma reda (9.32). Time je teorem 9.3. dokazan.

9.2 Faktorizacija cijele funkcije u beskonačni produkt

Neka je f cijela funkcija i pretpostavimo da je skup $N(f)$ svih njezinih nultočaka beskonačan. Ukoliko funkcija f nije identički jednaka nuli skup $N(f)$ nema gomlišta u $\mathbb{C}$. Po Bolzano−Weierstrassovom teoremu za svako $R > 0$ u zatvorenom krugu $\overline{K}(0, R)$ ima samo konačno mnogo elemenata skupa $N(f)$. Budući da je $\mathbb{C}$ unija prebrojivo mnogo krugova $\overline{K}(0, n)$, $n \in \mathbb{N}$, zaključujemo da je skup $N(f)$ prebrojiv. Prema tome, možemo numerirati skup $N(f)$ prirodnim brojevima: $N(f) = \{a_n;\ n \in \mathbb{N}\}$; pretpostavljamo da je $a_n \neq a_m$ za $n \neq m$. Kao što smo malo prije vidjeli, za proizvoljno $R > 0$ postoji prirodan broj $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da vrijedi

$$n \geq n_0 \qquad \Longrightarrow \qquad a_n \notin \overline{K}(0, R) \quad \text{tj.} \quad |a_n| > R.$$

To pokazuje da je

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty, \quad \text{odnosno,} \quad \lim_{n\to\infty} |a_n| = +\infty$$

bez obzira na izbor numeracije skupa $N(f)$.

Razmotrimo sada pitanje: da li postoji cijela funkcija s unaprijed zadanim nultočkama i unaprijed zadanim kratnostima tih nultočaka? Preciznije, da li za dani niz $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ međusobno različitih kompleksnih brojeva koji konvergira prema ∞ i za dani niz $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ prirodnih brojeva postoji cijela funkcija f takva da je $N(f) = \{a_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ i $m(f; a_n) = m_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$? Način da potvrdno odgovorimo na ovo pitanje možemo naslutiti iz teorema 9.2. Treba naći cijele funkcije f_n, $n \in \mathbb{N}$, takve da je a_n jedina nultočka od f_n i to jednostruka i takve da red

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} m_n|f_n(z) - 1|$$

konvergira lokalno uniformno na $\mathbb{C}$; tada će prema teoremu 9.2. i prema propoziciji 9.3. beskonačni produkt

$$\prod_{n\in\mathbb{N}} (f_n(z))^{m_n}$$

predstavljati cijelu funkciju s traženim svojstvima.

Kandidate za funkcije f_n konstruirat ćemo iz sljedećih cijelih funkcija:

$$E_0(z) = 1 - z, \qquad E_k(z) = (1 - z)\mathrm{e}^{z+\frac{z^2}{2}+\cdots+\frac{z^k}{k}}, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{9.38}$$

Funkcija E_k ima jedinu nultočku u točki $z = 1$ i ta je jednostruka. Kandidati za spomenutu funkciju f_n su funkcije $z \mapsto E_k(z/a_n)$.

Polinom u eksponentu s desne strane formule (9.38) je $k-$ta parcijalna suma reda potencija $\sum_{n\in\mathbb{N}} z^n/n$, koji konvergira u jediničnom krugu $K(0,1)$ i tamo predstavlja holomorfnu funkciju $z \mapsto -\mathrm{Ln}\,(1-z)$. Kako je $(1-z)\mathrm{e}^{-\mathrm{Ln}\,(1-z)} = 1$, naslućujemo da je vrijednost funkcije $E_k(z)$ u jedničnom krugu sve bliža jedinici kako k teži u beskonačno. Doista, imamo

Lema 9.2. *Vrijedi*

$$|E_k(z) - 1| \leq |z|^{k+1}, \qquad |z| \leq 1, \quad k \in \mathbb{Z}_+. \tag{9.39}$$

Dokaz: Slučaj $k = 0$ je trivijalan. Neka je $k \geq 1$. E_k je cijela funkcija i $E_k(0) = 1$, možemo pisati

$$E_k(z) = 1 + \sum_{n\in\mathbb{N}} b_n z^n, \qquad z \in \mathbb{C}. \tag{9.40}$$

Odavde i iz definicije funkcije E_k slijedi

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} n b_n z^{n-1} = E_k'(z) = -z^k \mathrm{e}^{z+\frac{z^2}{2}+\cdots+\frac{z^k}{k}} = -z^k \sum_{m\in\mathbb{Z}_+} \frac{1}{m!}\left(z + \frac{z^2}{2} + \cdots + \frac{z^k}{k}\right)^m.$$

Usporedba koeficijenata u dva reda potencija pokazuju da vrijedi

$$b_1 = \cdots = b_k = 0, \qquad b_n \leq 0 \quad \forall n > k. \tag{9.41}$$

Kako je $E_k(1) = 0$, iz (9.40) i (9.41) nalazimo da je

$$\sum_{n>k} |b_n| = -\sum_{n>k} b_n = 1 - E_k(1) = 1. \tag{9.42}$$

Sada iz (9.40), (9.41) i (9.42) dobivamo

$$|E_k(z) - 1| \leq \sum_{n>k} |b_n| \cdot |z|^n = |z|^{k+1} \sum_{n>k} |b_n| \cdot |z|^{n-k-1} \leq |z|^{k+1} \sum_{n>k} |b_n| = |z|^{k+1}.$$

Sljedeći nam teorem daje potvrdan odgovor na prije postavljeno pitanje:

Teorem 9.4. *Neka je $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz međusobno različitih kompleksnih brojeva koji konvergira prema ∞ i $a_n \neq 0$ $\forall n$. Neka je $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz prirodnih brojeva. Postoji niz $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nenegativnih cijelih brojeva takav da beskonačni produkt*

$$h(z) = \prod_{n\in\mathbb{N}} \left[E_{k_n}(z/a_n)\right]^{m_n} \tag{9.43}$$

konvergira apsolutno i lokalno uniformno na $\mathbb{C}$ i definira cijelu funkciju h takvu da je

$$N(h) = \{a_n;\ n \in \mathbb{N}\} \qquad i \qquad m(h; a_n) = m_n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Dokaz: Stavimo

$$q_0 = 0, \qquad q_n = m_1 + \cdots + m_n, \qquad k_n = q_n - 1, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Neka je $r > 0$. Budući da je $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$, postoji prirodan broj p takav da vrijedi

$$n > p \qquad \Longrightarrow \qquad |a_n| \geq 2r.$$

To znači da je
$$\frac{r}{|a_n|} \leq \frac{1}{2} \qquad \forall n > p,$$
pa imamo
$$\left(\frac{r}{|a_n|}\right)^{q_n} \leq 2^{-q} \qquad \text{za} \quad q_{n-1} < q \leq q_n, \quad q \in \mathbb{N} \quad \text{i} \quad n > p.$$
Odavde je
$$m_n \left(\frac{r}{|a_n|}\right)^{q_n} \leq \sum_{q_{n-1}<q\leq q_n} 2^{-q} \qquad \forall n > p,$$
pa slijedi
$$\sum_{n>p} m_n \left(\frac{r}{|a_n|}\right)^{k_n+1} \leq \sum_{q>q_{p-1}} 2^{-q} = 2^{-q_{p-1}}.$$
Prema tome, vrijedi
$$\sum_{n\in\mathbb{N}} m_n \left(\frac{r}{|a_n|}\right)^{k_n+1} < +\infty \qquad \forall r > 0. \tag{9.44}$$

Neka je sada $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bilo koji niz nenegativnih cijelih brojeva takav da vrijedi (9.44). Neka je $r > 0$ i izaberimo $p \in \mathbb{N}$ tako da bude $|a_n| \geq r \ \forall n > p$. Prema lemi reflm 9.2. za $|z| \leq r$ i za $n > p$ vrijedi
$$\left|E_{k_n}\left(\frac{z}{a_n}\right) - 1\right| \leq \left|\frac{z}{a_n}\right|^{k_n+1} \leq \left(\frac{r}{|a_n|}\right)^{k_n+1},$$
pa (9.44) pokazuje da red
$$\sum_{n\in\mathbb{N}} m_n \left|E_{k_n}(z/a_n) - 1\right|$$
konvergira uniformno na zatvorenom krugu $\overline{K}(r, 0)$. No to znači da taj red konvergira lokalno uniformno na $\mathbb{C}$. Tvrdnja teorema 9.4. sada slijedi iz teorema 9.2. i propozicije 9.3.

Zadatak 9.8. *Napišite cijelu funkciju f takvu da je $N(f) = \mathbb{Z} + i\mathbb{Z} = \{m + in;\ m, n \in \mathbb{Z}\}$ da su sve te nultočke jednostruke.*

Zadatak 9.9. *Ako u teoremu 9.4. vrijedi*
$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{m_n}{|a_n|} < +\infty$$
onda tvrdnja tog teorema vrijedi za $k_n = 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$, odnosno
$$h(z) = \prod_{n\in\mathbb{N}} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right).$$
Dokažite to direktno, bez pozivanja na teorem 9.4.

Posljedica teorema 9.4. je **Weierstrassov teorem o faktorizaciji cijele funkcije**:

Teorem 9.5. *Neka je f cijela funkcija, $N(f) \setminus \{0\} = \{a_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ uz $a_n \neq a_m$ za $n \neq m$, $m = m(f; 0)$ i $m_n = m(f; a_n)$ za $n \in \mathbb{N}$. Tada postoji cijela funkcija g i niz $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nenegativnih cijelih brojeva takvi da je*
$$f(z) = z^m e^{g(z)} \prod_{n\in\mathbb{N}} \left[E_{k_n}(z/a_n)\right]^{m_n} \tag{9.45}$$
i pri tome beskonačni produkt u (9.45) konvergira apsolutno i lokalno uniformno na $\mathbb{C}$.

Dokaz: Neka je niz $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ izabran kao u teoremu 9.4. i neka je h cijela funkcija definirana formulom (9.43). Neka je F holomorfna funkcija na skupu $\mathbb{C}^* \setminus \{a_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ definirana sa

$$F(z) = \frac{f(z)}{z^m h(z)}.$$

Budući da je $m(f; a_n) = m(h; a_n)$ za svaki $n \in \mathbb{N}$ i jer je 0 nultočka kratnosti $m = m(f; 0)$ za funkciju $z \mapsto z^m h(z)$, vidimo da su točke 0 i a_n, $n \in \mathbb{N}$, uklonjivi singulariteti os F. To znači da se F proširuje do cijele funkcije, koju će i dalje označavati sa F, i da vrijedi $N(F) = \emptyset$. Kompleksna ravnina $\mathbb{C}$ je jednostavno povezano područje, pa ima svojstvo logaritma. To znači da postoji cijela funkcija g takva da je $F = \mathrm{e}^g$. Slijedi

$$f(z) = z^m \mathrm{e}^{g(z)} h(z), \qquad z \in \mathbb{C},$$

a to je upravo formula (9.45).

Zadatak 9.10. *Dokažite da je svaka meromorfna funkcija na $\mathbb{C}$ kvocijent dviju cijelih funkcija.*

9.3 Algebarska struktura skupa meromorfnih funkcija

Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ neprazan otvoren skup. Sa $\mathcal{M}(\Omega)$ označavat ćemo skup svih meromorfnih funkcija na Ω. Meromorfne funkcije na Ω mogu se zbrajati i množiti. Pri tome valja imati na umu da točka koja je pol dviju meromorfnih funkcija ne mora biti pol njihova zbroja, nego uklonjiv singularitet: to je tako ako je zbroj glavnih dijelova Laurentovih razvoja tih dviju meromorfnih funkcija oko tog pola jednak nuli. Slično, točka koja je pol jedne od dviju meromorfnih funkcija ne mora biti pol njihova produkta, nego ponovo uklonjiv singularitet: to je tako ako je ta točka nultočka druge funkcije i to kratnosti veće ili jednake redu pola prve funkcije. Pri definiciji zbroja ili produkta dviju meromorfnih funkcija uvijek ćemo pretpostavljati da su svi uklonjivi singulariteti uklonjeni tako da je rezultat meromorfna funkcija. Uz ovako definirane zbroj i produkt skup $\mathcal{M}(\Omega)$ postaje komutativan unitalan prsten. Ukoliko je Ω područje, $\mathcal{M}(\Omega)$ je polje. Doista, uzmimo da je $f \in \mathcal{M}(\Omega)$, $f \neq 0$, i neka je P skup svih polova, a N skup svih nultočaka funkcije f. Tada je $\Omega \setminus P$ područje i po teoremu jedinstvenosti 1.11. skup N nema gomilišta u $\Omega \setminus P$. Nadalje, točka $a \in P$ ne može biti gomilište skupa N, jer ako f promatramo kao neprekidnu funkciju sa Ω u $\overline{\mathbb{C}}$, onda je $f(a) = \infty$. Prema tome, skup N nema gomilišta u Ω. Definiramo sada meromorfnu funkciju h na Ω na sljedeći način: skup polova od h je N, a na $\Omega \setminus N$ je

$$h(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{f(z)} & \text{ako je} \quad z \in \Omega \setminus (N \cup P), \\[2ex] 0 & \text{ako je} \quad z \in P. \end{cases}$$

Tada je $h \in \mathcal{M}(\Omega)$ i u skladu s definicijom množenja u $\mathcal{M}(\Omega)$ nalazimo da je $fh = 1$. Dakle, svaka je meromorfna funkcija $f \neq 0$ u prstenu $\mathcal{M}(\Omega)$ invertibilna, odnosno, $\mathcal{M}(\Omega)$ je polje.

Svaka holomorfna funkcija $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ je ujedno meromorfna funkcija na Ω; njen je skup polova prazan. Dakle, $\mathcal{H}(\Omega) \subseteq \mathcal{M}(\Omega)$, preciznije, $\mathcal{H}(\Omega)$ je unitalan potprsten prstena $\mathcal{M}(\Omega)$. Cilj nam je u ovom odjeljku generalizirati zadatak 9.10. i dokazati da se svaka meromorfna funkcija na proizvoljnom nepraznom nepraznom otvorenom skupu $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ može napisati kao kvocijent dviju holomorfnih funkcija na Ω. Posebno, ako je Ω područje, onda je $\mathcal{M}(\Omega)$ polje razlomaka integralne domene $\mathcal{H}(\Omega)$. U tu svrhu najprije ćemo generalizirati teorem 9.4. na holomorfne funkcije na proizvoljnom nepraznom otvorenom skupu $\Omega \subseteq \mathbb{C}$.

Teorem 9.6. *Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ neprazan otvoren skup i neka je N podskup od Ω koji nema gomilišta u Ω. Neka je zadana funkcija $m : N \to \mathbb{N}$. Tada postoji funkcija $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ takva da je $N(g) = N$ i $m(g; a) = m(n)$ $\forall a \in N$.*

Dokaz: Ako je skup N konačan, polinom

$$g(z) = \prod_{a \in N} (z - a)^{m(a)}$$

očito zadovoljava tvrdnje teorema. U daljnjem pretpostavljamo da je skup N beskonačan. Kako N nema gomilišta u Ω, taj je skup prebrojiv, jer je prema zadatku 4.3. Ω unija prebrojivog skupa kompaktnih podskupova od Ω. Stoga možemo pisati $N = \{a_n;\ n \in \mathbb{N}\}$, pri čemu je $a_n \neq a_m$ za $n \neq m$.

Fiksirajmo sada točku $\Omega \setminus N$. Budući da točka a nije gomilište skupa N, postoji $r > 0$ takav da je

$$\overline{K}(a, r) \subseteq \Omega \qquad \text{i} \qquad |a_n - a| \geq r \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Stavimo

$$\Omega_1 = \left\{ \frac{1}{z - a};\ z \in \Omega \setminus \{a\} \right\}, \qquad b_n = \frac{1}{a_n - a}, \quad n \in \mathbb{N}, \qquad N_1 = \{b_n;\ n \in \mathbb{N}\}.$$

Tada je Ω_1 otvoren podskup od $\mathbb{C}$ i N_1 je podskup od Ω_1 koji nema gomilišta u Ω_1. Nadalje, kako je $\overline{K}(a, r) \subseteq \Omega$, skup

$$\overline{K}(0; 1/r, +\infty) = \{z \in \mathbb{C};\ |z| \geq 1/r\}$$

je sadržan u Ω_1. Nadalje, iz $|a_n - a| \geq r$ $\forall n \in \mathbb{N}$ slijedi $|b_n| \leq 1/r$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Dokazat ćemo sada da postoji funkcija $g_1 \in \mathcal{H}(\Omega_1)$ sa sljedeća tri svojstva:

(a) $N(g_1) = N_1$;

(b) $m(g_1; b_n) = m(a_n)$ $\forall n \in \mathbb{N}$;

(c) za neko $R \geq 1/r$ funkcija g_1 je ograničena na skupu $K(0; R, +\infty) = \{z \in \mathbb{C};\ |z| > R\}$.

Pretpostavimo da smo pronašli funkciju $g_1 \in \mathcal{H}(\Omega_1)$ sa svojstvima (a), (b) i (c i stavimo

$$g(z) = g_1\left(\frac{1}{z - a}\right), \qquad z \in \Omega \setminus \{a\}.$$

Tada je g holomorfna funkcija na $\Omega \setminus \{a\}$. Zbog (c) ona je ograničena na punktiranom krugu $K^*(a, 1/R) = \{z \in \mathbb{C};\ 0 < |z - a| < 1/R\}$, pa je prema teoremu 2.1. točka a uklonjiv singularitet funkcije g. Jedinstveno njeno proširenje do holomorfne funkcije na Ω i dalje označavamo sa g. Prema (a) skup svih nultočaka funkcije g u skupu $\Omega \setminus \{a\}$ je

$$\left\{ z;\ \frac{1}{z - a} = b_n \ \text{ za neko } \ n \in \mathbb{N} \right\} = \{a_n;\ n \in \mathbb{N}\} = N,$$

a zbog (b) vrijedi

$$m(g; a_n) = m(g_1; b_n) = m(a_n) \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Prema tome, ako je $g(a) \neq 0$, onda funkcija g ima svojstva iz tvrdnje teorema 9.6. Ako je pak a nultočka funkcije g kratnosti k, onda ta svojstva ima funkcija $z \mapsto (z - a)^{-k} g(z)$. Dakle, teorem 9.6. bit će u potpunosti dokazan ako dokažemo egzistenciju funkcije $g_1 \in \mathcal{H}(\Omega_1)$ sa svojstvima (a), (b) i (c).

Neka je $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz u Ω_1 takav da je $N_1 = \{c_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ i da se za svako $j \in \mathbb{N}$ tgočka b_j pojavljuje u nizu (c_n) točno $m(a_j)$ puta. Budući da je skup $\mathbb{C} \setminus \Omega_1$ zatvoren, za svako $n \in \mathbb{N}$ postoji točka $z_n \in \mathbb{C} \setminus \Omega_1$ takva da je

$$|c_n - z_n| = d(c_n, \mathbb{C} \setminus \Omega_1) = \inf\{|c_n - z|;\ z \in \mathbb{C} \setminus \Omega_1\}.$$

Tada je

$$\lim_{n\to\infty} |c_n - z_n| = 0. \tag{9.46}$$

Doista, pretpostavimo da (9.46) ne stoji. Tada postoji $\varepsilon > 0$ i beskonačan skup $S \subseteq \mathbb{N}$ takvi da je

$$d(c_n, \mathbb{C} \setminus \Omega_1) = |c_n - z_n| \geq \varepsilon \qquad \forall n \in S. \tag{9.47}$$

Skup $\{c_n;\ n \in S\}$ je podskup od N_1, dakle, taj skup nema gomilišta u Ω_1. S druge strane, kako je $|b_n| \leq 1/r\ \ \forall n \in \mathbb{N}$, skup $\{c_n;\ n \in S\}$ sadržan je u kompaktnom skupu $\overline{K}(0, 1/r)$. To znači da skup $\{c_n;\ n \in S\}$ ima gomilište $c \in \mathbb{C} \setminus \Omega_1$. Stoga postoji $n \in S$ takav da je $|c - c_n| < \varepsilon$. Za taj n dobivamo $d(c_n, \mathbb{C} \setminus \Omega_1) \leq |c - c_n| < \varepsilon$, a to je u suprotnosti sa (9.47). Ova kontradikcija pokazuje da vrijedi (9.46).

Funkcija

$$z \mapsto E_n\left(\frac{c_n - z_n}{z - z_n}\right) \tag{9.48}$$

je holomorfna na skupu $\mathbb{C} \setminus \{z_n\} \supseteq \Omega_1$, jedina joj je nultočka c_n i ona je jednostruka. Dokazat ćemo sada da red

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \left| E_n\left(\frac{c_n - z_n}{z - z_n}\right) - 1 \right| \tag{9.49}$$

konvergira lokalno uniformno na $\Omega - 1$. Neka je $K \subseteq \Omega_1$ kompaktan skup. Tada je

$$d = d(K, \mathbb{C} \setminus \Omega_1) = \inf\{|z - w|;\ z \in K,\ w \in \mathbb{C} \setminus \Omega_1\} > 0.$$

Zbog (9.46) postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da vrijedi

$$n \geq n_0 \qquad \Longrightarrow \qquad |c_n - z_n| \leq \frac{d}{2}. \tag{9.50}$$

Za svaki $n \in \mathbb{N}$ i svaku točku $z \in K$ je

$$|z - z_n| \geq d(K, \mathbb{C} \setminus \Omega_1) = d,$$

pa iz (9.50) slijedi

$$\left|\frac{c_n - z_n}{z - z_n}\right| \leq \frac{1}{2} \qquad \forall n \geq n_0 \quad \text{i} \quad \forall z \in K.$$

Odavde i iz leme 9.2. dobivamo

$$\left| E_n\left(\frac{c_n - z_n}{z - z_n}\right) - 1 \right| \leq \frac{1}{2^{n+1}} \qquad \forall n \geq n_0 \quad \text{i} \quad \forall z \in K.$$

Odatle slijedi da red (9.49) konvergira uniformno na K. Kako je K bio proizvoljno odabran kompaktan podskup od Ω_1, zaključujemo da red (9.49) konvergira lokalno uniformno na Ω_1.

Prema teoremu 9.2. sa

$$g_1(z) = \prod_{n\in\mathbb{N}} E_n\left(\frac{c_n - z_n}{z - z_n}\right), \qquad z \in \Omega - 1,$$

je zadana holomorfna funkcija na Ω_1. Nadalje, budući da je c_n jedina nultočka funkcije (9.48), vrijedi $N(g_1) = \{c_n;\ n \in \mathbb{N}\} = N_1$, odnosno, vrijedi (a). Točka c_n je jednostruka nultočka funkcije (9.48), a točka b_j (za bilo koji $j \in \mathbb{N}$) pojavljuje se u nizu (c_n) točno $m(a_j)$ puta. Stoga posljednja tvrdnja teorema 9.2. povlači da je $m(g_1; b_j) = m(a_j)$. Prema tome, vrijedi i (b).

Treba još dokazati da funkcija g_1 ima svojstvo (c), tj. da postoji $R \geq 1/r$ takav da je funkcija g_1 ograničena na skupu $\{z \in \mathbb{C};\ |z| > R\}$. U tu svrhu dokazat ćemo sljedeće svojstvo funkcija E_n :

Lema 9.3. *Vrijedi*

$$\ln |E_n(z)| \leq \frac{|z|^{k+1}}{1-|z|} \qquad \forall n \in \mathbb{Z}_+ \quad i \quad \forall z \in K(0,1).$$

Dokaz: Doista, za $|z| < 1$ imamo redom

$$\ln |E_k(z)| = \mathrm{Re}\left[\ln(1-z) + z + \frac{z^2}{2} + \cdots + \frac{z^k}{k}\right] \leq \sum_{j>k} \frac{|z|^j}{j} \leq \sum_{j>k} |z|^j = \frac{|z|^{k+1}}{1-|z|}.$$

Neka je $z \in \mathbb{C}$, $|z| \geq 5/r$. Kako je $z_n \in \mathbb{C} \setminus \Omega_1$ za svaki $n \in \mathbb{N}$, i kako je $\overline{K}(0; 1/r, +\infty) \subseteq \Omega_1$, to je $|z_n| < 1/r$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Stoga imamo

$$|z - z_n| \geq \frac{5}{r} - \frac{1}{r} = \frac{4}{r} \qquad \text{i} \qquad |c_n - z_n| \leq |c_n| + |z_n| \leq \frac{1}{r} + \frac{1}{r} = \frac{2}{r}.$$

Odatle slijedi

$$\left|\frac{c_n - z_n}{z - z_n}\right| \leq \frac{2/r}{4/r} = \frac{1}{2} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{i} \quad \forall z \in \overline{K}(0; 5/r, +\infty).$$

Odatle i iz leme 9.3. dobivamo

$$\ln \left|E_n\left(\frac{c_n - z_n}{z - z_n}\right)\right| \leq 2\frac{1}{2^{n+1}} = 2^{-n} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{i} \quad \forall z \in \overline{K}(0; 5/r, +\infty).$$

Stoga za $|z| \geq 5/r$ nalazimo

$$\ln |g_1(z)| \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \ln \left|E_n\left(\frac{c_n - z_n}{z - z_n}\right)\right| \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} 2^{-n} = 1.$$

Dakle, vrijedi

$$|g_1(z)| \leq \mathrm{e} \qquad \forall z \in \overline{K}(0; 5/r, +\infty).$$

Time je teorem 9.6. u potpunosti dokazan.

Teorem 9.7. *Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ neprazan otvoren skup u $f \in \mathcal{M}(\Omega)$. Tada postoje funkcije $g, h \in \mathcal{H}(\Omega)$ takve da za svaku točku $z \in \Omega$, koja nije pol funkcije f, vrijedi $f(z) = \dfrac{h(z)}{g(z)}$, odnosno, takve da je funkcija g invertibilni element prstena $\mathcal{M}(\Omega)$ i da u tom prstenu vrijedi $f = hg^{-1}$.*

Dokaz: Pretpostavimo najprije da je Ω područje. Ako je $f \equiv 0$, možemo uzeti $h \equiv 0$ i $g \equiv 1$. Pretpostavimo da je $f \not\equiv 0$. Neka je P skup svih polova funkcije f i za $a \in P$ neka je $m(a)$ red tog pola funkcije f. Prema teoremu 9.6. postoji funkcija $g \in \mathcal{H}(\Omega))$ takva da je $N(g) = P$ i $mg; a) = m(a)$ $\forall a \in P$. Definiramo funkciju $h \in \mathcal{H}(\Omega \setminus P)$ sa

$$h(z) = g(z)f(z), \qquad z \in \Omega \setminus P.$$

Neka je $a \in P$. Tada postoji $r > 0$ takav da je $K(a,r) \subseteq \Omega$ i $K(a,r) \cap P = \{a\}$ i postoje holomorfne funkcije g_1 i f_1 na krugu $K(a,r)$ takve da je

$$g(z) = (z-a)^{m(a)} g_1(z) \qquad \forall z \in K(a,r) \qquad \text{i} \qquad g_1(a) \neq 0$$

i

$$f(z) = (z-a)^{-m(a)} f_1(z) \qquad \forall z \in K^*(a,r) \qquad \text{i} \qquad f_1(a) \neq 0.$$

Sada za $z \in K^*(a,r)$ imamo $h(z) = g_1(z) f_1(z)$. Prema tome, točka a je uklonjiv singularitet funkcije h. Kako je točka $a \in P$ bila proizvoljna, zaključujemo da se funkcija h (jedinstveno) proširuje do holomorfne funkcije na Ω. Sada za $z \in \Omega \setminus P$ vrijedi $f(z) = \dfrac{h(z)}{g(z)}$.

Neka je sada Ω proizvoljan neprazan otvoren podskup od $\mathbb{C}$ i neka su Ω_j, $j \in J$, sve komponente povezanosti skupa Ω. Za svako $j \in J$ skup Ω_j je područje i vrijedi $f|\Omega_j \in \mathcal{M}(\Omega_j)$. Prema prvom dijelu dokaza postoje funkcije $g_j, h_j \in \mathcal{H}(\Omega_j)$ takve da je $f(z) = \dfrac{h_j(z)}{g_j(z)}$ za $z \in \Omega_j \setminus P$; pri tome je P skup svih polova funkcije f. Definiramo sada funkcije $g, h : \Omega \to \mathbb{C}$ sa

$$g|\Omega_j = g_j, \qquad h|\Omega_j = h_j, \qquad j \in J.$$

Tada su $g, h \in \mathcal{H}(\Omega)$ i vrijedi $f(z) = \dfrac{h(z)}{g(z)}$ za $z \in \Omega \setminus P$.

9.4 Jensenova formula

Dublje rezultate o cijeloj funkciji $f \neq 0$ i njezinoj faktorizaciji u beskonačni produkt dobivamo proučavanjem tzv. **modula cijele funkcije** f :

$$M_f(r) = \max\{|f(z)|;\ |z| = r\}, \qquad r \geq 0.$$

Iz principa maksimuma modula slijedi da je $M_f(r)$ maksimum funkcije $z \mapsto |f(z)|$ na zatvorenom krugu $\overline{K}(0,r)$. Posebno, ako je cijela funkcija nekonstantna, funkcija $r \mapsto M_f(r)$ je striktno rastuća.

Ako cijela funkcija f nije polinom, onda njezin modul M_f raste brže od svake potencije r^m. Doista, napišimo cijelu funkciju kao red potencija

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}_+} c_n z^n, \qquad z \in \mathbb{C},$$

i pretpostavimo da postoje prirodan broj m i realni brojevi $M > 0$ i $R > 0$ takvi da vrijedi

$$M_f(r) \leq M r^m \qquad \text{za} \quad r \geq R.$$

Za koeficijente c_n u redu potencija funkcije f vrijede tzv. **Cauchyjeve nejednakosti**:

$$|c_n| \leq \frac{M_f(r)}{r^n} \qquad \forall n \in \mathbb{Z}_+ \quad \text{i} \quad \forall r > 0.$$

To je neposredna posljedica integralne formule za koeficijente Taylorovog reda: ako je γ_r pozitivno orijentirana kružnica oko 0 radijusa r, odnosno, $\gamma_r(t) = r\mathrm{e}^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$, onda je

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{z^{n+1}} \mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f\left(r\mathrm{e}^{it}\right)}{r^{n+1} \mathrm{e}^{i(n+1)t}} ir\mathrm{e}^{it} \mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} f\left(r\mathrm{e}^{it}\right) \mathrm{e}^{-int} \mathrm{d}t,$$

pa slijedi

$$|c_n| \leq \frac{1}{2\pi r^n}\int_0^{2\pi} \left|f\left(r\mathrm{e}^{it}\right)\right| \mathrm{d}t \leq \frac{M_f(r)}{r^n}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{d}t = \frac{M_f(r)}{r^n}$$

Kako je po pretpostavci $M_f(r) \leq Mr^m$ za $r \geq R$, dobivamo

$$|c_n| \leq Mr^{m-n} \qquad \forall r \geq R \quad \mathrm{i} \quad \forall n \in \mathbb{Z}_+.$$

Ako u toj nejednakosti za $n > m$ pustimo da r teži u $+\infty$, zaključujemo da je $c_n = 0$. To znači da je f polinom stupnja $\leq m$.

Interesantno je da postoji određena veza između sume kratnosti $n_f(r) = N(f; \overline{K}(0,r))$ svih nultočaka cijele funkcije f u zatvorenom krugu $\overline{K}(0,r)$ i modula te funkcije. Ta je veza dana **Jensenovom nejednakosti**

$$n_f(r) \leq M_f(\mathrm{e}r), \tag{9.51}$$

koja vrijedi uz dodatni tehnički uvjet $|f(0)| = 1$. Iz formule (9.51) slijedi da cijela funkcija f, koja u krugu $|z| \leq r$ ima mnogo nultočaka, mora brzo rasti u krugu $|z| \leq \mathrm{e}r$. Jensenova nejednakost (9.51) neposredno slijedi iz ove važne formule:

Teorem 9.8. (**Jensenova formula**) *Neka je f meromorfna funkcija na krugu $K(0,R)$ i $f(0) \neq 0$. Neka su $a_1,\dots,a_n$ sve nultočke funkcije f u krugu $|z| < r < R$ s kratnostima $m_1,\dots,m_n$ i neka su $b_1,\dots,b_q$ svi polovi te funkcije u krugu $|z| < r$ s redovima $k_1,\dots,k_q$. Pretpostavimo da f nema ni nultočaka ni polova na kružnici $|z| = r$. Tada vrijedi Jensenova formula*

$$\ln|f(0)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln\left|f\left(r\mathrm{e}^{it}\right)\right| \mathrm{d}t - \sum_{j=1}^n m_j \ln\left(\frac{r}{|a_j|}\right) + \sum_{i=1}^q k_i \ln\left(\frac{r}{|b_i|}\right). \tag{9.52}$$

Dokaz: Ako je F holomorfna funkcija na području koje sadrži zatvoren krug $|z| \leq r$, Cauchy-jeva integralna formula daje

$$F(0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F\left(r\mathrm{e}^{it}\right) \mathrm{d}t.$$

Odavde je

$$\operatorname{Re} F(0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \operatorname{Re} F\left(r\mathrm{e}^{it}\right) \mathrm{d}t. \tag{9.53}$$

Iz pretpostavki teorema slijedi da se funkcija

$$z \mapsto g(z)(z-a_1)^{-m_1}\cdots(z-a_n)^{-m_n}(z-b_1)^{k_1}\cdots(z-b_q)^{k_q} f(z) \tag{9.54}$$

proširuje do meromorfne funkcije na krugu $|z| < R$ koja u zatvorenom krugu $|z| \leq r$ nema ni nultočaka ni polova, dakle, ni u nekom malo većem otvorenom krugu $|z| < \rho$, $r < \rho \leq R$. No taj je otvoren krug jednostavno povezano područje, pa ima svojstvo logaritma. Stoga postoji holomorfna funkcija F na krugu $|z| < \rho$ takva da je $g(z) = \mathrm{e}^{F(z)}$. Tada je $\operatorname{Re} F(z) = \ln|g(z)|$, pa (9.53) prelazi u

$$\ln|g(0)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln\left|g\left(r\mathrm{e}^{it}\right)\right| \mathrm{d}t,$$

a to zajedno sa (9.54) daje

$$\ln\left[|f(0)|\cdot|a_1|^{-m_1}\cdots|a_n|^{-m_n}\cdot|b_1|^{k_1}\cdots|b_q|^{k_q}\right] =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[\ln\left|f\left(r\mathrm{e}^{it}\right)\right| - \sum_{j=1}^n m_j \ln\left|r\mathrm{e}^{it}-a_j\right| + \sum_{i=1}^q k_i \ln\left|r\mathrm{e}^{it}-b_i\right|\right] \mathrm{d}t. \tag{9.55}$$

Sada nam treba tehnička lema:

Lema 9.4. *Za $c \in \mathbb{C}$, $|c| < r$, vrijedi*

$$J = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln \left| re^{it} - c \right| \mathrm{d}t = \ln r.$$

Dokaz: Neka je c' točka simetrična točki c u odnosu na kružnicu $|z| = r$. Tada je $\overline{c}c' = r^2$ pa za $|z| = r$, odnosno, $z\overline{z} = r^2$, imamo

$$\frac{|z-c|}{|z-c'|} = \frac{|c|}{r}, \qquad \text{dakle,} \qquad \ln|z-c| = \ln|z-c'| + \ln\frac{|c|}{r}.$$

Stoga je

$$J = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln \left| re^{it} - c' \right| \mathrm{d}t + \ln\frac{|c|}{r}.$$

Točka c' leži izvan zatvorenog kruga $|z| \leq r$, dakle, funkcija $F(z) = \mathrm{Ln}\,(z - c')$ holomorfna je na malo većem otvorenom krugu, npr. na $|z| < |c'|$. Kako je $\mathrm{Re}\, F(z) = \ln|z - c'|$, iz (9.53) slijedi

$$J = \ln|0 - c'| + \ln\frac{|c|}{r} = \ln\frac{|\overline{c}c'|}{r} = \ln r.$$

Prema tome, formula (9.56) prelazi u

$$\ln|f(0)| - \sum_{j=1}^{n} m_j \ln|a_j| + \sum_{i=1}^{q} k_i \ln|b_i| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln\left|f\left(re^{it}\right)\right| \mathrm{d}t - \sum_{j=1}^{n} m_j \ln r + \sum_{i=1}^{q} k_i \ln r,$$

a to je upravo formula (9.52).

Napomena: Jensenova formula vrijedi i u slučaju kad se na kružnici $|z| = r$ nalaze neke od nultočaka a_j ili polova b_k funkcije f, no u tom slučaju integral u desnoj strani formule treba uzeti kao **glavnu vrijednost integrala**. To se dokazuje pomoću općenitije formulacije leme 9.4.: formula u lemi vrijedi i ako je $|c| = r$, ali tada se radi o glavnoj vrijedosti integrala: ako je $c = re^{i\varphi}$ i $0 < \varphi < 2\pi$, onda je

$$\ln r = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{2\pi}\left[\int_0^{\varphi-\varepsilon} \ln|re^{it} - c|\mathrm{d}t + \int_{\varphi+\varepsilon}^{2\pi} \ln|re^{it} - c|\mathrm{d}t\right],$$

odnosno, za $c = r$ vrijedi

$$\ln r = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{2\pi}\int_{\varepsilon}^{2\pi-\varepsilon} \ln|re^{it} - r|\mathrm{d}t.$$

Za dokaz te činjenice v. zadatak 2. u uputu za njegovo rješavanje na str. 308 knjige

> H. Kraljević i S. Kurepa, *Matematička analiza 4, Funkcije kompleksne varijable*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1986.

U daljnjem za cijelu funkciju $f \neq 0$ i za $r > 0$ sa $n_f(r)$ označavamo zbroj kratnosti svih nultočaka funkcije f u krugu $|z| \leq r$. Dakle, uz oznaku uvedenu prije iskaza teorema 2.5. je

$$n_f(r) = N\left(f; \overline{K}(0,r)\right).$$

Kao posljedicu Jensenove formule dobivamo sljedeća svojstva funkcije n_f :

Propozicija 9.4. *Ako je f cijela funkcija i $f(0) \neq 0$, onda za svako $r > 0$ vrijedi*

$$\int_0^r \frac{1}{t}\, n_f(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln\left|f\left(re^{it}\right)\right|\mathrm{d}t - \ln|f(0)|, \tag{9.56}$$

$$\int_0^r \frac{1}{t}\, n_f(t)\mathrm{d}t \leq \ln M_f(r) - \ln|f(0)|, \tag{9.57}$$

$$n_f(r) \leq \ln M_f(\mathrm{e}r) - \ln|f(0)|. \tag{9.58}$$

Dokaz: Neka su $a_1, \ldots, a_n$ sve nultočke funkcije f u krugu $|z| \leq r$, numerirane tako da je $0 < |a_1| \leq |a_2| \leq \cdots \leq |a_n|$, i neka je m_j kratnost nultočke a_j. Stavimo $p_0 = 0$, te $p_j = m_1 + \cdots + m_j$ i $r_j = |a_j|$ za $j = 1, \ldots, n$. Lijeva strana od (9.56) jednaka je

$$\int_0^{r_1} \frac{1}{t}\, n_f(t)\mathrm{d}t + \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{t}\, n_f(t)\mathrm{d}t + \cdots + \int_{r_{n-1}}^{r_n} \frac{1}{t}\, n_f(t)\mathrm{d}t + \int_{r_n}^{r} \frac{1}{t}\, n_f(t)\mathrm{d}t =$$

$$= 0 + p_1 \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t + \cdots + p_{n-1}\int_{r_{n-1}}^{r_n} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t + p_n \int_{r_n}^{r} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t =$$

$$= p_1(\ln r_2 - \ln r_1) + \cdots + p_{n-1}(\ln r_n - \ln r_{n-1}) + p_n(\ln r - \ln r_n) =$$

$$= p_n \ln r - \sum_{j=1}^{n}(p_j - p_{j-1})\ln r_j = p_n \ln r - \sum_{j=1}^{n} m_j \ln r_j = \sum_{j=1}^{n} m_j \ln\left(\frac{r}{|a_j|}\right).$$

No ovo je prema Jensenovoj formuli (9.52) upravo jednako desnoj strani od (9.56).

Nejednakost (9.57) slijedi neposredno iz jednakosti (9.56).

Napokon, budući da je funkcija $r \mapsto n_f(r)$ nepadajuća, iz (9.57) dobivamo

$$\ln M_f(\mathrm{e}r) - \ln|f(0)| \geq \int_0^{r\mathrm{e}} \frac{1}{t}\, n_f(t)\mathrm{d}t \geq \int_r^{r\mathrm{e}} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \geq n_f(r)\int_r^{r\mathrm{e}} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = n_f(r).$$

Primjedba: Ako je 0 $m-$struka nultočka funkcije f, onda se Jensenova formula, a time i propozicija 9.4. mogu primijeniti na funkciju $z \mapsto z^{-m}f(z)$. Ukoliko f nije polinom ta se cijela funkcija u beskonačnosti ponaša jednako kao i funkcija f.

Zadatak 9.11. *Dokažite da za cijelu funkciju f, takvu da je $|f(0)| = 1$, vrijedi*

$$n_f(r)\ln a \leq M_f(ar), \qquad r > 0, \quad a > 1.$$

9.5 Cijele funkcije konačnog genusa

Neka je f cijela funkcija s beskonačno mnogo nultočaka. Ponekad je zgodno skup $N(f) \setminus \{0\}$ svih njenih nultočaka različitih od nule numerirati tako da bude

$$N(f) \setminus \{0\} = \{a_n;\ n \in \mathbb{N}\} \qquad \text{i} \qquad 0 < |a_1| \leq |a_2| \leq \cdots\cdots$$

i da se svaka nultočka od f pojavljuje u nizu (a_n) točno onoliko puta kolika joj je kratnost. Tada kažemo da je skup $N(f)\setminus\{0\}$ **standardno numeriran**. Weierstrassov teorem o faktorizaciji tada poprima oblik

$$f(z) = z^m \mathrm{e}^{g(z)} h(z), \tag{9.59}$$

gdje je g cijela funkcija,

$$h(z) = \prod_{n\in\mathbb{N}} E_{k_n}\left(\frac{z}{a_n}\right) \tag{9.60}$$

i

$$E_k(z) = (1 - z)\mathrm{e}^{z + \frac{z^2}{2} + \cdots + \frac{z^k}{k}}. \tag{9.61}$$

Pri tome je $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz u $\mathbb{Z}_+$ sa svojstvom

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\frac{r}{|a_n|}\right)^{k_n+1} < +\infty \qquad \forall r > 0. \tag{9.62}$$

Jasno je da izbor niza (k_n) nije jedinstven, a time ni izbori funkcija h i g nisu jedinstveni.

Ako funkcija h nije polinom, onda njezin modul $M_h(r) = \max\{|h(z)|;\ |z| = r\}$ raste brže od svake potencije r^n. Nadalje, prema (9.58) vrijedi

$$n_h(r) \leq \ln M_h(\mathrm{e}r) \qquad \forall r > 0, \tag{9.63}$$

gdje je $n_h(r)$ broj nultočaka funkcije h u krugu $|z| \leq r$, računatih s kratnostima, tj. u slučaju standardne numeracije

$$n_h(r) = \max\{n \in \mathbb{N};\ |a_n| \leq r\}.$$

Opisno govoreći, iz (9.63) zaključujemo: ako modul funkcije h ne raste suviše brzo, onda ni funkcija n_h ne raste suviše brzo, a to je moguće samo tako da niz $(|a_n|)$ brzo raste u beskonačnost. No tada članovi niza $(1/|a_n|)$ brzo padaju, pa možemo očekivati egzistenciju cijelog broja $k \geq 0$ takvog da je

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n|^{-k-1} < +\infty. \tag{9.64}$$

Kažemo da je **cijela funkcija** f **konačnog ranga** ako postoji cijeli broj $k \geq 0$ takav da vrijedi (9.64). Najmanji od cijelih brojeva $k \geq 0$ takvih da vrijedi (9.64) označavamo $k(f)$ i zovemo **rang cijele funkcije** f. Ako ni za jedan $k \in \mathbb{Z}_+$ ne vrijedi (9.64) onda kažemo da je **cijela funkcija** f **beskonačnog ranga** i pišemo $k(f) = +\infty$.

Ako je $k(f) < +\infty$, onda je uvjet (9.62) zadovoljen za $k_n = k(f)\ \forall n \in \mathbb{N}$, pa u faktorizaciji (9.59) možemo uzeti funkciju h na *kanonski način*:

$$h(z) = \prod_{n\in\mathbb{N}} E_{k(f)}\left(\frac{z}{a_n}\right). \tag{9.65}$$

Takav je produkt potpuno određen funkcijom f i naziva se **kanonski produkt** pridružen funkciji f. Funkcija g u faktorizaciji (9.59) određena je sada do na aditivnu konstantu oblika $2n\pi i$, gdje je $n \in \mathbb{Z}$. Ako je k tome g polinom, njegov je stupanj potpuno određen.

Ako je $k(f) < +\infty$ i ako je u faktorizaciji (9.59) h kanonski produkt i g je polinom stupnja p, onda kažemo da je f **funkcija konačnog genusa**, a broj

$$q(f) = \max\{k(f), p\} \tag{9.66}$$

se zove **genus funkcije** f. Sljedeći teorem daje ocjenu rasta u beskonačnosti za cijelu funkciju konačnog genusa.

Teorem 9.9. *Neka je f cijela funkcija konačnog genusa $q = q(f)$. Postoji $R > 0$ takav da vrijedi*

$$|z| \geq R \qquad \Longrightarrow \qquad |f(z)| \leq \mathrm{e}^{|z|^{q+1}}. \tag{9.67}$$

Za dokaz ovog torema potrebne su nam neke ocjene za funkcije E_k :

Lema 9.5. *Neka je $k \in \mathbb{Z}_+$ i $a \in \mathbb{R}$, $a > k$.*

(*a*) *Za svaki $A > 0$ postoji $r > 0$ takav da je*

$$\ln|E_k(z)| \leq A|z|^a \qquad \forall z \in \mathbb{C}, \quad |z| \geq r. \tag{9.68}$$

(*b*) *Za svaki $r > 0$ postoji $A > 0$ takav da vrijedi* (9.68).

(*c*) *Postoji $M > 0$ takav da vrijedi*

$$\ln|E_k(z)| \leq M|z|^{k+1} \qquad \forall z \in \mathbb{C}. \tag{9.69}$$

Dokaz: (*a*) Imamo

$$|E_k(z)| \leq (1+|z|)\mathrm{e}^{|z|+\frac{|z|^2}{2}+\cdots+\frac{|z|^k}{k}},$$

pa je

$$\ln|E_k(z)| \leq \ln(1+|z|) + |z| + \frac{|z|^2}{2} + \cdots + \frac{|z|^k}{k}. \tag{9.70}$$

Odavde dobivamo

$$\lim_{z\to\infty} |z|^{-1}\ln|E_k(z)| = 0, \tag{9.71}$$

pa slijedi da za svaki $A > 0$ postoji $r > 0$ takav da vrijedi (9.68).

(*b*) Neka je $r > 0$. Funkcija $z \mapsto |z|^{-a}\ln|E_k(z)|$ neprekidna je na skupu $\{z \in \mathbb{C};\ |z| \geq r,\ z \neq 1\}$. Nadalje, budući da je 1 nultočka funkcije E_k, očito vrijedi

$$\lim_{z\to 1} |z|^{-a}\ln|E_k(z)| = -\infty.$$

Odatle i iz (9.71) slijedi da je funkcija $z \mapsto |z|^{-a}\ln|E_k(z)|$ odozgo ograničena na skupu $\{z \in \mathbb{C};\ |z| \geq r\}$, a to upravo znači da postoji $A > 0$ takav da vrijedi (9.68).

(*c*) Prema (*b*) postoji $B > 0$ takav da vrijedi

$$\ln|E_k(z)| \leq B|z|^{k+1} \qquad \forall z \in \mathbb{C}, \quad |z| \geq \frac{1}{2}. \tag{9.72}$$

S druge strane, za $|z| \leq 1/2$ prema lemi 9.3. vrijedi

$$\ln|E_k(z)| \leq \frac{|z|^{k+1}}{1-|z|} \leq 2|z|^{k+1}. \tag{9.73}$$

Iz (9.72) i (9.73) slijedi (9.69) uz $M = \max\{B, 2\}$.

Dokaz teorema 9.9.: Neka je $k = k(f)$ i neka je p stupanj polinoma g u faktorizaciji (9.59). Izaberimo $M > 0$ tako da vrijedi (9.69). Budući da vrijedi (9.64) postoji $N \in \mathbb{N}$ takav da je

$$\sum_{n>N} |a_n|^{-k-1} \leq \frac{1}{4M}. \tag{9.74}$$

Zbog (9.69) imamo

$$\sum_{n>N} \ln\left|E_k\left(\frac{z}{a_n}\right)\right| \leq M\sum_{n>N}\left|\frac{z}{a_n}\right|^{k+1} = M|z|^{k+1}\sum_{n>N}|a_n|^{-k-1},$$

pa iz (9.74) slijedi

$$\sum_{n>N} \ln \left| E_k\left(\frac{z}{a_n}\right) \right| \le \frac{1}{4}|z|^{k+1} \qquad \forall z \in \mathbb{C}. \tag{9.75}$$

Prema tvrdnji (a) leme 9.5. postoji $r > 0$ takav da vrijedi:

$$|z| \ge r \qquad \Longrightarrow \qquad \ln|E_k(z)| \le \frac{1}{4}\left[\sum_{n=1}^{N} |a_n|^{-k-1}\right]^{-1} |z|^{k+1}. \tag{9.76}$$

Neka je $\rho \in \mathbb{R}$ izabran tako da bude

$$\rho \ge |a_n| r \qquad \text{za} \quad n = 1, \ldots, N.$$

Za $|z| \ge \rho$ imamo tada $|z/a_n| \ge r$ $(1 \le n \le N)$, pa iz (9.76) slijedi

$$|z| \ge \rho \qquad \Longrightarrow \qquad \sum_{n=1}^{N} \ln \left| E_k\left(\frac{z}{a_n}\right)\right| \le \frac{1}{4}\left[\sum_{n=1}^{N} |a_n|^{-k-1}\right]^{-1} \sum_{n=1}^{N} \left|\frac{z}{a_n}\right|^{k+1} = \frac{1}{4}|z|^{k+1}. \tag{9.77}$$

Iz (9.75) i (9.77) dobivamo

$$|z| \ge \rho \qquad \Longrightarrow \qquad \ln|h(z)| = \sum_{n\in\mathbb{N}} \ln\left|E_k\left(\frac{z}{a_n}\right)\right| \le \frac{1}{2}|z|^{k+1}. \tag{9.78}$$

Budući da je g polinom stupnja p, to je

$$\lim_{z\to\infty} \frac{m \ln|z| + |g(z)|}{|z|^{p+1}} = 0,$$

pa postoji $R \ge \rho$, $R \ge 1$, takav da vrijedi

$$|z| \ge R \qquad \Longrightarrow \qquad m \ln|z| + |g(z)| \le \frac{1}{2}|z|^{p+1}. \tag{9.79}$$

Budući da je $|z|^{k+1} \le |z|^{q+1}$ i $|z|^{p+1} \le |z|^{q+1}$ za $|z| \ge R \ge 1$, iz (9.78) i (9.79) dobivamo

$$|z| \ge R \qquad \Longrightarrow \qquad \ln|f(z)| \le m\ln|z| + |g(z)| + \ln|h(z)| \le |z|^{q+1},$$

odnosno,

$$|z| \ge R \qquad \Longrightarrow \qquad |f(z)| \le \mathrm{e}^{|z|^{q+1}}.$$

Time je teorem 9.9. dokazan.

Zadatak 9.12. *Neka je*

$$f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}_+} c_n z^n, \qquad z \in \mathbb{C},$$

cijela funkcija konačnog genusa $q(f) = q$. *Dokažite da je tada*

$$\lim_{n\to\infty} c_n (n!)^{1/(q+1)} = 0.$$

Uputa: Koristite Cauchyjeve ocjene za koeficijente Taylorovog reda.

Zadatak 9.13. *Dokažite da cijela funkcija a nultočkama* $a_k = \ln(k+1)$, $k \in \mathbb{N}$, *nije konačnog ranga.*

9.6 Cijele funkcije konačnog reda

Neka je f cijela funkcija. Već smo napomenuli da modul funkcije f raste brže od svake potencije $|z|^m$ ako f nije polinom. S druge strane, prema teoremu 9.9. iz prethodnog odjeljka rast modula cijele funkcije f konačnog genusa q može se ocijeniti funkcijom $\mathrm{e}^{|z|^{q+1}}$. U ovom odjeljku promatrat ćemo cijele funkcije za čiji modul postoje ocjene rasta takve vrste.

Za cijelu funkciju f označimo sa $E(f)$ skup svih realnih brojeva $a > 0$ sa svojstvom da za neko $R > 0$ vrijedi:

$$|z| \geq R \qquad \Longrightarrow \qquad |f(z)| \leq \mathrm{e}^{|z|^a}. \tag{9.80}$$

Kažemo da f **cijela funkcija konačnog reda** ako je skup $E(f)$ neprazan. U tom je slučaju očito skup $E(f)$ ili otvoren interval oblika $\langle \rho + \infty\rangle$ ili poluotvoren interval oblika $[\rho, +\infty\rangle$. Realan broj

$$\rho(f) = \inf\, E(f)$$

zove se **red cijele funkcije** f. Ukoliko je $E(f) = \emptyset$, kažemo da je f **cijela funkcija beskonačnog reda** i pišemo $\rho(f) = +\infty$. Npr. redovi funkcija e^{z^n}, $\sin z$, $\cos\sqrt{z}$ i $\mathrm{e}^{\mathrm{e}^z}$ su redom n, 1, 1/2 i $+\infty$. Nadalje, red svakog polinoma je 0.

Da bismo izveli korisnu formulu za red cijele funkcije, potreban nam je pojam limesa superiora realne funkcije realne varijable u točki $+\infty$. Neka je zadana funkcija $g : [a, +\infty\rangle \to \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$. Ako je funkcija g odozgo neograničena na svakom intervalu $[b, +\infty\rangle$, $b \geq a$, onda stavljamo

$$\limsup_{t\to+\infty} g(t) = +\infty. \tag{9.81}$$

Ako je za neki $b \geq a$ funkcija g odozgo ograničena na intervalu $[b, +\infty\rangle$, onda stavljamo

$$\limsup_{t\to+\infty} g(t) = \lim_{b\to+\infty} \big(\sup\{g(t);\ t \in [b, +\infty\rangle\}\big). \tag{9.82}$$

Primijetimo da je funkcija $b \mapsto \sup\{g(t);\ t \in [b, +\infty\rangle\}$ monotono opadajuća, pa limes u (9.82) postoji u skupu $\mathbb{R}\cup\{-\infty\}$. Prema tome, sa (9.81) i (9.82) za svaku funkciju g definiran je element $\limsup_{t\to+\infty} g(t)$ skupa $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty] = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Taj se broj zove **limes superior funkcije** g **u točki** $+\infty$.

Iz (9.80) izlazi da je $M_f(r) \leq \mathrm{e}^{r^a}$ za velike r. Odavde logaritmiranjem dobivamo $\ln M_f(r) \leq r^a$, dakle, $\ln(\ln M_f(r)) \leq a \ln r$. Dakle, za velike r je

$$\frac{\ln(\ln M_f(r))}{\ln r} \leq a,$$

pa slijedi da je

$$\rho = \limsup_{r\to+\infty} \frac{\ln(\ln M_f(r))}{\ln r} \tag{9.83}$$

realan broj ili $-\infty$ i da je $\rho \leq \rho(f)$.

S druge strane, ako za cijelu funkciju f definiramo ρ sa (9.83) i ako je $\rho < +\infty$, onda za svaki $a > \rho$ postoji $R > 0$ takav da vrijedi

$$r \geq R \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{\ln(\ln M_f(r))}{\ln r} \leq a.$$

Odatle dobivamo redom:

$$\ln(\ln M_f(r)) \leq a \ln r = \ln r^a \qquad \Longrightarrow \qquad \ln M_f(r) \leq r^a \qquad \Longrightarrow \qquad M_f(r) \leq \mathrm{e}^{r^a}.$$

Prema tome, vrijedi (9.80), pa zaključujemo da je $a \in E(f)$. Kako to vrijedi za svaki $a > \rho$, zaključujemo da je $\rho(f) \leq \rho$. Time smo dokazali:

Teorem 9.10. *Za svaku cijelu funkciju f vrijedi*

$$\rho(f) = \limsup_{r \to +\infty} \frac{\ln(\ln M_f(r))}{\ln r}.$$

Opisat ćemo sada red cijele funkcije f na malo drugačiji način, koji je katkada u dokazima pogodniji. Neka je $E_0(f)$ skup svih realnih brojeva $b > 0$ takvih da za neke $A > 0$ i $B > 0$ vrijedi

$$|f(z)| \leq A\mathrm{e}^{B|z|^b} \qquad \forall z \in \mathbb{C}. \tag{9.84}$$

Uzmimo da je $E_0(f) \neq \emptyset$. Ako je $b \in E_0(f)$, onda je očito $[b, +\infty\rangle \subseteq E_0(f)$. Prema tome, postoji $\sigma \geq 0$ takav da je ili $E_0(f) = [\sigma, +\infty\rangle$ ili $E_0(f) = \langle\sigma, +\infty\rangle$. Neka je $a > \sigma$. Izaberimo $b \in \langle\sigma, a\rangle$. Tada je $b \in E_0(f)$ pa postoje $A > 0$ i $B > 0$ takvi da vrijedi (9.84). Kako je $a > b$, to je

$$\lim_{t \to +\infty} A\mathrm{e}^{Bt^b}\mathrm{e}^{-t^a} = 0,$$

pa postoji $R > 0$ takav da vrijedi

$$t \geq R \qquad \Longrightarrow \qquad A\mathrm{e}^{Bt^b}\mathrm{e}^{-t^a} \leq 1,$$

odnosno,

$$t \geq R \qquad \Longrightarrow \qquad A\mathrm{e}^{Bt^b} \leq \mathrm{e}^{t^a}.$$

Odavde i iz (9.84) slijedi (9.80), pa zaključujemo da je $a \in E(f)$. Time smo dokazali inkluziju $\langle\sigma, +\infty\rangle \subseteq E(f)$.

Uzmimo sada da je $E(f) \neq \emptyset$ i neka je $a \in E(f)$. Tada za neki $R > 0$ vrijedi (9.80). Funkcija $z \mapsto |f(z)|\mathrm{e}^{-|z|^a}$ neprekidna je, dakle i ograničena, na kompaktnom skupu $\overline{K}(0, R)$. Stoga postoji $A \geq 1$ takav da vrijedi

$$|z| \geq R \qquad \Longrightarrow \qquad |f(z)|\mathrm{e}^{-|z|^a} \leq A.$$

Odavde i iz (9.80) slijedi (5.84) za $b = a$ i uz $B = 1$. Dakle, $a \in E_0(f)$ i time smo dokazali da je $E(f) \subseteq E_0(f)$. Sve u svemu, imamo:

Propozicija 9.5. *Za svaku cijelu funkciju f vrijedi*

$$\rho(f) = \inf\, E_0(f).$$

Preciznije, ili vrijedi $E_0(f) = E(f)$ ili je $E_0(f) = Cl(E(f))$.

Propozicija 9.6. *Neka su f i g cijele funkcije.*

(*a*) *Vrijedi $\rho(f + g) \leq \max\{\rho(f), \rho(g)\}$. Ukoliko je $\rho(f) \neq \rho(g)$, vrijedi znak jednakosti.*

(*b*) *Vrijedi $\rho(fg) \leq \max\{\rho(f), \rho(g)\}$.*

Dokaz: Neka je $b > \max\{\rho(f), \rho(g)\}$. Prema propoziciji 9.5. tada postoje $A > 0$, $B > 0$, $C > 0$ i $D > 0$ takvi da vrijedi

$$|f(z)| \leq A\mathrm{e}^{B|z|^b} \qquad \text{i} \qquad |g(z)| \leq C\mathrm{e}^{D|z|^b} \qquad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Odavde je

$$|f(z) + g(z)| \leq (A + C)\mathrm{e}^{E|z|^b} \qquad \forall z \in \mathbb{C},$$

gdje je $E = \max\{B, D\}$, i

$$|f(z)g(z)| \leq AC\mathrm{e}^{(B+D)|z|^b} \qquad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Time smo dokazali da je $b \in E_0(f+g)$ i $b \in E_0(fg)$. Kako je $b > \max\{\rho(f), \rho(g)\}$ bio proizvoljan, slijede nejednakosti u tvrdnjama (a) i (b).

Pretpostavimo sada da je $\rho(f) \neq \rho(g)$, npr. $\rho(f) < \rho(g)$. Prema dokazanom je $\rho(f+g) \leq \rho(g)$. Kad bi bilo $\rho(f+g) < \rho(g)$, imali bismo

$$\rho(g) = \rho((f+g) + (-f)) \leq \max\{\rho(f+g), \rho(f)\} < \rho(g),$$

što je apsurd. Ova kontradikcija pokazuje da je nužno $\rho(f+g) \geq \rho(g)$, dakle, vrijedi jednakost $\rho(f+g) = \rho(g) = \max\{\rho(f), \rho(g)\}$.

Zadatak 9.14. *Nađite cijele funkcije f i g konačnog reda takve da je $f + g \neq 0$ i $\rho(f+g) < \max\{\rho(f), \rho(g)\}$.*

Propozicija 9.7. *Neka je f cijela funkcija i $P \neq 0$ polinom. Tada vrijedi*

$$\rho(Pf) = \rho(f) = \rho(f').$$

Dokaz: Kako je $P \neq 0$, imamo

$$\lim_{z\to\infty} P(z) = \infty$$

pa za neke $A > 0$ i $R > 0$ vrijedi

$$|z| \geq R \qquad \Longrightarrow \qquad |P(z)| \geq A.$$

Odavde slijedi

$$|z| \geq R \qquad \Longrightarrow \qquad |P(z)f(z)| \geq A|f(z)|,$$

dakle,

$$r \geq R \qquad \Longrightarrow \qquad M_f(r) \leq \frac{1}{A}M_{Pf}(r) = M_{\frac{1}{A}Pf}(r).$$

Sada iz teorema 9.10. slijedi

$$\rho(f) = \limsup_{r\to+\infty} \frac{\ln(\ln M_f(r))}{\ln r} \leq \limsup_{r\to+\infty} \frac{\ln\left(\ln M_{\frac{1}{A}Pf}(r)\right)}{\ln r} = \rho\left(\frac{1}{A}Pf\right).$$

Kako konstanta $\frac{1}{A}$ ima red 0, prema tvrdnji (b) propozicije 9.6. slijedi da je $\rho\left(\frac{1}{A}Pf\right) = \rho(Pf)$. Dakle, vrijedi nejednakost $\rho(f) \leq \rho(Pf)$. Budući da je $\rho(P) = 0$, iz tvrdnje (b) propozicije 9.6. slijedi i obrnuta nejednakost $\rho(Pf) \leq \rho(f)$. Time je dokazana jednakost $\rho(Pf) = \rho(f)$.

Dokažimo sada tvrdnju o redu derivacije. Za $z \in \mathbb{C}$ imamo

$$f(z) = \int_{[0,z]} f'(\zeta)\mathrm{d}\zeta + f(0),$$

gdje je $[0, z]$ oznaka za ravni segment od 0 do z, tj. za put $\gamma(t) = tz$, $0 \le t \le 1$. Slijedi

$$M_f(r) \le rM_{f'}(r) + |f(0)| \qquad \forall r > 0. \tag{9.85}$$

Neka je $r > 0$ i neka je točka $z \in \mathbb{C}$ takva da je $|z| = r$ i $M_{f'}(r) = |f'(z)|$. Neka je Γ pozitivno orijentirana kružnica sa središtem u točki z i radijusom r; dakle, $\Gamma^* = S(z, r) = \{\zeta;\ |\zeta - z| = r\}$. Tada je

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} \mathrm{d}\zeta.$$

Kako za svaku točku $\zeta \in \Gamma^*$ vrijedi $|\zeta| \ge 2r$, iz gornje jednakosti dobivamo

$$M_{f'}(r) \le \frac{1}{2\pi} \cdot M_f(2r) \cdot r^{-2} \cdot 2\pi r = \frac{1}{r} M_f(2r). \tag{9.86}$$

Iz (9.85) i (9.86) dobivamo

$$\frac{M_f(r) - |f(0)|}{r} \le M_{f'}(r) \le \frac{1}{r} M_f(2r).$$

Odatle i iz teorema 9.10. slijedi $\rho(f') = \rho(f)$.

Cijela funkcija f može se napisati kao svuda konvergentan red potencija

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}_+} c_n z^n, \qquad z \in \mathbb{C} \tag{9.87}$$

i pri tome je

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{z^{n+1}} \mathrm{d}z \tag{9.88}$$

gdje je γ_r pozitivno orijentirana kružnica sa središtem u 0 i radijusom $r > 0 : \gamma_r(t) = re^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$.

Teorem 9.11. *Za cijelu funkciju f zadanu redom potencija* (9.87) *vrijedi*

$$\rho(f) = \limsup_{n \to +\infty} \left(-\frac{\ln n}{\ln \sqrt[n]{|c_n|}} \right). \tag{9.89}$$

Dokaz: Stavimo

$$\mu(f) = \limsup_{n \to +\infty} \left(-\frac{\ln n}{\ln \sqrt[n]{|c_n|}} \right).$$

Ako je $\mu(f) = 0$, očito je $\rho(f) \ge \mu(f)$. Pretpostavimo da je $0 < \mu(f) \le +\infty$ i neka je $0 < b < \mu(f)$. Prema definiciji $\mu(f)$ postoji beskonačan podskup S od $\mathbb{N}$ takav da vrijedi

$$-\frac{\ln n}{\ln \sqrt[n]{|c_n|}} \ge b \qquad \forall n \in S.$$

Posebno, za svaki $n \in S$ je $-\ln \sqrt[n]{|c_n|} > 0$, pa gornju nejednakost možemo pisati ovako:

$$\ln n \le b(-\ln \sqrt[n]{|c_n|}) \qquad \forall n \in S.$$

Odavde je

$$\ln |c_n| \ge -\frac{n}{b} \ln n \qquad \forall n \in S. \tag{9.90}$$

Iz (9.88) slijedi

$$|c_n| = \frac{1}{2\pi}\left|\int_{\gamma_r}\frac{f(z)}{z^{n+1}}\mathrm{d}z\right| \le \frac{1}{r^n}M_f(r) \qquad \forall r > 0$$

pa zbog (9.90) dobivamo

$$\ln M_f(r) \ge n\left(\ln r - \frac{1}{b}\ln n\right) \qquad \forall r > 0 \quad \text{i} \quad \forall n \in S.$$

Izaberemo li $r = (\mathrm{e}n)^{1/b}$, slijedi

$$\ln M_f(r) \ge \frac{n}{b} = \frac{r^b}{\mathrm{e}b} \qquad \forall n \in S \quad \text{i} \quad r = (\mathrm{e}n)^{1/b}.$$

Logaritmiranjem dobivamo

$$\frac{\ln(\ln M_f(r))}{\ln r} \ge b - \frac{\ln(\mathrm{e}b)}{\ln r} \qquad \forall n \in S \quad \text{i} \quad r = (\mathrm{e}n)^{1/b}.$$

Zbog teorema 9.10. odavde slijedi da je $\rho(f) \ge b$. Kako je $b < \mu(f)$ bio proizvoljan, zaključujemo da je $\rho(f) \ge \mu(f)$.

Ako je $\mu(f) = +\infty$, očito je $\rho(f) \le \mu(f)$. Pretpostavimo da je $\mu(f) < +\infty$ i neka su a i b realni brojevi, takvi da je $a > b > \mu(f)$. Prema definiciji broja $\mu(f)$, postoji prirodan broj $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je

$$-\frac{\ln n}{\ln \sqrt[n]{|c_n|}} \le b \qquad \forall n \ge n_0,$$

odnosno,

$$|c_n| \le n^{-n/b} \qquad \forall n \ge n_0. \tag{9.91}$$

Budući da se prema tvrdnji (a) propozicije 9.7. dodavanjem polinoma cijeloj funkciji ne mijenja red, možemo uzeti da (9.91) vrijedi za sve $n \in \mathbb{Z}_+$ (s tim da je desna strana jednaka 1 za $n = 0$.) Iz (9.91) slijedi

$$M_f(r) \le \sum_{n\in\mathbb{Z}_+}|c_n|r^n \le \sum_{n\in\mathbb{Z}_+} n^{-n/b}r^n = A(r) + B(r), \tag{9.92}$$

gdje je

$$A(r) = \sum_{0\le n<(2r)^b} n^{-n/b}r^n \qquad \text{i} \qquad B(r) = \sum_{n\ge(2r)^b} n^{-n/b}r^n.$$

Imamo

$$A(r) \le r^{(2r)^b}\sum_{0\le n<(2r)^b} n^{-n/b} \le Ar^{(2r)^b} = A\mathrm{e}^{2^b r^b \ln r}, \tag{9.93}$$

gdje je

$$A = \sum_{n\in\mathbb{Z}_+} n^{-n/b} < +\infty.$$

Budući da je $a > b$, imamo

$$\lim_{r\to+\infty} A\mathrm{e}^{2^b r^b \ln r}\mathrm{e}^{-2^b r^a} = 0,$$

pa postoji $C > 0$ takav da je

$$A\mathrm{e}^{2^b r^b \ln r} \le C\mathrm{e}^{2^b r^a} \qquad \forall r > 0.$$

Sada iz (9.93) slijedi

$$A(r) \le C\mathrm{e}^{2^b r^a} \qquad \forall r > 0. \tag{9.94}$$

Nadalje, za $n \geq (2r)^b$ je $n^{-1/b} r \leq 1/2$, pa imamo

$$B(r) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} 2^{-n} = 1 < \mathrm{e}^{2^b r^a} \qquad \forall r > 0. \tag{9.95}$$

Sada iz (9.92), (9.94) i (9.95) dobivamo

$$M_f(r) \leq (C+1)\mathrm{e}^{2^b r^a} \qquad \forall r > 0.$$

Prema propoziciji 9.5. odavde izlazi da je $\rho(f) \leq a$, a kako je $a > \mu(f)$ bilo proizvoljno, zaključujemo da je $\rho(f) \leq \mu(f)$.

Iz dvije dokazane nejednakosti slijedi jednakost $\mu(f) = \rho(f)$ i time je teorem 9.11. dokazan.

Zadatak 9.15. *Nađite red cijelih funkcija* $\sin z$, $\cos\sqrt{z}$, $\sum_{n\in\mathbb{N}} a^{-an} z^n$ *za* $a > 0$, $\prod_{n\in\mathbb{N}}(1 - a^n z)$ *za* $0 < |a| < 1$ *i* $\prod_{n\in\mathbb{N}}(1 - z/n!)$.

Zadatak 9.16. *Neka je*

$$f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}_+} a_n z^n, \qquad z \in \mathbb{C},$$

cijela funkcija konačnog reda $\rho(f) = \rho$. *Koji je red funkcije*

$$F(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}_+} |a_n|^p z^n, \qquad p \geq 1, \quad z \in \mathbb{C}.?$$

Zadatak 9.17. *Dokažite da je za* $\sigma > 1$ *funkcija*

$$P_\sigma(z) = \prod_{n\in\mathbb{N}} \left(1 + z n^{-\sigma}\right)$$

cijela i da joj je red $1/\sigma$.

9.7 Red cijele funkcije s konačno mnogo nultočaka

Neka je f cijela funkcija koja ima samo konačno mnogo nultočaka. Tada je $f(z) = P(z)F(z)$, gdje je P polinom, a F je cijela funkcija koja se nigdje ne poništava. Prema propoziciji 9.7. imamo $\rho(f) = \rho(F)$. Prema tome, zadatak ovog odjeljka bit će ispunjen ako odredimo red cijele funkcije bez nultočaka. U tu su nam svrhu potrebne neke ocjene u vezi s realnim dijelom holomorfne funkcije.

Lema 9.6. *Neka je* f *holomorfna funkcija na krugu* $K(z_0, R)$, $z_0 = x_0 + iy_0 \in \mathbb{C}$, $R > 0$, *i neka je* $u(x, y) = \operatorname{Re} f(x + iy)$ *njezin realni dio. Za svaki* $\rho \in \langle 0, R\rangle$ *vrijede formule*

$$u(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(x_0 + \rho\cos\varphi, y_0 + \rho\sin\varphi)\mathrm{d}\varphi \tag{9.96}$$

i

$$u(x_0, y_0) = \frac{1}{\rho^2\pi}\int_0^{\rho}\int_0^{2\pi} u(x_0 + r\cos\varphi, y_0 + r\sin\varphi) r\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi. \tag{9.97}$$

Zadatak 9.18. *Dokažite lemu 9.6.*

Uputa: Formula (9.96) dobiva se uzimanjem realnog dijela u Cauchyjevoj integralnoj formuli

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_\rho} \frac{f(z)}{z - z_0}\mathrm{d}z,$$

gdje je γ_ρ pozitivno orijentirana kružnica sa središtem u točki z_0 i radijusom ρ, tj. $\gamma_\rho(\varphi) = z_0 + \rho e^{i\varphi}$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, a formula (9.97) slijedi iz (9.96) integracijom po radijalnoj varijabli.

Odavde slijedi **princip maksimuma za realni dio holomorfne funkcije**:

Teorem 9.12. *Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ područje, $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ nekonstantna holomorfna funkcija na Ω i $u(x, y) = \mathrm{Re}\, f(x + iy)$ njen realni dio. Tada funkcija u na području Ω ne poprima ni svoj supremum ni svoj infimum.*

Dokaz: Pretpostavimo da je

$$M = \sup \{u(x, y);\ x + iy \in \Omega\} < +\infty$$

i da postoji točka $z_0 = x_0 + iy_0 \in \Omega$ takva da je $u(x_0, y_0) = M$. Neka je $\rho > 0$ takav da je $\overline{K}(z_0, \rho) \subseteq \Omega$. Iz formule (9.97) slijedi

$$\int_0^\rho \int_0^{2\pi} [M - u(x_0 + r\cos\varphi, y_0 + r\sin\varphi)] r \mathrm{d}r \mathrm{d}\varphi = 0. \tag{9.98}$$

Kako je M supremum funkcije u, podintegralna funkcija u (9.98) je svuda nenegativna. Budući da je ta funkcija neprekidna, iz (9.98) slijedi da je ona jednaka nuli svuda na $\overline{K}(z_0, \rho)$. Time je dokazano da je skup

$$\Omega_1 = \{z = x + iy \in \Omega;\ u(x, y) = M\}$$

otvoren. Njegov je komplement u Ω također otvoren, jer je funkcija u neprekidna i vrijedi

$$\Omega \setminus \Omega_1 = \{z = x + iy \in \Omega;\ u(x, y) < M\}.$$

Kako je skup Ω povezan i Ω_1 je neprazan, slijedi da je $\Omega_1 = \Omega$, tj. funkcija u je konstanta M. Sada iz Cauchy−Riemannovih jednadžbi slijedi da i imaginarni dio funkcije f konstantan, a to je suprotnosti s pretpostavljenom nekonstantnošću funkcije f. Ova kontardikcija dokazuje da ne postoji točka $z_0 = x_0 + iy_0 \in \Omega$ takva da je $u(x_0, y_0) = M$.

Primjenom dokazanog na holomorfnu funkciju $-f$ nalazimo da funkcija u ni u jednoj točki ne poprima svoj infimum.

Lema 9.7. (**C. Carathéodory**) *Neka je f holomorfna funkcija na krugu $K(0, R)$. Stavimo*

$$A_f(r) = \max \{\mathrm{Re}\, f(z);\ |z| = r\}, \qquad 0 \leq r < R. \tag{9.99}$$

Tada je

$$M_f(r) \leq \frac{2r}{\rho - r} A_f(\rho) + \frac{\rho + r}{\rho - r}|f(0)|, \qquad 0 \leq r < \rho < R. \tag{9.100}$$

Dokaz: Tvrdnja leme očigledna je ako je f konstanta. Uzmimo u daljnjem da je f nekonstantna funkcija. Tvrdimo da je tada funkcija A_f, definirana sa (9.99), strogo rastuća na intervalu $[0, R\rangle$. Doista, ako je $0 < \rho < R$, prema teoremu 9.12. vrijedi

$$\mathrm{Re}\, f(z) < A_f(\rho) \qquad \forall z \in K(0, \rho),$$

a odatle neposredno slijedi tvrdnja o strogom rastu:

$$0 \le r < \rho < R \qquad \Longrightarrow \qquad A_f(r) < A_f(\rho). \tag{9.101}$$

Dokazat ćemo sada najprije Carathéodoryjevu lemu uz dodatnu pretpostavku da je $f(0) = 0$. Neka je $0 < \rho < R$ i definiramo holomorfnu funkciju $\varphi \in \mathcal{H}(K(0,1))$ sa

$$\varphi(z) = \frac{f(\rho z)}{2A_f(\rho) - f(\rho z)}, \qquad |z| < 1. \tag{9.102}$$

Primijetimo da je funkcija φ stvarno dobro definirana i holomorfna na jediničnom krugu $K(0,1)$, jer se zbog (9.101) realni dio nazivnika u (9.102) (dakle, ni sam nazivnik) nigdje na $K(0,1)$ ne poništava. Za proizvoljno odabranu točku $z \in K(0,1)$ stavimo

$$u = \operatorname{Re} f(\rho z) \qquad \text{i} \qquad v = \operatorname{Im} f(\rho z).$$

Budući da je $u < A_f(\rho)$, dakle, $u^2 < (2A_f(\rho) - u)^2$, imamo

$$|\varphi(z)|^2 = \frac{u^2 + v^2}{(2A_f(\rho) - u)^2 + v^2} < 1.$$

Kako je točka $z \in K(0,1)$ bila proizvoljna i kako je $\varphi(0) = 0$, iz Schwarzove leme (teorem 1.16.) slijedi da je $|\varphi(z)| \le |z|$ $\forall z \in K(0,1)$. Odatle i iz definicije (9.102) funkcije φ dobivamo da za $|z| = r < \rho$ vrijedi

$$|f(z)| = \left| \frac{2A_f(\rho)\varphi(z/\rho)}{1 + \varphi(z/\rho)} \right| \le \frac{2A_f(\rho)r/\rho}{1 - r/\rho} = \frac{2r}{\rho - r} A_f(\rho).$$

Odavde je

$$M_f(r) \le \frac{2r}{\rho - r} A_f(\rho),$$

a to je upravo nejednakost (9.100) u slučaju da je $f(0) = 0$.

Ako je $f(0) \ne 0$, primijenimo dokazano na funkciju $f - f(0)$. Tada za $|z| = r < \rho < R$ dobivamo

$$|f(z) - f(0)| \le \frac{2r}{\rho - r} \left(A_f(\rho) - \operatorname{Re} f(0)\right) \le \frac{2r}{\rho - r} \left(A_f(\rho) + |f(0)|\right).$$

Kako je $|f(z) - f(0)| \ge |f(z)| - |f(0)|$, dobivamo

$$|f(z)| \le |f(z) - f(0)| + |f(0)| \le \frac{2r}{\rho - r} \left(A_f(\rho) + |f(0)|\right) + |f(0)| = \frac{2r}{\rho - r} A_f(\rho) + \frac{\rho + r}{\rho - r} |f(0)|.$$

Teorem 9.13. *Cijela funkcija f bez nultočaka je konačnog reda ako i samo ako je $f = \mathrm{e}^g$, gdje je g polinom. U tom je slučaju $\rho(f) = \deg g$.*

Dokaz: Pretpostavimo da je $f = \mathrm{e}^g$, gdje je g polinom stupnja n. Za $a > n$ je tada

$$\lim_{z \to \infty} |z|^{-a} |g(z)| = 0,$$

pa za neki $R > 0$ vrijedi

$$|z| \ge R \qquad \Longrightarrow \qquad |g(z)| \le |z|^a.$$

Odavde je

$$|z| \ge R \qquad \Longrightarrow \qquad |f(z)| \le \mathrm{e}^{|z|^a}, \tag{9.103}$$

pa vidimo da je $\rho(f) \le a$. Kako to vrijedi za svaki $a > 0$, zaključujemo da je $\rho(f) \le n$.

Pretpostavimo sada da je f cijela funkcija bez nultočaka i konačnog reda. Kompleksna ravnina $\mathbb{C}$ ima svojstvo logaritma, pa postoji cijela funkcija g takva da je

$$f(z) = \mathrm{e}^{g(z)}, \qquad z \in \mathbb{C}.$$

Neka je $a > \rho(f)$ i izaberimo $R > 0$ takav da vrijedi (9.103). Kako je $|f(z)| = \mathrm{e}^{\mathrm{Re}\, g(z)}$, imamo

$$|z| \geq R \qquad \Longrightarrow \qquad \mathrm{e}^{\mathrm{Re}\, g(z)} \leq \mathrm{e}^{|z|^a},$$

a odatle logaritmiranjem nalazimo da vrijedi

$$|z| \geq R \qquad \Longrightarrow \qquad \mathrm{Re}\, g(z) \leq |z|^a.$$

Odavde i iz Carathéodoryjeve leme 9.7. za $f = g$, $r \geq R$ i $\rho = 2r$ slijedi

$$r \geq R \qquad \Longrightarrow \qquad M_g(r) \leq 2(2r)^a + 3|g(0)|. \tag{9.104}$$

Neka je $m \in \mathbb{Z}$ takav da je $m - 1 \leq a < m$. Iz (9.104) slijedi da je

$$\lim_{z \to \infty} z^{-m} g(z) = 0.$$

To pokazuje da je točka ∞ pol funkcije g reda $\leq m - 1 \leq a$, a to znači da je g polinom stupnja $n \leq a$. Kako je $a > \rho(f)$ bio proizvoljno odabran, zaključujemo da je $n = \deg\, g \leq \rho(f)$. Time je teorem 9.13. dokazan.

Korolar 9.1. *Ako je f cijela funkcija konačnog reda i s konačno mnogo nultočaka, onda je $\rho(f) \in \mathbb{Z}_+$.*

Zadatak 9.19. *Neka je f nekonstantna ciojela fukcija konačnog reda. Dokažite da je tada ili $f(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$ ili $f(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \setminus \{\alpha\}$ za neku točku $\alpha \in \mathbb{C}$.*

Uputa: Pretpostavite da postoje $\alpha, \beta \in \mathbb{C} \setminus f(\mathbb{C})$, $\alpha \neq \beta$. Tada je $f - \alpha$ cijela funkcija konačnog reda bez nultočaka. Iz činjenice da ona ne poprima vrijednost $\beta - \alpha$ i pomoću teorema 9.13. dovedite pretpostavke u kontradikciju s **Fundamentalnim teoremom algebre:** *svaki nekonstantni polinom s kompleksnim koeficijentima ima u kompleksnoj ravnini $\mathbb{C}$ bar jednu nultočku.*

9.8 Red kanonskog produkta

Neka je $f \neq 0$ cijela funkcija konačnog ranga $k = k(f)$ i neka je beskonačan skup njenih nultočaka različitih od nule standardno numeriran:

$$N(f) \setminus \{0\} = \{a_n;\ n \in \mathbb{N}\}, \qquad 0 < |a_1| \leq |a_2| \leq \cdots\cdots \qquad m(f;\alpha) = |\{n;\ a_n = \alpha\}| \quad \forall \alpha \in \mathbb{C}.$$

Neka je

$$h(z) = \prod_{n \in \mathbb{N}} E_k(z/a_n) \tag{9.105}$$

kanonski produkt pridružen cijeloj funkciji f. Iz teorema 9.9. slijedi da je cijela funkcija h konačnog reda i da je $\rho(h) \leq k + 1$. U ovom ćemo odjeljku precizno odrediti red $\rho(h)$ funkcije h.

Eksponent konvergencije nultočaka funkcije f je infimum $\sigma(f)$ skupa svih brojeva $\alpha > 0$ takvih da je

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} |a_n|^{-\alpha} < +\infty. \tag{9.106}$$

Kako je funkcija f konačnog ranga k, imamo $\sigma(f) \leq k + 1$. Ako broj $\sigma(f)$ nije cio, tada je očito $\sigma(f) - 1 < k < \sigma(f)$, tj. $k = [\sigma(f)]$; pri tome je za realan broj a sa $[a]$ označen najveći cijeli broj $m \in \mathbb{Z}$ takav da je $m \leq a$. Ako je $\sigma(f) \in \mathbb{Z}$, onda je $\sigma(f) = k$ ukoliko red (9.106) konvergira za $\alpha = \sigma(f)$, odnosno, $\sigma(f) = k - 1$ ako taj red divergira.

Teorem 9.14. *Neka je $f \neq 0$ cijela funkcija konačnog reda. Tada je f funkcija konačnog ranga i vrijedi $\sigma(f) \leq \rho(f)$. Nadalje, za kanonski produkt h pridružen funkciji f vrijedi $\rho(h) = \sigma(f)$.*

Dokaz: Ukoliko je $N(f)$ konačan skup, onda je $\sigma(f) = 0$ i h je polinom, dakle, $\rho(h) = 0$, pa su sve tvrdnje teorema očito istinite. U daljnjem pretpostavljamo da je skup $N(f)$ beskonačan. Možemo pretpostaviti da je $f(0) \neq 0$, budući da množenje sa z^{-m}, gdje je $m = m(f; 0)$, ne mijenja ni red (propozicija 9.7.) ni eksponent konvergencije nultočaka. Neka je

$$N(f) = \{a_n;\ n \in \mathbb{N}\}$$

standardna numeracija skupa nultočaka funkcije f.

Neka je $a > \rho(f)$ i $b \in \langle \rho(f), a \rangle$. Prema propoziciji 9.5. postoje $A > 0$ i $B > 0$ takvi da vrijedi

$$M_f(r) \leq A\mathrm{e}^{Br^b} \qquad \forall r \geq 0.$$

Odavde i iz Jensenove nejednakosti (9.58) (propozicija 9.4.) slijedi da postoji $C > 0$ takav da vrijedi

$$n_f(r) \leq Cr^b \qquad \forall r \geq 0. \tag{9.107}$$

Budući da je numeracija skupa $N(f)$ standardna, vrijedi $n \leq n_f(|a_n|)$ za svaki $n \in \mathbb{N}$, pa iz (9.107) slijedi

$$n \leq C|a_n|^b \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Odavde je

$$|a_n|^{-a} \leq C^{a/b} n^{-a/b} \qquad \forall n \in \mathbb{N},$$

pa nalazimo da je

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n|^{-a} \leq C^{a/b} \sum_{n\in\mathbb{N}} n^{-a/b} < +\infty$$

budući da je $a/b > 1$. To pokazuje da je $\sigma(f) \leq a$, a kako je $a > \rho(f)$ bio proizvoljan, zaključujemo da je $\sigma(f) \leq \rho(f)$.

Kanonski produkt h pridružen funkciji f dan je sa (9.105), gdje k rang funkcije f, odnosno, najmanji cijeli broj takav da je

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n|^{-k-1} < +\infty.$$

Kako je $\sigma(h) = \sigma(f)$, iz prvog dijela dokaza dobivamo da je $\sigma(f) \leq \rho(h)$. Dokazat ćemo sada da vrijedi i obrnuta nejdnakost.

Pretpostavimo najprije da je $\sigma(f) = k + 1$. Iz (9.78) u dokazu teorema 9.9. slijedi da postoji $\rho > 0$ takav da vrijedi

$$|z| \geq \rho \qquad \Longrightarrow \qquad |h(z)| \leq \mathrm{e}^{|z|^{k+1}}.$$

To znači da je $\rho(h) \leq k + 1 = \sigma(f)$.

Ostaje mogućnost da je $\sigma(f) < k + 1$, a tada znamo da je $k = [\sigma(f)]$. Neka je $a \in \mathbb{R}$ takav da je $\sigma(f) < a < k + 1$. Za $|z| = r$ možemo pisati

$$\ln|h(z)| = \sum_{|a_n|\leq 2r} \ln|E_k(z/a_n)| + \sum_{|a_n|>2r} \ln|E_k(z/a_n)|. \tag{9.108}$$

Za $|a_n| > 2r$ je $|z/a_n| \leq 1/2$, pa prema (9.73) vrijedi

$$|z| = r \qquad \Longrightarrow \qquad \ln|E_k(z/a_n)| \leq 2r^{k+1}|a_n|^{-k-1}.$$

Odavde za $|z| = r$ nalazimo redom

$$\sum_{|a_n|>2r} \ln|E_k(z/a_n)| \leq 2r^{k+1} \sum_{|a_n|>2r} |a_n|^{-k-1} = 2r^{k+1} \sum_{|a_n|>2r} |a_n|^{a-k-1}|a_n|^{-a} \leq 2r^{k+1}(2r)^{a-k-1} \sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n|^{-a}.$$

Stavimo li

$$A = \sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n|^{-a} < +\infty \tag{9.109}$$

(sjetimo se da je $a > \sigma(f)$) dobivamo da vrijedi

$$|z| = r \geq 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \sum_{|a_n|>2r} \ln|E_k(z/a_n)| \leq A2^{a-k}r^a. \tag{9.110}$$

Za ocjenu prve sume s desne strane formule (9.108) izaberimo $b \in \mathbb{R}$ tako da bude $\sigma(f) < b < a$. Tada je $b > k$ pa prema tvrdnji (b) leme 9.5. postoji $K > 0$ takav da vrijedi

$$|z| \geq 1/2 \qquad \Longrightarrow \qquad \ln|E_k(z)| \leq k|z|^b. \tag{9.111}$$

Za $|a_n| \leq 2r$ i $|z| = r$ je $|z/a_n| \geq 1/2$, pa zbog (9.111) nalazimo

$$\sum_{|a_n|\leq 2r} \ln|E_k(z/a_n)| \leq K \sum_{|a_n|\leq 2r} r^b|a_n|^{-b} = Kr^b \sum_{|a_n|\leq 2r} |a_n|^{a-b}|a_n|^{-a} \leq Kr^b(2r)^{a-b} \sum_{|a_n|\leq 2r} |a_n|^{-a}.$$

Dakle, uz oznaku (9.109) imamo

$$|z| = r \geq 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \sum_{|a_n|\leq 2r} \ln|E_k(z/a_n)| \leq AK2^{a-b}r^a. \tag{9.112}$$

Iz (9.108), (9.110) i (9.112) dobivamo

$$\ln|h(z)| \leq A(2^{a-k} + K2^{a-b})|z|^a \qquad \forall z \in \mathbb{C},$$

odnosno,

$$|h(z)| \leq \mathrm{e}^{B|z|^a} \qquad \forall z \in \mathbb{C},$$

gdje smo stavili $B = A2^a(2^{-k} + K2^{-b})$. Prema tome je $\rho(h) \leq a$, a kako je $a > \sigma(f)$ bio proizvoljno odabran, slijedi $\rho(h) \leq \sigma(f)$.

Time je teorem 9.14. u potpunosti dokazan.

9.9 Hadamardov teorem o faktorizaciji

Prema teoremu 9.9. cijela funkcija f konačnog genusa $q = q(f)$ je konačnog reda i vrijedi $\rho(f) \leq q + 1$. Nadalje, funkcija f može se faktorizirati u obliku

$$f(z) = z^m \cdot \mathrm{e}^{g(z)} \cdot h(z) \tag{9.113}$$

gdje je g polinom stupnja p, h je kanonski produkt pridružen funkciji f

$$h(z) = \prod_{n\in\mathbb{N}} E_k(z/a_n) \tag{9.114}$$

i $q = \max\{k, p\}$. U stvari, prema tvrdnji (b) propozicije 9.6. i prema teoremima 9.13. i 9.14. vrijedi sljedeća preciznija ocjena za red funkcije f :

$$\rho(f) \leq \max\{p, \sigma(f)\}.$$

U ovoj točki dokazat ćemo i obrat: cijela funkcija f konačnog reda može se faktorizirati u obliku (9.113), gdje je h kanonski produkt, a g je polinom; nadalje, tada je f funkcija konačnog genusa. To je tzv. **Hadamardov teorem o faktorizaciji**:

Teorem 9.15. *Cijela funkcija f konačnog je reda ako i samo ako je ona konačnog genusa. U tom slučaju je $q(f) \leq \rho(f) \leq q(f)+1$.*

Dokaz: Prema teoremu 9.9. ako je f cijela funkcija konačnog genusa q onda je f funkcija konačnog reda $\rho(f) \leq q+1$.

Pretpostavimo da je cijela funkcija f konačnog reda. Ukoliko je $N(f)$ konačan skup, onda je $f = PF$ gdje je P polinom a F je cijela funkcija bez nultočaka. Sada primjenom teorema 9.13. i propozicije 9.7. zaključujemo da je f funkcija konačnog genusa $q(f) = \rho(f)$.

Pretpostavimo sada da cijela funkcija f konačnog reda ima beskonačno mnogo nultočaka i da je $N(f) \setminus \{0\} = \{a_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ standardna numeracija. Prema teoremu 9.14. tada je f funkcija konačnog ranga $k \leq \rho(f)$, pa imamo faktorizaciju (9.113), gdje je h kanonski produkt pridružen funkciji f, $m = m(f;0)$ i g je cijela funkcija. Dokaz teorema bit će potpun, ako dokažemo da je g polinom stupnja $\leq \rho(f)$. Dokaz ne gubi na općenitosti ako pretpostavimo da je $m = 0$.

Budući da je

$$\frac{[E_k(z/a_n)]'}{E_k(z/a_n)} = -\left(\frac{z}{a_n}\right)^k \cdot \frac{1}{a_n - z},$$

prema (9.113), (9.114) i teoremu 9.3. nalazimo

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = g'(z) - \sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\frac{z}{a_n}\right)^k \cdot \frac{1}{a_n - z} \qquad \forall z \in \mathbb{C} \setminus N(f) \tag{9.115}$$

i pri tome red konvergira lokalno uniformno na $\mathbb{C} \setminus N(f)$. Stavimo $p = [\rho(f)]$. Imamo

$$\frac{1}{a_n - z} - \left(\frac{z}{a_n}\right)^k \cdot \frac{1}{a_n - z} = \frac{1}{a_n} + \frac{z}{a_n^2} + \cdots + \frac{z^{k-1}}{a_n^k},$$

pa je

$$\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}z^k}\left[\left(\frac{z}{a_n}\right)^k \cdot \frac{1}{a_n - z}\right] = \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}z^k}\frac{1}{a_n - z} = \frac{k!}{(a_n - z)^{k+1}}. \tag{9.116}$$

Kako je $k \leq p$, iz (9.115) i (9.116) slijedi

$$\frac{\mathrm{d}^p}{\mathrm{d}z^p}\left[\frac{f'(z)}{f(z))}\right] = g^{(p+1)}(z) - p! \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{(a_n - z)^{p+1}}. \tag{9.117}$$

Za $R > 0$ stavimo

$$g_R(z) = \frac{f(z)}{f(0)} \prod_{|a_n|\leq R} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right)^{-1}.$$

Uklonimo li uklonjive singularitete a_n, $|a_n| \leq R$, g_R postaje slijela funkcija bez nultočaka u zatvorenom krugu $\overline{K}(0,R)$. Budući da je $f = Pg_R$, gdje je P polinom, prema propoziciji 9.7. vrijedi $\rho(g_R) = \rho(f)$. Stoga za dano $a > \rho(f)$, $a < p+1$, prema propoziciji 9.5. postoji $A >=$ takav da je

$$|g_R(z)| \leq A\mathrm{e}^{|z|^a} \qquad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Odatle posebno vrijedi

$$|z| = 2R \qquad \Longrightarrow \qquad |g_R(z)| \leq A\mathrm{e}^{(2R)^a},$$

pa po principu maksimuma modula (teorem 1.12.) dobivamo

$$|z| \leq 2R \qquad \Longrightarrow \qquad |g_R(z)| \leq A\mathrm{e}^{(2R)^a}. \tag{9.118}$$

Funkcija G_r nema nultočaka u zatvorenom krugu $\overline{K}(0,R)$, dakle ni u nekom otvorenom krugu $K(0,R_1)$, $R < R_1 < 2R$. Kako je otvoren krug područje sa svojstvom logaritma, postoji funkcija $h_r \in \mathcal{H}(K(0,R_1))$ takva da je

$$g_R(z) = \mathrm{e}^{h_R(z)}, \qquad z \in K(0,R_1).$$

Kako je $g_R(0) = 1$, možemo uzeti da je $H_r(0) = 0$; tada je funkcija h_r jedinstveno određena. Budući da je

$$|g_R(z)| = \mathrm{e}^{\mathrm{Re}\, h_R(z)},$$

iz (9.118) slijedi

$$|z| < R_1 \qquad \Longrightarrow \qquad \mathrm{Re}\, h_R(z) \le \ln A + 2^a R^a,$$

dakle, za neki $B > 0$ vrijedi

$$|z| < R_1 \qquad \mathrm{Re}\, h_R(z) \le BR^a. \tag{9.119}$$

Kako je $H_R(0) = 0$, iz (9.119) i iz Carathéodoryjeve leme 9.7. dobivamo:

$$\rho < R \qquad \Longrightarrow \qquad M_{h_R}(\rho) \le \frac{2\rho}{R-\rho} BR^a. \tag{9.120}$$

Neka je $|z| = r < R$. Tada je

$$h_R^{(p+1)}(z) = \frac{(p+1)!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{H_R(\zeta)}{(\zeta - z)^{p+2}} \mathrm{d}\zeta, \tag{9.121}$$

gdje je γ pozitivno orijentirana kružnica sa središtem u točki z i radijusom $\frac{1}{2}(R-r)$, tj. $\gamma(t) = z + \frac{1}{2}(R-r)\mathrm{e}^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$. Za $\zeta \in \gamma^*$ vrijedi $|\zeta| \le r + \frac{1}{2}(R-r) = \frac{1}{2}(R+r)$, pa iz (9.120) za $\rho = \frac{1}{2}(R+r)$ i iz (9.121) slijedi da za $|z| = r < R$ vrijedi

$$\left|h_R^{(p+1)}(z)\right| \le \frac{(p+1)!}{2\pi} \cdot \frac{R+r}{(R-r)/2} \cdot BR^a \cdot \frac{2^{p+2}}{(R-r)^{p+2}} \cdot \pi(R-r) = B\frac{2^{p+2}(p+1)!(R+r)}{(R-r)^{p+2}} R^a.$$

Odavde uz oznaku $C = 3 \cdot 2^{2p+3} \cdot B \cdot (p+1)!$ dobivamo

$$|z| = R/2 \qquad \Longrightarrow \qquad \left|h_R^{(p+1)}(z)\right| \le CR^{a-p-1},$$

dakle, prema principu maksimuma modula

$$|z| \le R/2 \qquad \Longrightarrow \qquad \left|h_R^{(p+1)}(z)\right| \le CR^{a-p-1}, \tag{9.122}$$

Budući da je

$$h_R'(z) = \frac{g_R'(z)}{g_R(z)} = \frac{f'(z)}{f(z)} + \sum_{|a_n| leq R} \frac{1}{a_n - z},$$

iz (9.117) nalazimo

$$g^{(p+1)}(z) = h_R^{(p+1)}(z) + p! \sum_{|a_n| > R} \frac{1}{(a_n - z)^{p+1}}. \tag{9.123}$$

Ako je $|z| \le R/2$ i $|a_n| > R$, onda je $|a_n - z| \ge |a_n|/2$. Prema tome, vrijedi

$$|z| \le R/2 \qquad \Longrightarrow \qquad \left| p! \sum_{|a_n| > R} \frac{1}{(a_n - z)^{p+1}} \right| \le p!\, 2^{p+1} \sum_{|a_n| > R} |a_n|^{-p-1}. \tag{9.124}$$

Iz (9.122) slijedi da je

$$\lim_{R\to+\infty} h_R^{(p+1)}(z) = 0 \qquad \forall z \in \mathbb{C}. \tag{9.125}$$

Nadalje, red $\sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n|^{-p-1}$ konvergira, jer je $p \geq k$. Stoga iz (9.124) izlazi da vrijedi

$$\lim_{R\to+\infty} p! \sum_{|a_n|>R} \frac{1}{(a_n - z)^{p+1}} = 0 \tag{9.126}$$

Budući da lijeva strana u (9.123) ne ovisi o R, (9.125) i (9.126) pokazuju da je $g^{(p+1)}(z) = 0$. Dakle, g je polinom stupnja $\leq p$.

Zadatak 9.20. *Neka je f cijela funkcija konačnog reda $\rho(f) \notin \mathbb{Z}$. Dokažite da tada za svaku točku $a \in \mathbb{C}$ jednadžba $f(z) = a$ ima beskonačno mnogo rješenja.*

Uputa: U protivnom bismo imali $f(z) - a = \mathrm{e}^{g(z)}P(z)$, gdje je P polinom, a g cijela funkcija. Koristite sada teorem 9.13.

Zadatak 9.21. *Neka je f cijela funkcija reda < 2, kojoj su sve nultočke realne i za koju vrijedi $f(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}$. Dokažite da tada i njena derivacija f' ima sve nultočke realne i da se između dvije uzastopne nultočke od f nalazi točno jedna nultočka od f'.*

Uputa: Neka je $N(f) = \{x_n;\ n \in \mathbb{N}\}$. Izvedite formule

$$\mathrm{Im}\left[\frac{f'(z)}{f(z)}\right] = -y\left[\frac{k}{x^2+y^2} + \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{(x-x_n)^2+y^2}\right], \qquad z = x+iy \in \mathbb{C}, \quad x, y \in \mathbb{R},$$

i

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[\frac{f'(z)}{f(z)}\right] = -\frac{k}{z^2} - \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{(z-x_n)^2}, \qquad z \in \mathbb{C}.$$

9.10 Primjeri: trigonometrijske funkcije

Primjer 1. Cijela funkcija $f(z) = \sin \pi z$.

Imamo $N(f) = \mathbb{Z}$ i $m(f;n) = 1$ za svaki $n \in \mathbb{Z}$. Budući da je

$$\sum_{n\in\mathbb{Z},\, n\neq 0} |n|^{-2} < +\infty \qquad \text{i} \qquad \sum_{n\in\mathbb{Z},\, n\neq 0} |n|^{-1} = +\infty$$

promatrana je funkcija ranga 1. Nadalje, eksponent konvergencije nultočaka te funkcije također je jednak 1. Primjenom teorema 9.5. zaključujemo da je

$$\sin \pi z = z\mathrm{e}^{g(z)} \prod_{n\in\mathbb{N}} E_1\left(\frac{z}{n}\right) \cdot \prod_{n\in\mathbb{N}} E_1\left(-\frac{z}{n}\right), \tag{9.127}$$

gdje je g neka cijela funkcija. Prema propozicijama 9.2. i 9.3. u beskonačnom produktu (9.127) možemo po volji mijenjati redoslijed faktora i po volji ih možemo grupirati. Kako je

$$E_1\left(\frac{z}{n}\right) E_1\left(-\frac{z}{n}\right) = \left(1 - \frac{z}{n}\right)\mathrm{e}^{z/n}\left(1 + \frac{z}{n}\right)\mathrm{e}^{-z/n} = 1 - \frac{z^2}{n^2},$$

iz (9.127) slijedi

$$\sin \pi z = z e^{g(z)} \prod_{n\in\mathbb{N}} \left[1 - \frac{z^2}{n^2}\right]. \tag{9.128}$$

Treba još odrediti funkciju g.

Prema teoremu 9.3. iz (9.128) izlazi

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \pi \operatorname{ctg} \pi z = g'(z) + \frac{1}{z} + \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{2z}{z^2 - n^2}$$

i pri tome red konvergira lokalno uniformno na $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$. Odavde i iz formule (5.40) (str. 48) izlazi da je $g'(z) = 0$, tj. g je konstanta. Prema tome, postoji kompleksan broj $\alpha \neq 0$ takav da je

$$\sin \pi z = \alpha z \prod_{n\in\mathbb{N}} \left[1 - \frac{z^2}{n^2}\right]. \tag{9.129}$$

Budući da je

$$\lim_{z\to 0} \frac{\sin \pi z}{z} = \pi,$$

iz (9.129) slijedi da je $\alpha = \pi$, dakle, imamo konačnu formulu

$$\sin \pi z = \pi z \prod_{n\in\mathbb{N}} \left[1 - \frac{z^2}{n^2}\right]. \tag{9.130}$$

Primjer 2. Cijela funkcija $f(z) = \cos \pi z$.

Sasvim analogno za funkciju $\cos \pi z$ nalazimo

$$\cos \pi z = e^{g(z)} \prod_{n\in\mathbb{Z}} E_1\left(1 - \frac{z}{n + 1/2}\right),$$

pa iz

$$E_1\left(1 - \frac{z}{n + 1/2}\right) E_1\left(1 + \frac{z}{n + 1/2}\right) = 1 - \frac{z^2}{(n + 1/2)^2}$$

slijedi

$$\cos \pi z = e^{g(z)} \prod_{n\in\mathbb{Z}_+} \left[1 - \frac{z^2}{(n + 1/2)^2}\right].$$

Odavde korištenjem teorema 9.3. dobivamo

$$\frac{(\cos \pi z)'}{\cos \pi z} = -\pi \operatorname{tg} \pi z = g'(z) + \sum_{n\in\mathbb{Z}_+} \frac{2z}{z^2 - (n + 1/2)^2},$$

pa iz formule (5.42) (str. 48) slijedi da je $g'(z) = 0$, odnosno da je cijela funkcija g konstantna. Prema tome, za neki $\alpha \in \mathbb{C}$, $\alpha \neq 0$, vrijedi

$$\cos \pi z = \alpha \prod_{n\in\mathbb{Z}_+} \left[1 - \frac{z^2}{(n + 1/2)^2}\right].$$

Kako je $\cos 0 = 1$, slijedi $\alpha = 1$, pa imamo konačnu formulu

$$\cos \pi z = \prod_{n\in\mathbb{Z}_+} \left[1 - \frac{z^2}{(n + 1/2)^2}\right]. \tag{9.131}$$

Zadatak 9.22. *Za svaki $k \in \mathbb{Z}$ dokažite jednakosti:*

$$\prod_{n\in\mathbb{N}} \left[1 - \frac{(k+1/2)^2}{n^2}\right] = \frac{(-1)^k}{k\pi} \qquad i \qquad \prod_{n\in\mathbb{N}} \left[1 - \frac{k^2}{(n+1/2)^2}\right] = (-1)^k.$$

Zadatak 9.23. *Dokažite da vrijedi*

$$\mathrm{e}^{az} - \mathrm{e}^{bz} = (a-b)z\mathrm{e}^{(a+b)z/2} \prod_{n\in\mathbb{N}} \left[1 + \frac{(a-b)^2 z^2}{4n^2\pi^2}\right].$$

Zadatak 9.24. *Dokažite da za svaki $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}\pi$ vrijedi*

$$\sin(a-z) = \mathrm{e}^{-z\,\mathrm{ctg}\,a} \sin a \prod_{n\in\mathbb{Z}} \left[\left(1 - \frac{z}{a+n\pi}\right) \mathrm{e}^{z/(a+n\pi)}\right], \qquad z \in \mathbb{C}.$$

Poglavlje 10

Eulerova gama funkcija

10.1 Definicija gama funkcije

Promatrat ćemo funkciju Γ kompleksne varijable definiranu formulom

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} t^{z-1} \mathrm{d}t. \tag{10.1}$$

Pri tome je $t^{z-1} = \mathrm{e}^{(z-1)\ln t}$ za $z \in \mathbb{C}$ i $t > 0$. Integral u formuli (10.1) zove se **Eulerov integral druge vrste**. Na gornjoj granici to je nepravi integral. Osim toga, ako je $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 1$, onda je

$$\lim_{t \to 0} \mathrm{e}^{(z-1)\ln t} = \infty,$$

pa je i na donjoj granici integral nepravi. Dakle, definicija funkcije Γ je zapravo

$$\Gamma(z) = \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ R \to +\infty}} \int_\varepsilon^R \mathrm{e}^{-t} t^{z-1} \mathrm{d}t. \tag{10.2}$$

Funkcija Γ definirana je formulom (10.1) (odnosno, (10.2)) na skupu svih $z \in \mathbb{C}$ za koje postoji limes u (10.2), odnosno, za koje konvergira nepravi integral (10.1), i zove se **gama funkcija**.

Zadatak 10.1. *Dokažite da za* $z \in \mathbb{R}$, $z \geq 1$, *vrijedi*

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z). \tag{10.3}$$

odatle izvedite da je $\Gamma(n) = (n-1)!$ *za svaki* $n \in \mathbb{N}$.

Prema tome, gama funkcija je proširenje funkcije $n \mapsto (n-1)!$ sa skupa $\mathbb{N}$ na skup konvergencije nepravog integrala (10.1).

10.2 Nepravi integrali ovisni o parametru

Da bismo proučili konvergenciju integrala (10.1) i da bismo dokazali da je tim integralom definirana holomorfna funkcija na desnoj poluravnini, tj. za $\operatorname{Re} z > 0$, oučimo da je integral (10.1) poseban slučaj nepravog integrala oblika

$$\int_a^b f(t, z) \mathrm{d}t. \tag{10.4}$$

Za takav integral kažemo da ovisi o parametru z. Ako za svaku točku z iz nekog otvorenog skupa $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ nepravi integral (10.4) konvergira, onda on definira funkciju na Ω

$$g(z) = \int_a^b f(t,z)\mathrm{d}t, \qquad z \in \Omega. \tag{10.5}$$

Kod takvih inegrala postavlja se pitanje neprekidnosti i holomorfnosti funkcije g, a zatim i pitanje mogućnosti deriviranja pod znakom integrala, tj. pitanje uvjeta uz koje vrijedi

$$g^{(n)}(z) = \int_a^b \frac{\partial^n f(t,z)}{\partial z^n}\mathrm{d}t. \tag{10.6}$$

Prije nego što prijeđemo na rješavanje ovih pitanja za neprave integrale, razmotrimo jednostavniji slučaj pravih integrala.

Lema 10.1. *Neka je $-\infty < a < b < +\infty$, $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ otvoren skup i $f : [a,b] \times \Omega \to \mathbb{C}$ neprekidna funkcija takva da je za svako $t \in [a,b]$ funkcija $z \mapsto f(t,z)$ holomorfna na Ω. Tada je sa* (10.5) *definirana holomorfna funkcija na Ω i za svaki prirodan broj n vrijedi formula* (10.6).

Dokaz: Dokažimo najprije da je funkcija g neprekidna na Ω. Neka je $z_0 \in \Omega$. Izaberimo $r > 0$ tako da bude $\overline{K}(z_0,r) \subseteq \Omega$. Skup $[a,b] \times \overline{K}(z_0,r)$ je kompaktan, pa je svaka neprekidna funkcija na tom skupu uniformno neprekidna. Prema tome, za dano $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takvo da vrijedi

$$t_1,t_2 \in [a,b],\ z_1,z_2 \in \overline{K}(z_0,r),\ |t_1-t_2| \le \delta,\ |z_1-z_2| \le \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(t_1,z_1) - f(t_2,z_2)| \le \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Posebno, vrijedi:

$$t \in [a,b], \quad z \in \overline{K}(z_0,r), \quad |z-z_0| \le \delta \qquad \Longrightarrow \qquad |f(t,z) - f(t,z_0)| \le \frac{\varepsilon}{b-a}. \tag{10.7}$$

Imamo

$$g(z) - g(z_0) = \int_a^b [f(t,z) - f(t,z_0)]\mathrm{d}t,$$

pa iz (10.7) slijedi

$$z \in \overline{K}(z_0,r), \quad |z-z_0| \le \delta \qquad \Longrightarrow \qquad |g(z) - g(z_0)| \le \varepsilon.$$

Prema tome, funkcija g je neprekidna u svakoj točki $z_0 \in \Omega$.

Neka je sada Δ bilo koji zatvoren trokut sadržan u Ω i $\partial\Delta$ njegov orijentirani rub. Prema teoremu 1.5. zbog holomorfnosti funkcije $z \mapsto f(t,z)$ na Ω za svako $t \in [a,b]$ imamo

$$\int_{\partial\Delta} f(t,z)\mathrm{d}t = 0.$$

Odatle dobivamo

$$\int_{\partial\Delta} g(z)\mathrm{d}t = \int_{\partial\Delta}\left[\int_a^b f(t,z)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}z = \int_a^b \left[\int_{\partial\Delta} f(t,z)\mathrm{d}z\right]\mathrm{d}t = 0.$$

Sada iz teorema 1.5. zaključujemo da je funkcija g holomorfna na Ω.

Neka je $z \in \Omega$ i neka je $r > 0$ izabran tako da bude $\overline{K}(z,r) \subseteq \Omega$. Označimo sa γ pozitivno orijentiranu kružnicu sa središtem u točki z i radijusom r. Prema Cauchyjevoj integralnoj formuli za derivacije za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijede formule

$$g^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{g(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta \quad \text{i} \quad \frac{\partial^n f(t,z)}{\partial z^n} = \frac{n!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(t,\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta \qquad \forall t \in [a,b].$$

Odatle dobivamo

$$g^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1}{(\zeta - z)^{n+1}}\left[\int_a^b f(t,\zeta)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}\zeta = \int_a^b \left[\frac{n!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(t,\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta\right]\mathrm{d}t = \int_a^b \frac{\partial^n f(t,\zeta)}{\partial z^n}\mathrm{d}t.$$

U slučaju nepravog integrala koji ovisi o parametru za analogan rezultat potrebno je postaviti dodatne uvjete na konvergenciju integrala. Neka je $-\infty < a < b \leq +\infty$, $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ otvoren skup i $f : [a,b\rangle \times \Omega \to \mathbb{C}$ funkcija takva da nepravi integral (10.4) konvergira za svaku točku $z \in \Omega$. Neka je $g : \Omega \to \mathbb{C}$ funkcija definirana formulom (10.5). Kažemo da **nepravi integral** (10.4) **konvergira uniformno** na skupu $K \subseteq \Omega$, ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji $B_0 \in [a,b\rangle$ takvo da vrijedi:

$$z \in K, \quad B \geq B_0, \quad B < b \qquad \Longrightarrow \qquad \left|g(z) - \int_a^B f(t,z)\mathrm{d}t\right| \leq \varepsilon.$$

Kažemo da **nepravi integral** (10.4) **konvergira lokalno uniformno** na Ω, ako on konvergira uniformno na svakom kompaktnom skupu $K \subseteq \Omega$.

Sasvim analogno definira se pojam uniformne i lokalno uniformne konvergencije integrala (10.4) i kad se radi o nepravom integralu na donjoj ili na obje granice. U tim slučajevima vrijede analogni rezultati.

Lema 10.2. *Neka su $-\infty < a < b \leq +\infty$, $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ otvoren skup i $f : [a,b\rangle \times \Omega \to \mathbb{C}$ neprekidna funkcija. Ako za dani skup $K \subseteq \Omega$ postoji nenegativna neprekidna funkcija $F : [a,b\rangle \to \mathbb{R}$ takva da je*

$$|f(t,z)| \leq F(t) \qquad \forall (t,z) \in [a,b\rangle \times K \tag{10.8}$$

i

$$\int_a^b F(t)\mathrm{d}t < +\infty \tag{10.9}$$

onda integral (10.4) *konvergira uniformno na K.*

Dokaz: Iz (10.8) i (10.9) slijedi da integral (10.4) konvergira apsolutno za svaku točku $z \in K$. Neka je $\varepsilon > 0$. Izaberimo $B_0 \in [a,b\rangle$ tako da vrijedi

$$\int_{B_0}^b F(t)\mathrm{d}t \leq \varepsilon. \tag{10.10}$$

Sada za $z \in K$ i $B_0 \leq B < b$ iz (10.8), (10.9) i (10.10) dobivamo

$$\left|g(z) - \int_a^B f(t,z)\mathrm{d}t\right| = \left|\int_B^b f(t,z)\mathrm{d}t\right| \leq \int_B^b F(t)\mathrm{d}t \leq \int_{B_0}^b F(t)\mathrm{d}t \leq \varepsilon.$$

Time je lema dokazana.

Propozicija 10.1. *Neka su $-\infty < a < b \leq +\infty$, $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ otvoren skup i $f : [a,b\rangle \times \Omega \to \mathbb{C}$ neprekidna funkcija takva da je za svako $t \in [a,b\rangle$ funkcija $z \mapsto f(t,z)$ holomorfna na Ω. Pretpostavimo da nepravi integral* (10.4) *konvergira lokalno uniformno na Ω. Tada je funkcija $g : \Omega \to \mathbb{C}$ definirana tim integralom holomorfna na Ω i za svaki $n \in \mathbb{N}$ i svaku točku $z \in \Omega$ vrijedi formula* (10.6).

Dokaz: Neka je $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ rastući niz u $[a,b\rangle$ koji konvergira prema b. Za svaki prirodan broj $k \in \mathbb{N}$ definiramo funkciju $g_k : \Omega \to \mathbb{C}$ formulom

$$g_k(z) = \int_a^{b_k} f(t,z)\mathrm{d}t, \qquad z \in \Omega.$$

Prema lemi 10.1. funkcije g_k su holomorfne i za svaki $n \in \mathbb{N}$ i svaku točku $z \in \Omega$ vrijedi

$$g_k^{(n)}(z) = \int_a^{b_k} \frac{\partial^n f(t,z)}{\partial z^n} \mathrm{d}t. \tag{10.11}$$

Ptretpostavka o lokalno uniformnoj konvergenciji integrala (10.4) ima za posljedicu da niz holomorfnih funkcija $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergira lokalno uniformno na Ω prema funkciji g. Prema Weierstrassovom teoremu 1.6. funkcija g je holomorfna na Ω i za svaki prirodan broj $n \in \mathbb{N}$ niz $n-$tih derivacija $\left(g_k^{(n)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergira lokalno uniformno na Ω prema $n-$toj derivaciji $g^{(n)}$. Odatle i iz (10.11) slijedi (10.6), budući da je $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ proizvoljan rastući niz u $[a, b\rangle$ koji konvergira prema b.

Napomenimo još da Weierstrassov teorem 1.6. ima za posljedicu da iz lokalno uniformne konvergencije integrala (10.4) slijedi lokalno uniformna konvergencija integrala (10.6) za svaki $n \in \mathbb{N}$.

10.3 Područje konvergencije Eulerovog integrala

Vratimo se sada na pitanje konvergencije integrala (10.1) i to pitanje razdvojimo na razmatranje dvaju nepravih integrala, jednog na donjoj a drugog na gormnjoj granici:

$$P(z) = \int_0^1 \mathrm{e}^{-t} t^{z-1} \mathrm{d}t, \qquad Q(z) = \int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} t^{z-1} \mathrm{d}t. \tag{10.12}$$

Funkcije P i Q definirane tim integralima zovu se **nepotpune gama funkcije**. Dokazat ćemo da je funkcija P holomorfna na desnoj poluravnini $\mathrm{Re}\, z > 0$ i da je Q cijela funkcija.

Dokažimo najprije da je Q cijela funkcija. Prema propoziciji 10.1. u tu je svrhu dovoljno ustanoviti da funkcija $f : [1, +\infty\rangle \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, definirana sa

$$f(t, z) = \mathrm{e}^{-t} t^{z-1} = \mathrm{e}^{-t+(z-1)\ln t}, \qquad (t, z) \in [1, +\infty\rangle \times \mathbb{C}, \tag{10.13}$$

zadovoljava uvjete leme 10.2. za svaki kompaktan skup $K \subseteq \mathbb{C}$. Ta je funkcija očito neprekidna i za svaki $t \in [1, +\infty\rangle$ funkcija $z \to f(t, z)$ je cijela. Neka je $K \subseteq \mathbb{C}$ kompaktan skup. Tada je skup K ograničen pa postoji prirodan broj m takav da je

$$\mathrm{Re}\, z \le m \qquad \forall z \in K.$$

Definiramo sada nenegativnu funkciju $F_K : [1, +\infty\rangle \to \mathbb{R}$ sa

$$F_K(t) = \mathrm{e}^{-t} t^{m-1}.$$

Sada za $z \in K$ i $t \in [1, +\infty\rangle$ imamo

$$\left|\mathrm{e}^{-t} t^{z-1}\right| = \mathrm{e}^{-t} t^{\mathrm{Re}\, z-1} \le \mathrm{e}^{-t} t^{m-1} = F_K(t).$$

Nadalje, prema zadatku 10.1. imamo

$$\int_1^{+\infty} F_K(t)\mathrm{d}t = \int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} t^{m-1} \mathrm{d}t < \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} t^{m-1} \mathrm{d}t = (m-1)! < +\infty.$$

Dakle, funkcija $f(t, z) = \mathrm{e}^{-t} t^{z-1}$ za svaki kompaktan skup $K \subseteq \mathbb{C}$ zadovoljava uvjete leme 10.2. pa integral koji definira funkciju Q konvergira lokalno uniformno na $\mathbb{C}$. Prema propoziciji 10.1. Q je cijela funkcija i za svaki prirodan broj n vrijedi

$$Q^{(n)}(z) = \int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} t^{z-1} (\ln t)^n \mathrm{d}t. \tag{10.14}$$

Proučimo sada funkciju P na desnoj poluravnini $E = \{z \in \mathbb{C};\ \operatorname{Re} z > 0\}$. Neka je $K \subseteq E$ kompaktan skup. Stavimo

$$x = \min \{\operatorname{Re} z;\ z \in K\} > 0.$$

Definiramo nenegativnu neprekidnu funkciju $F_K : \langle 0, 1] \to \mathbb{R}$ sa

$$F_K(t) = t^{x-1}, \qquad 0 < t \leq 1.$$

Kako za $z \in K$ i $t \in \langle 0, 1]$ vrijedi

$$\mathrm{e}^{-t} \leq 1 \qquad \text{i} \qquad \left|t^{z-1}\right| = t^{\operatorname{Re} z-1} \leq t^{x-1},$$

dobivamo

$$\left|\mathrm{e}^{-t} t^{z-1}\right| \leq F_K(t) \qquad \forall (t, z) \in \langle 0, 1] \times K.$$

Nadalje, za $0 < \varepsilon < 1$ imamo

$$\int_\varepsilon^1 F_K(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{x} t^x \Big|_\varepsilon^1 = \frac{1}{x}\left(1 - \varepsilon^x\right),$$

a odatle je zbog $x > 0$

$$\int_0^1 F_K(t)\mathrm{d}t = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{x}\left(1 - \varepsilon^x\right) = \frac{1}{x} < +\infty.$$

Iz leme 10.2. i propozicije 10.1. slijedi da je funkcija P holomorfna na desnoj poluravnini E i da za svaki prirodan broj $n$vrijedi

$$P^{(n)}(z) = \int_0^1 \mathrm{e}^{-t} t^{z-1} (\ln t)^n \mathrm{d}t \qquad \forall z \in E. \tag{10.15}$$

Iz dokazanog izlazi da je funkcija $\Gamma = P + Q$, definirana formulom (10.1), holomorfna na desnoj poluravnini E. Nadalje, iz (10.13) i (10.14) slijedi

$$\Gamma^{(n)}(z) = \int_0^1 \mathrm{e}^{-t} t^{z-1} (\ln t)^n \mathrm{d}t, \qquad n \in \mathbb{N}, \quad z \in E. \tag{10.16}$$

Uočimo sada da svojstvo (10.3) gama funkcije vrijedi za svaku točku $z \in E$. Budući da su lijeva i desna strana jednakosti (10.3) holomorfne funkcije na E i budući da znamo da ta jednakost vrijedi za svaku točku $z \in [1, +\infty\rangle$, teorem jedinstvenosti 1.11. pokazuje da jednakost (10.3) vrijedi za sve točke z desne poluravnine E. Spomenimo još da se (10.3) lako dokazuje i direktno parcijalnom integracijom.

Iz (10.3) neposredno slijedi indukcijom po n :

$$\Gamma(z + n) = (z + n - 1)(z + n - 2) \cdots (z + 1) z \Gamma(z), \qquad n \in \mathbb{N}, \quad z \in E. \tag{10.17}$$

10.4 Proširenje gama funkcije

Razmatrat ćemo sada problem proširenja gama funkcije s desne poluravnine do holomorfne funkcije na većem području. Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ područje koje sadrži desnu poluravninu E i neka je $F : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorfna funkcija koja proširuje funkciju Γ. Po teoremu jedinstvenosti 1.11. iz (10.17) slijedi da za prirodan broj n i za sve točke $z \in \Omega$ takve da je i $z + n \in \Omega$ vrijedi

$$F(z + n) = (z + n - 1) \cdots (z + 1) z F(z).$$

Pretpostavimo sada da je $-k \in \Omega$ za neki $k \in \mathbb{Z}_+$. Uvrstimo li u gornju formulu $z = -k$ i $n = k+1$, dobivamo

$$F(1) = 0 \cdot (-1) \cdots (-k+1) \cdot (-k) \cdot F(-k) = 0,$$

a to je apsurd jer je $F(1) = \Gamma(1) = 1$. Prema tome, područje Ω sigurno ne sadrži nijednu točku iz $\mathbb{Z}_- = -\mathbb{Z}_+$. Dokazat ćemo sada da se funkcija Γ može proširiti do holomorfne funkcije na čitavom području $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_-$.

Za funkciju Q definiranu sa (10.12) dfokazali smo da je cijela. Prema tome, dovoljno je promatrati problem proširenja za funkciju P. Ako je $\operatorname{Re} z > 0$ iz definicije (10.12) funkcije P nalazimo

$$P(z) = \int_0^1 \mathrm{e}^{-t} t^{z-1} \mathrm{d}t = \int_0^1 \left[\sum_{k \in \mathbb{Z}_+} (-1)^k \frac{t^k}{k!} \right] t^{z-1} \mathrm{d}t,$$

odnosno,

$$P(z) = \int_0^1 t^{z-1} \mathrm{d}t + \int_0^1 \left[\sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{(-1)^k}{k!} t^{z+k-1} \right] \mathrm{d}t. \tag{10.18}$$

Prvi integral (nepravi) u formuli (10.18) jednak je $\frac{1}{z}$. Za svaku točku $z \in E$ red u drugom integralu u (10.18) konvergira apsolutno i uniformno po $t \in [0,1]$. Doista, za $0 \leq t \leq 1$ i $k \in \mathbb{N}$ imamo

$$\left| t^{z+k-1} \right| = t^{\operatorname{Re} z + k - 1} \leq 1,$$

pa je spomenuti red apsolutnih vrijednosti majoriziran konvergentnim redom s pozitivnim članovima

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{1}{k!} = \mathrm{e} - 1 < +\infty.$$

Zbog uniformne konvergencije na segmentu $[0,1]$ zaključujemo da drugi integral u (10.18) zapravo nije nepravi nego pravi i da možemo zamijeniti redoslijed integracije i sumacije. Kako je

$$\int_0^1 t^{z+k-1} \mathrm{d}t = \frac{1}{z+k},$$

iz (10.18) dobivamo

$$P(z) = \frac{1}{z} + \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{1}{z+k} = \sum_{k \in \mathbb{Z}_+} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{1}{z+k}.$$

Razmotrimo sada konvergenciju reda racionalnih funkcija

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{1}{z+k}. \tag{10.19}$$

Dokazat ćemo da taj red konvergira lokalno uniformno na $\mathbb{C}$ (u smislu definicije na str. 39).

Neka je $R > 0$. Izaberimo prirodan broj $m > R$. Tada članovi reda (10.18) za $k \geq m$ nemaju polova u zatvorenom krugu $\overline{K}(0,R)$. Nadalje, za $k \geq m$ i $z \in \overline{K}(0,R)$ je

$$|z+k| \geq k - |z| \geq m - R,$$

pa slijedi

$$\left|\frac{(-1)^k}{k!}\,\frac{1}{z+k}\right| \leq \frac{1}{k!}\,\frac{1}{m-R}.$$

Kako je

$$\sum_{k\geq m}\frac{1}{k!}\,\frac{1}{m-R} < \frac{1}{m-R}\sum_{k\in\mathbb{Z}_+}\frac{1}{k!} = \frac{\mathrm{e}}{m-R} < +\infty,$$

prema Weierstrassovom kriteriju uniformne konvergencije slijedi da red

$$\sum_{k\geq m}\frac{(-1)^k}{k!}\,\frac{1}{z+k}$$

konvergira uniformno na zatvorenom krugu $\overline{K}(0,R)$. Prema tome, red racionalnih funkcija (10.19) konvergira lokalno uniformno na $\mathbb{C}$. Prema propoziciji 5.1. suma tog reda je meromorfna funkcija Φ na $\mathbb{C}$ kojoj su polovi sadržani u skupu $\mathbb{Z}_-$. Nadalje, prema provedenom računu ta se funkcija Φ podudara s funkcijom P na desnoj poluravnini E.

Promatran na području $\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}_-$ red holomorfnih funkcija (10.19) konvergira lokalno uniformno. Prema Weierestrassovom teoremu 1.11. taj red smijemo derivirati član po član:

$$\Phi^{(n)}(z) = \sum_{k\in\mathbb{Z}_+}(-1)^{k+n}\frac{n!}{k!}\,\frac{1}{(z+k)^{n+1}}, \qquad z\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}_-.$$

Za bilo koji $n\in\mathbb{Z}_+$ imamo

$$\Phi(z) = \frac{(-1)^n}{n!}\,\frac{1}{z+n} + \Phi_n(z),$$

gdje je

$$\Phi_n(z) = \sum_{k\in\mathbb{Z}_+,\,k\neq n}\frac{(-1)^k}{k!}\,\frac{1}{z+k}$$

funkcija, koja je holomorfna na skupu $(\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}_-)\cup\{-n\}$ i posebno na okolini $K(-n,1)$ točke $-n$. Prema tome, glavni dio Laurentovog razvoja funkcije Φ oko točke $-n$ jednak je

$$\frac{(-1)^n}{n!}\,\frac{1}{z+n}.$$

Sve dokazano možemo iskazati teoremom:

Teorem 10.1. (*a*) *Funkcija* Γ *zadana sa*

$$\Gamma(z) = \int_1^{+\infty}\mathrm{e}^{-t}t^{z-1}\mathrm{d}t + \sum_{k\in\mathbb{Z}_+}\frac{(-1)^k}{k!}\,\frac{1}{z+k} \tag{10.20}$$

holomorfna je na području $\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}_-$, *ima polove prvog reda u točkama skupa* $\mathbb{Z}_-$ *i u tim su joj polovima reziduumi*

$$Res(\Gamma;-n) = \frac{(-1)^n}{n!}, \qquad n\in\mathbb{Z}_+.$$

(*b*) *Nepravi integral u* (10.20) *konvergira za sve* $z\in\mathbb{C}$ *i definira cijelu funkciju.*

(*c*) *Za svaki* $n \in \mathbb{N}$ *je*

$$\Gamma^{(n)}(z) = \int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} t^{z-1} (\ln t)^n \mathrm{d}t + \sum_{k \in \mathbb{Z}_+} (-1)^{k+n} \frac{n!}{k!} \frac{1}{(z+k)^{n+1}}, \qquad z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_-.$$

(*d*) *Vrijedi*

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \qquad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_-.$$

(*e*) *U desnoj poluravnini* E *funkcija* Γ *ima integralni prikaz*

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} t^{z-1} \mathrm{d}t$$

i za svaki $n \in \Gamma$ *vrijedi*

$$\Gamma^{(n)}(z) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} t^{z-1} (\ln t)^n \mathrm{d}t, \qquad z \in E.$$

10.5 Produktna formula

U ovom odjeljku dokazat ćemo tzv. **produktnu formulu**:

Teorem 10.2. *Vrijedi jednakost*

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z} \qquad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}. \tag{10.21}$$

Dokaz: Pretpostavimo najprije da je $z = x$, $0 < x < 1$. Imamo

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} t^{x-1} \mathrm{d}t, \qquad \Gamma(1-x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-s} s^{-x} \mathrm{d}s.$$

Supstitucijama $t = u^2$ i $s = v^2$ dobivamo

$$\Gamma(x) = 2 \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2} u^{2x-1} \mathrm{d}u, \qquad \Gamma(1-x) = 2 \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-v^2} v^{1-2x} \mathrm{d}v,$$

pa slijedi

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = 4 \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-(u^2+v^2)} \left(\frac{u}{v}\right)^{2x-1} \mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

Gornji integral možemo shvatiti kao površinski integral po prvom kvadrantu $(u, v)-$ravnine. Prijeđimo u tom integralu na polarne koordinate u $(u, v)-$ravnini:

$$u = r \cos \varphi, \qquad v = r \sin \varphi, \qquad \mathrm{d}u\mathrm{d}v = r\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi.$$

Imamo

$$u^2 + v^2 = r^2 \qquad \text{i} \qquad \frac{u}{v} = \operatorname{ctg} \varphi,$$

pa dobivamo

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = 4 \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-r^2} r\mathrm{d}r \int_0^{+\frac{\pi}{2}} (\operatorname{ctg} \varphi)^{2x-1} \mathrm{d}\varphi. \tag{10.22}$$

Budući da se ne radi o običnim nego o nepravim integralima, ovaj formalni račun treba opravdati.

Budući da je podintegralna funkcija svuda nenegativna, integral po kružnom isječku $\{(u,v) \in \mathbb{R}^2;\ u \geq 0,\ v \geq 0,\ u^2+v^2 \leq R^2\}$ možemo ocijeniti odozgo s integralom po opisanom kvadratu $\{(u,v) \in \mathbb{R}^2;\ 0 \leq u \leq R,\ 0 \leq v \leq R\}$, a odozdo s integralom po upisanom kvadratu $\{(u,v) \in \mathbb{R}^2;\ 0 \leq u \leq R/\sqrt{2},\ 0 \leq v \leq R/\sqrt{2}\}$:

$$\int_0^{\frac{R}{\sqrt{2}}}\int_0^{\frac{R}{\sqrt{2}}} \mathrm{e}^{-(u^2+v^2)}\left(\frac{u}{v}\right)^{2x-1}\mathrm{d}u\mathrm{d}v \leq \int_0^R \mathrm{e}^{-r^2} r\mathrm{d}r \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\operatorname{ctg}\varphi)^{2x-1}\mathrm{d}\varphi \leq \int_0^R\int_0^R \mathrm{e}^{-(u^2+v^2)}\left(\frac{u}{v}\right)^{2x-1}\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

Neka je $\Delta_R(x)$ razlika gornje i donje ocjene:

$$\Delta_R(x) = \int_0^R\int_0^R \mathrm{e}^{-(u^2+v^2)}\left(\frac{u}{v}\right)^{2x-1}\mathrm{d}u\mathrm{d}v - \int_0^{\frac{R}{\sqrt{2}}}\int_0^{\frac{R}{\sqrt{2}}} \mathrm{e}^{-(u^2+v^2)}\left(\frac{u}{v}\right)^{2x-1}\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

Postupak zamjene varijabli u dvostrukom nepravom integralu bit će opravdan ako dokažemo da za svaki $x \in \langle 0,1\rangle$ vrijedi $\lim_{R\to+\infty} \Delta_R(x) = 0$. Razlika integrala $\Delta_R(x)$ jednaka je sumi triju integrala:

$$\Delta_R(x) = A_R(x) + B_R(x) + C_R(x),$$

gdje su

$$A_R(x) = \int_0^{\frac{R}{\sqrt{2}}}\int_{\frac{R}{\sqrt{2}}}^R \mathrm{e}^{-(u^2+v^2)}\left(\frac{u}{v}\right)^{2x-1}\mathrm{d}u\mathrm{d}v, \qquad B_R(x) = \int_{\frac{R}{\sqrt{2}}}^R\int_0^{\frac{R}{\sqrt{2}}} \mathrm{e}^{-(u^2+v^2)}\left(\frac{u}{v}\right)^{2x-1}\mathrm{d}u\mathrm{d}v,$$

$$C_R(x) = \int_{\frac{R}{\sqrt{2}}}^R\int_{\frac{R}{\sqrt{2}}}^R \mathrm{e}^{-(u^2+v^2)}\left(\frac{u}{v}\right)^{2x-1}\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

Dokazat ćemo sada da za svaki $x \in \langle 0,1\rangle$ vrijedi

$$\lim_{R\to+\infty} A_R(x) = \lim_{R\to+\infty} B_R(x) = \lim_{R\to+\infty} C_R(x) = 0$$

i time će prijelaz s Kartezijevih koordinata (u,v) na polarne koordinate (r,φ) biti opravdan.

U integralu $A_R(x)$ je $0 \leq u \leq R/\sqrt{2}$ i $R/\sqrt{2} \leq v \leq R$ pa imamo

$$u^2+v^2 \geq \frac{R^2}{2}, \quad \text{dakle,} \quad \mathrm{e}^{-(u^2+v^2)} \leq \mathrm{e}^{-\frac{R^2}{2}}.$$

Dakle,

$$0 \leq A_R(x) \leq \mathrm{e}^{-\frac{R^2}{2}} \int_0^{\frac{R}{\sqrt{2}}}\int_{\frac{R}{\sqrt{2}}}^R \left(\frac{u}{v}\right)^{2x-1}\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

Ovaj se integral može eksplicitno izračunati:

$$\int_0^{\frac{R}{\sqrt{2}}}\int_{\frac{R}{\sqrt{2}}}^R \left(\frac{u}{v}\right)^{2x-1}\mathrm{d}u\mathrm{d}v = \int_0^{\frac{R}{\sqrt{2}}} u^{2x-1}\mathrm{d}u \int_{\frac{R}{\sqrt{2}}} v^{1-2x}\mathrm{d}v = \left.\frac{u^{2x}}{2x}\right|_0^{\frac{R}{\sqrt{2}}} \cdot \left.\frac{v^{2-2x}}{2-2x}\right|_{\frac{R}{\sqrt{2}}}^R = \frac{R^2(2^{1-x}-1)}{8x(1-x)}.$$

Slijedi

$$0 \leq A_R(x) \leq \mathrm{e}^{-\frac{R^2}{2}} \frac{R^2(2^{1-x}-1)}{8x(1-x)} \qquad \Longrightarrow \qquad \lim_{R\to+\infty} A_R(x) = 0.$$

U drugom integralu $B_R(x)$ je $R/\sqrt{2} \leq u \leq R$ i $0 \leq v \leq R/\sqrt{2}$ pa opet imamo

$$u^2+v^2 \geq \frac{R^2}{2}, \qquad \text{dakle,} \quad \mathrm{e}^{-(u^2+v^2)} \leq \mathrm{e}^{-\frac{R^2}{2}}$$

i dobivamo

$$0 \leq B_R(x) \leq \mathrm{e}^{-\frac{R^2}{2}} \int_{\frac{R}{\sqrt{2}}}^{R} \int_0^{\frac{R}{\sqrt{2}}} \left(\frac{u}{v}\right)^{2x-1} \mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

Sada je

$$\int_{\frac{R}{\sqrt{2}}}^{R} \int_0^{\frac{R}{\sqrt{2}}} \left(\frac{u}{v}\right)^{2x-1} \mathrm{d}u\mathrm{d}v = \int_{\frac{R}{\sqrt{2}}} u^{2x-1}\mathrm{d}u \int_0^{\frac{R}{\sqrt{2}}} v^{1-2x}\mathrm{d}v = \left.\frac{u^{2x}}{2x}\right|_{\frac{R}{\sqrt{2}}}^{R} \cdot \left.\frac{v^{2-2x}}{2-2x}\right|_0^{\frac{R}{\sqrt{2}}} = \frac{R^2(2^x-1)}{8x(1-x)}.$$

Stoga je

$$0 \leq B_R(x) \leq \mathrm{e}^{-\frac{R^2}{2}} \frac{R^2(2^x-1)}{8x(1-x)} \qquad \Longrightarrow \qquad \lim_{R\to+\infty} B_R(x) = 0.$$

Napokon, u trećem integralu $C_R(x)$ je $R/\sqrt{2} \leq u \leq R$ i $R/\sqrt{2} \leq v \leq R$ pa imamo

$$u^2 + v^2 \geq \frac{R^2}{2} + \frac{R^2}{2} = R^2 \qquad \Longrightarrow \qquad \mathrm{e}^{-(u^2+v^2)} \leq \mathrm{e}^{-R^2}$$

i dobivamo

$$0 \leq C_R(x) \leq \mathrm{e}^{-R^2} \int_{\frac{R}{\sqrt{2}}}^{R} \int_{\frac{R}{\sqrt{2}}}^{R} \left(\frac{u}{v}\right)^{2x-1} \mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

Sada je

$$\int_{\frac{R}{\sqrt{2}}}^{R} \int_{\frac{R}{\sqrt{2}}}^{R} \left(\frac{u}{v}\right)^{2x-1} \mathrm{d}u\mathrm{d}v = \int_{\frac{R}{\sqrt{2}}}^{R} u^{2x-1}\mathrm{d}u \int_{\frac{R}{\sqrt{2}}}^{R} v^{1-2x}\mathrm{d}v = \left.\frac{u^{2x}}{2x}\right|_{\frac{R}{\sqrt{2}}}^{R} \cdot \left.\frac{v^{2-2x}}{2-2x}\right|_{\frac{R}{\sqrt{2}}}^{R} = \frac{R^2(3-2^x-2^{1-x})}{8x(1-x)}.$$

Dakle,

$$0 \leq C_R(x) \leq \mathrm{e}^{-R^2} \frac{R^2(3-2^x-2^{1-x})}{8x(1-x)} \qquad \Longrightarrow \qquad \lim_{R\to+\infty} C_R(x) = 0.$$

Time je postupak prijelaza s Kartezijevih koordinata na polarne u potpunosti opravdan i vrijedi (10.22). U integralu po r supstitucija $r^2 = t$ daje

$$2\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-r^2} r\mathrm{d}r = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t = 1.$$

Prema tome je

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\operatorname{ctg}\varphi)^{2x-1}\mathrm{d}\varphi.$$

U ovaj integral uvodimo supstituciju $y = \operatorname{ctg}\varphi$. Budući da je

$$(\sin\,\varphi)^2 = \frac{1}{1+(\operatorname{ctg}\varphi)^2} = \frac{1}{1+y^2} \qquad \text{i} \qquad \mathrm{d}y = -\frac{1}{(\sin\,\varphi)^2}\mathrm{d}\varphi = -(1+y^2)\mathrm{d}\varphi,$$

dobivamo

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = 2\int_0^{+\infty} \frac{y^{2x-1}}{1+y^2}\mathrm{d}y. \tag{10.23}$$

Ovaj ćemo integral izračunati pomoću računa reziduuma. Stavimo

$$\Omega = \mathbb{C} \setminus i\mathbb{R}_- = \mathbb{C} \setminus \{-iv;\ v \geq 0\}$$

i definiramo meromorfnu funkciju f na Ω formulom

$$f(z) = \frac{z^{2x-1}}{1+z^2}; \tag{10.24}$$

pri tome za $z = |z|\mathrm{e}^{i\varphi}$, $-\pi/2 < \varphi < 3\pi/2$, stavljamo $z^{2x-1} = |z|^{2x-1}\mathrm{e}^{i(2x-1)\varphi}$. Jedini pol funkcije f je točka $z = i$. To je pol prvog reda i

$$Res(f;i) = \lim_{z\to i} \frac{(z-i)z^{2x-1}}{1+z^2} = \lim_{z\to i} \frac{z^{2x-1}}{z+i}\frac{1}{2i}\mathrm{e}^{i(2x-1)\pi/2} = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{ix\pi}.$$

U daljnjem za bilo koji $r > 0$ sa γ_r označavat ćemo pozitivno orijentiranu "gornju" polukružnicu sa središtem u 0 i radijusom r od točke r do točke $-r$:

$$\gamma_r(t) = r\mathrm{e}^{it}, \qquad 0 \le t \le \pi.$$

Nadalje, sa γ_r^- označimo suprotno orijentiranu polukružnicu od točke $-r$ do točke r :

$$\gamma_r^-(t) = \gamma_r(\pi - t) = r\mathrm{e}^{i(\pi-t)} = -r\mathrm{e}^{-it}, \qquad 0 \le t \le \pi.$$

Neka su sada $0 < r < 1 < R < +\infty$. Definiramo zatvorenu krivulju $\Gamma_{r,R}$ sastavljenu od ravnog segmenta $[-R,-r]$ od točke $-R$ do točke $-r$, zatim od negativno orijentirane polukružnice γ_r^- od točke $-r$ do točke r, zatim od ravnog segmenta $[r,R]$ od točke r do točke R i napokon od pozitivno orijentirane polukružnice γ_R od točke R do točke $-R$. Dakle, ako je f holomorfna funkcija na području koje sadrži $\Gamma_{r,R}^*$, onda je

$$\int_{\Gamma_{r,R}} f(z)\mathrm{d}z = \int_{[-R,-r]} f(z)\mathrm{d}z - \int_{\gamma_r} f(z)\mathrm{d}z + \int_{[r,R]} f(z)\mathrm{d}z + \int_{\gamma_R} f(z)\mathrm{d}z.$$

Područje $\Omega = \mathbb{C} \setminus i\mathbb{R}_-$ sadrži $\Gamma_{r,R}^*$, a jedini pol i funkcije $f \in \mathcal{M}(\Omega)$ definirane sa (10.24) nalazi se u unutarnjem području pozitivno orijentirane konture $\Gamma_{r,R}$. Prema teoremu o reziduumima imamo

$$\int_{\Gamma_{r,R}} f(z)\mathrm{d}z = 2\pi i Res(f;i) = -\pi i \mathrm{e}^{ix\pi}. \tag{10.25}$$

Razmotrimo sada pobliže četiri dijela gornjeg integrala. Prije svega na segmentu $[-R,-r]$ je $z < 0$, pa je $|z| = -z$ i $z = -z\mathrm{e}^{i\pi}$; dakle,

$$z^{2x-1} = (-z)^{2x-1}\mathrm{e}^{i(2x-1)\pi} = -(-z)^{2x-1}\mathrm{e}^{2ix\pi}.$$

Stoga je

$$\int_{[-R,-r]} f(z)\mathrm{d}z = -\mathrm{e}^{21x\pi} \int_{[-R,-r]} \frac{(-z)^{2x-1}}{1+z^2}\mathrm{d}z = -\mathrm{e}^{2ix\pi} \int_r^R \frac{y^{2x-1}}{1+y^2}\mathrm{d}y.$$

Odatle i iz (10.23) dobivamo da vrijedi

$$\lim_{\substack{R\to+\infty \\ r\to 0}} \int_{[-R,r]} f(z)\mathrm{d}z = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2ix\pi}\Gamma(x)\Gamma(1-x). \tag{10.26}$$

Na segmentu $[r,R]$ je $z > 0$, pa je $z = |z|$, dakle,

$$\int_{[r,R]} f(z)\mathrm{d}z = \int_r^R \frac{y^{2x-1}}{1+y^2}\mathrm{d}y.$$

Odatle je

$$\lim_{\substack{R \to +\infty \\ r \to 0}} \int_{[r,R]} f(z)\mathrm{d}z = \frac{1}{2}\Gamma(x)\Gamma(1-x). \tag{10.27}$$

Ostalim dvama dijelovima integrala po $\Gamma_{r,R}$ ćemo samo ocijeniti apsolutnu vrijednost. Na manjoj polukružnici radijusa $r < 1$ je

$$\left|\int_{\gamma_r} f(z)\mathrm{d}z\right| \leq r\pi \max\left\{\left|f\left(r\mathrm{e}^{it}\right)\right|;\ 0 \leq t \leq \pi\right\}.$$

Imamo

$$|f(r\mathrm{i}t)| = \frac{r^{2x-1}}{|1 + r^2\mathrm{e}^{2it}|} \leq \frac{r^{2x-1}}{1-r^2},$$

pa slijedi

$$\left|\int_{\gamma_r} f(z)\mathrm{d}z\right| \leq \frac{\pi r^{2x}}{1-r^2}.$$

Odatle dobivamo

$$\lim_{r\to 0}\int_{\gamma_r} f(z)\mathrm{d}z = 0. \tag{10.28}$$

Napokon, na većoj polukružnici je $R > 1$, odakle je

$$\left|f\left(R\mathrm{e}^{it}\right)\right| \leq \frac{R^{2x-1}}{R^2-1},$$

pa slično kao prije dobivamo

$$\left|\int_{\gamma_R} f(z)\mathrm{d}z\right| \leq \frac{\pi R^{2x}}{R^2-1}.$$

Kako je $2x < 2$, slijedi

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{\gamma_R} f(z)\mathrm{d}z = 0. \tag{10.29}$$

Iz formula (10.25) – (10.29) slijedi

$$-\pi i\mathrm{e}^{ix\pi} = \lim_{\substack{R \to +\infty \\ r \to 0}} \int_{\Gamma_{r,R}} f(z)\mathrm{d}z = \frac{1}{2}\left(1-\mathrm{e}^{2ix\pi}\right)\Gamma(x)\Gamma(1-x).$$

Odavde je

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{2\pi i\mathrm{e}^{ix\pi}}{\mathrm{e}^{2ix\pi}-1} = \frac{2\pi i}{\mathrm{e}^{ix\pi}-\mathrm{e}^{-ix\pi}} = \frac{\pi}{\sin \pi x}.$$

Time je jednakost (10.21) dokazana za $z \in \langle 0,1\rangle$. Međutim, obje strane te jednakosti holomorfne su funkcije na području $\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$, a skup $\langle 0,1\rangle$ ima gomilišta u tom području. Prema teoremu jedinstvenosti (teorem 1.11.) zaključujemo da jednakost (10.21) vrijedi za sve točke $z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$.

Time je teorem 10.2. u potpunosti dokazan.

Posebno, za $z = \frac{1}{2}$ iz (10.21) dobivamo $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \pi$, a kako je očito $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) > 0$, slijedi

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}. \tag{10.30}$$

Važna je posljedica produktne formule:

Teorem 10.3. *Funkcija Γ nema nultočaka u području $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_-$. Drugim riječima, funkcija $1/\Gamma$ je cijela, skup njenih nultočaka je $\mathbb{Z}_-$ i sve su te nultočke jednostruke.*

Dokaz: Za $n \in \mathbb{N}$ je $\Gamma(n) = (n-1)! \neq 0$. Neka je sada $z \in (\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}_-)\setminus\mathbb{N} = \mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$ i pretpostavimo da je $\Gamma(z) = 0$. Tada iz produktne formule slijedi nemoguće:

$$\pi = (\sin \pi z)\Gamma(z)\Gamma(1-z) = 0.$$

Prema tome, Γ nema nultočaka u području $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_-$.

Zadatak 10.2. *Dokažite da za svaki prirodan broj n vrijedi*

$$\Gamma\left(n - \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n-1)!!}{2^n}\sqrt{\pi} \qquad i \qquad \Gamma\left(\frac{1}{2} - n\right) = \frac{(-1)^n 2^n}{(2n-1)!!}\sqrt{\pi}.$$

Pri tome je $(2n-1)!! = 1 \cdot 3 \cdots (2n-1)$ i $(-1)!! = 1$ (tzv. **dvostruki faktorijeli**).

Uputa: Za prvu formulu koristite (10.30) i (10.3), a drugu izvedite iz prve pomoću produktne formule (10.21).

Zadatak 10.3. *Dokažite da za svaki prirodan broj n vrijedi*

$$\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)\cdots\Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right) = \frac{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}}{\sqrt{n}}.$$

Uputa: Pomoću produktne formule (10.21) dokažite da je kvadrat lijeve strane gornje jednakosti jednak

$$\frac{\pi^{n-1}}{\left(\sin\frac{\pi}{n}\right)\left(\sin\frac{2\pi}{n}\right)\cdots\left(\sin\frac{(n-1)\pi}{n}\right)}.$$

Da biste gornji izraz izračunali, u identitetu

$$\frac{z^n - 1}{z - 1} = \left(z - e^{\frac{2\pi i}{n}}\right)\left(z - e^{\frac{4\pi i}{n}}\right)\cdots\left(z - e^{\frac{2(n-1)\pi i}{n}}\right)$$

pustite da z teži prema 1.

10.6 Beta funkcija

Beta funkcija je kompleksna funkcija dviju kompleksnih varijabli definirana na skupu $D \times D$, $D = \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_-$, formulom

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}, \qquad (p,q) \in D \times D. \tag{10.31}$$

Teorem 10.4. *Ako su p i q u desnoj poluravnini E, onda je*

$$B(p,q) = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}\mathrm{d}t. \tag{10.32}$$

Dokaz: Integral u formuli (10.32) je nepravi na donjoj granici ako je $0 < \operatorname{Re} p < 1$, a na gornjoj granici taj je integral nepravi ako je $0 < \operatorname{Re} q < 1$. Uzmimo sada proizvoljne točke p i q iz desne poluravnine, tj. $\mathrm{Re}\, p > 0$ i $\mathrm{Re}\, q > 0$. Neka je $\varphi : \langle 0, 1\rangle \to \mathbb{R}$ nenegativna funkcija definirana sa

$$\varphi(t) = \begin{cases} 2t^{\mathrm{Re}\, p-1} & \text{za } 0 < t \le \frac{1}{2} \\ \\ 2(1-t)^{\mathrm{Re}\, q-1} & \text{za } \frac{1}{2} < t < 1. \end{cases}.$$

Neka je $0 < t \le 1/2$. Tada je $1 < 1/(1-t) \le 2$, pa zbog $1 - \mathrm{Re}\, q < 1$ imamo

$$\left|t^{p-1}(1-t)^{q-1}\right| = t^{\mathrm{Re}\, p-1}\left(\frac{1}{1-t}\right) < t^{\mathrm{Re}\, p-1}\frac{1}{1-t} \le 2t^{\mathrm{Re}\, p-1} = \varphi(t).$$

Sasvim analogno, za $1/2 < t < 1$ je $1 < 1/t < 2$, pa zbog $1 - \mathrm{Re}\, p < 1$ imamo

$$\left|t^{p-1}(1-t)^{q-1}\right| = \left(\frac{1}{t}\right)^{1-\mathrm{Re}\, p}(1-t)^{\mathrm{Re}\, q-1} < \frac{1}{t}(1-t)^{\mathrm{Re}\, q-1} < 2(1-t)^{\mathrm{Re}\, q-1} = \varphi(t).$$

Prema tome, vrijedi

$$\left|t^{p-1}(1-t)^{q-1}\right| \le \varphi(t) \qquad \forall t \in \langle 0, 1\rangle.$$

Nadalje,

$$\int_0^1 \varphi(t)\mathrm{d}t = 2\int_0^{\frac{1}{2}} t^{\mathrm{Re}\, p-1}\mathrm{d}t + 2\int_{\frac{1}{2}}^1 (1-t)^{\mathrm{Re}\, q-1}\mathrm{d}t = \frac{2^{2-\mathrm{Re}\, p}}{\mathrm{Re}\, p} + \frac{2^{2-\mathrm{Re}\, q}}{\mathrm{Re}\, q} < +\infty.$$

Prema tome, za proizvoljne točke p i q iz desne poluravnine nepravi integral u formuli (10.32) apsolutno konvergira. Označimo vrijednost tog integrala sa $A(p, q)$.

Uvođenjem supstitucije $t = (\cos\,\varphi)^2$ u integral $A(p, q)$ dobivamo

$$A(p, q) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos\,\varphi)^{2p-1}(\sin\,\varphi)^{2q-1}\mathrm{d}\varphi.$$

Nadalje, supstitucijom $t = r^2$ u integralu za $\Gamma(p + q)$ nalazimo

$$\Gamma(p+q) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}t^{p+q-1}\mathrm{d}t = 2\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-r^2}r^{2p+2q-1}\mathrm{d}r.$$

Dakle,

$$\Gamma(p+q)A(p, q) = 4\int_0^{+\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{-r^2}r^{2p+2q-1}(\cos\,\varphi)^{2p-1}(\sin\,\varphi)^{2q-1}\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi,$$

odnosno,

$$\Gamma(p+q)A(p, q) = 4\int_0^{+\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{-r^2}(r\, cos\,\varphi)^{2p-1}(r\,\sin\,\varphi)^{2q-1}r\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi.$$

Shvatimo sada kao u dokazu produktne formule ovaj dvostruki integral kao površinski integral u polarnim koordinatama r, φ po prvom kvadrantu ravnine i prijeđimo na Kartezijeve koordinate $x = r\,\cos\,\varphi$, $y = r\,\sin\,\varphi$. Slijedi

$$\Gamma(p+q)A(p, q) = 4\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2-y^2}x^{2p-1}y^{2q-1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y =$$

$$= \left(2\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}x^{2p-1}\mathrm{d}x\right)\cdot\left(2\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-y^2}y^{2q-1}\mathrm{d}y\right).$$

Supstitucijama $x = \sqrt{t}$ i $y = \sqrt{s}$ dobivamo

$$\Gamma(p+q)A(p, q) = \left(2\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}t^{p-1}\mathrm{d}t\right)\cdot\left(2\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-s}s^{q-1}\mathrm{d}s\right) = \Gamma(p)\Gamma(q).$$

To znači da je $A(p, q) = B(p, q)$, odnosno, dokazana je formula (10.32).

Zadatak 10.4. *Opravdajte prijelaz s polarnih na Kartezijeve koordinate u dokazu teorema 10.4.*

Uputa: Postupite analogno kao u dokazu produktne formule (10.21).

Nepravi integral u formuli (10.32), koji predstavlja vrijednost beta funkcije $B(p,q)$ za $\operatorname{Re} p > 0$ i $\operatorname{Re} q > 0$, naziva se **Eulerov integral prve vrste**.

Budući da je $\Gamma(1) = 1$, produktna formula (10.21) može se i ovako zapisati:

$$B(z, 1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}, \qquad z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}.$$

Izvest ćemo sada još jednu produktnu formulu za gama funkciju. Za $\operatorname{Re} z > 0$ prema formuli (10.32) imamo

$$B(z,z) = \int_0^1 \left(t - t^2\right)^{z-1} \mathrm{d}t = \int_0^{\frac{1}{2}} \left(t - t^2\right)^{z-1} \mathrm{d}t + \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(t - t^2\right)^{z-1} \mathrm{d}t.$$

U drugom integralu izvršimo supstituciju $s = 1 - t$. Kako je $t - t^2 = s - s^2$, dobivamo

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 \left(t - t^2\right)^{z-1} \mathrm{d}t = \int_0^{\frac{1}{2}} \left(s - s^2\right)^{z-1} \mathrm{d}s.$$

Dakle,

$$B(z,z) = 2\int_0^{\frac{1}{2}} \left(t - t^2\right)^{z-1} \mathrm{d}t.$$

Sada izvršimo supstituciju $t = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{u})$. Tada je $t - t^2 = \frac{1}{4}(1-u)$ i $\mathrm{d}t = -\frac{1}{4}u^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}u$ pa dobivamo

$$B(z,z) = 2 \cdot 4^{-z} \int_0^1 u^{-\frac{1}{2}}(1-u)^{z-1}\mathrm{d}u = 2^{1-2z} B\left(\tfrac{1}{2}, z\right).$$

Odavde i iz definicije beta funkcije nalazimo

$$\frac{\Gamma(z)^2}{\Gamma(2z)} = 2^{1-2z} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(z)}{\Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right)}.$$

Kako je prema (10.30) $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$, dobivamo još jednu produktnu formulu za gama funkciju:

$$\Gamma(z)\Gamma\left(z + \tfrac{1}{2}\right) = 2^{1-2z}\sqrt{\pi}\,\Gamma(2z). \tag{10.33}$$

Iako je izvod proveden uz pretpostavku $\operatorname{Re} z > 0$, po teoremu jedinstvenosti formula (10.33) vrijedi za svaku točku z iz područja $\mathbb{C} \setminus \frac{1}{2}\mathbb{Z}_-$, budući da su na tom području obje strane formule (10.33) holomorfne funkcije.

Zadatak 10.5. *Dokažite da je*

$$B(p,q) = \int_0^{+\infty} s^{p-1}(1+s)^{-p-q}\mathrm{d}s, \qquad \operatorname{Re} p > 0, \quad \operatorname{Re} q > 0.$$

Uputa: U Eulerovom integralu prve vrste izvršite supstituciju $t = \dfrac{s}{1+s}$.

10.7 Gama funkcija kao beskonačni produkt

Prema teoremu 10.3. fukcija $f(z) = 1/\Gamma(z)$ je cijela, nultočke su joj $0, -1, -2, \ldots$ i sve su jednostruke. Naravno, standardna numeracija skupa $N(f) \setminus \{0\}$ je $a_n = -n$, $n \in \mathbb{N}$. Kako je

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n|^{-1} = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n} = +\infty \qquad \text{i} \qquad \sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n|^{-2} = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n^2} < +\infty,$$

cijela funkcija $f = 1/\Gamma$ je konačnog ranga i rang joj je $k(f) = 1$. Prema tome, vrijedi

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = z\mathrm{e}^{g(z)} \prod_{k\in\mathbb{N}} E_1\left(-\tfrac{z}{k}\right) = z\mathrm{e}^{g(z)} \prod_{k\in\mathbb{N}} \left[\left(1 + \tfrac{z}{k}\right) \mathrm{e}^{-\frac{z}{k}}\right], \tag{10.34}$$

gdje je g cijela funkcija. Da bismo odredili tu cijelu funkciju, do prikaza funkcije $1/\Gamma$ u obliku beskonačnog produkta doći ćemo zaobilaznim putem.

Definiramo funkcije u desnoj poluravnini formulama

$$\Gamma_n(z) = \int_0^n t^{z-1} \left(1 - \tfrac{t}{n}\right)^n \mathrm{d}t, \qquad \mathrm{Re}\, z > 0, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{10.35}$$

Supstitucija $t = ns$ daje

$$\Gamma_n(z) = n^z \int_0^1 s^{z-1}(1-s)^n \mathrm{d}s.$$

Na taj integral primijenimo formulu parcijalne integracije uzastopce n puta:

$$\Gamma_n(z) = n^z \left[\frac{s^z}{z}(1-s)^n \Big|_0^1 + \frac{n}{z} \int_0^1 s^z (1-s)^{n-1} \mathrm{d}s \right] = n^z \, \frac{n}{z} \int_0^1 s^z (1-s)^{n-1} \mathrm{d}s =$$

$$= n^z \, \frac{n(n-1)}{z(z+1)} \int_0^1 s^{z+1}(1-s)^{n-2} = \cdots\cdots = \frac{n^z n!}{z(z+1)\cdots(z+n-1)} \int_0^1 s^{z+n-1} \mathrm{d}s.$$

Posljednji je integral jednak $1/(z+n)$, pa slijedi

$$\Gamma_n(z) = \frac{n^z n!}{z(z+1)\cdots(z+n)}. \tag{10.36}$$

Prema tome, funkcija Γ_n definirana formulom (10.35) na desnoj poluravnini proširuje se do meromorfne funkcije na $\mathbb{C}$ bez nultočaka i s polovima prvog reda u točkama $0, -1, \ldots, -n$. Dakle, $1/\Gamma_n$ je cijela funkcija i ima jednostruke nultočke u $0, -1, \ldots, -n$. Budući da niz polinoma $\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n$, $n \in \mathbb{N}$, konvergira prema funkciji e^{-t}, formula (10.35) ukazuje na to da možemo očekivati da niz cijelih funkcija $(1/\Gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira prema cijeloj funkciji $1/\Gamma$.

Dokazat ćemo sada da niz $(1/\Gamma_n)$ konvergira lokalno uniformno na $\mathbb{C}$. Imamo

$$\frac{1}{\Gamma_n(z)} = n^{-z} z \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \tfrac{z}{k}\right) = z\mathrm{e}^{z\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\right)} \prod_{k=1}^{n} \left[\left(1 + \tfrac{z}{k}\right) \mathrm{e}^{-\frac{z}{k}}\right]. \tag{10.37}$$

Razmotrimo sada niz realnih brojeva (a_n) definiran sa

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Kako je

$$\ln n = \int_1^n \frac{1}{x} \mathrm{d}x,$$

to iz

$$\frac{1}{x} \geq \frac{1}{n+1} \qquad \text{za} \quad n \leq x \leq n+1$$

nalazimo

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{n+1} - \int_n^{n+1} \frac{1}{x} \mathrm{d}x \leq 0.$$

Prema tome, niz (a_n) je monotono padajući. Nadalje,

$$\frac{1}{x} \leq \frac{1}{k} \qquad \text{za} \quad k \leq x \leq k+1,$$

pa slijedi

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \int_1^n \frac{1}{x} \mathrm{d}x = \frac{1}{n} + \sum_{k=1}^{n-1} \left[\frac{1}{k} - \int_k^{k+1} \frac{1}{x} \mathrm{d}x \right] \geq \frac{1}{n} > 0.$$

Dakle, svi članovi niza (a_n) su pozitivni. Zaključujemo da postoji

$$C = \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n \right) \geq 0. \tag{10.38}$$

Broj C naziva se **Eulerova konstanta**. On je s točnošću do šesnaeste decimale jednak

$$C = 0,5772\,1566\,4901\,5325\ldots$$

Iako se vjeruje da je taj broj transcendentan, do danas nije dokazano čak ni da C nije racionalan broj.

Budući da limes (10.38) postoji, slijedi da je

$$\lim_{n \to +\infty} \mathrm{e}^{z\left(1 + \frac{1}{2} \cdots + \frac{1}{n} - \ln n\right)} = \mathrm{e}^{Cz} \qquad \forall z \in \mathbb{C}$$

i konvergencija je lokalno uniformna na $\mathbb{C}$. Kako i beskonačan produkt u (10.34) konvergira lokalno uniformno na $\mathbb{C}$, iz (10.37) zaključujemo dya niz cijelih funkcija $(1/\Gamma_n)$ konvergira lokalno uniformno na $\mathbb{C}$. Označimo sa F cijelu funkciju koja je limesw toga niza:

$$F(z) = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{\Gamma_n(z)} = z\mathrm{e}^{Cz} \prod_{k \in \mathbb{N}} \left[\left(1 + \frac{z}{k} \right) \mathrm{e}^{-\frac{z}{k}} \right], \qquad z \in \mathbb{C}.$$

Dokazat ćemo sada da je $F(z) = 1/\Gamma(z)$. Budući da su F i $1/\Gamma$ cijele funkcije, po teoremu jedinstvenosti tu je jednakost dovoljno dokazati za $z = x > 0$. Dakle, treba dokazati da je

$$\Gamma(x) = \lim_{n \to +\infty} \Gamma_n(x) \qquad \forall x > 0. \tag{10.39}$$

Fiksirajmo $x > 0$. Kako je

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} \left[-\mathrm{e}^s \left(1 - \frac{s}{n} \right)^n \right] = \frac{s}{n} \mathrm{e}^s \left(1 - \frac{s}{n} \right)^{n-1},$$

nalazimo da je

$$1 - \mathrm{e}^t \left(1 - \frac{t}{n} \right)^n = \int_0^t \mathrm{e}^s \frac{s}{n} \left(1 - \frac{s}{n} \right)^{n-1} \mathrm{d}s. \tag{10.40}$$

Za $0 \leq t \leq n$ podintegralna je funkcija u (10.40) nenegativna, pa zaključujemo da je lijeva strana u jednakosti (10.40) nenegativna. Nadalje, za $0 \leq s \leq t$ je

$$\mathrm{e}^s \leq \mathrm{e}^t \qquad \text{i} \qquad \left(1 - \frac{s}{n}\right)^{n-1} \leq 1,$$

pa iz (10.40) slijedi da je

$$1 - \mathrm{e}^t \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leq \int_0^t \frac{s}{n}\, \mathrm{e}^t \mathrm{d}s = \frac{t^2}{2n}\, \mathrm{e}^t.$$

Prema tome je

$$0 \leq 1 - \mathrm{e}^t \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leq \frac{t^2}{2n}\, \mathrm{e}^t, \qquad 0 \leq t \leq n,$$

o odavde je

$$0 \leq \mathrm{e}^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leq \frac{t^2}{2n}, \qquad 0 \leq t \leq n. \tag{10.41}$$

Imamo

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} t^{x-1} \mathrm{d}t \qquad \text{i} \qquad \Gamma_n(x) = \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} \mathrm{d}t \tag{10.42}$$

pa je

$$\Gamma(x) - \Gamma_n(x) = \int_0^n \left[\mathrm{e}^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n\right] t^{x-1} \mathrm{d}t + \int_n^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} t^{x-1} \mathrm{d}t. \tag{10.43}$$

Neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljno odabran. Budući da prvi (nepravi) integral u (10.42) konvergira, postoji prirodan broj m takav da je

$$\int_m^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} t^{x-1} \mathrm{d}t \leq \frac{\varepsilon}{3}. \tag{10.44}$$

Prema (10.41) i (10.44) imamo za $n \geq m$:

$$\int_0^n \left[\mathrm{e}^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n\right] t^{x-1} \mathrm{d}t = \int_0^m \left[\mathrm{e}^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n\right] t^{x-1} \mathrm{d}t + \int_m^n \left[\mathrm{e}^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n\right] t^{x-1} \mathrm{d}t \leq$$

$$\leq \frac{1}{2n} \int_0^m t^{x+1} \mathrm{d}t + \int_m^n \mathrm{e}^{-t} t^{x-1} \mathrm{d}t \leq \frac{m^{x+2}}{2n(x+2)} + \frac{\varepsilon}{3}.$$

Neka je prirodan broj $n_0 \geq m$ takav da vrijedi

$$\frac{m^{x+2}}{2n_0(x+2)} \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Iz gornjih nejednakosti slijedi da je

$$\int_0^n \left[\mathrm{e}^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n\right] t^{x-1} \mathrm{d}t \leq \frac{2\varepsilon}{3} \qquad \forall n \geq n_0. \tag{10.45}$$

Iz (10.41), (10.43), (10.44) i (10.45) dobivamo da vrijedi

$$0 \leq \Gamma(x) - \Gamma_n(x) \leq \varepsilon \qquad \forall n \geq n_0.$$

Time smo dokazali da vrijedi (10.39) za svaki $x > 0$. Sve u svemu dokazan je

Teorem 10.5. *Za svaku točku $z \in \mathbb{C}$ vrijedi*

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = z\mathrm{e}^{Cz} \prod_{k\in\mathbb{N}} \left[\left(1 + \frac{z}{k}\right) \mathrm{e}^{-\frac{z}{k}}\right]$$

i pri tome beskonačni produkt konvergira apsolutno i lokalno uniformno na $\mathbb{C}$.

10.8 Logaritamska konveksnost gama funkcije

Iz teorema 10.5. i iz teorema 9.3. slijedi

$$\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = -\frac{(1/\Gamma(z))'}{1/\Gamma(z)} = -C - \frac{1}{z} + \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{z}{k(z+k)} \qquad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_-, \tag{10.46}$$

a odavde

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}\right] = \sum_{k\in\mathbb{Z}_+} \frac{1}{(z+k)^2} \qquad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_-. \tag{10.47}$$

Iz formule (10.47) izvest ćemo sada jedno značajno svojstvo gama fukcije na pozitivnom dijelu realne osi $\mathbb{R}_+^* = \langle 0, +\infty\rangle$.

Podsjetimo se definicije konveksne funkcije realne varijable. Za funkciju $\varphi : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$, $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, kažemo da je **konveksna** ako vrijedi

$$\varphi((1-t)x + ty) \leq (1-t)\varphi(x) + t\varphi(y) \qquad \forall x, y \in \langle a, b\rangle \quad \text{i} \quad \forall t \in [0, 1]. \tag{10.48}$$

Funkcija φ je **strogo konveksna** ako u (10.48) vrijedi striktna nejednakost kad god su $x \neq y$ i $t \in \langle 0, 1\rangle$. Neprekidno diferencijabilna funkcija φ je konveksna ako i samo ako je njena derivacija φ' monotono rastuća na intervalu $\langle a, b\rangle$, a strogo konveksna ako i samo ako je φ' strogo rastuća na $\langle a, b\rangle$.

Ako je funkcija $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ svuda strogo pozitivna, onda je dobro definirana funkcija $\varphi : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ formulom

$$\varphi(x) = \ln f(x), \qquad x \in \langle a, b\rangle.$$

Ukoliko je funkcija φ konveksna (odnosno, strogo konveksna) kažemo da je funkcija f **logaritamski konveksna** (odnosno, **logaritamski strogo konveksna**). Svaka logaritamski (strogo) konveksna funkcija je ujedno i (strogo) konveksna, ali obrat ne vrijedi.

Funkcija Γ je strogo pozitivna na intervalu $\langle 0, +\infty\rangle$. Stavimo li $\varphi(x) = \ln\Gamma(x)$, imamo $\varphi'(x) = \Gamma'(x)/\Gamma(x)$, pa iz (10.47) slijedi

$$\varphi''(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}\right] = \sum_{k\in\mathbb{Z}_+} \frac{1}{(k+x)^2} > 0 \qquad \forall x \in \langle 0, +\infty\rangle.$$

Prema tome, funkcija φ' je strogo rastuća na intervalu $\langle 0, +\infty\rangle$, a to znači da je funkcija φ strogo konveksna, odnosno, funkcija Γ je logaritamski strogo konveksna na $\langle 0, +\infty\rangle$. Logaritamska konveksnost zajedno s funkcionalnom jednadžbom $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ i s početnim uvjetom $\Gamma(1) = 1$ potpuno karakterizira gama funkciju:

Teorem 10.6. (**Bohr−Mollerup**) *Neka je $f : \langle 0, +\infty\rangle \to \langle 0, +\infty\rangle$ funkcija sa svojstvima:*

(*a*) $f(1) = 1$;

(*b*) $f(x+1) = xf(x)$ $\forall x > 0$;

(*c*) *funkcija f je logaritamski konveksna na intervalu $\langle 0, +\infty\rangle$.*

Tada je $f(x) = \Gamma(x)$ $\forall x \in \langle 0, +\infty\rangle$.

Dokaz: Prema (*b*) imamo

$$f(x+n) = (x+n-1)\cdots(x+1)xf(x) \qquad \text{za} \quad x > 0 \quad \text{i} \quad n \in \mathbb{N}, \tag{10.49}$$

a kako ista jednakost vrijedi i za gama funkciju, dovoljno je dokazati jednakost $f(x) = \Gamma(x)$ za svako $x \in \langle 0, 1]$. Stavimo

$$\psi(x) = \ln f(x), \qquad x \in \langle 0, +\infty\rangle.$$

U daljnjem fiksirajmo $x \in \langle 0, 1]$. Zbog svojstva (c) imamo

$$\psi((1-t)u + tv) \le (1-t)\psi(u) + t\psi(v) \qquad \text{za} \quad 0 < u < v \quad \text{i} \quad 0 \le t \le 1. \tag{10.50}$$

Odavde za $u = n \in \mathbb{N}$, $v = x + n + 1$ i $t = \frac{1}{x+1}$ dobivamo

$$\psi(n+1) \le \frac{x}{x+1}\psi(n) + \frac{1}{x+1}\psi(x+n+1),$$

odnosno,

$$\psi(x+n+1) \ge (x+1)\psi(n+1) - x\psi(n).$$

Iz (a) i iz (10.49) slijedi $f(n) = (n-1)!$, dakle, $\psi(n+1) = \ln n!$ i $\psi(n) = \ln(n-1)!$. Stoga iz gornje nejednakosti dobivamo

$$\psi(x+n+1) \ge (x+1)\ln n! - x\ln(n-1)! = \ln n! + x\ln n,$$

a odavde eksponenciranjem

$$f(x+n+1) \ge n^x n!.$$

Odatle i iz (10.49) (za $n+1$ umjesto n) dobivamo

$$f(x) \ge \frac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)},$$

odnosno, zbog (10.36)

$$f(x) \ge \Gamma_n(x) \qquad \text{za} \quad 0 < x \le 1 \quad \text{i} \quad n \in \mathbb{N}. \tag{10.51}$$

Stavimo sada u (10.50) $u = n \in \mathbb{N}$, $v = n + 1$ i $t = x$. Slijedi

$$\psi(x+n) \le (1-x)\psi(n) + x\psi(n+1).$$

Kao i malo prije odavde redom dobivamo

$$\psi(x+n) \le (1-x)\ln(n-1)! + x\ln n! = \ln(n-1)! + x\ln n,$$

$$f(x+n) \le n^x(n-1)!,$$

$$f(x) \le \frac{n^x(n-1)!}{x(x+1)\cdots(x+n-1)},$$

pa slijedi

$$f(x) \le \Gamma_n(x)\,\frac{x+n}{n} \qquad \text{za} \quad 0 < x \le 1 \quad \text{i} \quad n \in \mathbb{N}. \tag{10.52}$$

Sada iz (10.51), (10.52) i (10.39) i iz

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{x+n}{n} = 1$$

nalazimo da je $f(x) = \Gamma(x)$ za svako $x \in \langle 0, 1]$, dakle, i za svako $x \in \langle 0, +\infty\rangle$.

Zadatak 10.6. *Dokažite da za svaki prirodan broj m i za sve $z \in \mathbb{C} \setminus \frac{1}{m}\mathbb{Z}_-$ vrijedi produktna formula*

$$\Gamma(z)\Gamma\left(z + \tfrac{1}{m}\right)\cdots\Gamma\left(z + \tfrac{m-1}{m}\right) = m^{-mz+\frac{1}{2}}(2\pi)^{\frac{m-1}{2}}\Gamma(mz).$$

Uputa: Iz (10.46) slijedi da za funkciju $\varphi(z) = \Gamma(mz)^{-1}\Gamma(z)\Gamma(z+1/m)\cdots\Gamma(z+(m-1)/m)$ vrijedi $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\ln\varphi(x) = 0$ za svaki $x > 0$. Odatle je $\varphi(z) = a \cdot b^z$ za neke $a, b \in \mathbb{R}$. Za određivanje konstanti a i b upotrijebite formulu (10.3) i zadatak 10.2.

Zadatak 10.7. *Dokažite da za svaki* $t \in \mathbb{R}$ *vrijedi*

$$|\Gamma(it)| = \sqrt{\frac{\pi}{t \operatorname{sh} t\pi}}.$$

Zadatak 10.8. *Dokažite da za svaki* $t \in \mathbb{R}$ *vrijedi jednakost*

$$\left|\Gamma\left(\frac{1}{2} + it\right)\right| = \sqrt{\frac{2\pi}{\operatorname{ch} t\pi}}.$$

Uputa: Koristite produktnu formulu (10.21).

Zadatak 10.9. *Neka su* $a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_\ell \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{N}$.

(*a*) *Dokažite da beskonačni produkt*

$$\prod_{n\in\mathbb{N}} \frac{(n-a_1)\cdots(n-a_k)}{(n-b_1)\cdots(n-b_\ell)} \tag{10.53}$$

apsolutno konvergira ako i samo ako je $k = \ell$ *i* $a_1 + \cdots + a_k = b_1 + \cdots + b_k$.

(*b*) *U slučaju da beskonačan produkt* (10.53) *apsolutno konvergira dokažite da je njegova vrijednost jednaka*

$$\prod_{j=1}^{k} \frac{\Gamma(1-b_j)}{\Gamma(1-a_j)}.$$

(*c*) *Dokažite da za proizvoljne* $a, b \in \mathbb{C} \setminus (-\mathbb{N})$ *vrijedi*

$$\prod_{n\in\mathbb{N}} \frac{n(a+b+n)}{(a+n)(b+n)} = \frac{\Gamma(a+1)\Gamma(b+1)}{\Gamma(a+b+1)}.$$

Uputa za (*b*) : Pomnožite svaki član produkta sa $1 = \mathrm{e}^{\frac{1}{n}(a_1+\cdots+a_k-b_1-\cdots-b_k)}$.

Zadatak 10.10. *Dokažite da za prirodan broj* k *i za* $-k < \operatorname{Re} z < -k+1$ *vrijedi*

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1}\left(\mathrm{e}^{-t} - 1 - t - \cdots - \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}\right) \mathrm{d}t$$

Poglavlje 11

Riemannova zeta funkcija

U ovom ćemo poglavlju definirati i proučiti jedan izuzetno važan primjer meromorfne funkcije, tzv. **Riemannovu zeta funkciju**. Ta je funkcija vrlo mnogo proučavana s raznih aspekata i imala je ogroman utjecaj na razvoj teorije brojeva. Jedan od najčuvenijih dosad neriješenih problema u matematici je **Riemannova slutnja** o nultočkama zeta funkcije.

Riemannovu zeta funkciju najprije definiramo redom

$$\zeta(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n^x} \tag{11.1}$$

koji konvergira za $x > 1$, a zatim je produljujemo do holomorfne funkcije na čim veće područje u $\mathbb{C}$. Polazište u tzv. *analitičkoj teoriji brojeva* predstavlja ovaj Eulerov rezultat:

Teorem 11.1. (**Euler**) *Ako je $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz svih prostih brojeva, onda je*

$$\zeta(x) = \prod_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{1-p_n^{-x}} \qquad \forall x > 1. \tag{11.2}$$

Dokaz: Ako je $x > 1$ i $n \in \mathbb{N}$, onda je

$$\frac{1}{1-p_n^{-x}} = \sum_{k\in\mathbb{Z}_+} p_n^{-kx}.$$

Odavde zbog jedinstvenosti rastava prirodnog broj u produkt prostih brojeva dobivamo

$$\prod_{n=1}^{m} \frac{1}{1-p_n^{-x}} = \sum_{j\in\mathbb{N}} n_j^{-x}; \tag{11.3}$$

pri tome je $(n_j)_{j\in\mathbb{N}}$ niz svih prirodnih brojeva čiji se svi prosti faktori nalaze u skupu $\{p_1,\dots,p_m\}$, odnosno, svih prirodnih brojeva oblika

$$p_1^{k_1}p_2^{k_2}\cdots p_m^{k_m}, \qquad k_1,k_2,\dots,k_m \in \mathbb{Z}_+.$$

Kad u (11.3) pustimo da m teži u $+\infty$, dobivamo (11.2).

Ostavljajući neke primjene zeta funkcije u teoriji brojeva za zadatke, mi ćemo se u ovom poglavlju baviti holomorfnim proširenjem zeta funkcije definirane sa (11.1) i dokazu nekih važnih identiteta. Prvi korak za holomorfno proširenje sastoji se u tome da se u (11.1) umjesto x stavi kompleksna varijabla z :

$$\zeta(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}} n^{-z}. \tag{11.4}$$

Za $\operatorname{Re} z \geq x > 1$ vrijedi

$$\left|n^{-z}\right| = \left|e^{-z\ln n}\right| = e^{-(\operatorname{Re} z)(\ln n)} \leq e^{-x\ln n} = n^{-x}.$$

Odavde slijedi da red (11.4) konvergira apsolutno i uniformno na zatvorenoj poluravnini $\operatorname{Re} z \geq x$ za svaki $x > 1$. Prema tome, red (11.4) konvergira apsolutno i lokalno uniformno na otvorenoj poluravnini $\operatorname{Re} z > 1$ i na toj poluravnini definira holomorfnu funkciju.

Ako u (11.4) stavimo $z = 1$, dobivamo harmonijski red koji divergira, a promatramo li proširenu kompleksnu ravninu $\overline{\mathbb{C}}$ taj red konvergira prema točki ∞. To ukazuje na činjenicu da će eventualno holomorfno proširenje zeta funkcije imati pol u točki $z = 1$. U stvari, pokazat ćemo da se funkcija

$$z \mapsto \zeta(z) - \frac{1}{z-1}$$

proširuje do cijele funkcije. Drugim riječima, funkcija ζ produljuje se do holomorfne funkcije na $\mathbb{C} \setminus \{1\}$, a u točki $z = 1$ ona ima pol prvog reda i reziduum 1.

Pokazat će se da su $-2, -4, -6, \ldots$ nultočke funkcije ζ. To su tzv. **trivijalne nultočke** Riemannove zeta funkcije. Preostale **netrivijalne nultočke** sve se nalaze u otvorenoj pruzi $\{z;\ 0 < \operatorname{Re} z < 1\}$ paralelnoj sa $y-$osi i simetričnoj u odnosu na pravac $\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}$. Glasovita **Riemannova slutnja** sastoji se u tome da sve netrivijalne nultočke zeta funkcije leže na tom pravcu $\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}$. Iako brojni pokušaji da se ta slutnja dokaže ili opovrgne do danas nisu uspjeli, oni su doveli do vrlo značajnih otkrića i razvoja novih teorija. Između ostalog i Jensen je svoju formulu (9.52) otkrio pokušavajući riješiti Riemannovu slutnju.

Osnovna svojstva Riemannove zeta funkcije sadržana su u ovom teoremu:

Teorem 11.2. (a) *Riemannova zeta funkcija meromorfna je na* $\mathbb{C}$, *jedini joj je pol u točki* $z = 1$, *taj je pol prvog reda i* $Res(\zeta; 1) = 1$.

(b) *Na poluravnini* $\operatorname{Re} z > 1$ *Riemannova zeta funkcija dana je redom* (11.4).

(c) *Za* $z \neq 1$ *i* $z \neq 0$ *vrijedi* **Riemannova funkcionalna jednadžba** *koja povezuje funkcije* ζ *i* Γ :

$$\zeta(z) = 2(2\pi)^{z-1}\zeta(1-z)\Gamma(1-z)\sin\frac{z\pi}{2}. \tag{11.5}$$

(d) *Vrijede integralne reprezentacije*

$$\zeta(z)\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{z-1}}{e^t - 1}dt, \qquad \operatorname{Re} z > 1, \tag{11.6}$$

$$\zeta(z)\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} \left[\frac{1}{e^t - 1} - \frac{1}{t}\right] t^{z-1}dt, \qquad 0 < \operatorname{Re} z < 1, \tag{11.7}$$

$$\zeta(z)\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} \left[\frac{1}{e^t - 1} - \frac{1}{t} + \frac{1}{2}\right] t^{z-1}dt, \qquad -1 < \operatorname{Re} z < 0. \tag{11.8}$$

Dugačak i složeni dokaz ovog teorema provest ćemo u sljedeća dva odjeljka. Primijetimo da iz (c) neposredno slijedi da su točke $-2, -4, -6, \ldots$ nultočke zeta funkcije i sve su one jednostruke.

11.1 Veza između zeta funkcije i gama funkcije

Da bismo dokazali tvrdnju (d) teorema 11.2. i da bismo ujedno holomorfno produljili zeta funkciju, definiranu zasada samo na poluravnini $\operatorname{Re} z > 1$, neprave integrale u (10.6), (10.7) i (10.8) rastavit ćemo u dva dijela kao i kod proučavanja gama funkcije: od 0 do 1 i od 1 do $+\infty$. Dakle, promatrat ćemo funkcije F_k, $k = 1, \ldots, 6$, definirane nepravim integralima:

$$F_1(z) = \int_0^1 \frac{t^{z-1}}{\mathrm{e}^t - 1}\mathrm{d}t, \qquad F_2(z) = \int_1^{+\infty} \frac{t^{z-1}}{\mathrm{e}^t - 1}\mathrm{d}t,$$

$$F_3(z) = \int_0^1 \left[\frac{1}{\mathrm{e}^t - 1} - \frac{1}{t}\right] t^{z-1}\mathrm{d}t, \qquad F_4(z) = \int_1^{+\infty} \left[\frac{1}{\mathrm{e}^t - 1} - \frac{1}{t}\right] t^{z-1}\mathrm{d}t,$$

$$F_5(z) = \int_0^1 \left[\frac{1}{\mathrm{e}^t - 1} - \frac{1}{t} + \frac{1}{2}\right] t^{z-1}\mathrm{d}t, \qquad F_6(z) = \int_1^{+\infty} \left[\frac{1}{\mathrm{e}^t - 1} - \frac{1}{t} + \frac{1}{2}\right] t^{z-1}\mathrm{d}t.$$

Definiramo također funkcije

$$G_1(z) = F_1(z) + F_2(z) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{z-1}}{\mathrm{e}^t - 1}\mathrm{d}t,$$

$$G_2(z) = F_3(z) + F_4(z) = \int_0^{+\infty} \left[\frac{1}{\mathrm{e}^t - 1} - \frac{1}{t}\right] t^{z-1}\mathrm{d}t,$$

$$G_3(z) = F_5(z) + F_6(z) = \int_0^{+\infty} \left[\frac{1}{\mathrm{e}^t - 1} - \frac{1}{t} + \frac{1}{2}\right] t^{z-1}\mathrm{d}t.$$

Svaka od funkcija F_k, $k = 1, \ldots, 6$, definirana je na području konvergencije nepravog integrala, a funkcija G_j, $j = 1, 2, 3$, definirana je na presjeku područja definicije funkcija F_{2j-1} i F_{2j}.

Lema 11.1. (a) *Za $k = 1, \ldots, 6$ nepravi integral kojim je definirana funkcija F_k konvergira apsolutno i lokalno uniformno na području D_k :*

$$D_1 = \{z;\ \operatorname{Re} z > 1\}, \qquad D_2 = \mathbb{C}, \qquad D_3 = \{z;\ \operatorname{Re} z > 0\}, \qquad D_4 = \{z;\ \operatorname{Re} z < 1\},$$

$$D_5 = \{z;\ \operatorname{Re} z > -1\}, \qquad D_6 = \{z;\ \operatorname{Re} z < 0\}.$$

(b) *Vrijede jednakosti:*

$$F_1(z) = F_3(z) + \frac{1}{z-1}, \qquad z \in D_1, \tag{11.9}$$

$$F_2(z) = F_4(z) - \frac{1}{z-1}, \qquad z \in D_4, \tag{11.10}$$

$$F_3(z) = F_5(z) - \frac{1}{2z}, \qquad z \in D_3, \tag{11.11}$$

$$F_4(z) = F_6(z) + \frac{1}{2z}, \qquad z \in D_6. \tag{11.12}$$

Dokaz: Za dokaz tvrdnje (a) poslužit ćemo se lemom 10.2. i propozicijom 10.1. o nepravim integralima ovisnim o kompleksnom parametru. Stoga treba dokazati da za svaki kompaktan skup $K \subseteq D_k$ postoji neprekidna nenegativna funkcija φ na intervalu integracije, takva da njen nepravi integral konvergira i da za podintegralnu funkciju f_k u integralu kojim je definirana funkcija F_k vrijedi $|f_k(t, z)| \leq \varphi(t)$ za svaku točku $z \in K$ i za svaki t iz intervala integracije.

Dokaz za $k = 1$: Za kompaktan skup $K \subseteq D_1$ stavimo

$$\alpha = \min\{\mathrm{Re}\, z;\ z \in K\} > 1, \qquad \varphi(t) = t^{\alpha-2}, \quad 0 < t \leq 1.$$

Kako je $\alpha - 2 > -1$ imamo

$$\int_0^1 \varphi(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{\alpha - 1} < +\infty.$$

Nadalje, za $t \in \langle 0, 1]$ i $z \in K$ imamo

$$\left|\frac{t^{z-1}}{\mathrm{e}^t - 1}\right| = \frac{t^{\mathrm{Re}\, z-1}}{\mathrm{e}^t - 1} \leq \frac{t^{\alpha-1}}{t} = t^{\alpha-2} = \varphi(t).$$

Dokaz za $k = 2$: Za kompaktan skup $K \subseteq D_2 = \mathbb{C}$ stavimo

$$\beta = \max\{\mathrm{Re}\, z;\ z \in K\}.$$

Budući da je funkcija $t \mapsto t^{\beta-1}\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}$ neprekidna na $[1, +\infty\rangle$ i teži k 0 kada t teži u $+i$, postoji $M > 0$ takav da je

$$t^{\beta-1}\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}} \leq M \qquad \forall t \geq 1. \tag{11.13}$$

Stavimo

$$\varphi(t) = \frac{M}{2\mathrm{sh}\,\frac{t}{2}} = \frac{M\mathrm{e}^{\frac{t}{2}}}{\mathrm{e}^t - 1}, \qquad t \geq 1.$$

Zbog (11.13) imamo za $t \geq 1$ i $z \in K$

$$\left|\frac{t^{z-1}}{\mathrm{e}^t - 1}\right| = \frac{t^{\mathrm{Re}\, z-1}}{\mathrm{e}^t - 1} \leq \frac{t^{\beta-1}}{\mathrm{e}^t - 1} \leq \varphi(t).$$

Nadalje, kako je

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \ln\left[\mathrm{th}\,\frac{t}{4}\right] = \frac{2}{\mathrm{sh}\,\frac{t}{4}},$$

nalazimo

$$\int_1^{+\infty} \varphi(t)\mathrm{d}t = \lim_{R\to+\infty} 4M \ln\left[\mathrm{th}\,\frac{t}{4}\right]\Bigg|_1^R = -4M\ln\left[\mathrm{th}\,\frac{1}{4}\right] < +\infty,$$

budući da $\mathrm{th}\, s$ teži prema 1, pa $\ln(\mathrm{th}\, s)$ teži prema 0, kada s teži u $+\infty$. Napominjemo i da je $\mathrm{th}\,\frac{1}{4} < 1$, pa je $\ln\left[\mathrm{th}\,\frac{1}{4}\right] < 0$.

Dokaz za $k = 3$: Funkcija $z \mapsto (\mathrm{e}^z - 1)^{-1}$ holomorfna je na području $\mathbb{C} \setminus 2\pi i\mathbb{Z}$ i ima polove prvog reda u točkama $2n\pi i$, $n \in \mathbb{Z}$. Njen Laurentov red oko nule ima oblik

$$\frac{1}{\mathrm{e}^z - 1} = \frac{1}{z} - \frac{1}{2} + \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n, \qquad 0 < |z| < 2\pi. \tag{11.14}$$

Zaključujemo da funkcija

$$z \mapsto \frac{1}{\mathrm{e}^z - 1} - \frac{1}{z}$$

ima uklonjiv singularitet u 0, pa se produljuje do holomorfne funkcije na krugu $K(0, 2\pi)$. Posebno, ta je funkcija ograničena na segmentu $[0, 1]$, pa postoji $N > 0$ takav da je

$$\left|\frac{1}{\mathrm{e}^t - 1} - \frac{1}{t}\right| \leq N, \qquad 0 < t \leq 1. \tag{11.15}$$

Neka je $K \subseteq D_3$ kompaktan skup. Stavimo

$$\gamma = \min \{\operatorname{Re} z;\ z \in K\} > 0, \qquad \varphi(t) = N t^{\gamma - 1}, \quad 0 < t \leq 1.$$

Tada je

$$\int_0^1 \varphi(t) \mathrm{d}t = \frac{N}{\gamma} < +\infty.$$

Nadalje, iz (11.15) slijedi

$$\left| \left[\frac{1}{\mathrm{e}^t - 1} - \frac{1}{t} \right] t^{z-1} \right| \leq \varphi(t), \qquad t \in \langle 0, 1], \quad z \in K.$$

Dokaz za $k = 4$, a ujedno i jednakost (11.10) iz tvrdnje (b), slijedi iz dokazanog za $k = 2$ i iz očigledne jednakosti

$$\int_1^{+\infty} t^{z-2} \mathrm{d}t = -\frac{1}{z-1} \qquad \forall z \in D_4.$$

Dokaz za $k = 5$: Prema (11.14) vrijedi

$$\frac{1}{\mathrm{e}^z - 1} - \frac{1}{z} + \frac{1}{2} = z f(z),$$

gdje je funkcija f holomorfna na krugu $K(0, 2\pi)$ i, posebno, ograničena na segmentu $[0, 1]$. Stoga postoji realan broj $P > 0$ takav da vrijedi

$$\left| \frac{1}{\mathrm{e}^t - 1} - \frac{1}{t} + \frac{1}{2} \right| \leq P t \qquad \forall t \in \langle 0, 1]. \tag{11.16}$$

Za kompaktan skup $K \subseteq D_5$ stavimo

$$\delta = \min \{\operatorname{Re} z;\ z \in K\} > -1, \qquad \varphi(t) = P t^{\delta}, \quad t \in \langle 0, 1].$$

Tada je

$$\int_0^1 \varphi(t) \mathrm{d}t = \frac{P}{\delta + 1} < +\infty.$$

Nadalje, iz (11.16) slijedi

$$\left| \left[\frac{1}{\mathrm{e}^t - 1} - \frac{1}{t} + \frac{1}{2} \right] t^{z-1} \right| \leq \varphi(t).$$

Dokaz za $k = 6$, a ujedno i jednakost (11.12) iz tvrdnje (b), slijedi iz dokazanog za $k = 4$ i iz očigledne jednakosti

$$\int_1^{+\infty} t^{z-1} \mathrm{d}t = -\frac{1}{z} \qquad \forall z \in D_6.$$

Napokon, preostale dvije jednakosti (11.9) i (11.11) iz tvrdnje (b) slijede iz

$$\int_0^1 t^{z-2} \mathrm{d}t = \frac{1}{z-1} \qquad \forall z \in D_1$$

i iz

$$\int_0^1 t^{z-1} \mathrm{d}t = \frac{1}{z} \qquad \forall z \in D_3.$$

Iz leme 11.1. neposredno slijedi:

Lema 11.2. *Za $j = 1, 2, 3$ nepravi integral kojim je definirana funkcija G_j konvergira apsolutno i lokalno uniformno na području E_j :*

$$E_1 = D_1 \cap D_2 = D_1 = \{z;\ \operatorname{Re} z > 1\}, \qquad E_2 = D_3 \cap D_4 = \{z;\ 0 < \operatorname{Re} z < 1\},$$

$$E_3 = D_5 \cap D_6 = \{z;\ -1 < \operatorname{Re} z < 0\}.$$

Sada prelazimo na dokaz jednakosti (11.6) u teoremu 11.2. koja uz uvedene oznake poprima oblik

$$G_1(z) = \zeta(z)\Gamma(z), \qquad \operatorname{Re} z > 1. \tag{11.17}$$

Budući da su i lijeva i desna strana ove jednakosti holomorfne funkcije na poluravnini $E_1 = \{z;\ \operatorname{Re} z > 1\}$, prema teoremu jedinstvenosti za holomorfne funkcije dovoljno je dokazati tu jednakost na zraci $z = x > 1$. Fiksirajmo $x > 1$ i neka je $\varepsilon > 0$. Prema tvrdnji (a) leme 11.1. postoje realni brojevi $b > 1 > a > 0$ takvi da je

$$\int_0^a \frac{t^{x-1}}{\mathrm{e}^t - 1}\,\mathrm{d}t + \int_b^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{\mathrm{e}^t - 1}\,\mathrm{d}t \le \frac{\varepsilon}{2}. \tag{11.18}$$

Za svaki $m \in \mathbb{N}$ je

$$0 < \sum_{n=1}^{m} \mathrm{e}^{-nt} \le \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{e}^{-nt} = \frac{1}{\mathrm{e}^t - 1},$$

pa iz (11.18) slijedi

$$\sum_{n=1}^{m} \int_0^a \mathrm{e}^{-nt} t^{x-1}\mathrm{d}t + \sum_{n=1}^{m} \int_b^{+\infty} \mathrm{e}^{-nt} t^{x-1}\mathrm{d}t \le \frac{\varepsilon}{2}. \tag{11.19}$$

Ako u integralu

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-s} x^{x-1}\mathrm{d}s$$

izvršimo zamjenu varijable $s = nt$, dobivamo

$$\Gamma(x) = n^x \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-nt} t^{x-1}\mathrm{d}t,$$

pa slijedi

$$\zeta(x)\Gamma(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} n^{-x}\Gamma(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-nt} t^{x-1}\mathrm{d}t.$$

Odavde i iz (11.18) i (11.19) nalazimo

$$|\zeta(x)\Gamma(x) - G_1(x)| \le \varepsilon + \left| \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_a^b \mathrm{e}^{-nt} t^{x-1}\mathrm{d}t - \int_a^b \frac{t^{x-1}}{\mathrm{e}^t - 1}\,\mathrm{d}t \right|. \tag{11.20}$$

Međutim, red $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{e}^{-nt} = \sum_{n\in\mathbb{N}} (\mathrm{e}^{-t})^n$ konvergira prema $(\mathrm{e}^t - 1)^{-1}$ uniformno na segmentu $[a, b]$, pa vrijedi

$$\int_a^b \frac{t^{x-1}}{\mathrm{e}^t - 1}\,\mathrm{d}t = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_a^b \mathrm{e}^{-nt} t^{x-1}\mathrm{d}t.$$

Stoga iz (11.20) dobivamo da je $|\zeta(x)\Gamma(x) - G_1(x)| \le \varepsilon$. Kako je $\varepsilon > 0$ bilo proizvoljno odabrano, zaključujemo da vrijedi (11.17), odnosno, (11.6).

11.2 Holomorfno produljenje i funkcionalna jednadžba

U prošlom smo odjeljku dokazali jednakost (11.6), a u ovom ćemo dokazati ostale tvrdnje u teoremu 11.2. Plan dokaza je sljedeći: formule (11.9) – (11.12) i formulu (11.17) upotrijebit ćemo da funkciju ζ produljimo do meromorfne funkcije najprije na poluravnini $\operatorname{Re} z > 0$, a zatim na poluravnini $\operatorname{Re} z > -1$. Usput ćemo dokazati jednakosti (11.7) i (11.8) u teoremu 11.2. Zatim ćemo dokazati da Riemannova funkcionalna jednadžba vrijedi u pruzi $-1 < \operatorname{Re} z < 0$. Tu ćemo jednadžbu upotrijebiti za holomorfno produljenje zeta funkcije na područje $\mathbb{C} \setminus \{1\}$. Tada će Riemannova funkcionalna jednadžba (11.5) vrijediti na čitavom području $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ po teoremu jedinstvenosti za holomorfne funkcije.

Budući da je funkcija $1/\Gamma$ cijela i nema nultočaka u desnoj poluravnini D_3, iz (11.17) i (11.9) vidimo da se zeta funkcija produljuje do holomorfne funkcije na $D_3 \setminus \{1\}$ formulom

$$\zeta(z) = \frac{1}{\Gamma(z)} \left[F_2(z) + F_3(z) + \frac{1}{z-1} \right], \qquad \operatorname{Re} z > 0, \quad z \neq 1. \tag{11.21}$$

Nadalje, tako produljena funkcija ζ ima pol prvog reda u točki $z = 1$ i

$$Res(\zeta; 1) = \lim_{z \to 1} (z-1)\zeta(z) = \frac{1}{\Gamma(1)} = 1. \tag{11.22}$$

Iz (11.21) i (11.10) nalazimo da je

$$\zeta(z)\Gamma(z) = F_3(z) + F_4(z) = G_2(z), \qquad 0 < \operatorname{Re} z < 1, \tag{11.23}$$

a to je upravo jednakost (11.7). Odavde i iz (11.11) dobivamo

$$\zeta(z)\Gamma(z) = F_4(z) + F_5(z) - \frac{1}{2z}, \qquad 0 < \operatorname{Re} z < 1. \tag{11.24}$$

Kako je $z\Gamma(z) = \Gamma(z+1)$, slijedi

$$\zeta(z) = -\frac{1}{2\Gamma(z+1)} + \frac{1}{\Gamma(z)} \left[F_4(z) + F_5(z) \right], \qquad 0 < \operatorname{Re} z < 1. \tag{11.25}$$

Funkcije $z \mapsto 1/\Gamma(z+1)$, $z \mapsto 1/\Gamma(z)$, F_4 i F_5 su holomorfne na pruzi $-1 < \operatorname{Re} z < 1$, pa formula (11.25) omogućimo da zeta funkciju produljimo do meromorfne funkcije na poluravnini $\operatorname{Re} z > -1$ s jedinim polom u točki $z = 1$. Sada (11.24) vrijedi za $-1 < \operatorname{Re} z < 1$, $z \neq 0$. Ako je $-1 < \operatorname{Re} 0$, onda vrijedi (11.12), pa iz (11.24) dobivamo

$$\zeta(z)\Gamma(z) = F_5(z) + F_6(z) = G_3(z), \qquad -1 < \operatorname{Re} z < 0,$$

a to je upravo jednakost (11.8).

Time je zeta funkcija produljena do meromorfne funkcije na poluravnini $\operatorname{Re} z > -1$ i dokazana je tvrdnja (d) teorema 11.2.

Imamo

$$\frac{1}{e^t - 1} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \frac{e^t + 1}{e^t - 1} = \frac{i}{2} \operatorname{ctg} \frac{it}{2}. \tag{11.26}$$

Prema formuli (5.40) na str. 48 je

$$\operatorname{ctg} \frac{it}{2} = -\frac{2i}{t} - 4it \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{t^2 + 4n^2\pi^2}.$$

Odavde i iz (11.26) dobivamo

$$\frac{1}{t}\left[\frac{1}{\mathrm{e}^t-1}-\frac{1}{t}+\frac{1}{2}\right]=2\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{1}{t^2+4n^2\pi^2}. \tag{11.27}$$

Za svaki $t\in\mathbb{R}$ vrijedi

$$\frac{1}{t^2+4n^2\pi^2}\leq\frac{1}{4n^2\pi^2}.$$

Kako je

$$\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{1}{4n^2\pi^2}=\frac{1}{24}<+\infty,$$

zaključujemo da red s desne strane jednakosti (11.27) konvergira uniformno u odnosu na $t\in\mathbb{R}$. Prema tome, iz (11.8) i (11.27) dobivamo

$$\zeta(z)\Gamma(z)=2\sum_{n\in\mathbb{N}}\int_0^{+\infty}\frac{t^z}{t^2+4n^2\pi^2}\,\mathrm{d}t. \tag{11.28}$$

Zamjenom varijable integracije $t=2n\pi s$ slijedi

$$\int_0^{+\infty}\frac{t^z}{t^2+4n^2\pi^2}\,\mathrm{d}t=(2n\pi)^{z-1}\int_0^{+\infty}\frac{s^z}{s^2+1}\,\mathrm{d}s. \tag{11.29}$$

Kako je

$$\sum_{n\in\mathbb{N}}(2n\pi)^{z-1}=(2\pi)^{z-1}\zeta(1-z),\qquad \operatorname{Re}z<0,$$

iz (11.28) i (11.29) slijedi

$$\zeta(z)\Gamma(z)=2(2\pi)^{z-1}\zeta(1-z)\int_0^{+\infty}\frac{s^z}{s^2+1}\,\mathrm{d}s,\qquad -1<\operatorname{Re}z<0. \tag{11.30}$$

U dokazu produktne formule (10.21) za gama funkciju u odjeljku 10.5. izračunali smo da vrijedi

$$2\int_0^{+\infty}\frac{s^{2x-1}}{s^2+1}\,\mathrm{d}s=\frac{\pi}{\sin\pi x},\qquad 0<x<1.$$

Odatle je

$$2\int_0^{+\infty}\frac{s^x}{s^2+1}\,\mathrm{d}s=\frac{\pi}{\sin\left(\frac{\pi x}{2}+\frac{\pi}{2}\right)}=\frac{\pi}{\cos\frac{\pi x}{2}},\qquad -1<x<1.$$

Prema tome, iz (11.30) slijedi

$$\zeta(z)\Gamma(z)=(2\pi)^{z-1}\zeta(1-z)\,\frac{\pi}{\cos\frac{\pi z}{2}}, \tag{11.31}$$

za $z=x\in\langle-1,0\rangle$. S obje strane jednakosti (11.31) nalaze se funkcije koje su holomorfne na pruzi $-1<\operatorname{Re}z<0$. Stoga po teoremu jedinstvenosti za holomorfne funkcije zaključujemo da jednakost (11.31) vrijedi za $-1<\operatorname{Re}z<0$. Iz produktne formule (10.21) za gama funkciju dobivamo

$$\frac{1}{\Gamma(z)}=\frac{1}{\pi}\Gamma(1-z)\sin\pi z=\frac{2}{\pi}\Gamma(1-z)\left(\sin\frac{\pi z}{2}\right)\left(\cos\frac{\pi z}{2}\right),$$

pa iz (11.31) slijedi da Riemannova funkcionalna jednadžba (11.5) vrijedi za $-1<\operatorname{Re}z<0$. Međutim, funkcija s desne strane te jednadžbe holomorfna je na poluravnini $\operatorname{Re}z<1$, pa ta jednadžba može polsužiti za holomorfno produljenje zeta funkcije na područje $\mathbb{C}\setminus\{1\}$. Na taj način ζ postaje meromorfna funkcija na $\mathbb{C}$ s jedinim polom u točki $z=1$. Po teoremu jedinstvenosti za holomorfne funkcije zaključujemo da (11.5) vrijedi za svaku točku $z\in\mathbb{C}\setminus\{1\}$. Time je teorem 11.2. u potpunosti dokazan.

Zadatak 11.1. *Dokažite da je* $\zeta(0) = -\dfrac{1}{2}$.

Zadatak 11.2. (a) *Dokažite da u formuli* (11.14) *vrijedi* $a_{2k} = 0$ *za svaki* $k \in \mathbb{N}$, *tj. da je*

$$\frac{1}{\mathrm{e}^t - 1} = \frac{1}{t} - \frac{1}{2} + \sum_{k\in\mathbb{N}} b_k t^{2k-1}, \qquad 0 < |t| < 2\pi.$$

(b) *Dokažite da za svaki* $n \in \mathbb{N}$ *i za* $-2n-1 < \operatorname{Re} z < -2n+1$ *vrijedi*

$$\zeta(z)\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} \left[\frac{1}{\mathrm{e}^t - 1} - \frac{1}{t} + \frac{1}{2} - \sum_{k=1}^{n} b_k t^{2k-1}\right] t^{z-1}\mathrm{d}t.$$

(c) *Izračunajte* b_1, b_2, b_3 *i* b_4.

Uputa: (a) Provjerite da je funkcija $t \mapsto \frac{1}{\mathrm{e}^t-1} - \frac{1}{t} + \frac{1}{2}$ neparna.
(b) Postupite kao u dokazu tvrdnje (a) u lemi 11.1. i dokazu tvrdnje (d) u teoremu 11.2.
(c) $b_1 = 1/24$, $b_2 = -1/720$, $b_3 = 1/30240$, $b_4 = 1/134400$.

Zadatak 11.3. *Dokažite da Eulerov teorem 11.1. vrijedi i ako umjesto* x *stavimo kompleksan broj* z *sa* $\operatorname{Re} z > 1$.

Zadatak 11.4. *Dokažite da je*

$$\sum_{p\in P} \frac{1}{p} = +\infty,$$

gdje je P *skup svih prostih brojeva.*

Zadatak 11.5. *Dokažite da su* $-2, -4, -6, \ldots$ *jedine nultočke Riemannove zeta funkcije izvan pruge* $0 \leq \operatorname{Re} z \leq 1$.

Od sljedećih 9 zadataka riješite 3 i to ili 11.6., 11.9. i 11.12., ili 11.7., 11.10. i 11.13. ili 11.8., 11.11. i 11.14.

Zadatak 11.6. *Dokažite da vrijedi*

$$\zeta(z)^2 = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{d(n)}{n^z}, \qquad \operatorname{Re} z > 1,$$

gdje je $d(n)$ *broj djelitelja broja* n.

Zadatak 11.7. *Dokažite da je*

$$\frac{\zeta(z-1)}{\zeta(z)} = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\varphi(n)}{n^z}, \qquad \operatorname{Re} z > 2.$$

gdje je $\varphi(n)$ *broj prirodnih brojeva* $k < n$ *koji su relativno prosti sa* n.

Zadatak 11.8. *Dokažite da je*

$$\zeta(z)\zeta(z-1) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\sigma(n)}{n^z}, \qquad \operatorname{Re} z > 2,$$

gdje je $\sigma(n)$ *suma svih djelitelja broja* n.

Zadatak 11.9. *Dokažite da je*

$$\frac{1}{\zeta(z)} = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\mu(n)}{n^z}, \qquad \mathrm{Re}\, z > 1,$$

gdje je $\mu : \mathbb{N} \to \{-1, 0, 1\}$ **Möbiusova funkcija** *definirana sa* $\mu(1) = 1$, $\mu(n) = (-1)^m$ *ako je* $n = p_1 \cdots p_m$ *i* $p_1, \ldots, p_m$ *su međusobno različiti prosti brojevi, i* $\mu(n) = 0$ *inače.*

Zadatak 11.10. *Dokažite da je*

$$\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)} = -\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\wedge(n)}{n^z}, \qquad \mathrm{Re}\, z > 1,$$

gdje $\wedge(n) = \ln p$ *ako je* $n = p^m$ *za neki prost broj* p *i za neki* $m \in \mathbb{N}$ *i* $\wedge(n) = 0$ *inače.*

Zadatak 11.11. *Neka je*

$$\xi(z) = z(z-1)\pi^{-\frac{z}{2}}\zeta(z)\Gamma\left(\frac{z}{2}\right).$$

Dokažite:

(a) ξ *je cijela funkcija.*

(b) *Vrijedi* $\xi(z) = \xi(1-z)\ \ \forall z \in \mathbb{C}$.

(c) *Vrijedi* $\xi(t) \in \mathbb{R}\ \ \forall t \in \mathbb{R}$.

(d) *Vrijedi* $\xi(\frac{1}{2} + it) \in \mathbb{R}\ \ \forall t \in \mathbb{R}$.

Zadatak 11.12. *Dokažite da je za* $s > 1$

$$\zeta(s) = \max\left\{|\zeta(s+it)|\,;\ t \in \mathbb{R}\right\}.$$

Zadatak 11.13. *Dokažite da je*

$$\frac{\zeta(2z)}{\zeta(z)} = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\lambda(n)}{n^z}, \qquad \mathrm{Re}\, z > 1,$$

gdje je $\lambda(1) = 1$ *i* $\lambda\left(p_1^{m_1} \cdots p_r^{m_r}\right) = (-1)^{m_1+\cdots+m_r}$ *ako su* $p_1, \ldots, p_r$ *međusobno različiti prosti brojevi i* $m_1, \ldots, m_r \in \mathbb{N}$.

Zadatak 11.14. *Dokažite da je*

$$\frac{\zeta(2z)}{(z-1)\zeta(z)} = \int_1^{+\infty} t^{-z} C(t)\mathrm{d}t, \qquad \mathrm{Re}\, z > 1,$$

gdje je

$$C(t) = \sum_{n\in\mathbb{N},\, n\le t} \frac{\lambda(n)}{n}, \qquad t \ge 1.$$

i $\lambda : \mathbb{N} \to \{-1, 1\}$ *je funkcija iz zadatka 11.13.*

Bibliografija

[1] L. V. Ahlfors, *Complex Analysis*, 2^{nd} edition, McGraw−Hill, New York, 1966.

[2] L. V. Ahlfors, *Conformal Invariants. Topics in Geometric Function Theory*, McGraw−Hill, New York, 1973.

[3] J. B. Conway, *Functions of One Complex Variable*, Springer−Verlag, New York − Heidelberg − Berlin, 1973.

[4] K. Diedrich, R. Remmert, *Funktionentheorie I*, Springer−Verlag, Berlin − Heidelberg − New York, 1972.

[5] T. W. Gamelin, *Complex Analysis*, Springer, New York, 2001.

[6] R. Godement, *Analyse mathématique II, Calcul différentiel et intégral, séries de Fourier, fonctions holomorphes*, 2ème édition corrigée, Springer, Berlin − Heidelberg, 2003.

[7] R. Godement, *Analyse mathématique III, Fonctions analytiques, différentielles et variétés, surfaces de Riemann*, Springer, Berlin − Heidelberg, 2002.

[8] R. E. Greene, S. G. Krantz, *Function Theory of One Complex Variable*, Graduate Studies in Mathematics, American Mathematical Society, Providence R.I., 2006.

[9] E. Hille, *Analytic Function Theory I, II*, Ginn and Company, Boston − New York − Chicago − Atlanta − Dallas − Palo Alto − Toronto, 1962.

[10] A. Hurwitz, R. Courant, *Allgemeine Funktionentheorie und elliptische Funktionen*, Springer−Verlag, Berlin − Göttingen − Heidelberg − New York, 1964.

[11] K. Kodaira, *Complex Analysis*, Cambridge Univ. Press, Cambridge − New York − Melbourne − Madrid − Cape Town − Singapore − São Paulo − Delhi, 2007.

[12] H. Kraljević, S. Kurepa, *Matematička analiza IV/I, Funkcije kompleksne varijable*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1986.

[13] S. Lang, *Complex Analysis*, 4^{th} edition, Springer, New York, 1999.

[14] W. Rudin, *Real and Complex Analysis*, McGraw−Hill, New York, 1970.

[15] A. Saks, A. Zygmund, *Analytic Functions*, Warszawa, 1952.

[16] C. L. Siegel, *Topics in Complex Function Theory, Vol. I: Elliptic Functions and Uniformization Theory*, Wiley−Interscience, New York − London − Sydney − Toronto, 1969.

[17] E. M. Stein, R. Shakarchi, *Complex Analysis*, Princeton Univ. Press, Princeton − Oxford, 2003.

[18] E. C. Titchmarsh, *The Theory of Functions*, Oxford Univ. Press, Oxford, 1939.

[19] G. Valiron, *Fonctions analytiques*, Presses Univ., Paris, 1954.

[20] W. A. Veech, *A Second Course in Complex Analysis*, Dover Publications, Mineola N.Y., 2008.