REPREZENTACIJE POLUPROSTIH LIEJEVIH GRUPA

Prof. dr. sc. Hrvoje Kraljević

Predavanja održana u okviru poslijediplomskog studija
na PMF−Matematičkom odjelu Sveučilišta u Zagrebu
u akademskoj godini 2009./2010.

Zagreb, lipanj 2010.

Sadržaj

1 REPREZENTACIJE LIEJEVIH GRUPA **5**
1.1 Reprezentacije lokalno kompaktnih grupa 5
1.2 Kvadratno integrabilne reprezentacije 20
1.3 Reprezentacije kompaktnih grupa 25
1.4 Reprezentacije Liejevih algebri 31
1.5 Klasa induciranih reprezentacija 52
1.6 Liejeve grupe 56
1.6.1 Diferencijalne i analitičke mnogostrukosti 56
1.6.2 Liejeve grupe 61
1.6.3 Natkrivajuće grupe 66
1.6.4 Homomorfizmi Liejevih grupa 71
1.6.5 Grupa automorfizama Liejeve algebre 73
1.7 Glatki i analitički vektori 75

2 REALNE REDUKTIVNE LIEJEVE GRUPE **85**
2.1 Poluproste i reduktivne Liejeve algebre 85
2.2 Kompaktne Liejeve grupe 93
2.3 Trodimenzionalne proste Liejeve algebre 96
2.4 Reprezentacije reduktivnih Liejevih algebri 98
2.5 Reprezentacije kompaktnih Liejevih grupa 102
2.6 Definicija i struktura realnih reduktivnih grupa 104

3 HARISH−CHANDRINI MODULI **123**
3.1 Chevalleyevi teoremi o restrikcijama invarijanata 123
3.2 Harish−Chandrin izomorfizam. Infinitezimalni karakteri 131
3.3 $(\mathfrak{g}, K)$−moduli 139
3.4 Teorem o subkvocijentu 152

Poglavlje 1

REPREZENTACIJE LIEJEVIH GRUPA

1.1 Reprezentacije lokalno kompaktnih grupa

Za lokalno kompaktan Hausdorffov topološki prostor T i za topološki vektorski prostor V sa $C(T,V)$ ćemo označavati prostor svih neprekidnih funkcija sa T u V, a sa $C_0(T,V)$ potprostor svih $f \in C(T,V)$ s kompaktnim nosačem. Pri tome je **nosač funkcije** f s topološkog prostora T u vektorski prostor V zatvarač skupa $\{t \in T;\ f(t) \neq 0\}$; nosač funkcije f označavamo sa $Supp\, f$. Pišemo $C(T) = C(T,\mathbb{C})$, $C_0(T) = C_0(T,\mathbb{C})$, $C^r(T) = C(T,\mathbb{R})$ i $C_0^r(T) = C_0(T,\mathbb{R})$. Nadalje, $C^+(T)$ i $C_0^+(T)$ označavaju konuse svih nenegativnih funkcija.

Mjera na T je linearni funkcional $\mu : C_0(T) \to \mathbb{C}$ sa sljedećim svojstvom neprekidnosti: za svaki kompaktan skup $K \subseteq T$ postoji $M_K > 0$ takav da vrijedi:

$$f \in C_0(T), \quad Supp\, f \subseteq K \qquad \Longrightarrow \qquad |\mu(f)| \leq M_K \|f\|_\infty.$$

Pri tome je $\|f\|_\infty = \sup\{|f(t)|;\ t \in T\}$. Skup svih mjera na T označavat ćemo sa $\mathfrak{M}(T)$. Očito je $\mathfrak{M}(T)$ kompleksan vektorski prostor. Stavimo

$$\mathfrak{M}^r(T) = \{\mu \in \mathfrak{M}(T);\ \mu(f) \in \mathbb{R}\ \ \forall f \in C_0^r(T)\}, \quad \mathfrak{M}^+(T) = \{\mu \in \mathfrak{M}(T);\ \mu(f) \geq 0\ \ \forall f \in C_0^+(T)\}.$$

Elementi realnog vektorskog prostora $\mathfrak{M}^r(T)$ zovu se **realne mjere** na T, a elementi konusa $\mathfrak{M}^+(T)$ su **pozitivne mjere** na T.

Bez dokaza navodimo nekoliko osnovnih svojstava mjera na lokalno kompaktnom prostoru:

Propozicija 1.1.1. *Neka je T lokalno kompaktan Hausdorffov topološki prostor.*

(a) *$\mathbb{R}-$linearan funkcional $\mu : C_0^r(T) \to \mathbb{R}$ proširuje se do mjere na T ako i samo ako zadovoljava uvjet neprekidnosti: za svaki kompaktan skup $K \subseteq T$ postoji $M_K > 0$ takav da vrijedi:*

$$f \in C_0^r(T), \quad Supp\, f \subseteq K \qquad \Longrightarrow \qquad |\mu(f)| \leq M_K \|f\|_\infty.$$

Ta je mjera na T jedinstvena i realna.

(b) *Svako aditivno i $\mathbb{R}_+-$homogeno preslikavanje $\nu : C_0^+(T) \to \mathbb{R}_+ = [0,+\infty\rangle$ jedinstveno se proširuje do mjere na T i ta je mjera pozitivna.*

(c) *Za $\mu \in \mathfrak{M}^+(T)$ i $f \in C_0(T)$ je $|\mu(f)| \leq \mu(|f|)$.*

Neka je sada G lokalno kompaktna grupa. To znači da je G grupa i lokalno kompaktan Hausdorffov topološki prostor i da su preslikavanja $(x, y) \mapsto xy$ sa $G \times G$ u G i $x \mapsto x^{-1}$ sa G u G neprekidna. Za $x \in G$ definiramo preslikavanja $\lambda_x, \rho_x : G \to G$ sa

$$\lambda_x(y) = xy, \qquad \rho_x(y) = yx^{-1}, \qquad y \in G.$$

Tada su λ_x i ρ_x homeomorfizmi sa G na G i očito vrijedi

$$\lambda_x \circ \lambda_y = \lambda_{xy}, \quad \rho_x \circ \rho_y = \rho_{xy}, \quad \lambda_e = \rho_e = id_G.$$

Ti se homeomorfizmi zovu lijevi i desni pomak na grupi G. Pomaci se prenose na funkcije: ako je $x \in G$ i f je funkcija na grupi G, definiramo funkcije $\lambda_x f$ i $\rho_x g$ sa

$$\lambda_x f = f \circ \lambda_{x^{-1}} \qquad \text{i} \qquad \rho_x f = f \circ \rho_{x^{-1}},$$

tj.

$$(\lambda_x f)(y) = f(x^{-1}y), \qquad (\rho_x f)(y) = f(yx), \qquad y \in G.$$

Po dualnosti pomaci se prenose i na mjere na G : za $\mu \in \mathfrak{M}(G)$ i $x \in G$ definiramo mjere $\lambda_x\mu$ i $\rho_x\mu$ na G sa

$$(\lambda_x\mu)(f) = \mu(\lambda_{x^{-1}}f), \qquad (\rho_x\mu)(f) = \mu(\rho_{x^{-1}}f), \qquad f \in C_0(G).$$

Mjera $\mu \in \mathfrak{M}(G)$ zove se **lijevoinvarijantna** (odn., **desnoinvarijantna**) **mjera** na G ako je $\lambda_x\mu = \mu$ (odn., $\rho_x\mu = \mu$) $\forall x \in G$. Ako je k tome mjera μ pozitivna i različita od 0, ona se zove **lijeva** (odn., **desna**) **Haarova mjera** na grupi G.

Prenošenjem invertiranja $x \mapsto x^{-1}$ u grupi na funkcije i na mjere dolazimo do bijekcije između lijevoinvarijantnih i desnoinvarijantnih mjera. Naime, za fukciju f na grupi G definiramo novu funkciju $\check{f}$ sa

$$\check{f}(x) = f\left(x^{-1}\right), \qquad x \in G.$$

Tada imamo redom

$$(\rho_x\check{f})(y) = \check{f}(yx) = f\left(x^{-1}y^{-1}\right) = (\lambda_x f)\left(y^{-1}\right) = (\lambda_x f)\check{}(y), \qquad x, y \in G.$$

Prema tome, za svaku funkciju f na grupi G i za svaki $x \in G$ vrijedi

$$\rho_x\check{f} = (\lambda_x f)\check{}; \qquad \text{analogno je} \qquad \lambda_x\check{f} = (\rho_x f)\check{}.$$

Za mjeru $\mu \in \mathfrak{M}(G)$ definiramo $\check{\mu} \in \mathfrak{M}(G)$ sa

$$\check{\mu}(f) = \mu(\check{f}), \qquad f \in C_0(G).$$

Očito je $\mu \mapsto \check{\mu}$ linearna involutivna bijekcija sa $\mathfrak{M}(G)$ na $\mathfrak{m}(G)$. Iz gornjih relacija za funkcije slijede analogne relacije za mjere:

$$\rho_x\check{\mu} = (\lambda_x\mu)\check{} \qquad \text{i} \qquad \lambda_x\check{\mu} = (\rho_x\mu)\check{}, \qquad \mu \in \mathfrak{M}(G), \quad x \in G.$$

Prema tome, $\mu \mapsto \check{\mu}$ je bijekcija sa skupa svih lijevoinvarijantnih (odn., lijevih Haarovih) na skup svih desnoinvarijantnih (odn., desnih Haarovih) mjera na lokalno kompaktnoj grupi G.

Teorem 1.1.2. *Neka je G lokalno kompaktna grupa.*

(a) *Postoje lijeva Haarova mjera na G i desna Haarova mjera na G.*

(b) *Ako je μ lijeva (odn., desna) Haarova mjera na G onda je $\alpha \mapsto \alpha\mu$ bijekcija sa $\mathbb{C}$ na skup svih lijevoinvarijantnih (odn., na skup svih idesnonvarijantnih) mjera na G.*

(c) *Ako je μ lijeva ili desna Haarova mjera na G i $f \in C_0^+(G) \setminus \{0\}$ onda je $\mu(f) > 0$.*

Neka je μ lijeva Haarova mjera na lokalno kompaktnoj grupi G. Tada za $x, y \in G$ vrijedi $\lambda_x(\rho_y\mu) = \rho_y(\lambda_x\mu) = \rho_y\mu$, dakle, i $\rho_y\mu$ je lijeva Haarova mjera na G. Prema teoremu 1.1.2. postoji $\Delta(y) > 0$ takav da je $\rho_y\mu = \Delta(y)\mu$. Na taj način smo došli do funkcije $\Delta : G \to \mathbb{R}_+^* = \langle 0, +\infty\rangle$ takve da je

$$\rho_y\mu = \Delta(y)\mu \qquad \forall y \in G.$$

Kako je svaka lijevoinvarijantna mjera proporcionalna lijevoj Haarovoj mjeri, gornja jednakost vrijedi za svaku lijevoinvarijantnu mjeru μ.

Neka je sada μ desnoinvarijantna mjera na G. Tada je mjera $\check{\mu}$ lijevoinvarijantna, pa vrijedi

$$\rho_y\check{\mu} = \Delta(y)\check{\mu} \qquad \forall y \in G.$$

Međutim, $\rho_y\check{\mu} = (\lambda_y\mu)\check{}$. Zaključujemo da vrijedi

$$\lambda_y\mu = \Delta(y)\mu \qquad \forall y \in G$$

za svaku desnoinvarijatnu mjeru μ.

Funkcija $\Delta = \Delta_G$ zove se **modularna funkcija** grupe G. Nije teško dokazati:

Propozicija 1.1.3. *Neka je Δ modularna funkcija lokalno kompaktne grupe G.*

(*a*) *Δ je neprekidni homomorfizam grupe G u multiplikativnu grupu $\mathbb{R}_+^* = \langle 0, +\infty\rangle$.*

(*b*) *Ako je μ desnoinvarijantna mjera na G onda je $\check{\mu} = \Delta\mu$.*

(*c*) *Ako je μ lijevoinvarijantna mjera na G onda je $\check{\mu} = \frac{1}{\Delta}\mu$.*

Kad god imamo mjeru μ na G i $f \in C_0(G)$ uobičajen je integralni zapis

$$\mu(f) = \int_G f(x)\mathrm{d}\mu(x).$$

Uz integralni zapis svojstva lijevoinvarijantne mjere μ izgledaju ovako

$$\int_G f(yx)\mathrm{d}\mu(x) = \int_G f(x)\mathrm{d}\mu(x), \qquad \int_G f(xy)\mathrm{d}\mu(x) = \Delta\left(y^{-1}\right)\int_G f(x)\mathrm{d}\mu(x),$$

$$\int_G f\left(x^{-1}\right)\mathrm{d}\mu(x) = \int_G \Delta\left(x^{-1}\right) f(x)\mathrm{d}\mu(x).$$

Slično, svojstva desnoinvarijantne mjere μ uz integralni zapis su

$$\int_G f(xy)\mathrm{d}\mu(x) = \int_G f(x)\mathrm{d}\mu(x), \qquad \int_G f(yx)\mathrm{d}\mu(x) = \Delta(y)\int_G f(x)\mathrm{d}\mu(x),$$

$$\int_G f\left(x^{-1}\right)\mathrm{d}\mu(x) = \int_G \Delta(x)f(x)\mathrm{d}\mu(x).$$

Ako se radi o desnoj, odnosno lijevoj, Haarovoj mjeri, ove jednakosti vrijede ne samo za $f \in C_0(G)$ nego i za sve integrabilne funkcije f. (Točnije, u trećim jednakostima funkcija $\check{f}$ treba biti integrabilna, a to u slučaju kad je modularna funkcija Δ netrivijalna (tj. $\Delta \not\equiv 1$) nije ekvivalentno integrabilnosti funkcije f.)

Lokalno kompaktna grupa G zove se **unimodularna** ako je $\Delta_G \equiv 1$, tj. ako je svaka lijevoinvarijantna mjera ujedno i desnoinvarijantna, odnosno, ako postoji netrivijalna biinvarijantna mjera. Lako se dokazuje:

Propozicija 1.1.4. *Neka je G lokalno kompaktna grupa.*

(*a*) *Ako je G diskretna, komutativna ili kompaktna ona je unimodularna.*

(*b*) **Komutatorska podgrupa** *$[G,G]$ (to je podgrupa generirana sa $\{xyx^{-1}y^{-1};\ x,y\in G\}$) sadržana je u jezgri homomorfizma $\Delta_G : G \to \mathbb{R}_+^*$.*

Neka je G lokalno kompaktna grupa, μ lijeva Haarova mjera na G i Δ modularna funkcija grupe G. Za $f,g\in C_0(G)$ definiramo funkcije $f*g : G\to\mathbb{C}$ i $f^* : G\to\mathbb{C}$ relacijama

$$(f*g)(x)=\int_G f(xy)g(y^{-1})\mathrm{d}\mu(y)=\int_G f(y)g(y^{-1}x)\mathrm{d}\mu(y),$$

$$f^*(x)=\Delta(x^{-1})\overline{f(x^{-1})},\quad \text{tj.}\quad f^*=(\Delta\overline{f})\check{}.$$

Pokazuje se da vrijedi:

Propozicija 1.1.5. (*a*) *Za $f,g\in C_0(G)$ funkcije $f*g$ i f^* su neprekidne i vrijedi $\mathrm{Supp}\,(f*g)\subseteq(\mathrm{Supp}\,f)(\mathrm{Supp}\,g)$ i $\mathrm{Supp}\,f^*=(\mathrm{Supp}\,f)^{-1}$. Dakle, $f*g, f^*\in C_0(G)$.*

(*b*) *$C_0(G)$ s množenjem $(f,g)\mapsto f*g$ je asocijativna algebra.*

(*c*) *Preslikavanje $f\mapsto f^*$ je antilinearno, $f^{**}=f$ i $(f*g)^*=g^**f^*$. Drugim riječima, $C_0(G)$ je $*-$algebra.*

(*d*) *Za bilo koje $f,g\in C_0(G)$ i $x\in G$ vrijede jednakosti*

$$\lambda_x(f*g)=(\lambda_xf)*g,\qquad \rho_x(f*g)=f*\rho_xg,\qquad (\lambda_xf)^**(\lambda_xg)=f^**g,$$

$$\lambda_xf^*=\Delta(x)(\rho_xf)^*,\qquad \rho_xf^*=\Delta(x^{-1})(\lambda_xf)^*.$$

Za $f\in C_0(G)$ definiramo

$$\|f\|_1=\int_G |f(x)|\mathrm{d}\mu(x).$$

Tada je $\|\cdot\|_1$ norma na prostoru $C_0(G)$. Nije teško dokazati:

Propozicija 1.1.6. *Za $f,g\in C_0(G)$ vrijedi*

$$\|f*g\|_1\le\|f\|_1\|g\|_1,\qquad \|f^*\|_1=\|f\|_1.$$

Drugim riječima, $C_0(G)$ je normirana $*-$algebra.

Popunjenjem algebre $C_0(G)$ po normi $\|\cdot\|_1$ dobivamo Banachovu $*-$algebru. Kao Banachov prostor to se popunjenje identificira s prostorom $L_1(G,\mu)$ svih klasa $\mu-$integrabilnih funkcija na G; pri tome se dvije funkcije nalaze u istoj klasi ako i samo ako se podudaraju svuda osim na $\mu-$zanemarivom skupu, tj. na skupu $S\subseteq G$ takvom da je presjek $S\cap K$ mjere nula za svaki kompaktan skup $K\subseteq G$. Pokazuje se da se množenje i involucija mogu za predstavnike elemenata od $L_1(G,\mu)$ pisati pomoću istih formula kao i za elemente $C_0(G)$ s tim da se jednakosti interpretiraju kao jednakosti "*gotovo svuda*" (odnosno, svuda osim na $\mu-$zanemarivom skupu). Algebra $C_0(G)$, pa ni $L_1(G,\mu)$, općenito nije unitalna, tj. nema jedinicu. Može se pokazati da je algebra $C_0(G)$ (a također i $L_1(G,\mu)$) unitalna ako i samo ako je grupa G diskretna. Tada je Haarova mjera μ zadana sa

$$\mu(f)=\sum_{x\in G}f(x)=\sum_{x\in \mathrm{Supp}\,f}f(x),$$

a jedinica je

$$1(x) = \begin{cases} 1 & \text{ako je } x = e \\ \\ 0 & \text{ako je } x \neq e. \end{cases}$$

U mnogim važnim situacijama nepostojanje jedinice može nadomjestiti postojanje tzv. *aproksimativne jedinice*:

Propozicija 1.1.7. *Postoji hiperniz $(\varphi_i)_{i\in I}$ u $C_0^+(G)$ takav da za svaku funkciju $f \in C_0(G)$ vrijedi*

$$\lim_{i\in I} \|\varphi_i * f - f\|_1 = \lim_{i\in I} \|f * \varphi_i - f\|_1 = 0.$$

Ako je K kompaktna okolina jedinice e u G, hiperniz $(\varphi_i)_{i\in I}$ može se odabrati tako da su svi nosači $\operatorname{Supp}\varphi_i$, $i \in I$, sadržani u K.

Pri tome je **hiperniz** naziv za familiju indeksiranu usmjerenim skupom, a **usmjeren skup** je neprazan parcijalno uređen skup I takav da za bilo koje $i, j \in I$ postoji $k \in I$ takav da je $i \leq k$ i $j \leq k$. Nadalje, za hiperniz $(x_i)_{i\in I}$ u normiranom prostoru X kažemo da je **konvergentan**, ako postoji $x_0 \in X$ takav da vrijedi

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists i_0 \in I \quad \text{takav da} \quad i \in I,\ i_0 \leq i \qquad \Longrightarrow \qquad \|x_i - x_0\| \leq \varepsilon.$$

Ako postoji takav je x_0 jedinstven, zovemo ga **limes hiperniza** $(x_i)_{i\in I}$ i pišemo:

$$x_0 = \lim_{i\in I} x_i.$$

Propozicija 1.1.8. *Neka je $f \in C_0(G)$ i $\varepsilon > 0$. Neka su $\|\cdot\|_1$ L_1-norma i $\|\cdot\|_2$ L_2-norma na $C_0(G)$ u odnosu na lijevu Haarovu mjeru μ na grupi G :*

$$\|g\|_1 = \int_G |g(x)|d\mu(x), \qquad \|g\|_2 = \sqrt{\int_G |g(x)|^2 d\mu(x)}, \qquad g \in C_0(G).$$

Postoji okolina V jedinice e u grupi G takva da vrijedi

$$x \in V \qquad \Longrightarrow \qquad \|\lambda_x f - f\|_1 < \varepsilon, \quad \|\rho_x f - f\|_1 < \varepsilon, \quad \|\lambda_x f - f\|_2 < \varepsilon, \quad \|\rho_x f - f\|_2 < \varepsilon.$$

Ista tvrdnja vrijedi i za norme definirane pomoću desne Haarove mjere $\breve{\mu}$.

Neka je $\mathcal{H}$ Hilbertov prostor. Označavat ćemo sa $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ unitalnu Banachovu $*-$algebru svih ograničenih linearnih operatora na $\mathcal{H}$ a sa $\mathcal{GB}(\mathcal{H})$ grupu svih invertibilnih elemenata u algebri $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. **Reprezentacija** lokalno kompaktne grupe G na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$ je homomorfizam grupa $\pi : G \to \mathcal{GB}(\mathcal{H})$ takav da je preslikavanje $(x, \xi) \mapsto \pi(x)\xi$ sa $G \times \mathcal{H}$ u $\mathcal{H}$ neprekidno. Može dokazati da vrijedi:

Propozicija 1.1.9. *Neka je G lokalno kompaktna grupa, $\mathcal{H}$ Hilbertov prostor i $\pi : G \to \mathcal{GB}(\mathcal{H})$ homomorfizam grupa. Sljedeća su tri svojstva međusobno ekvivalentna:*

(*a*) *π je reprezentacija G na $\mathcal{H}$.*

(*b*) *Za svaki $\xi \in \mathcal{H}$ preslikavanje $x \mapsto \pi(x)\xi$ je neprekidno sa G u $\mathcal{H}$.*

(*c*) *Za neki gust potprostor $\mathcal{K}$ od $\mathcal{H}$ i za svaki $\xi \in \mathcal{K}$ preslikavanje $x \mapsto \pi(x)\xi$ je neprekidno u jedinici e grupe G.*

(*d*) *Za bilo koje $\xi, \eta \in \mathcal{H}$ kompleksna funkcija $x \mapsto (\pi(x)\xi|\eta)$ je neprekidna na G.*

(*e*) *Za neki gust potprostor $\mathcal{K}$ od $\mathcal{H}$ i za bilo koje $\xi, \eta \in \mathcal{K}$ funkcija $x \mapsto (\pi(x)\xi|\eta)$ je neprekidna u jedinici e.*

Nadalje, u tom slučaju je preslikavanje π lokalno uniformno ograničeno, tj. za svaki kompaktan podskup $K \subseteq G$ postoji $C_K > 0$ takav je $\|\pi(x)\| \leq C_K$ $\forall x \in K$.

Ako je π reprezentacija od G na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$, za potprostor V od $\mathcal{H}$ kažemo da je $\pi(G)-$invarijantan ako je $\pi(x)V \subseteq V \;\; \forall x \in G$. Naravno, tada je $\pi(x)V = V \;\; \forall x \in G$. Ako je $\mathcal{K}$ zatvoren $\pi(G)-$invarijantan potprostor od $\mathcal{H}$, restrikcijom operatora $\pi(x)$ na $\mathcal{K}$ dolazimo do tzv. **subreprezentacije** $\pi_{\mathcal{K}}$ od G na Hilbertovom prostoru $\mathcal{K}$, a prijelazom na kvocijent tzv. **kvocijentnu reprezentaciju** $\pi_{\mathcal{H}/\mathcal{K}}$ od G na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}/\mathcal{K}$. Ako su $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{K}$ zatvoreni $\pi(G)-$invarijantni potprostori od $\mathcal{H}$, subreprezentacija kvocijentne reprezentacije $\left(\pi_{\mathcal{H}/\mathcal{L}}\right)_{\mathcal{K}/\mathcal{L}}$ prirodno se identificira s kvocijentnom reprezentacijom subreprezentacije $(\pi_{\mathcal{K}})_{\mathcal{K}/\mathcal{L}}$; ta se reprezentacija od G na Hilbertovom prostoru $\mathcal{K}/\mathcal{L}$ označava sa $\pi_{\mathcal{K}/\mathcal{L}}$ i zove **subkvocijentna reprezentacija** od π, ili, kraće, **subkvocijent** od π.

Reprezentacija π od G na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$ zove se **ireducibilna** ako je $\mathcal{H} \neq \{0\}$ i ako ne postoji zatvoren $\pi(G)-$invarijantan potprostor od $\mathcal{H}$ različit od $\{0\}$ i od $\mathcal{H}$. U protivnom je π **reducibilna reprezentacija**. Reprezentacija π je **potpuno reducibilna** ako za svaki zatvoren $\pi(G)-$invarijantan potprostor $\mathcal{K}$ od $\mathcal{H}$ postoji zatvoren $\pi(G)-$invarijantan potprostor $\mathcal{L}$ od $\mathcal{H}$ takav da je $\mathcal{H} = \mathcal{K} \dotplus \mathcal{L}$.

Neka su π i ρ reprezentacije od G na Hilbertovim prostorima $\mathcal{H}$ i $\mathcal{K}$. **Preplitanje** reprezentacije π s reprezentacijom ρ je ograničen linearan operator $T : \mathcal{H} \to \mathcal{K}$ takav da vrijedi $T\pi(x) = \rho(x)T$ $\forall x \in G$. Skup svih preplitanja π sa ρ označavamo sa $Hom_G(\mathcal{H}, \mathcal{K})$. Dakle,

$$Hom_G(\mathcal{H}, \mathcal{K}) = \{T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{K});\; T\pi(x) = \rho(x)T \;\; \forall x \in G\}.$$

Očito je $Hom_G(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ zatvoren potprostor Banachovog prostora $\mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ svih ograničenih operatora sa $\mathcal{H}$ u $\mathcal{K}$. Za $\mathcal{H} = \mathcal{K}$ i $\pi = \rho$ pišemo $Hom_G(\mathcal{H}, \mathcal{H}) = End_G(\mathcal{H})$. Kažemo da je reprezentacija π **ekvivalentna** reprezentaciji ρ ako postoji bijektivno preplitanje π sa ρ. Tada pišemo $\pi \simeq \rho$. Prema teoremu o otvorenom preslikavanju za Banachove prostore (svaka ograničena linearna surjekcija Banachovog prostora na Banachov prostor je otvoreno preslikavanje) znamo da ako je $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ bijekcija, onda je $T^{-1} \in \mathcal{B}(\mathcal{K}, \mathcal{H})$. Odatle slijedi da je $\simeq$ relacija ekvivalencije.

Reprezentacija π lokalno kompaktne grupe G na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$ zove se **unitarna** ako su svi operatori $\pi(x)$, $x \in G$, unitarni. Grupu svih unitarnih operatora na $\mathcal{H}$ označavat ćemo sa $\mathcal{U}(\mathcal{H})$. Svaka unitarna reprezentacija je potpuno reducibilna: doista, ako je $\mathcal{K}$ zatvoren $\pi(G)-$invarijantan potprostor od $\mathcal{H}$, onda je i njegov ortogonalni komplement $\mathcal{K}^{\perp}$ zatvoren $\pi(G)-$invarijantan potprostor. To slijedi iz $\pi(x)^* = \pi(x^{-1})$ i iz činjenice da za $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ iz $A\mathcal{K} \subseteq \mathcal{K}$ slijedi $A^*\mathcal{K}^{\perp} \subseteq \mathcal{K}^{\perp}$. Za unitarne reprezentacije vrijedi sljedeća varijanta Schurove leme:

Teorem 1.1.10. *Neka je π unitarna reprezentacija lokalno kompaktne grupe G na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H} \neq \{0\}$. Reprezentacija π je ireducibilna ako i samo ako je $End_G(\mathcal{H}) = \mathbb{C}I$, tj. ako i samo ako su multipli jediničnog operatora jedina preplitanja π sa π.*

Dokaz: Pretpostavimo da reprezentacija π nije ireducibilna i neka je $\mathcal{K}$ zatvoren $\pi(G)-$invarijantan potprostor od $\mathcal{H}$ različit od $\{0\}$ i od $\mathcal{H}$. Neka je P ortogonalan projektor prostora $\mathcal{H}$ na potprostor $\mathcal{K}$. Tada je $P\pi(x) = \pi(x)P \;\; \forall x \in G$, tj. $P \in End_G(\mathcal{H})$. No kako je $P \neq 0$ i $P \neq I$, vrijedi $P \neq \lambda I \;\; \forall \lambda \in \mathbb{C}$. Dakle, $End_G(\mathcal{H}) \neq \mathbb{C}I$.

Za dokaz obrata upotrijebit ćemo spektralni teorem za ograničeni hermitski operator na Hilbertovom prostoru, koji ćemo sada iskazati. Prije svega, ako je $\mathcal{H}$ Hilbertov prostor i $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ hermitski operator koji je pozitivan, tj. vrijedi $(A\xi|\xi) \geq 0 \;\; \forall \xi \in \mathcal{H}$, jedinstveni pozitivan operator $B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ takav da je $B^2 = A$ označimo sa $\sqrt{A}$. Neka je sada A proizvoljan ograničen hermitski operator na $\mathcal{H}$. Tada je operator A^2 pozitivan. Stavimo $A_+ = \frac{1}{2}(\sqrt{A^2} + A)$ i $A_- = \frac{1}{2}(\sqrt{A^2} - A)$. Tada su A_+ i A_- pozitivni operatori, vrijedi $A = A_+ - A_-$ i za $B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ vrijedi $AB = BA$ ako i samo ako je $A_+B = BA_+$ i $A_-B = BA_-$. Za $\lambda \in \mathbb{R}$ definiramo E_λ kao ortogonalan projektor na jezgru $N\left((\lambda I - A)_-\right)$ pozitivnog operatora $(\lambda I - A)_-$. Preslikavanje $\lambda \mapsto E_\lambda$ zove se **spektralna funkcija** hermitskog operatora A.

Teorem 1.1.11. (**Spektralni teorem za ograničen hermitski operator**) *Neka je A ograničen hermitski operator na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$ i $\lambda \mapsto E_\lambda$ njegova spektralna funkcija.*

(*a*) *Za $B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ vrijedi $AB = BA$ ako i samo ako je $BE_\lambda = E_\lambda B \ \ \forall \lambda \in \mathbb{R}$.*

(*b*) *Spektralna funkcija je rastuća: za $\lambda \leq \mu$ je $E_\lambda \leq E_\mu$, tj. $E_\lambda E_\mu = E_\mu E_\lambda = E_\lambda$.*

(*c*) *Spektralna funkcija $\lambda \mapsto E_\lambda$ je jako zdesna neprekidna, tj. za svaki $\lambda \in \mathbb{R}$ i za svaki $\xi \in \mathcal{H}$ vrijedi*
$$E_\lambda \xi = \lim_{\mu \searrow \lambda} E_\mu \xi.$$

(*d*) *Stavimo $m = \inf\{(A\xi|\xi);\ \xi \in \mathcal{H},\ \|\xi\| = 1\}$ i $M = \sup\{(A\xi|\xi);\ \xi \in \mathcal{H},\ \|\xi\| = 1\}$. Tada je $E_\lambda = 0 \ \ \forall \lambda < m$ i $E_\lambda = I \ \ \forall \lambda \geq M$.*

(*e*) *Neka su m, M kao u (d), neka su $a < m$ i $b \geq M$ i neka je $(\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ particija segmenta $[a, b]$, tj.*
$$a = \lambda_0 < \lambda_1 < \cdots < \lambda_{n-1} < \lambda_n = b.$$
Tada vrijedi
$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_{j-1}(E_{\lambda_j} - E_{\lambda_{j-1}}) \leq A \leq \sum \sum_{j=1}^{n} \lambda_j (E_{\lambda_j} - E_{\lambda_{j-1}}).$$
Pri tome za hermitske operatore B i C oznaka $B \leq C$ znači da je $(B\xi|\xi) \leq (C\xi|\xi) \ \ \forall \xi \in \mathcal{H}$. Nadalje, za proizvoljne $\mu_j \in [\lambda_{j-1}, \lambda_j]$, $j = 1, \ldots, n$, vrijedi
$$\left\| A - \sum_{j=1}^{n} \mu_j (E_{\lambda_j} - E_{\lambda_{j-1}}) \right\| \leq \max\{\lambda_j - \lambda_{j-1};\ 1 \leq j \leq n\}.$$

Dokažimo sada drugu implikaciju u teoremu 1.1.10. Pretpostavimo da je reprezentacija π ireducibilna i neka je $A \in End_G(\mathcal{H})$. Pretpostavimo najprije da je operator A hermitski. Neka je $\lambda \mapsto E_\lambda$ spektralna funkcija operatora A. Sada iz tvrdnje (*a*) teorema 1.1.11. slijedi da su svi projektori E_λ preplitanja od π. No tada je slika projektora E_λ zatvoren $\pi(G)-$invarijantan potprostor od $\mathcal{H}$, dakle, ili $\{0\}$ ili $\mathcal{H}$. To znači da za svaki $\lambda \in \mathbb{R}$ vrijedi ili $E_\lambda = 0$ ili $E_\lambda = I$. Sada iz tvrdnji (*b*) i (*c*) teorema 1.1.11. slijedi da postoji $\mu \in \mathbb{R}$ takav da je $E_\lambda = 0$ za $\lambda < \mu$ i $E_\lambda = I$ za $\lambda \geq \mu$. Tada je uz oznake iz tvrdnje (*d*) $\mu \in [m, M]$. Neka je $a < m$, $b \geq M$ i $\varepsilon > 0$ i neka je $P = (\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ bilo koja particija segmenta $[a, b]$ koja sadrži točku μ, tj. $\mu = \lambda_k$ za neki $k \in \{1, \ldots, n\}$, takva da je $\lambda_j - \lambda_{j-1} \leq \varepsilon \ \forall j \in \{1, \ldots, n\}$. Tada je $E_{\lambda_0} = \cdots = E_{\lambda_{k-1}} = 0$ i $E_{\lambda_k} = \cdots = E_{\lambda_n} = I$, dakle,
$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j (E_{\lambda_j} - E_{\lambda_{j-1}}) = \lambda_k I = \mu I,$$
pa iz posljednje nejednakosti u tvrdnji (*e*) teorema 1.1.11. slijedi $\|A - \mu I\| \leq \varepsilon$. Kako je $\varepsilon > 0$ bio proizvoljan, slijedi $A = \mu I$.

Neka je sada $A \in End_G(\mathcal{H})$ proizvoljan. Tada je i $A^* \in End_G(\mathcal{H})$, dakle, hermitski operatori $A_1 = \frac{1}{2}(A + A^*)$ i $\frac{1}{2i}(A - A^*)$ su preplitanja. Prema dokazanom postoje $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$ takvi da je $A_1 = \mu_1 I$ i $A_2 = \mu_2 I$. No tada je $A = A_1 + iA_2 = \lambda I$ za $\lambda = \mu_1 + i\mu_2$.

Korolar 1.1.12. *Neka su π i ρ ireducibilne unitarne reprezentacije od G na Hilbertovim prostorima $\mathcal{H}$ i $\mathcal{K}$. Ako su π i ρ ekvivalentne, onda je prostor $Hom_G(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ jednodimenzionalan i sadrži izometrički izomorfizam sa $\mathcal{H}$ na $\mathcal{K}$.*

Dokaz: Neka je $T \in Hom_G(\mathcal{H},\mathcal{K})$ bijekcija i $S \in Hom_G(\mathcal{H},\mathcal{K})$. Tada je $T^{-1}S \in End_G(\mathcal{H})$, pa po teoremu 1.1.10. postoji $\lambda \in \mathbb{C}$ takav da je $T^{-1}S = \lambda I$. Dakle, $S = \lambda T$ i time je dokazano da je prostor $Hom_G(\mathcal{H},\mathcal{K})$ jednodimenzionalan.

Neka je $T \in Hom_G(\mathcal{H},\mathcal{K})$ bijekcija. Tada je $T^* \in Hom_G(\mathcal{K},\mathcal{H})$, dakle, $T^*T \in End_G(\mathcal{H})$. Prema teoremu 1.1.10. postoji $\lambda \in \mathbb{C}$ takav da je $T^*T = \lambda I$. Za $\xi \in \mathcal{H}$, $\|\xi\| = 1$, imamo

$$\lambda = \lambda(\xi|\xi) = (\lambda\xi|\xi) = (T^*T\xi|\xi) = (T\xi|T\xi) > 0.$$

Sada je $U = \lambda^{-\frac{1}{2}}T \in Hom_G(\mathcal{H},\mathcal{K})$ i to je bijekcija za koju vrijedi za proizvoljne $\xi,\eta \in \mathcal{H}$:

$$(U\xi|U\eta) = \lambda^{-1}(T\xi|T\eta) = \lambda^{-1}(T^*T\xi|\eta) = (\xi|\eta).$$

Dakle, U je izometrički izomorfizam sa $\mathcal{H}$ na $\mathcal{K}$.

Dokazat ćemo sada jednu jaču varijantu Schurove leme za unitarne ireducibilne reprezentacije. U tu svrhu treba nam sljedeći von Neumannov rezultat:

Propozicija 1.1.13. *Neka je $\mathcal{H}$ Hilbertov prostor i za podskup $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H})$ označimo sa S' njegov komutant:*

$$S' = \{T \in \mathcal{B}(\mathcal{H});\ TS = ST \ \ \forall S \in \mathcal{S}\}.$$

Nadalje, neka je $\mathcal{A}$ unitalna $*-$podalgebra od $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Tada za svaki $\xi \in \mathcal{H}$ vrijedi $(\mathcal{A}')'\,\xi \subseteq Cl(\mathcal{A}\xi)$. Pri tome $Cl(U)$ označava zatvarač podskupa $U \subseteq \mathcal{H}$.

Dokaz: Neka je $\xi \in \mathcal{H}$. Tada je zatvoren potprostor $Cl(\mathcal{A}\xi)$ invarijantan s obzirom na sve operatore iz $\mathcal{A}$. Budući da je $\mathcal{A}$ $*-$podalgebra, slijedi da je i ortogonalni komplement $Cl(\mathcal{A}\xi)^\perp = (\mathcal{A}\xi)^\perp$ invarijantan s obzirom na sve operatore iz $\mathcal{A}$. Neka je P ortogonalni projektor prostora $\mathcal{H}$ na zatvoren potprostor $Cl(\mathcal{A}\xi)$. Tada P komutira sa svim operatorima iz $\mathcal{A}$, tj. $P \in \mathcal{A}'$. Sada za svaki $T \in (\mathcal{A}')'$ vrijedi $TP = PT$. Odatle slijedi da je $TCl(\mathcal{A}\xi) \subseteq Cl(\mathcal{A}\xi)$. Kako je $\xi \in \mathcal{A}\xi$ (pretpostavili smo da je algebra $\mathcal{A}$ unitalna) slijedi $T\xi \in Cl(\mathcal{A}\xi)$.

Najavljeno pojačanje Schurove leme je:

Teorem 1.1.14. *Neka je π ireducibilna unitarna reprezentacija lokalno kompaktne grupe G na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$. Neka su V i W gusti potprostori od $\mathcal{H}$ i $T : V \to \mathcal{H}$ i $S : W \to \mathcal{H}$ linearni operatori* (*bez ikakve pretpostavke ograničenosti, tj. neprekidnosti*) *takvi da je potprostor V $\pi(G)-$invarijantan i da vrijedi*

$$T\pi(x)\xi = \pi(x)T\xi \qquad \forall x \in G \quad i \quad \forall \xi \in V$$

i

$$(T\xi|\eta) = (\xi|S\eta) \qquad \forall \xi \in V \quad i \quad \forall \eta \in W.$$

Tada je $T = \lambda I_V$ za neki $\lambda \in \mathbb{C}$.

Dokaz: Neka je $\mathcal{A}$ podalgebra od $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ razapeta svim operatorima $\pi(x)$, $x \in G$. Očito je $\mathcal{A}$ unitalna $*-$podalgebra od $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Dokazat ćemo sada sljedeću pomoćnu tvrdnju:

(*A*) *Za bilo koje $\xi,\eta \in \mathcal{H}$, $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ i $\varepsilon > 0$ postoji $A \in \mathcal{A}$ takav da je $\|T\xi - A\xi\| < \varepsilon$ i $\|T\eta - A\eta\| < \varepsilon$.*

Doista, neka je $\mathcal{K} = \mathcal{H} \times \mathcal{H}$. To je Hilbertov prostor sa skalarnim produktom

$$((\xi_1,\xi_2)|(\eta_1,\eta_2)) = (\xi_1|\eta_1) + (\xi_2|\eta_2), \qquad \xi_1,\xi_2,\eta_1,\eta_2 \in \mathcal{H}.$$

Za $A \in \mathcal{A}$ neka je $\tilde{A} \in \mathcal{B}(\mathcal{K})$ definiran sa $\tilde{A}(\xi, \eta) = (A\xi, A\eta)$ i neka je $\tilde{\mathcal{A}} = \{\tilde{A};\ A \in \mathcal{A}\}$. Tada je $\tilde{\mathcal{A}}$ unitalna $*-$podalgebra od $\mathcal{B}(\mathcal{K})$. Nadalje, vrijedi

$$\mathcal{B}(\mathcal{K}) = \left\{ \begin{bmatrix} X & Y \\ Z & W \end{bmatrix};\ X, Y, Z, W \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) \right\}.$$

Pri tome je

$$\begin{bmatrix} X & Y \\ Z & W \end{bmatrix} (\xi, \eta) = (X\xi + Y\eta, Z\xi + W\eta), \qquad (\xi, \eta) \in \mathcal{K}.$$

Posebno je $\tilde{A} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{bmatrix}$, pa nalazimo da je

$$\tilde{\mathcal{A}}' = \left\{ \begin{bmatrix} X & Y \\ Z & W \end{bmatrix};\ X, Y, Z, W \in \mathcal{A}' \right\}.$$

Prema teoremu 1.1.10. vrijedi $\mathcal{A}' = End_G(\mathcal{H}) = \mathbb{C}I$. Stoga je

$$\tilde{\mathcal{A}}' = \left\{ \begin{bmatrix} \alpha I & \beta I \\ \gamma I & \delta I \end{bmatrix};\ \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C} \right\}.$$

Zadatak 1.1.1. *Dokažite da je*

$$\left(\tilde{\mathcal{A}}'\right)' = \left\{ \begin{bmatrix} T & 0 \\ 0 & T \end{bmatrix};\ T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) \right\}.$$

Sada iz zadatka 1.1.1. i iz propozicije 1.1.13. slijedi da je

$$(T\xi, T\eta) \in Cl(\tilde{\mathcal{A}}(\xi, \eta)) = Cl(\{(A\xi, A\eta);\ A \in \mathcal{A}\})$$

za svaki $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ i $\forall \xi, \eta \in \mathcal{H}$. Dakle, ako je $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, $\varepsilon > 0$ i $\xi, \eta \in \mathcal{H}$, postoji $A \in \mathcal{A}$ takav da je $\|(T\xi, T\eta) - (A\xi, A\eta)\| < \varepsilon$. No tada je $\|T\xi - A\xi\| < \varepsilon$ i $\|T\eta - A\eta\| < \varepsilon$ i time je tvrdnja (A) dokazana.

Prijeđimo sada na dokaz teorema. Pretpostavimo da je $\xi \in V$ takav da su vektori ξ i $T\xi$ linearno nezavisni. Tada postoji $C \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ takav da je $C\xi = \xi = CT\xi$. Tvrdnja (A) povlači da postoji niz $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ u $\mathcal{A}$ takav da vrijedi

$$\|C\xi - A_n\xi\| < \frac{1}{n} \quad \text{i} \quad \|CT\xi - A_nT\xi\| < \frac{1}{n},$$

odnosno,

$$\|\xi - A_n\xi\| < \frac{1}{n} \quad \text{i} \quad \|\xi - A_nT\xi\| < \frac{1}{n}.$$

To znači da je

$$\xi = \lim_{n\to\infty} A_n\xi = \lim_{n\to\infty} A_nT\xi.$$

Sada za proizvoljan $\eta \in W$ nalazimo

$$(\xi|\eta) = \lim_{n\to\infty} (A_nT\xi|\eta) = \lim_{n\to\infty} (TA_n\xi|\eta) = \lim_{n\to\infty} (A_n\xi|S\eta) = (\xi|S\eta) = (T\xi|\eta).$$

Kako je potprostor W gust u $\mathcal{H}$ slijedi $T\xi = \xi$, a to je suprotno pretpostavci da su vektori ξ i $T\xi$ linearno nezavisni. Ova kontradikcija pokazuje da je svaki vektor $\xi \in V$ svojstven vektor operatora T. Odatle slijedi da je $T = \lambda I_V$ za neki $\lambda \in \mathbb{C}$.

Neka je π reprezentacija lokalno kompaktne grupe G na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$. Neka je i dalje μ lijeva Haarova mjera na G. Za $f \in C_0(G)$ je sa

$$(\xi, \eta) \mapsto \int_G f(x)(\pi(x)\xi|\eta)\mathrm{d}\mu(x)$$

definirana seskvilinearna forma na $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$. Posljednja tvrdnja propozicije 1.1.9. ima za posljedicu da je ta forma ograničena. Doista, ako je $C > 0$ takav da je $\|\pi(x)\| \leq C \ \ \forall x \in Supp(f)$ onda za proizvoljne $\xi, \eta \in \mathcal{H}$ imamo:

$$\left| \int_G \varphi(x)(\pi(x)\xi|\eta)\mathrm{d}\mu(x) \right| \leq \int_G |f(x)|\,|(\pi(x)\xi|\eta)|\mathrm{d}\mu(x) \leq C\|\xi\|\,\|\eta\| \int_G |f(x)|\mathrm{d}\mu(x) = C\|\xi\|\,\|\eta\|\,\|f\|_1.$$

Prema tome, postoji ograničen linearan operator $\tilde{\pi}(f) \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ takav da je

$$(\tilde{\pi}(f)\xi|\eta) = \int_G f(x)(\pi(x)\xi|\eta)\mathrm{d}\mu(x) \qquad \forall \xi, \eta \in \mathcal{H}.$$

Također se vidi da je

$$\|\tilde{\pi}(f)\| \leq \|f\|_1 \sup\{\|\pi(x)\|;\ x \in Supp(f)\}.$$

Na taj način definirali smo preslikavanje $f \to \tilde{\pi}(f)$ grupovne algebre $C_0(G)$ u algebru $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. To je preslikavanje očito linearno. Nadalje, ako su $f, g \in C_0(G)$ i $\xi, \eta \in \mathcal{H}$, onda zbog lijeve invarijantnosti mjere μ i korištenjem Fubinijevog teorema (ali samo za neprekidne funkcije) imamo redom

$$(\tilde{\pi}(f)\tilde{\pi}(g)\xi|\eta) = \int_G f(x)(\pi(x)\tilde{\pi}(g)\xi|\eta)\mathrm{d}\mu(x) = \int_G f(x)(\tilde{\pi}(g)\xi|\pi(x)^*\eta)\mathrm{d}\mu(x) =$$

$$= \int_G \int_G f(x)g(y)(\pi(y)\xi|\pi(x)^*\eta)\mathrm{d}\mu(x)\mathrm{d}\mu(y) = \int_G \int_G f(x)g(y)(\pi(xy)\xi|\eta)\mathrm{d}\mu(x)\mathrm{d}\mu(y) =$$

$$= \int_G \int_G f(x)g(x^{-1}y)(\pi(y)\xi|\eta)\mathrm{d}\mu(x)\mathrm{d}\mu(y) = \int_G (f * g)(y)\mathrm{d}\mu(y) = (\tilde{\pi}(f * g)\xi|\eta).$$

To pokazuje da je $\tilde{\pi}(f * g) = \tilde{\pi}(f)\tilde{\pi}(g)$, tj. $f \mapsto \tilde{\pi}(f)$ je homomorfizam grupovne algebre $C_0(G)$ u algebru $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Općenito, ako je $\mathcal{A}$ asocijativna algebra nad $\mathbb{C}$, homomorfizam $\pi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ zove se **reprezentacija algebre** $\mathcal{A}$ na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$. Za takve reprezentacije na potpuno isti način kao i za grupe definiraju se osnovni pojmovi ($\tilde{\pi}(\mathcal{A})-$invarijantan potprostor, subreprezentacija, kvocijentna reprezentacija, subkvocijentna reprezentacija, ireducibilnost, reducibilnost, potpuna reducibilnost, preplitanje, $Hom_{\mathcal{A}}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$, $End_{\mathcal{A}}(\mathcal{H}) = (\pi(\mathcal{A}))'$, ekvivalentnost reprezentacija). Ako je $\mathcal{A}$ $*-$algebra, $*-$**reprezentacija** od $\mathcal{A}$ na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$ je reprezentacija π sa svojstvom da je $\pi(a^*) = \pi(a)^* \ \ \forall a \in \mathcal{A}$.

Teorem 1.1.15. *Neka je G lokalno kompaktna grupa, $C_0(G)$ njezina grupovna $*-$algebra u odnosu na lijevu Haarovu mjeru μ i π reprezentacija od G na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$.*

(a) *Relacijom*

$$(\tilde{\pi}(f)\xi|\eta) = \int_G f(x)(\pi(x)\xi|\eta)\mathrm{d}\mu(x), \qquad f \in C_0(G), \quad \xi, \eta \in \mathcal{H}$$

definirana je reprezentacija $\tilde{\pi}$ algebre $C_0(G)$ na $\mathcal{H}$.

(*b*) *Zatvoren potprostor $\mathcal{K}$ od $\mathcal{H}$ je $\pi(G)-$invarijantan ako i samo ako je on $\tilde{\pi}(C_0(G))-$invarijantan. Posebno, reprezentacija π je ireducibilna (odn., reducibilna, potpuno reducibilna) ako i samo je reprezentacija $\tilde{\pi}$ takva.*

(*c*) *Ako je i σ reprezentacija od G na Hilbertovom prostoru $\mathcal{K}$, onda je*

$$Hom_G(\mathcal{H},\mathcal{K}) = Hom_{C_0(G)}(\mathcal{H},\mathcal{K}).$$

Posebno, reprezentacije π i σ su ekvivalentne ako i samo ako su reprezentacije $\tilde{\pi}$ i $\tilde{\sigma}$ ekvivalentne.

(*d*) *Reprezentacija $\tilde{\pi}$ ima sljedeće svojstvo neprekidnosti: za svaki kompaktan podskup $K \subseteq G$ postoji $C_K > 0$ takav da vrijedi*

$$f \in C_0(G), \quad Supp\, f \subseteq K \qquad \Longrightarrow \qquad \|\tilde{\pi}(f)\| \leq C_K \|f\|_1,$$

(*e*) *Reprezentacija $\tilde{\pi}$ je* **nedegenerirana** *tj. potprostor span $\{\tilde{\pi}(f)\xi;\ f \in C_0(G),\ \xi \in \mathcal{H}\}$ je gust u $\mathcal{H}$.*

(*f*) *Reprezentacija π je unitarna ako i samo ako je $\tilde{\pi}$ $*-$reprezentacija.*

Nadalje, ako je σ nedegenerirana reprezentacija algebre $C_0(G)$ na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$ sa svojstvom neprekidnosti kao u (d), onda postoji jedinstvena reprezentacija π od G na $\mathcal{H}$ takva da je $\tilde{\pi} = \sigma$.

Dokaz: Tvrdnje (a) i (d) već su dokazane.

(b) Neka je $\mathcal{K}$ zatvoren $\pi(G)-$invarijantan potprostor od $\mathcal{H}$. Za svaki $\xi \in \mathcal{K}$ i svaki $\eta \in \mathcal{K}^\perp$ iz definicije operatora $\tilde{\pi}(f)$ slijedi da je $(\tilde{\pi}(f)\xi|\eta) = 0$. To pokazuje da je $\tilde{\pi}(f)\mathcal{K} \subseteq \left(\mathcal{K}^\perp\right)^\perp = \mathcal{K}$, tj. potprostor $\mathcal{K}$ je $\tilde{\pi}(C_0(G))-$invarijantan.

Pretpostavimo sada da je $\mathcal{K}$ zatvoren $\tilde{\pi}(C_0(G))-$invarijantan potprostor od $\mathcal{H}$. Neka su $\xi \in \mathcal{K}$ i $\eta \in \mathcal{K}^\perp$ proizvoljni. Tada iz definicije reprezentacije $\tilde{\pi}$ slijedi da je

$$\int_G f(x)(\pi(x)\xi|\eta)\mathrm{d}\mu(x) = 0 \qquad \forall f \in C_0(G).$$

Neka je sada $x \in G$ i neka je $\varphi \in C_0(G)$ takva da je $\varphi(x) = 1$. Nadalje, neka je $F \in C_0(G)$ definirana kao umnožak $F(x) = \varphi(x)(\pi(x)\xi|\eta)$, $x \in G$. Tada nalazimo da je

$$(f|F)_{L_2(G,\mu)} = 0\ \forall f \in C_0(G) \quad \Longrightarrow \quad F = 0 \quad \text{u prostoru} \quad L_2(G,\mu) \quad \Longrightarrow \quad F(y) = 0 \quad y \in G.$$

Posebno je $(\pi(x)\xi|\eta) = F(x) = 0$. Kako su $x \in G$, $\xi \in \mathcal{K}$ i $\eta \in \mathcal{K}^\perp$ bili proizvoljni, zaključujemo da je potprostor $\mathcal{K}$ $\pi(G)-$invarijantan.

Zadatak 1.1.2. *Dokažite tvrdnju* (c).

(e) Neka je η vektor ortogonalan na potprostor V razapet sa $\{\tilde{\pi}(f)\xi;\ f \in C_0(G),\ \xi \in \mathcal{H}\}$, tj. takav da je $(\tilde{\pi}(f)\xi|\eta) = 0\ \forall f \in C_0(G)$ i $\forall \xi \in \mathcal{H}$. Kao u dokazu tvrdnje ($b$) nalazimo da je tada $(\pi(x)\xi|\eta) = 0\ \forall x \in G$ i $\forall \xi \in \mathcal{H}$. Posebno, za $x = e$ i $\xi = \eta$ dobivamo $(\eta|\eta) = 0$, dakle, $\eta = 0$. To pokazuje da je $V^\perp = \{0\}$, a to znači da je potprostpor V gust u $\mathcal{H}$.

Zadatak 1.1.3. *Dokažite tvrdnju* (f).

Napokon, neka je σ nedegenerirana reprezentacija algebre $C_0(G)$ na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$. Dokazat ćemo najprije jedinstvenost reprezentacije π od G takve da je $\tilde{\pi} = \sigma$. Pretpostavimo da su π i ρ reprezentacije od G na $\mathcal{H}$ takve da je $\tilde{\pi} = \tilde{\rho} = \sigma$. Za $x \in G$, $f \in C_0(G)$ i $\xi, \eta \in \mathcal{H}$ imamo zbog lijeve invarijantnosti mjere μ :

$$(\pi(x)\sigma(f)\xi|\eta) = (\tilde{\pi}(f)\xi|\pi(x)^*\eta) = \int_G f(y)(\pi(y)\xi|\pi(x)^*\eta)\mathrm{d}\mu(y) = \int_G f(y)(\pi(xy)\xi|\eta)\mathrm{d}\mu(y) =$$

$$= \int_G f(x^{-1}y)(\pi(y)\xi|\eta)\mathrm{d}\mu(y) = \int_G (\lambda_x f)(y)(\pi(y)\xi|\eta)\mathrm{d}\mu(y) = (\tilde{\pi}(\lambda_x f)\xi|\eta) = (\sigma(\lambda_x f)\xi|\eta).$$

Prema tome, $\pi(x)\sigma(f) = \sigma(\lambda_x f)$ $\forall x \in G$ i $\forall f \in C_0(G)$. Sasvim analogno imamo da je i $\rho(x)\sigma(f) = = \sigma(\lambda_x f)$ $\forall x \in G$ i $\forall f \in C_0(G)$. Odatle slijedi da se za svaki $x \in G$ restrikcije operatora $\pi(x)$ i $\rho(x)$ na potprostor *span* $\{\sigma(f)\xi;\ f \in C_0(G),\ \xi \in \mathcal{H}\}$ podudaraju. Kako je po pretpostavci taj potprostor gust u $\mathcal{H}$, slijedi da je $\pi(x) = \rho(x)$ $\forall x \in G$.

Skicirajmo još dokaz egzistencije reprezentacije π od G takve da je $\tilde{\pi} = \sigma$. Pretpostavimo najprije da je reprezentacija σ ciklička, tj. da postoji $\xi \in \mathcal{H}$ takav da je potprostor

$$V = \sigma(C_0(G))\xi = \{\sigma(f)\xi;\ f \in C_0(G)\}$$

gust u $\mathcal{H}$. Za $x \in G$ definiramo linearan operator $\pi(x) : V \to V$ ovako:

$$\pi(x)\sigma(f)\xi = \sigma(\lambda_x f)\xi, \qquad f \in C_0(G).$$

Treba ustanoviti da je ta definicija smislena, tj. da iz $\sigma(f)\xi = \sigma(g)\xi$ slijedi $\sigma(\lambda_x f)\xi = \sigma(\lambda_x g)\xi$. Stavimo li $h = f - g$ vidimo da treba dokazati da iz $\sigma(h)\xi = 0$ slijedi $\sigma(\lambda_x h)\xi = 0$. Primijetimo sada da je skup $\{h \in C_0(G);\ \sigma(h)\xi = 0\}$ lijevi ideal u algebri $C_0(G)$ koji je zbog svojstva neprekidnosti reprezentacije σ zatvoren u odnosu na normu $\|\cdot\|_1$.

Lema 1.1.16. *Neka je J lijevi ideal u algebri $C_0(G)$ koji je zatvoren u odnosu normu $\|\cdot\|_1$. Tada je $\lambda_x J = J$ $\forall x \in G$.*

Dokaz: Neka je $(\varphi_i)_{i\in I}$ hiperniz iz propozicije 1.1.7. Tada za $f \in J$, $x \in G$ i $i \in I$ imamo zbog lijeve invarijantnosti mjere μ i prema tvrdnji (d) propozicije 1.1.5.

$$\|\varphi_i * f - f\|_1 = \|\lambda_x(\varphi_i * f) - \lambda_x f\|_1 = \|(\lambda_x\varphi_i) * f - \lambda_x f\|_1.$$

Prema propoziciji 1.1.7. slijedi da je

$$\lim_{i\in I} \|(\lambda_x\varphi_i) * f - \lambda_x f\|_1 = 0.$$

Odavde slijedi tvrdnja leme jer je $(\lambda_x\varphi_i) * f \in J$ $\forall i \in I$ i jer je po pretpostavci ideal J zatvoren u odnosu na normu $\|\cdot\|_1$.

Time je smislenost definicije operatora $\pi(x) : V \to V$ dokazana. Očito je $\pi(xy) = \pi(x)\pi(y)$ za $x, y \in G$. Sada se pomoću svojstva neprekidnosti reprezentacije σ dokazuje da je za svaki $x \in G$ operator $\pi(x) : V \to V$ ograničen, pa se jedinstveno proširuje do $\pi(x) \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, a zatim pomoću propozicije 1.1.7. da su funkcije $x \to (\pi(x)\eta|\zeta)$, $\eta, \zeta \in V$ neprekidne u jedinici $e \in G$. Dakle, došli smo do reprezentacije π od G na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$ takve da je $\pi(x)\sigma(f) = \sigma(\lambda_x f)$ $\forall x \in G$ i $\forall f \in C_0(G)$. Sada za $g, f \in C_0(G)$ i $\eta \in \mathcal{H}$ imamo

$$(\tilde{\pi}(g)\sigma(f)\xi|\eta) = \int_G g(x)(\pi(x)\sigma(f)\xi|\eta)\mathrm{d}\mu(x) = \int_G g(x)(\sigma(\lambda_x f)\xi|\eta)\mathrm{d}\mu(x) = \int_G (\sigma(g(x)\lambda_x f)\xi|\eta)\mathrm{d}\mu(x).$$

Pokazuje se da se operator $\tilde{\pi}(f)$ može shvatiti i kao Bochnerov integral

$$\tilde{\pi}(f) = \int_G f(x)\pi(x)\mathrm{d}\mu(x)$$

funkcije $x \mapsto f(x)\pi(x)$ iz $C_0(G, \mathcal{B}(\mathcal{H}))$. Ako su X i Y Banachovi prostori, T lokalno kompaktan Hausdorffov topološki prostor, μ mjera na T i $F \in C_0(G, X)$, pokazuje se da za svaki $A \in \mathcal{B}(X, Y)$ vrijedi

$$A \int_T F(t)\mathrm{d}\mu(t) = \int_T AF(t)\mathrm{d}\mu(t).$$

Primijenimo to sada na funkciju $x \mapsto g(x)\lambda_x f$ iz $C_0(G, C(Supp\,(g * f)))$ i na ograničen linearan funkcional $h \mapsto (\sigma(h)\xi|\eta)$ na Banachovom prostoru $C(Supp\,(g * f))$. Slijedi

$$(\tilde{\pi}(g)\sigma(f)\xi|\eta) = \int_G (\sigma(g(x)\lambda_x f)\xi|\eta)\mathrm{d}\mu(x) = (\sigma(h)\xi|\eta),$$

gdje je

$$h(y) = \int_G g(x)(\lambda_x f)(y)\mathrm{d}\mu(x) = (g * f)(y), \qquad y \in G.$$

Stoga je $\tilde{\pi}(g)\sigma(f)\xi = \sigma(g*f)\xi = \sigma(g)\sigma(f)\xi$. Drugim riječima, $\tilde{\pi}(g)\eta = \sigma(g)\eta \ \forall \eta \in V$ i $\forall g \in C_0(G)$. Kako je potprostor V gust u $\mathcal{H}$, slijedi da je $\tilde{\pi}(g) = \sigma(g) \ \forall g \in C_0(G)$, tj. $\tilde{\pi} = \sigma$.

Time je egzistencija reprezentacije π od G takve da je $\tilde{\pi} = \sigma$ dokazana u slučaju da je reprezentacija σ ciklička. Neka je sada $\mathcal{S}$ skup svih zatvorenih $\sigma(C_0(G))-$invarijantnih potprostora $\mathcal{K}$ takvih da postoji reprezentacija π grupe G na Hilbertovom prostoru $\mathcal{K}$ takva da je $\tilde{\pi} = \sigma_{\mathcal{K}}$. Skup $\mathcal{S}$ je parcijalno uređen inkluzijom. Pomoću dokazane jedinstvenosti pokazuje se da skup $\mathcal{S}$ zadovoljava uvjet Zornove leme: za svaki linearno uređen podskup $\mathcal{T}$ od $\mathcal{S}$ postoji $\mathcal{K} \in \mathcal{S}$ takav da je $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{K} \ \forall \mathcal{L} \in \mathcal{T}$. Prema tome, u $\mathcal{S}$ postoji bar jedan maksimalan element $\mathcal{K}$. Neka je π reprezentacija do G na $\mathcal{K}$ takva da je $\tilde{\pi} = \sigma_{\mathcal{K}}$. Treba još samo dokazati da je $\mathcal{K} = \mathcal{H}$. Pretpostavimo suprotno da je $\mathcal{K} \neq \mathcal{H}$. Neka je $\xi \in \mathcal{H} \setminus \mathcal{K}$ i neka je $\mathcal{L} = Cl(\sigma(C_0(G))\xi)$. Tada je $\mathcal{L}$ zatvoren $\sigma(C_0(G))-$invarijantan potprostor i subreprezentacija $\sigma_{\mathcal{L}}$ je ciklička. Prema dokazanom postoji reprezentacija ω od G na $\mathcal{L}$ takva da je $\tilde{\omega} = \sigma_{\mathcal{L}}$. Sada subreprezentacije $\pi_{\mathcal{L}\cap\mathcal{K}}$ i $\omega_{\mathcal{L}\cap\mathcal{K}}$ imaju svojstvo da je $\tilde{\pi}_{\mathcal{L}\cap\mathcal{K}} = \sigma_{\mathcal{L}\cap\mathcal{K}}$ i $\tilde{\omega}_{\mathcal{L}\cap\mathcal{K}} = \sigma_{\mathcal{L}\cap\mathcal{K}}$. Zbog dokazane jedinstvenosti je $\pi_{\mathcal{L}\cap\mathcal{K}} = \omega_{\mathcal{L}\cap\mathcal{K}}$, tj. $\pi(x)|\mathcal{L} \cap \mathcal{K} = \omega(x)|\mathcal{L} \cap \mathcal{K} \ \forall x \in G$. Stoga za svaki $x \in G$ postoji linearan operator $\rho(x)$ na prostoru $\mathcal{L} + \mathcal{K}$ koji proširuje i $\pi(x)$ i $\omega(x)$. Zbog ograničenosti operatora $\pi(x)$ i $\omega(x)$ operator $\rho(x)$ je ograničen, pa se jedinstveno proširuje do ograničenog operatora na zatvorenom potprostoru $\mathcal{R} = Cl(\mathcal{L} + \mathcal{K})$ koji ćemo također označiti sa $\rho(x)$. Sada je ρ reprezentacija grupe G na prostoru $\mathcal{R}$ i lako se vidi da je $\tilde{\rho} = \sigma_{\mathcal{R}}$. To znači da je $\mathcal{R} \in \mathcal{S}$. Međutim, kako je $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{R}$ i $\xi \in \mathcal{R} \setminus \mathcal{K}$, dobiveno je u suprotnosti s maksimalnošću elementa $\mathcal{K} \in \mathcal{S}$. Ova kontradikcija pokazuje da je $\mathcal{K} = \mathcal{H}$.

Zbog bijektivnosti $\pi \longleftrightarrow \tilde{\pi}$ između reprezentacija lokalno kompaktne grupe G i nedegeneriranih neprekidnih reprezentacija njene grupovne algebre $C_0(G)$ uobičajeno je da se izostavlja znak $\tilde{}$ i umjesto $\tilde{\pi}$ pišemo π i za odgovarajuću reprezentaciju od $C_0(G)$. Veze između tih reprezentacija su sljedeće: ako je π reprezentacija od G na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$ onda je

$$\pi(f) = \int_G f(x)\pi(x)\mathrm{d}\mu(x), \quad f \in C_0(G), \quad \text{tj.} \quad (\pi(f)\xi|\eta) = \int_G f(x)(\pi(x)\xi|\eta)\mathrm{d}\mu(x), \quad \xi, \eta \in \mathcal{H};$$

obratno, ako je π nedegenerirana reprezentacija algebre $C_0(G)$ na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$ (sa svojstvom neprekidnosti kao u tvrdnji (d) prethodnog teorema), onda je $\pi(x)$, $x \in G$, jedinstven ograničen linearan operator na $\mathcal{H}$ sa svojstvom $\pi(x)\pi(f) = \pi(\lambda_x f) \ \forall f \in C_0(G)$.

U ovom uvodnom odjeljku dokazat ćemo još jedan teorem o posebnoj vrsti unitarnih reprezentacija – onih za koje su elementi grupovne algebre $C_0(G)$ reprezentirani kompaktnim operatorima. Podsjetimo se definicije kompaktnog operatora. Neka su $\mathcal{H}$ i $\mathcal{K}$ normirani prostori i neka je $A : \mathcal{H} \to \mathcal{K}$ linearan operator. A se naziva **kompaktan operator** ako on zatvorenu jediničnu kuglu u prostoru $\mathcal{H}$ preslikava u relativno kompaktan podskup prostora $\mathcal{K}$, tj. ako je

$$Cl(\{A\xi;\ \xi \in \mathcal{H},\ \|\xi\| \leq 1\})$$

kompaktan podskup od $\mathcal{K}$. To je ekvivalentno svojstvu da za svaki ograničen niz $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ u $\mathcal{H}$ niz $(A\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ima konvergentan podniz. Važna posljedica Arzelà–Ascolijevog teorema je da su neki integralni operatori kompaktni: ako je μ mjera na kompaktnom Hausdorffovom topološkom prostoru T i ako je $K : T \times T \to \mathbb{C}$ neprekidna funkcija, onda je operator A na Hilbertovom prostoru $L_2(T, \mu)$, definiran sa

$$(Af)(t) = \int_T K(t,s)f(s)\mathrm{d}\mu(s), \qquad t \in T, \quad f \in L_2(T,\mu),$$

kompaktan. Osnovni teorem o kompaktnim hermitskim operatorima na Hilbertovom prostoru je:

Teorem 1.1.17. (**Spektralni teorem za kompaktan hermitski operator**) *Neka je $\mathcal{H}$ Hilbertov prostor i $A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ kompaktan hermitski operator.*

(*a*) *Spektar $Sp(A) = \{\lambda \in \mathbb{C};\ \lambda I - A \notin \mathcal{GB}(\mathcal{H})\}$ je prebrojiv podskup od $\mathbb{R}$.*

(*b*) *Svaki $\lambda \in Sp(A) \setminus \{0\}$ je svojstvena vrijednost od A i pripadni svojstveni potprostor*

$$\mathcal{H}_\lambda(A) = N(\lambda I - A) = \{\xi \in \mathcal{H};\ A\xi = \lambda\xi\}$$

je konačnodimenzionalan.

(*c*) *Ako je $Sp(A)$ beskonačan skup, svaki niz međusobno različitih elemenata od $Sp(A)$ konvergira prema 0. Drugim riječima, 0 je gomilište od $Sp(A)$ i to jedino.*

(*d*) *Vrijedi*

$$\mathcal{H} = N(A) \oplus \bigoplus_{\lambda\in Sp(A)\setminus\{0\}} \mathcal{H}_\lambda(A).$$

Teorem 1.1.18. *Neka je π unitarna reprezentacija lokalno kompaktne grupe G na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$ takva da je operator $\pi(f)$ kompaktan za svaku funkciju $f \in C_0(G)$. Tada je π ortogonalna suma ireducibilnih subreprezentacija, tj. postoji skup $\mathcal{T}$ zatvorenih $\pi(G)$–invarijantnih međusobno ortogonalnih potprostora od $\mathcal{H}$ takvih da su sve subreprezentacije $\pi_\mathcal{L}$, $\mathcal{L} \in \mathcal{T}$, ireducibilne i da je*

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{\mathcal{L}\in\mathcal{T}} \mathcal{L}.$$

Nadalje, tada je za svaki $\mathcal{L} \in \mathcal{T}$ skup $\{\mathcal{M} \in \mathcal{T};\ \pi_\mathcal{M} \simeq \pi_\mathcal{L}\}$ konačan.

Dokaz: Neka je $\mathcal{S}$ skup svih skupova zatvorenih međusobno ortogonalnih $\pi(G)$–invarijantnih potprostora od $\mathcal{H}$ takvih da su sve pripadne subreprezentacije ireducibilne. Skup $\mathcal{S}$ je parcijalno uređen inkluzijom i lako se vidi da zadovoljava uvjet Zornove leme. Neka je $\mathcal{T}$ maksimalni element od $\mathcal{S}$ i neka je $\mathcal{K}$ zatvarač direktne sume potprostora u $\mathcal{T}$, tj.

$$\mathcal{K} = \bigoplus_{\mathcal{L}\in\mathcal{T}} \mathcal{L}.$$

Treba dokazati da je $\mathcal{K} = \mathcal{H}$. Pretpostavimo suprotno da je $\mathcal{K} \neq \mathcal{H}$. Tada je $\mathcal{K}^\perp \neq \{0\}$ zatvoren $\pi(G)-$invarijantan potprostor od $\mathcal{H}$. Subreprezentacija $\pi_{\mathcal{K}^\perp}$ algebre $C_0(G)$ je nedegenerirana, pa postoji $f \in C_0(G)$ takav da je $f = f^*$ i $\pi_{\mathcal{K}^\perp}(f) \neq 0$. Kako je operator $\pi_{\mathcal{K}^\perp}(f)$ hermitski i kompaktan prema teoremu 1.1.17. postoji $\lambda \in \mathbb{R}^*$ takav da je svojstveni potprostor $X = \{\xi \in \mathcal{K}^\perp;\ \pi(f)\xi = \lambda\xi\}$ različit od $\{0\}$ i taj je potprostor konačnodimenzionalan. Neka je $Y \neq \{0\}$ potprostor od X najmanje dimenzije sa svojstvom da je $Y = \mathcal{L} \cap X$ za neki zatvoren $\pi(G)-$invarijantan potprostor od $\mathcal{K}^\perp$. Neka je $\mathcal{L}$ najmanji zatvoren $\pi(G)-$invarijantan potprostor od $\mathcal{K}^\perp$ koji sadrži Y. Tada je subreprezentacija $\pi_{\mathcal{L}}$ ireducibilna. Doista, pretpostavimo da je $\mathcal{L} = \mathcal{M} \oplus \mathcal{N}$, gdje su $\mathcal{M}$ i $\mathcal{N}$ zatvoreni $\pi(G)-$invarijantni potprostori. Budući da su potprostori $\mathcal{M}$ i $\mathcal{N}$ invarijantni s obzirom na operator $\pi(f)$, slijedi da je svojstveni potprostor Y sadržan u jednom od njih, npr. u $\mathcal{M}$. Zbog zahtjeva minimalnosti slijedi da je $\mathcal{M} = \mathcal{L}$, dakle, $\mathcal{N} = \{0\}$. Time je dokazana ireducibilnost subreprezentacije $\pi_{\mathcal{L}}$. No tada je $\mathcal{T} \cup \{\mathcal{L}\} \in \mathcal{S}$ što se protivi maksimalnosti $\mathcal{T}$ u parcijalno uređenom skupu $\mathcal{S}$. Ova kontradikcija pokazuje da je $\mathcal{K}^\perp = \{0\}$, tj. $\mathcal{K} = \mathcal{H}$.

Napokon, posljednja tvrdnja slijedi iz konačne dimenzionalnosti svojstvenih potprostora kompaktnih operatora za svojstvene vrijednosti $\neq 0$.

1.2 Kvadratno integrabilne reprezentacije

Neka je π reprezentacija lokalno kompaktne grupe G na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$. Za vektore $\xi, \eta \in \mathcal{H}$ definiramo neprekidnu funkciju $\pi_{\xi,\eta} : G \to \mathbb{C}$ sa

$$\pi_{\xi,\eta}(x) = (\pi(x)\xi|\eta), \qquad x \in G.$$

Svaka takva funkcija zove se **matrični koeficijent reprezentacije** π.

Neka je sada μ lijeva Haarova mjera na G i $L_2(G,\mu)$ Hilbertov prostor kvadratno integrabilnih funkcija na grupi G sa skalarnim produktom

$$(f|g) = \int_G f(x)\overline{g(x)}\mathrm{d}\mu(x), \qquad f, g \in L_2(G,\mu).$$

Operatori lijevog pomaka λ_x, $x \in G$, definiraju reprezentaciju od G na Hilbertovom prostoru $L_2(G,\mu)$. Neprekidnost homomorfizma $\lambda : G \to \mathcal{GB}(L_2(G,\mu))$ slijedi iz propozicije 1.1.8. Zbog lijeve invarijantnosti mjere μ svi operatori λ_x je unitaran, odnosno, λ je unitarna reprezentacija. Ona se zove **lijeva regularna reprezentacija** grupe G. Sasvim analogno definira se **desna regularna reprezentacija** ρ od G. To je reprezentacija pomoću desnih pomaka ρ_x, $x \in G$, na Hilbertovom prostoru $L_2(G,\check{\mu})$. Primijetimo da su te dvije reprezentacije ekvivalentne. Naime, operator U definiran na prostoru $L_2(G,\mu)$ pomoću invertiranja

$$(Tf)(x) = \check{f}(x) = f\left(x^{-1}\right), \qquad f \in L_2(G,\mu),$$

je izometrički izomorfizam Hilbertovog prostora $L_2(G,\mu)$ na Hilbertov prostor $L_2(G,\check{\mu})$ i vrijedi $T\lambda_x = \rho_x T \ \ \forall x \in G$.

Kvadratno integrabilna reprezentacija od G je unitarna ireducibilna reprezentacija od G na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$ takva da postoje vektori $\xi, \eta \in \mathcal{H}$ različiti od nule takvi da je matrični koeficijent $\pi_{\xi,\eta}$ kvadratno integrabilna funkcija na G u odnosu na desnu Haarovu mjeru $\check{\mu}$.

Teorem 1.2.1. (*a*) *Neka je π kvadratno integrabilna reprezentacija od G na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$. Tada su svi matrični koeficijenti $\pi_{\xi,\eta}$, $\xi, \eta \in \mathcal{H}$, kvadratno integrabilne funkcije na G u odnosu na desnu Haarovu mjeru $\check{\mu}$. Nadalje, postoji izometrija $U \in Hom_G(\mathcal{H}, L_2(G,\check{\mu}))$ i njena je slika zatvoren ρ_G-invarijantan potprostor od $L_2(G,\check{\mu})$ sadržan u $C(G)$. Posebno, reprezentacija π ekvivalentna je subreprezentaciji desne regularne reprezentacije ρ.*

(*b*) *Svaka ireducibilna subreprezentacija regularne reprezentacije je kvadratno integrabilna.*

Dokaz: (*a*) Neka su $\xi_0, \eta_0 \in \mathcal{H}$ jedinični vektori takvi da je matrični koeficijent π_{ξ_0,η_0} kvadratno integrabilna funkcija. Stavimo

$$W = \{\xi \in \mathcal{H};\ \pi_{\xi,\eta_0} \in L_2(G,\check{\mu})\}.$$

Tada je W potprostor prostora $\mathcal{H}$ koji sadrži vektor ξ_0, dakle, $W \neq \{0\}$. Za $x, y \in G$ i $\xi, \eta \in \mathcal{H}$ imamo

$$\pi_{\pi(x)\xi,\eta}(y) = (\pi(y)\pi(x)\xi|\eta) = (\pi(yx)\xi|\eta) = \pi_{\xi,\eta}(yx) = (\rho_x\pi_{\xi,\eta})(y).$$

Dakle, ako je $\pi_{\xi,\eta}$ kvadratno integrabilna funkcija (u odnosu na $\check{\mu}$) onda je i $\pi_{\pi(x)\xi,\eta}$ kvadratno integrabilna za svaki $x \in G$. Posebno, za $\xi \in W$ je $\pi(x)\xi \in W$ za svaki $x \in G$. Dakle, potprostor W je $\pi(G)-$invarijantan. Kako je reprezentacija π ireducibilna, slijedi da je potprostor W gust u $\mathcal{H}$.

Definiramo linearan operator $A : W \to L_2(G, \check{\mu})$ sa $A\xi = \pi_{\xi,\eta_0}$, $\xi \in W$. Tada za $\xi \in W$ i $x \in G$ vrijedi
$$A\pi(x)\xi = \pi_{\pi(x)\xi,\eta_0} = \rho_x \pi_{\xi,\eta_0} = \rho_x A\xi.$$
Na prostoru W definiramo novi skalarni produkt $\langle \cdot | \cdot \rangle$ ovako:
$$\langle \xi | \eta \rangle = (\xi|\eta)_{\mathcal{H}} + (A\xi|A\eta)_{L_2(G,\check{\mu})}, \qquad \xi, \eta \in W.$$
S tim skalarnim produktom unitaran prostor W je potpun, odnosno, Hilbertov. Doista, neka je $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cuchyjev niz u unitarnom prostoru W. Iz definicije skalarnog produkta na W slijedi da je tada $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyjev niz u Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$ i $(A\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ je Cauchyjev niz u Hilbertovom prostoru $L_2(G, \check{\mu})$. Neka je
$$\xi = \lim_{n\to\infty} \xi_n \quad \text{u prostoru} \quad \mathcal{H} \qquad \text{i} \qquad f = \lim_{n\to\infty} A\xi_n \quad \text{u prostoru} \quad L_2(G, \check{\mu}).$$
Iz Lebesgueove teorije integracije slijedi da tada postoji podniz niza funkcija $(A\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ koji konvergira gotovo svuda predstavniku elementa $f \in L_2(G, \check{\mu})$. S druge strane za svaki $x \in G$ vrijedi
$$|(A\xi_n)(x) - \pi_{\xi,\eta_0}(x)| = |\pi_{\xi_n,\eta_0}(x) - \pi_{\xi,\eta_0}(x)| =$$
$$= |(\pi(x)\xi_n|\eta_0) - (\pi(x)\xi|\eta_0)| = |(\pi(x)(\xi_n - \xi_0)|\eta_0)| \leq \|\xi_n - \xi\|.$$
To pokazuje da niz funkcija $(A\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uniformno na G konvergira funkciji π_{ξ,η_0}. Dakle, predstavnik elemnta $f \in L_2(G, \check{\mu})$ gotovu svuda je jednak funkciji π_{ξ,η_0}. Posebno, to znači da je $\pi_{\xi,\eta_0} \in L_2(G, \check{\mu})$, odnosno, $\xi \in W$. Kako je ξ limes niza $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ u Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$, a $f = \pi_{\xi,\eta_0} = A\xi$ je limes niza $(A\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ u Hilbertovom prostoru $L_2(G, \check{\mu})$, slijedi da je ξ limes niza $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ u unitarnom prostoru W. Time je dokazana potpunost unitarnog prostora W.

Neka je $S : W \to \mathcal{H}$ kanonska inkluzija. Tada je S ograničen linearan operator s Hilbertovog prostora W u Hilbertov prostor $\mathcal{H}$. Neka je $T : \mathcal{H} \to W$ adjungiran operator, $T = S^*$. Tada možemo promatrati T kao linearan operator sa $\mathcal{H}$ u $\mathcal{H}$. Tada je
$$(T\xi|\eta) = (\xi|S\eta) \qquad \forall \xi \in \mathcal{H} \quad \text{i} \quad \forall \eta \in W.$$
Nadalje, za $x \in G$, $\xi \in \mathcal{H}$ i $\eta \in W$ imamo
$$(T\pi(x)\xi|\eta) = (\pi(x)\xi|S\eta) = (\pi(x)\xi|\eta) = (\xi|\pi(x^{-1})\eta) = (\xi|S\pi(x^{-1})\eta) = (T\xi|\pi(x^{-1})\eta) = (\pi(x)T\xi|\eta).$$
Kako je potprostor W gust u $\mathcal{H}$, slijedi da je $T\pi(x)\xi = \pi(x)T\xi$. To znači da su zadovoljeni uvjeti teorema 1.1.14. uz $V = \mathcal{H}$. Prema tom teoremu vrijedi $T = \lambda I_{\mathcal{H}}$ za neki $\lambda \in \mathbb{C}$. Budući da je T adjungiran operator inkluzije $S : W \to \mathcal{H}$, slijedi da je $\lambda = 1$, $W = \mathcal{H}$ i $S = I_{\mathcal{H}}$.

Kako je $\langle \cdot | \cdot \rangle$ drugi skalarni produkt na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$, postoji pozitivan operator $B \in \mathcal{GB}(\mathcal{H})$ takav da je
$$\langle \xi | \eta \rangle = (B\xi|\eta)_{\mathcal{H}} \qquad \forall \xi, \eta \in \mathcal{H}.$$
To znači da je
$$(B\xi|\eta)_{\mathcal{H}} = (\xi|\eta)_{\mathcal{H}} + (A\xi|A\eta)_{L_2(G,\check{\mu})} \qquad \forall \xi, \eta \in \mathcal{H}.$$
Kako je $A\pi(x) = \rho_x A \ \ \forall x \in G$, odavde za proizvoljne $x \in G$ i $\xi, \eta \in \mathcal{H}$ nalazimo
$$(B\pi(x)\xi|\eta)_{\mathcal{H}} = (\pi(x)\xi|\eta)_{\mathcal{H}} + (A\pi(x)\xi|A\eta)_{L_2(G,\check{\mu})} = (\pi(x)\xi|\eta)_{\mathcal{H}} + (\rho_x A\xi|A\eta)_{L_2(G,\check{\mu})} =$$
$$= (\pi(x)\xi|\eta) + (A\xi|\rho_{x^{-1}} A\eta)_{L_2(G,\check{\mu})} = (\xi|\pi(x^{-1})\eta)_{\mathcal{H}} + (A\xi|A\pi(x^{-1})\eta)_{L_2(G,\check{\mu})} =$$
$$= \langle \xi | \pi(x^{-1}\eta \rangle = (B\xi|\pi(x^{-1})\eta)_{\mathcal{H}} = (\pi(x)B\xi|\eta)_{\mathcal{H}}.$$

To pokazuje da je $B\pi(x) = \pi(x)B \ \ \forall x \in G$. Sada iz teorema 1.1.10. slijedi da je $B = \lambda I_{\mathcal{H}}$ za neki $\lambda \in \mathbb{C}$. No B je pozitivan invertibilan operator, pa slijedi da je $\lambda > 0$. Nadalje, za $\xi \in \mathcal{H}$ je

$$\lambda\|\xi\|^2_{\mathcal{H}} = (B\xi|\xi)_{\mathcal{H}} = (\xi|\xi)_{\mathcal{H}} + (A\xi|A\xi)_{L_2(G,\check{\mu})} = \|\xi\|^2_{\mathcal{H}} + \|A\xi\|^2_{L_2(G,\check{\mu})},$$

pa vidimo da je $\lambda > 1$. Stavimo $U = (\lambda-1)^{-\frac{1}{2}}A$. Tada je $U \in Hom_G(\mathcal{H}, L_2(G,\check{\mu}))$ i za $\xi \in \mathcal{H}$ je

$$\|U\xi\|^2_{L_2(G,\check{\mu})} = (\lambda-1)^{-1}(A\xi|A\xi)_{L_2(G,\check{\mu})} = (\lambda-1)^{-1}[\lambda(\xi|\xi)_{\mathcal{H}} - (\xi|\xi)_{\mathcal{H}}] = \|\xi\|^2_{\mathcal{H}},$$

dakle, U je izometrija. Po definiciji operatora A slika od U sastoji se od neprekidnih funkcija. Time je tvrdnja (a) dokazana.

(b) Neka je $\mathcal{H}$ zatvoren ρ_G-invarijantan potprostor Hilbertovog prostora $L_2(G,\check{\mu})$ takav da je subreprezentacija $\pi = \rho_{\mathcal{H}}$ ireducibilna. Neka je P ortogonalni projektor Hilbertovog prostora $L_2(G,\check{\mu})$ na potprostor $\mathcal{H}$. Tada je $P(C_0(G))$ gust potprostor od $\mathcal{H}$ i, posebno, $P(C_0(G)) \neq \{0\}$. Neka su $f, g \in P(C_0(G)) \setminus \{0\}$ i neka su $\varphi, \psi \in C_0(G)$ takve da je $f = P\varphi$ i $g = P\psi$. Sada je za $x \in G$

$$\pi_{f,g}(x) = (\pi(x)P\varphi|P\psi)_{L_2(G,\check{\mu})} = (P\rho_x\varphi|P\psi)_{L_2(G,\check{\mu})}.$$

Stoga je

$$|\pi_{f,g}(x)| = \left|(P\rho_x\varphi|P\psi)_{L_2(G,\check{\mu})}\right| \leq \left|(\rho_x\varphi|\psi)_{L_2(G,\check{\mu})}\right|.$$

Međutim, uz oznake za grupovnu algebru $C_0(G)$ imamo

$$(\rho_x\varphi|\psi)_{L_2(G,\check{\mu})} = \int_G \varphi(yx)\overline{\psi(y)}\mathrm{d}\check{\mu}(y) = \int_G \Delta(y^{-1})\psi^*(y^{-1})\varphi(yx)\mathrm{d}\check{\mu}(y).$$

Stavimo li $\chi = \Delta\psi^* \in C_0(G)$, dobivamo

$$(\rho_x\varphi|\psi)_{L_2(G,\check{\mu})} = \int_G \chi(y^{-1})\varphi(yx)\mathrm{d}\check{\mu}(y) = \int_G \chi(y)\varphi(y^{-1}x)\mathrm{d}\mu(y) = (\chi * \varphi)(x).$$

Dakle,

$$|\pi_{f,g}(x)| \leq |(\chi * \varphi)(x)|,$$

a kako je $\chi * \varphi \in C_0(G) \subseteq L_2(G,\check{\mu})$, slijedi da je i $\pi_{f,g} \in L_2(G,\check{\mu})$. Time je dokazano da je reprezentacija π kvadratno integrabilna.

Mala modifikacija prethodnog dokaza daje nam sljedeće relacije ortogonalnosti za matrične elemente kvadratno integrabilnih reprezentacija:

Teorem 1.2.2. *Neka su π i σ kvadratno integrabilne reprezentacije od G na Hilbertovim prostorima $\mathcal{H}$ i $\mathcal{K}$.*

(a) *Ako π i σ nisu ekvivalentne, onda je*

$$(\pi_{\xi,\xi'}|\sigma_{\eta,\eta'})_{L_2(G,\check{\mu})} = 0 \qquad \forall \xi,\xi' \in \mathcal{H} \quad i \quad \forall \eta,\eta' \in \mathcal{K}.$$

(b) *Postoji $d(\pi) > 0$ takav da vrijedi*

$$(\pi_{\xi,\xi'}|\pi_{\eta,\eta'})_{L_2(G,\check{\mu})} = \frac{1}{d(\pi)}(\xi|\eta)(\eta'|\xi') \qquad \forall \xi,\xi',\eta,\eta' \in \mathcal{H}.$$

Broj iz tvrdnje (b) zove se **formalna dimenzija** ili **formalni stupanj** kvadratno integrabilne reprezentacije π. Motiv za takav naziv vidjet ćemo u sljedećem odjeljku. Naime, za kompaktnu grupu G svaka ireducibilna unitarna reprezentacija je konačnodimenzionalna i, naravno, kvadratno integrabilna. Nadalje, ako je $\mu = \check{\mu}$ normirana Haarova mjera, tj. takva da je

$$\mu(1) = \int_G \mathrm{d}\mu(x) = 1,$$

onda je $d(\pi) = \dim \mathcal{H}$.

Dokaz: (a) Fiksirajmo $\xi' \in \mathcal{H}$ i $\eta' \in \mathcal{K}$. Neka su $T : \mathcal{H} \to L_2(G, \check{\mu})$ i $S : \mathcal{K} \to L_2(G, \check{\mu})$ preplitanja reprezentacija π i σ s desnom regularnom reprezentacijom ρ definirana kao u dokazu teorema 1.2.1.

$$(T\xi)(x) = (\pi(x)\xi|\xi')_{\mathcal{H}}, \qquad (S\eta)(x) = (\sigma(x)\eta|\eta')_{\mathcal{K}}, \qquad \xi \in \mathcal{H}, \quad \eta \in \mathcal{K}, \quad x \in G.$$

Sada je $(\xi, \eta) \mapsto (T\xi|S\eta)_{L_2(G,\check{\mu})}$ ograničena seskvilinearna forma na $\mathcal{H} \times \mathcal{K}$, pa postoji ograničen linearan operator $A : \mathcal{K} \to \mathcal{H}$ takav da je

$$(T\xi|S\eta)_{L_2(G,\check{\mu})} = (\xi|A\eta)_{\mathcal{H}} \qquad \forall \xi \in \mathcal{H} \text{i} \quad \forall \eta \in \mathcal{K}.$$

Sada je za svaki $x \in G$ i za $\xi \in \mathcal{H}$ i $\eta \in \mathcal{K}$

$$(\xi|A\sigma(x)\eta)_{\mathcal{H}} = (T\xi|S\sigma(x)\eta)_{L_2(G,\check{\mu})} = (T\xi|\rho_x S\eta)_{L_2(G,\check{\mu})} = (\rho_{x^{-1}}T\xi|S\eta)_{L_2(G,\check{\mu})} =$$
$$= (T\pi(x^{-1})\xi|S\eta)_{L_2(G,\check{\mu})} = (\pi(x^{-1})\xi|A\eta)_{\mathcal{H}} = (\xi|\pi(x)A\eta)_{\mathcal{H}}.$$

To pokazuje da je $A\sigma(x) = \pi(x)A \ \forall x \in G$, tj. A je preplitanje reprezentacije σ s reprezentacijom π. Kako su σ i π ireducibilne neekvivalentne reprezentacije, slijedi da je $A = 0$. No to je upravo tvrdnja (a)

(b) Neka je sada $\pi = \sigma$. Fiksirajmo vektore $\xi', \eta' \in \mathcal{H}$. Neka su sada $T, S \in Hom_G(\mathcal{H}, L_2(G, \check{\mu})$ definirani kao u dokazu (a) :

$$(T\xi)(x) = (\pi(x)\xi|\xi')_{\mathcal{H}}, \qquad (S\eta)(x) = (\pi(x)\eta|\eta')_{\mathcal{H}}, \qquad \xi, \eta\mathcal{H}, \quad x \in G.$$

Isti argument kao u dokazu (a) pokazuje da postoji $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ takav da je

$$(T\xi|S\eta)_{L_2(G,\check{\mu})} = (\xi|A\eta)_{\mathcal{H}} \qquad \forall \xi, \eta \in \mathcal{H}.$$

Nadalje, $A \in End_G(\mathcal{H})$. Prema teoremu 1.1.10. je $A = \lambda(\xi', \eta')I$ za neki $\lambda(\xi', \eta') \in \mathbb{C}$. To znači da je

$$\int_G (\pi(x)\xi|\xi')_{\mathcal{H}} \overline{(\pi(x)\eta|\eta')_{\mathcal{H}}} \mathrm{d}\check{\mu}(x) = \overline{\lambda(\xi', \eta')}(\xi|\eta)_{\mathcal{H}}.$$

Sada je očito preslikavanje $(\eta', \xi') \mapsto \overline{\lambda(\xi', \eta')}$ ograničena seskvilinearna forma na $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ pa postoji $B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ takav da je $\overline{\lambda(\xi', \eta')} = (B\eta'|\xi')$. Dakle,

$$\int_G (\pi(x)\xi|\xi')_{\mathcal{H}} \overline{(\pi(x)\eta|\eta')_{\mathcal{H}}} \mathrm{d}\check{\mu}(x) = (\xi|\eta)_{\mathcal{H}}(B\eta'|\xi')_{\mathcal{H}}, \qquad \xi, \xi', \eta, \eta' \in \mathcal{H}.$$

Fiksirajmo sada $\xi, \eta \in \mathcal{H}$ i definiramo operatore $U, V \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, L_2(G, \check{\mu}))$ sa

$$(U\xi')(x) = \overline{(\pi(x)\xi|\xi')_{\mathcal{H}}}, \qquad (V\eta')(x) = \overline{(\pi(x)\eta|\eta')_{\mathcal{H}}}, \qquad , \xi', \eta' \in \mathcal{H}, \quad x \in G.$$

Sasvim analogno se vidi da su to preplitanja reprezentacije π s desnom regularnom reprezentacijom ρ_G. Nadalje, preslikavanje $(\xi', \eta') \mapsto (U\xi'|V\eta')_{L_2(G,\check{\mu})}$ je ograničena seskvilinearna forma na $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$, pa postoji $C \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ takav da je

$$(U\xi'|V\eta')_{L_2(G,\check{\mu})} = (C\xi'|\eta') \qquad \forall \xi', \eta' \in \mathcal{H}.$$

Nadalje, nalazimo da je $C \in End_G(\mathcal{H})$, pa po teoremu 1.1.10. postoji $\mu(\xi, \eta) \in \mathbb{C}$ takav da je $C = \mu(\xi, \eta)I$. To znači da je

$$\int_G \overline{(\pi(x)\xi|\xi')_{\mathcal{H}}} (\pi(x)\eta|\eta')_{\mathcal{H}} \mathrm{d}\check{\mu}(x) = \mu(\xi, \eta)(\xi'|\eta') \qquad \forall \xi, \xi', \eta, \eta' \in \mathcal{H},$$

odnosno,

$$\int_G (\pi(x)\xi|\xi')_{\mathcal{H}} \overline{(\pi(x)\eta|\eta')_{\mathcal{H}}} \mathrm{d}\check{\mu}(x) = \overline{\mu(\xi, \eta)}(\eta'|\xi') \qquad \forall \xi, \xi', \eta, \eta' \in \mathcal{H}.$$

Usporedbom s prije dokazanim nalazimo da vrijedi

$$\overline{\lambda(\xi',\eta')}(\xi|\eta) = \overline{\mu(\xi,\eta)}(\eta',\xi') \qquad \forall \xi,\xi',\eta,\eta' \in \mathcal{H}.$$

Neka je sada $\xi \in \mathcal{H}$, $\|\xi\| = 1$. Tada imamo za proizvoljne $\xi',\eta' \in \mathcal{H}$

$$\overline{\lambda(\xi',\eta')} = \overline{\lambda(\xi',\eta')}(\xi|\xi) = \overline{\mu(\xi,\xi)}(\eta'|\xi')_{\mathcal{H}}.$$

To pokazuje da za neki $\alpha \in \mathbb{C}$ vrijedi $\overline{\lambda(\xi',\eta')} = \alpha(\eta'|\xi')_{\mathcal{H}}$. Dakle,

$$\int_G (\pi(x)\xi|\xi')_{\mathcal{H}} \overline{(\pi(x)\eta|\eta')}_{\mathcal{H}} \mathrm{d}\check{\mu}(x) = \alpha(\xi|\eta)_{\mathcal{H}}(\eta'|\xi')_{\mathcal{H}} \qquad \forall \xi,\xi',\eta,\eta' \in \mathcal{H}.$$

Ako je opet $\xi \in \mathcal{H}$, $\|\xi\| = 1$, dobivamo

$$\alpha = \alpha(\xi|\xi)_{\mathcal{H}}(\xi|\xi)_{\mathcal{H}} = \int_G |(\pi(x)\xi|\xi)_{\mathcal{H}}|^2 \,\mathrm{d}\check{\mu}(x) > 0.$$

Uz oznaku $d(\pi) = \alpha^{-1}$ dobivamo tvrdnju (b).

1.3 Reprezentacije kompaktnih grupa

U ovom odjeljku G je kompaktna grupa i μ Haarova mjera na G koja je normirana, tj. takva da je $\mu(1) = 1$.

Teorem 1.3.1. *Neka je π reprezentacija kompaktne grupe G na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$. Tada na prostoru $\mathcal{H}$ postoji skalarni produkt $\langle\,\cdot\,|\,\cdot\,\rangle$ ekvivalentan originalnom skalarnom produktu $(\,\cdot\,|\,\cdot\,)$ u odnosu na koji je reprezentacija π unitarna.*

Dokaz: Stavimo
$$\langle\xi|\eta\rangle = \int_G (\pi(x)\xi|\pi(x)\eta)\mathrm{d}\mu(x), \qquad \xi,\eta\in\mathcal{H}.$$
Očito je $\langle\,\cdot\,|\,\cdot\,\rangle$ dobro definirana pozitivna hermitska forma na $\mathcal{H}\times\mathcal{H}$. Nadalje, kako je G kompaktna, prema posljednjoj tvrdnji propozicije 1.1.9. postoji $C>0$ takav da je $\|\pi(x)\|\leq C \;\; \forall x\in G$; pri tome je $\|\cdot\|$ oznaka normu na $\mathcal{H}$ pridruženu skalarnom produktu $(\,\cdot\,|\,\cdot\,)$, tj. $\|\xi\| = \sqrt{(\xi|\xi)}$, a također i za pripadnu operatorsku normu na $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Dakle, vrijedi $\|\pi(x)\xi\|\leq C\|\xi\| \;\; \forall\xi\in\mathcal{H}$. Nadalje, za svaki $\xi\in\mathcal{H}$ i svaki $x\in G$ imamo i
$$\|\xi\| = \|\pi(x^{-1})\pi(x)\xi\| \leq C\|\pi(x)\xi\|,$$
dakle,
$$\|\pi(x)\xi\| \geq C^{-1}\|\xi\| \qquad \forall\xi\in\mathcal{H} \quad \text{i} \quad \forall x\in G.$$
Slijedi
$$C^{-2}(\xi|\xi) \leq \langle\xi|\xi\rangle \leq C^2(\xi|\xi) \qquad \forall\xi\in\mathcal{H}.$$
To pokazuje da je $\langle\,\cdot\,|\,\cdot\,\rangle$ skalarni produkt na prostoru $\mathcal{H}$ koji je ekvivalentan originalnom skalarnom produktu $(\,\cdot\,|\,\cdot\,)$. Napokon, iz desne invarijantnosti mjere μ slijedi da su svi operatori $\pi(y)$, $y\in G$, unitarni u odnosu na novi skalarni produkt:
$$\langle\pi(y)\xi|\pi(y)\eta\rangle = \int_G (\pi(xy)\xi|\pi(xy)\eta)\mathrm{d}\mu(x) = \int_G (\pi(x)\xi|\pi(x)\eta)\mathrm{d}\mu(x) = \langle\xi|\eta\rangle.$$

Zbog teorema 1.3.1. u daljnjem ćemo promatrati samo unitarne reprezentacije kompaktne grupe G.

Neka je sada π unitarna ireducibilna reprezentacija kompaktne grupe G na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$. Zbog kompaktnosti grupe G svi matrični koeficijenti $\pi_{\xi,\eta}$, $\xi,\eta\in\mathcal{H}$, su kvadratno integrabilne funkcije na G. Prema tome, svaka je ireducibilna unitarna reprezentacija od G kvadratno integrabilna, a to prema teoremu 1.2.1. znači da je ekvivalentna subreprezentaciji desne regularne reprezentacije ρ grupe G na Hilbertovom prostoru $L_2(G,\mu)$.

Teorem 1.3.2. *Neka je π ireducibilna unitarna reprezentacija grupe G na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$. Tada je prostor $\mathcal{H}$ konačnodimenzionalan i njegova je dimenzija jednaka formalnom stupnju $d(\pi)$ reprezentacije π.*

Dokaz: Prema tvrdnji (a) teorema 1.2.1. možemo pretpostaviti da je $\mathcal{H}$ zatvoren potprostor Hilbertovog prostora $L_2(G,\mu)$ koji je sadržan u $C(G)$, koji je $\rho(G)-$invarijantan i π je subreprezentacija $\rho_{\mathcal{H}}$ desne regularne reprezentacije ρ. Neka je $\|\cdot\|_2$ oznaka za L_2-normu, a $\|\cdot\|_\infty$ oznaka za maksimum$-$normu na $C(G)$. Zbog normiranosti mjere μ vrijedi
$$\|f\|_2 \leq \|f\|_\infty \qquad \forall f\in C(G).$$

Neka je $T : \mathcal{H} \to L_2(G,\mu)$ inkluzija. Prema gornjoj nejednakosti T je ograničen operator s normiranog prostora $(\mathcal{H}, \|\cdot\|_\infty)$ u Hilbertov prostor $(\mathcal{H}, \|\cdot\|_2$. Neka je $\mathcal{K}$ zatvarač potprostora $\mathcal{H}$ u Banachovom prostoru $C(G)$. Tada se T jedinstveno proširuje do ograničenog operatora sa $(\mathcal{K}, \|\cdot\|_\infty)$ u $(\mathcal{H}, \|\cdot\|_2)$. No kako je T identiteta na vektorskom prostoru $\mathcal{H}$, slijedi da je $\mathcal{K} = \mathcal{H}$, tj. $\mathcal{H}$ je zatvoren kao potprostor Banachovog prostora $C(G)$. Sada iz teorema o otvorenom preslikavanju slijedi da je identiteta na $\mathcal{H}$ ograničena i kao operator sa $(\mathcal{H}, \|\cdot\|_2)$ na $(\mathcal{H}, \|\cdot\|_\infty)$. Drugim riječima postoji $C > 0$ takav da je

$$\|f\|_\infty \leq C\|f\|_2 \qquad \forall f \in \mathcal{H}.$$

Neka je sada $\{f_1, \ldots, f_n\}$ ortonormiran skup u Hilbertovom prostoru $(\mathcal{H}, \|\cdot\|_2)$. Za bilo koje $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ i za $x \in G$ imamo

$$\left|\sum_{i=1}^n \lambda_i f_i(x)\right| \leq \left\|\sum_{i=1}^n \lambda_i f_i\right\|_\infty \leq C \left\|\sum_{i=1}^n \lambda_i f_i\right\|_2 = C\left(\sum_{i=1}^n |\lambda_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Za dano $x \in G$ izaberimo sada $\lambda_i = \overline{f_i(x)}$, $i = 1, \ldots, n$. Slijedi

$$\sum_{i=1}^n |f_i(x)|^2 \leq C\left(\sum_{i=1}^n |f_i(x)|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

To sada vrijedi za svako $x \in G$, a odatle slijedi da je

$$\sum_{i=1}^n |f_i(x)|^2 \leq C^2 \qquad \forall x \in G.$$

Stoga imamo

$$n = \sum_{i=1}^n \|f_i\|_2^2 = \sum_{i=1}^n \int_G |f_i(x)|^2 \, \mathrm{d}\mu(x) \leq C^2 \int_G \mathrm{d}\mu(x) = C^2.$$

Prema tome, broj elemenata bilo kojeg ortonormiranog podskupa Hilbertovog prostora $\mathcal{H}$ je $\leq C^2$. To pokazuje da je prostor $\mathcal{H}$ konačnodimenzionalan.

Neka je sada $n = \dim \mathcal{H}$ i neka je $\{f_1, \ldots, f_n\}$ ortonormirana baza od $\mathcal{H}$. Stavimo $\pi_{ij} = \pi_{f_i,f_j}$. Tada je za svaki $x \in G$ matrica $[\pi_{ij}(x)]_{i,j=1}^n$ unitarna. Prema tome,

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |\pi_{ij}(x)|^2 = n \qquad \forall x \in G.$$

Odatle i iz tvrdnje (b) teorema 1.2.2. zbog normiranosti mjere μ slijedi

$$n = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \int_G |\pi_{ij}(x)|^2 \, \mathrm{d}\mu(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (\pi_{ij}|\pi_{ij})_{L_2(G,\mu)} = n^2 \frac{1}{d(\pi)}.$$

Prema tome je $n = d(\pi)$.

U daljnjem sa $\hat{G}$ označavamo skup svih klasa ekvivalencije unitarnih ireducibilnih reprezentacija kompaktne grupe G. Za $\gamma \in \hat{G}$ označimo sa $L_2(G,\mu)(\gamma)$ sumu svih $\rho(G)-$invarijantnih zatvorenih (u stvari, konačnodimenzionalnih) potprostora $\mathcal{H}$ Hilbertovog prostora $L_2(G,\mu)$ takvih da je subreprezentacija $\rho_{\mathcal{H}}$ desne regularne reprezentacije ireducibilna i nalazi se u klasi ekvivalencije γ.

Za $\gamma \in \hat{G}$ označimo sa $d(\gamma)$ dimenziju (i formalni stupanj) bilo koje reprezentacije iz klase γ. Nadalje, neka je χ_γ **karakter** bilo koje reprezentacije π iz klase γ :

$$\chi_\gamma(x) = \operatorname{Tr}\pi(x), \qquad x \in G.$$

Napokon, neka je $\chi^\gamma = d(\gamma)\overline{\chi_\gamma}$.

Teorem 1.3.3. *(a) Svi potprostori $L_2(G,\mu)(\gamma)$, $\gamma \in \hat{G}$, su konačnodimenzionalni i vrijedi*

$$L_2(G,\mu) = \bigoplus_{\gamma\in\hat{G}} L_2(G,\mu)(\gamma).$$

(b) Za $\gamma, \sigma \in \hat{G}$ vrijedi

$$(\chi_\gamma|\chi_\sigma)_{L_2(G,\mu)} = \int_G \chi_\gamma)(x)\overline{\chi_\sigma(x)}\mathrm{d}\mu(x) = \delta_{\gamma,\sigma} = \begin{cases} 1 & \text{ako je } \gamma = \sigma \\ 0 & \text{ako je } \gamma \neq \sigma. \end{cases}$$

(c) Za $\gamma \in \hat{G}$ operator

$$\rho(\chi^\gamma) = d(\gamma)\int_G \overline{\chi_\gamma(x)}\rho_x \mathrm{d}\mu(x)$$

je ortogonalni projektor Hilbertovog prostora $L_2(G,\mu)$ na potprostor $L_2(G,\mu)(\gamma)$.

(d) Neka je $\gamma \in \hat{G}$ i neka je π ireducibilna unitarna reprezentacija od G na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$ u klasi γ. Ako je $\{\xi_1,\ldots,\xi_{d(\gamma)}\}$ ortonormirana baza od $\mathcal{H}$ i $\pi_{ij} = \pi_{\xi_i,\xi_j}$, onda je $\{\pi_{ij};\ 1 \leq i,j \leq d(\gamma)\}$ ortogonalna baza od $L_2(G,\mu)(\gamma)$. Posebno, $\dim L_2(G,\mu)(\gamma) = d(\gamma)^2$.

Dokaz: (a) Za $f \in C(G)$ operator $\rho(f)$ na Hilbertovom prostoru $L_2(G,\mu)$ zadan je sa

$$(\rho(f)g)(x) = \int_G f(y)(\rho_y g)(x)\mathrm{d}\mu(y) = \int_G f(y)g(xy)\mathrm{d}\mu(y) = \int_G g(y)f(x^{-1}y)\mathrm{d}\mu(y)$$

za $x \in G$ i $g \in L_2(G,\mu)$. Dakle, $\rho(f)$ je integralni operator s neprekidnom jezgrom $K(x,y) = f(x^{-1}y)$, pa je prema posljedici Arzelà–Ascolijevog teorema spomenutoj prije iskaza teorema 1.1.17. taj operator kompaktan. Sada iz teorema 1.1.18. slijedi da je Hilbertov prostor $L_2(G,\mu)$ ortogonalna suma potprostora $L_2(G,\mu)(\gamma)$, $\gamma \in \hat{G}$, i svaki je potprostor $L_2(G,\mu)(\gamma)$ konačnodimenzionalan.

(b) Ako je $\gamma \neq \sigma$, funkcije χ_γ i χ_σ su sume matričnih koeficijenata neekvivalentnih ireducibilnih reprezentacija, pa iz tvrdnje (a) teorema 1.2.2. slijedi da je $(\chi_\gamma|\chi_\sigma)_{L_2(G,\mu)} = 0$. Neka je sada $\gamma = \sigma$ i neka je π reprezentacija iz klase γ na $d(\gamma)-$dimenzionalnom Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$. Neka je $\{\xi_1,\ldots,\xi_{d(\gamma)}\}$ ortonormirana baza od $\mathcal{H}$ i neka je za $x \in G$ $[\pi_{ij}(x)]_{i,j=1}^{d(\gamma)}$ matrica operatora $\pi(x)$ u toj bazi, tj. $\pi_{ij} = \pi_{\xi_i,\xi_j}$. Sada iz tvrdnje (b) teorema 1.2.2. nalazimo

$$(\chi_\gamma|\chi_\gamma)_{L_2(G,\mu)} = \sum_{i=1}^{d(\gamma)}\sum_{j=1}^{d(\gamma)}(\pi_{ii}|\pi_{jj})_{L_2(G,\mu)} = \frac{1}{d(\gamma)}\sum_{i=1}^{d(\gamma)}\sum_{j=1}^{d(\gamma)}(\xi_i|\xi_j)_{\mathcal{H}}(\xi_j|\xi_i)_{\mathcal{H}} = 1.$$

Zadatak 1.3.1. *Dokažite da je $\rho(\chi^\gamma)|L_2(G,\mu)(\gamma) = I_{L_2(G,\mu)(\gamma)}$ i $L_2(G,\mu)(\sigma) \subseteq \operatorname{Ker}\rho(\chi^\gamma)$ za $\sigma \in \hat{G}$, $\sigma \neq \gamma$.*

Uputa: Za dokaz druge tvrdnje iskoristite tvrdnju (a) teorema 1.2.2. Za dokaz prve tvrdnje neka je $\mathcal{H}$ zatvoren (konačnodimenzionalan) $\rho(G)-$invarijantan potprostor od $L_2(G,\mu)$ takav da je subreprezentacija $\rho_{\mathcal{H}}$ ireducibilna u klasi γ. Ako je $\{f_1,\dots,f_{d(\gamma)}\}$ ortonormirana baza od $\mathcal{H}$, onda je

$$\chi^\gamma(x) = d(\gamma)(\overline{\rho_{f_1,f_1}(x)} + \cdots + \overline{\rho_{f_{d(\gamma)},f_{d(\gamma)}}}), \qquad x \in G.$$

Sada iskoristite tvrdnju (b) teorema 1.2.2. da dokažete da je $\rho(\chi^\gamma)f_j = f_j$ za $j = 1,\dots,d(\gamma)$, dakle, $\rho(\chi^\gamma)|\mathcal{H} = I_{\mathcal{H}}$. Odatle slijedi druga tvrdnja, jer je $L_2(G,\mu)(\gamma)$ suma takvih potprostora $\mathcal{H}$.

Tvrdnja (c) slijedi neposredno iz zadatka 1.3.1. jer je prema (a)

$$L_2(G,\mu)(\gamma)^\perp = \bigoplus_{\sigma\in\hat{G}\setminus\{\gamma\}} L_2(G,\mu)(\sigma).$$

(d) Prije svega, iz tvrdnje (b) teorema 1.2.2. vrijedi

$$(\pi_{ij}|\pi_{k\ell})_{L_2(G,\mu)} = \frac{1}{d(\gamma)}(\xi_i|\xi_k)_{\mathcal{H}}(\xi_\ell|\xi_j)_{\mathcal{H}} = \frac{1}{d(\gamma)}\delta_{ik}\delta_{j\ell}.$$

Prema tome, $\{\pi_{ij};\ 1 \le i,j \le d(\gamma)\}$ je ortogonalna baza u potprostoru X od $L_2(G,\mu)$ koji razapinje. Treba još dokazati da je $X = L_2(G,\mu)(\gamma)$.

Fiksirajmo $i \in \{1,\dots,d(\gamma)\}$ i označimo sa X_i potprostor od $L_2(G,\mu)$ razapet sa $\{\pi_{i1},\dots,\pi_{id(\gamma)}\}$. Za $x,y \in G$ i $1 \le j \le d(\gamma)$ vrijedi

$$(\rho_x\pi_{ij})(y) = \pi_{ij}(yx) = \sum_{k=1}^{d(\gamma)} \pi_{ik}(y)\pi_{kj}(x).$$

Prema tome,

$$\rho_x\pi_{ij} = \sum_{k=1}^{d(\gamma)} \pi_{kj}(x)\pi_{ik}, \qquad x \in G, \quad 1 \le j \le d(\gamma).$$

To pokazuje da je X_i $\rho(G)-$invarijantan potprostor od $L_2(G,\mu)$. Nadalje, ako sa $T : \mathcal{H} \to X_i$ označimo izomorfizam takav da je $T\xi_j = \pi_{ij}$, onda dobivamo

$$T\pi(x)\xi_j = T\sum_{k=1}^{d(\gamma)} \pi_{kj}(x)\xi_k = \sum_{k=1}^{d(\gamma)} \pi_{kj}(x)\pi_{ik} = \rho_x\pi_{ij} = \rho_x T\xi_j = \rho_{X_i}(x)T\xi_j.$$

Dakle, $T\pi(x) = \rho_{X_i}(x)T$ za svaki $x \in G$, što pokazuje da je subreprezentacija ρ_{X_i} ekvivalentna reprezentaciji π. Posebno, ta je subreprezentacija ireducibilna i nalazi se u klasi γ. Slijedi da je $X_i \subseteq L_2(G,\mu)(\gamma)$. Kako je $X = X_1 \dotplus \cdots \dotplus X_{d(\gamma)}$, slijedi inkluzija $X \subseteq L_2(G,\mu)(\gamma)$.

Dokažimo sada obrnutu inkluziju. Neka je $\mathcal{K}$ $\rho(G)-$invarijantan potprostor od $L_2(G,\mu)$ takav da je subreprezentacija $\rho_{\mathcal{K}}$ ireducibilna u klasi γ. Neka je $T : \mathcal{H} \to \mathcal{K}$ izomorfizam koji ostvaruje ekvivalenciju $\pi \simeq \rho_{\mathcal{K}}$, tj. takav da je $T\pi(x) = \rho_{\mathcal{K}}(x)T\ \ \forall x \in G$. Stavimo $f_j = T\xi_j$, $1 \le j \le d(\gamma)$. Tada je $\{f_1,\dots,f_{d(\gamma)}\}$ baza od $\mathcal{K}$. Nadalje, za $x,y \in G$ i $1 \le j \le d(\gamma)$ imamo redom

$$f_j(yx) = (\rho_x f_j)(y) = (\rho_{\mathcal{K}}(x)T\xi_j)(y) = (T\pi(x)\xi_j)(y) = \left(T\sum_{k=1}^{d(\gamma)} \pi_{kj}(x)\xi_k\right)(y) =$$

$$= \sum_{k=1}^{d(\gamma)} \pi_{kj}(x)(T\xi_k)(y) = \sum_{k=1}^{d(\gamma)} \pi_{kj}(x)f_k(y).$$

Posebno, za $y = e$ nalazimo

$$f_j(x) = \sum_{k=1}^{d(\gamma)} f_k(e)\pi_{kj}(x), \quad \forall x \in G, \quad \text{tj.} \quad f_j = \sum_{k=1}^{d(\gamma)} f_k(e)\pi_{kj} \in X.$$

To pokazuje da je $\mathcal{K} \subseteq X$, a kako je $L_2(G,\mu)(\gamma)$ suma takvih potprostora $\mathcal{K}$, dobivamo inkluziju $L_2(G,\mu)(\gamma) \subseteq X$.

Iz tvrdnji (a) i (d) teorema 1.3.3. neposredno slijedi

Teorem 1.3.4. (**Peter–Weyl**) *Iz svake klase $\gamma \in \hat{G}$ izaberimo ireducibilnu unitarnu reprezentaciju π^γ na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}_\gamma$ i ortonormiranu bazu $\{\xi_1^\gamma, \ldots, \xi_{d(\gamma)}^\gamma\}$ u $\mathcal{H}_\gamma$. Nadalje, za $x \in G$ neka je $\left[\pi_{ij}^\gamma(x)\right]_{i,j=1}^{d(\gamma)}$ matrica operatora $\pi^\gamma(x)$ u toj bazi. Tada je*

$$\{\sqrt{d(\gamma)}\pi_{ij}^\gamma;\ 1 \leq i,j \leq d(\gamma),\ \ \gamma \in \hat{G}\}$$

ortonormirana baza Hilbertovog prostora $L_2(G,\mu)$.

Neka je sada π proizvoljna unitarna reprezentacija kompaktne grupe G na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$. Za $\gamma \in \hat{G}$ neka je $\mathcal{H}(\gamma)$ suma svih $\pi(G)-$invarijantnih potprostora $\mathcal{K}$ od $\mathcal{H}$ takvih da je subreprezentacija $\pi_{\mathcal{K}}$ ireducibilna i nalazi se u klasi γ. Nadalje, neka je

$$\mathcal{H}_G = \{\xi \in \mathcal{H};\ \text{potprostor} \quad \mathit{span}\,\{\pi(x)\xi;\ x \in G\} \quad \text{je konačnodimenzionalan}\}.$$

Očito je $\mathcal{H}_G$ potprostor od $\mathcal{H}$ koji je $\pi(G)-$invarijantan. Njegovi elementi zovu se $G-$**konačni vektori** u $\mathcal{H}$.

Teorem 1.3.5. (a) *Potprostori $\mathcal{H}(\gamma)$, $\gamma \in \hat{G}$, su zatvoreni i međusobno ortogonalni.*

(b) *Za svaki $\gamma \in \hat{G}$ operator $\pi(\chi^\gamma)$ je ortogonalni projektor na potprostor $\mathcal{H}(\gamma)$.*

(c) *Vrijedi*

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{\gamma \in \hat{G}} \mathcal{H}(\gamma).$$

(d) *Vrijedi*

$$\mathcal{H}_G = \sum_{\gamma \in \hat{G}} \mathcal{H}(\gamma) \qquad (\textit{algebarska direktna suma}).$$

Posebno, potprostor $\mathcal{H}_G$ je gust u prostoru $\mathcal{H}$.

Dokaz teorema 1.3.5. sadržan je u sljedećim zadacima:

Zadatak 1.3.2. *Dokažite da su operatori $\pi(\chi^\gamma)$, $\gamma \in \hat{G}$, ortogonalni projektori.*

Zadatak 1.3.3. *Uz uvedene oznake dokažite da je*

$$\rho(\chi^\gamma)\pi_{\xi,\eta} = \pi_{\pi(\chi^\gamma)\xi,\eta}, \qquad \gamma \in \hat{G}, \quad \xi,\eta \in \mathcal{H}.$$

Zadatak 1.3.4. *Pomoću prethodnog zadatka dokažite da je*

$$(\pi(\chi^\gamma)\xi|\eta)_{\mathcal{H}} = (\xi|\eta)_{\mathcal{H}} \qquad \forall \xi \in \mathcal{H}(\gamma) \quad i \quad \forall \eta \in \mathcal{H},$$

dakle, $\pi(\chi^\gamma)|\mathcal{H}(\gamma) = I_{\mathcal{H}(\gamma)}$, odnosno, $\mathcal{H}(\gamma) \subseteq \pi(\chi^\gamma)\mathcal{H}$.

Zadatak 1.3.5. *Dokažite da je za* $\xi \in \pi(\chi^\gamma)\mathcal{H}$ *potprostor razapet sa* $\{\pi(x)\xi;\ x \in G\}$ *konačnodimenzionalan i da je za svaki njegov* $\pi(G)-$*invarijantan potprostor* $\mathcal{K}$, *takav da je subreprezentacija* $\pi_{\mathcal{K}}$ *ireducibilna, ta subreprezentacija* $\pi_{\mathcal{K}}$ *u klasi* γ. *Odatle izvedite da je* $\xi \in \mathcal{H}(\gamma)$, *dakle,* $\pi(\chi^\gamma)\mathcal{H} \subseteq \mathcal{H}(\gamma)$.

Zadatak 1.3.6. *Dokažite da je* $\mathcal{H}(\gamma) \perp \mathcal{H}(\sigma)$ *za* $\gamma, \sigma \in \hat{G}$, $\gamma \neq \sigma$.

Uputa: Iskoristite zadatak 1.3.4. da dokažete da je $\pi_{\xi,\eta} \in L_2(G,\mu)(\gamma) \cap L_2(G,\mu)(\sigma) = \{0\}$ za svaki $\xi \in \mathcal{H}(\gamma)$ i svaki $\eta \in \mathcal{H}(\sigma)$; odatle je $(\xi|\eta)_{\mathcal{H}} = \pi_{\xi,\eta}(e) = 0$.

Zadatak 1.3.7. *Dokažite da u odnosu na konvergenciju Hilbertovog prostora* $L_2(G,\mu)$ *vrijedi*

$$\sum_{\gamma \in \hat{G}} \rho(\chi^\gamma) f = f \qquad \forall f \in L_2(G,\mu).$$

Posebno to vrijedi za funkcije oblika $f = \pi_{\xi,\eta}$, $\xi, \eta \in \mathcal{H}$. *Tu činjenicu iskoristite da dokažete da je ortogonalni komplement algebarske sume potprostora* $\mathcal{H}(\gamma)$, $\gamma \in \hat{G}$, *jednak* $\{0\}$, *tj. da je ta suma gusta u* $\mathcal{H}$.

Napomenimo napokon da je očito $\mathcal{H}(\gamma) \subseteq \mathcal{H}_G$ $\forall \gamma \in \hat{G}$ dakle

$$\sum_{\gamma \in \hat{G}} \mathcal{H}(\gamma) \subseteq \mathcal{H}_G.$$

Obratno, ako je $\xi \in \mathcal{H}_G$, onda je konačnodimenzionalni potprostor $X = span\{\pi(x)\xi;\ x \in G\}$ $\pi(G)-$invarijantan pa je $X = X_1 \oplus \cdots \oplus X_n$ za neke $\pi(G)-$invarijantne potprostore takve da su subreprezentacije $\pi_{X_1}, \ldots, \pi_{X_n}$ ireducibilne. No tada je $X_j \subseteq \mathcal{H}(\gamma_j)$, $j = 1, \ldots, n$, za neke $\gamma_1, \ldots, \gamma_n \in \hat{G}$. Dakle, vrijedi i obrnuta inkluzija

$$\mathcal{H}_G \subseteq \sum_{\gamma \in \hat{G}} \mathcal{H}(\gamma).$$

1.4 Reprezentacije Liejevih algebri

Liejeva algebra je vektorski prostor $\mathfrak{g}$ nad poljem K na kome je zadana bilinearna binarna operacija $(x, y) \mapsto [x, y]$ sa $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ u $\mathfrak{g}$ koja ima sljedeća dva svojstva:

(a) *antikomutativnost*: $[x, x] = 0 \ \forall x \in \mathfrak{g}$;

(b) *Jacobijev identitet*: $[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0 \ \forall x, y, z \in \mathfrak{g}$.

Operacija $[\cdot\,, \cdot]$ zove se **komutator**. Asocijativna algebra $\mathcal{A}$ postaje Liejeva algebra uz operaciju $[a, b] = ab-ba$, $a, b \in \mathcal{A}$. Tu Liejevu algebru katkada ćemo označavati sa $Lie(\mathcal{A})$. **Liejev morfizam** je linearno preslikavanje φ Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ u asocijativnu algebru $\mathcal{A}$ takvo da je

$$\varphi([x, y]) = \varphi(x)\varphi(y) - \varphi(y)\varphi(x), \qquad x, y \in \mathfrak{g};$$

drugim riječima, Liejev morfizam je homomorfizam Liejevih algebri $\varphi : \mathfrak{g} \to Lie(\mathcal{A})$. Ako je V vektorski prostor, unitalnu algebru svih linearnih operatora sa V u V označavat ćemo sa $L(V)$; nadalje, $\mathfrak{gl}(V) = Lie(L(V))$. **Reprezentacija Liejeve algebre** $\mathfrak{g}$ na vektorskom prostoru V je Liejev morfizam $\pi : \mathfrak{g} \to L(V)$, odnosno, homomorfizam Liejevih algebri $\pi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$. Obično se podrazumijeva da su Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ i vektorski prostor V nad istim poljem, ali katkada se promatraju i reprezentacije Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ nad poljem K na vektorskom prostoru V nad nekim proširenjem polja K. Posebno ćemo za realne Liejeve algebre najčešće promatrati kompleksne reprezentacije.

Reprezentacija unitalne algebre $\mathcal{A}$ na vektorskom prostoru V je homomorfizam unitalnih algebri $\pi : \mathcal{A} \to L(V)$. U tom slučaju V postaje lijevi modul nad unitalnim prstenom $\mathcal{A}$ uz operaciju $av = \pi(a)v$, $a \in \mathcal{A}$, $v \in V$. Obratno, ako je V unitalni modul nad $\mathcal{A}$, onda je prije svega V vektorski prostor nad poljem K uz operaciju $\lambda v = (\lambda 1_{\mathcal{A}})v$, $\lambda \in K$, $v \in V$. Tada je sa $\pi(a)v = av$, $a \in \mathcal{A}$, $v \in V$, zadana reprezentacija π unitalne algebre $\mathcal{A}$ na vektorskom prostoru V.

Definiramo uobičajene pojmove vezane uz reprezentacije π bilo Liejeve algebre bilo unitalne algebre na prostoru V :

- $\pi-$**invarijantan potprostor** je potprostor W od V koji je invarijantan u odnosu na sve operatore reprezentacije $\pi(x)$; ako se radi o reprezentaciji unitalne algebre onda je $\pi-$invarijantan potprostor isto što i $\mathcal{A}-$podmodul;

- ako je W $\pi-$invarijantan potprostor od V, definiramo **subreprezentaciju** π_W pomoću restrikcije $\pi_W(x) = \pi(x)|W$ i **kvocijentnu reprezentaciju** prijelazom na kvocijent

  $$\pi_{V/W}(x)(v + W) = \pi(x)v + W;$$

  ako su $U \subseteq W$ $\pi-$invarijantni potprostori, reprezentacija $(\pi_{V/U})_{W/U} = (\pi_W)_{W/U}$ označava se sa $\pi_{W/U}$ i zove **subkvocijentna reprezentacija** ili **subkvocijent** od π;

- ako su π i ρ reprezentacije na vektorskim prostorima V i W, **preplitanje** π sa ρ je linearan operator $T : V \to W$ sa svojstvom $T\pi(x) = \rho(x)T \ \forall x$; skup svih preplitanja je potprostor prostora $L(V, W)$ svih linearnih operatora sa V u W i označava se sa $Hom_{\mathfrak{g}}(V, W)$ ako su π i ρ reprezentacije Liejeve algebre $\mathfrak{g}$, a sa $Hom_{\mathcal{A}}(V, W)$ ako se radi o reprezentacijama unitalne algebre $\mathcal{A}$, odnosno, ako su V i W lijevi unitalni $\mathcal{A}-$moduli $-$ tada su preplitanja upravo homomorfizmi $\mathcal{A}-$modula ili $\mathcal{A}-$homomorfizmi;

- za reprezentaciju π na prostoru V pišemo $End_{\mathfrak{g}}(V) = Hom_{\mathfrak{g}}(V, V)$ (odnosno, $End_{\mathcal{A}}(V)$, ako se radi o reprezentaciji unitalne algebre $\mathcal{A}$); to je unitalna podalgebra od $L(V)$;

– reprezentacija π zove se **ireducibilna** ako je $V \neq \{0\}$ i ako u V nema $\pi-$invarijantnih potprostora različitih od $\{0\}$ i od V; ako se radi o reprezentaciji unitalne algebre, onda to znači da je V **prost $\mathcal{A}-$modul**;

– kažemo da su reprezentacije π i ρ na prostorima V i W **ekvivalentne** i pišemo $\pi \simeq \rho$ ako postoji bijektivno preplitanje; ako se radi o reprezentacijama unitalne algebre $\mathcal{A}$, onda su reprezentacije ekvivalentne ako i samo ako su $\mathcal{A}-$moduli V i W izomorfni.

Promatranjem jezgre i slike preplitanja lako se vidi da vrijedi:

Propozicija 1.4.1. (**Schurova lema**) *Neka su π i ρ neekvivalentne ireducibilne reprezentacije Liejeve ili unitalne algebre $\mathcal{A}$ na vektorskim prostorima V i W.*

(*a*) $Hom_{\mathcal{A}}(V, W) = \{0\}$;

(*b*) *$End_{\mathcal{A}}(V)$ je tijelo.*

(*c*) *Ako je V konačnodimenzionalan vektorski prostor nad algebarski zatvorenim poljem K, onda je $End_{\mathcal{A}}(V) = KI_V$.*

Dixmierovo poboljšanje tvrdnje (*c*) odnosi se na prebrojivo dimenzionalne vektorske prostore nad poljem $\mathbb{C}$ kompleksnih brojeva, a bazira se na nepraznosti spektra linearnih operatora:

Propozicija 1.4.2. *Neka je π ireducibilna reprezentacija od $\mathcal{A}$ na prebrojivo dimenzionalnom prostoru V nad poljem $\mathbb{C}$ kompleksnih brojeva. Tada je $End_{\mathcal{A}}(V) = \mathbb{C}I_V$.*

Dokaz: Neka je $T \in L(V)$. Dokazat ćemo da je tada njegov spektar

$$Sp(T) = \{\lambda \in \mathbb{C};\ T - \lambda I_V \notin GL(V)\}$$

neprazan. Doista, pretpostavimo da je $T - \lambda I_V$ invertibilan za svaki $\lambda \in \mathbb{C}$. Tada je operator $P(T)$ invertibilan za svaki polinom $P \in \mathbb{C}[X] \setminus \{0\}$. Dakle, ako je $R = P/Q$ racionalna funkcija, možemo definirati $R(T) = P(T)Q(T)^{-1}$. Tako smo došli do linearnog preslikavanja $R \mapsto R(T)$ polja $\mathbb{C}(X)$ racionalnih funkcija jedne varijable u $L(V)$. Neka je $v \in V$, $v \neq 0$. Tada je $R \mapsto R(T)v$ linearan operator sa $\mathbb{C}(X)$ u V. Taj je operator očito injektivan. No to je nemoguće, jer je vektorski prostor $\mathbb{C}(X)$ neprebrojivo dimenzionalan, a V je po pretpostavci prebrojivo dimenzionalan. Ova kontradikcija pokazuje da postoji $\lambda \in \mathbb{C}$ takav da operator $T - \lambda I_V$ nije invertibilan. Dakle, $Sp(T) \neq \emptyset$.

Neka je sada $T \in End_{\mathcal{A}}(V)$ i $\lambda \in Sp(T)$. Tada je i $T - \lambda I_V \in End_{\mathcal{A}}(V)$. Operator $T - \lambda I_V$ nije invertibilan, pa ili nije injektivan ili nije surjektivan. U prvom slučaju je $Ker\,(T - \lambda I_V) \neq \{0\}$. Kako je to $\pi-$invarijantan potprostor, iz ireducibilnosti slijedi $Ker\,(T - \lambda I_V) = V$, a to znači da je $T = \lambda I_V$. U drugom slučaju je $Im\,(T - \lambda I_V) \neq V$. No i taj je potprostor $\pi-$invarijantan pa slijedi $Im\,(T - \lambda I_V) = \{0\}$, odnosno, opet je $T = \lambda I_V$.

Neka je V vektorski prostor nad poljem K. **Tenzorska algebra** prostora V je uređen par $(\mathcal{T}, \varphi)$, gdje je $\mathcal{T}$ unitalna algebra nad poljem K i $\varphi : V \to \mathcal{T}$ je linearan operator s tzv. **univerzalnim svojstvom** u odnosu na linearne operatore sa V u unitalne algebre:

> Ako je $\mathcal{A}$ unitalna algebra i $\psi : V \to \mathcal{A}$ linearan operator, onda postoji jedinstven unitalni homomorfizam $\Psi : \mathcal{T} \to \mathcal{A}$ takav da je $\psi = \Psi \circ \varphi$.

Simetrična algebra prostora V je uređen par $(\mathcal{S}, \varphi)$, gdje je $\mathcal{S}$ komutativna unitalna algebra nad poljem K i $\varphi : V \to \mathcal{S}$ je linearan operator s univerzalnim svojstvom u odnosu na linearne operatore sa V u komutativne unitalne algebre:

> Ako je $\mathcal{A}$ komutativna unitalna algebra i $\psi : V \to \mathcal{A}$ linearan operator, onda postoji jedinstven unitalni homomorfizam $\Psi : \mathcal{S} \to \mathcal{A}$ takav da je $\psi = \Psi \circ \varphi$.

Neka je sada $\mathfrak{g}$ Liejeva algebra nad poljem K. **Univerzalna omotačka algebra** od $\mathfrak{g}$ je uređen par $(\mathcal{U}, \varphi)$ gdje je $\mathcal{U}$ unitalna algebra nad poljem K i $\varphi : \mathfrak{g} \to \mathcal{U}$ je Liejev morfizam s univerzalnim svojstvom u odnosu na Liejeve morfizme $\mathfrak{g}$ u unitalne algebre:

> Ako je $\mathcal{A}$ unitalna algebra i $\psi : \mathfrak{g} \to \mathcal{A}$ Liejev morfizam, onda postoji jedinstven unitalni homomorfizam $\Psi : \mathcal{U} \to \mathcal{A}$ takav da je $\psi = \Psi \circ \varphi$.

Standardna je činjenica da su ti objekti jedinstveni do na prirodni izomorfizam. Opisat ćemo sada njihove konstrukcije.

Prije svega, podsjetimo se tenzorskog produkta vektorskih prostora. Neka su $V_1, \ldots, V_n$ vektorski prostori nad poljem K. **Tenzorski produkt** tih vektorskih prostora je uređen par (T, φ), gdje je T vektorski prostor nad poljem K i $\varphi : V_1 \times \cdots \times V_n \to T$ je $n-$linearno preslikavanje s univerzalnim svojstvom:

> Ako je W vektorski prostor nad poljem K i $\psi : V_1 \times \cdots \times V_n \to W$ $n-$linearno preslikavanje, onda postoji jedinstven linearan operator $\Psi : T \to W$ takav da je $\psi = \Psi \circ \varphi$.

Iz univerzalnog svojstva slijedi da je tenzorski produkt jedinstven do na prirodni izomorfizam. Egzistenciju dobivamo sljedećom konstrukcijom. Neka je $\mathbf{T}$ vektorski prostor svih funkcija $f : V_1 \times \cdots \times V_n \to K$ s konačnim nosačem. Za $(v_1, \ldots, v_n) \in V_1 \times \cdots \times V_n$ definiramo $f_{(v_1,\ldots,v_n)} \in \mathbf{T}$ sa

$$f_{(v_1,\ldots,v_n)}(w_1, \ldots, w_n) = \begin{cases} 1 & \text{ako je} \quad (w_1, \ldots, w_n) = (v_1, \ldots, v_n) \\ 0 & \text{ako je} \quad (w_1, \ldots, w_n) \neq (v_1, \ldots, v_n). \end{cases}$$

Tada je $\{f_{(v_1,\ldots,v_n)};\ (v_1, \ldots, v_n) \in V_1 \times \cdots \times V_n\}$ baza vektorskog prostora $\mathbf{T}$. Neka je $\mathbf{T_0}$ potprostor prostora $\mathbf{T}$ razapet skupom $\mathbf{S_1} \cup \cdots \cup \mathbf{S_n} \cup \mathbf{S'_1} \cup \cdots \cup \mathbf{S'_n}$ gdje je

$$\mathbf{S_j} = \{f_{(v_1,\ldots,v_{j-1},v+w,v_{j+1},\ldots,v_n)} - f_{(v_1,\ldots,v_{j-1},v,v_{j+1},\ldots,v_n)} - f_{(v_1,\ldots,v_{j-1},w,v_{j+1},\ldots,v_n)};\ v_i \in V_i \text{ za } i \neq j,\ v, w \in V_j\},$$

$$\mathbf{S'_j} = \{f_{(v_1,\ldots,v_{j-1},\alpha v_j,v_{j+1},\ldots,v_n)} - \alpha f_{(v_1,\ldots,v_n)};\ v_i \in V_i,\ \alpha \in K\}.$$

Sada je kvocijentni prostor $T = \mathbf{T}/\mathbf{T_0}$ tenzorski produkt prostora $V_1, \ldots, V_n$ uz $n-$linearno preslikavanje $\varphi : V_1 \times \cdots \times V_n \to T$ zadano sa

$$\varphi(v_1, \ldots, v_n) = f_{(v_1,\ldots,v_n)} + \mathbf{T_0}, \qquad (v_1, \ldots, v_n) \in V_1 \times \cdots \times V_n.$$

Uobičajene su oznake $T = V_1 \otimes \cdots \otimes V_n$ i $\varphi(v_1, \ldots, v_n) = v_1 \otimes \cdots \otimes v_n$. Prostor $V_1 \otimes \cdots \otimes V_n$ razapet je vektorima oblika $v_1 \otimes \cdots \otimes v_n$. Štoviše, ako je za svaki $j \in \{1, \ldots, n\}$ S_j podskup prostora V_j i ako je $S = \{v_1 \otimes \cdots \otimes v_n;\ v_1 \in S_1, \ldots, v_n \in S_n\}$ onda vrijede tvrdnje :

(a) Ako je $V_j = span\, S_j$ za $j = 1, \ldots, n$, onda je $V_1 \otimes \cdots \otimes V_n = span\, S$.

(b) Ako su skupovi $S_1, \ldots, S_n$ linearno nezavisni, onda je skup S linearno nezavisan.

(c) Ako je za svaki $j = 1, \ldots, n$ skup S_j baza vektorskog prostora V_j, onda je S baza vektorskog prostora $V_1 \otimes \cdots \otimes V_n$.

Iz univerzalnog svojstva lako se vidi da se prostor $(V_1 \otimes \cdots \otimes V_n) \otimes (W_1 \otimes \cdots \otimes W_m)$ može identificirati s prostorom $V_1 \otimes \cdots \otimes V_n \otimes W_1 \otimes \cdots \otimes W_m$ i to tako da bude

$$(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) \otimes (w_1 \otimes \cdots \otimes w_m) = v_1 \otimes \cdots \otimes v_n \otimes w_1 \otimes \cdots \otimes w_m,\ v_i \in V_i,\ 1 \leq i \leq n,\ w_j \in W_j,\ 1 \leq j \leq m.$$

Za vektorski prostor V nad poljem K stavimo

$$T^0(V) = K, \qquad T^1(V) = V, \qquad T^n(V) = \underbrace{V \otimes \cdots \otimes V}_{n}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad n \geq 2.$$

Stavimo

$$T(V) = \coprod_{n \in \mathbb{Z}_+} T^n(V).$$

Identifikacija $T^n(V) \otimes T^m(V) = T^{n+m}(V)$ se po bilinearnosti proširuje do binarne operacije $T(V) \times T(V) \to T(V)$ uz koju $T(V)$ postaje unitalna algebra, a identifikacija V s potprostorom $T^1(V)$ od $T(V)$ ima univerzalno svojstvo u odnosu na linearne operatore sa V u $T(V)$. Time smo konstruirali tenzorsku algebru $T(V)$ prostora V. Ako je $\{e_i;\ i \in I\}$ baza vektorskog prostora V, onda je za $n \in \mathbb{N}$

$$\{e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_n};\ (i_1, \ldots, i_n) \in I^n\}$$

baza od $T^n(V)$. Dakle, unija baze $\{1\}$ od $K = T^0(V)$ s unijom svih tih baza daje nam bazu prostora $T(V)$.

Neka je sada $\mathfrak{I}$ obostrani ideal u algebri $T(V)$ generiran skupom $\{v \otimes w - w \otimes v;\ v, w \in V\}$ i neka je $S(V)$ kvocijentna unitalna algebra $T(V)/\mathfrak{I}$. Tada je $S(V)$ komutativna unitalna algebra i preslikavanje $v \mapsto v + \mathfrak{I}$ je linearan operator sa V u $S(V)$ koji ima univerzalno svojstvo u odnosu na linearne operatore sa V u komutativne unitalne algebre. Dakle, $S(V)$ je simetrična algebra prostora V. Operaciju množenja u algebri $S(V)$ označavat ćemo s točkom $\cdot$ ili bez ikakvog znaka:

$$(x + \mathfrak{I})(y + \mathfrak{I}) = (x + \mathfrak{I}) \cdot (y + \mathfrak{I}) = x \otimes y + \mathfrak{I}, \qquad x, y \in T(V).$$

Označimo sa $S^n(V)$ sliku potprostora $T^n(V)$ algebre $T(V)$ pri kvocijentnom preslikavanju $T(V) \to S(V)$. Pokazuje se da je tada $S^0(V) = K\,1_{S(V)}$, pa se $S^0(V)$ identificira s K. Nadalje, linearan operator $v \to v + \mathfrak{I}$ sa V u $S(V)$ je izomorfizam sa V na $S^1(V)$; taj izomorfizam također upotrebljavano kao identifikaciju. Time prostor V postaje potprostor koji generira unitalnu algebru $S(V)$. Nadalje,

$$S(V) = \coprod_{n \in \mathbb{Z}_+} S^n(V), \qquad S^n(V) = \mathit{span}\,\{v_1 \cdots v_n;\ v_1, \ldots, v_n \in V\}.$$

Gornji rastav je graduacija od $S(V)$ i to ne samo kao vektorskog prostora nego i kao algebre; naime, vrijedi $S^n(V)S^m(V) \subseteq S^{n+m}(V)\ \forall n, m \in \mathbb{Z}_+$.

Ako je I linearno uređen skup i $\{e_i;\ i \in I\}$ uređena baza od V, onda je

$$\{e_{i_1} \cdots e_{i_n} :\ i_1, \ldots, i_n \in I,\ i_1 \leq \cdots \leq i_n\}$$

baza prostora $S^n(V)$. Posebno, ako je prostor V konačnodimenzionalan i $\{e_1, \ldots, e_n\}$ baza od V onda je

$$\{e_1^{m_1} \cdots e_n^{m_n};\ m_1, \ldots, m_n \in \mathbb{Z}_+\}$$

baza prostora $S(V)$, a za $k \in \mathbb{N}$ je

$$\{e_1^{m_1} \cdots e_n^{m_n};\ m_1, \ldots, m_n \in \mathbb{Z}_+,\ m_1 + \cdots + m_n = k\}$$

baza od $S^k(V)$.

Konstruirat ćemo sada jednu univerzalnu omotačku algebru Liejeve algebre $\mathfrak{g}$. Polazimo također od tenzorske algebre $T(\mathfrak{g})$ vektorskog prostora $\mathfrak{g}$. Sada označimo sa $\mathcal{J}$ obostrani ideal u $T(\mathfrak{g})$ generiran skupom

$$\{X \otimes Y - Y \otimes X - [X, Y];\ X, Y \in \mathfrak{g}\}$$

i neka je $U(\mathfrak{g})$ kvocijentna algebra $T(\mathfrak{g})/\mathcal{J}$. Tada je $\iota : X \mapsto X + \mathcal{J}$ Liejev morfizam sa $\mathfrak{g}$ u $U(\mathfrak{g})$ i nije teško vidjeti da ι ima univerzalno svojstvo u odnosu na Liejeve morfizme sa $\mathfrak{g}$ u unitalne algebre. Dakle, $(U(\mathfrak{g}), \iota)$ je univerzalna omotačka algebra Liejeve algebre $\mathfrak{g}$. Vrlo netrivijalan je sljedeći ključni **Poncaré−Birkhoff−Wittov teorem** (obično se govori kraće PBW−teorem) koji navodimo bez dokaza i to samo za konačnodimenzionalne Liejeve algebre:

Teorem 1.4.3. *Neka je $\{X_1, \ldots, X_n\}$ baza Liejeve algebre $\mathfrak{g}$. Tada je*

$$\left\{\{\iota(X_1)^{m_1} \cdots \iota(X_n)^{m_n};\ (m_1, \ldots, m_n) \in \mathbb{Z}_+^n\right\}$$

baza vektorskog prostora $U(\mathfrak{g})$.

Pri tome, naravno, za svaki $u \in U(\mathfrak{g})$ podrazumijevamo da je u^0 jedinica algebre $U(\mathfrak{g})$. PBW−teorem ima za posljedicu da je preslikavanje $\iota : \mathfrak{g} \to U(\mathfrak{g})$ injektivno. Stoga ga možemo shvaćati kao identifikaciju Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ s Liejevom podalgebrom od $Lie(U(\mathfrak{g}))$. U daljnjem izostavljamo znak ι, pa baza u PBW−teoremu postaje $\left\{X_1^{m_1} \cdots X_n^{m_n};\ (m_1, \ldots, m_n) \in \mathbb{Z}_+^n\right\}$.

Stavimo

$$U_0(\mathfrak{g}) = K \qquad \text{i} \qquad U_m(\mathfrak{g}) = span\{Y_1 \cdots Y_k;\ k \in \mathbb{N},\ k \leq m,\ Y_1, \ldots, Y_k \in \mathfrak{g}\} \quad \text{za} \quad m \in \mathbb{N}.$$

Iz PBW−teorema slijedi da je $U_1(\mathfrak{g}) = K \dotplus \mathfrak{g}$. Niz potprostora $(U_m(\mathfrak{g}))_{m \in \mathbb{Z}_+}$ je **filtracija algebre** $U(\mathfrak{g})$; to znači da je to rastući niz potprostora od $U(\mathfrak{g})$ takav da je

$$U(\mathfrak{g}) = \bigcup_{m \in \mathbb{Z}_+} U_m(\mathfrak{g}) \qquad \text{i} \qquad U_p(\mathfrak{g}) U_q(\mathfrak{g}) \subseteq U_{p+q}(\mathfrak{g}).$$

Neka je

$$Gr\, U(\mathfrak{g}) = \coprod_{m \in \mathbb{Z}_+} Gr^m\, U(\mathfrak{g}), \quad Gr^0\, U(\mathfrak{g}) = U_0(\mathfrak{g}) = K, \quad Gr^m\, U(\mathfrak{g}) = U_m(\mathfrak{g})/U_{m-1}(\mathfrak{g}) \text{ za } m \in \mathbb{N},$$

pripadna graduirana algebra. U toj algebri množenje je definirano na sljedeći način:

$$(u + U_{p-1}(\mathfrak{g}))(v + U_{q-1}(\mathfrak{g})) = uv + U_{p+q-1}(\mathfrak{g}) \quad za \quad u \in U_p(\mathfrak{g}) \quad \text{i} \quad v \in U_q(\mathfrak{g}).$$

$\mathfrak{g}$ generira unitalnu algebru $U(\mathfrak{g})$ i za $X, Y \in \mathfrak{g}$ vrijedi $XY - YX = [X, Y] \in \mathfrak{g} \subseteq U_1(\mathfrak{g})$. Odatle neposredno slijedi da je unitalna algebra $Gr\, U(\mathfrak{g})$ komutativna. Stoga se linearan operator $X \mapsto X + U_0(\mathfrak{g})$ sa $\mathfrak{g}$ u $Gr^1\, U(\mathfrak{g}) \subseteq Gr\, U(\mathfrak{g})$ jedinstveno proširuje do unitalnog homomorfizma $\mu : S(\mathfrak{g}) \to Gr\, U(\mathfrak{g})$. PBW−teorem ima za posljedicu da je μ izomorfizam unitalnih algebri.

Kad je polje K karakteristike 0 uočimo jedan vrlo koristan izomorfizam vektorskih prostora $S(\mathfrak{g})$ i $U(\mathfrak{g})$. Iz univerzalnog svojstva tenzorskog produkta prijelazom na kvocijente po idealima $\mathfrak{I}$ i $\mathfrak{J}$ pokazuje se da postoji jedinstven linearan operator $\sigma : S(\mathfrak{g}) \to U(\mathfrak{g})$ takav da je

$$\sigma(\lambda) = \lambda \quad \text{za} \quad \lambda \in K \qquad \text{i} \qquad \sigma(Y_1 \cdots Y_k) = \frac{1}{k!} \sum_{\tau \in \mathcal{S}_k} Y_{\tau(1)} \cdots Y_{\tau(k)} \quad \text{za} \quad k \in \mathbb{N} \quad \text{i} \quad Y_1, \ldots, Y_k \in \mathfrak{g}.$$

Pri tome je $\mathcal{S}_k$ oznaka za grupu permutacija skupa $\{1, \ldots, k\}$. Nadalje, produkt s lijeve strane gornje formule je produkt u algebri $S(\mathfrak{g})$, a produkti s desne strane su produkti u algebri $U(\mathfrak{g})$. Posljedica PBW−teorema je da je tako definirano preslikavanje σ izomorfizam vektorskog prostora $S(\mathfrak{g})$ na vektorski prostor $U(\mathfrak{g})$. Taj se operator zove **simetrizacija**. Za svaki $m \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$U_m(\mathfrak{g}) = \sigma(S^m(\mathfrak{g})) \dotplus U_{m-1}(\mathfrak{g}).$$

Odatle se dobiva izomorfizam unitalnih algebri sa $S(\mathfrak{g})$ na $Gr\, U(\mathfrak{g})$. Naime, ako je $\Lambda : U(\mathfrak{g}) \to Gr\, U(\mathfrak{g})$ izomorfizam vektorskih prostora zadan sa

$$\Lambda(u) = u + U_{m-1}(\mathfrak{g}) \quad \text{ako je} \quad u \in U_m(\mathfrak{g}) \setminus U_{m-1}(\mathfrak{g}),$$

onda je kompozicija $\Lambda \circ \sigma : S(\mathfrak{g}) \to Gr\, U(\mathfrak{g})$ ne samo izomorfizam vektorskih prostora nego izomorfizam unitalnih (komutativnih) algebri.

Homomorfizam Liejevih algebri $\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ jedinstveno se proširuje do unitalnog homomorfizma sa $U(\mathfrak{g})$ u $U(\mathfrak{h})$ koji ćemo označavati istim znakom φ. Ako je homomorfizam $\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ injektivan (odn. surjektivan) onda je i homomorfizam $\varphi : U(\mathfrak{g}) \to U(\mathfrak{h})$ injektivan (odn. surjektivan). Posebno, ako je $\mathfrak{g}$ Liejeva podalgebra Liejeve algebre $\mathfrak{h}$, inkluzija $\mathfrak{g}$ u $\mathfrak{h}$ inducira injektivni homomorfizam $U(\mathfrak{g})$ u $U(\mathfrak{h})$ koji tretiramo kao identifikaciju. Dakle, unitalna podalgebra od $U(\mathfrak{h})$ generirana sa $\mathfrak{g}$ identificira se sa $U(\mathfrak{g})$. Nadalje, ako je $\mathfrak{g}$ ideal u $\mathfrak{h}$ onda se kvocijentni epimorfizam $\mathfrak{h} \to \mathfrak{h}/\mathfrak{g}$ proširuje do epimorfizma $U(\mathfrak{h}) \to U(\mathfrak{h}/\mathfrak{g})$; jezgra tog epimorfizma je obostrani ideal u $U(\mathfrak{h})$ generiran sa $\mathfrak{g}$.

Za trivijalnu Liejevu algebru $\{0\}$ je $U(\{0\}) = K$. Neka je $\mathfrak{g}$ Liejeva algebra i neka je $\varepsilon : \mathfrak{g} \to \{0\}$ jedini epimorfizam, $\varepsilon(X) = 0\ \forall X \in \mathfrak{g}$. Taj se epimorfizam proširuje do epimorfizma unitalnih algebri $\varepsilon : U(\mathfrak{g}) \to K$. Taj se homomorfizam ε zove **homomorfizam augmentacije** ili kraće **augmentacija** algebre $U(\mathfrak{g})$.

Neka je sada $\mathfrak{g}$ Liejeva algebra i $\mathfrak{g}^{op}$ **suprotna** Liejeva algebra: ona se kao vektorski prostor podudara sa $\mathfrak{g}$ a komutator je zadan sa

$$[X, Y]_{op} = [Y, X] = -[X, Y], \qquad X, Y \in \mathfrak{g}^{op} = \mathfrak{g}.$$

Naravno, linearno preslikavanje $\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ Liejevih algebri je antihomomorfizam Liejevih algebri ako i samo ako je $\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}^{op}$ homomorfizam Liejevih algebri, a također ako i samo ako je $\varphi : \mathfrak{g}^{op} \to \mathfrak{h}$ homomorfizam Liejevih algebri. Očito je $U(\mathfrak{g}^{op})$ suprotna algebra $U(\mathfrak{g})^{op}$ unitalne algebre $U(\mathfrak{g})$: kao vektorski prostor $U(\mathfrak{g})^{op}$ se podudara sa $U(\mathfrak{g})$, a množenje $\cdot_{op}$ u algebri $U(\mathfrak{g})^{op}$ zadano je sa

$$u \cdot_{op} v = vu, \qquad u, v \in U(\mathfrak{g})^{op} = U(\mathfrak{g}).$$

Preslikavanje $X \mapsto -X$ je izomorfizam Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ na Liejevu algebru $\mathfrak{g}^{op}$. On se proširuje do izomorfizma unitalnih algebri sa $U(\mathfrak{g})$ na $U(\mathfrak{g}^{op}) = U(\mathfrak{g})^{op}$, odnosno, do antiautomorfizma unitalne algebre $U(\mathfrak{g})$. Taj ćemo antiautomorfitam označavati sa $x \mapsto x^t$. To je linearno preslikavanje potpuno određeno sa

$$1^t = 1, \qquad X^t = -X \quad \text{za} \quad X \in \mathfrak{g}, \qquad (uv)^t = v^t u^t \quad \text{za} \quad u, v \in U(\mathfrak{g}).$$

Posebno je

$$(X_1 \cdots X_k)^t = (-1)^k X_k \cdots X_1, \qquad X_1, \ldots, X_k \in \mathfrak{g}.$$

Još jedna posljedica PBW−teorema je:

Korolar 1.4.4. *Neka je $\mathfrak{g}$ Liejeva algebra, $\mathfrak{a}$ njena Liejeva podalgebra i V potprostor od $\mathfrak{g}$ takav da je $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \dotplus V$. Postoji jedinstven linearan operator $U(\mathfrak{a}) \otimes S(V) \to U(\mathfrak{g})$ takav da $a \otimes v \mapsto a\sigma(v)$ za $a \in U(\mathfrak{a})$ i $v \in S(V)$. (Pri tome je σ oznaka za simetrizaciju sa $S(\mathfrak{g})$ u $U(\mathfrak{g})$ restringiranu na potprostor $S(V) \subseteq S(\mathfrak{g})$). Taj je linearan operator izomorfizam vektorskih prostora sa $U(\mathfrak{a}) \otimes S(V)$ na $U(\mathfrak{g})$.*

Zadatak 1.4.1. *Dokažite korolar 1.4.4.*

Uputa: Za prvu tvrdnju koristite univerzalno svojstvo tenzorskog produkta vektorskih prostora, a za drugu PBW−teorem.

Ako je π reprezentacija Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ na vektorskom prostoru V, onda je π Liejev morfizam Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ u unitalnu algebru $L(V)$. Dakle, π se jedinstveno proširuje do unitalnog homomorfizma univerzalne omotačke algebre $U(\mathfrak{g})$ u algebru $L(V)$, odnosno do reprezentacije (koju ćemo također označiti sa π) unitalne algebre $U(\mathfrak{g})$ na vektorskom prostoru V. Tada je, naravno,

$$\pi(Y_1 \cdots Y_k) = \pi(Y_1) \cdots \pi(Y_k), \qquad Y_1, \ldots, Y_k \in \mathfrak{g}.$$

Prema tome, $\pi(U(\mathfrak{g}))$ je unitalna podalgebra od $L(V)$ generirana sa $\pi(\mathfrak{g})$. Odatle neposredno slijedi:

Teorem 1.4.5. *Neka su π i ρ reprezentacija Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ na vektorskim prostorima V i W i pripadne reprezentacije $U(\mathfrak{g})$ na V i W.*

(a) *$\pi(\mathfrak{g})-$invarijantni potprostori od V podudaraju se s $\pi(U(\mathfrak{g}))-$invarijantnim potprostorima od V.*

(b) *π je ireducibilna reprezentacija od $\mathfrak{g}$ ako i samo ako je to ireducibilna reprezentacija od $U(\mathfrak{g})$.*

(c) *$Hom_{\mathfrak{g}}(V,W) = Hom_{U(\mathfrak{g})}(V,W)$.*

(d) *π i ρ su ekvivalentne reprezentacije od $\mathfrak{g}$ ako i samo ako su to ekvivalentne reprezentacije od $U(\mathfrak{g})$.*

(e) *Ako je $v \in V$, najmanji $\pi-$invarijantni potprostor koji sadrži v je*

$$\pi(U(\mathfrak{g})v = \{\pi(u)v;\ u \in U(\mathfrak{g})\}.$$

(f) *Reprezentacija π je ireducibilna ako i samo ako je $V \neq \{0\}$ i za svaki $v \in V \setminus \{0\}$ je $\pi(U(\mathfrak{g}))v = V$.*

Posljedica Dixmierove varijante Schurove leme (propozicija 1.4.2.) je sljedeća važna činjenica:

Propozicija 1.4.6. *Neka je $\mathfrak{g}$ konačnodimenzionalna kompleksna Liejeva algebra i π njena ireducibilna reprezentacija na vektorskom prostoru V. Tada je prostor V prebrojivo dimenzionalan i $End_{\mathfrak{g}}(V) = \mathbb{C}I_V$.*

Zadatak 1.4.2. *Dokažite propoziciju 1.4.6.*

Uputa: Za dokaz prebrojive dimenzionalnosti prostora V koristite tvrdnju (f) teorema 1.4.5. i PBW−teorem.

Neka je u daljnjem $\mathcal{A}$ unitalna algebra nad poljem K. Proučit ćemo sada neka algebarska svojstva $\mathcal{A}-$modula. Za lijevi $\mathcal{A}-$modul V kažemo da je **Noetherin** ako za svaki rastući niz podmodula

$$V_1 \subseteq V_2 \subseteq \cdots \subseteq V_k \subseteq \cdots\cdots$$

postoji $m \in \mathbb{N}$ takav da je $V_k = V_m\ \forall k \geq m$. Analogno, kažemo da je lijevi $\mathcal{A}-$modul V **Artinov** ako za svaki padajući niz podmodula

$$V_1 \supseteq V_2 \supseteq \cdots \supseteq V_k \supseteq \cdots\cdots$$

postoji $m \in \mathbb{N}$ takav da je $V_k = V_m\ \forall k \geq m$.

Propozicija 1.4.7. *Neka je V lijevi $\mathcal{A}-$modul.*

(1) *Sljedeća su tri svojstva međusobno ekvivalentna:*

  (a) *Modul V je Noetherin.*

  (b) *Svaki neprazan skup $\mathcal{A}-$podmodula od V ima bar jedan maksimalan element.*

  (c) *Svaki $\mathcal{A}-$podmodul od V je konačno generiran.*

(2) *Sljedeća su dva svojstva međusobno ekvivalentna:*

  (a) *Modul V je Artinov.*

  (b) *Svaki neprazan skup $\mathcal{A}-$podmodula ima bar jedan minimalan element.*

Dokaz: Dokazat ćemo tvrdnju (1).

$(a) \Rightarrow (b)$ Pretpostavimo da je modul V Noetherin i neka je $\mathcal{S}$ neprazan skup podmodula od V. Pretpostavimo da u $\mathcal{S}$ ne postoji nijedan maksimalni element. Neka je $V_1 \in \mathcal{S}$. Budući da V_1 nije maksimalan element u $\mathcal{S}$ postoji $V_2 \in \mathcal{S}$ takav da je $V_1 \subsetneq V_2$. Induktivno na taj način dolazimo do striktno rastućeg niza podmodula od V, a to nije moguće, jer je modul V Noetherin. Ova kontradikcija pokazuje da je pretpostavka da u $\mathcal{S}$ ne postoji nijedan maksimalan element nemoguća, odnosno, dokazano je svojstvo (b).

$(b) \Rightarrow (c)$ Pretpostavimo da je ispunjeno svojstvo (b) i neka je W podmodul modula V. Neka je $\mathcal{S}$ skup svih konačno generiranih podmodula od W. Taj je skup neprazan jer je $\{0\} \in \mathcal{S}$. Prema tome postoji neki maksimalan element W_0 u $\mathcal{S}$. Pretpostavimo da je $W_0 \neq W$ i neka je $w \in W \setminus W_0$. Tada je podmodul $W_0 + \mathcal{A}w \subseteq W$ konačno generiran, dakle, $W_0 + \mathcal{A}w \in \mathcal{S}$, i $W_0 \subsetneq W_0 + \mathcal{A}w$. To je u suprotnosti s maksimalnošću od W_0 u $\mathcal{S}$. Ova kontradikcija pokazuje da je pretpostavka $W_0 \neq W$ nemoguća. Prema tome, podmodul $W = W_0$ je konačno generiran.

$(c) \Rightarrow (a)$ Pretpostavimo da je svaki podmodul od V konačno generiran i neka je

$$V_1 \subseteq V_2 \subseteq \cdots \subseteq V_k \subseteq \cdots\cdots$$

rastući niz podmodula. Tada je

$$W = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} V_n$$

podmodul od V i kao takav je konačno generiran. Stoga postoje $w_1, \ldots, w_n \in W$ takvi da je

$$W = \mathcal{A}w_1 + \cdots + \mathcal{A}w_m.$$

Budući da je W unija rastućeg niza podmodula V_k postoji $m \in \mathbb{N}$ takav da je $w_1, \ldots, w_n \in V_m$. No tada je $W = V_m$, dakle, $V_k = V_m$ $\forall k \geq m$. Dakle, modul V je Noetherin.

Zadatak 1.4.3. *Dokažite tvrdnju* (2) *propozicije 1.4.7.*

Algebra $\mathcal{A}$ zove se **lijevo Noetherina** (odn. **lijevo Artinova**) ako je ona kao lijevi $\mathcal{A}-$modul Noetherin (odn. Artinov). **Algebra** $\mathcal{A}$ zove se **desno Noetherina** (odn. **desno Artinova**) ako je suprotna algebra $\mathcal{A}^{op}$ lijevo Noetherina (odn. lijevo Artinova). $\mathcal{A}-$podmoduli lijevog $\mathcal{A}-$modula $\mathcal{A}$ su lijevi ideali u $\mathcal{A}$. Prema tome, algebra $\mathcal{A}$ je lijevo Noetherina ako i samo ako za svaki rastući niz lijevih ideala

$$\mathcal{J}_1 \subseteq \mathcal{J}_2 \subseteq \cdots \subseteq \mathcal{J}_k \subseteq \cdots\cdots$$

postoji $m \in \mathbb{N}$ takav da je $\mathcal{J}_k = \mathcal{J}_m$ $\forall k \geq m$.

Propozicija 1.4.8. *Neka je* $\{0\} \to U \to V \to W \to \{0\}$ *kratki egzaktni niz lijevih* $\mathcal{A}-$*modula. Modul* V *je Noetherin* (*odn. Artinov*) *ako i samo ako su moduli* U *i* W *Noetherini* (*odn. Artinovi*).

Dokaz: Pretpostavimo da je modul V Noetherin. Kako je U izomorfan podmodulu od V i on je Noetherin. Nadalje, ako je $\pi : V \to W$ epimorfizam i ako je

$$W_1 \subseteq W_2 \subseteq \cdots \subseteq W_k \subseteq \cdots\cdots$$

rastući niz podmodula od W, onda je

$$\pi^{-1}(W_1) \subseteq \pi^{-1}(W_2) \subseteq \cdots \subseteq \pi^{-1}(W_k) \subseteq \cdots\cdots$$

rastući niz podmodula od V. Kako je modul V Noetherin, postoji $m \in \mathbb{N}$ takav da vrijedi $\pi^{-1}(W_k) = \pi^{-1}(W_m)$ $\forall k \geq m$. No tada je i $W_k = W_m$ $\forall k \geq m$. Dakle, modul W je Noetherin.

Pretpostavimo sada da su moduli U i W Noetherini. Možemo pretpostaviti da je U podmodul od V i da je $W = V/U$. Označimo sa $\pi : V \to W$ kvocijentni epimorfizam. Neka je

$$V_1 \subseteq V_2 \subseteq \cdots \subseteq V_k \subseteq \cdots\cdots$$

rastući niz podmodula od V. Tada je

$$V_1 \cap U \subseteq V_2 \cap U \subseteq \cdots \subseteq V_k \cap U \subseteq \cdots\cdots$$

rastući niz podmodula od U pa postoji $m \in \mathbb{N}$ takav da je $V_k \cap U = V_m \cap U \ \forall k \geq m$. Nadalje,

$$\pi(V_1) \subseteq \pi(V_2) \subseteq \cdots \pi(V_k) \subseteq \cdots\cdots$$

je rastući niz podmodula od W, pa postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je $\pi(V_k) = \pi(V_n) \ \forall k \geq n$. Za $k \geq p = \max\{m, n\}$ vrijedi $V_k \cap U = V_p \cap U$ i $\pi(V_k) = \pi(V_p)$, a kako je $V_p \subseteq V_k$ odatle slijedi da je $V_k = V_p$. Prema tome, modul V je Noetherin.

Zadatak 1.4.4. *Dokažite tvrdnju iskorištenu pri kraju prethodnog dokaza: neka je U podmodul modula V i $\pi : V \to V/U$ kvocijentni epimorfizam; ako su A i B podmoduli od V takvi da je $A \subseteq B$, $A \cap U = B \cap U$ i $\pi(A) = \pi(B)$, onda je $A = B$.*

Zadatak 1.4.5. *Dokažite tvrdnje propozicije 1.4.8. za Artinovo svojstvo.*

Propozicija 1.4.8. ima sljedeću neposrednu posljedicu:

Korolar 1.4.9. *Neka su $V_1, \ldots, V_n$ Noetherini (odn. Artinovi) lijevi $\mathcal{A}-$moduli. Tada je i njihova direktna suma (tj. Kartezijev produkt) Noetherin (odn. Artinov) $\mathcal{A}-$modul.*

Dokaz slijedi indukcijom po n primjenom propozicije 1.4.8. na kratki egzaktni niz

$$\{0\} \to V_n \to \prod_{i=1}^{n} V_i \to \prod_{i=1}^{n-1} V_i \to \{0\}.$$

Propozicija 1.4.10. *Neka je $\mathcal{A}$ lijevo Noetherina (odn. lijevo Artinova) unitalna algebra i V konačno generiran lijevi $\mathcal{A}-$modul. Tada je modul V Noetherin (odn. Artinov).*

Dokaz: Ako je modul V konačno generiran, on je izomorfan kvocijentnom modulu lijevog $\mathcal{A}-$modula $\mathcal{A}^n$ za neki $n \in \mathbb{N}$. Doista, ako su $v_1, \ldots, v_n \in V$ takvi da je $V = \mathcal{A}v_1 + \cdots + \mathcal{A}v_n$, onda je $(a_1, \ldots, a_n) \mapsto a_1v_1 + \cdots + a_nv_n$ epimorfizam sa $\mathcal{A}^n$ na V. Prema korolaru 1.4.9. lijevi $\mathcal{A}-$modul $\mathcal{A}^n$ je Noetherin (odn. Artinov) pa je po propoziciji 1.4.8. i modul V Noetherin (odn. Artinov).

Teorem 1.4.11. (**Hilbertov teorem o bazi**) *Ako je $\mathcal{A}$ komutativna Noetherina unitalna algebra onda je algebra polinoma $\mathcal{A}[X_1, \ldots, X_n]$ u n varijabli s koeficijentima u $\mathcal{A}$ također Noetherina. Posebno, algebra polinoma $\mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]$ s kompleksnim koeficijentima je Noetherina. Nadalje, ako je V konačnodimenzionalan vektorski prostor, simetrična algebra $S(V)$ je Noetherina.*

Dokaz: Prvu tvrdnju dovoljno je dokazati za $n = 1$, tj. za algebru $\mathcal{A}[X]$. Opći slučaj slijedi indukcijom po n, jer je $\mathcal{A}[X_1, \ldots, X_n] = \mathcal{A}[X_1, \ldots, X_{n-1}][X_n]$ za $n \geq 2$.

Neka je $\mathcal{J}$ ideal u $\mathcal{A}[X]$. Tada vodeći koeficijenti elemenata od $\mathcal{J}$ tvore ideal $\mathfrak{I}$ u $\mathcal{A}$. Kako je algebra $\mathcal{A}$ Noetherina, ideal $\mathfrak{I}$ je konačno generiran, tj. postoje $a_1, \ldots, a_n \in \mathfrak{I}$ takvi da je

$$\mathfrak{I} = \mathcal{A}a_1 + \cdots + \mathcal{A}a_n.$$

Za svaki indeks $i \in \{1,\dots,n\}$ postoje $P_i \in \mathcal{J}$ i $r_i \in \mathbb{Z}_+$ takvi da je

$$P_i = a_i X^{r_i} + \text{polinom stupnja } < r_i.$$

Stavimo $r = \max\{r_1,\dots,r_n\}$. Neka je $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{J}$ ideal u $\mathcal{A}[X]$ generiran polinomima $P_1,\dots,P_n$. Neka je $P \in \mathcal{J} \setminus \{0\}$ proizvoljan. Tada je za neke $a \in \mathfrak{I}$ i $m \in \mathbb{Z}_+$

$$P = aX^m + \text{polinom stupnja } < m.$$

Ako je $m \geq r$, stavimo

$$a = u_1 a_1 + \cdots + u_n a_n \qquad \text{za neke} \quad u_1,\dots,u_n \in \mathcal{A}.$$

Tada polinom

$$P - u_1 P_1 X^{m-r_1} - \cdots - u_n P_n X^{m-r_n}$$

leži u $\mathcal{J}$ i stupanj mu je striktno manji od m. Korak po korak doći ćemo do polinoma $Q \in \mathcal{K}$ takvog da je $P - Q \in \mathcal{J}$ i da je stupanj tog polinoma striktno manji od r. Ako sa $\mathcal{A}_{r-1}[X]$ označimo $\mathcal{A}-$podmodul od $\mathcal{A}[X]$ svih polinoma stupnja $\leq r-1$, dokazali smo da je

$$\mathcal{J} = (\mathcal{J} \cap \mathcal{A}_{r-1}[X]) + \mathcal{K}.$$

$\mathcal{A}_{r-1}[X]$ je konačno generiran $\mathcal{A}-$modul pa je po propoziciji 1.4.10. to Noetherin $\mathcal{A}-$modul. Prema tvrdnji (1) propozicije 1.4.8. njegov $\mathcal{A}-$podmodul $\mathcal{J} \cap \mathcal{A}_{r-1}[X]$ također je konačno generiran. Ako su $Q_1,\dots,Q_p \in \mathcal{J} \cap \mathcal{A}_{r-1}[X]$ takvi da je

$$\mathcal{J} \cap \mathcal{A}_{r-1}[X] = \mathcal{A}Q_1 + \cdots + \mathcal{A}Q_p,$$

onda je očito

$$\mathcal{J} = \mathcal{J} \cap \mathcal{A}_{r-1}[X] + \mathcal{K} = \mathcal{A}[X]Q_1 + \cdots + \mathcal{A}[X]Q_p + \mathcal{A}[X]P_1 + \cdots + \mathcal{A}[X]P_n.$$

Time smo dokazali da je svaki ideal u algebri $\mathcal{A}[X]$ konačno generiran, a to prema tvrdnji (1) propozicije 1.4.7. znači da je algebra $\mathcal{A}[X]$ Noetherina.

Druga tvrdnja slijedi iz prve, budući da je svako polje Noetherina algebra. Za treću tvrdnju dovoljno je uočiti da je algebra $S(V)$ izomorfna algebri polinoma $\mathbb{C}[X_1,\dots,X_n]$ za $n = \dim V$. Doista, ako je $\{e_1,\dots,e_n\}$ baza od V onda je $P \mapsto P(e_1,\dots,e_n)$ izomorfizam unitalnih algebri sa $\mathbb{C}[X_1,\dots,X_n]$ na $S(V)$; naime, to je preslikavanje očito unitalni homomorfizam koji bazu

$$\left\{X_1^{m_1}\cdots X_n^{m_n};\ (m_1,\dots,m_n) \in \mathbb{Z}_+^n\right\}$$

prostora $\mathbb{C}[X_1,\dots,X_n]$ prevodi u bazu

$$\left\{e_1^{m_1}\cdots e_n^{m_n};\ (m_1,\dots,m_n) \in \mathbb{Z}_+^n\right\}$$

prostora $S(V)$.

Teorem 1.4.12. *Neka je $\mathfrak{g}$ konačnodimenzionalna kompleksna Liejeva algebra. Tada je njena univerzalna omotačka algebra $U(\mathfrak{g})$ (i lijevo i desno) Noetherina.*

Dokaz: Za bilo koji potprostor $\mathcal{J}$ od $U(\mathfrak{g})$ stavimo

$$Gr\,\mathcal{J} = \coprod_{j \in \mathbb{Z}_+} (\mathcal{J} \cap U_j(\mathfrak{g}))/(\mathcal{J} \cap U_{j-1}(\mathfrak{g})).$$

Zadatak 1.4.6. *Ako je $\mathcal{J}$ lijevi ideal u $U(\mathfrak{g})$ dokažite da je $Gr\,\mathcal{J}$ ideal u komutativnoj algebri $Gr\,U(\mathfrak{g})$.*

Algebra $Gr\,U(\mathfrak{g})$ izomorfna je simetričnoj algebri $S(\mathfrak{g})$, pa je po teoremu 1.4.11. ta algebra Noetherina. Dakle, ako je

$$\mathcal{J}_1 \subseteq \mathcal{J}_2 \subseteq \cdots \subseteq \mathcal{J}_k \subseteq \cdots\cdots$$

rastući niz lijevih ideala u algebri $U(\mathfrak{g})$ onda je

$$Gr\,\mathcal{J}_1 \subseteq Gr\,\mathcal{J}_2 \subseteq \cdots \subseteq Gr\,\mathcal{J}_k \subseteq \cdots\cdots$$

rastući niz ideala u $Gr\,U(\mathfrak{g})$, pa postoji $m \in \mathbb{N}$ takav da je $Gr\,\mathcal{J}_k = Gr\,\mathcal{J}_m$ $\forall k \geq m$. Sada svojstvo lijeve Noetherinosti slijedi iz zadatka:

Zadatak 1.4.7. *Dokažite da je tada $\mathcal{J}_k = \mathcal{J}_m$ $\forall k \geq m$.*

Uputa: Koristite zadatak 1.4.4.

Napokon, pomoću antiautomorfizma $u \mapsto u^t$ slijedi da je algebra $U(\mathfrak{g})$ i desno Noetherina.

Neka je $\mathcal{A}$ unitalna algebra i V lijevi $\mathcal{A}-$modul. **Normalan niz** u modulu V je svaki padajući konačan niz podmodula

$$\mathcal{V}: \qquad V = V_0 \supseteq V_1 \supseteq \cdots \supseteq V_n = \{0\}. \tag{1.1}$$

Faktori normalnog niza $\mathcal{V}$ su subkvocijentni moduli

$$V_{i-1}/V_i, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Duljina normalnog niza $\mathcal{V}$ je broj striktnih inkluzija u tom nizu, odnosno, broj faktora različitih od $\{0\}$. Taj ćemo broj označavati sa $\ell(\mathcal{V})$. **Profinjenje** normalnog niza $\mathcal{V}$ je normalni niz $\mathcal{W}$ koji se dobije umetanjem konačnog broja podmodula između postojećih. Očito je tada $\ell(\mathcal{W}) \geq \ell(\mathcal{V})$. $\mathcal{W}$ se zove **pravo profinjenje** od $\mathcal{V}$ ako je $\ell(\mathcal{W}) > \ell(\mathcal{V})$. Za dva normalna niza

$$\mathcal{V}: \quad V = V_0 \supseteq V_1 \supseteq \cdots \supseteq V_n = \{0\} \qquad \text{i} \qquad \mathcal{W}: \quad V = W_0 \supseteq W_1 \supseteq \cdots \supseteq W_m = \{0\}$$

kažemo da su **ekvivalentni** ako je $n = m$ i ako postoji permutacija $\tau \in \mathcal{S}_n$ takva da je za svaki $i \in \{1, \ldots, n\}$ modul V_{i-1}/V_i izomorfan modulu $W_{\tau(i)-1}/W_{\tau(i)}$. To posebno znači da su duljine tih dvaju normalnih nizova jednake, $\ell(\mathcal{V}) = \ell(\mathcal{W})$.

Kompozicioni niz modula V je normalan niz $\mathcal{V}$ iz (1.1) takav da su svi moduli V_{i-1}/V_i, $i = 1, \ldots, n$, prosti (posebno, svi su različiti od $\{0\}$, dakle, sve su inkluzije striktne). Posebno, kompozicioni niz nema nijedno pravo profinjenje. Kažemo da je V **modul konačne duljine** ako V ima kompozicioni niz.

Teorem 1.4.13. (**Schreier**) *Svaka dva normalna niza u modulu V imaju profinjenja koja su ekvivalentna. Ako je V modul konačne duljine, svaka dva njegova kompoziciona niza su ekvivalentna.*

Dokaz: Naravno, druga tvrdnja neposredno slijedi iz prve. Za dokaz prve tvrdnje trebaju nam sljedeće dvije leme:

Lema 1.4.14. (**Drugi teorem o izomorfizmu**) *Neka je V $\mathcal{A}-$modul i U i W njegovi podmoduli tada su sljedeći subkvocijentni moduli izomorfni:*

$$(U + W)/W \simeq U/(U \cap W).$$

Dokaz: Izomorfizam je dan sa $(u + w) + W \mapsto u + U \cap W$, $u \in U$, $w \in W$.

Lema 1.4.15. (**Zassenhaus**) *Neka je V $\mathcal{A}-$modul i V_1, V_2, V_1', V_2' njegovi podmoduli takvi da je $V_1' \subseteq V_1$ i $V_2' \subseteq V_2$. Tada su sljedeći subkvocijentni moduli izomorfni:*

$$[V_1 \cap V_2 + V_1']/[V_1 \cap V_2' + V_1'] \simeq [V_1 \cap V_2 + V_2']/[V_1' \cap V_2 + V_2'].$$

Dokaz: Iz leme 1.4.14. slijedi

$$(V_1 \cap V_1)/\{[(V_1 \cap V_2') + V_1'] \cap (V_1 \cap V_2)\} \simeq [V_1 \cap V_2 + V_1 \cap V_2' + V_1']/[V_1 \cap V_2' + V_1'] =$$

$$= [V_1 \cap V_2 + V_1']/[V_1 \cap V_2' + V_1'].$$

Nadalje,

$$[(V_1 \cap V_2') + V_1'] \cap (V_1 \cap V_2) = (V_1 \cap V_2' + V_1') \cap V_2 = V_1 \cap V_2' + V_1' \cap V_2.$$

Dakle, imamo

$$(V_1 \cap V_2)/[V_1 \cap V_2' + V_1' \cap V_2] \simeq [V_1 \cap V_2 + V_1']/[V_1 \cap V_2' + V_1'].$$

Primijetimo sada da je lijeva strana invarijantna u odnosu na zamjenu indeksa 1 i 2. Prema tome, modul s desne strane izomorfan je modulu dobivenom iz njega zamjenom indeksa 1 i 2. No to je upravo tvrdnja leme.

Prijeđimo sada na dokaz Schreierovog teorema. Neka su

$$V = V_0 \supseteq V_1 \supseteq \cdots \supseteq V_n = \{0\} \qquad \text{i} \qquad V = W_0 \supseteq W_1 \supseteq \cdots \supseteq W_m = \{0\}$$

normalni nizovi modula V. Stavimo

$$V_{ij} = V_i \cap W_j + V_{i+1}, \qquad 0 \leq j \leq m, \quad 0 \leq i \leq n-1,$$

$$W_{ji} = V_i \cap W_j + W_{j+1}, \qquad 0 \leq i \leq n, \quad 0 \leq j \leq m-1.$$

Budući da je $V_{im} = V_{i+1} = V_{i+1,0}$ i $W_{jn} = W_{j+1} = W_{j+1,0}$ imamo sljedeća profinjenja gornjih normalnih nizova:

$$V = V_{00} \supseteq V_{01} \supseteq \cdots \supseteq V_{0m} \supseteq V_{10} \supseteq V_{11} \supseteq \cdots \supseteq V_{1m} \supseteq \cdots\cdots V_{n-1,0} \supseteq V_{n-1,1} \supseteq \cdots \supseteq V_{n-1,m} = \{0\}$$

i

$$V = W_{00} \supseteq W_{01} \supseteq \cdots \supseteq W_{0n} \supseteq W_{10} \supseteq W_{11} \supseteq \cdots \supseteq W_{1n} \supseteq \cdots\cdots W_{m-1,0} \supseteq W_{m-1,1} \supseteq \cdots \supseteq W_{m-1,n} = \{0\}.$$

Iz sljedećeg zadatka neposredno slijedi da su ta dva profinjenja ekvivalentna:

Zadatak 1.4.8. *Dokažite da vrijedi*

$$V_{ij}/V_{i,j+1} \simeq W_{ji}/W_{j,i+1}.$$

Uputa: Iskoristite Zassenhausovu lemu 1.4.15.

Zbog druge tvrdnje u Schreierovom teoremu 1.4.13. (koja se katkada zove **Jordan–Hölderov teorem**) za svaki modul konačne duljine dobro je definirana **duljina modula** V : to je duljina bilo kojeg kompozicionog niza od V. Taj se broj iz $\mathbb{Z}_+$ označava sa $\ell(V)$.

Korolar 1.4.16. *Neka je V modul konačne duljine i $\mathcal{W}$ normalni niz u V. Tada je $\ell(\mathcal{W}) \leq \ell(V)$.*

Dokaz: Neka je $n = \ell(V)$ i neka je

$$\mathcal{V}: \qquad V = V_0 \supsetneqq V_1 \supsetneqq \cdots \supsetneqq V_n = \{0\}$$

kompozicioni niz od V. Nadalje, Neka je

$$\mathcal{W}: \qquad V = W_0 \supseteq W_1 \supseteq \cdots \supseteq W_m = \{0\}$$

normalni niz u V. Prema Schreierovom teoremu postoje profinjenje $\mathcal{V}'$ od $\mathcal{V}$ i $\mathcal{W}'$ od $\mathcal{W}$ koja su međusobno ekvivalentna. Kako kompozicioni niz nema pravog profinjenja, vrijedi $\ell(\mathcal{V}') = \ell(\mathcal{V})$. Dakle,

$$\ell(\mathcal{W}) \leq \ell(\mathcal{W}') = \ell(\mathcal{V}') = \ell(\mathcal{V}) = \ell(V).$$

Teorem 1.4.17. *$\mathcal{A}-$modul V je konačne duljine ako i samo ako je on i Noetherin i Artinov.*

Dokaz: Pretpostavimo da je V modul konačne duljine i neka je $n = \ell(V)$. Ako modul V nije Noetherin, postoji beskonačan striktno rastući niz podmodula od V

$$\{0\} \subsetneqq V_1 \subsetneqq V_2 \subsetneqq \cdots \subsetneqq V_k \subsetneqq \cdots\cdots.$$

Tada je

$$V = V_{n+1} \supsetneqq V_n \supsetneqq V_{n-1} \cdots \supsetneqq V_1 \supsetneqq V_0 = \{0\}$$

normalan niz u V duljine $n+1$. Slično, ako modul V nije Artinov, onda postoji beskonačan striktno padajući niz podmodula od V

$$V \supsetneqq V_1 \supsetneqq V_2 \supsetneqq \cdots \supsetneqq V_k \supsetneqq \cdots\cdots$$

i iz njega se također može formirati normalan niz u V duljine $n+1$:

$$V = V_0 \supsetneqq V_1 \supsetneqq V_2 \supsetneqq \cdots \supsetneqq V_n \supsetneqq V_{n+1} = \{0\}.$$

Dakle, ako modul V nije bilo Noetherin bilo Artinov, u njemu postoji normalni niz duljine $n+1 = \ell(V) + 1$. No to je nemoguće zbog korolara 1.4.16. Ova kontradikcija pokazuje da je modul V i Noetherin i Artinov.

Pretpostavimo sada da je modul V i Noetherin i Artinov. Ako je $W \neq \{0\}$ podmodul od V, neka je $\mathcal{S}(W)$ skup svih podmodula U od W takvih da je $U \neq W$. Dakle, podmodul $W \neq \{0\}$ je prost, ako i samo ako je $\mathcal{S}(W) = \{\,\{0\}\,\}$. Definiramo još $\mathcal{S}(\{0\}) = \{\,\{0\}\,\}$. Budući da je modul V Noetherin, svaki skup $\mathcal{S}(W)$ ima bar jedan maksimalan element W'. Neka je $\mathcal{S}$ skup svih podmodula od V. Definiramo preslikavanje $f : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ sa $f(W) = W'$. Naravno, za to nam treba Zermelov aksiom izbora: za svaki $W \in \mathcal{S}$ izabiremo jedan element W' iz skupa svih maksimalnih elemenata skupa $\mathcal{S}(W)$. Induktivno definiramo niz podmodula $(V_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ ovako:

$$V_0 = V, \qquad V_n = f(V_{n-1}) = V'_{n-1} \quad \text{za} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Tada je

$$V = V_0 \supseteq V_1 \supseteq V_2 \supseteq \cdots\cdots$$

padajući niz podmodula. Kako je modul V Artinov, postoji $m \in \mathbb{N}$ takav da je $V_k = V_m \ \forall k \geq m$. Tada je $V_m = V_{m+1} = V'_m = f(V_m)$. Međutim, po definiciji preslikavanja f za podmodul W je $f(W) = W$ ako i samo ako je $W = \{0\}$. Prema tome je $V_m = \{0\}$. Neka je n najmanji element $\mathbb{Z}_+$ takav da je $V_n = \{0\}$. Tada je $V_k \neq \{0\}$ za svaki $k < n$. Nadalje, za svaki $k < n$ V_{k+1} je maksimalan element skupa svih pravih podmodula od V_k. Prema tome, modul V_k/V_{k+1} je prost. Dakle,

$$V = V_0 \supsetneqq V_1 \supsetneqq \cdots \supsetneqq V_n = \{0\}$$

je kompozicioni niz modula V.

Iz Schreierovg teorema 1.4.17. i iz propozicije 1.4.8. neposredno slijedi

Korolar 1.4.18. *Ako je V modul i U njegov podmodul onda je modul V konačne duljine ako i samo ako su moduli U i V/U konačne duljine.*

Propozicija 1.4.19. *Neka je*

$$\{0\} \longrightarrow V_1 \longrightarrow V_2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow V_n \longrightarrow \{0\}$$

egzaktni niz $\mathcal{A}-$modula konačne duljine. Tada je

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^k \ell(V_k) = 0.$$

Dokaz ćemo provesti indukcijom po n. Za $n = 1$ tvrdnja je trivijalna, jer iz egzaktnosti niza $\{0\} \longrightarrow V_1 \longrightarrow \{0\}$ slijedi da je $V_1 = \{0\}$. I za $n = 2$ tvrdnja je trivijalna, jer egzaktnost niza $\{0\} \longrightarrow V_1 \longrightarrow V_2 \longrightarrow \{0\}$ znači da je $V_1 \simeq V_2$, dakle, $\ell(V_1) = \ell(V_2)$. Neka je sada $n = 2$, tj. imamo kratki egzaktni niz

$$\{0\} \longrightarrow V_1 \longrightarrow V_2 \longrightarrow V_3 \longrightarrow \{0\}.$$

Tada je modul V_1 izomorfan podmodulu U modula $V = 2$, a modul V_3 izomorfan je kvocijentnom modulu V/U. Neka je $n = \ell(V_1) = \ell(U)$, $m = \ell(V_3) = \ell(V/U)$ i označimo sa $\pi : V \rightarrow V/U$ kvocijentni epimorfizam. Neka je

$$U = U_0 \supsetneqq U_1 \supsetneqq \cdots \supsetneqq U_n = \{0\}$$

kompozicioni niz od U i neka je

$$V/U = W_0 \supsetneqq W_1 \supsetneqq \cdots W_m = \left\{0_{V/U}\right\}$$

kompozicioni niz od V/U. Stavimo $V_j = \pi^{-1}(W_j)$ za $0 \leq j \leq m$ i $V_j = U_{j-m}$ za $m < j \leq m + n$. Tada je očito

$$V = V_0 \supsetneqq V_1 \supsetneqq \cdots \supsetneqq V_m (= U = U_0) \supsetneqq V_{m+1} = U_1 \supsetneqq \cdots \supsetneqq V_{m+n} = U_n = \{0\}$$

kompozicioni niz od V. Prema tome,

$$\ell(V_2) = \ell(V) = n + m = \ell(U) + \ell(V/U) = \ell(V_1) + \ell(V_3) \qquad \Longrightarrow \qquad -\ell(V_1) + \ell(V_2) - \ell(V_3) = 0.$$

Provedimo sada korak indukcije. Neka je $n \geq 4$ i pretpostavimo da je propozicija dokazana za kraće egzaktne nizove. Za egzaktni niz

$$\{0\} \longrightarrow V_1 \longrightarrow V_2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow V_{n-2} \xrightarrow{\alpha} V_{n-1} \xrightarrow{\beta} V_n \longrightarrow \{0\}$$

stavimo $U = \operatorname{Im} \alpha = \operatorname{Ker} \beta$. Sada možemo formirati dva egzaktna niza:

$$\{0\} \longrightarrow V_1 \longrightarrow V_2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow V_{n-2} \xrightarrow{\alpha} U \longrightarrow \{0\}$$

i

$$\{0\} \longrightarrow U \longrightarrow V_{n-1} \xrightarrow{\beta} V_n \longrightarrow \{0\}.$$

Po pretpostavci indukcije imamo

$$\sum_{k=1}^{n-2}(-1)^k \ell(V_k) + (-1)^{n-1}\ell(U) = 0 \qquad \text{i} \qquad \ell(U) = \ell(V_{n-1}) - \ell(V_n).$$

Odatle slijedi

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^k \ell(V_k) = 0.$$

U daljnjem je $\mathcal{A}$ prebrojivo dimenzionalna kompleksna unitalna algebra (npr. $\mathcal{A} = U(\mathfrak{g})$ za kompleksnu konačnodimenzionalnu Liejevu algebru $\mathfrak{g}$). Jedinicu algebre $\mathcal{A}$ označavat ćemo sa 1. Lijeve $\mathcal{A}-$module zvat ćemo kraće $\mathcal{A}-$modulima. Neka je $\mathcal{Z}$ centar algebre $\mathcal{A}$. **Karakter** od $\mathcal{Z}$ je unitalni homomorfizam $\chi : \mathcal{Z} \to \mathbb{C}$. Skup svih karaktera od $\mathcal{Z}$ označavat ćemo sa $\hat{\mathcal{Z}}$. Očito je $\chi \mapsto \operatorname{Ker}\chi$ bijekcija sa skupa $\hat{\mathcal{Z}}$ na skup svih maksimalnih ideala algebre $\mathcal{Z}$. Nadalje, ako je $\chi \in \hat{\mathcal{Z}}$, onda je $\operatorname{Ker}\chi = \{z - \chi(z)1;\ z \in \mathcal{Z}\}$.

Lema 1.4.20. *Skup $\hat{\mathcal{Z}}$ je linearno nezavisan u prostoru $\mathbb{C}^{\mathcal{Z}}$ svih funkcija sa $\mathcal{Z}$ u $\mathbb{C}$.*

Dokaz: Pretpostavimo suprotno i neka je $n \in \mathbb{N}$ najmanji takav da postoje međusobno različiti $\chi_1, \ldots, \chi_n \in \hat{\mathcal{Z}}$ koji su linearno zavisni. Tada je očito $n \geq 2$. Štoviše, $n \geq 3$, jer ako su $\varphi, \psi \in \hat{\mathcal{Z}}$ proporcionalni, onda su jednaki, jer je $\varphi(1) = 1 = \psi(1)$. Neka su $\chi_1, \ldots, \chi_n \in \hat{\mathcal{Z}}$ različiti i linearno zavisni onda je za neke $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$

$$\lambda_1\chi_1(u) + \lambda_2\chi_2(u) + \cdots + \lambda_n\chi_n(u) = 0 \qquad \forall u \in \mathcal{Z}. \tag{1.2}$$

Budući da su χ_1 i χ_2 neproporcionalni linearni funkcionali na $\mathcal{Z}$ različiti od nule, skup

$$\mathcal{Z} \setminus (\operatorname{Ker}\chi_1 \cup \operatorname{Ker}\chi_2)$$

razapinje čitav prostor $\mathcal{Z}$. Prema tome, postoji $z \in \mathcal{Z}$ takav da je $0 \neq \chi_1(z) \neq \chi_2(z) \neq 0$. Sada iz (1.2) slijedi

$$\lambda_1\chi_1(zu) + \lambda_2\chi_2(zu) + \cdots + \lambda_n\chi_n(zu) = 0 \qquad \forall u \in \mathcal{Z},$$

odnosno, kako su χ_j karakteri,

$$\lambda_1\chi_1(z)\chi_1(u) + \lambda_2\chi_2(z)\chi_2(u) + \cdots + \lambda_n\chi_n(z)\chi_n(u) = 0 \qquad \forall u \in \mathcal{Z}.$$

Množenjem (1.2) sa $\chi_1(z)$ i oduzimanjem od gornje jednakosti dobivamo

$$\lambda_2(\chi_2(z) - \chi_1(z))\chi_2(u) + \cdots + \lambda_n(\chi_n(z) - \chi_1(z))\chi_n(u) = 0 \qquad \forall u \in \mathcal{Z}.$$

No to je nemoguće, jer su po izboru n karakteri $\chi_2, \ldots, \chi_n$ linearno nezavisni i jer je prvi koeficijent $\lambda_2(\chi_2(z) - \chi_1(z))$ u gornjoj linearnoj kombinaciji različit od nule. Ova kontradikcija dokazuje lemu.

Za $\mathcal{A}-$modul V i za $\chi \in \hat{\mathcal{Z}}$ definiramo

$$V_\chi = \{v \in V;\ zv = \chi(z)v\ \ \forall z \in \mathcal{Z}\} = \{v \in V;\ uv = 0\ \ \forall u \in \operatorname{Ker}\chi\}.$$

Općenitije, stavimo za svaki $k \in \mathbb{N}$

$$V_\chi^{(k)} = \{v \in V;\ u^k v = 0\ \ \forall u \in \operatorname{Ker}\chi\}.$$

Lema 1.4.21. *Uz oznaku $V_\chi^{(0)} = \{0\}$ za svaki $k \in \mathbb{N}$ vrijedi*

$$V_\chi^{(k)} = \{v \in V;\ u_1 \cdots u_k v = 0\ \ \forall u_1, \ldots, u_k \in \operatorname{Ker}\chi\} = \{v \in V;\ uv \in V_\chi^{(k-1)}\ \ \forall u \in \operatorname{Ker}\chi\}.$$

Dokaz: Druga jednakost slijedi neposredno iz prve. Za dokaz prve označimo

$$U = \{v \in V;\ u_1 \cdots u_k v = 0\ \ \forall u_1, \ldots, u_k \in \operatorname{Ker}\chi\}.$$

Očito je $U \subseteq V_\chi^{(k)}$. Neka je $v \in V_\chi^{(k)}$. Tada za proizvoljno fiksirane $u_1, \ldots, u_k \in \operatorname{Ker}\chi$ i za proizvoljne $t_1, \ldots, t_k \in \mathbb{C}$ vrijedi

$$0 = (t_1u_1 + \cdots + t_ku_k)^k v = \sum_{\substack{j_1, \ldots, j_k \in \mathbb{Z}_+ \\ j_1 + \cdots + j_k = k}} \frac{k!}{j_1! \cdots j_k!} t_1^{j_1} \cdots t_k^{j_k} u_1^{j_1} \cdots u_k^{j_k} v.$$

Desna strana je sadržana u konačnodimenzionalnom potprostoru

$$V_0 = span\,\{u_1^{j_1}\cdots u_k^{j_k}v;\ j_1,\ldots,j_k\in\mathbb{Z}_+,\ ju_1+\cdots+j_k=k\}$$

od V i to je polinomijalna funkcija sa $\mathbb{C}^k$ u V_0. Budući da je ta funkcija identički jednaka 0, svi njeni koeficijenti su jednaki 0. To znači da je

$$u_1^{j_1}\cdots u_k^{j_k}v=0 \qquad \forall j_1,\ldots,j_k\in\mathbb{Z}_+ \quad \text{t.d.} \quad j_1+\cdots+j_k=k.$$

Posebno to vrijedi za $j_1=\cdots=j_k=1$, dakle, $u_1\cdots u_kv=0$. Kako su $u_1,\ldots,u_k\in\operatorname{Ker}\chi$ bili proizvoljno fiksirani, slijedi da je $v\in U$, odnosno, dobivamo i obrnutu inkluziju $V_\chi^{(k)}\subseteq U$.

Uočimo sada da su svi potprostori $V_\chi^{(k)}$ $\mathcal{A}-$podmoduli od V. Nadalje, za dani karakter $\chi\in\hat{\mathcal{Z}}$ radi se o rastućem nizu $\mathcal{A}-$podmodula

$$V_\chi=V_\chi^{(1)}\subseteq V_\chi^{(2)}\subseteq\cdots\subseteq V_\chi^{(k)}\subseteq\cdots\cdots$$

Naravno, ako je $\mathcal{A}-$modul V Noetherin, postoji $m\in\mathbb{N}$ takav da je $V_\chi^{(k)}=V_\chi^{(m)}$ $\forall k\geq m$. Općenito stavimo

$$V_{(\chi)}=\bigcup_{k\in\mathbb{N}}V_\chi^{(k)}=\{v\in V;\ \exists k\in\mathbb{N},\ u^kv=0\ \forall u\in\operatorname{Ker}\chi\}=$$
$$=\{v\in V;\ \exists k\in\mathbb{N},\ u_1\cdots u_kv=0\ \forall u_1,\ldots,u_k\in\operatorname{Ker}\chi\}.$$

Propozicija 1.4.22. *Suma podmodula $V_{(\chi)}$, $\chi\in\hat{\mathcal{Z}}$, $\mathcal{A}-$modula V je direktna.*

Dokaz: Neka su $\chi_1,\ldots,\chi_n\in\hat{\mathcal{Z}}$ međusobno različiti karakteri takvi da je $V_{(\chi_j)}\neq\{0\}$ za $j=1,\ldots,n$ i neka su $v_j\in V_{(\chi_j)}\setminus\{0\}$. Treba dokazati da su vektori $v_1,\ldots,v_n$ linearno nezavisni. Neka je $m\in\mathbb{N}$ takav da je $u^mv_j=0$ $\forall u\in\operatorname{Ker}\chi$ i za $j=1,\ldots,n$. Budući da su $\chi_1,\ldots,\chi_n$ međusobno različiti linearni funkcionali na prostoru $\mathcal{Z}$, sve razlike $\chi_i-\chi_j$, $i\neq j$, su linearni funkcionali raličiti od nule. Svaki od potprostora $\operatorname{Ker}(\chi_i-\chi_j)$ je kodimenzije 1 u prostoru $\mathcal{Z}$. Stoga unija tih potprostora nije jednaka cijelom prostoru $\mathcal{Z}$. Neka je

$$z\in\mathcal{Z}\setminus\bigcup_{i\neq j}\operatorname{Ker}(\chi_i-\chi_j).$$

Tada su brojevi $\lambda_j=\chi_j(z)$, $j=1,\ldots,n$, međusobno različiti i vrijedi

$$(z-\lambda_j)^mv_j=0 \qquad \text{za} \quad j=1,\ldots,n.$$

Odatle slijedi da su potprostori $V_j=span\,\{v_j,zv_j,z^2v_j,\ldots,z^{m-1}v_j\}$ invarijantni s obzirom na djelovanje z. Stoga je njihova suma

$$V_0=V_1\,+\,\cdots\,+\,V_n$$

$z-$invarijantan konačnodimenzionalan potprostor od V. Djelovanje z definira linearan operator $A\in L(V_0)$. Tada za svaki $j\in\{1,\ldots,n\}$ vrijedi $(A-\lambda_jI_{V_0})^mv_j=0$. Prema tome, $v_1,\ldots,v_n$ su korijenski vektori operatora A za različite svojstvene vrijednosti. No tada iz linearne algebre znamo da su vektori $v_1,\ldots,v_n$ linearno nezavisni.

Neka je V i dalje $\mathcal{A}-$modul. Za **vektor** $v\in V$ kažemo da je $\mathcal{Z}-$**konačan**, ako je potprostor $\mathcal{Z}v=\{zv;\ z\in\mathcal{Z}\}$ konačnodimenzionalan, odnosno, ako je ideal $Ann_{\mathcal{Z}}(v)=\{z\in\mathcal{Z};\ zv=0\}$ u $\mathcal{Z}$ konačne kodimenzije u $\mathcal{Z}$. Skup svih $\mathcal{Z}-$konačnih vektora $\mathcal{A}-$modula V označavat ćemo sa V_f. To je potprostor vektorskog prostora V. Nadalje, kako je $\mathcal{Z}$ centar algebre $\mathcal{A}$, za $u\in\mathcal{A}$ i $v\in V_f$ preslikavanje $w\mapsto uw$, $w\in\mathcal{Z}v$, je linearna surjekcija sa $\mathcal{Z}v$ na $\mathcal{Z}uv$. Prema tome je $uv\in V_f$ za svaki $u\in\mathcal{A}$ i svaki $v\in V_f$. Dakle, V_f je podmodul $\mathcal{A}-$modula V.

Teorem 1.4.23. *Neka je $\mathcal{A}$ unitalna algebra i pretpostavimo da njen centar $\mathcal{Z}$ ima svojstvo da je za svaki $\chi \in \hat{\mathcal{Z}}$ i svaki $k \in \mathbb{N}$ ideal $(\operatorname{Ker}\chi)^k$ u $\mathcal{Z}$ konačne kodimenzije u $\mathcal{Z}$. Tada za svaki $\mathcal{A}-$modul V vrijedi*

$$V_f = \sum_{\chi \in \hat{\mathcal{Z}}} V_{(\chi)}.$$

Dokaz: Neka je $v \in V_{(\chi)}$. Tada je $v \in V_\chi^{(k)}$ za neki $k \in \mathbb{N}$, dakle, vrijedi $u_1 \cdots u_k v = 0$ $\forall u_1, \ldots, u_k \in \operatorname{Ker}\chi$, tj. $(\operatorname{Ker}\chi)^k v = \{0\}$. Drugim riječima, preslikavanje $z \mapsto zv$ sa $\mathcal{Z}$ na $\mathcal{Z}v$ u svojoj jezgri sadrži $(\operatorname{Ker}\chi)^k$. Kako je po pretpostavci potprostor $(\operatorname{Ker}\chi)^k$ konačne kodimenzije u $\mathcal{Z}$, zaključujemo da je potprostor $\mathcal{Z}v$ konačnodimenzionalan, odnosno, $v \in V_f$. To pokazuje da je $V_{(\chi)} \subseteq V_f$ za svaki $\chi \in \hat{\mathcal{Z}}$. Dakle, dokazali smo inkluziju

$$\sum_{\chi \in \hat{\mathcal{Z}}} V_{(\chi)} \subseteq V_f.$$

Dokažimo sada obrnutu inkluziju. Neka je $v \in V_f$. Tada je potprostor $W = \mathcal{Z}v$ konačnodimenzionalan i to je $\mathcal{Z}-$podmodul od V. Budući da je algebra $\mathcal{Z}$ komutativna, postoji baza $\{w_1, \ldots, w_n\}$ od W u odnosu na koju svi operatori djelovanja $z \in \mathcal{Z}$ imaju gornje trokutastu matricu. Neka su redom $\chi_1(z), \ldots, \chi_n(z)$ dijagonalni elementi te matrice. Tada su očito $\chi_1, \ldots, \chi_n \in \hat{\mathcal{Z}}$. Nadalje, za svaki $z \in \mathcal{Z}$ element $(z - \chi_1(z)) \cdots (z - \chi_n(z))$ djeluje nilpotentno na W.

Zadatak 1.4.9. *Dokažite da odatle slijedi da je $W \subseteq \sum_{j=1}^n V_{(\chi)}$.*

Uputa: Dokaz se svodi na promatranje konačnodimenzionalne komutativne algebre $\mathcal{Z}/Ann_{\mathcal{Z}}(v)$, gdje je $Ann_{\mathcal{Z}}(v) = \{z \in \mathcal{Z};\ zv = 0\}$, i njeno djelovanje kao algebre operatora na konačnodimenzionalnom prostoru W.

Kako je $v \in W$ i kako je $v \in V_f$ bio proizvoljan, pomoću zadatka 1.4.9. dobivamo obrnutu inkluziju

$$V_f \subseteq \sum_{\chi \in \hat{\mathcal{Z}}} V_{(\chi)}.$$

Time je teorem dokazan.

Uvjet teorema 1.4.23. ispunjen je ako je $\mathcal{Z}$ Noetherina algebra:

Propozicija 1.4.24. *Neka je $\mathcal{Z}$ komutativna Noetherina algebra. Tada je za svaki $\chi \in \hat{\mathcal{Z}}$ i svaki $k \in \mathbb{N}$ ideal $(\operatorname{Ker}\chi)^k$ konačne kodimenzije u $\mathcal{Z}$.*

Dokaz: Za $k = 1$ tvrdnja je trivijalna jer je ideal $\operatorname{Ker}\chi$ kodimenzije 1 u $\mathcal{Z}$. Pretpostavimo da je za neki $k \geq 2$ ideal $(\operatorname{Ker}\chi)^k$ beskonačne kodimenzije u $\mathcal{Z}$ i neka je k najmanji takav. Tada je $(\operatorname{Ker}\chi)^k$ potprostor od $(\operatorname{Ker}\chi)^{k-1}$ beskonačne kodimenzije. Primijetimo da je svaki potprostor $\mathcal{S}$ od $(\operatorname{Ker}\chi)^{k-1}$ koji sadrži $(\operatorname{Ker}\chi)^k$ ideal u $\mathcal{Z}$. Doista, vrijedi $\mathcal{Z} = (\operatorname{Ker}\chi) \dotplus \mathbb{C}$, pa je svaki $z \in \mathcal{Z}$ oblika $z = u + \lambda$ za neki $u \in \operatorname{Ker}\chi$ i neki $\lambda \in \mathbb{C}$. Stoga za $s \in \mathcal{S} \subseteq \operatorname{Ker}\chi$ imamo

$$zs = us + \lambda s \in (\operatorname{Ker}\chi)^k + \mathcal{S} = \mathcal{S}.$$

Zbog toga postoji striktno rastući niz ideala u $\mathcal{Z}$:

$$(\operatorname{Ker}\chi)^k = \mathcal{J}_0 \subsetneq \mathcal{J}_1 \subsetneq \mathcal{J}_2 \subsetneq \cdots\cdots$$

a to je nemoguće zbog toga što je po pretpostavci algebra $\mathcal{Z}$ Noetherina. Ova kontradikcija dokazuje tvrdnju propozicije.

Primijetimo još da je zbog Hilbertovog teorema o bazi svaka konačno generirana komutativna unitalna algebra $\mathcal{Z}$ Noetherina. Doista, ako konačan skup $\{z_1, \ldots, z_n\}$ generira unitalnu algebru $\mathcal{Z}$, onda je $P \mapsto P(z_1, \ldots, z_n)$ epimorfizam algebre polinoma $\mathbb{C}[T_1, \ldots, T_n]$ na algebru $\mathcal{Z}$. Dakle, algebra $\mathcal{Z}$ izomorfna je kvocijentnoj algebri Noetherine algebre $\mathbb{C}[T_1, \ldots, T_n]$ i kao takva je prema propoziciji 1.4.8. Noetherina.

U daljnjem promatramo unitalnu algebru $\mathcal{A}$ čiji centar $\mathcal{Z}$ ima svojstvo iz teorema 1.4.23. Označimo sa $Mod_f(\mathcal{A})$ kategoriju svih $\mathcal{A}-$modula V takvih da je $V = V_f$, odnosno, da je

$$V = \sum_{\chi \in \hat{\mathcal{Z}}} V_{(\chi)}.$$

Podsjetimo se da je gornja suma direktna. Za $\mathcal{A}-$modul V kažemo da je **modul s centralnim karakterom** χ ako je $V = V_\chi$, a da je **modul s generaliziranim centralnim karakterom** χ ako je $V = V_{(\chi)}$. Prema propoziciji 1.4.2. zbog prebrojive dimenzionalnosti algebre $\mathcal{A}$ zaključujemo da je svaki prost $\mathcal{A}-$modul modul s centralnim karakterom. Označimo sa $Mod_\chi(\mathcal{A})$ kategoriju $\mathcal{A}-$modula s centralnim karakterom χ i sa $Mod_{(\chi)}(\mathcal{A})$ kategoriju $\mathcal{A}-$modula s generaliziranim centralnim karakterom χ. Ako je $\varphi : V \to W$ homomorfizam $\mathcal{A}-$modula, onda za $k \in \mathbb{N}$, $v \in V_\chi^{(k)}$ i $u \in \operatorname{Ker} \chi$ imamo $u^k \varphi(v) = \varphi(u^k v) = 0$. To pokazuje da je $\varphi(V_\chi^{(k)}) \subseteq W_\chi^{(k)}$. Odatle slijede inkluzije $\varphi(V_\chi) \subseteq W_\chi$ i $\varphi(V_{(\chi)}) \subseteq W_{(\chi)}$.

Za homomorfizam $\mathcal{A}-$modula $\varphi : V \to W$ stavimo

$$\varphi_\chi = \varphi | V_\chi \in Hom_{\mathcal{A}}(V_\chi, W_\chi), \qquad \varphi_{(\chi)} = \varphi | V_{(\chi)} \in Hom_{\mathcal{A}}(V_{(\chi)}, W_{(\chi)}), \qquad \chi \in \hat{\mathcal{Z}}.$$

Očito je $(\varphi \circ \psi)_\chi = \varphi_\chi \circ \psi_\chi$ i $(\varphi \circ \psi)_{(\chi)} = \varphi_{(\chi)} \circ \psi_{(\chi)}$. Prema tome, $V \mapsto V_\chi$, $\varphi \mapsto \varphi_\chi$ je kovarijantan funktor s kategorije $Mod_f(\mathcal{A})$ u kategoriju $Mod_\chi(\mathcal{A})$, a $V \mapsto V_{(\chi)}$, $\varphi \mapsto \varphi_{(\chi)}$ je kovarijantan funktor sa $Mod_f(\mathcal{A})$ u $Mod_{(\chi)}(\mathcal{A})$.

Propozicija 1.4.25. *Funktor $V \mapsto V_{(\chi)}$, $\varphi \mapsto \varphi_{(\chi)}$ sa kategorije $Mod_f(\mathcal{A})$ u kategoriju $Mod_{(\chi)}(\mathcal{A})$ je egzaktan: ako su U, V, W moduli u kategoriji $Mod_f(\mathcal{A})$ i ako su $\varphi \in Hom_{\mathcal{A}}(U, V)$ i $\psi \in Hom_{\mathcal{A}}(V, W)$ takvi da je $\operatorname{Im} \varphi = \operatorname{Ker} \psi$, tada vrijedi i $\operatorname{Im} \varphi_{(\chi)} = \operatorname{Ker} \psi_{(\chi)}$. Posebno, ako je*

$$\{0\} \longrightarrow U \xrightarrow{\varphi} V \xrightarrow{\psi} W \longrightarrow \{0\}$$

kratki egzaktni niz u kategoriji $Mod_f(\mathcal{A})$ tada je i niz

$$\{0\} \longrightarrow U_{(\chi)} \xrightarrow{\varphi_{(\chi)}} V_{(\chi)} \xrightarrow{\psi_{(\chi)}} W_{(\chi)} \longrightarrow \{0\}$$

u kategoriji $Mod_{(\chi)}(\mathcal{A})$ također egzaktan.

Dokaz: Vrijedi $\psi_{(\chi)} \circ \varphi_{(\chi)} = (\psi \circ \varphi)_{(\chi)} = 0$, dakle, $\operatorname{Im} \varphi_{(\chi)} \subseteq \operatorname{Ker} \psi_{(\chi)}$. Neka je sada $v \in \operatorname{Ker} \psi_{(\chi)}$. Dakle, $v \in V_{(\chi)} \cap \operatorname{Ker} \psi$. Kako je $\operatorname{Ker} \psi = \operatorname{Im} \varphi$, postoji $u \in U$ takav da je $v = \varphi(u)$. Budući da je

$$U = U_f = \sum_{\omega \in \hat{\mathcal{Z}}} U_{(\omega)},$$

postoje $\omega_1, \ldots, \omega_n \in \hat{\mathcal{Z}}$ i $u_j \in U_{(\omega_j)}$, $j = 1, \ldots, n$, takvi da je $u = u_1 + \cdots + u_n$. Vrijedi $\varphi(U_{(\omega)}) \subseteq V_{(\omega)}$ i suma podmodula $V_{(\omega)}$, $\omega \in \hat{\mathcal{Z}}$, je direktna, pa slijedi da je $\varphi(u_j) = 0$ ako je $\omega_j \neq \chi$. Prema tome, postoji $j \in \{1, \ldots, n\}$ takav da je $\omega_j = \chi$ i tada je $\varphi(u_j) = v$, dakle, $\varphi_{(\chi)}(u_j) = v$. To pokazuje da je $v \in \operatorname{Im} \varphi_{(\chi)}$. Time je dokazana i obrnuta inkluzija $\operatorname{Ker} \psi_{(\chi)} \subseteq \operatorname{Im} \varphi_{(\chi)}$, dakle, jednakost $\operatorname{Ker} \psi_{(\chi)} = \operatorname{Im} \varphi_{(\chi)}$.

Napomenimo još da funktor $V \mapsto V_\chi$, $\varphi \mapsto \varphi_\chi$, sa kategorije $Mod_f(\mathcal{A})$ u kategoriju $Mod_\chi(\mathcal{A})$ općenito nije egzaktan. Naime, ako je V $\mathcal{A}-$modul s generaliziranim centralnim karakterom χ takav da je $V = V_\chi^{(2)} \neq V_\chi$, tada je niz

$$\{0\} \longrightarrow V_\chi \longrightarrow V \longrightarrow V/V_\chi \longrightarrow \{0\}$$

u kategoriji $Mod_f(\mathcal{A})$ egzaktan, ali odgovarajući niz u kategoriji $Mod_\chi(\mathcal{A})$

$$\{0\} \longrightarrow V_\chi \longrightarrow V_\chi \longrightarrow (V/V_\chi)_\chi \longrightarrow \{0\}$$

nije egzaktan, jer je $(V/V_\chi)_\chi = V/V_\chi \neq \{0\}$.

Ovaj ćemo odjeljak završiti s jednom važnom konstrukcijom modula polazeći od modula nad unitalnom podalgebrom.

Teorem 1.4.26. *Neka je $\mathcal{A}$ unitalna algebra, $\mathcal{B}$ njena unitalna podalgebra i W lijevi $\mathcal{B}-$modul.*

(a) *Postoji jedinstvena struktura $\mathcal{A}-$modula na prostoru $V = \mathcal{A} \otimes W$ takva da je*

$$a(x \otimes w) = ax \otimes w \qquad \forall a, x \in \mathcal{A} \text{ i } \forall w \in W.$$

(b) *Neka je $V_\mathcal{B}$ podmodul $\mathcal{A}-$modula V iz (a) generiran skupom $\{b\otimes w - 1\otimes bw;\ b \in \mathcal{B},\ w \in W\}$ i neka je*

$$\mathcal{A} \otimes_\mathcal{B} W = V/V_\mathcal{B}$$

kvocijentni $\mathcal{A}-$modul. Klasu elementa $x \otimes w$, $x \in \mathcal{A}$, $w \in W$, u kvocijentnom modulu $V/V_\mathcal{A} = \mathcal{A} \otimes_\mathcal{B} W$ označavamo sa $x \otimes_\mathcal{B} w$. Za svaki $\mathcal{A}-$modul U postoji jedinstveno linearno preslikavanje $T \mapsto \hat{T}$ sa $Hom_\mathcal{B}(W, U)$ u $Hom_\mathcal{A}(\mathcal{A} \otimes_\mathcal{B} W, U)$ takav da je $\hat{T}(1 \otimes_\mathcal{B} w) = Tw$ $\forall T \in Hom_\mathcal{B}(W, U)$ i $\forall w \in W$. Preslikavanje $T \mapsto \hat{T}$ je izomorfizam vektorskog prostora $Hom_\mathcal{B}(W, U)$ na vektorski prostor $Hom_\mathcal{A}(\mathcal{A} \otimes_\mathcal{B} W, U)$.

(c) *Ako je V $\mathcal{A}-$modul, vrijedi $\mathcal{A} \otimes_\mathcal{A} V \simeq V$.*

(d) *Ako je $\mathcal{C}$ unitalna podalgebra od $\mathcal{B}$ i ako je U $\mathcal{C}-$modul, onda je $\mathcal{A}-$modul $\mathcal{A} \otimes_\mathcal{C} U$ izomorfan $\mathcal{A}-$modulu $\mathcal{A} \otimes_\mathcal{B} (\mathcal{B} \otimes_\mathcal{C} U)$.*

Dokaz: (a) Fiksirajmo $a \in \mathcal{A}$. Tada je $(x, w) \mapsto ax \otimes w$ bilinearno preslikavanje sa $\mathcal{A} \times W$ u $\mathcal{A} \otimes W$. Prema univerzalnom svojstvu tenzorskog produkta vektorskih prostora postoji jedinstven linearan operator

$$A_a : \mathcal{A} \otimes W \to \mathcal{A} \otimes W \qquad \text{takav da je} \quad A_a(x \otimes w) = ax \otimes w\ \forall x \in \mathcal{A} \text{ i } \forall w \in W.$$

Treba dokazati dsa je sa

$$au = A_a u, \qquad a \in \mathcal{A}, \quad u \in \mathcal{A} \otimes W,$$

definirana struktura $\mathcal{A}-$modula na prostoru $\mathcal{A} \otimes W$. Budući da je A_a za $a \in \mathcal{A}$ linearan operator, preslikavanje $(a, u) \mapsto au$ je linearno u drugom argumentu:

$$a(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2) = A_a(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2) = \alpha_1 A_a u_1 + \alpha_2 A_a u_2 = \alpha_1 a u_1 + \alpha_2 a u_2.$$

Preslikavanje $(a, u) \mapsto au$ linearno je i u prvom argumentu. Doista, ako su $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$, $a_1, a_2, x \in \mathcal{A}$ i $w \in W$, imamo

$$(\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2)(x \otimes w) = A_{\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2}(x \otimes w) = (\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2)x \otimes w =$$

$$= \alpha_1(a_1 x \otimes w) + \alpha_2(a_2 x \otimes w) = \alpha_1 A_{a_1}(x \otimes w) + \alpha_2 A_{a_2}(x \otimes w) = \alpha_1 a_1(x \otimes w) + \alpha_2 a_2(x \otimes w).$$

Budući da vektori oblika $x \otimes w$, $x \in \mathcal{A}$, $w \in W$, razapinju vektorski prostor $\mathcal{A} \otimes W$, slijedi iskazana linearnost preslikavanja $(a, u) \mapsto au$ u prvom argumentu:

$$(\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2)u = \alpha_1 a_1 u + \alpha_2 a_2 u, \qquad \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}, \quad a_1, a_2 \in \mathcal{A}, \quad u \in \mathcal{A} \otimes W.$$

Dokažimo sada kvaziasocijativnost djelovanja $\mathcal{A}$ na prostoru $\mathcal{A} \otimes W$. Neka su $a, b, x \in \mathcal{A}$ i $w \in W$. Tada imamo

$$(ab)(x \otimes w) = A_{ab}(x \otimes w) = abx \otimes w = A_a(bx \otimes w) = A_a A_b(x \otimes w) = a(b(x \otimes w)).$$

Vektori $x \otimes w$ razapinju prostor $\mathcal{A} \otimes W$, pa slijedi kvaziasocijativnost:

$$(ab)u = a(bu), \qquad a, b \in \mathcal{A}, \quad u \in \mathcal{A} \otimes W.$$

Napokon, očito za $x \in \mathcal{A}$ i $w \in W$ vrijedi

$$1(x \otimes w) = A_1(x \otimes w) = x \otimes w,$$

pa imamo i

$$1u = u \qquad \forall u \in \mathcal{A} \otimes W.$$

Time je tvrdnja (a) dokazana.

(b) Neka je U $\mathcal{A}-$modul i neka je $\mathcal{A} \otimes_{\mathcal{B}} W$ kvocijentni modul $\mathcal{A}-$modula $V = \mathcal{A} \otimes W$ iz (a) po $\mathcal{A}-$podmodulu $V_{\mathcal{B}}$ generiranom skupom $\{b \otimes w - 1 \otimes bw;\ b \in \mathcal{B},\ w \in W\}$. Nadalje, neka je $T \in Hom_{\mathcal{B}}(W, U)$, tj. $T : W \to U$ je linearan operator takav da je $T(bw) = bTw$ $\forall b \in \mathcal{B}$ i $\forall w \in W$. Definiramo preslikavanje $\check{T} : \mathcal{A} \times W \to U$ sa

$$\check{T}(x, w) = xTw, \qquad x \in \mathcal{A}, \quad w \in W.$$

To je preslikavanje očito bilinearno, pa postoji jedinstven linearan operator $\tilde{T} : \mathcal{A} \otimes W \to U$ takav da je

$$\tilde{T}(x \otimes w) = xTw \qquad \forall x \in \mathcal{A} \quad \text{i} \quad \forall w \in W.$$

Tada je $\tilde{T}$ homomorfizam $\mathcal{A}-$modula. Doista, ako su $a, x \in \mathcal{A}$ i $w \in W$, tada je

$$\tilde{T}(a(x \otimes w)) = \tilde{T}(ax \otimes w) = (ax)Tw = a(xTw) = a\tilde{T}(x \otimes w).$$

Budući da vektori oblika $x \otimes w$, $x \in \mathcal{A}$, $w \in W$, razapinju prostor $V = \mathcal{A} \otimes W$, slijedi

$$\tilde{T}av = a\tilde{T}v \qquad \forall a \in \mathcal{A} \quad \text{i} \quad \forall v \in V.$$

Time je dokazano da je $\tilde{T} \in Hom_{\mathcal{A}}(V, U)$. Sada za $b \in \mathcal{B}$ i $w \in W$ imamo

$$\tilde{T}(b \otimes w - 1 \otimes bw) = bTw - Tbw = 0$$

budući da je $T \in Hom_{\mathcal{B}}(W, U)$. Prema tome, $\mathcal{A}-$podmodul $V_{\mathcal{B}}$ generiran vektorima oblika $b \otimes w - 1 \otimes bw$ sadržan je u jezgri operatora $\tilde{T}$. Prijelazom na kvocijent dolazimo do preplitanja $\hat{T} \in Hom_{\mathcal{A}}(\mathcal{A} \otimes_{\mathcal{B}} W, U)$:

$$\hat{T}(v + V_{\mathcal{B}}) = \tilde{T}v, \qquad v \in V = \mathcal{A} \otimes W.$$

Sada za $x \in \mathcal{A}$ i $w \in W$ imamo

$$\hat{T}(x \otimes_{\mathcal{B}} w) = \hat{T}(x \otimes w + V_{\mathcal{B}}) = \tilde{T}(x \otimes w) = xTw.$$

Posebno, vrijedi $\hat{T}(1 \otimes_{\mathcal{B}} w) = Tw$ $\forall w \in W$. Time je dokazana egzistencija $\hat{T}$, a jedinstvenost slijedi iz sljedećeg zadatka:

Zadatak 1.4.10. *Dokažite da skup* $\{1 \otimes_{\mathcal{B}} w;\ w \in W\}$ *generira* $\mathcal{A}-$*modul* $V = \mathcal{A} \otimes_{\mathcal{B}} W$.

Budući da je preslikavanje $T \mapsto xTw$ sa $Hom_{\mathcal{B}}(W,U)$ u U linearno za bilo koje $x \in \mathcal{A}$ i $w \in W$, očito je preslikavanje $T \mapsto \tilde{T}$ sa $Hom_{\mathcal{B}}(W,U)$ u $Hom_{\mathcal{A}}(V,U)$ linearno. Odatle slijedi linearnost preslikavanja $T \mapsto \hat{T}$ sa $Hom_{\mathcal{B}}(W,U)$ u $Hom_{\mathcal{A}}(\mathcal{A} \otimes_{\mathcal{B}} W, U)$.

Konstruirat ćemo sada inverzno preslikavanje $Hom_{\mathcal{A}}(\mathcal{A} \otimes_{\mathcal{B}} W, U) \to Hom_{\mathcal{B}}(W,U)$. Ako je $S \in Hom_{\mathcal{A}}(\mathcal{A} \otimes_{\mathcal{B}} W, U)$ definiramo operator $\check{S} : W \to U$ sa

$$\check{S}w = S(1 \otimes_{\mathcal{B}} w), \qquad w \in W.$$

Operator $\check{S}$ je očito linearan. Nadalje, kako je S preplitanje $\mathcal{A}-$modula i kako za $b \in \mathcal{B}$ i $w \in W$ u modulu $\mathcal{A} \otimes_{\mathcal{B}} W$ vrijedi $1 \otimes_{\mathcal{B}} bw = b \otimes_{\mathcal{B}} w$, imamo

$$\check{S}bw = S(1 \otimes_{\mathcal{B}} bw) = S(b \otimes_{\mathcal{B}} w) = S(b(1 \otimes_{\mathcal{B}} w)) = bS(1 \otimes_{\mathcal{B}} w) = b\check{S}w.$$

To pokazuje da je $\check{S} \in Hom_{\mathcal{B}}(W,U)$. Nadalje, preslikavanje $S \mapsto \check{S}$ je očito linearno. To je preslikavanje inverzno preslikavanju $T \mapsto \hat{T}$. Doista, za $T \in Hom_{\mathcal{B}}(W,U)$ i za $w \in W$ imamo

$$\check{\hat{T}}w = \hat{T}(1 \otimes_{\mathcal{B}} w) = Tw,$$

dakle, $\check{\hat{T}} = T$. Također, za $S \in Hom_{\mathcal{A}}(\mathcal{A} \otimes_{\mathcal{B}} W, U)$ i $w \in W$ imamo

$$\hat{\check{S}}(1 \otimes_{\mathcal{B}} w) = \check{S}w = S(1 \otimes_{\mathcal{B}} w).$$

Budući da prema zadatku 1.4.10. vektori oblika $1 \otimes_{\mathcal{B}} w$, $w \in W$, generiraju $\mathcal{A}-$modul $\mathcal{A} \otimes_{\mathcal{B}} W$, zaključujemo da vrijedi $\hat{\check{S}} = S$.

Time smo dokazali da je preslikavanje $S \mapsto \check{S}$ inverzno preslikavanju $T \mapsto \hat{T}$. Dakle, $T \mapsto \hat{T}$ je izomorfizam prostora $Hom_{\mathcal{B}}(W,U)$ na prostor $Hom_{\mathcal{A}}(\mathcal{A} \otimes_{\mathcal{B}} W, U)$.

Zadatak 1.4.11. *Dokažite tvrdnju* (c) *da je svaki* $\mathcal{A}-$*modul* V *izomorfan* $\mathcal{A}-$*modulu* $\mathcal{A} \otimes_{\mathcal{A}} V$.

Uputa: Izomorfizam $V \to \mathcal{A} \otimes_{\mathcal{A}} V$ je $v \mapsto 1 \otimes_{\mathcal{A}} v$.

Zadatak 1.4.12. *Dokažite tvrdnju* (d) : $\mathcal{A} \otimes_{\mathcal{C}} U \simeq \mathcal{A} \otimes_{\mathcal{B}} (\mathcal{B} \otimes_{\mathcal{C}} U)$ *ako su* $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ *unitalne podalgebre i ako je* U $\mathcal{C}-$*modul.*

Uputa: Preslikavanje $\mathcal{A} \otimes_{\mathcal{C}} U \to \mathcal{A} \otimes_{\mathcal{B}} (\mathcal{B} \otimes_{\mathcal{C}} U)$ dobiva se polazeći od bilinearnog preslikavanja

$$(a,u) \mapsto a \otimes_{\mathcal{B}} (1 \otimes_{\mathcal{C}} u), \qquad a \in \mathcal{A}, \quad u \in U,$$

sa $\mathcal{A} \times U$ u $\mathcal{A} \otimes_{\mathcal{B}} (\mathcal{B} \otimes_{\mathcal{C}} U)$. Inverzno preslikavanje $\mathcal{A} \otimes_{\mathcal{B}} (\mathcal{B} \otimes_{\mathcal{C}} U) \to \mathcal{A} \otimes_{\mathcal{C}} U$ dobiva se polazeći od trilinearnog preslikavanja

$$(a,b,u) \mapsto ab \otimes_{\mathcal{C}} u, \qquad a \in \mathcal{A}, \quad b \in \mathcal{B}, \quad u \in U,$$

sa $\mathcal{A} \times \mathcal{B} \times U$ u $\mathcal{A} \otimes_{\mathcal{C}} U$. Za proizvoljno fiksno $a \in \mathcal{B}$ iz bilinearnog preslikavanja $(b,u) \mapsto ab \otimes_{\mathcal{C}} u$ dolazi se najprije do linearnog preslikavanja $\mathcal{B} \otimes U \to \mathcal{A} \otimes U$, zatim do linearnog preslikavanja $\mathcal{B} \otimes_{\mathcal{C}} U \to \mathcal{A} \otimes_{\mathcal{C}} U$, pa do bilinearnog preslikavanja $\mathcal{A} \times (\mathcal{B} \otimes_{\mathcal{C}} U) \to \mathcal{A} \otimes_{\mathcal{C}} U$, pa do linearnog preslikavanja $\mathcal{A} \otimes (\mathcal{B} \otimes_{\mathcal{C}} U) \to \mathcal{A} \otimes_{\mathcal{C}} U$ i napokon do linearnog preslikavanja $\mathcal{A} \otimes_{\mathcal{B}} (\mathcal{B} \otimes_{\mathcal{C}} U) \to \mathcal{A} \otimes_{\mathcal{C}} U$. Zatim se dokazuje da su oba linearna preslikavanja $\mathcal{A}-$preplitanja, tj. homomorfizmi $\mathcal{A}-$modula, i da su međusobno inverzna.

Za $\mathcal{A}-$modul $\mathcal{A} \otimes_{\mathcal{B}} W$ iz teorema 1.4.26. kažemo da je **inducirani $\mathcal{B}-$modulom** W unitalne podalgebre $\mathcal{B}$ od $\mathcal{A}$. Tvrdnja (b) u tom teoremu zove se **Frobeniusov teorem reciprociteta**, a tvrdnja (d) **teorem o induciranju u etapama**.

1.5 Klasa induciranih reprezentacija

U ovom ćemo odjeljku definirati i proučiti jednu klasu tzv. *induciranih reprezentacija* lokalno kompaktnih grupa. U tu svrhu nam trebaju sljedeća dva rezultata koje navodimo bez dokaza:

Propozicija 1.5.1. *Neka je G unimodularna lokalno kompaktna grupa i A i B zatvorene podgrupe, takve da je podgrupa $A \cap B$ kompaktna i da je $G = AB = \{ab;\ a \in A,\ b \in B\}$. Neka je α lijeva Haarova mjera na A i β desna Haarova mjera na B. Tada je sa*

$$f \mapsto \int_A \int_B f(ab) \mathrm{d}\alpha(a) \mathrm{d}\beta(b), \qquad f \in C_0(G),$$

zadana Haarova mjera na G.

Propozicija 1.5.2. *Neka je G lokalno kompaktna grupa, H zatvorena podgrupa, $H\backslash G$ lokalno kompaktan topološki prostor svih lijevih $H-$klasa Hx u G i ν lijeva Haarova mjera na H. Za $f \in C_0(G)$ definiramo $F_f : H\backslash G \to \mathbb{C}$ sa*

$$F_f(Hx) = \int_H f(hx) \mathrm{d}\nu(h), \qquad x \in G.$$

Tada je $f \mapsto F_f$ linearna surjekcija sa $C_0(G)$ na $C_0(H\backslash G)$ koja preslikava $C_0^+(G)$ na $C_0^+(H\backslash G)$.

U daljnjem je G unimodularna lokalno kompaktna grupa, P zatvorena podgrupa od G i K kompaktna podgrupa od G takve da je $G = PK$. Neka je ν lijeva Haarova mjera na P i κ normirana Haarova mjera na K. Prema propoziciji 1.5.1. tada je sa

$$\int_G f(x) \mathrm{d}\mu(x) = \int_P \int_K f(pk) \mathrm{d}\nu(p) \mathrm{d}\kappa(k), \qquad f \in C_0(G),$$

zadana Haarova mjera μ na G. Proširimo sada modularnu funkciju Δ_P grupe P na grupu G tako da stavimo $\Delta_P(pk) = \Delta_P(p)$ za $p \in P$ i $k \in K$. Definicija ima smisla jer je $\Delta_P(k) = 1\ \forall k \in P \cap K$. Nadalje, Δ_P je neprekidna funkcija na G.

Izaberimo sada preslikavanja $x \mapsto p(x)$ sa G u P i $x \mapsto k(x)$ sa G u K takva da je $x = p(x)k(x)$ $\forall x \in G$. Naravno, takva preslikavanja postoje jer je $G = PK$, ali kako ne pretpostavljamo da je $P \cap K = \{e\}$ ona općenito nisu jedinstvena. Tada uz naše proširenje modularne funkcije Δ_P na cijelu grupu G očito vrijedi $\Delta_P(p(x)) = \Delta_P(x)\ \ \forall x \in G$.

Lema 1.5.3. *Za funkciju $f \in C(K)$ takvu da je $f(pk) = f(k)\ \ \forall p \in P \cap K$ i $\forall k \in K$ vrijedi*

$$\int_K f(k(kx)) \Delta_P(kx) \mathrm{d}\kappa(k) = \int_K f(k) \mathrm{d}\kappa(k) \qquad \forall x \in G.$$

Dokaz: Koristeći pretpostavljeno svojstvo funkcije f iz propozicije 1.5.2. slijedi da postoji $g \in C_0(G)$ takva da je

$$f(k) = \int_P g(pk) \mathrm{d}\nu(p) \qquad \forall k \in K.$$

Tada imamo

$$\int_G g(x) \mathrm{d}\mu(x) = \int_P \int_K g(pk) \mathrm{d}\nu(p) \mathrm{d}\kappa(k) = \int_K f(k) \mathrm{d}\kappa(k).$$

Sada imamo redom za proizvoljan $x \in G$:

$$\int_K f(k) \mathrm{d}\kappa(k) = \int_G g(y) \mathrm{d}\mu(y) = \int_G g(yx) \mathrm{d}\mu(y) = \int_P \int_K g(pkx) \mathrm{d}\nu(p) \mathrm{d}\kappa(k) =$$

$$= \int_P \int_K g(pp(kx)k(kx)) \mathrm{d}\nu(p) \mathrm{d}\kappa(k) = \int_P \int_K \Delta_P(p(kx)) g(pk(kx)) \mathrm{d}\nu(p) \mathrm{d}\kappa(k) =$$

$$= \int_K \Delta_P(kx) \left[\int_P g(pk(kx)) \mathrm{d}\nu(p) \right] \mathrm{d}\kappa(k) = \int_K \Delta_P(kx) f(k(kx)) \mathrm{d}\kappa(k).$$

Neka je sada σ reprezentacija grupe P na Hilbertovom prostoru $\mathcal{K}$. Prema teoremu 1.3.1. možemo pretpostaviti da je restrikcija $\sigma|P\cap K$ unitarna reprezentacija kompaktne grupe $P\cap K$. Neka je $\mathcal{H}_0^\sigma$ prostor svih neprekidnih funkcija $u : G \to \mathcal{K}$ sa svojstvom

$$u(px) = \sqrt{\Delta_P(p)}\sigma(p)u(x) \qquad \forall p \in P \quad \text{i} \quad \forall x \in G. \tag{1.3}$$

Za $u, v \in \mathcal{H}_0^\sigma$ stavimo

$$(u|v) = \int_K (u(k)|v(k))_{\mathcal{K}} \mathrm{d}\kappa(k).$$

Lako se vidi da je na taj način definirana pozitivna hermitska forma sa $\mathcal{H}_0^\sigma \times \mathcal{H}_0^\sigma$ u $\mathbb{C}$. Dokažimo da je ta forma definitna, tj. da je to skalarni produkt na prostoru $\mathcal{H}_0^\sigma$. Doista, ako je $u \in \mathcal{H}_0^\sigma$ iz $(u|u) = 0$ slijedi da je $u(k) = 0\ \forall k \in K$. Za proizvoljan $x \in G$ postoje $k \in K$ i $p \in P$ takvi da je $x = pk$, pa nalazimo

$$u(x) = u(pk) = \sqrt{\Delta_P(p)}\sigma(p)u(k) = 0.$$

Prema tome, $u = 0$. Time je dokazana definitnost forme $(\,\cdot\,|\,\cdot\,)$. Neka je $\mathcal{H}^\sigma$ popunjenje unitarnog prostora $\mathcal{H}_0^\sigma$.

Za $u \in \mathcal{H}_0^\sigma$ i $x \in G$ definiramo funkciju $\pi^\sigma(x)u : G \to \mathcal{K}$ ovako

$$(\pi^\sigma(x)u)(y) = u(yx), \qquad y \in G.$$

Tada je očito $\pi^\sigma(x)u \in \mathcal{H}_0^\sigma$. Na taj je način definirano je preslikavanje koje svakom $x \in G$ pridružuje linearan operator $\pi^\sigma(x) : \mathcal{H}_0^\sigma \to \mathcal{H}_0^\sigma$. To preslikavanje očito ima svojstva $\pi^\sigma(xy) = \pi^\sigma(x)\pi^\sigma(y)$, $x, y \in G$, i $\pi^\sigma(e) = I_{\mathcal{H}_0^\sigma}$.

Propozicija 1.5.4. (a) *Za svaki $x \in G$ operator $\pi^\sigma(x)$ jedinstveno se proširuje do ograničenog operatora na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}^\sigma$. Označimo taj operator također sa $\pi^\sigma(x)$.*

(b) *π^σ je reprezentacija grupe G na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}^\sigma$. Ako je reprezentacija σ grupe P unitarna, onda je i reprezentacija π^σ grupe G unitarna.*

Dokaz: (a) Koristit ćemo prije izabrane funkcije $p : G \to P$ i $k : G \to K$ takve da je $x = p(x)k(x)\ \forall x \in G$. Neodređenost izbora tih funkcija je u kompaktnom skupu $P \cap K$. Prema tome, ako je Ω kompaktan podskup od G onda postoji kompaktan podskup Ω' od P takav da je $p(\Omega) \subseteq \Omega'$.

Neka je sada $u \in \mathcal{H}_0^\sigma$ i neka je Ω kompaktan podskup od G. Za $x \in \Omega$ imamo

$$\|\pi^\sigma(x)u\|^2 = \int_K \|u(kx)\|_{\mathcal{K}}^2 \mathrm{d}\kappa(k) = \int_K \Delta_P(kx)\|\sigma(p(kx))u(k(kx))\|_{\mathcal{K}}^2 \mathrm{d}\kappa(k). \tag{1.4}$$

Za svaki $k \in K$ je $p(kx) \in (K\Omega)'$. Prema posljednjoj tvrdnji propozicije 1.1.9. postoji $M > 0$ takav da je

$$\|\sigma(p(kx))\|_{\mathcal{K}} \le M \qquad \forall x \in \Omega \quad \text{i} \quad \forall k \in K.$$

Nadalje, stavimo

$$L = \max\left\{\sqrt{\Delta_P(y)};\ y \in K\Omega\right\}.$$

Sada iz (1.4) slijedi

$$\|\pi^\sigma(x)u\| \le ML\|u\| \qquad \forall x \in \Omega. \tag{1.5}$$

Odavde slijedi tvrdnja (a).

(b) Neka su Ω, M i L kao u dokazu tvrdnje (a) i stavimo $C = ML$. Sada iz (1.5) nalazimo za $u, v, z \in \mathcal{H}_0^\sigma$ i $x \in \Omega$

$$|(\pi^\sigma(x)z|u) - (\pi^\sigma(x)z|v)| = |(\pi^\sigma(x)z|u-v)| \leq C\|z\|\,\|u-v\|$$

i, analogno,

$$|(\pi^\sigma(x)u|z) - (\pi^\sigma(x)v|z)| \leq C\|u-v\|\,\|z\|.$$

Budući da su očito funkcije $\pi^\sigma_{u,v}(x) = (\pi^\sigma(x)u|v)$ za $u, v \in \mathcal{H}_0^\sigma$ neprekidne na G, gornje nejednakosti zbog svojstva (e) u propoziciji 1.1.9. pokazuju da je π^σ reprezentacija hgrupe G na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}^\sigma$.

Pretpostavimo sada da je reprezentacija σ grupe P unitarna. Tada za $u \in \mathcal{H}_0^\sigma$ i $x \in G$ imamo prema (1.4)

$$\|\pi^\sigma(x)u\|^2 = \int_K \Delta_P(kx)\|u(k(kx))\|^2_{\mathcal{K}}\mathrm{d}\kappa(k). \tag{1.6}$$

Definiramo funkciju $f \in C(K)$ sa $f(k) = \|u(k)\|^2_{\mathcal{K}}$, $k \in K$. Za $k \in K$ i za $p \in P \cap K$ imamo zbog (1.3), zbog $\Delta_P|P \cap K \equiv 1$ i zbog unitarnosti reprezentacije σ

$$f(pk) = \|u(pk)\|^2 = \Delta_P(p)\|\sigma(p)u(k)\|^2_{\mathcal{K}} = \|u(k)\|^2_{\mathcal{K}} = f(k).$$

Sada po lemi 1.5.3. iz jednakosti (1.6) slijedi

$$\|\pi^\sigma(x)u\|^2 = \int_K \|u(k)\|^2_{\mathcal{K}}\mathrm{d}\kappa(k) = \|u\|^2.$$

Dakle, reprezentacija π^σ grupe G je unitarna.

Za konstruiranu reprezentaciju π^σ kažemo da je **inducirana** reprezentacijom σ. Katkada se piše $\pi^\sigma = Ind_P^G\,\sigma$. Može se dokazati da se $\mathcal{H}^\sigma$ može prirodno identificirati s prostorom svih klasa izmjerivih funkcija $u : G \to \mathcal{K}$ takvih da vrijedi (1.3) i da je funkcija $k \mapsto \|u(k)\|^2_{\mathcal{K}}$ integrabilna na K u odnosu na Haarovu mjeru κ.

Promatrajmo sada posebni slučaj kad je grupa G kompaktna. Neka je P zatvorena podgrupa od G. U našoj konstrukciji možemo uzeti $K = G$. Neka je σ konačnodimenzionalna unitarna reprezentacija grupe P na prostoru $\mathcal{K}$. Promatrat ćemo reprezentaciju π^σ. Sada je $\Delta_P \equiv 1$ pa je $\mathcal{H}_0^\sigma$ prostor svih neprekidnih funkcija $f : G \to \mathcal{K}$ takvih da je

$$f(px) = \sigma(p)f(x) \qquad \forall p \in P \quad \text{i} \quad \forall x \in G.$$

Nadalje, sada je za $u, v \in \mathcal{H}_0^\sigma$ funkcija $x \mapsto (u(x)|v(x))_{\mathcal{K}}$ konstantna na lijevim $P-$klasama u G, pa iz propozicije 1.5.1. slijedi da uz pogodno normiranje Haarove mjere ν vrijedi

$$(u|v) = \int_G (u(x)|v(x))_{\mathcal{K}}\mathrm{d}\mu(x).$$

Lema 1.5.5. *Za svako $\gamma \in \hat{G}$ potprostor $\mathcal{H}^\sigma(\gamma)$ sadržan je u $\mathcal{H}_0^\sigma$.*

Dokaz: Ako je $u \in C(G)$ i $v \in \mathcal{H}^\sigma$ tada je za $x \in G$

$$[\pi^\sigma(u)v](x) = \int_G u(y)[\pi^\sigma(y)v](x)\mathrm{d}\mu(y) = \int_G u(y)v(xy)\mathrm{d}\mu(y).$$

To je neprekidna funkcija od x, pa zaključujemo da je $\pi^\sigma(u)\mathcal{H}^\sigma \subseteq \mathcal{H}_0^\sigma \;\; \forall u \in C(G)$. Sada lema slijedi iz tvrdnje (b) teorema 1.3.5.

Teorem 1.5.6. (**Frobeniusov teorem reciprociteta**) *Neka je π konačnodimenzionalna unitarna reprezentacija kompaktne grupe G na prostoru $\mathcal{H}$ i σ konačnodimenzionalna unitarna reprezentacija zatvorene podgrupe P na prostoru $\mathcal{K}$. Za $T \in Hom_G(\mathcal{H}, \mathcal{H}^\sigma)$ je $T\mathcal{H} \subseteq \mathcal{H}_0^\sigma$. Definiramo $\hat{T} : \mathcal{H} \to \mathcal{K}$ sa $\hat{T}\xi = (T\xi)(e)$. Tada je $\hat{T} \in Hom_P(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ i $T \mapsto \hat{T}$ je izomorfizam prostora $Hom_G(\mathcal{H}, \mathcal{H}^\sigma)$ na prostor $Hom_P(\mathcal{H}, \mathcal{K})$.*

Dokaz: Inkluzija $T\mathcal{H} \subseteq \mathcal{H}_0^\sigma$ slijedi neposredno iz leme 1.5.5. Očito je $\hat{T} : \mathcal{H} \to \mathcal{K}$ linearan operator. Za $p \in P$ i $\xi \in \mathcal{H}$ imamo

$$\hat{T}\pi(p)\xi = (T\pi(p)\xi)(e) = (\pi^\sigma(p)T\xi)(e) = (T\xi)(p) = \sigma(p)(T\xi)(e) = \sigma(p)\hat{T}\xi.$$

Prema tome je $\hat{T} \in Hom_P(\mathcal{H}, \mathcal{K})$. Očito je preslikavanje $T \mapsto \hat{T}$ sa $Hom_G(\mathcal{H}, \mathcal{H}^\sigma)$ u $Hom_P(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ linearno.

Neka je sada $S \in Hom_P(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ i za $\xi \in \mathcal{H}$ definirajmo neprekidnu funkciju $\check{S}\xi : G \to \mathcal{K}$ ovako:

$$(\check{S}\xi)(x) = S(\pi(x)\xi), \qquad x \in G.$$

Tada za $p \in P$ i $x \in G$ imamo

$$(\check{S}\xi)(px) = S(\pi(px)\xi) = S(\pi(p)\pi(x)\xi) = \sigma(p)S(\pi(x)\xi) = \sigma(p)(\check{S}\xi)(x).$$

Prema tome je $\check{S}\xi \in \mathcal{H}_0^\sigma$. Prema tome, $\check{S}$ je linearan operator sa $\mathcal{H}$ u $\mathcal{H}_0^\sigma \subseteq \mathcal{H}^\sigma$. Za $x, y \in G$ i $\xi \in \mathcal{H}$ imamo

$$(\check{S}\pi(x)\xi)(y) = S(\pi(y)\pi(x)\xi) = S(\pi(yx)\xi) = (\check{S}\xi)(yx) = (\pi^\sigma(x)\check{S}\xi)(y).$$

To pokazuje da je $\check{S} \in Hom_G(\mathcal{H}, \mathcal{H}^\sigma)$. Očito je preslikavanje $S \mapsto \check{S}$ sa $Hom_P(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ u $Hom_G(\mathcal{H}, \mathcal{H}^\sigma)$ linearno. Napokon, to je preslikavanje inverzno preslikavanju $T \mapsto \hat{T}$, jer za $S \in Hom_P(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ i $\xi \in \mathcal{H}$ imamo

$$\hat{\check{S}}\xi = (\check{S}\xi)(e) = S\xi, \qquad \text{dakle,} \quad \hat{\check{S}} = S,$$

a za $T \in Hom_G(\mathcal{H}, \mathcal{H}^\sigma)$, $\xi \in \mathcal{H}$ i $x \in G$ imamo

$$(\check{\hat{T}}\xi)(x) = \hat{T}(\pi(x)\xi) = (T\pi(x)\xi)(e) = (\pi^\sigma(x)T\xi)(e) = (T\xi)(x), \qquad \text{dakle,} \quad \check{\hat{T}} = T.$$

Korolar 1.5.7. *Neka je $\gamma \in \hat{G}$ i neka je π unitarna ireducibilna reprezentacija kompaktne grupe G na prostoru $\mathcal{H}$ iz klase γ. Nadalje, neka je σ konačnodimenzionalna unitarna reprezentacija zatvorene podgrupe P na prostoru $\mathcal{K}$. Tada je*

$$\dim \mathcal{H}^\sigma(\gamma) = d(\gamma) \dim Hom_P(\mathcal{H}, \mathcal{K}).$$

Posebno, ako je σ ireducibilna, multiplicitet γ u induciranoj reprezentaciju π^σ jednak je multiplicitetu klase reprezentacije σ u restrikciji $\pi|P$.

Zadatak 1.5.1. *Dokažite korolar 1.5.7.*

Zadatak 1.5.2. *Neka su $Q \subseteq P$ zatvorene podgrupe kompaktne grupe G i neka je τ konačnodimenzionalna unitarna reprezentacija grupe Q na prostoru $\mathcal{L}$. Dokažite da su tada reprezentacije $Ind_P^G\, Ind_Q^P\, \tau$ i $Ind_Q^G\, \tau$ ekvivalentne.*

Napomena: Osim direktne konstrukcije bijektivnog preplitanja zadatak možete riješiti i tako da pomoću korolara 1.5.7. dokažete da su multipliciteti svake $\gamma \in \hat{G}$ i dvjema reprezentacijama isti.

Zadatak 1.5.3. *Dokažite da je reprezentacija π unimodularne grupe G na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$ ekvivalentna induciranoj reprezentaciji $Ind_G^G\, \pi$.*

Napomena: U ovom slučaju možete uzeti $P = G$ i $K = \{e\}$.

1.6 Liejeve grupe

U ovom odjeljku navodimo definicije i bez dokaza osnovne teoreme iz teorije Liejevih grupa.

1.6.1 Diferencijalne i analitičke mnogostrukosti

Neka je M Hausdorffov topološki prostor i neka je $n \in \mathbb{N}$. $n-$**dimenzionalna karta** na M je uređen par (U, ψ) gdje je $U \subseteq M$ otvoren skup i ψ je homeomorfizam sa U na otvoren podskup od $\mathbb{R}^n$. Skup U zovemo **domena karte** (U, ψ). $n-$**dimenzionalni** $C^\infty-$**atlas** na M je skup $\mathcal{A}$ $n-$dimenzionalnih karata na M sa sljedećim svojstvima:

(i) Domene karata u skupu $\mathcal{A}$ pokrivaju M :

$$\bigcup_{(U,\psi)\in\mathcal{A}} U = M.$$

(ii) Ako su $(U, \psi), (V, \varphi) \in \mathcal{A}$ takve karte da je $U \cap V \neq \emptyset$, onda je

$$\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \longrightarrow \psi(U \cap V)$$

$C^\infty-$preslikavanje.

$n-$**dimenzionalna** $C^\infty-$**struktura** na M je $n-$dimenzionalni $C^\infty-$atlas $\mathcal{A}$ na M koji pored (i) i (ii) zadovoljava i svojstvo maksimalnosti:

(iii) Ako je (W, χ) $n-$dimenzionalna karta na M i ako su za svaku kartu $(U, \psi) \in \mathcal{A}$ takvu da je $U \cap W \neq \emptyset$ preslikavanja

$$\psi \circ \chi^{-1} : \chi(U \cap W) \longrightarrow \psi(U \cap W) \qquad \text{i} \qquad \chi \circ \psi^{-1} : \psi(U \cap W) \longrightarrow \chi(U \cap W)$$

klase C^∞, onda je $(W, \chi) \in \mathcal{A}$.

Očito je svaki $n-$dimenzionalni $C^\infty-$atlas sadržan u jedinstvenoj $n-$dimenzionalnoj $C^\infty-$strukturi.

Diferencijabilna mnogostrukost ili $C^\infty-$**mnogostrukost** je uređen par $(M, \mathcal{A})$, gdje je M Hausdorffov topološki prostor s prebrojivom bazom topologije, a $\mathcal{A}$ je $n-$dimenzionalna $C^\infty-$struktura na M za neki $n \in \mathbb{N}$. Pišemo tada $n = \dim M$.

Zamijenimo li svuda u prethodnim definicijama izraz $C^\infty-$*preslikavanje* s izrazom *analitičko preslikavanje*, dobivamo definicije pojmova $n-$dimenzionalni **analitički atlas**, $n-$dimenzionalna **analitička struktura** i **analitička mnogostrukost**. Svaka analitička mnogostrukost je ujedno diferencijabilna mnogostrukost.

Neka su M i N $C^\infty-$mnogostrukosti, $\dim M = m$, $\dim N = n$. Za preslikavanje $f : M \to N$ kažemo da je **klase** C^∞ ili da je f $C^\infty-$**preslikavanje** ako za svaku točku $p \in M$ postoje karte (U, ψ) na M i (V, φ) na N takve da je $p \in U$, $f(U) \subseteq V$ i da je

$$\varphi \circ f \circ \psi^{-1} : \psi(U) \longrightarrow \varphi(V)$$

$C^\infty-$preslikavanje iz $\mathbb{R}^m$ u $\mathbb{R}^n$. Ako je $f : M \to N$ bijekcija i ako su f i f^{-1} $C^\infty-$preslikavanja, onda se f zove **difeomorfizam**. Ukoliko su M i N analitičke mnogostrukosti i ako je difeomorfizam $f : M \to N$ analitičko preslikavanje, pomoću teorema o inverznom preslikavanju za analitičke funkcije n realnih varijabli lako se vidi da je inverzno preslikavanje $f^{-1} : N \to M$ također analitičko.

Primjeri:

(1) $M = \mathbb{R}^n$; tada je $\{(R^n, id_{\mathbb{R}^n})\}$ $C^\infty-$atlas. Jedinstvena $C^\infty-$struktura koja sadrži taj atlas zove se **standardna** C^∞**−struktura** na $\mathbb{R}^n$, a jedinstvena analitička struktura koja sadrži taj atlas zove se **standardna analitička struktura** na R^n.

(2) Neka je $(M, \mathcal{A})$ $C^\infty-$mnogostrukost (odn. analitička mnogostrukost) i neka je $V \subseteq M$ otvoren skup. Tada je

$$\{(U \cap V, \psi | U \cap V);\ (U, \psi) \in \mathcal{A},\ U \cap V \neq \emptyset\}$$

$C^\infty-$atlas (odn. analitički atlas) na V. V se s pripadnom $C^\infty-$strukturom (odn. analitičkom strukturom) zove **otvorena podmnogostrukost** od M.

(3) Neka su $(M, \mathcal{A})$ i $(N, \mathcal{B})$ $C^\infty-$mnogostrukosti (odn. analitičke mnogostrukosti), $\dim M = m$, $\dim N = n$. Neka je

$$\mathcal{C} = \{(U \times V, \psi \times \varphi);\ (U, \psi) \in \mathcal{A},\ (V; \varphi) \in \mathcal{B}\},$$

pri čemu je $(\psi \times \varphi)(x, y) = (\psi(x), \varphi(y))$, $x \in U$, $y \in V$. Tada je $\mathcal{C}$ $(m+n)-$dimenzionalni $C^\infty-$atlas (odn. analitički atlas) na $M \times N$. S pripadnom $C^\infty-$strukturom (odn. analitičkom strukturom) $M \times N$ se zove **produkt mnogostrukosti** M i N.

Za $C^\infty-$mnogostrukost M sa $C^\infty(M)$ označavamo skup svih $C^\infty-$funkcija $f : M \to \mathbb{R}$. Uz operacije po točkama $C^\infty(M)$ je komutativna unitalna algebra.

Neka je M $C^\infty-$mnogostrukost i $\mathcal{U}$ otvoren pokrivač od M. **Particija jedinice** podređena pokrivaču $\mathcal{U}$ je niz $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ u $C^\infty(M)$ takav da vrijedi:

(i) Za svaki $n \in \mathbb{N}$ nosač

$$\operatorname{Supp} \varphi_n = Cl(\{p \in M;\ \varphi_n(p) \neq 0\})$$

je kompaktan skup sadržan u nekom $U \in \mathcal{U}$.

(ii) Za svaku točku $p \in M$ postoji otvorena okolina V točke p takva da je $\operatorname{Supp} \varphi_n \cap V \neq \emptyset$ za samo konačno mnogo $n \in \mathbb{N}$.

(iii) Za svaku točku $p \in M$ vrijedi

$$\varphi_n(p) \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad \text{i} \qquad \sum_{n \in \mathbb{N}} \varphi_n(p) = 1.$$

Teorem 1.6.1. *Za svaki otvoren pokrivač* $\mathcal{U}$ $C^\infty-$*mnogostrukosti* M *postoji particija jedinice podređena pokrivaču* $\mathcal{U}$.

Neka je M $C^\infty-$mnogostrukost. **Tangencijalni vektor** na mnogostrukost M u točki $p \in M$ je linearan funkcional $X : C^\infty(M) \to \mathbb{R}$ sa svojstvom

$$X(fg) = X(f)g(p) + f(p)X(g) \qquad \forall f, g \in C^\infty(M).$$

Skup svih tangencijalnih vektora na mnogostrukost M u točki p označavamo sa $T_p(M)$. To je očito potprostor realnog prostora $C^\infty(M)^*$. Zove se **tangencijalni prostor** na mnogostrukost M u točki p.

Lako se vidi da vrijedi $X(f) = 0$ za svaki $X \in T_p(M)$ i za svaku konstantnu funkciju f na mnogostrukosti M.

Lema 1.6.2. *Ako se funkcije $f, g \in C^\infty(M)$ podudaraju na nekoj okolini točke $p \in M$ onda je $X(f) = X(g)$ $\forall X \in T_p(M)$. Posebno, ako je funkcija f konstantna na nekoj okolini točke $p \in M$, onda je $X(f) = 0$ $\forall X \in T_p(M)$.*

Ovo svojstvo lokalnosti tangencijalnih vektora omogućuje nam da identificiramo tangencijalne prostore na M i na otvorenu podmnogostrukost U u svakoj točki $p \in U$:

Propozicija 1.6.3. *Neka je U otvorena podmnogostrukost mnogostrukosti M i neka je $p \in U$. Za $X \in T_p(U)$ definiramo $\tilde{X} : C^\infty(M) \to \mathbb{R}$ ovako:*

$$\tilde{X}(f) = X(f|U), \qquad f \in C^\infty(M).$$

Tada je $X \mapsto \tilde{X}$ izomorfizam prostora $T_p(U)$ na prostor $T_p(M)$.

Neka je $\varepsilon > 0$ i neka je $\sigma : \langle -\varepsilon, \varepsilon \rangle \to M$ $C^\infty-$preslikavanje takvo da je $\sigma(0) = p$. Tada se σ zove **glatka krivulja kroz točku** p. Definiramo tada $V_\sigma : C^\infty(M) \to \mathbb{R}$ sa

$$V_\sigma f = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(\sigma(t)) \bigg|_{t=0}, \qquad f \in C^\infty(M).$$

Tada je $V_\sigma \in T_p(M)$ i zove se **tangencijalni vektor na krivulju** σ u točki p. Pomoću teorema egzistencije za sisteme običnih diferencijalnih jednadžbi prvog reda nije teško dokazati da vrijedi:

Teorem 1.6.4. *Neka je M $C^\infty-$mnogostrukost i $p \in M$. Tada vrijedi:*

$$T_p(M) = \{V_\sigma;\ \sigma \text{ je glatka krivulja kroz točku } p\}.$$

Neka je sada (U, ψ) karta na $n-$dimenzionalnoj mnogostrukosti M i $p \in M$. Neka su

$$x_1, x_2, \dots, x_n : U \to \mathbb{R}$$

koordinatne funkcije preslikavanja ψ :

$$\psi(q) = (x_1(q), x_2(q), \dots, x_n(q)), \qquad q \in U.$$

Neka je $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ standardna baza od $\mathbb{R}^n$. Za neki $\varepsilon > 0$ možemo definirati glatke krivulje $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n : \langle -\varepsilon, \varepsilon \rangle \to M$ kroz točku p :

$$\sigma_i(t) = \psi^{-1}(\psi(p) + te_i).$$

Za pripadne tangencijalne vektore upotrebljavamo oznake

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p = V_{\sigma_i}.$$

Lema 1.6.5. *Uz uvedene oznake za proizvoljnu glatku krivulju σ kroz točku p vrijedi*

$$V_\sigma f = \sum_{i=1}^{n} \frac{d(x_i \circ \sigma)}{dt}(0) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p f, \qquad f \in C^\infty(M).$$

Odatle i iz teorema 1.6.4. neposredno slijedi:

Teorem 1.6.6. *Neka je M $n-$dimenzionalna mnogostrukost, (U,ψ) karta na M, $x_1,x_2,\ldots,x_n$ koordinatne funkcije prelikavanja ψ i $p\in U$. Tada je*

$$\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_p,\left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)_p,\ldots,\left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)_p\right\}$$

baza realnog vektorskog prostora $T_p(M)$. Posebno, $\dim T_p(M)=\dim M$.

Neka je V realan konačnodimenzionalan vektorski prostor i neka je $\{e_1,\ldots,e_n\}$ baza od V. Neka je $\psi : V\to\mathbb{R}^n$ preslikavanje koje svakom vektoru $v\in V$ pridružuje $n-$torku njegovih koordinata u odabranoj bazi:

$$v=\sum_{i=1}^n x_ie_i \qquad\Longrightarrow\qquad \psi(v)=(x_1,\ldots,x_n).$$

Tada je ψ izomorfizam, dakle i homeomorfizam sa V na $\mathbb{R}^n$. Prema tome, (V,ψ) je karta na V i $\{(V,\psi)\}$ je atlas na V. $C^\infty-$struktura na V koja sadrži taj atlas (tj. kartu (V,ψ)) ne ovisi o izboru baze, budući da su koordinate vektora u jednoj bazi linearne funkcije koordinata tog vektora u drugoj bazi.

Vidjet ćemo sada da se tangencijalni prostor $T_v(V)$ za svaki $v\in V$ prirodno identificira sa samim prostorom V. Naime, za $w\in V$ definiramo $\sigma_w:\mathbb{R}\to V$ ovako:

$$\sigma_w(t)=v+tw,\qquad t\in\mathbb{R}.$$

Tada je σ_w glatka krivulja u mnogostrukosti V kroz točku v. Pripadni tangencijalni vektor $V_{\sigma_w}\in T_v(V)$ označimo sa $A(w)$:

$$A(w)f=\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(v+tw)\right|_{t=0},\qquad f\in C^\infty(M).$$

Tada je $A:V\to T_v(V)$ linearno preslikavanje. Za izabranu bazu $\{e_1,\ldots,e_n\}$ i pripadnu kartu (V,ψ) označimo sa $x_1,\ldots,x_n$ koordinatne funkcije:

$$\psi(u)=(x_1(u),\ldots,x_n(u)),\qquad u\in V.$$

Drugim riječima, $\{x_1,\ldots,x_n\}$ je dualna baza u dualnom prostoru V^* u odnosu na bazu $\{e_1,\ldots,e_n\}$ u prostoru V. Jednostavan račun pokazuje da vrijedi

$$A(e_i)=\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_v,\qquad i=1,\ldots,n.$$

Dakle, operator A prevodi bazu $\{e_1,\ldots,e_n\}$ prostora V u bazu $\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_v,\ldots,\left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)_v\right\}$ tangencijalnog prostora $T_v(V)$. To pokazuje da je $A:V\to T_v(V)$ izomorfizam vektorskih prostora. Pomoću tog izomorfizma možemo identificirati prostor V s tangencijalnim prostorom $T_v(V)$. Dakle, vektor $w\in V$ identificira se s tangencijalnim vektorom

$$f\mapsto\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(v+tw)\right|_{t=0},\qquad f\in C^\infty(V).$$

Neka su M i N diferencijabilne mnogostrukosti i $\Phi:M\to N$ $C^\infty-$preslikavanje. Za $p\in M$ definiramo $T_p(\Phi):T_p(M)\to T_{\Phi(p)}(N)$ sa

$$[T_p(\Phi)X](f)=X(f\circ\Phi),\qquad f\in C^\infty(N),\quad X\in T_p(M).$$

Tada je $T_p(\Phi)$ linearan operator i zove se **diferencijal preslikavanja** Φ **u točki** p. Ako su $x_1, x_2, \ldots, x_m$ koordinatne funkcije za neku kartu (U, ψ) od M oko točke p i $y_1, y_2, \ldots, y_n$ koordinatne funkcije za neku kartu (V, φ) od N oko točke $\Phi(p)$, takvu da je $\Phi(U) \subseteq V$, onda operator $T_p(\Phi)$ djeluje na sljedeći način:

$$T_p(\Phi) \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \alpha_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p (y_j \circ f) \left(\frac{\partial}{\partial y_j}\right)_{\Phi(p)}, \qquad \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{R}.$$

Drugim riječima, matrica operatora $T_p(\Phi)$ u paru baza

$$\left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_p, \left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)_p, \ldots, \left(\frac{\partial}{\partial x_m}\right)_p \right\} \quad \text{prostora} \quad T_p(M)$$

i

$$\left\{ \left(\frac{\partial}{\partial y_1}\right)_{\Phi(p)}, \left(\frac{\partial}{\partial y_2}\right)_{\Phi(p)}, \ldots, \left(\frac{\partial}{\partial y_n}\right)_{\Phi(p)} \right\} \quad \text{prostora} \quad T_{\Phi(p)}(N)$$

je upravo Jacobijeva matrica preslikavanja $\varphi \circ \Phi \circ \psi^{-1}$.

Propozicija 1.6.7. *Neka su* L, M *i* N $C^\infty-$*mnogostrukosti i neka su* $\Psi : L \to M$ *i* $\Phi : M \to N$ $C^\infty-$*preslikavanja. Tada je* $\Phi \circ \Psi : L \to N$ $C^\infty-$*preslikavanje i da za svaku točku* $p \in L$ *vrijedi* $T_p(\Phi \circ \Psi) = T_{\Psi(p)}(\Phi) T_p(\Psi)$.

Korolar 1.6.8. *Neka je* $\Phi : M \to N$ *difeomorfizam* $C^\infty-$*mnogostrukosti. Tada je* $\dim M = \dim N$.

Podmnogostrukost mnogostrukosti M je podskup $N \subseteq M$ koji ima svoju diferencijabilnu strukturu koja je takva da inkluzija $i : N \to M$ zadovoljava:

(*i*) i je $C^\infty-$preslikavanje;

(*ii*) $T_p(i) : T_p(N) \to T_p(M)$ je injekcija $\forall p \in N$.

Posebno, svaka otvorena podmnogostrukost je podmnogostrukost.

Za mnogostrukost M definiramo

$$T(M) = \bigcup_{p \in M} T_p(M) \qquad \text{(disjunktna unija)}$$

i neka je $\pi : T(M) \to M$ preslikavanje definirano sa $\pi(T_p(M)) = \{p\}$. Neka je $\mathcal{A}$ $C^\infty-$struktura mnogostrukosti M. Za $\xi \in \mathcal{A}$ pišemo $\xi = (U_\xi, \psi_\xi)$ i neka su $x_1^\xi, \ldots, x_n^\xi : U_\xi \to \mathbb{R}$ pripadne koordinatne funkcije: $\psi_\xi(p) = (x_1^\xi(p), \ldots, x_n^\xi(p))$, $p \in U_\xi$. Za $\xi \in \mathcal{A}$ definiramo preslikavanje

$$\Psi_\xi : \pi^{-1}(U_\xi) \longrightarrow \mathbb{R}^{2n}$$

na sljedeći način:

$$\Psi_\xi(v) = (x_1^\xi(p), \ldots, x_n^\xi(p), v_1, \ldots, v_n) \qquad \text{ako je} \qquad p \in U_\xi \quad \text{i} \quad v = \sum_{i=1}^{n} v_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p \in T_p(M).$$

Za $\xi \in \mathcal{A}$ neka je τ_ξ skup svih podskupova od $\pi^{-1}(U_\xi) \subseteq T(M)$ oblika $\Psi_\xi^{-1}(W)$, gdje je W otvoren podskup od $\psi_\xi(U_\xi) \times \mathbb{R}^n$. Neka je τ unija svih skupova τ_ξ, $\xi \in \mathcal{A}$. Pokazuje se da je τ baza topologije s kojom $T(M)$ postaje Hausdorffov topološki prostor s prebrojivom bazom topologije i preslikavanje $\pi : T(M) \to M$ je neprekidno. Nadalje, direktno se provjerava da je

$$\{(\pi^{-1}(U_\xi), \Psi_\xi);\ \xi \in \mathcal{A}\}$$

$C^\infty-$atlas na $T(M)$. Na taj način $T(M)$ postaje $2n-$dimenzionalna $C^\infty-$mnogostrukost. Tada je preslikavanje $\pi : T(M) \to M$ klase C^∞.

Vektorsko polje na mnogostrukosti M je svako $C^\infty-$preslikavanje $X : M \to T(M)$, $p \mapsto X_p$, takvo da je $X_p \in T_p(M)$ $\forall p \in M$. Skup svih vektorskih polja označavamo sa $\mathcal{X}(M)$; to je realan vektorski prostor uz operacije po točkama:

$$(\alpha X)_p = \alpha X_p, \qquad (X+Y)_p = X_p + Y_p, \qquad \alpha \in \mathbb{R}, \quad X, Y \in \mathcal{X}(M), \quad p \in M.$$

Štoviše, $\mathcal{X}(M)$ je unitalni $C^\infty(M)-$modul uz množenje elemenata iz $\mathcal{X}(M)$ funkcijama iz $C^\infty(M)$ definirano također po točkama:

$$(fX)_p = f(p)X_p, \qquad f \in C^\infty(M), \quad X \in \mathcal{X}(M).$$

Liejeva algebra $Der(C^\infty(M))$ svih derivacija algebre $C^\infty(M)$ je unitalni $C^\infty(M)-$modul uz operaciju množenja definiranu sa

$$(fD)g = fDg, \qquad f, g \in C^\infty(M), \quad D \in Der(C^\infty(M)).$$

Teorem 1.6.9. *Za $X \in \mathcal{X}(M)$ definiramo $\overline{X} : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ sa*

$$[\overline{X}(f)](p) = X_p(f), \qquad f \in C^\infty(M), \quad p \in M.$$

Tada je $X \mapsto \overline{X}$ izomorfizam $C^\infty(M)-$modula $\mathcal{X}(M)$ na $C^\infty(M)-$modul $Der(C^\infty(M))$.

Preslikavanje $X \mapsto \overline{X}$ iz teorema 1.6.9. upotrebljavamo kao identifikaciju. Dakle, vektorska polja na mnogostrukosti M su derivacije algebre $C^\infty(M)$. Za tako shvaćeno vektorsko polje X i za $p \in M$, pripadni tangencijalni vektor $X_p \in T_p(M)$ definiran je sa $X_p f = (Xf)(p)$, $f \in C^\infty(M)$.

1.6.2 Liejeve grupe

Liejeva grupa je skup G sa svojstvima:

(i) G je grupa.

(ii) G je diferencijabilna mnogostrukost.

(iii) $(x, y) \mapsto xy^{-1}$ je $C^\infty-$preslikavanje sa $G \times G$ u G.

Naravno, tada je množenje $(x, y) \mapsto xy$ $C^\infty-$preslikavanje sa $G \times G$ u G, a invertiranje $x \mapsto x^{-1}$ je difeomorfizam sa G na G. Važna je činjenica da na svakoj Liejevoj grupi postoji prirodna struktura analitičke mnogostrukosti:

Teorem 1.6.10. *Neka je G Liejeva grupa. $C^\infty-$struktura mnogostrukosti G sadrži jedinstvenu analitičku strukturu takvu da je preslikavanje $(x, y) \mapsto xy^{-1}$ sa $G \times G$ u G analitičko.*

Neka je $\mathcal{A}$ konačnodimenzionalna realna unitalna algebra i neka je $G = \mathcal{A}^\times$ grupa njenih invertibilnih elemenata. Element $x \in \mathcal{A}$ je invertibilan ako i samo ako je regularan operator λ_x lijevog množenja sa x : $\lambda_x y = xy$, $y \in \mathcal{A}$. Dakle,

$$G = \{x \in \mathcal{A};\ \det(\lambda_x) \neq 0\}.$$

To pokazuje da je G otvoren podskup od $\mathcal{A}$. Kao vektorski prostor $\mathcal{A}$ je diferencijabilna mnogostrukost. Dakle i G je diferencijabilna mnogostrukost (otvorena podmnogostrukost od $\mathcal{A}$).

Prema razmatranjima u prethodnom odjeljku 3.1. za bilo koju točku $x \in G$ tangencijalni prostor $T_x(G)$ identificira se s tangencijalnim prostorom $T_x(\mathcal{A})$, a ovaj se opet s vektorskim prostorom $\mathcal{A}$. Identifikacija $\mathcal{A}$ sa $T_x(G)$ identificira element $y \in \mathcal{A}$ s tangencijalnim vektorom iz $T_x(G)$ danim sa

$$f \mapsto \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(x+ty)\bigg|_{t=0}, \qquad f \in C^\infty(G).$$

Posebno je važan slučaj algebre $L(V)$ svih linearnih operatora na konačnodimenzionalnom realnom vektorskom prostoru V. Dakle, $GL(V)$ je Liejeva grupa i za $x \in GL(V)$ tangencijalni prostor $T_x(GL(V))$ identificira se s prostorom $L(V)$. Izomorfna je Liejeva grupa $GL(n, \mathbb{R})$ svih regularnih kvadratnih matrica $n-$tog reda. Njen tangencijalni prostor u točki $x \in GL(n, \mathbb{R})$ identificira se s prostorom $M_n(\mathbb{R})$ svih kvadratnih matrica $n-$tog reda.

Za svaki element x Liejeve grupe G preslikavanja pomaka $\lambda_x, \rho_x : G \to G$ definirana sa

$$\lambda_x(y) = xy, \qquad \rho_x(y) = yx^{-1}, \qquad y \in G,$$

su analitički difeomorfizmi sa G na G i vrijedi $\lambda_x \circ \lambda_y = \lambda_{xy}$ i $\rho_x \circ \rho_y = \rho_{xy}$. **Vektorsko polje** $X \in \mathcal{X}(G)$ zove se **lijevoinvarijantno** ako vrijedi

$$T_y(\lambda_x) X_y = X_{xy} \qquad \forall x, y \in G.$$

Neka je $\mathfrak{g}$ potprostor od $\mathcal{X}(G)$ svih lijevoinvarijantnih vektorskih polja na G.

Propozicija 1.6.11. *$\mathfrak{g}$ je Liejeva podalgebra Liejeve algebre $Der(C^\infty(G)) = \mathcal{X}(G)$ svih vektorskih polja na G.*

Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ se zove **Liejeva algebra Liejeve grupe** G.

Propozicija 1.6.12. *Neka je e jedinica u Liejevoj grupi G. Preslikavanje $X \mapsto X_e$ je izomorfizam vektorskih prostora sa $\mathfrak{g}$ na $T_e(G)$.*

Izomorfizam iz propozicije 1.6.12. upotrebljava se kao identifikacija. Dakle, Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ Liejeve grupe G identificira se s tangencijalnim prostorom $T_e(G)$ na G u jedinici e. Komutator $[X, Y]$ elemenata Liejeve algebre $T_e(G)$ definiran je zaobilazno: dobiva se tako da najprije X i Y shvatimo kao lijevoinvarijantna vektorska polja, zatim izračunamo komutator tih dviju derivacija algebre $C^\infty(G)$ i rezultat ponovo shvaćamo kao element od $T_e(G)$. Daljnje definicije i konstrukcije dovest će nas do direktne formule za komutator $[X, Y] \in T_e(G)$ elemenata $X, Y \in T_e(G)$.

Razmotrimo opet primjer konačnodimenzionalne realne unitalne algebre $\mathcal{A}$. Grupa G svih njenih invertibilnih elemenata je Liejeva grupa. Njena Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ identificira se s tangencijalnim prostorom $T_e(G)$ na G u jedinici e, a ovaj se identificira s prostorom $\mathcal{A}$.

Propozicija 1.6.13. *Pri opisanoj identifikaciji $\mathfrak{g}$ sa $\mathcal{A}$ komutator $[x, y]$ u Liejevoj algebri $\mathfrak{g}$ jednak je $xy - yx$ u algebri $\mathcal{A}$.*

Prema tome Liejeva algebra Liejeve grupe $GL(V)$ (odnosno, Liejeve grupe $GL(n,\mathbb{R})$) identificira se s Liejevom algebrom $\mathfrak{gl}(V)$ (odnosno, s Liejevom algebrom $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$).

Neka su sada G i H Liejeve grupe s Liejevim algebrama $\mathfrak{g}$ i $\mathfrak{h}$. Preslikavanje $\varphi : G \to H$ zove se **Liejev homomorfizam** ako je to homomorfizam grupa i analitičko preslikavanje.

Propozicija 1.6.14. *Neka je $\varphi : G \to H$ Liejev homomorfizam. Tada je $T_e(\varphi)$ homomorfizam Liejeve algebre $T_e(G) = \mathfrak{g}$ u Liejevu algebru $T_e(H) = \mathfrak{h}$.*

Za element x Liejeve grupe G definiramo preslikavanje $Int(x) : G \to G$ sa

$$Int(x) = \lambda_x \circ \rho_x = \rho_x \circ \lambda_x, \qquad \text{tj.} \qquad (Int(x))(y) = xyx^{-1}, \qquad y \in G.$$

Očito je $Int(x)$ Liejev homomorfizam sa G u G. Homomorfizam $Int(x^{-1})$ je inverzno preslikavanje od $Int(x)$. Prema tome, svaki $Int(x)$ je automorfizam grupe G i analitički difeomorfizam mnogostrukosti G. Dakle, preslikavanje $Ad(x) = T_e(Int(x))$ je regularan operator na Liejevoj algebri $T_e(G) = \mathfrak{g}$, tj. $Ad(x) \in GL(\mathfrak{g})$. Lako se vidi:

Propozicija 1.6.15. *Preslikavanje $Ad : G \to GL(\mathfrak{g})$ je Liejev homomorfizam.*

Neka je sada $\varphi : G \to H$ Liejev homomorfizam Liejevih grupa G i H s Liejevim algebrama $\mathfrak{g} = T_e(G)$ i $\mathfrak{h} = T_e(H)$. Radi preciznosti preslikavanja Int i Ad za grupe G i H označavamo sa Int_G i Ad_G, te sa Int_H i Ad_H. Za $x, y \in G$ je

$$\varphi((Int_G(x))(y)) = \varphi(xyx^{-1}) = \varphi(x)\varphi(y)\varphi(x)^{-1} = (Int_H(\varphi(x)))(\varphi(y)).$$

Dakle,

$$\varphi \circ Int_G(x) = Int_H(\varphi(x)) \circ \varphi,$$

pa slijedi

$$T_e(\varphi)T_e(Int_G(x)) = T_e(Int_H(\varphi(x)))T_e(\varphi).$$

Prema tome:

Propozicija 1.6.16. *Neka je $\varphi : G \to H$ Liejev homomorfizam. Tada za svaku točku $x \in G$ vrijedi*

$$T_e(\varphi)Ad_G(x) = Ad_H(\varphi(x))T_e(\varphi).$$

Jednoparametarska podgrupa Liejeve grupe G je Liejev homomorfizam $\varphi : \mathbb{R} \to G$. Posebno, φ je glatka krivulja kroz e, pa je $V_\varphi \in T_e(G) = \mathfrak{g}$. Dokaz sljedećeg fundamentalnog teorem iz teorije Liejevih grupa temelji se na teoremu egzistencije i jedinstvenosti za sisteme običnih linearnih diferencijalnih jednadžbi prvog reda.

Teorem 1.6.17. *Za svaki $X \in \mathfrak{g}$ postoji jedinstvena jednoparametarska podgrupa φ_X Liejeve grupe G takva da je $X = V_{\varphi_X}$. Preslikavanje $(X,t) \mapsto \varphi_X(t)$ sa $\mathfrak{g} \times \mathbb{R}$ u G je analitičko.*

Uz oznake iz teorema 1.6.17. definiramo **eksponencijalno preslikavanje** $\exp : \mathfrak{g} \to G$ sa

$$\exp X = \varphi_X(1), \qquad X \in \mathfrak{g} = T_e(G).$$

Lako se vidi da je tada

$$\varphi_X(t) = \exp tX \qquad \forall t \in \mathbb{R} \quad \text{i} \quad X \in \mathfrak{g}.$$

Razmotrimo posebno Liejevu grupu $G = \mathcal{A}^\times$ za konačnodimenzionalnu realnu unitalnu algebru $\mathcal{A}$. Njenu smo Liejevu algebru identificirali s Liejevom algebrom $\mathcal{A}$ dobivenom iz asocijativne algebre $\mathcal{A}$ zadavanjem komutatora $[x,y] = xy - yx$, $x, y \in \mathcal{A}$. Element $x \in \mathcal{A}$ identificira se s tangencijalnim vektorom na G u jedinici $e = 1_{\mathcal{A}}$ zadanim sa

$$f \mapsto \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(e+tx)\right|_{t=0}, \qquad f \in C^\infty(G).$$

Neka je $x \in \mathcal{A}$. Tada je očito

$$\varphi : t \mapsto \mathrm{e}^{tx} = e + tx + \frac{t^2}{2!}x^2 + \frac{t^3}{3!}x^3 + \cdots, \qquad t \in \mathbb{R},$$

jednoparametarska podgrupa Liejeve grupe G.

Propozicija 1.6.18. *Uz gornje oznake je $V_\varphi = x$, tj. za svaku funkciju $f \in C^\infty(G)$ vrijedi*

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f\left(e + tx + \frac{t^2}{2!} + \cdots\right)\right|_{t=0} = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(e+tx)\right|_{t=0}.$$

Prema tome, u slučaju $G = \mathcal{A}^\times$ eksponencijalno preslikavanje dano je sa

$$\exp x = \mathrm{e}^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n, \qquad x \in \mathcal{A}.$$

Posebno to vrijedi za Liejevu grupu $G = GL(V)$ i njenu Liejevu algebru $\mathfrak{gl}(V)$, gdje je V konačnodimenzionalan realan vektorski prostor, a također i za Liejevu grupu $GL(n,\mathbb{R})$ i njenu Liejevu algebru $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$.

Važno svojstvo eksponencijalnog preslikavanja je analitičnost i lokalna difeomorfnost:

Teorem 1.6.19. *Neka je G Liejeva grupa i $\mathfrak{g}$ njena Liejeva algebra. Postoje otvorena okolina U nule u $\mathfrak{g}$ i otvorena okolina V jedinice u G takve da je restrikcija* $\exp|U$ *analitički difeomorfizam sa U na V.*

Jednostavna posljedica je:

Korolar 1.6.20. *Neka je G Liejeva grupa i $\mathfrak{g}$ njena Liejeva algebra. Tada je komponenta povezanosti jedinice G_0 u grupi G generirana skupom* $\exp \mathfrak{g} = \{\exp X;\ X \in \mathfrak{g}\}$. *Štoviše, za svaku otvorenu okolinu U nule u $\mathfrak{g}$ podgrupa G_0 generirana je sa* $\exp U$:

$$G_0 = \{(\exp X_1)(\exp X_2)\cdots(\exp X_n);\ n \in \mathbb{N},\ X_1, X_2, \ldots, X_n \in U\}.$$

Iz teorema 1.6.19. izvodi se i sljedeći netrivijalni rezultat:

Teorem 1.6.21. *Neka su G i H Liejeve grupe i $\varphi : G \to H$ neprekidni homomorfizam grupa. Tada je φ Liejev homomorfizam.*

Neka je sada $\psi : G \to H$ Liejev homomorfizam i neka su $\mathfrak{g}$ i $\mathfrak{h}$ Liejeve algebre Liejevih grupa G i H. Eksponencijalna preslikavanja $\mathfrak{g} \to G$ i $\mathfrak{h} \to H$ označimo sa $\exp_G$ i $\exp_H$. Za $X \in \mathfrak{g}$ preslikavanje $t \mapsto \exp tX$ je jedinstvena jednoparametarska podgrupa Liejeve grupe G s tangencijalnim vektorom u jedinici $e = e_G$ jednakim X. Kompozicijom tog preslikavanja s Liejevim homomorfizmom ψ dobivamo jednoparametarsku podgrupu $t \mapsto \psi(\exp_G tX)$ u Liejevoj grupi H. Pripadni tangencijalni vektor u jedinici $e = e_H$ grupe H na bilo koju funkciju $g \in C^\infty(H)$ djeluje ovako:

$$g \mapsto \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} g(\psi(\exp_G tX))\right|_{t=0} = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} (g \circ \psi)(\exp_G tX)\right|_{t=0} = X(g \circ \psi) = [T_e(\psi)X]\,(g).$$

Zbog jedinstvenosti u teoremu 1.6.17. i zbog propozicije 1.6.18. dobivamo da je

$$\exp_H tT_e(\psi)X = \psi(\exp_G tX), \qquad t \in \mathbb{R}, \quad X \in \mathfrak{g} = T_e(G).$$

Dakle,

Propozicija 1.6.22. *Ako je $\psi : G \to H$ Liejev homomorfizam onda je*

$$\psi(\exp_G X) = \exp_H T_e(\psi)X$$

za svaki X iz Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ Liejeve grupe G.

Propozicija 1.6.23. *Neka je G Liejeva grupa, $\mathfrak{g} = T_e(G)$ njena Liejeva algebra. Za $X \in \mathfrak{g}$ označimo sa $\tilde{X}$ jedinstveno lijevoinvarijantno vektorsko polje na G takvo da je $\tilde{X}_e = X$. Tada vrijedi*

$$(\tilde{X}^n f)(x \exp tX) = \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n} f(x \exp tX), \qquad X \in \mathfrak{g}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad x \in G.$$

$H \subseteq G$ zove se **Liejeva podgrupa** Liejeve grupe G ako je to podgrupa koja je ujedno podmnogostrukost; dakle, H ima svoju strukturu mnogostrukosti takvu da je to Liejeva grupa, inkluzija $\iota : H \to G$ je Liejev homomorfizam i pripadni homomorfizam Liejevih algebri $T_e(\iota) : \mathfrak{h} \to \mathfrak{g}$ injektivan. Tada se pomoću $T_e(\iota)$ Liejeva algebra $\mathfrak{h}$ identificira s Liejevom podalgebrom Liejeve algebre $\mathfrak{g}$.

Teorem 1.6.24. *Neka je G Liejeva grupa s Liejevom algebrom $\mathfrak{g}$ i neka je $\mathfrak{h}$ Liejeva podalgebra od $\mathfrak{g}$. Postoji jedinstvena povezana Liejeva podgrupa H od G čija je Liejeva algebra jednaka $\mathfrak{h}$.*

Ovaj se teorem dokazuje tako da se promatra skup $\exp \mathfrak{h} \subseteq G$ i za H se uzme podgrupa generirana tim skupom. $C^\infty-$strukturu u H uvedemo najprije na okolinu jedinice pomoću $\exp|\mathfrak{h}$, a zatim pomacima i na cijelu grupu H.

Teorem 1.6.25. *Neka je G Liejeva grupa i H zatvorena podgrupa. Tada je H Liejeva podgrupa od G.*

Za dokaz ovog teorema najprije se pokaže da je

$$\mathfrak{h} = \{X \in \mathfrak{g};\ \exp tX \in H\ \forall t \in \mathbb{R}\}$$

Liejeva podalgebra od $\mathfrak{g}$, a zatim da je $\exp \mathfrak{h}$ okolina jedinice u grupi H.

Neka je i dalje G Liejeva grupa i $\mathfrak{g} = T_e(G)$ njena Liejeva algebra. Iz Liejevog homomorfizma $Ad : G \to GL(\mathfrak{g})$ dobivamo homomorfizam Liejevih algebri $T_e(Ad) : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$. Najavljena formula, koja daje komutator elemenata $X, Y \in \mathfrak{g} = T_e(G)$ bez korištenja njihova proširenja do lijevoinvarijantnih vektorskih polja na G, je

$$(T_e(Ad)X)(Y) = [X, Y], \qquad X, Y \in \mathfrak{g} = T_e(G).$$

Drugim riječima:

Teorem 1.6.26. *Za Liejevu grupu G i njenu Liejevu algebru $\mathfrak{g} = T_e(G)$ vrijedi $T_e(Ad) = ad$.*

Ako je G topološka grupa i H njena zatvorena podgrupa, tada je skup desnih $H-$klasa $M = G/H = \{gH;\ g \in G\}$ s kvocijentnom topologijom Hausdorffov topološki prostor, koji je lokalno kompaktan ako je grupa G lokalno kompaktna.

Teorem 1.6.27. *Neka je G Liejeva grupa i H njena zatvorena podgrupa. Nadalje, neka je $\mathfrak{g}$ Liejeva algebra od G i $\mathfrak{h}$ njena Liejeva podalgebra koja odgovara zatvorenoj podgrupi H :*

$$\mathfrak{h} = \{X \in \mathfrak{g};\ \exp tX \in H\ \ \forall t \in \mathbb{R}\}.$$

Na kvocijentnom prostoru $M = G/H$ postoji jedinstvena struktura $C^\infty-$mnogostrukosti (odnosno, analitičke mnogostrukosti) takva da je $(g,m) \mapsto gm$, $g \in G$, $m \in M$, $C^\infty-$preslikavanje (odnosno, analitičko preslikavanje) sa $G \times M$ u M. Ako je podgrupa H normalna, kvocijentna grupa G/H s tom strukturom je Liejeva grupa. Nadalje, tada je $\mathfrak{h}$ ideal u Liejevoj algebri $\mathfrak{g}$ i kvocijentna Liejeva algebra $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ prirodno se identificira s Liejevom algebrom Liejeve grupe G/H.

Analitička struktura (a time i $C^\infty-$struktura) na kvocijentnom prostoru $M = G/H$ u prethodnom teoremu dobiva se pomoću eksponencijalnog preslikavanja. Pokazuje se da je preslikavanje $\exp_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}} : X + \mathfrak{h} \mapsto (\exp X)H$ sa $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ u M dobro definirano i njegova restrikcija na neku otvorenu okolinu V nule u $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ je homeomorfizam sa V na otvorenu okolinu U točke $H = eH$ prostora M. Tada inverzno preslikavanje $(\exp_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}|V)^{-1}$ komponirano s koordinatizacijom vektorskog prostora $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ definira kartu na M. Iz te karte pomakom na M dobivamo kartu oko svake točke $gH \in M$. Pokazuje se da je na taj način dobiven analitički atlas na M, i za pripadnu analitičku strukturu $(g,m) \mapsto gm$ je analitičko preslikavanje sa $G \times M$ u M.

1.6.3 Natkrivajuće grupe

Neka su X i Y povezani topološki prostori. Preslikavanje $f : Y \to X$ zove se **lokalni homeomorfizam** ako svaka točka $y \in Y$ ima otvorenu okolinu V takvu da je $f(V)$ otvoren podskup od X i $f|V$ je homeomorfizam sa V na $f(V)$. Za povezan otvoren podskup U od X kažemo da je **pravilno natkriven** s lokalnim homeomorfizmom $f : Y \to X$ ako je restrikcija preslikavanja $f|V$ na svaku komponentu povezanosti V skupa $f^{-1}(U)$ homeomorfizam sa V na U. Budući da je f lokalni homeomorfizam, dovoljno je zahtijevati da je svaka restrikcija $f|V$ bijekcija sa V na U. Za preslikavanje f kažemo da je **natkrivanje** ako svaka točka $x \in X$ ima povezanu otvorenu okolinu koja je pravilno natkrivena sa f. Naravno, svako natkrivanje je surjekcija. **Natkrivajući prostor** ili **natkrivač** topološkog prostora X je uređen par (Y, f), gdje je Y povezan topološki prostor i $f : Y \to X$ je natkrivanje. Ako je jasno o kojem preslikavanju f se radi, obično se sam prostor Y zove natkrivač od X ili natkrivajući prostor prostora X. Ako je $f : Y \to X$ natkrivanje, za svaku točku $x \in X$ skup $f^{-1}(x) = \{y \in Y;\ f(y) = x\}$ zove se **vlat** nad točkom x.

Lako se vidi da je za svaki (konačan ili beskonačan) kardinalni broj n skup

$$X_n = \{x \in X;\ Card\, f^{-1}(x) = n\}$$

otvoren u X. Stoga sve vlati natkrivanja $f : Y \to X$ imaju isti kardinalni broj. Taj se kardinalni broj zove se **broj listova natkrivanja** f (ili natkrivača Y).

Za Hausdorffov topološki prostor T kažemo da je **lokalno povezan** ako za svaku točku $t_0 \in T$ svaka okolina od t_0 sadrži otvorenu povezanu okolinu od t_0. U tom slučaju lako se vidi da je svaka komponenta povezanosti otvorenog podskupa od T otvoren podskup od T. Naravno, svaka mnogostrukost je lokalno povezan prostor. Nadalje, ako je X povezan i lokalno povezan Hausdorffov topološki prostor i ako je (Y, f) natkrivač od X, onda je i prostor Y lokalno povezan.

Neka su (Y_1, f_1) i (Y_2, f_2) natkrivači od X. Za neprekidno preslikavanje $\varphi : Y_1 \to Y_2$ kažemo da **čuva vlati** ako je $f_2 \circ \varphi = f_1$. To znači da vrijedi $\varphi\left(f_1^{-1}(x)\right) \subseteq f_2^{-1}(x)\ \forall x \in X$.

Propozicija 1.6.28. *Neka su* (Y_1, f_1) *i* (Y_2, f_2) *natkrivači povezanog i lokalno povezanog Hausdorffovog topološkog prostora* X.

(*a*) *Ako neprekidno preslikavanje* $\varphi : Y_1 \to Y_2$ *čuva vlati onda je* φ *natkrivanje.*

(*b*) *Ako su* $\varphi, \psi : Y_1 \to Y_2$ *dva međusobno različita neprekidna preslikavanja koja čuvaju vlati onda je* $\varphi(y) \neq \psi(y)\ \ \forall y \in Y_1$.

Neka je $f : Y \to X$ natkrivanje. Neprekidna bijekcija $\varphi : Y \to Y$ koja čuva vlati, tj. za koju je $f \circ \varphi = f$, zove se $f-$**transformacija** prostora Y. Svaka $f-$transformacija je po tvrdnji (*a*) propozicije 1.6.28. homeomorfizam; naime, bijektivno natkrivanje je očito homeomorfizam. Skup svih $f-$transformacija tvori grupu s obzirom na kompoziciju; to je podgrupa grupe $Homeo(Y)$ svih homeomorfizama sa Y na Y. Tu ćemo grupu označavati sa $\mathcal{T}(f)$. Dakle,

$$\mathcal{T}(f) = \{\varphi \in Homeo(Y);\ f \circ \varphi = f\}.$$

Iz tvrdnje (*b*) propozicije 1.6.28. neposredno slijedi:

Teorem 1.6.29. *Neka je* $f : Y \to X$ *natkrivanje i* $\varphi, \psi \in \mathcal{T}(f)$. *Ako je* $\varphi(y) = \psi(y)$ *za neku točku* $y \in Y$, *onda je* $\varphi = \psi$. *Posebno, ako* φ *nije identiteta onda je* $\varphi(y) \neq y\ \ \forall y \in Y$.

Štoviše, nije teško vidjeti da vrijedi i jače svojstvo grupe $\mathcal{T}(f)$ od onoga u drugoj tvrdnji prethodnog teorema:

Teorem 1.6.30. *Ako je* $f : Y \to X$ *natkrivanje, grupa* $\mathcal{T}(f)$ **djeluje diskontinuirano** *na* Y : *svaka točka* $y \in Y$ *ima okolinu* V *takvu da je* $V \cap \varphi(V) = \emptyset$ *za svako preslikavanje* $\varphi \in \mathcal{T}(f)$ *osim identitete.*

Put u topološkom prostoru X je neprekidno preslikavanje $\gamma : [0, 1] \to X$. Točka $x = \gamma(0)$ zove se **početak** a točka $x' = \gamma(1)$ **svršetak** puta γ. Tada kažemo da je γ put u X od točke x do točke x'. Skup svih puteva u X od x do x' označimo sa $\mathcal{P}(X, x, x')$. Za puteve $\gamma, \delta \in \mathcal{P}(X, x, x')$ kažemo da su **homotopni** ako postoji familija puteva $(\gamma_s)_{s\in[0,1]}$ u $\mathcal{P}(X, x, x')$ takva da je preslikavanje $(s, t) \mapsto \gamma_s(t)$ sa $[0, 1] \times [0, 1]$ u X neprekidno i ako je $\gamma_0 = \gamma$ i $\gamma_1 = \delta$. Lako se vidi da je homotopnost relacija ekvivalencije na skupu $\mathcal{P}(X, x, x')$. **Relaciju homotopnosti označavat ćemo u daljnjem sa** $\approx$.

Ako su $\gamma \in \mathcal{P}(X, x, x')$ i $\delta \in \mathcal{P}(X, x', x'')$ definiramo tzv. **složeni put** $\gamma\delta \in \mathcal{P}(X, x, x'')$,

$$(\gamma\delta)(t) = \begin{cases} \gamma(2t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \delta(2t-1) & \frac{1}{2} < t \leq 1. \end{cases}$$

i **inverzni put** $\gamma^- \in \mathcal{P}(X, x', x)$ puta γ,

$$\gamma^-(t) = \gamma(1-t) \qquad 0 \leq t \leq 1.$$

Topološki prostor X je **putevima povezan** ako je $\mathcal{P}(X, x, x') \neq \emptyset\ \ \forall x, x' \in X$. Lako se vidi da povezanost putevima povlači povezanost. Prostor X je **lokalno putevima povezan** ako svaka okolina svake točke $x \in X$ sadrži otvorenu okolinu od x koja je putevima povezana. U daljnjem kad god kažemo **topološki prostor** to će značiti **Hausdorffov lokalno putevima povezan topološki prostor**. Topologija svake mnogostrukosti ima to svojstvo: za $C^\infty-$mnogostrukost X povezanost je ekvivalentna povezanosti putevima. Štoviše, ako je X mnogostrukost i $x \in X$, komponenta povezanosti od X koja sadrži točku x (tj. najveći povezan podskup od X koji sadrži točku x) je skup $\{y \in X;\ \mathcal{P}(X, x, y) \neq \emptyset\}$ i taj je skup otvoren u X.

Za $x \in X$ elementi skupa $\mathcal{P}(X, x) := \mathcal{P}(X, x, x)$ zovu se **petlje** u prostoru X (s početkom u točki x). Za $\gamma, \delta \in \mathcal{P}(X, x)$ definiran je složen put $\gamma\delta$ i to je petlja iz $\mathcal{P}(X, x)$. Naravno, homotopnost petlji je relacija ekvivalencije na skupu $\mathcal{P}(X, x)$. Skup svih klasa homotopnosti u $\mathcal{P}(X, x)$ označavat ćemo sa $\Pi(X, x)$. Klasu homotopnosti petlje $\gamma \in \mathcal{P}(X, x)$ označavamo sa $[\gamma]$.

Teorem 1.6.31. *Neka je X putevima povezan topološki prostor. Preslikavanje*

$$\Pi(X,x)\times\Pi(X,x)\to\Pi(X,x),\qquad ([\gamma],[\delta])\mapsto[\gamma\delta],$$

je dobro definirano, tj. klasa homotopnosti složene petlje $\gamma\delta$ ne ovisi o izboru predstavnika klasa homotopnosti $[\gamma]$ i $[\delta]$. S tako definiranom operacijom skup $\Pi(X,x)$ postaje grupa. Inverzni element od $[\gamma]$ je klasa suprotne petlje $[\gamma^-]$.

Grupa $\Pi(X,x)$ iz teorema 1.6.31. zove se **fundamentalna grupa** prostora X. Definicija grupe $\Pi(X,x)$ ovisi o izboru točke $x\in X$. Međutim, ta ovisnost je nebitna:

Propozicija 1.6.32. *Neka je X putevima povezan topološki prostor i neka je δ put u X od točke x do točke y. Tada je $[\gamma]\mapsto[\delta\gamma\delta^-]$ izomorfizam grupe $\Pi(X,y)$ na grupu $\Pi(X,x)$.*

Neka je $f:Y\to X$ natkrivanje, T topološki prostor i $\varphi:T\to X$ neprekidno preslikavanje. **Lift preslikavanja** φ (u odnosu na natkrivanje f) je neprekidno preslikavanje $\tilde{\varphi}:T\to Y$ takvo da vrijedi $\varphi=f\circ\tilde{\varphi}$.

Propozicija 1.6.33. *Neka je $f:Y\to X$ natkrivanje, T povezan topološki prostor, $\varphi:T\to X$ neprekidno preslikavanje i $\tilde{\varphi}_1,\tilde{\varphi}_2:T\to Y$ liftovi preslikavanja φ. Ako za neku točku $t_0\in T$ vrijedi $\tilde{\varphi}_1(t_0)=\tilde{\varphi}_2(t_0)$, onda je $\tilde{\varphi}_1=\tilde{\varphi}_2$.*

Uz određene uvjete na prostor T ili na preslikavanje $\varphi:T\to X$ može se dokazati i egzistencija lifta $\tilde{\varphi}:T\to Y$ u odnosu na natkrivanje $f:Y\to X$. Važna je egzistencija u odnosu na sljedeće dvije jednostavne situacije:

Propozicija 1.6.34. *Neka je $f:Y\to X$ natkrivanje.*

(*a*) *Neka je $\gamma:[0,1]\to X$ neprekidno preslikavanje i neka je $y\in f^{-1}(\gamma(0))$. Postoji jedinstveni lift $\tilde{\gamma}:[0,1]\to Y$ od γ takav da je $\tilde{\gamma}(0)=y$.*

(*b*) *Neka je $H:[0,1]\times[0,1]\to X$ neprekidno preslikavanje i neka je $y\in f^{-1}(H(0,0))$. Postoji jedinstveni lift $\tilde{H}:[0,1]\times[0,1]\to Y$ od H takav da je $\tilde{H}(0,0)=y$.*

Neka je sada X povezana $C^\infty-$mnogostrukost (odnosno, analitička mnogostrukost) i neka je $f:Y\to X$ natkrivanje. Pomoću karata na X koje su pravilno natkrivene sa f dolazimo do $C^\infty-$atlasa (odnosno, analitičkog atlasa) na Y i za pripadnu strukturu mnogostrukosti na Y preslikavanje f je klase C^∞ (odnosno, analitičko). Nije teško vidjeti da je to jedinstvena struktura $C^\infty-$mnogostrukosti (odnosno, analitičke mnogostrukosti) na Y za koju je natkrivanje f preslikavanje klase C^∞ (odnosno, analitičko preslikavanje).

Neka je u daljnjem X povezana $C^\infty-$mnogostrukost i $f:Y\to X$ natkrivanje. Fiksirajmo točke $x\in X$ i $y\in f^{-1}(x)$. Prema tvrdnji (a) propozicije 1.6.34. za svaki put γ u X koji počinje u točki x postoji jedinstven put $\tilde{\gamma}$ u Y koji počinje u točki y koji je lift puta γ, tj. $f\circ\tilde{\gamma}=\gamma$.

Propozicija 1.6.35. *Uz uvedene oznake ako su γ i δ putevi u X koji počinju u točki x i koji su homotopni onda su putevi $\tilde{\gamma}$ i $\tilde{\delta}$ u Y homotopni. Posebno, tada je $\tilde{\gamma}(1)=\tilde{\delta}(1)$.*

Iz te propozicije neposredno slijedi

Korolar 1.6.36. *Uz pretpostavke propozicije 1.6.35. i uz oznaku uvedenu prije te propozicije neka je $\gamma\in\mathcal{P}(X,x)$ i pretpostavimo da je klasa $[\gamma]\in\Pi(X,x)$ trivijalna, tj. da je petlja γ homotopna konstantnoj petlji. Tada je i klasa $[\tilde{\gamma}]\in\Pi(Y,y)$ trivijalna, tj. petlja $\tilde{\gamma}$ u Y homotopna je konstantnoj petlji.*

Propozicija 1.6.37. *Uz pretpostavke propozicije 1.6.35. i uz oznaku uvedenu prije te propozicije stavimo*

$$D = \{[\gamma] \in \Pi(X, x);\ \text{put } \tilde{\gamma} \text{ je petlja}\}.$$

Tada je D podgrupa grupe $\Pi(X, x)$ i preslikavanje $\gamma \to \tilde{\gamma}$ inducira izomorfizam grupe D na grupu $\Pi(Y, y)$. Inverzni izomorfizam induciran je preslikavanjem $\delta \mapsto f \circ \delta$.

Oznaka: Za podgrupu D iz propozicije 1.6.37. pisat ćemo $D = D(f, y)$.

U teoriji natkrivanja mnogostrukosti ključan je sljedeći teorem:

Teorem 1.6.38. *Neka je X povezana $C^\infty-$mnogostrukost i $x \in X$. Za svaku podgrupu D grupe $\Pi(X, x)$ postoji natkrivanje $f : Y \to X$ i točka $y \in f^{-1}(x)$ takva da je $D(f, y) = D$.*

Teorem 1.6.39. *Neka su $f_1 : Y_1 \to X$ i $f_2 : Y_2 \to X$ natkrivanja povezane $C^\infty-$mnogostrukosti i neka su $x \in X$, $y_1 \in f_1^{-1}(x)$ i $y_2 \in f_2^{-1}(x)$.*

(*a*) *Ako je $D(f_1, y_1) \subseteq D(f_2, y_2)$ postoji jedinstveno preslikavanje $\varphi : Y_1 \to Y_2$ koje čuva vlati (tj. $f_1 = f_2 \circ \varphi$) i za koje je $\varphi(y_1) = y_2$. Preslikavanje φ je natkrivanje.*

(*b*) *Ako je $\varphi : Y_1 \to Y_2$ neprekidno preslikavanje koje čuva vlati i vrijedi $\varphi(y_1) = y_2$, onda je $D(f_1, y_1) \subseteq D(f_2, y_2)$.*

Propozicija 1.6.40. *Neka je X povezana mnogostrukost, $f : Y \to X$ natkrivanje, $x \in X$ i $y \in f^{-1}(x)$. Za $\sigma \in \mathcal{P}(X, x)$ neka je kao i prije $\tilde{\sigma} : [0, 1] \to Y$ jedinstven lift od σ koji počinje u točki y. Tada vrijedi*

$$D(f, \tilde{\sigma}(1)) = [\sigma]D(f, y)[\sigma]^{-1}$$

Za **natkrivanja** $f_1 : Y_1 \to X$ i $f_1 : Y_2 \to X$ povezane mnogostrukosti X kažemo da su **ekvivalentna** ako postoji neprekidna bijekcija $\varphi : Y_1 \to Y_2$ koja čuva vlati, tj. $f_1 = f_2 \circ \varphi$. Prema tvrdnji (a) propozicije 1.6.28. tada je φ natkrivanje, dakle, lokalni homeomorfizam. No kako je φ bijekcija, to je homeomorfizam; štoviše, nije teško vidjeti da je φ difeomorfizam. To pokazuje da je ekvivalentnost natkrivanja relacija ekvivalencije. Propozicija 1.6.40. i teorem 1.6.39. imaju za posljedicu:

Propozicija 1.6.41. *Neka su $f_1 : Y_1 \to X$ i $f_2 : Y_2 \to X$ natkrivanja povezane mnogostrukosti X i neka su $x \in X$, $y_1 \in f_1^{-1}(x)$ i $y_2 \in f_2^{-1}(x)$. Natkrivanja f_1 i f_2 su ekvivalentna ako samo ako su $D(f_1, y_1)$ i $D(f_2, y_2)$ konjugirane podgrupe fundamentalne grupe $\Pi(X, x)$, tj. vrijedi*

$$[\sigma]D(f_1, y_1)[\sigma]^{-1} = D(f_2, y_2) \quad \text{za neki element} \quad [\sigma] \in \Pi(X, x).$$

Sada se teorem 1.6.38. i propozicija 1.6.41. mogu spojiti u teorem:

Teorem 1.6.42. *Neka je X povezana mnogostrukost i $x \in X$. Preslikavanje $f \mapsto D(f, y)$, gdje je $f : Y \to X$ natkrivanje i $y \in f^{-1}(x)$, inducira bijekciju sa skupa svih klasa ekvivalencije natkrivanja mnogostrukosti X na skup svih klasa konjugiranosti podgrupa fundamentalne grupe.*

Za povezanu mnogostrukost X čija je fundamentalna grupa $\Pi(X, x)$ trivijalna, tj. svaka petlja u X homotopna je konstantnoj petlji, kažemo da je **jednostavno povezana**.

Teorem 1.6.43. *Neka je X povezana mnogostrukost.*

(*a*) *Postoji do na ekvivalenciju jedinstveno natkrivanje $\tilde{f} : \tilde{X} \to X$ takvo da je mnogostrukost $\tilde{X}$ jednostavno povezana.*

(*b*) *Neka je $\tilde{f} : \tilde{X} \to X$ kao u (a) i neka je $f : Y \to X$ natkrivanje. Izaberimo $x \in X$ i $\tilde{x} \in \tilde{f}^{-1}(x)$. Za svaku točku $y \in f^{-1}(x)$ postoji jedinstveno neprekidno preslikavanje $\varphi : \tilde{X} \to Y$ takvo da je $\tilde{f} = f \circ \varphi$ i $\varphi(\tilde{x}) = y$. Preslikavanje φ je natkrivanje.*

Natkrivanje $f : \tilde{X} \to X$ takvo da je mnogostrukost $\tilde{X}$ jednostavno povezana zove se zbog univerzalnog svojstva iskazanog u tvrdnji (b) teorema 1.6.43. **univerzalno natkrivanje**. Naime, tvrdnja (b) teorema 1.6.43. kaže da univerzalno natkrivanje povezane mnogostrukosti X natkriva svako natkrivanje od X.

Ako je H podgrupa grupe G onda sa $N_G(H)$ označavamo tzv. **normalizator podgrupe** H **u grupi** G :

$$N_G(H) = \{g \in G;\ gHg^{-1} = H\}.$$

$N_G(H)$ je podgrupa grupe G, H je normalna podgrupa od $N_G(H)$ i $N_G(H)$ sadrži svaku podgrupu K od G koja sadrži H kao normalnu podgrupu.

Teorem 1.6.44. *Neka je X povezana mnogostrukost, $f : Y \to X$ natkrivanje, $x \in X$ i $y \in f^{-1}(x)$. Stavimo $D = D(f, y)$ i $N = N_{\Pi(X,x)}(D)$. Grupa $\mathcal{T}(f)$ izomorfna je kvocijentnoj grupi N/D.*

Korolar 1.6.45. *Neka je $f : \tilde{X} \to X$ univerzalno natkrivanje povezane mnogostrukosti X i $x \in X$. Tada je fundamentalna grupa $\Pi(X, x)$ izomorfna je grupi $\mathcal{T}(f)$.*

Posljedica univerzalnog svojstva iz tvrdnje (b) teorema 1.6.43. je sljedeća važna činjenica:

Propozicija 1.6.46. *Neka je X povezana i jednostavno povezana $C^\infty-$mnogostrukost i neka je $f : Y \to X$ natkrivanje. Tada je f difeomorfizam.*

U mnogim situacijama pojavljuje se pitanje egzistencije i problem definicije funkcije na mnogostrukosti s određenim svojstvom, a to je svojstvo takve vrste da se vrlo lako vidi da svaka točka ima okolinu na kojoj je egzistencija takve funkcije trivijalna. Sljedeći teorem ima za posljedicu potvrdan odgovor na pitanje egzistencije ako je mnogostrukost povezana i jednostavno povezana.

Teorem 1.6.47. (**Teorem monodromije**) *Neka je X povezana i jednostavno povezana $C^\infty-$mnogostrukost i neka je D otvoren povezan podskup od $X \times X$ koji sadrži $\Delta = \{(x, x);\ x \in X\}$. Nadalje, pretpostavimo da je zadana familija nepraznih skupova $(S_x)_{x \in X}$ parametriziranih točkama iz X i familija preslikavanja $(\varphi_{x,y})_{(x,y) \in D}$ parametrizirana točkama iz D sa sljedećim svojstvima:*

(a) $\varphi_{(x,y)}$ je injekcija sa S_x u S_y za svaku točku $(x, y) \in D$.

(b) $\varphi_{(x,x)} = id_{S_x}$ za svaku točku $x \in X$.

(c) Ako su $x, y, z \in X$ takvi da su $(x, y), (y, z), (x, z) \in D$, onda je $\varphi_{(x,z)} = \varphi_{(y,z)} \circ \varphi_{(x,y)}$.

Tada postoji preslikavanje $F : X \to \bigcup_{x \in X} S_x$ takvo da je $F(x) \in S_x\ \forall x \in X$ i da je $F(y) = \varphi_{(x,y)}(F(x))\ \forall (x, y) \in D$. Ako su F i F' dva takva preslikavanja onda je ili $F = F'$ ili je $F(x) \neq F'(x)\ \forall x \in X$.

Razmotrimo sada natkrivanja povezanih Liejevih grupa.

Teorem 1.6.48. *Neka je G povezana Liejeva grupa i neka je $f : \tilde{G} \to G$ univerzalno natkrivanje. Tada na mnogostrukosti $\tilde{G}$ postoji struktura grupe takva da je f homomorfizam i da je $\tilde{G}$ Liejeva grupa.*

Uočimo da je $\operatorname{Ker} f = f^{-1}(e)$ diskretan podskup od $\tilde{G}$, dakle, to je diskretna normalna podgrupa od $\tilde{G}$. Vrijedi općenitije:

Propozicija 1.6.49. *Neka je Γ diskretna podgrupa povezane Liejeve grupe G. Tada je preslikavanje $\pi : G \to G/\Gamma$ koje svakoj točki $g \in G$ pridružuje njenu desnu $\Gamma-$klasu $g\Gamma$, natkrivanje.*

U prethodnoj propoziciji π nije općenito homomorfizam grupa, jer nismo pretpostavili da je podgrupa Γ normalna. Ako jest, onda imamo:

Propozicija 1.6.50. *Neka je G povezana topološka grupa i Γ diskretna normalna podgrupa. Tada je Γ sadržana u centru $Z(G)$ grupe G.*

Za topološke grupe G i H preslikavanje $f : G \to H$ zove se **lokalni izomorfizam**, ako je f homomorfizam grupa i postoje otvorene okoline U i V jedinica e_G i e_H u G i H takve da je restrikcija $f|U$ homeomorfizam sa U na V. Naravno, tada je homomorfizam $f : G \to H$ neprekidan. Obratno, ako pretpostavimo da je $f : G \to H$ neprekidan homomorfizam, da bi f bio lokalni izomorfizam dovoljno je pretpostaviti da postoje otvorene okoline U i V od e_G i e_H u G i H takve da je restrikcija $f|U$ bijekcija sa U na V.

Neka je $f : G \to H$ lokalni izomorfizam topoloških grupa. Ako je grupa H povezana, slika $\operatorname{Im} f = K$ sadrži okolinu jedinice V u grupi H. No tada za svaku točku $x \in K$ vrijedi $xV \subseteq K$. To pokazuje da je K otvorena podgrupa od H. Komplement $H \setminus K$ je unija desnih $K-$klasa hK, $h \in H \setminus K$, a one su sve otvoreni podskupovi od H. To pokazuje da je podgrupa K ne samo otvorena nego i zatvorena u H. Kako je po pretpostavci grupa H povezana, slijedi $H = K$, tj. f je epimorfizam.

Neka je sada $\Gamma = \operatorname{Ker} f$. To je zatvorena normalna podgrupa od G i f inducira izomorfizam topoloških grupa $G/\Gamma \to H$. Ako je U otvorena okolina jedinice e_G u G takva da je restrikcija $f|U$ injektivna, tada je $U \cap \Gamma = \{e_G\}$, što pokazuje da je podgrupa Γ diskretna.

Propozicija 1.6.51. *Neka su G i H povezane Liejeve grupe i $f : G \to H$ lokalni izomorfizam. Tada je f natkrivanje i $\Gamma = \operatorname{Ker} f$ je diskretna centralna podgrupa od G. Ako je G jednostavno povezana, onda je fundamentalna grupa $\Pi(H, e_H)$ izomorfna grupi Γ.*

1.6.4 Homomorfizmi Liejevih grupa

Neka su G i H Liejeve grupe s Liejevim algebrama $\mathfrak{g} = T_e(G)$ i $\mathfrak{h} = T_e(H)$ i neka je f neprekidni homomorfizam sa G u H. Prema teoremu 1.6.21. f je Liejev homomorfizam (tj. analitičko preslikavanje). Nadalje, prema propoziciji 1.6.14. njegov diferencijal $T_e(f) : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ je homomorfizam Liejevih algebri.

Teorem 1.6.52. *Neka su G i H Liejeve grupe s Liejevim algebrama $\mathfrak{g} = T_e(G)$ i $\mathfrak{h} = T_e(H)$ i s eksponencijalnim preslikavanjima $\exp_G : \mathfrak{g} \to G$ i $\exp_H : \mathfrak{h} \to H$. Neka je $f : G \to H$ neprekidni homomorfizam.*

(a) $f \circ \exp_G = \exp_H \circ T_e(f)$.

(b) *Ako je $\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ homomorfizam Liejevih algebri i ako je $f \circ \exp_G = \exp_H \circ \varphi$, onda je $\varphi = T_e(f)$.*

(c) *Ako je $g : H \to K$ neprekidni homomorfizam Liejevih grupa i $\mathfrak{k} = T_e(K)$, onda vrijedi $T_e(g \circ f) = T_e(g) \circ T_e(f)$.*

Korolar 1.6.53. *Uz oznake iz teorema 1.6.52. vrijedi:*

(a) $\operatorname{Im} f = f(G)$ *je Liejeva podgrupa od H i njena je Liejeva algebra* $\operatorname{Im} \mathrm{T_e(f)} = \mathrm{T_e(f)}\mathfrak{g}$.

(b) *Ako je grupa H povezana, onda je f surjekcija ako i samo ako je $T_e(f)$ surjekcija.*

(c) $\operatorname{Ker} f$ *je zatvorena (dakle, Liejeva) podgrupa od G i* $\operatorname{Ker} T_e(f)$ *je njena Liejeva algebra.*

(d) *$T_e(f)$ je injektivan operator ako i samo ako je homomorfizam f lokalno injektivan, tj. ako i samo ako postoji okolina U jedinice e u G takva da je restrikcija $f|U$ injektivna.*

Korolar 1.6.54. *Neka su $f, g : G \to H$ neprekidni homomorfizmi Liejevih grupa takvi da je $T_e(f) = T_e(g)$ i neka je G_0 komponenta povezanosti grupe G koja sadrži jedinicu. Tada vrijedi $f|G_0 = g|G_0$.*

Teorem 1.6.55. *Neka su G i H Liejeve grupe s Liejevim algebrama $\mathfrak{g}$ i $\mathfrak{h}$, i neka je $\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ homomorfizam Liejevih algebri. Ako je grupa G povezana i jednostavno povezana, postoji jedinstven Liejev homomorfizam $f : G \to H$ takav da je $\varphi = T_e(f)$.*

Ovaj će teorem dokazuje pomoću sljedeće posljedice teorema monodromije 1.6.47.; pri tome za proizvoljne topološke grupe G i H **lokalni homomorfizam** iz G u H je neprekidno preslikavanje $f : U \to H$, gdje je U otvorena okolina jedinice e u G i f ima svojstvo da ako su $x, y \in U$ takvi da je $xy \in U$, onda je $f(xy) = f(x)f(y)$.

Lema 1.6.56. *Neka je G povezana i jednostavno povezana Liejeva grupa i neka je f lokalni homomorfizam iz G u Liejevu grupu H. Tada postoji jedinstveno proširenje $F : G \to H$ preslikavanja f koje je Liejev morfizam.*

It teorema 1.6.55 i iz tvrdnje (c) teorema 1.6.52. neposredno slijedi:

Korolar 1.6.57. *Neka je G povezana i jednostavno povezana Liejeva grupa. Tada je $f \mapsto T_e(f)$ izomorfizam sa grupe $Aut(G)$ svih Liejevih automorfizama od G na grupu $Aut(\mathfrak{g})$ svih automorfizama Liejeve algebre $\mathfrak{g}$.*

Dobivene rezultate iskoristit ćemo sada za reprezentacije Liejevih grupa i Liejevih algebri. Neka je π reprezentacija Liejeve grupe G na konačnodimenzionalnom realnom ili kompleksnom prostoru V. Dakle, π je neprekidni homomorfizam Liejeve grupe G u Liejevu grupu $GL(V)$. Liejeva algebra Liejeve grupe $GL(V)$ identificira se sa $\mathfrak{gl}(V)$, a eksponencijalno preslikavanje sa $A \mapsto \mathrm{e}^A$, $A \in \mathfrak{gl}(V)$. Tada je $T_e(\pi) : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ reprezentacija Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ na prostoru V.

Teorem 1.6.58. *Neka je G povezana Liejeva grupa i $\mathfrak{g}$ njena Liejeva algebra. Nadalje, neka su π i ρ reprezentacije Liejeve grupe G na realnim ili kompleksnim konačnodimenzionalnim vektorskim prostorima V i W.*

(a) *Potprostor V_1 od V je $\pi-$invarijantan ako i samo ako je V_1 $T_e(\pi)-$invarijantan.*

(b) *Reprezentacija π je ireducibilna ako i samo ako je reprezentacija $T_e(\pi)$ ireducibilna.*

(c) *Reprezentacija π je potpuno reducibilna ako i samo ako je reprezentacija $T_e(\pi)$ potpuno reducibilna.*

(d) $Hom_{\mathfrak{g}}(V, W) = Hom_G(V, W)$.

(e) *Ako je G jednostavno povezana, za svaku konačnodimenzionalnu reprezentaciju σ Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ postoji jedinstvena reprezentacija π Liejeve grupe G na istom prostoru takva da je $T_e(\pi) = \sigma$.*

Ako je π reprezentacija Liejeve grupe G na konačnodimenzionalnom realnom ili kompleksnom vektorskom prostoru V, uobičajeno je da se pripadna reprezentacija $T_e(\pi)$ njene Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ također označava sa π. Tada je

$$\pi(X) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\pi(\exp tX)\bigg|_{t=0} \quad \text{i} \quad \pi(\exp X) = \mathrm{e}^{\pi(X)}, \qquad X \in \mathfrak{g}.$$

Za potprostor W od V stavimo

$$Stab_G(W) = \{x \in G;\ \pi(x)W = W\}, \qquad Stab_{\mathfrak{g}}(W) = \{X \in \mathfrak{g};\ \pi(X)W \subseteq W\}.$$

Nadalje, za $v \in V$ stavimo

$$Fix_G(v) = \{x \in G;\ \pi(x)v = v\}, \qquad Fix_{\mathfrak{g}}(v) = \{X \in \mathfrak{g};\ \pi(X)v = 0\}.$$

Tada su $Stab_G(W)$ i $Fix_G(v)$ očito zatvorene podgrupe od G. Prema teoremu 1.6.25. to su Liejeve podgrupe i prema naznaci dokaza teorema 1.6.25. vidi se da je $Stab_{\mathfrak{g}}(W)$ Liejeva algebra od $Stab_G(W)$ i da je $Fix_{\mathfrak{g}}(v)$ Liejeva algebra od $Fix_G(v)$.

1.6.5 Grupa automorfizama Liejeve algebre

Neka je $\mathfrak{g}$ realna ili kompleksna Liejeva algebra. Tada je $Aut(\mathfrak{g})$ zatvorena podgrupa Liejeve grupe $GL(\mathfrak{g})$, dakle, $Aut(\mathfrak{g})$ je Liejeva grupa. Uz identifikaciju $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ s Liejevom algebrom od $GL(\mathfrak{g})$, Liejeva algebra od $Aut(\mathfrak{g})$ je

$$\mathfrak{h} = \{A \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{g});\ \mathrm{e}^{tA} \in Aut(\mathfrak{g})\ \forall t \in \mathbb{R}\}.$$

Sada imamo redom

$$A \in \mathfrak{h} \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{e}^{tA}[x,y] = [\mathrm{e}^{tA}x, \mathrm{e}^{tA}y]\ \forall t \in \mathbb{R} \text{ i } \forall x, y \in \mathfrak{g}.$$

Deriviranjem po t u nuli odatle dobivamo

$$A \in \mathfrak{h} \quad \Longrightarrow \quad A[x,y] = [Ax,y] + [x,Ay] \quad \Longrightarrow \quad A \in Der(\mathfrak{g}).$$

Time je dokazano da je $\mathfrak{h} \subseteq Der(\mathfrak{g})$. Obratno, ako je $A \in Der(\mathfrak{g})$, onda indukcijom nalazimo da za svaki $n \in \mathbb{N}$ i za $x, y \in \mathfrak{g}$ vrijedi

$$A^n[x,y] = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} [A^k x, A^{n-k} y].$$

Prema tome,

$$\mathrm{e}^{tA}[x,y] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} A^n[x,y] = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{t^n}{n!} \binom{n}{k} [A^k x, A^{n-k} y] =$$

$$= \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k x, \sum_{n=k}^{\infty} \frac{t^{n-k}}{(n-k)!} A^{n-k} y \right] = \left[\mathrm{e^{tA}x}, \mathrm{e^{tA}y}\right],$$

što pokazuje da je $\mathrm{e^{tA}} \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ $\forall t \in \mathbb{R}$, odnosno, da je $A \in \mathfrak{h}$. Na taj način dokazali smo:

Propozicija 1.6.59. *Neka je $\mathfrak{g}$ realna ili kompleksna Liejeva algebra. Tada je $Der(\mathfrak{g})$ Liejeva algebra Liejeve grupe $Aut(\mathfrak{g})$.*

Grupa $Int(\mathfrak{g})$ unutarnjih automorfizama Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ generirana je svim automorfizmima oblika $\mathrm{e}^{ad\,x}$, $x \in \mathfrak{g}$. Tada je $Int(\mathfrak{g})$ Liejeva podgrupa Liejeve grupe $Aut(\mathfrak{g})$ i njena je Liejeva algebra $ad\,\mathfrak{g} = \{ad\,x;\ x \in \mathfrak{g}\}$. Budući da je $ad : \mathfrak{g} \to Der(\mathfrak{g})$ homomorfizam Liejevih algebri čija je jezgra

$$Ker\,ad = \{x \in \mathfrak{g};\ [x,y] = 0\ \forall y \in \mathfrak{g}\} = Z(\mathfrak{g})$$

centar Liejeve algebre $\mathfrak{g}$, vidimo da vrijedi:

Propozicija 1.6.60. *Adjungirana reprezentacija* $ad : \mathfrak{g} \to Der(\mathfrak{g})$ *inducira izomorfizam kvocijentne Liejeve algebre* $\mathfrak{g}/Z(\mathfrak{g})$ *na Liejevu algebru Liejeve grupe* $Int(\mathfrak{g})$.

Za tzv. poluprostu Liejevu algebru $\mathfrak{g}$ je $Z(\mathfrak{g}) = \{0\}$, odnosno, adjungirana reprezentacija ad je injektivna. Nadalje, u tom je slučaju svaka derivacija unutarnja, dakle, ad je izomorfizam $\mathfrak{g}$ na $Der(\mathfrak{g})$. Odatle i iz korolara 1.6.20. neposredno slijedi:

Propozicija 1.6.61. *Neka je* $\mathfrak{g}$ *poluprosta realna ili kompleksna Liejeva algebra. Tada je* ad *izomorfizam Liejeve algebre* $\mathfrak{g}$ *na Liejevu algebru Liejeve grupe* $Aut(\mathfrak{g})$. *Nadalje, grupa* $Int(\mathfrak{g})$ *unutarnjih automorfizama od* $\mathfrak{g}$ *je komponenta povezanosti jedinice grupe* $Aut(\mathfrak{g})$.

1.7 Glatki i analitički vektori

Neka je $\mathcal{H}$ Banachov prostor i Ω otvoren podskup od $\mathbb{R}^n$. Za preslikavanje $f : \Omega \to \mathcal{H}$ kažemo da je diferencijabilno u točki $x_0 \in \Omega$ ako postoji linearan operator $T_{x_0}(f) : \mathbb{R}^n \to \mathcal{H}$ takav da vrijedi

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\|f(x) - f(x_0) - T_{x_0}(f)(x - x_0)\|}{\|x - x_0\|} = 0.$$

Pri tome je $\|\cdot\|$ u brojniku oznaka za normu na Banachovom prostoru $\mathcal{H}$ a u nazivniku oznaka za bilo koju normu na prostoru $\mathbb{R}^n$. Naravno, kako je prostor $\mathbb{R}^n$ konačnodimenzionalan, svaki linearan operator sa $\mathbb{R}^n$ u $\mathcal{H}$ je ograničen; posebno, $T_{x_0}(f) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n, \mathcal{H})$. Preslikavanje f je diferencijabilno na Ω ako je diferencijabilno u svakoj točki od Ω. U tom slučaju definirano je preslikavanje $x \mapsto T_x(f)$ sa Ω u Banachov prostor $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n, \mathcal{H})$. Ako je to preslikavanje neprekidno na Ω, kažemo da je preslikavanje f klase C^1 na Ω. Ako je preslikavanje $x \mapsto T_x(f)$ klase C^1 na Ω, kažemo da je preslikavanje f klase C^2 na Ω. Induktivno definiramo za svaki $m \in \mathbb{N}$: preslikavanje f je klase C^m na Ω ako je ono diferencijabilno na Ω i preslikavanje $x \mapsto T_x(f)$ je klase C^{m-1} na Ω. Napokon, kažemo da je preslikavanje $f : \Omega \to \mathcal{H}$ klase C^∞ na Ω ako je ono klase C^m na Ω za svaki $m \in \mathbb{R}$.

Neka je sada M diferencijabilna mnogostrukost i $\mathcal{H}$ Banachov prostor. Preslikavanje $F : M \to \mathcal{H}$ je klase C^∞ ako je za svaku kartu (U, φ) mnogostrukosti M preslikavanje $F \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \to \mathcal{H}$ klase C^∞ na $\varphi(U)$. Lako se vidi da je dovoljno to zahtijevati za sve karte iz nekog atlasa mnogostrukosti M.

Vrijedi sljedeći Grothendieckov teorem (dokazan u *Espaces vectoriels topologiques*, Univ. São Paulo, 1954. u znatno općenitijoj situaciji kad je $\mathcal{H}$ lokalno konveksan vektorski prostor koji je *kvazi–potpun*, tj. takav da je svaki njegov zatvoren ograničen podskup potpun):

Teorem 1.7.1. *Neka je M diferencijabilna mnogostrukost i $\mathcal{H}$ Banachov prostor. Preslikavanje $F : M \to \mathcal{H}$ je klase C^∞ ako i samo ako je skalarna funkcija $\varphi \circ F : M \to \mathbb{C}$ klase C^∞ za svaki neprekidni linearni funkcional $\varphi \in \mathcal{H}'$.*

Neka je ponovo $\mathcal{H}$ Banachov prostor i Ω otvoren podskup od $\mathbb{R}^n$. Za preslikavanje $f : \Omega \to \mathcal{H}$ kažemo da je analitičko ako za svaku točku $x_0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$ postoji $r > 0$ takav da je

$$D(x_0, r) = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n;\ |x_j - x_j^0| < r \text{ za } j = 1, \ldots, n\} \subseteq \Omega$$

i postoje $a_m \in \mathcal{H}$, $m \in \mathbb{Z}_+^n$, takvi da vrijedi

$$f(x) = \sum_{m \in \mathbb{Z}_+^n} (x - x_0)^m a_m \qquad \forall x \in D(x_0, r).$$

Pri tome je

$$(x - x_0)^m = (x_1 - x_1^0)^{m_1} \cdots (x_n - x_n^0)^{m_n},$$

a gornji red konvergira po normi u $\mathcal{H}$, tj. za svaki $x \in D(x_0, r)$ i svaki $\varepsilon > 0$ postoji konačan podskup $F_0 \subset \mathbb{Z}_+^n$ takav da za svaki konačan podskup $F \subset \mathbb{Z}_+^n$ vrijedi:

$$F_0 \subseteq F \qquad \Longrightarrow \qquad \left\| f(x) - \sum_{m \in F} (x - x_0)^m a_m \right\| < \varepsilon.$$

Analogno kao malo prije, ako je M analitička mnogostrukost i $\mathcal{H}$ Banachov prostor, za preslikavanje $F : M \to \mathcal{H}$ kažemo da je analitičko ako je za svaku (analitičku) kartu (U, φ) od M preslikavanje $F \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \to \mathcal{H}$ analitičko. Ponovno je to dovoljno zahtijevati za sve karte iz nekog (analitičkog) atlasa mnogostrukosti M.

Vrijedi sljedeći analogon teorema 1.7.1. koji je dokazan u članku J. Barros Neto, *Spaces of vector valued real analytic function*, Trans. Amer. Math. Soc. **112**(1964),381−391, također u većoj općenitosti, ali ne takvoj kao što je Grothendieckov teorem za preslikavanja klase C^∞ :

Teorem 1.7.2. *Neka je M analitička mnogostrukost i $\mathcal{H}$ Banachov prostor. Preslikavanje $F : M \to \mathcal{H}$ je analitičko ako i samo ako je skalarna funkcija $\varphi \circ F : M \to \mathbb{C}$ analitička za svaki neprekidni linearni funkcional $\varphi \in \mathcal{H}'$.*

Neka je sada π reprezentacija Liejeve grupe G na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$. Za $\xi \in \mathcal{H}$ kažemo da je **glatki vektor** (odn. **analitički vektor**) za reprezentaciju π ako je preslikavanje $x \mapsto \pi(x)\xi$ sa G u $\mathcal{H}$ klase C^∞ (odn. analitičko). Označimo sa $\mathcal{H}^\infty(\pi)$ skup svih glatkih vektora, a sa $\mathcal{H}^\omega(\pi)$ skup svih analitičkih vektora reprezentacije π. Ukoliko je jasno o kojoj se reprezentaciji π na prostoru $\mathcal{H}$ radi, pisat ćemo kraće $\mathcal{H}^\infty$ i $\mathcal{H}^\omega$. Očito su to potprostori vektorskog prostora $\mathcal{H}$ i $\mathcal{H}^\omega \subseteq \mathcal{H}^\infty$.

Lema 1.7.3. (**Lars Gårding**) *Neka je $f \in C_0^\infty(G)$ i $\xi \in \mathcal{H}$. Tada je $\pi(f)\xi \in \mathcal{H}^\infty$.*

Dokaz: Neka je μ lijeva Haarova mjera na G u odnosu na koju je reprezentaciji π od G pridružena reprezentacija $f \mapsto \pi(f)$ konvolucijske algebre $C_0(G)$. Za proizvoljan $\eta \in \mathcal{H}$ i $x \in G$ imamo

$$(\pi(x)\pi(f)\xi|\eta) = (\pi(f)\xi|\pi(x)^*\eta) = \int_G f(y)(\pi(y)\xi|\pi(x)^*\eta)\mathrm{d}\mu(y) =$$

$$= \int_G f(y)(\pi(xy)\xi|\eta)\mathrm{d}\mu(y) = \int_G f(x^{-1}y)(\pi(y)\xi|\eta)\mathrm{d}\mu(y).$$

Budući da je $f \in C_0^\infty(G)$ i $y \mapsto (\pi(y)\xi|\eta)$ je neprekidna funkcija, u posljednjem gornjem izrazu možemo derivirati pod znakom integrala, pa slijedi da je stvarno funkcija $x \mapsto (\pi(x)\pi(f)\xi|\eta)$. Kako to vrijedi za svaki $\eta \in \mathcal{H}$, prema teoremu 1.7.1. zaključujemo da je preslikavanje $x \mapsto \pi(x)\pi(f)\xi$ sa G u $\mathcal{H}$ klase C^∞. Dakle, $\pi(f)\xi$ je glatki vektor za reprezentaciju π.

Potprostor

$$\pi(C_0^\infty(G))\mathcal{H} = span\,\{\pi(f)\xi;\ f \in C_0^\infty(G),\ \xi \in \mathcal{H}\}$$

zove se **Gårdingova domena** za reprezentaciju π.

Teorem 1.7.4. *Neka je π reprezentacija Liejeve grupe G na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$.*

(*a*) *Gårdingova domena $\pi(C_0^\infty(G))\mathcal{H}$ je gust potprostor od $\mathcal{H}$.*

(*b*) *$\mathcal{H}^\infty$ je gust potprostor od $\mathcal{H}$.*

Dokaz: Neka je $\xi \in \mathcal{H}$ i $\varepsilon > 0$. Zbog neprekidnosti funkcije $x \mapsto \pi(x)\xi$ postoji kompaktna okolina V jedinice e u grupi G takva da je

$$\|\pi(x)\xi - \xi\| < \varepsilon \qquad \forall x \in V.$$

Neka je sada $f \in C^\infty(G)$ takva da je

$$Supp\, f \subseteq V, \quad f(x) \geq 0 \quad \forall x \in G \qquad \text{i} \qquad \int_G f(x)\mathrm{d}\mu(x) = 1.$$

Tada za svaki $\eta \in \mathcal{H}$ vrijedi

$$|(\pi(f)\xi - \xi|\eta)| = \left|\int_G f(x)(\pi(x)\xi - \xi|\eta)\mathrm{d}\mu(x)\right| \leq \int_G f(x)\|\pi(x)\xi - \xi\|\mathrm{d}\mu(x)\|\eta\| \leq \varepsilon\|\eta\|.$$

Uzmemo li supremum po svim $\eta \in \mathcal{H}$, $\|\eta\| = 1$, slijedi $\|\pi(f)\xi - \xi\| \leq \varepsilon$. Time je tvrdnja (*a*) dokazana. Tvrdnja (*b*) odatle neposredno slijedi zbog Gårdingove leme 1.7.3.

Dixmier i Malliavin su u članku *Factorisations de fonctions et de vecteurs indéfiniment différentiables*, Bull. Sci. Math. **102**(1978),305−330, dokazali da je Gårdingova domena ne samo sadržana nego jednaka potprostoru $\mathcal{H}^\infty$. Štoviše, dokazali su da za široku klasu grupa, koja uključuje sve povezane poluproste Liejeve grupe s konačnim centrom, vrijedi

$$\mathcal{H}^\infty = \{\pi(f)\xi;\ f \in C_0^\infty(G),\ \xi \in \mathcal{H}\}.$$

To nije istina, ako Liejeva grupa G ima zatvorenu podgrupu H takvu da je $G/H \simeq \mathbb{R}^2$; to je tako npr. za povezane jednostavno povezane nilpotentne Liejeve grupe dimenzije ≥ 2. Dokazali su i da za aditivnu grupu $\mathbb{R}^n$ za $n \geq 2$ i njenu reprezentaciju π na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$ vrijedi

$$\mathcal{H}^\infty = \{\pi(f)\xi + \pi(g)\eta;\ f, g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n),\ \xi, \eta \in \mathcal{H}\}.$$

Neka je $\mathfrak{g}$ Liejeva algebra Liejeve grupe G. Za $X \in \mathfrak{g}$ definiramo linearan operator $\pi(X) : \mathcal{H}^\infty \to \mathcal{H}$ sa

$$\pi(X)\xi = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\pi(\exp tX)\xi\bigg|_{t=0}, \qquad \xi \in \mathcal{H}^\infty.$$

Propozicija 1.7.5. (*a*) *Potprostori $\mathcal{H}^\infty$ i $\mathcal{H}^\omega$ su $\pi(G)-$invarijantni.*

(*b*) *Potprostori $\mathcal{H}^\infty$ i $\mathcal{H}^\omega$ su invarijantni s obzirom na sve operatore $\pi(X)$, $X \in \mathfrak{g}$.*

(*c*) *$X \mapsto \pi(X)$ je reprezentacija Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ na vektorskom prostoru $\mathcal{H}^\infty$.*

Dokaz: (*a*) Neka je $\xi \in \mathcal{H}^\infty$ i $x_0 \in G$. Tada je preslikavanje $x \mapsto \pi(x)\pi(x_0)\xi = \pi(xx_0)\xi$ sa G u $\mathcal{H}$ kompozicija preslikavanja $x \mapsto xx_0$ sa G u G i preslikavanja $y \mapsto \pi(y)\xi$ sa G u $\mathcal{H}$. Budući da su oba preslikavanja klase C^∞, lako se vidi da je kompozicija klase C^∞. Prema tome, $\pi(x_0)\xi \in \mathcal{H}^\infty$. Ako je $\xi \in \mathcal{H}^\omega$, oba su preslikavanja $x \mapsto xx_0$ i $y \mapsto \pi(y)\xi$ analitička, pa je i njihova kompozicija $x \mapsto \pi(x)\pi(x_0)\xi$ analitičko preslikavanje sa G u $\mathcal{H}$. Prema tome je $\pi(x_0)\xi \in \mathcal{H}^\omega$.

(*b*) Neka je $\xi \in \mathcal{H}^\infty$. Za $X \in \mathfrak{g}$ označimo kao i prije sa $\tilde{X}$ pripadno lijevoinvarijantno vektorsko polje na G. Za proizvoljan $\eta \in \mathcal{H}$ definiramo funkciju $f_{\xi,\eta} : G \to \mathbb{C}$ klase C^∞ sa $f_{\xi,\eta}(x) = (\pi(x)\xi|\eta)$. Tada za $x \in G$ i $X \in \mathfrak{g}$ imamo primjenom propozicije 1.6.23. (za $n = 1$)

$$(\pi(x)\pi(X)\xi|\eta) = (\pi(X)\xi|\pi(x)^*\eta) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\pi(\exp tX)\xi|\pi(x)^*\eta)\bigg|_{t=0} =$$

$$= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\pi(x\exp tX)\xi|\eta)\bigg|_{t=0} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f_{\xi,\eta}(x\exp tX)\bigg|_{t=0} = (\tilde{X}f_{\xi,\eta})(x).$$

Kako je $f_{\xi,\eta} \in C^\infty(G)$ slijedi da je i $\tilde{X}f_{\xi,\eta} \in C^\infty(G)$. Budući da je vektor $\eta \in \mathcal{H}$ bio proizvoljan, prema teoremu 1.7.1. slijedi da je $\pi(X)\xi \in \mathcal{H}^\infty$.

Ako je $\xi \in \mathcal{H}^\omega$, onda je za svaki $\eta \in \mathcal{H}$ funkcija $f_{\xi,\eta} : G \to \mathbb{C}$ analitička. Tada je za $X \in \mathfrak{g}$ i funkcija $\tilde{X}f_{\xi,\eta}$ analitička, a ona je prema gornjem računu jednaka funkciji $x \mapsto (\pi(x)\pi(X)\xi|\eta)$. Kako to vrijedi za svaki $\eta \in \mathcal{H}$, zaključujemo da je $\pi(X)\xi \in \mathcal{H}^\omega$.

(*c*) Očito je preslikavanje $X \mapsto \pi(X)$ sa $\mathfrak{g}$ u algebru linearnih operatora na prostoru $\mathcal{H}^\infty$ linearno. Neka su sada $X, Y \in \mathfrak{g}$. Prema gornjem izvodu imamo za $t \in \mathbb{R}$, $\xi \in \mathcal{H}^\infty$ i $\eta \in \mathcal{H}$

$$(\pi(\exp tY)\pi(X)\xi|\eta) = (\tilde{X}f_{\xi,\eta})(\exp tY).$$

Odatle slijedi

$$(\pi(Y)\pi(X)\xi|\eta) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\pi(\exp tY)\pi(X)\xi|\eta)\bigg|_{t=0} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\tilde{X}f_{\xi,\eta})(\exp tY)\bigg|_{t=0} = (\tilde{Y}\tilde{X}f_{\xi,\eta})(e).$$

Zamijenimo li uloge X i Y i oduzmemo dvije jednakosti, dobivamo zbog definicije komutatora u Liejevoj algebri $\mathfrak{g}$:

$$(\pi(X)\pi(Y)\xi - \pi(Y)\pi(X)\xi|\eta) = (\tilde{X}\tilde{Y}f_{\xi,\eta} - \tilde{Y}\tilde{X}f_{\xi,\eta})(e) = ([X,Y]^{\sim}f_{\xi,\eta})(e) = (\pi([X,Y])\xi|\eta).$$

Prema tome je $\pi([X,Y]) = \pi(X)\pi(Y) - \pi(Y)\pi(X)$.

Reprezentacija realne Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ na prostoru $\mathcal{H}^\infty$ proširuje se do reprezentacije njene kompleksifikacije $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$, a ova do reprezentacije univerzalne omotačke algebre $U(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})$. Kao i prije, sa $Z(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})$ označavamo centar algebre $U(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})$. Reprezentacija $x \mapsto Ad\,x$ grupe G pomoću automorfizama Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ jedinstveno se proširuje do reprezentacije od G automorfizmima algebre $U(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})$ koju ćemo također označavati sa $x \mapsto Ad\,x$. Stavimo

$$Z_G(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}) = \{u \in U(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}});\ (Ad\,x)u = u\ \forall x \in G\}.$$

To je podalgebra centra $Z(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})$ i s njim se podudara ako je grupa G povezana. U slučaju ireducibilne unitarne reprezentacije imamo sljedeći važan rezultat:

Propozicija 1.7.6. *Neka je π ireducibilna unitarna reprezentacija Liejeve grupe G na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$. Za svaki $z \in Z_G(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})$ operator $\pi(z)$ je skalarni multipl jediničnog operatora $I_{\mathcal{H}^\infty}$.*

Dokaz: Za $X \in \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ i $X_1, X_2 \in \mathfrak{g}$ takve da je $X = X_1 + iX_2$ pišemo $\overline{X} = X_1 - iX_2$. Drugim riječima, $X \mapsto \overline{X}$ je konjugacija kompleksne Liejeve algebre $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ pridružena njenoj realnoj formi $\mathfrak{g}$. Nadalje, neka je $u \mapsto u^*$ jedinstveni antilinearan antiautomorfizam kompleksne unitalne algebre $U(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})$ koji proširuje preslikavanje $X \mapsto -\overline{X}$. Dakle,

$$1^* = 1, \qquad X^* = -\overline{X} \quad \text{za} \quad X \in \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}, \qquad (uv)^* = v^*u^* \quad \text{za} \quad u, v \in U(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}).$$

Kako je reprezentacija π unitarna, za $X \in \mathfrak{g}$ i $\xi, \eta \in \mathcal{H}^\infty$ nalazimo

$$(\pi(X)\xi|\eta) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\pi(\exp tX)\xi|\eta)\bigg|_{t=0} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\xi|(\pi(\exp -tX)\eta)\bigg|_{t=0} = -(\xi|\pi(X)\eta).$$

Odatle jednostavno slijedi

$$(\pi(u)\xi|\eta) = (\xi|\pi(u^*)\eta) \qquad \forall u \in U(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}) \quad \text{i} \quad \forall \xi, \eta \in \mathcal{H}^\infty.$$

Primijetimo sada da je $(Ad\,x)u^* = ((Ad\,x)u)^*$ za svaki $x \in G$ i svaki $u \in U(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})$. Odatle slijedi $Z_G(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})^* = Z_G(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})$. Stavimo sada $V = W = \mathcal{H}^\infty$ i neka su T i S linearni operatori na tom potprostoru zadani sa $T = \pi(z)$ i $S = \pi(z^*)$. Za $x \in G$ i $\xi \in \mathcal{H}^\infty$ imamo

$$T\pi(x)\xi = \pi(x)\pi(x^{-1})\pi(z)\pi(x)\xi = \pi(x)\pi((Ad\,x^{-1})z)\xi = \pi(x)\pi(z)\xi = \pi(x)T\xi.$$

Nadalje, prema prethodnoj jednakosti vrijedi

$$(T\xi|\eta) = (\xi|S\eta) \qquad \forall \xi, \eta \in \mathcal{H}^\infty.$$

Sada tvrdnja propozicije slijedi iz teorema 1.1.14.

S reprezentacije Liejeve grupe G prešli smo na reprezentaciju njene Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ (i jednu njenu subreprezentaciju). Međutim, pri tome smo promijenili prostor. Iako prostor $\mathcal{H}^\infty$ glatkih vektora ima dobro svojstvo da je gust u prostoru $\mathcal{H}$, to pridruživanje reprezentacijama od G reprezentacija od $\mathfrak{g}$ nema dovoljno dobra svojstva. Ukoliko je $\mathcal{K}$ zatvoren $\pi(G)-$invarijantan potprostor od $\mathcal{H}$, onda je očito $\mathcal{K}^\infty(\pi|\mathcal{K}) = \mathcal{K} \cap \mathcal{H}^\infty$ i to je $\pi(\mathfrak{g})-$invarijantan potprostor od $\mathcal{H}^\infty$ i njegov zatvarač jednak je $\mathcal{K}$. Nažalost, obično postoje $\pi(\mathfrak{g})-$invarijantni potprostori od $\mathcal{H}^\infty$ čiji zatvarač nije $\pi(G)-$invarijantan. Jedan primjer je:

Zadatak 1.7.1. *Neka je π regularna reprezentacija aditivne grupe $\mathbb{R}$ na prostoru $L_2(\mathbb{R})$. Neka je*

$$V = \{f \in C_0^\infty(\mathbb{R});\ Supp\, f \subseteq [0,1]\}.$$

Dokažite da je tada potprostor V $\pi(\mathfrak{g})-$invarijantan, ali da niti V niti njegov zatvarač $Cl(V)$ nisu $\pi(G)-$invarijantni.

S reprezentacijom $X \mapsto \pi(X)|\mathcal{H}^\omega$ situacija je za povezanu Liejevu grupu G u tom smislu bolja:

Propozicija 1.7.7. *Neka je G povezana Liejeva grupa, π njena reprezentacija na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$ i $\mathcal{V}$ $\pi(\mathfrak{g})-$invarijantan potprostor od $\mathcal{H}^\omega$. Tada je njegov zatvarač $Cl(\mathcal{V})$ $\pi(G)-$invarijantan potprostor od $\mathcal{H}$.*

Dokaz: Neka je $X \in \mathfrak{g}$, $\xi \in \mathcal{V}$ i $\eta \in \mathcal{V}^\perp$. Funkcija $t \mapsto (\pi(\exp tX)\xi|\eta)$ je analitička sa $\mathbb{R}$ u $\mathbb{C}$, pa postoje $\varepsilon > 0$ i skalari $a_n \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{Z}_+$, takvi da vrijedi

$$(\pi(\exp tX)\xi|\eta) = \sum_{n\in\mathbb{Z}_+} \alpha_n t^n \qquad \forall t \in \mathbb{R}, \quad |t| < \varepsilon. \tag{1.7}$$

Sada iz $\exp{(t+s)X} = (\exp tX)(\exp sX)$ slijedi

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\pi(\exp tX)\xi|\eta) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(\pi(\exp{(t+s)X})\xi|\eta)\Big|_{s=0} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(\pi(\exp tX)\pi(\exp sX)\xi|\eta)\Big|_{s=0} =$$

$$= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(\pi(\exp sX)\xi|\pi(\exp tX)^*\eta)\Big|_{s=0} = (\pi(X)\xi|\pi(\exp tX)^*\eta) = (\pi(\exp tX)\pi(X)\xi|\eta).$$

Indukcijom po n odatle slijedi da je

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}(\pi(\exp tX)\xi|\eta) = (\pi(\exp tX)\pi(X)^n\xi|\eta), \qquad t \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Sada pomoću (1.7) nalazimo

$$(\pi(X)^n\xi|\eta) = \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}(\pi(\exp tX)\xi|\eta)\Big|_{t=0} = n!\alpha_n \qquad \forall n \in \mathbb{Z}_+.$$

Prema tome,

$$(\pi(\exp tX)\xi|\eta) = \sum_{n\in\mathbb{Z}_+} \frac{1}{n!}(\pi(X)^n\xi|\eta)t^n \qquad \forall t \in \mathbb{R}, \quad |t| < \varepsilon.$$

Po pretpostavci potprostor $\mathcal{V}$ prostora $\mathcal{H}^\omega$ je $\pi(\mathfrak{g})-$invarijantan. Stoga je $\pi(X)^n\xi \in \mathcal{V}$ $\forall n \in \mathbb{Z}_+$. Kako je $\eta \in \mathcal{V}^\perp$, slijedi da je $(\pi(X)^n\xi|\eta) = 0$ $\forall n \in \mathbb{Z}_+$, dakle, $(\pi(\exp tX)\xi|\eta) = 0$ $\forall t \in \mathbb{R}$, $|t| < \varepsilon$, a kako je funkcija $t \mapsto (\pi(\exp tX)\xi|\eta)$ analitička na $\mathbb{R}$, zaključujemo da je $(\pi(\exp tX)\xi|\eta) = 0$ za svaki $t \in \mathbb{R}$ i, posebno, za $t = 1$. Dakle,

$$(\pi(\exp X)\xi|\eta) = 0 \qquad \forall X \in \mathfrak{g}, \quad \forall \xi \in \mathcal{V}, \quad \forall \eta \in \mathcal{V}^\perp.$$

Odatle je $\pi(\exp X)\xi \in \mathcal{V}^{\perp\perp} = Cl(\mathcal{V})$ za svaki $X \in \mathfrak{g}$ i svaki $\xi \in \mathcal{V}$. Kako je operator $\pi(\exp tX)$ ograničen, zaključujemo da je potprostor $Cl(\mathcal{V})$ invarijantan s obzirom na sve operatore $\pi(\exp X)$, $X \in \mathfrak{g}$. No kako je grupa G povezana, skup $\exp \mathfrak{g}$ generira grupu G, pa slijedi da je potprostor $Cl(\mathcal{V})$ $\pi(G)-$invarijantan.

Znatno kompliciranijim metodama nego što je Gårdingova lema E. Nelson je u članku *Analytic vectors*, Annals of Math. **70**(1959),572−615, dokazao

Teorem 1.7.8. *Za svaku reprezentaciju π Liejeve grupe G na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$ potprostor $\mathcal{H}^\omega$ je gust u $\mathcal{H}$.*

Taj teorem ne ćemo dokazivati u punoj općenitosti nego samo u situaciji tzv. *realnih reduktivnih Liejevih grupa* i tzv. *dopustivih reprezentacija*. Za takve grupe bit će moguće još suziti potprostor na kome djeluje reprezentacija Liejeve algebre, ali tako da on ostane gust i da pripadna reprezentacija Liejeve algebre ima još bolja svojstva. Kao pripremu za to promatrajmo reprezentaciju π Liejeve grupe G na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$ i neka je K kompaktna podgrupa od G. Tada je K Liejeva podgrupa od G i neka je $\mathfrak{k} \subseteq \mathfrak{g}$ njena Liejeva algebra. Prema teoremu 1.3.1. bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je reprezentacija $\pi|K$ unitarna. Prema teoremu 1.3.5. tada vrijedi

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{\gamma \in \hat{K}} \mathcal{H}(\gamma).$$

Pri tome je za svaku klasu $\gamma \in \hat{K}$ $\mathcal{H}(\gamma)$ zatvoren potprostor koji je suma svih (konačnodimenzionalnih) $\pi(K)-$invarijantnih potpostora $\mathcal{K}$ od $\mathcal{H}$ takvih da je subreprezentacija $(\pi|K)_{\mathcal{K}}$ ireducibilna i u klasi γ. Nadalje, ortogonalni projektor na potprostor $\mathcal{H}(\gamma)$ je $(\pi|K)(\chi^\gamma)$ u odnosu na normiranu Haarovu mjeru na K, pri čemu je $\chi^\gamma = d(\gamma)\overline{\chi_\gamma}$, a χ_γ je karakter reprezentacija u klasi γ. Nadalje, ako kao i prije sa $\mathcal{H}_K$ označimo potprostor od $\mathcal{H}$ svih $K-$konačnih vektora,

$$\mathcal{H}_K = \{\xi \in \mathcal{H};\ \dim \mathit{span}\,\{\pi(k)\xi;\ k \in K\} < \infty\},$$

onda je

$$\mathcal{H}_K = \sum_{\gamma \in \hat{K}} \mathcal{H}(\gamma) \qquad \text{(algebarska direktna suma)}$$

i taj je potprostor gust u $\mathcal{H}$. U daljnjem ćemo pisati $\pi(\chi^\gamma)$ umjesto $(\pi|K)(\chi^\gamma)$. Dakle,

$$(\pi(\chi^\gamma)\xi|\eta) = d(\gamma) \int_K \overline{\chi_\gamma(k)}(\pi(k)\xi|\eta)\mathrm{d}\nu(k),$$

pri čemu je ν normirana Haarova mjera na K.

Stavimo sada $\mathcal{H}_K^\infty = \mathcal{H}_K \cap \mathcal{H}^\infty$.

Propozicija 1.7.9. *Uz uvedene oznake za svaku klasu $\gamma \in \hat{K}$ vrijedi:*

(*a*) $\pi(\chi^\gamma)\mathcal{H}^\infty \subseteq \mathcal{H}^\infty$.

(*b*) $\pi(\chi^\gamma)\mathcal{H}^\infty = \mathcal{H}(\gamma) \cap \mathcal{H}^\infty$.

(*c*) $Cl(\pi(\chi^\gamma)\mathcal{H}^\infty) = \mathcal{H}(\gamma) = \pi(\chi^\gamma)\mathcal{H}$.

Zadatak 1.7.2. *Dokažite propoziciju 1.7.9.*

Uputa: Tvrdnja (a) slijedi pomoću standardnih rezultata o deriviranju pod znakom integrala. Tvrdnja (b) se svodi na jednostavan račun. Tvrdnja (c) slijedi iz gustoće potprostora $\mathcal{H}^\infty$ i iz ograničenosti operatora $\pi(\chi^\gamma)$.

Teorem 1.7.10. *Uz uvedene oznake vrijedi:*

(*a*)
$$\mathcal{H}_K^\infty = \sum_{\gamma \in \hat{K}} \pi(\chi^\gamma)\mathcal{H}^\infty.$$

(*b*) *$\mathcal{H}_K^\infty$ je gust potprostor od $\mathcal{H}$.*

(*c*) *$\mathcal{H}_K^\infty$ je $\pi(\mathfrak{g})-$invarijantan potprostor od $\mathcal{H}^\infty$.*

(*d*) *Za $X \in \mathfrak{g}$, $k \in K$ i $\xi \in \mathcal{H}_K^\infty$ vrijedi:*

$$\pi(k)\pi(X)\xi = \pi((Ad\,k)X)\xi.$$

Dokaz: (a) Stavimo
$$\mathcal{V}=\sum_{\gamma\in\hat{K}}\pi(\chi^\gamma)\mathcal{H}^\infty.$$
Prije svega, tada je $\mathcal{H}_K^\infty\subseteq\mathcal{V}$. Doista, neka je $\xi\in\mathcal{H}_K^\infty$. Budući da je vektor ξ $K-$konačan, postoje $n\in\mathbb{N}$, međusobno različiti $\gamma_1,\ldots,\gamma_n\in\hat{K}$ i $\xi_j\in\mathcal{H}(\gamma_j)$ za $j=1,\ldots,n$ takvi da je $\xi=\xi_1+\cdots+\xi_n$. Tada je
$$\xi_j=\pi(\chi^\gamma)\xi\in\pi(\chi^\gamma)\mathcal{H}^\infty\subseteq\mathcal{V}\qquad\Longrightarrow\qquad\xi=\xi_1+\cdots+\xi_n\in\mathcal{V}.$$
Time je dokazana inkluzija $\mathcal{H}_K^\infty\subseteq\mathcal{V}$. Dokažimo sada obrnutu inkluziju. Neka je $\gamma\in\hat{K}$ i $\xi\in\pi(\chi^\gamma)\mathcal{H}^\infty$. Prema tvrdnji ($a$) propozicije 1.7.9. tada je $\xi\in\mathcal{H}^\infty$, pa treba samo dokazati da je potprostor $W=span\,\{\pi(k)\xi;\ k\in K\}$ konačnodimenzionalan. Za $\eta\in\mathcal{H}$ definiramo funkciju na K sa
$$f_{\xi,\eta}(k)=(\pi(k^{-1})\xi|\eta)=(\xi|\pi(k)\eta),\qquad k\in K.$$
Kako je $\xi\in\mathcal{H}^\infty$, očito je $f_{\xi,\eta}\in C^\infty(K)$. Neka je λ lijeva regularna reprezentacija od K na prostoru $L_2(K)$. Tada imamo za $k\in K$
$$(\lambda(\chi^\gamma)f_{\xi,\eta})(k)=\int_K\chi^\gamma(h)(\lambda_hf_{\xi,\eta})(k)\mathrm{d}\nu(h)=\int_K\chi^\gamma(h)f_{\xi,\eta}(h^{-1}k)\mathrm{d}\nu(h)=$$
$$=\int_K\chi^\gamma(h)(\pi(k^{-1}h)\xi|\eta)\mathrm{d}\nu(h)=\int_K\chi^\gamma(h)(\pi(h)\xi|\pi(k)\eta)\mathrm{d}\nu(h)=(\pi(\chi^\gamma)\xi|\pi(k)\eta)=f_{\pi(\chi^\gamma)\xi,\eta}(k).$$
Međutim, $\xi\in\mathcal{H}(\gamma)$, pa je $\pi(\chi^\gamma)\xi=\xi$. Time je dokazano da je $\lambda(\chi^\gamma)f_{\xi,\eta}=f_{\xi,\eta}$, tj. $f_{\xi,\eta}\in L_2(K)(\gamma)$. Prema Peter$-$Weylovom teoremu 1.3.4. potprostor $L_2(K)(\gamma)$ je konačnodimenzionalan, precizno, $\dim L_2(K)(\gamma)=d(\gamma)^2$. Za $k,h\in K$ imamo
$$f_{\pi(k)\xi,\eta}(h)=(\pi(h^{-1})\pi(k)\xi|\eta)=(\pi(h^{-1}k)\xi|\eta)=f_{\xi,\eta}(k^{-1}h)=(\lambda(k)f_{\xi,\eta})(h).$$
Dakle, $f_{\pi(k)\xi,\eta}=\lambda(k)f_{\xi,\eta}\in L_2(K)(\gamma)$. Vektori $\pi(k)\xi$, $k\in K$, razapinju potprostor W, pa zaključujemo da je
$$\dim span\,\{f_{\zeta,\eta};\ \zeta\in W,\ \eta\in\mathcal{H}\}\leq d(\gamma)^2.$$
Promatrajmo sada antilinearno preslikavanje $\eta\mapsto f_{\xi,\eta}$ sa $\mathcal{H}$ u $L_2(K)(\gamma)$. Vrijedi $f_{\xi,\eta}=0$ ako i samo ako je $\eta\in W^\perp$. Zaključujemo da je $\dim\mathcal{H}/W^\perp\leq d(\gamma)^2$. Odatle slijedi da je potprostor W konačnodimenzionalan.

Zadatak 1.7.3. *Dokažite tvrdnju* (b).

(c) Za $\xi\in\mathcal{H}_K^\infty$ stavimo opet $W=span\,\{\pi(k)\xi;\ k\in K\}$. Definirajmo sada preslikavanje $A:\mathfrak{g}\times W\to\mathcal{H}^\infty$ sa $A(X,\eta)=\pi(X)\eta$, $X\in\mathfrak{g}$, $\eta\in W$. To je preslikavanje bilinearno pa postoji jedinstven linearan operator $B:\mathfrak{g}\otimes W\to\mathcal{H}^\infty$ takav da je $B(X\otimes\eta)=\pi(X)\eta$ za svaki $X\in\mathfrak{g}$ i svaki $\eta\in W$. Za $k\in K$, $X\in\mathfrak{g}$ i $\zeta\in\mathcal{H}$ imamo
$$(\pi(k)B(X\otimes\xi)|\zeta)=(\pi(k)\pi(X)\xi|\zeta)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\pi(k\exp tX)\xi|\zeta)\Big|_{t=0}=$$
$$=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\pi((Ad\,k)X)\pi(k)\xi|\zeta)\Big|_{t=0}=(\pi((Ad\,k)X)\pi(k)\xi|\zeta)=(B((Ad\,k)X\otimes\pi(k)\xi)|\zeta).$$
To pokazuje da je
$$\pi(k)\pi(X)\xi=\pi(k)B(X\otimes\xi)=B((Ad\,k)X\otimes\pi(k)\xi).$$
Zaključujemo da je za svaki $k\in K$ vektor $\pi(k)\pi(X)\xi$ sadržan u konačnodimenzionalnom potprostoru $B(\mathfrak{g}\otimes W)$. To pokazuje da je $\pi(X)\xi\in\mathcal{H}_K^\infty$, odnosno, dokazana je tvrdnja (c).

Zadatak 1.7.4. *Dokažite tvrdnju* (d).

Uputa: Koristite formulu izvedenu u dokazu tvrdnje (c).

Neka je i dalje G Liejeva grupa s Liejevom algebrom $\mathfrak{g}$, K kompaktna podgrupa od G i $\mathfrak{k} \subseteq \mathfrak{g}$ njena Liejeva algebra. Nadalje, neka je $\mathcal{V}$ kompleksan vektorski prostor na kome je zadana reprezentacija π Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ i reprezentacija ρ grupe K. Tada kažemo da je $\mathcal{V}$ $(\mathfrak{g}, K)-$**modul** ako su zadovoljeni sljedeća tri uvjeta kompatibilnosti:

(1) $\rho(k)\pi(X)\xi = \pi((Ad\,k)X)\rho(k)\xi$ za svaki $k \in K$, $X \in \mathfrak{g}$ i $\xi \in \mathcal{V}$.

(2) Za svaki $\xi \in \mathcal{V}$ potprostor $\mathcal{V}_\xi = span\,\{\rho(k)\xi;\ k \in K\}$ je konačnodimenzionalan i preslikavanje $k \mapsto \rho(k)|\mathcal{V}_\xi$ je neprekidno, dakle, klase C^∞ (štoviše, analitičko).

(3) Za svaki $Y \in \mathfrak{k}$ i $\xi \in \mathcal{V}$ vrijedi

$$\pi(Y)\xi = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\rho(\exp\, tY)\xi\bigg|_{t=0}$$

Za $\mathfrak{g}, K)-$modul $\mathcal{V}$ često se izostavljaju oznake π i ρ za reprezentacije od $\mathfrak{g}$ i K a djelovanja $\mathfrak{g}$ i K označava se s točkom; tj. za $\xi \in \mathcal{V}$, $k \in K$ i $X \in \mathfrak{g}$ pišemo

$$k \cdot \xi = \rho(k)\xi, \qquad X \cdot \xi = \pi(X)\xi.$$

Prema teoremu 1.7.10. ako je π reprezentacija od G na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$ onda je $\mathcal{H}_K^\infty$ $(\mathfrak{g}, K)-$modul.

Primijetimo da za $(\mathfrak{g}, K)-$modul $\mathcal{V}$ vrijedi

$$\mathcal{V} = \sum_{\gamma \in \hat{K}} \dot{+}\, \mathcal{V}(\gamma)$$

gdje je $\mathcal{V}(\gamma)$ suma svih $K-$invarijantnih konačnodimenzionalnih potprostora na kojima je reestrikcija reprezentacije grupe K ireducibilna i u klasi γ. Naravno, lako se vidi da je tada $\rho(\chi^\gamma)$ projektor prostora $\mathcal{V}$ na potprostor $\mathcal{V}(\gamma)$ duž potprostora $\sum_{\delta \neq \gamma} \dot{+}\, \mathcal{V}(\delta)$. Pri tome je operator $\rho(\chi^\gamma)$ dobro definiran sa

$$\rho(\chi^\gamma)\xi = d(\gamma) \int_K \overline{\chi_\gamma(k)}\, k \cdot \xi \,\mathrm{d}\nu(k), \qquad \xi \in \mathcal{V},$$

jer su svi vektori $\xi \in \mathcal{V}$ $K-$konačni.

Za $(\mathfrak{g}, K)-$module definiramo uobičajenu terminologiju kao i za reprezentacije. Npr. **invarijantan potprostor** ili $(\mathfrak{g}, K)-$**podmodul** je potprostor $\mathcal{W}$ koji je invarijantan s obzirom na sve operatore $k\cdot$, $k \in K$ i $X\cdot$, $X \in \mathfrak{g}$. $(\mathfrak{g}, K)-$**modul** $\mathcal{V}$ je **prost** ili **ireducibilan** ako je $\mathcal{V} \neq \{0\}$ i ne postoji $(\mathfrak{g}, K)-$podmodul različit od $\{0\}$ i od $\mathcal{V}$. Ako su $\mathcal{V}$ i $\mathcal{W}$ $(\mathfrak{g}, K)-$moduli, $Hom_{\mathfrak{g},K}(\mathcal{V}, \mathcal{W})$ označava prostor svih linearnih operatora $T : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ koji prepliću reprezentacije od K i reprezentacije od $\mathfrak{g}$, tj. takvih da za proizvoljne $k \in K$, $X \in \mathfrak{g}$ i $\xi \in \mathcal{V}$ vrijedi

$$T(k \cdot \xi) = k \cdot T\xi \qquad \text{i} \qquad T(X \cdot \xi) = X \cdot T\xi.$$

Ako je takav T bijekcija sa $\mathcal{V}$ na $\mathcal{W}$ kažemo da je T ekvivalencija $(\mathfrak{g}, K)-$modula. Ako postoji ekvivalencija $T \in Hom_{\mathfrak{g},K}(\mathcal{V}, \mathcal{W})$ kažemo da su $(\mathfrak{g}, K)-$moduli $\mathcal{V}$ i $\mathcal{W}$ ekvivalentni i pišemo $\mathcal{V} \simeq \mathcal{W}$. Kažemo da je $(\mathfrak{g}, K)-$**modul** $\mathcal{V}$ **unitaran** ako je na $\mathcal{V}$ zadan skalarni produkt koji je $K-$invarijantan,

$$(k \cdot \xi | k \cdot \eta) = (\xi | \eta) \qquad \forall k \in K \quad \text{i} \quad \forall \xi, \eta \in \mathcal{V},$$

i u odnosu na koji su svi operatori $X\cdot$ antisimetrični,

$$(X \cdot \xi | \eta) = -(\xi | X \cdot \eta) \qquad \forall X \in \mathfrak{g} \quad \text{i} \quad \forall \xi, \eta \in \mathcal{V}.$$

Napokon, za reprezentacije π i ρ grupe G na Hilbertovim prostorima $\mathcal{H}$ i $\mathcal{K}$ kažemo da su **infinitezimalno ekvivalentne** (u odnosu na kompaktnu podgrupu K) ako su pripadni $(\mathfrak{g}, K)-$moduli $\mathcal{H}_K^\infty$ i $\mathcal{K}_K^\infty$ ekvivalentni.

Za $(\mathfrak{g}, K)-$**modul** $\mathcal{V}$ kažemo da je **dopustiv** ako je potprostor $\mathcal{V}(\gamma)$ konačnodimenzionalan $\forall \gamma \in \hat{K}$. Analogno, **reprezentacija** π grupe G na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$ je **dopustiva** (u donosu na kompaktnu podgrupu K) ako je potprostor $\mathcal{H}(\gamma)$ konačnodimenzionalan $\forall \gamma \in \hat{K}$. Uočimo da je to ispunjeno ako i samo ako je $(\mathfrak{g}, K)-$modul $\mathcal{H}_K^\infty$ dopustiv.

Pokazat će se da je pojam $(\mathfrak{g}, K)-$modula vrlo koristan u slučaju kad je G poluprosta Liejeva grupa (s konačnim centrom) i K njena maksimalna kompaktna podgrupa. U tom slučaju postoji mnoštvo dopustivih reprezentacija. Posebno, svaka ireducibilna unitarna reprezentacija je dopustiva. Nadalje, unitarne reprezentacije su ekvivalentne (s izometričkim izomorfizmom) ako i samo ako su one infinitezimalno ekvivalentne. Napokon, ireducibilna reprezentacija je unitarna ako i samo ako je pripadni $(\mathfrak{g}, K)-$modul unitaran. Konstruirat ćemo sasvim određenu seriju reprezentacija (tzv. *osnovna serija*) koje su sve dopustive i konačne duljine, takve da je svaka dopustiva ireducibilna reprezentacija infinitezimalno ekvivalentna subkvocijentu neke reprezentacije osnovne serije (*Harish−Chandrin teorem o subkvocijentu*), štoviše, infinitezimalno je ekvivalentna subreprezentaciji neke reprezentacije osnovne serije (*Casselmanov teorem o subreprezentaciji*). Nadalje, važna je činjenica da su u tom slučaju za svaku dopustivu reprezentaciju $K-$konačni vektori automatski ne samo glatki nego analitički.

Mi ćemo teoriju razviti u nešto općenitijem kontekstu tzv. realnih reduktivnih Liejevih grupa. Takva generalizacija korisna je zato što su tada iste vrste i neke važne zatvorene podgrupe od G.

Poglavlje 2

REALNE REDUKTIVNE LIEJEVE GRUPE

2.1 Poluproste i reduktivne Liejeve algebre

U ovom odjeljku navodimo bez dokaza niz standardnih rezultata o konačnodimenzionalnim Liejevim algebrama. Iako mnogi od tih rezultata vrijede i nad općenitiji poljima, zbog jednostavnosti pretpostavljamo da je polje ili $\mathbb{R}$ ili $\mathbb{C}$. Dakle, **u daljnjem je $\mathfrak{g}$ konačnodimenzionalna realna ili kompleksna Liejeva algebra**. Sa $\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$ označavamo njen centar

$$\mathcal{Z}(\mathfrak{g}) = \{x \in \mathfrak{g};\ [x, y] = 0\ \forall y \in \mathfrak{g}\}.$$

Ako su $\mathfrak{i}$ i $\mathfrak{j}$ ideali u $\mathfrak{g}$, suma $\mathfrak{i} + \mathfrak{j}$ i presjek $\mathfrak{i} \cap \mathfrak{j}$ također su ideali u $\mathfrak{g}$, a iz pomoću Jacobijevog identiteta lako se provjerava da je i potprostor $[\mathfrak{i}, \mathfrak{j}]$ razapet svim komutatorima $[x, y]$, $x \in \mathfrak{i}$, $y \in \mathfrak{j}$, ideal u $\mathfrak{g}$. Nadalje, ako je $\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ homomorfizam Liejevih algebri i $\mathfrak{i}$ ideal u $\mathfrak{h}$, onda je

$$\varphi^{-1}(\mathfrak{i}) = \{x \in \mathfrak{g};\ \varphi(x) \in \mathfrak{i}\}$$

ideal u $\mathfrak{g}$. Posebno, ako je $\mathfrak{j}$ ideal u $\mathfrak{g}$ i $\mathfrak{i}$ ideal u kvocijentnoj algebri $\mathfrak{g}/\mathfrak{j}$, onda je

$$\{x \in \mathfrak{g};\ x + \mathfrak{j} \in \mathfrak{i}\}$$

ideal u $\mathfrak{g}$. Definiramo sada sljedeća tri niza ideala u Liejevoj algebri $\mathfrak{g}$:

izvedeni niz $\mathcal{D}^0(\mathfrak{g}) \supseteq \mathcal{D}^1(\mathfrak{g}) \supseteq \mathcal{D}^2(\mathfrak{g}) \supseteq \cdots\cdots$ definiran induktivno sa

$$\mathcal{D}^0(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}, \qquad \mathcal{D}^1(\mathfrak{g}) = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}], \qquad \mathcal{D}^k(\mathfrak{g}) = [\mathcal{D}^{k-1}(\mathfrak{g}), \mathcal{D}^{k-1}(\mathfrak{g})], \quad k \geq 2;$$

centralni silazni niz $\mathcal{C}^0(\mathfrak{g}) \supseteq \mathcal{C}^1(\mathfrak{g}) \supseteq \mathcal{C}^2(\mathfrak{g}) \supseteq \cdots\cdots$ definiran induktivno sa

$$\mathcal{C}^0(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}, \qquad \mathcal{C}^1(\mathfrak{g}) = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}], \qquad \mathcal{C}^k(\mathfrak{g}) = [\mathfrak{g}, \mathcal{C}^{k-1}(\mathfrak{g})], \quad k \geq 2;$$

centralni uzlazni niz $\mathcal{C}_0(\mathfrak{g}) \subseteq \mathcal{C}_1(\mathfrak{g}) \subseteq \mathcal{C}_2(\mathfrak{g}) \subseteq \cdots\cdots$ definiran induktivno sa

$$\mathcal{C}_0(\mathfrak{g}) = \{0\}, \qquad \mathcal{C}_1(\mathfrak{g}) = Z(\mathfrak{g}),$$

$$\mathcal{C}_k(\mathfrak{g}) = \{x \in \mathfrak{g};\ x + \mathcal{C}_{k-1}(\mathfrak{g}) \in \mathcal{Z}(\mathfrak{g}/\mathcal{C}_{k-1}(\mathfrak{g}))\} = \{x \in \mathfrak{g};\ [x, y] \in \mathcal{C}_{k-1}(\mathfrak{g}),\ \forall y \in \mathfrak{g}\}, \quad k \geq 2.$$

$\mathfrak{g}$ je **rješiva Liejeva algebra** ako postoji $k \in \mathbb{Z}_+$ takav da je $\mathcal{D}^k(\mathfrak{g}) = \{0\}$. Očito su rješive svaka podalgebra i svaka kvocijentna Liejeva algebra rješive Liejeve algebre. Nadalje, lako se vidi da ako je $\mathfrak{i}$ rješiv ideal u Liejevoj algebri $\mathfrak{g}$ takav da je kvocijentna Liejeva algebra $\mathfrak{g}/\mathfrak{i}$ rješiva, onda je i $\mathfrak{g}$ rješiva. Odatle slijedi da ako su $\mathfrak{i}$ i $\mathfrak{j}$ rješivi ideali, onda je i ideal $\mathfrak{i} + \mathfrak{j}$ rješiv. Prema tome, u svakoj Liejevoj algebri $\mathfrak{g}$ postoji najveći rješivi ideal. On se zove **radikal** Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ i označavat ćemo ga sa $\mathcal{R}(\mathfrak{g})$. Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ je **poluprosta** ako je $\mathcal{R}(\mathfrak{g}) = \{0\}$, a **reduktivna** ako je $\mathcal{R}(\mathfrak{g}) = \mathcal{Z}(\mathfrak{g})$.

Propozicija 2.1.1. *Za svaku Liejevu algebru $\mathfrak{g}$ kvocijentna algebra $\mathfrak{g}/\mathcal{R}(\mathfrak{g})$ je poluprosta, odnosno $\mathcal{R}(\mathfrak{g}/\mathcal{R}(\mathfrak{g})) = \{0\}$.*

Primjer rješive Liejeve algebre je algebra $\mathfrak{t}(n, K)$ ($K = \mathbb{R}$ ili $K = \mathbb{C}$) svih gornje trokutastih kvadratnih matrica $n-$tog reda.

$\mathfrak{g}$ je **nilpotentna Liejeva algebra** ako postoji $k \in \mathbb{Z}_+$ takav da je $\mathcal{C}^k(\mathfrak{g}) = \{0\}$. Očito su nilpotentne svaka podalgebra i svaka kvocijentna algebra nilpotentne Liejeve algebre. Nadalje, ako je Liejeva algebra $\mathfrak{g}/\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$ nilpotentna, onda je i $\mathfrak{g}$ nilpotentna Liejeva algebra. Pokazuje se da je Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ nilpotentna ako i samo ako postoji $m \in \mathbb{Z}_+$ takav da je $\mathcal{C}_m(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}$. Posebno, ako je $\mathfrak{g} \neq \{0\}$ nilpotentna Liejeva algebra, onda je $\mathcal{Z}(\mathfrak{g}) \neq \{0\}$.

Nije teško vidjeti da je realna Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ nilpotentna (rješiva, poluprosta, reduktivna) ako i samo je njena kompleksifikacija $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ nilpotentna (rješiva, poluprosta, reduktivna).

Teorem 2.1.2. *Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ je rješiva ako i samo ako je prvi izvedeni ideal $\mathcal{D}(\mathfrak{g}) = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ nilpotentan.*

Primjer nilpotentne Liejeve algebre je algebra $\mathfrak{n}(n, K)$ svih striktno gornje trokutastih kvadratnih matrica $n-$tog reda. Uočimo da je to upravo izvedeni ideal Liejeve algebre $\mathfrak{t}(n, K)$.

Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ je nilpotentna ako i samo ako postoji $k \in \mathbb{Z}_+$ takav da je

$$(ad\, x_1)(ad\, x_2) \cdots (ad\, x_k) = 0 \qquad \forall x_1, x_2, \ldots, x_k \in \mathfrak{g}.$$

Posebno, tada vrijedi $(ad\, x)^k = 0 \ \forall x \in \mathfrak{g}$. Općenito za Liejevu algebru $\mathfrak{g}$ element $x \in \mathfrak{g}$ zove se **ad−nilpotentan** ako je linearan operator $ad\, x$ nilpotentan. Dakle, svaki element nilpotentne Liejeve algebre je ad−nilpotentan. Važna je i netrivijalna činjenica da vrijedi i obrat:

Teorem 2.1.3. (**Engel**) *Liejeva algebra je nilpotentna ako i samo ako je svaki njen element ad−nilpotentan.*

Glavni korak u dokazu ovog teorema je sljedeći teorem koji ima i druge važne posljedice:

Teorem 2.1.4. *Neka je $V \neq \{0\}$ konačnodimenzionalan vektorski prostor nad poljem K ($= \mathbb{R}$ ili $\mathbb{C}$) i $\mathfrak{g}$ Liejeva podalgebra od $\mathfrak{gl}(V)$ koja se sastoji od nilpotentnih operatora. Tada postoji $v \in V$, $v \neq 0$, takav da je $Av = 0 \ \forall A \in \mathfrak{g}$.*

Zastava u $n-$dimenzionalnom vektorskom prostoru V je svaka uređena $(n+1)-$torka $\mathcal{Z} = (V_0, V_1, \ldots, V_n)$ potprostora od V takva da je

$$\{0\} = V_0 \subseteq V_1 \subseteq \cdots \subseteq V_n = V \qquad \text{i} \qquad \dim V_i = i \quad \forall i.$$

Korolar 2.1.5. *Uz pretpostavke teorema 2.1.4. postoji zastava $\mathcal{Z} = (V_0, V_1, \ldots, V_n)$ u prostoru V takva da je $AV_i \subseteq V_{i-1}$ $\forall A \in \mathfrak{g}$ i $\forall i \geq 1$. Drugim riječima, postoji baza u prostoru V u odnosu na koju matrice operatora iz $\mathfrak{g}$ tvore Liejevu podalgebru od $\mathfrak{n}(n, K)$.*

Slične tvrdnje vrijede za rješive Liejeve algebre, ako je polje algebarski zatvoreno, odnosno, $K = \mathbb{C}$.

Teorem 2.1.6. (**Lie**) *Neka je $V \neq \{0\}$ konačnodimenzionalan kompleksan vektorski prostor i $\mathfrak{g}$ rješiva podalgebra Liejeve algebre $\mathfrak{gl}(V)$. Tada postoji vektor $v \in V$, $v \neq 0$, koji je svojstven za svaki operator $A \in \mathfrak{g}$. Postoji zastava $\mathcal{Z}$ u V invarijantna s obzirom na sve operatore $A \in \mathfrak{g}$. Postoji baza prostora V u odnosu na koju matrice operatora iz $\mathfrak{g}$ tvore Liejevu podalgebru od $\mathfrak{t}(n, \mathbb{C})$.*

Teorem 2.1.7. (**Cartanov kriterij rješivosti**) *Neka je V konačnodimenzionalan vektorski prostor i $\mathfrak{g}$ Liejeva podalgebra od $\mathfrak{gl}(V)$ takva da vrijedi*

$$Tr\, AB = 0 \qquad \forall A \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \quad i \quad \forall B \in \mathfrak{g}.$$

Tada je Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ rješiva.

Killingova forma $B_{\mathfrak{g}}$ Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ je simetrična bilinearna forma na $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ definirana sa

$$B_{\mathfrak{g}}(x, y) = Tr\,(ad\, x)(ad\, y), \qquad x, y \in \mathfrak{g}.$$

Ta je forma **invarijantna** u odnosu na sve automorfizme Liejeve algebre $\mathfrak{g}$:

$$B_{\mathfrak{g}}(\varphi(x), \varphi(y)) = B_{\mathfrak{g}}(x, y) \qquad \forall \varphi \in Aut(\mathfrak{g}) \quad \text{i} \quad \forall x, y \in \mathfrak{g}.$$

Posljedica toga je

$$B_{\mathfrak{g}}(Dx, y) + B_{\mathfrak{g}}(x, Dy) = 0 \qquad \forall D \in Der(\mathfrak{g}) \quad \text{i} \quad \forall x, y \in \mathfrak{g}.$$

Posebno, to vrijedi za svaku unutarnju derivaciju $D = ad\, z$, $z \in \mathfrak{g}$, odnosno,

$$B_{\mathfrak{g}}([x, z], y) = B_{\mathfrak{g}}(x, [z, y]) \qquad \forall x, y, z \in \mathfrak{g}.$$

Odatle slijedi da je za svaki ideal $\mathfrak{j}$ u Liejevoj algebri $\mathfrak{g}$ i potprostor

$$\mathfrak{j}^{\perp} = \{x \in \mathfrak{g};\ B_{\mathfrak{g}}(x, y) = 0\ \forall y \in \mathfrak{j}\}$$

ideal u $\mathfrak{g}$. Nadalje, lako se vidi da za svaki ideal $\mathfrak{j}$ u $\mathfrak{g}$ vrijedi $B_{\mathfrak{j}} = B_{\mathfrak{g}}|\mathfrak{j} \times \mathfrak{j}$.

Korolar 2.1.8. *Neka je $\mathfrak{g}$ konačnodimenzionalna Liejeva algebra takva da vrijedi*

$$Tr\,(ad\, x)(ad\, y) = 0 \qquad \forall x \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \quad i \quad \forall y \in \mathfrak{g}.$$

Tada je Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ rješiva.

Očito je Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ poluprosta ako i samo ako ona ne sadrži rješivi ideal različit od $\{0\}$. Lako se vidi da je tome ekvivalentno da $\mathfrak{g}$ ne sadrži komutativan ideal različit od $\{0\}$. Kažemo da je $\mathfrak{g}$ **prosta Liejeva algebra** ako je $\mathfrak{g}$ nekomutativna i ako su $\{0\}$ i $\mathfrak{g}$ jedini ideali u $\mathfrak{g}$.

Teorem 2.1.9. *Za Liejevu algebru $\mathfrak{g}$ sljedeća su tri svojstva međusobno ekvivalentna:*

(*a*) *Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ je poluprosta.*

(*b*) *Killingova forma $B_{\mathfrak{g}}$ je nedegenerirana, tj. iz $B_{\mathfrak{g}}(x, y) = 0\ \forall y \in \mathfrak{g}$ slijedi $x = 0$.*

(*c*) *$\mathfrak{g}$ je izomorfna direktnom produktu prostih Liejevih algebri.*

Teorem 2.1.10. *Neka je* $\mathfrak{g} \neq \{0\}$ *poluprosta Liejeva algebra i* $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \dotplus \mathfrak{g}_2 \dotplus \cdots \dotplus \mathfrak{g}_k$*, pri čemu su* $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2, \ldots, \mathfrak{g}_k$ *prosti ideali u* $\mathfrak{g}$*. Nadalje, neka je* $\mathfrak{j} \neq \{0\}$ *ideal u* $\mathfrak{g}$*. Tada vrijedi:*

(*a*) *Ideal* $\mathfrak{j}$ *je poluprost.*

(*b*) *Vrijedi* $\mathfrak{g} = \mathfrak{j} \dotplus \mathfrak{j}^\perp$.

(*c*) *Postoje* $1 \leq i_1 < \cdots < i_\ell \leq k$ *takvi da je* $\mathfrak{j} = \mathfrak{g}_{i_1} \dotplus \cdots \dotplus \mathfrak{g}_{i_\ell}$.

Posebno, $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2, \ldots, \mathfrak{g}_k$ *su jedini prosti ideali u* $\mathfrak{g}$.

Teorem 2.1.11. *Neka je* $\mathfrak{g}$ *poluprosta Liejeva algebra. Tada vrijedi:*

(*a*) $\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$.

(*b*) $Der(\mathfrak{g}) = ad\,\mathfrak{g}$*, tj. svaka derivacija Liejeve algebre* $\mathfrak{g}$ *je unutarnja.*

Teorem 2.1.12. (**Weylov teorem potpune reducibilnosti**) *Svaka konačnodimenzionalna reprezentacija poluproste Liejeve algebre je potpuno reducibilna.*

Teorem 2.1.13. *Za Liejevu algebru* $\mathfrak{g}$ *sljedećih je sedam svojstava međusobno ekvivalentno:*

(*a*) *Liejeva algebra* $\mathfrak{g}$ *je reduktivna, tj.* $\mathcal{R}(\mathfrak{g}) = \mathcal{Z}(\mathfrak{g})$.

(*b*) *Adjungirana reprezentacija* $x \mapsto ad\,x$ *Liejeve algebre* $\mathfrak{g}$ *na prostoru* $\mathfrak{g}$ *je potpuno reducibilna.*

(*c*) *Liejeva algebra* $\mathfrak{g}$ *izomorfna je direktnom produktu poluproste Liejeve algebre i komutativne Liejeve algebre.*

(*d*) *Prvi izvedeni ideal* $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ *je poluprosta Liejeva algebra.*

(*e*) $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \cap \mathcal{R}(\mathfrak{g}) = \{0\}$.

(*f*) *Postoji vjerna konačnodimenzionalna potpuno reducibilna reprezentacija od* $\mathfrak{g}$.

(*g*) *Postoji konačnodimenzionalna reprezentacija* π *od* $\mathfrak{g}$ *takva da je pridružena simetrična bilinearna forma* B_π *na* $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$*, zadana sa*

$$B_\pi(x, y) = Tr\,\pi(x)\pi(y), \qquad x, y \in \mathfrak{g},$$

nedegenerirana.

U tom je slučaju $\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \dotplus \mathcal{Z}(\mathfrak{g})$.

Za Liejevu podalgebru $\mathfrak{h}$ Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ kažemo da je **reduktivna u** $\mathfrak{g}$ ako je reprezentacija $x \mapsto ad_{\mathfrak{g}}\,x$ Liejeve algebre $\mathfrak{h}$ na vektorskom prostoru $\mathfrak{g}$ (tj. restrikcija $ad_{\mathfrak{g}}|\mathfrak{h}$) potpuno reducibilna. Budući da je subreprezentacija potpuno reducibilne reprezentacije i sama potpuno reducibilna, iz svojstva (*b*) u teoremu 2.1.13. slijedi da je u tom slučaju Liejeva algebra $\mathfrak{h}$ reduktivna.

Razmotrit ćemo sada još neke opće pojmove.

Propozicija 2.1.14. *Neka je* π *reprezentacija Liejeve algebre* $\mathfrak{g}$ *na konačnodimenzionalnom vektorskom prostoru* V *i* $(V_0, V_1, \ldots, V_n)$ *kompozicioni niz u* V *u odnosu na reprezentaciju* π.

(*a*) *U skupu svih ideala* $\mathfrak{h}$ *u* $\mathfrak{g}$*, takvih da je operator* $\pi(y)$ *nilpotentan za svaki* $y \in \mathfrak{h}$*, postoji najveći element* $\mathfrak{n}_\pi$.

(*b*) *Vrijedi* $\mathfrak{n}_\pi = \{y \in \mathfrak{g};\ \pi(y)V_i \subseteq V_{i-1}\ \forall i \in \{1, \ldots, n\}\}$.

(*c*) *Vrijedi* $B_\pi(x, y) = Tr\,\pi(x)\pi(y) = 0\ \ \forall x \in \mathfrak{g}\ i\ \forall y \in \mathfrak{n}_\pi$.

Ideal $\mathfrak{n}_\pi$ iz propozicije 2.1.14. zove se **najveći ideal nilpotencije reprezentacije** π. Ako je $\mathfrak{n}$ ideal u Liejevoj algebri $\mathfrak{g}$, on je nilpotentan ako i samo ako je operator $ad_{\mathfrak{g}}\, x$ nilpotentan za svaki $x \in \mathfrak{h}$. Stoga primjena propozicije 2.1.14. na adjungiranu reprezentaciju daje:

Korolar 2.1.15. *Neka je $\mathfrak{g}$ Liejeva algebra i neka je $(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_1, \ldots, \mathfrak{g}_n)$ bilo koji kompozicioni niz prostora $\mathfrak{g}$ u odnosu na adjungiranu reprezentaciju $ad_{\mathfrak{g}}$.*

(*a*) *U skupu svih nilpotentnih ideala u Liejevoj algebri $\mathfrak{g}$ postoji najveći element $\mathfrak{n}$.*

(*b*) *Vrijedi $\mathfrak{n} = \{y \in \mathfrak{g};\ [y, \mathfrak{g}_i] \subseteq \mathfrak{g}_{i-1}\ \forall i \in \{1, \ldots, n\}\}$.*

(*c*) *Vrijedi $B_{\mathfrak{g}}(x, y) = 0\ \ \forall x \in \mathfrak{g}$ i $\forall y \in \mathfrak{n}$.*

Ideal $\mathfrak{n}$ iz korolara 2.1.15. zove se **najveći nilpotentni ideal** Liejeve algebre $\mathfrak{g}$. Važno je uočiti da u kvocijentnoj Liejevoj algebri $\mathfrak{g}/\mathfrak{n}$ mogu postojati nilpotentni ideali različiti od $\{0\}$.

Nilradikal Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ je presjek jezgara svih ireducibilnih konačnodimenzionalnih reprezentacija od $\mathfrak{g}$. Lako se vidi da je nilradikal najmanji element skupa jezgara svih konačnodimenzionalnih potpuno reducibilnih reprezentacija od $\mathfrak{g}$.

Teorem 2.1.16. *Neka je $\mathfrak{g}$ Liejeva algebra, $\mathfrak{r} = \mathcal{R}(\mathfrak{g})$ njen radikal, $\mathfrak{s}$ njen nilradikal i $\mathfrak{n}$ njen najveći nilpotentni ideal.*

(*a*) *Ideal $\mathfrak{s}$ sadržan je u najvećem idealu nilpotencije svake konačnodimenzionalne reprezentacije od $\mathfrak{g}$.*

(*b*) *Ideal $\mathfrak{s}$ je nilpotentan, tj. $\mathfrak{s} \subseteq \mathfrak{n}$.*

(*c*) *Vrijedi $\mathfrak{s} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{r}] = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \cap \mathfrak{r}$.*

(*d*) *Vrijedi $\mathfrak{r} = \{y \in \mathfrak{g};\ B_{\mathfrak{g}}(x, y) = 0\ \forall x \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]\}$.*

(*e*) *Za svaku konačnodimenzionalnu reprezentaciju π i pridruženu simetričnu bilinearnu formu B_π vrijedi $B_\pi(x, y) = 0\ \ \forall x \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ i $\forall y \in \mathfrak{r}$.*

(*f*) *Vrijedi*

$$\mathfrak{s} = \bigcap \{Rad\, B_\pi;\ \pi \text{ konačnodimenzionalna reprezentacija od } \mathfrak{g}\}.$$

Pri tome je B_π radikal forme B_π, tj. $Rad\, B_\pi = \{x \in \mathfrak{g};\ B_\pi(x, y) = 0\ \forall y \in \mathfrak{g}\}$.

(*g*) *Vrijedi $D\mathfrak{r} \subseteq \mathfrak{n}\ \forall D \in Der(\mathfrak{g})$. Posebno, $D\mathfrak{n} \subseteq \mathfrak{n}$ i $D\mathfrak{r} \subseteq \mathfrak{r}\ \forall D \in Der(\mathfrak{g})$.*

Korolar 2.1.17. *Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ je rješiva ako i samo ako je $B_{\mathfrak{g}}(x, y) = 0\ \ \forall x \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ i $\forall y \in \mathfrak{g}$.*

Neka je $\mathfrak{g}$ reduktivna Liejeva algebra. **Toralna podalgebra** od $\mathfrak{g}$ je Liejeva podalgebra $\mathfrak{h}$ takva da su svi operatori $ad\, x$, $x \in \mathfrak{h}$, poluprosti. Pokazuje se da je toralna podalgebra nužno komutativna. **Cartanova podalgebra** od $\mathfrak{g}$ je svaka maksimalna toralna podalgebra od $\mathfrak{g}$. Očito svaka Cartanova podalgebra $\mathfrak{h}$ sadrži centar $\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$, vrijedi $\mathfrak{h} = \mathcal{Z}(\mathfrak{g}) \dotplus [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \cap \mathfrak{h}$ i $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \cap \mathfrak{h}$ je Cartanova podalgebra poluproste Liejeve algebre $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$. Ako je $\mathfrak{g}$ realna reduktivna Liejeva algebra, lako se vidi da je podalgebra $\mathfrak{h}$ od $\mathfrak{g}$ toralna (odnosno, Cartanova) ako i samo ako je njena kompleksifikacija $\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}$ toralna (odnosno, Cartanova) podalgebra od $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$.

U daljnjem je sve do konca ovog odjeljka $\mathfrak{g}$ kompleksna reduktivna Liejeva algebra. Sa $Int(\mathfrak{g})$ označavamo grupu njenih unutarnjih automorfizama, tj. podgrupu od $Aut(\mathfrak{g})$ generiranu svim automorfizmima oblika e^{ad}, $x \in \mathfrak{g}$.

Teorem 2.1.18. *Neka su* $\mathfrak{h}$ *i* $\mathfrak{h}'$ *Cartanove podalgebre kompleksne reduktivne Liejeve algebre* $\mathfrak{g}$. *Tada postoji* $\varphi \in Int(\mathfrak{g})$ *takav da je* $\mathfrak{h}' = \varphi(\mathfrak{h})$.

Neka su D_j polinomi na $\mathfrak{g}$ definirani kao koeficijenti svojstvenog polinoma operatora $ad\, x$, $x \in \mathfrak{g}$, tj.

$$\det(tI - ad\, x) = \sum_j t^j D_j(x), \qquad x \in \mathfrak{g}.$$

Neka je r najmanji indeks takav da polinom D_j nije identički jednak nuli. Za **element** $x \in \mathfrak{g}$ kažemo da je **regularan**, ako je $D_r(x) \neq 0$.

Teorem 2.1.19. *Ako je element* $x \in \mathfrak{g}$ *regularan, tada je operator* $ad\, x$ *poluprost. Nadalje, tada je njegov centralizator*

$$C_{\mathfrak{g}}(x) = \{y \in \mathfrak{g};\ [x, y] = 0\}$$

Cartanova podalgebra od $\mathfrak{g}$.

Neka je u daljnjem $\mathfrak{h}$ Cartanova podalgebra kompleksne reduktivne Liejeve algebre $\mathfrak{g}$. Za $\alpha \in \mathfrak{h}^*$ stavimo

$$\mathfrak{g}_\alpha = \{x \in \mathfrak{g};\ [h, x] = \alpha(h)x\ \forall h \in \mathfrak{h}\}.$$

Ako su $\alpha \neq 0$ i $\mathfrak{g}_\alpha \neq \{0\}$ kažemo da je α **korijen** Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ u odnosu na Cartanovu podalgebru $\mathfrak{h}$. Za $\mathfrak{g}_\alpha$ kažemo da je pripadni **korijenski potprostor**. Skup svih korijena od $\mathfrak{g}$ u odnosu na $\mathfrak{h}$ označavamo sa $R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ i zovemo **sistem korijena** od $\mathfrak{g}$ u odnosu na $\mathfrak{h}$.

Teorem 2.1.20. *Uz uvedene oznake vrijedi:*

(*a*) $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \dot{+} \sum_{\alpha \in R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})} \dot{+} \mathfrak{g}_\alpha$.

(*b*) $\dim \mathfrak{g}_\alpha = 1\ \ \forall \alpha \in R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$.

(*c*) *Ako su* $\alpha, \beta \in R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ *i* $\alpha + \beta \neq 0$ *onda je* $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] = \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$.

(*d*) *Za svaki* $\alpha \in R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ *je* $\mathbb{C}\alpha \cap R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) = \{\alpha, -\alpha\}$.

Za simetričnu bilinearnu formu B na $\mathfrak{g}$ kažemo da je **invarijantna** ako je

$$B([x, y], z) = B(x, [y, z]) \qquad \forall x, y, z \in \mathfrak{g}.$$

Na $\mathfrak{g}$ uvijek postoji nedegenerirana invarijantna simetrična bilinearna forma: na poluprostoj Liejevoj algebri $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ uzmemo Killingovu formu, a na $\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$ bilo koju nedegeneriranu simetričnu bilinearnu formu; tada je njihova direktna suma nedegenerirana invarijantna simetrična bilinearna forma na $\mathfrak{g}$. **U daljnjem je B bilo koja nedegenerirana invarijantna simetrična bilinearna forma na** $\mathfrak{g}$. Lako se vidi da je $B(\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta) = \{0\}$ ako su $\alpha, \beta \in R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ i $\alpha + \beta \neq 0$. Nadalje, za svaki $\alpha \in R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ je $B(\mathfrak{h}, \mathfrak{g}_\alpha) = \{0\}$. Prema tome, restrikcija $B|\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}$ je nedegenerirana simetrična bilinearna forma na $\mathfrak{h}$. Dakle, definiran je izomorfizam $\mu \mapsto h_\mu$ sa $\mathfrak{h}^*$ na $\mathfrak{h}$:

$$B(h, h_\mu) = \mu(h) \qquad \forall h \in \mathfrak{h}.$$

Pomoću tog izomorfizma prenosimo formu B s prostora $\mathfrak{h}$ na dualni prostor $\mathfrak{h}^*$ i dobivenu nedegeneriranu simetričnu bilinearnu formu na $\mathfrak{h}^*$ označavamo sa $(\,\cdot\,|\,\cdot\,)$:

$$(\lambda|\mu) = B(h_\lambda, h_\mu), \qquad \lambda, \mu \in \mathfrak{h}^*.$$

Definiramo sada realne potprostore $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ od $\mathfrak{h}$ i $\mathfrak{h}^*_{\mathbb{R}}$ od $\mathfrak{h}^*$ ovako:

$$\mathfrak{h}_{\mathbb{R}} = span_{\mathbb{R}}\, \{h_\alpha;\ \alpha \in R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})\}, \qquad \mathfrak{h}^*_{\mathbb{R}} = span_{\mathbb{R}}\, R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}).$$

Teorem 2.1.21. *Uz uvedene oznake vrijedi:*

(*a*) $\lambda \mapsto \lambda|\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ *je izomorfizam realnog prostora* $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*$ *na dualni prostor realnog prostora* $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$.

(*b*) *Restrikcija forme* B *na* $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}} \times \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ *je skalarni produkt na realnom prostoru* $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ *i restrikcija forme* $(\cdot|\cdot)$ *je skalarni produkt na realnom prostoru* $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*$. *Posebno,* $(\alpha|\alpha) > 0 \ \forall \alpha \in R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$.

(*c*) *Realan prostor* $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ *je realna forma kompleksnog prostora* $\mathfrak{h} \cap [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, *tj.* $\mathfrak{h} \cap [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{h}_{\mathbb{R}} \dotplus i\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$.

Za $\alpha \in R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ definiramo sa s_α refleksiju prostora $\mathfrak{h}$ u odnosu na hiperplohu $\{h \in \mathfrak{h};\ \alpha(h) = 0\}$ definiranu sa

$$s_\alpha h = h - 2\frac{\alpha(h)}{(\alpha|\alpha)} h_\alpha, \qquad h \in \mathfrak{h}.$$

Operatori s_α zovu se **Weylove refleksije**. Istim znakom označavamo i dualan operator na $\mathfrak{h}^*$, tj.

$$s_\alpha \lambda = \lambda - 2\frac{\lambda(h_\alpha)}{(\alpha|\alpha)} \alpha, \qquad \lambda \in \mathfrak{h}^*.$$

Teorem 2.1.22. *Uz uvedene oznake za svaki* $\alpha \in R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ *vrijedi:*

(*a*) $s_\alpha R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) = R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$.

(*b*) $s_\alpha \mathfrak{h}_{\mathbb{R}} = \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ *i u odnosu na skalarni produkt* $B|\mathfrak{h}_{\mathbb{R}} \times \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ *operator* s_α *je ortogonalna refleksija.*

(*c*) $s_\alpha \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^* = \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*$ *i u odnosu na skalarni produkt* $(\cdot|\cdot)|\mathfrak{h}_{\mathbb{R}} \times \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ *operator* s_α *je ortogonalna refleksija.*

Iz tvrdnje (a) prethodnog teorema grupa $W(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ generirana svim refleksijama s_α je konačna podgrupa od $GL(\mathfrak{h})$ (i od $GL(\mathfrak{h}^*)$). Nadalje, kako je $w|\mathcal{Z}(\mathfrak{g}) = I_{\mathcal{Z}(\mathfrak{g})}$, restrikcija $w \mapsto w|\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ (odnosno, $w \mapsto w|\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*$) je zbog tvrdnje ($b$) (odnosno, zbog tvrdnje (c)) izomorfizam grupe $W(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ na podgrupu ortogonalne grupe $O(\mathfrak{h}_{\mathbb{R}})$ realnog unitarnog prostora $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ (odnosno, na podgrupu ortogonalne grupe $O(\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*)$ realnog unitarnog prostora $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*$). Konačna grupa $W(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ zove se **Weylova grupa** Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ u odnosu na Cartanovu podalgebru $\mathfrak{h}$.

Stavimo

$$\mathfrak{h}'_{\mathbb{R}} = \{h \in \mathfrak{h}_{\mathbb{R}};\ \alpha(h) \neq 0 \ \forall \alpha \in R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})\}.$$

Komponente povezanosti skupa $\mathfrak{h}'_{\mathbb{R}}$ zovu se **Weylove komore**. Neka je $\mathcal{C}$ skup svih Weylovih komora.

Za podskup $P \subseteq R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ kažemo da je **sistem pozitivnih korijena** ako je $R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ disjunktna unija skupova P i $-P = \{-\alpha,\ \alpha \in P\}$ i ako vrijedi:

$$\alpha, \beta \in P, \quad \alpha + \beta \in R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) \qquad \Longrightarrow \qquad \alpha + \beta \in P.$$

Sa $\mathcal{P}$ označavamo skup svih sistema pozitivnih korijena. Za **korijen** $\alpha \in P$ kažemo da je **prost** u odnosu na P ako ne postoje $\beta, \gamma \in P$ takvi da je $\alpha = \beta + \gamma$. Sa $B(P)$ označavamo skup svih prostih korijena u odnosu na P. Nadalje, stavljamo $\mathcal{B} = \{B(P);\ P \in \mathcal{P}\}$. Element skupa $\mathcal{B}$ zove se **baza sistema korijena** $R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$.

Teorem 2.1.23. *Uz uvedene oznake vrijedi:*

(*a*) $P \mapsto \{h \in \mathfrak{h}_{\mathbb{R}};\ \alpha(h) > 0 \ \forall \alpha \in P\}$ *je bijekcija sa* $\mathcal{P}$ *na* $\mathcal{C}$. *Inverzna je bijekcija dana sa* $C \mapsto \{\alpha \in R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h});\ \alpha(h) > 0 \ \forall h \in C\}$.

(*b*) *Za svaki* $P \in \mathcal{P}$ *skup* $B(P)$ *je baza realnog vektorskog prostora* $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*$.

(*c*) *Podskup* $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell\} \subseteq R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ *je element skupa* $\mathcal{B}$ *ako i samo ako za svaki* $\beta \in R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ *postoje jedinstveni* $c_1, \ldots, c_\ell \in \mathbb{Z}_+$ *takvi da je* $\beta = \pm \sum_{i=1}^{\ell} c_i \alpha_i$.

(*d*) $P \mapsto B(P)$ *je bijekcija sa* $\mathcal{P}$ *na* $\mathcal{B}$. *Inverzno preslikavanje je*

$$B \mapsto R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) \cap span_{\mathbb{Z}_+} B = \left\{ \beta \in R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}); \ \beta = \sum_{\alpha \in B} c_\alpha \alpha \ za \ neke \ c_\alpha \in \mathbb{Z}_+ \right\}.$$

(*e*) *Weylova grupa* $W(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ *djeluje prosto tranzitivno na skupu* $\mathcal{C}$ *svih Weylovih komora. Dakle, za* $C, C' \in \mathcal{C}$ *postoji jedinstven* $w \in W(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ *takav da je* $C' = wC$.

(*f*) *Weylova grupa* $W(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ *djeluje prosto tranzitivno na skupu* $\mathcal{P}$ *svih sistema pozitivnih korijena.*

(*g*) *Weylova grupa* $W(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ *djeluje prosto tranzitivno na skupu* $\mathcal{B}$ *svih baza sistema korijena* $R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$.

(*h*) *Ako je* $B \in \mathcal{B}$, *Weylova grupa* $W(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ *generirana je skupom* $\{s_\alpha; \ \alpha \in B\}$.

2.2 Kompaktne Liejeve grupe

Neka je G kompaktna Liejeva grupa i $\mathfrak{g}$ njena Liejeva algebra. Neka je μ normirana Haarova mjera na G. Ako je $\langle\cdot|\cdot\rangle$ bilo koji skalarni produkt na (realnom) vektorskom prostoru $\mathfrak{g}$. Tada je sa

$$(x|y)=\int_G\langle(Ad\,k)x|(Ad\,k)y\rangle\mathrm{d}\mu(k),\qquad x,y\in\mathfrak{g}$$

definiran novi skalarni produkt na $\mathfrak{g}$ i taj je invarijantan s obzirom na djelovanje grupe G. Drugim riječima, reprezentacija $k\mapsto Ad\,k$ grupe G na unitarnom prostoru $\mathfrak{g}$ (uz novi skalarni produkt $(\cdot|\cdot)$) je unitarna, dakle, potpuno reducibilna. Odatle slijedi da je pripadna reprezentacija $x\mapsto ad\,x$ Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ na prostoru $\mathfrak{g}$ potpuno reducibilna, odnosno, Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ je reduktivna. Promatrajmo sada reprezentacije Ad i ad od G i $\mathfrak{g}$ na kompleksifikaciji $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ od $\mathfrak{g}$. Tada su svi operatori $ad\,x$, $x\in\mathfrak{g}$, antihermitski na prostoru $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ sa skalarnim produktom koji je jedinstveno seskvilinearno proširenje od $(\cdot|\cdot)$. To znači da je svaki $ad\,x$, $x\in\mathfrak{g}$, dijagonalizabilan i ima čisto imaginaran spektar. Posebno, vrijedi

$$B_{\mathfrak{g}}(x,x)=Tr\,(ad\,x)^2\leq 0\qquad\forall x\in\mathfrak{g},$$

odnosno, Killingova forma $B_{\mathfrak{g}}$ je negativno semidefinitna. Nadalje, vrijedi

$$B_{\mathfrak{g}}(x,x)=0\qquad\Longleftrightarrow\qquad ad\,x=0\qquad\Longleftrightarrow\qquad x\in Z(\mathfrak{g}).$$

Dakle, Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ je poluprosta ako i samo ako je Killingova forma $B_{\mathfrak{g}}$ negativno definitna. Važno je da za povezane Liejeve grupe vrijedi i obrat o čemu govori sljedeći **Weylov teorem** koji navodimo bez dokaza:

Teorem 2.2.1. *Ako je G povezana Liejeva grupa s Liejevom algebrom $\mathfrak{g}$ i ako je Killingoova forma $B_{\mathfrak{g}}$ negativno definitna, onda je grupa G kompaktna.*

Torus je kompaktna komutativna povezana Liejeva grupa. Neka je T torus i $\mathfrak{t}$ njena Liejeva algebra. Tada se lako vidi da je exp natkrivanje sa $\mathfrak{t}$ na T. Ustvari, aditivna grupa $\mathfrak{t}$ s preslikavanjem $\exp:\mathfrak{t}\to T$ je univerzalna natkrivajuća grupa od T. Jezgra $L=\mathrm{Ker}(\exp)$ je rešetka u $\mathfrak{t}$, tj. L je slobodan $\mathbb{Z}-$modul ranga $\dim\mathfrak{t}$. Neka je $\hat{T}$ skup svih neprekidnih homomorfizama grupe T u multiplikativnu grupu $S=\{\lambda\in\mathbb{C};\ |\lambda|=1\}$. Za $\mu\in\hat{T}$ ćemo istim znakom μ označavati i njegov diferencijal:

$$\mu(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mu(\exp\,tx)\bigg|_{t=0},\qquad x\in\mathfrak{t}.$$

Tada je μ $\mathbb{R}-$linearna forma sa $\mathfrak{t}$ u $i\mathbb{R}$ takva da je $\mu(L)\subseteq 2\pi i\mathbb{Z}$. Svaka takva $\mathbb{R}-$linearna forma sa $\mathfrak{t}$ u $i\mathbb{R}$ zove se $T-$**integralna**. Za $\mathbb{R}-$linearnu $T-$integralnu formu $\mu:\mathfrak{t}\to i\mathbb{R}$ dobro je definirano preslikavanje $\mu:T\to S$ sa

$$\mu(\exp\,x)=\mathrm{e}^{\mu(x)},\qquad x\in\mathfrak{t}.$$

Dakle, dobili smo identifikaciju $\hat{T}$ sa skupom svih $\mathbb{R}-$linearnih $T-$integralnih formi sa $\mathfrak{t}$ u $i\mathbb{R}$.

Neka je sada G kompaktna povezana Liejeva grupa s Liejevom algebrom $\mathfrak{g}$. **Torus u grupi** G je zatvorena podgrupa od G koja je torus. **Maksimalni torus** u G je torus T u G takav da ne postoji torus T' u G sa svojstvom $T'\supsetneq T$. Neka je T maksimalni torus u G i neka su $\mathfrak{t}$ i $\mathfrak{g}$ Liejeve algebre od T i G. Tada je $\mathfrak{t}$ maksimalna komutativna podalgebra od $\mathfrak{g}$ koja je toralna, dakle, $\mathfrak{t}$ je Cartanova podalgebra od $\mathfrak{g}$. Stoga je $\mathfrak{t}^{\mathbb{C}}$ Cartanova podalgebra od $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ i restrikcije korijena iz $R\left(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}},\mathfrak{t}^{\mathbb{C}}\right)$ na $\mathfrak{t}$ su $\mathbb{R}-$linearne $T-$integralne forme sa $\mathfrak{t}$ u $i\mathbb{R}$. Stoga se sistem korijena $R\left(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}},\mathfrak{t}^{\mathbb{C}}\right)$ identificira s podskupom od $\hat{T}$.

Navodimo sada bez dokaza niz svojstava maksimalnih torusa u kompaktnim povezanim Liejevim grupama.

Teorem 2.2.2. *Neka je G kompaktna povezana Liejeva grupa s Liejevom algebrom $\mathfrak{g}$.*

(a) *Maksimalni torus u G je maksimalna komutativna podgrupa od G.*

(b) *Ako su T i T' maksimalni torusi u G, postoji $g \in G$ takav da je $T' = gTg^{-1}$.*

(c) *Svaki element grupe G sadržan je u nekom maksimalnom torusu u G. Ekvivalentno, eksponencijalno preslikavanje* $\exp : \mathfrak{g} \to G$ *je surjektivno.*

(d) *Ako je T maksimalni torus u G, mnogostrukost G/T je jednostavno povezana.*

(e) *Neka je T maksimalni torus u G s Liejevom algebrom $\mathfrak{t}$. Označimo sa $N_G(T)$ normalizator od T u G,*
$$N_G(T) = \{g \in G;\ gTg^{-1} = T\},$$
i neka je $W(G,T)$ kvocijentna grupa $N_G(T)/T$. Za $g \in s \in W(G,T)$ dobro je definirano preslikavanje $\varphi(s) : \mathfrak{t}^{\mathbb{C}} \to \mathfrak{t}^{\mathbb{C}}$ sa
$$\varphi(s)x = (Ad\, g)x, \qquad x \in \mathfrak{t}^{\mathbb{C}}.$$
Tada je φ izomorfizam grupe $W(G,T)$ na Weylovu grupu $W\left(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}, \mathfrak{t}^{\mathbb{C}}\right)$.

Realna forma kompleksne Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ je realna Liejeva podalgebra $\mathfrak{g}_0$ od $\mathfrak{g}$ takva da je $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \dotplus i\mathfrak{g}_0$. **Konjugacija** kompleksne Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ je antilinearna involutivna bijekcija $\sigma : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ takva da je $\sigma([x,y]) = [\sigma(x), \sigma(y)]$ $\forall x, y \in \mathfrak{g}$. Za konjugaciju σ od $\mathfrak{g}$ stavimo $\mathfrak{g}^\sigma = \{x \in \mathfrak{g};\ \sigma(x) = x\}$.

Zadatak 2.2.1. *Neka je $\mathfrak{g}$ kompleksna Liejeva algebra. Dokažite da je $\sigma \mapsto \mathfrak{g}^\sigma$ bijekcija sa skupa svih konjugacija od $\mathfrak{g}$ na skup svih realnih formi od $\mathfrak{g}$.*

Za konjugaciju σ kompleksne Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ označimo sa $(\cdot|\cdot)_\sigma$ seskvilinearnu formu na $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ definirana pomoću Killingove forme $B_{\mathfrak{g}}$ ovako:
$$(x|y)_\sigma = -B_{\mathfrak{g}}(x, \sigma(y)), \qquad x, y \in \mathfrak{g}.$$

Zadatak 2.2.2. *Neka je σ konjugacija kompleksne Liejeve algebre $\mathfrak{g}$. Dokažite da je $(\cdot|\cdot)_\sigma$ hermitska forma na $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$, tj. da vrijedi $(x|y)_\sigma = \overline{(y|x)_\sigma}$ $\forall x, y \in \mathfrak{g}$.*

Uputa: Svaki $z \in \mathfrak{g}$ jedinstveno se piše u obliku $z = x + iy$ za $x, y \in \mathfrak{g}^\sigma$ i tada je $\sigma(z) = x - iy$.

Zadatak 2.2.3. *Neka je σ konjugacija kompleksne Liejeve algebre $\mathfrak{g}$. Dokažite da vrijedi*
$$((ad\, x)y|z)_\sigma = -(y|(ad\, \sigma(x))z)_\sigma \qquad \forall x, y, z \in \mathfrak{g}$$
i
$$(\varphi(x)|\varphi(y))_\sigma = (x|y)_\sigma \qquad \forall x, y \in \mathfrak{g} \quad i \quad \forall \varphi \in Aut_\sigma(\mathfrak{g}) = \{\psi \in Aut(\mathfrak{g});\ \psi \circ \sigma = \sigma \circ \psi\}.$$

Kompaktna Liejeva algebra je realna Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ takva da na prostoru $\mathfrak{g}$ postoji skalarni produkt $(\cdot|\cdot)$ u odnosu na koji su svi operatori $ad\, x$, $x \in \mathfrak{g}$, antihermitski:
$$((ad\, x)y|z) = -(y|(ad\, x)z) \qquad \forall x, y, z \in \mathfrak{g}.$$

Kompaktna forma kompleksne Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ je realna forma $\mathfrak{u}$ od $\mathfrak{g}$ koja je kompaktna Liejeva algebra. **Kompaktna konjugacija** kompleksne Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ je konjugacija τ od $\mathfrak{g}$ takva da je $\mathfrak{g}^\tau$ kompaktna forma od $\mathfrak{g}$. Naravno, $\tau \mapsto \mathfrak{g}^\tau$ je bijekcija sa skupa svih kompaktnih konjugacija od $\mathfrak{g}$ na skup svih kompaktnih formi od $\mathfrak{g}$.

Zadatak 2.2.4. *Dokažite da je kompaktna Liejeva algebra reduktivna i da je realna reduktivna Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ kompaktna ako i samo ako je poluprosta Liejeva algebra $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ kompaktna.*

Zadatak 2.2.5. (*a*) *Dokažite da je konjugacija τ kompleksne poluproste Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ kompaktna ako i samo ako je $(\,\cdot\,|\,\cdot\,)_\tau$ skalarni produkt na prostoru $\mathfrak{g}$.*

(*b*) *Dokažite da je realna poluprosta Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ kompaktna ako i samo ako je njena Killingova forma $B_\mathfrak{g}$ negativno definitna.*

(*c*) *Dokažite da je realna reduktivna Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ kompaktna ako i samo ako je njena Killingova forma $B_\mathfrak{g}$ negativno semidefinitna.*

Pomoću ovih činjenica dokazuje se da vrijedi:

Teorem 2.2.3. (**H. Weyl**) *Neka je $\mathfrak{g}$ kompleksna poluprosta Liejeva algebra i $\mathfrak{h}$ njena Cartanova podalgebra. Tada postoji kompaktna konjugacija τ od $\mathfrak{g}$ takva da je $\tau(\mathfrak{h})=\mathfrak{h}$. Tada je $\mathfrak{h}\cap\mathfrak{g}^\tau$ realna forma od $\mathfrak{h}$ i to je maksimalna komutativna podalgebra (tj. Cartanova podalgebra) kompaktne Liejeve algebre $\mathfrak{g}^\tau$.*

Kompaktna konjugacija u Weylovom teoremu 2.2.3. može se konstruirati na sljedeći način. Neka je $\{\alpha_1,\ldots,\alpha_\ell\}$ baza sistema korijena $R(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$. Izaberimo $x_j\in\mathfrak{g}_{\alpha_j}$, $y_j\in\mathfrak{g}_{-\alpha_j}$, $h_j\in[\mathfrak{g}_{\alpha_j},\mathfrak{g}_{-\alpha_j}]$, $j=1,\ldots,\ell$, tako da bude $\alpha_j(h_j)=2$, tj.

$$[h_j,x_j]=2x_j,\qquad [h_j,y_j]=-2y_j,\qquad [x_j,y_j]=h_j,\qquad j=1,\ldots,\ell.$$

Budući da je tada i $\{-\alpha_1,\ldots,-\alpha_\ell\}$ baza sistema korijena $W(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$, i za $k_j=-h_j$, $e_j=-y_j$ i $f_j=-x_j$ vrijedi

$$[k_j,e_j]=2e_j,\qquad [k_j,f_j]=-2f_j,\qquad [e_j,f_j]=k_j,\qquad j=1,\ldots,\ell,$$

pokazuje se da postoji jedinstvena konjugacija τ od $\mathfrak{g}$ takva da vrijedi

$$\tau(h_j)=-h_j,\qquad \tau(x_j)=-y_j,\qquad \tau(y_j)=-x_j,\qquad j=1,\ldots,\ell.$$

To je tražena kompaktna konjugacija od $\mathfrak{g}$.

Weylov teorem 2.2.3. često se zove **Weylov unitarni trik**. Iz njega se relativno jednostavno dokazuje Weylov teorem 2.1.12. o potpunoj reducibilnosti. Doista, neka je π reprezentacija poluproste Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ na konačnodimenzionalnom prostoru V. Prije svega, primijetimo da bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je prostor V kompleksan i da je Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ kompleksna. Doista, ako su $\mathfrak{g}$ i V realni, tada je reprezentacija π potpuno reducibilna ako i samo ako je njena kompleksifikacija potpuno reducibilna, a ako je $\mathfrak{g}$ realna a prostor V kompleksan, potprostor od V je $\pi-$invarijantan ako i samo ako je $\pi^\mathbb{C}-$invarijantan, pri čemu je $\pi^\mathbb{C}$ $\mathbb{C}-$linearno proširenje reprezentacije π do reprezentacije kompleksifikacije $\mathfrak{g}^\mathbb{C}$ od $\mathfrak{g}:\pi^\mathbb{C}(x+iy)=\pi(x)+i\pi(y)$, $x,y\in\mathfrak{g}$.

Dakle, neka je π reprezentacija kompleksne poluproste Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ kompleksnom konačnodimenzionalnom prostoru V. Neka je $\mathfrak{u}$ kompaktna forma od $\mathfrak{g}$ i U jednostavno povezana Liejeva grupa s Liejevom algebrom $\mathfrak{u}$. Tada je $\pi|\mathfrak{u}$ reprezentacija od $\mathfrak{u}$, pa prema tvrdnji (*e*) teorema 1.6.58. postoji jedinstvena reprezentacija grupe U na prostoru V čiji je diferencijal upravo $\pi|\mathfrak{u}$. Prema teoremu 2.2.1. grupa U je kompaktna. Sada iz teorema 1.3.1. slijedi da je reprezentacija grupe U u odnosu na neki skalarni produkt na prostoru V unitarna, dakle, potpuno reducibilna. Prema tvrdnji (*c*) već spomenutog teorema 1.6.58. reprezentacija $\pi|\mathfrak{u}$ Liejeve algebre $\mathfrak{u}$, a time i pripadna reprezentacija $\pi=(\pi|\mathfrak{u})^\mathbb{C}$ njene kompleksifikacije $\mathfrak{g}$, je potpuno reducibilna.

2.3 Trodimenzionalne proste Liejeve algebre

Kompleksna Liejeva algebra $\mathfrak{s}$ zove se **trodimenzionalna prosta** Liejeva algebra, ako postoji baza $\{h, x, y\}$ od $\mathfrak{s}$ takva da je

$$[h, x] = 2x, \qquad [h, y] = -2y, \qquad [x, y] = h.$$

Takva se Liejeva algebra zove kratko TDS. Lako se vidi da je ona stvarno prosta. Primjer je Liejeva algebra $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ s kojom je izomorfna svaka TDS uz

$$h \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \qquad x \mapsto \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad y \mapsto \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Prema tome, ako je $\mathfrak{s}$ TDS i ako je $\mathfrak{u}$ realna forma od $\mathfrak{s}$ razapeta nad $\mathbb{R}$ sa $\{x - y, i(x + y), ih\}$, onda je $\mathfrak{u}$ izomorfna Liejevoj algebri $\mathfrak{su}(2)$ kompaktne grupe $SU(2)$ svih 2×2 unitarnih matrica determinante 1.

Neka je $\mathfrak{s}$ TDS s kanonskom bazom $\{h, x, y\}$. Neka je π reprezentacija od $\mathfrak{s}$ na prostoru V. Stavimo

$$H = \pi(h), \qquad X = \pi(x), \qquad Y = \pi(y). \tag{2.1}$$

Tada je

$$[X, Y] = H, \qquad [H, X] = 2X, \qquad [H, Y] = -2Y. \tag{2.2}$$

Obratno, ako su H, X i Y linearni operatori na kompleksnom vektorskom prostoru V koji zadovoljavaju (2.2), onda postoji jedinstvena reprezentacija π Liejeve algebre $\mathfrak{s}$ na prostoru V takva da vrijedi (2.1). Iz (2.2) indukcijom po n lako slijedi da vrijedi

$$[H, X^n] = 2nX^n, \quad [H, Y^n] = -2nY^n \quad \text{i} \quad [X, Y^n] = nY^{n-1}(H - n + 1) \qquad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{2.3}$$

U daljnjem je π reprezentacija od $\mathfrak{s}$ na kompleksnom vektorskom prostoru V i H, X, Y su linearni operatori na V definirani sa (2.1). Za $\lambda \in \mathbb{C}$ označimo sa V_λ pripadni svojstveni potprostor operatora H :

$$V_\lambda = \{v \in V;\ Hv = \lambda v\}.$$

Iz prvih dviju komutacionih relacija u (2.3) neposredno slijedi:

$$X^n V_\lambda \subseteq V_{\lambda+2n} \qquad \text{i} \qquad Y^n V_\lambda \subseteq V_{\lambda-2n} \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Propozicija 2.3.1. *Neka je $v \in V_\lambda$ takav da je $Xv = 0$. Tada vrijedi:*

(a) $XY^n v = n(\lambda - n + 1)Y^{n-1}v \ \ \forall n \in \mathbb{N}$.

(b) *Ako je $v \neq 0$ i $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_+$ onda je $Y^n v \neq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$.*

(c) *Ako je $m \in \mathbb{Z}_+$ takav da je $Y^m v \neq 0$ i $Y^{m+1}v = 0$, onda je $W = span\,\{v, Yv, \ldots, Y^m v\}$ $(m + 1)-$dimenzionalan $\pi-$invarijantan potprostor od V, pripadna subreprezentacija π_W je ireducibilna i $\lambda = m$.*

Dokaz: Tvrdnja (a) slijedi neposredno iz posljednje komutacione relacije u (2.3).

(b) Ako je $\lambda \notin \mathbb{Z}_+$, onda je $\lambda - n + 1 \neq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$, pa tvrdnja (a) pokazuje da iz $Y^{n-1}v \neq 0$ slijedi $XY^n v \neq 0$, dakle, $Y^n v \neq 0$.

(c) Očito su tada vektori $v, Yv, \ldots, Y^m v$ linearno nezavisni (to su svojstveni vektori operatora H za različite svojstvene vrijedosti), dakle, tvore bazu potprostora W. Potprostor W je invarijantan s obzirom na operatore H i Y, a zbog tvrdnje (a) i s obzirom na operator X. Dakle, potprostor

W je $\pi-$invarijantan. Neka je $U \neq \{0\}$ $\pi-$invarijantan potprostor od W. Tada je potprostor U invarijantan s obzirom na operator H, pa slijedi da sadrži neki njegov svojstven vektor različit od 0. Dakle, $Y^n v \in U$ za neki $n \in \{0, \ldots, m\}$. Ako je $n < m$, zbog invarijatnosti potprostora U s obzirom na operator Y slijedi da su i vektori $Y^{n+1}v, \ldots, Y^m v$ sadržani u U. Također, ako je $n > 0$ onda su zbog invarijantnosti potprostora U s obzirom na operator X i zbog tvrdnje (a) i vektori $Y^{n-1}v, \ldots, Yv, v$ sadržani u U. To pokazuje da je $U = W$, tj. subreprezentacija π_W je ireducibilna. Napokon, iz tvrdnje (a) za $n = m + 1$ slijedi $0 = (m + 1)(\lambda - m)Y^m v$, dakle, $\lambda = m$.

Teorem 2.3.2. *Neka je $\mathfrak{s}$ TDS s kanonskom bazom $\{h, x, y\}$. Za svaki prirodan broj $m + 1$ (tj. $m \in \mathbb{Z}_+$) postoji do na ekvivalenciju točno jedna ireducibilna $(m+1)-$dimenzionalna reprezentacija π. U prostoru V takve reprezentacije π postoji baza $\{v_0, \ldots, v_m\}$ na koju operatori reprezentacije djeluju ovako:*

$$\pi(h)v_n = (m - 2n)v_n \quad \textit{za} \quad n = 0, \ldots, m;$$

$$\pi(x)v_0 = 0, \qquad \pi(x)v_n = n(m - n + 1)v_{n-1} \quad \textit{za} \quad n = 1, \ldots, m;$$

$$\pi(y)v_n = v_{n+1} \quad \textit{za} \quad n = 0, \ldots, m - 1, \qquad \pi(y)v_m = 0.$$

Korolar 2.3.3. *Neka je $\mathfrak{s}$ TDS s kanonskom bazom $\{h, x, y\}$ i neka je π reprezentacija od $\mathfrak{s}$ na konačnodimenzionalnom prostoru V. Tada je operator $\pi(h)$ dijagonalizabilan i njegov je spektar sadržan u $\mathbb{Z}$. Za $n \in \mathbb{Z}$ neka je $V_n = \{v \in V;\ \pi(h)v = nv\}$ pripadni svojstveni potprostor operatora $\pi(h)$. Tada je $\dim V_n = \dim V_{-n}$ $\forall n \in \mathbb{Z}$. Nadalje, u rastavu reprezentacije π u direktnu sumu ireducibilnih reprezentacija multiplicitet $(m+1)-$dimenzionalne ireducibilne reprezentacije jednak je $\dim V_m - \dim V_{m+2}$.*

Zadatak 2.3.1. *Dokažite korolar 2.3.3.*

2.4 Reprezentacije reduktivnih Liejevih algebri

Neka je $\mathfrak{g}$ kompleksna reduktivna Liejeva algebra. U ovom ćemo odjeljku parametrizirati skup klasa ekvivalencije svih konačnodimenzionalnih ireducibilnih reprezentacija od $\mathfrak{g}$, a zatim ćemo u sljedećem odjeljku to primijeniti na parametrizaciju $\hat{G}$ za povezanu kompaktnu Liejevu grupu G.

U daljnjem je $\mathfrak{h}$ Cartanova podalgebra od $\mathfrak{g}$, B invarijantna nedegenerirana simetrična bilinearna forma na $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$, $R = R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ sistem korijena od $\mathfrak{g}$ u odnosu na $\mathfrak{h}$, R_+ neki sistem pozitivnih korijena u R i $B(R_+) = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell\}$ pripadna baza sistema korijena. Kao i prije sa $\mu \mapsto h_\mu$ označavamo izomorfizam prostora $\mathfrak{h}^*$ na prostor $\mathfrak{h}$ određen nedegeneriranom formom $B|\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}$, tj.

$$B(h, h_\mu) = \mu(h) \qquad \forall h \in \mathfrak{h}.$$

Lema 2.4.1. *Ako je $\alpha \in R$, $x \in \mathfrak{g}_\alpha$ i $y \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ onda je*

$$[x, y] = B(x, y) h_\alpha.$$

Zadatak 2.4.1. *Dokažite lemu 2.4.1.*

Uputa: Koristite invarijantnost forme $B : B([x, y], h) = -B(x, [y, h])$.

Lema 2.4.2. *Za svaki $\alpha \in R$ postoje $h^\alpha \in \mathfrak{h}$, $x^\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$ i $y^\alpha \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ koji tvore kanonsku bazu TDS−podalgebre od $\mathfrak{g}$, tj. takvi da je*

$$[h^\alpha, x^\alpha] = 2x^\alpha, \qquad [h^\alpha, y^\alpha] = -2y^\alpha, \qquad [x^\alpha, y^\alpha] = h^\alpha.$$

Dokaz: Stavimo

$$h^\alpha = \frac{2}{(\alpha|\alpha)} h_\alpha.$$

Tada je $\alpha(h^\alpha) = 2$, pa vrijedi $[h^\alpha, x] = 2x \ \forall x \in \mathfrak{g}_\alpha$ i $[h^\alpha, y] = -2y \ \forall y \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$. Prema tome, treba još samo izabrati $x^\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$ i $y^\alpha \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ tako da bude $[x^\alpha, y^\alpha] h^\alpha$. Mogućnost takvog izbora slijedi iz leme 2.4.1., iz činjenice da je forma $B|\mathfrak{g}_\alpha \times \mathfrak{g}_{-\alpha}$ nedegenerirana i iz $\dim \mathfrak{g}_\alpha = \dim \mathfrak{g}_{-\alpha} = 1$. Doista, $x^\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha \setminus \{0\}$ izaberimo proizvoljno. Neka je $y \in \mathfrak{g}_{-\alpha} \setminus \{0\}$. Tada je $B(x^\alpha, y) \neq 0$ pa možemo definirati

$$y^\alpha = \frac{2}{(\alpha|\alpha) B(x^\alpha, y)} y.$$

Sada iz leme 2.4.1. slijedi da je $[x^\alpha, y^\alpha] = h^\alpha$.

Propozicija 2.4.3. *Neka je π ireducibilna konačnodimenzionalna reprezentacija od $\mathfrak{g}$. Tada su svi operatori $\pi(h)$, $h \in \mathfrak{h}$, poluprosti.*

Dokaz: Za svaki $i \in \{1, \ldots, \ell\}$ prema lemi 2.4.2. postoje $h_i \in \mathfrak{h}$, $x_i \in \mathfrak{g}_{\alpha_i}$ i $y_i \in \mathfrak{g}_{-\alpha_i}$ koji tvore kanonsku bazu TDS−podalgebre od $\mathfrak{g}$. Sada iz korolara 2.3.3. slijedi da je operator $\pi(h_i)$ dijagonalizabilan, odnosno, poluprost. Prema Schurovoj lemi operatori $\pi(z)$, $z \in Z(\mathfrak{g})$, su skalarni multipli jediničnog operatora. Kako je $\mathfrak{h} = \mathit{span}\,\{h_1, \ldots, h_\ell\} \dotplus Z(\mathfrak{g})$, tvrdnja slijedi.

Zadatak 2.4.2. *Neka je π konačnodimenzionalna reprezentacija od $\mathfrak{g}$. Dokažite da su sljedeća tri svojstva međusobno ekvivalentna:*

(*a*) *Reprezentacija π je potpuno reducibilna.*

(*b*) *Svi operatori $\pi(h)$, $h \in \mathfrak{h}$, su poluprosti.*

(*c*) *Svi operatori $\pi(z)$, $z \in Z(\mathfrak{g})$, su poluprosti.*

Za proizvoljnu, ne nužno konačnodimenzionalnu, reprezentaciju π od $\mathfrak{g}$ na kompleksnom prostoru V i za $\mu \in \mathfrak{h}^*$ definiramo tzv. $\mu-$**težinski potprostor** od V :

$$V_\mu = \{v \in V;\ \pi(h)v = \mu(h)v\ \forall h \in \mathfrak{h}\}.$$

Ako je $V_\mu \neq \{0\}$, kažemo da je μ **težina** od V. Iz propozicije 2.4.3. slijedi da je u konačnodimenzionalnom slučaju prostor V direktna suma svojih težinskih potprostora.

Pretpostavimo sada da je prostor V konačnodimenzionalan i da je reprezentacija π ireducibilna. Uvedimo parcijalni uređaj na skup težina od V ovako:

$$\mu \geq \lambda \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mu - \lambda \ \text{ je suma korijena iz } \quad R_+.$$

Neka je Λ težina od V koja je maksimalna u odnosu na taj uređaj.

Lema 2.4.4. *Vrijedi*

$$2\frac{(\Lambda|\alpha)}{(\alpha|\alpha)} \in \mathbb{Z}_+ \qquad \forall \alpha \in R_+.$$

Dokaz: Za $\alpha \in R_+$ izaberimo $h^\alpha, x^\alpha, y^\alpha$ kao u lemi 2.4.2. Tada kao u odjeljku 2.3. nalazimo da je $\pi(x^\alpha)V_\mu \subseteq V_{\mu+\alpha}\ \forall \mu \in \mathfrak{h}^*$. Prema izboru Λ funkcional $\Lambda+\alpha$ nije težina za $\alpha \in R_+$ pa zaključujemo da je $\pi(x^\alpha)V_\Lambda = \{0\}$. No tada je prema rezultatima odjeljka 2.3. svojstvena vrijednost $\Lambda(h^\alpha)$ nenegativan cijeli broj. Ali po definiciji elementa h^α imamo

$$\Lambda(h^\alpha) = \Lambda\left(\frac{2}{(\alpha|\alpha)}h_\alpha\right) = 2\frac{\Lambda(h_\alpha)}{(\alpha|\alpha)} = 2\frac{(\Lambda|\alpha)}{(\alpha|\alpha)}.$$

Element $\Lambda \in \mathfrak{h}^*$ koji zadovoljava

$$2\frac{(\Lambda|\alpha)}{(\alpha|\alpha)} \in \mathbb{Z}_+ \qquad \forall \alpha \in R_+$$

zove se **dominantna integralna forma** na $\mathfrak{h}$ (u odnosu na izbor R_+).

Primijetimo da je za svaku težinu μ od V i za $\alpha \in R$ potprostor V_μ sadržan u svojstvenom potprostoru operatora $\pi(h^\alpha)$ sa svojstvenom vrijednošću

$$\mu(h^\alpha) = 2\frac{(\mu|\alpha)}{(\alpha|\alpha)}.$$

Stoga iz korolara 2.3.3. slijedi

Lema 2.4.5. *Ako je μ težina od V, onda je*

$$2\frac{(\mu|\alpha)}{(\alpha|\alpha)} \in \mathbb{Z} \qquad \forall \alpha \in R.$$

Takva se forma μ zove **integralna forma** na $\mathfrak{h}$.

Lema 2.4.6. *Ako je μ težina od V i $\alpha \in R$ onda je i $s_\alpha\mu$ težina od V.*

Dokaz: Neka je $\alpha \in R$ i neka je $\mathfrak{s}_\alpha = span\{h^\alpha, x^\alpha, y^\alpha\}$ pripadna TDS podalgebra od $\mathfrak{g}$. Neka je $v \in V_\mu$, $v \neq 0$. Tada postoji $r \in \mathbb{Z}_+$ takav da je $w = \pi(x^\alpha)^r v \neq 0$ i $\pi(x^\alpha)^{r+1}v = 0$. Prema propoziciji 2.3.1. tada je $m = (\mu + r\alpha)(h^\alpha) \in \mathbb{Z}_+$ i $\pi(y^\alpha)^j w \neq 0$ za $j = 0, \ldots, m$. Vektor $\pi(y^\alpha)^j w$ nalazi se u težinskom potprostoru $V_{\mu+(r-j)\alpha}$. To pokazuje da su $\mu + (r-j)\alpha$ težine od V za $j = 0, \ldots, m$. Sada iz $s_\alpha\mu = \mu - 2\frac{(\mu|\alpha)}{(\alpha|\alpha)}\alpha$ i iz $m = 2\frac{(\mu+r\alpha|\alpha)}{(\alpha|\alpha)}$ nalazimo da se $s_\alpha\mu$ nalazi u toj listi težina. Precizno, za $j = m - r$ je $r - j = 2r - m$, dakle, $\mu + (2r - m)\alpha$ je težina od V. S druge strane, iz $m = 2\frac{(\mu+r\alpha|\alpha)}{(\alpha|\alpha)}$ slijedi $m = 2\frac{(\mu|\alpha)}{(\alpha|\alpha)} + 2r$, dakle, $-2\frac{(\mu|\alpha)}{(\alpha|\alpha)} = 2r - m$, odnosno, $\sigma_\alpha\mu = \mu + (2r - m)\alpha$.

Definirat ćemo sada pojam tzv. *Vermaovih modula* koji ćemo iskoristiti u dokazu ključnog teorema ovog odjeljka, a bit će nam od velike koristi i kasnije. Definiramo

$$\mathfrak{n}^+ = \sum_{\alpha\in R_+} \dot{+}\, \mathfrak{g}_\alpha, \qquad \mathfrak{b} = \mathfrak{h} \dot{+} \mathfrak{n}^+.$$

$\mathfrak{b}$ se zove **Borelova podalgebra** od $\mathfrak{g}$ pridružena Cartanovoj podalgebri $\mathfrak{h}$ i izboru pozitivnih korijena R_+. Za $\mu \in \mathfrak{h}^*$ neka je $\mathbb{C}_\mu$ $1-$dimenzionalan $\mathfrak{b}-$modul $\mathbb{C}$ na kome $\mathfrak{h}$ djeluje sa μ a $\mathfrak{n}^+$ sa 0. Definiramo **Vermaov $\mathfrak{g}-$modul** $M(\mu)$ ovako:

$$M(\mu) = U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{b})} \mathbb{C}_\mu.$$

Teorem 2.4.7. (*a*) *Modul $M(\mu)$ je direktna suma svojih težinskih potprostora.*

(*b*) *$\lambda \in \mathfrak{h}^*$ je težina modula $M(\mu)$ ako i samo ako je $\mu \geq \lambda$, odnosno, ako i samo ako je $\lambda = \mu - \sum_{j=1}^{\ell} n_j\alpha_j$ za neke $n_1, \dots, n_\ell \in \mathbb{Z}_+$.*

(*c*) *Težinski potprostor $M(\mu)_\mu$ je $1-$dimenzionalan i razapet je sa $1 \otimes_{U(\mathfrak{b})} 1$.*

(*d*) *Postoji jedinstven pravi maksimalan podmodul N od $M(\mu)$ koji sadrži svaki pravi podmodul od $M(\mu)$. N je suma svih podmodula koji imaju trivijalan presjek sa $M(\mu)_\mu$.*

Dokaz: Ako definiramo

$$\mathfrak{n}^- = \sum_{\alpha\in R_+} \dot{+}\, \mathfrak{g}_{-\alpha}$$

onda je $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}^- \dot{+} \mathfrak{b}$. Sada po PBW$-$teoremu vrijedi $U(\mathfrak{g}) = U(\mathfrak{n}^-)U(\mathfrak{b})$. Stoga, ako stavimo $v = 1 \otimes_{U(\mathfrak{b})} 1 \in M(\mu)$, onda je $v \neq 0$ i $M(\mu) = U(\mathfrak{n}^-)v$. Odatle slijede tvrdnje (*a*), (*b*) i (*c*). Nadalje, za podmodul V od $M(\mu)$ iz $v \in V$ slijedi $V = M(\mu)$. Dakle, ako je $V \neq M(\mu)$ onda je $V \cap \mathbb{C}v = \{0\}$. Odatle slijedi tvrdnja (*d*).

Prema tvrdnji (*d*) prethodnog teorema modul $M(\mu)$ ima jedinstven ireducibilan kvocijent, koji ćemo označavati sa $L(\mu)$.

Teorem 2.4.8. (*a*) *Ako je V ireducibilan konačnodimenzionalan $\mathfrak{g}-$modul, onda V ima jedinstvenu maksimalnu težinu i pripadni težinski potprostor je $1-$dimenzionalan. Označimo sa Λ_V tu težinu.*

(*b*) *Ako su V i W ireducibilni konačnodimenzionalni $\mathfrak{g}-$moduli, onda vrijedi $V \simeq W$ ako i samo ako je $\Lambda_V = \Lambda_W$.*

(*c*) *Za svaku dominantnu integralnu formu Λ na $\mathfrak{h}$ postoji ireducibilan konačnodimenzionalan $\mathfrak{g}-$modul V takav da je $\Lambda = \Lambda_V$.*

Dokaz: (*a*) Neka je μ neka maksimalna težina modula V. Izaberimo $v \in V_\mu \setminus \{0\}$. Tada iz $U(\mathfrak{g}) = U(\mathfrak{n}^-)U(\mathfrak{b})$ i iz $U(\mathfrak{b})v = \mathbb{C}v$ slijedi $V = U(\mathfrak{g})v = U(\mathfrak{n}^-)v$. Neka je za svaki $\alpha \in \mathbb{R}_+$ izabran $y_\alpha \in \mathfrak{g}_{-\alpha} \setminus \{0\}$. Tada je $\{y_\alpha;\ \alpha \in R_+\}$ baza od $\mathfrak{n}^-$, pa ako R_+ numeriramo kao $\{\beta_1, \dots, \beta_n\}$, onda je

$$\{y_{\beta_1}^{m_1} \cdots y_{\beta_n}^{m_n};\ m_1, \dots, m_n \in \mathbb{Z}_+\}$$

baza od $U(\mathfrak{n}^-)$. Prema tome, vektori

$$y_{\beta_1}^{m_1} \cdots y_{\beta_n}^{m_n} v, \qquad m_1, \dots, m_n \in \mathbb{Z}_+$$

razapinju vektorski prostor V. No svaki od tih vektora je težinski s težinom

$$\mu - \sum_{i=1}^{n} m_i \beta_i.$$

Odatle slijedi tvrdnja (a).

(b) Neka je V ireducibilan konačnodimenzionalan $\mathfrak{g}-$modul s najvećom težinom Λ. Prema tvrdnji (b) teorema 1.4.26. postoji surjektivni homomorfizam $\mathfrak{g}-$modula sa $M(\Lambda)$ na V. Budući da je modul V ireducibilan, jezgra tog epimorfizma je upravo najveći pravi podmodul od $M(\Lambda)$, pa dobivamo da je $V \simeq L(\Lambda)$.

(c) Treba dokazati da je modul $L(\mu) = M(\mu)/N$ konačnodimenzionalan ako je forma μ dominantna integralna. Neka je α korijen iz baze $B(R_+)$ od R određene sa R_+ i neka je $\mathfrak{s}$ pripadna TDS$-$podalgebra od $\mathfrak{g}$ s kanonskom bazom $\{h, x, y\}$. Stavimo $m = \mu(h) + 1$. Tvrdimo da tada u Vermaovom modulu $M(\mu)$ vrijedi $v = y^m(1 \otimes_{U(\mathfrak{b})} 1) \in N$. Doista, ako je $\beta \in B(R_+)$ i $\beta \neq \alpha$, tada je $[\mathfrak{g}_\beta, y] = \{0\}$, pa je $\mathfrak{g}_\beta v = \{0\}$. Nadalje, $[x, y] = h$, pa kao u odjeljku 2.3. imamo

$$xv = xy^m(1 \otimes_{U(\mathfrak{b})})1) = [x, y^m](1 \otimes_{U(\mathfrak{b})} 1) = my^{m-1}(h - m + 1)(1 \otimes_{U(\mathfrak{b})} 1) = 0$$

jer je $\mu(h) - m + 1 = 0$. Prema tome, vrijedi $\mathfrak{n}^+ v = \{0\}$, dakle $U(\mathfrak{b})v = \mathbb{C}v$. Odatle i iz $U(\mathfrak{g}) = U(\mathfrak{n}^-)U(\mathfrak{b})$ slijedi da je $U(\mathfrak{g})v = U(\mathfrak{n}^-)v \subseteq N$, dakle, $v \in N$.

Neka je i dalje $\alpha \in B(R_+)$ i neka je $\mathfrak{s}$ pripadna TDS$-$podalgebra od $\mathfrak{g}$ s kanonskom bazom $\{h, x, y\}$. Dokazat ćemo sada da je za $v \in L(\mu)$ potprostor $U(\mathfrak{s})v$ konačnodimenzionalan. To je istina ako je v slika od $1 \otimes_{U(\mathfrak{b})} 1$ pri epimorfizmu $M(\mu) \to L(\mu)$. Označimo tu sliku sa w i stavimo $Z = U(\mathfrak{s})w$. Tada je

$$L(\mu) = \bigcup_{j \in \mathbb{Z}_+} span\, U_j(\mathfrak{g})Z.$$

Svaki od potprostora $span\, U_j(\mathfrak{g})Z$ je konačnodimenzionalan i $\mathfrak{s}-$invarijantan, pa tvrdnja slijedi.

Dokazat ćemo sada da ako je λ težina od $L(\mu)$ i $\sigma \in W(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ onda je i $\sigma\lambda$ težina od $L(\mu)$. To slijedi za slučaj $\sigma = s_\alpha$ za $\alpha \in B(R_+)$ kao u dokazu leme 2.4.6., a općenito iz činjenice da refleksije s_α, $\alpha \in B(R_+)$, generiraju Weylovu grupu $W(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$.

Uočimo da zbog činjenice da po Schurovoj lemi centar $Z(\mathfrak{g})$ djeluje na $L(\mu)$ skalarima, za težine λ i γ modula $L(\mu)$ iz $\lambda|\mathfrak{h}_\mathbb{R} = \gamma|\mathfrak{h}_\mathbb{R}$ slijedi $\lambda = \gamma$. Dokazat ćemo sada da modul $L(\mu)$ ima samo konačno mnogo težina. Doista, neka je λ težina od $L(\mu)$. Prema lemi 2.4.5. težina λ je integralna. Nadalje, prema tvrdnji (e) teorema 2.1.23. Weylova grupa $W(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ djeluje tranzitivno na skupu Weylovih komora. Stoga postoji $s \in W(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ takav da je težina $s\lambda$ dominantna integralna. Kako je Weylova grupa konačna, dovoljno je dokazati da u $L(\mu)$ postoji samo konačno mnogo dominantnih integralnih težina. Svaka težina od $L(\mu)$ je oblika $\lambda = \mu - \nu$, gdje ν suma korijena iz R_+. Ako je λ dominantna, imamo

$$(\lambda|\lambda) = (\mu - \nu|\lambda) \leq (\mu|\lambda) = (\mu|\mu - \nu) \leq (\mu|\mu).$$

Prema tome, sve dominantne integralne težine (točnije, njihove restrikcije na $\mathfrak{h}_\mathbb{R}$) sadržane su u kugli radijusa $\|\mu\|$, a kako integralne težine tvore rešetku u $\mathfrak{h}_\mathbb{R}^*$, ima ih samo konačno mnogo.

Napokon, za svaku težinu od λ od $M(\mu)$ dimenzija težinskog potprostora $M(\mu)_\lambda$ jednaka je broju načina da se $\mu - \lambda$ napiše kao suma pozitivnih korijena. Posebno, svi su težinski potprostori od $M(\mu)$, a time i od $L(\mu)$, konačnodimenzionalni. Dakle, modul $L(\mu)$ je konačnodimenzionalan.

2.5 Reprezentacije kompaktnih Liejevih grupa

U ovom je odjeljku G kompaktna povezana Liejeva grupa s maksimalnim torusom T i $\mathfrak{g}$ i $\mathfrak{t}$ njihove Liejeve algebre. Tada je $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ kompleksna reduktivna Liejeva algebra i $\mathfrak{t}^{\mathbb{C}}$ je njena Cartanova podalgebra. U odjeljku 2.2. identificirali smo skup $\hat{T}$ svih neprekidnih homomorfizama grupe T u multiplikativnu grupu $S = \{\lambda \in \mathbb{C};\ |\lambda| = 1\}$ sa skupom svih $\mathbb{R}-$linearnih $T-$integralnih preslikavanja sa $\mathfrak{t}$ u $i\mathbb{R}$. Pri tome se $\mathbb{R}-$linearno preslikavanje $\mu : \mathfrak{t} \to i\mathbb{R}$ zove $T-$integralno, ako je $\mu(L) \subseteq 2\pi i\mathbb{Z}$, gdje je $L = \mathrm{Ker}(\exp_T) = \{x \in \mathfrak{t};\ \exp_T x = e\}$. Identifikacija je dana sa

$$\mu(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mu(\exp_T tx)\bigg|_{t=0}, \qquad \text{odnosno}, \qquad \mu(\exp_T x) = \mathrm{e}^{\mu(x)}, \qquad x \in \mathfrak{t}.$$

Neka je $R = R(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}, \mathfrak{t}^{\mathbb{C}})$ sistem korijena od $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ u odnosu na Cartanovu podalgberu $\mathfrak{t}^{\mathbb{C}}$. Znamo da su restrikcije korijena iz R na $\mathfrak{t}$ integralne $\mathbb{R}-$linearne forme sa $\mathfrak{t}$ u $i\mathbb{R}$. Neka je $\alpha \in R$, $y \in \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}_\alpha$ i $x \in \mathfrak{t}$. Tada je

$$Ad(\exp_T x)y = \mathrm{e}^{ad\,x}y = \mathrm{e}^{\alpha(x)}y.$$

Ako je $x \in L = \mathrm{Ker}\,(\exp_T)$ dobivamo

$$\mathrm{e}^{\alpha(x)}y = y \quad \forall y \in \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}_\alpha \qquad \Longrightarrow \qquad \alpha(x) \in 2\pi i\mathbb{Z}.$$

Time je dokazano da je $\alpha(L) \subseteq 2\pi i\mathbb{Z}$, odnosno, svi korijeni $\alpha \in R$ su ne samo integralne nego i $T-$integralne forme. Dakle, sistem korijena R identificira se s podskupom od $\hat{T}$.

Neka je π reprezentacija grupe G na konačnodimenzionalnom kompleksnom prostoru V. Tada znamo da je sa

$$\pi(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\pi(\exp\ tx)\bigg|_{t=0}, \qquad x \in \mathfrak{g},$$

definirana reprezentacija Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ na prostoru V koja u potpunosti opisuje polaznu reprezentaciju grupe G. U stvari, budući da je po tvrdnji (c) teorema 2.2.2. preslikavanje $\exp : \mathfrak{g} \to G$ surjektivno, reprezentacija π od G dobiva se iz gore definirane reprezentacije π od $\mathfrak{g}$ ovako:

$$\pi(\exp\ x) = \mathrm{e}^{\pi(x)}, \qquad x \in \mathfrak{g}.$$

Istim znakom π označavamo i pripadnu reprezentaciju kompleksifikacije $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ od $\mathfrak{g}$ na prostoru V. Sada možemo primijeniti glavni rezultat prethodnog odjeljka kako bismo u potpunosti opisali $\hat{G}$. U tu svrhu izaberimo neki sistem R_+ pozitivnih korijena u R u odnosu na koji definiramo dominantne forme na $\mathfrak{t}^{\mathbb{C}}$.

Teorem 2.5.1. *Za dominantnu integralnu formu μ na $\mathfrak{t}^{\mathbb{C}}$ koja je $T-$integralna postoji ireducibilna unitarna reprezentacija grupe G čija je kompleksifikacija diferencijala ekvivalentna $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}-$modulu $L(\mu)$. Označimo klasu ekvivalencije te reprezentacije sa γ_μ. Tada je*

$$\hat{G} = \{\gamma_\mu;\ \mu \textit{ dominantna integralna } T-\textit{integralna forma na } \mathfrak{t}^{\mathbb{C}}\}.$$

Dokaz: Neka je $\tilde{G}$ jednostavno povezana natkrivajuća grupa od G i neka je Z jezgra natkrivanja $p : \tilde{G} \to G$. Budući da je $\tilde{G}$ povezana jednostavno povezana Liejeva grupa s Liejevom algebrom $\mathfrak{g}$, postoji jedinstvena reprezentacija π od $\tilde{G}$ na prostoru $L(\mu)$ čiji (kompleksificirani) diferencijal daje djelovanje $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ na $L(\mu)$. Treba samo dokazati da je $Z \subseteq \mathrm{Ker}\,\pi$, tako da se reprezentacija π može *spustiti* na G. U tu svrhu stavimo $\tilde{T} = p^{-1}(T)$. Tada je Z podgrupa od $\tilde{T}$ i $p|\tilde{T} : \tilde{T} \to T$ je epimorfizam. Sada iz $Z \subseteq \tilde{T} \subseteq \tilde{G}$, $T \simeq \tilde{T}/Z$ i $G \simeq \tilde{G}/Z$ slijedi da je kanonsko preslikavanje $\tilde{G}/\tilde{T} \to G/T$ bijekcija, dakle, homeomorfizam. Po tvrdnji (d) teorema 2.2.2. mnogostrukost G/T je jednostavno povezana. Dakle, i mnogostrukost $\tilde{G}/\tilde{T}$ je jednostavno povezana.

Zadatak 2.5.1. *Neka je G povezana Liejeva grupa i H zatvorena podgrupa od G takva da je mnogostrukost G/H jednostavno povezana. Dokažite da je tada grupa H povezana.*

Uputa: Neka je H_0 komponenta povezanosti jedinice u grupi H. Dokažite da je kanonsko preslikavanje $G/H_0 \to G/H$ natkrivanje, a zatim iskoristite propoziciju 1.6.46.

Iz prethodnog zadatka slijedi da je podgrupa $\tilde{T}$ grupe $\tilde{G}$ povezana. Stoga je $p|\tilde{T} : \tilde{T} \to T$ natkrivanje. Slijedi $p \circ \exp_{\tilde{T}} = \exp_T$; doista, $p \circ \exp_{\tilde{T}}$ i $\exp_T$ su analitički homomorfizmi aditivne grupe $\mathfrak{t}$ u grupu T koji oba imaju diferencijal jednak identiteti na $\mathfrak{t}$. Neka je sada $z \in Z$ i neka je $x \in \mathfrak{t}$ takav da je $\exp_{\tilde{T}} x = z$. Tada je $\exp_T x = p(\exp_{\tilde{T}} x) = p(z) = e$, dakle, $x \in \mathrm{Ker}(\exp_T)$. Po pretpostavci je forma μ $T-$integralna, tj. $\mu(\mathrm{Ker}(\exp_T)) \subseteq 2\pi i\mathbb{Z}$. Dakle, vrijedi $\mu(x) = 2\pi i n$ za neki $n \in \mathbb{Z}$. Za $v \in L(\mu)_\mu$, $v \neq 0$, je $xv = \mu(x)v$, dakle, $\pi(z)v = \mathrm{e}^{\mu(x)}v = \mathrm{e}^{2\pi i n}v = v$. To pokazuje da je $\pi(z)|L(\mu)_\mu$ identiteta na $L(\mu)_\mu$. No kako je Z centralna podgrupa od $\tilde{G}$ i reprezentacija π je ireducibilna, po Schurovoj lemi je operator $\pi(z)$ multipl identitete $I_{L(\mu)}$. Slijedi $\pi(z) = I_{L(\mu)}$ $\forall z \in Z$, odnosno, zaključujemo da doista vrijedi $Z \subseteq \mathrm{Ker}\,\pi$. Time je teorem 2.5.1. u potpunosti dokazan.

2.6 Definicija i struktura realnih reduktivnih grupa

Neka je $K = \mathbb{R}$ ili $K = \mathbb{C}$. Za $n \in \mathbb{N}$ sa $GL(n, K)$ označavamo grupu svih invertibilnih elemenata unitalne algebre $M_n(K)$ svih kvadratnih matrica $n-$tog reda s koeficijentima iz K. Tada je $GL(n, K) = \{g \in M_n(K);\ \det(g) \neq 0\}$, dakle, to je otvorena podmnogostrukost analitičke mnogostrukosti $M_n(K) \simeq K^n$ $(= \mathbb{R}^n$ ili $\simeq \mathbb{R}^{2n})$. Nadalje, množenje i invertiranje su očito analitička preslikavanja, pa je $GL(n, K)$ Liejeva grupa. Njena se Liejeva algebra prema razmatranjima u odjeljku 1.6. može identificirati s Liejevom algebrom $\mathfrak{gl}(n, K)$ koja se kao vektorski prostor podudara sa $M_n(K)$, a komutator je zadan sa

$$[x, y] = xy - yx, \qquad x, y \in \mathfrak{gl}(n, K).$$

Nadalje, eksponencijalno preslikavanje se uz ovakvu identifikaciju podudara s eksponenciranjem matrica $x \mapsto \mathrm{e}^x$.

Za kompleksnu polinomijalnu funkciju f na $M_n(\mathbb{C})$ kažemo da je **definirana nad** $\mathbb{R}$ ako su njene vrijednosti na $M_n(\mathbb{R})$ realne. Pretpostavimo sada da su $f_1, \ldots, f_m$ kompleksne polinomijalne funkcije na $M_n(\mathbb{C})$ definirane nad $\mathbb{R}$ takve da je

$$G_C = \{g \in GL(n, \mathbb{C});\ f_1(g) = \cdots = f_m(g) = 0\}$$

podgrupa od $GL(n, \mathbb{C})$. Tada se G_C zove **afina algebarska grupa definirana nad** $\mathbb{R}$. Za podgrupu $G_R = G_C \cap GL(n, \mathbb{R})$ kažemo da je njena **grupa realnih točaka**. Ako vrijedi $g^* \in G_C$ za svaku $g \in G_C$, kažemo da je afina algebarska grupa G_C **simetrična**. Tada vrijedi $g^* = g^t \in G_R$ za svaku matricu $g \in G_R$ pa je sa

$$\vartheta(g) = \left(g^{-1}\right)^*, \qquad g \in G_R,$$

definiran automorfizam ϑ grupe G_R. Taj je automorfizam involutivan i zove se **Cartanova involucija** grupe G_R. Sve su te grupe naravno Liejeve grupe (zatvorena podgrupa Liejeve grupe je Liejeva grupa).

Liejeva grupa G zove se **realna reduktivna grupa**, ako postoji konačno natkrivanje $p : G \to G_0$, gdje je G_0 otvorena podgrupa neke grupe G_R realnih točaka simetrične afine algebarske grupe G_C definirane nad $\mathbb{R}$. Napominjemo da u ovoj definiciji dopuštamo da su grupe G i G_0 nepovezane. Da je $p : G \to G_0$ konačno natkrivanje znači da je p epimorfizam kome je jezgra $\operatorname{Ker} p$ konačna centralna podgrupa od G. Liejevu algebru od G možemo identificirati s Liejevom algebrom $\mathfrak{g}$ od G_R. Ako je grupa G_C definirana pomoću polinomijalnih funkcija $f_1, \ldots, f_m$ definiranih nad $\mathbb{R}$ kao u prethodnom odlomku, onda je

$$\mathfrak{g} = \{x \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C});\ \mathrm{e}^{tx} \in G_C \cap GL(n, \mathbb{R})\ \forall t \in \mathbb{R}\} =$$

$$= \{x \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R});\ f_1\left(\mathrm{e}^{tx}\right) = \cdots = f_m\left(\mathrm{e}^{tx}\right) = 0\ \forall t \in \mathbb{R}\}.$$

Budući da je Cartanova involucija ϑ automorfizam od G_R, njen je diferencijal, koji ćemo također označavati sa ϑ, involutivni automorfizam Liejeve algebre $\mathfrak{g}$. Iz definicije ϑ odmah slijedi

$$\vartheta(x) = -x^* = -x^t, \qquad x \in \mathfrak{g}.$$

I taj se automorfizam zove Cartanova involucija.

Navest ćemo sada niz primjera realnih reduktivnih grupa. To su neke tzv. *klasične* realne reduktivne grupe.

1. $GL(n,\mathbb{R})$ je očito realna reduktivna grupa.

2. $SL(n,\mathbb{R})$. Neka je $SL(n,K) = \{g \in GL(n,K);\ \det(g) = 1\}$. Kako je $g \mapsto \det(g) - 1$ polinomijalna funkcija na $M_n(\mathbb{C})$ definirana nad $\mathbb{R}$, $SL(n,\mathbb{C})$ je afina algebarska grupa definirana nad $\mathbb{R}$ i $SL(n,\mathbb{R})$ je njena grupa realnih točaka. Nadalje, $\det(g^*) = \overline{\det(g)}$, pa vidimo da je $SL(n,\mathbb{C})$ simetrična podgrupa od $GL(n,\mathbb{C})$. Dakle, $SL(n,\mathbb{R})$ je realna reduktivna grupa.

3. $GL(n,\mathbb{C})$. Promatramo $\mathbb{C}^n$ kao $\mathbb{R}^{2n}$ i množenje sa i označimo sa J. Tada je

$$GL(n,\mathbb{C}) = \{g \in GL(2n,\mathbb{R});\ gJ - Jg = 0\}.$$

Identifikaciju $\mathbb{C}^n$ sa $\mathbb{R}^{2n}$ možemo odabrati tako da je $J^* = -J$.

Zadatak 2.6.1. *Dokažite da na opisan način $GL(n,\mathbb{C})$ postaje realna reduktivna grupa.*

4. $SL(n,\mathbb{C})$.

Zadatak 2.6.2. *Smjestite $SL(n,\mathbb{C})$ u $GL(2n,\mathbb{R})$ na takav način da bude vidljivo da je $SL(n,\mathbb{C})$ realna reduktivna grupa.*

5. $O(p,q)$. Neka su $p,q \in \mathbb{Z}_+$ i $n = p+q > 0$. Promatramo R^n kao direktnu sumu R^p i R^q i neka je $I_{p,q}$ operator na $\mathbb{R}^n$ zadan sa $I_{p,q}|\mathbb{R}^p = I_{\mathbb{R}^p}$ i $I_{p,q}|\mathbb{R}^q = -I_{\mathbb{R}^q}$. Definiramo grupu

$$O(p,q) = \{g \in GL(n,\mathbb{R});\ gI_{p,q}g^t = I_{p,q}\}.$$

Očito je grupa $O(0,n) = O(n,0)$ kompaktna grupa svih ortogonalnih realnih matrica $n-$tog reda. Tu grupu označavamo kraće sa $O(n)$.

Zadatak 2.6.3. *Dokažite da je $O(p,q)$ realna reduktivna grupa.*

6. $SO(p,q) = O(p,q) \cap SL(n,\mathbb{R})$ je realna reduktivna grupa. Pišemo $SO(0,n) = SO(n,0) = = SO(n)$.

7. $U(p,q)$. Neka su opet $p,q \in \mathbb{Z}_+$ i $n = p+q > 0$. Promatramo $\mathbb{C}^n$ kao direktnu sumu C^p i $\mathbb{C}^q$ i te prostore promatrane nad $\mathbb{R}$ identificiramo kao u primjeru **3.** sa $\mathbb{R}^{2n}$, $\mathbb{R}^{2p}$ i $\mathbb{R}^{2q}$. Tada je $U(p,q) = GL(n,\mathbb{C}) \cap O(2p,2q)$ realna reduktivna grupa. $U(n,0) = U(0,n)$ je kompaktna grupa svih kompleksnih unitarnih matrica $n-$tog reda i označavamo je sa $U(n)$.

8. $SU(p,q) = U(p,q) \cap SL(n,\mathbb{C})$ je realna reduktivna grupa. Pišemo $SU(n,0) = SU(0,n) = = SU(n)$.

9. $Sp(n,\mathbb{R})$. Uzmimo J na $\mathbb{R}^{2n}$ kao u primjeru **3.** Tada je

$$Sp(n,\mathbb{R}) = \{g \in GL(2n,\mathbb{R});\ gJg^t = J\}$$

realna reduktivna grupa.

Poluprosta Liejeva grupa je Liejeva grupa čija je Liejeva algebra poluprosta.

Propozicija 2.6.1. *Povezana poluprosta Liejeva grupa s konačnim centrom je realna reduktivna grupa.*

Dokaz: Neka je $\mathfrak{g}$ poluprosta (realna) Liejeva algebra i G povezana Liejeva grupa s Liejevom algebrom $\mathfrak{g}$ čiji je centar $Z = \{z \in G;\ gz = zg\ \forall g \in G\}$ konačan. Neka je $B = B_{\mathfrak{g}}$ Killingova forma od $\mathfrak{g}$. Neka je τ kompaktna konjugacija kompleksifikacije $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$. Pokazuje se da τ možemo izabrati tako da bude $\tau(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}$. Tada je $\vartheta = \tau|\mathfrak{g}$ involutivni automorfizam realne Liejeve algebre $\mathfrak{g}$. Pomoću tvrdnje (a) u zadatku 2.2.5. slijedi da je sa

$$(x|y) = -B(x, \vartheta(y)), \qquad x, y \in \mathfrak{g},$$

zadan skalarni produkt na realnom prostoru $\mathfrak{g}$. Neka je $\{x_1, \ldots, x_n\}$ ortonormirana baza od $\mathfrak{g}$ u odnosu na taj skalarni produkt. Tada se $\mathfrak{g}$ identificira sa $\mathbb{R}^n$. Neka je

$$G_C = Aut(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}) = \{g \in GL(n, \mathbb{C});\ [g(x), g(y)] = g([x, y])\ \forall x, y \in \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}\} =$$

$$= \{g \in GL(n, \mathbb{C});\ [g(x_i), g(x_j)] = g([x_i, x_j])\ \forall i, j \in \{1, \ldots, n\}\,\}.$$

Dakle, G_C je afina algebarska grupa definirana nad $\mathbb{R}$. Seskvilinearno proširenje skalarnog produkta sa $\mathfrak{g}$ na $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ je skalarni produkt na $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$, a kako je $\vartheta = \tau|\mathfrak{g}$ i τ je antilinearno preslikavanje, lako se vidi da je taj skalarni produkt na $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ dan sa

$$(x|y) = -B(x, \tau(y)), \qquad x, y \in \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}.$$

Neka je $g \in G_C = Aut(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})$ i neka je g^* adjungiran operator na $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ u odnosu na gornji skalarni produkt. Imamo redom za proizvoljne $x, y \in \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$:

$$(g^*(x)|y) = (x|g(y)) = -B(x, \tau g(y)) = -B(\tau(x), g(y)) =$$

$$= -B(g^{-1}\tau(x), y) = -B(\tau g^{-1}\tau(x), \tau(y)) = (\tau g^{-1}\tau(x)|y).$$

Dakle, vrijedi

$$g^* = \tau g^{-1} \tau,$$

a kako je g^{-1} (linearni) automorfizam, a τ (antilinearni) automorfizam od $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$, slijedi da je g^* automorfizam od $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$, odnosno, $g^* \in G_C$. Time je dokazano da je grupa G_C simetrična. Imamo $G_R = Aut(\mathfrak{g})$ i ako sa G_0 označimo komponentu povezanosti grupe G_R, onda je $Ad : G \to G_0$ natkrivanje od G_0. Prema tome, G je realna reduktivna grupa u smislu naše definicije.

Neka je G realna reduktivna grupa s Liejevom algebrom $\mathfrak{g}$. Podrazumijevamo sve pretpostavke i oznake kao u definiciji realne reduktivne grupe. Definiramo sada simetričnu bilinearnu formu B na $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ sa

$$B(x, y) = \operatorname{tr} xy, \qquad x, y \in \mathfrak{g}.$$

Za $x \in \mathfrak{g}$ je $\vartheta(x) = -x^* \in \mathfrak{g}$. Stoga je sa

$$(x|y) = -B(x, \vartheta(y)) = \operatorname{tr} xy^*, \qquad x, y \in \mathfrak{g},$$

definiran skalarni produkt na realnom prostoru $\mathfrak{g}$. Odatle slijedi da je forma B nedegenerirana. Neka je

$$\mathfrak{k} = \{x \in \mathfrak{g};\ \vartheta(x) = x\} \qquad \text{i} \qquad \mathfrak{p} = \{x \in \mathfrak{g};\ \vartheta(x) = -x\}.$$

Tada je $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \dotplus \mathfrak{p}$ i to se zove **Cartanova dekompozicija** od $\mathfrak{g}$. Budući da je ϑ automorfizam od $\mathfrak{g}$, očito je $\mathfrak{k}$ Liejeva podalgebra od $\mathfrak{g}$ i vrijedi

$$[\mathfrak{k}, \mathfrak{p}] \subseteq \mathfrak{p} \qquad \text{i} \qquad [\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] \subseteq \mathfrak{k}.$$

Propozicija 2.6.2. $\mathfrak{k}$ *je Liejeva algebra kompaktne podgrupe od* G.

Dokaz: Prije svega uočimo da je $\mathfrak{k}$ Liejeva algebra podgrupe $O(\mathfrak{g}) \cap G_R$, gdje je $O(\mathfrak{g})$ ortogonalna grupa realnog unitarnog prostora $\mathfrak{g}$. Doista, Liejeva algebra od $O(\mathfrak{g}) \cap G_R$ je

$$\{x \in \mathfrak{g};\ \mathrm{e}^{tx} \in O(\mathfrak{g})\ \forall t \in \mathbb{R}\} = \{x \in \mathfrak{g};\ (\mathrm{e}^{tx}y|\mathrm{e}^{tx}z) = (y|z)\ \forall t \in \mathbb{R}\ \text{ i }\ \forall y, z \in \mathfrak{g}\} =$$

$$= \{x \in \mathfrak{g};\ (\mathrm{e}^{tx}y|z) = (y|\mathrm{e}^{-tx}z)\ \forall t \in \mathbb{R}\ \text{ i }\ \forall y, z \in \mathfrak{g}\} =$$

$$= \{x \in \mathfrak{g};\ \mathrm{tr}\left(\mathrm{e}^{tx}yz^*\right) = \mathrm{tr}\left(y\left(\mathrm{e}^{-tx}z\right)^*\right)\ \forall t \in \mathbb{R}\ \text{ i }\ \forall y, z \in \mathfrak{g}\} =$$

$$= \{x \in \mathfrak{g};\ \mathrm{tr}\left(\mathrm{e}^{tx}yz^*\right) = \mathrm{tr}\left(\mathrm{e}^{-tx^*}yz^*\right)\ \forall t \in \mathbb{R}\ \text{ i }\ \forall y, z \in \mathfrak{g}\}.$$

Kako je forma $(y, z) \mapsto \mathrm{tr}\, yz^*$ nedegenerirana na $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$, ovo je dalje jednako

$$\{x \in \mathfrak{g};\ \mathrm{e}^{tx}y = \mathrm{e}^{-tx^*}y\ \forall t \in \mathbb{R}\ \text{ i }\ \forall y \in \mathfrak{g}\} = \{x \in \mathfrak{g};\ x = -x^*\} = \mathfrak{k}.$$

Dakle, $\mathfrak{k}$ je Liejeva algebra kompaktne podgrupe $O(\mathfrak{g}) \cap G_R$ grupe G_R. No tada je ujedno $\mathfrak{k}$ Liejeva algebra njene otvorene podgrupe $O(\mathfrak{g}) \cap G_0$ koja je također kompaktna. Kako je $p : G \to G_0$ natkrivanje, $\mathfrak{k}$ je također Liejeva algebra totalnog inversa $p^{-1}(O(\mathfrak{g}) \cap G_0)$. Međutim, natkrivanje p ima konačnu jezgru, pa je $p^{-1}(O(\mathfrak{g}) \cap G_0)$ kompaktna podgrupa od G.

Označimo sada istim znakom B $\mathbb{C}-$bilinearno proširenje forme B sa $\mathfrak{g}$ na $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$. Naravno, tada je

$$B(x, y) = \mathrm{tr}\, xy, \qquad x, y \in \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}.$$

Stavimo

$$\mathfrak{u} = \mathfrak{k} \dotplus i\mathfrak{p}.$$

Tada je $\mathfrak{u}$ očito realna forma prostora $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$, a iz $[\mathfrak{k}, \mathfrak{k}] \subseteq \mathfrak{k}$, $[\mathfrak{k}, \mathfrak{p}] \subseteq \mathfrak{p}$ i $[\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] \subseteq \mathfrak{k}$ slijedi da je $[\mathfrak{u}, \mathfrak{u}] \subseteq \mathfrak{u}$, dakle, $\mathfrak{u}$ je realna forma kompleksne Liejeve algebre $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$. Bilinearna forma $B|\mathfrak{u} \times \mathfrak{u}$ je nedegenerirana i negativno definitna. Prema tome, sa

$$(x|y) = -B(x, y), \qquad x, y \in \mathfrak{u},$$

zadan je invarijantan skalarni produkt na $\mathfrak{u}$. Dakle, Liejeva algebra $\mathfrak{u}$ je kompaktna, odnosno, $\mathfrak{u}$ je kompaktna forma od $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$. Posebno, $\mathfrak{u}$ je reduktivna realna Liejeva algebra. Iz definicije reduktivne Liejeve algebre (radikal jednak centru) odmah slijedi da je realna Liejeva algebra reduktivna ako i samo ako je njena kompleksifikacija redduktivna. Stoga najprije zaključujemo da je $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ kompleksna reduktivna Liejeva algebra, a zatim da je njena realna forma $\mathfrak{g}$ realna reduktivna Liejeva algebra. Time smo dokazali:

Propozicija 2.6.3. *Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ realne reduktivne grupe G je reduktivna.*

Proučit ćemo sada globalnu strukturu realne reduktivne grupe G. Najprije ćemo promatrati grupu G_0 koja je otvorena podgrupa od G_R i čije je G konačno natkrivanje.

U dokazima ćemo koristiti neke opće rezultate o operatorima na konačnodimenzionalnom realnom unitarnom prostoru V. Sa $\mathcal{H}(V)$ označimo potprostor prostora $L(V)$ svih hermitskih operatora na unitarnom prostoru V, tj.

$$\mathcal{H}(V) = \{A \in L(V);\ (Av|w) = (v|Aw)\ \ \forall v, w \in V\}.$$

Nadalje, neka je $\mathcal{P}(V)$ podskup od $\mathcal{H}(V)$ svih pozitivno definitnih operatora, tj.

$$\mathcal{P}(V) = \{A \in \mathcal{H}(V);\ (Av|v) > 0\ \ \forall v \in V \setminus \{0\}\,\} = \{A \in \mathcal{H}(V);\ Sp(A) \subseteq \mathbb{R}_+^* = \langle 0, +\infty\rangle\,\}.$$

Očito je $\mathcal{P}(V)$ otvoren podskup od $\mathcal{H}(V)$, dakle, otvorena podmnogostrukost od $\mathcal{H}(V)$ čiji se tangencijalni prostor u svakoj točki identificira s prostorom $\mathcal{H}(V)$. Napokon, sa $O(V)$ označavamo kompaktnu grupu svih ortogonalnih operatora na prostoru V, tj.

$$O(V) = \{A \in L(V);\ (Av|Aw) = (v|w)\ \ \forall v, w \in V\}.$$

$O(V)$ je Liejeva grupa i njena Liejeva algebra $\mathfrak{o}(V)$ je Liejeva algebra svih antihermitskih operatora na unitarnom prostoru V :

$$\mathfrak{o}(V) = \{A \in L(V);\ (Av|w) + (v|Aw) = 0\ \ \forall v, w \in V\}$$

Teorem 2.6.4. *(a) $A \mapsto \mathrm{e}^A$ je bianalitička bijekcija sa $\mathcal{H}(V)$ na $\mathcal{P}(V)$.*

(b) Množenje $(A, B) \mapsto AB$ je bianalitička bijekcija sa $O(V) \times \mathcal{P}(V)$ na $GL(V)$.

Zadatak 2.6.4. *Dokažite da je preslikavanje $A \mapsto \mathrm{e}^A$ bijekcija sa $\mathcal{H}(V)$ na $\mathcal{P}(V)$.*

Uputa: Koristite činjenicu da za svaki $A \in \mathcal{H}(V)$ vrijedi

$$V = \sum_{\lambda \in Sp(A)} \dot{+}\, V_\lambda(A)$$

gdje je $Sp(A)$ spektar operatora A i za $\lambda \in Sp(A)$ je $V_\lambda(A)$ pripadni svojstveni potprostor.

Dokaz teorema 2.6.4. (a) Prema zadatku 2.6.4. preslikavanje

$$\exp : A \mapsto \mathrm{e}^A = \sum_{n \in \mathbb{Z}_+} \frac{1}{n!} A^n$$

je bijekcija sa $\mathcal{H}(V)$ na $\mathcal{P}(V)$ i očito je to preslikavanje analitičko. Stoga još samo treba dokazati da je za svaki $B \in \mathcal{H}(V)$ diferencijal $T_B(\exp)$ izomorfizam tangencijalnog prostora $T_B(\mathcal{H}(V))$ na tangencijalni prostor $T_{\mathrm{e}^B}(\mathcal{P}(V))$. I jedan i drugi tangencijalni prostor identificiraju se s prostorom $\mathcal{H}(V)$, pa je dovoljno dokazati injektivnost. U tu svrhu pretpostavimo da su $A, B \in \mathcal{H}(V)$ takvi da je $T_B(\exp)A = 0$. Neka su $\beta : \mathbb{R} \to \mathcal{H}(V)$ i $\gamma : \mathbb{R} \to \mathcal{P}(V)$ $C^\infty-$krivulje definirane sa

$$\beta(t) = B + tA, \qquad \gamma(t) = \exp\,\beta(t) = \mathrm{e}^{\beta(t)}, \qquad t \in \mathbb{R},$$

tako da je

$$\beta(0) = B, \qquad \beta'(0) = A, \qquad \gamma(0) = \mathrm{e}^B, \qquad \gamma'(0) = T_B(\exp)A = 0.$$

Deriviranjem jednakosti $\beta(t)\gamma(t) = \gamma(t)\beta(t)$ u točki $t = 0$ dobivamo $A\mathrm{e}^B = \mathrm{e}^B A$. Imamo svojstveni rastav prostora u odnosu na operator B :

$$V = \sum_{\lambda \in Sp(B)} \dot{+}\, V_\lambda(B). \tag{2.4}$$

Nadalje, $Sp\left(\mathrm{e}^B\right) = \{\mathrm{e}^\lambda;\ \lambda \in Sp(B)\}$ i $\mathrm{e}^\lambda \neq \mathrm{e}^\mu$ ako su $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ međusobno različiti. Stoga je

$$V_{\mathrm{e}^\lambda}\left(\mathrm{e}^B\right) = V_\lambda(B) \qquad \forall \lambda \in Sp(B),$$

odnosno, (2.4) je ujedno svojstveni rastav prostora V u odnosu na operator e^B. Iz komutiranja operatora A i e^B slijedi da su svi svojstveni potprostori od e^B invarijantni s obzirom na operator

A. To znači da su svi svojstveni potprostori operatora B invarijantni s obzirom na operator A. Odatle je $AB = BA$. Sada imamo

$$\gamma(t) = \mathrm{e}^B \mathrm{e}^{tA} \qquad \Longrightarrow \qquad 0 = \gamma'(0) = \mathrm{e}^B A \qquad \Longrightarrow \qquad A = 0.$$

Time je tvrdnja (a) dokazana.

(b) Neka je $\log : \mathcal{P}(V) \to \mathcal{H}(V)$ inverzno preslikavanje bijekcije $\exp : \mathcal{H}(V) \to \mathcal{P}(V)$. Prema (a) znamo da je to preslikavanje analitičko. Neka su sada $A \in O(V)$, $C \in \mathcal{H}(V)$ i $B = \mathrm{e}^C$. Nadalje, neka je $G = AB = A\mathrm{e}^C$. Tada imamo $G^* = BA^{-1}$, pa je $\mathrm{e}^{2C} = B^2 = G^*G$, a odatle je

$$C = \frac{1}{2}\log(G^*G), \quad B = \exp\left(\frac{1}{2}\log(G^*G)\right) \quad \text{i} \quad A = G\exp\left(-\frac{1}{2}\log(G^*G)\right).$$

Kako je za svaki $G \in GL(V)$ operator G^*G hermitski i pozitivno definitan, iz gornjih jednakosti slijedi da je $(A, B) \mapsto AB$ analitička bijekcija sa $O(V) \times \mathcal{P}(V)$ na $GL(V)$. Nadalje, vidi se da je inverzno preslikavanje

$$G \mapsto \left(G\exp\left(-\frac{1}{2}\log(G^*G)\right), \exp\left(\frac{1}{2}\log(G^*G)\right)\right)$$

i to je preslikavanje očito također analitičko.

Sjetimo se da je Cartanova involucija ϑ od G_R automorfizam grupe G_R definiran sa $\vartheta(g) = \left(g^{-1}\right)^*$; istim znakom ϑ označavamo i njegov diferencijal i to je automorfizam Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ dan sa $\vartheta(x) = -x^*$. Stavimo

$$K_0 = \{g \in G_0;\ \vartheta(g) = g\}.$$

Tada je

$$K_0 = \left\{g \in G_0;\ \left(g^{-1}\right)^* = g\right\} = \left\{g \in G_0;\ g^* = g^{-1}\right\} = G_0 \cap O(\mathfrak{g}),$$

dakle, to je kompaktna podgrupa od G_0.

Propozicija 2.6.5. *Preslikavanje $K_0 \times \mathfrak{p} \to G_0$, zadano sa $(k, x) \mapsto ke^x$, je bianalitička bijekcija.*

Dokaz: Neka je $g \in G_0$. Prema teoremu 2.6.4. matrica g može se na jedinstven način napisati u obliku $g = u\mathrm{e}^x$, gdje je matrica u ortogonalna, a matrica x hermitska. Tada je $g^*g = \mathrm{e}^{2x}$. Neka su $f_1, \ldots, f_m$ polinomijalne fukcije koje definiraju grupe G_C i G_R. Kako je $(g^*g)^k \in G_R\ \forall k \in \mathbb{Z}$, slijedi da je

$$f_1\left(\mathrm{e}^{2kx}\right) = \cdots\cdots = f_m\left(\mathrm{e}^{2kx}\right) = 0 \qquad \forall k \in \mathbb{Z},$$

a kako su f_j polinomijalne fukcije, zaključujemo da je

$$f_1\left(\mathrm{e}^{tx}\right) = \cdots\cdots = f_m\left(\mathrm{e}^{tx}\right) = 0 \qquad \forall t \in \mathbb{R}.$$

To znači da je $\mathrm{e}^{tx} \in G_0\ \ \forall t \in \mathbb{R}$, pa slijedi da je $x \in \mathfrak{g}$. Kako je $x = x^* = -\vartheta(x)$, vrijedi $x \in \mathfrak{p}$. No tada je $u = g\mathrm{e}^{-x} \in G_0$, dakle, $u \in G_0 \cap O(\mathfrak{g}) = K_0$. Time smo dokazali da je preslikavanje iz iskaza propozicije surjektivno.

Pretpostavimo sada da je $u\mathrm{e}^x = v\mathrm{e}^y$ za neke $u, v \in K_0$ i $x, y \in \mathfrak{p}$. Tada je

$$\mathrm{e}^{2x} = (u\mathrm{e}^x)^*\, u\mathrm{e}^x = (v\mathrm{e}^y)^*\, v\mathrm{e}^y = \mathrm{e}^{2y},$$

a kako su x, y hermitske matrice, slijedi $2x = 2y$, dakle, $x = y$. No tada slijedi i $u = v$. Time je dokazano da je preslikavanje iz iskaza propozicije i injektivno, dakle, bijektivno. Očito je to preslikavanje analitičko. Analitičnost inverznog preslikavanja slijedi iz dokaza tvrdnje (b) teorema 2.6.4.

Iz propozicije 2.6.5. imamo sljedeće dvije neposredne posljedice:

Korolar 2.6.6. $\vartheta(G_0) = G_0$.

Korolar 2.6.7. *Kvocijentna mnogostrukost G_0/K_0 je povezana i jednostavno povezana.*

Neka je sada $\mathfrak{a}$ potprostor od $\mathfrak{p}$ koji je maksimalan među Liejevim podalgebrama od $\mathfrak{g}$ sadržanim u $\mathfrak{p}$. Kako je $[\mathfrak{p},\mathfrak{p}] \subseteq \mathfrak{k}$, jasno je da je $\mathfrak{a}$ komutativna podalgebra od $\mathfrak{g}$. Svaki takav potprostor zove se **Cartanov potprostor** od $\mathfrak{p}$. Svaki $h \in \mathfrak{a}$ je hermitski operator. Dakle, svi se operatori $h \in \mathfrak{a}$ mogu simultano dijagonalizirati. No tada se i operatori $ad\,h$, $h \in \mathfrak{a}$, na prostoru $\mathfrak{g}$ mogu simultano dijagonalizirati. Za $\mu \in \mathfrak{a}^*$ stavimo

$$\mathfrak{g}^\mu = \{x \in \mathfrak{g};\ [h,x] = \mu(h)x\ \forall h \in \mathfrak{a}\}.$$

Nadalje, stavimo

$$R(\mathfrak{g},\mathfrak{a}) = \{\mu \in \mathfrak{a}^*;\ \mu \neq 0 \text{ i } \mathfrak{g}^\mu \neq \{0\}\,\}.$$

Spomenuta simultana dijagonalizabilnost operatora $ad\,h$, $h \in \mathfrak{a}$, znači da je

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^0 \dotplus \sum_{\mu \in R(\mathfrak{g},\mathfrak{a})} \dotplus\, \mathfrak{g}^\mu.$$

Kako je $\vartheta|\mathfrak{a} = -I_\mathfrak{a}$, slijedi $\vartheta(\mathfrak{g}^0) = \mathfrak{g}^0$, dakle, $\mathfrak{g}^0 = \mathfrak{k} \cap \mathfrak{g}^0 \dotplus \mathfrak{p} \cap \mathfrak{g}^0$. Nadalje, $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p} \cap \mathfrak{g}^0$ i zbog maksimalnosti $\mathfrak{a}$ među podalgebrama od $\mathfrak{g}$ sadržanim u $\mathfrak{p}$ slijedi da je $\mathfrak{p} \cap \mathfrak{g}^0 = \mathfrak{a}$. Stavimo $\mathfrak{m} = \mathfrak{k} \cap \mathfrak{g}^0$. Uočimo da je $\mathfrak{m}$ Liejeva podalgebra od $\mathfrak{k}$, a kako je prema propoziciji 2.6.2. $\mathfrak{k}$ Liejeva algebra kompaktne podgrupe od G, slijedi da je Liejeva algebra $\mathfrak{m}$ reduktivna u $\mathfrak{g}$ i, posebno, $\mathfrak{m}$ je reduktivna Liejeva algebra. Nadalje, imamo $\mathfrak{g}^0 = \mathfrak{m} \dotplus \mathfrak{a}$, dakle,

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{m} \dotplus \mathfrak{a} \dotplus \sum_{\mu \in R(\mathfrak{g},\mathfrak{a})} \dotplus\, \mathfrak{g}^\mu. \tag{2.5}$$

Stavimo sada

$$\mathfrak{a}' = \{h \in \mathfrak{a};\ \mu(h) \neq 0\ \forall \mu \in R(\mathfrak{g},\mathfrak{a})\}.$$

Fiksirajmo $h_0 \in \mathfrak{a}'$ i neka je

$$P = \{\mu \in R(\mathfrak{g},\mathfrak{a});\ \mu(h_0) > 0\}.$$

Tada je očito $R(\mathfrak{g},\mathfrak{a}) = P \cup (-P)$ i $P \cap (-P) = \emptyset$. Stavimo

$$\mathfrak{n} = \sum_{\mu \in P} \dotplus\, \mathfrak{g}^\mu, \qquad \overline{\mathfrak{n}} = \sum_{\mu \in P} \dotplus\, \mathfrak{g}^{-\mu}.$$

Lako se vidi da je $[\mathfrak{g}^\mu, \mathfrak{g}^\nu] \subseteq \mathfrak{g}^{\mu+\nu}$ i da za $\mu, \nu \in P$ takve da je $\mu + \nu \in R(\mathfrak{g},\mathfrak{a})$ vrijedi $\mu + \nu \in P$. Odatle slijedi da su $\mathfrak{n}$ i $\overline{\mathfrak{n}}$ Liejeve podalgebre od $\mathfrak{g}$. Iz (2.5) se vidi da je

$$\mathfrak{g} = \overline{\mathfrak{n}} \dotplus \mathfrak{m} \dotplus \mathfrak{a} \dotplus \mathfrak{n}. \tag{2.6}$$

Nadalje, kako je $\vartheta|\mathfrak{a} = -I_\mathfrak{a}$, očito je $\vartheta(\mathfrak{g}^\mu) = \mathfrak{g}^{-\mu}\ \forall \mu \in R(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$. Prema tome, vrijedi

$$\vartheta(\mathfrak{n}) = \overline{\mathfrak{n}}. \tag{2.7}$$

Propozicija 2.6.8. *Vrijedi*

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \dotplus \mathfrak{a} \dotplus \mathfrak{n}.$$

Dokaz: Neka je $q : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ projektor prostora $\mathfrak{g}$ na potprostor $\mathfrak{k}$ duž potprostora $\mathfrak{p}$. Iz definicije $\mathfrak{k}$ i $\mathfrak{p}$ imamo da je $q = \frac{1}{2}(I_{\mathfrak{g}} + \vartheta)$. Sada je $q(\mathfrak{g}) = \mathfrak{k}$ i $q(\mathfrak{a}) = \{0\}$. Nadalje, za $x \in \mathfrak{n}$ je $\vartheta(x) \in \overline{\mathfrak{n}}$, pa imamo

$$q(\vartheta(x)) = \frac{1}{2}(I_{\mathfrak{g}} + \vartheta)\vartheta(x) = \frac{1}{2}(\vartheta(x) + x) = q(x);$$

posebno, vrijedi $q(\mathfrak{n}) = q\left(\overline{\mathfrak{n}}\right)$. Prema tome, iz (2.6) i (2.7) slijedi da je $q(\overline{\mathfrak{n}} \dotplus \mathfrak{m}) = \mathfrak{k}$ i da je $q|\overline{\mathfrak{n}} \dotplus \mathfrak{m}$ injekcija (tj. izomorfizam sa $\overline{\mathfrak{n}} \dotplus \mathfrak{m}$ na $\mathfrak{k}$). Odatle je

$$\dim \mathfrak{k} + \dim\left(\mathfrak{a} \dotplus \mathfrak{n}\right) = \dim\left(\overline{\mathfrak{n}} \dotplus \mathfrak{m}\right) + \dim\left(\mathfrak{a} \dotplus \mathfrak{n}\right) = \dim \mathfrak{g}. \tag{2.8}$$

Neka je sada $x \in \mathfrak{k} \cap (\mathfrak{a} \dotplus \mathfrak{n})$ i neka su $h \in \mathfrak{a}$ i $y \in \mathfrak{n}$ takvi da je $x = h + y$. Tada je

$$0 = x - \vartheta(x) = h + y - \vartheta(h) - \vartheta(y) = 2h + y - \vartheta(y).$$

Međutim, prema (2.7) je $\vartheta(y) \in \overline{\mathfrak{n}}$, pa iz (2.6) slijedi da je $h = y = 0$, dakle, $x = 0$. Time je dokazano da je $\mathfrak{k} \cap (\mathfrak{a} \dotplus \mathfrak{n}) = \{0\}$, a odatle i iz (2.8) slijedi tvrdnja propozicije.

Rastav u propoziciji 2.6.8. zove se **Iwasawina dekompozicija Liejeve algebre $\mathfrak{g}$**. Dokazat ćemo sada **Iwasawinu dekompoziciju grupe G_0**. Neka su A_1 i N_1 povezane Liejeve podgrupe od G_0 s Liejevim algebrama $\mathfrak{a}$ i $\mathfrak{n}$.

Propozicija 2.6.9. *Preslikavanje množenja $A_1 \times N_1 \times K_0 \to G_0$, $(a, n, k) \mapsto ank$, je bianalitička bijekcija.*

Dokaz: Svi $h \in \mathfrak{a}$ su hermitski operatori na realnom unitarnom prostoru koji međusobno komutiraju. Odatle i iz tvrdnje (a) teorema 2.6.4. slijedi da je A_1 zatvorena podgrupa od G_0 i da je preslikavanje $h \mapsto \mathrm{e}^h$ bianalitička bijekcija sa $\mathfrak{a}$ na A_1.

Neka je sada $h_0 \in \mathfrak{a}'$ prije fiksirani element. Neka je $\{v_1, \ldots, v_n\}$ ortonormirana baza od $\mathbb{R}^n = M_{n,1}(\mathbb{R})$ sastavljena od svojstvenih vektora operatora h_0 i neka su $\mu_1, \ldots, \mu_n$ pripadne svojstvene vrijednosti od h_0, tako da je $h_0 v_j = \mu_j v_j$ za $j = 1, \ldots, n$. Možemo pretpostaviti da je numeracija takva da je $\mu_j \geq \mu_{j+1}$ za $j = 1, \ldots, n-1$. U odnosu na tu bazu elementi od $\mathfrak{n}$ imaju striktno gornje trokutaste matrice. Dokazat ćemo sada da je $A_1 N_1$ zatvorena podgrupa od G_0. Doista, to je očito podgrupa jer je grupa A_1 sadržana u normalizatoru grupe N_1. Nadalje, pretpostavimo da su nizovi $(a_j)_{j\in\mathbb{N}}$ u A_1 i $(n_j)_{j\in\mathbb{N}}$ u N_1 takvi da niz $(a_j n_j)_{j\in\mathbb{N}}$ konvergira prema $g \in G_0$. Budući da su dijagonalni elementi matrice $a_j n_j$ ujedno dijagonalni elementi dijagonalne matrice a_j, slijedi da niz $(a_j)_{j\in\mathbb{N}}$ konvergira prema nekom $a \in GL(n, \mathbb{R})$. No tada i niz $(n_j)_{j\in\mathbb{N}}$ konvergira prema nekom $n \in GL(n, \mathbb{R})$. Kako je G_R zatvorena podgrupa od $GL(n, \mathbb{R})$, slijedi da su $a, n \in G_R$. Nadalje, A_1 je zatvorena podgrupa od G_0, pa slijedi da je $a \in A_1$.

Matrica n je gornje trokutasta s jedinicama na dijagonali, jer su takve sve matrice n_j. Treba nam sada sljedeći opći rezultat o matricama:

Lema 2.6.10. *Neka je $N(n, \mathbb{R})$ grupa svih gornje trokutastih matrica u $GL(n, \mathbb{R})$ s jedinicama na dijagonali i $\mathfrak{n}(n, \mathbb{R})$ Liejeva algebra svih striktno gornje trokutastih matrica iz $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$. Tada je $A \mapsto \mathrm{e}^A$ bianalitička bijekcija sa $\mathfrak{n}(n, \mathbb{R})$ na $N(n, \mathbb{R})$. Inverzno je preslikavanje dano sa*

$$\log : B \mapsto \sum_{k\geq 1} \frac{1}{k}(B - I)^k.$$

Zadatak 2.6.5. *Dokažite lemu 2.6.10.*

Uputa: Gore definirano preslikavanje $\log : N(n, \mathbb{R}) \to \mathfrak{n}(n, \mathbb{R})$ je očito analitičko. Dokažite da je ono i lijevo i desno inverzno analitičkom preslikavanju $\exp : \mathfrak{n}(n, \mathbb{R}) \to N(n, \mathbb{R})$, $\exp A = \mathrm{e}^A$.

Iz leme 2.6.10. slijedi da je $n_j = \mathrm{e}^{x_j}$ za neke $x_j \in \mathfrak{n}$ i zbog bianalitičnosti i bijektivnosti preslikavanja $\exp : \mathfrak{n}(n,\mathbb{R}) \to N_1(n,\mathbb{R})$ slijedi da niz $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ konvergira prema nekoj matrici $x \in \mathfrak{n}(n,\mathbb{R})$ i da je $n = \mathrm{e}^x$. Budući da su svi $x_j \in \mathfrak{n}$, slijedi $x \in \mathfrak{n}$, dakle, $n \in N_1$. Time je dokazano da je A_1N_1 zatvorena podgrupa od G_0.

Označimo sada sa φ preslikavanje množenja $A_1 \times N_1 \times K_0 \to G_0$ iz iskaza propozicije i promatrajmo njegov diferencijal $T_{(a,n,k)}(\varphi) : \mathfrak{a} \times \mathfrak{n} \times \mathfrak{k} \to \mathfrak{g}$ u bilo kojoj točki $(a,n,k) \in A_1 \times N_1 \times K_0$.

Zadatak 2.6.6. *Dokažite da za $H \in \mathfrak{a}$, $X \in \mathfrak{n}$ i $Y \in \mathfrak{k}$ vrijedi*

$$T_{(a,n,k)}(\varphi)(H,X,Y) = aHnk + anXk + ankY.$$

Uputa: Uočite da je $(H,X,Y) = (H,0,0) + (0,X,0) + (0,0,Y)$ te računajte odvojeno $T_{(a,n,k)}(\varphi)(H,0,0)$, $T_{(a,n,k)}(\varphi)(0,X,0)$ i $T_{(a,n,k)}(\varphi)(0,0,Y)$.

Dakle, ako je $T_{(a,n,k)}(\varphi)(H,X,Y) = 0$, onda je

$$aHnk + anXk + ankY = 0.$$

Množenjem s lijeva sa $n^{-1}a^{-1}$ i zdesna sa k^{-1} dobivamo

$$n^{-1}Hn + X + kYk^{-1} = 0.$$

Lako se vidi da je $n^{-1}Hn \in \mathfrak{a} + \mathfrak{n}$, dakle, $n^{-1}Hn + X \in \mathfrak{a} + \mathfrak{n}$. Nadalje, $kYk^{-1} \in \mathfrak{k}$. Zbog direktnosti sume u propoziciji 2.6.8. slijedi da je $kYk^{-1} = 0$ i $n^{-1}Hn + X = 0$. Odatle je $Y = 0$ i $H + nXn^{-1} = 0$, a kako je $nXn^{-1} \in \mathfrak{n}$, iz direktnosti sume $\mathfrak{a} + \mathfrak{n}$ slijedi $H = 0$ i $X = 0$. Time smo dokazali da je diferencijal preslikavanja φ u svakoj točki izomorfizam sa $\mathfrak{a}\times\mathfrak{n}\times\mathfrak{k}$ na $\mathfrak{g}$. Odatle slijedi da je slika od φ otvorena u G_0. Kako je K_0 kompaktna podgrupa od G_0, a A_1N_1 je zatvorena podgrupa od G_0, slika od φ je i zatvorena u G_0. Dakle, slika $A_1N_1K_0$ preslikavanja φ je unija komponenata povezanosti grupe G_0. Međutim, $K_0 \subseteq A_1N_1K_0$, a po propoziciji 2.6.5. grupa K_0 siječe svaku komponentu povezanosti od G_0. Odatle slijedi da je $A_1N_1K_0 = G_0$, tj. preslikavanje φ je surjekcija sa $A_1 \times N_1 \times K_0$ na G_0.

Vidjeli smo da je diferencijal tog preslikavanja u svakoj točki izomorfizam tangencijalnih prostora, pa treba još samo dokazati da je to preslikavanje injektivno. Pretpostavimo da su $a, a' \in A_1$, $n, n' \in N_1$ i $k, k' \in K_0$ takvi da je $ank = a'n'k'$. Tada je $(a'n')^{-1}an = k'k^{-1}$. U matričnog prikaza u prije izabranoj bazi lijeva je strana gornje trokutasta s pozitivnom dijagonalom, a desna ortogonalna. Slijedi da su obje strane jednake jediničnoj matrici. Dakle, $k' = k$ i $a'n' = an$. Ponovo zbog prikaza u izabranoj bazi slijedi $a' = a$, dakle i $n' = n$. Time je dokazana injektivnost preslikavanja φ, odnosno, propozicija 2.6.9. je u potpunosti dokazana.

Ove ćemo rezultate sada prenijeti na grupu G. Neka je $p : G \to G_0$ (konačno) natkrivanje. Stavimo $K = p^{-1}(K_0)$. Naravno, kako je K_0 kompaktna podgrupa od G_0 i $p : G \mapsto G_0$ je epimorfizam s konačnom jezgrom, K je kompaktna podgrupa od G. Neka su A i N povezane Liejeve podgrupe od G s Liejevim algebrama $\mathfrak{a}$ i $\mathfrak{n}$.

Teorem 2.6.11. (*a*) *Preslikavanje $K \times \mathfrak{p} \to G$, $(k,X) \mapsto k(\exp X)$, je bianalitička bijekcija.*

(*b*) *Preslikavanje množenja $A \times N \times K \to G$, $(a,n,k) \mapsto ank$, je bianalitička bijekcija.*

Dokaz: Iz propozicije 2.6.5. i 2.6.9. slijedi da su oba preslikavanja surjektivna, a kako je diferencijal natkrivanja p u svakoj točki identiteta na $\mathfrak{g}$, iz dokaza tih dviju propozicija slijedi i da su diferencijali tih dvaju preslikavanja u svakoj točki izomorfizmi tangencijalnioh prostora. Dakle, treba još samo dokazati da su dva preslikavanja injektivna.

(a) Neka su $k, k' \in K$ i $x, x' \in \mathfrak{p}$ takvi da je $k(\exp_G x) = k'(\exp_G x')$. Vrijedi $p(\exp_G y) = \mathrm{e}^y$ $\forall y \in \mathfrak{g}$. Stoga primjenom natkrivanja p na obje strane jednakosti $k(\exp_G x) = k'(\exp_G x')$ dobivamo $p(k)\mathrm{e}^x = p(k')\mathrm{e}^{x'}$. Sada iz propozicije 2.6.5. slijedi $x = x'$, a odatle je i $k = k'$.

(b) Prije svega uočimo da su restrikcije $p|A : A \to A_1$ i $p|N : N \to N_1$ izomorfizmi grupa. Za restrikciju $p|A$ to slijedi iz činjenice da je ona natkrivanje i da je A_1 jednostavno povezana. I druga je restrikcija $p|N$ natkrivanje pa treba još samo uočiti da je i grupa N_1 jednostavno povezana. U tu svrhu za prije fiksirani $h_0 \in \mathfrak{a}$ stavimo $a_t = \exp th_0$, $t \in \mathbb{R}$. Kako je Liejeva algebra $\mathfrak{n}$ razapeta svojstvenim vektorima operatora $ad\, h_0$ sa striktno pozitivnim svojstvenim vrijednostima i kako je $Ad\, a_t = \mathrm{e}^{t\, ad\, h_0}$ zaključujemo da je

$$\lim_{t \to -\infty} (Ad\, a_t)x = 0 \qquad \forall x \in \mathfrak{n}.$$

Nadalje, vrijedi $a_t(\exp x)a_t^{-1} = \exp((Ad\, a_t)x)$, pa slijedi

$$\lim_{t \to -\infty} a_t(\exp x)a_t^{-1} = e \qquad \forall x \in \mathfrak{n}.$$

Kako je $\{\exp x;\ x \in \mathfrak{n}\}$ okolina jedinice u N_1, ona generira grupu N_1 pa zaključujemo da vrijedi

$$\lim_{t \to \infty} a_t n a_t^{-1} = e \qquad \forall n \in N_1.$$

Jednostavna je posljedica toga da je svaka petlja u N_1 homotopna točki, dakle, i grupa N_1 je jednostavno povezana.

Prema tome, restrikcije $p|A : A \to A_1$ i $p|N : N \to N_1$ su izomorfizmi grupa. Pretpostavimo li sada da su $a, a' \in A$, $n, n' \in N$ i $k, k' \in K$ takvi da je $ank = a'n'k'$, primjenom homomorfizma p nalazimo da je $p(a)p(n)p(k) = p(a')p(n')p(k')$. Prema propoziciji 2.6.9. vrijedi $p(a) = p(a')$ i $p(n) = p(n')$. Zbog dokazanog slijedi da je $a = a'$ i $n = n'$, dakle, i $k = k'$.

Dekompozicija u tvrdnji (a) prethodnog teorema zove se **Cartanova dekompozicija** grupe G, a ona u tvrdnji (b) je **Iwasawina dekompozicija** grupe G. Ovi rezultati ovise o izboru Cartanovog potprostora $\mathfrak{a}$ i o izboru skupa $P \subset R(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$. Istražit ćemo sada tu ovisnost.

Propozicija 2.6.12. *Neka su $\mathfrak{a}_1$ i $\mathfrak{a}_2$ Cartanovi potprostori od $\mathfrak{p}$. Tada postoji $k \in K$ takav da je $(Ad\, k)\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{a}_2$.*

Dokaz: Neka su $h_1 \in \mathfrak{a}_1$ i $h_2 \in \mathfrak{a}_2$ izabrani na način kao što je ranije izabran $h_0 \in \mathfrak{a}$. Tada je

$$\mathfrak{a}_1 = \{x \in \mathfrak{p},\ [x, h_1] = 0\} \qquad \text{i} \qquad \mathfrak{a}_2 = \{x \in \mathfrak{p};\ [x, h_2] = 0\}.$$

Definiramo $f : K \to \mathbb{R}$ sa $f(k) = B((Ad\, k)h_1, h_2)$, $k \in K$. Budući da je grupa K kompaktna, postoji $k \in K$ takav da je $f(k) \leq f(k')$ $\forall k' \in K$. Neka je $y \in \mathfrak{k}$. Tada je $t \mapsto f((\exp ty)k)$ funkcija sa $\mathbb{R}$ u $\mathbb{R}$ klase C^∞ koja ima minimum u točki $t = 0$. Slijedi

$$0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} B((Ad\,(\exp ty))(Ad\, k)h_1, h_2)\bigg|_{t=0} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} B(\mathrm{e}^{t\, ad\, y}(Ad\, k)h_1, h_2)\bigg|_{t=0} =$$

$$= B((ad\, y)(Ad\, k)h_1, h_2) = B([y, (Ad\, k)h_1], h_2) = B(y, [(Ad\, k)h_1, h_2]).$$

Vrijedi $[(Ad\, k)h_1, h_2] \in [\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] \subseteq \mathfrak{k}$. Budući da je restrikcija $B|\mathfrak{k} \times \mathfrak{k}$ nedegenerirana forma i da je $y \in \mathfrak{k}$ bio proizvoljan, slijedi $[(Ad\, k)h_1, h_2] = 0$. To znači da je $(Ad\, k)\mathfrak{a}_1 \subseteq \mathfrak{a}_2$, a kako su $(Ad\, k)\mathfrak{a}_1$ i $\mathfrak{a}_2$ Cartanovi potprostori od $\mathfrak{p}$, slijedi $(Ad\, k)\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{a}_2$.

Razmotrimo sada pitanje izbora skupa $P \subseteq R(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$. Podskup P od $R(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$ bio je izabran tako da je fiksiran neki h_0 iz skupa

$$\mathfrak{a}' = \{h \in \mathfrak{a};\ \mu(h) \neq 0\ \forall \mu \in R(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})\}$$

i zatim je definiran

$$P = \{\mu \in R(\mathfrak{g}, \mathfrak{a});\ \mu(h_0) > 0\}.$$

Tako definiran skup P ne ovisi o h_0 nego samo o komponenti povezanosti skupa $\mathfrak{a}'$. Te komponente povezanosti zovemo **Weylove komore** u $\mathfrak{a}$. Stavimo

$$M = C_K(\mathfrak{a}) = \{k \in K;\ (Ad\,k)|\mathfrak{a} = I_{\mathfrak{a}}\}, \qquad M' = N_K(\mathfrak{a}) = \{k \in K;\ (Ad\,k)\mathfrak{a} = \mathfrak{a}\},$$

$$M_0 = C_{K_0}(\mathfrak{a}) = \{k \in K_0;\ k|\mathfrak{a} = I_{\mathfrak{a}}\}, \qquad M_0' = N_{K_0}(\mathfrak{a}) = \{k \in K;\ k\mathfrak{a} = \mathfrak{a}\}.$$

Tada su M_0 i M_0' (odnosno, M i M') zatvorene podgrupe od K_0 (odnosno, od K), dakle, te su grupe kompaktne. Nadalje, stavimo $W(G, A) = M/M' \simeq M_0/M_0'$ i tu grupu shvaćamo kao podgrupu od $O(\mathfrak{a})$.

Skalarni produkt na $\mathfrak{g}$ bio je definiran sa

$$(x|y) = B(x, y^*) = \operatorname{tr} xy^*, \qquad x, y \in \mathfrak{g}.$$

U odnosu na taj skalarni produkt Cartanova dekompozicija $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \dotplus \mathfrak{p}$ je ortogonalna. Restrikcija $(\,\cdot\,|\,\cdot\,)$ na $\mathfrak{a} \times \mathfrak{a}$ je skalarni produkt na Cartanovom potprostoru $\mathfrak{a}$ i pomoću njega definiramo izomorfizam $\lambda \mapsto t_\lambda$ sa $\mathfrak{a}^*$ na $\mathfrak{a}$ ovako

$$(h|t_\lambda) = \lambda(h) \qquad \forall h \in \mathfrak{a}.$$

Pomoću tog izomorfizma skalarni se produkt prenosi sa $\mathfrak{a}$ na dualni prostor $\mathfrak{a}^*$:

$$(\lambda|\mu) = (t_\lambda|t_\mu), \qquad \lambda, \mu \in \mathfrak{a}^*.$$

Za $\lambda \in R(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$ definiramo $h_\lambda \in \mathfrak{a}$ sa

$$h_\lambda = \frac{2}{(\lambda|\lambda)} t_\lambda.$$

Propozicija 2.6.13. *Neka je $\lambda \in R(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$ i $x_\lambda \in \mathfrak{g}^\lambda \setminus \{0\}$. Tada vrijedi*

(a) $[x_\lambda, \vartheta(x_\lambda)] = -(x_\lambda|x_\lambda)t_\lambda$.

(b) $\mathfrak{s}_\lambda = span_{\mathbb{R}}\{x_\lambda, \vartheta(x_\lambda), t_\lambda\}$ *je Liejeva podalgebra od $\mathfrak{g}$ i postoji izomorfizam $\varphi : \mathfrak{s}_\lambda \to \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ takav da je*

$$\varphi(e_\lambda) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \varphi(e_{-\lambda}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \varphi(h_\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

gdje su

$$e_\lambda = \sqrt{\frac{2}{(\lambda|\lambda)(x_\lambda|x_\lambda)}}\, x_\lambda \qquad i \qquad e_{-\lambda} = -\vartheta(e_\lambda).$$

(c) Uz oznake iz (b) je $k = e^{\frac{\pi}{2} ad(e_\lambda - e_{-\lambda})} \in M_0'$ i restrikcija $k|\mathfrak{a}$ je ortogonalna refleksija prostora $\mathfrak{a}$ u odnosu na hiperravninu $\mathcal{H}_\lambda = \operatorname{Ker} \lambda$; posebno, $kh_\lambda = -h_\lambda$.

Dokaz: (a) Vrijedi

$$\vartheta(x_\lambda) \in \vartheta\left(\mathfrak{g}^\lambda\right) = \mathfrak{g}^{-\lambda} \qquad \Longrightarrow \qquad [x_\lambda, \vartheta(x_\lambda)] \in \mathfrak{g}^0 = \mathfrak{m} \dotplus \mathfrak{a}.$$

Nadalje,

$$\vartheta([x_\lambda, \vartheta(x_\lambda)]) = \vartheta(x_\lambda), x_\lambda] = -[x_\lambda, \vartheta(x_\lambda)],$$

pa slijedi

$$[x_\lambda, \vartheta(x_\lambda)] \in (\mathfrak{m} \dotplus \mathfrak{a}) \cap \mathfrak{p} = \mathfrak{a}.$$

Za proizvoljan $h \in \mathfrak{a}$ je $\vartheta(h) = -h$, pa zbog invarijantnosti forme B i zbog $[h, \vartheta(x_\lambda)] = -\lambda(h)\vartheta(x_\lambda)$ imamo redom

$$\begin{aligned}([x_\lambda, \vartheta(x_\lambda)]|h) &= -B([x_\lambda, \vartheta(x_\lambda)], \vartheta(h)) = B([x_\lambda, \vartheta(x_\lambda)], h) = \\ &= B(x_\lambda, [\vartheta(x_\lambda), h]) = \lambda(h)B(x_\lambda, \vartheta(x_\lambda)) = B(t_\lambda, h)B(x_\lambda, \vartheta(x_\lambda)) = \\ &= B(B(x_\lambda, \vartheta(x_\lambda))t_\lambda, h) = -B(B(x_\lambda, \vartheta(x_\lambda))t_\lambda, \vartheta(h)) = (B(x_\lambda, \vartheta(x_\lambda))t_\lambda|h).\end{aligned}$$

Kako je $(\,\cdot\,|\,\cdot\,)$ skalarni produkt na $\mathfrak{a}$, tvrdnja (a) je dokazana.

(b) Imamo $\lambda(t_\lambda) = (t_\lambda|t_\lambda) = (\lambda|\lambda)$, dakle, $\lambda(h_\lambda) = 2$. Prema tome, kako su $e_\lambda \in \mathfrak{g}^\lambda$ i $e_{-\lambda} \in \mathfrak{g}^{-\lambda}$, vrijedi

$$[h_\lambda, e_\lambda] = 2e_\lambda \qquad \text{i} \qquad [h_\lambda, e_{-\lambda}] = -2e_{-\lambda}.$$

Nadalje, iz (a) slijedi

$$[e_\lambda, e_{-\lambda}] = -\frac{2}{(\lambda|\lambda)(x_\lambda|x_\lambda)}[x_\lambda, \vartheta(x_\lambda)] = \frac{2}{(\lambda|\lambda)}t_\lambda = h_\lambda.$$

Time je dokazana tvrdnja (b).

(c) Za $h \in \mathfrak{a}$ je

$$(ad\,(e_\lambda - e_{-\lambda}))h = [e_\lambda, h] - [e_{-\lambda}, h] = -\lambda(h)e_\lambda - \lambda(h)e_{-\lambda}.$$

Prema tome, ako je $h \in \mathcal{H}_\lambda = \operatorname{Ker}\lambda$, imamo

$$(ad\,(e_\lambda - e_{-\lambda}))h = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad kh = \mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}ad(e_\lambda - e_{-\lambda})}h = h.$$

Za $h = h_\lambda$ je $\lambda(h_\lambda) = 2$, dakle,

$$(ad\,(e_\lambda - e_{-\lambda}))h_\lambda = -2(e_\lambda + e_{-\lambda}).$$

Odatle je

$$(ad\,(e_\lambda - e_{-\lambda}))^2 h_\lambda = -2[e_\lambda - e_{-\lambda}, e_\lambda + e_{-\lambda}] = -4[e_\lambda, e_{-\lambda}] = -4h_\lambda.$$

Indukcijom po n nalazimo da je za svaki $n \in \mathbb{Z}_+$

$$(ad\,(e_\lambda - e_{-\lambda}))^{2n}h_\lambda = (-4)^{2n}h_\lambda = (-1)^n 2^{2n}h_\lambda, \qquad (ad\,(e_\lambda - e_{-\lambda}))^{2n+1}h_\lambda = (-1)^{n+1}2^{2n+1}(e_\lambda + e_{-\lambda}).$$

Dakle,

$$kh_\lambda = \mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}ad(e_\lambda - e_{-\lambda})}h_\lambda = \sum_{n\in\mathbb{Z}_+}\frac{\pi^{2n}}{(2n)!2^{2n}}(ad\,(e_\lambda - e_{-\lambda}))^{2n}h_\lambda + \sum_{n\in\mathbb{Z}_+}\frac{\pi^{2n+1}}{(2n+1)!2^{2n+1}}(ad\,(e_\lambda - e_{-\lambda}))^{2n+1}h_\lambda =$$

$$= \sum_{n\in\mathbb{Z}_+}(-1)^n\frac{\pi^{2n}}{(2n)!}h_\lambda - \sum_{n\in\mathbb{Z}_+}(-1)^n\frac{\pi^{2n+1}}{(2n+1)!}(e_\lambda + e_{-\lambda}) = (\cos\pi)h_\lambda - (\sin\pi)(e_\lambda + e_{-\lambda}) = -h_\lambda.$$

Time je i tvrdnja (c) dokazana.

Centar $Z(\mathfrak{g})$ Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ je $\vartheta-$invarijantan, pa vrijedi $Z(\mathfrak{g}) = Z(\mathfrak{g}) \cap \mathfrak{k} \oplus Z(\mathfrak{g}) \cap \mathfrak{p}$. Očito je $Z(\mathfrak{g}) \cap \mathfrak{k} \subseteq \mathfrak{m}$ i $Z(\mathfrak{g}) \cap \mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{a}$. Pisat ćemo $Z(\mathfrak{g}) \cap \mathfrak{p} = \mathfrak{s}$. Taj se potprostor od $\mathfrak{a}$ zove **standardna split−komponenta** od $\mathfrak{g}$. Pripadna povezana podgrupa od A, tj. $S = \exp\mathfrak{s}$, zove se **standardna split−komponenta grupe** G. Nadalje, definiramo ${}^0\mathfrak{a} = \mathfrak{a} \cap [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ i ${}^0A = \exp{}^0\mathfrak{a}$.

Teorem 2.6.14. *Uz uvedene oznake vrijedi:*

(*a*)

$$\mathfrak{s} = \bigcap_{\lambda\in R(\mathfrak{g},\mathfrak{a})} \operatorname{Ker}\lambda, \qquad \mathfrak{a} = \mathfrak{s} \oplus {}^0\mathfrak{a} \qquad i \qquad {}^0\mathfrak{a} = span_{\mathbb{R}}\,\{h_\lambda;\ \lambda\in R(\mathfrak{g},\mathfrak{a})\}.$$

(*b*) $R(\mathfrak{g},\mathfrak{a})$ *je sistem korijena u realnom unitarnom prostoru* $span_{\mathbb{R}} R(\mathfrak{g},\mathfrak{a})$, *tj. vrijedi*

(1) *Ako je* σ_λ *ortogonalna refleksija prostora* $span_{\mathbb{R}} R(\mathfrak{g},\mathfrak{a})$ *u odnosu na hiperravninu* $\lambda^\perp$, *onda je* $\sigma_\lambda R(\mathfrak{g},\mathfrak{a}) = R(\mathfrak{g},\mathfrak{a})$ $\forall\lambda\in R(\mathfrak{g},\mathfrak{a})$.

(2) *Za bilo koje* $\lambda,\mu\in R(\mathfrak{g},\mathfrak{a})$ *je*

$$2\frac{(\mu|\lambda)}{(\lambda|\lambda)}\in\mathbb{Z}.$$

(*c*) *Grupa* $W(G,A)$ *djeluje prosto tranzitivno na skupu* $\mathcal{C}$ *svih Weylovih komora u* $\mathfrak{a}$, *i njezino kontragredijentno djelovanje na prostoru* $span_{\mathbb{R}} R(\mathfrak{g},\mathfrak{a})$ *inducira izomorfizam grupe* $W(G,A)$ *na Weylovu grupu sistema korijena* $R(\mathfrak{g},\mathfrak{a})$.

Skica dokaza: Za $\lambda\in R(\mathfrak{g},\mathfrak{a})$, $x\in\mathfrak{g}^\lambda\setminus\{0\}$ i $h\in\mathfrak{s}$ je $0=[h,x]=\lambda(h)x$, dakle, $h\in\operatorname{Ker}\lambda$. Prema tome, vrijedi

$$\mathfrak{s}\subseteq\bigcap_{\lambda\in R(\mathfrak{g},\mathfrak{a})}\operatorname{Ker}\lambda.$$

Obratno, ako je $h\in\mathfrak{a}$ takav da je $\lambda(h)=0$ $\forall\lambda\in R(\mathfrak{g},\mathfrak{a})$, onda iz (2.5) slijedi da je $h\in Z(\mathfrak{g})$, dakle, $h\in\mathfrak{s}$. Time je dokazana prva jednakost u tvrdnji (*a*). Odatle slijedi:

$$h_\lambda^\perp = t_\lambda^\perp = \operatorname{Ker}\lambda \quad \forall\lambda\in R(\mathfrak{g},\mathfrak{a}) \qquad\Longrightarrow\qquad span_{\mathbb{R}}\,\{h_\lambda;\ \lambda\in R(\mathfrak{g},\mathfrak{a})\}^\perp = \bigcap_{\lambda\in R(\mathfrak{g},\mathfrak{a})}\operatorname{Ker}\lambda = \mathfrak{s}.$$

Odatle je

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{s}\oplus span_{\mathbb{R}}\{h_\lambda;\ \lambda\in R(\mathfrak{g},\mathfrak{a})\}.$$

No kako je očito $\mathfrak{s}\cap{}^0\mathfrak{a}\subseteq Z(\mathfrak{g})\cap[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]=\{0\}$ i kako je prema tvrdnji (*b*) propozicije 2.6.13. $h_\lambda=[e_\lambda,e_{-\lambda}]\in\mathfrak{a}\cap[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]={}^0\mathfrak{a}$, slijede i druge dvije jednakosti u tvrdnji (*a*).

Za $k\in M_0'$, $\lambda\in R(\mathfrak{g},\mathfrak{a})$, $x\in\mathfrak{g}^\lambda\setminus\{0\}$ i $h\in\mathfrak{a}$ imamo $k^{-1}h\in\mathfrak{a}$ i

$$[h,kx]=k[k^{-1}h,x]=\lambda(k^{-1}h)kx.$$

To pokazuje da je $h\mapsto\lambda(k^{-1}h)$ element skupa $R(\mathfrak{g},\mathfrak{a})$, i ako ga označimo sa μ, onda je $k\mathfrak{g}^\lambda=\mathfrak{g}^\mu$. Prema tome, grupa $W(G,A)$ ostavlja invarijantnim uniju hiperravnina $\operatorname{Ker}\lambda$, $\lambda\in R(\mathfrak{g},\mathfrak{a})$, dakle, i komplement te unije. To pokazuje da $W(G,A)$ djeluje na skupu $\mathcal{C}$ Weylovih komora u $\mathfrak{a}$.

Neka je $\lambda\in R(\mathfrak{g},\mathfrak{a})$ i neka je $\sigma\in W(G,A)$ klasa elementa $k\in M_0'$ iz tvrdnje (*c*) propozicije 2.6.13. Prema toj tvrdnji kontragredijentno djelovanje σ na $\mathfrak{a}^*$ je upravo ortogonalna refleksija prostora $\mathfrak{a}^*$ u odnosu na hiperravninu $\lambda^\perp$. Pema prethodnom odlomku ta refleksija ostavlja invarijantnim skup $R(\mathfrak{g},\mathfrak{a})$. Dakle, skup $R(\mathfrak{g},\mathfrak{a})$ zadovoljava svojstvo (1) sistema korijena. Dokažimo da vrijedi i svojstvo (2). Za izabrani $\lambda\in R(\mathfrak{g},\mathfrak{a})$ promatrajmo Liejevu podalgebru $\mathfrak{s}_\lambda$ iz tvrdnje (*b*) propozicije 2.6.13. Tada je $ad|\mathfrak{s}_\lambda$ reprezentacija Liejeve algebre $\mathfrak{s}_\lambda$ na realnom prostoru $\mathfrak{g}$. Kompleksifikacijom i algebre i prostora dolazimo do reprezentacije kompleksne TDS$-$algebre $\mathfrak{s}_\lambda^{\mathbb{C}}$ s kanonskom bazom $\{h_\lambda,e_\lambda,e_{-\lambda}\}$ na kompleksnom prostoru $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$. Prema korolaru 2.3.3. spektar operatora $ad\,h_\lambda$, a to je $\{0\}\cup\{\mu(h_\lambda);\ \mu\in R(\mathfrak{g},\mathfrak{a})\}$, sadržan je u $\mathbb{Z}$. Međutim,

$$\mu(h_\lambda)=\frac{2}{(\lambda|\lambda)}\mu(t_\lambda)=2\frac{(\mu|\lambda)}{(\lambda|\lambda)}.$$

Time je dokazano i svojstvo (2).

Prema dokazanom grupa $W(G,A)$ kontragredijentno djeluje na $span_{\mathbb{R}}R(\mathfrak{g},\mathfrak{a})$ i to djelovanje uključuje sve ortogonalne refleksije σ_λ za $\lambda \in R(\mathfrak{g},\mathfrak{a})$. Dakle, tako promatrana grupa $W(G,A)$ sadrži Weylovu grupu sistema korijena $R(\mathfrak{g},\mathfrak{a})$. Sada se dokazuje da je djelovanje grupe $W(G,A)$ na skupu $\mathcal{C}$ Weylovih komora ne samo tranzitivno, nego i prosto tranzitivno (vidi odjeljak 4.7. u RPLA). Odatle slijedi da je ovako shvaćena grupa $W(G,A)$ jednaka Weylovoj grupi sistema korijena $R(\mathfrak{g},\mathfrak{a})$.

Navest ćemo sada još neke definicije i **bez dokaza niz strukturnih rezultata o realnim reduktivnim grupama i nekim njihovim podgrupama.** U ostatku ovog odjeljka G je realna reduktivna grupa s Liejevom algebrom $\mathfrak{g}$, ϑ njena Cartanova involucija, $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \dotplus \mathfrak{p}$ pripadna Cartanova dekompozicija, K maksimalna kompaktna podgrupa od G s Liejevom algebrom $\mathfrak{k}$, $\mathfrak{a}$ Cartanov potprostor od $\mathfrak{p}$, P neki izbor skupa pozitivnih korijena u $R(\mathfrak{g},\mathfrak{a})$, $\mathfrak{n}$ pripadna nilpotentna podalgebra od $\mathfrak{g}$, tako da imamo Iwasawinu dekompoziciju $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \dotplus \mathfrak{a} \dotplus \mathfrak{n}$. Nadalje, $A = \exp \mathfrak{a}$ i $N = \exp \mathfrak{n}$ su zatvorene povezane i jednostavno povezane podgrupe od G s Liejevim algebrama $\mathfrak{a}$ i $\mathfrak{n}$, tako da imamo Iwasawinu dekompoziciju grupe $G = ANK$. Napomenimo da je $AN = NA$ pa imamo ekvivalentnu dekompoziciju $G = NAK$. Nadalje, invertiranjem dobivamo i dekompozicije $G = KAN$ i $G = KNA$. Sve se te dekompozicije od G zovu Iwasawine. Zadržavamo i oznake

$$\mathfrak{m} = C_{\mathfrak{k}}(\mathfrak{a}) = \{x \in \mathfrak{k};\ [x,h] = 0\ \ \forall h \in \mathfrak{a}\},$$

$$M = C_K(\mathfrak{a}) = \{k \in K;\ (Ad\,k)|\mathfrak{a} = I_{\mathfrak{a}}\}, \qquad M' = N_K(\mathfrak{a}) = \{k \in K;\ (Ad\,k)\mathfrak{a} = \mathfrak{a}\}.$$

Imamo $Z(\mathfrak{g}) = Z(\mathfrak{g}) \cap \mathfrak{k} \dotplus \mathfrak{s}$, gdje je $\mathfrak{s} = Z(\mathfrak{g}) \cap \mathfrak{p}$ split−komponenta od $\mathfrak{g}$ i $S = \exp \mathfrak{s}$ je split−komponenta grupe G. Uveli smo i oznake

$${}^0\mathfrak{a} = \mathfrak{a} \cap [\mathfrak{g},\mathfrak{g}] = span_{\mathbb{R}}\{h_\lambda;\ \lambda \in R(\mathfrak{g},\mathfrak{a})\} \qquad \text{i} \qquad {}^0A = \exp {}^0\mathfrak{a}.$$

Sa $X(G)$ označavamo skup svih neprekidnih homomorfizama grupe G u multiplikativnu grupu $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ i definiramo

$${}^0G = \{g \in G;\ \chi(g)^2 = 1\ \ \forall \chi \in X(G)\} = \bigcap_{\chi \in X(G)} \mathrm{Ker}\,|\chi|.$$

${}^0G$ je zatvorena podgrupa od G. Ona sadrži komutatorsku podgrupu (generiranu svim komutatorima $aba^{-1}b^{-1}$, $a,b \in G$), čija je Liejeva algebra $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$, a sadrži i svaku kompaktnu podgrupu od G. Posebno, ona sadrži maksimalnu kompaktnu podgrupu K.

Stavimo

$$G^+ = \{g \in G;\ (Ad\,g)|Z(\mathfrak{g}) = I_{Z(\mathfrak{g})}\}.$$

G^+ je naravno zatvorena podgrupa od G. Njena je Liejeva algebra

$$\mathfrak{g}^+ = \{x \in \mathfrak{g};\ (ad\,x)|Z(\mathfrak{g}) = 0\} = \{x \in \mathfrak{g};\ [x,y] = 0\ \forall y \in Z(\mathfrak{g})\} = \mathfrak{g},$$

pa je G^+ i otvorena podgrupa od G. Budući da se uvjeti koji definiraju podgrupu G^+ mogu iskazati pomoću jednakosti nekih matričnih elemenata operatora $Ad\,g$ nuli, odnosno, jedinici, i vrijedi $\vartheta(G^+) = G^+$, očito je G^+ realna reduktivna grupa. Za $s \in S$ imamo $s = \exp x$ za neki $x \in \mathfrak{s} \subseteq Z(\mathfrak{g})$, pa je očito $(Ad\,s)|Z(\mathfrak{g}) = e^{ad\,x}|Z(\mathfrak{g}) = I_{Z(\mathfrak{g})}$, dakle, $s \in G^+$. Prema tome, S je podgrupa od G^+.

Sa G^0 označavamo komponentu povezanosti jedinice u grupi G. Budući da grupa K siječe svaku komponentu povezanosti grupe G, vrijedi $G = G^0K = KG^0$.

Nadalje, sa $\mathfrak{g}^1$ označavamo ortogonalni komplement od $\mathfrak{s}$ u $\mathfrak{g}$ u odnosu na nedegeneriranu formu B. Prema tvrdnji (a) teorema 2.6.14. lako se vidi da je $\mathfrak{g}^1 = Z(\mathfrak{g}) \cap \mathfrak{k} \oplus [\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$. Sa G^1 označavamo povezanu Liejevu podgrupu od G s Liejevom algebrom $\mathfrak{g}^1$.

Stavimo sada

$$\tilde{\mathfrak{m}} = C_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{a}) = \{x \in \mathfrak{g};\ [x,h] = 0\ \ \forall h \in \mathfrak{a}\} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{m} \qquad \text{i} \qquad \tilde{M} = C_G(\mathfrak{a}) = \{g \in G;\ (Ad\, g)|\mathfrak{a} = I_{\mathfrak{a}}\}.$$

Tada je $\tilde{M}$ zatvorena podgrupa od G s Liejevom algebrom $\tilde{\mathfrak{m}}$. Definicija podgrupe $\tilde{M}$ je očito algebarske vrste pa je $\tilde{M}$ realna algebarska grupa.

Uz uvedene oznake vrijede sljedeće dekompozicije:

Teorem 2.6.15. (*a*) *Množenje* $(s,g) \mapsto sg$ *je izomorfizam Liejevih grupa sa* $S \times {}^0G$ *na* G.

(*b*) *Množenje* $(s,g) \mapsto sg$ *je izomorfizam Liejevih grupa sa* $S \times {}^0G^+$ *na* G^+.

(*c*) *Množenja* $(s,g) \mapsto sg$ *je izomorfizam Liejevih grupa sa* $S \times G^1$ *na* G^0.

(*d*) *Množenje* $(a,n,k) \mapsto ank$ *je bianalitička bijekcija sa* ${}^0A \times N \times K$ *na* ${}^0G$.

(*e*) A *je split–komponenta grupe* $\tilde{M}$ *i* ${}^0\tilde{M} = \tilde{M} \cap K = M$. *Posebno, moženje*$(a,m) \mapsto am$ *je izomorfizam Liejevih grupa sa* $A \times M$ *na* $\tilde{M}$.

Razmotrimo sada realne algebarske grupe iz primjera od **1.** do **9.**

Zadatak 2.6.7. *Dokažite da za* $G = GL(n,\mathbb{R})$ *vrijedi*

$$G^+ = G, \qquad \mathfrak{s} = \mathbb{R}I_n, \qquad S = \{cI_n;\ c > 0\} \qquad i \qquad {}^0G = \{g \in G;\ \det g = \pm 1\}.$$

Zadatak 2.6.8. *Dokažite da za* $G = GL(n,\mathbb{C})$ *vrijedi*

$$G^+ = G, \qquad \mathfrak{s} = \mathbb{R}I_n, \qquad S = \{cI_n;\ c > 0\} \qquad i \qquad {}^0G = \{g \in G;\ |\det g| = 1\}.$$

Nije teško pokazati da za sve preostale primjere **2.** i **4.**–**9.** vrijedi $\mathfrak{s} = \{0\}$ i $G^+ = {}^0G = G$.

Zadatak 2.6.9. *Neka je* $J \in GL(2n,\mathbb{R})$ *definiran kao u primjeru* **3.** *i neka je* $G = GSp(n,\mathbb{R})$ *podgrupa svih* $g \in GL(2n,\mathbb{R})$ *takvih da je* gJg^* *skalarni multipl od* J. *Dokažite da je* G *realna reduktivna grupa i da vrijedi*

$$G^+ = G, \qquad \mathfrak{s} = \mathbb{R}I_{2n}, \qquad S = \{cI_{2n};\ c > 0\} \qquad i \qquad {}^0G = \{g \in G;\ gJg^* = \pm J\}.$$

Neka je sada $\mathfrak{t}$ maksimalna komutativna podalgebra od $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{h}_0 = \mathfrak{t} \oplus \mathfrak{a}$ i $\mathfrak{h} = (\mathfrak{h}_0)^{\mathbb{C}}$. Lako se vidi da je tada $\mathfrak{h}_0$ Cartanova podalgebra od $\mathfrak{g}$ i, naravno, njena kompleksifikacija $\mathfrak{h}$ je Cartanova podalgebra od $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$. Neka je $R = R\left(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}, \mathfrak{h}\right)$ sistem korijena od $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ u odnosu na $\mathfrak{h}$. Tada je očito

$$R(\mathfrak{g},\mathfrak{a}) = \{\alpha|\mathfrak{a};\ \alpha \in R\} \setminus \{0\}.$$

Budući da su restrikcije svih korijena iz R na $\mathfrak{a}$ realne, a na $\mathfrak{t}$ čisto imaginarne, slijedi da su restrikcije svih korijena iz R na realnoj formi $i\mathfrak{t} \oplus \mathfrak{a}$ od $\mathfrak{h}$ realne; stoga uz oznake iz odjeljka 2.1. vrijedi

$$\mathfrak{h}_{\mathbb{R}} = (i\mathfrak{t} \oplus \mathfrak{a}) \cap \left[\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}, \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}\right].$$

Neka je kao i prije

$$\mathfrak{a}' = \{h \in \mathfrak{a};\ \mu(h) \neq 0\ \ \forall \mu \in R(\mathfrak{g},\mathfrak{a})\}$$

i izaberimo $h_1 \in \mathfrak{a}' \cap \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$. Tada je, naravno, $h_1 \neq 0$ pa ga možemo dopuniti do baze $\{h_1, \ldots, h_r\}$ od $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$. Uvedimo u R leksikografski uređaj u odnosu na tu bazu: za $\alpha, \beta \in R$ je $\alpha \leq \beta$ ako je ili

$\alpha = \beta$ ili za neki $j \in \{1, \ldots, r-1\}$ vrijedi $\alpha(h_i) = \beta(h_i)$ za $1 \le i < j$ i $\alpha(h_j) < \beta(h_j)$. Neka je R_+ skup pozitivnih korijena iz R u odnosu na taj uređaj. Jasno je da je

$$P = \{\mu \in R(\mathfrak{g}, \mathfrak{a});\ \mu(h_1) > 0\}$$

jedan mogući skup pozitivnih korijena iz $R(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$ i u odnosu na taj skup definiramo $\mathfrak{n}$ i $\overline{\mathfrak{n}}$. Neka je Δ baza sistema korijena R pridružena skupu pozitivnih korijena R_+ (dakle, Δ je skup svih $\alpha \in R_+$ takvih da ne postoje $\beta, \gamma \in R_+$ takvi da je $\alpha = \beta + \gamma$) i neka je Σ baza sistema korijena $R(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$ pridružena skupu pozitivnih korijena P. Stavimo

$$F_0 = \{\alpha \in \Delta;\ \alpha|\mathfrak{a} = 0\}.$$

Tada vrijedi

$$\Sigma = \{\alpha|\mathfrak{a};\ \alpha \in \Delta \setminus F_0\}.$$

Doista, ako je $\mu \in \Sigma$ i ako je $\alpha \in R$ takav da je $\alpha|\mathfrak{a} = \mu$, onda možemo pisati $\alpha = \beta_1 + \cdots + \beta_p$, gdje su $\beta_1, \ldots, \beta_p \in \Delta$. Međutim, svaki $\beta_i|\mathfrak{a}$ je ili 0 ili element od P. Prema tome, samo jedan član β_i u prikazu korijena α ima restrikciju na $\mathfrak{a}$ različitu od nule (inače ne bi vrijedilo $\mu \in \Sigma$). Time je tvrdnja dokazana.

Napomenimo još da je Σ linearno nezavisan podskup od $\mathfrak{a}^*$; doista, Σ je baza sistema korijena $R(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$ pa je Σ baza potprostora $span_{\mathbb{R}}\, R(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$ od $\mathfrak{a}^*$.

Neka je sada F podskup od Σ. Stavimo

$$\mathfrak{a}_F = \{h \in \mathfrak{a};\ \mu(h) = 0\ \ \forall \mu \in F\}, \qquad A_F = \exp \mathfrak{a}_F,$$

$$\tilde{\mathfrak{m}}_F = C_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{a}_F) = \{x \in \mathfrak{g};\ [a, h] = 0\ \ \forall h \in \mathfrak{a}_F\}, \qquad \tilde{M}_F = \{g \in G;\ (Ad\, g)h = h\ \ \forall h \in \mathfrak{a}_F\}.$$

Očito je $\tilde{M}_F$ zatvorena podgrupa od G s Liejevom algebrom $\tilde{\mathfrak{m}}_F$, a A_F je zatvorena povezana i jednostavno povezana podgrupa od G s Liejevom algebrom $\mathfrak{a}_F$. Nadalje, stavimo

$$P(F) = \{\alpha \in P;\ \alpha|\mathfrak{a}_F \ne 0\} \qquad \text{i} \qquad \mathfrak{n}_F = \sum_{\mu \in P(F)} \dot{+}\, \mathfrak{g}^\mu$$

i neka je N_F povezana Liejeva podgrupa od G s Liejevom algebrom $\mathfrak{n}_F$. Napokon, stavimo $P_F = \tilde{M}_F N_F = \{mn;\ m \in \tilde{M}_F,\ n \in N_F\}$.

Teorem 2.6.16. *Uz uvedene oznake vrijedi:*

(*a*) *$\tilde{M}_F$ je realna reduktivna grupa i A_F je njena standardna split–komponenta u odnosu na restrikciju Cartanove involucije ϑ.*

(*b*) *Ako je $G = G^+$ onda je $\tilde{M}_F = \tilde{M}_F^+$.*

(*c*) *$\mathfrak{n}_F$ je nilpotentna Liejeva algebra i $ad\, \mathfrak{n}_F$ se sastoji od nilpotentnih operatora na $\mathfrak{g}$.*

(*d*) *N_F je zatvorena jednostavno povezana podgrupa od G i $\exp|\mathfrak{n}_F$ je bianalitička bijekcija sa $\mathfrak{n}_F$ na N_F.*

(*e*) *P_F je zatvorena podgrupa od G i množenje $(m, n) \mapsto mn$ je bianalitička bijekcija sa $\tilde{M}_F \times N_F$ na P_F.*

(*f*) *Za $M_F = {}^0\tilde{M}_F$ množenje $(m, a, n) \mapsto man$ je bianalitička bijekcija sa $M_F \times A_F \times N_F$ na P_F.*

Podgrupe P_F, $F \subseteq \Sigma$, zovu se **standardne paraboličke podgrupe** od G. Dekompozicija $P_F = M_F A_F N_F$ zove se **Langlandsova dekompozicija** od P_F. **Paraboličke podgrupe** od G su sve one podgrupe koje su konjugirane nekoj standardnoj paraboličkoj podgrupi. Dakle, **minimalne paraboličke podgrupe** su podgrupe konjugirane podgrupi $P_\emptyset = \tilde{M}_\emptyset N_\emptyset$. Primijetimo da je $A_\emptyset = A$, $\tilde{M}_\emptyset = \tilde{M} = MA$, $M_\emptyset = M$ i $N_\emptyset = N$.

Za realnu reduktivnu grupu G kažemo da je **unutarnjeg tipa** ako je $Ad\,G \subseteq Int\left(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}\right)$.

Teorem 2.6.17. *Ako je G unutarnjeg tipa, onda je za svaki $F \subseteq \Sigma$ i grupa $\tilde{M}_F$ unutarnjeg tipa. Nadalje, vrijedi $G = P_F K^0$, gdje je K^0 komponenta povezanosti jedinice u kompaktnoj grupi K.*

Promatrajmo sada minimalnu standardnu paraboličku podgrupu $P = P_\emptyset$. Za svaki element s Weylove grupe $W(\mathfrak{g}, \mathfrak{a}) = W(G, A) = M'/M$ fiksirajmo $s^* \in M' = N_K(\mathfrak{a})$ takav da je $s = s^*M$.

Teorem 2.6.18. (**Bruhatova dekompozicija**) *Ako je grupa G unutarnjeg tipa, elementi s^*, $s \in W(G, A)$, su predstavnici svih duplih $P : P-$klasa u G. Drugim riječima, G je disjunktna unija skupova Ps^*P, $s \in W(G, A)$.*

Važna posljedica ovog teorema je

Teorem 2.6.19. (**Geljfand−Naimarkova dekompozicija**) *Ako je $G = G^+$ onda je za svaki $F \subseteq \Sigma$ množenje $(\overline{n}, m) \to \overline{n}m$ je bianalitička bijekcija sa $\vartheta(N_F) \times P_F$ na otvoren gust podskup od G, čiji komplement ima Haarovu mjeru nula.*

Promatrat ćemo sada Cartanove podalgebre od $\mathfrak{g}$. $\mathfrak{h}$ je Cartanova podalgebra od $\mathfrak{g}$ ako i samo ako je njena kompleksifikacija $\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}$ Cartanova podalgebra kompleksne reduktivne Liejeve algebre $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$. Definiramo polinome D_j na $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ ovako

$$\det(TI - ad\,x) = \sum_{j \geq 0} D_j(x) T^j.$$

Neka je ℓ rang kompleksne reduktivne Liejeve algebre $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$, tj. dimenzija bilo koje njene Cartanove podalgebre. Tada je $D_j = 0$ za $j < \ell$ i $D = D_\ell \neq 0$, posebno, $D|\mathfrak{g} \neq 0$. Stavimo

$$\mathfrak{g}' = \{x \in \mathfrak{g};\ D(x) \neq 0\}.$$

To je otvoren gust podskup od $\mathfrak{g}$. Elementi od $\mathfrak{g}'$ zovu se **regularni elementi** Liejeve algebre $\mathfrak{g}$.

Teorem 2.6.20. *Uz uvedene oznake vrijedi:*

(*a*) *Za svaki $x \in \mathfrak{g}'$ operator $ad\,x$ je poluprost i $C_{\mathfrak{g}}(x) = \{h \in \mathfrak{g};\ [h, x] = 0\}$ je Cartanova podalgebra od $\mathfrak{g}$.*

(*b*) *Ako je $x \in \mathfrak{g}$ takav da je operator $ad\,x$ poluprost, onda je $C_{\mathfrak{g}}(x)$ Liejeva podalgebra od $\mathfrak{g}$ koja je reduktivna u $\mathfrak{g}$ i ona sadrži Cartanovu podalgebru od $\mathfrak{g}$.*

(*c*) *Ako je $\mathfrak{h}$ Cartanova podalgebra od $\mathfrak{g}$, onda je $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}' \neq \emptyset$, i za svaki $x \in \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}'$ je $\mathfrak{h} = C_{\mathfrak{g}}(x)$.*

(*d*) *Ako je $\mathfrak{h}$ Cartanova podalgebra od $\mathfrak{g}$, postoji $\varphi \in Int(\mathfrak{g})$ takav da je Cartanova podalgebra $\varphi(\mathfrak{h})$ $\vartheta-$invarijantna.*

Za $\vartheta-$invarijantnu Cartanovu podalgebru $\mathfrak{h}$ od $\mathfrak{g}$ kažemo da je **fundamentalna** ili **maksimalno kompaktna** ako je $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{k}$ maksimalna komutativna podalgebra od $\mathfrak{k}$, a **maksimalno vektorska** ako je $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}$ Cartanov potprostor od $\mathfrak{p}$. Proizvoljna Cartanova podalgebra od $\mathfrak{g}$ zove se fundamentalna (odnosno, maksimalno vektorska) ako je njoj $Int(\mathfrak{g})-$konjugirana $\vartheta-$invarijantna Cartanova podalgebra takva.

Propozicija 2.6.21. *Fundamentalne i maksimalno vektorske $\vartheta-$invarijantne Cartanove podalgebre postoje. Svake dvije fundamentalne (odnosno, maksimalno vektorske) $\vartheta-$invarijantne Cartanove podalgebre su $Ad\,K^0-$konjugirane. Svake dvije fundamentalne (odnosno, maksimalno vektorske) Cartanove podalgebre od $\mathfrak{g}$ su $Int(\mathfrak{g})-$konjugirane.*

Primijetimo da je $\mathfrak{t} \mapsto C_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{t})$ bijekcija sa skupa svih Cartanovih podalgebri od $\mathfrak{k}$ na skup svih fundamentalnih $\vartheta-$invarijantnih podalgebri od $\mathfrak{g}$. Nadalje, za fiksirani Cartanov potprostor $\mathfrak{a}$ preslikavanje $\mathfrak{t} \mapsto i\mathfrak{t} \oplus \mathfrak{a}$ je bijekcija sa skupa svih maksimalnih komutativnih podalgebri od $\mathfrak{m}$ na skup svih maksimalno vektorskih $\vartheta-$invarijantnih Cartanovih podalgebri $\mathfrak{h}$ od $\mathfrak{g}$, takvih da je $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{p} = \mathfrak{a}$.

Za proizvoljnu Cartanovu podalgebru $\mathfrak{h}$ od $\mathfrak{g}$ korijen $\alpha \in R\left(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}, \mathfrak{h}^{\mathbb{C}}\right)$ zove se **realan korijen** ako je $\alpha(\mathfrak{h}) \subseteq \mathbb{R}$. Pokazuje se da vrijedi:

Propozicija 2.6.22. *Cartanova podalgebra $\mathfrak{h}$ je fundamentalna ako i samo ako u $R\left(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}, \mathfrak{h}^{\mathbb{C}}\right)$ nema realnih korijena.*

Za standardnu paraboličku podgrupu P_F od G kažemo da je **kaspidalna** ako Liejeva algebra $\mathfrak{m}_F = {}^0\tilde{\mathfrak{m}}_F$ od M_F ima Cartanovu podalgebru $\mathfrak{t}_F$ koja je sadržana u $\mathfrak{k}$. U tom slučaju stavljamo $\mathfrak{h}_F = \mathfrak{t}_F \dotplus \mathfrak{a}_F$.

Teorem 2.6.23. *Neka je $\mathfrak{h}$ Cartanova podalgebra od $\mathfrak{g}$. Tada postoje $\varphi \in Int(\mathfrak{g})$ i kaspidalna standardna parabolička podgrupa P_F od G takvi da je $\varphi(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}_F$.*

Skica dokaza: Možemo pretpostaviti da je $\mathfrak{h}$ $\vartheta-$invarijantna i da je $\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{a}$. Neka je

$$R_0 = \{\alpha \in R = R\left(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}, \mathfrak{h}^{\mathbb{C}}\right);\ \alpha|\mathfrak{a}_1 \neq 0\}$$

i neka je $h \in \mathfrak{a}_1$ takav da je $\alpha(h) \neq 0\ \forall\alpha \in R_0$. Za neki $s \in W(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$ tada je $\beta(sh) > 0\ \forall\beta \in P$. Neka je $k \in M' \subseteq K$ predstavnik elementa $s \in W(\mathfrak{g}, \mathfrak{a}) = W(G, A) = M'/M$. Sada zamijenimo $\mathfrak{h}$ sa $(Ad\,k)\mathfrak{h}$ i tvrdnja slijedi za $F = \{\alpha \in \Sigma;\ \alpha(h) = 0\}$.

Neka je $\mathfrak{h}$ Cartanova podalgebra od $\mathfrak{g}$. Tada se podgrupa

$$C_G(\mathfrak{h}) = \{g \in G;\ (Ad\,g)h = h\ \forall h \in \mathfrak{h}\}$$

zove **Cartanova podgrupa** od G.

Teorem 2.6.24. *Standardna parabolička podgrupa P_F je kaspidalna ako i samo ako grupa M_F ima kompaktnu Cartanovu podgrupu T_F. U tom je slučaju $H_F = T_F A_F$ Cartanova podgrupa od G. Za svaku Cartanovu podgrupu H od G postoje $g \in G^0$ i standardna kaspidalna parabolička podgrupa P_F takvi da je $gHg^{-1} = H_F$.*

Poglavlje 3

HARISH–CHANDRINI MODULI

3.1 Chevalleyevi teoremi o restrikcijama invarijanata

U daljnjem je G realna reduktivna grupa, $\mathfrak{g}$ njena Liejeva algebra, ϑ Cartanova involucija, $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \dotplus \mathfrak{p}$ pripadna Cartanova dekompozicija, K maksimalna kompaktna podgrupa od G s Liejevom algebrom $\mathfrak{k}$. Za realan konačnodimenzionalan prostor V sa $\mathcal{P}(V)$ označavamo komutativnu unitalnu algebru svih kompleksnih polinomijalnih funkcija na V; to je unitalna podalgebra od $\mathbb{C}^V$ generirana sa V^*. Grupa K djeluje na prostoru $\mathfrak{p}$ pa djeluje i automorfizmima na algebri $\mathcal{P}(\mathfrak{p})$:

$$(kf)(x) = f\left((Ad\, k^{-1})x\right), \qquad k \in K, \quad x \in \mathfrak{p}, \quad f \in \mathcal{P}(\mathfrak{p}).$$

Sa $\mathcal{P}(\mathfrak{p})^K$ označavamo podalgebru od $\mathcal{P}(\mathfrak{p})$ svih $K-$invarijanata:

$$\mathcal{P}(\mathfrak{p})^K = \{f \in \mathcal{P}(\mathfrak{p});\ kf = f\ \ \forall k \in K\}.$$

Neka je $\mathfrak{a}$ Cartanov potprostor od $\mathfrak{p}$ i neka je kao u odjeljku 2.6. $W = W(\mathfrak{g}, \mathfrak{a}) = M'/M$ Weylova grupa sistema korijena $R(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$; pri tome su

$$M = C_K(\mathfrak{a}) = \{k \in K;\ (Ad\, K)|\mathfrak{a} = I_{\mathfrak{a}}\}, \qquad M' = N_K(\mathfrak{a}) = \{k \in K;\ (Ad\, K)\mathfrak{a} = \mathfrak{a}\}.$$

Grupa W djeluje na prostoru $\mathfrak{a}$, dakle, djeluje automorfizmima na algebri $\mathcal{P}(\mathfrak{a})$:

$$(sf)(h) = f\left(s^{-1}h\right), \qquad s \in W, \quad h \in \mathfrak{a}, \quad f \in \mathcal{P}(\mathfrak{a}).$$

Sa $\mathcal{P}(\mathfrak{a})^W$ označavamo podalgebru od $\mathcal{P}(\mathfrak{a})$ svih $W-$invarijanata:

$$\mathcal{P}(\mathfrak{a})^W = \{f \in \mathcal{P}(\mathfrak{a});\ sf = f\ \ \forall s \in W\}.$$

Za potprostor W realnog konačnodimenzionalnog prostora V sa $Res_{V/W}$ označavamo unitalni homomorfizam sa $\mathcal{P}(V)$ u $\mathcal{P}(W)$ definiran pomoću restrikcije:

$$Res_{V/W}\, f = f|W, \qquad f \in \mathcal{P}(V).$$

Očito je $Res_{V/W}$ epimorfizam i njegova je jezgra $\{f \in \mathcal{P}(V);\ f|W \equiv 0\}$. Ako je $\{e_1, \ldots, e_n\}$ baza od V takva da je $\{e_1, \ldots, e_k\}$ baza od W i ako je $\{e_1^*, \ldots, e_n^*\}$ dualna baza od V^*, onda se lako vidi da je $\mathrm{Ker}\, Res_{V/W}$ ideal u $\mathcal{P}(V)$ generiran sa $\{e_{k+1}^*, \ldots, e_n^*\}$.

Teorem 3.1.1. *Ako je grupa G unutarnjeg tipa, onda je $Res_{\mathfrak{p}/\mathfrak{a}}|\mathcal{P}(\mathfrak{p})^K$ izomorfizam algebre $\mathcal{P}(\mathfrak{p})^K$ na algebru $\mathcal{P}(\mathfrak{a})^W$.*

Dokaz ćemo podijeliti u nekoliko koraka.

(1) *$Res_{\mathfrak{p}/\mathfrak{a}}\left(\mathcal{P}(\mathfrak{p})^K\right) \subseteq \mathcal{P}(\mathfrak{a})^W$.*

Doista, kako je $W = M'/M$, za $s \in W$ postoji $k \in M' \subseteq K$ takav da je $s = (Ad\,k)|\mathfrak{a}$. Stoga za $f \in \mathcal{P}(\mathfrak{p})^K$ i za svaki $h \in \mathfrak{a}$ imamo

$$[s(Res_{\mathfrak{p}/\mathfrak{a}}\,f)](h) = f\left(s^{-1}h\right) = f\left((Ad\,k^{-1})h\right) = (kf)(h) = f(h) = (Res_{\mathfrak{p}/\mathfrak{a}}\,f)(h).$$

Time je tvrdnja **(1)** dokazana.

(2) *Restrikcija $Res_{\mathfrak{p}/\mathfrak{a}}|\mathcal{P}(\mathfrak{p})^K$ je injekcija.*

Neka je $f \in \mathcal{P}(\mathfrak{p})^K$ u jezgri preslikavanja $Res_{\mathfrak{p}/\mathfrak{a}}$, tj. $f(h) = 0\ \forall h \in \mathfrak{a}$. Neka je $x \in \mathfrak{p}$ proizvoljan. Tada je x sadržan u nekom Cartanovom potprostoru od $\mathfrak{p}$, pa prema propoziciji 2.6.12. postoji $k \in K$ takav da je $(Ad\,k^{-1})\,x \in \mathfrak{a}$. Stoga je

$$0 = f\left((Ad\,k^{-1})x\right) = (kf)(x) = f(x).$$

Kako je $x \in \mathfrak{p}$ bio proizvoljan, slijedi $f = 0$. Time je tvrdnja **(2)** dokazana.

(3) *Ako su $h_1, h_2 \in \mathfrak{a}$ takvi da je $(Ad\,k)h_1 = h_2$ za neki $k \in K$, onda postoji $s \in W$ takav da je $sh_1 = h_2$.*

Uočimo da su $\mathfrak{a}$ i $(Ad\,k)\mathfrak{a}$ maksimalne komutativne podalgebre u $C_{\mathfrak{g}}(h_2) \cap \mathfrak{p}$. $C_{\mathfrak{g}}(h_2)$ je Liejeva algebra grupe $C_G(h_2)$, a ova je realna reduktivna grupa koja je $\vartheta-$invarijantna. Dakle, Cartanova dekompozicija od $C_{\mathfrak{g}}(h_2)$ je

$$C_{\mathfrak{g}}(h_2) = C_{\mathfrak{g}}(h_2) \cap \mathfrak{k} \dotplus C_{\mathfrak{g}}(h_2) \cap \mathfrak{p}$$

i maksimalna kompaktna podgrupa od $C_G(h_2)$ s Liejevom algebrom $C_{\mathfrak{g}}(h_2) \cap \mathfrak{k}$ je $C_G(h_2) \cap K$. $(Ad\,k)\mathfrak{a}$ i $\mathfrak{a}$ su Cartanovi potprostori od $C_{\mathfrak{g}}(h_2) \cap \mathfrak{p}$, pa prema propoziciji 2.6.12. primijenjenoj na grupu $C_G(h_2)$ postoji $k' \in C_G(h_2) \cap K$ takav da je $(Ad\,k')(Ad\,k)\mathfrak{a} = \mathfrak{a}$. Tada je $k'k \in M'$ i za pripadni element $s \in W$ vrijedi

$$sh_1 = (Ad\,k')(Ad\,k)h_1 = (Ad\,k')h_2 = h_2.$$

Time je tvrdnja **(3)** dokazana.

(4) *Ako su $h_1, h_2 \in \mathfrak{a}$ takvi da je $Wh_1 \cap Wh_2 = \emptyset$, onda postoji neprekidna funkcija $\varphi : \mathfrak{p} \to [0,1]$ takva da je*

$$\varphi(h_1) = 0, \qquad \varphi(h_2) = 1 \qquad \text{i} \qquad \varphi((Ad\,k)x) = \varphi(x) \quad \forall k \in K \quad \text{i} \quad \forall x \in \mathfrak{p}.$$

Doista, prema tvrdnji **(3)** iz pretpostavke $Wh_1 \cap Wh_2 = \emptyset$ slijedi $(Ad\,K)h_1 \cap (Ad\,K)h_2 = \emptyset$. Podskupovi $(Ad\,K)h_1$ i $(Ad\,K)h_2$ od $\mathfrak{p}$ su kompaktni, dakle, zatvoreni, pa prema Urisohnovoj lemi postoji neprekidna funkcija $\psi : \mathfrak{p} \to [0,1]$ takva da je $\psi|(Ad\,K)h_1 \equiv 0$ i $\psi|(Ad\,K)h_2 \equiv 1$. Sada definiramo neprekidnu funkciju $\varphi : \mathfrak{p} \to [0,1]$ sa

$$\varphi(x) = \int_K \psi((Ad\,k)x)\mathrm{d}\nu(k), \qquad x \in \mathfrak{p},$$

gdje je ν normirana Haarova mjera na K. Tada je očito $\varphi(h_1) = 0$ i $\varphi(h_2) = 1$, a zbog desne invarijantnosti mjere ν za svaki $k' \in K$ i svaki $x \in \mathfrak{p}$ imamo

$$\varphi((Ad\,k')x) = \int_K \psi((Ad\,k)(Ad\,k')x)\mathrm{d}\nu(k) = \int_K \psi((Ad\,kk')x)\mathrm{d}\nu(k) = \int_K \psi((Ad\,k)x)\mathrm{d}\nu(k) = \varphi(x).$$

Time je tvrdnja **(4)** dokazana.

(5) *Ako su $h_1, h_2 \in \mathfrak{a}$ takvi da je $Wh_1 \cap Wh_2 = \emptyset$, onda postoji $f \in \mathcal{P}(\mathfrak{p})^K$ takav da je $f(h_1) \neq f(h_2)$.*

Neka je $C = (Ad\,K)h_1 \cup (Ad\,K)h_2$. To je kompaktan podskup od $\mathfrak{p}$. Neka je φ neprekidna funkcija iz tvrdnje **(4)**. Prema Stone−Weierstrassovom teoremu postoji $g \in \mathcal{P}(\mathfrak{p})$ takav da je

$$|g(x) - \varphi(x)| < \frac{1}{2} \qquad \forall x \in C.$$

Definiramo $f : \mathfrak{p} \to \mathbb{C}$ sa

$$f(x) = \int_K g((Ad\,k)x)\mathrm{d}\nu(k), \qquad x \in \mathfrak{p}.$$

Zadatak 3.1.1. *Dokažite da je f polinomijalna funkcija na $\mathfrak{p}$.*

Zbog $K-$invarijantnosti mjere ν slijedi da je $f \in \mathcal{P}(\mathfrak{p})^K$. Napokon, za $i = 1, 2$ imamo

$$f(h_i) - \varphi(h_i) = \int_K g((Ad\,k)h_i)\mathrm{d}\nu(k) - \varphi(h_i) = \int_K [g((Ad\,k)h_i) - \varphi((Ad\,k)h_i)]\mathrm{d}\nu(k),$$

dakle,

$$|f(h_i) - \varphi(h_i)| \le \int_K |g((Ad\,k)h_i) - \varphi((Ad\,k)h_i)|\mathrm{d}\nu(k) < \frac{1}{2}.$$

Stoga je

$$|f(h_1)| = |f(h_1) - \varphi(h_1)| < \frac{1}{2} \qquad \text{i} \qquad |f(h_2) - 1| = |f(h_2) - \varphi(h_2)| < \frac{1}{2},$$

a odatle slijedi da je $f(h_1) \neq f(h_2)$. Time je i tvrdnja **(5)** dokazana.

(6) Neka je F polje razlomaka integralnog prstena $\mathcal{P}(\mathfrak{a})$ i L polje razlomaka integralnog prstena $\mathcal{J} = Res_{\mathfrak{p}/\mathfrak{a}}\left(\mathcal{P}(\mathfrak{p})^K\right)$. Budući da je $\mathcal{J}$ potprsten od $\mathcal{P}(\mathfrak{a})$, L se identificira s potpoljem od F. Neka su $D_j \in \mathcal{P}(\mathfrak{p})$ definirani kao koeficijenti svojstvenog polinoma operatora $ad_{\mathfrak{g}}\,x$, $x \in \mathfrak{p}$:

$$\det(TI_{\mathfrak{g}} - ad_{\mathfrak{g}}\,x) = \sum_j D_j(x)T^j, \qquad x \in \mathfrak{p}.$$

Za $k \in K$ i $x \in \mathfrak{p}$ vrijedi

$$\sum_j (kD_j)(x)T^j = \sum_j D_j((Ad\,k^{-1})x)T^j = \det(TI_{\mathfrak{g}} - ad_{\mathfrak{g}}\,(Ad\,k^{-1})x) =$$

$$= \det(TI_{\mathfrak{g}} - (Ad\,k)^{-1}(ad_{\mathfrak{g}}\,x)(Ad\,k)) = \det(TI_{\mathfrak{g}} - ad_{\mathfrak{g}}\,x) = \sum_j D_j(x)T^j.$$

Prema tome, vrijedi $kD_j = D_j\ \forall k \in K$ i $\forall j$. Dakle, polinomi D_j su elementi od $\mathcal{P}(\mathfrak{p})^K$. Stavimo $d_j = D_j|\mathfrak{a} \in \mathcal{J}$ i neka je $P \in L[T]$ polinom s koeficijentima d_j :

$$P(T) = \sum_j d_j T^j.$$

Za $h \in \mathfrak{a}$ operator $ad_{\mathfrak{g}}\,h$ je dijagonalizabilan i pripadni svojstveni rastav prostora $\mathfrak{g}$ je

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{m} \dotplus \mathfrak{a} \dotplus \sum_{\mu \in R(\mathfrak{g},\mathfrak{a})} \dotplus\, \mathfrak{g}^{\mu};$$

pri tome je

$$ad_{\mathfrak{g}}\,h|(\mathfrak{m} \dotplus \mathfrak{a}) = 0 \qquad \text{i} \qquad ad_{\mathfrak{g}}\,h|\mathfrak{g}^{\mu} = \mu(h)I_{\mathfrak{g}^{\mu}} \quad \text{za} \quad \mu \in R(\mathfrak{g},\mathfrak{a}).$$

Prema tome je

$$\sum_j d_j(h)T^j = \sum_j D_j(h)T^j = \det(TI_{\mathfrak{g}} - ad_{\mathfrak{g}}\, h) = T^{\dim\,\mathfrak{m}+\dim\,\mathfrak{a}} \prod_{\mu\in R(\mathfrak{g},\mathfrak{a})} (T-\mu(h))^{\dim\,\mathfrak{g}^{\mu}}, \qquad h\in\mathfrak{a}.$$

Dakle, dobivamo razlaganje polinoma $P \in L[T]$ nad poljem $F \supseteq \mathcal{P}(\mathfrak{a}) \supseteq R(\mathfrak{g},\mathfrak{a})$:

$$P(T) = T^{\dim\,\mathfrak{m}+\dim\,\mathfrak{a}} \prod_{\mu\in R(\mathfrak{g},\mathfrak{a})} (T-\mu)^{\dim\,\mathfrak{g}^{\mu}}.$$

To znači da polje F sadrži polje razlaganja polinoma P. Polje F generirano je nad $\mathbb{C}$, dakle, i nad L, sa $\mathfrak{a}^*$. Prema tvrdnji (a) teorema 2.6.14. vrijedi

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{s} \oplus {}^0\mathfrak{a}, \qquad \text{gdje su} \quad \mathfrak{s} = \bigcap_{\mu\in R(\mathfrak{g},\mathfrak{a})} \mathrm{Ker}\,\mu \quad \text{i} \quad {}^0\mathfrak{a} = span_{\mathbb{R}}\,\{h_\mu;\ \mu\in R(\mathfrak{g},\mathfrak{a})\}. \tag{3.1}$$

Stoga je

$$\mathfrak{a}^* = \mathfrak{s}^* \oplus span_{\mathbb{R}}\, R(\mathfrak{g},\mathfrak{a}),$$

gdje je dualni prostor $\mathfrak{s}^*$ od $\mathfrak{s}$ identificiran s potprostorom od $\mathfrak{a}^*$ u skladu s rastavom $\mathfrak{a} = \mathfrak{s} \oplus {}^0\mathfrak{a}$ tako da stavimo $\mu|{}^0\mathfrak{a} = 0$ za $\mu \in \mathfrak{s}$. Prema tome, polje F generirano je nad poljem L sa $\mathfrak{s}^* \cup R(\mathfrak{g},\mathfrak{a})$.

Svaki $\mu \in \mathfrak{s}^*$ definira homomorfizam χ_μ grupe $S = \exp\,\mathfrak{s}$ u multiplikativnu grupu $\mathbb{R}^*_+$:

$$\chi_\mu(\exp\,h) = \mathrm{e}^{\mu(h)}, \qquad h\in\mathfrak{s}.$$

Prema tvrdnji (a) teorema 2.6.15. χ_μ proširuje se do elementa skupa $X(G)$ koji također označavamo sa χ_μ :

$$\chi_\mu(sg) = \chi_\mu(s), \qquad s\in S, \quad g\in {}^0G.$$

Prema tvrdnji (d) teorema 2.6.15. vrijedi ${}^0G = {}^0ANK$. Posebno, $K \subseteq \mathrm{Ker}\,\chi_\mu$. Za $\mu \in \mathfrak{s}^*$ sa $\tilde{\mu}$ označimo linearan funkcional na $\mathfrak{p}$ definiran sa

$$\tilde{\mu}|\mathfrak{a} = \mu, \qquad \tilde{\mu}|\mathfrak{a}^{\perp} = 0,$$

gdje je $\mathfrak{a}^\perp$ ortogonalni komplement od $\mathfrak{a}$ u $\mathfrak{p}$. Definiramo sada $\chi_{\tilde{\mu}} : G \to \mathbb{R}^*_+$ sa

$$\chi_{\tilde{\mu}}(k\exp\,x) = \mathrm{e}^{\tilde{\mu}(x)}, \qquad k\in K, \quad x\in\mathfrak{p}.$$

Tvrdimo da je tada $\chi_{\tilde{\mu}} = \chi_\mu$. Doista, za $s \in S$ je $s = \exp\,h$ za neki $h \in \mathfrak{s} \subseteq \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}$, pa je

$$\chi_{\tilde{\mu}}(s) = \mathrm{e}^{\tilde{\mu}(h)} = \mathrm{e}^{\mu(h)} = \chi_\mu(s).$$

Za $y \in {}^0\mathfrak{a} \dotplus \mathfrak{a}^\perp$ je $\tilde{\mu}(y) = 0$, pa je $\chi_{\tilde{\mu}}(\exp\,y) = 1$. Prema (3.1) za proizvoljan $x \in \mathfrak{p}$ je $x = h + y$ za neke $h \in \mathfrak{s}$ i $y \in {}^0\mathfrak{a} \dotplus \mathfrak{a}^\perp$, a kako je $\mathfrak{s}$ sadržano u centru $Z(\mathfrak{g})$ Liejeve algebre $\mathfrak{g}$, imamo $\exp\,x = (\exp\,h)(\exp\,y)$. Tada je $\exp\,y \in {}^0G$, pa imamo redom

$$\chi_{\tilde{\mu}}(\exp\,x) = \mathrm{e}^{\tilde{\mu}(x)} = \mathrm{e}^{\mu(h)+\tilde{\mu}(y)} = \mathrm{e}^{\mu(h)} = \chi_\mu(\exp\,h) =$$

$$= \chi_\mu(\exp\,h)\chi_\mu(\exp\,y) = \chi_\mu((\exp\,h)(\exp\,y)) = \chi_\mu(\exp\,x).$$

Dakle, za $x \in \mathfrak{p}$ i $k \in K$ je

$$\chi_{\tilde{\mu}}(k\exp\,x) = \chi_{\tilde{\mu}}(\exp\,x) = \chi_\mu(\exp\,x) = \chi_\mu(k\exp\,x).$$

Time je dokazano da je $\chi_{\tilde{\mu}} = \chi_\mu$ i, posebno, $\chi_{\tilde{\mu}}$ je homomorfizam grupe G u multiplikativnu grupu $\mathbb{R}_+^*$. Stoga za $k \in K$, $x \in \mathfrak{p}$ i $\mu \in \mathfrak{s}^*$ imamo

$$\mathrm{e}^{\tilde{\mu}((Ad\, k)x)} = \chi_{\tilde{\mu}}(\exp\,(Ad\, k)x) = \chi_{\tilde{\mu}}(k(\exp\, x)k^{-1}) = \chi_{\tilde{\mu}}(\exp\, x) = \mathrm{e}^{\tilde{\mu}(x)}.$$

Odatle je

$$\tilde{\mu}((Ad\, k)x) = \tilde{\mu}(x) \qquad \forall x \in \mathfrak{p} \quad \text{i} \quad \forall k \in K.$$

To pokazuje da je $\tilde{\mu} \in \mathcal{P}(\mathfrak{p})^K$, a odatle je $\mu = \tilde{\mu}|\mathfrak{a} \in \mathcal{J} \subseteq L$. Time smo dokazali da je polje F nad poljem L generirano sa $R(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$. Drugim riječima, F je jednako polju razlaganja polinoma $P \in L[T]$. To znači da je F Galoisovo proširenje polja L, a tada je

$$L = F^{Gal(F/L)} = \{f \in F;\ \sigma f = f\ \forall \sigma \in Gal(F/L)\},$$

gdje je $Gal(F/L)$ Galoisova grupa proširenja F polja L :

$$Gal(F/L) = \{\sigma \in Aut(F);\ \sigma f = f\ \forall f \in L\}.$$

Svaki element $\sigma \in Gal(F/L)$ permutira korijene polinoma P i ostavlja po fiksnima elemente od $\mathfrak{s}^*$, pa zaključujemo da je $\sigma(\mathfrak{a}^*) = \mathfrak{a}^*$. Odatle slijedi $\sigma(\mathcal{P}(\mathfrak{a})) = \mathcal{P}(\mathfrak{a})\ \ \forall \sigma \in Gal(F/L)$.

Označimo sada sa U grupu svih automorfizama unitalne algebre $\mathcal{P}(\mathfrak{a})$ koji ostavljaju elemente od $\mathcal{J}$ fiksnima:

$$U = \{\sigma \in Aut(\mathcal{P}(\mathfrak{a}));\ \sigma f = f\ \forall f \in \mathcal{J}\}.$$

Svaki automorfizam σ prstena $\mathcal{P}(\mathfrak{a})$ jedinstveno se proširuje do automorfizma $\tilde{\sigma}$ polja F i za $\sigma \in U$ je $\tilde{\sigma} \in Gal(F/L)$. Prema tome, vrijedi

$$\mathcal{J} \subseteq \{f \in \mathcal{P}(\mathfrak{a});\ \sigma f = f\ \forall \sigma \in U\} = \mathcal{P}(\mathfrak{a}) \cap \{f \in F;\ \tilde{\sigma}\, f = f\ \forall \sigma \in U\} \subseteq \mathcal{P}(\mathfrak{a}) \cap L = \mathcal{J}.$$

Stoga je

$$\mathcal{J} = \{f \in \mathcal{P}(\mathfrak{a});\ \sigma f = f\ \forall \sigma \in U\}. \tag{3.2}$$

Za $\sigma \in U$ i $h \in \mathfrak{a}$ definiramo unitalni homomorfizam $\varphi_{\sigma,h} : \mathcal{P}(\mathfrak{a}) \to \mathbb{C}$ sa $\varphi_{\sigma,h}(f) = (\sigma f)(h)$, $h \in \mathfrak{a}$. Prema Hilbertovom teoremu o nulama postoji $h_1 \in \mathfrak{a}$ takav da je $\varphi_{\sigma,h}(f) = f(h_1)\ \ \forall f \in \mathcal{P}(\mathfrak{a})$. Za $f \in \mathcal{J}$ je $\sigma f = f$, dakle, vrijedi

$$f(h_1) = \varphi_{\sigma,h}(f) = (\sigma f)(h) = f(h) \qquad \forall f \in \mathcal{J}.$$

Kako je $\mathcal{J} = \{g|\mathfrak{a};\ g \in \mathcal{P}(\mathfrak{p})^K\}$, iz tvrdnje **(5)** zaključujemo da je $Wh_1 \cap Wh \neq \emptyset$. Dakle, postoji $s \in W$ takav da je $h_1 = sh$. Ako je $f \in \mathcal{P}(\mathfrak{a})^W$ slijedi da je

$$(\sigma f)(h) = \varphi_{\sigma,h}(f) = f(h_1) = f(sh) = f(h).$$

Budući da je $h \in \mathfrak{a}$ bio proizvoljno izabran, zaključujemo da za $f \in \mathcal{P}(\mathfrak{a})^W$ vrijedi $\sigma f = f\ \forall \sigma \in U$. Prema (3.2) to znači da je $\mathcal{P}(\mathfrak{a})^W \subseteq \mathcal{J} = Res_{\mathfrak{p}/\mathfrak{a}}\left(\mathcal{P}(\mathfrak{p})^K\right)$. Zajedno s obrnutom inkluzijom iz tvrdnje **(1)** dobivamo jednakost $\mathcal{P}(\mathfrak{a})^W = Res_{\mathfrak{p}/\mathfrak{a}}\left(\mathcal{P}(\mathfrak{p})^K\right)$, a zajedno s injektivnošću iz tvrdnje **(2)** to je upravo tvrdnja teorema.

Napomena: Ako realna reduktivna grupa G nije unutarnjeg tipa, pokazuje se da isti dokaz daje istu tvrdnju, ali za grupu $W = M'/{}^0M$.

Neka je sada $\mathfrak{g}$ kompleksna reduktivna Liejeva algebra. Definiramo djelovanje Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ derivacijama unitalne algebre $\mathcal{P}(\mathfrak{g})$ svih polinomijalnih funkcija na $\mathfrak{g}$ ovako:

$$(xf)(y) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f\left(\mathrm{e}^{-t\, ad\, x} y\right)\bigg|_{t=0} = f(-(ad\, x)y) = f([y, x]).$$

Definiramo sada
$$\mathcal{I}(\mathfrak{g}) = \{f \in \mathcal{P}(\mathfrak{g});\ xf = 0\ \ \forall x \in \mathfrak{g}\}.$$
Nadalje, neka je $\mathfrak{h}$ Cartanova podalgebra od $\mathfrak{g}$ i $W = W(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ Weylova grupa sistema korijena $R(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$. Definiramo djelovanje grupe W automorfizmima na unitalnoj algebri $\mathcal{P}(\mathfrak{h})$ svih polinomijalnih funkcija na $\mathfrak{h}$ ovako:
$$(sf)(h) = f(s^{-1}h), \qquad f \in \mathcal{P}(\mathfrak{h}), \quad h \in \mathfrak{h}, \quad s \in W.$$
Neka je $\mathcal{I}(\mathfrak{h})$ podalgebra $\mathcal{P}(\mathfrak{h})^W$ svih $W-$invarijanata u algebri $\mathcal{P}(\mathfrak{h})$:
$$\mathcal{I}(\mathfrak{h}) = \{f \in \mathcal{P}(\mathfrak{h});\ sf = f\ \ \forall s \in W\}.$$

Teorem 3.1.2. *$Res_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}|\mathcal{I}(\mathfrak{g})$ je izomorfizam unitalnih algebri sa $\mathcal{I}(\mathfrak{g})$ na $\mathcal{I}(\mathfrak{h})$.*

Dokaz ćemo podijeliti u nekoliko koraka.

(1) *Ako teorem vrijedi za sve kompleksne poluproste Liejeve algebre, onda vrijedi i za sve kompleksne reduktivne Liejeve algebre.*

Doista, ako je $\mathfrak{g}$ kompleksna reduktivna Liejeva algebra, onda je $\mathfrak{g} = Z(\mathfrak{g}) \dot{+} \mathfrak{g}_1$, gdje je $Z(\mathfrak{g})$ centar od $\mathfrak{g}$ i $\mathfrak{g}_1 = [\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ je poluprosta Liejeva algebra. Nadalje, za Cartanovu podalgebru $\mathfrak{h}$ od $\mathfrak{g}$ je $Z(\mathfrak{g}) \subseteq \mathfrak{h}$ i $\mathfrak{h} = Z(\mathfrak{g}) \dot{+} \mathfrak{h}_1$, gdje je $\mathfrak{h}_1 = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_1$ Cartanova podalgebra od $\mathfrak{g}_1$. Rastavi
$$\mathfrak{g} = Z(\mathfrak{g}) \dot{+} \mathfrak{g}_1 \qquad \text{i} \qquad \mathfrak{h} = Z(\mathfrak{g}) \dot{+} \mathfrak{h}_1$$
induciraju rastave dualnih prostora:
$$\mathfrak{g}^* = Z(\mathfrak{g})^* \dot{+} \mathfrak{g}_1^* \qquad \text{i} \qquad \mathfrak{h}^* = Z(\mathfrak{g})^* \dot{+} \mathfrak{h}_1^*$$
Sada se $\mathcal{P}(Z(\mathfrak{g}))$ identificira s unitalnom podalgebrom od $\mathcal{P}(\mathfrak{g})$ generiranom sa $Z(\mathfrak{g})^*$ i s unitalnom podalgebrom od $\mathcal{P}(\mathfrak{h})$ generiranom sa $Z(\mathfrak{g})^*$. Nadalje, $\mathcal{P}(\mathfrak{g}_1)$ se identificira s unitalnom podalgebrom od $\mathcal{P}(\mathfrak{g})$ generiranom sa $\mathfrak{g}_1^*$, a $\mathcal{P}(\mathfrak{h}_1)$ se identificira s unitalnom podalgebrom od $\mathcal{P}(\mathfrak{h})$ generiranom sa $\mathfrak{h}_1^*$. Uz takve identifikacije množenje polinomijalnih funkcija po točkama inducira izomorfizme $\Phi_\mathfrak{g} : \mathcal{P}(Z(\mathfrak{g})) \otimes \mathcal{P}(\mathfrak{g}_1) \to \mathcal{P}(\mathfrak{g})$ i $\Phi_\mathfrak{h} : \mathcal{P}(Z(\mathfrak{g})) \otimes \mathcal{P}(\mathfrak{h}_1) \to \mathcal{P}(\mathfrak{h})$. Prema tome, ako je $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ baza prostora $\mathcal{P}(Z(\mathfrak{g}))$, onda se svaki element $P \in \mathcal{P}(\mathfrak{g})$ na jedinstven način piše u obliku
$$P = \sum_{n\in\mathbb{N}} P_n R_n,$$
gdje su $R_n \in \mathcal{P}(\mathfrak{g}_1)$. Budući da je $Z(\mathfrak{g})$ centar Liejeve algebre $\mathfrak{g}$, vidi se da je gornji P u podalgebri $\mathcal{I}(\mathfrak{g})$ ako i samo ako su svi $R_n \in \mathcal{I}(\mathfrak{g}_1)$. Isto tako, svaki se element $Q \in \mathcal{P}(\mathfrak{h})$ na jedinstven način piše u obliku
$$Q = \sum_{n\in\mathbb{N}} P_n S_n,$$
gdje su $S_n \in \mathcal{P}(\mathfrak{h}_1)$. Weylova grupa $W = W(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ generirana je refleksijama s_α od $\mathfrak{h}$ u odnosu na hiperravnine $\operatorname{Ker}\alpha$ za $\alpha \in R(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$. Restrikcija $\alpha \mapsto \alpha|\mathfrak{h}_1$ je bijekcija sa $R(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ na $R(\mathfrak{g}_1,\mathfrak{h}_1)$ i refleksija s_α fiksira sve elemente od $Z(\mathfrak{g})$, a njena restrikcija na $\mathfrak{h}_1$ je upravo refleksija $s_{\alpha|\mathfrak{h}_1}$ od $\mathfrak{h}_1$. Budući da refleksije s_{α_1}, $\alpha_1 \in R(\mathfrak{g}_1,\mathfrak{h}_1)$ generiraju Weylovu grupu $W_1 = W(\mathfrak{g}_1,\mathfrak{h}_1)$, lako se vidi da je gornji Q u podalgebri $\mathcal{I}(\mathfrak{h}) = \mathcal{P}(\mathfrak{h})^W$ ako i samo ako su svi $S_n \in \mathcal{I}(\mathfrak{h}_1) = \mathcal{P}(\mathfrak{h}_1)^{W_1}$. Napokon, restrikcija homomorfizma $Res_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}} : \mathcal{P}(\mathfrak{g}) \to \mathcal{P}(\mathfrak{h})$ na podalgebru $\mathcal{P}(\mathfrak{g}_1)$ je upravo homomorfizam $Res_{\mathfrak{g}_1/\mathfrak{h}_1} : \mathcal{P}(\mathfrak{g}_1) \to \mathcal{P}(\mathfrak{h}_1)$, a restrikcija homomorfizma $Res_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}$ na podalgebru $\mathcal{P}(Z(\mathfrak{g}))$ je identiteta na $\mathcal{P}(Z(\mathfrak{g}))$. To znači da je
$$\Phi_\mathfrak{g} \circ (id_{\mathcal{P}(Z(\mathfrak{g}))} \otimes Res_{\mathfrak{g}_1/\mathfrak{h}_1}) = Res_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}} \circ \Phi_\mathfrak{g},$$
odnosno,
$$\Phi_\mathfrak{g} \circ (id_{\mathcal{P}(Z(\mathfrak{g}))} \otimes Res_{\mathfrak{g}_1/\mathfrak{h}_1}) \circ \Phi_\mathfrak{g}^{-1} = Res_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}. \tag{3.3}$$

Budući da je po pretpostavci $Res_{\mathfrak{g}_1/\mathfrak{h}_1}|\mathcal{I}(\mathfrak{g}_1)$ izomorfizam unitalnih algebri sa $\mathcal{I}(\mathfrak{g}_1)$ na $\mathcal{I}(\mathfrak{h}_1)$, slijedi da je $id_{\mathcal{P}(Z(\mathfrak{g}))} \otimes (Res_{\mathfrak{g}_1/\mathfrak{h}_1}|\mathcal{I}(\mathfrak{g}_1))$ izomorfizam unitalnih algebri sa $\mathcal{P}(Z(\mathfrak{g})) \otimes \mathcal{I}(\mathfrak{g}_1)$ na $\mathcal{P}(Z(\mathfrak{g})) \otimes \mathcal{I}(\mathfrak{h}_1)$. Prema tome, $\Phi_{\mathfrak{g}} \circ (id_{\mathcal{P}(Z(\mathfrak{g}))} \otimes (Res_{\mathfrak{g}_1/\mathfrak{h}_1}|\mathcal{I}(\mathfrak{g}_1)) \circ \Phi_{\mathfrak{g}}^{-1}$ je izomorfizam unitalnih algebri sa $\Phi_{\mathfrak{g}}(\mathcal{P}(Z(\mathfrak{g})) \otimes \mathcal{I}(\mathfrak{g}_1)) = \mathcal{I}(\mathfrak{g})$ na $\Phi_{\mathfrak{g}}(\mathcal{P}(Z(\mathfrak{g})) \otimes \mathcal{I}(\mathfrak{h}_1)) = \mathcal{I}(\mathfrak{h})$. Međutim, prema (3.3) imamo

$$\Phi_{\mathfrak{g}} \circ (id_{\mathcal{P}(Z(\mathfrak{g}))} \otimes (Res_{\mathfrak{g}_1/\mathfrak{h}_1}|\mathcal{I}(\mathfrak{g}_1)) \circ \Phi_{\mathfrak{g}}^{-1} = Res_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}|\Phi_{\mathfrak{g}}(\mathcal{P}(Z(\mathfrak{g})) \otimes \mathcal{I}(\mathfrak{h}_1)) = Res_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}|\mathcal{I}(\mathfrak{g}).$$

Time je tvrdnja **(1)** dokazana.

U skladu s **(1)** u daljnjem bez smanjenja općenitosti pretpostavljamo da je $\mathfrak{g}$ kompleksna poluprosta Liejeva algebra i $\mathfrak{h}$ njena Cartanova podalgebra. Stavimo sada $G = Int(\mathfrak{g})$. To je podgrupa od $Aut(\mathfrak{g})$ generirana svim automorfizmima oblika $\mathrm{e}^{ad\,x}$ za $x \in \mathfrak{g}$ i ona je upravo komponenta povezanosti jedinice grupe $Aut(\mathfrak{g})$. Grupa G djeluje automorfizmima na unitalnoj algebri $\mathcal{P}(\mathfrak{g})$ ovako:

$$(\varphi(f))(y) = f(\varphi^{-1}(y)), \qquad f \in \mathcal{P}(\mathfrak{g}), \quad \varphi \in G, \quad y \in \mathfrak{g}.$$

Dokazat ćemo sada da vrijedi:

(2) $\mathcal{I}(\mathfrak{g}) = \mathcal{P}(\mathfrak{g})^G = \{f \in \mathcal{P}(\mathfrak{g});\ \varphi(f) = f\ \ \forall \varphi \in G\}$.

Prije svega, za $x \in \mathfrak{g}$ i $t \in \mathbb{R}$ je $\varphi_t = \mathrm{e}^{t\,ad\,x} \in G$ pa za svaki $f \in \mathcal{P}(\mathfrak{g})^G$ vrijedi

$$f\left(\mathrm{e}^{-t\,ad\,x} y\right) = (\varphi_t(f))(y) = f(y) \qquad \forall y \in \mathfrak{g} \quad \mathrm{i} \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Desna strana ne ovisi o t pa deriviranjem lijeve strane po t u nuli dobivamo da je $(xf)(y) = 0$ $\forall y \in \mathfrak{g}$, odnosno, $xf = 0$. Kako je $x \in \mathfrak{g}$ bio proizvoljan, zaključujemo da je $\mathcal{P}(\mathfrak{g})^G \subseteq \mathcal{I}(\mathfrak{g})$.

Obratno, pretpostavimo da je $f \in \mathcal{I}(\mathfrak{g})$, tj. da je $xf = 0$ $\forall x \in \mathfrak{g}$. To znači da za proizvoljne $x, y \in \mathfrak{g}$ vrijedi $(xf)(y) = 0$. Dakle, za bilo koje $x, y \in \mathfrak{g}$ i bilo koji $s \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$0 = (xf\left(\mathrm{e}^{-s\,ad\,x} y\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f\left(\mathrm{e}^{-t\,ad\,x}\mathrm{e}^{-s\,ad\,x} y\right)\Big|_{t=0} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f\left(\mathrm{e}^{-(t+s)ad\,x} y\right)\Big|_{t=0} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} f\left(\mathrm{e}^{-s\,ad\,x} y\right).$$

Kako je funkcija $s \mapsto f\left(\mathrm{e}^{-s\,ad\,x} y\right)$ analitička na $\mathbb{R}$, odatle slijedi da je ta funkcija konstantna. Posebno, tada se podudaraju njene vrijednosti za $s = -1$ i za $s = 0$, tj.

$$f\left(\mathrm{e}^{ad\,x} y\right) = f(y) \qquad \forall x, y \in \mathfrak{g}.$$

Budući da automorfizmi $\mathrm{e}^{ad\,x}$, $x \in \mathfrak{g}$, genriraju grupu G, zaključujemo da je

$$(\sigma(f))(y) = f(\sigma^{-1} y) = f(y) \qquad \forall \sigma \in G \quad \mathrm{i} \quad \forall y \in \mathfrak{g},$$

odnosno, $\sigma(f) = f$ $\forall \sigma \in G$ ili $f \in \mathcal{P}(\mathfrak{g})^G$. Time je dokazana i obrnuta inkluzija $\mathcal{I}(\mathfrak{g}) \subseteq \mathcal{P}(\mathfrak{g})^G$, odnosno, dokazana je tvrdnja **(2)**.

Prema Weylovom teoremu 2.2.3. za danu Cartanovu podalgebru $\mathfrak{h}$ postoji kompaktna konjugacija τ od $\mathfrak{g}$ takva da je $\tau(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$. Tada je $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}^\tau$ realna forma od $\mathfrak{h}$ i to je maksimalna komutativna podalgebra (tj. Cartanova podalgebra) kompaktne Liejeve algebre $\mathfrak{g}^\tau$. Konjugacija τ promatrana kao automorfizam realne Liejeve algebre $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ je Cartanova involucija i tako shvaćenu označit ćemo je sa ϑ. Kao komponenta povezanosti jedinice u grupi $Aut(\mathfrak{g})$ grupa G je realna reduktivna grupa u odnosu na Cartanovu involuciju ϑ na njenoj Liejevoj algebri $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$. Pripadna Cartanova dekompozicija od $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ je

$$\mathfrak{g}_{\mathbb{R}} = \mathfrak{k} \dot{+} \mathfrak{p}, \qquad \mathfrak{k} = \mathfrak{g}^\tau, \qquad \mathfrak{p} = i\mathfrak{g}^\tau.$$

Označimo sa K maksimalnu kompaktnu podgrupu od G s Liejevom algebrom $\mathfrak{k} = \mathfrak{g}^\tau$. Tada je K podgrupa od G generirana svim automorfizmima oblika $\mathrm{e}^{ad\,x}$ za $x \in \mathfrak{k} = \mathfrak{g}^\tau$.

(3) *Restrikcija* $Res_{\mathfrak{g}/\mathfrak{p}}|\mathcal{I}(\mathfrak{g})$ *je izomorfizam unitalnih algebri sa* $\mathcal{I}(\mathfrak{g}) = \mathcal{P}(\mathfrak{g})^G$ *na* $\mathcal{P}(\mathfrak{p})^K$.

Za svaki $f \in \mathcal{I}(\mathfrak{g})$ i svaki $\varphi \in K \subseteq G$ je $\varphi(f) = f$. Kako je $\mathfrak{p}$ $K-$invarijantan potprostor od $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$, slijedi da je $\varphi(f|\mathfrak{p}) = \varphi(f)|\mathfrak{p} = f|\mathfrak{p}$. Drugim riječima, vrijedi $f|\mathfrak{p} = Res_{\mathfrak{g}/\mathfrak{p}}(f) \in \mathcal{P}(\mathfrak{p})^K$. Time je dokazano da je $Res_{\mathfrak{g}/\mathfrak{p}}\left(\mathcal{P}(\mathfrak{g})^G\right) \subseteq \mathcal{P}(\mathfrak{p})^K$.

Dokažimo sada injektivnost restrikcije $Res_{\mathfrak{g}/\mathfrak{p}}|\mathcal{P}(\mathfrak{g})^G$. To slijedi iz činjenice da je $\mathfrak{p}$ realna forma kompleksnog prostora $\mathfrak{g}$: ako je restrikcija kompleksne polinomijalne funkcije $f : \mathfrak{g} \to \mathbb{C}$ na $\mathfrak{p}$ jednak nuli onda je $f = 0$.

Ostaje još da dokažemo da je $Res_{\mathfrak{g}/\mathfrak{p}}\left(\mathcal{P}(\mathfrak{g})^G\right) = \mathcal{P}(\mathfrak{p})^K$. Neka je $f \in \mathcal{P}(\mathfrak{p})^K$. Kao u dokazu tvrdnje **(2)** nalazimo da tada vrijedi

$$f([x,y]) = 0 \qquad \forall y \in \mathfrak{p} \quad \text{i} \quad \forall x \in \mathfrak{k}. \tag{3.4}$$

Kompleksnoznačna polinomijalna funkcija f na realnoj formi $\mathfrak{p}$ kompleksnog prostora $\mathfrak{g}$ jedinstveno se proširuje do kompleksnoznačne polinomijalne funkcije F na kompleksnom prostoru $\mathfrak{g}$. Sada prema (3.4) vrijedi

$$(xF)|\mathfrak{p} = 0 \qquad \forall x \in \mathfrak{k} = \mathfrak{g}^\tau,$$

a kako je $\mathfrak{g}^\tau$ realna forma od $\mathfrak{g}$, slijedi

$$(xF)|\mathfrak{p} = 0 \qquad \forall x \in \mathfrak{g}.$$

No kako je $\mathfrak{p} = i\mathfrak{g}^\tau$ realna forma kompleksnog prostora $\mathfrak{g}$, slijedi da je $xF = 0$ $\forall x \in \mathfrak{g}$. Drugim riječima, $F \in \mathcal{I}(\mathfrak{g}) = \mathcal{P}(\mathfrak{g})^G$, a po konstrukciji je $Res_{\mathfrak{g}/\mathfrak{p}}(F) = F|\mathfrak{p} = f$.

(4) Stavimo sada $\mathfrak{a} = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}$. Tada je $\mathfrak{a}$ Cartanov potprostor od $\mathfrak{p}$ i on je realna forma od $\mathfrak{h}$. Prema teoremu 3.1.1. restrikcija $Res_{\mathfrak{p}/\mathfrak{a}}|\mathcal{P}(\mathfrak{p})^K$ je izomorfizam unitalnih algebri sa $\mathcal{P}(\mathfrak{p})^K$ na $\mathcal{P}(\mathfrak{a})^{W_{\mathbb{R}}}$, gdje je $W_{\mathbb{R}}$ Weylova grupa sistema korijena $R(\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}, \mathfrak{a})$. Međutim, očito je $Res_{\mathfrak{p}/\mathfrak{a}} \circ Res_{\mathfrak{g}/\mathfrak{p}} = Res_{\mathfrak{g}/\mathfrak{a}}$. Dakle, zbog tvrdnje **(3)** $Res_{\mathfrak{g}/\mathfrak{a}}|\mathcal{I}(\mathfrak{g})$ je izomorfizam unitalnih algebri sa $\mathcal{I}(\mathfrak{g})$ na $\mathcal{P}(\mathfrak{a})^{W_{\mathbb{R}}}$. Lako se vidi da je $W_{\mathbb{R}} = \{s|\mathfrak{a};\ s \in W\}$, gdje je W Weylova grupa sistema korijena $R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$. Stoga je $Res_{\mathfrak{h}/\mathfrak{a}}|\mathcal{I}(\mathfrak{h})$ izomorfizam unitalnih algebri sa $\mathcal{I}(\mathfrak{h}) = \mathcal{P}(\mathfrak{h})^W$ na $\mathcal{P}(\mathfrak{a})^{W_{\mathbb{R}}}$. Dakle, kompozicija

$$(Res_{\mathfrak{h}/\mathfrak{a}}|\mathcal{I}(\mathfrak{h}))^{-1} \circ Res_{\mathfrak{g}/\mathfrak{a}}|\mathcal{I}(\mathfrak{g}) = Res_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}|\mathcal{I}(\mathfrak{g})$$

je izomorfizam unitalnih algebri sa $\mathcal{I}(\mathfrak{g})$ na $\mathcal{I}(\mathfrak{h})$. Time je teorem 3.1.2. dokazan.

3.2 Harish–Chandrin izomorfizam. Infinitezimalni karakteri

U ovom odjeljku $\mathfrak{g}$ je kompleksna reduktivna Liejeva algebra, $\mathfrak{h}$ **njena Cartanova podalgebra**, $R = R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ **pripadni sistem korijena**, R_+ **neki izbor pozivinih korijena**. Tada je

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \dotplus \sum_{\alpha\in R} \dotplus \mathfrak{g}_\alpha, \qquad \mathfrak{g}_\alpha = \{x \in \mathfrak{g};\ [h,x] = \alpha(h)x\ \ \forall h \in \mathfrak{h}\},$$

dakle,

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{n}^+ \dotplus \mathfrak{h} \dotplus \mathfrak{n}^- \qquad \text{gdje su} \quad \mathfrak{n}^+ = \sum_{\alpha\in R_+} \dotplus \mathfrak{g}_\alpha \quad \text{i} \quad \mathfrak{n}^- = \sum_{\alpha\in R_+} \dotplus \mathfrak{g}_{-\alpha}.$$

Numerirajmo pozitivne korijene, $R_+ = \{\alpha_1, \dots, \alpha_s\}$, i za svaki $j \in \{1, \dots, s\}$ izaberimo $x_j \in \mathfrak{g}_{\alpha_j} \setminus \{0\}$ i $y_j \in \mathfrak{g}_{-\alpha_j} \setminus \{0\}$. Nadalje, neka je $\{h_1, \dots, h_k\}$ baza od $\mathfrak{h}$. Tada je

$$\{y_1, \dots, y_s, h_1, \dots, h_k, x_1, \dots, x_s\}$$

baza od $\mathfrak{g}$. Za $q = (q_1, \dots, q_s) \in \mathbb{Z}_+^s$, $m = (m_1, \dots, m_k) \in \mathbb{Z}_+^k$ i $p = (p_1, \dots, p_s) \in \mathbb{Z}_+^s$ definiramo elemente $u(q, m, p) \in U(\mathfrak{g})$ kao monome u elementima gornje baze od $\mathfrak{g}$:

$$u(q, m, p) = y_1^{q_1} \cdots y_s^{q_s} h_1^{m_1} \cdots h_k^{m_k} x_1^{p_1} \cdots x_s^{p_s}.$$

Prema PBW–teoremu 1.4.3. skup svih tih monoma $\{u(q, m, p);\ q, p \in \mathbb{Z}_+^s,\ m \in \mathbb{Z}_+^k\}$ je baza vektorskog prostora $U(\mathfrak{g})$. Promatrajmo sada na prostoru $U(\mathfrak{g})$ reprezentaciju Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ dobivenu jedinstvenim proširenjem operatora adjungirane reprezentacije $ad_\mathfrak{g}\, x$, $x \in \mathfrak{g}$, do derivacija algebre $U(\mathfrak{g})$. Tu ćemo reprezentaciju od $\mathfrak{g}$ označavati sa $ad_{U(\mathfrak{g})}$. Tada je očito

$$\left(ad_{U(\mathfrak{g})}\, x\right) u = xu - ux, \qquad x \in \mathfrak{g}, \quad u \in U(\mathfrak{g}).$$

Budući da za $h \in \mathfrak{h}$ vrijedi

$$[h, y_j] = -\alpha_j(h) y_j, \qquad [h, h_i] = 0, \qquad [h, x_j] = \alpha_j(h) x_j, \qquad j = 1, \dots, s, \quad i = 1, \dots, k,$$

vidi se da je svaki $u(q, m, p)$ težinski vektor reprezentacije $ad_{U(\mathfrak{g})}$:

$$\left(ad_{U(\mathfrak{g})}\, h\right) u(q, m, p) = \left((p_1 - q_1)\alpha_1 + \cdots + (p_s - q_s)\alpha_s\right)(h) u(q, m, p), \qquad q, p \in \mathbb{Z}_+^s, \quad m \in \mathbb{Z}_+^k.$$

Prema tome, prostor $U(\mathfrak{g})$ reprezentacije $ad_{U(\mathfrak{g})}$ je direktna suma težinskih potprostora:

$$U(\mathfrak{g}) = \sum_{\lambda\in\mathfrak{h}^*} \dotplus U(\mathfrak{g})_\lambda, \qquad U(\mathfrak{g})_\lambda = \{u \in U(\mathfrak{g});\ \left(ad_{U(\mathfrak{g})}\, h\right) u = \lambda(h) u\ \ \forall\forall h \in \mathfrak{h}\}.$$

Pri tome je $U(\mathfrak{g})_\lambda \neq \{0\}$ ako i samo ako je $\lambda \in Q = span_\mathbb{Z}\, R$. Za $\lambda \in Q$ težinski potprostor $U(\mathfrak{g})_\lambda$ je beskonačnodimenzionalan; baza mu je

$$\{u(q, m, p);\ q, p \in \mathbb{Z}_+^s,\ m \in \mathbb{Z}_+^k,\ (p_1 - q_1)\alpha_1 + \cdots + (p_s - q_s)\alpha_s = \lambda\}.$$

Budući da je za svaki $h \in \mathfrak{h}$ operator $ad_{U(\mathfrak{g})}$ derivacija algebre $U(\mathfrak{g})$, nalazimo da vrijedi nešto analogno graduaciji, ali sada s aditivnom grupom Q umjesto s polugrupom $\mathbb{Z}_+$:

$$U(\mathfrak{g})_\lambda U(\mathfrak{g})_\mu \subseteq U(\mathfrak{g})_{\lambda+\mu}, \qquad \lambda, \mu \in Q.$$

Posebno, potprostor

$$U(\mathfrak{g})_0 = U(\mathfrak{g})^\mathfrak{h} = \{u \in U(\mathfrak{g});\ hu = uh\ \ \forall h \in \mathfrak{h}\}$$

je unitalna podalgebra od $U(\mathfrak{g})$.

Propozicija 3.2.1. *Neka je* $\mathcal{L} = U(\mathfrak{g})\mathfrak{n}^+ \cap U(\mathfrak{g})_0$. *Tada vrijedi:*

(*a*) $\mathcal{L} = \mathfrak{n}^- U(\mathfrak{g}) \cap U(\mathfrak{g})_0$.

(*b*) $\mathcal{L}$ *je dvostrani ideal u algebri* $U(\mathfrak{g})_0$.

(*c*) $U(\mathfrak{g})_0 = U(\mathfrak{h}) \dotplus \mathcal{L}$.

Dokaz: (*a*) Baza od $U(\mathfrak{g})\mathfrak{n}^+$ je

$$\{u(q,m,p);\ q,p \in \mathbb{Z}_+^s,\ m \in \mathbb{Z}_+^k,\ p_1 + \cdots + p_s > 0\}$$

a baza od $\mathfrak{n}^- U(\mathfrak{g})$ je

$$\{u(q,m,p);\ q,p \in \mathbb{Z}_+^s,\ m \in \mathbb{Z}_+^k,\ q_1 + \cdots + q_s > 0\}.$$

S druge strane, vrijedi

$$u(q,m,p) \in U(\mathfrak{g})_0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad p_1\alpha_1 + \cdots + p_s\alpha_s = q_1\alpha_1 + \cdots + q_s\alpha_s.$$

To pokazuje da je

$$\mathcal{L} = U(\mathfrak{g})\mathfrak{n}^+ \cap U(\mathfrak{g})_0 = span\,\{u(q,m,p);\ q,p \in \mathbb{Z}_+^s \setminus \{0\},\ m \in \mathbb{Z}_+^k\} = \mathfrak{n}^- U(\mathfrak{g}) \cap U(\mathfrak{g})_0.$$

(*b*) Prema definiciji $\mathcal{L} = U(\mathfrak{g})\mathfrak{n}^+ \cap U(\mathfrak{g})_0$ je lijevi ideal u algebri $U(\mathfrak{g})_0$. S druge strane, prema (*a*) je $\mathcal{L} = \mathfrak{n}^- U(\mathfrak{g}) \cap U(\mathfrak{g})_0$, a odatle slijedi da je $\mathcal{L}$ i desni ideal u $U(\mathfrak{g})_0$.

Tvrdnja (*c*) slijedi iz sljedećih ekvivalencija koje vrijede za svaki $u(q,m,p) \in U(\mathfrak{g})_0$:

$$u(q,m,p) \in U(\mathfrak{h}) \iff p_1 = \cdots = p_s = q_1 = \cdots = q_s = 0 \iff p_1 + \cdots + p_s + q_1 + \cdots + q_s = 0$$

i

$$u(q,m,p) \in \mathcal{L} \qquad \Longleftrightarrow \qquad p_1 + \cdots + p_s + q_1 + \cdots + q_s > 0.$$

Prema tome, projektor φ prostora $U(\mathfrak{g})_0$ na potprostor $U(\mathfrak{h})$ duž obostranog ideala $\mathcal{L}$ je unitalni epimorfizam algebri. Taj se epimorfizam zove **Harish−Chandrin homomorfizam** u odnosu na izbor skupa R_+ pozitivnih korijena u $R = R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$. Valja uočiti da stvarno φ nije neovisan o izboru R_+.

Cartanova podalgebra $\mathfrak{h}$ je komutativna Liejeva algebra pa se njena univerzalna omotačka algebra $U(\mathfrak{h})$ identificira sa simetričnom algebrom $S(\mathfrak{h})$, a ova s algebrom $\mathcal{P}(\mathfrak{h}^*)$ polinomijalnih funkcija na dualnom prostoru $\mathfrak{h}^*$.

U daljnjem sa $\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$ označavamo centar algebre $U(\mathfrak{g})$:

$$\mathcal{Z}(\mathfrak{g}) = \{z \in U(\mathfrak{g});\ zu = uz\ \ \forall u \in U(\mathfrak{g})\} = \{z \in U(\mathfrak{g});\ zx = xz\ \ \forall x \in \mathfrak{g}\} = U(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}.$$

Tada je $\mathcal{Z}(\mathfrak{g}) \subseteq U(\mathfrak{g})^{\mathfrak{h}} = U(\mathfrak{g})_0$, pa se na svaki element z može primijeniti Harish−Chandrin homomorfizam φ. Tada je $\varphi(z) \in U(\mathfrak{h}) = S(\mathfrak{h}) = \mathcal{P}(\mathfrak{h}^*)$, tj. $\varphi(z)$ je polinomijalna funkcija na dualnom prostoru $\mathfrak{h}^*$ od $\mathfrak{h}$.

Propozicija 3.2.2. *Ako je* $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ *i ako je* V *ciklički* $U(\mathfrak{g})-$*modul s cikličkim vektorom* v_λ *takvim da je*

$$\mathfrak{n}^+ v_\lambda = \{0\} \qquad i \qquad v_\lambda \in V_\lambda, \quad tj. \quad hv_\lambda = \lambda(h)v_\lambda \quad \forall h \in \mathfrak{h},$$

onda vrijedi

$$zv = (\varphi(z))(\lambda)v \qquad \forall z \in \mathcal{Z}(\mathfrak{g}) \quad i \quad \forall v \in V.$$

Dokaz: Za $z \in \mathcal{Z}(\mathfrak{g})$ po definiciji je $\varphi(z)$ komponenta u $U(\mathfrak{h})$ od z u rastavu $U(\mathfrak{g})_0 = U(\mathfrak{h}) \dot{+} \mathcal{L}$ i vrijedi $\mathcal{L} = U(\mathfrak{g})\mathfrak{n}^+ \cap U(\mathfrak{g})_0$. To znači da postoje $u_1, \ldots, u_\ell \in U(\mathfrak{g})$ i $n_1, \ldots, n_\ell \in \mathfrak{n}^+$ takvi da je

$$z = \varphi(z) + u_1 n_1 + \cdots + u_\ell n_\ell.$$

Po pretpostavci je $n_1 v_\lambda = \cdots = n_\ell v_\lambda = 0$, pa nalazimo

$$zv_\lambda = \varphi(z)v_\lambda + u_1 n_1 v_\lambda + \cdots + u_\ell n_\ell v_\lambda = \varphi(z)v_\lambda.$$

Kako je $hv_\lambda = \lambda(h)v_\lambda$ za svaki $h \in \mathfrak{h}$, za svaki element $h_1^{m_1} \cdots h_k^{m_k}$ baze od $U(\mathfrak{h})$ vrijedi

$$h_1^{m_1} \cdots h_k^{m_k} v_\lambda = \lambda(h_1)^{m_1} \cdots \lambda(h_k)^{m_k} v_\lambda.$$

Uz identifikaciju $U(\mathfrak{h}) = S(\mathfrak{h})$ s algebrom $\mathcal{P}(\mathfrak{h}^*)$ skalar $\lambda(h_1)^{m_1} \cdots \lambda(h_k)^{m_k}$ je upravo vrijednost polinomijalne funkcije $h_1^{m_1} \cdots h_k^{m_k}$ u točki λ. Kako je $\{h_1^{m_1} \cdots h_k^{m_k};\ m \in \mathbb{Z}_+^k\}$ baza od $U(\mathfrak{h})$, odatle slijedi da za svaki $u \in U(\mathfrak{h})$ vrijedi $uv_\lambda = u(\lambda)v_\lambda$. Posebno,

$$zv_\lambda = \varphi(z)v_\lambda = (\varphi(z))(\lambda)v_\lambda \qquad \forall z \in \mathcal{Z}(\mathfrak{g}).$$

Napokon, kako je v_λ ciklički vektor $U(\mathfrak{g})$–modula V, za svaki $v \in V$ postoji $u \in U(\mathfrak{g})$ takav da je $v = uv_\lambda$. Sada za svaki $z \in \mathcal{Z}(\mathfrak{g})$ imamo

$$zv = zuv_\lambda = uzv_\lambda = (\varphi(z))(\lambda)uv_\lambda = (\varphi(z))(\lambda)v.$$

Time je propozicija 3.2.2. dokazana.

Kao što smo rekli, Harish–Chandrin homomorfizam $\varphi : U(\mathfrak{g})_0 \to U(\mathfrak{h})$ ovisi o izboru skupa pozitivnih korijena R_+. Ovisnost njegove restrikcije $\varphi|\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$ o R_+ popravlja se automorfizmom $\gamma = \gamma_{R_+}$ algebre $U(\mathfrak{h}) = S(\mathfrak{h}) = \mathcal{P}(\mathfrak{h}^*)$ definiranim sa

$$(\gamma(u))(\lambda) = u(\lambda - \rho), \quad \lambda \in \mathfrak{h}^*, \quad u \in U(\mathfrak{h}), \quad \text{gdje je} \quad \rho = \rho_{R_+} = \frac{1}{2}\sum_{\alpha \in R_+} \alpha.$$

Teorem 3.2.3. *Uz uvedene oznake restrikcija $(\gamma \circ \varphi)|\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$ je neovisna o izboru R_+ i to je izomorfizam unitalnih algebri sa $\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$ na algebru $S(\mathfrak{h})^W$ polinomijalnih funkcija na $\mathfrak{h}^*$ invarijantnih u odnosu na Weylovu grupu $W = W(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ sistema korijena $R = R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$.*

Dokaz ćemo podijeliti u četiri koraka:
(1) Za $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ neka je $M(\lambda)$ pripadni Vermaov $U(\mathfrak{g})$–modul definiran u odjeljku 2.4. sa

$$M(\lambda) = U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{b})} \mathbb{C}_\lambda.$$

Pri tome je $\mathfrak{b} = \mathfrak{h} \dot{+} \mathfrak{n}^+$ Borelova podalgebra od $\mathfrak{g}$ pridružena izboru R_+ i $\mathbb{C}_\lambda$ je jednodimenzionalni $\mathfrak{b}$–modul $\mathbb{C}$ definiran sa $(h + x)1 = \lambda(h)$ za $h \in \mathfrak{h}$ i $x \in \mathfrak{n}^+$. Tada je $M(\lambda)$ ciklički $U(\mathfrak{g})$–modul s cikličkim vektorom $v_\lambda = 1 \otimes_{U(\mathfrak{b})} 1$ za koji vrijedi

$$hv_\lambda = \lambda(h)v_\lambda \quad \forall h \in \mathfrak{h} \quad \text{i} \quad \mathfrak{n}^+ v_\lambda = \{0\}.$$

Stoga vrijedi

$$zv = (\varphi(z))(\lambda)v \qquad \forall z \in \mathcal{Z}(\mathfrak{g}) \quad \text{i} \quad \forall v \in M(\lambda).$$

Pretpostavimo sada da je λ dominantna integralna forma na $\mathfrak{h}$, tj. takva da je

$$2\frac{(\lambda|\alpha)}{(\alpha|\alpha)} \in \mathbb{Z}_+ \qquad \forall \alpha \in R_+.$$

Pri tome je $(\cdot|\cdot)$ nedegenerirana simetrična bilinearna forma na $\mathfrak{h}^* \times \mathfrak{h}^*$ dobivena iz restrikcije $B|\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}$ invarijantne nedegenerirane simetrične bilinearne forme B na $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$.

Neka je $B(R_+)$ baza sistema korijena R pridružena izboru R_+ pozitivnih korijena. Za $\alpha \in B(R_+)$ označimo sa h_α jedinstven element iz $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}]$ takav da je $\alpha(h_\alpha) = 2$. Tada znamo da je

$$\lambda(h_\alpha) = 2\frac{(\lambda|\alpha)}{(\alpha|\alpha)} = m \in \mathbb{Z}_+.$$

Neka je $y \in \mathfrak{g}_{-\alpha} \setminus \{0\}$ i stavimo $v = y^{m+1}v_\lambda$. Prema definiciji Vermaovog modula $u \mapsto uv_\lambda$ je izomorfizam vektorskih prostora sa $U(\mathfrak{n}^-)$ na $M(\lambda)$. Posebno, vrijedi $v \neq 0$. Označimo sa s_α refleksiju u odnosu na korijen α :

$$s_\alpha\mu = \mu - \mu(h_\alpha)\alpha, \qquad \mu \in \mathfrak{h}^*.$$

Kako je $\rho(h_\alpha) = 1$, imamo

$$s_a(\lambda + \rho) - \rho = \lambda + \rho - (\lambda + \rho)(h_\alpha) - \rho = \lambda - (m + 1)\alpha$$

pa je

$$v = y^{m+1}v_\lambda \in M(\lambda)_{\lambda-(m+1)\alpha} = M(\lambda)_{s_\alpha(\lambda+\rho)-\rho}.$$

Za $\beta \in B(R_+) \setminus \{\alpha\}$ vrijedi $[\mathfrak{g}_{-\alpha}, \mathfrak{g}_\beta] = \{0\}$ jer $\beta - \alpha \notin R$. Odatle i iz $\mathfrak{g}_\beta v_\lambda = \{0\}$ slijedi $\mathfrak{g}_\beta v = \{0\}$. Nadalje, neka je $x \in \mathfrak{g}_\alpha$ takav da je $[x, y] = h_\alpha$.

Zadatak 3.2.1. *Dokažite da za svaki $j \in \mathbb{Z}_+$ u algebri $U(\mathfrak{g})$ vrijedi*

$$[x, y^{j+1}] = (j + 1)y^j(h_\alpha - j).$$

Uputa: Jednakost se dokazuje indukcijom po $j \in \mathbb{Z}_+$ korištenjem jednakosti $[h_\alpha, y] = -2y$.

Posebno, za $j = m$ zbog $xv_\lambda = 0$ dobivamo

$$xv = xy^{m+1}v_\lambda = [x, y^{m+1}]v_\lambda + y^{m+1}xv_\lambda = (m + 1)y^m(h_\alpha - m)v_\lambda = (m + 1)(\lambda(h_\alpha) - m)y^m v_\lambda = 0.$$

Time je dokazano da vrijedi $\mathfrak{n}^+v = \{0\}$. Kako je $v \in M(\lambda)_{s_\alpha(\lambda+\rho)-\rho}$, prema propoziciji 3.2.2. na cikličkom podmodulu $U(\mathfrak{g})v \neq \{0\}$ od $M(\lambda)$ svaki element z centra $\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$ djeluje kao množenje skalarom $(\varphi(z))(s_\alpha(\lambda + \rho) - \rho)$. S druge strane, po istoj propoziciji na cijelom modulu $M(\lambda)$ element $z \in \mathcal{Z}(\mathfrak{g})$ djeluje kao množenje skalarom $(\varphi(z))(\lambda)$. Time je dokazano da je

$$(\varphi(z))(s_\alpha(\lambda + \rho) - \rho) = (\varphi(z))(\lambda) \quad \text{za svaku dominantnu integralnu formu} \quad \lambda \quad \text{na} \quad \mathfrak{h}.$$

Budući da su $\varphi(z)$ i $\lambda \mapsto (\varphi(z))(s_\alpha(\lambda + \rho) - \rho)$ polinomijalne fukcije na $\mathfrak{h}^*$, slijedi da su one identički jednake. Time je dokazano da vrijedi

$$(\varphi(z))(\lambda) = (\varphi(z))(s_\alpha(\lambda + \rho) - \rho) \qquad \forall z \in \mathcal{Z}(\mathfrak{g}), \quad \forall\lambda \in \mathfrak{h}^*, \quad \forall\alpha \in B(R_+).$$

Zamijenimo li u toj jednakosti λ sa $\lambda - \rho$, nalazimo

$$(\varphi(z))(\lambda - \rho) = (\varphi(z))(s_\alpha\lambda - \rho) \qquad \forall z \in \mathcal{Z}(\mathfrak{g}), \quad \forall\lambda \in \mathfrak{h}^*, \quad \forall\alpha \in B(R_+).$$

Po definiciji automorfizma γ to znači da je

$$((\gamma \circ \varphi)(z))(\lambda) = ((\gamma \circ \varphi)(z)(s_\alpha\lambda) \qquad \forall z \in \mathcal{Z}(\mathfrak{g}), \quad \forall\lambda \in \mathfrak{h}^*, \quad \forall\alpha \in B(R_+).$$

Budući da refleksije s_α, $a \in B(R_+)$, generiraju Weylovu grupu W, zaključujemo da je polinomijalna funkcija $(\gamma \circ \varphi)(z)$ na $\mathfrak{h}^*$ $W-$invarijantna za svaki $z \in \mathcal{Z}(\mathfrak{g})$. Time je dokazano da vrijedi

$$(\gamma \circ \varphi)(\mathcal{Z}(\mathfrak{g})) \subseteq \mathcal{P}(\mathfrak{h}^*)^W = S(\mathfrak{h})^W.$$

(2) Označimo sada sa $\tilde{\eta} : \mathcal{P}(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}} \to \mathcal{P}(\mathfrak{h})^W$ Chevalleyev izomorfizam restrikcije sa $\mathfrak{g}$ na $\mathfrak{h}$ iz teorema 3.1.2. Pomoću invarijantne nedegenerirane simetrične bilinearne forme B na $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ prostore $\mathfrak{g}$ i $\mathfrak{h}$ možemo identificirati s njihovim dualima $\mathfrak{g}^*$ i $\mathfrak{h}^*$. Tada se $\mathcal{P}(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$ identificira sa $\mathcal{P}(\mathfrak{g}^*)^{\mathfrak{g}} = S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$, a $\mathcal{P}(\mathfrak{h})^W$ sa $\mathcal{P}(\mathfrak{h}^*)^W = S(\mathfrak{h})^W$. Izomorfizam $S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}} \to S(\mathfrak{h})^W$ dobiven tom identifikacijom iz Chevalleyevog izomorfizma $\tilde{\eta}$ označimo sa η.

Chevalleyev izomorfizam $\tilde{\eta} : \mathcal{P}(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}} \to \mathcal{P}(\mathfrak{h})^W$ jednak je restrikciji $Res_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}|\mathcal{P}(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$, gdje je $Res_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}} : \mathcal{P}(\mathfrak{g}) \to \mathcal{P}(\mathfrak{h})$ epimorfizam restrikcije polinomijalnih funkcija sa $\mathfrak{g}$ na $\mathfrak{h}$. Jezgra epimorfizma $Res_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}} : \mathcal{P}(\mathfrak{g}) \to \mathcal{P}(\mathfrak{h})$ je ideal $\mathcal{J} = \{f \in \mathcal{P}(\mathfrak{g});\ f|\mathfrak{h} = 0\}$.

Zadatak 3.2.2. *Dokažite da pri opisanim identifikacijama $\mathfrak{g}$ sa $\mathfrak{g}^*$ i $\mathfrak{h}$ sa $\mathfrak{h}^*$, dakle, $\mathcal{P}(\mathfrak{g})$ sa $S(\mathfrak{g}) = \mathcal{P}(\mathfrak{g}^*)$ i $\mathcal{P}(\mathfrak{h})$ sa $\mathcal{P}(\mathfrak{h}^*) = S(\mathfrak{h})$, vrijedi:*

(a) *Ideal $\mathcal{J} = \{f \in \mathcal{P}(\mathfrak{g});\ f|\mathfrak{h} = 0\}$ identificira se s idealom $\mathcal{K}$ u algebri $S(\mathfrak{g})$ generiranim sa $\mathfrak{n}^+ \dotplus \mathfrak{n}^-$.*

(b) $S(\mathfrak{g}) = S(\mathfrak{h}) \dotplus \mathcal{K}$.

(c) *Epimorfizam $Res_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}} : \mathcal{P}(\mathfrak{g}) \to \mathcal{P}(\mathfrak{h})$ identificira se s projektorom ψ sa $S(\mathfrak{g})$ na $S(\mathfrak{h})$ duž $\mathcal{K}$ u skladu s rastavom iz (b).*

Prema tome, izomorfizam $\eta : S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}} \to S(\mathfrak{h})^W$ je restrikcija $\psi|S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$, gdje je ψ projektor $S(\mathfrak{g})$ na $S(\mathfrak{h})$ duž ideala $\mathcal{K}$ u algebri $S(\mathfrak{g})$ generiranog sa $\mathfrak{n}^+ \dotplus \mathfrak{n}^-$.

Neka je sada $\sigma : S(\mathfrak{g}) \to U(\mathfrak{g})$ linearni izomorfizam simetrizacije; dakle,

$$\sigma(z_1 \cdots z_n) = \frac{1}{n!} \sum_{\tau \in \mathcal{S}_n} z_{\tau(1)} \cdots z_{\tau(n)} \qquad \text{za} \quad n \in \mathbb{N} \quad \text{i} \quad z_1, \ldots, z_n \in \mathfrak{g}.$$

Pri tome s lijeve strane $z_1 \cdots z_n$ označava umnožak u simetričnoj algebri $S(\mathfrak{g})$, a s desne strane $z_{\tau(1)} \cdots z_{\tau(n)}$ označava umnožak u univerzalnoj omotačkoj algebri $U(\mathfrak{g})$. Iz PBW−teorema izvodi se da je σ izomorfizam vektorskih prostora koji je u skladu s graduacijom $(S^n(\mathfrak{g}))_{n \in \mathbb{Z}_+}$ algebre $S(\mathfrak{g})$ i filtracijom $(U_n(\mathfrak{g}))_{n \in \mathbb{Z}_+}$ algebre $U(\mathfrak{g})$ tako da je

$$U_n(\mathfrak{g}) = \sigma(S^n(\mathfrak{g})) \dotplus U_{n-1}(\mathfrak{g}) \qquad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{3.5}$$

Neka je $(S_n(\mathfrak{g}))_{n \in \mathbb{Z}_+}$ filtracija algebre $S(\mathfrak{g})$ pridružena graduaciji $(S^n(\mathfrak{g}))_{n \in \mathbb{Z}_+}$, tj.

$$S_n(\mathfrak{g}) = S^0(\mathfrak{g}) \dotplus S^1(\mathfrak{g}) \dotplus \cdots \dotplus S^n(\mathfrak{g}).$$

Tada iz (3.5) slijedi da je za svaki $n \in \mathbb{Z}_+$ restrikcija $\sigma|S_n(\mathfrak{g})$ izomorfizam vektorskih prostora sa $S_n(\mathfrak{g})$ na $U_n(\mathfrak{g})$.

Označimo sada sa $\Sigma : U(\mathfrak{g}) \to S(\mathfrak{g})$ izomorfizam vektorskih prostora inverzan simetrizaciji σ. Tada je za svaki $n \in \mathbb{Z}_+$ restrikcija $\Sigma|U_n(\mathfrak{g})$ izomorfizam vektorskih prostora sa $U_n(\mathfrak{g})$ na $S_n(\mathfrak{g})$. Neka je $\vartheta = \Sigma|\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$ restrikcija izomorfizma Σ na centar $\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$ algebre $U(\mathfrak{g})$. Budući da izomorfizam $\Sigma : U(\mathfrak{g}) \to S(\mathfrak{g})$ ostvaruje ekvivalenciju reprezentacija $ad_{U(\mathfrak{g})}$ i $ad_{S(\mathfrak{g})}$ danih derivacijama algebri $U(\mathfrak{g})$ i $S(\mathfrak{g})$, dobivenih jedinstvenim proširenjima operatora adjungirane reprezentacije $ad_{\mathfrak{g}}$ od $\mathfrak{g}$, i budući da su $\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$ i $S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$ potprostori invarijanata u odnosu na te reprezentacije, imamo $\vartheta(\mathcal{Z}(\mathfrak{g})) = \Sigma(\mathcal{Z}(\mathfrak{g})) = S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$, tj. ϑ je izomorfizam vektorskih prostora sa $\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$ na $S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$.

Iz izabrane baze $\{y_1, \ldots, y_s, h_1, \ldots, h_k, x_1, \ldots, x_s\}$ Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ formirajmo sada bazu prostora $S(\mathfrak{g})$: za $q, p \in \mathbb{Z}_+^s$ i $m \in \mathbb{Z}_+^k$ neka je $v(q, m, p)$ monom u $S(\mathfrak{g})$ definiran sa

$$v(q, m, p) = y_1^{q_1} \cdots y_s^{q_s} h_1^{m_1} \cdots h_k^{m_k} x_1^{p_1} \cdots x_s^{p_s}.$$

Tada je $\{v(q,m,p);\ q,p \in \mathbb{Z}_+^s,\ m \in \mathbb{Z}_+^k\}$ baza vektorskog prostora $S(\mathfrak{g})$. Nadalje, uz oznake

$$|q| = q_1 + \cdots + q_s, \quad |m| = m_1 + \cdots + m_k, \quad |p| = p_1 + \cdots + p_s, \quad p,q \in \mathbb{Z}_+^s, \quad m \in \mathbb{Z}_+^k,$$

za svaki $n \in \mathbb{Z}_+$

$$\{v(q,m,p);\ q,p \in \mathbb{Z}_+^s,\ m \in \mathbb{Z}_+^k,\ |q|+|m|+|p| = n\}$$

je baza od $S^n(\mathfrak{g})$ i

$$\{v(q,m,p);\ q,p \in \mathbb{Z}_+^s,\ m \in \mathbb{Z}_+^k,\ |q|+|m|+|p| \leq n\}$$

je baza od $S_n(\mathfrak{g})$. Iz (3.5) i iz definicije simetrizacije σ slijedi da je

$$\sigma(v(q,m,p)) - u(q,m,p) \in U_{|q|+|m|+|p|-1}(\mathfrak{g}), \qquad q,p \in \mathbb{Z}_+^s, \quad m \in \mathbb{Z}_+^k.$$

Stoga je

$$\Sigma(u(q,m,p)) - v(q,m,p) \in S_{|q|+|m|+|p|-1}(\mathfrak{g}), \qquad q,p \in \mathbb{Z}_+^s, \quad m \in \mathbb{Z}_+^k. \tag{3.6}$$

Neka je sada $n \in \mathbb{Z}_+$ i $z \in \mathcal{Z}(\mathfrak{g}) \cap U_n(\mathfrak{g})$. Tada za neke $c(q,m,p) \in \mathbb{C}$ vrijedi

$$z = \sum_{|q|+|m|+|p|\leq n} c(q,m,p)u(q,m,p).$$

Kako je $\vartheta : \mathcal{Z}(\mathfrak{g}) \to S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$ definirano kao restrikcija $\Sigma|\mathcal{Z}(\mathfrak{g}$, iz (3.6) dobivamo

$$\vartheta(z) - \sum_{|q|+|m|+|p|\leq n} c(q,m,p)v(q,m,p) \in S_{n-1}(\mathfrak{g}),$$

dakle, i

$$\vartheta(z) - \sum_{|q|+|m|+|p|= n} c(q,m,p)v(q,m,p) \in S_{n-1}(\mathfrak{g}).$$

Budući da je η restrikcija na $S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$ projektora $\psi : S(\mathfrak{g}) \to S(\mathfrak{h})$ u skladu s rastavom $S(\mathfrak{g}) = S(\mathfrak{h}) \dot{+} \mathcal{K}$, a monom $v(q,m,p)$ je u idealu $\mathcal{K}$ ako i samo ako je $|q|+|p| > 0$, zaključujemo da je

$$\eta(\vartheta(z)) - \sum_{m\in\mathbb{Z}_+^k,\,|m|=n} c(0,m,0)v(0,m,0) \in S_{n-1}(\mathfrak{g}). \tag{3.7}$$

S druge strane je

$$\varphi(z) = \sum_{m\in\mathbb{Z}_+^k,\,|m|\leq n} c(0,m,0)u(0,m,0). \tag{3.8}$$

Uz identifikaciju $U(\mathfrak{h})$ sa $S(\mathfrak{h})$ imamo $u(0,m,0) = v(0,m,0)$. (3.7) i (3.8) pokazuje da smo dokazali da vrijedi

$$(\eta \circ \vartheta)(z) - \varphi(z) \in S_{n-1}(\mathfrak{g}) \qquad \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{i} \quad \forall z \in \mathcal{Z}(\mathfrak{g}) \cap U_n(\mathfrak{g}). \tag{3.9}$$

(3) Filtracije na algebrama $U(\mathfrak{g})$ i $S(\mathfrak{g})$ induciraju filtracije na podalgebrama $\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$, $S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$ i $S(\mathfrak{h})^W$, a iz tih filtriranih algebri dobivamo graduirane algebre $Gr(\mathcal{Z}(\mathfrak{g}))$, $Gr\left(S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}\right)$ i $Gr\left(S(\mathfrak{h})^W\right)$. Izomorfizmi ϑ i η, dakle i njihova kompozicija $\eta \circ \vartheta$, kompatibilni su s filtracijama. Prema tome, iz izomorfizma vektorskih prostora $\eta \circ \vartheta : \mathcal{Z}(\mathfrak{g}) \to S(\mathfrak{h})^W$ prijelazom na graduirane algebre dobivamo izomorfizam vektorskih prostora $Gr(\eta \circ \vartheta) : Gr(\mathcal{Z}(\mathfrak{g})) \to Gr\left(S(\mathfrak{h})^W\right)$. Iz (3.9) slijedi da je $Gr(\eta \circ \vartheta) = Gr(\varphi|\mathcal{Z}(\mathfrak{g}))$. Nadalje, iz definicije automorfizma γ algebre $S(\mathfrak{h}) = \mathcal{P}(\mathfrak{h}^*)$ vidimo da je $Gr(\gamma)$ identiteta. Prema tome, $Gr(\gamma \circ \varphi|\mathcal{Z}(\mathfrak{g}))$ je izomorfizam vektorskih prostora sa $Gr(\mathcal{Z}(\mathfrak{g}))$ na $Gr\left(S(\mathfrak{h})^W\right)$. Odatle slijedi da je

$$\gamma \circ \varphi|\mathcal{Z}(\mathfrak{g}) : \mathcal{Z}(\mathfrak{g}) \to S(\mathfrak{h})^W$$

izomorfizam vektorskih prostora, a kako znamo da je to homomorfizam algebri, zaključujemo da je to izomorfizam algebri.

(4) Treba još dokazati da je taj izomorfizam neovisan o izboru sistema R_+ pozitivnih korijena u $R = R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$. Neka je λ dominantna integralna forma na $\mathfrak{h}$ (u odnosu na R_+) i neka je V prost konačnodimenzionalan $U(\mathfrak{g})-$modul s najvećom težinom λ. Tada je V izomorfan kvocijentnom modulu Vermaovog modula $M(\lambda)$, prema tome, svaki element $z \in \mathcal{Z}(\mathfrak{g})$ na modulu V djeluje množenjem sa skalarom $(\varphi(z))(\lambda)$.

Neka je sada R'_+ neki drugi izbor sistema pozitivnih korijena u R i neka su φ' i γ' homomorfizmi u odnosu na taj izbor. Prema tvrdnji (f) teorema 2.1.23. postoji (čak jedinstven) element $s \in W$ takav da je $R'_+ = s(R_+)$. Tada je $s\lambda$ najveća težina modula V u odnosu na R'_+, pa slijedi da svaki element $z \in \mathcal{Z}(\mathfrak{g})$ na modulu djeluje množenjem sa skalarom $(\varphi'(z))(s\lambda)$. Prema tome, vrijedi

$$(\varphi(z))(\lambda) = (\varphi'(z))(s\lambda) \qquad \forall z \in \mathcal{Z}(\mathfrak{g}).$$

Očito je $\rho' = \rho_{R'_+} = s\rho_{R_+} = s\rho$, pa prema dokazanom u **(1)** nalazimo da za svaki $z \in \mathcal{Z}(\mathfrak{g})$ vrijedi

$$((\gamma \circ \varphi)(z))(s\lambda + s\rho) = ((\gamma \circ \varphi)((z))(\lambda + \rho) = (\varphi(z))(\lambda) = (\varphi'(z))(s\lambda) = ((\gamma' \circ \varphi')(z))(s\lambda + s\rho).$$

Označimo sada sa P_+ skup svih dominantnih integralnih formi na $\mathfrak{h}$ u odnosu na R_+, a sa $P'_+ = s(P_+)$ skup svih dominantnih integralnih formi na $\mathfrak{h}$ u odnosu na R'_+. Prema dokazanom, za svaki $z \in \mathcal{Z}(\mathfrak{g})$ polinomijalne funkcije $(\gamma\circ\varphi)(z)$ i $(\gamma'\circ\varphi')(z)$ podudaraju se na skupu $P'_+ + \rho'$. Odatle slijedi da se one podudaraju svuda na $\mathfrak{h}^*$. Time je dokazana neovisnost izomorfizma $(\gamma \circ \varphi)|\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$ o izboru pozitivnog sistema korijena R_+ u R.

Izomorfizam $(\gamma\circ\varphi)|\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$ zove se **Harish−Chandrin izomorfizam** sa $\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$ na $S(\mathfrak{h})^W$. Označimo ga u daljnjem sa ω.

Infinitezimalni karakter Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ je naziv za centralni karakter od $U(\mathfrak{g})$, odnosno, za karakter od $\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$, tj. za unitalni homomorfizam $\mathcal{Z}(\mathfrak{g}) \to \mathbb{C}$. Za $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ je sa

$$\chi_\lambda(z) = (\varphi(z))(\lambda) = ((\gamma \circ \varphi)(z))(\lambda + \rho) = (\omega(z))(\lambda + \rho), \qquad z \in \mathcal{Z}(\mathfrak{g}),$$

definiran infinitezimalni karakter $\chi_\lambda : \mathcal{Z}(\mathfrak{g}) \to \mathbb{C}$.

Teorem 3.2.4. *$\lambda \mapsto \chi_\lambda$ je surjekcija sa $\mathfrak{h}^*$ na skup $\mathcal{Z}(\mathfrak{g})\hat{}$ svih infinitezimalnih karaktera. Za $\lambda, \lambda' \in \mathfrak{h}^*$ vrijedi $\chi_\lambda = \chi_{\lambda'}$ ako i samo ako je $\lambda' + \rho = s(\lambda + \rho)$ za neki $s \in W$.*

Dokaz: Za $\lambda, \lambda' \in \mathfrak{h}^*$ i $z \in \mathcal{Z}(\mathfrak{g})$ imamo

$$\chi_\lambda(z) = (\omega(z))(\lambda + \rho) \quad \text{i} \quad \chi_{\lambda'}(z) = (\omega(z))(\lambda' + \rho).$$

Kako je $\omega(z) \in S(\mathfrak{h})^W = \mathcal{P}(\mathfrak{h}^*)^W$, iz $\lambda' + \rho = s(\lambda + \rho)$ za neki $s \in W$ slijedi $\chi_\lambda = \chi_{\lambda'}$.

Pretpostavimo sada da takav $s \in W$ ne postoji, tj. da je

$$W(\lambda' + \rho) \cap W(\lambda + \rho) = \emptyset.$$

Tada postoji polinomijalna funkcija f na $\mathfrak{h}^*$ takva da je f jednaka 1 u svakoj točki skupa $W(\lambda+\rho)$ i da je f jednaka 0 u svakoj točki skupa $W(\lambda' + \rho)$. Možemo pretpostaviti da je polinomijalna funkcija f $W-$invarijantna. Doista, ako nije tako, možemo je zamijeniti s $W-$invarijantnom polinomijalnom funkcijom

$$\frac{1}{|W|} \sum_{s \in W} sf.$$

Neka je sada $z \in \mathcal{Z}(\mathfrak{g})$ takav da je $\omega(z) = f$. Tada je

$$\chi_\lambda(z) = (\omega(z))(\lambda + \rho) = f(\lambda + \rho) = 1 \quad \text{i} \quad \chi_{\lambda'}(z) = (\omega(z))(\lambda' + \rho) = f(\lambda' + \rho) = 0.$$

Prema tome, $\chi_\lambda \neq \chi_{\lambda'}$.

Treba još dokazati da je svaki infinitezimalni karakter oblika χ_λ za neki $\lambda \in \mathfrak{h}^*$. Neka je $\psi : S(\mathfrak{h})^W \to \mathbb{C}$ karakter, odnosno, unitalni homomorfizam. Tada je $\operatorname{Ker}\psi$ ideal u $S(\mathfrak{h})^W$ kodimenzije 1, štoviše, vrijedi $S(\mathfrak{h})^W = \mathbb{C}1 \dotplus \operatorname{Ker}\psi$. Dokažimo sada da je ideal u algebri $S(\mathfrak{h})$ generiran sa $\operatorname{Ker}\psi$ pravi ideal tj. različit od $S(\mathfrak{h})$. Pretpostavimo suprotno da je on jednak $S(\mathfrak{h})$. Tada posebno postoje $\ell \in \mathbb{N}$, $a_1, \ldots, a_\ell \in S(\mathfrak{h})$ i $b_1, \ldots, b_\ell \in \operatorname{Ker}\psi$ takvi da je

$$1 = a_1 b_1 + \cdots + a_\ell b_\ell.$$

Za svaki $s \in W$ je $sb_j = b_j \ \forall j$, pa iz gornje jednakosti slijedi

$$1 = (sa_1)b_1 + \cdots + (sa_\ell)b_\ell \qquad \forall s \in W.$$

Sumiranjem po svim $s \in W$ i dijeljenjem s redom $|W|$ grupe W dobivamo

$$1 = c_1 b_1 + \cdots + c_\ell b_\ell$$

gdje su

$$c_j = \frac{1}{|W|} \sum_{s \in W} sa_j \in S(\mathfrak{h})^W.$$

Kako je $\operatorname{Ker}\psi$ ideal u algebri $S(\mathfrak{h})^W$, odatle slijedi da je $1 \in \operatorname{Ker}\psi$. Ova kontradikcija pokazuje da je pretpostavka bila pogrešna. Prema tome, ideal u algebri $S(\mathfrak{h})$ generiran sa $\operatorname{Ker}\psi$ je pravi ideal u $S(\mathfrak{h})$. Neka je sada $\mathcal{M}$ maksimalni ideal u algebri $S(\mathfrak{h})$ takav da je $\operatorname{Ker}\psi \subseteq \mathcal{M}$. Tada je očito $\mathcal{M} \cap S(\mathfrak{h})^W = \operatorname{Ker}\psi$. Nadalje, $S(\mathfrak{h}) = \mathbb{C}1 \dotplus \mathcal{M}$, dakle, postoji karakter $\Psi : S(\mathfrak{h}) \to \mathbb{C}$ takav da je $\mathcal{M} = \operatorname{Ker}\psi$. Sada iz $\mathcal{M} \cap S(\mathfrak{h})^W = \operatorname{Ker}\psi$ slijedi da je $\psi = \Psi | S(\mathfrak{h})^W$. Prema Hilbertovom teoremu o nulama postoji $\mu \in \mathfrak{h}^*$ takav da je $\Psi(u) = u(\mu) \ \forall u \in S(\mathfrak{h}) = \mathcal{P}(\mathfrak{h}^*)$. Tada je $\psi(u) = u(\mu)$ $\forall u \in S(\mathfrak{h})^W$.

Neka je sada $\chi : \mathcal{Z}(\mathfrak{g}) \to \mathbb{C}$ infinitezimalni karakter. Kako je ω izomorfizam algebri sa $\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$ na $S(\mathfrak{h})^W$, slijedi da je $\chi \circ \omega^{-1}$ karakter algebre $S(\mathfrak{h})^W$. Prema dokazanom postoji $\mu \in \mathfrak{h}^*$ takav da je

$$(\chi \circ \omega^{-1})(u) = u(\mu) \qquad \forall u \in S(\mathfrak{h})^W.$$

Za svaki $z \in \mathcal{Z}(\mathfrak{g})$ je $\omega(z) \in S(\mathfrak{h})^W$, pa gornja jednakost pokazuje da je

$$\chi(z) = (\chi \circ \omega^{-1})(\omega(z)) = (\omega(z))(\mu) = \chi_\lambda(z) \qquad \forall z \in \mathcal{Z}(\mathfrak{g}),$$

gdje smo stavili $\lambda = \mu - \rho$. Time je dokazano da je $\lambda \mapsto \chi_\lambda$ surjekcija sa $\mathfrak{h}^*$ na skup svih infinitezimalnih karaktera $\mathcal{Z}(\mathfrak{g})\hat{}$, odnosno, teorem 3.2.4. u potpunosti je dokazan.

3.3 $(\mathfrak{g}, K)-$moduli

Neka je G realna Liejeva grupa s Liejevom algebrom $\mathfrak{g}$ i neka je K kompaktna podgrupa od G. Na koncu odjeljka 1.7. definirali smo pojam $(\mathfrak{g}, K)-$**modula**: to je kompleksan vektorski prostor $\mathcal{V}$ na kome su zadane reprezentacije Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ i grupe K, čija djelovanja označavamo s točkom, takve da vrijedi:

(1) $k \cdot X \cdot \xi = ((Ad\,k)X) \cdot k \cdot \xi \;\; \forall k \in K, \; \forall X \in \mathfrak{g}$ i $\forall \xi \in \mathcal{V}$.

(2) Za svaki $\xi \in \mathcal{V}$ potprostor $\mathcal{V}_\xi = span\,\{k \cdot \xi;\; k \in K\}$ od $\mathcal{V}$ je konačnodimenzionalan i preslikavanje $k \mapsto k \cdot |\mathcal{V}_\xi$ je neprekidno, dakle, klase C^∞ (štoviše, analitičko).

(3) Za svaki $Y \in \mathfrak{k}$ i svaki $\xi \in \mathcal{V}$ vrijedi

$$Y \cdot \xi = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\exp tY) \cdot \xi \Big|_{t=0}.$$

Prema teoremu 1.7.10. ako je π reprezentacija od G na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$, onda je $\mathcal{H}_K^\infty$ $(\mathfrak{g}, K)-$modul; pri tome je

$$\mathcal{H}_K^\infty = \{\xi \in \mathcal{H}^\infty;\; \text{potprostor } span\,\{\pi(k)\xi;\; k \in K\} \text{ je konačnodimenzionalan}\}.$$

Za $(\mathfrak{g}, K)-$modul $\mathcal{V}$ vrijedi

$$\mathcal{V} = \sum_{\gamma \in \hat{K}} \dot{+}\, \mathcal{V}(\gamma)$$

gdje je $\mathcal{V}(\gamma)$ suma svih $K-$invarijantnih konačnodimenzionalnih potprostora od $\mathcal{V}$ takvih da je pripadna subreprezentacija od K ireducibilna iz klase γ. Projektor P_γ prostora $\mathcal{V}$ na potprostor $\mathcal{V}(\gamma)$ u skladu s gornjim rastavom, tj duž potprostora $\sum_{\delta \neq \gamma} \dot{+}\, \mathcal{V}(\delta)$, dan je sa

$$P_\gamma \xi = d(\gamma) \int_K \overline{\chi_\gamma(k)}\, k \cdot \xi \, \mathrm{d}\nu(k), \qquad \xi \in \mathcal{V};$$

pri tome je $d(\gamma)$ dimenzija reprezentacije u klasi $\gamma \in \hat{K}$, χ_γ je karakter te reprezentacije i ν je normirana Haarova mjera na grupi K.

Za $(\mathfrak{g}, K)-$module definirali smo u odjeljku 1.7. uobičajenu terminologiju kao i za reprezentacije: **Invarijantan potprostor** ili $(\mathfrak{g}, K)-$**podmodul** $(\mathfrak{g}, K)-$modula $\mathcal{V}$ je potprostor $\mathcal{W}$ od $\mathcal{V}$ koji je invarijantan s obzirom na sve operatore $k\cdot$ (za $k \in K$) i $X\cdot$ (za $X \in \mathfrak{g}$). $(\mathfrak{g}, K)-$**modul** $\mathcal{V}$ je **prost** ili **ireducibilan** ako je $\mathcal{V} \neq \{0\}$ i ne postoji $(\mathfrak{g}, K)-$podmodul različit od $\{0\}$ i od $\mathcal{V}$. Ako su $\mathcal{V}$ i $\mathcal{W}$ $(\mathfrak{g}, K)-$moduli, $Hom_{\mathfrak{g},K}(\mathcal{V}, \mathcal{W})$ označava prostor svih linearnih operatora $T : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ koji prepliću reprezentacije od K i reprezentacije od $\mathfrak{g}$, tj. takvih da za proizvoljne $k \in K$, $X \in \mathfrak{g}$ i $\xi \in \mathcal{V}$ vrijedi

$$T(k \cdot \xi) = k \cdot T\xi \qquad \text{i} \qquad T(X \cdot \xi) = X \cdot T\xi.$$

Ako je takav T bijekcija sa $\mathcal{V}$ na $\mathcal{W}$ kažemo da je T **ekvivalencija** $(\mathfrak{g}, K)-$**modula**. Ako postoji ekvivalencija $T \in Hom_{\mathfrak{g},K}(\mathcal{V}, \mathcal{W})$ kažemo da su $(\mathfrak{g}, K)-$**moduli** $\mathcal{V}$ **i** $\mathcal{W}$ **ekvivalentni** i pišemo $\mathcal{V} \simeq \mathcal{W}$. Za $(\mathfrak{g}, K)-$modul $\mathcal{V}$ pišemo $End_{\mathfrak{g},K}(\mathcal{V}) = Hom_{\mathfrak{g},K}(\mathcal{V}, \mathcal{V})$. Za ireducibilne $(\mathfrak{g}, K)-$module imamo sljedeću varijantu Schurove leme:

Propozicija 3.3.1. *Neka je $\mathcal{V}$ ireducibilan $(\mathfrak{g}, K)-$modul. Tada je $End_{\mathfrak{g},K}(\mathcal{V}) = \mathbb{C} I_{\mathcal{V}}$.*

Dokaz: Neka je $\xi \in \mathcal{V}\backslash\{0\}$. Tada je potprostor $\mathcal{V}_\xi = span\,\{k{\cdot}\xi;\ k \in K\}$ konačnodimenzionalan. Nadalje, zbog svojstva (1) u definiciji $(\mathfrak{g}, K)-$modula prebrojivodimenzionalan potprostor

$$U(\mathfrak{g})\mathcal{V}_\xi = \sum_{\eta\in\mathcal{V}_\xi} U(\mathfrak{g})\eta = span\,\{u\cdot k\cdot\xi;\ u \in U(\mathfrak{g}),\ k \in K\}$$

je $(\mathfrak{g}, K)-$podmodul od $\mathcal{V}$. Kako je on različit od $\{0\}$, zbog ireducibilnosti on je jednak $\mathcal{V}$. Na taj je način dokazano da je prostor $\mathcal{V}$ prebrojivodimenzionalan. Sada tvrdnja slijedi iz propozicije 1.4.2. primijenjene na unitalnu podalgebru $\mathcal{A}$ od $L(\mathcal{V})$ generiranu sa $\{X\cdot;\ X \in \mathfrak{g}\}\cup\{k\cdot;\ k \in K\}$.

Za $(\mathfrak{g}, K)-$**modul** $\mathcal{V}$ kažemo da je **dopustiv** ako je potprostor $\mathcal{V}(\gamma)$ konačnodimenzionalan $\forall\gamma \in \hat{K}$. Analogno, **reprezentacija** π grupe G na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$ je **dopustiva** (u odnosu na kompaktnu podgrupu K) ako je potprostor $\mathcal{H}(\gamma)$ konačnodimenzionalan $\forall\gamma \in \hat{K}$. Uočimo da je to ispunjeno ako i samo ako je $(\mathfrak{g}, K)-$modul $\mathcal{H}_K^\infty$ dopustiv.

Propozicija 3.3.2. *$(\mathfrak{g}, K)-$modul $\mathcal{V}$ je dopustiv ako i samo ako je prostor $Hom_K(W, \mathcal{V})$ konačnodimenzionalan za svaki konačnodimenzionalan $K-$modul W.*

Zadatak 3.3.1. *Dokažite propoziciju 3.3.2.*

Za reprezentacije π i ρ grupe G na Hilbertovim prostorima $\mathcal{H}$ i $\mathcal{K}$ kažemo da su **infinitezimalno ekvivalentne** (u odnosu na kompaktnu podgrupu K od G) ako su pripadni $(\mathfrak{g}, K)-$moduli $\mathcal{H}_K^\infty$ i $\mathcal{K}_K^\infty$ ekvivalentni. Slično, za reprezentaciju π kažemo da je **infinitezimalno ireducibilna** ako je $(\mathfrak{g}, K)-$modul $\mathcal{H}_K^\infty$ ireducibilan.

Za $(\mathfrak{g}, K)-$**modul** $\mathcal{V}$ kažemo da je **konačno generiran** ako je on konačno generiran kao $U(\mathfrak{g})-$modul, tj. postoje $\xi_1, \ldots, \xi_n \in \mathcal{V}$ takvi da je

$$\mathcal{V} = U(\mathfrak{g})\xi_1 + \cdots + U(\mathfrak{g})\xi_n.$$

U daljnjem je stalno G realna reduktivna grupa, s pripadnom Cartanovom involucijom ϑ, $\mathfrak{g}$ njena Liejeva algebra, K njena maksimalna kompaktna podgrupa fiksnih točaka u odnosu na ϑ, $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \dotplus \mathfrak{p}$ Cartanova dekompozicija pridružena ϑ. Neka je $\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$ centar od $U(\mathfrak{g})$ i $\mathcal{Z}_G(\mathfrak{g})$ unitalna podalgebra centra definirana sa

$$\mathcal{Z}_G(\mathfrak{g}) = \{u \in U(\mathfrak{g});\ (Ad\,g)u = u\ \ \forall g \in G\}.$$

Lako se vidi da je $\mathcal{Z}_G(\mathfrak{g}) = \mathcal{Z}(\mathfrak{g})$ ako je grupa G unutarnjeg tipa.

Teorem 3.3.3. (**Harish–Chandra**) *Neka je $\mathcal{V}$ konačno generiran $(\mathfrak{g}, K)-$modul. Za svaku klasu $\gamma \in \hat{K}$ potprostor $\mathcal{V}(\gamma)$ je konačno generiran kao $\mathcal{Z}_G(\mathfrak{g})-$modul.*

Dokaz ćemo provesti pomoću jedne konstrukcije i niza pomoćnih tvrdnji.

Promatramo konačno generiran $(\mathfrak{g}, K)-$modul $\mathcal{V}$. Izaberimo konačnodimenzionalan $K-$invarijantan potprostor W od $\mathcal{V}$ takav da je $U(\mathfrak{g})W = \mathcal{V}$. Neka je $\sigma : S(\mathfrak{g}) \to U(\mathfrak{g})$ izomorfizam simetrizacije iz odjeljka 1.4. Prema korolaru 1.4.4. tada je $\mathcal{V} = \sigma(S(\mathfrak{p}))W$. Definiramo sada rastući niz potprostora $(\mathcal{V}_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ ovako:

$$\mathcal{V}_0 = W, \qquad \mathcal{V}_{n+1} = \mathfrak{p}\mathcal{V}_n + \mathcal{V}_n, \quad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Tada je svaki potprostor $\mathcal{V}_n$ konačnodimenzionalan i $K-$invarijantan i njihova je unija čitav prostor $\mathcal{V}$. Neka je $Gr(\mathcal{V})$ direktna suma vektorskih prostora $\mathcal{V}_n/\mathcal{V}_{n-1}$, $n \in \mathbb{Z}_+$; pri tome podrazumijevamo da je $\mathcal{V}_{-1} = \{0\}$. Tada je $Gr(\mathcal{V})$ $K-$modul ekvivalentan $K-$modulu $\mathcal{V}$. Neka su $p_n : \mathcal{V}_n \to \mathcal{V}_n/\mathcal{V}_{n-1}$ kvocijentna preslikavanja. Za $X \in \mathfrak{p}$ i za $\xi, \eta \in \mathcal{V}_n$ takve da je $p_n(\xi) = p_n(\eta)$ vrijedi $\xi - \eta \in \mathcal{V}_{n-1}$, dakle, $X \cdot \xi - X \cdot \eta \in V_n$, odnosno, $p_{n+1}(X \cdot \xi) = p_{n+1}(X \cdot \eta)$. Prema tome, možemo definirati linearan operator $X\cdot$ na prostoru $Gr(\mathcal{V})$ ovako:

$$X \cdot p_n(\xi) = p_{n+1}(X \cdot \xi), \qquad \xi \in \mathcal{V}_n, \quad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Sada na mnogostrukosti $\tilde{G} = K \times \mathfrak{p}$ definiramo binarnu operaciju ovako:

$$(k, X)(h, Y) = (kh, (Ad\, h)^{-1}X + Y), \qquad (k, X), (h, Y) \in \tilde{G}.$$

Zadatak 3.3.2. *Dokažite da s tako definiranom operacijom vrijedi:*

(a) *$\tilde{G}$ je Liejeva grupa.*

(b) *Njena se Liejeva algebra $\tilde{\mathfrak{g}}$ kao vektorski prostor podudara sa $\mathfrak{g}$, a komutator $\{\cdot, \cdot\}$ u $\tilde{\mathfrak{g}}$ je dan sa*

$$\{X + Y, X' + Y'\} = [X, X'] + [X, Y'] + [Y, X'], \qquad X, X' \in \mathfrak{k}, \quad Y, Y' \in \mathfrak{p}.$$

(c) *$\mathfrak{p}$ je komutativni ideal u $\tilde{\mathfrak{g}}$.*

(d) *$\{e\} \times \mathfrak{p}$ je zatvorena normalna komutativna podgrupa od $\tilde{G}$.*

(e) *$k \mapsto (k, 0)$ je izomorfizam K na maksimalnu kompaktnu podgrupu $\tilde{K} = K \times \{0\}$ od $\tilde{G}$.*

Kao što smo spomenuli $K-$modul $Gr(\mathcal{V})$ ekvivalentan je $K-$modulu $\mathcal{V}$; ekvivalencija $\mathcal{V} \to Gr(\mathcal{V})$ je dana sa

$$\xi \mapsto p_n(\xi) \qquad \text{za} \quad \xi \in \mathcal{V}_n \setminus \mathcal{V}_{n-1}, \quad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Tada je $Gr(\mathcal{V})$ i $\mathfrak{k}-$modul. Na $Gr(\mathcal{V})$ definirali smo i djelovanje elemenata $X \in \mathfrak{p}$. Kako je $\tilde{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} = \mathfrak{k} \dotplus \mathfrak{p}$, možemo definirati djelovanje svakog element Liejeve algebre $\tilde{\mathfrak{g}}$ na vektorskom prostoru $Gr(\mathcal{V})$:

$$(X + Y) \cdot v = X \cdot v + Y \cdot v, \qquad X \in \mathfrak{k}, \quad Y \in \mathfrak{p}, \quad v \in Gr(\mathcal{V}).$$

Lema 3.3.4. *$Gr(\mathcal{V})$ je konačno generiran $(\tilde{\mathfrak{g}}, K)-$modul.*

Dokaz: Za $X, Y \in \mathfrak{p}$ i $\xi \in \mathcal{V}_n$ imamo $[X, Y] \in \mathfrak{k}$, dakle, $[X, Y] \cdot \xi \in \mathcal{V}_n$. Prema tome,

$$X \cdot Y \cdot p_n(\xi) = p_{n+2}(X \cdot Y \cdot \xi) = p_{n+2}(Y \cdot X \cdot \xi + [X, Y] \cdot \xi) = p_{n+2}(Y \cdot X \cdot \xi) = Y \cdot X \cdot p_n(\xi).$$

To pokazuje da je

$$X \cdot Y \cdot v = Y \cdot X \cdot v \qquad \forall X, Y \in \mathfrak{p} \quad \text{i} \quad \forall v \in Gr(\mathcal{V}).$$

Zadatak 3.3.3. *Dokažite da odatle slijedi da je $Gr(\mathcal{V})$ $\tilde{\mathfrak{g}}-$modul, odnosno, da za $X, X' \in \mathfrak{k}$ i $Y, Y' \in \mathfrak{p}$ i za $v \in Gr(\mathcal{V})$ vrijedi*

$$\{X + Y, X' + Y'\} \cdot v = (X + Y) \cdot (X' + Y') \cdot v - (X' + Y') \cdot (X + Y) \cdot v.$$

Prema tome, $Gr(\mathcal{V})$ je $\tilde{\mathfrak{g}}-$modul i $K-$modul. Budući da su kao $K-$moduli $\mathcal{V}$ i $Gr(\mathcal{V})$ ekvivalentni, svojstva (2) i (3) za $K-$modul $Gr(\mathcal{V})$ neposredno slijede iz tih svojstava za $K-$modul $\mathcal{V}$. Nadalje, svojstvo (1) je dovoljno dokazati za $k \in K$ i $X \in \mathfrak{p}$, a tada to svojstvo slijedi iz istog svojstva za $(\mathfrak{g}, K)-$modul $\mathcal{V}$, iz definicije djelovanja $\mathfrak{p}$ na $Gr(\mathcal{V})$ i iz činjenice da su kvocijentna preslikavanja $p_n : \mathcal{V}_n \to \mathcal{V}_n/\mathcal{V}_{n-1}$ epimorfizmi $K-$modula. Doista, za $\xi \in \mathcal{V}_n \setminus \mathcal{V}_{n-1}$, $X \in \mathfrak{p}$ i $k \in K$ imamo redom:

$$\begin{aligned} k \cdot X \cdot p_n(\xi) &= k \cdot p_{n+1}(X \cdot \xi) = p_{n+1}(k \cdot X \cdot \xi) = \\ &= p_{n+1}(((Ad\, k)X) \cdot k \cdot \xi) = ((Ad\, k)X) \cdot p_n(k \cdot \xi) = ((Ad\, k)X) \cdot k \cdot p_n(\xi). \end{aligned}$$

Dakle, $Gr(\mathcal{V})$ je $(\tilde{\mathfrak{g}}, K)-$modul. Napokon, konačna generiranost slijedi iz $\mathfrak{p} \cdot Gr(\mathcal{V})_n = Gr(\mathcal{V})_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{Z}_+$, gdje su $Gr(\mathcal{V})_n = \mathcal{V}_n/\mathcal{V}_{n-1}$.

Znamo da je $\mathfrak{p}$ komutativan ideal u $\tilde{\mathfrak{g}}$. Prema tome, univerzalna omotačka algebra $U(\mathfrak{p})$ identificira se sa simetričnom algebrom $S(\mathfrak{p})$ i ona je komutativna unitalna podalgebra od $U(\tilde{\mathfrak{g}})$.

Korolar 3.3.5. *$Gr(\mathcal{V})$ je konačno generiran $S(\mathfrak{p})-$modul.*

Zadatak 3.3.4. *Dokažite korolar 3.3.5.*

Iz definicije grupe $\tilde{G}$ i njene Liejeve algebre vidi se da je $S(\mathfrak{p})^K$ unitalna podalgebra centra $\mathcal{Z}(\tilde{\mathfrak{g}})$ algebre $U(\tilde{\mathfrak{g}})$ sadržana u $\mathcal{Z}_{\tilde{G}}(\tilde{\mathfrak{g}})$.

Lema 3.3.6. *$Gr(\mathcal{V})(\gamma)$ je konačno generiran $S(\mathfrak{p})^K-$modul za svaki $\gamma \in \hat{K}$.*

Dokaz: Neka je $\gamma \in \hat{K}$ i X konačnodimenzionalan ireducibilan $K-$modul iz klase γ. Prostor $L(X, Gr(\mathcal{V}))$ svih linearnih operatora sa X u $Gr(\mathcal{V})$ je $K-$modul uz djelovanje

$$(k \cdot T)(x) = k \cdot T(k^{-1} \cdot x), \qquad k \in K, \quad T \in L(X, Gr(\mathcal{V})), \quad x \in X.$$

Prostor $L(X, Gr(\mathcal{V}))$ je i unitalan $S(\mathfrak{p})-$modul uz djelovanje

$$(u \cdot T)(x) = u \cdot T(x), \qquad u \in S(\mathfrak{p}), \quad T \in L(X, Gr(\mathcal{V})), \quad x \in X.$$

Kao $S(\mathfrak{p})-$modul $L(X, Gr(\mathcal{V}))$ je konačno generiran. Doista, prema korolaru 3.3.5. $Gr(\mathcal{V})$ je konačno generirani $S(\mathfrak{p})-$modul, pa tvrdnja slijedi iz konačnodimenzionalnosti prostora X.

Unitalna algebra $S(\mathfrak{p}) = \mathcal{P}(\mathfrak{p}^*)$ je Noetherina. Stoga je $S(\mathfrak{p})-$modul konačno generiran ako i samo ako je on Noetherin. Nadalje, svaki je podmodul Noetherinog modula i sam Noetherin modul. Odatle slijedi da je svaki podmodul konačno generiranog $S(\mathfrak{p})-$modula i sam konačno generiran. Posebno, svaki $S(\mathfrak{p})-$podmodul od $L(X, Gr(\mathcal{V}))$ je konačno generiran.

Promatrajmo sada potprostor $K-$invarijanata u $L(X, Gr(\mathcal{V}))$:

$$Hom_K(X, Gr(\mathcal{V})) = \{T \in L(X, Gr(\mathcal{V}));\ k \cdot T = T\ \ \forall k \in K\}.$$

Označimo sa L $S(\mathfrak{p})-$podmodul od $L(X, Gr(\mathcal{V}))$ generiran s potprostorom $Hom_K(X, Gr(\mathcal{V}))$, tj. $L = S(\mathfrak{p}) \cdot Hom_K(X, Gr(\mathcal{V}))$. Prema prethodnoj napomeni L je konačno generiran $S(\mathfrak{p})-$modul. Dakle, postoje elementi $T_1, \ldots, T_d \in Hom_K(X, Gr(\mathcal{V}))$ takvi da je

$$L = S(\mathfrak{p}) \cdot Hom_K(X, Gr(\mathcal{V})) = \sum_{j=1}^{d} S(\mathfrak{p}) \cdot T_j.$$

Neka je $T \in Hom_K(X, Gr(\mathcal{V}))$. Tada je $T \in L$, pa postoje $u_1, \ldots, u_d \in S(\mathfrak{p})$ takvi da je

$$T = \sum_{j=1}^{d} u_j \cdot T_j.$$

Za svaki $k \in K$ je $k \cdot T = T$ i $k \cdot T_j = T_j$ za $j = 1, \ldots, d$. Stoga je

$$T = k \cdot T = k \cdot \sum_{j=1}^{d} u_j \cdot T_j = \sum_{j=1}^{d} ((Ad\, k)u_j) \cdot k \cdot T_j = \sum_{j=1}^{d} ((Ad\, k)u_j) \cdot T_j.$$

Integriramo li po K u odnosu na normiranu Haarovu mjeru ν, dobivamo da vrijedi

$$T = \sum_{j=1}^{d} \overline{u}_j \cdot T_j,$$

pri čemu je

$$\overline{u}_j = \int_K ((Ad\,k)u_j)\mathrm{d}\nu(k).$$

No tada su $\overline{u}_j \in S(\mathfrak{p})^K$ za $j = 1, \ldots, d$. Time smo dokazali da je $Hom_K(X, Gr(\mathcal{V}))$ konačno generiran kao $S(\mathfrak{p})^K-$modul. Neka je sada $\Phi : Hom_K(X, Gr(\mathcal{V})) \otimes X \to Gr(\mathcal{V})$ jedinstven linearan operator takav da je

$$\Phi(T \otimes x) = T(x), \qquad T \in Hom_K(X, Gr(\mathcal{V})), \quad x \in X.$$

Svaki $T \in Hom_K(X, Gr(\mathcal{V}))$ je $K-$preplitanje modula X i modula $Gr(\mathcal{V})$, dakle, kako je $X = X(\gamma)$, slika od T sadržana je u $Gr(\mathcal{V})(\gamma)$. Zaključujemo da je slika $\operatorname{Im}\Phi$ od Φ sadržana u $Gr(\mathcal{V})(\gamma)$. U stvari, ta je slika jednaka $Gr(\mathcal{V})(\gamma)$. Doista, ako je Y bilo koji ireducibilni $K-$podmodul od $Gr(\mathcal{V})$ iz klase γ, onda postoji $K-$izomorfizam $T : X \to Y$. Tada je $T \in Hom_K(X, Gr(\mathcal{V}))$, pa vrijedi $Y = T(X) \subseteq \operatorname{Im}\Phi$. Budući da je $Gr(\mathcal{V})$ suma takvih $K-$podmodula Y, tvrdnja slijedi. Za prije izabrane $T_1, \ldots, T_d \in Hom_K(X, Gr(\mathcal{V}))$ imamo sada

$$Gr(\mathcal{V})(\gamma) = \Phi(Hom_K(X, Gr(\mathcal{V})) \otimes X) = \Phi\left(\sum_{j=1}^{d} \left(S(\mathfrak{p})^K \cdot T_j\right) \otimes X\right) = \sum_{j=1}^{d} S(\mathfrak{p})^K \cdot T_j(X).$$

Izaberemo li bazu $\{x_1, \ldots, x_n\}$ od X, dobivamo

$$Gr(\mathcal{V})(\gamma) = \sum_{j=1}^{d}\sum_{i=1}^{n} S(\mathfrak{p})^K \cdot T_j(x_i).$$

Time je lema dokazana.

Promatrajmo sada unitalne algebre $G-$invarijantnih polinoma na $\mathfrak{g}$ i $K-$invarijantnih polinoma na $\mathfrak{p}$:

$$\mathcal{P}(\mathfrak{g})^G = \{f \in \mathcal{P}(\mathfrak{g});\ f((Ad\,g)X) = f(X)\ \forall g \in G \text{ i } \forall X \in \mathfrak{g}\},$$
$$\mathcal{P}(\mathfrak{p})^K = \{f \in \mathcal{P}(\mathfrak{p});\ f((Ad\,k)X) = f(X)\ \forall k \in K \text{ i } \forall X \in \mathfrak{p}\}.$$

Za epimorfizam restrikcije $Res_{\mathfrak{g}/\mathfrak{p}} : \mathcal{P}(\mathfrak{g}) \to \mathcal{P}(\mathfrak{p})$ očito vrijedi $Res_{\mathfrak{g}/\mathfrak{p}}\left(\mathcal{P}(\mathfrak{g})^G\right) \subseteq \mathcal{P}(\mathfrak{p})^K$.

Lema 3.3.7. *$\mathcal{P}(\mathfrak{p})^K$ je konačno generiran kao $Res_{\mathfrak{g}/\mathfrak{p}}\left(\mathcal{P}(\mathfrak{g})^G\right)$ $-$modul.*

Dokaz: Neka je $\mathfrak{a}$ Cartanov potprostor od $\mathfrak{p}$. Koristimo sada definiciju pojma realne reduktivne grupe G kao konaňog natkrivanja otvorene podgrupe grupe $G_R \subseteq GL(n, \mathbb{R})$ realnih točaka simetrične afine algebarske grupe $G_C \subseteq GL(n, \mathbb{C})$. Posebno, tada se Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ identificira s Liejevom algebrom od G_R, dakle, s Liejevom podalgebrom od $GL(n, \mathbb{R})$. Uz takvu interpretaciju $\mathfrak{g}$ definiramo polinomijalne funkcije q_j na $\mathfrak{g}$, $j = 1, \ldots, n$, sa

$$\det(\lambda I_n - X) = \sum_{j=0}^{n} \lambda^j q_j(X), \qquad \lambda \in \mathbb{R}, \quad X \in \mathfrak{g}.$$

$\mathfrak{a}$ je komutativna Liejeva algebra dijagonalizabilnih operatora na $\mathbb{R}^n$. Označimo sa $\Sigma \subseteq \mathfrak{a}^*$ skup svih težina od $\mathfrak{a}$ na $\mathbb{R}^n$. Tada Σ razapinje $\mathfrak{a}^*$ pa slijedi da je unitalna algebra $\mathcal{P}(\mathfrak{a})$ generirana sa Σ. Spektar svakog operatora $X \in \mathfrak{a}$ jednak je $\{\beta(X);\ \beta \in \Sigma\}$. Dakle, vrijedi

$$\sum_{j=0}^{n} \beta(X)^j q_j(X) = 0 \qquad \forall \beta \in \Sigma \quad \text{i} \quad \forall X \in \mathfrak{a}.$$

No to znači da u algebri $\mathcal{P}(\mathfrak{a})$ vrijedi

$$\sum_{j=0}^{n} \beta^j Res_{\mathfrak{g}/\mathfrak{a}}(q_j) = 0 \qquad \forall \beta \in \Sigma.$$

Kako je $q_n \equiv 1$, slijedi da je

$$\beta^n = -\sum_{j=0}^{n-1} \beta^j Res_{\mathfrak{g}/\mathfrak{a}}(q_j). \tag{3.10}$$

Budući da su polinomi q_j $G-$invarijantni, tj. $q_j \in \mathcal{P}(\mathfrak{g})^G$, iz (3.10) slijedi da konačan skup

$$\bigcup_{\beta \in \Sigma} \{1, \beta, \beta^2, \ldots, \beta^{n-1}\}$$

generira $\mathcal{P}(\mathfrak{a})$ kao $Res_{\mathfrak{g}/\mathfrak{a}}\left(\mathcal{P}(\mathfrak{g})^G\right)-$modul. Neka su $f_1, \ldots, f_m \in \mathcal{P}(\mathfrak{a})$ generatori od $\mathcal{P}(\mathfrak{a})$ kao $Res_{\mathfrak{g}/\mathfrak{a}}\left(\mathcal{P}(\mathfrak{g})^G\right)-$modula, tj. takvi da je

$$\mathcal{P}(\mathfrak{a}) = \sum_{i=1}^{m} Res_{\mathfrak{g}/\mathfrak{a}}\left(\mathcal{P}(\mathfrak{g})^G\right) f_i. \tag{3.11}$$

Neka je $W = W(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$ Weylova grupa sistema korijena $R(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$. Neka je $P_W : \mathcal{P}(\mathfrak{a}) \to \mathcal{P}(\mathfrak{a})^W$ projektor definiran kao usrednjenje po konačnoj grupi W :

$$P_W f = \frac{1}{|W|} \sum_{s \in W} s \cdot f, \qquad \text{tj.} \quad (P_W f)(x) = \frac{1}{|W|} \sum_{s \in W} f(s^{-1}x), \qquad f \in \mathcal{P}(\mathfrak{a}), \quad x \in \mathfrak{a}.$$

Tada je P_W epimorfizam unitalnih algebri. Budući da se djelovanje svakog elementa Weylove grupe W na $\mathfrak{a}$ može realizirati kao $Ad\, k$ za neki $k \in N_K(\mathfrak{a})$, očito je $Res_{\mathfrak{g}/\mathfrak{a}}\left(\mathcal{P}(\mathfrak{g})^G\right) \subseteq \mathcal{P}(\mathfrak{a})^W$. Prema tome, primjenom P_W na jednakost (3.11) dobivamo

$$\mathcal{P}(\mathfrak{a})^W = \sum_{i=1}^{m} Res_{\mathfrak{g}/\mathfrak{a}}\left(\mathcal{P}(\mathfrak{g})^G\right) g_i$$

gdje su $g_i = P_W(f_i) \in \mathcal{P}(\mathfrak{a})^W$ za $i = 1, \ldots, m$. Kako je $Res_{\mathfrak{g}/\mathfrak{a}} = Res_{\mathfrak{p}/\mathfrak{a}} \circ Res_{\mathfrak{g}/\mathfrak{p}}$, to možemo pisati i ovako:

$$\mathcal{P}(\mathfrak{a})^W = \sum_{i=1}^{m} Res_{\mathfrak{p}/\mathfrak{a}}\left(Res_{\mathfrak{g}/\mathfrak{p}}\left(\mathcal{P}(\mathfrak{g})^G\right)\right) g_i.$$

Prema Chevalleyevom teoremu 3.1.1. restrikcija $Res_{\mathfrak{p}/\mathfrak{a}}|\mathcal{P}(\mathfrak{p})^K$ je izomorfizam unitalnih algebri sa $\mathcal{P}(\mathfrak{p})^K$ na $\mathcal{P}(\mathfrak{a})^W$. Označimo sa $\Psi : \mathcal{P}(\mathfrak{a})^W \to \mathcal{P}(\mathfrak{p})^K$ inverzni izomorfizam. Tada uz oznake $h_i = \Psi(g_i) \in \mathcal{P}(\mathfrak{p})^K$, $i = 1, \ldots, m$, iz gornje jednakosti primjenom izomorfizma Ψ slijedi

$$\mathcal{P}(\mathfrak{p})^K = \sum_{i=1}^{m} Res_{\mathfrak{g}/\mathfrak{p}}\left(\mathcal{P}(\mathfrak{g})^G\right) h_i.$$

Time je lema dokazana.

Neka je kao i prije sa σ označen operator simetrizacije sa $S(\mathfrak{g})$ u $U(\mathfrak{g})$. Tada je σ izomorfizam vektorskih prostora, dakle, $\sigma|S(\mathfrak{p})$ je injektivan linearan operator. Prema već spomenutom korolaru 1.4.4. jedinstven linearan operator $S(\mathfrak{p}) \otimes U(\mathfrak{k}) \to U(\mathfrak{g})$, takav da $p \otimes u \mapsto \sigma(p)u$ za $p \in S(\mathfrak{p})$ i $u \in U(\mathfrak{k})$, je izomorfizam vektorskih prostora sa $S(\mathfrak{p}) \otimes U(\mathfrak{k})$ na $U(\mathfrak{g})$. Odatle slijedi da je

$$U(\mathfrak{g}) = \sigma(S(\mathfrak{p})) \dotplus \mathfrak{k}U(\mathfrak{g}).$$

Komponiranjem projektora sa $U(\mathfrak{g})$ na $\sigma(S(\mathfrak{p}))$ u skladu s gornjom direktnom sumom i inverznog preslikavanja izomorfizma $\sigma|S(\mathfrak{p}) : S(\mathfrak{p}) \to \sigma(S(\mathfrak{p}))$ dolazimo do linearne surjekcije sa $U(\mathfrak{g})$ na $S(\mathfrak{p})$, koju ćemo označiti sa δ. Dakle, za svaki $p \in S(\mathfrak{p})$ i svaki $u \in U(\mathfrak{k})$ vrijedi

$$\delta(\sigma(p)u) = \varepsilon(u)p, \qquad p \in S(\mathfrak{p}), \quad u \in U(\mathfrak{k});$$

pri tome je ε linearan funkcional na $U(\mathfrak{k})$ definiran kao projektor sa $U(\mathfrak{k})$ na $\mathbb{C}$ u odnosu na rastav $U(\mathfrak{k}) = \mathbb{C} \dot{+} \mathfrak{k}U(\mathfrak{k})$.

Kao i obično sa $(S^j(\mathfrak{p}))_{j\in\mathbb{Z}_+}$ označimo graduaciju algebre $S(\mathfrak{p})$. Dakle,

$$S(\mathfrak{p}) = \sum_{j\in\mathbb{Z}_+} \dot{+} S^j(\mathfrak{p}).$$

Neka je γ_j projektor $S(\mathfrak{p})$ na $S^j(\mathfrak{p})$ u skladu s gornjim rastavom. Nadalje, stavimo $\delta_j = \gamma_j \circ \delta$. Tada je δ_j linearna surjekcija sa $U(\mathfrak{g})$ na $S^j(\mathfrak{p})$. Očito vrijedi $\delta_j(u) = 0$ ako je $u \in U_m(\mathfrak{g})$ i $m < j$, odnosno,

$$\delta(u) = \sum_{j=0}^{m} \delta_j(u) \qquad \text{za} \quad u \in U_m(\mathfrak{g}) \quad \text{i} \quad m \in \mathbb{Z}_+.$$

Lema 3.3.8. *Za $Z_1, \ldots, Z_j \in \mathfrak{p}$ neka je $u = Z_1 \cdots Z_j$ njihov umnožak u $U(\mathfrak{g})$, a $s = Z_1 \cdots Z_j$ njihov umnožak u $S(\mathfrak{p})$. Tada je $u - \sigma(s) \in \mathfrak{k}U(\mathfrak{g})$.*

Zadatak 3.3.5. *Dokažite lemu 3.3.8.*

Uputa: Koristite $[\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] \subseteq \mathfrak{k}$ i $[\mathfrak{k}, \mathfrak{p}] \subseteq \mathfrak{p}$.

Lema 3.3.9. *Uz oznake iz leme 3.3.8. vrijedi $\delta(u) = \delta_j(u) = s$.*

Dokaz: Neka je P projektor $U(\mathfrak{g})$ na potprostor $\sigma(S(\mathfrak{p}))$ duž potprostora $\mathfrak{k}U(\mathfrak{g})$, tj. pridružen rastavu $U(\mathfrak{g}) = \sigma(S(\mathfrak{p})) \dot{+} \mathfrak{k}U(\mathfrak{g})$. Prema lemi 3.3.8. vrijedi $P(u) = P(\sigma(s))$. Po definiciji preslikavanja δ odatle je $\delta(u) = s$, a kako je $s \in S^j(\mathfrak{p})$, to je $\delta(u) = \delta_j(u)$.

Lema 3.3.10. *Za $j, k \in \mathbb{Z}_+$, $u \in U_j(\mathfrak{g})$ i $\xi \in \mathcal{V}_k$ vrijedi*

$$p_{k+j}(u \cdot \xi) = \delta_j(u) \cdot p_k(\xi). \tag{3.12}$$

Dokaz: Neka je $\{X_1, \ldots, X_p\}$ baza od $\mathfrak{p}$ i $\{Y_1, \ldots, Y_q\}$ baza od $\mathfrak{k}$. Za $r = (r_1, \ldots, r_p) \in \mathbb{Z}_+^p$ i $s = (s_1, \ldots, s_q) \in \mathbb{Z}_+^q$ stavimo

$$u(r, s) = X_1^{r_1} \cdots X_p^{r_p} Y_1^{s_1} \cdots Y_q^{s_q}, \quad |r| = r_1 + \cdots + r_p, \quad |s| = s_1 + \cdots + s_q.$$

Po PBW$-$teoremu tada je

$$\{u(r, s);\ r \in \mathbb{Z}_+^p,\ s \in \mathbb{Z}_+^q,\ |r| + |s| \leq j\}$$

baza od $U_j(\mathfrak{g})$. Budući da su za svako fiksno $\xi \in \mathcal{V}_k$ obje strane jednakosti (3.12) linearne u odnosu na $u \in U_j(\mathfrak{g})$, dovoljno je tu jednakost provjeriti za svaki element $u = u(r, s)$ za $|r| + |s| \leq j$. No ako je $|r| < j$, tada je $u(r, s)\xi \in \mathcal{V}_{k+|r|} \subseteq \mathcal{V}_{k+j-1}$, pa je $p_{j+k}(u(r, s)\xi) = 0$. Nadalje, tada je $\delta_j(u(r, s)) = 0$. Dakle, ako je $|r| < j$, obje strane u (3.12) jednake su 0. Ako je $|r| = j$, tada je zbog pretpostavke $|r| + |s| \leq j$ nužno $|s| = 0$, dakle, radi se o elementu baze od $U_j(\mathfrak{g})$ oblika $u(r, 0)$ za $r \in \mathbb{Z}_+^p$, $|r| = j$. Time smo dokaz jednakosti (3.12) sveli na slučaj $u = Z_1 \cdots Z_j$ za neke $Z_1, \ldots, Z_j \in \mathfrak{p}$. Indukcijom po j dokazuje se da vrijedi

$$p_{j+k}(Z_1 \cdots Z_j \cdot \xi) = Z_1 \cdots Z_j \cdot p_k(\xi) \qquad \text{za} \quad \xi \in \mathcal{V}_k \quad \text{i} \quad Z_1, \ldots, Z_j \in \mathfrak{p}.$$

Odatle i iz leme 3.3.9. slijedi tvrdnja.

Polazni $(\mathfrak{g}, K)-$modul $\mathcal{V}$ je unija rastućeg niza konačnodimenzionalnih $K-$podmodula $(\mathcal{V}_k)_{k\in\mathbb{Z}_+}$. Za svaki $k \in \mathbb{Z}_+$ izaberimo $K-$invarijantan potprostor $\mathcal{W}_k$ od $\mathcal{V}_k$ takav da je $\mathcal{V}_k = \mathcal{W}_k \dot{+} \mathcal{V}_{k-1}$; podsjetimo se da dogovora $\mathcal{V}_{-1} = \{0\}$, dakle, $\mathcal{W}_0 = \mathcal{V}_0$. Tada je prostor $\mathcal{V}$ algebarska direktna suma potprostora $\mathcal{W}_k$:

$$\mathcal{V} = \sum_{k\in\mathbb{Z}_+} \dot{+}\, \mathcal{W}_k. \tag{3.13}$$

Za svaki $k \in \mathbb{Z}_+$ neka je kao i prije $p_k : \mathcal{V}_k \to Gr(\mathcal{V})_k = \mathcal{V}_k/\mathcal{V}_{k-1}$ kvocijentno preslikavanje. Budući da su $\mathcal{V}_{k-1} \subseteq \mathcal{V}_k$ $K-$podmosuli, p_k je epimorfizam $K-$modula, a restrikcija $p_k|\mathcal{W}_k$ je izomorfizam $K-$modula $\mathcal{W}_k$ na $K-$modul $Gr(\mathcal{V})_k$. Definiramo sada linearan operator $\Phi : \mathcal{V} \to Gr(\mathcal{V})$ sa

$$\Phi|\mathcal{W}_k = p_k|\mathcal{W}_k, \qquad k \in \mathbb{Z}_+.$$

Tada je Φ izomorfizam $K-$modula sa $\mathcal{V}$ na $Gr(\mathcal{V})$. Posebno,

$$\Phi(\mathcal{V}(\gamma)) = Gr(\mathcal{V})(\gamma) \qquad \forall\gamma \in \hat{K}. \tag{3.14}$$

Ako je $\xi \in \mathcal{V}$, neka je $m \in \mathbb{Z}_+$ takav da je $\xi \in \mathcal{V}_m \setminus \mathcal{V}_{m-1}$. Tada je

$$\xi = \xi_0 + \xi_1 + \cdots + \xi_m \qquad \text{za jedinstvene} \quad \xi_0 \in \mathcal{W}_0, \xi_1 \in \mathcal{W}_1, \ldots, \xi_m \in \mathcal{W}_m.$$

Odatle je

$$\Phi(\xi) = p_0(\xi_0) + p_1(\xi_1) + \cdots + p_m(\xi_m).$$

Neka je sada P_k projektor prostora $\mathcal{V}$ na potprostor $\mathcal{W}_k$ u skladu s rastavom (3.13), tj. duž potprostora $\sum_{j\neq k} \dot{+}\mathcal{W}_j$. Gornja jednakost može se tada ovako zapisati:

$$\Phi(\xi) = \sum_{k=0}^{m} p_k(P_k\xi) \qquad \forall\xi \in \mathcal{V}_m.$$

Ako je $k > m$, onda je $P_k\xi = 0$ za svaki $\xi \in \mathcal{V}_m$. Prema tome, iz gornje jednakosti slijedi

$$\Phi(\xi) = \sum_{k\in\mathbb{Z}_+} p_k(P_k\xi) \qquad \forall\xi \in \mathcal{V}. \tag{3.15}$$

Neka je sada Q_k projektor prostora $\mathcal{V}$ na potprostor $\mathcal{V}_k$ duž njegovog direktnog komplementa $\sum_{j>k} \dot{+}\mathcal{W}_j$. Tada je

$$Q_k = P_0 + P_1 + \cdots + P_k.$$

Nadalje, za $j < k$ je $p_k(P_j\xi) = 0$. Dakle, za svaki $\xi \in \mathcal{V}$ i svaki $k \in \mathbb{Z}_+$ vrijedi $p_k(P_k\xi) = p_k(Q_k\xi)$. Stoga iz (3.15) slijedi

$$\Phi(\xi) = \sum_{k\in\mathbb{Z}_+} p_k(Q_k\xi) \qquad \forall\xi \in \mathcal{V}.$$

Dakle, za proizvoljan potprostor $\mathcal{W}$ od $\mathcal{V}$ vrijedi

$$\Phi(\mathcal{W}) = \sum_{k\in\mathbb{Z}_+} \dot{+} p_k(Q_k(\mathcal{W})). \tag{3.16}$$

Dokaz teorema 3.3.3. Izaberimo $Aut(\mathfrak{g})-$invarijantnu nedegeneriranu simetričnu bilinearnu formu B na $\mathfrak{g}$. Tada je B invarijantna u odnosu na Cartanovu involuciju, pa je i restrikcija $B|\mathfrak{p} \times \mathfrak{p}$ nedegenerirana. Pomoću tih nedegeneriranih bilinearnih formi dualni prostor $\mathfrak{g}^*$ identificira se sa $\mathfrak{g}$, a također i $\mathfrak{p}^*$ sa $\mathfrak{p}$. To povlači identifikaciju $\mathcal{P}(\mathfrak{g})$ sa $S(\mathfrak{g})$ i $\mathcal{P}(\mathfrak{p})$ sa $S(\mathfrak{p})$. Uz te identifikacije preslikavanje $Res_{\mathfrak{g}/\mathfrak{p}}$ postaje projektor $S(\mathfrak{g})$ na $S(\mathfrak{p})$ duž ideala u $S(\mathfrak{g})$ generiranog sa $\mathfrak{k}$. Nadalje, budući da je simetrizacija $\sigma : S(\mathfrak{g}) \to U(\mathfrak{g})$ preplitanje djelovanja grupe G, restrikcija $\sigma|S(\mathfrak{g})^G$ je izomorfizam vektorskih prostora sa $S(\mathfrak{g})^G$ na $\mathcal{Z}_G(\mathfrak{g})$ i vrijedi

$$\delta(\sigma(u)) = Res_{\mathfrak{g}/\mathfrak{p}}(u) \qquad \forall u \in S(\mathfrak{g})^G = \mathcal{P}(\mathfrak{g})^G. \tag{3.17}$$

Za $\gamma \in \hat{K}$ prema lemi 3.3.6. $Gr(\mathcal{V})(\gamma)$ je konačno generirani $S(\mathfrak{p})^K-$modul, a prema lemi 3.3.7. $S(\mathfrak{p})^K = \mathcal{P}(\mathfrak{p})^K$ je konačno generiran kao $Res_{\mathfrak{g}/\mathfrak{p}}\left(\mathcal{P}(\mathfrak{g})^G\right)-$modul. Odatle slijedi da je $Gr(\mathcal{V})(\gamma)$ konačno generiran kao $Res_{\mathfrak{g}/\mathfrak{p}}\left(\mathcal{P}(\mathfrak{g})^G\right)-$modul. Neka su $v_1, \ldots, v_d \in Gr(\mathcal{V})(\gamma)$ generatori $Res_{\mathfrak{g}/\mathfrak{p}}\left(\mathcal{P}(\mathfrak{g})^G\right)-$modula $Gr(\mathcal{V})(\gamma)$. Možemo pretpostaviti da su $v_1, \ldots, v_d$ homogeni, tj. $v_j \in Gr(\mathcal{V})_{k_j} = \mathcal{V}_{k_j}/\mathcal{V}_{k_j-1}$ za neke $k_1, \ldots, k_d \in \mathbb{Z}_+$. Dakle,

$$Gr(\mathcal{V})(\gamma) = \sum_{j=1}^{d} Res_{\mathfrak{g}/\mathfrak{p}}\left(\mathcal{P}(\mathfrak{g})^G\right) v_j.$$

Za svaki $j \in \{1, \ldots, d\}$ neka je $\xi_j \in \mathcal{V}_{k_j}$ predstavnik elementa v_j. Neka je

$$\mathcal{W} = \sum_{j=1}^{d} \mathcal{Z}_G(\mathfrak{g})\xi_j.$$

Sada iz leme 3.3.10., iz (3.16) i iz (3.17) slijedi

$$\Phi(\mathcal{W}) = \sum_{k\in\mathbb{Z}_+} \dot{+} p_k\left(Q_k\left(\sum_{j=1}^{d} \mathcal{Z}_G(\mathfrak{g})\xi_j\right)\right) = \sum_{j=1}^{d} Res_{\mathfrak{g}/\mathfrak{p}}\left(\mathcal{P}(\mathfrak{g})^G\right) v_j = Gr(\mathcal{V})(\gamma).$$

Kako je Φ izomorfizam vektorskih prostora sa $\mathcal{V}$ na $Gr(\mathcal{V})$, odatle i iz (3.14) slijedi

$$\mathcal{V}(\gamma) = \mathcal{W} = \sum_{j=1}^{d} \mathcal{Z}_G(\mathfrak{g})\xi_j.$$

Time je teorem 3.3.3. dokazan.

Izvest ćemo sada neke posljedice teorema 3.3.3. Prva je neposredna:

Korolar 3.3.11. *Neka je $\mathcal{V}$ konačno generiran $(\mathfrak{g}, K)-$modul takav da je za svaki $\xi \in \mathcal{V}$ potprostor $\mathcal{Z}_G(\mathfrak{g}) \cdot \xi$ konačnodimenzionalan. Tada je $\mathcal{V}$ dopustiv $(\mathfrak{g}, K)-$modul.*

Prema propoziciji 3.3.1. na svakom ireducibilnom $(\mathfrak{g}, K)-$modulu svaki element $u \in \mathcal{Z}_G(\mathfrak{g})$ djeluje kao množenje skalarom. Stoga iz korolara 3.3.11. slijedi:

Korolar 3.3.12. *Svaki ireducibilan $(\mathfrak{g}, K)-$modul je dopustiv.*

Neka je sada $(\mathfrak{g}, K)-$modul $\mathcal{V}$ konačne dužine i neka je $(\mathcal{V}_0, \mathcal{V}_1, \ldots, \mathcal{V}_n)$ njegov kompozicioni niz. Kao $K-$modul $\mathcal{V}$ je potpuno reducibilan, dakle, ekvivalentan direktnoj sumi ireducibilnih $(\mathfrak{g}, K)-$modula $\mathcal{V}_j/\mathcal{V}_{j-1}$. Stoga iz korolara 3.3.12. slijedi:

Korolar 3.3.13. *Svaki $(\mathfrak{g}, K)-$modul konačne duljine je dopustiv.*

Neka je $\{X_1, \ldots, X_n\}$ baza od $\mathfrak{g}$ i neka je $\{Y_1, \ldots, Y_n\}$ njoj biortogonalna baza u odnosu na formu B, tj. takva da je $B(X_i, Y_j) = \delta_{ij}$. Stavimo tada

$$c = X_1Y_1 + X_2Y_2 + \cdots + X_nY_n \in U(\mathfrak{g}).$$

Zadatak 3.3.6. *Dokažite da element c ne ovisi o izboru baze $\{X_1,\dots,X_n\}$ i da je $c\in\mathcal{Z}_G(\mathfrak{g})$.*

Element c definiran sa (3.18) zove se **Casimirov element** od $U(\mathfrak{g})$ (u odnosu na formu B). Neka je c_K Casimirov element od $U(\mathfrak{k})$ u odnosu na formu $B|\mathfrak{k}\times\mathfrak{k}$.

Zadatak 3.3.7. *Neka je $\{X_1,\dots,X_n\}$ baza od $\mathfrak{g}$ koja je ortonormirana u odnosu na skalarni produkt $(X|Y)_\vartheta = -B(X,\vartheta(Y))$. Dokažite da je tada*

$$c-2c_K=\sum_{i=1}^n X_i^2.$$

Teorem 3.3.14. *Neka je π reprezentacija grupe G na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$ takva da je za svaki $\xi\in\mathcal{H}_K^\infty$ potprostor*

$$\mathbb{C}[c]\cdot\xi = span\,\{\xi, c\cdot\xi, c^2\cdot\xi,\dots\}$$

konačnodimenzionalan. Tada je $\mathcal{H}_K^\infty\subseteq\mathcal{H}^\omega$.

Skica dokaza: Iz pretpostavke slijedi da je za svaki $\xi\in\mathcal{H}_K^\infty$ potprostor

$$\mathbb{C}[c,c_K]\cdot\xi = span\,\{c^j c_K^k\cdot\xi;\ j,k\in\mathbb{Z}_+\}$$

konačnodimenzionalan. Stavimo $\Delta = c-2c_K$. Tada slijedi da je za svaki $\xi\in\mathcal{H}_K^\infty$ potprostor

$$\mathbb{C}(\Delta)\cdot\xi = span\,\{\xi,\Delta\cdot\xi,\Delta^2\cdot\xi,\dots\}$$

konačnodimenzionalan. Stoga za svaki $\xi\in\mathcal{H}_K^\infty$ postoji nekonstantan normiran polinom P_ξ s kompleksnim koeficijentima takav da je $P_\xi(\Delta)\xi=0$.

Za proizvoljne $\xi,\eta\in\mathcal{H}$ neka je $\pi_{\xi,\eta}$ pripadni matrični koeficijent:

$$\pi_{\xi,\eta}(g)=(\pi(g)\xi|\eta),\qquad g\in G.$$

Tada za $\xi\in\mathcal{H}^\infty$ vrijedi $\pi_{\xi,\eta}\in C^\infty(G)$. Svaki $X\in\mathfrak{g}$ može se promatrati kao lijevoinvarijantno vektorsko polje na G i tada je

$$(Xf)(g)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(g(\exp tX))\bigg|_{t=0},\qquad f\in C^\infty(G),\quad g\in G.$$

Posebno, ako je $\xi\in\mathcal{H}^\infty$ i $\eta\in\mathcal{H}$, imamo

$$(X\pi_{\xi,\eta})(g)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\pi(g)\pi(\exp tX)\xi|\eta)\bigg|_{t=0}=(\pi(g)X\cdot\xi|\eta).$$

Dakle,

$$X\pi_{\xi,\eta}=\pi_{X\cdot\xi,\eta},\qquad X\in\mathfrak{g},\quad \xi\in\mathcal{H}^\infty,\quad \eta\in\mathcal{H}.$$

Elementi $X\in\mathfrak{g}$ generiraju unitalnu algebru $U(\mathfrak{g})$. Stoga se $U(\mathfrak{g})$ može shvaćati kao algebra lijevoinvarijantnih diferencijalnih operatora na G. Iz gornje jednakosti slijedi za proizvoljne $X_1,\dots,X_k\in\mathfrak{g}$:

$$X_1\cdots X_k\cdot\pi_{\xi,\eta}=X_1\cdots X_{k-1}\pi_{X_k\cdot\xi,\eta}=\cdots=\pi_{X_1\cdots X_k\cdot\xi,\eta}.$$

Prema tome, vrijedi

$$u\cdot\pi_{\xi,\eta}=\pi_{u\cdot\xi,\eta},\qquad u\in U(\mathfrak{g}),\quad \xi\in\mathcal{H}^\infty,\quad \eta\in\mathcal{H}.$$

Neka su sada $\xi \in \mathcal{H}_K^\infty$ i $\eta \in \mathcal{H}$ proizvoljni. Tada je $P_\xi(\Delta)\xi = 0$, pa slijedi $P_\xi(\Delta)\pi_{\xi,\eta} = 0$. Oko svake točke $g \in G$ možemo izabrati analitičku kartu s koordinatnim sustavom

$$(x_1, \ldots, x_n) \mapsto g(\exp\, x_1X_1)(\exp\, x_2X_2)\cdots(\exp\, x_nX_n).$$

U toj karti vektorsko polje X_j predstavljeno je operatorom $\frac{\partial}{\partial x_j}$, dakle, ako je $k = \deg\, P_\xi$, vodeći član diferencijalnog operatora $P_\xi(\Delta)$ je

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}\right)^k.$$

Kako je $(\xi_1^2 + \xi_2^2 + \cdots + \xi_n^2)^k \neq 0\ \forall(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{(0, 0, \ldots, 0)\}$, operator $P_\xi(\Delta)$ je u takvoj karti eliptički. Sada teorem regularnosti za eliptičke operatore povlači da je u takvoj karti $\pi_{\xi,\eta}$ analitička funkcija. No to upravo znači da je $\xi \in \mathcal{H}^\omega$.

Teorem 3.3.15. *Ireducibilna unitarna reprezentacija od G je dopustiva.*

Dokaz: Neka je $\mathcal{H}$ prostor promatrane ireducibilne unitarne reprezentacije od G. Prema propoziciji 1.7.6. svaki $z \in \mathcal{Z}_G(\mathfrak{g})$ djeluje na $\mathcal{H}^\infty$ kao množenje skalarom. Sada iz teorema 3.3.14. slijedi da je $\mathcal{H}_K^\infty \subseteq \mathcal{H}^\omega$. Neka je $\xi \in \mathcal{H}_K^\infty \setminus \{0\}$ i stavimo

$$\mathcal{V} = span\,\{u \cdot k \cdot \xi;\ u \in U(\mathfrak{g}),\ k \in K\}.$$

Tada je prema korolaru 3.3.11. $\mathcal{V}$ dopustiv $(\mathfrak{g}, K)-$podmodul od $\mathcal{H}_K^\infty = \mathcal{H}_K^\omega$. Prema propoziciji 1.7.7. zatvarač $Cl(\mathcal{V})$ od $\mathcal{V}$ je zatvoren G^0-invarijantan potprostor od $\mathcal{H}$; pri tome je G^0 komponenta povezanosti jedinice grupe G. Taj je potprostor i $K-$invarijantan, a kako je $G = KG^0$, on je $G-$invarijantan. Iz ireducibilnosti slijedi $Cl(\mathcal{V}) = \mathcal{H}$. Budući da je $Cl(\mathcal{V})(\gamma) = Cl(\mathcal{H}(\gamma))$ $\forall\gamma \in \hat{K}$, slijedi $\mathcal{H}_K^\infty = \mathcal{V}$. Dakle, reprezentacija od G na $\mathcal{H}$ je dopustiva.

Teorem 3.3.16. (a) *Unitarna reprezentacija od G je ireducibilna ako i samo ako je ona infinitezimalno ireducibilna.*

(b) *Ireducibilne unitarne reprezentacije od G su ekvivalentne ako i samo ako su one infinitezimalno ekvivalentne.*

Dokaz: (a) Neka je π unitarna reprezentacija grupe G na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$. Pretpostavimo da je reprezentacija π ireducibilna. Neka je $\mathcal{W} \neq \{0\}$ $(\mathfrak{g}, K)-$podmodul od $\mathcal{H}_K^\infty$. U dokazu teorema 3.3.16. dokazali smo da je tada $\mathcal{W} = \mathcal{H}_K^\infty$. Dakle, $(\mathfrak{g}, K)-$modul $\mathcal{H}_K^\infty$ je ireducibilan, odnosno, reprezentacija π je infinitezimalno ireducibilna.

Obratno, pretpostavimo da je reprezentacija π infinitezimalno ireducibilna, odnosno, da je $(\mathfrak{g}, K)-$modul $\mathcal{H}_K^\infty$ ireducibilan. Pretpostavimo da je suprotno tvrdnji reprezentacija π reducibilna. Kako je π unitarna, to znači da postoji rastav $\mathcal{H} = \mathcal{K} \oplus \mathcal{L}$ Hilbertovog prostora $\mathcal{H}$ u ortogonalnu sumu dvaju zatvorenih $\pi-$invarijantnih potprostora različitih od $\{0\}$. Tada su $\mathcal{K}_K^\infty$ i $\mathcal{L}_K^\infty$ $(\mathfrak{g}, K)-$podmoduli od $\mathcal{H}_K^\infty$ koji su gusti u $\mathcal{K}$ i $\mathcal{L}$, dakle, različiti su od $\{0\}$, a različiti su i od $\mathcal{H}_K^\infty$, jer je $\mathcal{K}_K^\infty \cap \mathcal{L}_K^\infty = \{0\}$. To je u suprotnosti s pretpostavkom ireducibilnosti $(\mathfrak{g}, K)-$modula $\mathcal{H}_K^\infty$. Ova kontradikcija pokazuje da je reprezentacija π ireducibilna.

(b) Neka su sada π i ρ ireducibilne unitarne reprezentacije od G na Hilbertovim prostorima $\mathcal{H}$ i $\mathcal{K}$. Pretpostavimo najprije da su π i ρ ekvivalentne i neka je $T : \mathcal{H} \to \mathcal{K}$ je izometrički izomorfizam sa $\mathcal{H}$ na $\mathcal{K}$ takav da je $T\pi(g) = \rho(g)T\ \ \forall g \in G$. Tada odmah slijedi da je $T\mathcal{H}_K^\infty = \mathcal{K}_K^\infty$ i T ostvaruje ekvivalenciju $(\mathfrak{g}, K)-$modula $\mathcal{H}_K^\infty$ i $\mathcal{K}_K^\infty$. Dakle, reprezentacije π i ρ su infinitezimalno ekvivalentne.

Pretpostavimo sada da su π i ρ infinitezimalno ekvivalentne i neka je $A : \mathcal{H}_K^\infty \to \mathcal{K}_K^\infty$ izomorfizam vektorskih prostora koji ostvaruje ekvivalenciju tih $(\mathfrak{g}, K)$−modula, tj. takav da je

$$A(X \cdot \xi) = X \cdot A\xi \quad \text{i} \quad A(k \cdot \xi) = k \cdot A\xi \qquad \forall \xi \in \mathcal{H}_K^\infty, \quad \forall X \in \mathfrak{g}, \quad \forall k \in K.$$

Tada je očito $A|\mathcal{H}_K^\infty(\gamma)$ izomorfizam prostora $\mathcal{H}_K^\infty(\gamma)$ na prostor $\mathcal{K}_K^\infty(\gamma)$ $\forall \gamma \in \hat{K}$. Kako su ti potprostori konačnodimenzionalni prema teoremu 3.3.15. i vrijedi

$$\mathcal{H}_K^\infty = \sum_{\gamma \in \hat{K}} \dot{+}\, \mathcal{H}_K^\infty(\gamma) \qquad \text{i} \qquad \mathcal{K}_K^\infty = \sum_{\gamma \in \hat{K}} \dot{+}\, \mathcal{K}_K^\infty(\gamma),$$

možemo definirati linearan operator $A^* : \mathcal{K}_K^\infty \to \mathcal{H}_K^\infty$ ovako:

$$(A\xi|\eta) = (\xi|A^*\eta) \qquad \forall \xi \in \mathcal{H}_K^\infty(\gamma), \quad \forall \eta \in \mathcal{K}_K^\infty(\gamma), \quad \forall \gamma \in \hat{K}.$$

Tada vrijedi

$$(A\xi|\eta) = (\xi|A^*\eta) \qquad \forall \xi \in \mathcal{H}_K^\infty \quad \text{i} \quad \forall \eta \in \mathcal{K}_K^\infty.$$

Odatle slijedi da je A^* homomorfizam $(\mathfrak{g}, K)$−modula. Kako su $A \in Hom_{\mathfrak{g},K}(\mathcal{H}_K^\infty, \mathcal{K}_K^\infty)$ i $A^* \in Hom_{\mathfrak{g},K}(\mathcal{K}_K^\infty, \mathcal{H}_K^\infty)$ slijedi da je $A^*A \in End_{\mathfrak{g},K}(\mathcal{H}_K^\infty)$ i očito je $A^*A \neq 0$. Kako je $\mathcal{H}_K^\infty$ ireducibilan $(\mathfrak{g}, K)$−modul, prema propoziciji 3.3.1. je $A^*A = \lambda I_{\mathcal{H}_K^\infty}$ za neki skalar $\lambda \neq 0$. Sada za $\xi \in \mathcal{H}_K^\infty \setminus \{0\}$ imamo

$$\lambda \|\xi\|^2 = (\lambda\xi|\xi) = (A^*A\xi|\xi) = \|A\xi\|^2.$$

Odatle slijedi da je $\lambda > 0$. Stavimo sada $T = \lambda^{-\frac{1}{2}}A$. Tada je T izometrički izomorfizam unitarnog prostora $\mathcal{H}_K^\infty$ na unitarni prostor $\mathcal{K}_K^\infty$, pa se on jedinstveno proširuje do izometričkog izomorfizma Hilbertovog prostora $\mathcal{H}$ na Hilbertov prostor $\mathcal{K}$. Prema teoremu 3.3.14. je $\mathcal{H}_K^\infty = \mathcal{H}_K^\omega$ i $\mathcal{K}_K^\infty = \mathcal{K}_K^\omega$. Dakle, za $X \in \mathfrak{g}$ i $\xi \in \mathcal{H}_K^\infty$ imamo

$$T\pi(\exp X)\xi = T \sum_{k \in \mathbb{Z}_+} \frac{1}{k!} X^k \cdot \xi = \sum_{k \in \mathbb{Z}_+} \frac{1}{k!} X^k \cdot T\xi = \rho(\exp X)T\xi.$$

Kako je potprostor $\mathcal{H}_K^\infty$ gust u $\mathcal{H}$, slijedi $T\pi(\exp X) = \rho(\exp X)T$ $\forall X \in \mathfrak{g}$. Skup $\{\exp X;\ X \in \mathfrak{g}\}$ generira komponentu povezanosti jedinice G^0 grupe G, pa dobivamo da je $T\pi(g) = \rho(g)T$ $\forall g \in G^0$. Nadalje, $T|\mathcal{H}_K^\infty$ je preplitanje $(\mathfrak{g}, K)$−modula pa je posebno

$$T(k \cdot \xi) = k \cdot T\xi \qquad \forall k \in K, \quad \forall \xi \in \mathcal{H}_K^\infty.$$

Zbog gustoće $\mathcal{H}_K^\infty$ u $\mathcal{H}$, odatle slijedi $T\pi(k) = \rho(k)T$ $\forall k \in K$. Napokon, kako je $G = KG^0$, zaključujemo da vrijedi $T\pi(g) = \rho(g)T$ $\forall g \in G$, odnosno, reprezentacije π i ρ su ekvivalentne.

Dopustiva reprezentacija od G na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$ zove se **kvazi−prosta** ako je djelovanje svakog $z \in \mathcal{Z}_G(\mathfrak{g})$ na $\mathcal{H}_K^\infty$ skalarni multipl jediničnog operatora $I_{\mathcal{H}_K^\infty}$, tj. ako postoji infinitezimalni karakter $\chi \in Hom(\mathcal{Z}_G(\mathfrak{g}), \mathbb{C})$ takav da je

$$z \cdot \xi = \chi(z)\xi \qquad \forall z \in \mathcal{Z}_G(\mathfrak{g}) \quad \text{i} \quad \forall \xi \in \mathcal{H}_K^\infty.$$

Teorem 3.3.17. *Dopustiva kvazi−prosta reprezentacija od G na Hilbertovom prostoru je ireducibilna ako i samo ako je ona infinitezimalno ireducibilna.*

Dokaz: Neka je π dopustiva kvazi−prosta reprezentacija grupe G na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$. Pretpostavimo najprije da je reprezentacija π reducibilna i neka je $\mathcal{K} \neq \{0\}$ zatvoren pravi π−invarijantan potprostor od $\mathcal{H}$. Tada je $\mathcal{K}_K^\infty$ $(\mathfrak{g}, K)$−podmodul od $\mathcal{H}_K^\infty$ gust u $\mathcal{K}$, dakle, različit od $\{0\}$. Nadalje, $(\mathfrak{g}, K)-$modul $\mathcal{H}_K^\infty$ je dopustiv pa su svi potprostori $\mathcal{H}_K^\infty(\gamma)$, $\gamma \in \hat{K}$, konačnodimenzionalni, pa je $\mathcal{H}_K^\infty(\gamma) = \mathcal{H}(\gamma)$ $\forall \gamma \in \hat{K}$. Analogno je $\mathcal{K}_K^\infty(\gamma) = \mathcal{K}(\gamma)$ $\forall \gamma \in \hat{K}$. Kako je $\mathcal{K} \neq \mathcal{H}$, za neki $\gamma \in \hat{K}$ je $\mathcal{K}_K^\infty(\gamma) \neq \mathcal{H}_K^\infty(\gamma)$. Odatle slijedi da je $\mathcal{K}_K^\infty \neq \mathcal{H}_K^\infty$. Prema tome, $(\mathfrak{g}, K)-$modul $\mathcal{H}_K^\infty$ je reducibilan.

Pretpostavimo sada da je reprezentacija π ireducibilna ali da je $(\mathfrak{g}, K)-$modul $\mathcal{H}_K^\infty$ reducibilan i neka je $\mathcal{V}$ njegov $(\mathfrak{g}, K)-$podmodul koji je netrivijalan, tj. $\mathcal{V} \neq \{0\}$ i $\mathcal{V} \neq \mathcal{H}_K^\infty$. Zbog kvazi$-$prostote iz teorema 3.3.14. slijedi $\mathcal{H}_K^\infty = \mathcal{H}_K^\omega$. Stoga za $\xi \in \mathcal{V}$ i $X \in \mathfrak{g}$ vrijedi

$$\pi(\exp X)\xi = \sum_{k \in \mathbb{Z}_+} \frac{1}{k!} X^k \cdot \xi.$$

Svi su članovi gornje sume u $\mathcal{V}$, pa iz konvergencije tog reda slijedi $\pi(\exp X)\xi \in Cl(\mathcal{V})$. Iz neprekidnosti operatora $\pi(\exp X)$ slijedi da je $\pi(\exp X)Cl(\mathcal{V}) \subseteq Cl(\mathcal{V})$ za svaki $X \in \mathfrak{g}$. Kao u dokazu tvrdnje (b) teorema 3.3.16. dobivamo da je $\pi(g)Cl(\mathcal{V}) \subseteq Cl(\mathcal{V})$ za svaki $g \in G^0$, a kako to očito vrijedi i za svaki $g \in K$, zaključujemo da je zatvoren potprostor $Cl(\mathcal{V})$ $\pi-$invarijantan. Napokon, kako je $\mathcal{V} \neq \mathcal{H}_K^\infty$, postoji $\gamma \in \hat{K}$ takav da $\mathcal{H}_K^\infty(\gamma) \not\subseteq \mathcal{V}$. Kako je potprostor $\mathcal{H}_K^\infty(\gamma)$ konačnodimenzionalan, slijedi da $\mathcal{H}_K^\infty(\gamma) \not\subseteq Cl(\mathcal{V})$. Prema tome, $Cl(\mathcal{V}) \neq \mathcal{H}$. No to je u suprotnosti s pretpostavkom da je reprezentacija π ireducibilna. Ova kontradikcija pokazuje da je nužno $(\mathfrak{g}, K)-$modul $\mathcal{H}_K^\infty$ ireducibilan.

3.4 Teorem o subkvocijentu

U ovom odjeljku zadržavamo oznake i pretpostavke iz prethodnog: G je realna reduktivna grupa s Liejevom algebrom $\mathfrak{g}$, Cartanovom involucijom ϑ, pripadnom maksimalnom kompaktnom podgrupom K od G i pripadnom Cartanovom dekompozicijom $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \dotplus \mathfrak{p}$. Nadalje, izaberimo Cartanov potprostor $\mathfrak{a}$ od $\mathfrak{p}$ i neka je $\Sigma = R(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$ pripadni sistem korijena u $\mathfrak{a}^*$. Neka je Σ_+ neki izbor skupa pozitivnih korijena u Σ. Stavimo kao u odjeljku 2.6. :

$$\mathfrak{n} = \sum_{\lambda\in\Sigma_+} \dotplus \mathfrak{g}^{\lambda}, \qquad \overline{\mathfrak{n}} = \vartheta(\mathfrak{n}) = \sum_{\lambda\in\Sigma_+} \dotplus \mathfrak{g}^{-\lambda}, \qquad \mathfrak{m} = Z_{\mathfrak{k}}(\mathfrak{a}).$$

Tada imamo dekompozicije

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \dotplus \mathfrak{a} \dotplus \mathfrak{n} \qquad \text{i} \qquad \mathfrak{g} = \overline{\mathfrak{n}} \dotplus \mathfrak{m} \dotplus \mathfrak{a} \dotplus \mathfrak{n}.$$

Restrikcija $\exp|\mathfrak{a}$ je analitički izomorfizam aditivne grupe $\mathfrak{a}$ na zatvorenu podgrupu A oa G. Nadalje, restrikcija $\exp|\mathfrak{n}$ je bianalitička bijekcija sa $\mathfrak{n}$ na zatvorenu podgrupu N od G, čija je $\mathfrak{n}$ Liejeva algebra. Imamo tada Cartanovu i Iwasawinu dekompoziciju grupe G : preslikavanje $(k, X) \mapsto k(\exp X)$ je bianalitička bijekcija sa $K \times \mathfrak{p}$ na G i $(a, n, k) \mapsto ank$ je bianalitička bijekcija sa $A \times N \times K$ na G. Nadalje, kao i prije stavimo

$$M = Z_K(\mathfrak{a}) = \{k \in K;\ (Ad\,k)|\mathfrak{a} = I_{\mathfrak{a}}\} \qquad \text{i} \qquad M' = N_K(\mathfrak{a}) = \{k \in K;\ (Ad\,k)\mathfrak{a} = \mathfrak{a}\}.$$

Tada su M i M' zatvorene podgrupe od K i kvocijentna grupa M'/M identificira se s Weylovom grupom W sistema korijena Σ. Nadalje, preslikavanje množenja $(m, a, n) \mapsto man$ je bianalitička bijekcija sa $M \times A \times N$ na zatvorenu podgrupu $P = MAN$ od G – to je tzv. **minimalna parabolička podgrupa** od G (pridružena izboru Cartanovog potprostora $\mathfrak{a}$ i skupa pozitivnih korijena Σ_+ u $\Sigma = R(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$). Iz Iwasawine dekompozicije slijedi da je $G = PK$, pa smo u situaciji iz odjeljka 1.5. gdje smo definirali i proučili jednu klasu induciranih representacija.

Neka je σ unitarna ireducibilna (konačnodimenzionalna) reprezentacija kompaktne grupe M na unitarnom prostoru $\mathcal{K}$. Za $\mu \in \left(\mathfrak{a}^{\mathbb{C}}\right)^* = (\mathfrak{a}^*)^{\mathbb{C}}$, tj. za $\mathbb{R}$–linearnu formu $\mu : \mathfrak{a} \to \mathbb{C}$, definiramo reprezentaciju σ_μ grupe $P = MAN$ na prostoru $\mathcal{K}$:

$$\sigma_\mu(man) = a^\mu \sigma(m), \qquad m \in M, \quad a \in A, \quad n \in N.$$

Pri tome je $a \mapsto a^\mu$ homomorfizam grupe A u multiplikativnu grupu $\mathbb{C}^*$ definiran sa

$$(\exp\, H)^\mu = \mathrm{e}^{\mu(H)}, \qquad H \in \mathfrak{a}.$$

Zadatak 3.4.1. *Dokažite da je tako definirano preslikavanje $\sigma_\mu : P \to L(\mathcal{K})$ reprezentacija grupe P.*

Definiramo sada induciranu reprezentaciju $\pi^{\sigma,\mu} = Ind_P^G \sigma_\mu$. To je reprezentacija grupe G na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}^{\sigma,\mu}$ svih klasa izmjerivih funkcija $f : G \to \mathcal{K}$ takvih da vrijedi

$$f(px) = \sqrt{\Delta_P(p)}\sigma_\mu(p)f(x) \qquad \forall p \in P \quad \text{i}\forall x \in G, \tag{3.18}$$

i da je funkcija $k \mapsto \|f(k)\|$, $k \in K$, kvadratno integrabilna u odnosu na normiranu Haarovu mjeru κ na kompaktnoj grupi K. Pri tome je Δ_P oznaka za modularnu funkciju grupe P. Reprezentacija $\pi^{\sigma,\mu}$ djeluje desnim pomacima:

$$(\pi^{\sigma,\mu}(x)f)(y) = f(yx), \qquad f \in \mathcal{H}^{\sigma,\mu}, \quad x, y \in G.$$

Kako je grupa M kompaktna, vrijedi $\Delta_P(m) = 1 \ \forall m \in M$. Nadalje, korištenjem propozicije 1.5.1. može se dokazati da je i $\Delta_P(n) = 1 \ \forall n \in N$, a za $a = \exp H \in A$ je

$$\Delta_P(a) = \det((Ad\, a)|\mathfrak{n}) = \det\left(\mathrm{e}^{ad\, H}|\mathfrak{n}\right) = \mathrm{e}^{Tr\,(ad\, H)|\mathfrak{n}} = \mathrm{e}^{2\rho(H)} = a^{2\rho},$$

pri čemu je

$$\rho = \frac{1}{2}\sum_{\lambda\in\Sigma_+}(\dim\, \mathfrak{g}^\lambda)\lambda.$$

Prema tome, uvjet (3.18) postaje

$$f(manx) = a^{\mu+\rho}\sigma(m)f(x), \qquad \forall m \in M, \quad \forall a \in A, \quad n \in N, \quad \forall x \in G. \tag{3.19}$$

Restrikcija reprezentacije $\pi^{\sigma,\mu}$ na grupu K je upravo reprezentacija $Ind_M^K\sigma$. Stoga iz korolara 1.5.7. Frobeniusovog teorema reciprociteta slijedi da je $\dim \mathcal{H}^{\sigma,\mu}(\gamma) = d(\gamma)m(\sigma,\gamma)$ za svaku $\gamma \in \hat{K}$, gdje je $m(\sigma,\gamma)$ multiplicitet reprezentacije σ u restrikciji γ na podgrupu M. Posebno, svaki je potprostor $\mathcal{H}^{\sigma,\mu}(\gamma)$, $\gamma \in \hat{K}$, konačnodimenzionalan i neovisan o $\mu \in (\mathfrak{a}^*)^{\mathbb{C}}$. Dakle,

Teorem 3.4.1. *Za svaku ireducibilnu reprezentaciju σ od M i svaki $\mu \in (\mathfrak{a}^*)^{\mathbb{C}}$ $(\mathfrak{g},K)-$modul $(\mathcal{H}^{\sigma,\mu})_K^\infty$ je dopustiv, dakle, jednak je $(\mathcal{H}^{\sigma,\mu})_K$ i sastavljen je od analitičkih vektora.*

Uobičajen naziv za $\left\{\pi^{\sigma,\mu};\ \sigma \in \hat{M},\ \mu \in (\mathfrak{a}^*)^{\mathbb{C}}\right\}$ je **osnovna serija reprezentacija**. Cilj je ovog odjeljka da dokažemo slavni **Harish−Chandrin teorem o subkvocijentu**:

Teorem 3.4.2. *Za svaki ireducibilan $(\mathfrak{g},K)-$modul $\mathcal{V}$ postoji $\sigma \in \hat{M}$ i $\mu \in (\mathfrak{a}^*)^{\mathbb{C}}$ takvi da je $\mathcal{V}$ ekvivalentan nekom subkvocijentu $(\mathfrak{g},K)-$modula $(\mathcal{H}^{\sigma,\mu})_K$.*

Mi ćemo dokaz provesti u nizu koraka uz dodatnu pretpostavku da je grupa G, dakle, i K, povezana. Na kraju ćemo naznačiti koje modifikacije vode na dokaz općeg slučaja. No to nam i neće biti potrebno, jer ćemo u jednom od sljedećih odjeljaka dokazati jači **Casselmanov teorem o subreprezentaciji** bez pretpostavke povezanosti grupe G.

U daljnjem pretpostavljamo da je grupa G povezana, dakle i maksimalna kompaktna podgrupa K je povezana. Sa $\mathcal{G}$ ćemo označavati univerzalnu omotačku algebru $U(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})$ kompleksifikacije $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ od $\mathfrak{g}$, a sa $\mathcal{K}$ univerzalnu omotačku algebru $U(\mathfrak{k}^{\mathbb{C}})$ kompleksifikacije $\mathfrak{k}^{\mathbb{C}}$ od $\mathfrak{k}$. Uočimo da zbog povezanosti od K vrijedi

$$\mathcal{G}^K = \{u \in \mathcal{G};\ (Ad\, k)u = u \ \forall k \in K\} = \{u \in \mathcal{G};\ xu = ux \ \forall x \in \mathfrak{k}\}.$$

Propozicija 3.4.3. *Unitalna algebra $\mathcal{G}^K$ je slijeva i zdesna Noetherina.*

Dokaz: Neka je $\mathcal{J}$ lijevi ideal u algebri $\mathcal{G}^K$. Tada je $\mathcal{G}\mathcal{J}$ lijevi ideal u $\mathcal{G}$. Kako je algebra $\mathcal{G}$ slijeva Noetherina, taj je ideal konačno generiran, tj. postoje $u_1,\dots,u_d \in \mathcal{J}$ takvi da je

$$\mathcal{G}\mathcal{J} = \sum_{j=1}^d \mathcal{G}u_j.$$

Posebno, za $u \in \mathcal{J}$ postoje $v_1,\dots,v_d \in \mathcal{G}$ takvi da je

$$u = v_1u_1 + \cdots + v_du_d.$$

Za svaki $k \in K$ je $(Ad\, k)u = u$ i $(Ad\, k)u_j = u_j$ za $j = 1,\dots,d$. Prema tome, vrijedi

$$u = (Ad\, k)v_1u_1 + \cdots + (Ad\, k)v_du_d \qquad \forall k \in K.$$

Odatle integracijom po normiranoj Haarovoj mjeri ν na K dobivamo

$$u = v_1^0 u_1 + \cdots + v_d^0 u_d, \qquad \text{gdje su} \quad v_j^0 = \int_K (Ad\, k) v_j \mathrm{d}\nu(k) \in \mathcal{G}^K.$$

Prema tome, vrijedi

$$\mathcal{J} = \sum_{j=1}^{d} \mathcal{G}^K u_j.$$

To pokazuje da je proizvoljan lijevi ideal $\mathcal{J}$ u algebri $\mathcal{G}^K$ konačno generiran, odnosno, algebra $\mathcal{G}^K$ je slijeva Noetherina. Antiautomorfizam transpozicije, zadan sa

$$(x_1 \cdots x_n)^t = (-1)^n x_n \cdots x_1, \qquad x_1, \ldots, x_n \in \mathfrak{g},$$

ostavlja algebru $\mathcal{G}^K$ invarijantnom, a prevodi lijeve (desne) ideale u desne (lijeve) ideale. Dakle, algebra $\mathcal{G}^K$ je i zdesna Noetherina.

Budući da je grupa K povezana, skup $\hat{K}$ identificira se s podskupmo skupa $\hat{\mathfrak{k}}$ svih klasa ekvivalencije konačnodimenzionalnih ireducibilnih $\mathfrak{k}-$modula. Za svaku klasu $\gamma \in \hat{\mathfrak{k}}$ izaberimo predstavnika E^γ. Neka je $\mathcal{J}^\gamma$ jezgra reprezentacije $\mathcal{K}$ na E^γ (tj. anihilator od E^γ u $\mathcal{K}$.

Prema Jacobsonovom teoremu gustoće za linearno nezavisne $e_1, \ldots, e_k \in E^\gamma$ i za proizvoljan $A \in End(E^\gamma)$ postoji $u \in \mathcal{K}$ takav da je $Ae_j = u \cdot e_j$ za $j = 1, \ldots, k$. Posebno, izaberemo li bazu $\{e_1, \ldots, e_n\}$ od E^γ zaključujemo da je $u \mapsto u\cdot$ epimorfizam sa $\mathcal{K}$ na $End(E^\gamma)$. Dakle, kvocijentna algebra $\mathcal{K}/\mathcal{J}^\gamma$ izomorfna je algebri $End(E^\gamma)$.

Za konačnodimenzionalan vektorski prostor E svaka je reprezentacija unitalne algebre $End(E)$ je potpuno reducibilna. Nadalje, svaka ireducibilna reprezentacija od $End(E)$ ekvivalentna je identičnoj reprezentaciji na prostoru E. Odatle izvodimo:

Propozicija 3.4.4. *Za svaki $\mathcal{G}-$modul V i svaki $\gamma \in \hat{\mathfrak{k}}$ vrijedi*

$$V(\gamma) = \{v \in V;\ \mathcal{J}^\gamma v = \{0\}\}.$$

Dokaz: Stavimo $V' = \{v \in V;\ \mathcal{J}^\gamma v = \{0\}\}$. Ako je W ireducibilan $\mathfrak{k}-$podmodul od V iz klase γ, onda je $\mathcal{J}^\gamma W = \{0\}$. Time smo dokazali inkluziju $V(\gamma) \subseteq V'$. S druge strane, prijelazom na kvocijent V' postaje $\mathcal{K}/\mathcal{J}^\gamma-$modul. Kako je unitalna algebra $\mathcal{K}/\mathcal{J}^\gamma$ izomorfna algebri $End(E^\gamma)$, V' je poluprost $\mathcal{K}/\mathcal{J}^\gamma-$modul i kao takav je suma svojih prostih podmodula. Nadalje, ako je W prost $\mathcal{K}/\mathcal{J}^\gamma-$podmodul od V', on je ekvivalentan E^γ. Dakle, svaki prost $\mathcal{K}/\mathcal{J}^\gamma-$podmodul W od V' je prost $\mathfrak{k}-$modul iz klase γ, što znači da je $W \subseteq V(\gamma)$. Time smo dokazali i obrnutu inkluziju $V' \subseteq V(\gamma)$.

Za $\gamma, \delta \in \hat{\mathfrak{k}}$ definiramo sljedeći potprostor od $\mathcal{G}$:

$$\mathcal{G}^{\gamma,\delta} = \{u \in \mathcal{G};\ \mathcal{J}^\gamma u \subseteq \mathcal{G}\mathcal{J}^\delta\}.$$

Propozicija 3.4.5. *Uz uvedene oznake za proizvoljne $\gamma, \delta \in \hat{\mathfrak{k}}$ vrijedi*

(*a*) $\mathcal{G}\mathcal{J}^\delta \subseteq \mathcal{G}^{\gamma,\delta}$;

(*b*) $\mathcal{G}^{\gamma,\delta}/\mathcal{G}\mathcal{J}^\delta = (\mathcal{G}/\mathcal{G}\mathcal{J}^\delta)(\gamma)$;

(*c*) *za svaki $\mathcal{G}-$modul V je $\mathcal{G}^{\gamma,\delta}V(\delta) \subseteq V(\gamma)$.*

Dokaz: (a) Kako je $\mathcal{G}\mathcal{J}^\delta$ lijevi ideal u $\mathcal{G}$, to je $\mathcal{J}^\gamma\mathcal{G}\mathcal{J}^\delta \subseteq \mathcal{G}\mathcal{J}^\delta$. Dakle, za svaki $u \in \mathcal{G}\mathcal{J}^\delta$ je $\mathcal{J}^\gamma u \subseteq \mathcal{G}\mathcal{J}^\delta$, a to upravo znači da je $\mathcal{G}\mathcal{J}^\delta \subseteq \mathcal{G}^{\gamma,\delta}$.

(b) Prema propoziciji 3.4.4. i prema tvrdnji (a) imamo redom

$$(\mathcal{G}/\mathcal{G}\mathcal{J}^\delta)(\gamma) = \{u + \mathcal{G}\mathcal{J}^\delta;\ u \in \mathcal{G},\ \mathcal{J}^\gamma(u + \mathcal{G}\mathcal{J}^\delta) = \{0\}\} =$$

$$= \{u + \mathcal{G}\mathcal{J}^\delta;\ u \in \mathcal{G},\ \mathcal{J}^\gamma u \subseteq \mathcal{G}\mathcal{J}^\delta\} = \{u + \mathcal{G}\mathcal{J}^\delta;\ u \in \mathcal{G}^{\gamma,\delta}\} = \mathcal{G}^{\gamma,\delta}/\mathcal{G}\mathcal{J}^\delta.$$

(c) Za $u \in \mathcal{G}^{\gamma,\delta}$ i za $x \in \mathcal{J}^\gamma$ je $xu \in \mathcal{G}\mathcal{J}^\delta$, pa za svaki $v \in V(\delta)$ vrijedi $xuv = 0$. Zbog proizvoljnosti $x \in \mathcal{J}^\gamma$ zbog propozicije 3.4.4. to znači da je $uv \in V(\gamma)$, a kako su $u \in \mathcal{G}^{\gamma,\delta}$ i $v \in V(\delta)$ bili proizvoljni, dokazali smo traženu inkluziju $\mathcal{G}^{\gamma,\delta}V(\delta) \subseteq V(\gamma)$.

Za $\delta \in \hat{\mathfrak{k}}$ pišemo kraće $\mathcal{G}^\delta = \mathcal{G}^{\delta,\delta}$.

Propozicija 3.4.6. *Za svaki $\delta \in \hat{\mathfrak{k}}$ vrijedi:*

(a) *$\mathcal{G}^\delta$ je unitalna podalgebra od $\mathcal{G}$ koja sadrži $\mathcal{K}$.*

(b) *$\mathcal{G}\mathcal{J}^\delta$ je dvostrani ideal u algebri $\mathcal{G}^\delta$.*

(c) *Za $\mathcal{G}-$modul V je $\mathcal{G}^\delta V(\delta) \subseteq V(\delta)$ i $\mathcal{G}\mathcal{J}^\delta V(\delta) = \{0\}$; dakle, $V(\delta)$ je $(\mathcal{G}^\delta/\mathcal{G}\mathcal{J}^\delta)-$modul.*

Dokaz: (a) Ako su $u, v \in \mathcal{G}^\delta$, onda je $\mathcal{J}^\delta uv \subseteq \mathcal{G}\mathcal{J}^\delta v \subseteq \mathcal{G}\mathcal{J}^\delta$. Dakle, $uv \in \mathcal{G}^\delta$ i time je dokazano da je $\mathcal{G}^\delta$ podalgebra od $\mathcal{G}$. Ta je podalgebra unitalna, jer je očito $\mathcal{J}^\delta 1 = \mathcal{J}^\delta \subseteq \mathcal{G}\mathcal{J}^\delta$. Napokon, kako je $\mathcal{J}^\delta$ dvostrani ideal u $\mathcal{K}$, za $u \in \mathcal{K}$ je $\mathcal{J}^\delta u \subseteq \mathcal{J}^\delta \subseteq \mathcal{G}\mathcal{J}^\delta$, što znači da je $u \in \mathcal{G}^\delta$. Time je dokazano da je $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{G}^\delta$.

(b) Budući da je $\mathcal{G}\mathcal{J}^\delta$ lijevi ideal u $\mathcal{G}$, to je lijevi ideal u svakoj podalgebri od $\mathcal{G}$ koja ga sadrži. Posebno, $\mathcal{G}\mathcal{J}^\delta$ je lijevi ideal u $\mathcal{G}^\delta$. Nadalje, iz definicije $\mathcal{G}^\delta = \mathcal{G}^{\delta,\delta}$ slijedi $\mathcal{J}^\delta\mathcal{G}^\delta \subseteq \mathcal{G}\mathcal{J}^\delta$. Odatle je $\mathcal{G}\mathcal{J}^\delta\mathcal{G}^\delta \subseteq \mathcal{G}\mathcal{G}\mathcal{J}^\delta = \mathcal{G}\mathcal{J}^\delta$. Dakle, $\mathcal{G}\mathcal{J}^\delta$ je i desni ideal u algebri $\mathcal{G}^\delta$.

(c) Neka je V $\mathcal{G}-$modul. Tada je prema tvrdnji (c) propozicije 3.4.5. $\mathcal{G}^\delta V(\delta) \subseteq V(\delta)$. Nadalje, ako je W ireducibilan $\mathfrak{k}-$podmodul od V iz klase δ, onda je $\mathcal{J}^\delta W = \{0\}$, dakle, i $\mathcal{G}\mathcal{J}^\delta W = \{0\}$. Kako je $V(\delta)$ definirano kao suma takvih $\mathfrak{k}-$podmodula W, slijedi da je $\mathcal{G}\mathcal{J}^\delta V(\delta) = \{0\}$.

Budući da je $\mathfrak{k}$ Liejeva podalgebra reduktivna u $\mathfrak{g}$, za svaki $\mathfrak{g}-$modul V direktna suma

$$\sum_{\gamma \in \hat{\mathfrak{k}}} \dot{+}\, V(\gamma)$$

je $\mathfrak{g}-$podmodul od V. Kažemo da je V $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})-$**modul** ako je ta direktna suma jednaka čitavom V.

Propozicija 3.4.7. *$\mathcal{G}/\mathcal{G}\mathcal{J}^\delta$ je $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})-$modul za svaki $\delta \in \hat{\mathfrak{k}}$ i vrijedi*

$$\mathcal{G}/\mathcal{G}\mathcal{J}^\delta = \sum_{\gamma \in \hat{\mathfrak{k}}} \dot{+}\, \mathcal{G}^{\gamma,\delta}/\mathcal{G}\mathcal{J}^\delta.$$

Dokaz: Stavimo

$$V = \sum_{\gamma \in \hat{\mathfrak{k}}} \dot{+}\, (\mathcal{G}/\mathcal{G}\mathcal{J}^\delta)(\gamma).$$

To je $\mathcal{G}-$podmodul od $\mathcal{G}/\mathcal{G}\mathcal{J}^\delta$ i prema tvrdnji (b) propozicije 3.4.5. je $(\mathcal{G}/\mathcal{G}\mathcal{J}^\delta)(\gamma) = \mathcal{G}^{\gamma,\delta}/\mathcal{G}\mathcal{J}^\delta$. Dakle,

$$V = \sum_{\gamma \in \hat{\mathfrak{k}}} \dot{+}\, \mathcal{G}^{\gamma,\delta}/\mathcal{G}\mathcal{J}^\delta.$$

Napokon, $\mathcal{G}/\mathcal{G}\mathcal{J}^\delta$ je ciklički $\mathcal{G}-$modul s cikličkim vektorom $1 + \mathcal{G}\mathcal{J}^\delta$. Kako je $1 \in \mathcal{G}^{\delta,\delta}$, vrijedi $1 + \mathcal{G}\mathcal{J}^\delta \in \mathcal{G}^{\delta,\delta}/\mathcal{G}\mathcal{J}^\delta \subseteq V$. Dakle, $\mathcal{G}-$podmodul V jednak je cijelom modulu $\mathcal{G}/\mathcal{G}\mathcal{J}^\delta$.

Propozicija 3.4.8. *Neka je V ireducibilan $\mathcal{G}-$modul takav da je $V(\delta) \neq \{0\}$ za neki $\delta \in \hat{\mathfrak{k}}$. Tada je V $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})-$modul i $V(\delta)$ je ireducibilan $\mathcal{G}^\delta-$modul.*

Dokaz: $\mathcal{G}-$podmodul $\sum_{\gamma \in \hat{\mathfrak{k}}} \dot{+} V(\gamma)$ od V različit je od $\{0\}$, jer je po pretpostavci $V(\delta) \neq \{0\}$. Kako je V ireducibilan $\mathcal{G}-$modul, slijedi da je $V = \sum_{\gamma \in \hat{\mathfrak{k}}} \dot{+} V(\gamma)$. Dakle, V je $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})-$modul.

Neka je $v \in V(\delta) \setminus \{0\}$. Zbog ireducibilnosti je tada $V = \mathcal{G}v$. Budući da je $\mathcal{G}\mathcal{J}^\delta v = \{0\}$, iz propozicije 3.4.7. slijedi

$$V = \mathcal{G}v = \sum_{\gamma \in \hat{\mathfrak{k}}} \mathcal{G}^{\gamma,\delta} v.$$

Prema tvrdnji (c) propozicije 3.4.5. vrijedi $\mathcal{G}^{\gamma,\delta} v \subseteq V(\gamma)$, a kako je $V = \sum_{\gamma \in \hat{\mathfrak{k}}} \dot{+} V(\gamma)$, slijedi da je $\mathcal{G}^{\gamma,\delta} v = V(\gamma)$ $\forall \gamma \in \hat{\mathfrak{k}}$. Posebno je $\mathcal{G}^\delta v = V(\delta)$, a kako je $v \in V(\delta) \setminus \{0\}$ bio proizvoljan, $V(\delta)$ je ireducibilan $\mathcal{G}^\delta-$modul.

Propozicija 3.4.9. *Neka je V $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})-$modul i $\delta \in \hat{\mathfrak{k}}$. Označimo sa P projektor prostora V na potprostor $V(\delta)$ u skladu s rastavom $V = \sum_{\gamma \in \hat{\mathfrak{k}}} \dot{+} V(\gamma)$. Za $\mathcal{G}^\delta-$podmodul W od $V(\delta)$ stavimo*

$$W^{\min} = \mathcal{G}W \qquad i \qquad W^{\max} = \{v \in V;\ V(\delta) \cap \mathcal{G}v \subseteq W\}.$$

Tada vrijedi:

(a) $W^{\max} = \{v \in V;\ P(\mathcal{G}v) \subseteq W\}$.

(b) $W^{\min} \cap V(\delta) = W^{\max} \cap V(\delta) = W$.

(c) *Ako je X $\mathcal{G}-$podmodul od V takav da je $W \subseteq X \cap V(\delta)$, onda je $W^{\min} \subseteq X$.*

(d) *Ako je X $\mathcal{G}-$podmodul od V takav da je $X \cap V(\delta) \subseteq W$, onda je $X \subseteq W^{\max}$.*

Dokaz: (a) Za svaki $v \in V$ je $\mathcal{G}v$ podmodul od V pa vrijedi

$$\mathcal{G}v = \sum_{\gamma \in \hat{\mathfrak{k}}} \dot{+} V(\gamma) \cap \mathcal{G}v.$$

Odatle je $P(\mathcal{G}v) = V(\delta) \cap \mathcal{G}v$.

(b) Kako je $\mathcal{G}\mathcal{J}^\delta W = \{0\}$, iz propozicije 3.4.7. slijedi

$$W^{\min} = \mathcal{G}W = \sum_{\gamma \in \hat{\mathfrak{k}}} \mathcal{G}^{\gamma,\delta} W.$$

Nadalje, prema tvrdnji (c) propozicije 3.4.5. je $\mathcal{G}^{\gamma,\delta} W \subseteq V(\gamma)$ za svaki $\gamma \in \hat{\mathfrak{k}}$, pa je gornja suma direktna i slijedi

$$W^{\min} \cap V(\delta) = \mathcal{G}^\delta W = W.$$

Odatle je $W^{\min} \subseteq W^{\max}$, pa slijedi

$$W^{\max} \cap V(\delta) \supseteq W^{\min} \cap V(\delta) = W.$$

S druge strane, očito je $W^{\max} \cap V(\delta) \subseteq W$, pa imamo jednakost $W^{\max} \cap V(\delta) = W$.

(c) Iz $W \subseteq X \cap V(\delta)$ slijedi $X = \mathcal{G}X \supseteq \mathcal{G}(X \cap V(\delta)) \supseteq \mathcal{G}W = W^{\min}$.

(d) Za svaki $v \in X$ je $\mathcal{G}v \subseteq X$. Dakle, ako je $X \cap V(\delta) \subseteq W$, onda je $\mathcal{G}v \cap V(\delta) \subseteq W$ za svaki $v \in X$, dakle, vrijedi $X \subseteq W^{\max}$.

Primijenimo sada propoziciju 3.4.9. na $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})-$modul $V = \mathcal{G}/\mathcal{G}\mathcal{J}^\delta$. Tada je prema tvrdnji (b) propozicije 3.4.5. $V(\delta) = \mathcal{G}^\delta/\mathcal{G}\mathcal{J}^\delta$. Preslikavanje $M \mapsto M/\mathcal{G}\mathcal{J}^\delta$ je bijekcija sa skupa svih lijevih ideala u $\mathcal{G}$ koji sadrže $\mathcal{G}\mathcal{J}^\delta$ na skup svih $\mathcal{G}-$podmodula od V. Analogno, $N \mapsto N/\mathcal{G}\mathcal{J}^\delta$ je bijekcija sa skupa svih lijevih ideala u $\mathcal{G}^\delta$ koji sadrže $\mathcal{G}\mathcal{J}^\delta$ na skup svih $\mathcal{G}^\delta-$podmodula od $V(\delta)$. Napokon, ako je M pravi lijevi ideal u $\mathcal{G}$, tada $1 \notin M$, pa je $M \cap \mathcal{G}^\delta$ pravi lijevi ideal u $\mathcal{G}^\delta$. Stoga iz propozicije 3.4.9. neposredno slijedi:

Korolar 3.4.10. *Neka je $\delta \in \hat{\mathfrak{k}}$. Označimo sa $\mathcal{M}_\rho$ skup svih maksimalnih lijevih ideala u $\mathcal{G}$ koji sadrže $\mathcal{G}\mathcal{J}^\delta$ i sa $\mathcal{N}_\rho$ skup svih maksimalnih lijevih ideala u $\mathcal{G}^\delta$ koji sadrže $\mathcal{G}\mathcal{J}^\delta$.*

(a) *Preslikavanje $\varphi : M \mapsto M \cap \mathcal{G}^\delta$ je bijekcija sa $\mathcal{M}_\delta$ na $\mathcal{N}_\delta$.*

(b) *Ako je $N \in \mathcal{N}_\rho$ onda $\varphi^{-1}(N)$ sadrži svaki lijevi ideal M od $\mathcal{G}$ takav da je $M \cap \mathcal{G}^\delta \subseteq N$.*

(c) *Neka je $\pi : \mathcal{G} \to \mathcal{G}/\mathcal{G}\mathcal{J}^\delta$ kvocijentno preslikavanje i neka je P projektor prostora $\mathcal{G}/\mathcal{G}\mathcal{J}^\delta$ na potprostor $\mathcal{G}^\delta/\mathcal{G}\mathcal{J}^\delta$ u skladu s rastavom iz propozicije 3.4.7. Za $N \in \mathcal{N}_\delta$ je*

$$\varphi^{-1}(N) = \{u \in \mathcal{G};\ \mathcal{G}u \cap \mathcal{G}^\delta \subseteq N\} = \{u \in \mathcal{G};\ P(\mathcal{G}\pi(u)) \subseteq \pi(N)\}.$$

Propozicija 3.4.11. *Neka je $\delta \in \hat{\mathfrak{k}}$. Tada $V \mapsto V(\delta)$ inducira bijekciju sa skupa svih klasa ekvivalencije ireducibilnih $\mathcal{G}-$modula V takvih da je $V(\delta) \neq \{0\}$ na skup svih klasa ekvivalencije ireducibilnih $\left(\mathcal{G}^\delta/\mathcal{G}\mathcal{J}^\delta\right)-$modula.*

Dokaz: Ako je V ireducibilan $\mathcal{G}-$modul takav da je $V(\delta) \neq \{0\}$, prema propoziciji 3.4.8. $V(\delta)$ je ireducibilan $\mathcal{G}^\delta-$modul, a kako je $\mathcal{J}^\delta V(\delta) = \{0\}$, $V(\delta)$ je ireducibilan $\left(\mathcal{G}^\delta/\mathcal{G}\mathcal{J}^\delta\right)-$modul.

Neka su V i W ireducibilni $\mathcal{G}-$moduli takvi da su $V(\delta) \neq \{0\}$ i $W(\delta) \neq \{0\}$ i pretpostavimo da postoji izomorfizam $\mathcal{G}^\delta-$modula $f : V(\delta) \to W(\delta)$. Neka je $v \in V(\delta) \setminus \{0\}$. Stavimo

$$N = \{u \in \mathcal{G}^\delta;\ u \cdot v = 0\}.$$

Tada je N maksimalni lijevi ideal u $\mathcal{G}^\delta$, a kako je $f : V(\delta) \to W(\delta)$ izomorfizam $\mathcal{G}^\delta-$modula, to je

$$N = \{u \in \mathcal{G}^\delta;\ u \cdot f(v) = 0\}.$$

Stavimo sada

$$M = \{u \in \mathcal{G};\ u \cdot v = 0\} \qquad \text{i} \qquad M' = \{u \in \mathcal{G};\ u \cdot f(v) = 0\}.$$

Kako su $\mathcal{G}-$moduli V i W ireducibilni, M i M' su maksimalni lijevi ideali u $\mathcal{G}$, $V \simeq \mathcal{G}/M$ i $W \simeq \mathcal{G}/M'$. Sada je $M \cap \mathcal{G}^\delta = N = M' \cap \mathcal{G}^\delta$, pa iz tvrdnje (a) korolara 3.4.10. slijedi da je $M = M'$. Prema tome, $\mathcal{G}-$moduli V i W su ekvivalentni. Time je dokazano da $V \mapsto V(\delta)$ inducira injekciju sa skupa svih klasa ekvivalencije svih $\mathcal{G}-$modula V takvih da je $V(\delta) \neq \{0\}$ u skup svih klasa ekvivalencije ireducibilnih $\left(\mathcal{G}^\delta/\mathcal{G}\mathcal{J}^\delta\right)-$modula.

Dokažimo surjektivnost. Neka je Z ireducibilan $\left(\mathcal{G}^\delta/\mathcal{G}\mathcal{J}^\delta\right)-$modul, tj. ireducibilan $\mathcal{G}^\delta-$modul takav da je $\mathcal{J}^\delta Z = \{0\}$. Neka je $z \in Z \setminus \{0\}$ i $N = \{u \in \mathcal{G}^\delta;\ u \cdot z = 0\}$. Tada je N maksimalni lijevi ideal u $\mathcal{G}^\delta$ koji sadrži $\mathcal{G}\mathcal{J}^\delta$ i $\left(\mathcal{G}^\delta/\mathcal{G}\mathcal{J}^\delta\right)-$moduli $\mathcal{G}^\delta/N$ i Z su ekvivalentni. Prema tvrdnji (a) korolara 3.4.10. postoji maksimalni lijevi ideal M u $\mathcal{G}$ takav da je $M \cap \mathcal{G}^\delta = N$. Neka je $V = \mathcal{G}/M$ pripadni ireducibilan $\mathcal{G}-$modul. Prema propozicijama 3.4.5. i 3.4.7. vrijedi

$$\mathcal{G}/\mathcal{G}\mathcal{J}^\delta = \sum_{\gamma \in \hat{\mathfrak{k}}} \dot{+} \left(\mathcal{G}/\mathcal{G}\mathcal{J}^\delta\right)(\gamma), \quad \left(\mathcal{G}/\mathcal{G}\mathcal{J}^\delta\right)(\gamma) = \mathcal{G}^{\gamma,\delta}/\mathcal{G}\mathcal{J}^\delta, \quad \text{posebno} \quad \left(\mathcal{G}/\mathcal{G}\mathcal{J}^\delta\right)(\delta) = \mathcal{G}^\delta/\mathcal{G}\mathcal{J}^\gamma.$$

Budući da ideal M sadrži $\mathcal{G}\mathcal{J}^\delta$, odatle slijedi

$$V = \mathcal{G}/M = \sum_{\gamma\in\hat{\mathfrak{k}}} \dot{+} V(\gamma) \qquad \text{i} \qquad V(\delta) = \mathcal{G}^\delta / \left(M \cap \mathcal{G}^\delta\right) = \mathcal{G}^\delta/N.$$

Prema tome, $\left(\mathcal{G}^\delta/\mathcal{G}\mathcal{J}^\delta\right)-$modul $V(\delta)$ ekvivalentan je $\left(\mathcal{G}^\delta/\mathcal{G}\mathcal{J}^\delta\right)-$modulu Z. Time je dokazana surjektivnost.

Propozicija 3.4.12. *Za svaku klasu $\delta \in \hat{\mathfrak{k}}$ vrijedi:*

(*a*) $\mathcal{G}\mathcal{J}^\delta \cap \mathcal{K} = \mathcal{J}^\delta$; *dakle, algebra $\mathcal{K}/\mathcal{J}^\delta$ identificira se s podalgebrom od $\mathcal{G}^\delta/\mathcal{G}\mathcal{J}^\delta$.*

(*b*) $\mathcal{G}^K \subseteq \mathcal{G}^\delta$; *dakle, algebra $\mathcal{G}^K/\left(\mathcal{G}^K \cap \mathcal{G}\mathcal{J}^\delta\right)$ identificira se s podalgebrom od $\mathcal{G}^\delta/\mathcal{G}\mathcal{J}^\delta$; nadalje, vrijedi $\mathcal{G}^K \cap \mathcal{G}\mathcal{J}^\delta = \mathcal{G}^K \cap \mathcal{J}^\delta\mathcal{G}$.*

(*c*) *Komutant od $\mathcal{K}/\mathcal{J}^\delta$ u algebri $\mathcal{G}^\delta/\mathcal{G}\mathcal{J}^\delta$ jednak je $\mathcal{G}^K/\left(\mathcal{G}^K \cap \mathcal{G}\mathcal{J}^\delta\right)$.*

(*d*) *Jedinstven linearan operator sa $\left(\mathcal{K}/\mathcal{J}^\delta\right)\otimes\left(\mathcal{G}^K/\left(\mathcal{G}^K \cap \mathcal{G}\mathcal{J}^\delta\right)\right)$ u $\mathcal{G}^\delta/\mathcal{G}\mathcal{J}^\delta$ induciran množenjem u algebri $\mathcal{G}^\delta/\mathcal{G}\mathcal{J}^\delta$ je izomorfizam algebri.*

(*e*) $\mathcal{G}^\delta = \mathcal{K}\mathcal{G}^K + \mathcal{G}\mathcal{J}^\delta$.

Dokaz: (*a*) Prema PBW–teoremu algebra $\mathcal{G}$ je slobodan desni $\mathcal{K}-$modul. Izaberimo bazu $\{u_k;\ k \in \mathbb{Z}_+\}$ desnog $\mathcal{K}-$modula $\mathcal{G}$ i neka je $\{v_j;\ j \in \mathbb{Z}_+\}$ baza od $\mathcal{K}$ takva da je $\{v_j;\ j > N\}$ baza od $\mathcal{J}^\delta$ (napominjemo da je $\mathcal{J}^\delta$ konačne kodimenzije u $\mathcal{K}$.) Tada je $\{u_k v_j;\ k, j \in \mathbb{Z}_+,\ j > N\}$ baza u $\mathcal{G}\mathcal{J}^\delta$. Odatle neposredno slijedi tvrdnja $\left(\mathcal{G}\mathcal{J}^\delta\right) \cap \mathcal{K} = \mathcal{J}^\delta$.

(*b*) Inkluzija $\mathcal{G}^K \subseteq \mathcal{G}^\delta$ je očita. Neka je V $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})-$modul. Tada je

$$V = \sum_{\gamma\in\hat{\mathfrak{k}}} \dot{+} V(\gamma).$$

Taj rastav iskoristimo za identifikaciju dualnog prostora $V(\gamma)^*$ s potprostorom od V^* : linearan funkcional $f \in V(\gamma)^*$ proširujemo do linearnog funkcionala na V tako da stavimo $f|V(\delta) = 0$ $\forall\delta \neq \gamma$. Tada je

$$\tilde{V} = \sum_{\gamma\in\hat{\mathfrak{k}}} \dot{+} V(\gamma)^*$$

$\mathfrak{k}-$podmodul kontragredijentnog $\mathfrak{g}-$modula V^*.

Označimo sa $u \mapsto u^t$ transponiranje na algebri $\mathcal{G}$, tj. jedinstven antiautomorfizam od $\mathcal{G}$ takav da je

$$(x_1 \cdots x_n)^t = (-1)^n x_n \cdots x_1, \qquad x_1, \ldots, x_n \in \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}.$$

Tada je $\left(\mathcal{G}^K\right)^t = \mathcal{G}^K$ i lako se vidi da za svaki $\delta \in \hat{\mathfrak{k}}$ vrijedi $\left(\mathcal{J}^\delta\right)^t = \mathcal{J}^{\delta^*}$, gdje je $\delta^* \in \hat{\mathfrak{k}}$ klasa kontragredijentna klasi $\delta \in \hat{\mathfrak{k}}$. Neka je sada $u \in \mathcal{G}^K \cap \mathcal{J}^\delta\mathcal{G}$. Tada je $u^t \in \mathcal{G}^K \cap \mathcal{G}\mathcal{J}^{\delta^*}$, dakle, $u^t \cdot V(\delta)^* = \{0\}$. Stoga je za svaki $v \in V(\delta)$ i svaki $f \in V(\delta)^*$

$$f(u \cdot v) = (u^t \cdot f)(v) = 0. \tag{3.20}$$

Budući da je $u \in \mathcal{G}^K$, vrijedi $u \cdot V(\delta) \subseteq V(\delta)$. Stoga iz (3.20) slijedi da je $u \cdot v = 0$ za svaki $v \in V(\delta)$, odnosno, $u \cdot V(\delta) = \{0\}$. Primijenimo to na $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})-$modul $V = \mathcal{G}/\mathcal{G}\mathcal{J}^\delta$. Prema tvrdnji (*b*) propozicije 3.4.5. tada je $V(\delta) = \mathcal{G}^\delta/\mathcal{G}\mathcal{J}^\delta$. Dakle, za $u \in \mathcal{G}^K \cap \mathcal{J}^\delta\mathcal{G}$ je $u \cdot \left(\mathcal{G}^\delta/\mathcal{G}\mathcal{J}^\delta\right) = \{0\}$, a to znači da je $u\mathcal{G}^\delta \subseteq \mathcal{G}\mathcal{J}^\delta$. Posebno, kako je $\mathcal{G}^\delta$ unitalna algebra, imamo $u \in \mathcal{G}\mathcal{J}^\delta$. Time smo dokazali da je $\mathcal{G}^K \cap \mathcal{J}^\delta \mathcal{G} \subseteq \mathcal{G}\mathcal{J}^\delta$, dakle, $\mathcal{G}^K \cap \mathcal{J}^\delta \mathcal{G} \subseteq \mathcal{G}^K \cap \mathcal{G}\mathcal{J}^\delta$. Takva inkluzija vrijedi i za klasu δ^* umjesto δ, pa dobivamo i obrnutu inkluziju:

$$\mathcal{G}^K \cap \mathcal{G}\mathcal{J}^\delta = \left(\mathcal{G}^K \cap \mathcal{J}^{\delta^*}\mathcal{G}\right)^t \subseteq \left(\mathcal{G}^K \cap \mathcal{G}\mathcal{J}^{\delta^*}\right)^t = \mathcal{G}^K \cap \mathcal{J}^\delta \mathcal{G}.$$

Time je tvrdnja (b) dokazana.

(c) Adjungirana reprezentacija od $\mathfrak{k}$ na $\mathcal{G}$ je poluprosta. Uočimo da su $\mathcal{G}^\delta$ i $\mathcal{G}\mathcal{J}^\delta$ su $(ad\,\mathfrak{k})-$pod-moduli od $\mathcal{G}$ (tj. $\mathfrak{k}-$podmoduli u odnosu na adjungiranu reprezentaciju). Doista, ako je $u \in \mathcal{G}^\delta$ i $x \in \mathfrak{k}$, tada je

$$\mathcal{J}^\delta(ad\,x)u = \mathcal{J}^\delta(xu - ux) \subseteq \mathcal{J}^\delta xu + \mathcal{J}^\delta ux \subseteq \mathcal{J}^\delta u + \mathcal{J}^\delta ux \subseteq \mathcal{G}\mathcal{J}^\delta + \mathcal{G}\mathcal{J}^\delta x = \mathcal{G}\mathcal{J}^\delta,$$

a to pokazuje da je $(ad\,x)u \in \mathcal{G}^\delta$. Dakle, $\mathcal{G}^\delta$ je $(ad\,\mathfrak{k})-$podmodul od $\mathcal{G}$. Nadalje, ako su $u \in \mathcal{G}$, $v \in \mathcal{J}^\delta$ i $x \in \mathfrak{k}$, onda je $vx \in \mathcal{J}^\delta$, dakle,

$$(ad\,x)uv = xuv - uvx \in \mathcal{G}\mathcal{J}^\delta,$$

a to pokazuje da je i $\mathcal{G}\mathcal{J}^\delta$ $(ad\,\mathfrak{k})-$podmodul od $\mathcal{G}$. Posebno, postoji $(ad\,\mathfrak{k})-$podmodul $\mathcal{V}$ od $\mathcal{G}^\delta$ takav da je $\mathcal{G}^\delta = \mathcal{V} \dotplus \mathcal{G}\mathcal{J}^\delta$. Neka je sada $u \in \mathcal{V}$ takav da je $u + \mathcal{G}\mathcal{J}^\delta$ u komutantu podalgebre $\mathcal{K}/\mathcal{J}^\delta$. Tada je $wu - uw \in \mathcal{G}\mathcal{J}^\delta$ za svaki $w \in \mathcal{K}$. Posebno, tada je $(ad\,x)u = xu - ux \in \mathcal{G}\mathcal{J}^\delta$ za svaki $x \in \mathfrak{k}$. Kako je $\mathcal{V}$ $(ad\,\mathfrak{k})-$podmodul od $\mathcal{G}^\delta$ vrijedi i $xu - ux = (ad\,x)u \in \mathcal{V}$. Budući da je $\mathcal{G}\mathcal{J}^\delta \cap \mathcal{V} = \{0\}$, slijedi $xu - ux = 0\ \ \forall x \in \mathfrak{k}$, odnosno, $u \in \mathcal{G}^K$. Time je dokazano da je komutant podalgebre $\mathcal{K}/\mathcal{J}^\delta$ u algebri $\mathcal{G}^\delta/\mathcal{G}\mathcal{J}^\delta$ sadržan u $\mathcal{G}^K/\left(\mathcal{G}^K \cap \mathcal{G}\mathcal{J}^\delta\right)$. Budući da je $\mathcal{G}^K$ komutant od $\mathcal{K}$ u algebri $\mathcal{G}$, slijedi i obrnuta inkluzija: podalgebra $\mathcal{G}^K/\left(\mathcal{G}^K \cap \mathcal{G}\mathcal{J}^\delta\right)$ algebre $\mathcal{G}^\delta/\mathcal{G}\mathcal{J}^\delta$ sadržana je u komutantu podalgebre $\mathcal{K}/\mathcal{J}^\delta$. Time je tvrdnja (c) dokazana.

Tvrdnja (d) neposredna je posljedica tvrdnje (c), činjenice da je algebra $\mathcal{K}/\mathcal{J}^\delta$ izomorfna algebri $End(E^\delta) \simeq M_{d(\delta)}(\mathbb{C})$ i Jacobsonovog teorema iz opće algebre čija jednostavna verzija glasi: *Ako je $\mathcal{A}$ kompleksna unitalna algebra, $\mathcal{B}$ unitalna podalgebra izomorfna algebri $M_n(\mathbb{C})$ i $\mathcal{C}$ komutant od $\mathcal{B}$ u $\mathcal{A}$ onda množenje $(b,c) \mapsto bc$, $b \in \mathcal{B}$, $c \in \mathcal{C}$, inducira izomorfizam unitalnih algebri sa $\mathcal{B} \otimes \mathcal{C}$ na $\mathcal{A}$.*

Napokon, tvrdnja (e) slijedi neposredno iz tvrdnje (d). Naime, prema tvrdnji (d) za svaki $u \in \mathcal{G}^\delta$ postoje $u_1, \ldots, u_n \in \mathcal{G}^K$ i $w_1, \ldots, w_n \in \mathcal{K}$ takvi da u algebri $\mathcal{G}^\delta/\mathcal{G}\mathcal{J}^\delta$ vrijedi

$$u + \mathcal{G}\mathcal{J}^\delta = u_1w_1 + \cdots + u_nw_n + \mathcal{G}\mathcal{J}^\delta.$$

Odatle je $u \in u_1w_1 + \cdots + u_nw_n + \mathcal{G}\mathcal{J}^\delta \subseteq \mathcal{G}^K\mathcal{K} + \mathcal{G}\mathcal{J}^\delta$. Budući da to vrijedi za svaki $u \in \mathcal{G}^\delta$ i budući da je $\mathcal{G}^K, \mathcal{K}, \mathcal{G}\mathcal{J}^\delta \subseteq \mathcal{G}^\delta$, slijedi jednakost $\mathcal{G}^\delta = \mathcal{G}^K\mathcal{K} + \mathcal{G}\mathcal{J}^\delta$.

Teorem 3.4.13. *Za $\delta \in \hat{\mathfrak{k}}$ neka je $\mathcal{S}_\delta$ skup svih klasa ekvivalencije ireducibilnih $\mathcal{G}-$modula V takvih da je $V(\delta) \neq \{0\}$ i $\mathcal{T}_\delta$ skup svih klasa ekvivalencije ireducibilnih $\left(\mathcal{G}^K/\mathcal{G}^K \cap \mathcal{G}\mathcal{J}^\delta\right)-$modula. Tada $V \mapsto Hom_{\mathfrak{k}}(E^\delta, V(\delta))$ inducira bijekciju sa $\mathcal{S}_\delta$ na $\mathcal{T}_\delta$. Pri tome se $Hom_{\mathfrak{k}}(E^\delta, V(\delta))$ promatra kao $\mathcal{G}^K-$modul, dakle, i $\left(\mathcal{G}^K/\mathcal{G}^K \cap \mathcal{G}\mathcal{J}^\delta\right)-$modul, u odnosu na djelovanje*

$$(u \cdot \varphi)(e) = u \cdot \varphi(e), \qquad u \in \mathcal{G}^K, \quad \varphi \in Hom_{\mathfrak{k}}(E^\delta, V(\delta)), \quad e \in E^\delta.$$

Dokaz: Treba dokazati sljedeće tvrdnje:

(1) *Ako je V ireducibilan $\mathcal{G}-$modul takav da je $V(\delta) \neq \{0\}$, tada je $\mathcal{G}^K-$modul $Hom_{\mathfrak{k}}(E^\delta, V(\delta))$ ireducibilan.*

(2) *Za svaki ireducibilan $(\mathcal{G}^K/\mathcal{G}^K \cap \mathcal{G}\mathcal{J}^\delta)-$modul X postoji ireducibilan $\mathcal{G}-$modul V takav da je $V(\delta) \neq \{0\}$ i da je $\mathcal{G}^K-$modul X ekvivalentan $\mathcal{G}^K-$modulu $Hom_{\mathfrak{k}}(E^\delta, V(\delta))$.*

(3) *Ako su V i V' ireducibilni $\mathcal{G}-$moduli takvi da je $V(\delta) \neq \{0\} \neq V'(\delta)$, oni su ekvivalentni ako i samo ako su $\mathcal{G}^K-$moduli $Hom_{\mathfrak{k}}(E^\delta, V(\delta))$ i $Hom_{\mathfrak{k}}(E^\delta, V'(\delta))$ ekvivalentni.*

(1) Neka je V ireducibilan $\mathcal{G}$−modul takav da je $V(\delta) \neq \{0\}$. Primijetimo da za svaki $\varphi \in Hom_{\mathfrak{k}}(E^\delta, V)$ vrijedi $\varphi(E^\delta) \subseteq V(\delta)$. Prema tome, $\mathcal{G}^K$−modul $Hom_{\mathfrak{k}}(E^\delta, V(\delta))$ može se identificirati sa $Hom_{\mathfrak{k}}(E^\delta, V)$.

Promatrajmo sada preslikavanje $F : E^\delta \times Hom_{\mathfrak{k}}(E^\delta, V) \to V$ definirano sa

$$F(e, \varphi) = \varphi(e), \qquad e \in E^\delta, \quad \varphi \in Hom_{\mathfrak{k}}(E^\delta, V).$$

Budući da je $\varphi : E^\delta \to V$ preplitanje $\mathfrak{k}$−modula, vrijedi $\varphi(E^\delta) \subseteq V(\delta)$. Prema tome, F možemo promatrati kao preslikavanje sa $E^\delta \times Hom_{\mathfrak{k}}(E^\delta, V)$ u $V(\delta)$. To je preslikavanje očito bilinearno pa postoji jedinstven linearan operator $\Phi : E^\delta \otimes Hom_{\mathfrak{k}}(E^\delta, V) \to V(\delta)$ takav da vrijedi

$$\Phi(e \otimes \varphi) = \varphi(e) \qquad \forall e \in E^\delta \quad \text{i} \quad \forall \varphi \in Hom_{\mathfrak{k}}(E^\delta, V).$$

Dokažimo da je tada Φ izomorfizam vektorskih prostora. Kako je $V(\delta)$ suma ireducibilnih $\mathfrak{k}$−podmodula iz klase δ možemo izabrati familiju $(W_j)_{j\in J}$ ireducibilnih $\mathfrak{k}$−podmodula od $V(\delta)$ (naravno, svi su iz klase δ), takvu da je

$$V(\delta) = \sum_{j\in J} \dot{+} W_j.$$

Za svaki $j \in J$ izaberimo neki izomorfizam $\mathfrak{k}$−modula sa $\varphi_j : E^\delta \to W_j$. Tada su preslikavanja $\varphi_j \in Hom_{\mathfrak{k}}(E^\delta, V)$ linearno nezavisna jer njihove slike čine direktnu sumu. Nadalje, za svaki $j \in J$ neka je P_j projektor prostora $V(\delta)$ na potprostor W_j u skladu s gornjim rastavom u direktnu sumu. Za $\varphi \in Hom_{\mathfrak{k}}(E^\delta, V)$ kompozicija $P_j \circ \varphi$ je $\mathfrak{k}$−homomorfizam sa E^δ u W_j. Kako je po Schurovoj lemi $\dim Hom_{\mathfrak{k}}(E^\delta, W_j) = 1$, postoji $\lambda_j \in \mathbb{C}$ takav da je $P_j \circ \varphi = \lambda_j \varphi_j$. Primijetimo da ima samo konačno mnogo indeksa $j \in J$ takvih da je $P_j \circ \varphi \neq 0$, tj. $\lambda_j \neq 0$. Sada imamo za svaki $e \in E^\delta$:

$$\varphi(e) = \sum_{j\in J} P_j(\varphi(e)) = \sum_{j\in J} \lambda_j \varphi_j(e).$$

To pokazuje da je

$$\varphi = \sum_{j\in J} \lambda_j \varphi_j.$$

Time smo dokazali da je $\{\varphi_j;\ j \in J\}$ baza prostora $Hom_{\mathfrak{k}}(E^\delta, V)$. Definiramo sada linearno preslikavanje $\Psi : V(\delta) \to E^\delta \otimes Hom_{\mathfrak{k}}(E^\delta, V)$ ovako:

$$\Psi(v) = \sum_{j\in J} \varphi_j^{-1}(P_j v) \otimes \varphi_j, \qquad v \in V(\delta).$$

Definicija ima smisla jer za $v \in V(\delta)$ vrijedi $P_j v \neq 0$ za samo konačno mnogo indeksa $j \in J$. Sada za svaki $v \in V(\delta)$ imamo

$$(\Phi \circ \Psi)(v) = \Phi(\Psi(v)) = \sum_{j\in J} \Phi(\varphi_j^{-1}(P_j v) \otimes \varphi_j) = \sum_{j\in J} \varphi_j(\varphi_j^{-1}(P_j v)) = \sum_{j\in J} P_j v = v.$$

Dakle, $\Phi \circ \Psi = I_{V(\delta)}$. S druge strane, neka je $\varphi \in Hom_{\mathfrak{k}}(E^\delta, V)$ i prikažimo ga pomoću konstruirane baze kao

$$\varphi = \sum_{j\in J} \lambda_j \varphi_j.$$

Tada za proizvoljan $e \in E^\delta$ imamo

$$(\Psi \circ \Phi)(e \otimes \varphi) = \Psi(\varphi(e)) = \sum_{j\in J} \varphi_j^{-1}(P_j(\varphi(e))) \otimes \varphi_j = \sum_{j\in J} \varphi_j^{-1}(\lambda_j \varphi_j(e)) \otimes \varphi_j = e \otimes \sum_{j\in J} \lambda_j \varphi_j = e \otimes \varphi.$$

Budući da elementi oblika $e \otimes \varphi$ razapinju tenzorski produkt $E^\delta \otimes Hom_{\mathfrak{k}}(E^\delta, V)$, zaključujemo da je $\Psi \circ \Phi = I_{E^\delta \otimes Hom_{\mathfrak{k}}(E^\delta, V)}$. Time je dokazano da je $\Phi : E^\delta \otimes Hom_{\mathfrak{k}}(E^\delta, V) \to V(\delta)$ izomorfizam vektorskih prostora.

Prostor $Hom_{\mathfrak{k}}(E^\delta, V) = Hom_{\mathfrak{k}}(E^\delta, V(\delta))$ je $\mathcal{G}^K-$modul preko djelovanja $\mathcal{G}^K$ na V (odnosno, na $V(\delta)$):

$$(u \cdot \varphi)(e) = u \cdot (\varphi(e)), \qquad u \in \mathcal{G}^K, \quad \varphi \in Hom_{\mathfrak{k}}(E^\delta, V), \quad e \in E^\delta.$$

Na prostor $E^\delta \otimes Hom_{\mathfrak{k}}(E^\delta, V)$ uvedimo sada strukturu $\mathcal{G}^\delta-$modula prenesenu sa $V(\delta)$ pomoću izomorfizma $\Psi = \Phi^{-1} : V(\delta) \to E^\delta \otimes Hom_{\mathfrak{k}}(E^\delta, V)$. Tvrdimo da je tada

$$u \cdot (e \otimes \varphi) = e \otimes (u \cdot \varphi), \qquad u \in \mathcal{G}^K, \quad e \in E^\delta, \quad \varphi \in Hom_{\mathfrak{k}}(E^\delta, V), \tag{3.21}$$

i

$$w \cdot (e \otimes \varphi) = (w \cdot e) \otimes \varphi, \qquad w \in \mathcal{K}, \quad e \in E^\delta, \quad \varphi \in Hom_{\mathfrak{k}}(E^\delta, V). \tag{3.22}$$

Doista, za $u \in \mathcal{G}^K$, $e \in E^\delta$ i $\varphi \in Hom_{\mathfrak{k}}(E^\delta, V)$ imamo redom

$$u \cdot (e \otimes \varphi) = \Psi(u \cdot \Phi(e \otimes \varphi)) = \Psi(u \cdot (\varphi(e))) = \Psi((u \cdot \varphi)(e)) = e \otimes (u \cdot \varphi),$$

odnosno, vrijedi (3.21). Nadalje, za $w \in \mathcal{K}$, $e \in E^\delta$ i $\varphi \in Hom_{\mathfrak{k}}(E^\delta, V)$ je $w \cdot \varphi(e) = \varphi(w \cdot e)$, jer je φ homomorfizam $\mathcal{K}-$modula, dakle,

$$w \cdot (e \otimes \varphi) = \Psi(w \cdot \Phi(e \otimes \varphi)) = \Psi(w \cdot \varphi(e)) = \Psi(\varphi(w \cdot e)) = (w \cdot e) \otimes \varphi,$$

odnosno, vrijedi (3.22).

Iz ireducibilnosti $\mathcal{G}-$modula V prema propoziciji 3.4.8. slijedi da je $V(\delta)$ ireducibilan $\mathcal{G}^\delta-$modul, dakle, ireducibilan $\mathcal{G}^\delta/\mathcal{G}\mathcal{J}^\delta-$modul. Prema tvrdnji ($d$) propozicije 3.4.12. množenje inducira izomorfizam algebre $\left(\mathcal{K}/\mathcal{J}^\delta\right) \otimes \left(\mathcal{G}^K / \left(\mathcal{G}^K \cap \mathcal{G}\mathcal{J}^\delta\right)\right)$ na algebru $\mathcal{G}^\delta/\mathcal{G}\mathcal{J}^\delta$. Sada se iz formula (3.21) i (3.22) vidi izomorfizam $\Phi : E^\delta \otimes Hom_{\mathfrak{k}}(E^\delta, V) \to V(\delta)$ upravo poštuje strukture tih dvaju modula. Prema tome, iz ireducibilnosti $V/(\delta)$ kao $\mathcal{G}^\delta/\mathcal{G}\mathcal{J}^\delta-$modula slijedi ireducibilnost $E^\delta \otimes Hom_{\mathfrak{k}}(E^\delta, V)$ kao $\left(\mathcal{K}/\mathcal{J}^\delta\right) \otimes \left(\mathcal{G}^K / \left(\mathcal{G}^K \cap \mathcal{G}\mathcal{J}^\delta\right)\right)-$modula. To posebno znači da je $Hom_{\mathfrak{k}}(E^\delta, V)$ ireducibilan $\mathcal{G}^K-$modul, odnosno, dokazana je tvrdnja (1).

(2) Neka je sada X ireducibilan $\mathcal{G}^K / \left(\mathcal{G}^K \cap \mathcal{G}\mathcal{J}^\delta\right)-$modul, tj. ireducibilan $\mathcal{G}^K-$modul takav da je $\mathcal{G}^K \cap \mathcal{G}\mathcal{J}^\delta$ sadržano u njegovu anihilatoru. Uvest ćemo sada na prostor $E^\delta \otimes X$ strukturu $\mathcal{G}^\delta-$modula. Prije svega, za $w \in \mathcal{K}$ i $u \in \mathcal{G}^K$ definiramo preslikavanje $F_{w,u} : E^\delta \times X \to E^\delta \otimes X$ ovako:

$$F_{w,u}(e, x) = (w \cdot e) \otimes (u \cdot x), \qquad e \in E^\delta, \quad x \in X.$$

To je preslikavanje bilinearno pa postoji jedinstven linearan operator $\Phi_{w,u} : E^\delta \otimes X \to E^\delta \otimes X$ takav da je

$$\Phi_{w,u}(e \otimes x) = (w \cdot e) \otimes (u \cdot x) \qquad \forall e \in E^\delta \quad \text{i} \quad \forall x \in X.$$

Uočimo sada da je $F_{w,u} = 0$ ako je $w \in \mathcal{J}^\delta$ ili ako je $u \in \mathcal{G}^K \cap \mathcal{G}\mathcal{J}^\delta$. Prema tome, možemo definirati preslikavanje $\Omega : \mathcal{K}/\mathcal{J}^\delta \times \mathcal{G}^K / \left(\mathcal{G}^K \cap \mathcal{G}\mathcal{J}^\delta\right) \to End_{\mathbb{C}}(E^\delta \otimes X)$ ovako:

$$\Omega\left(w + \mathcal{J}^\delta, u + \left(\mathcal{G}^K \cap \mathcal{G}\mathcal{J}^\delta\right)\right) = \Phi_{w,u}, \qquad w \in \mathcal{K}, \quad u \in \mathcal{G}^K.$$

To je preslikavanje bilinearno, pa dobivamo linearan operator

$$\omega : \left(\mathcal{K}/\mathcal{J}^\delta\right) \otimes \left(\mathcal{G}^K / \left(\mathcal{G}^K \cap \mathcal{G}\mathcal{J}^\delta\right)\right) \to End_{\mathbb{C}}(E^\delta \otimes X)$$

takav da je

$$\omega\left(\left(w + \mathcal{J}^\delta\right) \otimes \left(u + \left(\mathcal{G}^K \cap \mathcal{G}\mathcal{J}^\delta\right)\right)\right) = \Phi_{w,u}, \qquad w \in \mathcal{K}, \quad u \in \mathcal{G}^K.$$

Dakle, imamo

$$\omega\left(\left(w + \mathcal{J}^\delta\right) \otimes \left(u + \left(\mathcal{G}^K \cap \mathcal{G}\mathcal{J}^\delta\right)\right)\right)(e \otimes x) = (w \cdot e) \otimes (u \cdot x), \quad w \in \mathcal{K},\ u \in \mathcal{G}^K,\ e \in E^\delta,\ x \in X.$$

Preslikavanje ω je reprezentacija unitalne algebre $\mathcal{A} = \left(\mathcal{K}/\mathcal{J}^{\delta}\right) \otimes \left(\mathcal{G}^{K}/\left(\mathcal{G}^{K} \cap \mathcal{G}\mathcal{J}^{\delta}\right)\right)$ na prostoru $E^{\delta} \otimes X$. Da to provjerimo treba vidjeti da se jedinica u algebri preslikava u jedinični operator i da se produkt u algebri preslikava u produkt operatora na prostoru $E^{\delta} \otimes X$. Ovo prvo je očito jer jedinica u algebri $\mathcal{A}$ je

$$1_{\mathcal{A}} = \left(1_{\mathcal{K}} + \mathcal{J}^{\delta}\right) \otimes \left(1_{\mathcal{G}^K} + \left(\mathcal{G}^{K} \cap \mathcal{G}\mathcal{J}^{\delta}\right)\right).$$

Stoga za svaki $e \in E^{\delta}$ i svaki $x \in X$ vrijedi

$$\omega\left(1_{\mathcal{A}}\right)(e \otimes x) = e \otimes x,$$

a odatle slijedi $\omega\left(1_{\mathcal{A}}\right) = I_{E^{\delta} \otimes X}$, jer vektori oblika $e \otimes x$ razapinju prostor $E^{\delta} \otimes X$. Nadalje, zbog linearnosti preslikavanja ω formulu za produkt je dovoljno ustanoviti za elemente algebre $\mathcal{A}$ oblika $\left(w + \mathcal{J}^{\delta}\right) \otimes \left(u + \left(\mathcal{G}^{K} \cap \mathcal{G}\mathcal{J}^{\delta}\right)\right)$, jer takvi razapinju cijelu algebru $\mathcal{A}$. Neka su, dakle, $w, w' \in \mathcal{K}$ i $u, u' \in \mathcal{G}^{K}$. Tada za proizvoljne $e \in E^{\delta}$ i $x \in X$ imamo

$$\omega\left(\left[\left(w + \mathcal{J}^{\delta}\right) \otimes \left(u + \left(\mathcal{G}^{K} \cap \mathcal{G}\mathcal{J}^{\delta}\right)\right)\right] \cdot \left[\left(w' + \mathcal{J}^{\delta}\right) \otimes \left(u' + \left(\mathcal{G}^{K} \cap \mathcal{G}\mathcal{J}^{\delta}\right)\right)\right]\right)(e \otimes x) =$$

$$= \omega\left(\left(ww' + \mathcal{J}^{\delta}\right) \otimes \left(uu' + \left(\mathcal{G}^{K} \cap \mathcal{G}\mathcal{J}^{\delta}\right)\right)\right)(e \otimes x) = (ww' \cdot e) \otimes (uu' \cdot x) =$$

$$= (w \cdot w' \cdot e) \otimes (u \cdot u' \cdot x) = \omega\left(\left(w + \mathcal{J}^{\delta}\right) \otimes \left(u + \left(\mathcal{G}^{K} \cap \mathcal{G}\mathcal{J}^{\delta}\right)\right)\right)((w' \cdot e) \otimes (u' \cdot x)) =$$

$$= \omega\left(\left(w + \mathcal{J}^{\delta}\right) \otimes \left(u + \left(\mathcal{G}^{K} \cap \mathcal{G}\mathcal{J}^{\delta}\right)\right)\right)\omega\left(\left(w' + \mathcal{J}^{\delta}\right) \otimes \left(u' + \left(\mathcal{G}^{K} \cap \mathcal{G}\mathcal{J}^{\delta}\right)\right)\right)(e \otimes x).$$

Dakle, ω je reprezentacija, odnosno, $E^{\delta} \otimes X$ postaje $\mathcal{A}-$modul. Taj je modul ireducibilan jer ireducibilni su $\mathcal{K}-$modul E^{δ} i $\mathcal{G}^{K}-$modul X. Prema tvrdnji (d) množenje inducira izomorfizam algebre $\mathcal{A}$ s algebrom $\mathcal{G}^{\delta}/\mathcal{G}\mathcal{J}^{\jmath}$, dakle, $E^{\delta} \otimes X$ postaje ireducibilan $\mathcal{G}^{\delta}-$modul čiji anihilator sadrži $\mathcal{G}\mathcal{J}^{\delta}$. No tada prema propoziciji 3.4.11. postoji ireducibilan $\mathcal{G}-$modul V takav da je $V(\delta) \neq \{0\}$ i da je $\mathcal{G}^{\delta}-$modul $V(\delta)$ ekvivalentan $\mathcal{G}^{\delta}-$modulu $E^{\delta} \otimes X$. No tada je prema dokazu tvrdnje (1) $\mathcal{G}^{\delta}-$modul $V(\delta)$ ekvivalentan $\mathcal{G}^{\delta}-$modulu $E^{\delta} \otimes Hom_{\mathfrak{k}}(E^{\delta}, V)$. Napokon, iz ekvivalentnosti $\left(\mathcal{K}/\mathcal{J}^{\delta}\right) \otimes \left(\mathcal{G}^{K}/\left(\mathcal{G}^{K} \cap \mathcal{G}\mathcal{J}^{\delta}\right)\right)-$modula $E^{\delta} \otimes X$ i $E^{\delta} \otimes Hom_{\mathfrak{k}}(E^{\delta}, V)$ i iz činjenice da je algebra $\mathcal{K}/\mathcal{J}^{\delta}$ izomorfna sa $End_{\mathbb{C}}(E^{\delta})$ slijedi da su $\mathcal{G}^{K}-$moduli X i $Hom_{\mathfrak{k}}(E^{\delta}, V) = Hom_{\mathfrak{k}}(E^{\delta}, V(\delta))$ ekvivalentni.

(3) Pretpostavimo sada da su V i V' ireducibilni $\mathcal{G}-$moduli takvi da je $V(\delta) \neq \{0\} \neq V'(\delta)$. Naravno, ako su $\mathcal{G}-$moduli V i V' ekvivalentni, onda su očito $\mathcal{G}^{K}-$moduli $Hom_{\mathfrak{k}}(E^{\delta}, V(\delta))$ i $Hom_{\mathfrak{k}}(E^{\delta}, V'(\delta))$ ekvivalentni.

Pretpostavimo sada da su $\mathcal{G}^{K}-$moduli $Hom_{\mathfrak{k}}(E^{\delta}, V(\delta)) = Hom_{\mathfrak{k}}(E^{\delta}, V'(\delta)) = Hom_{\mathfrak{k}}(E^{\delta}, V')$ ekvivalentni i neka je $\varphi : Hom_{\mathfrak{k}}(E^{\delta}, V) \to Hom_{\mathfrak{k}}(E^{\delta}, V')$ izomorfizam $\mathcal{G}^{K}-$modula. Tada je

$$I_{E^{\delta}} \otimes \varphi : E^{\delta} \otimes Hom_{\mathfrak{k}}(E^{\delta}, V) \to E^{\delta} \otimes Hom_{\mathfrak{k}}(E^{\delta}, V')$$

izomorfizam $\mathcal{K} \otimes \mathcal{G}^{K}-$modula. Kao u dokazu tvrdnje (2) zaključujemo da su $E^{\delta} \otimes Hom_{\mathfrak{k}}(E^{\delta}, V)$ i $E^{\delta} \otimes Hom_{\mathfrak{k}}(E^{\delta}, V')$ ekvivalentni kao $\mathcal{G}^{\delta}-$moduli. No prema dokazu tvrdnje (1) $\mathcal{G}^{\delta}-$modul $E^{\delta} \otimes Hom_{\mathfrak{k}}(E^{\delta}, V)$ ekvivalentan je $\mathcal{G}^{\delta}-$modulu $V(\delta)$, a $\mathcal{G}^{\delta}-$modul $E^{\delta} \otimes Hom_{\mathfrak{k}}(E^{\delta}, V')$ ekvivalentan je $\mathcal{G}^{\delta}-$modulu $V'(\delta)$. Prema tome, $\mathcal{G}^{\delta}-$moduli $V(\delta)$ i $V'(\delta)$ su ekvivalentni, a odatle po propoziciji 3.4.11. slijedi da su $\mathcal{G}-$moduli V i V' ekvivalentni.

Time je teorem 3.4.13. u potpunosti dokazan.

Propozicija 3.4.14. *Neka je V ireducibilan $\mathcal{G}-$modul takav da je $V(\delta) \neq \{0\}$ i neka je V' $\mathcal{G}-$modul. Pretpostavimo da je $\mathcal{G}^{K}-$modul $Hom_{\mathfrak{k}}(E^{\delta}, V)$ ekvivalentan nekom subkvocijentnom modulu $\mathcal{G}^{K}-$modula $Hom_{\mathfrak{k}}(E^{\delta}, V')$. Tada je $\mathcal{G}-$modul V ekvivalentan nekom subkvocijentnom modulu od V'.*

Dokaz: Budući da je nužno $Hom_{\mathfrak{k}}(E^\delta, V') \neq \{0\}$, vrijedi $V'(\delta) \neq \{0\}$. Nadalje, kako je $Hom_{\mathfrak{k}}(E^\delta, V') = Hom_{\mathfrak{k}}(E^\delta, V'(\delta))$, $\mathcal{G}-$modul V' možemo zamijeniti s njegovim podmodulom

$$\sum_{\gamma\in\hat{\mathfrak{k}}} \dot{+} V'(\gamma).$$

Drugim riječima, u dokazu možemo pretpostavljati da je V' $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})-$modul.

Prema dokazu teorema 3.4.13. (dio (1)) imamo sljedeće ekvivalencije $\mathcal{G}^\delta-$modula:

$$V(\delta) \simeq E^\delta \otimes Hom_{\mathfrak{k}}(E^\delta, V) \qquad \text{i} \qquad V'(\delta) \simeq E^\delta \otimes Hom_{\mathfrak{k}}(E^\delta, V').$$

Neka su $Y_1 \subseteq Y_2$ $\mathcal{G}^K-$podmoduli od $Hom_{\mathfrak{k}}(E^\delta, V')$ takvi da je $\mathcal{G}^K-$modul $Hom_{\mathfrak{k}}(E^\delta, V)$ ekvivalentan kvocijentnom modulu Y_2/Y_1. Tada su $E^\delta \otimes Y_1 \subseteq E^\delta \otimes Y_2$ $\mathcal{G}^\delta-$podmoduli od $E^\delta \otimes Hom_{\mathfrak{k}}(E^\delta, V')$. Budući da je $\mathcal{G}^K-$modul $Hom_{\mathfrak{k}}(E^\delta, V)$ ekvivalentan kvocijentnom modulu Y_2/Y_1, $\mathcal{G}^\delta-$modul $E^\delta \otimes Hom_{\mathfrak{k}}(E^\delta, V)$ ekvivalentan je kvocijentnom modulu $(E^\delta \otimes Y_2)/(E^\delta \otimes Y_1)$. Označimo sada sa Z_1 i Z_2 $\mathcal{G}^\delta-$podmodule od $V'(\delta)$ koji pri ekvivalenciji $\mathcal{G}^\delta-$modula $V'(\delta)$ i $E^\delta \otimes Hom_{\mathfrak{k}}(E^\delta, V')$ odgovaraju podmodulima $E^\delta \otimes Y_1$ i $E^\delta \otimes Y_2$. Tada je $\mathcal{G}^\delta-$modul $V(\delta)$ ekvivalentan kvocijentnom modulu Z_2/Z_1. Stavimo $Z_2' = \mathcal{G}Z_2$. Prema propoziciji 3.4.9. postoji najveći $\mathcal{G}-$podmodul Z_1' od Z_2' takav da je $Z_1' \cap V'(\delta) = Z_1$. Tada je $(Z_2'/Z_1')(\delta) \simeq Z_2/Z_1$, pa je prema propoziciji 3.4.11. $\mathcal{G}-$modul Z_2'/Z_1' ireducibilan i ekvivalentan $\mathcal{G}-$modulu V.

Neka je sada $\mathfrak{a}$ Cartanov potprostor od $\mathfrak{g}$ sadržan u $\mathfrak{p}$. Stavimo kao i prije u odjeljku 2.6.

$$\mathfrak{m} = Z_{\mathfrak{k}}(\mathfrak{a}) = \{x \in \mathfrak{k};\ [x, h] = 0\ \forall h \in \mathfrak{a}\},$$

$$M = Z_K(\mathfrak{a}) = \{k \in K;\ (Ad\,k)|\mathfrak{a} = I_{\mathfrak{a}}\}, \quad M' = N_K(\mathfrak{a}) = \{k \in K;\ (Ad\,k)\mathfrak{a} = \mathfrak{a}\}.$$

Tada znamo da je $\mathfrak{m}$ podalgebra reduktivna u $\mathfrak{g}$ i to je Liejeva algebra kompaktnih podgrupa M i M' od K. Nadalje, restrikcije Killingove forme $B|\mathfrak{m} \times \mathfrak{m}$ i $B|\mathfrak{a} \times \mathfrak{a}$ su nedegenerirane. Neka je $\mathfrak{t}$ Cartanova podalgebra od $\mathfrak{m}$. Tada je

$$\mathfrak{h} = \mathfrak{t} \dot{+} \mathfrak{a}$$

Cartanova podalgebra od $\mathfrak{g}$. Neka je $R = R(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}, \mathfrak{h}^{\mathbb{C}})$ sistem korijena od $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ u odnosu na $\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}$, $\Sigma = R(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$ sistem korijena od $\mathfrak{g}$ u odnosu na $\mathfrak{a}$ i $R^0 = R(\mathfrak{m}^{\mathbb{C}}, \mathfrak{t}^{\mathbb{C}})$ sistem korijena od $\mathfrak{m}^{\mathbb{C}}$ u odnosu na $\mathfrak{t}^{\mathbb{C}}$. Tada je

$$\Sigma = \{\alpha|\mathfrak{a};\ \alpha \in R,\ \alpha|\mathfrak{a} \neq 0\} \qquad \text{i} \qquad R^0 = \{\alpha|\mathfrak{t}^{\mathbb{C}};\ \alpha \in R,\ \alpha|\mathfrak{a} = 0\}.$$

Nadalje, možemo izabrati skupove pozitivnih korijena R_+ u R, Σ_+ u Σ i R^0_+ u R^0 tako da bude

$$\Sigma_+ = \{\alpha|\mathfrak{a};\ \alpha \in R_+,\ \alpha|\mathfrak{a} \neq 0\} \qquad \text{i} \qquad R^0_+ = \{\alpha|\mathfrak{t}^{\mathbb{C}};\ \alpha \in R_+,\ \alpha|\mathfrak{a} = 0\}.$$

Neka je kao i u odjeljku 2.6.

$$\mathfrak{n} = \sum_{\lambda\in\Sigma_+} \dot{+} \mathfrak{g}^{\lambda} \qquad \text{i} \qquad \overline{\mathfrak{n}} = \sum_{\lambda\in\Sigma_+} \dot{+} \mathfrak{g}^{-\lambda}$$

tako da imamo Iwasawinu dekompoziciju

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \dot{+} \mathfrak{a} \dot{+} \mathfrak{n}$$

i rastav u direktnu sumu

$$\mathfrak{g} = \overline{\mathfrak{n}} \dot{+} \mathfrak{m} \dot{+} \mathfrak{a} \dot{+} \mathfrak{n}.$$

Neka su u daljnjem redom $\mathcal{G}$, $\mathcal{K}$, $\mathcal{M}$, $\mathcal{A}$, $\mathcal{T}$, $\mathcal{H}$, $\mathcal{N}$ i $\overline{\mathcal{N}}$ univerzalne omotačke algebre kompleksifikacija $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$, $\mathfrak{k}^{\mathbb{C}}$, $\mathfrak{m}^{\mathbb{C}}$, $\mathfrak{a}^{\mathbb{C}}$, $\mathfrak{t}^{\mathbb{C}}$, $\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}$, $\mathfrak{n}^{\mathbb{C}}$ i $\overline{\mathfrak{n}}^{\mathbb{C}}$. Tada se $\mathcal{T}$, $\mathcal{A}$ i $\mathcal{H}$ identificiraju sa simetričnim algebrama $S\left(\mathfrak{t}^{\mathbb{C}}\right)$, $S\left(\mathfrak{a}^{\mathbb{C}}\right)$ i $S\left(\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}\right)$ prostora $\mathfrak{t}^{\mathbb{C}}$, $\mathfrak{a}^{\mathbb{C}}$ i $\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}$, a također sa algebrama $\mathcal{P}\left(\mathfrak{t}^*\right)$, $\mathcal{P}\left(\mathfrak{a}^*\right)$ i $\mathcal{P}\left(\mathfrak{h}^*\right)$ kompleksnih polinomijalnih funkcija na dualima $\mathfrak{t}^*$, $\mathfrak{a}^*$ i $\mathfrak{h}^*$. Nadalje, algebra $\mathcal{H}$ se identificira s tenzorskim produktom algebri $\mathcal{T}\otimes\mathcal{A}$. Upotrebljavat ćemo i sljedeće oznake

$$\mathcal{G}_n = U_n\left(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}\right), \qquad \mathcal{A}^n = S^n\left(\mathfrak{a}^{\mathbb{C}}\right), \qquad \mathcal{A}_n = U_n\left(\mathfrak{a}^{\mathbb{C}}\right) = \sum_{k=0}^{n} \dot{+}\, \mathcal{A}^k, \qquad n\in\mathbb{Z}_+,$$

te oznake za komutante (ili centralizatore)

$$\mathcal{G}^{\mathfrak{k}} = \{u\in\mathcal{G};\ xu = ux\ \forall x\in\mathfrak{k}\} = \mathcal{G}^K = \{u\in\mathcal{G};\ (Ad\,k)u = u\ \forall k\in K\},$$

$$\mathcal{K}^{\mathfrak{m}} = \{w\in\mathcal{K};\ xw = wx\ \forall x\in\mathfrak{m}\} \supseteq \mathcal{K}^M = \{w\in\mathcal{K};\ (Ad\,m)w = w\ \forall m\in M\},$$

$$\mathcal{G}^{\mathfrak{m}} = \{u\in\mathcal{G};\ xu = ux\ \forall x\in\mathfrak{m}\} \supseteq \mathcal{G}^M = \{u\in\mathcal{G};\ (Ad\,m)u = u\ \forall m\in M\}.$$

Zbog PBW−teorema iz Iwasawine dekompozicije $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}\dot{+}\mathfrak{a}\dot{+}\mathfrak{k}$ slijedi da množenje inducira izomorfizam vektorskih prostora sa $\mathcal{N}\otimes\mathcal{A}\otimes\mathcal{K}$ na $\mathcal{G}$. Nadalje, vrijedi $\mathcal{N} = \mathbb{C}1\dot{+}\mathfrak{n}\mathcal{N}$, pa dobivamo rastav u direktnu sumu

$$\mathcal{G} = \mathcal{A}\mathcal{K}\dot{+}\mathfrak{n}\mathcal{G}.$$

Neka je $\tilde{\omega}$ projektor prostora $\mathcal{G}$ na potprostor $\mathcal{A}\mathcal{K}$ u skladu s gornjim rastavom. Identificirat ćemo vektorski potprostor $\mathcal{A}\mathcal{K}$ od $\mathcal{G}$ s tenzorskim produktom $\mathcal{A}\otimes\mathcal{K}$. Tako shvaćeno preslikavanje $\tilde{\omega}:\mathcal{G}\to\mathcal{A}\otimes\mathcal{K}$ zove se **kanonsko preslikavanje $\mathcal{G}$ na $\mathcal{A}\otimes\mathcal{K}$** (pridruženo izabranoj Iwasawinoj dekompoziciji). Napomenimo da ćemo $\mathcal{A}\otimes\mathcal{K}$ promatrati i kao tenzorski produkt unitalnih algebri. Ističemo da je tada $\mathcal{A}\mathcal{K} = \mathcal{A}\otimes\mathcal{K}$ samo potprostor, ali ne i podalgebra od $\mathcal{G}$.

Propozicija 3.4.15. *(a) Za $u\in\mathcal{G}$ i $v\in\mathcal{G}^K$ vrijedi $\tilde{\omega}(uv) = \tilde{\omega}(v)\tilde{\omega}(u)$.*

(b) $\tilde{\omega}\left(\mathcal{G}^{\mathfrak{m}}\right)\subseteq\mathcal{A}\otimes\mathcal{K}^{\mathfrak{m}}$ i $\tilde{\omega}\left(\mathcal{G}^M\right)\subseteq\mathcal{A}\otimes\mathcal{K}^M$.

(c) Restrikcija $\tilde{\omega}|\mathcal{G}^K$ je antihomomorfizam unitalnih algebri sa $\mathcal{G}^K$ u $\mathcal{A}\otimes\mathcal{K}^M$.

(d) Za $u\in\mathcal{G}$ i $w\in\mathcal{K}$ je $\tilde{\omega}(uw) = \tilde{\omega}(u)(1_{\mathcal{A}}\otimes w)$.

(e) Za $n\in\mathbb{Z}_+$, $u\in\mathcal{G}_n$ i $w\in\mathcal{K}$ je $\tilde{\omega}(uw)\in\mathcal{A}_n\otimes\mathcal{K}$.

Dokaz: (a) Neka su $u\in\mathcal{G}$ i $v\in\mathcal{G}^K$. Tada je

$$u = \sum_{i=1}^{p} u_i u_i' + u'' \qquad \text{i} \qquad v = \sum_{j=1}^{q} v_j v_j' + v'',$$

gdje su $u_1,\ldots,u_p,v_1,\ldots,v_q\in\mathcal{A}$, $u_1',\ldots,u_p',v_1',\ldots,v_q'\in\mathcal{K}$ i $u'',v''\in\mathfrak{n}\mathcal{G}$. Kako je $[\mathfrak{a},\mathfrak{n}]\subseteq\mathfrak{n}$ imamo $\mathfrak{a}\mathfrak{n}\subseteq\mathfrak{n}\mathfrak{a}+\mathfrak{n}\subseteq\mathfrak{n}\mathcal{A}$, dakle, $\mathcal{A}\mathfrak{n}\subseteq\mathfrak{n}\mathcal{A}$. Odatle je

$$u_i v'' u_i' \in \mathcal{A}\mathfrak{n}\mathcal{G}\mathcal{K}\subseteq\mathfrak{n}\mathcal{A}\mathcal{G}\mathcal{K} = \mathfrak{n}\mathcal{G}.$$

Nadalje, imamo

$$u''v\in\mathfrak{n}\mathcal{G}\mathcal{G}^K = \mathfrak{n}\mathcal{G}.$$

Sada je

$$uv = \sum_{i=1}^{p} u_i u_i' v + u''v = \sum_{i=1}^{p} u_i v u_i' + u''v + = \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q} u_i v_j v_j' u_i' + \sum_{i=1}^{p} u_i v'' u_i' + u''v.$$

Kako je $u_i v_j = v_j u_i$ (algebra $\mathcal{A}$ je komutativna), dobivamo:

$$\tilde{\omega}(uv) = \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q}(u_i v_j)\otimes(v_j' u_i') = \sum_{j=1}^{q}\sum_{i=1}^{p}(v_j u_i)\otimes(v_j' u_i') = \left(\sum_{j=1}^{q} v_j \otimes v_j'\right)\left(\sum_{i=1}^{p} u_i \otimes u_i'\right) = \tilde{\omega}(v)\tilde{\omega}(u).$$

(b) Ako je $u \in \mathcal{G}^{\mathfrak{m}}$, prikažimo ga kao u dokazu tvrdnje (a) u obliku

$$u = \sum_{i=1}^{p} u_i u_i' + u'',$$

gdje su $u_1, \ldots, u_p \in \mathcal{A}$, koje izabiremo linearno nezavisne, $u_1', \ldots, u_i' \in \mathcal{K}$ i $u'' \in \mathfrak{n}\mathcal{G}$. Tada je za svaki $x \in \mathfrak{m}$

$$0 = [x, u] = \sum_{i=1}^{p}[x, u_i u_i'] + [x, u''] = \sum_{i=1}^{p} u_i[x, u_i'] + [x, u''].$$

Imamo $[x, \mathfrak{n}] \subseteq \mathfrak{n}$, jer je $[x, \mathfrak{g}^{\lambda}] \subseteq \mathfrak{g}^{\lambda}$ za svaki $\lambda \in \Sigma$. Dakle,

$$[x, u''] \in [x, \mathfrak{n}\mathcal{G}] \subseteq [x, \mathfrak{n}]\mathcal{G} + \mathfrak{n}[x, \mathcal{G}] \subseteq \mathfrak{n}\mathcal{G},$$

pa iz prethodne jednakosti zbog direktnosti sume $\mathcal{G} = \mathcal{A}\mathcal{K} \dotplus \mathfrak{n}\mathcal{G}$ zaključujemo da je

$$\sum_{i=1}^{p} u_i[x, u_i'] = 0.$$

Odatle je

$$\sum_{i=1}^{p} u_i \otimes [x, u_i'] = 0$$

Zbog linearne nezavisnosti $u_1, \ldots, u_p$ slijedi $[x, u_i'] = 0$ za svaki $i = 1, \ldots, p$. Kako je $x \in \mathfrak{m}$ bio proizvoljan, zaključujemo da su $u_1', \ldots, u_i' \in \mathcal{K}^{\mathfrak{m}}$. Prema tome,

$$\tilde{\omega}(u) = \sum_{i=1}^{p} u_i \otimes u_i' \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{K}^{\mathfrak{m}}.$$

Time je dokazana prva tvrdnja u (b).

Dokaz druge tvrdnje u (b) sasvim je analogan. Neka je $u \in \mathcal{G}^{M}$ prikazan kao u prvom dokazu prve tvrdnje. Tada je za svaki $k \in M$

$$0 = u - (Ad\,k)u = \sum_{i=1}^{p} u_i u_i' + u'' - \sum_{i=1}^{p}(Ad\,k)(u_i u_i') - (Ad\,k)u'' = \sum_{i=1}^{p} u_i\,(u_i' - (Ad\,k)u_i') + u'' - (Ad\,k)u''.$$

Sada imamo

$$(Ad\,k)u'' \in (Ad\,k)\mathfrak{n}\mathcal{G} = ((Ad\,k)\mathfrak{n})(Ad\,k)\mathcal{G}) = \mathfrak{n}\mathcal{G},$$

pa iz prethodne jednakosti slijedi (zbog direktnosti sume $\mathcal{G} = \mathcal{A}\mathcal{K} \dotplus \mathfrak{n}\mathcal{G}$)

$$\sum_{i=1}^{p} u_i\,(u_i' - (Ad\,k)u_i') = 0,$$

odnosno,

$$\sum_{i=1}^{p} u_i \otimes (u_i' - (Ad\,k)u_i') = 0.$$

Odatle zbog linearne nezavisnosti $u_1, \ldots, u_p$ dobivamo $(Ad\,k)u_i' = u_i'$ za svaki $i = 1, \ldots, p$, a kako je $k \in M$ bio proizvoljan, to znači da su $u_1', \ldots, u_p' \in \mathcal{K}^M$. Dakle,

$$\tilde{\omega}(u) = \sum_{i=1}^{p} u_i \otimes u_i' \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{K}^M.$$

Time je i druga tvrdnja u (b) dokazana.

Budući da je $\mathcal{G}^K \subseteq \mathcal{G}^M$, tvrdnja (c) slijedi neposredno iz tvrdnji (a) i (b).

(d) Neka su $u \in \mathcal{G}$ i $w \in \mathcal{K}$. Pišemo kao prije

$$u = \sum_{i=1}^{p} u_i u_i' + u''$$

gdje su $u_1, \ldots, u_p \in \mathcal{A}$, $u_1', \ldots, u_p' \in \mathcal{K}$ i $u'' \in \mathfrak{n}\mathcal{G}$. Tada je

$$uw = \sum_{i=1}^{p} u_i u_i' w + u'' w$$

i vrijedi $u_1'w, \ldots, u_p'w \in \mathcal{K}$ i $u''w \in \mathfrak{n}\mathcal{G}\mathcal{K} = \mathfrak{n}\mathcal{G}$. Dakle, imamo

$$\tilde{\omega}(uw) = \sum_{i=1}^{p} u_i \otimes u_i'w = \left(\sum_{i=1}^{p} u_i \otimes u_i' \right) (1_{\mathcal{A}} \otimes w) = \tilde{\omega}(u)\tilde{\omega}(w).$$

Za dokaz tvrdnje (e) možemo zbog tvrdnje (d) pretpostaviti da je $w = 1_{\mathcal{K}}$. Ako je $u \in \mathcal{G}_n$, onda je $u \in \mathcal{N}\mathcal{A}_n\mathcal{K}$, dakle,

$$\tilde{\omega}(u) \in \tilde{\omega}(\mathcal{A}_n\mathcal{K}) = \mathcal{A}_n \otimes \mathcal{K}.$$

Time je i posljednja tvrdnja (e) dokazana.

Neka je sada $\mathcal{J}$ dvostrani ideal u $\mathcal{K}$ i neka je $\pi : \mathcal{K} \to \mathcal{K}/\mathcal{J}$ kanonski epimorfizam unitalnih algebri. Definiramo sada preslikavanje

$$\tilde{\omega}_{\mathcal{J}} = (I_{\mathcal{A}} \otimes \pi) \circ \tilde{\omega} : \mathcal{G} \to \mathcal{A} \otimes (\mathcal{K}/\mathcal{J}).$$

Želimo proučiti presjek $\mathcal{G}^K \cap (\mathrm{Ker}\, \tilde{\omega}_{\mathcal{J}})$ i u tu svrhu ćemo definirati pomoćna linearna preslikavanja $\omega : \mathcal{G} \to \mathcal{A} \otimes \mathcal{K}$ i $\omega_{\mathcal{J}} : \mathcal{G} \to \mathcal{A} \otimes (\mathcal{K}/\mathcal{J})$.

Neka je $\sigma : S\left(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}\right) \to \mathcal{G}$ simetrizacija; to je izomorfizam vektorskih prostora. Sada preko bilinearnog preslikavanja $(u, w) \mapsto \sigma(u)w$ sa $S\left(\mathfrak{p}^{\mathbb{C}}\right) \times \mathcal{K}$ u $\mathcal{G}$ dolazimo do izomorfizma vektorskih prostora sa $S(\mathfrak{p}^C) \otimes \mathcal{K}$ na $\mathcal{G}$. Označimo sa Φ inverzni izomorfizam. Neka je $\mathfrak{b}$ ortogonalni komplement od $\mathfrak{a}$ u $\mathfrak{p}$ u odnosu na $B|\mathfrak{p} \times \mathfrak{p}$. Tada iz $\mathfrak{p} = \mathfrak{a} \dot{+} \mathfrak{b}$ slijedi $S\left(\mathfrak{p}^{\mathbb{C}}\right) = \mathcal{A} \dot{+} \mathfrak{b}S\left(\mathfrak{p}^{\mathbb{C}}\right)$ i taj rastav definira projektor $r : S\left(\mathfrak{p}^{\mathbb{C}}\right) \to \mathcal{A}$. Sada definiramo

$$\omega = (r \otimes I_{\mathcal{K}}) \circ \Phi : \mathcal{G} \to \mathcal{A} \otimes \mathcal{K},$$

$$\omega_{\mathcal{J}} = (I_{\mathcal{A}} \otimes \pi) \circ \omega : \mathcal{G} \to \mathcal{A} \otimes (\mathcal{K}/\mathcal{J}).$$

Lema 3.4.16. *Neka je $u \in \mathcal{G}$ i*

$$u = \sum_{i=1}^{p} \sigma(u_i)u_i',$$

gdje su $u_1, \ldots, u_p \in S\left(\mathfrak{p}^{\mathbb{C}}\right)$ i $u_1', \ldots, u_p' \in \mathcal{K}$. Tada je

$$\omega(u) = \sum_{i=1}^{p} r(u_i) \otimes u_i'.$$

Zadatak 3.4.2. *Dokažite lemu 3.4.16.*

Lema 3.4.17. *Za* $u \in \sigma\left(S^n\left(\mathfrak{p}^{\mathbb{C}}\right)\right)\mathcal{K}$ *vrijedi*

$$\omega(u) \in \mathcal{A}^n \otimes \mathcal{K} \qquad i \qquad \tilde{\omega}(u) - \omega(u) \in \mathcal{A}_{n-1} \otimes \mathcal{K}.$$

Dokaz: Neka su $\{a_1, \ldots, a_\ell\}$ baza od $\mathfrak{a}$ i $\{b_1, \ldots, b_q\}$ baza od $\mathfrak{b}$. Ortogonalni komplement od $\mathfrak{a}$ u $\mathfrak{g}$ je $\mathfrak{b} \oplus \mathfrak{k}$. S druge strane, za $\lambda \in \Sigma$, $x \in \mathfrak{g}^\lambda$ i $h \in \mathfrak{a}$ je $B(h,x) = 0$, dakle, $\mathfrak{n}$ je sdržano u ortogonalnom komplementu od $\mathfrak{a}$ u $\mathfrak{g}$. Sada po Iwasawinoj dekompoziciji $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \dot{+} \mathfrak{n} \dot{+} \mathfrak{k}$ zaključujemo da je $\mathfrak{n} \dot{+} \mathfrak{k}$ ortogonalni komplement od $\mathfrak{a}$ u $\mathfrak{g}$. Dakle, $\mathfrak{b} \oplus \mathfrak{k} = \mathfrak{n} \dot{+} \mathfrak{k}$ i, posebno, $\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{n} \dot{+} \mathfrak{k}$. Stoga za svaki $i \in \{1, \ldots, q\}$ postoje jedinstveni $n_i \in \mathfrak{n}$ i $k_i \in \mathfrak{k}$ takvi da je $b_i = n_i + k_i$. Kako su $b_1, \ldots, b_q$ linearno nezavisni, jasno je da su $n_1, \ldots, n_q$ linearno nezavisni, dakle, $\{n_1, \ldots, n_q\}$ je baza od $\mathfrak{n}$.

Sada je

$$\{a_1^{m_1} \cdots a_\ell^{m_\ell} b_1^{p_1} \cdots b_q^{p_q};\ m \in \mathbb{Z}_+^\ell,\ p \in \mathbb{Z}_+^q,\ |m| + |p| = n\}$$

baza od $S^n\left(\mathfrak{p}^{\mathbb{C}}\right)$. Stoga postoje jedinstveni $k_{m,p} \in \mathcal{K}$, $m \in \mathbb{Z}_+^\ell$, $p \in \mathbb{Z}_+^q$, $|m| + |p| = n$, takvi da je

$$u = \sum_{m \in \mathbb{Z}_+^\ell,\, p \in \mathbb{Z}_+^q,\, |m|+|p|=n} \sigma(a_1^{m_1} \cdots a_\ell^{m_\ell} b_1^{p_1} \cdots b_q^{p_q}) k_{m,p}.$$

Stoga imamo

$$\Phi(u) = \sum_{m \in \mathbb{Z}_+^\ell,\, p \in \mathbb{Z}_+^q,\, |m|+|p|=n} a_1^{m_1} \cdots a_\ell^{m_\ell} b_1^{p_1} \cdots b_q^{p_q} \otimes k_{m,p},$$

dakle,

$$\omega(u) = (r \otimes I_{\mathcal{K}}) \left(\sum_{m \in \mathbb{Z}_+^\ell,\, p \in \mathbb{Z}_+^q,\, |m|+|p|=n} a_1^{m_1} \cdots a_\ell^{m_\ell} b_1^{p_1} \cdots b_q^{p_q} \otimes k_{m,p} \right) =$$

$$= \sum_{m \in \mathbb{Z}_+^\ell,\, p \in \mathbb{Z}_+^q,\, |m|+|p|=n} r(a_1^{m_1} \cdots a_\ell^{m_\ell} b_1^{p_1} \cdots b_q^{p_q}) \otimes k_{m,p}.$$

Kako je

$$r(a_1^{m_1} \cdots a_\ell^{m_\ell} b_1^{p_1} \cdots b_q^{p_q}) = \begin{cases} a_1^{m_1} \cdots a_\ell^{m_\ell} & \text{ako je } |p| = 0 \\ \\ 0 & \text{ako je } |p| > 0, \end{cases}$$

dobivamo

$$\omega(u) = \sum_{m \in \mathbb{Z}_+^\ell,\, |m|=n} a_1^{m_1} \cdots a_\ell^{m_\ell} \otimes k_{m,0} \in \mathcal{A}^n \otimes \mathcal{K}.$$

Time je prva tvrdnja leme dokazana.

S druge strane, $\sigma(a_1^{m_1} \cdots a_\ell^{m_\ell} b_1^{p_1} \cdots b_q^{p_q})$ je kongruentno modulo $\mathcal{G}_{n-1}$ sa

$$\sum_{s \in \mathbb{Z}_+^q,\, p-s \in \mathbb{Z}_+^q} \binom{p_1}{s_1} \cdots \binom{p_q}{s_q} n_1^{s_1} \cdots n_q^{s_q} a_1^{m_1} \cdots a_\ell^{m_\ell} k_1^{p_1 - s_1} \cdots k_q^{p_q - s_q}.$$

Zbog tvrdnje (e) u propoziciji 3.4.15. imamo redom (gdje $\equiv$ označava kongruentnost modulo $\mathcal{A}_{n-1} \otimes \mathcal{K}$)

$$\tilde{\omega}(u) = \tilde{\omega} \left(\sum_{m \in \mathbb{Z}_+^\ell,\, p \in \mathbb{Z}_+^q,\, |m|+|p|=n} \sigma(a_1^{m_1} \cdots a_\ell^{m_\ell} b_1^{p_1} \cdots b_q^{p_q}) k_{m,p} \right) \equiv$$

$$\equiv \tilde{\omega} \left(\sum_{m \in \mathbb{Z}_+^\ell,\, p \in \mathbb{Z}_+^q,\, |m|+|p|=n} a_1^{m_1} \cdots a_\ell^{m_\ell} k_1^{p_1} \cdots k_q^{p_q} k_{m,p} \right) =$$

$$= \sum_{m\in\mathbb{Z}_+^\ell,\, p\in\mathbb{Z}_+^q,\, |m|+|p|=n} a_1^{m_1}\cdots a_\ell^{m_\ell}\otimes k_1^{p_1}\cdots k_q^{p_q}k_{m,p}\equiv$$

$$\equiv \sum_{m\in\mathbb{Z}_+^\ell,\, |m|=n} a_1^{m_1}\cdots a_\ell^{m_\ell}\otimes k_{m,0}=\omega(u).$$

Propozicija 3.4.18. *Neka je $\mathcal{J}$ obostrani ideal u $\mathcal{K}$. Tada je*

$$\mathcal{G}^K\cap(\mathrm{Ker}\,\tilde\omega_{\mathcal{J}})=\mathcal{G}^K\cap\mathcal{G}\mathcal{J}=\mathcal{G}^K\cap(\mathrm{Ker}\,\omega_{\mathcal{J}}).$$

Dokaz ćemo provesti u tri koraka u kojima ćemo dokazati tri inkluzije:

(1) $\mathcal{G}^K\cap\mathcal{G}\mathcal{J}\subseteq\mathcal{G}^K\cap(\mathrm{Ker}\,\tilde\omega_{\mathcal{J}})$,

(2) $\mathcal{G}^K\cap(\mathrm{Ker}\,\omega_{\mathcal{J}})\subseteq\mathcal{G}^K\cap\mathcal{G}\mathcal{J}$,

(3) $\mathcal{G}^K\cap(\mathrm{Ker}\,\tilde\omega_{\mathcal{J}})\subseteq\mathcal{G}^K\cap(\mathrm{Ker}\,\omega_{\mathcal{J}})$.

(1) Imamo

$$\mathcal{G}\mathcal{J}=(\mathcal{A}\mathcal{K}\dotplus\mathfrak{n}\mathcal{G})\mathcal{J}\subseteq\mathcal{A}\mathcal{J}\dotplus\mathfrak{n}\mathcal{G}.$$

Prema tome, $\tilde\omega(\mathcal{G}\mathcal{J})\subseteq\mathcal{A}\otimes\mathcal{J}$, pa slijedi $\tilde\omega_{\mathcal{J}}(\mathcal{G}\mathcal{J})=\{0\}$, odnosno, $\mathcal{G}\mathcal{J}\subseteq\mathrm{Ker}\,\tilde\omega_{\mathcal{J}}$. Odatle slijedi inkluzija $\mathcal{G}^K\cap\mathcal{G}\mathcal{J}\subseteq\mathcal{G}^K\cap(\mathrm{Ker}\,\tilde\omega_{\mathcal{J}})$.

(2) Pri definiciji preslikavanja ω i $\omega_{\mathcal{J}}$ koristili smo izomorfizam vektorskog prostora $S(\mathfrak{p}^{\mathbb{C}})\otimes\mathcal{K}$ na vektorski prostor $\mathcal{G}$ dobiven preko bilinearnog preslikavanja $(u,w)\mapsto\sigma(u)w$ sa $S(\mathfrak{p}^{\mathbb{C}})\times\mathcal{K}$ u $\mathcal{G}$; pri tome je $\sigma:S(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})\to\mathcal{G}$ simetrizacija. Sa $\Phi:\mathcal{G}\to\Sigma(\mathfrak{p}^{\mathbb{C}})\otimes\mathcal{K}$ smo označili inverzni izomorfizam. Tada je

$$\omega=(r\otimes I_{\mathcal{K}})\circ\Phi:\mathcal{G}\to\mathcal{A}\otimes\mathcal{K},$$

$$\omega_{\mathcal{J}}=(I_{\mathcal{A}}\otimes\pi)\circ\omega:\mathcal{G}\otimes(\mathcal{K}/\mathcal{J}),$$

pri čemu je $\pi:\mathcal{K}\to\mathcal{K}/\mathcal{J}$ kanonski epimorfizam, a r je projektor $S(\mathfrak{p}^{\mathbb{C}})$ na $\mathcal{A}$ u skladu s rastavom $S(\mathfrak{p}^{\mathbb{C}})=\mathcal{A}\dotplus\mathfrak{b}S(\mathfrak{p}^{\mathbb{C}})$, gdje je $\mathfrak{b}$ ortogonalni komplement od $\mathfrak{a}$ u $\mathfrak{p}$ u odnosu na $B|\mathfrak{p}\times\mathfrak{p}$, tako da je $\mathfrak{p}=\mathfrak{a}\dotplus\mathfrak{b}$.

Sada identificiramo prostor $\mathcal{G}$ s prostorom $S\left(\mathfrak{p}^{\mathbb{C}}\right)\otimes\mathcal{K}$, dakle, preslikavanje Φ postaje identiteta. Tada ω postaje preslikavanje $r\otimes I_{\mathcal{K}}$ sa $S(\mathfrak{p}^{\mathbb{C}})\otimes\mathcal{K}$ na $\mathcal{A}\otimes\mathcal{K}$, a $\omega_{\mathcal{J}}$ je kompozicija tog preslikavanja sa $(I_{\mathcal{A}}\otimes\pi$, dakle,

$$\omega_{\mathcal{J}}=(I_{\mathcal{A}}\otimes\pi)\circ(r\otimes I_{\mathcal{K}})=r\otimes\pi:S(\mathfrak{p}^{\mathbb{C}})\otimes\mathcal{K}\to\mathcal{A}\otimes(\mathcal{K}/\mathcal{J}).$$

Uočimo da uvedena identifikacija poštuje strukture $K-$modula na prostorima $\mathcal{G}$ i $S(\mathfrak{p}^{\mathbb{C}})\otimes\mathcal{K}$. Posebno, $\mathcal{G}^K$ se identificira s $K-$invarijantama u $S(\mathfrak{p}^{\mathbb{C}})\otimes\mathcal{K}$.

Neka je $u\in\mathcal{G}^K\cap(\mathrm{Ker}\,\omega_{\mathcal{J}})$. To znači da je slika od u u prostoru $\mathcal{A}\otimes(\mathcal{K}/\mathcal{J})=S(\mathfrak{a}^{\mathbb{C}})\otimes(\mathcal{K}/\mathcal{J})$ pri preslikavanju $r\otimes\pi$ jednaka 0. Izaberimo sada bazu $(x_i)_{i\in I}$ prostora $\mathcal{K}/\mathcal{J}$. Tada je

$$(I_{S(\mathfrak{p}^{\mathbb{C}})}\otimes\pi)(u)=\sum_{i\in I}w_i\otimes x_i$$

za jedinstveno određene $w_i\in S(\mathfrak{p}^{\mathbb{C}})$. Kako su restrikcije Killingove forme $B|\mathfrak{p}\times\mathfrak{p}$ i $B|\mathfrak{a}\times\mathfrak{a}$ nedegenerirane, algebre $S(\mathfrak{p}^{\mathbb{C}})$ i $S(\mathfrak{a}^{\mathbb{C}})$ identificiraju se s algebrama kompleksnoznačnih polinomijalnih funkcija $\mathcal{P}(\mathfrak{p})$ i $\mathcal{P}(\mathfrak{a})$. Uz te identifikacije preslikavanje r postaje epimorfizam restrikcije sa $\mathfrak{p}$ na $\mathfrak{a}$. Stoga imamo

$$0=\omega_{\mathcal{J}}(u)=(r\otimes I_{\mathcal{K}/\mathcal{J}})\circ(I_{\mathcal{P}(\mathfrak{p})}\otimes\pi)(u)=\sum_{i\in I}r(w_i)\otimes x_i=\sum_{i\in I}(w_i|\mathfrak{a})\otimes x_i,$$

što znači da je

$$\sum_{i\in I} w_i(a)x_i = 0 \qquad \forall a \in \mathfrak{a}.$$

Budući da je u $K-$invarijanta imamo za svaki $k \in K$

$$\sum_{i\in I}((Ad\, k)w_i) \otimes ((Ad\, k)x_i) = \sum_{i\in I} w_i \otimes x_i.$$

Primjenom operatora $(r \otimes I_{\mathcal{K}/\mathcal{J}})$ dobivamo

$$\sum_{i\in I} w_i((Ad\, k^{-1}a)(Ad\, k)x_i = 0 \qquad \forall a \in \mathfrak{a} \quad \text{i} \quad \forall k \in K.$$

Budući da je $((Ad\, k)x_i)_{i\in I}$ baza od $\mathcal{K}/\mathcal{J}$ za svaki $k \in K$, zaključujemo da je

$$w_i((Ad\, k^{-1})a) = 0 \qquad \forall i \in I, \quad \forall a \in \mathfrak{a} \quad \text{i} \quad \forall k \in K.$$

Međutim, prema propoziciji 2.6.12. $\{(Ad\, k^{-1})a;\ k \in K,\ a \in \mathfrak{a}\} = \mathfrak{p}$. Prema tome, $w_i = 0$ za svaki $i \in I$. To ima za posljedicu $(I_{S(\mathfrak{p}^{\mathbb{C}})} \otimes \pi)(u) = 0$, odnosno, $u \in \text{Ker}\,(I_{S(\mathfrak{p}^{\mathbb{C}})} \otimes \pi) = S(\mathfrak{p}^{\mathbb{C}}) \otimes \mathcal{J}$. Zbog identifikacije $\mathcal{G}$ sa $S(\mathfrak{p}^{\mathbb{C}}) \otimes \mathcal{K}$ to znači da je $u \in \mathcal{G}\mathcal{J}$. Prema tome je $\mathcal{G}^K \cap (\text{Ker}\,\omega_{\mathcal{J}}) \subseteq \mathcal{G}\mathcal{J}$, odnosno, dobivamo traženu inkluziju $\mathcal{G}^K \cap (\text{Ker}\,\omega_{\mathcal{J}}) \subseteq \mathcal{G}^K \cap \mathcal{G}\mathcal{J}$.

(3) Neka je sada $u \in \mathcal{G}^K \cap (\text{Ker}\,\tilde{\omega}_{\mathcal{J}})$. Možemo pisati $u = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$, gdje su $u_i \in \sigma(S^i(\mathfrak{p}^{\mathbb{C}}))\mathcal{K}$. Svaki potprostor $\sigma(S^i(\mathfrak{p}^{\mathbb{C}}))\mathcal{K}$ je $K-$invarijantan, pa slijedi $u_i \in \mathcal{G}^K$ za svaki i. Pretpostavimo sada da nisu svi $\omega_{\mathcal{J}}(u_i)$ jednaki 0. Neka je $p \in \{0, 1, \ldots, n\}$ najveći indeks takav da je $\omega_{\mathcal{J}}(u_p) \neq 0$; dakle, $\omega_{\mathcal{J}}(u_i) = 0$ za $i = p+1, \ldots, n$. Sada iz (1) i (2) slijedi da je $\tilde{\omega}_{\mathcal{J}}(u_i) = 0$ za $i = p+1, \ldots, n$. Nadalje, iz tvrdnje (e) propozicije 3.4.15. slijedi da je $\tilde{\omega}_{\mathcal{J}}(u_i) \in \mathcal{A}_{p-1} \otimes (\mathcal{K}/\mathcal{J})$ za $i < p$. Stoga prema lemi 3.4.17. vrijedi

$$\tilde{\omega}_{\mathcal{J}}(u) \in \omega_{\mathcal{J}}(u_p) + \mathcal{A}_{p-1} \otimes (\mathcal{K}/\mathcal{J}).$$

Odatle slijedi $\tilde{\omega}_{\mathcal{J}}(u) \neq 0$ suprotno pretpostavci. Ova kontradikcija pokazuje da su svi $\omega_{\mathcal{J}}(u_i)$ jednaki nuli, dakle, $\omega_{\mathcal{J}}(u) = 0$, odnosno, $u \in \text{Ker}\,\omega_{\mathcal{J}}$. To znači da je $\mathcal{G}^K \cap (\text{Ker}\,\tilde{\omega}_{\mathcal{J}}) \subseteq (\text{Ker}\,\omega)$, pa slijedi tražena inkluzija $\mathcal{G}^K \cap (\text{Ker}\,\tilde{\omega}_{\mathcal{J}}) \subseteq \mathcal{G}^K \cap (\text{Ker}\,\omega_{\mathcal{J}})$.

Za ideal $\mathcal{J} = \{0\}$ imamo $\tilde{\omega}_{\{0\}} = \tilde{\omega}$ i $\omega_{\{0\}} = \omega$. Dakle, iz propozicije 3.4.18. neposredno slijedi:

Korolar 3.4.19. *Vrijedi* $\mathfrak{g}^K \cap (\text{Ker}\,\tilde{\omega}) = \mathfrak{g}^K \cap (\text{Ker}\,\omega) = \{0\}$. *Posebno, antihomomorfizam* $\tilde{\omega}|\mathcal{G}^K$ *sa* $\mathcal{G}^K$ *u* $\mathcal{A} \otimes \mathcal{K}^M$ *iz tvrdnje* (c) *propozicije 3.4.15. je injektivan.*

U sljedećoj propoziciji ćemo koristiti ranije uveden antiautomorfizam transpozicije $u \mapsto u^t$ unitalne algebre $\mathcal{G}$ definiran sa

$$(x_1 \cdots x_k)^t = (-1)^k x_k \cdots x_1, \qquad x_1, \ldots, x_k \in \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}.$$

Nadalje, neka je kao i prije $\mathfrak{t}$ Cartanova podalgebra od $\mathfrak{m}$, tako da je $\mathfrak{h} = \mathfrak{t} \dot{+} \mathfrak{a}$ Cartanova podalgebra od $\mathfrak{g}$, i neka su $R = R(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}, \mathfrak{h}^{\mathbb{C}})$, $\Sigma = R(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$ i $R^0 = R(\mathfrak{m}^{\mathbb{C}}, \mathfrak{t}^{\mathbb{C}})$ pripadni sistemi korijena. Tada imamo

$$\Sigma = \{\alpha|\mathfrak{a};\ \alpha \in R,\ \alpha|\mathfrak{a} \neq 0\} \quad \text{i} \quad R^0 = \{\alpha|\mathfrak{t}^{\mathbb{C}};\ \alpha \in R, \alpha|\mathfrak{a} = 0\}$$

i možemo izabrati skupove pozitivnih korijena R_+, Σ_+ i R^0_+ tako da bude

$$\Sigma_+ = \{\alpha|\mathfrak{a};\ \alpha \in R_+,\ \alpha|\mathfrak{a} \neq 0\} \quad \text{i} \quad R^0_+ = \{\alpha|\mathfrak{t}^{\mathbb{C}};\ \alpha \in R_+, \alpha|\mathfrak{a} = 0\}.$$

Kao i prije stavimo

$$\mathfrak{n} = \sum_{\lambda\in\Sigma_+} \dot{+}\, \mathfrak{g}^\lambda, \qquad \text{dakle,} \quad \mathfrak{n}^{\mathbb{C}} = \sum_{\alpha\in R_+,\,\alpha|\mathfrak{a}\neq 0} \dot{+}\mathfrak{g}_\alpha^{\mathbb{C}}.$$

Označimo sa φ Harish−Chandrin homomorfizam sa $\mathcal{G}^\mathfrak{h}$ u $\mathcal{H} = \mathcal{A}\otimes\mathcal{T}$ pridužen izboru pozitivnih korijena R_+, a sa ψ Harish−Chandrin homomorfizam sa $\mathcal{M}^\mathfrak{t}$ u $\mathcal{T}$ pridružen izboru pozitivnih korijena R_+^0. Definiramo preslikavanja φ' i ψ' sa

$$\varphi'(z) = (\varphi(z^t))^t, \quad z\in\mathcal{G}^\mathfrak{h}, \qquad \psi'(w) = (\psi(w^t))^t, \quad w\in\mathcal{M}^\mathfrak{t}.$$

Propozicija 3.4.20. *Uz uvedene oznake vrijedi:*

(*a*) $\tilde{\omega}(\mathcal{Z}(\mathfrak{g}))\subseteq\mathcal{A}\otimes\mathcal{Z}_M(\mathfrak{m})$.

(*b*) *Za* $z\in\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$ *je* $\varphi(z) = (I_\mathcal{A}\otimes\psi)((\tilde{\omega}(z^t))^t)$ *i* $\varphi'(z) = (I_\mathcal{A}\otimes\psi')(\tilde{\omega}(z))$.

Pri tome je $\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$ *centar algebre* $\mathcal{G} = U(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})$, $\mathcal{Z}(\mathfrak{m})$ *je centar algebre* $\mathcal{M} = U(\mathfrak{m}^{\mathbb{C}})$ *i* $\mathcal{Z}_M(\mathfrak{m})$ *je podalgebra* $M-$*invarijanata u* $\mathcal{Z}(\mathfrak{m})$ (*naime, iako su po pretpostavci grupe* G *i* K *povezane, grupa* M *ne mora biti povezana, pa se* $\mathcal{Z}(\mathfrak{m})$ *i* $\mathcal{Z}_M(\mathfrak{m})$ *ne moraju podudarati*)*. Nadalje, operacija* ^{t} *na* $\mathcal{A}\otimes\mathcal{K}$ *je antiautomorfizam te algebre definiran kao tenzorski produkt antiautomorfizama* ^{t} *na algebrama* $\mathcal{A}$ *i* $\mathcal{K}$.

Dokaz: Za svaki $\alpha\in R = R(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}},\mathfrak{h}^{\mathbb{C}})$ izaberimo $x_\alpha\in\mathfrak{g}_\alpha^{\mathbb{C}}\setminus\{0\}$. Neka je $R_+ = \{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\}$, gdje su korijeni numerirani tako da je $\alpha_i|\mathfrak{a} = 0$ za $1\leq i\leq\ell$ i $\alpha_i|\mathfrak{a}\neq 0$ za $\ell < i\leq n$. Tada je $R_+^0 = \{\alpha_1|\mathfrak{t}^{\mathbb{C}},\ldots,\alpha_\ell|\mathfrak{t}^{\mathbb{C}}\}$. Nadalje, $\{x_{\alpha_{\ell+1}},\ldots,x_{\alpha_n}\}$ je baza od $\mathfrak{n}^{\mathbb{C}}$ i $x_{\pm\alpha_1},\ldots,x_{\pm\alpha_\ell}\in\mathfrak{m}^{\mathbb{C}}$. Izaberimo bazu $\{h_1,\ldots,h_r\}$ od $\mathfrak{t}$ i bazu $\{h_{r+1},\ldots,h_s\}$ od $\mathfrak{a}$. Za $q,p\in\mathbb{Z}_+^n$ i $m\in\mathbb{Z}_+^s$ stavimo

$$u(q,m,p) = x_{-\alpha_1}^{q_1}\cdots x_{-\alpha_n}^{q_n} h_1^{m_1}\cdots h_s^{m_s} x_{\alpha_1}^{p_1}\cdots x_{\alpha_n}^{p_n}.$$

Tada je $\{u(q,m,p);\ q,p\in\mathbb{Z}_+^n,\ m\in\mathbb{Z}_+^s\}$ baza vektorskog prostora $\mathcal{G}$. Napomenimo da $h_{r+1},\ldots,h_s$ komutiraju sa $x_{\alpha_1},\ldots,x_{\alpha_\ell}$, pa možemo pisati

$$u(q,m,p) = x_{-\alpha_1}^{q_1}\cdots x_{-\alpha_n}^{q_n} h_1^{m_1}\cdots h_p^{m_r} x_{\alpha_1}^{p_1}\cdots x_{\alpha_\ell}^{p_\ell} h_{r+1}^{m_{r+1}}\cdots h_s^{m_s} x_{\alpha_{\ell+1}}^{p_{\ell+1}}\cdots x_{\alpha_n}^{p_n}. \tag{3.23}$$

Neka je

$$z = \sum_{q,m,p}\lambda_{q,m,p} u(q,m,p)$$

element centra $\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$ od $\mathcal{G}$. Budući da je $[\mathfrak{h},z] = \{0\}$, vidimo da je $\lambda_{q,m,p}\neq 0$ moguće samo za one $p,q\in\mathbb{Z}_+^n$ za koje je

$$p_1\alpha_1 + \cdots + p_n\alpha_n = q_1\alpha_1 + \cdots + q_n\alpha_n.$$

Odatle slijedi

$$(p_{\ell+1}\alpha_{\ell+1} + \cdots + p_n\alpha_n)|\mathfrak{a} = (q_{\ell+1}\alpha_{\ell+1} + \cdots + q_n\alpha_n)|\mathfrak{a}.$$

Ako $p_{\ell+1},\ldots,p_n$ nisu svi jednaki 0, onda je $u(q,m,p)\in\mathcal{G}\mathfrak{n}$. Ako su svi jednaki 0 onda su i svi $q_{\ell+1},\ldots,q_n$ jednaki 0. Prema tome, $(\tilde{\omega}(z^t))^t$ je suma članova

$$\lambda_{q,m,p} h_{r+1}^{m_{r+1}}\cdots h_s^{m_s}\otimes x_{-\alpha_1}^{q_1}\cdots x_{-\alpha_\ell}^{q_\ell} h_1^{m_1}\cdots h_r^{m_r} x_{\alpha_1}^{p_1}\cdots x_{\alpha_\ell}^{p_\ell}$$

za $m\in\mathbb{Z}_+^s$ i za $q,p\in\mathbb{Z}_+^n$ takve da je $q_{\ell+1} = \cdots = q_n = p_{\ell+1} = \cdots = p_n = 0$. Odatle se vidi da je $(\tilde{\omega}(z^t))^t\in\mathcal{A}\otimes\mathcal{M}$. Kako su i $\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$ i $\mathcal{A}\otimes\mathcal{M}$ invarijantni na antiautomorfizam ^{t}, vidimo da je i $\tilde{\omega}(z)\in\mathcal{A}\otimes\mathcal{M}$. S druge strane, prema tvrdnji (*b*) (ili tvrdnji (*c*)) propozicije 3.4.15. je $\tilde{\omega}(z)\in\mathcal{A}\otimes\mathcal{K}^M$. Dakle, $\tilde{\omega}(z)\in\mathcal{A}\otimes(\mathcal{M}\cap\mathcal{K}^M) = \mathcal{A}\otimes\mathcal{Z}_M(\mathfrak{m})$ i time je tvrdnja (*a*) dokazana.

Po definiciji preslikavanja ψ vrijedi

$$\psi(x_{-\alpha_1}^{q_1}\cdots x_{-\alpha_\ell}^{q_\ell}h_1^{m_1}\cdots h_r^{m_r}x_{\alpha_1}^{p_1}\cdots x_{\alpha_\ell}^{p_\ell}) = \begin{cases} 0 & \text{ako je} \quad q_1+\cdots+q_\ell+p_1+\cdots+p_\ell>0 \\ h_1^{m_1}\cdots h_r^{m_r} & \text{ako je} \quad q_1+\cdots+q_\ell+p_1+\cdots+p_\ell=0. \end{cases}$$

Prema tome,

$$(I_{\mathcal{A}}\otimes\psi)((\tilde{\omega}(z^t))^t) = \sum_{m\in\mathbb{Z}_+^s}\lambda_{0,m,0}h_{r+1}^{m_{r+1}}\cdots h_s^{m_s}\otimes h_1^{m_1}\cdots h_r^{m_r} = \varphi(z).$$

Odatle dobivamo i

$$\varphi'(z) = ((I_{\mathcal{A}}\otimes\psi)((\tilde{\omega}(z))^t))^t = (I_{\mathcal{A}}\otimes\psi')(\tilde{\omega}(z)),$$

pa je dokazana i tvrdnja (b)

Neka je sada $\gamma\in\hat{\mathfrak{k}}$. Kao i prije sa E^γ označimo neki ireducibilni $\mathfrak{k}-$modul iz klase γ i neka je sa γ označena i pripadna reprezentacija od $\mathfrak{k}$ (i od $\mathcal{K}$) na E^γ. Sa $\mathcal{J}^\gamma$ smo označili antihilator $\mathcal{K}-$modula E^γ, tj. jezgru reprezentacije γ :

$$\mathcal{J}^\gamma = \{w\in\mathcal{K};\ \gamma(w)=0\}.$$

Kvocijentna algebra $\mathcal{K}/\mathcal{J}^\gamma$ identificira sa $\gamma(\mathcal{K}) = End(E^\gamma)$. Promatramo injektivni antihomomorfizam $\tilde{\omega}|\mathcal{G}^K$ sa $\mathcal{G}^K$ u $\mathcal{A}\otimes\mathcal{K}$. Definiramo sada antihomomorfizam $\tilde{\omega}_\gamma : \mathcal{G}^K\to\mathcal{A}\otimes(\mathcal{K}/\mathcal{J}^\gamma) = \mathcal{A}\otimes End(E^\gamma)$ ovako:

$$\tilde{\omega}_\gamma = (I_{\mathcal{A}}\otimes\gamma)\circ\tilde{\omega}.$$

Propozicija 3.4.21. (a) $\operatorname{Ker}\tilde{\omega}_\gamma = \mathcal{G}^K\cap\mathcal{G}\mathcal{J}^\gamma = \mathcal{G}^K\cap\mathcal{J}^\gamma\mathcal{G}$.

(b) $\operatorname{Im}\tilde{\omega}_\gamma\subseteq\mathcal{A}\otimes\left(\mathcal{K}^M/(\mathcal{K}^M\cap\mathcal{J}^\gamma)\right)$.

Zadatak 3.4.3. *Dokažite propoziciju 3.4.21.*

Uputa: Za tvrdnju (a) koristite tvrdnju (b) propozicije 3.4.12. i propoziciju 3.4.18., a tvrdnja (b) slijedi iz tvrdnje (b) propozicije 3.4.15.

Neka je sada $\rho\in\hat{\mathfrak{m}}$ i neka je F^ρ ireducibilan $\mathfrak{m}-$modul iz klase ρ. Stavimo $H_{\rho,\gamma} = Hom_{\mathfrak{m}}(F^\rho, E^\gamma)$. Naravno, ako među ireducibilnim subreprezentacijama restrikcije $\gamma|\mathfrak{m}$ nema nijedne iz klase ρ, onda je $H_{\rho,\gamma}=\{0\}$. U protivnom označimo sa $mtp(\rho,\gamma)$ multiplicitet klase ρ u reprezentaciji $\gamma|\mathfrak{m}$. Naravno, tada je $mtp(\rho,\gamma) = \dim H_{\rho,\gamma}$. Prostor $H_{\rho,\gamma}$ je $\mathcal{K}^{\mathfrak{m}}-$modul u odnosu na djelovanje:

$$w\cdot f = \gamma(w)\circ f, \qquad \text{tj.} \quad (w\cdot f)(\xi) = \gamma(w)f(\xi), \qquad \xi\in F^\rho, \quad f\in H_{\rho,\gamma}, \quad w\in\mathcal{K}^{\mathfrak{m}}.$$

Potpuno analogno koraku (1) dokaza teorema 3.4.13. dokazuje se:

Propozicija 3.4.22. *Ako je $mtp(\rho,\gamma)>0$, $H_{\rho,\gamma}$ je ireducibilan $\mathcal{K}^{\mathfrak{m}}-$modul dimenzije $mtp(\rho,\gamma)$.*

Neka je $\mathcal{I}^{\rho,\gamma}$ anihilator $\mathcal{K}^{\mathfrak{m}}-$modula $H_{\rho,\gamma}$. Argumentima iz dokaza tvrdnje (d) propozicije 3.4.12. dobiva se:

Propozicija 3.4.23. *Kvocijentna algebra $\mathcal{K}^{\mathfrak{m}}/\mathcal{I}^{\rho,\gamma}$ identificira se sa $End(H_{\rho,\gamma})$.*

Za $\gamma \in \hat{\mathfrak{k}}$ kao u koraku (1) dokaza teorema 3.4.13. pokazuje se da se E^δ identificira sa

$$\coprod_{\rho\in\hat{\mathfrak{m}}}(H_{\rho,\gamma} \otimes F^\rho).$$

Naravno, ta direktna suma je zapravo direktni produkt, jer za samo konačno mnogo $\rho \in \hat{\mathfrak{m}}$ je $H_{\rho,\gamma} \neq \{0\}$. U skladu s tom identifikacijom i uz identifikaciju $\mathcal{K}/\mathcal{J}^\gamma = End(E^\gamma)$ kvocijentna algebra $\mathcal{M}/(\mathcal{M} \cap \mathcal{J}^\gamma)$ se identificira sa

$$\prod_{\rho\in\hat{\mathfrak{m}}}(I_{H_{\rho,\gamma}} \otimes End(F^\rho)).$$

a prema propoziciji 3.4.23. kvocijentna algebra $\mathcal{K}^\mathfrak{m}/(\mathcal{K}^\mathfrak{m} \cap \mathcal{J}^\gamma)$ identificira se s komutantom od $\mathcal{M}/(\mathcal{M} \cap \mathcal{J}^\gamma)$, dakle, sa

$$\prod_{\rho\in\hat{\mathfrak{m}}}(End(H_{\rho,\gamma}) \otimes I_{F^\rho}).$$

Očito je $\mathcal{K}^\mathfrak{m} \cap \mathcal{J}^\gamma$ presjek ideala $\mathcal{I}^{\rho,\gamma}$, $\rho \in \hat{\mathfrak{m}}$. Stoga dobivamo:

Propozicija 3.4.24. *Uz navedene identifikacije vrijedi*

$$\mathcal{K}^\mathfrak{m}/(\mathcal{K}^\mathfrak{m} \cap \mathcal{J}^\gamma) = \prod_{\rho\in\hat{\mathfrak{m}}}(\mathcal{K}^\mathfrak{m}/\mathcal{I}^{\rho,\gamma}) = \prod_{\rho\in\hat{\mathfrak{m}}} End(H_{\rho,\gamma}).$$

Dakle, $\tilde{\omega}_\gamma|\mathcal{G}^K$ se identificira s antihomomorfizmom

$$\tilde{\omega}_\gamma : \mathcal{G}^K \to \prod_{\rho\in\hat{\mathfrak{m}}} \mathcal{A} \otimes End(H_{\rho,\gamma}) = \prod_{\rho\in\hat{\mathfrak{m}}} \mathcal{A} \otimes (\mathcal{K}^\mathfrak{m}/\mathcal{I}^{\rho,\gamma}).$$

Označimo sada sa $\tilde{\omega}_{\rho,\gamma}$ antihomomorfizam sa $\mathcal{G}^K$ u $\mathcal{A} \otimes End(H_{\rho,\gamma}) = \mathcal{A} \otimes (\mathcal{K}^\mathfrak{m}/\mathcal{I}^{\rho,\gamma})$ dobiven iz $\tilde{\omega}_\gamma$ projekcijom na faktor u gornjem direktnom produktu s indeksom ρ. Tada imamo

$$\mathcal{G}^K \cap \mathcal{G}\mathcal{J}^\gamma = \operatorname{Ker} \tilde{\omega}_\gamma = \bigcap_{\rho\in\hat{\mathfrak{m}}} \operatorname{Ker} \tilde{\omega}_{\rho,\gamma}. \tag{3.24}$$

Ako je μ linearan funkcional na prostoru $\mathfrak{t}^\mathbb{C}$ označimo sa χ_μ jedinstveno proširenje od μ do unitalnog homomorfizma sa $\mathcal{T}$ u $\mathbb{C}$. Dakle,

$$\chi_\mu(t_1 \cdots t_k) = \mu(t_1) \cdots \mu(t_k), \qquad k \in \mathbb{N}, \quad t_1, \ldots, t_k \in \mathfrak{t}^\mathbb{C}.$$

Propozicija 3.4.25. *Neka su $\gamma \in \hat{\mathfrak{k}}$ i $\rho \in \hat{\mathfrak{m}}$ i neka je μ najmanja težina reprezentacije ρ u odnosu na R^0_+. Tada za svaki $z \in \mathcal{Z}(\mathfrak{g})$ vrijedi*

$$\tilde{\omega}_{\rho,\gamma}(z) = (I_\mathcal{A} \otimes \chi_\mu)\left(\left(\varphi\left(z^t\right)\right)^t\right).$$

Dokaz: Koristimo oznake iz propozicije 3.4.20.: ψ je Harish−Chandrin homomorfizam sa $\mathcal{M}^\mathfrak{t}$ u $\mathcal{T}$ pridružen R^0_+ i $\psi'(w) = (\psi(w^t))^t$ za $w \in \mathcal{M}^\mathfrak{t}$. Nadalje, neka je $\pi_{\rho,\gamma} : \mathcal{K}^\mathfrak{m} \to \mathcal{K}^\mathfrak{m}/\mathcal{I}^{\rho,\gamma} = End(H_{\rho,\gamma})$ kanonski epimorfizam promatran kao ireducibilna reprezentacija $\mathcal{K}^\mathfrak{m}$ na $H_{\rho,\gamma}$. Elementi od $H_{\rho,\gamma}$ su $\mathfrak{m}$−homomorfizmi sa F^ρ u E^γ. Neka je $f \in H_{\rho,\gamma}$, tj. f je linearan operator sa F^ρ u E^γ takav da je $\gamma(m)f = f\rho(m)$ za svaki $m \in \mathfrak{m}$, dakle, i za svaki $m \in \mathcal{M}$. Nadalje, za $w \in \mathcal{K}^\mathfrak{m}$ i $f \in H_{\rho,\gamma}$ $[\pi_{\rho,\gamma}(w)]f$ je linearan operator sa F^ρ u E^δ definiran kao produkt $\gamma(w)f$. Posebno, za $y \in \mathcal{Z}(\mathfrak{m}) = \mathcal{M} \cap \mathcal{K}^\mathfrak{m}$ i za $f \in H_{\rho,\gamma}$ imamo

$$[\pi_{\rho,\gamma}(y)]f = \gamma(y)f = f\rho(y).$$

Međutim, kako je ρ ireducibilna reprezentacija od $\mathfrak{m}$ i $y \in \mathcal{Z}(\mathfrak{m})$, vrijedi $\rho(y) = \chi(y)I_{F^\rho}$ za $\chi(y) \in \mathbb{C}$. Tada je $\chi : \mathcal{Z}(\mathfrak{m}) \to \mathbb{C}$ infinitezimalni karakter reprezentacije ρ. Kontragredijentna reprezentacija ρ^* je također ireducibilna i vrijedi $\rho^*(y) = \chi^*(y)I_{F^{\rho^*}}$, $y \in \mathcal{Z}(\mathfrak{m})$. Budući da je za $x \in \mathfrak{m}$ $\rho^*(x)$ definiran kao dualni operator od $-\rho(x)$, za $x_1, \dots, x_k$ je $\rho^*(x_1 \cdots x_k)$ dualni operator od $(-\rho(x_k)) \cdots (-\rho(x_1)) = (-1)^k \rho(x_k \cdots x_1) = \rho\left((x_1 \cdots x_k)^t\right)$. Odatle slijedi da je $\chi(y) = \chi^*(y^t)$ za svaki $y \in \mathcal{Z}(\mathfrak{m})$. No infinitezimalni karakter ireducibilne reprezentacije s najvećom težinom ν u odnosu na R_+^0 dobiva se kompozicijom $\chi_\nu \circ \psi$ Harish$-$Chandrinog homomorfizma ψ u odnosu na R_+^0 s homomorfizmom $\chi_\nu : \mathcal{T} \to \mathbb{C}$. Ako je μ najmanja težina od ρ u odnosu na R_+^0, onda je $-\mu$ najveća težina kontragredijentne reprezentacije. Dakle, za svaki $y \in \mathcal{Z}(\mathfrak{m})$ je

$$\chi(y) = \chi^*\left(y^t\right) = \chi_{-\mu}\left(\psi\left(y^t\right)\right).$$

Uočimo sada da vrijedi

$$\chi_{-\mu}(w) = \chi_\mu\left(w^t\right) \qquad \forall w \in \mathcal{T}.$$

Tu je jednakost dovoljno provjeriti na produktima oblika $t_1 \cdots t_k$ za $t_1, \dots, t_k \in \mathfrak{t}$, a tada imamo

$$\chi_{-\mu}(t_1 \cdots t_k) = (-\mu)(t_1) \cdots (-\mu)(t_k) = (-1)^k \mu(t_1) \cdots \mu(t_k) = \chi_\mu\left((-1)^k t_k \cdots t_1\right) = \chi_\mu\left((t_1 \cdots t_k)^t\right).$$

Stoga imamo za svaki $y \in \mathcal{Z}(\mathfrak{m})$

$$\chi(y) = \chi_{-\mu}\left(\psi\left(y^t\right)\right) = \chi_\mu\left(\left(\psi\left(y^t\right)\right)^t\right) = \chi_\mu(\psi'(y)).$$

To znači da je

$$[\pi_{\rho,\gamma}(y)]f = f\rho(y) = \chi(y)f = \chi_\mu(\psi'(y))f,$$

odnosno,

$$\pi_{\rho,\gamma}(y) = \chi_\mu(\psi'(y))I_{H_{\rho,\gamma}}, \qquad y \in \mathcal{Z}(\mathfrak{m}).$$

Za $z \in \mathcal{Z}(\mathfrak{g})$ imamo $\tilde{\omega}(z) \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{Z}(\mathfrak{m})$ prema tvrdnji (a) propozicije 3.4.20. Dakle, pomoću tvrdnje (b) iste propozicije dobivamo za svaki $z \in \mathcal{Z}(\mathfrak{g})$:

$$\tilde{\omega}_{\rho,\gamma}(z) = (I_\mathcal{A} \otimes \pi_{\rho,\gamma})(\tilde{\omega}(z)) = (I_\mathcal{A} \otimes \chi_\mu \circ \psi')(\tilde{\omega}(z)) =$$

$$= (I_\mathcal{A} \otimes \chi_\mu)(I_\mathcal{A} \otimes \psi')(\tilde{\omega}(z)) = (I_\mathcal{A} \otimes \chi_\mu)\left(\varphi'(z)\right) = (I_\mathcal{A} \otimes \chi_\mu)\left(\varphi\left(z^t\right)^t\right)$$

Propozicija 3.4.26. *(a) Vrijedi* $\mathcal{G} = \mathcal{A} \dotplus (\mathcal{G}\mathfrak{k} + \mathfrak{n}\mathcal{G})$.

(b) Neka je $p : \mathcal{G} \to \mathcal{A}$ *projektor definiran direktnom sumom iz (a). Tada je restrikcija* $p|\mathcal{G}^K$ *homomorfizam algebre* $\mathcal{G}^K$ *u algebru* $\mathcal{A}$ *i jezgra tog homomorfizma je* $\mathcal{G}^K \cap \mathcal{G}\mathfrak{k} = \mathcal{G}^K \cap \mathfrak{k}\mathcal{G}$.

Dokaz: (a) Iz Iwasawine dekompozicije $\mathfrak{g} = \mathfrak{n} \dotplus \mathfrak{a} \dotplus \mathfrak{k}$ imamo zbog PBW$-$teorema:

$$\mathcal{G} = \mathcal{A}\mathcal{K} \dotplus \mathfrak{n}\mathcal{G} = \mathcal{A} \dotplus (\mathcal{A}\mathcal{K}\mathfrak{k} + \mathfrak{n}\mathcal{G}).$$

Nadalje,

$$\mathcal{G}\mathfrak{k} \subseteq (\mathcal{A}\mathcal{K} + \mathfrak{n}\mathcal{G})\mathfrak{k} \subseteq \mathcal{A}\mathcal{K}\mathfrak{k} + \mathfrak{n}\mathcal{G},$$

pa kako je $\mathcal{A}\mathcal{K}\mathfrak{k} \subseteq \mathcal{G}\mathfrak{k}$, imamo $\mathcal{G}\mathfrak{k} + \mathfrak{n}\mathcal{G} = \mathcal{A}\mathcal{K}\mathfrak{k} + \mathfrak{n}\mathcal{G}$, pa slijedi tvrdnja.

Zadatak 3.4.4. *Dokažite tvrdnju (b) propozicije 3.4.26.*

Uputa: Primijenite tvrdnju (b) propozicije 3.4.12., tvrdnju (c) propozicije 3.4.15. i jednakost u propoziciji 3.4.18. za dvostrani ideal $\mathcal{J} = \mathcal{K}\mathfrak{k} = \mathfrak{k}\mathcal{K}$ u algebri $\mathcal{K}$.

U teoremu 1.4.26. uveli smo i dokazali osnovna svojstva tzv. **induciranih reprezentacija** unitalnih algebri. Ako je $\mathcal{A}$ unitalna algebra, $\mathcal{B}$ njena unitalna podalgebra i W lijevi unitalni $\mathcal{B}-$modul, onda je $\mathcal{A}\otimes_{\mathcal{B}} W$ lijevi unitalni $\mathcal{A}-$modul za koji kažemo da je induciran $\mathcal{B}-$modulom W i označavamo sa $Ind_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} W$. Ako je ρ reprezentacija od $\mathcal{B}$ na prostoru W onda sa $Ind_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}\rho$ označavamo njome induciranu reprezentaciju od $\mathcal{A}$, tj. reprezentaciju od $\mathcal{A}$ na induciranom modulu $Ind_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} W = \mathcal{A}\otimes_{\mathcal{B}} W$. Prema tvrdnji ($b$) teorema 1.4.26. vrijedi tzv. **Frobeniusov teorem reciprociteta:** Ako je U unitalni $\mathcal{A}-$modul, postoji jedinstveno linearno preslikavanje $T\mapsto \hat{T}$ sa $Hom_{\mathcal{B}}(W,U)$ u $Hom_{\mathcal{A}}\left(Ind_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} W,U\right)$ takvo da je $\hat{T}(1_{\mathcal{A}}\otimes_{\mathcal{B}} w)=Tw$ za svaki $w\in W$ i za svaki $T\in Hom_{\mathcal{B}}(W,U)$; nadalje, preslikavanje $T\mapsto\hat{T}$ je izomorfizam vektorskih prostora sa $Hom_{\mathcal{B}}(W,U)$ na $Hom_{\mathcal{A}}\left(Ind_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} W,U\right)$.

Prostor W možemo identificirati s potprostorom $1_{\mathcal{A}}\otimes_{\mathcal{B}} W$ prostora $Ind_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} W$. Tada je W $\mathcal{B}-$podmodul od $Ind_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} W$ i njegova struktura $\mathcal{B}-$modula je upravo ona od koje smo krenuli. Drugim riječima, ako je ρ reprezentacija od $\mathcal{B}$ na W i $\pi = Ind_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}\rho$, onda je potprostor $W=1_{\mathcal{A}}\otimes_{\mathcal{B}} W$ invarijantan u odnosu na reprezentaciju $\pi|\mathcal{B}$ i pripadna subreprezentacija $(\pi|\mathcal{B})_W$ od $\mathcal{B}$ se podudara sa ρ. Uz takvu identifikaciju Frobeniusov teorem reciprociteta poprima oblik: za svaki $\mathcal{A}-$modul U svaki se $\mathcal{B}-$homomorfizam $T:W\to U$ jedinstveno proširuje do $\mathcal{A}-$homomorfizma $\hat{T}:Ind_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} W\to U$.

Tvrdnja (d) teorema 1.4.26. je tzv. **teorem o induciranju u etapama**: Ako je $\mathcal{C}$ unitalna podalgebra od $\mathcal{B}$ i U je unitalni lijevi $\mathcal{C}-$modul, onda je $Ind_{\mathcal{C}}^{\mathcal{A}} U\simeq Ind_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}\left(Ind_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} U\right)$.

Promatrat ćemo sada inducirane reprezentacije realnih Liejevih algebri definirane preko univerzalnih omotačkih algebri njihovih kompleksifikacija. Dakle, ako je $\mathfrak{q}$ podalgebra realne Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ i ρ reprezentacija Liejeve algebre $\mathfrak{q}$ na kompleksnom prostoru W, odnosno, ako je W $\mathfrak{q}-$modul, a time i unitalni lijevi $\mathcal{Q}-$modul (pri tome je $\mathcal{Q}=U(\mathfrak{q}^{\mathbb{C}})$) onda sa $Ind_{\mathfrak{q}}^{\mathfrak{g}}\rho$ označavamo pripadnu **induciranu reprezentaciju Liejeve algebre** $\mathfrak{g}$. Ona je dobivena restrikcijom inducirane reprezentacije $Ind_{\mathcal{Q}}^{\mathcal{G}}\rho$ na $\mathfrak{g}\subseteq\mathcal{G}$. Prostor te reprezentacije je $\mathcal{G}\otimes_{\mathcal{Q}} W =: Ind_{\mathfrak{q}}^{\mathfrak{g}} W$. Tada se na opisan način W identificira s potprostorom od $Ind_{\mathfrak{q}}^{\mathfrak{g}} W$ i vrijedi $Ind_{\mathfrak{q}}^{\mathfrak{g}} W=\mathcal{G}W$. Nadalje, za svaki $\mathfrak{g}-$modul U restrikcija na W je izomorfizam prostora preplitanja $Hom_{\mathfrak{g}}\left(Ind_{\mathfrak{q}}^{\mathfrak{g}} W,U\right)$ na prostor preplitanja $Hom_{\mathfrak{q}}(W,U)$.

Neka je $\{e_1,\ldots,e_n\}$ baza direktnog komplementa od $\mathfrak{q}$ u $\mathfrak{g}$. Za $m=(m_1,\ldots,m_n)\in\mathbb{Z}_+^n$ stavimo $e^m=e_1^{m_1}\cdots e_n^{m_n}$. Pomoću PBW−teorema lako se vidi da je $\mathcal{G}$ slobodan desni $\mathcal{Q}-$modul i da je $\{e^m;\ m\in\mathbb{Z}_+^n\}$ baza desnog $\mathcal{Q}-$modula $\mathcal{G}$. Ako je W $\mathfrak{q}-$modul s reprezentacijom ρ tada je vektorski prostor $Ind_{\mathfrak{q}}^{\mathfrak{g}} W$ direktna suma potprostora $e^m\otimes W$, $m\in\mathbb{Z}_+^n$. Ako sa π označimo induciranu reprezentaciju $Ind_{\mathfrak{q}}^{\mathfrak{g}}\rho$, onda uz identifikaciju W s potprostorom $1_{\mathcal{G}}\otimes W=1_{\mathcal{G}}\otimes_{\mathcal{Q}} W$ prostora $Ind_{\mathfrak{q}}^{\mathfrak{g}} W=\mathcal{G}\otimes_{\mathcal{Q}} W$ imamo

$$\pi(e^m)w=\pi(e^m)(1_{\mathcal{G}}\otimes_{\mathcal{Q}} w)=e^m(1_{\mathcal{G}}\otimes_{\mathcal{Q}} w)=e^m\otimes_{\mathcal{Q}} w,\qquad m\in\mathbb{Z}_+^n,\quad w\in W.$$

Za $u\in\mathcal{G}$ djelovanje operatora $\pi(u)$ može se opisati na sljedeći način. Za svaki $m\in\mathbb{Z}_+^n$ možemo pisati

$$ue^m=\sum_{p\in\mathbb{Z}_+^n} e^p u_{pm}$$

pri čemu su $u_{pm}\in\mathcal{Q}$ jedinstveno određeni (i samo ih je konačno mnogo različito od nule). Sada za $w\in W$ imamo

$$\pi(u)(\pi(e^m)w)=\pi(ue^m)w=\left(\sum_{p\in\mathbb{Z}_+^n} e^p u_{pm}\right)(1_{\mathcal{G}}\otimes_{\mathcal{Q}} w)=$$

$$=\sum_{p\in\mathbb{Z}_+^n} e^p\otimes_{\mathcal{Q}} u_{pm}w=\sum_{p\in\mathbb{Z}_+^n}\pi(e^p)(u_{pm}w).$$

Propozicija 3.4.27. *Neka je ρ reprezentacija podalgebre $\mathfrak{q}$ Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ na prostoru W i neka je $\pi = Ind_{\mathfrak{q}}^{\mathfrak{g}}\,\rho$ pripadna inducirana reprezentacija od $\mathfrak{g}$ na prostoru $V = Ind_{\mathfrak{q}}^{\mathfrak{g}}\,W = \mathcal{G}\otimes_{\mathcal{Q}}W$. Prostor W identificiramo s potprostorom $1_{\mathcal{G}}\otimes_{\mathcal{Q}}W$. Nadalje, neka je $\mathcal{J}$ jezgra od ρ u $\mathcal{Q}$ (tj. anihilator lijevog $\mathcal{Q}-$modula W).*

(a) *Anihilator od W u $\mathcal{G}$ je lijevi ideal $\mathcal{G}\mathcal{J}$.*

(b) *Jezgra reprezentacije π u $\mathcal{G}$ (tj. anihilator lijevog $\mathcal{G}-$modula V) je najveći dvostrani ideal u $\mathcal{G}$ sadržan u lijevom idealu $\mathcal{G}\mathcal{J}$.*

Dokaz: (a) Koristimo malo prije uvedenu notaciju. Neka je $u \in \mathcal{G}$ i

$$u = \sum_{m\in\mathbb{Z}_+^n} e^m u_m, \qquad u_m \in \mathcal{Q}.$$

Budući da je suma potprostora $e^m \otimes_{\mathcal{Q}} W$ od V direktna, imamo sljedeći niz ekvivalencija:

$$u\cdot W = \{0\} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \sum_{m\in\mathbb{Z}_+^n} e^m \otimes_{\mathcal{Q}} u_m \cdot W = \{0\} \qquad \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \qquad u_m\cdot W = \{0\} \quad \forall m \in \mathbb{Z}_+^n \qquad \Longleftrightarrow \qquad u_m \in \mathcal{J} \quad \forall m \in \mathbb{Z}_+.$$

Sada tvrdnja (a) slijedi iz činjenice da je zbog PBW$-$teorema $\mathcal{G}\mathcal{J}$ direktna suma potprostora $e^m\mathcal{J}$, $m \in \mathbb{Z}_+^n$.

(b) Za $u \in \mathcal{G}$ imamo zbog (a) sljedeći niz ekvivalencija:

$$u \in \operatorname{Ker}\pi \quad \Longleftrightarrow \quad u\mathcal{G}W = \{0\} \quad \Longleftrightarrow \quad u\mathcal{G} \subseteq \mathcal{G}\mathcal{J} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathcal{G}u\mathcal{G} \subseteq \mathcal{G}\mathcal{J}.$$

To posebno znači da $\operatorname{Ker}\pi$ sadrži svaki dvostrani ideal u $\mathcal{G}$ sadržan u $\mathcal{G}\mathcal{J}$.

Za naše potrebe, a to je proučavanje reprezentacija $Ind_{\mathfrak{q}}^{\mathfrak{g}}\,\rho$, gdje je $\rho \in \hat{\mathfrak{q}}$ i $\mathfrak{q} = \mathfrak{m} \dotplus \mathfrak{a} \dotplus \mathfrak{n}$ je minimalna parabolička podalgebra od $\mathfrak{g}$, trebat će nam sljedeća jednostavna propozicija:

Propozicija 3.4.28. *Neka su $\mathfrak{q}$ i $\mathfrak{k}$ podalgebre Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ takve da je $\mathfrak{g} = \mathfrak{q} + \mathfrak{k}$ i $\mathfrak{m} = \mathfrak{q}\cap\mathfrak{k}$. Ako je ρ reprezentacija od $\mathfrak{q}$ i $\pi = Ind_{\mathfrak{q}}^{\mathfrak{g}}\,\rho$ pripadna inducirana reprezentacija onda je restrikcija $\pi|\mathfrak{k}$ ekvivalentna induciranoj reprezentaciji $Ind_{\mathfrak{m}}^{\mathfrak{k}}\,\rho|\mathfrak{m}$.*

Dokaz: Iz PBW$-$teorema lako se vidi da množenje u $\mathcal{G}$ inducira izomorfizam prostora $\mathcal{K}\otimes_{\mathcal{M}}\mathcal{Q}$ na prostor $\mathcal{G}$. S druge strane, prema tvrdnji (c) teorema 1.4.26. preslikavanje $w \mapsto 1_{\mathcal{Q}}\otimes_{\mathcal{Q}} w$ je izomorfizam vektorskih prostora sa W na $\mathcal{Q}\otimes_{\mathcal{Q}} W$. Prema tome, imamo sljedeće izomorfizme vektorskih prostora

$$\varphi : \mathcal{K}\otimes_{\mathcal{M}} W \to \mathcal{K}\otimes_{\mathcal{M}}\mathcal{Q}\otimes_{\mathcal{Q}} W,$$

$$\varphi(u\otimes_{\mathcal{M}} w) = u\otimes_{\mathcal{M}} 1_{\mathcal{G}}\otimes_{\mathcal{Q}} w, \qquad u\in\mathcal{K}, \quad w \in W,$$

i

$$\psi : \mathcal{K}\otimes_{\mathcal{M}}\mathcal{Q}\otimes_{\mathcal{Q}} W \to \mathcal{G}\otimes_{\mathcal{Q}} W,$$

$$\psi(u\otimes_{\mathcal{M}} v\otimes_{\mathcal{Q}} w) = uv\otimes_{\mathcal{Q}} w = u\otimes_{\mathcal{Q}} v\cdot w, \qquad u\in\mathcal{K}, \quad v\in\mathcal{Q}, \quad w\in W.$$

Njihova kompozicija $\Phi = \psi\circ\varphi$ je izomorfizam vektorskih prostora sa $\mathcal{K}\otimes_{\mathcal{M}} W = Ind_{\mathfrak{m}}^{\mathfrak{k}}\,W$ na $\mathcal{G}\otimes_{\mathcal{Q}} W = Ind_{\mathfrak{q}}^{\mathfrak{g}}\,W$. Za $u\in\mathcal{K}$ i $w\in W$ imamo

$$\Phi(u\otimes_{\mathcal{M}} w) = \psi(\varphi(u\otimes_{\mathcal{M}} w)) = \psi(u\otimes_{\mathcal{M}} 1_{\mathcal{G}}\otimes_{\mathcal{Q}} w) = u\otimes_{\mathcal{Q}} w.$$

Izomorfizam Φ je homomorfizam $\mathfrak{k}-$modula, odnosno, $\mathcal{K}-$modula. Doista, za $u, u' \in\mathcal{K}$ i $w\in W$ imamo

$$\Phi(u\cdot(u'\otimes_{\mathcal{M}} w)) = \Phi(uu'\otimes_{\mathcal{M}} w) = uu'\otimes_{\mathcal{Q}} w = u\cdot(u'\otimes_{\mathcal{Q}} w) = u\cdot\Phi(u'\otimes_{\mathcal{M}} w).$$

Uz pretpostavke i oznake iz propozicije 3.4.28. neka je sada $\rho \in \hat{\mathfrak{q}}$ takva da je $\rho|\mathfrak{m} \in \hat{\mathfrak{m}}$. Nadalje, neka je $\gamma \in \hat{\mathfrak{k}}$. Označimo sa $mtp(\rho|\mathfrak{m}, \gamma)$ multiplicitet ireducibilne reprezentacije $\rho|\mathfrak{m}$ u restrikciji $\gamma|\mathfrak{m}$, a sa $mtp(\gamma, \pi)$ multiplicitet ireducibilne reprezentacije γ u restrikciji $\pi|\mathfrak{k}$. Zbog Frobeniusovog teorema reciprociteta propozicija 3.4.28. ima sljedeću neposrednu posljedicu:

Korolar 3.4.29. *Uz uvedene oznake vrijedi* $mtp(\gamma, \pi) = mtp(\rho|\mathfrak{m}, \gamma)$.

Promatrat ćemo sada tzv. producirane reprezentacije dobivene slično induciranima ali pomoću funktora $Hom_{\mathcal{Q}}(\mathcal{G}, \,\cdot\,)$ umjesto funktora $\mathcal{G} \otimes_{\mathcal{Q}} \cdot$. Dakle, neka je i dalje, $\mathfrak{q}$ podalgebra realne Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ i neka je W kompleksni $\mathfrak{q}-$modul (ili unitalni lijevi $\mathcal{Q}-$modul). Sada se pomoću množenja s lijeva $\mathcal{G}$ može shvaćati kao unitalni lijevi $\mathcal{Q}-$modul. Stavimo

$$V = Hom_{\mathcal{Q}}(\mathcal{G}, W).$$

Prostor V postaje unitalni lijevi $\mathcal{G}-$modul uz djelovanje

$$(u \cdot f)(v) = f(vu), \qquad f \in Hom_{\mathcal{Q}}(\mathcal{G}, W), \quad u, v \in \mathcal{G}.$$

Kažemo da je **modul** V **produciran modulom** W i pišemo $V = Pro_{\mathfrak{q}}^{\mathfrak{g}} W$. Ako je ρ reprezentacija od $\mathfrak{q}$ (i od $\mathcal{Q}$) na prostoru W, za pripadnu **reprezentaciju** π od $\mathfrak{g}$ (i od $\mathcal{G}$) na prostoru V kažemo da je **producirana reprezentacijom** ρ i pišemo $\pi = Pro_{\mathfrak{q}}^{\mathfrak{g}} \rho$.

Za producirane reprezentacije imamo sljedeći analogon Frobeniusovog teorema reciprociteta:

Propozicija 3.4.30. *Neka je* $\mathfrak{q}$ *podalgebra Liejeve algebre* $\mathfrak{g}$, *neka je* W $\mathfrak{q}-$*modul i* $V = Pro_{\mathfrak{q}}^{\mathfrak{g}} W$.

(a) *Preslikavanje* $\varepsilon : f \mapsto f(1_{\mathcal{G}})$ *je epimorfizam* $\mathfrak{q}-$*modula sa* V *na* W.

(b) *Ako je* X *kompleksni* $\mathfrak{g}-$*modul, onda za svaki* $\psi \in Hom_{\mathfrak{q}}(X, W)$ *postoji jedinstven* $\varphi \in Hom_{\mathfrak{g}}(X, V)$ *takav da je* $\psi = \varepsilon \circ \varphi$. *Preslikavanje* $\psi \mapsto \varphi$ *je izomorfizam vektorskih prostora sa* $Hom_{\mathfrak{q}}(X, V)$ *na* $Hom_{\mathfrak{g}}(X, V)$.

Dokaz: (a) Za $f \in V = Hom_{\mathfrak{q}}(\mathcal{G}, W)$ i $u \in \mathcal{Q}$ imamo

$$\varepsilon(u \cdot f) = (u \cdot f)(1_{\mathcal{G}}) = f(1_{\mathcal{G}} u) = f(u 1_{\mathcal{G}}) = u \cdot f(1_{\mathcal{G}}) = u \cdot \varepsilon(f).$$

To pokazuje da je ε homomorfizam $\mathfrak{q}-$modula sa V u W.

Treba još dokazati da je homomorfizam ε surjektivan, tj. da za svaki $w \in W$ postoji $f \in Hom_{\mathfrak{q}}(\mathcal{G}, W)$ takav da je $\varepsilon(f) = w$. Neka je $\mathfrak{p}$ potprostor od $\mathfrak{g}$ koji je direktni komplement od $\mathfrak{q}$, tj. takav da je $\mathfrak{g} = \mathfrak{q} \dotplus \mathfrak{p}$. Tada iz PBW−teorema slijedi da je $\mathcal{G} = \mathcal{Q} \dotplus \mathcal{G}\mathfrak{p}$. Neka je P projektor prostora $\mathcal{G}$ na potprostor $\mathcal{Q}$ duž potprostora $\mathcal{G}\mathfrak{p}$. Za fiksirani $w \in W$ definiramo preslikavanje $f : \mathcal{G} \to W$ ovako:

$$f(u) = P(u) \cdot w, \qquad u \in \mathcal{G}.$$

Tada za $v \in \mathcal{Q}$ i $u \in \mathcal{G}$ imamo $u = P(u) + u'$ za $u' \in \mathcal{G}\mathfrak{p}$, dakle, $vu = vP(u) + vu'$. Kako je $vP(u) \in \mathcal{Q}$ i $vu' \in \mathcal{G}\mathfrak{p}$, slijedi da je $P(vu) = vP(u)$. Stoga je

$$f(vu) = P(vu) \cdot w = vP(u) \cdot w = v \cdot P(u) \cdot w = v \cdot f(u).$$

Prema tome, $f \in Hom_{\mathfrak{q}}(\mathcal{G}, W)$. Sada je

$$\varepsilon(f) = f(1_{\mathcal{G}}) = f(1_{\mathcal{Q}}) = 1_{\mathcal{Q}} \cdot w = w.$$

(*b*) Neka je X $\mathcal{G}-$modul i $\psi \in Hom_{\mathfrak{q}}(X, W)$. Definiramo $\varphi : X \to L(\mathcal{G}, W)$ ovako:

$$[\varphi(x)](u) = \psi(u \cdot x), \qquad x \in X, \quad u \in \mathcal{G}.$$

Za svaki $x \in X$ tada je $\varphi(x) \in Hom_{\mathfrak{q}}(\mathcal{G}, W)$. Doista, za $v \in \mathcal{Q}$ i $u \in \mathcal{G}$ imamo

$$[\varphi(x)](vu) = \psi(vu \cdot x) = \psi(v \cdot u \cdot x) = v \cdot \psi(u \cdot x) = v \cdot [\varphi(x)](u).$$

Dakle, tako definiran φ je linearan operator sa X u $V = Hom_{\mathfrak{q}}(\mathcal{G}, W)$. Neka su sada $u \in \mathcal{G}$ i $x \in X$. Tada za svaki $u' \in \mathcal{G}$ imamo

$$[\varphi(u \cdot x)](u') = \psi(u' \cdot u \cdot x) = \psi(u'u \cdot x) = [\varphi(x)](u'u) = [u \cdot \varphi(x)](u').$$

Kako je $u' \in \mathcal{G}$ proizvoljan, to pokazuje da je vrijedi

$$\varphi(u \cdot x) = u \cdot \varphi(x), \qquad u \in \mathcal{G}, \quad x \in X.$$

Drugim riječima, $\varphi : X \to V$ je homomorfizam $\mathcal{G}-$modula, $\varphi \in Hom_{\mathfrak{g}}(X, V)$. Sada je za svaki $x \in X$

$$(\varepsilon \circ \varphi)(x) = \varepsilon(\varphi(x)) = [\varphi(x)](1_{\mathcal{G}}) = \psi(1_{\mathcal{G}} \cdot x) = \psi(x).$$

Time je dokazano da za svaki $\psi \in Hom_{\mathfrak{q}}(X, W)$ postoji $\varphi \in Hom_{\mathfrak{g}}(X, V)$ takav da je $\psi = \varepsilon \circ \varphi$.

Dokažimo jedinstvenost. Neka su $\varphi, \varphi' \in Hom_{\mathfrak{g}}(X, V)$ takvi da je $\varepsilon \circ \varphi = \varepsilon \circ \varphi'$, odnosno, takvi da je

$$[\varphi(x)](1_{\mathcal{G}}) = [\varphi'(x)](1_{\mathcal{G}}) \qquad \forall x \in X.$$

Budući da su φ i φ' $\mathcal{G}-$homomorfizmi sa X u $V = Hom_{\mathfrak{q}}(X, W)$, za proizvoljne $x \in X$ i $u \in \mathcal{G}$ imamo redom

$$[\varphi(x)](u) = [\varphi(x)](1_{\mathcal{G}}u) = [u \cdot \varphi(x)](1_{\mathcal{G}}) = [\varphi(u \cdot x)](1_{\mathcal{G}}) =$$

$$= [\varphi'(u \cdot x)](1_{\mathcal{G}}) = [u \cdot \varphi'(x)](1_{\mathcal{G}}) = [\varphi'(x)](1_{\mathcal{G}}u) = [\varphi'(x)](u).$$

Odatle je $\varphi = \varphi'$ i time je dokazana jedinstvenost.

Označimo sada sa Φ definirano preslikavanje $\psi \mapsto \varphi$ sa $Hom_{\mathfrak{q}}(X, W)$ u $Hom_{\mathfrak{g}}(X, V)$:

$$[\{\Phi(\psi)\}(x)](u) = \psi(u \cdot x), \qquad u \in \mathcal{G}, \quad x \in X.$$

Φ je linearno preslikavanje: za $\psi_1, \psi_2 \in Hom_{\mathfrak{q}}(X, W)$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$, $x \in X$ i $u \in \mathcal{G}$ imamo

$$[\{\Phi(\alpha_1\psi_1 + \alpha_2\psi_2)\}(x)](u) = (\alpha_1\psi_1 + \alpha_2\psi_2)(u \cdot x) = \alpha_1\psi_1(u \cdot x) + \alpha_2\psi_2(u \cdot x) =$$

$$= \alpha_1[\{\Phi(\psi_1)\}(x)](u) + \alpha_2[\{\Phi(\psi_2)\}(x)](u) = [\alpha_1\{\Phi(\psi_1)\}(x) + \alpha_2\{\Phi(\psi_2)\}(x)](u) =$$

$$= [\{\alpha_1\Phi(\psi_1) + \alpha_2\Phi(\psi_2)\}(x)](u).$$

Dakle, $\Phi(\alpha_1\psi_1 + \alpha_2\psi_2) = \alpha_1\Phi(\psi_1) + \alpha_2\Phi(\psi_2)$.

Konstruirat ćemo $\Psi : Hom_{\mathfrak{g}}(X, V) \to Hom_{\mathfrak{q}}(X, W)$. Za $\varphi \in Hom_{\mathfrak{g}}(X, V)$ neka je preslikavanje $\Psi(\varphi) : X \to W$ definirano sa

$$[\Psi(\varphi)](x) = [\varphi(x)](1_{\mathcal{G}}), \qquad x \in X.$$

Za $v \in \mathcal{Q}$ i $x \in X$ imamo redom koristeći činjenice da je φ $\mathcal{G}-$preplitanje i da je $\varphi(x)$ $\mathcal{Q}-$preplitanje:

$$[\Psi(\varphi)](v \cdot x) = [\varphi(v \cdot x)](1_{\mathcal{G}}) = [v \cdot \varphi(x)](1_{\mathcal{G}}) = [\varphi(x)](1_{\mathcal{G}}v) = [\varphi(x)](v1_{\mathcal{G}}) = v \cdot [\varphi(x)](1_{\mathcal{G}}) = v \cdot [\Psi(\varphi)](x).$$

Dakle, $\Psi(\varphi) \in Hom_{\mathfrak{q}}(X,W)$, odnosno, Ψ je preslikavanje sa $Hom_{\mathfrak{g}}(X,V)$ u $Hom_{\mathfrak{q}}(X,W)$. Sada imamo za $\varphi \in Hom_{\mathfrak{g}}(X,V)$ i za proizvoljne $x \in X$ i $u \in \mathcal{G}$:

$$[\{(\Phi\circ\Psi)(\varphi)\}(x)](u) = [\{\Phi(\Psi(\varphi))\}(x)](u) = (\Psi(\varphi))(u\cdot x) = [\varphi(u\cdot x)](1_{\mathcal{G}}) = [u\cdot\varphi(x)](1_{\mathcal{G}}) = [\varphi(x)](u).$$

Zbog proizvoljnosti $u \in \mathcal{G}$ i $x \in X$ to pokazuje da je $(\Phi \circ \Psi)(\varphi) = \varphi$ za svaki $\varphi \in Hom_{\mathfrak{g}}(X,V)$, odnosno, da je $\Phi \circ \Psi = I_{Hom_{\mathfrak{g}}(X,V)}$. Ako je sada $\psi \in Hom_{\mathfrak{q}}(X,W)$, onda za proizvoljan $x \in X$ imamo

$$[(\Psi \circ \Phi)(\psi)](x) = [\Psi(\Phi(\psi))](x) = [\{\Phi(\psi)\}(x)](1_{\mathcal{G}}) = \psi(1_{\mathcal{G}} \cdot x) = \psi(x).$$

Dakle, $(\Psi\circ\Phi)(\psi) = \psi$ za svaki $\psi \in Hom_{\mathfrak{q}}(X,W)$, odnosno, $\Psi\circ\Phi = I_{Hom_{\mathfrak{q}}(X,W)}$. Time je dokazano da je linearno preslikavanje $\Phi : Hom_{\mathfrak{q}}(X,W) \to Hom_{\mathfrak{g}}(X,V)$ bijekcija, odnosno, izomorfizam.

Korolar 3.4.31. *Neka je $\mathfrak{m}$ podalgebra realne Liejeve algebre $\mathfrak{k}$ koja je reduktivna u $\mathfrak{k}$. Neka su $\rho \in \hat{\mathfrak{m}}$, $\gamma \in \hat{\mathfrak{k}}$ i $\omega = Pro_{\mathfrak{m}}^{\mathfrak{k}}\,\rho$. Tada je $mtp(\gamma,\omega) = mtp(\rho,\gamma)$.*

Dokaz: Neka je E^γ ireducibilan $\mathfrak{k}-$modul iz klase γ i F^ρ ireducibilan $\mathfrak{m}-$modul iz klase ρ. Primijenimo sada tvrdnju (b) propozicije 3.4.30. na $\mathfrak{k}$, $\mathfrak{m}$, F^ρ i E^γ umjesto $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{q}$, W i X. Zaključujemo da su prostori $Hom_{\mathfrak{m}}(E^\gamma, F^\rho)$ i $Hom_{\mathfrak{k}}\left(E^\gamma, Pro_{\mathfrak{m}}^{\mathfrak{k}} F^\rho\right)$ izomorfni. Posebno, oba su konačnodimenzionalni i imaju istu dimenziju. Imamo

$$mtp(\gamma,\omega) = \dim\, Hom_{\mathfrak{k}}\left(E^\gamma, Pro_{\mathfrak{m}}^{\mathfrak{k}} F^\rho\right).$$

Nadalje, kako je $\mathfrak{m}$ reduktivna u $\mathfrak{k}$, $\mathfrak{m}-$modul E^γ je potpuno reducibilan, pa vrijedi

$$mtp(\rho,\gamma) = \dim\, Hom_{\mathfrak{m}}(F^\rho, E^\gamma) = \dim\, Hom_{\mathfrak{m}}(E^\gamma, F^\rho).$$

Dakle, $mtp(\gamma,\omega) = mtp(\rho,\gamma)$.

Propozicija 3.4.32. *Neka su $\mathfrak{q}$ i $\mathfrak{k}$ podalgebre Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ takve da je $\mathfrak{g} = \mathfrak{q} + \mathfrak{k}$ i neka je $\mathfrak{m} = \mathfrak{q}\cap\mathfrak{k}$. Nadalje, neka je ρ reprezentacija od $\mathfrak{q}$ i $\pi = Pro_{\mathfrak{q}}^{\mathfrak{g}}\,\rho$. Tada je restrikcija $\pi|\mathfrak{k}$ ekvivalentna reprezentaciji $Pro_{\mathfrak{m}}^{\mathfrak{k}}\,(\rho|\mathfrak{m})$.*

Dokaz: Neka je W prostor reprezentacije ρ i neka je $\varphi : Hom_{\mathfrak{q}}(\mathcal{G},W) \to Hom_{\mathfrak{m}}(\mathcal{K},W)$ linearno preslikavanje definirano restrikcijom sa $\mathcal{G}$ na $\mathcal{K}$. Tada je φ homomorfizam $\mathfrak{k}-$modula. Doista, za $v, v' \in \mathcal{K}$ i $f \in Hom_{\mathfrak{q}}(\mathcal{G},W)$ imamo

$$[v \cdot \varphi(f)](v') = [\varphi(f)](v'v) = f(v'v) = (v \cdot f)(v') = [\varphi(v \cdot f)](v'),$$

odnosno, vrijedi $v \cdot \varphi(f) = \varphi(v \cdot f)$ za svaki $v \in \mathcal{K}$ i svaki $f \in Hom_{\mathfrak{q}}(\mathcal{G},W)$.

Dokažimo sada injektivnost preslikavanja $\varphi : Hom_{\mathfrak{q}}(\mathcal{G},W) \to Hom_{\mathfrak{m}}(\mathcal{K},W)$. Neka je $f \in Hom_{\mathfrak{q}}(\mathcal{G},W)$ takav da je $\varphi(f) = 0$. To znači da je $f|\mathcal{K} = 0$. Kako je f homomorfizam $\mathfrak{q}-$modula, za $u \in \mathcal{Q}$ i $v \in \mathcal{K}$ nalazimo

$$f(uv) = u \cdot f(v) = 0.$$

Ali zbog $\mathfrak{g} = \mathfrak{q} + \mathfrak{k}$ vrijedi $\mathcal{G} = \mathcal{Q}\mathcal{K}$, odnosno, prostor $\mathcal{G}$ je razapet produktima oblika uv, $u \in \mathcal{Q}$, $v \in \mathcal{K}$. Zaključujemo da je $f = 0$ i time je dokazana injektivnost preslikavanja φ.

Dokažimo surjektivnost. Neka je $g \in Hom_{\mathfrak{m}}(\mathcal{K},W)$. Neka je $G : \mathcal{Q} \times \mathcal{K} \to W$ bilinearno preslikavanje definirano sa

$$G(u,v) = u \cdot g(v), \qquad u \in \mathcal{Q}, \quad v \in \mathcal{K}.$$

Za $m \in \mathcal{M}$, $u \in \mathcal{Q}$ i $v \in \mathcal{K}$ tada imamo

$$G(um,v) = um \cdot g(v) = u \cdot m \cdot g(v) = u \cdot g(mv) = G(u,mv).$$

To pokazuje da postoji (jedinstven) linearan operator $\Psi : \mathcal{Q} \otimes_{\mathcal{M}} \mathcal{K} \to W$ takav da je

$$\Psi(u \otimes_{\mathcal{M}} v) = u \cdot g(v) \qquad \forall u \in \mathcal{Q} \quad \text{i} \quad \forall v \in \mathcal{K}.$$

Taj operator Ψ je homomorfizam lijevih $\mathcal{Q}-$modula. Doista, za proizvoljne $u, u' \in \mathcal{Q}$ i $v \in \mathcal{K}$ imamo

$$\Psi\left(u' \cdot (u \otimes_{\mathcal{M}} v)\right) = \Psi\left(u'u \otimes_{\mathcal{M}} v\right) = u'u \cdot g(v) = u' \cdot u \cdot g(v) = u' \cdot \Psi\left(u \otimes_{\mathcal{M}} v\right).$$

Promatrajmo sada bilinearno preslikavanje $F : \mathcal{Q} \times \mathcal{K} \to \mathcal{G}$ definirano množenjem: $F(u, v) = uv$, $u \in \mathcal{Q}$, $v \in \mathcal{K}$. Tada za $u \in \mathcal{Q}$, $v \in \mathcal{K}$ i $m \in \mathcal{M} = \mathcal{Q} \cap \mathcal{K}$ očito vrijedi $F(um, v) = F(u, mv)$. Prema tome, postoji jedinstven linearan operator $\Phi : \mathcal{Q} \otimes_{\mathcal{M}} \mathcal{K} \to \mathcal{G}$ takav da je

$$\Phi(u \otimes_{\mathcal{M}} v) = uv, \qquad u \in \mathcal{Q}, \quad v \in \mathcal{K}.$$

Tada je Φ homomorfizam lijevih $\mathcal{Q}-$modula. Nadalje, ako izaberemo bazu $\{e_1, \ldots, e_n\}$ od $\mathfrak{g}$ takvu da je $\{e_1, \ldots, e_\ell\}$ baza direktnog komplementa od $\mathfrak{m}$ u $\mathfrak{q}$, $\{e_{\ell+1}, \ldots, e_k\}$ baza od $\mathfrak{m}$ i $\{e_{k+1}, \ldots, e_n\}$ baza direktnog komplementa od $\mathfrak{m}$ u $\mathfrak{k}$, onda je

$$\{e_1^{m_1} \cdots e_k^{m_k} \otimes_{\mathcal{M}} e_{k+1}^{m_{k+1}} \cdots e_n^{m_n};\ (m_1, \ldots, m_n) \in \mathbb{Z}_+^n\}$$

baza vektorskog prostora $\mathcal{Q} \otimes_{\mathcal{M}} \mathcal{K}$ i tu bazu operator Φ prevodi u bazu

$$\{e_1^{m_1} \cdots e_k^{m_k} e_{k+1}^{m_{k+1}} \cdots e_n^{m_n};\ (m_1, \ldots, m_n) \in \mathbb{Z}_+^n\}$$

vektorskog prostora $\mathcal{G}$. Prema tome, $\Phi : \mathcal{Q} \otimes_{\mathcal{M}} \mathcal{K} \to \mathcal{G}$ je izomorfizam lijevih $\mathcal{Q}-$modula. Sada je kompozicija $f = \Psi \circ \Phi^{-1} : \mathcal{G} \to W$ homomorfizam $\mathcal{Q}-$modula, tj. $f \in Hom_{\mathfrak{q}}(\mathcal{G}, W)$. Za svaki $v \in \mathcal{K}$ imamo

$$[\varphi(f)](v) = f(v) = [\Psi \circ \Phi^{-1}](v) = \Psi\left(\Phi^{-1}(v)\right) = \Psi\left(1_{\mathcal{Q}} \otimes_{\mathcal{M}} v\right) = 1_{\mathcal{Q}} \cdot g(v) = g(v).$$

To pokazuje da je $\varphi(f) = g$ i time je dokazana surjektivnost preslikavanja φ. Dakle, φ je izomorfizam $\mathfrak{k}-$modula sa $Hom_{\mathfrak{q}}(\mathcal{G}, W) = Pro_{\mathfrak{q}}^{\mathfrak{g}} W$ na $Hom_{\mathfrak{m}}(\mathcal{K}, W) = Pro_{\mathfrak{m}}^{\mathfrak{k}} W$. Time je dokazano da je reprezentacija $\pi|\mathfrak{k}$ ekvivalentna reprezentaciji $Pro_{\mathfrak{m}}^{\mathfrak{k}}(\rho|\mathfrak{m})$.

Propozicija 3.4.33. *Neka je W $\mathfrak{q}-$modul i W^* njemu kontragredijentni $\mathfrak{q}-$modul. Nadalje, neka je $V = Ind_{\mathfrak{q}}^{\mathfrak{g}} W = \mathcal{G} \otimes_{\mathcal{Q}} W$ i $V' = Pro_{\mathfrak{q}}^{\mathfrak{g}} W^* = Hom_{\mathfrak{q}}(\mathcal{G}, W^*)$. Za $\psi \in V^*$ i $u \in \mathcal{G}$ neka je $\hat{\psi}(u)$ linearan funkcional na prostoru W definiran sa*

$$[\hat{\psi}(u)](w) = \psi\left(u^t \otimes_{\mathcal{Q}} w\right), \qquad w \in W.$$

Tada je $\hat{\psi} \in V'$ i $\psi \mapsto \hat{\psi}$ je izomorfizam kontragredijentnog $\mathfrak{g}-$modula V^* na $\mathfrak{g}-$modul V'.

Dokaz: Neka je $\psi \in V^*$. Za proizvoljne $u \in \mathcal{G}$, $v \in \mathcal{Q}$ i $w \in W$ imamo

$$[\hat{\psi}(vu)](w) = \psi\left((vu)^t \otimes_{\mathcal{Q}} w\right) = \psi\left(u^t v^t \otimes_{\mathcal{Q}} w\right) = \psi\left(u^t \otimes_{\mathcal{Q}} v^t \cdot w\right) = [\hat{\psi}(u)](v^t \cdot w).$$

Kontragredijentno djelovanje $\mathfrak{q}$ na W^* zadano je sa

$$(y \cdot \varphi)(w) = -\varphi(y \cdot w), \qquad y \in \mathfrak{q}, \quad \varphi \in W^*, \quad w \in W.$$

Odatle dobivamo da je

$$(v \cdot \varphi)(w) = \varphi(v^t \cdot w), \qquad v \in \mathcal{Q}, \quad \varphi \in W^*, \quad w \in W.$$

Prema tome,

$$[\hat{\psi}(vu)](w) = [v \cdot \hat{\psi}(u)](w),$$

dakle, zbog proizvoljnosti $w \in W$,

$$\hat{\psi}(vu) = v \cdot \hat{\psi}(u), \qquad v \in \mathcal{Q}, \quad u \in \mathcal{G}.$$

Time je dokazano da je $\hat{\psi} : \mathcal{G} \to W^*$ homomorfizam $\mathcal{Q}-$modula, odnosno, $\hat{\psi} \in V'$.

Dokažimo sada da je $\psi \mapsto \hat{\psi}$ homomorfizam $\mathfrak{g}-$modula sa V^* u V'. Za $u, u' \in \mathcal{G}$ i $w \in W$ imamo

$$[(u \cdot \hat{\psi})(u')](w) = [\hat{\psi}(u'u)](w) = \psi\left((u'u)^t \otimes_{\mathcal{Q}} w\right) =$$

$$= \psi\left(u^t u'^t \otimes_{\mathcal{Q}} w\right) = (u \cdot \psi)\left(u'^t \otimes_{\mathcal{Q}} w\right) = [(u \cdot \psi)\hat{}(u')](w).$$

Zbog proizvoljnosti $w \in W$ i $u' \in \mathcal{G}$ to pokazuje da je $u \cdot \hat{\psi} = (u \cdot \psi)\hat{}$ za svaki $u \in \mathcal{G}$, odnosno, preslikavanje $\psi \mapsto \hat{\psi}$ je homomorfizam $\mathcal{G}-$modula.

Pretpostavimo da je $\psi \in V^*$ takav da je $\hat{\psi} = 0$, odnosno, $\hat{\psi}(u) = 0$ za svaki $u \in \mathcal{G}$. Po definiciji $\hat{\psi}$ to znači da je

$$\psi\left(u^t \otimes_{\mathcal{Q}} w\right) = 0 \qquad \forall u \in \mathcal{G} \quad \text{i} \quad \forall w \in W.$$

Budući da vektori oblika $u^t \otimes_{\mathcal{Q}} w$, $u \in \mathcal{G}$, $w \in W$, razapinju cijeli prostor $\mathcal{G} \otimes_{\mathcal{Q}} W = V$, zaključujemo da je $\psi = 0$. Time je dokazano da je preslikavanje $\psi \mapsto \hat{\psi}$ injekcija.

Neka je sada $f \in V' = Hom_{\mathfrak{q}}(\mathcal{G}, W^*)$. Neka je $F : \mathcal{G} \times W \to \mathbb{C}$ bilinearno preslikavanje definirano sa

$$F(u, w) = \left[f\left(u^t\right)\right](w), \qquad u \in \mathcal{G}, \quad w \in W.$$

Tada za $u \in \mathcal{G}$, $v \in \mathcal{Q}$ i $w \in W$ imamo redom

$$F(uv, w) = \left[f\left((uv)^t\right)\right](w) = \left[f\left(v^t u^t\right)\right](w) = \left[v^t \cdot f\left(u^t\right)\right](w) = \left[f\left(u^t\right)\right](v \cdot w) = F(u, v \cdot w).$$

Prema univerzalnom svojstvu postoji jedinstven linearan funkcional $\psi : \mathcal{G} \otimes_{\mathcal{Q}} W \to \mathbb{C}$, tj. $\psi \in V^*$, takav da je

$$\psi(u \otimes_{\mathcal{Q}} w) = F(u, w) = \left[f\left(u^t\right)\right](w) \qquad \forall u \in \mathcal{G} \quad \text{i} \quad \forall w \in W.$$

Tada je

$$[\hat{\psi}(u)](w) = \psi\left(u^t \otimes_{\mathcal{Q}} w\right) = [f(u)](w) \qquad \forall u \in \mathcal{G} \quad \text{i} \quad \forall w \in W,$$

odnosno, $\hat{\psi} = f$. Time je dokazano da je preslikavanje $\psi \mapsto \hat{\psi}$ i surjekcija.

Dakle, $\psi \mapsto \hat{\psi}$ je izomorfizam $\mathcal{G}-$modula sa V^* na V'.

Primijenit ćemo sada rezultate o induciranim i produciranim reprezentacijama na situaciju iz početnog dijela ovog odjeljka; upotrebljavamo u daljnjem tada uvedene oznake. Nadalje, stavimo $\mathfrak{q} = \mathfrak{m} \dotplus \mathfrak{a} \dotplus \mathfrak{n}$ – ta se podalgebra reduktivne Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ zove **minimalna parabolička**. Za $\rho \in \hat{\mathfrak{m}}$ neka je F^ρ ireducibilan (kompleksan) $\mathfrak{m}-$modul iz klase ρ. Sa ρ označavamo i konkretnu reprezentaciju od $\mathfrak{m}$ na F^ρ. Skup $\hat{\mathfrak{a}}$ svih klasa ekvivalencije ireducibilnih konačnodimenzionalnih reprezentacija od $\mathfrak{a}$ identificira se s $\mathfrak{a}^{*\mathbb{C}} = \left(\mathfrak{a}^{\mathbb{C}}\right)^*$. Za $\mu \in \hat{\mathfrak{a}}$ označimo sa $\rho \otimes \mu$ ireducibilnu reprezentaciju Liejeve algebre $\mathfrak{q}$ na prostoru $F^{\rho,\mu} = F^\rho$ definiranu sa

$$(\rho \otimes \mu)(m + a + n) = \rho(m) + \mu(a) I_{F^\rho}, \qquad m \in \mathfrak{m}, \quad a \in \mathfrak{a}, \quad n \in \mathfrak{n}.$$

Drugim riječima, $F^{\rho,\mu}$ je $\mathfrak{q}-$modul koji se kao vektorski prostor podudara sa F^ρ, a djelovanje je

$$(m + a + n) \cdot \xi = m \cdot \xi + \mu(a)\xi, \qquad m \in \mathfrak{m}, \quad a \in \mathfrak{a}, \quad n \in \mathfrak{n}.$$

Stavimo

$$M_{\rho,\mu} = Ind_{\mathfrak{q}}^{\mathfrak{g}} F^{\rho,\mu}, \qquad N_{\rho,\mu} = Pro_{\mathfrak{q}}^{\mathfrak{g}} F^{\rho,\mu}.$$

Ako je ρ^* kontragredijentna reprezentacija reprezentacije ρ Liejeve algebre $\mathfrak{m}$, onda je $\rho^* \otimes (-\mu)$ kontragredijentna reprezentacija reprezentacije $\rho \otimes \mu$ Liejeve algebre $\mathfrak{q}$. Prema propoziciji 3.4.33. $\mathcal{G}-$modul $N_{\rho,\mu}$ identificira se s kontragredijentnim modulom $\mathcal{G}-$modula $M_{\rho^*,-\mu}$. Stavimo

$$V_{\rho,\mu} = \sum_{\gamma \in \hat{\mathfrak{k}}} \dot{+} N_{\rho,\mu}(\gamma).$$

Budući da je $\mathfrak{k}$ Liejeva podalgebra reduktivna u $\mathfrak{g}$, $V_{\rho,\mu}$ je $\mathcal{G}-$podmodul od $N_{\rho,\mu}$.

Propozicija 3.4.34. *Neka su $\rho \in \hat{\mathfrak{m}}$ i $\mu \in \hat{\mathfrak{a}}$ i neka je $\lambda \in \left(\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}\right)^*$ definirano tako da je $\lambda|\mathfrak{a} = \mu$ i da je $\lambda|\mathfrak{t}^{\mathbb{C}}$ najveća težina reprezentacije ρ u odnosu na R_+^0. Nadalje, neka je $\tilde{\lambda} \in \left(\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}\right)^*$ definirano tako da je $\tilde{\lambda}|\mathfrak{a} = -\mu$ i da je $\tilde{\lambda}|\mathfrak{t}^{\mathbb{C}} = -w_0\left(\lambda|\mathfrak{t}^{\mathbb{C}}\right)$, gdje je $w_0 \in W(R^0)$ jedinstven element takav da je $w_0 R_+^0 = -R_+^0$.*

(*a*) *$\mathfrak{g}-$modul $M_{\rho,\mu}$ izomorfan je kvocijentnom modulu Vermaovog modula $M(\lambda)$ konstruiranom u odnosu na $\mathfrak{h}$ i R_+.*

(*b*) *$M_{\rho,\mu}$ je $\mathfrak{g}-$modul s infinitezimalnim karakterom χ_λ.*

(*c*) *$N_{\rho,\mu}$ i $V_{\rho,\mu}$ su $\mathfrak{g}-$moduli s infinitezimalnim karakterom $z \mapsto \chi_{\tilde{\lambda}}(z^t)$.*

Dokaz: (*a*) Neka je $\xi \in F^\rho \setminus \{0\}$ težinski vektor reprezentacije ρ u odnosu na $\mathfrak{t}^{\mathbb{C}}$ težine $\lambda|\mathfrak{t}^{\mathbb{C}}$. Tada je

$$\mathcal{M} \cdot \xi = F^\rho$$

i vrijedi

$$h \cdot \xi = \lambda(h)\xi \qquad \forall h \in \mathfrak{t}^{\mathbb{C}}.$$

Prema definiciji djelovanja $\mathfrak{a}$ na $F^{\rho,\mu} = F^\rho$, imamo i

$$h \cdot \xi = \mu(h)\xi = \lambda(h)\xi \qquad \forall h \in \mathfrak{a}.$$

Prema tome,

$$h \cdot \xi = \lambda(h)\xi \qquad \forall h \in \mathfrak{h}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{t}^{\mathbb{C}} \dot{+} \mathfrak{a}^{\mathbb{C}}.$$

Nadalje, kako je $\lambda|\mathfrak{t}^{\mathbb{C}}$ najveća težina $\mathfrak{m}^{\mathbb{C}}-$modula F^ρ u odnosu na R_+^0, vrijedi

$$x \cdot \xi = 0 \qquad \forall x \in \mathfrak{n}_0,$$

gdje je

$$\mathfrak{n}_0 = \sum_{\alpha \in R_+^0} \dot{+} \mathfrak{m}_\alpha^{\mathbb{C}} = \sum_{\alpha \in R_+,\, \alpha|\mathfrak{a}=0} \dot{+} \mathfrak{g}_\alpha^{\mathbb{C}}.$$

Liejeva algebra $\mathfrak{n}$ trivijalno djeluje na $F^{\rho,\mu} = F^\rho$, pa je također

$$x \cdot \xi = 0 \qquad \forall x \in \mathfrak{n}.$$

Prema tome,

$$x \cdot \xi = 0 \qquad \forall x \in \mathfrak{n}^+ = \sum_{\alpha \in R_+} \dot{+} \mathfrak{g}_\alpha^{\mathbb{C}} = \mathfrak{n}_0 \dot{+} \mathfrak{n}^{\mathbb{C}}.$$

Stavimo sada

$$v = 1_{\mathcal{G}} \otimes_{\mathcal{Q}} \xi \in \mathcal{G} \otimes_{\mathcal{Q}} F^{\rho,\mu} = Ind_{\mathfrak{q}}^{\mathfrak{g}} F^{\rho,\mu}.$$

Prema prethodnim razmatranjima tada imamo za svaki $h \in \mathfrak{h}^{\mathbb{C}} \subseteq \mathfrak{q}^{\mathbb{C}}$:

$$h \cdot v = h(1_{\mathcal{G}} \otimes_{\mathcal{Q}} \xi) = h \otimes_{\mathcal{Q}} \xi = 1_{\mathcal{G}} \otimes_{\mathcal{Q}} h \cdot \xi = \lambda(h)(1_{\mathcal{G}} \otimes_{\mathcal{Q}} \xi) = \lambda(h)v.$$

Nadalje, za svaki $x \in \mathfrak{n}^+ \subseteq \mathfrak{q}^{\mathbb{C}}$ je

$$x \cdot v = x(1_{\mathcal{G}} \otimes_{\mathcal{Q}} \xi) = x \otimes_{\mathcal{Q}} \xi = 1_{\mathcal{G}} \otimes_{\mathcal{Q}} x \cdot \xi = 0.$$

Prema tome, $\mathbb{C}v$ je $\mathfrak{b}-$podmodul od $M_{\rho,\mu}$ za Borelovu podalgebru $\mathfrak{b} = \mathfrak{h}^{\mathbb{C}} \dot{+} \mathfrak{n}^+$ koji je prema oznaci iz odjeljka 2.4. izomorfan modulu $\mathbb{C}_\lambda$. Neka je $\varphi : \mathbb{C}_\lambda \to \mathbb{C}v$ izomorfizam $\mathfrak{b}-$modula zadan sa $\varphi(c) = cv$, $c \in \mathbb{C}$. Dakle, $\varphi \in Hom_{\mathfrak{b}}(\mathbb{C}_\lambda, M_{\rho,\mu})$. Prema Frobeniusovom teoremu reciprociteta za inducirane reprezentacije Liejevih algebri (tvrdnja (b) teorema 1.4.26.) postoji jedinstven $\hat{\varphi} \in Hom_{\mathfrak{g}}(Ind_{\mathfrak{b}}^{\mathfrak{g}} \mathbb{C}_\lambda, M_{\rho,\mu}) = Hom_{\mathfrak{g}}(M(\lambda), M_{\rho,\mu})$ takav da je $\hat{\varphi}(1_{\mathcal{G}} \otimes 1) = \varphi(1) = v$. Budući da je

$$\mathcal{G} \cdot v = \mathcal{G} \otimes_{\mathcal{Q}} \xi = \mathcal{G} \otimes_{\mathcal{G}} \mathcal{M} \cdot \xi = \mathcal{G} \otimes_{\mathcal{Q}} F^{\rho,\mu} = M_{\rho,\mu},$$

tj. budući da je v ciklički vektor $\mathcal{G}-$modula $M_{\rho,\mu}$, homomorfizam $\hat{\varphi} : M(\lambda) \to M_{\rho,\mu}$ je surjektivni. Time je dokazana tvrdnja (a).

(b) Vermaov modul $M(\lambda)$ ima infinitezimalni karakter χ_λ, pa tvrdnja (b) slijedi neposredno iz tvrdnje (a).

Napokon, tvrdnja (c) slijedi iz činjenice da je modul $N_{\rho,\mu}$ izomorfan kontragredijentnom modulu modula $M_{\rho^*,-\mu}$, iz činjenice da je $-\lambda|\mathfrak{t}^{\mathbb{C}}$ najmanja težina reprezentacije ρ^*, dakle, $-w_0\left(\lambda|\mathfrak{t}^{\mathbb{C}}\right)$ je najveća težina te reprezentacije i iz sljedeće leme:

Lema 3.4.35. *Ako $\mathcal{G}-$modul V ima infinitezimalni karakter χ onda njemu kontragredijentni modul V^* ima infinitezimalni karakter $z \mapsto \chi\left(z^t\right)$.*

Dokaz: Vrijedi $z \cdot v = \chi(z)v$ $\forall z \in \mathcal{Z}(\mathfrak{g})$ i $\forall v \in V$. Stoga za proizvoljne $z \in \mathcal{Z}(\mathfrak{g})$, $v \in V$ i $f \in V^*$ imamo

$$(z \cdot f)(v) = f\left(z^t \cdot v\right) = f\left(\chi(z^t)v\right) = \chi\left(z^t\right) f(v),$$

dakle,

$$z \cdot f = \chi\left(z^t\right) f \qquad \forall z \in \mathcal{Z}(\mathfrak{g}) \quad \text{i} \quad \forall f \in V^*.$$

To znači da $\mathcal{G}-$modul V^* ima infinitezimalni karakter $z \mapsto \chi\left(z^t\right)$.

Propozicija 3.4.36. *Neka su $\rho \in \hat{\mathfrak{m}}$, $\mu \in \hat{\mathfrak{a}}$ i $\gamma \in \hat{\mathfrak{k}}$. Stavimo*

$$H^{\rho,\mu,\gamma} = Hom_{\mathfrak{k}}(E^\gamma, V_{\rho,\mu}) \qquad i \qquad H_{\rho,\gamma} = Hom_{\mathfrak{m}}(F^\rho, E^\gamma).$$

Nadalje, neka ε restrikcija na $V_{\rho,\mu}$ kanonske surjekcije $T \mapsto T(1_{\mathcal{G}})$ sa $Hom_{\mathfrak{q}}(\mathcal{G}, F^{\rho,\mu}) = Pro_{\mathfrak{q}}^{\mathfrak{g}} F^{\rho,\mu}$ na $F^{\rho,\mu} = F^\rho$.

(a) Za $h \in H^{\rho,\mu,\gamma}$ i $h' \in H_{\rho,\gamma}$ postoji $\varphi(h,h') \in \mathbb{C}$ takav da je $\varepsilon \circ h \circ h' = \varphi(h,h') I_{F^\rho}$.

(b) Bilinearna forma $\varphi : H^{\rho,\mu,\gamma} \times H_{\rho,\gamma} \to \mathbb{C}$ je nedegenerirana i u prvoj i drugoj varijabli, pa uspostavlja izomorfizam prostora $H^{\rho,\mu,\gamma}$ na dual od $H_{\rho,\gamma}$ i prostora $H_{\rho,\gamma}$ na dual od $H^{\rho,\mu,\gamma}$.

Dokaz: Za $h \in H^{\rho,\mu,\gamma}$ i $h' \in H_{\rho,\gamma}$ očito je $\varepsilon \circ h \circ h' \in End_{\mathfrak{m}}(F^\rho)$. Budući da je reprezentacija ρ od $\mathfrak{m}$ ireducibilna, po Schurovoj lemi slijedi tvrdnja (a). Neka je sada $h \in H^{\rho,\mu,\gamma} \setminus \{0\}$. Tada zbog činjenica da je ε $\mathcal{Q}-$homomorfizam i da je h $\mathcal{K}-$homomorfizam imamo

$$\mathcal{N}\mathcal{A}(\varepsilon \circ h)(E^\gamma) = \mathcal{N}\mathcal{A}\,\varepsilon(h(\mathcal{K}E^\gamma)) = \varepsilon(\mathcal{N}\mathcal{A}\mathcal{K}h(E^\gamma)) = \varepsilon(\mathcal{G}h(E^\gamma)).$$

Ovo posljednje je različito od $\{0\}$ zbog tvrdnje (b) propozicije 3.4.30. primijenjene na $X = \mathcal{G}h(E^\gamma)$. To pokazuje da je $\varepsilon \circ h \neq 0$. Kako je E^γ potpuno reducibilan kao $\mathfrak{m}-$modul i kako je $\varepsilon \circ h$ $\mathfrak{m}-$homomorfizam, postoji $h' \in H^{\rho,\gamma}$ takav da je $(\varepsilon \circ h) \circ h' \neq 0$. No tada je $\varphi(h, h') \neq 0$. To pokazuje da je forma φ nedegenerirana u prvoj varijabli. Međutim, po korolaru 3.4.31. i propoziciji 3.4.32. vrijedi

$$\dim H^{\rho,\mu,\gamma} = mtp(\gamma, Pro_{\mathfrak{q}}^{\mathfrak{g}} F^{\rho,\mu}) = mtp(\gamma, Pro_{\mathfrak{m}}^{\mathfrak{k}} F^\rho) = mtp(\rho, \gamma) = \dim H_{\rho,\gamma}.$$

Prema tome, forma φ je nedegenerirana i u drugoj varijabli.

Podsjetimo se definicije preslikavanja $\tilde{\omega}$, $\tilde{\omega}_\gamma$ i $\tilde{\omega}_{\rho,\gamma}$ ($\gamma \in \hat{\mathfrak{k}}$, $\rho \in \hat{\mathfrak{m}}$). $\tilde{\omega}$ je projektor prostora $\mathcal{G}$ na potprostor $\mathcal{AK}$ u skladu s rastavom $\mathcal{G} = \mathcal{AK} \dotplus \mathfrak{n}\mathcal{G}$. Vektorski potprostor $\mathcal{AK}$ od $\mathcal{G}$ identificira se s tenzorskim produktom $\mathcal{A} \otimes \mathcal{K}$, pa dobivamo $\tilde{\omega} : \mathcal{G} \to \mathcal{A} \otimes \mathcal{K}$. Ako $\mathcal{A} \otimes \mathcal{K}$ snabdijemo strukturom tenzorskog produkta unitalnih algebri, onda je prema tvrdnji (c) propozicije 3.4.15. i prema korolaru 3.4.19. restrikcija $\tilde{\omega}|\mathcal{G}^K$ injektivni antihomomorfizam algebri sa $\mathcal{G}^K$ u $\mathcal{A} \otimes \mathcal{K}^M \subseteq \mathcal{A} \otimes \mathcal{K}^{\mathfrak{m}}$.

Za $\gamma \in \hat{\mathfrak{k}}$ kvocijentna algebra $\mathcal{K}/\mathcal{J}^\gamma$ identificira se sa $\gamma(\mathcal{K}) = End(E^\gamma)$. Sada je $\tilde{\omega}_\gamma$ antihomomorfizam sa $\mathcal{G}^K$ u $\mathcal{A} \otimes (\mathcal{K}/\mathcal{J}^\gamma) = \mathcal{A} \otimes End(E^\gamma)$ definiran sa

$$\tilde{\omega}_\gamma = (I_{\mathcal{A}} \otimes \gamma) \circ \tilde{\omega}.$$

Budući da je $\tilde{\omega}(\mathcal{G}^K) \subseteq \mathcal{A} \otimes \mathcal{K}^{\mathfrak{m}}$, preslikavanje $\tilde{\omega}_\gamma$ možemo shvaćati kao antihomomorfizam sa $\mathcal{G}^K$ u $\mathcal{A} \otimes (\mathcal{K}^{\mathfrak{m}}/(\mathcal{K}^{\mathfrak{m}} \cap \mathcal{J}^\gamma))$. Prema propoziciji 3.4.24. imamo identifikaciju

$$\mathcal{K}^{\mathfrak{m}}/(\mathcal{K}^{\mathfrak{m}} \cap \mathcal{J}^\gamma) = \prod_{\rho \in \hat{\mathfrak{m}}} End(H_{\rho,\gamma}),$$

gdje je $H_{\rho,\gamma} = Hom_{\mathfrak{m}}(F^\rho, E^\gamma)$. Sada je $\tilde{\omega}_{\rho,\gamma}$ antihomomorfizam sa $\mathcal{G}^K$ u $\mathcal{A} \otimes End(H_{\rho,\gamma})$ dobiven iz $\tilde{\omega}_\gamma$ projekcijom na faktor u gornjem direktnom produktu s indeksom ρ.

Definiramo sada za $\mu \in \hat{\mathfrak{a}} = \mathfrak{a}^{*\mathbb{C}} = \left(\mathfrak{a}^{\mathbb{C}}\right)^*$ i za $\gamma \in \hat{\mathfrak{k}}$ i $\rho \in \hat{\mathfrak{m}}$ antihomomorfizme $\tilde{\omega}_\mu$, $\tilde{\omega}_{\gamma,\mu}$ i $\tilde{\omega}_{\rho,\gamma,\mu}$, koji se dobivaju iz antihomomorfizama $\tilde{\omega}|\mathfrak{g}^K$, $\tilde{\omega}_\gamma$ i $\tilde{\omega}_{\rho,\gamma}$ komponiranjem s evaluacijom $\chi_\mu : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ u točki μ :

$$\tilde{\omega}_\mu = (\chi_\mu \otimes I_{\mathcal{K}^{\mathfrak{m}}}) \circ \tilde{\omega} : \mathcal{G}^K \to \mathcal{K}^{\mathfrak{m}},$$

$$\tilde{\omega}_{\gamma,\mu} = (\chi_\mu \otimes I_{\mathcal{K}^{\mathfrak{m}}/(\mathcal{K}^{\mathfrak{m}} \cap \mathcal{J}^\gamma)}) \circ \tilde{\omega}_\gamma : \mathcal{G}^K \to \mathcal{K}^{\mathfrak{m}}/(\mathcal{K}^{\mathfrak{m}} \cap \mathcal{J}^\gamma) = \prod_{\rho \in \hat{\mathfrak{m}}} (\mathcal{K}^{\mathfrak{m}}/\mathcal{I}^{\rho,\gamma}) = \prod_{\rho \in \hat{\mathfrak{m}}} End(H_{\rho,\gamma}),$$

$$\tilde{\omega}_{\rho,\gamma,\mu} = (\chi_\mu \otimes I_{\mathcal{K}^{\mathfrak{m}}/\mathcal{I}^{\rho,\gamma}}) \circ \tilde{\omega}_{\rho,\gamma} : \mathcal{G}^K \to \mathcal{K}^{\mathfrak{m}}/\mathcal{I}^{\rho,\gamma} = End(H_{\rho,\gamma}).$$

Propozicija 3.4.37. *Uz oznake iz propozicije 3.4.36. i u skladu s tvrdnjom (b) te propozicije identificirajmo svaki od prostora $H^{\rho,\mu,\gamma}$ i $H_{\rho,\gamma}$ s dualom onog drugoga. Promatrajmo $H^{\rho,\mu,\gamma}$ kao lijevi $\mathcal{G}^K-$modul preko djelovanja $\mathcal{G}^K$ na $V_{\rho,\mu}$ i $H_{\rho,\gamma}$ kao lijevi $\mathcal{K}^{\mathfrak{m}}-$modul preko djelovanja $\mathcal{K}^{\mathfrak{m}}$ na F^γ.*

(a) *Za svaki $u \in \mathcal{G}^K$ djelovanje u na $H^{\rho,\mu,\gamma}$ i djelovanje $\tilde{\omega}_\mu(u) \in \mathcal{K}^{\mathfrak{m}}$ na $H_{\rho,\gamma}$ su međusobno dualna.*

(b) *Anihilator $\mathcal{G}^K-$modula $H^{\rho,\mu,\gamma}$ jednak je* Ker $\tilde{\omega}_{\rho,\gamma,\mu}$.

Dokaz: (a) Neka je $u \in \mathcal{G}^K$ Pišemo

$$u = \sum_{i=1}^{s} u_i u_i' + u'', \qquad u_1, \ldots, u_s \in \mathcal{A}, \quad u_1', \ldots, u_s' \in \mathcal{K}, \quad u'' \in \mathfrak{n}\mathcal{G}.$$

Označimo sa π reprezentaciju od $\mathcal{G}$ na $V_{\rho,\mu}$. Za $h \in H^{\rho,\mu,\gamma}$ i $h' \in H_{\rho,\gamma}$ imamo redom zbog toga što je ε $\mathcal{Q}-$homomorfizam i zbog toga što je h $\mathcal{K}-$homomorfizam:

$$\varphi(u \cdot h, h')I_{F^\rho} = \varepsilon \circ \pi(u) \circ h \circ h' = \sum_{i=1}^{s} u_i(\mu)\varepsilon \circ \pi(u_i') \circ h \circ h' = \sum_{i=1}^{s} u_i(\mu)\varepsilon \circ h \circ \gamma(u_i') \circ h' =$$

$$= \varepsilon \circ h \circ \gamma\left(\sum_{i=1}^{s} u_i(\mu)u_i'\right) \circ h' = \varepsilon \circ h \circ \gamma(\tilde{\omega}_\mu(u)) \circ h' = \varepsilon \circ h \circ (\tilde{\omega}_\mu(u) \cdot h') = \varphi\left(h, \tilde{\omega}_\mu(u) \cdot h'\right) I_{F^\rho}.$$

Time je dokazana tvrdnja (a).

Tvrdnja (b) slijedi iz tvrdnje (a) :

$$u \cdot H^{\rho,\mu,\gamma} = \{0\} \quad \Longleftrightarrow \quad \tilde{\omega}_\mu(u) \cdot H_{\rho,\gamma} = \{0\} \quad \Longleftrightarrow \quad u \in \mathrm{Ker}\, \tilde{\omega}_{\rho,\gamma,\mu}.$$

Za svaki $u \in \mathcal{G}^K$ je $\tilde{\omega}_{\rho,\gamma}(u) \in \mathcal{A} \otimes End(H_{\rho,\gamma})$. $\mathcal{A} \otimes H_{\rho,\gamma}$ je slobodan $\mathcal{A}-$modul s konačnom bazom (to je bilo koja baza vektorskog prostora $H_{\rho,\gamma}$) i $\mathcal{A} \otimes End(H_{\rho,\gamma})$ se identificira sa $End_{\mathcal{A}}(\mathcal{A} \otimes H_{\rho,\gamma})$. Dakle, za $\gamma \in \hat{\mathfrak{k}}$, $\rho \in \hat{\mathfrak{m}}$ i $u \in \mathcal{G}^K$ možemo shvaćati $\tilde{\omega}_{\rho,\gamma}(u)$ kao element od $End_{\mathcal{A}}(\mathcal{A} \otimes H_{\rho,\gamma})$. Promatrajmo svojstveni polinom tog endomorfizma

$$\det(T - \tilde{\omega}_{\rho,\gamma}(u))$$

kao element od $\mathcal{A}[T]$. Taj je polinom jednak 1 ako je $mtp(\rho, \gamma) = 0$. Definiramo

$$f_{\gamma,u}(T) = \prod_{\rho \in \hat{\mathfrak{m}}} \det(T - \tilde{\omega}_{\rho,\gamma}(u)) \in \mathcal{A}[T].$$

Tada vrijedi

$$f_{\gamma,u}(\tilde{\omega}_{\rho,\gamma}(u)) = 0 \qquad \text{za svaki } \rho \in \hat{\mathfrak{m}} \text{ takav da je } mtp(\rho, \gamma) > 0. \tag{3.25}$$

Neka je $W = W(R) = W(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}, \mathfrak{h}^{\mathbb{C}})$ i neka su φ i φ' definirani kao prije: $\varphi : \mathcal{G}^{\mathfrak{h}} \to \mathcal{H}$ je Harish−Chandrin homomorfizam u odnosu na R_+, tj. projektor sa $\mathcal{G}^{\mathfrak{h}}$ na $\mathcal{H}$ u odnosu na rastav $\mathcal{G} = \mathcal{H} \dot{+} \mathcal{L}$, gdje je $\mathcal{L} = \mathcal{G}^{\mathfrak{h}} \cap \mathcal{G}\mathfrak{n}^+ = \mathcal{G}^{\mathfrak{h}} \cap \mathfrak{n}^-\mathcal{G}$, a φ' je homomorfizam sa $\mathcal{G}^{\mathfrak{h}}$ u $\mathcal{H}$ dobiven iz φ dvostrukim transponiranjem:

$$\varphi'(u) = \left(\varphi(u^t)\right)^t, \qquad u \in \mathcal{G}^{\mathfrak{h}}.$$

Teorem 3.2.3. o Harish−Chandrinom izomorfizmu možemo ovako interpretirati: *Postoji izomorfizam $w \mapsto \tilde{w}$ grupe W na podgrupu $\tilde{W}$ grupe automorfizama algebre $\mathcal{H}$ takav da je $\varphi'|\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$ izomorfizam $\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$ na algebru $\mathcal{H}^{\tilde{W}}$ $\tilde{W}-$invarijanata u $\mathcal{H}$.* Izomorfizam $w \mapsto \tilde{w}$ dobiva se kombinacijom pomaka za polusumu pozitivnih korijena i transponiranja, ali precizna formula neće nam trebati. Označit ćemo istim znakom $\tilde{w}$ bijekciju $\mathfrak{h}^{*\mathbb{C}} \to \mathfrak{h}^{*\mathbb{C}}$ koja je pridružena automorfizmu $\tilde{w}$ od $\mathcal{H}$, tj. takvu da je

$$\chi_{\tilde{w}\lambda}(\tilde{w}(x)) = \chi_\lambda(x) \qquad \forall x \in \mathcal{H} \quad \text{i} \quad \forall \lambda \in \mathfrak{h}^{*\mathbb{C}}.$$

Pri tome je za $\lambda \in \mathfrak{h}^{*\mathbb{C}}$ sa χ_λ označen jedinstven unitalni homomorfizam sa $\mathcal{H}$ u $\mathbb{C}$ koji proširuje preslikavanje $\lambda : \mathfrak{h} \to \mathbb{C}$. Kao što znamo, uz identifikaciju $\mathcal{H}$ s algebrom $\mathcal{P}\left(\mathfrak{h}^{*\mathbb{C}}\right)$ polinomijalnih funkcija na $\mathfrak{h}^{*\mathbb{C}}$, homomorfizam χ_λ je evaluacija u točki λ. Budući da je $\mathcal{A}[T] \subseteq \mathcal{H}[T]$, možemo definirati

$$\overline{f}_{\gamma,u}(T) = \prod_{w \in W} \tilde{w}(f_{\gamma,u}(T)) \in \mathcal{H}^{\tilde{W}}[T].$$

Neka je q stupanj od $\overline{f}_{\gamma,u}$. Tada postoje $z_1, \ldots, z_q \in \mathcal{Z}(\mathfrak{g})$ takvi da je

$$\overline{f}_{\gamma,u}(T) = T^q + \varphi'(z_1)T^{q-1} + \cdots + \varphi'(z_{q-1})T + \varphi'(z_q). \tag{3.26}$$

Stavimo

$$v = u^q + z_1 u^{q-1} + \cdots + z_{q-1}u + z_q \in \mathcal{G}^K.$$

Lema 3.4.38. *Uz uvedene oznake vrijedi* $v \in \mathcal{G}^K \cap \mathcal{GJ}^\gamma$.

Dokaz: Neka je $\rho \in \hat{\mathfrak{m}}$ takva da je $mtp(\rho, \gamma) > 0$. Stavimo

$$v' = \tilde{\omega}_{\rho,\gamma}(u)^q + \varphi'(z_1)\tilde{\omega}_{\rho,\gamma}(u)^{q-1} + \cdots + \varphi'(z_{q-1})\tilde{\omega}_{\rho,\gamma}(u) + \varphi'(z_q) \in \mathcal{H} \otimes End(H_{\rho,\gamma}) = \mathcal{A} \otimes \mathcal{T} \otimes End(H_{\rho,\gamma}).$$

Sada iz (3.25) i (3.26) imamo

$$v' = \overline{f}_{\gamma,u}(\tilde{\omega}_{\rho,\gamma}(u)) = 0.$$

S druge strane, neka je $\mu \in \mathfrak{t}^{*\mathbb{C}}$ najmanja težina od ρ. Kao i prije označimo sa $\chi_\mu : \mathcal{T} = \mathcal{P}(\mathfrak{t}^*) \to \mathbb{C}$ homomorfizam evaluacije u točki μ, odnosno, jedinstveno proširenje preslikavanja $\mu : \mathfrak{t}^\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ do homomorfizma sa $\mathcal{T} = S(\mathfrak{t}^\mathbb{C})$ u $\mathbb{C}$. Tada je

$$I_\mathcal{A} \otimes \chi_\mu \otimes I_{End(H_{\rho,\gamma})} : \mathcal{A} \otimes \mathcal{T} \otimes End(H_{\rho,\gamma}) \to \mathcal{A} \otimes End(H_{\rho,\gamma})$$

unitalni homomorfizam algebri i imamo

$$0 = (I_\mathcal{A} \otimes \chi_\mu \otimes I_{End(H_{\rho,\gamma})})(v') = \tilde{\omega}_{\rho,\gamma}(u)^q + (I_\mathcal{A} \otimes \chi_\mu)(\varphi'(z_1))\tilde{\omega}_{\rho,\gamma}(u)^{q-1} + \cdots + (I_\mathcal{A} \otimes \chi_\mu)(\varphi'(z_q)).$$

Međutim, prema propoziciji 3.4.25. imamo za svaki $j = 1, \ldots, q$:

$$(I_\mathcal{A} \otimes \chi_\mu)(\varphi'(z_j)) = (I_\mathcal{A} \otimes \chi_\mu)\left(\left(\varphi(z_j^t)\right)^t\right) = \tilde{\omega}_{\rho,\gamma}(z_j).$$

Stoga imamo

$$\tilde{\omega}_{\rho,\gamma}(u)^q + \tilde{\omega}_{\rho,\gamma}(z_1)\tilde{\omega}_{\rho,\gamma}(u)^{q-1} + \cdots + \tilde{\omega}_{\rho,\gamma}(z_q) = 0.$$

Međutim, $\tilde{\omega}_{\rho,\gamma}$ je antihomomorfizam sa algebre $\mathcal{G}^K$ i $\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$ je sadržan u centru te algebre. Stoga iz gornje jednakosti zaključujemo da je $\tilde{\omega}_{\rho,\gamma}(v) = 0$. Dakle, $v \in \mathrm{Ker}\,\tilde{\omega}_{\rho,\gamma}$ za svaki $\rho \in \hat{\mathfrak{m}}$ takav da je $mtp(\rho, \gamma) > 0$, tj. takav da je $H_{\rho,\gamma} \neq \{0\}$. Prema (3.24) slijedi

$$v \in \bigcap_{\rho \in \hat{\mathfrak{m}},\, mtp(\rho,\gamma) > 0} \mathrm{Ker}\ \tilde{\omega}_{\rho,\gamma} = \mathrm{Ker}\ \tilde{\omega}_\gamma = \mathcal{G}^K \cap \mathcal{GJ}^\gamma.$$

Propozicija 3.4.39. *Neka je* $\gamma \in \hat{\mathfrak{k}}$ *i neka je* τ *ireducibilna reprezentacija od* $\mathcal{G}^K$ *takva da vrijedi* $\mathrm{Ker}\,\tau \supseteq \mathcal{G}^K \cap \mathcal{GJ}^\gamma$. *Označimo sa* Y^τ *pripadni* $\mathcal{G}^K-$*modul.*

(*a*) *Prostor* Y^τ *je konačnodimenzionalan.*

(*b*) *Postoje* $\rho \in \hat{\mathfrak{m}}$ *i* $\mu \in \hat{\mathfrak{a}}$ *takvi da je* $\mathcal{G}^K-$*modul* Y^τ *izomorfan nekom subkvocijentu modula* $Hom_\mathfrak{k}(E^\gamma, V_{\rho,\mu})$.

Dokaz: Budući da je reprezentacija τ ireducibilna, po Dixmierovoj varijanti Šchurove leme $\tau(\mathcal{Z}(\mathfrak{g}))$ se sastoji od skalarnih multipla jediničnog operatora. Odatle slijedi da postoji $\lambda \in \mathfrak{h}^{*\mathbb{C}}$ takav da je

$$\tau(z) = \chi_\lambda(\varphi'(z))I_{Y^\tau} \qquad \forall z \in \mathcal{Z}(\mathfrak{g}). \tag{3.27}$$

Pri tome je kao i u drugim sličnim slučajevima sa $\chi_\lambda : \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ označen homomorfizam evaluacije u točki λ, odnosno, jedinstven unitalni homomorfizam koji proširuje $\lambda : \mathfrak{h} \to \mathbb{C}$. Stavimo sada

$$\mathcal{R} = \{u \in \mathcal{G}^K;\ \tilde{\omega}_{\rho,\gamma,\tilde{w}\lambda|\mathfrak{a}}(u) = 0\ \forall \rho \in \hat{\mathfrak{m}}(\gamma) \text{ i } \forall w \in W\}. \tag{3.28}$$

Pri tome smo koristili oznaku $\tilde{\omega}_{\rho,\gamma,\mu}$ za antihomorfizam definiran prije propozicije 3.4.37. Nadalje,

$$\hat{\mathfrak{m}}(\gamma) = \{\rho \in \hat{\mathfrak{m}};\ mtp(\rho, \gamma) > 0\}.$$

Očito je $\mathcal{R}$ dvostrani ideal u $\mathcal{G}^K$. Za $u \in \mathcal{R}$ koeficijenti polinoma $\chi_\lambda(\overline{f}_{\gamma,u}(T))$ uz potencije T^j za $j < q$ dobivaju se kao produkti brojeva $\tilde{\omega}_{\rho,\gamma,\tilde{w}\lambda|\mathfrak{a}}(u)$, a ti su svi brojevi jednaki 0. Prema tome, vrijedi $\chi_\mu(\varphi'(z_j)) = 0$ za $j = 1, \ldots, q$. Sada za element v definiran prije leme 3.4.38. po toj lemi vrijedi

$$0 = \tau(v) = \tau(u)^q.$$

To pokazuje da je svaki element dvostranog ideala $\tau(\mathcal{R})$ u $\tau(\mathcal{G}^K)$ nilpotentan. Prema općem teoremu iz algebre takav ideal u Noetherinoj algebri je nilpotentan, tj. postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je $\tau(\mathcal{R})^n = \{0\}$, odnosno, da je $\mathcal{R}^n \subseteq \mathrm{Ker}\ \tau$.

Upotrijebit ćemo sada sljedeću činjenicu:

Lema 3.4.40. *Neka je τ ireducibilna reprezentacija unitalne algebre $\mathcal{A}$ na prostoru Y i neka su $\mathcal{R}$ i $\mathcal{S}$ dvostrani ideali u $\mathcal{A}$ koji zadovoljavaju jedan od sljedeća dva uvjeta:*

(*a*) $\mathcal{RS} \subseteq \mathrm{Ker}\ \tau$.

(*b*) $\mathcal{R} \cap \mathcal{S} \subseteq \mathrm{Ker}\ \tau$.

Tada je ili $\mathcal{R} \subseteq \mathrm{Ker}\,\tau$ ili $\mathcal{S} \subseteq \mathrm{Ker}\ \tau$.

Dokaz: Pretpostavimo da je $\mathcal{S} \nsubseteq \mathrm{Ker}\ \tau$. Tada je $\tau(\mathcal{S})Y \neq \{0\}$ potprostor od Y koji je $\tau-$invarijantan, pa zbog ireducibilnosti slijedi $\tau(\mathcal{S})Y = Y$. No tada u slučaju (a) imamo

$$\tau(\mathcal{R})Y = \tau(\mathcal{RS})Y = \{0\},$$

a u slučaju (b) je

$$\tau(\mathcal{R})Y = \tau(\mathcal{RS})Y \subseteq \tau(\mathcal{R} \cap \mathcal{S})Y = \{0\}.$$

Dakle, u oba slučaja je $\mathcal{R} \subseteq \mathrm{Ker}\ \tau$.

Posebno, u našem slučaju je $\mathcal{R}^n \subseteq \mathrm{Ker}\ \tau$, pa slijedi $\mathcal{R} \subseteq \mathrm{Ker}\ \tau$. Uočimo sada da je $\mathcal{R}$ presjek konačno mnogo dvostranih ideala $\mathrm{Ker}\ \tilde{\omega}_{\rho,\gamma,\tilde{w}\lambda|\mathfrak{a}}$, $\rho \in \hat{\mathfrak{m}}(\gamma)$, $w \in W$. Prema prethodnoj lemi zaključujemo da postoje $\rho \in \hat{\mathfrak{m}}(\gamma)$ i $w \in W$ takvi da vrijedi

$$\mathrm{Ker}\ \tilde{\omega}_{\rho,\gamma,\tilde{w}\lambda|\mathfrak{a}} \subseteq \mathrm{Ker}\ \tau.$$

Stavimo $\mu = \tilde{w}\lambda|\mathfrak{a}$. Prema tvrdnji (b) propozicije 3.4.37. $\mathrm{Ker}\ \tau$ sadrži anihilator $\mathcal{J}$ $\mathcal{G}^K-$modula $H^{\rho,\mu,\gamma} = Hom_{\mathfrak{k}}(E^\gamma, V_{\sigma,\mu})$. Prema korolaru 3.4.31. prostor $H^{\rho,\mu,\gamma}$ je konačnodimenzionalan. To znači da je ideal $\mathcal{J}$, a time i ideal $\mathrm{Ker}\ \tau$, konačne kodimenzije u $\mathcal{G}^K$. Odatle slijedi tvrdnja (a).

Neka je sada

$$H^{\rho,\mu,\gamma} = H_0 \supsetneq H_1 \supsetneq \cdots \supsetneq H_p = \{0\}$$

kompozicioni niz $\mathcal{G}^K-$modula $H^{\rho,\mu,\gamma}$. Neka je $\mathcal{J}_i$ anihilator ireducibilnog $\mathcal{G}^K-$modula H_{i-1}/H_i, $i = 1, \ldots, p$. Tada imamo

$$\mathrm{Ker}\,\tau \supseteq \mathcal{J} \supseteq \left(\bigcap_{i=1}^p \mathcal{J}_i\right)^p,$$

pa prema lemi 3.4.40. slijedi da je $\mathrm{Ker}\ \tau \supseteq \mathcal{J}_i$ za neki $i \in \{1, \ldots, p\}$. Tada je Y^τ izomorfan $\mathcal{G}^K-$modulu H_{i-1}/H_i. To slijedi iz sljedeće leme:

Lema 3.4.41. *Neka je $\mathcal{A}$ unitalna algebra i neka su X i Y ireducibilni konačnodimenzionalni $\mathcal{A}-$moduli takvi da anihilator jednoga sadrži anihilator drugoga. Tada su ti anihilatori jednaki i moduli X i Y su izomorfni.*

Dokaz: Neka su $\mathcal{J} = Ann_{\mathcal{A}} X$ i $\mathcal{I} = Ann_{\mathcal{A}} Y$ i pretpostavimo da je $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{I}$. Tada imamo prirodni epimorfizam $\varphi : \mathcal{A}/\mathcal{J} \to \mathcal{A}/\mathcal{I}$. Međutim, $\mathcal{A}/\mathcal{J} \simeq End(X)$ i $\mathcal{A}/\mathcal{I} \simeq End(Y)$, pa φ inducira epimorfizam sa $End(X)$ na $End(Y)$. Kako je algebra $End(X)$ prosta (nema netrivijalnih dvostranih ideala) taj epimorfizam je injektivan, dakle, izomorfizam. To znači da je φ izomorfizam, pa slijedi da je $\mathcal{J} = \mathcal{I}$. Budući da su sve ireducibilne reprezentacije algebre $End(X) \simeq \mathcal{A}/\mathcal{J}$ međusobno ekvivalentne, $\mathcal{A}-$moduli X i Y su izomorfni.

Time je propozicija 3.4.39. u potpunosti dokazana.

Teorem 3.4.42. *Neka je V ireducibilan $(\mathfrak{g}, K)-$modul. Postoje $\rho \in \hat{\mathfrak{m}}$ i $\mu \in \hat{\mathfrak{a}}$ takvi da je V izomorfan nekom subkvocijentu modula $V_{\rho,\mu}$.*

Dokaz: Izaberimo $\gamma \in \hat{\mathfrak{k}}$ tako da je $V(\gamma) \neq \{0\}$. Prema teoremu 3.4.13. tada je $Y = Hom_{\mathfrak{k}}(E^\gamma, V)$ ireducibilan $\mathcal{G}^K-$modul čiji anihilator sadrži $\mathcal{G}^K \cap \mathcal{G}\mathcal{J}^\gamma$. Prema propoziciji 3.4.39. postoje $\rho \in \hat{\mathfrak{m}}$ i $\mu \in \hat{\mathfrak{a}}$ takvi da je $\mathcal{G}^K-$modul Y izomorfan subkvocijentu modula $Hom_{\mathfrak{k}}(E^\gamma, V_{\rho,\mu})$. Sada je prema propoziciji 3.4.14. $(\mathfrak{g}, K)-$modul V izomorfan subkvocijentu od $V_{\rho,\mu}$.

Kao neposrednu posljedicu teorema 3.4.42. i korolara 3.4.31. dobivamo sljedeću tvrdnju koja između ostalog daje drugi dokaz Harish−Chandrinog teorema 3.3.3.:

Korolar 3.4.43. *Neka je V ireducibilan $(\mathfrak{g}, K)-$modul i $\gamma \in \hat{\mathfrak{k}}$. Tada je potprostor $V(\gamma)$ konačno-dimenzionalan i vrijedi*

$$\dim V(\gamma) \leq (\dim E^\gamma) \cdot \max\{mtp(\rho, \gamma);\ \rho \in \hat{\mathfrak{m}}\}.$$

Za $\gamma \in \hat{\mathfrak{k}}$ imamo

$$\tilde{\omega}_\gamma(\mathcal{Z}(\mathfrak{g})) \subseteq \tilde{\omega}_\gamma(\mathcal{G}^K) \subseteq \mathcal{A} \otimes (\mathcal{K}/\mathcal{J}^\gamma)\,.$$

Lema 3.4.44. *Za svaki $\gamma \in \hat{\mathfrak{k}}$ vrijedi:*

(*a*) *$\mathcal{A} \otimes (\mathcal{K}/\mathcal{J}^\gamma)$ je konačno generiran kao $\tilde{\omega}_\gamma(\mathcal{Z}(\mathfrak{g}))-$modul.*

(*b*) *$\mathcal{G}^K/(\mathcal{G}^K \cap \mathcal{G}\mathcal{J}^\gamma)$ je konačno generiran kao $\mathcal{Z}(\mathfrak{g})/(\mathcal{Z}(\mathfrak{g}) \cap \mathcal{G}\mathcal{J}^\gamma)-$modul.*

Dokaz: (*a*) Prema formulaciji teorema o Harish−Chandrinom izomorfizmu na str. 184, $\varphi'|\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$ je izomorfizam algebre $\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$ na algebru $\mathcal{H}^{\tilde{W}}$ $\tilde{W}-$invarijanata u algebri $\mathcal{H}$. Kako je grupa $\tilde{W}$ konačna, $\mathcal{H}$ je konačno generiran kao modul nad $\mathcal{H}^{\tilde{W}} = \varphi'(\mathcal{Z}(\mathfrak{g}))$. Nadalje, prema Chevalleyevom teoremu $\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$ je Noetherin prsten, dakle i $\varphi'(\mathcal{Z}(\mathfrak{g}))$ je Noetherin prsten. Modul nad Noetherinim prstenom je konačno generiran ako i samo ako je Noetherin. Slijedi da je svaki podmodul konačno generiranog modula i sam konačno generiran. Kako je prema propoziciji 3.4.20.

$$\mathcal{H} \supseteq \mathcal{A} \otimes \psi'(\mathcal{Z}(\mathfrak{m})) \supseteq \varphi'(\mathcal{Z}(\mathfrak{g})),$$

zaključujemo da je $\mathcal{A} \otimes \psi'(\mathcal{Z}(\mathfrak{m})) = (I_{\mathcal{A}} \otimes \psi')(\mathcal{A} \otimes \mathcal{Z}(\mathfrak{m}))$ konačno generiran kao modul nad

$$\varphi'(\mathcal{Z}(\mathfrak{g})) = (I_{\mathcal{A}} \otimes \psi')(\tilde{\omega}(\mathcal{Z}(\mathfrak{g})).$$

Međutim, prema teoremu o Harish−Chandrinom izomorfizmu za Liejevu algebru $\mathfrak{m}$, preslikavanje $\psi'|\mathcal{Z}(\mathfrak{m})$ je injektivno. Prema tome, $\mathcal{A} \otimes \mathcal{Z}(\mathfrak{m})$ je konačno generiran kao modul nad $\tilde{\omega}(\mathcal{Z}(\mathfrak{g}))$.

Budući da je $\mathcal{J}^\gamma$ ideal konačne kodimenzije u $\mathcal{K}$, jasno je da je $\mathcal{A} \otimes (\mathcal{K}/\mathcal{J}^\gamma)$ konačno generiran kao modul nad $\mathcal{A}$, dakle, tim više, kao modul nad $\mathcal{A} \otimes (\mathcal{Z}(\mathfrak{m})/(\mathcal{Z}(\mathfrak{m}) \cap \mathcal{J}^\gamma))$. Slijedi da je $\mathcal{A} \otimes (\mathcal{K}/\mathcal{J}^\gamma)$ konačno generiran kao modul nad $\tilde{\omega}_\gamma(\mathcal{Z}(\mathfrak{g}))$.

(*b*) Iz tvrdnje (*a*) slijedi da je i $\tilde{\omega}_\gamma(\mathcal{G}^K)$ konačno generiran kao $\tilde{\omega}_\gamma(\mathcal{Z}(\mathfrak{g}))-$modul. Odatle slijedi tvrdnja (*b*), budući da je po propoziciji 3.4.18. $\mathcal{G}^K \cap \mathcal{G}\mathcal{J}^\gamma$ jezgra antihomomorfizma $\tilde{\omega}_{\mathcal{J}^\gamma}|\mathcal{G}^K = \tilde{\omega}_\gamma$.

Teorem 3.4.45. *Neka je $\gamma \in \hat{\mathfrak{k}}$ i neka je $\chi : \mathcal{Z}(\mathfrak{g}) \to \mathbb{C}$ unitalni homomorfizam. Postoji do na izomorfizam samo konačno mnogo ireducibilnih $(\mathfrak{g}, K)-$modula V s infinitezimalnim karakterom χ takvih da je $V(\gamma) \neq \{0\}$.*

Dokaz: (1) Stavimo $\mathcal{J} = (\operatorname{Ker} \chi)\mathcal{G}$; to je dvostrani ideal u $\mathcal{G}$. Iz tvrdnje (b) leme 3.4.44. slijedi da je algebra $\mathcal{G}^K / \left(\mathcal{G}^K \cap (\mathcal{G}\mathcal{J}^\gamma + \mathcal{J})\right)$ konačnodimenzionalna. Dakle, ta algebra ima samo konačno mnogo klasa ekvivalencije ireducibilnih reprezentacija.

(2) Za ireducibilan $(\mathfrak{g}, K)-$modul V s infinitezimalnim karakterom χ takav da je $V(\gamma) \neq \{0\}$ stavimo $\mathcal{H}_V = Hom_{\mathfrak{k}}(E^\gamma, V)$. Prema teoremu 3.4.13. svaki takav $\mathcal{H}_V$ je ireducibilan $\mathcal{G}^K-$modul i njegov anihilator sadrži $\mathcal{G}^K \cap (\mathcal{G}\mathcal{J}^\gamma + \mathcal{J})$. Dakle, $\mathcal{H}_V$ je ireducibilan $\mathcal{G}^K / \left(\mathcal{G}^K \cap (\mathcal{G}\mathcal{J}^\gamma + \mathcal{J})\right)-$modul. Sada tvrdnja slijedi iz (1), budući da prema teoremu 3.4.13. ako su $\mathcal{H}_V$ i $\mathcal{H}_{V'}$ izomorfni $\mathcal{G}^K-$moduli onda su V i V' izomorfni $(\mathfrak{g}, K)-$moduli.

Neka je sada $\gamma_0 \in \hat{\mathfrak{k}}$ klasa trivijalnog jednodimenzionalnog $\mathfrak{k}-$modula. Za $\mathcal{G}-$modul V tada je

$$V(\gamma_0) = V^{\mathfrak{k}} = \{v \in V;\ x \cdot v = 0\ \ \forall x \in \mathfrak{k}\} = V^K = \{v \in V;\ k \cdot v = v\, q,\ \forall k \in K\}.$$

Kažemo da je V **sferički $\mathcal{G}-$modul** ako je $\dim V^K = 1$. Iz korolara 3.4.43. slijedi da je ireducibilan $(\mathfrak{g}, K)-$modul sferički ako i samo ako je $V^K \neq \{0\}$.

Neka su sada $\rho \in \hat{\mathfrak{m}}$ i $\mu \in \hat{\mathfrak{a}}$. Prema korolaru 3.4.31. ako klasa ρ nije trivijalna onda je $(V_{\rho,\lambda})^K = \{0\}$, a ako je klasa ρ trivijalna, onda je modul $V_{\rho,\lambda}$ sferički.

U daljnjem je $p : \mathcal{G}^K \to \mathcal{A}$ kanonski homomorfizam iz tvrdnje (b) propozicije 3.4.26. To je restrikcija na $\mathcal{G}^K$ projektora $\mathcal{G} \to \mathcal{A}$ definiranog direktnim rastavom $\mathcal{G} = \mathcal{A} \dotplus (\mathcal{G}\mathfrak{k} + \mathfrak{n}\mathcal{G})$.

Propozicija 3.4.46. *Neka je V sferički $(\mathfrak{g}, K)-$modul. Postoji $\mu \in \hat{\mathfrak{a}}$ takav da vrijedi*

$$u \cdot \xi = (p(u))(\mu)\xi \qquad \forall \xi \in V^K \quad i \quad \forall u \in \mathcal{G}^K. \tag{3.29}$$

Dokaz: Budući da je V^K jednodimenzionalan i $\mathcal{G}^K-$invarijantan, postoji unitalni homomorfizam $\zeta : \mathcal{G}^K \to \mathbb{C}$ takav da vrijedi

$$u \cdot \xi = \zeta(u)\xi \qquad \forall \xi \in V^K \quad \text{i} \quad \forall u \in \mathcal{G}^K.$$

Očito vrijedi $\operatorname{Ker} \zeta \supseteq \mathcal{G}^K \cap \mathcal{G}\mathfrak{k}$. Prema tvrdnji (b) propozicije 3.4.26. $\mathcal{G}^K \cap \mathcal{G}\mathfrak{k} = \mathcal{G}^K \cap \mathfrak{k}\mathcal{G}$ je jezgra homomorfizma $p : \mathcal{G}^K \to \mathcal{A}$. Prema tome, postoji unitalni homomorfizam $\zeta' : p(\mathcal{G}^K) \to \mathbb{C}$ takav da je $\zeta = \zeta' \circ p$. Iz tvrdnje (a) slijedi da je $\mathcal{A}$ konačno generiran kao $p(\mathcal{G}^K)-$modul. Stoga je svaki unitalni homomorfizam $p(\mathcal{G}^K) \to \mathbb{C}$ restrikcija unitalnog homomorfizma $\mathcal{A} \to \mathbb{C}$. Svaki takav je oblika $a \mapsto a(\mu)$ za neki $\mu \in \mathfrak{a}^{*\mathbb{C}} = \hat{\mathfrak{a}}$. To znači da za svaki $u \in \mathcal{G}^K$ vrijedi

$$\zeta(u) = \zeta'(p(u)) = (p(u))(\mu).$$

Sada iz teorema 3.4.13. neposredno slijedi:

Propozicija 3.4.47. *Za svaki $\mu \in \hat{\mathfrak{a}}$ postoji do na izomorfizam jedinstven ireducibilan sferički $(\mathfrak{g}, K)-$modul V takav da vrijedi* (3.29).

Bibliografija

[1] N. Bourbaki, *Lie Groups and Lie Algebras*, Ch. 1−3, Springer−Verlag, 2nd printing, Berlin−Heidelberg−New York−London−Paris−Tokyo, 1989; Ch. 4−6, Springer−Verlag, Berlin−Heidelberg−New York, 2002; Ch. 7−9, Springer−Verlag, Berlin−Heidelberg, 2005.

[2] C. Chevalley, *Théorie des groupes de Lie*, Hermann, Paris, 1968.

[3] J. Dixmier, *Enveloping Algebras*, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1996.

[4] W. Fulton and J. Harris, *Representation Theory, A First Course*, Springer−Verlag, New York, 2004.

[5] S. Helgason, *Differential Geometry, Lie Groups, and Symmetric Spaces*, Academic Press, New York−San Francisco−London, 1978.

[6] J.E. Humphreys, *Introduction to Lie Algebras and Representation Theory*, Springer−Verlag, Berlin−Heidelberg−New York, 1972.

[7] A.W. Knapp, *Lie Groups Beyond an Introduction*, 2nd ed., Birkhäuser, Boston−Basel−Berlin, 2002.

[8] A.W. Knapp, *Representations Theory of Semisimple Groups, An Overview Based on Examples*, Princeton Univ. Press, Princeton−Oxford, 1986.

[9] D.Miličić, *Lectures on Lie Groups*, www.math.utah.edu/∼milicic/lie.pdf

[10] N.R. Wallach, *Harmonic Analysis on Homogeneous Spaces*, Marcel Dekker, New York, 1973.

[11] N.R. Wallach, *Real Reductive Groups I*, Academic Press, Boston−San Diego−New York−Berkeley−London−Sydney−Tokyo−Toronto, 1988.

[12] G. Warner, *Harmonic Analysis on Semi-Simple Lie Groups I*, Springer−Verlag, Berlin−Heidelberg−New York, 1972.