DIRACOVI OPERATORI U TEORIJI REPREZENTACIJA

Prof. dr. sc. Hrvoje Kraljević

Predavanja održana u okviru doktorskog studija
na PMF−Matematičkom odjelu Sveučilišta u Zagrebu
u akademskoj godini 2010./2011.

Zagreb

Sadržaj

Poglavlje 1

REPREZENTACIJE LIEJEVIH GRUPA I LIEJEVIH ALGEBRI

1.1 Reprezentacije i moduli

Ako su V i W vektorski prostori nad poljem K sa $L(V,W)$ ćemo označavati vektorski prostor svih linearnih operatora $A : V \to W$. Pisat ćemo $L(V) = L(V,V)$ i to je asocijativna algebra. Jedinični operator $I = I_V$ ($Iv = v \ \forall v \in V$) je jedinica u algebri $L(V)$. Grupu avih inveribilnih elemenata algebre $L(V)$, tj. grupu svih izomorfizama sa V na V, označavat ćemo sa $GL(V)$.

Neka je S skup. $S-$**modul nad poljem** K je vektorski prostor V nad poljem K sa zadanim preslikavanjem $S \times V \to V$, $(s,v) \mapsto sv$, takvim da je $v \mapsto sv$, $v \in V$, linearan operator na prostoru $V \ \forall s \in S$:

$$s(\alpha v + \beta w) = \alpha sv + \beta sw, \qquad \forall \alpha, \beta \in K, \quad \forall v, w \in V, \quad \forall s \in S.$$

Reprezentacija skupa S na vektorskom prostoru V je preslikavanje $\pi : S \to L(V)$. Naravno, $S-$moduli i reprezentacije od S su u biti jedno te isto: ako je π reprezentacija od S na prostoru V onda je sa $sv = \pi(s)v$, $s \in S$, $v \in V$, zadano preslikavanje $S \times V \to V$ koje V čini $S-$modulom; s druge strane, ako je V $S-$modul, onda je sa $\pi(s)v = sv$, $s \in S$, $v \in V$, zadana reprezentacija π skupa S na prostoru V.

U daljnjem je V $S-$modul nad poljem K i π pripadna reprezentacija skupa S na prostoru V. $S-$**podmodul** od V je potprostor $W \subseteq V$ takav da je $sw \in W \ \forall s \in S$ i $\forall w \in W$. Naravno, s restrikcijom preslikavanja $(s,v) \to sv$ sa $S \times V \to V$ na $S \times W \to W$ i sam W postaje $S-$modul. Potprostor W od V je $S-$podmodul ako i samo ako je taj potprostor invarijantan s obzirom na sve operatore $\pi(s)$, $s \in S$. Reprezentacija pridružena $S-$podmodulu W označava se π_W i zove **subreprezentacija** reprezentacije π. **Pravi** $S-$**podmodul** od V je $S-$podmodul W koji je različit od V. W je **netrivijalan** $S-$**podmodul** od V ako je $W \neq V$ i $W \neq \{0\}$. **Maksimalan** $S-$**podmodul** od V je pravi $S-$podmodul od V koji nije pravi $S-$podmodul nijednog pravog $S-$podmodula od V. Drugim riječima, maksimalan $S-$podmodul od V je svaki maksimalan element skupa svih pravih podmodula od V parcijalno uređenog inkluzijom. Za pripadnu subreprezentaciju kažemo da je **maksimalna subreprezentacija** od π.

Presjek bilo kojeg skupa $S-$podmodula od V je očito $S-$podmodul od V. Ako je Σ podskup $S-$modula V, postoji najmanji $S-$podmodul od V koji sadrži skup Σ : to je presjek svih $S-$podmodula koji sadrže skup Σ. Taj se $S-$podmodul označava sa $S\Sigma$ i za njega kažemo da je **generiran skupom** Σ. Očito je

$$S\Sigma = span_K(\Sigma \cup \{s_1 \cdots s_n v; \ n \in \mathbb{N}, \ s_1, \ldots, s_n \in S, \ v \in \Sigma\}).$$

Ako je W $S-$podmodul $S-$modula V, kvocijentni vektorski prostor V/W možemo snabdjeti strukturom $S-$modula ovako:

$$s(v+W) = sv + W, \qquad s \in S, \quad v \in V.$$

S tom strukturom V/W se zove **kvocijentni** $S-$**modul** ($S-$modula V po $S-$podmodulu W). Pripadna reprezentacija označava se sa $\pi_{V/W}$ i zove **kvocijentna reprezentacija** reprezentacije π. Kvocijentni $S-$modul $S-$podmodula od V ili, ekvivalentno, $S-$podmodul kvocijentnog $S-$modula od V, zove se **subkvocijentni** $S-$**modul**, ili kraće **subkvocijent**, $S-$modula V. Dakle, subkvocijent od V je $S-$modul oblika W/U, gdje su W i U $S-$podmoduli od V i $U \subseteq W$. Pripadna reprezentacija označava se sa $\pi_{W/U}$ i zove **subkvocijentna reprezentacija** ili **subkvocijent** reprezentacije π.

Ako su V i W $S-$moduli nad poljem K, $S-$**homomorfizam** (ili homomorfizam $S-$modula) V u W je linearan operator $A : V \to W$ sa svojstvom

$$Asv = sAv \qquad \forall s \in S \quad \text{i} \quad \forall v \in V.$$

Skup svih $S-$homomorfizama V u W označavamo sa $Hom_S(V, W)$ i to je potprostor prostora $L(V, W)$ svih linearnih operatora sa V u W. Ako su π i ρ pripadne reprezentacije od S na prostorima V i W, $S-$homomorfizmi se zovu i **preplitanja** reprezentacije π s reprezentacijom ρ. Surjektivni (odn., injektivni, bijektivni) $S-$homomorfizam zove se $S-$epimorfizam (odn., $S-$monomorfizam, $S-$izomorfizam). Kažemo da je $S-$modul V izomorfan $S-$modulu W ako postoji $S-$izomorfizam sa V na W, tj. ako u $Hom_S(V, W)$ postoji bijekcija. Kako je kompozicija $S-$homomorfizama $S-$homomorfizam, očito je relacija izomorfnosti među $S-$modulima tranzitivna. Ona je i simetrična jer invers $S-$izomorfizma je $S-$izomorfizam. Napokon, kako je identiteta I_V na V izomorfizam $S-$modula, izomorfnost $S-$modula je relacija ekvivalencije.

Lako se dokazuju sljedeća dva standardna rezultata:

Teorem 1.1.1. *Ako je $A : V \to W$ homomorfizam $S-$modula onda je* $\operatorname{Ker} A$ *$S-$podmodul od V,* $\operatorname{Im} A$ *je $S-$podmodul od W i sa*

$$v + \operatorname{Ker} A \mapsto Av, \qquad v \in V,$$

je zadan izomorfizam $S-$modula sa $V/(\operatorname{Ker} A)$ na $\operatorname{Im} A$.

Suma bilo kojeg skupa $S-$podmodula od V je $S-$podmodul od V. Posebno, ako su W i U $S-$podmoduli od V onda je i $W + U$ $S-$podmodul od V.

Teorem 1.1.2. *Ako su W i U $S-$podmoduli $S-$modula V, onda je sa*

$$w + (W \cap U) \mapsto w + U, \qquad w \in W,$$

zadan izomorfizam $S-$modula $W/(W \cap U)$ na $S-$modul $(W + U)/U$.

Kažemo da je V **prost** $S-$**modul** ili **ireducibilan** $S-$**modul** ako je $V \neq \{0\}$ i V nema netrivijalnih $S-$podmodula; tj. V i $\{0\}$ su jedini $S-$podmoduli od V. U tom se slučaju pripadna **reprezentacija** zove **ireducibilna**. Kažemo da je π **reducibilna reprezentacija** ako ona nije ireducibilna. V je **poluprost** $S-$**modul**, ako za svaki $S-$podmodul W od V postoji $S-$podmodul U od V takav da je $V = W \dotplus U$. Za pripadnu reprezentaciju u tom slučaju kažemo da je **potpuno reducibilna**.

Propozicija 1.1.3. *Ako je W $S-$podmodul poluprostog $S-$modula V, onda su $S-$moduli W i V/W poluprosti.*

Dokaz: Neka je X $S-$podmodul od W. Tada je ujedno X $S-$podmodul od V, pa po pretpostavci postoji $S-$podmodul Y od V takav da je $V = X \dotplus Y$. Sada je $Z = Y \cap W$ $S-$podmodul od W i očito vrijedi $W = X \dotplus Z$. Time smo dokazali da je $S-$modul W poluprost.

Neka je sada X $S-$podmodul kvocijentnog modula V/W. Stavimo

$$Y = \{y \in V;\ y + W \in X\}.$$

Tada je Y potprostor prostora V koji je $S-$podmodul od V. Doista, ako je $s \in S$ i $y \in Y$, onda je $y + W \in X$, pa iz činjenice da je X $S-$podmodul od V/W slijedi $s(y + W) \in X$. Međutim, po definiciji strukture $S-$modula na kvocijentnom prostoru V/W vrijedi $s(y + W) = sy + W$. To pokazuje da je $sy \in Y$. Kako su $s \in S$ i $y \in Y$ bili proizvoljni, dokazali smo da je Y $S-$podmodul od V. Kako je $S-$modul V poluprost, postoji $S-$podmodul Z od V takav da je $V = Y \dotplus Z$. Stavimo sada

$$U = \{z + W;\ z \in Z\}.$$

Tada je U potprostor kvocijentnog prostora V/W i to je $S-$podmodul od V/W : za $s \in S$ i $u \in U$ i za $z \in Z$ takav da je $u = z + W$ vrijedi $sz \in Z$, jer je Z $S-$podmodul od V, pa vrijedi $su = s(z+W) = sz+W \in U$. Dokažimo sada da je $V/W = X \dotplus U$. Prije svega, proizvoljan vektor $v \in V$ može se napisati u obliku $v = y + z$, $y \in Y$, $z \in Z$. Tada je $v + W = (y + W) + (z + W)$ i vrijedi $y+W \in X$ i $z+W \in U$. To pokazuje da je $V/W = X + U$. Neka je sada $u \in X \cap U$. Budući da je $u \in U$, postoji $z \in Z$ takav da je $u = z + W$. No tada je $z + W \in X$, pa slijedi $z \in Y$. Dakle, $z \in Z \cap Y = \{0\}$, tj. $z = 0$, a to znači da je $u = z + W$ nulvektor u kvocijentnom prostoru V/W. Prema tome, suma je direktna: $V/W = X \dotplus U$. Time je dokazano da je i kvocijentni $S-$modul V/W poluprost.

Propozicija 1.1.4. *Svaki poluprost $S-$modul $V \neq \{0\}$ ima prost $S-$podmodul.*

Dokaz: Neka je $v \in V$, $v \neq 0$. Neka je $\mathcal{S}$ skup svih $S-$podmodula od V koji ne sadrže vektor v. Uz relaciju inkluzije $\mathcal{S}$ postaje parcijalno uređen skup. On je neprazan jer je $\{0\} \in \mathcal{S}$. Primjenom Zornove leme lako se vidi da skup $\mathcal{S}$ ima bar jedan maksimalni element W. Kako je $S-$modul V poluprost, postoji $S-$podmodul U takav da je $V = W \dotplus U$. Tada je $U \neq \{0\}$, jer $v \notin W$. Pretpostavimo da je U' netrivijalan podmodul od U. Prema propoziciji 1.1.3. $S-$modul U je poluprost pa on ima $S-$podmodul U'' takav da je $U = U' \dotplus U''$. Kako je W maksimalan $S-$podmodul od V sa svojstvom $v \notin W$, vrijedi $v \in W \dotplus U'$ i $v \in W \dotplus U''$. No tada slijedi da je $v \in (W \dotplus U') \cap (W \dotplus U'') = W$ suprotno svojstvu od W. Ova kontradikcija pokazuje da U nema netrivijalnih $S-$podmodula, odnosno, $S-$modul U je prost.

Teorem 1.1.5. *Sljedeća su tri svojstva $S-$modula V međusobno ekvivalentna:*

(a) *Modul V je poluprost.*

(b) *Modul V je suma svojih prostih podmodula.*

(c) *Modul V je direktna suma nekog skupa svojih prostih podmodula.*

Dokaz: $(a) \Rightarrow (b)$. Neka je V poluprost i neka je W suma svih njegovih prostih podmodula. Tada je $V = W \dotplus U$ za neki podmodul U. Prema propoziciji 1.1.4. ako je $U \neq \{0\}$ onda U sadrži neki prost podmodul Z. No po definiciji W tada je $Z \subseteq W$, a to je nemoguće. Ova kontradikcija pokazuje da je $U = \{0\}$, tj. $W = V$.

$(b) \Rightarrow (c)$. Pretpostavimo da je V suma svojih prostih podmodula. Primjenom Zornove leme nalazimo da postoji maksimalan skup $\mathcal{S}$ prostih podmodula u odnosu na svojstvo da im je suma direktna. Neka je $W = \sum \mathcal{S}$. Pretpostavimo da je $W \neq V$. Tada postoji prost podmodul U od V

takav da $U \subsetneq W$. Tada je $U \cap W \neq U$, dakle, $U \cap W = \{0\}$. Odatle slijedi da je suma $\sum(\mathcal{S} \cup \{U\})$ direktna i vrijedi $\mathcal{S} \subsetneq \mathcal{S} \cup \{U\}$, a to je nemoguće zbog izbora $\mathcal{S}$. Ova kontradikcija pokazuje da je $W = V$.

$(c) \Rightarrow (a)$. Pretpostavimo da je V direktna suma skupa $\mathcal{S}$ prostih podmodula od V i neka je W podmodul od V. Primjenom Zornove leme nalazimo da u skupu svih podmodula U od V takvih da je $U \cap W = \{0\}$ postoji bar jedan maksimalan element U. Za svaki $Z \in \mathcal{S}$ tada ne može biti $Z \cap (W \dotplus U) = \{0\}$; u protivnom bi $U \dotplus Z$ bio podmodul od V sa svojstvom $(U \dotplus Z) \cap W = \{0\}$ i imali bismo da je $U \subsetneq U \dotplus Z$, a to je suprotno izboru podmodula U. Kako je Z prost i $Z \cap (W \dotplus U) \neq \{0\}$, vrijedi $Z = Z \cap (W \dotplus U)$, tj. $Z \subseteq W \dotplus U$. Kako to vrijedi za svaki $Z \in \mathcal{S}$, slijedi $V = \sum \mathcal{S} \subseteq W \dotplus U$, odnosno, $V = W \dotplus U$.

Sokl $S-$modula V je suma svih njegovih prostih $S-$podmodula. Očito je sokl od V najveći poluprost $S-$podmodul od V.

Za $S-$modul V pišemo $End_S(V)$ umjesto $Hom_S(V, V)$. $End_S(V)$ je unitalna podalgebra od $L(V)$.

Teorem 1.1.6. (**Schurova lema**) *Neka su V i W prosti $S-$moduli nad poljem K.*

(a) *Ako je $Hom_S(V, W) \neq \{0\}$, $S-$moduli V i W su izomorfni.*

(b) *Unitalna algebra $End_S(V)$ je tijelo, tj. svaki $A \in End_S(V) \setminus \{0\}$ je invertibilan.*

(c) *Ako je polje K algebarski zatvoreno i ako je* $\dim V$ *manja od* $Card\, K$, *posebno, ako je prostor V konačnodimenzionalan, a također ako je polje K neprebrojivo, a prostor V je prebrojivo-dimenzionalan, onda je $End_S(V) = \{\lambda I_V;\ \lambda \in K\}$.*

Dokaz: (a) Pretpostavimo da je $A \in Hom_S(V, W) \setminus \{0\}$. Tada je $\mathrm{Ker}\, A$ $S-$podmodul od V :

$$v \in \mathrm{Ker}\, A, \quad s \in S \qquad \Longrightarrow \qquad Asv = sAv = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad sv \in \mathrm{Ker}\, A.$$

Kako je $A \neq 0$, vrijedi $\mathrm{Ker}\, A \neq V$, a kako je V prost $S-$modul, zaključujemo da je $\mathrm{Ker}\, A = \{0\}$, odnosno, A je injekcija. Nadalje, $\mathrm{Im}\, A$ je $S-$podmodul od W :

$$s \in S, \quad w \in \mathrm{Im}\, A, \quad v \in V \quad \text{takav da je} \quad w = Av \qquad \Longrightarrow \qquad sw = sAv = Asv \in \mathrm{Im}\, A.$$

Kako je $A \neq 0$ to je $\mathrm{Im}\, A \neq \{0\}$. Budući da je W prost $S-$modul, slijedi $\mathrm{Im}\, A = W$. Dakle, A je i surjekcija, dakle, izomorfizam.

(b) Iz dokaza tvrdnje (a) vidi se da je svaki $A \in End_S(V) \setminus \{0\}$ invertibilan.

(c) Neka je $A \in L(V)$. Dokazat ćemo da je tada njegov spektar

$$Sp(A) = \{\lambda \in K;\ A - \lambda I_V \notin GL(V)\}$$

neprazan. Naravno, ta je činjenica trivijalna ako je prostor V konačnodimenzionalan, jer je polje K po pretpostavci algebraski zatvoreno. Dokažimo tu činjenicu u općem slučaju uz iskazanu pretpostavku $\dim V < Card(K)$.

Pretpostavimo suprotno da je spektar $Sp(A)$ prazan, tj. da je operator $A - \lambda I_V$ invertibilan za svaki $\lambda \in K$. Tada je operator $Q(A)$ invertibilan za svaki polinom $Q \in K[T] \setminus \{0\}$. Dakle, ako je $R = P/Q$ racionalna funkcija, možemo definirati $R(A) = P(A)Q(A)^{-1}$. Tako dolazimo do linearnog preslikavanja $R \mapsto R(A)$ prostora $K(T)$ racionalnih funkcija jedne varijable nad poljem K u prostor $L(V)$. Neka je $v \in V$, $v \neq 0$. Tada je $R \mapsto R(A)v$ injektivan linearan operator sa $K(T)$ u V. Odatle slijedi da je $\dim K(T) \leq \dim V$.

Uočimo sada da je skup

$$\left\{ \frac{1}{T-\lambda};\ \lambda \in K \right\} \tag{1.1}$$

linearno nezavisan. Doista, u suprotnom bi postojali međusobno različiti $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$ i $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K \setminus \{0\}$ takvi da je

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\alpha_j}{T-\lambda_j} = 0.$$

Množenjem te jednakosti s umnoškom $(T-\lambda_1)\cdots(T-\lambda_n)$ dobivamo

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j Q_j(T) = 0, \qquad \text{gdje je} \quad Q_j(T) = (T-\lambda_1)\cdots(T-\lambda_{j-1})(T-\lambda_{j+1})\cdots(T-\lambda_n).$$

Sada je $Q_i(\lambda_j) = 0$ za $i \neq j$ i $Q_i(\lambda_i) = (\lambda_i - \lambda_1)\cdots(\lambda_i - \lambda_{i-1})(\lambda_i - \lambda_{i+1})\cdots(\lambda_i - \lambda_n) \neq 0$. Stoga za proizvoljan indeks $i \in \{1, \ldots, n\}$ vrijedi

$$0 = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j Q_j(\lambda_i) = \alpha_i Q_i(\lambda_i),$$

a to je nemoguće jer je $\alpha_i \neq 0$ i $Q_i(\lambda_i) \neq 0$. Time je dokazana linearna nezavisnost skupa (1.1). Odatle slijedi da je $Card\, K \leq \dim K(T)$, pa iz prije utvrđene nejednakosti $\dim K(T) \leq \dim V$ zaključujemo da je $Card\, K \leq \dim V$, a to je suprotno pretpostavci. Ova kontradikcija pokazuje da za svaki $A \in L(V)$ postoji $\lambda \in K$ takav da operator $A - \lambda I_V$ nije invertibilan. Sada iz tvrdnje (c) Schurove leme (teorem 1.1.6.) slijedi da je $A - \lambda I_V = 0$, dakle, $A = \lambda I_V$.

Neka je sada zadana familija $S-$modula $(V_i)_{i \in I}$ i neka je za $i \in I$ sa π_i označena pripadna reprezentacija od S na prostoru V_i. Tada na direktnoj sumi

$$\coprod_{i \in I} V_i = \left\{ f : I \to \bigcup_{i \in I} V_i;\ f(i) \in V_i\ \ \forall i \in I,\ \text{skup } \{i \in I;\ f(i) \neq 0\} \text{ je konačan} \right\}$$

definiramo reprezentaciju π od S na sljedeći način:

$$(\pi(s)f)(i) = \pi_i(s)f(i), \qquad s \in S, \quad i \in I.$$

π se zove **direktna suma reprezentacija** π_i. Uz pripadnu strukturu $S-$modula V se zove **direktna suma $S-$modula V_i**.

Naravno, ako je W $S-$modul i ako su V_i, $i \in I$, su $S-$podmoduli od W takvi da je prostor W direktna suma potprostora V_i, $i \in I$, onda je $S-$modul W izomorfan direktnoj sumi V familije $S-$modula $(V_i)_{i \in I}$, a izomorfizam sa V na W dan je sa

$$f \mapsto \sum_{i \in I} f(i), \qquad f \in V = \coprod_{i \in I} V_i.$$

Drugim riječima, reprezentacija od S na prostoru W ekvivalentna je direktnoj sumi familije reprezentacija $(\pi_{V_i})_{i \in I}$.

Lako se dokazuje:

Propozicija 1.1.7. *Za $S-$modul V vrijedi:*

(a) *Neka su W i U $S-$podmoduli od V takvi da je $V = W \dotplus U$. Tada je $V/W \simeq U$.*

(b) *Neka su A, B i C $S-$podmoduli od V takvi da je $V = A \dotplus B = A \dotplus C$. Tada je $B \simeq C$.*

U slučaju konačnodimenzionalnog $S-$modula teorem 1.1.5. iskazuje se ovako:

Teorem 1.1.8. *Neka je V konačnodimenzionalan $S-$modul. Sljedeća su tri svojstva međusobno ekvivalentna:*

(a) *Modul V je poluprost.*

(b) *Postoji familija prostih $(V_i)_{i\in I}$ $S-$podmodula od V takva da je*

$$V = \sum_{i\in I} V_i.$$

(c) *Postoje prosti podmoduli $V_1, V_2, \ldots, V_n$ od V takvi da je*

$$V = V_1 \dotplus V_2 \dotplus \cdots \dotplus V_n.$$

U situaciji iz tvrdnje (c) prethodnog teorema neka je π oznaka za reprezentaciju od S na prostoru V i neka je za svaki $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ izabrana neka baza $e^{(j)} = \left\{e_1^{(j)}, e_2^{(j)}, \ldots, e_{m_j}^{(j)}\right\}$ potprostora V_j. Nadalje, neka je e oznaka za bazu prostora V koja je dobivena iz tih baza:

$$e = \left\{e_1^{(1)}, e_2^{(1)}, \ldots, e_{m_1}^{(1)}, e_1^{(2)}, e_2^{(2)}, \ldots, e_{m_2}^{(2)}, \ldots\ldots, e_1^{(n)}, e_2^{(n)}, \ldots, e_{m_n}^{(n)}\right\}.$$

Za $s \in S$ označimo sa $\pi(s)[e]$ matricu operatora $\pi(s)$ u bazi e, a za $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ neka je $\pi_{V_j}(s)[e^{(j)}]$ oznaka za matricu operatora $\pi_{V_j}(s) = \pi(s)|V_j$ u bazi $e^{(j)}$. Tada se lako vidi da je $\pi(s)[e]$ blok$-$dijagonalna matrica:

$$\pi(s)[e] = \begin{bmatrix} \pi_{V_1}(s)[e^{(1)}] & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \pi_{V_2}(s)[e^{(2)}] & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \pi_{V_n}(s)[e^{(n)}] \end{bmatrix}, \qquad s \in S.$$

Ako se jedan od dvaju $S-$modula rastavlja u direktnu sumu $S-$podmodula, onda se lako vidi da se prostor preplitanja rastavlja u odgovarajuću direktnu sumu potprostora:

Propozicija 1.1.9. *Neka su V i W $S-$moduli nad istim poljem K. Ako je X $S-$podmodul od W tada prostor $Hom_S(V, X)$ možemo na prirodan način identificirati s potprostorom*

$$\{A \in Hom_S(V, W);\ AV \subseteq X\}$$

prostora $Hom_S(V, W)$. Ukoliko je $W = X_1 \dotplus X_2 \dotplus \cdots \dotplus X_n$, pri čemu su X_i $S-$podmoduli od W, onda uz spomenutu identifikaciju $Hom_S(V, X_i)$ s potprostorima od $Hom_S(V, W)$ vrijedi

$$Hom_S(V, W) = Hom_S(V, X_1) \dotplus Hom_S(V, X_2) \dotplus \cdots \dotplus Hom_S(V, X_n).$$

Propozicija 1.1.10. *Neka su V i W $S-$moduli nad istim poljem K.*

(a) *Ako je X $S-$podmodul od V, onda se prostor $Hom_S(V/X, W)$ na prirodan način identificira s potprostorom $\{A \in Hom_S(V, W);\ A|X = 0\}$ prostora $Hom_S(V, W)$.*

(b) *Ukoliko je $V = X_1 \dotplus X_2 \dotplus \cdots \dotplus X_n$, gdje su X_i, $1 \le i \le n$, $S-$podmoduli od V, definirajmo potprostore $\mathcal{X}_i$ prostora $L(V, W)$ ovako:*

$$\mathcal{X}_i = \{A \in L(V, W);\ A|V_j = 0 \text{ za } j \neq i,\ A|V_i \in Hom_S(V_i, W)\}.$$

Tada je svaki $\mathcal{X}_i$ potprostor prostora $Hom_S(V, W)$ i vrijedi

$$Hom_S(V, W) = \mathcal{X}_1 \dotplus \mathcal{X}_2 \dotplus \cdots \dotplus \mathcal{X}_n.$$

Teorem 1.1.11. *Neka su V i W konačnodimenzionalni $S-$modul nad algebarski zatvorenim poljem K pri čemu je $S-$modul V poluprost, a $S-$modul W prost. Neka je $V = V_1 \dot{+} V_2 \dot{+} \cdots \dot{+} V_n$, pri čemu je svaki od potprostora V_i prost $S-$podmodul od V. Tada je*

$$|\{i \in \{1, 2, \ldots, n\};\ V_i \simeq W\}| = \dim\ Hom_S(W, V) = \dim\ Hom_S(V, W).$$

(Pri tome $|S|$ označava broj elemenata konačnog skupa S).

Dokaz: Prema propoziciji 1.1.9. vrijedi

$$Hom_S(W, V) = Hom_S(W, V_1) \dot{+} Hom_S(W, V_2) \dot{+} \cdots \dot{+} Hom_S(W, V_n). \tag{1.2}$$

Nadalje, prema Schurovoj lemi (teorem 1.1.6.) vrijedi

$$\dim\ Hom_S(W, V_i) = \begin{cases} 1 & \text{ako je } V_i \simeq W \\ \\ 0 & \text{ako je } V_i \not\simeq W. \end{cases}$$

Odatle i iz (1.2) slijedi jednakost

$$\dim\ Hom_S(W, V) = |\{i \in \{1, 2, \ldots, n\};\ V_i \simeq W\}|.$$

Sasvim analogno, pomoću propozicije 1.1.10. dobivamo jednakost

$$\dim\ Hom_S(V, W) = |\{i \in \{1, 2, \ldots, n\};\ V_i \simeq W\}|.$$

U ovom kolegiju bavit ćemo se gotovo isključivo s reprezentacijama na kompleksnim vektorskim prostorima; samo u nekoliko slučajeva promatrat ćemo i reprezentacije na realnim vektorskim prostorima. Ako je k tome prostor unitaran, uz određene uvjete imamo potpunu reducibilnost reprezentacije, odnosno poluprostotu pripadnog modula.

Teorem 1.1.12. *Neka je π konačnodimenzionalna reprezentacija skupa S na realnom ili kompleksnom unitarnom prostoru V. Pretpostavimo da vrijedi $\pi(S)^* = \pi(S)$, tj. da je adjungiranje operatora $A \mapsto A^*$ permutacija skupa operatora reprezentacije $\pi(S) = \{\pi(s);\ s \in S\}$. Tada je reprezentacija π potpuno reducibilna.*

Dokaz: Neka je X $\pi-$invarijantan potprostor od V. Prema teoremu o ortogonalnoj projekciji tada je

$$V = X \dot{+} X^{\perp} \qquad \text{gdje je} \quad X^{\perp} = \{v \in V;\ (v|x) = 0\ \forall x \in X\}.$$

Neka je $v \in X^{\perp}$ i neka je $a \in \mathcal{A}$. Po pretpostavci postoji $b \in \mathcal{A}$ takav da je $\pi(a) = \pi(b)^*$. Sada za proizvoljan $x \in X$ imamo $\pi(b)x \in X$, dakle, $(\pi(a)v|x) = (v|\pi(b)x) = 0$. Dakle,

$$v \in X^{\perp} \qquad \Longrightarrow \qquad \pi(a)v \in X^{\perp} \quad \forall a \in \mathcal{A},$$

i time je dokazano da je reprezentacija π potpuno reducibilna.

Ako S nije samo skup, nego znak S podrazumijeva i neku algebarsku strukturu (npr. grupa, Liejeva algebra, unitalna algebra) onda reprezentacija od S (ili $S-$modul) podrazumijeva da se poštuju operacije u S. Tako je **reprezentacija grupe** G homomorfizam grupa $G \to GL(V)$, **reprezentacija unitalne algebre** $\mathcal{A}$ je homomorfizam unitalnih algebri $\mathcal{A} \to L(V)$, a **reprezentacija Liejeve algebre** $\mathfrak{g}$ je homomorfizam Liejevih algebri $\mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$; pri tome je Liejeva algebra $\mathfrak{gl}(V)$ prostor $L(V)$ uz operaciju $[A, B] = AB - BA$. Ukoliko S ima ne samo algebarsku nego i neku topološku ili diferencijalnu strukturu, onda se postavljaju i određeni zahtjevi neprekidnosti i/ili diferencijabilnosti.

1.2 Liejeve grupe

U ovom odjeljku navodimo definicije i bez dokaza osnovne teoreme iz teorije Liejevih grupa.

1.2.1 Diferencijalne i analitičke mnogostrukosti

Neka je M Hausdorffov topološki prostor i neka je $n \in \mathbb{N}$. $n-$**dimenzionalna karta** na M je uređen par (U, ψ) gdje je $U \subseteq M$ otvoren skup i ψ je homeomorfizam sa U na otvoren podskup od $\mathbb{R}^n$. Skup U zovemo **domena karte** (U, ψ). $n-$**dimenzionalni** $C^\infty-$**atlas** na M je skup $\mathcal{A}$ $n-$dimenzionalnih karata na M sa sljedećim svojstvima:

(i) Domene karata u skupu $\mathcal{A}$ pokrivaju M :

$$\bigcup_{(U,\psi)\in\mathcal{A}} U = M.$$

(ii) Ako su $(U, \psi), (V, \varphi) \in \mathcal{A}$ takve karte da je $U \cap V \neq \emptyset$, onda je

$$\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \longrightarrow \psi(U \cap V)$$

$C^\infty-$preslikavanje.

$n-$**dimenzionalna** $C^\infty-$**struktura** na M je $n-$dimenzionalni $C^\infty-$atlas $\mathcal{A}$ na M koji pored (i) i (ii) zadovoljava i svojstvo maksimalnosti:

(iii) Ako je (W, χ) $n-$dimenzionalna karta na M i ako su za svaku kartu $(U, \psi) \in \mathcal{A}$ takvu da je $U \cap W \neq \emptyset$ preslikavanja

$$\psi \circ \chi^{-1} : \chi(U \cap W) \longrightarrow \psi(U \cap W) \qquad \text{i} \qquad \chi \circ \psi^{-1} : \psi(U \cap W) \longrightarrow \chi(U \cap W)$$

klase C^∞, onda je $(W, \chi) \in \mathcal{A}$.

Očito je svaki $n-$dimenzionalni $C^\infty-$atlas sadržan u jedinstvenoj $n-$dimenzionalnoj $C^\infty-$strukturi.

diferencijalna mnogostrukost ili $C^\infty-$**mnogostrukost** je uređen par $(M, \mathcal{A})$, gdje je M Hausdorffov topološki prostor s prebrojivom bazom topologije, a $\mathcal{A}$ je $n-$dimenzionalna $C^\infty-$struktura na M za neki $n \in \mathbb{N}$. Pišemo tada $n = \dim M$.

Zamijenimo li svuda u prethodnim definicijama izraz $C^\infty-$*preslikavanje* s izrazom *analitičko preslikavanje*, dobivamo definicije pojmova $n-$dimenzionalni **analitički atlas**, $n-$dimenzionalna **analitička struktura** i **analitička mnogostrukost**. Svaka analitička mnogostrukost je ujedno diferencijalna mnogostrukost.

Neka su M i N $C^\infty-$mnogostrukosti, $\dim M = m$, $\dim N = n$. Za preslikavanje $f : M \to N$ kažemo da je **klase** C^∞ ili da je f $C^\infty-$**preslikavanje** ako za svaku točku $p \in M$ postoje karte (U, ψ) na M i (V, φ) na N takve da je $p \in U$, $f(U) \subseteq V$ i da je

$$\varphi \circ f \circ \psi^{-1} : \psi(U) \longrightarrow \varphi(V)$$

$C^\infty-$preslikavanje iz $\mathbb{R}^m$ u $\mathbb{R}^n$. Ako je $f : M \to N$ bijekcija i ako su f i f^{-1} $C^\infty-$preslikavanja, onda se f zove **difeomorfizam**. Ukoliko su M i N analitičke mnogostrukosti i ako je difeomorfizam $f : M \to N$ analitičko preslikavanje, pomoću teorema o inverznom preslikavanju za analitičke funkcije n realnih varijabli lako se vidi da je inverzno preslikavanje $f^{-1} : N \to M$ također analitičko.

Primjeri:

(1) $M = \mathbb{R}^n$; tada je $\{(R^n, id_{\mathbb{R}^n})\}$ $C^\infty-$atlas. Jedinstvena $C^\infty-$struktura koja sadrži taj atlas zove se **standardna $C^\infty-$struktura** na $\mathbb{R}^n$, a jedinstvena analitička struktura koja sadrži taj atlas zove se **standardna analitička struktura** na R^n.

(2) Neka je $(M, \mathcal{A})$ $C^\infty-$mnogostrukost (odn. analitička mnogostrukost) i neka je $V \subseteq M$ otvoren skup. Tada je

$$\{(U \cap V, \psi | U \cap V);\ (U, \psi) \in \mathcal{A},\ U \cap V \neq \emptyset\}$$

$C^\infty-$atlas (odn. analitički atlas) na V. V se s pripadnom $C^\infty-$strukturom (odn. analitičkom strukturom) zove **otvorena podmnogostrukost** od M.

(3) Neka su $(M, \mathcal{A})$ i $(N, \mathcal{B})$ $C^\infty-$mnogostrukosti (odn. analitičke mnogostrukosti), $\dim M = m$, $\dim N = n$. Neka je

$$\mathcal{C} = \{(U \times V, \psi \times \varphi);\ (U, \psi) \in \mathcal{A},\ (V; \varphi) \in \mathcal{B}\},$$

pri čemu je $(\psi \times \varphi)(x, y) = (\psi(x), \varphi(y))$, $x \in U$, $y \in V$. Tada je $\mathcal{C}$ $(m+n)-$dimenzionalni $C^\infty-$atlas (odn. analitički atlas) na $M \times N$. S pripadnom $C^\infty-$strukturom (odn. analitičkom strukturom) $M \times N$ se zove **produkt mnogostrukosti** M i N.

Za $C^\infty-$mnogostrukost M sa $C^\infty(M)$ označavamo skup svih $C^\infty-$funkcija $f : M \to \mathbb{R}$. Uz operacije po točkama $C^\infty(M)$ je komutativna unitalna algebra. **Tangencijalni vektor** na mnogostrukost M u točki $p \in M$ je linearan funkcional $X : C^\infty(M) \to \mathbb{R}$ sa svojstvom

$$X(fg) = X(f)g(p) + f(p)X(g) \qquad \forall f, g \in C^\infty(M).$$

Skup svih tangencijalnih vektora na mnogostrukost M u točki p označavamo sa $T_p(M)$. To je očito potprostor realnog prostora $C^\infty(M)^*$. Zove se **tangencijalni prostor** na mnogostrukost M u točki p.

Lako se vidi da vrijedi $X(f) = 0$ za svaki $X \in T_p(M)$ i za svaku konstantnu funkciju f na mnogostrukosti M.

Lema 1.2.1. *Ako se funkcije $f, g \in C^\infty(M)$ podudaraju na nekoj okolini točke $p \in M$ onda je $X(f) = X(g)$ $\forall X \in T_p(M)$. Posebno, ako je funkcija f konstantna na nekoj okolini točke $p \in M$, onda je $X(f) = 0$ $\forall X \in T_p(M)$.*

Ovo svojstvo lokalnosti tangencijalnih vektora omogućuje nam da identificiramo tangencijalne prostore na M i na otvorenu podmnogostrukost U u svakoj točki $p \in U$:

Propozicija 1.2.2. *Neka je U otvorena podmnogostrukost mnogostrukosti M i neka je $p \in U$. Za $X \in T_p(U)$ definiramo $\tilde{X} : C^\infty(M) \to \mathbb{R}$ ovako:*

$$\tilde{X}(f) = X(f|U), \qquad f \in C^\infty(M).$$

Tada je $X \mapsto \tilde{X}$ izomorfizam prostora $T_p(U)$ na prostor $T_p(M)$.

Neka je $\varepsilon > 0$ i neka je $\sigma : \langle -\varepsilon, \varepsilon \rangle \to M$ $C^\infty-$preslikavanje takvo da je $\sigma(0) = p$. Tada se σ zove **glatka krivulja kroz točku** p. Definiramo tada $V_\sigma : C^\infty(M) \to \mathbb{R}$ sa

$$V_\sigma f = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(\sigma(t))\bigg|_{t=0}, \qquad f \in C^\infty(M).$$

Tada je $V_\sigma \in T_p(M)$ i zove se **tangencijalni vektor na krivulju** σ u točki p. Pomoću teorema egzistencije za sisteme običnih diferencijalnih jednadžbi prvog reda nije teško dokazati da vrijedi:

Teorem 1.2.3. *Neka je M $C^\infty-$mnogostrukost i $p \in M$. Tada vrijedi:*

$$T_p(M) = \{V_\sigma;\ \sigma \text{ je glatka krivulja kroz točku } p\}.$$

Neka je sada (U, ψ) karta na $n-$dimenzionalnoj mnogostrukosti M i $p \in M$. Neka su

$$x_1, x_2, \ldots, x_n : U \to \mathbb{R}$$

koordinatne funkcije preslikavanja ψ :

$$\psi(q) = (x_1(q), x_2(q), \ldots, x_n(q)), \qquad q \in U.$$

Neka je $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ standardna baza od $\mathbb{R}^n$. Za neki $\varepsilon > 0$ možemo definirati glatke krivulje $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n : \langle -\varepsilon, \varepsilon\rangle \to M$ kroz točku p :

$$\sigma_i(t) = \psi^{-1}(\psi(p) + te_i).$$

Za pripadne tangencijalne vektore upotrebljavamo oznake

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p = V_{\sigma_i}.$$

Lema 1.2.4. *Uz uvedene oznake za proizvoljnu glatku krivulju σ kroz točku p vrijedi*

$$V_\sigma f = \sum_{i=1}^{n} \frac{d(x_i \circ \sigma)}{dt}(0) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p f, \qquad f \in C^\infty(M).$$

Odatle i iz teorema 1.2.3. neposredno slijedi:

Teorem 1.2.5. *Neka je M $n-$dimenzionalna mnogostrukost, (U, ψ) karta na M, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ koordinatne funkcije prelikavanja ψ i $p \in U$. Tada je*

$$\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_p, \left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)_p, \ldots, \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)_p\right\}$$

baza realnog vektorskog prostora $T_p(M)$. Posebno, $\dim T_p(M) = \dim M$.

Neka je V realan konačnodimenzionalan vektorski prostor i neka je $\{e_1, \ldots, e_n\}$ baza od V. Neka je $\psi : V \to \mathbb{R}^n$ preslikavanje koje svakom vektoru $v \in V$ pridružuje $n-$torku njegovih koordinata u odabranoj bazi:

$$v = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \qquad \Longrightarrow \qquad \psi(v) = (x_1, \ldots, x_n).$$

Tada je ψ izomorfizam, dakle i homeomorfizam sa V na $\mathbb{R}^n$. Prema tome, (V, ψ) je karta na V i $\{(V, \psi)\}$ je atlas na V. $C^\infty-$struktura na V koja sadrži taj atlas (tj. kartu (V, ψ)) ne ovisi o izboru baze, budući da su koordinate vektora u jednoj bazi linearne funkcije koordinata tog vektora u drugoj bazi.

Vidjet ćemo sada da se tangencijalni prostor $T_v(V)$ za svaki $v \in V$ prirodno identificira sa samim prostorom V. Naime, za $w \in V$ definiramo $\sigma_w : \mathbb{R} \to V$ ovako:

$$\sigma_w(t) = v + tw, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Tada je σ_w glatka krivulja u mnogostrukosti V kroz točku v. Pripadni tangencijalni vektor $V_{\sigma_w} \in T_v(V)$ označimo sa $A(w)$:

$$A(w)f = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(v+tw)\Big|_{t=0}, \qquad f \in C^\infty(M).$$

Tada je $A : V \to T_v(V)$ linearno preslikavanje. Za izabranu bazu $\{e_1, \ldots, e_n\}$ i pripadnu kartu (V, ψ) označimo sa $x_1, \ldots, x_n$ koordinatne funkcije:

$$\psi(u) = (x_1(u), \ldots, x_n(u)), \qquad u \in V.$$

Drugim riječima, $\{x_1, \ldots, x_n\}$ je dualna baza u dualnom prostoru V^* u odnosu na bazu $\{e_1, \ldots, e_n\}$ u prostoru V. Jednostavan račun pokazuje da vrijedi

$$A(e_i) = \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_v, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Dakle, operator A prevodi bazu $\{e_1, \ldots, e_n\}$ prostora V u bazu $\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_v, \ldots, \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)_v\right\}$ tangencijalnog prostora $T_v(V)$. To pokazuje da je $A : V \to T_v(V)$ izomorfizam vektorskih prostora. Pomoću tog izomorfizma možemo identificirati prostor V s tangencijalnim prostorom $T_v(V)$. Dakle, vektor $w \in V$ identificira se s tangencijalnim vektorom

$$f \mapsto \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(v+tw)\Big|_{t=0}, \qquad f \in C^\infty(V).$$

Neka su M i N diferencijalne mnogostrukosti i $\Phi : M \to N$ $C^\infty-$preslikavanje. Za $p \in M$ definiramo $T_p(\Phi) : T_p(M) \to T_{\Phi(p)}(N)$ sa

$$[T_p(\Phi)X](f) = X(f \circ \Phi), \qquad f \in C^\infty(N), \quad X \in T_p(M).$$

Tada je $T_p(\Phi)$ linearan operator i zove se **diferencijal preslikavanja Φ u točki** p. Ako su $x_1, x_2, \ldots, x_m$ koordinatne funkcije za neku kartu (U, ψ) od M oko točke p i $y_1, y_2, \ldots, y_n$ koordinatne funkcije za neku kartu (V, φ) od N oko točke $\Phi(p)$, takvu da je $\Phi(U) \subseteq V$, onda operator $T_p(\Phi)$ djeluje na sljedeći način:

$$T_p(\Phi) \sum_{i=1}^m \alpha_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \alpha_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p (y_j \circ f) \left(\frac{\partial}{\partial y_j}\right)_{\Phi(p)}, \qquad \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{R}.$$

Drugim riječima, matrica operatora $T_p(\Phi)$ u paru baza

$$\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_p, \left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)_p, \ldots, \left(\frac{\partial}{\partial x_m}\right)_p\right\} \quad \text{prostora} \quad T_p(M)$$

i

$$\left\{\left(\frac{\partial}{\partial y_1}\right)_{\Phi(p)}, \left(\frac{\partial}{\partial y_2}\right)_{\Phi(p)}, \ldots, \left(\frac{\partial}{\partial y_n}\right)_{\Phi(p)}\right\} \quad \text{prostora} \quad T_{\Phi(p)}(N)$$

je upravo Jacobijeva matrica preslikavanja $\varphi \circ \Phi \circ \psi^{-1}$.

Propozicija 1.2.6. *Neka su L, M i N $C^\infty-$mnogostrukosti i neka su $\Psi : L \to M$ i $\Phi : M \to N$ $C^\infty-$preslikavanja. Tada je $\Phi \circ \Psi : L \to N$ $C^\infty-$preslikavanje i da za svaku točku $p \in L$ vrijedi $T_p(\Phi \circ \Psi) = T_{\Psi(p)}(\Phi) T_p(\Psi)$.*

Korolar 1.2.7. *Ako je $\Phi : M \to N$ difeomorfizam onda je* $\dim M = \dim N$.

Podmnogostrukost mnogostrukosti M je podskup $N \subseteq M$ koji ima svoju $C^\infty-$strukturu koja je takva da inkluzija $i : N \to M$ zadovoljava:

(*i*) i je $C^\infty-$preslikavanje;

(*ii*) $T_p(i) : T_p(N) \to T_p(M)$ je injekcija $\forall p \in N$.

Posebno, svaka otvorena podmnogostrukost je podmnogostrukost.

Za mnogostrukost M definiramo

$$T(M) = \bigcup_{p\in M} T_p(M) \qquad \text{(disjunktna unija)}$$

i neka je $\pi : T(M) \to M$ preslikavanje definirano sa $\pi(T_p(M)) = \{p\}$. Neka je $\mathcal{A}$ $C^\infty-$struktura mnogostrukosti M. Za $\xi \in \mathcal{A}$ pišemo $\xi = (U_\xi, \psi_\xi)$ i neka su $x_1^\xi, \ldots, x_n^\xi : U_\xi \to \mathbb{R}$ pripadne koordinatne funkcije: $\psi_\xi(p) = (x_1^\xi(p), \ldots, x_n^\xi(p))$, $p \in U_\xi$. Za $\xi \in \mathcal{A}$ definiramo preslikavanje

$$\Psi_\xi : \pi^{-1}(U_\xi) \longrightarrow \mathbb{R}^{2n}$$

na sljedeći način:

$$\Psi_\xi(v) = (x_1^\xi(p), \ldots, x_n^\xi(p), v_1, \ldots, v_n) \qquad \text{ako je} \qquad p \in U_\xi \quad \text{i} \quad v = \sum_{i=1}^n v_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p \in T_p(M).$$

Za $\xi \in \mathcal{A}$ neka je τ_ξ skup svih podskupova od $\pi^{-1}(U_\xi) \subseteq T(M)$ oblika $\Psi_\xi^{-1}(W)$, gdje je W otvoren podskup od $\psi_\xi(U_\xi) \times \mathbb{R}^n$. Neka je τ unija svih skupova τ_ξ, $\xi \in \mathcal{A}$. Pokazuje se da je τ baza topologije s kojom $T(M)$ postaje Hausdorffov topološki prostor s prebrojivom bazom topologije i preslikavanje $\pi : T(M) \to M$ je neprekidno. Nadalje, direktno se provjerava da je

$$\{(\pi^{-1}(U_\xi), \Psi_\xi);\ \xi \in \mathcal{A}\}$$

$C^\infty-$atlas na $T(M)$. Na taj način $T(M)$ postaje $2n-$dimenzionalna $C^\infty-$mnogostrukost. Tada je preslikavanje $\pi : T(M) \to M$ klase C^∞.

Vektorsko polje na mnogostrukosti M je svako $C^\infty-$preslikavanje $X : M \to T(M)$, $p \mapsto X_p$, takvo da je $X_p \in T_p(M)$ $\forall p \in M$. Skup svih vektorskih polja označavamo sa $\mathcal{X}(M)$; to je realan vektorski prostor uz operacije po točkama:

$$(\alpha X)_p = \alpha X_p, \qquad (X+Y)_p = X_p + Y_p, \qquad \alpha \in \mathbb{R}, \quad X, Y \in \mathcal{X}(M), \quad p \in M.$$

Štoviše, $\mathcal{X}(M)$ je unitalni $C^\infty(M)-$modul uz množenje elemenata iz $\mathcal{X}(M)$ funkcijama iz $C^\infty(M)$ definirano također po točkama:

$$(fX)_p = f(p)X_p, \qquad f \in C^\infty(M), \quad X \in \mathcal{X}(M).$$

Liejeva algebra $Der(C^\infty(M))$ svih derivacija algebre $C^\infty(M)$ je unitalni $C^\infty(M)-$modul uz operaciju množenja definiranu sa

$$(fD)g = fDg, \qquad f, g \in C^\infty(M), \quad D \in Der(C^\infty(M)).$$

Teorem 1.2.8. *Za $X \in \mathcal{X}(M)$ definiramo $\overline{X} : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ sa*

$$[\overline{X}(f)](p) = X_p(f), \qquad f \in C^\infty(M), \quad p \in M.$$

Tada je $X \mapsto \overline{X}$ izomorfizam $C^\infty(M)-$modula $\mathcal{X}(M)$ na $C^\infty(M)-$modul $Der(C^\infty(M))$.

Preslikavanje $X \mapsto \overline{X}$ iz teorema 1.2.8. upotrebljavamo kao identifikaciju. Dakle, vektorska polja na mnogostrukosti M su derivacije algebre $C^\infty(M)$. Za tako shvaćeno vektorsko polje X i za $p \in M$, pripadni tangencijalni vektor $X_p \in T_p(M)$ definiran je sa $X_p f = (Xf)(p)$, $f \in C^\infty(M)$.

1.2.2 Liejeve grupe

Liejeva grupa je skup G sa svojstvima:

(i) G je grupa.

(ii) G je diferencijalna mnogostrukost.

(iii) $(x, y) \mapsto xy^{-1}$ je $C^\infty-$preslikavanje sa $G \times G$ u G.

Naravno, tada je množenje $(x, y) \mapsto xy$ $C^\infty-$preslikavanje sa $G \times G$ u G, a invertiranje $x \mapsto x^{-1}$ je difeomorfizam sa G na G. Važna je činjenica da na svakoj Liejevoj grupi postoji prirodna struktura analitičke mnogostrukosti:

Teorem 1.2.9. *Neka je G Liejeva grupa. $C^\infty-$struktura mnogostrukosti G sadrži jedinstvenu analitičku strukturu takvu da je preslikavanje $(x, y) \mapsto xy^{-1}$ sa $G \times G$ u G analitičko.*

Neka je $\mathcal{A}$ konačnodimenzionalna realna unitalna algebra i neka je $G = \mathcal{A}^\times$ grupa njenih invertibilnih elemenata. Element $x \in \mathcal{A}$ je invertibilan ako i samo ako je regularan operator λ_x lijevog množenja sa $x : \lambda_x y = xy$, $y \in \mathcal{A}$. Dakle,

$$G = \{x \in \mathcal{A};\ \det(\lambda_x) \neq 0\}.$$

To pokazuje da je G otvoren podskup od $\mathcal{A}$. Kao vektorski prostor $\mathcal{A}$ je diferencijalna mnogostrukost. Dakle i G je diferencijalna mnogostrukost (otvorena podmnogostrukost od $\mathcal{A}$).

Prema razmatranjima u prethodnom odjeljku 3.1. za bilo koju točku $x \in G$ tangencijalni prostor $T_x(G)$ identificira se s tangencijalnim prostorom $T_x(\mathcal{A})$, a ovaj se opet s vektorskim prostorom $\mathcal{A}$. Identifikacija $\mathcal{A}$ sa $T_x(G)$ identificira element $y \in \mathcal{A}$ s tangencijalnim vektorom iz $T_x(G)$ danim sa

$$f \mapsto \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(x + ty)\Big|_{t=0}, \qquad f \in C^\infty(G).$$

Posebno je važan slučaj algebre $L(V)$ svih linearnih operatora na konačnodimenzionalnom realnom vektorskom prostoru V. Dakle, $GL(V)$ je Liejeva grupa i za $x \in GL(V)$ tangencijalni prostor $T_x(GL(V))$ identificira se s prostorom $L(V)$. Izomorfna je Liejeva grupa $GL(n, \mathbb{R})$ svih regularnih kvadratnih matrica $n-$tog reda. Njen tangencijalni prostor u točki $x \in GL(n, \mathbb{R})$ identificira se s prostorom $M_n(\mathbb{R})$ svih kvadratnih matrica $n-$tog reda.

Za svaki element x Liejeve grupe G preslikavanja pomaka $\lambda_x, \rho_x : G \to G$ definirana sa

$$\lambda_x(y) = xy, \qquad \rho_x(y) = yx^{-1}, \qquad y \in G,$$

su analitički difeomorfizmi sa G na G i vrijedi $\lambda_x \circ \lambda_y = \lambda_{xy}$ i $\rho_x \circ \rho_y = \rho_{xy}$. **Vektorsko polje** $X \in \mathcal{X}(G)$ zove se **lijevoinvarijantno** ako vrijedi

$$T_y(\lambda_x)X_y = X_{xy} \qquad \forall x, y \in G.$$

Neka je $\mathfrak{g}$ potprostor od $\mathcal{X}(G)$ svih lijevoinvarijantnih vektorskih polja na G.

Propozicija 1.2.10. $\mathfrak{g}$ *je Liejeva podalgebra Liejeve algebre $Der(C^\infty(G)) = \mathcal{X}(G)$ svih vektorskih polja na G.*

Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ se zove **Liejeva algebra Liejeve grupe** G.

Propozicija 1.2.11. *Neka je e jedinica u Liejevoj grupi G. Preslikavanje $X \mapsto X_e$ je izomorfizam vektorskih prostora sa $\mathfrak{g}$ na $T_e(G)$.*

Izomorfizam iz propozicije 1.2.11. upotrebljava se kao identifikacija. Dakle, Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ Liejeve grupe G identificira se s tangencijalnim prostorom $T_e(G)$ na G u jedinici e. Komutator $[X, Y]$ elemenata Liejeve algebre $T_e(G)$ definiran je zaobilazno: dobiva se tako da najprije X i Y shvatimo kao lijevoinvarijantna vektorska polja, zatim izračunamo komutator tih dviju derivacija algebre $C^\infty(G)$ i rezultat ponovo shvaćamo kao element od $T_e(G)$. Daljnje definicije i konstrukcije dovest će nas do direktne formule za komutator $[X, Y] \in T_e(G)$ elemenata $X, Y \in T_e(G)$.

Razmotrimo opet primjer konačnodimenzionalne realne unitalne algebre $\mathcal{A}$. Grupa G svih njenih invertibilnih elemenata je Liejeva grupa. Njena Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ identificira se s tangencijalnim prostorom $T_e(G)$ na G u jedinici e, a ovaj se identificira s prostorom $\mathcal{A}$.

Propozicija 1.2.12. *Pri opisanoj identifikaciji $\mathfrak{g}$ sa $\mathcal{A}$ komutator $[x, y]$ u Liejevoj algebri $\mathfrak{g}$ jednak je $xy - yx$ u algebri $\mathcal{A}$.*

Prema tome Liejeva algebra Liejeve grupe $GL(V)$ (odnosno, Liejeve grupe $GL(n, \mathbb{R})$) identificira se s Liejevom algebrom $\mathfrak{gl}(V)$ (odnosno, s Liejevom algebrom $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$).

Neka su sada G i H Liejeve grupe s Liejevim algebrama $\mathfrak{g}$ i $\mathfrak{h}$. Preslikavanje $\varphi : G \to H$ zove se **Liejev homomorfizam** ako je to homomorfizam grupa i analitičko preslikavanje.

Propozicija 1.2.13. *Neka je $\varphi : G \to H$ Liejev homomorfizam. Tada je $T_e(\varphi)$ homomorfizam Liejeve algebre $T_e(G) = \mathfrak{g}$ u Liejevu algebru $T_e(H) = \mathfrak{h}$.*

Za element x Liejeve grupe G definiramo preslikavanje $Int(x) : G \to G$ sa

$$Int(x) = \lambda_x \circ \rho_x = \rho_x \circ \lambda_x, \qquad \text{tj.} \qquad (Int(x))(y) = xyx^{-1}, \qquad y \in G.$$

Očito je $Int(x)$ Liejev homomorfizam sa G u G. Homomorfizam $Int(x^{-1})$ je inverzno preslikavanje od $Int(x)$. Prema tome, svaki $Int(x)$ je automorfizam grupe G i analitički difeomorfizam mnogostrukosti G. Dakle, preslikavanje $Ad(x) = T_e(Int(x))$ je regularan operator na Liejevoj algebri $T_e(G) = \mathfrak{g}$, tj. $Ad(x) \in GL(\mathfrak{g})$. Lako se vidi:

Propozicija 1.2.14. *Preslikavanje $Ad : G \to GL(\mathfrak{g})$ je Liejev homomorfizam.*

Neka je sada $\varphi : G \to H$ Liejev homomorfizam Liejevih grupa G i H s Liejevim algebrama $\mathfrak{g} = T_e(G)$ i $\mathfrak{h} = T_e(H)$. Radi preciznosti preslikavanja Int i Ad za grupe G i H označavamo sa Int_G i Ad_G, te sa Int_H i Ad_H. Za $x, y \in G$ je

$$\varphi((Int_G(x))(y)) = \varphi(xyx^{-1}) = \varphi(x)\varphi(y)\varphi(x)^{-1} = (Int_H(\varphi(x)))(\varphi(y)).$$

Dakle,

$$\varphi \circ Int_G(x) = Int_H(\varphi(x)) \circ \varphi,$$

pa slijedi

$$T_e(\varphi)T_e(Int_G(x)) = T_e(Int_H(\varphi(x)))T_e(\varphi).$$

Prema tome:

Propozicija 1.2.15. *Neka je $\varphi : G \to H$ Liejev homomorfizam. Tada za svaku točku $x \in G$ vrijedi*

$$T_e(\varphi)Ad_G(x) = Ad_H(\varphi(x))T_e(\varphi).$$

Jednoparametarska podgrupa Liejeve grupe G je Liejev homomorfizam $\varphi : \mathbb{R} \to G$. Posebno, φ je glatka krivulja kroz e, pa je $V_\varphi \in T_e(G) = \mathfrak{g}$. Dokaz sljedećeg fundamentalnog teorem iz teorije Liejevih grupa temelji se na teoremu egzistencije i jedinstvenosti za sisteme običnih linearnih diferencijalnih jednadžbi prvog reda.

Teorem 1.2.16. *Za svaki $X \in \mathfrak{g}$ postoji jedinstvena jednoparametarska podgrupa φ_X Liejeve grupe G takva da je $X = V_{\varphi_X}$. Preslikavanje $(X,t) \mapsto \varphi_X(t)$ sa $\mathfrak{g} \times \mathbb{R}$ u G je analitičko.*

Uz oznake iz teorema 1.2.16. definiramo **eksponencijalno preslikavanje** $\exp : \mathfrak{g} \to G$ sa

$$\exp X = \varphi_X(1), \qquad X \in \mathfrak{g} = T_e(G).$$

Lako se vidi da je tada

$$\varphi_X(t) = \exp tX \qquad \forall t \in \mathbb{R} \quad \text{i} \quad X \in \mathfrak{g}.$$

Razmotrimo posebno Liejevu grupu $G = \mathcal{A}^\times$ za konačnodimenzionalnu realnu unitalnu algebru $\mathcal{A}$. Njenu smo Liejevu algebru identificirali s Liejevom algebrom $\mathcal{A}$ dobivenom iz asocijativne algebre $\mathcal{A}$ zadavanjem komutatora $[x,y] = xy - yx$, $x, y \in \mathcal{A}$. Element $x \in \mathcal{A}$ identificira se s tangencijalnim vektorom na G u jedinici $e = 1_\mathcal{A}$ zadanim sa

$$f \ \mapsto \ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(e+tx)\bigg|_{t=0}, \qquad f \in C^\infty(G).$$

Neka je $x \in \mathcal{A}$. Tada je očito

$$\varphi : t \ \mapsto \ \mathrm{e}^{tx} = e + tx + \frac{t^2}{2!}x^2 + \frac{t^3}{3!}x^3 + \cdots, \qquad t \in \mathbb{R},$$

jednoparametarska podgrupa Liejeve grupe G.

Propozicija 1.2.17. *Uz gornje oznake je $V_\varphi = x$, tj. za svaku funkciju $f \in C^\infty(G)$ vrijedi*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f\left(e + tx + \frac{t^2}{2!} + \cdots\right)\bigg|_{t=0} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(e+tx)\bigg|_{t=0}.$$

Prema tome, u slučaju $G = \mathcal{A}^\times$ eksponencijalno preslikavanje dano je sa

$$\exp x = \mathrm{e}^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}x^n, \qquad x \in \mathcal{A}.$$

Posebno to vrijedi za Liejevu grupu $G = GL(V)$ i njenu Liejevu algebru $\mathfrak{gl}(V)$, gdje je V konačnodimenzionalan realan vektorski prostor, a također i za Liejevu grupu $GL(n,\mathbb{R})$ i njenu Liejevu algebru $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$.

Važno svojstvo eksponencijalnog preslikavanja je analitičnost i lokalna difeomorfnost:

Teorem 1.2.18. *Neka je G Liejeva grupa i $\mathfrak{g}$ njena Liejeva algebra. Postoje otvorena okolina U nule u $\mathfrak{g}$ i otvorena okolina V jedinice u G takve da je restrikcija $\exp|U$ analitički difeomorfizam sa U na V.*

Jednostavna posljedica je:

Korolar 1.2.19. *Neka je G Liejeva grupa i $\mathfrak{g}$ njena Liejeva algebra. Tada je komponenta povezanosti jedinice G_0 u grupi G generirana skupom $\exp \mathfrak{g} = \{\exp X;\ X \in \mathfrak{g}\}$. Štoviše, za svaku otvorenu okolinu U nule u $\mathfrak{g}$ podgrupa G_0 generirana je sa $\exp U$:*

$$G_0 = \{(\exp X_1)(\exp X_2)\cdots(\exp X_n);\ n \in \mathbb{N},\ X_1, X_2, \ldots, X_n \in U\}.$$

Iz teorema 1.2.18. izvodi se i sljedeći netrivijalni rezultat:

Teorem 1.2.20. *Neka su G i H Liejeve grupe i $\varphi : G \to H$ neprekidni homomorfizam grupa. Tada je φ Liejev homomorfizam.*

Neka je sada $\psi : G \to H$ Liejev homomorfizam i neka su $\mathfrak{g}$ i $\mathfrak{h}$ Liejeve algebre Liejevih grupa G i H. Eksponencijalna preslikavanja $\mathfrak{g} \to G$ i $\mathfrak{h} \to H$ označimo sa $\exp_G$ i $\exp_H$. Za $X \in \mathfrak{g}$ preslikavanje $t \mapsto \exp tX$ je jedinstvena jednoparametarska podgrupa Liejeve grupe G s tangencijalnim vektorom u jedinici $e = e_G$ jednakim X. Kompozicijom tog preslikavanja s Liejevim homomorfizmom ψ dobivamo jednoparametarsku podgrupu $t \mapsto \psi(\exp_G tX)$ u Liejevoj grupi H. Pripadni tangencijalni vektor u jedinici $e = e_H$ grupe H na bilo koju funkciju $g \in C^\infty(H)$ djeluje ovako:

$$g \mapsto \left. \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} g(\psi(\exp_G tX)) \right|_{t=0} = \left. \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} (g \circ \psi)(\exp_G tX) \right|_{t=0} = X(g \circ \psi) = [T_e(\psi)X]\,(g).$$

Zbog jedinstvenosti u teoremu 1.2.16. i zbog propozicije 1.2.17. dobivamo da je

$$\exp_H tT_e(\psi)X = \psi(\exp_G tX), \qquad t \in \mathbb{R}, \quad X \in \mathfrak{g} = T_e(G).$$

Dakle,

Propozicija 1.2.21. *Ako je $\psi : G \to H$ Liejev homomorfizam onda je*

$$\psi(\exp_G X) = \exp_H T_e(\psi)X$$

za svaki X iz Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ Liejeve grupe G.

Propozicija 1.2.22. *Neka je G Liejeva grupa, $\mathfrak{g} = T_e(G)$ njena Liejeva algebra. Za $X \in \mathfrak{g}$ označimo sa $\tilde{X}$ jedinstveno lijevoinvarijantno vektorsko polje na G takvo da je $\tilde{X}_e = X$. Tada vrijedi*

$$(\tilde{X}^n f)(x \exp tX) = \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n} f(x \exp tX), \qquad X \in \mathfrak{g}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad x \in G.$$

$H \subseteq G$ zove se **Liejeva podgrupa** Liejeve grupe G ako je to podgrupa koja je ujedno podmnogostrukost; dakle, H ima svoju strukturu mnogostrukosti takvu da je to Liejeva grupa, inkluzija $\iota : H \to G$ je Liejev homomorfizam i pripadni homomorfizam Liejevih algebri $T_e(\iota) : \mathfrak{h} \to \mathfrak{g}$ injektivan. Tada se pomoću $T_e(\iota)$ Liejeva algebra $\mathfrak{h}$ identificira s Liejevom podalgebrom Liejeve algebre $\mathfrak{g}$.

Teorem 1.2.23. *Neka je G Liejeva grupa s Liejevom algebrom $\mathfrak{g}$ i neka je $\mathfrak{h}$ Liejeva podalgebra od $\mathfrak{g}$. Postoji jedinstvena povezana Liejeva podgrupa H od G čija je Liejeva algebra jednaka $\mathfrak{h}$.*

Ovaj se teorem dokazuje tako da se promatra skup $\exp \mathfrak{h} \subseteq G$ i za H se uzme podgrupa generirana tim skupom. $C^\infty-$strukturu u H uvedemo najprije na okolinu jedinice pomoću $\exp|\mathfrak{h}$, a zatim pomacima i na cijelu grupu H.

Teorem 1.2.24. (**Elie Cartan**) *Neka je G Liejeva grupa i H zatvorena podgrupa. Tada je H Liejeva podgrupa od G.*

Za dokaz ovog teorema najprije se pokaže da je

$$\mathfrak{h} = \{X \in \mathfrak{g};\ \exp tX \in H\ \forall t \in \mathbb{R}\}$$

Liejeva podalgebra od $\mathfrak{g}$, a zatim da je $\exp \mathfrak{h}$ okolina jedinice u grupi H.

Neka je i dalje G Liejeva grupa i $\mathfrak{g} = T_e(G)$ njena Liejeva algebra. Iz Liejevog homomorfizma $Ad : G \to GL(\mathfrak{g})$ dobivamo homomorfizam Liejevih algebri $T_e(Ad) : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$. Najavljena formula, koja daje komutator elemenata $X, Y \in \mathfrak{g} = T_e(G)$ bez korištenja njihova proširenja do lijevoinvarijantnih vektorskih polja na G, je

$$(T_e(Ad)X)(Y) = [X, Y], \qquad X, Y \in \mathfrak{g} = T_e(G).$$

Drugim riječima:

Teorem 1.2.25. *Za Liejevu grupu G i njenu Liejevu algebru $\mathfrak{g} = T_e(G)$ vrijedi $T_e(Ad) = ad$.*

Ako je G topološka grupa i H njena zatvorena podgrupa, tada je skup desnih $H-$klasa $M = G/H = \{gH;\ g \in G\}$ s kvocijentnom topologijom Hausdorffov topološki prostor, koji je lokalno kompaktan ako je grupa G lokalno kompaktna.

Teorem 1.2.26. *Neka je G Liejeva grupa i H njena zatvorena podgrupa. Nadalje, neka je $\mathfrak{g}$ Liejeva algebra od G i $\mathfrak{h}$ njena Liejeva podalgebra koja odgovara zatvorenoj podgrupi H :*

$$\mathfrak{h} = \{X \in \mathfrak{g};\ \exp tX \in H\ \ \forall t \in \mathbb{R}\}.$$

Na kvocijentnom prostoru $M = G/H$ postoji jedinstvena struktura $C^\infty-$mnogostrukosti (odnosno, analitičke mnogostrukosti) takva da je $(g, m) \mapsto gm$, $g \in G$, $m \in M$, $C^\infty-$preslikavanje (odnosno, analitičko preslikavanje) sa $G \times M$ u M. Ako je podgrupa H normalna, kvocijentna grupa G/H s tom strukturom je Liejeva grupa. Nadalje, tada je $\mathfrak{h}$ ideal u Liejevoj algebri $\mathfrak{g}$ i kvocijentna Liejeva algebra $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ prirodno se identificira s Liejevom algebrom Liejeve grupe G/H.

Analitička struktura (a time i $C^\infty-$struktura) na kvocijentnom prostoru $M = G/H$ u prethodnom teoremu dobiva se pomoću eksponencijalnog preslikavanja. Pokazuje se da je preslikavanje $\exp_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}} : X + \mathfrak{h} \mapsto (\exp X)H$ sa $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ u M dobro definirano i njegova restrikcija na neku otvorenu okolinu V nule u $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ je homeomorfizam sa V na otvorenu okolinu U točke $H = eH$ prostora M. Tada inverzno preslikavanje $(\exp_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}} |V)^{-1}$ komponirano s koordinatizacijom vektorskog prostora $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ definira kartu na M. Iz te karte pomakom na M dobivamo kartu oko svake točke $gH \in M$. Pokazuje se da je na taj način dobiven analitički atlas na M, i za pripadnu analitičku strukturu $(g, m) \mapsto gm$ je analitičko preslikavanje sa $G \times M$ u M.

Primjeri 1. Već smo spomenuli Liejevu grupu $GL(n, \mathbb{R})$ i njenu Liejevu algebru koja se identificira sa $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ tako da je eksponencijalno preslikavanje $\exp : \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) \to GL(n, \mathbb{R})$ upravo obično eksponenciranje matrica $A \mapsto \mathrm{e}^A$. Analogno je $GL(n, \mathbb{C})$ Liejeva grupa s Liejevom algebrom $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$, koja se ovdje promatra kao realna Liejeva algebra.

Primjer 2. Ako je $\mathbb{F}$ ili $\mathbb{R}$ ili $\mathbb{C}$ onda je

$$SL(n, \mathbb{F}) = \{A \in GL(n, \mathbb{F});\ \det A = 1\}$$

zatvorena podgrupa od $FL(n, \mathbb{F})$, dakle, po Cartanovom teoremu 1.2.24. to je Liejeva grupa. Njena se Liejeva algebra identificira sa sljedećom Liejevom podalgebrom od $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{F})$:

$$\mathfrak{sl}(n, \mathbb{F}) = \left\{A \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{F});\ \mathrm{e}^{tA} \in SL(n, \mathbb{F})\ \ \forall t \in \mathbb{R}\right\}.$$

Kako je $\det \mathrm{e}^B = \mathrm{e}^{\mathrm{Tr}\, B}$ za svaku kvadratnu matricu B, dobivamo

$$\mathfrak{sl}(n, \mathbb{F}) = \{A \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{F});\ \mathrm{Tr}\, A = 0\}.$$

Niz primjera dobivamo promatranjem nedegeneriranih bilinearnih formi na prostoru $\mathbb{F}^n = M_{n,1}(\mathbb{F})$. Neka je $\langle \cdot | \cdot \rangle$ oznaka za standardnu nedegeneriranu simetričnu bilinearnu formu na $\mathbb{F}^n$:

$$\langle x|y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

Tada su bilinearne forme B na $\mathbb{F}^n$ u bijekciji s matricama $H \in M_n(\mathbb{F})$: veza je

$$B(x,y) = \langle Hx|y \rangle, \qquad x,y \in \mathbb{F}^n.$$

Grupa $G = GL(n,\mathbb{F})$ djeluje na vektorskom prostoru svih bilinearnih formi na $\mathbb{F}^n$: element $g \in G$ šalje formu B u formu B^g zadanu sa

$$B^g(x,y) = B(gx,gy), \qquad x,y \in \mathbb{F}^n.$$

To je desno djelovanje: vrijedi $B^{gg'} = (B^g)^{g'}$. Ako pri gornjoj korespondenciji formi B odgovara matrica H, onda se lako vidi da formi B^g odgovara matrica g^tHg, pri čemu je g^t oznaka za transponiranu matricu matrice g. Posebno, element $g \in G$ čuva formu B ako i samo ako je $g^tHg = H$.

Na $\mathbb{C}^n$ možemo pored simetričnih promatrati i hermitske forme B. Pomoću standardnog skalarnog produkta $(\cdot | \cdot)$ na $\mathbb{C}^n$,

$$(x|y) = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y}_i, \qquad x,y \in \mathbb{C}^n,$$

hermitske forme su na analogan način kao i malo prije u bijekciji s hermitskim matricama H. No u ovom je slučaju djelovanje $g \in G$ dano sa $H \mapsto g^*Hg$, gdje je g^* adjungirana matrica matrice g.

Primjer 3. Neka je B nedegenerirana simetrična bilinearna forma na $\mathbb{C}^n$. Tada se može izabrati baza od $\mathbb{C}^n$ u kojoj je matrica forme B jedinična matrica $I = I_n$. Dakle, $g \in G$ čuva formu B ako i samo ako je $g^tg = I$. To je zatvorena podgrupa od $GL(n,\mathbb{C})$, dakle, Liejeva grupa. Ona se označava sa $O(n,\mathbb{C})$. Njena je Liejeva algebra

$$\mathfrak{o}(n,\mathbb{C}) = \left\{ A \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C});\ \mathrm{e}^{tA} \in O(n,\mathbb{C})\ \ \forall t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ A \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C});\ A^t = -A \right\},$$

dakle, to je Liejeva algebra svih komleksnih antisimetričnih matrica $n \times n$.

Primjer 4. $SO(n,\mathbb{C}) = O(n,\mathbb{C}) \cap SL(n,\mathbb{C})$ je Liejeva grupa (to je zatvorena podgrupa od $O(n,\mathbb{C})$ i zatvorena podgrupa od $SL(n,\mathbb{C})$), a kako svaka antisimetrična matrica ima trag 0, njena se Liejeva algebra podudara s Liejevom algebrom $\mathfrak{o}(n,\mathbb{C})$. Sada iz korolara 1.2.19. slijedi da grupa $SO(n,\mathbb{C})$ sadrži komponentu povezanosti grupa $O(n,\mathbb{C})$, tj. $SO(n,\mathbb{C})$ je otvorena podgrupa od $O(n,\mathbb{C})$. Nije teško vidjeti da je stvarno $SO(n,\mathbb{C})$ komponenta povezanosti grupe $O(n,\mathbb{C})$ i da grupa $O(n,\mathbb{C})$ ima dvije komponente povezanosti; ona druga komponenta povezanosti je $\{g \in O(n,\mathbb{C});\ \det g = -1\}$.

Primjer 5. Ako je B simetrična nedegenerirana bilinearna forma na $\mathbb{R}^n$, i ako ona ima signaturu (p,q) $(p+q=n)$ onda ona u nekoj bazi ima matricu

$$H_{p,q} = \begin{bmatrix} I_p & 0_{p,q} \\ 0_{q,p} & -I_q \end{bmatrix}.$$

Pripadna Liejeva grupa sastoji se od svih matrica $g \in GL(n,\mathbb{R})$ sa svojstvom $g^t H_{p,q} g = H_{p,q}$ i označava se sa $O(p,q)$. Njena je Liejeva algebra

$$\mathfrak{o}(p,q) = \left\{A \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R});\ A^t = -H_{p,q}AH_{p,q}\right\} = \left\{ \begin{bmatrix} B_1 & B_3 \\ B_3^t & B_2 \end{bmatrix};\ \begin{array}{l} B_1 \in M_p(\mathbb{R}),\ B_1^t = -B_1 \\ B_2 \in M_q(\mathbb{R}),\ B_2^t = -B_2 \\ B_3 \in M_{p,q}(\mathbb{R}) \end{array} \right\}.$$

Posebno, $O(n) = O(n,0)$ je grupa svih realnih ortogonalnih matrica i to je kompaktna grupa, a njena se Liejeva algebra $\mathfrak{o}(n)$ sastoji od svih simetričnih realnih matrica $n \times n$.

Primjer 6. Opet je $SO(p,q)$ otvorena podgrupa od $O(p,q)$ s istom Liejevom algebrom. Međutim, ako je $p > 0$ i $q > 0$, onda grupa $SO(p,q)$ ima dvije, a grupa $O(p,q)$ četiri komponente povezanosti. No ako je $p = n$ i $q = 0$, kompektna grupa $SO(n) = SO(n,0)$ je povezana, a grupa $O(n)$ ima dvije komponente povezanosti.

Primjer 7. Promatrajmo sada nedegeneriranu hermitsku formu na $\mathbb{C}^n$ sa signaturom (p,q), $p+q=n$. Tada je u zgodno odabranoj bazi matrica te forme opet $H_{p,q}$ i dobivamo Liejevu grupu

$$U(p,q) = \{g \in GL(n,\mathbb{C});\ g^* H_{p,q} g = H_{p,q}\}$$

s Liejevom algebrom

$$\mathfrak{u}(p,q) = \{A \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C});\ A^* = -H_{p,q}AH_{p,q}\} = \left\{ \begin{bmatrix} C_1 & C_3 \\ C_3^* & C_2 \end{bmatrix};\ \begin{array}{l} C_1 \in M_p(\mathbb{C}),\ C_1^* = -C_1 \\ C_2 \in M_q(\mathbb{C}),\ C_2^* = -C_2 \\ C_3 \in M_{p,q}(\mathbb{C}) \end{array} \right\}.$$

Pokazuje se da je grupa $U(p,q)$ povezana. $U(n) = U(n,0)$ je kompaktna grupa svih unitarnih matrica $n \times n$, a njena se Liejeva algebra $\mathfrak{u}(n)$ sastoji od svih antihermitskih matrica $n \times n$.

Primjer 8. $SU(p,q) = U(p,q) \cap SL(n,\mathbb{C})$ je povezana Liejeva grupa s Liejevom algebrom

$$\mathfrak{su}(p,q) = \{A \in \mathfrak{u}(p,q);\ \operatorname{Tr} A = 0\} = \left\{ \begin{bmatrix} C_1 & C_3 \\ C_3^* & C_2 \end{bmatrix} \in \mathfrak{u}(p,q); \operatorname{Tr} C_1 + \operatorname{Tr} C_2 = 0 \right\}.$$

Posebno, $SU(n) = SU(n,0)$ je kompaktna povezana Liejeva grupa i njena Liejeva algebra $\mathfrak{su}(n)$ sastoji se od svih antihermitskih $n \times n$ matrica s tragom 0.

Primjer 9. Nedegenerirana bilinearna antisimetrička forma zove se **simplektička forma**. Takve postoje samo na parnodimenzionalnim prostorima. Liejeva grupa koja ostavlja invarijantnom takvu formu na $\mathbb{C}^{2n}$ uz zgodno odabranu bazu je **simplektička grupa**

$$Sp(n,\mathbb{C}) = \left\{g \in GL(2n,\mathbb{C});\ g^t J_{2n} g = J_{2n}\right\}, \qquad \text{gdje je} \quad J_{2n} = \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{bmatrix}$$

s Liejevom algebrom

$$\mathfrak{sp}(n,\mathbb{C}) = \left\{A \in \mathfrak{gl}(2n,\mathbb{C});\ A^t = J_{2n}AJ_{2n}\right\} = \left\{ \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & -C_1^t \end{bmatrix};\ \begin{array}{l} C_1, C_2, C_3 \in M_n(\mathbb{C}) \\ C_2^t = C_2,\ C_3^t = C_3 \end{array} \right\}.$$

Grupa $Sp(n,\mathbb{C})$ povezana je i sadržana u $SL(2n,\mathbb{C})$.

Primjer 10. Realna simplektička grupa je povezana grupa $Sp(n,\mathbb{R}) = Sp(n,\mathbb{C}) \cap GL(2n,\mathbb{R})$:

$$Sp(n,\mathbb{R}) = \left\{ g \in GL(2n,\mathbb{R});\ g^t J_{2n} g = J_{2n} \right\} \subseteq SL(2n,\mathbb{R}).$$

Njena je Liejeva algebra

$$\mathfrak{sp}(n,\mathbb{R}) = \left\{ A \in \mathfrak{gl}(2n,\mathbb{R});\ A^t = J_{2n} A J_{2n} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & -B_1^t \end{bmatrix};\ \begin{array}{c} B_1, B_2, B_3 \in M_n(\mathbb{R}) \\ B_2^t = B_2,\ B_3^t = B_3 \end{array} \right\}.$$

Pokazuje se da je grupa $Sp(n,\mathbb{R}) \cap U(2n)$ izomorfna grupi $U(n)$.

U sljedeća dva primjera definiraju se grupe koje čuvaju po dvije forme.

Primjer 11. Definiramo za $p, q \in \mathbb{Z}_+$ definiramo Liejevu grupu

$$Sp(p,q) = \{ g \in Sp(p+q,\mathbb{C});\ g^* K_{p,q} g = K_{p,q} \}, \qquad \text{gdje je} \quad K_{p,q} = \begin{bmatrix} -I_p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -I_p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_q \end{bmatrix}.$$

Liejeva grupa $Sp(p,q)$ je povezana i njena je Liejeva algebra

$$\mathfrak{sp}(p,q) = \{ A \in \mathfrak{sp}(p+q,\mathbb{C});\ A^* = -K_{p,q} A K_{p,q} \} =$$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} \\ C_{12}^* & C_{22} & C_{14}^t & C_{24} \\ -\overline{C}_{13} & \overline{C}_{14} & \overline{C}_{11} & -\overline{C}_{12} \\ C_{14}^* & -\overline{C}_{24} & -C_{12}^t & \overline{C}_{22} \end{bmatrix};\ \begin{array}{l} C_{11}, C_{13} \in M_p(\mathbb{C}), \\ C_{22}, C_{24} \in M_q(\mathbb{C}), \\ C_{12}, C_{14} \in M_{p,q}(\mathbb{C}), \\ C_{11}^* = -C_{11},\ C_{13}^t = C_{13}, \\ C_{22}^* = -C_{22}\ C_{24}^t = C_{24} \end{array} \right\}.$$

Grupa $Sp(n) = Sp(n,0)$ je kompaktna:

$$Sp(n) = \{ g \in Sp(n,\mathbb{C});\ g^* g = I_{2n} \} = Sp(n,\mathbb{C}) \cap U(2n).$$

Njena je Liejeva algebra

$$\mathfrak{sp}(n) = \{ A \in \mathfrak{sp}(n,\mathbb{C});\ A^* = -A \} = \left\{ \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \\ -\overline{C}_2 & \overline{C}_1 \end{bmatrix};\ \begin{array}{c} C_1, C_2 \in M_n(\mathbb{C}) \\ C_1^* = -C_1,\ C_2^t = C_2 \end{array} \right\}.$$

Pokazuje se da je grupa $SO(2n) \cap Sp(n)$ izomorfna grupi $U(n)$ i da je grupa $Sp(p,q) \cap U(2p+2q)$ izomorfna direktnom produktu $Sp(p) \times Sp(q)$.

Primjer 12. Za $n \in \mathbb{N}$ definiramo Liejevu grupu

$$SO^*(2n) = \{ g \in SO(2n,\mathbb{C});\ g^* J_{2n} g = J_{2n} \}.$$

To je povezana Liejeva grupa s Liejevom algebrom

$$\mathfrak{so}^*(2n) = \{ A \in \mathfrak{o}(2n,\mathbb{C});\ A^* = J_{2n} A J_{2n} \} = \left\{ \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \\ -\overline{C}_2 & \overline{C}_1 \end{bmatrix};\ \begin{array}{c} C_1, C_2 \in M_n(\mathbb{C}), \\ C_1^t = -C_1,\ C_2^* = C_2 \end{array} \right\}.$$

Pokazuje se da je grupa $SO^*(2n) \cap U(2n)$ izomorfna grupi $U(n)$. Nadalje, vrijedi

$$SO^*(2n) \cap U(2n) = SO(2n) \cap Sp(n,\mathbb{C}) = SO(2n) \cap Sp(n).$$

Primjer 13. Definiramo povezanu Liejevu grupu $SU^*(2n)$ svih $g \in SL(2n, \mathbb{C})$ koje komutiraju s antilinearnim operatorom na $\mathbb{C}^{2n}$ zadanim sa

$$(z_1, \ldots, z_n, z_{n+1}, \ldots, z_{2n}) \mapsto (\overline{z}_{n+1}, \ldots, \overline{z}_{2n}, -\overline{z}_1, \ldots, -\overline{z}_n).$$

Njena je Liejeva algebra

$$\mathfrak{su}^*(2n) = \left\{ \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \\ -\overline{C}_2 & \overline{C}_1 \end{bmatrix}; \begin{array}{l} C_1, C_2 \in M_n(\mathbb{C}), \\ \operatorname{Tr} C_1 + \operatorname{Tr} \overline{C}_1 = 0 \end{array} \right\}.$$

Vrijedi $SU^*(2n) \cap U(2n) = Sp(n)$.

Primjer 14. Za $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ ili $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ definiramo Liejevu grupu $B(n, \mathbb{F})$ svih gornje trokutastih matrica u $GL(n, \mathbb{F})$. Njena je Liejeva algebra $\mathfrak{b}(n, \mathbb{F})$ skup svih gornje trokutastih matrica u $M_n(\mathbb{F})$. Grupa $B(n, \mathbb{C})$ je povezana, a grupa $B(n, \mathbb{R})$ ima 2^n komponenata povezanosti.

Primjer 15. $N(n, \mathbb{F})$ je povezana grupa svih unipotentnih matrica u $B(n, \mathbb{F})$, tj. grupa svih gornje trokutastih matrica s jedinicama na dijagonali. Njena je Liejeva algebra $\mathfrak{n}(n, \mathbb{F})$ skup svih striktno gornje trokutastih matrica.

Neka su X i Y topološki prostori. Preslikavanje $f : Y \to X$ zove se **natkrivanje** ako je f **lokalni homeomorfizam**, tj. svaka točka $y \in Y$ ima otvorenu okolinu V takvu da je $f(V)$ otvoren podskup od X i restrikcija $F|V$ je homeomorfizam sa V na $f(V)$, i ako svaka točka $x \in X$ ima povezanu otvorenu okolinu U, koja je **pravilno natkrivena** s preslikavanjem f, tj. restrikcija $f|V$ na svaku komponentu povezanosti V skupa $f^{-1}(U)$ je homeomorfizam sa V na U. **Natkrivajući prostor** ili **natkrivač** topološkog prostora X je uređen par (Y, f), gdje je Y topološki prostor, a $f : Y \to X$ je natkrivanje.

Teorem 1.2.27. *Ako je X diferencijalna (odnosno, analitička) mnogostrukost i $f : Y \to X$ natkrivanje, onda na Y postoji jedinstvena struktura diferencijalne (odnosno, analitičke) mnogostrukosti, takva da je preslikavanje f klase C^∞ (odnosno, analitičko).*

Kad god imamo natkrivanje $f : Y \to X$ diferencijalne (odnosno, analitičke) mnogostrukosti, podrazumijevat ćemo da je prostor Y snabdjeven sa struktorom mnogostrukosti iz teorema1.2.27.

Natkrivanja $f_1 : Y_1 \to X$ i $f_2 : Y_2 \to X$ su **ekvivalentna** ako postoji neprekidna bijekcija $\varphi : Y_1 \to Y_2$, takva da je $f_1 = f_2 \circ \varphi$. Tada je φ homeomorfizam, a ako je X diferencijalna (odnosno, analitička) mnogostrukost, onda je φ difeomorfizam (odnosno, bianalitičko preslikavanje).

Za povezanu diferencijalnu mnogostrukost X kažemo da je **jednostavno povezana**, ako je njena fundamentalna grupa trivijalna, odnosno, ako je svaka petlja u X homotopna točki (preciznije, konstantnoj petlji).

Teorem 1.2.28. *Neka je X povezana diferencijalna mnogostrukost.*

(*a*) *Postoji do na ekvivalenciju jedinstveno natkrivanje $\tilde{f} : \tilde{X} \to X$ takvo da je mnogostrukost $\tilde{X}$ jednostavno povezana.*

(*b*) *Neka je $\tilde{f} : \tilde{X} \to X$ kao u (a) i neka je $f : Y \to X$ natkrivanje. Izaberimo $x \in X$ i $\tilde{x} \in \tilde{f}^{-1}(x)$. Za svaku točku $y \in f^{-1}(x)$ postoji jedinstveno neprekidno preslikavanje $\varphi : \tilde{X} \to Y$ takvo da je $\tilde{f} = f \circ \varphi$ i $\varphi(\tilde{x}) = y$. Preslikavanje φ je natkrivanje.*

Natkrivanje $\tilde{f} : \tilde{X} \to X$ takvo da je mnogostrukost $\tilde{X}$ jednostavno povezana zove se **univerzalno natkrivanje**. Naziv dolazi od univerzalnog svojstva iskazanog u tvrdnji (*b*) teorema 1.2.28.: univerzalno natkrivanje povezane mnogostrukosti X natkriva svako natkrivanje od X.

Neposredna je posljedica tvrdnje (b) teorema 1.2.28.:

Korolar 1.2.29. *Neka je X povezana i jednostavno povezana diferencijalna (odnosno, analitička) mnogostrukost i neka je $f : Y \to X$ natkrivanje. Tada je F difeomorfizam (odnosno, bianalitička bijekcija).*

Posebno će nas zanimati natkrivanja Liejevih grupa.

Teorem 1.2.30. *Neka je G Liejeva grupa i $f : \tilde{G} \to G$ natkrivanje. Nadalje, neka je e jedinica u grupi G i neka je $\tilde{e} \in f^{-1}(e)$. Tada na $\tilde{G}$ postoji jedinstvena struktura grupe s jedinicom $\tilde{e}$, takva da je f homomorfizam i da je $\tilde{G}$ Liejeva grupa.*

Uočimo da je u situaciji iz teorema 1.2.30. $\operatorname{Ker} f = f^{-1}(e)$ diskretan podskup od $\tilde{G}$, dakle, to je diskretna normalna podgrupa od $\tilde{G}$. Vrijedi općenitije:

Propozicija 1.2.31. *Neka je Γ diskretna podgrupa Liejeve grupe G. Tada je preslikavanje $\pi : G \to G/\Gamma$, koje svakoj točki $g \in G$ pridružuje njenu desnu $\Gamma-$klasu $g\Gamma$, natkrivanje.*

Ako je u propoziciji 1.2.31. Γ diskretna normalna podgrupa od G, onda je, naravno, π surjektivni homomorfizam grupa. Nije teško dokazati:

Propozicija 1.2.32. *Ako je G povezana topološka grupa i Γ diskretna normalna podgrupa od G, onda je Γ sadržana u centru $Z(G)$ grupe G.*

Homomorfizam topoloških grupa $f : G \to H$ zove se **lokalni izomorfizam** ako postoje otvorene okoline U i V jedinica e_G i e_H u G i H takve da je restrikcija $f|U$ homeomorfizam sa U na V. Da bi neprekidni homomorfizam $f : G \to H$ bio lokalni izomorfizam dovoljno je pretpostaviti da postoje otvorene okoline U i V od e_G i e_H u G i H takve da je restrikcija $f|U$ bijekcija sa U na V. Ako je grupa H povezana, slika $\operatorname{Im} f = K$ sadrži okolinu jedinice V u grupi H. No tada za svaku točku $x \in K$ vrijedi $xV \subseteq K$, dakle, K je otvorena podgrupa od H. Svaka je otvorena podgrupa i zatvorena, pa iz povezanosti od H slijedi $H = K$, tj. f je epimorfizam.

Neka je sada $\Gamma = \operatorname{Ker} f$. To je zatvorena normalna podgrupa od G i f inducira izomorfizam topoloških grupa $G/\Gamma \to H$. Ako je U otvorena okolina jedinice e_G u G takva da je restrikcija $f|U$ injektivna, tada je $U \cap \Gamma = \{e_G\}$, što pokazuje da je podgrupa Γ diskretna.

Propozicija 1.2.33. *Neka su G i H Liejeve grupe i $f : G \to H$ lokalni izomorfizam. Tada je f natkrivanje i $\Gamma = \operatorname{Ker} f$ je diskretna normalna podgrupa od G, koja je centralna ako je grupa G (a time i grupa H) povezana.*

Neka su G i H Liejeve grupe s Liejevim algebrama $\mathfrak{g} = T_e(G)$ i $\mathfrak{h} = T_e(H)$ i neka je f neprekidni homomorfizam sa G u H. Prema teoremu 1.2.20. f je Liejev homomorfizam (tj. analitičko preslikavanje). Nadalje, prema propoziciji 1.2.13. njegov diferencijal $T_e(f) : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ je homomorfizam Liejevih algebri.

Teorem 1.2.34. *Neka su G i H Liejeve grupe s Liejevim algebrama $\mathfrak{g} = T_e(G)$ i $\mathfrak{h} = T_e(H)$ i s eksponencijalnim preslikavanjima $\exp_G : \mathfrak{g} \to G$ i $\exp_H : \mathfrak{h} \to H$. Neka je $f : G \to H$ neprekidni homomorfizam.*

(a) $f \circ \exp_G = \exp_H \circ T_e(f)$.

(b) *Ako je $\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ homomorfizam Liejevih algebri i ako je $f \circ \exp_G = \exp_H \circ \varphi$, onda je $\varphi = T_e(f)$.*

(c) *Ako je $g : H \to K$ neprekidni homomorfizam Liejevih grupa i $\mathfrak{k} = T_e(K)$, onda vrijedi $T_e(g \circ f) = T_e(g) \circ T_e(f)$.*

Korolar 1.2.35. *Uz oznake iz teorema 1.2.34. vrijedi:*

(*a*) $\mathrm{Im}\, f = f(G)$ *je Liejeva podgrupa od* H *i njena je Liejeva algebra* $\mathrm{Im}\, \mathrm{T_e(f)} = \mathrm{T_e(f)}\mathfrak{g}$.

(*b*) *Ako je grupa* H *povezana, onda je* f *surjekcija ako i samo ako je* $T_e(f)$ *surjekcija.*

(*c*) $\mathrm{Ker}\, f$ *je zatvorena (dakle, Liejeva) podgrupa od* G *i* $\mathrm{Ker}\, T_e(f)$ *je njena Liejeva algebra.*

(*d*) $T_e(f)$ *je injektivan operator ako i samo ako je homomorfizam* f *lokalno injektivan, tj. ako i samo ako postoji okolina* U *jedinice* e *u* G *takva da je restrikcija* $f|U$ *injektivna.*

Korolar 1.2.36. *Neka su* $f, g : G \to H$ *neprekidni homomorfizmi Liejevih grupa takvi da je* $T_e(f) = T_e(g)$ *i neka je* G_0 *komponenta povezanosti grupe* G *koja sadrži jedinicu. Tada vrijedi* $f|G_0 = g|G_0$.

Teorem 1.2.37. *Neka su* G *i* H *Liejeve grupe s Liejevim algebrama* $\mathfrak{g}$ *i* $\mathfrak{h}$, *i neka je* $\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ *homomorfizam Liejevih algebri. Ako je grupa* G *povezana i jednostavno povezana, postoji jedinstven Liejev homomorfizam* $f : G \to H$ *takav da je* $\varphi = T_e(f)$.

Iz teorema 1.2.37 i iz tvrdnje (c) teorema 1.2.34. neposredno slijedi:

Korolar 1.2.38. *Neka je* G *povezana i jednostavno povezana Liejeva grupa. Tada je* $f \mapsto T_e(f)$ *izomorfizam sa grupe* $Aut(G)$ *svih Liejevih automorfizama od* G *na grupu* $Aut(\mathfrak{g})$ *svih automorfizama Liejeve algebre* $\mathfrak{g}$.

Dobivene rezultate iskoristit ćemo sada za konačnodimenzionalne reprezentacije Liejevih grupa i Liejevih algebri. Pri tome kažemo da je π reprezentacija topološke grupe G na konačnodimenzionalnom realnom ili kompleksnom vektorskom prostoru V, ako je π neprekidni homomorfizam grupe G u grupu $GL(V)$. Ako je G Liejeva grupa, tada je preslikavanje π prema teoremu 1.2.20. automatski analitičko. Liejeva algebra Liejeve grupe $GL(V)$ identificira se sa $\mathfrak{gl}(V)$, uz eksponencijalno preslikavanje $A \mapsto \mathrm{e}^A$, $A \in \mathfrak{gl}(V)$. Prema propoziciji 1.2.13. tada je $T_e(\pi) : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ reprezentacija Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ na prostoru V.

Teorem 1.2.39. *Neka je* G *povezana Liejeva grupa i* $\mathfrak{g}$ *njena Liejeva algebra. Nadalje, neka su* π *i* ρ *reprezentacije Liejeve grupe* G *na realnim ili kompleksnim konačnodimenzionalnim vektorskim prostorima* V *i* W.

(*a*) *Potprostor* V_1 *od* V *je* $\pi-$*invarijantan ako i samo ako je* V_1 $T_e(\pi)-$*invarijantan.*

(*b*) *Reprezentacija* π *je ireducibilna ako i samo ako je reprezentacija* $T_e(\pi)$ *ireducibilna.*

(*c*) *Reprezentacija* π *je potpuno reducibilna ako i samo ako je reprezentacija* $T_e(\pi)$ *potpuno reducibilna.*

(*d*) $Hom_{\mathfrak{g}}(V, W) = Hom_G(V, W)$.

(*e*) *Ako je* G *jednostavno povezana, za svaku konačnodimenzionalnu reprezentaciju* σ *Liejeve algebre* $\mathfrak{g}$ *postoji jedinstvena reprezentacija* π *Liejeve grupe* G *na istom prostoru takva da je* $T_e(\pi) = \sigma$.

Ako je π reprezentacija Liejeve grupe G na konačnodimenzionalnom realnom ili kompleksnom vektorskom prostoru V, uobičajeno je da se pripadna reprezentacija $T_e(\pi)$ njene Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ također označava sa π. Tada je

$$\pi(X) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\pi(\exp tX)\bigg|_{t=0} \quad \text{i} \quad \pi(\exp X) = \mathrm{e}^{\pi(X)}, \qquad X \in \mathfrak{g}.$$

Za potprostor W od V stavimo

$$Stab_G(W) = \{x \in G;\ \pi(x)W = W\}, \qquad Stab_{\mathfrak{g}}(W) = \{X \in \mathfrak{g};\ \pi(X)W \subseteq W\}.$$

Nadalje, za $v \in V$ stavimo

$$Fix_G(v) = \{x \in G;\ \pi(x)v = v\}, \qquad Fix_{\mathfrak{g}}(v) = \{X \in \mathfrak{g};\ \pi(X)v = 0\}.$$

Tada su $Stab_G(W)$ i $Fix_G(v)$ očito zatvorene podgrupe od G. Prema teoremu 1.2.24. to su Liejeve podgrupe i prema naznaci dokaza teorema 1.2.24. vidi se da je $Stab_{\mathfrak{g}}(W)$ Liejeva algebra od $Stab_G(W)$ i da je $Fix_{\mathfrak{g}}(v)$ Liejeva algebra od $Fix_G(v)$.

Neka je $\mathfrak{g}$ realna ili kompleksna Liejeva algebra. Tada je $Aut(\mathfrak{g})$ zatvorena podgrupa Liejeve grupe $GL(\mathfrak{g})$, dakle, $Aut(\mathfrak{g})$ je Liejeva grupa. Uz identifikaciju $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ s Liejevom algebrom od $GL(\mathfrak{g})$, Liejeva algebra od $Aut(\mathfrak{g})$ je

$$\mathfrak{h} = \{A \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{g});\ \mathrm{e}^{tA} \in Aut(\mathfrak{g})\ \forall t \in \mathbb{R}\}.$$

Sada imamo redom

$$A \in \mathfrak{h} \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{e}^{tA}[x,y] = [\mathrm{e}^{tA}x, \mathrm{e}^{tA}y]\ \forall t \in \mathbb{R} \text{ i } \forall x,y \in \mathfrak{g}.$$

Deriviranjem po t u nuli odatle dobivamo

$$A \in \mathfrak{h} \quad \Longrightarrow \quad A[x,y] = [Ax,y] + [x,Ay] \quad \Longrightarrow \quad A \in Der(\mathfrak{g}).$$

Time je dokazano da je $\mathfrak{h} \subseteq Der(\mathfrak{g})$. Obratno, ako je $A \in Der(\mathfrak{g})$, onda indukcijom nalazimo da za svaki $n \in \mathbb{N}$ i za $x, y \in \mathfrak{g}$ vrijedi

$$A^n[x,y] = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} [A^k x, A^{n-k} y].$$

Prema tome,

$$\mathrm{e}^{tA}[x,y] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} A^n[x,y] = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{t^n}{n!} \binom{n}{k} [A^k x, A^{n-k} y] =$$
$$= \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k x, \sum_{n=k}^{\infty} \frac{t^{n-k}}{(n-k)!} A^{n-k} y \right] = \left[\mathrm{e}^{tA}x, \mathrm{e}^{tA}y \right],$$

što pokazuje da je $\mathrm{e}^{tA} \in Aut(\mathfrak{g})\ \forall t \in \mathbb{R}$, odnosno, da je $A \in \mathfrak{h}$. Na taj način dokazali smo:

Propozicija 1.2.40. *Neka je $\mathfrak{g}$ realna ili kompleksna Liejeva algebra. Tada je $Der(\mathfrak{g})$ Liejeva algebra Liejeve grupe $Aut(\mathfrak{g})$.*

Grupa $Int(\mathfrak{g})$ unutarnjih automorfizama Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ generirana je svim automorfizmima oblika $\mathrm{e}^{ad\,x}$, $x \in \mathfrak{g}$. Tada je $Int(\mathfrak{g})$ Liejeva podgrupa Liejeve grupe $Aut(\mathfrak{g})$ i njena je Liejeva algebra $ad\,\mathfrak{g} = \{ad\,x;\ x \in \mathfrak{g}\}$. Budući da je $ad : \mathfrak{g} \to Der(\mathfrak{g})$ homomorfizam Liejevih algebri čija je jezgra

$$\mathrm{Ker}\,ad = \{x \in \mathfrak{g};\ [x,y] = 0\ \forall y \in \mathfrak{g}\} = \mathcal{Z}(\mathfrak{g})$$

centar Liejeve algebre $\mathfrak{g}$, vidimo da vrijedi:

Propozicija 1.2.41. *Adjungirana reprezentacija $ad : \mathfrak{g} \to Der(\mathfrak{g})$ inducira izomorfizam kvocijentne Liejeve algebre $\mathfrak{g}/\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$ na Liejevu algebru Liejeve grupe $Int(\mathfrak{g})$.*

1.3 Univerzalna omotačka algebra

1.3.1 Tenzorski produkt

Neka su $V_1, \ldots, V_n$ vektorski prostori nad poljem $K = \mathbb{R}$ ili $K = \mathbb{C}$. **Tenzorski produkt** prostora $V_1, \ldots, V_n$ je uređen par (W, τ) koji ima sljedeća svojstva:

$(T1)$ W je vektorski prostor nad poljem K.

$(T2)$ τ je $n-$linearno preslikavanje sa $V_1 \times \cdots \times V_n$ u W.

$(T3)$ Za svaki vektorski prostor U nad poljem K i za svako $n-$linearno preslikavanje $\sigma : V_1 \times \cdots \times V_n \to U$ postoji jedinstven linearan operator $S : W \to U$ takav da je $\sigma = S \circ \tau$.

Aksiom $(T3)$ zove se **univerzalno svojstvo** u odnosu na $n-$linearna preslikavanja.

Tenzorski produkt postoji i jedinstven je do na izomorfizam:

Teorem 1.3.1. *Neka su $V_1, \ldots, V_n$ vektorski prostori nad poljem K.*

(a) *Postoji tenzorski produkt vektorskih prostora $V_1, \ldots, V_n$.*

(b) *Ako su (W, τ) i (U, σ) tenzorski produkti prostora $V_1, \ldots, V_n$, jedinstven linearan operator $S : W \to U$ sa svojstvom $\sigma = S \circ \tau$ je izomorfizam vektorskih prostora.*

(c) *Uređen par (W, τ) sa svojstvima $(T1)$ i $(T2)$ je tenzorski produkt vektorskih prostora $V_1, \ldots, V_n$ ako i samo ako je za neke (a tada i za svake) baze B_j prostora V_j, $j = 1, \ldots, n$, skup $\tau(B_1, \ldots, B_n) = \{\tau(v_1, \ldots, v_n);\ v_j \in B_j,\ j = 1, \ldots, n\}$ baza prostora W.*

Propozicija 1.3.2. *Neka je (W, τ) tenzorski produkt prostora $V_1, \ldots, V_n$ i (W', τ') tenzorski produkt prostora $V'_1, \ldots, V'_n$. Nadalje, neka su $A_i : V_i \to V'_i$ za $i = 1, \ldots, n$ linearni operatori. Tada postoji jedinstven linearan operator $A : W \to W'$ takav da je $A \circ \tau = \tau' \circ (A_1 \times \cdots \times A_n)$, tj.*

$$A(\tau(v_1, \ldots, v_n)) = \tau'(A_1 v_1, \ldots, A_n v_n) \qquad \forall v_1 \in V_1,\ \ldots, \forall v_n \in V_n.$$

Propozicija 1.3.3. *Neka su $m, n_1, \ldots, n_m \in \mathbb{N}$ i neka su V^i_j za $j = 1, \ldots, n_i$ i za $i = 1, \ldots, m$ vektorski prostori nad poljem K. Nadalje, neka je za $i = 1, \ldots, m$ (W^i, τ^i) tenzorski produkt vektorskih prostora $V^i_1, \ldots, V^i_{n_i}$ i neka je (W, τ) tenzorski produkt vektorskih prostora $W^1, \ldots, W^m$. Tada je $(W, \tau \circ (\tau^1 \times \cdots \times \tau^m))$ tenzorski produkt vektorskih prostora $V^1_1, \ldots, V^1_{n_1}, \ldots\ldots, V^m_1, \ldots, V^m_{n_m}$.*

Ako je (W, τ) tenzorski produkt vektorskih prostora $V_1, \ldots, V_n$, uobičajeno je pisati

$$W = V_1 \otimes \cdots \otimes V_n \qquad \text{i} \qquad \tau(v_1, \ldots, v_n) = v_1 \otimes \cdots \otimes v_n, \quad v_1 \in V_1,\ \ldots, v_n \in V_n.$$

Dakle, uz takve oznake imamo:

(1) $(v_1, \ldots, v_n) \mapsto v_1 \otimes \cdots \otimes v_n$ je $n-$linearno preslikavanje sa $V_1 \times \cdots \times V_n$ u $V_1 \otimes \cdots \otimes V_n$.

(2) Za svako $n-$linearno preslikavanje $\sigma : V_1 \times \cdots \times V_n \to U$ postoji jedinstven linearan operator $S : V_1 \otimes \cdots \otimes V_n \to U$ takav da je

$$S(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) = \sigma(v_1, \ldots, v_n) \qquad \forall (v_1, \ldots, v_n) \in V_1 \times \cdots \times V_n.$$

(3) Vektorski prostor $V_1 \otimes \cdots \otimes V_n$ razapet je vektorima oblika $v_1 \otimes \cdots \otimes v_n$, $v_1 \in V_1, \ldots, v_n \in V_n$. Štoviše, ako je za $j = 1, \ldots, n$ S_j podskup prostora V_j koji ga razapinje, onda je prostor $V_1 \otimes \cdots \otimes V_n$ razapet vektorima $v_1 \otimes \cdots \otimes v_n$ za $v_1 \in S_1, \ldots, v_n \in S_n$.

(4) Ako je S_i linearno nezavisan podskup od V_i za svaki $i = 1, \ldots, n$, onda je

$$\{v_1 \otimes \cdots \otimes v_n;\ v_i \in S_i,\ i = 1, \ldots, n\}$$

linearno nezavisan podskup od $V_1 \otimes \cdots \otimes V_n$.

(5) Ako je $\{e_j^{(i)};\ j \in J_i\}$ baza prostora V_i za svaki $i = 1, \ldots, n$, onda je

$$\{e_{j_1}^{(1)} \otimes \cdots \otimes e_{j_n}^{(n)};\ (j_1, \ldots, j_n) \in J_1 \times \cdots \times J_n\}$$

baza prostora $V_1 \otimes \cdots \otimes V_n$.

(6) Ako su $A_i : V_i \to V_i'$ linearni operatori za $i = 1, \ldots, n$, postoji jedinstven linearan operator $A : V_1 \otimes \cdots \otimes V_1 \to V_1' \otimes \cdots \otimes V_n'$ takav da je

$$A(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) = A_1 v_1 \otimes \cdots \otimes A_n v_n \qquad \forall v_1 \in V_1, \ldots, \forall v_n \in V_n.$$

Pisat ćemo tada $A = A_1 \otimes \cdots \otimes A_n$.

(7) Moguća je identifikacija

$$(V_1^1 \otimes \cdots \otimes V_{n_1}^1) \otimes \cdots \otimes (V_1^m \otimes \cdots \otimes V_{n_m}^m) = V_1^1 \otimes \cdots \otimes V_{n_1}^1 \otimes \cdots \otimes V_1^m \otimes \cdots \otimes V_{n_m}^m$$

i to tako da bude

$$(v_1^1 \otimes \cdots \otimes v_{n_1}^1) \otimes \cdots \otimes (v_1^m \otimes \cdots \otimes v_{n_m}^m) = v_1^1 \otimes \cdots \otimes v_{n_1}^1 \otimes \cdots \otimes v_1^m \otimes \cdots \otimes v_{n_m}^m, \qquad \forall v_j^i \in V_j^i.$$

1.3.2 Tenzorska, simetrična i polinomijalna algebra

Tenzorska algebra prostora V je uređen par $(\mathcal{T}, \tau)$ sa sljedećim svojstvima:

$(TA1)$ $\mathcal{T}$ je unitalna algebra (dakle, asocijativna algebra s jedinicom).

$(TA2)$ τ je linearan operator sa V u $\mathcal{T}$.

$(TA3)$ Za svaku unitalnu algebru $\mathcal{A}$ i svaki linearan operator $\sigma : V \to \mathcal{A}$ postoji jedinstven unitalan homomorfizam $\varphi : \mathcal{T} \to \mathcal{A}$ takav da je $\sigma = \varphi \circ \tau$.

Teorem 1.3.4. *Neka je V vektorski prostor nad poljem K.*

(a) *Postoji tenzorska algebra prostora V.*

(b) *Ako su $(\mathcal{T}, \tau)$ i $(\mathcal{S}, \sigma)$ tenzorske algebre od V, jedinstveni unitalni homomorfizam $\varphi : \mathcal{T} \to \mathcal{S}$ sa svojstvom $\sigma = \varphi \circ \tau$ je izomorfizam unitalnih algebri.*

(c) *Ako je S podskup od V koji razapinje V, onda $\tau(S)$ generira unitalnu algebru $\mathcal{T}$.*

(d) *Ako je $\{e_j;\ j \in J\}$ baza vektorskog prostora V onda je*

$$\{1_{\mathcal{T}}\} \cup \{\tau(e_{j_1}) \cdots \tau(e_{j_n});\ n \in \mathbb{N},\ j_1, \ldots, j_n \in J\}$$

baza vektorskog prostora $\mathcal{T}$.

Uobičajena je sljedeća realizacija tenzorske algebre vektorskog prostora V. Stavimo

$$T^0(V) = K, \quad T^1(V) = V, \quad T^n(V) = \underbrace{V \otimes \cdots \otimes V}_{n} \text{ za } n \in \mathbb{N},\ n \geq 2, \qquad T(V) = \coprod_{n\in\mathbb{Z}_+} T^n(V).$$

Korištenjem identifikacije

$$T^n(V) \otimes T^m(V) = (\underbrace{V \otimes \cdots \otimes V}_{n}) \otimes (\underbrace{V \otimes \cdots \otimes V}_{m}) = \underbrace{V \otimes \cdots \otimes V}_{n+m} = T^{n+m}(V)$$

dobivamo da postoji jedinstveno bilinearno preslikavanje $\mu : T(V) \times T(V) \to T(V)$ takvo da vrijedi

(a) $\mu(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n, w_1 \otimes \cdots \otimes w_m) = v_1 \otimes \cdots \otimes v_n \otimes w_1 \otimes \cdots \otimes w_m \ \ \forall v_1, \ldots, v_n, w_1, \ldots, w_m \in V.$

(b) S množenjem $uv = \mu(u, v)$, $u, v \in T(V)$, vektorski prostor $T(V)$ postaje unitalna algebra.

(c) Ako je $\tau : V \to T(V)$ identifikacija prostora V s potprostorom $T^1(V)$ od $T(V)$, $(T(V), \tau)$ je tenzorska algebra prostora V.

Simetrična algebra prostora V je uređen par $(\mathcal{S}, \sigma)$ sa sljedećim svojstvima:

$(SA1)$ $\mathcal{S}$ je komutativna unitalna algebra.

$(SA2)$ $\sigma : V \to \mathcal{S}$ je linearan operator.

$(SA3)$ Za svaku komutativnu unitalnu algebru $\mathcal{A}$ i za svaki linearan operator $\alpha : V \to \mathcal{A}$ postoji jedinstven unitalan homomorfizam $\varphi : \mathcal{S} \to \mathcal{A}$ takav da je $\alpha = \varphi \circ \sigma$.

Teorem 1.3.5. *Neka je V vektorski prostor.*

(a) *Postoji simetrična algebra prostora V.*

(b) *Ako su $(\mathcal{S}, \sigma)$ i $(\mathcal{O}, \omega)$ simetrične algebre od V, jedinstveni unitalni homomorfizam $\varphi : \mathcal{S} \to \mathcal{O}$ sa svojstvom $\omega = \varphi \circ \sigma$ je izomorfizam unitalnih algebri.*

(c) *Ako je $(\mathcal{S}, \sigma)$ simetrična algebra prostora V i ako skup $S \subseteq V$ razapinje prostor V onda $\sigma(S)$ generira unitalnu algebru $\mathcal{S}$.*

(d) *Ako je $(\mathcal{S}, \sigma)$ simetrična algebra prostora V i ako je $(e_i)_{i\in I}$ uređena baza od V, onda je*

$$\{1_{\mathcal{S}}\} \cup \{\sigma(e_{i_1}) \cdots \sigma(e_{i_n});\ n \in \mathbb{N},\ i_1, \ldots, i_n \in I,\ i_1 \leq \cdots \leq i_n\}$$

baza vektorskog prostora $\mathcal{S}$.

Uobičajena realizacija simetrične algebre vektorskog prostora V, a tako se ujedno dokazuje teorem 1.3.5., je $S(V) = T(V)/\mathcal{I}$, gdje je $\mathcal{I}$ dvostrani ideal u algebri $T(V)$ generiran skupom

$$\{v \otimes w - w \otimes v;\ v, w \in V\}$$

a linearno ulaganje $V \to S(V)$ dobiva se kompozicijom ulaganja $V \to T(V)$ i kvocijentnog epimorfizma $T(V) \to S(V)$.

Neka je $\mathcal{A}$ unitalna algebra. **Graduacija** na algebri $\mathcal{A}$ je niz $(\mathcal{A}^n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ potprostora od $\mathcal{A}$ takav da vrijedi

$$\mathcal{A} = \sum_{n\in\mathbb{Z}_+} \dot{+}\, \mathcal{A}^n, \qquad \mathcal{A}^0 = K \cdot 1_{\mathcal{A}}, \qquad \mathcal{A}^n\mathcal{A}^m \subseteq \mathcal{A}^{n+m}.$$

Graduirana algebra je algebra na kojoj je zadana graduacija. Tada se elementi od $\mathcal{A}^n$ zovu **homogeni** elementi stupnja n. Nadalje, za svaki $x \in \mathcal{A}$ postoje jedinstveni $x_n \in \mathcal{A}^n$, $n \in \mathbb{Z}_+$, takvi da je skup $\{n \in \mathbb{Z}_+;\ x_n \neq 0\}$ konačan i da je

$$x = \sum_{n \in \mathbb{Z}_+} x_n.$$

Tada se x_n zove **homogena komponenta** elementa x stupnja n.

Uočimo sada da je $(T^n(V))_{n \in \mathbb{Z}_+}$ graduacija tenzorske algebre $T(V)$ vektorskog prostora V, dakle, $T(V)$ je graduirana algebra.

Neka je $\mathcal{A}$ graduirana algebra s graduacijom $(\mathcal{A}^n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$. Za dvostrani **ideal** $\mathcal{I}$ u $\mathcal{A}$ kažemo da je **graduiran** ako je

$$\mathcal{I} = \sum_{n \in \mathbb{Z}_+} \mathcal{I} \cap \mathcal{A}^n.$$

U tom slučaju kvocijentna algebra $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ je graduirana s graduacijom $\left(\mathcal{A}^n/(\mathcal{I} \cap \mathcal{A}^n)\right)_{n \in \mathbb{Z}_+}$.

Lako se vidi da je dvostrani ideal $\mathcal{I}$ generiran nekim skupom S sastavljenim od homogenih elemenata graduirane algebre $\mathcal{A}$,

$$\mathcal{I} = span\,\{asb;\ a, b \in \mathcal{A},\ s \in S\}$$

graduiran.

Malo prije definiran dvostrani ideal $\mathcal{I}$ u graduiranoj algebri $T(V)$ generiran je skupom homogenih elemenata

$$\{v \otimes w - w \otimes v;\ v, w \in V\} \subseteq T^2(V).$$

Prema tome, kvocijentna algebra $S(V)$ graduirana je s graduacijom $(S^n(V))_{n \in \mathbb{Z}_+}$, gdje je

$$S^n(V) = T^n(V)/(\mathcal{I} \cap T^n(V)).$$

Nadalje, kako je očito

$$\mathcal{I} \cap T^0(V) = \{0\} \quad \text{i} \quad \mathcal{I} \cap T^1(V) = \{0\},$$

vrijedi

$$S^0(V) = T^0(V) \quad \text{i} \quad S^1(V) = T^1(V).$$

Prema tome, vektorski prostor V identificira se s homogenim potprostorom $S^1(V)$ od $S(V)$ stupnja 1.

Neka je $\pi : T(V) \to S(V) = T(V)/\mathcal{I}$ kvocijentni epimorfizam. Uobičajeno je da se operacija množenja u $S(V)$ označava s točkom $\cdot$ a još češće bez ikakvog znaka, tj. $(a, b) \mapsto ab$. Prostor $S^n(V) = \pi(T^n(V))$ razapet je elementima oblika $v_1 \cdots v_n$, $v_1, \ldots, v_n \in V$. Štoviše, ako je $(e_i)_{i \in I}$ uređena baza prostora V onda je

$$\{e_{i_1} \cdots e_{i_n};\ i_1, \ldots, i_n \in I,\ i_1 \leq \cdots \leq i_n\}$$

baza prostora $S^n(V)$. Odatle se lako izvodi da u slučaju $\dim V = N \in \mathbb{N}$ za $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\dim\, S^n(V) = \binom{n + N - 1}{N - 1} = \binom{n + N - 1}{n}.$$

Definiramo $n-$linearan operator $\varphi_n : V^n \to S^n(V)$ sa

$$\varphi_n(v_1, \ldots, v_n) = v_1 \cdots v_n, \qquad v_1, \ldots, v_n \in V.$$

Uočimo da je taj operator simetričan, tj. invarijantan s obzirom na bilo koju permutaciju varijabli:

$$\varphi_n(v_{\sigma(1)},\dots,v_{\sigma(n)})=\varphi_n(v_1,\dots,v_n)\qquad\forall v_1,\dots,v_n\in V,\quad\forall\sigma\in\mathcal{S}_n;$$

pri tome je $\mathcal{S}_n$ oznaka za simetričnu grupu $n-$tog reda, tj. za grupu permutacija skupa $\{1,\dots,n\}$.

Propozicija 1.3.6. *Za svaki $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$, uređen par $(S^n(V),\varphi_n)$ ima sljedeće univerzalno svojstvo: ako je W vektorski prostor i ako je $\psi:V^n\to W$ $n-$linearan simetričan operator, onda postoji jedinstven linearan operator $\Psi:S^n(V)\to W$ takav da je $\psi=\Psi\circ\varphi_n$, tj. da vrijedi*

$$\psi(v_1,\dots,v_n)=\Psi(v_1\cdots v_n)\qquad\forall v_1,\dots,v_n\in V.$$

Ovo možemo i malo drugačije formulirati:

Propozicija 1.3.7. *Neka su V i W vektorski prostori i $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$. Za linearan operator $A:S^n(V)\to W$ definiramo $\tilde{A}:V^n\to W$ relacijom*

$$\tilde{A}(v_1,\dots,v_n)=A(v_1\cdots v_n),\qquad v_1,\dots,v_n\in V.$$

Tada je $A\mapsto\tilde{A}$ izomorfizam vektorskog prostora $L(S^n(V),W)$ svih linearnih operatora sa $S^n(V)$ u W na vektorski prostor $L_s(V^n,W)$ svih $n-$linearnih simetričnih operatora sa V^n u W. Posebno, dualni prostor prostora $S^n(V)$ izomorfan je prostoru svih simetričnih $n-$linearnih formi $V^n\to K$.

Konstruirat ćemo sada jedan direktni komplement jezgre $\operatorname{Ker}\pi$ kvocijentnog epimorfizma sa $T(V)$ na $S(V)$, preciznije, za svaki n ćemo identificirati jedan direktni komplement $\tilde{S}^n(V)$ od $\operatorname{Ker}\pi|T^n(V)$ u prostoru $T^n(V)$. Restrikcija $\pi|\tilde{S}^n(V)$ tada će biti izomorfizam prostora $\tilde{S}^n(V)$ na prostor $S^n(V)$.

Definiramo $n-$linearno preslikavanje sa V^n u $T^n(V)$ na sljedeći način:

$$(v_1,\dots,v_n)\mapsto\frac{1}{n!}\sum_{\tau\in\mathcal{S}_n}v_{\tau(1)}\otimes\cdots\otimes v_{\tau(n)}.$$

Prema univerzalnom svojstvu tenzorskog produkta tada postoji jedinstven linearan operator $\sigma_n:T^n(V)\to T^n(V)$ takav da vrijedi

$$\sigma_n(v_1\otimes\cdots\otimes v_n)=\frac{1}{n!}\sum_{\tau\in\mathcal{S}_n}v_{\tau(1)}\otimes\cdots\otimes v_{\tau(n)}\qquad\forall v_1,\dots,v_n\in V.$$

Teorem 1.3.8. *Operator σ_n je projektor, tj. $\sigma_n^2=\sigma_n$. Njegova jezgra je*

$$\operatorname{Ker}\sigma_n=\{u\in T^n(V);\ \sigma_n(u)=0\}=T^n(V)\cap\mathcal{I}.$$

Prema tome, ako sa $\tilde{S}^n(V)$ označimo sliku $\sigma_n(T^n(V))$ tog operatora, onda je

$$T^n(V)=\tilde{S}^n(V)\dotplus T^n(V)\cap\mathcal{I}.$$

Preslikavanje $\sigma_n:T^n(V)\to T^n(V)$ zove se **simetrizacija**, a također i složeno preslikavanje $\sigma:T(V)\to T(V)$, $\sigma|T^n(V)=\sigma_n$. Elementi od $\tilde{S}^n(V)$ zovu se **simetrični $n-$tenzori**. Vrijedi

$$Im\,\sigma=\tilde{S}(V)=\sum_{n\in\mathbb{Z}_+}\dotplus\tilde{S}^n(V).$$

Za vektorski prostor V označimo kao i obično sa V^* njemu dualan prostor svih linearnih funkcionala sa V u K. Tada je V^* potprostor unitalne komutativne algebre K^V svih funkcija sa V u K s operacijama definiranim po točkama. Unitalna podalgebra $\mathcal{P}(V)$ od K^V generirana sa V^* zove se **polinomijalna algebra nad prostorom** V, a njeni elementi **polinomijalne funkcije** na prostoru V. To je graduirana algebra s graduacijom $(\mathcal{P}^n(V))_{n\in\mathbb{Z}_+}$, gdje je $\mathcal{P}^0(V)$ potprostor konstantnih funkcija, $\mathcal{P}^1(V)=V^*$, a za $n\geq 2$ je $\mathcal{P}^n(V)$ potprostor od $\mathcal{P}(V)$ razapet svim produktima $f_1\cdots f_n$, $f_1,\dots,f_n\in V^*$. Lako se vidi da vrijedi:

Propozicija 1.3.9. (*a*) *Potprostor $\mathcal{P}^n(V)$ razapet je svim potencijama f^n, $f \in V^*$; pri tome je, naravno, $f^n(v) = f(v)^n$, $v \in V$.*

(*b*) *Za svaki $n \geq 2$ postoji jedinstven linearan operator Π_n sa $S^n(V^*)$ u $\mathcal{P}^n(V)$, koji svaki umnožak $f_1 \cdots f_n$, $f_1, \ldots, f_n \in V^*$, u algebri $S(V^*)$ preslikava u umnožak funkcija $f_1 \cdots f_n$ u algebri $\mathcal{P}(V)$. Nadalje, Π_n je izomorfizam vektorskog prostora $S^n(V^*)$ na vektorski prostor $\mathcal{P}^n(V)$.*

(*c*) *Preslikavanje $\Pi : S(V^*) \to \mathcal{P}(V)$, definirano pomoću svojih restrikcija $\Pi|S^n(V^*) = \Pi_n$, (s tim da su $\Pi_0 : S^0(V^*) \to \mathcal{P}^0(V)$ i $\Pi_1 : S^1(V^*) \to \mathcal{P}^1(V)$ identitete) je izomorfizam unitalnih algebri.*

Izomorfizam Π iz prethodne propozicije upotrebljavat ćemo kao identifikaciju $\mathcal{P}(V) = S(V^*)$.

Neka je sada $\mathcal{J}$ dvostrani ideal u tenzorskoj algebri $T(V)$ generiran sa $\{v \otimes v;\ v \in V\}$ i neka je $\bigwedge(V) = T(V)/\mathcal{J}$. Ideal $\mathcal{J}$ je graduiran, jer je generiran skupom homogenih elemenata, pa je i algebra $\bigwedge(V)$ graduirana:

$$\bigwedge(V) = \sum_{n \in \mathbb{Z}_+} \dot{+} \bigwedge{}^n(V), \qquad \bigwedge{}^n(V) = T^n(V)/(T^n(V) \cap \mathcal{J}).$$

Budući da je ideal $\mathcal{J}$ generiran podskupom od $T^2(V)$, vidimo da se K i V identificiraju sa $\bigwedge^0(V)$ i sa $\bigwedge^1(V)$. Naravno, V generira unitalnu algebru $\bigwedge(V)$. Ta se algebra zove **vanjska algebra vektorskog prostora** V. Produkt u vanjskoj algebri $\bigwedge(V)$ označava se sa $\wedge$. Kako je

$$u \otimes v + v \otimes u = (u + v) \otimes (u + v) - u \otimes u - v \otimes v \in \mathcal{J},$$

to je $u \wedge v = -v \wedge u \ \ \forall u, v \in V$. Odatle slijedi

$$a \wedge b = (-1)^{mn} b \wedge a \qquad \text{za} \quad a \in \bigwedge{}^m(V) \quad \text{i} \quad b \in \bigwedge{}^n(V).$$

Analogno tvrdnjama o simetričnoj algebri dobivaju se i odgovarajuće tvrdnje o vanjskoj algebri:

Propozicija 1.3.10. *Neka je $\varphi : V \to \bigwedge(V)$ restrikcija kvocijentnog epimorfizma $T(V) \to \bigwedge(V)$, (odnosno, identifikacija V sa $\bigwedge^1(V)$). Uređen par $(\bigwedge(V), \varphi)$ ima sljedeće univerzalno svojstvo: ako je $\mathcal{A}$ unitalna algebra i ako je $\psi : V \to \mathcal{A}$ linearan operator takav da je $\psi(v)^2 = 0 \ \ \forall v \in V$ onda postoji jedinstven unitalni homomorfizam algebri $\Psi : \bigwedge(V) \to \mathcal{A}$ takav da je $\psi = \Psi \circ \varphi$ (odnosno, $\Psi|V = \psi$).*

Propozicija 1.3.11. *Neka je $\iota_n : V^n \to \bigwedge^n(V)$ alternirajući $n-$linearni operator definiran sa*

$$\iota_n(v_1, \ldots, v_n) = v_1 \wedge \cdots \wedge v_n, \qquad v_1, \ldots, v_n \in V.$$

Par $(\bigwedge^n(V), \iota_n)$ ima sljedeće univerzalno svojstvo: za svaki vektorski prostor W i za svaki alternirajući $n-$linearan operator $\ell : V^n \to W$ postoji jedinstven linearan operator $L : \bigwedge^n(V) \to W$ takav da je $\ell = L \circ \iota_n$, tj. da vrijedi

$$L(v_1 \wedge \cdots \wedge v_n) = \ell(v_1, \ldots, v_n) \qquad \forall v_1, \ldots, v_n \in V.$$

Propozicija 1.3.12. *Neka je J linearno uređen skup i neka je $\{e_j;\ j \in J\}$ baza vektorskog prostora V. Tada je*

$$\{e_{j_1} \wedge \cdots \wedge e_{j_n};\ j_1, \ldots, j_n \in J,\ j_1 < \cdots < j_n\}$$

baza vektorskog prostora $\bigwedge^n(V)$.

Odatle neposredno slijedi:

Korolar 1.3.13. *Neka je V konačnodimenzionalan vektorski prostor nad poljem K,* $\dim V = N$. *Tada je $\bigwedge^n(V) = \{0\}$ za $n > N$ i*

$$\dim \bigwedge^n(V) = \binom{N}{n} \qquad \text{za } 0 \leq n \leq N.$$

Ako je polje K karakteristike 0, možemo slično kao za simetričnu algebru identificirati direktni komplement od $T^n(V) \cap \mathcal{J}$ u prostoru $T^n(V)$. U ovom slučaju promatramo $n-$linearan operator

$$(v_1, \ldots, v_n) \mapsto \frac{1}{n!} \sum_{\tau \in \mathcal{S}_n} (sgn\, \tau) v_{\tau(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\tau(n)}$$

sa V^n u $T^n(V)$ i neka je $\sigma'_n : T^n(V) \to T^n(V)$ pripadni linearan operator. Dakle,

$$\sigma'_n(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) = \frac{1}{n!} \sum_{\tau \in \mathcal{S}_n} (sgn\, \tau) v_{\tau(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\tau(n)} \qquad \text{za } v_1, \ldots, v_n \in V.$$

Operator σ'_n se zove **antisimetrizacija**, a također i složeno preslikavanje $\sigma' : T(V) \to T(V)$, $\sigma'|T^n(V) = \sigma'_n$. Sliku operatora σ'_n označavamo sa $\tilde{\bigwedge}^n(V)$ a elementi te slike zovu se **antisimetrični $n-$tenzori**.

Propozicija 1.3.14. *Operator σ'_n je projektor i jezgra mu je $T^n(V) \cap \mathcal{J}$. Posebno,*

$$T^n(V) = \tilde{\bigwedge}^n(V) \dot{+} T^n(V) \cap \mathcal{J}$$

i restrikcija kvocijentnog epimorfizma $T(V) \to \bigwedge(V) = T(V)/\mathcal{J}$ na potprostor $\tilde{\bigwedge}^n(V)$ je izomorfizam prostora antisimetričnih $n-$tenzora $\tilde{\bigwedge}^n(V)$ na prostor $\bigwedge^n(V)$.

Sljedeća dva teorema daju dva načina proširenja djelovanja linearnog operatora sa vektorskog prostora na tenzorsku, simetričnu i vanjsku algebru tog prostora; napominjemo da kao i obično svaki vektorski prostor V identificiramo s potprostorima $T^1(V)$, $S^1(V)$ i $\bigwedge^1(V)$ algebri $T(V)$, $S(V)$ i $\bigwedge(V)$.

Teorem 1.3.15. *Neka su V i W vektorski prostori i $A : V \to W$ linearan operator. Tada se A jedinstveno proširuje do unitalnih homomorfizama*

$$T(A) : T(V) \to T(W), \qquad S(A) : S(V) \to S(W), \qquad \bigwedge(A) \bigwedge(V) \to \bigwedge(W).$$

Ako je operator A surjektivan (injektivan, bijektivan) onda su i homomorfizmi $T(A)$, $S(A)$ i $\bigwedge(A)$ takvi. Ako je U vektorski prostor i $B : W \to U$ linearan operator, onda je

$$T(BA) = T(B) \circ T(A), \qquad S(BA) = S(B) \circ S(A), \qquad \bigwedge(BA) = \bigwedge(B) \circ \bigwedge(A).$$

Posebno, $A \mapsto T(A)$, $A \mapsto S(A)$ i $A \mapsto \bigwedge(A)$ su homomorfizmi grupe $GL(V)$ u grupe automorfizama unitalnih algebri $T(V)$, $S(V)$ i $\bigwedge(V)$.

Teorem 1.3.16. *Neka je V vektorski prostor. Svaki linearan operator $A \in L(V) = \mathfrak{gl}(V)$ jedinstveno se proširuje do derivacija $D(A) \in Der(T(V))$, $d(A) \in Der(S(V))$ i $\delta(A) \in Der\left(\bigwedge(V)\right)$. Preslikavanja $D : \mathfrak{gl}(V) \to Der(T(V))$, $d : \mathfrak{gl}(V) \to Der(S(V))$ i $\delta : \mathfrak{gl}(V) \to Der\left(\bigwedge(V)\right)$ su homomorfizmi Liejevih algebri. Nadalje, kvocijentni epimorfizam $\pi : T(V) \to S(V)$ je preplitanje reprezentacija D i d a kvocijentni epimorfizam $\pi' : T(V) \to \bigwedge(V)$ je preplitanje reprezentacija D i δ :*

$$d(A) \circ \pi = \pi \circ D(A) \qquad i \qquad \delta(A) \circ \pi' = \pi' \circ D(A) \qquad \forall A \in \mathfrak{gl}(V).$$

Razmotrimo sada tenzorsku algebru $T(\mathfrak{g})$, simetričnu algebru $S(\mathfrak{g})$ i vanjsku algebru $\bigwedge(\mathfrak{g})$ Liejeve algebre $\mathfrak{g}$. Tada imamo adjungiranu reprezentaciju $ad_{\mathfrak{g}}$ koja je homomorfizam Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ u Liejevu algebru $Der(\mathfrak{g})$ derivacija od $\mathfrak{g}$. Kombiniramo li to s teoremom 1.3.16. dobivamo:

Teorem 1.3.17. *Neka je $\mathfrak{g}$ Liejeva algebra. Postoje jedinstveni homomorfizmi*

$$ad_{T(\mathfrak{g})} : \mathfrak{g} \to Der(T(\mathfrak{g})), \quad ad_{S(\mathfrak{g})} : \mathfrak{g} \to Der(S(\mathfrak{g})) \quad i \quad ad_{\bigwedge(\mathfrak{g})} : \mathfrak{g} \to Der(\bigwedge \mathfrak{g}))$$

takvi da je

$$(ad_{T(\mathfrak{g})}\, x)|\mathfrak{g} = ad_{\mathfrak{g}}\, x, \quad (ad_{S(\mathfrak{g})}\, x)|\mathfrak{g} = ad_{\mathfrak{g}}\, x \quad i \quad (ad_{\bigwedge(\mathfrak{g})}\, x)|\mathfrak{g} = ad_{\mathfrak{g}}\, x \quad \forall x \in \mathfrak{g}.$$

Lako se vidi da za $x, x_1, \ldots, x_n \in \mathfrak{g}$ vrijedi

$$(ad_{T(\mathfrak{g})}\, x)(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_1 \otimes \cdots \otimes [x, x_i] \otimes \cdots \otimes x_n,$$

$$(ad_{S(\mathfrak{g})}\, x)(x_1 \cdots x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_1 \cdots [x, x_i] \cdots x_n$$

i

$$(ad_{\bigwedge(\mathfrak{g})}\, x)(x_1 \wedge \cdots \wedge x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_1 \wedge \cdots \wedge [x, x_i] \wedge \cdots \wedge x_n$$

1.3.3 Univerzalna omotačka algebra. PBW teorem

Neke je $\mathfrak{g}$ Liejeva algebra nad poljem $K = \mathbb{R}$ ili $K = \mathbb{C}$. Ako je $\mathcal{A}$ asocijativna algebra, **Liejev morfizam** sa $\mathfrak{g}$ u $\mathcal{A}$ je linearno preslikavanje $\varphi : \mathfrak{g} \to \mathcal{A}$ takvo da je

$$\varphi([x, y]) = \varphi(x)\varphi(y) - \varphi(y)\varphi(x) \qquad \forall x, y \in \mathfrak{g}.$$

Drugim riječima, φ je homomorfizam Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ u Liejevu algebru koja se iz $\mathcal{A}$ dobiva definicijom komutatora $[a, b] = ab - ba$, $a, b \in \mathcal{A}$. **Univerzalna omotačka algebra** Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ je uređen par $(\mathcal{U}, \varphi)$ sa svojstvima:

$(U1)$ $\mathcal{U}$ je unitalna algebra nad poljem K.

$(U2)$ φ je Liejev morfizam sa $\mathfrak{g}$ u $\mathcal{U}$.

$(U3)$ Ako je $\mathcal{A}$ unitalna algebra nad poljem K i ako je ψ Liejev morfizam sa $\mathfrak{g}$ u $\mathcal{A}$, onda postoji jedinstven unitalan homomorfizam $\Psi : \mathcal{U} \to \mathcal{A}$ takav da je $\psi = \Psi \circ \varphi$.

Teorem 1.3.18. *Neka je $\mathfrak{g}$ Liejeva algebra nad poljem K.*

(a) Postoji univerzalna omotačka algebra $(\mathcal{U}, \varphi)$ od $\mathfrak{g}$.

(b) Ako su $(\mathcal{U}, \varphi)$ i $(\mathcal{V}, \psi)$ univerzalne omotačke algebre Liejeve algebre $\mathfrak{g}$, jedinstven unitalni homomorfizam $\Psi : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ sa svojstvom $\psi = \Psi \circ \varphi$ je izomorfizam unitalnih algebri.

(c) Ako je $(\mathcal{U}, \varphi)$ univerzalna omotačka algebra od $\mathfrak{g}$ onda potprostor $\varphi(\mathfrak{g})$ generira unitalnu algebru $\mathcal{U}$.

Uobičajena konstrukcija univerzalne omotačke algebre dobiva se analogno konstrukciji simetrične algebre. Definiramo $U(\mathfrak{g}) = T(\mathfrak{g})/\mathcal{J}$, gdje je $\mathcal{J}$ dvostrani ideal u $T(\mathfrak{g})$ generiran skupom

$$\{x \otimes y - y \otimes x - [x, y];\ x, y \in \mathfrak{g}\}.$$

Ako sa $\iota : \mathfrak{g} \to U(\mathfrak{g})$ označimo restrikciju na $\mathfrak{g} = T^1(\mathfrak{g})$ kvocijentnog epimorfizma $\pi : T(\mathfrak{g}) \to U(\mathfrak{g})$,

$$\iota(x) = x + \mathcal{J}, \qquad x \in \mathfrak{g}$$

onda je $(U(\mathfrak{g}), \iota)$ univerzalna omotačka algebra Liejeve algebre $\mathfrak{g}$.

Ako je π reprezentacija Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ na vektorskom prostoru V, onda je π Liejev morfizam $\mathfrak{g}$ u unitalnu algebru $L(V)$ svih linearnih operatora na prostoru V. Prema univerzalnom svojstvu $(U3)$ postoji jedinstvena reprezentacija $\tilde{\pi}$ unitalne algebre $U(\mathfrak{g})$ na prostoru V takva da je $\pi(x) = \tilde{\pi}(\iota(x))\ \forall x \in \mathfrak{g}$. Nadalje, vrijedi

Teorem 1.3.19. (a) *$\pi \mapsto \tilde{\pi}$ je bijekcija sa skupa svih reprezentacija Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ na prostoru V na skup svih reprezentacija unitalne algebre $U(\mathfrak{g})$ na prostoru V.*

(b) *Potprostor W od V je $\pi-$invarijantan ako i samo ako je on $\tilde{\pi}-$invarijantan.*

(c) *Najmanji $\pi-$invarijantan potprostor od V koji sadrži vektor $v \in V$ je*

$$\tilde{\pi}(U(\mathfrak{g}))v = \{\tilde{\pi}(a)v;\ a \in U(\mathfrak{g})\}.$$

(d) *Reprezentacija π je ireducibilna ako i samo ako je reprezentacija $\tilde{\pi}$ ireducibilna.*

(e) *Reprezentacija π je ireducibilna ako i samo ako za svaki vektor $v \in V \setminus \{0\}$ vrijedi*

$$\tilde{\pi}(U(\mathfrak{g}))v = \{\tilde{\pi}(a)v;\ a \in U(\mathfrak{g})\} = V.$$

(f) *Ako su π i ρ reprezentacije od $\mathfrak{g}$ na prostorima V i W, onda je*

$$Hom_{\mathfrak{g}}(V, W) = Hom_{U(\mathfrak{g})}(V, W).$$

(g) *Reprezentacije π i ρ Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ su ekvivalentne ako i samo ako su $\tilde{\pi}$ i $\tilde{\rho}$ ekvivalentne reprezentacije unitalne algebre $U(\mathfrak{g})$.*

Primijetimo da se skup koji generira ideal $\mathcal{J}$ u graduiranoj algebri $T(\mathfrak{g})$ ne sastoji od homogenih elemenata (osim ako je Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ komutativna). Stoga ne možemo zaključiti da je ideal $\mathcal{J}$ graduiran; ustvari, pokazuje se da je taj ideal graduiran ako i samo ako je Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ komutativna, a tada je $U(\mathfrak{g}) = S(\mathfrak{g})$. Stoga ne možemo prenijeti graduaciju s algebre $T(\mathfrak{g})$ na algebru $U(\mathfrak{g})$. Međutim, moguće je uvesti tzv. *filtraciju.*

Neka je $\mathcal{A}$ unitalna algebra. **Filtracija** na algebri $\mathcal{A}$ je niz $(\mathcal{A}_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$ potprostora od $\mathcal{A}$ takvih da je

$$\mathcal{A}_0 = K1_{\mathcal{A}}, \qquad \mathcal{A}_n \subseteq \mathcal{A}_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{Z}_+, \qquad \mathcal{A}_n\mathcal{A}_m \subseteq \mathcal{A}_{n+m} \quad \forall n, m \in \mathbb{Z}_+, \qquad \mathcal{A} = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}_+} \mathcal{A}_n.$$

Filtrirana algebra je unitalna algebra sa zadanom filtracijom. Ukoliko je $\mathcal{A}$ graduirana algebra s graduacijom $(\mathcal{A}^n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$ onda možemo definirati filtraciju na $\mathcal{A}$ ovako:

$$\mathcal{A}_n = \sum_{k=0}^{n} \mathcal{A}^k, \qquad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Neka je sada $\mathcal{A}$ filtrirana algebra s filtracijom $(\mathcal{A}_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$. Definiramo vektorske prostore $Gr^n(\mathcal{A})$ ovako:

$$Gr^0(\mathcal{A}) = \mathcal{A}_0, \qquad Gr^n(\mathcal{A}) = \mathcal{A}_n/\mathcal{A}_{n-1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Nadalje, neka je $Gr(\mathcal{A})$ direktna suma vektorskih prostora $Gr^n(\mathcal{A})$:

$$Gr(\mathcal{A}) = \coprod_{n\in\mathbb{Z}_+} Gr^n(\mathcal{A}).$$

Za $n, m \in \mathbb{Z}_+$ definiramo sada bilinearno preslikavanje $\gamma_{n,m} : Gr^n(\mathcal{A}) \times Gr^m(\mathcal{A}) \to Gr^{n+m}(\mathcal{A})$ ovako:

$$\gamma_{n,m}(a + \mathcal{A}_{n-1}, b + \mathcal{A}_{m-1}) = ab + \mathcal{A}_{n+m-1}, \qquad a \in \mathcal{A}_n, \quad b \in \mathcal{A}_m;$$

pri tome podrazumijevamo da je $\mathcal{A}_{-1} = \{0\}$. Definicija je smislena, tj. ne ovisi o izboru predstavnika a i b klasa $a + \mathcal{A}_{n-1}$ i $b + \mathcal{A}_{m-1}$. Doista, ako su $a, a' \in \mathcal{A}_n$ i $b, b' \in \mathcal{A}_m$ takvi da je

$$a + \mathcal{A}_{n-1} = a' + \mathcal{A}_{n-1} \qquad \text{i} \qquad b + \mathcal{A}_{m-1} = b' + \mathcal{A}_{m-1},$$

onda je $a - a' \in \mathcal{A}_{n-1}$ i $b - b' \in \mathcal{A}_{m-1}$, pa imamo

$$a(b - b') \in \mathcal{A}_n\mathcal{A}_{m-1} \subseteq \mathcal{A}_{n+m-1} \quad \text{i} \quad (a - a')b' \in \mathcal{A}_{n-1}\mathcal{A}_m \subseteq \mathcal{A}_{n+m-1},$$

odakle slijedi

$$ab - a'b' = a(b - b') + (a - a')b' \in \mathcal{A}_{n+m-1},$$

dakle,

$$ab + \mathcal{A}_{n+m-1} = a'b' + \mathcal{A}_{n+m-1}.$$

Definiramo sada bilinearno preslikavanje $\gamma : Gr(\mathcal{A}) \times Gr(\mathcal{A}) \to Gr(\mathcal{A})$ ovako:

$$\gamma|Gr^n(\mathcal{A}) \times Gr^m(\mathcal{A}) = \gamma_{n,m} \qquad n, m \in \mathbb{Z}_+.$$

Nije teško dokazati da je $Gr(\mathcal{A})$ s operacijom množenja danom sa $\alpha\beta = \gamma(\alpha, \beta)$, $\alpha, \beta \in Gr(\mathcal{A})$, unitalna algebra i da je $(Gr^n(\mathcal{A}))_{n\in\mathbb{Z}_+}$ graduacija na $Gr(\mathcal{A})$.

Vratimo se sada na univerzalnu omotačku algebru $(U(\mathfrak{g}), \varphi)$ Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ konstruiranu kao prije:

$$U(\mathfrak{g}) = T(\mathfrak{g})/\mathcal{J}, \qquad \varphi(x) = x + \mathcal{J}, \qquad x \in \mathfrak{g},$$

$$\mathcal{J} = span\,\{a \otimes (x \otimes y - y \otimes x - [x, y]) \otimes b;\ a, b \in T(\mathfrak{g}),\ x, y \in \mathfrak{g}\}.$$

Neka je $\pi : T(\mathfrak{g}) \to U(\mathfrak{g})$ kvocijentni epimorfizam. Iz graduacije $(T^n(\mathfrak{g}))_{n\in\mathbb{Z}_+}$ tenzorske algebre $T(\mathfrak{g})$ definiramo filtraciju $(T_n(\mathfrak{g}))_{n\in\mathbb{Z}_+}$ te algebre:

$$T_n(\mathfrak{g}) = \sum_{k=0}^{n} T^n(\mathfrak{g}), \qquad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Tada je sa

$$U_n(\mathfrak{g}) = \pi(T_n(\mathfrak{g})), \qquad n \in \mathbb{Z}_+,$$

definirana filtracija $(U_n(\mathfrak{g}))_{n\in\mathbb{Z}_+}$ na algebri $U(\mathfrak{g})$. Pripadnu graduiranu algebru $Gr(U(\mathfrak{g}))$ označavat ćemo kraće sa $Gr(\mathfrak{g})$. Dakle,

$$Gr(\mathfrak{g}) = \coprod_{n\in\mathbb{Z}_+} Gr^n(\mathfrak{g}), \qquad Gr^0(\mathfrak{g}) = U_0(\mathfrak{g}), \quad Gr^n(\mathfrak{g}) = U_n(\mathfrak{g})/U_{n-1}(\mathfrak{g}), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Množenje na $Gr(\mathfrak{g})$ zadano je svojim restrikcijama na $Gr^n(\mathfrak{g}) \times Gr^m(\mathfrak{g})$

$$(a + U_{n-1}(\mathfrak{g}))(b + U_{m-1}(\mathfrak{g})) = ab + U_{n+m-1}(\mathfrak{g}), \qquad a \in U_n(\mathfrak{g}), \quad b \in U_m(\mathfrak{g})$$

s tim da podrazumijevamo da je $U_{-1}(\mathfrak{g}) = \{0\}$.

U vezi s ovim pojmovima najvažniji je rezultat da je za svaku Liejevu algebru $\mathfrak{g}$ graduirana algebra $Gr(\mathfrak{g})$ prirodno izomorfna simetričnoj algebri $S(\mathfrak{g})$ vektorskog prostora $\mathfrak{g}$. To je jedna od posljedica važnog i netrivijalnog **Poincare−Birkhoff−Witt−ovog teorema**:

Teorem 1.3.20. (**PBW−teorem**) *Neka je $(x_j)_{j\in J}$ uređena baza Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ i neka je $(U(\mathfrak{g}), \iota)$ univerzalna omotačka algebra od $\mathfrak{g}$. Tada je skup monoma*

$$\{1\} \cup \{\iota(x_{j_1}) \cdots \iota(x_{j_n});\ n \in \mathbb{N},\ j_1, \dots, j_n \in J,\ j_1 \leq \cdots \leq j_n\}$$

baza vektorskog prostora $U(\mathfrak{g})$. Posebno, Liejev morfizam $\iota : \mathfrak{g} \to U(\mathfrak{g})$ je injektivan.

Naravno, ako je skup J konačan, npr. $J = \{1, \dots, N\}$, tj. ako je Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ konačnodimenzionalna i $\{x_1, \dots, x_N\}$ je njena uređena baza, onda se pripadna baza iz PBW−teorema može ovako pisati:

$$\{\iota(x_1)^{k_1} \cdots \iota(x_N)^{k_N};\ k_1, \dots, k_N \in \mathbb{Z}_+\}.$$

Budući da temeljem PBW−teorema znamo da je Liejev morfizam $\iota : \mathfrak{g} \to U(\mathfrak{g})$ injektivan, možemo ga upotrijebiti kao identifikaciju $\mathfrak{g}$ s potprostorom od $U(\mathfrak{g})$. Tada imamo

$$U_0(\mathfrak{g}) = K1_{U(\mathfrak{g})} \qquad \text{i} \qquad U_1(\mathfrak{g}) = K1_{U(\mathfrak{g})} \dot{+} \mathfrak{g}.$$

Nadalje, potprostor $U_n(\mathfrak{g})$ je razapet sa 1 i svim produktima oblika $z_1 \cdots z_k$ gdje su $z_1, \dots, z_k \in \mathfrak{g}$ i $k \leq n$. Univerzalno svojstvo od $U(\mathfrak{g})$ sada znači da se svaki Liejev morfizam sa $\mathfrak{g}$ u unitalnu algebru $\mathcal{A}$ jedinstveno proširuje do unitalnog homomorfizma sa $U(\mathfrak{g})$ u $\mathcal{A}$. To proširenje obično označavamo istim znakom kao i polazni Liejev morfizam. Posebno, ako je π reprezentacija Liejeve algebre $\mathfrak{g}$, njeno proširenje do reprezentacije unitalne algebre $U(\mathfrak{g})$ također označavamo sa π (umjesto oznake $\tilde{\pi}$ iz teorema 1.3.19.)

Analogno teoremima 1.3.15., 1.3.16. i 1.3.17. dobivamo:

Teorem 1.3.21. *Neka je $\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ homomorfizam Liejevih algebri. Tada se φ jedinstveno proširuje do unitalnog homomorfizma $U(\varphi) : U(\mathfrak{g}) \to U(\mathfrak{h})$. Ako je φ surjektivan (injektivan, bijektivan) onda je i $U(\varphi)$ takav. Ako je $\psi : \mathfrak{h} \to \mathfrak{k}$ također homomorfizam Liejevih algebri, onda je $U(\psi \circ \varphi) = U(\psi) \circ U(\varphi)$. Posebno, $\varphi \mapsto U(\varphi)$ je homomorfizam grupe $Aut(\mathfrak{g})$ u grupu $Aut(U(\mathfrak{g}))$ automorfizama unitalne algebre $U(\mathfrak{g})$.*

Teorem 1.3.22. *Neka je $\mathfrak{g}$ Liejeva algebra. Svaka derivacija $\delta \in Der(\mathfrak{g})$ Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ jedinstveno se proširuje do derivacije $U(\delta) \in Der(U(\mathfrak{g}))$ unitalne algebre $U(\mathfrak{g})$. Preslikavanje $\delta \to U(\delta)$ je homomorfizam Liejeve algebre $Der(\mathfrak{g})$ u Liejevu algebru $Der(U(\mathfrak{g}))$. Nadalje, kvocijentni epimorfizam $\pi : T(\mathfrak{g}) \to U(\mathfrak{g})$ je preplitanje dviju reprezentacija:*

$$U(\delta) \circ \pi = \pi \circ D(\delta) \qquad \forall \delta \in Der(\mathfrak{g}).$$

Adjungirana reprezentaciju $ad_{\mathfrak{g}}$ je homomorfizam Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ u Liejevu algebru $Der(\mathfrak{g})$ derivacija od $\mathfrak{g}$. Kombiniramo li to s teoremom 1.3.22. dobivamo:

Teorem 1.3.23. *Neka je $\mathfrak{g}$ Liejeva algebra. Postoji jedinstveni homomorfizam*

$$ad_{U(\mathfrak{g})} : \mathfrak{g} \to Der(U(\mathfrak{g}))$$

takav da je

$$(ad_{U(\mathfrak{g})}\, x)|\mathfrak{g} = ad_{\mathfrak{g}}\, x \qquad \forall x \in \mathfrak{g}.$$

Propozicija 1.3.24. (a) *Neka je $\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ homomorfizam Liejevih algebri. Za bilo koje $x_1, \dots, x_n \in \mathfrak{g}$ vrijedi*

$$U(\varphi)(x_1 \cdots x_n) = \varphi(x_1) \cdots \varphi(x_n).$$

(b) *Neka je $\delta \in Der(\mathfrak{g})$ derivacija Liejeve algebre $\mathfrak{g}$. Za $x_1, \dots, x_n \in \mathfrak{g}$ vrijedi*

$$U(\delta)(x_1 \cdots x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_1 \cdots \delta(x_i) \cdots x_n.$$

(c) *Za Liejevu algebru $\mathfrak{g}$, za $x \in \mathfrak{g}$ i za $u \in U(\mathfrak{g})$ vrijedi*

$$(ad_{U(\mathfrak{g})}\, x)u = xu - ux.$$

Iz teorema 1.3.21. slijedi

Korolar 1.3.25. *Neka je $\mathfrak{h}$ Liejeva podalgebra Liejeve algebre $\mathfrak{g}$. Tada se inkluzija $x \mapsto x$ sa $\mathfrak{h}$ u $\mathfrak{g}$ jedinstveno proširuje do izomorfizma unitalne algebre $U(\mathfrak{h})$ na unitalnu podalgebru od $U(\mathfrak{g})$ generiranu sa $\mathfrak{h}$.*

Korolar 1.3.26. *Neka su $\mathfrak{a}$ i $\mathfrak{b}$ Liejeve podalgebre Liejeve algebre $\mathfrak{g}$, takve da je $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \dot{+} \mathfrak{b}$. Uz identifikacije $U(\mathfrak{a}) \subseteq U(\mathfrak{g})$ i $U(\mathfrak{b}) \subseteq U(\mathfrak{g})$ iz korolara 1.3.25., postoji jedinstven lineran operator $\Phi : U(\mathfrak{a}) \otimes U(\mathfrak{b}) \to U(\mathfrak{g})$ takav da vrijedi*

$$\Phi(a \otimes b) = ab \qquad \forall a \in U(\mathfrak{a}) \quad \text{i} \quad \forall b \in U(\mathfrak{b}).$$

Φ je izomorfizam vektorskih prostora.

Neka je ponovo $\pi : T(\mathfrak{g}) \to U(\mathfrak{g}) = T(\mathfrak{g})/\mathcal{J}$ kvocijentni epimorfizam. Filtracija algebre $U(\mathfrak{g})$ definirana je kao $\pi-$slika filtracije od $T(\mathfrak{g})$:

$$U_n(\mathfrak{g}) = \pi(T_n(\mathfrak{g})), \qquad T_n(\mathfrak{g}) = \sum_{k=0}^{n} T^k(\mathfrak{g}).$$

Promatrajmo sada kompoziciju

$$T_n(\mathfrak{g}) \to (T_n(\mathfrak{g}) + \mathcal{J})/\mathcal{J} = U_n(\mathfrak{g}) \to Gr^n(\mathfrak{g}) = U_n(\mathfrak{g})/U_{n-1}(\mathfrak{g}).$$

Ta je kompozicija surjektivna, jer su oba preslikavanja surjektivna. Nadalje, potprostor $T_{n-1}(\mathfrak{g})$ sadržan je u jezgri te kompozicije. Budući da je $T_n(\mathfrak{g}) = T_{n-1}(\mathfrak{g}) \dot{+} T^n(\mathfrak{g})$, dolazimo do linearnog preslikavanja

$$\tilde{\varphi}_n : T^n(\mathfrak{g}) \to Gr^n(\mathfrak{g}) = U_n(\mathfrak{g})/U_{n-1}(\mathfrak{g}).$$

Definiramo sada linearno preslikavanje $\tilde{\varphi} : T(\mathfrak{g}) \to Gr(\mathfrak{g})$ pomoću njegovih restrikcija:

$$\tilde{\varphi}|T^n(\mathfrak{g}) = \tilde{\varphi}_n, \qquad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Kao posljedicu PBW$-$teorema dobivamo

Teorem 1.3.27. *Definirano preslikavanje $\tilde{\varphi} : T(\mathfrak{g}) \to Gr(\mathfrak{g})$ je unitalni homomorfizam. Jezgra* $\operatorname{Ker}\tilde{\varphi}$ *jednaka je dvostranom idealu $\mathcal{I}$ u $T(\mathfrak{g})$ generiranom skupom $\{x \otimes y - y \otimes x;\ x, y \in \mathfrak{g}\}$. Prijelazom na kvocijent $T(\mathfrak{g})/\mathcal{I} = S(\mathfrak{g})$ dobivamo izomorfizam $\varphi : S(\mathfrak{g}) \to Gr(\mathfrak{g})$. Za svaki $n \in \mathbb{Z}_+$ restrikcija $\varphi|S^n(\mathfrak{g})$ je izomorfizam prostora $S^n(\mathfrak{g})$ na prostor $Gr^n(\mathfrak{g})$.*

Korolar 1.3.28. *Neka je za $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, W potprostor od $T^n(\mathfrak{g})$ takav da je*

$$T^n(\mathfrak{g}) = W \dotplus T^n(\mathfrak{g}) \cap \mathcal{I},$$

tj. da je restrikcija kvocijentnog epimorfizma $T(\mathfrak{g}) \to S(\mathfrak{g}) = T(\mathfrak{g})/\mathcal{I}$ na potprostor W izomorfizam sa W na $S^n(\mathfrak{g})$. Neka je $\pi : T(\mathfrak{g}) \to U(\mathfrak{g}) = T(\mathfrak{g})/\mathcal{J}$ kvocijentni epimorfizam. Tada je restrikcija $\pi|W$ injektivna i vrijedi

$$U_n(\mathfrak{g}) = \pi(W) \dotplus U_{n-1}(\mathfrak{g}).$$

Primijenimo sada korolar 1.3.28. na potprostor $\tilde{S}^n(\mathfrak{g})$ simetričnih $n-$tenzora. To je potprostor od $T^n(\mathfrak{g})$ razapet elementima oblika

$$\sigma_n(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) = \frac{1}{n!} \sum_{\tau \in \mathcal{S}_n} x_{\tau(1)} \otimes \cdots \otimes x_{\tau(n)}, \qquad x_1, \ldots, x_n \in \mathfrak{g}.$$

Prema teoremu 1.3.8. je

$$T^n(\mathfrak{g}) = \tilde{S}^n(\mathfrak{g}) \dotplus T^n(\mathfrak{g}) \cap \mathcal{I},$$

pa je korolar 1.3.28. primjenjiv. Na taj način prijelazom na kvocijent $T(\mathfrak{g}) \to S(\mathfrak{g}) = T(\mathfrak{g})/\mathcal{I}$ dolazimo do izomorfizma prostora $S^n(\mathfrak{g})$ na direktni komplement potprostora $U_{n-1}(\mathfrak{g})$ u prostoru $U_n(\mathfrak{g})$. I to ćemo preslikavanje označiti sa σ_n; dakle,

$$U_n(\mathfrak{g}) = \sigma_n(S^n(\mathfrak{g})) \dotplus U_{n-1}(\mathfrak{g}),$$

gdje je

$$\sigma_n(x_1 \cdots x_n) = \frac{1}{n!} \sum_{\tau \in \mathcal{S}_n} x_{\tau(1)} \cdots x_{\tau(n)}, \qquad x_1, \ldots, x_n \in \mathfrak{g}.$$

Primijetimo da ovdje s lijeve strane $x_1 \cdots x_n$ predstavlja umnožak u algebri $S(\mathfrak{g})$ a s desne strane $x_{\tau(1)} \cdots x_{\tau(n)}$ predstavlja umnožak u algebri $U(\mathfrak{g})$. Ta preslikavanja σ_n po linearnosti proširimo do linearnog operatora $\sigma : S(\mathfrak{g}) \to U(\mathfrak{g})$, tj. $\sigma|S^n(\mathfrak{g}) = \sigma_n$, $n \in \mathbb{Z}_+$. I taj se operator zove **simetrizacija**.

Prema tome, kao posljedicu PBW$-$teorema imamo i prvu tvrdnju sljedećeg teorema. Druga se tvrdnja direktno provjerava.

Teorem 1.3.29. (*a*) *Simetrizacija $\sigma : S(\mathfrak{g}) \to U(\mathfrak{g})$ je izomorfizam vektorskih prostora i za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi*

$$U_n(\mathfrak{g}) = \sigma(S^n(\mathfrak{g})) \dotplus U_{n-1}(\mathfrak{g}).$$

(*b*) *Izomorfizam $\varphi : S(\mathfrak{g}) \to Gr(\mathfrak{g})$ iz teorema 1.3.27. dobiva se iz simetrizacije $\sigma : S(\mathfrak{g}) \to U(\mathfrak{g})$ prijelazom na uzastopne kvocijente:*

$$\varphi(a) = \sigma(a) + U_{n-1}(\mathfrak{g}), \qquad a \in S^n(\mathfrak{g}).$$

Nadalje, imamo sljedeće korisne posljedice:

Propozicija 1.3.30. *Neka je $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \dotplus \mathfrak{p}$, gdje je $\mathfrak{k}$ Liejeva podalgebra i $\mathfrak{p}$ potprostor Liejeve algebre $\mathfrak{g}$. Tada postoji jedinstven linearan operator $\Psi : U(\mathfrak{k}) \otimes S(\mathfrak{p}) \to U(\mathfrak{g})$ takav da je*

$$\Psi(a \otimes b) = a\sigma(b) \qquad \forall a \in U(\mathfrak{k}) \quad \text{i} \quad \forall b \in S(\mathfrak{b}).$$

Ψ je izomorfizam vektorskih prostora.

1.4 Moduli nad unitalnim algebrama

Neka je u daljnjem $\mathcal{A}$ unitalna algebra nad poljem K. Proučit ćemo sada neka algebarska svojstva $\mathcal{A}-$modula. Za lijevi $\mathcal{A}-$modul V kažemo da je **Noetherin** ako za svaki rastući niz podmodula

$$V_1 \subseteq V_2 \subseteq \cdots \subseteq V_k \subseteq \cdots\cdots$$

postoji $m \in \mathbb{N}$ takav da je $V_k = V_m$ $\forall k \geq m$. Analogno, kažemo da je lijevi $\mathcal{A}-$modul V **Artinov** ako za svaki padajući niz podmodula

$$V_1 \supseteq V_2 \supseteq \cdots \supseteq V_k \supseteq \cdots\cdots$$

postoji $m \in \mathbb{N}$ takav da je $V_k = V_m$ $\forall k \geq m$.

Propozicija 1.4.1. *Neka je V lijevi $\mathcal{A}-$modul.*

(1) *Sljedeća su tri svojstva međusobno ekvivalentna:*

  (a) *Modul V je Noetherin.*

  (b) *Svaki neprazan skup $\mathcal{A}-$podmodula od V ima bar jedan maksimalan element.*

  (c) *Svaki $\mathcal{A}-$podmodul od V je konačno generiran.*

(2) *Sljedeća su dva svojstva međusobno ekvivalentna:*

  (a) *Modul V je Artinov.*

  (b) *Svaki neprazan skup $\mathcal{A}-$podmodula od V ima bar jedan minimalan element.*

Dokaz: (1) (a) $\Rightarrow$ (b) Pretpostavimo da je modul V Noetherin i neka je $\mathcal{S}$ neprazan skup podmodula od V. Pretpostavimo da u $\mathcal{S}$ ne postoji nijedan maksimalni element. Neka je $V_1 \in \mathcal{S}$. Budući da V_1 nije maksimalan element u $\mathcal{S}$ postoji $V_2 \in \mathcal{S}$ takav da je $V_1 \subsetneq V_2$. Induktivno na taj način dolazimo do striktno rastućeg niza podmodula od V, a to nije moguće, jer je modul V Noetherin. Ova kontradikcija pokazuje da je pretpostavka da u $\mathcal{S}$ ne postoji nijedan maksimalan element nemoguća, odnosno, dokazano je svojstvo (b).

(b) $\Rightarrow$ (c) Pretpostavimo da je ispunjeno svojstvo (b) i neka je W podmodul modula V. Neka je $\mathcal{S}$ skup svih konačno generiranih podmodula od W. Taj je skup neprazan jer je $\{0\} \in \mathcal{S}$. Prema tome postoji neki maksimalan element W_0 u $\mathcal{S}$. Pretpostavimo da je $W_0 \neq W$ i neka je $w \in W \setminus W_0$. Tada je podmodul $W_0 + \mathcal{A}w \subseteq W$ konačno generiran, dakle, $W_0 + \mathcal{A}w \in \mathcal{S}$, i $W_0 \subsetneq W_0 + \mathcal{A}w$. To je u suprotnosti s maksimalnošću od W_0 u $\mathcal{S}$. Ova kontradikcija pokazuje da je pretpostavka $W_0 \neq W$ nemoguća. Prema tome, podmodul $W = W_0$ je konačno generiran.

(c) $\Rightarrow$ (a) Pretpostavimo da je svaki podmodul od V konačno generiran i neka je

$$V_1 \subseteq V_2 \subseteq \cdots \subseteq V_k \subseteq \cdots\cdots$$

rastući niz podmodula. Tada je

$$W = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} V_n$$

podmodul od V i kao takav je konačno generiran. Stoga postoje $w_1, \ldots, w_n \in W$ takvi da je

$$W = \mathcal{A}w_1 + \cdots + \mathcal{A}w_m.$$

Budući da je W unija rastućeg niza podmodula V_k postoji $m \in \mathbb{N}$ takav da je $w_1, \ldots, w_n \in V_m$. No tada je $W = V_m$, dakle, $V_k = V_m$ $\forall k \geq m$. Dakle, modul V je Noetherin.

(2) Implikacija $(a) \Rightarrow (b)$ dokazuje se analogno kao implikacija $(a) \Rightarrow (b)$ u tvrdnji (1).

$(b) \Rightarrow (a)$ Pretpostavimo da je ispunjeno svojstvo (b) i neka je

$$V_1 \supseteq V_2 \supseteq \cdots \supseteq V_k \supseteq \cdots\cdots$$

beskonačan padajući niz podmodula. Po pretpostavci neprazan skup podmodula $\{V_k;\ k \in \mathbb{N}\}$ ima bar jedan minimalan element i neka je to V_m. Za $k \geq m$ tada je $V_k \subseteq V_m$, a kako je V_m minimalan, slijedi $V_k = V_m$. Time je dokazano svojstvo (a).

Algebra $\mathcal{A}$ zove se **lijevo Noetherina** (odn. **lijevo Artinova**) ako je ona kao lijevi $\mathcal{A}-$modul Noetherin (odn. Artinov). **Algebra $\mathcal{A}$** zove se **desno Noetherina** (odn. **desno Artinova**) ako je suprotna algebra $\mathcal{A}^{op}$ lijevo Noetherina (odn. lijevo Artinova). $\mathcal{A}-$podmoduli lijevog $\mathcal{A}-$modula $\mathcal{A}$ su lijevi ideali u $\mathcal{A}$. Prema tome, algebra $\mathcal{A}$ je lijevo Noetherina ako i samo ako za svaki rastući niz lijevih ideala

$$\mathcal{J}_1 \subseteq \mathcal{J}_2 \subseteq \cdots \subseteq \mathcal{J}_k \subseteq \cdots\cdots$$

postoji $m \in \mathbb{N}$ takav da je $\mathcal{J}_k = \mathcal{J}_m\ \forall k \geq m$.

Propozicija 1.4.2. *Neka je $\{0\} \to U \to V \to W \to \{0\}$ kratki egzaktni niz lijevih $\mathcal{A}-$modula. Modul V je Noetherin (odn. Artinov) ako i samo ako su moduli U i W Noetherini (odn. Artinovi).*

Dokaz: Pretpostavimo da je modul V Noetherin. Kako je U izomorfan podmodulu od V i on je Noetherin. Nadalje, ako je $\pi : V \to W$ epimorfizam i ako je

$$W_1 \subseteq W_2 \subseteq \cdots \subseteq W_k \subseteq \cdots\cdots$$

rastući niz podmodula od W, onda je

$$\pi^{-1}(W_1) \subseteq \pi^{-1}(W_2) \subseteq \cdots \subseteq \pi^{-1}(W_k) \subseteq \cdots\cdots$$

rastući niz podmodula od V. Kako je modul V Noetherin, postoji $m \in \mathbb{N}$ takav da vrijedi $\pi^{-1}(W_k) = \pi^{-1}(W_m)\ \forall k \geq m$. No tada je i $W_k = W_m\ \forall k \geq m$. Dakle, modul W je Noetherin.

Pretpostavimo sada da su moduli U i W Noetherini. Možemo pretpostaviti da je U podmodul od V i da je $W = V/U$. Označimo sa $\pi : V \to W$ kvocijentni epimorfizam. Neka je

$$V_1 \subseteq V_2 \subseteq \cdots \subseteq V_k \subseteq \cdots\cdots$$

rastući niz podmodula od V. Tada je

$$V_1 \cap U \subseteq V_2 \cap U \subseteq \cdots \subseteq V_k \cap U \subseteq \cdots\cdots$$

rastući niz podmodula od U pa postoji $m \in \mathbb{N}$ takav da je $V_k \cap U = V_m \cap U\ \forall k \geq m$. Nadalje,

$$\pi(V_1) \subseteq \pi(V_2) \subseteq \cdots \pi(V_k) \subseteq \cdots\cdots$$

je rastući niz podmodula od W, pa postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je $\pi(V_k) = \pi(V_n)\ \forall k \geq n$. Za $k \geq p = \max\{m, n\}$ vrijedi $V_k \cap U = V_p \cap U$ i $\pi(V_k) = \pi(V_p)$, a kako je $V_p \subseteq V_k$ odatle slijedi da je $V_k = V_p$. Prema tome, modul V je Noetherin.

Time je dokazana tvrdnju propozicije za Noetherino svojstvo. Dokaz za Artinovo svojstvo potpuno je analogan.

Propozicija 1.4.2. ima sljedeću neposrednu posljedicu:

Korolar 1.4.3. *Neka su $V_1, \dots, V_n$ Noetherini (odn. Artinovi) lijevi $\mathcal{A}-$moduli. Tada je i njihova direktna suma (tj. Kartezijev produkt) Noetherin (odn. Artinov) $\mathcal{A}-$modul.*

Dokaz slijedi indukcijom po n primjenom propozicije 1.4.2. na kratki egzaktni niz

$$\{0\} \to V_n \to \coprod_{i=1}^{n} V_i \to \coprod_{i=1}^{n-1} V_i \to \{0\}.$$

Propozicija 1.4.4. *Neka je $\mathcal{A}$ lijevo Noetherina (odn. lijevo Artinova) unitalna algebra i V konačno generiran lijevi $\mathcal{A}-$modul. Tada je modul V Noetherin (odn. Artinov).*

Dokaz: Ako je modul V konačno generiran, on je izomorfan kvocijentnom modulu lijevog $\mathcal{A}-$modula $\mathcal{A}^n$ za neki $n \in \mathbb{N}$. Doista, ako su $v_1, \dots, v_n \in V$ takvi da je $V = \mathcal{A}v_1 + \cdots + \mathcal{A}v_n$, onda je $(a_1, \dots, a_n) \mapsto a_1v_1 + \cdots + a_nv_n$ epimorfizam sa $\mathcal{A}^n$ na V. Prema korolaru 1.4.3. lijevi $\mathcal{A}-$modul $\mathcal{A}^n$ je Noetherin (odn. Artinov) pa je po propoziciji 1.4.2. i modul V Noetherin (odn. Artinov).

Teorem 1.4.5. (**Hilbertov teorem o bazi**) *Ako je $\mathcal{A}$ komutativna Noetherina unitalna algebra onda je algebra polinoma $\mathcal{A}[X_1, \dots, X_n]$ u n varijabli s koeficijentima u $\mathcal{A}$ također Noetherina. Posebno, algebra polinoma $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$ s kompleksnim koeficijentima je Noetherina. Nadalje, ako je V konačnodimenzionalan vektorski prostor, simetrična algebra $S(V)$ je Noetherina.*

Dokaz: Prvu tvrdnju dovoljno je dokazati za $n = 1$, tj. za algebru $\mathcal{A}[X]$. Opći slučaj slijedi indukcijom po n, jer je $\mathcal{A}[X_1, \dots, X_n] = \mathcal{A}[X_1, \dots, X_{n-1}][X_n]$ za $n \geq 2$.

Neka je $\mathcal{J}$ ideal u $\mathcal{A}[X]$. Tada vodeći koeficijenti elemenata od $\mathcal{J}$ tvore ideal $\mathfrak{I}$ u $\mathcal{A}$. Kako je algebra $\mathcal{A}$ Noetherina, ideal $\mathfrak{I}$ je konačno generiran, tj. postoje $a_1, \dots, a_n \in \mathfrak{I}$ takvi da je

$$\mathfrak{I} = \mathcal{A}a_1 + \cdots + \mathcal{A}a_n.$$

Za svaki indeks $i \in \{1, \dots, n\}$ postoje $P_i \in \mathcal{J}$ i $r_i \in \mathbb{Z}_+$ takvi da je

$$P_i = a_iX^{r_i} + \text{polinom stupnja } < r_i.$$

Stavimo $r = \max\{r_1, \dots, r_n\}$. Neka je $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{J}$ ideal u $\mathcal{A}[X]$ generiran polinomima $P_1, \dots, P_n$. Neka je $P \in \mathcal{J} \setminus \{0\}$ proizvoljan. Tada je za neke $a \in \mathfrak{I}$ i $m \in \mathbb{Z}_+$

$$P = aX^m + \text{polinom stupnja } < m.$$

Ako je $m \geq r$, stavimo

$$a = u_1a_1 + \cdots + u_na_n \qquad \text{za neke} \quad u_1, \dots, u_n \in \mathcal{A}.$$

Tada polinom

$$P - u_1P_1X^{m-r_1} - \cdots - u_nP_nX^{m-r_n}$$

leži u $\mathcal{J}$ i stupanj mu je striktno manji od m. Korak po korak doći ćemo do polinoma $Q \in \mathcal{K}$ takvog da je $P - Q \in \mathcal{J}$ i da je stupanj tog polinoma striktno manji od r. Ako sa $\mathcal{A}_{r-1}[X]$ označimo $\mathcal{A}-$podmodul od $\mathcal{A}[X]$ svih polinoma stupnja $\leq r-1$, dokazali smo da je

$$\mathcal{J} = (\mathcal{J} \cap \mathcal{A}_{r-1}[X]) + \mathcal{K}.$$

$\mathcal{A}_{r-1}[X]$ je konačno generiran $\mathcal{A}-$modul pa je po propoziciji 1.4.4. to Noetherin $\mathcal{A}-$modul. Prema tvrdnji (1) propozicije 1.4.2. njegov $\mathcal{A}-$podmodul $\mathcal{J} \cap \mathcal{A}_{r-1}[X]$ također je konačno generiran. Ako su $Q_1, \dots, Q_p \in \mathcal{J} \cap \mathcal{A}_{r-1}[X]$ takvi da je

$$\mathcal{J} \cap \mathcal{A}_{r-1}[X] = \mathcal{A}Q_1 + \cdots + \mathcal{A}Q_p,$$

onda je očito

$$\mathcal{J} = \mathcal{J} \cap \mathcal{A}_{r-1}[X] + \mathcal{K} = \mathcal{A}[X]Q_1 + \cdots + \mathcal{A}[X]Q_p + \mathcal{A}[X]P_1 + \cdots + \mathcal{A}[X]P_n.$$

Time smo dokazali da je svaki ideal u algebri $\mathcal{A}[X]$ konačno generiran, a to prema tvrdnji (1) propozicije 1.4.1. znači da je algebra $\mathcal{A}[X]$ Noetherina.

Druga tvrdnja slijedi iz prve, budući da je svako polje Noetherina algebra. Za treću tvrdnju dovoljno je uočiti da je algebra $S(V)$ izomorfna algebri polinoma $\mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]$ za $n = \dim V$. Doista, ako je $\{e_1, \ldots, e_n\}$ baza od V onda je $P \mapsto P(e_1, \ldots, e_n)$ izomorfizam unitalnih algebri sa $\mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]$ na $S(V)$; naime, to je preslikavanje očito unitalni homomorfizam koji bazu

$$\left\{X_1^{m_1} \cdots X_n^{m_n};\ (m_1, \ldots, m_n) \in \mathbb{Z}_+^n\right\}$$

prostora $\mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]$ prevodi u bazu

$$\left\{e_1^{m_1} \cdots e_n^{m_n};\ (m_1, \ldots, m_n) \in \mathbb{Z}_+^n\right\}$$

prostora $S(V)$.

Teorem 1.4.6. *Neka je $\mathfrak{g}$ konačnodimenzionalna kompleksna Liejeva algebra. Tada je njena univerzalna omotačka algebra $U(\mathfrak{g})$ (i lijevo i desno) Noetherina.*

Dokaz: Za bilo koji potprostor $\mathcal{J}$ od $U(\mathfrak{g})$ stavimo

$$Gr\,\mathcal{J} = \coprod_{j \in \mathbb{Z}_+} (\mathcal{J} \cap U_j(\mathfrak{g}))/(\mathcal{J} \cap U_{j-1}(\mathfrak{g})).$$

Lako se vidi da ako je $\mathcal{J}$ lijevi ideal u algebri $U(\mathfrak{g})$, onda je $Gr\,\mathcal{J}$ ideal u komutativnoj algebri $Gr(\mathfrak{g}) = Gr(U(\mathfrak{g}))$. Algebra $Gr(\mathfrak{g})$ izomorfna je simetričnoj algebri $S(\mathfrak{g})$, pa je po teoremu 1.4.5. ta algebra Noetherina. Dakle, ako je

$$\mathcal{J}_1 \subseteq \mathcal{J}_2 \subseteq \cdots \subseteq \mathcal{J}_k \subseteq \cdots\cdots$$

rastući niz lijevih ideala u algebri $U(\mathfrak{g})$ onda je

$$Gr\,\mathcal{J}_1 \subseteq Gr\,\mathcal{J}_2 \subseteq \cdots \subseteq Gr\,\mathcal{J}_k \subseteq \cdots\cdots$$

rastući niz ideala u algebri $Gr(\mathfrak{g})$, pa postoji $m \in \mathbb{N}$ takav da je $Gr\,\mathcal{J}_k = Gr\,\mathcal{J}_m\ \forall k \geq m$. Odavde i iz definicije ideala $Gr\,\mathcal{J}_j$ slijedi da je $\mathcal{J}_k = \mathcal{J}_m\ \forall k \geq m$. Time smo dokazali da je algebra $U(\mathfrak{g})$ lijevo Noetherina.

Napokon, pomoću antiautomorfizma $u \mapsto u^t$, koji čuva inkluziju i prevodi lijeve ideale u desne ideale, a desne ideale u lijeve ideale, slijedi da je algebra $U(\mathfrak{g})$ i desno Noetherina.

Neka je $\mathcal{A}$ unitalna algebra i V lijevi $\mathcal{A}-$modul. **Normalan niz** u modulu V je svaki padajući konačan niz podmodula

$$\mathcal{V}: \qquad V = V_0 \supseteq V_1 \supseteq \cdots \supseteq V_n = \{0\}. \tag{1.3}$$

Faktori normalnog niza $\mathcal{V}$ su subkvocijentni moduli

$$V_{i-1}/V_i, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Duljina normalnog niza $\mathcal{V}$ je broj striktnih inkluzija u tom nizu, odnosno, broj faktora različitih od $\{0\}$. Taj ćemo broj označavati sa $\ell(\mathcal{V})$. **Profinjenje** normalnog niza $\mathcal{V}$ je normalni niz $\mathcal{W}$ koji se dobije umetanjem konačnog broja podmodula između postojećih. Očito je tada $\ell(\mathcal{W}) \geq \ell(\mathcal{V})$. $\mathcal{W}$ se zove **pravo profinjenje** od $\mathcal{V}$ ako je $\ell(\mathcal{W}) > \ell(\mathcal{V})$. Za dva normalna niza

$$\mathcal{V}: \quad V = V_0 \supseteq V_1 \supseteq \cdots \supseteq V_n = \{0\} \qquad \text{i} \qquad \mathcal{W}: \quad V = W_0 \supseteq W_1 \supseteq \cdots \supseteq W_m = \{0\}$$

kažemo da su **ekvivalentni** ako je $n = m$ i ako postoji permutacija $\tau \in \mathcal{S}_n$ takva da je za svaki $i \in \{1, \ldots, n\}$ modul V_{i-1}/V_i izomorfan modulu $W_{\tau(i)-1}/W_{\tau(i)}$. To posebno znači da su duljine tih dvaju normalnih nizova jednake, $\ell(\mathcal{V}) = \ell(\mathcal{W})$.

Kompozicioni niz modula V je normalan niz $\mathcal{V}$ iz (1.3) takav da su svi moduli V_{i-1}/V_i, $i = 1, \ldots, n$, prosti (posebno, svi su različiti od $\{0\}$, dakle, sve su inkluzije striktne). Posebno, kompozicioni niz nema nijedno pravo profinjenje. Kažemo da je V **modul konačne duljine** ako V ima kompozicioni niz.

Teorem 1.4.7. (**Schreier**) *Svaka dva normalna niza u modulu V imaju profinjenja koja su ekvivalentna. Ako je V modul konačne duljine, svaka dva njegova kompoziciona niza su ekvivalentna.*

Dokaz: Naravno, druga tvrdnja neposredno slijedi iz prve. Za dokaz prve tvrdnje trebaju nam sljedeće dvije leme:

Lema 1.4.8. (**Drugi teorem o izomorfizmu**) *Neka je V $\mathcal{A}-$modul i U i W njegovi podmoduli tada su sljedeći subkvocijentni moduli izomorfni:*

$$(U + W)/W \simeq U/(U \cap W).$$

Dokaz: Izomorfizam je dan sa $(u + w) + W \mapsto u + U \cap W$, $u \in U$, $w \in W$.

Lema 1.4.9. (**Zassenhaus**) *Neka je V $\mathcal{A}-$modul i V_1, V_2, V_1', V_2' njegovi podmoduli takvi da je $V_1' \subseteq V_1$ i $V_2' \subseteq V_2$. Tada su sljedeći subkvocijentni moduli izomorfni:*

$$[V_1 \cap V_2 + V_1']/[V_1 \cap V_2' + V_1'] \simeq [V_1 \cap V_2 + V_2']/[V_1' \cap V_2 + V_2'].$$

Dokaz: Iz leme 1.4.8. slijedi

$$(V_1 \cap V_1)/\{[(V_1 \cap V_2') + V_1'] \cap (V_1 \cap V_2)\} \simeq [V_1 \cap V_2 + V_1 \cap V_2' + V_1']/[V_1 \cap V_2' + V_1'] =$$

$$= [V_1 \cap V_2 + V_1']/[V_1 \cap V_2' + V_1'].$$

Nadalje,

$$[(V_1 \cap V_2') + V_1'] \cap (V_1 \cap V_2) = (V_1 \cap V_2' + V_1') \cap V_2 = V_1 \cap V_2' + V_1' \cap V_2.$$

Dakle, imamo

$$(V_1 \cap V_2)/[V_1 \cap V_2' + V_1' \cap V_2] \simeq [V_1 \cap V_2 + V_1']/[V_1 \cap V_2' + V_1'].$$

Primijetimo sada da je lijeva strana invarijantna u odnosu na zamjenu indeksa 1 i 2. Prema tome, modul s desne strane izomorfan je modulu dobivenom iz njega zamjenom indeksa 1 i 2. No to je upravo tvrdnja leme.

Prijeđimo sada na dokaz Schreierovog teorema. Neka su

$$V = V_0 \supseteq V_1 \supseteq \cdots \supseteq V_n = \{0\} \qquad \text{i} \qquad V = W_0 \supseteq W_1 \supseteq \cdots \supseteq W_m = \{0\}$$

normalni nizovi modula V. Stavimo

$$V_{ij} = V_i \cap W_j + V_{i+1}, \qquad 0 \leq j \leq m, \quad 0 \leq i \leq n-1,$$

$$W_{ji} = V_i \cap W_j + W_{j+1}, \qquad 0 \le i \le n, \quad 0 \le j \le m-1.$$

Budući da je $V_{im} = V_{i+1} = V_{i+1,0}$ i $W_{jn} = W_{j+1} = W_{j+1,0}$ imamo sljedeća profinjenja gornjih normalnih nizova:

$$V = V_{00} \supseteq V_{01} \supseteq \cdots \supseteq V_{0m} \supseteq V_{10} \supseteq V_{11} \supseteq \cdots \supseteq V_{1m} \supseteq \cdots\cdots V_{n-1,0} \supseteq V_{n-1,1} \supseteq \cdots \supseteq V_{n-1,m} = \{0\}$$

i

$$V = W_{00} \supseteq W_{01} \supseteq \cdots \supseteq W_{0n} \supseteq W_{10} \supseteq W_{11} \supseteq \cdots \supseteq W_{1n} \supseteq \cdots\cdots W_{m-1,0} \supseteq W_{m-1,1} \supseteq \cdots \supseteq W_{m-1,n} = \{0\}.$$

Pomoću Zassenhausove leme 1.4.9. dobiva se da vrijedi

$$V_{ij}/V_{i,j+1} \simeq W_{ji}/W_{j,i+1},$$

a to znači da su dva profinjenja ekvivalentna.

Zbog druge tvrdnje u Schreierovom teoremu 1.4.7. (koja se katkada zove **Jordan−Hölderov teorem**) za svaki modul konačne duljine dobro je definirana **duljina modula** V : to je duljina bilo kojeg kompozicionog niza od V. Taj se broj iz $\mathbb{Z}_+$ označava sa $\ell(V)$.

Korolar 1.4.10. *Neka je V modul konačne duljine i $\mathcal{W}$ normalni niz u V. Tada je $\ell(\mathcal{W}) \le \ell(V)$.*

Dokaz: Neka je $n = \ell(V)$ i neka je

$$\mathcal{V}: \qquad V = V_0 \supsetneq V_1 \supsetneq \cdots \supsetneq V_n = \{0\}$$

kompozicioni niz od V. Nadalje, Neka je

$$\mathcal{W}: \qquad V = W_0 \supseteq W_1 \supseteq \cdots \supseteq W_m = \{0\}$$

normalni niz u V. Prema Schreierovom teoremu postoje profinjenje $\mathcal{V}'$ od $\mathcal{V}$ i $\mathcal{W}'$ od $\mathcal{W}$ koja su međusobno ekvivalentna. Kako kompozicioni niz nema pravog profinjenja, vrijedi $\ell(\mathcal{V}') = \ell(\mathcal{V})$. Dakle,

$$\ell(\mathcal{W}) \le \ell(\mathcal{W}') = \ell(\mathcal{V}') = \ell(\mathcal{V}) = \ell(V).$$

Teorem 1.4.11. *$\mathcal{A}-$modul V je konačne duljine ako i samo ako je on i Noetherin i Artinov.*

Dokaz: Pretpostavimo da je V modul konačne duljine i neka je $n = \ell(V)$. Ako modul V nije Noetherin, postoji beskonačan striktno rastući niz podmodula od V

$$\{0\} \subsetneq V_1 \subsetneq V_2 \subsetneq \cdots \subsetneq V_k \subsetneq \cdots\cdots .$$

Tada je

$$V = V_{n+1} \supsetneq V_n \supsetneq V_{n-1} \cdots \supsetneq V_1 \supsetneq V_0 = \{0\}$$

normalan niz u V duljine $n+1$. Slično, ako modul V nije Artinov, onda postoji beskonačan striktno padajući niz podmodula od V

$$V \supsetneq V_1 \supsetneq V_2 \supsetneq \cdots \supsetneq V_k \supsetneq \cdots\cdots$$

i iz njega se također može formirati normalan niz u V duljine $n+1$:

$$V = V_0 \supsetneq V_1 \supsetneq V_2 \supsetneq \cdots \supsetneq V_n \supsetneq V_{n+1} = \{0\}.$$

Dakle, ako modul V nije bilo Noetherin bilo Artinov, u njemu postoji normalni niz duljine $n+1 = \ell(V)+1$. No to je nemoguće zbog korolara 1.4.10. Ova kontradikcija pokazuje da je modul V i Noetherin i Artinov.

Pretpostavimo sada da je modul V i Noetherin i Artinov. Ako je $W \neq \{0\}$ podmodul od V, neka je $\mathcal{S}(W)$ skup svih podmodula U od W takvih da je $U \neq W$. Dakle, podmodul $W \neq \{0\}$ je prost, ako i samo ako je $\mathcal{S}(W) = \{\{0\}\}$. Definiramo još $\mathcal{S}(\{0\}) = \{\{0\}\}$. Budući da je modul V Noetherin, svaki skup $\mathcal{S}(W)$ ima bar jedan maksimalan element W'. Neka je $\mathcal{S}$ skup svih podmodula od V. Definiramo preslikavanje $f : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ sa $f(W) = W'$. Naravno, za to nam treba Zermelov aksiom izbora: za svaki $W \in \mathcal{S}$ izabiremo jedan element W' iz skupa svih maksimalnih elemenata skupa $\mathcal{S}(W)$. Induktivno definiramo niz podmodula $(V_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ ovako:

$$V_0 = V, \qquad V_n = f(V_{n-1}) = V'_{n-1} \quad \text{za} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Tada je

$$V = V_0 \supseteq V_1 \supseteq V_2 \supseteq \cdots\cdots$$

padajući niz podmodula. Kako je modul V Artinov, postoji $m \in \mathbb{N}$ takav da je $V_k = V_m \ \forall k \geq m$. Tada je $V_m = V_{m+1} = V'_m = f(V_m)$. Međutim, po definiciji preslikavanja f za podmodul W je $f(W) = W$ ako i samo ako je $W = \{0\}$. Prema tome je $V_m = \{0\}$. Neka je n najmanji element $\mathbb{Z}_+$ takav da je $V_n = \{0\}$. Tada je $V_k \neq \{0\}$ za svaki $k < n$. Nadalje, za svaki $k < n$ V_{k+1} je maksimalan element skupa svih pravih podmodula od V_k. Prema tome, modul V_k/V_{k+1} je prost. Dakle,

$$V = V_0 \supsetneqq V_1 \supsetneqq \cdots \supsetneqq V_n = \{0\}$$

je kompozicioni niz modula V.

Iz Schreierovog teorema 1.4.7. i iz propozicije 1.4.2. neposredno slijedi

Korolar 1.4.12. *Ako je V modul i U njegov podmodul onda je modul V konačne duljine ako i samo ako su moduli U i V/U konačne duljine.*

Propozicija 1.4.13. *Neka je*

$$\{0\} \longrightarrow V_1 \longrightarrow V_2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow V_n \longrightarrow \{0\}$$

egzaktni niz $\mathcal{A}-$modula konačne duljine. Tada je

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^k \ell(V_k) = 0.$$

Dokaz ćemo provesti indukcijom po n. Za $n = 1$ tvrdnja je trivijalna, jer iz egzaktnosti niza $\{0\} \longrightarrow V_1 \longrightarrow \{0\}$ slijedi da je $V_1 = \{0\}$. I za $n = 2$ tvrdnja je trivijalna, jer egzaktnost niza $\{0\} \longrightarrow V_1 \longrightarrow V_2 \longrightarrow \{0\}$ znači da je $V_1 \simeq V_2$, dakle, $\ell(V_1) = \ell(V_2)$. Neka je sada $n = 2$, tj. imamo kratki egzaktni niz

$$\{0\} \longrightarrow V_1 \longrightarrow V_2 \longrightarrow V_3 \longrightarrow \{0\}.$$

Tada je modul V_1 izomorfan podmodulu U modula $V = 2$, a modul V_3 izomorfan je kvocijentnom modulu V/U. Neka je $n = \ell(V_1) = \ell(U)$, $m = \ell(V_3) = \ell(V/U)$ i označimo sa $\pi : V \to V/U$ kvocijentni epimorfizam. Neka je

$$U = U_0 \supsetneqq U_1 \supsetneqq \cdots \supsetneqq U_n = \{0\}$$

kompozicioni niz od U i neka je

$$V/U = W_0 \supsetneqq W_1 \supsetneqq \cdots W_m = \{0_{V/U}\}$$

kompozicioni niz od V/U. Stavimo $V_j = \pi^{-1}(W_j)$ za $0 \leq j \leq m$ i $V_j = U_{j-m}$ za $m < j \leq m+n$. Tada je očito

$$V = V_0 \supsetneq V_1 \supsetneq \cdots \supsetneq V_m(= U = U_0) \supsetneq V_{m+1} = U_1 \supsetneq \cdots \supsetneq V_{m+n} = U_n = \{0\}$$

kompozicioni niz od V. Prema tome,

$$\ell(V_2) = \ell(V) = n + m = \ell(U) + \ell(V/U) = \ell(V_1) + \ell(V_3) \qquad \Longrightarrow \qquad -\ell(V_1) + \ell(V_2) - \ell(V_3) = 0.$$

Provedimo sada korak indukcije. Neka je $n \geq 4$ i pretpostavimo da je propozicija dokazana za kraće egzaktne nizove. Za egzaktni niz

$$\{0\} \longrightarrow V_1 \longrightarrow V_2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow V_{n-2} \xrightarrow{\alpha} V_{n-1} \xrightarrow{\beta} V_n \longrightarrow \{0\}$$

stavimo $U = \operatorname{Im} \alpha = \operatorname{Ker} \beta$. Sada možemo formirati dva egzaktna niza:

$$\{0\} \longrightarrow V_1 \longrightarrow V_2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow V_{n-2} \xrightarrow{\alpha} U \longrightarrow \{0\}$$

i

$$\{0\} \longrightarrow U \longrightarrow V_{n-1} \xrightarrow{\beta} V_n \longrightarrow \{0\}.$$

Po pretpostavci indukcije imamo

$$\sum_{k=1}^{n-2} (-1)^k \ell(V_k) + (-1)^{n-1} \ell(U) = 0 \qquad \text{i} \qquad \ell(U) = \ell(V_{n-1}) - \ell(V_n).$$

Odatle slijedi

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^k \ell(V_k) = 0.$$

U daljnjem je $\mathcal{A}$ prebrojivo dimenzionalna kompleksna unitalna algebra (npr. $\mathcal{A} = U(\mathfrak{g})$ za kompleksnu konačnodimenzionalnu Liejevu algebru $\mathfrak{g}$). Jedinicu algebre $\mathcal{A}$ označavat ćemo sa 1. Lijeve $\mathcal{A}-$module zvat ćemo kraće $\mathcal{A}-$modulima. Neka je $\mathcal{Z}$ centar algebre $\mathcal{A}$. **Karakter** od $\mathcal{Z}$ je unitalni homomorfizam $\chi : \mathcal{Z} \to \mathbb{C}$. Skup svih karaktera od $\mathcal{Z}$ označavat ćemo sa $\hat{\mathcal{Z}}$. Očito je $\chi \mapsto \operatorname{Ker} \chi$ bijekcija sa skupa $\hat{\mathcal{Z}}$ na skup svih maksimalnih ideala algebre $\mathcal{Z}$. Nadalje, ako je $\chi \in \hat{\mathcal{Z}}$, onda je $\operatorname{Ker} \chi = \{z - \chi(z)1;\ z \in \mathcal{Z}\}$.

Lema 1.4.14. *Skup $\hat{\mathcal{Z}}$ je linearno nezavisan u prostoru $\mathbb{C}^{\mathcal{Z}}$ svih funkcija sa $\mathcal{Z}$ u $\mathbb{C}$.*

Dokaz: Pretpostavimo suprotno i neka je $n \in \mathbb{N}$ najmanji takav da postoje međusobno različiti $\chi_1, \ldots, \chi_n \in \hat{\mathcal{Z}}$ koji su linearno zavisni. Tada je očito $n \geq 2$. Štoviše, $n \geq 3$, jer ako su $\varphi, \psi \in \hat{\mathcal{Z}}$ proporcionalni, onda su jednaki, jer je $\varphi(1) = 1 = \psi(1)$. Neka su $\chi_1, \ldots, \chi_n \in \hat{\mathcal{Z}}$ različiti i linearno zavisni onda je za neke $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$

$$\lambda_1 \chi_1(u) + \lambda_2 \chi_2(u) + \cdots + \lambda_n \chi_n(u) = 0 \qquad \forall u \in \mathcal{Z}. \tag{1.4}$$

Budući da su χ_1 i χ_2 neproporcionalni linearni funkcionali na $\mathcal{Z}$ različiti od nule, skup

$$\mathcal{Z} \setminus (\operatorname{Ker} \chi_1 \cup \operatorname{Ker} \chi_2)$$

razapinje čitav prostor $\mathcal{Z}$. Prema tome, postoji $z \in \mathcal{Z}$ takav da je $0 \neq \chi_1(z) \neq \chi_2(z) \neq 0$. Sada iz (1.4) slijedi

$$\lambda_1 \chi_1(zu) + \lambda_2 \chi_2(zu) + \cdots + \lambda_n \chi_n(zu) = 0 \qquad \forall u \in \mathcal{Z},$$

odnosno, kako su χ_j karakteri,

$$\lambda_1\chi_1(z)\chi_1(u) + \lambda_2\chi_2(z)\chi_2(u) + \cdots + \lambda_n\chi_n(z)\chi_n(u) = 0 \qquad \forall u \in \mathcal{Z}.$$

Množenjem (1.4) sa $\chi_1(z)$ i oduzimanjem od gornje jednakosti dobivamo

$$\lambda_2(\chi_2(z) - \chi_1(z))\chi_2(u) + \cdots + \lambda_n(\chi_n(z) - \chi_1(z))\chi_n(u) = 0 \qquad \forall u \in \mathcal{Z}.$$

No to je nemoguće, jer su po izboru n karakteri $\chi_2, \ldots, \chi_n$ linearno nezavisni i jer je prvi koeficijent $\lambda_2(\chi_2(z)-\chi_1(z))$ u gornjoj linearnoj kombinaciji različit od nule. Ova kontradikcija dokazuje lemu.

Za $\mathcal{A}-$modul V i za $\chi \in \hat{\mathcal{Z}}$ definiramo

$$V_\chi = \{v \in V;\ zv = \chi(z)v\ \ \forall z \in \mathcal{Z}\} = \{v \in V;\ uv = 0\ \ \forall u \in \operatorname{Ker}\chi\}.$$

Općenitije, stavimo za svaki $k \in \mathbb{N}$

$$V_\chi^{(k)} = \{v \in V;\ u^k v = 0\ \ \forall u \in \operatorname{Ker}\chi\}.$$

Lema 1.4.15. *Uz oznaku $V_\chi^{(0)} = \{0\}$ za svaki $k \in \mathbb{N}$ vrijedi*

$$V_\chi^{(k)} = \{v \in V;\ u_1 \cdots u_k v = 0\ \ \forall u_1, \ldots, u_k \in \operatorname{Ker}\chi\} = \{v \in V;\ uv \in V_\chi^{(k-1)}\ \ \forall u \in \operatorname{Ker}\chi\}.$$

Dokaz: Druga jednakost slijedi neposredno iz prve. Za dokaz prve označimo

$$U = \{v \in V;\ u_1 \cdots u_k v = 0\ \ \forall u_1, \ldots, u_k \in \operatorname{Ker}\chi\}.$$

Očito je $U \subseteq V_\chi^{(k)}$. Neka je $v \in V_\chi^{(k)}$. Tada za proizvoljno fiksirane $u_1, \ldots, u_k \in \operatorname{Ker}\chi$ i za proizvoljne $t_1, \ldots, t_k \in \mathbb{C}$ vrijedi

$$0 = (t_1u_1 + \cdots + t_ku_k)^k v = \sum_{\substack{j_1,\ldots,j_k \in \mathbb{Z}_+ \\ j_1+\cdots+j_k=k}} \frac{k!}{j_1! \cdots j_k!} t_1^{j_1} \cdots t_k^{j_k} u_1^{j_1} \cdots u_k^{j_k} v.$$

Desna strana je sadržana u konačnodimenzionalnom potprostoru

$$V_0 = span\,\{u_1^{j_1} \cdots u_k^{j_k} v;\ j_1, \ldots, j_k \in \mathbb{Z}_+,\ ju_1 + \cdots + j_k = k\}$$

od V i to je polinomijalna funkcija sa $\mathbb{C}^k$ u V_0. Budući da je ta funkcija identički jednaka 0, svi njeni koeficijenti su jednaki 0. To znači da je

$$u_1^{j_1} \cdots u_k^{j_k} v = 0 \qquad \forall j_1, \ldots, j_k \in \mathbb{Z}_+ \quad \text{t.d.} \quad j_1 + \cdots + j_k = k.$$

Posebno to vrijedi za $j_1 = \cdots = j_k = 1$, dakle, $u_1 \cdots u_k v = 0$. Kako su $u_1, \ldots, u_k \in \operatorname{Ker}\chi$ bili proizvoljno fiksirani, slijedi da je $v \in U$, odnosno, dobivamo i obrnutu inkluziju $V_\chi^{(k)} \subseteq U$.

Uočimo sada da su svi potprostori $V_\chi^{(k)}$ $\mathcal{A}-$podmoduli od V. Nadalje, za dani karakter $\chi \in \hat{\mathcal{Z}}$ radi se o rastućem nizu $\mathcal{A}-$podmodula

$$V_\chi = V_\chi^{(1)} \subseteq V_\chi^{(2)} \subseteq \cdots \subseteq V_\chi^{(k)} \subseteq \cdots\cdots$$

Naravno, ako je $\mathcal{A}-$modul V Noetherin, postoji $m \in \mathbb{N}$ takav da je $V_\chi^{(k)} = V_\chi^{(m)}$ $\forall k \geq m$. Općenito stavimo

$$V_{(\chi)} = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} V_\chi^{(k)} = \{v \in V;\ \exists k \in \mathbb{N},\ u^k v = 0\ \forall u \in \operatorname{Ker}\chi\} =$$

$$= \{v \in V;\ \exists k \in \mathbb{N},\ u_1 \cdots u_k v = 0\ \forall u_1, \ldots, u_k \in \operatorname{Ker}\chi\}.$$

Propozicija 1.4.16. *Suma podmodula $V_{(\chi)}$, $\chi \in \hat{\mathcal{Z}}$, $\mathcal{A}-$modula V je direktna.*

Dokaz: Neka su $\chi_1, \dots, \chi_n \in \hat{\mathcal{Z}}$ međusobno različiti karakteri takvi da je $V_{(\chi_j)} \neq \{0\}$ za $j = 1, \dots, n$ i neka su $v_j \in V_{(\chi_j)} \setminus \{0\}$. Treba dokazati da su vektori $v_1, \dots, v_n$ linearno nezavisni. Neka je $m \in \mathbb{N}$ takav da je $u^m v_j = 0$ $\forall u \in \operatorname{Ker}\chi$ i za $j = 1, \dots, n$. Budući da su $\chi_1, \dots, \chi_n$ međusobno različiti linearni funkcionali na prostoru $\mathcal{Z}$, sve razlike $\chi_i - \chi_j$, $i \neq j$, su linearni funkcionali raličiti od nule. Svaki od potprostora $\operatorname{Ker}(\chi_i - \chi_j)$ je kodimenzije 1 u prostoru $\mathcal{Z}$. Stoga unija tih potprostora nije jednaka cijelom prostoru $\mathcal{Z}$. Neka je

$$z \in \mathcal{Z} \setminus \bigcup_{i \neq j} \operatorname{Ker}(\chi_i - \chi_j).$$

Tada su brojevi $\lambda_j = \chi_j(z)$, $j = 1, \dots, n$, međusobno različiti i vrijedi

$$(z - \lambda_j)^m v_j = 0 \qquad \text{za} \quad j = 1, \dots, n.$$

Odatle slijedi da su potprostori $V_j = \mathit{span}\,\{v_j, zv_j, z^2 v_j, \dots, z^{m-1} v_j\}$ invarijantni s obzirom na djelovanje z. Stoga je njihova suma

$$V_0 = V_1 + \cdots + V_n$$

$z-$invarijantan konačnodimenzionalan potprostor od V. Djelovanje z definira linearan operator $A \in L(V_0)$. Tada za svaki $j \in \{1, \dots, n\}$ vrijedi $(A - \lambda_j I_{V_0})^m v_j = 0$. Prema tome, $v_1, \dots, v_n$ su korijenski vektori operatora A za različite svojstvene vrijednosti. No tada iz linearne algebre znamo da su vektori $v_1, \dots, v_n$ linearno nezavisni.

Neka je V i dalje $\mathcal{A}-$modul. Za **vektor** $v \in V$ kažemo da je $\mathcal{Z}-$**konačan**, ako je potprostor $\mathcal{Z}v = \{zv;\ z \in \mathcal{Z}\}$ konačnodimenzionalan, odnosno, ako je ideal $Ann_{\mathcal{Z}}(v) = \{z \in \mathcal{Z};\ zv = 0\}$ u $\mathcal{Z}$ konačne kodimenzije. Skup svih $\mathcal{Z}-$konačnih vektora $\mathcal{A}-$modula V označavat ćemo sa V_f. To je potprostor vektorskog prostora V. Nadalje, kako je $\mathcal{Z}$ centar algebre $\mathcal{A}$, za $u \in \mathcal{A}$ i $v \in V_f$ preslikavanje $w \mapsto uw$, $w \in \mathcal{Z}v$, je linearna surjekcija sa $\mathcal{Z}v$ na $\mathcal{Z}uv$. Prema tome je $uv \in V_f$ za svaki $u \in \mathcal{A}$ i svaki $v \in V_f$. Dakle, V_f je podmodul $\mathcal{A}-$modula V.

Teorem 1.4.17. *Neka je $\mathcal{A}$ unitalna algebra i pretpostavimo da njen centar $\mathcal{Z}$ ima svojstvo da je za svaki $\chi \in \hat{\mathcal{Z}}$ i svaki $k \in \mathbb{N}$ ideal $(\operatorname{Ker}\chi)^k$ u $\mathcal{Z}$ konačne kodimenzije. Tada za svaki $\mathcal{A}-$modul V vrijedi*

$$V_f = \sum_{\chi \in \hat{\mathcal{Z}}} V_{(\chi)}.$$

Dokaz: Neka je $v \in V_{(\chi)}$. Tada je $v \in V_\chi^{(k)}$ za neki $k \in \mathbb{N}$, dakle, vrijedi $u_1 \cdots u_k v = 0$ $\forall u_1, \dots, u_k \in \operatorname{Ker}\chi$, tj. $(\operatorname{Ker}\chi)^k v = \{0\}$. Drugim riječima, preslikavanje $z \mapsto zv$ sa $\mathcal{Z}$ na $\mathcal{Z}v$ u svojoj jezgri sadrži $(\operatorname{Ker}\chi)^k$. Kako je po pretpostavci potprostor $(\operatorname{Ker}\chi)^k$ konačne kodimenzije u $\mathcal{Z}$, zaključujemo da je potprostor $\mathcal{Z}v$ konačnodimenzionalan, odnosno, $v \in V_f$. To pokazuje da je $V_{(\chi)} \subseteq V_f$ za svaki $\chi \in \hat{\mathcal{Z}}$. Dakle, dokazali smo inkluziju

$$\sum_{\chi \in \hat{\mathcal{Z}}} V_{(\chi)} \subseteq V_f.$$

Dokažimo sada obrnutu inkluziju. Neka je $v \in V_f$. Tada je potprostor $W = \mathcal{Z}v$ konačnodimenzionalan i to je $\mathcal{Z}-$podmodul od V. Budući da je algebra $\mathcal{Z}$ komutativna, postoji baza $\{w_1, \dots, w_n\}$ od W u odnosu na koju svi operatori djelovanja $z \in \mathcal{Z}$ imaju gornje trokutastu matricu. Neka su redom $\chi_1(z), \ldots, \chi_n(z)$ dijagonalni elementi te matrice. Tada su očito $\chi_1, \ldots, \chi_n \in \hat{\mathcal{Z}}$. Nadalje, za svaki $z \in \mathcal{Z}$ element $(z - \chi_1(z)) \cdots (z - \chi_n(z))$ djeluje nilpotentno na W. Promatranjem konačnodimenzionalne algebre $\mathcal{Z}/Ann_{\mathcal{Z}}(v)$, gdje je $Ann_{\mathcal{Z}}(v) = \{z \in \mathcal{Z};\ zv = 0\}$, i njenog djelovanja kao algebre operatora na konačnodimenzionalnom vektorskom prostoru, lako se vidi da vrijedi

$$W \subseteq \sum_{j=1}^{n} V_{(\chi_j)}.$$

Kako je $v \in W$ i kako je $v \in V_f$ bio proizvoljan, dobivamo željenu obrnutu inkluziju

$$V_f \subseteq \sum_{\chi \in \hat{\mathcal{Z}}} V_{(\chi)}.$$

Time je teorem dokazan.

Uvjet teorema 1.4.17. ispunjen je ako je $\mathcal{Z}$ Noetherina algebra:

Propozicija 1.4.18. *Neka je $\mathcal{Z}$ komutativna Noetherina algebra. Tada je za svaki $\chi \in \hat{\mathcal{Z}}$ i svaki $k \in \mathbb{N}$ ideal $(\operatorname{Ker}\chi)^k$ konačne kodimenzije u $\mathcal{Z}$.*

Dokaz: Za $k = 1$ tvrdnja je trivijalna jer je ideal $\operatorname{Ker}\chi$ kodimenzije 1 u $\mathcal{Z}$. Pretpostavimo da je za neki $k \geq 2$ ideal $(\operatorname{Ker}\chi)^k$ beskonačne kodimenzije u $\mathcal{Z}$ i neka je k najmanji takav. Tada je $(\operatorname{Ker}\chi)^k$ potprostor od $(\operatorname{Ker}\chi)^{k-1}$ beskonačne kodimenzije. Primijetimo da je svaki potprostor $\mathcal{S}$ od $(\operatorname{Ker}\chi)^{k-1}$ koji sadrži $(\operatorname{Ker}\chi)^k$ ideal u $\mathcal{Z}$. Doista, vrijedi $\mathcal{Z} = (\operatorname{Ker}\chi) \dot{+} \mathbb{C}$, pa je svaki $z \in \mathcal{Z}$ oblika $z = u + \lambda$ za neki $u \in \operatorname{Ker}\chi$ i neki $\lambda \in \mathbb{C}$. Stoga za $s \in \mathcal{S} \subseteq \operatorname{Ker}\chi$ imamo

$$zs = us + \lambda s \in (\operatorname{Ker}\chi)^k + \mathcal{S} = \mathcal{S}.$$

Zbog toga postoji striktno rastući niz ideala u $\mathcal{Z}$:

$$(\operatorname{Ker}\chi)^k = \mathcal{J}_0 \subsetneq \mathcal{J}_1 \subsetneq \mathcal{J}_2 \subsetneq \cdots\cdots$$

a to je nemoguće zbog toga što je po pretpostavci algebra $\mathcal{Z}$ Noetherina. Ova kontradikcija dokazuje tvrdnju propozicije.

Primijetimo još da je zbog Hilbertovog teorema o bazi svaka konačno generirana komutativna unitalna algebra $\mathcal{Z}$ Noetherina. Doista, ako konačan skup $\{z_1, \ldots, z_n\}$ generira unitalnu algebru $\mathcal{Z}$, onda je $P \mapsto P(z_1, \ldots, z_n)$ epimorfizam algebre polinoma $\mathbb{C}[T_1, \ldots, T_n]$ na algebru $\mathcal{Z}$. Dakle, algebra $\mathcal{Z}$ izomorfna je kvocijentnoj algebri Noetherine algebre $\mathbb{C}[T_1, \ldots, T_n]$ i kao takva je prema propoziciji 1.4.2. Noetherina.

U daljnjem promatramo unitalnu algebru $\mathcal{A}$ čiji centar $\mathcal{Z}$ ima svojstvo iz teorema 1.4.17. Označimo sa $Mod_f(\mathcal{A})$ kategoriju svih $\mathcal{A}-$modula V takvih da je $V = V_f$, odnosno, da je

$$V = \sum_{\chi \in \hat{\mathcal{Z}}} V_{(\chi)}.$$

Podsjetimo se da je gornja suma direktna. Za $\mathcal{A}-$modul V kažemo da je **modul s centralnim karakterom** χ ako je $V = V_\chi$, a da je **modul s generaliziranim centralnim karakterom** χ ako je $V = V_{(\chi)}$. U slučaju kad je $\mathcal{A} = U(\mathfrak{g})$, umjesto naziva **centralni karakter** obično se upotrebljava naziv **infinitezimalni karakter**. Prema Schurovoj lemi (teorem 1.1.6.) zbog prebrojive dimenzionalnosti algebre $\mathcal{A}$ zaključujemo da je svaki prost $\mathcal{A}-$modul modul s centralnim karakterom. Označimo sa $Mod_\chi(\mathcal{A})$ kategoriju $\mathcal{A}-$modula s centralnim karakterom χ i sa $Mod_{(\chi)}(\mathcal{A})$ kategoriju $\mathcal{A}-$modula s generaliziranim centralnim karakterom χ. Ako je $\varphi : V \to W$ homomorfizam $\mathcal{A}-$modula, onda za $k \in \mathbb{N}$, $v \in V_\chi^{(k)}$ i $u \in \operatorname{Ker}\chi$ imamo $u^k\varphi(v) = \varphi(u^k v) = 0$. To pokazuje da je $\varphi(V_\chi^{(k)}) \subseteq W_\chi^{(k)}$. Odatle slijede inkluzije $\varphi(V_\chi) \subseteq W_\chi$ i $\varphi(V_{(\chi)}) \subseteq W_{(\chi)}$.

Za homomorfizam $\mathcal{A}-$modula $\varphi : V \to W$ stavimo

$$\varphi_\chi = \varphi|V_\chi \in Hom_\mathcal{A}(V_\chi, W_\chi), \qquad \varphi_{(\chi)} = \varphi|V_{(\chi)} \in Hom_\mathcal{A}(V_{(\chi)}, W_{(\chi)}), \qquad \chi \in \hat{\mathcal{Z}}.$$

Očito je $(\varphi \circ \psi)_\chi = \varphi_\chi \circ \psi_\chi$ i $(\varphi \circ \psi)_{(\chi)} = \varphi_{(\chi)} \circ \psi_{(\chi)}$. Prema tome, $V \mapsto V_\chi$, $\varphi \mapsto \varphi_\chi$ je kovarijantan funktor s kategorije $Mod_f(\mathcal{A})$ u kategoriju $Mod_\chi(\mathcal{A})$, a $V \mapsto V_{(\chi)}$, $\varphi \mapsto \varphi_{(\chi)}$ je kovarijantan funktor sa $Mod_f(\mathcal{A})$ u $Mod_{(\chi)}(\mathcal{A})$.

Propozicija 1.4.19. *Funktor $V \mapsto V_{(\chi)}$, $\varphi \mapsto \varphi_{(\chi)}$ sa kategorije $Mod_f(\mathcal{A})$ u kategoriju $Mod_{(\chi)}(\mathcal{A})$ je egzaktan: ako su U, V, W moduli u kategoriji $Mod_f(\mathcal{A})$ i ako su $\varphi \in Hom_\mathcal{A}(U, V)$ i $\psi \in Hom_\mathcal{A}(V, W)$ takvi da je $\operatorname{Im}\varphi = \operatorname{Ker}\psi$, tada vrijedi i $\operatorname{Im}\varphi_{(\chi)} = \operatorname{Ker}\psi_{(\chi)}$. Posebno, ako je*

$$\{0\} \longrightarrow U \xrightarrow{\varphi} V \xrightarrow{\psi} W \longrightarrow \{0\}$$

kratki egzaktni niz u kategoriji $Mod_f(\mathcal{A})$ tada je i niz

$$\{0\} \longrightarrow U_{(\chi)} \xrightarrow{\varphi_{(\chi)}} V_{(\chi)} \xrightarrow{\psi_{(\chi)}} W_{(\chi)} \longrightarrow \{0\}$$

u kategoriji $Mod_{(\chi)}(\mathcal{A})$ također egzaktan.

Dokaz: Vrijedi $\psi_{(\chi)} \circ \varphi_{(\chi)} = (\psi \circ \varphi)_{(\chi)} = 0$, dakle, $\operatorname{Im}\varphi_{(\chi)} \subseteq \operatorname{Ker}\psi_{(\chi)}$. Neka je sada $v \in \operatorname{Ker}\psi_{(\chi)}$. Dakle, $v \in V_{(\chi)} \cap \operatorname{Ker}\psi$. Kako je $\operatorname{Ker}\psi = \operatorname{Im}\varphi$, postoji $u \in U$ takav da je $v = \varphi(u)$. Budući da je

$$U = U_f = \sum_{\omega \in \hat{\mathcal{Z}}} U_{(\omega)},$$

postoje $\omega_1, \ldots, \omega_n \in \hat{\mathcal{Z}}$ i $u_j \in U_{(\omega_j)}$, $j = 1, \ldots, n$, takvi da je $u = u_1 + \cdots + u_n$. Vrijedi $\varphi(U_{(\omega)}) \subseteq V_{(\omega)}$ i suma podmodula $V_{(\omega)}$, $\omega \in \hat{\mathcal{Z}}$, je direktna, pa slijedi da je $\varphi(u_j) = 0$ ako je $\omega_j \neq \chi$. Prema tome, postoji $j \in \{1, \ldots, n\}$ takav da je $\omega_j = \chi$ i tada je $\varphi(u_j) = v$, dakle, $\varphi_{(\chi)}(u_j) = v$. To pokazuje da je $v \in \operatorname{Im}\varphi_{(\chi)}$. Time je dokazana i obrnuta inkluzija $\operatorname{Ker}\psi_{(\chi)} \subseteq \operatorname{Im}\varphi_{(\chi)}$, dakle, jednakost $\operatorname{Ker}\psi_{(\chi)} = \operatorname{Im}\varphi_{(\chi)}$.

Napomenimo još da funktor $V \mapsto V_\chi$, $\varphi \mapsto \varphi_\chi$, sa kategorije $Mod_f(\mathcal{A})$ u kategoriju $Mod_\chi(\mathcal{A})$ općenito nije egzaktan. Naime, ako je V $\mathcal{A}-$modul s generaliziranim centralnim karakterom χ takav da je $V = V_\chi^{(2)} \neq V_\chi$, tada je niz

$$\{0\} \longrightarrow V_\chi \longrightarrow V \longrightarrow V/V_\chi \longrightarrow \{0\}$$

u kategoriji $Mod_f(\mathcal{A})$ egzaktan, ali odgovarajući niz u kategoriji $Mod_\chi(\mathcal{A})$

$$\{0\} \longrightarrow V_\chi \longrightarrow V_\chi \longrightarrow (V/V_\chi)_\chi \longrightarrow \{0\}$$

nije egzaktan, jer je $(V/V_\chi)_\chi = V/V_\chi \neq \{0\}$.

Ovaj ćemo odjeljak završiti s jednom važnom konstrukcijom modula polazeći od modula nad unitalnom podalgebrom.

Teorem 1.4.20. *Neka je $\mathcal{A}$ unitalna algebra, $\mathcal{B}$ njena unitalna podalgebra i W lijevi $\mathcal{B}-$modul.*

(a) *Postoji jedinstvena struktura $\mathcal{A}-$modula na prostoru $V = \mathcal{A} \otimes W$ takva da je*

$$a(x \otimes w) = ax \otimes w \qquad \forall a, x \in \mathcal{A} \text{ i } \forall w \in W.$$

(b) *Neka je $V_\mathcal{B}$ podmodul $\mathcal{A}-$modula V iz (a) generiran skupom $\{b \otimes w - 1 \otimes bw;\ b \in \mathcal{B},\ w \in W\}$ i neka je*

$$\mathcal{A} \otimes_\mathcal{B} W = V/V_\mathcal{B}$$

kvocijentni $\mathcal{A}-$modul. Klasu elementa $x \otimes w$, $x \in \mathcal{A}$, $w \in W$, u kvocijentnom modulu $V/V_\mathcal{A} = \mathcal{A} \otimes_\mathcal{B} W$ označavamo sa $x \otimes_\mathcal{B} w$. Za svaki $\mathcal{A}-$modul U postoji jedinstveno linearno preslikavanje $T \mapsto \hat{T}$ sa $Hom_\mathcal{B}(W, U)$ u $Hom_\mathcal{A}(\mathcal{A} \otimes_\mathcal{B} W, U)$ takav da je $\hat{T}(1 \otimes_\mathcal{B} w) = Tw$ $\forall T \in Hom_\mathcal{B}(W, U)$ i $\forall w \in W$. Preslikavanje $T \mapsto \hat{T}$ je izomorfizam vektorskog prostora $Hom_\mathcal{B}(W, U)$ na vektorski prostor $Hom_\mathcal{A}(\mathcal{A} \otimes_\mathcal{B} W, U)$.

(c) *Ako je V $\mathcal{A}-$modul, vrijedi $\mathcal{A} \otimes_\mathcal{A} V \simeq V$.*

(d) *Ako je $\mathcal{C}$ unitalna podalgebra od $\mathcal{B}$ i ako je U $\mathcal{C}-$modul, onda je $\mathcal{A}-$modul $\mathcal{A} \otimes_\mathcal{C} U$ izomorfan $\mathcal{A}-$modulu $\mathcal{A} \otimes_\mathcal{B} (\mathcal{B} \otimes_\mathcal{C} U)$.*

Dokaz: (a) Fiksirajmo $a \in \mathcal{A}$. Tada je $(x, w) \mapsto ax \otimes w$ bilinearno preslikavanje sa $\mathcal{A} \times W$ u $\mathcal{A} \otimes W$. Prema univerzalnom svojstvu tenzorskog produkta vektorskih prostora postoji jedinstven linearan operator

$$A_a : \mathcal{A} \otimes W \to \mathcal{A} \otimes W \qquad \text{takav da je} \quad A_a(x \otimes w) = ax \otimes w \ \forall x \in \mathcal{A} \text{ i } \forall w \in W.$$

Treba dokazati dsa je sa

$$au = A_a u, \qquad a \in \mathcal{A}, \quad u \in \mathcal{A} \otimes W,$$

definirana struktura $\mathcal{A}-$modula na prostoru $\mathcal{A} \otimes W$. Budući da je A_a za $a \in \mathcal{A}$ linearan operator, preslikavanje $(a, u) \mapsto au$ je linearno u drugom argumentu:

$$a(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2) = A_a(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2) = \alpha_1 A_a u_1 + \alpha_2 A_a u_2 = \alpha_1 a u_1 + \alpha_2 a u_2.$$

Preslikavanje $(a, u) \mapsto au$ linearno je i u prvom argumentu. Doista, ako su $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$, $a_1, a_2, x \in \mathcal{A}$ i $w \in W$, imamo

$$(\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2)(x \otimes w) = A_{\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2}(x \otimes w) = (\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2)x \otimes w =$$

$$= \alpha_1(a_1 x \otimes w) + \alpha_2(a_2 x \otimes w) = \alpha_1 A_{a_1}(x \otimes w) + \alpha_2 A_{a_2}(x \otimes w) = \alpha_1 a_1(x \otimes w) + \alpha_2 a_2(x \otimes w).$$

Budući da vektori oblika $x \otimes w$, $x \in \mathcal{A}$, $w \in W$, razapinju vektorski prostor $\mathcal{A} \otimes W$, slijedi iskazana linearnost preslikavanja $(a, u) \mapsto au$ u prvom argumentu:

$$(\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2)u = \alpha_1 a_1 u + \alpha_2 a_2 u, \qquad \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}, \quad a_1, a_2 \in \mathcal{A}, \quad u \in \mathcal{A} \otimes W.$$

Dokažimo sada kvaziasocijativnost djelovanja $\mathcal{A}$ na prostoru $\mathcal{A} \otimes W$. Neka su $a, b, x \in \mathcal{A}$ i $w \in W$. Tada imamo

$$(ab)(x \otimes w) = A_{ab}(x \otimes w) = abx \otimes w = A_a(bx \otimes w) = A_a A_b(x \otimes w) = a(b(x \otimes w)).$$

Vektori $x \otimes w$ razapinju prostor $\mathcal{A} \otimes W$, pa slijedi kvaziasocijativnost:

$$(ab)u = a(bu), \qquad a, b \in \mathcal{A}, \quad u \in \mathcal{A} \otimes W.$$

Napokon, očito za $x \in \mathcal{A}$ i $w \in W$ vrijedi

$$1(x \otimes w) = A_1(x \otimes w) = x \otimes w,$$

pa imamo i

$$1u = u \qquad \forall u \in \mathcal{A} \otimes W.$$

Time je tvrdnja (a) dokazana.

(b) Neka je U $\mathcal{A}-$modul i neka je $\mathcal{A} \otimes_{\mathcal{B}} W$ kvocijentni modul $\mathcal{A}-$modula $V = \mathcal{A} \otimes W$ iz (a) po $\mathcal{A}-$podmodulu $V_{\mathcal{B}}$ generiranom skupom $\{b \otimes w - 1 \otimes bw;\ b \in \mathcal{B},\ w \in W\}$. Nadalje, neka je $T \in Hom_{\mathcal{B}}(W, U)$, tj. $T : W \to U$ je linearan operator takav da je $T(bw) = bTw\ \ \forall b \in \mathcal{B}$ i $\forall w \in W$. Definiramo preslikavanje $\check{T} : \mathcal{A} \times W \to U$ sa

$$\check{T}(x, w) = xTw, \qquad x \in \mathcal{A}, \quad w \in W.$$

To je preslikavanje očito bilinearno, pa postoji jedinstven linearan operator $\tilde{T} : \mathcal{A} \otimes W \to U$ takav da je

$$\tilde{T}(x \otimes w) = xTw \qquad \forall x \in \mathcal{A} \quad \text{i} \quad \forall w \in W.$$

Tada je $\tilde{T}$ homomorfizam $\mathcal{A}-$modula. Doista, ako su $a, x \in \mathcal{A}$ i $w \in W$, tada je

$$\tilde{T}(a(x \otimes w)) = \tilde{T}(ax \otimes w) = (ax)Tw = a(xTw) = a\tilde{T}(x \otimes w).$$

Budući da vektori oblika $x \otimes w$, $x \in \mathcal{A}$, $w \in W$, razapinju prostor $V = \mathcal{A} \otimes W$, slijedi

$$\tilde{T}av = a\tilde{T}v \qquad \forall a \in \mathcal{A} \quad \text{i} \quad \forall v \in V.$$

Time je dokazano da je $\tilde{T} \in Hom_{\mathcal{A}}(V, U)$. Sada za $b \in \mathcal{B}$ i $w \in W$ imamo

$$\tilde{T}(b \otimes w - 1 \otimes bw) = bTw - Tbw = 0$$

budući da je $T \in Hom_{\mathcal{B}}(W, U)$. Prema tome, $\mathcal{A}-$podmodul $V_{\mathcal{B}}$ generiran vektorima oblika $b \otimes w - 1 \otimes bw$ sadržan je u jezgri operatora $\tilde{T}$. Prijelazom na kvocijent dolazimo do preplitanja $\hat{T} \in Hom_{\mathcal{A}}(\mathcal{A} \otimes_{\mathcal{B}} W, U)$:

$$\hat{T}(v + V_{\mathcal{B}}) = \tilde{T}v, \qquad v \in V = \mathcal{A} \otimes W.$$

Sada za $x \in \mathcal{A}$ i $w \in W$ imamo

$$\hat{T}(x \otimes_{\mathcal{B}} w) = \hat{T}(x \otimes w + V_{\mathcal{B}}) = \tilde{T}(x \otimes w) = xTw.$$

Posebno, vrijedi $\hat{T}(1 \otimes_{\mathcal{B}} w) = Tw\ \ \forall w \in W$. Time je dokazana egzistencija $\hat{T}$. Jedinstvenost slijedi iz očigledne činjenice da skup $\{1 \otimes_{\mathcal{B}} w;\ w \in W\}$ generira $\mathcal{A}-$modul $V = \mathcal{A} \otimes_{\mathcal{B}} W$.

Budući da je preslikavanje $T \mapsto xTw$ sa $Hom_{\mathcal{B}}(W, U)$ u U linearno za bilo koje $x \in \mathcal{A}$ i $w \in W$, očito je preslikavanje $T \mapsto \tilde{T}$ sa $Hom_{\mathcal{B}}(W, U)$ u $Hom_{\mathcal{A}}(V, U)$ linearno. Odatle slijedi linearnost preslikavanja $T \mapsto \hat{T}$ sa $Hom_{\mathcal{B}}(W, U)$ u $Hom_{\mathcal{A}}(\mathcal{A} \otimes_{\mathcal{B}} W, U)$.

Konstruirat ćemo sada inverzno preslikavanje $Hom_{\mathcal{A}}(\mathcal{A} \otimes_{\mathcal{B}} W, U) \to Hom_{\mathcal{B}}(W, U)$. Ako je $S \in Hom_{\mathcal{A}}(\mathcal{A} \otimes_{\mathcal{B}} W, U)$ definiramo operator $\check{S} : W \to U$ sa

$$\check{S}w = S(1 \otimes_{\mathcal{B}} w), \qquad w \in W.$$

Operator $\check{S}$ je očito linearan. Nadalje, kako je S preplitanje $\mathcal{A}-$modula i kako za $b \in \mathcal{B}$ i $w \in W$ u modulu $\mathcal{A} \otimes_{\mathcal{B}} W$ vrijedi $1 \otimes_{\mathcal{B}} bw = b \otimes_{\mathcal{B}} w$, imamo

$$\check{S}bw = S(1 \otimes_{\mathcal{B}} bw) = S(b \otimes_{\mathcal{B}} w) = S(b(1 \otimes_{\mathcal{B}} w)) = bS(1 \otimes_{\mathcal{B}} w) = b\check{S}w.$$

To pokazuje da je $\check{S} \in Hom_{\mathcal{B}}(W,U)$. Nadalje, preslikavanje $S \mapsto \check{S}$ je očito linearno. To je preslikavanje inverzno preslikavanju $T \mapsto \hat{T}$. Doista, za $T \in Hom_{\mathcal{B}}(W,U)$ i za $w \in W$ imamo

$$\check{\hat{T}}w = \hat{T}(1 \otimes_{\mathcal{B}} w) = Tw,$$

dakle, $\check{\hat{T}} = T$. Također, za $S \in Hom_{\mathcal{A}}(\mathcal{A} \otimes_{\mathcal{B}} W, U)$ i $w \in W$ imamo

$$\hat{\check{S}}(1 \otimes_{\mathcal{B}} w) = \check{S}w = S(1 \otimes_{\mathcal{B}} w).$$

Budući da vektori oblika $1 \otimes_{\mathcal{B}} w$, $w \in W$, generiraju $\mathcal{A}-$modul $\mathcal{A} \otimes_{\mathcal{B}} W$, zaključujemo da vrijedi $\hat{\check{S}} = S$.

Time smo dokazali da je preslikavanje $S \mapsto \check{S}$ inverzno preslikavanju $T \mapsto \hat{T}$. Dakle, $T \mapsto \hat{T}$ je izomorfizam prostora $Hom_{\mathcal{B}}(W,U)$ na prostor $Hom_{\mathcal{A}}(\mathcal{A} \otimes_{\mathcal{B}} W, U)$.

(c) Lako se vidi da je $v \mapsto 1 \otimes_{\mathcal{A}} v$ izomorfizam $\mathcal{A}-$modula V na $\mathcal{A}-$modul $\mathcal{A} \otimes_{\mathcal{A}} V$.

(d) Preslikavanje $\mathcal{A} \otimes_{\mathcal{C}} U \to \mathcal{A} \otimes_{\mathcal{B}} (\mathcal{B} \otimes_{\mathcal{C}} U)$ dobiva se polazeći od bilinearnog preslikavanja

$$(a,u) \mapsto a \otimes_{\mathcal{B}} (1 \otimes_{\mathcal{C}} u), \qquad a \in \mathcal{A}, \quad u \in U,$$

sa $\mathcal{A} \times U$ u $\mathcal{A} \otimes_{\mathcal{B}} (\mathcal{B} \otimes_{\mathcal{C}} U)$. Inverzno preslikavanje $\mathcal{A} \otimes_{\mathcal{B}} (\mathcal{B} \otimes_{\mathcal{C}} U) \to \mathcal{A} \otimes_{\mathcal{C}} U$ dobiva se polazeći od trilinearnog preslikavanja

$$(a,b,u) \mapsto ab \otimes_{\mathcal{C}} u, \qquad a \in \mathcal{A}, \quad b \in \mathcal{B}, \quad u \in U,$$

sa $\mathcal{A} \times \mathcal{B} \times U$ u $\mathcal{A} \otimes_{\mathcal{C}} U$. Za proizvoljno fiksno $a \in \mathcal{B}$ iz bilinearnog preslikavanja $(b,u) \mapsto ab \otimes_{\mathcal{C}} u$ dolazi se najprije do linearnog preslikavanja $\mathcal{B} \otimes U \to \mathcal{A} \otimes U$, zatim do linearnog preslikavanja $\mathcal{B} \otimes_{\mathcal{C}} U \to \mathcal{A} \otimes_{\mathcal{C}} U$, pa do bilinearnog preslikavanja $\mathcal{A} \times (\mathcal{B} \otimes_{\mathcal{C}} U) \to \mathcal{A} \otimes_{\mathcal{C}} U$, pa do linearnog preslikavanja $\mathcal{A} \otimes (\mathcal{B} \otimes_{\mathcal{C}} U) \to \mathcal{A} \otimes_{\mathcal{C}} U$ i napokon do linearnog preslikavanja $\mathcal{A} \otimes_{\mathcal{B}} (\mathcal{B} \otimes_{\mathcal{C}} U) \to \mathcal{A} \otimes_{\mathcal{C}} U$. Sada se direktnom provjerom utvrđuje da su oba linearna preslikavanja $\mathcal{A}-$preplitanja, tj. homomorfizmi $\mathcal{A}-$modula, i da su međusobno inverzna.

Za $\mathcal{A}-$modul $\mathcal{A} \otimes_{\mathcal{B}} W$ iz teorema 1.4.20. kažemo da je **inducira n $\mathcal{B}-$modulom** W unitalne podalgebre $\mathcal{B}$ od $\mathcal{A}$. Tvrdnja (b) u tom teoremu zove se **Frobeniusov teorem reciprociteta**, a tvrdnja (d) **teorem o induciranju u etapama**. Frobeniusov teorem reciprociteta je zapravo tvrdnja da je funktor induciranja lijevo adjungiran funktoru "suženja skalara" tj. "zaboravnom funktoru" prijelaza sa $\mathcal{A}-$modula na $\mathcal{B}-$module.

Promatrat ćemo sada tzv. producirane reprezentacije dobivene slično induciranima ali pomoću funktora $Hom_{\mathcal{B}}(\mathcal{A}, \cdot)$ umjesto funktora $\mathcal{A} \otimes_{\mathcal{B}} \cdot$. Dakle, neka je i dalje, $\mathcal{B}$ unitalna podalgebra kompleksne unitalne algebre $\mathcal{A}$ i neka je W unitalni lijevi $\mathcal{B}-$modul. Sada se pomoću množenja s lijeva $\mathcal{A}$ može shvaćati kao unitalni lijevi $\mathcal{B}-$modul. Stavimo

$$V = Hom_{\mathcal{B}}(\mathcal{A}, W).$$

Prostor V postaje unitalni lijevi $\mathcal{A}-$modul uz djelovanje

$$(u \cdot f)(v) = f(vu), \qquad f \in Hom_{\mathcal{B}}(\mathcal{A}, W), \quad u,v \in \mathcal{A}.$$

Kažemo da je **modul** V **produciran modulom** W i pišemo $V = Pro_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} W$. Ako je ρ reprezentacija od $\mathcal{B}$ na prostoru W, za pripadnu **reprezentaciju** π od $\mathcal{A}$ na prostoru V kažemo da je **producirana reprezentacijom** ρ i pišemo $\pi = Pro_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} \rho$.

Za producirane reprezentacije imamo sljedeći analogon Frobeniusovog teorema reciprociteta:

Teorem 1.4.21. *Neka je $\mathcal{B}$ unitalna podalgebra kompleksne unitalne algebre $\mathcal{A}$, neka je W initalan lijevi $\mathcal{B}-$modul i $V = Pro_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} W$.*

(a) *Preslikavanje $\varepsilon : f \mapsto f(1_{\mathcal{A}})$ je homomorfizam $\mathcal{B}-$modula sa V u W. Ukoliko je $\mathcal{A} = U(\mathfrak{g})$ i $\mathcal{B} = U(\mathfrak{q})$, gdje je $\mathfrak{g}$ Liejeva algebra i $\mathfrak{q}$ njena Liejeva podalgebra, onda je je taj homomorfizam $\mathcal{B}-$modula surjektivan.*

(b) *Ako je X unitalni $\mathcal{A}-$modul, onda za svaki $\psi \in Hom_{\mathcal{B}}(X, W)$ postoji jedinstven $\varphi \in Hom_{\mathcal{A}}(X, V)$ takav da je $\psi = \varepsilon \circ \varphi$. Preslikavanje $\psi \mapsto \varphi$ je izomorfizam vektorskih prostora sa $Hom_{\mathcal{B}}(X, V)$ na $Hom_{\mathcal{A}}(X, V)$.*

Dokaz: (a) Za $f \in V = Hom_{\mathcal{B}}(\mathcal{A}, W)$ i $u \in \mathcal{B}$ imamo

$$\varepsilon(u \cdot f) = (u \cdot f)(1_{\mathcal{A}}) = f(1_{\mathcal{A}} u) = f(u 1_{\mathcal{A}}) = u \cdot f(1_{\mathcal{A}}) = u \cdot \varepsilon(f).$$

To pokazuje da je ε homomorfizam $\mathcal{B}-$modula sa V u W.

Treba još dokazati da je u slučaju $\mathcal{A} = U(\mathfrak{g})$ i $\mathcal{B} = U(\mathfrak{q})$ homomorfizam ε surjektivan, tj. da za svaki $w \in W$ postoji $f \in Hom_{\mathcal{B}}(\mathcal{A}, W)$ takav da je $\varepsilon(f) = w$. Neka je $\mathfrak{p}$ potprostor od $\mathfrak{g}$ koji je direktni komplement od $\mathfrak{q}$, tj. takav da je $\mathfrak{g} = \mathfrak{q} \dotplus \mathfrak{p}$. Tada iz PBW$-$teorema slijedi da je $\mathcal{A} = \mathcal{B} \dotplus \mathcal{A}\mathfrak{p}$. Neka je P projektor prostora $\mathcal{A}$ na potprostor $\mathcal{B}$ duž potprostora $\mathcal{A}\mathfrak{p}$. Za fiksirani $w \in W$ definiramo preslikavanje $f : \mathcal{A} \to W$ ovako:

$$f(u) = P(u) \cdot w, \qquad u \in \mathcal{A}.$$

Tada za $v \in \mathcal{B}$ i $u \in \mathcal{A}$ imamo $u = P(u) + u'$ za $u' \in \mathcal{A}\mathfrak{p}$, dakle, $vu = vP(u) + vu'$. Kako je $vP(u) \in \mathcal{B}$ i $vu' \in \mathcal{A}\mathfrak{p}$, slijedi da je $P(vu) = vP(u)$. Stoga je

$$f(vu) = P(vu) \cdot w = vP(u) \cdot w = v \cdot P(u) \cdot w = v \cdot f(u).$$

Prema tome, $f \in Hom_{\mathcal{B}}(\mathcal{A}, W)$. Sada je

$$\varepsilon(f) = f(1_{\mathcal{A}}) = f(1_{\mathcal{B}}) = 1_{\mathcal{B}} \cdot w = w.$$

(b) Neka je X unitalni $\mathcal{A}-$modul i $\psi \in Hom_{\mathcal{B}}(X, W)$. Definiramo $\varphi : X \to L(\mathcal{A}, W)$ ovako:

$$[\varphi(x)](u) = \psi(u \cdot x), \qquad x \in X, \quad u \in \mathcal{A}.$$

Za svaki $x \in X$ tada je $\varphi(x) \in Hom_{\mathfrak{q}}(\mathcal{A}, W)$. Doista, za $v \in \mathcal{B}$ i $u \in \mathcal{A}$ imamo

$$[\varphi(x)](vu) = \psi(vu \cdot x) = \psi(v \cdot u \cdot x) = v \cdot \psi(u \cdot x) = v \cdot [\varphi(x)](u).$$

Dakle, tako definiran φ je linearan operator sa X u $V = Hom_{\mathfrak{q}}(\mathcal{A}, W)$. Neka su sada $u \in \mathcal{A}$ i $x \in X$. Tada za svaki $u' \in \mathcal{A}$ imamo

$$[\varphi(u \cdot x)](u') = \psi(u' \cdot u \cdot x) = \psi(u'u \cdot x) = [\varphi(x)](u'u) = [u \cdot \varphi(x)](u').$$

Kako je $u' \in \mathcal{A}$ proizvoljan, to pokazuje da vrijedi

$$\varphi(u \cdot x) = u \cdot \varphi(x), \qquad u \in \mathcal{A}, \quad x \in X.$$

Drugim riječima, $\varphi : X \to V$ je homomorfizam $\mathcal{A}-$modula, $\varphi \in Hom_{\mathcal{A}}(X, V)$. Sada je za svaki $x \in X$

$$(\varepsilon \circ \varphi)(x) = \varepsilon(\varphi(x)) = [\varphi(x)](1_{\mathcal{A}}) = \psi(1_{\mathcal{A}} \cdot x) = \psi(x).$$

Time je dokazano da za svaki $\psi \in Hom_{\mathcal{B}}(X, W)$ postoji $\varphi \in Hom_{\mathcal{A}}(X, V)$ takav da je $\psi = \varepsilon \circ \varphi$.

Dokažimo jedinstvenost. Neka su $\varphi, \varphi' \in Hom_{\mathcal{A}}(X, V)$ takvi da je $\varepsilon \circ \varphi = \varepsilon \circ \varphi'$, odnosno, takvi da je

$$[\varphi(x)](1_{\mathcal{A}}) = [\varphi'(x)](1_{\mathcal{A}}) \qquad \forall x \in X.$$

Budući da su φ i φ' $\mathcal{A}-$homomorfizmi sa X u $V = Hom_{\mathcal{B}}(X, W)$, za proizvoljne $x \in X$ i $u \in \mathcal{A}$ imamo redom

$$[\varphi(x)](u) = [\varphi(x)](1_{\mathcal{A}}u) = [u \cdot \varphi(x)](1_{\mathcal{A}}) = [\varphi(u \cdot x)](1_{\mathcal{A}}) =$$

$$= [\varphi'(u \cdot x)](1_{\mathcal{A}}) = [u \cdot \varphi'(x)](1_{\mathcal{A}}) = [\varphi'(x)](1_{\mathcal{A}}u) = [\varphi'(x)](u).$$

Odatle je $\varphi = \varphi'$ i time je dokazana jedinstvenost.

Označimo sada sa Φ tako definirano preslikavanje $\psi \mapsto \varphi$ sa $Hom_{\mathcal{B}}(X, W)$ u $Hom_{\mathcal{A}}(X, V)$:

$$[\{\Phi(\psi)\}(x)](u) = \psi(u \cdot x), \qquad u \in \mathcal{A}, \quad x \in X.$$

Φ je linearno preslikavanje: za $\psi_1, \psi_2 \in Hom_{\mathcal{B}}(X, W)$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$, $x \in X$ i $u \in \mathcal{A}$ imamo

$$[\{\Phi(\alpha_1\psi_1 + \alpha_2\psi_2)\}(x)](u) = (\alpha_1\psi_1 + \alpha_2\psi_2)(u \cdot x) = \alpha_1\psi_1(u \cdot x) + \alpha_2\psi_2(u \cdot x) =$$

$$= \alpha_1[\{\Phi(\psi_1)\}(x)](u) + \alpha_2[\{\Phi(\psi_2)\}(x)](u) = [\alpha_1\{\Phi(\psi_1)\}(x) + \alpha_2\{\Phi(\psi_2)\}(x)](u) =$$

$$= [\{\alpha_1\Phi(\psi_1) + \alpha_2\Phi(\psi_2)\}(x)](u).$$

Dakle, $\Phi(\alpha_1\psi_1 + \alpha_2\psi_2) = \alpha_1\Phi(\psi_1) + \alpha_2\Phi(\psi_2)$.

Konstruirat ćemo sada preslikavanje $\Psi : Hom_{\mathcal{A}}(X, V) \to Hom_{\mathcal{B}}(X, W)$. Za $\varphi \in Hom_{\mathcal{A}}(X, V)$ neka je $\Psi(\varphi) : X \to W$ preslikavanje definirano sa

$$[\Psi(\varphi)](x) = [\varphi(x)](1_{\mathcal{A}}), \qquad x \in X.$$

Za $v \in \mathcal{B}$ i $x \in X$ imamo redom koristeći činjenice da je φ $\mathcal{A}-$preplitanje i da je $\varphi(x)$ $\mathcal{B}-$preplitanje:

$$[\Psi(\varphi)](v \cdot x) = [\varphi(v \cdot x)](1_{\mathcal{A}}) = [v \cdot \varphi(x)](1_{\mathcal{A}}) = [\varphi(x)](1_{\mathcal{A}}v) = [\varphi(x)](v1_{\mathcal{A}}) = v \cdot [\varphi(x)](1_{\mathcal{A}}) = v \cdot [\Psi(\varphi)](x).$$

Dakle, $\Psi(\varphi) \in Hom_{\mathcal{B}}(X, W)$, odnosno, Ψ je preslikavanje sa $Hom_{\mathcal{A}}(X, V)$ u $Hom_{\mathcal{B}}(X, W)$. Sada imamo za $\varphi \in Hom_{\mathcal{A}}(X, V)$ i za proizvoljne $x \in X$ i $u \in \mathcal{A}$:

$$[\{(\Phi \circ \Psi)(\varphi)\}(x)](u) = [\{\Phi(\Psi(\varphi))\}(x)](u) = (\Psi(\varphi))(u \cdot x) = [\varphi(u \cdot x)](1_{\mathcal{A}}) = [u \cdot \varphi(x)](1_{\mathcal{A}}) = [\varphi(x)](u).$$

Zbog proizvoljnosti $u \in \mathcal{A}$ i $x \in X$ to pokazuje da je $(\Phi \circ \Psi)(\varphi) = \varphi$ za svaki $\varphi \in Hom_{\mathcal{A}}(X, V)$, odnosno, da vrijedi $\Phi \circ \Psi = I_{Hom_{\mathcal{A}}(X,V)}$. Ako je sada $\psi \in Hom_{\mathcal{B}}(X, W)$, onda za proizvoljan $x \in X$ imamo

$$[(\Psi \circ \Phi)(\psi)](x) = [\Psi(\Phi(\psi))](x) = [\{\Phi(\psi)\}(x)](1_{\mathcal{A}}) = \psi(1_{\mathcal{A}} \cdot x) = \psi(x).$$

Dakle, $(\Psi \circ \Phi)(\psi) = \psi$ za svaki $\psi \in Hom_{\mathcal{B}}(X, W)$, odnosno, $\Psi \circ \Phi = I_{Hom_{\mathcal{B}}(X,W)}$.

Time je dokazano da je linearno preslikavanje $\Phi : Hom_{\mathcal{B}}(X, W) \to Hom_{\mathcal{A}}(X, V)$ bijekcija, odnosno, izomorfizam.

1.5 Reprezentacije na Hilbertovim prostorima

U ovom odjeljku navest ćemo bez dokaza niz rezultata o reprezentacijama Liejevih grupa na Hilbertovim prostorima i pridruženim reprezentacijama pripadnih Liejevih algebri na nekim gustim potprostorima.

Neka je G lokalno kompaktna grupa i neka je μ lijeva Haarova mjera na G. Vektorski prostor $C_0(G)$ svih neprekidnih kompleksnoznačnih funkcija na G s kompektnim nosačem postaje asocijativna algebra uz konvoluciju kao operaciju množenja:

$$(f * g)(x) = \int_G f(y)g(y^{-1}x)\mathrm{d}\mu(y), \qquad f, g \in C_0(G), \quad x \in G.$$

To je $*-$algebra uz involuciju definiranu sa

$$f^*(x) = \Delta\left(x^{-1}\right)\overline{f\left(x^{-1}\right)}, \qquad f \in C_0(G), \quad x \in G.$$

Pri tome je $\Delta = \Delta_G$ **modularna funkcija** na grupi G, tj. neprekidni homomorfizam grupe G u multiplikativnu grupu $\mathbb{R}_+^* = \langle 0, +\infty\rangle$ sa svojstvima

$$\int_G f(xy)\mathrm{d}\mu(x) = \Delta\left(u^{-1}\right)\int_G f(x)\mathrm{d}\mu(x) \qquad \forall f \in C_0(G) \quad \text{i} \quad \forall y \in G$$

i

$$\int_G f\left(x^{-1}\right)\mathrm{d}\mu(x) = \int_G \Delta\left(x^{-1}\right)f(x)\mathrm{d}\mu(x) \qquad \forall f \in C_0(G).$$

Uz takvu strukturu $C_0(G)$ zove se **grupovna algebra** grupe G. $C_0(G)$ je normirana $*-$algebra uz L_1-normu

$$\|f\|_1 = \int_G |f(x)|\mathrm{d}\mu(x), \qquad f \in C_0(G),$$

budući da vrijedi

$$\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1\|g\|_1 \qquad \text{i} \qquad \|f^*\|_1 = \|f\|_1, \qquad f, g \in C_0(G).$$

Stoga se struktura $*-$algebre produljuje na popunjenje $L_1(G,\mu)$ i s operacijama koje se jednako zapisuju $L_1(G,\mu)$ postaje Banachova $*-$algebra koju zovemo **grupovna L_1-algebra** lokalno kompaktne grupe G. Grupovna algebra $L_1(G,\mu)$ (a i $C_0(G)$) je unitalna ako i samo je topologija na grupi G diskretna.

Za Hilbertov prostor $\mathcal{H}$ označavat ćemo sa $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ unitalnu Banachovu $*-$algebru svih ograničenih linearnih operatora na $\mathcal{H}$, a sa $\mathcal{GB}(\mathcal{H})$ grupu svih invertibilnih elemenata u toj algebri. **Reprezentacija lokalno kompaktne grupe G na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$** je homomorfizam grupa $\pi : G \to \mathcal{GB}(\mathcal{H})$ takav da je $x \mapsto \pi(x)\xi$ neprekidno preslikavanje sa G u $\mathcal{H}$ za svaki vektor $\xi \in \mathcal{H}$. Lako se vidi da je dovoljno zahtijevati neprekidnost u jedinici $e \in G$ za sve vektore ξ iz nekog gustog potprostora od $\mathcal{H}$. Nadalje, pokazuje se da je tada preslikavanje $(x,\xi) \mapsto \pi(x)\xi$ sa $G \times \mathcal{H}$ u $\mathcal{H}$ neprekidno.

Kod takvih reprezentacija među invarijantnim potprostorima $\mathcal{H}$ najvažniji su oni zatvoreni. Naime, ako je $\mathcal{K}$ zatvoren $\pi-$invarijantan potprostor od $\mathcal{H}$, onda je subreprezentacija $\pi_\mathcal{K}$ također reprezentacija grupe G na Hilbertovom prostoru, a i kvocijentna reprezentacija $\pi_{\mathcal{H}/\mathcal{K}}$ je takva. Za reprezentaciju π kažemo da je **ireducibilna** ako je $\mathcal{H} \neq \{0\}$ i $\{0\}$ i $\mathcal{H}$ su jedini zatvoreni $\pi-$invarijantni potprostori od $\mathcal{H}$. π se zove **potpuno reducibilna reprezentacija** ako za svaki zatvoren $\pi-$invarijantan potprostor $\mathcal{K}$ od $\mathcal{H}$ postoji zatvoren $\pi-$invarijantan potprostor $\mathcal{L}$ od $\mathcal{H}$ takav da je $\mathcal{H} = \mathcal{K} \dot{+} \mathcal{L}$.

Neka su π i ρ reporezentacije lokalno kompaktne grupe G na Hilbertovim prostorima $\mathcal{H}$ i $\mathcal{K}$. **Preplitanje** reprezentacije π s reprezentacijom ρ je ograničen linearan operator $T : \mathcal{H} \to \mathcal{K}$ takav da vrijedi $T\pi(x) = \rho(x)T \ \ \forall x \in G$. Skup svih takvih preplitanja označavamo sa $Hom_G(\mathcal{H}, \mathcal{K})$. To je zatvoren potprostor Banachovog prostora $\mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ svih ograničenih linearnih operatora sa $\mathcal{H}$ u $\mathcal{K}$. Kažemo da je reprezentacija π **ekvivalentna** reprezentaciji ρ, ako u $Hom_G(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ postoji bijekcija. Tada pišemo $\pi \simeq \rho$. Prema teoremu o otvorenom preslikavanju za Banachove prostore (svaka ograničena linearna surjekcija Banachovog prostora na Banachov prostor je otvoreno preslikavanje) za bijekciju $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ je $T^{-1} \in \mathcal{B}(\mathcal{K}, \mathcal{H})$. Stoga je $\simeq$ relacija ekvivalencije.

Za $\mathcal{H} = \mathcal{K}$ i $\pi = \rho$ upotrebljava se oznaka $Hom_G(\mathcal{H}, \mathcal{H}) = End_G(\mathcal{H})$.

Reprezentacija π lokalno kompaktne grupe G na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$ zove se **unitarna** ako su svi operatori $\pi(x)$, $x \in G$, unitarni. Grupu svih unitarnih operatora na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$ označavat ćemo sa $\mathcal{U}(\mathcal{H})$. Svaka je unitarna reprezentacija potpuno reducibilna: ako je $\mathcal{K}$ zatvoren $\pi-$invarijantan potprostor, onda je i njegov ortogonalni komplement $\mathcal{K}^\perp$ $\pi-$invarijantan. Za unitarne reprezentacije vrijedi sljedeća varijanta Schurove leme:

Teorem 1.5.1. *Neka je π unitarna reprezentacija lokalno kompaktne grupe G na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$. Reprezentacija π je ireducibilna ako i samo ako je $End_G(\mathcal{H}) = \mathbb{C}I_{\mathcal{H}}$, tj. ako i samo ako su multipli jediničnog operatora jedina preplitanja π sa π.*

Korolar 1.5.2. *Neka su π i ρ ireducibilne unitarne reprezentacije lokalno kompaktne grupe G na Hilbertovim prostorima $\mathcal{H}$ i $\mathcal{K}$. Ako su π i ρ ekvivalentne, onda je prostor $Hom_G(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ jednodimenzionalan i sadrži izometrički izomorfizam sa $\mathcal{H}$ na $\mathcal{K}$.*

Za reprezentacije Liejevih grupa posebno je važno sljedeće pojačanje Schurove leme:

Teorem 1.5.3. *Neka je π ireducibilna unitarna reprezentacija lokalno kompaktne grupe G na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$. Neka su V i W gusti potprostori od $\mathcal{H}$ i $T : V \to \mathcal{H}$ i $S : W \to \mathcal{H}$ linearni operatori (bez pretpostavke njihove neprekidnosti) takvi da je potprostor V $\pi-$invarijantan i da vrijedi*

$$T\pi(x)\xi = \pi(x)T\xi \qquad \forall x \in G \quad i \quad \forall \xi \in V$$

i

$$(T\xi|\eta) = (\xi|S\eta) \qquad \forall \xi \in V \quad i \quad \forall \eta \in W.$$

Tada je $T = \lambda I_V$ za neki $\lambda \in \mathbb{C}$.

Svakoj reprezentaciji π lokalno kompaktne grupe G na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$ pridružena je reprezentacija $\tilde{\pi}$ Banachove algebre $L_1(G, \mu)$ na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$. To je homomorfizam asocijativnih algebri $\tilde{\pi} : L_1(G, \mu) \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ definiran sa

$$(\tilde{\pi}(f)\xi|\eta) = \int_G f(x)(\pi(x)\xi|\eta)\mathrm{d}\mu(x), \qquad f \in L_1(G, \mu), \quad \xi, \eta \in \mathcal{H}.$$

Pokazuje se da je tada operator $\tilde{\pi}(f)$ Lebesgue$-$Bochnerov integral fukcije $x \mapsto f(x)\pi(x)$ sa G u $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ u odnosu na mjeru μ. Vrijedi sljedeći teorem:

Teorem 1.5.4. *Neka je π reprezentacija lokalno kompaktne grupe G na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$ i $\tilde{\pi}$ pridružena reprezentacija njene grupovne L_1-algebre.*

(*a*) *Zatvoren potprostor $\mathcal{K}$ od $\mathcal{H}$ je $\pi-$invarijantan ako i samo ako je $\tilde{\pi}-$invarijantan, štoviše, ako i samo ako je $\tilde{\pi}|C_0(G)-$invarijantan.*

(*b*) *Ako je σ reprezentacija od G na Hilbertovom prostoru $\mathcal{K}$, onda je*

$$Hom_G(\mathcal{H},\mathcal{K}) = Hom_{L_1(G,\mu)}(\mathcal{H},\mathcal{K}) = Hom_{C_0(G)}(\mathcal{H},\mathcal{K}).$$

Posebno, reprezentacije π i σ su ekvivalentne ako i samo ako su reprezentacije $\tilde{\pi}$ i $\tilde{\sigma}$ ekvivalentne, odnosno, ako i samo ako su reprezentacije $\tilde{\pi}|C_0(G)$ i $\tilde{\sigma}|C_0(G)$ ekvivalentne.

(*c*) *Reprezentacija $\tilde{\pi}|C_0(G)$ ima sljedeće svojstvo neprekidnosti: za svaki kompaktan podskup K od G postoji $C_K > 0$ takav da vrijedi*

$$f \in C_0(G), \quad Supp\, f \subseteq K \qquad \Longrightarrow \qquad \|\tilde{\pi}(f)\| \leq C_K \|f\|_1.$$

(*d*) *Reprezentacija $\tilde{\pi}|C_0(G)$ je* **nedegenerirana**, *tj. potprostor span $\{\tilde{\pi}(f)\xi;\ f \in C_0(G),\ \xi \in \mathcal{H}\}$ je gust u Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$.*

(*e*) *Reprezentacija π je unitarna ako i samo je $\tilde{\pi}$ $*-$reprezentacija, štoviše, ako i samo ako je restrikcija $\tilde{\pi}|C_0(G)$ $*-$reprezentacija.*

(*f*) *Ako je σ nedegenerirana reprezentacija algebre $C_0(G)$ na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$ sa svojstvom neprekidnosti kao u* (*c*), *onda postoji jedinstvena reprezentacija π od G na $\mathcal{H}$ takva da je $\sigma = \tilde{\pi}|C_0(G)$.*

Zbog ovog se teorema obično umjesto novog znaka $\tilde{\pi}$ upotrebljava isti znak π i za reprezentaciju grupovne algebre.

Razmotrimo sada posebno reprezentacije Liejevih grupa na Hilbertovim prostorima. Svakoj takvoj željeli bismo pridružiti reprezentaciju pripadne Liejeve algebre. To neće biti moguće na čitavom prostoru $\mathcal{H}$ (osim u slučaju konačne dimenzije) nego na određenim gustim potprostorima. U tu su nam svrhu potrebne neke opće definicije.

Neka je $\mathcal{H}$ Banachov prostor i Ω otvoren podskup od $\mathbb{R}^n$. Za preslikavanje $f : \Omega \to \mathcal{H}$ kažemo da je diferencijabilno u točki $x_0 \in \Omega$ ako postoji linearan operator $T_{x_0}(f) : \mathbb{R}^n \to \mathcal{H}$ takav da vrijedi

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\|f(x) - f(x_0) - T_{x_0}(f)(x - x_0)\|}{\|x - x_0\|} = 0.$$

Pri tome je $\|\cdot\|$ u brojniku oznaka za normu na Banachovom prostoru $\mathcal{H}$ a u nazivniku oznaka za bilo koju normu na prostoru $\mathbb{R}^n$. Naravno, kako je prostor $\mathbb{R}^n$ konačnodimenzionalan, svaki linearan operator sa $\mathbb{R}^n$ u $\mathcal{H}$ je ograničen; posebno, $T_{x_0}(f) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n, \mathcal{H})$. Preslikavanje f je diferencijabilno na Ω ako je diferencijabilno u svakoj točki od Ω. U tom slučaju definirano je preslikavanje $x \mapsto T_x(f)$ sa Ω u Banachov prostor $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n, \mathcal{H})$. Ako je to preslikavanje neprekidno na Ω, kažemo da je preslikavanje f klase C^1 na Ω. Ako je preslikavanje $x \mapsto T_x(f)$ klase C^1 na Ω, kažemo da je preslikavanje f klase C^2 na Ω. Induktivno definiramo za svaki $m \in \mathbb{N}$: preslikavanje f je klase C^m na Ω ako je ono diferencijabilno na Ω i preslikavanje $x \mapsto T_x(f)$ je klase C^{m-1} na Ω. Napokon, kažemo da je preslikavanje $f : \Omega \to \mathcal{H}$ klase C^∞ na Ω ako je ono klase C^m na Ω za svaki $m \in \mathbb{R}$.

Neka je sada M diferencijalna mnogostrukost i $\mathcal{H}$ Banachov prostor. Preslikavanje $F : M \to \mathcal{H}$ je klase C^∞ ako je za svaku kartu (U, φ) mnogostrukosti M preslikavanje $F \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \to \mathcal{H}$ klase C^∞ na $\varphi(U)$. Lako se vidi da je dovoljno to zahtijevati za sve karte iz nekog atlasa mnogostrukosti M.

Vrijedi sljedeći Grothendieckov teorem (dokazan u *Espaces vectoriels topologiques*, Univ. São Paulo, 1954. u znatno općenitijoj situaciji kad je $\mathcal{H}$ lokalno konveksan vektorski prostor koji je *kvazi−potpun*, tj. takav da je svaki njegov zatvoren ograničen podskup potpun):

Teorem 1.5.5. *Neka je M diferencijalna mnogostrukost i $\mathcal{H}$ Banachov prostor. Preslikavanje $F : M \to \mathcal{H}$ je klase C^∞ ako i samo ako je skalarna funkcija $\varphi \circ F : M \to \mathbb{C}$ klase C^∞ za svaki neprekidni linearni funkcional $\varphi \in \mathcal{H}'$.*

Neka je ponovo $\mathcal{H}$ Banachov prostor i Ω otvoren podskup od $\mathbb{R}^n$. Za preslikavanje $f : \Omega \to \mathcal{H}$ kažemo da je analitičko ako za svaku točku $x_0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$ postoji $r > 0$ takav da je

$$D(x_0, r) = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n;\ |x_j - x_j^0| < r \text{ za } j = 1, \dots, n\} \subseteq \Omega$$

i postoje $a_m \in \mathcal{H}$, $m \in \mathbb{Z}_+^n$, takvi da vrijedi

$$f(x) = \sum_{m \in \mathbb{Z}_+^n} (x - x_0)^m a_m \qquad \forall x \in D(x_0, r).$$

Pri tome je

$$(x - x_0)^m = (x_1 - x_1^0)^{m_1} \cdots (x_n - x_n^0)^{m_n},$$

a gornji red konvergira po normi u $\mathcal{H}$, tj. za svaki $x \in D(x_0, r)$ i svaki $\varepsilon > 0$ postoji konačan podskup $F_0 \subset \mathbb{Z}_+^n$ takav da za svaki konačan podskup $F \subset \mathbb{Z}_+^n$ vrijedi:

$$F_0 \subseteq F \qquad \Longrightarrow \qquad \left\| f(x) - \sum_{m \in F} (x - x_0)^m a_m \right\| < \varepsilon.$$

Analogno kao malo prije, ako je M analitička mnogostrukost i $\mathcal{H}$ Banachov prostor, za preslikavanje $F : M \to \mathcal{H}$ kažemo da je analitičko ako je za svaku (analitičku) kartu (U, φ) od M preslikavanje $F \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \to \mathcal{H}$ analitičko. Ponovno je to dovoljno zahtijevati za sve karte iz nekog (analitičkog) atlasa mnogostrukosti M.

Vrijedi sljedeći analogon teorema 1.5.5. koji je dokazan u članku J. Barros Neto, *Spaces of vector valued real analytic function*, Trans. Amer. Math. Soc. **112**(1964),381−391, također u većoj općenitosti, ali ne takvoj kao što je Grothendieckov teorem za preslikavanja klase C^∞ :

Teorem 1.5.6. *Neka je M analitička mnogostrukost i $\mathcal{H}$ Banachov prostor. Preslikavanje $F : M \to \mathcal{H}$ je analitičko ako i samo ako je skalarna funkcija $\varphi \circ F : M \to \mathbb{C}$ analitička za svaki neprekidni linearni funkcional $\varphi \in \mathcal{H}'$.*

Neka je sada π reprezentacija Liejeve grupe G na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$. Za $\xi \in \mathcal{H}$ kažemo da je **glatki vektor** (odn. **analitički vektor**) za reprezentaciju π ako je preslikavanje $x \mapsto \pi(x)\xi$ sa G u $\mathcal{H}$ klase C^∞ (odn. analitičko). Označimo sa $\mathcal{H}^\infty(\pi)$ skup svih glatkih vektora, a sa $\mathcal{H}^\omega(\pi)$ skup svih analitičkih vektora reprezentacije π. Ukoliko je jasno o kojoj se reprezentaciji π na prostoru $\mathcal{H}$ radi, pisat ćemo kraće $\mathcal{H}^\infty$ i $\mathcal{H}^\omega$. Očito su to potprostori vektorskog prostora $\mathcal{H}$ i $\mathcal{H}^\omega \subseteq \mathcal{H}^\infty$. Mnoštvo glatkih vektora nam daje

Lema 1.5.7. (**Lars Gårding**) *Neka je $f \in C_0^\infty(G)$ i $\xi \in \mathcal{H}$. Tada je $\pi(f)\xi \in \mathcal{H}^\infty$.*

Potprostor

$$\pi(C_0^\infty(G))\mathcal{H} = span\,\{\pi(f)\xi;\ f \in C_0^\infty(G),\ \xi \in \mathcal{H}\}$$

zove se **Gårdingova domena** za reprezentaciju π. Iz Gårdingove leme slijedi:

Teorem 1.5.8. *Neka je π reprezentacija Liejeve grupe G na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$. Gårdingova domena $\pi(C_0^\infty(G))\mathcal{H}$ je gust potprostor od $\mathcal{H}$. Posebno, $\mathcal{H}^\infty$ je gust potprostor od $\mathcal{H}$.*

Dixmier i Malliavin su u članku *Factorisations de fonctions et de vecteurs indéfiniment différentiables*, Bull. Sci. Math. **102**(1978),305−330, dokazali da je Gårdingova domena ne samo sadržana nego jednaka potprostoru $\mathcal{H}^\infty$. Štoviše, dokazali su da za široku klasu grupa, koja uključuje sve povezane poluproste Liejeve grupe s konačnim centrom, vrijedi

$$\mathcal{H}^\infty = \{\pi(f)\xi;\ f \in C_0^\infty(G),\ \xi \in \mathcal{H}\}.$$

To nije istina, ako Liejeva grupa G ima zatvorenu podgrupu H takvu da je $G/H \simeq \mathbb{R}^2$; to je tako npr. za povezane jednostavno povezane nilpotentne Liejeve grupe dimenzije ≥ 2. Dokazali su i da za aditivnu grupu $\mathbb{R}^n$ za $n \geq 2$ i njenu reprezentaciju π na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$ vrijedi

$$\mathcal{H}^\infty = \{\pi(f)\xi + \pi(g)\eta;\ f, g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n),\ \xi, \eta \in \mathcal{H}\}.$$

Neka je $\mathfrak{g}$ Liejeva algebra Liejeve grupe G. Za $X \in \mathfrak{g}$ definiramo linearan operator $\pi(X) : \mathcal{H}^\infty \to \mathcal{H}$ sa

$$\pi(X)\xi = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\pi(\exp tX)\xi\bigg|_{t=0}, \qquad \xi \in \mathcal{H}^\infty.$$

Propozicija 1.5.9. (*a*) *Potprostori $\mathcal{H}^\infty$ i $\mathcal{H}^\omega$ su $\pi(G)-$invarijantni.*

(*b*) *Potprostori $\mathcal{H}^\infty$ i $\mathcal{H}^\omega$ su invarijantni s obzirom na sve operatore $\pi(X)$, $X \in \mathfrak{g}$.*

(*c*) *$X \mapsto \pi(X)$ je reprezentacija Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ na vektorskom prostoru $\mathcal{H}^\infty$.*

Reprezentacija realne Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ na prostoru $\mathcal{H}^\infty$ proširuje se do reprezentacije njene kompleksifikacije $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$, a ova do reprezentacije univerzalne omotačke algebre $U(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})$. Kao i prije, sa $Z(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})$ označavamo centar algebre $U(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})$. Reprezentacija $x \mapsto Ad\,x$ grupe G pomoću automorfizama Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ jedinstveno se proširuje do reprezentacije od G automorfizmima algebre $U(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})$ koju ćemo također označavati sa $x \mapsto Ad\,x$. Stavimo

$$Z_G(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}) = \{u \in U(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}});\ (Ad\,x)u = u\ \forall x \in G\}.$$

To je podalgebra centra $Z(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})$ i s njim se podudara ako je grupa G povezana. U slučaju ireducibilne unitarne reprezentacije imamo sljedeći važan rezultat:

Propozicija 1.5.10. *Neka je π ireducibilna unitarna reprezentacija Liejeve grupe G na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$. Za svaki $z \in Z_G(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})$ operator $\pi(z)$ je skalarni multipl jediničnog operatora $I_{\mathcal{H}^\infty}$.*

S reprezentacije Liejeve grupe G prešli smo na reprezentaciju njene Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ (i jednu njenu subreprezentaciju). Međutim, pri tome smo promijenili prostor. Iako prostor $\mathcal{H}^\infty$ glatkih vektora ima dobro svojstvo da je gust u prostoru $\mathcal{H}$, to pridruživanje reprezentacijama od G reprezentacija od $\mathfrak{g}$ nema dovoljno dobra svojstva. Ukoliko je $\mathcal{K}$ zatvoren $\pi(G)-$invarijantan potprostor od $\mathcal{H}$, onda je očito $\mathcal{K}^\infty(\pi|\mathcal{K}) = \mathcal{K} \cap \mathcal{H}^\infty$ i to je $\pi(\mathfrak{g})-$invarijantan potprostor od $\mathcal{H}^\infty$ i njegov zatvarač jednak je $\mathcal{K}$. Nažalost, obično postoje $\pi(\mathfrak{g})-$invarijantni potprostori od $\mathcal{H}^\infty$ čiji zatvarač nije $\pi(G)-$invarijantan.

S reprezentacijom $X \mapsto \pi(X)|\mathcal{H}^\omega$ situacija je za povezanu Liejevu grupu G u tom smislu bolja:

Propozicija 1.5.11. *Neka je G povezana Liejeva grupa, π njena reprezentacija na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$ i $\mathcal{V}$ $\pi(\mathfrak{g})-$invarijantan potprostor od $\mathcal{H}^\omega$. Tada je njegov zatvarač $Cl(\mathcal{V})$ $\pi(G)-$invarijantan potprostor od $\mathcal{H}$.*

Znatno kompliciranijim metodama nego što je Gårdingova lema E. Nelson je u članku *Analytic vectors*, Annals of Math. **70**(1959),572−615, dokazao

Teorem 1.5.12. *Za svaku reprezentaciju π Liejeve grupe G na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$ potprostor $\mathcal{H}^\omega$ je gust u $\mathcal{H}$.*

Promatrat ćemo sada reprezentacije kompaktnih grupa. Ako je K kompaktna grupa, njena je lijeva Haarova mjera ν ujedno i desna Haarova mjera. Pretpostavljat ćemo da je mjera ν **normirana**, tj. da je $\nu(K) = 1$. Prostor $C(K)$ svih neprekidnih funkcija $f : K \to \mathbb{C}$ postaje unitaran prostor uz skalarni produkt

$$(f|g) = \int_K f(x)\overline{g(x)}\mathrm{d}\nu(x), \qquad f, g \in C(K).$$

Njegovo popunjenje je Hilbertov prostor $L_2(K) = L_2(K, \nu)$.

Ako je π reprezentacija kompaktne grupe K na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$ sa skalarnim produktom $(\,\cdot\,|\,\cdot\,)$, onda je sa

$$\langle \xi|\eta\rangle = \int_K (\pi(x)\xi|\pi(x)\eta)\mathrm{d}\nu(x), \qquad \xi, \eta \in \mathcal{H},$$

zadan novi skalarni produkt $\langle\,\cdot\,|\,\cdot\,\rangle$ na prostoru $\mathcal{H}$, koji je ekvivalentan polaznom, tj. postoje $m > 0$ i $M > 0$ takvi da je

$$m(\xi|\xi) \le \langle \xi|\xi\rangle \le M(\xi|\xi) \qquad \forall \xi \in \mathcal{H}.$$

U odnosu na novi skalarni produkt reprezentacija π je unitarna. Zbog toga se u proučavanju reprezentacija kompaktnih grupa na Hilbertovim prostorima ne gubi na općenitosti ako pretpostavljamo da se radi o unitarnim reprezentacijama.

Glavna svojstva reprezentacija kompaktnih grupa sadržana su u sljedeća tri teorema:

Teorem 1.5.13. *Neka je π ireducibilna reprezentacija kompaktne grupe K na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$. Tada je dimenzija prostora $\mathcal{H}$ konačna.*

U daljnjem sa $\hat{K}$ označavamo skup klasa ekvivalencije ireducibilnih reprezentacija grupe K na Hilbertovim prostorima. Znamo da se u svakoj klasi $\gamma \in \hat{K}$ nalazi unitarna reprezentacija, a prema prethodnom teoremu sve te reprezentacije su konačnodimenzionalne. Za $\gamma \in \hat{K}$ sa $d(\gamma)$ označavamo dimenziju reprezentacija iz klase γ. Za konačnodimenzionalnu reprezentaciju π kompaktne grupe K definiramo njen **karakter** $\chi_\pi \in C(K)$ kao trag operatora reprezentacije:

$$\chi_\pi(x) = \mathrm{Tr}\,\pi(x), \qquad x \in K.$$

Teorem 1.5.14. *Neka je K kompaktna grupa i π i ρ njene konačnodimenzionalne reprezentacije na unitarnim prostorima $\mathcal{H}$ i $\mathcal{K}$.*

(a) *Vrijedi*

$$(\chi_\pi|\chi_\rho) = \dim\, Hom_K(\mathcal{H}, \mathcal{K}) = \dim\, Hom_K(\mathcal{K}, \mathcal{H}).$$

(b) *Reprezentacija π je ireducibilna ako i samo ako je $(\chi_\pi|\chi_\pi) = 1$.*

(c) *Reprezentacije π i ρ su ekvivalentne ako i samo ako je $\chi_\pi = \chi_\rho$.*

Za klasu $\gamma \in \hat{K}$ označavat ćemo sa $d(\gamma)$ dimenziju, a sa χ_γ karakter bilo koje reprezentacije u toj klasi. Prema prethodnom teoremu $\{\chi_\gamma;\ \gamma \in \hat{K}\}$ je ortonormiran skup u unitarnom prostoru $C(K)$. Za $\gamma \in \hat{K}$ definiramo funkciju $\chi^\gamma \in C(K)$ sa

$$\chi^\gamma(x) = d(\gamma)\chi_\gamma\left(x^{-1}\right) = d(\gamma)\overline{\chi_\gamma(x)}, \qquad x \in K.$$

Neka je sada π proizvoljna unitarna reprezentacija kompaktne grupe K na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$. Za $\gamma \in \hat{K}$ neka je $\mathcal{H}(\gamma)$ suma svih $\pi-$invarijantnih potprostora $\mathcal{K}$ od $\mathcal{H}$ takvih da je subreprezentacija $\pi_{\mathcal{K}}$ ireducibilna i nalazi se u klasi γ. Nadalje, neka je

$$\mathcal{H}_K = \{\xi \in \mathcal{H};\ \text{potprostor } span\,\{\pi(x)\xi;\ x \in K\} \text{ je konačnodimenzionalan}\}.$$

Očito je $\mathcal{H}_K$ potprostor od $\mathcal{H}$ koji je $\pi-$invarijantan. Njegovi se elementi zovu $K-$**konačni vektori** u $\mathcal{H}$.

Teorem 1.5.15. *Neka je π unitarna reprezentacija kompaktne grupe K na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$.*

(a) *Potprostori $\mathcal{H}(\gamma)$, $\gamma \in \hat{K}$, su zatvoreni i međusobno ortogonalni.*

(b) *Za svaku klasu $\gamma \in \hat{K}$ operator $\pi\left(\chi^\gamma\right)$ je ortogonalni projektor sa slikom $\mathcal{H}(\gamma)$.*

(c) *Vrijedi*

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{\gamma \in \hat{K}} \mathcal{H}(\gamma).$$

(d) *Vrijedi*

$$\mathcal{H}_K = \sum_{\gamma \in \hat{K}} \mathcal{H}(\gamma) \qquad (\textit{algebraska direktna suma}).$$

Posebno, potprostor $\mathcal{H}_K$ je gust u Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$.

Ovaj teorem je posebno primjenjiv na desnu regularnu reprezentaciju $\rho = \rho_K$ na Hilbertovom prostoru $L_2(K)$:

$$(\rho(x)f)(y) = f(yx), \qquad f \in L_2(K), \quad x, y \in K.$$

U tom slučaju imamo:

Teorem 1.5.16. (**Peter$-$Weyl**) *Svi potprostori $L_2(K)(\gamma)$, $\gamma \in \hat{K}$, su konačnodimenzionalni. Precizno, za $\gamma \in \hat{K}$ neka je π ireducibilna unitarna reprezentacija od K na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$ u klasi γ. Za proizvoljno izabranu ortonormiranu bazu od $\mathcal{H}$ neka je $[\pi_{ij}(x)]$ matrica operatora $\pi(x)$ u toj bazi. Tada je $\{\pi_{ij};\ 1 \leq i, j \leq d(\gamma)\}$ ortogonalna baza prostora $L_2(K)(\gamma)$ i, posebno, vrijedi* $\dim\, L_2(K)(\gamma) = d(\gamma)^2$. *Napokon, prostor $L_2(K)_K$ $K-$konačnih vektora u odnosu na reprezentaciju ρ podudara se s prostorom $K-$konačnih vektora u odnosu na lijevu regularnu reprezentaciju λ ($(\lambda(x)f)(y) = f(x^{-1}y)$), sadržan je u $C(K)$ i razapet je matričnim elementima konačnodimenzionalnih reprezentacija od K.*

Neka je sada G Liejeva grupa s Liejevom algebrom $\mathfrak{g}$ i neka je K kompaktna podgrupa od G. Tada je K Liejeva podgrupa od G i neka je $\mathfrak{k} \subseteq \mathfrak{g}$ njena Liejeva algebra. Promatrajmo sada reprezentaciju π Liejeve grupe G s Liejevom algebrom $\mathfrak{g}$ na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je reprezentacija $\pi|K$ unitarna. Prema teoremu 1.5.15. tada vrijedi

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{\gamma \in \hat{K}} \mathcal{H}(\gamma)$$

i ortogonalni projektor na potprostor $\mathcal{H}(\gamma)$ je $(\pi|K)(\chi^\gamma)$ u odnosu na normiranu Haarovu mjeru na K. Nadalje, ako kao i prije sa $\mathcal{H}_K$ označimo potprostor od $\mathcal{H}$ svih $K-$konačnih vektora,

$$\mathcal{H}_K = \{\xi \in \mathcal{H};\ \dim \mathit{span}\,\{\pi(k)\xi;\ k \in K\} < +i\},$$

onda je

$$\mathcal{H}_K = \sum_{\gamma\in\hat{K}} \mathcal{H}(\gamma) \qquad \text{(algebarska direktna suma)}$$

i taj je potprostor gust u $\mathcal{H}$. U daljnjem ćemo pisati $\pi(\chi^\gamma)$ umjesto $(\pi|K)(\chi^\gamma)$. Dakle,

$$(\pi(\chi^\gamma)\xi|\eta) = d(\gamma)\int_K \overline{\chi_\gamma(k)}(\pi(k)\xi|\eta)\mathrm{d}\nu(k),$$

pri čemu je ν normirana Haarova mjera na K.

Stavimo sada $\mathcal{H}_K^\infty = \mathcal{H}_K \cap \mathcal{H}^\infty$.

Propozicija 1.5.17. *Uz uvedene oznake za svaku klasu $\gamma \in \hat{K}$ vrijedi:*

(*a*) $\pi(\chi^\gamma)\mathcal{H}^\infty \subseteq \mathcal{H}^\infty$.

(*b*) $\pi(\chi^\gamma)\mathcal{H}^\infty = \mathcal{H}(\gamma)\cap\mathcal{H}^\infty$.

(*c*) $Cl(\pi(\chi^\gamma)\mathcal{H}^\infty) = \mathcal{H}(\gamma) = \pi(\chi^\gamma)\mathcal{H}$.

Teorem 1.5.18. *Uz uvedene oznake vrijedi:*

(*a*)
$$\mathcal{H}_K^\infty = \sum_{\gamma\in\hat{K}} \pi(\chi^\gamma)\mathcal{H}^\infty.$$

(*b*) $\mathcal{H}_K^\infty$ *je gust potprostor od* $\mathcal{H}$.

(*c*) $\mathcal{H}_K^\infty$ *je* $\pi(\mathfrak{g})-$*invarijantan potprostor od* $\mathcal{H}^\infty$.

(*d*) *Za* $X \in \mathfrak{g}$, $k \in K$ *i* $\xi \in \mathcal{H}_K^\infty$ *vrijedi:*

$$\pi(k)\pi(X)\xi = \pi((Ad\,k)X)\xi.$$

Neka je i dalje G Liejeva grupa s Liejevom algebrom $\mathfrak{g}$, K kompaktna podgrupa od G i $\mathfrak{k} \subseteq \mathfrak{g}$ njena Liejeva algebra. Nadalje, neka je $\mathcal{V}$ kompleksan vektorski prostor na kome je zadana reprezentacija π Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ i reprezentacija ρ grupe K. Tada kažemo da je $\mathcal{V}$ $(\mathfrak{g}, K)-$**modul** ako su zadovoljeni sljedeća tri uvjeta kompatibilnosti:

(1) $\rho(k)\pi(X)\xi = \pi((Ad\,k)X)\rho(k)\xi$ za svaki $k \in K$, $X \in \mathfrak{g}$ i $\xi \in \mathcal{V}$.

(2) Za svaki $\xi \in \mathcal{V}$ potprostor $\mathcal{V}_\xi = \mathit{span}\,\{\rho(k)\xi;\ k \in K\}$ je konačnodimenzionalan i preslikavanje $k \mapsto \rho(k)|\mathcal{V}_\xi$ je neprekidno, dakle, klase C^∞ (štoviše, analitičko).

(3) Za svaki $Y \in \mathfrak{k}$ i $\xi \in \mathcal{V}$ vrijedi

$$\pi(Y)\xi = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\rho(\exp\,tY)\xi\Big|_{t=0}$$

Za $(\mathfrak{g}, K)-$modul $\mathcal{V}$ često se izostavljaju oznake π i ρ za reprezentacije od $\mathfrak{g}$ i K a djelovanja $\mathfrak{g}$ i K označava se s točkom; tj. za $\xi \in \mathcal{V}$, $k \in K$ i $X \in \mathfrak{g}$ pišemo

$$k \cdot \xi = \rho(k)\xi, \qquad X \cdot \xi = \pi(X)\xi.$$

Prema teoremu 1.5.18. ako je π reprezentacija od G na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$ onda je $\mathcal{H}_K^\infty$ $(\mathfrak{g}, K)-$modul.

Primijetimo da za $(\mathfrak{g}, K)-$modul $\mathcal{V}$ vrijedi

$$\mathcal{V} = \sum_{\gamma \in \hat{K}} \dot{+} \mathcal{V}(\gamma)$$

gdje je $\mathcal{V}(\gamma)$ suma svih $K-$invarijantnih konačnodimenzionalnih potprostora na kojima je reestrikcija reprezentacije grupe K ireducibilna i u klasi γ. Naravno, lako se vidi da je tada $\rho(\chi^\gamma)$ projektor prostora $\mathcal{V}$ na potprostor $\mathcal{V}(\gamma)$ duž potprostora $\sum_{\delta \neq \gamma} \dot{+} \mathcal{V}(\delta)$. Pri tome je operator $\rho(\chi^\gamma)$ dobro definiran sa

$$\rho(\chi^\gamma)\xi = d(\gamma) \int_K \overline{\chi_\gamma(k)}\, k \cdot \xi \, \mathrm{d}\nu(k), \qquad \xi \in \mathcal{V},$$

jer su svi vektori $\xi \in \mathcal{V}$ $K-$konačni, odnosno, podintegralna funkcija poprima vrijednosti u konačnodimenzionalnom potprostoru od $\mathcal{V}$.

Za $(\mathfrak{g}, K)-$module definiramo uobičajenu terminologiju kao i za reprezentacije. Npr. **invarijantan potprostor** ili $(\mathfrak{g}, K)-$**podmodul** je potprostor $\mathcal{W}$ koji je invarijantan s obzirom na sve operatore $k\cdot$, $k \in K$ i $X\cdot$, $X \in \mathfrak{g}$. $(\mathfrak{g}, K)-$**modul** $\mathcal{V}$ je **prost** ili **ireducibilan** ako je $\mathcal{V} \neq \{0\}$ i ne postoji $(\mathfrak{g}, K)-$podmodul različit od $\{0\}$ i od $\mathcal{V}$. Ako su $\mathcal{V}$ i $\mathcal{W}$ $(\mathfrak{g}, K)-$moduli, $Hom_{\mathfrak{g},K}(\mathcal{V}, \mathcal{W})$ označava prostor svih linearnih operatora $T : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ koji prepliću reprezentacije od K i reprezentacije od $\mathfrak{g}$, tj. takvih da za proizvoljne $k \in K$, $X \in \mathfrak{g}$ i $\xi \in \mathcal{V}$ vrijedi

$$T(k \cdot \xi) = k \cdot T\xi \qquad \text{i} \qquad T(X \cdot \xi) = X \cdot T\xi.$$

Ako je takav T bijekcija sa $\mathcal{V}$ na $\mathcal{W}$ kažemo da je T ekvivalencija $(\mathfrak{g}, K)-$modula. Ako postoji ekvivalencija $T \in Hom_{\mathfrak{g},K}(\mathcal{V}, \mathcal{W})$ kažemo da su $(\mathfrak{g}, K)-$moduli $\mathcal{V}$ i $\mathcal{W}$ ekvivalentni i pišemo $\mathcal{V} \simeq \mathcal{W}$. Kažemo da je $(\mathfrak{g}, K)-$**modul** $\mathcal{V}$ **unitaran** ako je na $\mathcal{V}$ zadan skalarni produkt koji je $K-$invarijantan,

$$(k \cdot \xi | k \cdot \eta) = (\xi|\eta) \qquad \forall k \in K \quad \text{i} \quad \forall \xi, \eta \in \mathcal{V},$$

i u odnosu na koji su svi operatori $X\cdot$ antisimetrični,

$$(X \cdot \xi|\eta) = -(\xi|X \cdot \eta) \qquad \forall X \in \mathfrak{g} \quad \text{i} \quad \forall \xi, \eta \in \mathcal{V}.$$

Napokon, za reprezentacije π i ρ grupe G na Hilbertovim prostorima $\mathcal{H}$ i $\mathcal{K}$ kažemo da su **infinitezimalno ekvivalentne** (u odnosu na kompaktnu podgrupu K) ako su pripadni $(\mathfrak{g}, K)-$moduli $\mathcal{H}_K^\infty$ i $\mathcal{K}_K^\infty$ ekvivalentni.

Za $(\mathfrak{g}, K)-$**modul** $\mathcal{V}$ kažemo da je **dopustiv** ako je potprostor $\mathcal{V}(\gamma)$ konačnodimenzionalan $\forall \gamma \in \hat{K}$. Analogno, **reprezentacija** π grupe G na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$ je **dopustiva** (u donosu na kompaktnu podgrupu K) ako je potprostor $\mathcal{H}(\gamma)$ konačnodimenzionalan $\forall \gamma \in \hat{K}$. Uočimo da je to ispunjeno ako i samo ako je $(\mathfrak{g}, K)-$modul $\mathcal{H}_K^\infty$ dopustiv.

Pokazat će se da je pojam $(\mathfrak{g}, K)-$modula vrlo koristan u slučaju kad je G poluprosta Liejeva grupa s konačnim centrom (ili, općenitije, realna reduktivna Liejeva grupa) i K njena maksimalna kompaktna podgrupa. U tom slučaju postoji mnoštvo dopustivih reprezentacija. Posebno, svaka ireducibilna unitarna reprezentacija je dopustiva. Nadalje, unitarne reprezentacije su ekvivalentne (s izometričkim izomorfizmom) ako i samo ako su one infinitezimalno ekvivalentne. Napokon, ireducibilna reprezentacija je unitarna ako i samo ako je pripadni $(\mathfrak{g}, K)-$modul unitaran.

1.6 Poluproste i reduktivne Liejeve algebre

U ovom odjeljku navodimo bez dokaza niz standardnih rezultata o konačnodimenzionalnim Liejevim algebrama. Iako mnogi od tih rezultata vrijede i nad općenitiji poljima, zbog jednostavnosti pretpostavljamo da je polje ili $\mathbb{R}$ ili $\mathbb{C}$. Dakle, **u daljnjem je $\mathfrak{g}$ konačnodimenzionalna realna ili kompleksna Liejeva algebra**. Sa $\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$ označavamo njen centar

$$\mathcal{Z}(\mathfrak{g}) = \{x \in \mathfrak{g};\ [x,y] = 0\ \forall y \in \mathfrak{g}\}.$$

Ako su $\mathfrak{i}$ i $\mathfrak{j}$ ideali u $\mathfrak{g}$, suma $\mathfrak{i}+\mathfrak{j}$ i presjek $\mathfrak{i}\cap\mathfrak{j}$ također su ideali u $\mathfrak{g}$, a pomoću Jacobijevog identiteta lako se provjerava da je i potprostor $[\mathfrak{i},\mathfrak{j}]$ razapet svim komutatorima $[x,y]$, $x \in \mathfrak{i}$, $y \in \mathfrak{j}$, ideal u $\mathfrak{g}$. Nadalje, ako je $\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ homomorfizam Liejevih algebri i $\mathfrak{i}$ ideal u $\mathfrak{h}$, onda je

$$\varphi^{-1}(\mathfrak{i}) = \{x \in \mathfrak{g};\ \varphi(x) \in \mathfrak{i}\}$$

ideal u $\mathfrak{g}$. Posebno, ako je $\mathfrak{j}$ ideal u $\mathfrak{g}$ i $\mathfrak{i}$ ideal u kvocijentnoj algebri $\mathfrak{g}/\mathfrak{j}$, onda je

$$\{x \in \mathfrak{g};\ x + \mathfrak{j} \in \mathfrak{i}\}$$

ideal u $\mathfrak{g}$. Definiramo sada sljedeća tri niza ideala u Liejevoj algebri $\mathfrak{g}$:

izvedeni niz $\mathcal{D}^0(\mathfrak{g}) \supseteq \mathcal{D}^1(\mathfrak{g}) \supseteq \mathcal{D}^2(\mathfrak{g}) \supseteq \cdots\cdots$ definiran induktivno sa

$$\mathcal{D}^0(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}, \qquad \mathcal{D}^1(\mathfrak{g}) = [\mathfrak{g},\mathfrak{g}], \qquad \mathcal{D}^k(\mathfrak{g}) = [\mathcal{D}^{k-1}(\mathfrak{g}), \mathcal{D}^{k-1}(\mathfrak{g})], \quad k \geq 2;$$

centralni silazni niz $\mathcal{C}^0(\mathfrak{g}) \supseteq \mathcal{C}^1(\mathfrak{g}) \supseteq \mathcal{C}^2(\mathfrak{g}) \supseteq \cdots\cdots$ definiran induktivno sa

$$\mathcal{C}^0(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}, \qquad \mathcal{C}^1(\mathfrak{g}) = [\mathfrak{g},\mathfrak{g}], \qquad \mathcal{C}^k(\mathfrak{g}) = [\mathfrak{g}, \mathcal{C}^{k-1}(\mathfrak{g})], \quad k \geq 2;$$

centralni uzlazni niz $\mathcal{C}_0(\mathfrak{g}) \subseteq \mathcal{C}_1(\mathfrak{g}) \subseteq \mathcal{C}_2(\mathfrak{g}) \subseteq \cdots\cdots$ definiran induktivno sa

$$\mathcal{C}_0(\mathfrak{g}) = \{0\}, \qquad \mathcal{C}_1(\mathfrak{g}) = \mathcal{Z}(\mathfrak{g}),$$

$$\mathcal{C}_k(\mathfrak{g}) = \{x \in \mathfrak{g};\ x + \mathcal{C}_{k-1}(\mathfrak{g}) \in \mathcal{Z}(\mathfrak{g}/\mathcal{C}_{k-1}(\mathfrak{g}))\} = \{x \in \mathfrak{g};\ [x,y] \in \mathcal{C}_{k-1}(\mathfrak{g}),\ \forall y \in \mathfrak{g}\}, \quad k \geq 2.$$

$\mathfrak{g}$ je **rješiva Liejeva algebra** ako postoji $k \in \mathbb{Z}_+$ takav da je $\mathcal{D}^k(\mathfrak{g}) = \{0\}$. Očito su rješive svaka podalgebra i svaka kvocijentna Liejeva algebra rješive Liejeve algebre. Nadalje, lako se vidi da ako je $\mathfrak{i}$ rješiv ideal u Liejevoj algebri $\mathfrak{g}$ takav da je kvocijentna Liejeva algebra $\mathfrak{g}/\mathfrak{i}$ rješiva, onda je i $\mathfrak{g}$ rješiva. Odatle slijedi da ako su $\mathfrak{i}$ i $\mathfrak{j}$ rješivi ideali, onda je i ideal $\mathfrak{i}+\mathfrak{j}$ rješiv. Prema tome, u svakoj Liejevoj algebri $\mathfrak{g}$ postoji najveći rješivi ideal. On se zove **radikal** Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ i označavat ćemo ga sa $\mathcal{R}(\mathfrak{g})$. Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ je **poluprosta** ako je $\mathcal{R}(\mathfrak{g}) = \{0\}$, a **reduktivna** ako je $\mathcal{R}(\mathfrak{g}) = \mathcal{Z}(\mathfrak{g})$.

Propozicija 1.6.1. *Za svaku Liejevu algebru $\mathfrak{g}$ kvocijentna algebra $\mathfrak{g}/\mathcal{R}(\mathfrak{g})$ je poluprosta, odnosno $\mathcal{R}(\mathfrak{g}/\mathcal{R}(\mathfrak{g})) = \{0\}$.*

Primjer rješive Liejeve algebre je algebra $\mathfrak{t}(n,K)$ ($K = \mathbb{R}$ ili $K = \mathbb{C}$) svih gornje trokutastih kvadratnih matrica $n-$tog reda.

$\mathfrak{g}$ je **nilpotentna Liejeva algebra** ako postoji $k \in \mathbb{Z}_+$ takav da je $\mathcal{C}^k(\mathfrak{g}) = \{0\}$. Očito su nilpotentne svaka podalgebra i svaka kvocijentna algebra nilpotentne Liejeve algebre. Nadalje, ako je Liejeva algebra $\mathfrak{g}/\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$ nilpotentna, onda je i $\mathfrak{g}$ nilpotentna Liejeva algebra. Pokazuje se da je Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ nilpotentna ako i samo ako postoji $m \in \mathbb{Z}_+$ takav da je $\mathcal{C}_m(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}$. Posebno, ako je $\mathfrak{g} \neq \{0\}$ nilpotentna Liejeva algebra, onda je $\mathcal{Z}(\mathfrak{g}) \neq \{0\}$.

Nije teško vidjeti da je realna Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ nilpotentna (rješiva, poluprosta, reduktivna) ako i samo je njena kompleksifikacija $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ nilpotentna (rješiva, poluprosta, reduktivna).

Teorem 1.6.2. *Liejeva algebra* $\mathfrak{g}$ *je rješiva ako i samo ako je prvi izvedeni ideal* $\mathcal{D}(\mathfrak{g}) = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ *nilpotentan.*

Primjer nilpotentne Liejeve algebre je algebra $\mathfrak{n}(n, K)$ svih striktno gornje trokutastih kvadratnih matrica $n-$tog reda. Uočimo da je to upravo izvedeni ideal Liejeve algebre $\mathfrak{t}(n, K)$.

Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ je nilpotentna ako i samo ako postoji $k \in \mathbb{Z}_+$ takav da je

$$(ad\, x_1)(ad\, x_2) \cdots (ad\, x_k) = 0 \qquad \forall x_1, x_2, \dots, x_k \in \mathfrak{g}.$$

Posebno, tada vrijedi $(ad\, x)^k = 0$ $\forall x \in \mathfrak{g}$. Općenito za Liejevu algebru $\mathfrak{g}$ element $x \in \mathfrak{g}$ zove se **ad−nilpotentan** ako je linearan operator $ad\, x$ nilpotentan. Dakle, svaki element nilpotentne Liejeve algebre je ad−nilpotentan. Važna je i netrivijalna činjenica da vrijedi i obrat:

Teorem 1.6.3. (**Engel**) *Liejeva algebra je nilpotentna ako i samo ako je svaki njen element ad−nilpotentan.*

Glavni korak u dokazu ovog teorema je sljedeći teorem koji ima i druge važne posljedice:

Teorem 1.6.4. *Neka je* $V \neq \{0\}$ *konačnodimenzionalan vektorski prostor nad poljem* K $(= \mathbb{R}$ *ili* $\mathbb{C})$ *i* $\mathfrak{g}$ *Liejeva podalgebra od* $\mathfrak{gl}(V)$ *koja se sastoji od nilpotentnih operatora. Tada postoji* $v \in V$, $v \neq 0$, *takav da je* $Av = 0$ $\forall A \in \mathfrak{g}$.

Zastava u $n-$dimenzionalnom vektorskom prostoru V je svaka uređena $(n+1)-$torka $\mathcal{Z} = (V_0, V_1, \dots, V_n)$ potprostora od V takva da je

$$\{0\} = V_0 \subseteq V_1 \subseteq \cdots \subseteq V_n = V \qquad \text{i} \qquad \dim V_i = i \quad \forall i.$$

Korolar 1.6.5. *Uz pretpostavke teorema 1.6.4. postoji zastava* $\mathcal{Z} = (V_0, V_1, \dots, V_n)$ *u prostoru* V *takva da je* $AV_i \subseteq V_{i-1}$ $\forall A \in \mathfrak{g}$ *i* $\forall i \geq 1$. *Drugim riječima, postoji baza u prostoru* V *u odnosu na koju matrice operatora iz* $\mathfrak{g}$ *tvore Liejevu podalgebru od* $\mathfrak{n}(n, K)$.

Slične tvrdnje vrijede za rješive Liejeve algebre, ako je polje algebarski zatvoreno, odnosno, $K = \mathbb{C}$.

Teorem 1.6.6. (**Lie**) *Neka je* $V \neq \{0\}$ *konačnodimenzionalan kompleksan vektorski prostor i* $\mathfrak{g}$ *rješiva podalgebra Liejeve algebre* $\mathfrak{gl}(V)$. *Tada postoji vektor* $v \in V$, $v \neq 0$, *koji je svojstven za svaki operator* $A \in \mathfrak{g}$. *Postoji zastava* $\mathcal{Z}$ *u* V *invarijantna s obzirom na sve operatore* $A \in \mathfrak{g}$. *Postoji baza prostora* V *u odnosu na koju matrice operatora iz* $\mathfrak{g}$ *tvore Liejevu podalgebru od* $\mathfrak{t}(n, \mathbb{C})$.

Teorem 1.6.7. (**Cartanov kriterij rješivosti**) *Neka je* V *konačnodimenzionalan vektorski prostor i* $\mathfrak{g}$ *Liejeva podalgebra od* $\mathfrak{gl}(V)$ *takva da vrijedi*

$$Tr\, AB = 0 \qquad \forall A \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \quad i \quad \forall B \in \mathfrak{g}.$$

Tada je Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ *rješiva.*

Killingova forma $B_{\mathfrak{g}}$ Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ je simetrična bilinearna forma na $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ definirana sa

$$B_{\mathfrak{g}}(x, y) = Tr\, (ad\, x)(ad\, y), \qquad x, y \in \mathfrak{g}.$$

Ta je forma **invarijantna** u odnosu na sve automorfizme Liejeve algebre $\mathfrak{g}$:

$$B_{\mathfrak{g}}(\varphi(x), \varphi(y)) = B_{\mathfrak{g}}(x, y) \qquad \forall \varphi \in Aut(\mathfrak{g}) \quad \text{i} \quad \forall x, y \in \mathfrak{g}.$$

Posljedica toga je

$$B_{\mathfrak{g}}(Dx, y) + B_{\mathfrak{g}}(x, Dy) = 0 \qquad \forall D \in Der(\mathfrak{g}) \quad \text{i} \quad \forall x, y \in \mathfrak{g}.$$

Posebno, to vrijedi za svaku unutarnju derivaciju $D = ad\, z$, $z \in \mathfrak{g}$, odnosno,

$$B_{\mathfrak{g}}([x, z], y) = B_{\mathfrak{g}}(x, [z, y]) \qquad \forall x, y, z \in \mathfrak{g}.$$

Odatle slijedi da je za svaki ideal $\mathfrak{j}$ u Liejevoj algebri $\mathfrak{g}$ i potprostor

$$\mathfrak{j}^{\perp} = \{x \in \mathfrak{g};\ B_{\mathfrak{g}}(x, y) = 0\ \forall y \in \mathfrak{j}\}$$

ideal u $\mathfrak{g}$. Nadalje, lako se vidi da za svaki ideal $\mathfrak{j}$ u $\mathfrak{g}$ vrijedi $B_{\mathfrak{j}} = B_{\mathfrak{g}}|\mathfrak{j} \times \mathfrak{j}$.

Očito je Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ poluprosta ako i samo ako ona ne sadrži rješivi ideal različit od $\{0\}$. Lako se vidi da je tome ekvivalentno da $\mathfrak{g}$ ne sadrži komutativan ideal različit od $\{0\}$. Kažemo da je $\mathfrak{g}$ **prosta Liejeva algebra** ako je $\mathfrak{g}$ nekomutativna i ako su $\{0\}$ i $\mathfrak{g}$ jedini ideali u $\mathfrak{g}$.

Teorem 1.6.8. *Za Liejevu algebru $\mathfrak{g}$ sljedeća su tri svojstva međusobno ekvivalentna:*

(*a*) *Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ je poluprosta.*

(*b*) *Killingova forma $B_{\mathfrak{g}}$ je nedegenerirana, tj. iz $B_{\mathfrak{g}}(x, y) = 0\ \forall y \in \mathfrak{g}$ slijedi $x = 0$.*

(*c*) *$\mathfrak{g}$ je izomorfna direktnom produktu prostih Liejevih algebri.*

Teorem 1.6.9. *Neka je $\mathfrak{g} \neq \{0\}$ poluprosta Liejeva algebra i $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \dotplus \mathfrak{g}_2 \dotplus \cdots \dotplus \mathfrak{g}_k$, pri čemu su $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2, \ldots, \mathfrak{g}_k$ prosti ideali u $\mathfrak{g}$. Nadalje, neka je $\mathfrak{j} \neq \{0\}$ ideal u $\mathfrak{g}$. Tada vrijedi:*

(*a*) *Ideal $\mathfrak{j}$ je poluprost.*

(*b*) *Vrijedi $\mathfrak{g} = \mathfrak{j} \dotplus \mathfrak{j}^{\perp}$.*

(*c*) *Postoje $1 \leq i_1 < \cdots < i_\ell \leq k$ takvi da je $\mathfrak{j} = \mathfrak{g}_{i_1} \dotplus \cdots \dotplus \mathfrak{g}_{i_\ell}$.*

Posebno, $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2, \ldots, \mathfrak{g}_k$ su jedini prosti ideali u $\mathfrak{g}$.

Teorem 1.6.10. *Neka je $\mathfrak{g}$ poluprosta Liejeva algebra. Tada vrijedi:*

(*a*) $\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$.

(*b*) *$Der(\mathfrak{g}) = ad\, \mathfrak{g}$, tj. svaka derivacija Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ je unutarnja.*

Teorem 1.6.11. (**Weylov teorem potpune reducibilnosti**) *Svaka konačnodimenzionalna reprezentacija poluproste Liejeve algebre je potpuno reducibilna.*

Teorem 1.6.12. *Za Liejevu algebru $\mathfrak{g}$ sljedećih je sedam svojstava međusobno ekvivalentno:*

(*a*) *Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ je reduktivna, tj. $\mathcal{R}(\mathfrak{g}) = \mathcal{Z}(\mathfrak{g})$.*

(*b*) *Adjungirana reprezentacija $x \mapsto ad\, x$ Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ na prostoru $\mathfrak{g}$ je potpuno reducibilna.*

(*c*) *Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ izomorfna je direktnom produktu poluproste Liejeve algebre i komutativne Liejeve algebre.*

(*d*) *Prvi izvedeni ideal $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ je poluprosta Liejeva algebra.*

(e) $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}] \cap \mathcal{R}(\mathfrak{g}) = \{0\}$.

(f) *Postoji vjerna konačnodimenzionalna potpuno reducibilna reprezentacija od* $\mathfrak{g}$.

(g) *Postoji konačnodimenzionalna reprezentacija* π *od* $\mathfrak{g}$ *takva da je pridružena simetrična bilinearna forma* B_π *na* $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$, *zadana sa*

$$B_\pi(x,y) = Tr\,\pi(x)\pi(y), \qquad x,y \in \mathfrak{g},$$

nedegenerirana.

U tom je slučaju $\mathfrak{g} = [\mathfrak{g},\mathfrak{g}] \dot{+} \mathcal{Z}(\mathfrak{g})$.

Za Liejevu podalgebru $\mathfrak{h}$ Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ kažemo da je **reduktivna u $\mathfrak{g}$** ako je reprezentacija $x \mapsto ad_\mathfrak{g}\, x$ Liejeve algebre $\mathfrak{h}$ na vektorskom prostoru $\mathfrak{g}$ (tj. restrikcija $ad_\mathfrak{g}|\mathfrak{h}$) potpuno reducibilna. Budući da je subreprezentacija potpuno reducibilne reprezentacije i sama potpuno reducibilna, iz svojstva (b) u teoremu 1.6.12. slijedi da je u tom slučaju Liejeva algebra $\mathfrak{h}$ reduktivna.

Razmotrit ćemo sada još neke opće pojmove.

Propozicija 1.6.13. *Neka je* π *reprezentacija Liejeve algebre* $\mathfrak{g}$ *na konačnodimenzionalnom vektorskom prostoru* V *i* $(V_0, V_1, \dots, V_n)$ *kompozicioni niz u* V *u odnosu na reprezentaciju* π.

(a) *U skupu svih ideala* $\mathfrak{h}$ *u* $\mathfrak{g}$, *takvih da je operator* $\pi(y)$ *nilpotentan za svaki* $y \in \mathfrak{h}$, *postoji najveći element* $\mathfrak{n}_\pi$.

(b) *Vrijedi* $\mathfrak{n}_\pi = \{y \in \mathfrak{g};\ \pi(y)V_i \subseteq V_{i-1}\ \forall i \in \{1,\dots,n\}\,\}$.

(c) *Vrijedi* $B_\pi(x,y) = Tr\,\pi(x)\pi(y) = 0\ \forall x \in \mathfrak{g}$ *i* $\forall y \in \mathfrak{n}_\pi$.

Ideal $\mathfrak{n}_\pi$ iz propozicije 1.6.13. zove se **najveći ideal nilpotencije reprezentacije** π. Ako je $\mathfrak{n}$ ideal u Liejevoj algebri $\mathfrak{g}$, on je nilpotentan ako i samo ako je operator $ad_\mathfrak{g}\, x$ nilpotentan za svaki $x \in \mathfrak{h}$. Stoga primjena propozicije 1.6.13. na adjungiranu reprezentaciju daje:

Korolar 1.6.14. *Neka je* $\mathfrak{g}$ *Liejeva algebra i neka je* $(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_1, \dots, \mathfrak{g}_n)$ *bilo koji kompozicioni niz prostora* $\mathfrak{g}$ *u odnosu na adjungiranu reprezentaciju* $ad_\mathfrak{g}$.

(a) *U skupu svih nilpotentnih ideala u Liejevoj algebri* $\mathfrak{g}$ *postoji najveći element* $\mathfrak{n}$.

(b) *Vrijedi* $\mathfrak{n} = \{y \in \mathfrak{g};\ [y, \mathfrak{g}_i] \subseteq \mathfrak{g}_{i-1}\ \forall i \in \{1,\dots,n\}\,\}$.

(c) *Vrijedi* $B_\mathfrak{g}(x,y) = 0\ \forall x \in \mathfrak{g}$ *i* $\forall y \in \mathfrak{n}$.

Ideal $\mathfrak{n}$ iz korolara 1.6.14. zove se **najveći nilpotentni ideal** Liejeve algebre $\mathfrak{g}$. Važno je uočiti da u kvocijentnoj Liejevoj algebri $\mathfrak{g}/\mathfrak{n}$ mogu postojati nilpotentni ideali različiti od $\{0\}$.

Nilradikal Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ je presjek jezgara svih ireducibilnih konačnodimenzionalnih reprezentacija od $\mathfrak{g}$. Lako se vidi da je nilradikal najmanji element skupa jezgara svih konačnodimenzionalnih potpuno reducibilnih reprezentacija od $\mathfrak{g}$.

Teorem 1.6.15. *Neka je* $\mathfrak{g}$ *Liejeva algebra,* $\mathfrak{r} = \mathcal{R}(\mathfrak{g})$ *njen radikal,* $\mathfrak{s}$ *njen nilradikal i* $\mathfrak{n}$ *njen najveći nilpotentni ideal.*

(a) *Ideal* $\mathfrak{s}$ *sadržan je u najvećem idealu nilpotencije svake konačnodimenzionalne reprezentacije od* $\mathfrak{g}$.

(*b*) *Ideal* $\mathfrak{s}$ *je nilpotentan, tj.* $\mathfrak{s} \subseteq \mathfrak{n}$.

(*c*) *Vrijedi* $\mathfrak{s} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{r}] = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \cap \mathfrak{r}$.

(*d*) *Vrijedi* $\mathfrak{r} = \{y \in \mathfrak{g};\ B_\mathfrak{g}(x, y) = 0\ \forall x \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]\}$.

(*e*) *Za svaku konačnodimenzionalnu reprezentaciju* π *i pridruženu simetričnu bilinearnu formu* B_π *vrijedi* $B_\pi(x, y) = 0\ \ \forall x \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ *i* $\forall y \in \mathfrak{r}$.

(*f*) *Vrijedi*

$$\mathfrak{s} = \bigcap \{Rad\, B_\pi;\ \pi \text{ konačnodimenzionalna reprezentacija od } \mathfrak{g}\}.$$

Pri tome je B_π *radikal forme* B_π, *tj.* $Rad\, B_\pi = \{x \in \mathfrak{g};\ B_\pi(x, y) = 0\ \forall y \in \mathfrak{g}\}$.

(*g*) *Vrijedi* $D\mathfrak{r} \subseteq \mathfrak{n}\ \ \forall D \in Der(\mathfrak{g})$. *Posebno,* $D\mathfrak{n} \subseteq \mathfrak{n}$ *i* $D\mathfrak{r} \subseteq \mathfrak{r}\ \ \forall D \in Der(\mathfrak{g})$.

Korolar 1.6.16. *Liejeva algebra* $\mathfrak{g}$ *je rješiva ako i samo ako je* $B_\mathfrak{g}(x, y) = 0\ \ \forall x \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ *i* $\forall y \in \mathfrak{g}$.

Neka je $\mathfrak{g}$ reduktivna Liejeva algebra. **Toralna podalgebra** od $\mathfrak{g}$ je Liejeva podalgebra $\mathfrak{h}$ takva da su svi operatori $ad\, x$, $x \in \mathfrak{h}$, poluprosti. Pokazuje se da je toralna podalgebra nužno komutativna. **Cartanova podalgebra** od $\mathfrak{g}$ je svaka maksimalna toralna podalgebra od $\mathfrak{g}$. Očito svaka Cartanova podalgebra $\mathfrak{h}$ sadrži centar $\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$, vrijedi $\mathfrak{h} = \mathcal{Z}(\mathfrak{g}) \dotplus [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \cap \mathfrak{h}$ i $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \cap \mathfrak{h}$ je Cartanova podalgebra poluproste Liejeve algebre $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$. Ako je $\mathfrak{g}$ realna reduktivna Liejeva algebra, lako se vidi da je podalgebra $\mathfrak{h}$ od $\mathfrak{g}$ toralna (odnosno, Cartanova) ako i samo ako je njena kompleksifikacija $\mathfrak{h}^\mathbb{C}$ toralna (odnosno, Cartanova) podalgebra od $\mathfrak{g}^\mathbb{C}$.

U daljnjem je sve do konca ovog odjeljka $\mathfrak{g}$ kompleksna reduktivna Liejeva algebra. Sa $Int(\mathfrak{g})$ označavamo grupu njenih unutarnjih automorfizama, tj. podgrupu od $Aut(\mathfrak{g})$ generiranu svim automorfizmima oblika e^{ad}, $x \in \mathfrak{g}$.

Teorem 1.6.17. *Neka su* $\mathfrak{h}$ *i* $\mathfrak{h}'$ *Cartanove podalgebre kompleksne reduktivne Liejeve algebre* $\mathfrak{g}$. *Tada postoji* $\varphi \in Int(\mathfrak{g})$ *takav da je* $\mathfrak{h}' = \varphi(\mathfrak{h})$.

Neka su D_j polinomi na $\mathfrak{g}$ definirani kao koeficijenti svojstvenog polinoma operatora $ad\, x$, $x \in \mathfrak{g}$, tj.

$$\det(tI - ad\, x) = \sum_j t^j D_j(x), \qquad x \in \mathfrak{g}.$$

Neka je r najmanji indeks takav da polinom D_j nije identički jednak nuli. Za **element** $x \in \mathfrak{g}$ kažemo da je **regularan**, ako je $D_r(x) \neq 0$.

Teorem 1.6.18. *Ako je element* $x \in \mathfrak{g}$ *regularan, tada je operator* $ad\, x$ *poluprost. Nadalje, tada je njegov centralizator*

$$C_\mathfrak{g}(x) = \{y \in \mathfrak{g};\ [x, y] = 0\}$$

Cartanova podalgebra od $\mathfrak{g}$.

Neka je u daljnjem $\mathfrak{h}$ Cartanova podalgebra kompleksne reduktivne Liejeve algebre $\mathfrak{g}$. Za $\alpha \in \mathfrak{h}^*$ stavimo

$$\mathfrak{g}_\alpha = \{x \in \mathfrak{g};\ [h, x] = \alpha(h)x\ \forall h \in \mathfrak{h}\}.$$

Ako su $\alpha \neq 0$ i $\mathfrak{g}_\alpha \neq \{0\}$ kažemo da je α **korijen** Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ u odnosu na Cartanovu podalgebru $\mathfrak{h}$. Za $\mathfrak{g}_\alpha$ kažemo da je pripadni **korijenski potprostor**. Skup svih korijena od $\mathfrak{g}$ u odnosu na $\mathfrak{h}$ označavamo sa $R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ i zovemo **sistem korijena** od $\mathfrak{g}$ u odnosu na $\mathfrak{h}$.

Teorem 1.6.19. *Uz uvedene oznake vrijedi:*

(a) $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \dotplus \sum_{\alpha \in R(\mathfrak{g},\mathfrak{h})} \dotplus \mathfrak{g}_\alpha$.

(b) $\dim \mathfrak{g}_\alpha = 1 \ \forall \alpha \in R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$.

(c) *Ako su* $\alpha, \beta \in R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ *i* $\alpha + \beta \neq 0$ *onda je* $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] = \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$.

(d) *Za svaki* $\alpha \in R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ *je* $\mathbb{C}\alpha \cap R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) = \{\alpha, -\alpha\}$.

Za simetričnu bilinearnu formu B na $\mathfrak{g}$ kažemo da je **invarijantna** ako je

$$B([x, y], z) = B(x, [y, z]) \qquad \forall x, y, z \in \mathfrak{g}.$$

Na $\mathfrak{g}$ uvijek postoji nedegenerirana invarijantna simetrična bilinearna forma: na poluprostoj Liejevoj algebri $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ uzmemo Killingovu formu, a na $\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$ bilo koju nedegeneriranu simetričnu bilinearnu formu; tada je njihova direktna suma nedegenerirana invarijantna simetrična bilinearna forma na $\mathfrak{g}$. **U daljnjem je B bilo koja nedegenerirana invarijantna simetrična bilinearna forma na $\mathfrak{g}$.** Lako se vidi da je $B(\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta) = \{0\}$ ako su $\alpha, \beta \in R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ i $\alpha + \beta \neq 0$. Nadalje, za svaki $\alpha \in R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ je $B(\mathfrak{h}, \mathfrak{g}_\alpha) = \{0\}$. Prema tome, restrikcija $B|\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}$ je nedegenerirana simetrična bilinearna forma na $\mathfrak{h}$. Dakle, definiran je izomorfizam $\mu \mapsto h_\mu$ sa $\mathfrak{h}^*$ na $\mathfrak{h}$:

$$B(h, h_\mu) = \mu(h) \qquad \forall h \in \mathfrak{h}.$$

Pomoću tog izomorfizma prenosimo formu B s prostora $\mathfrak{h}$ na dualni prostor $\mathfrak{h}^*$ i dobivenu nedegeneriranu simetričnu bilinearnu formu na $\mathfrak{h}^*$ označavamo sa $(\,\cdot\,|\,\cdot\,)$:

$$(\lambda|\mu) = B(h_\lambda, h_\mu), \qquad \lambda, \mu \in \mathfrak{h}^*.$$

Definiramo sada realne potprostore $\mathfrak{h}_\mathbb{R}$ od $\mathfrak{h}$ i $\mathfrak{h}^*_\mathbb{R}$ od $\mathfrak{h}^*$ ovako:

$$\mathfrak{h}_\mathbb{R} = span_\mathbb{R}\,\{h_\alpha;\ \alpha \in R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})\}, \qquad \mathfrak{h}^*_\mathbb{R} = span_\mathbb{R}\, R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}).$$

Teorem 1.6.20. *Uz uvedene oznake vrijedi:*

(a) $\lambda \mapsto \lambda|\mathfrak{h}_\mathbb{R}$ *je izomorfizam realnog prostora* $\mathfrak{h}^*_\mathbb{R}$ *na dualni prostor realnog prostora* $\mathfrak{h}_\mathbb{R}$.

(b) *Restrikcija forme* B *na* $\mathfrak{h}_\mathbb{R} \times \mathfrak{h}_\mathbb{R}$ *je skalarni produkt na realnom prostoru* $\mathfrak{h}_\mathbb{R}$ *i restrikcija forme* $(\,\cdot\,|\,\cdot\,)$ *je skalarni produkt na realnom prostoru* $\mathfrak{h}^*_\mathbb{R}$. *Posebno,* $(\alpha|\alpha) > 0 \ \forall \alpha \in R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$.

(c) *Realan prostor* $\mathfrak{h}_\mathbb{R}$ *je realna forma kompleksnog prostora* $\mathfrak{h} \cap [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, *tj.* $\mathfrak{h} \cap [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{h}_\mathbb{R} \dotplus i\mathfrak{h}_\mathbb{R}$.

Za $\alpha \in R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ definiramo sa s_α refleksiju prostora $\mathfrak{h}$ u odnosu na hiperplohu $\{h \in \mathfrak{h};\ \alpha(h) = 0\}$ definiranu sa

$$s_\alpha h = h - 2\frac{\alpha(h)}{(\alpha|\alpha)} h_\alpha, \qquad h \in \mathfrak{h}.$$

Operatori s_α zovu se **Weylove refleksije**. Istim znakom označavamo i dualan operator na $\mathfrak{h}^*$, tj.

$$s_\alpha \lambda = \lambda - 2\frac{\lambda(h_\alpha)}{(\alpha|\alpha)} \alpha, \qquad \lambda \in \mathfrak{h}^*.$$

Teorem 1.6.21. *Uz uvedene oznake za svaki $\alpha \in R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ vrijedi:*

(a) $s_\alpha R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) = R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$.

(b) $s_\alpha \mathfrak{h}_\mathbb{R} = \mathfrak{h}_\mathbb{R}$ *i u odnosu na skalarni produkt* $B|\mathfrak{h}_\mathbb{R} \times \mathfrak{h}_\mathbb{R}$ *operator* s_α *je ortogonalna refleksija.*

(c) $s_\alpha \mathfrak{h}^*_\mathbb{R} = \mathfrak{h}^*_\mathbb{R}$ *i u odnosu na skalarni produkt* $(\,\cdot\,|\,\cdot\,)|\mathfrak{h}_\mathbb{R} \times \mathfrak{h}_\mathbb{R}$ *operator* s_α *je ortogonalna refleksija.*

Iz tvrdnje (a) prethodnog teorema grupa $W(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ generirana svim refleksijama s_α je konačna podgrupa od $GL(\mathfrak{h})$ (i od $GL(\mathfrak{h}^*)$). Nadalje, kako je $w|\mathcal{Z}(\mathfrak{g}) = I_{\mathcal{Z}(\mathfrak{g})}$, restrikcija $w \mapsto w|\mathfrak{h}_\mathbb{R}$ (odnosno, $w \mapsto w|\mathfrak{h}^*_\mathbb{R}$) je zbog tvrdnje (b) (odnosno, zbog tvrdnje (c)) izomorfizam grupe $W(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ na podgrupu ortogonalne grupe $O(\mathfrak{h}_\mathbb{R})$ realnog unitarnog prostora $\mathfrak{h}_\mathbb{R}$ (odnosno, na podgrupu ortogonalne grupe $O(\mathfrak{h}^*_\mathbb{R})$ realnog unitarnog prostora $\mathfrak{h}^*_\mathbb{R}$). Konačna grupa $W(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ zove se **Weylova grupa** Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ u odnosu na Cartanovu podalgebru $\mathfrak{h}$.

Stavimo
$$\mathfrak{h}'_\mathbb{R} = \{h \in \mathfrak{h}_\mathbb{R};\ \alpha(h) \neq 0\ \forall \alpha \in R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})\}.$$
Komponente povezanosti skupa $\mathfrak{h}'_\mathbb{R}$ zovu se **Weylove komore**. Neka je $\mathcal{C}$ skup svih Weylovih komora.

Za podskup $P \subseteq R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ kažemo da je **sistem pozitivnih korijena** ako je $R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ disjunktna unija skupova P i $-P = \{-\alpha,\ \alpha \in P\}$ i ako vrijedi:
$$\alpha, \beta \in P, \quad \alpha + \beta \in R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) \qquad \Longrightarrow \qquad \alpha + \beta \in P.$$
Sa $\mathcal{P}$ označavamo skup svih sistema pozitivnih korijena. Za **korijen** $\alpha \in P$ kažemo da je **prost** u odnosu na P ako ne postoje $\beta, \gamma \in P$ takvi da je $\alpha = \beta + \gamma$. Sa $B(P)$ označavamo skup svih prostih korijena u odnosu na P. Nadalje, stavljamo $\mathcal{B} = \{B(P);\ P \in \mathcal{P}\}$. Element skupa $\mathcal{B}$ zove se **baza sistema korijena** $R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$.

Teorem 1.6.22. *Uz uvedene oznake vrijedi:*

(a) $P \mapsto \{h \in \mathfrak{h}_\mathbb{R};\ \alpha(h) > 0\ \forall \alpha \in P\}$ *je bijekcija sa* $\mathcal{P}$ *na* $\mathcal{C}$. *Inverzna je bijekcija dana sa* $C \mapsto \{\alpha \in R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h});\ \alpha(h) > 0\ \forall h \in C\}$.

(b) *Za svaki* $P \in \mathcal{P}$ *skup* $B(P)$ *je baza realnog vektorskog prostora* $\mathfrak{h}^*_\mathbb{R}$.

(c) *Podskup* $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell\} \subseteq R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ *je element skupa* $\mathcal{B}$ *ako i samo ako za svaki* $\beta \in R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ *postoje jedinstveni* $c_1, \ldots, c_\ell \in \mathbb{Z}_+$ *takvi da je* $\beta = \pm \sum_{i=1}^{\ell} c_i \alpha_i$.

(d) $P \mapsto B(P)$ *je bijekcija sa* $\mathcal{P}$ *na* $\mathcal{B}$. *Inverzno preslikavanje je*
$$B \mapsto R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) \cap span_{\mathbb{Z}_+} B = \left\{ \beta \in R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h});\ \beta = \sum_{\alpha \in B} c_\alpha \alpha \text{ za neke } c_\alpha \in \mathbb{Z}_+ \right\}.$$

(e) *Weylova grupa* $W(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ *djeluje prosto tranzitivno na skupu* $\mathcal{C}$ *svih Weylovih komora. Dakle, za* $C, C' \in \mathcal{C}$ *postoji jedinstven* $w \in W(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ *takav da je* $C' = wC$.

(f) *Weylova grupa* $W(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ *djeluje prosto tranzitivno na skupu* $\mathcal{P}$ *svih sistema pozitivnih korijena.*

(g) *Weylova grupa* $W(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ *djeluje prosto tranzitivno na skupu* $\mathcal{B}$ *svih baza sistema korijena* $R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$.

(h) *Ako je* $B \in \mathcal{B}$, *Weylova grupa* $W(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ *generirana je skupom* $\{s_\alpha;\ \alpha \in B\}$.

1.7 Kompaktne Liejeve grupe

Neka je G kompaktna Liejeva grupa i $\mathfrak{g}$ njena Liejeva algebra. Neka je μ normirana Haarova mjera na G. Ako je $\langle \cdot | \cdot \rangle$ bilo koji skalarni produkt na (realnom) vektorskom prostoru $\mathfrak{g}$. Tada je sa

$$(x|y) = \int_G \langle (Ad\, k)x | (Ad\, k)y \rangle \mathrm{d}\mu(k), \qquad x, y \in \mathfrak{g}$$

definiran novi skalarni produkt na $\mathfrak{g}$ i taj je invarijantan s obzirom na djelovanje grupe G. Drugim riječima, reprezentacija $k \mapsto Ad\, k$ grupe G na unitarnom prostoru $\mathfrak{g}$ (uz novi skalarni produkt $(\cdot | \cdot)$) je unitarna, dakle, potpuno reducibilna. Odatle slijedi da je pripadna reprezentacija $x \mapsto ad\, x$ Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ na prostoru $\mathfrak{g}$ potpuno reducibilna, odnosno, Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ je reduktivna. Promatrajmo sada reprezentacije Ad i ad od G i $\mathfrak{g}$ na kompleksifikaciji $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ od $\mathfrak{g}$. Tada su svi operatori $ad\, x$, $x \in \mathfrak{g}$, antihermitski na prostoru $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ sa skalarnim produktom koji je jedinstveno seskvilinearno proširenje od $(\cdot | \cdot)$. To znači da je svaki $ad\, x$, $x \in \mathfrak{g}$, dijagonalizabilan i ima čisto imaginaran spektar. Posebno, vrijedi

$$B_{\mathfrak{g}}(x, x) = Tr\,(ad\, x)^2 \leq 0 \qquad \forall x \in \mathfrak{g},$$

odnosno, Killingova forma $B_{\mathfrak{g}}$ je negativno semidefinitna. Nadalje, vrijedi

$$B_{\mathfrak{g}}(x, x) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad ad\, x = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x \in \mathcal{Z}(\mathfrak{g}).$$

Dakle, Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ je poluprosta ako i samo ako je Killingova forma $B_{\mathfrak{g}}$ negativno definitna. Važno je da za povezane Liejeve grupe vrijedi i obrat o čemu govori sljedeći **Weylov teorem**:

Teorem 1.7.1. *Ako je G povezana Liejeva grupa s Liejevom algebrom $\mathfrak{g}$ i ako je Killingoova forma $B_{\mathfrak{g}}$ negativno definitna, onda je grupa G kompaktna.*

Torus je kompaktna komutativna povezana Liejeva grupa. Neka je T torus i $\mathfrak{t}$ njena Liejeva algebra. Tada se lako vidi da je exp natkrivanje sa $\mathfrak{t}$ na T. Ustvari, aditivna grupa $\mathfrak{t}$ s preslikavanjem $\exp : \mathfrak{t} \to T$ je univerzalna natkrivajuća grupa od T. Jezgra $L = \mathrm{Ker}(\exp)$ je rešetka u $\mathfrak{t}$, tj. L je slobodan $\mathbb{Z}-$modul ranga $\dim \mathfrak{t}$. Neka je $\hat{T}$ skup svih neprekidnih homomorfizama grupe T u multiplikativnu grupu $S = \{\lambda \in \mathbb{C};\ |\lambda| = 1\}$. Za $\mu \in \hat{T}$ ćemo istim znakom μ označavati i njegov diferencijal:

$$\mu(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\, \mu(\exp\, tx)\bigg|_{t=0}, \qquad x \in \mathfrak{t}.$$

Tada je μ $\mathbb{R}-$linearna forma sa $\mathfrak{t}$ u $i\mathbb{R}$ takva da je $\mu(L) \subseteq 2\pi i\mathbb{Z}$. Svaka takva $\mathbb{R}-$linearna forma sa $\mathfrak{t}$ u $i\mathbb{R}$ zove se $T-$**integralna**. Za $\mathbb{R}-$linearnu $T-$integralnu formu $\mu : \mathfrak{t} \to i\mathbb{R}$ dobro je definirano preslikavanje $\mu : T \to S$ sa

$$\mu(\exp\, x) = \mathrm{e}^{\mu(x)}, \qquad x \in \mathfrak{t}.$$

Dakle, dobili smo identifikaciju $\hat{T}$ sa skupom svih $\mathbb{R}-$linearnih $T-$integralnih formi sa $\mathfrak{t}$ u $i\mathbb{R}$.

Neka je sada G kompaktna povezana Liejeva grupa s Liejevom algebrom $\mathfrak{g}$. **Torus u grupi** G je zatvorena podgrupa od G koja je torus. **Maksimalni torus** u G je torus T u G takav da ne postoji torus T' u G sa svojstvom $T' \supsetneq T$. Neka je T maksimalni torus u G i neka su $\mathfrak{t}$ i $\mathfrak{g}$ Liejeve algebre od T i G. Tada je $\mathfrak{t}$ maksimalna komutativna podalgebra od $\mathfrak{g}$ koja je toralna, dakle, $\mathfrak{t}$ je Cartanova podalgebra od $\mathfrak{g}$. Stoga je $\mathfrak{t}^{\mathbb{C}}$ Cartanova podalgebra od $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ i restrikcije korijena iz $R\left(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}, \mathfrak{t}^{\mathbb{C}}\right)$ na $\mathfrak{t}$ su $\mathbb{R}-$linearne $T-$integralne forme sa $\mathfrak{t}$ u $i\mathbb{R}$. Stoga se sistem korijena $R\left(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}, \mathfrak{t}^{\mathbb{C}}\right)$ identificira s podskupom od $\hat{T}$.

Sljedeći teorem sadrži niz svojstava maksimalnih torusa u kompaktnim povezanim Liejevim grupama.

Teorem 1.7.2. *Neka je G kompaktna povezana Liejeva grupa s Liejevom algebrom $\mathfrak{g}$.*

(a) *Maksimalni torus u G je maksimalna komutativna podgrupa od G.*

(b) *Ako su T i T' maksimalni torusi u G, postoji $g \in G$ takav da je $T' = gTg^{-1}$.*

(c) *Svaki element grupe G sadržan je u nekom maksimalnom torusu u G. Ekvivalentno, eksponencijalno preslikavanje $\exp : \mathfrak{g} \to G$ je surjektivno.*

(d) *Ako je T maksimalni torus u G, mnogostrukost G/T je jednostavno povezana.*

(e) *Neka je T maksimalni torus u G s Liejevom algebrom $\mathfrak{t}$. Označimo sa $N_G(T)$ normalizator od T u G,*

$$N_G(T) = \{g \in G;\ gTg^{-1} = T\},$$

i neka je $W(G,T)$ kvocijentna grupa $N_G(T)/T$. Za $g \in s \in W(G,T)$ dobro je definirano preslikavanje $\varphi(s) : \mathfrak{t}^{\mathbb{C}} \to \mathfrak{t}^{\mathbb{C}}$ sa

$$\varphi(s)x = (Ad\, g)x, \qquad x \in \mathfrak{t}^{\mathbb{C}}.$$

Tada je φ izomorfizam grupe $W(G,T)$ na Weylovu grupu $W\left(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}, \mathfrak{t}^{\mathbb{C}}\right)$.

Realna forma kompleksne Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ je realna Liejeva podalgebra $\mathfrak{g}_0$ od $\mathfrak{g}$ takva da je $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \dotplus i\mathfrak{g}_0$. **Konjugacija** kompleksne Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ je antilinearna involutivna bijekcija $\sigma : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ takva da je $\sigma([x,y]) = [\sigma(x), \sigma(y)]\ \forall x,y \in \mathfrak{g}$. Za konjugaciju σ od $\mathfrak{g}$ stavimo $\mathfrak{g}^\sigma = \{x \in \mathfrak{g};\ \sigma(x) = x\}$.

Propozicija 1.7.3. *Neka je $\mathfrak{g}$ kompleksna Liejeva algebra.*

(a) *$\sigma \mapsto \mathfrak{g}^\sigma$ je bijekcija sa skupa svih konjugacija od $\mathfrak{g}$ na skup svih realnih formi od $\mathfrak{g}$.*

(b) *Za konjugaciju σ od $\mathfrak{g}$ označimo sa $(\,\cdot\,|\,\cdot\,)_\sigma$ seskvilinearnu formu na $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ definirana pomoću Killingove forme $B_{\mathfrak{g}}$ sa*

$$(x|y)_\sigma = -B_{\mathfrak{g}}(x, \sigma(y)), \qquad x,y \in \mathfrak{g}.$$

Tada je $(\,\cdot\,|\,\cdot\,)_\sigma$ je hermitska forma na $\mathfrak{g}$, tj. vrijedi $(x|y)_\sigma = \overline{(y|x)_\sigma}\ \forall x,y \in \mathfrak{g}$.

(c) *Hermitska forma $(\,\cdot\,|\,\cdot\,)_\sigma$ ima sljedeća svojstva invarijantnosti:*

$$((ad\, x)y|z)_\sigma = -(y|(ad\, \sigma(x))z)_\sigma \qquad \forall x,y,z \in \mathfrak{g}$$

i

$$(\varphi(x)|\varphi(y))_\sigma = (x|y)_\sigma \qquad \forall x,y \in \mathfrak{g} \quad i \quad \forall \varphi \in Aut_\sigma(\mathfrak{g}) = \{\psi \in Aut(\mathfrak{g});\ \psi \circ \sigma = \sigma \circ \psi\}.$$

Kompaktna Liejeva algebra je realna Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ takva da na prostoru $\mathfrak{g}$ postoji skalarni produkt $(\,\cdot\,|\,\cdot\,)$ u odnosu na koji su svi operatori $ad\, x$, $x \in \mathfrak{g}$, antihermitski:

$$((ad\, x)y|z) = -(y|(ad\, x)z) \qquad \forall x,y,z \in \mathfrak{g}.$$

Kompaktna forma kompleksne Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ je realna forma $\mathfrak{u}$ od $\mathfrak{g}$ koja je kompaktna Liejeva algebra. **Kompaktna konjugacija** kompleksne Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ je konjugacija τ od $\mathfrak{g}$ takva da je $\mathfrak{g}^\tau$ kompaktna forma od $\mathfrak{g}$. Naravno, $\tau \mapsto \mathfrak{g}^\tau$ je bijekcija sa skupa svih kompaktnih konjugacija od $\mathfrak{g}$ na skup svih kompaktnih formi od $\mathfrak{g}$. Sljedeće dvije propozicije su jednostavne posljedice definicije:

Propozicija 1.7.4. *Kompaktna Liejeva algebra je reduktivna. Realna reduktivna Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ je kompaktna ako i samo ako je poluprosta Liejeva algebra $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ kompaktna.*

Propozicija 1.7.5. (*a*) *Konjugacija τ kompleksne poluproste Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ je kompaktna ako i samo ako je $(\,\cdot\,|\,\cdot\,)_\tau$ skalarni produkt na prostoru $\mathfrak{g}$.*

(*b*) *Realna poluprosta Liejeva algebra $\mathfrak{g}_0$ je kompaktna ako i samo ako je njena Killingova forma $B_{\mathfrak{g}_0}$ negativno definitna.*

(*c*) *Realna reduktivna Liejeva algebra $\mathfrak{g}_0$ je kompaktna ako i samo ako je njena Killingova forma $B_{\mathfrak{g}_0}$ negativno semidefinitna.*

Pomoću ovih činjenica dokazuje se da vrijedi:

Teorem 1.7.6. (**H. Weyl**) *Neka je $\mathfrak{g}$ kompleksna poluprosta Liejeva algebra i $\mathfrak{h}$ njena Cartanova podalgebra. Tada postoji kompaktna konjugacija τ od $\mathfrak{g}$ takva da je $\tau(\mathfrak{h})=\mathfrak{h}$. Tada je $\mathfrak{h}\cap\mathfrak{g}^\tau$ realna forma od $\mathfrak{h}$ i to je maksimalna komutativna podalgebra* (*tj. Cartanova podalgebra*) *kompaktne Liejeve algebre $\mathfrak{g}^\tau$.*

Kompaktna konjugacija u Weylovom teoremu 1.7.6. može se konstruirati na sljedeći način. Neka je $\{\alpha_1,\ldots,\alpha_\ell\}$ baza sistema korijena $R(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$. Izaberimo $x_j\in\mathfrak{g}_{\alpha_j}$, $y_j\in\mathfrak{g}_{-\alpha_j}$, $h_j\in[\mathfrak{g}_{\alpha_j},\mathfrak{g}_{-\alpha_j}]$, $j=1,\ldots,\ell$, tako da bude $\alpha_j(h_j)=2$, tj.

$$[h_j,x_j]=2x_j,\qquad [h_j,y_j]=-2y_j,\qquad [x_j,y_j]=h_j,\qquad j=1,\ldots,\ell.$$

Budući da je tada i $\{-\alpha_1,\ldots,-\alpha_\ell\}$ baza sistema korijena $W(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$, i za $k_j=-h_j$, $e_j=-y_j$ i $f_j=-x_j$ vrijedi

$$[k_j,e_j]=2e_j,\qquad [k_j,f_j]=-2f_j,\qquad [e_j,f_j]=k_j,\qquad j=1,\ldots,\ell,$$

pokazuje se da postoji jedinstvena konjugacija τ od $\mathfrak{g}$ takva da vrijedi

$$\tau(h_j)=-h_j,\qquad \tau(x_j)=-y_j,\qquad \tau(y_j)=-x_j,\qquad j=1,\ldots,\ell.$$

To je tražena kompaktna konjugacija od $\mathfrak{g}$.

Weylov teorem 1.7.6. često se zove **Weylov unitarni trik**. Iz njega se relativno jednostavno dokazuje Weylov teorem 1.6.11. o potpunoj reducibilnosti.

1.8 Trodimenzionalne proste Liejeve algebre

Kompleksna Liejeva algebra $\mathfrak{s}$ zove se **trodimenzionalna prosta Liejeva algebra**, ako postoji baza $\{h,x,y\}$ od $\mathfrak{s}$ takva da je

$$[h,x]=2x,\qquad [h,y]=-2y,\qquad [x,y]=h.$$

Takva se Liejeva algebra zove kratko TDS. Lako se vidi da je ona stvarno prosta. Primjer je Liejeva algebra $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ s kojom je izomorfna svaka TDS, a izomorfizam je dan sa

$$h\mapsto\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix},\qquad x\mapsto\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix},\qquad y\mapsto\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}.$$

Prema tome, ako je $\mathfrak{s}$ TDS i ako je $\mathfrak{u}$ realna forma od $\mathfrak{s}$ razapeta nad $\mathbb{R}$ sa $\{x-y,i(x+y),ih\}$, onda je $\mathfrak{u}$ izomorfna Liejevoj algebri $\mathfrak{su}(2)$ kompaktne grupe $SU(2)$ svih 2×2 unitarnih matrica determinante 1.

Neka je $\mathfrak{s}$ TDS s kanonskom bazom $\{h, x, y\}$. Neka je π reprezentacija od $\mathfrak{s}$ na prostoru V. Stavimo

$$H = \pi(h), \qquad X = \pi(x), \qquad Y = \pi(y). \tag{1.5}$$

Tada je

$$[X, Y] = H, \qquad [H, X] = 2X, \qquad [H, Y] = -2Y. \tag{1.6}$$

Obratno, ako su H, X i Y linearni operatori na kompleksnom vektorskom prostoru V koji zadovoljavaju (1.6), onda postoji jedinstvena reprezentacija π Liejeve algebre $\mathfrak{s}$ na prostoru V takva da vrijedi (1.5). Iz (1.6) indukcijom po n lako slijedi da vrijedi

$$[H, X^n] = 2nX^n, \quad [H, Y^n] = -2nY^n \quad \text{i} \quad [X, Y^n] = nY^{n-1}(H - n + 1) \qquad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{1.7}$$

U daljnjem je π reprezentacija od $\mathfrak{s}$ na kompleksnom vektorskom prostoru V i H, X, Y su linearni operatori na V definirani sa (1.5). Za $\lambda \in \mathbb{C}$ označimo sa V_λ pripadni svojstveni potprostor operatora H :

$$V_\lambda = \{v \in V;\ Hv = \lambda v\}.$$

Iz prvih dviju komutacionih relacija u (1.7) neposredno slijedi:

$$X^n V_\lambda \subseteq V_{\lambda+2n} \qquad \text{i} \qquad Y^n V_\lambda \subseteq V_{\lambda-2n} \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Odatle je lako dokazati:

Propozicija 1.8.1. *Neka je $v \in V_\lambda$ takav da je $Xv = 0$. Tada vrijedi:*

(a) $XY^n v = n(\lambda - n + 1)Y^{n-1}v \ \ \forall n \in \mathbb{N}$.

(b) Ako je $v \neq 0$ i $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_+$ onda je $Y^n v \neq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

(c) Ako je $m \in \mathbb{Z}_+$ takav da je $Y^m v \neq 0$ i $Y^{m+1}v = 0$, onda je $W = span\,\{v, Yv, \ldots, Y^m v\}$ $(m+1)-$dimenzionalan $\pi-$invarijantan potprostor od V, pripadna subreprezentacija π_W je ireducibilna i $\lambda = m$.

It te propozicije neposredno se dobiva popis i opis svih ireducibilnih konačnodimenzionalnih reprezentacija TDS:

Teorem 1.8.2. *Neka je $\mathfrak{s}$ TDS s kanonskom bazom $\{h, x, y\}$. Za svaki prirodan broj $m+1$ (tj. $m \in \mathbb{Z}_+$) postoji do na ekvivalenciju točno jedna ireducibilna $(m+1)-$dimenzionalna reprezentacija π. U prostoru V takve reprezentacije π postoji baza $\{v_0, \ldots, v_m\}$ na koju operatori reprezentacije djeluju ovako:*

$$\pi(h)v_n = (m - 2n)v_n \quad \textit{za} \quad n = 0, \ldots, m;$$

$$\pi(x)v_0 = 0, \qquad \pi(x)v_n = n(m - n + 1)v_{n-1} \quad \textit{za} \quad n = 1, \ldots, m;$$

$$\pi(y)v_n = v_{n+1} \quad \textit{za} \quad n = 0, \ldots, m-1, \qquad \pi(y)v_m = 0.$$

Korolar 1.8.3. *Neka je $\mathfrak{s}$ TDS s kanonskom bazom $\{h, x, y\}$ i neka je π reprezentacija od $\mathfrak{s}$ na konačnodimenzionalnom prostoru V. Tada je operator $\pi(h)$ dijagonalizabilan i njegov je spektar sadržan u $\mathbb{Z}$. Za $n \in \mathbb{Z}$ neka je $V_n = \{v \in V;\ \pi(h)v = nv\}$ pripadni svojstveni potprostor operatora $\pi(h)$. Tada je $\dim V_n = \dim V_{-n}$ $\forall n \in \mathbb{Z}$. Nadalje, u rastavu reprezentacije π u direktnu sumu ireducibilnih reprezentacija multiplicitet $(m+1)-$dimenzionalne ireducibilne reprezentacije jednak je $\dim V_m - \dim V_{m+2}$.*

1.9 Reprezentacije reduktivnih Liejevih algebri

Neka je $\mathfrak{g}$ kompleksna reduktivna Liejeva algebra. U ovom ćemo odjeljku parametrizirati skup klasa ekvivalencije svih konačnodimenzionalnih ireducibilnih reprezentacija od $\mathfrak{g}$, a zatim ćemo u sljedećem odjeljku to primijeniti na parametrizaciju $\hat{G}$ za povezanu kompaktnu Liejevu grupu G.

U daljnjem je $\mathfrak{h}$ Cartanova podalgebra od $\mathfrak{g}$, B invarijantna nedegenerirana simetrična bilinearna forma na $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$, $R = R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ sistem korijena od $\mathfrak{g}$ u odnosu na $\mathfrak{h}$, R_+ neki sistem pozitivnih korijena u R i $B(R_+) = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell\}$ pripadna baza sistema korijena. Kao i prije sa $\mu \mapsto h_\mu$ označavamo izomorfizam prostora $\mathfrak{h}^*$ na prostor $\mathfrak{h}$ određen nedegeneriranom formom $B|\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}$, tj.

$$B(h, h_\mu) = \mu(h) \qquad \forall h \in \mathfrak{h}.$$

Propozicija 1.9.1. *(a) Ako je $\alpha \in R$, $x \in \mathfrak{g}_\alpha$ i $y \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ onda je*

$$[x, y] = B(x, y) h_\alpha.$$

(b) Za svaki $\alpha \in R$ postoje $h^\alpha \in \mathfrak{h}$, $x^\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$ i $y^\alpha \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ koji tvore kanonsku bazu TDS−podalgebre od $\mathfrak{g}$, tj. takvi da je

$$[h^\alpha, x^\alpha] = 2x^\alpha, \qquad [h^\alpha, y^\alpha] = -2y^\alpha, \qquad [x^\alpha, y^\alpha] = h^\alpha.$$

Pri tome je

$$h^\alpha = \frac{2}{(\alpha|\alpha)} h_\alpha$$

Iz propozicije 1.9.1., korolara 1.8.3. i Schurove leme dobivamo sljedeće dvije propozicije:

Propozicija 1.9.2. *Neka je π ireducibilna konačnodimenzionalna reprezentacija od $\mathfrak{g}$. Tada su svi operatori $\pi(h)$, $h \in \mathfrak{h}$, poluprosti.*

Propozicija 1.9.3. *Neka je π konačnodimenzionalna reprezentacija od $\mathfrak{g}$. Tada su sljedeća tri svojstva međusobno ekvivalentna:*

(a) Reprezentacija π je potpuno reducibilna.

(b) Svi operatori $\pi(h)$, $h \in \mathfrak{h}$, su poluprosti.

(c) Svi operatori $\pi(z)$, $z \in \mathcal{Z}(\mathfrak{g})$, su poluprosti.

Za proizvoljnu, ne nužno konačnodimenzionalnu, reprezentaciju π od $\mathfrak{g}$ na kompleksnom prostoru V i za $\mu \in \mathfrak{h}^*$ definiramo tzv. $\mu-$**težinski potprostor** od V :

$$V_\mu = \{v \in V;\ \pi(h)v = \mu(h)v\ \forall h \in \mathfrak{h}\}.$$

Ako je $V_\mu \neq \{0\}$, kažemo da je μ **težina** od V. Iz propozicije 1.9.3. slijedi da je u konačnodimenzionalnom slučaju prostor V direktna suma svojih težinskih potprostora. Općenito, za proizvoljan $\mathfrak{g}-$modul V s reprezentacijom π je suma svih težinskih potprostora direktna i ta je suma $\mathfrak{g}-$podmodul od V. Ako je taj podmodul jednak čitavom modulu V, onda kažemo da je V **težinski modul**.

U prostoru $\mathfrak{h}^*$ uvodimo parcijalni uređaj ovako:

$$\mu \geq \lambda \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mu - \lambda \quad \text{je suma korijena iz} \quad R_+.$$

Element $\mu \in \mathfrak{h}^*$ zove se **integralna forma** na $\mathfrak{h}$ ako vrijedi

$$2\frac{(\mu|\alpha)}{(\alpha|\alpha)} \in \mathbb{Z} \qquad \forall \alpha \in R.$$

Ako je k tome

$$2\frac{(\mu|\alpha)}{(\alpha|\alpha)} \in \mathbb{Z}_+ \qquad \forall \alpha \in R_+$$

kažemo da je μ **dominantna integralna forma** na $\mathfrak{h}$ (u odnosu na izbor R_+).

Propozicija 1.9.4. *Neka je π potpuno reducibilna reprezentacija od $\mathfrak{g}$ na konačnodimenzionalnom prostoru V.*

(*a*) *Sve težine od V su integralne forme na $\mathfrak{h}$.*

(*b*) *Težine od V koje su maksimalne u skupu svih težina od V u odnosu na uvedeni parcijalni uređaj na $\mathfrak{h}^*$ su dominatne integralne forme na $\mathfrak{h}$.*

(*c*) *Ako je μ težina od V i $\sigma \in W(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$, onda je i $\sigma\mu$ težina od V i vrijedi* $\dim V_{\sigma\mu} = \dim V_\mu$.

Definiramo

$$\mathfrak{n}^+ = \sum_{\alpha \in R_+} \dot{+}\, \mathfrak{g}_\alpha, \qquad \mathfrak{n}^- = \sum_{\alpha \in R_+} \dot{+}\, \mathfrak{g}_{-\alpha}, \qquad \mathfrak{b} = \mathfrak{h} \dot{+} \mathfrak{n}^+.$$

$\mathfrak{b}$ se zove **Borelova podalgebra** od $\mathfrak{g}$ pridružena Cartanovoj podalgebri $\mathfrak{h}$ i izboru pozitivnih korijena R_+. Za $\mu \in \mathfrak{h}^*$ neka je $\mathbb{C}_\mu$ $1-$dimenzionalan $\mathfrak{b}-$modul $\mathbb{C}$ na kome $\mathfrak{h}$ djeluje sa μ a $\mathfrak{n}^+$ sa 0. Definiramo **Vermaov $\mathfrak{g}-$modul** $M(\mu)$ ovako:

$$M(\mu) = U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{b})} \mathbb{C}_\mu.$$

Teorem 1.9.5. (*a*) *Modul $M(\mu)$ je direktna suma svojih težinskih potprostora.*

(*b*) *Preslikavanje $u \mapsto u \otimes_{U(\mathfrak{b})} 1$ je izomorfizam vektorskih prostora sa $U(\mathfrak{n}^-)$ na $M(\mu)$.*

(*c*) *$\lambda \in \mathfrak{h}^*$ je težina modula $M(\mu)$ ako i samo ako je $\mu \geq \lambda$, odnosno, ako i samo ako je $\lambda = \mu - \sum_{j=1}^{\ell} n_j\alpha_j$ za neke $n_1, \ldots, n_\ell \in \mathbb{Z}_+$.*

(*d*) *Težinski potprostor $M(\mu)_\mu$ je $1-$dimenzionalan i razapet je sa $1 \otimes_{U(\mathfrak{b})} 1$.*

(*e*) *Postoji jedinstven pravi maksimalan podmodul N od $M(\mu)$ koji sadrži svaki pravi podmodul od $M(\mu)$. N je suma svih podmodula koji imaju trivijalan presjek sa $M(\mu)_\mu$.*

(*f*) *Ako je V $\mathfrak{g}-$modul i ako su $\mu \in \mathfrak{h}^*$ i $v \in V_\mu$ takvi da je $X \cdot v = 0$ za svaki $X \in \mathfrak{n}^+$, onda postoji jedinstven homomorfizam $\mathfrak{g}-$modula $\varphi : M(\mu) \to V$ takav da je $\varphi(1 \otimes_{U(\mathfrak{b})} 1) = v$.*

Prema tvrdnji (*e*) prethodnog teorema modul $M(\mu)$ ima jedinstven ireducibilan kvocijent, koji ćemo označavati sa $L(\mu)$.

Pomoću maksimalnih težina dobiva se potpuna klasifikacija konačnodimenzionalnih ireducibilnih reprezentacija od $\mathfrak{g}$:

Teorem 1.9.6. (*a*) *Ako je V ireducibilan konačnodimenzionalan $\mathfrak{g}-$modul, onda V ima jedinstvenu maksimalnu težinu i pripadni težinski potprostor je $1-$dimenzionalan. Označimo sa Λ_V tu težinu. Forma Λ_V je dominantna integralna.*

(*b*) *Ako su V i W ireducibilni konačnodimenzionalni $\mathfrak{g}-$moduli, onda vrijedi $V \simeq W$ ako i samo ako je $\Lambda_V = \Lambda_W$.*

(*c*) *Za svaku dominantnu integralnu formu Λ na $\mathfrak{h}$ postoji ireducibilan konačnodimenzionalan $\mathfrak{g}-$modul V takav da je $\Lambda = \Lambda_V$.*

1.10 Reprezentacije kompaktnih Liejevih grupa

U ovom je odjeljku G kompaktna povezana Liejeva grupa s maksimalnim torusom T i $\mathfrak{g}$ i $\mathfrak{t}$ njihove Liejeve algebre. Tada je $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ kompleksna reduktivna Liejeva algebra i $\mathfrak{t}^{\mathbb{C}}$ je njena Cartanova podalgebra. U odjeljku 1.7. identificirali smo skup $\hat{T}$ svih neprekidnih homomorfizama grupe T u multiplikativnu grupu $S = \{\lambda \in \mathbb{C};\ |\lambda| = 1\}$ sa skupom svih $\mathbb{R}-$linearnih $T-$integralnih preslikavanja sa $\mathfrak{t}$ u $i\mathbb{R}$. Pri tome se $\mathbb{R}-$linearno preslikavanje $\mu : \mathfrak{t} \to i\mathbb{R}$ zove $T-$integralno, ako je $\mu(L) \subseteq 2\pi i\mathbb{Z}$, gdje je $L = \mathrm{Ker}(\exp_T) = \{x \in \mathfrak{t};\ \exp_T x = e\}$. Identifikacija je dana sa

$$\mu(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mu(\exp_T tx)\bigg|_{t=0}, \qquad \text{odnosno}, \qquad \mu(\exp_T x) = \mathrm{e}^{\mu(x)}, \qquad x \in \mathfrak{t}.$$

Neka je $R = R(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}, \mathfrak{t}^{\mathbb{C}})$ sistem korijena od $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ u odnosu na Cartanovu podalgberu $\mathfrak{t}^{\mathbb{C}}$. Znamo da su restrikcije korijena iz R na $\mathfrak{t}$ integralne $\mathbb{R}-$linearne forme sa $\mathfrak{t}$ u $i\mathbb{R}$. Neka je $\alpha \in R$, $y \in \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}_{\alpha}$ i $x \in \mathfrak{t}$. Tada je

$$Ad(\exp_T x)y = \mathrm{e}^{ad\, x}y = \mathrm{e}^{\alpha(x)}y.$$

Ako je $x \in L = \mathrm{Ker}\,(\exp_T)$ dobivamo

$$\mathrm{e}^{\alpha(x)}y = y \quad \forall y \in \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}_{\alpha} \qquad \Longrightarrow \qquad \alpha(x) \in 2\pi i\mathbb{Z}.$$

Time je dokazano da je $\alpha(L) \subseteq 2\pi i\mathbb{Z}$, odnosno, svi korijeni $\alpha \in R$ su ne samo integralne nego i $T-$integralne forme. Dakle, sistem korijena R identificira se s podskupom od $\hat{T}$.

Neka je π reprezentacija grupe G na konačnodimenzionalnom kompleksnom prostoru V. Tada znamo da je sa

$$\pi(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\pi(\exp\, tx)\bigg|_{t=0}, \qquad x \in \mathfrak{g},$$

definirana reprezentacija Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ na prostoru V koja u potpunosti opisuje polaznu reprezentaciju grupe G. U stvari, budući da je po tvrdnji (c) teorema 1.7.2. preslikavanje $\exp : \mathfrak{g} \to G$ surjektivno, reprezentacija π od G dobiva se iz gore definirane reprezentacije π od $\mathfrak{g}$ ovako:

$$\pi(\exp\, x) = \mathrm{e}^{\pi(x)}, \qquad x \in \mathfrak{g}.$$

Istim znakom π označavamo i pripadnu reprezentaciju kompleksifikacije $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ od $\mathfrak{g}$ na prostoru V. Sada možemo primijeniti glavni rezultat prethodnog odjeljka kako bismo u potpunosti opisali $\hat{G}$. U tu svrhu izaberimo neki sistem R_+ pozitivnih korijena u R u odnosu na koji definiramo dominantne forme na $\mathfrak{t}^{\mathbb{C}}$.

Teorem 1.10.1. *Za dominantnu integralnu formu μ na $\mathfrak{t}^{\mathbb{C}}$ koja je $T-$integralna postoji ireducibilna unitarna reprezentacija grupe G čija je kompleksifikacija diferencijala ekvivalentna $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}-$modulu $L(\mu)$. Označimo klasu ekvivalencije te reprezentacije sa γ_μ. Tada je*

$$\hat{G} = \{\gamma_\mu;\ \mu \text{ dominantna integralna } T-\text{integralna forma na } \mathfrak{t}^{\mathbb{C}}\}.$$

1.11 Definicija i struktura realnih reduktivnih grupa

Neka je $K = \mathbb{R}$ ili $K = \mathbb{C}$. Za $n \in \mathbb{N}$ sa $GL(n, K)$ označavamo grupu svih invertibilnih elemenata unitalne algebre $M_n(K)$ svih kvadratnih matrica $n-$tog reda s koeficijentima iz K. Tada je $GL(n, K) = \{g \in M_n(K);\ \det(g) \neq 0\}$, dakle, to je otvorena podmnogostrukost analitičke mnogostrukosti $M_n(K) \simeq K^n$ $(= \mathbb{R}^n$ ili $\simeq \mathbb{R}^{2n})$. Nadalje, množenje i invertiranje su očito analitička preslikavanja, pa je $GL(n, K)$ Liejeva grupa. Njena se Liejeva algebra prema razmatranjima u odjeljku 1.6. može identificirati s Liejevom algebrom $\mathfrak{gl}(n, K)$ koja se kao vektorski prostor podudara sa $M_n(K)$, a komutator je zadan sa

$$[x, y] = xy - yx, \qquad x, y \in \mathfrak{gl}(n, K).$$

Nadalje, eksponencijalno preslikavanje se uz ovakvu identifikaciju podudara s eksponenciranjem matrica $x \mapsto \mathrm{e}^x$.

Za kompleksnu polinomijalnu funkciju f na $M_n(\mathbb{C})$ kažemo da je **definirana nad** $\mathbb{R}$ ako su njene vrijednosti na $M_n(\mathbb{R})$ realne. Pretpostavimo sada da su $f_1, \ldots, f_m$ kompleksne polinomijalne funkcije na $M_n(\mathbb{C})$ definirane nad $\mathbb{R}$ takve da je

$$G_C = \{g \in GL(n, \mathbb{C});\ f_1(g) = \cdots = f_m(g) = 0\}$$

podgrupa od $GL(n, \mathbb{C})$. Tada se G_C zove **afina algebarska grupa definirana nad** $\mathbb{R}$. Za podgrupu $G_R = G_C \cap GL(n, \mathbb{R})$ kažemo da je njena **grupa realnih točaka**. Ako vrijedi $g^* \in G_C$ za svaku $g \in G_C$, kažemo da je afina algebarska grupa G_C **simetrična**. Tada vrijedi $g^* = g^t \in G_R$ za svaku matricu $g \in G_R$ pa je sa

$$\vartheta(g) = \left(g^{-1}\right)^*, \qquad g \in G_R,$$

definiran automorfizam ϑ grupe G_R. Taj je automorfizam involutivan i zove se **Cartanova involucija** grupe G_R. Sve su te grupe naravno Liejeve grupe (zatvorena podgrupa Liejeve grupe je Liejeva grupa).

Liejeva grupa G zove se **realna reduktivna grupa**, ako postoji konačno natkrivanje $p : G \to G_0$, gdje je G_0 otvorena podgrupa neke grupe G_R realnih točaka simetrične afine algebarske grupe G_C definirane nad $\mathbb{R}$. Napominjemo da u ovoj definiciji dopuštamo da su grupe G i G_0 nepovezane. Da je $p : G \to G_0$ konačno natkrivanje znači da je p epimorfizam kome je jezgra $\mathrm{Ker}\, p$ konačna centralna podgrupa od G. Liejevu algebru od G možemo identificirati s Liejevom algebrom $\mathfrak{g}$ od G_R. Ako je grupa G_C definirana pomoću polinomijalnih funkcija $f_1, \ldots, f_m$ definiranih nad $\mathbb{R}$ kao u prethodnom odlomku, onda je

$$\mathfrak{g} = \{x \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C});\ \mathrm{e}^{tx} \in G_C \cap GL(n, \mathbb{R})\ \forall t \in \mathbb{R}\} =$$

$$= \{x \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R});\ f_1\left(\mathrm{e}^{tx}\right) = \cdots = f_m\left(\mathrm{e}^{tx}\right) = 0\ \forall t \in \mathbb{R}\}.$$

Budući da je Cartanova involucija ϑ automorfizam od G_R, njen je diferencijal, koji ćemo također označavati sa ϑ, involutivni automorfizam Liejeve algebre $\mathfrak{g}$. Iz definicije ϑ odmah slijedi

$$\vartheta x = -x^* = -x^t, \qquad x \in \mathfrak{g}.$$

I taj se automorfizam zove Cartanova involucija.

Navest ćemo sada niz primjera realnih reduktivnih grupa. To su tzv. *klasične* realne reduktivne grupe, koje smo naveli kao primjere **1.–13.** u odjeljku 1.2.2.

Primjer 1. $GL(n,\mathbb{R})$ je očito realna reduktivna grupa. Analogno, ako $\mathbb{C}^n$ identificiramo na uobičajen način sa $\mathbb{R}^{2n}$ i množenje sa i označimo sa J, onda je $J^* = -J$ i

$$GL(n,\mathbb{C}) = \{g \in GL(2n,\mathbb{R});\ gJ - Jg = 0\}.$$

Odatle se vidi da na opisan način $GL(,\mathbb{C})$ postaje realna reduktivna grupa.

Primjer 2. Kako je $g \mapsto \det(g) - 1$ polinomijalna funkcija na $M_n(\mathbb{C})$ definirana nad $\mathbb{R}$, $SL(n,\mathbb{C})$ je afina algebarska grupa definirana nad $\mathbb{R}$ i $SL(n,\mathbb{R})$ je njena grupa realnih točaka. Nadalje, $\det(g^*) = \overline{\det(g)}$, pa vidimo da je $SL(n,\mathbb{C})$ simetrična podgrupa od $GL(n,\mathbb{C})$. Dakle, $SL(n,\mathbb{R})$ je realna reduktivna grupa. Nadalje, uz identifikaciju $GL(n,\mathbb{C})$ (dakle, i $SL(n,\mathbb{C})$) s podgrupom od $GL(2n,\mathbb{R})$, zaključujemo da je i $SL(n,\mathbb{C})$ realna reduktivna grupa.

Za svaki od preostalih primjera $O(n,\mathbb{C})$, $SO(n,\mathbb{C})$, $O(p,q)$ (i posebno $O(n)$), $SO(p,q)$ (i posebno $SO(n)$), $U(p,q)$ (i posebno, $U(n)$), $SU(p,q)$ (i posebno $SU(n)$), $Sp(n,\mathbb{C})$, $Sp(n,\mathbb{R})$, $Sp(p,q)$ (i posebno $Sp(n)$), $SO^*(2n)$ i $SU^*(2n)$ lako se pokazuje da se radi o realnoj reduktivnj grupi. Za $SO(n,\mathbb{C})$, $SO(n)$, $SU(p,q)$, $Sp(n,\mathbb{C})$, $Sp(n,\mathbb{R})$, $Sp(p,q)$, $SO^*(2n)$ i $SU^*(2n)$ to slijedi i iz sljedeće propozicije, jer su te grupe povezane, poluproste i imaju konačan centar. Pri tome je **poluprosta Liejeva grupa** Liejeva grupa čija je Liejeva algebra poluprosta.

Propozicija 1.11.1. *Povezana poluprosta Liejeva grupa s konačnim centrom je realna reduktivna grupa.*

Neka je G realna reduktivna grupa s Liejevom algebrom $\mathfrak{g}$. Podrazumijevamo sve pretpostavke i oznake kao u definiciji realne reduktivne grupe. Definiramo sada simetričnu bilinearnu formu B na $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ sa

$$B(x,y) = \operatorname{tr} xy, \qquad x,y \in \mathfrak{g}.$$

Za $x \in \mathfrak{g}$ je $\vartheta x = -x^* \in \mathfrak{g}$. Stoga je sa

$$(x|y) = -B(x,\vartheta y) = \operatorname{tr} xy^*, \qquad x,y \in \mathfrak{g},$$

definiran skalarni produkt na realnom prostoru $\mathfrak{g}$. Odatle slijedi da je forma B nedegenerirana. Neka je

$$\mathfrak{k} = \{x \in \mathfrak{g};\ \vartheta x = x\} \qquad \text{i} \qquad \mathfrak{p} = \{x \in \mathfrak{g};\ \vartheta x = -x\}.$$

Tada je $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \dotplus \mathfrak{p}$ i to se zove **Cartanova dekompozicija** od $\mathfrak{g}$. Budući da je ϑ automorfizam od $\mathfrak{g}$, očito je $\mathfrak{k}$ Liejeva podalgebra od $\mathfrak{g}$ i vrijedi

$$[\mathfrak{k},\mathfrak{p}] \subseteq \mathfrak{p} \qquad \text{i} \qquad [\mathfrak{p},\mathfrak{p}] \subseteq \mathfrak{k}.$$

Nadalje, $\mathfrak{k}$ je Liejeva algebra kompaktne podgrupe K_0 od G_0, dane sa

$$K_0 = \{g \in G_0;\ \vartheta(g) = g\} = \{g \in G_0;\ g^{-1} = g^*\} = G_0 \cap O(n).$$

Budući da je $p : G \to G_0$ konačno natkrivanje, $K = p^{-1}(K_0)$ je kompaktna podgrupa grupe G i $\mathfrak{k}$ je njena Liejeva algebra.

Teorem 1.11.2. (*a*) *Preslikavanje $(k,x) \mapsto k(\exp x)$ je bianalitička bijekcija sa $K \times \mathfrak{p}$ na G.*

(*b*) *Preslikavanje $\vartheta : G \to G$ definirano sa $\vartheta(k(\exp x)) = k(\exp -x)$ je involutivni automorfizam Liejeve grupe G.*

(*c*) *Kvocijentna mnogostrukost G/K je povezana i jednostavno povezana.*

Tvrdnja (a) zove se **Cartanova dekompozicija grupe** G. Automorfizam ϑ grupe G iz tvrdnje (b) zove se **Cartanova involucija grupe** G.

Označimo sada istim znakom B bilinearno proširenje forme B sa $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ na $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} \times \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$. Naravno, tada je

$$B(x, y) = \operatorname{Tr} xy, \qquad x, y \in \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}.$$

Stavimo

$$\mathfrak{u} = \mathfrak{k} \dotplus i\mathfrak{p}.$$

Tada je $\mathfrak{u}$ očito realna forma prostora $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$, a iz $[\mathfrak{k}, \mathfrak{k}] \subseteq \mathfrak{k}$, $[\mathfrak{k}, \mathfrak{p}] \subseteq \mathfrak{p}$ i $[\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] \subseteq \mathfrak{k}$ slijedi da je $[\mathfrak{u}, \mathfrak{u}] \subseteq \mathfrak{u}$, dakle, $\mathfrak{u}$ je realna forma kompleksne Liejeve algebre $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$. Bilinearna forma $B|\mathfrak{u} \times \mathfrak{u}$ je nedegenerirana i negativno definitna. Prema tome, sa

$$(x|y) = -B(x, y), \qquad x, y \in \mathfrak{u},$$

zadan je invarijantan skalarni produkt na $\mathfrak{u}$. Dakle, Liejeva algebra $\mathfrak{u}$ je kompaktna, odnosno, $\mathfrak{u}$ je kompaktna forma od $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$. Posebno, $\mathfrak{u}$ je reduktivna realna Liejeva algebra. Iz definicije reduktivne Liejeve algebre (radikal jednak centru) odmah slijedi da je realna Liejeva algebra reduktivna ako i samo ako je njena kompleksifikacija reduktivna. Stoga najprije zaključujemo da je $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ kompleksna reduktivna Liejeva algebra, a zatim da je njena realna forma $\mathfrak{g}$ realna reduktivna Liejeva algebra. Time smo dokazali:

Propozicija 1.11.3. *Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ realne reduktivne grupe G je reduktivna.*

Neka je sada $\mathfrak{a}$ potprostor od $\mathfrak{p}$ koji je maksimalan među Liejevim podalgebrama od $\mathfrak{g}$ sadržanim u $\mathfrak{p}$. Kako je $[\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] \subseteq \mathfrak{k}$, jasno je da je $\mathfrak{a}$ komutativna podalgebra od $\mathfrak{g}$. Svaki takav potprostor zove se **Cartanov potprostor** od $\mathfrak{p}$. Svaki $h \in \mathfrak{a}$ je hermitski operator. Dakle, svi se operatori $h \in \mathfrak{a}$ mogu simultano dijagonalizirati. No tada se i operatori $ad\, h$, $h \in \mathfrak{a}$, na prostoru $\mathfrak{g}$ mogu simultano dijagonalizirati. Za $\mu \in \mathfrak{a}^*$ stavimo

$$\mathfrak{g}^{\mu} = \{x \in \mathfrak{g};\ [h, x] = \mu(h)x\ \forall h \in \mathfrak{a}\}.$$

Nadalje, stavimo

$$R(\mathfrak{g}, \mathfrak{a}) = \{\mu \in \mathfrak{a}^*;\ \mu \neq 0\ \text{ i }\ \mathfrak{g}^{\mu} \neq \{0\}\,\}.$$

Spomenuta simultana dijagonalizabilnost operatora $ad\, h$, $h \in \mathfrak{a}$, znači da je

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^0 \dotplus \sum_{\mu \in R(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})} \dotplus\, \mathfrak{g}^{\mu}.$$

Kako je $\vartheta|\mathfrak{a} = -I_{\mathfrak{a}}$, slijedi $\vartheta\mathfrak{g}^0 = \mathfrak{g}^0$, dakle, $\mathfrak{g}^0 = \mathfrak{k} \cap \mathfrak{g}^0 \dotplus \mathfrak{p} \cap \mathfrak{g}^0$. Nadalje, $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p} \cap \mathfrak{g}^0$ i zbog maksimalnosti $\mathfrak{a}$ među podalgebrama od $\mathfrak{g}$ sadržanim u $\mathfrak{p}$ slijedi da je $\mathfrak{p} \cap \mathfrak{g}^0 = \mathfrak{a}$. Stavimo $\mathfrak{m} = \mathfrak{k} \cap \mathfrak{g}^0$. Uočimo da je $\mathfrak{m}$ Liejeva podalgebra od $\mathfrak{k}$, a kako je prema propoziciji 1.11.2. $\mathfrak{k}$ Liejeva algebra kompaktne podgrupe od G, slijedi da je Liejeva algebra $\mathfrak{m}$ reduktivna u $\mathfrak{g}$ i, posebno, $\mathfrak{m}$ je reduktivna Liejeva algebra. Imamo $\mathfrak{g}^0 = \mathfrak{m} \dotplus \mathfrak{a}$, dakle, vrijedi

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{m} \dotplus \mathfrak{a} \dotplus \sum_{\mu \in R(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})} \dotplus\, \mathfrak{g}^{\mu}. \tag{1.8}$$

Stavimo sada

$$\mathfrak{a}' = \{h \in \mathfrak{a};\ \mu(h) \neq 0\ \ \forall \mu \in R(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})\}.$$

Fiksirajmo $h_0 \in \mathfrak{a}'$ i neka je

$$P = \{\mu \in R(\mathfrak{g}, \mathfrak{a});\ \mu(h_0) > 0\}.$$

Tada očito vrijedi

$$R(\mathfrak{g}, \mathfrak{a}) = P \cup (-P) \qquad \text{i} \qquad P \cap (-P) = \emptyset.$$

Nadalje, ako su $\mu, \nu \in P$ takvi da je $\mu+\nu \in R(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$, onda je $\mu+\nu \in P$. Prema tome, P je mogući izbor skupa pozitivnih korijena u $R(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$. Stavimo

$$\mathfrak{n} = \sum_{\mu \in P} \dot{+}\, \mathfrak{g}^{\mu} \qquad \text{i} \qquad \overline{\mathfrak{n}} = \sum_{\mu \in P} \dot{+}\, \mathfrak{g}^{-\mu}.$$

Lako se vidi da je $[\mathfrak{g}^{\mu}, \mathfrak{g}^{\nu}] \subseteq \mathfrak{g}^{\mu+\nu}$ pa slijedi da su $\mathfrak{n}$ i $\overline{\mathfrak{n}}$ Liejeve podalgebre od $\mathfrak{g}$. Iz (1.8) se vidi da je

$$\mathfrak{g} = \overline{\mathfrak{n}} \dot{+} \mathfrak{m} \dot{+} \mathfrak{a} \dot{+} \mathfrak{n}.$$

Nadalje, kako je $\vartheta|\mathfrak{a} = -I_{\mathfrak{a}}$, očito je $\vartheta\mathfrak{g}^{\mu} = \mathfrak{g}^{-\mu}\ \forall \mu \in R(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$. Prema tome, vrijedi

$$\vartheta\mathfrak{n} = \overline{\mathfrak{n}}.$$

Propozicija 1.11.4. *Vrijedi*

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \dot{+} \mathfrak{a} \dot{+} \mathfrak{n}.$$

Rastav u propoziciji 1.11.4. zove se **Iwasawina dekompozicija Liejeve algebre $\mathfrak{g}$**. Prva tvrdnja sljedećeg teorema je **Iwasawina dekompozicija grupe** G. Neka su A i N povezane Liejeve podgrupe od G s Liejevim algebrama $\mathfrak{a}$ i $\mathfrak{n}$.

Teorem 1.11.5. (a) *Preslikavanje množenja $(a, n, k) \mapsto ank$ je bianalitička bijekcija s produkta mnogostrukosti $A \times N \times K$ na Liejevu grupu G.*

(b) *Preslikavanje $h \mapsto \exp h$ je izomorfizam aditivne grupe $\mathfrak{a}$ na Liejevu grupu A.*

(c) *Preslikavanje $x \mapsto \exp x$ je bianalitička bijekcija sa $\mathfrak{n}$ na N.*

Iwasawine dekompozicije od $\mathfrak{g}$ i od G ovise o izboru Cartanovog potprostora $\mathfrak{a}$ i o izboru skupa $P \subset R(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$. Međutim, ta ovisnost nije bitna. Prije svega, vrijedi:

Propozicija 1.11.6. *Neka su $\mathfrak{a}_1$ i $\mathfrak{a}_2$ Cartanovi potprostori od $\mathfrak{p}$. Tada postoji $k \in K$ takav da je $(Ad\,k)\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{a}_2$.*

Razmotrimo sada pitanje izbora skupa $P \subseteq R(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$. Podskup P od $R(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$ bio je izabran tako da je fiksiran neki h_0 iz skupa

$$\mathfrak{a}' = \{h \in \mathfrak{a};\ \mu(h) \neq 0\ \forall \mu \in R(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})\}$$

i zatim je definiran

$$P = \{\mu \in R(\mathfrak{g}, \mathfrak{a});\ \mu(h_0) > 0\}.$$

Tako definiran skup P ne ovisi o h_0 nego samo o komponenti povezanosti skupa $\mathfrak{a}'$. Te komponente povezanosti zovemo **Weylove komore** u $\mathfrak{a}$. Stavimo

$$M = C_K(\mathfrak{a}) = \{k \in K;\ (Ad\,k)|\mathfrak{a} = I_{\mathfrak{a}}\}, \qquad M' = N_K(\mathfrak{a}) = \{k \in K;\ (Ad\,k)\mathfrak{a} = \mathfrak{a}\},$$

$$M_0 = C_{K_0}(\mathfrak{a}) = \{k \in K_0;\ k|\mathfrak{a} = I_{\mathfrak{a}}\}, \qquad M_0' = N_{K_0}(\mathfrak{a}) = \{k \in K;\ k\mathfrak{a} = \mathfrak{a}\}.$$

Tada su M_0 i M_0' (odnosno, M i M') zatvorene podgrupe od K_0 (odnosno, od K), dakle, te su grupe kompaktne. Nadalje, stavimo $W(G, A) = M/M' \simeq M_0/M_0'$ i tu grupu shvaćamo kao podgrupu od $O(\mathfrak{a})$.

Skalarni produkt na $\mathfrak{g}$ bio je definiran sa

$$(x|y) = B(x, y^*) = \mathrm{Tr}\, xy^*, \qquad x, y \in \mathfrak{g}.$$

U odnosu na taj skalarni produkt Cartanova dekompozicija $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \dotplus \mathfrak{p}$ je ortogonalna. Restrikcija $(\cdot|\cdot)$ na $\mathfrak{a} \times \mathfrak{a}$ je skalarni produkt na Cartanovom potprostoru $\mathfrak{a}$ i imamo izomorfizam $\lambda \mapsto t_\lambda$ sa $\mathfrak{a}^*$ na α dan sa $(h|t_\lambda) = \lambda(h)\ \forall h \in \mathfrak{a}$. Pomoću tog izomorfizma skalarni se produkt prenosi sa $\mathfrak{a}$ na dualni prostor $\mathfrak{a}^*$:

$$(\lambda|\mu) = (t_\lambda|t_\mu), \qquad \lambda, \mu \in \mathfrak{a}^*.$$

Za $\lambda \in R(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$ definiramo $h_\lambda \in \mathfrak{a}$ sa

$$h_\lambda = \frac{2}{(\lambda|\lambda)} t_\lambda.$$

Centar $\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$ Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ je $\vartheta-$invarijantan, pa vrijedi

$$\mathcal{Z}(\mathfrak{g}) = \mathcal{Z}(\mathfrak{g}) \cap \mathfrak{k} \oplus \mathcal{Z}(\mathfrak{g}) \cap \mathfrak{p}.$$

Očito je

$$\mathcal{Z}(\mathfrak{g}) \cap \mathfrak{k} \subseteq \mathfrak{m} \qquad \text{i} \qquad \mathcal{Z}(\mathfrak{g}) \cap \mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{a}.$$

Pisat ćemo

$$\mathcal{Z}(\mathfrak{g}) \cap \mathfrak{p} = \mathfrak{s}.$$

Taj se potprostor $\mathfrak{s}$ od $\mathfrak{a}$ zove **standardna split−komponenta** od $\mathfrak{g}$. Pripadna povezana podgrupa od A, tj. $S = \exp \mathfrak{s}$, zove se **standardna split−komponenta grupe** G. Nadalje, definiramo ${}^0\mathfrak{a} = \mathfrak{a} \cap [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ i ${}^0A = \exp {}^0\mathfrak{a}$.

Teorem 1.11.7. *Uz uvedene oznake vrijedi:*

(a)

$$\mathfrak{s} = \bigcap_{\lambda \in R(\mathfrak{g},\mathfrak{a})} \mathrm{Ker}\, \lambda, \qquad \mathfrak{a} = \mathfrak{s} \oplus {}^0\mathfrak{a} \qquad i \qquad {}^0\mathfrak{a} = span_{\mathbb{R}}\, \{h_\lambda;\ \lambda \in R(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})\}.$$

(b) *$R(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$ je sistem korijena u realnom unitarnom prostoru $span_{\mathbb{R}} R(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$, tj. vrijedi*

(1) *Ako je σ_λ ortogonalna refleksija prostora $span_{\mathbb{R}} R(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$ u odnosu na hiperravninu $\lambda^\perp$, onda je $\sigma_\lambda R(\mathfrak{g}, \mathfrak{a}) = R(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})\ \forall \lambda \in R(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$.*

(2) *Za bilo koje $\lambda, \mu \in R(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$ je*

$$2\frac{(\mu|\lambda)}{(\lambda|\lambda)} \in \mathbb{Z}.$$

(c) *Grupa $W(G, A)$ djeluje prosto tranzitivno na skupu $\mathcal{C}$ svih Weylovih komora u $\mathfrak{a}$, i njezino kontragredijentno djelovanje na prostoru $span_{\mathbb{R}} R(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$ inducira izomorfizam grupe $W(G, A)$ na Weylovu grupu sistema korijena $R(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$.*

Navest ćemo sada još neke definicije i niz strukturnih rezultata o realnim reduktivnim grupama i nekim njihovim podgrupama. U ostatku ovog odjeljka G je realna reduktivna grupa s Liejevom algebrom $\mathfrak{g}$, ϑ njena Cartanova involucija, $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \dotplus \mathfrak{p}$ pripadna Cartanova dekompozicija, K maksimalna kompaktna podgrupa od G s Liejevom algebrom $\mathfrak{k}$, $\mathfrak{a}$ Cartanov potprostor od $\mathfrak{p}$, P neki izbor skupa pozitivnih korijena u $R(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$, $\mathfrak{n}$ pripadna nilpotentna podalgebra od $\mathfrak{g}$, tako da imamo Iwasawinu dekompoziciju $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \dotplus \mathfrak{a} \dotplus \mathfrak{n}$. Nadalje, $A = \exp \mathfrak{a}$ i $N = \exp \mathfrak{n}$ su zatvorene povezane i jednostavno povezane podgrupe od G s Liejevim algebrama $\mathfrak{a}$ i $\mathfrak{n}$, tako da imamo Iwasawinu dekompoziciju grupe $G = ANK$. Napomenimo da je $AN = NA$ pa imamo ekvivalentnu dekompoziciju $G = NAK$. Nadalje, invertiranjem dobivamo i dekompozicije $G = KAN$ i $G = KNA$. Sve se te dekompozicije od G zovu Iwasawine.

Zadržavamo i oznake

$$\mathfrak{m} = C_{\mathfrak{k}}(\mathfrak{a}), \qquad M = C_K(\mathfrak{a}) \qquad \text{i} \qquad M' = N_K(\mathfrak{a}).$$

Imamo $\mathcal{Z}(\mathfrak{g}) = \mathcal{Z}(\mathfrak{g}) \cap \mathfrak{k} \dotplus \mathfrak{s}$, gdje je $\mathfrak{s} = \mathcal{Z}(\mathfrak{g}) \cap \mathfrak{p}$ split−komponenta od $\mathfrak{g}$. $S = \exp \mathfrak{s}$ je split−komponenta grupe G. Uveli smo i oznake

$${}^0\mathfrak{a} = \mathfrak{a} \cap [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = span_{\mathbb{R}}\{h_\lambda;\ \lambda \in R(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})\} \qquad \text{i} \qquad {}^0A = \exp {}^0\mathfrak{a}.$$

Sa $X(G)$ označavamo skup svih neprekidnih homomorfizama grupe G u multiplikativnu grupu $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ i definiramo

$${}^0G = \{g \in G;\ \chi(g)^2 = 1\ \ \forall \chi \in X(G)\} = \bigcap_{\chi \in X(G)} \operatorname{Ker} |\chi|.$$

${}^0G$ je zatvorena podgrupa od G. Ona sadrži komutatorsku podgrupu (generiranu svim komutatorima $aba^{-1}b^{-1}$, $a, b \in G$), čija je Liejeva algebra $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, a sadrži i svaku kompaktnu podgrupu od G. Posebno, ona sadrži maksimalnu kompaktnu podgrupu K.

Stavimo

$$G^+ = \{g \in G;\ (Ad\, g)|\mathcal{Z}(\mathfrak{g}) = I_{\mathcal{Z}(\mathfrak{g})}\}.$$

G^+ je naravno zatvorena podgrupa od G. Njena je Liejeva algebra

$$\mathfrak{g}^+ = \{x \in \mathfrak{g};\ (ad\, x)|\mathcal{Z}(\mathfrak{g}) = 0\} = \{x \in \mathfrak{g};\ [x, y] = 0\ \forall y \in \mathcal{Z}(\mathfrak{g})\} = \mathfrak{g},$$

pa je G^+ i otvorena podgrupa od G. Budući da se uvjeti koji definiraju podgrupu G^+ mogu iskazati pomoću jednakosti nekih matričnih elemenata operatora $Ad\, g$ nuli, odnosno, jedinici, i vrijedi $\vartheta(G^+) = G^+$, očito je G^+ realna reduktivna grupa. Za $s \in S$ imamo $s = \exp x$ za neki $x \in \mathfrak{s} \subseteq \mathcal{Z}(\mathfrak{g})$, pa je očito $(Ad\, s)|\mathcal{Z}(\mathfrak{g}) = \mathrm{e}^{ad\, x}|\mathcal{Z}(\mathfrak{g}) = I_{\mathcal{Z}(\mathfrak{g})}$, dakle, $s \in G^+$. Prema tome, S je podgrupa od G^+.

Sa G^0 označavamo komponentu povezanosti jedinice u grupi G. Budući da grupa K siječe svaku komponentu povezanosti grupe G, vrijedi $G = G^0K = KG^0$.

Sa $\mathfrak{g}^1$ označavamo ortogonalni komplement od $\mathfrak{s}$ u $\mathfrak{g}$ u odnosu na nedegeneriranu formu B :

$$\mathfrak{g}^1 = \{x \in \mathfrak{g};\ B(x, y) = 0\ \ \forall y \in \mathfrak{s}\}.$$

Lako se pokazuje da je restrikcija forme $B|\mathfrak{s} \times \mathfrak{s}$ nedegenerirana, a to ima za posljedicu da je $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^1 \dotplus \mathfrak{s}$. Iz tvrdnje (a) teorema 1.11.7. slijedi da je $\mathfrak{g}^1 = \mathcal{Z}(\mathfrak{g}) \cap \mathfrak{k} \oplus [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$. Sa G^1 označavamo povezanu Liejevu podgrupu od G s Liejevom algebrom $\mathfrak{g}^1$.

Stavimo sada

$$\tilde{\mathfrak{m}} = C_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{a}) = \{x \in \mathfrak{g};\ [x, h] = 0\ \ \forall h \in \mathfrak{a}\} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{m} \qquad \text{i} \qquad \tilde{M} = C_G(\mathfrak{a}) = \{g \in G;\ (Ad\, g)|\mathfrak{a} = I_{\mathfrak{a}}\}.$$

Tada je $\tilde{M}$ zatvorena podgrupa od G s Liejevom algebrom $\tilde{\mathfrak{m}}$. Definicija podgrupe $\tilde{M}$ je očito algebarske vrste pa je $\tilde{M}$ realna reduktivna grupa.

Uz uvedene oznake vrijede sljedeće dekompozicije:

Teorem 1.11.8. *(a) Množenje $(s, g) \mapsto sg$ je izomorfizam Liejevih grupa sa $S \times {}^0G$ na G.*

(b) Množenje $(s, g) \mapsto sg$ je izomorfizam Liejevih grupa sa $S \times {}^0G^+$ na G^+.

(c) Množenja $(s, g) \mapsto sg$ je izomorfizam Liejevih grupa sa $S \times G^1$ na G^0.

(d) Množenje $(a, n, k) \mapsto ank$ je bianalitička bijekcija sa ${}^0A \times N \times K$ na ${}^0G$.

(e) A je split−komponenta grupe $\tilde{M}$ i ${}^0\tilde{M} = \tilde{M} \cap K = M$. Posebno, moženje $(a, m) \mapsto am$ je izomorfizam Liejevih grupa sa $A \times M$ na $\tilde{M}$.

Razmotrimo sada realne algebarske grupe iz primjera od **1.** do **13.** Za $G = GL(n, \mathbb{R})$ vrijedi

$$G^+ = G, \qquad \mathfrak{s} = \mathbb{R}I_n, \qquad S = \{cI_n;\ c > 0\} \qquad \text{i} \qquad {}^0G = \{g \in G;\ \det g = \pm 1\}.$$

Za $G = GL(n, \mathbb{C})$ vrijedi:

$$G^+ = G, \qquad \mathfrak{s} = \mathbb{R}I_n, \qquad S = \{cI_n;\ c > 0\} \qquad \text{i} \qquad {}^0G = \{g \in G;\ |\det g| = 1\}.$$

Za sve ostale primjere vrijedi $\mathfrak{s} = \{0\}$ i $G^+ = {}^0G = G$.

Neka je sada $\mathfrak{t}$ maksimalna komutativna podalgebra od $\mathfrak{m}$ i $\mathfrak{h} = \mathfrak{t} \oplus \mathfrak{a}$. Lako se vidi da je tada $\mathfrak{h}$ Cartanova podalgebra od $\mathfrak{g}$ i, naravno, njena kompleksifikacija $\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}$ je Cartanova podalgebra od $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$. Neka je $R = R\left(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}, \mathfrak{h}^{\mathbb{C}}\right)$ sistem korijena od $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ u odnosu na $\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}$. Tada je očito

$$R(\mathfrak{g}, \mathfrak{a}) = \{\alpha|\mathfrak{a};\ \alpha \in R\} \setminus \{0\}.$$

Budući da su restrikcije svih korijena iz R na $\mathfrak{a}$ realne, a na $\mathfrak{t}$ čisto imaginarne, slijedi da su restrikcije svih korijena iz R na realnoj formi $i\mathfrak{t} \oplus \mathfrak{a}$ od $\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}$ realne; stoga uz oznake iz odjeljka 1.6. vrijedi

$$\left(\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}\right)_{\mathbb{R}} = (i\mathfrak{t} \oplus \mathfrak{a}) \cap \left[\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}, \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}\right].$$

Neka je kao i prije

$$\mathfrak{a}' = \{h \in \mathfrak{a};\ \mu(h) \neq 0\ \ \forall \mu \in R(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})\}$$

i izaberimo $h_1 \in \mathfrak{a}' \cap \left(\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}\right)_{\mathbb{R}}$. Tada je, naravno, $h_1 \neq 0$ pa ga možemo dopuniti do baze $\{h_1, \ldots, h_r\}$ realnog prostora $\left(\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}\right)_{\mathbb{R}}$. Uvedimo u R leksikografski uređaj u odnosu na tu bazu: za $\alpha, \beta \in R$ je $\alpha \leq \beta$ ako je ili $\alpha = \beta$ ili za neki $j \in \{1, \ldots, r-1\}$ vrijedi $\alpha(h_i) = \beta(h_i)$ za $1 \leq i < j$ i $\alpha(h_j) < \beta(h_j)$. Neka je R_+ skup pozitivnih korijena iz R u odnosu na taj uređaj. Jasno je da je

$$P = \{\mu \in R(\mathfrak{g}, \mathfrak{a});\ \mu(h_1) > 0\}$$

jedan mogući skup pozitivnih korijena iz $R(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$ i u odnosu na taj skup definiramo $\mathfrak{n}$ i $\overline{\mathfrak{n}}$. Neka je Δ baza sistema korijena R pridružena skupu pozitivnih korijena R_+ (dakle, Δ je skup svih $\alpha \in R_+$ takvih da ne postoje $\beta, \gamma \in R_+$ takvi da je $\alpha = \beta + \gamma$) i neka je Σ baza sistema korijena $R(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$ pridružena skupu pozitivnih korijena P. Stavimo

$$\Delta_0 = \{\alpha \in \Delta;\ \alpha|\mathfrak{a} = 0\}.$$

Tada vrijedi

$$\Sigma = \{\alpha|\mathfrak{a};\ \alpha \in \Delta \setminus \Delta_0\}.$$

Napomenimo još da je Σ linearno nezavisan podskup od $\mathfrak{a}^*$; doista, Σ je baza sistema korijena $R(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$ pa je Σ baza potprostora $span_{\mathbb{R}}\, R(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$ od $\mathfrak{a}^*$.

Neka je sada F podskup od Σ. Stavimo

$$\mathfrak{a}_F = \{h \in \mathfrak{a};\ \mu(h) = 0\ \ \forall \mu \in F\}, \qquad A_F = \exp \mathfrak{a}_F,$$

$$\tilde{\mathfrak{m}}_F = C_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{a}_F) = \{x \in \mathfrak{g};\ [a, h] = 0\ \ \forall h \in \mathfrak{a}_F\}, \quad \tilde{M}_F = C_G(\mathfrak{a}_F) = \{g \in G;\ (Ad\, g)h = h\ \ \forall h \in \mathfrak{a}_F\}.$$

Očito je $\tilde{M}_F$ zatvorena podgrupa od G s Liejevom algebrom $\tilde{\mathfrak{m}}_F$, a A_F je zatvorena povezana i jednostavno povezana podgrupa od G s Liejevom algebrom $\mathfrak{a}_F$. Nadalje, stavimo

$$P(F) = \{\alpha \in P;\ \alpha|\mathfrak{a}_F \neq 0\} \qquad \text{i} \qquad \mathfrak{n}_F = \sum_{\mu \in P(F)} \dot{+}\, \mathfrak{g}^{\mu}$$

i neka je N_F povezana Liejeva podgrupa od G s Liejevom algebrom $\mathfrak{n}_F$. Napokon, stavimo

$$P_F = \tilde{M}_F N_F = \{mn;\ m \in \tilde{M}_F,\ n \in N_F\}.$$

Teorem 1.11.9. *Uz uvedene oznake vrijedi:*

(*a*) *$\tilde{M}_F$ je realna reduktivna grupa i A_F je njena standardna split−komponenta u odnosu na restrikciju Cartanove involucije ϑ.*

(*b*) *Ako je $G = G^+$ onda je $\tilde{M}_F = \tilde{M}_F^+$.*

(*c*) *$\mathfrak{n}_F$ je nilpotentna Liejeva algebra i $ad\,\mathfrak{n}_F$ se sastoji od nilpotentnih operatora na $\mathfrak{g}$.*

(*d*) *N_F je zatvorena jednostavno povezana podgrupa od G i $\exp|\mathfrak{n}_F$ je bianalitička bijekcija sa $\mathfrak{n}_F$ na N_F.*

(*e*) *P_F je zatvorena podgrupa od G i množenje $(m, n) \mapsto mn$ je bianalitička bijekcija sa $\tilde{M}_F \times N_F$ na P_F.*

(*f*) *Za $M_F = {}^0\tilde{M}_F$ množenje $(m, a, n) \mapsto man$ je bianalitička bijekcija sa $M_F \times A_F \times N_F$ na P_F.*

Podgrupe P_F, $F \subseteq \Sigma$, zovu se **standardne paraboličke podgrupe** od G. Dekompozicija $P_F = M_F A_F N_F$ zove se **Langlandsova dekompozicija** od P_F. **Paraboličke podgrupe** od G su sve one podgrupe koje su konjugirane nekoj standardnoj paraboličkoj podgrupi. Dakle, **minimalne paraboličke podgrupe** su podgrupe konjugirane podgrupi $P_\emptyset = \tilde{M}_\emptyset N_\emptyset$. Primijetimo da je $A_\emptyset = A$, $\tilde{M}_\emptyset = \tilde{M} = MA$, $M_\emptyset = M$ i $N_\emptyset = N$.

Za realnu reduktivnu grupu G kažemo da je **unutarnjeg tipa** ako je $Ad\,G \subseteq Int\left(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}\right)$.

Teorem 1.11.10. *Ako je realna reduktivna grupa G unutarnjeg tipa, onda je za svaki $F \subseteq \Sigma$ i grupa $\tilde{M}_F$ unutarnjeg tipa. Nadalje, vrijedi $G = P_F K^0$, gdje je K^0 komponenta povezanosti jedinice u kompaktnoj grupi K.*

Promatrajmo sada minimalnu standardnu paraboličku podgrupu $P = P_\emptyset$. Za svaki element s Weylove grupe $W(R(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})) = W(G, A) = M'/M$ fiksirajmo $s^* \in M' = N_K(\mathfrak{a})$ takav da je $s = s^*M$.

Teorem 1.11.11. (**Bruhatova dekompozicija**) *Ako je grupa G unutarnjeg tipa, elementi s^*, $s \in W(G, A)$, su predstavnici svih duplih $P : P-$klasa u G. Drugim riječima, G je disjunktna unija skupova Ps^*P, $s \in W(G, A)$.*

Važna posljedica ovog teorema je

Teorem 1.11.12. (**Geljfand−Naimarkova dekompozicija**) *Ako je $G = G^+$ onda je za svaki $F \subseteq \Sigma$ množenje $(\overline{n}, m) \to \overline{n}m$ bianalitička bijekcija sa $\vartheta(N_F) \times P_F$ na otvoren gust podskup od G, čiji komplement ima Haarovu mjeru nula.*

Promatrat ćemo sada Cartanove podalgebre od $\mathfrak{g}$. $\mathfrak{h}$ je Cartanova podalgebra od $\mathfrak{g}$ ako i samo ako je njena kompleksifikacija $\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}$ Cartanova podalgebra kompleksne reduktivne Liejeve algebre $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$. Definiramo polinome D_j na $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ ovako

$$\det(TI_{\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}} - ad\,x) = \sum_{j \geq 0} D_j(x) T^j.$$

Neka je ℓ rang kompleksne reduktivne Liejeve algebre $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$, tj. dimenzija bilo koje njene Cartanove podalgebre. Tada je $D_j = 0$ za $j < \ell$ i $D = D_\ell \neq 0$, posebno, $D|\mathfrak{g} \neq 0$. Stavimo

$$\mathfrak{g}' = \{x \in \mathfrak{g};\ D(x) \neq 0\}.$$

To je otvoren gust podskup od $\mathfrak{g}$. Elementi od $\mathfrak{g}'$ zovu se **regularni elementi** Liejeve algebre $\mathfrak{g}$.

Teorem 1.11.13. *Uz uvedene oznake vrijedi:*

(*a*) *Za svaki* $x \in \mathfrak{g}'$ *operator* $ad\, x$ *je poluprost i* $C_{\mathfrak{g}}(x) = \{h \in \mathfrak{g};\ [h,x] = 0\}$ *je Cartanova podalgebra od* $\mathfrak{g}$.

(*b*) *Ako je* $x \in \mathfrak{g}$ *takav da je operator* $ad\, x$ *poluprost, onda je* $C_{\mathfrak{g}}(x)$ *Liejeva podalgebra od* $\mathfrak{g}$ *koja je reduktivna u* $\mathfrak{g}$ *i ona sadrži Cartanovu podalgebru od* $\mathfrak{g}$.

(*c*) *Ako je* $\mathfrak{h}$ *Cartanova podalgebra od* $\mathfrak{g}$, *onda je* $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}' \neq \emptyset$, *i za svaki* $x \in \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}'$ *je* $\mathfrak{h} = C_{\mathfrak{g}}(x)$.

(*d*) *Ako je* $\mathfrak{h}$ *Cartanova podalgebra od* $\mathfrak{g}$, *postoji* $\varphi \in Int(\mathfrak{g})$ *takav da je Cartanova podalgebra* $\varphi(\mathfrak{h})$ $\vartheta-$*invarijantna.*

Za $\vartheta-$invarijantnu Cartanovu podalgebru $\mathfrak{h}$ od $\mathfrak{g}$ kažemo da je **fundamentalna** ili **maksimalno kompaktna** ako je $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{k}$ maksimalna komutativna podalgebra od $\mathfrak{k}$, a **maksimalno vektorska** ako je $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}$ Cartanov potprostor od $\mathfrak{p}$. Proizvoljna Cartanova podalgebra od $\mathfrak{g}$ zove se fundamentalna (odnosno, maksimalno vektorska) ako je njoj $Int(\mathfrak{g})-$konjugirana $\vartheta-$invarijantna Cartanova podalgebra takva.

Propozicija 1.11.14. *Fundamentalne i maksimalno vektorske* $\vartheta-$*invarijantne Cartanove podalgebre postoje. Svake dvije fundamentalne* (*odnosno, maksimalno vektorske*) $\vartheta-$*invarijantne Cartanove podalgebre su* $Ad\, K^0-$*konjugirane. Svake dvije fundamentalne* (*odnosno, maksimalno vektorske*) *Cartanove podalgebre od* $\mathfrak{g}$ *su* $Int(\mathfrak{g})-$*konjugirane.*

Primijetimo da je $\mathfrak{t} \mapsto C_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{t})$ bijekcija sa skupa svih Cartanovih podalgebri od $\mathfrak{k}$ na skup svih fundamentalnih $\vartheta-$invarijantnih podalgebri od $\mathfrak{g}$. Nadalje, za fiksirani Cartanov potprostor $\mathfrak{a}$ preslikavanje $\mathfrak{t} \mapsto i\mathfrak{t} \oplus \mathfrak{a}$ je bijekcija sa skupa svih maksimalnih komutativnih podalgebri od $\mathfrak{m}$ na skup svih maksimalno vektorskih $\vartheta-$invarijantnih Cartanovih podalgebri $\mathfrak{h}$ od $\mathfrak{g}$, takvih da je $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{p} = \mathfrak{a}$.

Za proizvoljnu Cartanovu podalgebru $\mathfrak{h}$ od $\mathfrak{g}$ korijen $\alpha \in R\left(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}, \mathfrak{h}^{\mathbb{C}}\right)$ zove se **realan korijen** ako je $\alpha(\mathfrak{h}) \subseteq \mathbb{R}$. Pokazuje se da vrijedi:

Propozicija 1.11.15. *Cartanova podalgebra* $\mathfrak{h}$ *je fundamentalna ako i samo ako u* $R\left(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}, \mathfrak{h}^{\mathbb{C}}\right)$ *nema realnih korijena.*

Za standardnu paraboličku podgrupu P_F od G kažemo da je **kaspidalna** ako Liejeva algebra $\mathfrak{m}_F = {}^0\tilde{\mathfrak{m}}_F$ od M_F ima Cartanovu podalgebru $\mathfrak{t}_F$ koja je sadržana u $\mathfrak{k}$. U tom slučaju stavljamo $\mathfrak{h}_F = \mathfrak{t}_F \dotplus \mathfrak{a}_F$.

Teorem 1.11.16. *Neka je* $\mathfrak{h}$ *Cartanova podalgebra od* $\mathfrak{g}$. *Tada postoje* $\varphi \in Int(\mathfrak{g})$ *i kaspidalna standardna parabolička podgrupa* P_F *od* G *takvi da je* $\varphi(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}_F$.

Neka je $\mathfrak{h}$ Cartanova podalgebra od $\mathfrak{g}$. Tada se podgrupa

$$C_G(\mathfrak{h}) = \{g \in G;\ (Ad\, g)h = h\ \forall h \in \mathfrak{h}\}$$

zove **Cartanova podgrupa** od G.

Teorem 1.11.17. *Standardna parabolička podgrupa* P_F *je kaspidalna ako i samo ako grupa* M_F *ima kompaktnu Cartanovu podgrupu* T_F. *U tom je slučaju* $H_F = T_F A_F$ *Cartanova podgrupa od* G. *Za svaku Cartanovu podgrupu* H *od* G *postoje* $g \in G^0$ *i standardna kaspidalna parabolička podgrupa* P_F *takvi da je* $gHg^{-1} = H_F$.

1.12 Infinitezimalni karakteri

Neka je $\mathfrak{g}$ kompleksna reduktivna Liejeva algebra, $\mathfrak{h}$ njena Cartanova podalgebra, $R = R(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ pripadni sistem korijena i R_+ neki izbor pozitivnih korijena. Kao i prije stavimo

$$\mathfrak{n}^+ = \sum_{\alpha\in R_+} \dot{+}\, \mathfrak{g}_\alpha, \qquad \mathfrak{n}^- = \sum_{\alpha\in R_+} \dot{+}\, \mathfrak{g}_{-\alpha}, \qquad \mathfrak{b} = \mathfrak{h} \dot{+} \mathfrak{n}^+.$$

Iz baza u $\mathfrak{n}^-$, $\mathfrak{h}$ i $\mathfrak{n}^+$ pomoću PBW−teorema dolazimo do baze univerzalne omotačke algebre $U(\mathfrak{g})$. Posebno, dobivamo da vrijedi

$$U(\mathfrak{g}) = U(\mathfrak{h}) \dot{+} \left(\mathfrak{n}^- U(\mathfrak{g}) + U(\mathfrak{g})\mathfrak{n}^+\right).$$

U ovom rastavu prvi direktni sumand razapet je svim monomima u elementima baze od $\mathfrak{h}$, a drugi je direktni sumand razapet svim onim monomima u elementima baze od $\mathfrak{g}$ u kojima se pojavljuje neki član koji nije u $\mathfrak{h}$. Označimo sada sa $\mu_\mathfrak{b}$ projektor prostora $U(\mathfrak{g})$ na potprostor $U(\mathfrak{h})$ u skladu s gornjim rastavom u direktnu sumu.

Teorem 1.12.1. *Neka je*

$$U(\mathfrak{g})^\mathfrak{h} = \{u \in U(\mathfrak{g});\ uh = hu \ \ \forall h \in \mathfrak{h}\}$$

centralizator od $\mathfrak{h}$ u $U(\mathfrak{g})$. Restrikcija $\mu_\mathfrak{b}|U(\mathfrak{g})^\mathfrak{h}$ je epimorfizam unitalnih algebri sa $U(\mathfrak{g})^\mathfrak{h}$ na $U(\mathfrak{h})$ i njegova je jezgra

$$U(\mathfrak{g})^\mathfrak{h} \cap (\mathfrak{n}^- U(\mathfrak{g}) + U(\mathfrak{g})\mathfrak{n}^+) = U(\mathfrak{g})^\mathfrak{h} \cap \mathfrak{n}^- U(\mathfrak{g}) = U(\mathfrak{g})^\mathfrak{h} \cap U(\mathfrak{g})\mathfrak{n}^+.$$

Preslikavanje $\mu_\mathfrak{b}|U(\mathfrak{g})^\mathfrak{h}$ zove se **Harish−Chandrin homomorfizam** u odnosu na Borelovu podalgebru $\mathfrak{b}$ od $\mathfrak{g}$, odnosno, u odnosu na izbor R_+ pozitivnih korijena u $R = R(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$. Posebno ističemo da taj homomorfizam nije neovisan o izboru $\mathfrak{b}$, odnosno, o izboru R_+.

Liejeva algebra $\mathfrak{h}$ je komutativna pa se njena univerzalna omotačka algebra $U(\mathfrak{h})$ identificira sa simetričnom algebrom $S(\mathfrak{h})$ prostora $\mathfrak{h}$, a ona se po tvrdnji (c) propozicije 1.3.9. identificira s polinomijalnom algebrom $\mathcal{P}(\mathfrak{h}^*)$ nad dualnim prostorom $\mathfrak{h}^*$.

Neka je sada $Z(\mathfrak{g})$ **centar univerzalne omotačke algebre** $U(\mathfrak{g})$:

$$Z(\mathfrak{g}) = \{u \in U(\mathfrak{g});\ uv = vu \ \ \forall v \in U(\mathfrak{g})\} = \{u \in U(\mathfrak{g});\ xu = ux \ \ \forall x \in \mathfrak{g}\}.$$

Očito je $Z(\mathfrak{g})$ unitalna podalgebra od $U(\mathfrak{g})^\mathfrak{h}$, pa se na svaki element $z \in Z(\mathfrak{g})$ može primijeniti Harish−Chandrin homomorfizam $\mu_\mathfrak{b}$. Tada je $\mu_\mathfrak{b}(z)$ element od $U(\mathfrak{h})$, dakle, to je polinomijalna funkcija na dualnom prostoru $\mathfrak{h}^*$ od $\mathfrak{h}$. Ovisnost o izboru Borelove podalgebre $\mathfrak{b}$, odnosno, skupa pozitivnih korijena R_+, uklanja se primjenom jednostavnog automorfizma unitalne algebre $U(\mathfrak{h}) = S(\mathfrak{h}) = \mathcal{P}(\mathfrak{h}^*)$. Radi se o automorfizmu $\gamma_\mathfrak{b}$ algebre $\mathcal{P}(\mathfrak{h}^*)$ koji predstavlja pomak za

$$\rho_\mathfrak{b} = \rho_{R_+} = \frac{1}{2}\sum_{\alpha\in R_+} \alpha.$$

Automorfizam $\gamma_\mathfrak{b}$ polinomijalnu funkciju u na $\mathfrak{h}^*$ transformira u funkciju $\lambda \mapsto u(\lambda - \rho_\mathfrak{b})$. Dakle,

$$(\gamma_\mathfrak{b}(u))(\lambda) = u(\lambda - \rho_\mathfrak{b}), \qquad \lambda \in \mathfrak{h}^*, \quad u \in U(\mathfrak{h}) = S(\mathfrak{h}) = \mathcal{P}(\mathfrak{h}^*).$$

Teorem 1.12.2. (a) *Uz uvedene oznake restrikcija $\gamma_\mathfrak{h} = (\gamma_\mathfrak{b} \circ \mu_\mathfrak{b})|Z(\mathfrak{g})$ neovisna je o izboru Borelove podalgebre $\mathfrak{b}$ od $\mathfrak{g}$ koja sadrži Cartanovu podalgebru $\mathfrak{h}$, odnosno, neovisna je o izboru skupa R_+ pozitivnih korijena u $R = R(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$.*

(b) *$\gamma_\mathfrak{h}$ je izomorfizam unitalne algebre $Z(\mathfrak{g})$ na algebru $S(\mathfrak{h})^W = \mathcal{P}(\mathfrak{h}^*)^W$ polinomijalnih funkcija na $\mathfrak{h}^*$ invarijantnih u odnosu na Weylovu grupu $W = W(R)$ sistema korijena R.*

Izomorfizam $\gamma_{\mathfrak{h}} : Z(\mathfrak{g}) \to S(\mathfrak{h})^W = \mathcal{P}(\mathfrak{h}^*)^W$ zove se **Harish−Chandrin izomorfizam.**

Za $z \in Z(\mathfrak{g})$ evaluaciju polinomijalne funkcije $\gamma_{\mathfrak{h}}(z) \in \mathcal{P}(\mathfrak{h}^*)$ u točki $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ označimo sa $\chi_\lambda(z)$:

$$\chi_\lambda(z) = (\gamma_{\mathfrak{h}}(z))(\lambda) = (\mu_{\mathfrak{b}}(z))(\lambda - \rho_{\mathfrak{b}}), \qquad z \in Z(\mathfrak{g}), \quad \lambda \in \mathfrak{h}^*.$$

Tada je $\chi_\lambda : Z(\mathfrak{g}) \to \mathbb{C}$ unitalni homomorfizam algebre $Z(\mathfrak{g})$ u polje $\mathbb{C}$, tj. to je **centralni karakter unitalne algebre** $U(\mathfrak{g})$. U odjeljku 1.4. spomenuli smo da se centralni karakteri univerzalne omotačke algebre $U(\mathfrak{g})$ obično zovu **infinitezimalni karakteri** za Liejevu algebru $\mathfrak{g}$. Skup svih infinitezimalnih karaktera za Liejevu algebru $\mathfrak{g}$, odnosno, skup svih unitalnih homomorfizama $Z(\mathfrak{g}) \to \mathbb{C}$, označavamo sa $\hat{Z}(\mathfrak{g})$.

Teorem 1.12.3. *Preslikavanje $\lambda \mapsto \chi_\lambda$ je surjekcija sa $\mathfrak{h}^*$ na $\hat{Z}(\mathfrak{g})$. Za $\lambda, \lambda' \in \mathfrak{h}^*$ vrijedi $\chi_\lambda = \chi_{\lambda'}$ ako i samo ako se $W-$orbite od λ i od λ' podudaraju, tj. ako i samo ako postoji $w \in W$ takav da je $\lambda' = w\lambda$. Drugim riječima, preslikavanje $\lambda \mapsto \chi_\lambda$ inducira bijekciju sa skupa $\mathfrak{h}^*/W$ svih $W-$orbita u $\mathfrak{h}^*$ na skup $\hat{Z}(\mathfrak{g})$.*

Struktura algebre $\mathcal{P}(\mathfrak{h}^*)^W = S(\mathfrak{h})^W$ može se vrlo precizno opisati zahvaljujući činjenici da je W konačna grupa generirana refleksijama:

Teorem 1.12.4. *Neka je R sistem korijena u realnom ili kompleksnom konačnodimenzionalnom vektorskom prostoru V, $W = W(R)$ Weylova grupa od R i $\ell = \dim V$. Postoje homogeni polinomi $f_1, \ldots, f_\ell \in \mathcal{P}(V)^W$ koji su algebarski nezavisni i generiraju unitalnu algebru $\mathcal{P}(V)^W$. Drugim riječima, unitalna algebra $\mathcal{P}(V)^W$ izomorfna je algebri polinoma u ℓ varijabli. Stupnjevi $\nu_j = \deg f_j$, $j = 1, \ldots, \ell$, neovisni su (do na poredak) o izboru takvih polinoma $f_1, \ldots, f_\ell$ i vrijedi*

$$\nu_1 + \cdots + \nu_\ell = \ell + \frac{|R|}{2} \qquad i \qquad \nu_1 \cdots \nu_\ell = |W|.$$

Brojevi $\nu_j - 1$, $1 \le j \le \ell$, zovu se **eksponenti** sistema korijena R ili grupe W. Za ireducibilne reducirane sisteme korijena eksponenti su:

A_ℓ :	$1, 2, \ldots, \ell$;	E_6 :	$1, 4, 5, 7, 8, 11$;
B_ℓ :	$1, 3, \ldots, 2\ell - 1$;	E_7 :	$1, 5, 7, 9, 11, 13, 17$;
C_ℓ :	$1, 3, \ldots, 2\ell - 1$;	E_8 :	$1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29$;
D_ℓ :	$1, 3, \ldots, 2\ell - 3, \ell - 1$;	F_4 :	$1, 5, 7, 11$;
		G_2 :	$1, 5$.

Uz dosadašnje oznake neka je $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ i neka je $M(\lambda)$ pripadni Vermaov modul:

$$M(\lambda) = U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{b})} \mathbb{C}_\lambda.$$

Neka je $v_0 = 1_{U(\mathfrak{g})} \otimes_{U(\mathfrak{b})} 1$ kanonski generator $U(\mathfrak{g})-$modula $M(\lambda)$ najveće težine λ (u odnosu na parcijalni uređaj na $\mathfrak{h}^*$ uveden u odjeljku 1.9.). Neka je $z \in Z(\mathfrak{g})$. Tada je $z - \mu_{\mathfrak{b}}(z) \in U(\mathfrak{g})\mathfrak{n}^+$, a kako je $xv_0 = 0$ za svaki $x \in \mathfrak{n}^+$, slijedi da je $zv_0 = \mu_{\mathfrak{b}}(z)v_0$. Međutim, v_0 je svojstveni vektor za svaki $h \in \mathfrak{h}$ sa svojstvenom vrijednošću $\lambda(h)$. Odatle slijedi da je v_0 svojstveni vektor za svaki $u \in U(\mathfrak{h})$ sa svojstvenom vrijednošću $u(\lambda)$ (uz identifikaciju $U(\mathfrak{h}) = S(\mathfrak{h}) = \mathcal{P}(\mathfrak{h}^*)$). Za $z \in Z(\mathfrak{g})$ imamo

$$(\mu_{\mathfrak{b}}(z))(\lambda) = ((\gamma_{\mathfrak{b}}^{-1} \circ \gamma_{\mathfrak{h}})(z))(\lambda) = (\gamma_{\mathfrak{h}}(z))(\lambda + \rho_{\mathfrak{b}}) = \chi_{\lambda + \rho_{\mathfrak{b}}}(z)$$

Dakle, vrijedi

$$zv_0 = \chi_{\lambda + \rho_{\mathfrak{b}}}(z)v_0 \qquad \forall z \in Z(\mathfrak{g}).$$

Sada je

$$M(\lambda)_{\chi_{\lambda+\rho_{\mathfrak{b}}}} = \{v \in M(\lambda);\ zv = \chi_{\lambda+\rho_{\mathfrak{b}}}(z)v \ \ \forall z \in Z(\mathfrak{g})\}$$

$U(\mathfrak{g})-$podmodul od $M(\lambda)$ koji sadrži vektor v_0, a kako je $M(\lambda) = U(\mathfrak{g})v_0$, slijedi da je taj podmodul jednak čitavom Vermaovom modulu $M(\lambda)$. Prema tome:

Teorem 1.12.5. *Vermaov modul $M(\lambda)$ je $U(\mathfrak{g})-$modul s infinitezimalnim karakterom $\chi_{\lambda+\rho_{\mathfrak{b}}}$.*

Poglavlje 2

CLIFFORDOVE ALGEBRE

2.1 Realne Cliffordove algebre

U ovom odjeljku V je realan konačnodimenzionalan unitaran prostor sa skalarnim produktom $(\cdot|\cdot)$. Cliffordova algebra nad V je uređen par $(C(V), j)$ sa svojstvima:

($C1$) $C(V)$ je realna unitalna algebra s jedinicom e.

($C2$) $j : V \to C(V)$ je linearno preslikavanje sa svojstvom $j(v)^2 = -(v|v)e \ \forall v \in V$.

($C3$) Ako je $\mathcal{A}$ realna unitalna algebra s jedinicom $e_{\mathcal{A}}$ i $\varphi : V \to \mathcal{A}$ linearno preslikavanje sa svojstvom $\varphi(v)^2 = -(v|v)e_{\mathcal{A}} \ \forall v \in V$, onda postoji jedinstven unitalni homomorfizam $\tilde{\varphi} : C(V) \to \mathcal{A}$ takav da je $\tilde{\varphi} \circ j = \varphi$.

Kao i obično, ($C3$) se zove *univerzalno svojstvo.* To svojstvo osigurava da je Cliffordova algebra do na izomorfizam jedinstvena (ukoliko uopće postoji): ako su $(C(V), j)$ i $(C'(V), j')$ Cliffordove algebre nad V, onda za jedinstvene unitalne homomorfizme $\tilde{j}' : C(V) \to C'(V)$ i $\tilde{j} : C'(V) \to C(V)$ takve da je $\tilde{j}' \circ j = j'$ i $\tilde{j} \circ j' = j$ vrijedi

$$\tilde{j} \circ \tilde{j}' \circ j = \tilde{j} \circ j' = j = I_{C(V)} \circ j,$$

pa zbog jedinstvenosti u ($C3$) slijedi $\tilde{j} \circ \tilde{j}' = I_{C(V)}$; sasvim analogno je i $\tilde{j}' \circ \tilde{j} = I_{C'(V)}$, pa vidimo da su $\tilde{j}$ i $\tilde{j}'$ međusobno inverzni izomorfizmi. Druga je posljedica univerzalnog svojstva da je unitalna algebra $C(V)$ generirana slikom $\operatorname{Im} j = j(V)$ linearnog preslikavanja j. Doista, ako sa $\mathcal{A}$ označimo unitalnu podalgebru od $C(V)$ generiranu sa $j(V)$, onda je očito par $(\mathcal{A}, j)$ Cliffordova algebra nad V. Nadalje, izomorfizam $\tilde{j} : \mathcal{A} \to C(V)$ takav da je $\tilde{j} \circ j = j$ je zbog njegove jedinstvenosti naprosto inkluzija $\mathcal{A} \hookrightarrow C(V)$. Dakle, $\mathcal{A} = C(V)$.

Egzistenciju Cliffordove algebre nad V dobit ćemo nešto kasnije preko dvije konstrukcije: kao kvocijentne algebre tenzorske algebre $T(V)$ i sasvim konkretnim opisom preko baze. Prije toga uočimo još neke činjenice. Primijenimo li svojstvo $j(v)^2 = -(v|v)e$ na vektor $v + w$ za proizvoljne $v, w \in V$, zbog biaditivnosti skalarnog produkta slijedi da preslikavanje j ima svojstvo:

$$j(v)j(w) + j(w)j(v) = -2(v|w)e \qquad \forall v, w \in V. \tag{2.1}$$

Neka je sada $\{e_1, \ldots, e_n\}$ ortonormirana baza od V. Tada je $(e_i|e_k) = 0$ za $i \neq k$, prema tome, iz (2.1) slijedi da elementi $j(e_i)$ antikomutiraju i kvadrati su im $-e$:

$$j(e_i)j(e_k) = -j(e_k)j(e_i) \quad \text{za } i \neq k; \qquad j(e_i)^2 = -e \quad \forall i. \tag{2.2}$$

Odatle slijedi da skup

$$\{j(e_{i_1})\cdots j(e_{i_k});\ 1\leq i_1<i_2<\cdots<i_k\leq n=\dim V\} \tag{2.3}$$

razapinje vektorski prostor $C(V)$; pri tome je, naravno, i jedinica e algebre $C(V)$ uključena u taj skup: nju shvaćamo kao produkt praznog niza vektora $(j(e_i))_{i\in\emptyset}$. Vidjet ćemo nešto kasnije da je to ne samo skup koji razapinje $C(V)$ nego baza od $C(V)$, dakle, da je $\dim C(V)=2^{\dim V}$. Primijetimo još da skup (2.3) razapinje prostor $C(V)$ ne samo za ortonormiranu nego za svaku bazu prostora V. Za takav zaključak nisu nužne relacije (2.2) koje vrijede za ortonormiranu bazu, nego se jednako dobro mogu upotrijebiti općenite jednakosti

$$j(e_i)j(e_k)=-j(e_k)j(e_i)-2(e_i|e_k)e.$$

Neka je $k:V\to C(V)$ linearno preslikavanje definirano sa $k(v)=-j(v)$, $v\in V$. Tada je $k(v)^2=j(v)^2=-(v|v)e\ \ \forall v\in V$, pa po univerzalnom svojstvu $(C3)$ postoji jedinstven unitalni homomorfizam $\kappa:C(V)\to C(V)$ takav da je $\kappa\circ j=k$. Prema tome, $\kappa:C(V)\to C(V)$ je jedinstven unitalni homomorfizam takav da vrijedi

$$\kappa(j(v))=-j(v)\qquad\forall v\in V.$$

Očito je tada κ involutivni automorfizam od $C(V)$. Stavimo

$$C^0(V)=\{u\in C(V);\ \kappa(u)=u\}\qquad \text{i}\qquad C^1(V)=\{u\in C(V);\ \kappa(u)=-u\}.$$

Budući da za $v_1,\ldots,v_\ell\in V$ vrijedi

$$\kappa(j(v_1)\cdots j(v_\ell))=(-j(v_1))\cdots(-j(v_\ell))=(-1)^\ell j(v_1)\cdots j(v_\ell),$$

vidimo da je $C^0(V)$ potprostor od $C(V)$ razapet svim produktima parnog broja elemenata $j(v)$, $v\in V$, a $C^1(V)$ je potprostor razapet svim produktima neparnog broja takvih elemenata. Posebno, $(C^0(V),C^1(V))$ je $\mathbb{Z}_2-$graduacija algebre $C(V)$:

$$C(V)=C^0(V)\dotplus C^1(V),\qquad C^i(V)C^k(V)\subseteq C^{i+k}(V),\quad i,k\in\mathbb{Z}_2=\{0,1\},$$

pri čemu za $i,k\in\{0,1\}$ oznaka $i+k$ predstavlja zbroj u $\mathbb{Z}_2$, tj. *zbroj modulo* 2; dakle,

$$C^0(V)C^0(V)\subseteq C^0(V),\ C^0(V)C^1(V)\subseteq C^1(V),\ C^1(V)C^0(V)\subseteq C^1(V),\ C^1(V)C^1(V)\subseteq C^0(V).$$

Elementi od $C^0(V)$ zovu se **parni**, a elementi od $C^1(V)$ **neparni**. Involutivni automorfizam κ Cliffordove algebre $C(V)$ zove se **automorfizam parnosti**.

Prijeđimo sada na dokaz egzistencije Cliffordove algebre konstrukcijom iz tenzorske algebre. Neka je I dvostrani ideal u tenzorskoj algebri $T(V)$ nad vektorskim prostorom V generiran skupom

$$\{v\otimes v+(v|v);\ v\in V\}.$$

Stavimo $C(V)=T(V)/I$ i neka je j restrikcija na V kvocijentnog epimorfizma $T(V)\to C(V)$. Tada je $C(V)$ unitalna algebra i $j:V\to C(V)$ je linearno preslikavanje. Neka je $\mathcal{A}$ unitalna algebra i $\varphi:V\to\mathcal{A}$ linearno preslikavanje sa svojstvom $\varphi(v)^2=-(v|v)e_{\mathcal{A}}\ \forall v\in V$. Po univerzalnom svojstvu tenzorske algebre φ se jedinstveno proširuje do unitalnog homomorfizma $\overline{\varphi}:T(V)\to\mathcal{A}$. Za svaki $v\in V$ tada vrijedi

$$\overline{\varphi}(v\otimes v+(v|v))=\overline{\varphi}(v)\overline{\varphi}(v)+(v|v)\overline{\varphi}(1)=\varphi(v)^2+(v|v)e_{\mathcal{A}}=0.$$

To pokazuje da je

$$v \otimes v + (v|v) \in \operatorname{Ker} \overline{\varphi} \qquad \forall v \in V.$$

Dakle, $I \subseteq \operatorname{Ker} \overline{\varphi}$. Prijelazom na kvocijent dolazimo do unitalnog homomorfizma $\tilde{\varphi} : C(V) \to \mathcal{A}$,

$$\tilde{\varphi}(u + I) = \overline{\varphi}(u), \qquad u \in T(V).$$

Sada za proizvoljan $v \in V$ imamo

$$(\tilde{\varphi} \circ j)(v) = \tilde{\varphi}(v + I) = \overline{\varphi}(v) = \varphi(v),$$

dakle, vrijedi $\tilde{\varphi} \circ j = \varphi$. Jedinstvenost takvog homomorfizma $\tilde{\varphi} : C(V) \to \mathcal{A}$ slijedi iz činjenice da V generira unitalnu algebru $T(V)$, pa njegova slika $j(V)$ generira unitalnu algebru $C(V)$, dakle, ako se dva unitalna homomorfizma podudaraju na $j(V)$, oni su jednaki.

Budući da ideal I nije generiran homogenim elementima algebre $T(V)$, $\mathbb{Z}-$graduacija tenzorske algebre $T(V)$ ne prenosi se na kvocijent $C(V) = T(V)/I$. Međutim, generatori ideala I su linearne kombinacije homogenih elemenata parnih stupnjeva 0 i 2, pa $\mathbb{Z}-$graduacija tenzorske algebre $T(V)$ inducira $\mathbb{Z}_2-$graduaciju Cliffordove algebre $C(V)$ i to je upravo malo prije opisana $\mathbb{Z}_2-$graduacija dobivena pomoću involutivnog automorfizma parnosti κ : ako sa $\pi : T(V) \to C(V)$ označimo kvocijentni epimorfizam, onda je

$$C^0(V) = \pi\left(\sum_{k \in \mathbb{Z}_+} \dot{+}\, T^{2k}(V)\right) \qquad \text{i} \qquad C^1(V) = \pi\left(\sum_{k \in \mathbb{Z}_+} \dot{+}\, T^{2k+1}(V)\right).$$

Ako su $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ $\mathbb{Z}_2-$graduirane unitalne algebre s graduacijama $(\mathcal{A}^0, \mathcal{A}^1)$ i $(\mathcal{B}^0, \mathcal{B}^1)$, definiramo njihov $\mathbb{Z}_2-$**graduiran tenzorski produkt** $\mathcal{A}\overline{\otimes}\mathcal{B}$. Kao vektorski prostor $\mathcal{A}\overline{\otimes}\mathcal{B}$ podudara se sa $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$, a množenje je bilinearno preslikavanje koje je za homogene elemente $a, a' \in \mathcal{A}$ i $b, b' \in \mathcal{B}$ definirano sa

$$(a \otimes b)(a' \otimes b') = (-1)^{(\deg b)(\deg a')} aa' \otimes bb'.$$

Tada je očito $\mathcal{A}\overline{\otimes}\mathcal{B}$ unitalna algebra s jedinicom $e_{\mathcal{A}} \otimes e_{\mathcal{B}}$ i ona je $\mathbb{Z}_2-$garduirana s graduacijom

$$(\mathcal{A}\overline{\otimes}\mathcal{B})^0 = \mathcal{A}^0 \otimes \mathcal{B}^0 \,\dot{+}\, \mathcal{A}^1 \otimes \mathcal{B}^1, \qquad (\mathcal{A}\overline{\otimes}\mathcal{B})^1 = \mathcal{A}^0 \otimes \mathcal{B}^1 \,\dot{+}\, \mathcal{A}^1 \otimes \mathcal{B}^0.$$

Propozicija 2.1.1. *Neka je $V = U \oplus W$ ortogonalni rastav. Tada je $C(V) \cong C(U)\overline{\otimes}C(W)$.*

Dokaz: Neka je $\{e_1, \ldots, e_n\}$ ortonormirana baza od V takva da je $\{e_1, \ldots, e_k\}$ baza od U i $\{e_{k+1}, \ldots, e_n\}$ baza od W. Označimo sa $j_V : V \to C(V)$, $j_U : U \to C(U)$ i $j_W : W \to C(W)$ linearna preslikavanja s kojima su $C(V)$, $C(U)$ i $C(W)$ Cliffordove algebre nad prostorima V, U i W. Nadalje, neka su e_V, e_U i e_W jedinice u algebrama $C(V)$, $C(U)$ i $C(W)$. Neka je linearno preslikavanje $\varphi : V \to C(U)\overline{\otimes}C(W)$ definirano na bazi $\{e_1, \ldots, e_n\}$ ovako:

$$\varphi(e_j) = \begin{cases} j_U(e_j) \otimes e_W & \text{ako je } 1 \leq j \leq k \\ \\ e_U \otimes j_W(e_j) & \text{ako je } k < j \leq n. \end{cases}$$

Tada je $(v, v') \mapsto \varphi(v)\varphi(v') + \varphi(v')\varphi(v) + 2(v|v')e_U \otimes e_W$ bilinearno preslikavanje sa $V \times V$ u $C(U)\overline{\otimes}C(W)$. Ono se poništava na vektorima baze od V :

(1) za $1 \leq j, \ell \leq k$ vrijedi

$$\varphi(e_j)\varphi(e_\ell) + \varphi(e_\ell)\varphi(e_j) + 2(e_j|e_\ell)e_U \otimes e_W =$$

$$= (j_U(e_j) \otimes e_W)(j_U(e_\ell) \otimes e_W) + (j_U(e_\ell) \otimes e_W)(j_U(e_j) \otimes e_W) + 2\delta_{j\ell}e_U \otimes e_W =$$

$$= [j_U(e_j)j_U(e_\ell) + j_U(e_\ell)j_U(e_j) + 2\delta_{j\ell}e_U] \otimes e_W = 0;$$

(2) ako su $1 \leq j \leq k$ i $k < \ell \leq n$, onda zbog definicije množenja u $\mathbb{Z}_2-$graduiranom tenzorskom produktu $C(U)\overline{\otimes}C(W)$ vrijedi

$$\varphi(e_j)\varphi(e_\ell) + \varphi(e_\ell)\varphi(e_j) + 2(e_j|e_\ell)e_U \otimes e_W =$$

$$(j_U(e_j) \otimes e_W)(e_U \otimes j_W(e_\ell)) + (e_U \otimes j_W(e_\ell))(j_U(e_j) \otimes e_W) =$$
$$= j_U(e_j) \otimes j_W(e_\ell) - j_U(e_j) \otimes j_W(e_\ell) = 0;$$

(3) analogno kao u (2), ako su $k < j \leq n$ i $1 \leq \ell \leq k$, onda je

$$\varphi(e_j)\varphi(e_\ell) + \varphi(e_\ell)\varphi(e_j) + 2(e_j|e_\ell)e_U \otimes e_W =$$

$$(e_U \otimes j_W(e_j))(j_U(e_\ell) \otimes e_W) + (j_U(e_\ell) \otimes e_W)(e_U \otimes j_W(e_j)) =$$
$$= -j_U(e_\ell) \otimes j_W(e_j) + j_U(e_\ell) \otimes j_W(e_j) = 0;$$

(4) napokon, ako je $k < j, \ell \leq n$, onda kao u (1) imamo

$$\varphi(e_j)\varphi(e_\ell) + \varphi(e_\ell)\varphi(e_j) + 2(e_j|e_\ell)e_U \otimes e_W =$$

$$= (e_U \otimes j_W(e_j))(e_u \otimes j_W(e_\ell)) + (e_U \otimes j_W(e_\ell))(e_u \otimes j_W(e_j)) + 2\delta_{j\ell}e_U \otimes e_W =$$
$$= e_U \otimes [j_W(e_j)j_W(e_\ell) + j_W(e_\ell)j_W(e_j) + 2\delta_{j\ell}e_W] = 0.$$

To znači da je bilinearno preslikavanje identički jednako nula, tj. vrijedi

$$\varphi(v)\varphi(v') + \varphi(v')\varphi(v) + 2(v|v')e_U \otimes e_W = 0 \qquad \forall v, v' \in V.$$

Posebno, za $v = v'$ dobivamo

$$\varphi(v)^2 = -(v|v)e_U \otimes e_W \qquad \forall v \in V.$$

Prema univerzalnom svojstvu $(C3)$ za Cliffordovu algebru $C(V)$ postoji jedinstven unitalni homomorfizam $\tilde{\varphi} : C(V) \to C(U)\overline{\otimes}C(W)$ takav da je $\tilde{\varphi} \circ j_V = \varphi$, odnosno, takav da je

$$\tilde{\varphi}(j_V(e_j)) = \varphi(e_j) = \begin{cases} j_U(e_j) \otimes e_W & \text{ako je } 1 \leq j \leq k \\ \\ e_U \otimes j_W(e_j) & \text{ako je } k < j \leq n. \end{cases}$$

Tada za $1 \leq i_1 < \cdots < i_r \leq k < j_1 < \cdots j_s \leq n$ dobivamo

$$\tilde{\varphi}\left(j_V(e_{i_1}) \cdots j_V(e_{i_r}) j_V(e_{j_1}) \cdots j_V(e_{j_s})\right) = j_U(e_{i_1}) \cdots j_U(e_{i_r}) \otimes j_W(e_{j_1}) \cdots j_W(e_{j_s}).$$

Budući da skup $\{j_U(e_{i_1}) \cdots j_U(e_{i_r});\ 1 \leq i_1 < \cdots < i_r \leq k\}$ razapinje prostor $C(U)$, a skup $\{j_W(e_{j_1}) \cdots j_W(e_{j_s});\ k < j_1 < \cdots < j_s \leq n\}$ razapinje prostor $C(W)$, zaključujemo da je homomorfizam $\tilde{\varphi} : C(V) \to C(U)\overline{\otimes}C(W)$ surjektivan.

Konstruirat ćemo sada lijevi invers $\tilde{\psi} : C(U)\overline{\otimes}C(W) \to C(V)$ preslikavanja $\tilde{\varphi}$ i tako dokazati da je $\tilde{\varphi}$ i injekcija, dakle, izomorfizam unitalnih algebri. Definiramo linearno preslikavanje $\psi_U : U \to C(V)$ kao restrikciju $j_V|U$, a linearno preslikavanje $\psi_W : W \to C(V)$ kao restrikciju $j_V|W$. Za $u \in U$ i $w \in W$ tada imamo

$$\psi_U(u)^2 = j_V(u)^2 = -(u|u)e_V \qquad \text{i} \qquad \psi_W(w)^2 = j_V(w)^2 = -(w|w)e_V.$$

Prema univerzalnom svojstvu $(C3)$ za Cliffordove algebre $C(U)$ i $C(W)$ postoje jedinstveni unitalni homomorfizmi $\tilde{\psi}_U : C(U) \to C(V)$ i $\tilde{\psi}_W : C(W) \to C(V)$ takvi da je $\tilde{\psi}_U \circ j_U = \psi_U$ i $\tilde{\psi}_W \circ j_W = \psi_W$. Tada je preslikavanje $\Psi : C(U) \times C(W) \to C(V)$, definirano sa

$$\Psi(u, w) = \tilde{\psi}_U(u)\tilde{\psi}_W(w), \qquad u \in C(U), \quad w \in C(W),$$

bilinearno pa po univerzalnom svojstvu tenzorskog produkta $C(U) \otimes C(W)$, koji se kao vektorski prostor podudara sa $C(U)\overline{\otimes}C(W)$, postoji jedinstven linearan operator $\tilde{\psi} : C(U)\overline{\otimes}C(W) \to C(V)$ takav da vrijedi

$$\tilde{\psi}(u \otimes w) = \tilde{\psi}_U(u)\tilde{\psi}_W(w) \qquad \forall u \in C(U) \quad \text{i} \quad \forall w \in C(W).$$

Sada za $1 \leq i_1 < \cdots < i_r \leq k < j_1 < \cdots < j_s \leq n$ imamo redom koristeći činjenice da su $\tilde{\psi}_U$ i $\tilde{\psi}_W$ homomorfizmi i da vrijedi $\tilde{\psi}_U \circ j_U = \psi_U = j_V|U$ i $\tilde{\psi}_W \circ j_W = \psi_W = j_V|W$:

$$(\tilde{\psi} \circ \tilde{\varphi})\,(j_V(e_{i_1}) \cdots j_V(e_{i_r}) j_V(e_{j_1}) \cdots j_V(e_{j_s})) = \tilde{\psi}\,(j_U(e_{i_1}) \cdots j_U(e_{i_r}) \otimes j_W(e_{j_1}) \cdots j_W(e_{j_s})) =$$

$$= \tilde{\psi}_U\,(j_U(e_{i_1}) \cdots j_U(e_{i_r}))\,\tilde{\psi}_W\,(j_W(e_{j_1}) \cdots j_W(e_{j_s})) =$$

$$= \tilde{\psi}_U\,(j_U(e_{i_1})) \cdots \tilde{\psi}_U\,(j_U(e_{i_r}))\,\tilde{\psi}_W\,(j_W(e_{j_1})) \cdots \tilde{\psi}_W\,(j_W(e_{j_s})) = j_V(e_{i_1}) \cdots j_V(e_{i_r}) j_V(e_{j_1}) \cdots j_V(e_{j_s}).$$

Budući da vektori $j_V(e_{i_1}) \cdots j_V(e_{i_r}) j_V(e_{j_1}) \cdots j_V(e_{j_s})$ razapinju vektorski prostor $C(V)$, zaključujemo da je $\tilde{\psi} \circ \tilde{\varphi} = I_{C(V)}$, odnosno, preslikavanje $\tilde{\psi}$ je lijevi invers homomorfizma $\tilde{\varphi}$. Time je propozicija 2.1.1. dokazana.

Teorem 2.1.2. *Ako je $\{e_1, \ldots, e_n\}$ baza vektorskog prostora V onda je skup* (2.3) *baza vektorskog prostora $C(V)$. Posebno, kanonsko preslikavanje $j : V \to C(V)$ je injektivno. Nadalje,* $\dim\, C(V) = 2^{\dim V}$.

Dokaz: Dokazujemo najprije tvrdnju o dimenziji i to indukcijom u odnosu na $\dim V$.

Neka je $\dim V = 1$, izaberimo $w \in V$, $\|w\| = 1$. Definiramo preslikavanje $j : V \to \mathbb{C}$ sa $j(\alpha w) = i\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$. $\mathbb{C}$ je dvodimenzionalna realna unitalna algebra s jedinicom 1. Nadalje, j je $\mathbb{R}-$linearno preslikavanje i za svaki $\alpha \in \mathbb{R}$, tj. za svaki $v = \alpha w \in V$, vrijedi

$$j(v)^2 = (i\alpha)^2 = -\alpha^2 = -(v|v)1.$$

Napokon, neka je $\mathcal{A}$ realna unitalna algebra s jedinicom $e_{\mathcal{A}}$ i neka je $\varphi : V \to \mathcal{A}$ linearno preslikavanje takvo da je $\varphi(v)^2 = -(v|v)e_{\mathcal{A}}$ $\forall v \in V$. Tada je, posebno, $\varphi(w)^2 = -e_{\mathcal{A}}$. Definiramo preslikavanje $\tilde{\varphi} : \mathbb{C} \to \mathcal{A}$ sa

$$\tilde{\varphi}(\alpha + i\beta) = \alpha e_{\mathcal{A}} + \beta\varphi(w), \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Tada je $\tilde{\varphi}$ $\mathbb{R}-$linearno preslikavanje, vrijedi $\tilde{\varphi}(1) = e_{\mathcal{A}}$ i za $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, $\lambda = \alpha + i\beta$, $\mu = \gamma + i\delta$, $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$, imamo redom

$$\tilde{\varphi}(\lambda)\tilde{\varphi}(\mu) = (\alpha e_{\mathcal{A}} + \beta\varphi(w))(\gamma e_{\mathcal{A}} + \delta\varphi)(w)) = \alpha\gamma e_{\mathcal{A}} + \alpha\delta\varphi(w) + \beta\gamma\varphi(w) + \beta\delta\varphi(w)^2 =$$

$$= (\alpha\gamma - \beta\delta)e_{\mathcal{A}} + (\alpha\delta + \beta\gamma)\varphi(w) = \tilde{\varphi}(\alpha\gamma - \beta\delta + i(\alpha\delta + \beta\gamma)) = \tilde{\varphi}(\lambda\mu).$$

Prema tome, $\tilde{\varphi} : \mathbb{C} \to \mathcal{A}$ je unitalni homomorfizam realnih unitalnih algebri. Za $v \in V$, $v = \alpha w$, $\alpha \in \mathbb{R}$, vrijedi

$$(\tilde{\varphi} \circ j)(v) = \tilde{\varphi}(j(\alpha w)) = \tilde{\varphi}(i\alpha) = \alpha\varphi(w) = \varphi(v).$$

Dakle, $\tilde{\varphi} \circ j = \varphi$. Napokon, ako je i $\psi : \mathbb{C} \to \mathcal{A}$ unitalni homomorfizam realnih unitalnih algebri sa svojstvom $\psi \circ j = \varphi$, onda za $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda = \alpha + i\beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, imamo

$$\psi(\lambda) = \psi(\alpha + i\beta) = \alpha\psi(1) + \beta\psi(i) = \alpha e_{\mathcal{A}} + \beta\psi(j(w)) = \alpha e_{\mathcal{A}} + \beta\varphi(w) = \tilde{\varphi}(\lambda).$$

Prema tome, $\tilde{\varphi}$ je jedinstven unitalni homomorfizam sa $\mathbb{C}$ u $\mathcal{A}$ takav da je $\tilde{\varphi} \circ j = \varphi$. Time je dokazano da je $(\mathbb{C}, j)$ Cliffordova algebra nad V. Dakle, $\dim C(V) = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2 = 2^{\dim V}$. Time je dokazana baza indukcije.

Neka je sada $\dim V \geq 2$ i pretpostavimo da je tvrdnja o dimenziji dokazana za vektorske prostore manje dimenzije. Neka je $V = U \otimes W$ netrivijalni ortogonalni rastav. Po propoziciji 2.1.1. vektorski prostor $C(V)$ izomorfan je tenzorskom produktu $C(U) \otimes C(W)$, pa po pretpostavci indukcije dobivamo

$$\dim C(V) = (\dim C(U))(\dim C(W)) = 2^{\dim U} 2^{\dim W} = 2^{\dim U + \dim W} = 2^{\dim V}.$$

Time je dokazana tvrdnja o dimenziji.

Primijetimo sada da u skupu (2.3) ima točno $2^{\dim V} = \dim C(V)$ vektora. Budući da ti vektori razapinju realan vektorski prostor $C(V)$, oni tvore bazu od $C(V)$.

U daljnjem ćemo injektivno preslikavanje $j : V \to C(V)$ upotrijebiti kao identifikaciju prostora V s potprostorom Cliffordove algebre $C(V)$. Nadalje, preslikavanje $\alpha \mapsto \alpha e$, $\alpha \in \mathbb{R}$, ćemo upotrijebiti kao identifikaciju $\mathbb{R}$ s unitalnom podalgebrom od $C(V)$, dakle, $e = 1$. Uz te identifikacije vrijede antikomutacijska pravila

$$vw + wv = -2(v|w), \qquad v, w \in V. \tag{2.4}$$

Posebno, ako je $\{e_1, \ldots, e_n\}$ ortonormirana baza od V, onda vrijedi

$$e_i e_k + e_k e_i = 0 \quad \text{za } i \neq k; \qquad e_i^2 = -1 \quad \forall i. \tag{2.5}$$

Za svaku bazu $\{e_1, \ldots, e_n\}$ od V je

$$\{e_{i_1} \cdots e_{i_k};\ 1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n\} \tag{2.6}$$

baza vektorskog prostora $C(V)$.

Neka je sada $\{e_1, \ldots, e_n\}$ standardna ortonormirana baza od $\mathbb{R}^n : (e_i)_j = \delta_{ij}$. Tada se $C(\mathbb{R}^n)$ može identificirati s vektorskim prostorm s bazom (2.6), a množenje u unitalnoj algebri $C(\mathbb{R}^n)$ je određeno relacijama (2.5).

Iz dokaza baze indukcije u teoremu 2.1.2. znamo da je $C(\mathbb{R}^1) \cong \mathbb{C}$ i izomorfizam je dan sa $1 \mapsto 1$, $e_1 \mapsto i$. Nadalje, lako se vidi da je Cliffordova algebra $C(\mathbb{R}^2)$ izomorfna s tijelom kvaterniona $\mathbb{H}$; izomorfizam je na bazi (2.6) dan sa $1 \mapsto 1$, $e_1 \mapsto i$, $e_2 \mapsto j$, $e_1 e_2 \mapsto k$. Za $n \geq 3$ algebra $C(\mathbb{R}^n)$ nije tijelo. Doista, pomoću (2.5) dobivamo

$$(e_1e_2e_3)^2 = e_1e_2e_3e_1e_2e_3 = -e_1e_2e_1e_3e_2e_3 = (e_1)^2\, e_2e_3e_2e_3 = -e_2e_3e_2e_3 = (e_2)^2\,(e_3)^2 = 1,$$

dakle, $(1 - e_1e_2e_3)(1 + e_1e_2e_3) = 0$, odnosno, u algebri $C(\mathbb{R}^n)$ ima netrivijalnih djelitelja nule. Pokazuje se npr. da je $C(\mathbb{R}^3) \cong \mathbb{H} \times \mathbb{H}$. Opis svih algebri $C(\mathbb{R}^n)$ pomoću matričnih algebri nad $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ i $\mathbb{H}$ mogu se pronaći u knjizi: H.B. Lawson, M.−L. Michelson, *Spin Geometry*, Princeton Univ. Press, 1989).

Kao što smo vidjeli $\mathbb{Z}-$graduacija $\left(T^k(V)\right)_{k \in \mathbb{Z}_+}$ tenzorske algebre $T(V)$ prijelazom na kvocijent po idealu I generiranom skupom $\{v \otimes v + (v|v);\ v \in V\}$ ne daje $\mathbb{Z}-$graduaciju algebre $C(V) \cong T(V)/I$, nego samo njenu $\mathbb{Z}_2-$graduaciju. Međutim, iz pripadne filtracije $(T_k(V))_{k \in \mathbb{Z}+}$,

$$T_k(V) = \sum_{j=0}^{k} \dot{+}\, T^j(V), \qquad k \in \mathbb{Z}_+,$$

dobivamo filtraciju $(C_k(V))_{k\in\mathbb{Z}_+}$ algebre $C(V)$. Pri tome je

$$C_0(V) = \mathbb{R}, \quad C_k(V) = span\{v_1 \cdots v_j;\ 1 \le j \le k,\ v_1, \ldots, v_j \in V\} \quad \text{za} \quad k \in \mathbb{N}.$$

Naravno, $C_k(V) = C(V)\ \forall k \ge \dim V$. Vidjet ćemo sada da je pripadna graduirana algebra

$$Gr(C(V)) = \coprod_{0\le k\le \dim V} C_k(V)/C_{k-1}(V)$$

(uz $C_{-1}(V) = \{0\}$) izomorfna vanjskoj algebri $\bigwedge(V)$.

Kanonski epimorfizam $T(V) \to \bigwedge(V)$ ima linearni desni invers $\bigwedge(V) \to T(V)$, koji se zove **antisimetrizacija**. Ona je potpuno određena sa

$$v_1 \wedge \cdots \wedge v_k \mapsto \frac{1}{k!}\sum_{\sigma\in\mathcal{S}_k} sign(\sigma) v_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(k)}, \qquad v_1, \ldots, v_k \in V.$$

Pri tome je $\mathcal{S}_k$ oznaka za grupu permutacija skupa $\{1, \ldots, k\}$, a $sign : \mathcal{S}_k \to \{\pm 1\}$ je homomorfizam parnosti: $sign(\sigma) = 1$ za parne permutacije, a $sign(\sigma) = -1$ za neparne. Kompozicija antisimetrizacije $\bigwedge(V) \to T(V)$ s kvocijentnim epimorfizmom $T(V) \to C(V) = T(V)/I$ je izomorfizam vektorskih prostora budući da bazu od $\bigwedge(V)$ prevodi u bazu od $C(V)$:

$$1 \mapsto 1, \qquad e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_k} \mapsto e_{i_1} \cdots e_{i_k} \quad \text{za } 1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n;$$

pri tome je $\{e_1, \ldots, e_n\}$ ortonormirana baza prostora V. Taj ćemo izomorfizam vektorskih prostora $\bigwedge(V) \to C(V)$ označavati sa $\jmath$. On se zove **Chevalleyevo preslikavanje**, a također i **kvantizaciono preslikavanje**. Pisat ćemo $\jmath\left(\bigwedge^k(V)\right) = C(V)^{(k)}$; za elemente od $C(V)^{(k)}$, $0 \le k \le \dim V$, kažemo da su **čistog stupnja** k. Naravno, $\left(C(V)^{(k)}\right)$ jest $\mathbb{Z}-$graduacija vektorskog prostora $C(V)$, ali ne i $\mathbb{Z}-$graduacija algebre $C(V)$.

Propozicija 2.1.3. *Za svaki $k \in \{0, 1, \ldots, \dim V\}$ vrijedi $C_k(V) = C(V)^{(k)} \dotplus C_{k-1}(V)$. Nadalje, $\jmath$ inducira izomorfizam vanjske algebre $\bigwedge(V)$ na graduiranu algebru*

$$Gr(C(V)) = \coprod_{0\le k\le \dim V} C_k(V)/C_{k-1}(V).$$

Dokaz: Prva tvrdnja neposredno slijedi iz činjenice da je $\jmath(e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_k}) = e_{i_1} \cdots e_{i_k}$ i da je

$$\{e_{i_1} \cdots e_{i_k};\ 1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n\}$$

baza direktnog komplementa od $C_{k-1}(V)$ u $C_k(V)$. Označimo sa $\Phi : \bigwedge(V) \to Gr(C(V))$ izomorfizam vektorskih prostora induciran Chevalleyevim preslikavanjem $\jmath : \bigwedge(V) \to C(V)$; dakle,

$$\Phi(u) = \jmath(u) + C_{k-1}(V), \qquad u \in \textstyle\bigwedge^k(V), \quad 0 \le k \le n.$$

Treba dokazati da je $\Phi(u \wedge w) = \Phi(u)\Phi(w)\ \forall u, w \in \bigwedge(V)$. Preslikavanja $(u, w) \mapsto \Phi(u \wedge w)$ i $(u, w) \mapsto \Phi(u)\Phi(v)$ sa $\bigwedge(V) \times \bigwedge(V)$ u $Gr(C(V))$ su bilinearna, pa je njihovu jednakost dovoljno provjeriti na elementima baze $\{e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_k};\ 1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n\}$ od $\bigwedge(V)$. Neka su, dakle,

$$u = e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_k}, \quad 1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n, \quad w = e_{j_1} \wedge \cdots \wedge e_{j_\ell}, \quad 1 \le j_1 < \cdots < j_\ell \le n.$$

Ako je $\{i_1, \ldots, i_k\} \cap \{j_1, \ldots, j_\ell\} \ne \emptyset$, onda je $u \wedge w = 0$, a također i

$$\Phi(u)\Phi(w) = e_{i_1} \cdots e_{i_k} e_{j_1} \cdots e_{j_\ell} + C(V)^{(k+\ell-1)} = 0,$$

jer prema (2.2) vrijedi $e_{i_1}\cdots e_{i_k}e_{j_1}\cdots e_{j_\ell} \in C(V)^{(k+\ell-2)}$. Pretpostavimo sada da je presjek $\{i_1,\dots,i_k\}\cap\{j_1,\dots,j_\ell\}$ prazan i neka je $\sigma\in\mathcal{S}_{k+\ell}$ permutacija takva da je

$$\sigma(i_1)<\cdots<\sigma(i_k)<\sigma(j_1)<\cdots<\sigma(j_\ell).$$

Tada je

$$u\wedge w=e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_k}\wedge e_{j_1}\wedge\cdots\wedge e_{j_\ell}=sign(\sigma)e_{\sigma(i_1)}\wedge\cdots\wedge e_{\sigma(i_k)}\wedge e_{\sigma(j_1)}\wedge\cdots\wedge e_{\sigma(e_{\jmath_\ell})}$$

pa je

$$\Phi(u\wedge w)=sign(\sigma)e_{\sigma(i_1)}\cdots e_{\sigma(i_k)}e_{\sigma(j_1)}\cdots e_{\sigma(j_\ell)}+C(V)^{(k+\ell-1)}.$$

S druge strane,

$$\Phi(u)\Phi(w)=\left(e_{i_1}\cdots e_{i_k}+C(V)^{(k-1)}\right)\left(e_{j_1}\cdots e_{j_\ell}+C(V)^{(\ell-1)}\right)=e_{i_1}\cdots e_{i_k}e_{j_1}\cdots e_{j_\ell}+C(V)^{(k+\ell-1)}.$$

Međutim, prema (2.2) imamo

$$e_{i_1}\cdots e_{i_k}e_{j_1}\cdots e_{j_\ell}=sign(\sigma)e_{\sigma(i_1)}\cdots e_{\sigma(i_k)}e_{\sigma(j_1)}\cdots e_{\sigma(e_{\jmath_\ell})},$$

pa slijedi $\Phi(u\wedge w)=\Phi(u)\Phi(w)$. Time je propozicija dokazana.

Kao i svaka asocijativna algebra $C(V)$ postaje Liejeva algebra uz komutator $[a,b]=ab-ba$, $a,b\in C(V)$.

Propozicija 2.1.4. $C(V)^{(2)}=\jmath\left(\bigwedge^2(V)\right)$ *je Liejeva podalgebra Liejeve algebre* $C(V)$ *izomorfna Liejevoj algebri* $\mathfrak{o}(V)$ *svih antisimetričnih linearnih operatora na realnom unitarnom prostoru* V.

Dokaz: Neka je $\{e_1,\dots,e_n\}$ ortonormirana baza od V. Tada je

$$\{e_ie_j;\ 1\le i<j\le n\} \tag{2.7}$$

baza od $C(V)^{(2)}$. Za $i<j$ i $k<\ell$ imamo

$$[e_ie_j,e_ke_\ell]=0\quad\text{ako je}\quad\{i,j\}=\{k,\ell\}\quad\text{ili}\quad\{i,j\}\cap\{k,\ell\}=\emptyset.$$

Pretpostavimo sada da je $\{i,j\}\cap\{k,\ell\}$ jednočlan skup, npr. $j=k$, dakle, $1\le i<j=k<\ell\le n$. Tada imamo

$$[e_ie_j,e_je_\ell]=e_i\left(e_j\right)^2e_\ell-e_je_\ell e_ie_j=-e_ie_\ell+e_\ell e_je_ie_j=$$
$$=-e_ie_\ell-e_\ell e_i\left(e_j\right)^2=-e_ie_\ell+e_\ell e_i=-2e_ie_\ell\in C(V)^{(2)}.$$

Odatle, zbog $e_ie_j=-e_je_i$ za $i\ne j$, imamo u preostala tri slučaja jednočlanog presjeka $\{i,j\}\cap\{k,\ell\}$:

$$\begin{array}{rl}
1\le i=k<j,\ell\le n,\ j\ne\ell: & [e_ie_j,e_ie_\ell]=-[e_je_i,e_ie_\ell]=2e_je_\ell\in C(V)^{(2)};\\
1\le k<i=\ell<j\le n: & [e_ie_j,e_ke_i]=[e_je_i,e_ie_k]=-2e_je_k\in C(V)^{(2)};\\
1\le i,k<j=\ell\le n,\ i\ne k: & [e_ie_j,e_ke_j]=-[e_ie_j,e_je_k]=2e_ie_k\in C(V)^{(2)}.
\end{array}$$

Dakle, komutatori elemenata baze (2.7) od $C(V)^{(2)}$ svi leže u $C(V)^{(2)}$. Time smo dokazali da je $C(V)^{(2)}$ Liejeva podalgebra od $C(V)$.

Neka su sada $E_{ij}\in\mathfrak{gl}(V)$ linearni operatori zadani sa

$$E_{ij}e_k=\delta_{jk}e_i,\qquad 1\le i,j,k\le n.$$

Tada je

$$\{E_{ij} - E_{ji};\ 1 \le i < j \le n\}$$

baza od $\mathfrak{o}(V)$. Linearan operator $T : \mathfrak{o}(V) \to C(V)^{(2)}$ zadan sa

$$T(E_{ij} - E_{ji}) = -\frac{1}{2}e_i e_j, \qquad 1 \le i < j \le n,$$

je izomorfizam vektorskih prostora, jer prevodi bazu u bazu. Nadalje, budući da je $E_{ij}E_{k\ell} = \delta_{jk}E_{i\ell}$, vrijedi

$$[E_{ij} - E_{ji}, E_{k\ell} - E_{\ell k}] = 0 \quad \text{ako je} \quad \{i,j\} = \{k,\ell\} \quad \text{ili} \quad \{i,j\} \cap \{k,\ell\} = \emptyset.$$

Ako je $\{i,j\} \cap \{k,\ell\}$ jednočlan skup, npr. $j = k$, odnosno, $1 \le i < j = k < \ell \le n$, onda je

$$[E_{ij} - E_{ji}, E_{j\ell} - E_{\ell j}] = (E_{ij} - E_{ji})(E_{j\ell} - E_{\ell j}) - (E_{j\ell} - E_{\ell j})(E_{ij} - E_{ji}) = E_{i\ell} - E_{\ell i}.$$

Prema prijašnjem računu komutatora elemenata baze (2.7) od $C(V)^{(2)}$, imamo da je

$$[T(E_{ij} - E_{ji}), T(E_{j\ell} - E_{\ell j})] = \left[-\frac{1}{2}e_i e_j, -\frac{1}{2}e_j e_\ell\right] = \frac{1}{4}(-2e_i e_\ell) =$$

$$= -\frac{1}{2}e_i e_\ell = T(E_{i\ell} - E_{\ell i}) = T\left([E_{ij} - E_{ji}, E_{j\ell} - E_{\ell j}]\right).$$

Sasvim je analogna situacija i ako je $1 \le i = k < j, \ell \le n$ ili $1 \le i, k < j = \ell \le n$ ili $1 \le k < i = \ell < j \le n$. Odatle slijedi da je T homomorfizam, (dakle, izomorfizam) Liejevih algebri sa $\mathfrak{o}(V)$ na $C(V)^{(2)}$.

Grupa $C(V)^\times$ invertibilnih elemenata unitalne algebre $C(V)$ je otvoren podskup od $C(V)$, dakle, otvorena podmnogostrukost od $C(V)$. S tom strukturom analitičke mnogostrukosti $C(V)^\times$ je Liejeva grupa i njena se Liejeva algebra identificira s Liejevom algebrom dobivenom iz asocijativne algebre $C(V)$ uz komutator $[a,b] = ab - ba$, $a, b \in C(V)$. Eksponencijalno preslikavanje $\exp = \exp_{C(V)^\times}$ s Liejeve algebre $C(V)$ u Liejevu grupu $C(V)^\times$ dano je sa

$$\exp a = \mathrm{e}^a = \sum_{k \in \mathbb{Z}_+} \frac{1}{k!}a^k, \qquad a \in C(V).$$

Identificirat ćemo sada dvije zatvorene (štoviše, kompaktne) podgrupe $Pin(V)$ i $Spin(V)$ od $C(V)^\times$ čija je Liejeva algebra upravo $C(V)^{(2)}$.

Neka je $v \in V$ jedinični vektor, $(v|v) = 1$. Tada u Cliffordovoj algebri $C(V)$ vrijedi $v^2 = -1$, dakle, $v(-v) = (-v)v = 1$. To pokazuje da je $v \in C(V)^\times$ i da je $-v$ njegov invers u grupi $C(V)^\times$. Označimo sa $Pin(V)$ podgrupu od $C(V)^\times$ generiranu s jediničnom sferom $\{v \in V;\ \|v\| = 1\}$.

Za jedinični vektor $v \in V$ promatrajmo preslikavanje $\rho(v) : V \to C(V)$ definirano sa

$$\rho(v)x = vxv, \qquad x \in V.$$

Imamo $V = \mathbb{R}v \oplus v^\perp$, dakle, svaki $x \in V$ jedinstveno se piše u obliku $x = \lambda v + w$, gdje je $\lambda \in \mathbb{R}$ i $w \perp v$. Tada je $vw = -wv$, pa imamo

$$\rho(v)x = v(\lambda v + w)v = \lambda v^3 + vwv = -\lambda v - v^2 w = -\lambda v + w.$$

To prije svega pokazuje da je $\rho(v)x \in V$ za svaki $x \in V$, dakle, $\rho(v)$ je linearan operator na prostoru V. Nadalje, taj je linearan operator ortogonalna refleksija prostora V u odnosu na hiperravninu $v^\perp$. Posebno, $\rho(v) \in O(V)$ za svaki jedinični vektor $v \in V$.

Prisjetimo se sada ranije definiranog automorfizma parnosti Cliffordove algebre $C(V)$: to je jedinstven unitalni automorfizam κ algebre $C(V)$ takav da je $\kappa(v) = -v \ \forall v \in V$; nadalje, κ je involutivni automorfizam, tj. vrijedi $\kappa(\kappa(u)) = u \ \forall u \in C(V)$. Pomoću automorfizma parnosti operator $\rho(v)$ za jedinični vektor $v \in V$ može se pisati ovako:

$$\rho(v)x = \kappa(v)xv^{-1}, \qquad x \in V.$$

Sada definiramo za svaki $u \in Pin(V)$ linearan operator $\rho(u) : V \to C(V)$ sa

$$\rho(u)x = \kappa(u)xu^{-1}, \qquad x \in V.$$

Budući da je $Pin(V)$ podgrupa od $C(V)^\times$ generirana jediničnim vektorima, za $u \in Pin(V)$ postoje jedinični vektori $v_1, \dots, v_k$ takvi da je $u = v_1 \cdots v_k$. Budući da je κ automorfizam, imamo za svaki $x \in V$:

$$\rho(u)x = \kappa(u)xu^{-1} = \kappa(v_1) \cdots \kappa(v_k)xv_k^{-1} \cdots v_1^{-1} = \rho(v_1) \cdots \rho(v_k)x.$$

Posebno, $\rho(u)$ je linearni operator sa V u V i to je produkt ortogonalnih refleksija. Slijedi da je $\rho : u \mapsto \rho(u)$ preslikavanje grupe $Pin(V)$ u ortogonalnu grupu $O(V)$. Budući da je κ automorfizam, preslikavanje $\rho : Pin(V) \to O(V)$ je homomorfizam grupa:

$$\rho(u_1u_2)x = \kappa(u_1u_2)x(u_1u_2)^{-1} = \kappa(u_1)\kappa(u_2)xu_2^{-1}u_1^{-1} = \rho(u_1)\rho(u_2)x, \qquad u_1, u_2 \in Pin(V), \quad x \in V.$$

Propozicija 2.1.5. *$\rho : Pin(V) \to O(V)$ je epimorfizam s jezgrom $\{1, -1\}$.*

Dokaz: Surjektivnost homomorfizma $\rho : Pin(V) \to O(V)$ je posljedica dobro poznate činjenice da je ortogonalna grupa $O(V)$ konačnodimenzionalnog realnog unitarnog prostora V generirana ortogonalnim refleksijama u odnosu na hiperravnine u prostoru V. Odredimo sada jezgru $\operatorname{Ker}\rho$. Neka je $u \in \operatorname{Ker}\rho$, tj. $u \in Pin(V)$ je takav da je $\kappa(u)x = xu \ \forall x \in V$. Pišemo $u = u_0 + u_1$, pri čemu je $u_0 \in C(V)$ paran, a $u_1 \in C(V)$ neparan. Tada je $\kappa(u) = u_0 - u_1$, dakle,

$$u_0x - u_1x = xu_0 + xu_1 \qquad \forall x \in V.$$

Međutim, za svaki $x \in V$ elementi u_0x i xu_0 su neparni, a elementi u_1x i xu_1 su parni. Stoga vrijedi

$$u_0x = xu_0 \qquad \text{i} \qquad u_1x = -xu_1 \qquad \forall x \in V.$$

Neka je sada $\{e_1, \dots, e_n\}$ ortonormirana baza od V i zapišimo u_0 i u_1 kao linearne kombinacije parnih, odnosno, neparnih elemenata baze (2.6) :

$$u_0 = \lambda + \sum_{\substack{1 \le i_1 < \cdots < i_k \\ k \ge 2 \text{ parno}}} \lambda_{i_1 \cdots i_k} e_{i_1} \cdots e_{i_k}, \qquad u_1 = \sum_{\substack{1 \le i_1 < \cdots < i_k \\ k \ge 1 \text{ neparno}}} \lambda_{i_1 \cdots i_k} e_{i_1} \cdots e_{i_k}. \tag{2.8}$$

Za $i \in \{1, \dots, n\}$ i za $1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n$ imamo

$$(e_{i_1} \cdots e_{i_k})e_i = \begin{cases} (-1)^k e_i(e_{i_1} \cdots e_{i_k}) & \text{ako} \quad i \notin \{i_1, \dots, i_k\} \\ (-1)^{k-1} e_i(e_{i_1} \cdots e_{i_k}) & \text{ako} \quad i \in \{i_1, \dots, i_k\}. \end{cases}$$

To znači da je za parno $k \ge 2$

$$(e_{i_1} \cdots e_{i_k})e_i = \begin{cases} e_i(e_{i_1} \cdots e_{i_k}) & \text{ako} \quad i \notin \{i_1, \dots, i_k\} \\ -e_i(e_{i_1} \cdots e_{i_k}) & \text{ako} \quad i \in \{i_1, \dots, i_k\}. \end{cases}$$

Budući da je $u_0e_i = e_iu_0$ vidimo da u prikazu (2.8) elementa u_0 pomoću baze (2.6) vrijedi $\lambda_{i_1\cdots i_k} = 0$ ako je $i \in \{i_1, \ldots, i_k\}$. No to vrijedi za svaki $i \in \{1, \ldots, n\}$, pa zaključujemo da je $u_0 = \lambda \in \mathbb{R}$. Analogno, ako je k neparno, imamo

$$(e_{i_1}\cdots e_{i_k})e_i = \begin{cases} -e_i(e_{i_1}\cdots e_{i_k}) & \text{ako} \quad i \notin \{i_1, \ldots, i_k\} \\ \\ e_i(e_{i_1}\cdots e_{i_k}) & \text{ako} \quad i \in \{i_1, \ldots, i_k\}. \end{cases}$$

Kako je $u_1e_i = -e_iu_1$, u prikazu (2.8) elementa u_1 pomoću baze (2.6) je $\lambda_{i_1\cdots i_k} = 0$ ako je $i \in \{i_1, \ldots, i_k\}$. Ali i je proizvoljan, pa slijedi $u_1 = 0$. Prema tome, $u = u_0 + u_1 = \lambda \in \mathbb{R}$. Time je dokazano da je $\operatorname{Ker}\rho = Pin(V) \cap \mathbb{R}$.

Propozicija 2.1.5. bit će u potpunosti dokazana ako pokažemo da je $Pin(V) \cap \mathbb{R} = \{1, -1\}$. U tu svrhu poslužit ćemo se još tzv. **glavnim antiautomorfizmom** α Cliffordove algebre $C(V)$. To je jedinstven antiautomorfizam unitalne algebre $C(V)$ takav da je $\alpha|V = I_V$. To znači da je

$$\alpha(\lambda) = \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \qquad \alpha(v_1\cdots v_k) = v_k\cdots v_1, \quad v_1, \ldots, v_k \in V.$$

Posebno, ako je $\{e_1, \ldots, e_n\}$ ortonormirana baza od V i ako je $1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n$, onda zbog antikomutativnosti e_i i e_j za $i \ne j$ imamo

$$\alpha(e_{i_1}\cdots e_{i_k}) = e_{i_k}\cdots e_{i_1} = (-1)^{\frac{k(k-1)}{2}} e_{i_1}\cdots e_{i_k}.$$

To znači da je α množenje skalarom $(-1)^{\frac{k(k-1)}{2}}$ na elementima čistog stupnja k. Posebno, vidimo da je α^2 identiteta, odnosno, antiautomorfizam α je involutivan. Nadalje, primijetimo da α komutira s automorfizmom parnosti κ : oba su množenje skalarom na svakom potprostoru $C(V)^{(k)}$ elemenata čistog stupnja k.

Ako je v jedinični vektor iz V, onda je $v\alpha(v) = v^2 = -1$. To pokazuje da za svaki $u \in Pin(V)$ vrijedi $u\alpha(u) = \pm 1$. U stvari, svaki $u \in Pin(V)$ je ili paran ili neparan i vrijedi $u\alpha(u) = 1$ ako je u paran i $u\alpha(u) = -1$ ako je u neparan. Posebno, ako je $\lambda \in Pin(V) \cap \mathbb{R}$, onda je λ paran element i vrijedi $\alpha(\lambda) = \lambda$. Dakle, $\lambda^2 = \lambda\alpha(\lambda) = 1$, a to je moguće samo ako je $\lambda = \pm 1$. Time je dokazano da je $Pin(V) \cap \mathbb{R} \subseteq \{1, -1\}$. Tu vrijedi znak jednakosti jer je $1 \in Pin(V)$, a za jedinični vektor v dobivamo da je i $-1 = v^2 \in Pin(V)$. Time je propozicija dokazana.

Teorem 2.1.6. *$Pin(V)$ je kompaktna podgrupa od $C(V)^\times$ i njena je Liejeva algebra $C(V)^{(2)}$.*

Dokaz: Surjektivni homomorfizam $\rho : Pin(V) \to O(V)$ je očito neprekidan i ima konačnu jezgru $\{1, -1\}$, pa zbog kompaktnosti grupe $O(V)$ slijedi da je i grupa $Pin(V)$ kompaktna. Posebno, to je zatvorena podgrupa od $C(V)^\times$, dakle, Liejeva podgrupa od $C(V)^\times$. Njena se Liejeva algebra sastoji od tangencijalnih vektora u jedinici na glatke krivulje u $Pin(V)$ kroz jedinicu. Neka je i dalje $\{e_1, \ldots, e_n\}$ ortonormirana baza prostora V i $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, $i < j$. Definiramo glatku krivulju $\varphi : \mathbb{R} \to C(V)$ sa

$$\varphi(t) = \cos\, t + (\sin\, t)e_ie_j = [(\cos\, t)e_i + (\sin\, t)e_j](-e_i), \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Budući da su $(\cos\, t)e_i + (\sin\, t)e_j$ i $-e_i$ jedinični vektori, vidimo da je $\varphi(t) \in Pin(V)$ $\forall t \in \mathbb{R}$. Nadalje, vrijedi $\varphi(0) = 1$ i $\varphi'(0) = e_ie_j$. To pokazuje da Liejeva algebra $Lie(Pin(V))$ grupe $Pin(V)$ sadrži $span\,\{e_ie_j;\ 1 \le i < j \le n\} = C(V)^{(2)}$. S druge strane, zbog egzistencije dvolisnog natkrivanja $\rho : Pin(V) \to O(V)$ vidimo da je Liejeva algebra $Lie(Pin(V))$ izomorfna Liejevoj algebri $\mathfrak{o}(V)$. Posebno, one imaju istu dimenziju, a kako je $\mathfrak{o}(V)$ prema propoziciji 2.1.4. izomorfna Liejevoj algebri $C(V)^{(2)}$, zaključujemo da je $\dim Lie(Pin(V)) = \dim C(V)^{(2)}$. Dakle, $Lie(Pin(V)) = C(V)^{(2)}$.

Budući da je $Pin(V)$ podgrupa od $C(V)^\times$ generirana neparnim elementima, jasno je da je svaki element od $Pin(V)$ ili parni ili neparni, tj. $Pin(V)$ je disjunktna unija $Pin(V) \cap C^0(V)$ i $Pin(V) \cap C^1(V)$. Nadalje, očito je $Spin(V) = Pin(V) \cap C^0(V)$ podgrupa od $Pin(V)$. U stvari, to normalna podgrupa od $Pin(V)$ indeksa 2, dakle, i $Spin(V)$ je kompaktna grupa. Njeni su elementi produkti parnog broja jediničnih vektora iz V. To znači da je $\rho(Spin(V))$ grupa svih produkata parnog broja ortogonalnih refleksija u odnosu na hiperravnine u V. No to je upravo grupa rotacija $SO(V)$. Prema tome, $Spin(V) = \rho^{-1}(SO(V))$. Budući da su elementi 1 i -1 parni, vidimo da je restrikcija $\rho|Spin(V)$ epimorfizam grupe $Spin(V)$ na grupu $SO(V)$ s jezgrom $\{1, -1\}$, dakle, dvolisno natkrivanje.

Propozicija 2.1.7. *Ako je* $\dim V \geq 2$ *grupa* $Spin(V)$ *je povezana, a grupa* $Pin(V)$ *ima dvije komponente povezanosti.*

Dokaz: Budući da je grupa $SO(V)$ povezana, za povezanost grupe $Spin(V)$ dovoljno je dokazati da se u grupi $Spin(V)$ točke 1 i -1 mogu povezati putem. Neka su $e, f \in V$ jedinični vektori koji su međusobno okomiti. Tada je za svaki $t \in \mathbb{R}$ vektor $(\cos \pi t)e + (\sin \pi t)f$ jedinični, prema tome, sa

$$\gamma(t) = e[(\cos \pi t)e + (\sin \pi t)f], \qquad t \in [0,1],$$

definirano je neprekidno preslikavanje sa $[0,1]$ u $Spin(V)$, odnosno, put u $Spin(V)$. Taj put povezuje točku -1 s točkom 1 :

$$\gamma(0) = e^2 = -1, \qquad \gamma(1) = e(-e) = -e^2 = 1.$$

Time je dokazana povezanost grupe $Spin(V)$. Neparni i parni element u grupi $Pin(V)$ ne mogu se povezati putem u $Pin(V)$. Prema tome, grupa $Pin(V)$ nije povezana, nego ima dvije komponente povezanosti; to su $Spin(V)$ i $Pin(V) \cap C^1(V)$.

Napominjemo da se u slučaju $\dim V \geq 3$ može pokazati da je grupa $Spin(V)$ jednostavno povezana, dakle, tada je $\rho : Spin(V) \to SO(V)$ univerzalno natkrivanje.

Na koncu, razmotrimo generalizaciju: neka je na konačnodimenzionalnom realnom prostoru V umjesto skalarnog produkta zadana proizvoljna simetrična bilinearna forma B. Pripadna Cliffordova algebra je uređen par $(C(V;B), j)$ gdje je $C(V;B)$ unitalna algebra s jedinicom e, j je linearno preslikavanje sa V u $C(V;B)$ sa svojstvom

$$j(v)^2 = -B(v,v)e \qquad \forall v \in V$$

i vrijedi univerzalno svojstvo analogno $(C3)$:

$(C3')$ Ako je $\mathcal{A}$ realna unitalna algebra s jedinicom $e_{\mathcal{A}}$ i $\varphi : V \to \mathcal{A}$ linearno preslikavanje sa svojstvom $\varphi(v)^2 = -B(v,v)e_{\mathcal{A}}$ $\forall v \in V$, onda postoji jedinstven unitalni homomorfizam $\tilde{\varphi} : C(V;B) \to \mathcal{A}$ takav da je $\tilde{\varphi} \circ j = \varphi$.

Lako se vidi da i u ovom općenitijem slučaju vrijede propozicija 2.1.1. i teorem 2.1.2. Međutim, konkretni primjeri mogu izgledati potpuno drugačije. Npr. za negativno definitnu formu B na $\mathbb{R}^1$ ne dobivamo algebru $\mathbb{R}[X]/(X^2+1) \cong \mathbb{C}$, nego bitno drugačiju algebru $\mathbb{R}[X]/(X^2-1) \cong \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Usput napominjemo da se u slučaju trivijalne forme $B = 0$ na vektorskom prostoru V Cliffordova algebra podudara s vanjskom algebrom $\bigwedge(V)$.

Ako je forma B nedegenerirana i ima signaturu (p,q), pripadna Cliffordova algebra obično se označava sa $C(p,q)$. Analogno kao i u pozitivno definitnom slučaju dolazimo do monomorfizma Liejeve algebre $\mathfrak{o}(p,q)$ u $C(p,q)$ sa slikom $C(p,q)^{(2)}$. Slično kao prije definiraju se grupe $Pin(p,q)$ i $Spin(p,q)$: $Pin(p,q)$ je zatvorena podgrupa od $C(p,q)^\times$ generirana sa $\{v \in V;\ B(v,v) = \pm 1\}$, a $Spin(p,q)$ je njena otvorena podgrupa sastavljena od parnih elemenata. Obje Liejeve grupe imaju $C(p,q)^{(2)}$ kao Liejevu algebru. Grupe $Pin(p,q)$ i $Spin(p,q)$ su dvolisni natkrivači grupa $O(p,q)$ i $SO(p,q)$. Naravno, ako je $pq \neq 0$ te grupe nisu kompaktne.

2.2 Kompleksne Cliffordove algebre

U ovom ćemo odjeljku proučiti kompleksne Cliffordove algebre. Neka je V konačnodimenzionalan vektorski prostor nad poljem $\mathbb{C}$ kompleksnih brojeva i neka je $B : V \times V \to \mathbb{C}$ simetrična bilinearna forma. **Cliffordova algebra** pridružena paru (V, B) definira se jednako kao i u realnom slučaju: to je uređen par $(C(V), j)$ sa svojstvima:

$(C1)$ $C(V)$ je kompleksna unitalna algebra s jedinicom e.

$(C2)$ $j : V \to C(V)$ je linearno preslikavanje sa svojstvom $j(v)^2 = -B(v, v)e \ \ \forall v \in V$.

$(C3)$ Ako je $\mathcal{A}$ kompleksna unitalna algebra s jedinicom $e_{\mathcal{A}}$ i $\varphi : V \to \mathcal{A}$ linearno preslikavanje sa svojstvom $\varphi(v)^2 = -B(v, v)e_{\mathcal{A}} \ \forall v \in V$, onda postoji jedinstven unitalni homomorfizam $\tilde{\varphi} : C(V) \to \mathcal{A}$ takav da je $\varphi = \tilde{\varphi} \circ j$.

Zbog univerzalnog svojstva $(C3)$ ako postoji Cliffordova algebra ona je jedinstvena do na izomorfizam. Egzistencija se dobiva kao i u realnom slučaju pomoću tenzorske algebre $T(V)$ kompleksnog prostora V : $C(V) = T(V)/I$, gdje je I dvostrani ideal u $T(V)$ generiran skupom $\{v \otimes v + B(v, v);\ v \in V\}$; ujedno je I ideal generiran skupom $\{v \otimes w + w \otimes w + 2B(v, w);\ v, w \in V\}$. Sljedeći teorem dokazuje se analogno kao u realnom slučaju:

Teorem 2.2.1. *Neka je* $\{e_1, \ldots, e_n\}$ *baza kompleksnog vektorskog prostora* V. *Tada je*

$$\{j(e_{i_1})j(e_{i_2}) \cdots j(e_{i_k});\ k \in \{0, 1, \ldots, n\},\ 1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n\}$$

baza prostora $C(V)$. (*Pri tome se podrazumijeva da je prazan produkt jednak jedinici* e.) *Posebno, preslikavanje* j *je injektivno i vrijedi* $\dim C(V) = 2^{\dim V}$.

Temeljem tog teorema kao i u realnom slučaju preslikavanje j upotrebljavamo kao identifikaciju prostora V s potprostorom od $C(V)$, a također polje $\mathbb{C}$ identificiramo s unitalnom podalgebrom $\mathbb{C}\, e$. Dakle, baza od $C(V)$ iz teorema 2.2.1. je

$$\{e_{i_1}e_{i_2} \cdots e_{i_k};\ k \in \{0, 1, \ldots, n\},\ 1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n\}. \tag{2.9}$$

Kao i u realnom slučaju imamo $\mathbb{Z}_2-$graduaciju $(C^0(V), C^1(V))$ unitalne algebre $C(V)$: $C^0(V)$ je potprostor razapet svim produktima parnog broja vektora iz V, a $C^1(V)$ je potprostor razapet svim produktima neparnog broja vektora iz V. To su svojstveni potprostori involutivnog **automorfizma parnosti** κ algebre $C(V)$: κ je jedinstveni automorfizam od $C(V)$ čija je restrikcija na V jednaka $-I_V$. Nadalje, ako je $\pi : T(V) \to C(V)$ kvocijentni epimorfizam, onda je

$$C^0(V) = \pi\left(\sum_{k \in \mathbb{Z}_+} \dot{+}\, T^{2k}(V)\right) \qquad \text{i} \qquad C^1(V) = \pi\left(\sum_{k \in \mathbb{Z}_+} \dot{+}\, T^{2k+1}(V)\right).$$

Označimo kao i u realnom slučaju sa $(C_k(V))_{k \in \mathbb{Z}_+}$ filtraciju algebre $C(V)$ dobivenu iz filtracije tenzorske algebre $T(V)$:

$$C_k(V) = \pi\left(T_k(V)\right), \qquad T_k(V) = \sum_{j=0}^{k} \dot{+}\, T^j(V).$$

Chevalleyevo ili **kvantizaciono preslikavanje** $\jmath : \bigwedge(V) \to C(V)$, definirano kao kompozicija antisimetrizacije $\bigwedge(V) \to T(V)$ s kvocijentnim epimorfizmom $T(V) \to C(V)$, i u kompleksnom slučaju je izomorfizam vektorskih prostora i on inducira izomorfizam vanjske algebre $\bigwedge(V)$ na graduiranu algebru

$$Gr(C(V)) = \coprod_{0\leq k\leq \dim V} C_k(V)/C_{k-1}(V).$$

Ponovo pišemo $C(V)^{(k)} = \jmath\left(\bigwedge^k(V)\right)$ i za elemente tog direktnog komplementa od $C_{k-1}(V)$ u prostoru $C_k(V)$ kažemo da su **čistog stupnja** k.

I u kompleksnom slučaju definiramo **glavni antiautomorfizam** α unitalne algebre $C(V)$, kao jedinstveni unitalni antiautomorfizam za koji je $\alpha|V = I_V$. Naravno, opet je antiautomorfizam α involutivan i vrijedi

$$\alpha(\lambda) = \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{C}, \qquad \alpha(v_1\cdots v_k) = v_k\cdots v_1, \quad v_1,\ldots,v_k \in V.$$

U daljnjem razmatranju smeta činjenica da je $-Ad_V\, v$ a ne $Ad_V\, v$ refleksija prostora V : ako je prostor V neparnodimenzionalan onda svi operatori iz slike

U daljnjem ćemo pretpostavljati da je forma B nedegenerirana. To je ispunjeno ako i samo ako je za neku (a tada i za svaku) bazu $\{e_1,\ldots,e_n\}$ od V njena matrica $[B(e_i,e_j)]$ regularna.

Teorem 2.2.2. *Neka je B nedegenerirana simetrična bilinearna forma na kompleksnom konačno-dimenzionalnom vektorskom prostoru V.*

(*a*) *Postoji baza $\{e_1,\ldots,e_n\}$ prostora V takva da je $B(e_i,e_j) = \delta_{ij}$ $\forall i,j$. (Takva se baza zove* **ortonormirana**.)

(*b*) *Za svaki potprostor W prostora V i za njegov* **ortogonal**

$$W^\perp = \{v \in V;\ B(v,w) = 0\ \forall w \in W\}$$

vrijedi $\dim W + \dim W^\perp = \dim V$.

(*c*) *Neka je W potprostor od V. Sljedeća su četiri svojstva međusobno ekvivalentna:*

(1) *Restrikcija $B|W \times W$ je nedegenerirana.*
(2) $W \cap W^\perp = \{0\}$.
(3) $V = W + W^\perp$.
(4) *Restrikcija $B|W^\perp \times W^\perp$ je nedegenerirana.*

Naravno, tada je $V = W \dotplus W^\perp$.

(*d*) *Ako je prostor V parnodimenzionalan,* $\dim V = 2n$, *postoje $n-$dimenzionalni potprostori U i U^* od V koji su* **izotropni**, *tj. takvi da je $B(u,u) = 0$ $\forall u \in U$ i $\forall u \in U^*$, takvi da je $V = U \dotplus U^*$.*

(*e*) *Ako je prostor V neparnodimenzionalan,* $\dim V = 2n+1$, *za svaki neizotropni vektor $v \in V$, tj. takav da je $B(v,v) \neq 0$, postoje $n-$dimenzionalni izotropni potprostori U i U^* takvi da je $\{v\}^\perp = U \dotplus U^*$. Naravno, tada je $V = U \dotplus U^* \dotplus \mathbb{C}v$.*

(*f*) *Uz oznake iz (d) i (e) preslikavanje koje vektoru $u^* \in U^*$ pridružuje linearan funkcional $u \mapsto B(u,u^*)$ na prostoru U je izomorfizam prostora U^* na dualni prostor U' prostora U.*

Dokaz: (*b*) Definiramo linearan operator $\Phi : V \to V'$ ovako:

$$(\Phi v)(w) = B(v,w), \qquad v,w \in V.$$

Zbog nedegeneriranosti forme B jezgra tog operatora je $\{0\}$, pa je po teoremu o rangu i defektu Φ izomorfizam prostora V na njegov dual V'. Odatle neposredno slijedi tvrdnja (*b*), jer je $\Phi(W^\perp) = W^\circ = \{f \in V';\ f(w) = 0\ \forall w \in W\}$, dakle, $\dim W^\perp = \dim W^\circ = \dim V - \dim W$.

(c) Ekvivalencija svojstava (1) i (2) je očigledna jer je

$$\{w \in W;\ B(w,u) = 0\ \forall u \in W\} = W \cap W^\perp.$$

Ekvivalencija svojstava (2) i (3) je neposredna posljedica tvrdnje (b) i formule

$$\dim\left(W + W^\perp\right) = \dim W + \dim W^\perp - \dim W \cap W^\perp.$$

Napokon, očito je $W \subseteq \left(W^\perp\right)^\perp$, a primjenom tvrdnje ($b$) na potprostore W i $W^\perp$ nalazimo da je $\dim W = \dim \left(W^\perp\right)^\perp$. Dakle, vrijedi $W = \left(W^\perp\right)^\perp$, pa ekvivalenciju svojstva (4) s ostalim svojstvima dobivamo primjenom dokazanog na potprostor $W^\perp$.

(a) Tvrdnju dokazujemo indukcijom u odnosu na $\dim V$. Baza indukcije $\dim V = 1$ je trivijalno ispunjena. Pretpostavimo sada da je $\dim V = n \geq 2$ i da je tvrdnja dokazana za prostore dimenzije $n-1$. Uočimo da postoji $v \in V$ takav da je $B(v,v) \neq 0$. Naime, u suprotnom bismo imali

$$B(v,w) = \frac{1}{4}(B(v+w, v+w) - B(v-w, v-w)) = 0 \qquad \forall v, w \in V,$$

a to je u suprotnosti s nedegeneriranošću forme B. Izaberimo $v \in V$ tako da bude $B(v,v) \neq 0$ i neka je $\alpha \in \mathbb{C}$ takav da je $\alpha^2 B(v,v) = 1$. Stavimo li $e_1 = \alpha v$, imamo $B(e_1,e_1) = 1$. Tada je restrikcija $B|\mathbb{C}e_1 \times \mathbb{C}e_1$ nedegenerirana, pa je prema tvrdnji (b) dimenzija potprostora $W = e_1^\perp$ jednaka $n-1$, a prema tvrdnji (c) restrikcija $B|W \times W$ je nedegenerirana i $V = \mathbb{C}e_1 \dotplus W$. Sada po pretpostavci indukcije postoji baza $\{e_2, \ldots, e_n\}$ od W koja je ortonormirana u odnosu na $B|W \times W$. No tada je $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ baza od V koja je ortonormirana u odnosu na B.

(d) Pretpostavimo sada da je prostor V parnodimenzionalan, $\dim V = 2n$. Neka je $\{e_1, \ldots, e_{2n}\}$ baza od V koja je ortonormirana u odnosu na B. Stavimo sada

$$u_j = e_j + ie_{n+j}, \qquad u_j^* = e_j - ie_{n+j}, \qquad 1 \leq j \leq n.$$

Lako se vidi da su vektori $u_1, \ldots, u_n, u_1^*, \ldots, u_n^*$ linearno nezavisni. Prema tome, potprostori

$$U = span\,\{u_1, \ldots, u_n\} \qquad \text{i} \qquad U^* = span\,\{u_1^*, \ldots, u_n^*\}$$

su $n-$dimenzionalni i vrijedi $V = U \dotplus U^*$. Napokon, za bilo koje $j,k \in \{1, \ldots, n\}$ imamo

$$B(u_j,u_k) = B(e_j + ie_{n+j}, e_k + ie_{n+k}) = B(e_j,e_k) - B(e_{n+j}, e_{n+k}) = \begin{cases} 1-1=0 & \text{ako je} \quad j=k \\ 0-0=0 & \text{ako je} \quad j \neq k, \end{cases}$$

a sasvim analogno je i $B(u_j^*, u_k^*) = 0$. To pokazuje da su potprostori U i U^* izotropni u odnosu na formu B.

(e) Neka je prostor V neparnodimenzionalan, $\dim V = 2n+1$, i neka je $v \in V$ neizotropni vektor, $B(v,v) \neq 0$. Tada je restrikcija $B|\mathbb{C}v \times \mathbb{C}v$ nedegenerirana, pa iz tvrdnji (b) i (c) kao u dokazu tvrdnje (a) slijedi da je $W = v^\perp$ potprostor parne dimenzije $2n$ takav da je $V = \mathbb{C}v \dotplus W$ i da je restrikcija $B|W \times W$ nedegenerirana. Sada tvrdnja slijedi iz tvrdnje (d).

(f) Prema dokazu tvrdnje (e) možemo pretpostaviti da je prostor V parnodimenzionalan, $\dim V = 2n$. Neka su U i U^* $n-$dimenzionalni izotropni potprostori od V takvi da je $V = U \dotplus U^*$. Za proizvoljne $u, u' \in U$ imamo kao u dokazu tvrdnje (a) :

$$B(u,u') = \frac{1}{4}(B(u+u', u+u') - B(u-u', u-u')) = 0.$$

To pokazuje da je $U \subseteq U^\perp$. Međutim, prema tvrdnji (b) vrijedi

$$\dim U^\perp = \dim V - \dim U = 2n - n = n = \dim U,$$

pa zaključujemo da je $U^\perp = U$. Sasvim analogno je i $U^{*\perp} = U^*$.

Pretpostavimo sada da je $u \in U$ takav da je $B(u, u^*) = 0 \ \forall u^* \in U^*$. Zbog $U = U^\perp$ i $V = U \dot{+} U^*$ slijedi da je $B(u, v) = 0 \ \forall v \in V$. Zbog negdegeneriranosti forme B slijedi da je $u = 0$. Sasvim analogno, ako je $u^* \in U^*$ takav da je $B(u, u^*) = 0 \ \forall u \in U$, onda je nužno $u^* = 0$. Prema tome, restrikcija $B|U \times U^*$ je bilinearna forma koja je nedegenerirana i u odnosu na prvu varijablu i u odnosu na drugu varijablu. Definiramo sada linearan operator $A : U^* \to U'$ ovako:

$$(Au^*)(u) = B(u, u^*), \qquad u \in U, \quad u^* \in U^*.$$

Zbog nedegeneriranosti forme $B|U \times U^*$ taj je linearan operator injektivan, pa je po teoremu o rangu i defektu A izomorfizam.

Za neizotropni vektor $v \in V$ vrijedi $V = \mathbb{C}v \dot{+} v^\perp$. Označimo sa s_v refleksiju prostora V u odnosu na hiperravninu $v^\perp$ u smjeru vektora v : to je linearan operator definiran sa

$$s_v v = -v, \qquad s_v w = w \quad \forall w \in v^\perp.$$

Tada vrijedi

$$s_v w = w - 2\frac{B(v, w)}{B(v, v)}v, \qquad w \in V.$$

Uočimo da je operator s_v element ortogonalne grupe prostora V u odnosu na formu B :

$$O(V) = \{A \in GL(V);\ B(Ax, Ay) = B(x, y)\ \forall x, y \in V\}.$$

Doista, za proizvoljne $x, y \in V$ možemo pisati

$$x = \alpha v + u, \qquad y = \beta v + w, \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \quad u, w \in v^\perp.$$

Tada je

$$s_v x = -\alpha v + u \qquad \text{i} \qquad s_v y = -\beta v + w$$

pa imamo

$$B(s_v x, s_v y) = B(-\alpha v + u, -\beta v + w) = \alpha\beta B(v, v) + B(u, w) = B(\alpha v + u, \beta v + w) = B(x, y).$$

Teorem 2.2.3. (**Cartan–Dieudonné**) *Ortogonalna grupa $O(V)$ generirana je refleksijama s_v, $v \in V$, $B(v, v) \neq 0$.*

Dokaz ćemo provesti indukcijom u odnosu na dim V. U slučaju dim $V = 1$ tvrdnja je trivijalna jer je $O(V) = \{\pm 1\}$ i -1 je refleksija. Pretpostavimo da je dim $V = n \geq 2$ i da je teorem dokazan za prostore dimenzije manje od n. Neka je $A \in O(V)$ i neka je $v \in V$ neizotropni vektor. Razmotrit ćemo tri mogućnosti:

(a) Pretpostavimo najprije da je $Av = v$. Za $w \in v^\perp$ je tada

$$B(Aw, v) = B(Aw, Av) = B(w, v) = 0,$$

tj. $Aw \in v^\perp$. To pokazuje da je hiperravnina $v^\perp$ invarijantna s obzirom na operator A. Nadalje, restrikcija $B|v^\perp \times v^\perp$ je nedegenerirana i restrikcija $A|v^\perp$ je ortogonalan operator u odnosu na tu formu. No kako je dim $v^\perp = n - 1$, ta je restrikcija po pretpostavci indukcije produkt refleksija prostora $v^\perp$ u odnosu na neizotropne vektore $v_1, \ldots, v_k \in v^\perp$. Budući da je tada $v \in v_j^\perp$ za $j = 1, \ldots, k$, zaključujemo da je $A = s_{v_1} \cdots s_{v_k}$.

(b) Pretpostavimo sada da je $Av = -v$. Tada za operator $A' = s_v A \in O(V)$ vrijedi $A'v = v$, pa prema dokazanom u (a) postoje neizotropni vektori $v_1, \ldots, v_k \in V$ takvi da je $A' = s_{v_1} \cdots s_{v_k}$. Slijedi $A = s_v A' = s_v s_{v_1} \cdots s_{v_k}$.

(c) Pretpostavimo sada da je $Av \neq v$ i $Av \neq -v$ i stavimo $u = Av$. Tada je $B(u,u) = B(v,v)$, pa nalazimo

$$B(v+u, v+u) - B(v-u, v-u) = 2B(v,v) + 2B(u,u) = 4B(v,v) \neq 0.$$

Odatle se vidi da bar jedan od vektora $v+u$ i $v-u$ nije izotropan.

Pretpostavimo najprije da vektor $w = v-u$ nije izotropan. Tada je

$$2B(u,w) = B(u+w, u+w) - B(u,u) - B(w,w) = B(v,v) - B(u,u) - B(w,w) = -B(w,w).$$

Stoga je

$$s_w u = u - 2\frac{B(u,w)}{B(w,w)} w = u + w = v.$$

Stavimo sada $A' = s_w A$. Tada imamo $A'v = s_w A v = s_w u = v$, pa prema dokazanom u ($a$) postoje neizotropni vektori $v_1, \ldots, v_k$ takvi da je $A' = s_{v_1} \cdots s_{v_k}$. Tada je $A = s_w A' = s_w s_{v_1} \cdots s_{v_k}$.

Pretpostavimo sada da je vektor $w = v+u$ neizotropan. Tada je

$$2B(u,w) = -B(w-u, w-u) + B(u,u) + B(w,w) = -B(v,v) + B(u,u) + B(w,w) = B(w,w).$$

Stoga je

$$s_w u = u - 2\frac{B(u,w)}{B(w,w)} w = u - w = -v.$$

Stavimo opet $A' = s_w A$. Tada imamo $A'v = s_w A v = s_w u = -v$, pa prema dokazanom u ($b$) postoje neizotropni vektori $v_1, \ldots, v_k$ takvi da je $A' = s_{v_1} \cdots s_{v_k}$. Tada je opet $A = s_w A' = s_w s_{v_1} \cdots s_{v_k}$.

Kao i u realnom slučaju stavimo $C(V)^{(k)} = \jmath\left(\bigwedge^k(V)\right)$. Potpuno analogno kao u slučaju realne Cliffordove algebre dokazuje se da vrijede analogoni propozicija 2.1.3. i 2.1.4.:

Propozicija 2.2.4. *Za svaki $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$ ($n = \dim V$) vrijedi $C_k(V) = C(V)^{(k)} \dot{+} C_{k-1}(V)$. Nadalje, $\jmath$ inducira izomorfizam vanjske algebre $\bigwedge(V)$ na graduiranu algebru*

$$Gr(C(V)) = \coprod_{0 \le k \le n} C_k(V)/C_{k-1}(V).$$

Propozicija 2.2.5. *$C(V)^{(2)}$ je Liejeva podalgebra od $C(V)$ izomorfna kompleksnoj Liejevoj algebri*

$$\mathfrak{o}(V) = \{A \in \mathfrak{gl}(V);\ B(Av, w) + B(v, Aw) = 0\ \forall v, w \in V\} \cong \mathfrak{o}(n, \mathbb{C}).$$

Promatrajmo sada kao i u realnom slučaju grupu $C(V)^\times$ svih invertibilnih elemenata kompleksne unitalne algebre $C(V)$. Ponovo je to Liejeva grupa s Liejevom algebrom $\mathfrak{c}(V)$, koja se kao vektorski prostor podudara sa $C(V)$, a komutator je zadan sa $[a,b] = ab - ba$. Eksponencijalno preslikavanje je $a \mapsto \mathrm{e}^a$. Adjungirana reprezentacija Ad Liejeve grupe $C(V)^\times$ je homomorfizam grupe $C(V)^\times$ u grupu $Aut(\mathfrak{c}(V))$ automorfizama Liejeve algebre $\mathfrak{c}(V)$ zadan sa:

$$(Ad\, a)u = aua^{-1}, \qquad a \in C(V)^\times, \quad u \in \mathfrak{c}(V) = C(V).$$

Uočimo da je svaki $Ad\, a$, $a \in C(V)^\times$, ustvari automorfizam unitalne algebre $C(V)$ i da je $Aut(C(V))$ podgrupa od $Aut(\mathfrak{c}(V))$. Diferencijal tog homomorfizma je homomorfizam Liejevih algebri $ad : \mathfrak{c}(V) \to \mathfrak{c}(V) \subseteq Der(C(V))$ dan sa

$$(ad\, x)u = [x, u] = xu - ux, \qquad x, u \in \mathfrak{c}(V) = C(V).$$

Propozicija 2.2.6. *Neka je $v \in V \subseteq C(V)$ neizotropni vektor, tj. $B(v,v) \neq 0$. Tada je $v \in C(V)^\times$ i $(Ad\, v)V = V$. Preciznije, vrijedi jednakost*

$$(Ad\, v)w = -w + 2\frac{B(v,w)}{B(v,v)}v \qquad \forall w \in V. \tag{2.10}$$

Drugim riječima, operator $(-Ad\, v)|V$ jednak je refleksiji s_v prostora V u odnosu na hiperravninu $v^\perp$ u smjeru vektora v.

Dokaz: U Cliffordovoj algebri $C(V)$ imamo $v^2 = -B(v,v)$, pa vrijedi

$$v\left(-B(v,v)^{-1}v\right) = \left(-B(v,v)^{-1}v\right)v = 1.$$

Dakle, $v \in C(V)^\times$ i $v^{-1} = -B(v,v)^{-1}v$. Za svaki $w \in V$ imamo $wv + vw = -2B(v,w)$, dakle, $wv = -vw - 2B(v,w)$, pa slijedi

$$B(v,v)(Ad\, v)w = B(v,v)vwv^{-1} = -vwv = v^2w + 2B(v,w)v = -B(v,v)w + 2B(v,w)v.$$

Podijelimo li sa $B(v,v)$, dobivamo upravo jednakost (2.10).

Za izotropni vektor $v \in V$ vrijedi $v^2 = 0$, pa v nije invertibilan element unitalne algebre $C(V)$. Stoga iz propozicije 2.2.6. slijedi da je

$$V^\times = V \cap C(V)^\times = \{v \in V;\ B(v,v) \neq 0\}.$$

Neka je $P(V)$ podgrupa od $C(V)^\times$ generirana sa $V^\times$. Prema propoziciji 2.2.6. $(Ad\, u)V = V$ za svaki $u \in P(V)$. Označimo sa Ad_V homomorfizam sa $P(V)$ u $GL(V)$ definiran sa

$$Ad_V\, u = (Ad\, u)|V, \qquad u \in P(V).$$

Propozicija 2.2.7. *Za svaki $u \in P(V)$ vrijedi $Ad_V\, u \in O(V)$, tj.*

$$B\left((Ad_V\, u)x, (Ad_V\,)y\right) = B(x,y) \qquad \forall x,y \in V.$$

Dokaz: Tvrdnju je dovoljno provjeriti za $u = v \in V^\times$. U tom slučaju prema formuli (2.10) imamo za proizvoljne $x, y \in V$:

$$B\left((Ad_V\, v)x, (Ad_V\, v)y\right) = B\left(-x + 2\frac{B(v,x)}{B(v,v)}v, -y + 2\frac{B(v,y)}{B(v,v)}v\right) =$$

$$= B(x,y) - 2\frac{B(v,y)B(x,v)}{B(v,v)} - 2\frac{B(v,x)B(v,y)}{B(v,v)} + 4\frac{B(v,x)B(v,y)}{B(v,v)} = B(x,y).$$

U daljnjem bi nas smetala činjenica da je za $v \in V^\times$ operator $-Ad_V\, v$ a ne $Ad_V\, v$ refleksija prostora V. Između ostalog, ako je prostor V neparnodimenzionalan, svi operatori $Ad_V\, v$, $v \in V^\times$, dakle i svi operatori $Ad_V\, u$, $u \in P(V)$, imaju determinantu 1. Taj ćemo nedostatak ispraviti tako da malo promijenimo adjungiranu reprezentaciju i definiramo homomorfizam

$$\widetilde{Ad}\colon C(V)^\times \to GL(C(V))$$

formulom

$$(\widetilde{Ad}\, u)z = \kappa(u)zu^{-1}, \qquad u \in C(V)^\times, \quad z \in C(V).$$

To znači da vrijedi (uz oznake $C^0(V)^\times = C(V)^\times \cap C^0(V)$ i $C^1(V)^\times = C(V)^\times \cap C^1(V)$)

$$\widetilde{Ad}\, u = Ad\, u \quad \text{za} \quad u \in C^0(V)^\times \qquad \text{i} \qquad \widetilde{Ad}\, u = -Ad\, u \quad \text{za} \quad u \in C^1(V)^\times.$$

Posebno je $\widetilde{Ad}\, v = -Ad\, v$ za $v \in V^\times$, dakle, $\widetilde{Ad}_V\, v = (\widetilde{Ad}\, v)|V$ je upravo refleksija prostora V u odnosu na hiperravninu $v^\perp$ u smjeru vektora v :

$$\widetilde{Ad}_V\, v = s_v, \qquad v \in V^\times. \tag{2.11}$$

Sada definiramo podgrupu

$$\tilde{P}(V) = \{u \in C(V)^\times;\ (\widetilde{Ad}\, u)V = V\}.$$

Prema propoziciji 2.2.6. je $P(V) \subseteq \tilde{P}(V)$. Za $u \in \tilde{P}(V)$ stavimo $\widetilde{Ad}_V\, u = (\widetilde{Ad}\, u)|V \in GL(V)$.

Propozicija 2.2.8. *Jezgra homomorfizma* $\widetilde{Ad}_V : \tilde{P}(V) \to GL(V)$ *je* $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Dokaz: Neka je $\{e_1, \ldots, e_n\}$ baza prostora V ortonormirana u odnosu na B. Neka je $u \in \tilde{P}(V)$ u jezgri homomorfizma $\widetilde{Ad}_V$, tj. u ima svojstvo

$$\kappa(u)v = vu \qquad \forall v \in V.$$

Neka je $u = u_0 + u_1$, gdje je $u_0 \in C^0(V)$ i $u_1 \in C^1(V)$. Tada je $\kappa(u) = u_0 - u_1$, pa dobivamo

$$u_0 v - u_1 v = v u_0 + v u_1 \quad \forall v \in V,$$

a odatle slijedi

$$u_0 v = v u_0 \quad \text{i} \quad u_1 v = -v u_1 \quad \forall v \in V. \tag{2.12}$$

Napišimo sada u_0 i u_1 u bazi $\{e_{i_1} \cdots e_{i_k};\ 0 \le k \le n,\ 1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n\}$, tako da razdvojimo članove koji sadrže e_1 od onih koji ga ne sadrže, a to su 1 i oni koji sadrže samo $e_2, \ldots, e_n$:

$$u_0 = a_0 + e_1 a_1 \qquad \text{i} \qquad u_1 = b_0 + e_1 b_1,$$

gdje su

$$a_0 = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} \sum_{2 \le i_1 < \cdots < i_{2k} \le n} c_{i_1,\ldots,i_{2k}} e_{i_1} \cdots e_{i_{2k}}, \qquad a_1 = \sum_{k=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \sum_{2 \le i_1 < \cdots < i_{2k-1} \le n} c_{i_1,\ldots,i_{2k-1}} e_{i_1} \cdots e_{i_{2k-1}},$$

$$b_0 = \sum_{k=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \sum_{2 \le i_1 < \cdots < i_{2k-1} \le n} d_{i_1,\ldots,i_{2k-1}} e_{i_1} \cdots e_{i_{2k-1}}, \qquad b_1 = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} \sum_{2 \le i_1 < \cdots < i_{2k} \le n} d_{i_1,\ldots,i_{2k}} e_{i_1} \cdots e_{i_{2k}}.$$

Sada iz prve jednakosti u (2.12) za $v = e_1$ dobivamo

$$a_0 e_1 + e_1 a_1 e_1 = e_1 a_0 + e_1^2 a_1.$$

Budući da e_1 antikomutira sa svakim od vektora $e_2, \ldots, e_n$, slijedi da e_1 komutira sa a_0 i antikomutira sa a_1. Nadalje, vrijedi $e_1^2 = -B(e_1, e_1) = -1$. Stoga iz gornje jednakosti slijedi

$$e_1 a_0 - e_1^2 a_1 = e_1 a_0 + e_1^2 a_1 \qquad \Longrightarrow \qquad a_1 = -a_1 \qquad \Longrightarrow \qquad a_1 = 0.$$

Analogno, iz druge jednakosti u (2.12) za $v = e_1$ dobivamo

$$b_0 e_1 + e_1 b_1 e_1 = -e_1 b_0 - e_1^2 b_1.$$

No sada e_1 antikomutira sa b_0 i komutira sa b_1, pa slijedi

$$-e_1 b_0 + e_1^2 b_1 = -e_1 b_0 - e_1^2 b_1 \qquad \Longrightarrow \qquad -b_1 = b_1 \qquad \Longrightarrow \qquad b_1 = 0.$$

Time smo dokazali da se u prikazu elementa u u bazi $\{e_{i_1} \cdots e_{i_k};\ 0 \leq k \leq n,\ 1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n\}$ ne pojavljuju članovi koji sadrže e_1. Sada možemo jednako postupiti izdvajajući vektor e_2, pa dobivamo da se ne pojavljuju članovi koji sadrže bilo e_1 bilo e_2. Korak po korak možemo zaključiti da uopće nema članova za koje je $k \geq 1$, tj. $u = c \in \mathbb{C}$. Kako je $u \neq 0$, vrijedi $c \in \mathbb{C}^*$.

Uočimo da je u ovom dokazu bilo ključno da promatramo homomorfizam $\widetilde{Ad}$ a ne Ad; naime, predznak minus u drugoj jednakosti u (2.12) bitan je za dokaz.

Primijetimo još da propozicija 2.2.8. ne vrijedi bez pretpostavke da je forma B nedegenerirana. Da to uvidimo, promatrajmo ekstremni slučaj $B = 0$, odnosno, $C(V) = \bigwedge(V)$. Za bilo koje $v_1, v_2 \in V$ imamo $(1+v_1 \wedge v_2)(1-v_1 \wedge v_2) = 1$, dakle, $1+v_1 \wedge v_2 \in \bigwedge(V)^\times$ i $(1+v_1 \wedge v_2)^{-1} = 1-v_1 \wedge v_2$. Međutim, za svaki $v \in V$ je

$$\kappa(1+v_1 \wedge v_2) \wedge v \wedge (1+v_1 \wedge v_2)^{-1} = (1+v_1 \wedge v_2) \wedge v \wedge (1-v_1 \wedge v_2) = v + v_1 \wedge v_2 \wedge v - v \wedge v_1 \wedge v_2 = v.$$

Dakle, jezgra homomorfizma $\widetilde{Ad}_V$ sadrži mnoge neskalarne članove.

Definiramo sada preslikavanje $N : C(V) \to C(V)$ ovako:

$$N(u) = u\kappa(\alpha(u)), \qquad u \in C(V).$$

Uočimo da automorfizam parnosti κ komutira s glavnim antiautomorfizmom α, odnosno, vrijedi $\kappa(\alpha(u)) = \alpha(\kappa(u))\ \ \forall u \in C(V)$. Nadalje, za $v \in V$ je $\alpha(v) = v$ i $\kappa(v) = -v$, pa vrijedi

$$N(v) = -v^2 = B(v, v) \qquad \forall v \in V. \tag{2.13}$$

Preslikavanje N zove se **norma** na Cliffordovoj algebri $C(V)$. Važnost norme vidi se iz sljedeće propozicije:

Propozicija 2.2.9. *Restrikcija $N|\tilde{P}(V)$ je homomorfizam grupe $\tilde{P}(V)$ u multiplikativnu grupu $\mathbb{C}^*$.*

Dokaz: Neka je $u \in \tilde{P}(V)$. To znači da je $\kappa(u)vu^{-1} \in V\ \ \forall v \in V$. Kako je antiautomorfizam α identiteta na V, dobivamo

$$\kappa(u)vu^{-1} = \alpha(u)^{-1} v \alpha(\kappa(u)) \qquad \forall v \in V,$$

a odatle množenjem slijeva sa $\alpha(u)$ i zdesna sa $\alpha(\kappa(u))^{-1}$ dobivamo

$$\alpha(u)\kappa(u)vu^{-1}\alpha(\kappa(u))^{-1} = v \qquad \forall v \in V.$$

Prema tome, za svaki $v \in V$ vrijedi

$$\widetilde{Ad}\ \kappa(\alpha(u))u)v = \kappa[\kappa(\alpha(u))u]v[\kappa(\alpha(u))u]^{-1} = \alpha(u)\kappa(u)vu^{-1}\kappa(\alpha(u))^{-1} = v.$$

To pokazuje da je $\kappa(\alpha(u))u$ u jezgri homomorfizma $\widetilde{Ad}$. Prema propoziciji 2.2.8. zaključujemo da je $\kappa(\alpha(u))u \in \mathbb{C}^*$, pa primjenom automorfizma parnosti κ dobivamo da je $\alpha(u)\kappa(u) \in \mathbb{C}^*$. Ali $\alpha(u)\kappa(u) = N(\alpha(u))$, pa slijedi da je $N(\alpha(u)) \in \mathbb{C}^*$. Kako je očito $\alpha(\tilde{P}(V)) = \tilde{P}$, dokazali smo da je $N(\tilde{P}(V)) \subseteq \mathbb{C}^*$.

Sada za $u, w \in \tilde{P}(V)$ nalazimo

$$N(uw) = uw\kappa(\alpha(w))\kappa(\alpha(u)) = uN(w)\kappa(\alpha(u)) = u\kappa(\alpha(u))N(w) = N(u)N(w).$$

Teorem 2.2.10. *Vrijedi $\tilde{P}(V) = P(V)$ i $\widetilde{Ad}_V$ je epimorfizam grupe $P(V)$ na grupu $O(V)$.*

Dokaz: Za $u \in \tilde{P}(V)$ imamo

$$N(\kappa(u)) = \kappa(u)\alpha(u) = \kappa(u\kappa(\alpha(u))) = \kappa(N(u)) = N(u).$$

Stoga prema propoziciji 2.2.9. za svaki $v \in V^\times(\subseteq \tilde{P}(V))$ i $u \in \tilde{P}(V)$ vrijedi

$$N\left((\widetilde{Ad}_V\ u)v\right) = N\left(\kappa(u)vu^{-1}\right) = N(\kappa(u))N(v)N(u)^{-1} = N(u)N(v)N(u)^{-1} = N(v).$$

Međutim, za svaki $v \in V$ vrijedi $N(v) = B(v, v)$, pa zaključujemo da je

$$B\left((\widetilde{Ad}_V\ u)v, (\widetilde{Ad}_V\ u)v\right) = B(v, v) \qquad \forall v \in V^\times.$$

Posebno, odatle je $(\widetilde{Ad}_V\ u)V^\times \subseteq V^\times$. No tada je i $(\widetilde{Ad}_V\ u^{-1})V^\times \subseteq V^\times$, pa zaključujemo da je $(\widetilde{Ad}_V\ u)V^\times = V^\times$ za svaki $u \in \tilde{P}(V)$. Stoga operator $\widetilde{Ad}_V\ u$ ostavlja invarijantnim i skup $V \setminus V^\times$ izotropnih vektora. Zaključujemo da je

$$B\left((\widetilde{Ad}_V\ u)v, (\widetilde{Ad}_V\ u)v\right) = B(v, v) \qquad \forall v \in V.$$

No kako za bilo koje $x, y \in V$ vrijedi $4B(x, y) = B(x + y, x + y) - B(x - y, x - y)$, slijedi

$$B\left((\widetilde{Ad}_V\ u)x, (\widetilde{Ad}_V\ u)y\right) = B(x, y) \qquad \forall x, y \in V,$$

tj. $\widetilde{Ad}_V\ u \in O(V)\ \ \forall u \in \tilde{P}(V)$.

Podgrupa $P(V)$ grupe $\tilde{P}(V)$ generirana je sa $V^\times$. Za $v_1, \ldots, v_k \in V^\times$ i za $u = v_1 \cdots v_k \in P(V)$ imamo

$$\widetilde{Ad}\ u = (\widetilde{Ad}\ v_1) \cdots (\widetilde{Ad}\ v_k) = s_{v_1} \cdots s_{v_k}.$$

To pokazuje da slika homomorfizma $\widetilde{Ad}_V\ |P(V)$ sadrži sve refleksije prostora V u odnosu na neizotropne vektore. Sada iz Cartan−Dieudonnéovog teorema 2.2.3. slijedi ne samo da je $\widetilde{Ad}_V$ epimorfizam grupe $\tilde{P}(V)$ na grupu $O(V)$, nego i da je slika restrikcije $\widetilde{Ad}_V\ |P(V)$ epimorfizam grupe $P(V)$ na grupu $O(V)$.

Uočimo sada da je čitava multiplikativna grupa $\mathbb{C}^*$, promatrana kao podgrupa od $C(V)^\times$, sadržana u grupi $P(V)$. Doista, ako je $\lambda \in \mathbb{C}^*$ i ako je $v \in V^\times$ takav da je $B(v, v) = 1$, onda za $\alpha \in \mathbb{C}^*$ takav da je $\alpha^2 = -\lambda$ i za vektor $x = \alpha v \in V^\times \subseteq P(V)$ vrijedi

$$\lambda = -\alpha^2 = -\alpha^2 B(v, v) = -B(x, x) = x^2 \in P(V).$$

Neka je sada $u \in \tilde{P}(V)$ i neka je $w \in P(V)$ takav da je $\widetilde{Ad}_V\ u = \widetilde{Ad}_V\ w$. Tada je $w^{-1}u \in \tilde{P}(V)$ u jezgri homomorfizma $\widetilde{Ad}_V$. Prema propoziciji 2.2.8. slijedi $w^{-1}u \in \mathbb{C}^* \subseteq P(V)$, a odatle je $u = ww^{-1}u \in P(V)$. Time je dokazana i jednakost $\tilde{P}(V) = P(V)$.

Definiramo sada podgrupu $Pin(V)$ od $P(V)$ generiranu svim jediničnim vektorima u odnosu na formu B, tj. generiranu skupom $\{e \in V;\ B(e,e) = 1\} \subseteq V^\times$. Uočimo još podgrupu $Spin(V) = Pin(V) \cap C^0(V)$ svih parnih elemenata grupe $Pin(V)$.

Teorem 2.2.11. (*a*) *Vrijedi* $Pin(V) = \{u \in P(V);\ N(u) = 1\}$.

(*b*) *Restrikcija* $\widetilde{Ad}_V\,|Pin(V)$ *je epimorfizam grupe* $Pin(V)$ *na grupu* $O(V)$ *s jezgrom* $\{1, -1\}$.

(*c*) *Restrikcija* $\widetilde{Ad}_V\,|Spin(V)$ *je epimorfizam grupe* $Spin(V)$ *na grupu* $SO(V)$ *s jezgrom* $\{1, -1\}$.

Dokaz: (*a*) Ako je $e \in V$ jedinični vektor u odnosu na formu B, onda je prema (2.13) $N(e) = 1$. Nadalje, prema propoziciji 2.2.9. restrikcija $N|P(V)$ je homomorfizam grupe $P(V)$ u multiplikativnu grupu $\mathbb{C}^*$. Zaključujemo da je $N(u) = 1\ \forall u \in Pin(V)$.

Neka je sada $u \in P(V)$ takav da je $N(u) = 1$. Tada je u produkt neizotropnih vektora $v_1 \cdots v_k$. Neka su $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{C}^*$ takvi da su vektori $e_j = \alpha_j^{-1} v_j$, $j = 1, \ldots, k$ jedinični u odnosu na formu B. Tada zbog propozicije 2.2.9. imamo

$$1 = N(u) = N(v_1 \cdots v_k) = N(v_1) \cdots N(v_k) = N(\alpha_1) \cdots N(\alpha_k) N(e_1) \cdots N(e_k) = \alpha_1^2 \cdots \alpha_k^2.$$

Dakle, vrijedi $\alpha_1 \cdots \alpha_k = \pm 1$. Možemo pretpostaviti da je taj produkt jednak 1 : ako je on jednak -1 broj α_1 zamijenimo s brojem $-\alpha_1$; naime, zajedno s vektorom $\alpha_1^{-1} v_1$ i vektor $-\alpha_1^{-1} v_1$ je jedinični u odnosu na formu B. Sada iz $\alpha_1 \cdots \alpha_k = 1$ dobivamo

$$u = v_1 \cdots v_k = \alpha_1 \cdots \alpha_k e_1 \cdots e_k = e_1 \cdots e_k \in Pin(V).$$

(*b*) Za vektor $v \in V^\times$ izaberimo $\alpha \in \mathbb{C}^*$ tako da vektor $e = \alpha^{-1} v$ bude jedinični. Uočimo sada da je $v^\perp = e^\perp$, dakle, refleksije s_v i s_e se podudaraju. No to znači da slika restrikcije $\widetilde{Ad}_V\,|Pin(V)$ sadrži sve refleksije prostora V u odnosu na neizotropne vektore. Prema tome, restrikcija $\widetilde{Ad}_V\,|Pin(V)$ je epimorfizam grupe $Pin(V)$ na grupu $O(V)$. Jezgra tog epimorfizma je $\mathbb{C}^* \cap Pin(V)$. Za $\lambda \in \mathbb{C}^*$ je

$$N(\lambda) = \lambda \kappa(\alpha(\lambda)) = \lambda^2.$$

Prema tvrdnji (*a*) zaključujemo da je $\mathbb{C}^* \cap Pin(V) \subseteq \{1, -1\}$. Napokon, za jedinični vektor $e \in V$ vrijedi $e^2 = -1$, što pokazuje da je $-1 \in Pin(V)$. Time smo dokazali da je jezgra epimorfizma $\widetilde{Ad}_V\,|Pin(V)$ jednaka $\{1, -1\}$.

(*c*) Slika restrikcije $\widetilde{Ad}_V\,|Spin(V)$ sadrži sve produkte parnog broja refleksija prostora V. Kako je $\det s_v = -1$ za svaki neizotropni vektor v, zaključujemo da je $\det A = \pm 1$ za svaki $A \in O(V)$. Nadalje, slika homomorfizma $\widetilde{Ad}_V\,|Spin(V)$ je upravo grupa

$$SO(V) = \{A \in O(V);\ \det A = 1\}.$$

Napokon, kako je očito $-1 = e^2 \in Spin(V)$, jezgra epimorfizma $\widetilde{Ad}_V\,|Spin(V)$ grupe $Spin(V)$ na grupu $SO(V)$ je također jednaka $\{1, -1\}$.

Teorem 2.2.12. (*a*) $P(V)$, $SP(V) = P(V) \cap C^0(V)$, $Pin(V)$ *i* $Spin(V)$ *su zatvorene podgrupe Liejeve grupe* $C(V)^\times$. *Pri tome je* $SP(V)$ *otvorena podgrupa od* $P(V)$ *indeksa* 2, *a* $Spin(V)$ *je otvorena podgrupa od* $Pin(V)$ *također indeksa* 2.

(*b*) $P(V) = \mathbb{C}^* Pin(V) = \{\lambda u;\ \lambda \in \mathbb{C}^*,\ u \in Pin(V)\}$ *i* $SP(V) = \mathbb{C}^* Spin(V)$.

(*c*) *Ako je* $\dim V \geq 2$, *grupe* $SP(V)$ *i* $Spin(V)$ *su povezane, a grupe* $P(V)$ *i* $Pin(V)$ *imaju dvije komponente povezanosti.*

(*d*) *Liejeva algebra grupa* $Pin(V)$ *i* $Spin(V)$ *je* $C(V)^{(2)}$, *a Liejeva algebra grupa* $P(V)$ *i* $SP(V)$ *je* $\mathbb{C} \dotplus C(V)^{(2)}$.

Dokaz: (a) Prema teoremu 2.2.10. je $\tilde{P}(V) = P(V)$, a iz definicije grupe $\tilde{P}(V)$ je jasno da je to zatvorena podgrupa grupe $C(V)^\times$. Očito je $SP(V)$ zatvorena podgrupa grupe $P(V)$. Indeks te podgrupe jednak je 2 : dvije lijeve (i ujedno desne) $SP(V)-$klase u grupi $P(V)$ su $SP(V)$ i $P(V) \cap C^1(V)$, budući da je očito $P(V) \cap C^1(V) = SP(V)v$ za bilo koji $v \in V^\times$. Prema tome, $SP(V)$ je otvorena podgrupa od $P(V)$.

Sada iz tvrdnje (a) teorema 2.2.11. slijedi da je i $Pin(V)$ zatvorena podgrupa grupe $C(V)^\times$. Napokon, kao u prethodnom odjeljku vidimo da je $Spin(V)$ je zatvorena podgrupa grupe $Pin(V)$ indeksa 2, pa je ona i otvorena podgrupa od $Pin(V)$.

Tvrdnja (b) je očita, jer je $\{\alpha e;\ \alpha \in \mathbb{C}^*,\ e \in V,\ B(e,e) = 1\}$ skup svih neizotropnih vektora u prostoru V.

(c) Prema tvrdnji (b) teorema 2.2.11. $\widetilde{Ad}_V\,|Spin(V)$ je epimorfizam grupe $Spin(V)$ na povezanu grupu $SO(V)$ s jezgrom $\{1,-1\}$, pa povezanost grupe $Spin(V)$ slijedi iz činjenice da su 1 i -1 povezani putem u grupi $Spin(V)$. To se dokazuje jednako kao u dokazu propozicije 2.1.7.: za međusobno $B-$ortogonalne jedinične vektore $e, f \in V$ sa

$$\gamma(t) = e[(\cos \pi t)e + (\sin \pi t)f], \qquad t \in [0,1],$$

zadan je put u grupi $Spin(V)$ koji ide od točke -1 do točke 1. Povezanost grupe $SP(V)$ slijedi zbog tvrdnje (b). Budući da je $SP(V)$ (odnosno, $Spin(V)$) podgrupa od $P(V)$ (odnosno, od $Pin(V)$) indeksa 2, jasno je da grupe $P(V)$ i $Pin(V)$ imaju najviše dvije komponente povezanosti. Kako one nisu povezane, jer se parni element s neparnim elementom ne može spojiti putem, one imaju točno dvije komponente povezanosti.

(d) Prije svega, budući da je $SP(V)$ otvorena podgrupa Liejeve grupe $P(V)$, te dvije Liejeve grupe imaju istu Liejevu algebru. Iz istog razloga Liejeve grupe $Pin(V)$ i $Spin(V)$ imaju istu Liejevu algebru. Prema tvrdnji (b) teorema 2.2.11. $\widetilde{Ad}_V \colon Pin(V) \to O(V)$ je epimorfizam Liejevih grupa s konačnom jezgrom. Odatle slijedi da je diferencijal tog epimorfizma izomorfizam Liejevih algebri. Dakle, dimenzija Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ od $Pin(V)$ i od $Spin(V)$ jednaka je dimenziji Liejeve algebre $\mathfrak{o}(V)$, odnosno,

$$\dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{g} = \dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{o}(V) = 2 \dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{o}(V) = n(n-1), \qquad \text{ako je} \quad n = \dim_{\mathbb{C}} V.$$

Uočimo sada da je $\mathfrak{g} = Lie(Pin(V))$ (kao i $\mathfrak{o}(V)$) kompleksna Liejeva algebra. Neka je sada $\{e_1, \ldots, e_n\}$ ortonormirana baza kompleksnog prostora V u odnosu na formu B. Tada je

$$\{e_j e_k;\ 1 \le j < k \le n\}$$

baza kompleksnog vektorskog prostora $C(V)^{(2)}$. Posebno,

$$\dim_{\mathbb{R}} C(V)^{(2)} = 2 \dim_{\mathbb{C}} C(V)^{(2)} = n(n-1),$$

dakle, $\dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{g} = \dim_{\mathbb{R}} C(V)^{(2)}$. Stoga je za jednakost $\mathfrak{g} = C(V)^{(2)}$ dovoljno dokazati inkluziju $C(V)^{(2)} \subseteq \mathfrak{g}$, odnosno, dovoljno je dokazati da je $e_j e_k \in \mathfrak{g}$ za sve $j < k$. Neka su $j, k \in \{1, \ldots, n\}$, $j < k$. Definiramo glatku krivulju $\varphi : \mathbb{R} \to C(V)$ sa $\varphi(t) = \cos t + (\sin t) e_j e_k,\ t \in \mathbb{R}$. Tada je $\varphi(t) = [(\cos t)e_j + (\sin t)e_k](-e_j)$ i imamo

$$B\left((\cos t)e_j + (\sin t)e_k, (\cos t)e_j + (\sin t)e_k\right) = (\cos t)^2 B\left(e_j, e_j\right) + (\sin t)^2 B\left(e_k, e_k\right) = 1.$$

Zaključujemo da je $\varphi(t)$ produkt dva jedinična vektora, odnosno, $\varphi(t) \in Pin(V)$ za svaki $t \in \mathbb{R}$. Nadalje, vrijedi $\varphi(0) = 1$ i $\varphi'(0) = e_j e_k$. To znači da je $e_j e_k \in \mathfrak{g}$. Time je dokazano da je $C(V)^{(2)}$ Liejeva algebra od $Pin(V)$ i od $Spin(V)$.

Sada iz tvrdnje (b) slijedi da je Liejeva algebra od $P(V)$ i od $SP(V)$ jednaka $\mathbb{C} \dotplus C(V)^{(2)}$.

Zbog kasnijih primjena promatrat ćemo pobliže diferencijal epimorfizma $Pin(V) \to O(V)$. Taj je diferencijal izomorfizam Liejevih algebri sa $C(V)^{(2)}$ na $\mathfrak{o}(V)$. Izračunat ćemo ekspilicitno invers tog izomorfizma $\alpha : \mathfrak{o}(V) \to C(V)^{(2)}$.

Propozicija 2.2.13. *Ako su $\{a_1, \ldots, a_n\}$ i $\{b_1, \ldots, b_n\}$ baze prostora V koje su međusobno dualne u odnosu na formu B, tj. $B(a_j, b_k) = \delta_{jk}$, onda je*

$$\alpha(A) = -\frac{1}{4} \sum_{j=1}^{n} (Ab_j)a_j, \qquad A \in \mathfrak{o}(V). \tag{2.14}$$

Posebno, ako je $\{e_1, \ldots, e_n\}$ baza od V koja je ortonormirana u odnosu na formu B, onda je

$$\alpha(A) = -\frac{1}{4} \sum_{j=1}^{n} (Ae_j)e_j, \qquad A \in \mathfrak{o}(V). \tag{2.15}$$

Dokaz: Neka je $\{e_1, \ldots, e_n\}$ baza od V koja je ortonormirana u odnosu na formu B. U dokazu tvrdnje (d) teorema 2.2.12. vidjeli smo da je za $j < k$ sa

$$\varphi(t) = \cos t + (sin\, t)e_j e_k, \qquad t \in \mathbb{R}$$

zadana glatka krivulja u grupi $Spin(V)$ takva da je $\varphi(0) = 1$ i $\varphi'(0) = e_j e_k$. Označimo li sa Φ epimorfizam $\widetilde{Ad}\, V|Spin(V)$ grupe $Spin(V)$ na grupu $SO(V)$, onda je

$$\alpha^{-1}(e_j e_k) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \Phi(\varphi(t)) \Big|_{t=0}.$$

Za vektor $v \in V$ je

$$\Phi(\varphi(t))v = (\widetilde{Ad}\ \varphi(t))v = \kappa(\varphi(t))v\gamma(t)^{-1},$$

pri čemu je κ automorfizam parnosti. No automorfizam parnosti je identiteta na parnim elementima od $C(V)$ i posebno $\kappa(\gamma(t)) = \gamma(t)$. Nadalje, vrijedi

$$[\cos\, t + (\sin\, t)e_j e_k][\cos\, t - (\sin\, t)e_j e_k] = (\cos\, t)^2 - (\sin\, t)^2 e_j e_k e_j e_k = (\cos\, t)^2 + (\sin\, t)^2 e_j^2 e_k^2 = 1,$$

dakle,

$$\gamma(t)^{-1} = \cos\, t - (\sin\, t)e_j e_k.$$

Prema tome,

$$\Phi(\varphi(t))v = [\cos\, t + (\sin\, t)e_j e_k]\, v\, [\cos\, t - (\sin\, t)e_j e_k],$$

pa nalazimo

$$\alpha^{-1}(e_j e_k)v = [-\sin\, t + (\cos\, t)e_j e_k]\, v\, [\cos\, t - (\sin \tau)e_j e_k]|_{t=0} +$$
$$+ [\cos\, t + (\sin\, t)e_j e_k]\, v\, [-\sin\, t - (\cos\, t)e_j e_k]|_{t=0} = e_j e_k v - v e_j e_k.$$

Posebno, kako je $e_i e_\ell = -e_\ell e_i$ za $i \neq \ell$ i $e_i^2 = -1$, nalazimo

$$\alpha^{-1}(e_j e_k)e_j = 2e_k, \qquad \alpha^{-1}(e_j e_k)e_k = -2e_j, \qquad \alpha^{-1}(e_j e_k)e_i = 0 \quad \text{za } j \neq i \neq k.$$

Upravo tako djeluje operator $-2E_{jk} + 2E_{kj}$, gdje je $E_{rs} \in L(V)$ zadan sa $E_{rs}e_p = \delta_{sp}e_r$. Dakle, vrijedi

$$\alpha\,(E_{jk} - E_{kj}) = -\frac{1}{2} e_j e_k, \qquad 1 \leq j < k \leq n.$$

Naravno, time je izomorfizam $\alpha : \mathfrak{o}(V) \to C(V)^{(2)}$ potpuno određen, budući da operatori $E_{jk} - E_{kj}$, $1 \leq j < k \leq n$, čine bazu od $\mathfrak{o}(V)$.

S druge strane imamo

$$\sum_{i=1}^{n} ([E_{jk} - E_{kj}]e_i)\, e_i = e_j e_k - e_k e_j = 2e_j e_k,$$

pa vidimo da formula (2.15) vrijedi za sve operatore A iz baze prostora $\mathfrak{o}(V)$, dakle, i za sve $A \in \mathfrak{o}(V)$. Time je formula (2.15) dokazana.

Neka su sada $\{a_1, \dots, a_n\}$ i $\{b_1, \dots, b_n\}$ baze prostora V koje su međusobno dualne u odnosu na formu B. Pišemo li

$$a_j = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{kj} e_k \qquad \text{i} \qquad b_j = \sum_{k=1}^{n} \beta_{kj} e_k,$$

onda je zbog ortonormiranosti vektora e_j

$$\alpha_{kj} = B(a_j, e_k) \qquad \beta_{kj} = B(b_j, e_k),$$

a zbog dualnosti baza $\{a_j\}$ i $\{b_j\}$ u odnosu na formu B imamo

$$\delta_{jr} = B(a_j, b_r) = \sum_{k,s=1}^{n} \alpha_{kj} \beta_{sr} B(e_k, e_s) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{kj} \beta_{kr}.$$

To pokazuje da je matrica $[\beta_{jk}]$ transponirana od inverzne matrice od $[\alpha_{jk}]$. Prema tome, vrijedi

$$e_j = \sum_{k=1}^{n} \beta_{jk} a_k \qquad \text{i} \qquad e_j = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ji} b_i.$$

Uvrstimo li te razvoje u formulu (2.15), dobivamo

$$\alpha(A) = -\frac{1}{4} \sum_{j,i,k=1}^{n} \alpha_{ji} \beta_{jk} (Ab_i) a_k = -\frac{1}{4} \sum_{i,k=1}^{n} \delta_{ik} (Ab_i) a_k = -\frac{1}{4} \sum_{i=1}^{n} (Ab_i) a_i.$$

Time je i formula (2.14) dokazana.

2.3 Spinorne reprezentacije

U ovom odjeljku i dalje je V kompleksan konačnodimenzionalan vektorski prostor na kome je zadana nedegenerirana simetrična bilinearna forma B i $C(V)$ je pripadna Cliffordova algebra. U ovom odjeljku proučit ćemo reprezentacije Cliffordovih algebri i nekih njenih Liejevih podalgebri.

2.3.1 Algebra $C(V)$ za parnodimenzionalan prostor V

Promatrat ćemo najprije slučaj parnodimenzionalnog prostora V, $\dim V = 2n$, $n \in \mathbb{N}$. Prema tvrdnji (d) teorema 2.2.2. postoje izotropni $n-$dimenzionalni potprostori U i U^* od V takvi da je $V = U \dot{+} U^*$. Tada je prema tvrdnji (f) preslikavanje, koje vektoru $u^* \in U^*$ pridružuje linearan funkcional $u \mapsto B(u, u^*)$ na prostoru U, izomorfizam prostora U^* na dualni prostor U' prostora U. Označimo sada sa $\mathcal{S}$ vektorski prostor $\bigwedge(U)$. Za $u \in U$ definiramo linearan operator $T(u) : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ kao lijevo množenje sa u :

$$T(u)s = u \wedge s, \qquad s \in \mathcal{S}.$$

Neka je sada $u^* \in U^*$. Za $1 \leq k \leq n$ definiramo preslikavanje $A_k(u^*) : U^k \to \bigwedge^{k-1}(U)$ sa

$$[A_k(u^*)](u_1, \ldots, u_k) = \sum_{j=1}^{k} (-1)^j 2B(u^*, u_j) u_1 \wedge \cdots \overset{\wedge}{u_j} \cdots \wedge u_k, \qquad u_1, \ldots, u_k \in U.$$

Pri tome $\overset{\wedge}{u_j}$ znači da je član u_j izostavljen iz vanjskog produkta. Preslikavanje $A(u^*)$ očito je $k-$multilinearno. Dokažimo da je ono alternirajuće, odnosno, da vrijedi

$$[A_k(u^*)](u_{\sigma(1)}, \ldots, u_{\sigma(k)}) = sign(\sigma)[A_k(u^*)](u_1, \ldots, u_k) \qquad \forall \sigma \in \mathcal{S}_k \quad \text{i} \quad \forall u_1, \ldots, u_k \in U.$$

Naravno, ta je tvrdnja trivijalna ako je $k = 1$. Pretpostavimo, dakle, da je $k \geq 2$. Tu je jednakost dovoljno provjeriti za transpozicije susjednih brojeva $j, j+1$, budući da je svaka permutacija produkt takvih. Možemo se ograničiti na slučaj $j = 1$, tj. na transpoziciju indeksa 1 i 2. Budući da je $u_2 \wedge u_1 = -u_1 \wedge u_2$, nalazimo

$$[A_k(u^*)](u_2, u_1, u_3, \ldots, u_k) = 2B(u^*, u_2) u_1 \wedge u_3 \wedge \cdots \wedge u_k - 2B(u^*, u_1) u_2 \wedge u_3 \wedge \cdots \wedge u_k +$$

$$+ \sum_{j=3}^{k} (-1)^j 2B(u^*, u_j) u_2 \wedge u_1 \wedge u_3 \wedge \cdots \overset{\wedge}{u_j} \cdots \wedge u_k = -[A_k(u^*)](u_1, u_2, u_3, \ldots, u_k).$$

Time je dokazano da je $k-$multilinearno preslikavanje $A_k(u^*) : U^k \to \bigwedge^{k-1}(U)$ alternirajuće. To znači da postoji jedinstven linearan operator $T_k(u^*) : \bigwedge^k(U) \to \bigwedge^{k-1}(U)$ takav da vrijedi

$$[T_k(u^*)] u_1 \wedge \cdots \wedge u_k = \sum_{j=1}^{k} (-1)^j 2B(u^*, u_j) u_1 \wedge \cdots \overset{\wedge}{u_j} \cdots \wedge u_k \qquad \forall u_1, \ldots, u_k \in U.$$

Neka je $T(u^*) : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ jedinstven linearan operator takav da je $T(u^*)| \bigwedge^k(U) = T_k(u^*)$ za svaki $k \geq 1$ i $T(u^*)| \bigwedge^0(U) = 0$. Napokon, definiramo preslikavanje $T : V \to L(\mathcal{S})$ tako da stavimo

$$T(u + u^*) = T(u) + T(u^*), \qquad u \in U, \quad u^* \in U^*.$$

Tada je očito preslikavanje T linearno. Za svaki $u \in U$ i $s \in \mathcal{S}$ vrijedi

$$T(u)^2 s = u \wedge u \wedge s = 0.$$

To znači da je $T(u)^2 = 0$ za svaki $u \in U$. Uzmimo sada $u^* \in U^*$. Tada je $T(u^*)^2| \bigwedge^0(U) = 0$ i $T(u^*)^2| \bigwedge^1(U) = 0$. Neka je $k \geq 2$ i $u_1, \ldots, u_k \in U$. Tada imamo

$$T(u^*)^2 u_1 \wedge \cdots \wedge u_k = \sum_{j=1}^{k} (-1)^j 2B(u^*, u_j) T(u^*) u_1 \wedge \cdots \overset{\wedge}{u_j} \cdots \wedge u_k =$$

$$= \sum_{1\leq i<j\leq k} (-1)^{j+i} 4B(u^*, u_j) B(u^*, u_i) u_1 \wedge \cdots \overset{\wedge}{u_i} \cdots \overset{\wedge}{u_j} \cdots \wedge u_k +$$

$$+ \sum_{1\leq j<i\leq k} (-1)^{j+i-1} 4B(u^*, u_j) B(u^*, u_i) u_1 \wedge \cdots \overset{\wedge}{u_j} \cdots \overset{\wedge}{u_i} \cdots \wedge u_k = 0$$

jer se zamjenom indeksa i i j u drugoj sumi vidi da je ona upravo suprotna prvoj sumi. Time je dokazano da je $T(u^*)^2 = 0$ za svaki $u^* \in U^*$. Da bismo izračunali $T(v)^2$ za proizvoljan $v \in V$ trebamo još odrediti produkte $T(u)T(u^*)$ i $T(u^*)T(u)$ za $u \in U$ i $u^* \in U^*$. Računat ćemo te produkte na pojedinim direktnim sumandima $\bigwedge^k(U)$, $0 \leq k \leq n$. Za $k = 0$ i za $\lambda \in \bigwedge^0(U) = \mathbb{C}$ imamo

$$T(u)T(u^*)\lambda = 0 \qquad \text{i} \qquad T(u^*)T(u)\lambda = \lambda T(u^*)u = -2B(u^*, u)\lambda.$$

Odatle slijedi da je

$$[T(u)T(u^*) + T(u^*)T(u)]\lambda = -2B(u^*, u)\lambda.$$

Za $k = 1$ i za $w \in \bigwedge^1(U) = U$ imamo

$$T(u)T(u^*)w = T(u)[-2B(u^*, w)] = -2B(u^*, w)u$$

i

$$T(u^*)T(u)w = T(u^*)u \wedge w = -2B(u^*, u)w + 2B(u^*, w)u.$$

Odatle slijedi da je

$$[T(u)T(u^*) + T(u^*)T(u)]w = -2B(u^*, u)w.$$

Neka je sada $k \geq 2$ i $u_1, \ldots, u_k \in U$. Računamo djelovanje produkata $T(u)T(u^*)$ i $T(u^*)T(u)$ na vektor $u_1 \wedge \cdots \wedge u_k \in \bigwedge^k(U)$:

$$T(u)T(u^*)u_1 \wedge \cdots \wedge u_k = \sum_{j=1}^{k} (-1)^j 2B(u^*, u_j) u \wedge u_1 \wedge \cdots \overset{\wedge}{u_j} \cdots \wedge u_k;$$

$$T(u^*)T(u)u_1 \wedge \cdots \wedge u_k = -2B(u^*, u)u_1 \wedge \cdots \wedge u_k + \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j+1} 2B(u^*, u_j) u \wedge u_1 \wedge \cdots \overset{\wedge}{u_j} \cdots \wedge u_k.$$

Odatle je

$$[T(u)T(u^*) + T(u^*)T(u)]u_1 \wedge \cdots \wedge u_k = -2B(u^*, u)u_1 \wedge \cdots \wedge u_k.$$

Time smo dokazali da vrijedi

$$T(u)T(u^*) + T(u^*)T(u) = -2B(u^*, u)I_{\mathcal{S}} \qquad \forall u \in U \quad \text{i} \quad \forall u^* \in U^*.$$

Proizvoljan $v \in V$ ima oblik $v = u + u^*$ za neke $u \in U$ i $u^* \in U^*$, pa dobivamo

$$T(v)^2 = T(u)^2 + T(u)T(u^*) + T(u^*)T(u) + T(u^*)^2 = -2B(u^*, u)I_{\mathcal{S}}.$$

Međutim, svi vektori iu U i svi vektori iz U^* su izotropni, pa vrijedi

$$B(v, v) = B(u, u) + B(u^*, u) + B(u, u^*) + B(u^*, u^*) = 2B(u^*, u).$$

Prema tome,

$$T(v)^2 = -B(v, v)I_{\mathcal{S}} \qquad \forall v \in V.$$

Prema univerzalnom svojstvu Cliffordove algebre linearan operator $T : V \to L(\mathcal{S})$ se faktorizira kroz $C(V)$, tj. postoji jedinstven unitalni homomorfizam $\pi : C(V) \to L(\mathcal{S})$ takav da je $\pi|V = T$. Drugim riječima, dokazali smo:

Propozicija 2.3.1. *Neka je V kompleksan vektorski prostor parne dimenzije $2n$ s nedegeneriranom simetričnom bilinearnom formom B. Neka su U i U^* izotropni potprostori od V takvi da je $V = U \dot{+} U^*$. Postoji jedinstvena reprezentacija π unitalne algebre $C(V)$ na vektorskom prostoru $\mathcal{S} = \bigwedge(U)$ takva da vrijedi*

$$\pi(u)s = u \wedge s \qquad \text{za} \quad u \in U \quad \text{i} \quad s \in \mathcal{S},$$

$$\pi(u^*)u_1 \wedge \cdots \wedge u_k = \sum_{j=1}^{k} (-1)^j 2B(u^*, u_j) u_1 \wedge \cdots \overset{\wedge}{u_j} \cdots \wedge u_k \qquad \text{za} \quad u^* \in U^* \quad \text{i} \quad u_1, \ldots, u_k \in U.$$

Izaberimo sada bazu $\{u_1, \ldots, u_n\}$ potprostora U i neka je $\{u_1^*, \ldots, u_n^*\}$ baza od U^* koja je onoj prvoj dualna u odnosu na formu B, tj. takva da je $B(u_j, u_k^*) = \delta_{jk}$. Tada je

$$\{u_{i_1} \wedge \cdots \wedge u_{i_k};\ 0 \leq k \leq n,\ 1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n\} \tag{2.16}$$

baza prostora $\mathcal{S} = \bigwedge(U)$ i u toj je bazi naročito jednostavno prikazati djelovanje operatora $\pi(u_j)$ i $\pi(u_j^*)$, a time je reprezentacija π potpuno određena:

$$\pi(u_j)u_{i_1} \wedge \cdots \wedge u_{i_k} = 0 \qquad \text{ako je} \quad j \in \{i_1, \ldots, i_k\};$$

$$\pi(u_j)u_{i_1} \wedge \cdots \wedge u_{i_k} = u_j \wedge u_{i_1} \wedge \cdots \wedge u_{i_k} = \pm u_{i_1} \wedge \cdots \wedge u_j \wedge \cdots \wedge u_{i_k} \qquad \text{ako} \quad j \notin \{i_1, \ldots, i_k\};$$

$$\pi(u_j^*)u_{i_1} \wedge \cdots \wedge u_{i_k} = 0 \qquad \text{ako} \quad j \notin \{i_1, \ldots, i_k\};$$

$$\pi(u_j^*)u_{i_1} \wedge \cdots \wedge u_{i_k} = (-1)^p 2 u_{i_1} \wedge \cdots \overset{\wedge}{u_{i_p}} \cdots \wedge u_{i_k} \qquad \text{ako je} \quad j = i_p \quad \text{za neki} \quad p \in \{1, \ldots, k\}.$$

Teorem 2.3.2. (*a*) *Reprezentacija π Cliffordove algebre $C(V)$ na prostoru $\mathcal{S} = \bigwedge(U)$ iz propozicije 2.3.1. je ireducibilna.*

(*b*) *$\pi : C(V) \to L(\mathcal{S})$ je izomorfizam Cliffordove algebre $C(V)$ na unitalnu algebru $L(\mathcal{S})$ svih linearnih operatora na prostoru $\mathcal{S}$.*

(*c*) *Ako je $V \neq \{0\}$, Cliffordova algebra $C(V)$ je prosta (tj. različita je od $\{0\}$ i nema dvostranih ideala različitih od $\{0\}$ i od $C(V)$).*

(*d*) *Svaki ireducibilan $C(V)-$modul izomorfan je modulu $\mathcal{S}$.*

Dokaz: (*a*) Neka je $x \in \mathcal{S}$ proizvoljan element različit od nule. Neka je $k \in \{0, \ldots, n\}$ najmanji sa svojstvom $x \in \bigwedge_k(U)$. Pri tome je $(\bigwedge_k(U))$ standardna filtracija vanjske algebre $\bigwedge(U)$:

$$\bigwedge\nolimits_k(U) = \sum_{j \leq k} \dot{+} \bigwedge\nolimits^j(U).$$

Pretpostavimo da su $1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n$ takvi da je koeficijent λ uz $u_{i_1} \wedge \cdots \wedge u_{i_k}$ u prikazu elementa x u bazi (2.16) različit od nule. Imamo

$$\pi(u_{i_k}^* \cdots u_{i_1}^*) u_{i_1} \wedge \cdots \wedge u_{i_k} = (-2)^k.$$

Nadalje, ako su $1 \leq j_1 < \cdots < j_k \leq n$ takvi da je $j_p \neq i_p$ za bar jedan $p \in \{1, \ldots, k\}$ onda je

$$\pi(u_{i_k}^* \cdots u_{i_1}^*) u_{j_1} \wedge \cdots \wedge u_{j_k} = 0.$$

Napokon, budući da je $\pi(U^*) \bigwedge^j(U) \subseteq \bigwedge^{j-1}(U)$, vrijedi

$$\pi(u_{i_k}^* \cdots u_{i_1}^*) u_{j_1} \wedge \cdots \wedge u_{j_p} = 0 \qquad \text{za} \quad 1 \leq j_1 < \cdots < j_p \leq n \quad \text{i} \quad p < k.$$

To pokazuje da je

$$\pi(u_{i_k}^* \cdots u_{i_1}^*)x = (-2)^k \lambda \neq 0.$$

Prema tome, $C(V)-$podmodul od $\mathcal{S}$ generiran sa x sadrži 1. No kako je

$$\pi(u_{j_1} \cdots u_{j_\ell})1 = u_{j_1} \wedge \cdots \wedge u_{j_\ell},$$

1 generira čitav $C(V)-$modul $\mathcal{S}$. Prema tome, svaki $x \in \mathcal{S} \setminus \{0\}$ generira čitav $C(V)-$modul $\mathcal{S}$. Time je dokazana ireducibilnost.

(b) Neka je S skup svih podskupova od $\{1, \ldots, n\}$. Ako je $I \in S$ i $I = \{i_1, \ldots, i_k\}$, gdje su $1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n$, pisat ćemo

$$u_I = u_{i_1} \cdots u_{i_k} \in C(V), \qquad u_{(I)} = u_{i_1} \wedge \cdots \wedge u_{i_k} \in \mathcal{S}, \qquad u_I^* = \frac{1}{(-2)^k} u_{i_k}^* \cdots u_{i_1}^* \in C(V).$$

Tada je naravno $\{u_{(I)};\ I \in S\}$ baza od $\mathcal{S}$. Tvrdnja će biti dokazana ako pokažemo da za proizvoljne $I, J \in S$ postoji $x \in C(V)$ takav da vrijedi

$$\pi(x)u_{(I)} = u_{(J)} \qquad \text{i} \qquad \pi(x)u_{(K)} = 0 \quad \forall K \in S \setminus \{I\}.$$

Doista, to će značiti da je homomorfizam $\pi : C(V) \to L(\mathcal{S})$ surjektivan, no tada je on i injektivan jer je

$$\dim C(V) = 2^{2n} \qquad \text{i} \qquad \dim L(\mathcal{S}) = (\dim \mathcal{S})^2 = (2^n)^2 = 2^{2n}.$$

Stavimo

$$p = \frac{1}{(-2)^n} u_n^* \cdots u_1^* u_1 \cdots u_n \in C(V). \tag{2.17}$$

Tada je

$$\pi(p)u_{(\emptyset)} = u_{(\emptyset)} = 1 \qquad \text{i} \qquad \pi(p)u_{(K)} = 0 \quad \text{ako je} \quad K \neq \emptyset.$$

Odatle dobivamo za proizvoljan $J \in S$

$$\pi(u_J p)u_{(\emptyset)} = \pi(u_J)1 = u_{(J)} \qquad \text{i} \qquad \pi(u_J p)u_{(K)} = 0 \quad \text{ako je} \quad K \neq \emptyset.$$

Nadalje, imamo za $I \in S$

$$\pi(u_I^*)u_{(I)} = 1 = u_{(\emptyset)} \qquad \text{i} \qquad \pi(u_I^*)u_{(K)} = \begin{cases} 0 & \text{ako} \quad I \not\subseteq K \\ u_{(K \setminus I)} & \text{ako} \quad I \subseteq K. \end{cases}$$

Odatle slijedi

$$\pi(p u_I^*)u_{(I)} = 1 \qquad \text{i} \qquad \pi(p u_I^*)u_{(K)} = 0 \quad \text{ako je} \quad K \neq I.$$

Napokon, traženi element $x \in C(V)$ za koji $\pi(x)$ preslikava $u_{(I)}$ u $u_{(J)}$ a sve ostale $u_{(K)}$ u 0 dan je sa

$$x = u_J p^2 u_I^* = u_J p u_I^*.$$

Naime, lako se vidi da je $u_1 \cdots u_n u_n^* \cdots u_1^* = (-2)^n$, dakle, je $p^2 = p$.

(c) Tvrdnja slijedi neposredno iz činjenice da je algebra $L(X)$ prosta za svaki konačnodimenzionalan prostor X. Doista, neka je I obostrani ideal u $L(X)$ različit od $\{0\}$ i neka je $x \in I$, $x \neq 0$. Izaberimo sada bazu $\{e_1, \ldots, e_n\}$ prostora X i neka je $\{E_{jk};\ 1 \leq j, k \leq n\}$ pripadna baza od $L(X)$: linearan operator E_{jk} zadan je sa $E_{jk} e_\ell = \delta_{k\ell} e_j$. Tada možemo x zapisati kao linearnu kombinaciju operatora E_{jk} :

$$x = \sum_{j,k=1}^{n} \alpha_{jk} E_{jk}.$$

Budući da vrijedi $E_{jk} E_{rs} = \delta_{kr} E_{js}$, vidimo da je $E_{jj} x E_{kk} = \alpha_{jk} E_{jk}$. Izaberemo li j i k tako da bude $\alpha_{jk} \neq 0$, zaključujemo da je $E_{jk} \in I$. No tada za proizvoljne $r, s \in \{1, \ldots, n\}$ dobivamo da je $E_{rs} = E_{rj} E_{jk} E_{ks} \in I$. Dakle, $I = L(X)$.

(d) Neka je $\mathcal{T}$ ireducibilan $C(V)-$modul s reprezentacijom ρ. Neka je $p \in C(V)$ definiran sa (2.17). Tada je $p^2 = p$, dakle, $\rho(p)^2 = \rho(p)$, odnosno, $\rho(p)$ je projektor na prostoru $\mathcal{T}$. Budući da je algebra $C(V)$ prosta, $\operatorname{Ker}\rho = \{0\}$, pa slijedi da je $\rho(p) \neq 0$. Izaberimo $t \in \mathcal{T}$, $t \neq 0$, tako da bude $\rho(p)t = t$. Budući da je $u_j^* p = \pm 2^{-n} u_n^* \cdots (u_j^*)^2 \cdots u_n^* u_1 \cdots u_n = 0$, vrijedi $\rho(u_j^*)t = 0$ za $j = 1, \ldots, n$. Prema tome,

$$\rho(u^*)t = 0 \qquad \forall u^* \in U^*. \tag{2.18}$$

Definirajmo sada linearan operator $\varphi : \mathcal{S} \to \mathcal{T}$ na bazi prostora $\mathcal{S}$ ovako:

$$\varphi(u_{(I)}) = \rho(u_I)t, \qquad I \subseteq \{1, \ldots, n\}.$$

Tvrdimo da je preslikavanje φ homomorfizam $C(V)-$modula, odnosno, preplitanje reprezentacija π i ρ. Da to dokažemo, dovoljno je provjeriti da je

$$\varphi(\pi(u_j)u_{(I)}) = \rho(u_j)\varphi(u_{(I)}) \qquad \text{i} \qquad \varphi(\pi(u_j^*)u_{(I)}) = \rho(u_j^*)\varphi(U_{(I)}) \tag{2.19}$$

za sve $j \in \{1, \ldots, n\}$ i sve $I \subseteq \{1, \ldots, n\}$. Naime, $\{u_1, \ldots, u_n, u_1^*, \ldots, u_n^*\}$ je baza prostora V, dakle, generira unitalnu algebru $C(V)$.

Neka je $1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n$, $I = \{i_1, \ldots, i_k\}$ i $j \in \{1, \ldots, n\}$. Ako je $j \in I$ onda je

$$\varphi(\pi(u_j)u_{(I)}) = \varphi(u_j \wedge u_{(I)}) = 0.$$

S druge strane je

$$\rho(u_j)\varphi(u_{(I)}) = \rho(u_j)\rho(u_I)t = \rho(u_j u_I)t = 0.$$

Dakle, u tom slučaju vrijedi prva jednakost u (2.19). Ako pak $j \notin I$, neka je $q = 0$ ako je $j < i_1$, zatim $q = k$ ako je $j > i_k$ i napokon $q \in \{1, \ldots, k-1\}$ ako je $i_q < j < i_{q+1}$. Tada je

$$u_j u_I = (-1)^q u_{I \cup \{j\}} \qquad \text{i} \qquad u_j \wedge u_{(I)} = (-1)^q u_{(I \cup \{j\})}$$

pa imamo

$$\begin{aligned} \varphi(\pi(u_j)u_{(I)}) &= \varphi(u_j \cap U_{(I)}) = (-1)^q \varphi(u_{(I \cup \{j\})}) = \\ &= (-1)^q \rho(u_{I \cup \{j\}})t = \rho(u_j u_I)t = \rho(u_j)\rho(u_I)t = \rho(u_j)\varphi(u_{(I)}), \end{aligned}$$

odnosno, opet vrijedi prva jednakost u (2.19).

Ako je $j \in I$, tj. $j = i_q$ za neki $q \in \{1, \ldots, k\}$, onda je

$$\pi(u_j^*)u_{(I)} = (-1)^q 2u_{(I \setminus \{j\})} \qquad \text{i} \qquad u_j^* u_I = (-1)^q 2u_{I \setminus \{j\}}$$

pa imamo

$$\varphi(\pi(u_j^*)u_{(I)}) = (-1)^q 2\varphi(u_{(I \setminus \{j\})}) = (-1)^q 2\rho(u_{I \setminus \{j\}})t = \rho(u_j^* u_I)t = \rho(u_j^*)\rho(u_I)t = \rho(u_j^*)\varphi(u_{(I)}),$$

dakle, vrijedi druga jednakost u (2.19). Ako pak $j \notin I$, onda je

$$\pi(u_j^*)u_{(I)} = 0 \qquad \text{i} \qquad u_j^* u_I = (-1)^k u_I u_j^*.$$

Sada zbog (2.18) dobivamo

$$\varphi(\pi(u_j^*)u_{(I)}) = 0 = (-1)^k \rho(u_I)\rho(u_j^*)t = \rho(u_j^*)\rho(u_I)t = \rho(u_j^*)\varphi(u_{(I)}),$$

dakle, opet vrijedi druga jednakost u (2.19).

Time smo dokazali da je φ homomorfizam $C(V)-$modula. On je različit od nule jer npr. vrijedi $\varphi(p) = \rho(p)t = t \neq 0$. Iz Schurove leme (teorem 1.1.6.) slijedi da je $\varphi : \mathcal{S} \to \mathcal{T}$ izomorfizam $C(V)-$modula.

Time je i tvrdnja (d) dokazana.

$C(V)-$modul $\mathcal{S} = \bigwedge(U)$ zove se **spin−modul** za Cliffordovu algebru $C(V)$. Uočimo da za prostor U možemo uzeti bilo koji maksimalan izotropan potprostor od V.

2.3.2 Algebra $C(V)$ za neparnodimenzionalan prostor V

Promatrajmo sada slučaj neparnodimenzionalnog prostora V, $\dim V = 2n+1$, s nedegeneriranom simetričnom bilinearnom formom B. U slučaju parnodimenzionalnog prostora prema tvrdnji (b) teorema 2.3.2. Cliffordova algebra je prosta, štoviše izomorfna je algebri svih linearnih operatora na konačnodimenzionalnom vektorskom prostoru. Posebno, njen je centar $\mathbb{C}$. U neparnodimenzionalnom slučaju centar je dvodimenzionalan:

Propozicija 2.3.3. (a) *Neka je* $\{e_0, e_1, \ldots, e_{2n}\}$ *baza prostora* V *ortonormirana u odnosu na formu* B *i stavimo*

$$z = e_0 e_1 \cdots e_{2n}.$$

Tada je centar Cliffordove algebre $C(V)$ *jednak* $\mathbb{C} \dotplus \mathbb{C}z$.

(b) *Za element* z *iz tvrdnje* (a) *vrijedi* $z^2 = (-1)^{n+1}$.

Dokaz: Budući da je $e_j e_i = -e_i e_j$ za $i \neq j$, za svaki $j \in \{0, 1, \ldots, 2n\}$ vrijedi

$$e_j z = (-1)^j e_0 \cdots e_{j-1} e_j^2 e_{j+1} \cdots e_{2n} = (-1)^j (-1)^{2n-j} z e_j = z e_j.$$

Prema tome, element z nalazi se u centru algebre $C(V)$.

Tvrdnju (b) dokazuje direktan račun koji koristi jednakosti $e_i e_j = -e_j e_i$ za $i \neq j$ i $e_i^2 = -1$:

$$z^2 = e_0 e_1 \cdots e_{2n} e_0 e_1 \cdots e_{2n} = (-1)^{(2n+1)+2n+\cdots+2+1} = (-1)^{n+1}.$$

Stavimo $\overline{V} = e_0^{\perp}$. Prema tvrdnji (c) teorema 2.2.2. vrijedi $V = \mathbb{C}e_0 \dotplus \overline{V}$ i restrikcija $B|\overline{V} \times \overline{V}$ je nedegenerirana. Naravno, $\{e_1, \ldots, e_{2n}\}$ je baza od $\overline{V}$ koja je ortonormirana u odnosu na tu restrikciju. Sada iz teorema 2.2.1. slijedi da je

$$C(V) = C\big(\overline{V}\big) \dotplus e_0\, C\big(\overline{V}\big)\,.$$

Očito je $z\, C\big(\overline{V}\big) \subseteq e_0\, C\big(\overline{V}\big)$. Ako su $1 \leq i_1 < \cdots < i_r \leq 2n$ i ako su $1 \leq j_1 < \cdots < j_s \leq 2n$ takvi da je $\{1, \ldots, 2n\} \setminus \{i_1, \ldots, i_r\} = \{j_1, \ldots, j_s\}$, onda iz $e_i e_j = -e_j e_i$ za $i \neq j$ i iz $e_i^2 = -1$ slijedi da je

$$z e_{i_1} \cdots e_{i_r} = \pm e_0 e_{j_1} \cdots e_{j_s}.$$

To pokazuje da vrijedi i obrnuta inkluzija $e_0\, C\big(\overline{V}\big) \subseteq z\, C\big(\overline{V}\big)$. Prema tome,

$$C(V) = C\big(\overline{V}\big) \dotplus z\, C\big(\overline{V}\big)\,. \tag{2.20}$$

Pretpostavimo sada da je a element centra algebre $C(V)$. Ako pišemo $a = b + c$, gdje su $b \in C^0(V)$ i $c \in C^1(V)$, očito su b i c elementi centra od $C(V)$. Prema (2.20) vrijedi $b = b_1 + z b_2$ i $c = c_1 + z c_2$ gdje su $b_1, b_2, c_1, c_2 \in C\big(\overline{V}\big)$. Budući da je element z neparan, vrijedi $b_1, c_2 \in C^0\big(\overline{V}\big)$ i $b_2, c_1 \in C^1\big(\overline{V}\big)$. Sada za svaki $j \in \{1, \ldots, 2n\}$ vrijedi

$$e_j b_1 + z e_j b_2 = e_j b = b e_j = b_1 e_j + z b_2 e_j \qquad \text{i} \qquad e_j c_1 + z e_j c_2 = e_j c = c e_j = c_1 e_j + z c_2 e_j.$$

Kako je prostor $C(V)$ direktna suma potprostora $C^0(V)$ i $C^1(V)$, slijedi da je $e_j b_1 = b_1 e_j$, $z e_j b_2 = z b_2 e_j$, $e_j c_1 = c_1 e_j$ i $z e_j c_2 = z c_2 e_j$ za svaki $j \in \{1, \ldots, 2n\}$. Korištenjem jednakosti u tvrdnji (c) zaključujemo da se elementi b_1, b_2, c_1 i c_2 nalaze u centru algebre $C\big(\overline{V}\big)$. Međutim, taj je centar $\mathbb{C}$, pa slijedi da su $b, c \in \mathbb{C}$, odnosno, $a \in \mathbb{C} \dotplus \mathbb{C}z$. Time je dokazana i tvrdnja (a) : centar algebre $C(V)$ jednak je $\mathbb{C} \dotplus \mathbb{C}z$.

Element z iz prethodne propozicije leži u $C(V)^{(2n+1)}$. Štoviše, kako je

$$\dim C(V)^{(2n+1)} = \dim \bigwedge^{2n+1}(V) = 1$$

i $z \neq 0$, vrijedi $C(V)^{(2n+1)} = \mathbb{C}z$. Odatle se vidi da postoji $(2n+1)-$multilinearna forma $\gamma : V^{2n+1} \to \mathbb{C}$ takva da vrijedi

$$v_0 v_1 \cdots v_{2n} = \gamma(v_0, v_1, \ldots, v_{2n}) z \qquad \forall v_0, v_1, \ldots, v_{2n} \in V.$$

Korištenjem Chevalleyevog izomorfizma $\jmath : \bigwedge^{2n+1}(V) \to C(V)^{(2n+1)}$ slijedi da je forma γ alternirajuća. Primijetimo da je $\gamma(e_0, e_1, \ldots, e_{2n}) = 1$, dakle, forma γ nije identički jednaka nuli. Za proizvoljnu $(2n+1)-$torku $(v_0, v_1, \ldots, v_{2n}) \in V^{2n+1}$ neka je linearan operator $A_{v_0,v_1,\ldots,v_{2n}} \in L(V)$ definiran sa

$$A_{v_0,v_1,\ldots,v_{2n}} e_j = v_j, \qquad 0 \leq j \leq 2n.$$

Tada je $(v_0, v_1, \ldots, v_{2n}) \mapsto A_{v_0,v_1,\ldots,v_{2n}}$ $(2n+1)-$multilinearno preslikavanje sa $V^{(2n+1)}$ u $L(V)$, pa je $(v_0, v_1, \ldots, v_{2n}) \mapsto \det A_{v_0,v_1,\ldots,v_{2n}}$ alternirajuća $(2n+1)-$multilinearna forma na V^{2n+1} koja također nije identički jednaka nuli. Kako je prostor alternirajućih $(2n+1)-$multilinearnih formi na V^{2n+1} jednodimenzionalan, slijedi da su te dvije forme proporcionalne. Faktor proporcionalnosti jednak je 1, jer je $\gamma(e_0, e_1, \ldots, e_{2n}) = 1$ i $\det A_{v_0,v_1,\ldots,v_{2n}} = \det I_V = 1$.

Napokon, ako je $\{v_0, v_1, \ldots, v_{2n}\}$ ortonormirana baza od V u odnosu na formu B, onda se lako vidi da je $A_{v_0,v_1,\ldots,v_{2n}} \in O(V)$. Posebno, tada je $\det A_{v_0,v_1,\ldots,v_{2n}} = \pm 1$. Preciznije, ta je determinanta jednaka 1 ako su baze $\{e_0, e_1, \ldots, e_{2n}\}$ i $\{v_0, v_1, \ldots, v_{2n}\}$ jednako orijentirane, a -1 ako su suprotno orijentirane.

Općenitije, ako je $(v_0, v_1, \ldots, v_{2n}) \in V^{2n+1}$ proizvoljna $(2n+1)-$torka, označimo sa $[\alpha_{jk}]$ matricu operatora $A_{v_0,v_1,\ldots,v_{2n}}$ u bazi $\{e_0, e_1, \ldots, e_{2n}\}$:

$$v_k = A_{v_0,v_1,\ldots,v_{2n}} e_k = \sum_{j=0}^{2n} \alpha_{jk} e_j.$$

Budući da je baza $\{e_0, e_1, \ldots, e_{2n}\}$ ortonormirana u odnosu na formu B, slijedi da je $\alpha_{jk} = B(e_j, v_k)$.

Sve u svemu, dokazali smo:

Propozicija 2.3.4. *Za element z iz propozicije 2.3.3. vrijedi*

$$v_0 v_1 \cdots v_{2n} = \det\left[B\left(e_j, v_k\right)\right] z \qquad \forall v_0, v_1, \ldots, v_{2n} \in V.$$

Ako je $\{e'_0, e'_1, \ldots, e'_{2n}\}$ baza od V koja je također ortonormirana u odnosu na formu B, onda je

$$z' = e'_0 e'_1 \cdots e'_{2n} = \pm z,$$

pri čemu je predznak $+$ ako su baze $\{e_0, e_1, \ldots, e_{2n}\}$ i $\{e'_0, e'_1, \ldots, e'_{2n}\}$ jednako orijentirane, a predznak je $-$ ako su te dvije baze suprotno orijentirane.

Teorem 2.3.5. *Neka je V neparnodimenzionalan kompleksan vektorski prostor,* $\dim V = 2n+1$, *na kome je zadana nedegenerirana simetrična bilinearna forma B. Neka je $e_0 \in V$ jedinični vektor u odnosu na B i neka su U i U^* $n-$dimenzionalni izotropni potprostori od $\overline{V} = e_0^{\perp}$ takvi da je $\overline{V} = U \dot{+} U^*$. Nadalje, neka je π ireducibilna spin$-$reprezentacija Cliffordove algebre $C(\overline{V})$ na prostoru $\mathcal{S} = \bigwedge(U)$ iz prethodnog pododjeljka.*

(a) Reprezentacija π može se na dva načina proširiti do reprezentacije Cliffordove algebre $C(V)$ na prostoru $\mathcal{S}$. Označimo te dvije reprezentacije sa π_+ i π_-. Za element z iz propozicije 2.3.3. vrijedi $\pi_+(z) = -\pi_-(z)$.

(b) *Reprezentacije π_+ i π_- nisu međusobno ekvivalentna. Svaka ireducibilna konačnodimenzionalna reprezentacija od $C(V)$ ekvivalentna je jednoj od te dvije reprezentacije.*

(c) *Preslikavanje $x \mapsto (\pi_+(x), \pi_-(x))$ je izomorfizam Cliffordove algebre $C(V)$ na algebru $L(\mathcal{S}) \times L(\mathcal{S})$; pri tome je množenje na algebri $L(\mathcal{S}) \times L(\mathcal{S})$ definirano po komponentama: $(A, B)(C, D) = (AC, BD)$.*

Dokaz: (a) Pretpostavimo da se reprezentacija π može proširiti do reprezentacije ρ algebre $C(V)$. Tada je ρ očito ireducibilna reprezentacija. Element z iz propozicije 2.3.3. leži u centru algebre $C(V)$, pa je po Schurovoj lemi (teorem 1.1.6.) operator $\rho(z)$ skalarni multipl jediničnog operatora, $\rho(z) = \lambda I_{\mathcal{S}}$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Međutim, iz tvrdnje (b) propozicije 2.3.3. slijedi da mora biti $\lambda^2 = (-1)^{n+1}$. Prema tome, postoje najviše dvije mogućnosti za proširenje reprezentacije π do reprezentacije algebre $C(V)$.

Dokazat ćemo da obje mogućnosti stvarno postoje. Neka je $\varepsilon \in \mathbb{C}$ takav da je $\varepsilon^2 = (-1)^{n+1}$; dakle, ako je n parno onda je $\varepsilon = i$ ili $\varepsilon = -i$, a ako je n neparno, onda je $\varepsilon = 1$ ili $\varepsilon = -1$. Zbog jednakosti (2.20) možemo definirati proširenje reprezentacije π do linearnog preslikavanja $\rho : C(V) \to L(\mathcal{S})$ ovako:

$$\rho(a + zb) = \pi(a) + \varepsilon\pi(b), \qquad a, b \in C\left(\overline{V}\right).$$

Kako je $z^2 = \varepsilon^2$, za $a, b, c, d \in C\left(\overline{V}\right)$ imamo redom

$$\rho((a + zb)(c + zd)) = \rho(ac + zad + zad + z^2bc) = \rho\left((ac + \varepsilon^2 bd) + z(ad + bc)\right) =$$

$$= \pi(ac + \varepsilon^2 bd) + \varepsilon\pi(ad + bc) = \pi(a)\pi(c) + \varepsilon^2\pi(b)\pi(d) + \varepsilon\pi(a)\pi(d) + \varepsilon\pi(b)\pi(c) =$$
$$= (\pi(a) + \varepsilon\pi(b))(\pi(c) + \varepsilon\pi(d)) = \rho(a + zb)\rho(c + zd).$$

To pokazuje da je proširenje ρ stvarno reprezentacija algebre $C(V)$ i time je tvrdnja (a) dokazana.

(b) Zbog određenosti uzmimo da je $\pi_+(z) = \varepsilon I_{\mathcal{S}}$ i $\pi_-(z) = -\varepsilon I_{\mathcal{S}}$, gdje je $\varepsilon = i$, ako je n parno, a $\varepsilon = 1$, ako je n neparno. Zbog tih jednakosti jasno je da reprezentacije π_+ i π_- nisu ekvivalentna.

Pretpostavimo sada da je ρ ireducibilna reprezentacija algebre $C(V)$ na konačnodimenzionalnom kompleksnom prostoru $\mathcal{T}$. Kako je z u centru algebre $C(V)$ i $z^2 = (-1)^{n+1}$, slijedi da je ili $\rho(z) = \varepsilon I_{\mathcal{T}}$ ili $\rho(z) = -\varepsilon I_{\mathcal{T}}$. Nadalje, iz (2.20) slijedi da je restrikcija $\rho|C\left(\overline{V}\right)$ ireducibilna reprezentacija Cliffordove algebre $C\left(\overline{V}\right)$. Kako je prostor $\overline{V}$ parnodimenzionalan, iz tvrdnje (d) teorema 2.3.2. slijedi da je ta restrikcija ekvivalentna reprezentaciji π. No tada je reprezentacija ρ ekvivalentna reprezentaciji π_+ ako je $\rho(z) = \varepsilon I_{\mathcal{T}}$, odnosno, ekvivalentna je reprezentaciji π_- ako je $\rho(z) = -\varepsilon I_{\mathcal{T}}$.

(c) Budući da je

$$\dim C(V) = 2^{2n+1} = 2^{2n} + 2^{2n} = (2^n)^2 + (2^n)^2 = \dim L(\mathcal{S}) \times L(\mathcal{S}),$$

dovoljno je dokazati da je unitalni homomorfizam $x \mapsto (\pi_+(x), \pi_-(x))$ injektivan. Pretpostavimo da je $x \in C(V)$ takav da je $\pi_+(x) = 0$ i $\pi_-(x) = 0$. Možemo pisati

$$x = a + zb, \qquad a, b \in C\left(\overline{V}\right).$$

Budući da je $\pi_+(z) = -\pi_-(z)$, vrijedi

$$0 = \pi_+(a + zb) = \pi(a) + \pi_+(z)\pi(b) = \pi(a) - \pi_-(z)\pi(b) = \pi_-(a - zb)$$

i, analogno,

$$0 = \pi_-(a + zb) = \pi(a) + \pi_-(z)\pi(b) = \pi(a) - \pi_+(z)\pi(b) = \pi_+(a - zb).$$

To pokazuje da i za $y = a - zb$ vrijedi $\pi_+(y) = \pi_-(y) = 0$. Kako je $x + y = 2a$, slijedi da je $\pi(a) = \pi_+(a) = 0$, a odatle je $a = 0$, jer je reprezentacija π injektivna. Nadalje, kako je $x-y = 2zb$, dobivamo da je $\pi_+(z)\pi(b) = 0$. No budući da je $\pi_+(z) = \varepsilon I_{\mathcal{S}}$ slijedi da je $\pi(b) = 0$, dakle, $b = 0$. Prema tome, $x = 0$ i time je dokazana injektivnost homomorfizma $C(V) \to L(\mathcal{S}) \times L(\mathcal{S})$, odnosno, dokazana je i tvrdnja (c).

Dva ireducibilna $C(V)-$modula iz teorema 2.3.5. zovu se **spin−moduli** za Cliffordovu algebru $C(V)$. Ukoliko je izabrana orijentacija prostora V, tada je fiksirana jedna od dvije mogućnosti za centralni element z iz propozicije 2.3.3. U tom slučaju ćemo onaj ireducibilan $C(V)$ u kome je djelovanje elementa z množenje sa ε, zvati **pozitivnim**, a onaj drugi **negativnim**. Pri tome je $\varepsilon = i$ ako je n parno, a $\varepsilon = 1$ ako je n neparno.

2.3.3 Spinorne reprezentacije Liejeve algebre $\mathfrak{o}(V)$

Neka je V kompleksan konačnodimenzionalan vektorski prostor na kome je zadana nedegenerirana simetrična bilinearna forma B. U ovom ćemo pododjeljku proučiti restrikciju ireducibilne reprezentacije (ili dviju ireducibilnih reprezentacija) Cliffordove algebre $C(V)$ na njenu Liejevu podalgebru $C(V)^{(2)}$ koja je definirana kao slika $\jmath\left(\bigwedge^2(V)\right)$ pri Chevalleyevom izomorfizmu vektorskih prostora $\jmath : \bigwedge(V) \to C(V)$. Podsjećamo da je Liejeva algebra $C(V)^{(2)}$ izomorfna Liejevoj algebri $\mathfrak{o}(V)$ svih $B-$antisimetričnih linearnih operatora na prostoru V,

$$\mathfrak{o}(V) = \{A \in \mathfrak{gl}(V);\ B(Av, w) + B(v, Aw) = 0\ \ \forall v, w \in V\}.$$

Liejeva algebra $\mathfrak{o}(V)$ izomorfna je matričnoj Liejevoj algebri $\mathfrak{o}(n, \mathbb{C})$ svih kompleksnih antisimetričnih matrica $n \times n$, gdje je $n = \dim V$. Jedan od mogućih izomorfizama $\varphi : C(V)^{(2)} \to \mathfrak{o}(n, \mathbb{C})$ dobiva se na sljedeći način. Neka je $\{e_1, \ldots, e_n\}$ baza prostora V koja je ortonormirana u odnosu na formu B. Tada je $\{e_j e_k;\ 1 \leq j < k \leq n\}$ baza Liejeve algebre $C(V)^{(2)}$. Linearno preslikavanje $\varphi : C(V)^{(2)} \to \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$, zadano na toj bazi sa

$$\varphi(e_j e_k) = -2(E_{jk} - E_{kj}), \qquad 1 \leq j < k \leq n$$

je izomorfizam Liejeve algebre $C(V)^{(2)}$ na Liejevu algebru $\mathfrak{o}(n, \mathbb{C})$. Pri tome je E_{jk} matrica $n \times n$ koja ima na presjecištu $j-$tog retka i $k-$tog stupca 1, a na svim ostalim mjestima je 0.

U daljnjem Liejevu podalgebru $C(V)^{(2)}$ Cliffordove algebre $C(V)$ označavamo sa $\mathfrak{g}$. Pretpostavimo da su $v, w \in V$ takvi da je $B(v, w) = 1$. Tada je $vw + wv = -2B(v, w) = -2$, dakle, $wv = -vw - 2$. Prema tome, vrijedi

$$\jmath(v \wedge w) = \frac{1}{2}(vw - wv) = vw + 1.$$

Neka su sada $v, w \in V$ takvi da je $B(v, w) = 0$. Tada je $vw + wv = 0$, tj. $wv = -vw$. Prema tome, za takve vektore vrijedi

$$\jmath(v \wedge w) = \frac{1}{2}(vw - wv) = vw.$$

Izaberimo sada u skladu s teoremom 2.2.2. izotropne potprostore U i U^* prostora V takve da je $V = U \dotplus U^*$, ako je prostor V parnodimenzionalan, odnosno, da je $\overline{V} = e^\perp = U \dotplus U^*$, gdje je $e \in V$ jedinični vektor, $B(e, e) = 1$, ako je prostor V neparnodimenzionalan. Nadalje, neka je $\{u_1, \ldots, u_n\}$ baza potprostora U i izaberimo bazu $\{u_1^*, \ldots, u_n^*\}$ potprostora U^*, koja je dualna onoj prvoj bazi u odnosu na formu B : $B(u_j^*, u_k) = \delta_{jk}$. Tada je u parnodimenzionalnom slučaju $\{u_1^*, \ldots, u_n^*, u_1, \ldots, u_n\}$ baza od V, pa je prema gornjim relacijama

$$\{u_j^* u_j + 1;\ 1 \leq j \leq n\} \cup \{u_j^* u_k^*;\ 1 \leq j < k \leq n\} \cup \{u_j u_k;\ 1 \leq j < k \leq n\} \cup \{u_j^* u_k;\ 1 \leq j, k \leq n,\ j \neq k\}$$

baza Liejeve algebre $\mathfrak{g}$. Ako je prostor V neparnodimenzionalan, tada u bazu od V ulazi još i vektor e i bazu od $\mathfrak{g}$ dobivamo ako gornjim elementima priključimo još i

$$\{eu_j^*;\ 1 \le j \le n\} \cup \{eu_j;\ 1 \le j \le n\}.$$

Stavimo sada

$$h_j = u_j^* u_j + 1, \qquad j = 1, \ldots, n.$$

Ti elementi međusobno komutiraju, dakle, oni razapinju komutativnu Liejevu podalgebru $\mathfrak{h}$ od $\mathfrak{g}$. Nadalje, svi vektori izabrane baze od $\mathfrak{g}$ su svojstveni vektori svih operatora $ad\, h_j$, dakle, svih operatora $ad\, h$, $h \in \mathfrak{h}$. Doista, direktan račun pokazuje da vrijedi:

$$[h_j, u_k^* u_\ell] = 0, \quad j \ne k \ne \ell \ne j; \qquad [h_j, u_j^* u_k] = -2u_j^* u_k, \quad j \ne k; \quad [h_j, u_k^* u_j] = 2u_k^* u_j, \qquad j \ne k;$$

$$[h_j, u_k^* u_\ell^*] = 0, \quad k < \ell,\ k \ne j \ne \ell; \quad [h_j, u_j^* u_k^*] = -2u_j^* u_k^*, \quad j < k; \quad [h_k, u_j^* u_k^*] = -2u_j^* u_k^*, \quad j < k;$$

$$[h_j, u_k u_\ell] = 0, \quad k < \ell,\ k \ne j \ne \ell; \quad [h_j, u_j u_k] = 2u_j u_k, \qquad j < k; \quad [h_k, u_j u_k] = 2u_j u_k, \qquad j < k;$$

$$[h_j, eu_k^*] = 0, \quad j \ne k; \qquad [h_j, eu_j^*] = -2eu_j^*; \qquad [h_j, eu_k] = 0, \quad j \ne k; \qquad [h_j, eu_j] = 2eu_j.$$

Prema tome, $\mathfrak{h}$ je Cartanova podalgebra od $\mathfrak{g}$ i sistem korijena $R = R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ je u slučaju parnodimenzionalnog prostora V

$$R = \{\alpha_{jk};\ j,k = 1, \ldots, n,\ j \ne k\} \cup \{\pm\beta_{jk};\ 1 \le j < k \le n\},$$

a u slučaju neparnodimenzionalnog prostora V je

$$R = \{\alpha_{jk};\ j,k = 1, \ldots, n,\ j \ne k\} \cup \{\pm\beta_{jk};\ 1 \le j < k \le n\} \cup \{\pm\gamma_j;\ j = 1, \ldots, n\}.$$

Pri tome su $\alpha_{jk}, \beta_{jk}, \gamma_j \in \mathfrak{h}^*$ zadani sa

$$\alpha_{jk}(h_i) = 0, \quad i \ne j \ne k \ne i, \qquad \alpha_{jk}(h_j) = -2, \quad j \ne k, \quad \alpha_{jk}(h_k) = 2, \quad j \ne k;$$

$$\beta_{jk}(h_i) = 0, \quad j < k,\ j \ne i \ne k, \quad \beta_{jk}(h_j) = 2, \qquad j < k, \quad \beta_{jk}(h_k) = 2, \quad j < k;$$

$$\gamma_j(h_i) = 0,\ i \ne j, \qquad \gamma_j(h_j) = 2.$$

Nadalje, korijenski potprostori su

$$\mathfrak{g}_{\alpha_{jk}} = \mathbb{C}u_j^* u_k, \qquad \mathfrak{g}_{\beta_{jk}} = \mathbb{C}u_j u_k, \qquad \mathfrak{g}_{-\beta_{jk}} = \mathbb{C}u_j^* u_k^*,$$

a u slučaju neparnodimenzionalnog prostora V još i

$$\mathfrak{g}_{\gamma_j} = \mathbb{C}eu_j, \qquad \mathfrak{g}_{-\gamma_j} = \mathbb{C}eu_j^*.$$

Izaberimo pozitivne korijene ovako:

$$R_+ = \{\alpha_{jk};\ 1 \le j < k \le n\} \cup \{\beta_{jk};\ 1 \le j < k \le n\},$$

ako je prostor V parnodimenzionalan, odnosno,

$$R_+ = \{\alpha_{jk};\ 1 \le j < k \le n\} \cup \{\beta_{jk};\ 1 \le j < k \le n\} \cup \{\gamma_j;\ 1 \le j \le n\},$$

ako je prostor V neparnodimenzionalan. Pripadne baze sistema korijena su

$$\{\alpha_{j,j+1};\ 1 \le j \le n-1\} \cup \{\beta_{12}\},$$

ako je $\dim V = 2n$, odnosno,

$$\{\alpha_{j,j+1};\ 1 \le j \le n-1\} \cup \{\gamma_n\}$$

ako je $\dim V = 2n+1$.

Proučit ćemo sada restrikciju spin−reprezentacije $\pi|\mathfrak{g}$ ako je $\dim V$ parna, odnosno, restrikcije spin−reprezentacija $\pi_+|\mathfrak{g}$ i $\pi_-|\mathfrak{g}$ ako je $\dim V$ neparna.

Teorem 2.3.6. (*a*) *Ako je* $\dim V = 2n$ *restrikcija* $\pi|\mathfrak{g}$ *je direktna suma dvije ireducibilne međusobno neekvivalentne reprezentacije. Pripadni* $\mathfrak{g}$*−podmoduli od* $\mathcal{S} = \bigwedge(U)$ *su parni i neparni dio od* $\mathcal{S}$:

$$\mathcal{S}_+ = \sum_{0 \le k \le \frac{n}{2}} \dot{+} \bigwedge\nolimits^{n-2k}(U), \qquad \mathcal{S}_- = \sum_{0 \le k \le \frac{n-1}{2}} \dot{+} \bigwedge\nolimits^{n-2k-1}(U).$$

Najveće težine $\lambda_\pm$ *podmodula* $\mathcal{S}_\pm$ *dane su sa*

$$\lambda_+(h_j) = 1, \quad j = 1, \ldots, n, \qquad \lambda_-(h_1) = -1, \quad \lambda_-(h_j) = 1, \quad j = 2, \ldots, n.$$

Nadalje, svi su težinski potprostori jednodimenzionalni, a potprostori najveće težine su

$$(\mathcal{S}_+)_{\lambda_+} = \mathbb{C}u_1 \wedge \cdots \wedge u_n \qquad i \qquad (\mathcal{S}_-)_{\lambda_-} = \mathbb{C}u_2 \wedge \cdots \wedge u_n.$$

(*b*) *Ako je* $\dim V = 2n+1$, *vrijedi* $\pi_+|\mathfrak{g} \simeq \pi_-|\mathfrak{g}$ *i ta je reprezentacija ireducibilna. Svi su težinski potprostori jednodimenzionalni i najveća težina* λ *dana je sa*

$$\lambda(h_j) = 1, \qquad j = 1, \ldots, n,$$

a pripadni težinski potprostor je

$$\mathcal{S}_\lambda = \mathbb{C}u_1 \wedge \cdots \wedge u_n.$$

Dokaz: Prije svega, uočimo da je u slučaju neparnodimenzionalnog prostora V Cartanova podalgebra $\mathfrak{h}$ sadržana u $C(\overline{V})$. Prema tome je $\pi_+|\mathfrak{h} = \pi_-|\mathfrak{h}$ i to je upravo restrikcija spinorne reprezentacije π od $C(\overline{V})$. Kako je reprezentacija poluproste Liejeve algebre potpuno određena s njenom restrikcijom na Cartanovu podalgebru, zaključujemo da su restrikcije $\pi_+|\mathfrak{g}$ i $\pi_-|\mathfrak{g}$ međusobno ekvivalentne.

Promatrat ćemo u daljnjem zajedno i parnodimenzionalni i neparnodimenzionalni slučaj. Razmotrimo djelovanje Cartanove podalgebre na vektore baze $\{u_{(I)};\ I \subseteq \{1, \ldots, n\}\}$ prostora $\mathcal{S} = \bigwedge(U)$. Pri tome je $u_{(\emptyset)} = 1$, a ako je $I = \{i_1, \ldots, i_k\}$ i $1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n$, onda je $u_{(I)} = u_{i_1} \wedge \cdots \wedge u_{i_k}$. Imamo

$$\pi(u_j)u_{(I)} = \begin{cases} 0 & \text{ako je } j \in I, \\ (-1)^q u_{(I \cup \{j\})} & \text{ako je } j \notin I; \end{cases}$$

pri tome je $q = 0$ ako je $j < i_1$, $q = k$ ako je $i_k < j$ i $q \in \{1, \ldots, k-1\}$ ako je $i_q < j < i_{q+1}$. Nadalje,

$$\pi(u_j^*)u_{(I)} = \begin{cases} 0 & \text{ako je } j \notin I \\ (-1)^q 2u_{(I \setminus \{j\})} & \text{ako je } j = i_q. \end{cases}$$

Odatle vidimo da je

$$\pi(u_j^* u_j)u_{(I)} = \begin{cases} -2u_{(I)} & \text{ako je } j \notin I, \\ 0 & \text{ako je } j \in I, \end{cases}$$

odnosno,

$$\pi(h_j)u_{(I)} = \begin{cases} u_{(I)} & \text{ako je } j \in I, \\ -u_{(I)} & \text{ako je } j \notin I. \end{cases}$$

To pokazuje da su težine upravo svi linearni funkcionali $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ takvi da je $\lambda(h_j) = \pm 1 \ \forall j$ i svi su težinski potprostori jednodimenzionalni. Za $I \subseteq \{1, \ldots, n\}$ sa λ_I označimo linearni funkcional zadan sa

$$\lambda_I(h_j) = \begin{cases} 1 & \text{ako je } j \in I \\ -1 & \text{ako je } j \notin I. \end{cases}$$

Tada je

$$\mathcal{S}_{\lambda_I} = \mathbb{C}u_{(I)}, \qquad I \subseteq \{1, \ldots, n\}.$$

Pretpostavimo da je prostor V neparnodimenzionalan, dim $V = 2n + 1$. Za $I \subsetneq \{1, \ldots, n\}$ i za $j \in \{1, \ldots, n\} \setminus I$ imamo

$$\pi_\pm(eu_j)u_{(I)} = (-1)^q \pi_\pm(e)u_{(I \cup \{j\})},$$

a to nije jednako nuli jer je $e^2 = -1$, pa je operator $\pi_\pm(e)$ injektivan. Dakle, $u_{(I)}$ nije vektor najveće težine ako je $I \neq \{1, \ldots, n\}$. U slučaju $I = \{1, \ldots, n\}$ vrijedi

$$\pi(u_j^* u_k)u_{(I)} = \pi(u_j u_k)u_{(I)} = \pi(eu_\ell)u_{(I)} = 0$$

za sve $j < k$ i za sve ℓ. Prema tome, reprezentacija $\pi_\pm|\mathfrak{g}$ je ireducibilna, njena najveća težina je $\lambda_{\{1,\ldots,n\}} = \lambda$ i vektor najveće težine je $u_{(\{1,\ldots,n\})} = u_1 \wedge \cdots \wedge u_n$.

Pretpostavimo sada da je prostor V parnodimenzionalan, dim $V = 2n$. Već znamo da je $u_{(\{1,\ldots,n\})}$ primitivni vektor reprezentacije $\pi|\mathfrak{g}$. Neka je $I = \{i_1, \ldots, i_s\} \subsetneq \{1, \ldots, n\}$ i pretpostavimo da postoji $j \notin I$ takav da je $i_1 < j$. Tada je

$$\pi(u_{i_1}^* u_j)u_{(I)} = \pm 2u_{(I \cup \{j\} \setminus \{i_1\})} \neq 0,$$

prema tome $u_{(I)}$ nije primitivni vektor reprezentacije $\pi|\mathfrak{g}$. Ako takav j ne postoji onda je nužno $I = \{k, \ldots, n\}$ za neki $k \geq 2$. Ako je $k \geq 3$, onda imamo

$$\pi(u_1 u_2)u_{(I)} = u_{(\{1,2\} \cup I)} \neq 0,$$

dakle, $u_{(I)}$ nije primitivni vektor reprezentacije $\pi|\mathfrak{g}$. Napokon, očito je

$$\pi(u_j^* u_k)u_{(\{2,\ldots,n\})} = \pi(u_j u_k)u_{(\{2,\ldots,n\})} = 0$$

za bilo koje $1 \leq j < k \leq n$ (jer tada je $k \geq 2$.)

Prema tome, $u_{(\{1,2,\ldots,n\})}$ i $u_{(\{2,\ldots,n\})}$ su primitivni vektori reprezentacije $\pi|\mathfrak{g}$ i to jedini iz baze $\left\{u_{(I)}\right\}$. Napokon, uočimo da je $u_{(\{1,\ldots,n\})} \in \mathcal{S}_+$ i $u_{(\{2,\ldots,n\})} \in \mathcal{S}_-$, i da su $\mathcal{S}_+$ i $\mathcal{S}_-$ potprostori koji su $\pi|\mathfrak{g}-$invarijantni. Budući da je $\mathcal{S}$ direktna suma dvaju podmodula generiranih primitivnim vektorima $u_{(\{1,\ldots,n\})}$ i $u_{(\{2,\ldots,n\})}$, zaključujemo da su $\mathcal{S}_+$ i $\mathcal{S}_-$ upravo ti podmoduli. Najveće težine tih podmodula su težine primitivnih vektora koji ih generiraju, dakle, upravo λ_+ za $\mathcal{S}_+$ i λ_- za $\mathcal{S}_-$.

Time je teorem u potpunosti dokazan.

2.3.4 Kvadratične Liejeve algebre

Kvadratična Liejeva algebra je uređen par $(\mathfrak{g}, B)$, gdje je $\mathfrak{g}$ kompleksna Liejeva algebra, B nedegenerirana simetrična invarijantna bilinearna forma na $\mathfrak{g}$. Na svakoj reduktivnoj Liejevoj algebri $\mathfrak{g}$ postoji takva forma B : ako je $\mathfrak{g}$ poluprosta, možemo za B uzeti Killingovu formu $B_{\mathfrak{g}}$, a na općoj reduktivnoj $\mathfrak{g}$ možemo zadati $B|[\mathfrak{g},\mathfrak{g}] \times [\mathfrak{g},\mathfrak{g}] = B_{[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]}$, $B|\mathcal{Z}(\mathfrak{g}) \times [\mathfrak{g},\mathfrak{g}] = 0$, a kao $B|\mathcal{Z}(\mathfrak{g}) \times \mathcal{Z}(\mathfrak{g})$ možemo izabrati bilo koju nedefeneriranu simetričnu bilinearnu formu na centru $\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$.

Iako je kvadratična Liejeva algebra definirana kao par $(\mathfrak{g}, B)$, obično ćemo samu Liejevu algebru zvati kvadratičnom, podrazumijevajući da je jasno koja je forma B zadana. Za Liejevu podalgebru $\mathfrak{r}$ od $\mathfrak{g}$ kažemo da je **kvadratična podalgebra** od $\mathfrak{g}$, ako je restrikcija $B|\mathfrak{r} \times \mathfrak{r}$ nedegenerirana. Naravno, tada je i sama Liejeva algebra $\mathfrak{r}$ kvadratična (uz restrikciju $B|\mathfrak{r} \times \mathfrak{r}$). Nadalje, prema teoremu 2.2.2. za potprostor

$$\mathfrak{s} = \mathfrak{r}^{\perp} = \{x \in \mathfrak{g};\ B(x,y) = 0\ \forall y \in \mathfrak{r}\}$$

vrijedi da je

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{r} \dotplus \mathfrak{s}$$

i restrikcija $B|\mathfrak{s} \times \mathfrak{s}$ je nedegenerirana. Iz invarijantnosti forme B neposredno slijedi da je

$$[\mathfrak{r}, \mathfrak{s}] \subseteq \mathfrak{s}.$$

Prema tome, $x \mapsto (ad\, x)|\mathfrak{s}$ je reprezentacija Liejeve algebre $\mathfrak{r}$ na prostoru $\mathfrak{s}$, i, ponovo zbog invarijantnosti forme B, svi operatori $(ad\, x)|\mathfrak{s}$ su antisimetrični o odnosu na B. Dakle, preslikavanje $x \mapsto (ad\, x)|\mathfrak{s}$ je homomorfizam Liejeve algebre $\mathfrak{r}$ u Liejevu algebru $\mathfrak{o}(\mathfrak{s})$. Komponiramo li taj homomorfizam sa prije promatranim homomorfizmom $\alpha : \mathfrak{o}(\mathfrak{s}) \to C(\mathfrak{s})$ dobivamo homomorfizam $\beta : \mathfrak{r} \to C(\mathfrak{s})$.

Propozicija 2.3.7. (*a*) *Ako su* $\{a_1, \ldots, a_n\}$ *i* $\{b_1, \ldots, b_n\}$ *baze potprostora* $\mathfrak{s}$ *koje su međusobno dualne u odnosu na formu* $B|\mathfrak{s} \times \mathfrak{s}$, *onda je*

$$\beta(x) = -\frac{1}{4}\sum_{j=1}^{n} [x, b_j] a_j, \qquad x \in \mathfrak{r}. \tag{2.21}$$

Posebno, ako je $\{e_1, \ldots, e_n\}$ *baza od* $\mathfrak{s}$ *koja je ortonormirana u odnosu na formu* $B|\mathfrak{s} \times \mathfrak{s}$, *onda je*

$$\beta(x) = -\frac{1}{4}\sum_{j=1}^{n} [x, e_j] e_j, \qquad x \in \mathfrak{r}. \tag{2.22}$$

(*b*) *Uz oznake i pretpostavke iz* (*a*) *vrijede i formule*

$$\beta(x) = \frac{1}{4}\sum_{j,k=1}^{n} B\left(x, [b_j, b_k]\right) a_j a_k, \qquad x \in \mathfrak{r}, \tag{2.23}$$

$$\beta(x) = \frac{1}{2}\sum_{1 \le j < k \le n} B\left(x, [b_j, b_k]\right) \left(a_j a_k + B(a_j, a_k)\right), \qquad x \in \mathfrak{r}, \tag{2.24}$$

$$\beta(x) = \frac{1}{2}\sum_{1 \le j < k \le n} B\left(x, [e_j, e_k]\right) e_j e_k, \qquad x \in \mathfrak{r}. \tag{2.25}$$

Dokaz: Tvrdnja (a) neposredna je posljedica propozicije 2.2.13. Formula (2.23) dobiva se iz formule (2.21) uvrštavanjem prikaza elementa $[x, b_j]$ u bazi $\{b_1, \ldots, b_n\}$ i korištenjem invarijantnosti forme B. Naime, imamo

$$[x, b_k] = \sum_{j=1}^{n} B\left([x, b_k], b_j\right) a_j = -\sum_{j=1}^{n} B\left(x, [b_j, b_k]\right) a_j,$$

pa slijedi

$$\beta(x) = -\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n} [x, b_k] a_k = \frac{1}{4}\sum_{j,k=1}^{n} B\left(x, [b_j, b_k]\right) a_j a_k.$$

Formula (2.24) dobiva se iz formule (2.23) jer je

$$a_j a_k = -a_k a_j - 2B(a_j, a_k).$$

Napokon, formula (2.25) slijedi iz formule (2.24) uvrštavanjem $a_j = b_j = e_j$.

U daljnjem pretpostavljamo da je kvadratična Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ reduktivna i da je kvadratična Liejeva podalgebra $\mathfrak{r}$ reduktivna u $\mathfrak{g}$. Proučit ćemo sada kompoziciju homomorfizma $\beta : \mathfrak{r} \to C(\mathfrak{s})$ sa spin−reprezentacijom (odnosno, dvjema spin−reprezentacijama) Cliffordove algebre $C(\mathfrak{s})$.

Izaberimo Cartanovu podalgebru $\mathfrak{t}$ od $\mathfrak{r}$ i Cartanovu podalgebru $\mathfrak{h}$ od $\mathfrak{g}$ koja sadrži $\mathfrak{t}$. Restrikcije $B|\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}$ i $B|\mathfrak{t} \times \mathfrak{t}$ su nedegenerirane, pa vrijedi

$$\mathfrak{h} = \mathfrak{t} \dotplus \mathfrak{a}, \qquad \text{gdje je} \quad \mathfrak{a} = \{x \in \mathfrak{h};\ B(x, y) = 0\ \forall y \in \mathfrak{t}\}.$$

Lema 2.3.8. *Uz gornje oznake vrijedi* $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{s}$.

Dokaz: Neka je $a \in \mathfrak{a}$. Pišemo

$$a = r + s, \qquad r \in \mathfrak{r}, \quad s \in \mathfrak{s}.$$

Za svaki $x \in \mathfrak{t}$ tada je

$$0 = [x, a] = [x, r] + [x, s],$$

a kako vrijedi $[x, r] \in [\mathfrak{r}, \mathfrak{r}] \subseteq \mathfrak{r}$ i $[x, s] \in [\mathfrak{r}, \mathfrak{s}] \subseteq \mathfrak{s}$, zaključujemo da vrijedi

$$[x, r] = 0 \qquad \text{i} \qquad [x, s] = 0 \qquad \forall x \in \mathfrak{t}. \tag{2.26}$$

Cartanova podalgebra $\mathfrak{t}$ od $\mathfrak{r}$ je maksimalna komutativna podalgebra od $\mathfrak{r}$, pa iz prve relacije u (2.26) zaključujemo da je $r \in \mathfrak{t}$. Stoga je $s = a - r \in \mathfrak{h}$, pa slijedi $s \in \mathfrak{h} \cap \mathfrak{s} = \mathfrak{a}$. Sada iz jednakosti $a = r + s$, $r \in \mathfrak{t}$, $s \in \mathfrak{a}$, i iz direktnosti sume $\mathfrak{t}$ i $\mathfrak{a}$, slijedi da je $r = 0$, odnosno, $a = s \in \mathfrak{s}$. Kako je $a \in \mathfrak{a}$ bio proizvoljan, lema je dokazana.

Neka su $R = R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ i $R^{\mathfrak{r}} = R(\mathfrak{r}, \mathfrak{t})$. Tada imamo korijenske rastave reduktivnih Liejevih algebri $\mathfrak{g}$ i $\mathfrak{r}$:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \dotplus \sum_{\alpha \in R} \dotplus\, \mathfrak{g}_\alpha, \qquad \mathfrak{g}_\alpha = \{x \in \mathfrak{g};\ [h, x] = \alpha(h)x\ \forall h \in \mathfrak{h}\},$$

$$\mathfrak{r} = \mathfrak{t} \dotplus \sum_{\beta \in R^{\mathfrak{r}}} \dotplus\, \mathfrak{r}_\beta, \qquad \mathfrak{r}_\beta = \{y \in \mathfrak{r};\ [t, y] = \beta(t)y\ \forall t \in \mathfrak{t}\}.$$

Iz korijenskog rastava Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ vidi se da je centralizator bilo kojeg elementa $h \in \mathfrak{h}$ u Liejevoj algebri $\mathfrak{g}$ jednak

$$Z_{\mathfrak{g}}(h) \;=\; \{x \in \mathfrak{g};\; [h,x]=0\} \;=\; \mathfrak{h} \dotplus \sum_{\alpha\in R,\,\alpha(h)=0} \dotplus\, \mathfrak{g}_\alpha.$$

Stoga je za bilo koji potprostor $\mathfrak{b}$ od $\mathfrak{h}$

$$Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{b}) \;=\; \{x \in \mathfrak{g};\; [h,x]=0\ \forall h \in \mathfrak{b}\} \;=\; \mathfrak{h} \dotplus \sum_{\alpha\in R,\,\alpha|\mathfrak{b}=0} \dotplus\, \mathfrak{g}_\alpha. \tag{2.27}$$

Stavimo sada

$$R^0 = \{\alpha \in R;\; \alpha|\mathfrak{t}=0\}.$$

Lema 2.3.9. *Uz uvedene oznake vrijedi*

$$Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{t}) \;=\; \mathfrak{t} \dotplus \mathfrak{s}^0,$$

gdje je

$$\mathfrak{s}^0 \;=\; Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{t}) \cap \mathfrak{s} \;=\; \mathfrak{a} \dotplus \sum_{\alpha\in R^0} \dotplus\, \mathfrak{g}_\alpha.$$

Dokaz: Prema jednakosti (2.27) vrijedi

$$Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{t}) \;=\; \mathfrak{h} \dotplus \sum_{\alpha\in R^0} \dotplus\, \mathfrak{g}_\alpha \;=\; \mathfrak{t} \dotplus \mathfrak{s}^0,$$

gdje smo stavili

$$\mathfrak{s}^0 \;=\; \mathfrak{a} \dotplus \sum_{\alpha\in R^0} \dotplus\, \mathfrak{g}_\alpha.$$

Dokažimo sada da je $\mathfrak{g}_\alpha \subseteq \mathfrak{s}$ za svaki $\alpha \in R^0$. Doista, za $\beta \in R^{\mathfrak{r}}$ izaberimo $t \in \mathfrak{t}$ tako da bude $\beta(t)=1$. Tada imamo za svaki $x \in \mathfrak{r}_\beta$ i svaki $y \in \mathfrak{g}_\alpha$

$$B(x,y) = B(\beta(t)x,y) = B([t,x],y) = -B(x,[t,y]) = -B(x,\alpha(t)y) = 0.$$

Prema tome, korijenski potprostor $\mathfrak{g}_\alpha$ ortogonalan je (u odnosu na formu B) na svaki korijenski potprostor $\mathfrak{r}_\beta$, $\beta \in R^{\mathfrak{r}}$. Nadalje, $\mathfrak{g}_\alpha$ je ortogonalan na $\mathfrak{h}$ i, posebno, na $\mathfrak{t} = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{r}$. Prema tome, $\mathfrak{g}_\alpha$ je ortogonalan na $\mathfrak{r}$, a to upravo znači da je $\mathfrak{g}_\alpha \subseteq \mathfrak{s}$. Sada je jasno da je $\mathfrak{s}^0 \subseteq \mathfrak{s}$, pa slijedi da je $\mathfrak{s}^0 = Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{t}) \cap \mathfrak{s}$. Time je lema dokazana.

Izaberimo sada $h \in \mathfrak{t}$ koji je maksimalno regularan, tj. takav da je $\alpha(h) \neq 0\ \forall \alpha \in R \setminus R^0$. Možemo pretpostaviti da je $\alpha(h) \in \mathbb{R}$ za svaki $\alpha \in R$, odnosno, da su sve svojstvene vrijednosti operatora $ad\, h$ realne. Tada je $Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{t}) = Z_{\mathfrak{g}}(h)$. Sada se sve $\mathfrak{t}-$težine u $\mathfrak{g}$, a to su upravo restrikcije $\alpha|\mathfrak{t}$, $\alpha \in R$, dijele u tri skupine:

(*a*) Jedna je skupina $\{0\}$; pripadni je $\mathfrak{t}-$težinski potprostor od $\mathfrak{g}$ upravo $Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{t}) = Z_{\mathfrak{g}}(h)$.

(*b*) Druga je skupina $\{\alpha|\mathfrak{t};\ \alpha \in R,\ \alpha(h) > 0\}$. Te ćemo $\mathfrak{t}-$težine zvati pozitivnima.

(*c*) Treća je skupina $\{\alpha|\mathfrak{t};\ \alpha \in R,\ \alpha(h) < 0\}$. Te ćemo $\mathfrak{t}-$težine zvati negativnima.

Ako je γ ili pozitivna ili negativna $\mathfrak{t}-$težina u $\mathfrak{g}$, pripadni je težinski potprostor očito jednak

$$\mathfrak{g}_\gamma = \sum_{\alpha\in R,\,\alpha|\mathfrak{t}=\gamma} \dot{+}\, \mathfrak{g}_\alpha.$$

Neka je $\alpha \in R \setminus R^0$, tj. $\alpha|\mathfrak{t} \neq 0$. Ako je $\alpha|\mathfrak{t} \in R^\mathfrak{r}$, onda je očito $\mathfrak{r}_{\alpha|\mathfrak{t}} \subseteq \mathfrak{g}_\alpha$, a kako su oba potprostora jednodimenzionalna, zaključujemo da je $\mathfrak{g}_\alpha = \mathfrak{r}_{\alpha|\mathfrak{t}}$. Jasno je da vrijedi

$$R^\mathfrak{r} = \{\alpha|\mathfrak{t};\ \alpha \in R \setminus R^0,\ \mathfrak{g}_\alpha \subseteq \mathfrak{r}\}.$$

Nadalje,

$$R^\mathfrak{r}_+ = \{\gamma \in R^\mathfrak{r};\ \gamma(h) > 0\}$$

je jedan izbor pozitivnih korijena u sistemu korijena $R^\mathfrak{r}$. Neka je $R^\mathfrak{r}_+ = \{\delta_1, \dots, \delta_r\}$ i za svaki $i \in \{1, \dots, r\}$ izaberimo $u_i \in \mathfrak{r}_{\delta_i}$ i $u_i^* \in \mathfrak{r}_{-\delta_i}$ tako da bude $B(u_i, u_i^*) = 1$.

Neka je $\{\gamma_1, \dots, \gamma_m\}$ skup svih pozitivnih $\mathfrak{t}-$težina u $\mathfrak{s}$, s tim da se u tom popisu ista težina pojavljuje toliko puta koliki joj je multiplicitet. (Uočimo da je moguće da je neka od tih težina ujedno korijen iz $R^\mathfrak{r}$.) Naravno, tada je $\{-\gamma_1, \dots, -\gamma_m\}$ skup svih negativnih $\mathfrak{t}-$težina u $\mathfrak{s}$ i pri tome se također ista težina u tom popisu pojavljuje toliko puta koliki joj je multiplicitet. Nadalje, neka je V potprostor od $\mathfrak{s}$ koji je suma svih težinskih potprostora za pozitivne $\mathfrak{t}-$težine u $\mathfrak{s}$ i, analogno, neka je V^* suma svih težinskih potprostora za negativne $\mathfrak{t}-$težine u $\mathfrak{s}$. Izaberimo sada za svaki $j \in \{1, \dots, m\}$ težinski vektor $v_j \in \mathfrak{s}$ težine γ_j tako da $\{v_1, \dots, v_m\}$ bude baza prostora V. Nadalje, neka je $v_j^* \in \mathfrak{s}$ vektor težine $-\gamma_j$ izabran tako da $\{v_1^*, \dots, v_m^*\}$ bude baza prostora V^* dualna onoj prvoj u odnosu na formu B : $B(v_j, v_k^*) = \delta_{jk}$.

Napokon, ako je potprostor $\mathfrak{s}^0$ parnodimenzionalan, $\dim \mathfrak{s}^0 = 2s$, izaberimo dva $B-$izotropna $s-$dimenzionalna potprostora W i W^* od $\mathfrak{s}^0$, takva da je $\mathfrak{s}^0 = W \dot{+} W^*$; ako je potprostor $\mathfrak{s}^0$ neparnodimenzionalan, $\dim \mathfrak{s}^0 = 2s + 1$, onda najprije izaberemo jedinični vektor $z \in \mathfrak{s}^0$, a zatim dva $B-$izotropna $s-$dimenzionalna potprostora W i W^* od $z^\perp \cap \mathfrak{s}^0$, tako da bude $\mathfrak{s}^0 = \mathbb{C}z \dot{+} W \dot{+} W^*$. U oba slučaja neka je $\{w_1, \dots, w_s\}$ baza od W i $\{w_1^*, \dots, w_s^*\}$ njoj $B-$dualna baza od W^*. Tada je u slučaju parnodimenzionalnog $\mathfrak{s}^0$

$$\{v_1, \dots, v_m, v_1^*, \dots, v_m^*, w_1, \dots, w_s, w_1^*, \dots, w_s^*\}$$

baza od $\mathfrak{s}$ i njoj $B-$dualna baza je

$$\{v_1^*, \dots, v_m^*, v_1, \dots, v_m, w_1^*, \dots, w_s^*, w_1, \dots, w_s\}.$$

Ako je potprostor $\mathfrak{s}^0$ neparnodimenzionalan, onda je

$$\{v_1, \dots, v_m, v_1^*, \dots, v_m^*, w_1, \dots, w_s, w_1^*, \dots, w_s^*, z\}$$

baza od $\mathfrak{s}$ i njoj $B-$dualna baza je

$$\{v_1^*, \dots, v_m^*, v_1, \dots, v_m, w_1^*, \dots, w_s^*, w_1, \dots, w_s, z\}.$$

Budući da je $[\mathfrak{t}, \mathfrak{s}^0] = \{0\}$, formula (2.21) primijenjena na $x \in \mathfrak{t}$ daje

$$\beta(x) = -\frac{1}{4} \sum_{j=1}^m \left([x, v_j]v_j^* + [x, v_j^*]v_j\right) = -\frac{1}{4} \sum_{j=1}^m \left(\gamma_j(x)v_jv_j^* - \gamma_j(x)v_j^*v_j\right).$$

Kako je $v_jv_j^* = -v_j^*v_j - 2$, slijedi

$$\beta(x) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m \gamma_j(x)\left(v_j^*v_j + 1\right), \qquad x \in \mathfrak{t}. \tag{2.28}$$

Spin$-$modul $\mathcal{S}$ za Cliffordovu algebru $C(\mathfrak{s})$ može se konstruirati kao vanjska algebra nad izotropnim potprostorom $V \dotplus W$, a tom je slučaju $\mathcal{S} = \bigwedge(V) \otimes \bigwedge(W)$. Djelovanje $\mathfrak{t}$ na $\bigwedge(W)$ je nula. Nadalje, iz (2.28) dobiva se da je svaki od standardnih monoma

$$v_{(I)}, \qquad I \subseteq \{1, \ldots, m\}$$

(gdje je $v_{(\emptyset)} = 1$ i $v_{(I)} = v_{i_1} \wedge \cdots \wedge v_{i_k}$ ako je $I = \{i_1, \ldots, i_k\}$ uz $1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq m$) $\mathfrak{t}-$težinski vektor s težinom

$$\frac{1}{2} \sum_{k \in I} \gamma_k - \frac{1}{2} \sum_{k \notin I} \gamma_k. \tag{2.29}$$

Tenzorski produkt svakog od tih vektora s bilo kojim vektorom iz $\bigwedge(W)$ je $\mathfrak{t}-$težinski vektor u $\mathcal{S}$ s istom težinom. Prema tome, svaka od $\mathfrak{t}-$težina u $\mathcal{S}$ ima multiplicitet koji je multipl od $\dim \bigwedge(W) = 2^s$.

Ako Liejeva algebra $\mathfrak{r}$ ima rang jednak rangu od $\mathfrak{g}$, onda je $\mathfrak{t} = \mathfrak{h}$ i $\mathfrak{s}^0 = \{0\}$. Tada su $\{\delta_1, \ldots, \delta_r, \gamma_1, \ldots, \gamma_m\}$ upravo svi pozitivni korijeni iz R.

U općem slučaju jasno je da je

$$\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{m} \gamma_j \tag{2.30}$$

$\mathfrak{t}-$težina u $\mathcal{S}$ i njena je vrijednost na izabranom elementu h najveća. To posebno znači da je to najveća težina $\mathfrak{r}-$modula $\mathcal{S}$ u odnosu na $R_+^{\mathfrak{r}}$. Stoga pripadni težinski vektor

$$v_{\text{top}} = v_1 \wedge \cdots \wedge v_m$$

poništavaju svi $\beta(u_i)$, $i = 1, \ldots, r$. Nadalje, budući da β preslikava $\mathfrak{r}$ u parni dio $C^0(\mathfrak{s})$ Cliffordove algebre $C(\mathfrak{s})$, rastav $\mathcal{S} = \mathcal{S}_+ \dotplus \mathcal{S}_-$ iz tvrdnje (a) teorema 2.3.6. je $\mathfrak{r}-$invarijantan. Odatle slijedi da je $\mathfrak{o}(\mathfrak{s})-$primitivni vektor $v_2 \wedge \cdots \wedge v_m$ u $\mathcal{S}_-$ također i za djelovanje $\mathfrak{r}$ primitivni vektor. Pripadna težina je

$$-\frac{1}{2}\gamma_1 + \frac{1}{2} \sum_{j=2}^{m} \gamma_j. \tag{2.31}$$

Sve u svemu, dokazali smo:

Propozicija 2.3.10. *Uz navedene pretpostavke i uz uvedene oznake neka je $\mathcal{S}$ spin$-$modul za $C(\mathfrak{s})$ promatran kao $\mathfrak{r}-$modul. Tada su sve težine od $\mathcal{S}$ oblika* (2.29). *Među njima je težina* (2.30) *uvijek među najvećim težinama nekog ireducibilnog $\mathfrak{r}-$podmodula od $\mathcal{S}$, a ako je* $\dim \mathfrak{s}$ *neparna onda je i* (2.31) *takva težina. Nadalje, multiplicitet svake težine je multipl od 2^s, gdje $s = \left[\frac{1}{2} \dim \mathfrak{s}^0\right]$.*

Napomena: Drugačiji izbor elementa h, ali takav da se $R_+^{\mathfrak{r}}$ ne mijenja, može promijeniti popis pozitivnih $\mathfrak{t}-$težina od $\mathfrak{s}$, a u tom je slučaju i potprostor V drugačiji. To može dovesti do neke druge najveće težine za $\mathfrak{r}-$modul $\mathcal{S}$ dane također formulom (2.30), ali s novim težinama γ_j. Ako je potprostor $\mathfrak{s}^0$, a time i $\mathfrak{s}$, parnodimenzionalan, dobivamo i možda drugačiju najveću težinu analognu (2.31). Podrobnija razmatranja provest ćemo u nama najzanimljivijem slučaju kad je $\mathfrak{g}$ kompleksifikacija Liejeve algebre realne reduktivne Liejeve grupe G, a $\mathfrak{k} = \mathfrak{r}$ je kompleksifikacija Liejeve algebre maksimalne kompaktne podgrupe od G.

U ovom ćemo pododjeljku još definirati pojam Casimirovog elementa univerzalne omotačke algebre i dokazati jednu formulu s njim u vezi. Neka je $\mathfrak{g}$ kompleksna kvadratična Liejeva algebra s invarijantnom simetričnom nedegeneriranom bilinearnom formom B. Neka je $\{a_1, \ldots, a_n\}$ baza od $\mathfrak{g}$ i neka je $\{b_1, \dots, b_n\}$ njoj $B-$biortogonalna baza od $\mathfrak{g}$, tj. takva da je $B(a_j, b_k) = \delta_{jk}$. **Casimirov element** $\Omega_{\mathfrak{g}}$ univerzalne omotačke algebre $U(\mathfrak{g})$ definiran je formulom

$$\Omega_{\mathfrak{g}} = \sum_{j=1}^{n} a_j b_j.$$

Uočimo prije svega da je taj element u centru $Z(\mathfrak{g})$ algebre $U(\mathfrak{g})$. Doista, neka je $x \in \mathfrak{g}$ proizvoljan i napišimo djelovanje operatora $ad\,x$ u bazama $\{a_1, \dots, a_n\}$ i $\{b_1, \dots, b_n\}$:

$$(ad\,x)a_j = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{kj} a_k, \qquad (ad\,x)b_j = \sum_{k=1}^{n} \beta_{kj} b_k.$$

Tada zbog $B-$biortogonalnosti dviju baza i zbog invarijantnosti forme B vrijedi

$$\beta_{kj} = B(a_j, (ad\,x)b_k) = -B((ad\,x)a_j, b_k) = -\alpha_{jk},$$

pa nalazimo da je

$$x\Omega_{\mathfrak{g}} - \Omega_{\mathfrak{g}} x = \sum_{j=1}^{n} [x, a_j b_j] = \left(\sum_{j=1}^{n} (ad\,x)a_j \right) b_j + a_j \left(\sum_{j=1}^{n} (ad\,x)b_j \right) = \sum_{j,k=1}^{n} \alpha_{kj} a_k b_j - \sum_{j,k=1}^{n} \alpha_{jk} a_j b_k = 0.$$

To pokazuje da element $\Omega_{\mathfrak{g}}$ komutira sa svakim $x \in \mathfrak{g}$, a kako $\mathfrak{g}$ generira cijelu unitalnu algebru $U(\mathfrak{g})$, zaključujemo da je $\Omega_{\mathfrak{g}} \in Z(\mathfrak{g})$.

Dokažimo još da definicija Casimirovog elementa ne ovisi o izboru para $B-$biortogonalnih baza od $\mathfrak{g}$. Doista, ako su i $\{a'_1, \dots, a'_n\}$ i $\{b'_1, \dots, b'_n\}$ baze od $\mathfrak{g}$ takve da je $B(a'_j, b'_k) = \delta_{jk}$, prikažimo njihove elemente pomoću polaznih baza

$$a'_j = \sum_{r=1}^{n} \sigma_{rj} a_r, \qquad b'_k = \sum_{s=1}^{n} \tau_{sk} b_s.$$

Tada je

$$\delta_{jk} = B(a'_j, b'_k) = \sum_{r,s=1}^{n} \sigma_{rj} \tau_{sk} B(a_r, b_s) = \sum_{r=1}^{n} \sigma_{rj} \tau_{rk}.$$

To pokazuje da je matrica $[\tau_{jk}]$ transponirana inverznoj matrici matrice $[\sigma_{jk}]$. No tada vrijedi i

$$\sum_{j=1}^{n} \sigma_{rj} \tau_{sj} = \delta_{rs}.$$

Pomoću te jednakosti nalazimo

$$\sum_{j=1}^{n} a'_j b'_j = \sum_{j,r,s=1}^{n} \sigma_{rj} \tau_{sj} a_r b_s = \sum_{r,s=1}^{n} \delta_{rs} a_r b_s = \sum_{r=1}^{n} a_r b_r = \Omega_{\mathfrak{g}}.$$

Time je dokazana neovisnost Casimirovog elementa o izboru para $B-$biortogonalnih baza.

Neka je u daljnjem kvadratična Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ reduktivna i neka je $\mathfrak{h}$ njena Cartanova podalgebra i $R = R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ pripadni sistem korijena. Imamo tada korijenski rastav

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \dotplus \sum_{\alpha \in R} \dotplus \mathfrak{g}_\alpha.$$

Izaberimo pozitivan skup korijena R_+ i stavimo

$$\rho = \frac{1}{2}\sum_{\alpha\in R_+}\alpha.$$

Restrikcija $B|\mathfrak{h}\times\mathfrak{h}$ je nedegenerirana. Označimo sa $(\,\cdot\,|\,\cdot\,)$ nedegeneriranu simetričnu bilinearnu formu na dualu $\mathfrak{h}^*$ od $\mathfrak{h}$ definiranu pomoću forme $B|\mathfrak{h}\times\mathfrak{h}$ kao u odjeljku 1.6. :

$$(\lambda|\mu) = B(h_\lambda, h_\mu), \qquad \lambda,\mu\in\mathfrak{h}^*,$$

gdje je $\lambda\mapsto h_\lambda$ izomorfizam dualnog prostora $\mathfrak{h}^*$ na prostor $\mathfrak{h}$ definiran sa

$$B(h, h_\lambda) = \lambda(h) \qquad \forall h\in\mathfrak{h}.$$

Propozicija 2.3.11. *Neka je V konačnodimenzionalan ireducibilan $\mathfrak{g}-$modul s najvećom težinom λ u odnosu na R_+. Tada je*

$$\Omega_{\mathfrak{g}}v = [(\lambda+\rho|\lambda+\rho) - (\rho|\rho)]v \qquad \forall v\in V.$$

Dokaz: Budući da je Casimirov element $\Omega_{\mathfrak{g}}$ u centru $Z(\mathfrak{g})$ univerzalne omotačke algebre $U(\mathfrak{g})$, po Schurovoj lemi postoji $c\in\mathbb{C}$ takav da je

$$\Omega_{\mathfrak{g}}v = cv \qquad \forall v\in V. \tag{2.32}$$

Izaberimo sada $B-$ortonormiranu bazu $\{h_1,\ldots,h_\ell\}$ od $\mathfrak{h}$. Nadalje, neka je $R_+ = \{\alpha_1,\ldots,\alpha_r\}$ i za svaki $i\in\{1,\ldots,r\}$ izaberimo $x_i\in\mathfrak{g}_{\alpha_i}$ i $y_i\in\mathfrak{g}_{-\alpha_i}$ tako da bude $B(x_i,y_i)=1$. Tada je

$$\{h_1,\ldots,h_\ell,x_1,\ldots,x_r,y_1,\ldots,y_r\}$$

baza od $\mathfrak{g}$ i

$$\{h_1,\ldots,h_\ell,y_1,\ldots,y_r,x_1,\ldots,x_r\}$$

je njoj $B-$biortogonalna baza od $\mathfrak{g}$. Dakle,

$$\Omega_{\mathfrak{g}} = \sum_{i=1}^{\ell} h_i^2 + \sum_{j=1}^{r}(x_jy_j + y_jx_j).$$

Prema tvrdnji (a) propozicije 1.9.1. tada je $[x_j,y_j] = h_{\alpha_j}$, dakle, u algebri $U(\mathfrak{g})$ vrijedi

$$x_jy_j = y_jx_j + h_{\alpha_j}, \quad \text{odnosno}, \quad x_jy_j + y_jx_j = h_{\alpha_j} + 2y_jx_j.$$

Stoga je

$$\Omega_{\mathfrak{g}} = \sum_{i=1}^{\ell} h_i^2 + \sum_{j=1}^{r} h_{\alpha_j} + 2\sum_{j=1}^{r} y_jx_j.$$

Neka je sada $v\neq 0$ vektor najveće težine λ. Tada je

$$hv = \lambda(h)v \qquad \forall h\in\mathfrak{h} \qquad \text{i} \qquad x_jv = 0 \qquad \forall j\in\{1,\ldots,r\},$$

pa nalazimo

$$\Omega_{\mathfrak{g}}v = \left(\sum_{i=1}^{\ell}\lambda(h_i)^2 + \sum_{j=1}^{r}\lambda(h_{\alpha_j})\right)v. \tag{2.33}$$

Budući da je baza $\{h_1, \ldots, h_\ell\}$ od $\mathfrak{h}$ ortonormirana u odnosu na formu $B|\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}$, vrijedi

$$h_\lambda = \sum_{i=1}^{\ell} B(h_\lambda, h_i)h_i = \sum_{i=1}^{\ell} \lambda(h_i)h_i,$$

pa slijedi

$$\sum_{i=1}^{\ell} \lambda(h_i)^2 = \lambda(h_\lambda = B(h_\lambda, h_\lambda) = (\lambda|\lambda).$$

Nadalje, kako je preslikavanje $\mu \mapsto h_\mu$ linearno, imamo

$$\sum_{j=1}^{r} \lambda(h_{\alpha_j}) = \lambda\left(\sum_{j=1}^{r} h_{\alpha_j}\right) = \lambda\left(h_{\sum_{j=1}^{r}\alpha_j}\right) = \lambda\left(h_{2\rho}\right) = (\lambda|2\rho) = 2(\lambda|\rho).$$

Stoga iz (2.32) i (2.33) slijedi

$$c = (\lambda|\lambda) + 2(\lambda|\rho) = (\lambda + \rho|\lambda + \rho) - (\rho|\rho).$$

Zbog (2.32) time je propozicija 2.3.11. dokazana.

2.3.5 Slučaj realnih reduktivnih grupa

U ovom ćemo pododjeljku pretpostavljati da je G realna reduktivna grupa uz sve oznake iz odjeljka 1.11., osim što ćemo sa $\mathfrak{g}$ i $\mathfrak{k}$ označavati kompleksifikacije Liejevih algebri $\mathfrak{g}_0$ i $\mathfrak{k}_0$ Liejeve grupe G i njene maksimalne kompaktne podgrupe K, koja je točno skup fiksnih točaka Cartanove involucije ϑ od G. Sa ϑ označavamo i pripadnu Cartanovu involuciju od $\mathfrak{g}_0$, a također i njeno linearno proširenje na kompleksifikaciju $\mathfrak{g}$ od $\mathfrak{g}_0$. Tada je $\mathfrak{g}$ kvadratična reduktivna Liejeva algebra i $\mathfrak{k}$ je njena kvadratična podalgebra koja je reduktivna u $\mathfrak{g}$. Nadalje, vrijedi

$$\mathfrak{k} = \{x \in \mathfrak{g};\ \vartheta(x) = x\}, \qquad \mathfrak{p} = \mathfrak{k}^\perp = \{y \in \mathfrak{g};\ \vartheta(y) = -y\}, \qquad \mathfrak{g} = \mathfrak{k} \dotplus \mathfrak{p}.$$

Dakle, sada umjesto oznaka $\mathfrak{r}$ i $\mathfrak{s}$ iz prethodnog pododljeljka imamo oznake $\mathfrak{k}$ i $\mathfrak{p}$. Nadalje, zbog $\vartheta-$invarijantnosti forme B osim inkluzija $[\mathfrak{k}, \mathfrak{k}] \subseteq \mathfrak{k}$ i $[\mathfrak{k}, \mathfrak{p}] \subseteq \mathfrak{p}$ imamo i $[\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] \subseteq \mathfrak{k}$.

Neka je kao u 2.3.4. $\mathfrak{t}$ Cartanova podalgebra od $\mathfrak{k}$ i $\mathfrak{h} = \mathfrak{t} \dotplus \mathfrak{a}$, $\mathfrak{a} = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}$, pripadna Cartanova podalgebra od $\mathfrak{g}$.

Lema 2.3.12. *Vrijedi* $R^0 = \{\alpha \in R;\ \alpha|\mathfrak{t} = 0\} = \emptyset$.

Dokaz: Sa ϑ označavamo i linearni operator na dualu $\mathfrak{h}^*$ dualan restrikciji $\vartheta|\mathfrak{h}$:

$$(\vartheta\lambda)(h) = \lambda(\vartheta(h)), \qquad \lambda \in \mathfrak{h}^*, \quad h \in \mathfrak{h}.$$

Neka je $\alpha \in R^0$, tj. $\alpha \in R = R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ i $\alpha|\mathfrak{t} = 0$. Budući da je $\vartheta(t) = t$ za $t \in \mathfrak{t}$ i $\vartheta(a) = -a$ za $a \in \mathfrak{a}$, nalazimo da je $\vartheta\alpha = -\alpha$. Neka je $x \in \mathfrak{g}_\alpha \setminus \{0\}$. Tada je $\mathfrak{g}_\alpha = \mathbb{C}x$ i $\mathfrak{g}_{-\alpha} = \mathbb{C}\vartheta(x)$. Nadalje, $x + \vartheta(x) \in \mathfrak{k}$ i zbog $\alpha|\mathfrak{t} = 0$ vrijedi

$$[t, x + \vartheta(x)] = \alpha(t)x - \alpha(t)\vartheta(x) = 0 \qquad \forall t \in \mathfrak{t}.$$

No to je nemoguće budući da je $\mathfrak{t}$ maksimalna komutativna Liejeva podalgebra od $\mathfrak{k}$ i jer je $x + \vartheta(x) \in \mathfrak{k} \setminus \mathfrak{t}$. Ova kontradikcija pokazuje da ne postoji $\alpha \in R^0$, odnosno, da je $R^0 = \emptyset$.

Izaberimo kao u 2.3.4. maksimalno regularan element $h \in \mathfrak{t}$. Budući da je $R^0 = \emptyset$, tada je stvarno element h regularan u Liejevoj algebri $\mathfrak{g}$, odnosno, vrijedi $\mathfrak{h} = Z_{\mathfrak{g}}(h)$. Kao i u 2.3.4. pretpostavljamo da je $\alpha(h) \in \mathbb{R}$ za svaki $\alpha \in R$. Tada h definira pozitivne skupove korijena i u sistemu korijena R i u sistemu korijena $R^{\mathfrak{k}} = R(\mathfrak{k}, \mathfrak{t})$:

$$R_+ = \{\alpha \in R;\ \alpha(h) > 0\}, \qquad R_+^{\mathfrak{k}} = \{\beta \in R^{\mathfrak{k}};\ \beta(h) > 0\}.$$

Budući da je $\vartheta(h) = h$, očito je $\vartheta R_+ = R_+$. Prema tome, i pripadna Borelova podalgebra

$$\mathfrak{b} = \mathfrak{h} \dot{+} \sum_{\alpha \in R_+} \dot{+} \mathfrak{g}_\alpha$$

je $\vartheta-$invarijantna.

Za $\alpha \in R$ kažemo da je **imaginaran korijen** ako je $\alpha|\mathfrak{a} = 0$, ili, ekvivalentno, ako je $\vartheta\alpha = \alpha$. U ovom slučaju nema tzv. *realnih korijena* tj. takvih da je $\vartheta\alpha = -\alpha$. Napomenimo, međutim, da u slučaju kad je rang od $\mathfrak{k}$ manji nego rang od $\mathfrak{g}$, tj. kad je $\mathfrak{a} \neq \{0\}$, onda postoje **kompleksni korijeni**, tj. takvi da da je i $\alpha|\mathfrak{t} \neq 0$ i $\alpha|\mathfrak{a} \neq 0$, ili, ekvivalentno, takvi da je $\vartheta\alpha \neq \pm\alpha$. Istaknimo da je uvijek $\vartheta\alpha|\mathfrak{t} = \alpha|\mathfrak{t}$. Svaki imaginaran korijen α je ili **kompaktan**, tj. takav da je $\mathfrak{g}_\alpha \subseteq \mathfrak{k}$, ili **nekompaktan**, tj. takav da je $\mathfrak{g}_\alpha \subseteq \mathfrak{p}$. Prema tome, svi se pozitivni korijeni od $R^{\mathfrak{k}}$ sastoje od restrikcija na $\mathfrak{t}$ pozitivnih imaginarnih kompaktnih korijena i od restrikcija $\alpha|\mathfrak{t} = \vartheta\alpha|\mathfrak{t}$ za svaki par $(\alpha, \vartheta\alpha)$ pozitivnih kompleksnih korijena; naime, ako izaberemo $x \in \mathfrak{g}_\alpha \setminus \{0\}$, tada je $\vartheta(x) \in \vartheta(\mathfrak{g}_\alpha) = \mathfrak{g}_{\vartheta\alpha}$ i $x + \vartheta(x) \in \mathfrak{k} \setminus \{0\}$ je $\mathfrak{t}-$težinski vektor težine $\alpha|\mathfrak{t} = \vartheta\alpha|\mathfrak{t}$. Te smo korijene u pododjeljku 2.3.4. numerirali kao $\{\delta_1, \ldots, \delta_r\}$. Nadalje, sve pozitivne $\mathfrak{t}-$težine u $\mathfrak{p}$ sastoje se od restrikcija na $\mathfrak{t}$ pozitivnih imaginarnih nekompaktnih korijena i od restrikcija $\alpha|\mathfrak{t} = \vartheta\alpha|\mathfrak{t}$ za svaki par $(\alpha, \vartheta\alpha)$ pozitivnih kompleksnih korijena; naime, uz prethodnu oznaku je $x - \vartheta(x) \in \mathfrak{p} \setminus \{0\}$ $\mathfrak{t}-$težinski vektor težine $\alpha|\mathfrak{t} = \vartheta\alpha|\mathfrak{t}$. Te smo težine u odjeljku 2.3.4. označili sa $\{\gamma_1, \ldots, \gamma_m\}$, no u ovom slučaju sve su te $\mathfrak{t}-$težine multipliciteta 1. Prema rezultatima u 2.3.4. najveća težina $\mathfrak{k}-$modula $\mathcal{S}$ je

$$\frac{1}{2}\sum_{j=1}^m \gamma_j = \rho_{\mathfrak{g}}|\mathfrak{t} - \rho_{\mathfrak{k}}, \qquad \text{gdje je} \quad \rho_{\mathfrak{g}} = \frac{1}{2}\sum_{\alpha \in R_+} \alpha \quad \text{i} \quad \rho_{\mathfrak{k}} = \frac{1}{2}\sum_{\delta \in R_+^{\mathfrak{k}}} \delta = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^r \delta_j.$$

U slučaju kad je rang od $\mathfrak{k}$ manji nego rang od $\mathfrak{g}$, odnosno, kad je $\mathfrak{a} \neq \{0\}$, pozitivni kompleksni korijeni se pojavljuju u parovima $(\alpha, \vartheta\alpha)$ i vrijedi $\vartheta\alpha|\mathfrak{a} = -\alpha|\mathfrak{a}$. Zbog toga je $\rho_{\mathfrak{g}}|\mathfrak{a} = 0$. Dualni prostor $\mathfrak{t}^*$ shvaćamo kao potprostor od $\mathfrak{h}^*$ na način da svaki element $\lambda \in \mathfrak{t}^*$ proširujemo do elementa od $\mathfrak{h}^*$ sa $\lambda|\mathfrak{a} = 0$. Na taj način $\mathfrak{t}-$težine postaju elementi od $\mathfrak{h}^*$. Uz taj dogovor najveća težina $\mathfrak{k}-$modula $\mathcal{S}$ je $\rho_{\mathfrak{g}} - \rho_{\mathfrak{k}}$. Uz oznake iz 2.3.4. težinski vektor za tu težinu je

$$v_{\text{top}} = v_1 \wedge \cdots \wedge v_m.$$

U ovom je slučaju $R^0 = \emptyset$, dakle, ono što smo u 2.3.4. označavali sa $\mathfrak{s}^0$ u našoj je sadašnjoj situaciji jednako $\mathfrak{a}$. Dakle, vrijedi $\dim \mathfrak{a} = 2s + 1$ ili $\dim \mathfrak{a} = 2s$, odnosno, s je najveće cijelo od $\frac{1}{2}\dim \mathfrak{a}$. Prema propoziciji 2.3.10. multiplicitet svake težine $\mathfrak{k}-$modula $\mathcal{S}$ je multipl od 2^s; multiplicitet najveće težine $\rho_{\mathfrak{g}} - \rho_{\mathfrak{k}}$ je točno 2^s. U slučaju da $\mathfrak{k}$ i $\mathfrak{g}$ imaju isti rang, vrijedi $\mathfrak{a} = \{0\}$, odnosno, $s = 0$. Dakle, u tom je slučaju najveća $\mathfrak{t}-$težina (odnosno, $\mathfrak{h}-$težina) polusuma nekompaktnih pozitivnih korijena i ona je multipliciteta 1, tj. pripadni je težinski potprostor razapet sa v_{top}.

Proučit ćemo sada djelovanje Casimirovog elementa $\Omega_{\mathfrak{k}}$ od $\mathfrak{k}$ na spinornom $\mathfrak{k}-$modulu $\mathcal{S}$. Neka je kao i u odjeljku 2.3.4. $\beta : \mathfrak{k} \to C(\mathfrak{p})$ homomorfizam Liejevih algebri definiran kao kompozicija izomorfizma Liejevih algebri $\alpha : \mathfrak{o}(\mathfrak{p}) \to C(\mathfrak{p})^{(2)}$ iz odjeljka 2.2. i homomorfizma $x \mapsto (ad\, x)|\mathfrak{p}$ sa $\mathfrak{k}$ u $\mathfrak{o}(\mathfrak{p})$. Proširimo taj Liejev morfizam do homomorfizma unitalnih algebri $\beta : U(\mathfrak{k}) \to C(\mathfrak{p})$.

Restrikcija $B|\mathfrak{h}\times\mathfrak{h}$ je nedegenerirana pa definira izomorfizam prostora $\mathfrak{h}$ s njegovim dualom $\mathfrak{h}^*$. Prenesimo pomoću tog izomorfizma formu $B|\mathfrak{h}\times\mathfrak{h}$ na prostor $\mathfrak{h}^*$ i tako dobivenu nedegeneriranu simetričnu bilinearnu formu na $\mathfrak{h}^*$ označimo sa $(\,\cdot\,|\,\cdot\,)$.

Propozicija 2.3.13. *Uz uvedene oznake vrijedi*

$$\beta(\Omega_{\mathfrak{k}}) = (\rho_{\mathfrak{g}}|\,\rho_{\mathfrak{g}}) - (\rho_{\mathfrak{k}}|\,\rho_{\mathfrak{k}})\,.$$

Dokaz: Neka je $\{x_1,\ldots,x_m\}$ baza od $\mathfrak{k}$ koja je ortonormirana u odnosu na formu $-B|\mathfrak{k}\times\mathfrak{k}$, tj. takva da je $B(x_j,x_k) = -\delta_{jk}$ i neka je $\{y_1,\ldots,y_n\}$ baza od $\mathfrak{p}$ ortomormirana u odnosu na formu $B|\mathfrak{p}\times\mathfrak{p}$, tj. $B(y_r,y_s) = \delta_{rs}$. Tada je

$$\Omega_{\mathfrak{k}} = -\sum_{k=1}^{m} x_k^2 \qquad \Longrightarrow \qquad \beta(\Omega_{\mathfrak{k}}) = -\sum_{k=1}^{m} \beta(x_k)^2.$$

Prema jednakosti (2.23) u propoziciji 2.3.7. imamo

$$\beta(x_k) = \frac{1}{4}\sum_{r,s=1}^{n} B(x_k,[y_r,y_s])y_ry_s,$$

pa slijedi

$$\sum_{k=1}^{m} \beta(x_k)^2 = \frac{1}{16}\sum_{k=1}^{m}\sum_{p,q,r,s=1}^{n} B(x_k,[y_p,y_q])B(x_k,[y_r,y_s])y_py_qy_ry_s.$$

Budući da je $[\mathfrak{p},\mathfrak{p}] \subseteq \mathfrak{k}$ iz ortonormiranosti baze $\{x_1,\ldots,x_m\}$ od $\mathfrak{k}$ u odnosu na formu $-B$, vrijedi

$$\sum_{k=1}^{m} B(x_k,[y_p,y_q])B(x_k,[y_r,y_s]) = -B([y_p,y_q],[y_r,y_s]).$$

Stoga uz oznaku

$$R_{pqrs} = -\frac{1}{16}B([y_p,y_q],[y_r,y_s]), \qquad p,q,r,s \in \{1,\ldots,n\}$$

imamo

$$\sum_{k=1}^{m} \beta(x_k)^2 = \sum_{p,q,r,s=1}^{n} R_{pqrs}y_py_qy_ry_s.$$

Uočimo sada da zbog simetričnosti forme B vrijedi

$$R_{pqrs} = R_{rspq} \qquad \forall p,q,r,s \in \{1,\ldots,n\}. \tag{2.34}$$

Nadalje, zbog antikomutativnosti komutatora je

$$R_{pqrs} = -R_{qprs} \qquad \forall p,q,r,s \in \{1,\ldots,n\} \tag{2.35}$$

Napokon, pomoću Jacobijevog identiteta i invarijantnosti forme B nalazimo da je

$$-16(R_{pqrs} + R_{rpqs} + R_{qrps}) = B([y_p,y_q],[y_r,y_s]) + B([y_r,y_p],[y_q,y_s]) + B([y_q,y_r],[y_p,y_s]) =$$

$$= B([[y_p,y_q],y_r],y_s) + B([[y_r,y_p],y_q],y_s) + B([[y_q,y_r],y_p],y_s) = 0.$$

Prema tome, vrijedi

$$R_{pqrs} + R_{rpqs} + R_{qrps} = 0 \qquad \forall p, q, r, s \in \{1, \ldots, n\}. \tag{2.36}$$

Dokazat ćemo sada da iz jednakosti (2.34), (2.35) i (2.36) slijedi da u Cliffordovoj algebri $C(\mathfrak{p})$ vrijedi jednakost

$$\sum_{p,q,r,s=1}^{n} R_{pqrs} y_p y_q y_r y_s = 2 \sum_{p,q=1}^{n} R_{pqqp}. \tag{2.37}$$

Doista, stavimo

$$S = \sum_{p,q,r,s=1}^{n} R_{pqrs} y_p y_q y_r y_s \qquad \text{i} \qquad R = \sum_{p,q=1}^{n} R_{pqqp}.$$

Namjera nam je da prepišemo S sa zamijenjenim indeksima q i r, a zatim iskoristimo jednakost $y_q y_r + y_r y_q = -2\delta_{qr}$. Međutim, to ne možemo neposredno, jer općenito je $R_{pqrs} \neq R_{prqs}$. No prema (2.36) i (2.35) imamo $R_{prqs} = R_{pqrs} + R_{qrps}$, pa nalazimo

$$2S = \sum_{p,q,r,s=1}^{n} (R_{pqrs} y_p y_q y_r y_s + R_{prqs} y_p y_r y_q y_s) =$$

$$= \sum_{p,q,r,s=1}^{n} (R_{pqrs} y_p (y_q y_r + y_r y_q) y_s + R_{qrps} y_p y_r y_q y_s) = -2 \sum_{p,q,s=1}^{n} R_{pqqs} y_p y_s + S',$$

gdje smo stavili

$$S' = \sum_{p,q,r,s=1}^{n} R_{qrps} y_p y_r y_q y_s.$$

Prema (2.34) i (2.35) vrijedi $R_{pqqs} = R_{sqqp}$, dakle,

$$-2 \sum_{p,q,s=1}^{n} R_{pqqs} y_p y_s = - \sum_{p,q,s=1}^{n} R_{pqqs} (y_p y_s + y_s y_p) = 2 \sum_{p,q=1}^{n} R_{pqqp} = 2R.$$

Time smo dokazali da vrijedi

$$2S = 2R + S'. \tag{2.38}$$

Sada primijenimo sličan postupak sa S' kao što smo upravo napravili za S, no ovaj puta zamjenjujemo indekse p i r. Kao i prije imamo $R_{qrps} = R_{qprs} + R_{prqs}$, dakle, imamo

$$2S' = \sum_{p,q,r,s=1}^{n} (R_{qrps} y_p y_r y_q y_s + R_{qprs} y_r y_p y_q y_s) =$$

$$= \sum_{p,q,r,s=1}^{n} (R_{qprs} (y_p y_r + y_r y_p) y_q y_s + R_{prqs} y_p y_r y_q y_s) = -2 \sum_{p,q,s=1}^{n} R_{qpps} y_q y_s + S = 2R + S.$$

Odatle i iz (2.36) dobivamo $S = 2R$, a to je upravo jednakost (2.35).

Na taj način dokazali smo da vrijedi

$$\sum_{k=1}^{m} \beta(x_k)^2 = 2 \sum_{p,q=1}^{n} R_{pqqp} = \frac{1}{8} \sum_{p,q=1}^{n} B([y_p, y_q], [y_p, y_q]).$$

Odatle vidimo da je $\beta(\Omega_{\mathfrak{k}})$ konstanta, tj. multipl jedinice u Cliffordovoj algebri $C(\mathfrak{p})$. Umjesto da tu konstantu izračunavamo izborom neke konkretne baze $\{y_1, \ldots, y_n\}$, uočimo da odatle slijedi da $\Omega_{\mathfrak{k}}$ djeluje na spin−modulu $\mathcal{S}$ množenjem s tom konstantom. Međutim, znamo da je jedna od najvećih težina ireducibilnih $\mathfrak{k}$−podmodula spinornog modula $\mathcal{S}$ jednaka $\rho_{\mathfrak{g}} - \rho_{\mathfrak{k}}$. Stoga tvrdnja slijedi iz propozicije 2.3.11.

Funkcionali $\rho_{\mathfrak{g}}$ i $\rho_{\mathfrak{k}}$ leže u realnom potprostoru $\mathfrak{h}^*_{\mathbb{R}} = span_{\mathbb{R}}\, R$, a restrikcija forme $(\,\cdot\,|\,\cdot\,)$ na $\mathfrak{h}^*_{\mathbb{R}} \times \mathfrak{h}^*_{\mathbb{R}}$ je skalarni produkt. Označimo sa $\|\cdot\|$ normu izvedenu iz tog skalarnog produkta. Dakle, formulu iz propozicije 2.3.13. možemo ovako zapisati

$$\beta\,(\Omega_{\mathfrak{k}}) = \|\rho_{\mathfrak{g}}\|^2 - \|\rho_{\mathfrak{k}}\|^2.$$

Fiksirajmo neki izbor $R^{\mathfrak{k}}_+$ pozitivnih korijena u $R^{\mathfrak{k}}$. Neka je $\mathcal{P}$ skup svih izbora R_+ pozitivnih korijena u R, čije restrikcije na $\mathfrak{t}$ sadrže $R^{\mathfrak{k}}_+$. Stavimo

$$\rho_{\mathfrak{k}} = \frac{1}{2}\sum_{\delta\in R^{\mathfrak{k}}_+}\delta \qquad \text{i} \qquad \rho(R_+) = \frac{1}{2}\sum_{\alpha\in R_+}\alpha.$$

Za svaki $R_+ \in \mathcal{P}$ je $\rho(R_+) - \rho_{\mathfrak{k}}$ jedna od najvećih težina ireducibilnih $\mathfrak{k}-$podmodula od $\mathcal{S}$ i pripadni težinski vektor za tu težinu iz 2.3.4. označimo sa $v_{\mathrm{top}}(R_+)$. Ti su $\mathfrak{k}-$podmoduli međusobno neekvivalentni, jer su im najveće težine međusobno različite.

Propozicija 2.3.14. *Uz uvedene oznake je $\{\rho(R_+) - \rho_{\mathfrak{k}};\ R_+ \in \mathcal{P}\}$ skup najvećih težina svih ireducibilnih $\mathfrak{k}-$podmodula od $\mathcal{S}$.*

Dokaz: Fiksirajmo $R_+ \in \mathcal{P}$. Neka je λ najveća težina nekog ireducibilnog $\mathfrak{k}-$podmodula od $\mathcal{S}$. Prema propoziciji 2.3.11. Casimirov element $\Omega_{\mathfrak{k}}$ na tom podmodulu djeluje kao množenje skalarom $\|\lambda+\rho_{\mathfrak{k}}\|^2 - \|\rho_{\mathfrak{k}}\|^2$. No kako prema propoziciji 2.3.13. Casimirov element $\Omega_{\mathfrak{k}}$ na čitavom spin−modulu $\mathcal{S}$ djeluje kao množenje skalarom $\|\rho(R_+)\|^2 - \|\rho_{\mathfrak{k}}\|^2$, zaključujemo da je $\|\lambda + \rho_{\mathfrak{k}}\| = \|\rho(R_+)\|$. S druge strane, kako je λ težina $\mathfrak{k}-$modula $\mathcal{S}$, prema (2.29) je $\lambda = \rho(R_+) - \rho_{\mathfrak{k}} - \mu$, gdje je μ suma nekih međusobno različitih korijena iz $R_+ \setminus R^{\mathfrak{k}}_+$. Tada je $\|\rho(R_+) - \mu\| = \|\rho(R_+)\|$. Međutim, $\rho(R_+) - \mu$ je neka od težina ireducibilnog $\mathfrak{g}-$modula s najvećom težinom $\rho(R_+)$, pa iz jednakosti $\|\rho(R_+) - \mu\| = \|\rho(R_+)\|$ slijedi da je to jedna od ekstremalnih težina tog modula, odnosno, $\rho(R_+) - \mu = \rho(R'_+)$ za neki $R'_+ \in \mathcal{P}$. Tada je $\lambda = \rho(R'_+) - \rho_{\mathfrak{k}}$ i tvrdnja propozicije je dokazana.

2.3.6 Unitarna struktura na spin−modulu

Neka je V_0 realan konačnodimenzionalan unitaran prostor sa skalarnim produktom $(\,\cdot\,|\,\cdot\,)$. Neka je V kompleksifikacija prostora V_0 i označimo sa $v \mapsto \overline{v}$ kompleksno konjugiranje na V u odnosu na realnu formu V_0. Skalarni produkt $(\,\cdot\,|\,\cdot\,)$ jedinstveno se proširuje do skalarnog produkta na kompleksnom prostoru V i to ćemo proširenje označavati istim znakom $(\,\cdot\,|\,\cdot\,)$. Nadalje, neka je B bilinearna forma na V dobivena $\mathbb{C}-$bilinearnim proširenjem skalarnog produkta $(\,\cdot\,|\,\cdot\,)$ prostora V_0. Naravno, tada je

$$(v|w) = B\,(v, \overline{w})\,, \qquad v, w \in V.$$

Nadalje, forma B je simetrična i nedegenerirana. Za vektor $v \in V_0$ njegov $B-$ortogonalni komplement u prostoru V je upravo ortogonalni komplement tog vektora u odnosu na skalarni produkt.

Neka je U $B-$izotropan potprostor od V. Tada je i potprostor $\overline{U}$ $B-$izotropan. Nadalje, vrijedi $\overline{\left(U \cap \overline{U}\right)} = U \cap \overline{U}$, pa za $u \in U \cap \overline{U}$ slijedi da je i $\overline{u} \in U \cap \overline{U}$. Zbog $B-$izotropnosti dobivamo da je $(u|u) = B\,(u, \overline{u}) = 0$, dakle, $u = 0$. Dakle, za svaki $B-$izotropni potprostor U od V vrijedi $U \cap \overline{U} = \{0\}$.

Izaberimo sada maksimalan $B-$izotropan potprostor U prostora V. Tada je i $\overline{U}$ maksimalan $B-$izotropan potprostor. Ako je prostor V_0 parnodimenzionalan, tada je $V = U \dotplus \overline{U}$. Ukoliko je prostor V_0 neparnodimenzionalan, onda najprije izaberemo jedinični vektor $e \in V_0$ i tada imamo $e^{\perp} = U \dotplus \overline{U}$. Označimo kao i prije sa $\mathcal{S} = \bigwedge(U)$ spin−modul za Cliffordovu algebru $C(V)$.

Ako je $\{e_1, \ldots, e_n\}$ baza potprostora U koja je ortonormirana u odnosu na skalarni produkt prostora V, onda je očito $\{\overline{e}_1, \ldots, \overline{e}_n\}$ njoj $B-$biortogonalna baza od $\overline{U}$.

Propozicija 2.3.15. (*a*) *Na prostoru $\mathcal{S}$ postoji jedinstven skalarni produkt $\langle\,\cdot\,|\,\cdot\,\rangle$ u odnosu na koji je $\bigwedge^j(U) \perp \bigwedge^k(U)$ za $j \neq k$ i za koji vrijedi $\langle 1|1\rangle = 1$ i*

$$\langle x_1 \wedge \cdots \wedge x_k | y_1 \wedge \cdots \wedge y_k\rangle = \det\left[2(x_i|y_j)\right], \qquad x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_k \in U. \tag{2.39}$$

(*b*) *Za svaki $v \in V$ i $u, u' \in \mathcal{S}$ vrijedi*

$$\langle vu|u'\rangle = -\langle u|\overline{v}u'\rangle. \tag{2.40}$$

Dokaz: (*a*) Neka je $\{e_1, \ldots, e_n\}$ baza od U ortonormirana u odnosu na skalarni produkt prostora V. Neka je $\langle\,\cdot\,|\,\cdot\,\rangle$ skalarni produkt na prostoru $\mathcal{S}$ u odnosu na koji je baza

$$\{e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_k};\ 0 \leq k \leq n,\ 1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n\}$$

ortogonalna i takva da je kvadrat norme vektora $e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_k}$ jednak 2^k. Tada je $\langle 1|1\rangle = 1$ i očito vrijedi formula (2.39) za vektore $x_i, y_j \in \{e_1, \ldots, e_n\}$. Budući da su za fiksne vektore $y_1, \ldots, y_k \in \{e_1, \ldots, e_n\}$ lijeva i desna strana u jednakosti (2.39) $k-$multilinearne i alternirajuće u odnosu na $x_1, \ldots, x_k \in U$, zaključujemo da ta jednakost vrijedi za $y_1, \ldots, y_k \in \{e_1, \ldots, e_n\}$ i za proizvoljne $x_1, \ldots, x_k \in U$. Nadalje, za fiksne $x_1, \ldots, x_k \in U$ lijeva i desna strana kompleksno konjugirane jednakosti (2.39) su $k-$multilinearne i alternirajuće u odnosu na $y_1, \ldots, y_k \in U$, pa slijedi da jednakost (2.39) vrijedi za sve $x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_k \in U$. Time je dokazana egzistencija skalarnog produkta $\langle\,\cdot\,|\,\cdot\,\rangle$ na prostoru $\mathcal{S}$ s traženim svojstvom. Jedinstvenost takvog skalarnog produkta je očigledna jer vektori 1 i $x_1 \wedge \cdots \wedge x_k$ za $k \in \{1, \ldots, n\}$ i $x_1, \ldots, x_k \in U$ razapinju prostor $\mathcal{S}$.

(*b*) Jednakost (2.40) dovoljno je dokazati za $v \in V$ i za vektore u, u' iz neke baze od $\mathcal{S}$, npr. one baze koju smo koristili u dokazu tvrdnje (*a*). Nadalje, za fiksne $u, u' \in \mathcal{S}$ lijeva i desna strana su linearne u odnosu na $v \in V$, dakle, dovoljno je jednakost dokazati za vektore v iz neke baze od V, npr. $\{e_1, \ldots, e_n, \overline{e}_1, \ldots, \overline{e}_n\}$ ako je prostor V parnodimenzionalan, odnosno, $\{e, e_1, \ldots, e_n, \overline{e}_1, \ldots, \overline{e}_n\}$ ako je prostor V neparnodimenzionalan. Dakle, treba dokazati da vrijedi

$$\langle e_k \wedge e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_r} | e_{j_1} \wedge \cdots \wedge e_{j_s}\rangle = -\langle e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_r} | \overline{e}_k(e_{j_1} \wedge \cdots \wedge e_{j_s})\rangle,$$

$$\langle \overline{e}_k(e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_r}) | e_{j_1} \wedge \cdots \wedge e_{j_s}\rangle = -\langle e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_r} | e_k \wedge e_{j_1} \wedge \cdots \wedge e_{j_s}\rangle,$$

$$\langle e(e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_r}) | e_{j_1} \wedge \cdots \wedge e_{j_s}\rangle = -\langle e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_r} | e(e_{j_1} \wedge \cdots \wedge e_{j_s})\rangle,$$

za $k \in \{1, \ldots, n\}$, $1 \leq i_1 < \cdots < i_r \leq n$ i $1 \leq j_1 < \cdots < j_s \leq n$. U prvoj od gornjih jednakosti lijeva i desna strana jednake su nuli osim ako je $\{k, i_1, \ldots, i_r\} = \{j_1, \ldots, j_s\}$. U tom slučaju je $s = r + 1$ i za neki $k \in \{1, \ldots, r + 1\}$ vrijedi

$$i_1 = j_1\,, \ \ldots\ , i_{p-1} = j_{p-1}\,, k = j_p\,, i_p = j_{p+1}\,, \ \ldots\ , i_r = j_{r+1}\,,$$

a tada je i lijeva i desna strana jednaka $(-1)^{p-1}2^{r+1}$. Druga je jednakost ekvivalentna prvoj, jer se iz prve dobiva kompleksnim konjugiranjem. Napokon, ako je prostor V neparnodimenzionalan, treba dokazati i treću jednakost. No ona slijedi iz činjenice da je djelovanje e na svakom od potprostora $\bigwedge^r(U)$ množenje čisto imaginarnim skalarom $\pm i$.

Razmotrimo sada posebno slučaj kad je $\mathfrak{g}_0$ realna reduktivna Liejeva algebra, $\mathfrak{g}$ njena kompleksifikacija, ϑ Cartanova involucija od $\mathfrak{g}_0$ proširena $\mathbb{C}-$linearno na $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{k}_0 \dotplus \mathfrak{p}_0$ pripadna Cartanova dekompozicija. Neka je B simerična nedegenerirana invarijantna i $\vartheta-$invarijantna bilinearna forma na $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$. Neka je $x \mapsto \overline{x}$ konjugacija od $\mathfrak{g}$ u odnosu na realnu formu $\mathfrak{g}_0$ i neka je $\mathfrak{u}$ realna forma od $\mathfrak{g}$ pridružena konjugaciji $x \mapsto \vartheta\overline{x}$. Tada je $\mathfrak{u} = \mathfrak{k}_0 \dotplus i\mathfrak{p}_0$ i to je kompaktna forma od $\mathfrak{g}$. Restrikcija $B|\mathfrak{u} \times \mathfrak{u}$ je negativno definitna, pa kao skalarni produkt na $\mathfrak{u}$ možemo izabrati $(\cdot|\cdot) = -B|\mathfrak{u} \times \mathfrak{u}$. Skalarni produkt na $\mathfrak{g}$ dobiven proširenjem tog skalarnog produkta na $\mathfrak{u}$ označimo također sa $(\cdot|\cdot)$. Tada se lako vidi da je

$$(x|y) = -B\left(x, \vartheta\overline{y}\right), \qquad x, y \in \mathfrak{g}.$$

Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ je kvadratična u odnosu na formu B. Neka je $\mathfrak{r}$ kvadratična podalgebra koja je reduktivna u $\mathfrak{g}$ i neka je $\mathfrak{s} = \mathfrak{r}^{\perp}$ njen $B-$ortogonalan komplement. Skalarni produkt na $\mathfrak{s}$ dobiven restrikcijom gornjeg skalarnog produkta na $\mathfrak{s} \times \mathfrak{s}$ upotrijebimo kao ranije za definiciju skalarnog produkta na spin$-$modulu $\mathcal{S}$ za Cliffordovu algebru $C(\mathfrak{s})$. Sada neposredno iz propozicije 2.3.15. slijedi

Korolar 2.3.16. *Uz gornje pretpostavke i oznake vrijedi*

$$\langle xu|u'\rangle = -\langle u|(\vartheta\overline{x})u'\rangle, \qquad x \in \mathfrak{s}, \quad u, u' \in \mathcal{S}.$$

Poglavlje 3

ALGEBARSKI DIRACOVI OPERATORI

3.1 Definicije i osnovna svojstva

U ovom je poglavlju G **povezana** realna reduktivna grupa. Upotrebljavat ćemo oznake iz odjeljka 1.11. uz dodatnu pretpostavku da je grupa G povezana. Dakle, imamo konačno natkrivanje $p : G \to G_0$, gdje je G_0 komponenta povezanosti jedinice neke grupe G_R realnih točaka simetrične afine algebarske grupe G_C definirane nad $\mathbb{R}$. Cartanova involucija od G_R dana je sa $\vartheta(g) = (g^{-1})^*$. Restrikcija $\vartheta|G_0$ je involutivni automorfizam grupe G_0 i on se prema tvrdnji (b) teorema 1.11.2. podiže do involutivnog automorfizma grupe G, koji ćemo označavati također sa ϑ i zvati Cartanova involucija od G. Istim znakom označavamo i diferencijal od ϑ, koji je Cartanova involucija Liejeve algebre od G i od G_0. Za razliku od odjeljke 1.11. sada ćemo Liejevu algebru grupa G, G_R i G_0 označavati sa $\mathfrak{g}_0$. Vrijedi $\vartheta x = -x^t$ ako Liejevu algebru $\mathfrak{g}_0$ shvatimo kao Liejevu podalgebru od $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ kao u 1.11. Sada će $\mathfrak{g}$ označavati kompleksifikaciju od $\mathfrak{g}_0$, odnosno, Liejevu algebru od G_C. Cartanova involucija se po $\mathbb{C}-$linearnosti proširuje do involutivnog automorfizam kompleksne Liejeve algebre $\mathfrak{g}$, koji ćemo također označavati sa ϑ; naravno, tada je $\vartheta x = -x^t$ i za $x \in \mathfrak{g}$.

Neka je kao u 1.11.

$$K = \{k \in G;\ \vartheta(k) = k\}$$

maksimalna kompaktna podgrupa od G pridružena Cartanovoj involuciji ϑ. Nadalje, neka je

$$\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{k}_0 \dot{+} \mathfrak{p}_0, \qquad \mathfrak{k}_0 = \{x \in \mathfrak{g}_0;\ \vartheta x = x\}, \qquad \mathfrak{p}_0 = \{y \in \mathfrak{g}_0;\ \vartheta y = -y\},$$

pripadna Cartanova dekompozicija Liejeve algebre $\mathfrak{g}_0$. Neka su $\mathfrak{k}$ i $\mathfrak{p}$ kompleksifikacije od $\mathfrak{k}_0$ i $\mathfrak{p}_0$. Tada je uz spomenuto $\mathbb{C}-$linearno proširenje od ϑ

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \dot{+} \mathfrak{p}, \qquad \mathfrak{k} = \{x \in \mathfrak{g};\ \vartheta x = x\}, \qquad \mathfrak{p} = \{y \in \mathfrak{g};\ \vartheta y = -y\}$$

Formulom

$$B(x, y) = \operatorname{Tr} xy, \qquad x, y \in \mathfrak{g},$$

definirana je invarijantna nedegenerirana simetrična bilinearna forma na $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$. Kako je ona i $\vartheta-$invarijantna, vrijedi $\mathfrak{p} = \mathfrak{k}^\perp$ i restrikcije $B|\mathfrak{k} \times \mathfrak{k}$ i $B|\mathfrak{p} \times \mathfrak{p}$ su nedegenerirane. Napomenimo još da je restrikcija $B|\mathfrak{k}_0 \times \mathfrak{k}_0$ negativno definitna, a restrikcija $B|\mathfrak{p}_0 \times \mathfrak{p}_0$ je pozitivno definitna.

Promatrat ćemo sada unitalnu algebru $U(\mathfrak{g}) \otimes C(\mathfrak{p})$, u kojoj je množenje definirano tako da vrijedi

$$(u \otimes x)(v \otimes y) = uv \otimes xy, \qquad u, v \in U(\mathfrak{g}), \quad x, y \in C(\mathfrak{p}).$$

Pri tome je, naravno, $C(\mathfrak{p})$ oznaka za Cliffordovu algebru nad kompleksnim vektorskim prostorom $\mathfrak{p}$ s nedegeneriranom simetričnom bilinearnom formom $B|\mathfrak{p}\times\mathfrak{p}$. **Diracov operator** je element $D \in U(\mathfrak{g}) \otimes C(\mathfrak{p})$ definiran sa

$$D = \sum_{j=1}^{n} z_j \otimes z_j,$$

gdje je $\{z_1, \ldots, z_n\}$ ortonormirana baza od $\mathfrak{p}$ u odnosu na formu $B|\mathfrak{p}\times\mathfrak{p}$, tj. $B(z_j, z_k) = \delta_{jk}$.

Propozicija 3.1.1. (a) *Element D ne ovisi o izboru ortonormirane baze od $\mathfrak{p}$.*

(b) *Ako su $\{a_1, \ldots, a_n\}$ i $\{b_1, \ldots, b_n\}$ baze od $\mathfrak{p}$ koje su biortogonalne u odnosu na formu $B|\mathfrak{p}\times\mathfrak{p}$, onda vrijedi*

$$D = \sum_{j=1}^{n} a_j \otimes b_j.$$

(c) *Element D je invarijantan u odnosu na djelovanje grupe K automorfizmima unitalne algebre $U(\mathfrak{g}) \otimes C(\mathfrak{p})$ dobiveno kao tenzorski produkt prirodnih djelovanja grupe K automorfizmima unitalnih algebri $U(\mathfrak{g})$ i $C(\mathfrak{p})$; pri tome je djelovanje elementa $k \in K$ na $U(\mathfrak{g})$ jedinstven automorfizam unitalne algebre $U(\mathfrak{g})$ čija je restrikcija na $\mathfrak{g}$ jednaka $Ad_{\mathfrak{g}}\, k$, a djelovanje $k \in K$ na $C(\mathfrak{p})$ je jedinstven automorfizam unitalne algebre $C(\mathfrak{p})$ čija je restrikcija na $\mathfrak{p}$ jednaka $Ad_{\mathfrak{p}}\, k = (Ad_{\mathfrak{g}}\, k)\,|\mathfrak{p}$.*

Dokaz: Neka je $T \in \mathfrak{o}(\mathfrak{p})$ i neka je $[\tau_{jk}]$ njegova matrica u bazi $\{z_1, \ldots, z_n\}$. Ta je matrica ortogonalna, pa vrijedi

$$\sum_{j=1}^{n} \tau_{pj}\tau_{qj} = \delta_{pq}.$$

Stoga dobivamo

$$\sum_{j=1}^{n} Tz_j \otimes Tz_j = \sum_{j,p,q=1}^{n} \tau_{pj} z_p \otimes \tau_{qj} z_q = \sum_{p,q=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} \tau_{pj}\tau_{qj} \right) z_p \otimes z_q = \sum_{p=1}^{n} z_p \otimes z_p = D.$$

Odatle slijedi tvrdnja (a), jer proizvoljna ortonormirana baza od $\mathfrak{p}$ ima oblik $\{Tz_1, \ldots, Tz_n\}$ za neki $T \in \mathfrak{o}(\mathfrak{p})$, a slijedi i tvrdnja ($c$) jer za svaki $k \in K$ je $Ad_{\mathfrak{p}}\, k \in \mathfrak{o}(\mathfrak{p})$.

Da dokažemo tvrdnju (b) prikažimo vektore dviju baza pomoću ortonormirane baze $\{z_1, \ldots, z_n\}$:

$$a_j = \sum_{p=1}^{n} \alpha_{pj} z_p, \qquad b_k = \sum_{q=1}^{n} \beta_{qk} z_q, \qquad j, k \in \{1, \ldots, n\}.$$

Imamo

$$\delta_{jk} = B(a_j, b_k) = \sum_{p,q=1}^{n} \alpha_{pj}\beta_{qk} B(z_p, z_q) = \sum_{p=1}^{n} \alpha_{pj}\beta_{pk}.$$

To pokazuje da je matrica $[\alpha_{ij}]$ transponirana od inverzne matrice od $[\beta_{ij}]$. No tada vrijedi i

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_{pj}\beta_{qj} = \delta_{pq},$$

pa dobivamo

$$\sum_{j=1}^{n} a_j \otimes b_j = \sum_{j,p,q=1}^{n} \alpha_{pj}\beta_{qj} z_p \otimes z_q = \sum_{p,q=1}^{n} \delta_{pq} z_p \otimes z_q = \sum_{p=1}^{n} z_p \otimes z_p = D.$$

Sjetimo se sada homomorfizma Liejevih algebri $\beta : \mathfrak{k} \to C(\mathfrak{p})$, koji je prema propoziciji 2.3.7. dan formulom (2.25), odnosno,

$$\beta(x) = \frac{1}{2} \sum_{1 \le j < k \le n} B\left(x, [z_j, z_k]\right) z_j z_k, \qquad x \in \mathfrak{k}, \tag{3.1}$$

za bilo koju ortonormiranu bazu $\{z_1, \ldots, z_n\}$ od $\mathfrak{p}$.

Propozicija 3.1.2. (*a*) *Preslikavanje* $\Delta : \mathfrak{k} \to U(\mathfrak{g}) \otimes C(\mathfrak{p})$, *definirano sa*

$$\Delta(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes \beta(x), \qquad x \in \mathfrak{k},$$

je Liejev morfizam.

(*b*) *Jedinstveno proširenje Liejevog morfizma iz* (*a*) *do unitalnog homomorfizma* Δ *sa* $U(\mathfrak{k})$ *u* $U(\mathfrak{g}) \otimes C(\mathfrak{p})$ *je injektivno.*

Dokaz: (*a*) Za $x, y \in \mathfrak{k}$ imamo

$$\Delta(xy) = \Delta(x)\Delta(y) = [x\otimes 1 + 1\otimes\beta(x)][y\otimes 1 + 1\otimes\beta(y)] = xy\otimes 1 + x\otimes\beta(y) + y\otimes\beta(x) + 1\otimes\beta(x)\beta(y).$$

β je Liejev morfizam sa $\mathfrak{k}$ u $C(\mathfrak{p})$, pa za proizvoljne $x, y \in \mathfrak{k}$ imamo redom

$$[\Delta(x), \Delta(y)] = xy\otimes 1 + x\otimes\beta(y) + y\otimes\beta(x) + 1\otimes\beta(x)\beta(y) - yx\otimes 1 - y\otimes\beta(x) - x\otimes\beta(y) - 1\otimes\beta(y)\beta(x) =$$

$$= (xy - yx) \otimes 1 + 1 \otimes (\beta(x)\beta(y) - \beta(y)\beta(x)) = [x, y] \otimes 1 + 1 \otimes \beta([x, y]) = \Delta([x, y]).$$

Prema tome, $\Delta : \mathfrak{k} \to U(\mathfrak{g}) \otimes C(\mathfrak{p})$ je Liejev morfizam.

(*b*) Definiramo filtraciju $\left(F_p(U(\mathfrak{g}) \otimes C(\mathfrak{p}))\right)_{p\in\mathbb{Z}_+}$ algebre $U(\mathfrak{g}) \otimes C(\mathfrak{p})$ kao običnu filtraciju od $U(\mathfrak{g})$ tenzoriranu s trivijalnom filtracijom od $C(\mathfrak{p})$:

$$F_p(U(\mathfrak{g}) \otimes C(\mathfrak{p})) = U_p(\mathfrak{g}) \otimes C(\mathfrak{p}).$$

Tada vidimo da je $\Delta(U_p(\mathfrak{k})) \subseteq F_p(U(\mathfrak{g}) \otimes C(\mathfrak{p}))$ za svaki $p \in \mathbb{Z}_+$. Nadalje, ako je $\{x_1, \ldots, x_r\}$ baza od $\mathfrak{k}$, onda za bilo koji monom $u = x_1^{m_1} \cdots x_r^{m_r}$ iz pripadne $PBW-$baze od $U(\mathfrak{k})$ vrijedi

$$\Delta(u) - u \otimes 1 \in F_{m-1}(U(\mathfrak{g}) \otimes C(\mathfrak{p})), \qquad m = m_1 + \cdots + m_r.$$

Budući da je za svaki $m \in \mathbb{Z}_+$

$$\{x_1^{m_1} \cdots x_r^{m_r};\ (m_1, \ldots, m_r) \in \mathbb{Z}_+^r,\ m_1 + \cdots + m_r = m\}$$

baza direktnog komplementa od $U_{m-1}(\mathfrak{k})$ u $U_m(\mathfrak{k})$, slijedi da je restrikcija Δ na svaki od tih direktnih komplemenata injektivna. Kako je $U(\mathfrak{k})$ direktna suma svih tih direktnih komplemenata, slijedi da je Δ monomorfizam.

Sliku od $\mathfrak{k}$ pri preslikavanju Δ označavat ćemo sa $\mathfrak{k}_\Delta$. Tada je slika od $U(\mathfrak{k})$ pri monomorfizmu Δ univerzalna omotačka algebra $U(\mathfrak{k}_\Delta)$ Liejeve algebre $\mathfrak{k}_\Delta$. Nadalje, označimo sa $\Omega_\mathfrak{g}$, $\Omega_\mathfrak{k}$ i $\Omega_{\mathfrak{k}_\Delta}$ Casimirove elemente za Liejeve algebre $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{k}$ i $\mathfrak{k}_\Delta$. Naravno, tada je $\Omega_{\mathfrak{k}_\Delta} = \Delta\left(\Omega_\mathfrak{k}\right)$.

U daljnjem je kao i u 2.3.4. i 2.3.5. $\mathfrak{h} = \mathfrak{t} \dotplus \mathfrak{a}$ fundamentalna Cartanova podalgebra od $\mathfrak{g}$: dakle, $\mathfrak{t}$ je Cartanova podalgebra od $\mathfrak{k}$ i $\mathfrak{a} = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}$. Pretpostavljamo da smo izabrali sukladne pozitivne skupove korijena R_+ u $R = R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ i $R_+^\mathfrak{k}$ u $R^\mathfrak{k} = R(\mathfrak{k}, \mathfrak{t})$. Kao i obično stavljamo

$$\rho_\mathfrak{g} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in R_+} \alpha \qquad \text{i} \qquad \rho_\mathfrak{k} = \frac{1}{2} \sum_{\delta \in R_+^\mathfrak{k}} \delta.$$

Propozicija 3.1.3. *Kvadrat Diracovog operatora D jednak je*

$$D^2 = -\Omega_{\mathfrak{g}} \otimes 1 + \Omega_{\mathfrak{k}_\Delta} + c1 \otimes 1,$$

gdje je $c = \|\rho_{\mathfrak{k}}\|^2 - \|\rho_{\mathfrak{g}}\|^2$ i $\|\cdot\|$ je norma na realnom prostoru $\mathfrak{t}^*_{\mathbb{R}} = span_{\mathbb{R}}\, R^{\mathfrak{k}}$ dobivena iz skalarnog produkta $B|\mathfrak{t}_{\mathbb{R}} \times \mathfrak{t}_{\mathbb{R}}$.

Dokaz: Neka je $\{z_1, \ldots, z_n\}$ baza od $\mathfrak{p}$ ortonormirana u odnosu na restrikciju $B|\mathfrak{p}\times\mathfrak{p}$. Nadalje, neka je $\{x_1, \ldots, x_r\}$ baza od $\mathfrak{k}$ ortonormirana u odnosu na formu $-B|\mathfrak{k} \times \mathfrak{k}$. Tada u $C(\mathfrak{p})$ vrijedi $z_j z_k = -z_k z_j$ za $j \neq k$ i $z_j^2 = -1$, pa imamo

$$D^2 = \sum_{j,k=1}^{n} z_j z_k \otimes z_j z_k = \sum_{j=1}^{n} z_j^2 \otimes z_j^2 + \sum_{1\leq j<k\leq n} (z_j z_k - z_k z_j) \otimes z_j z_k = -\sum_{j=1}^{n} z_j^2 \otimes 1 + \sum_{1\leq j<k\leq n} [z_j, z_k] \otimes z_j z_k.$$

S druge strane, imamo

$$\Omega_{\mathfrak{g}} \otimes 1 = -\sum_{i=1}^{r} x_i^2 \otimes 1 + \sum_{j=1}^{n} z_j^2 \otimes 1, \qquad \Omega_{\mathfrak{k}} = -\sum_{i=1}^{r} x_i^2$$

i

$$\Omega_{\mathfrak{k}_\Delta} = \Delta\left(\Omega_{\mathfrak{k}}\right) = -\sum_{i=1}^{r} (x_i \otimes 1 + 1 \otimes \beta(x_i))^2 = -\sum_{i=1}^{r} x_i^2 \otimes 1 - 2\sum_{i=1}^{r} x_i \otimes \beta(x_i) - \sum_{i=1}^{r} 1 \otimes \beta(x_i)^2.$$

Prema tome, tvrdnja će biti dokazana ako dokažemo jednakosti

$$\sum_{1\leq j<k\leq n} [z_j, z_k] \otimes z_j z_k = -2\sum_{i=1}^{r} x_i \otimes \beta(x_i) \tag{3.2}$$

i

$$\sum_{i=1}^{r} \beta(x_i)^2 = \|\rho_{\mathfrak{k}}\|^2 - \|\rho_{\mathfrak{g}}\|^2. \tag{3.3}$$

Jednakost (3.3) je upravo tvrdnja propozicije 2.3.13. Dokažimo sada jednakost (3.2). Primijenimo li (3.1) na svaki od vektora x_i, nalazimo

$$-2\sum_{i=1}^{r} x_i \otimes \beta(x_i) = -\sum_{i=1}^{r} \sum_{1\leq j<k\leq n} B\left(x_i, [z_j, z_k]\right) x_i \otimes z_j z_k. \tag{3.4}$$

Kako je $[z_j, z_k] \in [\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] \subseteq \mathfrak{k}$, i kako je baza $\{x_1, \ldots, x_r\}$ od $\mathfrak{k}$ ortonormirana u odnosu na $-B|\mathfrak{k} \times \mathfrak{k}$, imamo

$$[z_j, z_k] = -\sum_{i=1}^{r} B\left(x_i, [z_j, z_k]\right) x_i.$$

Odatle i iz (3.4) slijedi (3.2).

3.2 Diracova kohomologija i Voganove slutnje

Uz oznake i pretpostavke iz prethodnog odjeljka neka je X $(\mathfrak{g}, K)-$modul. Da bismo mogli imati djelovanje Diracovog operatora treba definirati djelovanje unitalne algebre $U(\mathfrak{g}) \otimes C(\mathfrak{p})$. Zbog toga zamijenimo X sa $X \otimes \mathcal{S}$, gdje je $\mathcal{S}$ spin$-$modul za Cliffordovu algebru $C(\mathfrak{p})$. Djelovanje algebre $U(\mathfrak{g}) \otimes C(\mathfrak{p})$ karakterizirano je sa

$$(u \otimes a)(x \otimes s) = ux \otimes as, \qquad u \in U(\mathfrak{g}), \quad a \in C(\mathfrak{p}), \quad x \in X, \quad s \in \mathcal{S}.$$

Međutim, nemamo prirodno djelovanje grupe K na tom modulu. Naime, restrikcija adjungiranog djelovanja vodi na homomorfizam $Ad_{\mathfrak{p}_0} : K \to O(\mathfrak{p}_0)$, gdje je $Ad_{\mathfrak{p}_0} k = (Ad\, k)|\mathfrak{p}_0$. Kako je grupa G, dakle i K, po pretpostavci povezana, imamo homomorfizam $Ad_{\mathfrak{p}_0} : K \to SO(\mathfrak{p}_0)$. Međutim, na spin$-$modulu ne djeluje grupa $SO(\mathfrak{p}_0)$, nego njezin dvolisni natkrivač $Spin(\mathfrak{p}_0)$.

Taj problem rješavamo tako da uvedemo tzv. **spinski dvolisni natkrivač** $\tilde{K}$ grupe K i to pomoću sljedećeg dijagrama (tzv. *pullback* dijagram):

$$\begin{tikzcd}
\tilde{K} \arrow[r] \arrow[d] & Spin(\mathfrak{p}_0) \arrow[d, "p"] \\
K \arrow[r, "Ad_{\mathfrak{p}_0}"] & SO(\mathfrak{p}_0)
\end{tikzcd}$$

Pri tome je $p : Spin(\mathfrak{p}_0) \to SO(\mathfrak{p}_0)$ dvolisno natkrivanje iz odjeljka 2.1. Grupa $\tilde{K}$ je definirana kao podgrupa od $K \times Spin(\mathfrak{p}_0)$ koja se sastoji od svih uređenih parova (k, t) takvih da je $Ad_{\mathfrak{p}_0} k = p(t)$. Strelice iz $\tilde{K}$ su restrikcije na $\tilde{K}$ projekcija produkta $K \times Spin(\mathfrak{p}_0)$ na dva faktora. Tada je $\tilde{K} \to K$ dvolisno natkrivanje. Može se dogoditi da je to natkrivanje trivijalno, odnosno, da je $\tilde{K}$ nepovezana grupa, a tada je ona izomorfna sa $K \times \{\pm 1\}$ i na svakoj je komponenti povezanosti natkrivanje difeomorfizam. To je sigurno tako ako je grupa K jednostavno povezana.

Sada definiramo djelovanje grupe $\tilde{K}$ na $U(\mathfrak{g}) \otimes C(\mathfrak{p})-$modulu $X \otimes \mathcal{S}$ na sljedeći način:

$$(k, t) \sum_j x_j \otimes s_j = \sum_j kx_j \otimes ts_j, \qquad (k, t) \in \tilde{K},\ x_j \in X,\ s_j \in \mathcal{S}.$$

Nadalje, definiramo djelovanje grupe $\tilde{K}$ automorfizmima algebre $U(\mathfrak{g}) \otimes C(\mathfrak{p})$. Element $\tilde{k} = (k, t)$ grupe $\tilde{K}$ djeluje automorfizmom $Ad\, \tilde{k}$ za koji vrijedi

$$(Ad\, \tilde{k})(u \otimes a) = (Ad\, k)u \otimes tat^{-1}, \qquad u \in U(\mathfrak{g}), \quad a \in C(\mathfrak{p}).$$

Pri tome je $Ad\, k$ jedinstveno proširenjem automorfizma $Ad\, k$ Liejeve algebre $\mathfrak{g}_0$ do automorfizma unitalne algebre $U(\mathfrak{g})$, a $a \mapsto tat^{-1}$ je djelovanje grupe $Spin(\mathfrak{p}_0)$ na Cliffordovoj algebri $C(\mathfrak{p}) = C(\mathfrak{p}_0)^{\mathbb{C}}$ iz odjeljka 2.1. Pri tome podsjećamo da je grupa $Spin(\mathfrak{p}_0)$ definirana kao podgrupa multiplikativne grupe $C(\mathfrak{p}_0)^{\times} \subseteq C(\mathfrak{p})^{\times}$.

Primijetimo sada da diferencijali homomorfizama u pullback dijagramu koji definira grupu $\tilde{K}$ daju sljedeći dijagram:

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{k}_0 \arrow[r] \arrow[d, "id"'] & C(\mathfrak{p}_0)^{(2)} \arrow[d, "\simeq"] \\
\mathfrak{k}_0 \arrow[r, "ad_{\mathfrak{p}_0}"] & \mathfrak{o}(\mathfrak{p}_0)
\end{tikzcd}$$

Odatle se vidi da je gornja strelica upravo Liejev morfizam $\beta : \mathfrak{k}_0 \to C(\mathfrak{p})$. Diferencijal djelovanja $\tilde{K}$ na algebri $U(\mathfrak{g}) \otimes C(\mathfrak{p})$ je tenzorski produkt adjungiranog djelovanja Liejeve algebre $\mathfrak{k}_0$ grupe $\tilde{K}$ na dva faktora $U(\mathfrak{g})$ i $C(\mathfrak{p})$, a to je upravo djelovanje komutatorima dijagonalne slike $\mathfrak{k}_{0\Delta}$ od $\mathfrak{k}_0$ u algebri $U(\mathfrak{g}) \otimes C(\mathfrak{p})$.

Uz takvo djelovanje grupe $\tilde{K}$ na unitalnoj algebri $U(\mathfrak{g}) \otimes C(\mathfrak{p})$ možemo sada definirati pojam $(U(\mathfrak{g}) \otimes C(\mathfrak{p}), \tilde{K})-$modula: to je kompleksan vektorski prostor Y koji je $U(\mathfrak{g}) \otimes C(\mathfrak{p})-$modul i lokalno konačan $\tilde{K}-$modul, takav da se diferencijal djelovanja $\tilde{K}$ podudara s djelovanjem $\mathfrak{k}_{0,\Delta}$ i takav da je djelovanje $U(\mathfrak{g}) \otimes C(\mathfrak{p})$ na X $\tilde{K}-$ekvivarijantno, tj. vrijedi

$$\tilde{k}(uy) = [(Ad\,\tilde{k})u]\tilde{k}y, \qquad \tilde{k} \in \tilde{K}, \quad u \in U(\mathfrak{g}) \otimes C(\mathfrak{p}), \quad y \in Y.$$

Propozicija 3.2.1. *Za $(\mathfrak{g}, K)-$modul X i spin$-$modul $\mathcal{S}$ za $C(\mathfrak{p})$, uz opisano djelovanje $X \otimes \mathcal{S}$ je $(U(\mathfrak{g}) \otimes C(\mathfrak{p}), \tilde{K})-$modul.*

Dokaz: Sve već znamo osim $\tilde{K}-$ekvivarijantnosti djelovanja. No to se dobiva direktnom provjerom: naime, za $\tilde{k} = (k, t) \in \tilde{K}$, $u \in U(\mathfrak{g})$, $a \in C(\mathfrak{p})$, $x \in X$ i $s \in \mathcal{S}$ imamo redom

$$\tilde{k}(u \otimes a)(x \otimes s) = \tilde{k}(ux \otimes as) = kux \otimes tas = [(Ad\,k)u]kx \otimes tat^{-1}ts =$$

$$= [(Ad\,k)u \otimes tat^{-1}](kx \otimes ts) = [(Ad\,\tilde{k})(u \otimes a)]\tilde{k}(x \otimes s).$$

Dakle, Diracov operator D djeluje na modulu $X \otimes \mathcal{S}$. Iz tvrdnje (c) propozicije 3.1.1. slijedi da tako definirano djelovanje komutira s djelovanjem grupe $\tilde{K}$. Prema tome, $\operatorname{Ker} D$ i $\operatorname{Im} D$ su $\tilde{K}-$podmoduli od $X \otimes \mathcal{S}$. **Diracova kohomologija** $(\mathfrak{g}, K)-$modula X je $\tilde{K}-$modul

$$H_D(X) = (\operatorname{Ker} D) / \left((\operatorname{Im} D) \cap (\operatorname{Ker} D) \right).$$

Promotrimo sada $\tilde{K}-$podmodul $\operatorname{Ker} D^2$ od $X \otimes \mathcal{S}$. Za operator $d = D|\operatorname{Ker} D^2$ vrijedi $d^2 = 0$, pa je $\operatorname{Im} d \subseteq \operatorname{Ker} d$. Diracova kohomologija je očito izomorfna kvocijentnom $\tilde{K}-$modulu $(\operatorname{Ker} d)/(\operatorname{Im} d)$. Ako je X modul s infinitezimalnim karakterom, prema propoziciji 3.1.3. na svim ireducibilnim $\tilde{K}-$podmodulima potprostora $\operatorname{Ker} D^2$ od $X \otimes \mathcal{S}$ Casimirov element $\Omega_{\mathfrak{k}_\Delta}$ djeluje kao množenje s istim brojem. Ako ireducibilan $\tilde{K}-$modul, odnosno, pripadni ireducibilni $\mathfrak{k}-$modul ima najveću težinu μ, onda znamo da je djelovanje Casimirovog elementa množenje sa $\|\mu + \rho_\mathfrak{k}\|^2 - \|\rho_\mathfrak{k}\|^2$. Budući da je skup težina konačnodimenzionalnih $\mathfrak{k}-$modula rešetka u $\mathfrak{t}^*_\mathbb{R}$, vidimo da ima samo konačno mnogo mogućnosti za μ. Odatle slijedi da je prostor $\operatorname{Ker} D^2$ konačnodimenzionalan ako je X dopustiv $(\mathfrak{g}, K)-$modul s infinitezimalnim karakterom. Posebno, to vrijedi ako je X ireducibilan, dakle, i ako je konačne duljine. Dakle, vrijedi

Propozicija 3.2.2. *Ako je $(\mathfrak{g}, K)-$modul X konačne duljine, onda je Diracova kohomologija $H_D(X)$ konačnodimenzionalna.*

Pretpostavimo sada da je $(\mathfrak{g}, K)-$modul X unitaran, tj. da je zadan skalarni produkt $(\cdot|\cdot)_X$ na prostoru X za koji vrijedi

$$(kx|kx')_X = (x|x')_X \quad \forall k \in K \quad \text{i} \quad \forall x, x' \in X$$

i

$$(zx|x')_X = -(x|zx')_X \quad \forall z \in \mathfrak{g}_0 \quad \text{i} \quad \forall x, x' \in X.$$

Na spin−modulu $\mathcal{S}$ smo u 2.3.6. definirali skalarni produkt, označimo da sada sa $\langle\cdot|\cdot\rangle_{\mathcal{S}}$, u odnosu na koji svi elementi $z \in \mathfrak{p}_0$ djeluju kao antihermitski operatori:

$$\langle zs|s'\rangle_{\mathcal{S}} = -\langle s|zs'\rangle_{\mathcal{S}}.$$

Neka je sada $(\,\cdot\,|\,\cdot\,)_{X\otimes\mathcal{S}}$ jedinstven skalarni produkt na prostoru $X \otimes \mathcal{S}$ za koji vrijedi

$$(x \otimes s|x' \otimes s')_{X\otimes\mathcal{S}} = (x|x')_X \langle s|s'\rangle_{\mathcal{S}} \qquad \forall x, x' \in X \quad \text{i} \quad \forall s, s' \in \mathcal{S}.$$

B−ortonormiranu bazu $\{z_1, \ldots, z_n\}$ od $\mathfrak{p}$ pomoću koje definiramo Diracov operator možemo izabrati da bude sastavljena od elemenata od $\mathfrak{p}_0$: takva je bilo koja ortonormirana baza unitarnog prostora $\mathfrak{p}_0$ sa skalarnim produktom $B|\mathfrak{p}_0 \times \mathfrak{p}_0$. Sada svaki $z_j \otimes z_j$ djeluje na unitarnom prostoru $X \otimes \mathcal{S}$ kao hermitski operator (preciznije, simetričan operator). Prema tome, Diracov operator na modulu $X \otimes \mathcal{S}$ je simetričan.

Ako je pak modul X konačnodimenzionalan, onda na njemu možemo odabrati skalarni produkt u odnosu na koji svi elementi kompaktne forme $\mathfrak{k}_0 \dot{+} i\mathfrak{p}_0$ djeluju kao antihermitski operatori. Tada elementi od $\mathfrak{p}_0$ djeluju kao hermitski operatori, pa slijedi da će u tom slučaju Diracov operator na prostoru $X \otimes \mathcal{S}$ djelovati kao antihermitski operator.

U jednom i u drugom slučaju tada je

$$(\operatorname{Im} D) \cap (\operatorname{Ker} D) = \{0\} \quad \text{i vrijedi} \quad H_D(X) = \operatorname{Ker} D = \operatorname{Ker} D^2.$$

Podsjetimo da smo za fundamentalnu Cartanovu podalgebru $\mathfrak{h} = \mathfrak{t} \dot{+} \mathfrak{a}$ od $\mathfrak{g}$ dualni prostor $\mathfrak{t}^*$ identificirali s potprostorom od $\mathfrak{h}^*$ svih $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ takvih da je $\lambda|\mathfrak{a} = 0$ i da je pri tome $\rho_{\mathfrak{g}} \in \mathfrak{t}^*$ za bilo koji ϑ−invarijantan izbor pozitivnih korijena R_+ sistema korijena $R = R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$. U daljnjem fiksiramo izbor pozitivnih korijena $R_+^{\mathfrak{k}}$ sistema korijena $R^{\mathfrak{k}} = R(\mathfrak{k}, \mathfrak{t})$.

Teorem 3.2.3. (**Voganova slutnja**) *Neka je X ireducibilan $(\mathfrak{g}, K)$−modul. Pretpostavimo da Diracova kohomologija $H_D(X)$ sadrži ireducibilan $\tilde{K}$−modul s najvećom težinom $\mu \in \mathfrak{t}^* \subseteq \mathfrak{h}^*$. Tada je $\chi_{\mu+\rho_{\mathfrak{k}}}$ infinitezimalni karakter od X.*

Primijetimo da je infinitezimalni karakter ireducibilnog $\mathfrak{k}$−modula s najvećom težinom μ upravo određen funkcionalnom $\mu + \rho_{\mathfrak{k}} \in \mathfrak{t}^*$. Prema tome, ova Voganova slutnja kaže da se uz opisanu identifikaciju $\mathfrak{k}^* \subseteq \mathfrak{h}^*$ $\mathfrak{k}$−infintezimalni karakter Diracovog modula $H_D(X)$ podudara s $\mathfrak{g}$−infinitezimalnim karakterom od X.

Budući da je u slučaju unitarnog modula X Diracova kohomologija upravo jezgra Diracovog operatora D na $X \otimes \mathcal{S}$, iz teorema 3.2.3. neposredno slijedi:

Korolar 3.2.4. *Neka je X ireducibilan unitaran $(\mathfrak{g}, K)$−modul. Ako jezgra Diracovog operatora D na $X \otimes \mathcal{S}$ sadrži ireducibilan $\tilde{K}$−modul s najvećom težinom $\mu \in \mathfrak{t}^* \subseteq \mathfrak{h}^*$, onda je $\chi_{\mu+\rho_{\mathfrak{k}}}$ infinitezimalni karakter od X.*

Iskazat ćemo sada još dvije Voganove slutnje i pokazati kako se iz njih dokazuje teorem 3.2.3., a dokazu tih dvije slutnji bit će posvećeni daljnji odjeljci u ovom poglavlju.

Teorem 3.2.5. (**Voganova slutnja**) *Za svaki $z \in Z(\mathfrak{g})$ postoji jedinstven $\zeta(z) \in Z(\mathfrak{k}_\Delta)$ takav da za neke $a, b \in U(\mathfrak{g}) \otimes C(\mathfrak{p})$ vrijedi*

$$z \otimes 1 = \zeta(z) + Da + bD.$$

Teorem 3.2.6. (**Voganova slutnja**) *Preslikavanje* $\zeta : Z(\mathfrak{g}) \to Z(\mathfrak{k}_\Delta)$ *je unitalni homomorfizam i ako ga shvatimo kao preslikavanje u* $Z(\mathfrak{k}) \simeq Z(\mathfrak{k}_\Delta)$ *onda je sljedeći dijagram komutativan:*

$$\begin{tikzcd} Z(\mathfrak{g}) \arrow[r, "\zeta"] \arrow[d] & Z(\mathfrak{k}) \arrow[d] \\ S(\mathfrak{h})^W \arrow[r, "\mathrm{Res}"] & S(\mathfrak{t})^{W_K} \end{tikzcd}$$

Pri tome su vertikalne strelice Harish−Chandrini izomorfizmi, Res *je preslikavanje restrikcije polinomijalnih funkcija sa* $\mathfrak{h}^*$ *na* $\mathfrak{t}^*$ *uz identifikaciju* $S(\mathfrak{h})^W = \mathcal{P}(\mathfrak{h}^*)^W$ *i* $S(\mathfrak{t})^{W_K} = \mathcal{P}(\mathfrak{t}^*)^{W_K}$, W *je Weylova grupa sistema korijena* $R = R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ *i* W_K *je Weylova grupa sistema korijena* $R^\mathfrak{k} = R(\mathfrak{k}, \mathfrak{t})$.

Dokaz teorema 3.2.3. iz teorema 3.2.5. i teorema 3.2.6.: Neka je $\Lambda \in \mathfrak{h}^*$ takav da je χ_Λ infinitezimalni karakter od X. Nadalje, neka je $\mu \in \mathfrak{t}^*$ najveća težina nekog ireducibilnog $\tilde{K}-$modula i neka je $x \in (X \otimes \mathcal{S})(\mu)$ takav da je $x \in (\operatorname{Ker} D) \setminus (\operatorname{Im} D)$. Za $z \in Z(\mathfrak{g})$ tada imamo $(z \otimes 1)x = \chi_\Lambda(z)x$. S druge strane, budući da x pripada $\tilde{K}-$tipu μ, imamo $\zeta(z)x = \chi_{\mu+\rho_\mathfrak{k}}(\zeta(z))x$. Prema teoremu 3.2.5. za neke $a, b \in U(\mathfrak{g}) \otimes C(\mathfrak{p})$ imamo

$$[\chi_\Lambda(z) - \chi_{\mu+\rho_\mathfrak{k}}(\zeta(z))]x = [z \otimes 1 - \zeta(z)]x = Dax + bDx = Dax.$$

Budući da po pretpostavci $x \notin \operatorname{Im} D$, zaključujemo da je to jednako 0, a kako je $x \neq 0$, to znači da je $\chi_\Lambda(z) = \chi_{\mu+\rho_\mathfrak{k}}(\zeta(z))$. Budući da je $z \in Z(\mathfrak{g})$ bio proizvoljan, zaključujemo da je $\chi_\Lambda = \chi_{\mu+\rho_\mathfrak{k}} \circ \zeta$. No prema teoremu 3.2.6. to upravo znači da se uz identifikaciju $\mathfrak{t}^* \subseteq \mathfrak{h}^*$ infinitezimalni karakter χ_Λ podudara sa $\chi_{\mu+\rho_\mathfrak{k}}$.

3.3 Koszulov diferencijal

U ovom je odjeljku V konačnodimenzionalan vektorski prostor nad proizvoljnim poljem K karakteristike 0. Promatrat ćemo unitalnu algebru $S(V) \otimes \bigwedge(V)$ sa $\mathbb{Z}_2-$graduacijom zadanom sa

$$(S(V) \otimes \bigwedge(V))^0 = S(V) \otimes \bigwedge(V)^0 \qquad \text{i} \qquad (S(V) \otimes \bigwedge(V))^1 = S(V) \otimes \bigwedge(V)^1,$$

gdje je $(\bigwedge(V)^0, \bigwedge(V)^1)$ uobičajena *par−nepar* graduacija vanjske algebre:

$$\bigwedge(V)^0 = \sum_{k\geq 0} \dot{+} \bigwedge\nolimits^{2k}(V), \qquad \bigwedge(V)^1 = \sum_{k\geq 0} \dot{+} \bigwedge\nolimits^{2k+1}(V).$$

Općenito se (unitalna) algebra sa $\mathbb{Z}_2-$graduacijom zove **(unitalna) superalgebra**. U superalgebri $\mathcal{A}$ sa Z_2-graduacijom $(\mathcal{A}^0, \mathcal{A}^1)$ elementi od $\mathcal{A}^0$ zovu se **parni**, a oni iz $\mathcal{A}^1$ **neparni**. Parni i neparni elementi zovu se **homogeni** (katkada kažemo $\mathbb{Z}_2-$**homogeni**). Za parni element a stavljamo $\varepsilon(a) = 1$, a za neparni $\varepsilon(a) = -1$.

Za linearan operator $d : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ kažemo da je **paran**, ako je $d(\mathcal{A}^0) \subseteq \mathcal{A}^0$ i $d(\mathcal{A}^1) \subseteq \mathcal{A}^1$, a **neparan** ako je $d(\mathcal{A}^0) \subseteq \mathcal{A}^1$ i $d(\mathcal{A}^1) \subseteq \mathcal{A}^0$. Za paran linearan operator d pišemo $\varepsilon(d) = 1$, a za neparan $\varepsilon(d) = -1$. Paran (odnosno, neparan) linearan operator d zove se **parna derivacija**, (odnosno, **neparna derivacija**) ako za svaki homogeni element $a \in \mathcal{A}$ i za svaki element $b \in \mathcal{A}$ vrijedi

$$d(ab) = (da)b + \varepsilon(a)\varepsilon(d)a(db).$$

Dakle, parna derivacija d zadovoljava

$$d(ab) = (da)b + \varepsilon(a)a(db), \qquad a, b \in \mathcal{A},\ a \,\text{homogen},$$

a neparna derivacija d zadovoljava

$$d(ab) = (da)b - \varepsilon(a)a(db), \qquad a, b \in \mathcal{A},\ a \,\text{homogen}.$$

Skup svih parnih derivacija i skup svih neparnih derivacija superalgebre $\mathcal{A}$ su potprostori prostora $L(\mathcal{A})$ svih linearnih operatora na $\mathcal{A}$.

Lema 3.3.1. *Neka su d i d' neparne derivacije superalgebre $\mathcal{A}$. Tada je $dd' + d'd$ derivacija algebre $\mathcal{A}$.*

Dokaz: Neka su $a, b \in \mathcal{A}$, pri čemu je element a homogen. Tada imamo redom

$$(dd' + d'd)(ab) = d\left((d'a)b - \varepsilon(a)a(d'b)\right) + d'((da)b - \varepsilon(a)a(db)) =$$

$$= (dd'a)b - \varepsilon(d'a)(d'a)(db) - \varepsilon(a)(da)(d'b) + \varepsilon(a)^2 a(dd'b) +$$

$$+ (d'da)b - \varepsilon(da)(da)(d'b) - \varepsilon(a)(d'a)(db) + \varepsilon(a)^2 a(d'db) =$$

$$= [(dd' + d'd)a]b + a[(dd' + d'd)b],$$

jer je $\varepsilon(a)^2 = 1$ i budući da zbog neparnosti operatora d i d' za homogen element a vrijedi $\varepsilon(da) = \varepsilon(d'a) = -\varepsilon(a)$. Time je tvrdnja dokazana, jer svaki je element suma dvaju homogenih.

Uočimo sada da budući da prostor V generira unitalnu algebru $S(V)$, a također i unitalnu algebru $\bigwedge(V)$, skup $(V \otimes 1) \cup (1 \otimes V)$ generira unitalnu algebru $S(V) \otimes \bigwedge(V)$. Odatle slijedi da je parna ili neparna derivacija superalgebre $S(V) \otimes \bigwedge(V)$, a naravno i derivacija algebre $S(V) \otimes \bigwedge(V)$, potpuno određena svojom restrikcijom na skup $(V \otimes 1) \cup (1 \otimes V)$.

Linearan operator na nekom vektorskom prostoru zove se **diferencijal**, ako je $d^2 = 0$. U tom je slučaju $\operatorname{Im} d \subseteq \operatorname{Ker} d$, a kvocijentni prostor

$$H(d) = (\operatorname{Ker} d)/(\operatorname{Im} d)$$

zove se **kohomologija diferencijala** d.

Teorem 3.3.2. *Postoji jedinstven linearan operator d_V na superalgebri $S(V) \otimes \bigwedge(V)$ takav da vrijedi*

$$d_V(s \otimes v_1 \wedge \cdots \wedge v_k) = \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j-1} s v_j \otimes v_1 \wedge \cdots \overset{\wedge}{v_j} \cdots v_k, \qquad k \in \mathbb{Z}_+, \quad s \in S(V), \quad v_1, \ldots, v_k \in V.$$

Pri tome se podrazumijeva da je $d_V(s \otimes 1) = 0 \ \forall s \in S(V)$. Operator d_V je diferencijal i neparna derivacija. Nadalje, vrijedi

$$\operatorname{Ker} d_V \; = \; K1 \otimes 1 \dotplus \operatorname{Im} d_V.$$

Posebno, kohomologija od d_V je jednodimenzionalna.

Dokaz: Za svaki $s \in S(V)$ i svaki $k \in \mathbb{N}$ preslikavanje $d_s : V^k \to S(V) \otimes \bigwedge(V)$ definirano sa

$$d_s^{(k)}(v_1, \ldots, v_k) = \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j-1} s v_j \otimes v_1 \wedge \cdots \overset{\wedge}{v_j} \cdots v_k, \qquad v_1, \ldots, v_k \in V,$$

je $k-$multilinearno i lako se vidi da je alternirajuće. Prema tome, za svaki $s \in S(V)$ postoji jedinstven linearan operator $D_s^{(k)} : \bigwedge^k(V) \to S(V) \otimes \bigwedge(V)$ takav da vrijedi

$$D_s^{(k)}(v_1 \wedge \cdots \wedge v_k) = \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j-1} s v_j \otimes v_1 \wedge \cdots \overset{\wedge}{v_j} \cdots v_k \qquad \forall v_1, \ldots, v_k \in V.$$

Sada za svaki $s \in S(V)$ definiramo linearan operator $D_s : \bigwedge(V) \to S(V) \otimes \bigwedge(V)$ tako da stavimo $D_s | \bigwedge^0(V) = 0$ i $D_s | \bigwedge^k(V) = D_s^{(k)}$ za $k \in \mathbb{N}$ (naravno, $D_s^{(k)} = 0$ za $k > \dim V$). Sada je $(s, u) \mapsto D_s(u)$ bilinearan operator sa $S(V) \times \bigwedge(V)$ u $S(V) \otimes \bigwedge(V)$, pa po univerzalnom svojstvu tenzorskog produkta postoji jedinstven linearan operator $d_V : S(V) \otimes \bigwedge(V) \to S(V) \otimes \bigwedge(V)$ takav da vrijedi

$$d_V(s \otimes u) = D_s(u) \qquad \forall s \in S(V) \quad \text{i} \quad \forall u \in \bigwedge(V).$$

Tada očito za operator d_V vrijedi formula iz iskaza teorema. Nadalje, iz te formule vidi se da je operator d_V neparan, a direktan račun na produktima vektora oblika $s \otimes v_1 \wedge \cdots \wedge v_k$ pokazuje da je d_V neparna derivacija. Neparna derivacija potpuno je određena svojim djelovanjem na $(V \otimes 1) \cup (1 \otimes V)$, dakle, d_V je potpuno određen formulama

$$d_V(v \otimes 1) = 0, \qquad d_V(1 \otimes v) = v \otimes 1, \qquad v \in V. \tag{3.5}$$

Po lemi 3.3.1. operator d_V^2 je derivacija algebre $S(V) \otimes \bigwedge(V)$. Stoga je operator d_V^2 potpuno određen svojim vrijednostima na generatorima $(V \otimes 1) \cup (1 \otimes V)$. No iz (3.5) se vidi da d_V^2 sve te generatore preslikava u nulu, To znači da je $d_V^2 = 0$, odnosno, d_V je diferencijal.

Slično kao za operator d_V dokazuje se da postoji jedinstvena neparna derivacija h superalgebre $\mathcal{A}$ takva da je

$$h(v \otimes 1) = 1 \otimes v, \qquad h(1 \otimes v) = 0, \qquad v \in V. \tag{3.6}$$

Ponovo je $h^2 = 0$. Kako su d_V i h neparne derivacije, iz leme 3.3.1. slijedi da je $hd_V + d_V h$ derivacija algebre $S(V) \otimes \bigwedge(V)$.

Definiramo sada linearan operator $\deg : S(V) \otimes \bigwedge(V) \to S(V) \otimes \bigwedge(V)$ pomoću restrikcija

$$\deg|S^k \otimes \bigwedge^\ell(V) = (k+\ell)I_{k,\ell}, \qquad k,\ell \in \mathbb{Z}_+,$$

gdje je $I_{k,\ell}$ jedinični operator na prostoru $S^k(V) \otimes \bigwedge^\ell(V)$. Dakle, operator deg množi totalno homogen element njegovim stupnjem. Za $a \in S^k(V)$, $b \in S^p(V)$, $c \in \bigwedge^\ell(V)$ i $d \in \bigwedge^q(V)$ imamo

$$\deg((a\otimes c)(b\otimes d)) = (k+p+\ell+q)(a\otimes c)(b\otimes d) =$$

$$= (k+\ell)(a\otimes c)(b\otimes d) + (a\otimes c)(p+q)(b\otimes d) = [\deg(a\otimes c)](b\otimes d) + (a\otimes c)[\deg(b\otimes d)].$$

To pokazuje da je operator deg derivacija algebre $S(V) \otimes \bigwedge(V)$.

Sada iz formula (3.5) i (3.6) za svaki $v \in V$ dobivamo

$$(hd_V + d_V h)(v\otimes 1) = d_V(1\otimes v) = v\otimes 1 = \deg(v\otimes 1)$$

i

$$(hd_V + d_V h)(1\otimes v) = h((v\otimes 1) = 1\otimes v = \deg(1\otimes v).$$

Prema tome, derivacije $hd_V + d_V h$ podudaraju se na generatorima algebre $S(V) \otimes \bigwedge(V)$, pa zaključujemo da se podudaraju svuda:

$$hd_V + d_V h = \deg. \tag{3.7}$$

Označimo sa $[S(V) \otimes \bigwedge(V)]^k$ potprostor svih totalno homogenih elemenata totalnog stupnja k. Dakle,

$$[S(V)\otimes \bigwedge(V)]^k = \sum_{j=0}^{k} \dot{+}\, S^j(V) \otimes \bigwedge^{k-j}(V).$$

Tada je $d_V\, [S(V)\otimes \bigwedge(V)]^k \subseteq [S(V)\otimes \bigwedge(V)]^k$, pa vrijedi

$$\operatorname{Ker} d_V = \sum_{k\in\mathbb{Z}_+} \dot{+}\, (\operatorname{Ker} d_V) \cap [S(V)\otimes \bigwedge(V)]^k$$

i

$$\operatorname{Im} d_V = \sum_{k\in\mathbb{Z}_+} \dot{+}\, (\operatorname{Im} d_V) \cap [S(V)\otimes \bigwedge(V)]^k.$$

Neka je $a \in (\operatorname{Ker} d_V) \cap [S(V)\otimes \bigwedge(V)]^k$ za neki $k > 0$. Tada je $d_V a = 0$, pa iz (3.7) dobivamo

$$d_V h a = \deg a = ka \qquad \Longrightarrow \qquad a = \frac{1}{k} d_V h a \in \operatorname{Im} d_V.$$

To pokazuje da je

$$(\operatorname{Ker} d_V) \cap \Big[S(V)\otimes \bigwedge(V)\Big]^k \subseteq (\operatorname{Im} d_V) \cap \Big[S(V)\otimes \bigwedge(V)\Big]^k \qquad \forall k > 0,$$

a kako je $\operatorname{Im} d_V \subseteq \operatorname{Ker} d_V$, zaključujemo da je

$$(\operatorname{Ker} d_V) \cap \Big[S(V)\otimes \bigwedge(V)\Big]^k = (\operatorname{Im} d_V) \cap \Big[S(V)\otimes \bigwedge(V)\Big]^k \qquad \forall k > 0.$$

Napokon, jednodimenzionalan potprostor $[S(V)\otimes \bigwedge(V)]^0 = K1\otimes 1$ nije sadržan u $\operatorname{Im} d_V$, ali jest u $\operatorname{Ker} d_V$, jer je $d_V(1\otimes 1) = 0$. Time je dokazana i posljednja tvrdnja teorema 3.3.2.

3.4 Diferencijal na $K-$invarijantama

Cliffordova algebra ima $\mathbb{Z}_2-$graduaciju. Ako proglasimo sve elemente od $U(\mathfrak{g})$ parnima, imamo $\mathbb{Z}_2-$graduaciju i na algebri $U(\mathfrak{g})\otimes C(\mathfrak{p})$. Tu graduaciju čuva djelovanje grupe K. Za parni element a od $U(\mathfrak{g})\otimes C(\mathfrak{p})$, tj. za $a \in U(\mathfrak{g})\otimes C^0(\mathfrak{p})$, stavimo $\varepsilon(a) = 1$, a za neparan a, tj. za $a \in U(\mathfrak{g})\otimes C^1(\mathfrak{p})$, stavimo $\varepsilon(a) = -1$. Neka je $d : U(\mathfrak{g}) \otimes C(\mathfrak{p}) \to U(\mathfrak{g}) \otimes C(\mathfrak{p})$ linearan operator definiran sa

$$d(a) = Da - \varepsilon(a)aD, \qquad a \in U(\mathfrak{g}) \otimes C(\mathfrak{p}) \quad \text{homogen, tj. ili paran ili neparan.}$$

Propozicija 3.4.1. (a) *Operator d je neparna derivacija superalgebre $U(\mathfrak{g}) \otimes C(\mathfrak{p})$.*

(b) *Ako element $a \in U(\mathfrak{g}) \otimes C(\mathfrak{p})$ komutira sa D^2, onda je $d^2(a) = 0$.*

(c) *Operator d komutira s djelovanjem grupe K automorfizmima od $U(\mathfrak{g}) \otimes C(\mathfrak{p})$.*

(d) *Podalgebra $K-$invarijanata $(U(\mathfrak{g}) \otimes C(\mathfrak{p}))^K$ je $d-$invarijantan potprostor.*

(e) *Restrikcija $d|(U(\mathfrak{g}) \otimes C(\mathfrak{p}))^K$ je diferencijal, tj. kvadrat joj je* 0.

Dokaz: (a) Neparnost operatora d je neposredna posljedica neparnosti Diracovog operatora; naime, po definiciji je $D \in U(\mathfrak{g}) \otimes C^1(\mathfrak{p})$. Neka su sada x i y homogeni elementi superalgebre $U(\mathfrak{g}) \otimes C(\mathfrak{p})$. Tada imamo redom

$$d(x)y + \varepsilon(x)xd(y) = (Dx - \varepsilon(x)xD)y + \varepsilon(x)x(Dy - \varepsilon(y)yD) = Dxy - \varepsilon(x)\varepsilon(y)xyD = d(xy).$$

Dakle, d je neparna derivacija.

(b) Budući da je Diracov operator D neparni element od $U(\mathfrak{g}) \otimes C(\mathfrak{p})$, vrijedi $\varepsilon(Da) = -\varepsilon(a)$ za svaki homogeni element $a \in U(\mathfrak{g}) \otimes C(\mathfrak{p})$. Dakle, za homogen $a \in U(\mathfrak{g}) \otimes C(\mathfrak{p})$ imamo

$$d^2(a) = d(Da - \varepsilon(a)aD) = D^2a - \varepsilon(Da)DaD - \varepsilon(a)DaD + \varepsilon(a)\varepsilon(Da)aD^2 = D^2a - aD^2.$$

Posebno, ako a komutira sa D^2, slijedi da je $d^2(a) = 0$. Time je tvrdnja dokazana, jer je D^2 parni element pa proizvoljni element $a \in U(\mathfrak{g}) \otimes C(\mathfrak{p})$ komutira sa D^2 ako i samo ako i njegov parni dio i njegov neparni dio komutiraju sa D^2.

(c) Automorfizmi $Ad\,k$, $k \in K$, su parni operatori na $U(\mathfrak{g}) \otimes C(\mathfrak{p})$, pa vrijedi $\varepsilon((Ad\,k)a) = \varepsilon(a)$ za svaki homogen element od $U(\mathfrak{g}) \otimes C(\mathfrak{p})$. Nadalje, prema propoziciji 3.1.1. Diracov operator D komutira sa svakim automorfizmom $Ad\,k$, $k \in K$. Dakle, za homogeni a i za $k \in K$ imamo

$$d((Ad\,k)a) = D(Ad\,k)a - \varepsilon((Ad\,k)a)((Ad\,k)a)D = (Ad\,k)(Da - \varepsilon(a)aD) = (Ad\,k)d(a).$$

Tvrdnja (d) slijedi neposredno iz tvrdnje (c).

(e) Prema propoziciji 3.1.3. imamo $D^2 = -\Omega_{\mathfrak{g}} \otimes 1 + \Omega_{\mathfrak{k}_\Delta} + c1 \otimes 1$, gdje je $c \in \mathbb{C}$. Nadalje, očito je element $-\Omega_{\mathfrak{g}} \otimes 1 + c1 \otimes 1$ u centru algebre $U(\mathfrak{g}) \otimes C(\mathfrak{p})$. Dakle, komutiranje nekog elementa sa D^2 ekvivalentno je komutiranju tog elementa sa $\Omega_{\mathfrak{k}_\Delta}$. Budući da svi elementi od $(U(\mathfrak{g}) \otimes C(\mathfrak{p}))^K$ komutiraju s elementima Liejeve algebre $\mathfrak{k}_\Delta$, svi oni komutiraju sa $\Omega_{\mathfrak{k}_\Delta}$, dakle, i sa D^2. Stoga tvrdnja (e) slijedi iz tvrdnje (b).

U daljnjem sa d označavamo restrikciju $d|(U(\mathfrak{g}) \otimes C(\mathfrak{p}))^K$.

Teorem 3.4.2. (**Huang–Pandžić**) *Vrijedi*

$$\operatorname{Ker} d = Z(\mathfrak{k}_\Delta) \dotplus \operatorname{Im} d.$$

Posebno, kohomologija diferencijala d izomorfna je centru $Z(\mathfrak{k}_\Delta)$ algebre $U(\mathfrak{k}_\Delta)$.

Prije dokaza teorema 3.4.2. dokazat ćemo da iz njega slijedi teorem 3.2.5. Prije svega uočimo da je $Z(\mathfrak{g})\otimes 1$ sadržano u centru algebre $U(\mathfrak{g})\otimes C(\mathfrak{p})$, posebno, svaki element od $Z(\mathfrak{g})\otimes 1$ komutira sa D. Nadalje, svaki je taj element paran, pa iz definicije operatora d zaključujemo da je $Z(\mathfrak{g})\otimes 1\subseteq \operatorname{Ker} d$. Prema teoremu 3.4.2. slijedi da za svaki $z\in Z(\mathfrak{g})$ možemo pisati

$$z\otimes 1=\zeta(z)+d(a)$$

za neki $\zeta(z)\in Z(\mathfrak{k}_\Delta)$ i neki neparni $a\in(U(\mathfrak{g})\otimes C(\mathfrak{p}))^K$. No kako je tada $d(a)=Da+aD$, zaključujemo da vrijedi tvrdnja teorema 3.2.5. uz $b=a$.

Uočimo da se u dokazu ovog teorema koristila činjenica da je grupa K povezana. Naime, bez toga nije evidentno da je $Z(\mathfrak{g})$ sadržano u $(U(\mathfrak{g})\otimes C(\mathfrak{p}))^K$. Napomenimo da se to može zaključiti i uz slabije pretpostavke, npr. ako pretpostavimo da je $Ad\,K$ sadržano u $Int(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})$ (odnosno, ako je grupa G u Harish$-$Chandrinoj klasi)

Za dokaz teorema 3.4.2. treba nam određena priprema. Ideja je dokaza da se uvede filtracija na algebru $(U(\mathfrak{g})\otimes C(\mathfrak{p}))^K$, zatim se dokaže analogon teorema za pripadnu graduiranu algebru, i zatim se vratimo u filtriranu algebru indukcijom po stupnju.

Promatramo istu filtraciju $(F_p(U(\mathfrak{g})\otimes C(\mathfrak{p})))$ kao i u dokazu tvrdnje (b) propozicije 3.1.2:

$$F_p(U(\mathfrak{g})\otimes C(\mathfrak{p}))=U_p(\mathfrak{g})\otimes C(\mathfrak{p}).$$

Pripadna je graduirana algebra po PBW$-$teoremu izomorfna algebri $S(\mathfrak{g})\otimes C(\mathfrak{p})$. Nadalje, ta je filtracija $K-$invarijantna, pa definira filtraciju algebre $K-$invarijanata $(U(\mathfrak{g})\otimes C(\mathfrak{p}))^K$:

$$F_p\left((U(\mathfrak{g})\otimes C(\mathfrak{p}))^K\right)=(F_p(U(\mathfrak{g})\otimes C(\mathfrak{p})))^K=(U_p(\mathfrak{g})\otimes C(\mathfrak{p}))^K.$$

Pripadna je graduirana algebra izomorfna s algebrom $(S(\mathfrak{g})\otimes C(\mathfrak{p}))^K$. Nadalje, ta je filtracija algebre $U(\mathfrak{g})\otimes C(\mathfrak{p})$ očito kompatibilna s prije promatranom $\mathbb{Z}_2-$graduacijom. To znači da se $\mathbb{Z}_2-$graduacija prenosi i na pripadne graduirane algebre $S(\mathfrak{g})\otimes C(\mathfrak{p})$ i $(S(\mathfrak{g})\otimes C(\mathfrak{p}))^K$.

Budući da je $D\in F_1(U(\mathfrak{g})\otimes C(\mathfrak{p}))^K$, vrijedi

$$d\left(F_p(U(\mathfrak{g})\otimes C(\mathfrak{p}))^K\right)\subseteq F_{p+1}(U(\mathfrak{g})\otimes C(\mathfrak{p}))^K,\qquad p\in\mathbb{Z}_+.$$

Označimo pripadni diferencijal na graduiranoj algebri sa $\overline{d}$. Nadalje, za $a\in F_p(U(\mathfrak{g})\otimes C(\mathfrak{p}))^K$ označimo sa $\overline{a}$ njegovu sliku u $Gr^p(U(\mathfrak{g})\otimes C(\mathfrak{p}))^K=(S^p(\mathfrak{g})\otimes C(\mathfrak{p}))^K$. Posebno je

$$\overline{D}\in Gr^1(U(\mathfrak{p})\otimes C(\mathfrak{p}))^K=\left(S^1(\mathfrak{g})\otimes C(\mathfrak{p})\right)^K.$$

Operator $\overline{d}:Gr^p(U(\mathfrak{g})\otimes C(\mathfrak{p}))^K\to Gr^{p+1}(U(\mathfrak{g})\otimes C(\mathfrak{p}))^K$ dan je sa

$$\overline{d}\,(\overline{a})=\overline{D}\overline{a}-\varepsilon(a)\overline{a}\overline{D}\tag{3.8}$$

za $\mathbb{Z}_2-$homogeni $a\in F_p(U(\mathfrak{g})\otimes C(\mathfrak{p}))^K$. Primijetimo da je operator d bio definiran na cijeloj algebri $U(\mathfrak{g})\otimes C(\mathfrak{p})$, iako općenito ne vrijedi $d^2=0$ na cijeloj algebri. Ipak, očito vrijedi

$$d\left(F_p(U(\mathfrak{g})\otimes C(\mathfrak{p}))\right)\subseteq F_{p+1}(U(\mathfrak{g})\otimes C(\mathfrak{p})),\qquad p\in\mathbb{Z}_+,$$

pa za svaki $p\in\mathbb{Z}_+$ operator d definira operator $\overline{d}:Gr^p(U(\mathfrak{g})\otimes C(\mathfrak{p}))\to Gr^{p+1}(U(\mathfrak{g})\otimes C(\mathfrak{p}))$ i vrijedi formula (3.8) i za proizvoljan $\mathbb{Z}_2-$homogen $a\in F_p(U(\mathfrak{g})\otimes C(\mathfrak{p}))$.

Propozicija 3.4.3. *Uz identifikaciju $S(\mathfrak{g})$ sa $S(\mathfrak{k})\otimes S(\mathfrak{p})$ i uz identifikaciju $C(\mathfrak{p})$ sa $\bigwedge(\mathfrak{p})$ pomoću Chevalleyevog izomorfizma $\jmath$ operator $\overline{d}$ na prostoru $S(\mathfrak{g})\otimes C(\mathfrak{p}) = S(\mathfrak{k})\otimes(S(\mathfrak{p})\otimes\bigwedge(\mathfrak{p}))$ jednak je $-2I_{S(\mathfrak{k})}\otimes d_{\mathfrak{p}}$, gdje je $d_{\mathfrak{p}}$ Koszulov diferencijal na $S(\mathfrak{p})\otimes\bigwedge(\mathfrak{p})$, tj.*

$$d_{\mathfrak{p}}(s\otimes x_1\wedge\cdots\wedge x_k) = \sum_{j=1}^{k}(-1)^{j-1}sx_j\otimes x_1\wedge\cdots\overset{\wedge}{x_j}\cdots\wedge x_k \tag{3.9}$$

za $s\in S(\mathfrak{p})$ i $x_1,\ldots,x_k\in\mathfrak{p}$.

Dokaz: Neka je $\{z_1,\ldots,z_n\}$ $B-$ortonormirana baza od $\mathfrak{p}$. Za dokaz jednakosti operatora $\overline{d}$ i $-2I_{S(\mathfrak{k})}\otimes d_{\mathfrak{p}}$ dovoljno je ustanoviti da ta dva operatora jednako djeluju na svim elementima oblika $\overline{a} = s\otimes z_{j_1}\cdots z_{j_k}\in S(\mathfrak{g})\otimes C(\mathfrak{p})$, gdje je $s\in S(\mathfrak{g})$ i $1\le j_1<\cdots<j_k\le n$. Za takav element $\overline{a}$ imamo

$$\overline{d}\,(\overline{a}) = \overline{D}\overline{a} - (-1)^k\overline{a}\overline{D},$$

dakle, po definiciji Diracovog operatora je

$$\overline{d}\,(\overline{a}) = \sum_{j=1}^{n}\left(z_js\otimes z_jz_{j_1}\cdots z_{j_k} - (-1)^k sz_j\otimes z_{j_1}\cdots z_{j_k}z_j\right). \tag{3.10}$$

U toj sumi ima dvije vrste sumanada: ili je $j\in\{j_1,\ldots,j_k\}$ ili $j\notin\{j_1,\ldots,j_k\}$. U slučaju $j\notin\{j_1,\ldots,j_k\}$ element z_j antikomutira sa svakim od $z_{j_1},\ldots,z_{j_k}$, pa vrijedi

$$z_jz_{j_1}\cdots z_{j_k} = (-1)^k z_{j_1}\cdots z_{j_k}z_j,$$

dakle, odgovarajući član sume u (3.10) jednak je 0. Ako je pak $j=j_p$ za neki p, onda je

$$z_jz_{j_1}\cdots z_{j_k} = (-1)^{p-1}z_{j_1}\cdots\left(z_{j_p}\right)^2\cdots z_{j_k} = (-1)^p z_{j_1}\cdots\overset{\wedge}{z_{j_p}}\cdots z_{j_k}.$$

Slično dobivamo i

$$z_{j_1}\cdots z_{j_k}z_j = (-1)^{k-p-1}z_{j_1}\cdots\overset{\wedge}{z_{j_p}}\cdots z_{j_k}.$$

Dakle, j_p-ti sumand u (3.10) jednak je

$$\left((-1)^p - (-1)^k(-1)^{k-p-1}\right)sz_{j_p}\otimes z_{j_1}\cdots\overset{\wedge}{z_{j_p}}\cdots z_{j_k} = -2(-1)^{p-1}sz_{j_p}\otimes z_{j_1}\cdots\overset{\wedge}{z_{j_p}}\cdots z_{j_k}.$$

Time je tvrdnja dokazana, budući da Chevalleyev izomorfizam $\jmath$ identificira $z_{i_1}\cdots z_{i_r}\in C(\mathfrak{p})$ za $1\le i_1<\cdots<i_r\le n$ sa $z_{i_1}\wedge\cdots\wedge z_{i_r}$.

Iz propozicije 3.4.3. i iz teorema 3.3.2. vidimo da je ustvari $\overline{d}$ diferencijal na čitavoj algebri $Gr(U(\mathfrak{g})\otimes C(\mathfrak{p})) = S(\mathfrak{g})\otimes C(\mathfrak{p})$, i prije prijelaza na $K-$invarijante, i da vrijedi

$$\operatorname{Ker}\overline{d} = S(\mathfrak{k})\otimes 1_{S(\mathfrak{p})}\otimes 1_{C(\mathfrak{p})} \dotplus \operatorname{Im}\overline{d}. \tag{3.11}$$

Budući da je djelovanje $\overline{d}$ $K-$ekvivarijantno, vrijedi

$$\operatorname{Ker}\left(\overline{d}|(S(\mathfrak{g})\otimes C(\mathfrak{p}))^K\right) = \left(\operatorname{Ker}\overline{d}\right)^K \quad \text{i} \quad \operatorname{Im}\left(\overline{d}|(S(\mathfrak{g})\otimes C(\mathfrak{p}))^K\right) = \left(\operatorname{Im}\overline{d}\right)^K$$

Odatle i iz (3.11) neposredno slijedi

Propozicija 3.4.4. *Uz identifikacije iz propozicije 3.4.3. za diferencijal $\overline{d}_K = \overline{d}|(S(\mathfrak{g}) \otimes C(\mathfrak{p}))^K$ na algebri $K-$invarijanata $(S(\mathfrak{g}) \otimes C(\mathfrak{p}))^K = (S(\mathfrak{k}) \otimes S(\mathfrak{p}) \otimes C(\mathfrak{p}))^K$ vrijedi*

$$\operatorname{Ker} \overline{d}_K \;=\; S(\mathfrak{k})^K \otimes 1_{S(\mathfrak{p})} \otimes 1_{C(\mathfrak{p})} \;\dot{+}\; \operatorname{Im} \overline{d}_K.$$

Posebno, kohomologija diferencijala $\overline{d}_K$ izomorfna je $S(\mathfrak{k})^K \otimes 1_{S(\mathfrak{p})} \otimes 1_{C(\mathfrak{p})} \simeq S(\mathfrak{k})^K \simeq S(\mathfrak{t})^{W_K}$. Pri tome je $\mathfrak{t}$ Cartanova podalgebra od $\mathfrak{k}$ i W_K je Weylova grupa sistema korijena $R^{\mathfrak{k}} = R(\mathfrak{k}, \mathfrak{t})$.

Dokaz teorema 3.4.2. Budući da je Diracov operator $K-$invarijantan, on komutira sa $\mathfrak{k}_\Delta$, pa posebno komutira sa $Z(\mathfrak{k}_\Delta)$. Nadalje, sjetimo se da je dijagonalno preslikavanje $\Delta : \mathfrak{k} \to U(\mathfrak{g}) \otimes C(\mathfrak{p})$ bilo definirano sa

$$\Delta(x) = x \otimes 1_{C(\mathfrak{p})} + 1_{U(\mathfrak{g})} \otimes \beta(x), \qquad x \in \mathfrak{k},$$

pri čemu je β homomorfizam Liejevih algebri sa $\mathfrak{k}$ u $C(\mathfrak{p})^{(2)}$. Prema tome, slika $\mathfrak{k}_\Delta$ je sastavljena od parnih elemenata superalgebre $U(\mathfrak{g}) \otimes C(\mathfrak{p})$, odnosno, sadržana je u $(U(\mathfrak{g}) \otimes C(\mathfrak{p}))^0$. No kako je $(U(\mathfrak{g}) \otimes C(\mathfrak{p}))^0$ unitalna podalgebra od $U(\mathfrak{g}) \otimes C(\mathfrak{p})$, slijedi da je $U(\mathfrak{k}_\Delta) \subseteq (U(\mathfrak{g}) \otimes C(\mathfrak{p}))^0$ i, posebno, $Z(\mathfrak{k}_\Delta) \subseteq (U(\mathfrak{g}) \otimes C(\mathfrak{p}))^0$. Sada za $x \in Z(\mathfrak{k}_\Delta)$ imamo

$$d(x) = Dx - \varepsilon(x)xD = Dx - xD = 0.$$

Time smo dokazali da je $Z(\mathfrak{k}_\Delta) \subseteq \operatorname{Ker} d$. Nadalje, kako je d diferencijal, vrijedi $\operatorname{Im} d \subseteq \operatorname{Ker} d$. Prema tome, $Z(\mathfrak{k}_\Delta) + \operatorname{Im} d \subseteq \operatorname{Ker} d$. Primijetimo još da je suma $Z(\mathfrak{k}_\Delta) + \operatorname{Im} d$ direktna. To neposredno slijedi iz činjenice da je suma slika tih potprostora u graduiranoj algebri $Gr(U(\mathfrak{g}) \otimes C(\mathfrak{p}))^K$ direktna (propozicija 3.4.4.)

Treba još dokazati da je $\operatorname{Ker} d \subseteq Z(\mathfrak{k}_\Delta) \dot{+} \operatorname{Im} d$, odnosno, da iz $a \in \operatorname{Ker} d$ slijedi da je $a \in Z(\mathfrak{k}_\Delta) + \operatorname{Im} d$. To ćemo dokazati indukcijom po filtracijskom stupnju od a. Ako je taj stupanj -1, onda je $a = 0$, pa je tvrdnja trivijalna. Pretpostavimo sada da je a filtracijskog stupnja $n \geq 0$ i da je tvrdnja dokazana za sve elemente a filtracijskog stupnja $n-1$. Budući da je $d(a) = 0$, slijedi da je $\overline{d}_K\,(\overline{a}) = 0$, gdje $\overline{a}$ označava sliku od a u $Gr^n(U(\mathfrak{g}) \otimes C(\mathfrak{p}))^K$. Sada je po propoziciji 3.4.4.

$$\overline{a} = s \otimes 1_{S(\mathfrak{p})} \otimes 1_{C(\mathfrak{p})} + \overline{d}_K\left(\overline{b}\right)$$

za neki $s \in S(\mathfrak{k})^K$ i neki $\overline{b} \in Gr^{n-1}(U(\mathfrak{g}) \otimes C(\mathfrak{p}))^K$.

Primijetimo sada da po tvrdnji (b) propozicije 3.1.2. postoji $z \in Z(\mathfrak{k}_\Delta)$ (jedinstven modulo $Gr^{n-1}(U(\mathfrak{g}) \otimes C(\mathfrak{p}))^K)$ takav da je $s \otimes 1_{S(\mathfrak{p})} \otimes 1_{C(\mathfrak{p})} = \overline{z}$. Nadalje, neka je $b \in F_{n-1}(U(\mathfrak{g}) \otimes C(\mathfrak{p}))^K$ bilo koji predstavnik od $\overline{b}$. Tada je

$$\overline{a} = \overline{z} + \overline{d}_K\left(\overline{b}\right),$$

dakle,

$$\overline{a - z - d(b)} = \overline{a} - \overline{z} - \overline{d}_K\left(\overline{b}\right) = 0.$$

Prema tome, vrijedi $a - z - d(b) \in F_{n-1}(U(\mathfrak{g}) \otimes C(\mathfrak{p}))^K$. Nadalje, imamo

$$d(a - z - d(b)) = d(a) - d(z) - d^2(b) = 0,$$

jer je po pretpostavci $d(a) = 0$, nadalje, $d(z) = 0$ jer smo već dokazali da je $Z(\mathfrak{k}_\Delta) \subseteq \operatorname{Ker} d$, i, napokon, $d^2(b) = 0$, jer je po tvrdnji (e) propozicije 3.4.1. d diferencijal na $U(\mathfrak{g}) \otimes C(\mathfrak{p}))^K$. Sada pretpostavka indukcije povlači da postoje $z' \in Z(\mathfrak{k}_\Delta)$ i $b' \in (U(\mathfrak{g}) \otimes C(\mathfrak{p}))^K$ takvi da je

$$a - z - d(b) = z' + d(b').$$

Odatle je

$$a = (z + z') + d(b + b') \in Z(\mathfrak{k}_\Delta) + \operatorname{Im} d.$$

Time je teorem 3.4.2. u potpunosti dokazan.

Dokaz teorema 3.2.6. Neka su $z, z' \in Z(\mathfrak{g})$. Prema dokazu teorema 3.2.5. (str. 157) postoje neparni $a, a' \in (U(\mathfrak{g}) \otimes C(\mathfrak{p}))^K$ takvi da je $z \otimes 1 = \zeta(z) + d(a)$ i $z' \otimes 1 + d(a')$. Odatle je

$$zz' \otimes 1 = (z \otimes 1)(z' \otimes 1) = \zeta(z)\zeta(z') + \zeta(z)d(a') + d(a)\zeta(z') + d(a)d(a'). \tag{3.12}$$

Budući da je $Z(\mathfrak{g}) \otimes 1 \subseteq \operatorname{Ker} d$ i budući da je d diferencijal na $(U(\mathfrak{g}) \otimes C(\mathfrak{p}))^K$, zaključujemo da je $\zeta(z) = z \otimes 1 - d(a) \in \operatorname{Ker} d$ i analogno $\zeta(z') \in \operatorname{Ker} d$. Prema tvrdnji (a) propozicije 3.4.1. d je neparna derivacija superalgebre $(U(\mathfrak{g}) \otimes C(\mathfrak{p}))^K$. Nadalje, kao što smo već napomenuli $Z(\mathfrak{k}_\Delta)$ je sastavljeno od parnih elemenata superalgebre $(U(\mathfrak{g}) \otimes C(\mathfrak{p}))^K$, pa je $\varepsilon(\zeta(z)) = 1$. Dakle, imamo

$$d(\zeta(z)a') = d(\zeta(z))a' + \varepsilon(\zeta(z))\zeta(z)d(a') = \zeta(z)d(a'),$$

$$d(a\zeta(z')) = d(a)\zeta(z') + \varepsilon(a)a\, d(\zeta(z')) = d(a)\zeta(z'),$$
$$d(ad(a')) = d(a)d(a') + \varepsilon(a)a\, d^2(a') = d(a)d(a').$$

Stoga iz (3.12) slijedi

$$zz' \otimes 1 = \zeta(z)\zeta(z') + d\left(\zeta(z)a' + a\zeta(z') + ad(a')\right).$$

Međutim, $\zeta(zz')$ je jedinstveni element od $Z(\mathfrak{k}_\Delta)$ takav da vrijedi $zz' \otimes 1 = \zeta(z') + d(b)$ za neki $b \in (U(\mathfrak{g})\otimes C(\mathfrak{p}))^K$, pa zaključujemo da je $\zeta(zz') = \zeta(z)\zeta(z')$. Time je dokazano da je preslikavanje $\zeta : Z(\mathfrak{g}) \to Z(\mathfrak{k}_\Delta)$ homomorfizam unitalnih algebri. Očito je taj homomorfizam unitalni, jer je $1 \otimes 1$ jedinica u algebri $Z(\mathfrak{k}_\Delta)$ i trivijalno vrijedi $1 \otimes 1 = 1 \otimes 1 + d(0)$, dakle, $\zeta(1) = 1 \otimes 1$. Time je dokazana prva tvrdnja teorema 3.2.6.

Neka je sada $V(\lambda)$ ireducibilan konačnodimenzionalan $\mathfrak{g}-$modul s najvećom težinom $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ i pretpostavimo da je $\lambda \in \mathfrak{t}^*$. Neka je $\xi \in \mathfrak{t}^*$ bilo koja najveća težina za $\mathfrak{k}$. Prema propoziciji 3.1.3. i prema propoziciji 2.3.11. D^2 djeluje na $\mathfrak{k}-$izotipnoj komponenti $(V(\lambda)\otimes\mathcal{S})(\xi)$ množenjem skalarom $-\|\lambda + \rho_\mathfrak{g}\|^2 + \|\rho_\mathfrak{g}\|^2 + \|\xi + \rho_\mathfrak{k}\|^2 - \|\rho_\mathfrak{k}\|^2 + \|\rho_\mathfrak{k}\|^2 - \|\rho_\mathfrak{g}\|^2 = -\|\lambda + \rho_\mathfrak{g}\|^2 + \|\xi + \rho_\mathfrak{k}\|^2$, tj.

$$D^2|(V(\lambda) \otimes \mathcal{S})(\xi) = \left(-\|\lambda + \rho_\mathfrak{g}\|^2 + \|\xi + \rho_\mathfrak{k}\|^2\right) I_{(V(\lambda)\otimes\mathcal{S})(\xi)}. \tag{3.13}$$

Izaberimo sada $\xi = \lambda + \rho_\mathfrak{g} - \rho_\mathfrak{k}$. Budući da je prema propoziciji 2.3.15. $\rho_\mathfrak{g} - \rho_\mathfrak{k}$ najveća težina nekog ireducibilnog $\mathfrak{k}-$podmodula od $\mathcal{S}$, vrijedi $(V(\lambda) \otimes \mathcal{S})(\xi) \neq \{0\}$. No prema (3.13) vrijedi $(V(\lambda) \otimes \mathcal{S})(\xi) \subseteq \operatorname{Ker} D^2$. Prema drugom odlomku na str. 151 Diracov operator D na prostoru $V(\lambda)\otimes\mathcal{S}$ je antihermitski i $\operatorname{Ker} D = \operatorname{Ker} D^2$. Prema tome, vrijedi $(V(\lambda)\otimes\mathcal{S})(\xi) \subseteq \operatorname{Ker} D$, naravno, za $\xi = \lambda + \rho_\mathfrak{g} - \rho_\mathfrak{k}$. Prema dokazu teorema 3.2.5. znamo da je

$$z \otimes 1 = \zeta(z) + Da + aD$$

za neki neparni $a \in (U(\mathfrak{g}) \otimes C(\mathfrak{p}))^K$. Budući da je tada $a(V(\lambda) \otimes \mathcal{S})(\xi) \subseteq (V(\lambda) \otimes \mathcal{S})(\xi)$, slijedi da na potprostor $(V(\lambda)\otimes\mathcal{S})(\xi)$ jednako djeluju $z\otimes 1$ i $\zeta(z)$. No prvi djeluje množenjem skalarom $\chi_{\lambda+\rho_\mathfrak{g}}(z)$, a drugi množenjem skalarom $\chi_{\xi+\rho_\mathfrak{k}}(\zeta(z)) = \chi_{\lambda+\rho_\mathfrak{g}}(\zeta(z))$. Dakle, vrijedi

$$\chi_{\lambda+\rho_\mathfrak{g}}(z) = \chi_{\lambda+\rho_\mathfrak{g}}(\zeta(z)) \qquad \forall z \in Z(\mathfrak{g}).$$

Uz identifikaciju $Z(\mathfrak{g})$ sa $\mathcal{P}(\mathfrak{h}^*)^W$ i $Z(\mathfrak{k}_\Delta)$ sa $\mathcal{P}(\mathfrak{t}^*)^{W_K}$, gornja jednakost znači da se restrikcija polinoma $z \in Z(\mathfrak{g})$ na $\mathfrak{t}^*$ podudara s polinomom $\zeta(z)$ u svim točkama od $\mathfrak{t}^*$ oblika $\lambda + \rho_\mathfrak{g}$, gdje je $\lambda \in \mathfrak{t}^* \subseteq \mathfrak{h}^*$ najveća težina konačnodimenzionalnog $\mathfrak{g}-$modula. Takve točke tvore Zariski gust skup u $\mathfrak{t}^*$: uz pogodan izbor baze u $\mathfrak{t}^*$ to je upravo skup svih točaka s koordinatama iz $\mathbb{N}^\ell$, $\ell = \dim \mathfrak{t}$. Prema tome, jednakost vrijednosti u svim tim točkama povlači jednakost tih polinoma. Time je dokazana i druga tvrdnja teorema 3.2.6.

3.5 Generalizirana Parthasarathyjeva nejednakost

Ako je X unitar(izabil)an $(\mathfrak{g}, K)-$modul onda znamo da je $(\operatorname{Ker} D) \cap (\operatorname{Im} D) = \{0\}$, pa je Diracova kohomologija jednaka $\operatorname{Ker} D = \operatorname{Ker} D^2$.

Teorem 3.5.1. *Neka je X ireducibilan unitarizabilan $(\mathfrak{g}, K)-$modul s infinitezimalnim karakterom χ_Λ. Neka je $\mu \in \mathfrak{t}^* \subseteq \mathfrak{h}^*$ najveća težina konačnodimenzionalnog ireducibilnog $\mathfrak{k}-$modula i neka je $(X \otimes \mathcal{S})(\mu)$ suma svih ireducibilnih $\mathfrak{k}-$podmodula od $X \otimes \mathcal{S}$ s maksimalnom težinom μ.*

(*a*) (**Generalizirana Parthasarathyjeva nejednakost**) *Ako je $(X \otimes \mathcal{S})(\mu) \neq \{0\}$, onda vrijedi*

$$(\Lambda|\Lambda) \leq \|\mu + \rho_\mathfrak{k}\|^2. \tag{3.14}$$

Pri tome je $(\cdot|\cdot)$ nedegenerirana bilinearna forma na $\mathfrak{h}^* \times \mathfrak{h}^*$ dobivena po dualnosti iz restrikcije $B|\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}$.

(*b*) *Vrijedi $(X \otimes \mathcal{S})(\mu) \cap (\operatorname{Ker} D) \neq \{0\}$ ako i samo u (3.14) vrijedi znak jednakosti i tada je $(X \otimes \mathcal{S})(\mu) \subseteq \operatorname{Ker} D$.*

Dokaz: (*a*) Formula za D^2 iz propozicije 3.1.3. i propozicija 2.3.11. pokazuju da D^2 djeluje na potprostoru $(X \otimes \mathcal{S})(\mu)$ množenjem skalarom

$$-\left((\Lambda|\Lambda) - \|\rho_\mathfrak{g}\|^2\right) + \left(\|\mu + \rho_\mathfrak{k}\|^2 - \|\rho_\mathfrak{k}\|^2\right) + \left(\|\rho_\mathfrak{k}\|^2 - \|\rho_\mathfrak{g}\|^2\right) = -(\Lambda|\Lambda) + \|\mu + \rho_\mathfrak{k}\|^2.$$

Operator D je simetričan na unitarnom prostoru $X \otimes \mathcal{S}$. Kako je potprostor $(X \otimes \mathcal{S})(\mu)$ $D-$invarijantan, kvadrat restrikcije $D|(X \otimes \mathcal{S})(\mu)$ je pozitivno semidefinitan hermitski operator. Odatle slijedi nejednakost (3.14).

Tvrdnja (*b*) slijedi iz $\operatorname{Ker} D^2 = \operatorname{Ker} D$ i iz

$$D^2|(X \otimes \mathcal{S})(\mu) = \left(-(\Lambda|\Lambda) + \|\mu + \rho_\mathfrak{k}\|^2\right) I_{(X \otimes \mathcal{S})(\mu)}.$$

Poglavlje 4

KOHOMOLOŠKA INDUKCIJA

4.1 Osnovni pojmovi homološke algebre

U ovom ćemo se odjeljku ograničiti na kategorije unitalnih $\mathcal{A}-$modula za neku kompleksnu unitalnu algebru $\mathcal{A}$. To u pravilu neće biti kategorija svih unitalnih $\mathcal{A}-$modula, nego neka njena potkategorija obično definirana zahtjevom da na objektima imamo još neku strukturu, npr. djelovanje neke grupe ili neke druge kompleksne unitalne algebre slijeva ili zdesna. Za kategorije s kojima ćemo se baviti uvijek ćemo pretpostavljati da su zatvorene u odnosu na uzimanje podmodula (uz dodatnu strukturu), kvocijentnih modula i konačnih direktnih suma. Ako je $\mathcal{C}$ takva kategorija i ako su X i Y objekti u toj kategoriji, skup svih morfizama $Hom_{\mathcal{C}}(X,Y)$ uvijek će biti kompleksan vektorski prostor $-$ potprostor svih linearnih operatora sa X u Y. Za morfizam $f : X \to Y$ i za bilo koji treći objekt Z u kategoriji $\mathcal{C}$, sa f^* ćemo označavati linearan operator sa $Hom_{\mathcal{C}}(Y,Z)$ u $Hom_{\mathcal{C}}(X,Z)$ definiran kao "desno komponiranje" sa f :

$$f^*(g) = g \circ f, \qquad g \in Hom_{\mathcal{C}}(Y,Z).$$

Analogno, sa f_* označavamo "lijevo komponiranje" sa f, tj. linearan operator sa $Hom_{\mathcal{C}}(Z,X)$ u $Hom_{\mathcal{C}}(Z,Y)$ definiran sa

$$f_*(h) = f \circ h, \qquad h \in Hom_{\mathcal{C}}(Z,X).$$

Svi funktori koje ćemo promatrati poštovat će linearne strukture skupa morfizama. Tj. za funktor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ i za bilo koje objekte X i Y u kategoriji $\mathcal{C}$ pretpostavljamo da vrijedi

$$F(\alpha f + \beta g) = \alpha F(f) + \beta F(g) \qquad \forall f,g \in Hom_{\mathcal{C}}(X,Y) \quad \text{i} \quad \forall \alpha,\beta \in \mathbb{C}.$$

Napominjemo da uvijek promatramo kovarijantne funktore; kontravarijantni funktor s kategorije $\mathcal{C}$ u kategoriju $\mathcal{D}$ možemo promatrati kao kovarijantni funktor s kategorije $\mathcal{C}$ u suprotnu kategoriju $\mathcal{D}^{\text{op}}$ (ili kao kovarijantni funktor sa $\mathcal{C}^{\text{op}}$ u $\mathcal{D}$).

Neka su $\mathcal{C}$ i $\mathcal{D}$ kategorije i $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ i $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ funktori. Kažemo da je fuktor F **lijevo adjungiran** funktoru G i da je funktor G **desno adjungiran** funktoru F, ako za svaka dva objekta $X \in \mathcal{C}$ i $Y \in \mathcal{D}$ postoje međusobno inverzni izomorfizmi

$$\alpha_{X,Y} : Hom_{\mathcal{D}}(FX,Y) \to Hom_{\mathcal{C}}(X,GY) \qquad \text{i} \qquad \beta_{X,Y} : Hom_{\mathcal{C}}(X,GY) \to Hom_{\mathcal{D}}(FX,Y)$$

i te su dvije **familije** $(\alpha_{X,Y})$ i $(\beta_{X,Y})$ **prirodne** i u X i u Y. Prirodnost familije $(\alpha_{X,Y})$ u varijabli X znači da je za bilo koje $X, X' \in Ob(\mathcal{C})$ i bilo koji morfizam $f \in Hom_{\mathcal{C}}(X',X)$ i za bilo koji $Y \in Ob(\mathcal{D})$ sljedeći dijagram komutativan:

$$\begin{tikzcd}
Hom_{\mathcal{D}}(FX,Y) \arrow[r, "\alpha_{X,Y}"] \arrow[d, "(Ff)^*"'] & Hom_{\mathcal{C}}(X,GY) \arrow[d, "f^*"] \\
Hom_{\mathcal{D}}(FX',Y) \arrow[r, "\alpha_{X',Y}"'] & Hom_{\mathcal{C}}(X',GY)
\end{tikzcd}$$

Prirodnost familije $(\alpha_{X,Y})$ u varijabli Y znači da je za bilo koje $Y, Y' \in \mathcal{D}$ i bilo koji morfizam $g \in Hom_{\mathcal{D}}(Y, Y')$ i za bilo koji $X \in Ob(\mathcal{C})$ sljedeći dijagram komutativan:

$$\begin{tikzcd}
Hom_{\mathcal{D}}(FX,Y) \arrow[r, "\alpha_{X,Y}"] \arrow[d, "g_*"'] & Hom_{\mathcal{C}}(X,GY) \arrow[d, "(Gg)_*"] \\
Hom_{\mathcal{D}}(FX,Y') \arrow[r, "\alpha_{X,Y'}"'] & Hom_{\mathcal{C}}(X,GY')
\end{tikzcd}$$

Analogno, prirodnost familije $(\beta_{X,Y})$ u varijabli X znači da je za bilo koje $X, X' \in Ob(\mathcal{C})$ i bilo koji morfizam $f \in Hom_{\mathcal{C}}(X', X)$ i za bilo koji $Y \in Ob(\mathcal{D})$ sljedeći dijagram komutativan:

$$\begin{tikzcd}
Hom_{\mathcal{C}}(X,GY) \arrow[r, "\beta_{X,Y}"] \arrow[d, "f^*"'] & Hom_{\mathcal{D}}(FX,Y) \arrow[d, "(Ff)^*"] \\
Hom_{\mathcal{C}}(X',GY) \arrow[r, "\beta_{X',Y}"'] & Hom_{\mathcal{D}}(FX',Y)
\end{tikzcd}$$

Napokon, prirodnost familije $(\beta_{X,Y})$ u varijabli Y znači da je za bilo koje $Y, Y' \in \mathcal{D}$ i bilo koji morfizam $g \in Hom_{\mathcal{D}}(Y, Y')$ i za bilo koji $X \in Ob(\mathcal{C})$ sljedeći dijagram komutativan:

$$\begin{tikzcd}
Hom_{\mathcal{C}}(X,GY) \arrow[r, "\beta_{X,Y}"] \arrow[d, "(Gg)_*"'] & Hom_{\mathcal{D}}(FX,Y) \arrow[d, "g_*"] \\
Hom_{\mathcal{C}}(X,GY') \arrow[r, "\beta_{X,Y'}"'] & Hom_{\mathcal{D}}(FX,Y')
\end{tikzcd}$$

Razmotrimo sada dva elementarna ali važna primjera. Neka je $\mathcal{A}$ kompleksna unitalna algebra i $\mathcal{B}$ njena unitalna podalgebra. Svaki unitalni lijevi $\mathcal{A}-$modul postaje unitalni lijevi $\mathcal{B}-$modul koji se dobiva "zaboravljanjem" dijela djelovanja. Naravno, svaki homomorfizam $\mathcal{A}-$modula je ujedno homomorfizam pripadnih $\mathcal{B}-$modula. To se zove **zaboravni funktor** iz kategorije $Mod(\mathcal{A})$ unitalnih lijevih $\mathcal{A}-$modula u kategoriju $Mod(\mathcal{B})$ unitalnih lijevih $\mathcal{B}-$modula. Napomenimo da za objekte X i Y u kategoriji $Mod(\mathcal{A})$ prostor morfizama označavamo sa $Hom_{\mathcal{A}}(X,Y)$ (umjesto $Hom_{Mod(\mathcal{A})}(X,Y)$).

Neka je sada W unitalni lijevi $\mathcal{B}-$modul, tj. objekt iz kategorije $Mod(\mathcal{B})$. U tvrdnji (b) teorema 1.4.20. konstruirali smo unitalni lijevi $\mathcal{A}-$modul $\mathcal{A} \otimes_{\mathcal{B}} W$. To je kao vektorski prostor kvocijentni prostor tenzorskog produkta $\mathcal{A} \otimes W$ po potprostoru razapetom sa svim elementima oblika $ab \otimes w - a \otimes bw$, $a \in \mathcal{A}$, $b \in \mathcal{B}$, $w \in W$. Svakom homomorfizmu $\mathcal{B}-$modula $f : W \to W'$ pridružen je homomorfizam $\mathcal{A}-$modula $I_{\mathcal{A}} \otimes_{\mathcal{B}} f : \mathcal{A} \otimes_{\mathcal{B}} W \to \mathcal{A} \otimes_{\mathcal{B}} W'$, pa imamo funktor iz kategorije $Mod(\mathcal{B})$ u kategoriju $Mod(\mathcal{A})$. U odjeljku 1.4. zvali smo taj funktor **induciranje** sa $\mathcal{B}$ na $\mathcal{A}$ i označavali sa $Ind_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}$. Često se taj funktor zove i **proširenje skalara**. Tvrdnja (b) u teoremu 1.4.20., koja se obično zove **Frobeniusov teorem reciprociteta**, zapravo kaže da je taj funktor lijevo adjungiran zaboravnom funktoru $Mod(\mathcal{A}) \to Mod(\mathcal{B})$.

Drugi je primjer produciranih modula koji se dobivaju pomoću funktora $Hom_{\mathcal{B}}(\mathcal{A}, \bullet)$ umjesto funktora $\mathcal{A} \otimes_{\mathcal{B}} \bullet$. I dalje je $\mathcal{B}$ unitalna podalgebra unitalne algebre $\mathcal{A}$ i W unitalni lijevi $\mathcal{B}-$modul. Pomoću množenja s lijeva $\mathcal{A}$ se može shvaćati kao unitalni lijevi $\mathcal{B}-$modul, a $Pro_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} W = Hom_{\mathcal{B}}(\mathcal{A}, W)$ postaje unitalni lijevi $\mathcal{A}-$modul uz djelovanje

$$(u \cdot \varphi)(v) = \varphi(vu), \qquad \varphi \in Hom_{\mathcal{B}}(\mathcal{A}, W), \quad u, v \in \mathcal{A}.$$

Svakom homomorfizmu $\mathcal{B}-$modula $f : W \to W'$ pridružen je homomorfizam $\mathcal{A}-$modula $Pro_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} f : Hom_{\mathcal{B}}(\mathcal{A}, W) \to Hom_{\mathcal{B}}(\mathcal{A}, W')$ definiran kao lijevo komponiranje sa f :

$$\left(Pro_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} f\right)(\varphi) = f \circ \varphi, \qquad \varphi \in Hom_{\mathcal{B}}(\mathcal{A}, W).$$

Na taj način došli smo do funktora $Pro_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} : Mod(\mathcal{B}) \to Mod(\mathcal{A})$, koji smo u odjeljku 1.4. zvali **produciranje**. Teorem 1.4.21., koji se također zove **Frobeniusov teorem reciprociteta**, zapravo kaže da je taj funktor desno adjungiran zaboravnom funktoru $Mod(\mathcal{A}) \to Mod(\mathcal{B})$.

Imat ćemo često situaciju kad je algebra $\mathcal{A}$ slobodna kao $\mathcal{B}-$modul za lijevo i za desno množenje. Prema PBW$-$teoremu to je slučaj kad je $\mathcal{A} = U(\mathfrak{g})$ i $\mathcal{B} = U(\mathfrak{h})$ za podalgebru $\mathfrak{h}$ Liejeve algebre $\mathfrak{g}$. Općenito, ako je $\mathcal{A} = \mathcal{B} \otimes \Lambda$ za vektorski prostor Λ, onda se za lijevi $\mathcal{B}-$modul W vektorski prostor $Hom_{\mathcal{B}}(\mathcal{A}, W)$ identificira s vektorskim prostorom $Hom_{\mathbb{C}}(\Lambda, W)$ svih linearnih operatora sa Λ u W. Posebno, $Hom_{\mathcal{B}}(\mathcal{A}, \bullet)$ je egzaktni funktor. Međutim, dok je lijevo djelovanje algebre $\mathcal{A}$ na $Hom_{\mathcal{B}}(\mathcal{A}, W)$ jednostavno zapisati, da bismo ga zapisali na prostoru $Hom_{\mathbb{C}}(\Lambda, W)$ morali bismo znati neke komutacione relacije u algebri $\mathcal{A}$. Analogno, ako je kao desni $\mathcal{B}-$modul $\mathcal{A} = \Lambda \otimes \mathcal{B}$, onda se kao vektorski prostor $\mathcal{A} \otimes_{\mathcal{B}} W$ identificira sa $\Lambda \otimes W$.

Pojam indukcije odnosno proširenja skalara s unitalne podalgebre $\mathcal{B}$ na unitalnu algebru $\mathcal{A}$, a također i pojam produkcije sa $\mathcal{B}$ na $\mathcal{A}$, neposredno se generaliziraju i na situaciju kad $\mathcal{B}$ nije podalgebra od $\mathcal{A}$, ali je zadan unitalni homomorfizam $\tau : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$. Naime, u obje konstrukcije mi zapravo nismo trebali da $\mathcal{B}$ bude podalgebra od $\mathcal{A}$, nego smo samo trebali djelovanje unitalne algebre $\mathcal{B}$ na unitalnim lijevim $\mathcal{A}-$modulima, a to se postiže i pomoću unitalnog homomorfizma τ : naprosto $b \in \mathcal{B}$ djeluje na $\mathcal{A}-$modulu V kao $\tau(b)$. Svaki se takav τ može zapisati kao kompozicija epimorfizma $\mathcal{B} \to \tau(\mathcal{B})$ s monomorfizmom inkluzije $\tau(\mathcal{B}) \hookrightarrow \mathcal{A}$. Dakle, nova je situacija kad je $\mathcal{A}$ kvocijentna algebra od $\mathcal{B}$ po dvostranom idealu $\mathcal{J}$, i tada bi umjesto "proširenja skalara" bilo prirodnije govoriti o "ukidanju djelovanja dijela skalara". Ekstremna je situacija ako imamo epimorfizam $\mathcal{B} \to \mathbb{C}$. Takav epimorfizam postoji u slučaju univerzalne omotačke algebre $U(\mathfrak{g})$: to je kvocijent po dvostranom idealu $\mathfrak{g}U(\mathfrak{g})$. Za $\mathfrak{g}-$modul V pripadni "prošireni" moduli $\mathbb{C} \otimes_{U(\mathfrak{g})} V$ i $Hom_{U(\mathfrak{g})}(\mathbb{C}, V)$ su zapravo koinvarijante $V/\mathfrak{g}V$ i invarijante $V^{\mathfrak{g}}$. Općenitije, ako je $\mathcal{J}$ dvostrani ideal u unitalnoj algebri $\mathcal{B}$, onda su dva proširenja skalara (tj. produkcija i indukcija) u odnosu na epimorfizam $\mathcal{B} \to \mathcal{A} = \mathcal{B}/\mathcal{J}$ upravo uzimanje koinvarijanata $V \mapsto V/\mathcal{J}V$, odnosno, uzimanje invarijanata $V \mapsto V^{\mathcal{J}} = \{v \in V;\ \mathcal{J}v = \{0\}\}$, u odnosu na ideal $\mathcal{J}$.

Kad god imamo neku dodatnu strukturu na polaznom $\mathcal{B}-$modulu W (djelovanje grupe ili desno djelovanje neke druge unitalne algebre), ta će se dodatna struktura prirodno prenositi na $\mathcal{A}-$module $\mathcal{A} \otimes_{\mathcal{B}} W$ i $Hom_{\mathcal{B}}(\mathcal{A}, W)$.

Uočimo sada neka svojstva adjungiranih funktora. Prije svega to je jedinstvenost do na prirodni izomorfizam. Naime, ako su npr. F i F' lijevo adjungirani funktori istog funktora $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$, onda za bilo koje objekte X iz $\mathcal{C}$ i Y iz $\mathcal{D}$ imamo izomorfizme

$$Hom_{\mathcal{D}}(FX, Y) \simeq Hom_{\mathcal{C}}(X, GY) \simeq Hom_{\mathcal{D}}(F'X, Y).$$

Posebno, za dani objekt X iz $\mathcal{C}$ i za objekt $Y = F'X$ iz $\mathcal{D}$ imamo

$$Hom_{\mathcal{D}}(FX, F'X) \simeq H_{\mathcal{D}}(F'X, F'X),$$

i pri tom izomorfizmu identiteti u $Hom_{\mathcal{D}}(F'X, F'X)$ odgovara neki morfizam $\alpha : FX \to F'X$. Nadalje, za isti objekt X iz $\mathcal{C}$ i za objekt $Y = FX$ iz $\mathcal{D}$ imamo

$$Hom_{\mathcal{D}}(FX, FX) \simeq Hom_{\mathcal{D}}(F'X, FX),$$

i pri tom izomorfizmu identiteti u $Hom_{\mathcal{D}}(FX, FX)$ odgovara neki morfizam $\beta : F'X \to FX$. Pomoću prirodnosti u definiciji lijevo adjungiranog funktora lako se vidi da su obje kompozicije $\alpha \circ \beta$ i $\beta \circ \alpha$ identitete, dakle, imamo prirodni izomorfizam $FX \simeq F'X$ za svaki objekt X iz $\mathcal{C}$. Sasvim analogno se dobiva i prirodna izomorfnost desno adjungiranih funktora istog funktora.

Ako su $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ i $F' : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ funktori koji su lijevo (desno) adjungirani funktorima $G : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ i $G' : \mathcal{C} \to \mathcal{B}$, onda je kompozicija $F'F : \mathcal{A} \to \mathcal{C}$ lijevo (desno) adjungiran funktor kompozicije $GG' : \mathcal{C} \to \mathcal{A}$. To se vidi iz prirodnih izomorfizama

$$Hom_{\mathcal{C}}(F'FX, Y) \simeq Hom_{\mathcal{B}}(FX, G'Y) \simeq Hom_{\mathcal{A}}(X, GG'Y)$$

za lijevo adjungirane funktore, odnosno iz

$$Hom_{\mathcal{C}}(Y, F'FX) \simeq Hom_{\mathcal{B}}(G'Y, FX) \simeq Hom_{\mathcal{A}}(GG'Y, X)$$

za desno adjungirane funktore. Ova činjenica daje teoreme o induciranju i o produciranju u etapama, budući da se "zaboravljanje" s algebre $\mathcal{A}$ na podalgebru $\mathcal{C}$ očito može obaviti u etapama preko neke međualgebre $\mathcal{B}$: najprije sa $\mathcal{A}$ na $\mathcal{B}$, a zatim sa $\mathcal{B}$ na $\mathcal{C}$.

Kompleks u kategoriji $\mathcal{C}$ je konačan ili beskonačan niz objekata i morfizama u jednom od oblika

$$X : \quad \cdots \longleftarrow X_{n-1} \xleftarrow{\partial_{n-1}} X_n \xleftarrow{\partial_n} X_{n+1} \longleftarrow \cdots$$

$$Y : \quad \cdots \longrightarrow Y_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} Y_n \xrightarrow{d_n} Y_{n+1} \longrightarrow \cdots$$

pri čemu vrijedi $\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0$ (odnosno, $d_n \circ d_{n-1} = 0$) za svaki n. To znači da je $\operatorname{Im} \partial_n \subseteq \operatorname{Ker} \partial_{n-1}$ (odnosno, $\operatorname{Im} d_{n-1} \subseteq \operatorname{Ker} d_n$). **Homologija** kompleksa X s padajućim indeksima je familija modula u kategoriji $\mathcal{C}$

$$H_n(X) = (\operatorname{Ker} \partial_{n-1})/(\operatorname{Im} \partial_n)$$

a **kohomologija** kompleksa Y s rastućim indeksima je familija modula

$$H^n(Y) = (\operatorname{Ker} d_n)/(\operatorname{Im} d_{n-1}).$$

Dvije vrste kompleksa svode se na isto zamjenom n sa $-n$. Za kompleks X kažemo da je **egzaktan** na mjestu X_n ako je $\operatorname{Im} \partial_n = \operatorname{Ker} \partial_{n-1}$. Kažemo da je X **egzaktan niz** ili **egzaktan kompleks** ako je egzaktan na svakom mjestu.

Ako imamo dijagram u $\mathcal{C}$ oblika

$$\begin{array}{ccccccccc} X: & \cdots & \longleftarrow & X_{n-1} & \stackrel{\partial_{n-1}}{\longleftarrow} & X_n & \stackrel{\partial_n}{\longleftarrow} & X_{n+1} & \longleftarrow & \cdots \\ & & & \downarrow F_{n-1} & & \downarrow F_n & & \downarrow F_{n+1} & & \\ X': & \cdots & \longleftarrow & X'_{n-1} & \stackrel{\partial'_{n-1}}{\longleftarrow} & X'_n & \stackrel{\partial'_n}{\longleftarrow} & X'_{n+1} & \longleftarrow & \cdots \end{array}$$

u kojem su X i X' kompleksi i svi kvadrati komutiraju (tj. $F_{n-1} \circ \partial_{n-1} = \partial'_{n-1} \circ F_n \; \forall n$), kažemo da je $F = (F_n)$ **lančano preslikavanje** (ili **kolančano** u analognoj situaciji kad su indeksi rastući). Lančano preslikavanje $F = (F_n)$ daje preslikavanje na prostorima homologija također označeno s $F = (F_n)$, $F_n : H_n(X) \to H_n(X')$. Ako je u gornjem dijagramu $X_{-n} = X'_{-n} = 0$ za $n \geq 2$, $X_{-1} = M$, $X'_{-1} = M'$ i $F_{-1} = f$, onda F zovemo **lančano preslikavanje nad morfizmom** $f : M \to M'$ (odnosno, u analognoj situaciji za rastuće indekse, **kolančano preslikavanje nad morfizmom** f).

Neka su $F : X \to X'$ i $G : X \to X'$ dva lančana preslikavanja kompleksa s padajućim indeksima. Za familiju $s = (s_n)$ morfizama u $\mathcal{C}$ kažemo da je **homotopija** između F i G, ako je

$$s_n : X_n \to X'_{n+1} \qquad \text{i vrijedi} \qquad \partial'_n \circ s_n + s_{n-1} \circ \partial_{n-1} = F_n - G_n \qquad \forall n.$$

Definicija u analognom slučaju kolančanih preslikavanja $F, G : Y \to Y'$ kompleksa s rastućim indeksima je

$$s_n : Y_n \to Y'_{n-1} \qquad \text{i vrijedi} \qquad d_{n-1} \circ s_n + s_{n+1} \circ d_n = F_n - G_n \qquad \forall n.$$

Homotopna lančana (kolančana) preslikavanja induciraju ista preslikavanja na prostorima homologija (kohomologija). Doista, u lančanom slučaju s padajućim indeksima, ako je $\alpha \in H_n(X)$ i ako je $a \in \operatorname{Ker} \partial_{n-1}$ njegov predstavnik, tada su $F_n(a)$ i $G_n(a)$ predstavnici elemenata $F_n(\alpha), G_n(\alpha) \in H_n(X')$ u $\operatorname{Ker} \partial'_{n-1}$. Budući da je $\partial_{n-1}(a) = 0$, iz definicije homotopije između F i G slijedi

$$F_n(a) - G_n(a) = \partial'_n(s_n(a)) \in \operatorname{Im} \partial'_n,$$

a to znači da je $F_n(\alpha) = G_n(\alpha)$. Tvrdnja za kolančana preslikavanja kompleksa s rastućim indeksima dokazuje se sasvim analogno.

Za modul P u $\mathcal{C}$ kažemo da je **projektivan** u $\mathcal{C}$ ako za svaki dijagram

$$\begin{array}{ccccc} & & P & & \\ & & \downarrow \tau & & \\ 0 & \longleftarrow & B & \stackrel{\psi}{\longleftarrow} & C \end{array}$$

koji je egzaktan na mjestu B (tj. ψ je surjekcija) postoji $\sigma : P \to C$ takav da dobiveni dijagram

$$\begin{array}{ccccc} & & P & & \\ & & \downarrow \tau & \searrow \sigma & \\ 0 & \longleftarrow & B & \stackrel{\psi}{\longleftarrow} & C \end{array}$$

komutira (tj. da je $\tau = \psi \circ \sigma$). Ako je P projektivan i ako je

$$\begin{array}{ccccc} & & P & & \\ & & \downarrow \tau & & \\ A' & \stackrel{\varphi}{\longleftarrow} & A & \stackrel{\psi}{\longleftarrow} & A'' \end{array}$$

dijagram u $\mathcal{C}$ koji je egzaktan na mjestu A (tj. $\operatorname{Im}\psi = \operatorname{Ker}\varphi$), i ako je $\varphi \circ \tau = 0$, tada postoji $\sigma : P \to A''$ takav da dijagram

$$\begin{array}{ccccc} & & P & & \\ & & \downarrow\tau & \searrow\sigma & \\ A' & \xleftarrow{\varphi} & A & \xleftarrow{\psi} & A'' \end{array}$$

komutira (tj. $\tau = \psi \circ \sigma$).

U kategoriji $\mathcal{C}$ se egzaktan niz

$$0 \longleftarrow M \longleftarrow X_0 \longleftarrow X_1 \longleftarrow X_2 \longleftarrow \cdots\cdots ,$$

u kome su svi moduli $X_0, X_1, X_2, \ldots$ projektivni, zove **projektivna rezolucija** modula M.

Za modul I u $\mathcal{C}$ kažemo da je **injektivan** u $\mathcal{C}$ ako za svaki dijagram

$$\begin{array}{ccccc} & & I & & \\ & & \uparrow\tau & & \\ 0 & \longrightarrow & B & \xrightarrow{\varphi} & C \end{array}$$

koji je egzaktan na mjestu B (tj. φ je injekcija) postoji $\sigma : C \to I$ takav da dobiveni dijagram

$$\begin{array}{ccccc} & & I & & \\ & & \uparrow\tau & \nwarrow\sigma & \\ 0 & \longrightarrow & B & \xrightarrow{\varphi} & C \end{array}$$

komutira (tj. da je $\tau = \sigma \circ \varphi$). Ako je I injektivan i ako je

$$\begin{array}{ccccc} & & I & & \\ & & \uparrow\tau & & \\ A' & \xrightarrow{\psi} & A & \xrightarrow{\varphi} & A'' \end{array}$$

dijagram u $\mathcal{C}$ koji je egzaktan na mjestu A (tj. $\operatorname{Im}\psi = \operatorname{Ker}\varphi$), i ako je $\tau \circ \psi = 0$, tada postoji $\sigma : A'' \to I$ takav da dijagram

$$\begin{array}{ccccc} & & I & & \\ & & \uparrow\tau & \nwarrow\sigma & \\ A' & \xrightarrow{\psi} & A & \xrightarrow{\varphi} & A'' \end{array}$$

komutira (tj. $\tau = \sigma \circ \varphi$).

U kategoriji $\mathcal{C}$ se egzaktan niz

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow X_0 \longrightarrow X_1 \longrightarrow X_2 \longrightarrow \cdots\cdots ,$$

u kome su svi moduli $X_0, X_1, X_2, \ldots$ injektivni, zove **injektivna rezolucija** modula M.

Propozicija 4.1.1. *(a) Neka su zadani kompleksi X i X' i morfizam $f : M \to M'$ u sljedećem dijagramu u $\mathcal{C}$:*

$$\begin{array}{cccccccccccc} X: & 0 & \longleftarrow & M & \longleftarrow & X_0 & \longleftarrow & X_1 & \longleftarrow & X_2 & \longleftarrow & \cdots\cdots \\ & & & \downarrow f & & \downarrow F_0 & & \downarrow F_1 & & \downarrow F_2 & & \\ X': & 0 & \longleftarrow & M' & \longleftarrow & X'_0 & \longleftarrow & X'_1 & \longleftarrow & X'_2 & \longleftarrow & \cdots\cdots \end{array}$$

Nadalje, pretpostavimo da je X' egzaktan i da su svi X_n projektivni. Tada postoji gore označeno lančano preslikavanje $F : X \to X'$ nad f. Ako su $F : X \to X'$ i $G : X \to X'$ dva lančana preslikavanja nad f onda su F i G homotopni.

(*b*) *Neka su zadani kompleksi X i X' i morfizam $f : M \to M'$ u sljedećem dijagramu u $\mathcal{C}$:*

$$\begin{array}{ccccccccccc} X: & 0 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & X_0 & \longrightarrow & X_1 & \longrightarrow & X_2 & \longrightarrow & \cdots\cdots \\ & & & \downarrow f & & \downarrow F_0 & & \downarrow F_1 & & \downarrow F_2 & & \\ X': & 0 & \longrightarrow & M' & \longrightarrow & X'_0 & \longrightarrow & X'_1 & \longrightarrow & X'_2 & \longrightarrow & \cdots\cdots \end{array}$$

Nadalje, pretpostavimo da je X egzaktan i da su svi X'_n injektivni. Tada postoji gore označeno kolančano preslikavanje $F : X \to X'$ nad f. Ako su $F : X \to X'$ i $G : X \to X'$ dva kolančana preslikavanja nad f onda su F i G homotopni.

Dokaz: (a) Označimo horizontalne morfizme u gornjem dijagramu sa $\partial_{-1} : X_0 \to M$, $\partial'_{-1} : X'_0 \to M'$, $\partial_n : X_{n+1} \to X_n$, $\partial'_n : X'_{n+1} \to X'_n$, $n \in \mathbb{Z}_+$. Tada imamo dijagram s egzaktnim retkom

$$\begin{array}{ccccc} & & X_0 & & \\ & & \downarrow \tau & & \\ 0 & \longleftarrow & M' & \stackrel{\partial'_{-1}}{\longleftarrow} & X'_0, \end{array}$$

gdje je $\tau = f \circ \partial_{-1}$. Kako je modul X_0 projektivan postoji morfizam $F_0 : X_0 \to X'_0$, takav da je $\partial'_{-1} \circ F_0 = f \circ \partial_{-1}$. Daljnje morfizme $F_n : X_n \to X'_n$, $n \in \mathbb{N}$ konstruiramo induktivno. Pretpostavimo da su konstruirani morfizmi $F_k : X_k \to X'_k$ za $k = 0, 1, \ldots, n-1$ takvi da prvih n kvadrata u dijagramu iz tvrdnje (a) komutiraju. Tada imamo dijagram s egzaktnim retkom

$$\begin{array}{ccccc} & & X_n & & \\ & & \downarrow \tau & & \\ X'_{n-2} & \stackrel{\partial'_{n-2}}{\longleftarrow} & X'_{n-1} & \stackrel{\partial'_{n-1}}{\longleftarrow} & X'_n, \end{array}$$

gdje je $\tau = F_{n-1} \circ \partial_{n-1}$. Nadalje, komutativnost $n-$tog kvadrata znači da je $\partial'_{n-2} \circ F_{n-1} = F_{n-2} \circ \partial_{n-2}$, pa imamo

$$\partial'_{n-2} \circ \tau = \partial'_{n-2} \circ F_{n-1} \circ \partial_{n-1} = F_{n-2} \circ \partial_{n-2} \circ \partial_{n-1} = 0.$$

Stoga zbog projektivnosti modula X_n postoji morfizam $F_n : X_n \to X'_n$ takav da vrijedi $F_{n-1} \circ \partial_n = \partial'_n \circ F_n$, odnosno, da komutira $(n+1)-$vi kvadrat u dijagramu iz tvrdnje (a). Time je induktivno konstruirano lančano preslikavanje (F_n) s traženim svojstvima.

Pretpostavimo sada da su (F_n) i (G_n) dva takva lančana preslikavanja. Uvedemo li oznake $H_n = F_n - G_n$, dobivamo da u sljedećem dijagramu svi kvadrati komutiraju:

$$\begin{array}{ccccccccccc} 0 & \longleftarrow & M & \stackrel{\partial_{-1}}{\longleftarrow} & X_0 & \stackrel{\partial_0}{\longleftarrow} & X_1 & \stackrel{\partial_1}{\longleftarrow} & X_2 & \stackrel{\partial_2}{\longleftarrow} & \cdots\cdots \\ & & \downarrow 0 & & \downarrow H_0 & & \downarrow H_1 & & \downarrow H_2 & & \\ 0 & \longleftarrow & M' & \stackrel{\partial'_{-1}}{\longleftarrow} & X'_0 & \stackrel{\partial'_0}{\longleftarrow} & X'_1 & \stackrel{\partial'_1}{\longleftarrow} & X'_2 & \stackrel{\partial'_2}{\longleftarrow} & \cdots\cdots \end{array}$$

Budući da je modul X_0 projektivan, postoji morfizam $s_0 : X_0 \to X'_1$ takav da je $H_0 = \partial'_0 \circ s_0$. Označimo li sa $s_{-1} : M \to X'_0$ nul$-$morfizam, imamo jednakost

$$\partial'_0 \circ s_0 + s_{-1} \circ \partial_{-1} = H_0.$$

Daljnje morfizme $s_n : X_n \to X'_{n+1}$ konstruiramo induktivno po n. Neka je $n \in \mathbb{N}$ i pretpostavimo da smo konstruirali morfizme $s_k : X_k \to X'_{k+1}$ za $k = -1, 0, \ldots, n-1$ takve da vrijedi

$$\partial'_k \circ s_k + s_{k-1} \circ \partial_{k-1} = H_k \qquad \text{za} \quad 0 \leq k \leq n-1.$$

Imamo tada dijagram s egzaktnim retkom

$$\begin{array}{ccccc} & & X_n & & \\ & & \downarrow \tau & & \\ X'_{n-1} & \overset{\partial'_{n-1}}{\longleftarrow} & X'_n & \overset{\partial'_n}{\longleftarrow} & X'_{n+1}, \end{array}$$

gdje je $\tau = H_n - s_{n-1} \circ \partial_{n-1}$. Tada imamo

$$\partial'_{n-1} \circ \tau = \partial'_{n-1} \circ H_n - \partial'_{n-1} \circ s_{n-1} \circ \partial_{n-1} = H_{n-1} \circ \partial_{n-1} - \partial'_{n-1} \circ s_{n-1} \circ \partial_{n-1} =$$

$$= [H_{n-1} - \partial'_{n-1} \circ s_{n-1}] \circ \partial_{n-1} = s_{n-2} \circ \partial_{n-2} \circ \partial_{n-1} = 0.$$

Stoga zbog projektivnosti modula X_n postoji morfizam $s_n : X_n \to X'_{n+1}$ takav da je $\tau = \partial'_n \circ s_n$, odnosno, da vrijedi

$$\partial'_n \circ s_n + s_{n-1} \circ \partial_{n-1} = H_n = F_n - G_n.$$

Na taj način induktivno smo konstruirali familiju morfizama $s_n : X_n \to X'_{n+1}$, $n \geq -1$, takvu da gornja jednakost vrijedi za svaki $n \in \mathbb{Z}_+$, odnosno konstruirali smo homotopiju između F i G.

Tvrdnja (b) dokazuje se potpuno analogno.

Budući da pretpostavljamo da su svi funktori linearni na prostorima morfizama, svaki funktor šalje $0-$morfizme u $0-$morfizme, $0-$module u $0-$module, komplekse u komplekse i direktne sume u direktne sume.

Za **funktor** $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ kažemo da je **egzaktan** ako transformira svaki egzaktan niz u egzaktan niz.

Propozicija 4.1.2. *Funktor F je egzaktan ako i samo ako je egzaktan na svim tzv.* **kratkim egzaktnim nizovima**, *tj. na egzaktnim nizovima oblika*

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0. \tag{4.1}$$

Dokaz: Naravno, ako je funktor F egzaktan, on je posebno egzaktan na svim kratkim egzaktnim nizovima. Pretpostavimo sada da je funktor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ egzaktan na svim kratkim egzaktnim nizovima u, tj. da je za svaki egzaktan niz oblika (4.1) u kategoriji $\mathcal{C}$ i niz

$$0 \longrightarrow FA \longrightarrow FB \longrightarrow FC \longrightarrow 0$$

u kategoriji $\mathcal{D}$ egzaktan. Neka je sada

$$A \xrightarrow{\varphi} B \xrightarrow{\psi} C$$

egzaktan niz u kategoriji $\mathcal{C}$. Stavimo $A' = A/(\operatorname{Ker} f)$ i $C' = \operatorname{Im} \psi$. Nadalje, neka je $\Phi : A' \to B$ morfizam dobiven iz morfizma φ prijelazom na kvocijent:

$$\Phi(a + \operatorname{Ker} \varphi) = \varphi(a), \qquad a \in A.$$

Napokon, neka je $\Psi : B \to C'$ morfizam dobiven iz morfizma ψ restrikcijom kodomene; dakle,

$$\Psi(b) = \psi(b), \qquad b \in B.$$

Tada je morfizam Φ injektivan i morfizam Ψ je surjektivan. Nadalje, iz definicija je jasno da je $\operatorname{Im} \Phi = \operatorname{Im} \varphi$ i $\operatorname{Ker} \Psi = \operatorname{Ker} \psi$. Prema tome, niz u kategoriji $\mathcal{C}$

$$0 \longrightarrow A' \xrightarrow{\Phi} B \xrightarrow{\Psi} C' \longrightarrow 0$$

je egzaktan. Po pretpostavci je tada egzaktan niz

$$0 \longrightarrow FA' \xrightarrow{F\Phi} FB \xrightarrow{F\Psi} FC' \longrightarrow 0$$

u kategoriji $\mathcal{D}$. Posebno, vrijedi $\operatorname{Im} F\Phi = \operatorname{Ker} F\Psi$. Uočimo sada da je $\Phi \circ \pi = \varphi$, gdje je $\pi : A \to A'$ kvocijentni epimorfizam. Tada je $F\varphi = F\Phi \circ F\pi$, pa slijedi $\operatorname{Im} F\Phi \subseteq \operatorname{Im} F\varphi$. Nadalje, ako sa $\iota : C' \to C$ označimo monomorfizam inkluzije, onda je $\psi = \iota \circ \Psi$, pa je $F\psi = F\iota \circ F\Psi$. Odatle slijedi da je $\operatorname{Ker} F\psi \subseteq \operatorname{Ker} F\Psi$. Dakle, vrijedi

$$\operatorname{Ker} F\psi \subseteq \operatorname{Ker} F\Psi = \operatorname{Im} F\Phi \subseteq \operatorname{Im} F\varphi.$$

S druge strane, iz $\psi \circ \varphi = 0$ slijedi da je $F\psi \circ F\varphi = 0$, dakle, imamo i obrnutu inkluziju $\operatorname{Im} F\varphi \subseteq \operatorname{Ker} F\psi$. Dvije inkluzije pokazuju da je $\operatorname{Im} F\varphi = \operatorname{Ker} F\psi$, a to znači da je niz u kategoriji $\mathcal{D}$

$$FA \xrightarrow{F\varphi} FB \xrightarrow{F\psi} FC$$

egzaktan. Time je dokazano da je funktor F egzaktan.

Propozicija 4.1.3. *Ako je X kompleks u kategoriji $\mathcal{C}$ i $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ je egzaktan funktor, onda F inducira izomorfizam homologije (odnosno, kohomologije) od X s homologijom (odnosno, kohomologijom) od FX.*

Dokaz: Radi određenosti pretpostavimo da je X kompleks s rastućim indeksima:

$$X : \quad \cdots \quad \longrightarrow \quad X_{n-1} \quad \xrightarrow{d_{n-1}} \quad X_n \quad \xrightarrow{d_n} \quad X_{n+1} \quad \longrightarrow \quad \cdots$$

Tada je $d_n \circ d_{n-1} = 0$, pa slijedi $Fd_n \circ Fd_{n-1} = 0$, pa je niz u kategoriji $\mathcal{D}$

$$FX : \quad \cdots \quad \longrightarrow \quad FX_{n-1} \quad \xrightarrow{Fd_{n-1}} \quad FX_n \quad \xrightarrow{Fd_n} \quad FX_{n+1} \quad \longrightarrow \quad \cdots$$

također kompleks. Sada $n-$ti modul $H^n(X) = (\operatorname{Ker} d_n)/(\operatorname{Im} d_{n-1})$ kohomologije kompleksa X definira kratki egzaktni niz u kategoriji $\mathcal{C}$:

$$0 \longrightarrow \operatorname{Im} d_{n-1} \longrightarrow \operatorname{Ker} d_n \longrightarrow H^n(X) \longrightarrow 0$$

pa iz egzaktnosti funktora F slijedi da je itansformirani niz u kategoriji $\mathcal{D}$

$$0 \longrightarrow F(\operatorname{Im} d_{n-1}) \longrightarrow F(\operatorname{Ker} d_n) \longrightarrow FH^n(X) \longrightarrow 0$$

egzaktan. To znači da je modul $FH^n(X)$ izomorfan kvocijentnom modulu od $F(\operatorname{Ker} d_n)$ po slici monomorfizma $F(\operatorname{Im} d_{n-1}) \to F(\operatorname{Ker} d_n)$. Nadalje, iz egzaktnosti niza

$$X_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} \operatorname{Im} d_{n-1} \longrightarrow 0$$

slijedi egzaktnost niza

$$FX_{n-1} \xrightarrow{Fd_{n-1}} F(\operatorname{Im} d_{n-1}) \longrightarrow 0.$$

No egzaktan je i niz

$$FX_{n-1} \xrightarrow{Fd_{n-1}} \operatorname{Im} Fd_{n-1} \longrightarrow 0,$$

pa slijedi da se modul $F(\operatorname{Im} d_{n-1})$ može identificirati s modulom $\operatorname{Im} Fd_{n-1}$. Slično, iz egzaktnosti niza

$$0 \longrightarrow \operatorname{Ker} d_n \longrightarrow X_n \xrightarrow{d_n} X_{n+1}$$

slijedi egzaktnost niza

$$0 \longrightarrow F(\operatorname{Ker} d_n) \longrightarrow FX_n \xrightarrow{Fd_n} FX_{n+1}.$$

No egzaktan je i niz

$$0 \longrightarrow \operatorname{Ker} Fd_n \longrightarrow FX_n \xrightarrow{Fd_n} FX_{n+1},$$

pa slijedi da se modul $F(\operatorname{Ker} d_n)$ može identificirati s podmodulom $\operatorname{Ker} Fd_n$ modula FX_n. To pokazuje da je modul $FH^n(X)$ izomorfan kvocijentnom modulu $(\operatorname{Ker} Fd_n)/(\operatorname{Im} Fd_{n-1}) = H^n(FX)$.

Kažemo da je funktor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ **lijevo egzaktan** ako je za svaki kratki egzaktni niz (4.1) u kategoriji $\mathcal{C}$ niz

$$0 \longrightarrow FA \longrightarrow FB \longrightarrow FC \tag{4.2}$$

u kategoriji $\mathcal{D}$ egzaktan.

Propozicija 4.1.4. *Ako je funktor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ lijevo egzaktan, onda egzaktnost bilo kojeg četveročlanog niza u kategoriji $\mathcal{C}$ oblika*

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\varphi} B \xrightarrow{\psi} C$$

povlači egzaktnost niza (4.2) *u kategoriji $\mathcal{D}$.*

Dokaz: Neka je $C' = \operatorname{Im} \psi$ i neka je $\psi' : B \to C'$ definiran kao ψ, ali s restrikcijom kodomene. Drugim riječima, vrijedi $\psi = \iota \circ \psi'$, gdje je $\iota : C' \to C$ monomorfizam inkluzije. Tada su

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\varphi} B \xrightarrow{\psi'} C' \longrightarrow 0 \qquad \text{i} \qquad 0 \longrightarrow C' \xrightarrow{\iota} C \longrightarrow C/C' \longrightarrow 0$$

egzaktan nizovi, pa su zbog lijeve egzaktnosti funktora F nizovi

$$0 \longrightarrow FA \xrightarrow{F\varphi} FB \xrightarrow{F\psi'} FC' \qquad \text{i} \qquad 0 \longrightarrow FC' \xrightarrow{F\iota} FC \longrightarrow F(C/C')$$

egzaktni. Dakle, vrijedi $\operatorname{Ker} F\varphi = 0$, što znači da je niz (4.2) egzaktan na mjestu FA. Nadalje, vrijedi $\operatorname{Im} F\varphi = \operatorname{Ker} F\psi'$. Kako je F funktor, iz $\psi = \iota \circ \psi'$ slijedi $F\psi = F\iota \circ F\psi'$. Budući da je zbog egzaktnosti drugog od gornjih nizova $\operatorname{Ker} F\iota = 0$, zaključujemo da je $\operatorname{Ker} F\psi' = \operatorname{Ker} F\psi$. Prema tome, vrijedi $\operatorname{Im} F\varphi = \operatorname{Ker} F\psi$, a to znači da je niz (4.2) egzaktan i na mjestu FB.

Funktor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ je **desno egzaktan** ako je za svaki kratki egzaktni niz (4.1) u kategoriji $\mathcal{C}$ niz

$$F(A) \longrightarrow F(B) \longrightarrow F(C) \longrightarrow 0 \tag{4.3}$$

u kategoriji $\mathcal{D}$ egzaktan. Sasvim analogno prethodnoj propoziciji dokazuje se:

Propozicija 4.1.5. *Ako je funktor F desno egzaktan, onda egzaktnost bilo kojeg četveročlanog niza u kategoriji $\mathcal{C}$ oblika*

$$A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

povlači egzaktnost niza (4.3) *u kategoriji $\mathcal{D}$.*

Sljedeći nam je cilj na drugi način opisati pojam lijevo (odnosno, desno) adjungiranih funktora. U tu svrhu nam treba pojam prirodnog izomorfizma dvaju funktora. Neka su $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ funktori. **Prirodna transformacija** funktora F u funktor G je familija $\Phi = (\Phi_A)_{A \in Ob(\mathcal{C})}$, gdje je $\Phi_A \in Hom_{\mathcal{D}}(FA, GA)$ za $A \in Ob(\mathcal{C})$, takva da kad god je $\varphi \in Hom_{\mathcal{C}}(A, B)$ onda komutira dijagram

$$\begin{array}{ccc} FA & \xrightarrow{\Phi_A} & GA \\ F\varphi \downarrow & & \downarrow G\varphi \\ FB & \xrightarrow{\Phi_B} & GB \end{array}$$

Takva familija Φ zove se **prirodni izomorfizam** funktora F s funktorom G ako je Φ_A izomorfizam za svaki $A \in Ob(\mathcal{C})$. U tom slučaju je $\Phi^{-1} = \left(\Phi_A^{-1}\right)$ prirodni izomorfizam funtora G s funktorom F. Kompozicija prirodnih transformacija (odnosno, prirodnih izomorfizama) je prirodna transformacija (odnosno, prirodni izomorfizam). Posebno, vidimo da je prirodna izomorfnost funktora relacija ekvivalencije. Lako se vidi da prirodno izomorfni funktori imaju ista svojstva egzaktnosti: lijeva (odnosno, desna) egzaktnost jednog ekvivalentna je lijevoj (odnosno, desnoj) egzaktnosti drugog; posebno, egzaktnost jednog ekvivalentna je egzaktnosti drugog.

Propozicija 4.1.6. *Neka su $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ kompleksne unitalne algebre, $\mathcal{C}$ neka kategorija unitalnih lijevih $\mathcal{A}-$modula i $\mathcal{D}$ neka kategorija unitalnih lijevih $\mathcal{B}-$modula.*

(a) *Neka su A i B moduli u kategoriji $\mathcal{C}$ i pretpostavimo da za svaki modul C u $\mathcal{C}$ postoji izomorfizam*

$$\Phi_C : Hom_{\mathcal{C}}(A, C) \longrightarrow Hom_{\mathcal{C}}(B, C)$$

takav da je familija $\Phi = (\Phi_C)_{C \in Ob(\mathcal{C})}$ prirodni izomorfizam funktora $Hom_{\mathcal{C}}(A, \bullet)$ s funktorom $Hom_{\mathcal{C}}(B, \bullet)$. Pri tome $Hom_{\mathcal{C}}(A, \bullet)$ (a također i $Hom_{\mathcal{C}}(B, \bullet)$) shvaćamo kao funktor iz kategorije $\mathcal{C}$ u kategoriju $\mathcal{V}$ svih kompleksnih vektorskih prostora: za $\varphi \in Hom_{\mathcal{C}}(C, D)$ pripadni morfizam $Hom_{\mathcal{C}}(A, \varphi)$ u kategoriji $\mathcal{V}$ definiran je sa

$$\left(Hom_{\mathcal{C}}(A, \varphi)\right)(f) = \varphi \circ f, \qquad f \in Hom_{\mathcal{C}}(A, C),$$

tj. $Hom_{\mathcal{C}}(A, \varphi) = \varphi_*$. Tada je

$$\Phi_B^{-1}(I_B) : A \longrightarrow B$$

izomorfizam u kategoriji $\mathcal{C}$.

(b) *Neka su $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ funktori i pretpostavimo da za svaki modul A u $\mathcal{C}$ i za svaki modul B u $\mathcal{D}$ postoji izomorfizam*

$$\Phi_{A,B} : Hom_{\mathcal{D}}(FA, B) \longrightarrow Hom_{\mathcal{D}}(GA, B)$$

takav da je za svaki $A \in Ob(\mathcal{C})$ familija $\Phi_A = (\Phi_{A,B})_{B \in Ob(\mathcal{D})}$ prirodni izomorfizam funktora $Hom_{\mathcal{D}}(FA, \bullet)$ s funktorom $Hom_{\mathcal{D}}(GA, \bullet)$ i da je za svaki $B \in Ob(\mathcal{D})$ familija $\Phi_B = = (\Phi_{A,B})_{A \in Ob(\mathcal{C})}$ prirodni izomorfizam funktora $Hom_{\mathcal{D}}(F(\bullet), B)$ s funktorom $Hom_{\mathcal{D}}(G(\bullet), B)$. Za $A \in Ob(\mathcal{C})$ stavimo

$$\Psi_A = \Phi_{A,GA}^{-1}(I_{GA}) \in Hom_{\mathcal{D}}(FA, GA).$$

Tada je familija $\Psi = (\Psi_A)_{A \in Ob(\mathcal{C})}$ prirodni izomorfizam funktora F s funktorom G.

Dokaz: (a) Da je familija $\Phi = (\Phi_C)_{C \in Ob(\mathcal{C})}$ prirodna transformacija funktora $F = Hom_{\mathcal{C}}(A, \bullet)$ u funktor $G = Hom_{\mathcal{C}}(B, \bullet)$ znači da za bilo koje module $C, D \in Ob(\mathcal{C})$ i za bilo koji morfizam $\varphi \in Hom_{\mathcal{C}}(C, D)$ vrijedi $G\varphi \circ \Phi_C = \Phi_D \circ F\varphi$. No kako su $F\varphi = Hom_{\mathcal{C}}(A, \varphi)$ i $G\varphi = Hom_{\mathcal{C}}(B, \varphi)$ lijeve kompozicije sa φ, prirodnost familije $\Phi = (\Phi_C)_{C \in Ob(\mathcal{C})}$ znači da vrijedi

$$\varphi \circ \Phi_C(\psi) = \Phi_D(\varphi \circ \psi) \qquad \forall C, D \in Ob(\mathcal{C}), \quad \forall \varphi \in Hom_{\mathcal{C}}(C, D), \quad \forall \psi \in Hom_{\mathcal{C}}(A, C). \tag{4.4}$$

Preslikavanje $\Phi_B : Hom_{\mathcal{C}}(A,B) \to Hom_{\mathcal{C}}(B,B)$ je izomorfizam vektorskih prostora. Označimo $\psi = \Phi_B^{-1}(I_B)$; dakle, ψ je jedinstven morfizam u $Hom_{\mathcal{C}}(A,B)$ takav da je $\Phi_B(\psi) = I_B$. Iz (4.4) za $C = B$ i za taj morfizam $\psi \in Hom_{\mathcal{C}}(A,B)$ dobivamo

$$\varphi = \Phi_D(\varphi \circ \psi) \qquad \forall D \in Ob(\mathcal{C}) \quad \text{i} \quad \forall \varphi \in Hom_{\mathcal{C}}(B,D).$$

To pokazuje da je za svaki modul $D \in Ob(\mathcal{C})$ izomorfizam $\Phi_D^{-1} : Hom_{\mathcal{C}}(B,D) \to Hom_{\mathcal{C}}(A,D)$ je dan komponiranjem sa ψ zdesna. Posebno, za $D = A$ je $\varphi \mapsto \varphi \circ \psi$ izomorfizam prostora $Hom_{\mathcal{C}}(B,A)$ na prostor $Hom_{\mathcal{C}}(A,A)$, pa postoji (i to jedinstven) morfizam $\varphi \in Hom_{\mathcal{C}}(B,A)$ takav da je $\varphi \circ \psi = I_A$. Odatle slijedi da je ψ monomorfizam. Pretpostavimo sada da ψ nije epimorfizam. Tada je $D = B/(\operatorname{Im}\psi) \neq 0$ i kvocijentni epimorfizam $\varphi \in Hom_{\mathcal{C}}(B,D)$ je različit od 0. No to je u kontradikciji s jednakošću $\varphi = F_D(\varphi \circ \psi)$ jer je očito $\varphi \circ \psi = 0$. Ova kontradikcija dokazuje da je ψ i epimorfizam, dakle, izomorfizam.

(b) Prema (a) svaki je $\Psi_A \in Hom_{\mathcal{D}}(FA,GA)$ izomorfizam. Treba još dokazati prirodnost, tj. da vrijedi

$$G\varphi \circ \Psi_A = \Psi_{A'} \circ F\varphi, \qquad \forall A, A' \in Ob(\mathcal{C}) \quad \text{i} \quad \forall \varphi \in Hom_{\mathcal{C}}(A,A'). \tag{4.5}$$

Prirodnost transformacije $\Phi_A = (\Phi_{A,B})_{B \in Ob(\mathcal{D})}$ funktora $Hom_{\mathcal{D}}(FA,\bullet)$ u funktor $Hom_{\mathcal{D}}(GA,\bullet)$ znači da za bilo koje module $B, B' \in Ob(\mathcal{D})$ i za bilo koji morfizam $\chi \in Hom_{\mathcal{D}}(B,B')$ komutira dijagram

$$\begin{array}{ccc} Hom_{\mathcal{D}}(FA,B) & \stackrel{\Phi_{A,B}}{\longrightarrow} & Hom_{\mathcal{D}}(GA,B) \\ Hom_{\mathcal{D}}(FA,\chi)\downarrow & & \downarrow Hom_{\mathcal{D}}(GA,\chi) \\ Hom_{\mathcal{D}}(FA,B') & \stackrel{\Phi_{A,B'}}{\longrightarrow} & Hom_{\mathcal{D}}(GA,B') \end{array}$$

Kako su $Hom_{\mathcal{D}}(FA,\chi)$ i $Hom_{\mathcal{D}}(GA,\chi)$ komponiranja slijeva sa χ, komutativnost gornjeg dijagrama znači

$$\chi \circ \Phi_{A,B}(\psi) = \Phi_{A,B'}(\chi \circ \psi), \quad A \in Ob(\mathcal{C}),\ B, B' \in Ob(\mathcal{D}),\ \chi \in Hom_{\mathcal{D}}(B,B'),\ \psi \in Hom_{\mathcal{D}}(FA,B).$$

Posebno, za $B = GA$ i $B' = GA'$, gdje je $A' \in Ob(\mathcal{C})$, i za $\chi = G\varphi$ za $\varphi \in Hom_{\mathcal{C}}(A,A')$, imamo

$$G\varphi \circ \Phi_{A,GA}(\psi) = \Phi_{A,GA'}(G\varphi \circ \psi), \qquad A, A' \in Ob(\mathcal{C}),\ \varphi \in Hom_{\mathcal{C}}(A,A'),\ \psi \in Hom_{\mathcal{D}}(FA,GA).$$

Ako za $\psi \in Hom_{\mathcal{D}}(FA,GA)$ izaberemo $\Psi_A = \Phi_{A,GA}^{-1}(I_{GA})$, onda je $\Phi_{A,GA}(\psi) = I_{GA}$, pa dobivamo

$$G\varphi = \Phi_{A,GA'}(G\varphi \circ \Psi_A) \qquad \forall A, A' \in Ob(\mathcal{C}) \quad \text{i} \quad \forall \varphi \in Hom_{\mathcal{C}}(A,A'). \tag{4.6}$$

Prirodnost transformacije $\Phi_B = (\Phi_{A,B})_{A \in Ob(\mathcal{C})}$ funktora $Hom_{\mathcal{D}}(F(\bullet),B)$ u funktor $Hom_{\mathcal{D}}(G(\bullet),B)$ znači da za bilo koje module $A, A' \in Ob(\mathcal{C})$ i za bilo koji morfizam $\varphi \in Hom_{\mathcal{C}}(A,A')$ komutira dijagram

$$\begin{array}{ccc} Hom_{\mathcal{D}}(FA,B) & \stackrel{\Phi_{A,B}}{\longrightarrow} & Hom_{\mathcal{D}}(GA,B) \\ Hom_{\mathcal{D}}(F\varphi,B)\uparrow & & \uparrow Hom_{\mathcal{D}}(G\varphi,B) \\ Hom_{\mathcal{D}}(FA',B) & \stackrel{\Phi_{A',B}}{\longrightarrow} & Hom_{\mathcal{D}}(GA',B) \end{array}$$

Vertikalne strelice su obrnute jer su $Hom_{\mathcal{D}}(F(\bullet),B)$ i $Hom_{\mathcal{D}}(G(\bullet),B)$ kontravarijantni funktori. Morfizmi $Hom_{cD}(F\varphi,B)$ i $Hom_{\mathcal{D}}(G\varphi,B)$ su komponiranja sa $F\varphi$ i $G\varphi$ zdesna, pa komutativnost gornjeg dijagrama znači

$$\Phi_{A',B}(\omega) \circ G\varphi = \Phi_{A,B}(\omega \circ F\varphi), \quad A, A' \in Ob(\mathcal{C}),\ B \in Ob(\mathcal{D}),\ \varphi \in Hom_{\mathcal{C}}(A,A'),\ \omega \in Hom_{\mathcal{D}}(FA',B).$$

Odatle posebno za $B = GA'$ dobivamo:

$$\Phi_{A',GA'}(\omega) \circ G\varphi = \Phi_{A,GA'}(\omega \circ F\varphi), \quad A, A' \in Ob(\mathcal{C}),\ \varphi \in Hom_{\mathcal{C}}(A, A'),\ \omega \in Hom_{\mathcal{D}}(FA', GA').$$

Ako za $\omega \in Hom_{\mathcal{D}}(FA', GA')$ izaberemo $\Psi_{A'} = \Phi^{-1}_{A',GA'}(I_{GA'})$, imamo $\Phi_{A',GA'}(\omega) = I_{GA'}$, dakle, dobivamo

$$G\varphi = \Phi_{A,GA'}(\Psi_{A'} \circ F\varphi) \qquad \forall A, A' \in Ob(\mathcal{C}) \quad \text{i} \quad \forall \varphi \in Hom_{\mathcal{C}}(A, A'). \tag{4.7}$$

Budući da je $\Phi_{A,GA'} : Hom_{\mathcal{D}}(FA, GA') \to Hom_{\mathcal{D}}(GA, GA')$ izomorfizam, to je posebno injekcija, pa iz (4.6) i (4.7) slijedi (4.5).

Najavljena drugačija karakterizacija lijevo (odnosno, desno) adjungiranih funktora sadržana je u sljedećem teoremu:

Teorem 4.1.7. *Funktor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ je lijevo adjungiran funktoru $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ ako i samo ako postoje prirodne transformacije $\Phi : Id_{\mathcal{C}} \to GF$ i $\Psi : FG \to Id_{\mathcal{D}}$, takve da je za svaki modul $X \in Ob(\mathcal{C})$ kompozicija*

$$FX \xrightarrow{F\Phi_X} FGFX \xrightarrow{\Psi_{FX}} FX$$

identiteta I_{FX} na modulu FX i da je za svaki modul $Y \in Ob(\mathcal{D})$ kompozicija

$$GY \xrightarrow{\Phi_{GY}} GFGY \xrightarrow{G\Psi_Y} GY$$

identiteta I_{GY} na modulu GY.

Dokaz: Pretpostavimo da su ispunjeni uvjeti teorema, odnosno, da postoje prirodne transformacije $\Phi = (\Phi_X)_{X \in Ob(\mathcal{C})} : Id_{\mathcal{C}} \to GF$ i $\Psi = (\Psi_Y)_{Y \in Ob(\mathcal{D})} : FG \to Id_{\mathcal{D}}$ takve da su kompozicije (4.8) i (4.9) identitete. To znači da je za svaki modul $X \in Ob(\mathcal{C})$ zadan morfizam $\Phi_X \in Hom_{\mathcal{C}}(X, GFX)$ i da je za svaki modul $Y \in Ob(\mathcal{D})$ zadan morfizam $\Psi_Y \in Hom_{\mathcal{D}}(FGY, Y)$ takvi da vrijede jednakosti

$$\Psi_{FX} \circ F\Phi_X = I_{FX} \quad \forall X \in Ob(\mathcal{C}) \tag{4.8}$$

i

$$G\Psi_Y \circ \Phi_{GY} = I_{GY} \quad \forall Y \in Ob(\mathcal{D}). \tag{4.9}$$

Nadalje, transformacije Φ i Ψ su prirodne, što znači da vrijedi:

$$GFf \circ \Phi_{X'} = \Phi_X \circ f \qquad \forall X, X' \in Ob(\mathcal{C}) \quad \text{i} \quad \forall f \in Hom_{\mathcal{C}}(X', X) \tag{4.10}$$

i

$$g \circ \Psi_Y = \Psi_{Y'} \circ FGg \qquad \forall Y, Y' \in Ob(\mathcal{D}) \quad \text{i} \quad \forall g \in Hom_{\mathcal{D}}(Y, Y'). \tag{4.11}$$

Za module $X \in Ob(\mathcal{C})$ i $Y \in Ob(\mathcal{D})$ definiramo linearne operatore

$$\alpha_{X,Y} : Hom_{\mathcal{D}}(FX, Y) \to Hom_{\mathcal{C}}(X, GY) \qquad \text{i} \qquad \beta_{X,Y} : Hom_{\mathcal{C}}(X, GY) \to Hom_{\mathcal{D}}(FX, Y)$$

sa

$$\alpha_{X,Y}(g) = Gg \circ \Phi_X \quad \text{za} \quad g \in Hom_{\mathcal{D}}(FX, Y) \qquad \text{i} \qquad \beta_{X,Y}(f) = \Psi_Y \circ Ff \quad \text{za} \quad f \in Hom_{\mathcal{C}}(X, GY).$$

Dokažimo sada da su familije $(\alpha_{X,Y})$ i $(\beta_{X,Y})$ prirodne i u varijabli X i u varijabli Y.

Neka su $X, X' \in Ob(\mathcal{C})$, $Y \in Ob(\mathcal{D})$ i $f \in Hom_{\mathcal{C}}(X', X)$. Za prirodnost familije $(\alpha_{X,Y})$ u varijabli X treba dokazati da za svaki $g \in Hom_{\mathcal{D}}(FX, Y)$ vrijedi

$$f^* \left(\alpha_{X,Y}(g)\right) = \alpha_{X',Y} \left((Ff)^*(g)\right),$$

tj.

$$\alpha_{X,Y}(g) \circ f = \alpha_{X',Y}(g \circ Ff),$$

tj.

$$Gg \circ \Phi_X \circ f = G(g \circ Ff) \circ \Phi_{X'},$$

tj.

$$Gg \circ \Phi_X \circ f = Gg \circ GFf \circ \Phi_{X'}.$$

Posljednja jednakost slijedi neposredno iz (4.10). Time je dokazano da je familija $(\alpha_{X,Y})$ prirodna u varijabli X.

Dokažimo sada prirodnost familije $(\alpha_{X,Y})$ u varijabli Y. Neka su $Y, Y' \in Ob(\mathcal{D})$, $X \in Ob(\mathcal{C})$ i $g \in Hom_{\mathcal{D}}(Y, Y')$. Treba dokazati da za svaki $f \in Hom_{\mathcal{D}}(FX, Y)$ vrijedi

$$(Gg)_* \left(\alpha_{X,Y}(f)\right) = \alpha_{X,Y'} \left(g_*(f)\right),$$

tj.

$$Gg \circ \alpha_{X,Y}(f) = \alpha_{X,Y'}(g \circ f),$$

tj.

$$Gg \circ Gf \circ \Phi_X = G(g \circ f) \circ \Phi_X,$$

a to je trivijalno, jer je $G(g \circ f) = Gg \circ Gf$. Dakle, familija $(\alpha_{X,Y})$ prirodna je i u varijabli Y.

Dokažimo sada prirodnost familije $(\gamma_{X,Y})$ u varijabli X. Neka su $X, X' \in Ob(\mathcal{C})$ i $f \in Hom_{\mathcal{C}}(X', X)$. Treba dokazati da za svaki $g \in Hom_{\mathcal{C}}(X, GY)$ vrijedi

$$(Ff)^* \left(\beta_{X,Y}(g)\right) = \beta_{X',Y} \left(f^*(g)\right),$$

tj.

$$\beta_{X,Y}(g) \circ Ff = \beta_{X',Y}(g \circ f),$$

tj.

$$\Psi_Y \circ Fg \circ Ff = \Psi_Y \circ F(g \circ f),$$

a to je trivijalno, jer je $F(g \circ f) = Fg \circ Ff$. Dakle, dokazano je da je familija $(\beta_{X,Y})$ prirodna u varijabli X.

Napokon, dokažimo da je familija $(\beta_{X,Y})$ prirodna i u varijabli Y. Neka su $Y, Y' \in Ob(\mathcal{D})$ i $g \in Hom_{\mathcal{D}}(Y, Y')$. Treba dokazati da za svaki $f \in Hom_{\mathcal{C}}(X, GY)$ vrijedi

$$g_* \left(\beta_{X,Y}(f)\right) = \beta_{X,Y'} \left((Gg)_*(f)\right),$$

tj.

$$g \circ \beta_{X,Y}(f) = \beta_{X,Y'}(Gg \circ f),$$

tj.

$$g \circ \Psi_Y \circ Ff = \Psi_{Y'} \circ F(Gg \circ f),$$

tj.

$$g \circ \Psi_Y \circ Ff = \Psi_{Y'} \circ FGg \circ Ff.$$

Posljednja jednakost slijedi neposredno iz (4.11). Time je dokazano da je familija $(\beta_{X,Y})$ prirodna i u varijabli Y.

Neka su $X \in Ob(\mathcal{C})$ i $Y \in Ob(\mathcal{D})$. Treba još dokazati da su linearni operatori

$$\alpha_{X,Y} : Hom_{\mathcal{D}}(FX, Y) \longrightarrow Hom_{\mathcal{C}}(X, GY) \qquad \text{i} \qquad \beta_{X,Y} : Hom_{\mathcal{C}}(X, GY) \to Hom_{\mathcal{D}}(FX, Y)$$

međusobno inverzni.

Ako jednakost (4.11) prepišemo sa FX umjesto Y i sa Y umjesto Y', dobivamo

$$\Psi_Y \circ FGg = g \circ \Psi_{GX} \qquad \forall g \in Hom_{\mathcal{D}}(GX, Y).$$

Pomoću toga, iz definicije operatora $\alpha_{X,Y}$ i $\beta_{X,Y}$ i koristeći jednakost (4.8) imamo redom za svaki $g \in Hom_{\mathcal{D}}(FX, Y)$:

$$(\beta_{X,Y} \circ \alpha_{X,Y})(g) = \beta_{X,Y}(\alpha_{X,Y}(g)) = \beta_{X,Y}(Gg \circ \Phi_X) = \Psi_Y \circ F(Gg \circ \Phi_X) =$$

$$= \Psi_Y \circ FGg \circ F\Phi_X = g \circ \Psi_{FX} \circ F\Phi_X = g \circ I_{FX} = g.$$

Dakle, kompozicija $\beta_{X,Y} \circ \alpha_{X,Y}$ je identiteta na prostoru $Hom_{\mathcal{D}}(FX, Y)$.

Napokon, ako jednakost (4.10) prepišemo sa GY umjesto X i sa X umjesto X', dobivamo

$$GFf \circ \Phi_X = \Phi_{GY} \circ f \qquad \forall f \in Hom_{\mathcal{C}}(X, GY).$$

Odatle uz korištenje jednakosti (4.9) imamo redom za svaki $f \in Hom_{\mathcal{C}}(X, GY)$:

$$(\alpha_{X,Y} \circ \beta_{X,Y})(f) = \alpha_{X,Y}(\beta_{X,Y}(f)) = \alpha_{X,Y}(\Psi_Y \circ Ff) = G(\Psi_Y \circ Ff)) \circ \Phi_X =$$

$$= G\Psi_Y \circ GFf \circ \Phi_X = G\Psi_Y \circ \Phi_{GY} \circ f = I_{GY} \circ f = f.$$

Prema tome, kompozicija $\alpha_{X,Y} \circ \beta_{X,Y}$ je identiteta na prostoru $Hom_{\mathcal{C}}(X, GY)$.

Time je dokazana dovoljnost uvjeta za lijevu adjungiranost funktora F funktoru G.

Pretpostavimo sada da je funktor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ lijevo adjungiran funktoru $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$. Neka su $(\alpha_{X,Y})$ i $(\beta_{X,Y})$ familije operatora iz definicije lijeve adjungiranosti. Sada za $X \in Ob(\mathcal{C})$ stavimo

$$\Phi_X = \alpha_{X,FX}(I_{FX}) \in Hom_{\mathcal{C}}(X, GFX),$$

a za $Y \in Ob(\mathcal{D})$ stavimo

$$\Psi_Y = \beta_{GY,Y}(I_{GY}) \in Hom_{\mathcal{D}}(FGY, Y).$$

Treba prije svega dokazati da je $\Phi = (\Phi_X)_{X \in Ob(\mathcal{C})}$ prirodna transformacija funktora $Id_{\mathcal{C}}$ u funktor GF i da je $\Psi = (\Psi_Y)_{Y \in Ob(\mathcal{D})}$ prirodna transformacija funktora FG u funktor $Id_{\mathcal{D}}$. Neka su $X, X' \in Ob(\mathcal{C})$ i $f \in Hom_{\mathcal{C}}(X', X)$. Tada imamo zbog prirodnosti familije $(\alpha_{X,Y})$ u varijabli X :

$$\Phi_X \circ f = \alpha_{X,FX}(I_{FX}) \circ f = f^*(\alpha_{X,FX}(I_{FX})) = (f^* \circ \alpha_{X,FX})(I_{FX}) =$$

$$= (\alpha_{X',FX} \circ (Ff)^*)(I_{FX}) = \alpha_{X',FX}((Ff)^*(I_{FX})) = \alpha_{X',FX}(Ff).$$

S druge strane, zbog prirodnosti familije $(\alpha_{X,Y})$ u varijabli Y komutativan je dijagram

$$\begin{tikzcd}
Hom_{\mathcal{D}}(FX', FX') \arrow[r, "\alpha_{X',FX'}"] \arrow[d, "(Ff)_*"'] & Hom_{\mathcal{C}}(X', GFX') \arrow[d, "(GFf)_*"] \\
Hom_{\mathcal{D}}(FX', FX) \arrow[r, "\alpha_{X',FX}"'] & Hom_{\mathcal{C}}(X', GFX)
\end{tikzcd}$$

odnosno, vrijedi

$$(GFf)_* \circ \alpha_{X',FX'} = \alpha_{X',FX} \circ (Ff)_*,$$

pa imamo:

$$GFf \circ \Phi_{X'} = GFf \circ \alpha_{X',FX'}(I_{FX'}) = (GFf)_*(\alpha_{X',FX'}(I_{FX'})) = ((GFf)_* \circ \alpha_{X',FX'})(I_{FX'}) =$$

$$= (\alpha_{X',FX} \circ (Ff)_*)(I_{FX'}) = \alpha_{X',FX}((Ff)_*(I_{FX'})) = \alpha_{X',FX}(Ff).$$

Prema tome, vrijedi

$$GFf \circ \Phi_{X'} = \Phi_X \circ f \qquad \forall X, X' \in Ob(\mathcal{C}) \quad \text{i} \quad \forall f \in Hom_{\mathcal{C}}(X', X).$$

Prema tome, Φ je prirodna transformacija funktora $Id_{\mathcal{C}}$ u funktor GF. Sasvim analogno koristeći prirodnost familije $(\beta_{X,Y})$ u obje varijable dokazuje se da je Ψ prirodna transformacija funktora FG u funktor $Id_{\mathcal{D}}$.

Preostaje još da se dokaže da su dvije kompozicije u iskazu teorema identitete, tj. da vrijede (4.8) i (4.9). Neka je $X \in Ob(\mathcal{C})$. Zbog prirodnosti familije $(\beta_{X,Y})$ u varijabli X, za svaki $f \in Hom_{\mathcal{C}}(X, GFX)$ komutativan je dijagram

$$\begin{tikzcd}
Hom_{\mathcal{C}}(GFX, GFX) \arrow[r, "\beta_{GFX,FX}"] \arrow[d, "f^*"'] & Hom_{\mathcal{D}}(FGFX, FX) \arrow[d, "(Ff)^*"] \\
Hom_{\mathcal{C}}(X, GFX) \arrow[r, "\beta_{X,FX}"'] & Hom_{\mathcal{D}}(FX, FX)
\end{tikzcd}$$

odnosno, vrijedi

$$(Ff)^* \circ \beta_{GFX,FX} = \beta_{X,FX} \circ f^* \qquad \forall f \in Hom_{\mathcal{C}}(X, GFX).$$

To posebno vrijedi za $f = \Phi_X = \alpha_{X,FX}(I_{FX})$, dakle,

$$[F\alpha_{X,FX}(I_{FX})]^* \circ \beta_{GFX,FX} = \beta_{X,FX} \circ [\alpha_{X,FX}(I_{FX})]^* .$$

Prema tome, imamo redom

$$\begin{aligned}
\Psi_{FX} \circ F\Phi_X &= \beta_{GFX,FX}(I_{GFX}) \circ F\alpha_{X,FX}(I_{FX}) = [F\alpha_{X,FX}(I_{FX})]^* (\beta_{GFX,FX}(I_{GFX})) = \\
&= \{[F\alpha_{X,FX}(I_{FX})]^* \circ \beta_{GFX,FX}\} (I_{GFX}) = \{\beta_{X,FX} \circ [\alpha_{X,FX}(I_{FX})]^*\} (I_{GFX}) = \\
&= \beta_{X,FX} \{[\alpha_{X,FX}(I_{FX})]^* (I_{GFX})\} = \beta_{X,FX} [I_{GFX} \circ \alpha_{X,FX}(I_{FX})] = \\
&= \beta_{X,FX} (\alpha_{X,FX}(I_{FX})) = (\beta_{X,FX} \circ \alpha_{X,FX}) (I_{FX}) = I_{FX}.
\end{aligned}$$

Time je dokazana jednakost (4.8).

Neka je sada $Y \in Ob(\mathcal{D})$. Zbog prirodnosti familije $(\alpha_{X,Y})$ u varijabli Y, za svaki $g \in Hom_{\mathcal{D}}(FGY, Y)$ komutativan je dijagram

$$\begin{tikzcd}
Hom_{\mathcal{D}}(FGY, FGY) \arrow[r, "\alpha_{GY,FGY}"] \arrow[d, "g_*"'] & Hom_{\mathcal{C}}(GY, GFGY) \arrow[d, "(Gg)_*"] \\
Hom_{\mathcal{D}}(FGY, Y) \arrow[r, "\alpha_{GY,Y}"'] & Hom_{\mathcal{C}}(GY, GY)
\end{tikzcd}$$

odnosno, vrijedi

$$(Gg)_* \circ \alpha_{GY,FGY} = \alpha_{GY,Y} \circ g_*.$$

To posebno vrijedi za $g = \Psi_Y = \beta_{GY,Y}(I_{GY})$, dakle,,

$$[G\beta_{GY,Y}(I_{GY})]_* \circ \alpha_{GY,FGY} = \alpha_{GY,Y} \circ [\beta_{GY,Y}(I_{GY}]_* .$$

Prema tome, imamo redom

$$\begin{aligned} G\Psi_Y \circ \Phi_{GY} &= G\beta_{GY,Y}(I_{GY}) \circ \alpha_{GY,FGY}(I_{FGY}) = [G\beta_{GY,Y}(I_{GY})]_* (\alpha_{GY,FGY}(I_{FGY})) = \\ &= \left\{[G\beta_{GY,Y}(I_{GY})]_* \circ \alpha_{GY,FGY}\right\}(I_{FGY}) = \left\{\alpha_{GY,Y} \circ [\beta_{GY,Y}(I_{GY}]_*\right\}(I_{FGY}) = \\ &= \alpha_{GY,Y}\left\{[\beta_{GY,Y}(I_{GY})]_* (I_{FGY})\right\} = \alpha_{GY,Y}\left[\beta_{GY,Y}(I_{GY}) \circ I_{FGY}\right] = \\ &= \alpha_{GY,Y}\left[\beta_{GY,Y}(I_{GY})\right] = (\alpha_{GY,Y} \circ \beta_{GY,Y})(I_{GY}) = I_{GY}. \end{aligned}$$

Time je dokazana i jednakost (4.9), odnosno, teorem je u potpunosti dokazan.

Propozicija 4.1.8. *Za modul $A \in Ob(\mathcal{C})$ funktor $Hom_{\mathcal{C}}(A, \bullet)$ iz kategorije $\mathcal{C}$ u kategoriju $\mathcal{V}$ svih kompleksnih vektorskih prostora i funktor $Hom_{\mathcal{C}}(\bullet, A)$ iz kategorije $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ u kategoriju $\mathcal{V}$ su lijevo egzaktni.*

Dokaz: Neka je

$$0 \longrightarrow X \xrightarrow{\varphi} Y \xrightarrow{\psi} Z \longrightarrow 0$$

kratki egzaktni niz u kategoriji $\mathcal{C}$. Za lijevu egzaktnost funktora $Hom_{\mathcal{C}}(A, \bullet)$ treba dokazati da je niz

$$0 \longrightarrow Hom_{\mathcal{C}}(A, X) \xrightarrow{\varphi_*} Hom_{\mathcal{C}}(A, Y) \xrightarrow{\psi_*} Hom_{\mathcal{C}}(A, Z) \tag{4.12}$$

u kategoriji $\mathcal{V}$ egzaktan. Prije svega, za $f \in \operatorname{Ker}\varphi_*$ je $\varphi \circ f = \varphi_*(f) = 0$. Dakle, vrijedi $\varphi(f(a)) = 0$ za svaki $a \in A$. Međutim, φ je monomorfizam, pa slijedi da je $f(a) = 0$ za svaki $a \in A$, odnosno, $f = 0$. Time je dokazana egzaktnost niza (4.12) na mjestu $Hom_{\mathcal{C}}(A, X)$.

Iz $\psi \circ \varphi = 0$ slijedi $\psi_* \circ \varphi_* = 0$, dakle, $\operatorname{Im}\varphi_* \subseteq \operatorname{Ker}\psi_*$. Neka je $f \in \operatorname{Ker}\psi_*$. To znači da je $f \in Hom_{\mathcal{C}}(A, Y)$ i da vrijedi $\psi \circ f = 0$. Dakle, za svaki $a \in A$ je $\psi(f(a)) = 0$, odnosno, vrijedi $f(a) \in \operatorname{Ker}\psi = \operatorname{Im}\varphi$. Prema tome, za svaki $a \in A$ postoji $x \in X$ takav da je $f(a) = \varphi(x)$. Kako je φ monomorfizam, taj je $x \in X$ jedinstven. Označimo sa g preslikavanje $a \mapsto x$ sa A u X. Sada za svaki $a \in A$ vrijedi $\varphi(g(a)) = f(a)$, tj. $\varphi \circ g = f$. Kako je preslikavanje φ injektivno, zaključujemo da je $g \in Hom_{\mathcal{C}}(A, X)$. Nadalje, $f = \varphi \circ g = \varphi_*(g) \in \operatorname{Im}\varphi_*$. Time je dokazana i obrnuta inkluzija $\operatorname{Ker}\psi_* \subseteq \operatorname{Im}\varphi_*$, odnosno, dokazali smo jednakost $\operatorname{Ker}\psi_* = \operatorname{Im}\varphi_*$. Time je dokazana egzaktnost niza (4.12) i na mjestu $Hom_{\mathcal{C}}(A, Y)$.

Za lijevu egzaktnost funktora $Hom_{\mathcal{C}}(\bullet, A)$ iz kategorije $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ u kategoriju $\mathcal{V}$ treba dokazati da je niz

$$0 \longrightarrow Hom_{\mathcal{C}}(Z, A) \xrightarrow{\psi^*} Hom_{\mathcal{C}}(Y, A) \xrightarrow{\varphi^*} Hom_{\mathcal{C}}(X, A) \tag{4.13}$$

u kategoriji $\mathcal{V}$ egzaktan. Prije svega, ako je $f \in Hom_{\mathcal{C}}(Z, A)$ takav da je $\psi^*(f) = f \circ \psi = 0$, onda iz činjenice da je $\psi : Y \to Z$ epimorfizam slijedi $f = 0$. Dakle, ψ^* je monomorfizam, odnosno, niz (4.13) je egzaktan na mjestu $Hom_{\mathcal{C}}(Z, A)$.

Iz $\psi \circ \varphi = 0$ slijedi $\varphi^* \circ \psi^* = 0$, dakle, $\operatorname{Im}\psi^* \subseteq \operatorname{Ker}\varphi^*$. Neka je $f \in \operatorname{Ker}\varphi^*$. To znači da je $f \in Hom_{\mathcal{C}}(Y, A)$ i da vrijedi $f \circ \varphi = 0$. Tada je $\operatorname{Ker}\psi = \operatorname{Im}\varphi \subseteq \operatorname{Ker} f$, pa postoji $g \in Hom_{\mathcal{C}}(Z, A)$ takav da je $f = g \circ \psi$, odnosno, da je $f = \psi^*(g) \in \operatorname{Im}\psi^*$. Time je dokazana i obrnuta inkluzija $\operatorname{Ker}\varphi^* \subseteq \operatorname{Im}\psi^*$, odnosno, imamo jednakost $\operatorname{Im}\varphi^* = \operatorname{Ker}\psi^*$. Time je dokazano da je niz (4.13) egzaktan i na mjestu $Hom_{\mathcal{C}}(Y, A)$.

Propozicija 4.1.9. (**Yonedina lema**) *Neka su X, Y i Z moduli u kategoriji $\mathcal{C}$ i neka su $\varphi \in Hom_{\mathcal{C}}(X, Y)$ i $\psi \in Hom_{\mathcal{C}}(Y, Z)$. Pretpostavimo da je za svaki modul A u kategoriji $\mathcal{C}$ niz*

$$Hom_{\mathcal{C}}(A, X) \xrightarrow{\varphi_*} Hom_{\mathcal{C}}(A, Y) \xrightarrow{\Psi_*} Hom_{\mathcal{C}}(A, Z) \tag{4.14}$$

u kategoriji $\mathcal{V}$ egzaktan. Tada je niz

$$X \xrightarrow{\varphi} Y \xrightarrow{\psi} Z \tag{4.15}$$

u kategoriji $\mathcal{C}$ egzaktan.

Dokaz: Izaberemo li u (4.14) $A = X$, imamo

$$\psi \circ \varphi = \psi \circ \varphi \circ I_X = \psi_*(\varphi_*(I_X)) = (\psi_* \circ \varphi_*)(I_X) = 0.$$

To znači da je $\operatorname{Im} \varphi \subseteq \operatorname{Ker} \psi$. Izaberemo li sada u (4.14) $A = \operatorname{Ker} \psi$ imamo egzaktan niz

$$Hom_{\mathcal{C}}(\operatorname{Ker} \psi, X) \xrightarrow{\varphi_*} Hom_{\mathcal{C}}(\operatorname{Ker} \psi, Y) \xrightarrow{\psi_*} Hom_{\mathcal{C}}(\operatorname{Ker} \psi, Z).$$

Za inkluziju $\iota : \operatorname{Ker} \psi \to Y$ je očito $\psi \circ \iota = 0$, odnosno, $\psi_*(\iota) = 0$. Dakle, vrijedi $\iota \in \operatorname{Ker} \psi_*$, a to zbog egzaktnosti gornjeg niza znači da je $\iota \in \operatorname{Im} \varphi_*$, odnosno, postoji $\chi \in Hom_{\mathcal{C}}(\operatorname{Ker} \psi, X)$ takav da je $\iota = \varphi_*(\chi) = \varphi \circ \chi$. Odatle je $\operatorname{Im} \iota \subseteq \operatorname{Im} \varphi$. Međutim, $\operatorname{Im} \iota = \operatorname{Ker} \psi$, pa dobivamo inkluziju $\operatorname{Ker} \psi \subseteq \operatorname{Im} \varphi$. Dakle, imamo jednakost $\operatorname{Im} \varphi = \operatorname{Ker} \psi$, odnosno, dokazana je egzaktnost niza (4.15).

Teorem 4.1.10. *Neka je funktor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ lijevo adjungiran funktoru $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$.*

(a) *Funktor F je desno egzaktan.*

(b) *Funktor G je lijevo egzaktan.*

Dokaz: (b) Neka je

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\varphi} B \xrightarrow{\psi} C \longrightarrow 0$$

kratki egzaktni niz u kategoriji $\mathcal{D}$. Treba dokazati da je niz

$$0 \longrightarrow GA \xrightarrow{G\varphi} GB \xrightarrow{G\psi} GC \tag{4.16}$$

u kategoriji $\mathcal{C}$ egzaktan. Za $X \in Ob(\mathcal{C})$ i $Y \in Ob(\mathcal{D})$ neka je $\alpha_{X,Y}$ izomorfizam sa $Hom_{\mathcal{D}}(FX, Y)$ na $Hom_{\mathcal{C}}(X, GY)$ iz definicije lijeve adjungiranosti funktora F funktoru G. Tada imamo komutativan dijagram:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & Hom_{\mathcal{D}}(FX, A) \arrow[r, "\varphi_*"] \arrow[d, "\alpha_{X,A}"] & Hom_{\mathcal{D}}(FX, B) \arrow[r, "\psi_*"] \arrow[d, "\alpha_{X,B}"] & Hom_{\mathcal{D}}(FX, C) \arrow[d, "\alpha_{X,C}"] \\
0 \arrow[r] & Hom_{\mathcal{C}}(X, GA) \arrow[r, "(G\varphi)_*"'] & Hom_{\mathcal{C}}(X, GB) \arrow[r, "(G\psi)_*"'] & Hom_{\mathcal{C}}(X, GC)
\end{tikzcd}$$

Prema propoziciji 4.1.8. $Hom_{\mathcal{D}}(FX, \bullet)$ je lijevo egzaktan funktor iz kategorije $\mathcal{D}$ u kategoriju $\mathcal{V}$, pa je gornji redak u tom dijagramu egzaktan. Kako su $\alpha_{X,A}$, $\alpha_{X,B}$ i $\alpha_{X,C}$ izomorfizmi vektorskih prostora, i donji redak u tom dijagramu je egzaktan u kategoriji $\mathcal{V}$. Budući da to vrijedi za svaki $X \in Ob(\mathcal{C})$, prema Yonedinoj lemi (propozicija 4.1.9.) niz (4.16) je egzaktan u kategoriji $\mathcal{C}$. Time je dokazana lijeva egzaktnost funktora G.

(a) slijedi neposredno iz (b). Naime, suprotni funktor $F^{\mathrm{op}} : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{D}^{\mathrm{op}}$ je desno adjungiran funktoru G^{op}, pa je prema (b) on lijevo egzaktan, a to znači da je funktor F desno egzaktan.

Propozicija 4.1.11. (a) *Modul $P \in Ob(\mathcal{C})$ je projektivan u kategoriji $\mathcal{C}$ ako i samo ako je funktor $Hom_{\mathcal{C}}(P, \bullet)$ egzaktan.*

(b) *Modul $I \in Ob(\mathcal{C})$ je injektivan u kategoriji $\mathcal{C}$ ako i samo ako je (kontravarijantan) funktor $Hom_{\mathcal{C}}(\bullet, I)$ egzaktan.*

Dokaz: Po propoziciji 4.1.8. već znamo da je za svaki modul $P \in Ob(\mathcal{C})$ funktor $Hom_{\mathcal{C}}(P, \bullet)$ lijevo egzaktan. Pretpostavimo sada da je modul P projektivan u kategoriji $\mathcal{C}$ i neka je

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\varphi} B \xrightarrow{\psi} C \longrightarrow 0$$

egzaktan niz u $\mathcal{C}$. Za $f \in Hom_{\mathcal{C}}(P, C)$ iz definicije projektivnosti modula P slijedi da postoji $g \in Hom_{\mathcal{C}}(P, B)$ takav da je $f = \psi \circ g$, tj. $f = \psi_*(g)$. To znači da je linearan operator $\psi_* : Hom_{\mathcal{C}}(P, B) \to Hom_{\mathcal{C}}(P, C)$ surjektivan, odnosno, zbog lijeve egzaktnosti funktora $Hom_{\mathcal{C}}(P, \bullet)$ dobivamo da je niz

$$0 \longrightarrow Hom_{\mathcal{C}}(P, A) \xrightarrow{\varphi_*} Hom_{\mathcal{C}}(P, B) \xrightarrow{\psi_*} Hom_{\mathcal{C}}(P, C) \longrightarrow 0$$

u kategoriji $\mathcal{V}$ egzaktan. Time je dokazana egzaktnost funktora $Hom_{\mathcal{C}}(P, \bullet)$.

Pretpostavimo sada da je funktor $Hom_{\mathcal{C}}(P, \bullet)$ egzaktan. Neka su B i C proizvoljni moduli u kategoriji $\mathcal{C}$ i neka je $\psi \in Hom_{\mathcal{C}}(B, C)$ epimorfizam. Tada imamo kratki egzaktni niz

$$0 \longrightarrow \operatorname{Ker} \psi \longrightarrow B \xrightarrow{\psi} C \longrightarrow 0$$

u kategoriji $\mathcal{C}$, pa je po pretpostavci niz

$$0 \longrightarrow Hom_{\mathcal{C}}(P, \operatorname{Ker} \psi) \longrightarrow Hom_{\mathcal{C}}(P, B) \xrightarrow{\psi_*} Hom_{\mathcal{C}}(P, C) \longrightarrow 0$$

u kategoriji $\mathcal{V}$ egzaktan. Posebno, operator $\psi_* : Hom_{\mathcal{C}}(P, B) \to Hom_{\mathcal{C}}(P, C)$ je surjektivan. Zbog proizvoljnosti modula $B, C \in Ob(\mathcal{C})$ i epimorfizma $\psi : B \to C$ to upravo znači projektivnost modula P u kategoriji $\mathcal{C}$.

Tvrdnja (b) dokazuje se potpuno analogno koristeći drugu tvrdnju propozicije 4.1.8. prema kojoj je za svaki modul $I \in Ob(\mathcal{C})$ funktor $Hom_{\mathcal{C}}(\bullet, I)$ iz kategorije $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ u kategoriju $\mathcal{V}$ lijevo egzaktan. Doista, pretpostavimo najprije da je modul I injektivan u kategoriji $\mathcal{C}$ i neka je

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\varphi} B \xrightarrow{\psi} C \longrightarrow 0$$

egzaktan niz u $\mathcal{C}$. Za proizvoljan $f \in Hom_{\mathcal{C}}(A, I)$ iz definicije injektivnosti modula I slijedi da postoji $g \in Hom_{\mathcal{C}}(B, I)$ takav da je $f = g \circ \varphi$, tj. $f = \varphi^*(g)$. To znači da je linearan operator $\varphi^* : Hom_{\mathcal{C}}(B, I) \to Hom_{\mathcal{C}}(A, I)$ surjektivan, odnosno, zbog lijeve egzaktnosti funktora $Hom_{\mathcal{C}}(\bullet, I)$ iz $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ u $\mathcal{V}$ dobivamo da je niz

$$0 \longrightarrow Hom_{\mathcal{C}}(C, I) \xrightarrow{\psi^*} Hom_{\mathcal{C}}(B, I) \xrightarrow{\varphi^*} Hom_{\mathcal{C}}(A, I) \longrightarrow 0$$

egzaktan. Time je dokazana egzaktnost funktora $Hom_{\mathcal{C}}(\bullet, I)$ iz $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ u $\mathcal{V}$.

Pretpostavimo sada da je funktor $Hom_{\mathcal{C}}(\bullet, I)$ iz $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ u $\mathcal{V}$ egzaktan. Neka su $B, C \in Ob(\mathcal{C})$ i neka je $\varphi \in Hom_{\mathcal{C}}(B, C)$ monomorfizam. Tada imamo kratki egzaktni niz

$$0 \longrightarrow B \xrightarrow{\varphi} C \longrightarrow \operatorname{Coker} \varphi \longrightarrow 0$$

u kategoriji $\mathcal{C}$; pri tome je kao i obično $\operatorname{Coker} \varphi$ oznaka za kvocijentni modul $C/(\operatorname{Im} \varphi)$. Po pretpostavci je niz u $\mathcal{V}$

$$0 \longrightarrow Hom_{\mathcal{C}}(\operatorname{Coker} \varphi, I) \longrightarrow Hom_{\mathcal{C}}(C, I) \xrightarrow{\varphi^*} Hom_{\mathcal{C}}(B, I) \longrightarrow 0$$

egzaktan. Posebno, operator $\varphi^* : Hom_{\mathcal{C}}(C, I) \to Hom_{\mathcal{C}}(B, I)$ je surjektivan. Zbog proizvoljnosti modula $B, C \in Ob(\mathcal{C})$ i monomorfizma $\varphi : B \to C$ to upravo znači injektivnost modula I u kategoriji $\mathcal{C}$.

Propozicija 4.1.12. *Neka je funktor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ lijevo adjungiran funktoru $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$.*

(a) *Ako je funktor G egzaktan, za svaki modul X projektivan u kategoriji $\mathcal{C}$ modul FX projektivan je u kategoriji $\mathcal{C}$.*

(b) *Ako je funktor F egzaktan, za svaki modul Y injektivan u kategoriji $\mathcal{D}$ modul GY injektivan je u kategoriji $\mathcal{C}$.*

Dokaz: (a) Neka je X projektivan modul u kategoriji $\mathcal{C}$. Iz propozicije 4.1.11. i iz egzaktnosti funktora G slijedi da je funktor $Hom_{\mathcal{C}}(X, G(\bullet))$ egzaktan. Međutim, za bilo koji modul Y u kategoriji $\mathcal{D}$ prostori $Hom_{\mathcal{D}}(FX, Y)$ i $Hom_{\mathcal{C}}(X, GY)$ su prirodno izomorfni, što znači da su funktori $Hom_{\mathcal{D}}(FX, \bullet)$ i $Hom_{\mathcal{C}}(X, G(\bullet))$ prirodno izomorfni. Slijedi da je funktor $Hom_{\mathcal{D}}(FX, \bullet)$ egzaktan, a odatle po propoziciji 4.1.11. slijedi da je modul FX projektivan u kategoriji $\mathcal{D}$.

(b) Neka je Y injektivan modul u kategoriji $\mathcal{D}$. Iz propozicije 4.1.11. i iz egzaktnosti funktora F slijedi da je funktor $Hom_{\mathcal{D}}(F(\bullet), Y)$ egzaktan. Međutim, za bilo koji modul X u kategoriji $\mathcal{C}$ prostori $Hom_{\mathcal{C}}(X, GY)$ i $Hom_{\mathcal{D}}(FX, Y)$ su prirodno izomorfni, što znači da su funktori $Hom_{\mathcal{C}}(\bullet, GY)$ i $Hom_{\mathcal{D}}(F(\bullet), Y)$ prirodno izomorfni. Slijedi da je funktor $Hom_{\mathcal{D}}(\bullet, GY)$ egzaktan, a odatle po propoziciji 4.1.11. slijedi da je modul GY injektivan u kategoriji $\mathcal{C}$.

4.2 Izvedeni funktori

U ovom odjeljku sve ćemo konstrukcije precizno opisati, ali mnoge ćemo rezultate navesti bez dokazivanja.

Kažemo da **kategorija $\mathcal{C}$ ima dosta projektivnih** ako je svaki modul M iz $\mathcal{C}$ izomorfan kvocijentu projektivnog modula u $\mathcal{C}$, tj. ako postoji projektivan modul X u $\mathcal{C}$ i epimorfizam $\varphi \in Hom_{\mathcal{C}}(X, M)$. Tada postoji egzaktan beskonačan niz u $\mathcal{C}$ oblika

$$0 \longleftarrow M \longleftarrow X_0 \longleftarrow X_1 \longleftarrow X_2 \longleftarrow \cdots\cdots$$

u kome su svi X_n, $n \geq 0$, projektivni moduli u $\mathcal{C}$. Takav se niz zove **projektivna rezolucija** modula M u kategoriji $\mathcal{C}$ Pretpostavimo sada da je $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ desno egzaktan funktor. Primijenimo ga na gornju projektivnu rezoluciju i ispustimo član $F(M)$. Tada dobivamo kompleks u kategoriji $\mathcal{D}$:

$$0 \longleftarrow F(X_0) \longleftarrow F(X_1) \longleftarrow F(X_2) \longleftarrow \cdots\cdots$$

Za $n \in \mathbb{Z}_+$ sa $F_n(M)$ označimo $n-$ti modul homologije gornjeg kompleksa. Na taj način definirali smo $F_n(M) \in Ob(\mathcal{D})$ za svaki $M \in Ob(\mathcal{C})$ i svaki $n \in \mathbb{Z}_+$. Pretpostavimo sada da su $M, M' \in Ob(\mathcal{C})$ i da je $\varphi \in Hom_{\mathcal{C}}(M, M')$. Ako sa X i X' projektivne rezolucije modula M i M', prema tvrdnji (a) propozicije 4.1.1. postoji lančano preslikavanje $\Phi : X \to X'$ nad morfizmom φ. Tada Φ definira za svaki $n \in \mathbb{Z}_+$ morfizam iz $Hom_{\mathcal{D}}(F_n(M), F_n(M'))$ koji ćemo označiti sa $F_n(\varphi)$. Prema tvrdnji (a) propozicije 4.1.1. svaka dva lančana preslikavanja $X \to X'$ nad morfizmom φ su homotopna, pa induciraju iste morfizme na modulima homologije; dakle, morfizam $F_n(\varphi) \in Hom_{\mathcal{D}}(F_n(M), F_n(M'))$ je dobro definiran. Na taj način dolazimo do niza funktora $F_n : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, $n \in \mathbb{Z}_+$, i oni se zovu **izvedeni funtori** funktora F. Primijetimo da nije teško vidjeti da je funktor F_0 prirodno izomorfan polaznom funktoru F.

Slična je konstrukcija u slučaju lijevo egzaktnog funktora $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$. U tom slučaju pretpostavljamo da **kategorija $\mathcal{C}$ ima dosta injektivnih**, tj. da je svaki modul u $\mathcal{C}$ izomorfan podmodulu injektivnog modula u $\mathcal{C}$, tj. da za svaki modul $M \in Ob(\mathcal{C})$ postoji injektivan modul $X \in Ob(\mathcal{C})$ i monomorfizam $\varphi \in Hom_{\mathcal{C}}(M, X)$. Tada postoji beskonačan egzaktan niz u $\mathcal{C}$ oblika

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow X_0 \longrightarrow X_1 \longrightarrow X_2 \longrightarrow \cdots\cdots$$

u kome su svi X_n, $n \geq 0$, injektivni moduli u $\mathcal{C}$. Takav se niz zove **injektivna rezolucija** modula M u kategoriji $\mathcal{C}$. Primijenimo sada naš lijevo egzaktan funktor F na tu rezoluciju i ispustimo ponovo član $F(M)$. Tada dobivamo kompleks u kategoriji $\mathcal{D}$:

$$0 \longrightarrow F(X_0) \longrightarrow F(X_1) \longrightarrow F(X_2) \longrightarrow \cdots\cdots$$

Sada za $n \in \mathbb{Z}_+$ sa $F^n(M)$ označimo $n-$ti modul kohomologije gornjeg kompleksa. Na taj smo način definirali $F^n(M) \in Ob(\mathcal{D})$ za svaki $M \in Ob(\mathcal{C})$ i svaki $n \in \mathbb{Z}_+$. Za definiciju morfizama $F^n(\varphi) \in Hom_{\mathcal{D}}(F^n(M), F^n(M'))$ za bilo koje $M, M' \in Ob(\mathcal{C})$, bilo koji $\varphi \in Hom_{\mathcal{C}}(M, M')$ i bilo koji $n \in \mathbb{Z}_+$ postupamo analogno kao malo prije, ali sada uz primjenu tvrdnje (b) propozicije 4.1.1. Dolazimo do niza funktora $F^n : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ koji se također zovu izvedeni funktori funktora F. Ponovo je funktor F^0 prirodno izomorfan funktoru F.

Vrijede sljedeće dvije propozicije:

Propozicija 4.2.1. (a) *Neka je $\mathcal{C}$ kategorija s dosta projektivnih, $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ desno egzaktan funktor i $G : \mathcal{D} \to \mathcal{E}$ egzaktan funktor. Tada je funktor $G \circ F : \mathcal{C} \to \mathcal{E}$ desno egzaktan i za svaki $n \in \mathbb{Z}_+$ funktori $(G \circ F)_n$ i $G \circ F_n$ su prirodno izomorfni.*

(*b*) *Neka je $\mathcal{C}$ kategorija s dosta injektivnih, $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ lijevo egzaktan funktor i $G : \mathcal{D} \to \mathcal{E}$ egzaktan funktor. Tada je funktor F lijevo egzaktan i za svaki $n \in \mathbb{Z}_+$ funktori $(G \circ F)^n$ i $G \circ F^n$ su prirodno izomorfni.*

Propozicija 4.2.2. (*a*) *Neka su $\mathcal{C}$ i $\tilde{\mathcal{C}}$ kategorije s dosta projektivnih, $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ desno egzaktan funktor i $G : \tilde{\mathcal{C}} \to \mathcal{C}$ egzaktan funktor koji čuva projektivne, tj. takav da je za svaki projektivni modul P u $\tilde{\mathcal{C}}$ modul GP projektivan u $\mathcal{C}$. Tada je funktor $F \circ G$ desno egzaktan i za svaki $n \in \mathbb{Z}_+$ su funktori $(F \circ G)_n$ i $F_n \circ G$ prirodno izomorfni.*

(*b*) *Neka su $\mathcal{C}$ i $\tilde{\mathcal{C}}$ kategorije s dosta injektivnih, $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ lijevo egzaktan funktor i $G : \tilde{\mathcal{C}} \to \mathcal{C}$ egzaktan funktor koji čuva injektivne, tj. takav da je za svaki injektivni modul I u $\tilde{\mathcal{C}}$ modul GI injektivan u $\mathcal{C}$. Tada je funktor $F \circ G$ lijevo egzaktan i za svaki $n \in \mathbb{Z}_+$ su funktori $(F \circ G)^n$ i $F^n \circ G$ prirodno izomorfni.*

U primjenama izvedenih funktora važan je tzv. **dugi egzaktan homološki** (odnosno, **kohomološki**) **niz** koji se konstruira za svaki kratki egzaktan niz kompleksa. U tu je svrhu ključna konstrukcija tzv. veznog morfizma. Promatrajmo u kategoriji $\mathcal{C}$ komutativan dijagram oblika

$$\begin{array}{ccccccc} & & A & \xrightarrow{\psi} & B & \xrightarrow{\varphi} & C & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \varphi_A & & \downarrow \varphi_B & & \downarrow \varphi_C & & \\ 0 & \longrightarrow & A' & \xrightarrow{\psi'} & B' & \xrightarrow{\varphi'} & C' & & \end{array} \tag{4.17}$$

u kome su reci egzaktni. Neka je $x \in \operatorname{Ker} \varphi_C$. Kako je φ epimorfizam, postoji $b \in B$ takav da je $x = \varphi(b)$. Tada imamo

$$0 = \varphi_C(x) = \varphi_C(\varphi(b)) = (\varphi_C \circ \varphi)(b) = (\varphi' \circ \varphi_B)(b) = \varphi'(\varphi_B(b)).$$

Dakle, $\varphi_B(b) \in \operatorname{Ker} \varphi' = \operatorname{Im} \psi'$, pa postoji $a' \in A'$ takav da je $\varphi_B(b) = \psi'(a')$. Sada definiramo $\rho : \operatorname{Ker} \varphi_C \to \operatorname{Coker} \varphi_A = A'/(\operatorname{Im} \varphi_A)$ tako da stavimo

$$\rho(x) = a' + \operatorname{Im} \varphi_A. \tag{4.18}$$

Tada vrijedi tzv. **Snake lemma:**

Lema 4.2.3. (*a*) *ρ je dobro definiran morfizam.*

(*b*) $\operatorname{Ker} \rho = \varphi(\operatorname{Ker} \varphi_B)$.

(*c*) $\operatorname{Im} \rho = \psi'^{-1}(\operatorname{Im} \varphi_B)/(\operatorname{Im} \varphi_A)$.

Imamo egzaktan niz

$$\operatorname{Ker} \varphi_A \xrightarrow{\psi_0} \operatorname{Ker} \varphi_B \xrightarrow{\varphi_0} \operatorname{Ker} \varphi_C \xrightarrow{\rho} \operatorname{Coker} \varphi_A \xrightarrow{\psi_0'} \operatorname{Coker} \varphi_B \xrightarrow{\varphi_0'} \operatorname{Coker} \varphi_C. \tag{4.19}$$

Pri tome su φ_0 i ψ_0 restrikcije morfizama φ i ψ, a φ_0' i ψ_0' su kvocijentni morfizmi dobiveni iz φ' i ψ'. Ako je ψ monomorfizam, tj. ako je u dijagramu (4.17) *gornji redak s dopunom $0 \longrightarrow$ s lijeva kratki egzaktni niz, onda je i ψ_0 monomorfizam, a ako je φ' epimorfizam, tj. ako je u dijagramu* (4.17) *donji redak s dopunom $\longrightarrow 0$ zdesna kratki egzaktni niz, onda je i φ_0' epimorfizam.*

Za konstruiran morfizam $\rho \in Hom_{\mathcal{C}}(\operatorname{Ker} \varphi_C, \operatorname{Coker} \varphi_A)$ kažemo da je **vezni morfizam** pridružen dijagramu (4.17).

Dokaz: (a) Neka su $b, b_1 \in B$ takvi da je $x = \varphi(b) = \varphi(b_1)$ i neka su $a', a'_1 \in A'$ takvi da je $\varphi_B(b) = \psi'(a')$ i $\varphi_B(b_1) = \psi'(a'_1)$. Sada je $b - b_1 \in \operatorname{Ker}\varphi = \operatorname{Im}\psi$, pa postoji $a \in A$ takav da je $\psi(a) = b - b_1$. Imamo redom

$$\psi'(a' - a'_1) = \varphi_B(b - b_1) = \varphi_B(\psi(a)) = \psi'(\varphi_A(a)).$$

Kako je ψ' po pretpostavci monomorfizam, slijedi $a' - a'_1 = \varphi_A(a) \in \operatorname{Im}\varphi_A$. Stoga u modulu $\operatorname{Coker}\varphi_A = A'/(\operatorname{Im}\varphi_A)$ vrijedi

$$a' + \operatorname{Im}\varphi_A = a'_1 + \operatorname{Im}\varphi_A,$$

a to znači da je preslikavanje $\rho : \operatorname{Ker}\varphi_C \to \operatorname{Coker}\varphi_A$ formulom (4.18) dobro definirano.

Formalno možemo napisati

$$\rho \circ \varphi|\varphi^{-1}(\operatorname{Ker}\varphi_C) = \pi \circ \psi'^{-1} \circ \varphi_B|\varphi^{-1}(\operatorname{Ker}\varphi_C), \tag{4.20}$$

pri čemu je $\pi \in Hom_{\mathcal{C}}(A', \operatorname{Coker}\varphi_A)$ kvocijentni epimorfizam. Nadalje, ψ' je monomorfizam, dakle, možemo ga promatrati kao izomorfizam sa A' na $\operatorname{Im}\psi' = \operatorname{Ker}\varphi'$, i u formuli (4.20) ψ'^{-1} označava inverzni izomorfizam iz $Hom_{\mathcal{C}}(\operatorname{Ker}\varphi', A')$. Odatle slijedi da je preslikavanje ρ morfizam u kategoriji $\mathcal{C}$, tj. $\rho \in Hom_{\mathcal{C}}(\operatorname{Ker}\varphi_C, \operatorname{Coker}\varphi_A)$.

(b) Pretpostavimo da je $x \in \operatorname{Ker}\rho$. To znači da je $x \in \operatorname{Ker}\varphi_C$ i za $b \in B$, takav da je $x = \varphi(b)$, vrijedi $\varphi_B(b) = \psi'(a')$ za neki $a' \in \operatorname{Im}\varphi_A$. Neka je $a \in A$ takav da je $a' = \varphi_A(a)$. Tada imamo

$$\varphi_B(b) = \psi'(a') = \psi'(\varphi_A(a)) = \varphi_B(\psi(a)),$$

odnosno, vrijedi $b - \psi(a) \in \operatorname{Ker}\varphi_B$. Budući da je $\varphi \circ \psi = 0$, dobivamo

$$x = \varphi(b) = \varphi(b - \psi(a)) \in \varphi(\operatorname{Ker}\varphi_B).$$

Time je dokazana inkluzija $\operatorname{Ker}\rho \subseteq \varphi(\operatorname{Ker}\varphi_B)$.

Neka je sada $b \in \operatorname{Ker}\varphi_B$. Tada je

$$\varphi_C(\varphi(b)) = \varphi'(\varphi_B(b)) = 0,$$

odnosno, vrijedi $x = \varphi(b) \in \operatorname{Ker}\varphi_C$. Sada je $\rho(x) = a' + \operatorname{Im}\varphi_A$ za $a' \in A'$ takav da je $\psi'(a') = \varphi_B(b)$. Međutim, uzeli smo $b \in \operatorname{Ker}\varphi_B$, pa je $\psi'(a') = 0$. Kako je po pretpostavci ψ' monomorfizam, slijedi $a' = 0$. Dakle, $\rho(x) = 0$, odnosno, dokazali smo i obrnutu inkluziju $\varphi(\operatorname{Ker}\varphi_B) \subseteq \operatorname{Ker}\rho$.

Tvrdnja (c) slijedi neposredno iz jednakosti (4.20).

Tvrdnja (b) znači da je $\operatorname{Ker}\rho = \operatorname{Im}\varphi_0$, odnosno, niz (4.19) je egzaktan na mjestu $\operatorname{Ker}\varphi_C$. Tvrdnja ($c$) znači da je $\operatorname{Im}\rho = \operatorname{Ker}\psi'_0$. Naime, $\operatorname{Coker}\varphi_A = A'/(\operatorname{Im}\varphi_A)$, $\operatorname{Coker}\varphi_B = B'/(\operatorname{Im}\varphi_B)$ i morfizam ψ'_0 je definiran sa

$$\psi'_0(a' + \operatorname{Im}\varphi_A) = \psi'(a') + \operatorname{Im}\varphi_B,$$

pa vidimo da je $\operatorname{Ker}\psi'_0$ podmodul svih klasa $a' + \operatorname{Im}\varphi_A$ takvih da je $\psi'(a') \in \operatorname{Im}\varphi_B$, odnosno,

$$\operatorname{Ker}\psi'_0 = \psi'^{-1}(\operatorname{Im}\varphi_B),$$

a to je prema (c) upravo $\operatorname{Im}\rho$.

Dokažimo sada egzaktnost niza (4.19) na mjestu $\operatorname{Ker}\varphi_B$. Prije svega, φ_0 i ψ_0 su restrikcije morfizama φ i ψ, pa iz $\varphi \circ \psi = 0$ slijedi $\varphi_0 \circ \psi_0 = 0$, dakle, vrijedi $\operatorname{Im}\psi_0 \subseteq \operatorname{Ker}\varphi_0$. Neka je $b \in \operatorname{Ker}\varphi_0$. To znači da je $b \in \operatorname{Ker}\varphi_B$ i $\varphi_0(b) = 0$. No φ_0 je restrikcija morfizma φ, pa slijedi da je $b \in \operatorname{Ker}\varphi = \operatorname{Im}\psi$. Neka je $a \in A$ takav da je $b = \psi(a)$. Tada imamo

$$0 = \varphi_B(b) = \varphi_B(\psi(a)) = \psi'(\varphi_A(a)),$$

a kako je ψ' monomorfizam, zaključujemo da je $\varphi_A(a) = 0$, odnosno, $a \in \operatorname{Ker}\varphi_A$. Slijedi $b = \psi(a) = \psi_0(a) \in \operatorname{Im}\psi_0$. Time je dokazana i obrnuta inkluzija $\operatorname{Ker}\varphi_0 \subseteq \operatorname{Im}\psi_0$.

Dokažimo sada egzaktnost na mjestu $\operatorname{Coker}\varphi_B = B'/(\operatorname{Im}\varphi_B)$. Prije svega, φ_0' i ψ_0' su kvocijentni morfizmi morfizama φ' i ψ', pa iz $\varphi'\circ\psi' = 0$ slijedi $\varphi_0'\circ\psi_0' = 0$. To znači da vrijedi inkluzija $\operatorname{Im}\psi_0' \subseteq \operatorname{Ker}\varphi_0'$. Neka je $b' \in B'$ takav da se klasa $b' + \operatorname{Im}\varphi_B$ nalazi u $\operatorname{Ker}\varphi_0'$. Tada imamo

$$0 = \varphi_0'\,(b' + \operatorname{Im}\varphi_B) = \varphi'(b') + \operatorname{Im}\varphi_C \qquad \Longrightarrow \qquad \varphi'(b') \in \operatorname{Im}\varphi_C.$$

Neka je $c \in C$ takav da je $\varphi'(b') = \varphi_C(c)$. Kako je $\varphi : B \to C$ epimorfizam, postoji $b \in B$ takav da je $c = \varphi(b)$. Tada imamo

$$\varphi'(b') = \varphi_C(\varphi(b)) = \varphi'\,(\varphi_B(b)) \qquad \Longrightarrow \qquad b' - \varphi_B(b) \in \operatorname{Ker}\varphi' = \operatorname{Im}\psi'.$$

Stoga postoji (jedinstven) $a' \in A'$ takav da je $b' - \varphi_B(b) = \psi'(a')$. Sada je

$$b' + \operatorname{Im}\varphi_B = b' - \varphi_B(b) + \operatorname{Im}\varphi_B = \psi'(a') + \operatorname{Im}\varphi_B = \psi_0'\,(a' + \operatorname{Im}\varphi_A) \in \operatorname{Im}\psi_0'.$$

Time je dokazana i obrnuta inkluzija $\operatorname{Ker}\varphi_0' \subseteq \operatorname{Im}\psi_0'$.

Ako je ψ monomorfizam, onda je jasno da je i njegova restrikcija ψ_0 monomorfizam. Napokon, pretpostavimo da je φ' epimorfizam. Neka je $c' \in C'$. Tada postoji $b' \in B'$ takav da je $c' = \varphi'(b')$, dakle, u kvocijentnom modulu $\operatorname{Coker}\varphi_C = C'/(\operatorname{Im}\varphi_C)$ imamo po definiciji morfizma φ_0' :

$$c' + \operatorname{Im}\varphi_C = \varphi'(b') + \operatorname{Im}\varphi_C = \varphi_0'\,(b' + \operatorname{Im}\varphi_B)\,.$$

Time je dokazano da je φ_0' epimorfizam.

Neka je sada zadan beskonačan komutativan dijagram

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & A_{n+1} & \stackrel{\psi_{n+1}}{\longrightarrow} & B_{n+1} & \stackrel{\varphi_{n+1}}{\longrightarrow} & C_{n+1} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow \alpha_n & & \downarrow \beta_n & & \downarrow \gamma_n & & \\
0 & \longrightarrow & A_n & \stackrel{\psi_n}{\longrightarrow} & B_n & \stackrel{\varphi_n}{\longrightarrow} & C_n & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow \alpha_{n-1} & & \downarrow \beta_{n-1} & & \downarrow \gamma_{n-1} & & \\
0 & \longrightarrow & A_{n-1} & \stackrel{\psi_{n-1}}{\longrightarrow} & B_{n-1} & \stackrel{\varphi_{n-1}}{\longrightarrow} & C_{n-1} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots & &
\end{array}$$

u kojem su stupci A, B i C kompleksi i u kojem su svi reci egzaktni. Drugim riječima imamo kratki egzaktni niz kompleksa u kategoriji $\mathcal{C}$

$$0 \longrightarrow A \stackrel{\psi}{\longrightarrow} B \stackrel{\varphi}{\longrightarrow} C \longrightarrow 0. \tag{4.21}$$

Za svaki n imamo vezni morfizam

$$\rho_n : H_{n+1}(C) \longrightarrow H_n(A).$$

Nadalje, morfizam ψ_n inducira morfizam

$$\Psi_n = H_n(\psi) : H_n(A) \longrightarrow H_n(B),$$

a morfizam φ_n inducira morfizam

$$\Phi_n = H_n(\varphi) : H_n(B) \longrightarrow H_n(C).$$

Sada primjenom leme 4.2.3. dobivamo:

Propozicija 4.2.4. *Neka je* (4.21) *kratki egzaktni niz kompleksa u kategoriji* $\mathcal{C}$. *Tada je beskonačan niz*

$$\cdots \xrightarrow{H_{n+1}(\psi)} H_{n+1}(B) \xrightarrow{H_{n+1}(\varphi)} H_{n+1}(C) \xrightarrow{\rho_n} H_n(A) \xrightarrow{H_n(\psi)} H_n(B) \xrightarrow{H_n(\varphi)} H_n(C) \xrightarrow{\rho_{n-1}} H_{n-1}(A) \xrightarrow{H_{n-1}(\psi)} \cdots$$

u kategoriji $\mathcal{C}$ *egzaktan.*

Niz u propoziciji 4.2.4. zove se **dugi egzaktni homološki niz**. Sasvim analogno se u slučaju egzaktnog niza kompleksa s rastućim indeksima definira **dugi egzaktni kohomološki niz**.

Primijenit ćemo sada propoziciju 4.2.4. na izvedene funktore jednostrano egzaktnog funktora. U tu će svrhu biti potrebno odabrati projektivne, odnosno, injektivne rezolucije triju modula u kratkom egzaktnom nizu

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\psi} B \xrightarrow{\varphi} C \longrightarrow 0 \tag{4.22}$$

i pripadna lančana, odnosno, kolančana preslikavanja tako da dobijemo kratki egzaktni niz kompleksa. Tada će se na svakom mjestu pojavljivati tzv. rascjepivi kratki egzaktni nizovi, štoviše, rezolucije X od A, Y od B i Z od C moći će se odabrati na takav način da je srednji član svakog pojedinog od tih nizova direktna suma dva susjedna, tj. $Y_n = X_n \dotplus Z_n$.

Propozicija 4.2.5. *Neka je* (4.22) *kratki egzaktni niz u kategoriji* $\mathcal{C}$. *Sljedeća su tri svojstva međusobno ekvivalentna:*

(*a*) *Morfizam* φ *ima desni invers, tj. postoji* $\overline{\varphi} \in Hom_{\mathcal{C}}(C, B)$ *takav da je* $\varphi \circ \overline{\varphi} = I_C$.

(*b*) *Morfizam* ψ *ima lijevi invers, tj. postoji* $\overline{\psi} \in Hom_{\mathcal{C}}(B, A)$ *takav da je* $\overline{\psi} \circ \psi = I_A$.

(*c*) $B \simeq A \dotplus C$, *pri čemu* ψ *odgovara inkluziji* $A \hookrightarrow A \dotplus C$, *a* φ *odgovara projekciji* $A \dotplus C \to C$.

Dokaz: Očito iz (c) slijede (a) i (b).

Pretpostavimo da vrijedi (a). Tada je očito $\overline{\varphi}$ monomorfizam. Nadalje, za $b \in B$ stavimo $b_2 = \overline{\varphi}(\varphi(b))$ i $b_1 = b - b_2$. Tada je $b = b_1 + b_2$, $b_2 \in \operatorname{Im} \overline{\varphi}$ i

$$\varphi(b_1) = \varphi(b) - (\circ\overline{\varphi})(\varphi(b) = \varphi(b) - \varphi(b) = 0, \qquad \text{tj.} \quad b_1 \in \operatorname{Ker} \varphi.$$

To znači da je $B = \operatorname{Ker} \varphi + \operatorname{Im} \overline{\varphi}$. Ta je suma direktna, jer za $b \in (\operatorname{Ker} \varphi) \cap (\operatorname{Im} \overline{\varphi})$ i $c \in C$ takav da je $b = \overline{\varphi}(c)$ imamo $0 = \varphi(b) = (\varphi \circ \overline{\varphi})(c) = I_C(c) = c$, dakle, $b = \overline{\varphi}(c) = 0$. Napokon, kako su ψ i $\overline{\varphi}$ monomorfizmi, imamo $A \simeq \operatorname{Im} \psi = \operatorname{Ker} \varphi$ i $C \simeq \operatorname{Im} \overline{\varphi}$, dakle, $B \simeq A \dotplus C$ i pri tome ψ odgovara inkluziji $A \hookrightarrow A \dotplus C$, a φ projekciji $A \dotplus C \to C$. Time je dokazano da iz (a) slijedi (c).

Napokon, iz (b) slijedi da je $\overline{\psi}$ epimorfizam i sasvim analogno kao u prethodnom odlomku dokazuje se da je $B = \operatorname{Im} \psi \dotplus \operatorname{Ker} \overline{\psi}$, $\operatorname{Im} \psi \simeq A$ i $\operatorname{Ker} \overline{\psi} \simeq C$ (izomorfizam je restrikcija epimorfizma φ. Dakle, vrijedi (c).

U slučaju svojstava iz propozicije 4.2.5. kažemo da je **kratki egzaktni niz** (4.22) **rascjepiv**. Iz definicija projektivnosti i injektivnosti neposredno slijedi:

Propozicija 4.2.6. *Ako je u kratkom egzaktnom nizu* (4.22) *modul A injektivan ili je modul C projektivan, onda je taj egzaktan niz rascjepiv.*

Željene projektivne, odnosno, injektivne rezulucije usklađene sa zadanim kratkim egzaktnim nizom dobivamo pomoću sljedeće propozicije:

Propozicija 4.2.7. *Neka* (4.22) *kratki egzaktni niz u kategoriji $\mathcal{C}$.*

(a) *Neka su X i Z projektivni moduli u kategoriji $\mathcal{C}$ i neka su $\alpha : X \to A$ i $\gamma : Z \to C$ epimorfizmi. Tada postoji epimorfizam $\beta : X \dotplus Z \to B$ takav da sljedeći dijagram* (*s egzaktnim recima*) *komutira:*

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & X & \xrightarrow{\iota} & X \dotplus Z & \xrightarrow{\pi} & Z & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \alpha & & \downarrow \beta & & \downarrow \gamma & & \\ 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{\psi} & B & \xrightarrow{\varphi} & C & \longrightarrow & 0 \end{array} \tag{4.23}$$

(b) *Neka su X i Z injektivni moduli u kategoriji $\mathcal{C}$ i neka su $\alpha : A \to X$ i $\gamma : C \to Z$ monomorfizmi. Tada postoji monomorfizam $\beta : B \to X \dotplus Z$ takav da sljedeći dijagram* (*s egzaktnim recima*) *komutira:*

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & X & \xrightarrow{\iota} & X \dotplus Z & \xrightarrow{\pi} & Z & \longrightarrow & 0 \\ & & \uparrow \alpha & & \uparrow \beta & & \uparrow \gamma & & \\ 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{\psi} & B & \xrightarrow{\varphi} & C & \longrightarrow & 0 \end{array} \tag{4.24}$$

U oba dijagrama je $\iota : X \longrightarrow X \dotplus Z$ inkluzija, a $\pi : X \dotplus Z \longrightarrow Z$ projekcija duž X.

Dokaz: (a) Iz projektivnosti modula Z slijedi da postoji morfizam $\delta : Z \to C$ takav da je $\gamma = \varphi \circ \delta$. Definiramo sada morfizam $\beta : X \dotplus Z \to B$ ovako:

$$\beta(x + z) = \psi(\alpha(x)) + \delta(z), \qquad x \in X, \quad z \in Z.$$

Za $b \in B$ je $\varphi(b) \in C$, pa zbog surjektivnosti $\gamma : Z \to C$ postoji $z \in Z$ takav da je $\gamma(z) = \varphi(b)$. Sada je

$$\varphi(b - \delta(z)) = \varphi(b) - (\varphi \circ \delta)(z) = \varphi(b) - \gamma(z) = 0.$$

Dakle, vrijedi $b - \delta(z) \in \operatorname{Ker} \varphi = \operatorname{Im} \psi$, pa postoji $a \in A$ takav da je $b - \delta(z) = \psi(a)$. Kako je $\alpha : X \to A$ epimorfizam, postoji $x \in X$ takav da je $\alpha(x) = a$. Sada je

$$\beta(x + z) = \psi(\alpha(x)) + \delta(z) = \psi(a) + \delta(z) = b.$$

Time je dokazano da je $\beta : X \dotplus Z \to B$ epimorfizam.

Za $x \in X$ imamo

$$(\beta \circ \iota)(x) = \beta(x) = \beta(x + 0) = \psi(\alpha(x)) = (\psi \circ \alpha)(x).$$

To znači da lijevi kvadrat u dijagramu (4.23) komutira.

Za $x \in X$ i $z \in Z$ imamo zbog $\varphi \circ \psi = 0$

$$(\varphi \circ \beta)(x + z) = \varphi(\psi(\alpha(x)) + \varphi(\delta(z)) = (\varphi \circ \delta)(z) = \gamma(z) = \gamma(\pi(x + z)) = (\gamma \circ \pi)(x + z).$$

Dakle, i desni kvadrat u dijagramu (4.23) komutira.

(b) Iz injektivnosti modula X slijedi da postoji morfizam $\delta : B \to X$ takav da je $\alpha = \delta \circ \psi$. Definiramo sada morfizam $\beta : B \to X \dotplus Z$ sa

$$\beta(b) = \delta(b) + \gamma(\varphi(b)), \qquad b \in B.$$

Ako je $\beta(b) = 0$, onda je $\delta(b) = 0$ i $\gamma(\varphi(b)) = 0$, a kako je γ monomorfizam, imamo $\varphi(b) = 0$, odnosno, $b \in \operatorname{Ker}\varphi = \operatorname{Im}\psi$. Neka je $a \in A$ takav da je $\psi(a) = b$. Tada je $\alpha(a) = \delta(\psi(b)) = \delta(b) = 0$, a kako je α također monomorfizam, slijedi $a = 0$. No tada je $b = \psi(a) = 0$. Time je dokazano da je $\beta : B \to X \dotplus Z$ monomorfizam.

Za $a \in A$ imamo

$$(\beta \circ \psi)(a) = \beta(\psi(a)) = \delta(\psi(a)) + \gamma(\varphi(\psi(a))) = (\delta \circ \psi)(a) = \alpha(a) = (\iota \circ \alpha)(a).$$

To pokazuje da je lijevi kvadrat u dijagramu (4.24) komutira.

Za $b \in B$ imamo

$$(\pi \circ \beta)(b) = \pi(\beta(b)) = \pi(\delta(b) + \gamma(\varphi(b))) = \gamma(\varphi(b)) = (\gamma \circ \varphi)(b).$$

Dakle, i desni kvadrat u dijagramu (4.24) komutira.

Budući da je direktna suma dva projektivna modula projektivan modul, a direktna suma dva injektivna modula je injektivni modul, propozicija 4.2.7. ima kao neposrednu posljedicu:

Propozicija 4.2.8. *Neka je u kategoriji $\mathcal{C}$ zadan kratki egzaktni niz* (4.22).

(a) *Neka su X i Z projektivne rezolucije od A i C. Tada postoji projektivna rezolucija Y od B takva da je $Y_n = X_n \dotplus Z_n$ $\forall n \geq 0$ i da je sljedeći dijagram komutativan*

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C & \longrightarrow & 0 \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
0 & \longrightarrow & X_0 & \longrightarrow & Y_0 & \longrightarrow & Z_0 & \longrightarrow & 0 \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
0 & \longrightarrow & X_1 & \longrightarrow & Y_1 & \longrightarrow & Z_1 & \longrightarrow & 0 \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots & &
\end{array}$$

pri čemu je $X_n \to Y_n$ inkluzija, a $Y_n \to Z_n$ projekcija duž X_n.

(b) *Neka su X i Z injektivne rezolucije od A i C. Tada postoji injektivna rezolucija Y od B*

takva da je $Y_n = X_n \dot{+} Z_n$ $\forall n \geq 0$ *i da je sljedeći dijagram komutativan*

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & X_0 & \longrightarrow & Y_0 & \longrightarrow & Z_0 & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & X_1 & \longrightarrow & Y_1 & \longrightarrow & Z_1 & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots & &
\end{array}$$

pri čemu je $X_n \to Y_n$ *inkluzija, a* $Y_n \to Z_n$ *projekcija duž* X_n.

Primjenom propozicije 4.2.4. dobivamo:

Teorem 4.2.9. (*a*) *Neka je* $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ *desno egzaktan funktor i pretpostavimo da je* $\mathcal{C}$ *kategorija s dosta projektivnih. Neka je* (4.22) *kratki egzaktni niz u* $\mathcal{C}$. *Tada izvedeni funktori od* F *na* A, B, C, ψ *i* φ *uz vezne morfizme* ρ_n *daju dugi egzaktni niz:*

$$0 \longleftarrow F(C) \xleftarrow{F(\varphi)} F(B) \xleftarrow{F(\psi)} F(A) \xleftarrow{\rho_0} F_1(C) \xleftarrow{F_1(\varphi)} F_1(B) \xleftarrow{F_1(\psi)} F_1(A) \xleftarrow{\rho_1} \cdots\cdots$$

(*b*) *Neka je* $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ *lijevo egzaktan funktor i pretpostavimo da je* $\mathcal{C}$ *kategorija s dosta injektivnih. Neka je* (4.22) *kratki egzaktni niz u* $\mathcal{C}$. *Tada izvedeni funktori od* F *na* A, B, C, ψ *i* φ *uz vezne morfizme* ρ^n *daju dugi egzaktni niz:*

$$0 \longrightarrow F(A) \xrightarrow{F(\psi)} F(B) \xrightarrow{F(\varphi)} F(C) \xrightarrow{\rho^0} F^1(A) \xrightarrow{F^1(\psi)} F^1(B) \xrightarrow{F^1(\varphi)} F^1(B) \xrightarrow{\rho^1} \cdots\cdots$$

4.3 Homološka algebra Harish–Chandrinih modula

U ovom će odjeljku G označavati povezanu realnu reduktivnu grupu i ϑ njenu Cartanovu involuciju. Skup fiksnih točaka od ϑ je maksimalna kompaktna podgrupa K od G i ona je također povezana. $\mathfrak{g}_0$ i $\mathfrak{k}_0$ su Liejeve algebre od G i K i $\mathfrak{g}$ i $\mathfrak{k}$ njene kompleksifikacije. Sa ϑ označavamo i diferencijal Cartanove involucije kao i njeno $\mathbb{C}-$linearno proširenje. Tada je

$$\mathfrak{k}_0 = \{x \in \mathfrak{g}_0;\ \vartheta(x) = x\} \qquad \text{i} \qquad \mathfrak{k} = \{x \in \mathfrak{g};\ \vartheta(x) = x\}.$$

Imamo Cartanove dekompozicije od $\mathfrak{g}_0$ i $\mathfrak{g}$:

$$\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{k}_0 \dot{+} \mathfrak{p}_0, \qquad \mathfrak{p}_0 = \{x \in \mathfrak{g}_0;\ \vartheta(x) = -x\}, \qquad \mathfrak{g} = \mathfrak{k} \dot{+} \mathfrak{p}, \qquad \mathfrak{p} = \{x \in \mathfrak{g};\ \vartheta(x) = -x\}.$$

Te su dekompozicije ortogonalne u odnosu na kanonsku simetričnu invarijantnu bilinearnu formu B.

Neka je $\mathfrak{t}_0$ Cartanova podalgebra od $\mathfrak{k}_0$; $\mathfrak{t}_0$ je takva ako i samo ako je maksimalna komutativna podalgebra od $\mathfrak{k}_0$. Kao i prije stavimo

$$\mathfrak{a}_0 = Z_{\mathfrak{p}_0}(\mathfrak{t}_0) = \{x \in \mathfrak{p}_0;\ [x, h] = 0\ \forall h \in \mathfrak{t}_0\} \qquad \text{i} \qquad \mathfrak{h}_0 = Z_{\mathfrak{g}_0}(\mathfrak{t}_0) = \mathfrak{t}_0 \dot{+} \mathfrak{a}_0.$$

Tada je $\mathfrak{h}_0$ $\vartheta-$invarijantna Cartanova podalgebra od $\mathfrak{g}_0$ koja je fundamentalna, odnosno, maksimalno kompaktna. Sa $\mathfrak{t}$, $\mathfrak{a}$ i $\mathfrak{h}$ označavamo kompleksifikacije od $\mathfrak{t}_0$, $\mathfrak{a}_0$ i $\mathfrak{h}_0$. Nadalje, neka su pripadni sistemi korijena označeni sa $R = R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ i $R^{\mathfrak{k}} = R(\mathfrak{k}, \mathfrak{t})$. Prema lemi 2.3.12. vrijedi $\alpha|\mathfrak{t} \neq 0\ \forall \alpha \in R$.

Neka je $h \in i\mathfrak{t}_0$. Tada je operator $ad\,h$ poluprost, dakle, dijagonalizabilan na $\mathfrak{g}$, i sve su njegove svojstvene vrijednosti su realne. Označimo sa $\mathfrak{q}$ sumu svojstvenih potprostora operatora $ad\,h$ za nenegativne svojstvene vrijednosti. To je $\vartheta-$invarijantna parabolička podalgebra od $\mathfrak{g}$. Njen je nilradikal $\mathfrak{u}$ suma svojstvenih potprostora za strogo pozitivne svojstvene vrijednosti, a Levijeva podalgebra $\mathfrak{l}$ je svojstveni potprostor za svajstvenu vrijednost 0. Tada je

$$\mathfrak{q} = \mathfrak{l} \dot{+} \mathfrak{u} \qquad \text{i} \qquad \mathfrak{l} = Z_{\mathfrak{g}}(h) = \{x \in \mathfrak{g};\ [x, h] = 0\} \supseteq \mathfrak{h}.$$

Primijetimo da je h u centru od $\mathfrak{l}$, dakle, ako je $h \neq 0$, onda $\mathfrak{l}$ ima netrivijalan centar. Nadalje, Liejeve algebre $\mathfrak{l}$, $\mathfrak{u}$ i $\overline{\mathfrak{u}}$ su kompleksifikacija Liejevih podalgebri od $\mathfrak{g}_0$:

$$\mathfrak{l}_0 = \mathfrak{l} \cap \mathfrak{g}_0 = Z_{\mathfrak{g}_0}(h) = \{x \in \mathfrak{g}_0;\ [x, h] = 0\}, \qquad \mathfrak{u}_0 = \mathfrak{u} \cap \mathfrak{g}_0, \qquad \overline{\mathfrak{u}}_0 = \overline{\mathfrak{u}} \cap \mathfrak{g}_0.$$

Liejeva podalgebra $\mathfrak{l}$ je ujedno Levijeva podalgebra za suprotnu, također $\vartheta-$invarijantnu, paraboličku podalgebru $\overline{\mathfrak{q}}$ koja je definirana kao suma svojstvenih potprostora operatora $ad\,h$ za nepozitivne svojstvene vrijednosti, a pripadni je nilradikal $\overline{\mathfrak{u}}$ suma svojstvenih potprostora za strogo negativne svojstvene vrijednosti.

Ako je h regularan element, tj. ako je $\alpha(h) \neq 0\ \ \forall \alpha \in R$, tada je $\mathfrak{l} = \mathfrak{h}$ i $\mathfrak{q}$ je $\vartheta-$invarijantna Borelova podalgebra od $\mathfrak{g}$. Ako je $h = 0$, onda je $\mathfrak{l} = \mathfrak{q} = \mathfrak{g}$ i $\mathfrak{u} = \{0\}$.

Pripadne $\vartheta-$invarijantne paraboličke podgrupe su normalizatori u G paraboličkih podalgebri $\mathfrak{q}$ i $\overline{\mathfrak{q}}$:

$$Q = N_G(\mathfrak{q}) = \{g \in G;\ (Ad\,g)\mathfrak{q} = \mathfrak{q}\}, \qquad \overline{Q} = N_G(\overline{\mathfrak{q}}) = \{g \in G;\ (Ad\,g)\overline{\mathfrak{q}} = \overline{\mathfrak{q}}\}.$$

Njihova je Levijeva podgrupa

$$L = Z_G(h) = \{g \in G;\ (Ad\,g)h = h\},$$

a nilradikali su im

$$U = \exp \mathfrak{u}_0 \qquad \text{i} \qquad \overline{U} = \exp \overline{\mathfrak{u}}_0$$

i pri tome je restrikcija $\exp|\mathfrak{u}_0$ bianalitička bijekcija sa $\mathfrak{u}_0$ na U, a restrikcija $\exp|\overline{\mathfrak{u}}_0$ je bianalitička bijekcija sa $\overline{\mathfrak{u}}_0$ na $\overline{U}$.

U daljnjem ćemo raditi s tzv. **parovima** $(\mathfrak{s}, C)$, gdje je $\mathfrak{s}$ kompleksna konačnodimenzionalna Liejeva algebra, C je kompaktna Liejeva grupa koja djeluje automorfizmima na $\mathfrak{s}$, tj. zadan je homomorfizam Liejevih grupa $C \longrightarrow Aut(\mathfrak{s})$, i to tako da je kompleksifikacija $\mathfrak{c}$ Liejeve algebre $\mathfrak{c}_0$ od C Liejeva podalgebra od $\mathfrak{s}$ i da je djelovanje grupe C na Liejevoj algebri $\mathfrak{s}$ proširenje adjungiranog djelovanja $Ad_{\mathfrak{c}}$ od C na $\mathfrak{c}$. Zbog toga se obično djelovanje grupe C na Liejevoj algebri $\mathfrak{s}$ označava sa $Ad_{\mathfrak{s}}$. Naravno, tada je diferencijal djelovanja grupe C upravo restrikcija $ad_{\mathfrak{s}}|\mathfrak{c}_0$. Glavni će nam primjeri biti $(\mathfrak{g}, K)$, $\mathfrak{l}, L \cap K)$, $(\mathfrak{q}, L \cap K)$ i $(\overline{\mathfrak{q}}, L \cap K)$. Posebno ističemo da ne pretpostavljamo da je u paru $(\mathfrak{s}, C)$ Liejeva algebra $\mathfrak{s}$ reduktivna.

Ako je $(\mathfrak{s}, C)$ par, $(\mathfrak{s}, C)-$modul je kompleksan vektorski prostor V koji je $\mathfrak{s}-$modul i $C-$modul, a djelovanje C je **lokalno konačno**, tj. V je unija konačnodimenzionalnih $C-$podmodula na kojima C djeluje neprekidno, dakle, analitički, i diferencijal tog djelovanja je upravo restrikcija djelovanja $\mathfrak{s}$. Nadalje, pretpostavlja se da je djelovanje $\mathfrak{s} \otimes V \to V$ $C-$ekvivarijantno; dakle, ako pripadne reprezentacije od $\mathfrak{s}$ i C obje označimo sa π, onda se zahtijeva da bude

$$\pi\left((Ad_{\mathfrak{s}}\, c)x\right) = \pi(c)\pi(x)\pi(c)^{-1} \qquad \forall c \in C \quad \text{i} \quad \forall x \in \mathfrak{s}.$$

To je automatski ispunjeno ako je grupa C povezana. Morfizam dvaju $(\mathfrak{s}, C)-$modula je linearan operator koji prepliće oba djelovanja $-$ i ono od $\mathfrak{s}$ i ono od C. Tako definiranu kategoriju $(\mathfrak{s}, C)-$modula označavat ćemo sa $\mathcal{M}(\mathfrak{s}, C)$. Ponovo, ako je grupa C povezana, preplitanje djelovanja grupe C je posljedica preplitanja djelovanja Liejeve algebre $\mathfrak{s}$, dakle, tada je kategorija $\mathcal{M}(\mathfrak{s}, C)$ puna potkategorija kategorije svih unitalnih lijevih $U(\mathfrak{s})-$modula.

Neka su sada $(\mathfrak{s}, C)$ i $(\mathfrak{r}, C)$ parovi i pretpostavimo da je zadan $C-$ekvivarijantan homomorfizam $\tau : \mathfrak{r} \to \mathfrak{s}$ čija je restrikcija na $\mathfrak{c}$ identiteta. Tada imamo očigledan zaboravni funktor $For_{\mathfrak{r}}^{\mathfrak{s}} : \mathcal{M}(\mathfrak{s}, C) \to \mathcal{M}(\mathfrak{r}, C)$. Prvi sljedeći cilj nam je konstruirati njemu lijevo i desno adjungirane funktore. Neka je V $(\mathfrak{r}, C)-$modul. Tada je posebno V lijevi unitalni $U(\mathfrak{r})-$modul. Nadalje, homomorfizam $\tau : \mathfrak{r} \to \mathfrak{s}$ definira na $U(\mathfrak{s})$ strukturu i lijevog i desnog $U(\mathfrak{r})-$modula, pa možemo formirati $U(\mathfrak{s})-$module kao u odjeljku 4.1 :

$$U(\mathfrak{s}) \otimes_{U(\mathfrak{r})} V \qquad \text{i} \qquad Hom_{U(\mathfrak{r})}(U(\mathfrak{s}), V).$$

Tada $U(\mathfrak{s})$ djeluje na $U(\mathfrak{s}) \otimes_{U(\mathfrak{r})} V$ lijevim množenjem, a na $Hom_{U(\mathfrak{r})}(U(\mathfrak{s}), V)$ desnim množenjem argumenta:

$$w \cdot (u \otimes_{U(\mathfrak{r})} v) = wu \otimes_{U(\mathfrak{r})} v, \qquad w, u \in U(\mathfrak{s}), \quad v \in V,$$

i

$$(w \cdot \alpha)(u) = \alpha(uw), \qquad \alpha \in Hom_{U(\mathfrak{r})}(U(\mathfrak{s}), V), \quad w, u \in U(\mathfrak{s}).$$

Definirat ćemo sada na tim prostorima djelovanje grupe C. Neka je π oznaka za reprezentacije $\mathfrak{r}$ i C na $(\mathfrak{r}, C)-$modulu V. Za $c \in C$ definiramo preslikavanje $\sigma(c) : U(\mathfrak{s}) \times V \to U(\mathfrak{s}) \otimes_{U(\mathfrak{r})} V$ sa

$$\sigma(c)(u, v) = (Ad\, c)u \otimes_{U(\mathfrak{r})} \pi(c)v, \qquad u \in U(\mathfrak{s}), \quad v \in V.$$

To je preslikavanje očito bilinearno, pa po univerzalnom svojstvu postoji jedinstven linearan operator $\tilde{\sigma}(c) : U(\mathfrak{s}) \otimes_{\mathbb{C}} V \to U(\mathfrak{s}) \otimes_{U(\mathfrak{r})} V$ takav da vrijedi

$$\tilde{\sigma}(c)(u \otimes_{\mathbb{C}} v) = (Ad_{\mathfrak{s}}\, c)u \otimes_{U(\mathfrak{r})} \pi(c)v \qquad \forall u \in U(\mathfrak{s}) \quad \text{i} \quad \forall v \in V.$$

$U(\mathfrak{s}) \otimes_{U(\mathfrak{r})} V$ je kvocijentni prostor prostora $U(\mathfrak{s}) \otimes_{\mathbb{C}} V$ po potprostoru

$$W = span_{\mathbb{C}} \{u\tau(z) \otimes_{\mathbb{C}} v - u \otimes_{\mathbb{C}} \pi(z)v;\ u \in U(\mathfrak{s}),\ z \in U(\mathfrak{r}),\ v \in V\}.$$

Za $u \in U(\mathfrak{s})$, $z \in U(\mathfrak{r})$, $v \in V$ i $c \in C$ zbog $C-$ekvivarijantnosti homomorfizma $\tau : \mathfrak{r} \to \mathfrak{s}$ i zbog činjenice da je na V zadana struktura $(\mathfrak{r}, C)-$modula imamo redom:

$$\tilde{\sigma}(c)\left(u\tau(z) \otimes_{\mathbb{C}} v - u \otimes_{\mathbb{C}} \pi(z)v\right) = (Ad_{\mathfrak{s}}\, c)\left(u\tau(z)\right) \otimes_{\mathbb{C}} \pi(c)v - (Ad_{\mathfrak{s}}\, c)\, u \otimes \pi(c)\pi(z)v =$$
$$= ((Ad_{\mathfrak{s}}\, c)u)\, \tau\left((Ad_{\mathfrak{r}}\, c)z\right) \otimes_{\mathbb{C}} \pi(c)v - (Ad_{\mathfrak{s}}\, c)u \otimes_{\mathbb{C}} \pi\left((Ad_{\mathfrak{r}}\, c)z\right)\pi(c)v \in W.$$

To pokazuje da je potprostor W invarijantan s obzirom na sve operatore $\tilde{\sigma}(c)$, $c \in C$. Stoga možemo prijeći na kvocijent, pa za svaki $c \in C$ dobivamo linearan operator na prostoru $U(\mathfrak{s}) \otimes_{U(\mathfrak{r})} V$. Taj ćemo operator označiti sa $c\,\cdot$; to je jedinstven linearan operator na $U(\mathfrak{s}) \otimes_{U(\mathfrak{r})} V$ takav da vrijedi

$$c \cdot \left(u \otimes_{U(\mathfrak{r})} v\right) = (Ad_{\mathfrak{s}}\, c)u \otimes_{U(\mathfrak{r})} \pi(c)v \qquad \forall u \in U(\mathfrak{s}) \quad \text{i} \quad \forall v \in V.$$

Lako se vidi da je na taj način na $U(\mathfrak{s}) \otimes_{U(\mathfrak{r})} V$ definirana struktura $C-$modula. Štoviše, tada je $U(\mathfrak{s}) \otimes_{U(\mathfrak{r})} V$ $(\mathfrak{s}, C)-$modul. Doista, djelovanje C je lokalno konačno ne samo na V nego i na $U(\mathfrak{s})$, pa je lokalno konačno na tenzorskom produktu $U(\mathfrak{s}) \otimes_{\mathbb{C}} V$, dakle, i na njegovom kvocijentu $U(\mathfrak{s}) \otimes_{U(\mathfrak{r})} V$. Osim toga, zadovoljen je i drugi uvjet iz definicije $(\mathfrak{s}, C)-$modula: dva djelovanja $\mathfrak{c}_0$ na modulu $U(\mathfrak{s}) \otimes_{U(\mathfrak{r})} V$, dobivena diferenciranjem djelovanja C i restrikcijom djelovanja $\mathfrak{s}$, se podudaraju. Doista, ako je $x \in \mathfrak{c}_0$, $u \in U(\mathfrak{s})$ i $v \in V$ onda je djelovanje elementa x na vektor $u \otimes_{U(\mathfrak{r})} v$ dobiveno iz djelovanja grupe C dano sa

$$x \cdot \left(u \otimes_{U(\mathfrak{r})} v\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\exp\, tx)\left(u \otimes_{U(\mathfrak{r})} v\right)\Big|_{t=0} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,(Ad_{\mathfrak{s}}\, \exp\, tx)\, u \otimes_{U(\mathfrak{r})} \pi(\exp\, tx)v\Big|_{t=0} =$$

$$= (ad_{\mathfrak{s}} x)\, u \otimes_{U(\mathfrak{r})} v + u \otimes_{U(\mathfrak{r})} \pi(x)v = xu \otimes_{U(\mathfrak{r})} v - ux \otimes_{U(\mathfrak{r})} v + u \otimes_{U(\mathfrak{r})} \pi(x)v.$$

Međutim, kako je $\tau(x) = x$, u prostoru $U(\mathfrak{s}) \otimes_{U(\mathfrak{r})} V$ imamo

$$-ux \otimes_{U(\mathfrak{r})} v + u \otimes_{U(\mathfrak{r})} \pi(x)v = -u\tau(x) \otimes_{U(\mathfrak{r})} v + u \otimes_{U(\mathfrak{r})} \pi(x)v = 0,$$

pa dobivamo da je

$$x \cdot \left(u \otimes_{U(\mathfrak{r})} v\right) = xu \otimes_{U(\mathfrak{r})} v,$$

i time je tvrdnja o jednakosti dvaju djelovanja dokazana. Napokon, i treći zahtjev o $C-$ekvivarijantnosti djelovanja $\mathfrak{s}$ na modulu $U(\mathfrak{s}) \otimes_{U(\mathfrak{r})} V$ je također zadovoljen: doista, za $c \in C$, $x \in \mathfrak{s}$, $u \in U(\mathfrak{s})$ i $v \in V$ imamo redom

$$c\cdot\left(x \cdot \left(c^{-1} \cdot (u \otimes_{U(\mathfrak{r})} v)\right)\right) = c\cdot\left(x \cdot \left(\left(Ad\, c^{-1}\right) u \otimes_{U(\mathfrak{r})} \pi(c^{-1})v\right)\right) = c\cdot\left(x\left(Ad\, c^{-1}\right) u \otimes_{U(\mathfrak{r})} \pi(c^{-1})v\right) =$$

$$= (Ad\, c)\left(x\left(Ad\, c^{-1}\right) u\right) \otimes_{U(\mathfrak{r})} v = [(Ad\, c)x]u \otimes_{U(\mathfrak{r})} v = [(Ad\, c)x] \cdot (u \otimes v).$$

Razmotrimo sada drugi $U(\mathfrak{s})-$modul $Hom_{U(\mathfrak{r})}(U(\mathfrak{s}), V)$. Na tom prostoru definiramo djelovanje C tako da za $c \in C$ stavimo

$$(c \cdot \alpha)(u) = \pi(c)\alpha\left((Ad\, c)^{-1}u\right), \qquad \alpha \in Hom_{U(\mathfrak{r})}(U(\mathfrak{s}), V), \quad u \in U(\mathfrak{s}).$$

Tako dobiveno preslikavanje $c \cdot \alpha : U(\mathfrak{s}) \to V$ je ponovo homomorfizam lijevih $U(\mathfrak{r})-$modula. Doista, za $w \in U(\mathfrak{r})$ i $u \in U(\mathfrak{s})$ imamo

$$(Ad\, c)^{-1}(w \cdot u) = (Ad\, c)^{-1}(\tau(w)u) = \left((Ad\, c)^{-1}\tau(w)\right)\left((Ad\, c)^{-1}u\right) =$$

$$= \tau\left((Ad\, c)^{-1}w\right)\left((Ad\, c)^{-1}u\right) = \left((Ad\, c)^{-1}w\right) \cdot \left((Ad\, c)^{-1}u\right).$$

Nadalje, V je po pretpostavci $(\mathfrak{r}, C)-$modul pa vrijedi

$$\pi\left((Ad\, c)^{-1}w\right) = \pi(c^{-1})\pi(w)\pi(c).$$

Stoga dobivamo

$$(c \cdot \alpha)(w \cdot u) = \pi(c)\alpha\left((Ad\, c)^{-1}(w \cdot u)\right) = \pi(c)\alpha\left(\left((Ad\, c)^{-1}(w)\right) \cdot \left((Ad\, c)^{-1}u\right)\right) =$$

$$= \pi(c)\pi\left((Ad\, c)^{-1}w\right)\alpha\left((Ad\, c)^{-1}u\right) = \pi(w)\pi(c)\alpha\left((Ad\, c)^{-1}u\right) = \pi(w)(c \cdot \alpha)(u).$$

Provjerimo sada da tako definirana djelovanja $\mathfrak{s}$ i C na $Hom_{U(\mathfrak{r})}(U(\mathfrak{s}), V)$ zadovoljavaju treći uvjet iz definicije $(\mathfrak{s}, C)-$modula, tj. $C-$ekvivarijantnost djelovanja $\mathfrak{s}$ na $Hom_{U(\mathfrak{r})}(U(\mathfrak{s}), V)$. Doista, ako su $c \in C$, $x \in \mathfrak{s}$, $\alpha \in Hom_{U(\mathfrak{r})}(U(\mathfrak{s}), V)$ i $u \in U(\mathfrak{s})$, onda imamo

$$\left(c \cdot (x \cdot (c^{-1} \cdot \alpha))\right)(u) = \pi(c)\left(x \cdot (c^{-1} \cdot \alpha)\right)\left((Ad\, c)^{-1}u\right) = \pi(c)\left(c^{-1} \cdot \alpha\right)\left[\left((Ad\, c)^{-1}u\right)x\right] =$$

$$= \pi(c)\pi(c^{-1})\alpha\left(u(Ad\, c)x\right) = \alpha\left(u(Ad\, c)x\right) = \left([(Ad\, c)x] \cdot \alpha\right)(u),$$

dakle,

$$c \cdot x \cdot c^{-1} \cdot \alpha = [(Ad\, c)x] \cdot \alpha,$$

a to je i trebalo dokazati.

U ovom slučaju dobiveni $C-$modul ne mora biti (i obično nije) lokalno konačan. Stoga ćemo umjesto $Hom_{U(\mathfrak{r})}(U(\mathfrak{s}), V)$ promatrati njegov $C-$podmodul $Hom_{U(\mathfrak{r})}(U(\mathfrak{s}), V)_C$ svih $C-$konačnih vektora, tj. svih $\alpha \in Hom_{U(\mathfrak{r})}(U(\mathfrak{s}), V)$ takvih da je $C-$podmodul $span(C \cdot \alpha)$ konačnodimenzionalan i da je pripadna subreprezentacija od C neprekidna (dakle, analitička).

Treba provjeriti da je $C-$podmodul $Hom_{U(\mathfrak{r})}(U(\mathfrak{s}), V)_C$ ujedno i $U(\mathfrak{s})-$podmodul. Neka je $\alpha \in Hom_{U(\mathfrak{r})}(U(\mathfrak{s}), V)_C$ i neka je $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ baza prostora $span(C \cdot \alpha)$. Tada za neke (sasvim određene) analitičke kompleksne funkcije $f_1, \ldots, f_n$ na grupi C vrijedi

$$c \cdot \alpha = \sum_{j=1}^{n} f_j(c)\alpha_j, \qquad c \in C.$$

Nadalje, neka je $\{x_1, \ldots, x_m\}$ baza od $\mathfrak{s}$ i za $c \in C$ označimo sa $\sigma_{\ell k}(c)$ matrične elemente operatora $Ad\, c$ u toj bazi. Sada za $c \in C$ zbog dokazane $C-$ekvivarijantnosti djelovanja $\mathfrak{s}$ na $Hom_{U(\mathfrak{r})}(U(\mathfrak{s}), V)$ imamo

$$c \cdot x_k \cdot \alpha = [(Ad\, c)x_k] \cdot c \cdot \alpha = \sum_{\ell=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \sigma_{\ell k}(c) f_j(c) x_\ell \cdot \alpha_j.$$

To pokazuje da je za svaki $k \in \{1, \ldots, m\}$ potprostor $span(C \cdot x_k \cdot \alpha)$, a time i potprostor $span(C \cdot x \cdot \alpha)$ za svaki $x \in \mathfrak{s}$, sadržan u $span\,\{x_\ell \cdot \alpha_j;\ 1 \leq \ell \leq n,\ 1 \leq j \leq m\}$, dakle, konačnodimenzionalan, i na njemu je djelovanje C analitičko. Dakle, $x \cdot \alpha \in Hom_{U(\mathfrak{r})}(U(\mathfrak{s}), V)_C$ za svaki $x \in \mathfrak{s}$ i svaki $\alpha \in Hom_{U(\mathfrak{r})}(U(\mathfrak{s}), V)_C$. Time je dokazano da je $Hom_{U(\mathfrak{r})}(U(\mathfrak{s}), V)_C$ podmodul $U(\mathfrak{s})-$modula $Hom_{U(\mathfrak{r})}(U(\mathfrak{s}), V)$.

Da bismo dokazali da je $Hom_{U(\mathfrak{r})}(U(\mathfrak{s}), V)_C$ $(\mathfrak{s}, C)-$modul, treba još pokazati da se podudaraju dva djelovanja $\mathfrak{c}_0$ na $Hom_{U(\mathfrak{r})}(U(\mathfrak{s}), V)_C$, ono dobiveno restrikcijom djelovanja $\mathfrak{s}$ i ono dobiveno defirenciranjem djelovanja C. Za $x \in \mathfrak{c}_0$, $\alpha \in Hom_{U(\mathfrak{r})}(U(\mathfrak{s}), V)_C$ i $u \in U(\mathfrak{s})$ imamo $\pi(x)\alpha(u) = \alpha(xu)$, budući da je $x \in \mathfrak{c}_0 \subseteq \mathfrak{r}$ i zato što je α preplitanje reprezentacija od $\mathfrak{r}$, dakle i reprezentacija od $\mathfrak{c}_0$, na $U(\mathfrak{s})$ i na V. Prema tome, imamo

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}((\exp\, tx) \cdot \alpha)(u)\bigg|_{t=0} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\pi(\exp\, tx)\alpha\left((Ad\,(\exp\, -tx))u\right)\bigg|_{t=0} =$$

$$= \pi(x)\alpha(u) - \alpha((ad\, x)u) = \pi(x)\alpha(u) - \alpha(xu) + \alpha(ux) = \alpha(ux) = (x \cdot \alpha)(u),$$

a to je i trebalo dokazati.

Za obje opisane konstrukcije $(\mathfrak{s}, C)-$modula iz zadanog $(\mathfrak{r}, C)-$modula treba definirati transformacije morfizama. Pretpostavimo da su V i W $(\mathfrak{r}, C)-$moduli i da je $f \in Hom_{(\mathfrak{r},C)}(V, W)$. Odgovarajući $\mathfrak{s}-$morfizmi između modula $U(\mathfrak{s}) \otimes_{U(\mathfrak{r})} V$ i $U(\mathfrak{s}) \otimes_{U(\mathfrak{r})} W$, odnosno, između modula $Hom_{U(\mathfrak{r})}(U(\mathfrak{s}), V)$ i $Hom_{U(\mathfrak{r})}(U(\mathfrak{s}), W)$ dani su sa

$$I_{U(\mathfrak{s})} \otimes_{U(\mathfrak{r})} f : U(\mathfrak{s}) \otimes_{U(\mathfrak{r})} v \longrightarrow U(\mathfrak{s}) \otimes_{U(\mathfrak{r})} W$$

i
$$f_* = f\circ : Hom_{U(\mathfrak{r})}(U(\mathfrak{s}), V) \longrightarrow Hom_{U(\mathfrak{r})}(U(\mathfrak{s}), W).$$
Neposredno se provjerava da su to i $C-$morfizmi. Posebno, f_* preslikava $C-$konačne vektore u $C-$konačne vektore. To znači da restrikcijom dobivamo morfizam sa $Hom_{U(\mathfrak{r})}(U(\mathfrak{s}), V)_C$ u $Hom_{U(\mathfrak{r})}(U(\mathfrak{s}), W)_C$ u kategoriji $(\mathfrak{s}, C)-$modula.

Na taj način definirali smo funktore $U(\mathfrak{s})_{U(\mathfrak{r})}(\bullet)$ i $Hom_{U(\mathfrak{r})}(U(\mathfrak{s}), \bullet)_C$ iz kategorije $\mathcal{M}(\mathfrak{r}, C)$ u kategoriju $\mathcal{M}(\mathfrak{s}, C)$.

Teorem 4.3.1. *Neka su $(\mathfrak{s}, C)$ i $(\mathfrak{r}, C)$ parovi i neka je $\tau : \mathfrak{r} \to \mathfrak{s}$ $C-$ekvivarijantni homomorfizam Liejevih algebri čija je restrikcija na $\mathfrak{c}$ identiteta. Tada je funktor $U(\mathfrak{s})\otimes_{U(\mathfrak{r})}(\bullet)$ lijevo adjungiran, a funktor $Hom_{U(\mathfrak{r})}(U(\mathfrak{s}), \bullet)_C$ je desno adjungiran zaboravnom funktoru $For^{\mathfrak{s}}_{\mathfrak{r}} : \mathcal{M}(\mathfrak{s}, C) \to \mathcal{M}(\mathfrak{r}, C)$.*

Skica dokaza: Već znamo da je $U(\mathfrak{s})_{U(\mathfrak{s})}(\bullet)$ promatran kao funktor iz kategorije $\mathcal{M}(\mathfrak{r})$ svih $\mathfrak{r}-$modula u kategoriju $\mathcal{M}(\mathfrak{s})$ svih $\mathfrak{s}-$modula lijevo adjungiran zaboravnom funktoru sa $\mathcal{M}(\mathfrak{s})$ u $\mathcal{M}(\mathfrak{r})$. Za $\mathfrak{r}-$modul X i $\mathfrak{s}-$modul Y međusobno inverzni izomorfizmi vektorskih prostora
$$\alpha_{X,Y} : Hom_{U(\mathfrak{s})}(U(\mathfrak{s}) \otimes_{U(\mathfrak{r})} X, Y) \longrightarrow Hom_{U(\mathfrak{r})}(X, For^{\mathfrak{s}}_{\mathfrak{r}} Y)$$
i
$$\beta_{X,Y} : Hom_{U(\mathfrak{r})}(X, For^{\mathfrak{s}}_{\mathfrak{r}} Y) \longrightarrow Hom_{U(\mathfrak{s})}(U(\mathfrak{s}) \otimes_{U(\mathfrak{r})} X, Y)$$
su prema tvrdnji (b) teorema 1.4.20. i njenom dokazu definirani na sljedeći način:

1. Ako je $g \in Hom_{U(\mathfrak{s})}(U(\mathfrak{s}) \otimes_{U(\mathfrak{r})} X, Y)$, onda je $\check{g} = \alpha_{X,Y}(g) \in Hom_{U(\mathfrak{r})}(X, For^{\mathfrak{s}}_{\mathfrak{r}} Y)$ definiran sa
$$\check{g}(x) = g\left(1_{U(\mathfrak{s})} \otimes_{U(\mathfrak{r})} x\right).$$
2. Ako je $f \in Hom_{U(\mathfrak{r})}(X, For^{\mathfrak{s}}_{\mathfrak{r}} Y)$, onda je $\hat{f} = \beta_{X,Y}(f) \in Hom_{U(\mathfrak{s})}(U(\mathfrak{s})\otimes_{U(\mathfrak{r})} X, Y)$ jedinstven element takav da je
$$\hat{f}\left(1_{U(\mathfrak{s})} \otimes_{U(\mathfrak{r})} x\right) = f(x) \qquad \forall x \in X$$
i tada vrijedi
$$\hat{f}\left(u \otimes_{U(\mathfrak{r})} x\right) = uf(x) \qquad \forall u \in U(\mathfrak{s}) \quad \text{i} \quad \forall x \in X.$$

Pretpostavimo sada da je X ne samo $\mathfrak{r}-$modul, nego $(\mathfrak{r}, C)-$modul i da je Y ne samo $\mathfrak{s}-$modul, nego $(\mathfrak{s}, C)-$modul. Nadalje, neka su
$$g \in Hom_{(\mathfrak{s},C)}(U(\mathfrak{s}) \otimes_{U(\mathfrak{r})} X, Y) = Hom_{U(\mathfrak{s})}(U(\mathfrak{s}) \otimes_{U(\mathfrak{r})} X, Y) \cap Hom_C(U(\mathfrak{s}) \otimes_{U(\mathfrak{r})} X, Y)$$
i
$$f \in Hom_{(\mathfrak{r},C)}(X, For^{\mathfrak{s}}_{\mathfrak{r}} Y) = Hom_{U(\mathfrak{r})}(X, For^{\mathfrak{s}}_{\mathfrak{r}} Y) \cap Hom_C(X, Y).$$
Tada se direktno provjerava da su $\check{g}$ i $\hat{f}$ $C-$morfizmi. Dakle, restrikcijom dobivamo međusobno inverzne izomorfizme između prostora $Hom_{(\mathfrak{s},C)}(U(\mathfrak{s}) \otimes_{U(\mathfrak{r})} X, Y)$ i $Hom_{(\mathfrak{r},C)}(X, For^{\mathfrak{s}}_{\mathfrak{r}} Y)$. Prirodnost tih familija izomorfizama dobiva se neposredno iz prirodnosti na razini $U(\mathfrak{s})-$modula i $(U(\mathfrak{r})-$modula. Odatle slijedi da je funktor $U(\mathfrak{s}) \otimes_{U(\mathfrak{r})} (\bullet)$ iz kategorije $\mathcal{M}(\mathfrak{r}, C)$ u kategoriju $\mathcal{M}(\mathfrak{s}, C)$ lijevo adjungiran zaboravnom funktoru $For^{\mathfrak{s}}_{\mathfrak{r}} : \mathcal{M}(\mathfrak{s}, C) \to \mathcal{M}(\mathfrak{r}, C)$.

Sasvim analogno, korištenjem tvrdnje (b) teorema 1.4.21. dokazuje se desna adjungiranost funktora $Hom_{U(\mathfrak{r})}(U(\mathfrak{s}), \bullet)_C$ zaboravnom funktoru $For^{\mathfrak{s}}_{\mathfrak{r}} : \mathcal{M}(\mathfrak{s}, C) \to \mathcal{M}(\mathfrak{r}, C)$.

Pretpostavimo sada da je homomorfizam $\tau : \mathfrak{r} \to \mathfrak{s}$ injektivan, odnosno, da se zapravo radi o Liejevoj podalgebri $\mathfrak{r}$ od $\mathfrak{s}$ koja sadrži $\mathfrak{c}$ i koja je $Ad\, C-$invarijantna. Tada prema PBW$-$teoremu imamo $U(\mathfrak{s}) = U(\mathfrak{r}) \otimes_{\mathbb{C}} \Lambda = \Lambda \otimes_{\mathbb{C}} U(\mathfrak{r})$, gdje je Λ razapet monomima u elementima baze $C-$invarijantnog komplementa od $\mathfrak{r}$ u $\mathfrak{s}$. Tada imamo sljedeće identifikacije vektorskih prostora:

$$U(\mathfrak{s}) \otimes_{U(\mathfrak{r})} V = \Lambda \otimes_{\mathbb{C}} V \qquad \text{i} \qquad Hom_{U(\mathfrak{r})}(U(\mathfrak{s}), V)_C = Hom_{\mathbb{C}}(\Lambda, V)_C.$$

Prema tome, $U(\mathfrak{s})\otimes_{U(\mathfrak{r})}(\bullet)$ je egzaktan funktor. Drugi funktor $Hom_{U(\mathfrak{r})}(U(\mathfrak{s}), \bullet)_C$ je također egzaktan. Naime, struktura $C-$modula $Hom_{\mathbb{C}}(\Lambda, V)_C$ ovisi samo o strukturi $C-$modula V, a egzaktnost niza $(\mathfrak{s}, C)-$modula je ekvivalentna egzaktnosti istog niza ali promatranog kao niz $C-$modula. No radi se o lokalno konačnim $C-$modulima, dakle, potpuno reducibilnim $C-$modulima koji su direktne sume konačnodimenzionalnih, pa tvrdnja slijedi iz činjenice da su svi funktori na kategoriji takvih $C-$modula egzaktni. Odatle i iz propozicije 4.1.12. dobivamo:

Korolar 4.3.2. *Ako je homomorfizam $\tau : \mathfrak{r} \to \mathfrak{s}$ injektivan, i lijevo i desno adjungiran funktor zaboravnom funktoru $For^{\mathfrak{s}}_{\mathfrak{r}} : \mathcal{M}(\mathfrak{s}, C) \to \mathcal{M}(\mathfrak{r}, C)$ su egzaktni. Posebno, zaboravni funktor šalje projektivne module u kategoriji $\mathcal{M}(\mathfrak{s}, C)$ u projektivne module u kategoriji $\mathcal{M}(\mathfrak{r}, C)$, a također injektivne module u kategoriji $\mathcal{M}(\mathfrak{s}, C)$ u injektivne module u kategoriji $\mathcal{M}(\mathfrak{r}, C)$.*

Nama važan primjer takve situacije je kad je $\mathfrak{r} = \mathfrak{l}$ Levijeva podalgebra paraboličke podalgebre $\mathfrak{s} = \mathfrak{q} = \mathfrak{l} \dotplus \mathfrak{u}$ od $\mathfrak{g}$ i kad je $C = L \cap K$. Tada je nilradikal $\mathfrak{u}$ $Ad\,C-$invarijantan, pa za Λ možemo uzeti $U(\mathfrak{u})$.

Druga je situacija koja će nam biti važna jest kad je $\mathfrak{r} = \mathfrak{s}/\mathfrak{i}$, gdje je $\mathfrak{i}$ ideal u Liejevoj algebri $\mathfrak{s}$ i τ je kanonski epimorfizam. U tom su slučaju $U(\mathfrak{s}) \otimes_{U(\mathfrak{r})} (\bullet)$ i $Hom_{U(\mathfrak{r})}(U(\mathfrak{s}), \bullet)_C$ funktori uzimanja koinvarijanata, odnosno, invarijanata u odnosu na ideal $\mathfrak{i}$. Ti funktori prevode $(\mathfrak{r}/\mathfrak{i}, C)-$module u $(\mathfrak{r}, C)-$module, ali oni nisu egzaktni. Međutim, kao adjungirani funktori oni jesu jednostrano egzaktni, pa ćemo moći konstruirati i proučavati njihove izvedene funktore, a to će biti tzv. funktori $\mathfrak{i}-$homologije, odnosno, $\mathfrak{i}-$kohomologije. Tipičan je slučaj kad je $\mathfrak{r} = \mathfrak{q} = \mathfrak{l} \dotplus \mathfrak{u}$ parabolička podalgebra, $\mathfrak{s} = \mathfrak{l}$, a $\tau : \mathfrak{q} \to \mathfrak{l}$ je projektor duž nilradikala $\mathfrak{u}$. Naravno, $\mathfrak{l}$ se identificira sa $\mathfrak{q}/\mathfrak{u}$, dakle, $\mathfrak{u}-$invarijante, $\mathfrak{u}-$koinvarijante, $\mathfrak{u}-$homologije i $\mathfrak{u}-$kohomologije će biti $(\mathfrak{l}, C)-$moduli.

Uočimo sada da je za kompaktnu Liejevu grupu C i kompleksifikaciju njene Liejeve algebre $\mathfrak{c}$ kategorija $\mathcal{M}(\mathfrak{c}, C)$ upravo kategorija svih lokalno konačnih $C-$modula. Svi su ti moduli poluprosti, dakle, svi su oni u kategoriji $\mathcal{M}(\mathfrak{c}, C)$ i injektivni i projektivni. Ako je $(\mathfrak{s}, C)$ par, funktor $U(\mathfrak{s}) \otimes_{U(\mathfrak{c})} (\bullet)$ je prema teoremu 4.3.1. lijevo adjungiran zaboravnom funktoru $For^{\mathfrak{s}}_{\mathfrak{c}}$ iz kategorije $\mathcal{M}(\mathfrak{s}, C)$ u kategoriju $\mathcal{M}(\mathfrak{c}, C)$. Kako su svi moduli u $\mathcal{M}(\mathfrak{c}, C)$ poluprosti, funktor $For^{\mathfrak{s}}_{\mathfrak{c}}$ je egzaktan. Sada iz tvrdnje (a) propozicije 4.1.12. slijedi da funktor $U(\mathfrak{s})\otimes_{U(\mathfrak{c})}(\bullet)$ prevodi projektivne (dakle, sve) module u kategoriji $\mathcal{M}(\mathfrak{c}, C)$ u projektivne module u kategoriji $\mathcal{M}(\mathfrak{s}, C)$. Prema tome, za svaki $V \in Ob(\mathcal{M}(\mathfrak{c}, C))$ modul $U(\mathfrak{s}) \otimes_{U(\mathfrak{c})} V$ je projektivan u kategoriji $\mathcal{M}(\mathfrak{s}, C)$. Ako je sada V $(\mathfrak{s}, C)-$modul (dakle, i $(\mathfrak{c}, C)-$modul), lako se vidi da je jedinstven linearan operator $f : U(\mathfrak{s}) \otimes_{U(\mathfrak{c})} V \to V$ sa svojstvom

$$f(u \otimes_{U(\mathfrak{c})} v) = u \cdot v \qquad \forall u \in U(\mathfrak{s}) \quad \text{i} \quad \forall v \in V$$

zapravo $(\mathfrak{s}, C)-$morfizam. Taj je operator surjektivan, jer za $v \in V$ je $f(1_{U(\mathfrak{s})} \otimes v) = v$. Zaključujemo da za svaki modul V u kategoriji $\mathcal{M}(\mathfrak{s}, C)$ postoji projektivan modul P u $\mathcal{M}(\mathfrak{s}, C)$ i epimorfizam $f : P \to V$.

Analogno, funktor $Hom_{U(\mathfrak{c})}(U(\mathfrak{s}), \bullet)_C$ je prema teoremu 4.3.1. desno adjungiran zaboravnom funktoru $For^{\mathfrak{s}}_{\mathfrak{c}} : \mathcal{M}(\mathfrak{s}, C) \to \mathcal{M}(\mathfrak{c}, C)$, dakle, prema tvrdnji (b) propozicije 4.1.12. taj funktor prevodi injektivne (dakle, sve) module u kategoriji $\mathcal{M}(\mathfrak{c}, C)$ u injektivne module u kategoriji $\mathcal{M}(\mathfrak{s}, C)$. Prema tome, za svaki $V \in Ob(\mathcal{M}(\mathfrak{c}, C))$ modul $Hom_{U(\mathfrak{r})}(U(\mathfrak{s}), V)$ je injektivan u kategoriji $\mathcal{M}(\mathfrak{s}, C)$. Ako je ponovo V $(\mathfrak{s}, C)-$modul (dakle, i $(\mathfrak{c}, C)-$modul), definiramo linearan operator $f : V \to Hom_{U(\mathfrak{c})}(U(\mathfrak{s}), V)_C$ sa

$$[f(v)](u) = u \cdot v, \qquad v \in V, \quad u \in U(\mathfrak{s}).$$

Lako se vidi da je f morfizam $(\mathfrak{s}, C)-$modula i on je injektivan:

$$f(v_1) = f(v_2) \qquad \Longrightarrow \qquad v_1 = [f(v_1)]\left(1_{U(\mathfrak{s})}\right) = [f(v_2)]\left(1_{U(\mathfrak{s})}\right) = v_2.$$

Prema tome, za svaki modul V u kategoriji $\mathcal{M}(\mathfrak{s}, C)$ postoji injektivan modul I u $\mathcal{M}(\mathfrak{s}, C)$ i monomorfizam $f : V \to I$.

Dakle, dokazali smo:

Teorem 4.3.3. *Za svaki par $(\mathfrak{s}, C)$ kategorija $\mathcal{M}(\mathfrak{s}, C)$ ima dosta projektivnih i dosta injektivnih modula.*

Konstruirat ćemo sada neke vrlo eksplicitne projektivne i injektivne rezolucije. One se baziraju na raznim Koszulovim kompleksima, koji su rezolucije trivijalnog jednodimenzionalnog modula $\mathbb{C}$ u raznim kategorijama. Ti su Koszulovi kompleksi konačne duljine: počevši od nekog mjesta pojavljuju se samo nul−moduli. Rezolucije proizvoljnog modula V tada se dobivaju primjenom funktora $V \otimes (\bullet)$ ili $Hom(V, \bullet)$ ili $Hom(\bullet, V)$ na takve komplekse. Jednostavna ali važna posljedica takvih konstrukcija je činjenica da ćemo u našim kategorijama uvijek moći konstruirati rezolucije koje nisu duže od duljine Koszulovog kompleksa. Npr. za kategoriju $(\mathfrak{s}, C)-$modula ta će duljina biti $\dim \mathfrak{s}/\mathfrak{c} = \dim \mathfrak{s} - \dim \mathfrak{c}$. Dakle, naše će kategorije imati konačnu homološku dimenziju.

Podsjetimo se najprije Koszulovog kompleksa u najjednostavnijem komutativnom slučaju. Neka je V kompleksan konačnodimenzionalan vektorski prostor. U odjeljku 3.3. konstruirali smo kompleks

$$0 \longleftarrow \mathbb{C} \overset{e}{\longleftarrow} S(V)\otimes{\textstyle\bigwedge}^0(V) \overset{d}{\longleftarrow} S(V)\otimes{\textstyle\bigwedge}^1(V) \overset{d}{\longleftarrow} \cdots \overset{d}{\longleftarrow} S(V)\otimes{\textstyle\bigwedge}^{n-1}(V) \overset{d}{\longleftarrow} S(V)\otimes{\textstyle\bigwedge}^n(V) \longleftarrow 0.$$

Pri tome je za $1 \le k \le n = \dim V$ preslikavanje $d : S(V) \otimes \bigwedge^k(V) \to S(V) \otimes \bigwedge^{k-1}(V)$ Koszulov diferencijal dan sa

$$d(s \otimes v_1 \wedge \cdots \wedge v_k) = \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j-1} s v_j \otimes v_1 \wedge \cdots \overset{\wedge}{v_j} \cdots \wedge v_k, \quad s \in S(V), \quad v_1, \ldots, v_k \in V,$$

a $e : S(V) \otimes \bigwedge^0(V) = S(V) \to \mathbb{C} = S^0(V)$ projektor duž $S^*(V) = \sum_{k>0} S^k(V)$, odnosno, ako $S(V)$ identificiramo s $\mathcal{P}(V^*)$, e je evaluacija $P \mapsto P(0)$. Prema teoremu 3.3.2. taj je kompleks egzaktan. Prema tome, to je slobodna (dakle, i projektivna i injektivna) rezolucija od $\mathbb{C}$.

Razmotrimo sada umjesto V proizvoljnu kompleksnu konačnodimenzionalnu Liejevu algebru $\mathfrak{s}$ i kategoriju $\mathcal{M}(\mathfrak{s})$ svih $\mathfrak{s}-$modula. Iz univerzalnog svojstva tenzorskog produkta slijedi da za svaki $k \in \mathbb{N}$, $k \le n = \dim \mathfrak{s}$, postoji jedinstven linearan operator $d : U(\mathfrak{s}) \otimes \bigwedge^k(\mathfrak{s}) \to U(\mathfrak{s}) \otimes \bigwedge^{k-1}(V)$ takav da vrijedi

$$d(u \otimes x_1 \wedge \cdots \wedge x_k) = \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j-1} u x_j \otimes x_1 \wedge \cdots \overset{\wedge}{x_j} \cdots \wedge x_k +$$

$$+ \sum_{1 \le i < j \le k} (-1)^{i+j} u \otimes [x_i, x_j] \wedge x_1 \wedge \cdots \overset{\wedge}{x_i} \cdots \overset{\wedge}{x_j} \cdots \wedge x_k, \quad u \in U(\mathfrak{s}), \quad x_1, \ldots, x_k \in \mathfrak{s}.$$

Nadalje, neka je $\varepsilon : U(\mathfrak{s}) \otimes \bigwedge^0(\mathfrak{s}) = U(\mathfrak{s}) \to \mathbb{C} = U_0(\mathfrak{s})$ projektor duž potprostora $\mathfrak{s}U(\mathfrak{s})$. Naravno, budući da je $\mathfrak{s}U(\mathfrak{s})$ obostrani ideal u $U(\mathfrak{s})$, preslikavanje ε je epimorfizam lijevih $\mathfrak{s}-$modula sa $U(\mathfrak{s})$ (s adjungiranom reprezentacijom) na trivijalni $\mathfrak{s}-$modul $\mathbb{C}$.

Teorem 4.3.4. *Niz*

$$0 \longleftarrow \mathbb{C} \xleftarrow{\varepsilon} U(\mathfrak{s}) \otimes \bigwedge^0(\mathfrak{s}) \xleftarrow{d} U(\mathfrak{s}) \otimes \bigwedge^1(\mathfrak{s}) \xleftarrow{d} \cdots \xleftarrow{d} U(\mathfrak{s}) \otimes \bigwedge^{n-1}(\mathfrak{s}) \xleftarrow{d} U(\mathfrak{s}) \otimes \bigwedge^n(\mathfrak{s}) \longleftarrow 0$$

je rezolucija trivijalnog $\mathfrak{s}-$modula $\mathbb{C}$ u kategoriji $\mathcal{M}(\mathfrak{s})$. Pri tome je $U(\mathfrak{s})$ promatran kao lijevi $\mathfrak{s}-$modul za adjungiranu reprezentaciju:

$$x \cdot u = [x, u] = xu - ux, \qquad x \in \mathfrak{s}, \quad u \in U(\mathfrak{s}),$$

a struktura lijevog $\mathfrak{s}-$modula na $\bigwedge^k(\mathfrak{s})$ je dobivena restrikcijom adjungirane reprezentacije $ad_{\bigwedge(\mathfrak{s})}$ od $\mathfrak{s}$:

$$x \cdot (x_1 \wedge \cdots \wedge x_k) = \sum_{j=1}^{k} x_1 \wedge \cdots \wedge x_{j-1} \wedge [x, x_j] \wedge x_{j+1} \wedge \cdots \wedge x_k, \qquad x, x_1, \ldots, x_k \in \mathfrak{s}.$$

Skica dokaza: Direktan račun pokazuje da je $d : U(\mathfrak{s}) \otimes \bigwedge^k(\mathfrak{s}) \to U(\mathfrak{s}) \otimes \bigwedge^{k-1}(\mathfrak{s})$ morfizam $\mathfrak{s}-$modula, tj. da za proizvoljne $u \in U(\mathfrak{s})$ i $x, x_1, \ldots, x_k \in \mathfrak{s}$ vrijedi

$$x \cdot d(u \otimes x_1 \wedge \cdots \wedge x_k) = d\left(x \cdot (u \otimes x_1 \wedge \cdots \wedge x_k)\right).$$

Također, direktnim računom provjerava se da je niz $\mathfrak{s}-$modula u iskazu teorema kompleks, tj. da za $k \geq 2$ i za proizvoljne $u \in U(\mathfrak{s})$ i $x_1, \ldots, x_k \in \mathfrak{s}$ vrijedi

$$d(d(u \otimes x_1 \wedge \cdots \wedge x_k)) = 0.$$

Da bismo dokazali da se ne radi samo o kompleksu nego o egzaktnom nizu, za svaki $m \in \mathbb{Z}$ definiramo potkompleks F_m promatranog kompleksa sastavljenog od konačnodimenzionalnih $\mathfrak{s}-$modula. Za $m \in \mathbb{Z}_+$ to je kompleks

$$0 \longleftarrow \mathbb{C} \xleftarrow{\varepsilon} U_m(\mathfrak{s}) \otimes \bigwedge^0(\mathfrak{s}) \xleftarrow{d} U_{m-1}(\mathfrak{s}) \otimes \bigwedge^1(\mathfrak{s}) \xleftarrow{d} \cdots \xleftarrow{d} U_{m-n+1}(\mathfrak{s}) \otimes \bigwedge^{n-1}(\mathfrak{s}) \xleftarrow{d} U_{m-n}(\mathfrak{s}) \otimes \bigwedge^n(\mathfrak{s}) \longleftarrow 0.$$

a za $m < 0$ potkompleks F_m sastoji se od samih nul$-$modula. Iz definicije operatora d vidi se da je $Gr^m = F_m/F_{m-1}$ za $m > 0$ upravo potkompleks

$$0 \longleftarrow 0 \longleftarrow S^m(\mathfrak{s}) \otimes \bigwedge^0(\mathfrak{s}) \xleftarrow{d} S^{m-1}(\mathfrak{s}) \otimes \bigwedge^1(\mathfrak{s}) \xleftarrow{d} \cdots \xleftarrow{d} S^{m-n+1}(\mathfrak{s}) \otimes \bigwedge^{n-1}(\mathfrak{s}) \xleftarrow{d} S^{m-n}(\mathfrak{s}) \otimes \bigwedge^n(\mathfrak{s}) \longleftarrow 0$$

Koszulovog kompleksa za vektorski prostor $\mathfrak{s}$, dakle, taj je kompleks prema teoremu 3.3.2. egzaktan. Nadalje, za $m < 0$ potkompleks Gr^m sastoji se od samih nul$-$modula, a za $m = 0$ imamo egzaktan potkompleks

$$0 \longleftarrow \mathbb{C} \longleftarrow \mathbb{C} \longleftarrow 0 \longleftarrow \cdots\cdots \longleftarrow 0 \longleftarrow 0 \longleftarrow 0.$$

Sada iz dugog egzaktnog kohomološkog niza pridruženog kratkom egzaktnom nizu kompleksa

$$0 \longrightarrow F_{m-1} \longrightarrow F_m \longrightarrow Gr^m \longrightarrow 0$$

slijedi da kompleksi F_m i F_{m-1} imaju izomorfne kohomologije. Kako je $F_{-1} = 0$, zaključujemo da su sve te kohomologije trivijalne, odnosno, da su svi kompleksi F_m egzaktni. Odatle slijedi egzaktnost niza iz iskaza teorema.

Promatrajmo sada par $(\mathfrak{s}, C)$ i kategoriju $\mathcal{M}(\mathfrak{s}, C)$. Neka je $\mathfrak{p}$ $C-$invarijantni direktni komplement od $\mathfrak{c}$ u $\mathfrak{s}$ i neka je $\pi : \mathfrak{s} \to \mathfrak{p}$ pripadna $C-$ekvivarijantna projekcija. Neka je sada $n = \dim \mathfrak{p}$.

Teorem 4.3.5. *Niz*

$$0 \longleftarrow \mathbb{C} \xleftarrow{\varepsilon} U(\mathfrak{s}) \otimes_{U(\mathfrak{c})} \bigwedge^0(\mathfrak{p}) \xleftarrow{d} U(\mathfrak{s}) \otimes_{U(\mathfrak{c})} \bigwedge^1(\mathfrak{p}) \xleftarrow{d} \cdots\cdots \xleftarrow{d} U(\mathfrak{s}) \otimes_{U(\mathfrak{c})} \bigwedge^{n-1}(\mathfrak{p}) \xleftarrow{d} U(\mathfrak{s}) \otimes_{U(\mathfrak{c})} \bigwedge^n(\mathfrak{p}) \longleftarrow 0$$

je projektivna rezolucija trivijalnog $(\mathfrak{s}, C)$*−modula* $\mathbb{C}$ *u kategoriji* $\mathcal{M}(\mathfrak{s}, C)$*. Pri tome je*

$$d : U(\mathfrak{s}) \otimes_{U(\mathfrak{c})} \bigwedge^k(\mathfrak{p}) \to U(\mathfrak{s}) \otimes_{U(\mathfrak{c})} \bigwedge^{k-1}(\mathfrak{p})$$

jedinstven linearan operator takav da vrijedi

$$d\left(u \otimes_{U(\mathfrak{c})} x_1 \wedge \cdots \wedge x_k\right) = \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j-1} u x_j \otimes_{U(\mathfrak{c})} x_1 \wedge \cdots \overset{\wedge}{x_j} \cdots \wedge x_k +$$

$$+ \sum_{1 \le i < j \le k} (-1)^{i+j} u \otimes_{U(\mathfrak{c})} \pi([x_i, x_j]) \wedge x_1 \wedge \cdots \overset{\wedge}{x_i} \cdots \overset{\wedge}{x_j} \cdots \wedge x_k, \quad u \in U(\mathfrak{s}), \quad x_1, \ldots, x_k \in \mathfrak{p},$$

a $\varepsilon : U(\mathfrak{s}) \otimes_{U(\mathfrak{c})} \bigwedge^0(\mathfrak{p}) \to \mathbb{C}$ *je projekcija duž* $\mathfrak{s}U(\mathfrak{s}) \otimes_{U(\mathfrak{c})} 1$*. Ako je* $\mathfrak{c}$ *simetrična podalgebra od* $\mathfrak{s}$*, štoviše, kad god je* $[\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] \subseteq \mathfrak{c}$*, (kao npr. u slučaju para* $(\mathfrak{g}, K)$ *pridruženog realnoj reduktivnoj grupi) onda druga (dvostruka) suma u definiciji operatora* d *iščezava.*

Skica dokaza: Znamo da su moduli u gornjem nizu projektivni moduli u kategoriji $\mathcal{M}(\mathfrak{s}, C)$: to su upravo moduli iz dokaza teorema 4.3.3. Direktne provjere pokazuju da se radi o kompleksu $(\mathfrak{s}, C)$−modula. Dopunimo li bazu od $\mathfrak{p}$ s bazom od $\mathfrak{c}$ da dobijemo bazu od $\mathfrak{s}$, pomoću PBW−teorema možemo definirati filtraciju $U(\mathfrak{s})$ po $\mathfrak{p}$−stupnju: PBW−monom iz baze od $U(\mathfrak{s})$ leži u m−tom filtracionom potprostoru $U_{(m)}(\mathfrak{s})$ ako broj elemenata iz baze od $\mathfrak{p}$ u njemu (računajući s kratnostima) nije veći od m. To daje filtraciju $(F_m)_{m\in\mathbb{Z}}$ našeg kompleksa, gdje je F_m potkompleks

$$0 \longleftarrow \mathbb{C} \xleftarrow{\varepsilon} U_{(m)}(\mathfrak{s}) \otimes_{U(\mathfrak{c})} \bigwedge^0(\mathfrak{p}) \xleftarrow{d} U_{(m-1)}(\mathfrak{s}) \otimes_{U(\mathfrak{c})} \bigwedge^1(\mathfrak{p}) \xleftarrow{d} \cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots \xleftarrow{d} U_{(m-n+1)}(\mathfrak{s}) \otimes_{U(\mathfrak{c})} \bigwedge^{n-1}(\mathfrak{p}) \xleftarrow{d} U_{(m-n)}(\mathfrak{s}) \otimes_{U(\mathfrak{c})} \bigwedge^n(\mathfrak{p}) \longleftarrow 0$$

Zbog izomorfizma $(\mathfrak{s}, C)$−modula

$$U_{(m)}(\mathfrak{s}) \otimes_{U(\mathfrak{c})} \bigwedge^k(\mathfrak{p}) \simeq S_m(\mathfrak{p}) \otimes U(\mathfrak{c}) \otimes_{U(\mathfrak{c})} \bigwedge^k(\mathfrak{p}) \simeq S_m(\mathfrak{p}) \otimes \bigwedge^k(\mathfrak{p})$$

pripadni graduirani kompleks $Gr^m = F_m/F_{m-1}$ je

$$0 \longleftarrow \mathbb{C} \xleftarrow{\varepsilon} S^m(\mathfrak{p})(\mathfrak{s}) \otimes \bigwedge^0(\mathfrak{p}) \xleftarrow{d} S^{m-1} \otimes \bigwedge^1(\mathfrak{p}) \xleftarrow{d} \cdots\cdots \xleftarrow{d} S^{m-n+1}(\mathfrak{p}) \otimes \bigwedge^{n-1}(\mathfrak{p}) \xleftarrow{d} S^{m-n}(\mathfrak{p}) \otimes \bigwedge^n(\mathfrak{p}) \longleftarrow 0$$

s diferencijalom koji se podudara s restrikcijom Koszulovog diferencijala za prostor $\mathfrak{p}$. Posebno, kompleks Gr^m je egzaktan za svaki m, a odatle slijedi egzaktnost kompleksa F_m za svaki m kao u dokazu teorema 4.3.4., dakle i egzaktnost niza iz iskaza teorema.

Sada ćemo iskoristiti dvije konstrukcije u kategoriji $\mathcal{M}(\mathfrak{s}, C)$ da dobijemo projektivne i injektivne rezolucije netrivijalnih $(\mathfrak{s}, C)$−modula: za $(\mathfrak{s}, C)$−module V i W možemo konstruirati $(\mathfrak{s}, C)$−module $V \otimes W = V \otimes_{\mathbb{C}} W$ i $Hom_{\mathbb{C}}(V, W)_C$ s uobičajenim djelovanjem dobivenim iz djelovanja $\mathfrak{s}$ i C na oba modula V i W. Kad fiksiramo jednu od dvije varijable dobivamo egzaktne funktore s kategorije $\mathcal{M}(\mathfrak{s}, C)$ u samu sebe. Na taj način dobivamo tri egzaktna funktora, budući da su funktori $V \otimes (\bullet)$ i $(\bullet) \otimes V$ prirodno izomorfni.

Lema 4.3.6. *Za svaki modul* V *iz kategorije* $\mathcal{M}(\mathfrak{s}, C)$ *funktor* $V \otimes (\bullet)$ *je lijevo adjungiran funktoru* $Hom_{\mathbb{C}}(V, \bullet)_C$*.*

Skica dokaza: Za svaka dva modula X i Y u kategoriji $\mathcal{M}(\mathfrak{s}, C)$ treba definirati međusobno inverzne izomorfizme

$$\alpha_{X,Y} : Hom_{(\mathfrak{s},C)}(V \otimes X, Y) \to Hom_{(\mathfrak{s},C)}\left(X, Hom_{\mathbb{C}}(V,Y)_C\right)$$

i

$$\beta_{X,Y} : Hom_{(\mathfrak{s},C)}\left(X, Hom_{\mathbb{C}}(V,Y)_C\right) \to Hom_{(\mathfrak{s},C)}(V \otimes X, Y).$$

Oni su dani formulama:

$$\left\{\left[\alpha_{X,Y}(f)\right](x)\right\}(v) = f(v \otimes x), \qquad f \in Hom_{(\mathfrak{s},C)}(V \otimes X, Y), \quad x \in X, \quad v \in V,$$

i

$$\left[\beta_{X,Y}(g)\right](v \otimes x) = [g(x)](v), \qquad g \in Hom_{(\mathfrak{s},C)}\left(X, Hom_{\mathbb{C}}(V,Y)_C\right), \quad v \in V, \quad x \in X.$$

Direktno se provjerava da je stvarno $\alpha_{X,Y}(f) \in Hom_{(\mathfrak{s},C)}\left(X, Hom_{\mathbb{C}}(V,Y)_C\right)$ za svaki f iz prostora $Hom_{(\mathfrak{s},C)}(V \otimes X, Y)$ i da je $\beta_{X,Y}(g) \in Hom_{(\mathfrak{s},C)}(V \otimes X, Y)$ za svaki $g \in Hom_{(\mathfrak{s},C)}\left(X, Hom_{\mathbb{C}}(V,Y)_C\right)$. Nadalje, ti su linearni operatori međusobno inverzni. Doista, za

$$f \in Hom_{(\mathfrak{s},C)}(V \otimes X, Y), \quad g \in Hom_{(\mathfrak{s},C)}\left(X, Hom_{\mathbb{C}}(V,Y)_C\right), \quad x \in X \quad \text{i} \quad v \in V$$

imamo

$$\left\{\left[\left(\alpha_{X,Y} \circ \beta_{X,Y}\right)(g)\right](x)\right\}(v) = \left\{\left[\alpha_{X,Y}\left(\beta_{X,Y}(g)\right)\right](x)\right\}(v) = \left[\beta_{X,Y}(g)\right](v \otimes x) = [g(x)](v),$$

dakle, $\alpha_{X,Y} \circ \beta_{X,Y}$ je identiteta na $Hom_{(\mathfrak{s},C)}\left(X, Hom_{\mathbb{C}}(V,Y)_C\right)$; slično je

$$\left[\left(\beta_{X,Y} \circ \alpha_{X,Y}\right)(f)\right](v \otimes x) = \beta_{X,Y}\left[\alpha_{X,Y}(f)\right](v \otimes x) = \left\{\left[\alpha_{X,Y}(f)\right](x)\right\}(v) = f(v \otimes x),$$

dakle, $\beta_{X,Y} \circ \alpha_{X,Y}$ je identiteta na $Hom_{(\mathfrak{s},C)}(V \otimes X, Y)$. Dokaz završava direktnom provjerom da su familije $(\alpha_{X,Y})$ i $(\beta_{X,Y})$ prirodne u obje varijable.

Posebno, to znači da funktor $V \otimes (\bullet)$ šalje projektivne u projektivne i da funktor $Hom_{\mathbb{C}}(V, \bullet)_C$ šalje injektivne u injektivne. Nadalje, ako je modul W u kategoriji $\mathcal{M}(\mathfrak{s}, C)$ projektivan, onda je funktor

$$Hom_{(\mathfrak{s},C)}\left(\bullet, Hom_{\mathbb{C}}(W,V)_C\right) \simeq Hom_{(\mathfrak{s},C)}(W \otimes (\bullet), V) \simeq Hom_{(\mathfrak{s},C)}\left(W, Hom_{\mathbb{C}}(\bullet,V)_C\right)$$

egzaktan, a to znači da je modul $Hom_{\mathbb{C}}(W,V)_C$ injektivan u kategoriji $\mathcal{M}(\mathfrak{s}, C)$. Zaključujemo da kontravarijantan funktor $Hom_{\mathbb{C}}(\bullet, V)_C$ šalje projektivne u injektivne. Iz tog razmatranja slijedi

Teorem 4.3.7. *Za svaki $(\mathfrak{s}, C)-$modul V je*

$$V \otimes U(\mathfrak{s})_{U(\mathfrak{c})} {\bigwedge}^{\bullet}(\mathfrak{p}) \longrightarrow V$$

projektivna rezolucija od V u kategoriji $\mathcal{M}(\mathfrak{s}, C)$, a

$$V \longrightarrow Hom_{\mathbb{C}}\left(U(\mathfrak{s}) \otimes_{U(\mathfrak{c})} {\bigwedge}^{\bullet}(\mathfrak{p}), V\right)_C$$

je injektivna rezolucija od V u kategoriji $\mathcal{M}(\mathfrak{s}, C)$. Posebno, homološka i kohomološka dimenzija kategorije $\mathcal{M}(\mathfrak{s}, C)$ je $\leq \dim \mathfrak{p}$.

Važan specijalan slučaj dobivamo kad je modul V konačnodimenzionalan. Tada je funktor $Hom_{\mathbb{C}}(V, \bullet)_C$ prirodno izomorfan funktoru $V^* \otimes (\bullet)$, pri čemu je V^* kontragredijentan modul od V. Kako je $V^{**} \simeq V$, zaključujemo da je tenzoriranje sa V i lijevo i desno adjungiran funktor tenzoriranju sa V^*. Posebno:

Korolar 4.3.8. *Ako je V konačnodimenzionalan $(\mathfrak{s}, C)-$modul onda funktor $V \otimes (\bullet)$ šalje projektivne u projektivne i injektivne u injektivne.*

Još jedan važan funktor je kontravarijantan **funktor $C-$konačne dualnosti**. To je funktor $Hom_{\mathbb{C}}(\bullet, \mathbb{C})_C$ koji $(\mathfrak{s}, C)-$modulu V pridružuje modul $V^{(*)} = Hom_{\mathbb{C}}(V, \mathbb{C})_C$, najveći $(\mathfrak{s}, C)-$podmodul kontragredijentnog $\mathfrak{s}-$modula i $C-$modula V^*. Taj je funktor egzaktan, a dvostruka primjena na dopustivi $(\mathfrak{s}, C)-$modul V daje modul izomorfnan tom modulu. Važno svojstvo funktora $C-$konačne dualnosti je

Propozicija 4.3.9. *Za bilo koje $(\mathfrak{s}, C)-$module V i W prostori morfizama $Hom_{(\mathfrak{s},C)}\left(V, W^{(*)}\right)$ i $Hom_{(\mathfrak{s},C)}\left(W, V^{(*)}\right)$ su izomorfni. Štoviše, izomorfizam je prirodan u obje varijable.*

Dokaz: Doista, imamo prirodne izomorfizme

$$Hom_{(\mathfrak{s},C)}\left(V, W^{(*)}\right) = Hom_{(\mathfrak{s},C)}\left(V, Hom_{\mathbb{C}}(W, \mathbb{C})_C\right) \simeq Hom_{(\mathfrak{s},C)}(W \otimes V, \mathbb{C}) \simeq$$

$$\simeq Hom_{(\mathfrak{s},C)}(V \otimes W, \mathbb{C}) \simeq Hom_{(\mathfrak{s},C)}\left(W, Hom_{\mathbb{C}}(V, \mathbb{C})_C\right) = Hom_{(\mathfrak{s},C)}\left(W, V^{(*)}\right).$$

Svojstvo iz prethodne propozicije zapravo možemo shvaćati kao samoadjungiranost funktora $C-$konačne dualnosti. Preciznije, ako kontravarijantan funktor $C-$konačne dualnosti shvatimo kao kovarijantan funktor iz suprotne kategorije $\mathcal{M}(\mathfrak{s}, C)^{\mathrm{op}}$ u kategoriju $\mathcal{M}(\mathfrak{s}, C)$, onda ova propozicija tvrdi da je taj funktor desno adjungiran njemu suprotnom funktoru iz $\mathcal{M}(\mathfrak{s}, C)$ u $\mathcal{M}(\mathfrak{s}, C)^{\mathrm{op}}$. Isti dokaz pokazuje da analogno svojstvo vrijedi općenitije za kontravarijantan funktor $Hom_{\mathbb{C}}(\bullet, V)_C$ za bilo koji $(\mathfrak{s}, C)-$modul V :

$$Hom_{(\mathfrak{s},C)}\left(X, Hom_{(\mathfrak{s},C)}(Y, V)_C\right) \simeq Hom_{(\mathfrak{s},C)}(X \otimes Y, V) \simeq Hom_{(\mathfrak{s},C)}\left(Y, Hom_{(\mathfrak{s},C)}(X, V)_C\right).$$

4.4 Zuckermanov i Bernsteinov funktor

Ako je $(\mathfrak{s}, C)$ par i ako je T zatvorena podgrupa od C, onda je i $(\mathfrak{s}, T)$ par. Zuckermanov funktor je funktor iz kategorije $\mathcal{M}(\mathfrak{s}, T)$ u kategoriji $\mathcal{M}(\mathfrak{s}, C)$ koji je desno adjungiran zaboravnom funktoru $\mathcal{M}(\mathfrak{s}, C) \to \mathcal{M}(\mathfrak{s}, T)$. Bernsteinov je funktor lijevo adjungiran malo modificiranom zaboravnom funktoru. Konstrukciju tih funktora provest ćemo samo za slučaj realne reduktivne grupe G i to za $\mathfrak{s} = \mathfrak{g}$, $C = K$ i $T = L \cap K$ za Levijev faktor L neke $\vartheta-$invarijantne paraboličke podgrupe Q od G.

U tu svrhu označimo sa $\mathcal{R}(K)$ prostor svih glatkih funkcija na K koje su i za lijeve i za desne pomake $K-$konačne. To je lijevi $K-$modul za lijeve pomake, tj. za lijevu regularnu reprezentaciju

$$(\lambda(k)f)(h) = f(k^{-1}h), \qquad f \in \mathcal{R}(K), \quad k, h \in K,$$

a također i za desnu regularnu reprezentaciju

$$(\rho(k)f)h) = f(hk), \qquad f \in \mathcal{R}(K), \quad k, h \in K.$$

Za $(\mathfrak{g}, T)-$modul V definiramo vektorski prostor

$$\Gamma V = (\mathcal{R}(K) \otimes V)^{(\mathfrak{k}, T)}$$

svih $(\mathfrak{k}, T)-$invarijanata u tenzorskom produktu $\mathcal{R}(K) \otimes V$ u odnosu na djelovanje $\lambda \otimes \pi_V|(\mathfrak{k}, T)$. Na tom prostoru možemo odmah definirati djelovanje grupe K : to je restrikcija desne regularne reprezentacije ρ. To je dobro definirano, jer reprezentacija ρ komutira s reprezentacijom λ, dakle, takvo djelovanje na $\mathcal{R}(K) \otimes V$, tj. $\rho \otimes I_V$, komutira s reprezentacijom $\lambda \otimes \pi_V$, pa je potprostor $(\mathfrak{k}, T)-$invarijanata $\rho \otimes I_V-$invarijantan. Treba još definirati strukturu $\mathfrak{g}-$modula na prostoru ΓV i provjeriti da je s tim djelovanjem ΓV $(\mathfrak{g}, K)-$modul. Uočimo da ne možemo kao $\mathfrak{g}-$djelovanje uzeti $I_{\mathcal{R}(K)} \otimes \pi_V$ budući da za to djelovanje potprostor $(\mathfrak{k}, T)-$invarijanata ne mora biti invarijantan. Osim toga, to djelovanje komutira s djelovanjem grupe K, pa nije $K-$ekvivarijantno.

Uočimo identifikaciju

$$\mathcal{R}(K) \otimes V = \mathcal{R}(K, V),$$

gdje je $\mathcal{R}(K, V)$ oznaka za prostor glatkih funkcija sa K u konačnodimenzionalan potprostor od V, koje su $K-$konačne za lijeve i za desne pomake. Pri toj identifikaciji element $f \otimes v$, $f \in \mathcal{R}(K)$, $v \in V$, identificira se s funkcijom $k \mapsto f(k)v$. Definiramo sada djelovanje Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ na prostoru $\mathcal{R}(K, V)$:

$$(x \cdot F)(k) = \pi_V((Ad\, k)x)F(k), \qquad F \in \mathcal{R}(K, V), \quad x \in \mathfrak{g}, \quad k \in K.$$

To možemo zapisati i tenzorskom notacijom: ako su $x_j \in \mathfrak{g}$ i $f_j \in \mathcal{R}(K)$ takvi da je

$$(Ad\, k)x = \sum_j f_j(k)x_j, \qquad \text{onda je} \quad x \cdot (f \otimes v) = \sum_j f f_j \otimes \pi_V(x_j)v.$$

Provjerimo da je na taj način definirana na $\mathcal{R}(K, V)$ struktura $\mathfrak{g}-$modula. Očito je pridruživanje $x \mapsto x \cdot$ linearno. Nadalje, ako su $x, y \in \mathfrak{g}$, $F \in \mathcal{R}(K, V)$, i $k \in K$, onda imamo redom

$$([x, y] \cdot F)(k) = \pi_V((Ad\, k)[x, y])F(k) = \pi_V([(Ad\, k)x, (Ad\kappa)y])F(k) =$$

$$= \pi_V((Ad\, k)x)\pi_V((Ad\, k)y)F(k) - \pi_V((Ad\, k)y)\pi_V((Ad\, k)x)F(k) =$$

$$= \pi_V((Ad\, k)x)(y \cdot F)(k) - \pi_V((Ad\, k)y)(x \cdot F)(k) = (x \cdot y \cdot F)(k) - (y \cdot x \cdot F)(k),$$

odnosno, vrijedi $[x,y]\cdot F = x\cdot y\cdot F - y\cdot x\cdot F$. Sada treba dokazati da je potprostor ΓV svih $(\mathfrak{k},T)-$invarijanata invarijantan za tako definirano djelovanje $\mathfrak{g}$. Označimo sa Λ reprezentaciju od $(\mathfrak{k},T)$ na $\mathcal{R}(K,V)$ dobivenu iz $\lambda\otimes\pi_V$ pri identifikaciji $\mathcal{R}(K)\otimes V$ sa $\mathcal{R}(K,V)$. Lako se vidi da je tada

$$(\Lambda(t)F)(k) = \pi_V(t)F(t^{-1}k), \qquad F\in\mathcal{R}(K,V), \quad t\in T, \quad k\in K,$$

i

$$(\Lambda(y)F)(k) = \pi_V(y)F(k) + (\lambda(y)F)(k), \qquad F\in\mathcal{R}(K,V), \quad y\in\mathfrak{k}, \quad k\in K.$$

Pri tome je

$$(\lambda(y)F)(k) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F((\exp -ty)k)\bigg|_{t=0}.$$

Sada za $t\in T$, $x\in\mathfrak{g}$, $F\in\mathcal{R}(K,V)$ i $k\in K$ koristeći činjenicu da je V $(\mathfrak{g},T)-$modul imamo redom

$$(\Lambda(t)x\cdot F)(k) = \pi_V(t)(x\cdot F)(t^{-1}k) = \pi_V(t)\pi_V\left((Ad\,t^{-1}k)x\right)F(t^{-1}k) =$$
$$= \pi_V(t)\pi_V(t^{-1})\pi_V((Ad\,k)x)\pi_V(t)F(t^{-1}k) = \pi_V((Ad\,k)x)(\Lambda(t)F)(k) = (x\cdot\Lambda(t)F)(k).$$

Dakle, definirano djelovanje $\mathfrak{g}$ komutira s djelovanjem grupe T. Slično, djelovanje $\mathfrak{g}$ komutira i s operatorima $\Lambda(y)$, $y\in\mathfrak{k}$. Doista, za $y\in\mathfrak{k}$, $x\in\mathfrak{g}$, $F\in\mathcal{R}(K,V)$ i $k\in K$ imamo

$$(\Lambda(y)x\cdot F)(k) = \pi_V(y)(x\cdot F)(k) + (\lambda(y)(x\cdot F))(k) =$$
$$= \pi_V(y)\pi_V((Ad\,k)x)F(k) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x\cdot F)((\exp -ty)k)\bigg|_{t=0} =$$
$$= \pi_V(y)\pi_V((Ad\,k)x)F(k) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\pi_V((Ad\,(\exp -ty)k)x)F((\exp -ty)k)\bigg|_{t=0} =$$
$$= \pi_V(y)\pi_V((Ad\,k)x)F(k) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\pi_V\left(\mathrm{e}^{-t\,ad\,y}(Ad\,k)x\right)F(k)\bigg|_{t=0} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\pi_V((Ad\,k)x)F((\exp -ty)k)\bigg|_{t=0} =$$
$$= \pi_V(y)\pi_V((Ad\,k)x)F(k) + \pi_V([(Ad\,k)x,y])F(k) + \pi_V((Ad\,k)x)(\lambda(y)F)(k) =$$
$$= \pi_V((Ad\,k)x)\pi_V(y)F(k) - \pi_V((Ad\,k)x)(\lambda(y)F)(k) = \pi_V((Ad\,k)x)(\Lambda(y)F)(k) = (x\cdot\Lambda(y)F)(k).$$

Prema tome, potprostor ΓV $(\mathfrak{k},T)-$invarijanata u $\mathcal{R}(K,V)$ je $\mathfrak{g}-$invarijantan.

Dokažimo sada da je uz takva djelovanja $\mathfrak{g}$ i K prostor ΓV $(\mathfrak{g},K)-$modul. Prije svega, djelovanje $\mathfrak{g}$ je $K-$ekvivarijantno: za $x\in\mathfrak{g}$, $F\in\Gamma V = \mathcal{R}(K,V)^{(\mathfrak{k},T)}$ i $k,h\in K$ imamo

$$(k\cdot x\cdot k^{-1}\cdot F)(h) = (x\cdot k^{-1}\cdot F)(hk) = \pi_V((Ad\,hk)x)(k^{-1}\cdot F)(hk) =$$
$$= \pi_V((Ad\,h)(Ad\,k)x)F(h) = ((Ad\,k)x\cdot F)(h),$$

odnosno, vrijedi $k\cdot x\cdot k^{-1}\cdot = (Ad\,k)x\,\cdot$. Sada treba dokazati da se za $y\in\mathfrak{k}$ operator $\rho(y)$, dobiven diferenciranjem djelovanja grupe K na $\mathcal{R}(K,V)$ desnim pomacima podudara s djelovanjem $y\,\cdot$ od y kao elementa od $\mathfrak{g}$. Tu je podudarnost potrebno ustanoviti na $(\mathfrak{k},T)-$invarijantama. Ako je F $(\mathfrak{k},T)-$invarijanta, onda je $(\lambda(y)F)(k) = -\pi_V(y)F(k)$. Zbog toga imamo redom

$$(\rho(y)F)(k) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F(k(\exp ty))\bigg|_{t=0} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F((\exp t(Ad\,k)x)k)\bigg|_{t=0} =$$
$$= -(\lambda((Ad\,k)y)F)(k) = \pi_V((Ad\,k)y)F(k) = (y\cdot F)(k).$$

Dakle, ΓV je $(\mathfrak{g},K)-$modul. Da bi to postao funktor, treba ga definirati i na morfizmima. Ako je $\varphi\in Hom_{(\mathfrak{g},T)}(V,W)$ definiramo

$$\Gamma\varphi = I_{\mathcal{R}(K)}\otimes\varphi : (\mathcal{R}(K)\otimes V)^{(\mathfrak{k},T)} \longrightarrow (\mathcal{R}(K)\otimes W)^{(\mathfrak{k},T)}.$$

Tako definiran funktor zove se **Zuckermanov funktor**.

Teorem 4.4.1. *Zuckermanov funktor* $\Gamma : \mathcal{M}(\mathfrak{g}, T) \to \mathcal{M}(\mathfrak{g}, K)$ *je desno adjungiran zaboravnom funktoru* $For : \mathcal{M}(\mathfrak{g}, K) \to \mathcal{M}(\mathfrak{g}, T)$.

Dokaz: Iskoristit ćemo teorem 4.1.7., tj. konstruirat ćemo prirodne transformacije $\Phi : Id_{\mathcal{M}(\mathfrak{g},K)} \to \Gamma For$ i $\Psi : For\Gamma \to Id_{\mathcal{M}(\mathfrak{g},T)}$ koje zadovoljavaju uvjete iz teorema 4.1.7., tj. da je za svaki $(\mathfrak{g}, K)-$modul V kompozicija

$$For\, V \xrightarrow{For\Phi_V} For\Gamma For\, V \xrightarrow{\Psi_{For\, V}} For\, V$$

identiteta $I_{For\, V} = I_V$ na prostoru V i da je za svaki $(\mathfrak{g}, T)-$modul W kompozicija

$$\Gamma W \xrightarrow{\Phi_{\Gamma W}} \Gamma For \Gamma W \xrightarrow{\Gamma \Psi_W} \Gamma W$$

identiteta $I_{\Gamma W}$ na prostoru ΓW. Za $(\mathfrak{g}, K)-$modul V definiramo operator

$$\Phi_V : V \longrightarrow \Gamma V = \mathcal{R}(K, V)^{(\mathfrak{k},T)}, \qquad (\Phi_V(v))\,(k) = \pi_V(k)v.$$

Taj operator stvarno preslikava V u $(\mathfrak{k}, T)-$invarijante. Naime, za $v \in V$, $t \in T$ i $k \in K$ imamo

$$(\Lambda(t)\Phi_V(v))\,(k) = \pi_V(t)\,(\Phi_V(v))\,(t^{-1}k) = \pi_V(t)\pi_V(t^{-1}k)v = \pi_V(k)v = (\Phi_V(v))\,(k).$$

Slično, za $v \in V$, $y \in \mathfrak{k}$ i $k \in K$ imamo

$$(\Lambda(y)\Phi_V(v))\,(k) = \pi_V(y)\,(\Phi_V(v))\,(k) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,(\Phi_V(v))\,((\exp -ty)k)\Big|_{t=0} =$$

$$= \pi_V(y)\pi_V(k)v + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\pi_V((\exp -ty)k)v\Big|_{t=0} = \pi_V(y)\pi_V(k)v - \pi_V(y)\pi_V(k)v = 0.$$

Nadalje, operator Φ_V je morfizam $(\mathfrak{g}, K)-$modula. Naime, za $x \in \mathfrak{g}$, $v \in V$ i $k \in K$ imamo

$$(\Phi_V(\pi_V(x)v))\,(k) = \pi_V(k)\pi_V(x)v = \pi_V((Ad\, k)x)\pi_V(k)v = (x \cdot \Phi_V(v))\,(k).$$

Slično, za $v \in V$ i $h, k \in K$ imamo

$$(\Phi_V(\pi_V(h)v))\,(k) = \pi_V(k)\pi_V(h)v = \pi_V(kh)v = (\Phi_V(v))\,(kh) = (h \cdot \Phi_V(v))\,(k).$$

Sada za svaki $(\mathfrak{g}, T)-$modul W definiramo operator

$$\Psi_W : \Gamma W = \mathcal{R}(K, W)^{(\mathfrak{k},T)} \longrightarrow W, \qquad \Psi_W(F) = F(e), \quad F \in \mathcal{R}(K, W)^{(\mathfrak{k},T)}.$$

Operator Ψ_W je morfizam $(\mathfrak{g}, T)-$modula. Naime, za $x \in \mathfrak{g}$ i $F \in \mathcal{R}(K, W)^{(\mathfrak{k},T)}$ imamo

$$\Psi_W(x \cdot F) = (x \cdot F)(e) = \pi_W((Ad\, e)x)F(e) = \pi_W(x)\Psi_W(F).$$

S druge strane, za $t \in T$, $F \in \mathcal{R}(K, W)^{(\mathfrak{k},T)}$ i $k \in K$ je $F(tk) = \pi_W(t)F(k)$, pa je posebno

$$\Psi_W(t \cdot F) = (t \cdot F)(e) = F(t) = \pi_W(t)F(e) = \pi_W(t)\Psi_W(F).$$

Treba sada dokazati da su dvije kompozicije identitete. Za prvu od njih možemo izostaviti znak zaboravnog funktora, pa imamo kompoziciju

$$V \xrightarrow{\Phi_V} \Gamma V \xrightarrow{\Psi_V} V.$$

Za vektor $v \in V$ imamo

$$(\Psi_W \circ \Phi_V)(v) = (F_V(v))(e) = \pi_V(e)v = v = I_V v.$$

U drugoj kompoziciji možemo također izostaviti znak zaboravnog funktora, pa dobivamo

$$\Gamma W \xrightarrow{\Phi_{\Gamma W}} \Gamma\Gamma W \xrightarrow{\Gamma\Psi_W} \Gamma W.$$

$\Phi_{\Gamma W}$ preslikava funkciju $F \in \Gamma W = \mathcal{R}(K,W)^{(\mathfrak{k},T)}$ u funkciju $k \mapsto \rho(k)F$, a drugo preslikavanje $\Gamma\Psi_W$ toj funkciji iz $\Gamma\Gamma W$ pridružuje njenu vrijednost u jedinici e, što je upravo funkcija F. Dakle, i ta je kompozicija identiteta.

Na koncu izostavljamo dokaz prirodnosti transformacija $(\Phi_V)_{V \in Ob(\mathcal{M}(\mathfrak{g},K))}$ i $(\Psi_W)_{W \in Ob(\mathcal{M}(\mathfrak{g},T))}$.

Bernsteinov funktor $\Pi : \mathcal{M}(\mathfrak{g},T) \longrightarrow \mathcal{M}(\mathfrak{g},K)$ definiramo pomoću $(\mathfrak{k},T)-$koinvarijanata:

$$\Pi V = (\mathcal{R}(K) \otimes V)_{(\mathfrak{k},T)}.$$

Pri tome koinvarijante definiramo u odnosu na isto djelovanje $(\mathfrak{k},T)$ na $\mathcal{R}(K) \otimes V$, tj. u odnosu na tenzorski produkt $\lambda \otimes \pi_V$ lijeve regularne reprezentacije λ na $\mathcal{R}(K)$ i restrikcije originalne reprezentacije π_V na $(\mathfrak{g},T)-$modulu V. Prije smo definirali djelovanje Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ na prostoru $\mathcal{R}(K) \otimes V$ koje je komutiralo s djelovanjem $\lambda \otimes \pi_V$ para $(\mathfrak{k},T)$ i to je djelovanje bilo $K-$ekvivarijantno na čitavom prostoru $\mathcal{R}(K) \otimes V$. Ono ostaje $K-$ekvivarijantno pri prijelazu na $(\mathfrak{k},T)-$koinvarijante.

Dokaz da se podudaraju dva djelovanja Liejeve algebre $\mathfrak{k}$, jedno dobiveno diferenciranjem djelovanja grupe K i drugo dobiveno restrikcijom iz djelovanja Liejeve algebre $\mathfrak{g}$, je nešto kompliciraniji od dokaza za definiciju Zuckermanovog funktora. Neka je $\{x_1, \ldots, x_n\}$ baza od $\mathfrak{k}$ i za $x \in \mathfrak{k}$ definiramo funkcije $f_j \in \mathcal{R}(K)$ sa

$$(Ad\, k)x = \sum_{j=1}^{n} f_j(k)x_j, \qquad k \in K.$$

Tada za funkciju $F \in \mathcal{R}(K,V)$ i $k \in K$ imamo

$$-[\rho(x)F](k) = [\rho(-x)F](k) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F(k(\exp -tx))\bigg|_{t=0} =$$

$$= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F((\exp -(Ad\, k)x)k)\bigg|_{t=0} = [\lambda((Ad\, k)x)F]\,(k),$$

dakle,

$$(x \cdot F - \rho(x)F)(k) = \pi_V((Ad\, k)x)F(k) + [\lambda((Ad\, k)x)F]\,(k) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \{f_j(k)\pi_V(x_j)F(k) + f_j(k)(\lambda(x_j)F)(k)\} =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \{\pi_V(x_j)(f_jF)(k) + [\lambda(x_j)(f_jF)](k)\} - \sum_{j=1}^{n} [\lambda(x_j)f_j]\,(k)F(k).$$

Prva se suma pri prijelazu na koinvarijante preslikava u nulu, a druga suma iščezava zbog sljedeće leme:

Lema 4.4.2. *Uz uvedene oznake funkcija*

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda(x_j) f_j$$

identički je jednaka nuli.

Dokaz: Definiramo funkciju $F \in \mathcal{R}(K, \mathfrak{k})$ sa $F(k) = (Ad\, k)x$. Uz identifikaciju $\mathcal{R}(K, \mathfrak{k})$ s prostorom $\mathcal{R}(K) \otimes \mathfrak{k}$, ta je funkcija jednaka $\sum_{j=1}^{n} f_j \otimes x_j$. Imamo za $k, h \in K$:

$$((\lambda \otimes Ad)(k)F)(h) = (Ad\, k)F(k^{-1}h) = (Ad\, k)(Ad\, k^{-1}h)x = (Ad\, h)x = F(h).$$

Dakle, funkcija F je invarijantna u odnosu na djelovanje $\lambda \otimes Ad$ grupe K.

Neka je $A : \mathcal{R}(K) \otimes \mathfrak{k} \to \mathcal{R}(K)$ jedinstven linearan operator takav da je

$$A(f \otimes y) = \lambda(y)f, \qquad f \in \mathcal{R}(K), \quad y \in \mathfrak{k}.$$

To je preslikavanje upravo ono koje se dobije iz $\mathfrak{k}-$djelovanja na $(\mathfrak{k}, K)-$modulu $\mathcal{R}(K)$ u odnosu na lijevu regularnu reprezentaciju. Zbog toga A prepliće reprezentaciju $\lambda \otimes Ad$ grupe K na prostoru $\mathcal{R}(K) \otimes \mathfrak{k}$ s reprezentacijom λ na $\mathcal{R}(K)$. Slijedi da je funkcija

$$\sum_j \lambda(x_j) f_j = A \sum_j f_j \otimes x_j$$

$K-$invarijantna u odnosu na reprezentaciju λ, dakle, to je konstanta.

Da izračunamo vrijednost te konstante, izračunat ćemo je u jedinici $e \in K$. U jednakost

$$(Ad\, k)X = \sum_{j=1}^{n} f_j(k) x_j$$

uvrstimo $k = \exp\, tx_i$ i deriviramo u točki $t = 0$. Dobivamo

$$[x_i, x] = \sum_{j=1}^{n} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f_j(\exp\, tx_i) x_j \bigg|_{t=0} = \sum_{j=1}^{n} (\lambda(-x_i) f_j)(e) x_j.$$

Dakle,

$$[x, x_i] = \sum_{j=1}^{n} (\lambda(x_i) f_j)(e) x_j.$$

To pokazuje da je matrica operatora $ad\, x$ u bazi $\{x_j\}$ jednaka

$$(ad\, x)_{ji} = (\lambda(x_i) f_j)(e),$$

pa slijedi

$$\sum_{j=1}^{n} (\lambda(x_j) f_j)(e) = \mathrm{Tr}\, ad\, x = 0$$

Dakle, ΠV je $(\mathfrak{g}, K)-$modul. Da bismo imali funktor, definiramo Π i na morfizmima: za $\varphi \in Hom_{(\mathfrak{g},T)}(V, W)$ stavimo

$$\Pi\varphi = I_{\mathcal{R}(K)} \otimes \varphi : (\mathcal{R}(K) \otimes V)_{(\mathfrak{k},T)} \longrightarrow (\mathcal{R}(K) \otimes W)_{(\mathfrak{k},T)}.$$

Budući da je uzimanje koinvarijanata desno egzaktno, zaključujemo da je Bernsteinov funktor desno egzaktan. To slijedi i iz teorema koji ćemo dokazati kasnije, a prema kojem je Bernsteinov funktor lijevo adjungiran maloj modifikaciji zaboravnog funktora.

4.5 Izvedeni funktori i acikličke rezolucije

Vrlo često je zgodnije izračunavati izvedene funktore koristeći općenitije rezolucije − ne nužno projektivne, odnosno, injektivne. Promatrajmo najprije desno egzaktan funktor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ i neka su $F_n : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ njegovi izvedeni funktori. Modul X u kategoriji $\mathcal{C}$ zove se **aciklički** u odnosu na funktor F ako je $F_nX = 0\ \forall n > 0$. Projektivni modul P u kategoriji $\mathcal{C}$ je očigledno aciklički u odnosu na svaki takav funktor F jer se modul F_nP može računati pomoću trivijalne projektivne rezolucije:

$$0 \longleftarrow P \xleftarrow{id_P} P \longleftarrow 0 \longleftarrow 0 \longleftarrow 0 \longleftarrow \cdots\cdots$$

Aciklička rezolucija modula V u odnosu na desno egzaktan funktor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ je egzaktan kompleks

$$0 \longleftarrow V \longleftarrow X_0 \longleftarrow X_1 \longleftarrow X_2 \longleftarrow \cdots\cdots$$

u kojem je svaki modul X_n, $n \geq 0$, aciklički u odnosu na funktor F.

Definicije su analogne u slučaju lijevo egzaktnog funktora $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ i njegove izvedene funktore $F^n : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, koji se po definiciji izračunavaju pomoću injektivnih rezolucija u kategoriji $\mathcal{C}$. Modul X u kategoriji $\mathcal{C}$ zove se **aciklički** u odnosu na funktor F ako je $F^nX = 0\ \forall n > 0$. U ovom je slučju injektivni modul I trivijalno aciklički u odnosu na svaki takav funktor F jer se modul F^nI može računati pomoću trivijalne injektivne rezolucije:

$$0 \longrightarrow I \xrightarrow{id_I} I \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots\cdots$$

Aciklička rezolucija modula V u odnosu na lijevo egzaktan funktor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ je egzaktan kompleks

$$0 \longrightarrow V \longrightarrow X_0 \longrightarrow X_1 \longrightarrow X_2 \longrightarrow \cdots\cdots$$

u kojem je svaki modul X_n, $n \geq 0$, aciklički u odnosu na funktor F.

Pomoću propozicije 4.1.1. dokazuje se sljedeći važan teorem, koji često znatno olakšava izračunavanje izvedenih funktora jednostrano egzaktnog funktora (osobito ukoliko se radi o lijevo egzaktnom funktoru):

Teorem 4.5.1. (*a*) *Neka je $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ desno egzaktan funktor i neka je*

$$0 \longleftarrow V \longleftarrow X_0 \longleftarrow X_1 \longleftarrow X_2 \longleftarrow \cdots\cdots$$

aciklička rezolucija modula V u kategoriji $\mathcal{C}$. Tada su prostori homologije kompleksa

$$F(X): \quad 0 \longleftarrow FX_0 \longleftarrow FX_1 \longleftarrow FX_2 \longleftarrow \cdots\cdots$$

izomorfni modulima F_nX, $n \in \mathbb{Z}_+$.

(*b*) *Neka je $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ lijevo egzaktan funktor i neka je*

$$0 \longrightarrow V \longrightarrow X_0 \longrightarrow X_1 \longrightarrow X_2 \longrightarrow \cdots\cdots$$

aciklička rezolucija modula V u kategoriji $\mathcal{C}$. Tada su prostori kohomologije kompleksa

$$F(X): \quad 0 \longrightarrow FX_0 \longrightarrow FX_1 \longrightarrow FX_2 \longrightarrow \cdots\cdots$$

izomorfni modulima F^nX, $n \in \mathbb{Z}_+$.

4.6 Izvedeni Zuckermanovi i Bernsteinovi funktori

Zuckermanov fuktor $\Gamma : \mathcal{M}(\mathfrak{g}, T) \to \mathcal{M}(\mathfrak{g}, K)$ je desno adjungiran zaboravnom funktoru, dakle, taj je funktor lijevo egzaktan. Prema tome, definirani su izvedeni funktori Γ^k. Za $(\mathfrak{g}, T)-$modul X, $(\mathfrak{g}, K)-$modul $\Gamma^k X$ je po definiciji $k-$ti modul kohomologije kompleksa $\Gamma(I^\bullet)$ za injektivnu rezoluciju $0 \longrightarrow X \longrightarrow I^\bullet$ u kategoriji $\mathcal{M}(\mathfrak{g}, T)$. Međutim, budući da je funktor Γ definiran kao $(\mathcal{R}(K) \otimes (\bullet))^{(\mathfrak{k},T)} \simeq Hom_{(\mathfrak{k},T)}(\mathbb{C}, \mathcal{R}(K) \otimes I^\bullet)$, očekujemo da se funktori Γ^k mogu računati kao izvedeni moduli funktora uzimanja $(\mathfrak{k}, T)-$invarijanata, odnosno, kao $(\mathfrak{k}, T)-$kohomologije $(\mathfrak{k}, T)-$modula $\mathcal{R}(K) \otimes (\bullet)$. To će stvarno biti moguće zbog tvrdnje (b) teorema 4.5.1.

Modul $\Gamma^k X$ je definiran kao $k-$ti modul kohomologije

$$\Gamma^k X = H^k \left(Hom_{(\mathfrak{k},T)}(\mathbb{C}, \mathcal{R}(K) \otimes I^\bullet)\right),$$

gdje je sa $I^\bullet$ označen kompleks dobiven iz injektivne rezolucije u $\mathcal{M}(\mathfrak{g}, T)$

$$0 \longrightarrow X \longrightarrow I^0 \longrightarrow I^1 \longrightarrow I^2 \longrightarrow \cdots\cdots$$

izostavljanjem modula X. Budući da zaboravni funktor $\mathcal{M}(\mathfrak{g}, T) \to \mathcal{M}(\mathfrak{k}, T)$ ima kao lijevo adjungiran egzaktan funktor $Ind_{\mathfrak{k}}^{\mathfrak{g}}$, moduli I^k su injektivni kao $(\mathfrak{k}, T)-$moduli. Njihovi tenzorski produkti s konačnodimenzionalnim $(\mathfrak{k}, T)-$modulima su i dalje injektivni u kategoriji $\mathcal{M}(\mathfrak{k}, T)$. Kad bismo znali da su i $\mathcal{R}(K) \otimes I^k$ injektivni $(\mathfrak{k}, T)-$moduli, mogli bismo zaključiti da je $\Gamma^k X$, barem kao vektorski prostor, štoviše i kao $(\mathfrak{k}, T)-$modul, izomorfan $k-$tom modulu $(\mathfrak{k}, T)-$kohomologije $(\mathfrak{k}, T)-$modula $\mathcal{R}(K) \otimes X$. Nažalost, iako je $\mathcal{R}(K)$ direktna suma beskonačno mnogo konačnodimenzionalnih $K-$modula, dakle i $(\mathfrak{k}, T)-$modula, beskonačna direktna suma injektivnih modula nije nužno injektivan modul. Međutim, na sreću možemo iskoristiti tvrdnju (b) teorema 4.5.1. budući da budući da uzimanje modula $(\mathfrak{k}, T)-$kohomologije komutira s formiranjem direktnih suma, i to ne samo konačnih, nego bilo kakvih. Drugim riječima, ako su V_j, $j \in J$, injektivni $(\mathfrak{k}, T)-$moduli i V njihova direktna suma, onda vrijedi $H^k(\mathfrak{k}, T; V) = 0 \ \forall k > 0$. Štoviše, direktna suma acikličkih modula je aciklički modul.

Prema tome, $\Gamma^k X$ se može identificirati sa $H^k(\mathfrak{k}, T; \mathcal{R}(K) \otimes X)$, a taj se prema teoremu 4.3.7. identificira s $k-$tom kohomologijom kompleksa

$$Hom_{(\mathfrak{k},T)} \left(U(\mathfrak{k}) \otimes_{U(\mathfrak{t})} \textstyle\bigwedge^\bullet(\mathfrak{c}), \mathcal{R}(K) \otimes X\right),$$

gdje smo sa $\mathfrak{c}$ označili $(Ad\,T)-$invarijantan direktni komplement od $\mathfrak{t}$ u $\mathfrak{k}$. Drugim riječima, možemo uzeti rezoluciju prvog argumenta, $\mathbb{C}$, umjesto drugog argumenta $\mathcal{R}(K) \otimes X$ u $Hom_{(\mathfrak{k},T)}(\mathbb{C}, \mathcal{R}(K) \otimes X)$. Napokon, da dobijemo $(\mathfrak{g}, K)-$modul, a ne samo $(\mathfrak{k}, T)-$modul, imamo prirodno djelovanje $(\mathfrak{g}, K)$ na drugom argumentu.

Napokon, budući da zaboravni funktor $\mathcal{M}(\mathfrak{k}, T) \to \mathcal{M}(\mathfrak{t}, T)$ ima kao lijevo adjungiran funktor egzaktni funktor $Ind_{\mathfrak{t}}^{\mathfrak{k}}$ (točnije, njegovu restrikciju na kategoriju $\mathcal{M}(\mathfrak{t}, T)$, a ta je restrikcija egzaktni funktor sa $\mathcal{M}(\mathfrak{t}, T)$ u $\mathcal{M}(\mathfrak{k}, T)$, jer se lako vidi da je za svaki $(\mathfrak{t}, T)-$modul V inducirani modul $Ind_{\mathfrak{t}}^{\mathfrak{k}} V$ stvarno $(\mathfrak{k}, T)-$modul a ne samo $\mathfrak{k}-$modul) možemo za bilo koje $(\mathfrak{k}, T)-$module V i W identificirati $Hom_{(\mathfrak{k},T)} \left(U(\mathfrak{k}) \otimes_{U(\mathfrak{t})} V, W\right)$ sa $Hom_T(V, W)$. Prema tome, vrijedi:

Teorem 4.6.1. *Izvedeni Zuckermanovi funktori $(\mathfrak{g}, T)-$modula X mogu se izračunati kao*

$$\Gamma^k X = H^k \left(Hom_T \left(\textstyle\bigwedge^\bullet(\mathfrak{c}), \mathcal{R}(K) \otimes X\right)\right),$$

pri čemu je $\mathfrak{c}$ $(Ad\,T)-$invarijantni direktni komplement od $\mathfrak{t}$ u $\mathfrak{k}$. Pri tome grupa T djeluje na $\bigwedge(\mathfrak{c})$ proširenjem na vanjsku algebru subreprezentacije adjungirane reprezentacije $(Ad\,T)|\mathfrak{c}$, a na $\mathcal{R}(K) \otimes X$ djeluje restrikcijom reprezentacije $\lambda \otimes \pi_X$. Napokon, $(\mathfrak{g}, K)$ djeluje na $k-$tom prostoru kohomologije kompleksa $Hom_T \left(\bigwedge^\bullet(\mathfrak{c}), \mathcal{R}(K) \otimes X\right)$ preko svog djelovanja na drugom argumentu $\mathcal{R}(K) \otimes X \simeq \mathcal{R}(K, X)$.

Slična je situacija s izvedenim Bernsteinovim funktorima Π_k :

Teorem 4.6.2. *Izvedeni Bernsteinovi funktori* $(\mathfrak{g}, T)-$*modula* X *mogu se izraziti kao*

$$\Pi_k X = H^k \left(\bigwedge^\bullet(\mathfrak{c}) \otimes_T \mathcal{R}(K) \otimes X\right)$$

s $(\mathfrak{g}, K)-$*djelovanjem dobivenim iz djelovanja na* $\mathcal{R}(K) \otimes X$, *dakle, s trivijalnim djelovanjem na prvi faktor* $\bigwedge(\mathfrak{c})$. *Pri tome se kohomologije računaju u odnosu na Koszulov diferencijal.*

Dokaz je u ovom slučaju analogan dokazu prethodnog teorema, ustvari, nešto je jednostavniji. Naime, po definiciji $\Pi_k X$ je $k-$ta kohomologija kompleksa

$$\Pi(P^\bullet) = (\mathcal{R}(K) \otimes P^\bullet)_{(\mathfrak{k},T)}, \tag{4.25}$$

gdje je $P^\bullet \longrightarrow X \longrightarrow 0$ projektivna rezolucija $(\mathfrak{g}, T)-$modula X. Budući da zaboravni funktor $For : \mathcal{M}(\mathfrak{g}, T) \to \mathcal{M}(\mathfrak{k}, T)$ ima egzaktni desno adjungirani funktor produciranja $Pro_{\mathfrak{k}}^{\mathfrak{g}}$, (točnije, njegovu restrikciju sa $\mathcal{M}(\mathfrak{k})$ na $\mathcal{M}(\mathfrak{k}, T)$) prema tvrdnji (a) propozicije 4.1.12. zaboravni funktor šalje projektivne $(\mathfrak{g}, T)-$module u projektivne $(\mathfrak{k}, T)-$module. Prema tome, moduli u rezoluciji $P^\bullet$ su ne samo projektivni kao $(\mathfrak{g}, T)-$moduli, nego i kao $(\mathfrak{k}, T)-$moduli. Nadalje, zbog leme 4.3.6. i komentara nakon nje i ponovo zbog tvrdnje (a) propozicije 4.1.12. funktor $\mathcal{R}(K) \otimes (\bullet)$ šalje projektivne $(\mathfrak{k}, T)-$module u projektivne $(\mathfrak{k}, T)-$module. Prema tome, $\mathcal{R}(K) \otimes P^\bullet$ je projektivna rezolucija $(\mathfrak{k}, T)-$modula $\mathcal{R}(K) \otimes X$, dakle, homologija kompleksa (4.25) je $(\mathfrak{k}, T)-$homologija modula $\mathcal{R}(K) \otimes X$. Tvrdnja teorema slijedi, budući da se prema teoremu 4.3.5. homologija $(\mathfrak{k}, T)-$modula može računati pomoću Koszulovog kompleksa.

Na početku ovog odjeljka spomenuli smo da je Bernsteinov funktor lijevo adjungiran maloj modifikaciji zaboravnog funktora sa $\mathcal{M}(\mathfrak{g}, K)$ u $\mathcal{M}(\mathfrak{g}, T)$. Ta se modifikacija, koju označavamo sa $For^\vee$, zove **pseudozaboravni funktor** i sada ćemo ga opisati. Neka je V $(\mathfrak{g}, K)-$modul. Promatramo prostor $Hom_K(\mathcal{R}(K), V)$ $K-$morfizama sa $\mathcal{R}(K)$ (s lijevom regularnom reprezentacijom) u V. Na tom prostoru imamo $K-$djelovanje koje je kontragredijentno desnoj regularnoj reprezentaciji:

$$(k \cdot \varphi)(f) = \varphi\left(\rho(k^{-1})f\right), \qquad \varphi \in Hom_K(\mathcal{R}(K), V), \quad f \in \mathcal{R}(K), \quad k \in K.$$

To $K-$djelovanje općenito nije lokalno konačno. Restringiramo to djelovanje na T i uzmemo lokalno konačni dio dio u odnosu na T. Tako dobiven prostor $For^\vee V$:

$$For^\vee V = Hom_K(\mathcal{R}(K), V)_T.$$

Na tom prostoru djeluje grupa T. Nakon što definiramo djelovanje Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ takvo da $For^\vee V$ postane $(\mathfrak{g}, T)-$modul, a također i djelovanje $For^\vee$ na morfizme u kategoriji $\mathcal{M}(\mathfrak{g}, K)$, dobit ćemo funktor $For^\vee : \mathcal{M}(\mathfrak{g}, K) \to \mathcal{M}(\mathfrak{g}, T)$ koji je egzaktan. Naime, za provjeru egzaktnosti možemo zaboraviti na djelovanje $\mathfrak{g}$ i promatrati analogan funktor s kategorije $\mathcal{M}(K)$ lokalno konačnih $K-$modula u kategoriju $\mathcal{M}(T)$, a svaki je takav funtor egzaktan, jer je kategorija $\mathcal{M}(K)$ potpuno reducibilna (odnosno, poluprosta).

$\mathfrak{g}-$djelovanje na $For^\vee V$ je restrikcija $\mathfrak{g}-$djelovanja definiranog na cijelom $Hom_K(\mathcal{R}(K), V)$. Prostor $Hom_K(\mathcal{R}(K), V)$ sada ćemo malo drugačije opisati. Za $f \in \mathcal{R}(K)$ označimo sa $\pi_V(f)$ linearan operator na V definiran sa

$$\pi_V(f)v = \int_K f(k)\pi_V(k)v\mathrm{d}\mu(k), \qquad v \in V,$$

gdje je μ normirana Haarova mjera na K. U stvari, budući da je reprezentacija grupe K na prostoru V lokalno konačna, taj operator možemo opisati i čisto algebarski. Naime, za dani $v \in V$ postoje vektori $v_1, \ldots, v_n \in V$ i funkcije $f_1, \ldots, f_n \in \mathcal{R}(K)$ takvi da je

$$\pi_V(k)v = \sum_{j=1}^{n} f_i(k)v_i.$$

Označimo sada sa $\varepsilon : \mathcal{R}(K) \to \mathbb{C}$ $K \times K-$ekvivarijantnu projekciju na konstantne funkcije. Zbog $K-$biinvarijantnosti i normiranosti Haarove mjere μ vrijedi

$$\int_K g(k)\mathrm{d}\mu(k) = \varepsilon(g) \qquad \forall g \in \mathcal{R}(K).$$

Odatle dobivamo da je

$$\pi_V(f)v = \sum_{j=1}^{n} \varepsilon(ff_j)v_j.$$

Međutim, mnogo se lakše provode računi koristeći integralnu a ne algebarsku notaciju.

Lako se provjerava da vrijedi

$$\pi_V(\lambda(k)f) = \pi_V(k)\pi_V(f) \quad \text{i} \quad \pi_V(\rho(k)f) = \pi_V(f)\pi_V(k^{-1}) \quad \text{za} \quad f \in \mathcal{R}(K) \quad \text{i} \quad k \in K. \tag{4.26}$$

Identificirat ćemo sada (ne lokalno konačan) $K-$modul $Hom_K(\mathcal{R}(K), V)$ s Kartezijevim produktom

$$\prod_{\delta \in \hat{K}} V(\delta), \qquad \text{gdje je} \quad V(\delta) = Hom_K(V_\delta, V) \otimes V_\delta = Hom_K(V_\delta \otimes V_\delta^*, V),$$

a za svaki $\delta \in \hat{K}$ je izabran neki prostor V_δ na kome djeluje reprezentacija iz klase δ. Dakle, $V(\delta)$ se identificira s $\delta-$izotipnom komponentom u $K-$modulu V. Ta se identifikacija apstraktno dobiva ovako:

$$Hom_K(\mathcal{R}(K), V) = Hom_K\left(\coprod_{\delta \in \hat{K}} V_\delta \otimes V_\delta^*, V\right) = \prod_{\delta \in \hat{K}} Hom_K(V_\delta \otimes V_\delta^*, V) = \prod_{\delta \in \hat{K}} V(\delta).$$

Konkratni opis te identifikacije je sljedeći. Element $\tilde{v} = (v_\delta)$ produkta $\prod_\delta V(\delta)$ definira linearan operator

$$\tilde{v} : f \mapsto \sum_\delta \pi_V(f)v_\delta$$

sa $\mathcal{R}(K)$ u V. Iako je suma zapisana po beskonačnom skupu $\hat{K}$, samo je konačno mnogo članova te sume različito od nule: to su točno oni članovi za koje element $f \in \mathcal{R}(K)$ ima komponentu u $\mathcal{R}(K)(\delta)$ raličitu od nule. Preslikavanje $\tilde{v}$ je $K-$morfizam zbog (4.26). Nadalje, (4.26) povlači da $K-$djelovanje na $Hom_K(\mathcal{R}(K), V)$ točno odgovara očitom $K-$djelovanju na produktu $\prod_\delta V(\delta)$. Primijetimo sada da to preslikavanje $\mathcal{R}(K) \to V$ u potpunosti određuje element $\tilde{v}$ produkta $\prod_\delta V(\delta)$, budući da se svaki v_δ dobiva kao slika normaliziranog karaktera χ^δ reprezentacije δ. Odatle se vidi i da se svi $K-$morfizmi sa $\mathcal{R}(K)$ u V dobivaju na taj način.

Sada definiramo $\mathfrak{g}-$djelovanje na produktu $\prod_\delta V(\delta)$ ovako:

$$x \cdot \left(\sum_\delta v_\delta\right) = \sum_\delta \pi_V(x)v_\delta, \qquad x \in \mathfrak{g}.$$

Pri tome smo element $\tilde{v} = (v_\delta)_{\delta\in\hat{K}}$ pisali formalno kao sumu $\sum_\delta v_\delta$. Ovakva definicija ima smisla, jer je $\delta-$komponenta u sumi s desne strane konačna suma članova, jer $\pi_V(x)v_{\delta'}$ može imati $\delta-$komponentu različitu od nule za samo konačno mnogo $\delta' \in \hat{K}$ − samo za one koji se pojavljuju u rastavu tenzorskog produkta $Ad_{\mathfrak{g}}|K \otimes \delta^*$. Odgovarajući element prostora $Hom_K(\mathcal{R}(K), V)$ dan je sa

$$(x \cdot \tilde{v})(f) = \sum_\delta \int_K f(k)\pi_V(k)\pi_V(x)v_\delta \mathrm{d}\mu(k) = \sum_\delta \int_K f(k)\pi_V((Ad\,k)x)\pi_V(k)v_\delta \mathrm{d}\mu(k).$$

Ako zapišemo

$$(Ad\,k)x = \sum_{j=1}^m f_j(k)x_j \qquad \text{za neke} \quad f_1, \dots, f_m \in \mathcal{R}(K) \quad \text{i} \quad x_1, \dots, x_m \in \mathfrak{g}, \tag{4.27}$$

dobivamo

$$(x \cdot \tilde{v})(f) = \sum_{j=1}^m \sum_\delta \int_K f_j(k)f(k)\pi_V(k)v_\delta \mathrm{d}\mu(k) = \sum_{j=1}^m \pi_V(x_i)\tilde{v}(f_j f).$$

To je opis $\mathfrak{g}-$djelovanja na prostoru $Hom_K(\mathcal{R}(K), V)$. No račun je mnogo jednostavniji i jasniji ako upotrebljavamo prethodnu formalnu definiciju preko produkta $\prod_\delta V(\delta)$.

$K-$ekvivarijantnost tog $\mathfrak{g}-$djelovanja slijedi iz $K-$ekvivarijantnosti na modulu V :

$$k \cdot x \cdot k^{-1} \cdot \left(\sum_\delta v_\delta\right) = \sum_\delta \pi_V(k)\pi_V(x)\pi_V(k^{-1})v_\delta = \sum_\delta \pi_V((Ad\,k)x)v_\delta = ((Ad\,kx) \cdot \left(\sum_\delta v_\delta\right).$$

Sličan račun pokazuje da se dva $\mathfrak{k}-$djelovanja na $\prod_\delta V(\delta)$ podudaraju zato što se podudaraju na V.

Iz definicije djelovanja vidi se da je preslikavanje

$$\jmath_V : V = \coprod_\delta V(\delta) \longrightarrow \left(\prod_\delta V(\delta)\right)_T = For^\vee V,$$

dobiveno iz inkluzije direktne sume u direktni produkt, prirodni morfizam $(\mathfrak{g}, T)-$modula, dakle, prirodna transformacija funktora For u funktor $For^\vee$. Operator $\jmath_V$ je naravno uvijek injektivan, ali surjektivan je ako i samo ako je skup $\{\delta \in \hat{K};\ V(\delta) \neq \{0\}\ \}$ konačan.

Teorem 4.6.3. *Bernsteinov funktor* $\Pi : \mathcal{M}(\mathfrak{g}, T) \to \mathcal{M}(\mathfrak{g}, K)$ *je lijevo adjungiran funktoru* $For^\vee$.

Dokaz: Za $(\mathfrak{g}, T)-$modul V definiramo preslikavanje

$$\Phi_V : V \longrightarrow For^\vee \Pi V = Hom_K\left(\mathcal{R}(K), (\mathcal{R}(K) \otimes V)_{(\mathfrak{k},T)}\right)_T$$

ovako:

$$[\Phi_V(v)]\,(f) = f^\vee \otimes v, \qquad v \in V, \quad f \in \mathcal{R}(K),$$

gdje je $f^\vee(k) = f(k^{-1})$. Pri tome je identificirano $f^\vee \otimes v$ s njegovom slikom u $(\mathfrak{k}, T)-$koinvarijantama. $\Phi_V(v)$ je dobro definiran $K-$morfizam:

$$[\Phi_V(v)]\,(\lambda(k)f) = (\lambda(k)f)^\vee \otimes v = \rho(k)f^\vee \otimes v = [(\rho(k) \otimes id_V)\varphi_V(v)]\,(f).$$

Nadalje, Φ_V je $T-$morfizam:

$$[t \cdot \Phi_V(v)]\,(f) = [\Phi_V(v)]\,(\rho(t^{-1})f) = \left(\rho(t^{-1}f\right)^\vee \otimes v = \lambda(t^{-1})f^\vee \otimes v,$$

a u $(\mathfrak{k},T)-$koinvarijantama to je isto kao i

$$f^{\vee}\otimes\pi_V(t)v=\left[\Phi_V(\pi_V(t)v)\right](f).$$

Da provjerimo da je Φ_V $\mathfrak{g}-$morfizam, upotrijebit ćemo interpretaciju $\Pi V=\mathcal{R}(K,V)_{(\mathfrak{k},T)}$. Neka je $x\in\mathfrak{g}$ i neka su $f_1,\ldots,f_m\in\mathcal{R}(K)$ i $x_1,\ldots,x_m\in\mathfrak{g}$ takvi da vrijedi (4.27). Tada imamo redom

$$\left\{\left[x\cdot\Phi_V(v)\right](f)\right\}(k)=\sum_{j=1}^{m}\left\{x_j\cdot\left[\Phi_V(v)(ff_j)\right]\right\}(k)=\sum_{j=1}^{m}\pi_V((Ad\,k)x_i)(ff_j)^{\vee}(k)v=$$

$$=\pi_V\left((Ad\,k)\sum_{j=1}^{m}f_j(k^{-1}x_j\right)f^{\vee}(k)v=f^{\vee}(k)\pi_V(x)v=\left\{\left[\Phi_V(\pi_V(x)v\right](f)\right\}(k).$$

Druga familija operatora (Ψ_W) za $(\mathfrak{g},K)-$module W je

$$\Psi_W:(\mathcal{R}(K)\otimes Hom_K(\mathcal{R}(K),W)_T)_{(\mathfrak{k},T)}\longrightarrow W,$$

gdje je

$$\Psi_W(f\otimes\varphi)=\varphi\left(f^{\vee}\right)=\sum_{\delta}\pi_W\left(f^{\vee}\right)w_\delta;$$

pri tome morfizam φ odgovara elementu $(w_\delta)\in\prod_\delta W(\delta)$. Iz (4.26) se lako vidi da je Ψ_W dobro definiran na koinvarijantama i da je to $K-$morfizam. To je i $\mathfrak{g}-$morfizam:

$$\Psi_W(x\cdot(f\otimes\varphi))=\sum_{j=1}^{m}(x_i\cdot\varphi)(ff_j)^{\vee}=\sum_{j=1}^{m}\sum_{\delta}\int_K(ff_j)^{\vee}(k)\pi_W(k)\pi_W(x_i)w_\delta\mathrm{d}\mu(k)=$$

$$=\sum_{\delta}\int_K f^{\vee}(k)\sum_{j=1}^{m}f_j(k^{-1})\pi_W((Ad\,k)x_i)\pi_W(k)w_\delta\mathrm{d}\mu(k)=$$

$$=\pi_W(x)\sum_{\delta}\int_K f^{\vee}(k)\pi_W(k)w_\delta\mathrm{d}\mu(k)=\pi_W(x)\Psi_W(f\otimes\varphi).$$

Napokon, jednostavna provjera pokazuje da su dvije kompozicije iz teorema 4.1.7. identitete.