ODABRANA POGLAVLJA TEORIJE REPREZENTACIJA

Prof. dr. sc. Hrvoje Kraljević

Predavanja održana na PMF−Matematičkom odjelu
Sveučilišta u Zagrebu
u zimskom semestru akademske godine 2010./2011.

Zagreb, prosinac 2010.

Sadržaj

Poglavlje 1

Osnovni pojmovi teorije reprezentacija

1.1 Reprezentacije i moduli

Ako su V i W vektorski prostori nad poljem K sa $L(V,W)$ ćemo označavati skup svih linearnih operatora $A : V \to W$. $L(V,W)$ je vektorski prostor nad poljem K s operacijama

$$(A+B)v = Av + Bv, \qquad (\lambda A)v = \lambda Av, \qquad A, B \in L(V,W), \quad \lambda \in K, \quad v \in V.$$

Pisat ćemo $L(V) = L(V,V)$ i to je asocijativna algebra uz operaciju množenja

$$(AB)v = A(Bv), \qquad A, B \in L(V), \quad v \in V.$$

Jedinični operator $I = I_V$ ($Iv = v \ \forall v \in V$) je jedinica u algebri $L(V)$. Grupu avih inveribilnih elemenata algebre $L(V)$, tj. grupu svih izomorfizama sa V na V, označavat ćemo sa $GL(V)$.

Mi ćemo se u ovom kolegiju baviti reprezentacijama nekoliko vrsta algebarskih struktura $-$ grupa, asocijativnih algebri, unitalnih algebri i Liejevih algebri. No najprije ćemo definirati pojam reprezentacije skupa bez ikakve algebarske strukture i s tim usko vezan pojam modula nad skupom.

Neka je S skup. $S-$**modul nad poljem** K je vektorski prostor V nad poljem K sa zadanim preslikavanjem $S \times V \to V$, $(s, v) \mapsto sv$, takvim da je $v \mapsto sv$, $v \in V$, linearan operator na prostoru V $\forall s \in S$:

$$s(\alpha v + \beta w) = \alpha sv + \beta sw, \qquad \forall \alpha, \beta \in K, \quad \forall v, w \in V, \quad \forall s \in S.$$

Reprezentacija skupa S na vektorskom prostoru V je preslikavanje $\pi : S \to L(V)$. Naravno, $S-$moduli i reprezentacije od S su u biti jedno te isto: ako je π reprezentacija od S na prostoru V onda je sa $sv = \pi(s)v$, $s \in S$, $v \in V$, zadano preslikavanje $S \times V \to V$ koje V čini $S-$modulom; s druge strane, ako je V $S-$modul, onda je sa $\pi(s)v = sv$, $s \in S$, $v \in V$, zadana reprezentacija π skupa S na prostoru V.

U daljnjem je V $S-$modul nad poljem K i π pripadna reprezentacija skupa S na prostoru V. $S-$**podmodul** od V je potprostor $W \subseteq V$ takav da je $sw \in W$ $\forall s \in S$ i $\forall w \in W$. Naravno, s restrikcijom preslikavanja $(s, v) \to sv$ sa $S \times V \to V$ na $S \times W \to W$ i sam W postaje $S-$modul. Potprostor W od V je $S-$podmodul ako i samo ako je taj potprostor invarijantan s obzirom na sve operatore $\pi(s)$, $s \in S$. Reprezentacija pridružena $S-$podmodulu W označava se π_W i zove **subreprezentacija** reprezentacije π. **Pravi** $S-$**podmodul** od V je $S-$podmodul W koji je različit od V. W je **netrivijalan** $S-$**podmodul** od V ako je $W \neq V$ i $W \neq \{0\}$. **Maksimalan** $S-$**podmodul** od V je pravi $S-$podmodul od V koji nije pravi $S-$podmodul nijednog pravog $S-$podmodula od V. Drugim riječima, maksimalan $S-$podmodul od V je svaki maksimalan element skupa svih pravih podmodula od V parcijalno uređenog inkluzijom. Za pripadnu subreprezentaciju kažemo da je **maksimalna subreprezentacija** od π.

Presjek bilo kojeg skupa $S-$podmodula od V je očito $S-$podmodul od V. Ako je Σ podskup $S-$modula V, postoji najmanji $S-$podmodul od V koji sadrži skup Σ : to je presjek svih $S-$podmodula koji sadrže skup Σ. Taj se $S-$podmodul označava sa $S\Sigma$ i za njega kažemo da je **generiran skupom** Σ. Očito je

$$S\Sigma = span_K(\Sigma \cup \{s_1 \cdots s_n v;\ n \in \mathbb{N},\ s_1, \ldots, s_n \in S,\ v \in \Sigma\}).$$

Ako je W $S-$podmodul $S-$modula V, kvocijentni vektorski prostor V/W možemo snabdjeti strukturom $S-$modula ovako:

$$s(v + W) = sv + W, \qquad s \in S, \quad v \in V.$$

S tom strukturom V/W se zove **kvocijentni** $S-$**modul** ($S-$modula V po $S-$podmodulu W). Pripadna reprezentacija označava se sa $\pi_{V/W}$ i zove **kvocijentna reprezentacija** reprezentacije π. Kvocijentni $S-$modul $S-$podmodula od V ili, ekvivalentno, $S-$podmodul kvocijentnog $S-$modula od V, zove se **subkvocijentni** $S-$**modul**, ili kraće **subkvocijent**, $S-$modula V. Dakle, subkvocijent od V je $S-$modul oblika W/U, gdje su W i U $S-$podmoduli od V i $U \subseteq W$. Pripadna reprezentacija označava se sa $\pi_{W/U}$ i zove **subkvocijentna reprezentacija** ili **subkvocijent** reprezentacije π.

Ako su V i W $S-$moduli nad poljem K, $S-$**homomorfizam** (ili homomorfizam $S-$modula) V u W je linearan operator $A : V \to W$ sa svojstvom

$$Asv = sAv \qquad \forall s \in S \quad \text{i} \quad \forall v \in V.$$

Skup svih $S-$homomorfizama V u W označavamo sa $Hom_S(V, W)$ i to je potprostor prostora $L(V, W)$ svih linearnih operatora sa V u W. Ako su π i ρ pripadne reprezentacije od S na prostorima V i W, $S-$homomorfizmi se zovu i **preplitanja** reprezentacije π s reprezentacijom ρ. Surjektivni (odn., injektivni, bijektivni) $S-$homomorfizam zove se $S-$epimorfizam (odn., $S-$monomorfizam, $S-$izomorfizam). Kažemo da je $S-$modul V izomorfan $S-$modulu W ako postoji $S-$izomorfizam sa V na W, tj. ako u $Hom_S(V, W)$ postoji bijekcija. Kako je kompozicija $S-$homomorfizama $S-$homomorfizam, očito je relacija izomorfnosti među $S-$modulima tranzitivna. Ona je i simetrična jer invers $S-$izomorfizma je $S-$izomorfizam. Napokon, kako je identiteta I_V na V izomorfizam $S-$modula, izomorfnost $S-$modula je relacija ekvivalencije.

Vrijede sljedeća dva standardna rezultata:

Teorem 1.1.1. *Ako je $A : V \to W$ homomorfizam $S-$modula onda je* $\operatorname{Ker} A$ *$S-$podmodul od V,* $\operatorname{Im} A$ *je $S-$podmodul od W i sa*

$$v + \operatorname{Ker} A \mapsto Av, \qquad v \in V,$$

je zadan izomorfizam $S-$modula sa $V/(\operatorname{Ker} A)$ na $\operatorname{Im} A$.

Zadatak 1.1.1. *Dokažite teorem 1.1.1.*

Suma bilo kojeg skupa $S-$podmodula od V je $S-$podmodul od V. Posebno, ako su W i U $S-$podmoduli od V onda je i $W + U$ $S-$podmodul od V.

Teorem 1.1.2. *Ako su W i U $S-$podmoduli $S-$modula V, onda je sa*

$$w + (W \cap U) \mapsto w + U, \qquad w \in W,$$

zadan izomorfizam $S-$modula $W/(W \cap U)$ na $S-$modul $(W + U)/U$.

Zadatak 1.1.2. *Dokažite teorem 1.1.2.*

Kažemo da je V **prost** $S-$**modul** ako je $V \neq \{0\}$ i V nema netrivijalnih $S-$podmodula; tj. V i $\{0\}$ su jedini $S-$podmoduli od V. U tom se slučaju pripadna **reprezentacija** zove **ireducibilna**. Kažemo da je π **reducibilna reprezentacija** ako ona nije ireducibilna. V je **poluprost** $S-$**modul**, ako za svaki $S-$podmodul W od V postoji $S-$podmodul U od V takav da je $V = W \dotplus U$. Za pripadnu reprezentaciju u tom slučaju kažemo da je **potpuno reducibilna**.

Propozicija 1.1.3. *Ako je W $S-$podmodul poluprostog $S-$modula V, onda su $S-$moduli W i V/W poluprosti.*

Dokaz: Neka je X $S-$podmodul od W. Tada je ujedno X $S-$podmodul od V, pa po pretpostavci postoji $S-$podmodul Y od V takav da je $V = X \dotplus Y$. Sada je $Z = Y \cap W$ $S-$podmodul od W i očito vrijedi $W = X \dotplus Z$. Time smo dokazali da je $S-$modul W poluprost.

Neka je sada X $S-$podmodul kvocijentnog modula V/W. Stavimo

$$Y = \{y \in V;\ y + W \in X\}.$$

Tada je Y potprostor prostora V koji je $S-$podmodul od V. Doista, ako je $s \in S$ i $y \in Y$, onda je $y + W \in X$, pa iz činjenice da je X $S-$podmodul od V/W slijedi $s(y + W) \in X$. Međutim, po definiciji strukture $S-$modula na kvocijentnom prostoru V/W vrijedi $s(y + W) = sy + W$. To pokazuje da je $sy \in Y$. Kako su $s \in S$ i $y \in Y$ bili proizvoljni, dokazali smo da je Y $S-$podmodul od V. Kako je $S-$modul V poluprost, postoji $S-$podmodul Z od V takav da je $V = Y \dotplus Z$. Stavimo sada

$$U = \{z + W;\ z \in Z\}.$$

Tada je U potprostor kvocijentnog prostora V/W i to je $S-$podmodul od V/W : za $s \in S$ i $u \in U$ i za $z \in Z$ takav da je $u = z + W$ vrijedi $sz \in Z$, jer je Z $S-$podmodul od V, pa vrijedi $su = s(z+W) = sz+W \in U$. Dokažimo sada da je $V/W = X \dotplus U$. Prije svega, proizvoljan vektor $v \in V$ može se napisati u obliku $v = y + z$, $y \in Y$, $z \in Z$. Tada je $v + W = (y + W) + (z + W)$ i vrijedi $y+W \in X$ i $z+W \in U$. To pokazuje da je $V/W = X+U$. Neka je sada $u \in X \cap U$. Budući da je $u \in U$, postoji $z \in Z$ takav da je $u = z + W$. No tada je $z + W \in X$, pa slijedi $z \in Y$. Dakle, $z \in Z \cap Y = \{0\}$, tj. $z = 0$, a to znači da je $u = z + W$ nulvektor u kvocijentnom prostoru V/W. Prema tome, suma je direktna: $V/W = X \dotplus U$. Time je dokazano da je i kvocijentni $S-$modul V/W poluprost.

Propozicija 1.1.4. *Svaki poluprost $S-$modul $V \neq \{0\}$ ima prost $S-$podmodul.*

Dokaz: Neka je $v \in V$, $v \neq 0$. Neka je $\mathcal{S}$ skup svih $S-$podmodula od V koji ne sadrže vektor v. Uz relaciju inkluzije $\mathcal{S}$ postaje parcijalno uređen skup. On je neprazan jer je $\{0\} \in \mathcal{S}$. Primjenom Zornove leme lako se vidi da skup $\mathcal{S}$ ima bar jedan maksimalni element W. Kako je $S-$modul V poluprost, postoji $S-$podmodul U takav da je $V = W \dotplus U$. Tada je $U \neq \{0\}$, jer $v \notin W$. Pretpostavimo da je U' netrivijalan podmodul od U. Prema propoziciji 1.1.3. $S-$modul U je poluprost pa on ima $S-$podmodul U'' takav da je $U = U' \dotplus U''$. Kako je W maksimalan $S-$podmodul od V sa svojstvom $v \notin W$, vrijedi $v \in W \dotplus U'$ i $v \in W \dotplus U''$. No tada slijedi da je $v \in (W \dotplus U') \cap (W \dotplus U'') = W$ suprotno svojstvu od W. Ova kontradikcija pokazuje da U nema netrivijalnih $S-$podmodula, odnosno, $S-$modul U je prost.

Teorem 1.1.5. *Sljedeća su tri svojstva $S-$modula V međusobno ekvivalentna:*

(*a*) *Modul V je poluprost.*

(*b*) *Modul V je suma svojih prostih podmodula.*

(*c*) *Modul V je direktna suma nekog skupa svojih prostih podmodula.*

Dokaz: $(a) \Rightarrow (b)$. Neka je V poluprost i neka je W suma svih njegovih prostih podmodula. Tada je $V = W \dot{+} U$ za neki podmodul U. Prema propoziciji 1.1.4. ako je $U \neq \{0\}$ onda U sadrži neki prost podmodul Z. No po definiciji W tada je $Z \subseteq W$, a to je nemoguće. Ova kontradikcija pokazuje da je $U = \{0\}$, tj. $W = V$.

$(b) \Rightarrow (c)$. Pretpostavimo da je V suma svojih prostih podmodula. Primjenom Zornove leme nalazimo da postoji maksimalan skup $\mathcal{S}$ prostih podmodula u odnosu na svojstvo da im je suma direktna. Neka je $W = \sum \mathcal{S}$. Pretpostavimo da je $W \neq V$. Tada postoji prost podmodul U od V takav da $U \subsetneq W$. Tada je $U \cap W \neq U$, dakle, $U \cap W = \{0\}$. Odatle slijedi da je suma $\sum(\mathcal{S} \cup \{U\})$ direktna i vrijedi $\mathcal{S} \subsetneq \mathcal{S} \cup \{U\}$, a to je nemoguće zbog izbora $\mathcal{S}$. Ova kontradikcija pokazuje da je $W = V$.

$(c) \Rightarrow (a)$. Pretpostavimo da je V direktna suma skupa $\mathcal{S}$ prostih podmodula od V i neka je W podmodul od V. Primjenom Zornove leme nalazimo da u skupu svih podmodula U od V takvih da je $U \cap W = \{0\}$ postoji bar jedan maksimalan element U. Za svaki $Z \in \mathcal{S}$ tada ne može biti $Z \cap (W \dot{+} U) = \{0\}$; u protivnom bi $U \dot{+} Z$ bio podmodul od V sa svojstvom $(U \dot{+} Z) \cap W = \{0\}$ i imali bismo da je $U \subsetneq U \dot{+} Z$, a to je suprotno izboru podmodula U. Kako je Z prost i $Z \cap (W \dot{+} U) \neq \{0\}$, vrijedi $Z = Z \cap (W \dot{+} U)$, tj. $Z \subseteq W \dot{+} U$. Kako to vrijedi za svaki $Z \in \mathcal{S}$, slijedi $V = \sum \mathcal{S} \subseteq W \dot{+} U$, odnosno, $V = W \dot{+} U$.

Sokl $S-$**modula** V je suma svih njegovih prostih $S-$podmodula. Očito je sokl od V najveći poluprost $S-$podmodul od V.

Za $S-$modul V pišemo $End_S(V)$ umjesto $Hom_S(V, V)$. $End_S(V)$ je unitalna podalgebra od $L(V)$.

Teorem 1.1.6. (**Schurova lema**) *Neka su V i W prosti $S-$moduli nad poljem K.*

(a) *Ako je $Hom_S(V, W) \neq \{0\}$, $S-$moduli V i W su izomorfni.*

(b) *Unitalna algebra $End_S(V)$ je tijelo, tj. svaki $A \in End_S(V) \setminus \{0\}$ je invertibilan.*

(c) *Ako je polje K algebarski zatvoreno i ako je* $\dim V$ *manja od* $Card\, K$, *posebno, ako je prostor V konačnodimenzionalan, onda je $End_S(V) = \{\lambda I_V;\ \lambda \in K\}$.*

Dokaz: (a) Pretpostavimo da je $A \in Hom_S(V, W) \setminus \{0\}$. Tada je $\operatorname{Ker} A$ $S-$podmodul od V :

$$v \in \operatorname{Ker} A, \quad s \in S \qquad \Longrightarrow \qquad Asv = sAv = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad sv \in \operatorname{Ker} A.$$

Kako je $A \neq 0$, vrijedi $\operatorname{Ker} A \neq V$, a kako je V prost $S-$modul, zaključujemo da je $\operatorname{Ker} A = \{0\}$, odnosno, A je injekcija. Nadalje, $\operatorname{Im} A$ je $S-$podmodul od W :

$$s \in S, \quad w \in \operatorname{Im} A, \quad v \in V \quad \text{takav da je} \quad w = Av \qquad \Longrightarrow \qquad sw = sAv = Asv \in \operatorname{Im} A.$$

Kako je $A \neq 0$ to je $\operatorname{Im} A \neq \{0\}$. Budući da je W prost $S-$modul, slijedi $\operatorname{Im} A = W$. Dakle, A je i surjekcija, dakle, izomorfizam.

(b) Iz dokaza tvrdnje (a) vidi se da je svaki $A \in End_S(V) \setminus \{0\}$ invertibilan.

(c) Neka je $A \in L(V)$. Dokazat ćemo da je tada njegov spektar

$$Sp(A) = \{\lambda \in K;\ A - \lambda I_V \notin GL(V)\}$$

neprazan. Naravno, ta je činjenica trivijalna ako je prostor V konačnodimenzionalan, jer je polje K po pretpostavci algebraski zatvoreno. Dokažimo tu činjenicu u općem slučaju uz iskazanu pretpostavku $\dim V < Card(K)$. Pretpostavimo suprotno da je spektar $Sp(A)$ prazan, tj. da je operator $A - \lambda I_V$ invertibilan za svaki $\lambda \in K$. Tada je operator $P(A)$ invertibilan za svaki polinom $Q \in$

$K[T] \setminus \{0\}$. Dakle, ako je $R = P/Q$ racionalna funkcija, možemo definirati $R(A) = P(A)Q(A)^{-1}$. Tako dolazimo do linearnog preslikavanja $R \mapsto R(A)$ prostora $K(T)$ racionalnih funkcija jedne varijable nad poljem K u prostor $L(V)$. Neka je $v \in V$, $v \neq 0$. Tada je $R \mapsto R(A)v$ injektivan linearan operator sa $K(T)$ u V. Odatle slijedi da je $\dim K(T) \leq \dim V$.

Uočimo sada da je skup

$$\left\{ \frac{1}{T-\lambda};\ \lambda \in K \right\} \tag{1.1}$$

linearno nezavisan. Doista, u suprotnom bi postojali međusobno različiti $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$ i $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K \setminus \{0\}$ takvi da je

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\alpha_j}{T-\lambda_j} = 0.$$

Množenjem te jednakosti s umnoškom $(T-\lambda_1)\cdots(T-\lambda_n)$ dobivamo

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j Q_j(T) = 0, \qquad \text{gdje je} \quad Q_j(T) = (T-\lambda_1)\cdots(T-\lambda_{j-1})(T-\lambda_{j+1})\cdots(T-\lambda_n).$$

Sada je $Q_i(\lambda_j) = 0$ za $i \neq j$ i $Q_i(\lambda_i) = (\lambda_i - \lambda_1)\cdots(\lambda_i - \lambda_{i-1})(\lambda_i - \lambda_{i+1})\cdots(\lambda_i - \lambda_n) \neq 0$. Stoga za proizvoljan indeks $i \in \{1, \ldots, n\}$ vrijedi

$$0 = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j Q_j(\lambda_i) = \alpha_i Q_i(\lambda_i),$$

a to je nemoguće jer je $\alpha_i \neq 0$ i $Q_i(\lambda_i) \neq 0$. Time je dokazana linearna nezavisnost skupa (1.1). Odatle slijedi da je $Card\,K \leq \dim K(T)$, pa iz prije utvrđene nejednakosti $\dim K(T) \leq \dim V$ zaključujemo da je $Card\,K \leq \dim V$, a to je suprotno pretpostavci. Ova kontradikcija pokazuje da za svaki $A \in L(V)$ postoji $\lambda \in K$ takav da operator $A - \lambda I_V$ nije invertibilan. Sada iz tvrdnje (c) Schurove leme (teorem 1.1.6.) slijedi da je $A - \lambda I_V = 0$, dakle, $A = \lambda I_V$.

Neka je sada zadana familija $S-$modula $(V_i)_{i \in I}$ i neka je za $i \in I$ sa π_i označena pripadna reprezentacija od S na prostoru V_i. Tada na direktnoj sumi

$$\coprod_{i \in I} V_i = \left\{ f : I \to \bigcup_{i \in I} V_i;\ f(i) \in V_i\ \ \forall i \in I,\ \text{skup } \{i \in I;\ f(i) \neq 0\} \text{ je konačan} \right\}$$

definiramo reprezentaciju π od S na sljedeći način:

$$(\pi(s)f)(i) = \pi_i(s)f(i), \qquad s \in S, \quad i \in I.$$

π se zove **direktna suma reprezentacija** π_i. Uz pripadnu strukturu $S-$modula V se zove **direktna suma $S-$modula** V_i.

Naravno, ako je W $S-$modul i ako su V_i, $i \in I$, su $S-$podmoduli od W takvi da je prostor W direktna suma potprostora V_i, $i \in I$, onda je $S-$modul W izomorfan direktnoj sumi V familije $S-$modula $(V_i)_{i \in I}$, a izomorfizam sa V na W dan je sa

$$f \mapsto \sum_{i \in I} f(i), \qquad f \in V = \coprod_{i \in I} V_i.$$

Drugim riječima, reprezentacija od S na prostoru W ekvivalentna je direktnoj sumi familije reprezentacija $(\pi_{V_i})_{i \in I}$.

Zadatak 1.1.3. *Neka je S skup i neka je V $S-$modul.*

(a) *Neka su W i U $S-$podmoduli od V takvi da je $V = W \dotplus U$. Dokažite da je tada $V/W \simeq U$.*

(b) *Neka su A, B i C $S-$podmoduli od V takvi da je $V = A \dotplus B = A \dotplus C$. Dokažite da je tada $B \simeq C$.*

U slučaju konačnodimenzionalnog $S-$modula teorem 1.1.5. iskazuje se ovako:

Teorem 1.1.7. *Neka je V konačnodimenzionalan $S-$modul. Sljedeća su tri svojstva međusobno ekvivalentna:*

(a) *Modul V je poluprost.*

(b) *Postoji familija prostih $(V_i)_{i\in I}$ $S-$podmodula od V takva da je*

$$V = \sum_{i\in I} V_i.$$

(c) *Postoje prosti podmoduli $V_1, V_2, \ldots, V_n$ od V takvi da je*

$$V = V_1 \dotplus V_2 \dotplus \cdots \dotplus V_n.$$

U situaciji iz tvrdnje (c) prethodnog teorema neka je π oznaka za reprezentaciju od S na prostoru V i neka je za svaki $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ izabrana neka baza $e^{(j)} = \left\{e_1^{(j)}, e_2^{(j)}, \ldots, e_{m_j}^{(j)}\right\}$ potprostora V_j. Nadalje, neka je e oznaka za bazu prostora V koja je dobivena iz tih baza:

$$e = \left\{e_1^{(1)}, e_2^{(1)}, \ldots, e_{m_1}^{(1)}, e_1^{(2)}, e_2^{(2)}, \ldots, e_{m_2}^{(2)}, \ldots\ldots, e_1^{(n)}, e_2^{(n)}, \ldots, e_{m_n}^{(n)}\right\}.$$

Za $s \in S$ označimo sa $\pi(s)[e]$ matricu operatora $\pi(s)$ u bazi e, a za $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ neka je $\pi_{V_j}(s)[e^{(j)}]$ oznaka za matricu operatora $\pi_{V_j}(s) = \pi(s)|V_j$ u bazi $e^{(j)}$. Tada se lako vidi da je $\pi(s)[e]$ blok$-$dijagonalna matrica:

$$\pi(s)[e] = \begin{bmatrix} \pi_{V_1}(s)[e^{(1)}] & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \pi_{V_2}(s)[e^{(2)}] & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \pi_{V_n}(s)[e^{(n)}] \end{bmatrix}, \qquad s \in S.$$

Zadatak 1.1.4. *Neka su V i W $S-$moduli nad istim poljem K. Ako je X $S-$podmodul od W tada prostor $Hom_S(V, X)$ možemo na prirodan način identificirati s potprostorom*

$$\{A \in Hom_S(V, W);\ AV \subseteq X\}$$

prostora $Hom_S(V, W)$. Ukoliko je $W = X_1 \dotplus X_2 \dotplus \cdots \dotplus X_n$, pri čemu su X_i $S-$podmoduli od W dokažite da uz spomenutu identifikaciju prostora $Hom_S(V, X_i)$ s potprostorima od $Hom_S(V, W)$ vrijedi

$$Hom_S(V, W) = Hom_S(V, X_1) \dotplus Hom_S(V, X_2) \dotplus \cdots \dotplus Hom_S(V, X_n).$$

Zadatak 1.1.5. *Neka su V i W $S-$moduli nad istim poljem K.*

(a) *Ako je X $S-$podmodul od V, konstruirajte izomorfizam prostora $Hom_S(V/X,W)$ s potprostorom*
$$\{A \in Hom_S(V,W);\ A|X = 0\}$$
prostora $Hom_S(V,W)$.

(b) *Ako je $V = X_1 \dotplus X_2 \dotplus \cdots \dotplus X_n$, gdje su X_i, $1 \leq i \leq n$, $S-$podmoduli od V, definirajmo potprostore $\mathcal{X}_i$ prostora $L(V,W)$ ovako:*
$$\mathcal{X}_i = \{A \in L(V,W);\ A|V_j = 0 \text{ za } j \neq i,\ A|V_i \in Hom_S(V_i,W)\}.$$
Dokažite da je svaki $\mathcal{X}_i$ potprostor prostora $Hom_S(V,W)$ i da je
$$Hom_S(V,W) = \mathcal{X}_1 \dotplus \mathcal{X}_2 \dotplus \cdots \dotplus \mathcal{X}_n.$$

Teorem 1.1.8. *Neka su V i W konačnodimenzionalni $S-$modul nad algebarski zatvorenim poljem K pri čemu je $S-$modul V poluprost, a $S-$modul W prost. Neka je $V = V_1 \dotplus V_2 \dotplus \cdots \dotplus V_n$, pri čemu je svaki od potprostora V_i prost $S-$podmodul od V. Tada je*
$$|\{i \in \{1,2,\ldots,n\};\ V_i \simeq W\}| = \dim\, Hom_S(W,V) = \dim\, Hom_S(V,W).$$
(*Pri tome $|S|$ označava broj elemenata konačnog skupa S*).

Dokaz: Prema zadatku 1.1.4. vrijedi
$$Hom_S(W,V) = Hom_S(W,V_1) \dotplus Hom_S(W,V_2) \dotplus \cdots \dotplus Hom_S(W,V_n). \tag{1.2}$$
Nadalje, prema Schurovoj lemi (teorem 1.1.6.) vrijedi
$$\dim\, Hom_S(W,V_i) = \begin{cases} 1 & \text{ako je } V_i \simeq W \\ \\ 0 & \text{ako je } V_i \not\simeq W. \end{cases}$$
Odatle i iz (1.2) slijedi jednakost
$$\dim\, Hom_S(W,V) = |\{i \in \{1,2,\ldots,n\};\ V_i \simeq W\}|.$$
Sasvim analogno, pomoću zadatka 1.1.5. dobivamo jednakost
$$\dim\, Hom_S(V,W) = |\{i \in \{1,2,\ldots,n\};\ V_i \simeq W\}|.$$

U najvećem dijelu ovog kolegija bavit ćemo se isključivo s reprezentacijama na kompleksnim i na realnim vektorskim prostorima. Ako je k tome prostor unitaran, uz određene uvjete imamo potpunu reducibilnost reprezentacije, odnosno poluprostotu pripadnog modula.

Teorem 1.1.9. *Neka je π konačnodimenzionalna reprezentacija skupa S na realnom ili kompleksnom unitarnom prostoru V. Pretpostavimo da vrijedi $\pi(S)^* = \pi(S)$, tj. da je adjungiranje operatora $A \mapsto A^*$ permutacija skupa operatora reprezentacije $\pi(S) = \{\pi(s);\ s \in S\}$. Tada je reprezentacija π potpuno reducibilna.*

Dokaz: Neka je X $\pi-$invarijantan potprostor od V. Prema teoremu o ortogonalnoj projekciji tada je
$$V = X \dotplus X^\perp \qquad \text{gdje je} \quad X^\perp = \{v \in V;\ (v|x) = 0\ \forall x \in X\}.$$
Neka je $v \in X^\perp$ i neka je $a \in \mathcal{A}$. Po pretpostavci postoji $b \in \mathcal{A}$ takav da je $\pi(a) = \pi(b)^*$. Sada za proizvoljan $x \in X$ imamo $\pi(b)x \in X$, dakle, $(\pi(a)v|x) = (v|\pi(b)x) = 0$. Dakle,
$$v \in X^\perp \qquad \Longrightarrow \qquad \pi(a)v \in X^\perp \quad \forall a \in \mathcal{A},$$
i time je dokazano da je reprezentacija π potpuno reducibilna.

1.2 Grupe i algebre

Ako je G grupa, grupovnu operaciju najčešće ćemo označavati bez ikakvoga znaka $(a,b) \mapsto ab$, $a,b \in G$ a jedinicu grupe G označavat ćemo sa e (ili sa e_G).

Asocijativnu algebru s jedinicom zvat ćemo **unitalna algebra**. Ako je $\mathcal{A}$ unitalna algebra, njenu ćemo jedinicu označavati sa $e_{\mathcal{A}}$. Neka su $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ unitalne algebre. Homomorfizam algebri $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ sa svojstvom $\varphi(e_{\mathcal{A}}) = e_{\mathcal{B}}$ zvat ćemo **unitalni homomorfizam**.

Liejeva algebra nad poljem K je vektorski prostor $\mathfrak{g}$ na kome je zadana bilinearna binarna operacija $(x,y) \mapsto [x,y]$ sa sljedeća dva svojstva:

(LA1) $[x,x] = 0 \ \forall x \in \mathfrak{g}$ (antikomutativnost);

(LA2) $[x,[y,z]] + [y,[z,x]] + [z,[x,y]] = 0 \ \forall x,y,z \in \mathfrak{g}$ (Jacobijev identitet).

Naravno, iz (LA1) slijedi $[x,y] = -[y,x] \ \forall x,y \in \mathfrak{g}$.

Zadatak 1.2.1. *Neka je $\mathcal{A}$ asocijativna algebra. Stavimo*

$$[x,y] = xy - yx, \qquad x,y \in \mathcal{A}.$$

Dokažite da $\mathcal{A}$ uz tako definiranu operaciju $(x,y) \mapsto [x,y]$ postaje Liejeva algebra.

Zbog definicije u zadatku 1.2.1. operacija $(x,y) \mapsto [x,y]$ u bilo kojoj Liejevoj algebri $\mathfrak{g}$ obično se zove **komutator**.

Posebno, za vektorski prostor V asocijativna algebra $L(V)$ postaje Liejeva algebra uz komutator

$$[A,B] = AB - BA, \qquad A,B \in L(V).$$

Kada imamo na umu strukturu Liejeve algebre umjesto $L(V)$ pisat ćemo $\mathfrak{gl}(V)$.

Ako skup S ima strukturu grupe, asocijativne algebre, unitalne algebre ili Liejeve algebre, i s tom strukturom ga označimo sa $\mathcal{S}$, među svim $S-$modulima uočit ćemo one koji nose odgovarajuću dodatnu strukturu i takve ćemo zvati $\mathcal{S}-$modulima:

- Ako je G grupa, $G-$modul nad poljem K je vektorski prostor V nad poljem K koji je modul nad skupom G i vrijedi

$$(ab)v = a(bv) \quad \forall a,b \in G \quad \text{i} \quad \forall v \in V \qquad \text{i} \qquad e_G v = v \quad \forall v \in V.$$

  Tada je svaki operator $v \mapsto av$, $a \in G$, invertibilan i njegov je invers $v \mapsto a^{-1}v$.

- Ako je $\mathcal{A}$ asocijativna algebra nad poljem k i K je proširenje polja k, $\mathcal{A}-$modul nad poljem K je vektorski prostor nad K koji je modul nad skupom $\mathcal{A}$ i vrijedi

$$(a+b)v = av + bv, \quad (\lambda a)v = \lambda av \quad \text{i} \quad (ab)v = a(bv) \qquad \forall a,b \in \mathcal{A}, \quad \forall \lambda \in k \quad \text{i} \quad \forall v \in V.$$

- Ako je $\mathcal{A}$ unitalna algebra, pored prethodnog zahtijevamo još da je

$$e_{\mathcal{A}} v = v \qquad \forall v \in V.$$

- Ako je $\mathfrak{g}$ Liejeva algebra nad poljem k i K proširenje polja k, $\mathfrak{g}-$modul nad poljem K je vektorski prostor V nad poljem K koji je modul nad skupom $\mathfrak{g}$ i vrijedi

$$(a+b)v = av+bv, \quad (\lambda a)v = \lambda av \quad \text{i} \quad [a,b]v = a(bv)-b(av) \qquad \forall a,b \in \mathfrak{g}, \quad \forall \lambda \in k \quad \text{i} \quad \forall v \in V.$$

Pripadne reprezentacije zovu se reprezentacije te strukture:

- **Reprezentacija grupe** G na vektorskom prostoru V nad poljem K je homomorfizam grupa $\pi : G \to GL(V)$. Drugim riječima, reprezentacija G na V je preslikavanje $\pi\colon G \to L(V)$ takvo da vrijedi
$$\pi(ab) = \pi(a)\pi(b) \quad \forall a, b \in G, \qquad \pi(e) = I.$$
- **Reprezentacija asocijativne algebre** $\mathcal{A}$ nad poljem k na vektorskom prostoru V nad poljem K (koje je proširenje polja k) je homomorfizam asocijativnih algebri nad poljem k $\pi : \mathcal{A} \to L(V)$. Dakle, reprezentacija $\mathcal{A}$ na V je preslikavanje $\pi\colon \mathcal{A} \to L(V)$ takvo da vrijedi
$$\pi(\alpha x + \beta y) = \alpha\pi(x) + \beta\pi(y), \qquad \pi(xy) = \pi(x)\pi(y), \qquad \forall x, y \in \mathcal{A},\ \forall \alpha, \beta \in k.$$
- **Reprezentacija unitalne algebre** $\mathcal{A}$ nad k na vektorskom prostoru V nad $K \supseteq k$ je homomorfizam unitalnih algebri nad poljem k $\pi : \mathcal{A} \to L(V)$. Drugim riječima, reprezentacija unitalne algebre $\mathcal{A}$ na prostoru V je reprezentacija asocijativne algebre $\mathcal{A}$ takva da vrijedi
$$\pi\left(e_{\mathcal{A}}\right) = I.$$
- **Reprezentacija Liejeve algebre** $\mathfrak{g}$ nad poljem k na vektorskom prostoru V nad poljem $K \supseteq k$ je homomorfizam Liejevih algebri nad poljem k $\pi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$. Dakle, reprezentacija $\mathfrak{g}$ na V je preslikavanje $\pi\colon \mathfrak{g} \to L(V)$ takvo da vrijedi
$$\pi(\alpha x + \beta y) = \alpha\pi(x) + \beta\pi(y), \qquad \pi([x, y]) = \pi(x)\pi(y) - \pi(y)\pi(x), \qquad \forall x, y \in \mathfrak{g},\ \forall \alpha, \beta \in k.$$

U svakom od ta četiri slučaja vektorski prostor V zovemo **prostorom reprezentacije** π. Ako je prostor V konačnodimenzionalan, **reprezentacija** π zove se **konačnodimenzionalna** i tada se prirodan broj (ili nula) $d(\pi) = \dim V$ zove **dimenzija reprezentacije** π.

Ako je reprezentacija π injektivni homomorfizam, kažemo da je π **vjerna reprezentacija**. Ako se radi o reprezentaciji grupe G, onda je jezgra
$$H = \ker \pi = \{a \in G;\ \pi(a) = I\}$$
reprezentacije π normalna podgrupa grupe G i prijelazom na kvocijent dobivamo vjernu reprezentaciju $\tilde{\pi}$ kvocijentne grupe G/H :
$$\tilde{\pi}(aH) = \pi(a), \qquad aH \in G/H.$$
Slično, ako se radi o reprezentaciji asocijativne, unitalne ili Liejeve algebre $\mathcal{A}$, onda je jezgra
$$\mathcal{I} = \ker \pi = \{a \in \mathcal{A};\ \pi(a) = 0\}$$
reprezentacije π ideal u toj algebri $\mathcal{A}$ i prijelazom na kvocijent dobivamo vjernu reprezentaciju asocijativne, unitalne ili Liejeve kvocijentne algebre $\mathcal{A}/\mathcal{I}$:
$$\tilde{\pi}(a + \mathcal{I}) = \pi(x), \qquad x + \mathcal{I} \in \mathcal{A}/\mathcal{I}.$$

Napomenimo da je važna primjena teorema 1.1.9. na tzv. **unitarnu reprezentaciju** π **grupe** G, tj. takvu da je svaki operator reprezentacije $\pi(g)$, $g \in G$, unitaran:
$$\pi(g)^* = \pi\left(g^{-1}\right) \qquad \forall g \in G.$$

Druga je važna primjena tog teorema na tzv. **antihermitsku reprezentaciju** π **realne Liejeve algebre** $\mathfrak{g}$ na realnom ili kompleksnom unitarnom prostoru V, tj. takvu da je svaki operator reprezentacije $\pi(x)$, $x \in \mathfrak{g}$, antihermitski:

$$\pi(x)^* = -\pi(x) \qquad \forall x \in \mathfrak{g}.$$

U tim slučajevima iz teorema 1.1.9. neposredno slijedi:

Teorem 1.2.1. *Neka je V konačnodimenzionalan realan ili kompleksan unitaran prostor i neka je π ili unitarna reprezentacija grupe G ili antihermitska reprezentacija realne Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ na prostoru V. Tada je reprezentacija π potpuno reducibilna.*

Zadatak 1.2.2. *Neka je S_n simetrična grupa reda n tj. grupa svih permutacija skupa $\{1, 2, \ldots, n\}$ i neka je V $n-$dimenzionalan vektorski prostor nad poljem K s bazom $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$. Za $\sigma \in S_n$ neka je $\pi(\sigma) \in L(V)$ definiran sa*

$$\pi(\sigma)e_i = e_{\sigma(i)}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Dokažite da je π vjerna reprezentacija grupe S_n na prostoru V.

Zadatak 1.2.3. *Neka je V realan ili kompleksan konačnodimenzionalan vektorski prostor i neka je π neprekidna reprezentacija aditivne grupe $\mathbb{R}$ na prostoru V :*

$$\pi(t+s) = \pi(t)\pi(s), \quad t, s \in \mathbb{R}; \qquad \pi(0) = I.$$

(a) *Dokažite da je preslikavanje $\pi : \mathbb{R} \to L(V)$ diferencijabilno.*

(b) *Dokažite da za*

$$A = \frac{d}{dt}\pi(t)\Big|_{t=0} = \lim_{t\to 0} \frac{\pi(t) - I}{t}$$

vrijedi

$$\pi(t) = e^{tA}.$$

Pri tome je za $B \in L(V)$ operator e^B definiran konvergentnim redom

$$e^B = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} B^k.$$

Uputa za (a) Uočite da iz neprekidnosti preslikavanja π slijedi da je

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \int_0^t \pi(t)\mathrm{d}t = \pi(0) = I.$$

Odatle zaključite da postoji $\alpha > 0$ takav da je operator

$$B = \int_0^{\alpha} \pi(t)\mathrm{d}t$$

regularan. Zatim dokažite da vrijedi

$$\pi(s) = B^{-1} \int_s^{s+\alpha} \pi(t)\mathrm{d}t \qquad \forall s \in \mathbb{R}.$$

Zadatak 1.2.4. *Pretpostavimo da je u zadatku 1.2.2. K polje karakteristike 0. Dokažite da su tada*

$$W = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i;\ \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n \in K,\ \sum_{i=1}^{n} \xi_i = 0 \right\} \qquad i \qquad U = Ku, \qquad \textit{gdje je} \quad u = \sum_{i=1}^{n} e_i,$$

$\pi-$invarijantni potprostori i da je $V = W \dot{+} U$. Nadalje, dokažite da je reprezentacija π_W ireducibilna.

Uputa za drugu tvrdnju: Neka je $\{0\} \neq X \leq W$ π_W-invarijantan potprostor. Ako je $x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \cdots + \xi_n e_n \in X$ i $x \neq 0$ tada $x \notin U$ pa postoje $i \neq j$ takvi da je $\xi_i \neq \xi_j$. Sada izračunajte $\pi(\sigma_{ij})x - x$, gdje je $\sigma_{ij} \in S_n$ transpozicija $\sigma_{ij}(i) = j$, $\sigma_{ij}(j) = i$, $\sigma_{ij}(k) = k$ za $k \neq i$ i $k \neq j$. Zaključite da je $e_i - e_j \in X$, a zatim djelovanjem $\pi(\sigma)$, $\sigma \in S_n$, da su $e_p - e_q \in X$ za sve $p, q \in \{1, 2, \dots, n\}$. Odatle zaključite da je $X = W$.

Zadatak 1.2.5. *Neka je $\mathcal{P}$ vektorski prostor svih polinomijalnih funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. Dokažite da je sa*

$$[\pi(t)f](s) = f(s - t), \quad t, s \in \mathbb{R}, \quad f \in \mathcal{P},$$

zadana reducibilna reprezentacija π aditivne grupe $\mathbb{R}$ na prostoru $\mathcal{P}$. Odredite sve $\pi-$invarijantne potprostore od $\mathcal{P}$. Za konačnodimenzionalan $\pi-$invarijantan potprostor V dokažite da je subreprezentacija π_V neprekidna i izračunajte

$$\left. \frac{d}{dt} \pi_V(t) \right|_{t=0}.$$

Neka je π reprezentacija grupe G na vektorskom prostoru V. Stavimo

$$V^G = \{v \in V;\ \pi(a)v = v\ \ \forall a \in G\}.$$

Vektori iz V^G zovu se $G-$**invarijante** reprezentacije π. Potprostor $G-$invarijanata V^G je očito $\pi-$invarijantan, odnosno, to je $G-$podmodul. Štoviše, svaki potprostor od V^G je $\pi-$invarijantan.

Neka su π i ρ reprezentacije grupe G na vektorskim prostorima V i W nad istim poljem K. Na prostoru linearnih operatora $L(V, W)$ tada možemo definirati reprezentaciju τ grupe G na sljedeći način:

$$\tau(a)(A) = \rho(a)A\pi(a^{-1}), \qquad A \in L(V, W), \quad a \in G.$$

Tada je očito $Hom_G(V, W)$ upravo $\tau-$invarijantan potprostor $L(V, W)^G$ svih $G-$invarijanata reprezentacije τ.

Neka je sada π reprezentacija Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ na vektorskom prostoru V. Tada se $\mathfrak{g}-$**invarijantama** zovu vektori $\pi-$invarijantnog potprostora

$$V^{\mathfrak{g}} = \{v \in V;\ \pi(x)v = 0\ \ \forall x \in \mathfrak{g}\}$$

Slično kao kod grupa, ako su π i ρ reprezentacije Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ na vektorskim prostorima V i W na prostoru $L(V, W)$ možemo definirati reprezentaciju τ od $\mathfrak{g}$ na sljedeći način:

$$\tau(x)(A) = \rho(x)A - A\pi(x), \qquad A \in L(V, W), \quad x \in \mathfrak{g}.$$

Tada je $Hom_{\mathfrak{g}}(V, W)$ upravo $\tau-$invarijantan potprostor $L(V, W)^{\mathfrak{g}}$ svih $\mathfrak{g}-$invarijanata reprezentacije τ.

Neka je π reprezentacija grupe G na vektorskom prostoru V nad poljem K. Na dualnom prostoru $V' = L(V, K)$ definiramo tzv. **kontragredijentnu** reprezentaciju π^t reprezentacije π :

$$\pi^t(a)f = f \circ \pi(a^{-1}), \qquad \text{tj.} \qquad (\pi^t(a)f)(v) = f(\pi(a^{-1})v), \qquad a \in G, \quad v \in V, \quad f \in V'.$$

Analogno, ako je π reprezentacija Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ na vektorskom prostoru V tada se na dualnom prostoru V' kontragredijentna reprezentacija π^t reprezentacije π definira ovako:

$$\pi^t(x)f = -f \circ \pi(x), \qquad \text{tj.} \qquad (\pi^t(x)f)(v) = -f(\pi(x)v), \qquad x \in \mathfrak{g}, \quad v \in V, \quad f \in V'.$$

Ovdje se u stvari radi o prethodnim konstrukcijama za trivijalnu reprezentaciju ρ grupe G na jednodimenzionalnom prostoru $W = K$ ($\rho(a) = 1$ $\forall a \in G$), odnosno, za trivijalnu reprezentaciju ρ Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ na jednodimenzionalnom prostoru $W = K$ ($\rho(x) = 0$ $\forall x \in \mathfrak{g}$).

Teorem 1.2.2. *Neka je π ireducibilna konačnodimenzionalna reprezentacija grupe G ili Liejeve algebre $\mathfrak{g}$. Tada je njoj kontragredijentna reprezentacija π^t također ireducibilna.*

Dokaz: Pretpostavimo da se radi o reprezentaciji grupe G. Neka je $U \subseteq V'$ π^t-invarijantan potprostor. Tada je njegov anihilator

$$U^\circ = \{x \in V;\ f(x) = 0 \quad \forall f \in U\}$$

potprostor od V koji je $\pi-$invarijantan:

$$x \in U^\circ,\ a \in G,\ f \in U \qquad \Longrightarrow \qquad f(\pi(a)x) = (\pi^t(a^{-1})f)(x) = 0,$$

jer je $\pi^t(a^{-1})f \in U$. Dakle,

$$x \in U^\circ,\ a \in G \qquad \Longrightarrow \qquad \pi(a)x \in U^\circ.$$

Kako je reprezentacija π ireducibilna, slijedi da je ili $U^\circ = \{0\}$ ili $U^\circ = V$. Znamo da je

$$\dim V' = \dim V \qquad \text{i} \qquad \dim U^\circ = \dim V - \dim U.$$

Dakle, ili je $\dim U = \dim V'$, tj. $U = V'$, ili je $\dim U = 0$, tj. $U = \{0\}$. Time je dokazano da je reprezentacija π^t ireducibilna.

1.3 Grupovna algebra

Neka je G grupa i K polje. Sa $K[G]$ ćemo označavati vektorski prostor svih funkcija $\varphi : G \to K$ za koje je nosač

$$Supp\,\varphi = \{a \in G;\ \varphi(a) \neq 0\}$$

konačan skup. Za $a \in G$ definiramo $\delta_a \in K[G]$ sa

$$\delta_a(b) = \begin{cases} 1 & \text{ako je } b = a \\ \\ 0 & \text{ako je } b \neq a \end{cases}.$$

Tada je očito $\{\delta_a;\ a \in G\}$ baza vektorskog prostora $K[G]$ nad poljem K; za svaku funkciju $\varphi \in K[G]$ je

$$\varphi = \sum_{a \in G} \varphi(a)\delta_a. \tag{1.3}$$

Za $\varphi, \psi \in K[G]$ definiramo njihovu **konvoluciju** $\varphi * \psi : G \to K$ na sljedeći način:

$$(\varphi * \psi)(a) = \sum_{b \in G} \varphi(b)\psi(b^{-1}a), \qquad a \in G.$$

Gornja suma je dobro definirana jer je samo konačno mnogo njenih članova različito od nule.

Propozicija 1.3.1. (a) *Za $\varphi, \psi \in K[G]$ je $\varphi * \psi \in K[G]$.*

(b) *Konvolucija $(\varphi, \psi) \mapsto \varphi * \psi$ definira na $K[G]$ strukturu unitalne algebre. Jedinica u algebri $K[G]$ je δ_e.*

(c) *Za $a, b \in G$ vrijedi $\delta_a * \delta_b = \delta_{ab}$.*

Zadatak 1.3.1. *Dokažite propoziciju 1.3.1.*

Unitalna algebra $K[G]$ zove se **grupovna algebra** grupe G nad poljem K. Primijetimo da se za konačnu grupu G prostor $K[G]$ sastoji od svih funkcija sa G u K. U tom slučaju je $\dim K[G] = |G|$. Ako je grupa G beskonačna, prostor $K[G]$ je beskonačnodimenzionalan.

Teorem 1.3.2. (a) *Neka je π reprezentacija grupe G na vektorskom prostoru V nad poljem K. Za $\varphi \in K[G]$ definiramo $\tilde{\pi}(\varphi) : V \to V$ relacijom*

$$\tilde{\pi}(\varphi) = \sum_{a \in G} \varphi(a)\pi(a).$$

Tada je $\varphi \mapsto \tilde{\pi}(\varphi)$ reprezentacija unitalne algebre $K[G]$ na vektorskom prostoru V.

(b) *Neka je ρ reprezentacija unitalne algebre $K[G]$ na vektorskom prostoru V nad poljem K. Za $a \in G$ definiramo $\hat{\rho}(a) : V \to V$ relacijom*

$$\hat{\rho}(a) = \rho(\delta_a).$$

Tada je $a \mapsto \hat{\rho}(a)$ reprezentacija grupe G na vektorskom prostoru V.

(c) *Preslikavanja $\pi \mapsto \tilde{\pi}$ iz (a) i $\rho \mapsto \hat{\rho}$ iz (b) su međusobno inverzna. Tj. ako je π reprezentacija od G onda je $\hat{\tilde{\pi}} = \pi$, a ako je ρ reprezentacija od $K[G]$ onda je $\tilde{\hat{\rho}} = \rho$.*

(*d*) *Uz oznaku iz* (*a*) *potprostor* X *prostora* V *je* $\pi-$*invarijantan ako i samo ako je on* $\tilde{\pi}-$*invarijantan.*

(*e*) *Neka su* π *i* ρ *reprezentacije grupe* G *na vektorskim prostorima* V *i* W *nad poljem* K *i* $\tilde{\pi}$ *i* $\tilde{\rho}$ *pripadne reprezentacije unitalne algebre* $K[G]$ *kao u* (*a*)*. Tada je*

$$Hom_G(V,W) = Hom_{K[G]}(V,W).$$

Posebno, reprezentacije π *i* ρ *grupe* G *su ekvivalentne ako i samo ako su ekvivalentne pripadne reprezentacije* $\tilde{\pi}$ *i* $\tilde{\rho}$ *unitalne algebre* $K[G]$*.*

Dokaz: (*a*) Očito je preslikavanje $\varphi \mapsto \tilde{\pi}(\varphi)$ linearno. Nadalje, za $\varphi, \psi \in K[G]$ imamo

$$\tilde{\pi}(\varphi * \psi) = \sum_{a\in G}(\varphi * \psi)(a)\pi(a) = \sum_{a\in G}\left(\sum_{b\in G}\varphi(b)\psi(b^{-1}a)\right)\pi(a) = \sum_{b\in G}\varphi(b)\left(\sum_{a\in G}\psi(b^{-1}a)\pi(a)\right).$$

Za svako fiksno $b \in G$ u unutarnjoj sumi s desne strane izvršimo zamjenu sumacije po $a \in G$ sumacijom po $c = b^{-1}a$ (dakle, $a = bc$):

$$\sum_{a\in G}\psi(b^{-1}a)\pi(a) = \sum_{c\in G}\psi(c)\pi(bc) = \sum_{c\in G}\psi(c)\pi(b)\pi(c) = \pi(b)\sum_{c\in G}\psi(c)\pi(c) = \pi(b)\tilde{\pi}(\psi).$$

Dakle,

$$\tilde{\pi}(\varphi * \psi) = \sum_{b\in G}\varphi(b)\pi(b)\tilde{\pi}(\psi) = \tilde{\pi}(\varphi)\tilde{\pi}(\psi).$$

Time je dokazano da je $\varphi \mapsto \tilde{\pi}(\varphi)$ reprezentacija asocijativne algebre $K[G]$ na prostoru V. Nadalje, za svaki $a \in G$ vrijedi

$$\tilde{\pi}(\delta_a) = \sum_{b\in G}\delta_a(b)\pi(b) = \pi(a).$$

Posebno je $\tilde{\pi}(\delta_e) = \pi(e) = I_V$. Dakle, $\varphi \mapsto \tilde{\pi}(\varphi)$ je reprezentacija unitalne algebre $K[G]$ na prostoru V.

(*b*) Prema tvrdnji (*c*) propozicije 1.3.1. imamo

$$\hat{\rho}(ab) = \rho(\delta_{ab}) = \rho(\delta_a * \delta_b) = \rho(\delta_a)\rho(\delta_b) = \hat{\rho}(a)\hat{\rho}(b), \qquad \hat{\rho}(e) = \hat{\rho}(\delta_e) = I_V.$$

Dakle, $a \mapsto \hat{\rho}(a)$ je reprezentacija grupe G na vektorskom prostoru V.

(*c*) Za reprezentaciju π grupe G i za $a \in G$ imamo

$$\hat{\tilde{\pi}}(a) = \tilde{\pi}(\delta_a) = \sum_{b\in G}\delta_a(b)\pi(b) = \pi(a).$$

Dakle, vrijedi $\hat{\tilde{\pi}} = \pi$. Nadalje, ako je ρ reprezentacija unitalne algebre $K[G]$ i $\varphi \in K[G]$, onda zbog (1.3) imamo

$$\tilde{\hat{\rho}}(\varphi) = \sum_{a\in G}\varphi(a)\hat{\rho}(a) = \sum_{a\in G}\varphi(a)\rho(\delta_a) = \rho\left(\sum_{a\in G}\varphi(a)\delta_a\right) = \rho(\varphi).$$

Dakle, vrijedi $\tilde{\hat{\rho}} = \rho$.

(*d*) Pretpostavimo da je potprostor X prostora V $\pi-$invarijantan, tj. invarijantan s obzirom na sve operatore $\pi(a)$, $a \in G$. Kako je prema definiciji reprezentacije $\tilde{\pi}$ operator $\tilde{\pi}(\varphi)$, $\varphi \in K[G]$, linearna kombinacija operatora $\pi(a)$, $a \in G$, slijedi da je potprostor X invarijantan s obzirom na sve operatore $\tilde{\pi}(\varphi)$, $\varphi \in K[G]$, tj. potprostor X je $\tilde{\pi}-$invarijantan.

Obratno, pretpostavimo da je potprostor X prostora V $\tilde{\pi}-$invarijantan, tj. invarijantan s obzirom na sve operatore $\tilde{\pi}(\varphi)$, $\varphi \in K[G]$. Kako je prema (c) $\pi(a) = \tilde{\pi}(\delta_a)$, neposredno slijedi da je potprostor X invarijantan s obzirom na sve operatore $\pi(a)$, $a \in G$, tj. potprostor X je $\pi-$invarijantan.

(e) Neka je $A \in Hom_G(V,W)$, tj. $A\pi(a) = \rho(a)A \ \forall a \in G$. Tada za $\varphi \in K[G]$ imamo

$$A\tilde{\pi}(\varphi) = A\sum_{a\in G}\varphi(a)\pi(a) = \sum_{a\in G}\varphi(a)A\pi(a) = \sum_{a\in G}\varphi(a)\rho(a)A = \tilde{\rho}(\varphi)A.$$

Dakle, $A \in Hom_{K[G]}(V,W)$ i time je dokazana inkluzija $Hom_G(V,W) \subseteq Hom_{K[G]}(V,W)$. Da dokažemo obrnutu inkluziju pretpostavimo da je $A \in Hom_{K[G]}(V,W)$ i neka je $a \in G$. Tada je prema (c) $\pi(a) = \tilde{\pi}(\delta_a)$ i $\rho(a) = \tilde{\rho}(\delta_a)$ pa imamo

$$A\pi(a) = A\tilde{\pi}(\delta_a) = \tilde{\rho}(\delta_a)A = \rho(a)A.$$

Dakle, $A \in Hom_G(V,W)$ i time je dokazana obrnuta inkluzija $Hom_{K[G]}(V,W) \subseteq Hom_G(V,W)$.

Zbog tvrdnji prethodnog teorema u daljnjem ćemo izostavljati oznake $\tilde{}$ i $\hat{}$. Dakle, ako je π reprezentacija grupe G onda ćemo s istim znakom π označavati reprezentaciju unitalne algebre $K[G]$ definiranu sa

$$\pi(\varphi) = \sum_{a\in G}\varphi(a)\pi(a), \qquad \varphi \in K[G].$$

Analogno, ako je π reprezentacija unitalne algebre $K[G]$ onda ćemo s istim znakom π označavati reprezentaciju grupe G definiranu sa

$$\pi(a) = \pi(\delta_a), \qquad a \in G.$$

Za $a \in G$ definiramo linearne operatore $\lambda(a), \rho(a) : K[G] \to K[G]$ na sljedeći način:

$$(\lambda(a)\varphi)(b) = \varphi\left(a^{-1}b\right), \qquad (\rho(a)\varphi)(b) = \varphi(ba), \qquad \varphi \in K[G],\ b \in G. \tag{1.4}$$

Propozicija 1.3.3. *(a) λ i ρ definirane sa (1.4) su reprezentacije grupe G na vektorskom prostoru $K[G]$.*

(b) Za $\varphi, \psi \in K[G]$ vrijedi $\lambda(\varphi)\psi = \varphi * \psi$ i $\rho(\varphi)\psi = \psi * \check{\varphi}$, gdje je funkcija $\check{\varphi} \in K[G]$ definirana sa $\check{\varphi}(a) = \varphi\left(a^{-1}\right)$, $a \in G$.

(c) Potprostor $X \neq K[G]$ je $\lambda-$invarijantan ako i samo ako je X lijevi ideal u algebri $K[G]$.

(d) Potprostor $X \neq K[G]$ je $\rho-$invarijantan ako i samo ako je X desni ideal u algebri $K[G]$.

Zadatak 1.3.2. *Dokažite propoziciju 1.3.3.*

Uputa: Za tvrdnju (b) pomoću definicija izračunajte $(\lambda(\varphi)\psi)(a)$, $(\varphi * \psi)(a)$, $(\rho(\varphi)\psi)(a)$ i $(\psi * \check{\varphi})(a)$ za bilo koji $a \in G$. Za tvrdnje (c) i (d) koristite tvrdnju (b).

Reprezentacija λ zove se **lijeva regularna reprezentacija** grupe G nad poljem K. ρ je **desna regularna reprezentacija** grupe G nad poljem K.

Zadatak 1.3.3. *Dokažite da je $\lambda \simeq \rho$.*

Uputa: Uz oznaku iz tvrdnje (b) propozicije 1.3.3. izomorfizam T prostora $K[G]$ na samog sebe koji daje ekvivalenciju tih dviju reprezentacija dan je sa $T\varphi = \check{\varphi}$.

1.4 Tenzorski produkt

Razmotrit ćemo sada jednu važnu konstrukciju u teoriji reprezentacija, a to je tenzorski produkt.

Neka su V i W vektorski prostori nad poljem K. **Tenzorski produkt** prostora V i W je uređen par (T, φ), gdje je T vektorski prostor nad K, φ je bilinearno preslikavanje sa $V \times W$ u T i vrijedi tzv. *univerzalno svojstvo*:

> *Ako je S vektorski prostor nad K i $\psi : V \times W \to S$ je bilinearno preslikavanje, onda postoji jedinstven linearan operator $\chi : T \to S$ takav da je $\psi = \chi \circ \varphi$.*

Teorem 1.4.1. *Neka su V i W vektorski prostori nad poljem K.*

(a) *Postoji tenzorski produkt prostora V i W.*

(b) *Ako su (T, φ) i (S, ψ) tenzorski produkti prostora V i W, onda postoji jedinstven izomorfizam $\chi : T \to S$ takav da je $\psi = \chi \circ \varphi$.*

Dokaz: (a) Neka je $\mathcal{T}$ skup svih funkcija $f : V \times W \to K$ za koje je skup

$$\operatorname{Supp} f = \{(v, w) \in V \times W;\ f(v, w) \neq 0\}$$

konačan. $\mathcal{T}$ je vektorski prostor s operacijama definiranim po točkama:

$$(f+g)(v,w) = f(v,w) + g(v,w), \quad (\lambda f)(v,w) = \lambda f(v,w), \quad \lambda \in K, \quad f, g \in \mathcal{T}, \quad (v,w) \in V \times W.$$

Za $(x, y) \in V \times W$ definiramo $f_{(x,y)} \in \mathcal{T}$ ovako:

$$f_{(x,y)}(v,w) = \begin{cases} 1 & \text{ako je } v = x \text{ i } w = y \\ 0 & \text{ako je } v \neq x \text{ ili } w \neq y \end{cases}$$

Tada je $\{f_{(x,y)};\ (x,y) \in V \times W\}$ baza vektorskog prostora $\mathcal{T}$. Neka je $\mathcal{J}$ potprostor od $\mathcal{T}$ razapet skupom

$$\{f_{(\alpha x_1 + x_2, \beta y_1 + y_2)} - \alpha\beta f_{(x_1,y_1)} - \alpha f_{(x_1,y_2)} - \beta f_{(x_2,y_1)} - f_{(x_2,y_2)};\ \alpha, \beta \in K,\ x_1, x_2 \in V,\ y_1, y_2 \in W\}.$$

Neka je $T = \mathcal{T}/\mathcal{J}$ i neka je $\varphi : V \times W \to T$ definirano sa

$$\varphi(v, w) = f_{(v,w)} + \mathcal{J}.$$

Iz definicije potprostora $\mathcal{J}$ slijedi da je preslikavanje φ bilinearno. Dokazat ćemo da je par (T, φ) tenzorski produkt prostora V i W. Neka je S vektorski prostor i $\psi : V \times W \to S$ bilinearno preslikavanje. Definiramo tada linearan operator $X : \mathcal{T} \to S$ njegovim djelovanjem na bazi $\{f_{(x,y)};\ x \in V,\ y \in W\}$:

$$X f_{(x,y)} = \psi(x, y), \qquad (x, y) \in V \times W.$$

Iz bilinearnosti preslikavanja ψ slijedi da je potprostor $\mathcal{J}$ sadržan u jezgri operatora X, pa prijelazom na kvocijent dolazimo do linearnog operatora $\chi : T \to S$:

$$\chi(f + \mathcal{J}) = Xf, \qquad f \in \mathcal{T}.$$

Tada za $(x, y) \in V \times W$ nalazimo:

$$(\chi \circ \varphi)(x, y) = \chi(\varphi(x, y)) = \chi(f_{(x,y)} + \mathcal{J}) = X f_{(x,y)} = \psi(x, y).$$

Dakle, vrijedi $\chi \circ \varphi = \psi$. Treba još dokazati da je takav χ jedinstven. No to je očigledno, jer je $\{f_{(x,y)};\ x \in V,\ y \in W\}$ baza prostora $\mathcal{T}$, dakle, skup $\{f_{(x,y)} + \mathcal{J};\ x \in V,\ y \in W\}$ razapinje čitav kvocijentni prostor $T = \mathcal{T}/\mathcal{J}$.

(b) Budući da su (T, φ) i (S, ψ) tenzorski produkti prostora V i W postoje jedinstveni linearni operatori $\chi : T \to S$ i $\omega : S \to T$ takvi da je $\psi = \chi \circ \varphi$ i $\varphi = \omega \circ \psi$. Tada je

$$(\omega \circ \chi) \circ \varphi = \omega \circ (\chi \circ \varphi) = \omega \circ \psi = \varphi = I_T \circ \varphi.$$

Zbog jedinstvenosti u univerzalnom svojstvu para (T, φ) slijedi $\omega \circ \chi = I_T$. Sasvim analogno nalazimo da je $\chi \circ \omega = I_S$. Dakle, $\chi : T \to S$ je izomorfizam.

Time je teorem u potpunosti dokazan.

U daljnjem (T, φ) je tenzorski produkt vektorskih prostora V i W. Pisat ćemo tada

$$T = V \otimes W \qquad \text{i} \qquad v \otimes w = \varphi(v, w), \quad v \in V, w \in W.$$

Uz takve oznake bilinearnost φ ima za posljedicu:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i\right) \otimes \left(\sum_{j=1}^{m} \beta_j w_j\right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \alpha_i \beta_j v_i \otimes w_j$$

za $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m \in K$, $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$, $w_1, w_2, \ldots, w_m \in W$.

Teorem 1.4.2. *Neka je $\{v_i;\ i \in I\}$ baza vektorskog prostora V i $\{w_j;\ j \in J\}$ baza vektorskog prostora W. Tada je $\{v_i \otimes w_j;\ i \in I,\ j \in J\}$ baza njihovog tenzorskog produkta $V \otimes W$.*

Dokaz: Zbog jedinstvenosti izomorfizma između bilo koja dva tenzorska produkta prostora V i W (tvrdnja (b) teorema 1.4.1.) možemo pretpostaviti da su $T = V \otimes W$ i φ upravo oni koji su konstruirani u dokazu tvrdnje (a) teorema 1.4.1. Neka je $t \in T$ i neka je $f \in \mathcal{T}$ takva da je $t = f + \mathcal{J}$. Tada za neke $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n) \in V \times W$ i za neke $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in K$ vrijedi:

$$f = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k f_{(x_k, y_k)}.$$

Nadalje, kako su $\{v_i;\ i \in I\}$ i $\{w_j;\ j \in J\}$ baze vektorskih prostora V i W, imamo

$$x_k = \sum_{i \in I} \beta_{ik} v_i \qquad \text{i} \qquad y_k = \sum_{j \in J} \gamma_{jk} w_j,$$

gdje je u svakoj od tih suma samo konačno mnogo članova različito do nule. Tada je

$$f - \sum_{k=1}^{n} \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \alpha_k \beta_{ik} \gamma_{jk} f_{(v_i, w_k)} \in \mathcal{J}.$$

Stoga je

$$t = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \alpha_k \beta_{ik} \gamma_{jk} v_i \otimes w_j$$

i time smo dokazali da skup $\{v_i \otimes w_j;\ i \in I,\ j \in J\}$ razapinje prostor $T = V \otimes W$.

Treba još dokazati da je taj skup linearno nezavisan. U tu svrhu za par $(p, q) \in I \times J$ definiramo bilinearno preslikavanje $\psi_{pq} : V \times W \to K$ formulom:

$$\psi_{pq}\left(\sum_{i \in I} \alpha_i v_i, \sum_{j \in J} \beta_j w_j\right) = \alpha_p \beta_q.$$

Neka je $\chi_{pq} : V \otimes W \to K$ jedinstven linearan funkcional takav da je $\psi_{pq} = \chi_{pq} \circ \varphi$, tj.

$$\psi_{pq}(v, w) = \chi_{pq}(v \otimes w), \qquad v \in V, \quad w \in W.$$

Tada vrijedi:

$$\chi_{pq}(v_i \otimes w_j) = \psi_{pq}(v_i, w_j) = \delta_{pi}\delta_{qj}.$$

Odatle neposredno slijedi da su vektori $v_i \otimes w_j$ linearno nezavisni.

Posebno, ako su vektorski prostori V i W konačnodimenzionalni onda je

$$\dim V \otimes W = (\dim V) \cdot (\dim W).$$

Zadatak 1.4.1. *Neka su V i W vektorski prostori nad istim poljem K.*

(a) *Neka su $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$ linearno nezavisni i neka su $w_1, w_2, \ldots, w_m \in W$ linearno nezavisni. Dokažite da su $v_i \otimes w_j \in V \otimes W$ ($1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m$) linearno nezavisni.*

(b) *Neka je $a \in V \otimes W$, $a \neq 0$. Dokažite da postoje $n \in \mathbb{N}$, linearno nezavisni $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$ i linearno nezavisni $w_1, w_2, \ldots, w_n \in W$ takvi da je*

$$a = v_1 \otimes w_1 + v_2 \otimes w_2 + \cdots + v_n \otimes w_n.$$

Potpuno analogno tenzorskom produktu $V \otimes W$ definira se tenzorski produkt $V_1 \otimes V_2 \otimes \cdots \otimes V_n$ više od dva vektorska prostora. Jedina je razlika što se umjesto bilinearnih preslikavanja definiranih na $V \times W$ promatraju preslikavanja definirana na $V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_n$ koja su multilinearna, tj. linearna u svakoj varijabli kad se ostalih $n - 1$ varijabli fiksiraju.

Tenzorski produkt je do na izomorfizam asocijativan i u skladu s višestrukim tenzorskim produktima:

Zadatak 1.4.2. *Neka su V, W i U vektorski prostori nad istim poljem K. Dokažite da postoje jedinstveni linearni operatori*

$$A : (V \otimes W) \otimes U \to V \otimes (W \otimes U) \qquad i \qquad B : (V \otimes W) \otimes U \to V \otimes W \otimes U$$

takvi da je

$$A[(v \otimes w) \otimes u] = v \otimes (w \otimes u) \qquad i \qquad B[(v \otimes w) \otimes u] = v \otimes w \otimes u \qquad \forall v \in V,\, w \in W,\, u \in U.$$

Nadalje, dokažite da su A i B izomorfizmi vektorskih prostora.

Neka su sada V_1, V_2, W_1 i W_2 vektorski prostori nad istim poljem K i neka su $A_1 \in L(V_1, W_1)$ i $A_2 \in L(V_2, W_2)$. Tada je

$$(v_1, v_2) \mapsto A_1 v_1 \otimes A_2 v_2, \qquad v_1 \in V_1,\ v_2 \in V_2,$$

bilinearno preslikavanje s Kartezijevog produkta $V_1 \times V_2$ u vektorski prostor $W_1 \otimes W_2$. Zbog univerzalnog svojstva postoji jedinstven linearan operator $B : V_1 \otimes V_2 \to W_2 \otimes W_2$ takav da je $B(v_1 \otimes v_2) = A_1 v_1 \otimes A_2 v_2$ za svaki $v_1 \in V_1$ i svaki $v_2 \in V_2$. Taj ćemo operator označavati znakom $A_1 \underline{\otimes} A_2$. Dakle,

$$(A_1 \underline{\otimes} A_2)(v_1 \otimes v_2) = A_1 v_1 \otimes A_2 v_2, \qquad v_1 \in V_1,\ v_2 \in V_2.$$

Teorem 1.4.3. *Neka su V_1, V_2, W_1 i W_2 vektorski prostori nad poljem K. Postoji jedinstveno linearno preslikavanje $\Phi : L(V_1, W_1) \otimes L(V_2, W_2) \to L(V_1 \otimes V_2, W_1 \otimes W_2)$ takvo da je*

$$\Phi(A_1 \otimes A_2) = A_1 \underline{\otimes} A_2 \qquad \forall A_1 \in L(V_1, W_1) \quad i \quad \forall A_2 \in L(V_2, W_2).$$

Ako su vektorski prostori V_1, V_2, W_1 i W_2 konačnodimenzionalni onda je Φ izomorfizam.

Dokaz: Postojanje i jedinstvenost takvog linearnog preslikavanja Φ slijede iz univerzalnog svojstva tenzorskog produkta, jer je preslikavanje $(A_1, A_2) \mapsto A_1 \underline{\otimes} A_2$ sa $L(V_1, W_1) \times L(V_2, W_2)$ u $L(V_1 \otimes V_2, W_1 \otimes W_2)$ očigledno bilinearno.

Pretpostavimo sada da su vektorski prostori V_1, V_2, W_1 i W_2 konačnodimenzionalni. Tada imamo jednakost dimenzija:

$$\dim L(V_1, W_1) \otimes L(V_2, W_2) = (\dim L(V_1, W_1)) \cdot (\dim L(V_2, W_2)) =$$

$$= (\dim V_1) \cdot (\dim W_1) \cdot (\dim V_2) \cdot (\dim W_2) = (\dim V_1 \otimes V_2) \cdot (\dim W_1 \otimes W_2) = \dim L(V_1 \otimes V_2, W_1 \otimes W_2).$$

Stoga je za dokaz da je Φ izomorfizam dovoljno dokazati da je Φ injekcija.

Neka je $C \in L(V_1, W_1) \otimes L(V_2, W_2)$ takav da je $\Phi(C) = 0$. Neka su redom $\{e_1, \ldots, e_n\}$, $\{f_1, \ldots, f_m\}$, $\{g_1, \ldots, g_p\}$ i $\{h_1, \ldots, h_q\}$ baze vektorskih prostora V_1, V_2, W_1 i W_2. Definiramo operatore $E_{ik} \in L(V_1, W_1)$ za $1 \le i \le p$, $1 \le k \le n$ i $F_{j\ell} \in L(V_2, W_2)$ za $1 \le j \le q$, $1 \le \ell \le m$ ovako:

$$E_{ik} e_r = \delta_{kr} g_i \quad (1 \le r \le n), \qquad F_{j\ell} f_s = \delta_{\ell s} h_j \quad (1 \le s \le m).$$

Znamo da je tada $\{E_{ik};\ 1 \le i \le p, 1 \le k \le n\}$ baza vektorskog prostora $L(V_1, W_1)$ i da je $\{F_{j\ell};\ 1 \le j \le q, 1 \le \ell \le m\}$ baza vektorskog prostora $L(V_2, W_2)$. Stoga je prema teoremu 1.4.2. $\{E_{ik} \otimes F_{j\ell};\ 1 \le i \le p, 1 \le k \le n, 1 \le j \le q, 1 \le \ell \le m\}$ baza vektorskog prostora $L(V_1, W_1) \otimes L(V_2, W_2)$. Stoga postoje $\alpha_{ikj\ell} \in K$ takvi da je

$$C = \sum_{i=1}^{p} \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{q} \sum_{\ell=1}^{m} \alpha_{ikj\ell} E_{ik} \otimes F_{j\ell}.$$

Sada za $r \in \{1, 2, \ldots, n\}$ i $s \in \{1, 2, \ldots, m\}$ imamo redom

$$0 = (\Phi(C))(e_r \otimes f_s) = \sum_{i=1}^{p} \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{q} \sum_{\ell=1}^{m} \alpha_{ikj\ell} (\Phi(E_{ik} \otimes F_{j\ell}))(e_r \otimes f_s) =$$

$$= \sum_{i=1}^{p} \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{q} \sum_{\ell=1}^{m} \alpha_{ikj\ell} (E_{ik} \underline{\otimes} F_{j\ell})(e_r \otimes f_s) = \sum_{i=1}^{p} \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{q} \sum_{\ell=1}^{m} \alpha_{ikj\ell} (E_{ik} e_r \otimes F_{j\ell} f_s) =$$

$$= \sum_{i=1}^{p} \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{q} \sum_{\ell=1}^{m} \alpha_{ikj\ell} \delta_{kr} \delta_{\ell s} g_i \otimes h_j = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{q} \alpha_{irjs} g_i \otimes h_j.$$

Međutim, vektori $g_i \otimes h_j$ tvore bazu u vektorskom prostoru $W_1 \otimes W_2$ pa su linearno nezavisni. Slijedi da je $\alpha_{irjs} = 0$ za $i = 1, 2, \ldots, p$ i $j = 1, 2, \ldots, q$. Kako su $r \in \{1, 2, \ldots, n\}$ i $s \in \{1, 2, \ldots, m\}$ bili proizvoljni, slijedi da su svi koeficijenti α_{irjs} jednaki nuli. Dakle, $C = 0$ i time je injektivnost preslikavanja Φ dokazana.

Zbog teorema 1.4.3. u slučaju konačnodimenzionalnih prostora ćemo pomoću preslikavanja Φ identificirati vektorske prostore $L(V_1, W_1) \otimes L(V_2, W_2)$ i $L(V_1 \otimes V_2, W_1 \otimes W_2)$. Dakle,

$$(A_1 \otimes A_2)(v_1 \otimes v_2) = A_1 v_1 \otimes A_2 v_2, \qquad A_1 \in L(V_1, W_1), \quad A_2 \in L(V_2, W_2), \quad v_1 \in V_1, \quad v_2 \in V_2.$$

Unatoč opasnosti od pogrešnog tumačenja pisat ćemo $A_1 \otimes A_2$ umjesto $A_1 \underline{\otimes} A_2$ i onda kad neki od promatranih vektorskih prostora nije konačnodimenzionalan.

Zadatak 1.4.3. *Neka su V_1, V_2, W_1, W_2, U_1 i U_2 vektorski prostori nad poljem K i $A \in L(V_1, W_1)$, $B \in L(W_1, U_1)$, $C \in L(V_2, W_2)$ i $D \in L(W_2, U_2)$. Dokažite da je tada*

$$(B \otimes D)(A \otimes C) = BA \otimes DC.$$

Neka su sada π i ρ reprezentacije grupa G i H na vektorskim prostorima V i W nad poljem K. Formiramo Kartezijev (tj. direktan) produkt grupa $G \times H$ i tenzorski produkt vektorskih prostora $V \otimes W$ i za $(g, h) \in G \times H$ definiramo operator $(\pi \times \rho)(g, h) = \pi(g) \otimes \rho(h)$, tj.

$$(\pi \times \rho)(g, h)(v \otimes w) = \pi(g)v \otimes \rho(h)w, \qquad g \in G,\ h \in H,\ v \in V,\ w \in W.$$

Kako je očito $I_V \otimes I_W = I_{V \otimes W}$, iz zadatka 1.4.3. slijedi da je $\pi \times \rho$ reprezentacija grupe $G \times H$ na prostoru $V \otimes W$. Ta se reprezentacija zove **vanjski tenzorski produkt reprezentacija** π i ρ.

Ako je $H = G$, tj. ako su π i ρ reprezentacije grupe G onda možemo promatrati restrikciju reprezentacije $\pi \times \rho$ na podgrupu

$$\Delta(G) = \{(g, g);\ g \in G\}$$

grupe $G \times G$. Očito je $g \mapsto (g, g)$ izomorfizam grupe G na grupu $\Delta(G)$. Stoga restrikciju $(\pi \times \rho)|\Delta(G)$ možemo shvaćati kao reprezentaciju grupe G. Ta reprezentacija grupe G zove se **tenzorski produkt reprezentacija** π i ρ i označava $\pi \otimes \rho$. Dakle:

$$(\pi \otimes \rho)(g) = \pi(g) \otimes \rho(g), \qquad g \in G.$$

Provest ćemo sada sličnu konstrukciju za reprezentacije Liejevih algebri. Neka su π i ρ reprezentacije Liejevih algebri $\mathfrak{g}$ i $\mathfrak{h}$ na vektorskim prostorima V i W ($\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$, V i W su svi definirani nad istim poljem K). Kartezijev produkt $\mathfrak{g} \times \mathfrak{h}$ je Liejeva algebra nad K uz komutator definiran sa

$$[(x_1, y_1), (x_2, y_2)] = ([x_1, x_2], [y_1, y_2]), \qquad x_1, x_2 \in \mathfrak{g}, \quad y_1, y_2 \in \mathfrak{h}.$$

Za $(x, y) \in \mathfrak{g} \times \mathfrak{h}$ definiramo linearan operator $(\pi \times \rho)(x, y)$ na tenzorskom produktu $V \otimes W$ na sljedeći način:

$$(\pi \times \rho)(x, y) = \pi(x) \otimes I_W + I_V \otimes \rho(y),$$

tj.

$$(\pi \times \rho)(x, y)(v \otimes w) = \pi(x)v \otimes w + v \otimes \rho(y)w, \quad x \in \mathfrak{g},\ y \in \mathfrak{h},\ v \in V,\ w \in W.$$

Zadatak 1.4.4. *Dokažite da je na opisani način definirana reprezentacija $\pi \times \rho$ Liejeve algebre $\mathfrak{g} \times \mathfrak{h}$ na vektorskom prostoru $V \otimes W$.*

Reprezentacija $\pi \times \rho$ zove se **vanjski tenzorski produkt reprezentacija** π i ρ Liejevih algebri $\mathfrak{g}$ i $\mathfrak{h}$.

Neka je sada $\mathfrak{g} = \mathfrak{h}$, tj. π i ρ su reprezentacije Liejeve algebre $\mathfrak{g}$. Analogno kao kod grupa možemo promatrati restrikciju reprezentacije $\pi \times \rho$ na Liejevu podalgebru

$$\Delta(\mathfrak{g}) = \{(x, x);\ x \in \mathfrak{g}\}.$$

Sada je $x \mapsto (x, x)$ izomorfizam Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ na Liejevu algebru $\Delta(\mathfrak{g})$ pa restrikciju $(\pi \times \rho)|\Delta(\mathfrak{g})$ možemo shvaćati kao reprezentaciju Liejeve algebre $\mathfrak{g}$. Ta se reprezentacija od $\mathfrak{g}$ zove **tenzorski produkt reprezentacija** π i ρ Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ i označava sa $\pi \otimes \rho$. Dakle,

$$(\pi \otimes \rho)(x) = \pi(x) \otimes I_W + I_V \otimes \rho(x), \qquad x \in \mathfrak{g}.$$

Zadatak 1.4.5. *Neka su π i ρ reprezentacije grupa G i H (odnosno, Liejevih algebri $\mathfrak{g}$ i $\mathfrak{h}$ nad poljem K) na vektorskim prostorima V i W nad poljem K.*

(a) *Dokažite da postoji jedinstven linearan operator $\Psi : V' \otimes W \to L(V, W)$ takav da je*

$$[\Psi(f \otimes w)](v) = f(v)w, \qquad v \in V, \quad f \in V', \quad w \in W.$$

(b) *Dokažite da je Ψ iz (a) izomorfizam vektorskog prostora $V' \otimes W$ na vektorski prostor $L(V, W)$.*

(c) *Dokažite da izomorfizam Ψ iz (a) reprezentaciju $\pi^t \times \rho$ grupe $G \times H$ (odnosno, Liejeve algebre $\mathfrak{g} \times \mathfrak{h}$) prevodi u reprezentaciju τ na prostoru $L(V, W)$ zadanu sa:*

$$\tau(g, h)(A) = \rho(h)A\pi(g^{-1}), \qquad A \in L(V, W), \quad g \in G, \quad h \in H,$$

(*odnosno*

$$\tau(x, y)(A) = \rho(y)A - A\pi(x), \qquad A \in L(V, W), \quad x \in \mathfrak{g}, \quad y \in \mathfrak{h}).$$

Zadatak 1.4.6. *Neka su π i ρ konačnodimenzionalne reprezentacije grupa G i H (odnosno, Liejevih algebri $\mathfrak{g}$ i $\mathfrak{h}$) takve da je reprezentacija $\pi \times \rho$ grupe $G \times H$ (odnosno, Liejeve algebre $\mathfrak{g} \times \mathfrak{h}$) ireducibilna. Dokažite da su tada reprezentacije π i ρ ireducibilne.*

Tvrdnja zadatka 1.4.6. ima obrat ako je polje algebarski zatvoreno. Dokažimo najprije lemu:

Lema 1.4.4. *Neka je π ireducibilna reprezentacija grupe G (odnosno, Liejeve algebre $\mathfrak{g}$) na konačnodimenzionalnom vektorskom prostoru V nad algebarski zatvorenim poljem K i neka je W konačnodimenzionalan vektorski prostor nad K. Definiramo reprezentaciju $\tilde{\pi}$ grupe G (odnosno, Liejeve algebre $\mathfrak{g}$) na prostoru $V \otimes W$ sa $\tilde{\pi}(g) = \pi(g) \otimes I_W$. Neka je U $\tilde{\pi}-$invarijantan potprostor od $V \otimes W$ takav da je reprezentacija $\tilde{\pi}_U$ ireducibilna. Tada postoji $w \in W$ takav da je*

$$U = V \otimes w = \{v \otimes w;\ v \in V\}.$$

Dokaz: Pretpostavljat ćemo da se radi o reprezentaciji grupe; dokaz za reprezentaciju Liejeve algebre je sasvim analogan.

Neka je $\{w_1, w_2, \ldots, w_m\}$ baza vektorskog prostora W. Tada je očito

$$V \otimes W = V \otimes w_1 \dotplus V \otimes w_2 \dotplus \cdots \dotplus V \otimes w_m$$

i za svaki j subreprezentacija $\tilde{\pi}_{V \otimes w_j}$ je ireducibilna i ekvivalentna reprezentaciji π. Neka je U $\tilde{\pi}-$invarijantan potprostor od $V \otimes W$. Prema implikaciji $(c) \Rightarrow (a)$ u teoremu 1.1.5. postoji podskup $\{j_1, j_2, \ldots, j_k\}$ skupa $\{1, 2, \ldots, m\}$ takav da je

$$V \otimes W = U \dotplus V \otimes w_{j_1} \dotplus V \otimes w_{j_2} \dotplus \cdots \dotplus V \otimes w_{j_k}.$$

Neka je $\{1, 2, \ldots, m\} \setminus \{j_1, j_2, \ldots, j_k\} = \{i_1, i_2, \ldots, i_{m-k}\}$. Tada prema zadatku 1.1.3.(b) imamo:

$$\tilde{\pi}_U \simeq \tilde{\pi}_{V \otimes w_{i_1} \dotplus V \otimes w_{i_2} \dotplus \cdots \dotplus V \otimes w_{i_{m-k}}}.$$

Prema tome, ako je $\tilde{\pi}_U$ ireducibilna, onda je nužno $k = m - 1$ tj. postoji $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$ takav da je $\tilde{\pi}_U \simeq \tilde{\pi}_{V \otimes w_j} \simeq \pi$. Neka je $\varphi : U \to V$ izomorfizam koji ostvaruje ekvivalenciju reprezentacije $\tilde{\pi}_U$ s reprezentacijom π, tj. takav da je

$$\pi(g) \circ \varphi = \varphi \circ (\pi(g) \otimes I_W)|U.$$

Budući da je $\{w_1, w_2, \ldots, w_m\}$ baza vektorskog prostora W iz teorema 1.4.2. lako slijedi da za svaki vektor x iz $V \otimes W$ postoje jedinstveni vektori $v_1, v_2, \ldots, v_m \in V$ takvi da je

$$x = v_1 \otimes w_1 + v_2 \otimes w_2 + \cdots + v_m \otimes w_m. \tag{1.5}$$

Posebno, postoje linearni operatori $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m : U \to V$ takvi da je

$$u = \varphi_1(u) \otimes w_1 + \varphi_2(u) \otimes w_2 + \cdots + \varphi_m(u) \otimes w_m \qquad \forall u \in U.$$

Za svaki $g \in G$ i $u \in U$ imamo:

$$\varphi_1(\tilde{\pi}_U(g)u) \otimes w_1 + \varphi_2(\tilde{\pi}_U(g)u) \otimes w_2 + \cdots + \varphi_m(\tilde{\pi}_U(g)u) \otimes w_m = \tilde{\pi}_U(g)u = \tilde{\pi}(g)u =$$

$$= \tilde{\pi}(g)[\varphi_1(u) \otimes w_1 + \varphi_2(u) \otimes w_2 + \cdots + \varphi_m(u) \otimes w_m] =$$
$$= \pi(g)\varphi_1(u) \otimes w_1 + \pi(g)\varphi_2(u) \otimes w_2 + \cdots + \pi(g)\varphi_m(u) \otimes w_m.$$

Odatle zbog jedinstvenosti prikaza (1.5) slijedi

$$\varphi_j(\tilde{\pi}_U(g)u) = \pi(g)\varphi_j(u) \qquad \forall u \in U, \quad \forall g \in G, \quad j = 1, 2, \ldots, m,$$

odnosno,

$$\varphi_j \circ \tilde{\pi}(g) = \pi(g) \circ \varphi_j \qquad \forall g \in G, \quad j = 1, 2, \ldots, m.$$

Prema tome, $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m \in Hom_G(U, V)$. Stoga su $\varphi^{-1} \circ \varphi_1, \varphi^{-1} \circ \varphi_2, \ldots, \varphi^{-1} \circ \varphi_m \in End_G(U)$. Prema tvrdnji (c) Schurove leme (teorem 1.1.6.) postoje $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m \in K$ takvi da je

$$\varphi^{-1} \circ \varphi_j = \lambda_j I_U \quad \text{za} \quad j = 1, 2, \ldots, m.$$

Dakle,

$$\varphi_j = \lambda_j \varphi \quad \text{za} \quad j = 1, 2, \ldots, m.$$

Slijedi za svaki $u \in U$:

$$u = \lambda_1\varphi(u) \otimes w_1 + \lambda_2\varphi(u) \otimes w_2 + \cdots + \lambda_m\varphi(u) \otimes w_m = \varphi(u) \otimes (\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \cdots + \lambda_m w_m).$$

Kako je φ izomorfizam prostora U na prostor V, slijedi

$$U = V \otimes w \quad \text{za} \quad w = \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \cdots + \lambda_m w_m$$

i time je lema dokazana.

Teorem 1.4.5. *Neka su π i ρ konačnodimenzionalne ireducibilne reprezentacije grupa G i H (odnosno, Liejevih algebri $\mathfrak{g}$ i $\mathfrak{h}$) na vektorskim prostorima V i W nad algebarski zatvorenim poljem K. Tada je reprezentacija $\pi \times \rho$ grupe $G \times H$ (odnosno, Liejeve algebre $\mathfrak{g} \times \mathfrak{h}$) ireducibilna.*

Dokaz: Pretpostavljamo da se radi o reprezentacijama grupa. Neka je $U \neq \{0\}$ potprostor od $V \otimes W$ koji je $\pi \times \rho-$invarijantan. Potprostor U očito je $\tilde{\pi}-$invarijantan, gdje je $\tilde{\pi}$ reprezentacija grupe G na prostoru $V \otimes W$ zadana kao u lemi 1.4.4:

$$\tilde{\pi}(g) = \pi(g) \otimes I_W = (\pi \times \rho)(g, e_H), \qquad g \in G.$$

Prema lemi 1.4.4. postoji $w_0 \in W$, $w_0 \neq 0$, takav da $U \supseteq V \otimes w_0$. Za svaki $v \in V$ definiramo potprostor $W(v)$ prostora W ovako:

$$W(v) = \{w \in W;\ v \otimes w \in U\}.$$

Taj je potprostor $\rho-$invarijantan. Doista, kako je potprostor U $\pi \times \rho-$invarijantan, za $h \in H$ i $w \in W(v)$ imamo

$$v \otimes \rho(h)w = (\pi \times \rho)(e_G, h)(v \otimes w) \in U \qquad \Longrightarrow \qquad \rho(h)w \in W(v).$$

Nadalje, $w_0 \in W(v)$, pa slijedi $W(v) \neq \{0\}$ za svaki $v \in V$. Budući da je reprezentacija ρ ireducibilna, slijedi $W(v) = W$ za svaki $v \in V$. Dakle, $\{v \otimes w;\ v \in V,\ w \in W\} \subseteq U$, a odatle i iz teorema 1.4.2. slijedi $U = V \otimes W$.

Zadatak 1.4.7. *Dokažite teorem 1.4.5. u slučaju reprezentacija Liejevih algebri.*

Pretpostavka o algebarskoj zatvorenosti polja K je bitna, kao što pokazuje:

Zadatak 1.4.8. *Neka je $\mathbb{H}$ tijelo kvaterniona, G multiplikativna grupa $\mathbb{H} \setminus \{0\}$ i H multiplikativna grupa $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Neka je π reprezentacija grupe G na četverodimenzionalnom realnom vektorskom prostoru $\mathbb{H}$ definirana pomoću množenja*

$$\pi(\alpha)\beta = \alpha\beta, \qquad \alpha \in G, \quad \beta \in \mathbb{H}$$

i neka je ρ analogno definirana reprezentacija grupe H na dvodimenzionalnom realnom vektorskom prostoru $\mathbb{C}$. Dokažite da su reprezentacije π i ρ ireducibilne, ali da je reprezentacija $\pi \times \rho$ grupe $G \times H$ reducibilna.

1.5 Proširenje polja skalara

Neka je V vektorski prostor nad poljem k i neka je K proširenje polja k. Tada je K ujedno vektorski prostor nad poljem k, pa možemo formirati tenzorski produkt $K \otimes V$ i to je vektorski prostor nad poljem k. Definirat ćemo sada na aditivnoj grupi $W = K \otimes V$ strukturu vektorskog prostora nad poljem K. Za proizvoljan $\alpha \in K$ neka je $\psi_\alpha : K \times V \to W$ preslikavanje definirano ovako:

$$\psi_\alpha(\beta, v) = \alpha\beta \otimes v, \qquad \beta \in K, \quad v \in V.$$

Tada je preslikavanje ψ_α očito $k-$bilinearno, pa prema univerzalnom svojstvu tenzorskog produkta $W = K \otimes V$ postoji jedinstven $k-$linearan operator $\varphi_\alpha : W \to W$ takav da vrijedi

$$\varphi_\alpha(\beta \otimes v) = \alpha\beta \otimes V \qquad \forall\beta \in K \quad \text{i} \quad \forall v \in V.$$

Definiramo sada preslikavanje $(\alpha, w) \mapsto \alpha w$ sa $K \times W$ u W ovako:

$$\alpha w = \varphi_\alpha(w), \qquad \alpha \in K, \quad w \in W.$$

Zadatak 1.5.1. *Dokažite da uz tako definirano preslikavanje $K \times W \to W$ aditivna grupa $W = K \otimes V$ postaje vektorski prostor nad K, odnosno, da vrijedi*

(a) $\alpha(w + u) = \alpha v + \alpha u \ \forall\alpha \in K$ *i* $\forall w, u \in W$.

(b) $(\alpha + \beta)w = \alpha w + \beta w \ \forall\alpha, \beta \in K$ *i* $\forall w \in W$.

(c) $(\alpha\beta)w = \alpha(\beta w) \ \forall\alpha, \beta \in K$ *i* $\forall w \in W$.

(d) $1w = w \ \forall w \in W$.

Tako dobiven vektorski prostor nad K označavat ćemo sa V^K. Kažemo da je vektorski prostor V^K dobiven iz vektorskog prostora V **proširenjem polja skalara** sa k na K.

Teorem 1.5.1. *Neka je V vektorski prostor nad poljem k i neka je K proširenje polja k.*

(a) *$v \mapsto 1 \otimes v$ je injektivno $k-$linearno preslikavanje sa V u $V^K = K \otimes V$.*

U daljnjem preslikavanje iz (a) shvaćamo kao identifikaciju prostora V s $k-$potprostorom od V^K.

(b) *Vrijedi sljedeće univerzalno svojstvo:*

> *Ako je U vektorski prostor nad poljem K, svaki $k-$linearan operator $V \to U$ jedinstveno se proširuje do $K-$linearnog operatora $V^K \to U$.*

(c) *Ako je podskup $S \subseteq V$ linearno nezavisan nad k, on je kao podskup od V^K linearno nezavisan nad K.*

(d) *Ako podskup $S \subseteq V$ razapinje vektorski prostor V nad poljem k, onda S razapinje vektorski prostor V^K nad poljem K :*

$$V = span_k(S) \qquad \Longrightarrow \qquad V^K = span_K(S).$$

(e) *Ako je B baza vektorskog prostora V nad poljem k, onda je B baza vektorskog prostora V^K nad poljem K.*

Dokaz: (a) Za $\alpha, \beta \in k$ i $v, u \in V$ imamo

$$1 \otimes (\alpha v + \beta u) = 1 \otimes \alpha v + 1 \otimes \beta u = \alpha \otimes v + \beta \otimes u = \alpha(1 \otimes v) + \beta(1 \otimes u).$$

To pokazuje da je preslikavanje $v \mapsto 1 \otimes v$ sa V u V^K linearno nad poljem k. Pretpostavimo li da su $v, u \in V$ takvi da je $1 \otimes v = 1 \otimes u$, onda je $1 \otimes (v - u) = 0$. Kad bi bilo $v \neq u$, tj. $v - u \neq 0$, jednočlani podskupovi $\{1\} \subseteq K$ i $\{v-u\} \subseteq V$ bili bi linearno nezavisni nad k, pa bi prema tvrdnji (a) zadatka 1.4.1. i jednočlan skup $\{1 \otimes (v - u)\} = \{0\} \subseteq V^K$ bio linearno nezavisan nad k, a to je apsurdno. Ova kontradikcija pokazuje da je nužno $v = u$, i time je dokazana injektivnost preslikavanja $v \mapsto 1 \otimes v$.

(b) Neka je U vektorski prostor nad poljem K i neka je $A : V \to U$ $k-$linearan operator. Definiramo preslikavanje $B : K \times V \to U$ ovako:

$$B(\alpha, v) = \alpha A v, \qquad \alpha \in K, \quad v \in V.$$

Tada je očito B $k-$bilinearno preslikavanje, pa po univerzalnom svojstvu tenzorskog produkta $V^K = K \otimes V$ postoji $k-$linearan operator $C : V^K \to U$ takav da je

$$C(\alpha \otimes v) = B(\alpha, v) = \alpha A v \qquad \forall \alpha \in K \quad \text{i} \quad \forall v \in V.$$

Tada uz identifikaciju prostora V s $k-$potprostorom $1 \otimes V$ od V^K operator C proširuje operator A. Doista, za svaki $v \in V$ imamo

$$Cv = C(1 \otimes v) = 1Av = Av.$$

Nadalje, operator $C : V^K \to U$ je ne samo $k-$linearan, nego $K-$linearan. Doista, za $\alpha, \beta \in K$ i $v \in V$ imamo

$$C(\beta(\alpha \otimes v)) = C(\beta\alpha \otimes v) = \beta\alpha A v = \beta C(\alpha \otimes v),$$

a budući da skup $\{\alpha \otimes v;\ \alpha \in K,\ v \in V\}$ prema teoremu 1.4.2. razapinje nad poljem k čitav prostor $V^K = K \otimes V$, zaključujemo da je operator homogen nad poljem K, a kako je i aditivan, slijedi da je $K-$linearan.

Napokon, jedinstvenost $K-$linearnog proširenja operatora A slijedi iz činjenice da $V = 1 \otimes V$ razapinje prostor V^K nad poljem K.

Budući da je svaki linearno nezavisan podskup vektorskog prostora sadržan u nekoj bazi tog prostora, tvrdnja (c) slijedi iz tvrdnje (e). Nadalje, svaki podskup vektorskog prostora koji ga razapinje sadrži neku bazu tog vektorskog prostora, dakle i tvrdnja (d) slijedi iz tvrdnje (e).

Stoga treba još dokazati tvrdnju (e). Neka je B baza vektorskog prostora nad poljem k. Nadalje, neka je $C \subseteq K$ neka baza polja K promatranog kao vektorski prostor nad poljem k. Prema teoremu 1.4.2. tada je $C \otimes B = \{\alpha \otimes v;\ \alpha \in C,\ v \in B\}$ baza prostora $V^K = K \otimes V$ nad poljem k. Neka su sada $v_1, \ldots, v_n$ međusobno različiti elementi od B i dokažimo da su oni linearno nezavisni ne samo nad poljem k nego i nad poljem K. Pretpostavimo da su $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K$ takvi da vrijedi

$$0 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (1 \otimes v_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \otimes v_i.$$

Svaki α_i može se prikazati kao $k-$linearna kombinacija elemenata od C. Dakle, postoje međusobno različiti elementi $\gamma_1, \ldots, \gamma_m \in C$ i elementi $\beta_{ji} \in k$, $j = 1, \ldots, m$, $i = 1, \ldots, n$, takvi da je

$$\alpha_i = \sum_{j=1}^{m} \beta_{ji} \gamma_j, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Slijedi
$$0=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\otimes v_i=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\beta_{ji}\gamma_j\otimes v_i.$$
No budući da su vektori $\gamma_j\otimes v_i$ linearno nezavisni nad poljem k, zaključujemo da su nužno $\beta_{ji}=0$ za sve $j=1,\ldots,m$ i $i=1,\ldots,n$. Slijedi $\alpha_1=\cdots=\alpha_n=0$ i time je dokazana linearna nezavisnost vektora $v_1,\ldots,v_n$ nad poljem K. Kako su vektori $v_1,\ldots,v_n\in B$ bili proizvoljni, zaključujemo da je skup B linearno nezavisan nad poljem K.

Treba još dokazati da skup B razapinje vektorski prostor V^K nad poljem K. Neka je $w\in V^K$ proizvoljan. Uz oznaku iz prethodnog odlomka skup $C\otimes B=\{\alpha\otimes v;\ \alpha\in C,\ v\in B\}$ je baza vektorskog prostora V^K nad poljem k, pa postoje $\alpha_1,\ldots,\alpha_m\in C$, $v_1,\ldots,v_n\in B$ i $\beta_{ji}\in k$ za $j=1,\ldots,m$ i $i=1,\ldots,n$ takvi da vrijedi
$$w=\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\beta_{ji}\alpha_j\otimes v_i.$$
Odatle uz oznake
$$\gamma_i=\sum_{j=1}^{m}\beta_{ji}\alpha_i\in K,\qquad i=1,\ldots,n,$$
slijedi
$$w=\sum_{i=1}^{n}\gamma_i\otimes v_i=\sum_{i=1}^{n}\gamma_i(1\otimes v_i)=\sum_{i=1}^{n}\gamma_i v_i.$$
Dakle, skup B razapinje prostor V^K nad poljem K.

Time je teorem u potpunosti dokazan.

Dualna konstrukcija proširenju polja skalara sa k na K je **suženje polja skalara** sa K na $k:$ ako je W vektorski prostor nad proširenjem K polja k, možemo ga shvaćati kao vektorski prostor nad poljem k tako da zaboravimo da znamo vektore iz W množiti i sa skalarima iz $K\setminus k$. Taj se $k-$vektorski prostor označava sa W_k. Primijetimo da ove dvije konstrukcije (tj. proširenje polja skalara i suženje polja skalara) nisu međusobno inverzne. Npr. ako je $k=\mathbb{R}$ i $K=\mathbb{C}$, i ako je V konačnodimenzionalan realan vektorski prostor, a W konačnodimenzionalan kompleksan vektorski prostor, onda je
$$\dim_{\mathbb{C}} V^{\mathbb{C}}=\dim_{\mathbb{R}} V\qquad \text{i}\qquad \dim_{\mathbb{R}} W_{\mathbb{R}}=2\dim_{\mathbb{C}} W,$$
dakle,
$$\dim_{\mathbb{R}}\left(V^{\mathbb{C}}\right)_{\mathbb{R}}=2\dim_{\mathbb{R}} V\qquad \text{i}\qquad \dim_{\mathbb{C}}\left(W_{\mathbb{R}}\right)^{\mathbb{C}}=2\dim_{\mathbb{C}} W.$$
Neka su sada V_1 i V_2 vektorski prostori nad poljem k, K proširenje polja k i $A:V_1\to V_2$ $k-$linearan operator. Tada možemo A promatrati i kao $k-$linearan operator sa V_1 u V_2^K, pa se on po univerzalnom svojstvu iz tvrdnje (b) teorema 1.5.1. jedinstveno proširuje do $K-$linearnog operatora $A^K:V_1^K\to V_2^K$. Ponovna primjena univerzalnog svojstva iz tvrdnje (b) teorema 1.5.1. ali sada na $k-$linearno preslikavanje $A\mapsto A^K$ prostora $L_k(V_1,V_2)$ u prostor $L_K\left(V_1^K,V_2^K\right)$ pokazuje da se to preslikavanje jedinstveno proširuje do $K-$linearnog preslikavanja prostora $L_k(V_1,V_2)^K=K\otimes L_k(V_1,V_2)$ u prostor $L_K\left(V_1^K,V_2^K\right)$.

Zadatak 1.5.2. * *Dokažite da je preslikavanje* $L_k(V_1,V_2)^K\to L_K\left(V_1^K,V_2^K\right)$ *opisano u prethodnom odlomku izomorfizam vektorskih prostora nad poljem* K.

Neka je sada π reprezentacija skupa S na vektorskom prostoru V nad poljem k i neka je K proširenje polja k. Za svaki $s \in S$ $k-$linearan operator $\pi(s) \in L(V)$ prema prethodnom razmatranju jedinstveno se proširuje do $K-$linearnog operatora $\pi(s)^K \in L\left(V^K\right)$. Sada je sa $\pi^K(s) = \pi(s)^K$, $s \in S$, definirana reprezentacija skupa S na vektorskom prostoru V^K nad poljem K. Za reprezentaciju π^K kažemo da je dobivena iz reprezentacije π proširenjem polja skalara sa k na K.

Propozicija 1.5.2. *Neka je S ne samo skup, nego jedna od sljedeće četiri algebarske strukture: grupa, asocijativna algebra nad poljem k, unitalna algebra nad poljem k, Liejeva algebra nad poljem k. Nadalje, neka je π reprezentacija algebarske strukture S na vektorskom prostoru V nad poljem k i neka je K proširenje polja k. Tada je reprezentacija π^K skupa S, dobivena iz reprezentacije π proširenjem polja skalara sa k na K, reprezentacija algebarske strukture S.*

Dokaz: (1) Ako je S algebra nad poljem k (bilo asocijativna, bilo unitalna, bilo Liejeva) preslikavanje $\pi^K : S \to L_K\left(V^K\right)$ je $k-$linearno jer je to kompozicija $k-$linearnog preslikavanja $\pi : S \to L_k(V)$ s $k-$linearnim preslikavanjem $A \mapsto A^K$ sa $L_k(V)$ u $L_K\left(V^K\right)$.

(2) Ako je S grupa ili asocijativna algebra nad k ili unitalna algebra nad k, za $x, y \in S$ imamo

$$\pi^K(x)\pi^K(y) = \pi(x)^K\pi(y)^K = (\pi(x)\pi(y))^K = (\pi(xy))^K = \pi^K(xy).$$

(3) Ako je S grupa ili unitalna algebra i ako je e jedinica u S, imamo

$$\pi^K(e) = \pi(e)^K = (I_V)^K = I_{V^K}.$$

(4) Napokon, ako je S Liejeva algebra nad k, za $x, y \in S$ imamo

$$\pi^K([x,y]) = \pi([x,y])^K = (\pi(x)\pi(y) - \pi(y)\pi(x))^K =$$

$$= \pi(x)^K\pi(y)^K - \pi(y)^K\pi(x)^K = \pi^K(x)\pi^K(y) - \pi^K(y)\pi^K(x).$$

Tvrdnja propozicije za grupu slijedi iz (2) i (3), za asocijativnu algebru nad k iz (1) i (2), za unitalnu algebru nad k iz (1), (2) i (3), a za Liejevu algebru nad k iz (1) i (4).

Zadatak 1.5.3. *Neka su V, W i U vektorski prostori nad poljem k, neka je K proširenje polja k i neka je $A : V \times W \to U$ $k-$bilinearan operator. Dokažite da se A jedinstveno proširuje do $K-$bilinearnog operatora $A^K : V^K \times W^K \to U^K$.*

Posebno, ako je $\mathcal{A}$ algebra nad poljem k onda se množenje $\mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ jeidnstveno proširuje do $K-$bilinearnog preslikavanja sa $\mathcal{A}^K \times \mathcal{A}^K \to \mathcal{A}^K$ i s tako definiranim množenjem $\mathcal{A}^K$ postaje algebra nad poljem K. Tada kažemo da je algebra $\mathcal{A}^K$ dobivena iz algebre $\mathcal{A}$ proširenjem polja skalara sa k na K. Ako je $\mathcal{I}$ ideal (lijevi, desni ili obostrani) u $k-$algebri $\mathcal{A}$ onda se lako vidi da je $\mathcal{I}^K$ ideal iste vrste u algebri $\mathcal{A}^K$. Ako je ideal $\mathcal{I}$ obostrani, lako se vidi da se kvocijentna algebra $\mathcal{A}^K/\mathcal{I}^K$ može identificirati s algebrom $(\mathcal{A}/\mathcal{I})^K$. Nadalje, homomorfizam $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ $k-$algebri jedinstveno se proširuje do homomorfizma $K-$algebri $\varphi^K : \mathcal{A}^K \to \mathcal{B}^K$ i pridruživanje $\varphi \to \varphi^K$ je injekcija sa $Hom_k(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ u $Hom_K\left(\mathcal{A}^K, \mathcal{B}^K\right)$. Ta se injekcija može upotrijebiti kao identifikacija skupa $Hom_k(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ s podskupom $\left\{\psi \in Hom_K\left(\mathcal{A}^K, \mathcal{B}^K\right);\ \psi(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{B}\right\}$ skupa $Hom_K\left(\mathcal{A}^K, \mathcal{B}^K\right)$.

Zadatak 1.5.4. *Neka je $\mathcal{A}$ asocijativna, unitalna ili Liejeva algebra nad poljem k, π reprezentacija algebre $\mathcal{A}$ na vektorskom prostoru V nad poljem k i K proširenje polja k. Dokažite:*

(*a*) *Algebra $\mathcal{A}^K$ nad poljem K je iste vrste kao $\mathcal{A}$: asocijativna, unitalna ili Liejeva.*

(*b*) *Reprezentacija π^K algebre $\mathcal{A}$ na prostoru V^K jedinstveno se proširuje do reprezentacije algebre $\mathcal{A}^K$.*

Poglavlje 2

Reprezentacije konačnih grupa

2.1 Relacije ortogonalnosti

U cijelom ovom poglavlju G označava konačnu grupu s jedinicom e. Broj elemenata grupe G, tj. **red grupe** G, označavat ćemo sa $|G|$. Općenitije, za svaki konačan skup S sa $|S|$ označavamo broj elemenata skupa S.

Neka je π reprezentacija grupe G na vektorskom prostoru V. Neka je $v \in V$, $v \neq 0$. Tada je potprostor razapet skupom $\{\pi(a)v;\ a \in G\}$ očito $\pi-$invarijantan. Odatle slijedi da je svaka ireducibilna reprezentacija grupe G konačnodimenzionalna i dimenzija joj nije veća od $|G|$.

Svi vektorski prostori koje ćemo promatrati u ovom poglavlju su konačnodimenzionalni i kompleksni.

Teorem 2.1.1. *Neka je π reprezentacija grupe G na vektorskom prostoru V.*

(a) *Reprezentacija π je potpuno reducibilna.*

(b) *Na vektorskom prostoru V postoji skalarni produkt u odnosu na koji je π unitarna reprezentacija.*

Dokaz: (b) Neka je $\langle\cdot|\cdot\rangle$ bilo koji skalarni produkt na prostoru V. Definiramo preslikavanje $(x, y) \mapsto (x|y)$ sa $V \times V$ u $\mathbb{C}$ na sljedeći način:

$$(x|y) = \sum_{a \in G} \langle \pi(a)x|\pi(a)y\rangle, \qquad x, y \in V.$$

Tada je očito $x \mapsto (x|y)$ linearan funkcional na V za svaki $y \in V$. Također je očito da vrijedi $(y|x) = \overline{(x|y)}$ za bilo koje $x, y \in V$. Nadalje, za $x \in V$ vrijedi

$$(x|x) = \sum_{a \in G} \langle \pi(a)x|\pi(a)x\rangle \geq 0$$

jer je $\langle\cdot|\cdot\rangle$ skalarni produkt na V. Nadalje, iz $(x|x) = 0$ slijedi $\langle \pi(a)x|\pi(a)x\rangle = 0$ za svaki $a \in G$. Posebno za jedinicu e grupe G nalazimo $0 = \langle \pi(e)x|\pi(e)x\rangle = \langle x|x\rangle$, pa slijedi $x = 0$. Time je dokazano da je $(\cdot|\cdot)$ skalarni produkt na vektorskom prostoru V.

Neka je $b \in G$. Tada je $a \mapsto ab$ bijekcija sa G na G pa za proizvoljne vektore $x, y \in V$ imamo

$$(\pi(b)x|\pi(b)y) = \sum_{a \in G} \langle \pi(a)\pi(b)x|\pi(a)\pi(b)y\rangle = \sum_{a \in G} \langle \pi(ab)x|\pi(ab)y\rangle = \sum_{a \in G} \langle \pi(a)x|\pi(a)y\rangle = (x|y).$$

Prema tome, reprezentacija π je unitarna s obzirom na skalarni produkt $(\cdot|\cdot)$.

Tvrdnja (a) slijedi neposredno iz tvrdnje (b) zbog teorema 1.2.1.

Propozicija 2.1.2. *Neka su π i ρ reprezentacije od G na prostorima V i W. Za $A \in L(V,W)$ stavimo*

$$A^0 = \frac{1}{|G|} \sum_{a \in G} \rho\left(a^{-1}\right) A\pi(a).$$

Tada je $A \mapsto A^0$ projektor prostora $L(V,W)$ na potprostor $Hom_G(V,W)$.

Dokaz: Očito je $A \mapsto A^0$ linearan operator sa $L(V,W)$ u $L(V,W)$. Za $A \in L(V,W)$ i $b \in G$ nalazimo

$$\rho(b)A^0 = \frac{1}{|G|} \sum_{a \in G} \rho(b)\rho\left(a^{-1}\right) A\pi(a) = \frac{1}{|G|} \sum_{a \in G} \rho\left(ba^{-1}\right) A\pi(a) = \frac{1}{|G|} \sum_{a \in G} \rho\left(\left(ab^{-1}\right)^{-1}\right) A\pi(a).$$

U ovoj zadnjoj sumi promijenimo varijablu sumacije i stavimo $c = ab^{-1}$, dakle, $a = cb$. Kako je $a \mapsto ab^{-1}$ bijekcija sa G na G, slijedi

$$\rho(b)A^0 = \frac{1}{|G|} \sum_{c \in G} \rho\left(c^{-1}\right) A\pi(cb) = \frac{1}{|G|} \sum_{c \in G} \rho\left(c^{-1}\right) A\pi(c)\pi(b) = A^0\pi(b).$$

Dakle, $A^0 \in Hom_G(V,W)$, tj. dokazali smo da je područje vrijednosti linearnog operatora $A \mapsto A^0$ sadržano u $Hom_G(V,W)$. Napokon, za $A \in Hom_G(V,W)$ je $A\pi(a) = \rho(a)A$ za svaki $a \in G$, dakle,

$$A^0 = \frac{1}{|G|} \sum_{a \in G} \rho\left(a^{-1}\right) A\pi(a) = \frac{1}{|G|} \sum_{a \in G} \rho\left(a^{-1}\right) \rho(a)A = \frac{1}{|G|} \sum_{a \in G} A = A.$$

Dakle, $A \mapsto A^0$ je projektor prostora $L(V,W)$ na potprostor $Hom_G(V,W)$.

Ako su u propoziciji 2.1.2. reprezentacije π i ρ ireducibilne, možemo primijeniti Schurovu lemu (teorem 1.1.6.) pa dobivamo

Teorem 2.1.3. *Neka su π i ρ ireducibilne reprezentacije grupe G na prostorima V i W.*

(a) *Ako π i ρ nisu ekvivalentne, onda je za svaki $A \in L(V,W)$*

$$\sum_{a \in G} \rho\left(a^{-1}\right) A\pi(a) = 0.$$

(b) *Za svaki $A \in L(V)$ vrijedi*

$$\sum_{a \in G} \pi\left(a^{-1}\right) A\pi(a) = \frac{|G|}{\dim V} (\mathrm{Tr}\, A) I_V.$$

Zadatak 2.1.1. *Pomoću Schurove leme i propozicije 2.1.2. dokažite teorem 2.1.3.*

Teorem 2.1.4. *Uz pretpostavke teorema 2.1.3. neka je $e = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ baza vektorskog prostora V i $f = \{f_1, f_2, \ldots, f_m\}$ baza vektorskog prostora W i neka su $\pi_{ij}(a)$ elementi matrice operatora $\pi(a)$ u bazi e i $\rho_{k\ell}(a)$ elementi matrice operatora $\rho(a)$ u bazi f. Tada vrijedi*

$$\sum_{a \in G} \pi_{ij}(a)\rho_{k\ell}\left(a^{-1}\right) = 0, \qquad \forall i,j \in \{1,2,\ldots,n\} \quad i \quad \forall k,\ell \in \{1,2,\ldots,m\}$$

i

$$\sum_{a \in G} \pi_{ij}(a)\pi_{rs}\left(a^{-1}\right) = \frac{|G|}{n}\delta_{is}\delta_{jr}, \qquad \forall i,j,r,s \in \{1,2,\ldots,n\}.$$

Dokaz: Neka su $\ell \in \{1,2,\dots,m\}$ i $i \in \{1,2,\dots,n\}$ proizvoljni i neka je $A \in L(V,W)$ zadan na bazi e sa

$$Ae_r = \delta_{ir} f_\ell, \qquad r = 1,2,\dots,n.$$

Tada je prema tvrdnji (a) teorema 2.1.3. za svaki $j \in \{1,2,\dots,n\}$

$$0 = \sum_{a\in G} \rho\left(a^{-1}\right) A\pi(a)e_j = \sum_{a\in G}\sum_{r=1}^{n} \pi_{rj}(a)\rho\left(a^{-1}\right) Ae_r = \sum_{a\in G}\sum_{r=1}^{n} \pi_{rj}(a)\delta_{ir}\rho\left(a^{-1}\right) f_\ell =$$

$$= \sum_{a\in G}\pi_{ij}(a)\sum_{k=1}^{m}\rho_{k\ell}\left(a^{-1}\right) f_k = \sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{a\in G}\pi_{ij}(a)\rho_{k\ell}\left(a^{-1}\right)\right) f_k.$$

Budući da su $f_1, f_2, \dots, f_m$ linearno nezavisni slijedi prva tvrdnja teorema.

Za dokaz druge tvrdnje na analogan način primijenimo tvrdnju (b) teorema 2.1.3. Neka su $i, s \in \{1,2,\dots,n\}$ proizvoljni i neka je $A \in L(V)$ zadan na bazi e sa

$$Ae_p = \delta_{ip} e_s, \qquad p = 1,2,\dots,n.$$

Tada je $\operatorname{Tr} A = \delta_{is}$ pa zbog tvrdnje (b) teorema 2.1.3. za svaki $j \in \{1,2,\dots,n\}$ imamo redom

$$\frac{|G|}{n}\delta_{is}e_j = \frac{|G|}{n}(\operatorname{Tr} A)I_V e_j = \sum_{a\in G}\pi\left(a^{-1}\right) A\pi(a)e_j = \sum_{a\in G}\sum_{p=1}^{n}\pi_{pj}(a)\pi\left(a^{-1}\right) Ae_p =$$

$$= \sum_{a\in G}\sum_{p=1}^{n}\delta_{ip}\pi_{pj}(a)\pi\left(a^{-1}\right) e_s = \sum_{a\in G}\pi_{ij}(a)\sum_{r=1}^{n}\pi_{rs}\left(a^{-1}\right) e_r = \sum_{r=1}^{n}\left(\sum_{a\in G}\pi_{ij}(a)\pi_{rs}\left(a^{-1}\right)\right) e_r.$$

Dakle,

$$\sum_{r=1}^{n}\left(\sum_{a\in G}\pi_{ij}(a)\pi_{rs}\left(a^{-1}\right)\right) e_r = \frac{|G|}{n}\delta_{is}e_j = \sum_{r=1}^{n}\frac{|G|}{n}\delta_{is}\delta_{jr}e_r,$$

a odatle zbog linearne nezavisnosti vektora $e_1, e_2, \dots, e_n$ dobivamo drugu tvrdnju teorema.

Promatrajmo sada prostor $\mathbb{C}[G]$ svih kompleksnoznačnih funkcija na grupi G. To je unitaran prostor uz skalarni produkt definiran sa

$$(\varphi|\psi) = \frac{1}{|G|}\sum_{a\in G}\varphi(a)\overline{\psi(a)}, \qquad \varphi,\psi \in \mathbb{C}[G].$$

Kao posljedicu teorema 2.1.4. dobivamo tzv. **relacije ortogonalnosti**:

Teorem 2.1.5. *Neka su π i ρ neekvivalentne ireducibilne unitarne reprezentacije grupe G na prostorima V i W. Neka su $e = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ i $f = \{f_1, f_2, \dots, f_m\}$ ortonormirane baze u prostorima V i W. Neka su $\pi_{ij}(a)$ matrični elementi operatora $\pi(a)$ u bazi e i $\rho_{k\ell}(a)$ matrični elementi operatora $\rho(a)$ u bazi f. Tada vrijedi*

$$(\pi_{ij}|\rho_{k\ell}) = 0 \qquad \forall i,j \in \{1,2,\dots,n\} \quad i \quad \forall k,\ell \in \{1,2,\dots,m\}$$

i

$$(\pi_{ij}|\pi_{sr}) = \frac{1}{n}\delta_{is}\delta_{jr} \qquad \forall i,j,r,s \in \{1,2,\dots,n\}.$$

Dokaz: Tvrdnje slijede neposredno iz dviju tvrdnji teorema 2.1.4., budući da su matrice unitarnih operatora $\pi(a)$ i $\rho(a)$ u ortonormiranim bazama unitarne, tj. vrijedi

$$\pi_{rs}(a^{-1}) = \overline{\pi_{sr}(a)} \qquad \text{i} \qquad \rho_{k\ell}(a^{-1}) = \overline{\rho_{\ell k}(a)}.$$

2.2 Karakter reprezentacije

Neka je π reprezentacija grupe G na vektorskom prostoru V. Definiramo funkciju $\chi_\pi : G \to \mathbb{C}$ ovako:

$$\chi_\pi(a) = \operatorname{Tr} \pi(a), \qquad a \in G.$$

Funkcija χ_π zove se **karakter reprezentacije** π.

Propozicija 2.2.1. *Karakter χ_π reprezentacije π grupe G na vektorskom prostoru V ima svojstva:*

(a) $\chi_\pi(e) = \dim V$.

(b) $\chi_\pi(a^{-1}) = \overline{\chi_\pi(a)}$, $a \in G$.

(c) $\chi_\pi(ab) = \chi_\pi(ba)$, $a, b \in G$.

Dokaz: Tvrdnja (a) slijedi neposredno iz činjenice da je $\pi(e) = I_V$.

(b) Prema tvrdnji (b) teorema 2.1.1. možemo pretpostaviti da je prostor V unitaran i da je reprezentacija π unitarna. Neka je $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ ortonormirana baza u V. Operator $\pi(a)$ je unitaran i pa je njegov inverzni operator $\pi(a^{-1})$ njemu adjungiran. Stoga su i matrice tih operatora u bazi e međusobno adjungirane. Posebno, dijagonalni elementi matrice operatora $\pi(a^{-1})$ su kompleksno konjugirani dijagonalnim elementima matrice operatora $\pi(a)$. Kako je trag operatora suma dijagonalnih elemenata matrice tog operatora u bilo kojoj bazi, slijedi tvrdnja.

Tvrdnja (c) je neposredna posljedica jednakosti $\operatorname{Tr} AB = \operatorname{Tr} BA$ za bilo koje $A, B \in L(V)$, jer je $\pi(ab) = \pi(a)\pi(b)$ i $\pi(ba) = \pi(b)\pi(a)$.

Propozicija 2.2.2. *Neka je π reprezentacija grupe G na vektorskom prostoru V i neka su $V_1, V_2, \ldots, V_s$ $\pi-$invarijantni potprostori takvi da je*

$$V = V_1 \dot{+} V_2 \dot{+} \cdots \dot{+} V_s.$$

Tada vrijedi

$$\chi_\pi = \chi_{\pi_{V_1}} + \chi_{\pi_{V_2}} + \cdots + \chi_{\pi_{V_s}}.$$

Zadatak 2.2.1. *Dokažite propoziciju 2.2.2.*

Propozicija 2.2.3. *Neka su π i ρ reprezentacije grupe G. Tada je*

$$\chi_{\pi\otimes\rho} = \chi_\pi \chi_\rho.$$

Zadatak 2.2.2. *Dokažite propoziciju 2.2.3.*

Teorem 2.2.4. *Neka su π i ρ ireducibilne reprezentacije grupe G. Tada vrijedi*

$$(\chi_\pi | \chi_\rho) = \begin{cases} 1 & \text{ako je} \quad \pi \simeq \rho \\ 0 & \text{ako je} \quad \pi \not\simeq \rho \end{cases}$$

Dokaz: Zbog tvrdnje (b) teorema 2.1.1. možemo pretpostavljati da su reprezentacije π i ρ unitarne.

Pretpostavimo najprije da reprezentacije π i ρ nisu ekvivalentne. Neka je $\{e_1, \ldots, e_n\}$ ortonormirana baza prostora reprezentacije π i neka je $[\pi_{ij}(a)]_{i,j=1}^n$ matrica operatora $\pi(a)$, $a \in G$, u toj bazi. Analogno, neka je $\{f_1, \ldots, f_m\}$ ortonormirana baza prostora reprezentacije ρ i neka je $[\rho_{k\ell}(a)]_{k,\ell=1}^m$

matrica operatora $\rho(a)$, $a \in G$, u toj bazi. Trag linearnog operatora je suma dijagonalnih elemenata njegove matrice u bilo kojoj bazi, pa imamo

$$\chi_\pi(a) = \sum_{i=1}^{n} \pi_{ii}(a) \qquad \text{i} \qquad \chi_\rho(a) = \sum_{k=1}^{m} \rho_{kk}(a) \qquad \text{za} \quad a \in G.$$

Sada iz prve tvrdnje teorema 2.1.5. slijedi

$$(\chi_\pi|\chi_\rho) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}(\pi_{ii}|\rho_{kk}) = 0.$$

Pretpostavimo sada da su reprezentacije π i ρ ekvivalentne. Tada je očito $\chi_\rho = \chi_\pi$, jer su u nekim bazama matrice operatora $\pi(a)$ i $\rho(a)$ jednake. Dakle, treba dokazati da je $(\chi_\pi|\chi_\pi) = 1$. Uz oznaku iz prethodnog odlomka i uz primjenu druge tvrdnje teorema 2.1.5. dobivamo

$$(\chi_\pi|\chi_\pi) = \sum_{i,j=1}^{n}(\pi_{ii}|\pi_{jj}) = \frac{1}{n}\sum_{i,j=1}^{n}\delta_{ij} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}1 = 1.$$

Time je teorem u potpunosti dokazan.

Teorem 2.2.5. *Neka je π reprezentacija grupe G na vektorskom prostoru V i neka su $V_1, V_2, \ldots, V_s$ $\pi-$invarijantni potprostori takvi da je*

$$V = V_1 \dotplus V_2 \dotplus \cdots \dotplus V_s$$

i da su sve subreprezentacije π_{V_j} ireducibilne. Neka je ρ ireducibilna reprezentacija od G. Tada je skalarni produkt $(\chi_\pi|\chi_\rho)$ jednak broju indeksa $j \in \{1, 2, \ldots, s\}$ takvih da je $\pi_{V_j} \simeq \rho$.

Dokaz: Prema propoziciji 2.2.2. vrijedi

$$(\chi_\pi|\chi_\rho) = \sum_{j=1}^{s}(\chi_{\pi_{V_j}}|\chi_\rho).$$

Tvrdnja slijedi neposredno iz te jednakosti, jer je prema teoremu 2.2.4.

$$(\chi_{\pi_{V_j}}|\chi_\rho) = \begin{cases} 1 & \text{ako je} \quad \pi_{V_j} \simeq \rho \\ 0 & \text{ako je} \quad \pi_{V_j} \not\simeq \rho \end{cases}$$

Korolar 2.2.6. *Neka su π i σ reprezentacije grupe G. Tada je $\pi \simeq \sigma$ ako i samo ako je $\chi_\pi = \chi_\sigma$.*

Zadatak 2.2.3. *Dokažite korolar 2.2.6.*

U daljnjem ćemo sa $\hat{G}$ označavati skup svih klasa ekvivalencije ireducibilnih reprezentacija grupe G (na kompleksnim vektorskim prostorima). Iz teorema 2.2.5. slijedi da broj potprostora V_i u rastavu prostora reprezentacije π na kojima se subreprezentacija π_{V_i} nalazi u danoj klasi $\alpha \in \hat{G}$ ne ovisi o izboru takvog rastava. Taj se broj zove **multiplicitet** ili **kratnost** ireducibilne klase $\alpha \in \hat{G}$ u reprezentaciji π. Taj ćemo broj označavati sa $m(\pi, \alpha)$.

Nadalje, za $\alpha \in \hat{G}$ označimo sa χ_α karakter bilo koje reprezentacije iz klase α. Prema teoremu 2.2.4. karakteri χ_α, $\alpha \in \hat{G}$, čine ortonormiran skup u vektorskom prostoru $\mathbb{C}[G]$, a kako je taj prostor konačnodimenzionalan, zaključujemo da je skup $\hat{G}$ konačan. Štoviše, budući da je $\dim \mathbb{C}[G] = |G|$, vrijedi $|\hat{G}| \leq |G|$.

Teorem 2.2.7. *Neka je π reprezentacija grupe G na vektorskom prostoru $V \neq \{0\}$. Tada je $(\chi_\pi|\chi_\pi) \in \mathbb{N}$ i reprezentacija π je ireducibilna ako i samo ako je $(\chi_\pi|\chi_\pi) = 1$.*

Dokaz: Uz uvedene oznake imamo

$$\chi_\pi = \sum_{\alpha \in \hat{G}} m(\pi, \alpha)\chi_\alpha$$

a odatle zbog ortonormiranosti karaktera χ_α slijedi

$$(\chi_\pi|\chi_\pi) = \sum_{\alpha \in \hat{G}} \sum_{\beta \in \hat{G}} m(\pi, \alpha)m(\pi, \beta)(\chi_\alpha|\chi_\beta) = \sum_{\alpha \in \hat{G}} m(\pi, \alpha)^2.$$

Dakle, $(\chi_\pi|\chi_\pi) \in \mathbb{N}$ i taj je broj jednak 1 ako i samo ako je $\chi_\pi = \chi_\alpha$ za neki $\alpha \in \hat{G}$.

2.3 Dekompozicija regularne reprezentacije

U daljnjem ćemo za $\alpha \in \hat{G}$ sa $d(\alpha)$ označavati dimenziju reprezentacija u klasi α.

Lijevu i desnu regularnu reprezentaciju grupe G na prostoru $\mathbb{C}[G]$, definirane u prvom poglavlju, označavat ćemo u daljnjem sa λ_G i ρ_G. Podsjetimo se da je

$$(\lambda_G(a)\varphi)(b) = \varphi(a^{-1}b), \qquad (\rho_G(a)\varphi)(b) = \varphi(ba), \qquad a, b \in G.$$

Nadalje, prema zadatku 1.3.3. reprezentacije λ_G i ρ_G su ekvivalentne, a ekvivalenciju ostvaruje izomorfizam $T : \mathbb{C}[G] \to \mathbb{C}[G]$ dan sa

$$T\varphi = \check{\varphi}, \qquad \check{\varphi}(a) = \varphi\left(a^{-1}\right), \qquad \varphi \in \mathbb{C}[G], \quad a \in G.$$

Zadatak 2.3.1. *Dokažite da su reprezentacije λ_G i ρ_G u odnosu na uvedeni skalarni produkt na prostoru $\mathbb{C}[G]$ unitarne i da je gore definirani operator T unitaran.*

Teorem 2.3.1. (a) *Karakter regularne reprezentacije dan je sa*

$$\chi_{\lambda_G}(a) = \begin{cases} |G| & \text{ako je} \quad a = e \\ 0 & \text{ako je} \quad a \neq e. \end{cases}$$

(b) *Za svaku klasu $\alpha \in \hat{G}$ je $m(\lambda_G, \alpha) = d(\alpha)$.*
(c) *Vrijedi*

$$\sum_{\alpha \in \hat{G}} d(\alpha)^2 = |G|.$$

Dokaz: (a) Upotrijebit ćemo prije uvedenu bazu $\{\delta_c;\ c \in G\}$ prostora $\mathbb{C}[G]$:

$$\delta_c(b) = \delta_{c,b} = \begin{cases} 1 & \text{za} \quad b = c \\ 0 & \text{za} \quad b \neq c. \end{cases}$$

Za $a, b, c \in G$ imamo

$$(\lambda_G(a)\delta_c)(b) = \delta_c(a^{-1}b) = \delta_{c,a^{-1}b} = \delta_{ac,b} = \delta_{ac}(b).$$

Dakle,

$$\lambda_G(a)\delta_c = \delta_{ac}, \qquad a, c \in G.$$

Odavde se vidi da ako je $a \neq e$ onda su u matrici operatora $\lambda_G(a)$ u toj bazi svi dijagonalni elementi jednaki nuli. Dakle, trag tog operatora jednak je 0, tj. $\chi_{\lambda_G}(a) = 0$. Naravno, $\lambda_G(e) = I_{\mathbb{C}[G]}$ pa je $\chi_{\lambda_G}(e) = \dim \mathbb{C}[G] = |G|$.

(b) Prema teoremu 2.2.5., prema tvrdnji (a) propozicije 2.2.1 i prema dokazanoj tvrdnji (a) imamo

$$m(\lambda_G, \alpha) = (\chi_{\lambda_G}|\chi_\alpha) = \frac{1}{|G|}\sum_{a \in G} \chi_{\lambda_G}(a)\overline{\chi_\alpha(a)} = \frac{1}{|G|}|G|\overline{\chi_\alpha(e)} = d(\alpha).$$

(c) Prema dokazanoj tvrdnji (b) imamo

$$\chi_{\lambda_G} = \sum_{\alpha \in \hat{G}} d(\alpha)\chi_\alpha$$

pa zbog tvrdnje (a) slijedi

$$|G| = \chi_{\lambda_G}(e) = \sum_{\alpha \in \hat{G}} d(\alpha)\chi_\alpha(e) = \sum_{\alpha \in \hat{G}} d(\alpha)^2.$$

Tvrdnja (c) teorema 2.3.1. može nam poslužiti da ustanovimo da li određene pronađene međusobno neekvivalentne ireducibilne reprezentacije grupe G predstavljaju predstavnike svih klasa $\alpha \in \hat{G}$: to jest tako ako i samo ako je suma kvadrata njihovih dimenzija jednaka $|G|$. Kasnije ćemo ustanoviti još jednu činjenicu o odnosu dimenzija $d(\alpha)$ ireducibilnih reprezentacija i reda $|G|$ grupe G : broj $|G|$ djeljiv je s $d(\alpha)$ za svaku $\alpha \in \hat{G}$.

Prema tvrdnji (b) teorema 2.3.1. u dekompoziciji regularne reprezentacije konačne grupe G u direktnu sumu ireducibilnih reprezentacija za svaku klasu $\alpha \in \hat{G}$ točno $d(\alpha)$ reprezentacija iz te dekompozicije nalazi se u klasi α. To će biti i posljedica preciznog opisa strukture grupovne algebre $\mathbb{C}[G]$ koji ćemo dobiti u odjeljku 2.5.

2.4 Centralne funkcije

Sljedeći nam je cilj odrediti broj elemenata skupa $\hat{G}$. U tu svrhu trebamo definirati nekoliko pojmova u vezi s grupom G.

Funkcija $\varphi \in \mathbb{C}[G]$ zove se **centralna** ako vrijedi $\varphi(ab) = \varphi(ba)\ \forall a, b \in G$. Prema tvrdnji (c) propozicije 2.2.1. karakter bilo koje reprezentacije grupe G je centralna funkcija na G. Skup svih centralnih funkcija na grupi G označavat ćemo sa $\mathbb{C}_c[G]$. Očito je $\mathbb{C}_c[G]$ potprostor vektorskog prostora $\mathbb{C}[G]$.

Podsjetimo se da smo odjeljku 1.3. uspostavili bijektivnu vezu između reprezentacija grupe G (u ovom slučaju na kompleksnim vektorskim prostorima) i reprezentacija unitalne algebre $\mathbb{C}[G]$. Dogovorili smo se da ćemo odgovarajuće reprezentacije tih dvaju objekata označavati istim znakom. Veze između reprezentacije π od G i pripadne reprezentacije od $\mathbb{C}[G]$ su sljedeće:

$$\pi(\varphi) = \sum_{a \in G} \varphi(a)\pi(a), \quad \varphi \in \mathbb{C}[G]; \qquad\qquad \pi(a) = \pi(\delta_a), \quad a \in G.$$

Propozicija 2.4.1. *Neka je π ireducibilna reprezentacija grupe G na prostoru V dimenzije n i neka je $\varphi \in \mathbb{C}_c[G]$. Tada je*

$$\pi(\varphi) = \lambda I_V \qquad \textit{gdje je} \qquad \lambda = \frac{1}{n}\sum_{a \in G} \varphi(a)\chi_\pi(a) = \frac{|G|}{n}(\chi_\pi|\overline{\varphi}).$$

Dokaz: Za $b \in G$ imamo redom

$$\pi(\varphi)\pi(b) = \sum_{a \in G} \varphi(a)\pi(ab) = \sum_{a \in G} \varphi(ab^{-1})\pi(a) = \sum_{a \in G} \varphi(b^{-1}a)\pi(a) = \sum_{a \in G} \varphi(a)\pi(ba) = \pi(b)\pi(\varphi).$$

Sada iz tvrdnje (b) Schurove leme (teorem 1.1.6.) slijedi da je $\pi(\varphi) = \lambda I_V$ za neki $\lambda \in \mathbb{C}$. Slijedi

$$n\lambda = \operatorname{Tr} \pi(\varphi) = \sum_{a \in G} \varphi(a) \operatorname{Tr} \pi(a) = \sum_{a \in G} \varphi(a)\chi_\pi(a)$$

i time je propozicija dokazana.

Teorem 2.4.2. $\{\chi_\alpha;\ \alpha \in \hat{G}\}$ *je ortonormirana baza prostora* $\mathbb{C}_c[G]$.

Dokaz: Znamo da su χ_α ortonormirani i da leže u potprostoru $\mathbb{C}_c[G]$. Neka je $\varphi \in \mathbb{C}_c[G]$, $\varphi \perp \chi_\alpha\ \forall \alpha \in \hat{G}$. Za bilo koju ireducibilnu reprezentaciju π grupe G na prostoru V dimenzije n definiramo operator $\pi(\overline{\varphi})$ na prostoru V ovako:

$$\pi(\overline{\varphi}) = \sum_{a \in G} \overline{\varphi(a)}\pi(a).$$

Prema propoziciji 2.4.1. tada je $\pi(\overline{\varphi}) = \lambda I_V$, gdje je

$$\lambda = \frac{|G|}{n}(\chi_\pi|\varphi)$$

a to je jednako 0 jer je $\chi_\pi = \chi_\alpha$ ako je $\pi \in \alpha$ i jer smo pretpostavili da je $\varphi \perp \chi_\alpha$ za svaki $\alpha \in \hat{G}$. Dakle, $\pi(\overline{\varphi}) = 0$ za svaku ireducibilnu reprezentaciju π. Kako je svaka reprezentacija direktna suma ireducibilnih reprezentacija, slijedi da je za svaku reprezentaciju π

$$\pi(\overline{\varphi}) = \sum_{a \in G} \overline{\varphi(a)}\pi(a) = 0.$$

Posebno, $\lambda_G(\overline{\varphi}) = 0$. Upotrijebit ćemo sada bazu $\{\delta_a;\ a \in G\}$ prostora $\mathbb{C}[G]$ iz dokaza teorema 2.3.1. Primijenimo operator $0 = \lambda_G(\overline{\varphi})$ na funkciju δ_e :

$$0 = \lambda_G(\overline{\varphi})\delta_e = \sum_{a\in G} \overline{\varphi(a)}\lambda_G(a)\delta_e = \sum_{a\in G} \overline{\varphi(a)}\delta_a.$$

Budući da su δ_a, $a \in G$, linearno nezavisni, slijedi $\varphi(a) = 0\ \forall a \in G$ tj. $\varphi = 0$.

Na taj način dokazali smo da je ortogonalni komplement potprostora razapetog sa $\{\chi_\alpha;\ \alpha \in \hat{G}\}$ u prostoru $\mathbb{C}_c[G]$ jednak $\{0\}$. Time je teorem dokazan.

Zadatak 2.4.1. *Neka su G i H konačne grupe. Pomoću teorema 2.2.7., 2.3.1. i 2.4.2. dokažite da je $(\pi, \rho) \mapsto \pi \times \rho$ bijekcija sa skupa $\hat{G} \times \hat{H}$ na skup svih klasa ekvivalencije ireducibilnih reprezentacija grupe $G \times H$.*

Posljedica teorema 2.4.2. je da je broj $|\hat{G}|$ klasa ekvivalencije ireducibilnih reprezentacija grupe G jednak dimenziji vektorskog prostora $\mathbb{C}_c[G]$ svih centralnih funkcija na grupi G. Sada ćemo na drugi način odrediti dimenziju vektorskog prostora $\mathbb{C}_c[G]$.

Za element $a \in G$ kažemo da je **konjugiran** elementu $b \in G$ ako postoji $c \in G$ takav da je $a = c^{-1}bc$. Lako se vidi da je konjugiranost relacija ekvivalencije na grupi G pa je G disjunktna unija svojih klasa konjugiranosti.

Propozicija 2.4.3. (*a*) *Funkcija $\varphi \in \mathbb{C}[G]$ je centralna ako i samo ako je ona konstantna na svakoj klasi konjugiranosti u grupi G.*

(*b*) *Neka su $C_1, C_2, \ldots, C_s$ sve klase konjugiranosti u grupi G. Za svaki $j \in \{1, 2, \ldots, s\}$ definiramo funkciju φ_j na grupi G ovako:*

$$\varphi_j(a) = \begin{cases} 1 & \textit{ako} \quad a \in C_j \\ 0 & \textit{ako} \quad a \in G \setminus C_j \end{cases}$$

(drugim riječima φ_j je karakteristična funkcija podskupa $C_j \subseteq G$). Tada je

$$\{\varphi_j;\ j = 1, 2, \ldots, s\}$$

baza vektorskog prostora $\mathbb{C}_c[G]$. Posebno, $\dim \mathbb{C}_c[G] = s$.

Zadatak 2.4.2. *Dokažite propoziciju 2.4.3.*

Napomenimo da je baza u tvrdnji (*b*) propozicije 2.4.3. očito ortogonalna, jer su klase konjugiranosti međusobno disjunktne. Nadalje, kvadrat norme funkcije φ_j jednak je kvocijentu broja $|C_j|$ elemenata u klasi konjugiranosti C_j i reda $|G|$ grupe G. Dakle,

$$\left\{ \sqrt{\frac{|G|}{|C_j|}}\varphi_j;\ j = 1, 2, \ldots, s \right\}$$

je ortonormirana baza od $\mathbb{C}_c[G]$.

Iz propozicije 2.4.3. i iz teorema 2.4.2. neposredno slijedi:

Teorem 2.4.4. *Broj $|\hat{G}|$ klasa ekvivalencije ireducibilnih reprezentacija konačne grupe G jednak je broju klasa konjugiranosti u grupi G.*

Teorem 2.4.5. *Neka je G konačna grupa. Sljedeća su tri svojstva međusobno ekvivalentna:*

(a) *Grupa G je komutativna.*

(b) *Svaka ireducibilna kompleksna reprezentacija grupe G je jednodimenzionalna.*

(c) $|\hat{G}| = |G|$.

Dokaz: Neka je za svaku klasu $\alpha \in \hat{G}$ $d(\alpha)$ dimenzija reprezentacija u klasi α. Prema tvrdnji (c) teorema 2.3.1. tada je

$$|G| = \sum_{\alpha \in \hat{G}} d(\alpha)^2.$$

Odatle neposredno slijedi da je $|\hat{G}| = |G|$ ako i samo ako je $d(\alpha) = 1 \ \ \forall \alpha \in \hat{G}$. Dakle, $(b) \iff (c)$.

Grupa G je komutativna ako i samo ako je $b^{-1}ab = a \ \ \forall a, b \in G$, tj. ako i samo ako je svaka klasa konjugiranosti u grupi G jednočlan skup. Kako je broj klasa konjugiranosti u grupi G prema teoremu 2.4.4. jednak $|\hat{G}|$, slijedi ekvivalencija $(a) \iff (c)$.

Dokazat ćemo sada precizniji oblik teorema 2.4.5. U svakoj grupi G sa $[G, G]$ označavamo podgrupu generiranu svim elementima oblika $aba^{-1}b^{-1}$, $a, b \in G$. Ta se podgrupa zove **komutatorska podgrupa** grupe G.

Zadatak 2.4.3. *Dokažite da je komutatorska podgrupa $[G, G]$ normalna podgrupa grupe G i da je kvocijentna grupa $G/[G, G]$ komutativna.*

Zadatak 2.4.4. *Dokažite da je komutatorska podgrupa $[G, G]$ sadržana u jezgri svakog homomorfizma grupe G u komutativnu grupu.*

Teorem 2.4.6. *Broj jednodimenzionalnih reprezentacija konačne grupe G na kompleksnom vektorskom prostoru jednak je indeksu podgrupe $[G, G]$ u grupi G, odnosno redu kvocijentne grupe $G/[G, G]$:*

$$\Big| \{\alpha \in \hat{G};\ d(\alpha) = 1\} \Big| = |G/[G, G]| = \frac{|G|}{|[G, G]|}.$$

Dokaz: Neka je $A = G/[G, G]$ i neka je $\kappa : G \to A$ kvocijentni epimorfizam. Budući da je grupa A komutativna, prema teoremu 2.4.5. svaka $\beta \in \hat{A}$ je jednodimenzionalna. Stoga je i reprezentacija $\beta \circ \kappa$ grupe G jednodimenzionalna, dakle, ireducibilna. Na taj način imamo očito injektivno preslikavanje $\beta \mapsto \beta \circ \kappa$ sa $\hat{A}$ u $\{\alpha \in \hat{G};\ d(\alpha) = 1\}$. To je preslikavanje i surjektivno. Doista, ako je α jednodimenzionalna reprezentacija grupe G, onda je njena slika $\operatorname{Im} \alpha$ komutativna grupa. Iz zadatka 2.4.4. slijedi da je $[G, G] \subseteq \operatorname{Ker} \alpha$. Prijelazom na kvocijent dolazimo do reprezentacije $\beta \in \hat{A}$ takve da je $\alpha = \beta \circ \kappa$.

Odatle i iz teorema 2.4.5. primijenjenog na grupu A dobivamo:

$$\Big| \{\alpha \in \hat{G};\ d(\alpha) = 1\} \Big| = |\hat{A}| = |A| = |G/[G, G]| = \frac{|G|}{|[G, G]|}.$$

Neka je π reprezentacija grupe G na prostoru V i neka je $e = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ baza prostora V. Za $a \in G$ označimo sa $\pi_{ij}(a)$ elemente matrice operatora $\pi(a)$ u bazi e. Tada su $\pi_{ij} \in \mathbb{C}[G]$. Označimo sa $\mathbb{C}_\pi[G]$ potprostor od $\mathbb{C}[G]$ razapet funkcijama π_{ij}, $1 \leq i, j \leq n$. Taj potprostor očito ne ovisi o izboru baze e prostora V. Nadalje, ako su π i ρ ekvivalentne reprezentacije, onda je $\mathbb{C}_\pi[G] = \mathbb{C}_\rho[G]$. Ako je $\alpha \in \hat{G}$ i ako je $\pi \in \alpha$ pisat ćemo $\mathbb{C}_\alpha[G] = \mathbb{C}_\pi[G]$.

Teorem 2.4.7. *Neka je G konačna grupa.*

(a) *Vrijedi*

$$\mathbb{C}[G]=\bigoplus_{\alpha\in\hat{G}}\mathbb{C}_\alpha[G].$$

(b) *Neka $\pi^\alpha\in\alpha$ djeluje na vektorskom prostoru V_α, neka je $e^\alpha=\{e_1^\alpha,e_2^\alpha,\ldots,e_{d(\alpha)}^\alpha\}$ baza prostora V_α i neka su $\pi_{ij}^\alpha(a)$ elementi matrice operatora $\pi^\alpha(a)$ u bazi e^α $(a\in G,\ 1\leq i,j\leq d(\alpha))$. Tada je $\{\pi_{ij}^\alpha;\ 1\leq i,j\leq d(\alpha)\}$ baza potprostora $\mathbb{C}_\alpha[G]$ i $\{\pi_{ij}^\alpha;\ \alpha\in\hat{G},\ 1\leq i,j\leq d(\alpha)\}$ je baza prostora $\mathbb{C}[G]$.*

(c) *Ako su reprezentacije π^α u (b) unitarne i ako su baze e^α ortonormirane, onda je*

$$\{\sqrt{d(\alpha)}\,\pi_{ij}^\alpha;\ \alpha\in\hat{G},\ 1\leq i,j\leq d(\alpha)\}$$

ortonormirana baza u unitarnom prostoru $\mathbb{C}[G]$.

Dokaz: Tvrdnje (a) i (b) slijede iz tvrdnje (c) jer za $\alpha\in\hat{G}$ i za bilo koji izbor reprezentacije π^α i baze e^α funkcije π_{ij}^α razapinju potprostor $\mathbb{C}_\alpha[G]$.

Dokažimo tvrdnju (c). Operatori $\pi^\alpha(a)$ su unitarni, dakle operatori $\pi^\alpha(a)$ i $\pi^\alpha\left(a^{-1}\right)$ su međusobno adjungirani. Kako je baza e^α ortonormirana, matrice tih operatora u toj bazi su međusobno adjungirane. To znači da vrijedi:

$$\pi_{ij}^\alpha\left(a^{-1}\right)=\overline{\pi_{ji}^\alpha(a)},\qquad 1\leq i,j\leq d(\alpha),\quad \alpha\in\hat{G},\quad a\in G.$$

Sada iz teorema 2.1.4 neposredno slijedi:

$$\sum_{a\in G}\pi_{ij}^\alpha(a)\overline{\pi_{sr}^\beta(a)}=\frac{|G|}{d(\alpha)}\delta_{\alpha\beta}\delta_{is}\delta_{jr},\qquad \alpha,\beta\in\hat{G},\ i,j\in\{1,2,\ldots,d(\alpha)\},\ r,s\in\{1,2,\ldots,d(\beta)\}.$$

Prema definiciji skalarnog produkta u prostoru $\mathbb{C}[G]$ to znači da je

$$(\pi_{ij}^\alpha|\pi_{sr}^\beta)=\frac{1}{d(\alpha)}\delta_{\alpha\beta}\delta_{is}\delta_{jr},\qquad \alpha,\beta\in\hat{G},\ i,j\in\{1,2,\ldots,d(\alpha)\},\ r,s\in\{1,2,\ldots,d(\beta)\}.$$

Iz gornjih relacija vidimo da je

$$\{\sqrt{d(\alpha)}\pi_{ij}^\alpha;\ \alpha\in\hat{G},\ 1\leq i,j\leq d(\alpha)\}$$

ortonormiran skup. Broj elemenata tog skupa je

$$\sum_{\alpha\in\hat{G}}d(\alpha)^2,$$

a to je prema tvrdnji (c) teorema 2.3.1. jednako $|G|=\dim\,\mathbb{C}[G]$. Dakle, radi se o ortonormiranoj bazi unitarnog prostora $\mathbb{C}[G]$.

Zadatak 2.4.5. *Za simetričnu grupu S_3 (grupu permutacija skupa $\{1,2,3\}$) pronađite sve klase konjugiranosti, konstruirajte za svaku $\alpha\in\hat{S}_3$ unitarnu reprezentaciju $\pi^\alpha\in\alpha$ i konstruirajte ortonormiranu bazu prostora $\mathbb{C}_c[S_3]$ iz teorema 2.4.2. i prostora $\mathbb{C}[S_3]$ iz tvrdnje (c) teorema 2.4.7. Napokon, izračunajte matricu unitarnog operatora na prostoru $\mathbb{C}_c[S_3]$ koji prevodi bazu iz teorema 2.4.2. u bazu koja se dobije normiranjem ortogonalne baze iz tvrdnje (b) propozicije 2.4.3.*

2.5 Struktura grupovne algebre $\mathbb{C}[G]$

Propozicija 2.5.1. *Potprostor* $\mathbb{C}_c[G] = \{\varphi \in \mathbb{C}[G];\ \varphi(ab) = \varphi(ba)\ \forall a \in G\}$ *svih centralnih funkcija je centar algebre* $\mathbb{C}[G]$, *tj.*

$$\mathbb{C}_c[G] = \{\varphi \in \mathbb{C}[G];\ \varphi \star \psi = \psi \star \varphi\ \forall \psi \in \mathbb{C}[G]\}.$$

Dokaz: Neka je $\varphi \in \mathbb{C}_c[G]$ i $\psi \in \mathbb{C}[G]$. Tada imamo redom

$$(\varphi \star \psi)(a) = \sum_{b \in G} \varphi(b)\psi\left(b^{-1}a\right) = \sum_{b \in G} \varphi\left(b^{-1}\right)\psi(ba) = \sum_{b \in G} \varphi\left(\left(ba^{-1}\right)^{-1}\right)\psi(b) =$$

$$= \sum_{b \in G} \psi(b)\varphi\left(ab^{-1}\right) = \sum_{b \in G} \psi(b)\varphi\left(b^{-1}a\right) = (\psi \star \varphi)(a).$$

Dakle, za svaku centralnu funkciju φ vrijedi $\varphi \star \psi = \psi \star \varphi\ \forall \psi \mathbb{C}[G]$.

Pretpostavimo sada da je funkcija φ iz centra algebre $\mathbb{C}[G]$, tj. takva da je $\varphi \star \psi = \psi \star \varphi$ $\forall \psi \mathbb{C}[G]$. Tada posebno za svaki $a \in G$ vrijedi $\varphi \star \delta_a = \delta_a \star \varphi$. Međutim,

$$(\varphi \star \delta_a)(b) = \sum_{c \in G} \varphi(c)\delta_a\left(c^{-1}b\right) = \sum_{c \in G} \varphi(c)\delta_{a,c^{-1}b} = \varphi\left(ba^{-1}\right),$$

$$(\delta_a \star \varphi)(b) = \sum_{c \in G} \delta_a(c)\varphi\left(c^{-1}b\right) = \sum_{c \in G} \delta_{a,c}\varphi\left(c^{-1}b\right) = \varphi\left(a^{-1}b\right).$$

Dakle, $\varphi\left(ba^{-1}\right) = \varphi\left(a^{-1}b\right)\ \forall a, b \in G$ a to znači da je $\varphi \in \mathbb{C}_c[G]$.

Proučit ćemo sada pobliže strukturu algebre $\mathbb{C}[G]$ i to tako da ustanovimo pravila konvolucije elemenata pogodno izabrane baze od $\mathbb{C}[G]$. Prema teoremu 2.4.7. znamo da bazu od $\mathbb{C}[G]$ čine matrični elementi ireducibilnih reprezentacija grupe G. Kao i prije za svaku klasu $\alpha \in \hat{G}$ izaberimo iz te klase jednu ireducibilnu reprezentaciju π^α grupe G na vektorskom prostoru V_α. Neka je $d(\alpha) = \dim V_\alpha$ i izaberimo za svaku klasu $\alpha \in \hat{G}$ bazu $e^\alpha = \{e_1^\alpha, e_2^\alpha, \ldots, e_{d(\alpha)}^\alpha\}$ prostora V_α. Nadalje, označimo sa $\pi_{ij}^\alpha(a)$ elemente matrice operatora $\pi^\alpha(a)$ u bazi e^α. Prema tvrdnji (b) teorema 2.4.7.

$$\{\pi_{ij}^\alpha;\ \alpha \in \hat{G},\ i, j \in \{1, 2, \ldots, d(\alpha)\}\}$$

je baza vektorskog prostora $\mathbb{C}[G]$. Nadalje, za $\alpha \in \hat{G}$ sa χ_α je označen karakter reprezentacije π^α :

$$\chi_\alpha(a) = \sum_{i=1}^{d(\alpha)} \pi_{ii}^\alpha(a), \qquad a \in G.$$

Propozicija 2.5.2. *Vrijedi*

$$\pi_{ij}^\alpha \star \pi_{k\ell}^\beta = \frac{|G|}{d(\alpha)}\delta_{\alpha,\beta}\delta_{jk}\pi_{i\ell}^\alpha.$$

Zadatak 2.5.1. *Pomoću teorema 2.1.4. dokažite propoziciju 2.5.2.*

Teorem 2.5.3. (a) *Potprostori* $\mathbb{C}_\alpha[G]$, $\alpha \in \hat{G}$, *su obostrani ideali u algebri* $\mathbb{C}[G]$.

(b) *Za funkcije*

$$\chi^\alpha = \frac{d(\alpha)}{|G|}\chi_\alpha, \qquad \alpha \in \hat{G},$$

vrijedi

$$\chi^\alpha \star \varphi = \varphi \star \chi^\alpha = \begin{cases} \varphi & \textit{ako je} \quad \varphi \in \mathbb{C}_\alpha[G] \\ 0 & \textit{ako je} \quad \varphi \in \mathbb{C}_\beta[G],\ \beta \in \hat{G},\ \beta \neq \alpha. \end{cases}$$

Posebno, funkcija χ^α *je jedinica u algebri* $\mathbb{C}_\alpha[G]$ *i vrijedi* $\chi^\alpha \star \chi^\beta = \delta_{\alpha\beta}\chi^\alpha$.

Dokaz: Prema teoremu 2.4.7.

$$\{\pi^\alpha_{ij};\ 1 \le i,j \le d(\alpha)\}$$

je baza potprostora $\mathbb{C}_\alpha[G]$, a

$$\{\pi^\beta_{k\ell};\ \beta \in \hat{G},\ 1 \le k,\ell \le d(\beta)\}$$

je baza čitave algebre $\mathbb{C}[G]$. Dakle, ako su $\varphi \in \mathbb{C}_\alpha[G]$ i $\psi \in \mathbb{C}[G]$ možemo pisati

$$\varphi = \sum_{i,j=1}^{d(\alpha)} \lambda_{ij}\pi^\alpha_{ij} \qquad \text{i} \qquad \psi = \sum_{\beta\in\hat{G}} \sum_{k,\ell=1}^{d(\beta)} \mu^\beta_{k\ell}\pi^\beta_{k\ell}$$

za neke $\lambda_{ij}, \mu^\beta_{k\ell} \in \mathbb{C}$. Stoga je prema propoziciji 2.5.2.

$$\varphi \star \psi = \sum_{\beta\in\hat{G}} \sum_{i,j=1}^{d(\alpha)} \sum_{k,\ell=1}^{d(\beta)} \lambda_{ij}\mu^\beta_{k\ell}\pi^\alpha_{ij} \star \pi^\beta_{k\ell} =$$

$$= \frac{|G|}{d(\alpha)} \sum_{\beta\in\hat{G}} \sum_{i,j=1}^{d(\alpha)} \sum_{k,\ell=1}^{d(\beta)} \lambda_{ij}\mu^\beta_{k\ell}\delta_{\alpha,\beta}\delta_{jk}\pi^\alpha_{i\ell} = \frac{|G|}{d(\alpha)} \sum_{i,j,\ell=1}^{d(\alpha)} \lambda_{ij}\mu^\alpha_{j\ell}\pi^\alpha_{i\ell} \in \mathbb{C}_\alpha[G]$$

i sasvim analogno

$$\psi \star \varphi = \sum_{\beta\in\hat{G}} \sum_{i,j=1}^{d(\alpha)} \sum_{k,\ell=1}^{d(\beta)} \lambda_{ij}\mu^\beta_{k\ell}\pi^\beta_{k\ell} \star \pi^\alpha_{ij} =$$

$$= \frac{|G|}{d(\alpha)} \sum_{\beta\in\hat{G}} \sum_{i,j=1}^{d(\alpha)} \sum_{k,\ell=1}^{d(\beta)} \lambda_{ij}\mu^\beta_{k\ell}\delta_{\alpha,\beta}\delta_{i\ell}\pi^\alpha_{kj} = \frac{|G|}{d(\alpha)} \sum_{i,j,k=1}^{d(\alpha)} \lambda_{ij}\mu^\alpha_{ki}\pi^\alpha_{kj} \in \mathbb{C}_\alpha[G]$$

Time je dokazano da je $\mathbb{C}_\alpha[G]$ obostrani ideal u algebri $\mathbb{C}[G]$.

(b) Funkcije χ^α su centralne, pa prema propoziciji 2.5.1. vrijedi $\chi^\alpha \star \varphi = \varphi \star \chi^\alpha$. Nadalje, iz propozicije 2.5.2. slijedi da za $\alpha, \beta \in \hat{G}$ i za $i, j \in \{1, 2, \ldots, d(\beta)\}$ imamo

$$\chi^\alpha \star \pi^\beta_{ij} = \frac{d(\alpha)}{|G|} \sum_{k=1}^{d(\alpha)} \pi^\alpha_{kk} \star \pi^\beta_{ij} = \delta_{\alpha\beta} \sum_{k=1}^{d(\alpha)} \delta_{ki}\pi^\alpha_{kj} = \delta_{\alpha\beta}\pi^\alpha_{ij}.$$

Kako je $\{\pi^\beta_{ij};\ 1 \le i,j \le d(\beta)\}$ baza potprostora $\mathbb{C}_\beta[G]$, tvrdnja slijedi.

2.6 Osnovna redukcija reprezentacije

Neka su u daljnjem χ^α, $\alpha \in \hat{G}$, centralne funkcije definirane u tvrdnji (b) teorema 2.5.3:

$$\chi^\alpha = \frac{d(\alpha)}{|G|}\chi_\alpha.$$

Prema tom teoremu vrijedi:

$$\chi^\alpha \star \chi^\beta = 0, \quad \alpha, \beta \in \hat{G},\ \alpha \neq \beta; \qquad\qquad \chi^\alpha \star \chi^\alpha = \chi^\alpha, \quad \alpha \in \hat{G};$$

$$\chi^\alpha \star \pi^\beta_{ij} = 0, \quad \alpha, \beta \in \hat{G},\ \alpha \neq \beta,\ 1 \leq i, j \leq d(\beta); \qquad \chi^\alpha \star \pi^\alpha_{ij} = \pi^\alpha_{ij}, \quad \alpha \in \hat{G},\ 1 \leq i, j \leq d(\alpha).$$

Nadalje, kako je χ^α jedinica algebre $\mathbb{C}_\alpha[G]$, zbog tvrdnje (a) teorema 2.4.7. slijedi da je suma tih funkcija jedinica algebre $\mathbb{C}[G]$. Dakle,

$$\sum_{\alpha \in \hat{G}} \chi^\alpha = 1_{\mathbb{C}[G]} = \delta_e.$$

Neka je sada π reprezentacija grupe G na vektorskom prostoru V. Promatrajmo operatore $\pi\left(\overline{\chi^\alpha}\right)$, $\alpha \in \hat{G}$. Tada je

$$\pi\left(\overline{\chi^\alpha}\right)^2 = \pi\left(\overline{\chi^\alpha}\right)\pi\left(\overline{\chi^\alpha}\right) = \pi\left(\overline{\chi^\alpha} \star \overline{\chi^\alpha}\right) = \pi\left(\overline{\chi^\alpha \star \chi^\alpha}\right) = \pi\left(\overline{\chi^\alpha}\right).$$

Dakle, operatori $\pi\left(\overline{\chi^\alpha}\right)$ su projektori. Označimo sa V_α sliku projektora $\pi\left(\overline{\chi^\alpha}\right)$:

$$V_\alpha = \{v \in V;\ \pi\left(\overline{\chi^\alpha}\right)v = v\}.$$

Budući da vrijedi

$$\sum_{\alpha \in \hat{G}} \pi\left(\overline{\chi^\alpha}\right) = \pi\left(\sum_{\alpha \in \hat{G}} \overline{\chi^\alpha}\right) = \pi\left(1_{\mathbb{C}[G]}\right) = I_V$$

i

$$\pi\left(\overline{\chi^\alpha}\right)\pi\left(\overline{\chi^\beta}\right) = \pi\left(\overline{\chi^\alpha \star \chi^\beta}\right) = 0 \quad \text{ako je} \quad \alpha \neq \beta,$$

zaključujemo da je

$$V = \sum_{\alpha \in \hat{G}} V_\alpha \qquad\qquad \text{(direktna suma)}.$$

Budući da su $\overline{\chi^\alpha}$ centralne funkcije, potprostori V_α su $\pi-$invarijantni. Gornji rastav prostora V zove se **osnovna redukcija reprezentacije** π.

Razmotrimo sada što predstavljaju potprostori V_α, $\alpha \in \hat{G}$, u osnovnoj redukciji reperezentacije π. Neka je W $\pi-$invarijantan potprostor od V takav da je subreprezentacija π_W ireducibilna. Neka je $\alpha \in \hat{G}$ klasa ekvivalencije te ireducibilne reprezentacije. Tada je $\chi_{\pi_W} = \chi_\alpha$. Budući da je χ^α centralna funkcija, prema propoziciji 2.4.1. vrijedi

$$\pi\left(\overline{\chi^\alpha}\right)|W = \pi_W\left(\overline{\chi^\alpha}\right) = \lambda I_W,$$

gdje je

$$\lambda = \frac{|G|}{d(\alpha)}(\chi_{\pi_W}|\chi^\alpha) = (\chi_\alpha|\chi_\alpha) = 1.$$

Dakle, $\pi\left(\overline{\chi^\alpha}\right)|W = I_W$, što znači da je $W \subseteq V_\alpha$.

Na taj način dokazali smo:

Teorem 2.6.1. *Neka je π reprezentacija grupe G na prostoru V.*

(a) *Za $\alpha \in \hat{G}$ operator*

$$\pi\left(\overline{\chi^\alpha}\right) = \frac{d(\alpha)}{|G|} \sum_{a \in G} \overline{\chi_\alpha(a)} \pi(a)$$

je projektor.

(b) *Vrijedi*

$$\sum_{\alpha \in \hat{G}} \pi\left(\overline{\chi^\alpha}\right) = I_V.$$

Drugim riječima, ako je V_α područje vrijednosti projektora $\pi\left(\overline{\chi^\alpha}\right)$, onda je

$$V = \sum_{\alpha \in \hat{G}} V_\alpha \qquad \text{(direktna suma)}.$$

(c) *Ako je $W \leq V$ $\pi-$invarijantan potprostor takav da je subreprezentacija π_W ireducibilna i ako je $\alpha \in \hat{G}$ klasa ekvivalencije reprezentacije π_W, onda je $W \subseteq V_\alpha$.*

(d) *Neka je*

$$V = V_1 \dot{+} V_2 \dot{+} \cdots \dot{+} V_s$$

rastav prostora V u direktnu sumu $\pi-$invarijantnih potprostora takvih da su sve subreprezentacije π_{V_i} ireducibilne. Suma svih potprostora V_i takvih da je subreprezentacija π_{V_i} u klasi $\alpha \in \hat{G}$ ne ovisi o gornjem rastavu i jednaka je području vrijednosti V_α projektora $\pi(\overline{\chi^\alpha})$.

Teorem 2.6.2. *Neka su $\pi^i : G \to GL(V_i)$, $1 \leq i \leq s$, međusobno neekvivalentne ireducibilne reprezentacije grupe G. Pomoću pripadnih reprezentacija grupovne algebre $\pi^i : \mathbb{C}[G] \to L(V_i)$ definiramo homomorfizam algebri*

$$\pi : \mathbb{C}[G] \to L(V_1) \times L(V_2) \times \cdots \times L(V_s), \qquad \pi(\varphi) = (\pi_1(\varphi), \pi_2(\varphi), \ldots, \pi_s(\varphi)), \quad \varphi \in \mathbb{C}[G].$$

Homomorfizam π je surjektivan.

Dokaz: Pretpostavimo da homomorfizam π nije surjektivan. Tada je slika $\pi(\mathbb{C}[G])$ tog homomorfizma pravi potprostor prostora $\prod_i L(V_i)$, pa slijedi da postoji netrivijalni linearni funkcional f na prostoru $\prod_i L(V_i)$ koji se poništava na $\pi(\mathbb{C}[G])$. Za svaki $a \in G$ je $\pi^i(a) = \pi^i(\delta_a)$, gdje je $\delta_a \in \mathbb{C}[G]$ definirana sa $\delta_a(b) = \delta_{a,b}$. Dakle, vrijedi

$$f(\pi^1(a), \pi^2(a), \ldots, \pi^s(a)) = 0 \qquad \forall a \in G.$$

Za svaki $i \in \{1, 2, \ldots, s\}$ izaberimo bazu $e^i = \{e_1^i, e_2^i, \ldots, e_{n_i}^i\}$ prostora V_i i neka su $\pi_{jk}^i(a)$ elementi matrice operatora $\pi^i(a)$ u bazi e^i. Neka je za svaki i $\{E_{jk}^i;\ 1 \leq j, k \leq n_i\}$ pridružena baza prostora $L(V_i)$:

$$E_{jk}^i e_\ell^i = \delta_{k\ell} e_j^i, \qquad 1 \leq j, k, \ell \leq n_i; \quad 1 \leq i \leq s.$$

Stavimo

$$\lambda_{jk}^i = f(\underbrace{0, \ldots, 0}_{i-1}, E_{jk}^i, \underbrace{0, \ldots, 0}_{s-i}), \qquad 1 \leq j, k \leq n_i, \quad 1 \leq i \leq s.$$

Tada imamo

$$\pi^i(a) = \sum_{j,k=1}^{n_i} \pi_{jk}^i(a) E_{jk}^i, \qquad a \in G, \quad 1 \leq i \leq s,$$

pa iz jednakosti $f(\pi^1(a), \pi^2(a), \ldots, \pi^s(a)) = 0 \ \forall a \in G$ slijedi

$$\sum_{i=1}^{s} \sum_{j,k=1}^{n_i} \lambda^i_{jk} \pi^i_{jk}(a) = 0 \qquad \forall a \in G.$$

Međutim, prema tvrdnji (b) teorema 2.4.7. funkcije π^i_{jk} $(1 \leq j,k \leq n_i,\ 1 \leq i \leq s)$ su linearno nezavisne, pa slijedi $\lambda^i_{jk} = 0 \ \forall i,j,k$. Dakle, $f = 0$ suprotno pretpostavci. Ova kontradikcija dokazuje da je pretpostavka da homomorfizam π nije surjektivan bila pogrešna. Time je teorem dokazan.

Iz prethodnog teorema neposredno slijedi:

Korolar 2.6.3. *Neka je π ireducibilna reprezentacija grupe G na prostoru V. Tada je*

$$L(V) = \pi(\mathbb{C}[G]) = \{\pi(\varphi);\ \varphi \in \mathbb{C}[G]\}.$$

Nadalje, vrijedi:

Korolar 2.6.4. *Pretpostavimo da su reprezentacije π^i u teoremu 2.6.2. predstavnici svih klasa ekvivalencije $\hat{G}$. Tada je homomorfizam π u tvrdnji tog teorema izomorfizam algebre $\mathbb{C}[G]$ na algebru $L(V_1) \times L(V_2) \times \cdots \times L(V_s)$.*

Zadatak 2.6.1. *Dokažite korolar 2.6.4.*

Zadatak 2.6.2. *Uz oznake i pretpostavke teorema 2.6.2. za svaki $i \in \{1, 2, \ldots, s\}$ neka je $\alpha_i \in \hat{G}$ klasa ekvivalencije reprezentacije π^i. Nadalje, neka je $\hat{G} \setminus \{\alpha_1, \ldots, \alpha_s\} = \{\beta_1, \ldots, \beta_r\}$. Dokažite da je tada*

$$Ker\,\pi = \sum_{j=1}^{r} \mathbb{C}_{\beta_j}[G]$$

i da je restrikcija homomorfizma π na podalgebru

$$\sum_{i=1}^{s} \mathbb{C}_{\alpha_i}[G]$$

unitalni izomorfizam te unitalne algebre na algebru $L(V_1) \times L(V_2) \times \cdots \times L(V_s)$.

Teorem 2.6.5. *Neka su π i ρ reprezentacije grupe G na prostorima V i W. Tada je*

$$\dim\, Hom_G(V, W) = \dim\, Hom_G(W, V) = (\chi_\pi | \chi_\rho) = \sum_{\alpha \in \hat{G}} m(\pi, \alpha) m(\rho, \alpha).$$

Dokaz: Neka je $V = X_1 \dot{+} X_2 \dot{+} \cdots \dot{+} X_n$ pri čemu su $X_1, X_2, \cdots, X_n$ $\pi-$invarijantni potprostori od V takvi da su subreprezentacije $\pi_{X_1}, \pi_{X_2}, \ldots, \pi_{X_n}$ ireducibilne. Prema zadatku 1.1.5. tada vrijedi

$$\dim\, Hom_G(V, W) = \sum_{i=1}^{n} \dim\, Hom_G(X_i, W).$$

Nadalje, neka je $W = Y_1 \dot{+} Y_2 \dot{+} \cdots \dot{+} Y_m$ pri čemu su $Y_1, Y_2, \ldots, Y_m$ $\rho-$invarijantni potprostori od W takvi da su subreprezentacije $\rho_{Y_1}, \rho_{Y_2}, \ldots, \rho_{Y_m}$ ireducibilne. Prema zadatku 1.1.4. tada je za svaki $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$

$$\dim\, Hom_G(X_i, W) = \sum_{j=1}^{m} \dim\, Hom_G(X_i, Y_j).$$

Iz prethodne dvije jednakosti slijedi

$$\dim\, Hom_G(V,W)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\dim\, Hom_G(X_i,Y_j).$$

Primjenom Schurove leme (teorem 1.1.6.) i teorema 2.2.4. slijedi

$$\dim\, Hom_G(X_i,Y_j)=\left\{\begin{array}{ll} 1 & \text{ako je } \pi_{X_i}\simeq\rho_{Y_j} \\ & \\ 0 & \text{ako je } \pi_{X_i}\not\simeq\rho_{Y_j}\end{array}\right\}=\left(\chi_{\pi_{X_i}}\middle|\chi_{\rho_{Y_j}}\right).$$

Budući da prema propoziciji 2.2.2. vrijedi

$$\chi_\pi=\sum_{i=1}^{n}\chi_{\pi_{X_i}}\qquad \text{i}\qquad \chi_\rho=\sum_{j=1}^{m}\chi_{\rho_{Y_j}}$$

iz gornjih jednakosti nalazimo

$$\dim\, Hom_G(V,W)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\left(\chi_{\pi_{X_i}}\middle|\chi_{\rho_{Y_j}}\right)=\left(\sum_{i=1}^{n}\chi_{\pi_{X_i}}\middle|\sum_{j=1}^{m}\chi_{\rho_{Y_j}}\right)=(\chi_\pi|\chi_\rho).$$

Napokon, kao u dokazu teorema 2.2.7. imamo

$$\chi_\pi=\sum_{\alpha\in\hat{G}}m(\pi,\alpha)\chi_\alpha\qquad \text{i}\qquad \chi_\rho=\sum_{\beta\in\hat{G}}m(\rho,\beta)\chi_\beta$$

pa zbog ortonormiranosti karaktera χ_α, $\alpha\in\hat{G}$, slijedi

$$(\chi_\pi|\chi_\rho)=\sum_{\alpha\in\hat{G}}\sum_{\beta\in\hat{G}}m(\pi,\alpha)m(\rho,\beta)(\chi_\alpha|\chi_\beta)=\sum_{\alpha\in\hat{G}}m(\pi,\alpha)m(\rho,\alpha).$$

Time smo dokazali da je

$$\dim\, Hom_G(V,W)=(\chi_\pi|\chi_\rho)=\sum_{\alpha\in\hat{G}}m(\pi,\alpha)m(\rho,\alpha).$$

No odatle je $(\chi_\pi|\chi_\rho)=(\chi_\rho|\chi_\pi)$, pa slijedi i

$$\dim\, Hom_G(V,W)=\dim\, Hom_G(W,V).$$

2.7 Svojstva djeljivosti

Cilj je ovog odjeljka da dokažemo da je red $|G|$ grupe G djeljiv s dimenzijom $d(\alpha)$ svake ireducibilne reprezentacije od G. U tu svrhu trebaju nam neki pojmovi i činjenice iz opće algebre.

Neka je R proizvoljan unitalan prsten. Jedinicu prstena R označavat ćemo sa 1. Nadalje, za $m \in \mathbb{N}$ istim znakom m označavamo element prstena R koji se dobije zbrajanjem m primjeraka jedinice prstena R, a sa $-m$ njemu suprotan element prstena R. Na taj način definiran je unitalni homomorfizam prstenova $\mathbb{Z} \to R$. Ujedno, na taj način svaki unitalan prsten možemo shvaćati kao $\mathbb{Z}-$modul i lijevi i desni budući da je slika homomorfizma $\mathbb{Z} \to R$ sadržana u centru prstena R.

Neka je sada R komutativan unitalan prsten. Za element $x \in R$ kažemo da je **cio** (nad $\mathbb{Z}$) ako postoji $n \in \mathbb{N}$ i $m_1, m_2, \ldots, m_n \in \mathbb{Z}$ takvi da je

$$x^n + m_1 x^{n-1} + \cdots + m_{n-1} x + m_n = 0.$$

Zadatak 2.7.1. *Dokažite da je element $x \in \mathbb{Q}$ cio nad $\mathbb{Z}$ ako i samo ako je $x \in \mathbb{Z}$.*

Uputa: Napišite x kao razlomak $\pm\frac{p}{q}$ s relativno prostim $p, q \in \mathbb{N}$, a zatim pomoću svojstava djeljivosti dokažite da je $q = 1$.

Za $x \in R$ označimo sa $\mathbb{Z}[x]$ unitalan potprsten od R generiran elementom x. Drugim riječima, $\mathbb{Z}[x]$ je $\mathbb{Z}-$podmodul od R generiran sa $\{1, x, x^2, \ldots\}$.

Propozicija 2.7.1. *Neka je R komutativan unitalan prsten i $x \in R$. Sljedeća su tri svojstva međusobno ekvivalentna:*

(*a*) *Element x je cio nad $\mathbb{Z}$.*

(*b*) *$\mathbb{Z}[x]$ je konačno generiran kao $\mathbb{Z}-$modul, tj. postoje $y_1, y_2, \ldots, y_n \in \mathbb{Z}[x]$ takvi da je $\mathbb{Z}[x] = \mathbb{Z}y_1 + \mathbb{Z}y_2 + \cdots + \mathbb{Z}y_n$.*

(*c*) *$\mathbb{Z}[x]$ je sadržan u nekom potprstenu $S \subseteq R$ koji je konačno generiran kao $\mathbb{Z}-$modul.*

Dokaz: Iz (a) slijedi

$$x^n = -m_1 x^{n-1} - \cdots - m_{n-1} x - m_n \quad \text{za neki} \quad n \in \mathbb{N} \quad \text{i za neke} \quad m_1, m_2, \ldots, m_n \in \mathbb{Z},$$

a odatle množenjem sa x^{k-n} dobivamo

$$x^k = -m_1 x^{k-1} - \cdots - m_{n-1} x^{k-n+1} - m_n x^{k-n} \qquad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Odatle indukcijom nalazimo da je $x^k \in \mathbb{Z}1 + \mathbb{Z}x + \mathbb{Z}x^2 + \cdots + \mathbb{Z}x^{n-1}$ $\forall k \in \mathbb{N}$. Dakle, vrijedi

$$\mathbb{Z}[x] = \mathbb{Z}1 + \mathbb{Z}x + \mathbb{Z}x^2 + \cdots + \mathbb{Z}x^{n-1},$$

što pokazuje da je $\mathbb{Z}[x]$ konačno generiran kao $\mathbb{Z}-$modul. Time je dokazano da iz (a) slijedi (b).

Očito iz (b) slijedi (c).

Pretpostavimo sada da vrijedi (c) i neka su $y_1, y_2, \ldots, y_n \in S$ takvi da je

$$S = \mathbb{Z}y_1 + \mathbb{Z}y_2 + \cdots + \mathbb{Z}y_n.$$

Tada posebno postoje $a_{ij} \in \mathbb{Z}$ takvi da je

$$xy_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j, \qquad 1 \leq i \leq n.$$

Zadatak 2.7.2. *Dokažite da odatle slijedi* $(\det A)y_i = 0\ \forall i$, *gdje je* A *matrica iz* $M_n(R)$ *s elementima* $\delta_{ij}x - a_{ij}$.

Kako je $1 \in \mathbb{Z}[x] \subseteq S$ postoje $b_1, b_2, \ldots, b_n \in \mathbb{Z}$ takvi da je $1 = b_1y_1 + b_2y_2 + \cdots + b_ny_n$. Slijedi

$$\det A = (\det A)1 = b_1(\det A)y_1 + b_2(\det A)y_2 + \cdots + b_n(\det A)y_n = 0.$$

Međutim, $\det A = 0$ je upravo jednakost oblika $x^n + m_1x^{n-1} + \cdot + m_{n-1}x + m_n = 0$ za neke $m_1, m_2, \ldots, m_n \in \mathbb{Z}$, dakle x je cio nad $\mathbb{Z}$. Time je dokazano da iz (c) slijedi (a).

Propozicija 2.7.2. *Cijeli elementi komutativnog unitalnog prstena* R *tvore potprsten.*

Dokaz: Neka su x i y cijeli elementi prstena R. Treba dokazati da su tada $x - y$ i xy cijeli elementi prstena R. Neka je $\mathbb{Z}[x, y]$ unitalan potprsten od R generiran skupom $\{x, y\}$. Prema dokazu implikacije $(a) \implies (b)$ u propoziciji 2.7.1.za neke $n, m \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\mathbb{Z}[x] = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}x + \mathbb{Z}x^2 + \cdots \mathbb{Z}x^{n-1} \qquad \text{i} \qquad \mathbb{Z}[y] = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}y + \mathbb{Z}y^2 + \cdots + \mathbb{Z}y^{m-1}. \tag{2.1}$$

Dokažimo da vrijedi

$$\mathbb{Z}[x, y] = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} \mathbb{Z}x^iy^j.$$

Očito vrijedi

$$\sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} \mathbb{Z}x^iy^j \subseteq \mathbb{Z}[x, y].$$

Da dokažemo obrnutu inkluziju neka je $a \in \mathbb{Z}[x, y]$. Tada postoje $k, \ell \in \mathbb{N}$ i $a_{ij} \in \mathbb{Z}$, $0 \le i \le k$, $0 \le j \le \ell$, takvi da je

$$a = \sum_{i=0}^{k} \sum_{j=0}^{\ell} a_{ij}x^iy^j.$$

Međutim, prema (2.1) vrijedi

$$x^i \in \sum_{p=0}^{n-1} \mathbb{Z}x^p \qquad \text{i} \qquad y^j \in \sum_{q=0}^{m-1} \mathbb{Z}y^q \qquad \forall i, j \ge 0,$$

pa možemo pretpostaviti da je $k = n - 1$ i $\ell = m - 1$. Kako je $a \in \mathbb{Z}[x, y]$ bio proizvoljan, dokazali smo obrnutu inkluziju

$$\mathbb{Z}[x, y] \subseteq \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} \mathbb{Z}x^iy^j.$$

Dokazana jednakost pokazuje da je $\mathbb{Z}[x, y]$ konačno generiran $\mathbb{Z}-$podmodul od R. Kako su $\mathbb{Z}[x-y]$ i $\mathbb{Z}[xy]$ sadržani u $\mathbb{Z}[x, y]$, prema propoziciji 2.7.1. slijedi da su $x-y$ i xy cijeli, pa je time propozicija dokazana.

Propozicija 2.7.3. *Neka je* χ *karakter reprezentacije* π *grupe* G. *Tada je za svaki* $a \in G$ *broj* $\chi(a) \in \mathbb{C}$ *cio nad* $\mathbb{Z}$.

Dokaz: $\chi(a)$ je suma svojstvenih vrijednosti operatora $\pi(a)$. Ako je $|G| = n$ onda je $a^n = e$, dakle, $\pi(a)^n = \pi(a^n) = I$. Slijedi da su sve svojstvene vrijednosti operatora $\pi(a)$ $n-$ti korijeni iz jedinice, dakle ti su kompleksni brojevi cijeli nad $\mathbb{Z}$. Prema propoziciji 2.7.2. slijedi da je i $\chi(a)$ cio nad $\mathbb{Z}$.

Propozicija 2.7.4. *Neka je π ireducibilna reprezentacija grupe G dimenzije d. Neka je χ karakter reprezentacije π i neka je K neka klasa konjugiranosti u grupi G. Tada je broj*

$$\frac{1}{d}\sum_{a\in K}\chi(a)$$

cio nad $\mathbb{Z}$.

Dokaz: Neka je φ karakteristična funkcija skupa K. Tada znamo da je $\varphi \in \mathbb{C}_c[G]$. No zapravo je $\varphi \in \mathbb{Z}_c[G]$, pri čemu je $\mathbb{Z}[G]$ potprsten od $\mathbb{C}[G]$ svih funkcija $\psi : G \to \mathbb{Z}$ i $\mathbb{Z}_c[G]$ je centar tog prstena. Prsten $\mathbb{Z}_c[G]$ je komutativan i očito je konačno generiran kao $\mathbb{Z}-$modul. Prema propoziciji 2.7.1. slijedi da su svi elementi tog prstena cijeli nad $\mathbb{Z}$. Posebno, φ je cio nad $\mathbb{Z}$. Operator $\pi(\varphi)$ komutira sa svim operatorima $\pi(a)$, $a \in G$, pa po tvrdnji (c) Schurove leme (teorem 1.1.6.) slijedi da je $\pi(\varphi) = \lambda I$ za neki $\lambda \in \mathbb{C}$. Budući da je $\psi \mapsto \pi(\psi)$ homomorfizam algebri, slijedi da je broj λ cio nad $\mathbb{Z}$. Sada računanjem traga nalazimo:

$$\lambda = \frac{1}{d}\mathrm{Tr}\,\pi(\varphi) = \frac{1}{d}\mathrm{Tr}\left(\sum_{a\in G}\varphi(a)\pi(a)\right) = \frac{1}{d}\mathrm{Tr}\left(\sum_{a\in K}\pi(a)\right) = \frac{1}{d}\sum_{a\in K}\chi(a).$$

Time je propozicija dokazana.

Teorem 2.7.5. *Neka je G grupa reda $|G| = n$ i neka je π njena ireducibilna reprezentacija dimenzije d. Tada je n djeljiv sa d.*

Dokaz: Neka je χ karakter reprezentacije π. Prema teoremu 2.2.4. tada je $(\chi|\chi) = 1$. Prema definiciji skalarnog produkta i prema tvrdnji (b) propozicije 2.2.1. nalazimo

$$1 = (\chi|\chi) = \frac{1}{n}\sum_{a\in G}\overline{\chi(a)}\chi(a) = \frac{1}{n}\sum_{a\in G}\chi\left(a^{-1}\right)\chi(a).$$

Neka su $C_1, C_2, \ldots, C_s$ sve klase konjugiranosti u grupi G. Slijedi

$$\frac{n}{d} = \frac{1}{d}\sum_{i=1}^{s}\sum_{a\in C_i}\chi\left(a^{-1}\right)\chi(a).$$

Funkcija χ je centralna, dakle konstantna na svakoj klasi konjugiranosti. Stoga je i $\chi\left(a^{-1}\right)$ neovisan o izboru elementa $a \in C_i$; označimo taj broj sa χ_i. Slijedi

$$\frac{n}{d} = \sum_{i=1}^{s}\chi_i\frac{1}{d}\sum_{a\in C_i}\chi(a).$$

Prema propoziciji 2.7.3. brojevi $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_s$ su cijeli nad $\mathbb{Z}$. Nadalje, prema propoziciji 2.7.4. i brojevi

$$\frac{1}{d}\sum_{a\in C_i}\chi(a), \qquad 1 \leq i \leq s,$$

su cijeli nad $\mathbb{Z}$. Stoga pomoću propozicije 2.7.2. zaključujemo da je n/d cio nad $\mathbb{Z}$, a odatle i iz zadatka 2.7.1. slijedi da je n djeljiv sa d.

Teorem 2.7.6. *Neka je C centar grupe G. Tada je red kvocijentne grupe $|G/C|$ djeljiv s dimenzijom svake ireducibilne reprezentacije grupe G.*

Dokaz: Neka je π ireducibilna reprezentacija grupe G dimenzije d. Stavimo $|G| = n$ i $|C| = m$. Za bilo koji $k \in \mathbb{N}$ je tada $\pi \times \pi \times \cdots \times \pi$ (k faktora) ireducibilna reprezentacija grupe $G \times G \times \cdots \times G$ (k faktora). Prema Schurovoj lemi za svaki $x \in C$ operator $\pi(x)$ djeluje kao množenje nekim kompleksnim brojem $\lambda(x)$. Centar grupe $G \times G \times \cdots \times G$ je $C \times C \times \cdots \times C$ i za svaki $(x_1, x_2, \ldots, x_k) \in C \times C \times \cdots \times C$ operator

$$(\pi \times \pi \times \cdots \times \pi)(x_1, x_2, \ldots, x_k) = \pi(x_1) \otimes \pi(x_2) \otimes \cdots \otimes \pi(x_k)$$

djeluje kao množenje kompleksnim brojem $\lambda(x_1)\lambda(x_2)\cdots\lambda(x_k) = \lambda(x_1 x_2 \cdots x_k)$. Neka je H sljedeća podgrupa grupe $C \times C \times \cdots \times C$:

$$H = \{(x_1, x_2, \ldots, x_k) \in C \times C \times \cdots \times C;\ x_1 x_2 \cdots x_k = e\}.$$

Tada je $|H| = m^{k-1}$ i ta grupa je sadržana u jezgri reprezentacije $\pi \times \pi \times \cdots \times \pi$. Prijelazom na kvocijent dobivamo reprezentaciju ρ grupe $(G \times G \times \cdots \times G)/H$:

$$\rho(gH) = (\pi \times \pi \times \cdots \times \pi)(g), \qquad g \in G \times G \times \cdots \times G.$$

Očito je reprezentacija ρ ireducibilna. Njena je dimenzija jednaka d^k. Prema teoremu 2.7.5. taj broj dijeli red grupe $(G \times G \times \cdots \times G)/H$, a red te grupe jednak je n^k/m^{k-1}. Dakle, za svaki $k \in \mathbb{N}$ postoji $p_k \in \mathbb{N}$ takav da je

$$\frac{n^k}{m^{k-1}} = d^k p_k.$$

Uz oznaku

$$\alpha = \frac{n}{md}$$

imamo

$$\alpha^k = \frac{p_k}{m}, \quad p_k \in \mathbb{N}.$$

Budući da to vrijedi za svaki $k \in \mathbb{N}$, zaključujemo da je $\mathbb{Z}[\alpha] \subseteq \mathbb{Z}\frac{1}{m}$. Odatle je $m\mathbb{Z}[\alpha] \subseteq \mathbb{Z}$. Sada nam treba jedna jednostavna činjenica o podgrupama aditivne grupe $\mathbb{Z}$:

Zadatak 2.7.3. *Neka je $\mathcal{A} \neq \{0\}$ aditivna podgrupa grupe $\mathbb{Z}$. Tada vrijedi $\mathcal{A} = p\mathbb{Z} = \{pq;\ q \in \mathbb{Z}\}$ za jedinstven $p \in \mathbb{N}$.*

Kako je $m\mathbb{Z}[\alpha]$ aditivna podgrupa grupe $\mathbb{Z}$, iz prethodnog zadatka slijedi da je $m\mathbb{Z}[\alpha] = p\mathbb{Z}$ za neki $p \in \mathbb{N}$. Dakle, vrijedi

$$\mathbb{Z}[\alpha] = \mathbb{Z}\frac{p}{m}.$$

To pokazuje da je $\mathbb{Z}[\alpha]$ konačno generiran $\mathbb{Z}-$modul. Prema propoziciji 2.7.1. slijedi da je broj α cio nad $\mathbb{Z}$, a kako je $\alpha \in \mathbb{Q}$, prema zadatku 2.7.1. to znači da je $\alpha \in \mathbb{Z}$. Dakle, red $\frac{n}{m}$ grupe G/C djeljiv je sa d.

2.8 Kompleksne, realne i kvaternionske reprezentacije

U ovom odjeljku promatrat ćemo neko vrijeme **proizvoljne a ne samo konačnodimenzionalne** kompleksne vektorske prostore. Dakle, neka je V vektorski prostor nad $\mathbb{C}$. Preslikavanje $C : V \to V$ zove se **kompleksna konjugacija** ako je ono antilinearno i involutivno:

$$C(\alpha v + \beta w) = \overline{\alpha} Cv + \overline{\beta} Cw, \qquad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \quad \forall v, w \in V,$$

$$C^2 = I_V, \qquad \text{tj.} \quad C(Cv) = v \qquad \forall v \in V.$$

Zadatak 2.8.1. *Neka je V kompleksan vektorski prostor i $C : V \to V$ kompleksna konjugacija i neka su*

$$V_{re} = \{v \in V;\ Cv = v\}, \qquad V_{im} = \{v \in V;\ Cv = -v\}.$$

Dokažite:

(*a*) *V_{re} i V_{im} su realni potprostori od V i vrijedi $V_{im} = iV_{re}$.*

(*b*) *Promatramo li V kao prostor nad $\mathbb{R}$ vrijedi $V = V_{re} \dot{+} V_{im}$.*

(*c*) *Ako je $\{v_j;\ j \in I\}$ baza realnog prostora V_{re} onda je to ujedno baza kompleksnog prostora V.*

Zadatak 2.8.2. *Ako je V kompleksan vektorski prostor i W realan potprostor od V takav da je $V = W \dot{+} iW$, dokažite da je sa*

$$C(w_1 + iw_2) = w_1 - iw_2, \qquad w_1, w_2 \in W,$$

zadana kompleksna konjugacija na prostoru V.

Zadatak 2.8.3. *Dokažite da na svakom kompleksnom vektorskom prostoru postoji kompleksna konjugacija.*

Propozicija 2.8.1. *Neka su C i D kompleksne konjugacije kompleksnog vektorskog prostora V.*

(*a*) *Postoji $T \in GL(V)$ takav da je $DT = TC$, tj. $D = TCT^{-1}$.*

(*b*) *Za operatore $Q = DC$ i $R = CD$ vrijedi $Q, R \in GL(V)$ i $D = QC = CR$.*

Dokaz: (*a*) Neka su $V_{re}^C = \{v \in V;\ Cv = v\}$ i $V_{re}^D = \{v \in V;\ Dv = v\}$. Prema (*c*) u zadatku 2.8.1. svaka baza realnog prostora V_{re}^C ili realnog prostora V_{re}^D ujedno je baza kompleksnog prostora V. Budući da bilo koje dvije baze vektorskog prostora imaju isti kardinalni broj, možemo izabrati baze od V_{re}^C i od V_{re}^D indeksirane istim skupom. Dakle, neka je $\{v_j;\ j \in I\}$ baza realnog prostora V_{re}^C i neka je $\{w_j;\ j \in I\}$ baza realnog prostora V_{re}^D. Budući da su to baze kompleksnog prostora V postoji jedinstven $T \in GL(V)$ takav da je

$$Tv_j = w_j \qquad \forall j \in I.$$

Tada imamo za svaki $j \in I$

$$DTv_j = Dw_j = w_j = Tv_j = TCv_j,$$

dakle, $DT = TC$.

(*b*) Budući da su C i D antilinearne bijekcije sa V na V jasno je da su operatori Q i R linearne bijekcije sa V na V, dakle, $Q, R \in GL(V)$. Nadalje,

$$QC = DCC = DC^2 = D \qquad \text{i} \qquad CR = CCD = C^2D = D.$$

Promatrat ćemo sada neko vrijeme reprezentacije i module u općenitom kontekstu iz odjeljka 1.1. Neka je, dakle, S skup i neka je π reprezentacija skupa S na kompleksnom vektorskom prostoru V. Za kompleksnu konjugaciju C prostora V i za svaki $s \in S$ definiramo operator $\pi^C(s) : V \to V$ ovako:

$$\pi^C(s) = C\pi(s)C, \qquad s \in S.$$

Budući da je operator $\pi(s)$ linearan, a C antilinearan, očito je operator $\pi^C(s)$ linearan. Dakle, preslikavanje $\pi^C : s \mapsto \pi^C(s)$, $s \in S$, je reprezentacija skupa S na prostoru V. Za reprezentaciju π^C kažemo da je **kompleksno konjugirana** reprezentaciji π (u odnosu na kompleksnu konjugaciju C prostora V). Ta reprezentacija do na ekvivalenciju ne ovisi o izboru kompleksne konjugacije C prostora V :

Propozicija 2.8.2. *Neka je π reprezentacija skupa S na kompleksnom vektorskom prostoru V i neka su C i D kompleksne konjugacije na prostoru V. Tada su reprezentacije π^C i π^D ekvivalentne.*

Dokaz: Prema tvrdnji (b) propozicije 2.8.1. za $Q = DC \in GL(V)$ vrijedi $D = QC$, dakle i $D = D^{-1} = C^{-1}Q^{-1} = CQ^{-1}$. Stoga za svaki $s \in S$ imamo

$$\pi^D(s) = D\pi(s)D = QC\pi(x)CQ^{-1} = Q\pi^C(s)Q^{-1}.$$

Dakle, $\pi^D \simeq \pi^C$.

Propozicija 2.8.3. *Neka skup S ima jednu od sljedeće četiri algebarske strukture: grupa, realna asocijativna algebra, realna unitalna algebra, realna Liejeva algebra. Ako je π reprezentacija algebarske strukture S na kompleksnom vektorskom prostoru V i ako je C kompleksna konjugacija prostora V, onda je i π^C reprezentacija algebarske strukture S.*

Dokaz: (1) Ako je S realna algebra (bilo asocijativna, bilo unitalna, bilo Liejeva) preslikavanje $\pi^C : S \to L(V)$ očito linearno nad poljem $\mathbb{R}$. Doista, za $x, y \in S$ i $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ imamo

$$\pi^C(\alpha x + \beta y) = C\pi(\alpha x + \beta y)C = C(\alpha\pi(x) + \beta\pi(y))C = \alpha C\pi(x)C * \beta C\pi(y)C = \alpha\pi^C(x) + \beta\pi^C(y).$$

(2) Ako je S grupa ili asocijativna algebra ili unitalna algebra, za $x, y \in S$ imamo

$$\pi^C(x)\pi^C(y) = C\pi(x)CC\pi(y)C = C\pi(xy)C = \pi^C(xy).$$

(3) Ako je S grupa ili unitalna algebra i e jedinica u S, imamo

$$\pi^C(e) = C\pi(e)C = CI_VC = CC = I_V.$$

(4) Napokon, ako je S Liejeva algebra, za $x, y \in S$ imamo

$$\pi^C([x, y]) = C\pi([x, y])C = C(\pi(x)\pi(y) - \pi(y)\pi(x))C = C\pi(x)\pi(y)C - C\pi(y)\pi(x)C =$$

$$= C\pi(x)CC\pi(y)C - C\pi(y)CC\pi(x)C = \pi^C(x)\pi^C(y) - \pi^C(y)\pi^C(x).$$

Tvrdnja slijedi za grupu iz (2) i (3), za realnu asocijativnu algebru iz (1) i (2), za realnu unitalnu algebru iz (1), (2) i (3), a za realnu Liejevu algebru iz (1) i (4).

Za reprezentaciju π skupa S na kompleksnom vektorskom prostoru V kažemo da je **samokonjugirana** ako je ona ekvivalentna reprezentaciji π^C za neku (a tada prema propoziciji 2.8.2. za svaku) kompleksnu konjugaciju C prostora V. Naravno, direktna suma samokonjugiranih reprezentacija je samokonjugirana reprezentacija. S druge strane, moguće je da direktna suma reprezentacija koje nisu samokonjugirane bude samokonjugirana. Naime, za svaku reprezentaciju π direktna suma $\pi \dotplus \pi^C$ je samokonjugirana. Stoga ćemo pojam samokonjugiranosti promatrati samo za ireducibilne reprezentacije.

Za ireducibilnu reprezentaciju π skupa S na kompleksnom vektorskom prostoru V kažemo da je **realna reprezentacija**, ako postoji kompleksna konjugacija C prostora V takva da je realan potprostor $V_{re}^C = \{v \in V;\ Cv = v\}$ invarijantan u odnosu na sve operatore $\pi(s)$, $s \in S$. Drugim riječima, reprezentacija π je realna ako i samo ako postoji reprezentacija σ od S na realnom vektorskom prostoru W takva da je kompleksifikacija od σ ekvivalentna reprezentaciji π.

Propozicija 2.8.4. *Svaka je realna reprezentacija samokonjugirana.*

Dokaz: Neka je C kompleksna konjugacija prostora V takva da je realan potprostor V_{re}^C invarijantan s obzirom na sve operatore $\pi(s)$, $s \in S$. Kako je $V = V_{re}^C \dotplus iV_{re}^C$, za proizvoljan vektor $v \in V$ postoje jedinstveni vektori $v_1, v_2 \in V_{re}^C$ takvi da je $v = v_1 + iv_2$. Tada za svaki $s \in S$ vrijedi $\pi(s)v_1, \pi(s)v_2 \in V_{re}^C$, odnosno, $C\pi(s)v_1 = \pi(s)v_1$ i $C\pi(s)v_2 = \pi(s)v_2$. Stoga imamo

$$\pi^C(s)v = C\pi(s)C(v_1 + iv_2) = C\pi(s)(v_1 - iv_2) = C(\pi(s)v_1 - i\pi(s)v_2) =$$

$$= C\pi(s)v_1 + iC\pi(s)v_2 = \pi(s)v_1 + i\pi(s)v_2 = \pi(s)v.$$

To pokazuje da je $\pi^C = \pi$.

Ireducibilna reprezentacija skupa S na kompleksnom vektorskom prostoru V koja nije samokonjugirana zove se **kompleksna reprezentacija**. Ireducibilna samokonjugirana reprezentacija skupa S na kompleksnom vektorskom prostoru V koja nije realna zove se **kvaternionska reprezentacija**. Da takve reprezentacije postoje pokazuje primjer u sljedećem zadatku:

Zadatak 2.8.4. *Neka je $\mathbb{H} = \{\alpha + i\beta + j\gamma + k\delta;\ \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}\}$ tijelo kvaterniona i neka je $G = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$ – to je osmočlana multiplikativna grupa. Neka je $V = \mathbb{C}^2$ identificiran s prostorom $M_{2,1}(\mathbb{C})$ jednostupčanih matrica visine 2, tako da se $L(V)$ identificira s algebrom $M_2(\mathbb{C})$ kvadratnih matrica drugog reda, a grupa $GL(V)$ sa $GL_2(\mathbb{C})$.*

(*a*) *Dokažite da je sa*

$$\pi(\pm 1) = \pm I_2, \quad \pi(\pm i) = \pm \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}, \quad \pi(\pm j) = \pm \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \pi(\pm k) = \pm \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix},$$

zadana ireducibilna reprezentacija grupe G na kompleksnom vektorskom prostoru V.

(*b*) *Dokažite da je reprezentacija π samokonjugirana.*

(*c*) *Dokažite da reprezentacija π nije realna.*

Uputa: (*b*) Pokažite da za standardno kompleksno konjugiranje C od V, tj. $C \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{\alpha} \\ \overline{\beta} \end{bmatrix}$, vrijedi

$$\pi^C(x) = \pi(k)\pi(x)\pi(k)^{-1} \qquad \forall x \in G.$$

Za (*c*) treba dokazati da ne postoji baza prostora V u kojoj su matrice svih operatora $\pi(x)$, $x \in G$, realne. Iz pretpostavke da takva baza postoji izvedite kontradikciju računanjem u toj bazi i u standardnoj bazi od $V = M_{2,1}(\mathbb{C})$ tragova operatora $\pi(x)$ i tragova umnožaka $\pi(x)\pi(y)$ za $x \neq y$, $x, y \in \{i, j, k\}$.

Teorem 2.8.5. *Neka je π ireducibilna reprezentacija skupa S na kompleksnom prostoru V.*

(a) *Reprezentacija π je samokonjugirana ako i samo ako postoji antilinearna bijekcija $L : V \to V$ takva da je*
$$\pi(s)L = L\pi(s) \qquad \forall s \in S.$$

(b) *Ako vrijedi (a), operator L jedinstven je do na multipl $\lambda \in \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$.*

(c) *Ako je reprezentacija π realna, za svaki takav L vrijedi $L^2 = \alpha I_V$, pri čemu je $\alpha > 0$.*

(d) *Ako je reprezentacija π kvaternionska, za svaki takav L vrijedi $L^2 = \alpha I_V$, pri čemu je $\alpha < 0$.*

Dokaz: (a) Pretpostavimo da je reprezentacija π samokonjugirana, tj. da su za neko kompleksno konjugiranje C prostora V reprezentacije π i π^C ekvivalentne. Neka $T \in GL(V)$ ostvaruje tu ekvivalenciju, tj.
$$T\pi(s) = \pi^C(s)T \qquad \forall s \in S.$$
To znači da je
$$T\pi(s) = C\pi(s)CT \qquad \forall s \in S.$$
Pomnožimo li tu jednakost slijeva sa $C^{-1} = C$, dobivamo
$$CT\pi(s) = \pi(s)CT \qquad \forall s \in S.$$
Odatle slijedi tvrdnja, budući da je $L = CT$ očito antilinearna bijekcija sa V na V.

Obratno, pretpostavimo da za neku antilinearnu bijekciju $L : V \to V$ vrijedi
$$\pi(s)L = L\pi(s) \qquad \forall s \in S.$$
Neka je C kompleksno konjugiranje prostora V. Tada je operator $T = CL$ linearan i bijekcija sa V na V, dakle, $T \in GL(V)$. Tada je $T^{-1} = L^{-1}C^{-1} = L^{-1}C$, pa za $s \in S$ imamo:
$$T\pi(s)T^{-1} = CL\pi(s)L^{-1}C = C\pi(s)LL^{-1}C = C\pi(s)C = \pi^C(s).$$
Dakle, $\pi \simeq \pi^C$, odnosno, reprezentacija π je samokonjugirana.

(b) Neka su L i L' antilinearne bijekcije sa V na V takve da je
$$\pi(s)L = L\pi(s) \quad \text{i} \quad \pi(s)L' = L'\pi(s) \qquad \forall s \in S.$$
Tada je i
$$\pi(s)L^{-1} = L^{-1}\pi(s) \qquad \forall s \in S.$$
Sada je $T = L'L^{-1}$ linearna bijekcija sa V na V i vrijedi za svaki $s \in S$:
$$T\pi(s) = L'L^{-1}\pi(s) = L'\pi(s)L^{-1} = \pi(s)L'L^{-1} = \pi(s)T.$$
Budući da je po pretpostavci reprezentacija π ireducibilna, iz tvrdnje (c) Schurove leme (teorem 1.1.6.) slijedi da je $T = \lambda I_V$ za neki $\lambda \in \mathbb{C}^*$. Množenjem te jednakosti zdesna sa L slijedi $L' = \lambda L$.

S druge strane, ako je L antilinearna bijekcija sa V na V takva da vrijedi $\pi(s)L = L\pi(s)$ $\forall s \in S$, za $\lambda \in \mathbb{C}^*$ je i $L' = \lambda L$ antilinearna bijekcija sa V na V i vrijedi za svaki $s \in S$:
$$\pi(s)L' = \pi(s)\lambda L = \lambda\pi(s)L = \lambda L\pi(s) = L'\pi(s).$$

(c) i (d) Prije svega, primijetimo da je L^2 linearna bijekcija sa V na V koja komutira sa svim operatorima $\pi(s)$, pa kako je reprezentacija π ireducibilna, po tvrdnji (c) Schurove leme (teorem 1.1.6.) za neki $\alpha \in \mathbb{C}^*$ vrijedi $L^2 = \alpha I_V$. Nadalje, imamo

$$\alpha L = \alpha I_V L = L^2 L = L^3 = LL^2 = L(\alpha I_V) = \overline{\alpha} L I_V = \overline{\alpha} L,$$

a to znači da je $\alpha = \overline{\alpha}$, odnosno, $\alpha \in \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Prema tome, ili je $\alpha > 0$ ili je $\alpha < 0$.

Pretpostavimo najprije da je $\alpha > 0$. Stavimo

$$C = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} L.$$

Tada je C antilinearna involucija na V, odnosno, C je kompleksno konjugiranje prostora V. Budući da operator C komutira sa svim operatorima $\pi(s)$, $s \in S$, slijedi da je realni potprostor $V_{re}^C = \{v \in V;\ Cv = v\}$ invarijantan s obzirom na sve te operatore $\pi(s)$. Kako je $V = V_{re}^C \dot{+} iV_{re}^C$, zaključujemo da je reprezentacija π realna.

Pretpostavimo sada da je reprezentacija π realna. To znači da je za neku kompleksnu konjugaciju C prostora V realni potprostor V_{re}^C invarijantan s obzirom na sve operatore $\pi(s)$, $s \in S$. Tada svi operatori $\pi(s)$ komutiraju sa C. Doista, za svaki $v \in V$ postoje jedinstveni $v_1, v_2 \in V_{re}^C$ takvi da je $v = v_1 + iv_2$, pa imamo slično kao u dokazu propozicije 2.8.3.:

$$C\pi(s)v = C\pi(s)(v_1 + iv_2) = C(\pi(s)v_1 + i\pi(s)v_2) = C\pi(s)v_1 - iC\pi(s)v_2 =$$

$$= \pi(s)v_1 - i\pi(s)v_2 = \pi(s)(v_1 - iv_2) = \pi(s)C(v_1 + iv_2) = \pi(s)Cv.$$

Prema tvrdnji (b) vrijedi $L = \lambda C$ za neki $\lambda \in \mathbb{C}^*$. Sada imamo

$$\alpha I_V = L^2 = \lambda C \lambda C = |\lambda|^2 C^2 = |\lambda|^2 I_V \qquad \Longrightarrow \qquad \alpha = |\lambda|^2 > 0.$$

Na taj način dokazali smo da je reprezentacija π realna ako i samo ako je $\alpha > 0$. Naravno, odatle slijedi da je reprezentacija π kvaternionska ako i samo ako je $\alpha < 0$.

Objasnit ćemo sada naziv *kvaternionska reprezentacija.*

Prije svega, polje $\mathbb{C}$ kompleksnih brojeva možemo shvaćati kao potpolje tijela kvaterniona $\mathbb{H}$ ako identificiramo $i \in \mathbb{C}$ sa $i \in \mathbb{H}$. Stoga se svaki lijevi vektorski prostor V nad tijelom $\mathbb{H}$ može shvaćati i kao vektorski prostor nad $\mathbb{C}$. Promatrajmo na tom kompleksnom prostoru V operator $J : V \to V$ definiran kao množenje sa $j \in \mathbb{H}$ na kvaternionskom prostoru V :

$$Jv = jv, \qquad v \in V.$$

Taj operator J očito je aditivan

$$J(v_1 + v_2) = Jv_1 + Jv_2, \qquad v_1, v_2 \in V.$$

Nadalje, neka je $\lambda = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Budući da u tijelu $\mathbb{H}$ vrijedi $ij = k = -ji$, imamo

$$j\lambda = j\alpha + ji\beta = j\alpha - k\beta = j\alpha - ij\beta = \alpha j - i\beta j = (\alpha - i\beta)j = \overline{\lambda} j.$$

Prema tome, za $\lambda \in \mathbb{C}$ i $v \in V$ vrijedi

$$J(\lambda v) = j(\lambda v) = (j\lambda)v = (\overline{\lambda} j)v = \overline{\lambda}(jv) = \overline{\lambda} Jv.$$

Time je dokazano da je operator J na kompleksnom prostoru V antilinearan. Nadalje, kako je $j^2 = -1$, vrijedi $J^2 = -I_V$.

Pretpostavimo sada da je zadan kompleksan vektorski prostor V i na njemu antilinearan operator J takav da je $J^2 = -I_V$. U tijelu $\mathbb{H}$ vrijedi $ij = k$, pa za svaki kvaternion $\alpha + i\beta + j\gamma + k\delta$, $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$, imamo

$$\alpha + i\beta + j\gamma + k\delta = (\alpha + i\beta) + (\gamma + i\delta)j = \lambda + \mu j \qquad \text{za} \quad \lambda = \alpha + i\beta, \mu = \gamma + i\delta \in \mathbb{C}.$$

Prema tome, svaki se kvaternion na jedinstven način može napisati kao $\lambda + \mu j$ za $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$. Definiramo sada na prostoru V lijevo množenje kvaternionima ovako

$$(\lambda + \mu j)v = \lambda v + \mu J v, \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{C}, \quad v \in V.$$

Zadatak 2.8.5. *Dokažite da je na taj način na V definirana struktura lijevog vektorskog prostora nad tijelom $\mathbb{H}$.*

Uputa: Lako se vidi da je tako definirano lijevo množenje $\mathbb{H} \times V \to V$ distributivno i u odnosu na zbrajanje u $\mathbb{H}$ i u odnosu na zbrajanje u V i zadovoljava $1v = v \ \forall v \in V$. Treba još samo eksplicitno provjeriti da za bilo koje $\xi = \lambda + \mu j, \eta = \sigma + \tau j \in \mathbb{H}$, gdje su $\lambda, \mu, \sigma, \tau \in \mathbb{C}$, i za svaki vektor $v \in V$ vrijedi $\xi(\eta v) = (\xi\eta)v$. Pri tome se koristi jednakost $\lambda j = j\overline{\lambda} \ \forall \lambda \in \mathbb{C}$.

Na taj način ustanovili smo da se kvaternionski lijevi vektorski prostori mogu identificirati s uređenim parovima (V, J), gdje je V komplesan vektorski prostor i $J : V \to V$ je antilinearan operator takav da je $J^2 = -I_V$.

Ako je $\mathcal{A}$ grupa (odnosno, asocijativna algebra nad $\mathbb{R}$, unitalna algebra nad $\mathbb{R}$ ili Liejeva algebra nad $\mathbb{R}$) **reprezentacija na kvaternionskom lijevom vektorskom prostoru** V definira se analogno kao reprezentacija na realnom ili kompleksnom vektorskom prostoru: to je homomorfizam π grupe $\mathcal{A}$ u grupu $GL(V)$ (odnosno, homomorfizam asocijativne algebre $\mathcal{A}$ u algebru $L(V)$, unitalni homomorfizam unitalne algebre $\mathcal{A}$ u unitalnu algebru $L(V)$ ili homomorfizam Liejeve algebre $\mathcal{A}$ u Liejevu algebru $L(V)$). Naravno, $L(V)$ označava skup $L_{\mathbb{H}}(V)$ svih $\mathbb{H}-$linearnih operatora $A : V \to V$. Ako kvaternionski prostor V shvatimo kao par (V, J), gdje je V kompleksan vektorski prostor a $J : V \to V$ antilinearan operator takav da je $J^2 = -I_V$, onda je

$$L_{\mathbb{H}}(V) = \{A \in L_{\mathbb{C}}(V);\ AJ = JA\}.$$

Prema tome, reprezentacija π od $\mathcal{A}$ na kompleksnom prostoru V je reprezentacija na kvaternionskom prostoru (V, J) ako i samo ako vrijedi

$$\pi(x)J = J\pi(x) \qquad \forall x \in \mathcal{A}.$$

Neka je sada π ireducibilna reprezentacija od $\mathcal{A}$ na kompleksnom vektorskom prostoru V koja je kvaternionska, tj. samokonjugirana i ne realna. Prema teoremu 2.8.5. postoji antilinearna bijekcija $L : V \to V$ takva da je

$$\pi(x)L = L\pi(x) \qquad \forall x \in \mathcal{A}, \qquad L^2 = -\alpha I_V, \quad \alpha > 0.$$

Stavimo tada

$$J = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} L.$$

Tada je preslikavanje $J : V \to V$ antilinearno i vrijedi $J^2 = -I_V$. Drugim riječima, (V, J) je kvaternionski lijevi vektorski prostor. Budući da L komutira sa svim operatorima $\pi(x)$, $x \in \mathcal{A}$, to vrijedi i za J :

$$\pi(x)J = J\pi(x) \qquad \forall x \in \mathcal{A}.$$

Zaključujemo:

Korolar 2.8.6. *Neka je π ireducibilna kvaternionska reprezentacija od $\mathcal{A}$ na kompleksnom prostoru V. Tada na V postoji struktura kvaternionskog lijevog vektorskog prostora takva da su svi operatori $\pi(x)$ $\mathbb{H}-$linearni, tj. da je π reprezentacija od $\mathcal{A}$ na kvaternionskom lijevom vektorskom prostoru.*

Primijetimo da ireducibilna reprezentacija od $\mathcal{A}$ na kvaternionskom lijevom vektorskom prostoru V ne mora biti ireducibilna ako je promatramo kao reprezentaciju na kompleksnom prostoru V. Na primjer, neka je χ reprezentacija od $\mathcal{A}$ na jednodimenzionalnom kompleksnom prostoru $\mathbb{C}$ i $\overline{\chi}$ njoj kompleksno konjugirana reprezentacija na $\mathbb{C}$. Neka je na kompleksnom prostoru $V = \mathbb{C}\times\mathbb{C}$ zadana reprezentacija $\pi = (\chi, \overline{\chi})$, tj.

$$\pi(x)(\alpha, \beta) = \left(\chi(x)\alpha, \overline{\chi(x)}\beta\right), \qquad (\alpha, \beta) \in V, \quad x \in \mathcal{A}.$$

Definiramo $J : V \to V$ sa

$$J(\alpha, \beta) = \left(\overline{\beta}, -\overline{\alpha}\right), \qquad (\alpha, \beta) \in V.$$

Tada je operator J antilinearan i vrijedi $J^2 = -I_V$, dakle, J definira strukturu kvaternionskog lijevog vektorskog prostora na V. Za $x \in \mathcal{A}$ i $(\alpha, \beta) \in V$ imamo

$$\pi(x)J(\alpha, \beta) = \pi(x)\left(\overline{\beta}, -\overline{\alpha}\right) = \left(\chi(x)\overline{\beta}, -\overline{\chi(x)}\overline{\alpha}\right) = \left(\overline{\overline{\chi(x)}\beta}, -\overline{\chi(x)\alpha}\right) =$$

$$= J\left(\chi(x)\alpha, \overline{\chi(x)}\beta\right) = J\pi(x)(\alpha, \beta).$$

Dakle,

$$\pi(x)J = J\pi(x) \qquad \forall x \in \mathcal{A},$$

odnosno, π je reprezentacija od $\mathcal{A}$ na kvaternionskom lijevom vektorskom prostoru V. Budući da je $\dim_{\mathcal{H}} V = 1$, ta je reprezentacija ireducibilna, iako očito nije ireducibilna kao reprezentacija na kompleksnom vektorskom prostoru $\mathbb{C}$.

Razmotrimo sada posebno reprezentacije konačne grupe G. Za klasu $\alpha \in \hat{G}$ označimo sa $\overline{\alpha}$ klasu kompleksno konjugiranih reprezentacija od reprezentacija u klasi α. Dakle, reprezentacije u klasi α su samokonjugirane ako je $\alpha = \overline{\alpha}$, a kompleksne ako je $\alpha \neq \overline{\alpha}$.

Da li je ireducibilna reprezentacija kompleksna, realna ili kvaternionska može se vidjeti iz njenog karaktera:

Teorem 2.8.7. (**Frobenius−Schur**) *Neka je χ karakter ireducibilne reprezentacije π konačne grupe G na kompleksnom vektorskom prostoru V. Tada je*

$$\sum_{a\in G} \chi\left(a^2\right) = \begin{cases} |G| & \text{ako je } \pi \text{ realna,} \\ 0 & \text{ako je } \pi \text{ kompleksna,} \\ -|G| & \text{ako je } \pi \text{ kvaternionska.} \end{cases}$$

Dokaz: Možemo pretpostaviti da je reprezentacija π unitarna. Neka je $n = \dim V$ i neka su $\pi_{ij}(a)$ matrični elementi operatora $\pi(a)$ u nekoj ortonormiranoj bazi $\{e_1, \ldots, e_n\}$. Tada imamo

$$\chi\left(a^2\right) = \sum_{i=1}^{n} \pi_{ii}\left(a^2\right) = \sum_{i,j=1}^{n} \pi_{ij}(a)\pi_{ji}(a),$$

dakle,

$$\sum_{a\in G} \chi\left(a^2\right) = \sum_{i,j=1}^{n} \left(\sum_{a\in G} \pi_{ij}(a)\pi_{ji}(a)\right). \tag{2.2}$$

Pretpostavimo najprije da je reprezentacija π realna. Bazu $\{e_1, \ldots, e_n\}$ mogli smo odabrati tako da matrice svih operatora $\pi(a)$ budu realne. Dakle, $\pi_{ji}(a) = \overline{\pi_{ji}(a)}$ i iz (2.2) pomoću relacija ortogonalnosti (teorem 2.1.5.) nalazimo

$$\sum_{a\in G} \chi\left(a^2\right) = \sum_{i,j=1}^{n} |G| \left(\frac{1}{|G|}\sum_{a\in G} \pi_{ij}(a)\overline{\pi_{ji}(a)}\right) = |G| \sum_{i,j=1}^{n} (\pi_{ij}|\pi_{ji}) = \frac{|G|}{n} \sum_{i,j=1}^{n} \delta_{ij} = |G|.$$

Pretpostavimo sada da je reprezentacija π kompleksna. Neka je $C : V \to V$ kompleksno konjugiranje određeno bazom $\{e_1, \ldots, e_n\}$:

$$C\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \overline{\alpha_i} e_i.$$

Pripadnu kompleksno konjugiranu reprezentaciju π^C označimo sa ρ i neka su $\rho_{ij}(a)$ matrični operatora $\rho(a)$ u bazi $\{e_1, \ldots, e_n\}$. Imamo

$$\sum_{j=1}^{n} \rho_{ji}(a)e_j = \rho(a)e_i = C\pi(a)Ce_i = C\pi(a)e_i = C\left(\sum_{j=1}^{n} \pi_{ji}(a)e_j\right) = \sum_{j=1}^{n} \overline{\pi_{ji}(a)}e_j.$$

Dakle, vrijedi $\pi_{ji}(a) = \overline{\rho_{ji}(a)}$, a budući da ireducibilne reprezentacije π i ρ nisu ekvivalentne, iz (2.2) ponovo pomoću teorema 2.1.5. nalazimo

$$\sum_{a\in G} \chi\left(a^2\right) = \sum_{i,j} |G| \left(\frac{1}{|G|}\sum_{a\in G} \pi_{ij}(a)\overline{\rho_{ji}(a)}\right) = |G| \sum_{i,j=1}^{n} (\pi_{ij}|\rho_{ji}) = 0.$$

Napokon, pretpostavimo da je reprezentacija π kvaternionska. Prema teoremu 2.8.5. i prema razmatranju prije iskaza korolara 2.8.6. postoji antilinearno preslikavanje $J : V \to V$ takvo da vrijedi

$$\pi(a)J = J\pi(a) \qquad \forall a \in G \qquad \text{i} \qquad J^2 = -I_V.$$

Odatle je $\pi(a) = -\pi(a)J^2 = -J\pi(a)J$, tj vrijedi

$$\pi(a) = -J\pi(a)J \qquad \forall a \in G. \tag{2.3}$$

Možemo pretpostavljati da antilinearan operator J ima sljedeće svojstvo:

$$(Jx|y) = -(Jy|x) \qquad \forall x, y \in V. \tag{2.4}$$

Doista, ako nije tako, definiramo novi skalarni produkt $\langle\cdot|\cdot\rangle$ na sljedeći način:

$$\langle x|y\rangle = (x|y) + (Jy|Jx), \qquad x, y \in V.$$

Provjerimo svojstva skalarnog produkta:

(1) Pozitivnost:
$$\langle x|x\rangle = (x|x) + (Jx|Jx) \geq 0.$$

(2) Definitnost:
$$x \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad \langle x|x\rangle = (x|x) + (Jx|Jx) \geq (x|x) > 0.$$

(3) Linearnost u prvoj varijabli:

$$\langle \alpha x+\beta y|z\rangle=(\alpha x+\beta y|z)+(Jz|J(\alpha x+\beta y))=$$
$$=\alpha(x|z)+\beta(y|z)+(Jz|\overline{\alpha}Jx+\overline{\beta}Jy)=\alpha(x|z)+\beta(y|z)+\alpha(Jz|Jx)+\beta(Jz|Jy)=$$
$$=\alpha[(x|z)+(Jz|Jx)]+\beta[(y|z)+(Jz|Jy)]=\alpha\langle x|z\rangle+\beta\langle y|z\rangle.$$

(4) Hermitska simetrija:

$$\langle y|x\rangle=(y|x)+(Jx|Jy)=\overline{(x|y)}+\overline{(Jy|Jx)}=\overline{\langle x|y\rangle}.$$

Nadalje, provjerimo da je i u odnosu na novi skalarni produkt reprezentacija π unitarna: za $x,y\in V$ i za $a\in G$, budući da operatori J i $\pi(a)$ komutiraju, imamo

$$\langle \pi(a)x|\pi(a)y\rangle=(\pi(a)x|\pi(a)y)+(J\pi(a)y|J\pi(a)x)=$$
$$=(\pi(a)x|\pi(a)y)+(\pi(a)Jy|\pi(a)Jx)=(x|y)+(Jy|Jx)=\langle x|y\rangle.$$

Napokon, u odnosu na novi skalarni produkt operator J ima traženo svojstvo, jer zbog $J^2=-I_V$ imamo za $x,y\in V$:

$$\langle Jx|y\rangle=(Jx|y)+(Jy|J^2x)=-(Jx|J^2y)-(Jy|x)=-[(Jy|x)+(Jx|J^2y)]=-\langle Jy|x\rangle.$$

Neka su α_{ij} matrični elementi antilinearnog operatora J u bazi $\{e_1,\dots,e_n\}$:

$$Je_j=\sum_{i=1}^n\alpha_{ij}e_i,\qquad j=1,\dots,n.$$

Sada je

$$\sum_{j=1}^n\pi_{ji}(a)e_j=\pi(a)e_i=-J\pi(a)Je_i=-J\pi(a)\sum_{k=1}^n\alpha_{ki}e_k=$$
$$=-J\sum_{k,\ell=1}^n\alpha_{ki}\pi_{\ell k}(a)e_\ell=-\sum_{j,k,\ell=1}^n\overline{\alpha_{ki}}\,\overline{\pi_{\ell k}(a)}\alpha_{j\ell}e_j,$$

pa dobivamo

$$\pi_{ji}(a)=-\sum_{k,\ell=1}^n\overline{\pi_{\ell k}(a)}\,\overline{\alpha_{ki}}\alpha_{j\ell},\qquad 1\le i,j\le n,\quad a\in G. \tag{2.5}$$

Sada iz (2.2) i (2.5) pomoću teorema 2.1.5. nalazimo

$$\sum_{a\in G}\chi\left(a^2\right)=-|G|\sum_{i,j=1}^n\left(\frac{1}{|G|}\sum_{a\in G}\pi_{ij}(a)\sum_{k,\ell=1}^n\overline{\pi_{\ell k}(a)}\,\overline{\alpha_{ki}}\alpha_{j\ell}\right)=-|G|\sum_{i,j,k,\ell=1}^n(\pi_{ij}|\pi_{\ell k})\overline{\alpha_{ki}}\alpha_{j\ell}=$$
$$=-\frac{|G|}{n}\sum_{i,j,k,\ell=1}^n\delta_{i\ell}\delta_{jk}\overline{\alpha_{ki}}\alpha_{j\ell}=-\frac{|G|}{n}\sum_{i,j=1}^n\overline{\alpha_{ji}}\alpha_{ji}=-\frac{|G|}{n}\sum_{i,j=1}^n\left|\alpha_{ji}\right|^2.$$

Iz (2.3) i (2.4) nalazimo

$$\alpha_{ij}=(Je_j|e_i)=-(Je_i|e_j)=-\alpha_{ji}.$$

Odatle zbog $J^2 = -I_V$ dobivamo

$$\sum_{k=1}^{n} \delta_{kj} e_k = e_j = -J^2 e_j = -J \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} e_i = -\sum_{i=1}^{n} \overline{\alpha_{ij}} J e_i = -\sum_{i,k=1}^{n} \overline{\alpha_{ij}} \alpha_{ki} e_k = \sum_{i,k=1}^{n} \overline{\alpha_{ji}} \alpha_{ki} e_k,$$

dakle,

$$\sum_{i=1}^{n} \overline{\alpha_{ji}} \alpha_{ki} = \delta_{kj}, \qquad 1 \leq j,k \leq n,$$

i, posebno,

$$\sum_{i=1}^{n} |\alpha_{ji}|^2 = 1, \qquad 1 \leq j \leq n.$$

Prema tome,

$$\sum_{a \in G} \chi\left(a^2\right) = -\frac{|G|}{n} \sum_{i,j=1}^{n} |\alpha_{ji}|^2 = -\frac{|G|}{n} \sum_{j=1}^{n} 1 = -|G|.$$

Time je Frobenius−Schurov teorem u potpunosti dokazan.

Naravno, ako je ireducibilna reprezentacija konačne grupe realna (kompleksna, kvaternionska) onda je takva i svaka reprezentacija koja je njoj ekvivalentna. Stoga možemo govoriti o realnim, kompleksnim i kvaternionskim klasama ekvivalencije ireducibilnih reprezentacija. Za konačnu grupu G označimo sa $\hat{G}_r$ ($\hat{G}_c$, $\hat{G}_h$) skup svih realnih (kompleksnih, kvaternionskih) klasa u $\hat{G}$. Za $\alpha \in \hat{G}$ definiramo

$$c_\alpha = \begin{cases} 1 & \text{ako je } \alpha \in \hat{G}_r, \\ 0 & \text{ako je } \alpha \in \hat{G}_c, \\ -1 & \text{ako je } \alpha \in \hat{G}_h. \end{cases}$$

Nadalje, za $b \in G$ definiramo $\mathcal{S}(b)$ kao broj elemenata $a \in G$ takvih da je $a^2 = b$:

$$\mathcal{S}(b) = \left|\left\{a \in G;\ a^2 = b\right\}\right|.$$

Korolar 2.8.8. *Uz uvedene oznake vrijedi*

$$\mathcal{S}(b) = \sum_{\alpha \in \hat{G}} c_\alpha \chi_\alpha(b), \qquad b \in G. \tag{2.6}$$

Posebno,

$$\mathcal{S}(e) = \sum_{\alpha \in \hat{G}_r} d(\alpha) - \sum_{\alpha \in \hat{G}_h} d(\alpha).$$

Dokaz: Prije svega, uočimo da je funkcija $\mathcal{S}$ na G konstantna na svakoj klasi konjugiranosti u G, tj. $\mathcal{S}$ je centralna funkcija. Prema teoremu 2.4.2. imamo

$$\mathcal{S}(b) = \sum_{\alpha \in \hat{G}} (\mathcal{S}|\chi_\alpha)\chi_\alpha(b). \tag{2.7}$$

Nadalje, prema Frobenius−Schurovom teoremu 2.8.7. nalazimo

$$(\mathcal{S}|\chi_\alpha) = \frac{1}{|G|} \sum_{b \in G} \mathcal{S}(b)\overline{\chi_\alpha(b)} = \frac{1}{|G|} \sum_{a \in G} \overline{\chi_\alpha\left(a^2\right)} = \overline{c_\alpha} = c_\alpha.$$

Uvrstimo li to u (2.7) slijedi (2.6).

Klasa konjugiranosti C u grupi G zove se **ambivalentna** ako vrijedi

$$a \in C \qquad \Longleftrightarrow \qquad a^{-1} \in C.$$

Teorem 2.8.9. *Broj ambivalentnih klasa konjugiranosti u grupi G jednak je broju samokonjugiranih klasa u $\hat{G}$, tj. $|\hat{G}_r| + |\hat{G}_h|$, i taj je broj jednak*

$$\frac{1}{|G|}\sum_{a\in G}\mathcal{S}(a)^2.$$

Dokaz: Budući da karakteri χ_α, $\alpha \in \hat{G}$, tvore ortonormiranu bazu u prostoru centralnih funkcija, prema korolaru 2.8.8. imamo

$$\frac{1}{|G|}\sum_{a\in G}\mathcal{S}(a)^2 = (\mathcal{S}|\mathcal{S}) = \sum_{\alpha\in\hat{G}} c_\alpha^2.$$

Budući da je $c_\alpha^2 = 1$ ako je α realna ili kvaternionska (dakle, samokonjugirana) a 0 ako nije, dobivena suma jednaka je broju samokonjugiranih reprezentacija.

S druge strane, ako je χ karakter ireducibilne reprezentacije π, karakter kompleksno konjugirane reprezentacije je $\overline{\chi}$, pa imamo

$$\frac{1}{|G|}\sum_{a\in G}\chi(a)^2 = (\chi|\overline{\chi}) = \begin{cases} 1 & \text{ako je } \pi \text{ samokonjugirana} \\ 0 & \text{ako } \pi \text{ nije samokonjugirana.} \end{cases}$$

Označimo sada sa $C_1, \ldots, C_s$ sve klase konjugiranosti u grupi G i stavimo

$$\chi_{\alpha,j} = \chi_\alpha(a), \qquad a \in C_j,\ \alpha \in \hat{G},\ j \in \{1, \ldots, s\}.$$

Prema gornjoj formuli broj samokonjugiranih klasa u $\hat{G}$ jednak je

$$\frac{1}{|G|}\sum_{\alpha\in\hat{G},\, a\in G}\chi_\alpha(a)^2 = \sum_{j=1}^{s}\frac{|C_j|}{|G|}\sum_{\alpha}\left(\chi_{\alpha,j}\right)^2. \tag{2.8}$$

Izrazit ćemo sada činjenicu da je skup $\{\chi_\alpha;\ \alpha \in \hat{G}\}$ ortonormiran pomoću brojeva $\chi_{\alpha,i}$:

$$\delta_{\alpha\beta} = (\chi_\alpha|\chi_\beta) = \frac{1}{|G|}\sum_{a\in G}\chi_\alpha(a)\overline{\chi_\beta(a)} = \frac{1}{|G|}\sum_{j=1}^{s}|C_j|\chi_{\alpha,j}\overline{\chi_{\beta,j}}.$$

Broj elemenata u skupu $\hat{G}$ jednak je broju klasa konjugiranosti u G pa taj skup možemo numerirati od 1 do s : $\hat{G} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_s\}$. Gornja jednakost se stoga može pisati ovako:

$$\frac{1}{|G|}\sum_{j=1}^{s}|C_j|\chi_{\alpha_i,j}\overline{\chi_{\alpha_k,j}} = \delta_{ik},$$

odnosno, uz oznaku

$$u_{ij} = \sqrt{\frac{|C_j|}{|G|}}\chi_{\alpha_i,j}, \qquad 1 \le i, j \le s,$$

imamo

$$\sum_{j=1}^{s} u_{ij}\overline{u_{kj}} = \delta_{ik}, \qquad 1 \le i, k \le s.$$

To znači da je $s \times s$ matrica U s elementima u_{ij} unitarna, $UU^* = I$. No tada je i $U^*U = I$, odnosno,

$$\sum_{i=1}^{s} u_{ij}\overline{u_{ik}} = \delta_{jk}, \qquad 1 \le j, k \le s.$$

To znači da je

$$\sum_{i=1}^{s} \frac{\sqrt{|C_j| \cdot |C_k|}}{|G|} \chi_{\alpha_i,j} \overline{\chi_{\alpha_i,k}} = \delta_{jk},$$

ili

$$\sum_{\alpha \in \hat{G}} \chi_{\alpha,j} \overline{\chi_{\alpha,k}} = \frac{|G|}{\sqrt{|C_j| \cdot |C_k|}} \delta_{jk}, \qquad 1 \leq j, k \leq s.$$

Prema tvrdnji (b) propozicije 2.2.1. vrijedi $\overline{\chi_\alpha(a)} = \chi_\alpha\left(a^{-1}\right)$. Za dano $j \in \{1, \ldots, s\}$ skup C_j^{-1} je neka od klasa konjugiranosti, dakle, $C_j^{-1} = C_k$ za neki $k \in \{1, \ldots, s\}$. To znači da je $\overline{\chi_{\alpha,k}} = \chi_{\alpha,j}$, $\alpha \in \hat{G}$. Prema tome,

$$\sum_{\alpha \in \hat{G}} (\chi_{\alpha,j})^2 = \frac{|G|}{\sqrt{|C_j| \cdot |C_k|}} \delta_{jk} = \begin{cases} \frac{|G|}{|C_j|} & \text{ako je } C_j^{-1} = C_j \\ 0 & \text{ako je } C_j^{-1} \neq C_j. \end{cases}$$

Odatle i iz (2.8) nalazimo da je broj samokonjugiranih klasa u $\hat{G}$ jednak

$$\sum_{1 \leq j \leq s, C_j = C_j^{-1}} 1 = \left|\left\{j;\ 1 \leq j \leq s,\ C_j = C_j^{-1}\right\}\right|.$$

Dakle, broj $|\hat{G}_r| + |\hat{G}_h|$ samokonjugiranih klasa u $\hat{G}$ jednak je broju ambivalentnih klasa konjugiranosti u grupi G.

Teorem 2.8.9. ima neobičnu posljedicu:

Korolar 2.8.10. *Ako je broj $|G|$ neparan, trivijalna jednodimenzionalna reprezentacija je jedina ireducibilna samokonjugirana reprezentacija. Sve ostale ireducibilne reprezentacije su kompleksne. Nadalje, tada je $\{e\}$ jedina ambivalentna klasa konjugiranosti u grupi G.*

Dokaz: Stavimo $|G| = n$. Tada je $a^n = e$, dakle, $a^{n+1} = a\ \ \forall a \in G$. Budući da je n neparan, $k = \frac{1}{2}(n+1)$ je prirodan broj. Dakle, imamo $\left(a^k\right)^2 = a^{2k} = a$, pa zaključujemo da je $\mathcal{S}(a) \geq 1$ $\forall a \in G$. S druge strane, skupovi $\{b \in G;\ b^2 = a\}$ za različite $a \in G$ su očigledno disjunktni, pa slijedi da su svi oni jednočlani, odnosno, vrijedi $\mathcal{S}(a) = 1\ \ \forall a \in G$. Prema tome je

$$\frac{1}{|G|} \sum_{a \in G} \mathcal{S}(a)^2 = 1,$$

pa tvrdnje slijede iz teorema 2.8.9.

Poglavlje 3

Reprezentacije kompaktnih grupa

3.1 Kompaktne grupe i invarijantni integral

Topološka grupa je grupa G koja je ujedno Hausdorffov topološki prostor i za koju su preslikavanja množenja

$$(a, b) \mapsto ab \qquad \text{sa} \quad G \times G \quad \text{u} \quad G$$

i invertiranja

$$a \mapsto a^{-1} \qquad \text{sa} \quad G \quad \text{u} \quad G$$

neprekidna. Ekvivalentno se može zahtijevati neprekidnost samo jednog preslikavanja

$$(a, b) \mapsto ab^{-1} \qquad \text{sa} \quad G \times G \quad \text{u} \quad G.$$

Ako je topološki prostor G kompaktan, takva se topološka grupa zove **kompaktna grupa**.

Ako je G topološka grupa s jedinicom e, za svaki $a \in G$ definiramo lijevi i desni pomak $\lambda_a : G \to G$ i $\rho_a : G \to G$ sa

$$\lambda_a(x) = ax, \qquad \rho_a(x) = xa^{-1}, \qquad x \in G.$$

Ta su preslikavanja neprekidne bijekcije. Nadalje, očito vrijedi

$$\lambda_a \circ \lambda_b = \lambda_{ab} \qquad \text{i} \qquad \rho_a \circ \rho_b = \rho_{ab}.$$

Budući da je $\lambda_e = \rho_e = id_G$, slijedi da su i inverzna preslikavanja pomaci:

$$(\lambda_a)^{-1} = \lambda_{a^{-1}}, \qquad (\rho_a)^{-1} = \rho_{a^{-1}}.$$

Prema tome, pomaci λ_a i ρ_a su homeomorfizmi sa G na G. Posljedica je da je topološka struktura topološke grupe *uniformnog tipa*: okoline svake točke jednako "*izgledaju*". Naime, ako je $\mathcal{V}$ skup svih otvorenih okolina jedinice e onda pomoću λ_a dobivamo sve okoline točke $\lambda_a(e) = a$, odnosno,

$$a\mathcal{V} = \{aV;\ V \in \mathcal{V}\}$$

je skup svih otvorenih okolina točke $a \in G$. Sasvim analogno, i

$$\mathcal{V}a = \{Va;\ V \in \mathcal{V}\}$$

je skup svih otvorenih okolina točke $a \in G$. Kako je i invertiranje $a \mapsto a^{-1}$ homeomorfizam sa G na G, slijedi da je $\mathcal{V}^{-1} = \mathcal{V}$, tj. V je otvorena okolina od e ako i samo ako je $V^{-1} = \{a^{-1};\ a \in V\}$

otvorena okolina od e. Okolina jedinice V zove se **simetrična** ako je $V = V^{-1}$. Očito svaka okolina U jedinice sadrži simetričnu okolinu jedinice: takva je okolina $U \cap U^{-1}$. Budući da je množenje $(a, b) \mapsto ab$ neprekidno sa $G \times G$ u G i posebno u točki (e, e), za svaku okolinu U od e postoje okoline V_1 i V_2 od e takve da je $V_1V_2 = \{ab;\ a \in V_1,\ b \in V_2\} \subseteq U$. Tada okolina jedinice $V = V_1 \cap V_2$ zadovoljava $V^2 = VV \subseteq U$. Analogno, za svaki prirodan broj n i svaku okolinu U od e postoji okolina V od e takva da je

$$V^n = \underbrace{VV \cdots V}_{n} = \{a_1a_2 \cdots a_n;\ a_1, a_2, \ldots, a_n \in V\} \subseteq U.$$

Nadalje, iz neprekidnosti preslikavanja $(a, b) \mapsto ab^{-1}$ slijedi da za svaku okolinu U od e postoji okolina V od e takva da je

$$VV^{-1} = \{ab^{-1};\ a, b \in V\} \subseteq U.$$

U daljnjem promatramo samo kompaktne grupe. Ako je G kompaktna grupa tada je skup $C(G)$ svih neprekidnih funkcija $f : G \to \mathbb{C}$ komutativna asocijativna algebra u odnosu na operacije po točkama:

$$(f + g)(a) = f(a) + g(a), \quad (\lambda f)(a) = \lambda f(a), \quad (fg)(a) = f(a)g(a), \quad f, g \in C(G),\ \lambda \in \mathbb{C},\ a \in G.$$

To je unitalna algebra: jedinica je konstantna funkcija $1(a) = 1\ \forall a \in G$. $C(G)$ je Banachova algebra u odnosu na maksimum normu

$$\|f\|_\infty = \max\{|f(a)|;\ a \in G\}.$$

Uniformna struktura topologije na G omogućuje definiciju uniformne neprekidnosti: kažemo da je funkcija $f : G \to \mathbb{C}$ **uniformno neprekidna** ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji otvorena okolina V jedinice e takva da vrijedi

$$x, y \in G, \quad x^{-1}y \in V \qquad \Longrightarrow \qquad |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

U stvari, takve su sve funkcije u $C(G)$:

Propozicija 3.1.1. *Neka je G kompaktna grupa i $f \in C(G)$. Tada je funkcija f uniformno neprekidna.*

Dokaz: Neka je $\varepsilon > 0$. Iz neprekidnosti funkcije f u točki $a \in G$ slijedi da postoji otvorena okolina W_a od e takva da vrijedi

$$b \in aW_a \qquad \Longrightarrow \qquad |f(b) - f(a)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Za svaki $a \in G$ možemo izabrati okolinu V_a od e takvu da je $V_aV_a^{-1} \subseteq W_a$. Tada je $\{aV_a;\ a \in G\}$ otvoren pokrivač od G, pa zbog kompaktnosti slijedi da postoji konačan skup $A \subseteq G$ takav da je

$$G = \bigcup_{a \in A} aV_a.$$

Definiramo sada okolinu V od e kao presjek $V_a,\ a \in A$:

$$V = \bigcap_{a \in A} V_a.$$

Neka su sada $x, y \in G$ takvi da je $x^{-1}y \in V$. Izaberimo $a \in A$ tako da je $y \in aV_a$. Tada je $y \in aW_a$, pa vrijedi

$$|f(y) - f(a)| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{3.1}$$

Nadalje, imamo

$$x^{-1}y \in V \quad \Longrightarrow \quad x \in yV^{-1} \subseteq aV_aV_a^{-1} \subseteq aW_a,$$

pa vrijedi i

$$|f(x) - f(a)| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{3.2}$$

Iz (3.1) i (3.2) slijedi $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Zadatak 3.1.1. *Neka je $f \in C(G)$ i $\varepsilon > 0$. Dokažite da postoji otvorena okolina V jedinice e takva da vrijedi*

$$x, y \in G, \quad yx^{-1} \in V \qquad \Longrightarrow \qquad |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Važne zaključke o konačnim grupama i njihovim reprezentacijama dobili smo korištenjem "*usrednjenja*" po grupi, odnosno, sumacijom vrijednosti funkcije po svim elementima grupe i dijeljenjem s brojem elemenata. To ne možemo provoditi na beskonačnim grupama, ali u slučaju kompaktnih grupa imamo vrlo korisnu zamjenu za usrednjenje, a to je tzv. *invarijatni integral.* Naziv **integral** na kompaktnoj grupi G upotrebljava se za svaki pozitivan linearan funkcional $M : C(G) \to \mathbb{C}$. *Pozitivnost* znači

$$f \in C(G), \quad f(x) \geq 0 \quad \forall x \in G \qquad \Longrightarrow \qquad M(f) \geq 0.$$

Propozicija 3.1.2. *Svaki integral M na G je neprekidan linearan funkcional na Banachovom prostoru $C(G)$ s normom $\|M\| = M(1)$. Štoviše, vrijedi*

$$|M(f)| \leq M(|f|) \leq M(1)\|f\|_\infty \qquad \forall f \in C(G).$$

Dokaz: Naravno, iz pozitivnosti od M slijedi da za realne neprekidne funkcije $f, g : G \to \mathbb{R}$ iz $f \leq g$ slijedi $M(f) \leq M(g)$. Neka je $f \in C(G)$. Možemo pisati

$$M(f) = r\mathrm{e}^{i\varphi}, \quad r \geq 0, \ \varphi \in \mathbb{R}.$$

Označimo sa g i h realni i imaginarni dio funkcije $\mathrm{e}^{-i\varphi}f$. Dakle, $g, h : G \to \mathbb{R}$ su neprekidne funkcije i $\mathrm{e}^{-i\varphi}f = g + ih$. Sada imamo redom

$$|M(f)| = r = M(\mathrm{e}^{-i\varphi}f) = M(g) + iM(h) = M(g) \leq M(|g|) \leq M(|f|).$$

Dakle, drugu nejednakost $|M(f)| \leq M(1)\|f\|_\infty$ dovoljno je dokazati za nenegativne funkcije f. Međutim, ako je $f \in C(G)$ i $f(x) \geq 0 \ \forall x \in G$, onda je funkcija f svuda manja ili jednaka od konstantne funkcije $\|f\|_\infty$, pa slijedi

$$M(f) \leq M(\|f\|_\infty) = M(\|f\|_\infty 1) = M(1)\|f\|_\infty.$$

Time je dokazano da je funkcional M neprekidan, odnosno, ograničen i da je $\|M\| \leq M(1)$. Međutim, konstantna funkcija 1 ima normu jednaku 1 pa dobivamo i obrnutu nejednakost

$$M(1) \leq \|M\| \cdot \|1\|_\infty = \|M\|.$$

Lijevi i desni pomaci na grupi G prenose se na funkcije na grupi G : ako je $f \in C(G)$ i $a \in G$ definiramo funkcije $\lambda_a f = f \circ \lambda_{a^{-1}}$ i $\rho_a f = f \circ \rho_{a^{-1}}$, tj.

$$(\lambda_a f)(x) = f(a^{-1}x), \qquad (\rho_a f)(x) = f(xa), \qquad x \in G.$$

Integral M na grupi G zove se **lijevoinvarijantan** ako vrijedi $M(\lambda_a f) = M(f) \ \forall a \in G$ i $\forall f \in C(G)$ i, analogno, **desnoinvarijantan** ako je $M(\rho_a f) = M(f) \ \forall a \in G$ i $\forall f \in C(G)$. Cilj nam je da dokažemo da netrivijalni takvi integrali postoje, a dobit ćemo i rezultat o jedinstvenosti (do na konstantni faktor > 0). Štoviše, jedinstvenost do na faktor proširuje se na proizvoljne neprekidne lijevo ili desnoinvarijantne linearne funkcionale na $C(G)$. U svrhu dokaza tih činjenica, potrebna su nam neka razmatranja o konveksnim kompaktnim podskupovima Banachovog prostora i jedan teorem o fiksnoj točki na takvim skupovima.

Ako je V vektorski prostor, podskup K od V zove se konveksan ako vrijedi

$$v, w \in K, \quad 0 \leq t \leq 1 \qquad \Longrightarrow \qquad (1-t)v + tw \in K.$$

Dakle, zajedno sa svake svoje dvije točke K sadrži ravni segment između te dvije točke. Očito je presjek konveksnih skupova ponovo konveksan skup. Stoga za proizvoljan skup $S \subseteq V$ postoji najmanji konveksan skup koji ga sadrži: to je presjek svih konveksnih podskupova od V koji sadrže S. Taj se skup označava sa $Co(S)$ i zove **konveksna ljuska** skupa S.

Zadatak 3.1.2. *Dokažite da za konveksan skup $K \subseteq V$, $v_1, v_2, \ldots, v_n \in K$ i $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}_+$ takve da je $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = 1$ vrijedi $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n \in K$.*

Općenito, ako su $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}_+$ takvi da je $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = 1$, vektor

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k v_k$$

se zove **konveksna kombinacija** vektora $v_1, v_2, \ldots, v_n$. Dakle, prema zadatku 3.1.2. konveksna kombinacija vektora iz nekog konveksnog skupa K je vektor iz K. Štoviše, formiranjem konveksnih kombinacija dobiva se konveksna ljuska bilo kojeg nepraznog skupa:

Zadatak 3.1.3. *Neka je S neprazan podskup vektorskog prostora V. Dokažite da je $Co(S)$ skup svih konveksnih kombinacija vektora iz S :*

$$Co(S) = \left\{ v \in V;\ \exists n \in \mathbb{N},\ v_1, v_2, \ldots, v_n \in S,\ \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}_+,\ \sum_{k=1}^{n} \alpha_k = 1,\ v = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k v_k \right\}.$$

Promatrajmo sada konveksne skupove u normiranom prostoru.

Zadatak 3.1.4. *Neka X normiran prostor. Dokažite:*

(*a*) *Ako je $K \subseteq X$ konveksan i njegov zatvarač je konveksan.*

(*b*) *Za svaki skup $S \subseteq X$ postoji najmanji zatvoren konveksan skup koji ga sadrži.*

Najmanji zatvoren konveksan skup koji sadrži zadani podskup S normiranog prostora X zove se **zatvorena konveksna ljuska** skupa S i označava $\overline{Co}(S)$.

Teorem 3.1.3. (**Kakutani**) *Neka je X normiran prostor, $K \subseteq X$ neprazan konveksan kompaktan podskup i G podgrupa grupe izometrija prostora X. Pretpostavimo da je $AK \subseteq K$ za svaki $A \in G$. Tada postoji $x \in K$ takav da je $Ax = x\ \ \forall A \in G$.*

Dokaz ćemo provesti korištenjem sljedećeg **Hausdorffovog teorema** koji je varijanta Zornove leme:

Teorem 3.1.4. *Svaki neprazan parcijalno uređen skup sadrži maksimalan lanac.*

Dokaz teorema 3.1.4. Neka je $\mathcal{S}$ skup svih lanaca u parcijalno uređenom skupu S. Skup $\mathcal{S}$ je neprazan, jer za svaki $x \in S$ je $\{\{x\}\}$ lanac u S. Nadalje, skup $\mathcal{S}$ je parcijalno uređen inkluzijom. Dokažimo da $\mathcal{S}$ zadovoljava uvjet Zornove leme. Neka je $\mathcal{L}$ lanac u $\mathcal{S}$, tj. lanac lanaca u S. Formiramo podskup M od S kao uniju svih lanaca $L \in \mathcal{L}$. Tada je M lanac u S. Doista, ako su $x, y \in M$, onda postoje $L, L' \in \mathcal{L}$ takvi da je $x \in L$ i $y \in L'$. Budući da je $\mathcal{L}$ lanac u odnosu na inkluziju, vrijedi ili $L' \subseteq L$ ili $L \subseteq L'$. Pretpostavimo npr. da je $L' \subseteq L$. Tada su $x, y \in L$, a kako je L lanac u odnosu na uređaj $\leq$ u S, vrijedi ili $x \leq y$ ili $y \leq x$. Time je dokazano da je M lanac u S, tj. da je $M \in \mathcal{S}$. Kako je očito $L \subseteq M \ \ \forall L \in \mathcal{L}$, zaključujemo da je M gornja ograda lanca $\mathcal{L}$. Time je dokazano da $\mathcal{S}$ zadovoljava uvjet Zornove leme, pa slijedi da parcijalno uređen skup $\mathcal{S}$ ima barem jedan maksimalan element, a to je onda očito maksimalan lanac u S.

Dokaz teorema 3.1.3. Neka je Ω skup svih nepraznih kompaktnih konveksnih podskupova $H \subseteq K$ takvih da je $AH \subseteq H \ \ \forall A \in G$. Tada je $\Omega \neq \emptyset$, jer je $K \in \Omega$. Nadalje, Ω je parcijalno uređen inkluzijom. Prema Hausdorffovom teoremu Ω sadrži neki maksimalan lanac Ω_0. Definiramo tada

$$H_0 = \bigcap_{H \in \Omega_0} H.$$

Dokažimo najprije da je skup H_0 neprazan. Dosta, pretpostavimo suprotno, tj. da je $H_0 = \emptyset$. Za svaki $H \in \Omega_0$, skup $K \setminus H$ je otvoren podskup od K i vrijedi

$$\bigcup_{H \in \Omega_0} (K \setminus H) = K \setminus \left(\bigcap_{H \in \Omega_0} H \right) = K \setminus H_0 = K.$$

Dakle, $\{K \setminus H;\ H \in \Omega_0\}$ je otvoren pokrivač od K. Kako je K kompaktan, postoji konačno mnogo članova $H_1, H_2, \ldots, H_n \in \Omega_0$ takvih da je $\{K \setminus H_1, K \setminus H_2, \ldots, K \setminus H_n\}$ pokrivač od K. Dakle,

$$K = \bigcup_{i=1}^{n} (K \setminus H_i) = K \setminus (H_1 \cap H_2 \cap \cdots \cap H_n) \qquad \Longrightarrow \qquad H_1 \cap H_2 \cap \cdots \cap H_n = \emptyset.$$

Kako je Ω_0 lanac, za neki $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ je $H_i \supseteq H_j$ za svaki i, pa slijedi da je $H_j = \emptyset$. No to je nemoguće jer je $H_j \in \Omega_0 \subseteq \Omega$, a Ω se po definiciji sastoji od nepraznih skupova. Ova kontradikcija pokazuje da je pretpostavka $H_0 = \emptyset$ nemoguća, pa zaključujemo da je $H_0 \neq \emptyset$. Naravno, kako su svi operatori $A \in G$ izometrije, iz $AH = H \ \ \forall H \in \Omega_0$ slijedi $AH_0 = H_0$. Dakle, $H_0 \in \Omega$.

Sljedeći nam je cilj dokazati da je skup H_0 jednočlan. To će slijediti iz tvrdnje:

Ako skup $H \in \Omega$ nije jednočlan, onda postoji $H_1 \in \Omega$ takav da je $H_1 \subsetneq H$.

Dokažimo tu tvrdnju. Stavimo

$$H - H = \{x - y;\ x, y \in H\}.$$

Budući da skup H nije jednočlan, to je $H - H \neq \{0\}$, pa postoji $r > 0$ takav da

$$H - H \not\subseteq K(0, r) = \{x \in X;\ \|x\| < r\}.$$

S druge strane, skup $H - H$ je kompaktan, dakle, ograničen, pa postoji $s > 0$, dakle, nužno $s > r$, takav da je $H - H \subseteq K(0, s)$. Stavimo

$$t = \inf \{s \in \mathbb{R}_+;\ H - H \subseteq K(0, s)\}.$$

Tada je, naravno, $t \geq r$ i očito vrijede sljedeće relacije:

$$AK(0, s) = K(0, s) \qquad \forall s > 0 \quad \text{i} \quad \forall A \in G, \tag{3.3}$$

$$H - H \subseteq K(0, s) \qquad \forall s > t, \tag{3.4}$$

$$H - H \not\subseteq \overline{K}(0, s) = \{x \in X;\ \|x\| \le s\} \qquad \forall s < t. \tag{3.5}$$

Budući da je skup H kompaktan, postoje $x_1, x_2, \ldots, x_n \in H$ takvi da je

$$H \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} K\left(x_i, \frac{t}{2}\right). \tag{3.6}$$

Stavimo tada

$$H_1 = H \cap \bigcap_{y \in H} \overline{K}\left(y, \left(1 - \frac{1}{4n}\right) t\right).$$

H_1 je kao presjek konveksnih skupova i sam konveksan. Nadalje, H_1 je zatvoren podskup kompaktnog skupa H, dakle, H_1 je kompaktan. Dokažimo da je H_1 neprazan. Neka je

$$x_0 = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n).$$

Kako je H konveksan, vrijedi $x_0 \in H$. Nadalje, neka je $y \in H$ proizvoljan. Tada zbog (3.6) postoji $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ takav da je $y \in K\left(x_j, \frac{t}{2}\right)$, tj.

$$\|y - x_j\| < \frac{t}{2}. \tag{3.7}$$

Nadalje, za $i \neq j$ zbog $y, x_i \in H$ imamo $y - x_i \in H - H$, a budući da je $\left(1 + \dfrac{1}{4n}\right) t > t$, zbog (3.4) je $y - x_i \in K\left(0, \left(1 + \dfrac{1}{4n}\right) t\right)$, odnosno

$$\|y - x_i\| < \left(1 + \frac{1}{4n}\right) t \qquad \forall i \neq j. \tag{3.8}$$

Sada iz (3.8) i (3.9) nalazimo

$$\|y - x_0\| = \left\| y - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k \right\| = \frac{1}{n} \left\| \sum_{k=1}^{n} (y - x_k) \right\| \le \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \|y - x_k\| <$$

$$< \frac{1}{n} \left[\frac{1}{2} + (n-1)\left(1 + \frac{1}{4n}\right)\right] t = \frac{4n^2 - n - 1}{4n^2} t < \frac{4n^2 - n}{4n^2} t = \left(1 - \frac{1}{4n}\right) t.$$

Drugim riječima, vrijedi $x_0 \in K\left(y, \left(1 - \dfrac{1}{4n}\right) t\right)$ za svaki $y \in H$, odnosno, $x_0 \in H_1$. Time je dokazano da je $H_1 \neq \emptyset$. Dakle, H_1 je neprazan zatvoren konveksan podskup od H.

Nadalje, svaki $A \in G$ je izometrija, pa za svaki $y \in H$ vrijedi

$$A\overline{K}\left(y, \left(1 - \frac{1}{4n}\right) t\right) = \overline{K}\left(Ay, \left(1 - \frac{1}{4n}\right) t\right),$$

a kako je $AH = H$ zaključujemo da je $AH_1 = H_1$. Time je dokazano da je $H_1 \in \Omega$.

Očito je $H_1 \subseteq H$. Zbog (3.5) postoje $x, y \in H$ takvi da

$$x - y \notin \overline{K}\left(0, \left(1 - \frac{1}{4n}\right) t\right) \quad \Longrightarrow \quad x \notin \overline{K}\left(y, \left(1 - \frac{1}{4n}\right) t\right) \quad \Longrightarrow \quad x \notin H_1.$$

To pokazuje da vrijedi $H_1 \subsetneq H$. Time je iskazana tvrdnja dokazana.

Sada zbog maksimalnosti lanca Ω_0 zaključujemo da je skup H_0 jednočlan, $H_0 = \{x\}$. Kako je $AH_0 = H_0$, imamo $Ax = x \ \forall A \in G$. Time je Kakutanijev teorem dokazan.

Napomenimo da se Kakutanijev teorem može dokazati i pod znatno općentijim pretpostavkama: X ne mora biti normiran, nego je dovoljno da bude lokalno konveksan topološki vektorski prostor; u tom slučaju, naravno, besmislen je zahtjev da su elementi grupe G izometrije; zaključak Kakutanijevog teorema vrijedi uz pretpostavku da je grupa linearnih operatora G ekvikontinuirana.

Vratimo se sada na kompaktnu grupu G. Prostor $C(G)$ je Banachov i očito su svi operatori λ_a, ρ_a, $a \in G$, na tom prostoru izometrije:

$$\|\lambda_a f\|_\infty = \|\rho_a f\|_\infty = \|f\|_\infty \qquad \forall a \in G \quad \text{i} \quad \forall f \in C(G). \tag{3.9}$$

Za $f \in C(G)$ stavimo

$$K_\ell(f) = Co\,\{\lambda_a f;\ a \in G\}, \qquad \overline{K}_\ell(f) = Cl(K_\ell(f)) = \overline{Co}\,\{\lambda_a f;\ a \in G\},$$

$$K_r(f) = Co\,\{\rho_a f;\ a \in G\}, \qquad \overline{K}_r(f) = Cl(K_r(f)) = \overline{Co}\,\{\rho_a f;\ a \in G\}.$$

Teorem 3.1.5. *Za svaku funkciju $f \in C(G)$ skupovi $\overline{K}_\ell(f)$ i $\overline{K}_r(f)$ su kompaktni.*

Taj ćemo teorem dokazati korištenjem poznatog kriterija kompaktnosti za skupove neprekidnih funkcija na kompaktnom topološkom prostoru:

Teorem 3.1.6. (**Arzelà–Ascoli**) *Neka je K kompaktan topološki prostor i S podskup Banachovog prostora $C(K)$. Skup S je relativno kompaktan ako i samo ako je on ograničen, tj. za neki $M > 0$ vrijedi*

$$\|f\|_\infty \le M \qquad \forall f \in S,$$

i ekvikontinuiran u svakoj točki $x \in K$, tj. za svaki $\varepsilon > 0$ postoji okolina V točke x takva da vrijedi

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon \qquad \forall y \in V \quad i \quad \forall f \in S.$$

Dokaz teorema 3.1.5. Ako su $a_1, a_2, \ldots, a_n \in G$ i $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}_+$ takvi da je $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$, onda zbog (3.9) imamo

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda_{a_i} f \right\|_\infty \le \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \,\|\lambda_{a_i} f\|_\infty = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \|f\|_\infty = \|f\|_\infty.$$

Dakle, $\|g\|_\infty \le \|f\|_\infty \ \forall g \in K_\ell(f)$, odnosno, skup $K_\ell(f)$ je ograničen. Nadalje, neka je $\varepsilon > 0$. Budući da je prema propoziciji 3.1.1. funkcija f uniformno neprekidna, postoji otvorena okolina V jedinice e u grupi G takva da vrijedi

$$x, y \in G, \quad x^{-1} y \in V \qquad \Longrightarrow \qquad |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Za bilo koji $a \in G$ i takve x, y imamo $(a^{-1}x)^{-1}(a^{-1}y) = x^{-1}y \in V$, pa je

$$|(\lambda_a f)(x) - (\lambda_a f)(y)| = \left| f\left(a^{-1}x\right) - f\left(a^{-1}y\right)\right| < \varepsilon. \tag{3.10}$$

Neka je $g \in K_\ell(f)$. Neka su $n \in \mathbb{N}$, $a_1, a_2, \ldots, a_n \in G$ i $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}_+$ takvi da je

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1, \qquad g = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda_{a_i} f.$$

Zbog (3.10) iz $x^{-1}y \in V$ slijedi

$$|g(x) - g(y)| = \left| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left[(\lambda_{a_i} f)(x) - (\lambda_{a_i} f)(y) \right] \right| \leq \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left| (\lambda_{a_i} f)(x) - (\lambda_{a_i} f)(y) \right| < \varepsilon \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = \varepsilon.$$

Time je dokazano da je skup $K_\ell(f)$ ekvikontinuiran. Prema Arzelà–Ascolijevom teoremu, skup $K_\ell(f)$ je relativno kompaktan, pa slijedi da je njegov zatvarač $\overline{K}_\ell(f)$ kompaktan. Dokaz za $\overline{K}_r(f)$ sasvim je analogan, jedino što se umjesto propozicije 3.1.1. koristi analogna tvrdnja iz zadatka 3.1.1.

Teorem 3.1.7. *Na svakoj kompaktnoj grupi G postoji integral $I : C(G) \to \mathbb{C}$ sa sljedećim svojstvima:*

(a) *lijeva invarijantnost: $I(\lambda_a f) = I(f)$ $\forall a \in G$ i $\forall f \in C(G)$.*

(b) *desna invarijantnost: $I(\rho_a f) = I(f)$ $\forall a \in G$ i $\forall f \in C(G)$.*

(c) *invarijantnost na invertiranje: $I(\check{f}) = I(f)$ $\forall f \in C(G)$, gdje je $\check{f}(a) = f(a^{-1})$, $a \in G$.*

(d) *normiranost: $I(1) = 1$.*

(e) *regularnost: Ako je $f \in C(G)$, $f(a) \geq 0$ $\forall a \in G$ i $f \not\equiv 0$ onda je $I(f) > 0$.*

Integral sa svojstvima (a) i (d) je jedinstven, a također i integral sa svojstvima (b) i (d). Štoviše, ako je $\Phi : C(G) \to \mathbb{C}$ neprekidni linearni funkcional takav da vrijedi ili $\Phi(\lambda_a f) = \Phi(f)$ $\forall a \in G$ i $\forall f \in C(G)$ ili $\Phi(\rho_a f) = \Phi(f)$ $\forall a \in G$ i $\forall f \in C(G)$ tada je $\Phi = \lambda I$ za neki $\lambda \in \mathbb{C}$.

Dokaz: Uočimo da je $\{\lambda_a;\ a \in G\}$ podgrupa grupe izometrija Banachovog prostora $C(G)$. Neka je $f \in C(G)$ i $g \in K_\ell(f)$. Za neke $n \in \mathbb{N}$, $a_1, a_2, \ldots, a_n \in G$ i $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}_+$ je tada

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1 \qquad \text{i} \qquad g = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda_{a_i} f.$$

Sada za svaki $a \in G$ imamo

$$\lambda_a g = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda_a \lambda_{a_i} f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda_{aa_i} f \in K_\ell(f).$$

Dakle vrijedi $\lambda_a K_\ell(f) \subseteq K_\ell(f)$ $\forall a \in G$, a iz neprekidnosti operatora λ_a slijedi $\lambda_a \overline{K}_\ell(f) \subseteq \overline{K}_\ell(f)$ $\forall a \in G$. Prema teoremu 3.1.5. skup $\overline{K}_\ell(f)$ je kompaktan, pa prema Kakutanijevom teoremu 3.1.3. postoji $g \in \overline{K}_\ell(f)$ takva da je $\lambda_a g = g$ $\forall a \in G$. No to znači da za svaki $a \in G$ imamo $g(a) = (\lambda_a g)(a) = g(e)$, tj. funkcija g je konstantna. Time je dokazano da je $\overline{K}_\ell(f) \cap \mathbb{C} \neq \emptyset$. Sasvim analogno, korištenjem grupe izometrija $\{\rho_a;\ a \in G\}$ i kompaktnost skupa $\overline{K}_r(f)$ dobivamo da je i $\overline{K}_r(f) \cap \mathbb{C} \neq \emptyset$.

Dokazat ćemo sada da je $\overline{K}_\ell(f) \cap \mathbb{C} = \overline{K}_r(f) \cap \mathbb{C}$ i da je to jednočlan skup. Neka su $\alpha \in \overline{K}_\ell(f) \cap \mathbb{C}$, $\beta \in \overline{K}_r(f) \cap \mathbb{C}$ i $\varepsilon > 0$. Tada postoje $g \in K_\ell(f)$ i $h \in K_r(f)$ takvi da je

$$\|\alpha - g\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{i} \qquad \|\beta - h\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{3.11}$$

Neka su $n, m \in \mathbb{N}$, $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_m \in G$ i $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m \in \mathbb{R}_+$ takvi da je

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = \sum_{j=1}^{m} \beta_j = 1, \qquad g = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda_{a_i^{-1}} f \qquad \text{i} \qquad h = \sum_{j=1}^{m} \beta_j \rho_{b_j} f.$$

Tada iz (3.11) slijedi

$$\left|\alpha - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(a_i x)\right| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \forall x \in G \tag{3.12}$$

i

$$\left|\beta - \sum_{j=1}^{m} \beta_j f(x b_j)\right| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \forall x \in G. \tag{3.13}$$

Sada u (3.12) uvrstimo $x = b_j$ za $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$, pa dobivamo

$$\left|\alpha - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(a_i b_j)\right| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \forall j \in \{1, 2, \ldots, m\}. \tag{3.14}$$

Imamo

$$\left|\alpha - \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \alpha_i \beta_j f(a_i b_j)\right| = \left|\sum_{j=1}^{m} \beta_j \left(\alpha - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(a_i b_j)\right)\right| \le \sum_{j=1}^{m} \beta_j \left|\alpha - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(a_i b_j)\right|,$$

a kako je $\sum_{j=1}^{m} \beta_j = 1$, zbog (3.14) dobivamo

$$\left|\alpha - \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \alpha_i \beta_j f(a_i b_j)\right| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{3.15}$$

Sasvim analogno, uvrštavanjem $x = a_i$, $1 \le i \le n$, iz (3.13) dobivamo

$$\left|\beta - \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \alpha_i \beta_j f(a_i b_j)\right| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{3.16}$$

Iz (3.15) i (3.16) slijedi $|\alpha - \beta| < \varepsilon$, a kako je $\varepsilon > 0$ bio proizvoljan, zaključujemo da je $\alpha = \beta$.

Time je dokazano da za svaku funkciju $f \in C(G)$ vrijedi $\overline{K}_\ell(f) \cap \mathbb{C} = \overline{K}_r(f) \cap \mathbb{C}$ i da je to jednočlan skup. Taj jedini član označimo sa $I(f)$. Dakle, $I(f) \in \mathbb{C}$ je jedina konstanta koja se može uniformno aproksimirati funkcijama iz $K_\ell(f)$ i ujedno jedina konstanta koja se može uniformno aproksimirati funkcijama iz $K_r(f)$.

Dokažimo sada svojstva preslikavanja $I : C(G) \to \mathbb{C}$.

Prije svega, ako je $f \in C(G)$ i $f(x) \ge 0$ $\forall x \in G$ onda za svaki $a \in G$ vrijedi $(\lambda_a f)(x) \ge 0$ $\forall x \in G$, pa isto vrijedi i za svaku konveksnu kombinaciju $g \in K_\ell(f) : g(x) \ge 0$ $\forall x \in G$. Funkcija koja se može uniformno aproksimirati nenegativnim funkcijama i sama je nenegativna, pa slijedi $g(x) \ge 0$ $\forall x \in G$ za svaku funkciju $g \in \overline{K}_\ell(G)$. Odatle slijedi $I(f) \ge 0$. Time je dokazana pozitivnost preslikavanja $I : C(G) \to \mathbb{C}$:

$$f \in C(G), \quad f(x) \ge 0 \quad \forall x \in G \qquad \Longrightarrow \qquad I(f) \ge 0. \tag{3.17}$$

Neka je $f \in C(G)$ i $\alpha \in \mathbb{C}$. Za $a \in G$ je $\lambda_a(\alpha f) = \alpha \lambda_a f$, a odatle je

$$K_\ell(\alpha f) = \alpha K_\ell(f) = \{\alpha g;\ g \in K_\ell(f)\} \qquad \Longrightarrow \qquad \overline{K}_\ell(\alpha f) = \alpha \overline{K}_\ell(f) = \{\alpha g;\ g \in \overline{K}_\ell(f)\}.$$

Slijedi

$$I(\alpha f) = \alpha I(f), \qquad f \in C(G), \quad \alpha \in \mathbb{C}. \tag{3.18}$$

Dokažimo sada aditivnost preslikavanja $I : C(G) \to \mathbb{C}$. Neka su $f, g \in C(G)$ i neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljno izabran. Konstanta $I(f)$ se može uniformno aproksimirati funkcijama iz $K_\ell(f)$, pa postoje $n \in \mathbb{N}$, $a_1, a_2, \ldots, a_n \in G$ i $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}_+$ takvi da je

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1 \qquad \text{i} \qquad \left| I(f) - \sum_{i=1}^n \alpha_i f(a_i x) \right| < \frac{\varepsilon}{3} \qquad \forall x \in G. \tag{3.19}$$

Stavimo

$$h = \sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda_{a_i^{-1}} g, \quad \text{tj.} \qquad h(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i g(a_i x), \quad x \in G.$$

Tada je $h \in K_\ell(g)$, pa slijedi $K_\ell(h) \subseteq K_\ell(g)$, dakle i $\overline{K}_\ell(h) \subseteq \overline{K}_\ell(g)$, a odatle je $I(g) = I(h)$. Ta se konstanta može uniformno aproksimirati funkcijama iz $K_\ell(h)$, pa postoje $m \in \mathbb{N}$, $b_1, b_2, \ldots, b_m \in G$ i $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m \in \mathbb{R}_+$ takvi da je

$$\sum_{j=1}^m \beta_j = 1 \qquad \text{i} \qquad \left| I(g) - \sum_{j=1}^m \beta_j h(b_j x) \right| < \frac{\varepsilon}{3} \qquad \forall x \in G,$$

odnosno, zbog definicije funkcije h,

$$\left| I(g) - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \alpha_i \beta_j g(a_i b_j x) \right| < \frac{\varepsilon}{3} \qquad \forall x \in G. \tag{3.20}$$

U (3.19) umjesto x uvrstimo $b_j x$, $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$. Dobivamo

$$\left| I(f) - \sum_{i=1}^n \alpha_i f(a_i b_j x) \right| < \frac{\varepsilon}{3} \qquad \forall x \in G,$$

a odatle

$$\left| I(f) - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \alpha_i \beta_j f(a_i b_j x) \right| = \left| \sum_{j=1}^m \beta_j \left(I(f) - \sum_{i=1}^n \alpha_i f(a_i b_j x) \right) \right| \leq$$

$$\leq \sum_{j=1}^m \beta_j \left| I(f) - \sum_{i=1}^n \alpha_i f(a_i x) \right| < \sum_{j=1}^m \beta_j \frac{\varepsilon}{3} = \frac{\varepsilon}{3}.$$

Dakle,

$$\left| I(f) - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \alpha_i \beta_j f(a_i b_j x) \right| < \frac{\varepsilon}{3} \qquad \forall x \in G. \tag{3.21}$$

Iz (3.20) i (3.21) nejednakost trokuta daje

$$\left| I(f) + I(g) - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \alpha_i \beta_j (f+g)(a_i b_j x) \right| < \frac{2\varepsilon}{3} \qquad \forall x \in G. \tag{3.22}$$

Konstanta $I(f+g)$ može se uniformno aproksimirati funkcijama iz $K_r(f+g)$, pa postoje $p \in \mathbb{N}$, $c_1, c_2, \ldots, c_p \in G$ i $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_p \in \mathbb{R}_+$ takvi da je

$$\left| I(f+g) - \sum_{k=1}^p \gamma_k (f+g)(x c_k) \right| < \frac{\varepsilon}{3} \qquad \forall x \in G.$$

Uvrstimo li $x = a_ib_j$, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$, dobivamo

$$\left| I(f+g) - \sum_{k=1}^{p} \gamma_k (f+g)(a_ib_jc_k) \right| < \frac{\varepsilon}{3}, \qquad 1 \le i \le n, \quad 1 \le j \le m,$$

a odatle zbog $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \alpha_i\beta_j = 1$

$$\left| I(f+g) - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{p} \alpha_i\beta_j\gamma_k (f+g)(a_ib_jc_k) \right| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{3.23}$$

Nadalje, kako je $\sum_{k=1}^{p} \gamma_k = 1$, iz nejednakosti (3.22) za $x = c_k$, $k = 1, 2, \ldots, p$, slijedi

$$\left| I(f) + I(g) - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{p} \alpha_i\beta_j\gamma_k (f+g)(a_ib_jc_k) \right| < \frac{2\varepsilon}{3}. \tag{3.24}$$

Iz (3.23) i (3.24) nejednakost trokuta daje $|I(f) + I(g) - I(f+g)| < \varepsilon$, a kako je $\varepsilon > 0$ bio proizvoljan, dobivamo aditivnost:

$$I(f+g) = I(f) + I(g), \qquad f, g \in C(G). \tag{3.25}$$

Prema (3.17), (3.18) i (3.25) preslikavanje $I : C(G) \to \mathbb{C}$ je integral na G.

Dokažimo sada iskazana svojstva $(a) - (e)$ integrala I.

Za $a, b \in G$ i $f \in C(G)$ je $\lambda_b(\lambda_a f) = \lambda_{ba} f$, pa zaključujemo da je $K_\ell(\lambda_a f) = K_\ell(f)$. Odatle slijedi (a).

Sasvim analogno imamo $K_r(\rho_a f) = K_r(f)$, pa vrijedi i (b).

Za konstantnu funkciju 1 je očito $K_\ell(1) = \{1\}$, dakle vrijedi i (d).

Neka je $f \in C(G)$, $f(x) \ge 0$ $\forall x \in G$ i $f \ne 0$. Tada je za neki $r > 0$ skup

$$V = \{x \in G;\ f(x) > r\}$$

neprazan i otvoren, pa je $\{aV;\ a \in G\}$ otvoren pokrivač od G. Zbog kompaktnosti od G postoje $a_1, a_2, \ldots, a_n \in G$ takvi da je

$$G = a_1V \cup a_2V \cup \cdots \cup a_nV.$$

Stavimo

$$g = \sum_{i=1}^{n} \lambda_{a_i} f.$$

Za $x \in G$ postoji $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ takav da je $x \in a_iV$, tj. $x = a_iy$ za neki $y \in V$. Tada je $(\lambda_{a_i} f)(x) = f(a_i^{-1}x) = f(y) > r$, a odatle i $g(x) > r$. Prema tome, $g(x) > r$ $\forall x \in G$, pa slijedi $I(g) \ge r$. Međutim, zbog lijeve invarijantnosti integrala I iz definicije funkcije g slijedi $I(g) = nI(f)$. Zaključujemo da je $I(f) = \frac{1}{n}I(G) \ge \frac{r}{n} > 0$ i time je dokazano svojstvo (e).

Pretpostavimo sada da je $\Phi : C(G) \to \mathbb{C}$ neprekidni linearni funkcional koji je lijevoinvarijantan, tj. takav da vrijedi

$$\Phi(\lambda_a f) = \Phi(f) \qquad \forall f \in C(G) \quad \text{i} \quad \forall a \in G.$$

Za $f \in C(G)$ postoji niz $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ u $K_\ell(f)$ koji uniformno konvergira prema konstanti $I(f)$. Zbog lijeve invarijatnosti funkcionala Φ vrijedi $\Phi(f_n) = \Phi(f)$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Sada zbog neprekidnosti od Φ dobivamo

$$\Phi(f) = \lim_{n\to\infty} \Phi(f_n) = \Phi\left(\lim_{n\to\infty} f_n\right) = \Phi(I(f)) = \Phi(I(f)1) = I(f)\Phi(1).$$

Time je dokazano da je $\Phi = \Phi(1)I$. Sasvim analogno dokazuje se tvrdnja i za desnoinvarijantan neprekidan linearan funkcional Φ.

Ostaje još da dokažemo svojstvo (c). Stavimo $\Phi(f) = I(\check{f})$, $f \in C(G)$. Tada je Φ neprekidan linearan funkcional na $C(G)$. Nadalje, imamo za $a, x \in G$ i $f \in C(G)$

$$(\rho_a \check{f})(x) = \check{f}(xa) = f(a^{-1}x^{-1}) = (\lambda_a f)(x^{-1}) = (\lambda_a f)\check{}(x),$$

dakle,

$$\Phi(\lambda_a f) = I((\lambda_a f)\check{}) = I(\rho_a \check{f}) = I(\check{f}) = \Phi(f).$$

Prema dokazanom je $\Phi(f) = \Phi(1)I(f)$. Međutim, $\Phi(1) = I(1) = 1$. Time je dokazano i (c).

U teoriji integracije pokazuje se da je svaki pozitivni funkcional na prostoru $C(G)$ oblika $f \mapsto \int_G f(x)\mathrm{d}\mu(x)$ za neku pozitivnu Borelovu mjeru μ. Dakle, integral I iz prethodnog teorema se može tako pisati:

$$I(f) = \int_G f(x)\mathrm{d}\mu(x), \qquad f \in C(G).$$

μ se zove **Haarova mjera** na grupi G. U integralnom zapisu svojstva integrala I izgledaju ovako

$$\int_G f(ax)\mathrm{d}\mu(x) = \int_G f(xa)\mathrm{d}\mu(x) = \int_G f\left(x^{-1}\right)\mathrm{d}\mu(x) = \int_G f(x)\mathrm{d}\mu(x), \qquad \forall f \in C(G), \quad \forall a \in G,$$

$$f \in C(G), \quad f(x) \geq 0 \quad \forall x \in G, \quad f \not\equiv 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \int_G f(x)\mathrm{d}\mu(x) > 0.$$

Haarova mjera μ ima sljedeća svojstva invarijantnosti:

$$\mu(aA) = \mu(Aa) = \mu\left(A^{-1}\right) = \mu(A), \qquad A \subseteq G \quad \text{izmjeriv}, \quad a \in G.$$

Nadalje, iz svojstva (d) u teoremu 3.1.7. slijedi da je mjera μ normirana, tj. $\mu(G) = 1$, a iz (e) slijedi da je $\mu(A) > 0$ za svaki izmjeriv skup $A \subseteq G$ s nepraznom nutrinom i, posebno, za svaki neprazan otvoren skup $A \subseteq G$.

3.2 Reprezentacije na Hilbertovim prostorima

Neka je $\mathcal{H}$ Hilbertov prostor. Sa $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ ćemo označavati unitalnu C^*-algebru svih ograničenih linearnih operatora $A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$. Za grupu svih invertibilnih elemenata algebre $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ upotrebljavat ćemo oznaku $\mathcal{G}\ell(\mathcal{H})$, a za njenu podgrupu svih unitarnih operatora oznaku $\mathcal{U}(\mathcal{H})$:

$$\mathcal{G}\ell(\mathcal{H}) = \{A \in \mathcal{B}(\mathcal{H});\ \exists B \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) \quad \text{takav da je} \quad AB = BA = I_{\mathcal{H}}\},$$

$$\mathcal{U}(\mathcal{H}) = \{U \in \mathcal{B}(\mathcal{H});\ UU^* = U^*U = I_{\mathcal{H}}\}.$$

Reprezentacija kompaktne grupe G na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$ je homomorfizam π grupe G u grupu $\mathcal{G}\ell(\mathcal{H})$ takav da je preslikavanje $(x, \xi) \mapsto \pi(x)\xi$ sa $G \times \mathcal{H}$ u $\mathcal{H}$ neprekidno. **Reprezentacija** π zove se **unitarna** ako je $\pi(x) \in \mathcal{U}(\mathcal{H})\ \forall x \in G$. Invarijatni integral na grupi G omogućuje dokaz analogona tvrdnje (b) teorema 2.1.1.:

Teorem 3.2.1. *Neka je π reprezentacija kompaktne grupe G na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$. Tada na $\mathcal{H}$ postoji skalarni produkt, ekvivalentan originalnom skalarnom produktu, u odnosu na koji je reprezentacija π unitarna.*

Dokaz: Neka je I invarijantni integral na grupi G i neka je $(\cdot|\cdot)$ skalarni produkt na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$. Za $\xi, \eta \in \mathcal{H}$ funkcija $\varphi_{\xi,\eta} : G \to \mathbb{C}$, zadana sa $\varphi_{\xi,\eta}(x) = (\pi(x)\xi|\pi(x)\eta)$, $x \in G$, je neprekidna. Stavimo

$$\langle\xi|\eta\rangle = I(\varphi_{\xi,\eta}).$$

Zapisano pomoću Haarove mjere μ pridružene integralu I definicija preslikavanja $\langle\cdot|\cdot\rangle$ sa $cH \times \mathcal{H}$ u $\mathbb{C}$ je sljedeća:

$$\langle\xi|\eta\rangle = \int_G (\pi(x)\xi|\pi(x)\eta)\mathrm{d}\mu(x), \qquad \xi, \eta \in \mathcal{H}.$$

Očito je to preslikavanje seskvilinearno. Nadalje, ono ima hermitsku simetriju. Doista, za $\xi, \eta \in \mathcal{H}$ funkcija $\varphi_{\eta,\xi}$ je kompleksno konjugirana funkciji $\varphi_{\xi,\eta}$, a integral I poprima realne vrijednosti na realnim funkcijama, pa vrijedi $I(\overline{\varphi}) = \overline{I(\varphi)}$; dakle,

$$\langle\eta|\xi\rangle = I(\varphi_{\eta,\xi}) = I(\overline{\varphi_{\xi,\eta}}) = \overline{I(\varphi_{\xi,\eta})} = \overline{\langle\xi|\eta\rangle}.$$

Za $\xi \in \mathcal{H}$ funkcija $\varphi_{\xi,\xi}$ je nenegativna, pa vrijedi

$$\langle\xi, \xi\rangle = I(\varphi_{\xi,\xi}) \geq 0.$$

Nadalje, ako je $\xi \neq 0$ vrijedi $\varphi_{\xi,\xi}(e) = (\xi|\xi) > 0$, dakle, funkcija $\varphi_{\xi,\xi}$ nije identički jednaka nuli, pa iz svojstva (e) teorema 3.1.7. slijedi $\langle\xi|\xi\rangle = I(\varphi_{\xi,\xi}) > 0$. Time je dokazano da je $\langle\cdot|\cdot\rangle$ skalarni produkt na vektorskom prostoru $\mathcal{H}$.

Zadatak 3.2.1. *Dokažite da su operatori $\pi(x)$, $x \in G$, po normi uniformno ograničeni, tj. da postoji $C > 0$ takav da je $\|\pi(x)\| \leq C\ \ \forall x \in G$. Pokažite da tada vrijedi i $\|\pi(x)\xi\| \geq C^{-1}\|\xi\|$ $\forall x \in G$ i $\forall \xi \in \mathcal{H}$.*

Uputa: Za svako $\xi \in \mathcal{H}$ funkcija $x \mapsto \pi(x)\xi$ sa G u $\mathcal{H}$ je neprekidna, dakle, zbog kompaktnosti od G, ograničena. Sada koristite teorem uniformne ograničenosti za familije operatora na Banachovom prostoru.

Zadatak 3.2.2. *Dokažite da je gore definirani skalarni produkt $\langle\cdot|\cdot\rangle$ na prostoru $\mathcal{H}$ ekvivalentan originalnom skalarnom produktu $(\cdot|\cdot)$, tj. da postoje $m > 0$ i $M > 0$ takvi da je*

$$m(\xi|\xi) \leq \langle\xi|\xi\rangle \leq M(\xi|\xi) \qquad \forall \xi \in \mathcal{H}.$$

Uputa: Koristite zadatak 3.2.1.

Zadatak 3.2.3. *Dokažite da su u odnosu na novi skalarni produkt* $\langle\,\cdot\,|\,\cdot\,\rangle$ *svi operatori* $\pi(x)$, $x \in G$, *unitarni, tj. da je*

$$\langle \pi(x)\xi|\pi(x)\eta\rangle = \langle \xi|\eta\rangle \qquad \forall x \in G \quad i \quad \forall \xi, \eta \in \mathcal{H}.$$

Zbog toga ćemo u daljnjem promatrati isključivo unitarne reprezentacije kompaktne grupe G.

Da bi homomorfizam $\pi : G \to \mathcal{U}(\mathcal{H})$ bio unitarna reprezentacija kompaktne grupe G na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$ dovoljan je znatno slabiji uvjet neprekidnosti:

Propozicija 3.2.2. *Neka je* G *kompaktna grupa i* $\mathcal{H}$ *Hilbertov prostor i neka je* $\pi : G \to \mathcal{U}(\mathcal{H})$ *homomorfizam grupa. Sljedeća su tri svojstva međusobno ekvivalentna:*

(a) π *je unitarna reprezentacija od* G *na Hilbertovom prostoru* $\mathcal{H}$.

(b) *Za svaki* $\xi \in \mathcal{H}$ *realna funkcija* $x \mapsto Re(\pi(x)\xi|\xi)$ *je neprekidna u jedinici* e *grupe* G.

(c) *Postoji skup* $S \subseteq \mathcal{H}$ *koji razapinje gust potprostor u* $\mathcal{H}$ *takav da je za bilo koje vektore* $\xi, \eta \in S$ *kompleksna funkcija* $x \mapsto (\pi(x)\xi|\eta)$ *neprekidna u jedinici* e *grupe* G.

Dokaz: Očito iz (a) slijedi (c).
Pretpostavimo sada da vrijedi (c). Neka je

$$\mathcal{H}_1 = \{\xi \in \mathcal{H};\ \text{funkcija } x \mapsto (\pi(x)\xi|\eta) \text{ je neprekidna u točki } e\ \forall \eta \in S\}.$$

Očito je $\mathcal{H}_1$ potprostor od $\mathcal{H}$. Budući da $\mathcal{H}_1$ sadrži S, zaključujemo da je $\mathcal{H}_1$ gust potprostor od $\mathcal{H}$.
Za $\xi \in \mathcal{H}$, $\zeta \in \mathcal{H}_1$, $\eta \in S$ i $x \in G$ vrijedi

$$|(\pi(x)\xi|\eta) - (\xi|\eta)| \leq |(\pi(x)(\xi - \zeta)|\eta)| + |(\pi(x)\zeta|\eta) - (\zeta|\eta)| + |(\zeta - \xi|\eta)|,$$

pa zaključujemo da je

$$|(\pi(x)\xi|\eta) - (\xi|\eta)| \leq 2\|\xi - \zeta\| \cdot \|\eta\| + |(\pi(x)\zeta|\eta) - (\zeta|\eta)|, \qquad \xi \in \mathcal{H},\ \eta \in S,\ \zeta \in \mathcal{H}_1,\ x \in G. \tag{3.26}$$

Neka su sada $\xi \in \mathcal{H}$, $\eta \in S$, $\eta \neq 0$, i $\varepsilon > 0$. Izaberimo $\zeta \in \mathcal{H}_1$ tako da bude $\|\xi - \zeta\| \leq \dfrac{\varepsilon}{3\|\eta\|}$. Nadalje, neka je U okolina od e u G takva da vrijedi

$$x \in U \qquad \Longrightarrow \qquad |(\pi(x)\zeta|\eta) - (\zeta|\eta)| \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Odatle i iz (3.28) slijedi

$$x \in U \qquad \Longrightarrow \qquad |(\pi(x)\xi|\eta) - (\xi|\eta)| \leq 2\frac{\varepsilon}{3\|\eta\|} \cdot \|\eta\| + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Dakle, preslikavanje $x \mapsto (\pi(x)\xi|\eta)$ je neprekidno u točki e. Budući da je vektor $\eta \in S \setminus \{0\}$ bio proizvoljan, zaključujemo da je $\xi \in \mathcal{H}_1$. Time je dokazano da je $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}$, odnosno da je preslikavanje $x \mapsto (\pi(x)\xi|\eta)$ neprekidno u točki e za svaki $\xi \in \mathcal{H}$ i svaki $\eta \in S$.
Stavimo sada

$$\mathcal{H}_2 = \{\eta \in \mathcal{H};\ \text{funkcija } x \mapsto (\pi(x)\xi|\eta) \text{ je neprekidna u točki } e\ \forall \xi \in \mathcal{H}\}.$$

Sasvim analogno nalazimo da je $\mathcal{H}_2 = \mathcal{H}$.

Prema tome, preslikavanje $x \mapsto (\pi(x)\xi|\eta)$ je neprekidno u točki e za svaka dva vektora $\xi, \eta \in \mathcal{H}$. Odatle slijedi (b).

Napokon, pretpostavimo da vrijedi (b). Neka su $\xi_0 \in \mathcal{H}$, $x_0 \in G$ i $\varepsilon > 0$. Vrijednost funkcije $x \mapsto \mathrm{Re}\,(\pi(x)\pi(x_0)\xi_0|\pi(x_0)\xi_0)$ u točki e jednaka je $\|\xi_0\|^2$. Po pretpostavci ta je funkcija neprekidna u točki e pa postoji okolina U od e takva da vrijedi

$$y \in U \qquad \Longrightarrow \qquad \|\xi_0\|^2 - \mathrm{Re}\,(\pi(y)\pi(x_0)\xi_0|\pi(x_0)\xi_0) < \frac{\varepsilon^2}{8}.$$

Za $x \in Ux_0$ (tj. $xx_0^{-1} \in U$) i za $\xi \in \mathcal{H}$ takav da je $\|\xi - \xi_0\| < \frac{\varepsilon}{2}$ imamo redom

$$\|\pi(x)\xi - \pi(x_0)\xi_0\| \leq \|\pi(x)\xi - \pi(x)\xi_0\| + \|\pi(x)\xi_0 - \pi(x_0)\xi_0\| =$$

$$= \|\xi - \xi_0\| + \sqrt{(\pi(x)\xi_0|\pi(x)\xi_0) + (\pi(x_0)\xi_0|\pi(x_0)\xi_0) - 2\mathrm{Re}\,(\pi(x)\xi_0|\pi(x_0)\xi_0)} =$$

$$= \|\xi - \xi_0\| + \sqrt{2\left[\|\xi_0\|^2 - \mathrm{Re}\,(\pi(xx_0^{-1})\pi(x_0)\xi_0|\pi(x_0)\xi_0)\right]} < \frac{\varepsilon}{2} + \sqrt{2\frac{\varepsilon^2}{8}} = \varepsilon.$$

Time je dokazano da je preslikavanje $(x, \xi) \mapsto \pi(x)\xi$ neprekidno u svakoj točki $(x_0, \xi_0) \in G \times \mathcal{H}$, odnosno, vrijedi (a).

Neka je π unitarna reprezentacija kompaktne grupe G na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$. Nadalje, neka je I invarijantni integral na grupi G iz teorema 3.1.7. i μ pripadna (normirana) Haarova mjera. Za $f \in C(G)$ i $\xi, \eta \in \mathcal{H}$ kompleksna funkcija $\varphi_{f,\xi,\eta} : a \mapsto f(a)(\pi(a)\xi|\eta)$ na grupi G je neprekidna. Stoga na nju možemo primijeniti integral I. Primijetimo da je preslikavanje

$$(\xi, \eta) \mapsto I(\varphi_{f,\xi,\eta}) = \int_G f(a)(\pi(a)\xi|\eta)\mathrm{d}\mu(a)$$

sa $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ u $\mathbb{C}$ seskvilinearno. Nadalje, vrijedi

$$|\varphi_{f,\xi,\eta}(a)| \leq \|f\|_\infty \cdot \|\xi\| \cdot \|\eta\|, \qquad f \in C(G),\ \xi, \eta \in \mathcal{H}.$$

Prema propoziciji 3.1.2. nalazimo

$$|I(\varphi_{f,\xi,\eta})| \leq \max\{|f(a)(\pi(a)\xi|\eta)|;\ a \in G\} \leq \|f\|_\infty \cdot \|\xi\| \cdot \|\eta\|, \qquad f \in C(G),\ \xi, \eta \in \mathcal{H}. \tag{3.27}$$

Prema tome, postoji ograničen linearan operator na prostoru $\mathcal{H}$, koji ćemo označiti sa $\pi(f)$, takav da je

$$(\pi(f)\xi|\eta) = I(\varphi_{f,\xi,\eta}) = \int_G f(a)(\pi(a)\xi|\eta)\mathrm{d}\mu(a), \qquad \xi, \eta \in \mathcal{H}. \tag{3.28}$$

Očito je tako definirano preslikavanje $f \mapsto \pi(f)$ sa $C(G)$ u $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ linearno. Nadalje, iz (3.27) slijedi da je

$$\|\pi(f)\| \leq \|f\|_\infty \qquad \forall f \in C(G),$$

dakle, preslikavanje $f \mapsto \pi(f)$ je neprekidno.

Za $f, g \in G$ definiramo funkciju $f * g : G \to \mathbb{C}$ tako da njena vrijednost u točki a bude vrijednost integrala I na neprekidnoj funkciji $b \mapsto f(ab^{-1})g(b)$, tj. pisano pomoću integrala po Haarovoj mjeri μ :

$$(f * g)(a) = \int_G f(ab^{-1})g(b)\mathrm{d}\mu(b).$$

Zadatak 3.2.4. *Dokažite da je* $f * g \in C(G)$ *i* $\|f * g\|_\infty \leq \|f\|_\infty \|g\|_\infty$.

Binarna operacija $(f, g) \mapsto f * g$ sa $C(G) \times C(G)$ u $C(G)$ zove se **konvolucija na kompaknoj grupi** G.

Zadatak 3.2.5. *Neka je* Φ *neprekidni linearni funkcional na Banachovom prostoru* $C(G)$. *Dokažite da vrijedi Fubinijev teorem za neprekidne funkcije dvije varijable: ako je* $F : G \times G \to \mathbb{C}$ *neprekidna funkcija i* $a \in G$ *definiramo funkcije* $F_a, F^a \in C(G)$ *sa* $F_a(b) = F(a, b)$, $F^a(b) = F(b, a)$, $b \in G$; *tada su funkcije* φ_F *i* φ^F *definirane sa* $\varphi_F(a) = \Phi(F_a)$ *i* $\varphi^F(a) = \Phi(F^a)$ *neprekidne i vrijedi* $\Phi(\varphi_F) = \Phi(\varphi^F)$.

Uputa: Dokaz neprekidnosti funkcija φ_F i φ^F može se provesti korištenjem uniformne neprekidnosti funkcije F. Dokaz jednakosti provedite najprije za funkcije oblika $F(a, b) = f(a)g(b)$, $f, g \in C(G)$, a zatim iskoristite Stone−Weierstrassov teorem da dokažete da takve funkcije razapinju gust potprostor od $C(G \times G)$.

Posebno, za invarijatni integral I pisan pomoću Haarove mjere μ tvrdnja zadatka 3.2.5. znači:

$$\int_G \left[\int_G F(a, b) \mathrm{d}\mu(a) \right] \mathrm{d}\mu(b) = \int_G \left[\int_G F(a, b) \mathrm{d}\mu(b) \right] \mathrm{d}\mu(a), \qquad F \in C(G \times G).$$

Zadatak 3.2.6. *Dokažite da je s konvolucijom* $C(G)$ *Banachova algebra. Dokažite da je ta algebra unitalna ako i samo je grupa* G *konačna.*

Uputa: Za dokaz asocijativnosti konvolucije iskoristite zadatak 3.2.5.

Zadatak 3.2.7. *Neka je* π *unitarna reprezentacija kompaktne grupe* G *na Hilbertovom prostoru* $\mathcal{H}$ *i neka je za* $f \in C(G)$ *pomoću* (3.28) *definiran operator* $\pi(f)$.

(*a*) *Dokažite da je* $f \mapsto \pi(f)$ *homomorfizam algebre* $C(G)$ *u algebru* $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, *tj. da je*

$$\pi(f * g) = \pi(f)\pi(g), \qquad f, g \in C(G).$$

(*b*) *Dokažite da je* $\pi(f)^* = \pi(f^*)$, $f \in C(G)$, *pri čemu je* $f^*(a) = \overline{f(a^{-1})}$, $a \in G$.

(*c*) *Dokažite da je zatvoren potprostor* $\mathcal{K}$ *od* $\mathcal{H}$ *invarijantan s obzitom na sve operatore* $\pi(a)$, $a \in G$, *ako i samo ako je* $\mathcal{K}$ *invarijantan s obzirom na sve operatore* $\pi(f)$, $f \in C(G)$.

Uputa: U (*b*) i (*c*) koristite sljedeću činjenicu:

Zadatak 3.2.8. *Neka je* $\mathcal{V}$ *skup svih otvorenih okolina jedinice* e *u kompaktnoj grupi* G. *Skup* $\mathcal{V}$ *je usmjeren u odnosu na uređaj obrnut od inkluzije. Za svaku* $V \in \mathcal{V}$ *moguće je izabrati nenegativnu funkciju* $g_V \in C(G)$ *čiji je nosač*

$$Supp\, g_V = Cl(\{a \in G;\ g_V(a) \neq 0\})$$

sadržan u V *i koja ima svojstvo da je* $I(g_V) = 1$. *Dokažite da za svaku* $f \in C(G)$ *hipernizovi* $(f * g_V)_{V \in \mathcal{V}}$ *i* $(g_V * f)_{V \in \mathcal{V}}$ *konvergiraju prema* f *u Banachovom prostoru* $C(G)$, *tj. da za svaku* $f \in C(G)$ *i za svaki* $\varepsilon > 0$ *postoji* $V_0 \in \mathcal{V}$ *takva da vrijedi:*

$$V \in \mathcal{V},\ V \subseteq V_0 \qquad \|f - g_V * f\|_\infty < \varepsilon \quad i \quad \|f - f * g_V\|_\infty < \varepsilon.$$

Zadatak 3.2.9. *Neka je* $(g_V)_{V \in \mathcal{V}}$ *hiperniz iz prethodnog zadatka i neka je* π *unitarna reprezentacija od* G *na Hilbertovom prostoru* $\mathcal{H}$. *Dokažite da tada za svaki* $\xi \in \mathcal{H}$ *hiperniz* $(\pi(g_V)\xi)_{V \in \mathcal{V}}$ *u Hilbertovom prostoru* $\mathcal{H}$ *konvergira prema* ξ, *tj. da za svaki* $\xi \in \mathcal{H}$ *i svaki* $\varepsilon > 0$ *postoji* $V_0 \in \mathcal{V}$ *takva da vrijedi*

$$V \in \mathcal{V}, V \subseteq V_0 \qquad \Longrightarrow \qquad \|\pi(g_V)\xi - \xi\| < \varepsilon.$$

Zadatak 3.2.10. *Korištenjem činjenice da je $C(G)$ gust potprostor Banachovog prostora $L_1(G)$ svih klasa integrabilnih funkcija u odnosu na Haarovu mjeru μ ili korištenjem nekog od topoloških teorema egzistencije neprekidnih funkcija na Hausdorffovom kompatnom topološkom prostoru dokažite konstataciju iz zadatka 3.2.8.: ako je V otvorena okolina jedinice e u grupi G onda postoji nenegativna funkcija $g \in C(G)$ takva da je*

$$Supp\, g = Cl(\{a \in G;\ g(a) \neq 0\}) \subseteq V \qquad i \qquad I(g) = 1.$$

Uputa: Karakteristična funkcija χ_U nepraznog otvorenog skupa U je integrabilna funkcija na G i $I(\chi_U) = \mu(U) > 0$ zbog regularnosti mjere μ. Nadalje, koristite svojstva okolina jedinice e u G s početka odjeljka 4.1.

Za $f, g \in C(G)$ stavimo

$$(f|g) = I(f\overline{g}) = \int_G f(a)\overline{g(a)}\mathrm{d}\mu(a).$$

Lako se vidi da je na taj način definiran skalarni produkt na vektorskom prostoru $C(G)$. Hilbertov prostor koji je upotpunjenje tog unitarnog prostora označavamo sa $L_2(G)$.

Za $a \in G$ ponovo promatramo lijevi i desni pomak λ_a i ρ_a na $C(G)$:

$$(\lambda_a f)(x) = f(a^{-1}x), \qquad (\rho_a f)(x) = f(xa), \qquad f, g \in C(G),\ a, x \in G.$$

Znamo da su $a \to \lambda_a$ i $a \to \rho_a$ homomorfizmi grupe G u grupu izometrija Banachovog prostora $C(G)$ na samoga sebe.

Zadatak 3.2.11. (a) *Dokažite da su preslikavanja $(a, f) \mapsto \lambda_a f$ i $(a, f) \mapsto \rho_a f$ sa $G \times C(G)$ u $C(G)$ neprekidna.*

(b) *Dokažite da se operatori λ_a i ρ_a jedinstveno proširuju sa $C(G)$ do neprekidnih operatora $\lambda(a)$ i $\rho(a)$ na Hilbertovom prostoru $L_2(G)$ i da su λ i ρ unitarne reprezentacije kompaktne grupe G na Hilbertovom prostoru $L_2(G)$.*

(c) *Dokažite da postoji unitaran operator U na $L_2(G)$ takav da je $(Uf)(a) = f(a^{-1})$ za $f \in C(G)$ i $a \in G$ i da vrijedi $U\lambda(a) = \rho(a)U$ i $U\rho(a) = \lambda(a)U$ za svaki $a \in G$.*

Za unitarne reprezentacije λ i ρ i za $f \in C(G)$ tada su definirani ograničeni operatori $\lambda(f)$ i $\rho(f)$ na Hilbertovom prostoru $L_2(G)$ i znamo da su $f \mapsto \lambda(f)$ i $f \mapsto \rho(f)$ neprekidni homomorfizmi Banachove algebre $C(G)$ u Banachovu algebru $\mathcal{B}(L_2(G))$ i vrijedi $\lambda(f)^* = \lambda(f^*)$ i $\rho(f)^* = \rho(f^*)$, gdje je $f^*(a) = \overline{f(a^{-1})}$.

Zadatak 3.2.12. *Dokažite da vrijedi*

$$\lambda(f)g = f * g, \qquad \rho(f)g = g * \check{f}, \qquad \forall f, g \in C(G).$$

Pri tome je kao i prije $\check{f}(a) = f(a^{-1})$.

Promatrajući realizaciju prostora $L_2(G)$ kao prostora klasa ekvivalencije $\mu-$izmjerivih funkcija $\varphi : G \to \mathbb{C}$ takvih da je funkcija $a \mapsto |\varphi(a)|^2$ integrabilna, pri čemu za dvije $\mu-$izmjerive funkcije $\varphi, \psi : G \to \mathbb{C}$ kažemo da su ekvivalentne ako $\mu(\{a \in G;\ \varphi(a) \neq \psi(a)\}) = 0$, može se dokazati da ne samo za neprekidnu funkciju g nego i za predstavnika φ bilo koje klase u $L_2(G)$ vrijede formule iz zadatka 3.2.12.:

$$(\lambda(f)\varphi)(a) = (f * \varphi)(a) = \int_G f(b)\varphi(b^{-1}a)\mathrm{d}\mu(b),$$

$$(\rho(f)\varphi)(a) = (\varphi * \check{f})(a) = \int_G \varphi(b)\check{f}(b^{-1}a)\mathrm{d}\mu(b) = \int_G \varphi(ab)f(b)\mathrm{d}\mu(b)$$

i da su konvolucije $f * \varphi$ i $\varphi * \check{f}$ neprekidne funkcije. Štoviše, pokazuje se da se konvolucija $\varphi * \psi$ može definirati i ako su obje funkcije φ i ψ predstavnici klasa iz $L_2(G)$ i da je to ponovo neprekidna funkcija na G. Posebno vrijedi:

Propozicija 3.2.3. *Neka su $\xi \in L_2(G)$ i $f \in C(G)$. Tada su $\lambda(f)\xi \in C(G)$ i $\rho(f)\xi \in C(G)$.*

Odatle dobivamo sljedeću činjenicu koja će biti ključna u dokazu Peter−Weylovog teorema u sljedećem odjeljku.

Propozicija 3.2.4. *Neka je $X \neq \{0\}$ zatvoren potprostor Hilbertovog prostora $L_2(G)$ koji je invarijantan s obzirom na sve operatore $\lambda(a)$ ili s obzirom na sve operatore $\rho(a)$, $a \in G$. Tada je $X \cap C(G) \neq \{0\}$.*

Dokaz: Pretpostavimo da je zatvoren potprostor $X \neq \{0\}$ Hilbertovog prostora $L_2(G)$ invarijantan s obzirom na sve operatore $\lambda(a)$, $a \in G$. Tada je prema tvrdnji (c) zadatka 3.2.7. $\lambda(f)\xi \in X$ za svaki $\xi \in X$ i svaku funkciju $f \in C(G)$. Prema zadatku 3.2.9. postoje $\xi \in X$ i $f \in C(G)$ takvi da je $\lambda(f)\xi \neq 0$. Tada je $\lambda(f)\xi \in X$, a prema propoziciji 3.2.3. je $\lambda(f)\xi \in C(G)$. Time je tvrdnja propozicije dokazana u slučaju $\lambda-$invarijantnosti potprostora X. U slučaju $\rho-$invarijantnosti dokaz je potpuno analogan.

3.3 Peter−Weylov teorem

O ovom odjeljku je G kompaktna grupa. Primijetimo da je karakter χ_π konačnodimenzionalne neprekidne reprezentacije kompaktne grupe G na prostoru V neprekidna funkcija na G za koju vrijede tvrdnje propozicija 2.2.1., 2.2.2. i 2.2.3.:

$$\chi_\pi(e) = \dim V, \qquad \chi_\pi\left(a^{-1}\right) = \overline{\chi_\pi(a)} \quad a \in G, \qquad \chi_\pi(ab) = \chi_\pi(ba) \quad a, b \in G;$$

$$V = V_1 \dot{+} V_2 \dot{+} \cdots \dot{+} V_s, \quad V_1, V_2, \ldots, V_s \quad \pi-\text{invarijatni} \qquad \Longrightarrow \qquad \chi_\pi = \chi_{\pi_{V_1}} + \chi_{\pi_{V_2}} + \cdots + \chi_{\pi_{V_s}};$$

$$\chi_{\pi\otimes\rho} = \chi_\pi \chi_\rho.$$

Nadalje, potpuno analogno kao u poglavlju 2. dokazuje se sljedeći analogon propozicije 2.1.2.:

Propozicija 3.3.1. *Neka su π i ρ neprekidne reprezentacije kompaktne grupe G na konačnodimenzionalnim prostorima V i W. Za $A \in L(V, W)$ stavimo*

$$A^0 = \int_G \rho\left(a^{-1}\right) A\pi(a) d\mu(a)$$

(*integral operatorske funkcije definiran je pomoću bilo kojih baza u V i W i pomoću integrala skalarnih funkcija*). *Tada je $A \mapsto A^0$ projektor prostora $L(V, W)$ na potprostor $Hom_G(V, W)$.*

Odatle pomoću Schurove leme neposredno slijedi analogon teorema 2.1.3. i 2.1.4.:

Teorem 3.3.2. *Neka su π i ρ neekvivalentne ireducibilne neprekidne reprezentacije kompaktne grupe G na konačnodimenzionalnim prostorima V i W.*

(*a*) *Za svaki $A \in L(V, W)$*

$$\int_G \rho\left(a^{-1}\right) A\pi(a) = 0.$$

(*b*) *Za svaki $A \in L(V)$ vrijedi*

$$\int_G \pi\left(a^{-1}\right) A\pi(a) \mathrm{d}\mu(a) = \frac{\mathrm{Tr}\, A}{\dim V} I_V.$$

Korolar 3.3.3. *Uz pretpostavke teorema 3.3.2. neka je $e = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ baza vektorskog prostora V i $f = \{f_1, f_2, \ldots, f_m\}$ baza vektorskog prostora W. Nadalje, neka su $\pi_{ij}(a)$ elementi matrice operatora $\pi(a)$ u bazi e i $\rho_{k\ell}(a)$ elementi matrice operatora $\rho(a)$ u bazi f. Tada vrijedi*

$$\int_G \pi_{ij}(a)\rho_{k\ell}\left(a^{-1}\right) \mathrm{d}\mu(a) = 0, \qquad \forall i, j \in \{1, 2, \ldots, n\} \quad \text{i} \quad \forall k, \ell \in \{1, 2, \ldots, m\},$$

$$\int_G \pi_{ij}(a)\pi_{rs}\left(a^{-1}\right) \mathrm{d}\mu(a) = \frac{1}{n}\delta_{is}\delta_{jr}, \qquad \forall i, j, r, s \in \{1, 2, \ldots, n\}.$$

Na prostoru $C(G)$ definiran je skalarni produkt pomoću invarijatnog funkcionala i upotpunjenje tog unitarnog prostora označili smo sa $L_2(G)$. Iz korolara 3.3.3. neposredno slijedi

Teorem 3.3.4. *Neka su π i ρ neprekidne ireducibilne konačnodimenzionalne reprezentacije kompaktne grupe G. Tada je*

$$(\chi_\pi|\chi_\rho) = \begin{cases} 1 & \text{ako je} \quad \pi \simeq \rho \\ 0 & \text{ako je} \quad \pi \not\simeq \rho. \end{cases}$$

Sada se sasvim analogno dokazu teorema 2.2.5. dokazuje

Teorem 3.3.5. *Neka je π neprekidna reprezentacija grupe G na konačnodimenzionalnom vektorskom prostoru V i neka su $V_1, V_2, \ldots, V_s$ $\pi-$invarijantni potprostori takvi da je*

$$V = V_1 \dotplus V_2 \dotplus \cdots \dotplus V_s$$

i da su sve subreprezentacije π_{V_j} ireducibilne. Neka je ρ neprekidna konačnodimenzionalna ireducibilna reprezentacija od G. Tada je skalarni produkt $(\chi_\pi|\chi_\rho)$ jednak broju indeksa $j \in \{1, \ldots, s\}$ takvih da je $\pi_{V_j} \simeq \rho$.

Korolar 3.3.6. *Neka su π i σ neprekidne konačnodimenzionalne reprezentacije grupe G. Tada je $\pi \simeq \sigma$ ako i samo ako je $\chi_\pi = \chi_\sigma$.*

U daljnjem ćemo za kompaktnu grupu G sa $\hat{G}$ označavati skup svih klasa ekvivalencije neprekidnih ireducibilnih konačnodimenzionalnih reprezentacija grupe G. Kao i u poglavlju 4. definiramo multiplicitet $m(\pi, \alpha)$ ireducibilne klase $\alpha \in \hat{G}$ u neprekidnoj konačnodimenzionalnoj reprezentaciji π i sasvim analogno dokazima teorema 2.2.7. i 2.6.5. dokazuje se

Teorem 3.3.7. *Neka su π i ρ neprekidne reprezentacije na konačnodimenzionalnim prostorima V i W. Tada je*

$$(\chi_\pi|\chi_\rho) = \dim\, Hom_G(V, W) = \dim\, Hom_G(W, V) = \sum_{\alpha \in \hat{G}} m(\pi, \alpha) m(\rho, \alpha).$$

Reprezentacija π je ireducibilna ako i samo ako je $(\chi_\pi|\chi_\pi) = 1$.

Neka je π neprekidna reprezentacija kompaktne grupe G na konačnodimenzionalnom prostoru V i neka je $e = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ baza prostora V. Za $a \in G$ označimo sa $\pi_{ij}(a)$ elemente matrice operatora $\pi(a)$ u bazi e. Tada su $\pi_{ij} \in C(G)$ i sa $C_\pi(G)$ označimo potprostor od $C(G)$ razapet funkcijama π_{ij}, $1 \leq i, j \leq n$. Taj potprostor ne ovisi o izboru baze e prostora V. Ako su π i ρ ekvivalentne neprekidne konačnodimenzionalne reprezentacije od G, onda je $C_\pi(G) = C_\rho(G)$. Za $\alpha \in \hat{G}$ i $\pi \in \alpha$ pišemo $C_\alpha(G) = C_\pi(G)$.

Sada za svaku klasu $\alpha \in \hat{G}$ izaberimo neku unitarnu reprezentaciju π^α na V^α i neku ortonormiranu bazu $e^\alpha = \{e_1^\alpha, e_2^\alpha, \ldots, e_{d(\alpha)}^\alpha\}$ ($d(\alpha) = \dim V^\alpha$) i neka su $\pi_{ij}^\alpha(a)$ elementi matrice operatora $\pi^\alpha(a)$ u bazi e^α. Analogno kao teorem 2.4.7. dokazuje se

Teorem 3.3.8. *Skup $\{\sqrt{d(\alpha)}\pi_{ij}^\alpha;\ \alpha \in \hat{G},\ 1 \leq i, j \leq d(\alpha)\}$ je ortonormiran u unitarnom prostoru $C(G)$ i $\{\pi_{ij}^\alpha;\ 1 \leq i, j \leq d(\alpha)\}$ je baza potprostora $C_\alpha(G)$. Posebno,*

$$\dim C_\alpha(G) = d(\alpha)^2 \qquad i \qquad C_\alpha(G) \perp C_\beta(G) \quad ako\ je \quad \alpha \neq \beta.$$

U stvari, vrijedi sljedeći teorem:

Teorem 3.3.9. (Peter$-$Weyl) *$\{\sqrt{d(\alpha)}\pi_{ij}^\alpha;\ \alpha \in \hat{G},\ 1 \leq i, j \leq d(\alpha)\}$ je ortonormirana baza Hilbertovog prostora $L_2(G)$.*

Dokaz ovog teorema relativno je jednostavna posljedica Stone$-$Weierstrassovog teorema ukoliko je grupa G matrična, odnosno, ukoliko ima vjernu konačnodimenzionalnu neprekidnu reprezentaciju. Označimo sa $\mathcal{C}(G)$ potprostor od $C(G)$ razapet matričnim elementima neprekidnih konačnodimenzionalnih reprezentacija od G. Naravno, $\mathcal{C}(G)$ je direktna suma potprostora $C_\alpha(G)$, $\alpha \in \hat{G}$. Ako su f i g matrični elementi neprekidnih konačnodimenzionalnih reprezentacija π i ρ od

G, onda je njihov produkt fg matrični element reprezentacije $\pi \otimes \rho$, koja je također konačnodimenzionalna i neprekidna. Stoga je $fg \in \mathcal{C}(G)$ pa slijedi da je $\mathcal{C}(G)$ podalgebra Banachove algebre $C(G)$. Nadalje, kompleksno konjugirane reprezentacije imaju kompleksno konjugirane matrične elementi, pa slijedi da je algebra $\mathcal{C}(G)$ zatvorena u odnosu na kompleksno konjugiranje. Napokon, budući da postoji vjerna konačnodimenzionalna neprekidna reprezentacija od G, za $a, b \in G$, $a \neq b$, postoji $f \in \mathcal{C}(G)$ takva da je $f(a) \neq f(b)$. Drugim riječima, algebra $\mathcal{C}(G)$ razlikuje točke. Sada iz Stone–Weierstrassovog teorema slijedi da je $\mathcal{C}(G)$ gusta u $C(G)$ u odnosu na normu $\| \cdot \|_\infty$. Kako je

$$\|f\|_2 \leq \|f\|_\infty \qquad \forall f \in C(G)$$

slijedi da je $\mathcal{C}(G)$ gusto u $C(G)$ i u odnosu na normu $\| \cdot \|_2$, a kako je $C(G)$ gusto u $L_2(G)$ u odnosu na $\| \cdot \|_2$, slijedi da je $\mathcal{C}(G)$ gust potprostor Hilbertovog prostora $L_2(G)$. Ortonormiran skup $\{\sqrt{d(\alpha)}\pi_{ij}^\alpha;\ \alpha \in \hat{G},\ 1 \leq i, j \leq d(\alpha)\}$ je baza vektorskog prostora $\mathcal{C}(G)$, pa zaključujemo da je to ortonormirana baza od $L_2(G)$.

Dokažimo sada Peter–Weylov teorem i u slučaju kad ne znamo ima li kompaktna grupa G ima vjernu konačnodimenzionalnu neprekidnu reprezentaciju. Ponovo je $\mathcal{C}(G)$ podalgebra Banachove algebre $C(G)$ zatvorena u odnosu na kompleksno konjugiranje, samo sada ne znamo da li $\mathcal{C}(G)$ razlikuje točke od G. Označimo sa Y zatvarač potprostora $\mathcal{C}(G)$ u Hilbertovom prostoru $L_2(G)$. Svaki od potprostora $C_\alpha(G)$ invarijantan je u odnosu na sve operatore $\lambda(a)$ i $\rho(a)$, pa slijedi da je i $\mathcal{C}(G)$, dakle i njegov zatvarač Y invarijantan u odnosu na sve te operatore. Pretpostavimo da je $Y \neq L_2(G)$. Tada je njegov ortogonalni komplement $X = Y^\perp = \mathcal{C}(G)^\perp$ različit od $\{0\}$. Kako je $\lambda(a)^* = \lambda(a^{-1})$ i $\rho(a)^* = \rho(a^{-1})$, zatvoren potprostor X od $L_2(G)$ također je invarijantan s obzirom na sve operatore $\lambda(a)$ i $\rho(a)$, $a \in G$. Prema propoziciji 3.2.4. tada je $X \cap C(G) \neq \{0\}$. Neka je $F_1 \in X \cap C(G)$, $F_1 \neq 0$. Invarijantnost prostora $X \cap C(G)$ u odnosu na lijeve (i desne) pomake pokazuje da možemo pretpostaviti da je $F_1(e) \neq 0$, a množenjem skalarom možemo postići da je $F_1(e) = 1$. Stavimo sada

$$F_2(a) = \int_G F_1(bab^{-1})\mathrm{d}\mu(b).$$

To je neprekidna funkcija na grupi G i vrijedi $F_2(cac^{-1}) = F_2(a)\ \forall a, c \in G$. Nadalje, $F_2(e) = F_1(e) = 1$. Za $f \in \mathcal{C}(G)$ zbog Fubinijevog teorema za neprekidne funkcije (zadatak 3.2.5.) i zbog invarijantnosti integrala u odnosu na pomake imamo

$$(F_2|f) = \int_G F_2(a)\overline{f(a)}\mathrm{d}\mu(a) = \int_G \left[\int_G F_1(bab^{-1})\overline{f(a)}\mathrm{d}\mu(b)\right]\mathrm{d}\mu(a) =$$

$$= \int_G \left[\int_G F_1(bab^{-1})\overline{f(a)}\mathrm{d}\mu(a)\right]\mathrm{d}\mu(b) = \int_G \left[\int_G F_1(a)\overline{f(b^{-1}ab)}\mathrm{d}\mu(a)\right]\mathrm{d}\mu(b).$$

Međutim, imamo $f(b^{-1}ab) = (\lambda(b)\rho(b)f)(a)$ i funkcija $g_b = \lambda(b)\rho(b)f$ je također u $\mathcal{C}(G)$ za svaki $b \in G$. Stoga je $(F_1|g_b) = 0$ za svaki $b \in G$, pa slijedi

$$(F_2|f) = \int_G (F_1|g_b)\mathrm{d}\mu(b) = 0.$$

Budući da je $f \in \mathcal{C}(G)$ bila proizvoljna, slijedi da je $F_2 \in X \cap C(G)$.

Za matrične elemente unitarne reprezentacije vrijedi $\pi_{ij}(a) = \overline{\pi_{ji}(a^{-1})}$, pa zaključujemo da iz $f \in \mathcal{C}(G)$ slijedi $f^* \in \mathcal{C}(G)$. Stoga je i $F_2^* \in X \cap C(G)$, dakle i $F = F_2 + F_2^* \in X \cap C(G)$. Tada vrijedi

$$F(e) = 2 > 0, \quad F(cac^{-1}) = F(a), \quad \text{tj.} \quad F(ca) = F(ac), \quad \text{i} \quad F(a^{-1}) = \overline{F(a)}, \quad a, c \in G.$$

Definiramo operator $T : C(G) \to C(G)$ sa

$$(Tf)(a) = \int_G F(a^{-1}b)f(b)\mathrm{d}\mu(b), \qquad f \in C(G).$$

Tada iz teorije integralnih operatora slijedi da je T kompaktan operator koji se proširuje do kompkatnog operatora $T : L_2(G) \to L_2(G)$. Nadalje, kako je $F(e) \neq 0$, vrijedi $T \neq 0$, a iz $F = F^*$ slijedi da je operator T hermitski. No tada operator T ima neku svojstvenu vrijednost $\tau \in \mathbb{R}$, $\tau \neq 0$ i pripadni svojstveni potprostor

$$V = \{\xi \in L_2(G);\ T\xi = \tau\xi\}$$

je konačnodimenzionalan. Nadalje, pomoću propozicije 3.2.3. pokazuje se da je $TL_2(G) \subseteq C(G)$, dakle, $V \subseteq C(G)$. Za $f \in V$ i $a, b \in G$ imamo

$$(T\lambda(a)f)(b) = \int_G F(b^{-1}c)(\lambda(a)f)(c)\mathrm{d}\mu(c) = \int_G F(b^{-1}c)f(a^{-1}c)\mathrm{d}\mu(c) =$$

$$= \int_G F(b^{-1}ac)f(c)\mathrm{d}\mu(c) = (Tf)(a^{-1}b) = \tau f(a^{-1}b) = \tau(\lambda(a)f)(b).$$

Dakle, $T(\lambda(a)f) = \tau(\lambda(a)f)$, pa zaključujemo da je $\lambda(a)f \in V$. Time je dokazano da je potprostor V invarijantan s obzirom na sve operatore $\lambda(a)$, $a \in G$. No tada V sadrži neki potprostor $W \neq \{0\}$ koji je $\lambda-$invarijantan i takav da je subreprezentacija $\pi = \lambda_W$ ireducibilna. Neka je $\{f_1, \ldots, f_n\}$ ortonormirana baza od W. Matrični elementi operatora $\pi(a) = \lambda_W(a)$ u toj bazi su

$$\pi_{ij}(a) = (\lambda(a)f_j|f_i) = \int_G f_j(a^{-1}b)\overline{f_i(b)}\mathrm{d}\mu(b).$$

Po definiciji imamo $\pi_{ij} \in \mathcal{C}(G)$, dakle $\pi_{ij} \perp X$. Posebno, imamo redom

$$0 = (F|\pi_{ii}) = \int_G F(a)\overline{\pi_{ii}(a)}\mathrm{d}\mu(a) = \int_G \left[\int_G F(a)\overline{f_i(a^{-1}b)}f_i(b)\mathrm{d}\mu(b)\right]\mathrm{d}\mu(a) =$$

$$= \int_G \left[\int_G F(a)\overline{f_i(a^{-1}b)}f_i(b)\mathrm{d}\mu(a)\right]\mathrm{d}\mu(b) = \int_G \left[\int_G F(ba^{-1})\overline{f_i(a)}f_i(b)\mathrm{d}\mu(a)\right]\mathrm{d}\mu(b) =$$

$$= \int_G \left[\int_G F(a^{-1}b)f_i(b)\mathrm{d}\mu(b)\right]\overline{f_i(a)}\mathrm{d}\mu(a) = \int_G (Tf_i)(a)\overline{f_i(a)}\mathrm{d}\mu(a) = \tau\|f_i\|^2,$$

što je u suprotnosti sa $\tau \neq 0$ i $f_i \neq 0$. Ova kontradikcija dokazuje da je $X = \{0\}$, tj. da je $\mathcal{C}(G)$ gusto u Hilbertovom prostoru $L_2(G)$.

Poglavlje 4

Reprezentacije nekih matričnih grupa

4.1 Reprezentacije grupa $SO(2)$ i $O(2)$

U ovom odjeljku proučit ćemo konačnodimenzionalne reprezentacije grupe $O(2)$ svih realnih ortogonalnih matrica drugog reda

$$O(2) = \{A \in M_2(\mathbb{R});\ AA^t = A^tA = I\}$$

i njene podgrupe

$$SO(2) = \{A \in O(2);\ \det A = 1\}.$$

Promatrano geometrijski, grupa $SO(2)$ predstavlja grupu svih rotacija ravnine oko neke fiksne točke (ishodište) a $O(2)$ je grupa svih rotacija ravnine oko ishodišta i svih refleksija s obzirom na pravce kroz ishodište. Lako se vidi da je

$$SO(2) = \{u(\varphi);\ \varphi \in \mathbb{R}\}, \qquad \text{gdje je} \quad u(\varphi) = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix},$$

$$O(2) = SO(2) \cup \{v(\varphi);\ \varphi \in \mathbb{R}\}, \qquad \text{gdje je} \quad v(\varphi) = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{bmatrix}.$$

Matrica $u(\varphi)$ predstavlja rotaciju ravnine oko ishodišta za kut φ, a $v(\varphi)$ refleksiju s obzirom na pravac kroz ishodište koji zatvara s pozitivnim dijelom abscise kut $\varphi/2$. Imamo

$$u(\varphi)u(\psi) = u(\varphi + \psi)$$

dakle, grupa $SO(2)$ je komutativna. U stvari, preslikavanje $\varphi \mapsto u(\varphi)$ je epimorfizam aditivne grupe $\mathbb{R}$ s jezgrom $2\pi\mathbb{Z}$, dakle, grupa $SO(2)$ je izomorfna kvocijentnoj grupi $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. Nadalje, lako se izračuna da je

$$u(\varphi)v(\psi) = v(\varphi - \psi), \qquad v(\psi)u(\varphi) = v(\psi - \varphi), \qquad v(\varphi)v(\psi) = u(\varphi - \psi).$$

Odatle se vidi da grupa $O(2)$ nije komutativna, da je $SO(2)$ normalna podgrupa od $O(2)$ i da je kvocijentna grupa $O(2)/SO(2)$ izomorfna dvočlanoj multiplikativnoj grupi $\{1, -1\}$. Ako sa T označimo refleksiju u odnosu na abscisu, tj.

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

onda se lako provjerava da je

$$v(\varphi) = u(\varphi)T = Tu(-\varphi), \qquad \varphi \in \mathbb{R},$$

dakle, I i T su predstavnici dvije $SO(2)-$klase u grupi $O(2)$.

Dakle, $e^{i\varphi} \mapsto u(\varphi)$ je bijekcija jedinične kružnice $S = \{\lambda \in \mathbb{C};\ |\lambda| = 1\}$ u kompleksnoj ravnini na grupu $SO(2)$ i pomoću te bijekcije uvodimo topologiju na grupu $SO(2)$. Na taj način $SO(2)$ postaje kompaktna grupa. Nadalje, i grupa $O(2)$ je kompaktna preko bijekcije sa $S \times \{I, T\}$ na $O(2)$. Prostor $C(SO(2))$ može se identificirati s prostorom $C(S)$ svih neprekidnih funkcija $f : S \to \mathbb{C}$, odnosno s prostorom svih neprekidnih funkcija $F : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ koje su periodičke s periodom 2π. Nadalje, prostor $C(O(2))$ se može identificirati s prostorom svih uređenih parova (f_1, f_2) (odnosno, (F_1, F_2)) takvih funkcija.

Zadatak 4.1.1. *Dokažite da su uz te identifikacije invarijantni integrali na grupama $SO(2)$ i $O(2)$ dani sa*

$$I(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi)d\varphi, \qquad f \in C(S);$$

$$I(f) = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} F_1(\varphi)d\varphi + \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} F_2(\varphi)d\varphi, \qquad f = (F_1, F_2) \in C(S) \times C(S).$$

Proučit ćemo sada neprekidne konačnodimenzionalne reprezentacije grupe $SO(2)$, tj. preslikavanja $\pi : SO(2) \to L(V)$ takva da je

$$\pi(u(\varphi))\pi(u(\psi)) = \pi(u(\varphi)u(\psi)) = \pi(u(\varphi + \psi)), \qquad \varphi, \psi \in \mathbb{R},$$

i takva da je $\varphi \mapsto \pi(u(\varphi))$ neprekidno sa $\mathbb{R}$ u $L(V)$. Tada je $\varphi \mapsto \pi(u(\varphi))$ neprekidna konačnodimenzionalna reprezentacija aditivne grupe $\mathbb{R}$, pa prema zadatku 1.2.3. vrijedi:

(*a*) Preslikavanje $\varphi \mapsto \pi(u(\varphi))$ sa $\mathbb{R}$ u $L(V)$ je diferencijabilno.

(*b*) Ako stavimo

$$A = \frac{d}{d\varphi}\pi(u(\varphi))\bigg|_{\varphi=0}$$

onda je

$$\pi(u(\varphi)) = e^{\varphi A} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varphi^k}{k!}A^k$$

pri čemu red konvergira u odnosu na bilo koju normu prostora $L(V)$ i to uniformno na svakom ograničenom podskupu od $\mathbb{R}$.

Pretpostavimo sada da je V konačnodimenzionalan vektorski prostor i da je $A \in L(V)$. Tada je sa

$$\pi(\varphi) = \mathrm{e}^{\varphi A}, \qquad \varphi \in \mathbb{R},$$

zadana neprekidna reprezentacija aditivne grupe $\mathbb{R}$ na prostoru V. Da bi π predstavljala reprezentaciju grupe $SO(2)$ na vektorskom prostoru V nužno je i dovoljno da linearni operator A bude takav da je $u(\varphi + 2\pi) = u(\varphi)\ \forall \varphi \in \mathbb{R}$, tj. da je $e^{2\pi A} = I$.

Svaka je neprekidna konačnodimenzionalna reprezentacija grupe $SO(2)$ direktna suma ireducibilnih subreprezentacija. Nadalje, kako je grupa $SO(2)$ komutativna, prema Schurovoj lemi svaka je njena konačnodimenzionalna ireducibilna reprezentacija π jednodimenzionalna. Dakle, postoji $\lambda \in \mathbb{C}$ takav da je

$$\pi(u(\varphi)) = e^{\lambda\varphi}, \qquad \varphi \in \mathbb{R}.$$

Periodičnost povlači da mora biti $e^{2\pi\lambda} = 1$ a to je ispunjeno ako i samo ako je $\lambda = in$ za neki $n \in \mathbb{Z}$. Obratno, ako je $n \in \mathbb{Z}$ onda je sa

$$\pi_n(u(\varphi)) = e^{in\varphi}, \qquad \varphi \in \mathbb{R},$$

zadana jednodimenzionalna (dakle, ireducibilna) neprekidna reprezentacija grupe $SO(2)$. Prema tome, ako identificiramo reprezentaciju π_n s njenom klasom ekvivalencije, imamo

Teorem 4.1.1. *Za $G = SO(2)$ je $\hat{G} = \{\pi_n;\ n \in \mathbb{Z}\}$.*

Naravno, za jednodimenzionalnu reprezentaciju karakter je jednak samoj reprezentaciji i teorem 3.3.4. u ovom slučaju daje dobro poznate relacije ortogonalnosti za funkcije $e^{in\varphi}$:

$$(\pi_n|\pi_m) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{in\varphi}e^{-im\varphi}\mathrm{d}\varphi = \delta_{nm}.$$

Nadalje, u ovom je slučaju Peter$-$Weylov teorem upravo osnovni teorem teorije Fourierovih redova: funkcije π_n tvore ortonormiranu bazu Hilbertovog prostora $L_2(S)$ sa skalarnim produktom

$$(f|g) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi)\overline{g(\varphi)}\mathrm{d}\varphi, \qquad f,g \in L_2(S).$$

Odredimo sada neprekidne konačnodimenzionalne ireducibilne reprezentacije grupe $O(2)$. Ako je π takva reprezentacija na prostoru V tada je njena restrikcija $\pi|SO(2)$ potpuno reducibilna. Neka je W neki $\pi|SO(2)-$invarijantni jednodimenzionalni potprostor od V i neka je $n \in \mathbb{Z}$ takav da je $(\pi|SO(2))_W \simeq \pi_n$:

$$\pi(u(\varphi))w = e^{in\varphi}w, \qquad w \in W, \quad \varphi \in \mathbb{R}.$$

Za $w \in W$ i $\varphi \in \mathbb{R}$ imamo $u(\varphi)T = Tu(-\varphi)$, dakle,

$$\pi(u(\varphi))\pi(T)w = \pi(T)\pi(u(-\varphi))w = e^{-in\varphi}\pi(T)w.$$

Prema tome, potprostor $\pi(T)W$ je također $\pi|SO(2)-$invarijantan i $(\pi|SO(2))_{\pi(T)W} \simeq \pi_{-n}$. Ako je $n \neq 0$, tada su π_n i π_{-n} neekvivalentne ireducibilne reprezentacije grupe $SO(2)$, pa je tada suma potprostora W i $\pi(T)W$ direktna. Ta je suma očito $\pi-$invarijantna, dakle

$$V = W \dot{+} \pi(T)W.$$

Pretpostavimo sada da je $n = 0$. Tada je također suma $W + \pi(T)W$ $\pi-$invarijantna, dakle jednaka V. Međutim, tada je $\pi(a) = I_V$ za svaki $a \in SO(2)$, tj. podgrupa $SO(2)$ je sadržana u jezgri reprezentacije π. Prijelazom na kvocijent $O(2)/SO(2) \simeq \{e,T\}$ dobivamo ireducibilnu reprezentaciju komutativne dvočlane grupe $\{e,T\}$. Slijedi da je tada $\dim V = 1$ i vrijedi ili $\pi(T) = 1$ ili $\pi(T) = -1$.

Teorem 4.1.2. *Za $G = O(2)$ je*

$$\hat{G} = \{\rho_0, \rho_0^-\} \cup \{\rho_n;\ n \in \mathbb{N}\}.$$

Pri tome je ρ_0 trivijalna jednodimenzionalna reprezentacija

$$\rho_0(a) = 1 \qquad \forall a \in G,$$

ρ_0^- je jednodimenzionalna reprezentacija zadana sa

$$\rho_0^-(a) = 1 \quad i \quad \rho_0^-(Ta) = -1 \qquad za\ a \in SO(2),$$

a za $n \in \mathbb{N}$ je ρ_n reprezentacija od G na dvodimenzionalnom prostoru V s bazom $\{e_1, e_2\}$ u kojoj operatori reprezentacije imaju matrice

$$\rho_n(u(\varphi)) = \begin{bmatrix} e^{in\varphi} & 0 \\ 0 & e^{-in\varphi} \end{bmatrix}, \qquad \rho_n(T) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Tvrdnje ovoga teorema sve su dokazane su činjenice da su gornjim formulama stvarno definirane neprekidne ireducibilne reprezentacije grupe $O(2)$.

Zadatak 4.1.2. *Dokažite da su gornjim formulama definirane neprekidne ireducibilne reprezentacije ρ_0^-, ρ_n, $n \in \mathbb{N}$, grupe $O(2)$.*

4.2 Reprezentacije grupa $SO(3)$ i $SU(2)$

Za svaki prirodan broj n definiramo grupe

$$O(n) = \{A \in M_n(\mathbb{R});\ AA^t = A^tA = I_n\}, \qquad SO(n) = \{A \in O(n);\ \det A = 1\},$$

$$U(n) = \{A \in M_n(\mathbb{C});\ AA^* = A^*A = I_n\}, \qquad SU(n) = \{A \in U(n);\ \det A = 1\}.$$

U odnosu na bilo koju normu na prostoru kvadratnih matrica to su očito zatvoreni podskupovi od $M_n(\mathbb{R})$, odnosno od $M_n(\mathbb{C})$. Nadalje, ti su podskupovi ograničeni, dakle, to su kompaktni topološki prostori. Matrični elementi umnoška AB su polinomi matričnih elemenata matrica A i B. Označimo li sa G bilo koju od definiranih grupa, zaključujemo da je preslikavanje množenja $(A, B) \mapsto AB$ neprekidno sa $G \times G$ u G. Nadalje, za $A \in G$ je $A^{-1} = A^*$, pa vidimo da je preslikavanje invertiranja $A \mapsto A^{-1}$ neprekidno sa G u G. Na taj način smo ustanovili da je svaka od gore definiranih grupa kompaktna topološka grupa.

Zadatak 4.2.1. *Matricu $A \in SO(3)$ identificiramo s linearnim operatorom $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ koji u standardnoj bazi $e = \{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\}$, $\vec{e_1} = (1, 0, 0), \vec{e_2} = (0, 1, 0), \vec{e_3} = (0, 0, 1)$, ima matricu A. Uz standardnu geometrijsku interpretaciju prostora $\mathbb{R}^3$ s trodimenzionalnim Euklidovim prostorom dokažite da je $SO(3)$ skup svih rotacija oko osi kroz ishodište.*

Uputa: Iz $\det A = 1$ dokažite da je 1 svojstvena vrijednost od A.

Cilj nam je sada doći do neke parametrizacije grupe $G = SO(3)$. Neka je $A \in G$. Tada je sa

$$\vec{e_j}' = A\,\vec{e_j}, \qquad j = 1, 2, 3,$$

definirana desna ortonormirana baza $e' = \{\vec{e_1}', \vec{e_2}', \vec{e_3}'\}$ od $\mathbb{R}^3$. Neka su koordinate vektora $\vec{x}$ u bazi e označene sa (ξ, η, ζ) a u bazi e' sa (ξ', η', ζ'). Pretpostavimo najprije da se ravnine $\xi\eta$ i $\xi'\eta'$ ne podudaraju i neka je p pravac kroz ishodište koji je presjek tih ravnina (taj se pravac zove *čvorna linija* rotacije A). Neka je $\vartheta \in \langle 0, \pi\rangle$ kut između vektora $\vec{e_3}$ i $\vec{e_3}'$. Orijentaciju čvorne linije p izaberemo tako da rotacija oko pravca p za kut ϑ u smjeru suprotnom od smjera kazaljke na satu ako gledamo s pozitivne strane pravca p prevodi os ζ u os ζ'. Neka je $\vec{f_1}$ pozitivno orijentirani jedinični vektor pravca p. Neka je $\varphi_1 \in [0, 2\pi\rangle$ kut između vektora $\vec{e_1}$ i vektora $\vec{f_1}$ i neka je $\varphi_2 \in [0, 2\pi\rangle$ kut između vektora $\vec{f_1}$ i vektora $\vec{e_1}'$. Označimo sa $A(\varphi_1)$ rotaciju oko $\vec{e_3}$ za kut φ_1. Ta rotacija prevodi vektor $\vec{e_1}$ u vektor $\vec{f_1}$, vektor $\vec{e_2}$ u vektor $\vec{f_2}$ koji leži u $\xi\eta-$ravnini (tj. u ravnini određenoj vektorima $\vec{e_1}$ i $\vec{e_2}$), i vektor $\vec{e_3}$ u vektor $\vec{f_3} = \vec{e_3}$. Tada je $f = (\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ pozitivno orijentirana (tj. desna) ortonormirana baza od $\mathbb{R}^3$. Sada označimo sa $B(\vartheta)$ rotaciju oko $\vec{f_1}$ za kut ϑ. Ta rotacija prevodi bazu f u desnu ortonormiranu bazu $g = (\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$, gdje je $\vec{g_1} = \vec{f_1}$, $\vec{g_2}$ je vektor koji leži u $\xi'\eta'-$ravnini (tj. ravnini određenoj vektorima $\vec{e_1}'$ i $\vec{e_2}'$) i $\vec{g_3} = \vec{e_3}'$. Napokon, sa $C(\varphi_2)$ označimo rotaciju oko $\vec{g_3} = \vec{e_3}'$ za kut φ_2. Ta rotacija prevodi bazu g u desnu ortonormiranu bazu $h = (\vec{h_1}, \vec{h_2}, \vec{h_3})$. Kako je $\vec{h_1} = C(\varphi_2)\,\vec{g_1} = \vec{e_1}'$ i $\vec{h_3} = C(\varphi_2)\,\vec{e_3}' = \vec{e_e}'$ to je i $\vec{h_2} = \vec{e_2}'$. Dakle, $h = e'$, tj. $C(\varphi_2)$ prevodi bazu g u bazu e'. To znači da je

$$A\,\vec{e_j} = \vec{e_j}' = C(\varphi_2)B(\vartheta)A(\varphi_1)\,\vec{e_j} \qquad j = 1, 2, 3,$$

pa slijedi

$$A = C(\varphi_2)B(\vartheta)A(\varphi_1). \tag{4.1}$$

Ta je jednakost izvedena uz pretpostavku da se $\xi'\eta'-$ravnina ne podudara sa $\xi\eta-$ravninom, tj. da potprostor razapet vektorima $\vec{e_1}$ i $\vec{e_2}$ nije inverijantan s obzirom na rotaciju A. Međutim, ista formula vrijedi i ako je taj potprostor invarijantan s obzirom na A. U tom slučaju je ili $\vec{e_3}' = A\vec{e_3} = \vec{e_3}$ ili $\vec{e_3}' = A\vec{e_3} = -\vec{e_3}$. U prvom slučaju je A rotacija oko $\vec{e_3}$ pa možemo uzeti $\vartheta = 0$ i $\varphi_2 = 0$, a sa φ_1 označimo kut rotacije A oko $\vec{e_3}$. U drugom slučaju označimo sa $B(\pi)$ rotaciju oko $\vec{e_1}$ za kut π. Tada je $B(\pi)\vec{e_3} = -\vec{e_3}$, dakle, $B(\pi)A\vec{e_3} = \vec{e_3}$. To znači da je $B(\pi)A$ rotacija oko $\vec{e_3}$ za neki kut φ_1, tj. $B(\pi)A = A(\varphi_1)$, a kako je $B(\pi)^{-1} = B(\pi)$, opet imamo

$$A = C(\varphi_2)B(\vartheta)A(\varphi_1) \qquad \text{za} \quad \varphi_2 = 0 \quad \text{i} \quad \vartheta = \pi.$$

Na taj način dokazali smo da svaka rotacija $A \in SO(3)$ ima oblik (4.1) uz $\varphi_1, \varphi_2 \in [0, 2\pi\rangle$ i $\vartheta \in [0, \pi]$. Pri tome je ϑ jedinstveno određen s rotacijom A, a ako je $\vartheta \in \langle 0, \pi\rangle$ onda su i φ_1 i φ_2 jedinstveno određeni. Ako je $\vartheta = 0$ onda φ_1 i φ_2 nisu jedinstveno određeni ali je $\varphi_1 + \varphi_2$ jedinstveno određen. Napokon, ako je $\vartheta = \pi$ onda također φ_1 i φ_2 nisu jedinstveno određeni, ali je njihova razlika $\varphi_1 - \varphi_2$ jedinstveno određena.

Za linearan operator T i za bilo koju bazu $h = \left(\vec{h_1}, \vec{h_2}, \vec{h_3}\right)$ označimo sa $T[h]$ matricu operatora T u bazi h. Matrični elementi τ_{ij} te matrice dani su sa

$$T\vec{h_j} = \sum_{i=1}^{3} \tau_{ij}\vec{h_i}, \qquad j = 1, 2, 3.$$

Nadalje, ako je $h' = \left(\vec{h_1}', \vec{h_2}', \vec{h_3}'\right)$ druga baza onda sa $T[h', h]$ označimo matricu operatora T u paru baza (h, h'); matrični elementi σ_{ij} te matrice dani su sa

$$T\vec{h_j} = \sum_{i=1}^{3} \sigma_{ij}\vec{h_i}', \qquad j = 1, 2, 3.$$

Naravno, $T[h] = T[h, h]$. Nadalje, ako su (h, h') i (k, k') dva para baza i ako su U i V operatori prijelaza iz baze h u bazu k, odnosno, iz baze h' u bazu k', tj.

$$U\vec{h_j} = \vec{k_j}, \qquad V\vec{h_j}' = \vec{k_j}', \qquad j = 1, 2, 3,$$

onda je

$$T[k', k] = V[h']^{-1}T[h', h]U[h].$$

Prikažimo sada matricu $A[e]$ pomoću parametara $\varphi_1, \varphi_2, \vartheta$. Naravno, vrijedi

$$A[e] = C(\varphi_2)[e]B(\vartheta)[e]A(\varphi_1)[e].$$

Nadalje, iz definicije rotacija $A(\varphi_1), B(\vartheta)$ i $C(\varphi_2)$ imamo

$$A(\varphi_1)[e] = \begin{bmatrix} \cos\varphi_1 & -\sin\varphi_1 & 0 \\ \sin\varphi_1 & \cos\varphi_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B(\vartheta)[f] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ 0 & \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{bmatrix}$$

$$\text{i} \qquad C(\varphi_2)[g] = \begin{bmatrix} \cos\varphi_2 & -\sin\varphi_2 & 0 \\ \sin\varphi_2 & \cos\varphi_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Operator prijelaza iz baze e u bazu f je $A(\varphi_1)$, a operator prijelaza iz baze f u bazu g je $B(\vartheta)$. Stoga je

$$B(\vartheta)[f] = A(\varphi_1)[e]^{-1}B(\vartheta)[e]A(\varphi_1)[e] \qquad \Longrightarrow \qquad B(\vartheta)[e] = A(\varphi_1)[e]B(\vartheta)[f]A(\varphi_1)[e]^{-1}.$$

Slično, za rotaciju $C(\varphi_2)$ imamo

$$C(\varphi_2)[g] = B(\vartheta)[f]^{-1}C(\varphi_2)[f]B(\vartheta)[f] \qquad \Longrightarrow \qquad C(\varphi_2)[f] = B(\vartheta)[f]C(\varphi_2)[g]B(\vartheta)[f]^{-1}$$

i

$$C(\varphi_2)[f] = A(\varphi_1)[e]^{-1}C(\varphi_2)[e]A(\varphi_1)[e] \qquad \Longrightarrow \qquad C(\varphi_2)[e] = A(\varphi_1)[e]C(\varphi_2)[f]A(\varphi_1)[e]^{-1}$$

pa slijedi

$$C(\varphi_2)[e] = A(\varphi_1)[e]B(\vartheta)[f]C(\varphi_2)[g]B(\vartheta)[f]^{-1}A(\varphi_1)[e]^{-1}.$$

Iz tih formula nalazimo

$$A = A(\varphi_1)[e]B(\vartheta)[f]C(\varphi_2)[g]B(\vartheta)[f]^{-1}A(\varphi_1)[e]^{-1}A(\varphi_1)[e]B(\vartheta)[f]A(\varphi_1)[e]^{-1}A(\varphi_1)[e],$$

a odatle je

$$A = A(\varphi_1)[e]B(\vartheta)[f]C(\varphi_2)[g].$$

Množenjem jednostavnih matrica $A(\varphi_1)[e], B(\vartheta)[f]$ i $C(\varphi_2)[g]$ nalazimo eksplicitni prikaz proizvoljne rotacije $A \in SO(3)$ pomoću parametara φ_1, φ_2 i ϑ :

$$A[e] = \begin{bmatrix} \cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \cos\vartheta\sin\varphi_1\sin\varphi_2 & -\cos\varphi_1\sin\varphi_2 - \cos\vartheta\sin\varphi_1\cos\varphi_2 & \sin\vartheta\sin\varphi_1 \\ \sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \cos\vartheta\cos\varphi_1\sin\varphi_2 & -\sin\varphi_1\sin\varphi_2 + \cos\vartheta\cos\varphi_1\cos\varphi_2 & -\sin\vartheta\cos\varphi_1 \\ \sin\vartheta\sin\varphi_2 & \sin\vartheta\cos\varphi_2 & \cos\vartheta \end{bmatrix}.$$

Ovako definirani parametri φ_1, φ_2 i ϑ zovu se **Eulerovi kutovi rotacije** $A \in SO(3)$. Oni potpuno određuju rotaciju A. U daljnjem identificiramo rotaciju A s matricom $A[e]$ i ako su $\varphi_1, \varphi_2, \vartheta$ njeni Eulerovi kutovi, pišemo $A = A(\varphi_1, \varphi_2, \vartheta)$. Matrični elementi rotacije su trigonometrijske, dakle, analitičke, funkcije njenih Eulerovih parametara.

Zadatak 4.2.2. *Koristeći* $A^{-1} = A^t$ *za* $A \in SO(3)$ *dokažite da je*

$$A(\varphi_1, \varphi_2, \vartheta)^{-1} = A(\pi - \varphi_2, \pi - \varphi_1, \vartheta).$$

Na taj način grupa $SO(3)$ parametrizirana je s tri realna parametra $\varphi_1, \varphi_2 \in [0, 2\pi]$ i $\vartheta \in [0, \pi]$, dakle, elementi grupe $SO(3)$ dovedeni su u vezu s kvadrom $[0, 2\pi] \times [0, 2\pi] \times [0, \pi]$ u $\mathbb{R}^3$; pri tome je $\varphi_1 = 0$ ekvivalentno sa $\varphi_1 = 2\pi$ i $\varphi_2 = 0$ je ekvivalentno sa $\varphi_2 = 2\pi$. Stoga je govoriti o funkciji na grupi $SO(3)$ isto kao govoriti o funkciji Eulerovih kuteva:

$$f(A) = f(A(\varphi_1, \varphi_2, \vartheta)) = f(\varphi_1, \varphi_2, \vartheta), \qquad \varphi_1, \varphi_2 \in \mathbb{R}, \quad \vartheta \in [0, \pi],$$

s tim da je

$$f(\varphi_1 + 2\pi, \varphi_2, \vartheta) = f(\varphi_1, \varphi_2 + 2\pi, \vartheta) = f(\varphi_1, \varphi_2, \vartheta).$$

Neprekidna funkcija na grupi $SO(3)$ je neprekidna funkcija Eulerovih kutova. U tom smislu možemo govoriti i o diferencijabilnim i analitičkim funkcijama na grupi $SO(3)$ misleći pri tome na diferencijabilne i analitičke funkcije Eulerovih kutova.

Neka je $C(SO(3))$ vektorski prostor svih kompleksnih neprekidnih funkcija na grupi $SO(3)$. Za $f \in C(SO(3))$ definiramo $I(f) \in \mathbb{C}$ sa

$$I(f) = \frac{1}{8\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} f(\varphi_1, \varphi_2, \vartheta) \sin\vartheta \, \mathrm{d}\vartheta \, \mathrm{d}\varphi_1 \, \mathrm{d}\varphi_2 =$$

$$= \frac{1}{8\pi^2} \int_0^{2\pi} \left[\int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\pi} f(\varphi_1, \varphi_2, \vartheta) \sin\vartheta \, \mathrm{d}\vartheta \right) \mathrm{d}\varphi_1 \right] \mathrm{d}\varphi_2.$$

Teorem 4.2.1. *Ovako definirano preslikavanje $I : C(SO(3)) \to \mathbb{C}$ je invarijantni integral na grupi $SO(3)$.*

Zadatak 4.2.3. *Dokažite teorem 4.2.1.*

Uputa: Dovoljno je dokazati npr. lijevu invarijantnost. Budući da je svaka matrica iz $SO(3)$ produkt matrica oblika

$$A = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{i} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\beta & -\sin\beta \\ 0 & \sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix}$$

Dovoljno je dokazati lijevu invarijantnost u odnosu na mnozenje takvim matricama. Za matricu A radi se samo o pomaku varijable φ_1 za α, a u slučaju matrice B treba računati Jacobijan transformacije varijabli integracije $\varphi_1, \varphi_2, \vartheta$.

Uspostavit ćemo sada vezu između grupa $SU(2)$ i $SO(3)$.

Zadatak 4.2.4. *Dokažite da je*

$$SU(2) = \left\{ A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\overline{\beta} & \overline{\alpha} \end{bmatrix};\ \alpha, \beta \in \mathbb{C},\ |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \right\}$$

i, posebno, da je $SU(2)$ kao topološki prostor homeomorfna s jediničnom sferom

$$S^3 = \{(x_0, x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^4;\ x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$$

u četverodimenzionalnom euklidskom prostoru R^4.

Uputa: Iskoristite jednakosti $AA^* = I_2$ i $\det A = 1$ da dokažete da za matricu

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{C})$$

vrijedi $A \in SU(2)$ ako i samo ako je

$$\alpha\overline{\gamma} + \beta\overline{\delta} = 0, \qquad |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1, \qquad |\gamma|^2 + |\delta|^2 = 1, \qquad \alpha\delta - \beta\gamma = 1,$$

te da su te jednakosti ekvivalentne sa

$$\gamma = -\overline{\beta}, \qquad \delta = \overline{\alpha}, \qquad |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1.$$

Neka je H_2 realan vektorski prostor svih hermitskih matrica u $M_2(\mathbb{C})$ s tragom 0. Neka je $\Phi : R^3 \to M_2(\mathbb{C})$ definirano sa

$$\Phi(x, y, z) = \begin{bmatrix} -z & x + iy \\ x - iy & z \end{bmatrix}, \qquad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

Očito je tada Φ izomorfizam realnih vektorskih prostora sa $\mathbb{R}^3$ na H_2. Nadalje vrijedi

$$-\det \Phi(x,y,z) = x^2+y^2+z^2, \qquad (x,y,z)\in\mathbb{R}^3. \tag{4.2}$$

Za $A \in SU(2)$ i $H \in H_2$ je $(AHA^*)^* = AHA^*$ i $\operatorname{Tr} AHA^* = \operatorname{Tr} A^*AH = \operatorname{Tr} H = 0$, dakle, $AHA^* \in H_2$. Očito je $H \mapsto AHA^*$ linearan operator na realnom vektorskom prostoru H_2. Pomoću izomorfizma $\Phi : \mathbb{R}^3 \to H_2$ dolazimo do linearnog operatora na prostoru $\mathbb{R}^3$ koji ćemo označiti sa $\sigma(A)$. Dakle, ako $\mathbb{R}^3$ identificiramo sa prostorom jednostupčanih matrica $M_{31}(\mathbb{R})$, a time prostor linearnih operatora $L(\mathbb{R}^3)$ sa prostorom matrica $M_3(\mathbb{R})$, onda imamo:

$$A\begin{bmatrix} -z & x+iy \\ x-iy & z\end{bmatrix}A^* = \begin{bmatrix} -z' & x'+iy' \\ x'-iy' & z'\end{bmatrix} \qquad \Longrightarrow \qquad \sigma(A)\begin{bmatrix} x\\ y\\ z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x'\\ y'\\ z'\end{bmatrix}.$$

Propozicija 4.2.2. *$A \mapsto \sigma(A)$ je epimorfizam grupe $SU(2)$ na grupu $SO(3)$ s jezgrom*

$$\operatorname{Ker}\sigma = \{I_2, -I_2\}, \qquad I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}.$$

Dokaz: Prije svega, ako je $A \in SU(2)$, onda je $\det AHA^* = |\det A|^2(\det H) = \det H$, pa iz (4.2) slijedi da je $\sigma(A)$ ortogonalan operator, tj. uz gornju identifikaciju je $\sigma(A) \in O(3)$. Preslikavanje $A \mapsto \sigma(A)$ je neprekidno, pa je i preslikavanje $A \mapsto \det\sigma(A)$ neprekidno. No kako je $\sigma(A) \in O(3)$ to je $\det\sigma(A) \in \{1,-1\}$. Dakle, $A \mapsto \det\sigma(A)$ je neprekidno preslikavanje sa $SU(2)$ u $\{1,-1\}$, pa slijedi da je to konstantno preslikavanje. Kako je $\sigma(I_2) = I_3$ i $\det I_3 = 1$ zaključujemo da je $\det\sigma(A) = 1$ $\forall A \in SU(2)$. Dakle, σ je preslikavanje sa $SU(2)$ u $SO(3)$. Za $A, B \in SU(2)$ i za $H \in H_2$ imamo $A(BHB^*)A^* = (AB)H(AB)^*$, a odatle slijedi da je $\sigma(AB) = \sigma(A)\sigma(B)$. Dakle, $\sigma : SU(2) \to SO(3)$ je homomorfizam grupa.

Neka je $A \in SU(2)$ i $H \in H_2$. Tada je

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta\\ -\overline{\beta} & \overline{\alpha}\end{bmatrix}, \qquad \alpha,\beta\in\mathbb{C}, \quad |\alpha|^2+|\beta|^2 = 1.$$

Nadalje, neka su $(x,y,z) = \Phi^{-1}(H) \in \mathbb{R}^3$ i $(x',y',z') = \Phi^{-1}(AHA^*) \in \mathbb{R}^3$. Imamo

$$A^* = \begin{bmatrix} \overline{\alpha} & -\beta\\ \overline{\beta} & \alpha\end{bmatrix},$$

dakle

$$\begin{bmatrix} -z' & x'+iy' \\ x'-iy' & z'\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta\\ -\overline{\beta} & \overline{\alpha}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} -z & x+iy \\ x-iy & z\end{bmatrix}\begin{bmatrix} \overline{\alpha} & -\beta\\ \overline{\beta} & \alpha\end{bmatrix}.$$

Odatle direktnim računom slijedi

$$\begin{bmatrix} x'\\ y'\\ z'\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(\alpha^2+\overline{\alpha}^2-\beta^2-\overline{\beta}^2) & \frac{i}{2}(\alpha^2-\overline{\alpha}^2+\beta^2-\overline{\beta}^2) & \overline{\alpha}\overline{\beta}+\alpha\beta\\ \frac{i}{2}(\overline{\alpha}^2-\alpha^2+\beta^2-\overline{\beta}^2 & \frac{1}{2}(\alpha^2+\overline{\alpha}^2+\beta^2+\overline{\beta}^2) & i(\overline{\alpha}\overline{\beta}-\alpha\beta)\\ -\overline{\alpha}\beta-\alpha\overline{\beta} & i(\overline{\alpha}\beta-\alpha\overline{\beta}) & |\alpha|^2-|\beta|^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix} x\\ y\\ z\end{bmatrix},$$

a to znači da je

$$\sigma\left(\begin{bmatrix} \alpha & \beta\\ -\overline{\beta} & \overline{\alpha}\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(\alpha^2+\overline{\alpha}^2-\beta^2-\overline{\beta}^2) & \frac{i}{2}(\alpha^2-\overline{\alpha}^2+\beta^2-\overline{\beta}^2) & \overline{\alpha}\overline{\beta}+\alpha\beta\\ \frac{i}{2}(\overline{\alpha}^2-\alpha^2+\beta^2-\overline{\beta}^2 & \frac{1}{2}(\alpha^2+\overline{\alpha}^2+\beta^2+\overline{\beta}^2) & i(\overline{\alpha}\overline{\beta}-\alpha\beta)\\ -\overline{\alpha}\beta-\alpha\overline{\beta} & i(\overline{\alpha}\beta-\alpha\overline{\beta}) & |\alpha|^2-|\beta|^2\end{bmatrix}. \tag{4.3}$$

Odatle, ponovo direktnim računom nalazimo

$$\sigma\left(\begin{bmatrix} e^{i\frac{\varphi}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\varphi}{2}} \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

i

$$\sigma\left(\begin{bmatrix} \cos\frac{\vartheta}{2} & -i\sin\frac{\vartheta}{2} \\ -i\sin\frac{\vartheta}{2} & \cos\frac{\vartheta}{2} \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ 0 & \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{bmatrix}.$$

Kako je svaki element grupe $SO(3)$ produkt triju matrica takvog tipa, zaključujemo da je σ epimorfizam.

Treba još samo izračunati jezgru tog epimorfizma:

Zadatak 4.2.5. *Pomoću eksplicitne formule* (4.3) *dokažite da je jezgra od σ jednaka $\{I_2, -I_2\}$.*

Eksplicitne formule iz dokaza propozicije 4.2.2. omogućuju nam da i grupu $SU(2)$ parametriziramo pomoću Eulerovih parametara. Uz prijašnje oznake imali smo u grupi $SO(3)$

$$A(\varphi_1,\varphi_2,\vartheta) = \begin{bmatrix} \cos\varphi_1 & -\sin\varphi_1 & 0 \\ \sin\varphi_1 & \cos\varphi_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ 0 & \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\varphi_2 & -\sin\varphi_2 & 0 \\ \sin\varphi_2 & \cos\varphi_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Prema dokazu propozicije 4.2.2. imamo $A(\varphi_1,\varphi_2,\theta) = \sigma(B(\varphi_1,\varphi_2,\vartheta))$, gdje je

$$B(\varphi_1,\varphi_2,\vartheta) = \begin{bmatrix} e^{i\frac{\varphi_1}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\varphi_1}{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\frac{\vartheta}{2} & -i\sin\frac{\vartheta}{2} \\ -i\sin\frac{\vartheta}{2} & \cos\frac{\vartheta}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{i\frac{\varphi_2}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\varphi_2}{2}} \end{bmatrix}$$

Zadatak 4.2.6. *Dokažite da je*

$$B(\varphi_1,\varphi_2,\vartheta) = \begin{bmatrix} e^{i\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}}\cos\frac{\vartheta}{2} & -ie^{i\frac{\varphi_1-\varphi_2}{2}}\sin\frac{\vartheta}{2} \\ -ie^{-i\frac{\varphi_1-\varphi_2}{2}}\sin\frac{\vartheta}{2} & e^{-i\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}}\cos\frac{\vartheta}{2} \end{bmatrix}$$

i da vrijedi

$$B(\varphi_1+4\pi,\varphi_2,\vartheta) = B(\varphi_1,\varphi_2+4\pi,\vartheta) = B(\varphi_1+2\pi,\varphi_2+2\pi,\vartheta) = B(\varphi_1,\varphi_2,\vartheta).$$

Zadatak 4.2.7. *Dokažite da je*

$$SU(2) = \{B(\varphi_1,\varphi_2,\vartheta);\ \varphi_1,\varphi_2 \in [0,4\pi\rangle,\ \vartheta\in[0,\pi]\}.$$

Nadalje, dokažite da u prikazu elementa $A \in SU(2)$ u obliku $A = B(\varphi_1,\varphi_2,\vartheta)$ vrijedi:

(a) *Parametar $\vartheta \in [0,\pi]$ jedinstveno je određen.*

(b) *Ako je $0 < \vartheta < \pi$ onda postoje točno dva para $(\varphi_1,\varphi_2),(\varphi_1',\varphi_2') \in [0,4\pi\rangle \times [0,4\pi\rangle$ takva da je $A = B(\varphi_1,\varphi_2,\vartheta) = B(\varphi_1',\varphi_2',\vartheta)$.*

(c) *Vrijedi $B(\varphi_1,\varphi_2,0) = B(\varphi_1',\varphi_2',0)$ ako i samo ako je $\varphi_1+\varphi_2 \equiv \varphi_1'+\varphi_2' \pmod{4\pi}$.*

(d) *Vrijedi $B(\varphi_1,\varphi_2,\pi) = B(\varphi_1',\varphi_2',\pi)$ ako i samo ako je $\varphi_1-\varphi_2 \equiv \varphi_1'-\varphi_2' \pmod{4\pi}$.*

Iz propozicije 4.2.2. neposredno slijedi:

Propozicija 4.2.3. *Ako je π reprezentacija grupe $SO(3)$ onda je $\pi\circ\sigma$ reprezentacija grupe $SU(2)$. Za reprezentaciju ρ grupe $SU(2)$ postoji reprezentacija π grupe $SO(3)$ takva da je $\rho=\pi\circ\sigma$ ako i samo ako je $\rho(-I_2)$ jedinični operator.*

Prema zadacima 4.2.6. i 4.2.7. grupa $SU(2)$ parametrizirana je s tri realna parametra $\varphi_1,\varphi_2\in[0,4\pi]$ i $\vartheta\in[0,\pi]$. Pri tome je $\varphi_1=0$ ekvivalentno sa $\varphi_1=4\pi$, $\varphi_2=0$ je ekvivalentno sa $\varphi_2=4\pi$ i (φ_1,φ_2) je ekvivalentno sa $(\varphi_1+2\pi,\varphi_2+2\pi)$, sa $(\varphi_1+2\pi,\varphi_2-2\pi)$, sa $(\varphi_1-2\pi,\varphi_2+2\pi)$, odnosno sa $(\varphi_1-2\pi,\varphi_2-2\pi)$. Govoriti o funkciji na $SU(2)$ je isto kao govoriti o funkciji varijabli $\varphi_1,\varphi_2,\vartheta$:

$$f(B(\varphi_1,\varphi_2,\vartheta))=f(\varphi_1,\varphi_2,\vartheta),\qquad \varphi_1,\varphi_2\in\mathbb{R},\quad \vartheta\in[0,\pi],$$

s tim da je

$$f(\varphi_1+4\pi,\varphi_2,\vartheta)=f(\varphi_1,\varphi_2+4\pi,\vartheta)=f(\varphi_1+2\pi,\varphi_2+2\pi,\vartheta)=f(\varphi_1,\varphi_2,\vartheta).$$

Neka je $C(SU(2))$ vektorski prostor svih kompleksnih neprekidnih funkcija na grupi $SU(2)$. Za $f\in C(SU(2))$ definiramo $I(f)\in\mathbb{C}$ sa

$$I(f)=\frac{1}{32\pi^2}\int_0^{4\pi}\int_0^{4\pi}\int_0^{\pi}f(\varphi_1,\varphi_2,\vartheta)\sin\vartheta\,\mathrm{d}\varphi_1\,\mathrm{d}\varphi_2\,\mathrm{d}\vartheta.$$

Analogno teoremu 4.2.1. vrijedi

Teorem 4.2.4. *Ovako definirano preslikavanje $I:C(SU(2))\to\mathbb{C}$ je invarijantni integral na grupi $SU(2)$.*

Proučit ćemo sada neprekidne konačnodimenzionalne reprezentacije grupe $SU(2)$. Cilj nam je konstruirati predstavnike svih klasa ekvivalencije neprekidnih konačnodimenzionalnih reprezentacija te grupe jer je svaka neprekidna konačnodimenzionalna reprezentacija od $SU(2)$ potpuno reducibilna, dakle, prostor takve reprezentacije je direktna suma invarijantnih potprostora takvih da su pripadne subreprezentacije ireducibilne.

Analiza neprekidnih konačnodimenzionalnih reprezentacija grupe $SU(2)$ najjednostavnije se provodi pomoću pripadnih reprezentacija njene *Liejeve algebre*. Pri tome se **Liejeva algebra** $\mathfrak{su}(2)$ grupe $SU(2)$ definira na sljedeći način:

$$\mathfrak{su}(2)=\{A\in M_2(\mathbb{C});\ e^{tA}\in SU(2)\ \forall t\in\mathbb{R}\}.$$

Zadatak 4.2.8. *Dokažite da za svaku matricu $A\in M_n(\mathbb{C})$ vrijedi*

$$\det\left(e^A\right)=e^{Tr\,A}.$$

Uputa: Iskoristite činjenicu da je svaka kvadratna matrica slična gornjetrokutastoj matrici.

Zadatak 4.2.9. *Pomoću zadatka 4.2.8. dokažite da je $\mathfrak{su}(2)$ skup svih antihermitskih matrica u $M_2(\mathbb{C})$ s tragom 0.*

Prema zadatku 4.2.9. $\mathfrak{su}(2)$ je trodimenzionalan realan vektorski prostor i vrijedi

$$A,B\in\mathfrak{su}(2)\qquad\Longrightarrow\qquad [A,B]=AB-BA\in\mathfrak{su}(2).$$

Dakle, $\mathfrak{su}(2)$ je doista Liejeva algebra $-$ trodimenzionalna realna Liejeva algebra.

Neka je ρ neprekidna konačnodimenzionalna reprezentacija grupe $SU(2)$ na prostoru V. Za $A \in \mathfrak{su}(2)$ je tada $t \mapsto \rho\left(e^{tA}\right)$ neprekidna reprezentacija aditivne grupe $\mathbb{R}$ na prostoru V, pa prema zadatku 1.2.3. možemo definirati linearan operator $\tilde{\rho}(A)$ na prostoru V sa

$$\tilde{\rho}(A) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\rho\left(e^{tA}\right)\Big|_{t=0}$$

i tada je

$$\rho\left(e^{tA}\right) = e^{t\tilde{\rho}(A)}.$$

Na taj način svakoj neprekidnoj konačnodimenzionalnoj reprezentaciji ρ grupe $SU(2)$ na prostoru V pridruženo je preslikavanje $\tilde{\rho} : \mathfrak{su}(2) \to L(V)$.

Teorem 4.2.5. *Neka su ρ i ω neprekidne konačnodimenzionalne reprezentacije grupe $SU(2)$ na prostorima V i U.*

(a) *$\tilde{\rho}$ je reprezentacija Liejeve algebre $\mathfrak{su}(2)$ tj. $\mathbb{R}-$linearno preslikavanje sa $\mathfrak{su}(2)$ u $L(V)$ takvo da je*

$$\tilde{\rho}([A,B]) = [\tilde{\rho}(A), \tilde{\rho}(B)] \qquad \forall A, B \in \mathfrak{su}(2).$$

(b) *Potprostor W prostora V je $\rho-$invarijantan ako i samo ako je $\tilde{\rho}-$invarijantan.*

(c) *Reprezentacija ρ grupe $SU(2)$ je ireducibilna ako i samo ako je reprezentacija $\tilde{\rho}$ Liejeve algebre $\mathfrak{su}(2)$ ireducibilna.*

(d) *$Hom_{SU(2)}(V,U) = Hom_{\mathfrak{su}(2)}(V,U)$.*

(e) *Reprezentacije ρ i ω grupe $SU(2)$ su ekvivalentne ako i samo ako su reprezentacije $\tilde{\rho}$ i $\tilde{\omega}$ Liejeve algebre $\mathfrak{su}(2)$ ekvivalentne.*

Za dokaz tvrdnje (a) treba nam sljedeća propozicija:

Propozicija 4.2.6. (a) *Postoji otvorena okolina $\mathcal{U}$ nule u realnom vektorskom prostoru $\mathfrak{su}(2)$ i otvorena okolina $\mathcal{V}$ jedinice u grupi $SU(2)$ takve da je eksponencijalno preslikavanje $exp : A \mapsto e^A$ difeomorfizam sa $\mathcal{U}$ na $\mathcal{V}$ (tj. homeomorfizam takav da su preslikavanja $exp|\mathcal{U}$ i $(exp|\mathcal{U})^{-1}$ klase C^∞).*

(b) *Postoji otvorena okolina $\mathcal{U}'$ točke $(0,0,0)$ u prostoru $\mathbb{R}^3$ i otvorena okolina $\mathcal{V}'$ jedinice u grupi $SU(2)$ takve da je za bazu*

$$A_1 = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad A_3 = \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}$$

realnog prostora $\mathfrak{su}(2)$ preslikavanje $(y_1,y_2,y_3) \mapsto e^{y_1A_1}e^{y_2A_2}e^{y_3A_3}$ difeomorfizam sa $\mathcal{U}'$ na $\mathcal{V}'$.

Dokaz: (a) Identificirat ćemo grupu $SU(2)$ s jediničnom sferom

$$S^3 = \{(x_0,x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^4;\ x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^3 = 1\}$$

euklidskog prostora $\mathbb{R}^4$ kao u zadatku 4.2.4. tako da točku $(x_0,x_1,x_2,x_3) \in S^3$ identificiramo s matricom

$$\begin{bmatrix} x_0 + ix_1 & x_2 + ix_3 \\ -x_2 + ix_3 & x_0 - ix_1 \end{bmatrix} \in SU(2).$$

Tada se jedinica I_2 u grupi $SU(2)$ identificira s točkom $(1,0,0,0) \in S^3$. Nadalje, otvorena okolina $\mathcal{W}$ jedinice u grupi $SU(2)$ definirana sa

$$\mathcal{W} = \left\{ \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\overline{\beta} & \overline{\alpha} \end{bmatrix} \in SU(2);\ \mathrm{Re}\,\alpha > 0 \right\}$$

identificira se sa sljedećom otvorenom okolinom točke $(1,0,0,0)$ na sferi S^3 :

$$\{(x_0, x_1, x_2, x_3) \in S^3;\ x_0 > 0\}.$$

Ta se okolina identificira s otvorenom jediničnom kuglom $K = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3;\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < 1\}$ u euklidskom prostoru $\mathbb{R}^3$ pomoću difeomorfizma

$$(x_1, x_2, x_3) \mapsto \left(\sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2}, x_1, x_2, x_3 \right),$$

odnosno,

$$(x_1, x_2, x_3) \mapsto \begin{bmatrix} \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2} + ix_1 & x_2 + ix_3 \\ -x_2 + ix_3 & \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2} - ix_1 \end{bmatrix},$$

sa K na $\mathcal{W}$. Pri tom difeomorfizmu jedinica u grupi $SU(2)$ identificira se s točkom $0 = (0,0,0)$. Inverzna identifikacija je

$$\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\overline{\beta} & \overline{\alpha} \end{bmatrix} \mapsto (\mathrm{Im}\,\alpha, \mathrm{Re}\,\beta, \mathrm{Im}\,\beta).$$

S druge strane, realan trodimenzionalan vektorski prostor $\mathfrak{su}(2)$ identificira se s euklidskim prostorom $\mathbb{R}^3$ pomoću baze $\{A_1, A_2, A_3\}$ u $\mathfrak{su}(2)$. Dakle, točka $y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$ identificira se s matricom

$$A(y) = \begin{bmatrix} iy_1 & y_2 + iy_3 \\ -y_2 + iy_3 & -iy_1 \end{bmatrix} \in \mathfrak{su}(2).$$

Zadatak 4.2.10. *Uz gornju oznaku dokažite indukcijom po n da je*

$$A(y)^{2n} = (-1)^n \|y\|^{2n} I_2, \qquad A(y)^{2n+1} = (-1)^n \|y\|^{2n} A(y), \qquad y \in \mathbb{R}^3, \quad \|y\| = \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2}.$$

Izvedite odatle da za $y \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ vrijedi

$$e^{A(y)} = (\cos\|y\|) I_2 + \frac{\sin\|y\|}{\|y\|} A(y) = \begin{bmatrix} \cos\|y\| + i\dfrac{y_1}{\|y\|}\sin\|y\| & \dfrac{y_2 + iy_3}{\|y\|}\sin\|y\| \\ \dfrac{-y_2 + iy_3}{\|y\|}\sin\|y\| & \cos\|y\| - i\dfrac{y_1}{\|y\|}\sin\|y\| \end{bmatrix}.$$

Definiramo sada otvorenu okolinu L nule u $\mathbb{R}^3$

$$L = \{y \in \mathbb{R}^3;\ e^{A(y)} \in \mathcal{W}\}.$$

Zbog zadatka 4.2.10. i uz uvedenu identifikaciju okoline $\mathcal{W}$ s otvorenom jediničnom kuglom K u $\mathbb{R}^3$ imamo

$$L = \{y \in \mathbb{R}^3; \cos\|y\| > 0\} = \left\{ y \in \mathbb{R}^3;\ \|y\| < \frac{\pi}{2} \text{ ili } \frac{4n-1}{2}\pi < \|y\| < \frac{4n+1}{2}\pi \text{ za neki } n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Neka je M komponenta povezanosti skupa L koja sadrži nulu, tj. otvorena kugla u $\mathbb{R}^3$ oko nule radijusa $\pi/2$:

$$M = \left\{ y \in \mathbb{R}^3;\ \|y\| < \frac{\pi}{2} \right\}$$

Prema zadatku 4.2.10. uz ove identifikacije preslikavanje $\exp : A \mapsto e^A$ restringirano na otvorenu kuglu M je $C^\infty-$preslikavanje sa M u K zadano sa $0 \mapsto 0$ i

$$y = (y_1, y_2, y_3) \mapsto \left(\frac{y_1}{\|y\|} \sin \|y\|, \frac{y_2}{\|y\|} \sin \|y\|, \frac{y_3}{\|y\|} \sin \|y\| \right) = \frac{\sin \|y\|}{\|y\|} y \quad \text{za} \quad y \neq 0.$$

Prema teoremu o inverznoj funkciji iz teorije funkcija više realnih varijabli tvrdnja (a) će biti dokazana ako pokažemo da je Jacobijeva matrica tog preslikavanja u nuli regularna. To slijedi iz sljedećeg zadatka:

Zadatak 4.2.11. *Dokažite da je Jacobijeva matrica preslikavanja* $0 \mapsto 0$, *i* $y \mapsto \dfrac{\sin \|y\|}{\|y\|} y$ *za* $y \neq 0$ *u točki* $y \in M \setminus \{(0,0,0)\}$ *jednaka*

$$\frac{\sin \|y\|}{\|y\|} I_3 + \left(\frac{\cos \|y\|}{\|y\|^2} - \frac{\sin \|y\|}{\|y\|^3} \right) \begin{bmatrix} y_1^2 & y_1 y_2 & y_1 y_3 \\ y_1 y_2 & y_2^2 & y_2 y_3 \\ y_1 y_3 & y_2 y_3 & y_3^2 \end{bmatrix},$$

te da je Jacobijeva matrica tog preslikavanja u točki $y = (0,0,0)$ *jednaka jediničnoj matrici* I_3.

Time je tvrdnja (a) propozicije 4.2.6. dokazana.

Tvrdnja (b) dokazuje se sasvim analogno. Prije svega, imamo

$$e^{y_1 A_1} e^{y_2 A_2} e^{y_3 A_3} = \begin{bmatrix} e^{iy_1} & 0 \\ 0 & e^{-iy_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos y_2 & \sin y_2 \\ -\sin y_2 & \cos y_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos y_3 & i \sin y_3 \\ i \sin y_3 & \cos y_3 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} e^{iy_1}(\cos y_2 \cos y_3 + i \sin y_2 \sin y_3) & e^{iy_1}(\sin y_2 \cos y_3 + i \cos y_2 \sin y_3) \\ e^{-iy_1}(-\sin y_2 \cos y_3 + i \cos y_2 \sin y_3) & e^{-iy_1}(\cos y_2 \cos y_3 - i \sin y_2 \sin y_3) \end{bmatrix}.$$

Ta se matrica za male vrijednosti parametara y_1, y_2, y_3 kao u (a) identificira s točkom

$$(x_1(y_1,y_2,y_3), x_2(y_1,y_2,y_3), x_3(y_1,y_2,y_3)) \in \mathbb{R}^3,$$

gdje je

$$\begin{aligned} x_1(y_1,y_2,y_3) &= \cos y_1 \sin y_2 \sin y_3 + \sin y_1 \cos y_2 \cos y_3, \\ x_2(y_1,y_2,y_3) &= \cos y_1 \sin y_2 \cos y_3 - \sin y_1 \cos y_2 \sin y_3, \\ x_3(y_1,y_2,y_3) &= \sin y_1 \sin y_2 \cos y_3 + \cos y_1 \cos y_2 \sin y_3. \end{aligned}$$

Jednostavan račun pokazuje da je Jacobijeva matrica preslikavanja

$$(y_1,y_2,y_3) \mapsto (x_1(y_1,y_2,y_3), x_2(y_1,y_2,y_3), x_3(y_1,y_2,y_3))$$

u točki $(0,0,0)$ jednaka jediničnoj matrici I_3. Odatle slijedi tvrdnja (b) i time je propozicija 4.2.6. dokazana.

Dokaz teorema 4.2.5: (a) Za $A \in \mathfrak{su}(2)$ i za $\lambda \in \mathbb{R}$ imamo

$$\tilde{\rho}(\lambda A) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \rho \left(e^{t\lambda A} \right) \Big|_{t=0} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} e^{t\lambda \tilde{\rho}(A)} \Big|_{t=0} = \lambda \tilde{\rho}(A).$$

Dakle, vrijedi

$$\tilde{\rho}(\lambda A) = \lambda\tilde{\rho}(A) \qquad \forall A \in \mathfrak{su}(2) \quad \text{i} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}. \tag{4.4}$$

Neka su $\mathcal{U}'$ otvorena okolina nule u $\mathfrak{su}(2)$ i $\mathcal{V}'$ otvorena okolina jedinice u grupi $SU(2)$ iz propozicije 4.2.6., pri čemu je prostor $\mathfrak{su}(2)$ identificiran s prostorom $\mathbb{R}^3$ pomoću baze $\{A_1, A_2, A_3\}$. Zbog (4.4) za dokaz linearnosti preslikavanja $\tilde{\rho}$ dovoljno je dokazati da vrijedi

$$\tilde{\rho}(A + B) = \tilde{\rho}(A) + \tilde{\rho}(B)$$

za sve $A, B \in \mathcal{U}'$ takve da su $A+B \in \mathcal{U}'$. Izaberimo takve A i B. Tada prema tvrdnji (b) propozicije 4.2.6. postoje $\varepsilon > 0$ i C^∞−funkcije $\omega_1, \omega_2, \omega_3 : \langle -\varepsilon, \varepsilon\rangle \to \mathbb{R}$ takve da je

$$e^{tA}e^{tB}e^{-t(A+B)} = e^{\omega_1(t)A_1}e^{\omega_2(t)A_2}e^{\omega_3(t)A_3}, \qquad t \in \langle -\varepsilon, \varepsilon\rangle.$$

Imamo

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}e^{tA}e^{tB}e^{-t(A+B)}\bigg|_{t=0} = \left(Ae^{tA}e^{tB}e^{-t(A+B)} + e^{tA}Be^{tB}e^{-t(A+B)} + e^{tA}e^{tB}(A+B)e^{-t(A+B)}\right)\Big|_{t=0} =$$

$$= A + B - (A + B) = 0.$$

S druge strane, zbog $\omega_1(0) = \omega_2(0) = \omega_3(0) = 0$ imamo

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}e^{\omega_1(t)A_1}e^{\omega_2(t)A_2}e^{\omega_3(t)A_3}\bigg|_{t=0} = \dot{\omega}_1(0)A_1 + \dot{\omega}_2(0)A_2 + \dot{\omega}_3(0)A_3,$$

gdje smo stavili

$$\dot{\omega}_j(0) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\omega_j(t)\bigg|_{t=0}, \qquad j = 1, 2, 3.$$

Prema tome je

$$\dot{\omega}_1(0)A_1 + \dot{\omega}_2(0)A_2 + \dot{\omega}_3(0)A_3 = 0,$$

a kako su A_1, A_2 i A_3 linearno nezavisni, slijedi da je

$$\dot{\omega}_1(0) = \dot{\omega}_2(0) = \dot{\omega}_3(0) = 0. \tag{4.5}$$

S druge strane, kako je ρ reprezentacija grupe $SU(2)$ i kako vrijedi

$$\rho\left(e^{sC}\right) = e^{s\tilde{\rho}(C)} \qquad \forall C \in \mathfrak{su}(2) \quad \text{i} \quad \forall s \in \mathbb{R},$$

dobivamo

$$\rho\left(e^{tA}e^{tB}e^{-t(A+B)}\right) = \rho\left(e^{tA}\right)\rho\left(e^{tB}\right)\rho\left(e^{-t(A+B)}\right) = e^{t\tilde{\rho}(A)}e^{t\tilde{\rho}(B)}e^{t\tilde{\rho}(A+B)}$$

i

$$\rho\left(e^{\omega_1(t)A_1}e^{\omega_2(t)A_2}e^{\omega_3(t)A_3}\right) = \rho\left(e^{\omega_1(t)A_1}\right)\rho\left(e^{\omega_2(t)A_2}\right)\rho\left(e^{\omega_3(t)A_3}\right) = e^{\omega_1(t)\tilde{\rho}(A_1)}e^{\omega_2(t)\tilde{\rho}(A_2)}e^{\omega_3(t)\tilde{\rho}(A_3)}.$$

Dakle, vrijedi

$$e^{t\tilde{\rho}(A)}e^{t\tilde{\rho}(B)}e^{t\tilde{\rho}(A+B)} = e^{\omega_1(t)\tilde{\rho}(A_1)}e^{\omega_2(t)\tilde{\rho}(A_2)}e^{\omega_3(t)\tilde{\rho}(A_3)}, \qquad t \in \langle -\varepsilon, \varepsilon\rangle.$$

Deriviramo sada obje strane ove jednakosti po varijabli t i zatim uvrstimo $t = 0$. Analogni račun kao malo prije daje uzevši u obzir (4.5),

$$\tilde{\rho}(A) + \tilde{\rho}(B) - \tilde{\rho}(A + B) = \dot{\omega}_1(0)\tilde{\rho}(A_1) + \dot{\omega}_2(0)\tilde{\rho}(A_2) + \dot{\omega}_3(0)\tilde{\rho}(A_3) = 0.$$

Time je dokazano da vrijedi $\tilde{\rho}(A+B)=\tilde{\rho}(A)+\tilde{\rho}(B)$ ako su $A,B\in\mathcal{U}'$ takve da je $A+B\in\mathcal{U}'$. Dakle, dokazana je $\mathbb{R}-$linearnost preslikavanja $\tilde{\rho}:\mathfrak{su}(2)\to L(V)$.

Treba još dokazati da vrijedi

$$\tilde{\rho}\left([A,B]\right)=[\tilde{\rho}(A),\tilde{\rho}(B)],\qquad A,B\in\mathfrak{su}(2).$$

Zbog (4.4) dovoljno je tu jednakost dokazati u situaciji kad su $A,B\in\mathcal{U}'$ takvi da je $[A,B]\in\mathcal{U}'$. Slično kao prije zaključujemo da postoje $\varepsilon>0$ i $C^\infty-$funkcije $\omega_1,\omega_2,\omega_3:[0,\varepsilon\rangle\to\mathbb{R}$ takve da je

$$e^{\sqrt{t}A}e^{\sqrt{t}B}e^{-\sqrt{t}A}e^{-\sqrt{t}B}e^{-t[A,B]}=e^{\omega_1(t)A_1}e^{\omega_2(t)A_2}e^{\omega_3(t)A_3},\qquad t\in[0,\varepsilon\rangle. \tag{4.6}$$

Kako je lijeva strana jednaka I_2 za $t=0$ i u ovom slučaju je $\omega_1(0)=\omega_2(0)=\omega_3(0)=0$.

Neka su sada T i S proizvoljni linearni operatori na konačnodimenzionalnom vektorskom prostoru. Tada je za $t\geq 0$

$$e^{\sqrt{t}T}e^{\sqrt{t}S}e^{-\sqrt{t}T}e^{-\sqrt{t}S}=$$

$$=(I+\sqrt{t}T+\frac{t}{2}T^2+\cdots)(I+\sqrt{t}S+\frac{t}{2}S^2+\cdots)(I-\sqrt{t}T+\frac{t}{2}T^2+\cdots)(I-\sqrt{t}S+\frac{t}{2}S^2+\cdots)=$$

$$I+\sqrt{t}(T+S-T-S)+t\left(\frac{1}{2}T^2+\frac{1}{2}S^2+\frac{1}{2}T^2+\frac{1}{2}S^2+TS-T^2-TS-ST-S^2+TS\right)+$$

$$+t^{3/2}\left(\frac{1}{6}T^3+\frac{1}{6}S^3-\frac{1}{6}T^3-\frac{1}{6}S^3+\frac{1}{2}T^2S-\frac{1}{2}T^3-\frac{1}{2}T^2S+\frac{1}{2}TS^2-\frac{1}{2}S^2T-\frac{1}{2}S^3+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}T^3+\frac{1}{2}ST^2-\frac{1}{2}T^2S+\frac{1}{2}TS^2+\frac{1}{2}S^3-\frac{1}{2}TS^2-TST-TS^2+T^2S+STS\right)+\cdots\cdots=$$

$$=I+t[T,S]+\frac{1}{2}t^{3/2}\left([T,[T,S]]+[S,[T,S]]\right)+\cdots\cdots.$$

Odatle slijedi

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}e^{\sqrt{t}T}e^{\sqrt{t}S}e^{-\sqrt{t}T}e^{-\sqrt{t}S}\right|_{t=0}=[T,S]. \tag{4.7}$$

Stoga imamo

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}e^{\sqrt{t}A}e^{\sqrt{t}B}e^{-\sqrt{t}A}e^{-\sqrt{t}B}e^{-t[A,B]}\right|_{t=0}=[A,B]-[A,B]=0.$$

Nadalje, isti račun kao i prije daje

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}e^{\omega_1(t)A_1}e^{\omega_2(t)A_2}e^{\omega_3(t)A_3}\right|_{t=0}=\dot{\omega}_1(0)A_1+\dot{\omega}_2(0)A_2+\dot{\omega}_3(0)A_3,$$

dakle,

$$\dot{\omega}_1(0)=\dot{\omega}_2(0)=\dot{\omega}_2(0)=0. \tag{4.8}$$

Primjenimo sada ρ na obje strane jednakosti (4.6). Kao i prije dobivamo jednakost

$$e^{\sqrt{t}\tilde{\rho}(A)}e^{\sqrt{t}\tilde{\rho}(B)}e^{-\sqrt{t}\tilde{\rho}(A)}e^{-\sqrt{t}\tilde{\rho}(B)}e^{-t\tilde{\rho}([A,B])}=e^{\omega_1(t)\tilde{\rho}(A_1)}e^{\omega_2(t)\tilde{\rho}(A_2)}e^{\omega_3(t)\tilde{\rho}(A_3)}.$$

Sada zbog (4.7) i (4.8) dobivamo redom

$$[\tilde{\rho}(A),\tilde{\rho}(B)]-\tilde{\rho}\left([A,B]\right)=\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}e^{\sqrt{t}\tilde{\rho}(A)}e^{\sqrt{t}\tilde{\rho}(B)}e^{-\sqrt{t}\tilde{\rho}(A)}e^{-\sqrt{t}\tilde{\rho}(B)}e^{-t\tilde{\rho}([A,B])}\right|_{t=0}=$$

$$=\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}e^{\omega_1(t)\tilde{\rho}(A_1)}e^{\omega_2(t)\tilde{\rho}(A_2)}e^{\omega_3(t)\tilde{\rho}(A_3)}\right|_{t=0}=\dot{\omega}_1(0)\tilde{\rho}(A_1)+\dot{\omega}_2(0)\tilde{\rho}(A_2)+\dot{\omega}_3(0)\tilde{\rho}(A_3)=0.$$

Time je dokazano da vrijedi i

$$\tilde{\rho}\left([A,B]\right) = [\tilde{\rho}(A), \tilde{\rho}(B)], \qquad A, B \in \mathfrak{su}(2),$$

odnosno, tvrdnja (a) je u potpunosti dokazana.

(b) Pretpostavimo da je potprostor W $\rho-$invarijantan. Za $A \in \mathfrak{su}(2)$ je tada $e^{tA} \in SU(2)$ za svaki $t \in \mathbb{R}$, dakle vrijedi

$$\rho\left(e^{tA}\right) w \in W \qquad \forall t \in \mathbb{R} \quad \text{i} \quad \forall w \in W.$$

Međutim, imamo

$$\rho\left(e^{tA}\right) = e^{t\tilde{\rho}(A)},$$

dakle, vrijedi

$$e^{t\tilde{\rho}(A)} w \in W \qquad \forall t \in \mathbb{R} \quad \text{i} \quad \forall w \in W.$$

Odatle je za svaki $w \in W$

$$\tilde{\rho}(A)w = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} e^{t\tilde{\rho}(A)} w \bigg|_{t=0} = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}\left(e^{t\tilde{\rho}(A)}w - w\right) \in W,$$

jer je svaki potprostor konačnodimenzionalnog prostora zatvoren. Time je dokazano da je potprostor W invarijantan s obzirom na sve operatore $\tilde{\rho}(A)$, $A \in \mathfrak{su}(2)$.

Pretpostavimo sada da je potprostor W invarijantan s obzirom na sve operatore $\tilde{\rho}(A)$, $A \in \mathfrak{su}(2)$. Tada opet zbog zatvorenosti potprostora W imamo za svaki $w \in W$ i za svaki $A \in \mathfrak{su}(2)$:

$$\rho\left(e^{A}\right) w = e^{\tilde{\rho}(A)} w = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \tilde{\rho}(A)^k w \in W.$$

Dakle, potprostor W je invarijantan s obzirom na sve operatore $\rho\left(e^{A}\right)$, $A \in \mathfrak{su}(2)$. Međutim, vidjeli smo da se svaki element grupe $SU(2)$ može pisati kao

$$B(\varphi_1, \varphi_2, \vartheta) = \begin{bmatrix} e^{i\frac{\varphi_1}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\varphi_1}{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\frac{\vartheta}{2} & -i\sin\frac{\vartheta}{2} \\ -i\sin\frac{\vartheta}{2} & \cos\frac{\vartheta}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{i\frac{\varphi_2}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\varphi_2}{2}} \end{bmatrix} = e^{i\frac{\varphi_1}{2}A_1} e^{-i\frac{\vartheta}{2}A_3} e^{i\frac{\varphi_2}{2}A_1}.$$

Dakle, svaki element B grupe $SU(2)$ može se napisati kao produkt elemenata oblika e^{A}, $A \in \mathfrak{su}(2)$. Prema tome, potprostor W je invarijantan s obzirom na sve operatore $\rho(B)$, $B \in SU(2)$.

Tvrdnja (c) neposredna je posljedica tvrdnje (b).

(d) Neka je $T \in Hom_{SU(2)}(V, U)$, tj. $T \in L(V, W)$ je takav da vrijedi $T\rho(B) = \omega(B)T$ za svaki $B \in SU(2)$. Tada za svaki $A \in \mathfrak{su}(2)$ i za svaki $t \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$Te^{t\tilde{\rho}(A)} = T\rho\left(e^{t}A\right) = \omega\left(e^{tA}\right)T = e^{t\tilde{\omega}(A)}T.$$

Deriviranjem po varijabli t u točki $t = 0$ slijedi $T\tilde{\rho}(A) = \tilde{\omega}(A)T$, dakle, $T \in Hom_{\mathfrak{su}(2)}(V, W)$.

Pretpostavimo sada da je $T \in Hom_{\mathfrak{su}(2)}(V, U)$, tj. $T \in L(V, U)$ je takav da je $T\tilde{\rho}(A) = \tilde{\omega}(A)T$, $\forall A \in \mathfrak{su}(2)$. Tada za svaki k vrijedi $T\tilde{\rho}(A)^k = \tilde{\omega}(A)^k T$, dakle,

$$T\rho\left(e^{A}\right) = Te^{\tilde{\rho}(A)} = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} T\tilde{\rho}(A)^k = \lim_{k \to \infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \tilde{\omega}(A)^k T = e^{\tilde{\omega}(A)}T = \omega\left(e^{A}\right)T.$$

Kako je svaki $B \in SU(2)$ produkt elemenata oblika e^{A}, $A \in \mathfrak{su}(2)$, slijedi $T\rho(B) = \omega(B)T$, $\forall B \in SU(2)$. Dakle, $T \in Hom_{SU(2)}(V, U)$ i time je tvrdnja (d) dokazana.

Napokon, tvrdnja (e) neposredna je posljedica tvrdnje (d).

Proučit ćemo sada konačnodimenzionalne reprezentacije Liejeve algebre $\mathfrak{su}(2)$, tj. $\mathbb{R}-$linearna preslikavanja $\pi : \mathfrak{su}(2) \to L(V)$, za konačnodimenzionalan kompleksan vektorski prostor V, takva da je $\pi([A, B]) = [\pi(A), \pi(B)]\ \forall A, B \in \mathfrak{su}(2)$. U daljnjem upotrebljavamo prije uvedene oznake

$$A_1 = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad A_3 = \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}.$$

$\{A_1, A_2, A_3\}$ je baza realnog vektorskog prostora $\mathfrak{su}(2)$ i vrijedi

$$[A_1, A_2] = 2A_3, \qquad [A_2, A_3] = 2A_1, \qquad [A_3, A_1] = 2A_2.$$

Zadatak 4.2.12. *Dokažite da operacija komutiranja $[A, B] = AB - BA$ u $L(V)$ ili u $M_n(\mathbb{C})$ ima svojstva*

$$[A, BC] = [A, B]C + B[A, C] \qquad i \qquad [A, [B, C]] = [[A, B], C] + [B, [A, C]] \qquad \forall A, B, C.$$

Zadatak 4.2.13. *Ako je π reprezentacija Liejeve algebre $\mathfrak{su}(2)$, dokažite da linearni operatori*

$$H = -i\pi(A_1), \qquad X = \frac{1}{2}\pi(A_2) - \frac{i}{2}\pi(A_3) \qquad i \qquad Y = -\frac{1}{2}\pi(A_2) - \frac{i}{2}\pi(A_3)$$

zadovoljavaju

$$[H, X] = 2X, \qquad [H, Y] = -2Y, \qquad [X, Y] = H.$$

Nadalje, dokažite da za operator

$$C = H^2 - 2H + 4XY = H^2 + 2H + 4YX$$

vrijedi

$$[\pi(A), C] = 0 \qquad \forall A \in \mathfrak{su}(2)$$

Teorem 4.2.7. *Za svaki $n \in \mathbb{N}$ postoji točno jedna klasa ekvivalencije ireducibilnih reprezentacija Liejeve algebre $\mathfrak{su}(2)$ dimenzije n. Ako je π takva, postoji baza $\{e_0, e_1, \ldots, e_{n-1}\}$ prostora reprezentacije π na koju operatori $H = -i\pi(A_1)$, $X = \frac{1}{2}\pi(A_2) - \frac{i}{2}\pi(A_3)$ i $Y = -\frac{1}{2}\pi(A_2) - \frac{i}{2}\pi(A_3)$ djeluju na sljedeći način:*

$$\begin{array}{lll} He_j = (2j - n + 1)e_j & za \quad j = 0, 1, \ldots, n - 1; & \\ Xe_j = e_{j+1} & za \quad j = 0, 1, \ldots, n - 2, & Xe_{n-1} = 0; \\ Ye_j = j(n - j)e_{j-1} & za \quad j = 1, 2, \ldots, n - 1, & Ye_0 = 0. \end{array}$$

Dokaz: Pretpostavimo da je π ireducibilna reprezentacija Liejeve algebre $\mathfrak{su}(2)$ na konačnodimenzionalnom prostoru V i neka su $H, X, Y, C \in L(V)$ operatori iz zadatka 4.2.13. Neka je α svojstvena vrijednost operatora H i $x \neq 0$ pripadni svojstveni vektor, $Hx = \alpha x$. Tada nalazimo

$$HYx = (HY - YH + YH)x = [H, Y]x + YHx = -2Yx + \alpha Yx = (\alpha - 2)Yx.$$

Odatle indukcijom po k slijedi

$$HY^k x = (\alpha - 2k)Y^k x.$$

Doista, ako pretpostavimo da je $HY^{k-1}x = (\alpha - 2k + 2)Y^{k-1}x$, onda pomoću zadatka 4.2.12. imamo

$$HY^k x = HYY^{k-1}x = ([H, Y] + YH)Y^{k-1}x = -2YY^{k-1}x + Y(\alpha - 2k + 2)Y^{k-1}x = (\alpha - 2k)Y^k x.$$

Odatle zaključujemo da postoji $k \in \mathbb{N}$ takav da je $Y^k x = 0$. Doista, kad bi bilo $Y^k x \neq 0\ \forall k$ onda bi $\alpha - 2k$ bila svojstvena vrijednost od H za svaki $k \in \mathbb{N}$, a to je nemoguće zbog toga što je prostor

V konačnodimenzionalan. Neka je, dakle, $k \in \mathbb{N}$ takav da je $e = Y^{k-1}x \neq 0$ i $Y^k x = 0$. Tada je e svojstveni vektor operatora H i vrijedi $Ye = 0$.

Na taj način dokazali smo da postoje $\lambda \in \mathbb{C}$ i $e \in V$, $e \neq 0$, takvi da je

$$He = \lambda e \qquad \text{i} \qquad Ye = 0.$$

Sada slično kao malo prije slijedi da je

$$HX^j e = (\lambda + 2j)X^j e \qquad \forall j \in \mathbb{N}.$$

Stoga postoji $k \geq 0$ takav da je $X^k e \neq 0$ i $X^{k+1}e = 0$. Stavimo tada

$$e_j = X^j e, \qquad j = 0, 1, \ldots, k$$

Tada je

$$Xe_j = e_{j+1} \qquad \text{za} \qquad 0 \leq j \leq k-1 \qquad \text{i} \qquad Xe_k = 0.$$

Nadalje

$$He_j = (\lambda + 2j)e_j \qquad \text{za} \qquad 0 \leq j \leq k.$$

Po zadatku 4.2.13. operator C komutira sa svim operatorima reprezentacije π. Sada iz tvrdnje (c) Schurove leme (teorem 1.1.6.) slijedi $C = \beta I_V$ za neki $\beta \in \mathbb{C}$. Sada je

$$\beta e = Ce = (H^2 - 2H + 4XY)e = (\lambda^2 - 2\lambda)e.$$

Dakle, $\beta = \lambda^2 - 2\lambda$, tj. $Cx = (\lambda^2 - 2\lambda)x \ \forall x \in V$. Sada za $j \in \{1, 2, \ldots, k\}$ imamo

$$(\lambda^2 - 2\lambda)e_{j-1} = Ce_{j-1} = (H^2 + 2H + 4YX)e_{j-1} = H^2 e_{j-1} + 2He_{j-1} + 4YXe_{j-1} =$$

$$= (\lambda + 2j - 2)^2 e_{j-1} + 2(\lambda + 2j - 2)e_{j-1} + 4Ye_j,$$

odakle je

$$Ye_j = \frac{1}{4}\left(\lambda^2 - 2\lambda - (\lambda + 2j - 2)^2 - 2(\lambda + 2j - 2)\right)e_{j-1} = -j(\lambda + j - 1)e_{j-1}.$$

Iz dobivenih jednakosti nalazimo

$$(\lambda + 2k)e_k = He_k = [X, Y]e_k = XYe_k - YXe_k = XYe_k = -k(\lambda + k - 1)Xe_{k-1} = -k(\lambda + k - 1)e_k$$

pa slijedi

$$\lambda + 2k = -k\lambda - k^2 + k \qquad \Longrightarrow \qquad \lambda = -k.$$

Sve u svemu, imamo formule djelovanja operatora H, X i Y na vektore e_j :

$$\begin{array}{lll} He_j = (2j - k)e_j & \text{za} \quad j = 0, 1, \ldots, k; & \\ Xe_j = e_{j+1} & \text{za} \quad j = 0, 1, \ldots, k-1, & Xe_k = 0; \\ Ye_j = j(k - j + 1)e_{j-1} & \text{za} \quad j = 1, 2, \ldots, k, & Ye_0 = 0. \end{array}$$

Vektori $e_0, e_1, \ldots, e_k$ su linearno nezavisni, jer su to svojstveni vektori operatora H za međusobno različite svojstvene vrijednosti. Gornje formule pokazuju da je potprostor W razapet vektorima $e_0, e_1, \ldots, e_k$ invarijantan s obzirom na operatore H, X i Y. Kako je

$$\pi(A_1) = iH, \qquad \pi(A_2) = X - Y, \qquad \pi(A_3) = iX + iY,$$

slijedi da je potprostor W invarijantan s obzirom na operatore $\pi(A_1)$, $\pi(A_2)$ i $\pi(A_3)$, a kako je $\{A_1, A_2, A_3\}$ baza od $\mathfrak{su}(2)$, zaključujemo da je potprostor W invarijantan s obzirom na $\pi(A)$ za sve $A \in \mathfrak{su}(2)$, tj. W je $\pi-$invarijantan. Kako je po pretpostavci reprezentacija π ireducibilna, slijedi $W = V$. Dakle, $\{e_0, e_1, \ldots, e_k\}$ je baza prostora V. Dakle, ako je $\dim V = n$, onda je $k = n - 1$ pa dobivamo upravo formule iz iskaza teorema.

Na taj način dokazali smo da ako je π $n-$dimenzionalna ireducibilna reprezentacija Liejeve algebre $\mathfrak{su}(2)$, onda postoji baza $\{e_0, e_1, \ldots, e_{n-1}\}$ prostora reprezentacije na koju operatori

$$H = -i\pi(A_1), \qquad X = \frac{1}{2}\pi(A_2) - \frac{i}{2}\pi(A_3), \qquad Y = -\frac{1}{2}\pi(A_2) - \frac{i}{2}\pi(A_3)$$

djeluju po formulama iz iskaza teorema.

Neka je sada V $n-$dimenzionalni vektorski prostor s bazom $\{e_0, e_1, \ldots, e_{n-1}\}$ i neka su operatori $H, X, Y \in L(V)$ zadani formulama iz iskaza teorema. Tada se direktnim računom provjerava da vrijedi

$$[H, X] = 2X, \qquad [H, Y] = -2Y, \qquad [X, Y] = H.$$

Definiramo sada operatore $B_1, B_2, B_3 \in L(V)$ sljedećim formulama:

$$B_1 = iH, \qquad B_2 = X - Y, \qquad B_3 = iX + iY.$$

Tada se provjerava da vrijedi

$$[B_1, B_2] = 2B_3, \qquad [B_2, B_3] = 2B_1, \qquad [B_3, B_1] = 2B_2,$$

a odatle slijedi da je sa

$$\pi(\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \alpha_3 A_3) = \alpha_1 B_1 + \alpha_2 B_2 + \alpha_3 B_3, \qquad \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R},$$

zadana reprezentacija π Liejeve algebre $\mathfrak{su}(2)$ na vektorskom prostoru V. Treba još dokazati da je tako definirana reprezentacija π ireducibilna. Neka je $W \neq \{0\}$ $\pi-$invarijantni potprostor prostora V. Tada je W invarijantan s obzirom na operator H, pa slijedi da u potprostoru W postoji svojstven vektor operatora H. Slijedi da je $e_j \in W$ za neki $j \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$. Sada iz formula djelovanja operatora X i iz činjenice da je potprostor W invarijantan s obzirom na X slijedi da su $e_{j+1}, \ldots, e_{n-1} \in W$. Analogno, iz formula djelovanja operatora Y i iz činjenice da je potprostor W invarijantan s obzirom na operator Y slijedi da su i $e_{j-1}, \ldots, e_0 \in W$. Dakle, $\{e_0, e_1, \ldots, e_{n-1}\} \subseteq W$, pa zaključujemo da je $W = V$. Dakle, reprezentacija π je ireducibilna.

Napokon, ako su π i σ ireducibilne reprezentacije Liejeve algebre $\mathfrak{su}(2)$ na prostorima V i W i ako je $\dim V = \dim W = n - 1$, onda prema prvom dijelu dokaza postoji baza $\{e_0, e_1, \ldots, e_{n-1}\}$ prostora V takva da za operatore $H = -i\pi(A_1)$, $X = \frac{1}{2}\pi(A_2) - \frac{i}{2}\pi(A_3)$ i $Y = -\frac{1}{2}\pi(A_2) - \frac{i}{2}\pi(A_3)$ vrijede formule iz iskaza teorema. Iz istog razloga postoji baza $\{f_0, f_1, \ldots, f_{n-1}\}$ prostora W na koju operatori $H' = -i\sigma(A_1)$, $X' = \frac{1}{2}\sigma(A_2) - \frac{i}{2}\sigma(A_3)$ i $Y' = -\frac{1}{2}\sigma(A_2) - \frac{i}{2}\sigma(A_3)$ djeluju na isti način:

$$\begin{array}{lll} H'f_j = (2j - n + 1)f_j & \text{za} \quad j = 0, 1, \ldots, n-1; & \\ X'f_j = f_{j+1} & \text{za} \quad j = 0, 1, \ldots, n-2, & X'f_{n-1} = 0; \\ Y'f_j = j(n-j)f_{j-1} & \text{za} \quad j = 1, 2, \ldots, n-1, & Y'f_0 = 0. \end{array}$$

Neka je $T : V \to W$ izomorfizam vektorskih prostora zadan sa $Te_j = f_j$, $j = 0, 1, \ldots, n-1$. Tada očito vrijedi

$$TH = H'T, \qquad TX = X'T, \qquad TY = Y'T.$$

Imamo

$$\pi(A_1) = iH, \quad \pi(A_2) = X - Y, \quad \pi(A_3) = iX + iY,$$

$$\sigma(A_1)=iH', \quad \sigma(A_2)=X'-Y', \quad \sigma(A_3)=iX'+iY'$$

pa iz gornjih jednakosti slijedi

$$T\pi(A_j)=\sigma(A_j)T \qquad \text{za} \qquad j=1,2,3.$$

Kako je $\{A_1,A_2,A_3\}$ baza realnog vektorskog prostora $\mathfrak{su}(2)$ i kako su π i σ $\mathbb{R}-$linearna preslikavanja, zaključujemo da je

$$T\pi(A)=\sigma(A)T \qquad \forall A\in\mathfrak{su}(2).$$

Time je dokazano da su ireducibilne reprezentacije π i σ ekvivalentne čim imaju istu dimenziju. Dakle, teorem 4.2.7. u potpunosti je dokazan.

A priori nije jasno da je svaka ireducibilna konačnodimenzionalna reprezentacija Liejeve algebre $\mathfrak{su}(2)$ oblika $\tilde{\rho}$ za neku neprekidnu ireducibilnu reprezentaciju ρ grupe $SU(2)$. Sada ćemo za svaki prirodan broj n konstruirati $n-$dimenzionalnu neprekidnu ireducibilnu reprezentaciju grupe $SU(2)$.

Neka je $\mathcal{P}$ vektorski prostor svih polinoma dvije varijable s kompleksnim koeficijentima. Za svaku matricu $A\in GL(2,\mathbb{C})$ definiramo linearan operator $\pi(A)$ na prostoru $\mathcal{P}$ na sljedeći način:

$$(\pi(A)P)(x,y)=P(\alpha x+\gamma y,\beta x+\delta y), \qquad A=\begin{bmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{bmatrix}\in GL(2,\mathbb{C}).$$

Lako se provjeri da je tada $\pi(AB)=\pi(A)\pi(B)$, $A,B\in GL(2,\mathbb{C})$, i da je $\pi(I_2)=I_{\mathcal{P}}$. Dakle, π je reprezentacija grupe $GL(2,\mathbb{C})$ na vektorskom prostoru $\mathcal{P}$. Označimo sa $\mathcal{P}_n$ potprostor od $\mathcal{P}$ svih homogenih polinoma stupnja n. Tada je $\dim\mathcal{P}_n=n+1$ jer ako stavimo $P_{n,k}(x,y)=x^ky^{n-k}$ onda je očito $\{P_{n,0},P_{n,1},\ldots,P_{n,n}\}$ baza od $\mathcal{P}_n$. Nadalje, jasno je da je $\mathcal{P}_n$ $\pi-$invarijantan potprostor od $\mathcal{P}$ i da je subreprezentacija $\pi_{\mathcal{P}_n}$ neprekidna. Označimo sa π_n restrikciju te subreprezentacije na podgrupu $SU(2)$ grupe $GL(2,\mathbb{C})$. Dakle,

$$(\pi_n(A)P)(x,y)=P(\alpha x-\overline{\beta}y,\beta x+\overline{\alpha}y), \qquad A=\begin{bmatrix}\alpha & \beta\\ -\overline{\beta} & \overline{\alpha}\end{bmatrix}\in SU(2).$$

Izračunajmo sada operatore $\tilde{\pi}_n(A_1)$, $\tilde{\pi}_n(A_2)$ i $\tilde{\pi}_n(A_3)$. Imamo

$$e^{tA_1}=\begin{bmatrix}e^{it} & 0\\ 0 & e^{-it}\end{bmatrix}, \qquad e^{tA_2}=\begin{bmatrix}\cos t & \sin t\\ -\sin t & \cos t\end{bmatrix} \qquad \text{i} \qquad e^{tA_3}=\begin{bmatrix}\cos t & i\sin t\\ i\sin t & \cos t\end{bmatrix}.$$

Stoga je za $P\in\mathcal{P}_n$

$$\left(\rho\left(e^{tA_1}\right)P\right)(x,y)=P\left(e^{it}x,e^{-it}y\right),$$
$$\left(\rho\left(e^{tA_2}\right)P\right)(x,y)=P(x\cos t-y\sin t,x\sin t+y\cos t),$$
$$\left(\rho\left(e^{tA_3}\right)P\right)(x,y)=P(x\cos t+iy\sin t,ix\sin t+y\cos t).$$

Odatle dobivamo

$$(\tilde{\pi}_n(A_1)P)(x,y)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}P\left(e^{it}x,e^{-it}y\right)\Big|_{t=0}=ix\frac{\partial}{\partial x}P(x,y)-iy\frac{\partial}{\partial y}P(x,y),$$

$$(\tilde{\pi}_n(A_2)P)(x,y)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}P(x\cos t-y\sin t,x\sin t+y\cos t)\Big|_{t=0}=-y\frac{\partial}{\partial x}P(x,y)+x\frac{\partial}{\partial y}P(x,y),$$

$$(\tilde{\pi}_n(A_3)P)(x,y) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}P(x\cos t + iy\sin t, ix\sin t + y\cos t)\bigg|_{t=0} = iy\frac{\partial}{\partial x}P(x,y) + ix\frac{\partial}{\partial y}P(x,y).$$

Stavimo kao i prije

$$H = -i\tilde{\pi}_n(A_1), \qquad X = \frac{1}{2}\tilde{\pi}_n(A_2) - \frac{i}{2}\tilde{\pi}_n(A_3) \qquad \text{i} \qquad Y = -\frac{1}{2}\tilde{\pi}_n(A_2) - \frac{i}{2}\tilde{\pi}_n(A_3).$$

Prema gornjem računu tada imamo na prostoru $\mathcal{P}_n$:

$$H = x\frac{\partial}{\partial x} - y\frac{\partial}{\partial y}, \qquad X = x\frac{\partial}{\partial y} \qquad \text{i} \qquad Y = y\frac{\partial}{\partial x}.$$

Ti operatori na bazu $\{P_{n,k};\ k = 0,1,\ldots,n\}$ prostora $\mathcal{P}_n$ $(P_{n,k}(x,y) = x^k y^{n-k})$ djeluju na sljedeći način:

$$HP_{n,k} = (2k-n)P_{n,k}, \qquad XP_{n,k} = (n-k)P_{n,k+1} \qquad \text{i} \qquad YP_{n,k} = kP_{n,k-1}.$$

Posebno, vidimo da su vektori baze svojstveni vektori operatora H za međusobno različite svojstvene vrijednosti.

Pretpostavimo sada da je $W \neq \{0\}$ π_n-invarijantan potprostor od $\mathcal{P}_n$. Tada je prema tvrdnji (b) teorema 4.2.5. potprostor W $\tilde{\pi}_n-$invarijantan, dakle, W je invarijantan s obzirom na operatore H, X i Y. Slijedi da W sadrži neki od svojstvenih vektora $P_{n,k}$ operatora H. Kako je W invarijantan i s obzirom na operator X, slijedi da W sadrži i vektore $P_{n,k+1}, P_{n,k+2}, \ldots, P_{n,n}$, a zbog invarijantnosti s obzirom na operator Y sadrži i vektore $P_{n,k-1}, P_{n,k-2}, \ldots, P_{n,0}$. To znači da W sadrži sve vektore baze, odnosno, vrijedi $W = \mathcal{P}_n$. Time je dokazana tvrdnja (a) sljedećeg teorema:

Teorem 4.2.8. (a) *Reprezentacije* π_n, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, *grupe* $SU(2)$ *su ireducibilne.*

(b) *Ako je* π *konačnodimenzionalna neprekidna ireducibilna reprezentacija grupe* $SU(2)$ *na prostoru* V *i* $\dim V = n$ *onda je* $\pi \simeq \pi_{n-1}$.

Dokaz tvrdnje (b). Prema tvrdnji (c) teorema 4.2.5. $\tilde{\pi}$ i $\tilde{\pi}_{n-1}$ su ireducibilne reprezentacije Liejeve algebre $\mathfrak{su}(2)$ na prostorima V i $\mathcal{P}_{n-1}$. Nadalje, $\dim V = n = \dim \mathcal{P}_{n-1}$. Iz teorema 4.2.7. slijedi da je $\tilde{\pi} \simeq \tilde{\pi}_{n-1}$. Sada pomoću tvrdnje (e) teorema 4.2.5. zaključujemo da je $\pi \simeq \pi_{n-1}$.

Zadatak 4.2.14. *Konstruirajte bazu* $\{e_0, e_1, \ldots, e_n\}$ *prostora* $\mathcal{P}_n$ *takvu da operatori*

$$H = -i\tilde{\pi}_n(A_1), \qquad X = \frac{1}{2}\tilde{\pi}_n(A_2) - \frac{i}{2}\tilde{\pi}_n(A_3), \qquad Y = -\frac{1}{2}\tilde{\pi}_n(A_2) - \frac{i}{2}\tilde{\pi}_n(A_3)$$

djeluju kao u teoremu 4.2.7:

$$\begin{array}{lll} He_j = (2j-n)e_j & \textit{za} \ \ j = 0,1,\ldots,n; & \\ Xe_j = e_{j+1} & \textit{za} \ \ j = 0,1,\ldots,n-1, & Xe_n = 0; \\ Ye_j = j(n-j+1)e_{j-1} & \textit{za} \ \ j = 1,2,\ldots,n, & Ye_0 = 0. \end{array}$$

Teorem 4.2.9. *Svaka neprekidna konačnodimenzionalna ireducibilna reprezentacija grupe* $SO(3)$ *je neparne dimenzije. Za svaki neparan prirodan broj* n *postoji točno jedna klasa ekvivalencije neprekidnih ireducibilnih konačnodimenzionalnih reprezentacija grupe* $SO(3)$ *dimenzije* n.

Dokaz: Izračunajmo $\pi_n(-I_2)$ za reprezentacije π_n grupe $SU(2)$ konstruirane prije iskaza teorema 4.2.8. Za $P \in \mathcal{P}$ imamo po definiciji reprezentacije π_n :

$$[\pi_n(-I_2)P](x,y) = P(-x,-y) = (-1)^n P(x,y).$$

Dakle,

$$\pi_n(-I_2) = (-1)^n I_{\mathcal{P}_n}.$$

Prema propoziciji 4.2.3. reprezentacija π_n grupe $SU(2)$ nastaje iz reprezentacije kvocijentne grupe $SU(2)/\{I_2, -I_2\} \simeq SO(3)$ ako i samo ako je $\pi_n(-I_2) = I_{\mathcal{P}_n}$, dakle ako i samo ako je $(-1)^n = 1$, tj. ako i samo ako je n paran broj, a to znači ako i samo ako je dimenzija reprezentacije π_n neparna.

Zadatak 4.2.15. *Neka su π i σ neprekidne reprezentacije grupe $SU(2)$ na konačnodimenzionalnim prostorima V i W. Dokažite da za svaki $A \in \mathfrak{su}(2)$ vrijedi*

$$(\pi \otimes \sigma)\tilde{}(A) = \tilde{\pi}(A) \otimes I_W + I_V \otimes \tilde{\sigma}(A).$$

Zadatak 4.2.16. *Neka su π i σ konačnodimenzionalne neprekidne ireducibilne reprezentacije grupe $SU(2)$ na vektorskim prostorima V i W i neka je* $\dim V = n+1 \geq k+1 = \dim W$. *Dokažite da postoje $\pi \otimes \sigma-$invarijatni potprostori U_j, $j = n-k, n-k+2, n-k+4, \ldots, n+k-2, n+k$, takvi da je* $\dim U_j = j+1$ *i da su sve subreprezentacije $(\pi \otimes \sigma)_{U_j}$ ireducibilne. Dakle,*

$$\pi_n \otimes \pi_k \simeq \pi_{n-k} \dotplus \pi_{n-k+2} \dotplus \pi_{n-k+4} \dotplus \cdots\cdots \pi_{n+k-2} \dotplus \pi_{n+k}.$$

Uputa: Prema teoremu 4.2.7. postoji baza $\{e_0, e_1, \ldots, e_n\}$ prostora V i baza $\{f_0, f_1, \ldots, f_k\}$ prostora W koje su sastavljene od svojstvenih vektora operatora $H' = -i\pi(A_1)$, odnosno $H'' = -i\sigma(A_1)$, i da vrijedi

$$\begin{array}{lll} H'e_j = (2j-n)e_j & \text{za} & j = 0, 1, \ldots, n; \\ H''f_i = (2i-k)f_i & \text{za} & i = 0, 1, \ldots, k; \end{array}$$

Iz zadatka 4.2.15. slijedi da za operator $H = -i(\pi \otimes \sigma)(A_1)$ vrijedi $H = H' \otimes I_W + I_V \otimes H''$. Odatle izvedite da je

$$H(e_j \otimes f_i) = (2j + 2i - n - k)(e_j \otimes f_i), \qquad 0 \leq j \leq n, \quad 0 \leq i \leq k.$$

Budući da je $\{e_j \otimes f_i;\ 0 \leq j \leq n,\ 0 \leq i \leq k\}$ baza prostora $U = V \otimes W$, zaključite da je spektar operatora H jednak $Sp(H) = \{-n-k, -n-k+2, \ldots, n+k-2, n+k\}$ i da je za $\ell \in Sp(H)$

$$\{e_j \otimes f_i;\ 0 \leq j \leq n, 0 \leq i \leq k,\ \ell = 2j + 2i - n - k\}$$

baza svojstvenog potprostora $Z_\ell = \{u \in U;\ Hu = \ell u\}$ operatora H za svojstvenu vrijednost ℓ. Odredite dimenzije potprostora Z_ℓ, a odatle pomoću potpune reducibilnosti izvedite tvrdnju.

U sljedeća tri zadatka σ_n je neprekidna ireducibilna reprezentacija grupe $SU(2)$ dimenzije n i χ_n je njen karakter. Napomenimo da je $\sigma_n \simeq \pi_{n-1}$ uz oznake iz teorema 4.2.8.

Zadatak 4.2.17. *Neka je $B \in SU(2)$ takva da je $\sigma(B)$ rotacija oko osi kroz ishodište u $\mathbb{R}^3$ za kut $\varphi \in [0, 2\pi\rangle$ ($\sigma : SU(2) \to SO(3)$ je epimorfizam iz propozicije 4.2.2.). Dokažite da je tada*

$$\chi_n(B) = \frac{\sin\left(\frac{n\varphi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)}.$$

Uputa: Dokažite da je tada element B u grupi $SU(2)$ konjugiran sa $C = e^{\varphi A_1}$ ili sa $D = e^{(\varphi+2\pi)A_1}$. Zatim izračunajte trag operatora $\pi_n(C)$ i $\pi_n(D)$ koristeći bazu iz teorema 4.2.7.

Zadatak 4.2.18. *Riješite zadatak 4.2.16. koristeći zadatak 4.2.17. i jednakost $\chi_{\pi_n \otimes \pi_k} = \chi_n \cdot \chi_k$.*

Zadatak 4.2.19. *Neka je V prostor reprezentacije σ_n i $S, A : V \otimes V \to V \otimes V$ jedinstveni linearni operatori sa svojstvima $S(v \otimes w) = v \otimes w + w \otimes v$ i $A(v \otimes w) = v \otimes w - w \otimes v$, $\forall v, w \in V$. Dokažite da su njihova područja vrijednosti $R(S)$ i $R(A)$ $\sigma_n \otimes \sigma_n-$invarijantni potprostori i da vrijedi $V \otimes V = R(S) \dotplus R(A)$. Pronađite rastav dviju subreprezentacija $(\sigma_n \otimes \sigma_n)_{R(S)}$ i $(\sigma_n \otimes \sigma_n)_{R(A)}$ u direktnu sumu ireducibilnih.*

4.3 Sferni harmonici

Promatrat ćemo sada funkcije na jediničnoj sferi S^2 u $\mathbb{R}^3$:

$$S^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3;\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}.$$

Polarne koordinate (r, ϑ, φ), $r \geq 0$, $\vartheta \in [0, \pi]$, $\varphi \in [0, 2\pi\rangle$, na prostoru $\mathbb{R}^3$ zadane su sa

$$x_1 = r \sin \vartheta \cos \varphi, \qquad x_2 = r \sin \vartheta \sin \varphi, \qquad x_3 = r \cos \vartheta.$$

Ako iz $\mathbb{R}^3$ izuzmemo npr. pozitivni dio treće osi, prijelaz s Kartezijevih na polarne koordinate je klase C^∞. Standardni integral na $\mathbb{R}^3$ u polarnim koordinatama postaje

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} F \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 \mathrm{d}x_3 = \int_0^{+\infty} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} F r^2 \sin \vartheta \mathrm{d}r \mathrm{d}\vartheta \mathrm{d}\varphi.$$

Odatle dobivamo koordinate (ϑ, φ), $\vartheta \in [0, \pi]$, $\varphi \in [0, 2\pi\rangle$, na sferi S^2, i integral na S^2 koji normiramo tako da površina sfere S^2 bude jednaka 1 :

$$f \mapsto \frac{1}{4\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} f(\vartheta, \varphi) \sin \vartheta \mathrm{d}\vartheta \mathrm{d}\varphi.$$

Neka je $L_2(S^2)$ Hilbertov prostor (klasa) kvadratno integrabilnih kompleksnoznačnih funkcija na sferi S^2 sa skalarnim produktom

$$(f|g) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} f(\vartheta, \varphi) \overline{g(\vartheta, \varphi)} \sin \vartheta \mathrm{d}\vartheta \mathrm{d}\varphi.$$

Laplaceov operator ili **Laplasijan** Δ je diferencijalni operator na $\mathbb{R}^3$ definiran sa

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}.$$

Prijelazom na polarne koordinate dobivamo

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \Delta_{S^2}, \tag{4.9}$$

gdje je Δ_{S^2} tzv. **sferni Laplasijan**:

$$\Delta_{S^2} = \frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2} + \cot \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} + \frac{1}{(\sin \vartheta)^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}. \tag{4.10}$$

Svaka matrica $A \in SO(3)$ djeluje kao rotacija prostora $\mathbb{R}^3$. Za funkciju $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{C}$ i za $A \in SO(3)$ definiramo funkciju $\rho(A) f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{C}$ sa

$$(\rho(A) f)(x) = f(A^{-1} x), \qquad x \in \mathbb{R}^3.$$

Tada očito vrijedi

$$\rho(A)\rho(B) f = \rho(AB) f \qquad \forall A, B \in SO(3) \quad \text{i za svaku funkciju} \quad f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{C}.$$

Restrikcije operatora $\rho(A)$ na invarijantne potprostore funkcija označavat ćemo također sa $\rho(A)$; npr. na prostoru $L_2(\mathbb{R}^3)$ ili na njegovim gustim potprostorima $C_0(\mathbb{R}^3)$ i $C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$.

Uvest ćemo sada pojam harmonijskih polinoma i vidjeti da se restrikcijama operatora $\rho(A)$, $A \in SO(3)$, na prostore homogenih harmonijskih polinoma dobivaju sve ireducibilne konačnodimenzionalne reprezentacije grupe $SO(3)$.

Harmonijska funkcija je funkcija $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{C}$ koja je klase C^2 i vrijedi

$$\Delta f = 0.$$

Za svaki $\ell \in \mathbb{Z}_+$ označimo sa $\mathcal{P}^\ell$ kompleksan vektorski prostor svih homogenih kompleksnoznačnih polinoma na $\mathbb{R}^3$ stupnja ℓ. Nadalje, neka je $\mathcal{H}^\ell$ potprostor od $\mathcal{P}^\ell$ svih **harmonijskih polinoma** tj. svih $P \in \mathcal{P}^\ell$ takvih da je $\Delta P = 0$.

Zadatak 4.3.1. *Dokažite da je*

$$\dim \mathcal{P}^\ell = \frac{(\ell+1)(\ell+2)}{2}.$$

Zadatak 4.3.2. *Dokažite da je za svaki $\ell \in \mathbb{Z}_+$ $\Delta|\mathcal{P}^\ell$ surjekcija sa $\mathcal{P}^\ell$ na $\mathcal{P}^{\ell-2}$. Pri tome podrazumijevamo da je $\mathcal{P}^{-1} = \mathcal{P}^{-2} = \{0\}$.*

Uputa: Dokažite direktnim računom da su polinomi oblika $x \mapsto x_3^{q_3}$, $x \mapsto x_1 x_3^{q_3}$ i $x \mapsto x_2 x_3^{q_3}$, $q_3 \in \mathbb{Z}_+$, u slici operatora $\Delta|\mathcal{P}$. Zatim pomoću formule

$$\Delta(x_1^{q_1} x_2^{q_2} x_3^{q_3}) = q_1(q_1-1)x_1^{q_1-2}x_2^{q_2}x_3^{q_3} + q_2(q_2-1)x_1^{q_1}x_2^{q_2-2}x_3^{q_3} + q_3(q_3-1)x_1^{q_1}x_2^{q_2}x_3^{q_3-2}$$

dokažite da iz surjektivnosti $\Delta|\mathcal{P}^\ell : \mathcal{P}^\ell \to \mathcal{P}^{\ell-2}$ slijedi surjektivnost $\Delta|\mathcal{P}^{\ell+2} : \mathcal{P}^{\ell+2} \to \mathcal{P}^\ell$. Napokon, uočite da je tvrdnja trivijalna za $\ell = 0$ i $\ell = 1$.

Zadatak 4.3.3. *Dokažite da je* $\dim \mathcal{H}^\ell = 2\ell + 1$ $\forall \ell \in \mathbb{Z}_+$.

Uputa: Iskoristite zadatke 4.3.1. i 4.3.2.

Ako je $P \in \mathcal{P}$ i $A \in SO(3)$ očito je i $\rho(A)P \in \mathcal{P}$. Štoviše, ako je $P \in \mathcal{P}^\ell$ i $A \in SO(3)$, onda je i $\rho(A)P \in \mathcal{P}^\ell$. Iz definicije ρ jasno je da je za svaki $P \in \mathcal{P}^\ell$ preslikavanje $A \mapsto \rho(A)P$ sa $SO(3)$ u $\mathcal{P}^\ell$ neprekidno. Prema tome, $A \mapsto \rho(A)|\mathcal{P}^\ell$ je reprezentacija grupe $SO(3)$ na konačnodimenzionalnom prostoru $\mathcal{P}^\ell$.

Propozicija 4.3.1. *Potprostor $\mathcal{H}^\ell$ od $\mathcal{P}^\ell$ je $\rho-$invarijantan.*

Dokaz: Neka je $A \in SO(3)$ i neka su α_{ij} matrični elementi matrice A. Za točku $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ označimo sa $y = (y_1, y_2, y_3)$ točku $A^{-1}x$, dakle,

$$y_k = \sum_{j=1}^{3} \alpha_{jk} x_j.$$

Za funkciju $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{C}$ klase C^2 i za $1 \le i \le 3$ imamo

$$\frac{\partial}{\partial x_i} f(A^{-1}x) = \frac{\partial}{\partial x_i} f\left(\sum_{j=1}^{3} \alpha_{j1} x_j, \sum_{j=1}^{3} \alpha_{j2} x_j, \sum_{j=1}^{3} \alpha_{j3} x_j\right) = \sum_{k=1}^{3} \alpha_{ik} \frac{\partial}{\partial y_k} f(y_1, y_2, y_3).$$

Odavde je

$$\Delta f(A^{-1}x) = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} f(A^{-1}x) = \sum_{i,j,k=1}^{3} \alpha_{ij}\alpha_{ik} \frac{\partial^2}{\partial y_j \partial y_k} f(y_1, y_2, y_3).$$

Međutim, A je ortogonalna matrica pa je

$$\sum_{i=1}^{3} \alpha_{ik}\alpha_{ij} = \delta_{kj}.$$

Slijedi

$$\Delta f(A^{-1}x) = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial^2 f}{\partial y_j^2}(y) = (\Delta f)(A^{-1}x).$$

Prema tome, ako je P harmonijski polinom, onda je za svaku $A \in SO(3)$ polinom $\rho(A)P = P \circ A^{-1}$ također harmonijski.

Subreprezentaciju $A \mapsto \rho(A)|\mathcal{H}^\ell$ označavat ćemo sa ρ^ℓ.

Propozicija 4.3.2. *Reprezentacija ρ^ℓ grupe $SO(3)$ je ireducibilna za svaki $\ell \in \mathbb{Z}_+$. Ta je reprezentacija ekvivalentna reprezentaciji $\pi_{2\ell}$ iz odjeljka* 4.2.

Dokaz: Lako se vidi da je homogeni polinom $P_\ell(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + ix_2)^\ell$ stupnja ℓ harmonijski. Neka je $\sigma : SU(2) \to SO(3)$ epimorfizam iz odjeljka 5.2. Promatrajmo reprezentaciju $\rho^\ell \circ \sigma$ grupe $SU(2)$ na prostoru $\mathcal{H}^\ell$. Tada je

$$\sigma\left(\begin{bmatrix} \mathrm{e}^{it} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-it} \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \cos 2t & -\sin 2t & 0 \\ \sin 2t & \cos 2t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

pa nalazimo

$$(\rho^\ell \circ \sigma)\left(\begin{bmatrix} \mathrm{e}^{it} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-it} \end{bmatrix}\right) P_\ell = \mathrm{e}^{-2i\ell t} P_\ell.$$

Odatle slijedi da je P_ℓ svojstveni vektor operatora

$$(\rho^\ell \circ \sigma)\left(\begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\rho^\ell \circ \sigma)\left(\begin{bmatrix} \mathrm{e}^{it} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-it} \end{bmatrix}\right)\Bigg|_{t=0}$$

sa svojstvenom vrijednošću $-2i\ell$, dakle, svojstveni vektor operatora

$$H = -i(\rho^\ell \circ \sigma)\left(\begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}\right)$$

sa svojstvenom vrijednošću -2ℓ. Prema teoremu 4.2.7. u rastavu reprezentacije $\rho^\ell \circ \sigma$ u direktnu sumu ireducibilnih reprezentacija pojavljuje se $(2\ell+1)-$dimenzionalna reprezentacija $\pi_{2\ell}$. No kako je $\dim \mathcal{H}^\ell = 2\ell + 1$, slijedi tvrdnja propozicije.

Na taj način realizirali smo sve ireducibilne reprezentacije grupe $SO(3)$ na prostorima homogenih harmonijskih polinoma na $\mathbb{R}^3$.

Propozicija 4.3.3. *Za svaki $\ell \geq 2$ je*

$$\mathcal{P}_\ell = \mathcal{H}_\ell \dotplus r^2 \mathcal{P}^{\ell-2}.$$

Pri tome za polinom P $r^2 P$ označava polinom $(x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)P(x_1, x_2, x_3)$.

Dokaz: Očito je preslikavanje $P \mapsto r^2 P$ injektivno. Prema tome je $\dim r^2 \mathcal{P}^{\ell-2} = \dim \mathcal{P}^{\ell-2}$. Iz zadataka 4.3.1. i 4.3.3. znamo da je

$$\dim \mathcal{P}^\ell = \dim \mathcal{H}^\ell + \dim \mathcal{P}^{\ell-2}.$$

Prema tome, treba samo dokazati da je $\mathcal{H}^\ell \cap r^2 \mathcal{P}^{\ell-2} = \{0\}$.

Zadatak 4.3.4. *Dokažite da za svaki* $P \in \mathcal{P}^\ell$ *vrijedi* **Eulerov identitet***:*

$$(x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + x_3 \frac{\partial}{\partial x_3})P = \ell P.$$

Zadatak 4.3.5. *Pomoću zadatka 4.3.4. dokažite da za svaki* $P \in \mathcal{P}^\ell$ *i svaki* $k \in \mathbb{N}$ *vrijedi*

$$\Delta(r^{2k}P) = 2k(2\ell + 2k + 1)r^{2k-2}P + r^{2k}\Delta P.$$

Pretpostavimo da postoji $P \in \mathcal{H}^\ell \cap r^2\mathcal{P}^{\ell-2}$ različit od nule. Neka je $k \in \mathbb{N}$ najveći takav da postoji $Q \in \mathcal{P}^{\ell-2k}$ takav da je $P = r^{2k}Q$. Tada po zadatku 4.3.5. imamo

$$0 = \Delta P = \Delta(r^{2k}Q) = 2k(2\ell + 2k + 1)r^{2k-2}Q + r^{2k}\Delta Q.$$

Odatle je

$$Q = -\frac{r^2}{2k(2\ell + 2k + 1)}\Delta Q.$$

To znači da je polinom Q u prstenu polinoma $\mathcal{P}$ djeljiv sa r^2, a to je nemoguće po izboru k. Ova kontradikcija pokazuje da je $\mathcal{H}^\ell \cap r^2\mathcal{P}^{\ell-2} = \{0\}$.

Odatle neposredno slijedi:

Korolar 4.3.4. *Vrijedi*

$$\mathcal{P}^\ell = \begin{cases} \mathcal{H}^\ell \dotplus r^2\mathcal{H}^{\ell-2} \dotplus \cdots \dotplus r^\ell\mathcal{H}^0 & \textit{ako je} \quad \ell \quad \textit{paran} \\ \\ \mathcal{H}^\ell \dotplus r^2\mathcal{H}^{\ell-2} \dotplus \cdots \dotplus r^{\ell-1}\mathcal{H}^1 & \textit{ako je} \quad \ell \quad \textit{neparan.} \end{cases}$$

Uočimo sada da je homogeni polinom na $\mathbb{R}^3$ potpuno određen svojom restrikcijom na jediničnu sferu S^2. **Sferni harmonici** su funkcije na sferi S^2 koje su restrikcije harmonijskih polinoma. Za svaki $\ell \in \mathbb{Z}_+$ stavimo

$$\tilde{\mathcal{H}}^\ell = \{P|S^2;\ P \in \mathcal{H}^\ell\}.$$

Tada je $\tilde{\mathcal{H}}^\ell$ $(2\ell+1)-$dimenzionalan vektorski prostor. Njegove elemente zovemo **homogeni sferni harmonici stupnja** ℓ. Naravno, sferni harmonici su neprekidne funkcije na sferi S^2. Dakle, $\tilde{\mathcal{H}}^\ell$ su potprostori od $C(S^2)$, a time i od $L_2(S^2)$. Nadalje, označimo sa $\tilde{\mathcal{P}}^\ell$ potprostor od $C(S^2) \subseteq L_2(S^2)$ koji se sastoji od restrikcija homogenih polinoma $P \in \mathcal{P}^\ell$. Prema korolaru 4.3.4. imamo

$$\tilde{\mathcal{P}}^\ell = \tilde{\mathcal{H}}^\ell \dotplus \tilde{\mathcal{H}}^{\ell-2} \dotplus \cdots \tag{4.11}$$

pri čemu je posljednji član $\tilde{\mathcal{H}}^0$ ako je ℓ paran, a $\tilde{\mathcal{H}}^1$ ako je ℓ neparan.

Preko izomorfizma restrikcije na prostor $\tilde{\mathcal{H}}^\ell$ s prostora $\mathcal{H}^\ell$ prenosimo reprezentaciju ρ^ℓ koju ćemo i dalje označavati sa ρ^ℓ. Te su reprezentacije unitarne u odnosu na skalarni produkt iz Hilbertovog prostora $L_2(S^2)$ jer je mjera μ invarijantna u odnosu na rotacije.

Zadatak 4.3.6. *Neka je*

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_3 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

standardna baza Liejeve algebre $\mathfrak{so}(3)$. *Dokažite da za svaku* $f \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ *vrijedi*

$$\frac{d}{dt}\left(\rho\left(e^{tB_1}\right) f\right)(x)\Big|_{t=0} = \left(x_3\frac{\partial}{\partial x_2} - x_2\frac{\partial}{\partial x_3}\right) f(x),$$
$$\frac{d}{dt}\left(\rho\left(e^{tB_2}\right) f\right)(x)\Big|_{t=0} = \left(x_1\frac{\partial}{\partial x_3} - x_3\frac{\partial}{\partial x_1}\right) f(x),$$
$$\frac{d}{dt}\left(\rho\left(e^{tB_3}\right) f\right)(x)\Big|_{t=0} = \left(x_2\frac{\partial}{\partial x_1} - x_1\frac{\partial}{\partial x_2}\right) f(x).$$

Zadatak 4.3.7. *Iz zadatka 4.3.6. izvedite da za reprezentaciju* ρ^ℓ *na prostoru* $\tilde{\mathcal{H}}^\ell$ *u polarnim koordinatama na* S^2 *vrijedi*

$$\rho^\ell(B_1) = \sin\varphi\frac{\partial}{\partial\vartheta} + \cos\varphi\cot\vartheta\frac{\partial}{\partial\varphi},$$
$$\rho^\ell(B_2) = -\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\vartheta} + \sin\varphi\cot\vartheta\frac{\partial}{\partial\varphi},$$
$$\rho^\ell(B_3) = -\frac{\partial}{\partial\varphi}.$$

Budući da su reprezentacije ρ^ℓ unitarne, gornji operatori su antihermitski. Definiramo hermitske operatore množenjem sa i.

$$J_1 = i\rho^\ell(B_1) = i\left(\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\vartheta} + \cos\varphi\cot\vartheta\frac{\partial}{\partial\varphi}\right),$$
$$J_2 = i\rho^\ell(B_2) = i\left(-\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\vartheta} + \sin\varphi\cot\vartheta\frac{\partial}{\partial\varphi}\right),$$
$$J_3 = i\rho^\ell(B_3) = -i\frac{\partial}{\partial\varphi}. \tag{4.12}$$

Nadalje, kao i u odjeljku 5.2. definiramo operatore

$$J_\pm = J_1 \pm iJ_2 = e^{\pm i\varphi}\left(\pm\frac{\partial}{\partial\vartheta} + i\cot\vartheta\frac{\partial}{\partial\varphi}\right). \tag{4.13}$$

Nadalje, definiramo Casimirov operator (također hermitski)

$$C = J_1^2 + J_2^2 + J_3^2 = J_+J_- + J_3^2 - J_3.$$

Zadatak 4.3.8. *Dokažite da za* $\ell \in \mathbb{Z}_+$ *na prostoru* $\tilde{\mathcal{H}}^\ell$ *vrijedi* $C = -\Delta_{S^2}$, *tj.*

$$\Delta_{S^2} = \rho^\ell(B_1)^2 + \rho^\ell(B_2)^2 + \rho^\ell(B_3)^2.$$

Za $P \in \mathcal{P}^\ell$ možemo u polarnim koordinatama pisati

$$P(r,\vartheta,\varphi) = r^\ell Y(\vartheta,\varphi), \qquad \text{gdje je} \quad Y \in \tilde{\mathcal{P}}^\ell.$$

Pomoću formule (4.9) nalazimo da je

$$\Delta P = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \Delta_{S^2} Y = -\ell(\ell+1)Y.$$

To pokazuje da je

$$\Delta_{S^2}|\tilde{\mathcal{H}}^\ell = -\ell(\ell+1)I_{\tilde{\mathcal{H}}^\ell}.$$

Drugim riječima, da je prostor $\tilde{\mathcal{H}}^\ell$ sadržan u svojstvenom potprostoru operatora Δ_{S^2} za svojstvenu vrijednost $-\ell(\ell+1)$. Primijetimo da je $\ell(\ell+1) \neq \ell'(\ell'+1)$ ako su $\ell, \ell' \in \mathbb{Z}_+$ i $\ell \neq \ell'$. Prema tome, prostori $\tilde{\mathcal{H}}^\ell$ sadržani su u svojstvenim potprostorima operatora Δ_{S^2} za različite svojstvene vrijednosti.

Zadatak 4.3.9. *Dokažite da za svake dvije funkcije f, g iz sume prostora $\tilde{\mathcal{H}}^\ell$, $\ell \in \mathbb{Z}_+$, vrijedi*

$$(\Delta_{S^2} f|g) = (f|\Delta_{S^2} g)$$

Uputa: Koristite zadatak 4.3.8.

Zadatak 4.3.10. *Pomoću zadatka 4.3.9. dokažite da su potprostori $\tilde{\mathcal{H}}^\ell$ međusobno ortogonalni u Hilbertovom prostoru $L_2(S^2)$.*

Teorem 4.3.5. *Vrijedi*

$$L_2(S^2) = \bigoplus_{\ell \in \mathbb{Z}_+} \tilde{\mathcal{H}}^\ell.$$

Dokaz: Već znamo da su potprostori $\tilde{\mathcal{H}}^\ell$ međusobno ortogonalni. Budući da je prostor neprekidnih funkcija $C(S^2)$ gust u $L^2(S^2)$, da dokažemo tvrdnju dovoljno je dokazati da je svaka neprekidna funkcija na S^2 uniformni limes suma funkcija iz $\tilde{\mathcal{H}}^\ell$, $\ell \in \mathbb{Z}_+$. Prema Weierstrassovom teoremu svaka je neprekidna funkcija na S^2 uniformni limes niza restrikcija polinoma. No svaka restrikcija homogenog polinoma na S^2 je prema (4.11) suma funkcija iz $\tilde{\mathcal{H}}^\ell$, $\ell \in \mathbb{Z}_+$. Odatle slijedi tvrdnja.

Iz teorema 4.3.5. neposredno slijedi

Korolar 4.3.6. *$\tilde{\mathcal{H}}^\ell$ je svojstveni potprostor operatora Δ_{S^2} za svojstvenu vrijednost $-\ell(\ell+1)$.*

Konstruirat ćemo sada jednu ortonormiranu bazu $\{Y^\ell_m;\ m \in \mathbb{Z},\ -\ell \le m \le \ell\}$ prostora sfernih harmonika $\tilde{\mathcal{H}}^\ell$. Stavimo za $\ell, m \in \mathbb{Z}_+$ i $m \le \ell$

$$Y^\ell_m(\vartheta, \varphi) = \gamma^\ell_m Z^\ell_m(\vartheta) \mathrm{e}^{im\varphi},$$

gdje je

$$Z^\ell_m(\vartheta) = (\sin\vartheta)^m Q^\ell_m(\cos\vartheta), \qquad Q^\ell_m(x) = \frac{\mathrm{d}^{\ell+m}}{\mathrm{d}x^{\ell+m}}(1-x^2)^\ell,$$

a γ^ℓ_m je realan broj

$$\gamma^\ell_m = \frac{(-1)^{\ell+m}}{2^\ell \ell!}\sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}}\sqrt{\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}}.$$

Za $-\ell \le m < 0$ stavimo

$$Y^\ell_m = (-1)^m \overline{Y^\ell_{-m}}.$$

Neka su u daljnjem J_3, J_+, J_- diferencijalni operatori na $C^\infty(S^2)$ zadani tako da se podudaraju s operatorima (4.12) i (4.13) na pojedinim prostorima $\tilde{\mathcal{H}}^\ell$, tj.

$$J_3 = -i\frac{\partial}{\partial\varphi}, \qquad J_\pm = \mathrm{e}^{\pm i\varphi}\left(\pm\frac{\partial}{\partial\vartheta} + i\cot\vartheta\frac{\partial}{\partial\varphi}\right),$$

i neka je

$$C = J_+J_- + J_3^2 - J_3.$$

Tada znamo da se na prostoru restrikcija polinoma operator C podudara sa $-\Delta_{S^2}$.

Zadatak 4.3.11. *Dokažite formule*

$$J_+Y^\ell_m = \sqrt{(\ell-m)(\ell+m+1)}Y^\ell_{m+1}, \tag{4.14}$$

$$J_-Y^\ell_m = \sqrt{(\ell+m)(\ell-m+1)}Y^\ell_{m-1}, \tag{4.15}$$

$$J_3Y^\ell_m = mY^\ell_m, \tag{4.16}$$

$$CY^\ell_m = \ell(\ell+1)Y^\ell_m. \tag{4.17}$$

Zadatak 4.3.12. *Dokažite da su funkcije Y^ℓ_m, $-\ell \leq m \leq \ell$, elementi potprostora $\tilde{\mathcal{H}}^\ell$.*

Uputa: Iskoristite formulu (4.17) i korolar 4.3.6.

Zadatak 4.3.13. *Dokažite da su funkcije Y^ℓ_m i $Y^\ell_{m'}$ za $m \neq m'$ međusobno ortogonalne.*

Uputa: Iskoristite formulu (4.16) i hermitičnost operatora J_3 na prostoru $\tilde{\mathcal{H}}^\ell$.

Budući da je dimenzija prostora $\tilde{\mathcal{H}}^\ell$ jednaka $2\ell+1$, zaključujemo da je $\{Y^\ell_m;\ -\ell \leq m \leq \ell\}$ baza ortogonalna prostora $\tilde{\mathcal{H}}^\ell$. Dokazat ćemo sada da su svi ti vektori Y^ℓ_m jedinični. Prije svega, operatori J_+ i J_- na prostoru $\tilde{\mathcal{H}}^\ell$ su međusobno adjungirani. Sada iz formula (4.14) i (4.15) nalazimo za $-\ell < m \leq \ell$:

$$\sqrt{(\ell+m)(\ell-m+1)}(Y^\ell_m|Y^\ell_m) = (J_+Y^\ell_{m-1}|Y^\ell_m) = (Y^\ell_{m-1}|J_-Y^\ell_m) = \sqrt{(\ell+m)(\ell-m+1)}(Y^\ell_{m-1}|Y^\ell_{m-1}).$$

Odatle se vidi da su svi vektori Y^ℓ_m iste norme. Stoga je dovoljno dokazati da je jedan od njih jedinični, npr. Y^ℓ_ℓ. Polinom Q^ℓ_ℓ je konstanta $(-1)^\ell(2\ell)!$, pa je

$$Y^\ell_\ell(\vartheta,\varphi) = (-1)^\ell\gamma^\ell_\ell(2\ell)!(\sin\vartheta)^\ell \mathrm{e}^{i\ell\varphi}.$$

Stoga je

$$(Y^\ell_\ell|Y^\ell_\ell) = \gamma_\ell \mathcal{I}_\ell,$$

gdje je

$$\gamma_\ell = 2\pi\left(\gamma^\ell_\ell(2\ell)!\right)^2$$

i

$$\mathcal{I}_\ell = \int_0^\pi (\sin\vartheta)^{2\ell+1}\mathrm{d}\vartheta.$$

Imamo $\mathcal{I}_0 = 2$ i $\gamma_0 = \frac{1}{2}$, dakle, $(Y^0_0|Y^0_0) = 1$. Supstitucijom $x = \cos\vartheta$ integral $\mathcal{I}_\ell$ poprima oblik

$$\mathcal{I}_\ell = \int_{-1}^1 (1-x^2)^\ell \mathrm{d}x.$$

Zadatak 4.3.14. *Parcijalnom integracijom dokažite da je*

$$\mathcal{I}_{\ell+1} = \mathcal{I}_\ell - \frac{1}{2\ell+2}\mathcal{I}_{\ell+1}.$$

Odatle je $(2\ell+3)\mathcal{I}_{\ell+1} = (2\ell+2)\mathcal{I}_\ell$. Lako se vidi da je $(2\ell+2)\gamma_{\ell+1} = (2\ell+3)\gamma_\ell$. Slijedi

$$(Y^{\ell+1}_{\ell+1}|Y^{\ell+1}_{\ell+1}) = \gamma_{\ell+1}\mathcal{I}_{\ell+1} = \gamma_\ell\mathcal{I}_\ell = (Y^\ell_\ell|Y^\ell_\ell).$$

Odatle indukcijom po ℓ zaključujemo da su svi vektori Y^ℓ_ℓ jedinični. Prema tome, svi vektori Y^ℓ_m su jedinični. Dakle, $\{Y^\ell_m;\ -\ell \leq m \leq \ell\}$ je ortonormirana baza prostora $\tilde{\mathcal{H}}^\ell$. Iz teorema 4.3.5. sada neposredno slijedi:

Teorem 4.3.7. *Sferni harmonici Y^ℓ_m, $\ell \in \mathbb{Z}_+$, $-\ell \leq m \leq \ell$, tvore ortonormiranu bazu Hilbertovog prostora $L_2(S^2)$.*

Napomena: Legendreovi polinomi definirani su sa

$$P_\ell(x) = \frac{(-1)^\ell}{2^\ell \ell!}\frac{\mathrm{d}^\ell}{\mathrm{d}x^\ell}(1-x^2)^\ell, \qquad \ell \in \mathbb{Z}_+,$$

a **Legendreove funkcije** $P_{\ell,m}$ $\ell, m \in \mathbb{Z}_+$, su funkcije na segmentu $[-1,1]$ definirane sa

$$P_{\ell,m}(x) = (-1)^m \sqrt{(1-x^2)^m} \frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m} P_\ell(x) = \frac{(-1)^{\ell+m}}{2^\ell \ell!} \sqrt{(1-x^2)^m} \frac{\mathrm{d}^{\ell+m}}{\mathrm{d}x^{\ell+m}} (1-x^2)^\ell.$$

Direktnim računom nalazimo da za $\ell \in \mathbb{Z}_+$ i $0 \leq m \leq \ell$ vrijedi

$$Y^\ell_m(\vartheta, \varphi) = \gamma_{\ell,m} P_{\ell,m}(\cos\vartheta) \mathrm{e}^{im\varphi}.$$

Zadatak 4.3.15. *Dokažite da vrijedi*

$$\int_{-1}^{1} P_{\ell,m}(x) P_{\ell',m}(x) \mathrm{d}x = 0 \qquad \textit{za} \quad \ell \neq \ell'.$$

Izračunajte integral za $\ell = \ell'$.

Zadatak 4.3.16. *Dokažite da postoje* $\alpha(\ell,m), \beta(\ell,m) \in \mathbb{C}$ *takvi da je*

$$(\cos\vartheta) Y^\ell_m(\vartheta,\varphi) = \alpha(\ell,m) Y^{\ell+1}_m(\vartheta,\varphi) + \beta(\ell,m) Y^{\ell-1}_m(\vartheta,\varphi).$$

Napomena: Može se dokazati da vrijedi tzv. **adicioni teorem** za sferne harmonike:

$$\frac{4\pi}{2\ell+1} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \overline{Y^\ell_m(\vartheta,\varphi)} Y^\ell_m(\vartheta',\varphi) = P_\ell(\cos(\vartheta - \vartheta')).$$

Bibliografija

[1] H. Boerner, *Group Representations*, Springer−Verlag, Berlin, 1955.

[2] A.J. Coleman, *Induced Representations with Applications to S_n and $GL(n)$*, Queens Univ. No.4, Kingston, Ontario, 1966.

[3] A.J. Coleman, *Induced and Subduced Representations*, u *Group Theory and its Applications* ed. M. Loebl, Academic Press, New York, 1968.

[4] C. Curtis, I. Reiner, *Representation Theory of Finite Groups and Associative Algebras*, Interscience Publishers, New York, 1962.

[5] W. Feit, *Characters of Finite Groups*, W.A. Benjamin Publishers, New York, 1967.

[6] F.G. Frobenius, *Gesammelte Abhandlungen*, Bd. III., Springer−Verlag, Berlin, 1969.

[7] W. Fulton, J. Harris, *Representation Theory. A First Course*, Springer−Verlag, New York, 2004.

[8] R. Goodman, N.R. Wallach, *Representations and Invariants of the Classical Groups*, Cambridge University Press, Cambridge, 2003.

[9] M. Hall, *The Theory of Groups*, Macmillan, New York, 1959.

[10] M. Hamermesh, *Group Theory and its Application to Physical Problems*, Addison−Wesley Publ. Co., Reading − Palo Alto − London, 1964.

[11] A.W. Knapp, *Representation Theory of Semisimple Groups. An Overview Based on Examples*, Princeton University Press, Princeton − Oxford, 2001.

[12] Y. Kosmann−Schwarzbah, *Groups and Symmetries. From Finite Groups to Lie Groups*, Springer−Verlag, New York − Dordrecht − Heidelberg − London, 2009.

[13] S. Kurepa, *Konačno dimenzionalni vektorski prostori i primjene*, Sveučilišna naklada Liber, Zagreb, 1976.

[14] D.E. Littlewood, *The Theory of Group Characters*, Oxford Univ. Press, Oxford, 1950.

[15] J.S. Lomont, *Applications of Finite Groups*, Academic Press, New York, 1959.

[16] G.W. Mackey, *Induced representations of groups*, American Journal of Mathematics, 73(1951), 576−592.

[17] C. Procesi, *Lie Groups. An Approach through Invariants and Representations*, Springer−Verlag, New York, 2007.

[18] L. Pukanszky, *Leçons sur les représentations des groupes*, Dunod, Paris, 1967.

[19] J.−P. Serre, *Linear Representations of Finite Groups*, Springer−Verlag, New York − Heidelberg − Berlin, 1977.

[20] B. Simon, *Representations of Finite and Compact Groups*, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1996.

[21] E.B. Vinberg, *Lineinie predstavlenija grupp*, (na ruskom) Nauka, Moskva, 1985.

[22] S.H. Weintraub, *Representation Theory of Finite Groups: Algebra and Arithmetic*, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2003.

[23] H. Weyl, *The Theory of Groups and Quantum Mechanics*, Princeton Univ. Press, Princeton, 1931.

[24] H. Weyl, *The Classical Groups*, Princeton University Press, Princeton, 1946.

[25] E.P. Wigner, *Group Theory and its Applications to the Quantum Mechanics*, Academic Press, New York, 1959.