OPERATORSKE ALGEBRE

Prof. dr. sc. Hrvoje Kraljević

Predavanja održana na PMF−Matematičkom odjelu
Sveučilišta u Zagrebu
u ljetnom semestru akademske godine 2010./2011.

Zagreb, 2011.

Sadržaj

1 Osnovni pojmovi **5**
1.1 Algebre . . . 5
1.2 Normirane i Banachove algebre . . . 10
1.3 Normirane $*-$algebre. Hermitski linearni funkcionali . . . 19
1.4 C^*-algebre. Unitalizacija . . . 21

2 Komutativne C^*-algebre **25**
2.1 Karakteri . . . 25
2.2 Slaba topologija na dualu normiranog prostora . . . 28
2.3 Geljfandova transformacija . . . 33
2.4 Stone−Weierstrassov teorem . . . 35
2.5 Funkcionalni račun u C^*-algebrama . . . 39

3 Kompaktni operatori na Hilbertovim prostorima **45**
3.1 Kompaktni operatori na normiranim prostorima . . . 45
3.2 Spektar kompaktnog operatora . . . 53
3.3 Kompaktni simetrični operatori . . . 60
3.4 Algebre kompaktnih operatora . . . 66

4 Spektralni teorem za ograničen hermitski operator **69**
4.1 Pozitivni operatori . . . 69
4.2 Parcijalne izometrije i polarna forma . . . 76
4.3 Spektralni teorem . . . 79

5 Reprezentacije C^*-algebri **83**
5.1 Uređaj u C^*-algebri . . . 83
5.2 Aproksimativne jedinice . . . 87
5.3 Zatvoreni ideali, kvocijenti i homomorfizmi C^*-algebri . . . 91
5.4 Reprezentacije . . . 94
5.5 Ireducibilne reprezentacije . . . 97
5.6 Pozitivni funkcionali i reprezentacije . . . 99
5.7 Stanja i čista stanja. Kriterij ireducibilnosti . . . 103
5.8 Egzistencija vjerne reprezentacije . . . 105

6 Kompaktni operatori u reprezentacijama C^*-algebri **107**
6.1 Kompaktne C^*-algebre . . . 107
6.2 CCR−algebre i GCR−algebre . . . 110
6.3 Dodatni zadaci . . . 114

Poglavlje 1

Osnovni pojmovi

1.1 Algebre

U cijelom kolegiju termin **algebra** označava kompleksnu asocijativnu algebru (osim što ćemo kod dokazivanja Stone-Weierstrassovog teorema promatrati i realne asocijativne algebre funkcija). Dakle, algebra je vektorski prostor $\mathcal{A}$ nad poljem $\mathbb{C}$ kompleksnih brojeva na kojem je zadana asocijativna binarna operacija $(a,b) \mapsto ab$ sa $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$ u $\mathcal{A}$ koja je bihomogena u odnosu na množenje skalarima i distributivna i slijeva i zdesna s obzirom na zbrajanje u $\mathcal{A}$:

$$a(bc) = (ab)c, \qquad \lambda(ab) = (\lambda a)b = a(\lambda b), \qquad a(b+c) = ab + ac,$$

$$(a+b)c = ac + bc, \qquad a, b, c \in \mathcal{A},\ \lambda \in \mathbb{C}.$$

Jedinica u algebri $\mathcal{A}$ je element $e \in \mathcal{A}$ takav da je

$$ea = ae = a \qquad \forall a \in \mathcal{A}.$$

Ako jedinica postoji, ona je jedinstvena i tada ćemo je najčešće označavati sa e. **Unitalna algebra** je algebra u kojoj postoji jedinica. Ako je $\mathcal{A}$ unitalna algebra sa $\mathcal{A}^\times$ označavamo grupu invertibilnih elemenata algebre $\mathcal{A}$:

$$\mathcal{A}^\times = \{a \in \mathcal{A};\ \exists a^{-1} \in \mathcal{A} \text{ takav da je } aa^{-1} = a^{-1}a = e\}.$$

Potprostor $\mathcal{B}$ algebre $\mathcal{A}$ zove se **podalgebra** ako vrijedi

$$a, b \in \mathcal{B} \qquad \Longrightarrow \qquad ab \in \mathcal{B}.$$

Naravno, tada je $\mathcal{B}$ algebra s obzirom na iste operacije (ili, točnije, s obzirom na operacije koje su definirane kao restrikcije operacija algebre $\mathcal{A}$). Ako je $\mathcal{A}$ unitalna algebra, $\mathcal{B}$ se zove **unitalna podalgebra** ako sadrži jedinicu algebre $\mathcal{A}$. Napomenimo da je moguće da je $\mathcal{B}$ unitalna algebra, ali da $\mathcal{B}$ nije unitalna podalgebra algebre $\mathcal{A}$: naime, mobuće je da $\mathcal{B}$ ima jedinicu, ali da ta jedinica nije jednaka jedinici u algebri $\mathcal{A}$.

Ako su $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ algebre, preslikavanje $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ se zove **homomorfizam algebri** ako je φ linearno i multiplikativno:

$$\varphi(\lambda a + \mu b) = \lambda\varphi(a) + \mu\varphi(b) \qquad \text{i} \qquad \varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b) \qquad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{C},\ \forall a, b \in \mathcal{A}.$$

Ako su $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ unitalne algebre s jedinicama $e_\mathcal{A}$ i $e_\mathcal{B}$ i ako vrijedi $\varphi(e_\mathcal{A}) = e_\mathcal{B}$ onda se φ zove **unitalni homomorfizam**. Injektivni homomorfizam zove se **monomorfizam**, surjektivni homomorfizam zove se **epimorfizam**, a bijektivni homomorfizam je **izomorfizam algebri**. Za algebre $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$

kažemo da su **izomorfne** ako postoji izomorfizam $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$. Očito je izomorfnost algebri relacija ekvivalencije.

Primjer unitalne algebre je algebra $\mathbb{C}[T]$ polinoma u jednoj varijabli nad poljem $\mathbb{C}$. To je skup svih nizova $(\alpha_n)_{n\geq 0}$ kompleksnih brojeva, takvih da je samo konačno članova različito do nule: $\exists m$ takav da vrijedi $\alpha_n = 0\ \forall n > m$. Zbrajanje u $\mathbb{C}[T]$ i množenje skalarom definirani su po komponentama: $(\alpha_n) + (\beta_n) = (\alpha_n + \beta_n)$, $\lambda(\alpha_n) = (\lambda\alpha_n)$, a množenje na sljedeći način:

$$(\alpha_n)(\beta_n) = (\gamma_n), \qquad \text{gdje je} \qquad \gamma_n = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \beta_{n-k}.$$

$\mathbb{C}[T]$ je komutativna algebra i vrijedi $\mathbb{C}[T]^\times = \mathbb{C}^\times = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Obično pišemo $(0, 1, 0, \ldots) = T$. Tada je za bilo koji prirodan broj n $T^n = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots)$, tj. niz u kome su svi članovi nula osim jedinice na mjestu $n+1$. Uz dogovor $T^0 = (1, 0, \ldots)$ (to je jedinica u algebri $\mathbb{C}[T]$), polinom $P = (\alpha_n)$, za koji je $\alpha_n = 0$ za svaki $n > m$, možemo ovako zapisati:

$$P = P(T) = \alpha_0 + \alpha_1 T + \alpha_2 T^2 + \ldots + \alpha_m T^m = \sum_{n=0}^{m} \alpha_n T^n.$$

Ako je $\mathcal{A}$ unitalna algebra s jedinicom e, $x \in \mathcal{A}$ i $P \in \mathbb{C}[T]$ kao gore onda pišemo:

$$P(x) = \alpha_0 e + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \ldots + \alpha_m x^m = \sum_{n=0}^{m} \alpha_n x^n.$$

Očito je $P \mapsto P(x)$ unitalni homomorfizam algebri $\Phi_x \colon \mathbb{C}[T] \to \mathcal{A}$. Njegova je slika najmanja unitalna podalgebra od $\mathcal{A}$ koja sadrži x; to je potprostor od $\mathcal{A}$ razapet svim potencijama $\{e, x, x^2, \ldots\}$ elementa x.

Ako je $\mathcal{A}$ unitalna algebra i $x \in \mathcal{A}$ definiramo **spektar** elementa x kao skup

$$\sigma(x) = \sigma_{\mathcal{A}}(x) = \{\lambda \in \mathbb{C};\ x - \lambda e \notin \mathcal{A}^\times\}.$$

Uočimo neke evidentne činjenice. Ako je algebra trivijalna, $\mathcal{A} = \{0\}$, onda je 0 jedinica u toj algebri, pa je $\mathcal{A}^\times = \mathcal{A} = \{0\}$. Stoga je u tom slučaju $\sigma_{\mathcal{A}}(0) = \emptyset$. Ako je algebra netrivijalna, $\mathcal{A} \neq \{0\}$, onda je $\sigma(\lambda e) = \{\lambda\}$ za svaki $\lambda \in \mathbb{C}$.

Propozicija 1.1.1. *Neka je $\mathcal{A}$ unitalna algebra.*

(*a*) *Za $x \in \mathcal{A}$ i za $P \in \mathbb{C}[T]$ vrijedi:*

$$\sigma(P(x)) = P(\sigma(x)) = \{P(\lambda);\ \lambda \in \sigma(x)\}.$$

(*b*) *Za $x \in \mathcal{A}^\times$ vrijedi:*

$$\sigma\left(x^{-1}\right) = \sigma(x)^{-1} = \{\lambda^{-1};\, \lambda \in \sigma(x)\}.$$

Dokaz: (*a*) Neka je $\lambda \in \sigma(x)$. Definiramo $Q = P - P(\lambda)$. Tada je $Q(\lambda) = 0$, pa postoji $R \in \mathbb{C}[T]$, takav da je

$$P(T) - P(\lambda) = (T - \lambda)R(T).$$

Primijenimo li na tu jednakost homomorfizam Φ_x slijedi:

$$P(x) - P(\lambda)e = (x - \lambda e)R(x).$$

Pretpostavimo da je $P(x) - P(\lambda)e \in \mathcal{A}^\times$ i stavimo $a = (P(x) - P(\lambda)e)^{-1}$. Slijedi

$$e = a\left(P(x) - P(\lambda)e\right) = aR(x)(x - \lambda e) = (x - \lambda e)aR(x).$$

Odatle slijedi da je $x - \lambda e \in \mathcal{A}^\times$, a to je suprotno pretpostavci $\lambda \in \sigma(x)$. Dakle, pretpostavka $P(x) - P(\lambda)e \in \mathcal{A}^\times$ je bila pogrešna, pa zaključujemo da je $P(x) - P(\lambda)e \notin \mathcal{A}^\times$, tj. $P(\lambda) \in \sigma(P(x))$. Time je dokazana inkluzija $P(\sigma(x)) \subseteq \sigma(P(x))$.

Dokažimo sada obrnutu inkluziju. Neka je $\mu \in \sigma(P(x))$. Polje $\mathbb{C}$ je algebarski zatvoreno, pa ako je m stupanj polinoma P, postoje skalari $\alpha \neq 0$ i $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ takvi da je

$$P(T) - \mu = \alpha \cdot (T - \lambda_1) \cdots (T - \lambda_m).$$

Za svaki $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$ tada je $P(\lambda_j) - \mu = 0$, tj. $\mu = P(\lambda_j)$. Primijenimo li na gornju jednakost homomorfizam Φ_x dobivamo

$$P(x) - \mu e = \alpha \cdot (x - \lambda_1 e) \cdots (x - \lambda_m e).$$

Kako je $\mu \in \sigma(P(x))$ to vrijedi $P(x) - \mu e \notin \mathcal{A}^\times$ pa slijedi da postoji $j \in \{1, \ldots, m\}$ takav da $x - \lambda_j e \notin \mathcal{A}^\times$, tj. $\lambda_j \in \sigma(x)$. No tada je $\mu = P(\lambda_j) \in P(\sigma(x))$. Time je dokazana i obrnuta inkluzija $\sigma(P(x)) \subseteq P(\sigma(x))$, dakle jednakost $\sigma(P(x)) = P(\sigma(x))$.

(b) Neka je $\lambda \in \sigma(x)$, tj. $\lambda e - x$ nije invertibilan. Imamo

$$\lambda e - x = -\lambda(\lambda^{-1}e - x^{-1})x,$$

odakle se vidi da $\lambda^{-1}e - x^{-1}$ nije invertibilan, dakle $\lambda^{-1} \in \sigma\left(x^{-1}\right)$. Time je dokazano da iz $\lambda \in \sigma(x)$ slijedi $\lambda^{-1} \in \sigma(x^{-1})$, tj. dokazana je inkluzija $\sigma(x)^{-1} \subseteq \sigma\left(x^{-1}\right)$. Zamjena uloga x i x^{-1} daje $\sigma\left(x^{-1}\right)^{-1} \subseteq \sigma(x)$, odnosno dobivamo obrnutu inkluziju $\sigma\left(x^{-1}\right) \subseteq \sigma(x)^{-1}$.

Zadatak 1.1.1. *Neka je $\mathcal{A} \neq \{0\}$ unitalna algebra i neka je element $x \in \mathcal{A}$ nilpotentan. Dokažite da je tada $\sigma(x) = \{0\}$.*

Zadatak 1.1.2. *Neka je $\varphi\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ unitalni homomorfizam unitalnih algebri i neka je $x \in \mathcal{A}$. Dokaťite da je tada $\sigma_{\mathcal{B}}(\varphi(x)) \subseteq \sigma_{\mathcal{A}}(x)$.*

Neka je $\mathcal{A}$ unitalna algebra. Stavimo

$$R(x, \lambda) = (\lambda e - x)^{-1}, \qquad x \in \mathcal{A},\ \ \lambda \in \mathbb{C} \setminus \sigma(x)$$

Funkcija $\lambda \mapsto R(x, \lambda)$ sa $\mathbb{C} \setminus \sigma(x)$ u $\mathcal{A}$ zove se **rezolventa** elementa x.

Zadatak 1.1.3. *Neka je $\mathcal{A}$ unitalna algebra.*

(a) *Dokažite da za $x \in \mathcal{A}$ i $\lambda, \mu \in \mathbb{C} \setminus \sigma(x)$ vrijedi*

$$(\lambda - \mu)R(x, \lambda)R(x, \mu) = R(x, \mu) - R(x, \lambda).$$

Posebno, $R(x, \lambda)$ i $R(x, \mu)$ komutiraju.

(b) *Dokažite da za $x, y \in \mathcal{A}$ i $\lambda \in \mathbb{C} \setminus (\sigma(x) \cup \sigma(y))$ vrijedi*

$$R(y, \lambda)(y - x)R(x, \lambda) = R(y, \lambda) - R(x, \lambda).$$

Zadatak 1.1.4. *Neka je $\mathcal{A}$ algebra. Na Kartezijevom produktu $\tilde{\mathcal{A}} = \mathbb{C} \times \mathcal{A}$ definiramo operaciju množenja na sljedeći način:*

$$(\lambda, x)(\mu, y) = (\lambda\mu, \lambda y + \mu x + xy), \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{C}, \ \ x, y \in \mathcal{A}.$$

Dokažite da je tada $\tilde{\mathcal{A}}$ unitalna algebra s jedinicom $\varepsilon = (1, 0)$ i da je $x \mapsto (0, x)$ monomorfizam algebre $\mathcal{A}$ u algebru $\tilde{\mathcal{A}}$.

Monomorfizam $x \mapsto (0, x)$ iz zadatka 1.1.4. upotrijebit ćemo kao identifikaciju. Na taj način $\mathcal{A}$ postaje podalgebra od $\tilde{\mathcal{A}}$ i imamo rastav $\tilde{\mathcal{A}} = \mathcal{A} \dotplus \mathbb{C}\varepsilon$. Za algebru $\tilde{\mathcal{A}}$ kažemo da je iz algebre $\mathcal{A}$ dobivena **unitalizacijom** ili **dodavanjem jedinice**. Na taj način svaku algebru bez jedinice uranjamo u unitalnu algebru. No, primijetimo da konstrukcija ima smisla i kad polazna algebra $\mathcal{A}$ ima jedinicu.

Za bilo koji element $x \in \mathcal{A}$ definiramo

$$\sigma'(x) = \sigma_{\tilde{\mathcal{A}}}(x).$$

Primijetimo da je $0 \in \sigma'(x)$ $\forall x \in \mathcal{A}$.

Zadatak 1.1.5. *Neka je $\mathcal{A}$ unitalna algebra. Dokažite da je tada $\sigma'(x) = \sigma(x) \cup \{0\}$ za svaki $x \in \mathcal{A}$.*

Lijevi ideal u algebri $\mathcal{A}$ je potprostor $\mathcal{L}$ od $\mathcal{A}$ takav da je $\mathcal{L} \neq \mathcal{A}$ i da vrijedi:

$$x \in \mathcal{L} \ \text{ i } \ a \in \mathcal{A} \qquad \Longrightarrow \qquad ax \in \mathcal{L}.$$

Analogno, **desni ideal** je potprostor $\mathcal{R} \neq \mathcal{A}$ sa svojstvom:

$$x \in \mathcal{R} \ \text{ i } \ a \in \mathcal{A} \qquad \Longrightarrow \qquad xa \in \mathcal{R}.$$

Ako je $\mathcal{J}$ i lijevi i desni ideal, $\mathcal{J}$ se zove **obostrani ideal**, a katkada i samo **ideal**. Dakle, obostrani ideal je potprostor $\mathcal{J} \neq \mathcal{A}$ takav da vrijedi:

$$x \in \mathcal{J} \ \text{ i } \ a \in \mathcal{A} \qquad \Longrightarrow \qquad xa \in \mathcal{J} \ \text{ i } \ ax \in \mathcal{J}.$$

Ako je $\mathcal{A}$ unitalna algebra, primijetimo da za lijevi, desni ili obostrani ideal $\mathcal{J}$ vrijedi $e \notin \mathcal{J}$. Štoviše, ako je $\mathcal{J}$ lijevi, desni ili obostrani ideal u $\mathcal{A}$ onda $\mathcal{J}$ ne sadrži nijedan invertibilni element, tj. $\mathcal{J} \cap \mathcal{A}^\times = \emptyset$.

Neka je $\mathcal{J}$ obostrani ideal u algebri $\mathcal{A}$. U kvocijentni vektorski prostor $\mathcal{A}/\mathcal{J}$ uvodimo operaciju množenja na sljedeći način:

$$(x + \mathcal{J})(y + \mathcal{J}) = xy + \mathcal{J}, \qquad x, y \in \mathcal{A}.$$

Iz činjenice da je $\mathcal{J}$ obostrani ideal slijedi da ta definicija ima smisla, tj. ne ovisi o izboru predstavnika x i y klasa kvocijentnog prostora. Doista, ako je $x + \mathcal{J} = x' + \mathcal{J}$ i $y + \mathcal{J} = y' + \mathcal{J}$ (tj. $x - x' \in \mathcal{J}$ i $x - x' \in \mathcal{J}$) onda je

$$xy - x'y' = x(y - y') + (x - x')y' \in \mathcal{J},$$

dakle, $xy + \mathcal{J} = x'y' + \mathcal{J}$. S tako definiranim množenjem $\mathcal{A}/\mathcal{J}$ postaje algebra i zove se **kvocijentna algebra** algebre $\mathcal{A}$ po idealu $\mathcal{J}$. Kvocijentno preslikavanje $\pi \colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}/\mathcal{J}$, koje element algebre $\mathcal{A}$ preslikava u njegovu klasu modulo $\mathcal{J}$ ($\pi(x) = x + \mathcal{J}$), je surjektivni homomorfizam algebri. Ako je e jedinica u algebri $\mathcal{A}$, njegova je klasa $\pi(e) = e + \mathcal{J}$ jedinica u kvocijentnoj algebri $\mathcal{A}/\mathcal{J}$. Napomenimo da je moguće da je $\mathcal{A}$ algebra bez jedinice, ali da je $\mathcal{A}/\mathcal{J}$ unitalna algebra.

Ako je $\mathcal{A}$ algebra i $\tilde{\mathcal{A}}$ algebra dobivena iz nje dodavanjem jedinice, i ako pomoću injektivnog homomorfizma $x \mapsto (0, x)$ identificiramo $\mathcal{A}$ s njenom slikom u $\tilde{\mathcal{A}}$, $\mathcal{A}$ postaje ne samo podalgebra nego obostrani ideal u algebri $\tilde{\mathcal{A}}$.

Zadatak 1.1.6. *Neka je* $\varphi\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ *homomorfizam algebri. Dokažite da vrijedi:*

(*a*) *Slika* $\varphi(\mathcal{A}) = \{\varphi(x);\ x \in \mathcal{A}\}$ *homomorfizma* φ *je podalgebra od* $\mathcal{B}$.

(*b*) *Jezgra* $\ker \varphi = \{x \in \mathcal{A};\ \varphi(x) = 0\}$ *homomorfizma* φ *je obostrani ideal u algebri* $\mathcal{A}$.

(*c*) *Preslikavanje* Φ *definirano sa*

$$\Phi(x + \ker \varphi) = \varphi(x), \qquad x \in \mathcal{A},$$

je izomorfizam algebre $\mathcal{A}/(\ker \varphi)$ *na algebru* $\varphi(\mathcal{A})$.

1.2 Normirane i Banachove algebre

Normirana algebra je algebra $\mathcal{A}$ nad poljem $\mathbb{C}$ kompleksnih brojeva, na kojoj je zadana norma $x \mapsto \|x\|$ sa svojstvom

$$\|xy\| \leq \|x\| \cdot \|y\| \qquad \forall x, y \in \mathcal{A}.$$

Ako je u odnosu na zadanu normu prostor $\mathcal{A}$ potpun (odnosno, ako je to Banachov prostor), $\mathcal{A}$ se zove **Banachova algebra**.

Primijetimo da je operacija množenja neprekidna kao preslikavanje sa $\mathcal{A}\times\mathcal{A}$ u $\mathcal{A}$ ($(x, y) \mapsto xy$). Dokaz je sljedeći:

$$\|xy-ab\| = \|(x-a)(y-b)+a(y-b)+(x-a)b\| \leq \|x-a\|\cdot\|y-b\|+\|a\|\cdot\|y-b\|+\|x-a\|\cdot\|b\|.$$

Neka je $\mathcal{A}$ normirana algebra i $\mathcal{J}$ zatvoren obostrani ideal u $\mathcal{A}$. Tada znamo da je sa

$$\|x + \mathcal{J}\| = \inf\{\|x + y\|;\ y \in \mathcal{J}\}, \qquad x \in \mathcal{A},$$

zadana norma na kvocijentnom prostoru $\mathcal{A}/\mathcal{J}$. S tom normom kvocijentna algebra $\mathcal{A}/\mathcal{J}$ postaje normirana algebra. Doista, ako su $x_1, x_2 \in \mathcal{A}$, onda iz činjenice da je $\mathcal{J}$ obostrani ideal slijedi da je $x_1y_2 + y_1x_2 + y_1y_2 \in \mathcal{J}$ za bilo koje $y_1, y_2 \in \mathcal{J}$. Stoga imamo:

$$\|(x_1 + \mathcal{J})(x_2 + \mathcal{J})\| = \|x_1x_2 + \mathcal{J}\| = \inf\{\|x_1x_2 + y\|;\ y \in \mathcal{J}\} \leq$$

$$\leq \inf\{\|x_1x_2 + y_1x_2 + x_1y_2 + y_1y_2\|;\ y_1, y_2 \in \mathcal{J}\} =$$

$$= \inf\{\|(x_1 + y_1)(x_2 + y_2)\|;\ y_1, y_2 \in \mathcal{J}\} \leq \{\|x_1 + y_1\| \cdot \|x_2 + y_2\|;\ y_1, y_2 \in \mathcal{J}\} =$$

$$= \inf\{\|x_1 + y_1\|;\ y_1 \in \mathcal{J}\} \cdot \inf\{\|x_2 + y_2\|;\ y_2 \in \mathcal{J}\} = \|x_1 + \mathcal{J}\| \cdot \|x_2 + \mathcal{J}\|.$$

Za svaku algebru $\mathcal{A}$ definiramo tzv. *suprotnu algebru* $\mathcal{A}^0$ koja se kao vektorski prostor podudara sa $\mathcal{A}$, a množenje $\diamond$ je definirano suprotnim redoslijedom u odnosu na originalno: $x \diamond y = yx$. Ako je $\mathcal{A}$ normirana algebra, očito je i $\mathcal{A}^0$ normirana algebra.

Neka je $\mathcal{A}$ normirana algebra. U algebri $\tilde{\mathcal{A}}$ dobivenoj iz $\mathcal{A}$ dodavanjem jedinice definiramo normu sa:

$$\|(\lambda, x)\| = |\lambda| + \|x\|, \qquad \lambda \in \mathbb{C},\ x \in \mathcal{A}.$$

Tada $\tilde{\mathcal{A}}$ postaje normirana algebra, jer je

$$\|(\lambda, x)(\mu, y)\| = \|(\lambda\mu, \lambda y + \mu x + xy\| = |\lambda\mu| + \|\lambda y + \mu x + xy\| \leq$$

$$\leq |\lambda\mu| + \|\lambda y\| + \|\mu x\| + \|xy\| \leq |\lambda| \cdot |\mu| + |\lambda| \cdot \|y\| + |\mu| \cdot \|x\| + \|x\| \cdot \|y\| =$$

$$= (|\lambda| + \|x\|) \cdot (|\mu| + \|y\|) = \|(\lambda, x)\| \cdot \|(\mu, y)\|.$$

U toj unitalnoj normiranoj algebri jedinica ima normu 1: $\|(1, 0)\| = 1$.

Ako je X normiran prostor i $B(X)$ algebra svih ograničenih linearnih operatora $A\colon X \to X$, tada je sa

$$\|A\| = \sup\{\|Ax\|;\ x \in X,\ \|x\| = 1\}, \qquad A \in B(X),$$

zadana norma na prostoru $B(X)$, i taj je normiran prostor Banachov ako i samo ako je prostor X Banachov. Očito vrijedi $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$ za bilo koje operatore $A, B \in B(X)$, dakle $B(X)$ je s definiranom normom normirana algebra. To je unitalna algebra: jedinica je jedinični operator I. I u toj algebri jedinica ima normu 1: $\|I\| = 1$.

Neka je $\mathcal{A}$ normirana algebra. Za $x \in \mathcal{A}$ definiramo linearne operatore $L_x \colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ i $R_x \colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ sa

$$L_x y = xy, \qquad R_x y = yx, \qquad y \in \mathcal{A}.$$

Operatori L_x i R_x su ograničeni, jer je $\|L_x y\| \le \|x\| \cdot \|y\|$ i $\|R_x y\| \le \|x\| \cdot \|y\|$. Odatle se vidi da vrijedi:

$$\|L_x\| \le \|x\|, \qquad \|R_x\| \le \|x\|, \qquad x \in \mathcal{A}. \tag{1.1}$$

Preslikavanja $x \mapsto L_x$ i $x \mapsto R_x$ sa $\mathcal{A}$ u $B(\mathcal{A})$ su očito linearna i vrijedi $L_{xy} = L_x L_y$ i $R_{xy} = R_y R_x$. Dakle, $x \mapsto L_x$ je homomorfizam algebre $\mathcal{A}$ u algebru $B(\mathcal{A})$, a $x \mapsto R_x$ je homomorfizam suprotne algebre $\mathcal{A}^0$ u algebru $B(\mathcal{A})$. Zbog gornjih nejednakosti ti su homomorfizmi neprekidni. Ako je e jedinica u algebri $\mathcal{A}$ onda za svaki $x \in \mathcal{A}$ vrijedi $L_x e = x = R_x e$. Dakle, u tom su slučaju homomorfizmi $x \mapsto L_x$ i $x \mapsto R_x$ injektivni. Stoga su sa

$$\|x\|_l = \|L_x\| \qquad \text{i} \qquad \|x\|_r = \|R_x\|, \qquad x \in \mathcal{A},$$

definirane norme $\|\cdot\|_l$ i $\|\cdot\|_r$ na $\mathcal{A}$ u odnosu na koje su $\mathcal{A}$ i $\mathcal{A}^0$ normirane algebre. Kako je $\|x\| \le \|L_x\| \cdot \|e\|$ i $\|x\| \le \|R_x\| \cdot \|e\|$, zbog (1.1) vidimo da vrijedi

$$\|x\|_l \le \|x\| \le \|e\| \cdot \|x\|_l, \qquad \|x\|_r \le \|x\| \le \|e\| \cdot \|x\|_r, \qquad x \in \mathcal{A}.$$

Dakle, svaka od normi $\|\cdot\|_l$ i $\|\cdot\|_r$ na prostoru $\mathcal{A}$ ekvivalentna je polaznoj normi $\|\cdot\|$. Prema tome, dokazali smo:

Propozicija 1.2.1. *Neka je $\mathcal{A}$ normirana unitalna algebra s jedinicom e. Na prostoru $\mathcal{A}$ postoji ekvivalentna norma u odnosu na koju je $\mathcal{A}$ normirana algebra i e ima normu jednaku* 1.

Zbog ove propozicije ubuduće ćemo uvijek pretpostavljati da u unitalnoj normiranoj algebri $\mathcal{A}$ vrijedi $\|e\| = 1$. Napomenimo da iz gornjih nejednakosti slijedi: ako je $\mathcal{A}$ unitalna normirana algebra u kojoj vrijedi $\|e\| = 1$, onda je $\|x\|_l = \|x\|_r = \|x\|$, $\forall x \in \mathcal{A}$.

Razmotrimo sada nekoliko primjera.

1. Neka je K kompaktan Hausdorffov topološki prostor i neka je $C(K)$ skup svih neprekidnih funkcija $f \colon K \to \mathbb{C}$. S operacijama definiranim po točkama:

$$(f+g)(t) = f(t) + g(t), \qquad (\lambda f)(t) = \lambda f(t), \qquad (fg)(t) = f(t)g(t), \qquad t \in K,$$

$C(K)$ je komutativna unitalna algebra; jedinica e je konstantna funkcija $e(t) = 1\ \forall t \in K$. Algebra $C(K)$ je Banachova uz normu

$$\|f\| = \max\{|f(t)|;\ t \in K\}.$$

2. Neka je sada Ω lokalno kompaktan Hausdorffov topološki prostor. To znači da svaka točka ima kompaktnu okolinu, tj. da se svaka točka nalazi u nutrini nekog kompaktnog podskupa od Ω. Za funkciju $f \colon \Omega \to \mathbb{C}$ i za kompleksan broj $L \in \mathbb{C}$ pišemo

$$L = \lim_{t \to \infty} f(t)$$

i kažemo da f teži prema L u beskonačnosti, ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji kompaktan podskup $K \subseteq \Omega$ takav da vrijedi:

$$t \in \Omega \setminus K \qquad \Longrightarrow \qquad |f(t) - L| \le \varepsilon.$$

Primijetimo da ako je topološki prostor Ω ne samo lokalno kompaktan nego kompaktan, onda za svaku $f \in C(\Omega)$ vrijedi

$$\lim_{t \to \infty} f(t) = 0.$$

Općenito, za bilo koji lokalno kompaktan prostor Ω stavimo

$$C_0(\Omega) = \{f \in C(\Omega);\ \lim_{t\to\infty} f(t) = 0\}.$$

To je Banachova algebra uz iste operacije kao u prethodnom primjeru. Ako prostor Ω nije kompaktan, $C_0(\Omega)$ ne sadrži konstantne funkcije pa $C_0(\Omega)$ nije unitalna algebra. Lako se vidi da dodavanjem jedinice dobivamo algebru izomorfnu algebri

$$C_1(\Omega) = \{f \in C(\Omega);\ \text{postoji } \lim_{t\to\infty} f(t) \in \mathbb{C}\}.$$

U vezi s ovim primjerom razmotrimo još tzv. *Aleksandrovljevu kompaktifikaciju* prostora Ω. Definiramo $\tilde{\Omega} = \Omega \cup \{\infty\}$ i u tom proširenom prostoru za otvorene okoline nove točke ∞ proglasimo sve skupove oblika $(\Omega \setminus K) \cup \{\infty\}$, gdje je K kompaktan podskup od Ω. Tada je $\tilde{\Omega}$ kompaktan Hausdorffov topološki prostor i moguće su sljedeće identifikacije:

$$C_1(\Omega) = C(\tilde{\Omega}), \qquad C_0(\Omega) = \{f \in C(\tilde{\Omega});\ f(\infty) = 0\}.$$

Općenito, za bilo koji topološki prostor Ω *kompaktifikacija* od Ω je naziv za bilo koji kompaktan prostor u kome je Ω otvoren gust podskup. Aleksandrovljeva kompaktifikacija je u određenom smislu minimalna, jer je komplement od Ω u $\tilde{\Omega}$ samo jedna točka.

3. Za neprekidnu funkciju $f\colon [0,1] \to \mathbb{C}$ kažemo da je **neprekidno derivabilna**, ako vrijedi:

(a) restrikcija $f|\langle 0,1\rangle$ je klase C^1, tj. ona je derivabilna u svakoj točki otvorenog intervala $\langle 0,1\rangle$ i njena derivacija f' je neprekidna funkcija na $\langle 0,1\rangle$;

(b) u točki 0 postoji desna derivacija

$$f'(0) = \lim_{t\searrow 0} \frac{1}{t}(f(t) - f(0))$$

i vrijedi

$$f'(0) = \lim_{t\searrow 0} f'(t);$$

(c) u točki 1 postoji lijeva derivacija

$$f'(1) = \lim_{t\nearrow 1} \frac{1}{1-t}(f(1) - f(t))$$

i vrijedi

$$f'(1) = \lim_{t\nearrow 1} f'(t).$$

Tako definirana funkcija $f'\colon [0,1] \to \mathbb{C}$ (derivacija funkcije f) je neprekidna. Skup svih neprekidno derivabilnih funkcija $f\colon [0,1] \to \mathbb{C}$ označavat ćemo sa $C^1([0,1])$. Induktivno definiramo za bilo koji prirodan broj n :

$$C^n([0,1]) = \{f \in C^1([0,1]);\ f' \in C^{n-1}([0,1])\}.$$

Nadalje, za $f \in C^n([0,1])$ stavljamo $f^{(0)} = f$ i za bilo koji $k \in \{1,\ldots,n\}$ induktivno definiramo $f^{(k)} = (f^{(k-1)})'$. Pokazuje se da je $C^n([0,1])$ u odnosu na operacije po točkama i s normom

$$\|f\| = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \max\{|f^{(k)}(t)|;\ t \in [0,1]\}$$

unitalna komutativna Banachova algebra.

4. Sa $l_1(\mathbb{Z})$ označimo Banachov prostor svih nizova $x = (\xi_n;\, n \in \mathbb{Z})$ takvih da je

$$\|x\|_1 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\xi_n| < +\infty.$$

Za $x = (\xi_n)$ i $y = (\eta_n)$ iz $l_1(\mathbb{Z})$ stavljamo

$$x \bullet y = (\zeta_n) \qquad \text{gdje je} \qquad \zeta_n = \sum_{p\in\mathbb{Z}} \xi_p \eta_{n-p};$$

napomenimo, da se lako dokazuje se da je za bilo koje $x, y \in l_1(\mathbb{Z})$ gornji red apsolutno konvergentan. S množenjem $\bullet$ i s normom $\|\cdot\|_1$ $l_1(\mathbb{Z})$ je unitalna komutativna Banachova algebra; jedinica je niz (ε_n), $\varepsilon_0 = 1$, $\varepsilon_n = 0\ \forall n \neq 0$.

Za $x = (\xi_n) \in l_1(\mathbb{Z})$ definiramo neprekidnu kompleksnu funkciju $\varphi(x)$ na jediničnoj kružnici $S = \{z \in \mathbb{C};\, |z| = 1\}$:

$$[\varphi(x)](z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \xi_n z^n, \qquad z \in S,$$

ili

$$[\varphi(x)](e^{it}) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \xi_n e^{int}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Pokazuje se da na taj način dobivamo unitalni homomorfizam unitalnih algebri $\varphi\colon l_1(\mathbb{Z}) \to C(S)$. Taj je homomorfizam injektivan. Naime, lako se izračuna da vrijedi

$$\xi_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [\varphi(x)](e^{it}) e^{-int}\, \mathrm{d}t, \qquad n \in \mathbb{Z}.$$

5. Promatrajmo sada zatvoren jedinični krug $D = \{z \in \mathbb{C};\, |z| \le 1\}$ i njegovu nutrinu označimo sa $D^o = \{z \in \mathbb{C};\, |z| < 1\}$. Neka je $\mathcal{A}$ skup svih funkcija $f \in C(D)$ takvih da je restrikcija $f|D^o$ analitička. S operacijama po točkama i s maksimum normom

$$\|f\| = \max\{|f(z)|;\, z \in D\} = \max\{|f(z)|;\, z \in S\}$$

$\mathcal{A}$ je unitalna komutativna Banachova algebra. $\mathcal{A}$ je podalgebra od $C(D)$. Kako je analitička funkcija f potpuno određena svojim rubnim vrijednostima $f|S$, algebru $\mathcal{A}$ možemo shvaćati i kao podalgebru od $C(S)$.

Neka je $\mathcal{A}$ normirana algebra. Broj

$$\nu(x) = \inf\{\|x^n\|^{\frac{1}{n}};\, n \in \mathbb{N}\}$$

nazivamo **spektralni radijus** elementa $x \in \mathcal{A}$. Dakle, spektralni radijus je funkcija ν sa $\mathcal{A}$ u $\mathbb{R}_+$.

Teorem 1.2.2. *Neka je $\mathcal{A}$ normirana algebra. Za svaki $x \in \mathcal{A}$ niz $(\|x^n\|^{\frac{1}{n}})_{n\in\mathbb{N}}$ je konvergentan i limes mu je spektralni radijus od x :*

$$\lim_{n\to\infty} \|x^n\|^{\frac{1}{n}} = \nu(x).$$

Dokaz: Za izabrani $x \in \mathcal{A}$ stavimo $\nu = \nu(x)$. Neka je $\varepsilon > 0$. Neka je $m \in \mathbb{N}$ takav da vrijedi

$$\|x^m\|^{\frac{1}{m}} \le \nu + \varepsilon, \qquad \text{tj.} \qquad \|x^m\| \le (\nu + \varepsilon)^m.$$

Za svaki prirodan broj n označimo s $p_n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ kvocijent, a s $q_n \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$ ostatak pri dijeljenju n sa $m : n = p_n m + q_n$. Tada je

$$1 = \frac{p_n m}{n} + \frac{q_n}{n}, \qquad n \in \mathbb{N}$$

pa zbog ograničenosti funkcije $n \mapsto q_n$ slijedi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{q_n}{n} = 0 \qquad \text{i} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{p_n m}{n} = 1.$$

Imamo redom

$$\|x^n\| = \|(x^m)^{p_n} x^{q_n}\| \leq \|x^m\|^{p_n} \cdot \|x\|^{q_n} \leq (\nu + \varepsilon)^{p_n m} \cdot \|x\|^{q_n},$$

pa slijedi

$$\|x^n\|^{\frac{1}{n}} \leq (\nu + \varepsilon)^{\frac{p_n m}{n}} \cdot \|x\|^{\frac{q_n}{n}}.$$

Pustimo li u toj nejednakosti da n teži u ∞, nalazimo da vrijedi:

$$\limsup \|x^n\|^{\frac{1}{n}} \leq \lim_{n\to\infty} [(\nu + \varepsilon)^{\frac{p_n m}{n}} \cdot \|x\|^{\frac{q_n}{n}}] = \nu + \varepsilon.$$

Budući da je $\varepsilon > 0$ bio proizvoljan, iz ove nejednakosti slijedi

$$\limsup \|x^n\|^{\frac{1}{n}} \leq \nu = \inf \|x^n\|^{\frac{1}{n}} \leq \liminf \|x^n\|^{\frac{1}{n}}.$$

Dakle,

$$\nu(x) = \limsup \|x^n\|^{\frac{1}{n}} = \liminf \|x^n\|^{\frac{1}{n}},$$

što ima za posljedicu da je niz brojeva $(\|x^n\|^{\frac{1}{n}}; n \in \mathbb{N})$ konvergentan i da mu je limes jednak $\nu(x)$.

Zadatak 1.2.1. *Neka je $\mathcal{A}$ normirana algebra. Dokažite da vrijedi:*

(*a*) $0 \leq \nu(x) \leq \|x\|, \ \forall x \in \mathcal{A}$.

(*b*) $\nu(\lambda x) = |\lambda| \cdot \nu(x), \ \forall x \in \mathcal{A}, \ \forall \lambda \in \mathbb{C}$.

(*c*) $\nu(xy) = \nu(yx), \ \forall x, y \in \mathcal{A}$.

(*d*) $\nu(x^k) = [\nu(x)]^k, \ \forall x \in \mathcal{A}, \ \forall k \in \mathbb{N}$.

(*e*) *Ekvivalentne norme daju isti spektralni radijus.*

Propozicija 1.2.3. *Neka je $\mathcal{A}$ normirana unitalna algebra. Tada je preslikavanje invertiranja $x \mapsto x^{-1}$ neprekidno sa $\mathcal{A}^\times$ u $\mathcal{A}^\times$.*

Zadatak 1.2.2. *Dokažite propoziciju 1.2.3.*

Uputa: Dokažite da za $a \in \mathcal{A}^\times$, za $r = \frac{1}{2 \cdot \|a^{-1}\|}$ i za $x \in \mathcal{A}^\times \cap K(a, r)$ vrijedi

$$\|x^{-1} - a^{-1}\| \leq 2 \cdot \|a^{-1}\|^2 \cdot \|a - x\|.$$

Teorem 1.2.4. *Neka je $\mathcal{A}$ Banachova algebra s jedinicom e.*

(*a*) *Ako je $a \in \mathcal{A}$ i $\nu(a) < 1$, onda je $e - a \in \mathcal{A}^\times$ i vrijedi*

$$(e - a)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n = e + a + a^2 + a^3 + \cdots,$$

pri čemu taj red konvergira apsolutno.

(*b*) *Ako je* $a \in \mathcal{A}$ *i* $\|a\| < 1$, *onda je* $e - a \in \mathcal{A}^\times$.

(*c*) *Grupa* $\mathcal{A}^\times$ *je otvoren podskup od* $\mathcal{A}$.

Dokaz: Prema Hadamardovom teoremu radijus konvergencije reda potencija $\sum \|a^n\|\lambda^n$ u $\mathbb{C}$ jednak je

$$r = \frac{1}{\limsup \|a^n\|^{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{\nu(a)} > 1.$$

Odavde slijedi da red $\sum \|a^n\|\lambda^n$ konvergira za $\lambda = 1$. Drugim riječima, red $\sum \|a^n\|$ konvergira, odnosno red $\sum a^n$ konvergira apsolutno. Budući da je po pretpostavci prostor $\mathcal{A}$ potpun, red $\sum a^n$ konvergira. Označimo njegovu sumu sa x, a parcijalne sume sa x_n :

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} a^n, \qquad x_n = e + a + a^2 + \cdots + a^{n-1}, \qquad x = \lim_{n\to\infty} x_n.$$

Imamo

$$(e - a)x_n = x_n(e - a) = e - a^n.$$

Budući da red $\sum \|a^n\|$ konvergira, imamo $\lim \|a^n\| = 0$, dakle i $\lim a^n = 0$. Pustimo li u gornjoj jednakosti da n teži u ∞, dobivamo

$$(e - a)x = x(e - a) = e$$

što pokazuje da je element $e - a$ invertibilan i $(e - a)^{-1} = x$.

Tvrdnja (*b*) slijedi neposredno iz tvrdnje (*a*), jer je $\nu(a) \le \|a\|$.

(*c*) Neka je $a \in \mathcal{A}^\times$. Neka je

$$x \in K\Big(a, \frac{1}{\|a^{-1}\|}\Big), \qquad \text{tj.} \qquad x \in \mathcal{A} \qquad \text{i} \qquad \|a - x\| < \frac{1}{\|a^{-1}\|}.$$

Stavimo $y = e - a^{-1}x$. Tada je

$$\|y\| = \|e - a^{-1}x\| = \|a^{-1}(a - x)\| \le \|a^{-1}\| \cdot \|a - x\| < 1.$$

Stoga je prema dokazanoj tvrdnji (*b*) $a^{-1}x = e - y \in \mathcal{A}^\times$. Kako je $a \in \mathcal{A}^\times$ to je i $x = a(a^{-1}x) \in \mathcal{A}^\times$. Tako smo dokazali da je

$$K\Big(a, \frac{1}{\|a^{-1}\|}\Big) \subseteq \mathcal{A}^\times, \qquad \forall a \in \mathcal{A}^\times.$$

Dakle, $\mathcal{A}^\times$ je otvoren podskup od $\mathcal{A}$.

Teorem 1.2.5. *Neka* $\mathcal{A}$ *unitalna Banachova algebra.*

(*a*) *Ako je* $x_0 \in \mathcal{A}$ *lijevo* (*odnosno, desno*) *invertibilan, ako je* y *neki njegov lijevi* (*odnosno, desni*) *invers i ako je* $x \in \mathcal{A}$ *takav da je* $\|x_0 - x\| < \frac{1}{\|y\|}$, *onda je* x *lijevo* (*odnosno, desno*) *invertibilan.*

(*b*) *Neka je* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergentan niz lijevo* (*odnosno, desno*) *invertibilnih elemenata algebre* $\mathcal{A}$ *i neka je za* $n \in \mathbb{N}$ y_n *neki lijevi* (*odnosno, desni*) *invers od* x_n. *Pretpostavimo da je skup* $\{y_n;\, n \in \mathbb{N}\}$ *ograničen. Tada je element* $x = \lim_{n\to\infty} x_n$ *lijevo* (*odnosno, desno*) *invertibilan.*

Dokaz: (a) Imamo $yx_0 = e$, pa je

$$\nu(e - yx) = \nu(y(x_0 - x)) \leq \|y(x_0 - x)\| \leq \|y\| \cdot \|x_0 - x\| < 1.$$

Prema teoremu 1.2.4. element $e - (e - yx) = yx$ je invertibilan. Neka je $z = (yx)^{-1}$. Tada je $zyx = e$, što pokazuje da je x lijevo invertibilan. Dokaz u slučaju desno invertibilnog elementa x_0 sasvim je analogan: dokaže se da je $\nu(e - xy) < 1$, dakle xy je invertibilan; ako je $z = (xy)^{-1}$, slijedi $xyz = e$, dakle yz je desni invers od x.

(b) Neka je $M > 0$ takav da je $\|y_n\| \leq M$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Kako je $x = \lim_n x_n$ postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je $\|x_n - x\| < \frac{1}{M}$. Tada je $\|x_n - x\| < \frac{1}{\|y_n\|}$, pa zbog tvrdnje (a) slijedi da je x lijevo (odnosno, desno) invertibilan.

Time je teorem u potpunosti dokazan.

Neka je Ω otvoren podskup od $\mathbb{C}$ i X Banachov prostor. **Funkcija** $f\colon \Omega \to X$ zove se **analitička** na Ω ako za svaku točku $\lambda_0 \in \Omega$ postoji $r > 0$ i postoje vektori $x_0, x_1, x_2, \ldots$ u X takvi da je:

$$f(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^n x_n \qquad \forall \lambda \in K(\lambda_0, r).$$

Teorem 1.2.6. *Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ otvoren skup, X Banachov prostor i $f\colon \Omega \to X$. Sljedeća su četiri svojstva međusobno ekvivalentna:*

(a) *Funkcija f je analitička na Ω.*

(b) *Za svaki $\lambda_0 \in \Omega$ postoji*

$$f'(\lambda_0) = \lim_{\lambda \to \lambda_0} \frac{f(\lambda) - f(\lambda_0)}{\lambda - \lambda_0}.$$

(c) *Ako su $\lambda_0 \in \Omega$ i $r > 0$ takvi da je $K(\lambda_0, r) \subseteq \Omega$, onda postoje vektori $x_n \in X$, $n \in \mathbb{N}$, takvi da je*

$$f(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^n x_n \qquad \forall \lambda \in K(\lambda_0, r).$$

U gornjem redu konvergencija je apsolutna.

(d) *Za svaki $\chi \in X'$ kompleksna funkcija $\lambda \mapsto \chi(f(\lambda))$ je analitička na Ω.*

Dokaz ovog teorema izostavljamo. Napominjemo da se međusobna ekvivalentnost svojstava (a), (b) i (c) dokazuje potpuno analogno kao i ekvivalentnost takvih svojstava za skalarnu funkciju $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$. Za dokaz ekvivalentnosti tvrdnje (d) s tvrdnjom (a) koristi se Hahn–Banachov teorem i njegova posljedica, koje također navodimo bez dokaza:

Teorem 1.2.7. (**Hahn–Banach**) *Neka je X normiran prostor, Y potprostor i $\varphi \in Y'$. Tada postoji $\Phi \in X'$ takav da je $\Phi|Y = \varphi$ i da vrijedi $\|\Phi\| = \|\varphi\|$. Drugim riječima, svaki neprekidni linearni funkcional na potprostoru normiranog prostora može se proširiti na čitav prostor bez povećanja norme.*

Korolar 1.2.8. *Neka je X normiran prostor i $x \in X$. Postoji $\varphi \in X'$ takav da je $\varphi(x) = \|x\|$ i $\|\varphi\| = 1$.*

Teorem 1.2.9. *Neka je $\mathcal{A}$ unitalna Banachova algebra i $x \in \mathcal{A}$.*

(a) *$\sigma(x)$ je neprazan kompaktan podskup od $\mathbb{C}$.*

(*b*) $\nu(x) = \max\{|\lambda|;\ \lambda \in \sigma(x)\}$.

(*c*) *Rezolventa* $\lambda \mapsto R(x,\lambda)$ *je analitička funkcija sa* $\mathbb{C} \setminus \sigma(x)$ *u* $\mathcal{A}$. *Ako su* $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ *i* $r > 0$ *takvi da je* $K(\lambda_0, r) \subseteq \mathbb{C} \setminus \sigma(x)$, *onda vrijedi:*

$$R(x,\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (\lambda - \lambda_0)^n R(x,\lambda_0)^{n+1} \qquad \lambda \in K(\lambda_0, r).$$

Nadalje,

$$R(x,\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda^{n+1}} x^n \qquad \text{ako je} \quad |\lambda| > \nu(x).$$

Posebno, $\lim_{\lambda\to\infty} R(x,\lambda) = 0$. *Ovo posljednje možemo izreći i ovako: funkcija* $\lambda \mapsto R(x,\lambda)$ *analitička je u beskonačnosti i točka* ∞ *joj je nultočka.*

Dokaz: Neka je $\lambda_0 \in \mathbb{C}\setminus\sigma(x)$. Stavimo $y = x - \lambda_0 e$. Tada je $y \in \mathcal{A}^\times$. Neka je $\lambda \in K\left(\lambda_0, \frac{1}{\|y^{-1}\|}\right)$. Imamo

$$\lambda e - x = (\lambda - \lambda_0)e - y = -y[e - (\lambda - \lambda_0)y^{-1}].$$

Nadalje, $\|(\lambda - \lambda_0)y^{-1}\| = |\lambda - \lambda_0| \cdot \|y^{-1}\| < 1$, pa iz teorema 1.2.4. slijedi da je $e - (\lambda - \lambda_0)y^{-1} \in \mathcal{A}^\times$, dakle prema gornjoj jednakosti $\lambda e - x \in \mathcal{A}^\times$. To pokazuje da je $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \sigma(x)$, dakle otvoren krug $K\left(\lambda_0, \frac{1}{\|y^{-1}\|}\right)$ je sadržan u $\mathbb{C} \setminus \sigma(x)$. Zaključujemo da je skup $\mathbb{C} \setminus \sigma(x)$ otvoren, odnosno, $\sigma(x)$ je zatvoren. Nadalje, iz teorema 1.2.4. slijedi:

$$R(x,\lambda) = (\lambda e - x)^{-1} = -y^{-1}[e - (\lambda - \lambda_0)y^{-1}]^{-1} = -y^{-1}\sum_{n=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^n y^{-n} = -\sum_{n=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^n y^{-n-1}.$$

Međutim, $y^{-1} = (x - \lambda_0 e)^{-1} = -R(x,\lambda_0)$, pa slijedi

$$R(x,\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (\lambda - \lambda_0)^n R(x,\lambda_0)^{n+1}.$$

Time je dokazano da je funkcija $\lambda \mapsto R(x,\lambda)$ analitička na otvorenom skupu $\mathbb{C} \setminus \sigma(x)$. Nadalje, dokazano je da vrijedi prva jednakost u tvrdnji (*c*) za $r = \frac{1}{\|x - \lambda_0 e\|^{-1}}$. Prema teoremu 1.2.6., ako je $r > 0$ takav da je $K(\lambda_0, r) \subseteq \mathbb{C} \setminus \sigma(x)$ onda postoje elementi $a_n \in \mathcal{A}$ takvi da je

$$R(x,\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^n a_n \qquad \forall \lambda \in K(\lambda_0, r).$$

Usporedimo li taj red potencija s redom potencija kojeg smo dobili za $\lambda \in K\left(\lambda_0, \frac{1}{\|x - \lambda_0 e\|^{-1}}\right)$ nalazimo da je $a_n = (-1)^n R(x,\lambda_0)^{n+1}$ $\forall n$. Drugim riječima, dokazana je prva jednakost u tvrdnji (*c*) za bilo koji $r > 0$ takav da je $K(\lambda_0, r) \subseteq \mathbb{C} \setminus \sigma(x)$.

Za $|\lambda| > \nu(x)$ imamo redom:

$$\nu\left(\tfrac{1}{\lambda}x\right) = \tfrac{1}{|\lambda|}\nu(x) < 1 \quad \Longrightarrow \quad e - \tfrac{1}{\lambda}x \in \mathcal{A}^\times \quad \Longrightarrow \quad \lambda e - x \in \mathcal{A}^\times \quad \Longrightarrow \quad \lambda \in \mathbb{C} \setminus \sigma(x).$$

Dakle, $\{\lambda \in \mathbb{C};\ |\lambda| > \nu(x)\} \subseteq \mathbb{C} \setminus \sigma(x)$, tj. $\sigma(x)$ je sadržan u zatvorenom krugu $\overline{K}(0, \nu(x))$ oko nule radijusa $\nu(x)$. Time je dokazana tvrdnja (*a*) osim činjenice da je spektar neprazan. Nadalje, po teoremu 1.2.4. za takve λ vrijedi

$$R(x,\lambda) = (\lambda e - x)^{-1} = \frac{1}{\lambda}\left(e - \frac{1}{\lambda}x\right)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda^{n+1}} x^n.$$

Time je dokazana i druga jednakost u tvrdnji (*c*).

Dokažimo sada da je $\sigma(x) \neq \emptyset$. Pretpostavimo suprotno da je $\sigma(x) = \emptyset$. Tada je funkcija $\lambda \mapsto R(x, \lambda)$ analitička na $\mathbb{C}$ i zbog (c) vrijedi $\lim_{\lambda\to\infty} R(x, \lambda) = 0$. Tada je za svaki $\varphi \in \mathcal{A}'$ skalarna funkcija $\lambda \mapsto \varphi(R(x, \lambda))$ analitička na $\mathbb{C}$ i ograničena, a to prema Liouvilleovom teoremu ima za posljedicu da je ona konstantna. Kako joj je limes u beskonačnosti jednak nuli zaključujemo da je $\varphi(R(x, \lambda)) = 0\ \forall\varphi \in \mathcal{A}'$. Slijedi $R(x, \lambda) \equiv 0$, a to je nemoguće. Ova kontradikcija pokazuje da je $\sigma(x) \neq \emptyset$ i time je tvrdnja (a) u potpunosti dokazana.

Treba još dokazati tvrdnju (b). Ako je $\nu(x) = 0$ onda iz

$$\sigma(x) \subseteq \overline{K}(0, \nu(x)) = \{0\}$$

i iz $\sigma(x) \neq \emptyset$ slijedi $\sigma(x) = \{0\}$, dakle tvrdnja (b) je u tom slučaju istinita. Pretpostavimo sada da je $\nu(x) > 0$. Znamo da je $\sigma(x) \subseteq \overline{K}(0, \nu(x))$, pa je za dokaz tvrdnje (b) dovoljno dokazati $\sigma(x) \nsubseteq K(0, \nu(x))$. Pretpostavimo suprotno, tj. $\sigma(x) \subseteq K(0, \nu(x))$. Kako je $\sigma(x)$ zatvoren, postoji r, $0 < r < \nu(x)$, takav da je $\sigma(x) \subseteq \overline{K}(0, r)$. Tada za $|\lambda| > r$ vrijedi

$$R(x, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda^{n+1}}\, x^n.$$

U tom je redu konvergencija apsolutna, a to ima za posljedicu da red

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|x^n\|}{\lambda^{n+1}}$$

konvergira za svaki $\lambda \in \mathbb{C},\ |\lambda| > r$. Zamijenimo sada kompleksnu varijablu i stavimo $\mu = \frac{1}{\lambda}$. Slijedi da je skalarna funkcija

$$F(\mu) = \sum_{n=0}^{\infty} \|x^n\| \mu^{n+1}$$

analitička na krugu $K(0, \frac{1}{r})$. Prema tome, za radijus konvergencije R gornjeg reda potencija vrijedi $R \geq \frac{1}{r}$. Međutim, radijus konvergencije je po Cauchy−Hadamardovoj formuli jednak

$$R = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \|x^n\|^{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{\nu(x)}.$$

Odatle je

$$\frac{1}{\nu(x)} \geq \frac{1}{r}, \quad \text{odnosno}, \quad r \geq \nu(x),$$

a to je suprotno pretpostavci $r < \nu(x)$. Ova kontradikcija pokazuje da je tvrdnja (b) istinita i u slučaju $\nu(x) > 0$.

Teorem 1.2.10. (**Geljfand−Mazur**) *Neka je $\mathcal{A}$ unitalna Banachova algebra. Ako je $\mathcal{A}^\times = \mathcal{A} \setminus \{0\}$, tj. ako je $\mathcal{A}$ tijelo, onda je $\mathcal{A} = \mathbb{C}e$.*

Dokaz: Neka je $x \in \mathcal{A}$. Prema tvrdnji (a) teorema 1.2.9. $\sigma(x) \neq \emptyset$. Neka je $\lambda \in \sigma(x)$. Tada $\lambda e - x \notin \mathcal{A}^\times = \mathcal{A} \setminus \{0\}$, dakle $\lambda e - x = 0$, odnosno $x = \lambda e$.

1.3 Normirane $*-$algebre. Hermitski linearni funkcionali

Neka je $\mathcal{A}$ algebra. **Involucija** na $\mathcal{A}$ je preslikavanje $*: \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ takvo da vrijedi

(a) $(x^*)^* = X, \ \forall x \in \mathcal{A}$.

(b) $(x+y)^* = x^* + y^*, \ \forall x, y \in \mathcal{A}$.

(c) $(\lambda x)^* = \overline{\lambda} x^*, \ \forall x \in \mathcal{A}, \ \forall \lambda \in \mathbb{C}$.

(d) $(xy)^* = y^* x^*, \ \forall x, y \in \mathcal{A}$.

$*-$**algebra** je algebra na kojoj je zadana involucija. Zbog (a) je očito da je involucija uvijek bijekcija sa $\mathcal{A}$ na $\mathcal{A}$. Nadalje, ako je $\mathcal{A}$ unitalna algebra s jedinicom e i ako je $x \to x^*$ involucija na $\mathcal{A}$, tada je nužno $e^* = e$. Doista, iz svojstava (a) i (d) odmah se vidi da je e^* jedinica u algebri $\mathcal{A}$, pa je jednakost $e^* = e$ posljedica jedinstvenosti jedinice.

Najjednostavniji primjer involucije na algebri je kompleksno konjugiranje $\lambda \to \overline{\lambda}$ na algebri $\mathbb{C}$. Pomoću kompleksnog konjugiranja definira se i involucija na komutativnim algebrama $C(K)$ za kompaktan prostor K i na $C_0(\Omega)$ za lokalno kompaktan prostor Ω :

$$f^*(t) = \overline{f(t)} \qquad t \in K \quad \text{ili} \quad t \in \Omega.$$

Još jedan važan primjer involucije je adjungiranje na Banachovoj algebri $B(\mathcal{H})$ svih ograničenih operatora na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$: za $A \in B(\mathcal{H})$ je A^* jedinstven linearan operator sa svojstvom

$$(A\xi|\eta) = (\xi|A^*\eta) \qquad \forall \xi, \eta \in \mathcal{H}.$$

Neka je u daljnjem $\mathcal{A}$ $*-$algebra. Element $x \in \mathcal{A}$ zove se **hermitski**, ako je $x^* = x$, a **antihermitski** ako je $x^+ = -x$. Nadalje, kažemo da je element x **normalan** ako vrijedi $xx^* = x^*x$. Napokon, ako je $\mathcal{A}$ unitalna $*-$algebra, element $x \in \mathcal{A}$ zove se **unitaran**, ako je $x^*x = xx^* = e$, tj. ako je $x \in \mathcal{A}^\times$ i $x^{-1} = x^*$. Naravno, hermitski, antihermitski i unitarni elementi su normalni. Hermitski elementi tvore realan potprostor prostora $\mathcal{A}$; taj ćemo realan vektorski prostor označavati sa $\mathcal{A}_h$. Skup svih antihermitskih elemenata je $i\mathcal{A}_h$ i vrijedi $\mathcal{A} = \mathcal{A}_h \dotplus i\mathcal{A}_h$. Doista, za svaki $x \in \mathcal{A}$ postoje jedinstveni hermitski elementi x_1 i x_2 takvi da je $x = x_1 + ix_2$. Ti su elementi dani sa

$$x_1 = \frac{1}{2}(x + x^*), \qquad x_2 = \frac{1}{2i}(x - x^*).$$

Primijetimo da je

$$xx^* = x_1^2 + x_2^2 + i(x_2x_1 - x_1x_2), \qquad x^*x = x_1^2 + x_2^2 - i(x_2x_1 - x_1x_2),$$

dakle, x je normalan ako i samo ako x_1 i x_2 komutiraju.

Ako je $\mathcal{A}$ unitalna $*-$algebra, odmah se vidi da je $x \in \mathcal{A}$ invertibilan ako i samo ako je x^* invertibilan i vrijedi $(x^*)^{-1} = (x^{-1})^*$. Budući da je $(\lambda e - x)^* = \overline{\lambda} e - x^*$, slijedi da je

$$\sigma(x^*) = \overline{\sigma(x)} = \{\overline{\lambda};\ \lambda \in \sigma(x)\}.$$

Normirana $*-$**algebra** je normirana algebra $\mathcal{A}$ na kojoj je zadana involucija $x \mapsto x^*$ sa svojstvom da je

$$\|x^*\| = \|x\| \qquad \forall x \in \mathcal{A}.$$

Ako je $\mathcal{A}$ i potpuna, tj. Banachova zove se **Banachova** $*-$**algebra**. U svim prije navedenim primjerima $\mathbb{C}$, $C(K)$, $C_0(\Omega)$ i $B(\mathcal{H})$ involucija ima traženo svojstvo, dakle, sve su to Banachove $*-$algebre.

Neka je $\mathcal{A}$ normirana $*-$algebra i $\tilde{\mathcal{A}}$ unitalizacija algebre $\mathcal{A}$. Uz normu $\|(\lambda, x)\| = |\lambda| + \|x\|$ $\tilde{\mathcal{A}}$ postaje normirana unitalna algebra u kojoj jedinica ima normu 1. Nadalje, lako se vidi da je sa $(\lambda, x)^* = (\overline{\lambda}, x^*)$ zadana involucija na unitalnoj algebri $\tilde{\mathcal{A}}$ i da je s tom involucijom $\tilde{\mathcal{A}}$ normirana $*-$algebra.

Neka je $\mathcal{A}$ $*-$algebra. Ako je $f : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ linearan funkcional na $\mathcal{A}$ tada je sa

$$f^*(x) = \overline{f(x^*)}, \qquad x \in \mathcal{A},$$

zadan također linearan funkcional na $\mathcal{A}$. Očito vrijedi

$$f^{**} = f, \qquad (f+g)^* = f^* + g^*, \qquad (\lambda f)^* = \overline{\lambda} f^*.$$

f se zove **hermitski funkcional**, ako vrijedi $f^* = f$. Naravno, svaki linearan funkcional f ima jedinstven prikaz u obliku $f = f_1 + if_2$, gdje su f_1 i f_2 hermitski funkcionali:

$$f_1 = \frac{1}{2}(f + f^*), \qquad f_2 = \frac{1}{2i}(f - f^*).$$

Linearan funkcional f na $\mathcal{A}$ je hermitski ako i samo ako vrijedi $f(\mathcal{A}_h) \subseteq \mathbb{R}$. Preslikavanje $f \mapsto f|\mathcal{A}_h$ je izomorfizam realnog vektorskog prostora svih hermitskih funkcionala na $\mathcal{A}$ na prostor svih $\mathbb{R}-$linearnih funkcionala na realnom vektorskom prostoru $\mathcal{A}_h$.

Neka je $\mathcal{A}$ normirana $*-$algebra. Ako je $f \in \mathcal{A}'$, tj. ako je f neprekidan linearan funkcional na $\mathcal{A}$, tada je i $f^* \in \mathcal{A}'$. Štoviše, vrijedi $\|f^*\| = \|f\|$; to je posljedica činjenice da je $x \mapsto x^*$ bijekcija zatvorene jedinične kugle

$$\overline{K}_{\mathcal{A}}(0,1) = \{x \in \mathcal{A};\ \|x\| \leq 1\}$$

u $\mathcal{A}$ na samu sebe.

Propozicija 1.3.1. *Neka je $\mathcal{A}$ normirana $*-$algebra. Tada je $f \mapsto f|\mathcal{A}_h$ izometrički izomorfizam realnog Banachovog prostora svih neprekidnih hermitskih funkcionala na $\mathcal{A}$ na dualni prostor $(\mathcal{A}_h)'$ realnog normiranog prostora $\mathcal{A}_h$ svih hermitskih elemenata u $\mathcal{A}$.*

Dokaz: Iz $\mathbb{R}-$linearne bijekcije $f \mapsto f|\mathcal{A}_h$ s realnog prostora svih hermitskih linearnih funkcionala na $\mathcal{A}$ na prostor svih $\mathbb{R}-$linearnih funkcionala na $\mathcal{A}_h$ očito dobivamo $\mathbb{R}-$linearnu bijekciju s prostora svih neprekidnih hermitskih linearnih funkcionala na $\mathcal{A}$ na prostor svih neprekidnih $R-$linearnih funkcionala na $\mathcal{A}_h$. Doista, ako za hermitski linearan funkcional $f : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ stavimo $g = f|\mathcal{A}_h$, onda je

$$f(x) = g\left(\frac{1}{2}(x + x^*)\right) + ig\left(\frac{1}{2i}(x - x^*)\right),$$

pa se vidi da je f neprekidan ako i samo ako je g neprekidan. Treba još samo dokazati izometričnost, tj. da je uz gornje oznake $\|f\| = \|g\|$. Prije svega, jasno je da je $\|f\| \geq \|g\|$. S druge strane, neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljno odabran. Tada postoji $x \in \mathcal{A}$, $\|x\| \leq 1$, takav da je $|f(x)| \geq \|f\| - \varepsilon$. Pomnožimo li, ako treba, element x s brojem modula 1, vidimo da možemo pretpostaviti da je $f(x) \geq 0$, tj. $f(x) = |f(x)|$. Tada imamo

$$\left|g\left(\frac{1}{2}(x + x^*)\right)\right| = \frac{1}{2}|f(x) + f(x^*)| = f(x) \geq \|f\| - \varepsilon.$$

Budući da je

$$\left\|\frac{1}{2}(x + x^*)\right\| \leq \frac{1}{2}(\|x\| + \|x^*\|) = \|x\| \leq 1,$$

slijedi

$$\|g\| \geq \|f\| - \varepsilon.$$

Budući da je $\varepsilon > 0$ bio proizvoljan, dobivamo i obrnutu nejednakost $\|g\| \geq \|f\|$, dakle, jednakost $\|g\| = \|f\|$.

1.4 C^*−algebre. Unitalizacija

$\mathcal{A}$ se zove C^*−**algebra** ako je:

(a) $\mathcal{A}$ $*$−algebra;

(b) $\mathcal{A}$ Banachova algebra;

(c) $\|x^*x\| = \|x\|^2 \quad \forall x \in \mathcal{A}$.

U sva četiri primjera Banachovih $*$−algebri iz prethodnog odjeljka radi se o C^*−algebrama. To je evidentno za $\mathbb{C}$, $C(K)$ i $C_0(\Omega)$, a za algebru $B(\mathcal{H})$ to se dokazuje pomoću činjenice da za hermitski operator $A \in B(\mathcal{H})$ vrijedi

$$\|A\| = \sup\{|(Ax|x)|;\ x \in \mathcal{H},\ \|x\| \leq 1\}.$$

Za svaki $A \in B(\mathcal{H})$ je operator A^*A hermitski, pa nalazimo

$$\|A^*A\| = \sup\{|(A^*Ax|x)|;\ x \in \mathcal{H},\ \|x\| \leq 1\} = \sup\{|(Ax|Ax)|;\ x \in \mathcal{H},\ \|x\| \leq 1\} =$$
$$= \sup\{\|Ax\|^2;\ x \in \mathcal{H},\ \|x\| \leq 1\} = \|A\|^2.$$

Dakle, $\mathcal{A} = B(\mathcal{H})$ je doista C^*−algebra.

Propozicija 1.4.1. *Neka je $\mathcal{A}$ C^*−algebra i $x \in \mathcal{A}$. Tada je $\|x^*\| = \|x\|$.*

Zadatak 1.4.1. *Dokažite propoziciju 1.4.1.*

Propozicija 1.4.2. *Neka je $\mathcal{A}$ unitalna C^*−algebra i $x \in \mathcal{A}$.*

(a) *Ako je x hermitski, onda je $\sigma(x) \subseteq \mathbb{R}$.*

(b) *Ako je x unitaran, onda je $\sigma(x) \subseteq S = \{\lambda \in \mathbb{C};\ |\lambda| = 1\}$.*

Zadatak 1.4.2. *Dokažite propoziciju 1.4.2.*

Uputa: Najprije dokažite tvrdnju (b) i to pomoću tvrdnje (b) teorema 1.2.9., pomoću propozicije 1.4.1. i pomoću tvrdnje (b) propozicije 1.1.1. Zatim za hermitski element $x \in \mathcal{A}$ definirajte element $u \in \mathcal{A}$ na sljedeći način:

$$u = \mathrm{e}^{ix} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} x^n.$$

(Definicija elementa u ima smisla jer gornji red konvergira apsolutno, pa kako je algebra $\mathcal{A}$ potpuna taj red konvergira u $\mathcal{A}$). Zatim dokažite da je element u unitaran. Napokon, pomoću jednakosti

$$\lambda^n e - x^n = (\lambda e - x)(\lambda^{n-1}e + \lambda^{n-2}x + \cdots + \lambda x^{n-2} + x^{n-1}) = (\lambda^{n-1}e + \lambda^{n-2}x + \cdots + \lambda x^{n-2} + x^{n-1})(\lambda e - x),$$

dokažite da iz $\lambda \in \sigma(x)$ slijedi $\mathrm{e}^{i\lambda} \in \sigma(u)$, te iskoristite dokazanu tvrdnju (b).

Ako je $\mathcal{A}$ neunitalna C^*−algebra, algebra $\tilde{\mathcal{A}} = \mathcal{A} \dotplus \mathbb{C}e$ dobivena iz $\mathcal{A}$ unitalizacijom je Banachova $*$−algebra s normom

$$\|y + \lambda e\| = \|y\| + |\lambda\| \qquad y \in \mathcal{A},\ \lambda \in \mathbb{C}$$

i involucijom

$$(y + \lambda e)^* = y^* + \overline{\lambda} e, \qquad y \in \mathcal{A},\ \lambda \in \mathbb{C}.$$

Međutim, općenito norma na Banachovoj algebri $\tilde{\mathcal{A}}$ nema C^*−svojstvo, tj. ne vrijedi $\|z^*z\| = \|z\|^2$. Dokazat ćemo sada teorem koji ipak mogućuje relativno jednostavno baratanje s neunitalnim C^*−algebrama.

Teorem 1.4.3. *Neka je $\mathcal{A}$ neunitalna C^*-algebra. Tada se norma na $\mathcal{A}$ može se proširiti do norme na $\tilde{\mathcal{A}} = \mathcal{A} \dotplus \mathbb{C}e$ s obzirom na koju je $\tilde{\mathcal{A}}$ unitalna C^*-algebra.*

Dokaz: Definiramo preslikavanje $\varphi\colon \tilde{\mathcal{A}} \to B(\mathcal{A})$ tako da je za $z \in \tilde{\mathcal{A}}$ operator $\varphi(z)$ definiran kao množenje slijeva sa z. Dakle, ako je $z = y + \lambda e$, $y \in \mathcal{A}$, $\lambda \in \mathbb{C}$, onda je

$$(\varphi(z))(x) = zx = yx + \lambda x, \qquad x \in \mathcal{A}.$$

Tada je očito φ unitalni homomorfizam unitalnih algebri $\tilde{\mathcal{A}}$ u $B(\mathcal{A})$. Primijetimo da je homomorfizam φ injektivan. Doista, neka je $z \in \tilde{\mathcal{A}}$ takav da je $\varphi(z) = 0$. Imamo $z = y + \lambda e$ za neke $y \in \mathcal{A}$ i $\lambda \in \mathbb{C}$ i $\varphi(z) = 0$ znači da vrijedi

$$yx + \lambda x = 0 \qquad \forall x \in \mathcal{A}.$$

Pretpostavimo da je $\lambda \neq 0$. Tada za element $u = -\lambda^{-1}y \in \mathcal{A}$ vrijedi $ux = x$ $\forall x \in \mathcal{A}$, dakle u je lijeva jedinica za $\mathcal{A}$. Za svaki $x \in \mathcal{A}$ tada vrijedi $xu^* = x^{**}u^* = (ux^*)^* = x^{**} = x$, dakle u^* je desna jedinica za $\mathcal{A}$. No ako $\mathcal{A}$ ima i lijevu i desnu jedinicu, onda su one jednake, $u^* = u$, i to je jedinica algebre $\mathcal{A}$. To je u suprotnosti s pretpostavkom da $\mathcal{A}$ nema jedinicu. Ova kontradikcija pokazuje da je $\lambda = 0$, tj. $z = y \in \mathcal{A}$. Dakle, vrijedi $yx = 0$ $\forall x \in \mathcal{A}$. Za $x = y^*$ dobivamo

$$0 = \|yy^*\| = \|y^*\|^2 = \|y\|^2 \qquad \Longrightarrow \qquad y = 0.$$

Dakle, $z = 0$ odnosno dokazali smo da je $\ker \varphi = \{0\}$, što znači da je φ injekcija.

Pomoću operatorske norme $\|\cdot\|$ na prostoru $B(\mathcal{A})$

$$\|A\| = \sup\{\|Ax\|;\ x \in \mathcal{A},\ \|x\| \leq 1\}, \qquad A \in B(\mathcal{A})$$

zbog injektivnosti homomorfizma φ možemo definirati normu $\|\cdot\|_1$ na $\tilde{\mathcal{A}}$:

$$\|z\|_1 = \|\varphi(z)\|, \qquad z \in \tilde{\mathcal{A}}.$$

Dakle,

$$\|z\|_1 = \sup\{\|zx\|;\ x \in \mathcal{A},\ \|x\| \leq 1\}, \qquad z \in \tilde{\mathcal{A}}.$$

Uz normu $\|\cdot\|_1$ $\tilde{\mathcal{A}}$ postaje normirana algebra.

Dokažimo sada da norma $\|\cdot\|_1$ proširuje normu $\|\cdot\|$ na $\mathcal{A}$, tj. da je $\|y\|_1 = \|y\|$ $\forall y \in \mathcal{A}$. Imamo

$$\|y\|_1 = \sup\{\|yx\|;\ x \in \mathcal{A},\ \|x\| \leq 1\} \leq \sup\{\|y\| \cdot \|x\|;\ x \in \mathcal{A},\ \|x\| \leq 1\} = \|y\|.$$

S druge strane imamo

$$\|y\|^2 = \|y^*\|^2 = \|yy^*\| = \|\varphi(y)y^*\| \leq \|\varphi(y)\| \cdot \|y^*\| = \|y\|_1 \cdot \|y\|.$$

Ako je $y \neq 0$ odatle slijedi nejednakost $\|y\| \leq \|y\|_1$ (koja vrijedi i ako je $y = 0$). Iz dvije suprotne nejednakosti slijedi jednakost:

$$\|y\|_1 = \|y\| \qquad \forall y \in \mathcal{A}.$$

Dokažimo sada da norma $\|\cdot\|_1$ na $*-$algebri $\tilde{\mathcal{A}}$ zadovoljava C^*-uvjet

$$\|z^*z\|_1 = \|z\|_1^2 \qquad \forall z \in \tilde{\mathcal{A}}.$$

Za svaki $z \in \tilde{\mathcal{A}}$ i za $x \in \mathcal{A}$ je $zx \in \mathcal{A}$. Nadalje, norma $\|\cdot\|$ na $*-$algebri $\mathcal{A}$ ima C^*-svojstvo, a vrijedi i $\|x^*\| = \|x\|$ za svaki $x \in \mathcal{A}$. Stoga imamo

$$\|z\|_1^2 = \sup\{\|zx\|^2;\ x \in \mathcal{A},\ \|x\| \leq 1\} = \sup\{\|(zx)^*zx\|;\ x \in \mathcal{A},\ \|x\| \leq 1\} =$$

$$= \sup\{\|x^*z^*zx\|;\ x \in \mathcal{A},\ \|x\| \leq 1\} \leq \sup\{\|x^*\| \cdot \|z^*zx\|;\ x \in \mathcal{A},\ \|x\| \leq 1\} =$$
$$= \sup\{\|z^*zx\|;\ x \in \mathcal{A},\ \|x\| \leq 1\} = \|z^*z\|_1 \leq \|z^*\|_1 \cdot \|z\|_1.$$

Odatle slijedi $\|z\|_1 \leq \|z^*\|_1\ \ \forall z \in \tilde{\mathcal{A}}$, a zamjenom uloga z i z^* nalazimo da vrijedi i $\|z^*\|_1 \leq \|z\|_1$. Dakle, vrijedi jednakost $\|z^*\|_1 = \|z\|_1\ \ \forall z \in \tilde{\mathcal{A}}$. Odatle i iz već dokazanog za svaki $z \in \tilde{\mathcal{A}}$ nalazimo

$$\|z\|_1^2 \leq \|z^*z\|_1 \leq \|z^*\|_1 \cdot \|z\|_1 = \|z\|_1^2 \qquad \Longrightarrow \qquad \|z^*z\|_1 = \|z\|_1^2.$$

Treba još samo dokazati da je algebra $\tilde{\mathcal{A}}$ potpuna u odnosu na normu $\|\cdot\|_1$. Budući da je norma $\|\cdot\|_1$ dobivena iz operatorske norme $\|\cdot\|$ pomoću injektivnog homomorfizma $\varphi\colon \tilde{\mathcal{A}} \to B(\mathcal{A})$ i budući da je s operatorskom normom $B(\mathcal{A})$ Banachova algebra, potpunost algebre $\tilde{\mathcal{A}}$ u odnosu na normu $\|\cdot\|_1$ slijedit će ako dokažemo da je slika $\varphi(\tilde{\mathcal{A}})$ algebre $\tilde{\mathcal{A}}$ pri preslikavanju φ zatvorena u $B(\mathcal{A})$. Označimo sa $I_{\mathcal{A}}$ operator identitete u $B(\mathcal{A})$, $I_{\mathcal{A}}x = x\ \ \forall x \in \mathcal{A}$. Očito je $\varphi(e) = I_{\mathcal{A}}$, dakle za $z = y + \lambda e \in \tilde{\mathcal{A}},\ y \in \mathcal{A},\ \lambda \in \mathbb{C}$, vrijedi $\varphi(z) = \varphi(y) + \lambda I_{\mathcal{A}}$. To znači da je $\varphi(\tilde{\mathcal{A}}) = \varphi(\mathcal{A}) + \mathbb{C}I_{\mathcal{A}}$. Algebra $\mathcal{A}$ je potpuna i φ je izometrija, pa slijedi da je slika $\varphi(\mathcal{A})$ algebre $\mathcal{A}$ potpuna, dakle i zatvorena u $B(\mathcal{A})$. Zatvorenost $\varphi(\tilde{\mathcal{A}})$ sada slijedi iz sljedeće općenite leme:

Lema 1.4.4. *Neka su Y i Z potprostori normiranog prostora X pri čemu je Y zatvoren, a Z konačnodimenzionalan. Tada je potprostor $Y + Z$ zatvoren.*

Dokaz: Prije svega uočimo da možemo pretpostaviti da je suma $Y + Z$ direktna. Naime, ako je $Y \cap Z \neq \{0\}$, onda možemo izabrati potprostor Z_1 od Z takav da je $Z = Y \cap Z \dot{+} Z_1$, a tada je $Y + Z = Y \dot{+} Z_1$.

Stavimo $W = Y \dot{+} Z$ i neka je $P \in L(W)$ projektor prostora W na potprostor Z duž potprostora Y. Dokažimo da je P ograničen. Pretpostavimo suprotno, dakle da ne postoji $M > 0$ takav da je $\|Px\| \leq M\|x\|\ \ \forall x \in W$. Tada postoji niz $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ u W takav da je

$$\|Px_n\| = 1\ \ \forall n \in \mathbb{N} \qquad \text{i} \qquad \lim_{n\to\infty} x_n = 0.$$

Budući da je potprostor Z konačnodimenzionalan, jedinična sfera u Z je kompaktan skup. Niz vektora $(Px_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sadržan je u toj jediničnoj sferi, pa taj niz ima konvergentan podniz. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da smo niz (x_n) izabrali tako da je niz $(Px_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergentan. Stavimo $z = \lim_{n\to\infty} Px_n$. Tada je $z \in Z$. Nadalje, $I_W - P$ je projektor na Y duž Z, dakle je $(I_W - P)x_n \in Y$ za svaki n. Kako je po pretpostavci potprostor Y zatvoren, slijedi da je $\lim_{n\to\infty}(I_W - P)x_n \in Y$. Međutim,

$$\lim_{n\to\infty}(I_W - P)x_n = \lim_{n\to\infty} x_n - \lim_{n\to\infty} Px_n = -z.$$

Dakle, $z \in Y \cap Z = \{0\}$, tj. $z = 0$. No to je u suprotnosti sa

$$\|z\| = \lim_{n\to\infty} \|Px_n\| = 1.$$

Ova kontradikcija pokazuje da je operator P ograničen.

Neka je sada $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz u W koji je konvergentan u X i neka je

$$x = \lim_{n\to\infty} x_n.$$

Da bismo dokazali zatvorenost potprostora $W = Y \dot{+} Y$ dovoljno je dokazati da je $x \in W$. Kako je P ograničen operator kome je Z područje vrijednosti, niz $(Px_n)_{n\in\mathbb{N}}$ je Cauchyjev u Z. Međutim, prostor Z je konačnodimenzionalan, dakle potpun, pa slijedi da je niz $(Px_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergentan. Stavimo

$$z = \lim_{n\to\infty} Px_n \in Z.$$

Kako su (x_n) i (Px_n) konvergentni nizovi, to je i niz $((I_W - P)x_n)$ konvergentan. $I_W - P$ je projektor na Y duž Z, dakle $(I_W - P)x_n \in Y$ za svaki n. Kako je po pretpostavci potprostor Y zatvoren, slijedi da je

$$y = \lim_{n\to\infty}(I_W - P)x_n \in Y.$$

Dakle,

$$x = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}(I_W - P)x_n + \lim_{n\to\infty} Px_n = y + z \in Y \dot{+} Z = W.$$

Poglavlje 2

Komutativne C^*–algebre

2.1 Karakteri

Neka je $\mathcal{A}$ algebra. **Karakter algebre** $\mathcal{A}$ je svaki homomorfizam algebri $\chi\colon \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ različit od nule. U daljnjem ćemo sa $X(\mathcal{A})$ označavati skup svih karaktera algebre $\mathcal{A}$.

Propozicija 2.1.1. *Neka je $\mathcal{A}$ unitalna algebra s jedinicom e i $\chi \in X(\mathcal{A})$. Tada je $\chi(e) = 1$.*

Dokaz: Imamo $\chi(e) = \chi(e^2) = \chi(e)^2$. Odatle slijedi da je ili $\chi(e) = 0$ ili $\chi(e) = 1$. Kad bi bilo $\chi(e) = 0$ onda bi za svaki $x \in \mathcal{A}$ vrijedilo

$$\chi(x) = \chi(xe) = \chi(x)\chi(e) = 0,$$

dakle tada bilo bi $\chi = 0$ suprotno pretpostavci da je $\chi \neq 0$. Dakle, $\chi(e) = 1$.

Propozicija 2.1.2. *Neka je $\mathcal{A}$ komutativna algebra i $\tilde{\mathcal{A}}$ njena unitalizacija identificirana sa $\mathcal{A}\dot{+}\mathbb{C}$. Za $\chi \in X(\mathcal{A})$ definiramo $\tilde{\chi} : \tilde{\mathcal{A}} \to \mathbb{C}$ sa*

$$\tilde{\chi}(a + \lambda) = \chi(a) + \lambda, \qquad a \in \mathcal{A}, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Tada je $\chi \mapsto \tilde{\chi}$ bijekcija sa $X(\mathcal{A})$ na $X(\tilde{\mathcal{A}}) \setminus \{\varphi_0\}$, pri čemu je $\varphi_0 \in X(\tilde{\mathcal{A}})$ definiran sa

$$\varphi_0(a + \lambda) = \lambda, \qquad a \in \mathcal{A}, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Zadatak 2.1.1. *Dokažite propoziciju 2.1.2.*

Teorem 2.1.3. *Neka je $\mathcal{A}$ komutativna Banachova algebra i neka je $\chi \in X(\mathcal{A})$. Tada je χ neprekidan linearan funkcional na $\mathcal{A}$ norme ≤ 1. Ako je algebra $\mathcal{A}$ unitalna i $\|e\| = 1$, onda je $\|\chi\| = 1$.*

Dokaz: Pretpostavimo da funkcional χ nije neprekidan, odnosno, ograničen ili da je χ ograničen, ali $\|\chi\| > 1$. Tada postoji $a \in \mathcal{A}$ takav da je $\chi(a) = 1$ i $\|a\| < 1$. Stavimo

$$b = a + a^2 + a^3 + \cdots = \sum_{n \in \mathbb{N}} a^n.$$

Tada vrijedi $a+ab = b$, a odatle je $\chi(b) = \chi(a+ab) = \chi(a)+\chi(a)\chi(b) = 1+\chi(b)$, a to je nemoguće. Prema tome, χ je ograničen i $\|\chi\| \leq 1$. Napokon, ako je algebra $\mathcal{A}$ unitalna s jedinicom e i ako je $\|e\| = 1$, onda je prema propoziciji 2.1.1. $\chi(e) = 1$, pa imamo

$$1 \geq \|\chi\| = \sup\{|\chi(a)|;\ a \in \mathcal{A},\ \|a\| = 1\} \geq |\chi(e)| = 1,$$

odakle slijedi $\|\chi\| = 1$.

Već smo spomenuli da invertibilni element unitalne algebre nije sadržan ni u jednom lijevom i ni u jednom desnom idealu. Vrijedi i preciznija tvrdnja:

Lema 2.1.4. *Neka je $\mathcal{A}$ unitalna algebra. Element $x \in \mathcal{A}$ je lijevoinvertibilan (odnosno, desnoinvertibilan) ako i samo ako x nije sadržan ni u jednom lijevom (odnosno, desnom) idealu.*

Zadatak 2.1.2. *Dokažite lemu 2.1.4.*

Propozicija 2.1.5. *Neka je $\mathcal{A}$ unitalna algebra i neka je $\mathcal{I}$ lijevi (odnosno desni, odnosno obostrani) ideal u $\mathcal{A}$. Postoji maksimalan lijevi (odnosno desni, odnosno obostrani) ideal u $\mathcal{A}$ koji sadrži $\mathcal{I}$.*

Dokaz ćemo provesti za lijeve ideale. Za desne i za obostrane dokaz je sasvim analogan. Neka je $\mathfrak{S}$ skup svih lijevih ideala koji sadrže $\mathcal{I}$. Skup $\mathfrak{S}$ je neprazan jer je $\mathcal{I} \in \mathfrak{S}$ i to je parcijalno uređen skup, ako uređaj definiramo pomoću inkluzije. Provjerimo da je ispunjen uvjet Zornove leme. Neka je $\mathfrak{L}$ lanac u $\mathfrak{S}$. Stavimo $\mathcal{J} = \bigcup_{\mathcal{K}\in\mathfrak{L}} \mathcal{K}$. Očito $\mathcal{J} \supseteq \mathcal{I}$. Nadalje, $\mathcal{J}$ je potprostor; doista, ako su $x, y \in \mathcal{J}$ i $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ onda po definiciji skupa $\mathcal{J}$ vrijedi $x \in \mathcal{K}$ i $y \in \mathcal{L}$ za neke $\mathcal{K}, \mathcal{L} \in \mathfrak{L}$. Kako je $\mathfrak{L}$ lanac, to je ili $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{L}$ ili $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{K}$. Možemo pretpostaviti da je $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{L}$. Tada su $x, y \in \mathcal{L}$, pa slijedi $\alpha x + \beta y \in \mathcal{L} \subseteq \mathcal{J}$. Dakle, $\mathcal{J}$ je potprostor. Nadalje, ako je $x \in \mathcal{J}$ onda je $x \in \mathcal{K}\ \forall \mathcal{K} \in \mathfrak{L}$, dakle za svaki $a \in \mathcal{A}$ vrijedi $ax \in \mathcal{K}\ \forall \mathcal{K} \in \mathfrak{L}$, jer je svaki $\mathcal{K} \in \mathfrak{L}$ lijevi ideal. Odatle je $ax \in \mathcal{J}\ \ \forall a \in \mathcal{A}$. Da bismo zaključili da je $\mathcal{J}$ lijevi ideal, a tada i gornja ograda za $\mathfrak{L}$ u $\mathfrak{S}$, treba još samo provjeriti da je $\mathcal{J} \neq \mathcal{A}$. Međutim, prema lemi 2.1.4. $e \notin \mathcal{K}\ \forall \mathcal{K} \in \mathfrak{L}$ pa slijedi $e \notin \mathcal{J}$, dakle $\mathcal{J} \neq \mathcal{A}$. Zornova lema sada povlači da u $\mathfrak{S}$ postoji maksimalan element, a to je očito maksimalan lijevi ideal koji sadrži $\mathcal{I}$.

Teorem 2.1.6. *Ako je $\mathcal{A}$ komutativna unitalna Banachova algebra, onda je $\chi \mapsto \ker \chi$ bijekcija sa $X(\mathcal{A})$ na skup svih maksimalnih ideala u $\mathcal{A}$.*

Dokaz: Dokažimo da je $\chi \mapsto \ker \chi$ injekcija sa $X(\mathcal{A})$ u skup svih maksimalnih ideala u $\mathcal{A}$. Doista, svaki $\chi \in X(\mathcal{A})$ je linearan funkcional na $\mathcal{A}$ koji je različit od nule, pa je $\ker \chi$ potprostor od $\mathcal{A}$ kodimenzije 1. Nadalje, zbog multiplikativnosti od χ, tj. zbog jednakosti $\chi(xy) = \chi(x)\chi(y)\ \forall x, y \in \mathcal{A}$, $\ker \chi$ je ideal. Prema tome, $\ker \chi$ je maksimalan ideal u $\mathcal{A}$. Neka su $\chi_1, \chi_2 \in X(\mathcal{A})$ i $\chi_1 \neq \chi_2$. Tada postoji $x \in \mathcal{A}$ takav da je $\chi_1(x) \neq \chi_2(x)$. Za element $a = x - \chi_1(x)e$ imamo zbog propozicije 2.1.1.

$$\chi_1(a) = 0 \qquad \text{i} \qquad \chi_2(a) = \chi_2(x) - \chi_1(x) \neq 0.$$

Dakle, $a \in \ker \chi_1$ i $a \notin \ker \chi_2$, što pokazuje da je $\ker \chi_1 \neq \ker \chi_2$. Prema tome, $\chi \mapsto \ker \chi$ je injekcija sa $X(\mathcal{A})$ u skup svih maksimalnih ideala u algebri $\mathcal{A}$.

Dokažimo sada surjektivnost preslikavanja $\chi \mapsto \ker \chi$. Neka je $\mathcal{M}$ maksimalni ideal u algebri $\mathcal{A}$. Prema teoremu 1.2.4. otvorena jedinična kugla $K(e, 1)$ u algebri $\mathcal{A}$ sa središtem u e sadržana je u $\mathcal{A}^\times$, dakle, $K(e, 1) \cap \mathcal{M} = \emptyset$. Prema tome, zatvarač $Cl(\mathcal{M})$ ideala $\mathcal{M}$ nije jednak $\mathcal{A}$, nego je to ideal. Zbog maksimalnosti zaključujemo da je ideal $\mathcal{M}$ zatvoren. Tada je $\mathcal{A}/\mathcal{M}$ unitalna Banachova algebra, a zbog maksimalnosti ideala $\mathcal{M}$ u algebri $\mathcal{A}$ kvocijentna algebra $\mathcal{A}/\mathcal{M}$ nema ideala $\neq \{0\}$. Prema lemi 2.1.4. u kvocijentnoj algebri $\mathcal{A}/\mathcal{M}$ je svaki element osim nule invertibilan. Sada iz Gelfand−Mazurovog teorema 1.2.10. slijedi da je $\mathcal{A}/\mathcal{M} = \mathbb{C} \cdot (e + \mathcal{M})$. Dakle, za svaki $x \in \mathcal{A}$ postoji (očito jedinstven) skalar $\chi(x) \in \mathbb{C}$ takav da je $x - \chi(x)e \in \mathcal{M}$. Tako smo došli do preslikavanja $\chi\colon \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ i vrijedi $\mathcal{M} = \{x \in \mathcal{A};\ \chi(x) = 0\}$.

Dokažimo da je preslikavanje χ linearno. Neka su $x, y \in \mathcal{A}$ i $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Tada je

$$x - \chi(x)e \in \mathcal{M}, \qquad y - \chi(y)e \in \mathcal{M}, \qquad \alpha x + \beta y - \chi(\alpha x + \beta y)e \in \mathcal{M}.$$

Slijedi

$$[\chi(\alpha x + \beta y) - \alpha\chi(x) - \beta\chi(y)]e = \alpha[x - \chi(x)e] + \beta[y - \chi(y)e] - [\alpha x + \beta y - \chi(\alpha x + \beta y)] \in \mathcal{M}.$$

Kako je za svaki $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda \neq 0$, element λe invertibilan, dakle $\lambda e \notin \mathcal{M}$, zaključujemo da mora biti $\chi(\alpha x + \beta y) - \alpha\chi(x) - \beta\chi(y) = 0$. Dakle, χ je linearan funkcional na $\mathcal{A}$ i vrijedi ker $\chi = \mathcal{M}$.

Treba još dokazati da je χ karakter. Neka su $x, y \in \mathcal{A}$. Tada je

$$x - \chi(x)e \in \mathcal{M}, \qquad y - \chi(y)e \in \mathcal{M} \qquad \text{i} \qquad xy - \chi(xy)e \in \mathcal{M}.$$

Odavde slijedi

$$[\chi(xy) - \chi(x)\chi(y)]e = [x - \chi(x)e]y + \chi(x)[y - \chi(y)e] - [xy - \chi(xy)e] \in \mathcal{M}.$$

Kao i malo prije zaključujemo da je $\chi(xy) - \chi(x)\chi(y) = 0$, odnosno $\chi(xy) = \chi(x)\chi(y)$.

Teorem 2.1.7. *Neka je $\mathcal{A}$ unitalna komutativna Banachova algebra i $x \in \mathcal{A}$. Tada je*

$$\sigma(x) = \{\chi(x);\ \chi \in X(\mathcal{A})\}.$$

Dokaz: Neka je $\chi \in X(\mathcal{A})$. Po propoziciji 2.1.1. je $x - \chi(x)e \in \ker \chi$, pa slijedi $x - \chi(x)e \notin \mathcal{A}^\times$. Dakle je $\chi(x) \in \sigma(x)$ i time je dokazana inkluzija $\{\chi(x);\ \chi \in X(\mathcal{A})\} \subseteq \sigma(x)$. Dokažimo i obrnutu inkluziju. Neka je $\lambda \in \sigma(x)$. Tada je $x - \lambda e \notin \mathcal{A}^\times$ pa iz leme 2.1.4. i iz propozicije 2.1.5. slijedi da postoji maksimalan ideal $\mathcal{M}$ takav da je $x - \lambda e \in \mathcal{M}$. Prema teoremu 2.1.6. postoji $\chi \in X(\mathcal{A})$ takav da je $\mathcal{M} = \ker \chi$. Tada je

$$0 = \chi(x - \lambda e) = \chi(x) - \lambda \qquad \Longrightarrow \qquad \lambda = \chi(x).$$

Time je dokazana i obrnuta inkluzija $\{\chi(x);\ \chi \in X(\mathcal{A})\} \supseteq \sigma(x)$.

Zadatak 2.1.3. *Neka je T kompaktan Hausdorffov topološki prostor i $C(T)$ unitalna komutativna Banachova algebra svih neprekidnih funkcija $f : T \to \mathbb{C}$ s operacijama definiranim po točkama*

$$(f + g)(t) = f(t) + g(t), \qquad (\lambda f)(t) = \lambda f(t), \qquad (fg)(t) = f(t)g(t),$$
$$f, g \in C(T), \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad t \in T,$$

i normom

$$\|f\| = \max\{|f(t)|;\ t \in T\}, \qquad f \in C(T).$$

Za $t \in T$ stavimo:

$$\mathcal{M}_t = \{f \in C(T);\ f(t) = 0\}, \qquad \varphi_t(f) = f(t), \quad f \in C(T).$$

Dokažite da je $t \mapsto \mathcal{M}_t$ bijekcija sa T na skup svih maksimalnih ideala algebre $C(T)$ i da je $t \mapsto \varphi_t$ bijekcija sa T na $X(C(T))$.

Zadatak 2.1.4. *Neka je T lokalno kompaktan nekompaktan Hausdorffov topološki prostor i $C_0(T)$ neunitalna komutativna Banachova algebra svih neprekidnih funkcija $f : T \to \mathbb{C}$ sa svojstvom $\lim_{t\to\infty} f(t) = 0$ s operacijama i normom kao u zadatku 2.1.3. Za $t \in T$ stavimo:*

$$\varphi_t(f) = f(t), \quad f \in C_0(T).$$

Dokažite da je $t \mapsto \varphi_t$ bijekcija sa T na $X(C_0(T))$.

Zadatak 2.1.5. *Uz oznake iz zadatka 2.1.3. i za zatvoren podskup $S \subseteq T$ stavimo*

$$\mathcal{I}_S = \{f \in C(T);\ f(s) = 0\ \forall s \in S\}.$$

Dokažite da je $S \mapsto \mathcal{I}_S$ bijekcija sa skupa svih nepraznih zatvorenih podskupova $S \subseteq T$ na skup svih zatvorenih ideala u algebri $C(T)$ i da je inverzna bijekcija $\mathcal{I} \mapsto T_{\mathcal{I}}$, gdje je

$$T_{\mathcal{I}} = \{t \in T;\ f(t) = 0\ \forall f \in \mathcal{I}\}.$$

2.2 Slaba topologija na dualu normiranog prostora

Neka je X normiran prostor. Dualni prostor X' svih neprekidnih linearnih funkcionala na X je Banachov prostor s normom

$$\|f\| = \sup\{|f(x)|;\ x \in X,\ \|x\| \leq 1\}.$$

Podsjetimo da je posljedica Hahn−Banachovog teorema da za svaki $x \in X$ postoji $f \in X'$ takav da je $\|f\| = 1$ i $f(x) = \|x\|$.

Promatrat ćemo sada na prostoru X' jednu drugu topologiju, tzv. **slabu topologiju**. Za tu topologiju bazu okolina točke $f_0 \in X'$ tvore svi skupovi oblika

$$U(f_0; x_1, \ldots, x_n; \varepsilon) = \{f \in X';\ |f(x_k) - f_0(x_k)| < \varepsilon \text{ za } k = 1, \ldots, n\},$$

pri čemu su $n \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_n \in X$ i $\varepsilon > 0$. To znači da da je skup $V \subseteq X'$ **slabo otvoren** (odnosno, otvoren u odnosu na slabu topologiju) ako za svaki $f_0 \in V$ postoje $n \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_n \in X$ i $\varepsilon > 0$ takvi da je $U(f_0; x_1, \ldots, x_n; \varepsilon) \subseteq V$.

U odnosu na slabu topologiju X' je Hausdorffov prostor. Doista, ako su $f, g \in X'$ i ako je $f \neq g$ onda postoji $x \in X$ takav da je $f(x) \neq g(x)$. Stavimo $\varepsilon = \frac{1}{2}|f(x) - g(x)|$. Tada je $U(f; x; \varepsilon) \cap U(g; x; \varepsilon) = \emptyset$. Doista, u protivnom bismo za $h \in U(f; x; \varepsilon) \cap U(g; x; \varepsilon)$ imali

$$2\varepsilon = |f(x) - g(x)| = |(f(x) - h(x)) + (g(x) - h(x))| \leq$$

$$\leq |f(x) - h(x)| + |g(x) - h(x)| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$$

a to je nemoguće.

Prema teoremu 2.1.3. za Banachovu algebru $\mathcal{A}$ je $X(\mathcal{A})$ podskup zatvorene jedinične kugle $\overline{K}(0,1) = \{f \in \mathcal{A}';\ \|f\| \leq 1\}$ u dualu $\mathcal{A}'$ algebre $\mathcal{A}$. Glavni cilj ovog poglavlja jest da dokažemo da je uz slabu topologiju $X(\mathcal{A})$ Hausdorffov topološki prostor koji je kompaktan ako je algebra $\mathcal{A}$ unitalna, a lokalno kompaktan nekompaktan ako je algebra $\mathcal{A}$ neunitalna. U tu svrhu najprije ćemo dokazati nekoliko teorema iz opće topologije koji će nam omogućiti da dokažemo teorem Banacha i Alaoglua po kome je zatvorena jedinična kugla u dualu normiranog prostora u odnosu na slabu topologiju kompaktan topološki prostor.

Propozicija 2.2.1. *Neka je X normiran prostor, T topološki prostor i neka je F funkcija sa T u dualni prostor X'. Funkcija F je slabo neprekidna (tj. neprekidna s obzirom na slabu topologiju u prostoru X') ako i samo ako je za svaki $x \in X$ funkcija $t \mapsto [F(t)](x)$ neprekidna sa T u $\mathbb{C}$.*

Zadatak 2.2.1. *Dokažite propoziciju 2.2.1.*

Neka su $T_1, \ldots, T_n$ topološki prostori. U Kartezijev produkt $T = T_1 \times \cdots \times T_n$ uvodi se tzv. *topologija produkta* tako da se kao baza otvorenih skupova u T uzme skup svih skupova oblika $V_1 \times \cdots \times V_n$, pri čemu je V_j otvoren skup u T_j za $j = 1, \ldots, n$.

Ova se definicija generalizira i na produkt beskonačno mnogo topoloških prostora. Neka je $(T_i,\ i \in I)$ bilo kakva familija topoloških prostora. U njihov produkt

$$T = \prod_{i \in I} T_i = \left\{ f \colon I \to \bigcup_{i \in I} T_i;\ f(i) \in T_i\ \ \forall i \in I \right\}$$

uvodi se tzv. **produktna topologija** tako da se kao baza otvorenih skupova u T uzme skup svih skupova oblika

$$U(i_1, \ldots, i_n; V_1, \ldots, V_n) = \{f \in T;\ f(i_k) \in V_k \text{ za } k = 1, \ldots, n\}$$

pri čemu je $n \in \mathbb{N}$, $i_1, \ldots, i_n \in I$, i za svaki $k \in \{1, \ldots, n\}$ je V_k otvoren skup u T_{i_k}. Ako sa $\pi_i \colon T \to T_i$ označimo $i-$tu projekciju (tj. $\pi_i(f) = f(i)$) onda je

$$U(i_1, \ldots, i_n; V_1, \ldots, V_n) = \pi_{i_1}^{-1}(V_1) \cap \cdots \cap \pi_{i_n}^{-1}(V_n).$$

Odatle se vidi da je svaka projekcija π_i neprekidno preslikavanje sa T u T_i. Štoviše, produktna topologija na T je najslabija među svim onim topologijama na T za koje su sve projekcije π_i neprekidne.

Ako su svi prostori T_i Hausdorffovi onda je i prostor T Hausdorffov. Doista, neka su $f, g \in T$ i $f \neq g$. Tada je $f(i) \neq g(i)$ za neki $i \in I$, pa zbog toga što je T_i Hausdorffov postoje otvoreni skupovi $U, V \subseteq T_i$ takvi da je $f(i) \in U$, $g(i) \in V$ i $U \cap V = \emptyset$. Tada su skupovi $U(i; U) = \pi_i^{-1}(U)$ i $U(i; V) = \pi_i^{-1}(V)$ otvoreni u T i vrijedi

$$f \in U(i; U), \qquad g \in U(i; V) \qquad \text{i} \qquad U(i; U) \cap U(i; V) = \pi_i^{-1}(U \cap V) = \emptyset.$$

Skup $\mathcal{S}$ otvorenih podskupova topološkog prostora T zove se **podbaza topologije** prostora T ako je skup svih konačnih presjeka

$$\{S_1 \cap \ldots \cap S_n;\ n \in \mathbb{N},\ S_1, \ldots, S_n \in \mathcal{S}\}$$

baza topologije prostora T.

Teorem 2.2.2. (**J.W. Alexander, 1939.**) *Neka je T topološki prostor i $\mathcal{S}$ podbaza topologije tog prostora. Ako svaki $\mathcal{S}-$pokrivač prostora T sadrži konačan potpokrivač, onda je prostor T kompaktan.*

Dokaz: Pretpostavimo da prostor T nije kompaktan. Dokazat ćemo da tada postoji $\mathcal{S}-$pokrivač od T koji ne sadrži nijedan konačan potpokrivač.

Neka je $\mathcal{P}$ skup svih otvorenih pokrivača od T koji ne sadrže konačan potpokrivač. Po pretpostavci skup $\mathcal{P}$ je neprazan. Uz relaciju inkluzije skup $\mathcal{P}$ je parcijalno uređen. On zadovoljava uvjet Zornove leme. Doista, ako je $\mathcal{Q}$ lanac u $\mathcal{P}$ onda je njegova unija $\mathcal{B} = \cup_{\mathcal{A} \in \mathcal{Q}} \mathcal{A}$ otvoren pokrivač od T koji ne sadrži konačan potpokrivač (jer bi to bio konačan potpokrivač nekog $\mathcal{A} \in \mathcal{Q}$), dakle je $\mathcal{B} \in \mathcal{P}$ i to je očito gornja međa za $\mathcal{Q}$.

Neka je sada Γ neki maksimalni element od $\mathcal{P}$. Tada je Γ otvoren pokrivač od T, Γ nema konačnih potpokrivača i ako je V bilo koji otvoren podskup od T koji nije element od Γ, onda $\Gamma \cup \{V\}$ ima konačan potpokrivač. To slijedi iz činjenice da je tada $\Gamma \subsetneq \Gamma \cup \{V\}$ što zbog maksimalnosti Γ u $\mathcal{P}$ ima za posljedicu da $\Gamma \cup \{V\} \notin \mathcal{P}$.

Stavimo $\tilde{\Gamma} = \Gamma \cap \mathcal{S}$. Tvrdimo da je tada $\tilde{\Gamma}$ pokrivač (dakle, $\mathcal{S}-$pokrivač) od T. Kad to ne bi bilo istina, postojala bi točka $t \in T$ koja nije ni u jednom članu od $\tilde{\Gamma}$. Međutim, $t \in W$ za neki $W \in \Gamma$ jer je Γ pokrivač od T. Kako je $\mathcal{S}$ bodbaza topologije prostora T postoje $V_1, \ldots, V_n \in \mathcal{S}$ takvi da je

$$t \in V_1 \cap \cdots \cap V_n \subseteq W.$$

Budući da točka t nije ni u jednom članu od $\tilde{\Gamma} = \Gamma \cap \mathcal{S}$ i jer su $V_1, \ldots, V_n \in \mathcal{S}$, zaključujemo da $V_j \notin \Gamma$ za $j = 1, \ldots, n$. Dakle, $\Gamma \cup \{V_j\}$ sadrži konačan potpokrivač za svaki $j \in \{1, \ldots, n\}$. Drugim riječima postoje $U_1^{(j)}, \ldots, U_{m_j}^{(j)} \in \Gamma$ takvi da je

$$T = U_1^{(j)} \cup \cdots \cup U_{m_j}^{(j)} \cup V_j \qquad \text{za} \qquad j = 1, \ldots, n.$$

Odavde slijedi

$$T = \bigcup_{j=1}^{n} \left(\bigcup_{i=1}^{m_j} U_i^{(j)} \right) \cup \left(\bigcap_{j=1}^{n} V_j \right) \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} \left(\bigcup_{i=1}^{m_j} U_i^{(j)} \right) \cup W.$$

Međutim, kako je $W \in \Gamma$ to bi značilo da je

$$\{W\} \cup \{U_i^{(j)};\ 1 \le i \le m_j,\ 1 \le j \le n\}$$

konačan potpokrivač od Γ, a takav ne postoji.

Ova kontradikcija dokazuje da je $\tilde{\Gamma}$ $\mathcal{S}-$pokrivač od T. Međutim, $\tilde{\Gamma}$ je potpokrivač od Γ, dakle $\tilde{\Gamma}$ ne može sadržavati konačan potpokrivač od T. Time je teorem dokazan.

Teorem 2.2.3. (**A.N.Tihonov, 1930.**) *Ako su svi topološki prostori T_i $(i \in I)$ kompaktni onda je i njihov produkt $T = \prod_{i\in I} T_i$ kompaktan.*

Dokaz: Neka je za svako $i \in I$ $\mathcal{S}_i$ skup svih podskupova od T oblika

$$\pi_i^{-1}(V) = \{f \in T;\ f(i) \in V\},$$

gdje je V otvoren podskup od T_i. Prema definiciji produktne topologije jasno je da je unija $\mathcal{S} = \cup_{i\in I}\mathcal{S}_i$ podbaza topologije prostora T.

Neka je Γ $\mathcal{S}-$pokrivač od T. Stavimo $\Gamma_i = \Gamma \cap \mathcal{S}_i$. Tvrdimo da barem jedan od skupova Γ_i pokriva T. Pretpostavimo da nije tako. Tada za svaki $i \in I$ postoji točka $t_i \in T$ koja nije u uniji članova od Γ_i. Svaki član od Γ_i je u $\mathcal{S}_i$. To znači da je svaki član od Γ_i oblika $\pi_i^{-1}(S)$ za neki $S \subseteq T_i$. Prema tome, ako stavimo $s_i = \pi_i(t_i)$, onda je skup $\pi_i^{-1}(\{s_i\})$ disjunktan sa svakim članom od Γ_i.

Neka je $f \in T$ definirano sa $f(i) = s_i,\ i \in I$. Tada je $f \in \cap_{i\in I}\pi_i^{-1}(\{s_i\})$, dakle f nije sadržana ni u jednom članu od $\Gamma = \cup_{i\in I}\Gamma_i$. Ali to je nemoguće, jer je Γ pokrivač od T.

Ova kontradikcija dokazuje da je Γ_i pokrivač od T za neko $i \in I$. Imamo $\Gamma_i = \{\pi_i^{-1}(V_j);\ j \in J\}$ za neke otvorene podskupove $V_j \subseteq T_i$. No tada je $\{V_j;\ j \in J\}$ otvoren pokrivač od T_i. Kako je T_i po pretpostavci kompaktan, postoje $j_1, \ldots, j_n \in J$ takvi da je

$$T_i = V_{j_1} \cup \cdots \cup V_{j_n}.$$

Slijedi

$$T = \pi_i^{-1}(T_i) = \pi_i^{-1}(V_{j_1}) \cup \cdots \cup \pi_i^{-1}(V_{j_n}).$$

Time je dokazano da svaki $\mathcal{S}-$pokrivač od T ima konačan potpokrivač. Prema teoremu 2.2.2. prostor T je kompaktan.

Sljedeći je teorem za separabilne prostore dokazao S. Banach 1932. godine, a općenito L. Alaoglu 1940. godine.

Teorem 2.2.4. (**Banach−Alaoglu**) *Neka X normiran prostor i*

$$K = \overline{K}_{X'}(0,1) = \{f \in X';\ \|f\| \le 1\}.$$

Skup K je u odnosu na slabu topologiju dualnog prostora X' kompaktan skup.

Dokaz: Za svaki vektor $x \in X$ stavimo

$$D_x = \{\lambda \in \mathbb{C};\ |\lambda| \le \|x\|\}.$$

Svaki od skupova D_x je kompaktan, pa je prema Tihonovljevom teoremu 2.2.3. kompaktan i njihov produkt

$$D = \prod_{x\in X} D_x = \{f\colon X \to \mathbb{C};\ |f(x)| \le \|x\|\ \forall x \in X\}.$$

Za $f \in K$ i $x \in X$ je $|f(x)| \le \|f\|\cdot\|x\| \le \|x\|$. Dakle, $K \subseteq X' \cap D$. Na taj način na skupu K imamo dvije topologije; onu induciranu slabom topologijom na X' i onom induciranom produktnom topologijom na D. Dokazat ćemo sada sljedeće dvije tvrdnje:

(*a*) *Te dvije topologije na K se podudaraju.*

(*b*) *K je zatvoren podskup prostora D.*

Budući da je prostor D kompaktan, odatle će slijediti tvrdnja teorema.

Dokaz tvrdnje (*a*) : Neka je $f_0 \in K$. Izaberimo $n \in \mathbb{N}$, $x_1, \dots, x_n \in X$ i $\delta > 0$ i stavimo

$$W_1 = \{f \in X';\ |f(x_i) - f_0(x_i)| < \delta \text{ za } i = 1, \dots, n\},$$

$$W_2 = \{f \in D;\ |f(x_i) - f_0(x_i)| < \delta \text{ za } i = 1, \dots, n\},$$

Svi skupovi oblika W_1 predstavljaju bazu okolina točke f_0 u prostoru X' sa slabom topologijom, a svi skupovi oblika W_2 predstavljaju bazu okolina točke f_0 u prostoru D s produktnom topologijom. Kako je $K \subseteq X' \cap D$, vidimo da za bilo kako izabrane $n, x_1, \dots, x_n, \delta$ vrijedi $W_1 \cap K = W_2 \cap K$. Time je tvrdnja (a) dokazana.

Dokaz tvrdnje (*b*) : Neka je f_0 točka iz zatvarača skupa K u prostoru D. Neka su $x, y \in X$ i $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Za proizvoljno $\varepsilon > 0$ je

$$U = \left\{ f \in D;\ |f(x) - f_0(x)| < \frac{\varepsilon}{1 + |\alpha| + |\beta|},\ |f(y) - f_0(y)| < \frac{\varepsilon}{1 + |\alpha| + |\beta|}, \right.$$
$$\left. |f(\alpha x + \beta y) - f_0(\alpha x + \beta y)| < \frac{\varepsilon}{1 + |\alpha| + |\beta|} \right\}$$

otvorena okolina točke f_0 u prostoru D. Kako je f_0 točka iz zatvarača skupa K u prostoru D, slijedi $U \cap K \neq \emptyset$. Neka je $f \in U \cap K$. Tada je $f \in X'$, dakle vrijedi $f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$. Stoga imamo redom:

$$|f_0(\alpha x + \beta y) - \alpha f_0(x) - \beta f_0(y)| =$$
$$= |f_0(\alpha x + \beta y) - f(\alpha x + \beta y) + \alpha(f(x) - f_0(x)) + \beta(f(y) - f_0(y))| \leq$$
$$\leq |f_0(\alpha x + \beta y) - f(\alpha x + \beta y)| + |\alpha| \cdot |f(x) - f_0(x)| + |\beta| \cdot |f(y) - f_0(y)| <$$
$$< (1 + |\alpha| + |\beta|) \frac{\varepsilon}{1 + |\alpha| + |\beta|} = \varepsilon.$$

Prema tome je $|f_0(\alpha x + \beta y) - \alpha f_0(x) - \beta f_0(y)| < \varepsilon$. Kako je $\varepsilon > 0$ bio proizvoljan, slijedi $f_0(\alpha x + \beta y) = \alpha f_0(x) + \beta f_0(y),\ x, y \in X,\ \alpha, \beta \in \mathbb{C}$, odnosno f_0 je linearan funkcional na prostoru X.

Napokon, $f_0 \in D$, pa po definiciji prostora D vrijedi $|f_0(x)| \leq \|x\|\ \forall x \in X$. To znači da je linearan funkcional f_0 ograničen, tj. $f_0 \in X'$, i da je $\|f_0\| \leq 1$, tj. $f_0 \in K$. Time smo dokazali da je skup K zatvoren u prostoru D, odnosno dokazana je i tvrdnja (b).

Teorem 2.2.5. *Neka je $\mathcal{A}$ komutativna Banachova algebra i neka je skup karaktera $X(\mathcal{A})$ snabdjeven slabom topologijom duala $\mathcal{A}'$. Ako je algebra $\mathcal{A}$ unitalna prostor $X(\mathcal{A})$ je kompaktan. Ako je algebra $\mathcal{A}$ neunitalna prostor $X(\mathcal{A})$ je lokalno kompaktan.*

Dokaz: Pretpostavimo prvo da $\mathcal{A}$ ima jedinicu. Prema teoremu 2.1.3. je

$$X(\mathcal{A}) \subseteq \{f \in \mathcal{A}';\ \|f\| \leq 1\}.$$

Dakle, zbog teorema 2.2.4. dovoljno je dokazati da je u odnosu na slabu topologiju skup $X(\mathcal{A})$ zatvoren podskup od $K = \{f \in \mathcal{A}';\ \|f\| \leq 1\}$.

Neka je $f_0 \in K$ u slabom zatvaraču od $X(\mathcal{A})$. Treba dokazati da je $f_0 \in X(\mathcal{A})$, odnosno da je

$$f_0(xy) = f_0(x) f_0(y)\ \ \forall x, y \in \mathcal{A} \qquad \text{i} \qquad f_0(e) = 1.$$

Neka su $x, y \in \mathcal{A}$. Uzmimo proizvoljan $\varepsilon > 0$ i neka je

$$W = \left\{ f \in \mathcal{A}';\ |f(e) - f_0(e)| < \varepsilon,\ |f(x) - f_0(x)| < \frac{\varepsilon}{1 + \|x\| + |f_0(y)|}, \right.$$

$$\left. |f(y) - f_0(y)| < \frac{\varepsilon}{1 + \|x\| + |f_0(y)|},\ |f(xy) - f_0(xy)| < \frac{\varepsilon}{1 + \|x\| + |f_0(y)|} \right\}.$$

Tada je W otvorena okolina točke f_0 u prostoru $\mathcal{A}'$ sa slabom topologijom, pa je $W \cap X(\mathcal{A}) \neq \emptyset$. Neka je $f \in W \cap X(\mathcal{A})$. Tada je prije svega $f(e) = 1$, pa slijedi

$$|1 - f_0(e)| = |f(e) - f_0(e)| < \varepsilon.$$

Kako je $\varepsilon > 0$ bio proizvoljan, slijedi da je $f_0(e) = 1$. Nadalje, kako je f karakter, vrijedi jednakost $f(xy) = f(x)f(y)$, pa imamo redom:

$$|f_0(xy) - f_0(x)f_0(y)| = |[f_0(xy) - f(xy)] + [f(x)f(y) - f_0(x)f_0(y)]| =$$

$$= |[f_0(xy) - f(xy)] + f(x)[f(y) - f_0(y)] + f_0(y)[f(x) - f_0(x)]| \leq$$

$$\leq |f_0(xy) - f(xy)| + |f(x)| \cdot |f(y) - f_0(y)| + |f_0(y)| \cdot |f(x) - f_0(x)| <$$

$$< (1 + \|x\| + |f_0(y)|) \frac{\varepsilon}{1 + \|x\| + |f_0(y)|} = \varepsilon.$$

Kako je $\varepsilon > 0$ bio proizvoljan slijedi da za bilo koje $x, y \in \mathcal{A}$ vrijedi jednakost $f_0(xy) = f_0(x)f_0(y)$. Dakle, $f_0 \in X(\mathcal{A})$.

Time je teorem dokazan ako je $\mathcal{A}$ unitalna algebra. Neka je sada $\mathcal{A}$ komutativna neunitalna Banachova algebra. Tada znamo da se $X(\mathcal{A})$ identificira sa $X(\tilde{\mathcal{A}}) \setminus \{\chi_0\}$, pri čemu je karakter $\chi_0 \in X(\tilde{\mathcal{A}})$ zadan sa $\chi_0(x + \lambda e) = \lambda,\ x \in \mathcal{A},\ \lambda \in \mathbb{C}$. Dakle, $X(\mathcal{A})$ je otvoren podskup kompaktnog prostora $X(\tilde{\mathcal{A}})$ i kao takav je lokalno kompaktan.

2.3 Geljfandova transformacija

Za komutativnu Banachovu algebru $\mathcal{A}$ i za $x \in \mathcal{A}$ definiramo funkciju $\Gamma_{\mathcal{A}}(x) \colon X(\mathcal{A}) \to \mathbb{C}$ sa

$$[\Gamma_{\mathcal{A}}(x)]\,(\chi) = \chi(x), \qquad \chi \in X(\mathcal{A}).$$

Po definiciji topologije od $X(\mathcal{A})$, sve funkcije $\Gamma_{\mathcal{A}}(x)$ su neprekidne. Dakle, $\Gamma_{\mathcal{A}}$ je preslikavanje sa $\mathcal{A}$ u algebru $C(X(\mathcal{A}))$ svih neprekidnih kompleksnih funkcija na kompaktnom ili lokalno kompaktnom Hausdorffovom topološkom prostoru $X(\mathcal{A})$. To se preslikavanje zove **Geljfandova transformacija** komutativne Banachove algebre $\mathcal{A}$.

Teorem 2.3.1. *Neka je $\mathcal{A}$ komutativna Banachova algebra.*

(a) *Geljfandova transformacija $\Gamma_{\mathcal{A}}$ je homomorfizam algebri, unitalni ako je $\mathcal{A}$ unitalna.*

(b) *Ako je $\mathcal{A}$ unitalna, vrijedi $\mathcal{A}^\times = \{x \in \mathcal{A};\ \Gamma_{\mathcal{A}}(x) \in C(X(\mathcal{A}))^\times\}$.*

(c) *Ako algebra $\mathcal{A}$ nije unitalna, $\Gamma_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}) \subseteq C_0(X(\mathcal{A}))$.*

(d) *Homomorfizam $\Gamma_{\mathcal{A}}$ je neprekidan. Štoviše, vrijedi $\|\Gamma_{\mathcal{A}}(x)\|_\infty \le \|x\|\ \ \forall x \in \mathcal{A}$.*

(e) *Algebra funkcija $\Gamma_{\mathcal{A}}(\mathcal{A})$ razlikuje točke od $X(\mathcal{A})$; tj. ako su $\chi, \psi \in X(\mathcal{A})$ i $\chi \neq \psi$, onda postoji funkcija $f \in \Gamma_{\mathcal{A}}(\mathcal{A})$ takva da je $f(\chi) \neq f(\psi)$.*

Dokaz: (a) Ako su $x, y \in \mathcal{A}$ i $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ onda za svaki $\chi \in X(\mathcal{A})$ imamo

$$[\alpha\Gamma_{\mathcal{A}}(x) + \beta\Gamma_{\mathcal{A}}(y)]\,(\chi) = \alpha\,[\Gamma_{\mathcal{A}}(x)]\,(\chi) + \beta\,[\Gamma_{\mathcal{A}}(y)]\,(\chi) = \alpha\chi(x) + \beta\chi(y) =$$

$$= \chi(\alpha x + \beta y) = [\Gamma_{\mathcal{A}}(\alpha x + \beta y)]\,(\chi), \qquad \text{tj.} \quad \Gamma_{\mathcal{A}}(\alpha x + \beta y) = \alpha\Gamma_{\mathcal{A}}(x) + \beta\Gamma_{\mathcal{A}}(y).$$

Nadalje, za $x, y \in \mathcal{A}$ imamo

$$[\Gamma_{\mathcal{A}}(x)\Gamma_{\mathcal{A}}(y)]\,(\chi) = [\Gamma_{\mathcal{A}}(x)]\,(\chi)\,[\Gamma_{\mathcal{A}}(y)]\,(\chi) = \chi(x)\chi(y) = \chi(xy) = [\Gamma_{\mathcal{A}}(xy)]\,(\chi),$$

tj. $\Gamma_{\mathcal{A}}(xy) = \Gamma_{\mathcal{A}}(x)\Gamma_{\mathcal{A}}(y)$. Time je dokazano da je $\Gamma_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \to C(X(\mathcal{A}))$ homomorfizam algebri.

Neka je $\mathcal{A}$ unitalna komutativna Banachova algebra s jedinicom e. Prema propoziciji 2.1.1. tada je $[\Gamma_{\mathcal{A}}(e)]\,(\chi) = \chi(e) = 1\ \forall \chi \in X(\mathcal{A})$, što znači da je funkcija $\Gamma_{\mathcal{A}}(e)$ identički jednaka 1, odnosno, to je jedinica u algebri $C(X(\mathcal{A}))$. Dakle, $\Gamma_{\mathcal{A}}$ je unitalni homomorfizam.

(b) Neka je i dalje $\mathcal{A}$ unitalna komutativna Banachova algebra. Prema teoremu 2.1.7. imamo redom

$$x \in \mathcal{A}^\times \iff 0 \notin \sigma(x) \iff [\Gamma_{\mathcal{A}}(x)]\,(\chi) = \chi(x) \neq 0\ \forall \chi \in X(\mathcal{A}) \iff \Gamma_{\mathcal{A}}(x) \in C(X(\mathcal{A}))^\times.$$

(c) Ako je $\mathcal{A}$ neunitalna algebra, dodavanjem jedinice dolazimo do komutativne unitalne Banachove algebre $\tilde{\mathcal{A}} = \mathcal{A} \dot{+} \mathbb{C}$. Prema propoziciji 2.1.2. tada je $\chi \to \tilde{\chi}$ bijekcija sa $X(\mathcal{A})$ na $X(\tilde{\mathcal{A}}) \backslash \{\varphi_0\}$. Pri tome je za $\chi \in X(\mathcal{A})$ karakter $\tilde{\chi} \in X(\tilde{\mathcal{A}})$ definiran sa

$$\tilde{\chi}(x + \lambda) = \chi(x) + \lambda, \qquad x \in \mathcal{A}, \quad \lambda \in \mathbb{C},$$

a $\varphi_0 \in X(\tilde{\mathcal{A}})$ je definiran sa

$$\varphi_0(x + \lambda) = \lambda, \qquad x \in \mathcal{A}, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Inverzna bijekcija je restrikcija $\varphi \mapsto \varphi|\mathcal{A}$, $\varphi \in X(\tilde{\mathcal{A}}) \setminus \{\varphi_0\}$. Te bijekcije upotrijebimo kao identifikacije skupova $X(\mathcal{A})$ i $X(\tilde{\mathcal{A}}) \setminus \{\varphi_0\}$. Uz takvu identifikaciju očito za $x \in \mathcal{A} \subset \tilde{\mathcal{A}}$ vrijedi $\Gamma_{\mathcal{A}}(x) = \Gamma_{\tilde{\mathcal{A}}}(x)|X(\mathcal{A})$. Nadalje, imamo $[\Gamma_{\tilde{\mathcal{A}}}(x)](\varphi_0) = \varphi_0(x) = 0$. Kako je funkcija $\Gamma_{\tilde{\mathcal{A}}}(x)$ neprekidna na $X(\tilde{\mathcal{A}})$, slijedi

$$\lim_{\chi \to \infty} [\Gamma_{\mathcal{A}}(x)](\chi) = \lim_{\chi \to \varphi_0} [\Gamma_{\tilde{\mathcal{A}}}(x)](\chi) = [\Gamma_{\tilde{\mathcal{A}}}(x)](\varphi_0) = 0.$$

Prema tome, stvarno je $\Gamma_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}) \subseteq C_0(X(\mathcal{A}))$.

(d) Po teoremu 2.1.3. svaki $\chi \in X(\mathcal{A})$ je ograničen linearan funkcional i vrijedi $\|\chi\| \leq 1$. Stoga za $x \in \mathcal{A}$ i $\chi \in X(\mathcal{A})$ vrijedi

$$|[\Gamma_{\mathcal{A}}(x)](\chi)| = |\chi(x)| \leq \|\chi\| \cdot \|x\| \leq \|x\|.$$

Prema tome, za $x \in \mathcal{A}$ imamo

$$\|\Gamma_{\mathcal{A}}(x)\|_\infty = \max\{|[\Gamma_{\mathcal{A}}(x)](\chi)|;\ \chi \in X(\mathcal{A})\} \leq \|x\|.$$

(e) Ako su $\chi, \psi \in X(\mathcal{A})$ i $\chi \neq \psi$, onda postoji $x \in \mathcal{A}$ takav da je $\chi(x) \neq \psi(x)$. No to upravo znači da za funkciju $f = \Gamma_{\mathcal{A}}(x) \in \Gamma_{\mathcal{A}}(\mathcal{A})$ vrijedi $f(\chi) \neq f(\psi)$.

U daljnjem za element x komutativne Banachove algebre $\mathcal{A}$ njegovu Geljfandovu transformaciju $\Gamma_{\mathcal{A}}(x)$ označavat ćemo kraće sa $\hat{x}$. Dakle, $\hat{x}$ je kompleksna neprekidna funkcija na $X(\mathcal{A})$ definirana sa

$$\hat{x}(\chi) = \chi(x), \qquad \chi \in X(\mathcal{A}),\ x \in \mathcal{A}.$$

2.4 Stone–Weierstrassov teorem

Da bismo proučili sliku $\hat{\mathcal{A}}$ komutativne Banachove algebre $\mathcal{A}$ u algebri $C(X(\mathcal{A}))$ (odnosno u algebri $C_0(X(\mathcal{A}))$) proučit ćemo podalgebre od $C(K)$ (K kompaktan) s ciljem da pronađemo dovoljne uvjete da bi takva podalgebra bila gusta u $C(K)$.

U daljnjem do konca ovoga poglavlja K je kompaktan Hausdorffov topološki prostor. Neko vrijeme ćemo se baviti s realnom Banachovom algebrom $C(K,\mathbb{R})$ svih neprekidnih realnih funkcija na K.

Za bilo koje funkcije $x, y\colon K \to \mathbb{R}$ definiramo funkcije $x \vee y$ i $x \wedge y$ relacijama:

$$(x \vee y)(t) = \max\{x(t), y(t)\}, \qquad (x \wedge y)(t) = \min\{x(t), y(t)\}, \qquad t \in K.$$

Skup X funkcija sa K u $\mathbb{R}$ zove se **rešetka**, ako vrijedi:

$$x, y \in X \qquad \Longrightarrow \qquad x \vee y \in X \qquad \text{i} \qquad x \wedge y \in X.$$

Ako je x funkcija sa X u $\mathbb{R}$ sa $|x|$ označavamo funkciju koja je definirana sa $|x|(t) = |x(t)|$, $t \in K$. Lako se provjerava da vrijede jednakosti:

$$x \vee y = \frac{1}{2}(x + y + |x - y|), \qquad x \wedge y = \frac{1}{2}(x + y - |x - y|), \qquad |x| = x \vee (-x).$$

Prema tome, ako je X potprostor prostora $\mathbb{R}^K$ svih funkcija sa K u $\mathbb{R}$, X je rešetka ako i samo ako vrijedi

$$x \in X \qquad \Longrightarrow \qquad |x| \in X.$$

Očito je $C(K,\mathbb{R})$ rešetka.

Teorem 2.4.1. *Svaka zatvorena podalgebra $\mathcal{A}$ realne Banachove algebre $C(K,\mathbb{R})$ je rešetka.*

Dokaz: Pretpostavimo najprije da je $1 \in \mathcal{A}$. Neka je $x \in \mathcal{A}$, $x \neq 0$. Tada je $\|x\|_\infty > 0$ i $\|x\|_\infty \geq |x(t)|$ $\forall x \in K$. Stoga imamo redom

$$|x|(t) = |x(t)| = \sqrt{x(t)^2} = \sqrt{\|x\|_\infty^2 - (\|x\|_\infty^2 - x(t)^2)} = \|x\|_\infty \cdot \sqrt{1 - \left(1 - \frac{x(t)^2}{\|x\|_\infty^2}\right)}.$$

Upotrijebit ćemo sada formulu razvoja u red potencija

$$\sqrt{1-\lambda} = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-3)!!}{(2n)!!}\lambda^n$$

koji konvergira uniformno na segmentu $0 \leq \lambda \leq 1$. Odatle imamo

$$|x|(t) = \|x\|_\infty \cdot \left[1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-3)!!}{(2n)!!}\left(1 - \frac{x(t)^2}{\|x\|_\infty^2}\right)^n\right],$$

a kako je $0 \leq 1 - \dfrac{x(t)^2}{\|x\|_\infty^2} \leq 1$ za svaki $t \in K$, zaključujemo da gornji red konvergira uniformno na K. No uniformna konvergencija znači upravo konvergenciju po normi u $C(K,\mathbb{R})$. Budući da je $\mathcal{A}$ podalgebra od $C(K,\mathbb{R})$, članovi gornjeg reda su elementi od $\mathcal{A}$. Kako je $\mathcal{A}$ zatvorena u $C(K,\mathbb{R})$, slijedi $|x| \in \mathcal{A}$. Time je dokazano da je $\mathcal{A}$ rešetka.

Pretpostavimo sada da $1 \notin \mathcal{A}$. Tada $\mathcal{A}$ ne sadrži nijednu konstantu osim 0. Stavimo $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A} \dot{+} \mathbb{R}$ – to je podalgebra od $C(K, \mathbb{R})$ koja sadrži sve konstante, dakle i 1.

Prema lemi 1.4.4. (odnosno, prema njenom analogonu za realne prostore) $\mathcal{A}_1$ je zatvorena podalgebra od $C(K, \mathbb{R})$. Prema prvom dijelu dokaza $\mathcal{A}_1$ je rešetka. Prema tome, za bilo koji element $x \in \mathcal{A} \subset \mathcal{A}_1$ je $|x| \in \mathcal{A}_1$, tj. $|x| = y + \lambda$ za neke $y \in \mathcal{A}$ i $\lambda \in \mathbb{R}$. Slijedi

$$x^2 = |x|^2 = \lambda^2 + 2\lambda y + y^2 \qquad \Longrightarrow \qquad \lambda^2 = x^2 - 2\lambda y - y^2.$$

Odavde slijedi $\lambda^2 \in \mathcal{A}$. Međutim, po pretpostavci $\mathcal{A}$ ne sadrži nijednu konstantu različitu od 0. Dakle, nužno je $\lambda = 0$, a to znači da je $|x| = y \in \mathcal{A}$. Time je dokazano da je $\mathcal{A}$ rešetka i u slučaju kad ne sadrži 1.

Teorem 2.4.2. *Neka je $\mathcal{A}$ podskup od $C(K, \mathbb{R})$ sa sljedećim svojstvima:*

(a) *$\mathcal{A}$ je rešetka.*

(b) *Za bilo koje međusobno različite točke $t, s \in K$ i za bilo koje $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ postoji $x \in \mathcal{A}$ takva da je $x(t) = \lambda$ i $x(s) = \mu$.*

Tada je skup $\mathcal{A}$ gust u $C(K, \mathbb{R})$.

Dokaz: Neka je $y \in C(K, \mathbb{R})$ i $\varepsilon > 0$. Treba dokazati da postoji $z \in \mathcal{A}$ takva da je $\|z - y\|_\infty \leq \varepsilon$.

Za $t, s \in K$, $t \neq s$, izaberimo funkciju $x_{t,s} \in \mathcal{A}$ takvu da je $x_{t,s}(t) = y(t)$ i $x_{t,s}(s) = y(s)$. Stavimo

$$U_{t,s} = \{u \in K;\ x_{t,s}(u) < y(u) + \varepsilon\}, \qquad V_{t,s} = \{u \in K;\ x_{t,s}(u) > y(u) - \varepsilon\}.$$

Skupovi $U_{t,s}$ i $V_{t,s}$ su otvoreni i svaki od njih sadrži točke t i s. Fiksirajmo sada točku s. Tada je

$$\{U_{t,s};\ t \in K,\ t \neq s\}$$

otvoren pokrivač od K. Kako je K kompaktan, postoje točke $t_1, \ldots, t_n \in K \setminus \{s\}$ takve da je

$$K = U_{t_1,s} \cup \cdots \cup U_{t_n,s}.$$

Stavimo

$$y_s = x_{t_1,s} \wedge \cdots \wedge x_{t_n,s} \in \mathcal{A}.$$

Po definiciji skupova $U_{t,s}$ tada vrijedi

$$y_s(u) < y(u) + \varepsilon \qquad \forall u \in K.$$

Nadalje, po definiciji skupova $V_{t,s}$ vrijedi i

$$y_s(u) > y(u) - \varepsilon \qquad \forall u \in V_s = V_{t_1,s} \cap \cdots \cap V_{t_n,s}.$$

Sve ovo mogli smo provesti za bilo koju točku $s \in K$. Tako dolazimo do otvorenog pokrivača $\{V_s;\ s \in K\}$ od K i do familije funkcija $\{y_s;\ s \in K\}$ u $\mathcal{A}$ takvih da je

$$y_s(u) < y(u) + \varepsilon \qquad \forall u \in K, \qquad y_s(u) > y(u) - \varepsilon \qquad \forall u \in V_s.$$

Zbog kompaktnosti K možemo naći točke $s_1, \ldots, s_m \in K$ takve da je

$$K = V_{s_1} \cup \cdots \cup V_{s_m}.$$

Stavimo $z = y_{s_1} \vee \cdots \vee y_{s_m}$. Tada je $z \in \mathcal{A}$ i vrijedi

$$y(u) - \varepsilon < z(u) < y(u) + \varepsilon \qquad \forall u \in K.$$

To se može pisati i ovako:

$$-\varepsilon < z(u) - y(u) < \varepsilon \qquad \text{tj.} \qquad |z(u) - y(u)| < \varepsilon \qquad \forall u \in K.$$

Odatle slijedi $\|z - y\|_\infty < \varepsilon$.

Za skup $\mathcal{A}$ funkcija definiranih na K kažemo da **razdvaja točke** od K ako za bilo koje međusobno različite točke $t, s \in K$ postoji $x \in \mathcal{A}$ takva da je $x(t) \neq x(s)$.

Teorem 2.4.3. (**M.H. Stone**) *Neka je $\mathcal{A}$ podalgebra od $C(K, \mathbb{R})$ koja razdvaja točke od K. Tada je $\mathcal{A}$ gusta u $C(K, \mathbb{R})$ ili postoji točka $t_0 \in K$ takva da je $\mathcal{A}$ sadržana i gusta u maksimalnom idealu $C_{t_0}(K, \mathbb{R}) = \{x \in C(K, \mathbb{R});\, x(t_0) = 0\}$.*

Dokaz: Provest ćemo dokaz najprije uz dodatnu pretpostavku da za svaku točku $t_0 \in K$ postoji $x \in \mathcal{A}$ takva da je $x(t_0) \neq 0$.

Dokažimo da za bilo koje međusobno različite točke $t, s \in K$ postoji $x \in \mathcal{A}$ takva da je

$$x(t) \neq 0, \qquad x(t) \neq x(s).$$

Doista, postoje $y, z \in \mathcal{A}$ takve da je $y(t) \neq y(s)$ i $z(t) \neq 0$. Ako je $y(t) \neq 0$, gornja svojstva ima funkcija $x = y$. Ako je $y(t) = 0$ ali $z(t) \neq z(s)$, gornja svojstva ima funkcija $x = z$. Napokon, ako je $y(t) = 0$ i $z(t) = z(s)$, gornja svojstva ima funkcija $x = y + z$.

Dokažimo sada da za $t, s \in K$, $t \neq s$, postoji $x' \in \mathcal{A}$ takva da je $x'(t) \neq 0$ i $x'(s) = 0$. Doista, ako za malo prije izabranu funkciju x vrijedi $x(s) = 0$ možemo uzeti $x' = x$, a ako je $x(s) \neq 0$ tražena svojstva ima funkcija

$$x'(u) = \frac{x(u)}{x(s)} - \frac{x(u)^2}{x(s)^2}, \qquad u \in K.$$

Za takvu funkciju $x' \in \mathcal{A}$ stavimo

$$x_1(u) = \frac{x'(u)}{x'(t)}, \qquad u \in K.$$

Tada je $x_1 \in \mathcal{A}$ i vrijedi $x_1(t) = 1$ i $x_1(s) = 0$. Sasvim analogno pronalazimo funkciju $x_2 \in \mathcal{A}$ takvu da je $x_2(t) = 0$ i $x_2(s) = 1$. Sada za proizvoljne $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ funkcija $x = \lambda x_1 + \mu x_2 \in \mathcal{A}$ ima svojstva $x(t) = \lambda$ i $x(s) = \mu$. Prema tome, podalgebra $\mathcal{A}$ zadovoljava uvjet (b) teorema 2.4.2. Taj uvjet zadovoljava i zatvarač $Cl(\mathcal{A})$ od $\mathcal{A}$ u $C(K, \mathbb{R})$. Zbog teorema 2.4.1. zatvarač $Cl(\mathcal{A})$ zadovoljava i uvjet (a) teorema 2.4.4. Iz teorema 2.4.4. slijedi da je $Cl(\mathcal{A}) = C(K, \mathbb{R})$.

Pretpostavimo sada da nije ispunjena pretpostavka iz prvog dijela dokaza, tj. da se sve funkcije u $\mathcal{A}$ poništavaju u nekoj točki $t_0 \in K$, dakle $\mathcal{A} \subseteq C_{t_0}(K, \mathbb{R})$. Stavimo tada

$$\mathcal{A}_1 = \mathcal{A} \dotplus \mathbb{R} = \{x + \lambda;\ x \in \mathcal{A},\, \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Tada je $\mathcal{A}_1$ podalgebra od $C(K, \mathbb{R})$ koja zadovoljava uvjete iz iskaza teorema. Ta podalgebra zadovoljava i dodatni uvjet iz prvog dijela dokaza, pa zaključujemo da je $Cl(\mathcal{A}_1) = C(K, \mathbb{R})$. Neka su sada $z \in C_{t_0}(K, \mathbb{R})$ i $\varepsilon > 0$. Tada postoji $y \in \mathcal{A}_1$ takva da je $\|z - y\|_\infty < \varepsilon/2$. Tada je $y = x + \lambda$ za neke $x \in \mathcal{A}$ i $\lambda \in \mathbb{R}$. Imamo

$$|z(t) - x(t) - \lambda| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \forall t \in K.$$

Posebno, iz te nejednakosti za $t = t_0$ dobivamo $|\lambda| < \varepsilon/2$. Slijedi

$$|z(t) - x(t)| \leq |z(t) - x(t) - \lambda| + |\lambda| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \qquad \forall t \in K,$$

tj. $\|z - x\|_\infty < \varepsilon$. Time je dokazano da je podalgebra $\mathcal{A}$ gusta u $C_{t_0}(K, \mathbb{R})$.

Klasični Weierstrassov teorem posljedica je Stoneovog teorema:

Korolar 2.4.4. (**C. Weierstrass**) *Ako je K kompaktan podskup od $\mathbb{R}^n$, onda je svaka funkcija $x \in C(K, \mathbb{R})$ limes uniformno konvergentnog niza realnih polinoma na K (tj. funkcija na K koje su restrikcije realnih polinomijalnih funkcija u n varijabli).*

Zadatak 2.4.1. *Dokažite korolar 2.4.4.*

Teorem 2.4.5. *Neka je $\mathcal{A}$ kompleksna podalgebra od $C(K) = C(K, \mathbb{C})$ koja razdvaja točke od K i koja je zatvorena u odnosu na kompleksno konjugiranje, tj.*

$$x \in \mathcal{A} \qquad \Longrightarrow \qquad \overline{x} \in \mathcal{A} \qquad (\text{gdje je } \overline{x}(t) = \overline{x(t)}).$$

Tada je $\mathcal{A}$ gusta u $C(K)$ ili u $C_{t_0}(K) = \{x \in C(K);\ x(t_0) = 0\}$ za neku točku $t_0 \in K$.

Dokaz: Neka je $\mathcal{B} = Cl(\mathcal{A})$ (zatvarač od $\mathcal{A}$ u $C(K)$) i $\mathcal{C} = \mathcal{B} \cap C(K, \mathbb{R})$. Tada je $\mathcal{C}$ realna zatvorena podalgebra od $C(K, \mathbb{R})$. Nadalje, u smislu realnih vektorskih prostora je

$$\mathcal{B} = \mathcal{C} \dotplus i\mathcal{C};$$

to slijedi iz zatvorenosti $\mathcal{A}$ (dakle i $\mathcal{B}$) u odnosu na kompleksno konjugiranje, jer za svaku funkciju x je

$$x = \frac{1}{2}(x + \overline{x}) + i \cdot \frac{1}{2i}(x - \overline{x}),$$

a funkcije

$$\frac{1}{2}(x + \overline{x}) \qquad \text{i} \qquad \frac{1}{2i}(x - \overline{x})$$

poprimaju realne vrijednosti. Nadalje, $\mathcal{C}$ razdvaja točke od K. Doista, ako su $t, s \in K$, $t \neq s$, postoji $x \in \mathcal{B}$ takva da je $x(t) \neq x(s)$. Stavimo li

$$y = \frac{1}{2}(x + \overline{x}), \qquad z = \frac{1}{2i}(x - \overline{x}),$$

tada su $y, z \in \mathcal{C}$ i vrijedi

$$y(t) + iz(t) = x(t) \neq x(s) = y(s) + iz(s).$$

Odatle slijedi da je ili $y(t) \neq y(s)$ ili $z(t) \neq z(s)$ (ili oboje). Prema teoremu 2.4.3. je ili $\mathcal{C} = C(K, \mathbb{R})$ ili $\mathcal{C} = C_{t_0}(K, \mathbb{R})$ za neku točku $t_0 \in K$. U prvom slučaju je $\mathcal{B} = C(K)$, a u drugom $\mathcal{B} = C_{t_0}(K)$.

Zadatak 2.4.2. *Neka je $\mathcal{A}$ Banachova algebra svih neprekidnih funkcija $x : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ koje su periodičke s periodom 2π. Operacije u $\mathcal{A}$ definirane su po točkama*

$$(x + y)(t) = x(t) + y(t), \qquad (\lambda x)(t) = \lambda x(t), \qquad (xy)(t) = x(t)y(t), \qquad x, y \in \mathcal{A}, \quad \lambda \in \mathbb{C},$$

a norma je maksimum norma

$$\|x\| = \max\{|x(t)|;\ t \in \mathbb{R}\}, \qquad x \in \mathcal{A}.$$

Neka je $\mathcal{B}$ skup svih tzv. Fourierovih polinoma, tj. svih funkcija $x : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ oblika

$$x(t) = \sum_{k=m}^{n} \alpha_k e^{ikt}, \qquad m, n \in \mathbb{Z}, \quad m \leq n, \quad \alpha_k \in \mathbb{C}.$$

Dokažite da je $\mathcal{B}$ gusto u $\mathcal{A}$.

2.5 Funkcionalni račun u C^*-algebrama

Teorem 2.5.1. *Neka je $\mathcal{A}$ komutativna C^*-algebra. Ako je algebra $\mathcal{A}$ unitalna, Geljfandova transformacija je izometrički $*-$izomorfizam sa $\mathcal{A}$ na $C(X(\mathcal{A}))$. Ako je $\mathcal{A}$ neunitalna, Geljfandova transformacija je izometrički $*-$izomorfizam sa $\mathcal{A}$ na $C_0(X(\mathcal{A}))$.*

Dokaz: Pretpostavimo najprije da je $\mathcal{A}$ unitalna. Neka je $x \in \mathcal{A}$ hermitski element. Za $\chi \in X(\mathcal{A})$ je prema teoremu 2.1.3. i prema tvrdnji (a) propozicije 1.4.2.

$$\hat{x}(\chi) = \chi(x) \in \sigma(x) \subseteq \mathbb{R}.$$

Dakle, ako je $x \in \mathcal{A}$ hermitski, funkcija $\hat{x}$ je realna.

Proizvoljan element $x \in \mathcal{A}$ može se napisati u obliku $x = x_1 + ix_2$ pri čemu su x_1 i x_2 hermitski. Doista, to je ispunjeno za

$$x_1 = \frac{1}{2}(x + x^*) \qquad \text{i} \qquad x_2 = \frac{1}{2i}(x - x^*).$$

Tada imamo $x^* = x_1 - ix_2$, pa nalazimo za svaki $\chi \in X(\mathcal{A})$

$$(x^*)\hat{}(\chi) = \hat{x}_1(\chi) - i\hat{x}_2(\chi) = \overline{\hat{x}_1(\chi) + i\hat{x}_2(\chi)} = \overline{\hat{x}(\chi)}.$$

To pokazuje da je Geljfandova transformacija $*-$homomorfizam C^*-algebre $\mathcal{A}$ u C^*-algebru $C(X(\mathcal{A}))$.

Neka su $\chi, \kappa \in X(\mathcal{A})$, $\chi \neq \kappa$. Tada postoji $x \in \mathcal{A}$ takav da je $\chi(x) \neq \kappa(x)$. To znači da je $\hat{x}(\chi) \neq \hat{x}(\kappa)$, pa zaključujemo da podalgebra $\hat{\mathcal{A}}$ od $C(X(\mathcal{A}))$ razdvaja točke od $X(\mathcal{A})$. Nadalje, za svaki $\chi \in X(\mathcal{A})$ je $\chi(e) = 1$, odnosno $\hat{e}(\chi) = 1 \neq 0$. Prema teoremu 2.4.5. podalgebra $\hat{\mathcal{A}}$ je gusta u $C(X(\mathcal{A}))$.

Treba još dokazati da je $x \mapsto \hat{x}$ izometrija. Tada će slijediti da je $\hat{\mathcal{A}}$ zatvorena u $C(X(\mathcal{A}))$, dakle $\hat{\mathcal{A}} = C(X(\mathcal{A}))$.

Za hermitski element $y \in \mathcal{A}$ je $\|y^2\| = \|y^*y\| = \|y\|^2$. Odatle indukcijom nalazimo da je

$$\|y\| = \left\|y^{2^n}\right\|^{\frac{1}{2^n}} \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Prijelazom na limes $n \to \infty$ dobivamo $\|y\| = \nu(y)$. Po tvrdnji (b) teorema 1.2.9. i po teoremu 2.1.3. imamo redom

$$\|y\| = \nu(y) = \max\{|\lambda|;\ \lambda \in \sigma(y)\} = \max\{|\chi(y)|;\ \chi \in X(\mathcal{A})\} = \max\{|\hat{y}(\chi)|;\ \chi \in X(\mathcal{A})\} = \|\hat{y}\|_\infty.$$

Ako je $x \in \mathcal{A}$ proizvoljan, onda je $y = x^*x$ hermitski, pa slijedi

$$\|x\|^2 = \|x^*x\| = \|(x^*x)\hat{}\|_\infty = \|(x^*)\hat{}\hat{x}\|_\infty = \|\overline{\hat{x}}\hat{x}\|_\infty = \|\hat{x}\|_\infty^2.$$

Time je teorem dokazan ako C^*-algebra $\mathcal{A}$ ima jedinicu.

Pretpostavimo sada da je $\mathcal{A}$ neunitalna. Prema teoremu 1.4.3. norma na $\mathcal{A}$ može se proširiti do norme na algebri $\tilde{\mathcal{A}}$, dobivenoj iz $\mathcal{A}$ unitalizacijom, na način da $\tilde{\mathcal{A}}$ postane C^*-algebra. Prema prvom dijelu dokaza Geljfandova transformacija je izometrički $*-$izomorfizam algebre $\tilde{\mathcal{A}}$ na algebru $C(X(\tilde{\mathcal{A}}))$. Označimo sa χ_0 jedini karakter algebre $\tilde{\mathcal{A}}$ koji je trivijalan na $\mathcal{A}$:

$$\chi_0(y + \lambda e) = \lambda, \qquad y \in \mathcal{A}, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Restrikcija $\chi \mapsto \chi|\mathcal{A}$ je bijekcija sa $X(\tilde{\mathcal{A}}) \setminus \{\chi_0\}$ na $X(\mathcal{A})$. Pomoću te bijekcije identificiramo $X(\tilde{\mathcal{A}}) \setminus \{\chi_0\}$ sa $X(\mathcal{A})$. Sada se algebra $C_0(X(\mathcal{A}))$ može identificirati s idealom

$$C_{\chi_0}(X(\tilde{\mathcal{A}})) = \{f \in C(X(\tilde{\mathcal{A}}));\ f(\chi_0) = 0\}$$

u algebri $C(X(\tilde{\mathcal{A}}))$. Identifikacija se dobiva pomoću restrikcije $f \mapsto f|X(\mathcal{A})$ koja je bijekcija sa $C_{\chi_0}(X(\tilde{\mathcal{A}}))$ na $C_0(X(\mathcal{A}))$.

Uz ove identifikacije Geljfandova transformacija algebre $\tilde{\mathcal{A}}$ je restrikcija Geljfandove transformacije algebre $\tilde{\mathcal{A}}$. Prema tome, to je izometrički $*-$homomorfizam algebre $\mathcal{A}$ u algebru $C(X(\tilde{\mathcal{A}}))$. Kako je $\hat{x}(\chi_0) = \chi_0(x) = 0$ za svaki $x \in \mathcal{A}$, slika algebre $\mathcal{A}$ pri Geljfandovoj transformaciji sadržana je u $C_{\chi_0}(X(\tilde{\mathcal{A}}))$ odnosno u $C_0(X(\mathcal{A}))$. Budući da je kodimenzija $\mathcal{A}$ u $\tilde{\mathcal{A}}$ jednaka 1, kodimenzija njene slike u slici od $\tilde{\mathcal{A}}$ također je jednaka 1. Međutim, slika od $\tilde{\mathcal{A}}$ je $C(X(\tilde{\mathcal{A}}))$, pa kako je kodimenzija od $C_0(X(\mathcal{A}))$ u $C(X(\tilde{\mathcal{A}}))$ jednaka 1, slijedi da je slika od $\mathcal{A}$ pri Geljfandovoj transformaciji jednaka $C_0(X(\mathcal{A}))$. Time je dokazana i tvrdnja teorema za slučaj neunitalne C^*-algebre.

Neka je $\mathcal{A}$ C^*-algebra. Za podalgebru $\mathcal{B}$ kažemo da je $*-$**podalgebra** ako je ona invarijantna s obzirom na involuciju, tj. ako vrijedi $x \in \mathcal{B} \ \rightarrow \ x^* \in \mathcal{B}$. Ako je $\mathcal{B}$ zatvorena $*-$podalgebra, zvat ćemo je C^*-**podalgebra**. Ako još k tome algebra $\mathcal{A}$ unitalna i ako je njena jedinicu sadržana u $\mathcal{B}$, kažemo da je $\mathcal{B}$ **unitalna** C^*-**podalgebra**. Očito je presjek bilo koje familije unitalnih C^*-podalgebri ponovno unitalna C^*-podalgebra. Odatle slijedi da za bilo koji podskup $S \subseteq \mathcal{A}$ postoji najmanja unitalna C^*-podalgebra od $\mathcal{A}$ koja sadrži skup S. To je presjek svih C^*-podalgebri koje sadrže skup $S \cup \{e\}$. Za tu se C^*-podalgebru kaže da je **generirana skupom** S. To je zatvarač potprostora razapetog sa $S \cup S^* \cup \{e\}$ i sa svim mogućim produktima elemenata iz $S \cup S^*$.

Razmotrimo sada posebno komutativne C^*-algebre generirane s jednim elementom. Ako je $\mathcal{A}$ komutativna C^*-algebra generirana elementom $x \in \mathcal{A}$, onda je i $x^* \in \mathcal{A}$ pa je zbog komutativnosti algebre $\mathcal{A}$ element x normalan. Ako je $\mathcal{A}$ bilo koja unitalna C^*-algebra i ako je $x \in \mathcal{A}$ normalan element, unitalna C^*-podalgebra od $\mathcal{A}$ generirana elementom x je očito zatvarač potprostora razapetog s jedinicom, sa x, sa x^* i sa svim produktima koji se mogu formirati od elemenata x i x^*. Budući da x i x^* komutiraju ta je podalgebra zatvarač potprostora razapetog sa $\{x^n x^{*m};\ n, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$. Taj je potprostor upravo skup svih polinoma u dvije varijable od x i x^*. Dakle, unitalna C^*-podalgebra od $\mathcal{A}$ generirana normalnim elementom $x \in \mathcal{A}$ je zatvarač od

$$\{P(x, x^*);\ P \in \mathbb{C}[T_1, T_2]\}$$

Teorem 2.5.2. *Neka je $\mathcal{A}$ komutativna unitalna C^*-algebra generirana jednim elementom x. Tada je $\hat{x}$ homeomorfizam sa $X(\mathcal{A})$ na $\sigma(x)$.*

Dokaz: Znamo da je $\hat{x}$ neprekidno preslikavanje sa $X(\mathcal{A})$ u $\mathbb{C}$. Nadalje, prema teoremu 2.1.3. slika tog preslikavanja je $\sigma(x)$. Prema tome, $\hat{x}$ je neprekidna surjekcija sa $X(\mathcal{A})$ na $\sigma(x)$. Budući da su i $X(\mathcal{A})$ i $\sigma(x)$ kompaktni, i budući da je svaka bijekcija između dva komaktna Hausdorffova topološka prostora homeomorfizam, teorem će biti dokazan ako pokažemo da je $\hat{x}$ injekcija.

Neka su $\chi, \kappa \in X(\mathcal{A})$ takvi da je $\hat{x}(\chi) = \hat{x}(\kappa)$, tj. $\chi(x) = \kappa(x)$. Iz dijela dokaza teorema 2.5.1. slijedi da je tada

$$\chi(x^*) = \overline{\chi(x)} = \overline{\kappa(x)} = \kappa(x^*).$$

Kako su χ i κ homomorfizmi algebre $\mathcal{A}$ u $\mathbb{C}$, imamo

$$\chi(P(x, x^*)) = \kappa(P(x, x^*)) \qquad \forall P \in \mathbb{C}[T_1, T_2],$$

dakle, χ i κ se podudaraju na skupu $\{P(x, x^*);\ P \in \mathbb{C}[T_1, T_2]\}$. Međutim, taj je skup gust u $\mathcal{A}$ i homomorfizmi χ i κ su neprekidni, pa slijedi $\chi = \kappa$. Time je dokazana injektivnost preslikavanja $\hat{x}$.

Zadatak 2.5.1. *Neka je $\mathcal{A}$ komutativna unitalna C^*-algebra generirana jednim elementom x. Dokažite da za svaki $\lambda \in \sigma(x)$ postoji jedinstven $\chi_\lambda \in X(\mathcal{A})$ takav da je $\chi_\lambda(x) = \lambda$ i da je $\lambda \mapsto \chi_\lambda$ homeomorfizam sa $\sigma(x)$ na $X(\mathcal{A})$.*

Neka je sada $\mathcal{A}$ proizvoljna (ne nužno komutativna) unitalna C^*-algebra (npr. $B(\mathcal{H})$ za neki Hilbertov prostor $\mathcal{H}$). Neka je $x \in \mathcal{A}$ normalan element. C^*-podalgebra od $\mathcal{A}$ generirana sa x je zatvarač podalgebre svih polinoma $P(x, x^*)$ od x i x^*. Označimo je sa $\mathcal{B}$. Kako je x normalan algebra $\mathcal{B}$ je komutativna. Teoremi 2.5.1. i 2.5.2. pokazuju da Geljfandova transformacija daje izometrički $*-$izomorfizam sa $\mathcal{B}$ na $C(\sigma_{\mathcal{B}}(x))$. Posebno, za svaku funkciju $f \in C(\sigma_{\mathcal{B}}(x))$ postoji jedinstven $y \in \mathcal{B}$ kojeg Geljfandova transformacija preslikava u funkciju f. Taj ćemo element označiti sa $f(x)$. Pridruživanje $f \mapsto f(x)$ zove se **funkcionalni račun** u C^*-algebri $\mathcal{A}$ za normalni element x. Uz oznaku iz zadatka 2.5.1. je

$$f(x)\hat{}(\chi_\lambda) = f(\lambda), \qquad f \in C(\sigma_{\mathcal{B}}(x)), \ \ \lambda \in \sigma_{\mathcal{B}}(x).$$

Sljedeći teorem nabraja svojstva funkcionalnog računa i dokazuje se direktnim i jednostavnim računanjem:

Teorem 2.5.3. *Neka je $\mathcal{A}$ unitalna C^*-algebra i neka je element $x \in \mathcal{A}$ normalan. Neka je $\mathcal{B}$ unitalna C^*-podalgebra od $\mathcal{A}$ generirana elementom x i neka su $f, g \in C(\sigma_{\mathcal{B}}(x))$. Tada vrijedi:*

(a) *Ako je $f(\lambda) = 1 \ \forall \lambda \in \sigma_{\mathcal{B}}(x)$, onda je $f(x) = e$.*

(b) *Ako je $f(\lambda) = \lambda \ \forall \lambda \in \sigma_{\mathcal{B}}(x)$, onda je $f(x) = x$.*

(c) *Ako je $f(\lambda) = \overline{\lambda} \ \forall \lambda \in \sigma_{\mathcal{B}}(x)$, onda je $f(x) = x^*$.*

(d) *$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$.*

(e) *$(f \cdot g)(x) = f(x)g(x)$.*

Zadatak 2.5.2. *Dokažite teorem 2.5.3.*

U ovim razmatranjima i u tvrdnjama teorema 2.5.3. postoji jedna smetnja. Naime, pojavljuje se spektar $\sigma_{\mathcal{B}}(x)$ normalnog elementa x u podalgebri $\mathcal{B}$ a sve bi bilo ljepše i jednostavnije kad bi se konstrukcija i sve tvrdnje odnosile na spektar elementa x u čitavoj algebri $\mathcal{A}$. Teorija je značajna upravo zato jer se pokazuje da je za svaki x spektar $\sigma_{\mathcal{B}}(x)$ elementa x u podalgebri $\mathcal{B}$ jednak spektru $\sigma(x) = \sigma_{\mathcal{A}}(x)$ od x u algebri $\mathcal{A}$. Da bismo to dokazali, potrebna su nam još neka razmatranja iz opće teorije Banachovih algebri, koja se nadovezuju na rezultate iz poglavlja 2.

Neka je $\mathcal{A}$ algebra i neka je $x \in \mathcal{A}$. Element x zove se **lijevi** (odnosno, **desni**) **divizor nule** u algebri $\mathcal{A}$, ako postoji $y \in \mathcal{A}$, $y \neq 0$, takav da je $xy = 0$ (odnosno, $yx = 0$). Ako je algebra $\mathcal{A}$ normirana, x se zove **topološki lijevi** (odnosno, **desni**) **divizor nule** u algebri $\mathcal{A}$, ako postoji niz $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ u $\mathcal{A}$ takav da je $\|z_n\| = 1 \ \forall n \in \mathbb{N}$ i da je $\lim_{n\to\infty} xz_n = 0$ (odnosno, $\lim_{n\to\infty} z_n x = 0$). Svaki lijevi (odnosno, desni) divizor nule je i topološki lijevi (odnosno, desni) divizor nule; da se u to uvjerimo treba samo staviti $z_n = \frac{1}{\|y\|} y \ \forall n \in \mathbb{N}$.

Ako je x lijevi (odnosno, desni) divizor nule u $\mathcal{A}$, onda očito x nije lijevoinvertibilan (odnosno, desnoinvertibilan). Isto vrijedi i za topološke divizore nule. Doista, neka su $z_n \in \mathcal{A}$ takvi da je $\|z_n\| = 1 \ \forall n \in \mathbb{N}$ i da je $\lim_n xz_n = 0$. Pretpostavimo da je $y \in \mathcal{A}$ takav da je $yx = e$. Tada slijedi

$$0 = y \cdot \lim_{n\to\infty} xz_n = \lim_{n\to\infty} yxz_n = \lim_{n\to\infty} z_n,$$

a to je nespojivo sa $\|z_n\| = 1 \ \forall n \in \mathbb{N}$.

Lema 2.5.4. *Neka je $\mathcal{A}$ unitalna Banachova algebra i $x \in \mathcal{A}$ element koji nije lijevoinvertibilan (odnosno, desnoinvertibilan), ali koji je limes niza (x_n) elemenata koji su lijevoinvertibilni (odnosno, desnoinvertibilni). Tada je x topološki desni (odnosno, lijevi) divizor nule.*

Dokaz: Dokazujemo tvrdnju bez zagrada; ona druga dokazuje se sasvim analogno. Neka je $y_n \in \mathcal{A}$ lijevi invers od x_n. Sada iz tvrdnje (b) teorema 1.2.5. slijedi da niz brojeva $(\|y_n\|)$ nije ograničen. Prešavši na podnizove koje ponovno označimo sa (x_n) i (y_n) možemo pretpostaviti da je

$$\lim_{n\to\infty} \|y_n\| = +\infty.$$

Stavimo

$$z_n = \frac{1}{\|y_n\|} y_n \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Tada je $\|z_n\| = 1$ za svaki n. Imamo

$$\lim_{n\to\infty} z_n x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\|y_n\|} y_n x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\|y_n\|} e = 0.$$

S druge strane, budući da elementi z_n imaju normu 1 imamo

$$\|z_n(x - x_n)\| \le \|x - x_n\| \qquad \forall n \in \mathbb{N},$$

a kako je $x = \lim_{n\to\infty} x_n$ iz gornje nejednakosti slijedi da je

$$\lim_{n\to\infty} z_n(x - x_n) = 0.$$

Prema tome,

$$0 = \lim_{n\to\infty} z_n x_n + \lim_{n\to\infty} z_n(x - x_n) = \lim_{n\to\infty} z_n x.$$

Dakle, x je topološki desni divizor nule.

Teorem 2.5.5. *Neka je $\mathcal{A}$ unitalna Banachova algebra, $\mathcal{B}$ zatvorena unitalna podalgebra i $x \in \mathcal{B}$. Tada je*

$$\sigma_{\mathcal{A}}(x) \subseteq \sigma_{\mathcal{B}}(x) \qquad i \qquad \partial\sigma_{\mathcal{B}}(x) \subseteq \partial\sigma_{\mathcal{A}}(x).$$

Pri tome je ∂S oznaka za rub skupa $S \subseteq \mathbb{C}$, tj. $\partial S = Cl(S) \cap Cl(\mathbb{C} \setminus S)$.

Dokaz: Za $\lambda \in \sigma_{\mathcal{A}}(x)$ element $\lambda e - x$ nije invertibilan u $\mathcal{A}$, pa pogotovo nije invertibilan u $\mathcal{B}$. Dakle, $\lambda \in \sigma_{\mathcal{B}}(x)$. Time je dokazana inkluzija $\sigma_{\mathcal{A}}(x) \subseteq \sigma_{\mathcal{B}}(x)$.

Neka je $\lambda \in \partial\sigma_{\mathcal{B}}(x)$. Tada postoji niz $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ u $\mathbb{C} \setminus \sigma_{\mathcal{B}}(x)$ koji konverira prema λ. Elementi $\lambda_n e - x$ su invertibilni u $\mathcal{B}$ i konvergiraju prema $\lambda e - x$ koji nije invertibilan u $\mathcal{B}$, dakle ili nije lijevoinvertibilan u $\mathcal{B}$ ili nije desnoinvertibilan u $\mathcal{B}$. Prema lemi 2.5.4. $\lambda e - x$ je topološki ili desni ili lijevi divizor nule u $\mathcal{B}$, dakle i u $\mathcal{A}$. Posebno, $\lambda e - x$ nije invertibilan u $\mathcal{A}$, a to znači da je $\lambda \in \sigma_{\mathcal{A}}(x)$. Budući da je $\sigma_{\mathcal{A}}(x) \subseteq \sigma_{\mathcal{B}}(x)$, λ ne može biti unutarnja točka od $\sigma_{\mathcal{A}}(x)$, pa slijedi $\lambda \in \partial\sigma_{\mathcal{A}}(x)$. Time je dokazana i inkluzija $\partial\sigma_{\mathcal{B}}(x) \subseteq \partial\sigma_{\mathcal{A}}(x)$.

Teorem 2.5.6. *Neka je $\mathcal{A}$ unitalna C^*-algebra, $\mathcal{B}$ unitalna C^*-podalgebra i $x \in \mathcal{B}$. Tada je $\sigma_{\mathcal{B}}(x) = \sigma_{\mathcal{A}}(x)$.*

Dokaz: Ako je $x \in \mathcal{B}$ hermitski, prema tvrdnji (a) propozicije 1.4.2. je $\sigma_{\mathcal{B}}(x) \subseteq \mathbb{R}$ i $\sigma_{\mathcal{A}}(x) \subseteq \mathbb{R}$. Stoga je $\partial\sigma_{\mathcal{B}}(x) = \sigma_{\mathcal{B}}(x)$ i $\partial\sigma_{\mathcal{A}}(x) = \sigma_{\mathcal{A}}(x)$. Zbog teorema 2.5.5. odatle slijedi $\sigma_{\mathcal{B}}(x) = \sigma_{\mathcal{A}}(x)$. Posebno, vrijedi

$$0 \notin \sigma_{\mathcal{B}}(x) \qquad \Longleftrightarrow \qquad 0 \notin \sigma_{\mathcal{A}}(x),$$

dakle, hermitski element $x \in \mathcal{B}$ je invertibilan u $\mathcal{B}$ ako i samo ako je on invertibilan u $\mathcal{A}$. Dokazat ćemo sada da ta ekvivalencija vrijedi za svaki a ne samo za hermitski element $x \in \mathcal{B}$.

Ako je $x \in \mathcal{B}$ invertibilan u $\mathcal{B}$ očito je x invertibilan i u $\mathcal{A}$. Pretpostavimo sada da je $x \in \mathcal{B}$ invertibilan u $\mathcal{A}$. Tada je i x^* invertibilan u $\mathcal{A}$, pa su x^*x i xx^* invertibilni u $\mathcal{A}$. Međutim, elementi x^*x i xx^* su hermitski, pa su prema dokazanom oni invertibilni u $\mathcal{B}$. Neka su y i z njihovi inversi u $\mathcal{B}$. Tada je $yx^*x = e$, pa slijedi da je x lijevoinvertibilan u $\mathcal{B}$. Nadalje, iz $xx^*z = e$ slijedi da je x i desnoinvertibilan u $\mathcal{B}$. To pokazuje da je x invertibilan u $\mathcal{B}$.

Sada za svaki $\lambda \in \mathbb{C}$ i svaki $x \in \mathcal{B}$ imamo

$$\lambda e - x \text{ nije invertibilan u } \mathcal{B} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \lambda e - x \text{ nije invertibilan u } \mathcal{A}.$$

To znači da vrijedi

$$\lambda \in \sigma_{\mathcal{B}}(x) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \lambda \in \sigma_{\mathcal{A}}(x).$$

Time je dokazana jednakost $\sigma_{\mathcal{B}}(x) = \sigma_{\mathcal{A}}(x)$.

Prema teoremima 2.5.1., 2.5.2., 2.5.3. i 2.5.6. za svaki normalan element x unitalne C^*-algebre $\mathcal{A}$ postoji jedinstven izometrički $*-$homomorfizam $f \mapsto f(x)$ sa C^*-algebre $C(\sigma(x))$ u C^*-algebru $\mathcal{A}$ takav da je $\mathrm{id}_{\sigma(x)}(x) = x$. Pri tome $\mathrm{id}_{\sigma(x)} \in C(\sigma(x))$ označava identitetu na $\sigma(x)$:

$$\mathrm{id}_{\sigma(x)}(\lambda) = \lambda \qquad \forall \lambda \in \sigma(x).$$

Teorem 2.5.7. *Neka je $\mathcal{A}$ unitalna C^*-algebra i $x \in \mathcal{A}$ normalan element. Tada je*

$$\sigma(f(x)) = f(\sigma(x)) = \{f(\lambda));\ \lambda \in \sigma(x)\} \qquad \forall f \in C(\sigma(x)).$$

Dokaz: Neka je $\mathcal{B}$ unitalna C^*-podalgebra generirana elementom x. Neka je $\lambda \in \sigma(x)$. Neka je $g \in C(\sigma(x))$ definirana sa

$$g(\mu) = f(\lambda) - f(\mu), \qquad \mu \in \sigma(x).$$

Tada je $g(\lambda) = 0$, dakle funkcija g nalazi se u idealu

$$C_\lambda(\sigma(x)) = \{h \in C(\sigma(x));\ h(\lambda) = 0\}$$

algebre $C(\sigma(x))$. No to znači da element g algebre $C(\sigma(x))$ nije invertibilan. Slijedi da ni njegova slika $g(x)$ u algebri $\mathcal{B}$ nije invertibilna. Dakle, $0 \in \sigma_{\mathcal{B}}(g(x))$, a po teoremu 2.5.6. to znači da je $0 \in \sigma_{\mathcal{A}}(g(x)) = \sigma(g(x))$, tj. $g(x)$ nije invertibilan u algebri $\mathcal{A}$. Međutim, $g(x) = f(\lambda)e - f(x)$. Dakle, $f(\lambda) \in \sigma(f(x))$. Time je dokazana inkluzija $f(\sigma(x)) \subseteq \sigma(f(x))$.

Dokažimo i obrnutu inkluziju. Neka je $\alpha \in \sigma(f(x))$, tj. $\alpha e - f(x)$ nije invertibilan u algebri $\mathcal{A}$, dakle ni u algebri $\mathcal{B}$. Neka je $g \in C(\sigma(x))$ definirana sa $g(\mu) = \alpha - f(\mu)$. Tada je $g(x) = \alpha e - f(x)$. To znači da element g algebre $C(\sigma(x))$ nije invertibilan, odnosno, postoji $\lambda \in \sigma(x)$ takav da je $g(\lambda) = 0$. Tada je $\alpha - f(\lambda) = 0$, tj. $\alpha = f(\lambda)$. Time je dokazana i obrnuta inkluzija $\sigma(f(x)) \subseteq f(\sigma(x))$.

Promatrajmo sada neunitalnu C^*-algebru $\mathcal{A}$ i neka je $\tilde{\mathcal{A}}$ njena unitalizacija. Neka je e jedinica u algebri $\tilde{\mathcal{A}}$. Kao obično identificiramo algebru $\mathcal{A}$ s obostranim idealom u $\tilde{\mathcal{A}}$, tako da je $\tilde{\mathcal{A}} = \mathcal{A} \dotplus \mathbb{C}e$. Naravno, ako je x normalni element C^*-algebre $\mathcal{A}$ funkcionalni račun provediv je u $\tilde{\mathcal{A}}$: preko Geljfandove transformacije dolazimo do izometričkog $*-$izomorfizma $\varphi \mapsto \varphi(x)$ sa C^*-algebre $C(\sigma'(x))$ na unitalnu C^*-podalgebru $C^*(x, e)$ od $\tilde{\mathcal{A}}$ generiranu elementom x. Pri tome je kao u odjeljku 1.1. sa $\sigma'(x)$ označen spektar $\sigma_{\tilde{\mathcal{A}}}(x)$ elementa $x \in \mathcal{A}$ u unitalizaciji $\tilde{\mathcal{A}}$. Naravno, $x \in \mathcal{A}$ nije invertibilan u $\tilde{\mathcal{A}}$, tj. $0 \in \sigma'(x)\ \forall x \in \mathcal{A}$. Funkcionalni račun za normalni element $x \in \mathcal{A}$ može se provoditi potpuno unutar algebre $\mathcal{A}$ ako se ograničimo na funkcije φ sa svojstvom $\varphi(0) = 0$:

Teorem 2.5.8. *Neka je $\mathcal{A}$ neunitalna C^*-algebra i neka je $x \in \mathcal{A}$ normalni element. Za $\varphi \in C(\sigma'(x))$ vrijedi $\varphi(x) \in \mathcal{A}$ ako i samo ako je $\varphi(0) = 0$. Dakle, $\varphi \mapsto \varphi(x)$ je izometrički $*-$izomorfizam sa C^*-algebre*

$$C_0(\sigma'(x)) = \{\varphi \in C(\sigma'(x));\ \varphi(0) = 0\}$$

na C^*-podalgebru $C^*(x)$ od $\mathcal{A}$ generiranu elementom x. Pri tome je $C^*(x) = C^*(x,e) \cap \mathcal{A}$ i $C^*(x,e) = C^*(x) \dotplus \mathbb{C}e$ se prirodno identificira s unitalizacijom od $C^*(x)$.

Dokaz: Sve tvrdnje slijede iz činjenice da je $C^*(x)$ zatvarač podalgebre generirane sa x i x^*, tj. zatvarač potprostora razapetog sa $\{x^k\,(x^*)^\ell;\ k,\ell \in \mathbb{Z}_+,\ k+\ell > 0\}$. Doista, odatle se vidi da je $C^*(x) = C^*(x,e)$ i da je $C^*(x,e) = C^*(x) \dotplus \mathbb{C}e$. Nadalje, ako je $\varphi \in C_0(\sigma'(x))$ onda se φ može na $\sigma'(x)$ uniformno aproksimirati funkcijama oblika $\lambda \mapsto P(\lambda, \overline{\lambda}),\ \lambda \in \sigma'(x)$, gdje je $P \in \mathbb{C}[X,Y]$ polinom u dvije varijable takav da je $P(0,0) = 0$, tj. linearna kombinacija monoma oblika X^kY^ℓ, $k,\ell \in \mathbb{Z}_+$, $k+\ell > 0$. Odatle slijedi da je $\varphi(x)$ limes niza elemenata iz $C^*(x)$, dakle, $\varphi(x) \in C^*(x)$. Napokon, neka je $\varphi \in C(\sigma'(x))$ takva da je $\varphi(x) \in \mathcal{A}$. Neka je $\psi = \varphi - \varphi(0) \in C_0(\sigma'(x))$. Tada je $\varphi(x) = \psi(x) + \varphi(0)e$ i $\psi(x) \in C^*(x) \subseteq \mathcal{A}$, dakle, $\varphi(0)e = \varphi(x) - \psi(x) \in \mathcal{A} \cap \mathbb{C}e = \{0\}$, pa slijedi $\varphi(0) = 0$.

Poglavlje 3

Kompaktni operatori na Hilbertovim prostorima

3.1 Kompaktni operatori na normiranim prostorima

Neka je X normiran prostor. Primijetimo da je tada X i metrički prostor uz metriku zadanu sa $d(x,y) = \|x-y\|$. Neka je S podskup prostora X. **Otvoren pokrivač** od S je familija $\{U_\alpha;\ \alpha \in \mathcal{A}\}$ otvorenih podskupova $U_\alpha \subseteq X$, takvih da je

$$S \subseteq \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} U_\alpha.$$

Skup S zove se **kompaktan**, ako za svaki otvoren pokrivač $\{U_\alpha;\ \alpha \in \mathcal{A}\}$ od S postoji konačno mnogo indeksa $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathcal{A}$ takvih da je $\{U_{\alpha_1}, U_{\alpha_2}, \dots, U_{\alpha_n}\}$ pokrivač od S :

$$S \subseteq U_{\alpha_1} \cup U_{\alpha_2} \cup \cdots \cup U_{\alpha_n}.$$

Drugim riječima, skup S je kompaktan ako svaki njegov otvoren pokrivač ima konačan potpokrivač. Iz teorije metričkih prostora znamo da je S kompaktan ako i samo ako svaki niz u S ima konvergentan podniz čiji je limes u S.

Skup $S \subseteq X$ zove se **relativno kompaktan** ako svaki niz u S ima konvergentan podniz (bez zahtjeva da je limes tog podniza u S). Dakle, skup S je relativno kompaktan ako i samo ako je njegov zatvarač $\mathrm{Cl}(S)$ kompaktan.

Zadatak 3.1.1. *Dokažite da je podskup S Banachovog prostora X relativno kompaktan ako i samo ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji konačna $\varepsilon-$mreža skupa S. Pri tome je* **konačna $\varepsilon-$mreža** *skup $\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subseteq S$ takav da je*

$$S \subseteq K(x_1, \varepsilon) \cup K(x_2, \varepsilon) \cup \cdots \cup K(x_n, \varepsilon).$$

Iz zadatka 3.1.1. slijedi da je svaki relativno kompaktan skup ograničen.

Ako je normiran prostor X konačnodimenzionalan, njegov je podskup S relativno kompaktan ako i samo ako je ograničen, a kompaktan ako i samo ako je ograničen i zatvoren. Posebno svaka **zatvorena kugla**

$$\overline{K}(x_0, r) = \{x \in X;\ \|x - x_0\| \le r\}$$

je kompaktan podskup od X. Isto vrijedi i za svaku **sferu**

$$S(x_o, r) = \{x \in X;\ \|x - x_0\| = r\}.$$

Otvorene kugle u konačnodimenzionalnom normiranom prostoru su relativno kompaktni skupovi. Sljedeći teorem govori da to ne vrijedi u beskonačnodimenzionalnim prostorima.

Teorem 3.1.1. *Neka je X beskonačnodimenzionalan normiran prostor i neka su $x_0 \in X$ i $r > 0$. Tada niti zatvorena kugla $\overline{K}(x_0, r)$ niti otvorena kugla $K(x_0, r)$ niti sfera $S(x_0, r)$ nisu relativno kompaktni skupovi.*

Za dokaz teorema 3.1.1. treba nam sljedeća lema:

Lema 3.1.2. (**F. Riesz**) *Neka je X normiran prostor, $Y \neq X$ njegov zatvoren potprostor i $\varepsilon > 0$. Postoji vektor $x(\varepsilon) \in X$ takav da je $\|x(\varepsilon)\| = 1$ i $d(x(\varepsilon), Y) \geq 1 - \varepsilon$. Ako je potprostor Y konačnodimenzionalan, postoji vektor $x_0 \in X$ takav da je $\|x_0\| = 1$ i $d(x_0, Y) = 1$.*

Pri tome, za podskup S normiranog prostora X i za vektor $x \in X$ sa $d(x, S)$ označavamo udaljenost vektora x od skupa S :

$$d(x, S) = \inf\{\|x - y\|;\, y \in S\}.$$

Lako se vidi da je $d(x, S) = 0$ ako i samo ako je $x \in \mathrm{Cl}(S)$. Ako je prostor X unitaran, Y njegov potprostor i x_0 jedinični vektor okomit na potprostor Y, onda za svaki $y \in Y$ imamo:

$$\|x_0 - y\|^2 = \|x_0\|^2 + \|y\|^2 = 1 + \|y\|^2 \geq 1,$$

pa zbog $0 \in Y$ slijedi $d(x_0, Y) = 1$. Zbog toga, iako u normiranom prostoru nije definiran pojam okomitosti, vektor $x(\varepsilon)$ iz leme 3.1.2. možemo shvaćati kao vektor koji je ″približno okomit″ na potprostor Y.

Dokaz leme 3.1.2: Neka je $\varepsilon > 0$. Možemo pretpostavljati da je $\varepsilon < 1$. Označimo sa δ pozitivan broj $\dfrac{\varepsilon}{1-\varepsilon}$. Neka je z bilo koji vektor iz X koji nije u potprostoru Y. Stavimo $d = d(z, Y)$. Primijetimo da je $d > 0$ jer je potprostor Y zatvoren i $z \notin Y$. Kako je $d + d\delta > d$, postoji $y_0 \in Y$ takav da je $d \leq \|z - y_0\| \leq d + d\delta$. Neka je $x(\varepsilon)$ jedinični vektor u smjeru $z - y_0$:

$$x(\varepsilon) = \frac{1}{\|z - y_0\|}(z - y_0).$$

Tada za svaki $y \in Y$ imamo redom:

$$\|x(\varepsilon) - y\| = \frac{1}{\|z - y_0\|} \cdot \|z - (y_0 + \|z - y_0\|y)\| \geq \frac{d}{\|z - y_0\|} \geq \frac{d}{d + d\delta} = \frac{1}{1+\delta} = 1 - \varepsilon.$$

Kako to vrijedi za svaki vektor $y \in Y$ slijedi $d(x(\varepsilon), Y) \geq 1 - \varepsilon$.

Pretpostavimo sada da je potprostor Y konačnodimenzionalan. Za izabrani vektor $z \in X \setminus Y$ i potprostor $Z = [Y \cup \{z\}] = Y \dotplus [\{z\}]$ je konačnodimenzionalan. Primijenimo sada dokazano na prostor Z, njegov potprostor Y i $\varepsilon = \frac{1}{n}$ $(n \in \mathbb{N})$. Zaključujemo da za svaki prirodan broj n postoji jedinični vektor x_n u konačnodimenzionalnom prostoru Z takav da je $d(x_n, Y) \geq 1 - \frac{1}{n}$. No zatvorena jedinična kugla u konačnodimenzionalnom prostoru Z je kompaktan skup, pa postoji konvergentan podniz (x_{n_k}) niza (x_n). Neka je $x_0 = \lim_{k\to\infty} x_{n_k}$. Tada je vektor x_0 jedinični. Nadalje, za svaki $k \in \mathbb{N}$ i za svaki vektor $y \in Y$ imamo

$$\|x_{n_k} - y\| \geq 1 - \frac{1}{n_k}.$$

Pustiši da k teži u ∞ odatle dobivamo $\|x_0 - y\| \geq 1$. Stoga vrijedi $d(x,Y) \geq 1$. S druge strane, kako je vektor x_0 jedinični i $0 \in Y$ dobivamo i obrnutu nejednakost:

$$d(x_0, Y) \leq \|x_0 - 0\| = \|x_0\| = 1.$$

Dakle, $d(x_0, Y) = 1$.

Dokaz teorema 3.1.1: Izaberimo jedinični vektor $e_1 \in X$ i stavimo $Y_1 = [\{e_1\}]$. Prema lemi 3.1.2. postoji jedinični vektor $e_2 \in X$ takav da je $d(e_2, Y_1) = 1$. Kako je $e_1 \in Y_2$, imamo $\|e_2 - e_1\| \geq 1$. Primijenimo li sada lemu 3.1.2. na potprostor $Y_2 = [\{e_1, e_2\}]$ zaključujemo da postoji jedinični vektor $e_3 \in X$ takav da je $d(e_3, Y_2) = 1$. Kako su e_1 i e_2 vektori u potprostoru Y_2, slijedi $\|e_3 - e_1\| \geq 1$ i $\|e_3 - e_2\| \geq 1$. Nastavimo na isti način i stavimo $Y_3 = [\{e_1, e_2, e_3\}]$. Primjenom leme 3.1.2. na potprostor Y_3 dolazimo do jediničnog vektora $e_4 \in X$ takvog da je $d(e_4, Y_3) = 1$, dakle $\|e_4 - e_1\| \geq 1$, $\|e_4 - e_2\| \geq 1$ i $\|e_4 - e_3\| \geq 1$. Korak po korak na taj način dolazimo do niza (e_n) jediničnih vektora takvih da je $\|e_m - e_n\| \geq 1$ za $m \neq n$. Taj niz očito nema konvergentan podniz, pa zaključujemo da jedinična sfera $S(0,1)$ sa središtem u nuli nije relativno kompaktan skup. Odatle evidentno slijedi da ni sfera $S(0,r) = rS(0,1) = \{rx;\ x \in S(0,1)\}$ za bilo koji $r > 0$ nije relativno kompaktan skup, pa niti sfera s nekim drugim središtem $S(x_0, r) = x_0 + S(0,r) = \{x_0 + x;\ x \in S(0,r)\}$. Kako svaka kugla (otvorena ili zatvorena) sadrži sfere kao podskupove, ni kugle nisu relativno kompaktni skupovi.

Iz teorema 3.1.1. slijedi da je dobro poznata karakterizacija kompaktnosti za podskupove euklidskog prostora (kompaktnost = ograničenost + zatvorenost) zapravo karakterizacija konačnodimenzionalnosti:

Korolar 3.1.3. (**F. Riesz**) *Normiran prostor je konačnodimenzionalan ako i samo ako je svaki njegov ograničen i zatvoren podskup kompaktan.*

Dokaz: Neka normiran prostor X ima svojstvo da je svaki njegov ograničen i zatvoren podskup kompaktan. Tada X ne može biti beskonačnodimenzionalan, jer bi u protivnom zatvorena kugla $\overline{K}(0,1)$ bila zatvoren i ograničen podskup koji nije relativno kompaktan, dakle ni kompaktan.

Neka su X i Y normirani prostori i $A : X \to Y$ linearan operator. A se zove **kompaktan operator** ako je $A\overline{K}(0,1) = \{Ax;\ x \in X, \|x\| \leq 1\}$ relativno kompaktan podskup od Y. Zbog nizovne karakterizacije relativne kompaktnosti slijedi da je operator A kompaktan ako i samo ako za svaki ograničen niz (x_n) u X niz (Ax_n) u Y ima konvergentan podniz, odnosno, ako i samo ako svaki ograničen niz (x_n) u X ima podniz (x_{n_k}) takav da je niz (Ax_{n_k}) u Y konvergentan.

Skup svih kompaktnih operatora sa X u Y označavat ćemo sa $K(X,Y)$.

Propozicija 3.1.4. *Svaki kompaktan operator je ograničen.*

Dokaz: Neka je $A : X \to Y$ kompaktan operator. Tada je skup $\{Ax;\ x \in X,\ \|x\| \leq 1\}$ relativno kompaktan, dakle i ograničen. Stoga postoji broj $M > 0$ takav da je $\|Ax\| \leq M$ za svaki $x \in X$ takav da je $\|x\| \leq 1$. Ako je sada x bilo koji vektor iz X različit od nule, onda je vektor $\frac{1}{\|x\|}x$ jedinični, pa slijedi

$$\frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \left\| A\Big(\frac{1}{\|x\|}x\Big) \right\| \leq M.$$

Dakle, $\|Ax\| \leq M\|x\|\ \forall x \in X$, odnosno operator A je ograničen. Prema tome, vrijedi $K(X,Y) \subseteq B(X,Y)$.

Teorem 3.1.5. *Neka su X, Y i Z normirani prostori.*

(*a*) *$K(X,Y)$ je potprostor od $B(X,Y)$.*

(*b*) *Za $A \in K(X,Y)$ i $B \in B(Y,Z)$ vrijedi $BA \in K(X,Z)$.*

(*c*) *Za $A \in B(X,Y)$ i $B \in K(Y,Z)$ vrijedi $BA \in K(X,Z)$.*

Dokaz: (a) Neka su $A, B \in K(X, Y)$ i $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Neka je (x_n) ograničen niz u X. Kako je operator A kompaktan, postoji podniz (u_n) niza (x_n) takav da je niz (Au_n) konvergentan. Kako je operator B kompaktan, postoji podniz (z_n) niza (u_n) takav da je niz (Bz_n) konvergentan. Niz (Az_n) je također konvergentan, jer je to podniz konvergentanog niza (Au_n). Stoga je i niz $((\alpha A + \beta B)z_n)$ konvergentan. To pokazuje da je operator $\alpha A + \beta B$ kompaktan, dakle $K(X, Y)$ je potprostor od $B(X, Y)$.

(b) Neka je (x_n) ograničen niz u X. Kako je operator A kompaktan, postoji podniz (u_n) niza (x_n) takav da je niz (Au_n) konvergentan u prostoru Y. Operator B je ograničen, dakle neprekidan, pa on preslikava svaki konvergentan niz u Y u konvergentan niz u Z. Dakle, niz (BAu_n) je konvergentan u prostoru Z. To pokazuje da je $BA \in K(X, Z)$.

(c) Neka je ponovo (x_n) ograničen niz u X. Kako je operator A ograničen, (Ax_n) je ograničen niz u Y. Kako je operator B kompaktan, niz (BAx_n) u prostoru Z ima konvergentan podniz. Dakle, dokazali smo da je i u tom slučaju $BA \in K(X, Z)$.

Teorem 3.1.5. ima sljedeću neposrednu posljedicu:

Korolar 3.1.6. *Ako je X normiran prostor, $K(X)$ je ideal u algebri $B(X)$.*

Teorem 3.1.7. *Neka su X i Y normirani prostori.*

(a) *Ako je ili X ili Y konačnodimenzionalan prostor, onda je $K(X, Y) = B(X, Y)$.*

(b) *Jedinični operator $I = I_X$ je kompaktan ako i samo ako je prostor X konačnodimenzionalan.*

(c) *Ako je prostor X beskonačnodimenzionalan i $A \in K(X)$, onda A nije invertibilan u algebri $B(X)$, tj. ne postoji $B \in B(X)$ takav da je $AB = BA = I$.*

Dokaz: (a) Pretpostavimo prvo da je prostor Y konačnodimenzionalan. Neka je $A \in B(X, Y)$ i neka je K zatvorena jedinična kugla u X. Kako je operator A ograničen to je AK ograničen podskup od Y. U konačnodimenzionalnom normiranom prostoru svaki je ograničen skup relativno kompaktan. Dakle skup AK je relativno kompaktan, što pokazuje da je operator A kompaktan. Kako je $A \in B(X, Y)$ bio proizvoljan, slijedi $B(X, Y) = K(X, Y)$.

Pretpostavimo sada da je prostor X konačnodimenzionalan. Neka je $A \in B(X, Y)$ i neka je (x_n) ograničen niz u X. Tada zbog konačnodimenzionalnosti prostora X niz (x_n) ima konvergentan podniz (x_{n_k}). No tada je zbog neprekidnosti operatora A i niz (Ax_{n_k}) konvergentan u prostoru Y. Dakle, i u ovom slučaju je operator A kompaktan, pa je opet $B(X, Y) = K(X, Y)$.

(b) Ako je prostor X beskonačnodimenzionalan, po teoremu 3.1.1. zatvorena jedinična kugla $K = \overline{K}(0, 1)$ u prostoru X nije relativno kompaktan skup. Kako je $K = IK$ zaključujemo da jedinični operator I nije kompaktan. S druge strane, ako je prostor X konačnodimenzionalan, onda je prema dokazanoj tvrdnji (a) $B(X) = K(X)$ i posebno $I \in K(X)$.

Tvrdnja (c) slijedi iz tvrdnje (b) i korolara 3.1.6. Doista, pretpostavimo suprotno da je neki kompaktan operator A invertibilan i neka je $B \in B(X)$ njegov invers. Tada je $AB = I$ pa iz korolara 3.1.6. slijedi $I \in K(X)$ a to nije tako zbog tvrdnje (b).

Teorem 3.1.8. *Neka je X normiran i Y Banachov prostor. Tada je $K(X, Y)$ zatvoren potprostor prostora $B(X, Y)$.*

Dokaz: Neka je (A_n) niz u $K(X, Y)$ koji je konvergentan u $B(X, Y)$ i neka je $A = \lim A_n$. Treba dokazati da je $A \in K(X, Y)$. Neka je K zatvorena jedinična kugla u prostoru X :

$$K = \overline{K}(0, 1) = \{x \in X;\ \|x\| \leq 1\}.$$

Treba dokazati da je AK relativno kompaktan podskup od Y. Kako je prostor Y potpun relativna kompaktnost je prema zadatku 3.1.1. ekvivalentna s postojanjem konačne $\varepsilon-$mreže $\forall \varepsilon > 0$. Dakle, treba dokazati da za svaki $\varepsilon > 0$ skup AK ima konačnu $\varepsilon-$mrežu.

Neka je $\varepsilon > 0$. Zbog $A = \lim A_n$ postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je $\|A - A_n\| < \frac{\varepsilon}{3}$. Operator A_n je kompaktan, dakle skup A_nK je relativno kompaktan, dakle taj skup ima konačnu $\frac{\varepsilon}{3}-$mrežu. To znači da postoje $x_1, x_2, \ldots, x_m \in K$ takvi da je

$$A_nK \subseteq K\Big(A_nx_1, \frac{\varepsilon}{3}\Big) \cup K\Big(A_nx_2, \frac{\varepsilon}{3}\Big) \cup \cdots \cup K\Big(A_nx_m, \frac{\varepsilon}{3}\Big).$$

Tvrdimo da je tada $\{Ax_1, Ax_2, \ldots, Ax_m\}$ $\varepsilon-$mreža skupa AK, tj.

$$AK \subseteq K(Ax_1, \varepsilon) \cup K(Ax_2, \varepsilon) \cup \cdots \cup K(Ax_m, \varepsilon). \tag{3.1}$$

Doista, neka je $x \in K$. Tada je $A_nx \in A_nK$ pa postoji $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$ takav da je

$$A_nx \in K\Big(A_nx_j, \frac{\varepsilon}{3}\Big), \qquad \text{tj.} \qquad \|A_nx - A_nx_j\| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Slijedi

$$\|Ax - Ax_j\| \le \|Ax - A_nx\| + \|A_nx - A_nx_j\| + \|A_nx_j - Ax_j\| \le$$
$$\le \|A - A_n\| \cdot \|x\| + \|A_nx - A_nx_j\| + \|A_n - A\| \cdot \|x_j\| < \frac{\varepsilon}{3} \cdot 1 + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} \cdot 1 = \varepsilon.$$

To pokazuje da je $Ax \in K(Ax_j, \varepsilon)$, a kako je $x \in K$ bio proizvoljan, zaključujemo da vrijedi (3.1). Time je teorem dokazan.

Neka su X i Y normirani prostori. Za $A \in B(X, Y)$ kažemo da je **operator konačnog ranga** ako mu je slika $R(A)$ konačnodimenzionalan potprostor od Y. U tom slučaju se broj $r(A) = \dim R(A)$ zove **rang operatora** A. Sa $F(X, Y)$ ćemo označavati skup svih operatora konačnog ranga u $B(X, Y)$.

Propozicija 3.1.9. *Neka su X, Y i Z normirani prostori.*

(*a*) *$F(X, Y)$ je potprostor od $B(X, Y)$ sadržan u $K(X, Y)$.*

(*b*) *Za $A \in F(X, Y)$ i $B \in B(Y, Z)$ vrijedi $BA \in F(X, Z)$ i $r(BA) \le r(A)$.*

(*c*) *Za $A \in B(X, Y)$ i $B \in F(Y, Z)$ vrijedi $BA \in F(X, Z)$ i $r(BA) \le r(B)$.*

(*d*) *$F(X) = F(X, X)$ je ideal u algebri $B(X)$ sadržan u $K(X)$.*

Dokaz: (*a*) Ako su $A, B \in F(X, Y)$ i $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, onda je $R(\alpha A + \beta B) \subseteq R(A) + R(B)$, dakle slika operatora $\alpha A + \beta B$ je konačnodimenzionalna, odnosno $\alpha A + \beta B \in F(X, Y)$. Dakle, $F(X, Y)$ je potprostor prostora $B(X, Y)$.

Neka je $A \in F(X, Y)$. Tada je $A \in B(X, R(A))$, pa iz tvrdnje (*a*) teorema 3.1.7. slijedi $A \in K(X, R(A))$, dakle i $A \in K(X, Y)$. Time smo dokazali da je $F(X, Y) \subseteq K(X, Y)$.

(*b*) Neka je $A \in F(X, Y)$ i $B \in B(Y, Z)$. Imamo $R(BA) = BR(A)$, pa ako izaberemo bazu $\{e_1, \ldots, e_n\}$ prostora $R(A)$ slijedi da vektori $Be_1, \ldots, Be_n$ razapinju prostor $R(BA)$. Dakle, taj je prostor konačnodimenzionalan i dimenzija mu je $\le n = \dim R(A)$. Dakle, $BA \in F(X, Z)$ i $r(BA) \le r(A)$.

(*c*) Neka je $A \in B(X, Y)$ i $B \in F(Y, Z)$. Tada je $R(BA) \subseteq R(B)$ pa očito vrijedi $BA \in F(X, Z)$ i $r(BA) \le r(B)$.

Tvrdnja (*d*) neposredna je posljedica tvrdnji (*a*), (*b*) i (*c*).

Propozicija 3.1.10. *Neka su X i Y normirani prostori. Operator $A \in B(X,Y)$ je konačnog ranga ako i samo ako postoje linearno nezavisni vektori $e_1, e_2, \ldots, e_n$ u prostoru Y i linearno nezavisni funkcionali $f_1', f_2', \ldots, f_n'$ u dualu X' prostora X takvi da je*

$$Ax = \sum_{i=1}^{n} f_i'(x) e_i, \qquad x \in X. \tag{3.2}$$

Tada je $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ baza prostora $R(A)$, $\{f_1', f_2', \ldots, f_n'\}$ je baza prostora $R(A')$ i vrijedi

$$A'g' = \sum_{i=1}^{n} g'(e_i) f_i', \qquad g' \in Y'. \tag{3.3}$$

Posebno, dualni operator A' je operator konačnog ranga i $r(A') = r(A)$.

Dokaz: Pretpostavimo da su $e_1, e_2, \ldots, e_n$ linearno nezavisni vektori u prostoru Y i da su $f_1', f_2', \ldots, f_n' \in Y'$ takvi da vrijedi (3.2). Tada je potprostor $R(A)$ očito sadržan u $[\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}]$, pa slijedi da je A operator konačnog ranga.

Pretpostavimo sada da je $A \in B(X,Y)$ operator konačnog ranga i da je $\dim R(A) = n$. Neka je $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ baza od $R(A)$. Tada vrijedi (3.2) pri čemu su $f_1', f_2', \ldots, f_n'$ neka preslikavanja sa X u $\mathbb{C}$. Lako se vidi da su funkcionali $f_1', f_2', \ldots, f_n'$ linearni, a iz neprekidnosti operatora A slijedi i njihova neprekidnost. Dakle, $f_1', f_2', \ldots, f_n' \in X'$. Definiramo sada linearan operator $B : Y' \to X'$ relacijom

$$Bg' = \sum_{i=1}^{n} g'(e_i) f_i', \qquad g' \in Y'.$$

Kako su preslikavanja $g' \mapsto g'(e_i)$ sa Y' u $\mathbb{C}$ neprekidna to je i operator B neprekidan. Nadalje, za proizvoljan vektor $x \in X$ i proizvoljan funkcional $g' \in Y'$ imamo:

$$(A'g')(x) = g'(Ax) = g'\Big(\sum_{i=1}^{n} f_i'(x) e_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} f_i'(x) g'(e_i) = \Big(\sum_{i=1}^{n} g'(e_i) f_i'\Big)(x) = (Bg')(x).$$

Dakle, $B = A'$, odnosno vrijedi (3.3).

Dokažimo sada da su funkcionali $f_1', f_2', \ldots, f_n'$ linearno nezavisni. Neka su $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$ takvi da je $Ax_j = e_j$ za $j = 1, 2, \ldots, n$; takvi vektori x_j postoje jer su e_j vektori iz $R(A)$. Iz

$$e_j = Ax_j = \sum_{i=1}^{n} f_i'(x_j) e_i$$

neposredno slijedi $f_i'(x_j) = \delta_{ij}$. Dakle, ako je

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i' = 0$$

za neke $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$, onda za svaki $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ nalazimo:

$$0 = \Big(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i'\Big)(x_j) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i'(x_j) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \delta_{ij} = \lambda_j.$$

Dakle, funkcionali $f_1', f_2', \ldots, f_n'$ su linearno nezavisni.

Da bismo dokazali da je $\{f_1', f_2', \ldots, f_n'\}$ baza od $R(A')$ treba još samo ustanoviti da su funkcionali $f'_1, f'_2, \ldots, f'_n$ sadržani u $R(A')$, jer tada je iz (3.3) jasno da ti funkcionali razapinju $R(A')$. Neka je $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Definiramo linearan funkcional G'_j na konačnodimenzionalnom potprostoru $R(A) = [\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}]$ prostora Y sa

$$G'_j(e_i) = \delta_{ij}, \qquad \text{odnosno} \qquad G_j\Big(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i\Big) = \lambda_j.$$

Tada je $G'_j \in R(A)'$ pa prema Hahn$-$Banachovom teoremu 1.2.7. postoji $g'_j \in Y'$ čija je restrikcija na $R(A)$ jednaka G'_j. Sada je zbog (3.2) za svaki $x \in X$

$$(A'g'_j)(x) = g'_j(Ax) = G'_j\Big(\sum_{i=1}^{n} f'_i(x)e_i\Big) = f'_j(x),$$

pa slijedi $f'_j = A'g'_j \in R(A')$.

Time je propozicija u potpunosti dokazana.

Propozicija 3.1.11. *Neka su X i Y Hilbertovi prostori. Operator $A \in B(X, Y)$ je konačnog ranga ako i samo ako postoje linearno nezavisni vektori $e_1, e_2, \ldots, e_n \in Y$ i linearno nezavisni vektori $f_1, f_2, \ldots, f_n \in X$ takvi da je*

$$Ax = \sum_{i=1}^{n} (x|f_i)e_i \qquad \forall x \in X.$$

Tada je

$$A^*y = \sum_{i=1}^{n} (y|e_i)f_i \qquad \forall y \in Y.$$

Nadalje, $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ je baza potprostora $R(A)$ i $\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ je baza potprostora $R(A^*)$. Posebno, A je konačnog ranga ako i samo ako je A^* konačnog ranga i tada je $r(A) = r(A^*)$.

Zadatak 3.1.2. *Dokažite propoziciju 3.1.11.*

Uputa: Koristite propoziciju 3.1.10. i Rieszov teorem o reprezentaciji neprekidnih linearnih funkcionala na Hilbertovom prostoru.

Teorem 3.1.12. *Neka je X normiran i Y Hilbertov prostor. Operator $A \in B(X, Y)$ je kompaktan ako i samo ako je A limes niza operatora konačnog ranga. Drugim riječima,*

$$K(X, Y) = \mathrm{Cl}(F(X, Y)).$$

Dokaz: Neka je (A_n) niz u $F(X, Y)$ koji konvergira u $B(X, Y)$ i neka je $A = \lim A_n$. Po tvrdnji (a) propozicije 3.1.9. operatori A_n su kompaktni pa iz zatvorenosti od $K(X, Y)$ u $B(X, Y)$ (teorem 3.1.8.) slijedi $A \in K(X, Y)$. Time je dokazana inkluzija $\mathrm{Cl}(F(X, Y)) \subseteq K(X, Y)$.

Dokažimo sada obrnutu inkluziju $K(X, Y) \subseteq \mathrm{Cl}(F(X, Y))$ i pretpostavimo da je $A \in K(X, Y)$. Treba dokazati da za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $B \in F(X, Y)$ takav da je $\|A - B\| \leq \varepsilon$.

Neka je $K = \overline{K}(0, 1) = \{x \in X;\ \|x\| \leq 1\}$ zatvorena jedinična kugla u prostoru X i neka je $\varepsilon > 0$. AK je relativno kompaktan podskup potpunog prostora Y pa on ima konačnu $\varepsilon-$mrežu, tj. postoje vektori $x_1, x_2, \ldots, x_n \in K$ takvi da je

$$AK \subseteq K(Ax_1, \varepsilon) \cup K(Ax_2, \varepsilon) \cup \cdots \cup K(Ax_n, \varepsilon).$$

Neka je $Z = [\{Ax_1, Ax_2, \ldots, Ax_n\}]$ i neka je $P \in B(Y)$ ortogonalni projektor prostora Y na potprostor Z : dakle, P operator definiran sa

$$Py = z \qquad \text{ako je} \qquad y = z + u, \ \ z \in Z, \ \ u \in Z^{\perp}.$$

Stavimo $B = PA$. Tada je $R(B) \subseteq R(P) = Z$, dakle B je operator konačnog ranga: $B \in F(X, Y)$. Neka je $x \in K$. Tada je $Ax \in K(Ax_i, \varepsilon)$ za neki $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, tj. vrijedi $\|Ax - Ax_i\| < \varepsilon$. Rastavimo sada vektor Ax prostora Y u skladu s ortogonalnim rastavom $Y = Z \oplus Z^{\perp}$: $Ax = z + u, \ z \in Z, \ u \in Z^{\perp}$. Kako je $Ax_i \in Z$, nalazimo:

$$\varepsilon^2 > \|Ax - Ax_i\|^2 = \|u + (z - Ax_i)\|^2 = \|u\|^2 + \|z - Ax_i\|^2 \qquad \Longrightarrow \qquad \|u\| < \varepsilon.$$

Međutim, $z = PAx = Bx$, pa je $u = Ax - z = Ax - Bx = (A - B)x$. Tako smo dokazali da vrijedi $\|(A - B)x\| < \varepsilon, \qquad \forall x \in K$, a to povlači da je $\|A - B\| \leq \varepsilon$.

Zadatak 3.1.3. *Neka su X i Y Hilbertovi prostori i $A \in B(X, Y)$. Dokažite da su sljedeća tri svojstva međusobno ekvivalentna:*

(a) $A \in K(X, Y)$;

(b) $A^* \in K(Y, X)$;

(c) $A^*A \in K(X)$.

Uputa: Za implikaciju $(c) \Longrightarrow (a)$ dokažite i koristite nejednakost

$$\|Ax - Ax'\|^2 \leq \|x - x'\| \cdot \|A^*Ax - A^*Ax'\|, \qquad x, x' \in X.$$

3.2 Spektar kompaktnog operatora

Teorem 3.2.1. *Neka je X normiran prostor, $A \in K(X)$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda \neq 0$. Za svaki prirodan broj n stavimo $N_n(\lambda) = N((\lambda I - A)^n)$ i $R_n(\lambda) = R((\lambda I - A)^n)$.*

(*a*) *Za svaki n je potprostor $N_n(\lambda)$ konačnodimenzionalan. Postoji n takav da je $N_n(\lambda) = N_{n+1}(\lambda)$.*

(*b*) *Za svaki n je potprostor $R_n(\lambda)$ zatvoren. Postoji n takav da je $R_n(\lambda) = R_{n+1}(\lambda)$.*

Dokaz: Imamo $\lambda I - A = \lambda(I - \lambda^{-1}A)$ i operator $\lambda^{-1}A$ je kompaktan. Nadalje, za svako n vrijedi

$$N((\lambda I - A)^n) = N((I - \lambda^{-1}A)^n) \qquad \text{i} \qquad R((\lambda I - A)^n) = R((I - \lambda^{-1}A)^n).$$

Prema tome, bez smanjenja općenitosti u dokazu možemo pretpostavljati da je $\lambda = 1$. U tom slučaju pisat ćemo kraće $N_n(1) = N_n$ i $R_n(1) = R_n$. Nadalje, stavimo $T = I - A$.

(*a*) Operator

$$U_n = T^n - I = -nA + \binom{n}{2}A^2 - \binom{n}{3}A^3 + \cdots + (-1)^n A^n$$

je kompaktan. Potprostor N_n invarijantan je s obzirom na operator A, dakle i s obzirom na operator U_n. N_n je jezgra operatora T^n, dakle restrikcija operatora T^n na potprostor N_n je nul$-$operator na tom potprostoru. Kako je $-U_n = I - T^n$, vidimo da je restrikcija operatora $-U_n$ na potprostor N_n jedinični operator na tom potprostoru. Budući da je operator U_n kompaktan, i kako je očito restrikcija kompaktnog operatora na zatvoren invarijantan potprostor također kompaktan operator, zaključujemo da je jedinični operator na potprostoru N_n kompaktan. Sada iz tvrdnje (*b*) teorema 3.1.7. slijedi da je potprostor N_n konačnodimenzionalan.

Dokažimo sada da postoji prirodan broj n takav da je $N_n = N_{n+1}$. Pretpostavimo suprotno: $N_n \neq N_{n+1}$ $\forall n$. Tada imamo striktno rastući niz konačnodimenzionalnih potprostora:

$$N_1 \subsetneq N_2 \subsetneq N_3 \subsetneq \cdots \subsetneq N_n \subsetneq N_{n+1} \subsetneq \cdots$$

Prema Rieszovoj lemi 3.1.2. za svaki $n \in \mathbb{N}$ postoji jedinični vektor $e_n \in N_{n+1}$ takav da je $d(e_n, N_n) = 1$. Za bilo koji n je $T^n T e_n = T^{n+1}e_n = 0$, dakle $Te_n \in N_n$. Nadalje, za bilo koje $m < n$ imamo $e_m \in N_{m+1} \subseteq N_n$ i $Te_m \in N_m \subseteq N_n$. Dakle je $z = Te_n - Te_m + e_m \in N_n$, pa slijedi:

$$\|Ae_n - Ae_m\| = \|e_n - z\| \geq d(e_n, N_n) = 1.$$

To pokazuje da niz (Ae_n) nema konvergentan podniz, a to je nemoguće jer je A kompaktan i svi vektori e_n su jedinični. Ova kontradikcija pokazuje da je pretpostavka $N_n \neq N_{n+1}$ $\forall n$ pogrešna. Dakle, postoji n takav da je $N_n = N_{n+1}$.

(*b*) Dokažimo sada da je potprostor R_n zatvoren za svaki $n \in \mathbb{N}$. Neka je $y \in \mathrm{Cl}\,(R_n)$. Tada postoji niz (x_k) u X, takav da je

$$y = \lim_{k \to \infty} T^n x_k.$$

Tvrdimo da je tada skup $\{d(x_k, N_n);\ k \in \mathbb{N}\}$ ograničen. Pretpostavimo suprotno. Tada postoji podniz (u_k) niza (x_k) takav da je $d(u_k, N_n) \geq k$ $\forall k$. Stavimo

$$z_k = \frac{1}{d(u_k, N_n)} u_k.$$

Tada je $d(z_k, N_n) = 1$ pa za svaki k možemo izabrati vektor $y_k \in N_n$ takav da je $\|z_k - y_k\| \leq 2$. Stavimo $v_k = z_k - y_k$. Niz (v_k) je ograničen, pa kako je operator $-U_n = I - T^n$ kompaktan, slijedi da niz $(-U_n v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ima konvergentan podniz. Zbog jednostavnijeg označavanja možemo pretpostaviti da smo podniz (u_k) niza (x_k) odabrali tako da je niz $(-U_n v_k)$ konvergentan. Stavimo

$$v = -\lim_{k\to\infty} U_n v_k.$$

Kako je $y_k \in N_n = N(T^n)$, imamo

$$v_k = I v_k = T^n v_k - U_n v_k = T^n z_k - T^n y_k - U_n v_k = T^n z_k - U_n v_k. \tag{3.4}$$

Iz definicije vektora z_k slijedi

$$T^n z_k = \frac{1}{d(u_k, N_n)} T^n u_k.$$

Niz (u_k) je podniz niza (x_k), pa dobivamo:

$$y = \lim_{k\to\infty} T^n x_k = \lim_{k\to\infty} T^n u_k.$$

Nadalje, $d(u_k, N_n) \geq k \ \forall k$, pa slijedi

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{d(u_k, N_n)} = 0.$$

Stoga je

$$\lim_{k\to\infty} T^n z_k = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{d(u_k, N_n)} T^n u_k = 0 \cdot y = 0.$$

Odatle i iz (3.4) zaključujemo da je

$$\lim_{k\to\infty} v_k = -\lim_{k\to\infty} U_n v_k = v,$$

pa slijedi

$$d(v, N_n) = \lim_{k\to\infty} d(v_k, N_n).$$

Međutim, $z_k = v_k + y_k$ i $y_k \in N_n$, pa je $d(v_k, N_n) = d(z_k, N_n) = 1$, odakle zaključujemo da je $d(v, N_n) = 1$. S druge strane, kako je operator T^n ograničen, dakle neprekidan, i kako je $T^n z_k = T^n v_k + T^n y_k = T^n v_k$ (naime, $y_k \in N_n = N(T^n)$), imamo

$$T^n v = \lim_{k\to\infty} T^n v_k = \lim_{k\to\infty} T^n z_k = 0,$$

tj. $v \in N_n$. To je u kontradikciji s upravo dokazanim $d(v, N_n) = 1$. Ova kontradikcija pokazuje da je pretpostavka o neograničenosti skupa $\{d(x_k, N_n);\ k \in \mathbb{N}\}$ bila pogrešna.

Dakle, postoji $M > 0$ takav da je $d(x_k, N_n) \leq M \ \forall k$. No tada za svaki k postoji vektor $a_k \in N_n$ takav da je $\|x_k - a_k\| \leq M + 1$. Stavimo $b_k = x_k - a_k$. Tada je niz (b_k) ograničen pa zbog kompaktnosti operatora $U_n = T^n - I$ zaključujemo da niz $(U_n b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ima konvergentan podniz. Zbog jednostavnijeg pisanja možemo pretpostaviti da smo na početku niz (x_k) izabrali tako da je niz $(U_n b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergentan. Stavimo

$$b = \lim_{k\to\infty} U_n b_k.$$

Niz (x_k) bio je izabran tako da je

$$y = \lim_{k\to\infty} T^n x_k.$$

Kako je $a_k \in N_n$ i $b_k = x_k - a_k$, imamo

$$T^n x_k = T^n b_k + T^n a_k = T^n b_k \qquad \Longrightarrow \qquad y = \lim_{k\to\infty} T^n b_k.$$

Odatle slijedi

$$y - b = \lim_{k\to\infty} T^n b_k - \lim_{k\to\infty} U_n b_k = \lim_{k\to\infty} (T^n - U_n) b_k = \lim_{k\to\infty} I b_k = \lim_{k\to\infty} b_k.$$

Zbog neprekidnosti operatora T^n odavde slijedi

$$y = \lim_{k\to\infty} T^n b_k = T^n(y - b).$$

To pokazuje da je $y \in R_n$, a kako je $y \in \mathrm{Cl}\,(R_n)$ bio proizvoljan, zaključujemo da je potprostor R_n zatvoren.

Treba još dokazati da je $R_{n+1} = R_n$ za neko n. Pretpostavimo suprotno, tj. da je $R_{n+1} \neq R_n$ $\forall n$. Tada imamo striktno padajući niz zatvorenih potprostora:

$$R_1 \supsetneq R_2 \supsetneq R_3 \supsetneq \cdots \supsetneq R_n \supsetneq R_{n+1} \supsetneq \cdots$$

Prema Rieszovoj lemi 3.1.2. tada za svaki $n \in \mathbb{N}$ postoji jedinični vektor $e_n \in R_n$ takav da je $d(e_n, R_{n+1}) \geq \frac{1}{2}$. Za svaki n je $Te_n \in TR_n = R_{n+1}$. Nadalje, za bilo koje $m > n$ je $e_m \in R_m \subseteq R_{n+1}$ i $Te_m \in R_{m+1} \subseteq R_{n+1}$. Dakle, stavimo li $z = Te_n - Te_m + e_m$, vrijedi $z \in R_{n+1}$, pa slijedi:

$$\|Ae_m - Ae_n\| = \|z - e_n\| \geq d(e_n, R_{n+1}) \geq \frac{1}{2}, \qquad \forall m \neq n.$$

To pokazuje da niz (Ae_n) nema konvergentan podniz, a to je nemoguće jer je operator A kompaktan i svi vektori e_n su jedinični. Ova kontradikcija pokazuje da je pretpostavka $R_n \neq R_{n+1}$ $\forall n$ pogrešna. Dakle, postoji n takav da je $R_n = R_{n+1}$.

Sljedećih nekoliko tvrdnji (propozicija 3.2.2. i teorem 3.2.3.) su čisto algebarske i vrijede za bilo koji linearan operator na bilo kojem vektorskom prostoru (a ne samo za ograničen operator na normiranom prostoru).

Propozicija 3.2.2. *Neka je X vektorski prostor i $T \in L(X)$.*

(*a*) *Ako je $N(T^n) = N(T^{n+1})$ za neko n, onda je $N(T^m) = N(T^n)$ $\forall m \geq n$.*

(*b*) *Ako je $R(T^n) = R(T^{n+1})$ za neko n, onda je $R(T^m) = R(T^n)$ $\forall m \geq n$.*

Dokaz: (*a*) Dovoljno je dokazati da je $N(T^{n+2}) = N(T^{n+1})$, jer tada tvrdnja slijedi indukcijom u odnosu na $m > n$. Očito je $N(T^{n+2}) \supseteq N(T^{n+1})$. Dokažimo i obrnutu inkluziju. Doista, imamo redom:

$$x \in N(T^{n+2}) \implies 0 = T^{n+2}x = T^{n+1}Tx \implies Tx \in N(T^{n+1}) = N(T^n) \implies$$
$$\implies 0 = T^n(Tx) = T^{n+1}x \implies x \in N(T^{n+1}).$$

Dakle, vrijedi i $N(T^{n+2}) \subseteq N(T^{n+1})$.

(*b*) Analogno, očito je $R(T^{n+1}) \supseteq R(T^{n+2})$, pa treba još dokazati da vrijedi i obrnuta inkluzija $R(T^{n+1}) \subseteq R(T^{n+2})$. Neka je $x \in R(T^{n+1})$ i neka je $y \in X$ takav da je $x = T^{n+1}y$. Imamo $T^n y \in R(T^n) = R(T^{n+1})$, pa postoji $u \in X$ takav da je $T^n y = T^{n+1}u$. Slijedi:

$$x = T^{n+1}y = T(T^n y) = T(T^{n+1}u) = T^{n+2}u \in R(T^{n+2}).$$

Time je dokazano $R(T^{n+1}) \subseteq R(T^{n+2})$.

Teorem 3.2.3. *Neka je $X \neq \{0\}$ vektorski prostor i $T \in L(X)$. Pretpostavimo da postoje $k \geq 0$ i $r \geq 0$ takvi da je $N(T^k) = N(T^{k+1})$ i $R(T^r) = R(T^{r+1})$ i neka su k i r najmanji takvi. [Kao obično stavljamo $T^0 = I$, dakle $N(T^0) = \{0\}$ i $R(T^0) = X$.]*

(*a*) $k = r$.

(*b*) $X = N(T^k) \dotplus R(T^k)$.

(*c*) *Potprostori $N(T^k)$ i $R(T^k)$ su invarijantni s obzirom na operator T.*

(*d*) *Restrikcija $T|N(T^k)$ je nilpotentan operator. Ako je Y potprostor od X invarijantan s obzirom na operator T i ako je restrikcija $T|Y$ nilpotentan operator, onda je $Y \subseteq N(T^k)$.*

(*e*) *Restrikcija $T|R(T^k)$ je izomorfizam sa $R(T^k)$ na $R(T^k)$. Ako je Z potprostor od X takav da je $TZ = Z$, onda je $Z \subseteq R(T^k)$.*

Rastav prostora iz tvrdnje (*b*) zove se **Fittingova dekompozicija** s obzirom na operator T, a broj k zove se **nilindeks** operatora T. Istaknimo da teorem 3.2.3. nije primjenjiv na svaki linearan operator T, nego samo na onaj za kojeg su ispunjene dvije pretpostavke: postoji k takav da je $N(T^k) = N(T^{k+1})$ i postoji r takav da je $R(T^r) = R(T^{r+1})$. Samo takav operator ima nilindeks. Prema teoremu 3.2.1. takav je svaki operator oblika $\lambda I - A$, gdje je $\lambda \neq 0$ i A je kompaktan operator na normiranom prostoru. Nadalje, jasno je da je takav svaki linearan operator na konačnodimenzionalnom prostoru.

Dokaz teorema 3.2.3.: (*a*) Ako je $k = 0$ očito je $r \geq k$. Pretpostavimo da je $k \geq 1$. Izaberimo vektor $x \in N(T^k) \setminus N(T^{k-1})$, tj. $T^k x = 0$ i $T^{k-1}x \neq 0$. Pretpostavimo da je $r < k$, dakle $R(T^{k-1}) = R(T^k)$. Tada postoji vektor $y \in X$ takav da je $T^{k-1}x = T^k y$. Odatle slijedi:

$$0 = T^k x = T^{k+1} y \implies y \in N(T^{k+1}) = N(T^k) \implies T^{k-1}x = T^k y = 0,$$

a to je suprotno izboru vektora x. Ova kontradikcija pokazuje da je pretpostavka $r < k$ bila pogrešna, pa zalključujemo da mora biti $r \geq k$.

Ako je $r = 0$ očito je $k \geq r$. Pretpostavimo da je $r \geq 1$. Neka je $x \in R(T^{r-1}) \setminus R(T^r)$. Tada je $x = T^{r-1}y$ za neki vektor $y \in X$. Stavimo $u = Tx$. Tada je $u = T^r y \in R(T^r) = R(T^{r+1})$, pa postoji $v \in X$ takav da je $u = T^{r+1}v$. Stavimo $z = Tv - y$. Tada iz $u = T^r y = T^{r+1}v$ slijedi:

$$T^r z = T^r(Tv - y) = T^{r+1}v - T^r y = u - u = 0.$$

S druge strane, kako je $x \notin R(T^r)$, imamo

$$T^{r-1}z = T^{r-1}(Tv - y) = T^r v - T^{r-1}y = T^r v - x \neq 0.$$

Prema tome vrijedi $z \in N(T^r) \setminus N(T^{r-1})$. To pokazuje da je $N(T^{r-1}) \subsetneq N(T^r)$, dakle je $k \geq r$.

Dvije dokazane nejednakosti $r \geq k$ i $k \geq r$ daju jednakost $k = r$.

(*b*) Neka je $x \in N(T^k) \cap R(T^k)$. Tada vrijedi $x = T^k y$ za neki $y \in X$. Imamo

$$0 = T^k x = T^{2k} y \qquad \implies \qquad y \in N(T^{2k}) = N(T^k) \qquad \implies \qquad x = T^k y = 0.$$

Dakle, $N(T^k) \cap R(T^k) = \{0\}$. Stoga je suma potprostora $N(T^k)$ i $R(T^k)$ direktna. Treba još dokazati da je ta direktna suma jednaka cijelom prostoru X. Neka je $x \in X$. Tada je

$$T^k x \in R(T^k) = R(T^{2k}) = T^k R(T^k),$$

pa postoji $y \in R(T^k)$ takav da je $T^k x = T^k y$. Stavimo sada $u = x - y$. Tada je

$$x = u + y, \qquad u \in N(T^k), \qquad y \in R(T^k).$$

Kako je $x \in X$ bio proizvoljan, zaključujemo da je $N(T^k) \dot{+} R(T^k) = X$.

Tvrdnja (c) je evidentna.

(d) Očito je $(T|N(T^k))^k = 0$, dakle restrikcija $T|N(T^k)$ je nilpotentan operator. Neka je Y potprostor od X invarijantan s obzirom na operator T i pretpostavimo da je operator $T|Y$ nilpotentan, npr. $(T|Y)^n = 0$. Tada je $T^n y = 0 \; \forall y \in Y$, pa slijedi $Y \subseteq N(T^n) \subseteq N(T^k)$.

(e) Imamo $TR(T^k) = R(T^{k+1}) = R(T^k)$. Dakle, restrikcija $T|R(T^k)$ je surjekcija sa $R(T^k)$ na $R(T^k)$. Dokažimo da je ta restrikcija i injekcija. Treba dokazati da za $x \in R(T^k)$ iz $Tx = 0$ slijedi $x = 0$. To je posljedica tvrdnje (b), jer tada je $x \in N(T) \subseteq N(T^k)$, pa nalazimo da je

$$x \in N(T^k) \cap R(T^k) = \{0\}.$$

Napokon, ako je $Z \leq X$ takav da je $TZ = Z$, onda je i $T^k Z = Z$, a odatle slijedi $Z \subseteq R(T^k)$.

Vratimo se sada opet na kompaktne operatore na normiranim prostorima.

Teorem 3.2.4. *Neka je X normiran prostor i $A \in K(X)$.*

(a) *Ako $\lambda \neq 0$ nije svojstvena vrijednost operatora A, onda je operator $\lambda I - A$ invertibilan u $B(X)$.*

(b) *Operator A ima najviše prebrojivo mnogo svojstvenih vrijednosti. Skup svih svojstvenih vrijednosti operatora A nema gomilišta različitog od* 0.

(c) *Neka je $\lambda \neq 0$ svojstvena vrijednost operatora A i neka je k nilindeks operatora $\lambda I - A$. Tada je $X = N((\lambda I - A)^k) \dot{+} R((\lambda I - A)^k)$. Restrikcija operatora $\lambda I - A$ na potprostor $R((\lambda I - A)^k)$ je invertibilan operator na normiranom prostoru $R((\lambda I - A)^k)$ (tj. $(\lambda I - A)$ je invertibilan element algebre $B(R((\lambda I - A)^k))$).*

Dokaz: (a) Ako $\lambda \neq 0$ nije svojstvena vrijednost od A, onda je $N(\lambda I - A) = \{0\}$, dakle nilindeks operatora $T = \lambda I - A$ jednak je 0. Tada je prema teoremu 3.2.3. $R(T) = X$ i T je bijekcija sa X na X. Treba još dokazati da je operator T invertibilan u algebri $B(X)$, tj. da je invers T^{-1} od T ograničen, odnosno neprekidan. U tu je svrhu dovoljno dokazati da je za svaki otvoren skup $U \subseteq X$ i skup $(T^{-1})^{-1}(U) = T(U)$ otvoren, ili, ekvivalentno, da je za svaki zatvoren skup $F \subseteq X$ i skup $T(F)$ zatvoren. U daljnjem ćemo pretpostavljati da je $\lambda = 1$. Time općenitost dokaza nije smanjena, jer je $\lambda I - A = \lambda(I - \lambda^{-1}A)$ i operator $\lambda^{-1}A$ je kompaktan.

Neka je F zatvoren podskup od X i $y \in \mathrm{Cl}\,(T(F))$. Treba dokazati da je $y \in T(F)$. Neka je (x_n) niz u F takav da je $y = \lim Tx_n$. Tvrdimo da je tada niz (x_n) ograničen. Tu ćemo činjenicu dokazati metodom suprotnog, pa pretpostavimo da je niz (x_n) neograničen. Tada postoji podniz (u_n) niza (x_n) takav da je $\|u_n\| \geq n \; \forall n \in \mathbb{N}$. Stavimo $z_n = \frac{1}{\|u_n\|}u_n$. Vektori z_n su jedinični, pa zbog kompaktnosti operatora A niz (Az_n) ima konvergentan podniz. Zbog jednostavnijeg označavanja možemo pretpostaviti da smo podniz (u_n) niza (x_n) izabrali tako da je niz (Az_n) konvergentan. Stavimo $z = \lim Az_n$. Imamo

$$z_n = Tz_n + Az_n = \frac{1}{\|u_n\|}Tu_n + Az_n.$$

Kako je (u_n) podniz niza (x_n), to je (Tu_n) odniz niza (Tx_n) pa vrijedi $y = \lim Tu_n$. Nadalje, iz $\|u_n\| \geq n$ slijedi $\lim \frac{1}{\|u_n\|} = 0$, pa dobivamo:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\|u_n\|}Tu_n = 0 \implies \lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\|u_n\|}Tu_n + \lim_{n\to\infty} Az_n = \lim_{n\to\infty} Az_n = z.$$

Kako su svi vektori z_n jedinični, to je i vektor z jedinični. Operator T je neprekidan pa imamo

$$Tz = \lim_{n\to\infty} Tz_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\|u_n\|} Tu_n = 0.$$

No T je bijekcija, pa slijedi $z = 0$, a to je nemoguće jer je $\|z\| = 1$.

Ova kontradikcija pokazuje da je pretpostavka neograničenosti niza (x_n) bila pogrešna, pa je time dokazano da je niz (x_n) ograničen. Zbog kompaktnosti operatora A niz (Ax_n) ima konvergentan podniz. Dakle, postoji podniz (v_n) niza (x_n) takav da je niz (Av_n) konvergentan. Stavimo $x = \lim Av_n$. Kako je (Tv_n) podniz niza (Tx_n) imamo $y = \lim Tv_n$. Nadalje, $T + A = I$, dakle $v_n = Tv_n + Av_v$. Zaključujemo da je niz (v_n) konvergentan i

$$\lim_{n\to\infty} v_n = \lim_{n\to\infty} Tv_n + \lim_{n\to\infty} Av_n = y + x.$$

Budući da su svi vektori v_n u skupu F i budući da je skup F zatvoren, slijedi $y + x \in F$. Napokon,

$$y = \lim_{n\to\infty} Tv_n = T\Big(\lim_{n\to\infty} v_n\Big) = T(y + x) \in T(F).$$

Time je dokazano da je skup $T(F)$ zatvoren. Dakle, operator T^{-1} je ograničen.

Tvrdnja (b) bit će dokazana ako pokažemo da je za svaki $\varepsilon > 0$ skup svih svojstvenih vrijednosti λ od A, takvih da je $|\lambda| \geq \varepsilon$, konačan. Pretpostavimo suprotno, dakle da za neki $\varepsilon > 0$ postoji niz $(\lambda_n;\ n \in \mathbb{N})$ međusobno različitih svojstvenih vrijednosti od A takvih da je $|\lambda_n| \geq \varepsilon\ \forall n$. Za svaki n izaberimo vektor $x_n \neq 0$ takav da je $Ax_n = \lambda_n x_n$. Stavimo $X_n = [\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}]$. Primijetimo da su vektori niza (x_n) linearno nezavisni. Doista, ako je

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n = 0,$$

primijenimo na tu jednakost operator $(\lambda_1 I - A) \cdots (\lambda_{k-1} I - A) \cdot (\lambda_{k+1} I - A) \cdots (\lambda_n I - A)$ za bilo koji $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Taj operator poništava vektore $x_1, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_n$ pa dobivamo

$$(\lambda_1 - \lambda_k) \cdots (\lambda_{k-1} - \lambda_k) \cdot (\lambda_{k+1} - \lambda_k) \cdots (\lambda_n - \lambda_k)\alpha_k x_k = 0.$$

Odavde slijedi da je $\alpha_k = 0$, a kako je $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ bio proizvoljan, time smo dokazali da su vektori $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ linearno nezavisni. Dakle, $\dim X_n = n\ \forall n$, pa imamo striktno rastući niz konačnodimenzionalnih potprostora

$$X_1 \subsetneq X_2 \subsetneq X_3 \subsetneq \cdots \subsetneq X_{n-1} \subsetneq X_n \subsetneq \cdots$$

Prema Rieszovoj lemi 3.1.2. tada za svaki $n \in \mathbb{N}$ postoji jedinični vektor $e_n \in X_n$ takav da je $d(e_n, X_{n-1}) = 1$.

Neka je $x \in X_n$. Tada je $x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n$ za neke skalare $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, pa slijedi

$$(\lambda_n I - A)x = \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j (\lambda_n - \lambda_j) x_j \in X_{n-1}.$$

Kako je x bio proizvoljan vektor potprostora X_n zaključujemo da je $(\lambda_n I - A)X_n \subseteq X_{n-1}$ Posebno je $(\lambda_n I - A)e_n \in X_{n-1}$, pa slijedi da je

$$Ae_n = \lambda_n e_n - (\lambda_n I - A)e_n \in X_n.$$

Neka je $m < n$. Tada je $Ae_m \in X_m \subseteq X_{n-1}$, pa za vektor $e = \lambda_n^{-1}(\lambda_n e_n - Ae_n + Ae_m)$ vrijedi $e \in X_{n-1}$. Slijedi

$$\|Ae_n - Ae_m\| = \|\lambda_n e_n - (\lambda_n e_n - Ae_n + Ae_m)\| = \|\lambda_n(e_n - e)\| =$$
$$= |\lambda_n| \cdot \|e_n - e\| \geq |\lambda_n| \cdot d(e_n, X_{n-1}) = |\lambda_n| \geq \varepsilon.$$

To pokazuje da niz (Ae_n) nema konvergentan podniz. No to je u suprotnosti s kompaktnosti operatora A, jer su svi vektori e_n jedinični. Ova kontradikcija pokazuje da je pretpostavka o beskonačnosti skupa $\{\lambda;\ \lambda \text{ je svojstvena vrijednost operatora } A \text{ i } |\lambda| \geq \varepsilon\}$ bila pogrešna.

(c) Iz teorema 3.2.1. i 3.2.3. slijedi da je

$$X = N((\lambda I - A)^k) \dotplus R((\lambda I - A)^k)$$

i da je restrikcija operatora $\lambda I - A$ na potprostor $Y = R((\lambda I - A)^k)$ bijekcija sa Y na Y. Treba još dokazati da je ta restrikcija invertibilan operator u normiranoj algebri $B(Y)$. Neka je $B = A|Y$. Tada je $\lambda I_Y - B = (\lambda I - A)|Y$ bijekcija sa Y na Y. Nadalje, potprostor Y je prema tvrdnji (b) teorema 3.2.1. zatvoren, pa je operator $B = A|Y$ kompaktan. To znači da λ nije svojstvena vrijednost operatora B. Iz tvrdnje (a) sada slijedi da je restrikcija $(\lambda I - A)|Y$ invertibilan operator u algebri $B(Y)$.

3.3 Kompaktni simetrični operatori

Neka je X Hilbertov prostor. Iz korolara 1.2.8. Hahn−Banachovog teorema 1.2.7. slijedi da za svaki vektor $z \in X$ vrijedi

$$\|z\| = \max\{|\varphi(z)|;\ \varphi \in X',\ \|\varphi\| \leq 1\}.$$

Međutim, za Hilbertov prostor X po Rieszovom teoremu za svaki neprekidan linearan funkcional $\varphi \in X'$ postoji jedinstven vektor $y \in X$ takav da je $\varphi(z) = (z|y)$ $\forall z \in X$, i tada je $\|\varphi\| = \|y\|$. Prema tome, za proizvoljan vektor $z \in X$ vrijedi

$$\|z\| = \max\{|(z|y)|;\ y \in X,\ \|y\| \leq 1\}.$$

Odatle neposredno slijedi da za svaki $A \in B(X)$ vrijedi jednakost

$$\|A\| = \sup\{|(Ax|y)|;\ x, y \in X,\ \|x\| \leq 1,\ \|y\| \leq 1\}. \tag{3.5}$$

Zadatak 3.3.1. *Dokažite da jednakost* (3.5) *vrijedi i za proizvoljan unitaran prostor* X.

Uputa: Očito je desna strana manja ili jednaka od lijeve. Za dokaz obrnute nejednakosti upotrijebite upotpunjenje prostora X.

Neka je X unitaran prostor. Linearan operator $A : X \to X$ zove se **simetričan** ako vrijedi

$$(Ax|y) = (x|Ay) \qquad \forall x, y \in X.$$

Naravno, ako je prostor X Hilbertov i operator A ograničen, A je simetričan ako i samo ako je on hermitski, tj. $A^* = A$.

Propozicija 3.3.1. *Za ograničen simetričan operator A na unitarnom prostoru X vrijedi*

$$\|A\| = \sup\{|(Ax|x)|;\ x \in X, \|x\| \leq 1\}. \tag{3.6}$$

Dokaz: Desnu stranu gornje jednakosti koju trebamo dokazati označimo sa M. Očito vrijedi $M \leq \|A\|$. Dokažimo obrnutu nejednakost. Neka su $x, y \in X$, $\|x\| \leq 1$, $\|y\| \leq 1$. Tada je

$$(A(x+y)|x+y) - (A(x-y)|x-y) = 4\mathrm{Re}(Ax|y).$$

Kako za svaki $z \in X$ očito vrijedi $|(Az|z)| \leq M\|z\|^2$, iz gornje jednakosti i iz jednakosti paralelograma izvodimo:

$$4|\mathrm{Re}(Ax|y)| \leq |(A(x+y)|x+y)| + |(A(x-y)|x-y)| \leq M(\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2) = 2M(\|x\|^2 + \|y\|^2) \leq 4M.$$

Dakle, vrijedi

$$|\mathrm{Re}(Ax|y)| \leq M, \qquad x, y \in X, \|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1.$$

Za bilo koje $x, y \in X$, takve da je $\|x\| \leq 1$ i $\|y\| \leq 1$, neka je $\lambda \in \mathbb{C}$ takav da je $|\lambda| = 1$ i $|(Ax|y)| = \lambda(Ax|y)$. Tada imamo

$$|(Ax|y)| = \lambda(Ax|y) = (A(\lambda x)|y) = |\mathrm{Re}(A(\lambda x)|y)| \leq M.$$

Primjenom jednakosti (3.5) slijedi $\|A\| \leq M$. Iz dvije nejednakosti zaključujemo da je $\|A\| = M$ i time je propozicija dokazana.

Ako je unitaran prostor X beskonačnodimenzionalan onda jedinična sfera

$$S = \{x \in X;\ \|x\| = 1\}$$

nije kompaktan, čak ni relativno kompaktan skup. Ipak, dokazat ćemo da se u formuli

$$\|A\| = \sup\{|(Ax|x)|;\ x \in S\}$$

za kompaktan simetričan operator A supremum dostiže, tj. radi se o maksimumu. Precizno:

Teorem 3.3.2. *Neka je X realan ili kompleksan unitaran prostor i neka je A kompaktan simetričan operator na X. Tada je ili $\|A\|$ ili $-\|A\|$ svojstvena vrijednost operatora A. Ako je e jedinični svojstveni vektor za tu svojstvenu vrijednost, onda je*

$$\|A\| = |(Ae|e)| = \sup\{|(Ax|x)|;\ x \in S\}.$$

Dokaz: Ako je $A = 0$, tvrdnja je trivijalna. Pretpostavimo da je $A \neq 0$. Iz propozicije 3.3.1. slijedi da postoji niz jediničnih vektora (z_n) takav da je

$$\|A\| = \lim_{n\to\infty} |(Az_n|z_n)|.$$

Budući da je $\|A\| \neq 0$ možemo pretpostaviti da je $(Az_n|z_n) \neq 0\ \forall n$. Nadalje, zbog simetričnosti operatora A svi brojevi $(Az_n|z_n)$ su realni. Stoga postoji podniz (y_n) niza (z_n) takav da su svi brojevi $(Ay_n|y_n)$ istog predznaka. Tada vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} (Ay_n|y_n) = \lambda,$$

gdje je $\lambda = \|A\|$ ako je $(Ay_n|y_n) > 0\ \forall n$, a $\lambda = -\|A\|$ ako je $(Ay_n|y_n) < 0\ \forall n$. Budući da je operator A kompaktan i svi su vektori y_n jedinični, postoji podniz (x_n) niza (y_n) takav da je niz (Ax_n) konvergentan u X. Neka je x limes tog niza i stavimo $v_n = Ax_n - \lambda x_n$. Tada imamo

$$\|v_n\|^2 = (Ax_n - \lambda x_n|Ax_n - \lambda x_n) = \|Ax_n\|^2 - 2\lambda(Ax_n|x_n) + \lambda^2 \leq 2\lambda^2 - 2\lambda(Ax_n|x_n),$$

jer je $\|Ax_n\|^2 \leq \|A\|^2 = \lambda^2$. Međutim, $\lambda = \lim(Ax_n|x_n)$ pa slijedi da desna strana gornje nejednakosti teži k nuli. Dakle, (v_n) je nul$-$niz. Kako je

$$x_n = \frac{1}{\lambda}Ax_n - \frac{1}{\lambda}v_n,$$

zaključujemo da je

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{1}{\lambda}\lim_{n\to\infty} Ax_n - \frac{1}{\lambda}\lim_{n\to\infty} v_n = \frac{1}{\lambda}x.$$

Kako su svi vektori x_n jedinični, slijedi $\|x\| = |\lambda|$ i, posebno, $x \neq 0$. Imamo

$$0 = \lim_{n\to\infty} v_n = \lim_{n\to\infty} Ax_n - \lim_{n\to\infty} \lambda x_n = A\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) - \lambda\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) = A\left(\frac{1}{\lambda}x\right) - \lambda\left(\frac{1}{\lambda}x\right),$$

a odatle je $Ax = \lambda x$. Dakle, λ je svojstvena vrijednost operatora A.

Neka je sada $e \in X$ jedinični vektor takav da je $Ae = \lambda e$. Tada je

$$(Ae|e) = (\lambda e|e) = \lambda(e|e) = \lambda = \pm\|A\| \qquad \Longrightarrow \qquad |(Ae|e)| = \|A\|.$$

Teorem 3.3.3. *Neka je X realan ili kompleksan unitaran prostor i $A \neq 0$ simetričan operator na X konačnog ranga. Postoje $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ i ortonormirani vektori $e_1, e_2, \ldots, e_n$ takvi da je*

$$|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \cdots \geq |\lambda_n| > 0 \qquad i \qquad Ax = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (x|e_i) e_i \qquad \forall x \in X.$$

Tada je $R(A) = [\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}]$, $N(A) = R(A)^\perp$ i $X = R(A) \dotplus N(A)$.

Dokaz: Prema teoremu 3.3.2. postoje jedinični vektor $e_1 \in X$ i $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ takvi da je $|\lambda_1| = \|A\|$ i $Ae_1 = \lambda_1 e_1$. Stavimo $X_1 = X$ i

$$X_2 = \{e_1\}^\perp = \{x \in X;\ (x|e_1) = 0\}.$$

Potprostor X_2 je $A-$invarijantan:

$$(x|e_1) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad (Ax|e_1) = (x|Ae_1) = (x|\lambda_1 e_1) = \lambda_1 (x|e_1) = 0.$$

Neka je $A_2 \in L(X_2)$ restrikcija operatora $A_1 = A$ na potprostor $X_2 : A_2 x = Ax$, $x \in X$. Tada je A_2 kompaktan simetričan operator na unitarnom prostoru X_2 pa ako je $A_2 \neq 0$ po teoremu 3.3.2. postoje jedinični vektor $e_2 \in X_2$ i $\lambda_2 \in \mathbb{R}$ takvi da je $|\lambda_2| = \|A_2\|$ i $A_2 e_2 = \lambda_2 e_2$. Očito je $\|A_2\| \leq \|A\|$, dakle je $|\lambda_1| \geq |\lambda_2|$. Prema tome,

$$\|e_1\| = \|e_2\| = 1, \quad (e_1|e_2) = 0, \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \quad |\lambda_1| \geq |\lambda_2|, \quad Ae_1 = \lambda_1 e_1, \quad Ae_2 = \lambda_2 e_2.$$

Stavimo sada

$$X_3 = \{e_1, e_2\}^\perp = \{x \in X;\ (x|e_1) = (x|e_2) = 0\}.$$

Tada je potprostor X_3 $A-$invarijantan i neka je $A_3 = A|X_3 = A_2|X_3 \in L(X_3)$. Operator A_3 na unitarnom prostoru X_3 je kompaktan i simetričan, pa ako je $A_3 \neq 0$ po teoremu 3.3.2. postoji jedinični vektor $e_3 \in X_3$ i $\lambda_3 \in \mathbb{R}$ takvi da je $|\lambda_3| = \|A_3\| \leq \|A_2\| = |\lambda_2|$ i $A_3 e_3 = \lambda_3 e_3$. Dakle,

$$\|e_1\| = \|e_2\| = \|e_3\| = 1, \quad (e_1|e_2) = (e_1|e_3) = (e_2|e_3) = 0,$$

$$|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq |\lambda_3| > 0, \quad Ae_1 = \lambda_1 e_1, \quad Ae_2 = \lambda_2 e_2, \quad Ae_3 = \lambda_3 e_3.$$

Nastavimo li taj postupak dolazimo do ortonormiranih vektora $e_1, e_2, \ldots, e_k$ i realnih brojeva $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ takvih da je $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \cdots \geq |\lambda_k| > 0$ i $Ae_i = \lambda_i e_i$, $i = 1, 2, \ldots, k$. Potprostor

$$X_{k+1} = \{e_1, e_2, \ldots, e_k\}^\perp = \{x \in X;\ (x|e_i) = 0 \ \text{ za } \ i = 1, 2, \ldots, k\}$$

je $A-$invarijantan i $A_{k+1} = A|X_{k+1} = A_k|X_{k+1}$ je kompaktan i simetričan operator na unitarnom prostoru X_{k+1}. Ako je $A_{k+1} \neq 0$ postupak se može nastaviti. Očito su $e_i \in R(A)$, pa kako je $R(A)$ konačnodimenzionalan, postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je $A_n \neq 0$ i $A_{n+1} = 0$. Neka je sada $x \in X$ proizvoljan. Njegova ortogonalna projekcija na potprostor $[\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}]$ je

$$\sum_{i=1}^{n} (x|e_i) e_i,$$

pa vrijedi

$$y = x - \sum_{i=1}^{n} (x|e_i) e_i \in X_{n+1} = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}^\perp.$$

Slijedi $Ay = A_{n+1} y = 0$, dakle,

$$Ax = \sum_{i=1}^{n} (x|e_i) Ae_i = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (x|e_i) e_i,$$

a to je upravo formula koju smo trebali dokazati. Iz te formule slijedi $R(A) = [\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}]$ i $N(A) = X_{n+1} = R(A)^\perp$. Time je teorem u potpunosti dokazan.

Teorem 3.3.4. *Neka je X unitaran prostor i A kompaktan simetričan operator na X beskonačnog ranga. Tada postoji ortonormiran niz $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ u X i niz $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ u $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ takvi da je*

$$|\lambda_n| \geq |\lambda_{n+1}| \quad \forall n\in\mathbb{N}, \qquad \lim_{n\to\infty}\lambda_n = 0,$$

$$Ax = \sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n(x|e_n)e_n \qquad \forall x\in X.$$

Posebno, $Ae_n = \lambda_n e_n$, dakle, λ_n su svojstvene vrijednosti operatora A. Štoviše, $\{\lambda_n;\ n\in\mathbb{N}\}$ je skup svih svojstvenih vrijednosti od A različitih od nule. Ako je $\lambda\neq 0$ svojstvena vrijednost od A onda je

$$X_\lambda(A) = N(\lambda I - A) = \{x\in X;\ Ax=\lambda x\} = [\{e_n;\ n\in\mathbb{N},\, \lambda_n=\lambda\}].$$

Ortonormiran skup $\{e_n;\ n\in\mathbb{N}\}$ u unitarnom prostoru X je maksimalan ako i samo ako 0 nije svojstvena vrijednost od A. Općenito je $N(A)=\{e_n;\ n\in\mathbb{N}\}^{\perp}$.

Dokaz: Koristimo teorem 3.3.2. na isti način kao u dokazu teorema 3.3.3. Međutim, sada je potprostor $R(A)$ beskonačnodimenzionalan, pa je $X_{n+1}\neq\{0\}$ za svaki $n\in\mathbb{N}$. Dakle, postupkom iz dokaza teorema 3.3.3. dolazimo do beskonačnog ortonormiranog niza $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ i beskonačnog niza $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ realnih brojeva različitih od nule, takvih da je

$$Ae_n = \lambda_n e_n \qquad \text{i} \qquad |\lambda_n|\geq|\lambda_{n+1}| \qquad \forall n\in\mathbb{N}.$$

Niz pozitivnih brojeva $(|\lambda_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ je monotono padajući pa postoji

$$\alpha = \lim_{n\to\infty}|\lambda_n| \geq 0.$$

Pretpostavimo da je $\alpha>0$. Stavimo

$$x_n = \frac{1}{\lambda_n}e_n, \qquad n\in\mathbb{N}.$$

Tada je niz $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ u X ograničen:

$$\|x_n\| = \frac{1}{|\lambda_n|}\|e_n\| = \frac{1}{|\lambda_n|} \leq \frac{1}{\alpha}.$$

Kako je $Ax_n = e_n$, iz kompaktnosti operatora A slijedi da niz $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ima konvergentan podniz. No to je nemoguće jer je niz $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ortonormiran. Ova kontradikcija dokazuje da je nužno $\alpha=0$. Dakle,

$$\lim_{n\to\infty}|\lambda_n| = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \lim_{n\to\infty}\lambda_n = 0.$$

Neka je sada $x\in X$ proizvoljan. Za $n\in\mathbb{N}$ stavimo

$$y_n = x - \sum_{i=1}^{n}(x|e_i)e_i.$$

Tada je uz oznake iz dokaza teorema 3.3.3. $y_n\in X_{n+1}$, dakle

$$\|Ay_n\| = \|A_{n+1}y_n\| \leq \|A_{n+1}\|\|y_n\| = |\lambda_{n+1}|\|y_n\| \leq |\lambda_{n+1}|\|x\|.$$

Slijedi

$$\lim_{n\to\infty}\|Ay_n\| = 0,$$

a kako je

$$Ay_n = Ax - \sum_{i=1}^{n}(x|e_i)Ae_i = Ax - \sum_{i=1}^{n}\lambda_i(x|e_i)e_i,$$

slijedi

$$\lim_{n\to\infty}\left\|Ax - \sum_{i=1}^{n}\lambda_i(x|e_i)e_i\right\| = 0.$$

Time je dokazano

$$Ax = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(x|e_i)e_i = \sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n(x|e_n)e_n.$$

Neka je λ svojstvena vrijednost operatora A i neka je $x \neq 0$ takav da je $Ax = \lambda x$. Slijedi

$$\lambda x = \sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n(x|e_n)e_n.$$

Skalarni produkt s e_k daje

$$\lambda(x|e_k) = \lambda_k(x|e_k), \qquad \text{tj.} \qquad (\lambda - \lambda_k)(x|e_k) = 0.$$

Ako je $\lambda \neq \lambda_k$ $\forall k \in \mathbb{N}$, tada je $(x|e_k) = 0$ $\forall k \in \mathbb{N}$, pa slijedi $\lambda x = 0$. Kako je $x \neq 0$ zaključujemo da je $\lambda = 0$. Time je dokazano da je $\{\lambda_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ skup svih svojstvenih vrijednosti operatora A različitih od nule.

Neka je sada $\lambda \neq 0$ svojstvena vrijednost od A. Očito je $[\{e_n;\ \lambda_n = \lambda\}] \subseteq N(\lambda I - A)$. Dokažimo i obrnutu inkluziju. Neka je $x \in N(\lambda I - A)$, tj. $Ax = \lambda x$. Tada kao i malo prije nalazimo da je $(\lambda - \lambda_n)(x|e_n) = 0$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Odatle slijedi

$$\lambda x = Ax = \sum_{n\in\mathbb{N},\lambda_n=\lambda}\lambda(x|e_n)e_n \qquad \Longrightarrow \qquad x = \sum_{n\in\mathbb{N},\lambda_n=\lambda}(x|e_n)e_n \in [\{e_n;\ \lambda_n = \lambda\}].$$

Dakle, dokazali smo i obrnutu inkluziju $N(\lambda I - A) \subseteq [\{e_n;\ \lambda_n = \lambda\}]$.

Napokon, imamo

$$x \in N(A) \iff Ax = 0 \iff (x|e_n) = 0\ \forall n \in \mathbb{N} \iff x \in \{e_n;\ n \in \mathbb{N}\}^{\perp}.$$

Dakle, $N(A) = \{e_n;\ n \in \mathbb{N}\}^{\perp}$. Odatle se vidi da je $N(A) = \{0\}$, tj. 0 nije svojstvena vrijednost operatora A, ako i samo ako je $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ maksimalan ortonormiran niz u prostoru X. Time je teorem u potpunosti dokazan.

Primijetimo da dokaz teorema 3.3.3. i 3.3.4. daje algoritam za izračunavanje svojstvenih vrijednosti i svojstvenih vektora simetričnog kompaktnog operatora na unitarnom prostoru. Nadalje, svaki vektor iz $R(A)$ se može napisati kao red svojstvenih vektora operatora A za svojstvene vrijednosti različite od nule.

Teorem 3.3.5. *Neka je X Hilbertov prostor i A kompaktan hermitski operator na X beskonačnog ranga. Neka su λ_n i e_n kao u teoremu 3.3.4. Tada za svaki $x \in X$ vrijedi*

$$x - \sum_{n=1}^{\infty}(x|e_n)e_n \in N(A).$$

Drugim riječima, $N(A) = R(A)^{\perp}$ i $Cl(R(A)) = N(A)^{\perp}$. Nadalje,

$$\sigma(A) = \{0\} \cup \{\lambda_n;\ n \in \mathbb{N}\}.$$

Dokaz: Prije svega primijetimo da konvergencija reda $\sum(x|e_n)e_n$ slijedi iz potpunosti prostora X i iz Besselove nejednakosti $\sum |(x|e_n)|^2 \leq \|x\|^2$. Stavimo li $x_0 = x - \sum(x|e_n)e_n$, zbog neprekidnosti operatora A iz teorema 3.3.4. slijedi

$$Ax_0 = Ax - \sum_{n=1}^{\infty}(x|e_n)Ae_n = Ax - \sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n(x|e_n)e_n = 0.$$

Odatle i iz teorema 3.2.4. slijede sve tvrdnje teorema.

Sljedeći je korolar neposredna posljedica teorema 3.3.4. i činjenice da je u Hilbertovom prostoru svaki maksimalni ortonormiran skup ortonormirana baza:

Korolar 3.3.6. *Neka je X Hilbertov prostor A kompaktan hermitski operator na X. Tada je skup vektora $\{e_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ iz teorema 3.3.4. ortonormirana baza u X ako i samo ako* 0 *nije svojstvena vrijednost operatora A.*

3.4 Algebre kompaktnih operatora

U ovom poglavlju X je Hilbertov prostor. Tada je prema teoremima 3.1.5. i 3.1.8. $K(X)$ zatvoren obostrani ideal u Banachovoj algebri $B(X)$. Promatrat ćemo sada podalgebre algebre $K(X)$. Podalgebru $\mathcal{A}$ algebre $B(X)$ zovemo $*-$**podalgebrom** ako je $\mathcal{A}^* = \mathcal{A}$, tj. ako vrijedi

$$A \in \mathcal{A} \qquad \Longrightarrow \qquad A^* \in \mathcal{A}.$$

Za $*-$podalgebru $\mathcal{A}$ od $K(X)$ sa $\mathcal{P}(\mathcal{A})$ ćemo označavati skup svih ortogonalnih projektora u $\mathcal{A}$, tj.

$$\mathcal{P}(\mathcal{A}) = \{E \in \mathcal{A};\ E^2 = E = E^*\}.$$

Svaki je operator $E \in \mathcal{P}(\mathcal{A})$ kompaktan i očito je $E|R(E) = I_{R(E)}$, pa iz tvrdnje (b) teorema 3.1.7. slijedi da je slika $R(E)$ konačnodimenzionalna. Drugim riječima, svaki $E \in \mathcal{P}(\mathcal{A})$ je projektor konačnog ranga.

Skup $\mathcal{P}(\mathcal{A})$ je parcijalno uređen relacijom

$$E, F \in \mathcal{P}(\mathcal{A}), \qquad E \leq F \qquad \Longleftrightarrow \qquad EF = FE = E.$$

Zadatak 3.4.1. *Dokažite da za $E, F \in \mathcal{P}(\mathcal{A})$ vrijedi*

$$E \leq F \qquad \Longleftrightarrow \qquad R(E) \subseteq R(F) \qquad \Longleftrightarrow \qquad (Ex|x) \leq (Fx|x) \quad \forall x \in X.$$

Za projektore $E, F \in \mathcal{P}(\mathcal{A})$ kažemo da su međusobno **ortogonalni** ako vrijedi $EF = 0$. Tada pišemo $E \perp F$. Naravno, iz $\mathcal{A}^* = \mathcal{A}$ slijedi da je tada i $FE = 0$.

Zadatak 3.4.2. *Dokažite da za $E, F \in \mathcal{P}(\mathcal{A})$ vrijedi $E \perp F$ ako i samo ako je $R(E) \perp R(F)$.*

Projektor $E \in \mathcal{P}(\mathcal{A})$ zove se **minimalan** u $\mathcal{A}$, ako je on minimalan element parcijalno uređenog skupa $\mathcal{P}(\mathcal{A}) \setminus \{0\}$, tj. ako je $E \neq 0$ i ako vrijedi:

$$F \in \mathcal{P}(\mathcal{A}), \quad F \leq E \qquad \Longrightarrow \qquad F = E \quad \text{ili} \quad F = 0.$$

Propozicija 3.4.1. (a) *$E \in \mathcal{P}(\mathcal{A}) \setminus \{0\}$ je minimalan ako i samo ako vrijedi*

$$E\mathcal{A}E = \mathbb{C}E, \qquad \textit{tj.} \quad \{EAE;\ A \in \mathcal{A}\} = \{\lambda E;\ \lambda \in \mathbb{C}\}.$$

(b) *Svaki $E \in \mathcal{P}(\mathcal{A}) \setminus \{0\}$ je konačna suma međusobno ortogonalnih minimalnih projektora u $\mathcal{A}$.*

Dokaz: (a) Pretpostavimo najprije da je $E\mathcal{A}E = \mathbb{C}E$. Neka je $F \in \mathcal{P}(\mathcal{A})$ i $F \leq E$. Tada je $F = EFE$, pa postoji $\lambda \in \mathbb{C}$ takav da je $F = \lambda E$. Kako su F i E projektori, imamo

$$\lambda E = F = F^2 = \lambda^2 E^2 = \lambda^2 E.$$

Kako je $E \neq 0$, slijedi $\lambda^2 = \lambda$, a to je moguće samo ako je $\lambda = 1$ ili $\lambda = 0$. Dakle, $F = E$ ili $F = 0$, i time je dokazano da je E minimalan projektor u algebri $\mathcal{A}$.

Pretpostavimo sada da je $E \in \mathcal{P}(\mathcal{A}) \setminus \{0\}$ minimalan projektor u algebri $\mathcal{A}$. Neka je $T \in \mathcal{A}$ hermitski, tj. $T^* = T$. Tada je ETE hermitski operator konačnog ranga. Po teoremu o dijagonalizaciji hermitskog operatora na konačnodimenzionalnom prostoru primijenjenom na restrikciju $ETE|R(E)$, potprostor $R(E)$ je ortogonalna suma svojstvenih potprostora tog operatora. Dakle, ako je $ETE \neq 0$, $\sigma(ETE|R(E)) \setminus \{0\} = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$ i $\lambda_i \neq \lambda_j$ za $i \neq j$, onda vrijedi

$$R(E) = X_0 \oplus X_1 \oplus \cdots \oplus X_n, \quad X_0 = N(ETE) \cap R(E), \quad X_j = \{x \in X;\ ETEx = \lambda_j x\}, \quad 1 \leq j \leq n.$$

Označimo sada sa F_j, $1 \leq j \leq n$, ortogonalni projektor prostora X na potprostor X_j, dakle, projektor duž potprostora

$$X_j^\perp = N(E) \oplus X_0 \oplus X_1 \oplus \cdots \oplus X_{j-1} \oplus X_{j+1} \oplus \cdots \oplus X_n.$$

Zadatak 3.4.3. *Dokažite da uz gornje oznake vrijedi*

$$ETE = \lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2 + \cdots + \lambda_n F_n.$$

Nadalje, dokažite da je $F_j = P_j(ETE)$, $j = 1, 2, \ldots, n$, gdje je svaki P_j polinom bez konstantnog člana.

Uputa: Za drugu tvrdnju promatrajte sustav jednadžbi

$$(ETE)^k = \lambda_1^k F_1 + \lambda_2^k F_2 + \cdots + \lambda_n^k F_n, \qquad 1 \le k \le n,$$

koji neposredno slijedi iz jednakosti za $k = 1$, i riješite taj sustav po $F_1, F_2, \ldots, F_n$.

Prema drugoj tvrdnji u prethodnom zadatku vrijedi $F_1, F_2, \ldots, F_n \in \mathcal{P}(\mathcal{A})$. Imamo $R(F_j) = X_j \subseteq R(E)$, dakle, prema zadatku 3.4.1. vrijedi $F_j \le E$ za svaki j. Po pretpostavci je E minimalan, pa slijedi da je za svako j ili $F_j = E$ ili $F_j = 0$. Kako su projektori F_j međusobno ortogonalni, slijedi da je nužno $n = 1$ i $F_1 = E$. Dakle, vrijedi $ETE = \lambda_1 E$.

Napokon, svaki operator $T \in \mathcal{A}$ je oblika $T_1 + iT_2$, gdje su $T_1, T_2 \in \mathcal{A}$ hermitski, dakle, vrijedi $ETE = ET_1E + iET_2E = \lambda E$ za neki $\lambda \in \mathbb{C}$. Time je tvrdnja (a) dokazana.

(b) Ako $E \in \mathcal{P}(\mathcal{A}) \setminus \{0\}$ nije minimalan u $\mathcal{A}$ onda postoji $F_1 \in \mathcal{P}(\mathcal{A})$ takav da je $F_1 \ne E$, $F_1 \ne 0$ i $F_1 \le E$. Tada isto vrijedi i za $F_2 = E - F_1$. Sada je $F_1 \perp F_2$ i $E = F_1 + F_2$. Budući da je $\dim R(E) = \dim R(F_1) + \dim R(F_2)$, tvrdnja slijedi indukcijom po $\dim R(E)$.

Podalgebra $\mathcal{A}$ od $B(X)$ zove se **ireducibilna** ako ne postoji zatvoren $\mathcal{A}-$invarijantan potprostor Y koji je netrivijalan, tj. $Y \ne X$ i $Y \ne \{0\}$.

Teorem 3.4.2. *Neka je X Hilbertov prostor i neka je $\mathcal{A} \ne \{0\}$ zatvorena ireducibilna $*-$podalgebra od $K(X)$. Tada je $\mathcal{A} = K(X)$.*

Dokaz: Dokažimo najprije da postoji $E \in \mathcal{P}(\mathcal{A})$ takav da je $\dim R(E) = 1$. Prema tvrdnji (b) propozicije 3.4.1. dovoljno je dokazati da je $\dim R(E) = 1$ za svaki minimalan projektor E u algebri $\mathcal{A}$. Doista, neka je $E \in \mathcal{P}(\mathcal{A}) \setminus \{0\}$ minimalan u $\mathcal{A}$. Neka je $x \in R(E)$, $x \ne 0$. Neka je Y zatvarač potprostora $\mathcal{A}x = \{Tx;\ T \in \mathcal{A}\}$. Kako je $x = Ex$, to je $x \in Y$, dakle, $Y \ne \{0\}$. Nadalje, očito je potprostor Y $\mathcal{A}-$invarijantan. Kako je po pretpostavci algebra $\mathcal{A}$ ireducibilna, zaključujemo da je $Y = X$. Drugim riječima, potprostor $\mathcal{A}x$ je gust u X. To je ekvivalentno jednakosti $(\mathcal{A}x)^\perp = \{0\}$.

Neka je sada $y \in R(E)$ i $y \perp x$. Neka je $T \in \mathcal{A}$. Prema tvrdnji (a) propozicije 3.4.1. tada je $ETE = \lambda E$ za neki $\lambda \in \mathbb{C}$. Dakle,

$$(y|Tx) = (Ey|TEx) = (y|ETEx) = (y|\lambda x) = \overline{\lambda}(y|x) = 0.$$

Kako to vrijedi za svaki $T \in \mathcal{A}$, dobivamo da je $y \perp \mathcal{A}x$, dakle, $y = 0$. Time je dokazano da je $R(E) = \mathbb{C}x$, tj. $\dim R(E) = 1$.

Dokažimo sada da $\mathcal{A}$ sadrži svaki ortogonalan projektor na prostoru X ranga 1. Doista, neka je F ortogonalan projektor na prostoru X ranga 1 i neka je $f \in R(F)$, $\|f\| = 1$. Tada se lako vidi da vrijedi $Fz = (z|f)f$ za svaki $z \in X$. Neka je $E \in \mathcal{P}(\mathcal{A})$ projektor ranga 1 i $e \in R(E)$, $\|e\| = 1$, dakle, $Ez = (z|e)e\ \forall z \in X$. Prema prethodnom odlomku tada je potprostor $\mathcal{A}e$ gust u X, pa postoji niz $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ u $\mathcal{A}$ takav da niz $(T_ne)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira prema f, a bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $\|T_ne\| = 1\ \forall n$; doista, možemo uzeti da su svi $T_ne \ne 0$, a zatim T_n zamijeniti sa $\dfrac{1}{\|T_ne\|}T_n$. Tada je $T_nET_n^* \in \mathcal{A}$ i za svaki $z \in X$ nalazimo

$$\|T_nET_n^*z - Fz\| = \|T_n(T_n^*z|e)e - (z|f)f\| = \|(z|T_ne)T_ne - (z|f)f\| =$$

$$= \|(z|T_ne)(T_ne - f) + (z|T_ne - f)f\| \le \|z\| \cdot \|T_ne\| \cdot \|T_ne - f\| + \|z\| \cdot \|T_e - f\| \cdot \|f\| = 2\|z\|\|T_ne - f\|.$$

Kako to vrijedi za svaki $z \in X$, slijedi

$$\|T_nET_n^* - F\| \leq 2\|T_ne - f\| \qquad \Longrightarrow \qquad F = \lim_{n\to\infty} T_nET_n^*,$$

a kako je po pretpostavci algebra $\mathcal{A}$ zatvorena, slijedi $F \in \mathcal{A}$ kao što smo i tvrdili.

Iz dokazanog slijedi da $\mathcal{A}$ sadrži sve ortogonalne projektore na X konačnog ranga, a iz teorema o dijagonalizaciji hermitskih operatora na konačnodimenzionalnom prostoru slijedi da $\mathcal{A}$ sadrži sve operatore na X konačnog ranga. Dakle, $F(X) \subseteq \mathcal{A}$, a kako je prema teoremu 3.1.12. $K(X) = Cl(F(X))$, to je $K(X) \subseteq \mathcal{A}$, tj. $\mathcal{A} = K(X)$.

Teorem 3.4.3. *Neka je X Hilbertov prostor. Algebra $K(X)$ ne sadrži nijedan zatvoren obostrani ideal osim $K(X)$ i $\{0\}$.*

Dokaz: Neka je $\mathcal{A} \neq \{0\}$ zatvoren obostrani ideal u algebri $K(X)$. Za svaki $x \in X$, $x \neq 0$, tada je $Y = Cl(\mathcal{A}x)$ zatvoren potprostor od X koji je različit od $\{0\}$ i koji je $K(X)-$invarijantan; doista, za $T \in K(X)$ je $T\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}$, dakle, $T\mathcal{A}x \subseteq \mathcal{A}x$, pa zbog neprekidnosti operatora T slijedi $TY \subseteq Y$. Posebno, Y je invarijantan s obzirom na svaki projektor ranga 1, a to je moguće samo ako je $Y = X$. Time je dokazano da je potprostor $\mathcal{A}x$ gust u X za svaki vektor $x \neq 0$. Odatle slijedi da u X nema netrivijalnih zatvorenih $\mathcal{A}-$invarijantnih potprostora. Prema teoremu 3.4.2. zaključujemo da je nužno $\mathcal{A} = K(X)$.

Teorem 3.4.4. *Neka je X Hilbertov prostor i neka je $\mathcal{A}$ zatvorena ireducibilna $*-$podalgebra od $B(X)$. Tada je ili $\mathcal{A} \cap K(X) = \{0\}$ ili je $K(X) \subseteq \mathcal{A}$.*

Dokaz: Pretpostavimo da je $\mathcal{B} = \mathcal{A} \cap K(X) \neq \{0\}$. Tada je $\mathcal{B}$ zatvoren ideal u algebri $\mathcal{A}$. Odatle slično kao u dokazu teorema 3.4.3. nalazimo da je za svaki vektor $x \neq 0$ potprostor $\mathcal{B}x$ gust u X. Doista, za $T \in \mathcal{A}$ je $T\mathcal{B} \subseteq \mathcal{B}$, dakle, $T\mathcal{B}x \subseteq \mathcal{B}x$, pa po neprekidnosti slijedi da je $Cl(\mathcal{B}x) \neq \{0\}$ zatvoren $\mathcal{A}-$invarijantan potprostor od X, dakle, $Cl(\mathcal{B}x) = X$. Odatle slijedi da u X ne postoji netrivijalan zatvoren $\mathcal{B}-$invarijantan potprostor, pa pomoću teorema 3.4.3. zaključujemo da je $\mathcal{B} = K(X)$. Time je dokazano da je $K(X) \subseteq \mathcal{A}$.

Zadatak 3.4.4. *Neka je $\mathcal{A}$ zatvorena $*-$podalgebra od $K(X)$.*

(a) *Neka je $E \in \mathcal{P}(\mathcal{A}) \setminus \{0\}$ minimalni projektor u $\mathcal{A}$ i neka je $x \in R(E)$ jedinični vektor. Stavimo $Y = Cl(\mathcal{A}x)$. Dokažite da je $\mathcal{A}|Y = \{T|Y;\ T \in \mathcal{A}\} = K(Y)$.*

(b) *Dokažite da postoje međusobno ortogonalni zatvoreni $\mathcal{A}-$invarijantni potprostori X_i, $i \in I$, takvi da je*

$$\mathcal{A}|X_i = K(X_i) \quad \forall i \in I \qquad i \qquad Cl\left(\sum_{i\in I} X_i\right) = X.$$

Poglavlje 4

Spektralni teorem za ograničen hermitski operator

4.1 Pozitivni operatori

Neka je X Hilbertov prostor. Operator $A \in B(X)$ zove se **pozitivan** ako je

$$A = A^* \qquad \text{i} \qquad (Ax|x) \geq 0 \quad \forall x \in X.$$

Skup svih hermitskih operatora u $B(X)$ označavat ćemo sa $B_h(X)$, a skup svih pozitivnih sa $B_+(X)$. Za $A \in B_+(X)$ pišemo $A \geq 0$. Nadalje, za $A, B \in B_h(X)$ pišemo $A \leq B$ (ili $B \geq A$) ako je $B - A \geq 0$, tj. ako je $(Ax|x) \leq (Bx|x)$ $\forall x \in X$. Očito je $B_+(X)$ konveksan konus u realnom vektorskom prostoru $B_h(X)$, tj. vrijedi:

$$A, B \in B_+(X) \quad \text{i} \quad \lambda \in \mathbb{R},\ \lambda \geq 0 \qquad \Longrightarrow \qquad A + B \in B_+(X) \quad \text{i} \quad \lambda A \in B_+(X).$$

Nadalje, $B_h(X)$ je s relacijom $\leq$ parcijalno uređen skup.

Zadatak 4.1.1. *Dokažite da je svaki ortogonalni projektor P, tj. operator $P \in B(X)$ takav da je $P^2 = P = P^*$, pozitivan i da vrijedi $P \leq I$. Nadalje, ako su P i Q ortogonalni projektori na Hilbertovom prostoru X, dokažite da su sljedeća četiri svojstva međusobno ekvivalentna:*

(*a*) $P \leq Q$.

(*b*) $PQ = QP = P$.

(*c*) $R(P) \subseteq R(Q)$.

(*d*) $N(Q) \subseteq N(P)$.

Ako je $A \in B(X)$ onda je $A^*A \in B_h(X)$ i za svaki $x \in X$ vrijedi

$$(A^*Ax|x) = (Ax|Ax) = \|Ax\|^2 \geq 0,$$

dakle, $A^*A \in B_+(X)$. Posebno, ako je $A \in B_h(X)$ onda je $A^2 \in B_+(X)$.

Za svaki $A \in B_+(X)$ preslikavanje $(x, y) \mapsto (Ax|y)$ je pozitivno semidefinitna hermitska forma, pa za nju vrijedi nejednakost Cauchy−Schwarz−Buniakowskog:

$$|(Ax|y)|^2 \leq (Ax|x)(Ay|y) \qquad \forall x, y \in X. \tag{4.1}$$

Dokazat ćemo sada analogon teorema o konvergentnosti ograničenih monotonih nizova u $\mathbb{R}$.

Teorem 4.1.1. *Neka je* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *niz u* $B_h(X)$ *koji je rastući, tj.* $A_n \leq A_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ *i ograničen, tj.*

$$M = \sup\{\|A_n\|;\ n \in \mathbb{N}\} < +\infty.$$

Tada postoji $A \in B_h(X)$ *takav da je*

$$Ax = \lim_{n\to\infty} A_n x \qquad \forall x \in X \tag{4.2}$$

i vrijedi $A_n \leq A$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Dokaz: Za svaki $x \in X$ niz realnih brojeva $((A_n x|x))_{n\in\mathbb{N}}$ je rastući i ograničen. Dakle, taj je niz konvergentan u $\mathbb{R}$. Za $m \geq n$ je $A_m - A_n \geq 0$ pa nejednakost (4.1) primijenjena na operator $A_m - A_n$ daje za proizvoljne vektore $x, y \in X$:

$$|((A_m - A_n)x|y)|^2 \leq ((A_m - A_n)x|x)((A_m - A_n)y|y) \leq 2M[(A_m x|x) - (A_n x|x)]\|y\|^2.$$

Uvrstimo li $y = (A_m - A_n)x$, slijedi

$$\|A_m x - A_n x\|^2 \leq 2M[(A_m x|x) - (A_n x|x)].$$

Budući da je niz $((A_n x|x))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergentan u $\mathbb{R}$ iz gornje nejednakosti slijedi da je $(A_n x)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyjev niz u X. Kako je prostor X Hilbertov, dakle potpun, sa (4.2) je definiran linearan operator $A : X \to X$. Nadalje, vrijedi

$$\|A_n x\| \leq M\|x\| \quad \forall x \in X \qquad \text{i} \qquad (A_n x|y) = (x|A_n y) \quad \forall x, y \in X,$$

a odatle, kada pustimo da n teži u ∞, dobivamo

$$\|Ax\| \leq M\|x\| \quad \forall x \in X \qquad \text{i} \qquad (Ax|y) = (x|Ay) \quad \forall x, y \in X.$$

Dakle, $A \in B_h(X)$. Napokon, kada u nejednakosti

$$(A_n x|x) \leq (A_m x|x) \qquad \text{za} \quad n \leq m$$

pustimo da m teži u ∞, dobivamo

$$(A_n x|x) \leq (Ax|x) \qquad \forall x \in X \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad \text{tj.} \qquad A_n \leq A \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Time je teorem dokazan.

Naravno, zamjenom A_n sa $-A_n$ vidimo da analogna tvrdnja vrijedi i za padajuće ograničene nizove hermitskih operatora. Nadalje, naglasimo da se u teoremu 4.1.1. **ne tvrdi** da je operator A limes niza $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ u odnosu na normu $\|\cdot\|$ prostora $B(X)$, nego samo da vrijedi (4.2).

Korolar 4.1.2. *Neka je* $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *monotoni niz ortogonalnih projektora na Hilbertovom prostoru* X. *Tada je sa*

$$Px = \lim_{n\to\infty} P_n x \qquad x \in X \tag{4.3}$$

definiran ortogonalan projektor na prostoru X. *Nadalje, ako je niz* $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *padajući, onda je*

$$R(P) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} R(P_n) \qquad i \qquad N(P) = Cl\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} N(P_n)\right)$$

a ako je taj niz rastući, onda je

$$N(P) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} N(P_n) \qquad i \qquad R(P) = Cl\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} R(P_n)\right).$$

Dokaz: Pretpostavimo najprije da je niz $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rastući. Za svaki ortogonalni projektor $P \neq 0$ je $\|P\| = 1$. Dakle, niz $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zadovoljava uvjete teorema 4.1.1. Prema tome, sa (4.3) definiran je operator $P \in B_h(X)$. Sada iz $P_n^2 = P_n$ $\forall n$ slijedi $P^2 = P$. Dakle, P je ortogonalni projektor. Nadalje, prema teoremu 4.1.1. je $P_n \leq P$ $\forall n \in \mathbb{N}$, a to prema zadatku 4.1.1. znači da je $N(P) \subseteq N(P_n)$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Odatle

$$N(P) \subseteq \bigcap_{n\in\mathbb{N}} N(P_n).$$

Obrnuta inkluzija slijedi neposredno iz (4.3).

Iz jednakosti za jezgre slijedi i jednakost za područja vrijednosti. Naime, za svaki ortogonalni projektor Q vrijedi $N(Q) = R(Q)^\perp$ i $R(Q) = N(Q)^\perp$. Nadalje, za vektorski potprostor Y Hilbertovog prostora X vrijedi $Cl(Y) = Y^{\perp\perp}$. Posebno, za zatvoren potprostor Z je $Z = Z^{\perp\perp}$. Stoga imamo redom

$$R(P)^\perp = N(P) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} N(P_n) = \left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} N(P_n)\right)^{\perp\perp} = \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} N(P_n)^\perp\right)^\perp,$$

pa slijedi

$$R(P) = \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} N(P_n)^\perp\right)^{\perp\perp} = Cl\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} R(P_n)\right).$$

Iz jednakosti dokazanih za rastuće nizove ortogonalnih projektora odmah slijede analogne jednakosti za padajuće nizove, jer za svaki ortogonalan projektor Q je i $I-Q$ ortogonalan projektor i vrijedi $R(I-Q) = N(Q)$ i $N(I-Q) = R(Q)$.

Zadatak 4.1.2. *Neka je $(P_t)_{t\in\mathbb{R}}$ rastuća familija ortogonalnih projektora na Hilbertovom prostoru X, tj. $P_t \leq P_s$ za $t < s$. Dokažite da tada za svaki $x \in X$ i za svaki $t \in \mathbb{R}$ postoje limesi*

$$P_{t-0}x = \lim_{s\nearrow t} P_s x \qquad i \qquad P_{t+0}x = \lim_{s\searrow t} P_s x.$$

Nadalje, dokažite da su P_{t-0} i P_{t+0} ortogonalni projektori i da je $P_{t-0} \leq P_t \leq P_{t+0}$.

Teorem 4.1.3. *Za $A \in B_+(X)$ postoji jedinstven $B \in B_+(X)$ takav da je $B^2 = A$. Ako je $C \in B(X)$ takav da je $CA = AC$, onda je $CB = BC$.*

Dokaz: Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $\|A\| \leq 1$. Tada je

$$0 \leq (Ax|x) \leq (x|x) \qquad \forall x \in X,$$

dakle, vrijedi $0 \leq A \leq I$. Stavimo $D = I - A \in B_+(X)$ i induktivno definiramo niz operatora $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$E_1 = 0, \qquad E_{n+1} = \frac{1}{2}(D + E_n^2), \quad n \in \mathbb{N}. \tag{4.4}$$

Tada su svi $E_n \in B_+(X)$. Nadalje, svaki E_n je polinom operatora D, pa možemo pisati

$$E_n = p_n(D), \qquad E_{n+1} - E_n = q_n(D),$$

gdje su p_n i q_n polinomi definirani induktivno sa

$$p_1(\lambda) = 0, \qquad p_{n+1}(\lambda) = \frac{1}{2}(\lambda + p_n(\lambda)^2), \qquad q_n(\lambda) = p_{n+1}(\lambda) - p_n(\lambda).$$

Iz te se definicije vidi da su svi koeficijenti polinoma p_n, $n \in \mathbb{N}$, nenegativni brojevi. Dokazat ćemo sada da su i koeficijenti polinoma q_n, $n \in \mathbb{N}$, nenegativni brojevi. Tu činjenicu dokazujemo indukcijom po $n \in \mathbb{N}$. Tvrdnja je očita za $n = 1$ jer je $q_1(\lambda) = \frac{1}{2}\lambda$. Provedimo sada korak indukcije. Pretpostavimo da su za neki $n \geq 2$ svi koeficijenti polinoma q_{n-1} nenegativni. Imamo

$$q_n(\lambda) = p_{n+1}(\lambda) - p_n(\lambda) = \frac{1}{2}[\lambda + p_n(\lambda)^2] - \frac{1}{2}[\lambda + p_{n-1}(\lambda)^2] = \frac{1}{2}[p_n(\lambda)^2 - p_{n-1}(\lambda)^2] =$$

$$= \frac{1}{2}[p_n(\lambda) + p_{n-1}(\lambda)][p_n(\lambda) - p_{n-1}(\lambda)] = \frac{1}{2}[p_n(\lambda) + p_{n-1}(\lambda)]q_{n-1}(\lambda).$$

Odatle slijedi da i polinom q_n ima sve koeficijente nenegativne.

Uočimo sada da za polinom p, kome su svi koeficijenti nenegativni, i za svaki $B \in B_+(X)$, vrijedi $p(B) \in B_+(X)$. Stoga iz dokazanog slijedi

$$E_n \geq 0 \qquad \text{i} \qquad E_n \leq E_{n+1} \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Iz $0 \leq A \leq I$ slijedi $0 \leq D \leq I$, pa je $\|D\| \leq 1$. Odatle i iz (4.4) indukcijom jednostavno slijedi da je $\|E_n\| \leq 1$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Sada teorem 4.1.1. povlači da postoji $E \in B_+(X)$ takav da vrijedi

$$Ex = \lim_{n\to\infty} E_n x \quad \forall x \in X, \qquad \|E\| \leq 1 \qquad \text{i} \qquad E_n \leq E \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Imamo

$$Ex = \lim_{n\to\infty} p_n(D)x$$

pa slijedi da operator E komutira sa svakim operatorom s kojim komutira D, dakle i sa svakim operatorom s kojim komutira A. Posebno, E komutira sa svim operatorima E_n, pa nalazimo za $x \in X$:

$$\|E^2x - E_n^2x\| = \|(E + E_n)(E - E_n)x\| \leq \|E + E_n\| \cdot \|Ex - E_nx\| \leq 2\|Ex - E_nx\|.$$

Pustimo li da n teži k ∞, nalazimo da je

$$E^2x = \lim_{n\to\infty} E_n^2 x \qquad \forall x \in X.$$

Pustimo sada da u jednakosti

$$E_{n+1}x = \frac{1}{2}(Dx + E_n^2x) \qquad \forall x \in X$$

n teži u ∞. Dobivamo

$$Ex = \frac{1}{2}(Dx + E^2x) \qquad \forall x \in X.$$

Odatle je

$$E^2 - 2E = -D \qquad \Longrightarrow \qquad (I - E)^2 = I - 2E + E^2 = I - D = A.$$

Dakle, operator $B = I - E$ ima svojstvo $B^2 = A$. Nadalje, za svaki $x \in X$ vrijedi

$$(Bx|x) = (x|x) - (Ex|x) \geq \|x\|^2 - \|E\| \cdot \|x\|^2 \geq 0, \quad \text{jer je } \|E\| \leq 1.$$

Prema tome, $B \in B_+(X)$. Time je dokazana egzistencija, a dokazano je i da konstruirani operator $B = I - E$ komutira sa svakim operatorom C koji komutira sa A.

Dokažimo sada jedinstvenost. Neka je i $B_1 \in B_+(X)$ takav da je $B_1^2 = A$. Operator B_1 komutira sa $B_1^2 = A$, dakle komutira i sa B. Neka je $x \in X$. Tada za $y = (B_1 - B)x$ imamo

$$(B_1y|y) + (By|y) = ((B_1 + B)(B_1 - B)x|y) = ((B_1^2 - B^2)x|y) = ((A - A)x|y) = 0.$$

Kako su $(B_1y|y) \geq 0$ i $(By|y) \geq 0$, odatle slijedi da je

$$(B_1y|y) = (By|y) = 0.$$

Prema dokazanom postoje operatori $F_1, F \in B_+(X)$ takvi da je $F_1^2 = B_1$ i $F^2 = B$. Stoga je

$$\|F_1y\|^2 = (F_1y|F_1y) = (F_1^2y|y) = (B_1y|y) = 0 \quad \text{i} \quad \|Fy\|^2 = (Fy|Fy) = (F^2y|y) = (By|y) = 0.$$

Zaključujemo da je $F_1y = Fy = 0$, pa slijedi

$$B_1y = F_1^2y = 0 \qquad \text{i} \qquad By = F^2y = 0.$$

Odatle je

$$\|y\|^2 = (y|(B_1 - B)x) = ((B_1 - B)y|x) = 0,$$

odnosno, $0 = y = B_1x - Bx$. Drugim riječima, vrijedi $B_1x = Bx$, a kako je $x \in X$ bio proizvoljan, zaključujemo da je $B_1 = B$. Time je i jedinstvenost dokazana.

Jedinstveni operator $B \in B_+(X)$ takav da je $B^2 = A$ zove se **drugi korijen** iz operatora $A \in B_+(X)$. Pisat ćemo

$$B = \sqrt{A}.$$

Zadatak 4.1.3. *Neka su $A, B \in B_+(X)$ takvi da je $A^2 = B^2$. Dokažite da je tada $A = B$.*

Zadatak 4.1.4. *Neka su $A, B \in B_+(X)$. Dokažite da je $AB \in B_+(X)$ ako i samo ako je $AB = BA$.*

Zadatak 4.1.5. *Neka operatori $A, B, C \in B_h(X)$ međusobno komutiraju i pretpostavimo da je $A \leq B$ i $C \geq 0$. Dokažite da je tada $AC \leq BC$.*

Proučit ćemo sada vezu između dvaju operatora $A_1, A_2 \in B_h(X)$ takvih da je $A_1^2 = A_2^2$ i $A_1A_2 = A_2A_1$, bez pretpostavke da su A_1 i A_2 pozitivni.

Propozicija 4.1.4. *Neka su $A_1, A_2 \in B_h(X)$ takvi da je $A_1^2 = A_2^2$ i $A_1A_2 = A_2A_1$. Neka je P ortogonalni projektor prostora X na potprostor*

$$N(A_1 - A_2) = \{x \in X;\ A_1x = A_2x\}.$$

Tada vrijedi:

(*a*) *Ako $C \in B(X)$ komutira s $A_1 - A_2$ onda C komutira s P.*

(*b*) *$N(A_1) \subseteq R(P)$, tj. $A_1x = 0 \implies Px = x$.*

(*c*) *$A_1 = (2P - I)A_2$ i $A_2 = (2P - I)A_1$.*

Dokaz: (*a*) Neka je $Y = R(P) = N(A_1 - A_2)$. Neka operator $C \in B(X)$ komutira s operatorom $A_1 - A_2$. Za $y \in Y$ tada imamo

$$(A_1 - A_2)Cy = C(A_1 - A_2)y = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad Cy \in Y.$$

Dakle, vrijedi $CPx \in Y\ \forall x \in X$, pa slijedi $PCPx = CPx\ \forall x \in X$, odnosno, $PCP = CP$. Kako je operator $A_1 - A_2$ hermitski, to i operator C^* komutira sa $A_1 - A_2$, pa vrijedi i $PC^*P = C^*P$. Odatle adjungiranjem zbog $P^* = P$ slijedi $PCP = PC$. Prema tome je $PC = PCP = CP$.

(*b*) Iz $A_1x = 0$ slijedi

$$\|A_2x\|^2 = (A_2x|A_2x) = (A_2^2x|x) = (A_1^2x|x) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad A_2x = 0 \qquad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \qquad x \in N(A_1 - A_2) = R(P) \qquad \Longrightarrow \qquad Px = x.$$

(c) Zbog (b) imamo za svaki $x \in X$:

$$(A_1 - A_2)(A_1 + A_2)x = (A_1^2 - A_2^2)x = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad (A_1 + A_2)x \in N(A_1 - A_2) = R(P),$$

pa slijedi $P(A_1 + A_2)x = (A_1 + A_2)x \ \forall x \in X$. Dakle,

$$P(A_1 + A_2) = A_1 + A_2. \tag{4.5}$$

Nadalje, za $x \in X$ je $Px \in R(P) = N(A_1 - A_2)$, pa kako prema ($a$) P komutira sa $A_1 - A_2$, slijedi $P(A_1 - A_2)x = (A_1 - A_2)Px = 0$. Dakle,

$$P(A_1 - A_2) = 0. \tag{4.6}$$

Zbrajanjem i oduzimanjem jednakosti (4.5) i (4.6) dobivamo

$$A_2 = (2P - I)A_1 \qquad \text{i} \qquad A_1 = (2P - I)A_2.$$

Teorem 4.1.5. *Za $A \in B_h(X)$ stavimo*

$$A_+ = \frac{1}{2}\left(\sqrt{A^2} + A\right) \qquad i \qquad A_- = \frac{1}{2}\left(\sqrt{A^2} - A\right).$$

Neka je P ortogonalni projektor prostora X na potprostor $N(A_-)$. Tada vrijedi:

(a) *$A_+, A_- \in B_+(X)$ i $A = A_+ - A_-$.*

(b) *Vrijedi $PA = P\sqrt{A^2} = A_+$, $(P - I)A = -(P - I)\sqrt{A^2} = A_-$ i $N(A) \subseteq R(P)$.*

(c) *Operator $C \in B(X)$ komutira s operatorom A ako i samo ako C komutira sa A_+, A_- i P.*

Dokaz: (c) Ako operator C komutira sa A, onda C komutira i sa A^2, dakle, prema teoremu 4.1.3. i sa $\sqrt{A^2}$. Odatle slijedi da C komutira sa A_+ i sa A_-. No tada je potprostor $R(P) = N(A_-)$ invarijantan s obzirom na operator C. Kako je A hermitski, i C^* komutira sa A, dakle, potprostor $R(P)$ je invarijantan i s obzirom na C^*. Odatle, kao u dokazu tvrdnje (a) propozicije 4.1.4. slijedi $CP = PCP = PC$.

Obratno, ako C komutira sa A_+, A_- i P, onda C komutira i sa $A = A_+ - A_-$.

(b) Operator A komutira sa A^2, dakle i sa $\sqrt{A^2}$. Odatle slijedi da operatori A_+ i A_- komutiraju. Nadalje, iz tvrdnje (c) propozicije 4.1.4. primijenjene na operatore $A_1 = A$ i $A_2 = \sqrt{A^2}$, nalazimo da je $\sqrt{A^2} = (2P - I)A = 2PA - A$ i $A = (2P - I)\sqrt{A^2} = 2P\sqrt{A^2} - \sqrt{A^2}$, dakle,

$$PA = \frac{1}{2}\left(\sqrt{A^2} + A\right) = A_+ \qquad \text{i} \qquad P\sqrt{A^2} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{A^2} + A\right) = A_+.$$

Odatle je

$$(P - I)A = PA - A = A_+ - A = A_- \qquad \text{i} \qquad (P - I)\sqrt{A^2} = P\sqrt{A^2} - \sqrt{A^2} = A_+ - \sqrt{A^2} = -A_-.$$

Napokon, ako je $Ax = 0$, onda je $A^2x = 0$, pa slijedi

$$\left\|\sqrt{A^2}x\right\|^2 = \left(\sqrt{A^2}x \middle| \sqrt{A^2}x\right) = (A^2x|x) = 0,$$

dakle i $\sqrt{A^2}x = 0$. Odatle je $x \in N(A_-) = R(P)$.

(a) Jasno je da je $A = A_+ - A_-$. Treba još dokazati da su $A_+, A_- \in B_+(X)$. Međutim, P, $I - P$ i $\sqrt{A^2}$ su pozitivni operatori koji međusobno komutiraju, pa pomoću zadatka 4.1.4. zaključujemo da su i $A_+ = P\sqrt{A^2}$ i $A_- = (I - P)\sqrt{A^2}$ pozitivni.

Operatori A_+ i A_- iz teorema 4.1.5. zovu se **pozitivni** i **negativni dio** operatora $A \in B_h(X)$.

Zadatak 4.1.6. *Dokažite da za* $A, B \in B_h(X)$ *vrijedi*

$$A \leq B \quad i \quad B \leq A \qquad \Longleftrightarrow \qquad A = B.$$

Zadatak 4.1.7. *Neka su* $A, B \in B_+(X)$ *takvi da je* $A \leq B$ *i* $AB = BA$. *Dokažite da je tada* $\sqrt{A} \leq \sqrt{B}$ *i* $A^n \leq B^n$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Zadatak 4.1.8. *Dokažite da za svaki* $A \in B_h(X)$ *postoji jedinstven* $B \in B_h(X)$ *takav da je* $B^3 = A$.

4.2 Parcijalne izometrije i polarna forma

Teorem 4.2.1. *Neka su X i Y Hilbertovi prostori i $V \in B(X, Y)$. Sljedeća su svojstva međusobno ekvivalentna:*

(a) $V^*V \in B(X)$ je projektor.

(b) $VV^* \in B(Y)$ je projektor.

(c) Postoji zatvoren potprostor X_1 od X takav da vrijedi

$$\|Vx\| = \|x\| \qquad \forall x \in X_1 \qquad i \qquad Vx = 0 \qquad \forall x \in X_1^\perp.$$

(d) Postoji zatvoren potprostor Y_1 od Y takav da vrijedi

$$\|V^*y\| = \|y\| \qquad \forall y \in Y_1 \qquad i \qquad V^*y = 0 \qquad \forall y \in Y_1^\perp.$$

U tom slučaju, $R(V)$ je zatvoren potprostor od Y, $R(V^*)$ je zatvoren potprostor od X, V^*V je (ortogonalan) projektor prostora X na potprostor $R(V^*)$ duž potprostora $N(V)$, i VV^* je (ortogonalan) projektor prostora Y na potprostor $R(V)$ duž potprostora $N(V^*)$. Nadalje, restrikcija $V|R(V^*)$ je izometrički izomorfizam Hilbertovog prostora $R(V^*)$ na Hilbertov prostor $R(V)$.

Dokaz: Pretpostavimo najprije da je $P = V^*V$ projektor. Tada je $P^* = P$, dakle, P je ortogonalni projektor i vrijedi $X = R(P) \oplus N(P)$. Stavimo $X_1 = R(P)$. Tada imamo

$$x \in X_1 \quad \Longrightarrow \quad Px = x \quad \Longrightarrow \quad V^*Vx = x \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad \|Vx\|^2 = (Vx|Vx) = (V^*Vx|x) = (x|x) = \|x\|^2 \quad \Longrightarrow \quad \|Vx\| = \|x\|$$

i

$$x \perp X_1 \quad \Longrightarrow \quad x \in R(P)^\perp = N(P) \quad \Longrightarrow \quad Px = 0 \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad \|Vx\|^2 = (V^*Vx|x) = (Px|x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad Vx = 0.$$

Time je dokazano da iz (a) slijedi (c).

Pretpostavimo sada da je X_1 zatvoren potprostor od X takav da vrijedi

$$\|Vx\| = \|x\| \qquad \forall x \in X_1 \qquad \text{i} \qquad Vx = 0 \qquad \forall x \in X_1^\perp.$$

Neka je P ortogonalni projektor na X_1. Za proizvoljan $x \in X$ pišemo $x = y + z$, $y \in X_1$, $z \in X_1^\perp$. Tada imamo

$$(V^*Vx|x) = (Vx|Vx) = (Vy|Vy) = (y|y) = (y|x) = (Px|x).$$

Dakle, $((V^*V - P)x|x) = 0\ \forall x \in X$, a kako je operator $V^*V - P$ hermitski, iz tvrdnje (a) propozicije 1.4.1. slijedi $V^*V - P = 0$. Dakle, $V^*V = P$ je projektor. Time je dokazano da iz (c) slijedi (a).

Dakle, vrijedi $(a) \iff (c)$, a zamjenom V sa V^* odatle dobivamo i $(b) \iff (d)$.

Iz dokaza $(a) \Longrightarrow (c)$ vidi se da je $N(P) = N(V)$, pa iz propozicije 1.3.1. nalazimo

$$R(P) = N(P)^\perp = N(V)^\perp = Cl(R(V^*)).$$

Nadalje, za $x \in R(P)$ je $x = Px = V^*Vx \in R(V^*)$, pa zaključujemo da je zapravo $R(P) = R(V^*)$. Dakle, ako vrijede (a) i (c) onda je $R(V^*)$ zatvoren potprostor od X. Sasvim analogno, ako vrijede (b) i (d) onda je $R(V)$ zatvoren potprostor.

Pretpostavimo ponovo da vrijedi (a), dakle i (c) za $X_1 = R(P) = R(V^*)$ i $P = V^*V$. Tada je očito $R(V) = VX_1$ i restrikcija $V|X_1$ je izometrija sa $X_1 = R(V^*)$ na $VX_1 = R(V)$. Time je dokazano da iz (a) slijedi zadnja tvrdnja teorema. Nadalje, odatle slijedi da je i $R(V)$ zatvoren potprostor od Y. Napokon, stavimo $Q = VV^*$. Tada je očito $N(V^*) \subseteq N(Q)$. Nadalje,

$$y \in N(Q) \quad \Longrightarrow \quad Qy = 0 \quad \Longrightarrow \quad VV^*y = 0 \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad \|V^*y\|^2 = (V^*y|V^*y) = (VV^*y|y) = 0 \quad \Longrightarrow \quad V^*y = 0 \quad \Longrightarrow \quad y \in N(V^*).$$

Time je dokazana obrnuta inkluzija $N(Q) \subseteq N(V^*)$, dakle, vrijedi $N(V^*) = N(Q)$. Kako je $R(V)$ zatvoren potprostor od Y, pomoću propozicije 1.3.1. nalazimo

$$R(V) = N(V^*)^\perp = N(Q)^\perp \qquad \text{i} \qquad N(V^*) = R(V)^\perp.$$

Dakle,

$$Y = N(V^*) \oplus R(V).$$

Neka su sada $y \in R(V)$ i $z \in N(V^*) = N(Q)$. Tada je $y \in VR(V^*)$, tj. postoji $x \in R(V^*)$ takav da je $y = Vx$. Označimo ponovo $P = V^*V$. Vidjeli smo da je to ortogonalan projektor i da je $R(P) = R(V^*)$. Dakle, $Px = x$, pa imamo

$$Qy = VV^*y = VV^*Vx = VPx = Vx = y \qquad \text{i} \qquad Qz = 0.$$

Time je dokazano da je $Q = VV^*$ projektor. Dakle, dokazali smo da iz (a) slijedi (b). Sasvim analogno, iz (b) slijedi (a).

Time su sve tvrdnje teorema dokazane.

Ako su X i Y Hilbertovi prostori, operator $V \in B(X,Y)$ koji ima svojstva $(a)-(d)$ iz teorema 4.2.1. zove se **parcijalna izometrija** sa X u Y. Jasno je da je tada V^* parcijalna izometrija sa Y u X.

Teorem 4.2.2. *Neka su X i Y Hilbertovi prostori i $A \in B(X,Y)$. Neka je $H = \sqrt{A^*A}$ i $K = \sqrt{AA^*}$. Tada postoje parcijalne izometrije V i W sa X u Y takve da vrijedi*

$$A = VH = KW.$$

Ako je $X = Y$ i ako je A normalan operator, možemo uzeti da je $V = W$ unitaran operator na X koji komutira sa svakim operatorom $B \in B(X)$, takvim da je $BA = AB$ i $BA^* = A^*B$.

Dokaz: Prema propoziciji 1.3.1. je

$$X = N(H) \oplus Cl(R(H)).$$

Neka je P ortogonalni projektor prostora X na potprostor $Cl(R(H))$ (dakle, duž potprostora $N(H)$). Imamo $N(H) = N(A)$, dakle, za bilo koje $x, y \in X$ vrijedi

$$Hx = Hy \qquad \Longleftrightarrow \qquad Ax = Ay. \tag{4.7}$$

Definirat ćemo sada operator

$$V_1 : R(H) \longrightarrow R(A)$$

na sljedeći način. Za $y \in R(H)$ izaberemo $x \in X$ takav da je $y = Hx$. Tada stavljamo $V_1y = Ax$. Zbog (4.7) V_1 je dobro definiran linearan operator i očito vrijedi $R(V_1) = R(A)$. Neka su sada $y, y' \in R(H)$ i neka su $x, x' \in X$ takvi da je $y = Hx$ i $y' = Hx'$. Tada imamo

$$(V_1y|V_1y') = (Ax|Ax') = (A^*Ax|x') = (H^2x|x') = (Hx|Hx') = (y|y').$$

Dakle, V_1 je izometrički izomorfizam sa $R(H)$ na $R(A)$. Proširenjem po neprekidnosti dolazimo do izometričkog izomorfizma V_2 sa $Cl(R(H))$ na $Cl(R(A))$. Napokon, stavimo $V = V_2 P \in B(X, Y)$. Tada je V izometrija na zatvorenom potprostoru $Cl(R(H))$, a na njegovom ortogonalnom komplementu $N(H) = N(P)$ je restrikcija operatora V jednaka nuli. Prema teoremu 4.2.1. zaključujemo da je V parcijalna izometrija sa X u Y. Nadalje, jasno je da je $R(V) = Cl(R(A))$ i prema dokazu teorema 4.2.1. je $V^*V = P$.

Sada za proizvoljan $x \in X$ imamo $PHx = Hx$, dakle,

$$VHx = V_2 PHx = V_2 Hx = V_1 Hx = Ax.$$

Time je dokazano da je $A = VH$. Primijenimo li dokazano na operator $A^* \in B(Y, X)$, zaključujemo da postoji parcijalna izometrija U sa Y u X, takva da je $A^* = UK$. No tada je $A = KU^*$ i $U^* = W$ je prema teoremu 4.2.1. parcijalna izometrija sa X u Y.

Pretpostavimo napokon da je $X = Y$ i da je operator $A \in B(X)$ normalan. Naravno, tada je $H = K$. Nadalje, iz tvrdnje (c) propozicije 1.4.1. vrijedi $N(A^*) = N(A) = N(H)$, a odatle i iz propozicije 1.3.1. je $Cl(R(A)) = Cl(R(A^*)) = Cl(R(H))$. Dakle, V_2 je izometrički izomorfizam sa $Cl(R(H))$ na $Cl(R(H))$, a to znači da je V_2 unitaran operator na Hilbertovom prostoru $Cl(R(H))$. Kako je

$$X = Cl(R(H)) \oplus N(H),$$

linearan operator $U : X \to X$ definiran sa $U(y + z) = V_2 y + z$ za $y \in Cl(R(H))$ i $z \in N(H)$ je unitaran. Očito je $A = UH$.

Neka je sada $B \in B(X)$ operator koji komutira sa A i sa A^*. Tada B komutira i sa A^*A, dakle, i sa H. Za proizvoljan $x \in X$ imamo

$$BU(Hx) = BAx = ABx = UHBx = UB(Hx).$$

Dakle,

$$BUy = UBy \qquad \forall y \in R(H). \tag{4.8}$$

S druge strane, za $y \in N(H)$ je $Uy = y$. Nadalje, kako B komutira sa H to je potprostor $N(H)$ invarijantan s obzirom na operator B, dakle vrijedi $By \in N(H)$ za svaki $y \in N(H)$. Dakle,

$$BUy = By = UBy \qquad \forall y \in N(H). \tag{4.9}$$

Kako je $X = N(H) \oplus Cl(R(H))$, iz (4.8) i (4.9) slijedi $UB = BU$. Napokon, operatori B i H komutiraju, jer imamo

$$H^2 = A^*A = AA^* = UHHU^* \qquad \Longrightarrow \qquad UH^2 = H^2U \qquad \Longrightarrow \qquad UH = HU.$$

Prikazi operatora $A \in B(X, Y)$ u obliku $A = VH$ i $A = KW$, gdje su $H = \sqrt{A^*A}$, $K = \sqrt{AA^*}$ i V i W su parcijalne izometrije sa X u Y, zovu se **polarne forme** operatora A.

4.3 Spektralni teorem

U daljnjem je A hermitski operator na Hilbertovom prostoru X. Za $\lambda \in \mathbb{R}$ tada je i operator $\lambda I - A$ hermitski. Sa E_λ ćemo označavati ortogonalni projektor prostora X na potprostor $N((\lambda I - A)_-)$. Prema tvrdnji (b) teorema 4.1.5. tada je $N(\lambda I - A) \subseteq R(E_\lambda)$, dakle, vrijedi

$$Ax = \lambda x \qquad \Longrightarrow \qquad E_\lambda x = x.$$

Funkcija $\lambda \mapsto E_\lambda$ zove se **spektralna funkcija hermitskog operatora** A.

Teorem 4.3.1. (**Spektralni teorem**) *Neka je A hermitski operator na Hilbertovom prostoru X i neka je $\lambda \mapsto E_\lambda$ njegova spektralna funkcija.*

(a) *Za $C \in B(X)$ vrijedi $AC = CA$ ako i samo ako vrijedi $E_\lambda C = CE_\lambda$ $\forall \lambda \in \mathbb{R}$.*

(b) *Za $\lambda \leq \mu$ vrijedi $E_\lambda \leq E_\mu$, tj. $E_\lambda E_\mu = E_\mu E_\lambda = E_\lambda$.*

(c) *Za svaki vektor $x \in X$ funkcija $\lambda \mapsto E_\lambda x$ sa $\mathbb{R}$ u X je zdesna neprekidna, tj. za svaki $\lambda \in \mathbb{R}$ vrijedi*

$$\lim_{\mu \searrow \lambda} E_\mu x = E_\lambda x.$$

(d) *Stavimo*

$$m = \inf \{(Ax|x);\ x \in X,\ \|x\| = 1\} \qquad i \qquad M = \sup \{(Ax|x);\ x \in X,\ \|x\| = 1\}.$$

Tada vrijedi

$$\lambda < m \quad \Longrightarrow \quad E_\lambda = 0 \qquad i \qquad \lambda \geq M \quad \Longrightarrow \quad E_\lambda = I.$$

(e) *Neka su m, M kao u (d), neka su $a < m$ i $b \geq M$ i neka je P particija segmenta $[a, b]$:*

$$a = \lambda_0 < \lambda_1 < \cdots \lambda_{n-1} < \lambda_n = b.$$

Tada vrijedi

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_{k-1}(E_{\lambda_k} - E_{\lambda_{k-1}}) \leq A \leq \sum_{k=1}^{n} \lambda_k (E_{\lambda_k} - E_{\lambda_{k-1}}). \tag{4.10}$$

Nadalje, ako su $\xi_k \in [\lambda_{k-1}, \lambda_k]$ i $\delta(P) = \max \{\lambda_k - \lambda_{k-1};\ 1 \leq k \leq n\}$, onda vrijedi

$$\left\| A - \sum_{k=1}^{n} \xi_k (E_{\lambda_k} - E_{\lambda_{k-1}}) \right\| \leq \delta(P). \tag{4.11}$$

Dokaz: (a) Neka je $C \in B(X)$ takav da je $CA = AC$ i neka je $\lambda \in \mathbb{R}$. Tada je

$$C(\lambda I - A) = (\lambda I - A)C,$$

pa iz tvrdnje (c) teorema 4.1.5. slijedi $CE_\lambda = E_\lambda C$. Na taj način dokazali smo da vrijedi

$$CA = AC \qquad \Longrightarrow \qquad CE_\lambda = E_\lambda C \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

Obrnuta implikacija u (a) bit će neposredna posljedica tvrdnje (e). No već iz dokazanog slijedi da je

$$E_\lambda E_\mu = E_\mu E_\lambda \qquad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

(*b*) Neka je $\lambda < \mu$. Stavimo $P = E_\lambda(I - E_\mu)$. Budući da operatori E_λ i E_μ međusobno komutiraju, iz definicije slijedi $E_\lambda P = PE_\lambda = P$, odnosno, $P \le E_\lambda$. Iz definicije je također $(I - E_\mu)P = P(I - E_\mu) = P$, pa imamo i $P \le I - E_\mu$. Prema prvom dijelu tvrdnje (*b*) u teoremu 4.1.5., primijenjenom na operator $\lambda I - A$, nalazimo da vrijedi

$$E_\lambda(\lambda I - A) = (\lambda I - A)E_\lambda = (\lambda I - A)_+ \ge 0, \tag{4.12}$$

a prema drugom dijelu iste tvrdnje, primijenjenom na operator $\mu I - A$, dobivamo

$$(I - E_\mu)(\mu I - A) = (\mu I - A)(I - E_\mu) = -(\mu I - A)_- \le 0. \tag{4.13}$$

Za $y \in R(P)$ je $Py = y$, dakle i $E_\lambda y = y$ i $(I - E_\mu)y = y$, pa nalazimo

$$((\lambda I - A)y|y) = ((\lambda I - A)E_\lambda y|y) \ge 0 \qquad \text{i} \qquad ((\mu I - A)y|y) = ((\mu I - A)(I - E_\mu)y|y) \le 0.$$

Oduzmemo li prvu od tih dviju nejednakosti od druge, slijedi $(\mu - \lambda)(y|y) \le 0$, a kako je $\mu > \lambda$ slijedi $(y|y) \le 0$, dakle, $(y|y) = 0$, odnosno, $y = 0$. Time je dokazano da je $R(P) = \{0\}$, tj. $P = 0$. Dakle, vrijedi $E_\lambda = E_\lambda E_\mu = E_\mu E_\lambda$, odnosno, $E_\lambda \le E_\mu$.

(*c*) Za $\lambda < \mu$ i za poluotvoren interval $\Delta = \langle\lambda, \mu]$ stavimo $E(\Delta) = E_\mu - E_\lambda$. Tada je

$$E_\mu E(\Delta) = E_\mu^2 - E_\mu E_\lambda = E_\mu - E_\lambda = E(\Delta)$$

i

$$(I - E_\lambda)E(\Delta) = E_\mu - E_\lambda - E_\mu E_\lambda + E_\lambda^2 = E_\mu - E_\lambda - E_\lambda + E_\lambda = E(\Delta).$$

Dakle, zbog nejednakosti (4.12) i (4.13) i zbog zadatka 4.1.6. vrijedi

$$(\mu I - A)E(\Delta) = (\mu I - A)E_\mu \cdot E(\Delta) \ge 0 \qquad \text{i} \qquad (\lambda I - A)E(\Delta) = (\lambda I - A)(I - E_\lambda) \cdot E(\Delta) \le 0,$$

a odatle slijedi

$$\lambda E(\Delta) \le AE(\Delta) \le \mu E(\Delta). \tag{4.14}$$

Funkcija $\lambda \mapsto E_\lambda$ je rastuća i svi operatori E_λ su ortogonalni projektori. Prema zadatku 4.1.2. za svaki $\lambda \in \mathbb{R}$ i za svaki vektor $x \in X$ postoji limes zdesna $E_{\lambda+0}x = \lim\limits_{\mu\searrow\lambda} E_\lambda x$ i $E_{\lambda+0}$ je ortogonalni projektor takav da je $E_{\lambda+0} \ge E_\lambda$. Dakle, operator $Q = E_{\lambda+0} - E_\lambda$ je ortogonalni projektor. Zbog (4.14) za svaki $x \in X$ imamo $\lambda(E(\Delta)x|x) \le (E(\Delta)Ax|x) \le \mu(E(\Delta)x|x)$, pa ako pustimo da $\mu \searrow \lambda$, dobivamo $\lambda(Qx|x) \le (QAx|x) \le \lambda(Qx|x)$ $\forall x \in X$. Odavde je

$$((QA - \lambda Q)x|x) = 0 \qquad \forall x \in X. \tag{4.15}$$

Hermitski operatori A i Q komutiraju, pa imamo $(QA - \lambda Q)^* = AQ - \lambda Q = QA - \lambda Q$. Stoga iz (4.15) i iz propozicije 3.3.1. slijedi

$$AQ = QA = \lambda Q. \tag{4.16}$$

Neka je $x \in X$ i $y = Qx$. Tada zbog (4.16) imamo $Ay = \lambda y$, tj. $y \in N(\lambda I - A) \subseteq R(E_\lambda)$. Time je dokazano $E_\lambda y = y$, odnosno, $E_\lambda Qx = Qx$, a kako je vektor $x \in X$ bio proizvoljan, slijedi

$$E_\lambda Q = Q. \tag{4.17}$$

S druge strane je $E_\lambda(E_\mu - E_\lambda) = 0$ za $\mu > \lambda$, pa slijedi

$$E_\lambda Q = 0. \tag{4.18}$$

Iz (4.17) i (4.18) dobivamo $Q = 0$, tj. $E_{\lambda+0} = E_\lambda$. Time je dokazano da je za svaki vektor $x \in X$ funkcija $\lambda \mapsto E_\lambda x$ zdesna neprekidna u svakoj točki iz $\mathbb{R}$.

(d) Neka je $\mu > M$ i za $x \in X$ stavimo $y = (I - E_\mu)x$. Tada je $(I - E_\mu)y = y$, pa pomoću (4.13) nalazimo $\mu(y|y) - (Ay|y) = ((\mu I - A)y|y) = ((\mu I - A)(I - E_\mu)y|y) \leq 0$. Odatle je $\mu(y|y) \leq (Ay|y) \leq M(y|y)$. Kako je $\mu > M$, slijedi $y = 0$, odnosno, $E_\mu x = x$. Međutim, vektor $x \in X$ je bio proizvoljan, pa zaključujemo da je $E_\mu = I$. Odavde i iz (c) zaključujemo da $E_\lambda = I$ vrijedi za $\lambda \geq M$.

Neka je sada $\lambda < m$ i za $x \in X$ stavimo $y = E_\lambda x$. Tada je $E_\lambda y = y$, pa pomoću (4.12) nalazimo

$$\lambda(y|y) - (Ay|y) = (((\lambda I - A)y|y) = ((\lambda I - A)E_\lambda y|y) \geq 0.$$

Odatle je

$$\lambda(y|y) \geq (Ay|y) \geq m(y|y).$$

Kako je $\lambda < m$, slijedi $y = 0$, odnosno, $E_\lambda x = 0$. Zbog proizvoljnosti vektora $x \in X$ zaključujemo da je $E_\lambda = 0$ za $\lambda < m$.

(e) Za zadanu particiju P segmenta $[a, b]$ ($a < m$, $M < b$) stavimo $\Delta_k = \langle \lambda_{k-1}, \lambda_k]$ i , kao u dokazu tvrdnje (c), $E(\Delta_k) = E_{\lambda_k} - E_{\lambda_{k-1}}$. Sada iz (4.14) dobivamo

$$\lambda_{k-1} E(\Delta_k) \leq AE(\Delta_k) \leq \lambda_k E(\Delta_k). \tag{4.19}$$

Nadalje, zbog tvrdnje (d) imamo

$$\sum_{k=1}^{n} E(\Delta_k) = E_b - E_a = I, \tag{4.20}$$

pa iz (4.19) sumiranjem po k od 1 do n dobivamo

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_{k-1} E(\Delta_k) \leq A \leq \sum_{k=1}^{n} \lambda_k E(\Delta_k), \tag{4.21}$$

odnosno, vrijedi (4.10).

Neka su sada $\xi_k \in [\lambda_{k-1}, \lambda_k]$ proizvoljni. Tada je očito

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_{k-1} E(\Delta_k) \leq \sum_{k=1}^{n} \xi_k E(\Delta_k) \leq \sum_{k=1}^{n} \lambda_k E(\Delta_k),$$

dakle, i

$$-\sum_{k=1}^{n} \lambda_k E(\Delta_k) \leq -\sum_{k=1}^{n} \xi_k E(\Delta_k) \leq -\sum_{k=1}^{n} \lambda_{k-1} E(\Delta_k).$$

Zbrajanjem tih nejednakosti sa (4.21) dobivamo

$$-\sum_{k=1}^{n} (\lambda_k - \lambda_{k-1}) E(\Delta_k) \leq A - \sum_{k=1}^{n} \xi_k E(\Delta_k) \leq \sum_{k=1}^{n} (\lambda_k - \lambda_{k-1}) E(\Delta_k). \tag{4.22}$$

Zadatak 4.3.1. *Neka su $B \in B_+(X)$ i $C \in B_h(X)$ takvi da je $-B \leq C \leq B$. Dokažite da je tada $\|C\| \leq \|B\|$.*

Uputa: Koristite propoziciju 3.3.1.

Pomoću tog zadatka iz (4.22) slijedi

$$\left\| A - \sum_{k=1}^{n} \xi_k E(\Delta_k) \right\| \leq \left\| \sum_{k=1}^{n} (\lambda_k - \lambda_{k-1}) E(\Delta_k) \right\|. \tag{4.23}$$

Za svaki $k \in \{1, 2 \ldots, n\}$ vrijedi $0 < \lambda_k - \lambda_{k-1} \leq \delta(P)$, pa zbog (4.20) imamo

$$0 \leq \sum_{k=1}^{n} (\lambda_k - \lambda_{k-1}) E(\Delta_k) \leq \delta(P) \sum_{k=1}^{n} E(\Delta_k) = \delta(P) I.$$

Odatle i iz (4.23) pomoću zadatka 4.3.1. slijedi

$$\left\| A - \sum_{k=1}^{n} \xi_k E(\Delta_k) \right\| \leq \delta(P), \tag{4.24}$$

odnosno, vrijedi (4.11).

Preostaje nam još da dokažemo drugu implikaciju u tvrdnji (a). Pretpostavimo da je $C \in B(X)$ takav da je $CE_\lambda = E_\lambda C$ $\forall \lambda \in \mathbb{R}$. Tada uz oznake iz dokaza tvrdnje (e) vrijedi $CE(\Delta_k) = E(\Delta_k)C$ za svaki k. Stavimo

$$B = \sum_{k=1}^{n} \xi_k E(\Delta_k).$$

Tada je $BC = CB$ i prema (4.24) je $\|A - B\| \leq \delta(P)$. Stoga je

$$\|AC - CA\| = \|(AC - BC) + (CB - CA)\| \leq \|(A - B)C\| + \|C(B - A)\| \leq 2\|C\| \cdot \|A - B\| \leq 2\delta(P)\|C\|.$$

Budući da to vrijedi za svaku particiju P segmenta $[a, b]$ ($a < m$ i $M \leq b$), zaključujemo da je $AC = CA$.

Zbog nejednakosti (4.11) obično se piše

$$A = \int_a^b \lambda \mathrm{d}E_\lambda.$$

Može se dokazati da za svaku neprekidnu funkciju $f : \sigma(A) \to \mathbb{C}$, proširenu bilo kako do neprekidne funkcije sa $[a, b]$ u $\mathbb{C}$, vrijedi

$$f(A) = \int_a^b f(\lambda) \mathrm{d}E_\lambda.$$

Nadalje, pridruživanje $f \mapsto f(A)$ ima svojstvo monotonosti: ako za funkcije f i g vrijedi $f(\lambda) \leq g(\lambda)$ $\forall \lambda \in \sigma(A)$, onda je $f(A) \leq g(A)$.

Napokon, spektralni teorem omogućuje proširenje funkcionalnog računa s neprekidnih do Borelovih funkcija na spektru $\sigma(A)$ hermitskog operatora A.

Nadalje, spektralna funkcija sadrži precizne informacije o spektru ograničenog hermitskog operatora. Naime, može se dokazati:

Teorem 4.3.2. *Neka je $A \in B_h(X)$ i neka je $\lambda \mapsto E_\lambda$ njegova spektralna funkcija.*

(a) Za $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ vrijedi $\lambda_0 \notin \sigma(A)$ ako i samo ako je funkcija $\lambda \mapsto E_\lambda$ konstantna na nekoj okolini od λ_0, tj. ako postoji $\varepsilon > 0$ takav da je $E_\lambda = E_\mu$ za sve $\lambda, \mu \in [\lambda_0 - \varepsilon, \lambda_0 + \varepsilon]$.

(b) $\lambda_0 \in \sigma(A)$ je svojstvena vrijednost operatora A ako i samo ako funkcija $\lambda \mapsto E_\lambda$ ima prekid u točki λ_0, tj. ako samo ako je $E_{\lambda_0} \neq E_{\lambda_0 - 0}$. Tada je $E_{\lambda_0} - E_{\lambda_0 - 0}$ ortogonalni projektor na pripadni svojstveni potprostor $\{x \in X;\ Ax = \lambda_0 x\}$.

Poglavlje 5

Reprezentacije C^*-algebri

5.1 Uređaj u C^*-algebri

Neka je $\mathcal{A}$ C^*-algebra. Za element $x \in \mathcal{A}$ kažemo da je **pozitivan** i pišemo $x \geq 0$ ako je x hermitski, $x = x^*$, i ako je $\sigma'(x) \subseteq \mathbb{R}_+ = [0, +\infty\rangle$. Ako je C^*-algebra $\mathcal{A}$ unitalna, prema zadatku 1.1.5. za $x \in \mathcal{A}$ je $\sigma'(x) = \sigma(x) \cup \{0\}$, dakle, hermitski element $x \in \mathcal{A}$ je pozitivan ako i samo ako je $\sigma(x) \subseteq \mathbb{R}_+$. Skup svih hermitskih elemenata od $\mathcal{A}$ označavamo sa $\mathcal{A}_h$, a skup svih pozitivnih sa $\mathcal{A}_+$. Iz definicije je jasno da vrijedi $\mathcal{A}_+ = \tilde{\mathcal{A}}_+ \cap \mathcal{A}$.

Lema 5.1.1. *Za svaki $x \in \mathcal{A}_+$ postoji jedinstven $y \in \mathcal{A}_+$ takav da je $y^2 = x$.*

Dokaz: Imamo $\sigma'(x) \subseteq \mathbb{R}_+$. Neka je $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ neprekidna funkcija definirana sa $f(t) = \sqrt{t}$, $t \in \mathbb{R}_+$. Stavimo $y = f(x)$. Budući da je funkcija f realna, element y je hermitski. Nadalje, vrijedi $f(0) = 0$, pa po teoremu 2.5.8. zaključujemo da je $y \in \mathcal{A}$. Nadalje, po teoremu 2.5.7. vrijedi $\sigma'(y) = \{f(t);\ t \in \sigma'(x)\} \subseteq \mathbb{R}_+$, dakle, $y \in \mathcal{A}_+$. Kako je $f(t)^2 = t\ \forall t$ vrijedi $y^2 = x$. Time je dokazana egzistencija. Dokažimo sada jedinstvenost. Neka je i $z \in \mathcal{A}_+$ takav da je $z^2 = x$. Neka je $\mathcal{B}$ C^*-podalgebra od $\mathcal{A}$ generirana sa z. Tada je $x = z^2 \in \mathcal{B}$, ali i $y \in \mathcal{B}$ jer y je funkcija od x. C^*-algebra $\mathcal{B}$ izomorfna je algebri $C^0(\sigma'(z))$ svih neprekidnih funkcija $\varphi : \sigma'(z) \to \mathbb{C}$ takvih da je $\varphi(0) = 0$. Tada je

$$\mathcal{B}_+ = \mathcal{A}_+ \cap \mathcal{B} = \{\varphi(y);\ \varphi \in C^0_+(\sigma'(z))\}, \quad C^0_+(\sigma'(z)) = \{\varphi \in C^0(\sigma'(z));\ \varphi(t) \geq 0\ fat \in \sigma'(z)\}.$$

Stavimo $\psi(t) = t^2,\ t \in \sigma'(z)$. Tada je $\psi(z) = x$. Nadalje, identiteta $id_{\sigma'(z)}(t) = t,\ t \in \sigma'(z)$, je jedina funkcija u $C^0_+(\sigma'(z))$ čiji je kvadrat jednak ψ. Slijedi $y = id_{\sigma'(z)}(z) = z$.

Lema 5.1.2. *Za svaki $x \in \mathcal{A}_h$ postoje $y, z \in \mathcal{A}_+$ takvi da je $x = y - z$ i $yz = zy = 0$.*

Dokaz: Definiramo neprekidne funkcije $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ sa

$$f(t) = \frac{|t| + t}{2} = \begin{cases} t & \text{ako je } t \geq 0, \\ 0 & \text{ako je } t < 0, \end{cases} \qquad g(t) = f(-t) = \frac{|t| - t}{2} = \begin{cases} 0 & \text{ako je } t \geq 0, \\ -t & \text{ako je } t < 0. \end{cases}$$

Stavimo $y = f(x)$ i $z = g(x)$. Kako je $f(0) = g(0) = 0$, vrijedi $x, y \in \mathcal{A}$ bez obzira da li je $\mathcal{A}$ unitalna ili ne. Elementi y i z su hermitski jer su funkcije f i g realne, a pozitivni su po teoremu 2.5.7. jer su funkcije f i g svuda ≥ 0. Napokon, iz identiteta $f(t) - g(t) = t$ i $f(t)g(t) = 0\ \forall t \in \mathbb{R}$ slijedi $x = y - z$ i $yz = zy = 0$.

Lema 5.1.3. *Neka je $\mathcal{A}$ C^*-algebra. Skup pozitivnih elemenata $\mathcal{A}_+$ je konus, tj. vrijedi*

(a) *Ako je $x \in \mathcal{A}_+$ i $t \in \mathbb{R}_+$ onda je $tx \in \mathcal{A}_+$.*

(b) *Ako su $x, y \in \mathcal{A}_+$ onda je $x + y \in \mathcal{A}_+$.*

Dokaz: U dokazu možemo pretpostavljati da je C^*-algebra $\mathcal{A}$ unitalna, budući da za neunitalnu $\mathcal{A}$ vrijedi $\mathcal{A}_+ = \tilde{\mathcal{A}}_+ \cap \mathcal{A}$.

(a) Ako je $x \in \mathcal{A}_+$ i $t \in \mathbb{R}_+$, onda je tx hermitski i vrijedi $\sigma(tx) = \{t\lambda;\ \lambda \in \sigma(x)\} \subseteq \mathbb{R}_+$, dakle, $tx \in \mathcal{A}_+$.

(b) Neka su $x, y \in \mathcal{A}_+$. Kako množenje s pozitivnim brojem prema (a) ne mijenja pripadnost $\mathcal{A}_+$, u dokazu možemo pretpostavljati da je $\|x\| \leq 1$ i $\|y\| \leq 1$. Tada je $\sigma(x) \subseteq [0,1]$, pa je i $\sigma(e-x) \subseteq [0,1]$. Kako je $e-x$ hermitski, norma mu je jednaka spektralnom radijusu, pa slijedi $\|e-x\| \leq 1$. Slično je i $\|e-y\| \leq 1$. Odatle je

$$\|2e-(x+y)\| = \|(e-x)+(e-y)\| \leq \|e-x\| + \|e-y\| \leq 2.$$

Dakle, $\sigma(2e-(x+y)) \subseteq [-2,2]$, pa slijedi $\sigma(x+y) \subseteq [0,4] \subseteq \mathbb{R}_+$, dakle, $x+y \in \mathcal{A}_+$.

Lema 5.1.4. *Ako za $z \in \mathcal{A}$ vrijedi $-z^*z \geq 0$, onda je $z = 0$.*

Dokaz: Koristit ćemo sljedeću jednostavnu činjenicu:

Zadatak 5.1.1. *Neka je $\mathcal{A}$ unitalna algebra i $x, y \in \mathcal{A}$. Dokažite da je tada $\sigma(xy) \cup \{0\} = \sigma(yx) \cup \{0\}$.*

Zbog zadatka 5.1.1. iz $-z^*z \geq 0$ slijedi $-zz^* \geq 0$. Iz leme 5.1.3. sada slijedi da je $-z^*z - zz^* \geq 0$. Stavimo $x = \frac{1}{2}(z+z^*)$ i $y = \frac{1}{2i}(z-z^*)$. Tada su x i y hermitski i vrijedi $z = x+iy$ i $z^* = x-iy$. Odatle je $-(x^2+y^2) = \frac{1}{2}(-z^*z-zz^*) \geq 0$. No kako su očito $x^2 \geq 0$ i $y^2 \geq 0$, iz leme 5.1.3. slijedi i $x^2+y^2 \geq 0$. To znači da je $\sigma(x^2+y^2) = \{0\}$. Međutim, za svaki hermitski element je norma jednaka spektralnom radijusu, pa zaključujemo da je $x^2+y^2 = 0$. Sada je $x^2 = -y^2$, pa je i $\sigma(x^2) = \sigma(y^2) = \{0\}$, dakle $x^2 = y^2 = 0$. Međutim, elementi x i y su hermitski, pa pomoću C^*-svojstva norme nalazimo $\|x\|^2 = \|x^2\| = 0$, tj. $x = 0$ i analogno $y = 0$. Slijedi $z = x+iy = 0$.

Teorem 5.1.5. *Neka je $\mathcal{A}$ C^*-algebra i neka je $x \in \mathcal{A}_h$. Sljedeća su svojstva međusobno ekvivalentna:*

(a) $x \in \mathcal{A}_+$.

(b) *Postoji $y \in \mathcal{A}_h$ takav da je $x = y^2$.*

(c) *Postoji $z \in \mathcal{A}$ takav da je $x = z^*z$.*

(d) *Za neki $t \geq \|x\|$ vrijedi $\|te-x\| \leq t$.*

(e) *Za svaki $t \geq \|x\|$ vrijedi $\|te-x\| \leq t$.*

Pri tome, ako je algebra $\mathcal{A}$ neunitalna u (d) i (e) podrazumijevamo da je uronjena u unitalizaciju $\tilde{\mathcal{A}}$ s jedinicom e. Napokon, konus $\mathcal{A}_+$ je zatvoren i vrijedi $\mathcal{A}_+ \cap (-\mathcal{A}_+) = \{0\}$.

Dokaz: Implikacija $(a) \implies (b)$ slijedi iz leme 5.1.1. a implikacija $(b) \implies (c)$ je trivijalna.

Dokažimo implikaciju $(c) \implies (a)$. Neka je $z \in \mathcal{A}$. Tada je element z^*z hermitski. Definiramo sada neprekidne funkcije $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ sa

$$f(t) = \begin{cases} \sqrt{t} & \text{ako je } t \geq 0, \\ 0 & \text{ako je } t < 0, \end{cases} \qquad g(t) = \begin{cases} 0 & \text{ako je } t \geq 0, \\ \sqrt{-t} & \text{ako je } t < 0. \end{cases}$$

Tada je $fg = 0$ i $t = f(t)^2 - g(t)^2$. Dakle, pozitivni elementi $u = f(z^*z)$ i $v = g(z^*z)$ zadovoljavaju

$$uv = vu = 0 \qquad \text{i} \qquad z^*z = u^2 - v^2.$$

Slijedi

$$vz^*zv = vu^2v - v^4 = -v^4.$$

Stavimo li $w = zv$, dobivamo

$$-w^*w = -vz^*zv = v^4 \geq 0,$$

pa iz leme 5.1.4. slijedi $w = 0$. Odatle je $v^4 = 0$, pa slijedi $v = 0$, jer je element v hermitski. Dakle, vrijedi $z^*z = u^2$, a kako je element u hermitski, slijedi $z^*z \geq 0$, tj. $z^*z \in \mathcal{A}_+$.

Dokažimo sada implikaciju $(b) \implies (e)$. U dokazu te implikacije možemo bez smanjenja općenitosti pretpostavljati da je algebra $\mathcal{A}$ unitalna. Neka je $t \geq \|x\|$ i neka je $x = y^2$ za hermitski element y. Tada je $x = f(y)$, gdje je $f \in C(\sigma(y))$ funkcija $f(t) = t^2$. Budući da je funkcionalni račun $\varphi \mapsto \varphi(y)$ izometrički izomorfizam sa $C(\sigma(y))$ na unitalnu C^*−podalgebru generiranu sa y, imamo $\|x\| = \|f\|_\infty$. Stoga je $0 \leq f \leq \|x\| \leq t$, pa slijedi $0 \leq t - f \leq t$. Prema tome,

$$\|te - x\| = \|(t - f)(y)\| = \|t - f\|_\infty \leq t.$$

Budući da je implikacija $(e) \implies (d)$ trivijalna, dokaz ekvivalencije pet svojstava će biti potpun ako dokažemo implikaciju $(d) \implies (a)$. U dokazu te implikacije možemo također bez smanjenja općenitosti pretpostavljati da je algebra $\mathcal{A}$ unitalna. Dakle, pretpostavimo da za hermitski element $x \in \mathcal{A}$ i za neki $t \geq \|x\|$ vrijedi $\|te - x\| \leq t$. Neka je $g = id_{\sigma(x)} \in C(\sigma(x))$, tj. $g(\lambda) = \lambda \ \forall \lambda \in \sigma(x)$. Tada je $g(x) = x$, pa imamo

$$t \geq \|te - x\| = \|(t - g)(x)\| = \|t - g\|_\infty.$$

Odatle slijedi da je identiteta nenegativna funkcija na $\sigma(x)$, a to upravo znači da je $\sigma(x) \subseteq \mathbb{R}_+$, tj. da je $x \in \mathcal{A}_+$.

Dokažimo sada da je konus $\mathcal{A}_+$ zatvoren. Zbog dokazane ekvivalencije svojstva (d) s ostalim svojstvima imamo jednakost

$$\mathcal{A}_+ = \mathcal{A}_h \cap \{x \in \mathcal{A};\ \|(\|x\|e) - x\| \leq \|x\|\}.$$

Odatle slijedi zatvorenost konusa $\mathcal{A}_+$, budući da je skup $\mathcal{A}_h$ zatvoren zbog neprekidnosti involucije $x \mapsto x^*$, a drugi skup u gornjem presjeku je zatvoren zbog neprekidnosti norme.

Napokon, neka je $x \in \mathcal{A}_+ \cap (-\mathcal{A}_+)$. Prema svojstvu (c) postoji $z \in \mathcal{A}$ takav da je $x = z^*z$. No tada je i $-z^*z \in \mathcal{A}_+$, pa iz leme 5.1.4. slijedi $z = 0$, odnosno, $x = 0$.

Pomoću pojma pozitivnog elementa definiramo uređaj na realnom vektorskom prostoru $\mathcal{A}_h$. Za $x, y \in \mathcal{A}_h$ stavljamo $x \leq y$ ako je $y - x \in \mathcal{A}_+$; pišemo tada i $y \geq x$. Radi se doista o parcijalnom uređaju na $\mathcal{A}_h$:

- Ako su $x, y \in \mathcal{A}_h$ takvi da je $x \leq y$ i $y \leq x$, onda je $y - x \in \mathcal{A}_+ \cap (-\mathcal{A}_+)$, pa iz posljednje tvrdnje teorema 5.1.5. slijedi $y - x = 0$, odnosno, $x = y$.

- Neka su $x, y, z \in \mathcal{A}_h$ takvi da je $x \leq y$ i $y \leq z$. Tada su $y - x, z - y \in \mathcal{A}_+$, pa iz tvrdnje (b) leme 5.1.3. slijedi $z - x = (z - y) + (y - x) \in \mathcal{A}_+$, dakle, $x \leq z$.

Nadalje, taj uređaj poštuje strukturu realnog vektorskog prostora na $\mathcal{A}_h$:

- Ako su $x, y, z \in \mathcal{A}_h$ i ako je $x \leq y$, onda je $(y+z)-(x+z) = y-x \in \mathcal{A}_+$, dakle, $x+z \leq y+z$.

- Ako su $x, y \in \mathcal{A}_h$ takvi da je $x \leq y$ i ako je $t \in \mathbb{R}_+$, tada je $y - x \in \mathcal{A}_+$, pa iz tvrdnje (a) leme 5.1.3. slijedi $ty - tx = t(y - x) \in \mathcal{A}_+$, dakle, $tx \leq ty$.

Zadatak 5.1.2. *Neka su $x, y \in \mathcal{A}_h$ i $z \in \mathcal{A}$. Dokažite da iz $x \leq y$ slijedi $z^*xz \leq z^*yz$.*

Uputa: Primijenite lemu 5.1.1. na pozitivan element $y - x$.

Propozicija 5.1.6. *Pretpostavimo da je C^*-algebra $\mathcal{A}$ unitalna, da su $x, y \in \mathcal{A}_+$ invertibilni i da vrijedi $x \leq y$. Tada su $x^{-1}, y^{-1} \in \mathcal{A}_+$ i vrijedi $y^{-1} \leq x^{-1}$.*

Dokaz: Kako je općenito $(z^*)^{-1} = (z^{-1})^*$ za $z \in \mathcal{A}^\times$, elementi x^{-1} i y^{-1} su hermitski. Nadalje, iz tvrdnje (b) propozicije 1.1.1. slijedi da su pozitivni. Prema lemi 5.1.1. postoje $u, v \in \mathcal{A}_+$ takvi da je $u^2 = x$ i $v^2 = y$. Prema zadatku 5.1.2. imamo

$$e - v^{-1}xv^{-1} = v^{-1}(y - x)v^{-1} \geq 0.$$

Odatle je

$$\left(uv^{-1}\right)^* \left(uv^{-1}\right) = v^{-1}xv^{-1} \leq e,$$

pa slijedi

$$1 \geq \left\|\left(uv^{-1}\right)^* \left(uv^{-1}\right)\right\| = \left\|uv^{-1}\right\|^2 \qquad \Longrightarrow \qquad \left\|uv^{-1}\right\| \leq 1.$$

Adjungiranje ne mijenja normu, pa imamo i

$$\left\|v^{-1}u\right\| = \left\|\left(uv^{-1}\right)^*\right\| \leq 1,$$

a odatle je

$$1 \geq \left\|v^{-1}u\right\|^2 = \left\|\left(v^{-1}u\right)^* \left(v^{-1}u\right)\right\|,$$

pa slijedi

$$e \geq \left(v^{-1}u\right)^* \left(v^{-1}u\right) = uv^{-2}u \qquad \Longrightarrow \qquad e \geq uy^{-1}u.$$

Primjenom zadatka 5.1.2. iz posljednje nejednakosti nalazimo

$$x^{-1} = u^{-1}eu^{-1} \geq u^{-1}\left(uy^{-1}u\right)u^{-1} = y^{-1}.$$

Zadatak 5.1.3. *Neka su $x, y \in \mathcal{A}_+$ takvi da je $x \leq y$ i $xy = yx$ i neka je $n \in \mathbb{N}$. Dokažite da je $x^n \leq y^n$.*

Zadatak 5.1.4. *Neka su $x, y \in \mathcal{A}_+$ takvi da je $x \leq y$ i $xy = yx$ i neka su $u, v \in \mathcal{A}_+$ takvi da je $u^2 = x$ i $v^2 = y$. Dokažite da je tada $u \leq v$.*

Zadatak 5.1.5. *Neka je $x \in \mathcal{A}_h$ i neka je $n \in \mathbb{N}$ neparan broj. Dokažite da postoji jedinstven $y \in \mathcal{A}_h$ takav da je $y^n = x$.*

Zadatak 5.1.6. *Neka su $x, y \in \mathcal{A}_+$ takvi da je $x \leq y$. Dokažite da je tada $\|x\| \leq \|y\|$.*

Propozicija 5.1.7. *Neka je $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ $*-$homomorfizam C^*-algebri. Tada je $\varphi(\mathcal{A}_+) = \varphi(\mathcal{A}) \cap \mathcal{B}_+$.*

Dokaz: Ako je $x \in \mathcal{A}_+$, prema lemi 5.1.1. postoji $y \in \mathcal{A}_+$ takav da je $x = y^2$. Tada je

$$\varphi(x) = \varphi(y)^2 \qquad \text{i} \qquad \varphi(y)^* = \varphi(y^*) = \varphi(y),$$

pa je po teoremu 5.1.5. $\varphi(x) \in \mathcal{B}_+$. Dakle, $\varphi(\mathcal{A}_+) \subseteq \varphi(\mathcal{A}) \cap \mathcal{B}_+$.

Neka je $z \in \varphi(\mathcal{A}) \cap \mathcal{B}_+$ i neka je $x \in \mathcal{A}$ takav da je $z = \varphi(x)$. Tada je

$$\varphi(x^*) = \varphi(x)^* = z^* = z \qquad \Longrightarrow \qquad \varphi(x^*x) = z^2.$$

Imamo $x^*x \in \mathcal{A}_+$, pa postoji $y \in \mathcal{A}_+$ takav da je $y^2 = x^*x$. Sada je

$$\varphi(y)^2 = \varphi(y^2) = \varphi(x^*x) = z^2.$$

Prema dokazanom je $\varphi(\mathcal{A}_+) \subseteq \mathcal{B}_+$. To znači da su $\varphi(y)$ i z elementi od $\mathcal{B}_+$ s jednakim kvadratima. No tada iz jedinstvenosti u lemi 5.1.1. slijedi $z = \varphi(y) \in \varphi(\mathcal{A}_+)$. Time je dokazana i obrnuta inkluzija $\varphi(\mathcal{A}) \cap \mathcal{B}_+ \subseteq \varphi(\mathcal{A}_+)$.

5.2 Aproksimativne jedinice

Neka je $\mathcal{A}$ C^*-algebra. **Aproksimativna jedinica** u $\mathcal{A}$ je hiperniz $(e_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ u $\mathcal{A}_+$ sa svojstvima:

(a) Skup indeksa Λ je parcijalno uređen skup koji je usmjeren, tj. za bilo koje $\lambda, \mu \in \Lambda$ postoji $\nu \in \Lambda$ takav da je $\lambda \leq \nu$ i $\mu \leq \nu$.

(b) Hiperniz je rastući, tj. ako su $\lambda, \mu \in \Lambda$ i $\lambda \leq \mu$ onda je $e_\lambda \leq e_\mu$.

(c) $\|e_\lambda\| \leq 1 \ \forall\lambda \in \Lambda$.

(d) Za svaki $x \in \mathcal{A}$ je

$$\lim_{\lambda\in\Lambda} e_\lambda x = \lim_{\lambda\in\Lambda} x e_\lambda = x.$$

Pri tome, ako je Λ usmjeren skup, kažemo da **hiperniz** $(a_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ u $\mathcal{A}$ **konvergira prema** $a \in \mathcal{A}$, ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $\lambda_0 \in \Lambda$ takav da vrijedi

$$\lambda \in \Lambda, \ \lambda \geq \lambda_0 \qquad \Longrightarrow \qquad \|a_\lambda - a\| \leq \varepsilon.$$

Naravno, ako je algebra $\mathcal{A}$ unitalna tada za bilo koji usmjeren skup Λ dobivamo aproksimativnu jedinicu ako stavimo $e_\lambda = e \ \forall\lambda$.

Zadatak 5.2.1. *Neka je $\mathcal{A}$ unitalna C^*-algebra s jedinicom e i neka je $(e_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ hiperniz u $\mathcal{A}_+$ indeksiran usmjerenim parcijalno uređenim skupom Λ koja je rastući, tj. $\lambda \leq \mu \ \Rightarrow \ e_\lambda \leq e_\mu$, i takav da je $\|e_\lambda\| \leq 1 \ \forall\lambda$. Dokažite da je taj hiperniz aproksimativna jedinica algebre $\mathcal{A}$ ako i samo ako je*

$$\lim_{\lambda\in\Lambda} \|e_\lambda - e\| = 0.$$

Teorem 5.2.1. *Neka je $\mathcal{A}$ C^*-algebra i neka je $\mathcal{I}$ dvostrani ideal u $\mathcal{A}$ koji je gust u $\mathcal{A}$. Postoji aproksimativna jedinica u $\mathcal{A}$ sastavljena od elemenata ideala $\mathcal{I}$. Ukoliko je algebra $\mathcal{A}$ separabilna tada se može izabrati aproksimativna jedinica u $\mathcal{I}$ indeksirana prirodnim brojevima, tj. kao rastući niz.*

Dokaz: Neka je $\tilde{\mathcal{A}} = \mathcal{A} \dot{+} \mathbb{C}e$ unitalizacija od $\mathcal{A}$. $\mathcal{I}$ je dvostrani ideal i u algebri $\tilde{\mathcal{A}}$. Neka je Λ skup svih konačnih podskupova od $\mathcal{I}$ uređen inkluzijom. Naravno, taj je parcijalno uređen skup usmjeren. Za $\lambda = \{x_1, \ldots, x_n\} \in \Lambda$ stavimo

$$a_\lambda = x_1 x_1^* + \cdots + x_n x_n^* \qquad \text{i} \qquad e_\lambda = a_\lambda \left(\frac{1}{n}e + a_\lambda\right)^{-1};$$

primijetimo da je e_λ doduše izračunat u $\tilde{\mathcal{A}}$, ali leži u $\mathcal{I}$, jer je $\mathcal{I}$ dvostrani ideal u $\tilde{\mathcal{A}}$.

Za $t \geq 0$ funkcija

$$t \mapsto \frac{t}{\frac{1}{n} + t}$$

poprima vrijednosti iz $[0, 1]$. Stoga je $0 \leq e_\lambda \leq e$.

Budući da a_λ i e_λ komutiraju, imamo

$$\sum_{i=1}^{n} [(e_\lambda - e)x_i][(e_\lambda - e)x_i]^* = (e_\lambda - e)a_\lambda(e_\lambda - e) = a_\lambda(e_\lambda - e)^2.$$

No kako je

$$e_\lambda - e = a_\lambda \left(\frac{1}{n}e + a_\lambda\right)^{-1} - e = \left(\frac{1}{n}e + a_\lambda\right)^{-1}\left[a_\lambda - \frac{1}{n}e - a_\lambda\right] = -\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}e + a_\lambda\right)^{-1},$$

slijedi

$$\sum_{i=1}^{n}[(e_\lambda - e)x_i][(e_\lambda - e)x_i]^* = \frac{1}{n^2}a_\lambda\left(\frac{1}{n}e + a_\lambda\right)^{-2} = \frac{1}{n^2}f(a_\lambda),$$

gdje je $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ funkcija

$$f(t) = \frac{t}{\left(\frac{1}{n} + t\right)^2}, \qquad t \geq 0.$$

Derivacija te funkcije

$$f'(t) = \frac{\frac{1}{n} - t}{\left(\frac{1}{n} + t\right)^3}$$

ima kao jedinu nultočku $\frac{1}{n}$, za $t < \frac{1}{n}$ je pozitivna, a za $t > \frac{1}{n}$ je negativna. Dakle, funkcija f poprima svoj maksimum u točki $\frac{1}{n}$ i taj je jednak

$$\frac{\frac{1}{n}}{\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n}\right)^2} = \frac{n}{4}.$$

Slijedi da je

$$\sum_{i=1}^{n}[(e_\lambda - e)x_i][(e_\lambda - e)x_i]^* \leq \frac{1}{n^2}\frac{n}{4}e = \frac{1}{4n}e.$$

Odatle je za svaki $i \in \{1, \ldots, n\}$

$$[(e_\lambda - e)x_i][(e_\lambda - e)x_i]^* \leq \frac{1}{4n}e,$$

pa pomoću zadatka 5.1.6. slijedi

$$\|e_\lambda x_i - x_i\|^2 \leq \frac{1}{4n}.$$

Time smo dokazali da za svaki $n-$člani $\lambda \in \Lambda$ i za svaki $x \in \lambda$ vrijedi

$$\|e_\lambda x - x\| \leq \frac{1}{2\sqrt{n}}.$$

Neka je sada $x \in \mathcal{I}$ i neka je $\varepsilon > 0$. Neka je $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $n_0 \geq 1/4\varepsilon^2$ i neka je $\lambda_0 \in \Lambda$ n_0-člani skup koji sadrži x. Tada svaki $\lambda \geq \lambda_0$ također sadrži x i ima $n \geq n_0$ članova, pa je

$$\|e_\lambda x - x\| \leq \frac{1}{2\sqrt{n}} \leq \frac{1}{2\sqrt{n_0}} \leq \varepsilon.$$

Time je dokazano da vrijedi

$$\lim_{\lambda \in \Lambda} e_\lambda x = x \qquad \forall x \in \mathcal{I}.$$

Budući da je ideal $\mathcal{I}$ gust u $\mathcal{A}$, slijedi

$$\lim_{\lambda \in \Lambda} e_\lambda x = x \qquad \forall x \in \mathcal{A}.$$

Primjenom involucije na
$$\lim_{\lambda\in\Lambda} e_\lambda x^* = x^*$$
slijedi da je i
$$\lim_{\lambda\in\Lambda} xe_\lambda = x \qquad \forall x \in \mathcal{A}.$$

Treba još dokazati da iz $\lambda \leq \mu$ slijedi $e_\lambda \leq e_\mu$. Ako su $\lambda, \mu \in \Lambda$ takvi da je $\lambda \leq \mu$, možemo pisati
$$\lambda = \{x_1, \ldots, x_n\}, \qquad \mu = \{x_1, \ldots, x_m\}, \qquad m \geq n.$$
Tada je
$$a_\lambda = \sum_{i=1}^{n} x_i x_i^* \leq \sum_{i=1}^{m} x_i x_i^* = a_\mu.$$
Stoga je
$$\frac{1}{n}e + a_\lambda \leq \frac{1}{n}e + a_\mu$$
a odatle i iz propozicije 5.1.6. slijedi
$$\left(\frac{1}{n}e + a_\lambda\right)^{-1} \geq \left(\frac{1}{n}e + a_\mu\right)^{-1}. \tag{5.1}$$
Nadalje, kako je $m \geq n$, vrijedi
$$\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n} + t\right)^{-1} \geq \frac{1}{m}\left(\frac{1}{m} + t\right)^{-1} \qquad \forall t \geq 0,$$
a odatle slijedi
$$\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n} + a_\mu\right)^{-1} \geq \frac{1}{m}\left(\frac{1}{m} + a_\mu\right)^{-1}. \tag{5.2}$$
Iz (5.1) i (5.2) nalazimo
$$e_\lambda = a_\lambda\left(\frac{1}{n}e + a_\lambda\right)^{-1} = e - \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}e + a_\lambda\right)^{-1} \leq e - \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}e + a_\mu\right)^{-1} \leq$$
$$\leq e - \frac{1}{m}\left(\frac{1}{m}e + a_\mu\right)^{-1} = a_\mu\left(\frac{1}{m}e + a_\mu\right)^{-1} = e_\mu.$$

Napokon, pretpostavimo da je C^*-algebra $\mathcal{A}$ separabilna. Tada postoji prebrojiv skup $\{x_k;\ k \in \mathbb{N}\}$ u $\mathcal{I}$ koji je gust u $\mathcal{A}$. Stavimo tada $e_n = e_{\{x_1,\ldots,x_n\}}$. Prethodni dokaz daje $0 \leq e_n \leq e_m$ za $n \leq m$, $\|e_n\| \leq 1\ \ \forall n \in \mathbb{N}$ i
$$\lim_{n\to\infty} \|e_n x_k - x_k\| = 0 \qquad \forall k \in \mathbb{N}. \tag{5.3}$$
Neka je sada $x \in \mathcal{A}$ i $\varepsilon > 0$. Budući da je skup $\{x_k;\ k \in \mathbb{N}\}$ gust u $\mathcal{A}$, postoji $k \in \mathbb{N}$ takav da je
$$\|x - x_k\| \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$
Sada zbog (5.3) postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da vrijedi
$$\|e_n x_k - x_k\| \leq \frac{\varepsilon}{3} \qquad \forall n \geq n_0.$$

Stoga, koristeći činjenicu da je $\|e_n\| \leq 1$, za $n \geq n_0$ dobivamo

$$\|e_n x - x\| \leq \|e_n(x - x_k)\| + \|e_n x_k - x_k\| + \|x_k - x\| \leq 2\|x - x_k\| + \|e_n x_k - x_k\| \leq \frac{2\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Time je dokazano

$$\lim_{n\to\infty} e_n x = x \qquad \forall x \in \mathcal{A}.$$

Naravno, pomoću adjungiranja dobivamo i

$$\lim_{n\to\infty} x e_n = x \qquad \forall x \in \mathcal{A}.$$

Zadatak 5.2.2. *Neka je $\mathcal{A}$ C^*-algebra i $\mathcal{R}$ desni ideal u $\mathcal{A}$. Dokažite da postoji hiperniz $(e_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ u $\mathcal{R} \cap \mathcal{A}_+$, indeksiran usmjerenim skupom Λ, sa sljedećim svojstvima:*

(a) *Za $\lambda, \mu \in \Lambda$ i $\lambda \leq \mu$ vrijedi $e_\lambda \leq e_\mu$.*

(b) $\|e_\lambda\| \leq 1 \;\; \forall \lambda \in \Lambda$.

(c) *Vrijedi*

$$\lim_{\lambda\in\Lambda} e_\lambda x = x \qquad \forall x \in Cl(\mathcal{R}).$$

5.3 Zatvoreni ideali, kvocijenti i homomorfizmi C^*-algebri

Propozicija 5.3.1. *Neka je $\mathcal{A}$ C^*-algebra i neka je $\mathcal{J}$ zatvoren obostrani ideal u $\mathcal{A}$. Tada je $\mathcal{J}$ $*-$ideal, tj. $x \in \mathcal{J} \implies x^* \in \mathcal{J}$.*

Dokaz: Neka je $x \in \mathcal{J}$. Prema zadatku 5.2.2. u $\mathcal{J}$ postoji hiperniz $(e_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ pozitivnih elemenata indeksiran usmjerenim skupom Λ takav da je

$$x = \lim_{\lambda\in\Lambda} e_\lambda x.$$

Budući da je involucija $y \mapsto y^*$ neprekidno preslikavanje sa $\mathcal{A}$ u $\mathcal{A}$, slijedi

$$x^* = \lim_{\lambda\in\Lambda} x^* e_\lambda.$$

$\mathcal{J}$ je dvostrani ideal pa iz $e_\lambda \in \mathcal{J}$ slijedi $x^* e_\lambda \in \mathcal{J}$. Kako je ideal $\mathcal{J}$ zatvoren, zaključujemo da je $x^* \in \mathcal{J}$.

Ako je $\mathcal{J}$ obostrani zatvoren ideal u C^*-algebri $\mathcal{A}$, znamo da je kvocijentna algebra $\mathcal{A}/\mathcal{J}$ Banachova algebra s normom

$$\|x + \mathcal{J}\| = \inf\{\|x + y\|;\ y \in \mathcal{J}\}, \qquad x \in \mathcal{A}.$$

Budući da je $\mathcal{J}$ $*-$ideal, lako se provjeri da je sa

$$(x + \mathcal{J})^* = x^* + \mathcal{J}, \qquad x \in \mathcal{A},$$

definirana involucija na kvocijentnoj algebri $\mathcal{A}/\mathcal{J}$. Važno je da norma na $\mathcal{A}/\mathcal{J}$ ima C^*-svojstvo:

Propozicija 5.3.2. *Neka je $\mathcal{A}$ C^*-algebra i neka je $\mathcal{J}$ zatvoren obostrani ideal u $\mathcal{A}$. Tada je $\mathcal{A}/\mathcal{J}$ C^*-algebra.*

Dokaz: Neka je

$$E = \{u \in \mathcal{J};\ u = u^*,\ \sigma(u) \subseteq [0,1]\};$$

pri tome, ako je algebra $\mathcal{A}$ neunitalna, $\sigma(u)$ označava spektar elementa u u njenoj unitalizaciji $\tilde{\mathcal{A}}$. Tvrdimo da je tada

$$\|x + \mathcal{J}\| = \inf\{\|x - xu\|;\ u \in E\} \qquad \forall x \in \mathcal{A}.$$

Doista, kako je $xu \in \mathcal{J}$ za svaki $x \in \mathcal{A}$ i svaki $u \in E \subseteq \mathcal{J}$, očito vrijedi nejednakost

$$\|x + \mathcal{J}\| \leq \inf\{\|x - xu\|;\ u \in E\}.$$

Obrnuta nejednakost slijedit će ako dokažemo da za svaki $y \in \mathcal{J}$ postoji niz $u_n \in E$ takav da za svaki $x \in \mathcal{A}$ vrijedi

$$\|x + y\| \geq \inf\{\|x - xu_n\|;\ n \in \mathbb{N}\}.$$

Prema teoremu 5.2.1. postoji aproksimativna jedinica $(e_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ u E za C^*-algebru $\mathcal{J}$. Tada je za svaki $y \in \mathcal{J}$

$$y = \lim_{\lambda\in\Lambda} ye_\lambda$$

pa za svaki $y \in \mathcal{J}$ možemo izabrati podniz $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hiperniza $(e_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ takav da je

$$y = \lim_{n\to\infty} yu_n.$$

Za svaki $u \in E$ je $0 \leq u \leq e$, dakle, $\|e-u\| \leq 1$, i, posebno, $\|e-u_n\| \leq 1$ za svaki n. Stoga imamo redom

$$\|x+y\| \geq \liminf_{n\to\infty} \|(x+y)(e-u_n)\| = \liminf_{n\to\infty} \|(x-xu_n)+(y-yu_n)\| =$$
$$= \liminf_{n\to\infty} \|x-xu_n\| \geq \inf\{\|x-xu_n\|;\ n\in\mathbb{N}\},$$

jer je $\lim_{n\to\infty}(y-yu_n)=0$.

Primjenom dokazane jednakosti nalazimo za svaki $x \in \mathcal{A}$ (računajući gdje je potrebno u algebri $\tilde{\mathcal{A}}$):

$$\|x+\mathcal{J}\|^2 = \inf\{\|x-xu\|^2;\ u\in E\} = \inf\{\|x(e-u)\|^2;\ u\in E\} = \inf\{\|(e-u)x^*x(e-u)\|;\ u\in E\} \leq$$

$$\leq \inf\{\|x^*x(e-u)\|;\ u\in E\} = \inf\{\|x^*x-x^*xu\|;\ u\in E\} = \|x^*x+\mathcal{J}\| = \|(x+\mathcal{J})^*(x+\mathcal{J})\|.$$

Time je dokazana nejednakost

$$\|x+\mathcal{J}\|^2 \leq \|(x+\mathcal{J})^*(x+\mathcal{J})\|.$$

Iz te nejednakosti kao u dokazu teorema 1.4.3. slijedi C^*−jednakost.

Teorem 5.3.3. *Neka su $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ C^*−algebre i neka je $\pi\colon \mathcal{A}\to\mathcal{B}$ $*$−homomorfizam.*

(*a*) *Operator π je neprekidan i norma mu je manja ili jednaka* 1.

(*b*) *Ako je homomorfizam π injektivan, on je izometrija.*

(*c*) *Slika $\pi(\mathcal{A})$ homomorfizma π je zatvorena i to je C^*−podalgebra od $\mathcal{B}$.*

(*d*) *Homomorfizam π inducira izometrički $*$−izomorfizam kvocijentne algebre $\mathcal{A}/\ker\pi$ na algebru $\pi(\mathcal{A})$.*

Dokaz: (*a*) Pretpostavimo prvo da su $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ unitalne C^*−algebre s jedinicama $e_{\mathcal{A}}$ i $e_{\mathcal{B}}$ i da je homomorfizam π unitalan, tj. $\pi(e_{\mathcal{A}})=e_{\mathcal{B}}$. Tada π preslikava invertibilne elemente algebre $\mathcal{A}$ u invertibilne elemente algebre $\mathcal{B}$. Odatle slijedi da je $\sigma_{\mathcal{B}}(\pi(x))\subseteq\sigma_{\mathcal{A}}(x)$ za svaki $x\in\mathcal{A}$. Budući da je norma svakog hermitskog (čak i normalnog) elementa unitalne C^*−algebre jednaka njegovom spektralnom radijusu, za svaki $x\in\mathcal{A}$ imamo redom:

$$\|\pi(x)\|^2 = \|\pi(x^*x)\| = \nu(\pi(x^*x)) \leq \nu(x^*x) = \|x^*x\| = \|x\|^2.$$

Time je tvrdnja (*a*) dokazana uz navedene pretpostavke.

Pretpostavimo sada samo da je algebra $\mathcal{A}$ unitalna s jedinicom $e_{\mathcal{A}}$. Možemo pretpostaviti da je slika $\pi(\mathcal{A})$ gusta u $\mathcal{B}$; ako nije tako, možemo bez smanjenja općenitosti promatrati zatvarač slike $\pi(\mathcal{A})$ umjesto C^*−algebre $\mathcal{B}$. $\pi(e_{\mathcal{A}})$ je jedinica za algebru $\pi(\mathcal{A})$, a kako je ova gusta u $\mathcal{B}$ zbog neprekidnosti množenja zaključujemo da je $\pi(e_{\mathcal{A}})$ jedinica u algebri $\mathcal{B}$. U tom slučaju tvrdnja je već dokazana.

Pretpostavimo napokon da je algebra $\mathcal{A}$ neunitalna i neka je $\tilde{\mathcal{A}}=\mathcal{A}\dotplus\mathbb{C}e_{\mathcal{A}}$ njena unitalizacija. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je algebra $\mathcal{B}$ unitalna; naime, ako nije tako, algebru $\mathcal{B}$ možemo zamijeniti s njenom unitalizacijom. Definiramo sada $\tilde{\pi}\colon\tilde{\mathcal{A}}\to\mathcal{B}$ na sljedeći način:

$$\tilde{\pi}(x+\lambda e_{\mathcal{A}}) = \pi(x)+\lambda e_{\mathcal{B}}, \qquad x\in\mathcal{A},\ \lambda\in\mathbb{C}.$$

Lako se vidi da je na taj način definiran $*$−homomorfizam koji proširuje π. Sada iz dokazanog slijedi da je $\tilde{\pi}$, a time i njegova restrikcija π, neprekidan i norme manje ili jednake 1.

(*b*) Možemo pretpostavljati da su algebre $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ unitalne i da je homomorfizam π unitalan.

Doista, ako nije tako, postupamo jednako kao u dokazu tvrdnje (a). Iz dokaza tvrdnje (a) vidi se da će izometričnost homomorfizma π slijediti ako dokažemo da za svaki hermitski element $z \in \mathcal{A}$ vrijedi jednakost $\sigma_{\mathcal{B}}(\pi(z)) = \sigma_{\mathcal{A}}(z)$. Već znamo da je $\sigma_{\mathcal{B}}(\pi(z)) \subseteq \sigma_{\mathcal{A}}(z)$. Pretpostavimo da ti skupovi nisu jednaki. Tada postoji neprekidna funkcija $f\colon \sigma_{\mathcal{A}}(z) \to \mathbb{R}$, takva da je $f \neq 0$, ali da je $f(\lambda) = 0$ za svaki $\lambda \in \sigma_{\mathcal{B}}(\pi(z))$. Iz Weierstrassovog teorema (korolar **??**.) slijedi da je funkcija f uniformni limes niza polinoma. Za svaki polinom P je $P(\pi(z)) = \pi(P(z))$. Budući da je homomorfizam π neprekidan odatle slijedi da je $f(\pi(z)) = \pi(f(z))$. Međutim, to je nemoguće jer je $f(z) \neq 0$, $f(\pi(z)) = 0$ i po pretpostavci je π injekcija. Ova kontradikcija pokazuje da je nužno $\sigma_{\mathcal{B}}(\pi(z)) = \sigma_{\mathcal{A}}(z)$, što je i trebalo dokazati.

(d) slijedi iz (b). Ako je π injekcija, onda je prema (b) slika $\pi(\mathcal{A})$ potpuna, dakle zatvorena, podalgebra od $\mathcal{B}$. Zbog (d) slika $\pi(\mathcal{A})$ je zatvorena u $\mathcal{B}$ i ako π nije injekcija. Dakle, vrijedi i (c).

Korolar 5.3.4. *Neka je $\mathcal{A}$ C^*-algebra s normom $\|\cdot\|$ i neka je i $\|\cdot\|_1$ norma na $\mathcal{A}$ s obzirom na koju je $\mathcal{A}$ također C^*-algebra. Tada je $\|x\|_1 = \|x\|$ za svaki $x \in \mathcal{A}$.*

Dokaz: Tvrdnja slijedi neposrednom primjenom tvrdnje (b) teorema 5.3.3. jer je identiteta $\mathrm{id}_{\mathcal{A}}$ bijektivni $*-$homomorfizam C^*-algebre $\mathcal{A}$ s normom $\|\cdot\|$ na C^*-algebru $\mathcal{A}$ s normom $\|\cdot\|_1$.

5.4 Reprezentacije

Reprezentacija C^*-algebre $\mathcal{A}$ na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$ je $*-$homomorfizam $\pi\colon \mathcal{A} \to B(\mathcal{H})$. Pri tome je $B(\mathcal{H})$ C^*-algebra ograničenih linearnih operatora na $\mathcal{H}$ na kojoj je norma zadana sa

$$\|A\| = \sup\{\|A\xi\|;\ \xi \in \mathcal{H},\ \|\xi\| \le 1\}, \qquad A \in B(\mathcal{H}),$$

a involucija je adjungiranje

$$(A^*\xi|\eta) = (\xi|A\eta) \qquad \forall \xi, \eta \in \mathcal{H}.$$

Zatvoren potprostor $\mathcal{K}$ prostora $\mathcal{H}$ zove se $\pi-$**invarijantan** ako je on invarijantan za svaki operator $\pi(x)$, $x \in \mathcal{A}$. U tom slučaju je pomoću restrikcija

$$\pi_{\mathcal{K}}(x) = \pi(x)|\mathcal{K}, \qquad x \in \mathcal{A},$$

definirana reprezentacija $\pi_{\mathcal{K}}$ od $\mathcal{A}$ na Hilbertovom prostoru $\mathcal{K}$ koja se zove **subreprezentacija** od π. Ako je $\mathcal{K}$ $\pi-$invarijantan potprostor onda je i njegov ortogonalni komplement $\mathcal{K}^\perp$ $\pi-$invarijantan. Doista, za $x \in \mathcal{A}$ i za $\xi \in \mathcal{K}^\perp$ imamo za svaki $\eta \in \mathcal{K}$

$$(\pi(x)\xi|\eta) = (\xi|\pi(x^*)\eta) = 0$$

jer je $\pi(x^*)\eta \in \mathcal{K}$. Dakle, $\pi(x)\xi \in \mathcal{K}^\perp$.

Zatvarač $Cl[\pi(\mathcal{A})\mathcal{H}]$ potprostora

$$[\pi(\mathcal{A})\mathcal{H}] = [\{\pi(x)\xi;\ x \in \mathcal{A},\ \xi \in \mathcal{H}\}]$$

očito je $\pi-$invarijantan. Stoga je i njegov ortogonalni komplement $(Cl[\pi(\mathcal{A})\mathcal{H}])^\perp = [\pi(\mathcal{A})\mathcal{H}]^\perp$ $\pi-$invarijantan potprostor. Za $\eta \in \mathcal{H}$ imamo redom

$$\eta \in [\pi(\mathcal{A})\mathcal{H}]^\perp \iff (\pi(x)\xi|\eta) = 0\ \forall \xi \in \mathcal{H} \text{ i } \forall x \in \mathcal{A} \iff$$

$$\iff (\xi|\pi(x^*)\eta) = 0\ \forall \xi \in \mathcal{H} \text{ i } \forall x \in \mathcal{A} \iff \pi(x^*)\eta = 0\ \forall x \in \mathcal{A} \iff \pi(x)\eta = 0\ \forall x \in \mathcal{A}.$$

Reprezentacija π zove se **nedegenerirana** ako je potprostor $[\pi(\mathcal{A})\mathcal{H}]$ gust u $\mathcal{H}$. Prema gornjem to je ekvivalentno uvjetu da iz $\pi(x)\eta = 0$ $\forall x \in \mathcal{A}$ slijedi $\eta = 0$. Zbog toga je očito svaka subreprezentacija nedegenerirane reprezentacije i sama nedegenerirana.

Neka je π reprezentacija C^*-algebre $\mathcal{A}$ na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$. Ako je $\xi \in \mathcal{H}$, zatvarač $Cl(\pi(\mathcal{A})\xi)$ potprostora

$$\pi(\mathcal{A})\xi = \{\pi(x)\xi;\ x \in \mathcal{A}\}.$$

je očito invarijantan i zove se **ciklički potprostor**. **Reprezentacija** π se zove **ciklička**, odnosno, čitav se prostor $\mathcal{H}$ zove **ciklički prostor**, ako postoji vektor $\xi \in \mathcal{H}$ takav da je potprostor $\pi(\mathcal{A})\xi$ gust u $\mathcal{H}$. U tom se slučaju ξ zove **ciklički vektor** reprezentacije π.

Teorem 5.4.1. *Neka je π nedegenerirana reprezentacija C^*-algebre $\mathcal{A}$ na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$. Postoji skup cikličkih invarijantnih potprostora koji su međusobno ortogonalni i čija je suma gusta u $\mathcal{H}$.*

Dokaz: Neka je $\mathcal{P}$ skup svih skupova međusobno ortogonalnih cikličkih potprostora od $\mathcal{H}$. Taj je skup parcijalno uređen inkluzijom. Ako je $\mathcal{R}$ neki njegov linearno uređen podskup, onda je unija svih skupova iz $\mathcal{R}$ očito element od $\mathcal{P}$ i to je gornja međa za $\mathcal{R}$. Prema tome, parcijalno uređen skup $\mathcal{P}$ zadovoljava uvjet Zornove leme, pa u $\mathcal{P}$ postoji neki maksimalan element X. To znači da je X skup međusobno ortogonalnih cikličkih potprostora i ne postoji $Y \in \mathcal{P}$ takav da je

$X \subsetneq Y$. Neka je ΣX suma svih potprostora iz X. Pretpostavimo da ΣX nije gust u $\mathcal{H}$. Tada je $\mathcal{K} = (\Sigma X)^\perp \neq \{0\}$. $\mathcal{K}$ je $\pi-$invarijantan potprostor od $\mathcal{H}$. Subreprezentacija $\pi_{\mathcal{K}}$ je nedegenerirana, pa $\mathcal{K}$ sadrži neki ciklički potprostor $\mathcal{L}$. No tada je $X \cup \{\mathcal{L}\} \in \mathcal{P}$ i $X \subsetneq X \cup \{\mathcal{L}\}$. To je nemoguće zbog maksimalnosti X u $\mathcal{P}$. Ova kontradikcija pokazuje da je ΣX gusto u $\mathcal{H}$.

Neka su π i σ reprezentacije C^*-algebre $\mathcal{A}$ na Hilbertovim prostorima $\mathcal{H}$ i $\mathcal{K}$. Reprezentacije π i σ zovu se **ekvivalentne** ako postoji izometrički izomorfizam $U\colon \mathcal{H} \to \mathcal{K}$, takav da je

$$U\pi(x) = \sigma(x)U \ \ \forall x \in \mathcal{A}.$$

Primijetimo da je ograničen operator $U \in B(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ izometrički izomorfizam sa $\mathcal{H}$ na $\mathcal{K}$ ako i samo ako je $UU^* = I_{\mathcal{K}}$ i $U^*U = I_{\mathcal{H}}$. Dakle, gornji se uvjet može zapisati i ovako:

$$U\pi(x)U^* = \sigma(x) \ \ \forall x \in \mathcal{A}.$$

U tom slučaju pišemo $\pi \sim \sigma$. Očito je $\sim$ relacija ekvivalencije na skupu svih reprezentacija C^*-algebre $\mathcal{A}$.

Teorem 5.4.2. *Neka je $\mathcal{J}$ zatvoren obostrani ideal u C^*-algebri $\mathcal{A}$ i neka je π nedegenerirana reprezentacija C^*-algebre $\mathcal{J}$ na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$. Postoji jedinstveno proširenje π do reprezentacije $\tilde{\pi}$ C^*-algebre $\mathcal{A}$ na prostoru $\mathcal{H}$. Ako su π i σ ekvivalentne nedegenerirane reprezentacije od $\mathcal{J}$, onda su njihova proširenja $\tilde{\pi}$ i $\tilde{\sigma}$ ekvivalentne reprezentacije od $\mathcal{A}$.*

Dokaz: Dokazat ćemo da za svaki $x \in \mathcal{A}$ postoji jedinstven $\tilde{\pi}(x) \in B(\mathcal{H})$ takav da vrijedi $\tilde{\pi}(x)\pi(y) = \pi(xy) \ \ \forall y \in \mathcal{J}$. Jedinstvenost je očita posljedica nedegeneriranosti reprezentacije π od $\mathcal{J}$ na $\mathcal{H}$. Ostaje nam da dokažemo egzistenciju.

Pretpostavimo najprije da je reprezentacija π ciklička, tj. da postoji $\xi \in \mathcal{H}$ takav da je potprostor $\pi(\mathcal{J})\xi$ gust u $\mathcal{H}$. Tvrdimo da je tada

$$\|\pi(xy)\xi\| \leq \|x\| \cdot \|\pi(y)\xi\|, \qquad \forall x \in \mathcal{A} \text{ i } \forall y \in \mathcal{J}.$$

Doista, neka je $y \in \mathcal{J}$ i neka je $(e_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ aproksimativna jedinica C^*-algebre $\mathcal{J}$. Tada je

$$y = \lim_{\lambda\in\Lambda} e_\lambda y$$

pa za svaki $x \in \mathcal{A}$ imamo

$$\|\pi(xy)\xi\| = \lim_{\lambda\in\Lambda} \|\pi(xe_\lambda y)\xi\| = \lim_{\lambda\in\Lambda} \|\pi(xe_\lambda)\pi(y)\xi\| \leq \sup_{\lambda\in\Lambda} \|xe_\lambda\| \cdot \|\pi(y)\xi\| \leq \|x\| \cdot \|\pi(y)\xi\|,$$

kao što smo i tvrdili. Iz dokazane nejednakosti slijedi da je za svaki $x \in \mathcal{A}$ sa $\pi(y)\xi \mapsto \pi(xy)\xi$ dobro definiran ograničen linearan operator na normiranom prostoru $\pi(\mathcal{J})\xi$. Taj je potprostor gust u $\mathcal{H}$, pa zaključujemo da postoji ograničen linearan operator $\tilde{\pi}(x)\colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ takav da je $\tilde{\pi}(x)\pi(y) = \pi(xy), \ x \in \mathcal{A}, \ y \in \mathcal{J}$.

U općem slučaju prema teoremu 5.4.1. postoje međusobno ortogonalni ciklički potprostori $\mathcal{H}_i$, $i \in I$, čija je suma $\Sigma_i \mathcal{H}_i$ gusta u $\mathcal{H}$. Prema dokazanom za svaki $i \in I$ i za svaki $x \in \mathcal{A}$ postoji $\rho_i(x) \in B(\mathcal{H}_i)$ takav da je

$$\rho_i(x)\pi(y)|\mathcal{H}_i = \pi(xy)|\mathcal{H}_i \qquad \forall y \in \mathcal{J} \qquad \text{i} \qquad \|\rho_i(x)\| \leq \|x\|.$$

Definiramo $\rho(x)\colon \Sigma_i\mathcal{H}_i \to \Sigma_i\mathcal{H}_i$ tako da stavimo $\rho(x)|\mathcal{H}_i = \rho_i(x), \ i \in I$. Tada je $\rho(x)$ ograničen linearan operator na potrostoru $\Sigma_i\mathcal{H}_i$. No taj potprostor je gust u $\mathcal{H}$ pa se $\rho(x)$ proširuje do $\tilde{\pi}(x) \in B(\mathcal{H})$ s traženim svojstvom $\tilde{\pi}(x)\pi(y) = \pi(xy)$, $x \in \mathcal{A}$, $y \in \mathcal{J}$.

Iz jedinstvenosti operatora $\tilde{\pi}(x)$ sa zadanim svojstvom neposredno slijedi da je $\tilde{\pi}$ reprezentacija C^*−algebre $\mathcal{A}$ na prostoru $\mathcal{H}$ koja proširuje reprezentaciju π od $\mathcal{J}$ i to proširenje je jedinstveno. Time je dokazana prva tvrdnja teorema 5.4.2.

Dokažimo i drugu tvrdnju. Neka je $U \in B(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ izometrički izomorfizam takav da je

$$U\pi(y) = \sigma(y)U \qquad \forall y \in \mathcal{J}.$$

Tada za jedinstvena proširenja $\tilde{\pi}$ i $\tilde{\sigma}$ i za svaki $x \in \mathcal{A}$, $y \in \mathcal{J}$ i $\xi \in \mathcal{H}$ vrijedi:

$$U\tilde{\pi}(x)\pi(y)\xi = U\pi(xy)\xi = \sigma(xy)U\xi = \tilde{\sigma}(x)\sigma(y)U\xi = \tilde{\sigma}(x)U\pi(y)\xi.$$

Kako je reprezentacija π od $\mathcal{J}$ nedegenerirana, vektori $\pi(y)\xi$ razapinju gust potprostor od $\mathcal{H}$, pa slijedi $U\tilde{\pi}(x) = \tilde{\sigma}(x)U$ za svaki $x \in \mathcal{A}$. Dakle, reprezentacije $\tilde{\pi}$ i $\tilde{\sigma}$ su ekvivalentne.

5.5 Ireducibilne reprezentacije

Reprezentacija π C^*-algebre $\mathcal{A}$ na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$ zove se **reducibilna** ako postoji $\pi-$invarijantan potprostor od $\mathcal{H}$ koji je netrivijalan, odnosno koji je različit od $\{0\}$ i od $\mathcal{H}$. Ako netrivijalan $\pi-$invarijantan potprostor ne postoji, reprezentacija π zove se **ireducibilna**. To znači da nijedan netrivijalan hermitski projektor ne komutira sa svim operatorima $\pi(x)$, $x \in \mathcal{A}$. Očito je svaka ireducibilna reprezentacija na prostoru koji nije jednodimenzionalan nedegenerirana. Reprezentacija $\pi \neq 0$ je ireducibilna ako i samo ako je za svaki $\xi \in \mathcal{H}$, $\xi \neq 0$, potprostor $\pi(\mathcal{A})\xi$ gust u $\mathcal{H}$.

Teorem 5.5.1. *Neka je $\mathcal{A}$ C^*-algebra, $\mathcal{J}$ zatvoren obostrani ideal u $\mathcal{A}$ i π ireducibilna reprezentacija od $\mathcal{A}$ na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$. Ako je $\mathcal{J} \not\subseteq \ker\pi$, tj. $\pi(\mathcal{J}) \neq \{0\}$, onda je restrikcija $\pi|\mathcal{J}$ ireducibilna reprezentacija C^*-algebre $\mathcal{J}$ na prostoru $\mathcal{H}$. Nadalje, ako za ireducibilne reprezentacije π i σ od $\mathcal{A}$ vrijedi $\pi(\mathcal{J}) \neq \{0\}$ i $\sigma(\mathcal{J}) \neq \{0\}$ i ako su reprezentacije $\pi|\mathcal{J}$ i $\sigma|\mathcal{J}$ od $\mathcal{J}$ ekvivalentne, onda su reprezentacije π i σ ekvivalentne.*

Dokaz: Za prvu tvrdnju dovoljno je dokazati da je potprostor $\pi(\mathcal{J})\xi$ gust u $\mathcal{H}$ za svaki $\xi \in \mathcal{H}$, $\xi \neq 0$. Kako je $\mathcal{J}$ ideal u $\mathcal{A}$ očito je zatvarač $Cl(\pi(\mathcal{J})\xi)$ potprostora $\pi(\mathcal{J})\xi$ $\pi-$invarijantan potprostor od $\mathcal{H}$. Budući da je reprezentacija π ireducibilna, slijedi da je $Cl(\pi(\mathcal{J})\xi) = \mathcal{H}$ ili je $Cl(\pi(\mathcal{J})\xi) = \{0\}$. U drugom slučaju je $\pi(y)\xi = 0$ $\forall y \in \mathcal{J}$. Odatle imamo redom:

$$(\pi(y)\xi|\eta) = 0 \quad \forall y \in \mathcal{J},\ \forall \eta \in \mathcal{H} \quad \Longrightarrow \quad (\xi|\pi(y)\eta) = 0 \quad \forall y \in \mathcal{J},\ \forall \eta \in \mathcal{H} \quad \Longrightarrow \quad \xi \perp [\pi(\ J)\mathcal{H}].$$

Dakle, $[\pi(\mathcal{J})\mathcal{H}]^\perp \neq \{0\}$. No taj je potprostor $\pi-$invarijantan, pa zbog ireducibilnosti slijedi $[\pi(\mathcal{J})\mathcal{H}]^\perp = \mathcal{H}$. Odatle bi slijedilo da je $\pi(\mathcal{J}) = \{0\}$. No to je suprotno pretpostavci. Ova kontradikcija pokazuje da za svaki vektor $\xi \neq 0$ vrijedi $Cl(\pi(\mathcal{J})\xi) = \mathcal{H}$ i time je dokazano da je reprezentacija $\pi|\mathcal{J}$ ireducibilna.

Druga tvrdnja slijedi neposredno iz druge tvrdnje teorema 5.4.2.

Već smo spomenuli da je reprezentacija π C^*-algebre $\mathcal{A}$ na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$ ireducibilna ako i samo ako nema hermitskog projektora $P \in B(\mathcal{H})$ različitog od 0 i od I koji komutira sa svim operatorima $\pi(x)$, $x \in \mathcal{A}$. Stoga je u sljedećem teoremu jedna implikacija trivijalna:

Teorem 5.5.2. *Neka je π reprezentacija C^*-algebre $\mathcal{A}$ na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$. Reprezentacija π je ireducibilna ako i samo ako je*

$$\{A \in B(\mathcal{H});\ A\pi(x) = \pi(x)A\ \forall x \in \mathcal{A}\} = \mathbb{C}I = \{\lambda I;\ \lambda \in \mathbb{C}\}.$$

Dokaz: Pretpostavimo da vrijedi gornja jednakost. Neka je $P \in B(\mathcal{H})$ hermitski projektor takav da je $P\pi(x) = \pi(x)P$ za svaki $x \in \mathcal{A}$. Tada je $P = \lambda I$ za neki $\lambda \in \mathbb{C}$, a kako je P projektor, slijedi $\lambda^2 = \lambda$, dakle, ili je $\lambda = 0$ ili je $\lambda = 1$. To znači da je ili $P = 0$ ili je $P = I$, pa zaključujemo da je reprezentacija π ireducibilna.

Pretpostavimo sada da je reprezentacija π C^*-algebre $\mathcal{A}$ na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$ ireducibilna. Očito je

$$\mathbb{C}I \subseteq \{A \in B(\mathcal{H});\ A\pi(x) = \pi(x)A\ \forall x \in \mathcal{A}\}.$$

Treba još dokazati obrnutu inkluziju tj. treba dokazati da vrijedi:

$$A \in B(\mathcal{H}), \quad A\pi(x) = \pi(x)A \quad \forall x \in \mathcal{A} \qquad \Longrightarrow \qquad A = \lambda I \quad \text{za neki } \lambda \in \mathbb{C}.$$

Pretpostavimo najprije da je operator A hermitski. Neka je $\lambda \mapsto E_\lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$, spektralna funkcija operatora A. Prema tvrdnji (a) spektralnog teorema 4.3.1. za hermitski operator tada vrijedi

$$E_\lambda\pi(x) = \pi(x)E_\lambda \qquad \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \text{i} \quad \forall x \in \mathcal{A}.$$

Svaki E_λ je ortogonalni projektor pa iz ireducibilnosti reprezentacije π slijedi da je za svaki $\lambda \in \mathbb{R}$ ili $E_\lambda = 0$ ili $E_\lambda = I$. Sada iz tvrdnje (b) spektralnog teorema zaključujemo da postoji $\mu \in \mathbb{R}$ takav da je $E_\lambda = 0$ $\forall \lambda < \mu$ i $E_\lambda = I$ $\forall \lambda > \mu$. Nadalje, zbog neprekidnosti zdesna (tvrdnja (c) spektralnog teorema) vrijedi $E_\mu = I$. Dakle, vrijedi

$$\lambda < \mu \quad \Longrightarrow \quad E_\lambda = 0, \qquad\qquad \lambda \geq \mu \quad \Longrightarrow \quad E_\lambda = I.$$

Neka su m, M, a, b kao u spektralnom teoremu:

$$m = \inf\{(A\xi|\xi);\ \xi \in \mathcal{H},\ \|\xi\| = 1\}, \quad M = \sup\{(A\xi|\xi);\ \xi \in \mathcal{H},\ \|\xi\| = 1\}, \quad a < m, \quad b \geq M.$$

Neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljan i neka je $P = \{\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ subdivizija segmenta $[a, b]$ takva da je $\lambda_k = \mu$ za neki $k \in \{1, \ldots, n-1\}$ i da je $\delta(P) \leq \varepsilon$, tj. $|\lambda_j - \lambda_{j-1}| \leq \varepsilon$ $\forall j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Stavimo

$$B = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j (E_{\lambda_j} - E_{\lambda_{j-1}}).$$

Prema tvrdnji (e) spektralnog teorema tada je $\|A - B\| \leq \varepsilon$. Nadalje,

$$E_{\lambda_0} = E_{\lambda_1} = \cdots = E_{\lambda_{k-1}} = 0 \quad \text{i} \quad E_{\lambda_k} = E_{\lambda_{k+1}} = \cdots = E_{\lambda_n} = I.$$

Prema tome,

$$E_{\lambda_j} - E_{\lambda_{j-1}} = \begin{cases} 0 & \text{ako je } 1 \leq j \leq k-1 \\ I & \text{ako je } j = k \\ 0 & \text{ako je } k+1 \leq j \leq n, \end{cases}$$

pa slijedi

$$B = \lambda_k I = \mu I.$$

Na taj način dokazali smo da je $\|A - \mu I\| \leq \varepsilon$, a kako je $\varepsilon > 0$ bio proizvoljan, zaključujemo da je $A = \mu I$.

Neka je sada da je $A \in B(\mathcal{H})$ proizvoljan (tj. ne nužno hermitski) i da vrijedi $A\pi(x) = \pi(x)A$ $\forall x \in \mathcal{A}$. Adjungiranjem te jednakosti zbog $\pi(x)^* = \pi(x^*)$ i zbog $\mathcal{A}^* = \mathcal{A}$ imamo redom

$$\pi(x)^* A^* = A^* \pi(x)^* \ \forall x \in \mathcal{A} \implies \pi(x^*) A^* = A^* \pi(x^*) \ \forall x \in \mathcal{A} \implies \pi(x) A^* = A^* \pi(x) \ \forall x \in \mathcal{A}.$$

Stavimo sada $A_1 = \frac{1}{2}(A + A^*)$ i $A_2 = \frac{1}{2i}(A - A^*)$. Tada je $A = A_1 + iA_2$, operatori A_1 i A_2 su hermitski i vrijedi

$$A_1 \pi(x) = \pi(x) A_1 \ \forall x \in \mathcal{A} \quad \text{i} \quad A_2 \pi(x) = \pi(x) A_2 \ \forall x \in \mathcal{A}.$$

Prema dokazanom postoje $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$ takvi da je $A_1 = \mu_1 I$ i $A_2 = \mu_2 I$. Sada za $\lambda = \mu_1 + i\mu_2 \in \mathbb{C}$ imamo

$$A = A_1 + iA_2 = \mu_1 I + i\mu_2 I = \lambda I.$$

Time je teorem u potpunosti dokazan.

5.6 Pozitivni funkcionali i reprezentacije

U daljnjem (sve do pred kraj ovog odjeljka) $\mathcal{A}$ predstavlja unitalnu C^*-algebru. Njenu jedinicu ćemo označavati sa e.

Linearni funkcional f na $\mathcal{A}$ zove se **pozitivan**, ako je $f(x) \geq 0$ $\forall x \in \mathcal{A}_+$. Primijetimo da u definiciji pozitivnog funkcionala ne pretpostavljamo da je taj funkcional ograničen. Ipak, to će biti posljedica definicije.

Neka je π reprezentacija od $\mathcal{A}$ na Hilbertovom prostoru i neka je $\xi \in \mathcal{H}$. Tada je sa

$$f(x) = (\pi(x)\xi|\xi), \qquad x \in \mathcal{A},$$

definiran pozitivan linearan funkcional f na $\mathcal{A}$. Dokazat ćemo da se na taj način može dobiti svaki pozitivan linearan funkcional na $\mathcal{A}$.

Za svaki linearan funkcional f na C^*-algebri $\mathcal{A}$ relacijom

$$[x|y]_f = f(y^*x), \qquad x, y \in \mathcal{A},$$

definiran je seskvilinearan funkcional $[\cdot|\cdot]_f$ na $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$. Ako je funkcional f pozitivan, seskvilinearan funkcional $[\cdot|\cdot]_f$ je pozitivno semidefinitan, tj. vrijedi $[x|x]_f \geq 0$ $\forall x \in \mathcal{A}$. Tada vrijedi CSB$-$nejednakost (nejednakost Cauchy$-$Schwartz$-$Buniakowskog) koja iskazana pomoću f poprima oblik

$$|f(y^*x)|^2 \leq f(x^*x)f(y^*y) \qquad \forall x, y \in \mathcal{A}.$$

Teorem 5.6.1. (*a*) *Ako je f pozitivan funkcional na $\mathcal{A}$, onda je f ograničen i $\|f\| = f(e)$.*

(*b*) *Ako za ograničen linearni funkcional f na $\mathcal{A}$ vrijedi $\|f\| = f(e)$, onda je funkcional f pozitivan.*

Dokaz: (*a*) Neka je f pozitivan funkcional na $\mathcal{A}$ i neka je $z \in \mathcal{A}$, $\|z\| \leq 1$. Primjenom Schwarzove nejednakosti nalazimo

$$|f(z)|^2 = |f(e^*z)|^2 \leq f(z^*z)f(e^*e) = f(z^*z)f(e).$$

Dakle, da bismo dokazali da je f ograničen i da je $\|f\| \leq f(e)$ dovoljno je dokazati da vrijedi $f(z^*z) \leq f(e)$, odnosno da je $f(e - z^*z) \geq 0$. Međutim, kako je $\|z^*z\| = \|z\|^2 \leq 1$, za pozitivan element z^*z vrijedi $\sigma(z^*z) \subseteq [0, 1]$. Odatle je i $\sigma(e - z^*z) \subseteq [0, 1]$. Posebno, $e - z^*z \in \mathcal{A}_+$, pa slijedi $f(e - z^*z) \geq 0$. Time je dokazano da je f ograničen i da je $\|f\| \leq f(e)$. Obrnuta nejednakost $\|f\| \geq f(e)$ je evidentna, jer je $\|e\| = 1$.

(*b*) Neka je f ograničen linearan funkcional na $\mathcal{A}$ za koji je $\|f\| = f(e)$.

Dokažimo najprije da je $f(x) \in \mathbb{R}$ za svaki hermitski element $x \in \mathcal{A}$. Dodatna pretpostavka $\|x\| \leq 1$ ne smanjuje općenitost. Neka je, dakle, $x \in \mathcal{A}$, $x^* = x$, $\|x\| \leq 1$. Stavimo $f(x) = \alpha + i\beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Ukoliko je potrebno, zamijenimo x sa $-x$ da postignemo da je $\beta \geq 0$. Za bilo koji prirodan broj $r > 0$ imamo

$$\|re - ix\|^2 = \|(re - ix)^*(re - ix)\| = \|(re + ix)(re - ix)\| = \|r^2e + x^2\| \leq \|r^2e\| + \|x^2\| = r^2 + \|x\|^2,$$

a kako je $\|x\| \leq 1$ zaključujemo da je

$$\|re - ix\|^2 \leq r^2 + 1 \qquad \forall r > 0. \tag{5.4}$$

S druge strane, kako je $f(e) = \|f\|$, imamo

$$f(re - ix) = rf(e) - if(x) = r\|f\| + \beta - i\alpha,$$

dakle,

$$|f(re - ix)|^2 = (r\|f\| + \beta)^2 + \alpha^2 \qquad \forall r > 0. \tag{5.5}$$

Iz (5.4) i (5.5) dobivamo

$$(r\|f\| + \beta)^2 + \alpha^2 = |f(re - ix)|^2 \leq \|f\|^2\|re - ix\|^2 \leq (r^2 + 1)\|f\|^2,$$

pa slijedi

$$r^2\|f\|^2 + 2r\beta\|f\| + \beta^2 + \alpha^2 \leq (r^2 + 1)\|f\|^2 \qquad \Longrightarrow \qquad 2r\beta\|f\| + \alpha^2 + \beta^2 \leq \|f\|^2.$$

Kako to vrijedi za svaki $r > 0$, vidi se da nije moguće da je $\beta > 0$. Zaključujemo da je $\beta = 0$, tj. $f(x) = \alpha \in \mathbb{R}$. Time je dokazano da je $f(x) \in \mathbb{R}$ za svaki hermitski element $x \in \mathcal{A}$.

Treba dokazati da je $f(x) \geq 0$ za svaki $x \in \mathcal{A}_+$. Pretpostavimo da nije tako i neka je $x \in \mathcal{A}_+$ takav da $f(x) \not\geq 0$. Budući da je svaki pozitivan element hermitski, iz dokazanog slijedi da je tada $f(x) < 0$. Stavimo

$$g = \frac{1}{\|f\|}f \qquad (\text{tada je } \|g\| = g(e) = 1\,) \qquad \text{i} \qquad y = x - \frac{1}{2}\|x\|e.$$

Tada je $g(x) < 0$. Nadalje, budući da je element x pozitivan, vrijedi

$$\sigma(x) \subseteq [0, \|x\|] \qquad \Longrightarrow \qquad \sigma(y) \subseteq \left[-\frac{1}{2}\|x\|, \frac{1}{2}\|x\|\right].$$

Element y je hermitski pa mu je norma jednaka spektralnom radijusu. Slijedi $\|y\| \leq \frac{1}{2}\|x\|$. Kako je $\|g\| = 1$, odatle slijedi $|g(y)| \leq \frac{1}{2}\|x\|$. S druge strane, kako je $g(e) = 1$ i $g(x) < 0$, imamo

$$g(y) = g(x) - \frac{1}{2}\|x\| < -\frac{1}{2}\|x\| \qquad \Longrightarrow \qquad |g(y)| > \frac{1}{2}\|x\|.$$

Ova kontradikcija pokazuje da je pretpostavka $f(x) < 0$ za neki $x \in \mathcal{A}_+$ netočna. Dakle, funkcional f je pozitivan.

Lema 5.6.2. *Neka je f pozitivan funkcional na unitalnoj C^*-algebri $\mathcal{A}$. Tada vrijedi*

$$f(z^*) = \overline{f(z)} \qquad \forall z \in \mathcal{A}.$$

Nadalje, seskvilinearan funkcional definiran na $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$ sa

$$[x, y]_f = f(y^*x), \qquad x, y \in \mathcal{A},$$

je hermitski, tj. vrijedi $[y, x]_f = \overline{[x, y]_f}$.

Zadatak 5.6.1. *Dokažite lemu 5.6.2.*

Uputa: Iskoristite lemu 5.1.2. da dokažete da je $f(x) \in \mathbb{R}$ za svaki hermitski element $x \in \mathcal{A}$.

Teorem 5.6.3. (**Geljfand−Naimark−Segal**) *Neka je f pozitivni linearni funkcional na $\mathcal{A}$. Postoji ciklička reprezentacija π C^*-algebre $\mathcal{A}$ na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$ s cikličkim vektorom $\xi \in \mathcal{H}$ tako da je $f(x) = (\pi(x)\xi|\xi)$ za svaki $x \in \mathcal{A}$.*

Dokaz: Kao prije definiramo pozitivno semidefinitan seskvilinearan funkcional $[\cdot,\cdot]_f$ na $\mathcal{A}\times\mathcal{A}$, koji je prema lemi 5.6.2. hermitski:

$$[x,y]_f = f(y^*x), \qquad x,y \in \mathcal{A}.$$

Neka je za $x \in \mathcal{A}$ $\pi_0(x) \in B(\mathcal{A})$ definiran kao množenje slijeva sa x :

$$\pi_0(x)y = xy, \qquad y \in \mathcal{A}.$$

Za $x,y,z \in \mathcal{A}$ imamo

$$[\pi_0(x)y,z]_f = [xy,z]_f = f(z^*xy) = f((x^*z)^*y) = [y,x^*z]_f = [y,\pi_0(x^*)z]_f.$$

Neka je $z \in \mathcal{A}$ takav da je $[z,z]_f = 0$. Zbog CBS$-$nejednakosti tada slijedi da je $[x,z]_f = 0$ $\forall x \in \mathcal{A}$. To pokazuje da je

$$N = \{z \in \mathcal{A};\ [z,z]_f = 0\} = \{z \in \mathcal{A};\ f(z^*z) = 0\}$$

potprostor vektorskog prostora $\mathcal{A}$. Nadalje, zbog $[y,\pi_0(x)z]_f = [x^*y,z]_f$ vidimo da je potprostor N invarijantan s obzirom na sve operatore $\pi_0(x)$, $x \in \mathcal{A}$. To omogućuje da za svaki $x \in \mathcal{A}$ definiramo linearan operator $\pi(x)\colon \mathcal{A}/N \to \mathcal{A}/N$:

$$\pi(x)(y+N) = \pi_0(x)y + N = xy + N, \qquad y \in \mathcal{A}.$$

Nadalje, na kvocijentnom prostoru možemo definirati skalarni produkt:

$$(x+N|y+N) = [x,y]_f, \qquad x,y \in \mathcal{A}.$$

Lako se vidi da je tada π homomorfizam algebre $\mathcal{A}$ u algebru linearnih operatora na $\mathcal{A}/N$ i da vrijedi

$$(\pi(x)\xi|\eta) = (\xi|\pi(x^*)\eta), \qquad \xi,\eta \in \mathcal{A}/N,\ x \in \mathcal{A}.$$

Dokažimo sada da je svaki operator $\pi(x)$, $x \in \mathcal{A}$, na unitarnom prostoru $\mathcal{A}/N$ ograničen. Za $x \in \mathcal{A}$ i za svaki $y \in \mathcal{A}$ i $\eta = y + N \in \mathcal{A}/N$ imamo

$$\|\pi(x)\eta\|^2 = (xy+N|xy+N) = [xy,xy]_f = f(y^*x^*xy).$$

Za fiksno $y \in \mathcal{A}$ definiramo linearan funkcional g na $\mathcal{A}$ relacijom $g(z) = f(y^*zy)$, $z \in \mathcal{A}$. Iz pozitivnosti f slijedi da za svaki $z \in \mathcal{A}$ vrijedi

$$g(z^*z) = f(y^*z^*zy) = f((zy)^*(zy)) \geq 0.$$

Prema svojstvu (c) teorema 5.1.5. slijedi da je funkcional g pozitivan. Prema tvrdnji (a) teorema 5.6.1. slijedi da je $\|g\| = g(e) = f(y^*y)$. Stoga imamo

$$\|\pi(x)\eta\|^2 = f(y^*x^*xy) = g(x^*x) \leq f(y^*y)\|x^*x\| = \|x\|^2[y,y]_f = \|x\|^2(\eta|\eta) = \|x\|^2\|\eta\|^2.$$

Time je dokazano da je svaki operator $\pi(x)$, $x \in \mathcal{A}$, na unitarnom prostoru $\mathcal{A}/N$ ograničen i da je $\|\pi(x)\| \leq \|x\|$.

Neka je sada $\mathcal{H}$ upotpunjenje unitarnog prostora $\mathcal{A}/N$. Zbog ograničenosti svaki se operator $\pi(x)$, $x \in \mathcal{A}$, na jedinstven način proširuje do ograničenog operatora na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$, kojeg ćemo također označiti sa $\pi(x)$. Preslikavanje $x \mapsto \pi(x)$ je homomorfizam algebre $\mathcal{A}$ u algebru $B(\mathcal{H})$ i vrijedi

$$(\pi(x)\xi|\eta) = (\xi|\pi(x^*)\eta), \qquad \forall \xi,\eta \in \mathcal{H}\ \forall x \in \mathcal{A}.$$

Dakle, π je reprezentacija C^*-algebre $\mathcal{A}$ na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$. Napokon, za vektor $\xi = e + N \in \mathcal{A}/N \subseteq \mathcal{H}$ i za svaki $x \in \mathcal{A}$ imamo

$$(\pi(x)\xi|\xi) = [xe, e]_f = f(exe) = f(x).$$

Dakle, svaki pozitivni linearni funkcional f na C^*-algebri $\mathcal{A}$ može se prikazati u obliku $f(x) = (\pi(x)\xi|\xi)$, gdje je π reprezentacija od $\mathcal{A}$ na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$ i $\xi \in \mathcal{H}$. Treba još samo primijetiti da možemo postići da je reprezenacija π ciklička i da je ξ njen ciklički vektor. Doista, ako nije tako, možemo $\mathcal{H}$ zamijeniti njegovim cikličkim zatvorenim invarijantnim potprostorom $\mathcal{K} = Cl(\pi(\mathcal{A})\xi)$ i reprezentaciju π njenom cikličkom subreprezentacijom $\sigma = \pi_{\mathcal{K}}$; tada evidentno vrijedi $f(x) = (\sigma(x)\xi|\xi)\ \forall x \in \mathcal{A}$.

U cijelom ovom poglavlju pretpostavljali smo da je promatrana C^*-algebra unitalna. Analogni rezultati za neunitalne C^*-algebre mogu se izvesti iz dokazanog pomoću unitalizacije. No često je svrhovitije, posebno u teoriji reprezentacija, raditi s neproširenom C^*-algebrom. U tu svrhu možemo upotrijebiti teorem 5.2.1. odnosno egzistenciju aproksimativne jedinice.

Zadatak 5.6.2. *Neka je π reprezentacija C^*-algebre $\mathcal{A}$ na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$. Dokažite da su sljedeća tri svojstva međusobno ekvivalentna:*

(a) *Reprezentacija π je nedegenerirana.*

(b) *Za svaki $\xi \in \mathcal{H}$ i svaku aproksimativnu jedinicu $(e_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ algebre $\mathcal{A}$ vrijedi*

$$\lim_{\lambda\in\Lambda} \|\pi(e_\lambda)\xi - \xi\| = 0.$$

(c) *Za svaki $\xi \in \mathcal{H}$ postoji aproksimativna jedinica $(e_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ algebre $\mathcal{A}$ takva da vrijedi*

$$\lim_{\lambda\in\Lambda} \|\pi(e_\lambda)\xi - \xi\| = 0.$$

Zadatak 5.6.3. *Neka je $\mathcal{A}$ C^*-algebra i $f : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ linearni funkcional. Dokažite da su sljedeća tri svojstva međusobno ekvivalentna:*

(a) *Funkcional f je pozitivan.*

(b) *Funkcional f je ograničen i za svaku aproksimativnu jedinicu $(e_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ algebre $\mathcal{A}$ vrijedi*

$$\|f\| = \lim_{\lambda\in\Lambda} f(e_\lambda).$$

(c) *Funkcional f je ograničen i postoji aproksimativna jedinica $(e_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ algebre $\mathcal{A}$ takva da vrijedi*

$$\|f\| = \lim_{\lambda\in\Lambda} f(e_\lambda).$$

Uputa: Za dokaz implikacije $(c) \implies (a)$ na odgovarajući način prilagodite dokaz implikacije $(b) \implies (a)$ teorema 5.6.1. Konkretnije, ako je $x \in \mathcal{A}$ hermitski i $f(x) = \alpha + i\beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\beta \geq 0$, dokažite da za $r > 0$ i za $\lambda \in \Lambda$ takav da je $r\|xe_\lambda - e_\lambda x\| < 1$ vrijedi $\|re_\lambda - ix\|^2 < r^2 + 2$. Odatle, slično kao u spomenutom dokazu, izvedite da je

$$2r\|f\|\beta + \alpha^2 + \beta^2 \leq 2\|f\|^2 \qquad \forall r > 0,$$

a odatle očito slijedi $\beta = 0$.

5.7 Stanja i čista stanja. Kriterij ireducibilnosti

Pozitivni linearni funkcional f na unitalnoj C^*-algebri $\mathcal{A}$ zove se **stanje**, ako je $f(e) = 1$. Prema tvrdnji (a) teorema 5.6.1. pozitivan ograničen linearan funkcional f je stanje ako i samo ako je $\|f\| = 1$. Označimo skup svih stanja na unitalnoj C^*-algebri $\mathcal{A}$ sa $S(\mathcal{A})$. Očito je $S(\mathcal{A})$ konveksan podskup dualnog prostora $\mathcal{A}'$, tj. vrijedi:

$$f, g \in S(\mathcal{A}) \ \text{ i } \ 0 \leq t \leq 1 \qquad \Longrightarrow \qquad tf + (1-t)g \in S(\mathcal{A}).$$

Ekstremne točke konveksnog skupa $S(\mathcal{A})$ zovu se **čista stanja**. Dakle, $f \in S(\mathcal{A})$ je čisto stanje ako i samo ako za bilo koje $g_1, g_2 \in S(\mathcal{A})$ iz jednakosti $f = tg_1 + (1-t)g_2$ za neki $t \in \mathbb{R}$, $0 < t < 1$, nužno slijedi da je $g_1 = g_2 = f$.

Teorem 5.7.1. *Neka je π ciklička reprezentacija unitalne C^*-algebre $\mathcal{A}$ na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$, neka je $\xi \in \mathcal{H}$ njen jedinični ciklički vektor i neka je stanje f definirano sa $f(x) = (\pi(x)\xi|\xi)$. Stanje f je čisto ako i samo ako je reprezentacija π ireducibilna.*

Dokaz: Pretpostavimo prvo da je f čisto stanje na $\mathcal{A}$. Neka je $P \in B(\mathcal{H})$ ortogonalan projektor koji komutira sa svim operatorima $\pi(x)$, $x \in \mathcal{A}$. Treba dokazati da je tada ili $P = 0$ ili $P = I$.

Pretpostavimo suprotno da je $P \neq 0$ i $P \neq I$. Tvrdimo da je tada $P\xi \neq 0$. Doista, iz $P\xi = 0$, bi za svaki $x \in \mathcal{A}$ slijedilo $P\pi(x)\xi = \pi(x)P\xi = 0$, a to bi značilo da je $P = 0$, jer je po pretpostavci potprostor $\pi(\mathcal{A})\xi$ gust u $\mathcal{H}$. Sasvim analogno zaključujemo da je i $(I-P)\xi \neq 0$, jer bi u protivnom bilo $I - P = 0$, tj. $P = I$. Stavimo sada $\eta = P\xi$ i $\zeta = (I-P)\xi$. Tada su η i ζ međusobno okomiti vektori različiti od nule i $\xi = \eta + \zeta$. Slijedi $1 = \|\eta\|^2 + \|\zeta\|^2$. Dakle, za broj $t = \|\eta\|^2$ vrijedi $0 < t < 1$. Definiramo sada linearne funkcionale g_1 i g_2 na $\mathcal{A}$:

$$g_1(x) = \frac{1}{t}(\pi(x)\xi|\eta), \qquad g_2(x) = \frac{1}{1-t}(\pi(x)\xi|\zeta), \qquad x \in \mathcal{A}.$$

Budući da je $P = P^*$ i $P\eta = \eta$, imamo za svaki $x \in \mathcal{A}$

$$g_1(x) = \frac{1}{t}(\pi(x)\xi|\eta) = \frac{1}{t}(\pi(x)\xi|P\eta) = \frac{1}{t}(P\pi(x)\xi|\eta) = \frac{1}{t}(\pi(x)P\xi|\eta) = \frac{1}{t}(\pi(x)\eta|\eta).$$

To pokazuje da je g_1 pozitivni funkcional na $\mathcal{A}$. Nadalje,

$$g_1(e) = \frac{1}{t}(\xi|\eta) = \frac{1}{t}(\xi|P\eta) = \frac{1}{t}(P\xi|\eta) = \frac{1}{t}(\eta|\eta) = 1,$$

dakle, g_1 je stanje, $g_1 \in S(\mathcal{A})$. Sasvim analogno, zbog $(I-P)^* = I - P$ i $(I-P)\zeta = \zeta$ nalazimo

$$g_2(x) = \frac{1}{1-t}(\pi(x)\zeta|\zeta) \qquad \text{i} \qquad g_2(e) = 1.$$

Dakle, i g_2 je stanje na $\mathcal{A}$, $g_2 \in S(\mathcal{A})$. Napokon, iz definicije g_1 i g_2 nalazimo za svaki $x \in \mathcal{A}$:

$$tg_1(x) + (1-t)g_2(x) = (\pi(x)\xi|\eta) + (\pi(x)\xi|\zeta) = (\pi(x)\xi|\eta + \zeta) = (\pi(x)\xi|\xi) = f(x).$$

Budući da je f stanje, odnosno ekstremna točka konveksnog skupa $S(\mathcal{A})$, odatle slijedi $g_1 = g_2 = f$. Dakle, za svaki $x \in \mathcal{A}$ imamo

$$(\pi(x)\xi|\xi) = f(x) = g_1(x) = \frac{1}{t}(\pi(x)\xi|\eta) = \frac{1}{t}(\pi(x)\xi|P\xi),$$

dakle,

$$(\pi(x)\xi|(P - tI)\xi) = 0 \qquad \forall \xi \in \mathcal{A}.$$

Kako je $\pi(\mathcal{A})\xi$ gusto u $\mathcal{H}$, slijedi $(P - tI)\xi = 0$, a odatle je za svaki $x \in \mathcal{A}$:

$$(P - tI)\pi(x)\xi = \pi(x)(P - tI)\xi = 0.$$

Ponovo zbog gustoće $\pi(\mathcal{A})\xi$ u $\mathcal{H}$ slijedi $P - tI = 0$, odnosno $P = tI$. No to je nemoguće jer je $0 < t < 1$. Ova kontradikcija pokazuje da je pretpostavka $P \neq 0$ i $P \neq I$ bila pogrešna. Dakle, ako ortogonalni projektor $P \in B(\mathcal{H})$ komutira sa svim operatorima $\pi(x)$, $x \in \mathcal{A}$, onda je nužno ili $P = 0$ ili $P = I$. To znači da je reprezentacija π ireducibilna.

Dokažimo sada obrnutu implikaciju. Pretpostavimo da je reprezentacija π ireducibilna i neka su $g_1, g_2 \in S(\mathcal{A})$ i $0 < t < 1$ takvi da je $f = tg_1 + (1 - t)g_2$. Definiramo sada seskvilinearan hermitski funkcional $[\,\cdot\,|\,\cdot\,]$ na gustom potprostoru $\pi(\mathcal{A})\xi$ prostora $\mathcal{H}$:

$$[\pi(x)\xi|\pi(y)\xi] = tg_1(y^*x), \qquad x, y \in \mathcal{A}.$$

Imamo

$$0 \leq tg_1(x^*x) = f(x^*x) - (1 - t)g_2(x^*x) \leq f(x^*x),$$

dakle,

$$0 \leq [\pi(x)\xi|\pi(x)\xi] \leq \|\pi(x)\xi\|^2.$$

To pokazuje da je hermitski funkcional $[\cdot|\cdot]$ pozitivno semidefinitan i ograničen. No tada postoji hermitski operator $A \in B(\mathcal{H})$ takav da je $[\eta|\zeta] = (\eta|A\zeta)$ za sve $\eta, \zeta \in \pi(\mathcal{A})\xi$. To znači da je

$$tg_1(z^*y) = [\pi(y)\xi|\pi(z)\xi] = (\pi(y)\xi|A\pi(z)\xi) \qquad \forall y, z \in \mathcal{A}.$$

Stoga za bilo koje $y, z \in \mathcal{A}$ imamo

$$(\pi(y)\xi|A\pi(x)\pi(z)\xi) = (\pi(y)\xi|A\pi(xz)\xi) = [\pi(y)\xi|\pi(xz)\xi] = tg_1((xz)^*y) = tg_1(z^*x^*y) =$$

$$= [\pi(x^*y)\xi|\pi(z)\xi] = (\pi(x^*y)\xi|A\pi(z)\xi) = (\pi(x)^*\pi(y)\xi|A\pi(z)\xi) = (\pi(y)\xi|\pi(x)A\pi(z)\xi).$$

Zbog gustoće $\pi(\mathcal{A})\xi$ u $\mathcal{H}$ odatle zaključujemo

$$(\eta|A\pi(x)\zeta) = (\eta|\pi(x)A\zeta) \qquad \forall \eta, \zeta \in \mathcal{H} \qquad \Longrightarrow \qquad A\pi(x) = \pi(x)A.$$

Dakle, operator A komutira sa svim operatorima $\pi(x)$, $x \in \mathcal{A}$. Kako je reprezentacija π ireducibilna, prema teoremu 5.5.2. odatle slijedi da je A skalarni multipl jediničnog operatora I, $A = \lambda I$. Pri tome je λ realan broj, jer je operator A hermitski. Dakle, za svaki $x \in \mathcal{A}$ imamo

$$tg_1(x) = (\pi(x)\xi|A\xi) = \lambda(\pi(x)\xi|\xi) = \lambda f(x).$$

Uvrstimo li $x = e$ zbog $f(e) = g_1(e) = 1$ nalazimo da je $t = \lambda$. Dakle, $g_1 = f$. Sada slijedi da je

$$g_2 = \frac{1}{1 - t}(f - tg_1) = \frac{1}{1 - t}(f - tf) = f.$$

Time je dokazano da je f ekstremna točka skupa $S(\mathcal{A})$, tj. f je čisto stanje.

5.8 Egzistencija vjerne reprezentacije

Cilj je ovog odjeljka da dokažemo slavni Geljfand–Naimarkov teorem da svaka C^*–algebra ima vjernu reprezentaciju, tj. da je svaka izometrički $*$–izomorfna C^*–podalgebri algebre $B(\mathcal{H})$ za neki Hilbertov prostor $\mathcal{H}$.

Teorem 5.8.1. *Neka je x hermitski element unitalne C^*–algebre $\mathcal{A}$. Tada postoji čisto stanje f na $\mathcal{A}$ takvo da je $|f(x)| = \|x\|$.*

Dokaz: Dokažimo najprije da postoji stanje $f \in S(\mathcal{A})$ takvo da je $|f(x)| = \|x\|$. Neka je $\mathcal{B}$ komutativna C^*–podalgebra od $\mathcal{A}$ generirana sa x i e. Prema teoremima 3.1.1., 2.5.1. i 2.5.2. zaključujemo da postoji $\omega \in X(\mathcal{B})$ takav da je $|\omega(x)| = \|x\|$. Tada je ω stanje na $\mathcal{B}$, jer je $\|\omega\| = \omega(e) = 1$. Po Hahn–Banachovom teoremu postoji $f \in \mathcal{A}'$ takav da je $f|\mathcal{B} = \omega$ i $\|f\| = 1$. Tada je $f(e) = \omega(e) = 1$, dakle f je stanje na $\mathcal{A}$. Nadalje, f proširuje ω, pa je $|f(x)| = \|x\|$.

Neka je sada

$$\Sigma = \{g \in S(\mathcal{A});\ g(x) = f(x)\}.$$

Očito je Σ zatvoren podskup jedinične sfere u prostoru $\mathcal{A}'$ u odnosu na slabu topologiju. Dakle, prostor Σ sa slabom topologijom je kompaktan. Nadalje, skup Σ je konveksan. Upotrijebit ćemo sada jedan opći teorem iz funkcionalne analize, koji je posljedica Hahn–Banachovog teorema i koji navodimo bez dokaza:

Teorem 5.8.2. (**Krein–Milman**) *Svaki neprazan konveksan podskup Σ duala X' normiranog prostora X, koji je kompaktan u odnosu na slabu topologiju od X', ima barem jednu ekstremnu točku.*

Neka je, dakle, $g \in \Sigma$ ekstremna točka akupa Σ. Teorem 5.8.1. će biti dokazan ako pokažemo da je tada g ekstremna točka skupa $S(\mathcal{A})$. Neka su $g_1, g_2 \in S(\mathcal{A})$ i $0 < t < 1$ takvi da je

$$g = tg_1 + (1-t)g_2.$$

Tada nejednakosti

$$|g_1(x)| \leq \|x\| = |f(x)| \qquad \text{i} \qquad |g_2(x)| \leq \|x\| = |f(x)|$$

zajedno sa

$$tg_1(x) + (1-t)g_2(x) = g(x) = f(x)$$

povlače da vrijedi $g_1(x) = g_2(x) = f(x)$, dakle $g_1, g_2 \in \Sigma$. Međutim, g je ekstremna točka od Σ, pa slijedi $g_1 = g_2 = g$. To pokazuje da je g ekstremna točka skupa $S(\mathcal{A})$.

Korolar 5.8.3. *Za svaki element $z \neq 0$ unitalne C^*–algebre $\mathcal{A}$ postoji ireducibilna reprezentacija π od $\mathcal{A}$ na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$ i jedinični vektor $\xi \in \mathcal{H}$ takvi da je $\|\pi(z)\xi\| = \|z\| > 0$.*

Dokaz: Primijenimo teorem 5.8.1. na hermitski element z^*z. Slijedi da postoji čisto stanje f na $\mathcal{A}$ takvo da je $f(z^*z) = \|z^*z\| = \|z\|^2$. Neka su π i ξ reprezentacija i jedinični vektor dobiveni pomoću teorema 5.6.3., tj. dobiveni tzv. GNS–konstrukcijom. Tada je

$$\|\pi(z)\xi\|^2 = (\pi(z)\xi|\pi(z)\xi) = (\pi(z^*z)\xi|\xi) = f(z^*z) = \|z\|^2.$$

Dakle, vrijedi $\|\pi(z)\xi\| = \|z\|$. Prema teoremu 5.7.1. tada je reprezentacija π ireducibilna. Time je korolar dokazan.

Teorem 5.8.4. (**Geljfand–Naimark**) *Svaka C^*–algebra $\mathcal{A}$ izometrički je izomorfna C^*–podalgebri od $B(\mathcal{H})$ za neki Hilbertov prostor $\mathcal{H}$.*

Dokaz: Treba dokazati da postoji izometrička reprezentacija algebre $\mathcal{A}$ na nekom Hilbertovom prostoru. Naravno, možemo pretpostaviti da je C^*-algebra $\mathcal{A}$ unitalna. Prema korolaru 5.8.3. za svaki $x \in \mathcal{A}$, $x \neq 0$, postoji reprezentacija π_x na nekom Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}_x$ takva da je $\|\pi_x(x)\|_x = \|x\|$; pri tome smo sa $\|\cdot\|_x$ označili normu na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}_x$ a također i na algebri operatora $B(\mathcal{H}_x)$. Neka je $\mathcal{H}$ skup svih funkcija

$$\varphi\colon \mathcal{A}\setminus\{0\} \to \bigcup_{x\in\mathcal{A}\setminus\{0\}} \mathcal{H}_x,$$

takvih da je $\varphi(x) \in \mathcal{H}_x \;\; \forall x \in \mathcal{A}\setminus\{0\}$ i da je

$$\sum_{x\in\mathcal{A}\setminus\{0\}} \|\varphi(x)\|_x^2 < +\infty.$$

Primijetimo da za svaki $\varphi \in \mathcal{H}$ vrijedi $\varphi(x) \neq 0$ za najviše prebrojivo mnogo $x \in \mathcal{A}\setminus\{0\}$. Lako se vidi da je tada $\mathcal{H}$ Hilbertov prostor sa skalarnim produktom

$$(\varphi|\psi) = \sum_{x\in\mathcal{A}\setminus\{0\}} (\varphi(x)|\psi(x))_x,$$

gdje je $(\cdot|\cdot)_x$ skalarni produkt na prostoru $\mathcal{H}_x$, $x \in \mathcal{A}\setminus\{0\}$. Nadalje, za $y \in \mathcal{A}$ definiramo operator $\pi(y)$ na prostoru $\mathcal{H}$:

$$(\pi(y)\varphi)(x) = \pi_x(y)\varphi(x), \qquad x \in \mathcal{A}\setminus\{0\}, \qquad \varphi \in \mathcal{H}.$$

Direktno se provjerava da je π reprezentacija C^*-algebre $\mathcal{A}$ na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$. Ako je $x \in \mathcal{A}$, $x \neq 0$, tada je $\|\pi_x(x)\|_x = \|x\| \neq 0$, odakle slijedi $\pi(x) \neq 0$. Prema tome, reprezentacija π je injektivna, dakle po tvrdnji (b) teorema 5.3.3. reprezentacija π je izometrija sa $\mathcal{A}$ u $B(\mathcal{H})$. Time je teorem u potpunosti dokazan.

Reprezentacija π dobivena u dokazu teorema 5.8.4. izgleda "*preglomazna*". U stvari, mogli smo definirati $\mathcal{H}$ kao znatno "*manji*" prostor; mogli smo npr. promatrati funkcije φ definirane ne na čitavom skupu $\mathcal{A}\setminus\{0\}$ nego samo na skupu $\mathcal{A}_+ \cap S(0,1)$ svih pozitivnih elemenata algebre $\mathcal{A}$ norme 1, pa čak i na bilo kojem njegovom gustom podskupu.

Zadatak 5.8.1. *Neka je $\mathcal{A}$ separabilna C^*-algebra. Dokažite da je $\mathcal{A}$ izometrički izomorfna C^*-podalgebri od $B(\mathcal{H})$ za neki separabilan Hilbertov prostor $\mathcal{H}$.*

Uputa: Neka je S prebrojiv gust podskup od $\mathcal{A}_+ \cap S(0,1)$. Sada oponašajte dokaz teorema 5.8.4 s tim da umjesto funkcija na skupu $\mathcal{A}\setminus\{0\}$ promatrate funkcije

$$\varphi\colon S \to \bigcup_{x\in S} \mathcal{H}_x \quad \text{takve da je} \quad \varphi(x) \in \mathcal{H}_x \;\; \forall x \in S \quad \text{i} \quad \sum_{x\in S} \|\varphi(x)\|_x^2 < +\infty.$$

Poglavlje 6

Kompaktni operatori u reprezentacijama C^*-algebri

6.1 Kompaktne C^*-algebre

U odjeljku 3.4. proučili smo zatvorene $*-$podalgebre algebre $K(\mathcal{H})$ svih kompaktnih operatora na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$. Naravno, zbog zatvorenosti takva je algebra C^*-algebra. Takve algebre zovemo **kompaktne C^*-algebre**. Općenito za C^*-podalgebru $\mathcal{A}$ od $B(\mathcal{H})$ označavat ćemo sa $\pi_{\mathcal{A}}$ njenu identičnu reprezentaciju $A \mapsto A$ na prostoru $\mathcal{H}$. C^*-algebra $\mathcal{A}$ zove se **nedegenerirana** ako je reprezentacija $\pi_{\mathcal{A}}$ nedegenerirana, tj. ako je potprostor *span* $\mathcal{A}\mathcal{H}$ gust u $\mathcal{H}$. Tome je ekvivalentno da iz $A\xi = 0\ \forall A \in \mathcal{A}$ slijedi $\xi = 0$. C^*-podalgebra $\mathcal{A}$ od $B(\mathcal{H})$ zove se **ireducibilna** ako je njena identična reprezentacija ireducibilna, odnosno, ako je potprostor $\mathcal{A}\xi = \{A\xi;\ A \in \mathcal{A}\}$ gust u $\mathcal{H}$ za svaki $\xi \in \mathcal{H}$, $\xi \neq 0$. Prema teoremu 3.4.2. jedina ireducibilna kompaktna C^*-algebra na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H} \neq \{0\}$ je $K(\mathcal{H})$. Nadalje, prema teoremu 3.4.3. algebra $K(\mathcal{H})$ ne sadrži nijedan obostrani ideal osim $K(\mathcal{H})$ i $\{0\}$.

Prema tvrdnji (c) teorema 5.3.3. za svaku reprezentaciju π C^*-algebre $\mathcal{A}$ na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$ njena je slika $\pi(\mathcal{A})$ zatvorena, dakle, to je C^*-podalgebra od $B(\mathcal{H})$. Stoga se teorem 3.4.4. može ovako iskazati:

Teorem 6.1.1. *Neka je π ireducibilna reprezentacija C^*-algebre $\mathcal{A}$ na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$ takva da je $\pi(\mathcal{A}) \cap K(\mathcal{H}) \neq \{0\}$. Tada je $K(\mathcal{H}) \subseteq \pi(\mathcal{A})$.*

Teorem 6.1.2. *Neka je $\mathcal{A}$ kompaktna nedegenerirana C^*-algebra na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$ i neka je π nedegenerirana reprezentacija od $\mathcal{A}$ na Hilbertovom prostoru $\mathcal{K}$. Postoji familija $(\mathcal{K}_i)_{i\in I}$ zatvorenih $\pi-$invarijantnih potprostora od $\mathcal{K}$ takva da je $\mathcal{K}_i \perp \mathcal{K}_j$ za $i \neq j$, da je suma potprostora $\mathcal{K}_i$ gusta u $\mathcal{K}$ i da je za svako $i \in I$ subreprezentacija $\pi_{\mathcal{K}_i}$ ekvivalentna subreprezentaciji identične reprezentaciji $\sigma : A \mapsto A$ algebre $\mathcal{A}$.*

Dokaz: Linearne kombinacije minimalnih projektora u $\mathcal{A}$ čine gust potprostor od $\mathcal{A}$. Stoga postoji minimalni projektor $P \in \mathcal{A}$ takav da je $\pi(P) \neq 0$. Za takav P prema propoziciji 3.4.1. postoji linearan funkcional $f : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ takav da je $PAP = f(A)P\ \forall A \in \mathcal{A}$. Neka je η jedinični vektor u $R(\pi(P))$ i neka je ξ jedinični vektor u $R(P)$. Tada je $\mathcal{K}_0 = Cl(\pi(\mathcal{A})\eta)$ zatvoren $\pi-$invarijantan potprostor od $\mathcal{K}$. Dokazat ćemo sada da je subreprezentacija $\pi_{\mathcal{K}_0}$ ekvivalentna subreprezentaciji identične reprezentaciji σ na $\sigma-$invarijantnom potprostoru $\mathcal{H}_0 = Cl(\mathcal{A}\xi)$. Doista, za $A \in \mathcal{A}$ imamo

$$\|\pi(A)\eta\|^2 = \|\pi(A)\pi(P)\eta\|^2 = \|\pi(AP)\eta\|^2 = (\pi(AP)\eta|\pi(AP)\eta) = (\pi(PA^*AP)\eta|\eta) =$$

$$= f(A^*A)(\pi(P)\eta|\eta) = f(A^*A) = (PA^*AP\xi|\xi) = (AP\xi|AP\xi) = (A\xi|A\xi) = \|A\xi\|^2.$$

Time je dokazano da je operator $U : A\xi \mapsto \pi(A)\eta$ linearna izometrija sa $\mathcal{A}\xi$ na $\pi(\mathcal{A})\eta$. Po neprekidnosti taj se operator proširuje do izometričkog izomorfizma prostora $\mathcal{H}_0$ na prostor $\mathcal{K}_0$ i to proširenje ćemo također označiti sa U. Za $A, B \in \mathcal{A}$ imamo

$$\pi_{\mathcal{K}_0}(B)U(A\xi) = \pi(B)U(A\xi) = \pi(B)\pi(A)\eta = \pi(BA)\eta = U(BA\xi) = U(\sigma_{\mathcal{H}_0}(B)A\xi)$$

Prema tome, restrikcije operatora $\pi_{\mathcal{K}_0}(B)U$ i $U\sigma_{\mathcal{H}_0}(B)$ na potprostor $\mathcal{A}\xi$ se podudaraju. Kako je to po definiciji gust potprostor prostora $\mathcal{H}_0$, slijedi da je $\pi_{\mathcal{K}_0}(B)U = U\sigma_{\mathcal{H}_0}(B)$, a kako to vrijedi za svaki $B \in \mathcal{A}$ dokazali smo da je subreprezentacija $\pi_{\mathcal{K}_0}$ reprezentacije π ekvivalentna subreprezentaciji $\sigma_{\mathcal{H}_0}$ identične reprezentacije σ.

Na taj način smo dokazali da svaka nedegenerirana reprezentacija algebre $\mathcal{A}$ ima subreprezentaciju koja je ekvivalentna subreprezentaciji identične reprezentacije σ.

Zadatak 6.1.1. *Pomoću Zornove leme završite dokaz teorema 6.1.2.*

Neka je π reprezentacija C^*-algebre $\mathcal{A}$ na Hilbertovom prostoru $\mathcal{K}$. Neka je n pozitivan kardinalni broj. Neka je $\mathcal{K}'$ Hilbertov prostor koji je ortogonalna suma n primjeraka prostora $\mathcal{K}$. To znači da je za neki skup I s kardinalnim brojem n

$$\mathcal{K}' = \left\{ (\xi_i)_{i\in I};\ \xi_i \in \mathcal{K},\ \sum_{i\in I} \|\xi_i\|^2 < +\infty \right\}$$

i operacije i skalarni produkt na $\mathcal{K}'$ su definirani sa

$$(\xi_i)_{i\in I} + (\eta_i)_{i\in I} = (\xi_i + \eta_i)_{i\in I}, \qquad \lambda(\xi_i)_{i\in I} = (\lambda\xi_i)_{i\in I}, \qquad ((\xi)_{i\in I}|(\eta_i)_{i\in I}) = \sum_{i\in I}(\xi_i|\eta_i).$$

Sada na Hilbertovom prostoru $\mathcal{K}'$ definiramo reprezentaciju $n\cdot\pi$ na sljedeći način:

$$(n\cdot\pi)(A)(\xi_i)_{i\in I} = (\pi(A)\xi_i)_{i\in I}.$$

Tako definiranu reprezentaciju $n\cdot\pi$ algebre $\mathcal{A}$ zovemo **multipl reprezentacije** π.

Zadatak 6.1.2. *Neka su π i ρ reprezentacije C^*-algebre $\mathcal{A}$ na Hilbertovim prostorima $\mathcal{H}$ i $\mathcal{K}$. Pretpostavimo da postoji familija $(\mathcal{K}_i)_{i\in I}$ međusobno ortogonalnih zatvorenih $\rho-$invarijatnih potprostora od $\mathcal{K}$ čija je suma gusta u $\mathcal{K}$ i takvi da je za svako $i \in I$ subreprezentacija $\rho_{\mathcal{K}_i}$ ekvivalentna reprezentaciji π. Dokažite da je tada reprezentacija ρ ekvivalentna multiplu $n\cdot\pi$, gdje je n kardinalni broj skupa I.*

Korolar 6.1.3. *Svaka nedegenerirana reprezentacija C^*-algebre $K(\mathcal{H})$ ekvivalentna je multiplu identične reprezentacije $\sigma : A \mapsto A$.*

Dokaz: Neka je π nedegenerirana reprezentacija C^*-algebre $K(\mathcal{H})$ na Hilbertovom prostoru $\mathcal{K}$. Prema teoremu 6.1.2. postoje međusobno ortogonalni $\pi-$invarijantni zatvoreni potprostori $\mathcal{K}_i$ od $\mathcal{K}$ čija suma je gusta u $\mathcal{K}$ i takvi da je za svako $i \in I$ subreprezentacija $\pi_{\mathcal{K}_i}$ ekvivalentna subreprezentaciji identične reprezentacije σ. Međutim, reprezentacija σ je ireducibilna, dakle, za svaki $i \in I$ subreprezentacija $\pi_{\mathcal{K}_i}$ je ekvivalentna identičnoj reprezentaciji σ. Prema zadatku 6.1.2. zaključujemo da je π ekvivalentna multiplu identične reprezentacije σ.

Odatle neposredno slijedi:

Korolar 6.1.4. *Neka je π ireducibilna reprezentacija C^*-algebre $K(\mathcal{H})$. Tada je π ekvivalentna identičnoj reprezentaciji σ.*

Teorem 6.1.5. *Neka su $\mathcal{H}$ i $\mathcal{K}$ Hilbertovi prostori.*

(a) *Neka je φ $*-$izomorfizam C^*-algebre $K(\mathcal{H})$ na C^*-algebru $K(\mathcal{K})$. Tada postoji izometrički izomorfizam $U : \mathcal{H} \to \mathcal{K}$ takav da je $\varphi(A) = UAU^*$ za svaki $A \in K(\mathcal{H})$.*

(b) *Neka je ψ $*-$izomorfizam C^*-algebre $B(\mathcal{H})$ na C^*-algebru $B(\mathcal{K})$. Tada postoji izometrički izomorfizam $U : \mathcal{H} \to \mathcal{K}$ takav da je $\psi(B) = UBU^*$ za svaki $B \in B(\mathcal{H})$.*

Dokaz: (a) Tada je φ ireducibilna reprezenatacija C^*-algebre $K(\mathcal{H})$ na Hilbertovom prostoru $\mathcal{K}$ pa je prema korolaru 6.1.3. ta reprezentacija ekvivalentna identičnoj reprezentaciji $\sigma : A \to A$ algebre $K(\mathcal{H})$ na prostoru $\mathcal{H}$. To znači da postoji izometrički izomorfizam $U : \mathcal{H} \to \mathcal{K}$ takav da je $U\sigma(A) = \varphi(A)U$ za svaki $A \in K(\mathcal{H})$. Kako je $\sigma(A) = A$ i $U^{-1} = U^*$ odatle slijedi $\varphi(A) = UAU^*$ za svaki $A \in K(\mathcal{H})$.

(b) Neka je $\varphi = \psi|K(\mathcal{H})$. Budući da je ψ ireducibilna vjerna reprezentacija C^*-algebre $B(\mathcal{H})$ i budući da je $K(\mathcal{H})$ zatvoren obostrani ideal u $B(\mathcal{H})$, prema teoremu 5.5.1. reprezentacija φ C^*-algebre $K(\mathcal{H})$ na prostoru $\mathcal{K}$ je ireducibilna. Prema korolaru 6.1.3. postoji izometrički izomorfizam $U : \mathcal{H} \to \mathcal{K}$ takav da je $\varphi(A) = UAU^*$ za svaki $A \in K(\mathcal{H})$. Sada iz zadnje tvrdnje teorema 5.5.1. slijedi da je također $\psi(B) = UBU^*$ za svaki $B \in B(\mathcal{H})$.

6.2 CCR−algebre i GCR−algebre

CCR−algebra je C^*−algebra $\mathcal{A}$ s svojstvom da je za svaku njenu ireducibilnu reprezentaciju π na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$ i za svaki $a \in \mathcal{A}$ operator $\pi(a)$ kompaktan. Tada je $\pi(\mathcal{A})$ ireducibilna kompaktna C^*−algebra, dakle prema teoremu 3.4.2. vrijedi $\pi(\mathcal{A}) = K(\mathcal{H})$. Prema teoremu 6.1.2. svaka je kompaktna C^*−algebra CCR−algebra. Nadalje, kako je svaka ireducibilna reprezentacija komutativne C^*−algebre jednodimenzionalna, svaka je komutativna C^*−algebra CCR−algebra.

Neka je π ireducibilna reprezentacija CCR−algebre $\mathcal{A}$ na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$. Tada je $\pi(\mathcal{A}) = K(\mathcal{H})$ pa slijedi da je kvocijentna algebra $\mathcal{A}/\mathrm{Ker}\,\pi$ izomorfna algebri $K(\mathcal{H})$. Prema teoremu 3.4.3. algebra $K(\mathcal{H})$ nema zatvorenih obostranih ideala različitih od $\{0\}$ i od $K(\mathcal{H})$. Odatle slijedi da je $\mathrm{Ker}\,\pi$ maksimalan obostrani ideal u C^*−algebri $\mathcal{A}$. Time smo dokazali:

Propozicija 6.2.1. *Neka je π ireducibilna reprezentacija CCR−algebre $\mathcal{A}$. Tada je jezgra te reprezentacije maksimalan obostrani ideal u $\mathcal{A}$.*

Propozicija 6.2.2. *Neka su π i σ ireducibilne reprezentacije CCR−algebre $\mathcal{A}$ takve da je $Ker\pi \subseteq Ker\sigma$. Tada je $\pi \simeq \sigma$.*

Dokaz: Neka su $\mathcal{H}$ i $\mathcal{K}$ Hilbertovi prostori reprezentacija π i σ. Tada je $\pi(\mathcal{A}) = K(\mathcal{H})$, a zbog $\mathrm{Ker}\,\pi \subseteq \mathrm{Ker}\,\sigma$ možemo definirati ireducibilnu reprezentaciju ω C^*− algebre $K(\mathcal{H})$ na Hilbertovom prostoru $\mathcal{K}$ na sljedeći način:

$$\omega(\pi(a)) = \sigma(a), \qquad a \in \mathcal{A}.$$

Prema korolaru 6.1.3. reprezentacija ω je ekvivalentna identičnoj reprezentaciji C^*−algebre $K(\mathcal{H})$. To znači da postoji izometrički izomorfizam $U : \mathcal{H} \to \mathcal{K}$ takav da je

$$UA = \omega(A)U \qquad \forall A \in K(\mathcal{H}).$$

Uvrstimo li ovdje $A = \pi(a)$, $a \in \mathcal{A}$, dobivamo

$$U\pi(a) = \omega(\pi(a))U = \sigma(a)U \qquad \forall a \in \mathcal{A}.$$

To znači da su reprezentacije π i σ ekvivalentne.

To posebno znači da je ireducibilna reprezentacija CCR−algebre $\mathcal{A}$ potpuno određena svojom jezgrom, tj. da je preslikavanje $\pi \to \mathrm{Ker}\,\pi$ injekcija sa skupa svih klasa ekvivalencije ireducibilnih reprezentacija algebre $\mathcal{A}$ u skup zatvorenih obostranih ideala u $\mathcal{A}$. To nipošto ne vrijedi za opće C^*−algebre, ali uskoro ćemo vidjeti da vrijedi i za jednu znatno širu klasu C^*−algebri.

Propozicija 6.2.3. *Neka je $\mathcal{A}$ CCR−algebra i $\mathcal{I} \neq \mathcal{A}$ obostrani zatvoreni ideal u $\mathcal{A}$. Tada je $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ CCR−algebra.*

Dokaz: Neka je π ireducibilna reprezentacija C^*−algebre $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$. Definiramo
$\sigma : \mathcal{A} \to B(\mathcal{H})$ sa

$$\sigma(x) = \pi(x + \mathcal{I}), \qquad x \in \mathcal{A}.$$

Tada je σ ireducibilna reprezentacija C^*−algebre $\mathcal{A}$ na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$, a kako je $\mathcal{A}$ CCR−algebra, slijedi $\sigma(\mathcal{A}) = K(\mathcal{H})$. Imamo $\sigma(\mathcal{A}) = \pi(\mathcal{A}/\mathcal{I})$, pa slijedi $\pi(\mathcal{A}/\mathcal{I}) = K(\mathcal{H})$. Budući da je π bila proizvoljna ireducibilna reprezentacija kvocijentne algebre $\mathcal{A}/\mathcal{I}$, zaključujemo da je $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ CCR−algebra.

Neka je $\mathcal{A}$ C^*- algebra i π njena ireducibilna reprezentacija na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$. Kako je $K(\mathcal{H})$ zatvoren obostrani ideal u $B(\mathcal{H})$, slijedi da je

$$\mathcal{C}_\pi = \{a \in \mathcal{A};\ \pi(a) \in K(\mathcal{H})\}$$

zatvoren obostrani ideal u $\mathcal{A}$. Naravno, $\operatorname{Ker}\pi \subseteq \mathcal{C}_\pi$, a može se dogoditi da je $\operatorname{Ker}\pi = \mathcal{C}_\pi$; to je upravo onda kad je $\pi(\mathcal{A}) \cap K(\mathcal{H}) = \{0\}$. Definiramo sada $\mathrm{CCR}(\mathcal{A})$ kao presjek svih ideala $\mathcal{C}_\pi$ za sve ireducibilne reprezentacije π. $\mathrm{CCR}(\mathcal{A})$ je skup svih $a \in \mathcal{A}$ takvih da je operator $\pi(a)$ kompaktan za svaku ireducibilnu reprezentaciju π algebre $\mathcal{A}$. Iz teorema 5.5.1. slijedi da je $\mathrm{CCR}(\mathcal{A})$ CCR$-$algebra i da $\mathrm{CCR}(\mathcal{A})$ sadrži svaki zatvoren CCR$-$ideal u algebri $\mathcal{A}$. Dakle, $\mathrm{CCR}(\mathcal{A})$ je najveći CCR$-$ideal u algebri $\mathcal{A}$.

GCR$-$algebra je C^*-algebra $\mathcal{A}$ takva da je $\mathrm{CCR}(\mathcal{A}/\mathcal{I}) \neq \{0\}$ za svaki zatvoren obostrani ideal $\mathcal{I} \neq \mathcal{A}$.

Propozicija 6.2.4. *Svaka CCR$-$algebra je GCR$-$algebra.*

Dokaz: Neka je $\mathcal{A}$ CCR$-$algebra i neka je $\mathcal{I} \neq \mathcal{A}$ zatvoren obostrani ideal u $\mathcal{A}$. Prema propoziciji 6.2.3. tada je $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ CCR$-$algebra, pa je $\mathrm{CCR}(\mathcal{A}/\mathcal{I}) = \mathcal{A}/\mathcal{I} \neq \{0\}$.

Propozicija 6.2.5. *Neka je $\mathcal{A}$ GCR$-$algebra i neka je π ireducibilna reprezentacija C^*-algebre $\mathcal{A}$ na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$. Tada je $\pi(\mathcal{A}) \supseteq K(\mathcal{H})$.*

Dokaz: $\pi(\mathcal{A})$ je C^*-algebra izomorfna kvocijentnoj algebri $\mathcal{A}/(\operatorname{Ker}\pi)$. Budući da je $\mathcal{A}$ GCR$-$algebra, to je $\mathrm{CCR}(\mathcal{A}/(\operatorname{Ker}\pi)) \neq \{0\}$. Slijedi da C^*-algebra $\pi(\mathcal{A})$ sadrži netrivijalan CCR$-$ideal $\mathcal{I}$. Budući da je $\pi(\mathcal{A})$ ireducibilna C^*-algebra operatora na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$, prema teoremu 5.5.1. identična reprezentacija od $\mathcal{I}$ je ireducibilna. Kako je $\mathcal{I}$ CCR$-$algebra, slijedi da je $\mathcal{I} = K(\mathcal{H}$. Dakle, $K(\mathcal{H}) \subseteq \pi(\mathcal{A})$.

Propozicija 6.2.6. *Neka su π i σ ireducibilne reprezentacije GCR$-$algebre $\mathcal{A}$ takve da je $Ker\,\pi = Ker\,\sigma$. Tada je $\pi \simeq \sigma$.*

Dokaz: Neka je $\mathcal{H}$ prostor reprezentacije π i neka je$\mathcal{K}$ prostor reprezentacije σ. Preslikavanje $\lambda : \pi(x) \mapsto \sigma(x)$, $x \in \mathcal{A}$, definira ireducibilnu reprezentaciju C^*-algebre $\pi(\mathcal{A})$ na Hilbertovom prostoru $\mathcal{K}$. C^*-algebra $\pi(\mathcal{A})$ sadrži $K(\mathcal{H})$ i iz teorema 5.5.1. slijedi da je restrikcija $\lambda|K(\mathcal{H})$ ireducibilna reprezentacija C^*-algebre $K(\mathcal{H})$ na Hilbertovom prostoru $\mathcal{K}$. Prema korolaru 6.1.3. reprezentacija $\lambda|K(\mathcal{H})$ je ekvivalentna identičnoj reprezentaciji od $K(\mathcal{H})$. Prema zadnjoj tvrdnji teorema 5.5.1. reprezentacija λ C^*-algebre $\pi(\mathcal{A})$ ekvivalentna je identičnoj reprezentaciji te algebre. Dakle, postoji izometrički izomorfizam $T : \mathcal{H} \to \mathcal{K}$ takav da je $TA = \lambda(A)T$ $\forall A \in \pi(\mathcal{A})$. To znači da vrijedi $T\pi(x) = \lambda(\pi(x))T$ $\forall x \in \mathcal{A}$, dakle, $T\pi(x) = \sigma(x)T$ $\forall x \in \mathcal{A}$, odnosno, $\pi \simeq \sigma$.

Definicija GCR$-$algebre izrazito je neprikladna za provjeru da li je neka C^*-algebra GCR ili nije, jer ta provjera zahtijeva da najprije pronađemo sve zatvorene obostrane ideale u toj algebri. S definicijom CCR$-$algebre je znatno lakše baratati, jer treba provjeriti da su svi operatori u svakoj ireducibilnoj reprezentaciji te algebre kompaktni. Prema propoziciji 6.2.5. slično svojstvo ima svaka ireducibilna reprezentacija GCR$-$algebre: ona sadrži sve kompaktne operatore. Prirodno je postaviti pitanje da li je to svojstvo ne samo nužno nego i dovoljno da bi promatrana C^*-algebra bila GCR. To je stvarno tako, ali dokaz je vrlo kompliciran; to je dokazao James Glimm 1961. za separabilne C^*-algebre, a istovremeno i nešto jednostavnije Jacques Dixmier. Dokaz je Shoichiro Sakai 1966. generalizirao i na neseparabilne C^*-algebre. Istovremeno je dokazano da i svojstvo iz propozicije 6.2.6. karakterizira GCR$-$algebre.

Kompozicioni niz za C^*-algebru $\mathcal{A}$ je familija $(\mathcal{J}_\alpha;\ 0 \leq \alpha \leq \alpha_0)$ zatvorenih obostranih ideala u $\mathcal{A}$ indeksirana rednim brojevima α, $0 \leq \alpha \leq \alpha_0$, sa sljedećim svojstvima:

(1) Za avaki $\alpha < \alpha_0$ je $\mathcal{J}_\alpha \subsetneq \mathcal{J}_{\alpha+1}$.

(2) $\mathcal{J}_0 = \{0\}$ i $\mathcal{J}_{\alpha_0} = \mathcal{A}$.

(3) Ako je $\beta \leq \alpha_0$ granični redni broj, onda je $\mathcal{J}_\beta = Cl\left(\cup_{\alpha<\beta}\mathcal{J}_\alpha\right)$.

Teorem 6.2.7. *Neka je $\mathcal{A}$ C^*-algebra.*

(*a*) *Ako je $\mathcal{A}$ GCR$-$algebra, onda $\mathcal{A}$ ima točno jedan kompozicioni niz $(\mathcal{J}_\alpha;\ 0 \leq \alpha \leq \alpha_0)$ takav da je $\mathcal{J}_{\alpha+1}/\mathcal{J}_\alpha$ =CCR$(\mathcal{A}/\mathcal{J}_\alpha)$ za svaki $\alpha < \alpha_0$.*

(*b*) *Ako $\mathcal{A}$ ima kompozicioni niz $(\mathcal{J}_\alpha;\ 0 \leq \alpha \leq \alpha_0)$ takav da je kvocijentna algebra $\mathcal{J}_{\alpha+1}/\mathcal{J}_\alpha$ CCR$-$algebra za svaki $\alpha < \alpha_0$, onda je $\mathcal{A}$ GCR$-$algebra.*

Dokaz: (*a*) Definirat ćemo familiju $(\mathcal{J}_\alpha)$ transfinitnom indukcijom. Stavimo $\mathcal{J}_0 = \{0\}$. Korak induktivne definicije je sljedeći: Neka je β redni broj takav da je $\mathcal{J}_\alpha$ definiran za svaki $\alpha < \beta$ i to tako da je zadovoljeno:

(1) Ako je $\alpha < \beta$ takav da je $\alpha + 1 < \beta$ onda je $\mathcal{J}_\alpha \subsetneq \mathcal{J}_{\alpha+1}$.

(2) $\mathcal{J}_0 = \{0\}$ (ovo je trivijalno ispunjeno).

(3) Ako je $\gamma < \beta$ granični redni broj, onda je $\mathcal{J}_\gamma = Cl\left(\cup_{\alpha<\gamma}\mathcal{J}_\alpha\right)$.

(4) $\mathcal{J}_{\alpha+1}/\mathcal{J}_\alpha$ =CCR$(\mathcal{A}/\mathcal{J}_\alpha)$ za svaki $\alpha < \beta$ takav da je $\alpha + 1 < \beta$.

Sada razlikujemo dva moguća slučaja:

(*A*) β nije granični redni broj, tj. postoji redni broj γ takav da je $\beta = \gamma + 1$; drugim riječima, γ je neposredni prethodnik rednog broja β. Ako je $\mathcal{J}_\gamma = \mathcal{A}$, onda postupak završava sa $\alpha_0 = \gamma$. Ako je, pak, $\mathcal{J}_\gamma \neq \mathcal{A}$, onda stavljamo $\mathcal{J}_\beta$ =CCR$(\mathcal{A}/\mathcal{J}_\gamma)$.

(*B*) β je granični redni broj. Tada stavljamo $J_\beta = Cl\left(\cup_{\alpha<\beta}J_\alpha\right)$.

Ovaj postupak transfinitne indukcije definira kompozicioni niz s traženim svojstvom. Treba još dokazati jedinstvenost takvog kompozicionog niza. Pretpostavimo suprotno, tj. da postoji dva takva međusobno različita kompoziciona niza $(\mathcal{K}_\alpha;\ 0 \leq \alpha \leq \beta_0)$ i $(\mathcal{J}_\alpha;\ 0 \leq \alpha \leq \alpha_0)$. Zbog određenosti pretpostavimo da je $\alpha_0 \leq \beta_0$. Kad bi bilo $\mathcal{J}_\alpha = \mathcal{K}_\alpha$ za svaki $\alpha \leq \alpha_0$ slijedilo bi $\mathcal{K}_{\alpha_0} = \mathcal{J}_{\alpha_0} = \mathcal{A}$, dakle, $\beta_0 = \alpha_0$, suprotno pretpostavci da su dva kompoziciona niza međusobno različiti. Prema tome, postoji redni broj $\gamma \leq \alpha_0$ takav da je $\mathcal{J}_\gamma \neq \mathcal{K}_\gamma$. Neka je γ najmanji takav redni broj. Tada je $\gamma > 0$ jer je $\mathcal{J}_0 = \{0\} = \mathcal{K}_0$. Nadalje, prema svojstvu (3) iz definicije kompozicionog niza γ ne može biti granični redni broj. Stoga postoji neposredni prethodnik od γ, tj. redni broj δ takav da je $\gamma = \delta + 1$. Tada je $\mathcal{J}_\delta = \mathcal{K}_\delta$, pa slijedi

$$\mathcal{J}_\gamma/\mathcal{J}_\delta = CCR(\mathcal{A}/\mathcal{J}_\delta) = CCR(\mathcal{A}/\mathcal{K}_\delta) = \mathcal{K}_\gamma/\mathcal{K}_\delta,$$

a odatle je $\mathcal{J}_\gamma = \mathcal{K}_\gamma$ suprotno pretpostavci. Ova kontradikcija dokazuje jedinstvenost kompozicionog niza s traženim svojstvom.

(*b*) Neka je $(\mathcal{J}_\alpha;\ 0 \leq \alpha \leq \alpha_0)$ kompozicioni niz za C^*-algebru $\mathcal{A}$ takav da je svaki kvocijent $\mathcal{J}_{\alpha+1}/\mathcal{J}_\alpha$ CCR$-$algebra. Neka je $\mathcal{I} \neq \mathcal{A}$ zatvoren obostrani ideal u $\mathcal{A}$. Treba dokazati da kvocijentna algebra $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ sadrži CCR$-$ideal različit od $\{0\}$. Budući da je $\cup_\alpha\mathcal{J}_\alpha = \mathcal{A}$, slijedi da postoji najmanji redni broj γ takav da je $(\mathcal{J}_\gamma+\mathcal{I})/\mathcal{I} \neq \{0\}$. Tvrdimo da je tada $(\mathcal{J}_\gamma+\mathcal{I})/\mathcal{I}$ CCR$-$algebra i time će tvrdnja biti dokazana, jer je $(\mathcal{J}_\gamma+\mathcal{I})/\mathcal{I}$ zatvoren obostrani ideal u C^*-algebri $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ različit od nule.

Prije svega, očito je $\gamma > 0$. Nadalje, kad bi γ bio granični redni broj, imali bismo

$$(\mathcal{J}_\gamma + \mathcal{I})/\mathcal{I} = \bigcup_{\delta<\gamma} (\mathcal{J}_\delta + \mathcal{I})/\mathcal{I} = \{0\}$$

suprotno pretpostavci. Dakle, γ nije granični redni broj. Neka je δ neposredni prethodnik od γ, tj. $\delta + 1 = \gamma$. Tada je $(\mathcal{J}_\delta + \mathcal{I})/\mathcal{I} = \{0\}$, odnosno, $\mathcal{J}_\delta \subseteq \mathcal{I}$. Tada je $x + \mathcal{J}_\delta \mapsto x + \mathcal{I}$ $*-$epimorfizam CCR−algebre $\mathcal{J}_\gamma/\mathcal{J}_\delta$ na C^*-algebru $(\mathcal{J}_\gamma + \mathcal{I})/\mathcal{I}$. Prema tvrdnji (d) teorema 5.3.3. C^*-algebra $(\mathcal{J}_\gamma + \mathcal{I})/\mathcal{I}$ je izomorfna kvocijentnoj algebri CCR−algebre $\mathcal{J}_\gamma/\mathcal{J}_\delta$, pa je prema propoziciji 6.2.3. $(\mathcal{J}_\gamma + \mathcal{I})/\mathcal{I}$ CCR−algebra.

Zadatak 6.2.1. *Neka je $\mathcal{A}$ GCR−algebra i $\mathcal{I} \neq \mathcal{A}$ zatvoren obostrani ideal u $\mathcal{A}$. Dokažite da su $\mathcal{I}$ i $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ GCR−algebre.*

Zadatak 6.2.2. *C^*-algebra $\mathcal{A}$ zove se NGCR−***algebra** *ako je CCR$(\mathcal{A}) = \{0\}$, tj. ako $\mathcal{A}$ ne sadrži nijedan zatvoren obostrani ideal $\mathcal{I} \neq \{0\}$ koji je CCR−algebra. Dokažite da svaka C^*-algebra $\mathcal{A}$ sadrži jedinstven zatvoren obostrani ideal $\mathcal{K}$ takav da je $\mathcal{K}$ GCR−algebra i da je $\mathcal{A}/\mathcal{K}$ NGCR−algebra.*

Zadatak 6.2.3. *Neka je $\mathcal{H} \neq \{0\}$ Hilbertov prostor i $\mathcal{A}$ ireducibilna C^*-podalgebra od $B(\mathcal{H})$. Dokažite da je $\mathcal{A}$ NGCR−algebra ako i samo ako je $\mathcal{A} \cap K(\mathcal{H}) = \{0\}$.*

Zadatak 6.2.4. *Neka je $\{e_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ ortonormirana baza Hilbertovog prostora $\mathcal{H}$ i neka je $S \in B(\mathcal{H})$ definiran sa $Se_n = e_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$. Neka je $C^*(S)$ najmanja C^*-podalgebra od $B(\mathcal{H})$ koja sadrži S. Dokažite da je $C^*(S)$ GCR−algebra i pronađite njen kompozicioni niz sa svojstvom iz tvrdnje (a) teorema 6.2.7.*

6.3 Dodatni zadaci

Zadatak 6.3.1. *Neka je* $D = \{\lambda \in \mathbb{C};\ |\lambda| \leq 1\}$ *i* $K = \{\lambda \in \mathbb{C};\ |\lambda| < 1\}$. *Neka je* $\mathcal{A}$ *skup svih neprekidnih funkcija* $f : D \to \mathbb{C}$ *takvih da je restrikcija* $f|K$ *analitička na* K.

(a) *Dokažite da je* $\mathcal{A}$ *komutativna Banachova algebra u odnosu na operacije po točkama i normu*

$$\|f\| = \max\{|f(\lambda)|;\ \lambda \in D\}.$$

(b) *Dokažite da je sa* $f^*(\lambda) = \overline{f\left(\overline{\lambda}\right)}$ *definirana izometrička involucija na* $\mathcal{A}$.

(c) *Dokažite da postoji unitalni homomorfizam* $\omega : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ *koji nije* $*-$*homomorfizam, tj. koji ne zadovoljava* $\omega(f^*) = \overline{\omega(f)}$.

Zadatak 6.3.2. *Neka su* S *i* T *normalni ograničeni operatori na Hilbertovim prostorima* $\mathcal{H}$ *i* $\mathcal{K}$ *i neka su* $C^*(S)$ *i* $C^*(T)$ *unitalne* C^*-*algebre generirane s tim operatorima. Dokažite da je algebra* $C^*(S)$ $*-$*izomorfna algebri* $C^*(T)$ *ako i samo ako je spektar* $\sigma(S)$ *operatora* S *homeomorfan spektru* $\sigma(T)$ *operatora* T.

Zadatak 6.3.3. *Neka je* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *neprekidna funkcija i neka je* $\mathcal{A}$ *unitalna* C^*-*algebra. Dokažite da je* $x \mapsto f(x)$ *neprekidno preslikavanje sa* $\mathcal{A}_h = \{x \in \mathcal{A};\ x^* = x\}$ *u* $\mathcal{A}$.

Zadatak 6.3.4. *Neka je* $\mathcal{A}$ C^*-*algebra,* $\mathcal{J}$ *zatvoren obostrani ideal u* $\mathcal{A}$ *i* $\mathcal{B}$ C^*-*podalgebra od* $\mathcal{A}$. *Dokažite da je*

$$\mathcal{B} + \mathcal{J} = \{b + x;\ b \in \mathcal{B},\ x \in \mathcal{J}\}$$

C^*-*podalgebra od* $\mathcal{A}$ *i da su* C^*-*algebre* $(\mathcal{B}+\mathcal{J})/\mathcal{J}$ *i* $\mathcal{B}/(\mathcal{B}\cap\mathcal{J})$ $*-$*izomorfne.*

Zadatak 6.3.5. *Neka je* $\mathcal{J}$ *zatvoren obostrani ideal u* C^*-*algebri* $\mathcal{A}$ *i neka je* $x \in \mathcal{A}$, $x^* = x$. *Pomoću funkcionalnog računa dokažite da postoji* $y \in \mathcal{J}$ *takav da je*

$$\|x + y\| = \inf\{\|x + z\|;\ z \in \mathcal{J}\}.$$

Zadatak 6.3.6. *Neka je* x *hermitski element* C^*-*algebre* $\mathcal{A}$. *Dokažite da postoje* $y, z \in \mathcal{A}_+$ *takvi da je*

$$\|y\| \leq \|x\|, \quad \|z\| \leq \|x\|, \quad yz = zy = 0, \quad x = y - z.$$

Da li su takvi y *i* z *jedinstveni?*

Zadatak 6.3.7. *Neka je* $\mathcal{A}$ *unitalna* C^*-*algebra i* $x \in \mathcal{A}$ *hermitski element takav da je* $\|x\| \leq 1$. *Dokažite da je* $x \in \mathcal{A}_+$ *ako i samo ako je* $\|e - x\| \leq 1$.

Zadatak 6.3.8. *Neka je* $\mathcal{A}$ C^*-*algebra i neka su* $a_1, b_1, c_1, d_1, a_2, b_2, c_2, d_2 \in \mathcal{A}_+$ *i* $x \in \mathcal{A}$ *takvi da je* $a_1 \leq b_1$, $a_2 \leq b_2$, $c_1^2 = a_1$, $c_2^2 = a_2$, $d_1^2 = b_1$ *i* $d_2^2 = b_2$. *Dokažite da tada vrijedi*

$$\|c_1 x\| \leq \|d_1 x\|, \quad \|x c_2\| \leq \|x d_2\| \quad i \quad \|c_1 x c_2\| \leq \|d_1 x d_2\|.$$

Zadatak 6.3.9. *Neka je* $\mathcal{A}$ *unitalna* C^*-*algebra i* $\mathcal{U}$ *multiplikativna grupa svih unitarnih elemenata algebre* $\mathcal{A}$. *Dokažite sljedeće tri tvrdnje:*

(a) *Ako je* $u \in \mathcal{U}$ *takav da je* $\|e - u\| < 2$, *onda postoji* $x \in \mathcal{A}_h$ *takav da je* $u = e^{ix}$.

(b) *Ako su* $v, w \in \mathcal{U}$ *takvi da je* $\|v - w\| < 2$, *onda postoji* $y \in \mathcal{A}_h$ *takav da je* $v = we^{iy}$.

(c) *Neka je* $\mathcal{U}_1$ *skup svih produkata oblika* $e^{ix_1}\cdots e^{ix_n}$, *gdje su* $n\in\mathbb{N}$ *i* $x_1,\ldots,x_n\in\mathcal{A}_h$. *Tada je skup* $\mathcal{U}_1$ *u odnosu na topologiju na* $\mathcal{U}$ *induciranu normom otvoren i zatvoren podskup od* $\mathcal{U}$. *Nadalje, skup* $\mathcal{U}_1$ *je putevima povezan, tj. za* $u,v\in\mathcal{U}_1$ *postoji neprekidna funkcija* $\varphi:[0,1]\to\mathcal{U}_1$ *takva da je* $\varphi(0)=u$ *i* $\varphi(1)=v$.

Zadatak 6.3.10. *Neka je* $\mathcal{A}$ *unitalna* C^*-*algebra i neka je* $x\in\mathcal{A}_+$. *Pretpostavimo da su* $p,q\in\mathcal{A}$ *međusobno ortogonalni projektori* (*tj.* $p^2=p=p^*$, $q^2=q=q^*$ *i* $pq=qp=0$) *i pretpostavimo da je* $pxp=0$. *Dokažite da je* $pxq=0$.

Zadatak 6.3.11. *Neka je* $\varphi:\mathcal{A}\to\mathcal{B}$ $*-$*epimorfizam* C^*-*algebri i neka su* $b_1,b_2\in\mathcal{B}_+$ *takvi da je* $b_1b_2=0$. *Dokažite da postoje* $a_1,a_2\in\mathcal{A}_+$ *takvi da je* $a_1a_2=0$, $\varphi(a_1)=b_1$ *i* $\varphi(a_2)=b_2$.

Zadatak 6.3.12. *Neka je* $\varphi:\mathcal{A}\to\mathcal{B}$ $*-$*epimorfizam* C^*-*algebri i neka je* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *niz u* $\mathcal{B}_+$ *takav da je* $b_nb_m=0$ *za* $n\neq m$. *Koristeći zadatak 6.3.11. dokažite da postoji niz* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *takav da je* $a_na_m=0$ *za* $n\neq m$ *i* $\varphi(a_n)=b_n$ $\forall n\in\mathbb{N}$.

Uputa: Zamjenom b_n sa t_nb_n za neke $t_n>0$ može se postići da redovi $\sum_n b_n$ i $\sum_n\sqrt{b_n}$ konvergiraju u $\mathcal{B}$. Sada indukcijom po n dokažite da postoje $a_1,\ldots,a_n,x_n\in\mathcal{A}_+$ takvi da je $a_ja_k=0$ za $j\neq k$, $a_jx_n=0$ $\forall j$ i da vrijedi

$$\varphi(a_j)=b_j\quad \text{z}\quad j=1,\ldots,n,\qquad \varphi(x_n)=\sum_{k>n}b_k.$$

Zadatak 6.3.13. *Neka je* $\mathcal{A}$ *unitalna komutativna* C^*-*algebra i neka su* f *i* g *međusobno različita čista stanja na* $\mathcal{A}$. *Dokažite da je tada* $\|f-g\|=2$.

Zadatak 6.3.14. *Neka je* $\mathcal{A}$ *unitalna* C^*-*algebra i neka* $u\in\mathcal{A}$ *unitarni element. Za stanje* f *na* $\mathcal{A}$ *stavimo*

$$f_u(x)=f(uxu^*),\qquad x\in\mathcal{A}.$$

Dokažite da je i f_u *stanje na* $\mathcal{A}$ *i da je ono čisto ako i samo ako je* f *čisto.*

Zadatak 6.3.15. *Neka je* $\mathcal{A}$ *unitalna komutativna* C^*-*algebra. Pretpostavimo da postoji* $r>0$ *takav da za svaka dva međusobno različita čista stanja* f *i* g *na* $\mathcal{A}$ *vrijedi* $\|f-g\|\geq r$. *Dokažite da je tada algebra* $\mathcal{A}$ *komutativna.*

Uputa: Za $h\in\mathcal{A}_h$ pokažite da je uz oznaku iz zadatka 6.3.14. $f_{e^{ith}}=f$ za svako čisto stanje f i svaki $t\in\mathbb{R}$. Izvedite odatle da je $f(xh-hx)=0$ za svako čisto stanje f i za sve $x\in\mathcal{A}$ i $h\in\mathcal{A}_h$.

Zadatak 6.3.16. *Dokažite da za svaki pravi zatvoren dvostrani ideal* $\mathcal{J}$ *u* C^*-*algebri* $\mathcal{A}$ *postoji reprezentacija* π *od* $\mathcal{A}$ *čija je jezgra* $\mathcal{J}$.

Zadatak 6.3.17. *Neka je* $\varphi:\mathcal{A}\to\mathcal{B}$ $*-$*homomorfizam* C^*-*algebri i neka je* $\mathcal{J}$ *zatvoren dvostrani ideal u* $\mathcal{A}$. *Dokažite da je* $\varphi(\mathcal{J})$ *zatvoren potprostor od* $\mathcal{B}$.

Zadatak 6.3.18. *Neka su* $\mathcal{I}$ *i* $\mathcal{J}$ *zatvoreni dvostrani ideali u* C^*-*algebri* $\mathcal{A}$. *Dokažite da je i dvostrani ideal* $\mathcal{I}+\mathcal{J}$ *zatvoren.*

Bibliografija

[1] William Arveson, *An Invitation to C^*-algebras*, Springer−Verlag, New York − Heidelberg − Berlin, 1976.

[2] George Bachman, Lawrence Narici, *Functional Analysis*, Academic Press, New York − San Francisco − London, 1966.

[3] John B. Conway, *A Course in Operator Theory*, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 20000.

[4] Kenneth R. Davidson, *C^*-algebras by Examples*, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1996.

[5] Jacques Dixmier, *C^*-algebras*, North−Holland Publishing Company, Amsterdam − New York − Oxford, 1977.

[6] Richard V. Kadison, John R. Ringrose, *Fundamentals of the Theory of Operator Algebras, Volume I: Elementary Theory*, Academic Press, San Diego, California, 1983.

[7] Richard V. Kadison, John R. Ringrose, *Fundamentals of the Theory of Operator Algebras, Volume II: Advanced Theory*, Academic Press, San Diego, California, 1983.

[8] Richard V. Kadison, John R. Ringrose, *Fundamentals of the Theory of Operator Algebras, Volume III: Elementary Theory - An Exercise Approach*, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1991.

[9] Richard V. Kadison, John R. Ringrose, *Fundamentals of the Theory of Operator Algebras, Volume III: Advanced Theory - An Exercise Approach*, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1991.

[10] Hrvoje Kraljević, *Kompaktni operatori*, PMF − Matematički odjel, Zagreb, siječanj 2007. (interna skripta)

[11] Svetozar Kurepa, *Funkcionalna analiza. Elementi teorije operatora*, Školska knjiga, Zagreb, 1981.

[12] Gerard J. Murphy, *C^*-algebras and operator theory*, Academic Press, Boston − San Diego − New York, 1990.

[13] Mark A. Naimark, *Normed rings*, P. Noordhoff N.V., Groningen, 1964.

[14] Walter Rudin, *Functional Analysis*, McGraw - Hill Book Company, New York, 1973.

[15] Angus E. Taylor, David C. Day *Introduction to Functional Analysis*, John Wiley & Sons, New York − Chichester − Brisbane − Toronto, 1980.