

ODABRANA POGLAVLJA TEORIJE REPREZENTACIJA

Prof. dr. sc. Hrvoje Kraljević

Predavanja održana na PMF–Matematičkom odjelu
Sveučilišta u Zagrebu
u zimskom semestru akademske godine 2009./2010.

Zagreb, prosinac 2009.

Sadržaj

1	Osnovni pojmovi teorije reprezentacija	5
1.1	Reprezentacije, reducibilnost, ekvivalencija	5
1.2	Grupovna algebra	15
1.3	Tenzorski produkt	18
2	Reprezentacije konačnih grupa	27
2.1	Relacije ortogonalnosti	27
2.2	Karakter reprezentacije	30
2.3	Dekompozicija regularne reprezentacije	32
2.4	Centralne funkcije	33
2.5	Struktura grupovne algebre $\mathbb{C}[G]$	37
2.6	Osnovna redukcija reprezentacije	39
2.7	Svojstva djeljivosti	43
2.8	Broj jednodimenzionalnih reprezentacija	47
3	Inducirane reprezentacije	49
3.1	Definicija inducirane reprezentacije	49
3.2	Teorem imprimitiviteta	51
3.3	Karakter inducirane reprezentacije	54
3.4	Frobeniusov teorem reciprociteta	55
3.5	Teorem o induciranju u etapama	57
3.6	Restrikcija inducirane reprezentacije	59
3.7	Tenzorski produkt induciranih reprezentacija	62
3.8	Ireducibilnost inducirane reprezentacije	63
3.9	Induciranje za grupovne algebre	65
4	Reprezentacije kompaktnih grupa	77
4.1	Kompaktne grupe i invarijantni integral	77
4.2	Reprezentacije na Hilbertovim prostorima	89
4.3	Peter–Weylov teorem	95
5	Reprezentacije nekih matricnih grupa	99
5.1	Reprezentacije grupa $SO(2)$ i $O(2)$	99
5.2	Reprezentacije grupa $SO(3)$ i $SU(2)$	102
5.3	Sferni harmonici	121

Poglavlje 1

Osnovni pojmovi teorije reprezentacija

1.1 Reprezentacije, reducibilnost, ekvivalencija

Ako je V vektorski prostor nad poljem K sa $L(V)$ ćemo označavati skup svih linearnih operatora $A : V \rightarrow V$. $L(V)$ je asocijativna algebra s operacijama

$$(A + B)v = Av + Bv, \quad (\lambda A)v = \lambda Av, \quad (AB)v = A(Bv), \quad A, B \in L(V), \quad \lambda \in K, \quad v \in V.$$

Jedinični operator $I = I_V$ ($Iv = v \quad \forall v \in V$) je jedinica u algebri $L(V)$. Grupu svih invertibilnih elemenata algebre $L(V)$, tj. grupu svih izomorfizama sa V na V , označavat ćemo sa $GL(V)$.

Kao i svaka asocijativna algebra $L(V)$ ima i strukturu Liejeve algebre. **Liejeva algebra** nad poljem K je vektorski prostor \mathfrak{g} na kome je zadana bilinearna binarna operacija $(x, y) \mapsto [x, y]$ sa sljedeća dva svojstva:

$$(LA1) \quad [x, x] = 0 \quad \forall x \in \mathfrak{g} \quad (\text{antikomutativnost});$$

$$(LA2) \quad [x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0 \quad \forall x, y, z \in \mathfrak{g} \quad (\text{Jacobijev identitet}).$$

Naravno, iz (LA1) slijedi $[x, y] = -[y, x] \quad \forall x, y \in \mathfrak{g}$.

Zadatak 1.1. *Neka je \mathcal{A} asocijativna algebra. Stavimo*

$$[x, y] = xy - yx, \quad x, y \in \mathcal{A}.$$

Dokažite da \mathcal{A} uz tako definiranu operaciju $(x, y) \mapsto [x, y]$ postaje Liejeva algebra.

Zbog definicije u zadatku 1.1. operacija $(x, y) \mapsto [x, y]$ u bilo kojoj Liejevoj algebri \mathfrak{g} obično se zove **komutator**.

Ako je G grupa, grupovnu operaciju najčešće ćemo označavati bez ikakvoga znaka $(a, b) \mapsto ab$, $a, b \in G$ a jedinicu grupe G označavat ćemo sa e (ili sa e_G).

Asocijativnu algebru s jedinicom zvat ćemo **unitalna algebra**. Neka su \mathcal{A} i \mathcal{B} unitalne algebre i neka su $e_{\mathcal{A}}$ i $e_{\mathcal{B}}$ jedinice u tim algebrama. Homomorfizam algebri $\varphi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ sa svojstvom $\varphi(e_{\mathcal{A}}) = e_{\mathcal{B}}$ zvat ćemo **unitalni homomorfizam**.

Definirat ćemo sada pojam reprezentacije za bilo koju od te četiri algebarske strukture (grupa, asocijativna algebra, unitalna algebra i Liejeva algebra):

- (1) **Reprezentacija grupe** G na vektorskom prostoru V je homomorfizam grupe G u grupu $GL(V)$. Drugim riječima, reprezentacija G na V je preslikavanje $\pi: G \rightarrow L(V)$ takvo da vrijedi

$$\pi(ab) = \pi(a)\pi(b) \quad \forall a, b \in G, \quad \pi(e) = I.$$

- (2) **Reprezentacija asocijativne algebre** \mathcal{A} nad poljem K na vektorskom prostoru V nad istim poljem K je homomorfizam algebri $\pi: \mathcal{A} \rightarrow L(V)$. Dakle, reprezentacija \mathcal{A} na V je preslikavanje $\pi: \mathcal{A} \rightarrow L(V)$ takvo da vrijedi

$$\pi(\alpha x + \beta y) = \alpha\pi(x) + \beta\pi(y), \quad \pi(xy) = \pi(x)\pi(y), \quad \forall x, y \in \mathcal{A}, \quad \forall \alpha, \beta \in K.$$

- (3) **Reprezentacija unitalne algebre** \mathcal{A} s jedinicom $e_{\mathcal{A}}$ na vektorskom prostoru V je reprezentacija π asocijativne algebre \mathcal{A} na V za koju je

$$\pi(e_{\mathcal{A}}) = I.$$

- (4) **Reprezentacija Liejeve algebre** \mathfrak{g} nad poljem K na vektorskom prostoru V nad poljem K je homomorfizam Liejevih algebri $\pi: \mathfrak{g} \rightarrow L(V)$. Dakle, reprezentacija \mathfrak{g} na V je preslikavanje $\pi: \mathfrak{g} \rightarrow L(V)$ takvo da vrijedi

$$\pi(\alpha x + \beta y) = \alpha\pi(x) + \beta\pi(y), \quad \pi([x, y]) = \pi(x)\pi(y) - \pi(y)\pi(x), \quad \forall x, y \in \mathfrak{g}, \quad \forall \alpha, \beta \in K.$$

U svakom od ta četiri slučaja vektorski prostor V tada zovemo **prostorom reprezentacije** π . Ako je prostor V konačnodimenzionalan, **reprezentacija** π zove se **konačnodimenzionalna** i tada se prirodan broj (ili nula) $d(\pi) = \dim V$ zove **dimenzija reprezentacije** π .

U slučajevima (2), (3) i (4) definicija se proširuje i na situaciju kad je \mathcal{A} (odnosno, \mathfrak{g}) algebra (odnosno, Liejeva algebra) nad poljem K , a V je vektorski prostor nad nekim proširenjem L polja K . Tada se traži da su svi operatori $\pi(x)$ linearni nad poljem L , a preslikavanje $x \mapsto \pi(x)$ je homomorfizam nad poljem K .

Ako je reprezentacija π injektivni homomorfizam, kažemo da je π **vjerna reprezentacija**. Ako se radi o reprezentaciji grupe G , onda je jezgra

$$H = \ker \pi = \{a \in G; \pi(a) = I\}$$

reprezentacije π normalna podgrupa grupe G i prijelazom na kvocijent dobivamo vjernu reprezentaciju $\tilde{\pi}$ kvocijentne grupe G/H :

$$\tilde{\pi}(aH) = \pi(a), \quad aH \in G/H.$$

Slično, ako se radi o reprezentaciji asocijativne, unitalne ili Liejeve algebre \mathcal{A} , onda je jezgra

$$\mathcal{I} = \ker \pi = \{a \in \mathcal{A}; \pi(a) = 0\}$$

reprezentacije π ideal u toj algebri \mathcal{A} i prijelazom na kvocijent dobivamo vjernu reprezentaciju asocijativne, unitalne ili Liejeve kvocijentne algebre \mathcal{A}/\mathcal{I} :

$$\tilde{\pi}(a + \mathcal{I}) = \pi(x), \quad x + \mathcal{I} \in \mathcal{A}/\mathcal{I}.$$

Zadatak 1.2. Neka je S_n simetrična grupa reda n tj. grupa svih permutacija skupa $\{1, 2, \dots, n\}$ i neka je V n -dimenzionalan vektorski prostor nad poljem K s bazom $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$. Za $\sigma \in S_n$ neka je $\pi(\sigma) \in L(V)$ definiran sa

$$\pi(\sigma)e_i = e_{\sigma(i)}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Dokažite da je π vjerna reprezentacija grupe S_n na prostoru V .

Zadatak 1.3. Neka je V realan ili kompleksan konačnodimenzionalan vektorski prostor i neka je π neprekidna reprezentacija aditivne grupe \mathbb{R} na prostoru V :

$$\pi(t+s) = \pi(t)\pi(s), \quad t, s \in \mathbb{R}; \quad \pi(0) = I.$$

(a) Dokažite da je preslikavanje $\pi : \mathbb{R} \rightarrow L(V)$ diferencijabilno.

(b) Dokažite da za

$$A = \left. \frac{d}{dt} \pi(t) \right|_{t=0} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\pi(t) - I}{t}$$

vrijedi

$$\pi(t) = e^{tA}.$$

Pri tome je za $B \in L(V)$ operator e^B definiran konvergentnim redom

$$e^B = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} B^k.$$

Uputa za (a) Uočite da iz neprekidnosti preslikavanja π slijedi da je

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \int_0^t \pi(t) dt = \pi(0) = I.$$

Odatle zaključite da postoji $\alpha > 0$ takav da je operator

$$B = \int_0^\alpha \pi(t) dt$$

regularan. Zatim dokažite da vrijedi

$$\pi(s) = B^{-1} \int_s^{s+\alpha} \pi(t) dt \quad \forall s \in \mathbb{R}.$$

U daljnjem je stalno \mathcal{A} oznaka za bilo koju od četiri algebarske strukture. Neka su π i ρ reprezentacije od \mathcal{A} na vektorskim prostorima V i W nad poljem K . Za linearan operator $A : V \rightarrow W$ kažemo da je \mathcal{A} -**ekvivarijantan** ako vrijedi

$$A\pi(a) = \rho(a)A \quad \forall a \in \mathcal{A}.$$

Drugi naziv za takav operator A je **operator preplitanja** reprezentacija π i ρ . Skup svih takvih označavat ćemo sa $Hom_{\mathcal{A}}(V, W)$. To je potprostor prostora $L(V, W)$ svih linearnih operatora sa V u W . Kažemo da je reprezentacija π **ekvivalentna** reprezentaciji ρ i pišemo $\pi \simeq \rho$ ako postoji $A \in Hom_{\mathcal{A}}(V, W)$ koji je izomorfizam prostora V na prostor W . Očito je \simeq relacija ekvivalencije.

Neka je π reprezentacija od \mathcal{A} na vektorskom prostoru V . **Potprostor** W prostora V zove se π -**invarijantan** ako je invarijantan u odnosu na svaki operator $\pi(a)$, $a \in \mathcal{A}$:

$$w \in W, \quad a \in \mathcal{A} \quad \implies \quad \pi(a)w \in W.$$

Očito su suma i presjek bilo koje familije π -invarijantnih potprostora također π -invarijantni potprostori.

Ako je W π -invarijantan potprostor onda restrikcijom i prijelazom na kvocijent možemo definirati reprezentaciju π_W na prostoru W i reprezentaciju $\pi_{V/W}$ na prostoru V/W :

$$\pi_W(a) = \pi(a)|_W \in L(W); \quad \pi_{V/W}(a)(v+W) = \pi(a)v+W, \quad a \in \mathcal{A}, \quad v \in V.$$

π_W se zove **subreprezentacija** a $\pi_{V/W}$ **kvocijentna reprezentacija** reprezentacije π . Kombinacijom ove dvije konstrukcije reprezentacija dolazimo do tzv. **subkvocijentne reprezentacije**: ako su U i W π -invarijantni potprostori od V i ako je $U \subseteq W$ onda je $\pi_{W/U}$ kvocijentna reprezentacija subreprezentacije π_W (ili subreprezentacija kvocijentne reprezentacije $\pi_{V/U}$).

Neka je π reprezentacija od \mathcal{A} na konačnodimenzionalnom vektorskom prostoru V i neka je W π -invarijantan potprostor. Izaberimo bazu $e' = \{e_1, \dots, e_k\}$ potprostora W i dopunimo je do baze $e = \{e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_n\}$ prostora V . Tada je $e'' = \{e_{k+1} + W, \dots, e_n + W\}$ baza kvocijentnog prostora V/W . Ako za $a \in \mathcal{A}$ sa $\pi(a)[e]$, $\pi_W(a)[e']$ i $\pi_{V/W}(a)[e'']$ označimo redom matrice operatora $\pi(a)$, $\pi_W(a)$ i $\pi_{V/W}(a)$ u bazama e , e' i e'' onda je

$$\pi(a)[e] = \begin{bmatrix} \pi_W(a)[e'] & \vdots & A(a) \\ \dots\dots\dots & \vdots & \dots\dots\dots \\ 0 & \vdots & \pi_{V/W}(a)[e''] \end{bmatrix},$$

pri čemu je $A(a)$ neka matrica sa k redaka i $n - k$ stupaca.

Reprezentacija π od \mathcal{A} na vektorskom prostoru V zove se **ireducibilna** ako postoje točno dva π -invarijantna potprostora od V . To znači da je $V \neq \{0\}$ i da su trivijalni potprostori $\{0\}$ i V jedini π -invarijantni potprostori od V , odnosno da V nema netrivialnih π -invarijantnih potprostora. Reprezentacija je **reducibilna** ako nije ireducibilna.

Zadatak 1.4. *Pretpostavimo da je u zadatku 1.2. K polje karakteristike 0. Dokažite da su tada*

$$W = \left\{ \sum_{i=1}^n \xi_i e_i; \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n \in K, \sum_{i=1}^n \xi_i = 0 \right\} \quad i \quad U = Ku, \quad \text{gdje je} \quad u = \sum_{i=1}^n e_i,$$

π -invarijantni potprostori i da je $V = W \dot{+} U$. Nadalje, dokažite da je reprezentacija π_W ireducibilna.

Uputa za drugu tvrdnju: Neka je $\{0\} \neq X \leq W$ π_W -invarijantan potprostor. Ako je $x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \dots + \xi_n e_n \in X$ i $x \neq 0$ tada $x \notin U$ pa postoje $i \neq j$ takvi da je $\xi_i \neq \xi_j$. Sada izračunajte $\pi(\sigma_{ij})x - x$, gdje je $\sigma_{ij} \in S_n$ transpozicija $\sigma_{ij}(i) = j$, $\sigma_{ij}(j) = i$, $\sigma_{ij}(k) = k$ za $k \neq i$ i $k \neq j$. Zaključite da je $e_i - e_j \in X$, a zatim djelovanjem $\pi(\sigma)$, $\sigma \in S_n$, da su $e_p - e_q \in X$ za sve $p, q \in \{1, 2, \dots, n\}$. Odatle zaključite da je $X = W$.

Zadatak 1.5. *Neka je \mathcal{P} vektorski prostor svih polinomijalnih funkcija $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$. Dokažite da je sa*

$$[\pi(t)f](s) = f(s - t), \quad t, s \in \mathbb{R}, \quad f \in \mathcal{P},$$

zadana reducibilna reprezentacija π aditivne grupe \mathbb{R} na prostoru \mathcal{P} . Odredite sve π -invarijantne potprostore od \mathcal{P} . Za konačnodimenzionalan π -invarijantan potprostor V dokažite da je subreprezentacija π_V neprekidna i izračunajte

$$\left. \frac{d}{dt} \pi_V(t) \right|_{t=0}.$$

Neka je π reprezentacija grupe G na vektorskom prostoru V . Stavimo

$$V^G = \{v \in V; \pi(a)v = v \quad \forall a \in G\}.$$

Vektori iz V^G zovu se **G -invarijante** reprezentacije π . Potprostor G -invarijanata V^G je očito π -invarijantan. Štoviše, svaki potprostor od V^G je π -invarijantan.

Neka su π i ρ reprezentacije grupe G na vektorskim prostorima V i W nad istim poljem K . Na prostoru $L(V, W)$ tada možemo definirati reprezentaciju τ grupe G na sljedeći način:

$$\tau(a)(A) = \rho(a)A\pi(a^{-1}), \quad A \in L(V, W), \quad a \in G.$$

Tada je očito $Hom_G(V, W)$ upravo τ -invarijantan potprostor $L(V, W)^G$ svih G -invarijanata reprezentacije τ .

Neka je sada π reprezentacija Liejeve algebre \mathfrak{g} na vektorskom prostoru V . Tada se **\mathfrak{g} -invarijantama** zovu vektori π -invarijantnog potprostora

$$V^{\mathfrak{g}} = \{v \in V; \pi(x)v = 0 \quad \forall x \in \mathfrak{g}\}$$

Slično kao kod grupa, ako su π i ρ reprezentacije Liejeve algebre \mathfrak{g} na vektorskim prostorima V i W na prostoru $L(V, W)$ možemo definirati reprezentaciju τ od \mathfrak{g} na sljedeći način:

$$\tau(x)(A) = \rho(x)A - A\pi(x), \quad A \in L(V, W), \quad x \in \mathfrak{g}.$$

Tada je $Hom_{\mathfrak{g}}(V, W)$ upravo τ -invarijantan potprostor $L(V, W)^{\mathfrak{g}}$ svih \mathfrak{g} -invarijanata reprezentacije τ .

Neka je π reprezentacija grupe G na vektorskom prostoru V nad poljem K . Na dualnom prostoru $V' = L(V, K)$ definiramo tzv. **kontragredijentnu** reprezentaciju π^t reprezentacije π :

$$\pi^t(a)f = f \circ \pi(a^{-1}), \quad \text{tj.} \quad (\pi^t(a)f)(v) = f(\pi(a^{-1})v), \quad a \in G, \quad v \in V, \quad f \in V'.$$

Analogno, ako je π reprezentacija Liejeve algebre \mathfrak{g} na vektorskom prostoru V tada se na dualnom prostoru V' kontragredijentna reprezentacija π^t reprezentacije π definira ovako:

$$\pi^t(x)f = -f \circ \pi(x), \quad \text{tj.} \quad (\pi^t(x)f)(v) = -f(\pi(x)v), \quad x \in \mathfrak{g}, \quad v \in V, \quad f \in V'.$$

Ovdje se u stvari radi o prethodnim konstrukcijama za trivijalnu reprezentaciju ρ grupe G na jednodimenzionalnom prostoru $W = K$ ($\rho(a) = 1 \quad \forall a \in G$), odnosno, za trivijalnu reprezentaciju ρ Liejeve algebre \mathfrak{g} na jednodimenzionalnom prostoru $W = K$ ($\rho(x) = 0 \quad \forall x \in \mathfrak{g}$).

Neka je sada zadana familija reprezentacija $\pi_i, i \in I$, od \mathcal{A} na vektorskim prostorima V_i nad istim poljem K . Tada na direktnoj sumi

$$\coprod_{i \in I} V_i = \left\{ f : I \rightarrow \bigcup_{i \in I} V_i; f(i) \in V_i \quad \forall i \in I, \text{ skup } \{i \in I; f(i) \neq 0\} \text{ je konačan} \right\}$$

definiramo reprezentaciju π od \mathcal{A} na sljedeći način:

$$(\pi(x)f)(i) = \pi_i(x)f(i), \quad x \in \mathcal{A}, \quad i \in I.$$

π se zove **direktna suma reprezentacija** π_i . Naravno, ako je π neka reprezentacija od \mathcal{A} na vektorskom prostoru V i ako su $V_i, i \in I$, π -invarijantni potprostori od V takvi da je V njihova direktna suma, onda je reprezentacija π ekvivalentna direktnoj sumi njenih subreprezentacija π_{V_i} .

Reprezentacija π od \mathcal{A} na vektorskom prostoru V zove se **potpuno reducibilna**, ako za svaki π -invarijantan potprostor W postoji njegov π -invarijantan direktni komplement, tj. postoji π -invarijantan potprostor U takav da je $V = W \dot{+} U$. Naravno, svaka je ireducibilna reprezentacija potpuno reducibilna.

Zadatak 1.6. Neka je π reprezentacija od \mathcal{A} na vektorskom prostoru V .

- (a) Neka su W i U π -invarijantni potprostori od V takvi da je $V = W \dot{+} U$. Dokažite da je tada $\pi_{V/W} \simeq \pi_U$.
- (b) Neka su R , S i T π -invarijantni potprostori takvi da je $V = R \dot{+} S = R \dot{+} T$. Dokažite da je tada $\pi_S \simeq \pi_T$.

Teorem 1.1.1. Neka je π potpuno reducibilna reprezentacija od \mathcal{A} na vektorskom prostoru V . Tada je svaka njena subkvocijentna reprezentacija potpuno reducibilna.

Dokaz: Neka je W π -invarijantan potprostor od V i neka je U π_W -invarijantan potprostor od W . Tada je U π -invarijantan potprostor od V pa zbog potpune reducibilnosti reprezentacije π postoji π -invarijantan potprostor S od V takav da je $V = U \dot{+} S$. Tada je $T = S \cap W$ π_W -invarijantan potprostor od W i vrijedi $W = U \dot{+} T$. Time je dokazano da je svaka subreprezentacija potpuno reducibilne reprezentacije i sama potpuno reducibilna.

Neka je sada U $\pi_{V/W}$ -invarijantan potprostor od V/W . Neka je $\varphi : V \rightarrow V/W$ kvocijentno preslikavanje, $\varphi(v) = v + W$. Tada je $S = \varphi^{-1}(U) = \{v \in V; v + W \in U\}$ π -invarijantan potprostor od V pa zbog potpune reducibilnosti reprezentacije π postoji potprostor T od V takav da je $V = S \dot{+} T$. Lako se vidi da je tada $R = \varphi(T)$ $\pi_{V/W}$ -invarijantan potprostor od V/W i da vrijedi $V/W = U \dot{+} R$. Time je dokazano da je svaka kvocijentna reprezentacija potpuno reducibilne reprezentacije i sama potpuno reducibilna.

Teorem 1.1.2. Neka je π reprezentacija od \mathcal{A} na vektorskom prostoru V . Pretpostavimo da postoje π -invarijantni potprostori V_i , $i \in I$, takvi da je

$$V = \sum_{i \in I} V_i$$

i da su sve subreprezentacije π_{V_i} ireducibilne.

- (a) Reprezentacija π je potpuno reducibilna.
- (b) Ako je W π -invarijantan potprostor od V onda postoji $J \subseteq I$ takav da je suma potprostora

$$U = \sum_{j \in J} V_j$$

direktna i da je $V = W \dot{+} U$.

- (c) Postoji $K \subseteq I$ takav da je

$$V = \sum_{k \in K} V_k$$

pri čemu je ta suma potprostora direktna.

Dokaz: Očito i (a) i (c) slijede iz (b). Dokažimo (b) Neka je \mathcal{S} skup svih podskupova $J \subseteq I$ takvih da je suma potprostora

$$W + \sum_{j \in J} V_j$$

direktna. Skup \mathcal{S} je s relacijom inkluzije parcijalno uređen. Dokažimo da taj parcijalno uređen skup zadovoljava uvjet Zornove leme. Neka je \mathcal{T} lanac u \mathcal{S} . Stavimo

$$K = \bigcup_{J \in \mathcal{T}} J.$$

Dokažimo da je tada suma potprostora

$$W + \sum_{k \in K} V_k \quad (1.1)$$

direktna. Neka su $k_1, k_2, \dots, k_n \in K$ međusobno različiti i neka su $w \in W$, $v_1 \in V_{k_1}$, $v_2 \in V_{k_2}$, \dots , $v_n \in V_{k_n}$ takvi da je $w + v_1 + v_2 + \dots + v_n = 0$. Budući da je \mathcal{T} lanac, postoji $J \in \mathcal{T}$ takav da je $k_1, k_2, \dots, k_n \in J$. Kako je $J \in \mathcal{S}$, suma potprostora

$$W + \sum_{j \in J} V_j$$

je direktna, pa iz jednakosti $w + v_1 + v_2 + \dots + v_n = 0$ slijedi da je $w = v_1 = v_2 = \dots = v_n = 0$. Time je dokazano da je suma potprostora (1.1) direktna. To znači da je $K \in \mathcal{S}$, a očito je K gornja ograda lanca \mathcal{T} . Dakle, parcijalno uređen skup \mathcal{S} zadovoljava uvjet Zornove leme. Stoga u skupu \mathcal{S} postoji neki maksimalni element J . Stavimo

$$U = \sum_{j \in J} V_j, \quad X = W + U = W \dot{+} U.$$

Treba dokazati da je $X = V$. Očito je X π -invarijantan potprostor od V . Stoga je za bilo koji $i \in I$ $X \cap V_i$ π_{V_i} -invarijantni potprostor od V_i . Kako je po pretpostavci reprezentacija π_{V_i} ireducibilna, to je ili $X \cap V_i = V_i$, odnosno, $V_i \subseteq X$, ili je $X \cap V_i = \{0\}$. Pretpostavimo da je $X \cap V_i = \{0\}$. To znači da je suma $X + V_i$ direktna, pa slijedi da je suma potprostora

$$W + \sum_{j \in J \cup \{i\}} V_j$$

direktna. To znači da je $J \cup \{i\} \in \mathcal{S}$. No to se protivi maksimalnosti J u \mathcal{S} jer je očito $J \subsetneq J \cup \{i\}$. Dakle, $X \cap V_i = \{0\}$ je nemoguće, pa slijedi da je $V_i \subseteq X$ za svaki $i \in I$. No kako je V suma potprostora V_i , $i \in I$, slijedi $X = V$. Time je tvrdnja (b) u potpunosti dokazana.

U konačnodimenzionalnom slučaju situacija je znatno jednostavnija. Naime, ako je π reprezentacija od \mathcal{A} na konačnodimenzionalnom vektorskom prostoru $V \neq \{0\}$, onda iz konačnodimenzionalnosti lako slijedi da svaki π -invarijantan potprostor $W \neq \{0\}$ sadrži π -invarijantan potprostor U takav da je reprezentacija π_U ireducibilna. Stoga iz teorema 1.1.2. neposredno slijedi:

Teorem 1.1.3. *Neka je π reprezentacija od \mathcal{A} na konačnodimenzionalnom vektorskom prostoru $V \neq \{0\}$. Sljedeća su svojstva međusobno ekvivalentna:*

(a) *Reprezentacija π je potpuno reducibilna.*

(b) *Postoje π -invarijantni potprostori V_i , $i \in I$, takvi da su sve reprezentacije π_{V_i} ireducibilne i da je*

$$V = \sum_{i \in I} V_i.$$

(c) *Postoje π -invarijantni potprostori V_1, V_2, \dots, V_n takvi da su reprezentacije $\pi_{V_1}, \pi_{V_2}, \dots, \pi_{V_n}$ ireducibilne i da je*

$$V = V_1 \dot{+} V_2 \dot{+} \dots \dot{+} V_n.$$

U situaciji iz tvrdnje (c) teorema 1.1.3. neka je $e(j) = \{e_1^{(j)}, e_2^{(j)}, \dots, e_{m_j}^{(j)}\}$ baza potprostora V_j i neka je e baza prostora V dobivena iz tih baza:

$$e = \{e_1^{(1)}, e_2^{(1)}, \dots, e_{m_1}^{(1)}, e_1^{(2)}, e_2^{(2)}, \dots, e_{m_2}^{(2)}, \dots, e_1^{(n)}, e_2^{(n)}, \dots, e_{m_n}^{(n)}\}.$$

Nadalje, neka je za $a \in G$ $\pi(a)[e]$ matrica operatora $\pi(a)$ u bazi e i $\pi_{V_j}(a)[e(j)]$ matrica operatora $\pi_{V_j}(a)$ u bazi $e(j)$, $j = 1, 2, \dots, n$. Lako se vidi da je tada $\pi(a)[e]$ blok–dijagonalna matrica:

$$\pi(a)[e] = \begin{bmatrix} \pi_{V_1}(a)[e(1)] & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \pi_{V_2}(a)[e(2)] & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \pi_{V_n}(a)[e(n)] \end{bmatrix}.$$

Teorem 1.1.4. (Schurova lema) *Neka su π i ρ ireducibilne reprezentacije od \mathcal{A} na vektorskim prostorima V i W nad poljem K .*

- (a) *Ako reprezentacije π i ρ nisu ekvivalentne onda je $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(V, W) = \{0\}$.*
- (b) *$\text{End}_{\mathcal{A}}(V) = \text{Hom}_{\mathcal{A}}(V, V)$ je tijelo.*
- (c) *Ako je prostor V konačnodimenzionalan i ako je polje K algebarski zatvoreno, onda je $\text{End}_{\mathcal{A}}(V) = \{\lambda I; \lambda \in K\}$.*

Dokaz: (a) Neka je $A \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(V, W)$. Tada je jezgra $N(A) = \{v \in V; Av = 0\}$ operatora A ρ –invarijantan potprostor:

$$v \in N(A), \quad a \in G \quad \implies \quad A\pi(a)v = \rho(a)Av = 0 \quad \implies \quad \pi(a)v \in N(A).$$

Kako je reprezentacija π ireducibilna, slijedi $N(A) = \{0\}$ ili $N(A) = V$. Pretpostavimo da je $N(A) = \{0\}$, tj. da je A injekcija. Tada je područje vrijednosti $R(A) = \{Av; v \in V\}$ potprostor od W različit od $\{0\}$. No taj je potprostor ρ –invarijantan. Doista, neka je $w \in R(A)$ i $a \in G$. Neka je $v \in V$ takav da je $w = Av$. Tada je

$$\rho(a)w = \rho(a)Av = A\pi(a)v \in R(A).$$

Kako je reprezentacija ρ ireducibilna i $R(A) \neq \{0\}$, slijedi $R(A) = W$. No tada je A izomorfizam pa slijedi $\pi \simeq \rho$ suprotno pretpostavci. Ova kontradikcija pokazuje da $N(A) = \{0\}$ nije moguće. Zaključujemo da je $N(A) = V$, odnosno, $A = 0$. Dakle, dokazali smo da je $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(V, W) = \{0\}$.

(b) Dokaz tvrdnje (a) pokazuje da je svaki $A \in \text{End}_{\mathcal{A}}(V) \setminus \{0\}$ invertibilan. Dakle, $\text{End}_{\mathcal{A}}(V)$ je tijelo.

(c) Neka je $A \in \text{End}_{\mathcal{A}}(V)$. Kako je prostor V konačnodimenzionalan i polje K je algebarski zatvoreno, spektar $\sigma(A)$ operatora A je neprazan. Neka je $\lambda \in \sigma(A)$. Tada je operator $A - \lambda I$ iz $\text{End}_{\mathcal{A}}(V)$ singularan, a kako je prema tvrdnji (b) $\text{End}_{\mathcal{A}}(V)$ tijelo, slijedi $A - \lambda I = 0$, odnosno, $A = \lambda I$.

Teorem 1.1.5. *Neka je π ireducibilna konačnodimenzionalna reprezentacija grupe G ili Liejeve algebre \mathfrak{g} . Tada je njoj kontragredijentna reprezentacija π^t također ireducibilna.*

Dokaz: Pretpostavimo da se radi o reprezentaciji grupe G . Neka je $U \subseteq V'$ π^t –invarijantan potprostor. Tada je njegov anihilator

$$U^\circ = \{x \in V; f(x) = 0 \quad \forall f \in U\}$$

potprostor od V koji je π -invarijantan:

$$x \in U^\circ, a \in G, f \in U \quad \Longrightarrow \quad f(\pi(a)x) = (\pi^t(a^{-1})f)(x) = 0,$$

jer je $\pi^t(a^{-1})f \in U$. Dakle,

$$x \in U^\circ, a \in G \quad \Longrightarrow \quad \pi(a)x \in U^\circ.$$

Kako je reprezentacija π ireducibilna, slijedi da je ili $U^\circ = \{0\}$ ili $U^\circ = V$. Znamo da je

$$\dim V' = \dim V \quad \text{i} \quad \dim U^\circ = \dim V - \dim U.$$

Dakle, ili je $\dim U = \dim V'$, tj. $U = V'$, ili je $\dim U = 0$, tj. $U = \{0\}$. Time je dokazano da je reprezentacija π^t ireducibilna.

Zadatak 1.7. *Dokažite teorem 1.1.5. u slučaju reprezentacije Liejeve algebre.*

Zadatak 1.8. *Neka su π i ρ reprezentacije od \mathcal{A} na vektorskim prostorima V i W . Ako je X ρ -invarijantan potprostor od W tada prostor $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(V, X)$ možemo na prirodan način identificirati s potprostorom*

$$\{A \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(V, W); AV \subseteq X\}$$

prostora $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(V, W)$. Ukoliko je $W = X_1 \dot{+} X_2 \dot{+} \cdots \dot{+} X_n$, pri čemu su X_i ρ -invarijantni potprostori od W dokažite da uz spomenutu identifikaciju prostora $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(V, X_i)$ s potprostorima od $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(V, W)$ vrijedi

$$\text{Hom}_{\mathcal{A}}(V, W) = \text{Hom}_{\mathcal{A}}(V, X_1) \dot{+} \text{Hom}_{\mathcal{A}}(V, X_2) \dot{+} \cdots \dot{+} \text{Hom}_{\mathcal{A}}(V, X_n).$$

Zadatak 1.9. *Neka su π i ρ reprezentacije od \mathcal{A} na vektorskim prostorima V i W .*

- (a) *Ako je X π -invarijantan potprostor prostora V , konstruirajte izomorfizam prostora $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(V/X, W)$ s potprostorom*

$$\{A \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(V, W); A|X = 0\}$$

prostora $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(V, W)$.

- (b) *Ako je $V = X_1 \dot{+} X_2 \dot{+} \cdots \dot{+} X_n$, gdje su X_i , $1 \leq i \leq n$, π -invarijantni potprostori prostora V , konstruirajte izomorfizme prostora $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(X_i, W)$ s potprostorima \mathcal{X}_i prostora $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(V, W)$ i to tako da bude*

$$\text{Hom}_{\mathcal{A}}(V, W) = \mathcal{X}_1 \dot{+} \mathcal{X}_2 \dot{+} \cdots \dot{+} \mathcal{X}_n.$$

Teorem 1.1.6. *Neka je π potpuno reducibilna reprezentacija od \mathcal{A} na konačnodimenzionalnom prostoru V nad algebarski zatvorenim poljem K i neka je ρ ireducibilna reprezentacija od \mathcal{A} na prostoru W nad poljem K . Neka je $V = V_1 \dot{+} V_2 \dot{+} \cdots \dot{+} V_n$, pri čemu je svaki od potprostora V_i π -invarijantan i takav da je pripadna subreprezentacija π_{V_i} ireducibilna. Tada je*

$$|\{i \in \{1, 2, \dots, n\}; \pi_{V_i} \simeq \rho\}| = \dim \text{Hom}_{\mathcal{A}}(W, V) = \dim \text{Hom}_{\mathcal{A}}(V, W).$$

(Pri tome $|S|$ označava broj elemenata konačnog skupa S).

Dokaz: Prema zadatku 1.8. vrijedi

$$\text{Hom}_{\mathcal{A}}(W, V) = \text{Hom}_{\mathcal{A}}(W, V_1) \dot{+} \text{Hom}_{\mathcal{A}}(W, V_2) \dot{+} \cdots \dot{+} \text{Hom}_{\mathcal{A}}(W, V_n). \quad (1.2)$$

Nadalje, prema Schurovoj lemi (teorem 1.1.4.) vrijedi

$$\dim \text{Hom}_{\mathcal{A}}(W, V_i) = \begin{cases} 1 & \text{ako je } \pi_{V_i} \simeq \rho \\ 0 & \text{ako je } \pi_{V_i} \not\simeq \rho. \end{cases}$$

Odatle iz (1.1) slijedi jednakost

$$\dim \text{Hom}_{\mathcal{A}}(W, V) = |\{i \in \{1, 2, \dots, n\}; \pi_{V_i} \simeq \rho\}|.$$

Sasvim analogno, pomoću zadatka 1.9. dobivamo jednakost

$$\dim \text{Hom}_{\mathcal{A}}(V, W) = |\{i \in \{1, 2, \dots, n\}; \pi_{V_i} \simeq \rho\}|.$$

U najvećem dijelu ovog kolegija bavit ćemo se isključivo s reprezentacijama na kompleksnim i na realnim vektorskim prostorima. Ako je K tome prostor unitaran, uz određene uvjete imamo potpunu reducibilnost:

Teorem 1.1.7. *Neka je π konačnodimenzionalna reprezentacija od \mathcal{A} na realnom ili kompleksnom unitarnom prostoru V . Pretpostavimo da vrijedi $\pi(\mathcal{A})^* = \pi(\mathcal{A})$, tj. da je adjungiranje operatora $A \mapsto A^*$ permutacija skupa operatora reprezentacije $\pi(\mathcal{A}) = \{\pi(a); a \in \mathcal{A}\}$. Tada je reprezentacija π potpuno reducibilna.*

Dokaz: Neka je X π -invarijantan potprostor od V . Prema teoremu o ortogonalnoj projekciji tada je

$$V = X \dot{+} X^\perp \quad \text{gdje je} \quad X^\perp = \{v \in V; (v|x) = 0 \ \forall x \in X\}.$$

Neka je $v \in X^\perp$ i neka je $a \in \mathcal{A}$. Po pretpostavci postoji $b \in \mathcal{A}$ takav da je $\pi(a) = \pi(b)^*$. Sada za proizvoljan $x \in X$ imamo $\pi(b)x \in X$, dakle, $(\pi(a)v|x) = (v|\pi(b)x) = 0$. Dakle,

$$v \in X^\perp \quad \implies \quad \pi(a)v \in X^\perp \quad \forall a \in \mathcal{A},$$

i time je dokazano da je reprezentacija π potpuno reducibilna.

Važna primjena teorema 1.1.7. je na unitarnu reprezentaciju π grupe G , tj. takvu da je svaki operator reprezentacije $\pi(g)$, $g \in G$, unitaran:

$$\pi(g)^* = \pi(g^{-1}) \quad \forall g \in G.$$

Druga važna primjena je na antihermitsku reprezentaciju π realne Liejeve algebre \mathfrak{g} na realnom ili kompleksnom unitarnom prostoru V , tj. takvu da je svaki operator reprezentacije $\pi(x)$, $x \in \mathfrak{g}$, antihermitski:

$$\pi(x)^* = -\pi(x) \quad \forall x \in \mathfrak{g}.$$

1.2 Grupovna algebra

Neka je G grupa i K polje. Sa $K[G]$ ćemo označavati vektorski prostor svih funkcija $\varphi : G \rightarrow K$ za koje je nosač

$$\text{Supp } \varphi = \{a \in G; \varphi(a) \neq 0\}$$

konačan skup. Za $a \in G$ definiramo $\delta_a \in K[G]$ sa

$$\delta_a(b) = \begin{cases} 1 & \text{ako je } b = a \\ 0 & \text{ako je } b \neq a \end{cases}.$$

Tada je očito $\{\delta_a; a \in G\}$ baza vektorskog prostora $K[G]$ nad poljem K ; za svaku funkciju $\varphi \in K[G]$ je

$$\varphi = \sum_{a \in G} \varphi(a) \delta_a. \quad (1.3)$$

Za $\varphi, \psi \in K[G]$ definiramo njihovu **konvoluciju** $\varphi * \psi : G \rightarrow K$ na sljedeći način:

$$(\varphi * \psi)(a) = \sum_{b \in G} \varphi(b) \psi(b^{-1}a), \quad a \in G.$$

Gornja suma je dobro definirana jer je samo konačno mnogo njenih članova različito od nule.

Propozicija 1.2.1. (a) Za $\varphi, \psi \in K[G]$ je $\varphi * \psi \in K[G]$.

(b) Konvolucija $(\varphi, \psi) \mapsto \varphi * \psi$ definira na $K[G]$ strukturu unitalne algebre. Jedinica u algebri $K[G]$ je δ_e .

(c) Za $a, b \in G$ vrijedi $\delta_a * \delta_b = \delta_{ab}$.

Zadatak 1.10. Dokažite propoziciju 1.2.1.

Unitalna algebra $K[G]$ zove se **grupovna algebra** grupe G nad poljem K . Primijetimo da se za konačnu grupu G prostor $K[G]$ sastoji od svih funkcija sa G u K . U tom slučaju je $\dim K[G] = |G|$. Ako je grupa G beskonačna, prostor $K[G]$ je beskonačnodimenzionalan.

Teorem 1.2.2. (a) Neka je π reprezentacija grupe G na vektorskom prostoru V nad poljem K . Za $\varphi \in K[G]$ definiramo $\tilde{\pi}(\varphi) : V \rightarrow V$ relacijom

$$\tilde{\pi}(\varphi) = \sum_{a \in G} \varphi(a) \pi(a).$$

Tada je $\varphi \mapsto \tilde{\pi}(\varphi)$ reprezentacija unitalne algebre $K[G]$ na vektorskom prostoru V .

(b) Neka je ρ reprezentacija unitalne algebre $K[G]$ na vektorskom prostoru V nad poljem K . Za $a \in G$ definiramo $\hat{\rho}(a) : V \rightarrow V$ relacijom

$$\hat{\rho}(a) = \rho(\delta_a).$$

Tada je $a \mapsto \hat{\rho}(a)$ reprezentacija grupe G na vektorskom prostoru V .

(c) Preslikavanja $\pi \mapsto \tilde{\pi}$ iz (a) i $\rho \mapsto \hat{\rho}$ iz (b) su međusobno inverzna. Tj. ako je π reprezentacija od G onda je $\hat{\tilde{\pi}} = \pi$, a ako je ρ reprezentacija od $K[G]$ onda je $\tilde{\hat{\rho}} = \rho$.

- (d) Uz oznaku iz (a) potprostor X prostora V je π -invarijantan ako i samo ako je on $\tilde{\pi}$ -invarijantan.
- (e) Neka su π i ρ reprezentacije grupe G na vektorskim prostorima V i W nad poljem K i $\tilde{\pi}$ i $\hat{\rho}$ pripadne reprezentacije unitalne algebre $K[G]$ kao u (a). Tada je

$$\text{Hom}_G(V, W) = \text{Hom}_{K[G]}(V, W).$$

Posebno, reprezentacije π i ρ grupe G su ekvivalentne ako i samo ako su ekvivalentne pripadne reprezentacije $\tilde{\pi}$ i $\hat{\rho}$ unitalne algebre $K[G]$.

Dokaz: (a) Očito je preslikavanje $\varphi \mapsto \tilde{\pi}(\varphi)$ linearno. Nadalje, za $\varphi, \psi \in K[G]$ imamo

$$\tilde{\pi}(\varphi * \psi) = \sum_{a \in G} (\varphi * \psi)(a) \pi(a) = \sum_{a \in G} \left(\sum_{b \in G} \varphi(b) \psi(b^{-1}a) \right) \pi(a) = \sum_{b \in G} \varphi(b) \left(\sum_{a \in G} \psi(b^{-1}a) \pi(a) \right).$$

Za svako fiksno $b \in G$ u unutarnjoj sumi s desne strane izvršimo zamjenu sumacije po $a \in G$ sumacijom po $c = b^{-1}a$ (dakle, $a = bc$):

$$\sum_{a \in G} \psi(b^{-1}a) \pi(a) = \sum_{c \in G} \psi(c) \pi(bc) = \sum_{c \in G} \psi(c) \pi(b) \pi(c) = \pi(b) \sum_{c \in G} \psi(c) \pi(c) = \pi(b) \tilde{\pi}(\psi).$$

Dakle,

$$\tilde{\pi}(\varphi * \psi) = \sum_{b \in G} \varphi(b) \pi(b) \tilde{\pi}(\psi) = \tilde{\pi}(\varphi) \tilde{\pi}(\psi).$$

Time je dokazano da je $\varphi \mapsto \tilde{\pi}(\varphi)$ reprezentacija asocijativne algebre $K[G]$ na prostoru V . Nadalje, za svaki $a \in G$ vrijedi

$$\tilde{\pi}(\delta_a) = \sum_{b \in G} \delta_a(b) \pi(b) = \pi(a).$$

Posebno je $\tilde{\pi}(\delta_e) = \pi(e) = I_V$. Dakle, $\varphi \mapsto \tilde{\pi}(\varphi)$ je reprezentacija unitalne algebre $K[G]$ na prostoru V .

(b) Prema tvrdnji (c) propozicije 1.2.1. imamo

$$\hat{\rho}(ab) = \rho(\delta_{ab}) = \rho(\delta_a * \delta_b) = \rho(\delta_a) \rho(\delta_b) = \hat{\rho}(a) \hat{\rho}(b), \quad \hat{\rho}(e) = \hat{\rho}(\delta_e) = I_V.$$

Dakle, $a \mapsto \hat{\rho}(a)$ je reprezentacija grupe G na vektorskom prostoru V .

(c) Za reprezentaciju π grupe G i za $a \in G$ imamo

$$\hat{\tilde{\pi}}(a) = \tilde{\pi}(\delta_a) = \sum_{b \in G} \delta_a(b) \pi(b) = \pi(a).$$

Dakle, vrijedi $\hat{\tilde{\pi}} = \pi$. Nadalje, ako je ρ reprezentacija unitalne algebre $K[G]$ i $\varphi \in K[G]$, onda zbog (1.3) imamo

$$\tilde{\tilde{\rho}}(\varphi) = \sum_{a \in G} \varphi(a) \hat{\rho}(a) = \sum_{a \in G} \varphi(a) \rho(\delta_a) = \rho \left(\sum_{a \in G} \varphi(a) \delta_a \right) = \rho(\varphi).$$

Dakle, vrijedi $\tilde{\tilde{\rho}} = \rho$.

(d) Pretpostavimo da je potprostor X prostora V π -invarijantan, tj. invarijantan s obzirom na sve operatore $\pi(a)$, $a \in G$. Kako je prema definiciji reprezentacije $\tilde{\pi}$ operator $\tilde{\pi}(\varphi)$, $\varphi \in K[G]$, linearna kombinacija operatora $\pi(a)$, $a \in G$, slijedi da je potprostor X invarijantan s obzirom na

sve operatore $\tilde{\pi}(\varphi)$, $\varphi \in K[G]$, tj. potprostor X je $\tilde{\pi}$ -invarijantan.

Obratno, pretpostavimo da je potprostor X prostora V $\tilde{\pi}$ -invarijantan, tj. invarijantan s obzirom na sve operatore $\tilde{\pi}(\varphi)$, $\varphi \in K[G]$. Kako je prema (c) $\pi(a) = \tilde{\pi}(\delta_a)$, neposredno slijedi da je potprostor X invarijantan s obzirom na sve operatore $\pi(a)$, $a \in G$, tj. potprostor X je π -invarijantan.

(e) Neka je $A \in Hom_G(V, W)$, tj. $A\pi(a) = \rho(a)A \forall a \in G$. Tada za $\varphi \in K[G]$ imamo

$$A\tilde{\pi}(\varphi) = A \sum_{a \in G} \varphi(a)\pi(a) = \sum_{a \in G} \varphi(a)A\pi(a) = \sum_{a \in G} \varphi(a)\rho(a)A = \tilde{\rho}(\varphi)A.$$

Dakle, $A \in Hom_{K[G]}(V, W)$ i time je dokazana inkluzija $Hom_G(V, W) \subseteq Hom_{K[G]}(V, W)$. Da dokažemo obrnutu inkluziju pretpostavimo da je $A \in Hom_{K[G]}(V, W)$ i neka je $a \in G$. Tada je prema (c) $\pi(a) = \tilde{\pi}(\delta_a)$ i $\rho(a) = \tilde{\rho}(\delta_a)$ pa imamo

$$A\pi(a) = A\tilde{\pi}(\delta_a) = \tilde{\rho}(\delta_a)A = \rho(a)A.$$

Dakle, $A \in Hom_G(V, W)$ i time je dokazana obrnuta inkluzija $Hom_{K[G]}(V, W) \subseteq Hom_G(V, W)$.

Zbog tvrdnji prethodnog teorema u daljnjem ćemo izostavljati oznake $\tilde{\pi}$ i $\tilde{\rho}$. Dakle, ako je π reprezentacija grupe G onda ćemo s istim znakom π označavati reprezentaciju unitalne algebre $K[G]$ definiranu sa

$$\pi(\varphi) = \sum_{a \in G} \varphi(a)\pi(a), \quad \varphi \in K[G].$$

Analogno, ako je ρ reprezentacija unitalne algebre $K[G]$ onda ćemo s istim znakom ρ označavati reprezentaciju grupe G definiranu sa

$$\rho(a) = \pi(\delta_a), \quad a \in G.$$

Za $a \in G$ definiramo linearne operatore $\lambda(a), \rho(a) : K[G] \rightarrow K[G]$ na sljedeći način:

$$(\lambda(a)\varphi)(b) = \varphi(a^{-1}b), \quad (\rho(a)\varphi)(b) = \varphi(ba), \quad \varphi \in K[G], b \in G. \quad (1.4)$$

Propozicija 1.2.3. (a) λ i ρ definirane sa (1.4) su reprezentacije grupe G na vektorskom prostoru $K[G]$.

(b) Za $\varphi, \psi \in K[G]$ vrijedi $\lambda(\varphi)\psi = \varphi * \psi$ i $\rho(\varphi)\psi = \psi * \check{\varphi}$, gdje je funkcija $\check{\varphi} \in K[G]$ definirana sa $\check{\varphi}(a) = \varphi(a^{-1})$, $a \in G$.

(c) Potprostor $X \neq K[G]$ je λ -invarijantan ako i samo ako je X lijevi ideal u algebri $K[G]$.

(d) Potprostor $X \neq K[G]$ je ρ -invarijantan ako i samo ako je X desni ideal u algebri $K[G]$.

Zadatak 1.11. Dokažite propoziciju 1.2.3.

Uputa: Za tvrdnju (b) pomoću definicija izračunajte $(\lambda(\varphi)\psi)(a)$, $(\varphi * \psi)(a)$, $(\rho(\varphi)\psi)(a)$ i $(\psi * \check{\varphi})(a)$ za bilo koji $a \in G$. Za tvrdnje (c) i (d) koristite tvrdnju (b).

Reprezentacija λ zove se **lijeva regularna reprezentacija** grupe G nad poljem K . ρ je **desna regularna reprezentacija** grupe G nad poljem K .

Zadatak 1.12. Dokažite da je $\lambda \simeq \rho$.

Uputa: Uz oznaku iz tvrdnje (b) propozicije 1.2.3. izomorfizam T prostora $K[G]$ na samog sebe koji daje ekvivalenciju tih dviju reprezentacija dan je sa $T\varphi = \check{\varphi}$.

1.3 Tenzorski produkt

Razmotrit ćemo sada jednu važnu konstrukciju u teoriji reprezentacija, a to je tenzorski produkt.

Neka su V i W vektorski prostori nad poljem K . **Tenzorski produkt** prostora V i W je uređen par (T, φ) , gdje je T vektorski prostor nad K , φ je bilinearne preslikavanje sa $V \times W$ u T i vrijedi tzv. *univerzalno svojstvo*:

Ako je S vektorski prostor nad K i $\psi : V \times W \rightarrow S$ je bilinearne preslikavanje, onda postoji jedinstven linearan operator $\chi : T \rightarrow S$ takav da je $\psi = \chi \circ \varphi$.

Teorem 1.3.1. *Neka su V i W vektorski prostori nad poljem K .*

(a) *Postoji tenzorski produkt prostora V i W .*

(b) *Ako su (T, φ) i (S, ψ) tenzorski produkti prostora V i W , onda postoji jedinstven izomorfizam $\chi : T \rightarrow S$ takav da je $\psi = \chi \circ \varphi$.*

Dokaz: (a) Neka je \mathcal{T} skup svih funkcija $f : V \times W \rightarrow K$ za koje je skup

$$\text{Supp } f = \{(v, w) \in V \times W; f(v, w) \neq 0\}$$

konačan. \mathcal{T} je vektorski prostor s operacijama definiranim po točkama:

$$(f + g)(v, w) = f(v, w) + g(v, w), \quad (\lambda f)(v, w) = \lambda f(v, w), \quad \lambda \in K, \quad f, g \in \mathcal{T}, \quad (v, w) \in V \times W.$$

Za $(x, y) \in V \times W$ definiramo $f_{(x,y)} \in \mathcal{T}$ ovako:

$$f_{(x,y)}(v, w) = \begin{cases} 1 & \text{ako je } v = x \text{ i } w = y \\ 0 & \text{ako je } v \neq x \text{ ili } w \neq y \end{cases}$$

Tada je $\{f_{(x,y)}; (x, y) \in V \times W\}$ baza vektorskog prostora \mathcal{T} . Neka je \mathcal{J} potprostor od \mathcal{T} razapet skupom

$$\{f_{(\alpha x_1 + x_2, \beta y_1 + y_2)} - \alpha \beta f_{(x_1, y_1)} - \alpha f_{(x_1, y_2)} - \beta f_{(x_2, y_1)} - f_{(x_2, y_2)}; \alpha, \beta \in K, x_1, x_2 \in V, y_1, y_2 \in W\}.$$

Neka je $T = \mathcal{T}/\mathcal{J}$ i neka je $\varphi : V \times W \rightarrow T$ definirano sa

$$\varphi(v, w) = f_{(v,w)} + \mathcal{J}.$$

Iz definicije potprostora \mathcal{J} slijedi da je preslikavanje φ bilinearne. Dokazat ćemo da je par (T, φ) tenzorski produkt prostora V i W . Neka je S vektorski prostor i $\psi : V \times W \rightarrow S$ bilinearne preslikavanje. Definiramo tada linearan operator $X : \mathcal{T} \rightarrow S$ njegovim djelovanjem na bazi $\{f_{(x,y)}; x \in V, y \in W\}$:

$$X f_{(x,y)} = \psi(x, y), \quad (x, y) \in V \times W.$$

Iz bilinearne preslikavanja ψ slijedi da je potprostor \mathcal{J} sadržan u jezgri operatora X , pa prijelazom na kvocijent dolazimo do linearnog operatora $\chi : T \rightarrow S$:

$$\chi(f + \mathcal{J}) = Xf, \quad f \in \mathcal{T}.$$

Tada za $(x, y) \in V \times W$ nalazimo:

$$(\chi \circ \varphi)(x, y) = \chi(\varphi(x, y)) = \chi(f_{(x,y)} + \mathcal{J}) = X f_{(x,y)} = \psi(x, y).$$

Dakle, vrijedi $\chi \circ \varphi = \psi$. Treba još dokazati da je takav χ jedinstven. No to je očigledno, jer je $\{f_{(x,y)}; x \in V, y \in W\}$ baza prostora \mathcal{T} , dakle, skup $\{f_{(x,y)} + \mathcal{J}; x \in V, y \in W\}$ razapinje čitav kvocijentni prostor $T = \mathcal{T}/\mathcal{J}$.

(b) Budući da su (T, φ) i (S, ψ) tenzorski produkti prostora V i W postoje jedinstveni linearni operatori $\chi : T \rightarrow S$ i $\omega : S \rightarrow T$ takvi da je $\psi = \chi \circ \varphi$ i $\varphi = \omega \circ \psi$. Tada je

$$(\omega \circ \chi) \circ \varphi = \omega \circ (\chi \circ \varphi) = \omega \circ \psi = \varphi = I_T \circ \varphi.$$

Zbog jedinstvenosti u univerzalnom svojstvu para (T, φ) slijedi $\omega \circ \chi = I_T$. Sasvim analogno nalazimo da je $\chi \circ \omega = I_S$. Dakle, $\chi : T \rightarrow S$ je izomorfizam.

Time je teorem u potpunosti dokazan.

U daljnjem (T, φ) je tenzorski produkt vektorskih prostora V i W . Pisat ćemo tada

$$T = V \otimes W \quad \text{i} \quad v \otimes w = \varphi(v, w), \quad v \in V, w \in W.$$

Uz takve oznake bilinearlost φ ima za posljedicu:

$$\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i \right) \otimes \left(\sum_{j=1}^m \beta_j w_j \right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \alpha_i \beta_j v_i \otimes w_j$$

za $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m \in K, v_1, v_2, \dots, v_n \in V, w_1, w_2, \dots, w_m \in W$.

Teorem 1.3.2. *Neka je $\{v_i; i \in I\}$ baza vektorskog prostora V i $\{w_j; j \in J\}$ baza vektorskog prostora W . Tada je $\{v_i \otimes w_j; i \in I, j \in J\}$ baza njihovog tenzorskog produkta $V \otimes W$.*

Dokaz: Zbog jedinstvenosti izomorfizma između bilo koja dva tenzorska produkta prostora V i W (tvrdnja (b) teorema 1.3.1.) možemo pretpostaviti da su $T = V \otimes W$ i φ upravo oni koji su konstruirani u dokazu tvrdnje (a) teorema 1.3.1. Neka je $t \in T$ i neka je $f \in \mathcal{T}$ takva da je $t = f + \mathcal{J}$. Tada za neke $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n) \in V \times W$ i za neke $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in K$ vrijedi:

$$f = \sum_{k=1}^n \alpha_k f_{(x_k, y_k)}.$$

Nadalje, kako su $\{v_i; i \in I\}$ i $\{w_j; j \in J\}$ baze vektorskih prostora V i W , imamo

$$x_k = \sum_{i \in I} \beta_{ik} v_i \quad \text{i} \quad y_k = \sum_{j \in J} \gamma_{jk} w_j,$$

gdje je u svakoj od tih suma samo konačno mnogo članova različito do nule. Tada je

$$f - \sum_{k=1}^n \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \alpha_k \beta_{ik} \gamma_{jk} f_{(v_i, w_j)} \in \mathcal{J}.$$

Stoga je

$$t = \sum_{k=1}^n \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \alpha_k \beta_{ik} \gamma_{jk} v_i \otimes w_j$$

i time smo dokazali da skup $\{v_i \otimes w_j; i \in I, j \in J\}$ razapinje prostor $T = V \otimes W$.

Treba još dokazati da je taj skup linearno nezavisan. U tu svrhu za par $(p, q) \in I \times J$ definiramo bilinearne preslikavanje $\psi_{pq} : V \times W \rightarrow K$ formulom:

$$\psi_{pq} \left(\sum_{i \in I} \alpha_i v_i, \sum_{j \in J} \beta_j w_j \right) = \alpha_p \beta_q.$$

Neka je $\chi_{pq} : V \otimes W \rightarrow K$ jedinstven linearan funkcional takav da je $\psi_{pq} = \chi_{pq} \circ \varphi$, tj.

$$\psi_{pq}(v, w) = \chi_{pq}(v \otimes w), \quad v \in V, \quad w \in W.$$

Tada vrijedi:

$$\chi_{pq}(v_i \otimes w_j) = \psi_{pq}(v_i, w_j) = \delta_{pi}\delta_{qj}.$$

Odatle neposredno slijedi da su vektori $v_i \otimes w_j$ linearno nezavisni.

Posebno, ako su vektorski prostori V i W konačnodimenzionalni onda je

$$\dim V \otimes W = (\dim V) \cdot (\dim W).$$

Zadatak 1.13. Neka su V i W vektorski prostori nad istim poljem K .

(a) Neka su $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$ linearno nezavisni i neka su $w_1, w_2, \dots, w_m \in W$ linearno nezavisni. Dokažite da su $v_i \otimes w_j \in V \otimes W$ ($1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m$) linearno nezavisni.

(b) Neka je $a \in V \otimes W$, $a \neq 0$. Dokažite da postoje $n \in \mathbb{N}$, linearno nezavisni $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$ i linearno nezavisni $w_1, w_2, \dots, w_n \in W$ takvi da je

$$a = v_1 \otimes w_1 + v_2 \otimes w_2 + \dots + v_n \otimes w_n.$$

Potpuno analogno tenzorskom produktu $V \otimes W$ definira se tenzorski produkt $V_1 \otimes V_2 \otimes \dots \otimes V_n$ više od dva vektorska prostora. Jedina je razlika što se umjesto bilinearnih preslikavanja definiranih na $V \times W$ promatraju preslikavanja definirana na $V_1 \times V_2 \times \dots \times V_n$ koja su multilinearna, tj. linearna u svakoj varijabli kad se ostalih $n - 1$ varijabli fiksiraju.

Tenzorski produkt je do na izomorfizam asocijativan i u skladu s višestrukim tenzorskim produktima:

Zadatak 1.14. Neka su V, W i U vektorski prostori nad istim poljem K . Dokažite da postoje jedinstveni linearni operatori

$$A : (V \otimes W) \otimes U \rightarrow V \otimes (W \otimes U) \quad i \quad B : (V \otimes W) \otimes U \rightarrow V \otimes W \otimes U$$

takvi da je

$$A[(v \otimes w) \otimes u] = v \otimes (w \otimes u) \quad i \quad B[(v \otimes w) \otimes u] = v \otimes w \otimes u \quad \forall v \in V, w \in W, u \in U.$$

Nadalje, dokažite da su A i B izomorfizmi vektorskih prostora.

Neka su sada V_1, V_2, W_1 i W_2 vektorski prostori nad istim poljem K i neka su $A_1 \in L(V_1, W_1)$ i $A_2 \in L(V_2, W_2)$. Tada je

$$(v_1, v_2) \mapsto A_1 v_1 \otimes A_2 v_2, \quad v_1 \in V_1, v_2 \in V_2,$$

bilinearno preslikavanje s Kartezijevog produkta $V_1 \times V_2$ u vektorski prostor $W_1 \otimes W_2$. Zbog univerzalnog svojstva postoji jedinstven linearan operator $B : V_1 \otimes V_2 \rightarrow W_1 \otimes W_2$ takav da je $B(v_1 \otimes v_2) = A_1 v_1 \otimes A_2 v_2$ za svaki $v_1 \in V_1$ i svaki $v_2 \in V_2$. Taj ćemo operator označavati znakom $A_1 \underline{\otimes} A_2$. Dakle,

$$(A_1 \underline{\otimes} A_2)(v_1 \otimes v_2) = A_1 v_1 \otimes A_2 v_2, \quad v_1 \in V_1, v_2 \in V_2.$$

Teorem 1.3.3. *Neka su V_1, V_2, W_1 i W_2 vektorski prostori nad poljem K . Postoji jedinstveno linearno preslikavanje $\Phi : L(V_1, W_1) \otimes L(V_2, W_2) \rightarrow L(V_1 \otimes V_2, W_1 \otimes W_2)$ takvo da je*

$$\Phi(A_1 \otimes A_2) = A_1 \underline{\otimes} A_2 \quad \forall A_1 \in L(V_1, W_1) \quad i \quad \forall A_2 \in L(V_2, W_2).$$

Ako su vektorski prostori V_1, V_2, W_1 i W_2 konačnodimenzionalni onda je Φ izomorfizam.

Dokaz: Postojanje i jedinstvenost takvog linearnog preslikavanja Φ slijede iz univerzalnog svojstva tenzorskog produkta, jer je preslikavanje $(A_1, A_2) \mapsto A_1 \underline{\otimes} A_2$ sa $L(V_1, W_1) \times L(V_2, W_2)$ u $L(V_1 \otimes V_2, W_1 \otimes W_2)$ očigledno bilinearno.

Pretpostavimo sada da su vektorski prostori V_1, V_2, W_1 i W_2 konačnodimenzionalni. Tada imamo jednakost dimenzija:

$$\begin{aligned} \dim L(V_1, W_1) \otimes L(V_2, W_2) &= (\dim L(V_1, W_1)) \cdot (\dim L(V_2, W_2)) = \\ &= (\dim V_1) \cdot (\dim W_1) \cdot (\dim V_2) \cdot (\dim W_2) = (\dim V_1 \otimes V_2) \cdot (\dim W_1 \otimes W_2) = \dim L(V_1 \otimes V_2, W_1 \otimes W_2). \end{aligned}$$

Stoga je za dokaz da je Φ izomorfizam dovoljno dokazati da je Φ injekcija.

Neka je $C \in L(V_1, W_1) \otimes L(V_2, W_2)$ takav da je $\Phi(C) = 0$. Neka su redom $\{e_1, \dots, e_n\}$, $\{f_1, \dots, f_m\}$, $\{g_1, \dots, g_p\}$ i $\{h_1, \dots, h_q\}$ baze vektorskih prostora V_1, V_2, W_1 i W_2 . Definiramo operatore $E_{ik} \in L(V_1, W_1)$ za $1 \leq i \leq p, 1 \leq k \leq n$ i $F_{j\ell} \in L(V_2, W_2)$ za $1 \leq j \leq q, 1 \leq \ell \leq m$ ovako:

$$E_{ik}e_r = \delta_{kr}g_i \quad (1 \leq r \leq n), \quad F_{j\ell}f_s = \delta_{\ell s}h_j \quad (1 \leq s \leq m).$$

Znamo da je tada $\{E_{ik}; 1 \leq i \leq p, 1 \leq k \leq n\}$ baza vektorskog prostora $L(V_1, W_1)$ i da je $\{F_{j\ell}; 1 \leq j \leq q, 1 \leq \ell \leq m\}$ baza vektorskog prostora $L(V_2, W_2)$. Stoga je prema teoremu 1.3.2. $\{E_{ik} \otimes F_{j\ell}; 1 \leq i \leq p, 1 \leq k \leq n, 1 \leq j \leq q, 1 \leq \ell \leq m\}$ baza vektorskog prostora $L(V_1, W_1) \otimes L(V_2, W_2)$. Stoga postoje $\alpha_{ikj\ell} \in K$ takvi da je

$$C = \sum_{i=1}^p \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^q \sum_{\ell=1}^m \alpha_{ikj\ell} E_{ik} \otimes F_{j\ell}.$$

Sada za $r \in \{1, 2, \dots, n\}$ i $s \in \{1, 2, \dots, m\}$ imamo redom

$$\begin{aligned} 0 &= (\Phi(C))(e_r \otimes f_s) = \sum_{i=1}^p \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^q \sum_{\ell=1}^m \alpha_{ikj\ell} (\Phi(E_{ik} \otimes F_{j\ell}))(e_r \otimes f_s) = \\ &= \sum_{i=1}^p \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^q \sum_{\ell=1}^m \alpha_{ikj\ell} (E_{ik} \underline{\otimes} F_{j\ell})(e_r \otimes f_s) = \sum_{i=1}^p \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^q \sum_{\ell=1}^m \alpha_{ikj\ell} (E_{ik}e_r \otimes F_{j\ell}f_s) = \\ &= \sum_{i=1}^p \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^q \sum_{\ell=1}^m \alpha_{ikj\ell} \delta_{kr} \delta_{\ell s} g_i \otimes h_j = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q \alpha_{irjs} g_i \otimes h_j. \end{aligned}$$

Međutim, vektori $g_i \otimes h_j$ tvore bazu u vektorskom prostoru $W_1 \otimes W_2$ pa su linearno nezavisni. Slijedi da je $\alpha_{irjs} = 0$ za $i = 1, 2, \dots, p$ i $j = 1, 2, \dots, q$. Kako su $r \in \{1, 2, \dots, n\}$ i $s \in \{1, 2, \dots, m\}$ bili proizvoljni, slijedi da su svi koeficijenti α_{irjs} jednaki nuli. Dakle, $C = 0$ i time je injektivnost preslikavanja Φ dokazana.

Zbog teorema 1.3.3. u slučaju konačnodimenzionalnih prostora ćemo pomoću preslikavanja Φ identificirati vektorske prostore $L(V_1, W_1) \otimes L(V_2, W_2)$ i $L(V_1 \otimes V_2, W_1 \otimes W_2)$. Dakle,

$$(A_1 \otimes A_2)(v_1 \otimes v_2) = A_1 v_1 \otimes A_2 v_2, \quad A_1 \in L(V_1, W_1), \quad A_2 \in L(V_2, W_2), \quad v_1 \in V_1, \quad v_2 \in V_2.$$

Unatoč opasnosti od pogrešnog tumačenja pisat ćemo $A_1 \otimes A_2$ umjesto $A_1 \underline{\otimes} A_2$ i onda kad neki od promatranih vektorskih prostora nije konačnodimenzionalan.

Zadatak 1.15. Neka su V_1, V_2, W_1, W_2, U_1 i U_2 vektorski prostori nad poljem K i $A \in L(V_1, W_1)$, $B \in L(W_1, U_1)$, $C \in L(V_2, W_2)$ i $D \in L(W_2, U_2)$. Dokažite da je tada

$$(B \otimes D)(A \otimes C) = BA \otimes DC.$$

Neka su sada π i ρ reprezentacije grupa G i H na vektorskim prostorima V i W nad poljem K . Formiramo Kartezijev (tj. direktan) produkt grupa $G \times H$ i tenzorski produkt vektorskih prostora $V \otimes W$ i za $(g, h) \in G \times H$ definiramo operator $(\pi \times \rho)(g, h) = \pi(g) \otimes \rho(h)$, tj.

$$(\pi \times \rho)(g, h)(v \otimes w) = \pi(g)v \otimes \rho(h)w, \quad g \in G, h \in H, v \in V, w \in W.$$

Kako je očito $I_V \otimes I_W = I_{V \otimes W}$, iz zadatka 1.15. slijedi da je $\pi \times \rho$ reprezentacija grupe $G \times H$ na prostoru $V \otimes W$. Ta se reprezentacija zove **vanjski produkt reprezentacija** π i ρ .

Ako je $H = G$, tj. ako su π i ρ reprezentacije grupe G onda možemo promatrati restrikciju reprezentacije $\pi \times \rho$ na podgrupu

$$\Delta(G) = \{(g, g); g \in G\}$$

grupe $G \times G$. Očito je $g \mapsto (g, g)$ izomorfizam grupe G na grupu $\Delta(G)$. Stoga restrikciju $(\pi \times \rho)|_{\Delta(G)}$ možemo shvaćati kao reprezentaciju grupe G . Ta reprezentacija grupe G zove se **tenzorski produkt reprezentacija** π i ρ i označava $\pi \otimes \rho$. Dakle:

$$(\pi \otimes \rho)(g) = \pi(g) \otimes \rho(g), \quad g \in G.$$

Provest ćemo sada sličnu konstrukciju za reprezentacije Liejevih algebri. Neka su π i ρ reprezentacije Liejevih algebri \mathfrak{g} i \mathfrak{h} na vektorskim prostorima V i W ($\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, V$ i W su svi definirani nad istim poljem K). Kartezijev produkt $\mathfrak{g} \times \mathfrak{h}$ je Liejeva algebra nad K uz komutator definiran sa

$$[(x_1, y_1), (x_2, y_2)] = ([x_1, x_2], [y_1, y_2]), \quad x_1, x_2 \in \mathfrak{g}, \quad y_1, y_2 \in \mathfrak{h}.$$

Za $(x, y) \in \mathfrak{g} \times \mathfrak{h}$ definiramo linearan operator $(\pi \times \rho)(x, y)$ na tenzorskom produktu $V \otimes W$ na sljedeći način:

$$(\pi \times \rho)(x, y) = \pi(x) \otimes I_W + I_V \otimes \rho(y),$$

tj.

$$(\pi \times \rho)(x, y)(v \otimes w) = \pi(x)v \otimes w + v \otimes \rho(y)w, \quad x \in \mathfrak{g}, y \in \mathfrak{h}, v \in V, w \in W.$$

Zadatak 1.16. Dokažite da je na opisani način definirana reprezentacija $\pi \times \rho$ Liejeve algebre $\mathfrak{g} \times \mathfrak{h}$ na vektorskom prostoru $V \otimes W$.

Reprezentacija $\pi \times \rho$ zove se **vanjski produkt reprezentacija** π i ρ Liejevih algebri \mathfrak{g} i \mathfrak{h} .

Neka je sada $\mathfrak{g} = \mathfrak{h}$, tj. π i ρ su reprezentacije Liejeve algebre \mathfrak{g} . Analogno kao kod grupa možemo promatrati restrikciju reprezentacije $\pi \times \rho$ na Liejevu podalgebru

$$\Delta(\mathfrak{g}) = \{(x, x); x \in \mathfrak{g}\}.$$

Sada je $x \mapsto (x, x)$ izomorfizam Liejeve algebre \mathfrak{g} na Liejevu algebru $\Delta(\mathfrak{g})$ pa restrikciju $(\pi \times \rho)|_{\Delta(\mathfrak{g})}$ možemo shvaćati kao reprezentaciju Liejeve algebre \mathfrak{g} . Ta se reprezentacija od \mathfrak{g} zove **tenzorski produkt reprezentacija** π i ρ Liejeve algebre \mathfrak{g} i označava sa $\pi \otimes \rho$. Dakle,

$$(\pi \otimes \rho)(x) = \pi(x) \otimes I_W + I_V \otimes \rho(x), \quad x \in \mathfrak{g}.$$

Zadatak 1.17. Neka su π i ρ reprezentacije grupa G i H (odnosno, Liejevih algebri \mathfrak{g} i \mathfrak{h} nad poljem K) na vektorskim prostorima V i W nad poljem K .

(a) Dokažite da postoji jedinstven linearan operator $\Psi : V' \otimes W \rightarrow L(V, W)$ takav da je

$$[\Psi(f \otimes w)](v) = f(v)w, \quad v \in V, \quad f \in V', \quad w \in W.$$

(b) Dokažite da je Ψ iz (a) izomorfizam vektorskog prostora $V' \otimes W$ na vektorski prostor $L(V, W)$.

(c) Dokažite da izomorfizam Ψ iz (a) reprezentaciju $\pi^t \times \rho$ grupe $G \times H$ (odnosno, Liejeve algebre $\mathfrak{g} \times \mathfrak{h}$) prevodi u reprezentaciju τ na prostoru $L(V, W)$ zadanu sa:

$$\tau(g, h)(A) = \rho(h)A\pi(g^{-1}), \quad A \in L(V, W), \quad g \in G, \quad h \in H,$$

(odnosno

$$\tau(x, y)(A) = \rho(y)A - A\pi(x), \quad A \in L(V, W), \quad x \in \mathfrak{g}, \quad y \in \mathfrak{h}).$$

Zadatak 1.18. Neka su π i ρ konačnodimenzionalne reprezentacije grupa G i H (odnosno, Liejevih algebri \mathfrak{g} i \mathfrak{h}) takve da je reprezentacija $\pi \times \rho$ grupe $G \times H$ (odnosno, Liejeve algebre $\mathfrak{g} \times \mathfrak{h}$) ireducibilna. Dokažite da su tada reprezentacije π i ρ ireducibilne.

Tvrđnja zadatka 1.18. ima obrat ako je polje algebarski zatvoreno. Dokažimo najprije lemu:

Lema 1.3.4. Neka je π ireducibilna reprezentacija grupe G (odnosno, Liejeve algebre \mathfrak{g}) na konačnodimenzionalnom vektorskom prostoru V nad algebarski zatvorenim poljem K i neka je W konačnodimenzionalan vektorski prostor nad K . Definiramo reprezentaciju $\tilde{\pi}$ grupe G (odnosno, Liejeve algebre \mathfrak{g}) na prostoru $V \otimes W$ sa $\tilde{\pi}(g) = \pi(g) \otimes I_W$. Neka je U $\tilde{\pi}$ -invarijantan potprostor od $V \otimes W$ takav da je reprezentacija $\tilde{\pi}_U$ ireducibilna. Tada postoji $w \in W$ takav da je

$$U = V \otimes w = \{v \otimes w; v \in V\}.$$

Dokaz: Pretpostavljat ćemo da se radi o reprezentaciji grupe; dokaz za reprezentaciju Liejeve algebre je sasvim analogan.

Neka je $\{w_1, w_2, \dots, w_m\}$ baza vektorskog prostora W . Tada je očito

$$V \otimes W = V \otimes w_1 \dot{+} V \otimes w_2 \dot{+} \dots \dot{+} V \otimes w_m$$

i za svaki j subreprezentacija $\tilde{\pi}_{V \otimes w_j}$ je ireducibilna i ekvivalentna reprezentaciji π . Neka je U $\tilde{\pi}$ -invarijantan potprostor od $V \otimes W$. Prema tvrdnji (b) teorema 1.3.1. postoji podskup $\{j_1, j_2, \dots, j_k\}$ skupa $\{1, 2, \dots, m\}$ takav da je

$$V \otimes W = U \dot{+} V \otimes w_{j_1} \dot{+} V \otimes w_{j_2} \dot{+} \dots \dot{+} V \otimes w_{j_k}.$$

Neka je $\{1, 2, \dots, m\} \setminus \{j_1, j_2, \dots, j_k\} = \{i_1, i_2, \dots, i_{m-k}\}$. Tada prema zadatku 1.6.(b) imamo:

$$\tilde{\pi}_U \simeq \tilde{\pi}_{V \otimes w_{i_1} \dot{+} V \otimes w_{i_2} \dot{+} \dots \dot{+} V \otimes w_{i_{m-k}}}.$$

Prema tome, ako je $\tilde{\pi}_U$ ireducibilna, onda je nužno $k = m - 1$ tj. postoji $j \in \{1, 2, \dots, m\}$ takav da je $\tilde{\pi}_U \simeq \tilde{\pi}_{V \otimes w_j} \simeq \pi$. Neka je $\varphi : U \rightarrow V$ izomorfizam koji ostvaruje ekvivalenciju reprezentacije $\tilde{\pi}_U$ s reprezentacijom π , tj. takav da je

$$\pi(g) \circ \varphi = \varphi \circ (\pi(g) \otimes I_W)|U.$$

Budući da je $\{w_1, w_2, \dots, w_m\}$ baza vektorskog prostora W iz teorema 1.3.2. lako slijedi da za svaki vektor x iz $V \otimes W$ postoje jedinstveni vektori $v_1, v_2, \dots, v_m \in V$ takvi da je

$$x = v_1 \otimes w_1 + v_2 \otimes w_2 + \dots + v_m \otimes w_m. \quad (1.5)$$

Posebno, postoje linearni operatori $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m : U \rightarrow V$ takvi da je

$$u = \varphi_1(u) \otimes w_1 + \varphi_2(u) \otimes w_2 + \dots + \varphi_m(u) \otimes w_m \quad \forall u \in U.$$

Za svaki $g \in G$ i $u \in U$ imamo:

$$\begin{aligned} \varphi_1(\tilde{\pi}(g)u) \otimes w_1 + \varphi_2(\tilde{\pi}(g)u) \otimes w_2 + \dots + \varphi_m(\tilde{\pi}(g)u) \otimes w_m &= \tilde{\pi}(g)u = \\ &= \tilde{\pi}(g)[\varphi_1(u) \otimes w_1 + \varphi_2(u) \otimes w_2 + \dots + \varphi_m(u) \otimes w_m] = \\ &= \pi(g)\varphi_1(u) \otimes w_1 + \pi(g)\varphi_2(u) \otimes w_2 + \dots + \pi(g)\varphi_m(u) \otimes w_m. \end{aligned}$$

Odatle zbog jedinstvenosti prikaza (1.5) slijedi

$$\varphi_j(\tilde{\pi}(g)u) = \pi(g)\varphi_j(u) \quad \forall u \in U, \quad \forall g \in G, \quad j = 1, 2, \dots, m,$$

tj.

$$\varphi_j \circ \tilde{\pi}(g) = \pi(g) \circ \varphi_j \quad \forall g \in G, \quad j = 1, 2, \dots, m.$$

Prema tome, $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m \in \text{Hom}_G(U, V)$. Stoga su $\varphi^{-1} \circ \varphi_1, \varphi^{-1} \circ \varphi_2, \dots, \varphi^{-1} \circ \varphi_m \in \text{End}_G(U)$. Prema tvrdnji (c) Schurove leme (teorem 1.1.4.) postoje $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m \in K$ takvi da je

$$\varphi^{-1} \circ \varphi_j = \lambda_j I_U \quad \text{za} \quad j = 1, 2, \dots, m.$$

Dakle,

$$\varphi_j = \lambda_j \varphi \quad \text{za} \quad j = 1, 2, \dots, m.$$

Slijedi za svaki $u \in U$:

$$u = \lambda_1 \varphi(u) \otimes w_1 + \lambda_2 \varphi(u) \otimes w_2 + \dots + \lambda_m \varphi(u) \otimes w_m = \varphi(u) \otimes (\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \dots + \lambda_m w_m).$$

Kako je φ izomorfizam prostora U na prostor V , slijedi

$$U = V \otimes w \quad \text{za} \quad w = \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \dots + \lambda_m w_m$$

i time je lema dokazana.

Teorem 1.3.5. *Neka su π i ρ konačnodimenzionalne ireducibilne reprezentacije grupa G i H (odnosno, Liejevih algebri \mathfrak{g} i \mathfrak{h}) na vektorskim prostorima V i W nad algebarski zatvorenim poljem K . Tada je reprezentacija $\pi \times \rho$ grupe $G \times H$ (odnosno, Liejeve algebre $\mathfrak{g} \times \mathfrak{h}$) ireducibilna.*

Dokaz: Pretpostavljamo da se radi o reprezentacijama grupa. Neka je $U \neq \{0\}$ potprostor od $V \otimes W$ koji je $\pi \times \rho$ -invarijantan. Potprostor U očito je $\tilde{\pi}$ -invarijantan, gdje je $\tilde{\pi}$ reprezentacija grupe G na prostoru $V \otimes W$ zadana kao u lemi 1.3.4:

$$\tilde{\pi}(g) = \pi(g) \otimes I_W = (\pi \times \rho)(g, e_H), \quad g \in G.$$

Prema lemi 1.3.4. postoji $w_0 \in W$, $w_0 \neq 0$, takav da $U \supseteq V \otimes w_0$. Za svaki $v \in V$ definiramo potprostor $W(v)$ prostora W ovako:

$$W(v) = \{w \in W; v \otimes w \in U\}.$$

Taj je potprostor ρ -invarijantan. Doista, kako je potprostor U $\pi \times \rho$ -invarijantan, za $h \in H$ i $w \in W(v)$ imamo

$$v \otimes \rho(h)w = (\pi \times \rho)(e_G, h)(v \otimes w) \in U \quad \implies \quad \rho(h)w \in W(v).$$

Nadalje, $w_0 \in W(v)$, pa slijedi $W(v) \neq \{0\}$ za svaki $v \in V$. Budući da je reprezentacija ρ ireducibilna, slijedi $W(v) = W$ za svaki $v \in V$. Dakle, $\{v \otimes w; v \in V, w \in W\} \subseteq U$, a odatle i iz teorema 1.3.2. slijedi $U = V \otimes W$.

Zadatak 1.19. *Dokažite teorem 1.3.5. u slučaju reprezentacija Liejevih algebri.*

Pretpostavka o algebarskoj zatvorenosti polja K je bitna, kao što pokazuje:

Zadatak 1.20. *Neka je \mathbb{H} tijelo kvaterniona, G multiplikativna grupa $\mathbb{H} \setminus \{0\}$ i H multiplikativna grupa $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Neka je π reprezentacija grupe G na četverodimenzionalnom realnom vektorskom prostoru \mathbb{H} definirana pomoću množenja*

$$\pi(\alpha)\beta = \alpha\beta, \quad \alpha \in G, \quad \beta \in \mathbb{H}$$

i neka je ρ analogno definirana reprezentacija grupe H na dvodimenzionalnom realnom vektorskom prostoru \mathbb{C} . Dokažite da su reprezentacije π i ρ ireducibilne, ali da je reprezentacija $\pi \times \rho$ grupe $G \times H$ reducibilna.

Poglavlje 2

Reprezentacije konačnih grupa

2.1 Relacije ortogonalnosti

U cijelom ovom poglavlju G označava konačnu grupu s jedinicom e . Broj elemenata grupe G , tj. **red grupe** G , označavat ćemo sa $|G|$. Općenitije, za svaki konačan skup S sa $|S|$ označavamo broj elemenata skupa S .

Neka je π reprezentacija grupe G na vektorskom prostoru V . Neka je $v \in V$, $v \neq 0$. Tada je potprostor razapet skupom $\{\pi(a)v; a \in G\}$ očito π -invarijantan. Odatle slijedi da je svaka ireducibilna reprezentacija grupe G konačnodimenzionalna i dimenzija joj nije veća od $|G|$.

Svi vektorski prostori koje ćemo promatrati u ovom poglavlju su konačnodimenzionalni i kompleksni.

Teorem 2.1.1. *Neka je π reprezentacija grupe G na vektorskom prostoru V .*

- (a) *Reprezentacija π je potpuno reducibilna.*
- (b) *Na vektorskom prostoru V postoji skalarni produkt u odnosu na koji je π unitarna reprezentacija.*

Dokaz: (b) Neka je $\langle \cdot | \cdot \rangle$ bilo koji skalarni produkt na prostoru V . Definiramo preslikavanje $(x, y) \mapsto (x|y)$ sa $V \times V$ u \mathbb{C} na sljedeći način:

$$(x|y) = \sum_{a \in G} \langle \pi(a)x | \pi(a)y \rangle, \quad x, y \in V.$$

Tada je očito $x \mapsto (x|y)$ linearan funkcional na V za svaki $y \in V$. Također je očito da vrijedi $(y|x) = \overline{(x|y)}$ za bilo koje $x, y \in V$. Nadalje, za $x \in V$ vrijedi

$$(x|x) = \sum_{a \in G} \langle \pi(a)x | \pi(a)x \rangle \geq 0$$

jer je $\langle \cdot | \cdot \rangle$ skalarni produkt na V . Nadalje, iz $(x|x) = 0$ slijedi $\langle \pi(a)x | \pi(a)x \rangle = 0$ za svaki $a \in G$. Posebno za jedinicu e grupe G nalazimo $0 = \langle \pi(e)x | \pi(e)x \rangle = (x|x)$, pa slijedi $x = 0$. Time je dokazano da je $(\cdot | \cdot)$ skalarni produkt na vektorskom prostoru V .

Neka je $b \in G$. Tada je $a \mapsto ab$ bijekcija sa G na G pa za proizvoljne vektore $x, y \in V$ imamo

$$(\pi(b)x | \pi(b)y) = \sum_{a \in G} \langle \pi(a)\pi(b)x | \pi(a)\pi(b)y \rangle = \sum_{a \in G} \langle \pi(ab)x | \pi(ab)y \rangle = \sum_{a \in G} \langle \pi(a)x | \pi(a)y \rangle = (x|y).$$

Prema tome, reprezentacija π je unitarna s obzirom na skalarni produkt $(\cdot|\cdot)$.

Tvrdnja (a) slijedi neposredno iz tvrdnje (b) zbog teorema 1.1.7.

Propozicija 2.1.2. *Neka su π i ρ reprezentacije od G na prostorima V i W . Za $A \in L(V, W)$ stavimo*

$$A^0 = \frac{1}{|G|} \sum_{a \in G} \rho(a^{-1}) A \pi(a).$$

Tada je $A \mapsto A^0$ projektor prostora $L(V, W)$ na potprostor $Hom_G(V, W)$.

Dokaz: Očito je $A \mapsto A^0$ linearan operator sa $L(V, W)$ u $L(V, W)$. Za $A \in L(V, W)$ i $b \in G$ nalazimo

$$\rho(b)A^0 = \frac{1}{|G|} \sum_{a \in G} \rho(b)\rho(a^{-1}) A \pi(a) = \frac{1}{|G|} \sum_{a \in G} \rho(ba^{-1}) A \pi(a) = \frac{1}{|G|} \sum_{a \in G} \rho((ab^{-1})^{-1}) A \pi(a).$$

U ovoj zadnjoj sumi promijenimo varijablu sumacije i stavimo $c = ab^{-1}$, dakle, $a = cb$. Kako je $a \mapsto ab^{-1}$ bijekcija sa G na G , slijedi

$$\rho(b)A^0 = \frac{1}{|G|} \sum_{c \in G} \rho(c^{-1}) A \pi(cb) = \frac{1}{|G|} \sum_{c \in G} \rho(c^{-1}) A \pi(c) \pi(b) = A^0 \pi(b).$$

Dakle, $A^0 \in Hom_G(V, W)$, tj. dokazali smo da je područje vrijednosti linearnog operatora $A \mapsto A^0$ sadržano u $Hom_G(V, W)$. Napokon, za $A \in Hom_G(V, W)$ je $A \pi(a) = \rho(a)A$ za svaki $a \in G$, dakle,

$$A^0 = \frac{1}{|G|} \sum_{a \in G} \rho(a^{-1}) A \pi(a) = \frac{1}{|G|} \sum_{a \in G} \rho(a^{-1}) \rho(a)A = \frac{1}{|G|} \sum_{a \in G} A = A.$$

Dakle, $A \mapsto A^0$ je projektor prostora $L(V, W)$ na potprostor $Hom_G(V, W)$.

Ako su u propoziciji 2.1.2. reprezentacije π i ρ ireducibilne, možemo primijeniti Schurovu lemu (teorem 1.1.4.) pa dobivamo

Teorem 2.1.3. *Neka su π i ρ ireducibilne reprezentacije grupe G na prostorima V i W .*

(a) *Ako π i ρ nisu ekvivalentne, onda je za svaki $A \in L(V, W)$*

$$\sum_{a \in G} \rho(a^{-1}) A \pi(a) = 0.$$

(b) *Za svaki $A \in L(V)$ vrijedi*

$$\sum_{a \in G} \pi(a^{-1}) A \pi(a) = \frac{|G|}{\dim V} (\text{Tr } A) I_V.$$

Zadatak 2.1. *Pomoću Schurove leme i propozicije 2.1.2. dokažite teorem 2.1.3.*

Teorem 2.1.4. *Uz pretpostavke teorema 2.1.3. neka je $e = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ baza vektorskog prostora V i $f = \{f_1, f_2, \dots, f_m\}$ baza vektorskog prostora W i neka su $\pi_{ij}(a)$ elementi matrice operatora $\pi(a)$ u bazi e i $\rho_{k\ell}(a)$ elementi matrice operatora $\rho(a)$ u bazi f . Tada vrijedi*

$$\sum_{a \in G} \pi_{ij}(a) \rho_{k\ell}(a^{-1}) = 0, \quad \forall i, j \in \{1, 2, \dots, n\} \quad \text{i} \quad \forall k, \ell \in \{1, 2, \dots, m\}$$

i

$$\sum_{a \in G} \pi_{ij}(a) \pi_{rs}(a^{-1}) = \frac{|G|}{n} \delta_{is} \delta_{jr}, \quad \forall i, j, r, s \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

Dokaz: Neka su $\ell \in \{1, 2, \dots, m\}$ i $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ proizvoljni i neka je $A \in L(V, W)$ zadan na bazi e sa

$$Ae_r = \delta_{ir} f_\ell, \quad r = 1, 2, \dots, n.$$

Tada je prema tvrdnji (a) teorema 2.1.3. za svaki $j \in \{1, 2, \dots, n\}$

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{a \in G} \rho(a^{-1}) A \pi(a) e_j = \sum_{a \in G} \sum_{r=1}^n \pi_{rj}(a) \rho(a^{-1}) A e_r = \sum_{a \in G} \sum_{r=1}^n \pi_{rj}(a) \delta_{ir} \rho(a^{-1}) f_\ell = \\ &= \sum_{a \in G} \pi_{ij}(a) \sum_{k=1}^m \rho_{k\ell}(a^{-1}) f_k = \sum_{k=1}^m \left(\sum_{a \in G} \pi_{ij}(a) \rho_{k\ell}(a^{-1}) \right) f_k. \end{aligned}$$

Budući da su f_1, f_2, \dots, f_m linearno nezavisni slijedi prva tvrdnja teorema.

Za dokaz druge tvrdnje na analogan način primijenimo tvrdnju (b) teorema 2.1.3. Neka su $i, s \in \{1, 2, \dots, n\}$ proizvoljni i neka je $A \in L(V)$ zadan na bazi e sa

$$Ae_p = \delta_{ip} e_s, \quad p = 1, 2, \dots, n.$$

Tada je $\text{Tr } A = \delta_{is}$ pa zbog tvrdnje (b) teorema 2.1.3. za svaki $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ imamo redom

$$\begin{aligned} \frac{|G|}{n} \delta_{is} e_j &= \frac{|G|}{n} (\text{Tr } A) I_V e_j = \sum_{a \in G} \pi(a^{-1}) A \pi(a) e_j = \sum_{a \in G} \sum_{p=1}^n \pi_{pj}(a) \pi(a^{-1}) A e_p = \\ &= \sum_{a \in G} \sum_{p=1}^n \delta_{ip} \pi_{pj}(a) \pi(a^{-1}) e_s = \sum_{a \in G} \pi_{ij}(a) \sum_{r=1}^n \pi_{rs}(a^{-1}) e_r = \sum_{r=1}^n \left(\sum_{a \in G} \pi_{ij}(a) \pi_{rs}(a^{-1}) \right) e_r. \end{aligned}$$

Dakle,

$$\sum_{r=1}^n \left(\sum_{a \in G} \pi_{ij}(a) \pi_{rs}(a^{-1}) \right) e_r = \frac{|G|}{n} \delta_{is} e_j = \sum_{r=1}^n \frac{|G|}{n} \delta_{is} \delta_{jr} e_r,$$

a odatle zbog linearne nezavisnosti vektora e_1, e_2, \dots, e_n dobivamo drugu tvrdnju teorema.

Promatrajmo sada prostor $\mathbb{C}[G]$ svih kompleksnoznačnih funkcija na grupi G . To je unitaran prostor uz skalarni produkt definiran sa

$$(\varphi | \psi) = \frac{1}{|G|} \sum_{a \in G} \varphi(a) \overline{\psi(a)}, \quad \varphi, \psi \in \mathbb{C}[G].$$

Kao posljedicu teorema 2.1.4. dobivamo tzv. **relacije ortogonalnosti**:

Teorem 2.1.5. Neka su π i ρ neekvivalentne ireducibilne unitarne reprezentacije grupe G na prostorima V i W . Neka su $e = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ i $f = \{f_1, f_2, \dots, f_m\}$ ortonormirane baze u prostorima V i W . Neka su $\pi_{ij}(a)$ matrični elementi operatora $\pi(a)$ u bazi e i $\rho_{k\ell}(a)$ matrični elementi operatora $\rho(a)$ u bazi f . Tada vrijedi

$$(\pi_{ij} | \rho_{k\ell}) = 0 \quad \forall i, j \in \{1, 2, \dots, n\} \quad i \quad \forall k, \ell \in \{1, 2, \dots, m\}$$

i

$$(\pi_{ij} | \pi_{sr}) = \frac{1}{n} \delta_{is} \delta_{jr} \quad \forall i, j, r, s \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

Dokaz: Tvrdnje slijede neposredno iz dviju tvrdnji teorema 2.1.4., budući da su matrice unitarnih operatora $\pi(a)$ i $\rho(a)$ u ortonormiranim bazama unitarne, tj. vrijedi

$$\pi_{rs}(a^{-1}) = \overline{\pi_{sr}(a)} \quad i \quad \rho_{k\ell}(a^{-1}) = \overline{\rho_{\ell k}(a)}.$$

2.2 Karakter reprezentacije

Neka je π reprezentacija grupe G na vektorskom prostoru V . Definiramo funkciju $\chi_\pi : G \rightarrow \mathbb{C}$ ovako:

$$\chi_\pi(a) = \text{Tr } \pi(a), \quad a \in G.$$

Funkcija χ_π zove se **karakter reprezentacije** π .

Propozicija 2.2.1. *Karakter χ_π reprezentacije π grupe G na vektorskom prostoru V ima svojstva:*

- (a) $\chi_\pi(e) = \dim V$.
- (b) $\chi_\pi(a^{-1}) = \overline{\chi_\pi(a)}$, $a \in G$.
- (c) $\chi_\pi(ab) = \chi_\pi(ba)$, $a, b \in G$.

Dokaz: Tvrdnja (a) slijedi neposredno iz činjenice da je $\pi(e) = I_V$.

(b) Prema tvrdnji (b) teorema 2.1.1. možemo pretpostaviti da je prostor V unitaran i da je reprezentacija π unitarna. Neka je $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ ortonormirana baza u V . Operator $\pi(a)$ je unitaran i pa je njegov inverzni operator $\pi(a^{-1})$ njemu adjungiran. Stoga su i matrice tih operatora u bazi e međusobno adjungirane. Posebno, dijagonalni elementi matrice operatora $\pi(a^{-1})$ su kompleksno konjugirani dijagonalnim elementima matrice operatora $\pi(a)$. Kako je trag operatora suma dijagonalnih elemenata matrice tog operatora u bilo kojoj bazi, slijedi tvrdnja.

Tvrdnja (c) je neposredna posljedica jednakosti $\text{Tr } AB = \text{Tr } BA$ za bilo koje $A, B \in L(V)$, jer je $\pi(ab) = \pi(a)\pi(b)$ i $\pi(ba) = \pi(b)\pi(a)$.

Propozicija 2.2.2. *Neka je π reprezentacija grupe G na vektorskom prostoru V i neka su V_1, V_2, \dots, V_s π -invarijantni potprostori takvi da je*

$$V = V_1 \dot{+} V_2 \dot{+} \dots \dot{+} V_s.$$

Tada vrijedi

$$\chi_\pi = \chi_{\pi_{V_1}} + \chi_{\pi_{V_2}} + \dots + \chi_{\pi_{V_s}}.$$

Zadatak 2.2. *Dokažite propoziciju 2.2.2.*

Propozicija 2.2.3. *Neka su π i ρ reprezentacije grupe G . Tada je*

$$\chi_{\pi \otimes \rho} = \chi_\pi \chi_\rho.$$

Zadatak 2.3. *Dokažite propoziciju 2.2.3.*

Teorem 2.2.4. *Neka su π i ρ ireducibilne reprezentacije grupe G . Tada vrijedi*

$$(\chi_\pi | \chi_\rho) = \begin{cases} 1 & \text{ako je } \pi \simeq \rho \\ 0 & \text{ako je } \pi \not\simeq \rho \end{cases}$$

Dokaz: Zbog tvrdnje (b) teorema 2.1.1. možemo pretpostavljati da su reprezentacije π i ρ unitarne. Pretpostavimo najprije da reprezentacije π i ρ nisu ekvivalentne. Budući da je karakter reprezentacije suma (dijagonalnih) matrice operatora reprezentacije u bilo kojoj bazi, iz prve tvrdnje teorema 2.1.5. slijedi

$$(\chi_\pi | \chi_\rho) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (\pi_{ii} | \rho_{jj}) = 0.$$

Pretpostavimo sada da su reprezentacije π i ρ ekvivalentne. Tada je očito $\chi_\rho = \chi_\pi$, jer su u nekim bazama matrice operatora $\pi(a)$ i $\rho(a)$ jednake. Dakle, treba dokazati da je $(\chi_\pi | \chi_\pi) = 1$. Uz primjenu druge tvrdnje teorema 2.1.5. imamo

$$(\chi_\pi | \chi_\pi) = \sum_{i,j=1}^n (\pi_{ii} | \pi_{jj}) = \frac{1}{n} \sum_{i,j=1}^n \delta_{ij} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1 = 1.$$

Time je teorem u potpunosti dokazan.

Teorem 2.2.5. *Neka je π reprezentacija grupe G na vektorskom prostoru V i neka su V_1, V_2, \dots, V_s π -invarijantni potprostori takvi da je*

$$V = V_1 \dot{+} V_2 \dot{+} \dots \dot{+} V_s$$

i da su sve subreprezentacije π_{V_j} ireducibilne. Neka je ρ ireducibilna reprezentacija od G . Tada je skalarni produkt $(\chi_\pi | \chi_\rho)$ jednak broju indeksa $j \in \{1, 2, \dots, s\}$ takvih da je $\pi_{V_j} \simeq \rho$.

Dokaz: Prema propoziciji 2.2.2. vrijedi

$$(\chi_\pi | \chi_\rho) = \sum_{j=1}^s (\chi_{\pi_{V_j}} | \chi_\rho).$$

Tvrdnja slijedi neposredno iz te jednakosti, jer je prema teoremu 2.2.4.

$$(\chi_{\pi_{V_j}} | \chi_\rho) = \begin{cases} 1 & \text{ako je } \pi_{V_j} \simeq \rho \\ 0 & \text{ako je } \pi_{V_j} \not\simeq \rho \end{cases}$$

Korolar 2.2.6. *Neka su π i σ reprezentacije grupe G . Tada je $\pi \simeq \sigma$ ako i samo ako je $\chi_\pi = \chi_\sigma$.*

Zadatak 2.4. *Dokažite korolar 2.2.6.*

U daljnjem ćemo sa \hat{G} označavati skup svih klasa ekvivalencije ireducibilnih reprezentacija grupe G (na kompleksnim vektorskim prostorima). Iz teorema 2.2.5. slijedi da broj potprostora V_i u rastavu prostora reprezentacije π na kojima se subreprezentacija π_{V_i} nalazi u danoj klasi $\alpha \in \hat{G}$ ne ovisi o izboru takvog rastava. Taj se broj zove **multiplicitet** ili **kratnost** ireducibilne klase $\alpha \in \hat{G}$ u reprezentaciji π . Taj ćemo broj označavati sa $m(\pi, \alpha)$.

Nadalje, za $\alpha \in \hat{G}$ označimo sa χ_α karakter bilo koje reprezentacije iz klase α . Prema teoremu 2.2.4. karakteri χ_α , $\alpha \in \hat{G}$, čine ortonormiran skup u vektorskom prostoru $\mathbb{C}[G]$, a kako je taj prostor konačnodimenzionalan zaključujemo da je skup \hat{G} konačan. Štoviše, kako je $\dim \mathbb{C}[G] = |G|$, vrijedi $|\hat{G}| \leq |G|$.

Teorem 2.2.7. *Neka je π reprezentacija grupe G na vektorskom prostoru $V \neq \{0\}$. Tada je $(\chi_\pi | \chi_\pi) \in \mathbb{N}$ i reprezentacija π je ireducibilna ako i samo ako je $(\chi_\pi | \chi_\pi) = 1$.*

Dokaz: Uz uvedene oznake imamo

$$\chi_\pi = \sum_{\alpha \in \hat{G}} m(\pi, \alpha) \chi_\alpha$$

a odatle zbog ortonormiranosti karaktera χ_α slijedi

$$(\chi_\pi | \chi_\pi) = \sum_{\alpha \in \hat{G}} \sum_{\beta \in \hat{G}} m(\pi, \alpha) m(\pi, \beta) (\chi_\alpha | \chi_\beta) = \sum_{\alpha \in \hat{G}} m(\pi, \alpha)^2.$$

Dakle, $(\chi_\pi | \chi_\pi) \in \mathbb{N}$ i taj je broj jednak 1 ako i samo ako je $\chi_\pi = \chi_\alpha$ za neki $\alpha \in \hat{G}$.

2.3 Dekompozicija regularne reprezentacije

U daljnjem ćemo za $\alpha \in \hat{G}$ sa $d(\alpha)$ označavati dimenziju reprezentacija u klasi α .

Lijevu i desnu regularnu reprezentaciju grupe G na prostoru $\mathbb{C}[G]$, definirane u prvom poglavlju, označavat ćemo u daljnjem sa λ_G i ρ_G . Podsjetimo se da je

$$(\lambda_G(a)\varphi)(b) = \varphi(a^{-1}b), \quad (\rho_G(a)\varphi)(b) = \varphi(ba), \quad a, b \in G.$$

Nadalje, prema zadatku 1.12. reprezentacije λ_G i ρ_G su ekvivalentne, a ekvivalenciju ostvaruje izomorfizam $T : \mathbb{C}[G] \rightarrow \mathbb{C}[G]$ dan sa

$$T\varphi = \hat{\varphi}, \quad \hat{\varphi}(a) = \varphi(a^{-1}), \quad \varphi \in \mathbb{C}[G], \quad a \in G.$$

Zadatak 2.5. *Dokažite da su reprezentacije λ_G i ρ_G u odnosu na uvedeni skalarni produkt na prostoru $\mathbb{C}[G]$ unitarne i da je gore definirani operator T unitaran.*

Teorem 2.3.1. (a) *Karakter regularne reprezentacije dan je sa*

$$\chi_{\lambda_G}(a) = \begin{cases} |G| & \text{ako je } a = e \\ 0 & \text{ako je } a \neq e. \end{cases}$$

(b) *Za svaku klasu $\alpha \in \hat{G}$ je $m(\lambda_G, \alpha) = d(\alpha)$.*

(c) *Vrijedi*

$$\sum_{\alpha \in \hat{G}} d(\alpha)^2 = |G|.$$

Dokaz: (a) Upotrijebit ćemo prije uvedenu bazu $\{\delta_c; c \in G\}$ prostora $\mathbb{C}[G]$:

$$\delta_c(b) = \delta_{c,b} = \begin{cases} 1 & \text{za } b = c \\ 0 & \text{za } b \neq c. \end{cases}$$

Za $a, b, c \in G$ imamo

$$(\lambda_G(a)\delta_c)(b) = \delta_c(a^{-1}b) = \delta_{c,a^{-1}b} = \delta_{ac,b} = \delta_{ac}(b).$$

Dakle,

$$\lambda_G(a)\delta_c = \delta_{ac}, \quad a, c \in G.$$

Odavde se vidi da ako je $a \neq e$ onda su u matrici operatora $\lambda_G(a)$ u toj bazi svi dijagonalni elementi jednaki nuli. Dakle, trag tog operatora jednak je 0, tj. $\chi_{\lambda_G}(a) = 0$. Naravno, $\lambda_G(e) = I_{\mathbb{C}[G]}$ pa je $\chi_{\lambda_G}(e) = \dim \mathbb{C}[G] = |G|$.

(b) Prema teoremu 2.2.5., prema tvrdnji (a) propozicije 2.2.1 i prema dokazanoj tvrdnji (a) imamo

$$m(\lambda_G, \alpha) = (\chi_{\lambda_G} | \chi_\alpha) = \frac{1}{|G|} \sum_{a \in G} \chi_{\lambda_G}(a) \overline{\chi_\alpha(a)} = \frac{1}{|G|} |G| \overline{\chi_\alpha(e)} = d(\alpha).$$

(c) Prema dokazanoj tvrdnji (b) imamo

$$\chi_{\lambda_G} = \sum_{\alpha \in \hat{G}} d(\alpha) \chi_\alpha$$

pa zbog tvrdnje (a) slijedi

$$|G| = \chi_{\lambda_G}(e) = \sum_{\alpha \in \hat{G}} d(\alpha) \chi_\alpha(e) = \sum_{\alpha \in \hat{G}} d(\alpha)^2.$$

Tvrđnja (c) teorema 2.3.1. može nam poslužiti da ustanovimo da li određene pronađene međusobno neekvivalentne ireducibilne reprezentacije grupe G predstavljaju predstavnike svih klasa $\alpha \in \hat{G}$: to jest tako ako i samo ako je suma kvadrata njihovih dimenzija jednaka $|G|$. Kasnije ćemo ustanoviti još jednu činjenicu o odnosu dimenzija $d(\alpha)$ ireducibilnih reprezentacija i reda $|G|$ grupe G : broj $|G|$ djeljiv s $d(\alpha)$ za svaku $\alpha \in \hat{G}$.

Prema tvrdnji (b) teorema 2.3.1. u dekompoziciji regularne reprezentacije konačne grupe G u direktnu sumu ireducibilnih reprezentacija za svaku klasu $\alpha \in \hat{G}$ točno $d(\alpha)$ reprezentacija iz te dekompozicije nalazi se u klasi α . To će biti i posljedica preciznog opisa strukture grupovne algebre $\mathbb{C}[G]$ koji ćemo dobiti u odjeljku 2.5.

2.4 Centralne funkcije

Sljedeći nam je cilj odrediti broj elemenata skupa \hat{G} . U tu svrhu trebamo definirati nekoliko pojmova u vezi s grupom G .

Funkcija $\varphi \in \mathbb{C}[G]$ zove se **centralna** ako vrijedi $\varphi(ab) = \varphi(ba) \forall a, b \in G$. Prema tvrdnji (c) propozicije 2.2.1. karakter bilo koje reprezentacije grupe G je centralna funkcija na G . Skup svih centralnih funkcija na grupi G označavat ćemo sa $\mathbb{C}_c[G]$. Očito je $\mathbb{C}_c[G]$ potprostor vektorskog prostora $\mathbb{C}[G]$.

Podsjetimo se da smo odjeljku 1.2. uspostavili bijektivnu vezu između reprezentacija grupe G (u ovom slučaju na kompleksnim vektorskim prostorima) i reprezentacija unitalne algebre $\mathbb{C}[G]$. Dogovorili smo se da ćemo odgovarajuće reprezentacije tih dvaju objekata označavati istim znakom. Veze između reprezentacije π od G i pripadne reprezentacije od $\mathbb{C}[G]$ su sljedeće:

$$\pi(\varphi) = \sum_{a \in G} \varphi(a)\pi(a), \quad \varphi \in \mathbb{C}[G]; \quad \pi(a) = \pi(\delta_a), \quad a \in G.$$

Propozicija 2.4.1. *Neka je π ireducibilna reprezentacija grupe G na prostoru V dimenzije n i neka je $\varphi \in \mathbb{C}_c[G]$. Tada je*

$$\pi(\varphi) = \lambda I_V \quad \text{gdje je} \quad \lambda = \frac{1}{n} \sum_{a \in G} \varphi(a)\chi_\pi(a) = \frac{|G|}{n} (\chi_\pi | \overline{\varphi}).$$

Dokaz: Za $b \in G$ imamo redom

$$\pi(\varphi)\pi(b) = \sum_{a \in G} \varphi(a)\pi(ab) = \sum_{a \in G} \varphi(ab^{-1})\pi(a) = \sum_{a \in G} \varphi(b^{-1}a)\pi(a) = \sum_{a \in G} \varphi(a)\pi(ba) = \pi(b)\pi(\varphi).$$

Sada iz tvrdnje (b) Schurove leme (teorem 1.1.4.) slijedi da je $\pi(\varphi) = \lambda I_V$ za neki $\lambda \in \mathbb{C}$. Slijedi

$$n\lambda = \text{Tr } \pi(\varphi) = \sum_{a \in G} \varphi(a) \text{Tr } \pi(a) = \sum_{a \in G} \varphi(a)\chi_\pi(a)$$

i time je propozicija dokazana.

Teorem 2.4.2. $\{\chi_\alpha; \alpha \in \hat{G}\}$ je ortonormirana baza prostora $\mathbb{C}_c[G]$.

Dokaz: Znamo da su χ_α ortonormirani i da leže u potprostoru $\mathbb{C}_c[G]$. Neka je $\varphi \in \mathbb{C}_c[G]$, $\varphi \perp \chi_\alpha \forall \alpha \in \hat{G}$. Za bilo koju ireducibilnu reprezentaciju π grupe G na prostoru V dimenzije n definiramo operator $\pi(\overline{\varphi})$ na prostoru V ovako:

$$\pi(\overline{\varphi}) = \sum_{a \in G} \overline{\varphi(a)}\pi(a).$$

Prema propoziciji 2.4.1. tada je $\pi(\overline{\varphi}) = \lambda I_V$, gdje je

$$\lambda = \frac{|G|}{n} (\chi_\pi | \varphi)$$

a to je jednako 0 jer je $\chi_\pi = \chi_\alpha$ ako je $\pi \in \alpha$ i jer smo pretpostavili da je $\varphi \perp \chi_\alpha$ za svaki $\alpha \in \hat{G}$. Dakle, $\pi(\overline{\varphi}) = 0$ za svaku ireducibilnu reprezentaciju π . Kako je svaka reprezentacija direktna suma ireducibilnih reprezentacija, slijedi da je za svaku reprezentaciju π

$$\pi(\overline{\varphi}) = \sum_{a \in G} \overline{\varphi(a)} \pi(a) = 0.$$

Posebno, $\lambda_G(\overline{\varphi}) = 0$. Upotrijebit ćemo sada bazu $\{\delta_a; a \in G\}$ prostora $\mathbb{C}[G]$ iz dokaza teorema 2.3.1. Primijenimo operator $0 = \lambda_G(\overline{\varphi})$ na funkciju δ_e :

$$0 = \lambda_G(\overline{\varphi})\delta_e = \sum_{a \in G} \overline{\varphi(a)} \lambda_G(a) \delta_e = \sum_{a \in G} \overline{\varphi(a)} \delta_a.$$

Budući da su $\delta_a, a \in G$, linearno nezavisni, slijedi $\varphi(a) = 0 \forall a \in G$ tj. $\varphi = 0$.

Na taj način dokazali smo da je ortogonalni komplement potprostora razapetog sa $\{\chi_\alpha; \alpha \in \hat{G}\}$ u prostoru $\mathbb{C}_c[G]$ jednak $\{0\}$. Time je teorem dokazan.

Zadatak 2.6. *Neka su G i H konačne grupe. Pomoću teorema 2.2.7., 2.3.1. i 2.4.2. dokažite da je $(\pi, \rho) \mapsto \pi \times \rho$ bijekcija sa skupa $\hat{G} \times \hat{H}$ na skup svih klasa ekvivalencije ireducibilnih reprezentacija grupe $G \times H$.*

Posljedica teorema 2.4.2. je da je broj $|\hat{G}|$ klasa ekvivalencije ireducibilnih reprezentacija grupe G jednak dimenziji vektorskog prostora $\mathbb{C}_c[G]$ svih centralnih funkcija na grupi G . Sada ćemo na drugi način odrediti dimenziju vektorskog prostora $\mathbb{C}_c[G]$.

Za element $a \in G$ kažemo da je **konjugiran** elementu $b \in G$ ako postoji $c \in G$ takav da je $a = c^{-1}bc$. Lako se vidi da je konjugiranost relacija ekvivalencije na grupi G pa je G disjunktna unija svojih klasa konjugiranosti.

Propozicija 2.4.3. (a) *Funkcija $\varphi \in \mathbb{C}[G]$ je centralna ako i samo ako je ona konstantna na svakoj klasi konjugiranosti u grupi G .*

(b) *Neka su C_1, C_2, \dots, C_s sve klase konjugiranosti u grupi G . Za svaki $j \in \{1, 2, \dots, s\}$ definiramo funkciju φ_j na grupi G ovako:*

$$\varphi_j(a) = \begin{cases} 1 & \text{ako } a \in C_j \\ 0 & \text{ako } a \in G \setminus C_j \end{cases}$$

(drugim riječima φ_j je karakteristična funkcija podskupa $C_j \subseteq G$). Tada je

$$\{\varphi_j; j = 1, 2, \dots, s\}$$

baza vektorskog prostora $\mathbb{C}_c[G]$. Posebno, $\dim \mathbb{C}_c[G] = s$.

Zadatak 2.7. *Dokažite propoziciju 2.4.3.*

Napomenimo da je baza u tvrdnji (b) propozicije 2.4.3. očito ortogonalna, jer su klase konjugiranosti međusobno disjunktne. Nadalje, kvadrat norme funkcije φ_j jednak je kvocijentu broja $|C_j|$ elemenata u klasi konjugiranosti C_j i reda $|G|$ grupe G . Dakle,

$$\left\{ \sqrt{\frac{|G|}{|C_j|}} \varphi_j; j = 1, 2, \dots, s \right\}$$

je ortonormirana baza od $\mathbb{C}_c[G]$.

Iz propozicije 2.4.3. i iz teorema 2.4.2. neposredno slijedi:

Teorem 2.4.4. *Broj $|\hat{G}|$ klasa ekvivalencije ireducibilnih reprezentacija konačne grupe G jednak je broju klasa konjugiranosti u grupi G .*

Teorem 2.4.5. *Neka je G konačna grupa. Sljedeća su tri svojstva međusobno ekvivalentna:*

- (a) *Grupa G je komutativna.*
- (b) *Svaka ireducibilna kompleksna reprezentacija grupe G je jednodimenzionalna.*
- (c) $|\hat{G}| = |G|$.

Dokaz: Neka je za svaku klasu $\alpha \in \hat{G}$ $d(\alpha)$ dimenzija reprezentacija u klasi α . Prema tvrdnji (c) teorema 2.3.1. tada je

$$|G| = \sum_{\alpha \in \hat{G}} d(\alpha)^2.$$

Odatle neposredno slijedi da je $|\hat{G}| = |G|$ ako i samo ako je $d(\alpha) = 1 \quad \forall \alpha \in \hat{G}$. Dakle, (b) \iff (c).

Grupa G je komutativna ako i samo ako je $b^{-1}ab = a \quad \forall a, b \in G$, tj. ako i samo ako je svaka klasa konjugiranosti u grupi G jednočlan skup. Kako je broj klasa konjugiranosti u grupi G prema teoremu 2.4.4. jednak $|\hat{G}|$, slijedi ekvivalencija (a) \iff (c).

Neka je π reprezentacija grupe G na prostoru V i neka je $e = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ baza prostora V . Za $a \in G$ označimo sa $\pi_{ij}(a)$ elemente matrice operatora $\pi(a)$ u bazi e . Tada su $\pi_{ij} \in \mathbb{C}[G]$. Označimo sa $\mathbb{C}_\pi[G]$ potprostor od $\mathbb{C}[G]$ razapet funkcijama π_{ij} , $1 \leq i, j \leq n$. Taj potprostor očito ne ovisi o izboru baze e prostora V . Nadalje, ako su π i ρ ekvivalentne reprezentacije, onda je $\mathbb{C}_\pi[G] = \mathbb{C}_\rho[G]$. Ako je $\alpha \in \hat{G}$ i ako je $\pi \in \alpha$ pisat ćemo $\mathbb{C}_\alpha[G] = \mathbb{C}_\pi[G]$.

Teorem 2.4.6. *Neka je G konačna grupa.*

- (a) *Vrijedi*

$$\mathbb{C}[G] = \sum_{\alpha \in \hat{G}} \mathbb{C}_\alpha[G]$$

i ta suma vektorskih potprostora je direktna.

- (b) *Neka $\pi^\alpha \in \alpha$ djeluje na vektorskom prostoru V_α , neka je $e^\alpha = \{e_1^\alpha, e_2^\alpha, \dots, e_{d(\alpha)}^\alpha\}$ baza prostora V_α i neka su $\pi_{ij}^\alpha(a)$ elementi matrice operatora $\pi^\alpha(a)$ u bazi e^α ($a \in G$, $1 \leq i, j \leq d(\alpha)$). Tada je $\{\pi_{ij}^\alpha; 1 \leq i, j \leq d(\alpha)\}$ baza potprostora $\mathbb{C}_\alpha[G]$ i $\{\pi_{ij}^\alpha; \alpha \in \hat{G}, 1 \leq i, j \leq d(\alpha)\}$ je baza prostora $\mathbb{C}[G]$.*

(c) Ako su reprezentacije π^α u (b) unitarne i ako su baze e^α ortonormirane, onda je

$$\{\sqrt{d(\alpha)}\pi_{ij}^\alpha; \alpha \in \hat{G}, 1 \leq i, j \leq d(\alpha)\}$$

ortonormirana baza u unitarnom prostoru $\mathbb{C}[G]$.

Dokaz: Tvrdnje (a) i (b) slijede iz tvrdnje (c) jer za $\alpha \in \hat{G}$ i za bilo koji izbor reprezentacije π^α i baze e^α funkcije π_{ij}^α razapinju potprostor $\mathbb{C}_\alpha[G]$.

Dokažimo tvrdnju (c). Operatori $\pi^\alpha(a)$ su unitarni, dakle operatori $\pi^\alpha(a)$ i $\pi^\alpha(a^{-1})$ su međusobno adjungirani. Kako je baza e^α ortonormirana, matrice tih operatora u toj bazi su međusobno adjungirane. To znači da vrijedi:

$$\pi_{ij}^\alpha(a^{-1}) = \overline{\pi_{ji}^\alpha(a)}, \quad 1 \leq i, j \leq d(\alpha), \quad \alpha \in \hat{G}, \quad a \in G.$$

Sada iz teorema 2.1.4 neposredno slijedi:

$$\sum_{a \in G} \pi_{ij}^\alpha(a) \overline{\pi_{sr}^\beta(a)} = \frac{|G|}{d(\alpha)} \delta_{\alpha\beta} \delta_{is} \delta_{jr}, \quad \alpha, \beta \in \hat{G}, \quad i, j \in \{1, 2, \dots, d(\alpha)\}, \quad r, s \in \{1, 2, \dots, d(\beta)\}.$$

Prema definiciji skalarnog produkta u prostoru $\mathbb{C}[G]$ to znači da je

$$(\pi_{ij}^\alpha | \pi_{sr}^\beta) = \frac{1}{d(\alpha)} \delta_{\alpha\beta} \delta_{is} \delta_{jr}, \quad \alpha, \beta \in \hat{G}, \quad i, j \in \{1, 2, \dots, d(\alpha)\}, \quad r, s \in \{1, 2, \dots, d(\beta)\}.$$

Iz gornjih relacija vidimo da je

$$\{\sqrt{d(\alpha)}\pi_{ij}^\alpha; \alpha \in \hat{G}, 1 \leq i, j \leq d(\alpha)\}$$

ortonormiran skup. Broj elemenata tog skupa je

$$\sum_{\alpha \in \hat{G}} d(\alpha)^2,$$

a to je prema tvrdnji (c) teorema 2.3.1. jednako $|G| = \dim \mathbb{C}[G]$. Dakle, radi se o ortonormiranoj bazi unitarnog prostora $\mathbb{C}[G]$.

Zadatak 2.8. Za simetričnu grupu S_3 (grupu permutacija skupa $\{1, 2, 3\}$) pronađite sve klase konjugiranosti, konstruirajte za svaku $\alpha \in \hat{S}_3$ unitarnu reprezentaciju $\pi^\alpha \in \alpha$ i konstruirajte ortonormiranu bazu prostora $\mathbb{C}_c[S_3]$ iz teorema 2.3.1. i prostora $\mathbb{C}[S_3]$ iz tvrdnje (c) teorema 2.4.6. Napokon, izračunajte matricu unitarnog operatora na prostoru $\mathbb{C}_c[S_3]$ koji prevodi bazu iz teorema 2.3.1. u bazu koja se dobije normiranjem ortogonalne baze iz tvrdnje (b) propozicije 2.4.3.

2.5 Struktura grupovne algebre $\mathbb{C}[G]$

Propozicija 2.5.1. *Potprostor $\mathbb{C}_c[G] = \{\varphi \in \mathbb{C}[G]; \varphi(ab) = \varphi(ba) \forall a \in G\}$ svih centralnih funkcija je centar algebre $\mathbb{C}[G]$, tj.*

$$\mathbb{C}_c[G] = \{\varphi \in \mathbb{C}[G]; \varphi \star \psi = \psi \star \varphi \forall \psi \in \mathbb{C}[G]\}.$$

Dokaz: Neka je $\varphi \in \mathbb{C}_c[G]$ i $\psi \in \mathbb{C}[G]$. Tada imamo redom

$$\begin{aligned} (\varphi \star \psi)(a) &= \sum_{b \in G} \varphi(b) \psi(b^{-1}a) = \sum_{b \in G} \varphi(b^{-1}) \psi(ba) = \sum_{b \in G} \varphi((ba^{-1})^{-1}) \psi(b) = \\ &= \sum_{b \in G} \psi(b) \varphi(ab^{-1}) = \sum_{b \in G} \psi(b) \varphi(b^{-1}a) = (\psi \star \varphi)(a). \end{aligned}$$

Dakle, za svaku centralnu funkciju φ vrijedi $\varphi \star \psi = \psi \star \varphi \forall \psi \in \mathbb{C}[G]$.

Pretpostavimo sada da je funkcija φ iz centra algebre $\mathbb{C}[G]$, tj. takva da je $\varphi \star \psi = \psi \star \varphi \forall \psi \in \mathbb{C}[G]$. Tada posebno za svaki $a \in G$ vrijedi $\varphi \star \delta_a = \delta_a \star \varphi$. Međutim,

$$\begin{aligned} (\varphi \star \delta_a)(b) &= \sum_{c \in G} \varphi(c) \delta_a(c^{-1}b) = \sum_{c \in G} \varphi(c) \delta_{a,c^{-1}b} = \varphi(ba^{-1}), \\ (\delta_a \star \varphi)(b) &= \sum_{c \in G} \delta_a(c) \varphi(c^{-1}b) = \sum_{c \in G} \delta_{a,c} \varphi(c^{-1}b) = \varphi(a^{-1}b). \end{aligned}$$

Dakle, $\varphi(ba^{-1}) = \varphi(a^{-1}b) \forall a, b \in G$ a to znači da je $\varphi \in \mathbb{C}_c[G]$.

Proučit ćemo sada поближе strukturu algebre $\mathbb{C}[G]$ i to tako da ustanovimo pravila konvolucije elemenata pogodno izabrane baze od $\mathbb{C}[G]$. Prema teoremu 2.4.6. znamo da bazu od $\mathbb{C}[G]$ čine matricni elementi ireducibilnih reprezentacija grupe G . Kao i prije za svaku klasu $\alpha \in \hat{G}$ izaberimo iz te klase jednu ireducibilnu reprezentaciju π^α grupe G na vektorskom prostoru V_α . Neka je $d(\alpha) = \dim V_\alpha$ i izaberimo za svaku klasu $\alpha \in \hat{G}$ bazu $e^\alpha = \{e_1^\alpha, e_2^\alpha, \dots, e_{d(\alpha)}^\alpha\}$ prostora V_α . Nadalje, označimo sa $\pi_{ij}^\alpha(a)$ elemente matrice operatora $\pi^\alpha(a)$ u bazi e^α . Prema tvrdnji (b) teorema 2.4.6.

$$\{\pi_{ij}^\alpha; \alpha \in \hat{G}, i, j \in \{1, 2, \dots, d(\alpha)\}\}$$

je baza vektorskog prostora $\mathbb{C}[G]$. Nadalje, za $\alpha \in \hat{G}$ χ_α je karakter reprezentacije π^α :

$$\chi_\alpha(a) = \sum_{i=1}^{d(\alpha)} \pi_{ii}^\alpha(a), \quad a \in G.$$

Propozicija 2.5.2. *Vrijedi*

$$\pi_{ij}^\alpha \star \pi_{kl}^\beta = \frac{|G|}{d(\alpha)} \delta_{\alpha,\beta} \delta_{jk} \pi_{il}^\alpha.$$

Zadatak 2.9. *Pomoću teorema 2.1.4. dokažite propoziciju 2.5.2.*

Teorem 2.5.3. (a) *Potprostori $\mathbb{C}_\alpha[G]$, $\alpha \in \hat{G}$, su obostrani ideali u algebri $\mathbb{C}[G]$.*

(b) *Za funkcije*

$$\chi^\alpha = \frac{d(\alpha)}{|G|} \chi_\alpha, \quad \alpha \in \hat{G},$$

vrijedi

$$\chi^\alpha \star \varphi = \varphi \star \chi^\alpha = \begin{cases} \varphi & \text{ako je } \varphi \in \mathbb{C}_\alpha[G] \\ 0 & \text{ako je } \varphi \in \mathbb{C}_\beta[G], \beta \in \hat{G}, \beta \neq \alpha. \end{cases}$$

Posebno, funkcija χ^α je jedinica u algebri $\mathbb{C}_\alpha[G]$ i vrijedi $\chi^\alpha \star \chi^\beta = \delta_{\alpha\beta} \chi^\alpha$.

Dokaz: Prema teoremu 2.4.6.

$$\{\pi_{ij}^\alpha; 1 \leq i, j \leq d(\alpha)\}$$

je baza potprostora $\mathbb{C}_\alpha[G]$, a

$$\{\pi_{k\ell}^\beta; \beta \in \hat{G}, 1 \leq k, \ell \leq d(\beta)\}$$

je baza čitave algebre $\mathbb{C}[G]$. Dakle, ako su $\varphi \in \mathbb{C}_\alpha[G]$ i $\psi \in \mathbb{C}[G]$ možemo pisati

$$\varphi = \sum_{i,j=1}^{d(\alpha)} \lambda_{ij} \pi_{ij}^\alpha \quad \text{i} \quad \psi = \sum_{\beta \in \hat{G}} \sum_{k,\ell=1}^{d(\beta)} \mu_{k\ell}^\beta \pi_{k\ell}^\beta$$

za neke $\lambda_{ij}, \mu_{k\ell}^\beta \in \mathbb{C}$. Stoga je prema propoziciji 2.5.2.

$$\begin{aligned} \varphi \star \psi &= \sum_{\beta \in \hat{G}} \sum_{i,j=1}^{d(\alpha)} \sum_{k,\ell=1}^{d(\beta)} \lambda_{ij} \mu_{k\ell}^\beta \pi_{ij}^\alpha \star \pi_{k\ell}^\beta = \\ &= \frac{|G|}{d(\alpha)} \sum_{\beta \in \hat{G}} \sum_{i,j=1}^{d(\alpha)} \sum_{k,\ell=1}^{d(\beta)} \lambda_{ij} \mu_{k\ell}^\beta \delta_{\alpha,\beta} \delta_{jk} \pi_{i\ell}^\alpha = \frac{|G|}{d(\alpha)} \sum_{i,j,\ell=1}^{d(\alpha)} \lambda_{ij} \mu_{j\ell}^\alpha \pi_{i\ell}^\alpha \in \mathbb{C}_\alpha[G] \end{aligned}$$

i sasvim analogno

$$\begin{aligned} \psi \star \varphi &= \sum_{\beta \in \hat{G}} \sum_{i,j=1}^{d(\alpha)} \sum_{k,\ell=1}^{d(\beta)} \lambda_{ij} \mu_{k\ell}^\beta \pi_{k\ell}^\beta \star \pi_{ij}^\alpha = \\ &= \frac{|G|}{d(\alpha)} \sum_{\beta \in \hat{G}} \sum_{i,j=1}^{d(\alpha)} \sum_{k,\ell=1}^{d(\beta)} \lambda_{ij} \mu_{k\ell}^\beta \delta_{\alpha,\beta} \delta_{i\ell} \pi_{kj}^\alpha = \frac{|G|}{d(\alpha)} \sum_{i,j,k=1}^{d(\alpha)} \lambda_{ij} \mu_{ki}^\alpha \pi_{kj}^\alpha \in \mathbb{C}_\alpha[G] \end{aligned}$$

Time je dokazano da je $\mathbb{C}_\alpha[G]$ obostrani ideal u algebri $\mathbb{C}[G]$.

(b) Funkcije χ^α su centralne, pa prema propoziciji 2.5.1. vrijedi $\chi^\alpha \star \varphi = \varphi \star \chi^\alpha$. Nadalje, iz propozicije 2.5.2. slijedi da za $\alpha, \beta \in \hat{G}$ i za $i, j \in \{1, 2, \dots, d(\beta)\}$ imamo

$$\chi^\alpha \star \pi_{ij}^\beta = \frac{d(\alpha)}{|G|} \sum_{k=1}^{d(\alpha)} \pi_{kk}^\alpha \star \pi_{ij}^\beta = \delta_{\alpha,\beta} \sum_{k=1}^{d(\alpha)} \delta_{ki} \pi_{kj}^\alpha = \delta_{\alpha,\beta} \pi_{ij}^\alpha.$$

Kako je $\{\pi_{ij}^\beta; 1 \leq i, j \leq d(\beta)\}$ baza potprostora $\mathbb{C}_\beta[G]$, tvrdnja slijedi.

2.6 Osnovna redukcija reprezentacije

Neka su u daljnjem χ^α , $\alpha \in \hat{G}$, centralne funkcije definirane u tvrdnji (b) teorema 2.5.3:

$$\chi^\alpha = \frac{d(\alpha)}{|G|} \chi_\alpha.$$

Prema tom teoremu vrijedi:

$$\chi^\alpha \star \chi^\beta = 0, \quad \alpha, \beta \in \hat{G}, \quad \alpha \neq \beta; \quad \chi^\alpha \star \chi^\alpha = \chi^\alpha, \quad \alpha \in \hat{G};$$

$$\chi^\alpha \star \pi_{ij}^\beta = 0, \quad \alpha, \beta \in \hat{G}, \quad \alpha \neq \beta, \quad 1 \leq i, j \leq d(\beta); \quad \chi^\alpha \star \pi_{ij}^\alpha = \pi_{ij}^\alpha, \quad \alpha \in \hat{G}, \quad 1 \leq i, j \leq d(\alpha).$$

Nadalje, kako je χ^α jedinica algebre $\mathbb{C}_\alpha[G]$, zbog tvrdnje (a) teorema 2.4.6. slijedi da je suma tih funkcija jedinica algebre $\mathbb{C}[G]$. Dakle,

$$\sum_{\alpha \in \hat{G}} \chi^\alpha = 1_{\mathbb{C}[G]} = \delta_e.$$

Neka je sada π reprezentacija grupe G na vektorskom prostoru V . Promatrajmo operatore $\pi(\overline{\chi^\alpha})$, $\alpha \in \hat{G}$. Tada je

$$\pi(\overline{\chi^\alpha})^2 = \pi(\overline{\chi^\alpha}) \pi(\overline{\chi^\alpha}) = \pi(\overline{\chi^\alpha \star \chi^\alpha}) = \pi(\overline{\chi^\alpha \star \chi^\alpha}) = \pi(\overline{\chi^\alpha}).$$

Dakle, operatori $\pi(\overline{\chi^\alpha})$ su projektori. Označimo sa V_α sliku projektora $\pi(\overline{\chi^\alpha})$:

$$V_\alpha = \{v \in V; \pi(\overline{\chi^\alpha})v = v\}.$$

Budući da vrijedi

$$\sum_{\alpha \in \hat{G}} \pi(\overline{\chi^\alpha}) = \pi\left(\sum_{\alpha \in \hat{G}} \overline{\chi^\alpha}\right) = \pi(1_{\mathbb{C}[G]}) = I_V$$

i

$$\pi(\overline{\chi^\alpha}) \pi(\overline{\chi^\beta}) = \pi(\overline{\chi^\alpha \star \chi^\beta}) = 0 \quad \text{ako je } \alpha \neq \beta,$$

zaključujemo da je

$$V = \sum_{\alpha \in \hat{G}} V_\alpha \quad (\text{direktna suma}).$$

Budući da su $\overline{\chi^\alpha}$ centralne funkcije, potprostori V_α su π -invarijantni. Gornji rastav prostora V zove **osnovna redukcija reprezentacije** π .

Razmotrimo sada što predstavljaju potprostori V_α , $\alpha \in \hat{G}$, u osnovnoj redukciji reprezentacije π . Neka je W π -invarijantan potprostor od V takav da je subreprezentacija $\pi|_W$ ireducibilna. Neka je $\alpha \in \hat{G}$ klasa ekvivalencije te ireducibilne reprezentacije. Tada je $\chi_{\pi|_W} = \chi_\alpha$. Budući da je χ^α centralna funkcija, prema propoziciji 2.4.1. vrijedi

$$\pi(\overline{\chi^\alpha})|_W = \pi|_W(\overline{\chi^\alpha}) = \lambda I_W,$$

gdje je

$$\lambda = \frac{|G|}{d(\alpha)} (\chi_{\pi|_W} | \chi^\alpha) = (\chi_\alpha | \chi_\alpha) = 1.$$

Dakle, $\pi(\overline{\chi^\alpha})|_W = I_W$, što znači da je $W \subseteq V_\alpha$.

Na taj način dokazali smo:

Teorem 2.6.1. *Neka je π reprezentacija grupe G na prostoru V .*

(a) *Za $\alpha \in \hat{G}$ operator*

$$\pi(\overline{\chi^\alpha}) = \frac{d(\alpha)}{|G|} \sum_{a \in G} \overline{\chi_\alpha(a)} \pi(a)$$

je projektor.

(b) *Vrijedi*

$$\sum_{\alpha \in \hat{G}} \pi(\overline{\chi^\alpha}) = I_V.$$

Drugim riječima, ako je V_α područje vrijednosti projektora $\pi(\overline{\chi^\alpha})$, onda je

$$V = \sum_{\alpha \in \hat{G}} V_\alpha \quad (\text{direktna suma}).$$

(c) *Ako je $W \leq V$ π -invarijantan potprostor takav da je subreprezentacija π_W ireducibilna i ako je $\alpha \in \hat{G}$ klasa ekvivalencije reprezentacije π_W , onda je $W \subseteq V_\alpha$.*

(d) *Neka je*

$$V = V_1 \dot{+} V_2 \dot{+} \cdots \dot{+} V_s$$

rastav prostora V u direktnu sumu π -invarijantnih potprostora takvih da su sve subreprezentacije π_{V_i} ireducibilne. Suma svih potprostora V_i takvih da je subreprezentacija π_{V_i} u klasi $\alpha \in \hat{G}$ ne ovisi o gornjem rastavu i jednaka je području vrijednosti V_α projektora $\pi(\overline{\chi^\alpha})$.

Teorem 2.6.2. *Neka su $\pi^i : G \rightarrow GL(V_i)$, $1 \leq i \leq s$, međusobno neekvivalentne ireducibilne reprezentacije grupe G . Pomoću pripadnih reprezentacija grupovne algebre $\pi^i : \mathbb{C}[G] \rightarrow L(V_i)$ definiramo homomorfizam algebri*

$$\pi : \mathbb{C}[G] \rightarrow L(V_1) \times L(V_2) \times \cdots \times L(V_s), \quad \pi(\varphi) = (\pi_1(\varphi), \pi_2(\varphi), \dots, \pi_s(\varphi)), \quad \varphi \in \mathbb{C}[G].$$

Homomorfizam π je surjektivan.

Dokaz: Pretpostavimo da homomorfizam π nije surjektivan. Tada je slika $\pi(\mathbb{C}[G])$ tog homomorfizma pravi potprostor prostora $\prod_i L(V_i)$, pa slijedi da postoji netrivialni linearni funkcional f na prostoru $\prod_i L(V_i)$ koji se poništava na $\pi(\mathbb{C}[G])$. Za svaki $a \in G$ je $\pi^i(a) = \pi^i(\delta_a)$, gdje je $\delta_a \in \mathbb{C}[G]$ definirana sa $\delta_a(b) = \delta_{a,b}$. Dakle, vrijedi

$$f(\pi^1(a), \pi^2(a), \dots, \pi^s(a)) = 0 \quad \forall a \in G.$$

Za svaki $i \in \{1, 2, \dots, s\}$ izaberimo bazu $e^i = \{e_1^i, e_2^i, \dots, e_{n_i}^i\}$ prostora V_i i neka su $\pi_{jk}^i(a)$ elementi matrice operatora $\pi^i(a)$ u bazi e^i . Neka je za svaki i $\{E_{jk}^i; 1 \leq j, k \leq n_i\}$ pridružena baza prostora $L(V_i)$:

$$E_{jk}^i e_\ell^i = \delta_{k\ell} e_j^i, \quad 1 \leq j, k, \ell \leq n_i; \quad 1 \leq i \leq s.$$

Stavimo

$$\lambda_{jk}^i = f(\underbrace{0, \dots, 0}_{i-1}, E_{jk}^i, \underbrace{0, \dots, 0}_{s-i}), \quad 1 \leq j, k \leq n_i, \quad 1 \leq i \leq s.$$

Tada imamo

$$\pi^i(a) = \sum_{j,k=1}^{n_i} \pi_{jk}^i(a) E_{jk}^i, \quad a \in G, \quad 1 \leq i \leq s,$$

pa iz jednakosti $f(\pi^1(a), \pi^2(a), \dots, \pi^s(a)) = 0 \quad \forall a \in G$ slijedi

$$\sum_{i=1}^s \sum_{j,k=1}^{n_i} \lambda_{jk}^i \pi_{jk}^i(a) = 0 \quad \forall a \in G.$$

Međutim, prema tvrdnji (b) teorema 2.4.6. funkcije π_{jk}^i ($1 \leq j, k \leq n_i$, $1 \leq i \leq s$) su linearno nezavisne, pa slijedi $\lambda_{jk}^i = 0 \quad \forall i, j, k$. Dakle, $f = 0$ suprotno pretpostavci. Ova kontradikcija dokazuje da je pretpostavka da homomorfizam π nije surjektivan bila pogrešna. Time je teorem dokazan.

Iz prethodnog teorema neposredno slijedi:

Korolar 2.6.3. *Neka je π ireducibilna reprezentacija grupe G na prostoru V . Tada je*

$$L(V) = \pi(\mathbb{C}[G]) = \{\pi(\varphi); \varphi \in \mathbb{C}[G]\}.$$

Nadalje, vrijedi:

Korolar 2.6.4. *Pretpostavimo da su reprezentacije π^i u teoremu 1.3.5. predstavnici svih klasa ekvivalencije \hat{G} . Tada je homomorfizam π u tvrdnji tog teorema izomorfizam algebre $\mathbb{C}[G]$ na algebru $L(V_1) \times L(V_2) \times \dots \times L(V_s)$.*

Zadatak 2.10. *Dokažite korolar 2.6.4.*

Zadatak 2.11. *Uz oznake i pretpostavke teorema 2.6.2. za svaki $i \in \{1, 2, \dots, s\}$ neka je $\alpha_i \in \hat{G}$ klasa ekvivalencije reprezentacije π^i . Nadalje, neka je $\hat{G} \setminus \{\alpha_1, \dots, \alpha_s\} = \{\beta_1, \dots, \beta_r\}$. Dokažite da je tada*

$$\text{Ker } \pi = \sum_{j=1}^r \mathbb{C}_{\beta_j}[G]$$

i da je restrikcija homomorfizma π na podalgebru

$$\sum_{i=1}^s \mathbb{C}_{\alpha_i}[G]$$

unitalni izomorfizam te unitalne algebre na algebru $L(V_1) \times L(V_2) \times \dots \times L(V_s)$.

Teorem 2.6.5. *Neka su π i ρ reprezentacije grupe G na prostorima V i W . Tada je*

$$\dim \text{Hom}_G(V, W) = \dim \text{Hom}_G(W, V) = (\chi_\pi | \chi_\rho) = \sum_{\alpha \in \hat{G}} m(\pi, \alpha) m(\rho, \alpha).$$

Dokaz: Neka je $V = X_1 \dot{+} X_2 \dot{+} \dots \dot{+} X_n$ pri čemu su X_1, X_2, \dots, X_n π -invarijantni potprostori od V takvi da su subreprezentacije $\pi_{X_1}, \pi_{X_2}, \dots, \pi_{X_n}$ ireducibilne. Prema zadatku 1.9. tada vrijedi

$$\dim \text{Hom}_G(V, W) = \sum_{i=1}^n \dim \text{Hom}_G(X_i, W).$$

Nadalje, neka je $W = Y_1 \dot{+} Y_2 \dot{+} \dots \dot{+} Y_m$ pri čemu su Y_1, Y_2, \dots, Y_m ρ -invarijantni potprostori od W takvi da su subreprezentacije $\rho_{Y_1}, \rho_{Y_2}, \dots, \rho_{Y_m}$ ireducibilne. Prema zadatku 1.8. tada je za svaki $i \in \{1, 2, \dots, n\}$

$$\dim \text{Hom}_G(X_i, W) = \sum_{j=1}^m \dim \text{Hom}_G(X_i, Y_j).$$

Iz prethodne dvije jednakosti slijedi

$$\dim Hom_G(V, W) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \dim Hom_G(X_i, Y_j).$$

Primjenom Schurove leme (teorem 1.1.4.) i teorema 2.2.4. slijedi

$$\dim Hom_G(X_i, Y_j) = \begin{cases} 1 & \text{ako je } \pi_{X_i} \simeq \rho_{Y_j} \\ 0 & \text{ako je } \pi_{X_i} \not\simeq \rho_{Y_j} \end{cases} = (\chi_{\pi_{X_i}} | \chi_{\rho_{Y_j}}).$$

Budući da prema propoziciji 2.2.2. vrijedi

$$\chi_{\pi} = \sum_{i=1}^n \chi_{\pi_{X_i}} \quad \text{i} \quad \chi_{\rho} = \sum_{j=1}^m \chi_{\rho_{Y_j}}$$

iz gornjih jednakosti nalazimo

$$\dim Hom_G(V, W) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (\chi_{\pi_{X_i}} | \chi_{\rho_{Y_j}}) = \left(\sum_{i=1}^n \chi_{\pi_{X_i}} \left| \sum_{j=1}^m \chi_{\rho_{Y_j}} \right. \right) = (\chi_{\pi} | \chi_{\rho}).$$

Napokon, kao u dokazu teorema 2.2.7. imamo

$$\chi_{\pi} = \sum_{\alpha \in \hat{G}} m(\pi, \alpha) \chi_{\alpha} \quad \text{i} \quad \chi_{\rho} = \sum_{\beta \in \hat{G}} m(\rho, \beta) \chi_{\beta}$$

pa zbog ortonormiranosti karaktera χ_{α} , $\alpha \in \hat{G}$, slijedi

$$(\chi_{\pi} | \chi_{\rho}) = \sum_{\alpha \in \hat{G}} \sum_{\beta \in \hat{G}} m(\pi, \alpha) m(\rho, \beta) (\chi_{\alpha} | \chi_{\beta}) = \sum_{\alpha \in \hat{G}} m(\pi, \alpha) m(\rho, \alpha).$$

Time smo dokazali da je

$$\dim Hom_G(V, W) = (\chi_{\pi} | \chi_{\rho}) = \sum_{\alpha \in \hat{G}} m(\pi, \alpha) m(\rho, \alpha).$$

No odatle je $(\chi_{\pi} | \chi_{\rho}) = (\chi_{\rho} | \chi_{\pi})$, pa slijedi i

$$\dim Hom_G(V, W) = \dim Hom_G(W, V).$$

2.7 Svojstva djeljivosti

Cilj je ovog odjeljka da dokažemo da je red $|G|$ grupe G djeljiv s dimenzijom $d(\alpha)$ svake ireducibilne reprezentacije od G . U tu svrhu trebaju nam neki pojmovi i činjenice iz opće algebre.

Neka je R proizvoljan unitalan prsten. Jedinicu prstena R označavat ćemo sa 1. Nadalje, za $m \in \mathbb{N}$ istim znakom m označavamo element prstena R koji se dobije zbrajanjem m primjeraka jedinice prstena R , a sa $-m$ njemu suprotan element prstena R . Na taj način definiran je unitalni homomorfizam prstenova $\mathbb{Z} \rightarrow R$. Ujedno, na taj način svaki unitalan prsten možemo shvaćati kao \mathbb{Z} -modul i lijevi i desni budući da je slika homomorfizma $\mathbb{Z} \rightarrow R$ sadržana u centru prstena R .

Neka je sada R komutativan unitalan prsten. Za element $x \in R$ kažemo da je **cio** (nad \mathbb{Z}) ako postoji $n \in \mathbb{N}$ i $m_1, m_2, \dots, m_n \in \mathbb{Z}$ takvi da je

$$x^n + m_1x^{n-1} + \dots + m_{n-1}x + m_n = 0.$$

Zadatak 2.12. *Dokažite da je element $x \in \mathbb{Q}$ cio nad \mathbb{Z} ako i samo ako je $x \in \mathbb{Z}$.*

Uputa: Napišite x kao razlomak $\pm \frac{p}{q}$ s relativno prostim $p, q \in \mathbb{N}$, a zatim pomoću svojstava djeljivosti dokažite da je $q = 1$.

Za $x \in R$ označimo sa $\mathbb{Z}[x]$ unitalan potprsten od R generiran elementom x . Drugim riječima, $\mathbb{Z}[x]$ je \mathbb{Z} -podmodul od R generiran sa $\{1, x, x^2, \dots\}$.

Propozicija 2.7.1. *Neka je R komutativan unitalan prsten i $x \in R$. Sljedeća su tri svojstva međusobno ekvivalentna:*

- (a) *Element x je cio nad \mathbb{Z} .*
- (b) *$\mathbb{Z}[x]$ je konačno generiran kao \mathbb{Z} -modul, tj. postoje $y_1, y_2, \dots, y_n \in \mathbb{Z}[x]$ takvi da je $\mathbb{Z}[x] = \mathbb{Z}y_1 + \mathbb{Z}y_2 + \dots + \mathbb{Z}y_n$.*
- (c) *$\mathbb{Z}[x]$ je sadržan u nekom potprstenu $S \subseteq R$ koji je konačno generiran kao \mathbb{Z} -modul.*

Dokaz: Iz (a) slijedi

$$x^n = -m_1x^{n-1} - \dots - m_{n-1}x - m_n \quad \text{za neki } n \in \mathbb{N} \text{ i za neke } m_1, m_2, \dots, m_n \in \mathbb{Z},$$

a odatle množenjem sa x^{k-n} dobivamo

$$x^k = -m_1x^{k-1} - \dots - m_{n-1}x^{k-n+1} - m_nx^{k-n} \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Odatle indukcijom nalazimo da je $x^k \in \mathbb{Z}1 + \mathbb{Z}x + \mathbb{Z}x^2 + \dots + \mathbb{Z}x^{n-1} \quad \forall k \in \mathbb{N}$. Dakle, vrijedi

$$\mathbb{Z}[x] = \mathbb{Z}1 + \mathbb{Z}x + \mathbb{Z}x^2 + \dots + \mathbb{Z}x^{n-1},$$

što pokazuje da je $\mathbb{Z}[x]$ konačno generiran kao \mathbb{Z} -modul. Time je dokazano da iz (a) slijedi (b).

Očito iz (b) slijedi (c).

Pretpostavimo sada da vrijedi (c) i neka su $y_1, y_2, \dots, y_n \in S$ takvi da je

$$S = \mathbb{Z}y_1 + \mathbb{Z}y_2 + \dots + \mathbb{Z}y_n.$$

Tada posebno postoje $a_{ij} \in \mathbb{Z}$ takvi da je

$$xy_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}y_j, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Zadatak 2.13. Dokažite da odatle slijedi $(\det A)y_i = 0 \forall i$, gdje je A matrica iz $M_n(R)$ s elementima $\delta_{ij}x - a_{ij}$.

Kako je $1 \in \mathbb{Z}[x] \subseteq S$ postoje $b_1, b_2, \dots, b_n \in \mathbb{Z}$ takvi da je $1 = b_1y_1 + b_2y_2 + \dots + b_ny_n$. Slijedi

$$\det A = (\det A)1 = b_1(\det A)y_1 + b_2(\det A)y_2 + \dots + b_n(\det A)y_n = 0.$$

Međutim, $\det A = 0$ je upravo jednakost oblika $x^n + m_1x^{n-1} + \dots + m_{n-1}x + m_n = 0$ za neke $m_1, m_2, \dots, m_n \in \mathbb{Z}$, dakle x je cio nad \mathbb{Z} . Time je dokazano da iz (c) slijedi (a).

Propozicija 2.7.2. Cijeli elementi komutativnog unitalnog prstena R tvore potprsten.

Dokaz: Neka su x i y cijeli elementi prstena R . Treba dokazati da su tada $x - y$ i xy cijeli elementi prstena R . Neka je $\mathbb{Z}[x, y]$ unitalan potprsten od R generiran skupom $\{x, y\}$. Prema dokazu implikacije (a) \implies (b) u propoziciji 2.7.1. za neke $n, m \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\mathbb{Z}[x] = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}x + \mathbb{Z}x^2 + \dots + \mathbb{Z}x^{n-1} \quad \text{i} \quad \mathbb{Z}[y] = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}y + \mathbb{Z}y^2 + \dots + \mathbb{Z}y^{m-1}. \quad (2.1)$$

Dokažimo da vrijedi

$$\mathbb{Z}[x, y] = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} \mathbb{Z}x^i y^j.$$

Očito vrijedi

$$\sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} \mathbb{Z}x^i y^j \subseteq \mathbb{Z}[x, y].$$

Da dokažemo obrnutu inkluziju neka je $a \in \mathbb{Z}[x, y]$. Tada postoje $k, \ell \in \mathbb{N}$ i $a_{ij} \in \mathbb{Z}$, $0 \leq i \leq k$, $0 \leq j \leq \ell$, takvi da je

$$a = \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^{\ell} a_{ij} x^i y^j.$$

Međutim, prema (2.1) vrijedi

$$x^i \in \sum_{p=0}^{n-1} \mathbb{Z}x^p \quad \text{i} \quad y^j \in \sum_{q=0}^{m-1} \mathbb{Z}y^q \quad \forall i, j \geq 0,$$

pa možemo pretpostaviti da je $k = n - 1$ i $\ell = m - 1$. Kako je $a \in \mathbb{Z}[x, y]$ bio proizvoljan, dokazali smo obrnutu inkluziju

$$\mathbb{Z}[x, y] \subseteq \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} \mathbb{Z}x^i y^j.$$

Dokazana jednakost pokazuje da je $\mathbb{Z}[x, y]$ konačno generiran \mathbb{Z} -podmodul od R . Kako su $\mathbb{Z}[x - y]$ i $\mathbb{Z}[xy]$ sadržani u $\mathbb{Z}[x, y]$, prema propoziciji 2.7.1. slijedi da su $x - y$ i xy cijeli, pa je time propozicija dokazana.

Propozicija 2.7.3. Neka je χ karakter reprezentacije π grupe G . Tada je za svaki $a \in G$ broj $\chi(a) \in \mathbb{C}$ cio nad \mathbb{Z} .

Dokaz: $\chi(a)$ je suma svojstvenih vrijednosti operatora $\pi(a)$. Ako je $|G| = n$ onda je $a^n = e$, dakle, $\pi(a)^n = \pi(a^n) = I$. Slijedi da su sve svojstvene vrijednosti operatora $\pi(a)$ n -ti korijeni iz jedinice, dakle ti su kompleksni brojevi cijeli nad \mathbb{Z} . Prema propoziciji 2.7.2. slijedi da je i $\chi(a)$ cio nad \mathbb{Z} .

Propozicija 2.7.4. *Neka je π ireducibilna reprezentacija grupe G dimenzije d . Neka je χ karakter reprezentacije π i neka je K neka klasa konjugiranosti u grupi G . Tada je broj*

$$\frac{1}{d} \sum_{a \in K} \chi(a)$$

cio nad \mathbb{Z} .

Dokaz: Neka je φ karakteristična funkcija skupa K . Tada znamo da je $\varphi \in \mathbb{C}_c[G]$. No zapravo je $\varphi \in \mathbb{Z}_c[G]$, pri čemu je $\mathbb{Z}[G]$ potprsten od $\mathbb{C}[G]$ svih funkcija $\psi : G \rightarrow \mathbb{Z}$ i $\mathbb{Z}_c[G]$ je centar tog prstena. Prsten $\mathbb{Z}_c[G]$ je komutativan i očito je konačno generiran kao \mathbb{Z} -modul. Prema propoziciji 2.7.1. slijedi da su svi elementi tog prstena cijeli nad \mathbb{Z} . Posebno, φ je cio nad \mathbb{Z} . Operator $\pi(\varphi)$ komutira sa svim operatorima $\pi(a)$, $a \in G$, pa po tvrdnji (c) Schurove leme (teorem 1.1.4.) slijedi da je $\pi(\varphi) = \lambda I$ za neki $\lambda \in \mathbb{C}$. Budući da je $\psi \mapsto \pi(\psi)$ homomorfizam algebr, slijedi da je broj λ cio nad \mathbb{Z} . Sada računanjem traga nalazimo:

$$\lambda = \frac{1}{d} \text{Tr} \pi(\varphi) = \frac{1}{d} \text{Tr} \left(\sum_{a \in G} \varphi(a) \pi(a) \right) = \frac{1}{d} \text{Tr} \left(\sum_{a \in K} \pi(a) \right) = \frac{1}{d} \sum_{a \in K} \chi(a).$$

Time je propozicija dokazana.

Teorem 2.7.5. *Neka je G grupa reda $|G| = n$ i neka je π njena ireducibilna reprezentacija dimenzije d . Tada je n djeljiv sa d .*

Dokaz: Neka je χ karakter reprezentacije π . Prema teoremu 2.2.4. tada je $(\chi|\chi) = 1$. Prema definiciji skalarnog produkta i prema tvrdnji (b) propozicije 2.2.1. nalazimo

$$1 = (\chi|\chi) = \frac{1}{n} \sum_{a \in G} \overline{\chi(a)} \chi(a) = \frac{1}{n} \sum_{a \in G} \chi(a^{-1}) \chi(a).$$

Neka su C_1, C_2, \dots, C_s sve klase konjugiranosti u grupi G . Slijedi

$$\frac{n}{d} = \frac{1}{d} \sum_{i=1}^s \sum_{a \in C_i} \chi(a^{-1}) \chi(a).$$

Funkcija χ je centralna, dakle konstantna na svakoj klasi konjugiranosti. Stoga je i $\chi(a^{-1})$ neovisan o izboru elementa $a \in C_i$; označimo taj broj sa χ_i . Slijedi

$$\frac{n}{d} = \sum_{i=1}^s \chi_i \frac{1}{d} \sum_{a \in C_i} \chi(a).$$

Prema propoziciji 2.7.3. brojevi $\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_s$ su cijeli nad \mathbb{Z} . Nadalje, prema propoziciji 2.7.4. i brojevi

$$\frac{1}{d} \sum_{a \in C_i} \chi(a), \quad 1 \leq i \leq s,$$

su cijeli nad \mathbb{Z} . Stoga pomoću propozicije 2.7.2. zaključujemo da je n/d cio nad \mathbb{Z} , a odatle i iz zadatka 2.12. slijedi da je n djeljiv sa d .

Teorem 2.7.6. *Neka je C centar grupe G . Tada je red kvocijentne grupe $|G/C|$ djeljiv s dimenzijom svake ireducibilne reprezentacije grupe G .*

Dokaz: Neka je π ireducibilna reprezentacija grupe G dimenzije d . Stavimo $|G| = n$ i $|C| = m$. Za bilo koji $k \in \mathbb{N}$ je tada $\pi \times \pi \times \cdots \times \pi$ (k faktora) ireducibilna reprezentacija grupe $G \times G \times \cdots \times G$ (k faktora). Prema Schurovoj lemi za svaki $x \in C$ operator $\pi(x)$ djeluje kao množenje nekim kompleksnim brojem $\lambda(x)$. Centar grupe $G \times G \times \cdots \times G$ je $C \times C \times \cdots \times C$ i za svaki $(x_1, x_2, \dots, x_k) \in C \times C \times \cdots \times C$ operator

$$(\pi \times \pi \times \cdots \times \pi)(x_1, x_2, \dots, x_k) = \pi(x_1) \otimes \pi(x_2) \otimes \cdots \otimes \pi(x_k)$$

djeluje kao množenje kompleksnim brojem $\lambda(x_1)\lambda(x_2) \cdots \lambda(x_k) = \lambda(x_1x_2 \cdots x_k)$. Neka je H sljedeća podgrupa grupe $C \times C \times \cdots \times C$:

$$H = \{(x_1, x_2, \dots, x_k) \in C \times C \times \cdots \times C; x_1x_2 \cdots x_k = e\}.$$

Tada je $|H| = m^{k-1}$ i ta grupa je sadržana u jezgri reprezentacije $\pi \times \pi \times \cdots \times \pi$. Prijelazom na kvocijent dobivamo reprezentaciju ρ grupe $(G \times G \times \cdots \times G)/H$:

$$\rho(gH) = (\pi \times \pi \times \cdots \times \pi)(g), \quad g \in G \times G \times \cdots \times G.$$

Očito je reprezentacija ρ ireducibilna. Njena je dimenzija jednaka d^k . Prema teoremu 2.7.5. taj broj dijeli red grupe $(G \times G \times \cdots \times G)/H$, a red te grupe jednak je n^k/m^{k-1} . Dakle, za svaki $k \in \mathbb{N}$ postoji $p_k \in \mathbb{N}$ takav da je

$$\frac{n^k}{m^{k-1}} = d^k p_k.$$

Uz oznaku

$$\alpha = \frac{n}{md}$$

imamo

$$\alpha^k = \frac{p_k}{m}, \quad p_k \in \mathbb{N}.$$

Budući da to vrijedi za svaki $k \in \mathbb{N}$, zaključujemo da je $\mathbb{Z}[\alpha] \subseteq \mathbb{Z}\frac{1}{m}$. Odatle je $m\mathbb{Z}[\alpha] \subseteq \mathbb{Z}$.

Zadatak 2.14. Neka je $\mathcal{A} \neq \{0\}$ aditivna podgrupa grupe \mathbb{Z} . Tada vrijedi $\mathcal{A} = p\mathbb{Z} = \{pq; q \in \mathbb{Z}\}$ za jedinstven $p \in \mathbb{N}$.

Kako je $m\mathbb{Z}[\alpha]$ aditivna podgrupa grupe \mathbb{Z} , iz prethodnog zadatka slijedi da je $m\mathbb{Z}[\alpha] = p\mathbb{Z}$ za neki $p \in \mathbb{N}$. Dakle, vrijedi

$$\mathbb{Z}[\alpha] = \mathbb{Z}\frac{p}{m}.$$

To pokazuje da je $\mathbb{Z}[\alpha]$ konačno generiran \mathbb{Z} -modul. Prema propoziciji 2.7.1. slijedi da je broj α cio nad \mathbb{Z} , a kako je $\alpha \in \mathbb{Q}$, prema zadatku 2.12. to znači da je $\alpha \in \mathbb{Z}$. Dakle, red $\frac{n}{m}$ grupe G/C djeljiv je sa d .

2.8 Broj jednodimenzionalnih reprezentacija

U svakoj grupi G sa $[G, G]$ označavamo podgrupu generiranu svim elementima oblika $aba^{-1}b^{-1}$, $a, b \in G$. Ta se podgrupa zove **komutatorska podgrupa** grupe G .

Zadatak 2.15. *Dokažite da je komutatorska podgrupa $[G, G]$ normalna podgrupa grupe G i da je kvocijentna grupa $G/[G, G]$ komutativna.*

Zadatak 2.16. *Dokažite da je $[G, G]$ sadržana u jezgri svakog homomorfizma grupe G u komutativnu grupu.*

Teorem 2.8.1. *Broj jednodimenzionalnih reprezentacija konačne grupe G na kompleksnom vektorskom prostoru jednak je indeksu podgrupe $[G, G]$ u grupi G , odnosno redu kvocijentne grupe $G/[G, G]$:*

$$\left| \{ \alpha \in \hat{G}; d(\alpha) = 1 \} \right| = |G/[G, G]| = \frac{|G|}{|[G, G]|}.$$

Dokaz: Neka je $A = G/[G, G]$ i neka je $\kappa : G \rightarrow A$ kvocijenti epimorfizam. Budući da je grupa A komutativna, prema teoremu 2.4.5. svaka $\beta \in \hat{A}$ je jednodimenzionalna. Stoga je i reprezentacija $\beta \circ \kappa$ grupe G jednodimenzionalna, dakle, ireducibilna. Na taj način imamo očito injektivno preslikavanje sa \hat{A} u $\{ \alpha \in \hat{G}; d(\alpha) = 1 \}$. To je preslikavanje i surjektivno. Doista, ako je α jednodimenzionalna reprezentacija grupe G , onda je njena slika $\text{Im } \alpha$ komutativna grupa. Iz zadatka 2.16. slijedi da je $[G, G] \subseteq \text{Ker } \alpha$. Prijelazom na kvocijent dolazimo do reprezentacije $\beta \in \hat{A}$ takve da je $\alpha = \beta \circ \kappa$.

Odatle i iz teorema 2.4.5. primijenjenog na grupu A dobivamo:

$$\left| \{ \alpha \in \hat{G}; d(\alpha) = 1 \} \right| = |\hat{A}| = |A|.$$

Poglavlje 3

Inducirane reprezentacije

Neka je G grupa i H podgrupa grupe G . Za svaku reprezentaciju π grupe G na vektorskom prostoru V restrikcija $\pi|_H$ je reprezentacija grupe H na istom prostoru V . U određenim situacijama može biti važno prikazati tu reprezentaciju od H kao direktnu sumu ireducibilnih reprezentacija te grupe, tj. pronaći multiplicitete $m(\pi|_H, \beta)$ za $\beta \in \hat{H}$. Preciznije, može se postaviti problem pronalaženja $\pi|_H$ -invarijantnih potprostora V_1, V_2, \dots, V_s takvih da je $V = V_1 \dot{+} V_2 \dot{+} \dots \dot{+} V_s$ i da su sve subreprezentacije $(\pi|_H)_{V_j}$, $1 \leq j \leq s$, ireducibilne reprezentacije grupe H .

Zadatak 3.1. Neka je $G = S_n$, $n \geq 4$, i $H = S_3$ shvaćena kao podgrupa od G :

$$H = \{\sigma \in G; \sigma(j) = j, 4 \leq j \leq n\}.$$

Neka je ω ireducibilna $(n-1)$ -dimenzionalna reprezentacija grupe G iz zadatka 1.4. Rastavite prostor reprezentacije ω u direktnu sumu $\omega|_H$ -invarijantnih potprostora tako da su odgovarajuće subreprezentacije grupe H ireducibilne u slučajevima:

- (a) $n = 4$;
- (b) $n = 5$;
- (c) za proizvoljno $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$.

U ovom ćemo se poglavlju baviti jednom obrnutom konstrukcijom: polazeći od reprezentacije ρ podgrupe H definirat ćemo tzv. *induciranu reprezentaciju* $\pi = \text{Ind}_H^G \rho$ grupe G . Nadalje, pobliže ćemo proučiti vezu između reprezentacija ρ i π , a također i odnos između dviju konstrukcija: induciranja s podgrupe i restrikcije na podgrupu.

3.1 Definicija inducirane reprezentacije

Neka je G konačna grupa i H njena podgrupa. Neka je ρ reprezentacija grupe H na (konačno-dimenzionalnom kompleksnom) vektorskom prostoru W . Neka je

$$V = \{f : G \rightarrow W; f(hg) = \rho(h)f(g) \forall h \in H \text{ i } \forall g \in G\}.$$

Tada je očito V vektorski prostor – to je potprostor prostora W^G svih funkcija sa G u W . Za $a \in G$ i za $f \in V$ neka je $\pi(a)f$ funkcija sa G u W definirana pomoću desnog pomaka $g \mapsto ga$:

$$[\pi(a)f](g) = f(ga) \quad g \in G.$$

Tada je $\pi(a)f \in V$; doista, za svaki $g \in G$ i svaki $h \in H$ imamo

$$[\pi(a)f](hg) = f(hga) = \rho(h)f(ga) = \rho(h)[\pi(a)f](g).$$

Nadalje, tako definiran operator $\pi(a) : V \rightarrow V$ očito je linearan. Napokon, $a \mapsto \pi(a)$ je reprezentacija grupe G na prostoru V :

$$[\pi(e)f](g) = f(ge) = f(g) \quad \Longrightarrow \quad \pi(e) = I_V;$$

$$[\pi(ab)f](g) = f(gab) = [\pi(b)f](ga) = [\pi(a)\pi(b)f](g) \quad \Longrightarrow \quad \pi(ab) = \pi(a)\pi(b).$$

Za tako definiranu reprezentaciju π grupe G kažemo da je **inducirana** reprezentacijom ρ podgrupe H i pišemo

$$\pi = \text{Ind}_H^G \rho \quad \text{i} \quad V = \text{Ind}_H^G W.$$

Proučimo prije svega prostor $V = \text{Ind}_H^G W$. Ako je poznata vrijednost $w_0 = f(a)$ funkcije $f \in V$ u nekoj točki $a \in G$ onda su poznate vrijednosti te funkcije u svim točkama pripadne lijeve H -klase $Ha = \{ha; h \in H\}$:

$$f(ha) = \rho(h)w_0, \quad h \in H.$$

Dakle, ako su $\{a_1, a_2, \dots, a_s\}$ predstavnici svih lijevih H -klasa u G tako da imamo

$$G = Ha_1 \cup Ha_2 \cup \dots \cup Ha_s \quad (\text{disjunktna unija}),$$

tada je $f \in V$ potpuno određena ako su zadane vrijednosti $f(a_1), f(a_2), \dots, f(a_s) \in W$, a te se vrijednosti mogu zadati proizvoljno. Dakle, za svaku s -torku $(w_1, w_2, \dots, w_s) \in W^s$ postoji jedna i samo jedna funkcija $f \in V$ takva da je $f(a_j) = w_j$ za $j = 1, 2, \dots, s$. Ona je zadana formulom

$$f(ha_j) = \rho(h)w_j, \quad h \in H, \quad j = 1, 2, \dots, s.$$

Doista, ako je $f \in V$ i $f(a_j) = w_j$ onda za svaki $h \in H$ imamo $f(ha_j) = \rho(h)f(a_j) = \rho(h)w_j$, dakle, takva je funkcija jedinstvena jer je G unija H -klasa Ha_1, Ha_2, \dots, Ha_s . Nadalje, ako definiramo funkciju $f : G \rightarrow W$ gornjom formulom, onda je ta funkcija element prostora V . Doista, neka su $g \in G$ i $h \in H$ proizvoljni. Tada postoji jedinstven $j \in \{1, 2, \dots, s\}$ takav da je $g \in Ha_j$, pa postoji jedinstven $h' \in H$ takav da je $g = h'a_j$. Tada je

$$f(hg) = f(hh'a_j) = \rho(hh')w_j = \rho(h)\rho(h')w_j = \rho(h)f(h'a_j) = \rho(h)f(g).$$

Stoga je stvarno $f \in V$. Napokon, prema definiciji funkcija f zadovoljava $f(a_j) = w_j$ za $j = 1, 2, \dots, s$.

Zadatak 3.2. Dokažite da je opisano preslikavanje $(w_1, w_2, \dots, w_s) \mapsto f$ izomorfizam vektorskog prostora W^s na vektorski prostor $V = \text{Ind}_H^G W$.

Zadatak 3.3. Neka je $\{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ baza vektorskog prostora W . Za $1 \leq i \leq s$ i $1 \leq j \leq m$ definiramo funkciju $f_{ij} : G \rightarrow W$ na sljedeći način:

$$f_{ij}(ha_k) = \begin{cases} \pi(h)e_j & \text{ako je } k = i \\ 0 & \text{ako je } k \neq i \end{cases}, \quad h \in H, \quad k \in \{1, 2, \dots, s\}.$$

Dokažite da je tada $\{f_{ij}; 1 \leq i \leq s, 1 \leq j \leq m\}$ baza vektorskog prostora $V = \text{Ind}_H^G W$.

Napomenimo da se broj lijevih H -klasa u grupi G , koji je jednak broju desnih H -klasa $aH = \{ah; h \in H\}$ u grupi G , obično označava sa $(G:H)$ i zove **indeks podgrupe H u grupi G** . Iz zadatka 3.2. ili iz zadatka 3.3. neposredno slijedi:

Propozicija 3.1.1. *Neka je ρ reprezentacija podgrupe H grupe G na prostoru W . Tada je dimenzija inducirane reprezentacije $\pi = \text{Ind}_H^G \rho$ jednaka umnošku dimenzije reprezentacije ρ s indeksom $(G:H)$ podgrupe H u grupi G :*

$$\dim \text{Ind}_H^G W = (\dim W)(G:H).$$

Zadatak 3.4. *Neka je π reprezentacija grupe G . Dokažite da je $\text{Ind}_G^G \pi \simeq \pi$.*

Zadatak 3.5. *Neka je ρ_0 jednodimenzionalna reprezentacija trivijalne podgrupe $H = \{e\}$ grupe G . Dokažite da je tada inducirana reprezentacija $\text{Ind}_H^G \rho_0$ ekvivalentna desnoj regularnoj reprezentaciji ρ_G grupe G .*

3.2 Teorem imprimitiviteta

Proučimo sada поближе strukturu inducirane reprezentacije. Neka je H podgrupa grupe G i neka je ρ reprezentacija grupe H na prostoru W . Neka je

$$V = \text{Ind}_H^G W = \{f : G \rightarrow W; f(hg) = \rho(h)f(g) \forall h \in H \text{ i } \forall g \in G\}$$

prostor inducirane reprezentacije $\pi = \text{Ind}_H^G \rho$:

$$[\pi(a)f](g) = f(ga), \quad f \in V, \quad a, g \in G.$$

Za $w \in W$ definiramo funkciju $f_w : G \rightarrow W$ na sljedeći način:

$$f_w(g) = \begin{cases} \rho(g)w & \text{ako je } g \in H \\ 0 & \text{ako je } g \in G \setminus H. \end{cases}$$

Tada je $f_w \in V$. Doista, za $h \in H$ i $g \in G$ vrijedi $g \in H$ ako i samo ako je $hg \in G$, dakle,

$$\begin{aligned} f_w(hg) &= \begin{cases} \rho(hg)w & \text{ako je } g \in H \\ 0 & \text{ako je } g \in G \setminus H \end{cases} = \begin{cases} \rho(h)\rho(g)w & \text{ako je } g \in H \\ 0 & \text{ako je } g \in G \setminus H \end{cases} = \\ &= \rho(h) \begin{cases} \rho(g)w & \text{ako je } g \in H \\ 0 & \text{ako je } g \in G \setminus H \end{cases} = \rho(h)f_w(g) \end{aligned}$$

Očito je $w \mapsto f_w$ linearan operator prostora W u prostor V . Označimo taj linearan operator sa A . Dakle,

$$(Aw)(g) = \begin{cases} \rho(g)w & \text{ako je } g \in H \\ 0 & \text{ako je } g \in G \setminus H. \end{cases}$$

Primijetimo da je operator A injektivan, jer iz $Aw = 0$ slijedi $0 = (Aw)(e) = \rho(e)w = w$.

Za $g \in G$ i $h \in H$ imamo $g \in H$ ako i samo ako je $gh \in H$, dakle, imamo redom

$$\begin{aligned} (A\rho(h)w)(g) &= \begin{cases} \rho(g)\rho(h)w & \text{ako je } g \in H \\ 0 & \text{ako je } g \in G \setminus H \end{cases} = \\ &= \begin{cases} \rho(gh)w & \text{ako je } g \in H \\ 0 & \text{ako je } g \in G \setminus H \end{cases} = (Aw)(gh) = (\pi(h)Aw)(g). \end{aligned}$$

Dakle, vrijedi $A\rho(h) = \pi(h)A \forall h \in H$. Drugim riječima, vrijedi $A \in \text{Hom}_H(W, V)$, pri čemu na prostoru W imamo reprezentaciju ρ grupe H a na prostoru V restrikciju $\pi|_H$ inducirane reprezentacije $\pi = \text{Ind}_H^G \rho$. Označimo li sa X područje vrijednosti operatora A onda je X $\pi|_H$ -invarijantan potprostor od V i pripadna subreprezentacija $(\pi|_H)_X$ je ekvivalentna reprezentaciji ρ .

Na taj način dokazali smo:

Lema 3.2.1. *Neka je ρ reprezentacija podgrupe H grupe G na prostoru W i neka je $\pi = \text{Ind}_H^G \rho$ i $V = \text{Ind}_H^G W$. Tada je sa*

$$(Aw)(g) = \left\{ \begin{array}{ll} \rho(g)w & \text{ako je } g \in H \\ 0 & \text{ako je } g \in G \setminus H \end{array} \right\}, \quad g \in G, \quad w \in W,$$

definiran injektivan linearan operator $A : W \rightarrow V$ i vrijedi $A \in \text{Hom}_H(W, V)$. Ako je $X \subseteq V$ područje vrijednosti operatora A , onda je X $\pi|H$ -invarijantan potprostor od V i pripadna subreprezentacija $(\pi|H)_X$ grupe H ekvivalentna je reprezentaciji ρ .

Lema 3.2.2. *Neka su $a_1, a_2, \dots, a_s \in G$ predstavnici svih lijevih H -klasa $Ha = \{ha; h \in H\}$ u grupi G tako da imamo disjunktne uniju*

$$G = Ha_1 \cup Ha_2 \cup \dots \cup Ha_s.$$

Uz uvedene oznake tada vrijedi

$$V = \pi(a_1)^{-1}X \dot{+} \pi(a_2)^{-1}X \dot{+} \dots \dot{+} \pi(a_s)^{-1}X.$$

Dokaz: Za svaki $j \in \{1, 2, \dots, s\}$ neka $f_j \neq 0$ funkcija iz $\pi(a_j)^{-1}X$. Kako je $X = AW$, postoje vektori $w_1, w_2, \dots, w_s \in W \setminus \{0\}$ takvi da je $f_j = \pi(a_j)^{-1}Aw_j$ za $j = 1, 2, \dots, s$. Imamo za $g \in G$ i za $j \in \{1, 2, \dots, s\}$

$$f_j(g) = (\pi(a_j)^{-1}Aw_j)(g) = (Aw_j)(ga_j^{-1}),$$

a to je različito od nule ako i samo ako je $ga_j^{-1} \in H$, tj. ako i samo ako je $g \in Ha_j$. To znači da su skupovi $S_j = \{g \in G; f_j(g) \neq 0\}$ međusobno disjunktne, odakle slijedi linearna nezavisnost funkcija f_1, f_2, \dots, f_m . Time je dokazano da potprostori $\pi(a_1)^{-1}X, \pi(a_2)^{-1}X, \dots, \pi(a_s)^{-1}X$ čine direktnu sumu. No dimenzija direktne sume je suma dimenzija, pa je

$$\dim (\pi(a_1)^{-1}X \dot{+} \pi(a_2)^{-1}X \dot{+} \dots \dot{+} \pi(a_s)^{-1}X) = \sum_{j=1}^s \dim \pi(a_j)^{-1}X = s \cdot \dim X = (G:H) \cdot \dim W,$$

a to je prema propoziciji 3.1.1. jednako dimenziji prostora V . Dakle, direktna suma potprostora $\pi(a_j)^{-1}X$ jednaka je čitavom vektorskom prostoru V . Time je lema 3.2.2. dokazana.

Lema 3.2.3. *Uz uvedene oznake stavimo*

$$X_i = \pi(a_i)^{-1}X, \quad i = 1, 2, \dots, s.$$

Svaki operator $\pi(a)$, za $a \in G$, permutira među sobom potprostore X_j , $1 \leq j \leq s$. Preciznije, ako su $a \in G$ i $j \in \{1, 2, \dots, s\}$ tada postoji jedinstven $k \in \{1, 2, \dots, s\}$ takav da je $a_k a a_j^{-1} \in H$ i za takav k vrijedi

$$\pi(a)X_j = X_k.$$

Nadalje, ovo permutiranje potprostora X_j , $1 \leq j \leq s$, je tranzitivno, odnosno, za $1 \leq j \leq s$ i $1 \leq k \leq s$ postoji $a \in G$ takav da je $\pi(a)X_j = X_k$.

Dokaz: Neka su $a \in G$ i $j \in \{1, 2, \dots, s\}$. Tada se element $a_j a^{-1}$ nalazi u jedinstvenoj lijevoj H -klasi u grupi G , odnosno, postoji jedinstven $k \in \{1, 2, \dots, s\}$ takav da je $a_j a^{-1} \in Ha_k$. To znači da postoji jedinstven k takav da je $a_j a^{-1} a_k^{-1} \in H$, odnosno, ekvivalentno, jedinstven k takav da je $a_k a a_j^{-1} = (a_j a^{-1} a_k^{-1})^{-1} \in H$.

Budući da je potprostor X $\pi|H$ -invarijantan, za takav k imamo

$$X = \pi(a_k a a_j^{-1})X = \pi(a_k)\pi(a)\pi(a_j)^{-1}X \quad \Rightarrow \quad \pi(a)\pi(a_j)^{-1}X = \pi(a_k)^{-1}X,$$

tj. vrijedi $\pi(a)X_j = X_k$.

Napokon, neka su $j, k \in \{1, 2, \dots, s\}$ proizvoljni. Tada za $a = a_k^{-1}a_j$ vrijedi $aa_j^{-1} = a_k^{-1}$. Odatle je $\pi(a)\pi(a_j)^{-1} = \pi(a_k)^{-1}$, pa slijedi

$$\pi(a)X_j = \pi(a)\pi(a_j)^{-1}X = \pi(a_k)^{-1}X = X_k,$$

i time je lema 3.2.3. dokazana.

Ovakva struktura prostora reprezentacije π karakteristična je za inducirane reprezentacije. Naime, vrijedi tzv. **teorem imprimitiviteta**:

Teorem 3.2.4. *Neka je π reprezentacija grupe G na prostoru V i neka postoji rastav prostora V u direktnu sumu potprostora*

$$V = X_1 \dot{+} X_2 \dot{+} \dots \dot{+} X_s$$

sa sljedeća dva svojstva:

- (a) *Operatori $\pi(a)$, $a \in G$, permutiraju potprostore X_j , tj. ako su $a \in G$ i $j \in \{1, 2, \dots, s\}$, onda je $\pi(a)X_j = X_k$ za neki $k \in \{1, 2, \dots, s\}$.*
- (b) *Permutiranje u (a) je tranzitivno, tj. za bilo koje $j, k \in \{1, 2, \dots, s\}$ postoji $a \in G$ takav da je $\pi(a)X_j = X_k$.*

Neka je

$$H = \{h \in G; \pi(h)X_1 = X_1\} \quad \text{i za } h \in H \quad \text{neka je } \rho(h) = \pi(h)|_{X_1}.$$

Tada je H podgrupa od G , ρ je reprezentacija grupe H na prostoru X_1 i vrijedi $\pi \simeq \text{Ind}_H^G \rho$.

Zadatak 3.6. *Dokažite teorem 3.2.4.*

Uputa: (1) Dokažite da je H podgrupa od G i da je ρ reprezentacija grupe H na prostoru X_1 .

(2) Neka je $a_1 = e$ i neka su $a_2, \dots, a_s \in G$ izabrani tako da je $\pi(a_j)X_j = X_1$ za svaki j . Dokažite da su tada a_1, a_2, \dots, a_s predstavnici svih lijevih H -klasa u grupi G , tj. da je

$$G = Ha_1 \cup Ha_2 \cup \dots \cup Ha_s \quad (\text{disjunktna unija}).$$

(3) Neka je $X = \text{Ind}_H^G X_1$ i $\omega = \text{Ind}_H^G \rho$. Definiramo za $x_j \in X_j$ funkciju $A_j x_j : G \rightarrow X_1$ na sljedeći način:

$$(A_j x_j)(g) = \begin{cases} \pi(g)x_j & \text{ako je } g \in Ha_j \\ 0 & \text{ako je } g \in G \setminus Ha_j \end{cases}$$

Nadalje, definiramo operator $A : V \rightarrow X_1^G$ kao direktnu sumu operatora A_j :

$$A(x_1 + x_2 + \dots + x_s) = A_1 x_1 + A_2 x_2 + \dots + A_s x_s, \quad x_1 \in X_1, \quad x_2 \in X_2, \quad \dots \quad x_s \in X_s.$$

Dokažite da je A linearan operator sa V u X , da je A injektivan, a računom dimenzija da je A i surjektivan.

(4) Dokažite da je $\omega(g)A = A\pi(g)$ za svaki $g \in G$.

3.3 Karakter inducirane reprezentacije

Izračunat ćemo sada karakter χ_π reprezentacije $\pi = \text{Ind}_H^G \rho$ inducirane reprezentacijom ρ podgrupe H i to u terminima karaktera χ_ρ reprezentacije ρ .

Upotrijebit ćemo prije uvedene oznake

$$A \in \text{Hom}_H(W, V), \quad (Aw)(g) = \begin{cases} \rho(g)w & \text{ako je } g \in H \\ 0 & \text{ako je } g \in G \setminus H \end{cases}, \quad g \in G, \quad w \in W;$$

$$X = AW = \{Aw; w \in W\};$$

$$G = Ha_1 \cup Ha_2 \cup \dots \cup Ha_s \quad (\text{disjunktna unija});$$

$$X_j = \pi(a_j)^{-1}X, \quad j = 1, 2, \dots, s.$$

Treba izračunati karakter reprezentacije π tj. trag operatora $\pi(a)$, $a \in G$. Prema lemi 3.2.2. je

$$V = X_1 \dot{+} X_2 \dot{+} \dots \dot{+} X_s,$$

a prema lemi 3.2.3. je

$$\pi(a)X_j = X_k \quad \text{ako su } a \in G \text{ i } j, k \in \{1, 2, \dots, s\} \text{ takvi da je } a_k^{-1}aa_j \in H.$$

Trag operatora je suma dijagonalnih elemenata matrice tog operatora u bilo kojoj bazi vektorskog prostora. Sastavimo li bazu prostora V od baza u potprostorima X_j , vidimo da dijagonalni matični element operatora $\pi(a)$ koji odgovara elementu te baze iz potprostora X_j može biti različit od nule samo ako je $\pi(a)X_j = X_j$, tj. samo ako je $a_jaa_j^{-1} \in H$. Dakle, imamo

$$\chi_\pi(a) = \text{Tr } \pi(a) = \sum_{\substack{1 \leq j \leq s \\ a_jaa_j^{-1} \in H}} \text{Tr } (\pi(a)|X_j).$$

Treba još izračunati trag restrikcije operatora $\pi(a)$ na potprostor X_j za svaki j takav da je $a_jaa_j^{-1} \in H$. Definiramo operator $A_j : W \rightarrow X_j$ kao kompoziciju izomorfizama $A : W \rightarrow X$ i $\pi(a_j)^{-1} : X \rightarrow X_j$:

$$A_j = \pi(a_j)^{-1}A, \quad j \in \{1, 2, \dots, s\}.$$

Prema definiciji operatora A tada za $w \in W$ i za $g \in G$ imamo

$$(A_jw)(g) = (\pi(a_j)^{-1}Aw)(g) = (Aw)(ga_j^{-1}).$$

Prema lemi 3.2.1. znamo da je $A \in \text{Hom}_H(W, V)$, tj. da je $A\rho(h) = \pi(h)A \forall h \in H$. Stoga imamo za $a \in G$ i za $j \in \{1, 2, \dots, s\}$ takve da je $h = a_jaa_j^{-1} \in H$:

$$\begin{aligned} (\pi(a)A_jw)(g) &= (A_jw)(ga) = (Aw)(gaa_j^{-1}) = (Aw)(ga_j^{-1}h) = (\pi(h)Aw)(ga_j^{-1}) = \\ &= (A\rho(h)w)(ga_j^{-1}) = (\pi(a_j)^{-1}A\rho(h)w)(g) = (A_j\rho(h)w)(g). \end{aligned}$$

Na taj način dokazali smo da je $\pi(a)A_j = A_j\rho(h)$, gdje je $h = a_jaa_j^{-1}$. Odatle je

$$\pi(a)|X_j = A_j\rho(a_jaa_j^{-1})A_j^{-1}, \quad \text{ako je } a_jaa_j^{-1} \in H.$$

Tada je

$$\text{Tr } (\pi(a)|X_j) = \text{Tr } (A_j\rho(a_jaa_j^{-1})A_j^{-1}) = \text{Tr } \rho(a_jaa_j^{-1}) = \chi_\rho(a_jaa_j^{-1}).$$

Na taj način dokazali smo:

Teorem 3.3.1. *Neka je ρ reprezentacija podgrupe H grupe G i neka je $\pi = \text{Ind}_H^G \rho$. Tada za karaktere χ_ρ i χ_π tih reprezentacija vrijedi:*

$$\chi_\pi(a) = \sum_{\substack{1 \leq j \leq s \\ a_j a a_j^{-1} \in H}} \chi_\rho(a_j a a_j^{-1}), \quad a \in G.$$

3.4 Frobeniusov teorem reciprociteta

Dokazat ćemo sada tzv. **Frobeniusov teorem reciprociteta** koji daje mogućnost analize inducirane reprezentacije.

Teorem 3.4.1. *Neka je π reprezentacija grupe G na vektorskom prostoru V i ρ reprezentacija njene podgrupe H na vektorskom prostoru W .*

- (a) *Postoji izomorfizam vektorskog prostora $\text{Hom}_H(V, W)$ na vektorski prostor $\text{Hom}_G(V, \text{Ind}_H^G W)$.*
- (b) *Ako su reprezentacije π i ρ ireducibilne, onda je multiplicitet reprezentacije π u induciranoj reprezentaciji $\text{Ind}_H^G \rho$ jednak multiplicitetu reprezentacije ρ u restrikciji reprezentacije π na podgrupu H :*

$$m(\text{Ind}_H^G \rho, \pi) = m(\pi|_H, \rho).$$

Dokaz: Neka je $\omega = \text{Ind}_H^G \rho$ reprezentacija grupe G inducirana reprezentacijom ρ na prostoru $X = \text{Ind}_H^G W$:

$$X = \{f : G \rightarrow W; f(hg) = \rho(h)f(g) \forall h \in H \text{ i } \forall g \in G\},$$

$$[\omega(a)f](g) = f(ga), \quad a, g \in G, \quad f \in X.$$

Neka je $A \in \text{Hom}_H(V, W)$, tj. $A : V \rightarrow W$ je linearan operator takav da je

$$\rho(h)A = A\pi(h) \quad \forall h \in H.$$

Za $v \in V$ definiramo funkciju $F_{A,v} : G \rightarrow W$ ovako:

$$F_{A,v}(g) = A\pi(g)v, \quad g \in G.$$

Tada je $F_{A,v}$ funkcija iz prostora X , jer za bilo koje $h \in H$ i $g \in G$ imamo redom

$$F_{A,v}(hg) = A\pi(hg)v = A\pi(h)\pi(g)v = \rho(h)A\pi(g)v = \rho(h)F_{A,v}(g).$$

Očito je preslikavanje $v \mapsto F_{A,v}$ linearan operator sa V u X . Taj operator označimo sa $\Phi(A)$. Dakle, $\Phi(A) : V \rightarrow X$ je linearan operator definiran na sljedeći način:

$$[\Phi(A)v](g) = A\pi(g)v, \quad v \in V, \quad g \in G.$$

Za svaki $A \in \text{Hom}_H(V, W)$ vrijedi $\Phi(A) \in \text{Hom}_G(V, X)$. Doista, za $v \in V$ i $a, g \in G$ imamo

$$[\omega(a)\Phi(A)v](g) = [\Phi(A)v](ga) = A\pi(ga)v = A\pi(g)\pi(a)v = [\Phi(A)\pi(a)v](g).$$

Kako to vrijedi za svaki element $g \in G$ i svaki vektor $v \in V$, zaključujemo da je

$$\omega(a)\Phi(A) = \Phi(A)\pi(a) \quad \forall a \in G,$$

tj. dokazano je da je $\Phi(A) \in \text{Hom}_G(V, X)$.

Očito je $A \mapsto \Phi(A)$ linearno preslikavanje sa $\text{Hom}_H(V, W)$ u $\text{Hom}_G(V, X)$. Da dokažemo da je to izomorfizam vektorskih prostora, konstruirat ćemo inverzno preslikavanje sa $\text{Hom}_G(V, X)$ u $\text{Hom}_H(V, W)$. Za $B \in \text{Hom}_G(V, X)$ definiramo linearni operator $\Psi(B) : V \rightarrow W$ ovako:

$$\Psi(B)v = (Bv)(e), \quad v \in V.$$

Dokažimo da je $\Psi(B) \in \text{Hom}_H(V, W)$. Za $v \in V$ i $h \in H$ imamo

$$\Psi(B)\pi(h)v = (B\pi(h)v)(e) = (\omega(h)Bv)(e) = (Bv)(h) = (Bv)(he) = \rho(h)(Bv)(e) = \rho(h)\Psi(B)v.$$

Pri tome je druga jednakost posljedica činjenice da je $B \in \text{Hom}_G(V, X)$, treća jednakost slijedi iz definicije reprezentacije $\omega = \text{Ind}_H^G \rho$, a peta jednakost slijedi iz činjenice da je $Bv \in X$. Dakle, vrijedi

$$\Psi(B)\pi(h) = \rho(h)\Psi(B) \quad \forall h \in H,$$

što znači da je $\Psi(B) \in \text{Hom}_H(V, W)$.

Za $B \in \text{Hom}_G(V, X)$, $v \in V$ i $g \in G$ imamo redom

$$[\Phi(\Psi(B))v](g) = \Psi(B)\pi(g)v = (B\pi(g)v)(e) = (\omega(g)Bv)(e) = (Bv)(g).$$

Kako to vrijedi za svaki $g \in G$ i svaki $v \in V$, vidimo da je $\Phi(\Psi(B)) = B \quad \forall B \in \text{Hom}_G(V, X)$, dakle, $\Phi \circ \Psi$ je identiteta na prostoru $\text{Hom}_G(V, X)$.

Za $A \in \text{Hom}_H(V, W)$ i $v \in V$ imamo

$$(\Psi(\Phi(A))v) = (\Phi(A)v)(e) = Av,$$

što pokazuje da je $\Psi(\Phi(A)) = A$ za svaki $A \in \text{Hom}_H(V, W)$, odnosno, $\Psi \circ \Phi$ je identiteta na prostoru $\text{Hom}_H(V, W)$.

Time smo dokazali da su $\Phi : \text{Hom}_H(V, W) \rightarrow \text{Hom}_G(V, X)$ i $\Psi : \text{Hom}_G(V, X) \rightarrow \text{Hom}_H(V, W)$ i time je tvrdnja (a) dokazana.

(b) Prema dokazanoj tvrdnji (a) imamo

$$\dim \text{Hom}_H(V, W) = \dim \text{Hom}_G(V, X).$$

Međutim, ako je reprezentacija π grupe G ireducibilna, iz teorema 2.6.5. primijenjenog na reprezentacije $\text{Ind}_H^G \rho$ na prostoru $X = \text{Ind}_H^G W$ i π na prostoru V slijedi

$$\dim \text{Hom}_G(V, X) = m(\text{Ind}_H^G \rho, \pi).$$

Nadalje, ako je reprezentacija ρ grupe H ireducibilna, iz istog teorema 2.6.5. primijenjenog na reprezentacije $\pi|_H$ na prostoru V i ρ na prostoru W slijedi

$$\dim \text{Hom}_H(V, W) = m(\pi|_H, \rho).$$

Ako su i π i ρ ireducibilne, gornje tri jednakosti daju $m(\text{Ind}_H^G \rho, \pi) = m(\pi|_H, \rho)$ i time je tvrdnja (b) dokazana.

3.5 Teorem o induciranju u etapama

Dokazat ćemo sada tzv. **teorem o induciranju u etapama**, čija tvrdnja se može tumačiti kao tranzitivnost operacije induciranja:

Teorem 3.5.1. *Neka su $K \subseteq H$ podgrupe grupe G i neka je σ reprezentacija grupe K . Tada je*

$$\text{Ind}_H^G \text{Ind}_K^H \sigma \simeq \text{Ind}_K^G \sigma.$$

Dokaz: Neka je U prostor reprezentacije σ . Označimo sa W prostor reprezentacije $\rho = \text{Ind}_K^H \sigma$:

$$W = \{f : H \rightarrow U; f(kh) = \sigma(k)f(h) \forall k \in K \text{ i } \forall h \in H\},$$

$$[\rho(x)f](h) = f(hx), \quad h, x \in H, \quad f \in W.$$

Sa V označimo prostor reprezentacije $\pi = \text{Ind}_H^G \rho = \text{Ind}_H^G \text{Ind}_K^H \sigma$:

$$V = \{F : G \rightarrow W; F(hg) = \rho(h)F(g) \forall h \in H \text{ i } \forall g \in G\},$$

$$[\pi(a)F](g) = F(ga), \quad a, g \in G, \quad F \in V.$$

Napokon, neka je X prostor reprezentacije $\omega = \text{Ind}_K^G \sigma$:

$$X = \{\varphi : G \rightarrow U; \varphi(kg) = \sigma(k)\varphi(g) \forall k \in K \text{ i } \forall g \in G\},$$

$$[\omega(a)\varphi](g) = \varphi(ga), \quad a, g \in G, \quad \varphi \in X.$$

Neka je $\varphi \in X$. Definiramo funkciju $T\varphi : G \rightarrow U^H$ formulom

$$[(T\varphi)(g)](h) = \varphi(hg), \quad g \in G, \quad h \in H.$$

Tada za $k \in K$, $h \in H$ i $g \in G$ imamo

$$[(T\varphi)(g)](kh) = \varphi(khg) = \sigma(k)\varphi(hg) = \sigma(k)[(T\varphi)(g)](h).$$

To pokazuje da je $(T\varphi)(g) \in W$ za svaki $g \in G$. Dakle, $T\varphi$ je funkcija sa G u W . Nadalje, za $h, x \in H$ i za $g \in G$ imamo zbog definicije reprezentacije ρ :

$$[(T\varphi)(hg)](x) = \varphi(xhg) = [(T\varphi)(g)](xh) = [\rho(h)(T\varphi)(g)](x), \quad \text{tj.} \quad (T\varphi)(gh) = \rho(h)(T\varphi)(g).$$

To pokazuje da je $T\varphi \in V$. Dakle, T je preslikavanje prostora X u prostor V . Očito je T linearan operator.

Za $\varphi \in X$, $a, g \in G$ i $h \in H$ imamo:

$$[(T\omega(a)\varphi)(g)](h) = (\omega(a)\varphi)(hg) = \varphi(hga) = [(T\varphi)(ga)](h).$$

Budući da to vrijedi za svaki $h \in H$, za svaki $g \in G$ i za svaku funkciju $\varphi \in X$ imamo redom

$$(T\omega(a)\varphi)(g) = (T\varphi)(ga) = [\pi(a)T\varphi](g) \Rightarrow T\omega(a)\varphi = \pi(a)T\varphi \Rightarrow T\omega(a) = \pi(a)T.$$

Treba još samo dokazati da je $T : X \rightarrow V$ izomorfizam vektorskih prostora. U tu svrhu definirat ćemo linearan operator $S : V \rightarrow X$ i dokazati da je S invers od T . Za $F \in V$ definiramo preslikavanje $SF : G \rightarrow U$ na sljedeći način:

$$(SF)(g) = [F(g)](e), \quad g \in G.$$

Treba dokazati da je $SF \in X$. Prije svega, F je funkcija iz V pa vrijedi $F(hg) = \rho(h)F(g)$ za svaki $h \in H$ i svaki $g \in G$. Kako je $K \subseteq H$, vrijedi $F(kg) = \rho(k)F(g)$ za svaki $k \in K$ i svaki $g \in G$. Nadalje, za svaki $g \in G$ je $F(g) \in W$ pa za svaki $k \in K$ i svaki $h \in H$ vrijedi $[F(g)](kh) = \sigma(k)[F(g)](h)$, a odatle za $h = e$ slijedi $[F(g)](k) = \sigma(k)[F(g)](e)$. Dakle, za $k \in K$ i $g \in G$ imamo redom

$$(SF)(kg) = [F(kg)](e) = [\rho(k)F(g)](e) = [F(g)](k) = \sigma(k)[F(g)](e) = \sigma(k)(SF)(g).$$

Time je dokazano da je $SF \in X$ za svaku funkciju $F \in V$, dakle, S je linearan operator sa V u X . Sada za $F \in V$, $g \in G$ i $h \in H$ imamo

$$[(TSF)(g)](h) = (SF)(hg) = [F(hg)](e) = [\rho(h)F(g)](e) = [F(g)](h).$$

Budući da to vrijedi za svaki $h \in H$ i svaki $g \in G$, zaključujemo da je $TSF = F \forall F \in V$, tj. $TS = I_V$. Napokon, za $\varphi \in X$ i svaki $g \in G$ imamo

$$(ST\varphi)(g) = [(T\varphi)(g)](e) = \varphi(g).$$

Dakle, $ST\varphi = \varphi \forall \varphi \in X$, tj. $ST = I_X$. Prema tome, S je invers operatora T , što dokazuje da je T izomorfizam prostora X na prostor V .

3.6 Restrikcija inducirane reprezentacije

Neka je H podgrupa grupe G . Za svaki $g \in G$ tada je $g^{-1}Hg$ također podgrupa grupe G . Za tu podgrupu kažemo da je **konjugirana** podgrupi H . Ako je ρ reprezentacija grupe H na prostoru W onda na istom prostoru imamo reprezentaciju ρ^g konjugirane podgrupe $g^{-1}Hg$:

$$\rho^g(k) = \rho(gkg^{-1}), \quad k \in g^{-1}Hg.$$

Propozicija 3.6.1. *Uz gornje oznake je $Ind_H^G \rho \simeq Ind_{g^{-1}Hg}^G \rho^g$.*

Dokaz: Neka su $\pi = Ind_H^G \rho$ i $\pi^g = Ind_{g^{-1}Hg}^G \rho^g$ i neka su V i V^g prostori tih dviju induciranih reprezentacija:

$$\begin{aligned} V &= \{f : G \rightarrow W; f(ha) = \rho(h)f(a) \forall h \in H \text{ i } \forall a \in G\}, \\ V^g &= \{F : G \rightarrow W; F(ka) = \rho^g(k)F(a) \forall k \in g^{-1}Hg \text{ i } \forall a \in G\}, \\ (\pi(a)f)(b) &= f(ba), \quad (\pi^g(a)F)(b) = F(ba), \quad f \in V, \quad F \in V^g, \quad a, b \in G. \end{aligned}$$

Za funkciju $f \in V$ definiramo funkciju $Af : G \rightarrow W$ na sljedeći način:

$$(Af)(a) = f(ga), \quad a \in G.$$

Tada je $Af \in V^g$. Doista, ako su $k \in g^{-1}Hg$ i $a \in G$, onda je $gkg^{-1} \in H$, pa imamo

$$(Af)(ka) = f(gka) = f((gkg^{-1})(ga)) = \rho(gkg^{-1})f(ga) = \rho^g(k)(Af)(a).$$

Očito je $A : V \rightarrow V^g$ linearan operator. Sasvim analogno imamo linearan operator $B : V^g \rightarrow V$ definiran sa

$$(BF)(a) = F(g^{-1}a), \quad a \in G.$$

Tada je

$$\begin{aligned} (ABF)(a) &= (BF)(ga) = F(g^{-1}ga) = F(a), \quad F \in V^g, \quad a \in G, \\ (BAf)(a) &= (Af)(g^{-1}a) = f(gg^{-1}a) = f(a), \quad f \in V, \quad a \in G. \end{aligned}$$

Dakle, A i B su međusobno inverzni izomorfizmi vektorskih prostora. Napokon, izomorfizam $A : V \rightarrow V^g$ ostvaruje ekvivalenciju reprezentacija π i π^g , jer za $a, b \in G$ i za $f \in V$ vrijedi:

$$(A\pi(a)f)(b) = (\pi(a)f)(gb) = f(gba) = (Af)(ba) = (\pi^g(a)Af)(b).$$

Neka su H i K podgrupe grupe G i ρ reprezentacija grupe H na vektorskom prostoru W . Neka je $\pi = Ind_H^G \rho$ inducirana reprezentacija grupe G na prostoru

$$V = Ind_H^G W = \{f : G \rightarrow W; f(hg) = \rho(h)f(g) \forall h \in H \text{ i } \forall g \in G\}.$$

Analizirat ćemo sada restrikciju inducirane reprezentacije π na podgrupu K . Označimo sa $H \backslash G / K$ skup svih duplih $(H : K)$ -klasa u grupi G , tj. skup svih podskupova oblika

$$HgK = \{h g k; h \in H, k \in K\}.$$

Duple $(H : K)$ -klase su klase ekvivalencije za relaciju ekvivalencije na grupi G definiranu na sljedeći način:

$$a \sim b \iff b = hak \quad \text{za neke } h \in H \text{ i } k \in K.$$

Nadalje, za $g \in G$ označimo sa K_g podgrupu $K \cap g^{-1}Hg$ grupe K i sa ρ_g reprezentaciju grupe K_g definiranu pomoću reprezentacije ρ na sljedeći način:

$$\rho_g(k) = \rho(gkg^{-1}), \quad k \in K_g = K \cap g^{-1}Hg.$$

Lema 3.6.2. *Ako $g, g' \in G$ pripadaju istoj duploj $(H:K)$ -klasi, tj. ako je $HgK = Hg'K$, onda su inducirane reprezentacije $Ind_{K_g}^K \rho_g$ i $Ind_{K_{g'}}^K \rho_{g'}$ grupe K ekvivalentne.*

Zadatak 3.7. *Dokažite lemu 3.6.2.*

Uputa: Ako je $g' = h g k$ za neke $h \in H$ i $k \in K$, dokažite da je $K_{g'} = k^{-1} K_g k$ i da za $x \in K_{g'}$ vrijedi $\rho_{g'}(x) = \rho(h) \rho_g(k x k^{-1}) \rho(h)^{-1}$, tj. da uz oznaku upotrijebljenu u propoziciji 3.6.1. vrijedi $\rho_{g'}(x) = \rho(h) (\rho_g)^k(x) \rho(h)^{-1}$. Zaključite da su reprezentacije $\rho_{g'}$ i $(\rho_g)^k$ grupe $K_{g'} = k^{-1} K_g k$ ekvivalentne. Zatim primijenite propoziciju 3.6.1.

Teorem 3.6.3. *Neka su K i H podgrupe grupe G i neka je ρ reprezentacija grupe H . Neka su a_1, a_2, \dots, a_s predstavnici svih duplih $(H:K)$ -klasa u grupi G tako da je*

$$G = Ha_1K \cup Ha_2K \cup \dots \cup Ha_sK \quad (\text{disjunktna unija}).$$

Za $j \in \{1, 2, \dots, s\}$ neka je ρ_j reprezentacija grupe $K_j = K \cap a_j^{-1} H a_j$ definirana sa

$$\rho_j(k) = \rho(a_j k a_j^{-1}), \quad k \in K_j$$

i neka je

$$\pi_j = Ind_{K_j}^K \rho_j, \quad 1 \leq j \leq s.$$

Tada je restrikcija $(Ind_H^G \rho)|_K$ ekvivalentna direktnoj sumi reprezentacija $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_s$.

Dokaz: Neka je W prostor reprezentacije ρ i neka je $V = Ind_H^G W$ prostor inducirane reprezentacije $\pi = Ind_H^G \rho$. U ovom nas teoremu zanima samo restrikcija $\pi|_K$.

Označimo sa V_j potprostor prostora V svih funkcija $f \in V$ takvih da je $f(g) = 0$ za svaki $g \in G \setminus Ha_jK$. Za $k \in K$ i $g \in G$ je $[\pi(k)f](g) = f(gk)$ i očito je $g \in Ha_jK$ ako i samo ako je $gk \in Ha_jK$. To pokazuje da su potprostori V_1, V_2, \dots, V_s $(\pi|_K)$ -invarijantni. Nadalje, očito je

$$V = V_1 \dot{+} V_2 \dot{+} \dots \dot{+} V_s.$$

Treba još dokazati da je subreprezentacija $(\pi|_K)_{V_j}$ ekvivalentna induciranoj reprezentaciji $\pi_j = Ind_{K_j}^K \rho_j$.

Za $f \in V_j$ definiramo funkciju $A_j f : K \rightarrow W$ na sljedeći način:

$$(A_j f)(k) = f(a_j k), \quad k \in K.$$

Dokažimo da je tada $A_j f \in X_j = Ind_{K_j}^K W$, gdje se uzima da je ρ_j reprezentacija od K_j na W . Doista, za $k \in K$ i za $x \in K_j$ je $a_j x a_j^{-1} \in H$, pa zbog činjenice da je $f \in V_j \subseteq V = Ind_H^G W$ imamo

$$(A_j f)(xk) = f(a_j x k) = f(a_j x a_j^{-1} a_j k) = \rho(a_j x a_j^{-1}) f(a_j k) = \rho_j(x) (A_j f)(k).$$

Dakle, A_j je preslikavanje sa V_j u X_j i očito je taj operator linearan. Dokažimo da operator A_j prepliće reprezentacije $(\pi|_K)_{V_j}$ i $\pi_j = Ind_{K_j}^K \rho_j$. Doista, za $x, k \in K$ i za $f \in V_j$ imamo

$$(A_j (\pi|_K)_{V_j}(x)f)(k) = (A_j \pi(x)f)(k) = (\pi(x)f)(a_j k) = f(a_j k x) = (A_j f)(k x) = (\pi_j(x) A_j f)(k).$$

Dakle,

$$A_j (\pi|_K)_{V_j}(x) = \pi_j(x) A_j, \quad \forall x \in K.$$

Treba još samo dokazati da su $A_j : V_j \rightarrow X_j$ izomorfizmi vektorskih prostora.

Prije svega dokažimo da su svi operatori A_j injekcije. Doista, ako je $f \in V_j$ takva da je $A_j f = 0$, onda prema definiciji operatora A_j imamo

$$f(a_j k) = 0 \quad \forall k \in K.$$

Kako je $f \in V_j \subseteq V = \text{Ind}_H^G W$, odatle za svaki $h \in H$ i svaki $k \in K$ imamo

$$f(ha_j k) = \rho(h)f(a_j k) = 0.$$

Dakle, funkcija f jednaka je nuli u svakoj točki duple $(H : K)$ -klase $Ha_j K$. Prema definiciji V_j slijedi da je funkcija f jednaka nuli svuda na G . Time je dokazano da je $A_j : V_j \rightarrow X_j$ injekcija za svaki j .

Dokažimo sada surjektivnost. Neka je $\varphi \in X_j = \text{Ind}_{K_j}^K W$. Dakle, φ je funkcija sa K u W sa svojstvom

$$\varphi(xk) = \rho_j(x)\varphi(k) = \rho(a_j x a_j^{-1})\varphi(k), \quad \forall x \in K_j = K \cap a_j^{-1} H a_j, \quad \forall k \in K.$$

Definiramo sada funkciju $f : G \rightarrow W$ na sljedeći način:

$$f(g) = \begin{cases} \rho(h)\varphi(k) & \text{ako je } g = ha_j k \text{ za neke } h \in H \text{ i } k \in K \\ 0 & \text{ako je } g \in G \setminus Ha_j K. \end{cases}$$

Treba prije svega vidjeti da je definicija smisljena, tj. da ne ovisi o prikazu elementa $g \in Ha_j K$ u obliku $ha_j k$, $h \in H$, $k \in K$. Doista, neka su $h, h' \in H$ i $k, k' \in K$ takvi da je $ha_j k = h'a_j k'$. Tada je

$$x = k'k^{-1} = a_j^{-1}h'^{-1}ha_j \in K \cap a_j^{-1}Ha_j = K_j,$$

pa zbog svojstva funkcije φ imamo

$$\rho(h')\varphi(k') = \rho(h')\varphi(xk) = \rho(h')\rho(a_j x a_j^{-1})\varphi(k) = \rho(h')\rho(h'^{-1}h)\varphi(k) = \rho(h)\varphi(k).$$

Time je dokazana neovisnost definicije funkcije f o prikazu elementa $g \in Ha_j K$ u obliku $ha_j k$, $h \in H$, $k \in K$. Iz definicije je odmah jasno da je $f \in V$ a budući da je jednaka nuli izvan duple $(H : K)$ -klase $Ha_j K$ slijedi da je $f \in V_j$. Napokon,

$$(A_j f)(k) = f(a_j k) = \varphi(k) \quad \forall k \in K \quad \implies \quad A_j f = \varphi.$$

Time je dokazano da je A_j i surjektivna sa V_j na X_j , odnosno, teorem 3.6.3. je u potpunosti dokazan.

3.7 Tenzorski produkt induciranih reprezentacija

Teorem 3.7.1. *Neka su H_1 i H_2 podgrupe konačnih grupa G_1 i G_2 i neka su ρ_1 i ρ_2 njihove reprezentacije. Tada je $\text{Ind}_{H_1 \times H_2}^{G_1 \times G_2}(\rho_1 \times \rho_2) \simeq (\text{Ind}_{H_1}^{G_1} \rho_1) \times (\text{Ind}_{H_2}^{G_2} \rho_2)$.*

Dokaz: Neka su W_1 i W_2 prostori reprezentacija ρ_1 i ρ_2 . Označimo sa V_1, V_2 i V prostore induciranih reprezentacija $\pi_1 = \text{Ind}_{H_1}^{G_1} \rho_1$, $\pi_2 = \text{Ind}_{H_2}^{G_2} \rho_2$ i $\pi = \text{Ind}_{H_1 \times H_2}^{G_1 \times G_2}(\rho_1 \times \rho_2)$:

$$V_1 = \{\varphi : G_1 \rightarrow W_1; \varphi(h_1 g_1) = \rho_1(h_1) \varphi(g_1) \quad \forall h_1 \in H_1 \text{ i } \forall g_1 \in G_1\},$$

$$V_2 = \{\psi : G_2 \rightarrow W_2; \psi(h_2 g_2) = \rho_2(h_2) \psi(g_2) \quad \forall h_2 \in H_2 \text{ i } \forall g_2 \in G_2\},$$

$$V = \{F : G_1 \times G_2 \rightarrow W_1 \otimes W_2; F(h_1 g_1, h_2 g_2) = [\rho_1(h_1) \otimes \rho_2(h_2)] F(g_1, g_2) \\ \forall h_1 \in H_1, \forall h_2 \in H_2, \forall g_1 \in G_1 \text{ i } \forall g_2 \in G_2\}.$$

Za $\varphi \in V_1$ i $\psi \in V_2$ definiramo funkciju $A(\varphi, \psi) : G_1 \times G_2 \rightarrow W_1 \otimes W_2$ na sljedeći način:

$$A(\varphi, \psi)(g_1, g_2) = \varphi(g_1) \otimes \psi(g_2).$$

Tada se lako provjeri da je $A(\varphi, \psi) \in V$ i da je preslikavanje $A : V_1 \times V_2 \rightarrow V$ bilinearно. Stoga postoji jedinstven linearan operator $B : V_1 \otimes V_2 \rightarrow V$ takav da je

$$B(\varphi \otimes \psi) = A(\varphi, \psi), \quad \text{tj.} \quad B(\varphi \otimes \psi)(g_1, g_2) = \varphi(g_1) \otimes \psi(g_2), \quad \varphi \in V_1, \psi \in V_2, g_1 \in G_1, g_2 \in G_2.$$

Zadatak 3.8. (a) *Zgodnim izborom baza u V_1 i V_2 , a time i u $V_1 \otimes V_2$, dokažite da je B injekcija, a zatim računom dimenzija dokažite da je B i surjekcija, dakle, izomorfizam vektorskog prostora $V_1 \otimes V_2$ na vektorski prostor V .*

(b) *Dokažite da je*

$$B(\pi_1 \times \pi_2)(g_1, g_2) = \pi(g_1, g_2) B \quad \forall (g_1, g_2) \in G_1 \times G_2.$$

Time je teorem 3.7.1. dokazan.

Ako grupu G identificiramo s podgrupom $\{(a, a); a \in G\}$ grupe $G \times G$, i ako su π i ω reprezentacije grupe G onda je njihov tenzorski produkt $\pi \otimes \omega$ restrikcija vanjskog produkta $\pi \times \omega$ na tu podgrupu od $G \times G$. Odgovarajućom primjenom teorema 3.7.1., leme 3.6.2. i teorema 3.6.3. dobivamo sljedeći teorem koji navodimo bez dokaza i koji daje analizu tenzorskog produkta induciranih reprezentacija $(\text{Ind}_H^G \rho) \otimes (\text{Ind}_K^G \sigma) = [(\text{Ind}_H^G \rho) \times (\text{Ind}_K^G \sigma)]|_G \simeq (\text{Ind}_{H \times K}^{G \times G} \rho \times \sigma)|_G$:

Teorem 3.7.2. *Neka su H i K podgrupe konačne grupe G i neka su ρ i σ reprezentacije grupa H i K . Za $a, b \in G$ neka su podgrupa $G_{a,b}$ i njene reprezentacije $\rho_{a,b}$ i $\sigma_{a,b}$ zadane na sljedeći način:*

$$G_{a,b} = a^{-1} H a \cap b^{-1} K b, \quad \rho_{a,b}(x) = \rho(axa^{-1}), \quad \sigma_{a,b}(x) = \sigma(bxb^{-1}).$$

(a) *Ako su $a, b, c, d \in G$ takvi da je $H a b^{-1} K = H c d^{-1} K$ tada vrijedi*

$$\text{Ind}_{G_{a,b}}^G (\rho_{a,b} \otimes \sigma_{a,b}) \simeq \text{Ind}_{G_{c,d}}^G (\rho_{c,d} \otimes \sigma_{c,d}).$$

(b) *Neka su a_1, a_2, \dots, a_s predstavnici svih duplih $(H : K)$ -klasa u grupi G . Tada je tenzorski produkt $\pi \otimes \omega$ induciranih reprezentacija $\pi = \text{Ind}_H^G \rho$ i $\omega = \text{Ind}_K^G \sigma$ ekvivalentan direktnoj sumi reprezentacija $\tau_j = \text{Ind}_{G_{a_j,e}}^G (\rho_{a_j,e} \otimes \sigma_{a_j,e})$, $j = 1, 2, \dots, s$.*

3.8 Ireducibilnost inducirane reprezentacije

Dokazat ćemo sada kriterij ireducibilnosti inducirane reprezentacije $Ind_H^G \rho$. U tu svrhu koristit ćemo se teoremom 3.6.3. u situaciji $H = K$, dakle za restrikciju $(Ind_H^G \rho)|_H$. Za iskaz *Mackeyevog teorema* o kriteriju ireducibilnosti inducirane reprezentacije treba nam pojam disjunktnosti reprezentacija. Za reprezentacije π i ω grupe G kažemo da su **disjunktne** ako one nemaju ekvivalentnih ireducibilnih subreprezentacija.

Zadatak 3.9. *Neka su π i ω reprezentacije grupe G na prostorima V i W i neka su χ_π i χ_ω njihovi karakteri. Dokažite da su sljedeća svojstva međusobno ekvivalentna:*

- (a) *Reprezentacije π i ω su disjunktne.*
- (b) $Hom_G(V, W) = \{0\}$.
- (c) $Hom_G(W, V) = \{0\}$.
- (d) $m(\pi, \alpha)m(\omega, \alpha) = 0 \forall \alpha \in \hat{G}$.
- (e) $(\chi_\pi | \chi_\omega) = 0$.

Teorem 3.8.1. *Neka je ρ reprezentacija podgrupe H grupe G i neka je $\pi = Ind_H^G \rho$. Za $a \in G \setminus H$ neka su H_a podgrupa od H i ρ_a njena reprezentacija definirane sa:*

$$H_a = H \cap aHa^{-1}, \quad \rho_a(x) = \rho(a^{-1}xa), \quad x \in H_a.$$

Reprezentacija π grupe G je ireducibilna ako i samo ako su ispunjena sljedeća dva uvjeta:

- (a) *Reprezentacija ρ grupe H je ireducibilna.*
- (b) *Za svaki element $a \in G \setminus H$ reprezentacije $\rho|_{H_a}$ i ρ_a grupe H_a su disjunktne.*

Dokaz: Prema teoremu 2.2.7. reprezentacija π je ireducibilna ako i samo ako je $(\chi_\pi | \chi_\pi)_G = 1$, gdje je χ_π karakter reprezentacije π a $(\cdot | \cdot)_G$ je prije uvedeni skalarni produkt na prostoru $\mathbb{C}[G]$:

$$(\varphi | \psi)_G = \frac{1}{|G|} \sum_{a \in G} \varphi(a) \overline{\psi(a)}, \quad \varphi, \psi \in \mathbb{C}[G].$$

Sada imamo redom zbog teorema 2.6.5. i zbog tvrdnje (a) teorema 3.4.1:

$$(\chi_\pi | \chi_\pi)_G = \dim Hom_G(V, V) = \dim Hom_H(V, W) = (\chi_\pi | \chi_\rho)_H.$$

Neka su a_1, a_2, \dots, a_s predstavnici svih duplih $(H : H)$ -klasa u grupi G tako da imamo disjunktne uniju

$$G = Ha_1H \cup Ha_2H \cup \dots \cup Ha_sH.$$

Prema teoremu 3.6.3. restrikcija $\pi|_H$ je ekvivalentna direktnoj sumi reprezentacija $Ind_{H_{a_1}}^H \rho_{a_1}, Ind_{H_{a_2}}^H \rho_{a_2}, \dots, Ind_{H_{a_s}}^H \rho_{a_s}$. Stoga imamo dalje

$$(\chi_\pi | \chi_\pi)_G = \sum_{i=1}^s \dim Hom_H(Ind_{H_{a_i}}^H W_i, W),$$

pri čemu smo sa W_i označili prostor W na kome djeluje reprezentacija ρ_{a_i} grupe H_{a_i} . Za svaki i ponovnom primjenom teorema 3.4.1. i teorema 2.6.5. nalazimo

$$\dim Hom_H(Ind_{H_{a_i}}^H W_i, W) = \dim Hom_H(W, Ind_{H_{a_i}}^H W_i) = \dim Hom_{H_{a_i}}(W, W_i),$$

Dakle,

$$(\chi_\pi | \chi_\pi)_G = \sum_{i=1}^s \dim \operatorname{Hom}_{H_{a_i}}(W, W_i).$$

Pri izboru predstavnika duplih $(H:H)$ -klasa možemo uzeti da je $a_1 = e$ i da su $a_2, \dots, a_s \in G \setminus H$. Tada je $H_{a_1} = H_e = H$ i $\rho_{a_1} = \rho_e = \rho$. Dakle,

$$(\chi_\pi | \chi_\pi)_G = \dim \operatorname{Hom}_H(W, W) + \sum_{i=2}^s \dim \operatorname{Hom}_{H_{a_i}}(W, W_i).$$

Odatle se vidi da je $(\chi_\pi | \chi_\pi)_G = 1$ ako i samo ako je $\dim \operatorname{Hom}_H(W, W) = 1$ i $\operatorname{Hom}_{H_{a_i}}(W_i, W) = \{0\}$ za $i = 2, \dots, s$. Kako je $G \setminus H = Ha_2H \cup \dots \cup Ha_sH$ zbog sljedećeg zadatka vidimo da to upravo znači da je reprezentacija π ireducibilna ako i samo ako vrijedi (a) i (b).

Zadatak 3.10. *Uz oznake teorema 3.8.1. dokažite da su za $a, b \in G$ takve da je $HaH = HbH$ reprezentacije $\rho|_{H_a}$ i ρ_a grupe H_a disjunktne ako i samo ako su reprezentacije $\rho|_{H_b}$ i ρ_b grupe H_b disjunktne.*

Uputa: Primijenite lemu 3.6.2. i tvrdnju (a) teorema 3.4.1. ili dokažite da ako je $a = h b h'$, tada je $H_a = h H_b h^{-1}$ i $\rho_a(x) = \rho(h')^{-1} \rho_b(h^{-1} x h) \rho(h')$, a zatim direktno konstruirajte izomorfizam prostora $\operatorname{Hom}_{H_a}(W, W_a)$ na prostor $\operatorname{Hom}_{H_b}(W, W_b)$, pri čemu je W_a (odnosno, W_b) prostor W na kome djeluje reprezentacija ρ_a grupe H_a (odnosno, reprezentacija ρ_b grupe H_b).

Korolar 3.8.2. *Neka je H normalna podgrupa grupe G i ρ reprezentacija grupe H . Reprezentacija $\operatorname{Ind}_H^G \rho$ je ireducibilna ako i samo ako je ρ ireducibilna i za svaki $a \in G \setminus H$ vrijedi $\rho \not\cong \rho_a$, pri čemu je ρ_a reprezentacija od H definirana konjugiranjem reprezentacije ρ :*

$$\rho_a(h) = \rho(a^{-1} h a), \quad h \in H.$$

Dokaz: Doista, tada je $H_a = H$ za svaki a .

3.9 Induciranje za grupovne algebre

U ovoj točki opisać ćemo konstrukciju inducirane reprezentacije u terminima grupovnih algebri. Naime, prema teoremu 1.2.2. reprezentacija π grupe G na vektorskom prostoru V daje reprezentaciju unitalne grupovne algebre $\mathbb{C}[G]$ na istom prostoru za koju smo se dogovorili da ćemo je označavati istim znakom π :

$$\pi(\varphi) = \sum_{a \in G} \varphi(a)\pi(a), \quad \varphi \in \mathbb{C}[G].$$

Također, reprezentacija ρ podgrupe H grupe G na prostoru W je ujedno reprezentacija unitalne grupovne algebre $\mathbb{C}[H]$:

$$\rho(\psi) = \sum_{b \in H} \psi(b)\rho(b), \quad \psi \in \mathbb{C}[H].$$

Opisat ćemo sada na koji se način reprezentacija $\pi = \text{Ind}_H^G \rho$ promatrana kao reprezentacija unitalne algebre $\mathbb{C}[G]$ dobiva iz reprezentacije ρ promatrane kao reprezentaciju unitalne algebre $\mathbb{C}[H]$.

Prije svega, uočimo da se $\mathbb{C}[H]$ može promatrati kao unitalna podalgebra od $\mathbb{C}[G]$.

Propozicija 3.9.1. *Za $\psi \in \mathbb{C}[H]$ definiramo funkciju $\Phi(\psi) \in \mathbb{C}[G]$ na sljedeći način:*

$$[\Phi(\psi)](a) = \begin{cases} \psi(a) & \text{ako je } a \in H \\ 0 & \text{ako je } a \in G \setminus H, \end{cases} \quad a \in G.$$

Preslikavanje Φ je unitalni monomorfizam unitalne algebre $\mathbb{C}[H]$ u unitalnu algebru $\mathbb{C}[G]$.

Dokaz: Očito je preslikavanje $\Phi : \mathbb{C}[H] \rightarrow \mathbb{C}[G]$ linearno. Nadalje, za $\psi_1, \psi_2 \in \mathbb{C}[H]$ konvolucija funkcija $\Phi(\psi_1)$ i $\Phi(\psi_2)$ na grupi G dana je za $a \in G$ sa

$$[\Phi(\psi_1) * \Phi(\psi_2)](a) = \sum_{b \in G} [\Phi(\psi_1)](b)[\Phi(\psi_2)](b^{-1}a).$$

Kako je $[\Phi(\psi_1)](b) = 0$ za $b \in G \setminus H$ i $[\Phi(\psi_1)](b) = \psi_1(b)$ za $b \in H$, nalazimo za $a \in G$

$$[\Phi(\psi_1) * \Phi(\psi_2)](a) = \sum_{b \in H} \psi_1(b)[\Phi(\psi_2)](b^{-1}a).$$

Ako je $b \in H$ i $a \in G \setminus H$ onda je $b^{-1}a \in G \setminus H$ pa je $[\Phi(\psi_2)](b^{-1}a) = 0$. Stoga je

$$[\Phi(\psi_1) * \Phi(\psi_2)](a) = 0 \quad \forall a \in G \setminus H.$$

S druge strane, ako je $b \in H$ i $a \in H$ onda je $b^{-1}a \in H$ pa je $[\Phi(\psi_2)](b^{-1}a) = \psi_2(b^{-1}a)$. Stoga je

$$[\Phi(\psi_1) * \Phi(\psi_2)](a) = \sum_{b \in H} \psi_1(b)\psi_2(b^{-1}a) = (\psi_1 * \psi_2)(a) \quad \forall a \in H,$$

pri čemu je $\psi_1 * \psi_2$ oznaka za konvoluciju na grupi H . Iz prethodne dvije jednakosti slijedi

$$[\Phi(\psi_1) * \Phi(\psi_2)](a) = \begin{cases} (\psi_1 * \psi_2)(a) & \text{ako je } a \in H \\ 0 & \text{ako je } a \in G \setminus H \end{cases} = [\Phi(\psi_1 * \psi_2)](a) \quad \forall a \in G.$$

Time je dokazano da je $\Phi(\psi_1 * \psi_2) = \Phi(\psi_1) * \Phi(\psi_2) \forall \psi_1, \psi_2 \in \mathbb{C}[H]$, tj. Φ je homomorfizam algebre $\mathbb{C}[H]$ u algebru $\mathbb{C}[G]$. Taj je homomorfizam očito injektivan, tj. to je monomorfizam. Napokon, monomorfizam Φ je unitalan jer je očito $\Phi(\delta_e^H) = \delta_e^G$, gdje su δ_e^H i δ_e^G jedinice u algebrama $\mathbb{C}[H]$ i $\mathbb{C}[G]$:

$$\delta_e^H(b) = \begin{cases} 1 & \text{ako je } b = e \\ 0 & \text{ako je } b \neq e \end{cases}, \quad \delta_e^G(a) = \begin{cases} 1 & \text{ako je } a = e \\ 0 & \text{ako je } a \neq e \end{cases}, \quad b \in H, \quad a \in G.$$

Zadatak 3.11. *Dokažite da je preslikavanje $\Psi : \mathbb{C}[G] \rightarrow \mathbb{C}[H]$ definirano kao restrikcija sa G na H , tj.*

$$\Psi(\varphi) = \varphi|_H, \quad \varphi \in \mathbb{C}[G],$$

lijevi invers homomorfizma $\Phi : \mathbb{C}[H] \rightarrow \mathbb{C}[G]$ iz propozicije 3.9.1. Da li je Ψ homomorfizam algebri?

Monomorfizam Φ iz propozicije 3.9.1. shvaćat ćemo kao identifikaciju. Na taj način $\mathbb{C}[H]$ postaje unitalna podalgebra od $\mathbb{C}[G]$. Funkcija $\psi \in \mathbb{C}[H]$ identificira se s funkcijom na G koja se na H podudara sa ψ a na $G \setminus H$ je jednaka nuli.

Neka je sada $\varphi \in \mathbb{C}[G]$ i neka je $\psi \in \mathbb{C}[H]$ identificirana na opisani način s funkcijom iz $\mathbb{C}[G]$. Kako je $\psi|_{G \setminus H} = 0$, vrijedi za $a \in G$

$$(\psi * \varphi)(a) = \sum_{b \in G} \psi(b) \varphi(b^{-1}a) = \sum_{b \in H} \psi(b) \varphi(b^{-1}a).$$

Nadalje, zamjenom varijable sumacije $b \mapsto ab$, a zatim $b \mapsto b^{-1}$, nalazimo za $a \in G$

$$\begin{aligned} (\varphi * \psi)(a) &= \sum_{b \in G} \varphi(b) \psi(b^{-1}a) = \sum_{b \in G} \varphi(ab) \psi(b^{-1}) = \\ &= \sum_{b \in G} \varphi(ab^{-1}) \psi(b) = \sum_{b \in H} \varphi(ab^{-1}) \psi(b). \end{aligned}$$

Dakle, imamo sljedeće formule za konvoluciju funkcija iz $\mathbb{C}[G]$ zdesna, odnosno slijeva, s funkcijama iz $\mathbb{C}[H]$:

$$(\psi * \varphi)(a) = \sum_{b \in H} \psi(b) \varphi(b^{-1}a) = \sum_{b \in H} \psi(b^{-1}) \varphi(ba), \quad \psi \in \mathbb{C}[H], \quad \varphi \in \mathbb{C}[G], \quad a \in G; \quad (3.1)$$

$$(\varphi * \psi)(a) = \sum_{b \in H} \varphi(ab^{-1}) \psi(b) = \sum_{b \in H} \varphi(ab) \psi(b^{-1}), \quad \varphi \in \mathbb{C}[G], \quad \psi \in \mathbb{C}[H], \quad a \in G. \quad (3.2)$$

U daljnjem ćemo se koristiti s pojmom modula nad prstenom. Ako je R prsten (ne nužno komutativan), **lijevi modul nad prstenom R** ili **lijevi R -modul** je aditivna Abelova grupa V za koju je zadano lijevo množenje elementima prstena R , tj. zadano je preslikavanje $R \times V \rightarrow V$, $(\varphi, v) \mapsto \varphi v$, sa svojstvima:

- (i) $(\varphi_1 + \varphi_2)v = \varphi_1 v + \varphi_2 v \quad \forall \varphi_1, \varphi_2 \in R \text{ i } \forall v \in V$;
- (ii) $\varphi(v_1 + v_2) = \varphi v_1 + \varphi v_2 \quad \forall \varphi \in R \text{ i } \forall v_1, v_2 \in V$;
- (iii) $(\varphi_1 \varphi_2)v = \varphi_1(\varphi_2 v) \quad \forall \varphi_1, \varphi_2 \in R \text{ i } \forall v \in V$.

Ako je prsten R unitalan s jedinicom 1_R , **lijevi R -modul V** se zove **unitalan**, ako vrijedi i

- (iv) $1_R v = v \quad \forall v \in V$.

Ako su V i W lijevi R -moduli, preslikavanje $A : V \rightarrow W$ zove se **homomorfizam R -modula** ili **R -homomorfizam** ako je preslikavanje A aditivno

$$A(v_1 + v_2) = A(v_1) + A(v_2) \quad \forall v_1, v_2 \in V$$

i ako vrijedi

$$A(\varphi v) = \varphi A(v) \quad \forall \varphi \in R \quad \text{i} \quad \forall v \in V.$$

Skup svih R -homomorfizama modula V u modul W označavat ćemo sa $Hom_R(V, W)$. Taj je skup aditivna grupa uz zbrajanje definirano po točkama:

$$(A + B)(v) = A(v) + B(v), \quad A, B \in Hom_R(V, W), \quad v \in V.$$

Reprezentacije unitalne algebre \mathcal{A} u uskoj su vezi s unitalnim lijevim \mathcal{A} -modulima:

Propozicija 3.9.2. *Neka je \mathcal{A} unitalna algebra nad poljem K s jedinicom $1_{\mathcal{A}}$.*

- (a) *Neka je π reprezentacija unitalne algebre \mathcal{A} na vektorskom prostoru V nad poljem K . Za $\varphi \in \mathcal{A}$ i $v \in V$ stavimo $\varphi v = \pi(\varphi)v$. Tada je V unitalan lijevi modul nad unitalnim prstenom \mathcal{A} .*
- (b) *Neka je V unitalan lijevi modul nad unitalnim prstenom \mathcal{A} . Za $\lambda \in K$ i $v \in V$ definiramo $\lambda v = (\lambda 1_{\mathcal{A}})v$. Tada V postaje vektorski prostor nad poljem K . Nadalje, ako za $\varphi \in \mathcal{A}$ definiramo $\pi(\varphi) : V \rightarrow V$ sa $\pi(\varphi)v = \varphi v$, $v \in V$, tada je svaki $\pi(\varphi)$ linearan operator na vektorskom prostoru V i $\pi : \mathcal{A} \rightarrow L(V)$ je reprezentacija unitalne algebre \mathcal{A} .*
- (c) *Ako su π i ρ reprezentacije unitalne algebre \mathcal{A} na vektorskim prostorima V i W onda je preslikavanje $A : V \rightarrow W$ preplitanje reprezentacija π i ρ ako i samo ako je to homomorfizam lijevih \mathcal{A} -modula V u W . Posebno, svaki \mathcal{A} -homomorfizam je linearan operator s vektorskog prostora V u vektorski prostor W .*

Zadatak 3.12. *Dokažite propoziciju 3.9.2.*

Sasvim analogno lijevim modulima definira se i pojam **desnog modula nad prstenom S** ili **desnog S -modula**. To je aditivna Abelova grupa V na kojoj je definirano desno množenje elementima iz S , tj. zadano je preslikavanje $V \times S \rightarrow V$, $(v, \psi) \mapsto v\psi$, sa svojstvima.

$$(i') \quad v(\psi_1 + \psi_2) = v\psi_1 + v\psi_2 \quad \forall \psi_1, \psi_2 \in S \quad \text{i} \quad \forall v \in V;$$

$$(ii') \quad (v_1 + v_2)\psi = v_1\psi + v_2\psi \quad \forall \psi \in S \quad \text{i} \quad \forall v_1, v_2 \in V;$$

$$(iii') \quad v(\psi_1\psi_2) = (v\psi_1)\psi_2 \quad \forall \psi_1, \psi_2 \in S \quad \text{i} \quad \forall v \in V.$$

Ako je prsten S unitalan s jedinicom 1_S , **desni S -modul V** se zove **unitalan**, ako vrijedi i

$$(iv') \quad v1_S = v \quad \forall v \in V.$$

Ako su R i S prstenovi, (R, S) -**bimodul** je aditivna Abelova grupa na kojoj je zadano lijevo množenje elementima iz R i desno množenje elementima iz S , tj. zadana su preslikavanja $(\varphi, v) \mapsto \varphi v$ sa $R \times V$ u V i $(v, \psi) \mapsto v\psi$ sa $V \times S$ u V takva da vrijede (i), (ii), (iii), (i'), (ii') i (iii') i dva množenja međusobno komutiraju, tj. vrijedi

$$(v) \quad (\varphi v)\psi = \varphi(v\psi) \quad \forall \varphi \in R, \quad \forall \psi \in S \quad \text{i} \quad \forall v \in V.$$

Ako su prsteni R i S unitalni i ako vrijede (iv) i (iv') , tj. ako je V unitalan kao lijevi R -modul i kao desni S -modul, V se zove **unitalan** (R, S) -**bimodul**.

U daljnjem ćemo promatrati samo unitalne prstenove. Umjesto *unitalan lijevi* (odnosno, *desni*) *modul* govorit ćemo kraće *lijevi* (odnosno, *desni*) *modul*. Također, *bimodul* će značiti *unitalni bi-modul*.

Generalizirat ćemo sada pojam tenzorskog produkta za module nad prstenovima. Neka su R prsten, V desni R -modul i W lijevi R -modul. Ako je Z aditivna Abelova grupa, preslikavanje $\chi : V \times W \rightarrow Z$ zove se R -**bimorfizam** ako je to preslikavanje biaditivno

$$\chi(v_1 + v_2, w) = \chi(v_1, w) + \chi(v_2, w) \quad \forall v_1, v_2 \in V \quad \text{i} \quad \forall w \in W,$$

$$\chi(v, w_1 + w_2) = \chi(v, w_1) + \chi(v, w_2) \quad \forall v \in V \quad \text{i} \quad \forall w_1, w_2 \in W$$

i ako vrijedi

$$\chi(v\varphi, w) = \chi(v, \varphi w) \quad \forall v \in V, \quad \forall w \in W \quad \text{i} \quad \forall \varphi \in R.$$

Tenzorski produkt V i W je uređen par (T, χ) , gdje T aditivna Abelova grupa i $\chi : V \times W \rightarrow T$ R -bimorfizam, koji ima *univerzalno svojstvo*:

Ako je Z aditivna Abelova grupa i $\psi : V \times W \rightarrow Z$ R -bimorfizam, postoji jedinstven homomorfizam grupa $\Psi : T \rightarrow Z$ takav da je $\psi = \Psi \circ \chi$, tj. $\psi(v, w) = \Psi(\chi(v, w)) \quad \forall v \in V$ i $\forall w \in W$.

Sasvim analogno kao i za tenzorski produkt vektorskih prostora dokazuje se teorem o egzistenciji i jedinstvenosti (do na izomorfizam) tenzorskog produkta modula:

Teorem 3.9.3. *Neka su R (unitalan) prsten, V (unitalan) desni R -modul i W (unitalan) lijevi R -modul.*

(a) *Postoji tenzorski produkt (T, χ) modula V i W .*

(b) *Ako su (T, χ) i (T', χ') tenzorski produkti modula V i W , onda postoji jedinstven izomorfizam grupa $\Phi : T \rightarrow T'$ takav da je $\chi' = \Phi \circ \chi$.*

Uobičajeno je da se tenzorski produkt modula V i W označava sa $V \otimes_R W$ podrazumijevajući da je pripadni R -bimorfizam dan sa $(v, w) \mapsto v \otimes_R w$. U slučaju modula nemamo analogon s teoremom 1.3.2. jer u modulima općenito ne postoji analogon baze. No može se dokazati:

Teorem 3.9.4. *Ako su R prsten, V desni R -modul i W lijevi R -modul, Abelova grupa $V \otimes_R W$ generirana je skupom $\{v \otimes_R w; v \in V, w \in W\}$. Štoviše, ako skup $T \subseteq V$ generira desni R -modul V i ako skup $S \subseteq W$ generira lijevi R -modul W onda skup $\{v \otimes_R w; v \in T, w \in S\}$ generira grupu $V \otimes_R W$.*

Ako desni R -modul V i/ili lijevi R -modul W imaju dodatnu strukturu, ona se prenosi na tenzorski produkt $V \otimes_R W$:

Teorem 3.9.5. *Neka su R, S i T prstenovi.*

(a) *Neka je V (R, S) -bimodul i W lijevi S -modul. Tada na Abelovoj grupi $V \otimes_S W$ postoji jedinstvena struktura lijevog R -modula takva da vrijedi*

$$\varphi(v \otimes_S w) = (\varphi v) \otimes_S w \quad \forall (v, w) \in V \times W \quad \text{i} \quad \forall \varphi \in R.$$

(b) Neka je V desni R -modul i W (R, S) -bimodul. Tada na Abelovoj grupi $V \otimes_R W$ postoji jedinstvena struktura desnog S -modula takva da vrijedi

$$(v \otimes_R w)\psi = v \otimes_R (w\psi) \quad \forall (v, w) \in V \times W \quad i \quad \forall \psi \in S.$$

(c) Neka je V (R, S) -bimodul i W (S, T) -bimodul. Tada na Abelovoj grupi $V \otimes_S W$ postoji jedinstvena struktura (R, T) -bimodula takva da vrijedi

$$\varphi(v \otimes_S w)\chi = (\varphi v) \otimes_S (w\chi) \quad \forall (v, w) \in V \times W, \quad \forall \varphi \in R \quad i \quad \forall \chi \in T.$$

Nadalje, do na izomorfizam vrijedi i svojstvo asocijativnosti:

Teorem 3.9.6. Neka su R, S i T prstenovi i neka su V desni R -modul, W (R, S) -bimodul i U lijevi S -modul. Tada postoji jedinstven homomorfizam aditivnih grupa

$$\Phi : (V \otimes_R W) \otimes_S U \rightarrow V \otimes_R (W \otimes_S U)$$

takav da vrijedi

$$\Phi((v \otimes_R w) \otimes_S u) = v \otimes_R (w \otimes_S u) \quad \forall (v, w, u) \in V \times W \times U.$$

Φ je izomorfizam grupa. Ako je V ne samo desni R -modul nego (T, R) -bimodul onda je Φ izomorfizam lijevih T -modula, a ako je U ne samo lijevi S -modul nego (S, T) -bimodul onda je Φ izomorfizam desnih T -modula.

Sljedeća dva teorema daju i izomorfizme grupa (odnosno, modula) homomorfizama.

Teorem 3.9.7. Neka su R, S i T prstenovi i neka su V desni R -modul, W (R, S) -bimodul i U desni S -modul. Postoji jedinstven homomorfizam aditivnih grupa

$$\Phi : Hom_S(V \otimes_R W, U) \rightarrow Hom_R(V, Hom_S(W, U))$$

takav da vrijedi

$$\{[\Phi(F)](v)\}(w) = F(v \otimes_R w) \quad \forall F \in Hom_S(V \otimes_R W, U), \quad \forall v \in V \quad i \quad \forall w \in W.$$

Pri tome je $Hom_S(X, Y)$ oznaka za aditivnu grupu homomorfizama desnih S -modula X i Y , $Hom_R(X, Y)$ je oznaka za aditivnu grupu homomorfizme desnih R -modula X i Y , a aditivna grupa $Hom_S(W, U)$ ima strukturu desnog R -modula preko sljedećeg desnog množenja elementima iz R :

$$(G\varphi)(w) = G(\varphi w), \quad G \in Hom_S(W, U), \quad \varphi \in R, \quad w \in W.$$

Φ je izomorfizam grupe $Hom_S(V \otimes_R W, U)$ na grupu $Hom_R(V, Hom_S(W, U))$.

Ako je U ne samo desni S -modul nego (T, S) -bimodul, onda se mogu definirati strukture lijevih T -modula na aditivnim grupama $Hom_S(V \otimes_R W, U)$ i $Hom_R(V, Hom_S(W, U))$ preko sljedećih lijevih množenja elementima iz T :

$$(\chi F)(x) = \chi F(x), \quad \chi \in T, \quad F \in Hom_S(V \otimes_R W, U), \quad x \in V \otimes_R W,$$

$$[(\chi G)(v)](w) = \chi\{[G(v)](w)\}, \quad \chi \in T, \quad G \in Hom_R(V, Hom_S(W, U)), \quad v \in V, \quad w \in W.$$

U tom slučaju je Φ izomorfizam lijevih T -modula.

Ako je V ne samo desni R -modul nego (T, R) -bimodul, onda se mogu definirati strukture desnih T -modula na aditivnim grupama $Hom_S(V \otimes_R W, U)$ i $Hom_R(V, Hom_S(W, U))$ preko sljedećih desnih množenja elementima iz T :

$$(F\chi)(x) = F(\chi x), \quad \chi \in T, \quad F \in Hom_S(V \otimes_R W, U), \quad x \in V \otimes_R W,$$

$$(G\chi)(v) = G(\chi v), \quad \chi \in T, \quad G \in Hom_R(V, Hom_S(W, U)), \quad v \in V.$$

U tom slučaju je Φ izomorfizam desnih T -modula.

Teorem 3.9.8. *Neka su R , S i T prstenovi i neka su V lijevi R -modul, W (S, R) -bimodul i U lijevi S -modul. Postoji jedinstven homomorfizam aditivnih grupa*

$$\Phi : \text{Hom}_S(W \otimes_R V, U) \rightarrow \text{Hom}_R(V, \text{Hom}_S(W, U))$$

takav da vrijedi

$$\{[\Phi(F)](v)\}(w) = F(w \otimes_R v) \quad \forall F \in \text{Hom}_S(W \otimes_R V, U), \quad \forall v \in V \quad \text{i} \quad \forall w \in W.$$

Pri tome je $\text{Hom}_S(X, Y)$ oznaka za aditivnu grupu homomorfizama lijevih S -modula X i Y , $\text{Hom}_R(X, Y)$ je oznaka za aditivnu grupu homomorfizama lijevih R -modula X i Y , a aditivna grupa $\text{Hom}_S(W, U)$ ima strukturu lijevog R -modula preko sljedećeg lijevog množenja elementima iz R :

$$(\varphi G)(w) = G(w\varphi), \quad \varphi \in R, \quad G \in \text{Hom}_S(W, U), \quad w \in W.$$

Φ je izomorfizam grupe $\text{Hom}_S(W \otimes_R V, U)$ na grupu $\text{Hom}_R(V, \text{Hom}_S(W, U))$.

Ako je U ne samo lijevi S -modul nego (S, T) -bimodul, onda se mogu definirati strukture lijevih T -modula na aditivnim grupama $\text{Hom}_S(W \otimes_R V, U)$ i $\text{Hom}_R(V, \text{Hom}_S(W, U))$ preko sljedećih lijevih množenja elementima iz T :

$$(\chi F)(x) = F(x)\chi, \quad \chi \in T, \quad F \in \text{Hom}_S(W \otimes_R V, U), \quad x \in W \otimes_R V,$$

$$\{[(\chi G)](v)\}(w) = \{[G(v)](w)\}\chi, \quad \chi \in T, \quad G \in \text{Hom}_R(V, \text{Hom}_S(W, U)), \quad v \in V, \quad w \in W.$$

U tom slučaju je Φ izomorfizam lijevih T -modula.

Ako je V ne samo lijevi R -modul nego (R, T) -bimodul, onda se mogu definirati strukture lijevih T -modula na aditivnim grupama $\text{Hom}_S(W \otimes_R V, U)$ i $\text{Hom}_R(V, \text{Hom}_S(W, U))$ preko sljedećih lijevih množenja elementima iz T :

$$(\chi F)(x) = F(x\chi), \quad \chi \in T, \quad F \in \text{Hom}_S(W \otimes_R V, U), \quad x \in W \otimes_R V,$$

$$(\chi G)(v) = G(v\chi), \quad \chi \in T, \quad G \in \text{Hom}_R(V, \text{Hom}_S(W, U)), \quad v \in V.$$

U tom slučaju je Φ izomorfizam lijevih T -modula.

Neka je sada R prsten i S potprsten. Ako je V lijevi (odnosno, desni) R -modul onda možemo suziti operaciju množenja elementima prstena na potprsten S . Na taj način iz lijevog (odnosno, desnog) R -modula V dolazimo do lijevog (odnosno, desnog) S -modula koji se kao aditivna grupa podudara sa V . Ta se konstrukcija zove **suženje prstena skalara**.

S druge strane, neka je V lijevi S -modul. Prsten R možemo shvaćati kao (R, S) -bimodul, pa možemo formirati tenzorski produkt $R \otimes_S V$. Prema tvrdnji (a) teorema 3.9.5. $R \otimes_S V$ je lijevi R -modul i vrijedi

$$\varphi(\psi \otimes_S v) = (\varphi\psi) \otimes_S v \quad \forall \varphi, \psi \in R \quad \text{i} \quad \forall v \in V.$$

Analogno, ako je V desni S -modul, R možemo shvaćati kao (S, R) -bimodul pa prema tvrdnji (b) teorema 3.9.5. $V \otimes_S R$ ima strukturu desnog R -modula i vrijedi

$$(v \otimes_S \varphi)\psi = v \otimes_S (\varphi\psi) \quad \forall \varphi, \psi \in R \quad \text{i} \quad \forall v \in V.$$

Ove konstrukcije zovu se **proširenja prstena skalara**.

Zadatak 3.13. *Neka je R unitalni prsten i neka je V lijevi (odnosno, desni) unitalni R -modul. Promatramo R kao (R, R) -bimodul i definiramo lijevi (odnosno, desni) R -modul $R \otimes_R V$ (odnosno, $V \otimes_R R$). Dokažite da je taj modul izomorfan modulu V .*

Uputa: Promatrajte preslikavanje $\Phi : V \rightarrow R \otimes_R V$ definirano sa

$$\Phi(v) = 1_R \otimes_R v, \quad v \in V,$$

i dokažite da je Φ homomorfizam lijevih R -modula. Zatim promatrajte preslikavanje

$$\psi : R \times V \rightarrow V \quad \text{definirano sa} \quad \psi(\alpha, v) = \alpha v, \quad \alpha \in R, \quad v \in V,$$

i dokažite da je ψ (R, R) -bimorfizam. Napokon, dokažite da je pripadni homomorfizam lijevih R -modula

$$\Psi : R \otimes_R V \rightarrow V, \quad \text{takav da je} \quad \Psi(\alpha \otimes_R v) = \alpha v, \quad \alpha \in R, \quad v \in V,$$

inverzno preslikavanje od Φ .

Neka je sada G konačna grupa i H njena podgrupa i neka je ρ reprezentacija grupe H na (konačnodimenzionalnom kompleksnom) vektorskom prostoru W . Neka je $\pi = \text{Ind}_H^G \rho$ inducirana reprezentacija grupe G na prostoru $V = \text{Ind}_H^G W$:

$$V = \{f : G \rightarrow W; f(hg) = \rho(h)f(g) \forall h \in H \text{ i } \forall g \in G\}, \quad [\pi(a)f](g), \quad f \in V, \quad a, g \in G.$$

Cilj nam je ustanoviti da je induciranje zapravo proširenje prstena skalara, tj. da je V kao lijevi $\mathbb{C}[G]$ -modul izomorfan lijevom $\mathbb{C}[G]$ -modulu $\mathbb{C}[G] \otimes_{\mathbb{C}[H]} V$:

Teorem 3.9.9. *Uz uvedene oznake lijevi $\mathbb{C}[G]$ -modul V je izomorfan modulu $\mathbb{C}[G] \otimes_{\mathbb{C}[H]} W$.*

Dokaz: Definiramo bilinearne preslikavanje χ sa $\mathbb{C}[G] \times W$ u prostor W^G svih funkcija sa G u W :

$$[\chi(\varphi, w)](a) = \frac{1}{|H|} \sum_{b \in H} \varphi(a^{-1}b) \rho(b)w, \quad \varphi \in \mathbb{C}[G], \quad w \in W, \quad a \in G,$$

gdje kao i obično $|H|$ označava broj elemenata grupe H . Za $\varphi \in \mathbb{C}[G]$, $w \in W$, $a \in G$ i $h \in H$ imamo

$$\begin{aligned} [\chi(\varphi, w)](ha) &= \frac{1}{|H|} \sum_{b \in H} \varphi(a^{-1}h^{-1}b) \rho(b)w = \frac{1}{|H|} \sum_{b \in H} \varphi(a^{-1}b) \rho(hb)w = \\ &= \frac{1}{|H|} \sum_{b \in H} \varphi(a^{-1}b) \rho(h)\rho(b)w = \rho(h) \frac{1}{|H|} \sum_{b \in H} \varphi(a^{-1}b) \rho(b)w = \rho(h)[\chi(\varphi, w)](a). \end{aligned}$$

Pri tome, druga jednakost posljedica je zamjene varijable sumacije $b \mapsto hb$. Time je dokazano da je $\chi(\varphi, w) \in V$, tj. χ je preslikavanje sa $\mathbb{C}[G] \times W$ u V . Dokažimo da je χ $\mathbb{C}[H]$ -bimorfizam, tj. da vrijedi

$$\chi(\varphi * \psi, w) = \chi(\varphi, \psi w) = \chi(\varphi, \rho(\psi)w) \quad \forall \varphi \in \mathbb{C}[G], \quad \forall \psi \in \mathbb{C}[H], \quad \forall w \in W,$$

pri čemu je

$$\rho(\psi)w = \sum_{b \in H} \psi(b)\rho(b)w, \quad \psi \in \mathbb{C}[H], \quad w \in W.$$

Doista, neka su $\varphi \in \mathbb{C}[G]$, $\psi \in \mathbb{C}[H]$, $w \in W$ i $a \in G$. Tada prema formuli (3.2), zatim zamjenom varijable sumacije $c \mapsto b^{-1}c$, pa zamjenom redoslijeda dviju sumacija, pa zamjenom druge varijable sumacije $b \mapsto cb$, imamo redom

$$[\chi(\varphi * \psi, w)](a) = \frac{1}{|H|} \sum_{b \in H} (\varphi * \psi)(a^{-1}b) \rho(b)w = \frac{1}{|H|} \sum_{b \in H} \left[\sum_{c \in H} \varphi(a^{-1}bc) \psi(c^{-1}) \right] \rho(b)w =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{|H|} \sum_{b \in H} \left[\sum_{c \in H} \varphi(a^{-1}c) \psi(c^{-1}b) \right] \rho(b)w = \frac{1}{|H|} \sum_{c \in H} \varphi(a^{-1}c) \left[\sum_{b \in H} \psi(c^{-1}b) \rho(b)w \right] = \\
&= \frac{1}{|H|} \sum_{c \in H} \varphi(a^{-1}c) \left[\sum_{b \in H} \psi(b) \rho(cb)w \right] = \frac{1}{|H|} \sum_{c \in H} \varphi(a^{-1}c) \left[\sum_{b \in H} \psi(b) \rho(c) \rho(b)w \right] = \\
&= \frac{1}{|H|} \sum_{c \in H} \varphi(a^{-1}c) \rho(c) \left[\sum_{b \in H} \psi(b) \rho(b)w \right] = \frac{1}{|H|} \sum_{c \in H} \varphi(a^{-1}c) \rho(c) \rho(\psi)w = [\chi(\varphi, \rho(\psi)w)](a).
\end{aligned}$$

Time je dokazano da je $\chi : \mathbb{C}[G] \times W \rightarrow V$ $\mathbb{C}[H]$ -bimorfizam. Po definiciji tenzorskog produkta nad prstenom postoji jedinstven homomorfizam aditivnih grupa $X : \mathbb{C}[G] \otimes_{\mathbb{C}[H]} W \rightarrow V$ takav da vrijedi

$$X(\varphi \otimes_{\mathbb{C}[H]} w) = \chi(\varphi, w) \quad \forall \varphi \in \mathbb{C}[G] \quad \text{i} \quad \forall w \in W,$$

tj.

$$[X(\varphi \otimes_{\mathbb{C}[H]} w)](a) = \sum_{b \in H} \varphi(a^{-1}b) \rho(b)w \quad \forall \varphi \in \mathbb{C}[G], \quad \forall w \in W \quad \text{i} \quad \forall a \in G.$$

Budući da je preslikavanje χ bilinearно (nad \mathbb{C}) odmah se vidi da je X linearan operator sa vektorskog prostora $\mathbb{C}[G] \otimes_{\mathbb{C}[H]} W$ u vektorski prostor V .

Dokažimo da je X homomorfizam lijevih $\mathbb{C}[G]$ -modula, tj. da vrijedi

$$X(\varphi' * \varphi \otimes_{\mathbb{C}[H]} w) = \pi(\varphi')X(\varphi \otimes_{\mathbb{C}[H]} w) \quad \forall \varphi', \varphi \in \mathbb{C}[G] \quad \text{i} \quad \forall w \in W, \quad (3.3)$$

pri čemu je $\pi = \text{Ind}_H^G \rho$, tj.

$$[\pi(\varphi')f](a) = \sum_{g \in G} \varphi'(g) [\pi(g)f](a) = \sum_{g \in G} \varphi'(g) f(ag), \quad \varphi' \in \mathbb{C}[G], \quad f \in V, \quad a \in G.$$

Doista, za $\varphi', \varphi \in \mathbb{C}[G]$, $w \in W$ i $a \in G$ imamo

$$\begin{aligned}
[X(\varphi' * \varphi \otimes_{\mathbb{C}[H]} w)](a) &= \frac{1}{|H|} \sum_{b \in H} (\varphi' * \varphi)(a^{-1}b) \rho(b)w = \\
&= \frac{1}{|H|} \sum_{b \in H} \left[\sum_{g \in G} \varphi'(g) \varphi(g^{-1}a^{-1}b) \right] \rho(b)w = \sum_{g \in G} \varphi^{-1}(g) \left[\frac{1}{|H|} \sum_{b \in H} \varphi((ag)^{-1}b) \rho(b)w \right] = \\
&= \sum_{g \in G} \varphi' [X(\varphi \otimes_{\mathbb{C}[H]} w)](ag) = \sum_{g \in G} \varphi'(g) [\pi(g)X(\varphi \otimes_{\mathbb{C}[H]} w)](a) = [\pi(\varphi')X(\varphi \otimes_{\mathbb{C}[H]} w)](a),
\end{aligned}$$

a kako je $a \in G$ bio proizvoljan, slijedi (3.3).

Treba još dokazati da je linearan operator X izomorfizam vektorskih prostora. U tu svrhu konstruirat ćemo inverzno preslikavanje $Y : V \rightarrow \mathbb{C}[G] \otimes_{\mathbb{C}[H]} W$. Neka je $\{w_1, w_2, \dots, w_m\}$ baza vektorskog prostora W . Za $f \in V$ definiramo funkcije $f_1, f_2, \dots, f_m \in \mathbb{C}[G]$ kao koordinatne funkcije od f u izabranoj bazi:

$$f(a) = \sum_{j=1}^m f_j(a)w_j, \quad a \in G.$$

Neka su $\rho_{kj}(b)$ matricni elementi operatora $\rho(b)$ u bazi $\{w_1, w_2, \dots, w_m\}$:

$$\rho(b)w_k = \sum_{j=1}^m \rho_{jk}(b)w_j, \quad b \in H, \quad k \in \{1, 2, \dots, m\}.$$

Budući da je $f \in V$, za $a \in G$ i $b \in H$ vrijedi $f(ba) = \rho(b)f(a)$, pa imamo redom:

$$\sum_{j=1}^m f_j(ba)w_j = \sum_{k=1}^m f_k(a)\rho(b)w_k = \sum_{k=1}^m f_k(a) \left[\sum_{j=1}^m \rho_{jk}(b)w_j \right] = \sum_{j=1}^m \left[\sum_{k=1}^m \rho_{jk}(b)f_k(a) \right] w_j.$$

Odatle slijedi

$$f_j(ba) = \sum_{k=1}^m \rho_{jk}(b)f_k(a), \quad f \in V, \quad a \in G, \quad b \in H, \quad j \in \{1, 2, \dots, m\}. \quad (3.4)$$

Za $f \in V$ definiramo $Yf \in \mathbb{C}[G] \otimes_{\mathbb{C}[H]} W$ ovako:

$$Yf = \sum_{j=1}^m \check{f}_j \otimes_{\mathbb{C}[H]} w_j, \quad \check{f}_j(a) = f_j(a^{-1}), \quad a \in G.$$

Očito je $Y : V \rightarrow \mathbb{C}[G] \otimes_{\mathbb{C}[H]} W$ linearan operator. Zbog (3.4) imamo za $f \in V$ i $a \in G$:

$$\begin{aligned} (XYf)(a) &= \sum_{j=1}^m [X(\check{f}_j \otimes_{\mathbb{C}[H]} w_j)](a) = \sum_{j=1}^m \frac{1}{|H|} \sum_{b \in H} \check{f}_j(a^{-1}b) \rho(b)w_j = \\ &= \sum_{j=1}^m \frac{1}{|H|} \sum_{b \in H} f_j(b^{-1}a) \sum_{k=1}^m \rho_{kj}(b)w_k = \frac{1}{|H|} \sum_{b \in H} \sum_{k=1}^m \left[\sum_{j=1}^m \rho_{kj}(b)f_j(b^{-1}a) \right] w_k = \\ &= \frac{1}{|H|} \sum_{b \in H} \sum_{k=1}^m f_k(a)w_k = \sum_{k=1}^m f_k(a)w_k = f(a). \end{aligned}$$

Budući da to vrijedi za svaki $a \in G$, zaključujemo da je $XYf = f$, a kako je funkcija $f \in V$ bila proizvoljna, nalazimo

$$XY = I_V. \quad (3.5)$$

Promatrajmo sada kompoziciju operatora $YX : \mathbb{C}[G] \otimes_{\mathbb{C}[H]} W \rightarrow \mathbb{C}[G] \otimes_{\mathbb{C}[H]} W$. Za proizvoljno izabrane $\varphi \in \mathbb{C}[G]$ i $k \in \{1, 2, \dots, m\}$ stavimo

$$f = X(\varphi \otimes_{\mathbb{C}[H]} w_k) \in V.$$

Tada za $a \in G$ imamo

$$f(a) = \frac{1}{|H|} \sum_{b \in H} \varphi(a^{-1}b) \rho(b)w_k = \frac{1}{|H|} \sum_{b \in H} \varphi(a^{-1}b) \sum_{j=1}^m \rho_{jk}(b)w_j.$$

Dakle, koordinatne funkcije od f dane su sa

$$f_j(a) = \frac{1}{|H|} \sum_{b \in H} \varphi(a^{-1}b) \rho_{jk}(b), \quad a \in G, \quad j \in \{1, 2, \dots, m\}.$$

Slijedi

$$YX(\varphi \otimes_{\mathbb{C}[H]} w) = Yf = \sum_{j=1}^m \check{f}_j \otimes_{\mathbb{C}[H]} w_j$$

i

$$\check{f}_j(a) = f_j(a^{-1}) = \frac{1}{|H|} \sum_{b \in H} \varphi(ab) \rho_{jk}(b), \quad a \in G, \quad j \in \{1, 2, \dots, m\}.$$

Nadalje, funkcije ρ_{jk} , a i $\check{\rho}_{jk}$, su elementi algebre $\mathbb{C}[H]$, pa pomoću formule (3.2) nalazimo

$$\check{f}_j(a) = \frac{1}{|H|} \sum_{b \in H} \varphi(ab) \check{\rho}_{jk}(b^{-1}) = \frac{1}{|H|} (\varphi * \check{\rho}_{jk})(a),$$

tj.

$$\check{f}_j = \frac{1}{|H|} \varphi * \check{\rho}_{jk}, \quad j \in \{1, 2, \dots, m\}.$$

U tenzorskom produktu $\mathbb{C}[G] \otimes_{\mathbb{C}[H]} W$ vrijedi $\varphi * \check{\rho}_{jk} \otimes_{\mathbb{C}[H]} w_j = \varphi \otimes_{\mathbb{C}[H]} \rho(\check{\rho}_{jk}) w_j$, pa nalazimo

$$YX(\varphi \otimes_{\mathbb{C}[H]} w_k) = \sum_{j=1}^m \frac{1}{|H|} \varphi * \check{\rho}_{jk} \otimes_{\mathbb{C}[H]} w_j = \varphi \otimes_{\mathbb{C}[H]} \frac{1}{|H|} \sum_{j=1}^m \rho(\check{\rho}_{jk}) w_j.$$

Nadalje,

$$\rho(\check{\rho}_{jk}) w_j = \sum_{b \in H} \check{\rho}_{jk}(b) \rho(b) w_j = \sum_{b \in H} \rho_{jk}(b^{-1}) \sum_{\ell=1}^m \rho_{\ell j}(b) w_\ell = \sum_{\ell=1}^m \left[\sum_{b \in H} \rho_{\ell j}(b) \rho_{jk}(b^{-1}) \right] w_\ell.$$

Primijenimo li drugu formulu u teoremu 2.1.4. na reprezentaciju ρ grupe H , dobivamo

$$\sum_{b \in H} \rho_{\ell j}(b) \rho_{jk}(b^{-1}) = \frac{|H|}{m} \delta_{\ell k}, \quad \ell \in \{1, 2, \dots, m\},$$

pa slijedi

$$\rho(\check{\rho}_{jk}) w_j = \sum_{\ell=1}^m \frac{|H|}{m} \delta_{\ell k} w_\ell = \frac{|H|}{m} w_k \quad \forall j \in \{1, 2, \dots, m\}.$$

Stoga nalazimo

$$YX(\varphi \otimes_{\mathbb{C}[H]} w_k) = \varphi \otimes_{\mathbb{C}[H]} \frac{1}{|H|} \sum_{j=1}^m \frac{|H|}{m} w_k = \varphi \otimes_{\mathbb{C}[H]} w_k.$$

Budući da skup

$$\{\varphi \otimes_{\mathbb{C}[H]} w_k; \varphi \in \mathbb{C}[G], k \in \{1, 2, \dots, m\}\}$$

razapinje vektorski prostor $\mathbb{C}[G] \otimes_{\mathbb{C}[H]} W$, slijedi da je

$$YX = I_{\mathbb{C}[G] \otimes_{\mathbb{C}[H]} W}. \quad (3.6)$$

(3.5) i (3.6) pokazuju da je Y inverzan operator operatora X . Dakle, X je izomorfizam prostora $\mathbb{C}[G] \otimes_{\mathbb{C}[H]} W$ na prostor V i time je teorem 3.9.9. u potpunosti dokazan.

Interpretacija inducirane reprezentacije kao tenzorskog produkta nad grupovnom algebrom podgrupe omogućuje da na jednostavniji način dokažemo neke teoreme o induciranim reprezentacijama.

Prije svega, tu je teorem 3.5.1. o induciranju u etapama koji se svodi na asocijativnost tenzorskog produkta iskazan u teoremu 3.9.6. Naime, ako su $K \subseteq H$ podgrupe grupe G i ako je σ reprezentacija grupe K na prostoru W , onda uz shvaćanje prostora reprezentacije grupe kao lijevi modul nad grupovnom algebrom te grupe i korištenjem zadatka 3.13. nalazimo

$$\begin{aligned} \text{Ind}_H^G(\text{Ind}_K^H W) &= \mathbb{C}[G] \otimes_{\mathbb{C}[H]} (\mathbb{C}[H] \otimes_{\mathbb{C}[K]} W) \simeq \\ &\simeq (\mathbb{C}[G] \otimes_{\mathbb{C}[H]} \mathbb{C}[H]) \otimes_{\mathbb{C}[K]} W \simeq \mathbb{C}[G] \otimes_{\mathbb{C}[K]} W = \text{Ind}_K^G W. \end{aligned}$$

Drugi je primjer jednostavniji dokaz Frobeniusovog teorema reciprociteta (teorem 3.4.1.). U tom slučaju radi se o neposrednoj primjeni teorema 3.9.8. Naime, ako je ρ reprezentacija podgrupe H grupe G na prostoru W i ako je π reprezentacija grupe G na prostoru V , onda nalazimo

$$\begin{aligned} \operatorname{Hom}_G(\operatorname{Ind}_H^G W, V) &= \operatorname{Hom}_{\mathbb{C}[G]}(\mathbb{C}[G] \otimes_{\mathbb{C}[H]} W, V) \simeq \\ &\simeq \operatorname{Hom}_{\mathbb{C}[H]}(W, \operatorname{Hom}_{\mathbb{C}[G]}(\mathbb{C}[G], V)) \simeq \operatorname{Hom}_{\mathbb{C}[H]}(W, V) = \operatorname{Hom}_H(W, V). \end{aligned}$$

Tvrdnja (a) Frobeniusovog teorema reciprociteta odavde neposredno slijedi, jer prema prvoj jednakosti u teoremu 2.6.5. imamo

$$\operatorname{Hom}_G(V, \operatorname{Ind}_H^G W) \simeq \operatorname{Hom}_G(\operatorname{Ind}_H^G W, V) \quad \text{i} \quad \operatorname{Hom}_H(V, W) \simeq \operatorname{Hom}_H(W, V).$$

Pri gornjem izvodu koristili smo jednostavnu činjenicu sadržanu sljedećem zadatku:

Zadatak 3.14. *Neka je R unitalni prsten i V unitalni lijevi R -modul. Dokažite da je tada $\operatorname{Hom}_R(R, V) \simeq V$.*

Uputa: Dokažite da je $\Phi : \psi \mapsto \psi(1_R)$ homomorfizam lijevih R -modula sa $\operatorname{Hom}_R(R, V)$ u V . Zatim konstruirajte njemu inverzni homomorfizam $V \rightarrow \operatorname{Hom}_R(R, V)$.

Poglavlje 4

Reprezentacije kompaktnih grupa

4.1 Kompaktne grupe i invarijantni integral

Topološka grupa je grupa G koja je ujedno Hausdorffov topološki prostor i za koju su preslikavanja množenja

$$(a, b) \mapsto ab \quad \text{sa } G \times G \text{ u } G$$

i invertiranja

$$a \mapsto a^{-1} \quad \text{sa } G \text{ u } G$$

neprekidna. Ekvivalentno se može zahtijevati neprekidnost samo jednog preslikavanja

$$(a, b) \mapsto ab^{-1} \quad \text{sa } G \times G \text{ u } G.$$

Ako je topološki prostor G kompaktan, takva se topološka grupa zove **kompaktna grupa**.

Ako je G topološka grupa s jedinicom e , za svaki $a \in G$ definiramo lijevi i desni pomak $\lambda_a : G \rightarrow G$ i $\rho_a : G \rightarrow G$ sa

$$\lambda_a(x) = ax, \quad \rho_a(x) = xa^{-1}, \quad x \in G.$$

Ta su preslikavanja neprekidne bijekcije. Nadalje, očito vrijedi

$$\lambda_a \circ \lambda_b = \lambda_{ab} \quad \text{i} \quad \rho_a \circ \rho_b = \rho_{ab}.$$

Budući da je $\lambda_e = \rho_e = id_G$, slijedi da su i inverzna preslikavanja pomaci:

$$(\lambda_a)^{-1} = \lambda_{a^{-1}}, \quad (\rho_a)^{-1} = \rho_{a^{-1}}.$$

Prema tome, pomaci λ_a i ρ_a su homeomorfizmi sa G na G . Posljedica je da je topološka struktura topološke grupe *uniformnog tipa*: okoline svake točke jednako "izgledaju". Naime, ako je \mathcal{V} skup svih otvorenih okolina jedinice e onda pomoću λ_a dobivamo sve okoline točke $\lambda_a(e) = a$, odnosno,

$$a\mathcal{V} = \{aV; V \in \mathcal{V}\}$$

je skup svih otvorenih okolina točke $a \in G$. Sasvim analogno, i

$$\mathcal{V}a = \{Va; V \in \mathcal{V}\}$$

je skup svih otvorenih okolina točke $a \in G$. Kako je i invertiranje $a \mapsto a^{-1}$ homeomorfizam sa G na G , slijedi da je $\mathcal{V}^{-1} = \mathcal{V}$, tj. V je otvorena okolina od e ako i samo ako je $V^{-1} = \{a^{-1}; a \in V\}$

otvorena okolina od e . Okolina jedinice V zove se **simetrična** ako je $V = V^{-1}$. Očito svaka okolina U jedinice sadrži simetričnu okolinu jedinice: takva je okolina $U \cap U^{-1}$. Budući da je množenje $(a, b) \mapsto ab$ neprekidno sa $G \times G$ u G i posebno u točki (e, e) , za svaku okolinu U od e postoje okoline V_1 i V_2 od e takve da je $V_1 V_2 = \{ab; a \in V_1, b \in V_2\} \subseteq U$. Tada okolina jedinice $V = V_1 \cap V_2$ zadovoljava $V^2 = VV \subseteq U$. Analogno, za svaki prirodan broj n i svaku okolinu U od e postoji okolina V od e takva da je

$$V^n = \underbrace{VV \cdots V}_n = \{a_1 a_2 \cdots a_n; a_1, a_2, \dots, a_n \in V\} \subseteq U.$$

Nadalje, iz neprekidnosti preslikavanja $(a, b) \mapsto ab^{-1}$ slijedi da za svaku okolinu U od e postoji okolina V od e takva da je

$$VV^{-1} = \{ab^{-1}; a, b \in V\} \subseteq U.$$

U daljnjem promatramo samo kompaktne grupe. Ako je G kompaktna grupa tada je skup $C(G)$ svih neprekidnih funkcija $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ komutativna asocijativna algebra u odnosu na operacije po točkama:

$$(f + g)(a) = f(a) + g(a), \quad (\lambda f)(a) = \lambda f(a), \quad (fg)(a) = f(a)g(a), \quad f, g \in C(G), \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad a \in G.$$

To je unitalna algebra: jedinica je konstantna funkcija $1(a) = 1 \quad \forall a \in G$. $C(G)$ je Banachova algebra u odnosu na maksimum normu

$$\|f\|_\infty = \max \{|f(a)|; a \in G\}.$$

Uniformna struktura topologije na G omogućuje definiciju uniformne neprekidnosti: kažemo da je funkcija $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ **uniformno neprekidna** ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji otvorena okolina V jedinice e takva da vrijedi

$$x, y \in G, \quad x^{-1}y \in V \quad \implies \quad |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

U stvari, takve su sve funkcije u $C(G)$:

Propozicija 4.1.1. *Neka je G kompaktna grupa i $f \in C(G)$. Tada je funkcija f uniformno neprekidna.*

Dokaz: Neka je $\varepsilon > 0$. Iz neprekidnosti funkcije f u točki $a \in G$ slijedi da postoji otvorena okolina W_a od e takva da vrijedi

$$b \in aW_a \quad \implies \quad |f(b) - f(a)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Za svaki $a \in G$ možemo izabrati okolinu V_a od e takvu da je $V_a V_a^{-1} \subseteq W_a$. Tada je $\{aV_a; a \in G\}$ otvoren pokrivač od G , pa zbog kompaktnosti slijedi da postoji konačan skup $A \subseteq G$ takav da je

$$G = \bigcup_{a \in A} aV_a.$$

Definiramo sada okolinu V od e kao presjek V_a , $a \in A$:

$$V = \bigcap_{a \in A} V_a.$$

Neka su sada $x, y \in G$ takvi da je $x^{-1}y \in V$. Izaberimo $a \in A$ tako da je $y \in aV_a$. Tada je $y \in aW_a$, pa vrijedi

$$|f(y) - f(a)| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (4.1)$$

Nadalje, imamo

$$x^{-1}y \in V \implies x \in yV^{-1} \subseteq aV_aV_a^{-1} \subseteq aW_a,$$

pa vrijedi i

$$|f(x) - f(a)| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (4.2)$$

Iz (4.1) i (4.2) slijedi $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Zadatak 4.1. Neka je $f \in C(G)$ i $\varepsilon > 0$. Dokažite da postoji otvorena okolina V jedinice e takva da vrijedi

$$x, y \in G, \quad yx^{-1} \in V \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Važne zaključke o konačnim grupama i njihovim reprezentacijama dobili smo korištenjem "usrednjenja" po grupi, odnosno, sumacijom vrijednosti funkcije po svim elementima grupe i dijeljenjem s brojem elemenata. To ne možemo provoditi na beskonačnim grupama, ali u slučaju kompaktnih grupa imamo vrlo korisnu zamjenu za usrednjenje, a to je tzv. *invarijantni integral*. Naziv **integral** na kompaktnoj grupi G upotrebljava se za svaki pozitivan linearan funkcional $M : C(G) \rightarrow \mathbb{C}$. *Pozitivnost* znači

$$f \in C(G), \quad f(x) \geq 0 \quad \forall x \in G \implies M(f) \geq 0.$$

Propozicija 4.1.2. Svaki integral M na G je neprekidan linearan funkcional na Banachovom prostoru $C(G)$ s normom $\|M\| = M(1)$. Štoviše, vrijedi

$$|M(f)| \leq M(|f|) \leq M(1)\|f\|_\infty \quad \forall f \in C(G).$$

Dokaz: Naravno, iz pozitivnosti od M slijedi da za realne neprekidne funkcije $f, g : G \rightarrow \mathbb{R}$ iz $f \leq g$ slijedi $M(f) \leq M(g)$. Neka je $f \in C(G)$. Možemo pisati

$$M(f) = re^{i\varphi}, \quad r \geq 0, \quad \varphi \in \mathbb{R}.$$

Označimo sa g i h realni i imaginarni dio funkcije $e^{-i\varphi}f$. Dakle, $g, h : G \rightarrow \mathbb{R}$ su neprekidne funkcije i $e^{-i\varphi}f = g + ih$. Sada imamo redom

$$|M(f)| = r = M(e^{-i\varphi}f) = M(g) + iM(h) = M(g) \leq M(|g|) \leq M(|f|).$$

Dakle, drugu nejednakost $|M(f)| \leq M(1)\|f\|_\infty$ dovoljno je dokazati za nenegativne funkcije f . Međutim, ako je $f \in C(G)$ i $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in G$, onda je funkcija f svuda manja ili jednaka od konstantne funkcije $\|f\|_\infty$, pa slijedi

$$M(f) \leq M(\|f\|_\infty) = M(\|f\|_\infty 1) = M(1)\|f\|_\infty.$$

Time je dokazano da je funkcional M neprekidan, odnosno, ograničen i da je $\|M\| \leq M(1)$. Međutim, konstantna funkcija 1 ima normu jednaku 1 pa dobivamo i obrnutu nejednakost

$$M(1) \leq \|M\| \cdot \|1\|_\infty = \|M\|.$$

Lijevi i desni pomaci na grupi G prenose se na funkcije na grupi G : ako je $f \in C(G)$ i $a \in G$ definiramo funkcije $\lambda_a f = f \circ \lambda_{a^{-1}}$ i $\rho_a f = f \circ \rho_{a^{-1}}$, tj.

$$(\lambda_a f)(x) = f(a^{-1}x), \quad (\rho_a f)(x) = f(xa), \quad x \in G.$$

Integral M na grupi G zove se **lijevoinvarijantan** ako vrijedi $M(\lambda_a f) = M(f) \quad \forall a \in G$ i $\forall f \in C(G)$ i, analogno, **desnoinvarijantan** ako je $M(\rho_a f) = M(f) \quad \forall a \in G$ i $\forall f \in C(G)$. Cilj

nam je da dokažemo da netrivialni takvi integrali postoje, a dobit ćemo i rezultat o jedinstvenosti (do na konstantni faktor > 0). Štoviše, jedinstvenost do na faktor proširuje se na proizvoljne neprekidne lijevo ili desnoinvarijantne linearne funkcionalne na $C(G)$. U svrhu dokaza tih činjenica, potrebna su nam neka razmatranja o konveksnim kompaktnim podskupovima Banachovog prostora i jedan teorem o fiksnoj točki na takvim skupovima.

Ako je V vektorski prostor, podskup K od V zove se konveksan ako vrijedi

$$v, w \in K, \quad 0 \leq t \leq 1 \quad \implies \quad (1-t)v + tw \in K.$$

Dakle, zajedno sa svake svoje dvije točke K sadrži ravni segment između te dvije točke. Očito je presjek konveksnih skupova ponovo konveksan skup. Stoga za proizvoljan skup $S \subseteq V$ postoji najmanji konveksan skup koji ga sadrži: to je presjek svih konveksnih podskupova od V koji sadrže S . Taj se skup označava sa $Co(S)$ i zove **konveksna ljuska** skupa S .

Zadatak 4.2. *Dokažite da za konveksan skup $K \subseteq V$, $v_1, v_2, \dots, v_n \in K$ i $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}_+$ takve da je $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = 1$ vrijedi $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n \in K$.*

Općenito, ako su $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}_+$ takvi da je $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = 1$, vektor

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k v_k$$

se zove **konveksna kombinacija** vektora v_1, v_2, \dots, v_n . Dakle, prema zadatku 4.2. konveksna kombinacija vektora iz nekog konveksnog skupa K je vektor iz K . Štoviše, formiranjem konveksnih kombinacija dobiva se konveksna ljuska bilo kojeg nepraznog skupa:

Zadatak 4.3. *Neka je S neprazan podskup vektorskog prostora V . Dokažite da je $Co(S)$ skup svih konveksnih kombinacija vektora iz S :*

$$Co(S) = \left\{ v \in V; \exists n \in \mathbb{N}, v_1, v_2, \dots, v_n \in S, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}_+, \sum_{k=1}^n \alpha_k = 1, v = \sum_{k=1}^n \alpha_k v_k \right\}.$$

Promatrajmo sada konveksne skupove u normiranom prostoru.

Zadatak 4.4. *Neka X normiran prostor. Dokažite:*

- (a) *Ako je $K \subseteq X$ konveksan i njegov zatvarač je konveksan.*
- (b) *Za svaki skup $S \subseteq X$ postoji najmanji zatvoren konveksan skup koji ga sadrži.*

Najmanji zatvoren konveksan skup koji sadrži zadani podskup S normiranog prostora X zove se **zatvorena konveksna ljuska** skupa S i označava $\overline{Co}(S)$.

Teorem 4.1.3. (Kakutani) *Neka je X normiran prostor, $K \subseteq X$ neprazan konveksan kompaktan podskup i G podgrupa grupe izometrija prostora X . Pretpostavimo da je $AK \subseteq K$ za svaki $A \in G$. Tada postoji $x \in K$ takav da je $Ax = x \quad \forall A \in G$.*

Dokaz ćemo provesti korištenjem sljedećeg **Hausdorffovog teorema** koji je varijanta Zornove leme:

Teorem 4.1.4. *Svaki neprazan parcijalno uređen skup sadrži maksimalan lanac.*

Dokaz teorema 4.1.4. Neka je \mathcal{S} skup svih lanaca u parcijalno uređenom skupu S . Skup \mathcal{S} je neprazan, jer za svaki $x \in S$ je $\{\{x\}\}$ lanac u S . Nadalje, skup \mathcal{S} je parcijalno uređen inkluzijom. Dokažimo da \mathcal{S} zadovoljava uvjet Zornove leme. Neka je \mathcal{L} lanac u \mathcal{S} , tj. lanac lanaca u S . Formiramo podskup M od S kao uniju svih lanaca $L \in \mathcal{L}$. Tada je M lanac u S . Doista, ako su $x, y \in M$, onda postoje $L, L' \in \mathcal{L}$ takvi da je $x \in L$ i $y \in L'$. Budući da je \mathcal{L} lanac u odnosu na inkluziju, vrijedi ili $L' \subseteq L$ ili $L \subseteq L'$. Pretpostavimo npr. da je $L' \subseteq L$. Tada su $x, y \in L$, a kako je L lanac u odnosu na uređaj \leq u S , vrijedi ili $x \leq y$ ili $y \leq x$. Time je dokazano da je M lanac u S , tj. da je $M \in \mathcal{S}$. Kako je očito $L \subseteq M \ \forall L \in \mathcal{L}$, zaključujemo da je M gornja ograda lanca \mathcal{L} . Time je dokazano da \mathcal{S} zadovoljava uvjet Zornove leme, pa slijedi da parcijalno uređen skup \mathcal{S} ima barem jedan maksimalan element, a to je onda očito maksimalan lanac u S .

Dokaz teorema 4.1.3. Neka je Ω skup svih nepraznih kompaktnih konveksnih podskupova $H \subseteq K$ takvih da je $AH \subseteq H \ \forall A \in G$. Tada je $\Omega \neq \emptyset$, jer je $K \in \Omega$. Nadalje, Ω je parcijalno uređen inkluzijom. Prema Hausdorffovom teoremu Ω sadrži neki maksimalan lanac Ω_0 . Definiramo tada

$$H_0 = \bigcap_{H \in \Omega_0} H.$$

Dokažimo najprije da je skup H_0 neprazan. Dosta, pretpostavimo suprotno, tj. da je $H_0 = \emptyset$. Za svaki $H \in \Omega_0$, skup $K \setminus H$ je otvoren podskup od K i vrijedi

$$\bigcup_{H \in \Omega_0} (K \setminus H) = K \setminus \left(\bigcap_{H \in \Omega_0} H \right) = K \setminus H_0 = K.$$

Dakle, $\{K \setminus H; H \in \Omega_0\}$ je otvoren pokrivač od K . Kako je K kompaktan, postoji konačno mnogo članova $H_1, H_2, \dots, H_n \in \Omega_0$ takvih da je $\{K \setminus H_1, K \setminus H_2, \dots, K \setminus H_n\}$ pokrivač od K . Dakle,

$$K = \bigcup_{i=1}^n (K \setminus H_i) = K \setminus (H_1 \cap H_2 \cap \dots \cap H_n) \implies H_1 \cap H_2 \cap \dots \cap H_n = \emptyset.$$

Kako je Ω_0 lanac, za neki $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ je $H_i \supseteq H_j$ za svaki i , pa slijedi da je $H_j = \emptyset$. No to je nemoguće jer je $H_j \in \Omega_0 \subseteq \Omega$, a Ω se po definiciji sastoji od nepraznih skupova. Ova kontradikcija pokazuje da je pretpostavka $H_0 = \emptyset$ nemoguća, pa zaključujemo da je $H_0 \neq \emptyset$. Naravno, kako su svi operatori $A \in G$ izometrije, iz $AH = H \ \forall H \in \Omega_0$ slijedi $AH_0 = H_0$. Dakle, $H_0 \in \Omega$.

Sljedeći nam je cilj dokazati da je skup H_0 jednočlan. To će slijediti iz tvrdnje:

Ako skup $H \in \Omega$ nije jednočlan, onda postoji $H_1 \in \Omega$ takav da je $H_1 \subsetneq H$.

Dokažimo tu tvrdnju. Stavimo

$$H - H = \{x - y; x, y \in H\}.$$

Budući da skup H nije jednočlan, to je $H - H \neq \{0\}$, pa postoji $r > 0$ takav da

$$H - H \not\subseteq K(0, r) = \{x \in X; \|x\| < r\}.$$

S druge strane, skup $H - H$ je kompaktan, dakle, ograničen, pa postoji $s > 0$, dakle, nužno $s > r$, takav da je $H - H \subseteq K(0, s)$. Stavimo

$$t = \inf \{s \in \mathbb{R}_+; H - H \subseteq K(0, s)\}.$$

Tada je, naravno, $t \geq r$ i očito vrijede sljedeće relacije:

$$AK(0, s) = K(0, s) \quad \forall s > 0 \quad \text{i} \quad \forall A \in G, \quad (4.3)$$

$$H - H \subseteq K(0, s) \quad \forall s > t, \quad (4.4)$$

$$H - H \not\subseteq \overline{K}(0, s) = \{x \in X; \|x\| \leq s\} \quad \forall s < t. \quad (4.5)$$

Budući da je skup H kompaktan, postoje $x_1, x_2, \dots, x_n \in H$ takvi da je

$$H \subseteq \bigcup_{i=1}^n K\left(x_i, \frac{t}{2}\right). \quad (4.6)$$

Stavimo tada

$$H_1 = H \cap \bigcap_{y \in H} \overline{K}\left(y, \left(1 - \frac{1}{4n}\right)t\right).$$

H_1 je kao presjek konveksnih skupova i sam konveksan. Nadalje, H_1 je zatvoren podskup kompaktnog skupa H , dakle, H_1 je kompaktan. Dokažimo da je H_1 neprazan. Neka je

$$x_0 = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \dots + x_n).$$

Kako je H konveksan, vrijedi $x_0 \in H$. Nadalje, neka je $y \in H$ proizvoljan. Tada zbog (4.6) postoji $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ takav da je $y \in K\left(x_j, \frac{t}{2}\right)$, tj.

$$\|y - x_j\| < \frac{t}{2}. \quad (4.7)$$

Nadalje, za $i \neq j$ zbog $y, x_i \in H$ imamo $y - x_i \in H - H$, a budući da je $\left(1 + \frac{1}{4n}\right)t > t$, zbog (4.4) je $y - x_i \in K\left(0, \left(1 + \frac{1}{4n}\right)t\right)$, odnosno

$$\|y - x_i\| < \left(1 + \frac{1}{4n}\right)t \quad \forall i \neq j. \quad (4.8)$$

Sada iz (4.8) i (4.9) nalazimo

$$\begin{aligned} \|y - x_0\| &= \left\| y - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k \right\| = \frac{1}{n} \left\| \sum_{k=1}^n (y - x_k) \right\| \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \|y - x_k\| < \\ &< \frac{1}{n} \left[\frac{1}{2} + (n-1) \left(1 + \frac{1}{4n}\right)t \right] = \frac{4n^2 - n - 1}{4n^2} t < \frac{4n^2 - n}{4n^2} t = \left(1 - \frac{1}{4n}\right)t. \end{aligned}$$

Drugim riječima, vrijedi $x_0 \in K\left(y, \left(1 - \frac{1}{4n}\right)t\right)$ za svaki $y \in H$, odnosno, $x_0 \in H_1$. Time je dokazano da je $H_1 \neq \emptyset$. Dakle, H_1 je neprazan zatvoren konveksan podskup od H .

Nadalje, svaki $A \in G$ je izometrija, pa za svaki $y \in H$ vrijedi

$$A\overline{K}\left(y, \left(1 - \frac{1}{4n}\right)t\right) = \overline{K}\left(Ay, \left(1 - \frac{1}{4n}\right)t\right),$$

a kako je $AH = H$ zaključujemo da je $AH_1 = H_1$. Time je dokazano da je $H_1 \in \Omega$.

Očito je $H_1 \subseteq H$. Zbog (4.5) postoje $x, y \in H$ takvi da

$$x - y \notin \overline{K}\left(0, \left(1 - \frac{1}{4n}\right)t\right) \implies x \notin \overline{K}\left(y, \left(1 - \frac{1}{4n}\right)t\right) \implies x \notin H_1.$$

To pokazuje da vrijedi $H_1 \subsetneq H$. Time je iskazana tvrdnja dokazana.

Sada zbog maksimalnosti lanca Ω_0 zaključujemo da je skup H_0 jednočlan, $H_0 = \{x\}$. Kako je $AH_0 = H_0$, imamo $Ax = x \ \forall A \in G$. Time je Kakutanijev teorem dokazan.

Napomenimo da se Kakutanijev teorem može dokazati i pod znatno općentijim pretpostavkama: X ne mora biti normiran, nego je dovoljno da bude lokalno konveksan topološki vektorski prostor; u tom slučaju, naravno, besmislen je zahtjev da su elementi grupe G izometrije; zaključak Kakutanijevog teorema vrijedi uz pretpostavku da je grupa linearnih operatora G ekvinkontinuirana.

Vratimo se sada na kompaktnu grupu G . Prostor $C(G)$ je Banachov i očito su svi operatori $\lambda_a, \rho_a, a \in G$, na tom prostoru izometrije:

$$\|\lambda_a f\|_\infty = \|\rho_a f\|_\infty = \|f\|_\infty \quad \forall a \in G \quad i \quad \forall f \in C(G). \quad (4.9)$$

Za $f \in C(G)$ stavimo

$$\begin{aligned} K_\ell(f) &= Co\{\lambda_a f; a \in G\}, & \overline{K}_\ell(f) &= Cl(K_\ell(f)) = \overline{Co}\{\lambda_a f; a \in G\}, \\ K_r(f) &= Co\{\rho_a f; a \in G\}, & \overline{K}_r(f) &= Cl(K_r(f)) = \overline{Co}\{\rho_a f; a \in G\}. \end{aligned}$$

Teorem 4.1.5. *Za svaku funkciju $f \in C(G)$ skupovi $\overline{K}_\ell(f)$ i $\overline{K}_r(f)$ su kompaktni.*

Taj ćemo teorem dokazati korištenjem poznatog kriterija kompaktnosti za skupove neprekidnih funkcija na kompaktnom topološkom prostoru:

Teorem 4.1.6. (Arzelà–Ascoli) *Neka je K kompaktn topološki prostor i S podskup Banachovog prostora $C(K)$. Skup S je relativno kompaktn ako i samo ako je on ograničen, tj. za neki $M > 0$ vrijedi*

$$\|f\|_\infty \leq M \quad \forall f \in S,$$

i ekvinkontinuiran u svakoj točki $x \in K$, tj. za svaki $\varepsilon > 0$ postoji okolina V točke x takva da vrijedi

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon \quad \forall y \in V \quad i \quad \forall f \in S.$$

Dokaz teorema 4.1.5. Ako su $a_1, a_2, \dots, a_n \in G$ i $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}_+$ takvi da je $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$, onda zbog (4.9) imamo

$$\left\| \sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda_{a_i} f \right\|_\infty \leq \sum_{i=1}^n \alpha_i \|\lambda_{a_i} f\|_\infty = \sum_{i=1}^n \alpha_i \|f\|_\infty = \|f\|_\infty.$$

Dakle, $\|g\|_\infty \leq \|f\|_\infty \ \forall g \in K_\ell(f)$, odnosno, skup $K_\ell(f)$ je ograničen. Nadalje, neka je $\varepsilon > 0$. Budući da je prema propoziciji 4.1.1. funkcija f uniformno neprekidna, postoji otvorena okolina V jedinice e u grupi G takva da vrijedi

$$x, y \in G, \quad x^{-1}y \in V \quad \implies \quad |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Za bilo koji $a \in G$ i takve x, y imamo $(a^{-1}x)^{-1}(a^{-1}y) = x^{-1}y \in V$, pa je

$$|(\lambda_a f)(x) - (\lambda_a f)(y)| = |f(a^{-1}x) - f(a^{-1}y)| < \varepsilon. \quad (4.10)$$

Neka je $g \in K_\ell(f)$. Neka su $n \in \mathbb{N}$, $a_1, a_2, \dots, a_n \in G$ i $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}_+$ takvi da je

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1, \quad g = \sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda_{a_i} f.$$

Zbog (4.10) iz $x^{-1}y \in V$ slijedi

$$|g(x) - g(y)| = \left| \sum_{i=1}^n \alpha_i [(\lambda_{a_i} f)(x) - (\lambda_{a_i} f)(y)] \right| \leq \sum_{i=1}^n \alpha_i |(\lambda_{a_i} f)(x) - (\lambda_{a_i} f)(y)| < \varepsilon \sum_{i=1}^n \alpha_i = \varepsilon.$$

Time je dokazano da je skup $K_\ell(f)$ ekvikontinuiran. Prema Arzelà–Ascolijevom teoremu, skup $K_\ell(f)$ je relativno kompaktan, pa slijedi da je njegov zatvarač $\overline{K}_\ell(f)$ kompaktan. Dokaz za $\overline{K}_r(f)$ sasvim je analogan, jedino što se umjesto propozicije 4.1.1. koristi analogna tvrdnja iz zadatka 4.1.

Teorem 4.1.7. *Na svakoj kompaktnoj grupi G postoji integral $I : C(G) \rightarrow \mathbb{C}$ sa sljedećim svojstvima:*

- (a) *lijeva invarijantnost:* $I(\lambda_a f) = I(f) \quad \forall a \in G \text{ i } \forall f \in C(G)$.
- (b) *desna invarijantnost:* $I(\rho_a f) = I(f) \quad \forall a \in G \text{ i } \forall f \in C(G)$.
- (c) *invarijantnost na invertiranje:* $I(\check{f}) = I(f) \quad \forall f \in C(G)$, gdje je $\check{f}(a) = f(a^{-1})$, $a \in G$.
- (d) *normiranost:* $I(1) = 1$.
- (e) *regularnost:* Ako je $f \in C(G)$, $f(a) \geq 0 \quad \forall a \in G$ i $f \not\equiv 0$ onda je $I(f) > 0$.

Integral sa svojstvima (a) i (d) je jedinstven, a također i integral sa svojstvima (b) i (d). Štoviše, ako je $\Phi : C(G) \rightarrow \mathbb{C}$ neprekidni linearni funkcional takav da vrijedi ili $\Phi(\lambda_a f) = \Phi(f) \quad \forall a \in G$ i $\forall f \in C(G)$ ili $\Phi(\rho_a f) = \Phi(f) \quad \forall a \in G$ i $\forall f \in C(G)$ tada je $\Phi = \lambda I$ za neki $\lambda \in \mathbb{C}$.

Dokaz: Uočimo da je $\{\lambda_a; a \in G\}$ podgrupa grupe izometrija Banachovog prostora $C(G)$. Neka je $f \in C(G)$ i $g \in K_\ell(f)$. Za neke $n \in \mathbb{N}$, $a_1, a_2, \dots, a_n \in G$ i $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}_+$ je tada

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1 \quad \text{i} \quad g = \sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda_{a_i} f.$$

Sada za svaki $a \in G$ imamo

$$\lambda_a g = \sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda_a \lambda_{a_i} f = \sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda_{aa_i} f \in K_\ell(f).$$

Dakle vrijedi $\lambda_a K_\ell(f) \subseteq K_\ell(f) \quad \forall a \in G$, a iz neprekidnosti operatora λ_a slijedi $\lambda_a \overline{K}_\ell(f) \subseteq \overline{K}_\ell(f) \quad \forall a \in G$. Prema teoremu 4.1.5. skup $\overline{K}_\ell(f)$ je kompaktan, pa prema Kakutanijevom teoremu 4.1.3. postoji $g \in \overline{K}_\ell(f)$ takva da je $\lambda_a g = g \quad \forall a \in G$. No to znači da za svaki $a \in G$ imamo $g(a) = (\lambda_a g)(a) = g(e)$, tj. funkcija g je konstantna. Time je dokazano da je $\overline{K}_\ell(f) \cap \mathbb{C} \neq \emptyset$. Sasvim analogno, korištenjem grupe izometrija $\{\rho_a; a \in G\}$ i kompaktnost skupa $\overline{K}_r(f)$ dobivamo da je i $\overline{K}_r(f) \cap \mathbb{C} \neq \emptyset$.

Dokazat ćemo sada da je $\overline{K}_\ell(f) \cap \mathbb{C} = \overline{K}_r(f) \cap \mathbb{C}$ i da je to jednočlan skup. Neka su $\alpha \in \overline{K}_\ell(f)$, $\beta \in \overline{K}_r(f)$ i $\varepsilon > 0$. Tada postoje $g \in K_\ell(f)$ i $h \in K_r(f)$ takvi da je

$$\|\alpha - g\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{i} \quad \|\beta - h\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (4.11)$$

Neka su $n, m \in \mathbb{N}$, $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_m \in G$ i $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m \in \mathbb{R}_+$ takvi da je

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i = \sum_{j=1}^m \beta_j = 1, \quad g = \sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda_{a_i^{-1}} f \quad \text{i} \quad h = \sum_{j=1}^m \beta_j \rho_{b_j} f.$$

Tada iz (4.11) slijedi

$$\left| \alpha - \sum_{i=1}^n \alpha_i f(a_i x) \right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall x \in G \quad (4.12)$$

i

$$\left| \beta - \sum_{j=1}^m \beta_j f(x b_j) \right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall x \in G. \quad (4.13)$$

Sada u (4.12) uvrstimo $x = b_j$ za $j \in \{1, 2, \dots, m\}$, pa dobivamo

$$\left| \alpha - \sum_{i=1}^n \alpha_i f(a_i b_j) \right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall j \in \{1, 2, \dots, m\}. \quad (4.14)$$

Imamo

$$\left| \alpha - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \alpha_i \beta_j f(a_i b_j) \right| = \left| \sum_{j=1}^m \beta_j \left(\alpha - \sum_{i=1}^n \alpha_i f(a_i b_j) \right) \right| \leq \sum_{j=1}^m \beta_j \left| \alpha - \sum_{i=1}^n \alpha_i f(a_i b_j) \right|,$$

a kako je $\sum_{j=1}^m \beta_j = 1$, zbog (4.14) dobivamo

$$\left| \alpha - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \alpha_i \beta_j f(a_i b_j) \right| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (4.15)$$

Sasvim analogno, uvrštavanjem $x = a_i$, $1 \leq i \leq n$, iz (4.13) dobivamo

$$\left| \beta - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \alpha_i \beta_j f(a_i b_j) \right| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (4.16)$$

Iz (4.15) i (4.16) slijedi $|\alpha - \beta| < \varepsilon$, a kako je $\varepsilon > 0$ bio proizvoljan, zaključujemo da je $\alpha = \beta$.

Time je dokazano da za svaku funkciju $f \in C(G)$ vrijedi $\overline{K}_\ell(f) \cap \mathbb{C} = \overline{K}_r(f) \cap \mathbb{C}$ i da je to jednočlan skup. Taj jedini član označimo sa $I(f)$. Dakle, $I(f) \in \mathbb{C}$ je jedina konstanta koja se može uniformno aproksimirati funkcijama iz $K_\ell(f)$ i ujedno jedina konstanta koja se može uniformno aproksimirati funkcijama iz $K_r(f)$.

Dokažimo sada svojstva preslikavanja $I : C(G) \rightarrow \mathbb{C}$.

Prije svega, ako je $f \in C(G)$ i $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in G$ onda za svaki $a \in G$ vrijedi $(\lambda_a f)(x) \geq 0 \quad \forall x \in G$, pa isto vrijedi i za svaku konveksnu kombinaciju $g \in K_\ell(f) : g(x) \geq 0 \quad \forall x \in G$. Funkcija koja se može uniformno aproksimirati nenegativnim funkcijama i sama je nenegativna, pa slijedi $g(x) \geq 0 \quad \forall x \in G$ za svaku funkciju $g \in \overline{K}_\ell(G)$. Odatle slijedi $I(f) \geq 0$. Time je dokazana pozitivnost preslikavanja $I : C(G) \rightarrow \mathbb{C}$:

$$f \in C(G), \quad f(x) \geq 0 \quad \forall x \in G \quad \implies \quad I(f) \geq 0. \quad (4.17)$$

Neka je $f \in C(G)$ i $\alpha \in \mathbb{C}$. Za $a \in G$ je $\lambda_a(\alpha f) = \alpha \lambda_a f$, a odatle je

$$K_\ell(\alpha f) = \alpha K_\ell(f) = \{\alpha g; g \in K_\ell(f)\} \quad \implies \quad \overline{K}_\ell(\alpha f) = \alpha \overline{K}_\ell(f) = \{\alpha g; g \in \overline{K}_\ell(f)\}.$$

Slijedi

$$I(\alpha f) = \alpha I(f), \quad f \in C(G), \quad \alpha \in \mathbb{C}. \quad (4.18)$$

Dokažimo sada aditivnost preslikavanja $I : C(G) \rightarrow \mathbb{C}$. Neka su $f, g \in C(G)$ i neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljno izabran. Konstanta $I(f)$ se može uniformno aproksimirati funkcijama iz $K_\ell(f)$, pa postoje $n \in \mathbb{N}$, $a_1, a_2, \dots, a_n \in G$ i $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}_+$ takvi da je

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1 \quad \text{i} \quad \left| I(f) - \sum_{i=1}^n \alpha_i f(a_i x) \right| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall x \in G. \quad (4.19)$$

Stavimo

$$h = \sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda_{a_i^{-1}} g, \quad \text{tj.} \quad h(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i g(a_i x), \quad x \in G.$$

Tada je $h \in K_\ell(g)$, pa slijedi $K_\ell(h) \subseteq K_\ell(g)$, dakle i $\overline{K}_\ell(h) \subseteq \overline{K}_\ell(g)$, a odatle je $I(g) = I(h)$. Ta se konstanta može uniformno aproksimirati funkcijama iz $K_\ell(h)$, pa postoje $m \in \mathbb{N}$, $b_1, b_2, \dots, b_m \in G$ i $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m \in \mathbb{R}_+$ takvi da je

$$\sum_{j=1}^m \beta_j = 1 \quad \text{i} \quad \left| I(g) - \sum_{j=1}^m \beta_j h(b_j x) \right| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall x \in G,$$

odnosno, zbog definicije funkcije h ,

$$\left| I(g) - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \alpha_i \beta_j g(a_i b_j x) \right| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall x \in G. \quad (4.20)$$

U (4.19) umjesto x uvrstimo $b_j x$, $j \in \{1, 2, \dots, m\}$. Dobivamo

$$\left| I(f) - \sum_{i=1}^n \alpha_i f(a_i b_j x) \right| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall x \in G,$$

a odatle

$$\begin{aligned} \left| I(f) - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \alpha_i \beta_j f(a_i b_j x) \right| &= \left| \sum_{j=1}^m \beta_j \left(I(f) - \sum_{i=1}^n \alpha_i f(a_i b_j x) \right) \right| \leq \\ &\leq \sum_{j=1}^m \beta_j \left| I(f) - \sum_{i=1}^n \alpha_i f(a_i x) \right| < \sum_{j=1}^m \beta_j \frac{\varepsilon}{3} = \frac{\varepsilon}{3}. \end{aligned}$$

Dakle,

$$\left| I(f) - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \alpha_i \beta_j f(a_i b_j x) \right| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall x \in G. \quad (4.21)$$

Iz (4.20) i (4.21) nejednakost trokuta daje

$$\left| I(f) + I(g) - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \alpha_i \beta_j (f + g)(a_i b_j x) \right| < \frac{2\varepsilon}{3} \quad \forall x \in G. \quad (4.22)$$

Konstanta $I(f + g)$ može se uniformno aproksimirati funkcijama iz $K_r(f + g)$, pa postoje $p \in \mathbb{N}$, $c_1, c_2, \dots, c_p \in G$ i $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_p \in \mathbb{R}_+$ takvi da je

$$\left| I(f + g) - \sum_{k=1}^p \gamma_k (f + g)(x c_k) \right| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall x \in G.$$

Uvrstimo li $x = a_i b_j$, $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, $j \in \{1, 2, \dots, m\}$, dobivamo

$$\left| I(f + g) - \sum_{k=1}^p \gamma_k(f + g)(a_i b_j c_k) \right| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad 1 \leq i \leq n, \quad 1 \leq j \leq m,$$

a odatle zbog $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \alpha_i \beta_j = 1$

$$\left| I(f + g) - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^p \alpha_i \beta_j \gamma_k(f + g)(a_i b_j c_k) \right| < \frac{\varepsilon}{3}. \quad (4.23)$$

Nadalje, kako je $\sum_{k=1}^p \gamma_k = 1$, iz nejednakosti (4.22) za $x = c_k$, $k = 1, 2, \dots, p$, slijedi

$$\left| I(f) + I(g) - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^p \alpha_i \beta_j \gamma_k f(a_i b_j c_k) \right| < \frac{2\varepsilon}{3}. \quad (4.24)$$

Iz (4.23) i (4.24) nejednakost trokuta daje $|I(f) + I(g) - I(f + g)| < \varepsilon$, a kako je $\varepsilon > 0$ bio proizvoljan, dobivamo aditivnost:

$$I(f + g) = I(f) + I(g), \quad f, g \in C(G). \quad (4.25)$$

Prema (4.17), (4.18) i (4.25) preslikavanje $I : C(G) \rightarrow \mathbb{C}$ je integral na G .

Dokažimo sada iskazana svojstva (a) – (e) integrala I .

Za $a, b \in G$ i $f \in C(G)$ je $\lambda_b(\lambda_a f) = \lambda_{ba} f$, pa zaključujemo da je $K_\ell(\lambda_a f) = K_\ell(f)$. Odatle slijedi (a).

Sasvim analogno imamo $K_r(\rho_a f) = K_r(f)$, pa vrijedi i (b).

Za konstantnu funkciju 1 je očito $K_\ell(1) = \{1\}$, dakle vrijedi i (d).

Neka je $f \in C(G)$, $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in G$ i $f \neq 0$. Tada je za neki $r > 0$ skup

$$V = \{x \in G; f(x) > r\}$$

neprazan i otvoren, pa je $\{aV; a \in G\}$ otvoren pokrivač od G . Zbog kompaktnosti od G postoje $a_1, a_2, \dots, a_n \in G$ takvi da je

$$G = a_1 V \cup a_2 V \cup \dots \cup a_n V.$$

Stavimo

$$g = \sum_{i=1}^n \lambda_{a_i} f.$$

Za $x \in G$ postoji $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ takav da je $x \in a_i V$, tj. $x = a_i y$ za neki $y \in V$. Tada je $(\lambda_{a_i} f)(x) = f(a_i^{-1} x) = f(y) > r$, a odatle i $g(x) > r$. Prema tome, $g(x) > r \quad \forall x \in G$, pa slijedi $I(g) \geq r$. Međutim, zbog lijeve invarijantnosti integrala I iz definicije funkcije g slijedi $I(g) = nI(f)$. Zaključujemo da je $I(f) = \frac{1}{n} I(g) \geq \frac{r}{n} > 0$ i time je dokazano svojstvo (e).

Pretpostavimo sada da je $\Phi : C(G) \rightarrow \mathbb{C}$ neprekidni linearni funkcional koji je lijevoinvarijantan, tj. takav da vrijedi

$$\Phi(\lambda_a f) = \Phi(f) \quad \forall f \in C(G) \quad \text{i} \quad \forall a \in G.$$

Za $f \in C(G)$ postoji niz $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ u $K_\ell(f)$ koji uniformno konvergira prema konstanti $I(f)$. Zbog lijeve invarijantnosti funkcionala Φ vrijedi $\Phi(f_n) = \Phi(f)$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Sada zbog neprekidnosti od Φ dobivamo

$$\Phi(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \Phi(f_n) = \Phi\left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n\right) = \Phi(I(f)) = \Phi(I(f)1) = I(f)\Phi(1).$$

Time je dokazano da je $\Phi = \Phi(1)I$. Sasvim analogno dokazuje se tvrdnja i za desnoinvarijantan neprekidan linearan funkcional Φ .

Ostaje još da dokažemo svojstvo (c). Stavimo $\Phi(f) = I(\check{f})$, $f \in C(G)$. Tada je Φ neprekidan linearan funkcional na $C(G)$. Nadalje, imamo za $a, x \in G$ i $f \in C(G)$

$$(\rho_a \check{f})(x) = \check{f}(xa) = f(a^{-1}x^{-1}) = (\lambda_a f)(x^{-1}) = (\lambda_a f)^\sim(x),$$

dakle,

$$\Phi(\lambda_a f) = I((\lambda_a f)^\sim) = I(\rho_a \check{f}) = I(\check{f}) = \Phi(f).$$

Prema dokazanom je $\Phi(f) = \Phi(1)I(f)$. Međutim, $\Phi(1) = I(1) = 1$. Time je dokazano i (c).

U teoriji integracije pokazuje se da je svaki pozitivni funkcional na prostoru $C(G)$ oblika $f \mapsto \int_G f(x) d\mu(x)$ za neku pozitivnu Borelovu mjeru μ . Dakle, integral I iz prethodnog teorema se može tako pisati:

$$I(f) = \int_G f(x) d\mu(x), \quad f \in C(G).$$

μ se zove **Haarova mjera** na grupi G . U integralnom zapisu svojstva integrala I izgledaju ovako

$$\int_G f(ax) d\mu(x) = \int_G f(xa) d\mu(x) = \int_G f(x^{-1}) d\mu(x) = \int_G f(x) d\mu(x), \quad \forall f \in C(G), \quad \forall a \in G,$$

$$f \in C(G), \quad f(x) \geq 0 \quad \forall x \in G, \quad f \not\equiv 0 \quad \implies \quad \int_G f(x) d\mu(x) > 0.$$

Haarova mjera μ ima sljedeća svojstva invarijantnosti:

$$\mu(aA) = \mu(Aa) = \mu(A^{-1}) = \mu(A), \quad A \subseteq G \text{ izmjeriv}, \quad a \in G.$$

Nadalje, iz svojstva (d) u teoremu 4.1.7. slijedi da je mjera μ normirana, tj. $\mu(G) = 1$, a iz (e) slijedi da je $\mu(A) > 0$ za svaki izmjeriv skup $A \subseteq G$ s nepraznom nutrinom i, posebno, za svaki neprazan otvoren skup $A \subseteq G$.

4.2 Reprezentacije na Hilbertovim prostorima

Neka je \mathcal{H} Hilbertov prostor. Sa $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ ćemo označavati unitalnu C^* -algebru svih ograničenih linearnih operatora $A : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$. Za grupu svih invertibilnih elemenata algebre $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ upotrebljavat ćemo oznaku $\mathcal{G}l(\mathcal{H})$, a za njenu podgrupu svih unitarnih operatora oznaku $\mathcal{U}(\mathcal{H})$:

$$\mathcal{G}l(\mathcal{H}) = \{A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}); \exists B \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) \text{ takav da je } AB = BA = I_{\mathcal{H}}\},$$

$$\mathcal{U}(\mathcal{H}) = \{U \in \mathcal{B}(\mathcal{H}); UU^* = U^*U = I_{\mathcal{H}}\}.$$

Reprezentacija kompaktne grupe G na Hilbertovom prostoru \mathcal{H} je homomorfizam π grupe G u grupu $\mathcal{G}l(\mathcal{H})$ takav da je preslikavanje $(x, \xi) \mapsto \pi(x)\xi$ sa $G \times \mathcal{H}$ u \mathcal{H} neprekidno. **Reprezentacija π** zove se **unitarna** ako je $\pi(x) \in \mathcal{U}(\mathcal{H}) \forall x \in G$. Invarijantni integral na grupi G omogućuje dokaz analogona tvrdnje (b) teorema 2.1.1.:

Teorem 4.2.1. *Neka je π reprezentacija kompaktne grupe G na Hilbertovom prostoru \mathcal{H} . Tada na \mathcal{H} postoji skalarni produkt, ekvivalentan originalnom skalarnom produktu, u odnosu na koji je reprezentacija π unitarna.*

Dokaz: Neka je I invarijantni integral na grupi G i neka je $(\cdot | \cdot)$ skalarni produkt na Hilbertovom prostoru \mathcal{H} . Za $\xi, \eta \in \mathcal{H}$ funkcija $\varphi_{\xi, \eta} : G \rightarrow \mathbb{C}$, zadana sa $\varphi_{\xi, \eta}(x) = (\pi(x)\xi | \pi(x)\eta)$, $x \in G$, je neprekidna. Stavimo

$$\langle \xi | \eta \rangle = I(\varphi_{\xi, \eta}).$$

Zapisano pomoću Haarove mjere μ pridružene integralu I definicija preslikavanja $\langle \cdot | \cdot \rangle$ sa $c\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ u \mathbb{C} je sljedeća:

$$\langle \xi | \eta \rangle = \int_G (\pi(x)\xi | \pi(x)\eta) d\mu(x), \quad \xi, \eta \in \mathcal{H}.$$

Očito je to preslikavanje seskvilinearno. Nadalje, ono ima hermitsku simetriju. Doista, za $\xi, \eta \in \mathcal{H}$ funkcija $\varphi_{\eta, \xi}$ je kompleksno konjugirana funkciji $\varphi_{\xi, \eta}$, a integral I poprima realne vrijednosti na realnim funkcijama, pa vrijedi $I(\overline{\varphi}) = \overline{I(\varphi)}$; dakle,

$$\langle \eta | \xi \rangle = I(\varphi_{\eta, \xi}) = I(\overline{\varphi_{\xi, \eta}}) = \overline{I(\varphi_{\xi, \eta})} = \overline{\langle \xi | \eta \rangle}.$$

Za $\xi \in \mathcal{H}$ funkcija $\varphi_{\xi, \xi}$ je nenegativna, pa vrijedi

$$\langle \xi, \xi \rangle = I(\varphi_{\xi, \xi}) \geq 0.$$

Nadalje, ako je $\xi \neq 0$ vrijedi $\varphi_{\xi, \xi}(e) = (\xi | \xi) > 0$, dakle, funkcija $\varphi_{\xi, \xi}$ nije identički jednaka nuli, pa iz svojstva (e) teorema 4.1.7. slijedi $\langle \xi | \xi \rangle = I(\varphi_{\xi, \xi}) > 0$. Time je dokazano da je $\langle \cdot | \cdot \rangle$ skalarni produkt na vektorskom prostoru \mathcal{H} .

Zadatak 4.5. *Dokažite da su operatori $\pi(x)$, $x \in G$, po normi uniformno ograničeni, tj. da postoji $C > 0$ takav da je $\|\pi(x)\| \leq C \forall x \in G$. Pokažite da tada vrijedi i $\|\pi(x)\xi\| \geq C^{-1}\|\xi\| \forall x \in G$ i $\forall \xi \in \mathcal{H}$.*

Uputa: Za svako $\xi \in \mathcal{H}$ funkcija $x \mapsto \pi(x)\xi$ sa G u \mathcal{H} je neprekidna, dakle, zbog kompaktnosti od G , ograničena. Sada koristite teorem uniformne ograničenosti za familije operatora na Banachovom prostoru.

Zadatak 4.6. *Dokažite da je gore definirani skalarni produkt $\langle \cdot | \cdot \rangle$ na prostoru \mathcal{H} ekvivalentan originalnom skalarnom produktu $(\cdot | \cdot)$, tj. da postoje $m > 0$ i $M > 0$ takvi da je*

$$m(\xi | \xi) \leq \langle \xi | \xi \rangle \leq M(\xi | \xi) \quad \forall \xi \in \mathcal{H}.$$

Uputa: Koristite zadatak 4.5.

Zadatak 4.7. Dokažite da su u odnosu na novi skalarni produkt $\langle \cdot | \cdot \rangle$ svi operatori $\pi(x)$, $x \in G$, unitarni, tj. da je

$$\langle \pi(x)\xi | \pi(x)\eta \rangle = \langle \xi | \eta \rangle \quad \forall x \in G \quad i \quad \forall \xi, \eta \in \mathcal{H}.$$

Zbog toga ćemo u daljnjem promatrati isključivo unitarne reprezentacije kompaktne grupe G .

Da bi homomorfizam $\pi : G \rightarrow \mathcal{U}(\mathcal{H})$ bio unitarna reprezentacija kompaktne grupe G na Hilbertovom prostoru \mathcal{H} dovoljan je znatno slabiji uvjet neprekidnosti:

Propozicija 4.2.2. Neka je G kompaktna grupa i \mathcal{H} Hilbertov prostor i neka je $\pi : G \rightarrow \mathcal{U}(\mathcal{H})$ homomorfizam grupa. Sljedeća su tri svojstva međusobno ekvivalentna:

- (a) π je unitarna reprezentacija od G na Hilbertovom prostoru \mathcal{H} .
- (b) Za svaki $\xi \in \mathcal{H}$ realna funkcija $x \mapsto \operatorname{Re}(\pi(x)\xi | \xi)$ je neprekidna u jedinici e grupe G .
- (c) Postoji skup $S \subseteq \mathcal{H}$ koji razapinje gust potprostor u \mathcal{H} takav da je za bilo koje vektore $\xi, \eta \in S$ kompleksna funkcija $x \mapsto (\pi(x)\xi | \eta)$ neprekidna u jedinici e grupe G .

Dokaz: Očito iz (a) slijedi (c).

Pretpostavimo sada da vrijedi (c). Neka je

$$\mathcal{H}_1 = \{\xi \in \mathcal{H}; \text{ funkcija } x \mapsto (\pi(x)\xi | \eta) \text{ je neprekidna u točki } e \forall \eta \in S\}.$$

Očito je \mathcal{H}_1 potprostor od \mathcal{H} . Budući da \mathcal{H}_1 sadrži S , zaključujemo da je \mathcal{H}_1 gust potprostor od \mathcal{H} .

Za $\xi \in \mathcal{H}$, $\zeta \in \mathcal{H}_1$, $\eta \in S$ i $x \in G$ vrijedi

$$|(\pi(x)\xi | \eta) - (\xi | \eta)| \leq |(\pi(x)(\xi - \zeta) | \eta)| + |(\pi(x)\zeta | \eta) - (\zeta | \eta)| + |(\zeta - \xi | \eta)|,$$

pa zaključujemo da je

$$|(\pi(x)\xi | \eta) - (\xi | \eta)| \leq 2\|\xi - \zeta\| \cdot \|\eta\| + |(\pi(x)\zeta | \eta) - (\zeta | \eta)|, \quad \xi \in \mathcal{H}, \eta \in S, \zeta \in \mathcal{H}_1, x \in G. \quad (4.26)$$

Neka su sada $\xi \in \mathcal{H}$, $\eta \in S$, $\eta \neq 0$, i $\varepsilon > 0$. Izaberimo $\zeta \in \mathcal{H}_1$ tako da bude $\|\xi - \zeta\| \leq \frac{\varepsilon}{3\|\eta\|}$.

Nadalje, neka je U okolina od e u G takva da vrijedi

$$x \in U \quad \implies \quad |(\pi(x)\zeta | \eta) - (\zeta | \eta)| \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Odatle i iz (4.28) slijedi

$$x \in U \quad \implies \quad |(\pi(x)\xi | \eta) - (\xi | \eta)| \leq 2\frac{\varepsilon}{3\|\eta\|} \cdot \|\eta\| + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Dakle, preslikavanje $x \mapsto (\pi(x)\xi | \eta)$ je neprekidno u točki e . Budući da je vektor $\eta \in S \setminus \{0\}$ bio proizvoljan, zaključujemo da je $\xi \in \mathcal{H}_1$. Time je dokazano da je $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}$, odnosno da je preslikavanje $x \mapsto (\pi(x)\xi | \eta)$ neprekidno u točki e za svaki $\xi \in \mathcal{H}$ i svaki $\eta \in S$.

Stavimo sada

$$\mathcal{H}_2 = \{\eta \in \mathcal{H}; \text{ funkcija } x \mapsto (\pi(x)\xi | \eta) \text{ je neprekidna u točki } e \forall \xi \in \mathcal{H}\}.$$

Sasvim analogno nalazimo da je $\mathcal{H}_2 = \mathcal{H}$.

Prema tome, preslikavanje $x \mapsto (\pi(x)\xi|\eta)$ je neprekidno u točki e za svaka dva vektora $\xi, \eta \in \mathcal{H}$. Odatle slijedi (b).

Napokon, pretpostavimo da vrijedi (b). Neka su $\xi_0 \in \mathcal{H}$, $x_0 \in G$ i $\varepsilon > 0$. Vrijednost funkcije $x \mapsto \operatorname{Re}(\pi(x)\pi(x_0)\xi_0|\pi(x_0)\xi_0)$ u točki e jednaka je $\|\xi_0\|^2$. Po pretpostavci ta je funkcija neprekidna u točki e pa postoji okolina U od e takva da vrijedi

$$y \in U \quad \implies \quad \|\xi_0\|^2 - \operatorname{Re}(\pi(y)\pi(x_0)\xi_0|\pi(x_0)\xi_0) < \frac{\varepsilon^2}{8}.$$

Za $x \in Ux_0$ (tj. $xx_0^{-1} \in U$) i za $\xi \in \mathcal{H}$ takav da je $\|\xi - \xi_0\| < \frac{\varepsilon}{2}$ imamo redom

$$\begin{aligned} & \|\pi(x)\xi - \pi(x_0)\xi_0\| \leq \|\pi(x)\xi - \pi(x)\xi_0\| + \|\pi(x)\xi_0 - \pi(x_0)\xi_0\| = \\ & = \|\xi - \xi_0\| + \sqrt{(\pi(x)\xi_0|\pi(x)\xi_0) + (\pi(x_0)\xi_0|\pi(x_0)\xi_0) - 2\operatorname{Re}(\pi(x)\xi_0|\pi(x_0)\xi_0)} = \\ & = \|\xi - \xi_0\| + \sqrt{2[\|\xi_0\|^2 - \operatorname{Re}(\pi(xx_0^{-1})\pi(x_0)\xi_0|\pi(x_0)\xi_0)]} < \frac{\varepsilon}{2} + \sqrt{2\frac{\varepsilon^2}{8}} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Time je dokazano da je preslikavanje $(x, \xi) \mapsto \pi(x)\xi$ neprekidno u svakoj točki $(x_0, \xi_0) \in G \times \mathcal{H}$, odnosno, vrijedi (a).

Neka je π unitarna reprezentacija kompaktne grupe G na Hilbertovom prostoru \mathcal{H} . Nadalje, neka je I invarijantni integral na grupi G iz teorema 4.1.7. i μ pripadna (normirana) Haarova mjera. Za $f \in C(G)$ i $\xi, \eta \in \mathcal{H}$ kompleksna funkcija $\varphi_{f,\xi,\eta} : a \mapsto f(a)(\pi(a)\xi|\eta)$ na grupi G je neprekidna. Stoga na nju možemo primijeniti integral I . Primijetimo da je preslikavanje

$$(\xi, \eta) \mapsto I(\varphi_{f,\xi,\eta}) = \int_G f(a)(\pi(a)\xi|\eta)d\mu(a)$$

sa $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ u \mathbb{C} seskvilinearno. Nadalje, vrijedi

$$|\varphi_{f,\xi,\eta}(a)| \leq \|f\|_\infty \cdot \|\xi\| \cdot \|\eta\|, \quad f \in C(G), \xi, \eta \in \mathcal{H}.$$

Prema propoziciji 4.1.2. nalazimo

$$|I(\varphi_{f,\xi,\eta})| \leq \max\{|f(a)(\pi(a)\xi|\eta)|; a \in G\} \leq \|f\|_\infty \cdot \|\xi\| \cdot \|\eta\|, \quad f \in C(G), \xi, \eta \in \mathcal{H}. \quad (4.27)$$

Prema tome, postoji ograničen linearan operator na prostoru \mathcal{H} , koji ćemo označiti sa $\pi(f)$, takav da je

$$(\pi(f)\xi|\eta) = I(\varphi_{f,\xi,\eta}) = \int_G f(a)(\pi(a)\xi|\eta)d\mu(a), \quad \xi, \eta \in \mathcal{H}. \quad (4.28)$$

Očito je tako definirano preslikavanje $f \mapsto \pi(f)$ sa $C(G)$ u $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ linearno. Nadalje, iz (4.27) slijedi da je

$$\|\pi(f)\| \leq \|f\|_\infty \quad \forall f \in C(G),$$

dakle, preslikavanje $f \mapsto \pi(f)$ je neprekidno.

Za $f, g \in C(G)$ definiramo funkciju $f * g : G \rightarrow \mathbb{C}$ tako da njena vrijednost u točki a bude vrijednost integrala I na neprekidnoj funkciji $b \mapsto f(ab^{-1})g(b)$, tj. pisano pomoću integrala po Haarovoj mjeri μ :

$$(f * g)(a) = \int_G f(ab^{-1})g(b)d\mu(b).$$

Zadatak 4.8. Dokažite da je $f * g \in C(G)$ i $\|f * g\|_\infty \leq \|f\|_\infty \|g\|_\infty$.

Binarna operacija $(f, g) \mapsto f * g$ sa $C(G) \times C(G)$ u $C(G)$ zove se **konvolucija na kompaknoj grupi** G .

Zadatak 4.9. Neka je Φ neprekidni linearni funkcional na Banachovom prostoru $C(G)$. Dokažite da vrijedi Fubinijev teorem za neprekidne funkcije dvije varijable: ako je $F : G \times G \rightarrow \mathbb{C}$ neprekidna funkcija i $a \in G$ definiramo funkcije $F_a, F^a \in C(G)$ sa $F_a(b) = F(a, b)$, $F^a(b) = F(b, a)$, $b \in G$; tada su funkcije φ_F i φ^F definirane sa $\varphi_F(a) = \Phi(F_a)$ i $\varphi^F(a) = \Phi(F^a)$ neprekidne i vrijedi $\Phi(\varphi_F) = \Phi(\varphi^F)$.

Uputa: Dokaz neprekidnosti funkcija φ_F i φ^F može se provesti korištenjem uniformne neprekidnosti funkcije F . Dokaz jednakosti provedite najprije za funkcije oblika $F(a, b) = f(a)g(b)$, $f, g \in C(G)$, a zatim iskoristite Stone–Weierstrassov teorem da dokažete da takve funkcije razapinju gust potprostor od $C(G \times G)$.

Posebno, za invarijantni integral I pisan pomoću Haarove mjere μ tvrdnja zadatka 4.9. znači:

$$\int_G \left[\int_G F(a, b) d\mu(a) \right] d\mu(b) = \int_G \left[\int_G F(a, b) d\mu(b) \right] d\mu(a), \quad F \in C(G \times G).$$

Zadatak 4.10. Dokažite da je s konvolucijom $C(G)$ Banachova algebra. Dokažite da je ta algebra unitalna ako i samo je grupa G konačna.

Uputa: Za dokaz asocijativnosti konvolucije iskoristite zadatak 4.9.

Zadatak 4.11. Neka je π unitarna reprezentacija kompaktne grupe G na Hilbertovom prostoru \mathcal{H} i neka je za $f \in C(G)$ pomoću (4.28) definiran operator $\pi(f)$.

(a) Dokažite da je $f \mapsto \pi(f)$ homomorfizam algebre $C(G)$ u algebru $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, tj. da je

$$\pi(f * g) = \pi(f)\pi(g), \quad f, g \in C(G).$$

(b) Dokažite da je $\pi(f)^* = \pi(f^*)$, $f \in C(G)$, pri čemu je $f^*(a) = \overline{f(a^{-1})}$, $a \in G$.

(c) Dokažite da je zatvoren potprostor \mathcal{K} od \mathcal{H} invarijantan s obzirom na sve operatore $\pi(a)$, $a \in G$, ako i samo ako je \mathcal{K} invarijantan s obzirom na sve operatore $\pi(f)$, $f \in C(G)$.

Uputa: U (b) i (c) koristite sljedeću činjenicu:

Zadatak 4.12. Neka je \mathcal{V} skup svih otvorenih okolina jedinice e u kompaknoj grupi G . Skup \mathcal{V} je usmjeren u odnosu na uređaj obrnut od inkluzije. Za svaku $V \in \mathcal{V}$ moguće je izabrati nenegativnu funkciju $g_V \in C(G)$ čiji je nosač

$$\text{Supp } g_V = \text{Cl}(\{a \in G; g_V(a) \neq 0\})$$

sadržan u V i koja ima svojstvo da je $I(g_V) = 1$. Dokažite da za svaku $f \in C(G)$ hipernizovi $(f * g_V)_{V \in \mathcal{V}}$ i $(g_V * f)_{V \in \mathcal{V}}$ konvergiraju prema f u Banachovom prostoru $C(G)$, tj. da za svaku $f \in C(G)$ i za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $V_0 \in \mathcal{V}$ takva da vrijedi:

$$V \in \mathcal{V}, V \subseteq V_0 \quad \|f - g_V * f\|_\infty < \varepsilon \quad \text{i} \quad \|f - f * g_V\|_\infty < \varepsilon.$$

Zadatak 4.13. Neka je $(g_V)_{V \in \mathcal{V}}$ hiperniz iz prethodnog zadatka i neka je π unitarna reprezentacija od G na Hilbertovom prostoru \mathcal{H} . Dokažite da tada za svaki $\xi \in \mathcal{H}$ hiperniz $(\pi(g_V)\xi)_{V \in \mathcal{V}}$ u Hilbertovom prostoru \mathcal{H} konvergira prema ξ , tj. da za svaki $\xi \in \mathcal{H}$ i svaki $\varepsilon > 0$ postoji $V_0 \in \mathcal{V}$ takva da vrijedi

$$V \in \mathcal{V}, V \subseteq V_0 \quad \implies \quad \|\pi(g_V)\xi - \xi\| < \varepsilon.$$

Zadatak 4.14. *Korištenjem činjenice da je $C(G)$ gust potprostor Banachovog prostora $L_1(G)$ svih klasa integrabilnih funkcija u odnosu na Haarovu mjeru μ ili korištenjem nekog od topoloških teorema egzistencije neprekidnih funkcija na Hausdorffovom kompaktnom topološkom prostoru dokažite konstataciju iz zadatka 4.12.: ako je V otvorena okolina jedinice e u grupi G onda postoji nenegativna funkcija $g \in C(G)$ takva da je*

$$\text{Supp } g = \text{Cl}(\{a \in G; g(a) \neq 0\}) \subseteq V \quad \text{i} \quad I(g) = 1.$$

Uputa: Karakteristična funkcija χ_U nepraznog otvorenog skupa U je integrabilna funkcija na G i $I(\chi_U) = \mu(U) > 0$ zbog regularnosti mjere μ . Nadalje, koristite svojstva okolina jedinice e u G s početka odjeljka 4.1.

Za $f, g \in C(G)$ stavimo

$$(f|g) = I(f\bar{g}) = \int_G f(a)\overline{g(a)}d\mu(a).$$

Lako se vidi da je na taj način definiran skalarni produkt na vektorskom prostoru $C(G)$. Hilbertov prostor koji je upotpunjenje tog unitarnog prostora označavamo sa $L_2(G)$.

Za $a \in G$ ponovo promatramo lijevi i desni pomak λ_a i ρ_a na $C(G)$:

$$(\lambda_a f)(x) = f(a^{-1}x), \quad (\rho_a f)(x) = f(xa), \quad f, g \in C(G), \quad a, x \in G.$$

Znamo da su $a \rightarrow \lambda_a$ i $a \rightarrow \rho_a$ homomorfizmi grupe G u grupu izometrija Banachovog prostora $C(G)$ na samoga sebe.

Zadatak 4.15. (a) *Dokažite da su preslikavanja $(a, f) \mapsto \lambda_a f$ i $(a, f) \mapsto \rho_a f$ sa $G \times C(G)$ u $C(G)$ neprekidna.*

(b) *Dokažite da se operatori λ_a i ρ_a jedinstveno proširuju sa $C(G)$ do neprekidnih operatora $\lambda(a)$ i $\rho(a)$ na Hilbertovom prostoru $L_2(G)$ i da su λ i ρ unitarne reprezentacije kompaktne grupe G na Hilbertovom prostoru $L_2(G)$.*

(c) *Dokažite da postoji unitaran operator U na $L_2(G)$ takav da je $(Uf)(a) = f(a^{-1})$ za $f \in C(G)$ i $a \in G$ i da vrijedi $U\lambda(a) = \rho(a)U$ i $U\rho(a) = \lambda(a)U$ za svaki $a \in G$.*

Za unitarne reprezentacije λ i ρ i za $f \in C(G)$ tada su definirani ograničeni operatori $\lambda(f)$ i $\rho(f)$ na Hilbertovom prostoru $L_2(G)$ i znamo da su $f \mapsto \lambda(f)$ i $f \mapsto \rho(f)$ neprekidni homomorfizmi Banachove algebre $C(G)$ u Banachovu algebru $\mathcal{B}(L_2(G))$ i vrijedi $\lambda(f)^* = \lambda(f^*)$ i $\rho(f)^* = \rho(f^*)$, gdje je $f^*(a) = \overline{f(a^{-1})}$.

Zadatak 4.16. *Dokažite da vrijedi*

$$\lambda(f)g = f * g, \quad \rho(f)g = g * \check{f}, \quad \forall f, g \in C(G).$$

Pri tome je kao i prije $\check{f}(a) = f(a^{-1})$.

Promatrajući realizaciju prostora $L_2(G)$ kao prostora klasa ekvivalencije μ -izmjerivih funkcija $\varphi : G \rightarrow \mathbb{C}$ takvih da je funkcija $a \mapsto |\varphi(a)|^2$ integrabilna, pri čemu za dvije μ -izmjerive funkcije $\varphi, \psi : G \rightarrow \mathbb{C}$ kažemo da su ekvivalentne ako $\mu(\{a \in G; \varphi(a) \neq \psi(a)\}) = 0$, može se dokazati da ne samo za neprekidnu funkciju g nego i za predstavnika φ bilo koje klase u $L_2(G)$ vrijede formule iz zadatka 4.16.:

$$(\lambda(f)\varphi)(a) = (f * \varphi)(a) = \int_G f(b)\varphi(b^{-1}a)d\mu(b),$$

$$(\rho(f)\varphi)(a) = (\varphi * \check{f})(a) = \int_G \varphi(b)\check{f}(b^{-1}a)d\mu(b) = \int_G \varphi(ab)f(b)d\mu(b)$$

i da su konvolucije $f * \varphi$ i $\varphi * \check{f}$ neprekidne funkcije. Štoviše, pokazuje se da se konvolucija $\varphi * \psi$ može definirati i ako su obje funkcije φ i ψ predstavnici klasa iz $L_2(G)$ i da je to ponovo neprekidna funkcija na G . Posebno vrijedi:

Propozicija 4.2.3. *Neka su $\xi \in L_2(G)$ i $f \in C(G)$. Tada su $\lambda(f)\xi \in C(G)$ i $\rho(f)\xi \in C(G)$.*

Odatle dobivamo sljedeću činjenicu koja će biti ključna u dokazu Peter–Weylovog teorema u sljedećem odjeljku.

Propozicija 4.2.4. *Neka je $X \neq \{0\}$ zatvoren potprostor Hilbertovog prostora $L_2(G)$ koji je invarijantan s obzirom na sve operatore $\lambda(a)$ ili s obzirom na sve operatore $\rho(a)$, $a \in G$. Tada je $X \cap C(G) \neq \{0\}$.*

Dokaz: Pretpostavimo da je zatvoren potprostor $X \neq \{0\}$ Hilbertovog prostora $L_2(G)$ invarijantan s obzirom na sve operatore $\lambda(a)$, $a \in G$. Tada je prema tvrdnji (c) zadatka 4.11. $\lambda(f)\xi \in X$ za svaki $\xi \in X$ i svaku funkciju $f \in C(G)$. Prema zadatku 4.13. postoje $\xi \in X$ i $f \in C(G)$ takvi da je $\lambda(f)\xi \neq 0$. Tada je $\lambda(f)\xi \in X$, a prema propoziciji 4.2.3. je $\lambda(f)\xi \in C(G)$. Time je tvrdnja propozicije dokazana u slučaju λ -invarijantnosti potprostora X . U slučaju ρ -invarijantnosti dokaz je potpuno analogan.

4.3 Peter–Weylov teorem

O ovom odjeljku je G kompaktna grupa. Primijetimo da je karakter χ_π konačnodimenzionalne neprekidne reprezentacije kompaktne grupe G na prostoru V neprekidna funkcija na G za koju vrijede tvrdnje propozicija 2.2.1., 2.2.2. i 2.2.3.:

$$\chi_\pi(e) = \dim V, \quad \chi_\pi(a^{-1}) = \overline{\chi_\pi(a)} \quad a \in G, \quad \chi_\pi(ab) = \chi_\pi(ba) \quad a, b \in G;$$

$$V = V_1 \dot{+} V_2 \dot{+} \cdots \dot{+} V_s, \quad V_1, V_2, \dots, V_s \quad \pi\text{-invarijantni} \quad \implies \quad \chi_\pi = \chi_{\pi_{V_1}} + \chi_{\pi_{V_2}} + \cdots + \chi_{\pi_{V_s}};$$

$$\chi_{\pi \otimes \rho} = \chi_\pi \chi_\rho.$$

Nadalje, potpuno analogno kao u poglavlju 2. dokazuje se sljedeći analogon propozicije 2.1.2.:

Propozicija 4.3.1. *Neka su π i ρ neprekidne reprezentacije kompaktne grupe G na konačnodimenzionalnim prostorima V i W . Za $A \in L(V, W)$ stavimo*

$$A^0 = \int_G \rho(a^{-1}) A \pi(a) d\mu(a)$$

(integral operatorske funkcije definiran je pomoću bilo kojih baza u V i W i pomoću integrala skalarnih funkcija). Tada je $A \mapsto A^0$ projektor prostora $L(V, W)$ na potprostor $\text{Hom}_G(V, W)$.

Odatle pomoću Schurove leme neposredno slijedi analogon teorema 2.1.3. i 2.1.4.:

Teorem 4.3.2. *Neka su π i ρ neekvivalentne ireducibilne neprekidne reprezentacije kompaktne grupe G na konačnodimenzionalnim prostorima V i W .*

(a) *Za svaki $A \in L(V, W)$*

$$\int_G \rho(a^{-1}) A \pi(a) = 0.$$

(b) *Za svaki $A \in L(V)$ vrijedi*

$$\int_G \pi(a^{-1}) A \pi(a) d\mu(a) = \frac{\text{Tr } A}{\dim V} I_V.$$

Korolar 4.3.3. *Uz pretpostavke teorema 4.3.2. neka je $e = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ baza vektorskog prostora V i $f = \{f_1, f_2, \dots, f_m\}$ baza vektorskog prostora W . Nadalje, neka su $\pi_{ij}(a)$ elementi matrice operatora $\pi(a)$ u bazi e i $\rho_{kl}(a)$ elementi matrice operatora $\rho(a)$ u bazi f . Tada vrijedi*

$$\int_G \pi_{ij}(a) \rho_{kl}(a^{-1}) d\mu(a) = 0, \quad \forall i, j \in \{1, 2, \dots, n\} \quad \text{i} \quad \forall k, \ell \in \{1, 2, \dots, m\},$$

$$\int_G \pi_{ij}(a) \pi_{rs}(a^{-1}) d\mu(a) = \frac{1}{n} \delta_{is} \delta_{jr}, \quad \forall i, j, r, s \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

Na prostoru $C(G)$ definiran je skalarni produkt pomoću invarijantnog funkcionala i upotpunjenje tog unitarnog prostora označili smo sa $L_2(G)$. Iz korolara 4.3.3. neposredno slijedi

Teorem 4.3.4. *Neka su π i ρ neprekidne ireducibilne konačnodimenzionalne reprezentacije kompaktne grupe G . Tada je*

$$(\chi_\pi | \chi_\rho) = \begin{cases} 1 & \text{ako je } \pi \simeq \rho \\ 0 & \text{ako je } \pi \not\simeq \rho. \end{cases}$$

Sada se sasvim analogno dokazu teorema 2.2.5. dokazuje

Teorem 4.3.5. *Neka je π neprekidna reprezentacija grupe G na konačnodimenzionalnom vektorskom prostoru V i neka su V_1, V_2, \dots, V_s π -invarijantni potprostori takvi da je*

$$V = V_1 \dot{+} V_2 \dot{+} \dots \dot{+} V_s$$

i da su sve subreprezentacije π_{V_j} ireducibilne. Neka je ρ neprekidna konačnodimenzionalna ireducibilna reprezentacija od G . Tada je skalarni produkt $(\chi_\pi | \chi_\rho)$ jednak broju indeksa $j \in \{1, \dots, s\}$ takvih da je $\pi_{V_j} \simeq \rho$.

Korolar 4.3.6. *Neka su π i σ neprekidne konačnodimenzionalne reprezentacije grupe G . Tada je $\pi \simeq \sigma$ ako i samo ako je $\chi_\pi = \chi_\sigma$.*

U daljnjem ćemo za kompaktnu grupu G sa \hat{G} označavati skup svih klasa ekvivalencije neprekidnih ireducibilnih konačnodimenzionalnih reprezentacija grupe G . Kao i u poglavlju 4. definiramo multiplicitet $m(\pi, \alpha)$ ireducibilne klase $\alpha \in \hat{G}$ u neprekidnoj konačnodimenzionalnoj reprezentaciji π i sasvim analogno dokazima teorema 2.2.7. i 2.6.5. dokazuje se

Teorem 4.3.7. *Neka su π i ρ neprekidne reprezentacije na konačnodimenzionalnim prostorima V i W . Tada je*

$$(\chi_\pi | \chi_\rho) = \dim \operatorname{Hom}_G(V, W) = \dim \operatorname{Hom}_G(W, V) = \sum_{\alpha \in \hat{G}} m(\pi, \alpha) m(\rho, \alpha).$$

Reprezentacija π je ireducibilna ako i samo ako je $(\chi_\pi | \chi_\pi) = 1$.

Neka je π neprekidna reprezentacija kompaktne grupe G na konačnodimenzionalnom prostoru V i neka je $e = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ baza prostora V . Za $a \in G$ označimo sa $\pi_{ij}(a)$ elemente matrice operatora $\pi(a)$ u bazi e . Tada su $\pi_{ij} \in C(G)$ i sa $C_\pi(G)$ označimo potprostor od $C(G)$ razapet funkcijama π_{ij} , $1 \leq i, j \leq n$. Taj potprostor ne ovisi o izboru baze e prostora V . Ako su π i ρ ekvivalentne neprekidne konačnodimenzionalne reprezentacije od G , onda je $C_\pi(G) = C_\rho(G)$. Za $\alpha \in \hat{G}$ i $\pi \in \alpha$ pišemo $C_\alpha(G) = C_\pi(G)$.

Sada za svaku klasu $\alpha \in \hat{G}$ izaberimo neku unitarnu reprezentaciju π^α na V^α i neku ortonormiranu bazu $e^\alpha = \{e_1^\alpha, e_2^\alpha, \dots, e_{d(\alpha)}^\alpha\}$ ($d(\alpha) = \dim V^\alpha$) i neka su $\pi_{ij}^\alpha(a)$ elementi matrice operatora $\pi^\alpha(a)$ u bazi e^α . Analogno kao teorem 2.4.6. dokazuje se

Teorem 4.3.8. *Skup $\{\sqrt{d(\alpha)}\pi_{ij}^\alpha; \alpha \in \hat{G}, 1 \leq i, j \leq d(\alpha)\}$ je ortonormiran u unitarnom prostoru $C(G)$ i $\{\pi_{ij}^\alpha; 1 \leq i, j \leq d(\alpha)\}$ je baza potprostora $C_\alpha(G)$. Posebno,*

$$\dim C_\alpha(G) = d(\alpha)^2 \quad i \quad C_\alpha(G) \perp C_\beta(G) \quad \text{ako je } \alpha \neq \beta.$$

U stvari, vrijedi sljedeći teorem:

Teorem 4.3.9. (Peter–Weyl) *$\{\sqrt{d(\alpha)}\pi_{ij}^\alpha; \alpha \in \hat{G}, 1 \leq i, j \leq d(\alpha)\}$ je ortonormirana baza Hilbertovog prostora $L_2(G)$.*

Dokaz ovog teorema relativno je jednostavna posljedica Stone–Weierstrassovog teorema ukoliko je grupa G matricna, odnosno, ukoliko ima vjernu konačnodimenzionalnu neprekidnu reprezentaciju. Označimo sa $\mathcal{C}(G)$ potprostor od $C(G)$ razapet matricnim elementima neprekidnih konačnodimenzionalnih reprezentacija od G . Naravno, $\mathcal{C}(G)$ je direktna suma potprostora $C_\alpha(G)$, $\alpha \in \hat{G}$. Ako su f i g matricni elementi neprekidnih konačnodimenzionalnih reprezentacija π i ρ od

G , onda je njihov produkt fg matricni element reprezentacije $\pi \otimes \rho$, koja je također konačnodimenzionalna i neprekidna. Stoga je $fg \in \mathcal{C}(G)$ pa slijedi da je $\mathcal{C}(G)$ podalgebra Banachove algebre $C(G)$. Nadalje, kompleksno konjugirane reprezentacije imaju kompleksno konjugirane matricne elementi, pa slijedi da je algebra $\mathcal{C}(G)$ zatvorena u odnosu na kompleksno konjugiranje. Napokon, budući da postoji vjerna konačnodimenzionalna neprekidna reprezentacija od G , za $a, b \in G$, $a \neq b$, postoji $f \in \mathcal{C}(G)$ takva da je $f(a) \neq f(b)$. Drugim riječima, algebra $\mathcal{C}(G)$ razlikuje točke. Sada iz Stone–Weierstrassovog teorema slijedi da je $\mathcal{C}(G)$ gusta u $C(G)$ u odnosu na normu $\|\cdot\|_\infty$. Kako je

$$\|f\|_2 \leq \|f\|_\infty \quad \forall f \in \mathcal{C}(G)$$

slijedi da je $\mathcal{C}(G)$ gusto u $C(G)$ i u odnosu na normu $\|\cdot\|_2$, a kako je $C(G)$ gusto u $L_2(G)$ u odnosu na $\|\cdot\|_2$, slijedi da je $\mathcal{C}(G)$ gust potprostor Hilbertovog prostora $L_2(G)$. Ortonormiran skup $\{\sqrt{d(\alpha)}\pi_{ij}^\alpha; \alpha \in \hat{G}, 1 \leq i, j \leq d(\alpha)\}$ je baza vektorskog prostora $\mathcal{C}(G)$, pa zaključujemo da je to ortonormirana baza od $L_2(G)$.

Dokažimo sada Peter–Weylov teorem i u slučaju kad ne znamo ima li kompaktna grupa G ima vjernu konačnodimenzionalnu neprekidnu reprezentaciju. Ponovo je $\mathcal{C}(G)$ podalgebra Banachove algebre $C(G)$ zatvorena u odnosu na kompleksno konjugiranje, samo sada ne znamo da li $\mathcal{C}(G)$ razlikuje točke od G . Označimo sa Y zatvarač potprostora $\mathcal{C}(G)$ u Hilbertovom prostoru $L_2(G)$. Svaki od potprostora $C_\alpha(G)$ invarijantan je u odnosu na sve operatore $\lambda(a)$ i $\rho(a)$, pa slijedi da je i $\mathcal{C}(G)$, dakle i njegov zatvarač Y invarijantan u odnosu na sve te operatore. Pretpostavimo da je $Y \neq L_2(G)$. Tada je njegov ortogonalni komplement $X = Y^\perp = \mathcal{C}(G)^\perp$ različit od $\{0\}$. Kako je $\lambda(a)^* = \lambda(a^{-1})$ i $\rho(a)^* = \rho(a^{-1})$, zatvoren potprostor X od $L_2(G)$ također je invarijantan s obzirom na sve operatore $\lambda(a)$ i $\rho(a)$, $a \in G$. Prema propoziciji 4.2.4. tada je $X \cap \mathcal{C}(G) \neq \{0\}$. Neka je $F_1 \in X \cap \mathcal{C}(G)$, $F_1 \neq 0$. Invarijantnost prostora $X \cap \mathcal{C}(G)$ u odnosu na lijeve (i desne) pomake pokazuje da možemo pretpostaviti da je $F_1(e) \neq 0$, a množenjem skalarom možemo postići da je $F_1(e) = 1$. Stavimo sada

$$F_2(a) = \int_G F_1(bab^{-1})d\mu(b).$$

To je neprekidna funkcija na grupi G i vrijedi $F_2(cac^{-1}) = F_2(a) \quad \forall a, c \in G$. Nadalje, $F_2(e) = F_1(e) = 1$. Za $f \in \mathcal{C}(G)$ zbog Fubinijevog teorema za neprekidne funkcije (zadatak 4.9.) i zbog invarijantnosti integrala u odnosu na pomake imamo

$$\begin{aligned} (F_2|f) &= \int_G F_2(a)\overline{f(a)}d\mu(a) = \int_G \left[\int_G F_1(bab^{-1})\overline{f(a)}d\mu(b) \right] d\mu(a) = \\ &= \int_G \left[\int_G F_1(bab^{-1})\overline{f(a)}d\mu(a) \right] d\mu(b) = \int_G \left[\int_G F_1(a)\overline{f(b^{-1}ab)}d\mu(a) \right] d\mu(b). \end{aligned}$$

Međutim, imamo $f(b^{-1}ab) = (\lambda(b)\rho(b)f)(a)$ i funkcija $g_b = \lambda(b)\rho(b)f$ je također u $\mathcal{C}(G)$ za svaki $b \in G$. Stoga je $(F_1|g_b) = 0$ za svaki $b \in G$, pa slijedi

$$(F_2|f) = \int_G (F_1|g_b)d\mu(b) = 0.$$

Budući da je $f \in \mathcal{C}(G)$ bila proizvoljna, slijedi da je $F_2 \in X \cap \mathcal{C}(G)$.

Za matricne elemente unitarne reprezentacije vrijedi $\pi_{ij}(a) = \overline{\pi_{ji}(a^{-1})}$, pa zaključujemo da iz $f \in \mathcal{C}(G)$ slijedi $f^* \in \mathcal{C}(G)$. Stoga je i $F_2^* \in X \cap \mathcal{C}(G)$, dakle i $F = F_2 + F_2^* \in X \cap \mathcal{C}(G)$. Tada vrijedi

$$F(e) = 2 > 0, \quad F(cac^{-1}) = F(a), \quad \text{tj.} \quad F(ca) = F(ac), \quad \text{i} \quad F(a^{-1}) = \overline{F(a)}, \quad a, c \in G.$$

Definiramo operator $T : C(G) \rightarrow C(G)$ sa

$$(Tf)(a) = \int_G F(a^{-1}b)f(b)d\mu(b), \quad f \in C(G).$$

Tada iz teorije integralnih operatora slijedi da je T kompaktni operator koji se proširuje do kompaktnog operatora $T : L_2(G) \rightarrow L_2(G)$. Nadalje, kako je $F(e) \neq 0$, vrijedi $T \neq 0$, a iz $F = F^*$ slijedi da je operator T hermitski. No tada operator T ima neku svojstvenu vrijednost $\tau \in \mathbb{R}$, $\tau \neq 0$ i pripadni svojstveni potprostor

$$V = \{\xi \in L_2(G); T\xi = \tau\xi\}$$

je konačnodimenzionalan. Nadalje, pomoću propozicije 4.2.3. pokazuje se da je $TL_2(G) \subseteq C(G)$, dakle, $V \subseteq C(G)$. Za $f \in V$ i $a, b \in G$ imamo

$$\begin{aligned} (T\lambda(a)f)(b) &= \int_G F(b^{-1}c)(\lambda(a)f)(c)d\mu(c) = \int_G F(b^{-1}c)f(a^{-1}c)d\mu(c) = \\ &= \int_G F(b^{-1}ac)f(c)d\mu(c) = (Tf)(a^{-1}b) = \tau f(a^{-1}b) = \tau(\lambda(a)f)(b). \end{aligned}$$

Dakle, $T(\lambda(a)f) = \tau(\lambda(a)f)$, pa zaključujemo da je $\lambda(a)f \in V$. Time je dokazano da je potprostor V invarijantan s obzirom na sve operatore $\lambda(a)$, $a \in G$. No tada V sadrži neki potprostor $W \neq \{0\}$ koji je λ -invarijantan i takav da je subreprezentacija $\pi = \lambda_W$ ireducibilna. Neka je $\{f_1, \dots, f_n\}$ ortonormirana baza od W . Matrični elementi operatora $\pi(a) = \lambda_W(a)$ u toj bazi su

$$\pi_{ij}(a) = (\lambda(a)f_j | f_i) = \int_G f_j(a^{-1}b)\overline{f_i(b)}d\mu(b).$$

Po definiciji imamo $\pi_{ij} \in \mathcal{C}(G)$, dakle $\pi_{ij} \perp X$. Posebno, imamo redom

$$\begin{aligned} 0 &= (F | \pi_{ii}) = \int_G F(a)\overline{\pi_{ii}(a)}d\mu(a) = \int_G \left[\int_G F(a)\overline{f_i(a^{-1}b)}f_i(b)d\mu(b) \right] d\mu(a) = \\ &= \int_G \left[\int_G F(a)\overline{f_i(a^{-1}b)}f_i(b)d\mu(a) \right] d\mu(b) = \int_G \left[\int_G F(ba^{-1})\overline{f_i(a)}f_i(b)d\mu(a) \right] d\mu(b) = \\ &= \int_G \left[\int_G F(a^{-1}b)f_i(b)d\mu(b) \right] \overline{f_i(a)}d\mu(a) = \int_G (Tf_i)(a)\overline{f_i(a)}d\mu(a) = \tau \|f_i\|^2, \end{aligned}$$

što je u suprotnosti sa $\tau \neq 0$ i $f_i \neq 0$. Ova kontradikcija dokazuje da je $X = \{0\}$, tj. da je $\mathcal{C}(G)$ gusto u Hilbertovom prostoru $L_2(G)$.

Poglavlje 5

Reprezentacije nekih matričnih grupa

5.1 Reprezentacije grupa $SO(2)$ i $O(2)$

U ovom odjeljku proučit ćemo konačnodimenzionalne reprezentacije grupe $O(2)$ svih realnih ortogonalnih matrica drugog reda

$$O(2) = \{A \in M_2(\mathbb{R}); AA^t = A^tA = I\}$$

i njene podgrupe

$$SO(2) = \{A \in O(2); \det A = 1\}.$$

Promatrano geometrijski, grupa $SO(2)$ predstavlja grupu svih rotacija ravnine oko neke fiksne točke (ishodište) a $O(2)$ je grupa svih rotacija ravnine oko ishodišta i svih refleksija s obzirom na pravce kroz ishodište. Lako se vidi da je

$$SO(2) = \{u(\varphi); \varphi \in \mathbb{R}\}, \quad \text{gdje je } u(\varphi) = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix},$$

$$O(2) = SO(2) \cup \{v(\varphi); \varphi \in \mathbb{R}\}, \quad \text{gdje je } v(\varphi) = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ \sin \varphi & -\cos \varphi \end{bmatrix}.$$

Matrica $u(\varphi)$ predstavlja rotaciju ravnine oko ishodišta za kut φ , a $v(\varphi)$ refleksiju s obzirom na pravac kroz ishodište koji zatvara s pozitivnim dijelom abscise kut $\varphi/2$. Imamo

$$u(\varphi)u(\psi) = u(\varphi + \psi)$$

dakle, grupa $SO(2)$ je komutativna. U stvari, preslikavanje $\varphi \mapsto u(\varphi)$ je epimorfizam aditivne grupe \mathbb{R} s jezgrom $2\pi\mathbb{Z}$, dakle, grupa $SO(2)$ je izomorfna kvocijentnoj grupi $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. Nadalje, lako se izračuna da je

$$u(\varphi)v(\psi) = v(\varphi - \psi), \quad v(\psi)u(\varphi) = v(\psi - \varphi), \quad v(\varphi)v(\psi) = u(\varphi - \psi).$$

Odatle se vidi da grupa $O(2)$ nije komutativna, da je $SO(2)$ normalna podgrupa od $O(2)$ i da je kvocijentna grupa $O(2)/SO(2)$ izomorfna dvočlanoj multiplikativnoj grupi $\{1, -1\}$. Ako sa T označimo refleksiju u odnosu na abscisu, tj.

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

onda se lako provjerava da je

$$v(\varphi) = u(\varphi)T = Tu(-\varphi), \quad \varphi \in \mathbb{R},$$

dakle, I i T su predstavnici dvije $SO(2)$ -klase u grupi $O(2)$.

Dakle, $e^{i\varphi} \mapsto u(\varphi)$ je bijekcija jedinične kružnice $S = \{\lambda \in \mathbb{C}; |\lambda| = 1\}$ u kompleksnoj ravni na grupu $SO(2)$ i pomoću te bijekcije uvodimo topologiju na grupu $SO(2)$. Na taj način $SO(2)$ postaje kompaktna grupa. Nadalje, i grupa $O(2)$ je kompaktna preko bijekcije sa $S \times \{I, T\}$ na $O(2)$. Prostor $C(SO(2))$ može se identificirati s prostorom $C(S)$ svih neprekidnih funkcija $f : S \rightarrow \mathbb{C}$, odnosno s prostorom svih neprekidnih funkcija $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ koje su periodičke s periodom 2π . Nadalje, prostor $C(O(2))$ se može identificirati s prostorom svih uređenih parova (f_1, f_2) (odnosno, (F_1, F_2)) takvih funkcija.

Zadatak 5.1. Dokažite da su uz te identifikacije invarijantni integrali na grupama $SO(2)$ i $O(2)$ dani sa

$$I(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) d\varphi, \quad f \in C(S);$$

$$I(f) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} f_1(\varphi) d\varphi + \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} f_2(\varphi) d\varphi, \quad f = (f_1, f_2) \in C(S) \times C(S).$$

Proučit ćemo sada neprekidne konačnodimenzionalne reprezentacije grupe $SO(2)$, tj. preslikavanja $\pi : SO(2) \rightarrow L(V)$ takva da je

$$\pi(u(\varphi))\pi(u(\psi)) = \pi(u(\varphi)u(\psi)) = \pi(u(\varphi + \psi)), \quad \varphi, \psi \in \mathbb{R},$$

i takva da je $\varphi \mapsto \pi(u(\varphi))$ neprekidno sa \mathbb{R} u $L(V)$. Tada je $\varphi \mapsto \pi(u(\varphi))$ neprekidna konačnodimenzionalna reprezentacija aditivne grupe \mathbb{R} , pa prema zadatku 1.3. vrijedi:

- (a) Preslikavanje $\varphi \mapsto \pi(u(\varphi))$ sa \mathbb{R} u $L(V)$ je diferencijabilno.
 (b) Ako stavimo

$$A = \left. \frac{d}{d\varphi} \pi(u(\varphi)) \right|_{\varphi=0}$$

onda je

$$\pi(u(\varphi)) = e^{\varphi A} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varphi^k}{k!} A^k$$

pri čemu red konvergira u odnosu na bilo koju normu prostora $L(V)$ i to uniformno na svakom ograničenom podskupu od \mathbb{R} .

Pretpostavimo sada da je V konačnodimenzionalan vektorski prostor i da je $A \in L(V)$. Tada je sa

$$\pi(\varphi) = e^{\varphi A}, \quad \varphi \in \mathbb{R},$$

zadana neprekidna reprezentacija aditivne grupe \mathbb{R} na prostoru V . Da bi π predstavljala reprezentaciju grupe $SO(2)$ na vektorskom prostoru V nužno je i dovoljno da linearni operator A bude takav da je $u(\varphi + 2\pi) = u(\varphi) \quad \forall \varphi \in \mathbb{R}$, tj. da je $e^{2\pi A} = I$.

Svaka je neprekidna konačnodimenzionalna reprezentacija grupe $SO(2)$ direktna suma ireducibilnih subreprezentacija. Nadalje, kako je grupa $SO(2)$ komutativna, prema Schurovoj lemi svaka je njena konačnodimenzionalna ireducibilna reprezentacija π jednodimenzionalna. Dakle, postoji $\lambda \in \mathbb{C}$ takav da je

$$\pi(u(\varphi)) = e^{\lambda\varphi}, \quad \varphi \in \mathbb{R}.$$

Periodičnost povlači da mora biti $e^{2\pi\lambda} = 1$ a to je ispunjeno ako i samo ako je $\lambda = in$ za neki $n \in \mathbb{Z}$. Obratno, ako je $n \in \mathbb{Z}$ onda je sa

$$\pi_n(u(\varphi)) = e^{in\varphi}, \quad \varphi \in \mathbb{R},$$

zadana jednodimenzionalna (dakle, ireducibilna) neprekidna reprezentacija grupe $SO(2)$. Prema tome, ako identificiramo reprezentaciju π_n s njenom klasom ekvivalencije, imamo

Teorem 5.1.1. *Za $G = SO(2)$ je $\hat{G} = \{\pi_n; n \in \mathbb{Z}\}$.*

Naravno, za jednodimenzionalnu reprezentaciju karakter je jednak samoj reprezentaciji i teorem 4.3.4. u ovom slučaju daje dobro poznate relacije ortogonalnosti za funkcije $e^{in\varphi}$:

$$(\pi_n | \pi_m) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{in\varphi} e^{-im\varphi} d\varphi = \delta_{nm}.$$

Nadalje, u ovom je slučaju Peter–Weylov teorem upravo osnovni teorem teorije Fourierovih redova: funkcije π_n tvore ortonormiranu bazu Hilbertovog prostora $L_2(S)$ sa skalarnim produktom

$$(f|g) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) \overline{g(\varphi)} d\varphi, \quad f, g \in L_2(S).$$

Odredimo sada neprekidne konačnodimenzionalne ireducibilne reprezentacije grupe $O(2)$. Ako je π takva reprezentacija na prostoru V tada je njena restrikcija $\pi|SO(2)$ potpuno reducibilna. Neka je W neki $\pi|SO(2)$ –invarijantni jednodimenzionalni potprostor od V i neka je $n \in \mathbb{Z}$ takav da je $(\pi|SO(2))_W \simeq \pi_n$:

$$\pi(u(\varphi))w = e^{in\varphi}w, \quad w \in W, \quad \varphi \in \mathbb{R}.$$

Za $w \in W$ i $\varphi \in \mathbb{R}$ imamo $u(\varphi)T = Tu(-\varphi)$, dakle,

$$\pi(u(\varphi))\pi(T)w = \pi(T)\pi(u(-\varphi))w = e^{-in\varphi}\pi(T)w.$$

Prema tome, potprostor $\pi(T)W$ je također $\pi|SO(2)$ –invarijantan i $(\pi|SO(2))_{\pi(T)W} \simeq \pi_{-n}$. Ako je $n \neq 0$, tada su π_n i π_{-n} neekvivalentne ireducibilne reprezentacije grupe $SO(2)$, pa je tada suma potprostora W i $\pi(T)W$ direktna. Ta je suma očito π –invarijantna, dakle

$$V = W \dot{+} \pi(T)W.$$

Pretpostavimo sada da je $n = 0$. Tada je također suma $W + \pi(T)W$ π –invarijantna, dakle jednaka V . Međutim, tada je $\pi(a) = I_V$ za svaki $a \in SO(2)$, tj. podgrupa $SO(2)$ je sadržana u jezgri reprezentacije π . Prijelazom na kvocijent $O(2)/SO(2) \simeq \{e, T\}$ dobivamo ireducibilnu reprezentaciju komutativne dvočlane grupe $\{e, T\}$. Slijedi da je tada $\dim V = 1$ i vrijedi ili $\pi(T) = 1$ ili $\pi(T) = -1$.

Teorem 5.1.2. *Za $G = O(2)$ je*

$$\hat{G} = \{\rho_0, \rho_0^-\} \cup \{\rho_n; n \in \mathbb{N}\}.$$

Pri tome je ρ_0 trivijalna jednodimenzionalna reprezentacija

$$\rho_0(a) = 1 \quad \forall a \in G,$$

ρ_0^- je jednodimenzionalna reprezentacija zadana sa

$$\rho_0^-(a) = 1 \quad i \quad \rho_0^-(Ta) = -1 \quad za \ a \in SO(2),$$

a za $n \in \mathbb{N}$ je ρ_n reprezentacija od G na dvodimenzionalnom prostoru V s bazom $\{e_1, e_2\}$ u kojoj operatori reprezentacije imaju matrice

$$\rho_n(u(\varphi)) = \begin{bmatrix} e^{in\varphi} & 0 \\ 0 & e^{-in\varphi} \end{bmatrix}, \quad \rho_n(T) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Tvrđnje ovoga teorema sve su dokazane su činjenice da su gornjim formulama stvarno definirane neprekidne ireducibilne reprezentacije grupe $O(2)$.

Zadatak 5.2. *Dokažite da su gornjim formulama definirane neprekidne ireducibilne reprezentacije ρ_0^- , ρ_n , $n \in \mathbb{N}$, grupe $O(2)$.*

5.2 Reprezentacije grupa $SO(3)$ i $SU(2)$

Za svaki prirodan broj n definiramo grupe

$$O(n) = \{A \in M_n(\mathbb{R}); AA^t = A^t A = I_n\}, \quad SO(n) = \{A \in O(n); \det A = 1\},$$

$$U(n) = \{A \in M_n(\mathbb{C}); AA^* = A^* A = I_n\}, \quad SU(n) = \{A \in U(n); \det A = 1\}.$$

U odnosu na bilo koju normu na prostoru kvadratnih matrica to su očito zatvoreni podskupovi od $M_n(\mathbb{R})$, odnosno od $M_n(\mathbb{C})$. Nadalje, ti su podskupovi ograničeni, dakle, to su kompaktni topološki prostori. Matricni elementi umnoška AB su polinomi matricnih elemenata matrica A i B . Označimo li sa G bilo koju od definiranih grupa, zaključujemo da je preslikavanje množenja $(A, B) \mapsto AB$ neprekidno sa $G \times G$ u G . Nadalje, za $A \in G$ je $A^{-1} = A^*$, pa vidimo da je preslikavanje invertiranja $A \mapsto A^{-1}$ neprekidno sa G u G . Na taj način smo ustanovili da je svaka od gore definiranih grupa kompaktna topološka grupa.

Zadatak 5.3. *Matricu $A \in SO(3)$ identificiramo s linearnim operatorom $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ koji u standardnoj bazi $e = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$, $\vec{e}_1 = (1, 0, 0)$, $\vec{e}_2 = (0, 1, 0)$, $\vec{e}_3 = (0, 0, 1)$, ima matricu A . Uz standardnu geometrijsku interpretaciju prostora \mathbb{R}^3 s trodimenzionalnim Euklidovim prostorom dokažite da je $SO(3)$ skup svih rotacija oko osi kroz ishodište.*

Uputa: Iz $\det A = 1$ dokažite da je 1 svojstvena vrijednost od A .

Cilj nam je sada doći do neke parametrizacije grupe $G = SO(3)$. Neka je $A \in G$. Tada je sa

$$\vec{e}'_j = A \vec{e}_j, \quad j = 1, 2, 3,$$

definirana desna ortonormirana baza $e' = \{\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3\}$ od \mathbb{R}^3 . Neka su koordinate vektora \vec{x} u bazi e označene sa (ξ, η, ζ) a u bazi e' sa (ξ', η', ζ') . Pretpostavimo najprije da se ravnine $\xi\eta$ i $\xi'\eta'$ ne podudaraju i neka je p pravac kroz ishodište koji je presjek tih ravnina (taj se pravac zove *čvorna linija* rotacije A). Neka je $\vartheta \in \langle 0, \pi \rangle$ kut između vektora \vec{e}_3 i \vec{e}'_3 . Orijehtaciju čvorne linije p izaberemo tako da rotacija oko pravca p za kut ϑ u smjeru suprotnom od smjera kazaljke na satu ako gledamo s pozitivne strane pravca p prevodi os ζ u os ζ' . Neka je \vec{f}_1 pozitivno orijentirani jedinični vektor pravca p . Neka je $\varphi_1 \in [0, 2\pi)$ kut između vektora \vec{e}_1 i vektora \vec{f}_1 i neka je $\varphi_2 \in [0, 2\pi)$ kut između vektora \vec{f}_1 i vektora \vec{e}'_1 . Označimo sa $A(\varphi_1)$ rotaciju oko \vec{e}_3 za kut φ_1 . Ta rotacija prevodi vektor \vec{e}_1 u vektor \vec{f}_1 , vektor \vec{e}_2 u vektor \vec{f}_2 koji leži u $\xi\eta$ -ravnini (tj. u ravnini određenoj vektorima \vec{e}_1 i \vec{e}_2), i vektor \vec{e}_3 u vektor $\vec{f}_3 = \vec{e}_3$. Tada je $f = (\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$ pozitivno orijentirana (tj. desna) ortonormirana baza od \mathbb{R}^3 . Sada označimo sa $B(\vartheta)$ rotaciju oko \vec{f}_1 za kut ϑ . Ta rotacija prevodi bazu f u desnu ortonormiranu bazu $g = (\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3)$, gdje je $\vec{g}_1 = \vec{f}_1$, \vec{g}_2 je vektor koji leži u $\xi'\eta'$ -ravnini (tj. ravnini određenoj vektorima \vec{e}'_1 i \vec{e}'_2) i $\vec{g}_3 = \vec{e}'_3$. Napokon, sa $C(\varphi_2)$ označimo rotaciju oko $\vec{g}_3 = \vec{e}'_3$ za kut φ_2 . Ta rotacija prevodi bazu g u desnu ortonormiranu bazu $h = (\vec{h}_1, \vec{h}_2, \vec{h}_3)$. Kako je $\vec{h}_1 = C(\varphi_2) \vec{g}_1 = \vec{e}'_1$ i $\vec{h}_3 = C(\varphi_2) \vec{g}_3 = \vec{e}'_3$ to je i $\vec{h}_2 = \vec{e}'_2$. Dakle, $h = e'$, tj. $C(\varphi_2)$ prevodi bazu g u bazu e' . To znači da je

$$A \vec{e}_j = \vec{e}'_j = C(\varphi_2) B(\vartheta) A(\varphi_1) \vec{e}_j \quad j = 1, 2, 3,$$

pa slijedi

$$A = C(\varphi_2) B(\vartheta) A(\varphi_1). \quad (5.1)$$

Ta je jednakost izvedena uz pretpostavku da se $\xi'\eta'$ -ravnina ne podudara sa $\xi\eta$ -ravinom, tj. da potprostor razapet vektorima \vec{e}_1 i \vec{e}_2 nije inverijantan s obzirom na rotaciju A . Međutim, ista formula vrijedi i ako je taj potprostor invarijantan s obzirom na A . U tom slučaju je ili $\vec{e}_3' = A\vec{e}_3 = \vec{e}_3$ ili $\vec{e}_3' = A\vec{e}_3 = -\vec{e}_3$. U prvom slučaju je A rotacija oko \vec{e}_3 pa možemo uzeti $\vartheta = 0$ i $\varphi_2 = 0$, a sa φ_1 označimo kut rotacije A oko \vec{e}_3 . U drugom slučaju označimo sa $B(\pi)$ rotaciju oko \vec{e}_1 za kut π . Tada je $B(\pi)\vec{e}_3 = -\vec{e}_3$, dakle, $B(\pi)A\vec{e}_3 = \vec{e}_3$. To znači da je $B(\pi)A$ rotacija oko \vec{e}_3 za neki kut φ_1 , tj. $B(\pi)A = A(\varphi_1)$, a kako je $B(\pi)^{-1} = B(\pi)$, opet imamo

$$A = C(\varphi_2)B(\vartheta)A(\varphi_1) \quad \text{za} \quad \varphi_2 = 0 \quad \text{i} \quad \vartheta = \pi.$$

Na taj način dokazali smo da svaka rotacija $A \in SO(3)$ ima oblik (5.1) uz $\varphi_1, \varphi_2 \in [0, 2\pi)$ i $\vartheta \in [0, \pi]$. Pri tome je ϑ jedinstveno određen s rotacijom A , a ako je $\vartheta \in \langle 0, \pi \rangle$ onda su i φ_1 i φ_2 jedinstveno određeni. Ako je $\vartheta = 0$ onda φ_1 i φ_2 nisu jedinstveno određeni ali je $\varphi_1 + \varphi_2$ jedinstveno određen. Napokon, ako je $\vartheta = \pi$ onda također φ_1 i φ_2 nisu jedinstveno određeni, ali je njihova razlika $\varphi_1 - \varphi_2$ jedinstveno određena.

Za linearan operator T i za bilo koju bazu $h = (\vec{h}_1, \vec{h}_2, \vec{h}_3)$ označimo sa $T[h]$ matricu operatora T u bazi h . Matrični elementi τ_{ij} te matrice dani su sa

$$T\vec{h}_j = \sum_{i=1}^3 \tau_{ij} \vec{h}_i, \quad j = 1, 2, 3.$$

Nadalje, ako je $h' = (\vec{h}'_1, \vec{h}'_2, \vec{h}'_3)$ druga baza onda sa $T[h', h]$ označimo matricu operatora T u paru baza (h, h') ; matrični elementi σ_{ij} te matrice dani su sa

$$T\vec{h}'_j = \sum_{i=1}^3 \sigma_{ij} \vec{h}'_i, \quad j = 1, 2, 3.$$

Naravno, $T[h] = T[h, h]$. Nadalje, ako su (h, h') i (k, k') dva para baza i ako su U i V operatori prijelaza iz baze h u bazu k , odnosno, iz baze h' u bazu k' , tj.

$$U\vec{h}_j = \vec{k}_j, \quad V\vec{h}'_j = \vec{k}'_j, \quad j = 1, 2, 3,$$

onda je

$$T[k', k] = V[h']^{-1}T[h', h]U[h].$$

Prikažimo sada matricu $A[e]$ pomoću parametara $\varphi_1, \varphi_2, \vartheta$. Naravno, vrijedi

$$A[e] = C(\varphi_2)[e]B(\vartheta)[e]A(\varphi_1)[e].$$

Nadalje, iz definicije rotacija $A(\varphi_1), B(\vartheta)$ i $C(\varphi_2)$ imamo

$$A(\varphi_1)[e] = \begin{bmatrix} \cos \varphi_1 & -\sin \varphi_1 & 0 \\ \sin \varphi_1 & \cos \varphi_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B(\vartheta)[f] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \vartheta & -\sin \vartheta \\ 0 & \sin \vartheta & \cos \vartheta \end{bmatrix}$$

$$\text{i} \quad C(\varphi_2)[g] = \begin{bmatrix} \cos \varphi_2 & -\sin \varphi_2 & 0 \\ \sin \varphi_2 & \cos \varphi_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Operator prijelaza iz baze e u bazu f je $A(\varphi_1)$, a operator prijelaza iz baze f u bazu g je $B(\vartheta)$. Stoga je

$$B(\vartheta)[f] = A(\varphi_1)[e]^{-1}B(\vartheta)[e]A(\varphi_1)[e] \quad \implies \quad B(\vartheta)[e] = A(\varphi_1)[e]B(\vartheta)[f]A(\varphi_1)[e]^{-1}.$$

Slično, za rotaciju $C(\varphi_2)$ imamo

$$C(\varphi_2)[g] = B(\vartheta)[f]^{-1}C(\varphi_2)[f]B(\vartheta)[f] \quad \implies \quad C(\varphi_2)[f] = B(\vartheta)[f]C(\varphi_2)[g]B(\vartheta)[f]^{-1}$$

i

$$C(\varphi_2)[f] = A(\varphi_1)[e]^{-1}C(\varphi_2)[e]A(\varphi_1)[e] \quad \implies \quad C(\varphi_2)[e] = A(\varphi_1)[e]C(\varphi_2)[f]A(\varphi_1)[e]^{-1}$$

pa slijedi

$$C(\varphi_2)[e] = A(\varphi_1)[e]B(\vartheta)[f]C(\varphi_2)[g]B(\vartheta)[f]^{-1}A(\varphi_1)[e]^{-1}.$$

Iz tih formula nalazimo

$$A = A(\varphi_1)[e]B(\vartheta)[f]C(\varphi_2)[g]B(\vartheta)[f]^{-1}A(\varphi_1)[e]^{-1}A(\varphi_1)[e]B(\vartheta)[f]A(\varphi_1)[e]^{-1}A(\varphi_1)[e],$$

a odatle je

$$A = A(\varphi_1)[e]B(\vartheta)[f]C(\varphi_2)[g].$$

Množenjem jednostavnih matrica $A(\varphi_1)[e]$, $B(\vartheta)[f]$ i $C(\varphi_2)[g]$ nalazimo eksplicitni prikaz proizvoljne rotacije $A \in SO(3)$ pomoću parametara φ_1 , φ_2 i ϑ :

$$A[e] = \begin{bmatrix} \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \cos \vartheta \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 & -\cos \varphi_1 \sin \varphi_2 - \cos \vartheta \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 & \sin \vartheta \sin \varphi_1 \\ \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + \cos \vartheta \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 & -\sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + \cos \vartheta \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 & -\sin \vartheta \cos \varphi_1 \\ \sin \vartheta \sin \varphi_2 & \sin \vartheta \cos \varphi_2 & \cos \vartheta \end{bmatrix}.$$

Ovako definirani parametri φ_1 , φ_2 i ϑ zovu se **Eulerovi kutovi rotacije** $A \in SO(3)$. Oni potpuno određuju rotaciju A . U daljnjem identificiramo rotaciju A s matricom $A[e]$ i ako su φ_1 , φ_2 , ϑ njeni Eulerovi kutovi, pišemo $A = A(\varphi_1, \varphi_2, \vartheta)$. Matrični elementi rotacije su trigonometrijske, dakle, analitičke, funkcije njenih Eulerovih parametara.

Zadatak 5.4. Koristeći $A^{-1} = A^t$ za $A \in SO(3)$ dokažite da je

$$A(\varphi_1, \varphi_2, \vartheta)^{-1} = A(\pi - \varphi_2, \pi - \varphi_1, \vartheta).$$

Na taj način grupa $SO(3)$ parametrizirana je s tri realna parametra $\varphi_1, \varphi_2 \in [0, 2\pi]$ i $\vartheta \in [0, \pi]$, dakle, elementi grupe $SO(3)$ dovedeni su u vezu s kvadrom $[0, 2\pi] \times [0, 2\pi] \times [0, \pi]$ u \mathbb{R}^3 ; pri tome je $\varphi_1 = 0$ ekvivalentno sa $\varphi_1 = 2\pi$ i $\varphi_2 = 0$ je ekvivalentno sa $\varphi_2 = 2\pi$. Stoga je govoriti o funkciji na grupi $SO(3)$ isto kao govoriti o funkciji Eulerovih kutova:

$$f(A) = f(A(\varphi_1, \varphi_2, \vartheta)) = f(\varphi_1, \varphi_2, \vartheta), \quad \varphi_1, \varphi_2 \in \mathbb{R}, \quad \vartheta \in [0, \pi],$$

s tim da je

$$f(\varphi_1 + 2\pi, \varphi_2, \vartheta) = f(\varphi_1, \varphi_2 + 2\pi, \vartheta) = f(\varphi_1, \varphi_2, \vartheta).$$

Neprekidna funkcija na grupi $SO(3)$ je neprekidna funkcija Eulerovih kutova. U tom smislu možemo govoriti i o diferencijabilnim i analitičkim funkcijama na grupi $SO(3)$ misleći pri tome na diferencijabilne i analitičke funkcije Eulerovih kutova.

Neka je $C(SO(3))$ vektorski prostor svih kompleksnih neprekidnih funkcija na grupi $SO(3)$. Za $f \in C(SO(3))$ definiramo $I(f) \in \mathbb{C}$ sa

$$\begin{aligned} I(f) &= \frac{1}{8\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi f(\varphi_1, \varphi_2, \vartheta) \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi_1 \, d\varphi_2 = \\ &= \frac{1}{8\pi^2} \int_0^{2\pi} \left[\int_0^{2\pi} \left(\int_0^\pi f(\varphi_1, \varphi_2, \vartheta) \sin \vartheta \, d\vartheta \right) d\varphi_1 \right] d\varphi_2. \end{aligned}$$

Teorem 5.2.1. *Ovako definirano preslikavanje $I : C(SO(3)) \rightarrow \mathbb{C}$ je invarijantni integral na grupi $SO(3)$.*

Zadatak 5.5. *Dokažite teorem 5.2.1.*

Uputa: Dovoljno je dokazati npr. lijevu invarijantnost. Budući da je svaka matrica iz $SO(3)$ produkt matrica oblika

$$A = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \beta & -\sin \beta \\ 0 & \sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix}$$

Dovoljno je dokazati lijevu invarijantnost u odnosu na množenje takvim matricama. Za matricu A radi se samo o pomaku varijable φ_1 za α , a u slučaju matrice B treba računati Jacobijan transformacije varijabli integracije $\varphi_1, \varphi_2, \vartheta$.

Uspostavit ćemo sada vezu između grupa $SU(2)$ i $SO(3)$.

Zadatak 5.6. *Dokažite da je*

$$SU(2) = \left\{ A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{bmatrix}; \alpha, \beta \in \mathbb{C}, |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \right\}$$

i, posebno, da je $SU(2)$ kao topološki prostor homeomorfna s jediničnom sferom

$$S^3 = \{(x_0, x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^4; x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$$

u četverodimenzionalnom euklidskom prostoru \mathbb{R}^4 .

Uputa: Iskoristite jednakosti $AA^* = I_2$ i $\det A = 1$ da dokažete da za matricu

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{C})$$

vrijedi $A \in SU(2)$ ako i samo ako je

$$\alpha\bar{\gamma} + \beta\bar{\delta} = 0, \quad |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1, \quad |\gamma|^2 + |\delta|^2 = 1, \quad \alpha\delta - \beta\gamma = 1,$$

te da su te jednakosti ekvivalentne sa

$$\gamma = -\bar{\beta}, \quad \delta = \bar{\alpha}, \quad |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1.$$

Neka je H_2 realan vektorski prostor svih hermitskih matrica u $M_2(\mathbb{C})$ s tragom 0. Neka je $\Phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow M_2(\mathbb{C})$ definirano sa

$$\Phi(x, y, z) = \begin{bmatrix} -z & x + iy \\ x - iy & z \end{bmatrix}, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

Očito je tada Φ izomorfizam realnih vektorskih prostora sa \mathbb{R}^3 na H_2 . Nadalje vrijedi

$$-\det \Phi(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3. \quad (5.2)$$

Za $A \in SU(2)$ i $H \in H_2$ je $(AHA^*)^* = AHA^*$ i $\text{Tr } AHA^* = \text{Tr } A^*AH = \text{Tr } H = 0$, dakle, $AHA^* \in H_2$. Očito je $H \mapsto AHA^*$ linearan operator na realnom vektorskom prostoru H_2 . Pomoću izomorfizma $\Phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow H_2$ dolazimo do linearnog operatora na prostoru \mathbb{R}^3 koji ćemo označiti sa $\sigma(A)$. Dakle, ako \mathbb{R}^3 identificiramo sa prostorom jednostupčanih matrica $M_{31}(\mathbb{R})$, a time prostor linearnih operatora $L(\mathbb{R}^3)$ sa prostorom matrica $M_3(\mathbb{R})$, onda imamo:

$$A \begin{bmatrix} -z & x + iy \\ x - iy & z \end{bmatrix} A^* = \begin{bmatrix} -z' & x' + iy' \\ x' - iy' & z' \end{bmatrix} \implies \sigma(A) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}.$$

Propozicija 5.2.2. $A \mapsto \sigma(A)$ je epimorfizam grupe $SU(2)$ na grupu $SO(3)$ s jezgrom

$$\text{Ker } \sigma = \{I_2, -I_2\}, \quad I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Dokaz: Prije svega, ako je $A \in SU(2)$, onda je $\det AHA^* = |\det A|^2(\det H) = \det H$, pa iz (5.2) slijedi da je $\sigma(A)$ ortogonalan operator, tj. uz gornju identifikaciju je $\sigma(A) \in O(3)$. Preslikavanje $A \mapsto \sigma(A)$ je neprekidno, pa je i preslikavanje $A \mapsto \det \sigma(A)$ neprekidno. No kako je $\sigma(A) \in O(3)$ to je $\det \sigma(A) \in \{1, -1\}$. Dakle, $A \mapsto \det \sigma(A)$ je neprekidno preslikavanje sa $SU(2)$ u $\{1, -1\}$, pa slijedi da je to konstantno preslikavanje. Kako je $\sigma(I_2) = I_3$ i $\det I_3 = 1$ zaključujemo da je $\det \sigma(A) = 1 \forall A \in SU(2)$. Dakle, σ je preslikavanje sa $SU(2)$ u $SO(3)$. Za $A, B \in SU(2)$ i za $H \in H_2$ imamo $A(BHB^*)A^* = (AB)H(AB)^*$, a odatle slijedi da je $\sigma(AB) = \sigma(A)\sigma(B)$. Dakle, $\sigma : SU(2) \rightarrow SO(3)$ je homomorfizam grupa.

Neka je $A \in SU(2)$ i $H \in H_2$. Tada je

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{bmatrix}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \quad |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1.$$

Nadalje, neka su $(x, y, z) = \Phi^{-1}(H) \in \mathbb{R}^3$ i $(x', y', z') = \Phi^{-1}(AHA^*) \in \mathbb{R}^3$. Imamo

$$A^* = \begin{bmatrix} \bar{\alpha} & -\beta \\ \bar{\beta} & \alpha \end{bmatrix},$$

dakle

$$\begin{bmatrix} -z' & x' + iy' \\ x' - iy' & z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -z & x + iy \\ x - iy & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\alpha} & -\beta \\ \bar{\beta} & \alpha \end{bmatrix}.$$

Odatle direktnim računom slijedi

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(\alpha^2 + \bar{\alpha}^2 - \beta^2 - \bar{\beta}^2) & \frac{i}{2}(\alpha^2 - \bar{\alpha}^2 + \beta^2 - \bar{\beta}^2) & \bar{\alpha}\bar{\beta} + \alpha\beta \\ \frac{i}{2}(\bar{\alpha}^2 - \alpha^2 + \beta^2 - \bar{\beta}^2) & \frac{1}{2}(\alpha^2 + \bar{\alpha}^2 + \beta^2 + \bar{\beta}^2) & i(\bar{\alpha}\bar{\beta} - \alpha\beta) \\ -\bar{\alpha}\beta - \alpha\bar{\beta} & i(\bar{\alpha}\beta - \alpha\bar{\beta}) & |\alpha|^2 - |\beta|^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix},$$

a to znači da je

$$\sigma \left(\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(\alpha^2 + \bar{\alpha}^2 - \beta^2 - \bar{\beta}^2) & \frac{i}{2}(\alpha^2 - \bar{\alpha}^2 + \beta^2 - \bar{\beta}^2) & \bar{\alpha}\bar{\beta} + \alpha\beta \\ \frac{i}{2}(\bar{\alpha}^2 - \alpha^2 + \beta^2 - \bar{\beta}^2) & \frac{1}{2}(\alpha^2 + \bar{\alpha}^2 + \beta^2 + \bar{\beta}^2) & i(\bar{\alpha}\bar{\beta} - \alpha\beta) \\ -\bar{\alpha}\beta - \alpha\bar{\beta} & i(\bar{\alpha}\beta - \alpha\bar{\beta}) & |\alpha|^2 - |\beta|^2 \end{bmatrix}. \quad (5.3)$$

Odatle, ponovo direktnim računom nalazimo

$$\sigma \left(\begin{bmatrix} e^{i\frac{\varphi}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\varphi}{2}} \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

i

$$\sigma \left(\begin{bmatrix} \cos \frac{\vartheta}{2} & -i \sin \frac{\vartheta}{2} \\ -i \sin \frac{\vartheta}{2} & \cos \frac{\vartheta}{2} \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \vartheta & -\sin \vartheta \\ 0 & \sin \vartheta & \cos \vartheta \end{bmatrix}.$$

Kako je svaki element grupe $SO(3)$ produkt triju matrica takvog tipa, zaključujemo da je σ epimorfizam.

Treba još samo izračunati jezgru tog epimorfizma:

Zadatak 5.7. *Pomoću eksplicitne formule (5.3) dokažite da je jezgra od σ jednaka $\{I_2, -I_2\}$.*

Eksplicitne formule iz dokaza propozicije 5.2.2. omogućuju nam da i grupu $SU(2)$ parametriziramo pomoću Eulerovih parametara. Uz prijašnje oznake imali smo u grupi $SO(3)$

$$A(\varphi_1, \varphi_2, \vartheta) = \begin{bmatrix} \cos \varphi_1 & -\sin \varphi_1 & 0 \\ \sin \varphi_1 & \cos \varphi_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \vartheta & -\sin \vartheta \\ 0 & \sin \vartheta & \cos \vartheta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \varphi_2 & -\sin \varphi_2 & 0 \\ \sin \varphi_2 & \cos \varphi_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Prema dokazu propozicije 5.2.2. imamo $A(\varphi_1, \varphi_2, \theta) = \sigma(B(\varphi_1, \varphi_2, \vartheta))$, gdje je

$$B(\varphi_1, \varphi_2, \vartheta) = \begin{bmatrix} e^{i\frac{\varphi_1}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\varphi_1}{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \frac{\vartheta}{2} & -i \sin \frac{\vartheta}{2} \\ -i \sin \frac{\vartheta}{2} & \cos \frac{\vartheta}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{i\frac{\varphi_2}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\varphi_2}{2}} \end{bmatrix}$$

Zadatak 5.8. *Dokažite da je*

$$B(\varphi_1, \varphi_2, \vartheta) = \begin{bmatrix} e^{i\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}} \cos \frac{\vartheta}{2} & -ie^{i\frac{\varphi_1-\varphi_2}{2}} \sin \frac{\vartheta}{2} \\ -ie^{-i\frac{\varphi_1-\varphi_2}{2}} \sin \frac{\vartheta}{2} & e^{-i\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}} \cos \frac{\vartheta}{2} \end{bmatrix}$$

i da vrijedi

$$B(\varphi_1 + 4\pi, \varphi_2, \vartheta) = B(\varphi_1, \varphi_2 + 4\pi, \vartheta) = B(\varphi_1 + 2\pi, \varphi_2 + 2\pi, \vartheta) = B(\varphi_1, \varphi_2, \vartheta).$$

Zadatak 5.9. *Dokažite da je*

$$SU(2) = \{B(\varphi_1, \varphi_2, \vartheta); \varphi_1, \varphi_2 \in [0, 4\pi), \vartheta \in [0, \pi]\}.$$

Nadalje, dokažite da u prikazu elementa $A \in SU(2)$ u obliku $A = B(\varphi_1, \varphi_2, \vartheta)$ vrijedi:

- Parametar $\vartheta \in [0, \pi]$ jedinstveno je određen.*
- Ako je $0 < \vartheta < \pi$ onda postoje točno dva para $(\varphi_1, \varphi_2), (\varphi'_1, \varphi'_2) \in [0, 4\pi) \times [0, 4\pi)$ takva da je $A = B(\varphi_1, \varphi_2, \vartheta) = B(\varphi'_1, \varphi'_2, \vartheta)$.*
- Vrijedi $B(\varphi_1, \varphi_2, 0) = B(\varphi'_1, \varphi'_2, 0)$ ako i samo ako je $\varphi_1 + \varphi_2 \equiv \varphi'_1 + \varphi'_2 \pmod{4\pi}$.*
- Vrijedi $B(\varphi_1, \varphi_2, \pi) = B(\varphi'_1, \varphi'_2, \pi)$ ako i samo ako je $\varphi_1 - \varphi_2 \equiv \varphi'_1 - \varphi'_2 \pmod{4\pi}$.*

Iz propozicije 5.2.2. neposredno slijedi:

Propozicija 5.2.3. *Ako je π reprezentacija grupe $SO(3)$ onda je $\pi \circ \sigma$ reprezentacija grupe $SU(2)$. Za reprezentaciju ρ grupe $SU(2)$ postoji reprezentacija π grupe $SO(3)$ takva da je $\rho = \pi \circ \sigma$ ako i samo ako je $\rho(-I_2)$ jedinični operator.*

Prema zadacima 5.8. i 5.9. grupa $SU(2)$ parametrizirana je s tri realna parametra $\varphi_1, \varphi_2 \in [0, 4\pi]$ i $\vartheta \in [0, \pi]$. Pri tome je $\varphi_1 = 0$ ekvivalentno sa $\varphi_1 = 4\pi$, $\varphi_2 = 0$ je ekvivalentno sa $\varphi_2 = 4\pi$ i (φ_1, φ_2) je ekvivalentno sa $(\varphi_1 + 2\pi, \varphi_2 + 2\pi)$, sa $(\varphi_1 + 2\pi, \varphi_2 - 2\pi)$, sa $(\varphi_1 - 2\pi, \varphi_2 + 2\pi)$, odnosno sa $(\varphi_1 - 2\pi, \varphi_2 - 2\pi)$. Govoriti o funkciji na $SU(2)$ je isto kao govoriti o funkciji varijabli $\varphi_1, \varphi_2, \vartheta$:

$$f(B(\varphi_1, \varphi_2, \vartheta)) = f(\varphi_1, \varphi_2, \vartheta), \quad \varphi_1, \varphi_2 \in \mathbb{R}, \quad \vartheta \in [0, \pi],$$

s tim da je

$$f(\varphi_1 + 4\pi, \varphi_2, \vartheta) = f(\varphi_1, \varphi_2 + 4\pi, \vartheta) = f(\varphi_1 + 2\pi, \varphi_2 + 2\pi, \vartheta) = f(\varphi_1, \varphi_2, \vartheta).$$

Neka je $C(SU(2))$ vektorski prostor svih kompleksnih neprekidnih funkcija na grupi $SU(2)$. Za $f \in C(SU(2))$ definiramo $I(f) \in \mathbb{C}$ sa

$$I(f) = \frac{1}{32\pi^2} \int_0^{4\pi} \int_0^{4\pi} \int_0^\pi f(\varphi_1, \varphi_2, \vartheta) \sin \vartheta \, d\varphi_1 \, d\varphi_2 \, d\vartheta.$$

Analogno teoremu 5.2.1. vrijedi

Teorem 5.2.4. *Ovako definirano preslikavanje $I : C(SU(2)) \rightarrow \mathbb{C}$ je invarijantni integral na grupi $SU(2)$.*

Proučit ćemo sada neprekidne konačnodimenzionalne reprezentacije grupe $SU(2)$. Cilj nam je konstruirati predstavnike svih klasa ekvivalencije neprekidnih konačnodimenzionalnih reprezentacija te grupe jer je svaka neprekidna konačnodimenzionalna reprezentacija od $SU(2)$ potpuno reducibilna, dakle, prostor takve reprezentacije je direktna suma invarijantnih potprostora takvih da su pripadne subreprezentacije ireducibilne.

Analiza neprekidnih konačnodimenzionalnih reprezentacija grupe $SU(2)$ najjednostavnije se provodi pomoću pripadnih reprezentacija njene *Liejeve algebre*. Pri tome se **Liejeva algebra** $\mathfrak{su}(2)$ grupe $SU(2)$ definira na sljedeći način:

$$\mathfrak{su}(2) = \{A \in M_2(\mathbb{C}); e^{tA} \in SU(2) \forall t \in \mathbb{R}\}.$$

Zadatak 5.10. *Dokažite da za svaku matricu $A \in M_n(\mathbb{C})$ vrijedi*

$$\det(e^A) = e^{\text{Tr } A}.$$

Uputa: Iskoristite činjenicu da je svaka kvadratna matrica slična gornjetrokutastoj matrici.

Zadatak 5.11. *Pomoću zadatka 5.10. dokažite da je $\mathfrak{su}(2)$ skup svih antihermitskih matrica u $M_2(\mathbb{C})$ s tragom 0.*

Prema zadatku 5.11. $\mathfrak{su}(2)$ je trodimenzionalan realan vektorski prostor i vrijedi

$$A, B \in \mathfrak{su}(2) \quad \implies \quad [A, B] = AB - BA \in \mathfrak{su}(2).$$

Dakle, $\mathfrak{su}(2)$ je doista Liejeva algebra – trodimenzionalna realna Liejeva algebra.

Neka je ρ neprekidna konačnodimenzionalna reprezentacija grupe $SU(2)$ na prostoru V . Za $A \in \mathfrak{su}(2)$ je tada $t \mapsto \rho(e^{tA})$ neprekidna reprezentacija aditivne grupe \mathbb{R} na prostoru V , pa prema zadatku 1.3. možemo definirati linearni operator $\tilde{\rho}(A)$ na prostoru V sa

$$\tilde{\rho}(A) = \left. \frac{d}{dt} \rho(e^{tA}) \right|_{t=0}$$

i tada je

$$\rho(e^{tA}) = e^{t\tilde{\rho}(A)}.$$

Na taj način svakoj neprekidnoj konačnodimenzionalnoj reprezentaciji ρ grupe $SU(2)$ na prostoru V pridruženo je preslikavanje $\tilde{\rho} : \mathfrak{su}(2) \rightarrow L(V)$.

Teorem 5.2.5. *Neka su ρ i ω neprekidne konačnodimenzionalne reprezentacije grupe $SU(2)$ na prostorima V i U .*

(a) $\tilde{\rho}$ je reprezentacija Liejeve algebre $\mathfrak{su}(2)$ tj. \mathbb{R} -linearno preslikavanje sa $\mathfrak{su}(2)$ u $L(V)$ takvo da je

$$\tilde{\rho}([A, B]) = [\tilde{\rho}(A), \tilde{\rho}(B)] \quad \forall A, B \in \mathfrak{su}(2).$$

(b) Potprostor W prostora V je ρ -invarijantan ako i samo ako je $\tilde{\rho}$ -invarijantan.

(c) Reprezentacija ρ grupe $SU(2)$ je ireducibilna ako i samo ako je reprezentacija $\tilde{\rho}$ Liejeve algebre $\mathfrak{su}(2)$ ireducibilna.

(d) $\text{Hom}_{SU(2)}(V, U) = \text{Hom}_{\mathfrak{su}(2)}(V, U)$.

(e) Reprezentacije ρ i ω grupe $SU(2)$ su ekvivalentne ako i samo ako su reprezentacije $\tilde{\rho}$ i $\tilde{\omega}$ Liejeve algebre $\mathfrak{su}(2)$ ekvivalentne.

Za dokaz tvrdnje (a) treba nam sljedeća propozicija:

Propozicija 5.2.6. (a) *Postoji otvorena okolina \mathcal{U} nule u realnom vektorskom prostoru $\mathfrak{su}(2)$ i otvorena okolina \mathcal{V} jedinice u grupi $SU(2)$ takve da je eksponencijalno preslikavanje $\exp : A \mapsto e^A$ difeomorfizam sa \mathcal{U} na \mathcal{V} (tj. homeomorfizam takav da su preslikavanja $\exp|_{\mathcal{U}}$ i $(\exp|_{\mathcal{U}})^{-1}$ klase C^∞).*

(b) *Postoji otvorena okolina \mathcal{U}' točke $(0, 0, 0)$ u prostoru \mathbb{R}^3 i otvorena okolina \mathcal{V}' jedinice u grupi $SU(2)$ takve da je za bazu*

$$A_1 = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}$$

realnog prostora $\mathfrak{su}(2)$ preslikavanje $(y_1, y_2, y_3) \mapsto e^{y_1 A_1} e^{y_2 A_2} e^{y_3 A_3}$ difeomorfizam sa \mathcal{U}' na \mathcal{V}' .

Dokaz: (a) Identificirat ćemo grupu $SU(2)$ s jediničnom sferom

$$S^3 = \{(x_0, x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^4; x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$$

euklidskog prostora \mathbb{R}^4 kao u zadatku 5.6. tako da točku $(x_0, x_1, x_2, x_3) \in S^3$ identificiramo s matricom

$$\begin{bmatrix} x_0 + ix_1 & x_2 + ix_3 \\ -x_2 + ix_3 & x_0 - ix_1 \end{bmatrix} \in SU(2).$$

Tada se jedinica I_2 u grupi $SU(2)$ identificira s točkom $(1, 0, 0, 0) \in S^3$. Nadalje, otvorena okolina \mathcal{W} jedinice u grupi $SU(2)$ definirana sa

$$\mathcal{W} = \left\{ \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{bmatrix} \in SU(2); \operatorname{Re} \alpha > 0 \right\}$$

identificira se sa sljedećom otvorenom okolinom točke $(1, 0, 0, 0)$ na sferi S^3 :

$$\{(x_0, x_1, x_2, x_3) \in S^3; x_0 > 0\}.$$

Ta se okolina identificira s otvorenom jediničnom kuglom $K = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < 1\}$ u euklidskom prostoru \mathbb{R}^3 pomoću difeomorfizma

$$(x_1, x_2, x_3) \mapsto \left(\sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2}, x_1, x_2, x_3 \right),$$

odnosno,

$$(x_1, x_2, x_3) \mapsto \begin{bmatrix} \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2} + ix_1 & x_2 + ix_3 \\ -x_2 + ix_3 & \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2} - ix_1 \end{bmatrix},$$

sa K na \mathcal{W} . Pri tom difeomorfizmu jedinica u grupi $SU(2)$ identificira se s točkom $0 = (0, 0, 0)$. Inverzna identifikacija je

$$\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{bmatrix} \mapsto (\operatorname{Im} \alpha, \operatorname{Re} \beta, \operatorname{Im} \beta).$$

S druge strane, realan trodimenzionalan vektorski prostor $\mathfrak{su}(2)$ identificira se s euklidskim prostorom \mathbb{R}^3 pomoću baze $\{A_1, A_2, A_3\}$ u $\mathfrak{su}(2)$. Dakle, točka $y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$ identificira se s matricom

$$A(y) = \begin{bmatrix} iy_1 & y_2 + iy_3 \\ -y_2 + iy_3 & -iy_1 \end{bmatrix} \in \mathfrak{su}(2).$$

Zadatak 5.12. Uz gornju oznaku dokažite indukcijom po n da je

$$A(y)^{2n} = (-1)^n \|y\|^{2n} I_2, \quad A(y)^{2n+1} = (-1)^n \|y\|^{2n} A(y), \quad y \in \mathbb{R}^3, \quad \|y\| = \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2}.$$

Izvedite odatle da za $y \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ vrijedi

$$e^{A(y)} = (\cos \|y\|) I_2 + \frac{\sin \|y\|}{\|y\|} A(y) = \begin{bmatrix} \cos \|y\| + i \frac{y_1}{\|y\|} \sin \|y\| & \frac{y_2 + iy_3}{\|y\|} \sin \|y\| \\ \frac{-y_2 + iy_3}{\|y\|} \sin \|y\| & \cos \|y\| - i \frac{y_1}{\|y\|} \sin \|y\| \end{bmatrix}.$$

Definiramo sada otvorenu okolinu L nule u \mathbb{R}^3

$$L = \{y \in \mathbb{R}^3; e^{A(y)} \in \mathcal{W}\}.$$

Zbog zadatka 5.12. i uz uvedenu identifikaciju okoline \mathcal{W} s otvorenom jediničnom kuglom K u \mathbb{R}^3 imamo

$$L = \{y \in \mathbb{R}^3; \cos \|y\| > 0\} = \left\{ y \in \mathbb{R}^3; \|y\| < \frac{\pi}{2} \text{ ili } \frac{4n-1}{2}\pi < \|y\| < \frac{4n+1}{2}\pi \text{ za neki } n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Neka je M komponenta povezanosti skupa L koja sadrži nulu, tj. otvorena kugla u \mathbb{R}^3 oko nule radijusa $\pi/2$:

$$M = \left\{ y \in \mathbb{R}^3; \|y\| < \frac{\pi}{2} \right\}$$

Prema zadatku 5.12. uz ove identifikacije preslikavanje $\exp : A \mapsto e^A$ restringirano na otvorenu kuglu M je C^∞ -preslikavanje sa M u K zadano sa $0 \mapsto 0$ i

$$y = (y_1, y_2, y_3) \mapsto \left(\frac{y_1}{\|y\|} \sin \|y\|, \frac{y_2}{\|y\|} \sin \|y\|, \frac{y_3}{\|y\|} \sin \|y\| \right) = \frac{\sin \|y\|}{\|y\|} y \quad \text{za } y \neq 0.$$

Prema teoremu o inverznoj funkciji iz teorije funkcija više realnih varijabli tvrdnja (a) će biti dokazana ako pokažemo da je Jacobijeva matrica tog preslikavanja u nuli regularna. To slijedi iz sljedećeg zadatka:

Zadatak 5.13. *Dokažite da je Jacobijeva matrica preslikavanja $0 \mapsto 0$, i $y \mapsto \frac{\sin \|y\|}{\|y\|} y$ za $y \neq 0$ u točki $y \in M \setminus \{(0, 0, 0)\}$ jednaka*

$$\frac{\sin \|y\|}{\|y\|} I_3 + \left(\frac{\cos \|y\|}{\|y\|^2} - \frac{\sin \|y\|}{\|y\|^3} \right) \begin{bmatrix} y_1^2 & y_1 y_2 & y_1 y_3 \\ y_1 y_2 & y_2^2 & y_2 y_3 \\ y_1 y_3 & y_2 y_3 & y_3^2 \end{bmatrix},$$

te da je Jacobijeva matrica tog preslikavanja u točki $y = (0, 0, 0)$ jednaka jediničnoj matrici I_3 .

Time je tvrdnja (a) propozicije 5.2.6. dokazana.

Tvrdnja (b) dokazuje se sasvim analogno. Prije svega, imamo

$$\begin{aligned} e^{y_1 A_1} e^{y_2 A_2} e^{y_3 A_3} &= \begin{bmatrix} e^{iy_1} & 0 \\ 0 & e^{-iy_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos y_2 & \sin y_2 \\ -\sin y_2 & \cos y_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos y_3 & i \sin y_3 \\ i \sin y_3 & \cos y_3 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} e^{iy_1} (\cos y_2 \cos y_3 + i \sin y_2 \sin y_3) & e^{iy_1} (\sin y_2 \cos y_3 + i \cos y_2 \sin y_3) \\ e^{-iy_1} (-\sin y_2 \cos y_3 + i \cos y_2 \sin y_3) & e^{-iy_1} (\cos y_2 \cos y_3 - i \sin y_2 \sin y_3) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Ta se matrica za male vrijednosti parametara y_1, y_2, y_3 kao u (a) identificira s točkom

$$(x_1(y_1, y_2, y_3), x_2(y_1, y_2, y_3), x_3(y_1, y_2, y_3)) \in \mathbb{R}^3,$$

gdje je

$$\begin{aligned} x_1(y_1, y_2, y_3) &= \cos y_1 \sin y_2 \sin y_3 + \sin y_1 \cos y_2 \cos y_3, \\ x_2(y_1, y_2, y_3) &= \cos y_1 \sin y_2 \cos y_3 - \sin y_1 \cos y_2 \sin y_3, \\ x_3(y_1, y_2, y_3) &= \sin y_1 \sin y_2 \cos y_3 + \cos y_1 \cos y_2 \sin y_3. \end{aligned}$$

Jednostavan račun pokazuje da je Jacobijeva matrica preslikavanja

$$(y_1, y_2, y_3) \mapsto (x_1(y_1, y_2, y_3), x_2(y_1, y_2, y_3), x_3(y_1, y_2, y_3))$$

u točki $(0, 0, 0)$ jednaka jediničnoj matrici I_3 . Odatle slijedi tvrdnja (b) i time je propozicija 5.2.6. dokazana.

Dokaz teorema 5.2.5: (a) Za $A \in \mathfrak{su}(2)$ i za $\lambda \in \mathbb{R}$ imamo

$$\tilde{\rho}(\lambda A) = \left. \frac{d}{dt} \rho(e^{t\lambda A}) \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt} e^{t\lambda \tilde{\rho}(A)} \right|_{t=0} = \lambda \tilde{\rho}(A).$$

Dakle, vrijedi

$$\tilde{\rho}(\lambda A) = \lambda \tilde{\rho}(A) \quad \forall A \in \mathfrak{su}(2) \quad \text{i} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}. \quad (5.4)$$

Neka su \mathcal{U}' otvorena okolina nule u $\mathfrak{su}(2)$ i \mathcal{V}' otvorena okolina jedinice u grupi $SU(2)$ iz propozicije 5.2.6., pri čemu je prostor $\mathfrak{su}(2)$ identificiran s prostorom \mathbb{R}^3 pomoću baze $\{A_1, A_2, A_3\}$. Zbog (5.4) za dokaz linearnosti preslikavanja $\tilde{\rho}$ dovoljno je dokazati da vrijedi

$$\tilde{\rho}(A + B) = \tilde{\rho}(A) + \tilde{\rho}(B)$$

za sve $A, B \in \mathcal{U}'$ takve da su $A+B \in \mathcal{U}'$. Izaberimo takve A i B . Tada prema tvrdnji (b) propozicije 5.2.6. postoje $\varepsilon > 0$ i C^∞ -funkcije $\omega_1, \omega_2, \omega_3 : \langle -\varepsilon, \varepsilon \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ takve da je

$$e^{tA} e^{tB} e^{-t(A+B)} = e^{\omega_1(t)A_1} e^{\omega_2(t)A_2} e^{\omega_3(t)A_3}, \quad t \in \langle -\varepsilon, \varepsilon \rangle.$$

Imamo

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dt} e^{tA} e^{tB} e^{-t(A+B)} \right|_{t=0} &= \left(A e^{tA} e^{tB} e^{-t(A+B)} + e^{tA} B e^{tB} e^{-t(A+B)} + e^{tA} e^{tB} (A+B) e^{-t(A+B)} \right) \Big|_{t=0} = \\ &= A + B - (A+B) = 0. \end{aligned}$$

S druge strane, zbog $\omega_1(0) = \omega_2(0) = \omega_3(0) = 0$ imamo

$$\left. \frac{d}{dt} e^{\omega_1(t)A_1} e^{\omega_2(t)A_2} e^{\omega_3(t)A_3} \right|_{t=0} = \dot{\omega}_1(0)A_1 + \dot{\omega}_2(0)A_2 + \dot{\omega}_3(0)A_3,$$

gdje smo stavili

$$\dot{\omega}_j(0) = \left. \frac{d}{dt} \omega_j(t) \right|_{t=0}, \quad j = 1, 2, 3.$$

Prema tome je

$$\dot{\omega}_1(0)A_1 + \dot{\omega}_2(0)A_2 + \dot{\omega}_3(0)A_3 = 0,$$

a kako su A_1, A_2 i A_3 linearno nezavisni, slijedi da je

$$\dot{\omega}_1(0) = \dot{\omega}_2(0) = \dot{\omega}_3(0) = 0. \quad (5.5)$$

S druge strane, kako je ρ reprezentacija grupe $SU(2)$ i kako vrijedi

$$\rho(e^{sC}) = e^{s\tilde{\rho}(C)} \quad \forall C \in \mathfrak{su}(2) \quad \text{i} \quad \forall s \in \mathbb{R},$$

dobivamo

$$\rho(e^{tA} e^{tB} e^{-t(A+B)}) = \rho(e^{tA}) \rho(e^{tB}) \rho(e^{-t(A+B)}) = e^{t\tilde{\rho}(A)} e^{t\tilde{\rho}(B)} e^{t\tilde{\rho}(A+B)}$$

i

$$\rho(e^{\omega_1(t)A_1} e^{\omega_2(t)A_2} e^{\omega_3(t)A_3}) = \rho(e^{\omega_1(t)A_1}) \rho(e^{\omega_2(t)A_2}) \rho(e^{\omega_3(t)A_3}) = e^{\omega_1(t)\tilde{\rho}(A_1)} e^{\omega_2(t)\tilde{\rho}(A_2)} e^{\omega_3(t)\tilde{\rho}(A_3)}.$$

Dakle, vrijedi

$$e^{t\tilde{\rho}(A)} e^{t\tilde{\rho}(B)} e^{t\tilde{\rho}(A+B)} = e^{\omega_1(t)\tilde{\rho}(A_1)} e^{\omega_2(t)\tilde{\rho}(A_2)} e^{\omega_3(t)\tilde{\rho}(A_3)}, \quad t \in \langle -\varepsilon, \varepsilon \rangle.$$

Deriviramo sada obje strane ove jednakosti po varijabli t i zatim uvrstimo $t = 0$. Analogni račun kao malo prije daje uzevši u obzir (5.5),

$$\tilde{\rho}(A) + \tilde{\rho}(B) - \tilde{\rho}(A+B) = \dot{\omega}_1(0)\tilde{\rho}(A_1) + \dot{\omega}_2(0)\tilde{\rho}(A_2) + \dot{\omega}_3(0)\tilde{\rho}(A_3) = 0.$$

Time je dokazano da vrijedi $\tilde{\rho}(A + B) = \tilde{\rho}(A) + \tilde{\rho}(B)$ ako su $A, B \in \mathcal{U}'$ takve da je $A + B \in \mathcal{U}'$. Dakle, dokazana je \mathbb{R} -linearnost preslikavanja $\tilde{\rho} : \mathfrak{su}(2) \rightarrow L(V)$.

Treba još dokazati da vrijedi

$$\tilde{\rho}([A, B]) = [\tilde{\rho}(A), \tilde{\rho}(B)], \quad A, B \in \mathfrak{su}(2).$$

Zbog (5.4) dovoljno je tu jednakost dokazati u situaciji kad su $A, B \in \mathcal{U}'$ takvi da je $[A, B] \in \mathcal{U}'$. Slično kao prije zaključujemo da postoje $\varepsilon > 0$ i C^∞ -funkcije $\omega_1, \omega_2, \omega_3 : [0, \varepsilon] \rightarrow \mathbb{R}$ takve da je

$$e^{\sqrt{t}A} e^{\sqrt{t}B} e^{-\sqrt{t}A} e^{-\sqrt{t}B} e^{-t[A, B]} = e^{\omega_1(t)A_1} e^{\omega_2(t)A_2} e^{\omega_3(t)A_3}, \quad t \in [0, \varepsilon]. \quad (5.6)$$

Kako je lijeva strana jednaka I_2 za $t = 0$ i u ovom slučaju je $\omega_1(0) = \omega_2(0) = \omega_3(0) = 0$.

Neka su sada T i S proizvoljni linearni operatori na konačnodimenzionalnom vektorskom prostoru. Tada je za $t \geq 0$

$$\begin{aligned} & e^{\sqrt{t}T} e^{\sqrt{t}S} e^{-\sqrt{t}T} e^{-\sqrt{t}S} = \\ &= (I + \sqrt{t}T + \frac{t}{2}T^2 + \dots)(I + \sqrt{t}S + \frac{t}{2}S^2 + \dots)(I - \sqrt{t}T + \frac{t}{2}T^2 + \dots)(I - \sqrt{t}S + \frac{t}{2}S^2 + \dots) = \\ & I + \sqrt{t}(T + S - T - S) + t \left(\frac{1}{2}T^2 + \frac{1}{2}S^2 + \frac{1}{2}T^2 + \frac{1}{2}S^2 + TS - T^2 - TS - ST - S^2 + TS \right) + \\ & + t^{3/2} \left(\frac{1}{6}T^3 + \frac{1}{6}S^3 - \frac{1}{6}T^3 - \frac{1}{6}S^3 + \frac{1}{2}T^2S - \frac{1}{2}T^3 - \frac{1}{2}T^2S + \frac{1}{2}TS^2 - \frac{1}{2}S^2T - \frac{1}{2}S^3 + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2}T^3 + \frac{1}{2}ST^2 - \frac{1}{2}T^2S + \frac{1}{2}TS^2 + \frac{1}{2}S^3 - \frac{1}{2}TS^2 - TST - TS^2 + T^2S + STS \right) + \dots = \\ &= I + t[T, S] + \frac{1}{2}t^{3/2}([T, [T, S]] + [S, [T, S]]) + \dots \end{aligned}$$

Odatle slijedi

$$\left. \frac{d}{dt} e^{\sqrt{t}T} e^{\sqrt{t}S} e^{-\sqrt{t}T} e^{-\sqrt{t}S} \right|_{t=0} = [T, S]. \quad (5.7)$$

Stoga imamo

$$\left. \frac{d}{dt} e^{\sqrt{t}A} e^{\sqrt{t}B} e^{-\sqrt{t}A} e^{-\sqrt{t}B} e^{-t[A, B]} \right|_{t=0} = [A, B] - [A, B] = 0.$$

Nadalje, isti račun kao i prije daje

$$\left. \frac{d}{dt} e^{\omega_1(t)A_1} e^{\omega_2(t)A_2} e^{\omega_3(t)A_3} \right|_{t=0} = \dot{\omega}_1(0)A_1 + \dot{\omega}_2(0)A_2 + \dot{\omega}_3(0)A_3,$$

dakle,

$$\dot{\omega}_1(0) = \dot{\omega}_2(0) = \dot{\omega}_3(0) = 0. \quad (5.8)$$

Primjenimo sada ρ na obje strane jednakosti (5.6). Kao i prije dobivamo jednakost

$$e^{\sqrt{t}\tilde{\rho}(A)} e^{\sqrt{t}\tilde{\rho}(B)} e^{-\sqrt{t}\tilde{\rho}(A)} e^{-\sqrt{t}\tilde{\rho}(B)} e^{-t\tilde{\rho}([A, B])} = e^{\omega_1(t)\tilde{\rho}(A_1)} e^{\omega_2(t)\tilde{\rho}(A_2)} e^{\omega_3(t)\tilde{\rho}(A_3)}.$$

Sada zbog (5.7) i (5.8) dobivamo redom

$$\begin{aligned} & [\tilde{\rho}(A), \tilde{\rho}(B)] - \tilde{\rho}([A, B]) = \left. \frac{d}{dt} e^{\sqrt{t}\tilde{\rho}(A)} e^{\sqrt{t}\tilde{\rho}(B)} e^{-\sqrt{t}\tilde{\rho}(A)} e^{-\sqrt{t}\tilde{\rho}(B)} e^{-t\tilde{\rho}([A, B])} \right|_{t=0} = \\ &= \left. \frac{d}{dt} e^{\omega_1(t)\tilde{\rho}(A_1)} e^{\omega_2(t)\tilde{\rho}(A_2)} e^{\omega_3(t)\tilde{\rho}(A_3)} \right|_{t=0} = \dot{\omega}_1(0)\tilde{\rho}(A_1) + \dot{\omega}_2(0)\tilde{\rho}(A_2) + \dot{\omega}_3(0)\tilde{\rho}(A_3) = 0. \end{aligned}$$

Time je dokazano da vrijedi i

$$\tilde{\rho}([A, B]) = [\tilde{\rho}(A), \tilde{\rho}(B)], \quad A, B \in \mathfrak{su}(2),$$

odnosno, tvrdnja (a) je u potpunosti dokazana.

(b) Pretpostavimo da je potprostor W ρ -invarijantan. Za $A \in \mathfrak{su}(2)$ je tada $e^{tA} \in SU(2)$ za svaki $t \in \mathbb{R}$, dakle vrijedi

$$\rho(e^{tA})w \in W \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad \text{i} \quad \forall w \in W.$$

Međutim, imamo

$$\rho(e^{tA}) = e^{t\tilde{\rho}(A)},$$

dakle, vrijedi

$$e^{t\tilde{\rho}(A)}w \in W \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad \text{i} \quad \forall w \in W.$$

Odatle je za svaki $w \in W$

$$\tilde{\rho}(A)w = \left. \frac{d}{dt} e^{t\tilde{\rho}(A)}w \right|_{t=0} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (e^{t\tilde{\rho}(A)}w - w) \in W,$$

jer je svaki potprostor konačnodimenzionalnog prostora zatvoren. Time je dokazano da je potprostor W invarijantan s obzirom na sve operatore $\tilde{\rho}(A)$, $A \in \mathfrak{su}(2)$.

Pretpostavimo sada da je potprostor W invarijantan s obzirom na sve operatore $\tilde{\rho}(A)$, $A \in \mathfrak{su}(2)$. Tada opet zbog zatvorenosti potprostora W imamo za svaki $w \in W$ i za svaki $A \in \mathfrak{su}(2)$:

$$\rho(e^A)w = e^{\tilde{\rho}(A)}w = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \tilde{\rho}(A)^k w \in W.$$

Dakle, potprostor W je invarijantan s obzirom na sve operatore $\rho(e^A)$, $A \in \mathfrak{su}(2)$. Međutim, vidjeli smo da se svaki element grupe $SU(2)$ može pisati kao

$$B(\varphi_1, \varphi_2, \vartheta) = \begin{bmatrix} e^{i\frac{\varphi_1}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\varphi_1}{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \frac{\vartheta}{2} & -i \sin \frac{\vartheta}{2} \\ -i \sin \frac{\vartheta}{2} & \cos \frac{\vartheta}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{i\frac{\varphi_2}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\varphi_2}{2}} \end{bmatrix} = e^{i\frac{\varphi_1}{2}A_1} e^{-i\frac{\vartheta}{2}A_3} e^{i\frac{\varphi_2}{2}A_1}.$$

Dakle, svaki element B grupe $SU(2)$ može se napisati kao produkt elemenata oblika e^A , $A \in \mathfrak{su}(2)$. Prema tome, potprostor W je invarijantan s obzirom na sve operatore $\rho(B)$, $B \in SU(2)$.

Tvrdnja (c) neposredna je posljedica tvrdnje (b).

(d) Neka je $T \in \text{Hom}_{SU(2)}(V, U)$, tj. $T \in L(V, W)$ je takav da vrijedi $T\rho(B) = \omega(B)T$ za svaki $B \in SU(2)$. Tada za svaki $A \in \mathfrak{su}(2)$ i za svaki $t \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$Te^{t\tilde{\rho}(A)} = T\rho(e^A) = \omega(e^A)T = e^{t\tilde{\omega}(A)}T.$$

Deriviranjem po varijabli t u točki $t = 0$ slijedi $T\tilde{\rho}(A) = \tilde{\omega}(A)T$, dakle, $T \in \text{Hom}_{\mathfrak{su}(2)}(V, W)$.

Pretpostavimo sada da je $T \in \text{Hom}_{\mathfrak{su}(2)}(V, U)$, tj. $T \in L(V, U)$ je takav da je $T\tilde{\rho}(A) = \tilde{\omega}(A)T$, $\forall A \in \mathfrak{su}(2)$. Tada za svaki k vrijedi $T\tilde{\rho}(A)^k = \tilde{\omega}(A)^k T$, dakle,

$$T\rho(e^A) = Te^{\tilde{\rho}(A)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} T\tilde{\rho}(A)^k = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \tilde{\omega}(A)^k T = e^{\tilde{\omega}(A)}T = \omega(e^A)T.$$

Kako je svaki $B \in SU(2)$ produkt elemenata oblika e^A , $A \in \mathfrak{su}(2)$, slijedi $T\rho(B) = \omega(B)T$, $\forall B \in SU(2)$. Dakle, $T \in \text{Hom}_{SU(2)}(V, U)$ i time je tvrdnja (d) dokazana.

Napokon, tvrdnja (e) neposredna je posljedica tvrdnje (d).

Proučit ćemo sada konačnodimenzionalne reprezentacije Liejeve algebre $\mathfrak{su}(2)$, tj. \mathbb{R} -linearna preslikavanja $\pi : \mathfrak{su}(2) \rightarrow L(V)$, za konačnodimenzionalan kompleksan vektorski prostor V , takva da je $\pi([A, B]) = [\pi(A), \pi(B)] \forall A, B \in \mathfrak{su}(2)$. U daljnjem upotrebljavamo prije uvedene oznake

$$A_1 = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}.$$

$\{A_1, A_2, A_3\}$ je baza realnog vektorskog prostora $\mathfrak{su}(2)$ i vrijedi

$$[A_1, A_2] = 2A_3, \quad [A_2, A_3] = 2A_1, \quad [A_3, A_1] = 2A_2.$$

Zadatak 5.14. Dokažite da operacija komutiranja $[A, B] = AB - BA$ u $L(V)$ ili u $M_n(\mathbb{C})$ ima svojstva

$$[A, BC] = [A, B]C + B[A, C] \quad i \quad [A, [B, C]] = [[A, B], C] + [B, [A, C]] \quad \forall A, B, C.$$

Zadatak 5.15. Ako je π reprezentacija Liejeve algebre $\mathfrak{su}(2)$, dokažite da linearni operatori

$$H = -i\pi(A_1), \quad X = \frac{1}{2}\pi(A_2) - \frac{i}{2}\pi(A_3) \quad i \quad Y = -\frac{1}{2}\pi(A_2) - \frac{i}{2}\pi(A_3)$$

zadovoljavaju

$$[H, X] = 2X, \quad [H, Y] = -2Y, \quad [X, Y] = H.$$

Nadalje, dokažite da za operator

$$C = H^2 - 2H + 4XY = H^2 + 2H + 4YX$$

vrijedi

$$[\pi(A), C] = 0 \quad \forall A \in \mathfrak{su}(2)$$

Teorem 5.2.7. Za svaki $n \in \mathbb{N}$ postoji točno jedna klasa ekvivalencije ireducibilnih reprezentacija Liejeve algebre $\mathfrak{su}(2)$ dimenzije n . Ako je π takva, postoji baza $\{e_0, e_1, \dots, e_{n-1}\}$ prostora reprezentacije π na koju operatori $H = -i\pi(A_1)$, $X = \frac{1}{2}\pi(A_2) - \frac{i}{2}\pi(A_3)$ i $Y = -\frac{1}{2}\pi(A_2) - \frac{i}{2}\pi(A_3)$ djeluju na sljedeći način:

$$\begin{aligned} He_j &= (2j - n + 1)e_j & \text{za } j &= 0, 1, \dots, n-1; \\ Xe_j &= e_{j+1} & \text{za } j &= 0, 1, \dots, n-2, & Xe_{n-1} &= 0; \\ Ye_j &= j(n-j)e_{j-1} & \text{za } j &= 1, 2, \dots, n-1, & Ye_0 &= 0. \end{aligned}$$

Dokaz: Pretpostavimo da je π ireducibilna reprezentacija Liejeve algebre $\mathfrak{su}(2)$ na konačnodimenzionalnom prostoru V i neka su $H, X, Y, C \in L(V)$ operatori iz zadatka 5.15. Neka je α svojstvena vrijednost operatora H i $x \neq 0$ pripadni svojstveni vektor, $Hx = \alpha x$. Tada nalazimo

$$HYx = (HY - YH + YH)x = [H, Y]x + YHx = -2Yx + \alpha Yx = (\alpha - 2)Yx.$$

Odatle indukcijom po k slijedi

$$HY^k x = (\alpha - 2k)Y^k x.$$

Doista, ako pretpostavimo da je $HY^{k-1}x = (\alpha - 2k + 2)Y^{k-1}x$, onda pomoću zadatka 5.14. imamo

$$HY^k x = HYY^{k-1}x = ([H, Y] + YH)Y^{k-1}x = -2YY^{k-1}x + Y(\alpha - 2k + 2)Y^{k-1}x = (\alpha - 2k)Y^k x.$$

Odatle zaključujemo da postoji $k \in \mathbb{N}$ takav da je $Y^k x = 0$. Doista, kad bi bilo $Y^k x \neq 0 \forall k$ onda bi $\alpha - 2k$ bila svojstvena vrijednost od H za svaki $k \in \mathbb{N}$, a to je nemoguće zbog toga što je prostor

V konačnodimenzionalan. Neka je, dakle, $k \in \mathbb{N}$ takav da je $e = Y^{k-1}x \neq 0$ i $Y^k x = 0$. Tada je e svojstveni vektor operatora H i vrijedi $Ye = 0$.

Na taj način dokazali smo da postoje $\lambda \in \mathbb{C}$ i $e \in V$, $e \neq 0$, takvi da je

$$He = \lambda e \quad \text{i} \quad Ye = 0.$$

Sada slično kao malo prije slijedi da je

$$HX^j e = (\lambda + 2j)X^j e \quad \forall j \in \mathbb{N}.$$

Stoga postoji $k \geq 0$ takav da je $X^k e \neq 0$ i $X^{k+1} e = 0$. Stavimo tada

$$e_j = X^j e, \quad j = 0, 1, \dots, k$$

Tada je

$$Xe_j = e_{j+1} \quad \text{za} \quad 0 \leq j \leq k-1 \quad \text{i} \quad Xe_k = 0.$$

Nadalje

$$He_j = (\lambda + 2j)e_j \quad \text{za} \quad 0 \leq j \leq k.$$

Po zadatku 5.15. operator C komutira sa svim operatorima reprezentacije π . Sada iz tvrdnje (c) Schurove leme (teorem 1.1.4.) slijedi $C = \beta I_V$ za neki $\beta \in \mathbb{C}$. Sada je

$$\beta e = Ce = (H^2 - 2H + 4XY)e = (\lambda^2 - 2\lambda)e.$$

Dakle, $\beta = \lambda^2 - 2\lambda$, tj. $Cx = (\lambda^2 - 2\lambda)x \quad \forall x \in V$. Sada za $j \in \{1, 2, \dots, k\}$ imamo

$$\begin{aligned} (\lambda^2 - 2\lambda)e_{j-1} &= Ce_{j-1} = (H^2 + 2H + 4YX)e_{j-1} = H^2 e_{j-1} + 2H e_{j-1} + 4YX e_{j-1} = \\ &= (\lambda + 2j - 2)^2 e_{j-1} + 2(\lambda + 2j - 2)e_{j-1} + 4Y e_j, \end{aligned}$$

odakle je

$$Y e_j = \frac{1}{4} (\lambda^2 - 2\lambda - (\lambda + 2j - 2)^2 - 2(\lambda + 2j - 2)) e_{j-1} = -j(\lambda + j - 1)e_{j-1}.$$

Iz dobivenih jednakosti nalazimo

$$(\lambda + 2k)e_k = H e_k = [X, Y]e_k = XY e_k - YX e_k = XY e_k = -k(\lambda + k - 1)X e_{k-1} = -k(\lambda + k - 1)e_k$$

pa slijedi

$$\lambda + 2k = -k\lambda - k^2 + k \quad \implies \quad \lambda = -k.$$

Sve u svemu, imamo formule djelovanja operatora H , X i Y na vektore e_j :

$$\begin{array}{lll} He_j = (2j - k)e_j & \text{za} & j = 0, 1, \dots, k; \\ Xe_j = e_{j+1} & \text{za} & j = 0, 1, \dots, k-1, \quad Xe_k = 0; \\ Ye_j = j(k - j + 1)e_{j-1} & \text{za} & j = 1, 2, \dots, k, \quad Ye_0 = 0. \end{array}$$

Vektori e_0, e_1, \dots, e_k su linearno nezavisni, jer su to svojstveni vektori operatora H za međusobno različite svojstvene vrijednosti. Gornje formule pokazuju da je potprostor W razapet vektorima e_0, e_1, \dots, e_k invarijantan s obzirom na operatore H , X i Y . Kako je

$$\pi(A_1) = iH, \quad \pi(A_2) = X - Y, \quad \pi(A_3) = iX + iY,$$

slijedi da je potprostor W invarijantan s obzirom na operatore $\pi(A_1)$, $\pi(A_2)$ i $\pi(A_3)$, a kako je $\{A_1, A_2, A_3\}$ baza od $\mathfrak{su}(2)$, zaključujemo da je potprostor W invarijantan s obzirom na $\pi(A)$ za sve $A \in \mathfrak{su}(2)$, tj. W je π -invarijantan. Kako je po pretpostavci reprezentacija π ireducibilna, slijedi $W = V$. Dakle, $\{e_0, e_1, \dots, e_k\}$ je baza prostora V . Dakle, ako je $\dim V = n$, onda je $k = n - 1$ pa dobivamo upravo formule iz iskaza teorema.

Na taj način dokazali smo da ako je π n -dimenzionalna ireducibilna reprezentacija Liejeve algebre $\mathfrak{su}(2)$, onda postoji baza $\{e_0, e_1, \dots, e_{n-1}\}$ prostora reprezentacije na koju operatori

$$H = -i\pi(A_1), \quad X = \frac{1}{2}\pi(A_2) - \frac{i}{2}\pi(A_3), \quad Y = -\frac{1}{2}\pi(A_2) - \frac{i}{2}\pi(A_3)$$

djeluju po formulama iz iskaza teorema.

Neka je sada V n -dimenzionalni vektorski prostor s bazom $\{e_0, e_1, \dots, e_{n-1}\}$ i neka su operatori $H, X, Y \in L(V)$ zadani formulama iz iskaza teorema. Tada se direktnim računom provjerava da vrijedi

$$[H, X] = 2X, \quad [H, Y] = -2Y, \quad [X, Y] = H.$$

Definiramo sada operatore $B_1, B_2, B_3 \in L(V)$ sljedećim formulama:

$$B_1 = iH, \quad B_2 = X - Y, \quad B_3 = iX + iY.$$

Tada se provjerava da vrijedi

$$[B_1, B_2] = 2B_3, \quad [B_2, B_3] = 2B_1, \quad [B_3, B_1] = 2B_2,$$

a odatle slijedi da je sa

$$\pi(\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \alpha_3 A_3) = \alpha_1 B_1 + \alpha_2 B_2 + \alpha_3 B_3, \quad \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R},$$

zadana reprezentacija π Liejeve algebre $\mathfrak{su}(2)$ na vektorskom prostoru V . Treba još dokazati da je tako definirana reprezentacija π ireducibilna. Neka je $W \neq \{0\}$ π -invarijantni potprostor prostora V . Tada je W invarijantan s obzirom na operator H , pa slijedi da u potprostoru W postoji svojstven vektor operatora H . Slijedi da je $e_j \in W$ za neki $j \in \{0, 1, \dots, n-1\}$. Sada iz formula djelovanja operatora X i iz činjenice da je potprostor W invarijantan s obzirom na X slijedi da su $e_{j+1}, \dots, e_{n-1} \in W$. Analogno, iz formula djelovanja operatora Y i iz činjenice da je potprostor W invarijantan s obzirom na operator Y slijedi da su i $e_{j-1}, \dots, e_0 \in W$. Dakle, $\{e_0, e_1, \dots, e_{n-1}\} \subseteq W$, pa zaključujemo da je $W = V$. Dakle, reprezentacija π je ireducibilna.

Napokon, ako su π i σ ireducibilne reprezentacije Liejeve algebre $\mathfrak{su}(2)$ na prostorima V i W i ako je $\dim V = \dim W = n - 1$, onda prema prvom dijelu dokaza postoji baza $\{e_0, e_1, \dots, e_{n-1}\}$ prostora V takva da za operatore $H = -i\pi(A_1)$, $X = \frac{1}{2}\pi(A_2) - \frac{i}{2}\pi(A_3)$ i $Y = -\frac{1}{2}\pi(A_2) - \frac{i}{2}\pi(A_3)$ vrijede formule iz iskaza teorema. Iz istog razloga postoji baza $\{f_0, f_1, \dots, f_{n-1}\}$ prostora W na koju operatori $H' = -i\sigma(A_1)$, $X' = \frac{1}{2}\sigma(A_2) - \frac{i}{2}\sigma(A_3)$ i $Y' = -\frac{1}{2}\sigma(A_2) - \frac{i}{2}\sigma(A_3)$ djeluju na isti način:

$$\begin{aligned} H'f_j &= (2j - n + 1)f_j & \text{za } j &= 0, 1, \dots, n-1; \\ X'f_j &= f_{j+1} & \text{za } j &= 0, 1, \dots, n-2, & X'f_{n-1} &= 0; \\ Y'f_j &= j(n-j)f_{j-1} & \text{za } j &= 1, 2, \dots, n-1, & Y'f_0 &= 0. \end{aligned}$$

Neka je $T : V \rightarrow W$ izomorfizam vektorskih prostora zadan sa $Te_j = f_j$, $j = 0, 1, \dots, n-1$. Tada očito vrijedi

$$TH = H'T, \quad TX = X'T, \quad TY = Y'T.$$

Imamo

$$\pi(A_1) = iH, \quad \pi(A_2) = X - Y, \quad \pi(A_3) = iX + iY,$$

$$\sigma(A_1) = iH', \quad \sigma(A_2) = X' - Y', \quad \sigma(A_3) = iX' + iY'$$

pa iz gornjih jednakosti slijedi

$$T\pi(A_j) = \sigma(A_j)T \quad \text{za} \quad j = 1, 2, 3.$$

Kako je $\{A_1, A_2, A_3\}$ baza realnog vektorskog prostora $\mathfrak{su}(2)$ i kako su π i σ \mathbb{R} -linearna preslikavanja, zaključujemo da je

$$T\pi(A) = \sigma(A)T \quad \forall A \in \mathfrak{su}(2).$$

Time je dokazano da su ireducibilne reprezentacije π i σ ekvivalentne čim imaju istu dimenziju. Dakle, teorem 5.2.7. u potpunosti je dokazan.

A priori nije jasno da je svaka ireducibilna konačnodimenzionalna reprezentacija Liejeve algebre $\mathfrak{su}(2)$ oblika $\tilde{\rho}$ za neku neprekidnu ireducibilnu reprezentaciju ρ grupe $SU(2)$. Sada ćemo za svaki prirodan broj n konstruirati n -dimenzionalnu neprekidnu ireducibilnu reprezentaciju grupe $SU(2)$.

Neka je \mathcal{P} vektorski prostor svih polinoma dvije varijable s kompleksnim koeficijentima. Za svaku matricu $A \in GL(2, \mathbb{C})$ definiramo linearan operator $\pi(A)$ na prostoru \mathcal{P} na sljedeći način:

$$(\pi(A)P)(x, y) = P(\alpha x + \gamma y, \beta x + \delta y), \quad A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \in GL(2, \mathbb{C}).$$

Lako se provjeri da je tada $\pi(AB) = \pi(A)\pi(B)$, $A, B \in GL(2, \mathbb{C})$, i da je $\pi(I_2) = I_{\mathcal{P}}$. Dakle, π je reprezentacija grupe $GL(2, \mathbb{C})$ na vektorskom prostoru \mathcal{P} . Označimo sa \mathcal{P}_n potprostor od \mathcal{P} svih homogenih polinoma stupnja n . Tada je $\dim \mathcal{P}_n = n + 1$ jer ako stavimo $P_{n,k}(x, y) = x^k y^{n-k}$ onda je očito $\{P_{n,0}, P_{n,1}, \dots, P_{n,n}\}$ baza od \mathcal{P}_n . Nadalje, jasno je da je \mathcal{P}_n π -invarijantan potprostor od \mathcal{P} i da je subreprezentacija $\pi_{\mathcal{P}_n}$ neprekidna. Označimo sa π_n restrikciju te subreprezentacije na podgrupu $SU(2)$ grupe $GL(2, \mathbb{C})$. Dakle,

$$(\pi_n(A)P)(x, y) = P(\alpha x - \bar{\beta}y, \beta x + \bar{\alpha}y), \quad A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{bmatrix} \in SU(2).$$

Izračunajmo sada operatore $\tilde{\pi}_n(A_1)$, $\tilde{\pi}_n(A_2)$ i $\tilde{\pi}_n(A_3)$. Imamo

$$e^{tA_1} = \begin{bmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{-it} \end{bmatrix}, \quad e^{tA_2} = \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad e^{tA_3} = \begin{bmatrix} \cos t & i \sin t \\ i \sin t & \cos t \end{bmatrix}.$$

Stoga je za $P \in \mathcal{P}_n$

$$\begin{aligned} (\rho(e^{tA_1})P)(x, y) &= P(e^{it}x, e^{-it}y), \\ (\rho(e^{tA_2})P)(x, y) &= P(x \cos t - y \sin t, x \sin t + y \cos t), \\ (\rho(e^{tA_3})P)(x, y) &= P(x \cos t + iy \sin t, ix \sin t + y \cos t). \end{aligned}$$

Odatle dobivamo

$$(\tilde{\pi}_n(A_1)P)(x, y) = \left. \frac{d}{dt} P(e^{it}x, e^{-it}y) \right|_{t=0} = ix \frac{\partial}{\partial x} P(x, y) - iy \frac{\partial}{\partial y} P(x, y),$$

$$(\tilde{\pi}_n(A_2)P)(x, y) = \left. \frac{d}{dt} P(x \cos t - y \sin t, x \sin t + y \cos t) \right|_{t=0} = -y \frac{\partial}{\partial x} P(x, y) + x \frac{\partial}{\partial y} P(x, y),$$

$$(\tilde{\pi}_n(A_3)P)(x, y) = \left. \frac{d}{dt} P(x \cos t + iy \sin t, ix \sin t + y \cos t) \right|_{t=0} = iy \frac{\partial}{\partial x} P(x, y) + ix \frac{\partial}{\partial y} P(x, y).$$

Stavimo kao i prije

$$H = -i\tilde{\pi}_n(A_1), \quad X = \frac{1}{2}\tilde{\pi}_n(A_2) - \frac{i}{2}\tilde{\pi}_n(A_3) \quad \text{i} \quad Y = -\frac{1}{2}\tilde{\pi}_n(A_2) - \frac{i}{2}\tilde{\pi}_n(A_3).$$

Prema gornjem računu tada imamo na prostoru \mathcal{P}_n :

$$H = x \frac{\partial}{\partial x} - y \frac{\partial}{\partial y}, \quad X = x \frac{\partial}{\partial y} \quad \text{i} \quad Y = y \frac{\partial}{\partial x}.$$

Ti operatori na bazu $\{P_{n,k}; k = 0, 1, \dots, n\}$ prostora \mathcal{P}_n ($P_{n,k}(x, y) = x^k y^{n-k}$) djeluju na sljedeći način:

$$HP_{n,k} = (2k - n)P_{n,k}, \quad XP_{n,k} = (n - k)P_{n,k+1} \quad \text{i} \quad YP_{n,k} = kP_{n,k-1}.$$

Posebno, vidimo da su vektori baze svojstveni vektori operatora H za međusobno različite svojstvene vrijednosti.

Pretpostavimo sada da je $W \neq \{0\}$ π_n -invarijantan potprostor od \mathcal{P}_n . Tada je prema tvrdnji (b) teorema 5.2.5. potprostor W $\tilde{\pi}_n$ -invarijantan, dakle, W je invarijantan s obzirom na operatore H , X i Y . Slijedi da W sadrži neki od svojstvenih vektora $P_{n,k}$ operatora H . Kako je W invarijantan i s obzirom na operator X , slijedi da W sadrži i vektore $P_{n,k+1}, P_{n,k+2}, \dots, P_{n,n}$, a zbog invarijantnosti s obzirom na operator Y sadrži i vektore $P_{n,k-1}, P_{n,k-2}, \dots, P_{n,0}$. To znači da W sadrži sve vektore baze, odnosno, vrijedi $W = \mathcal{P}_n$. Time je dokazana tvrdnja (a) sljedećeg teorema:

Teorem 5.2.8. (a) *Reprezentacije π_n , $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, grupe $SU(2)$ su ireducibilne.*

(b) *Ako je π konačnodimenzionalna neprekidna ireducibilna reprezentacija grupe $SU(2)$ na prostoru V i $\dim V = n$ onda je $\pi \simeq \pi_{n-1}$.*

Dokaz tvrdnje (b). Prema tvrdnji (c) teorema 5.2.5. $\tilde{\pi}$ i $\tilde{\pi}_{n-1}$ su ireducibilne reprezentacije Liejeve algebre $\mathfrak{su}(2)$ na prostorima V i \mathcal{P}_{n-1} . Nadalje, $\dim V = n = \dim \mathcal{P}_{n-1}$. Iz teorema 5.2.7. slijedi da je $\tilde{\pi} \simeq \tilde{\pi}_{n-1}$. Sada pomoću tvrdnje (e) teorema 5.2.5. zaključujemo da je $\pi \simeq \pi_{n-1}$.

Zadatak 5.16. *Konstruirajte bazu $\{e_0, e_1, \dots, e_n\}$ prostora \mathcal{P}_n takvu da operatori*

$$H = -i\tilde{\pi}_n(A_1), \quad X = \frac{1}{2}\tilde{\pi}_n(A_2) - \frac{i}{2}\tilde{\pi}_n(A_3), \quad Y = -\frac{1}{2}\tilde{\pi}_n(A_2) - \frac{i}{2}\tilde{\pi}_n(A_3)$$

djeluju kao u teoremu 5.2.7:

$$\begin{array}{lll} He_j = (2j - n)e_j & \text{za } j = 0, 1, \dots, n; \\ Xe_j = e_{j+1} & \text{za } j = 0, 1, \dots, n-1, & Xe_n = 0; \\ Ye_j = j(n - j + 1)e_{j-1} & \text{za } j = 1, 2, \dots, n, & Ye_0 = 0. \end{array}$$

Teorem 5.2.9. *Svaka neprekidna konačnodimenzionalna ireducibilna reprezentacija grupe $SO(3)$ je neparne dimenzije. Za svaki neparan prirodan broj n postoji točno jedna klasa ekvivalencije neprekidnih ireducibilnih konačnodimenzionalnih reprezentacija grupe $SO(3)$ dimenzije n .*

Dokaz: Izračunajmo $\pi_n(-I_2)$ za reprezentacije π_n grupe $SU(2)$ konstruirane prije iskaza teorema 5.2.8. Za $P \in \mathcal{P}$ imamo po definiciji reprezentacije π_n :

$$[\pi_n(-I_2)P](x, y) = P(-x, -y) = (-1)^n P(x, y).$$

Dakle,

$$\pi_n(-I_2) = (-1)^n I_{\mathcal{P}_n}.$$

Prema propoziciji 5.2.3. reprezentacija π_n grupe $SU(2)$ nastaje iz reprezentacije kvocijentne grupe $SU(2)/\{I_2, -I_2\} \simeq SO(3)$ ako i samo ako je $\pi_n(-I_2) = I_{\mathcal{P}_n}$, dakle ako i samo ako je $(-1)^n = 1$, tj. ako i samo ako je n paran broj, a to znači ako i samo ako je dimenzija reprezentacije π_n neparna.

Zadatak 5.17. *Neka su π i σ neprekidne reprezentacije grupe $SU(2)$ na konačnodimenzionalnim prostorima V i W . Dokažite da za svaki $A \in \mathfrak{su}(2)$ vrijedi*

$$(\pi \otimes \sigma)^\sim(A) = \tilde{\pi}(A) \otimes I_W + I_V \otimes \tilde{\sigma}(A).$$

Zadatak 5.18. *Neka su π i σ konačnodimenzionalne neprekidne ireducibilne reprezentacije grupe $SU(2)$ na vektorskim prostorima V i W i neka je $\dim V = n + 1 \geq k + 1 = \dim W$. Dokažite da postoje $\pi \otimes \sigma$ -invarijantni potprostori U_j , $j = n - k, n - k + 2, n - k + 4, \dots, n + k - 2, n + k$, takvi da je $\dim U_j = j + 1$ i da su sve subreprezentacije $(\pi \otimes \sigma)_{U_j}$ ireducibilne. Dakle,*

$$\pi_n \otimes \pi_k \simeq \pi_{n-k} \dot{+} \pi_{n-k+2} \dot{+} \pi_{n-k+4} \dot{+} \cdots \dot{+} \pi_{n+k-2} \dot{+} \pi_{n+k}.$$

Uputa: Prema teoremu 5.2.7. postoji baza $\{e_0, e_1, \dots, e_n\}$ prostora V i baza $\{f_0, f_1, \dots, f_k\}$ prostora W koje su sastavljene od svojstvenih vektora operatora

$$H' = -i\pi(A_1), \quad \text{odnosno} \quad H'' = -i\sigma(A_1),$$

i da vrijedi

$$\begin{aligned} H'e_j &= (2j - n)e_j & \text{za } j &= 0, 1, \dots, n; \\ H''f_i &= (2i - k)f_i & \text{za } i &= 0, 1, \dots, k; \end{aligned}$$

Iz zadatka 5.17. slijedi da za operator

$$H = -i(\pi \otimes \sigma)(A_1)$$

vrijedi

$$H = H' \otimes I_W + I_V \otimes H''.$$

Odatle izvedite da je

$$H(e_j \otimes f_i) = (2j + 2i - n - k)(e_j \otimes f_i), \quad 0 \leq j \leq n, \quad 0 \leq i \leq k.$$

Budući da je $\{e_j \otimes f_i; 0 \leq j \leq n, 0 \leq i \leq k\}$ baza prostora $U = V \otimes W$, zaključite da je spektar operatora H jednak

$$Sp(H) = \{-n - k, -n - k + 2, \dots, n + k - 2, n + k\}$$

i da je za $\ell \in Sp(H)$

$$\{e_j \otimes f_i; 0 \leq j \leq n, 0 \leq i \leq k, \ell = 2j + 2i - n - k\}$$

baza svojstvenog potprostora

$$Z_\ell = \{u \in U; Hu = \ell u\}$$

operatora H za svojstvenu vrijednost ℓ . Odredite dimenzije potprostora Z_ℓ , a odatle pomoću potpune reducibilnosti izvedite tvrdnju.

U daljnjim zadacima σ_n je neprekidna ireducibilna reprezentacija grupe $SU(2)$ dimenzije n i χ_n je njen karakter. Napomenimo da je $\sigma_n \simeq \pi_{n-1}$ uz oznake iz teorema 5.2.8. Nadalje, ako je ω konačnodimenzionalna neprekidna reprezentacija grupe $SU(2)$ sa χ_ω označavamo njen karakter.

Zadatak 5.19. Neka je $B \in SU(2)$ takva da je $\sigma(B)$ rotacija oko osi kroz ishodište u \mathbb{R}^3 za kut $\varphi \in [0, 2\pi)$ ($\sigma : SU(2) \rightarrow SO(3)$ je epimorfizam iz propozicije 5.2.2.). Dokažite da je tada

$$\chi_n(B) = \frac{\sin\left(\frac{n\varphi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)}.$$

Uputa: Dokažite da je tada element B u grupi $SU(2)$ konjugiran sa $C = e^{\varphi A_1}$ ili sa $D = e^{(\varphi+2\pi)A_1}$. Zatim izračunajte trag operatora $\pi_n(C)$ i $\pi_n(D)$ koristeći bazu iz teorema 5.2.7.

Zadatak 5.20. Dokažite tvrdnju zadatka 5.18. koristeći zadatak 5.19. i jednakost $\chi_{\pi_n \otimes \pi_k} = \chi_n \cdot \chi_k$.

Zadatak 5.21. Dokažite da je

$$\chi_{\sigma_3 \otimes \sigma_3 \otimes \sigma_3} = \chi_7 + 2\chi_5 + 3\chi_3 + \chi_1,$$

$$\chi_{\sigma_3 \otimes \sigma_3 \otimes \sigma_3 \otimes \sigma_3} = \chi_9 + 3\chi_7 + 6\chi_5 + 6\chi_3 + 3\chi_1,$$

$$\chi_{\sigma_3 \otimes \sigma_3 \otimes \sigma_3 \otimes \sigma_3 \otimes \sigma_3} = \chi_{11} + 4\chi_9 + 10\chi_7 + 15\chi_5 + 15\chi_3 + 6\chi_1.$$

Zadatak 5.22. Neka je V prostor reprezentacije σ_n . Dokažite da postoje linearni operatori $S, A : V \otimes V \rightarrow V \otimes V$ takvi da vrijedi

$$S(x \otimes y) = x \otimes y + y \otimes x \quad i \quad A(x \otimes y) = x \otimes y - y \otimes x, \quad x, y \in V.$$

Neka su $R(S)$ i $R(A)$ područja vrijednosti tih operatora. Dokažite da su potprostori $R(S)$ i $R(A)$ $\sigma_n \otimes \sigma_n$ -invarijantni i da je $V \otimes V = R(S) \dot{+} R(A)$. Pronađite rastav subreprezentacija $(\sigma_n \otimes \sigma_n)_{R(S)}$ i $(\sigma_n \otimes \sigma_n)_{R(A)}$ u direktnu sumu ireducibilnih subreprezentacija.

5.3 Sferni harmonici

Promatrat ćemo sada funkcije na jediničnoj sferi S^2 u \mathbb{R}^3 :

$$S^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}.$$

Polarne koordinate (r, ϑ, φ) , $r \geq 0$, $\vartheta \in [0, \pi]$, $\varphi \in [0, 2\pi)$, na prostoru \mathbb{R}^3 zadane su sa

$$x_1 = r \sin \vartheta \cos \varphi, \quad x_2 = r \sin \vartheta \sin \varphi, \quad x_3 = r \cos \vartheta.$$

Ako iz \mathbb{R}^3 izuzmemo npr. pozitivni dio treće osi, prijelaz s Kartezijevih na polarne koordinate je klase C^∞ . Standardni integral na \mathbb{R}^3 u polarnim koordinatama postaje

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} F dx_1 dx_2 dx_3 = \int_0^{+\infty} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} F r^2 \sin \vartheta dr d\vartheta d\varphi.$$

Odatle dobivamo koordinate (ϑ, φ) , $\vartheta \in [0, \pi]$, $\varphi \in [0, 2\pi)$, na sferi S^2 , i integral na S^2 koji normiramo tako da površina sfere S^2 bude jednaka 1:

$$f \mapsto \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} f(\vartheta, \varphi) \sin \vartheta d\vartheta d\varphi.$$

Neka je $L_2(S^2)$ Hilbertov prostor (klasa) kvadratno integrabilnih kompleksnoznačnih funkcija na sferi S^2 sa skalarnim produktom

$$(f|g) = \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} f(\vartheta, \varphi) \overline{g(\vartheta, \varphi)} \sin \vartheta d\vartheta d\varphi.$$

Laplaceov operator ili **Laplasijan** Δ je diferencijalni operator na \mathbb{R}^3 definiran sa

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}.$$

Prijelazom na polarne koordinate dobivamo

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \Delta_{S^2}, \quad (5.9)$$

gdje je Δ_{S^2} tzv. **sferni Laplasijan**:

$$\Delta_{S^2} = \frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2} + \cot \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} + \frac{1}{(\sin \vartheta)^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}. \quad (5.10)$$

Svaka matrica $A \in SO(3)$ djeluje kao rotacija prostora \mathbb{R}^3 . Za funkciju $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C}$ i za $A \in SO(3)$ definiramo funkciju $\rho(A)f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C}$ sa

$$(\rho(A)f)(x) = f(A^{-1}x), \quad x \in \mathbb{R}^3.$$

Tada očito vrijedi

$$\rho(A)\rho(B)f = \rho(AB)f \quad \forall A, B \in SO(3) \quad \text{i za svaku funkciju } f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C}.$$

Restrikcije operatora $\rho(A)$ na invarijantne potprostore funkcija označavat ćemo također sa $\rho(A)$; npr. na prostoru $L_2(\mathbb{R}^3)$ ili na njegovim gustim potprostorima $C_0(\mathbb{R}^3)$ i $C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$.

Uvest ćemo sada pojam harmonijskih polinoma i vidjeti da se restrikcijama operatora $\rho(A)$, $A \in SO(3)$, na prostore homogenih harmonijskih polinoma dobivaju sve ireducibilne konačnodimenzionalne reprezentacije grupe $SO(3)$.

Harmonijska funkcija je funkcija $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C}$ koja je klase C^2 i vrijedi

$$\Delta f = 0.$$

Za svaki $\ell \in \mathbb{Z}_+$ označimo sa \mathcal{P}^ℓ kompleksan vektorski prostor svih homogenih kompleksnoznačnih polinoma na \mathbb{R}^3 stupnja ℓ . Nadalje, neka je \mathcal{H}^ℓ potprostor od \mathcal{P}^ℓ svih **harmonijskih polinoma** tj. svih $P \in \mathcal{P}^\ell$ takvih da je $\Delta P = 0$.

Zadatak 5.23. *Dokažite da je*

$$\dim \mathcal{P}^\ell = \frac{(\ell + 1)(\ell + 2)}{2}.$$

Zadatak 5.24. *Dokažite da je za svaki $\ell \in \mathbb{Z}_+$ $\Delta|_{\mathcal{P}^\ell}$ surjektivna sa \mathcal{P}^ℓ na $\mathcal{P}^{\ell-2}$. Pri tome podrazumijevamo da je $\mathcal{P}^{-1} = \mathcal{P}^{-2} = \{0\}$.*

Uputa: Dokažite direktnim računom da su polinomi oblika $x \mapsto x_3^{q_3}$, $x \mapsto x_1 x_3^{q_3}$ i $x \mapsto x_2 x_3^{q_3}$, $q_3 \in \mathbb{Z}_+$, u slici operatora $\Delta|_{\mathcal{P}}$. Zatim pomoću formule

$$\Delta(x_1^{q_1} x_2^{q_2} x_3^{q_3}) = q_1(q_1 - 1)x_1^{q_1-2} x_2^{q_2} x_3^{q_3} + q_2(q_2 - 1)x_1^{q_1} x_2^{q_2-2} x_3^{q_3} + q_3(q_3 - 1)x_1^{q_1} x_2^{q_2} x_3^{q_3-2}$$

dokažite da iz surjektivnosti $\Delta|_{\mathcal{P}^\ell} : \mathcal{P}^\ell \rightarrow \mathcal{P}^{\ell-2}$ slijedi surjektivnost $\Delta|_{\mathcal{P}^{\ell+2}} : \mathcal{P}^{\ell+2} \rightarrow \mathcal{P}^\ell$. Napokon, uočite da je tvrdnja trivijalna za $\ell = 0$ i $\ell = 1$.

Zadatak 5.25. *Dokažite da je $\dim \mathcal{H}^\ell = 2\ell + 1 \quad \forall \ell \in \mathbb{Z}_+$.*

Uputa: Iskoristite zadatke 5.23. i 5.24.

Ako je $P \in \mathcal{P}$ i $A \in SO(3)$ očito je i $\rho(A)P \in \mathcal{P}$. Štoviše, ako je $P \in \mathcal{P}^\ell$ i $A \in SO(3)$, onda je i $\rho(A)P \in \mathcal{P}^\ell$. Iz definicije ρ jasno je da je za svaki $P \in \mathcal{P}^\ell$ preslikavanje $A \mapsto \rho(A)P$ sa $SO(3)$ u \mathcal{P}^ℓ neprekidno. Prema tome, $A \mapsto \rho(A)|\mathcal{P}^\ell$ je reprezentacija grupe $SO(3)$ na konačnodimenzionalnom prostoru \mathcal{P}^ℓ .

Propozicija 5.3.1. *Potprostor \mathcal{H}^ℓ od \mathcal{P}^ℓ je ρ -invarijantan.*

Dokaz: Neka je $A \in SO(3)$ i neka su α_{ij} matricni elementi matrice A . Za točku $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ označimo sa $y = (y_1, y_2, y_3)$ točku $A^{-1}x$, dakle,

$$y_k = \sum_{j=1}^3 \alpha_{jk} x_j.$$

Za funkciju $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C}$ klase C^2 i za $1 \leq i \leq 3$ imamo

$$\frac{\partial}{\partial x_i} f(A^{-1}x) = \frac{\partial}{\partial x_i} f \left(\sum_{j=1}^3 \alpha_{j1} x_j, \sum_{j=1}^3 \alpha_{j2} x_j, \sum_{j=1}^3 \alpha_{j3} x_j \right) = \sum_{k=1}^3 \alpha_{ik} \frac{\partial}{\partial y_k} f(y_1, y_2, y_3).$$

Oдавde je

$$\Delta f(A^{-1}x) = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} f(A^{-1}x) = \sum_{i,j,k=1}^3 \alpha_{ij} \alpha_{ik} \frac{\partial^2}{\partial y_j \partial y_k} f(y_1, y_2, y_3).$$

Međutim, A je ortogonalna matrica pa je

$$\sum_{i=1}^3 \alpha_{ik} \alpha_{ij} = \delta_{kj}.$$

Slijedi

$$\Delta f(A^{-1}x) = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2 f}{\partial y_j^2}(y) = (\Delta f)(A^{-1}x).$$

Prema tome, ako je P harmonijski polinom, onda je za svaku $A \in SO(3)$ polinom $\rho(A)P = P \circ A^{-1}$ također harmonijski.

Subreprezentaciju $A \mapsto \rho(A)|\mathcal{H}^\ell$ označavat ćemo sa ρ^ℓ .

Propozicija 5.3.2. *Reprezentacija ρ^ℓ grupe $SO(3)$ je ireducibilna za svaki $\ell \in \mathbb{Z}_+$. Ta je reprezentacija ekvivalentna reprezentaciji $\pi_{2\ell}$ iz odjeljka 5.2.*

Dokaz: Lako se vidi da je homoheni polinom $P_\ell(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + ix_2)^\ell$ stupnja ℓ harmonijski. Neka je $\sigma : SU(2) \rightarrow SO(3)$ epimorfizam iz odjeljka 5.2. Promatrajmo reprezentaciju $\rho^\ell \circ \sigma$ grupe $SU(2)$ na prostoru \mathcal{H}^ℓ . Tada je

$$\sigma \left(\begin{bmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{-it} \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} \cos 2t & -\sin 2t & 0 \\ \sin 2t & \cos 2t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

pa nalazimo

$$(\rho^\ell \circ \sigma) \left(\begin{bmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{-it} \end{bmatrix} \right) P_\ell = e^{-2i\ell t} P_\ell.$$

Odatle slijedi da je P_ℓ svojstveni vektor operatora

$$(\rho^\ell \circ \sigma) \left(\begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix} \right) = \frac{d}{dt} (\rho^\ell \circ \sigma) \left(\begin{bmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{-it} \end{bmatrix} \right) \Big|_{t=0}$$

sa svojstvenom vrijednošću $2i\ell$, dakle, svojstveni vektor operatora

$$H = -i(\rho^\ell \circ \sigma) \left(\begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix} \right)$$

sa svojstvenom vrijednošću 2ℓ . Prema teoremu 5.2.7. u rastavu reprezentacije $\rho^\ell \circ \sigma$ u direktnu sumu ireducibilnih reprezentacija pojavljuje se jedinstvena $(2\ell + 1)$ -dimenzionalna reprezentacija $\pi_{2\ell}$. No kako je $\dim \mathcal{H}_\ell = 2\ell + 1$, slijedi tvrdnja propozicije.

Na taj način realizirali smo sve ireducibilne reprezentacije grupe $SO(3)$ na prostorima homogenih harmonijskih polinoma na \mathbb{R}^3 .

Propozicija 5.3.3. *Za svaki $\ell \geq 2$ je*

$$\mathcal{P}_\ell = \mathcal{H}_\ell \dot{+} r^2 \mathcal{P}^{\ell-2}.$$

Pri tome za polinom P $r^2 P$ označava polinom $(x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)P(x_1, x_2, x_3)$.

Dokaz: Očito je preslikavanje $P \mapsto r^2 P$ injektivno. Prema tome je $\dim r^2 \mathcal{P}^{\ell-2} = \dim \mathcal{P}^{\ell-2}$. Iz zadataka 5.23. i 5.25. znamo da je

$$\dim \mathcal{P}^\ell = \dim \mathcal{H}^\ell + \dim \mathcal{P}^{\ell-2}.$$

Prema tome, treba samo dokazati da je $\mathcal{H}^\ell \cap r^2 \mathcal{P}^\ell = \{0\}$.

Zadatak 5.26. *Dokažite da za svaki $P \in \mathcal{P}^\ell$ vrijedi Eulerov identitet:*

$$(x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + x_3 \frac{\partial}{\partial x_3})P = \ell P.$$

Zadatak 5.27. *Pomoću zadatka 5.26. dokažite da za svaki $P \in \mathcal{P}^\ell$ i svaki $k \in \mathbb{N}$ vrijedi*

$$\Delta(r^{2k} P) = 2k(2\ell + 2k + 1)r^{2k-2} P + r^{2k} \Delta P.$$

Pretpostavimo da postoji $P \in \mathcal{H}^\ell \cap r^2 \mathcal{P}^{\ell-2}$ različit od nule. Neka je $k \in \mathbb{N}$ najveći takav da postoji $Q \in \mathcal{P}^{\ell-2k}$ takav da je $P = r^{2k} Q$. Tada po zadatku 5.27. imamo

$$0 = \Delta P = \Delta(r^{2k} Q) = 2k(2\ell + 2k + 1)r^{2k-2} Q + r^{2k} \Delta Q.$$

Odatle je

$$Q = \frac{1}{2k(2\ell + 2k + 1)} r^2 \Delta Q.$$

To znači da je polinom Q u prstenu polinoma \mathcal{P} djeljiv sa r^2 , a to je nemoguće po izboru k . Ova kontradikcija pokazuje da je $\mathcal{H}^\ell \cap r^2 \mathcal{P}^{\ell-2} = \{0\}$.

Odatle neposredno slijedi:

Korolar 5.3.4. *Vrijedi*

$$\mathcal{P}^\ell = \begin{cases} \mathcal{H}^\ell \dot{+} r^2 \mathcal{H}^{\ell-2} \dot{+} \dots \dot{+} r^\ell \mathcal{H}^0 & \text{ako je } \ell \text{ paran} \\ \mathcal{H}^\ell \dot{+} r^2 \mathcal{H}^{\ell-2} \dot{+} \dots \dot{+} r^{\ell-1} \mathcal{H}^1 & \text{ako je } \ell \text{ neparan.} \end{cases}$$

Uočimo sada da je homogeni polinom na \mathbb{R}^3 potpuno određen svojom restrikcijom na jediničnu sferu S^2 . **Sferni harmonici** su funkcije na sferi S^2 koje su restrikcije harmonijskih polinoma. Za svaki $\ell \in \mathbb{Z}_+$ stavimo

$$\tilde{\mathcal{H}}^\ell = \{P|S^2; P \in \mathcal{H}^\ell\}.$$

Tada je $\tilde{\mathcal{H}}^\ell$ $(2\ell+1)$ -dimenzionalan vektorski prostor. Njegove elemente zovemo **homogeni sferni harmonici stupnja ℓ** . Naravno, sferni harmonici su neprekidne funkcije na sferi S^2 . Dakle, $\tilde{\mathcal{H}}^\ell$ su potprostori od $C(S^2)$, a time i od $L_2(S^2)$. Nadalje, označimo sa $\tilde{\mathcal{P}}^\ell$ potprostor od $C(S^2) \subseteq L_2(S^2)$ koji se sastoji od restrikcija homogenih polinoma $P \in \mathcal{P}^\ell$. Prema korolaru 5.3.4. imamo

$$\tilde{\mathcal{P}}^\ell = \tilde{\mathcal{H}}^\ell \dot{+} \tilde{\mathcal{H}}^{\ell-2} \dot{+} \dots \quad (5.11)$$

pri čemu je posljednji član $\tilde{\mathcal{H}}^0$ ako je ℓ paran, a $\tilde{\mathcal{H}}^1$ ako je ℓ neparan.

Preko izomorfizma restrikcije na prostor $\tilde{\mathcal{H}}^\ell$ s prostora \mathcal{H}^ℓ prenosimo reprezentaciju ρ^ℓ koju ćemo i dalje označavati sa ρ^ℓ . Te su reprezentacije unitarne u odnosu na sklarni produkt iz Hilbertovog prostora $L_2(S^2)$ jer je mjera μ invarijantna u odnosu na rotacije.

Zadatak 5.28. *Neka je*

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_3 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

standardna baza Liejeve algebre $\mathfrak{so}(3)$. Dokažite da za svaku $f \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ vrijedi

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dt} (\rho(e^{tB_1}) f)(x) \right|_{t=0} &= \left(x_3 \frac{\partial}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial}{\partial x_3} \right) f(x), \\ \left. \frac{d}{dt} (\rho(e^{tB_2}) f)(x) \right|_{t=0} &= \left(x_1 \frac{\partial}{\partial x_3} - x_3 \frac{\partial}{\partial x_1} \right) f(x), \\ \left. \frac{d}{dt} (\rho(e^{tB_3}) f)(x) \right|_{t=0} &= \left(x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} - x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} \right) f(x). \end{aligned}$$

Zadatak 5.29. *Iz zadatka 5.28. izvedite da za reprezentaciju ρ^ℓ na prostoru $\tilde{\mathcal{H}}^\ell$ u polarnim koordinatama na S^2 vrijedi*

$$\begin{aligned} \rho^\ell(B_1) &= \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \vartheta} + \cos \varphi \cot \vartheta \frac{\partial}{\partial \varphi}, \\ \rho^\ell(B_2) &= -\cos \varphi \frac{\partial}{\partial \vartheta} + \sin \varphi \cot \vartheta \frac{\partial}{\partial \varphi}, \\ \rho^\ell(B_3) &= -\frac{\partial}{\partial \varphi}. \end{aligned}$$

Budući da su reprezentacije ρ^ℓ unitarne, gornji operatori su antihermitski. Definiramo hermitske operatore množenjem sa i .

$$\begin{aligned} J_1 &= i\rho^\ell(B_1) = i \left(\sin \varphi \frac{\partial}{\partial \vartheta} + \cos \varphi \cot \vartheta \frac{\partial}{\partial \varphi} \right), \\ J_2 &= i\rho^\ell(B_2) = i \left(-\cos \varphi \frac{\partial}{\partial \vartheta} + \sin \varphi \cot \vartheta \frac{\partial}{\partial \varphi} \right), \\ J_3 &= i\rho^\ell(B_3) = -i \frac{\partial}{\partial \varphi}. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Nadalje, kao i u odjeljku 5.2. definiramo operatore

$$J_{\pm} = J_1 \pm iJ_2 = e^{\pm i\varphi} \left(\pm \frac{\partial}{\partial \vartheta} + i \cot \vartheta \frac{\partial}{\partial \varphi} \right). \quad (5.13)$$

Nadalje, definiramo Casimirov operator (također hermitski)

$$C = J_1^2 + J_2^2 + J_3^2 = J_+ J_- + J_3^2 - J_3.$$

Zadatak 5.30. *Dokažite da za $\ell \in \mathbb{Z}_+$ na prostoru $\tilde{\mathcal{H}}^\ell$ vrijedi $C = -\Delta_{S^2}$, tj.*

$$\Delta_{S^2} = \rho^\ell (B_1)^2 + \rho^\ell (B_2)^2 + \rho^\ell (B_3)^2.$$

Za $P \in \mathcal{P}^\ell$ možemo u polarnim koordinatama pisati

$$P(r, \vartheta, \varphi) = r^\ell Y(\vartheta, \varphi), \quad \text{gdje je } Y \in \tilde{\mathcal{P}}^\ell.$$

Pomoću formule (5.9) nalazimo da je

$$\Delta P = 0 \quad \iff \quad \Delta_{S^2} Y = -\ell(\ell + 1)Y.$$

To pokazuje da je

$$\Delta_{S^2} | \tilde{\mathcal{H}}^\ell = -\ell(\ell + 1) I_{\tilde{\mathcal{H}}^\ell}.$$

Drugim riječima, da je prostor $\tilde{\mathcal{H}}^\ell$ sadržan u svojstvenom potprostoru operatora Δ_{S^2} za svojstvenu vrijednost $-\ell(\ell + 1)$. Primijetimo da je $\ell(\ell + 1) \neq \ell'(\ell' + 1)$ ako su $\ell, \ell' \in \mathbb{Z}_+$ i $\ell \neq \ell'$. Prema tome, prostori $\tilde{\mathcal{H}}^\ell$ sadržani su u svojstvenim potprostorima operatora Δ_{S^2} za različite svojstvene vrijednosti.

Zadatak 5.31. *Dokažite da za svake dvije funkcije f, g iz sume prostora $\tilde{\mathcal{H}}^\ell$, $\ell \in \mathbb{Z}_+$, vrijedi*

$$(\Delta_{S^2} f | g) = (f | \Delta_{S^2} g)$$

Uputa: Koristite zadatak 5.30.

Zadatak 5.32. *Pomoću zadatka 5.31. dokažite da su potprostori $\tilde{\mathcal{H}}^\ell$ međusobno ortogonalni u Hilbertovom prostoru $L_2(S^2)$.*

Teorem 5.3.5. *Vrijedi*

$$L_2(S^2) = \bigoplus_{\ell \in \mathbb{Z}_+} \tilde{\mathcal{H}}^\ell.$$

Dokaz: Već znamo da su potprostori $\tilde{\mathcal{H}}^\ell$ međusobno ortogonalni. Budući da je prostor neprekidnih funkcija $C(S^2)$ gust u $L^2(S^2)$, da dokažemo tvrdnju dovoljno je dokazati da je svaka neprekidna funkcija na S^2 uniformni limes suma funkcija iz $\tilde{\mathcal{H}}^\ell$, $\ell \in \mathbb{Z}_+$. Prema Weierstrassovom teoremu svaka je neprekidna funkcija na S^2 uniformni limes niza restrikcija polinoma. No svaka restrikcija homogenog polinoma na S^2 je prema (5.11) suma funkcija iz $\tilde{\mathcal{H}}^\ell$, $\ell \in \mathbb{Z}_+$. Odatle slijedi tvrdnja.

Iz teorema 5.3.5. neposredno slijedi

Korolar 5.3.6. *$\tilde{\mathcal{H}}^\ell$ je svojstveni potprostor operatora Δ_{S^2} za svojstvenu vrijednost $-\ell(\ell + 1)$.*

Konstruirat ćemo sada jednu ortonormiranu bazu $\{Y_m^\ell; m \in \mathbb{Z}, -\ell \leq m \leq \ell\}$ prostora sfernih harmonika $\tilde{\mathcal{H}}^\ell$. Stavimo za $\ell, m \in \mathbb{Z}_+$ i $m \leq \ell$

$$Y_m^\ell(\vartheta, \varphi) = \gamma_m^\ell Z_m^\ell(\vartheta) e^{im\varphi},$$

gdje je

$$Z_m^\ell(\vartheta) = (\sin \vartheta)^m Q_m^\ell(\cos \vartheta), \quad Q_m^\ell = \frac{d^{\ell+m}}{dx^{\ell+m}}(1-x^2)^\ell,$$

a γ_m^ℓ je realan broj

$$\gamma_m^\ell = \frac{(-1)^{\ell+m}}{2^\ell \ell!} \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}} \sqrt{\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}}.$$

Za $-\ell \leq m < 0$ stavimo

$$Y_m^\ell = (-1)^m \overline{Y_{-m}^\ell}.$$

Neka su u daljnjem J_3, J_+, J_- diferencijalni operatori na $C^\infty(S^2)$ zadani tako da se podudaraju s operatorima (5.12) i (5.13) na pojedinim prostorima $\tilde{\mathcal{H}}^\ell$, tj.

$$J_3 = -i \frac{\partial}{\partial \varphi}, \quad J_\pm = e^{\pm i\varphi} \left(\pm \frac{\partial}{\partial \vartheta} + i \cot \vartheta \frac{\partial}{\partial \varphi} \right),$$

i neka je

$$C = J_+ J_- + J_3^2 - J_3.$$

Tada znamo da se na prostoru restrikcija polinoma operator C podudara sa $-\Delta_{S^2}$.

Zadatak 5.33. *Dokažite formule*

$$J_+ Y_m^\ell = \sqrt{(\ell-m)(\ell+m+1)} Y_{m+1}^\ell, \quad (5.14)$$

$$J_- Y_m^\ell = \sqrt{(\ell+m)(\ell-m+1)} Y_{m-1}^\ell, \quad (5.15)$$

$$J_3 Y_m^\ell = m Y_m^\ell, \quad (5.16)$$

$$C Y_m^\ell = \ell(\ell+1) Y_m^\ell. \quad (5.17)$$

Zadatak 5.34. *Dokažite da su funkcije Y_m^ℓ , $-\ell \leq m \leq \ell$, elementi potprostora $\tilde{\mathcal{H}}^\ell$.*

Uputa: Iskoristite formulu (5.17) i korolar 5.3.6.

Zadatak 5.35. *Dokažite da su funkcije Y_m^ℓ i $Y_{m'}^\ell$ za $m \neq m'$ međusobno ortogonalne.*

Uputa: Iskoristite formulu (5.16) i hermitičnost operatora J_3 na prostoru $\tilde{\mathcal{H}}^\ell$.

Budući da je dimenzija prostora $\tilde{\mathcal{H}}^\ell$ jednaka $2\ell+1$, zaključujemo da je $\{Y_m^\ell; -\ell \leq m \leq \ell\}$ baza ortogonalna prostora $\tilde{\mathcal{H}}^\ell$. Dokazat ćemo sada da su svi ti vektori Y_m^ℓ jedinični. Prije svega, operatori J_+ i J_- su na prostoru $\tilde{\mathcal{H}}^\ell$ su adjungirani. Sada iz formula (5.14) i (5.15) nalazimo za $-\ell < m \leq \ell$:

$$\sqrt{(\ell+m)(\ell-m+1)} (Y_m^\ell | Y_m^\ell) = (J_+ Y_{m-1}^\ell | Y_m^\ell) = (Y_{m-1}^\ell | J_- Y_m^\ell) = \sqrt{(\ell+m)(\ell-m+1)} (Y_{m-1}^\ell | Y_{m-1}^\ell).$$

Odatle se vidi da su svi vektori Y_m^ℓ iste norme. Stoga je dovoljno dokazati da je jedan od njih jedinični, npr. Y_ℓ^ℓ . Polinom Q_ℓ^ℓ je konstanta $(-1)^\ell (2\ell)!$, pa je

$$Y_\ell^\ell(\vartheta, \varphi) = (-1)^\ell \gamma_\ell^\ell (2\ell)! (\sin \vartheta)^\ell e^{i\ell\varphi}.$$

Stoga je

$$(Y_\ell^\ell | Y_\ell^\ell) = \gamma_\ell \mathcal{I}_\ell,$$

gdje je

$$\gamma_\ell = 2\pi (\gamma_\ell^\ell (2\ell)!)^2$$

i

$$\mathcal{I}_\ell = \int_0^\pi (\sin \vartheta)^{2\ell+1} d\vartheta.$$

Imamo $\mathcal{I}_0 = 2$ i $\gamma_0 = \frac{1}{2}$, dakle, $(Y_0^0 | Y_0^0) = 1$. Supstitucijom $x = \cos \vartheta$ integral \mathcal{I}_ℓ poprima oblik

$$\mathcal{I}_\ell = \int_{-1}^1 (1-x^2)^\ell dx.$$

Zadatak 5.36. *Parcijalnom integracijom dokažite da je*

$$\mathcal{I}_{\ell+1} = \mathcal{I}_\ell - \frac{1}{2\ell+2} \mathcal{I}_{\ell+1}.$$

Odatle je $(2\ell+3)\mathcal{I}_{\ell+1} = (2\ell+2)\mathcal{I}_\ell$. Lako se vidi da je $(2\ell+2)\gamma_{\ell+1} = (2\ell+3)\gamma_\ell$. Slijedi

$$(Y_{\ell+1}^{\ell+1} | Y_{\ell+1}^{\ell+1}) = \gamma_{\ell+1} \mathcal{I}_{\ell+1} = \gamma_\ell \mathcal{I}_\ell = (Y_\ell^\ell | Y_\ell^\ell).$$

Odatle indukcijom po ℓ zaključujemo da su svi vektori Y_ℓ^ℓ jedinični. Prema tome, svi vektori Y_m^ℓ su jedinični. Dakle, $\{Y_m^\ell; -\ell \leq m \leq \ell\}$ je ortonormirana baza prostora $\tilde{\mathcal{H}}^\ell$. Iz teorema 5.3.5. sada neposredno slijedi:

Teorem 5.3.7. *Sferni harmonici Y_m^ℓ , $\ell \in \mathbb{Z}_+$, $-\ell \leq m \leq \ell$, tvore ortonormiranu bazu Hilbertovog prostora $L_2(S^2)$.*

Napomena: Legendreovi polinomi definirani su sa

$$P_\ell(x) = \frac{(-1)^\ell}{2^\ell \ell!} \frac{d^\ell}{dx^\ell} (1-x^2)^\ell, \quad \ell \in \mathbb{Z}_+,$$

a **Legendreove funkcije** $P_{\ell,m}$, $\ell, m \in \mathbb{Z}_+$, su funkcije na segmentu $[-1, 1]$ definirane sa

$$P_{\ell,m}(x) = (-1)^m \sqrt{(1-x^2)^m} \frac{d^m}{dx^m} P_\ell(x) = \frac{(-1)^{\ell+m}}{2^\ell \ell!} \sqrt{(1-x^2)^m} \frac{d^{\ell+m}}{dx^{\ell+m}} (1-x^2)^\ell.$$

Direktnim računom nalazimo da za $\ell \in \mathbb{Z}_+$ i $0 \leq m \leq \ell$ vrijedi

$$Y_m^\ell(\vartheta, \varphi) = \gamma_{\ell,m} P_{\ell,m}(\cos \vartheta) e^{im\varphi}.$$

Zadatak 5.37. *Dokažite da vrijedi*

$$\int_{-1}^1 P_{\ell,m}(x) P_{\ell',m}(x) dx = 0 \quad \text{za } \ell \neq \ell'.$$

Izračunajte integral za $\ell = \ell'$.

Zadatak 5.38. *Dokažite da postoje $\alpha(\ell, m), \beta(\ell, m) \in \mathbb{C}$ takvi da je*

$$(\cos \vartheta) Y_m^\ell(\vartheta, \varphi) = \alpha(\ell, m) Y_m^{\ell+1}(\vartheta, \varphi) + \beta(\ell, m) Y_m^{\ell-1}(\vartheta, \varphi).$$

Napomena: Može se dokazati da vrijedi tzv. **adicioni teorem** za sferne harmonike:

$$\frac{4\pi}{2\ell+1} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \overline{Y_m^\ell(\vartheta, \varphi)} Y_m^\ell(\vartheta', \varphi) = P_\ell(\cos(\vartheta - \vartheta')).$$

Bibliografija

- [1] H. Boerner, *Group Representations*, Springer–Verlag, Berlin, 1955.
- [2] A.J. Coleman, *Induced Representations with Applications to S_n and $GL(n)$* , Queens Univ. No.4, Kingston, Ontario, 1966.
- [3] A.J. Coleman, *Induced and Subduced Representations*, u *Group Theory and its Applications* ed. M. LoebI, Academic Press, New York, 1968.
- [4] C. Curtis, I. Reiner, *Representation Theory of Finite Groups and Associative Algebras*, Interscience Publishers, New York, 1962.
- [5] W. Feit, *Characters of Finite Groups*, W.A. Benjamin Publishers, New York, 1967.
- [6] F.G. Frobenius, *Gesammelte Abhandlungen*, Bd. III., Springer–Verlag, Berlin, 1969.
- [7] W. Fulton, J. Harris, *Representation Theory. A First Course*, Springer–Verlag, New York, 2004.
- [8] R. Goodman, N.R. Wallach, *Representations and Invariants of the Classical Groups*, Cambridge University Press, Cambridge, 2003.
- [9] M. Hall, *The Theory of Groups*, Macmillan, New York, 1959.
- [10] M. Hamermesh, *Group Theory and its Application to Physical Problems*, Addison–Wesley Publ. Co., Reading – Palo Alto – London, 1964.
- [11] A.W. Knap, *Representation Theory of Semisimple Groups. An Overview Based on Examples*, Princeton University Press, Princeton – Oxford, 2001.
- [12] Y. Kosmann–Schwarzbah, *Groups and Symmetries. From Finite Groups to Lie Groups*, Springer–Verlag, New York – Dordrecht – Heidelberg – London, 2009.
- [13] S. Kurepa, *Konačno dimenzionalni vektorski prostori i primjene*, Sveučilišna naklada Liber, Zagreb, 1976.
- [14] D.E. Littlewood, *The Theory of Group Characters*, Oxford Univ. Press, Oxford, 1950.
- [15] J.S. Lomont, *Applications of Finite Groups*, Academic Press, New York, 1959.
- [16] G.W. Mackey, *Induced representations of groups*, American Journal of Mathematics, 73(1951), 576–592.
- [17] C. Procesi, *Lie Groups. An Approach through Invariants and Representations*, Springer–Verlag, New York, 2007.

- [18] L. Pukanszky, *Leçons sur les représentations des groupes*, Dunod, Paris, 1967.
- [19] J.–P. Serre, *Linear Representations of Finite Groups*, Springer–Verlag, New York – Heidelberg – Berlin, 1977.
- [20] B. Simon, *Representations of Finite and Compact Groups*, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1996.
- [21] E.B. Vinberg, *Lineinje predstavlenija grupp*, (na ruskom) Nauka, Moskva, 1985.
- [22] S.H. Weintraub, *Representation Theory of Finite Groups: Algebra and Arithmetic*, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2003.
- [23] H. Weyl, *The Theory of Groups and Quantum Mechanics*, Princeton Univ. Press, Princeton, 1931.
- [24] H. Weyl, *The Classical Groups*, Princeton University Press, Princeton, 1946.
- [25] E.P. Wigner, *Group Theory and its Applications to the Quantum Mechanics*, Academic Press, New York, 1959.