REALNE POLUPROSTE LIEJEVE ALGEBRE

Prof. dr. sc. Hrvoje Kraljević

Predavanja održana u okviru poslijediplomskog studija
na PMF−Matematičkom odjelu Sveučilišta u Zagrebu
u akademskoj godini 2008./2009.

Zagreb, srpanj 2009.

Sadržaj

1 LIEJEVE ALGEBRE **5**

1.1 Osnovni pojmovi . . . 5
1.2 Reprezentacije . . . 12
1.2.1 Osnovni pojmovi . . . 12
1.2.2 Potpuno reducibilne reprezentacije . . . 14
1.2.3 Moduli konačne duljine . . . 16
1.3 Kompleksne poluproste Liejeve algebre . . . 21
1.3.1 Cartanove podalgebre i korijenski rastav . . . 21
1.3.2 Sistemi korijena . . . 22
1.3.3 Klasične kompleksne Liejeve algebre . . . 25
1.3.4 Weylove komore i baze sistema korijena. Klasifikacija . . . 28
1.3.5 Klasifikacija prostih kompleksnih Liejevih algebri . . . 33
1.3.6 Automorfizmi . . . 40
1.4 Univerzalna omotačka algebra . . . 42
1.4.1 Tenzorski produkt . . . 42
1.4.2 Tenzorska, simetrična i polinomijalna algebra . . . 44
1.4.3 Univerzalna omotačka algebra. PBW teorem . . . 48
1.4.4 Centar univerzalne omotačke algebre . . . 54
1.5 Nilradikal i najveći nilpotentni ideal . . . 58
1.6 Reduktivne Liejeve algebre . . . 62
1.7 Kriteriji potpune reducibilnosti . . . 65

2 REALNE FORME LIEJEVIH ALGEBRI **71**

2.1 Realne forme i konjugacije . . . 71
2.2 Kompaktne Liejeve algebre . . . 79

3 LIEJEVE GRUPE **89**

3.1 Diferencijalne i analitičke mnogostrukosti . . . 89
3.2 Liejeve grupe . . . 96
3.3 Natkrivajuće grupe . . . 103
3.4 Homomorfizmi i reprezentacije Liejevih grupa . . . 121
3.5 Grupa automorfizama Liejeve algebre . . . 126

4 POLUPROSTE LIEJEVE GRUPE **127**

4.1 Grupa automorfizama kompleksne poluproste Liejeve algebre . . . 127
4.2 Cartanove dekompozicije . . . 137
4.3 Multiplikativne Cartanove dekompozicije . . . 140
4.4 Konjugiranost maksimalnih kompaktnih podgrupa . . . 142
4.5 Cartanovi potprostori . . . 146

4.6 Iwasawine dekompozicije 151
4.7 Mala Weylova grupa 158
4.8 Struktura povezanih poluprostih Liejevih grupa 163
4.9 Komutativne Liejeve grupe 169
4.10 Torusi u kompaktnim Liejevim grupama 173
4.11 Cartanove podalgebre realnih poluprostih Liejevih algebri 177

5 Klasifikacija realnih prostih Liejevih algebri 183
5.1 Cayleyeve transformacije 183
5.2 Voganovi dijagrami 191
5.3 Klasifikacija 195

Poglavlje 1

LIEJEVE ALGEBRE

1.1 Osnovni pojmovi

Algebra nad poljem K je vektorski prostor $\mathcal{A}$ nad poljem K na kome je zadana $K-$bilinearna operacija $\mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ koja se zove **množenje** i obično označava sa $(a,b) \mapsto ab$. Za algebru $\mathcal{A}$ kažemo da je **asocijativna**, ukoliko je množenje asocijativno:

$$(ab)c = a(bc), \qquad \forall a, b \in \mathcal{A}.$$

Unitalna algebra je asocijativna algebra $\mathcal{A}$ u kojoj postoji **jedinica**, tj. element $1 \in \mathcal{A}$ takav da je

$$1a = a1 = a \qquad \forall a \in \mathcal{A}.$$

Potprostor $\mathcal{B}$ algebre $\mathcal{A}$ zove se **podalgebra** od $\mathcal{A}$ ako vrijedi

$$a, b \in \mathcal{B} \qquad \Longrightarrow \qquad ab \in \mathcal{B}.$$

Lijevi ideal u algebri $\mathcal{A}$ je potprostor $\mathcal{L}$ od $\mathcal{A}$ takav da vrijedi

$$a \in \mathcal{A}, \quad b \in \mathcal{L} \qquad \Longrightarrow \qquad ab \in \mathcal{L}.$$

Desni ideal u algebri $\mathcal{A}$ je potprostor $\mathcal{R}$ od $\mathcal{A}$ takav da vrijedi

$$a \in \mathcal{A}, \quad b \in \mathcal{R} \qquad \Longrightarrow \qquad ba \in \mathcal{R}.$$

Potprostor $\mathcal{I}$ algebre $\mathcal{A}$ zove se **ideal**, ako je on i lijevi i desni ideal, tj. ako vrijedi

$$a \in \mathcal{A}, \quad b \in \mathcal{I} \qquad \Longrightarrow \qquad ab, ba \in \mathcal{I}.$$

Ako je $\mathcal{I}$ ideal u algebri $\mathcal{A}$ onda na kvocijentnom vektorskom prostoru $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ možemo definirati množenje sa

$$(a + \mathcal{I})(b + \mathcal{I}) = ab + \mathcal{I}, \qquad a, b \in \mathcal{A}.$$

Tako dobivena algebra zove se **kvocijentna algebra**. Ako je $\mathcal{A}$ asocijativna algebra, onda je i kvocijentna algebra $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ asocijativna. Ako je k tome $\mathcal{A}$ unitalna algebra s jedinicom 1 onda je i $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ unitalna algebra s jedinicom $1 + \mathcal{I}$.

Neka su $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ algebre nad istim poljem K. Preslikavanje $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ zove se **homomorfizam algebri** ako je φ $K-$linearan operator sa svojstvom

$$\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b) \qquad \forall a, b \in \mathcal{A}.$$

Skup svih homomorfizama $\mathcal{A}$ u $\mathcal{B}$ označavat ćemo sa $Hom(\mathcal{A}, \mathcal{B})$. To je potprostor vektorskog prostora $L(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ svih $K-$linearnih operatora $\mathcal{A} \to \mathcal{B}$. Homomorfizam koji je bijekcija zove se **izomorfizam**. Izomorfizmi definiraju relaciju ekvivalencije, koja se zove **izomorfnost algebri**: kažemo da je algebra $\mathcal{A}$ **izomorfna** algebri $\mathcal{B}$, i pišemo $\mathcal{A} \simeq \mathcal{B}$, ako postoji izomorfizam $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$.

Homorfizam algebre $\mathcal{A}$ u samu sebe zove se **endomorfizam** algebre $\mathcal{A}$. Umjesto $Hom(\mathcal{A}, \mathcal{A})$ pišemo $End(\mathcal{A})$. Za svaku algebru $\mathcal{A}$ uz kompoziciju kao operaciju množenja $End(\mathcal{A})$ je asocijativna algebra; štoviše, $End(\mathcal{A})$ je unitalna algebra i jedinica joj je identiteta $I_{\mathcal{A}}$. Endomorfizam algebre $\mathcal{A}$ koji je ujedno bijekcija, tj. izomorfizam, zove se **automorfizam** algebre $\mathcal{A}$. Skup svih automorfizama od $\mathcal{A}$ označavamo $Aut(\mathcal{A})$; to je upravo grupa svih invertibilnih elemenata unitalne algebre $End(\mathcal{A})$.

Ako je $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ homomorfizam algebri, onda je njegova jezgra $Ker\,\varphi = \{a \in \mathcal{A};\ \varphi(a) = 0\}$ ideal u algebri $\mathcal{A}$, a njegova slika $Im\,\varphi = \varphi(\mathcal{A}) = \{\varphi(a);\ a \in \mathcal{A}\}$ je podalgebra od $\mathcal{B}$. Nadalje, preslikavanje $\Phi : \mathcal{A}/Ker\,\varphi \to Im\,\varphi = \varphi(\mathcal{A})$, definirano sa $\Phi(a + Ker\,\varphi) = \varphi(a),\ a \in \mathcal{A}$, je izomorfizam kvocijentne algebre $\mathcal{A}/Ker\,\varphi$ na podalgebru $Im\,\varphi$ algebre $\mathcal{B}$.

Derivacija algebre $\mathcal{A}$ je linearan operator $D : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ sa svojstvom

$$D(ab) = D(a)b + aD(b) \qquad \forall a, b \in \mathcal{A}.$$

Skup svih derivacija algebre $\mathcal{A}$ označavat ćemo sa $Der(\mathcal{A})$. To je potprostor vektorskog prostora $L(\mathcal{A}) = L(\mathcal{A}, \mathcal{A})$ svih linearnih operatora $\mathcal{A} \to \mathcal{A}$. Prostor $L(\mathcal{A})$ je unitalna algebra, ali $Der(\mathcal{A})$ općenito nije podalgebra, budući da kompozicija derivacija ne mora biti (i obično nije) derivacija. Međutim, lako se vidi da vrijedi:

Propozicija 1.1.1. *Ako je $\mathcal{A}$ algebra i $D, E \in Der(\mathcal{A})$ onda je $DE - ED \in Der(\mathcal{A})$.*

Liejeva algebra nad poljem K je algebra $\mathfrak{g}$, u kojoj se množenje obično označava sa $(x, y) \mapsto [x, y]$ i zove **komutator**, ukoliko su ispunjena sljedeća dva uvjeta:

$(L1)$ $[x, x] = 0 \ \ \forall x \in \mathfrak{g}$.

$(L2)$ $[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0 \ \ \forall x, y, z \in \mathcal{A}$.

Svojstvo $(L2)$ zove se **Jacobijev identitet**. Iz svojstva $(L1)$ slijedi svojstvo

$(L1')$ $[x, y] = -[y, x] \ \ \forall x, y \in \mathfrak{g}$.

Svojstvo $(L1')$ povlači svojstvo $(L1)$ ukoliko je karakteristika polja K različita od 2.

U cijelom ovom kolegiju promatrat ćemo isključivo realne i kompleksne Liejeve algebre, tj. samo $K = \mathbb{R}$ ili $K = \mathbb{C}$. Naravno, tada su uvjeti $(L1)$ i $(L1')$ međusobno ekvivalentni. **Nadalje, kad god kažemo "neka je $\mathfrak{g}$ Liejeva algebra" uvijek ćemo podrazumijevati da je $\mathfrak{g}$ konačnodimenzionalna**.

Kompleksan vektorski prostor V promatran kao realan vektorski prostor označavat ćemo sa $V_{\mathbb{R}}$. Ako je B baza od V, onda je disjunktna unija $B \cup iB$ baza od $V_{\mathbb{R}}$. S druge strane, ako je V realan vektorski prostor, sa $V^{\mathbb{C}}$ ćemo označavati njegovu **kompleksifikaciju**. Dakle, $V^{\mathbb{C}} = V \times V$ i množenje s kompleksnim brojevima definirano je sa

$$(\alpha + i\beta)(v, w) = (\alpha v - \beta w, \beta v + \alpha w), \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad v, w \in V.$$

Naravno, tada se V identificira s podskupom $V \times \{0\}$ od $V^{\mathbb{C}}$ ($v = (v, 0)$ za $v \in V$). Uz tu identifikaciju kompleksifikacija $W^{\mathbb{C}}$ potprostora W realnog prostora V je kompleksan potprostor od $V^{\mathbb{C}}$ razapet sa W. Nadalje, svaka baza realnog prostora V ujedno je baza kompleksnog prostora $V^{\mathbb{C}}$.

Neka je V kompleksan vektorski prostor. **Realna forma** prostora V je potprostor W od $V_{\mathbb{R}}$ takav da je $V_{\mathbb{R}} = W \dotplus iW$. Naravno, tada je $(w, w') \mapsto w + iw'$ izomorfizam kompleksnih vektorskih prostora $W^{\mathbb{C}} \to V$.

Ako je $\mathcal{A}$ kompleksna algebra, onda je $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}$ realna algebra iste vrste (asocijativna, unitalna, Liejeva). Nadalje, ako je $\mathcal{A}$ realna algebra, onda na $\mathcal{A}^{\mathbb{C}}$ postoji jedinstvena struktura kompleksne algebre takve da je $\mathcal{A}$ podalgebra realne algebre $\left(\mathcal{A}^{\mathbb{C}}\right)_{\mathbb{R}}$. Množenje u $\mathcal{A}^{\mathbb{C}}$ dano je sa

$$(a, b)(c, d) = (ac - bd, ad + bc) \quad \text{ili} \quad (a + ib)(c + id) = (ac - bd) + i(ad + bc), \qquad a, b, c, d \in \mathcal{A}.$$

Kompleksna algebra $\mathcal{A}^{\mathbb{C}}$ iste je vrste (asocijativna, unitalna, Liejeva) kao i realna algebra $\mathcal{A}$.

Neka je $\mathcal{A}$ kompleksna algebra. **Realna forma algebre** $\mathcal{A}$ je podalgebra $\mathcal{B}$ realne algebre $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}$ koja je realna forma vektorskog prostora $\mathcal{A}$, tj. takva da je $\mathcal{A}_{\mathbb{R}} = \mathcal{B} \dotplus i\mathcal{B}$.

Ako je $\mathcal{A}$ asocijativna algebra i ako definiramo

$$[x, y] = xy - yx, \qquad x, y \in \mathcal{A},$$

onda se lako provjeri da je s operacijom $[\,\cdot\,,\,\cdot\,]$ $\mathcal{A}$ Liejeva algebra. Tu Liejevu algebru označavat ćemo sa $Lie(\mathcal{A})$. Ako je $\mathfrak{g}$ algebra i $\mathcal{A}$ asocijativna algebra onda ćemo preslikavanje $\varphi : \mathfrak{g} \to \mathcal{A}$, koje je homomorfizam Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ u Liejevu algebru $Lie(\mathcal{A})$, zvati **Liejev homomorfizam** Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ u asocijativnu algebru $\mathcal{A}$.

Ako je V vektorski prostor, pisat ćemo $\mathfrak{gl}(V) = Lie(L(V))$. Dakle, $\mathfrak{gl}(V)$ je Liejeva algebra svih linearnih operatora $A : V \to V$ s komutatorom $[A, B] = AB - BA$. Prema propoziciji 1.1.1. za svaku algebru $\mathcal{A}$ skup svih derivacija $Der(\mathcal{A})$ je Liejeva podalgebra Liejeve algebre $Lie(L(\mathcal{A}))$.

Neka je $\mathfrak{g}$ Liejeva algebra. Za $x \in \mathfrak{g}$ definiramo linearan operator $ad\,x : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ ovako:

$$(ad\,x)y = [x, y], \qquad y \in \mathfrak{g}.$$

Iz Jacobijevog identiteta slijedi da je $ad\,x$ derivacija, $ad\,x \in Der(\mathfrak{g})$ i da je preslikavanje $ad : \mathfrak{g} \to Der(\mathfrak{g})$ homomorfizam Liejevih algebri, tj. to je preslikavanje linearno i vrijedi

$$ad\,[x, y] = (ad\,x)(ad\,y) - (ad\,y)(ad\,x), \qquad \forall x, y \in \mathfrak{g}.$$

Derivacije Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ oblika $ad\,x$ za neki $x \in \mathfrak{g}$ zovu se **unutarnje derivacije** Liejeve algebre $\mathfrak{g}$.

Zadatak 1.1.1. *Dokažite da za $D \in Der(\mathfrak{g})$ i $x \in \mathfrak{g}$ vrijedi $[D, ad\,x] = ad\,Dx$ i da je skup $ad\,\mathfrak{g}$ svih unutarnjih derivacija Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ ideal u Liejevoj algebri $Der(\mathfrak{g})$ svih derivacija od $\mathfrak{g}$.*

Uvedimo još neke uobičajene oznake i nazive vezane uz bilo koju Liejevu algebru $\mathfrak{g}$.

Ako su $\mathfrak{a}$ i $\mathfrak{b}$ potprostori od $\mathfrak{g}$, sa $[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}]$ označavamo potprostor od $\mathfrak{g}$ razapet svim elementima oblika $[a, b]$, $a \in \mathfrak{a}$, $b \in \mathfrak{b}$. Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ zove se **komutativna** ili **Abelova** ako je $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \{0\}$, tj. $[x, y] = 0\ \forall x, y \in \mathfrak{g}$.

Ako je S podskup od $\mathfrak{g}$ i $\mathfrak{h}$ Liejeva podalgebra od $\mathfrak{g}$, definiramo

$$C_{\mathfrak{h}}(S) = \{x \in \mathfrak{h};\ [x, y] = 0\ \forall y \in S\}.$$

$C_{\mathfrak{h}}(S)$ se zove **centralizator** skupa S u Liejevoj podalgebri $\mathfrak{h}$.

Zadatak 1.1.2. *Dokažite da je $C_{\mathfrak{h}}(S)$ Liejeva podalgebra od $\mathfrak{h}$.*

Skup $Z(\mathfrak{g}) = C_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g}) = \{x \in \mathfrak{g};\ [x,y] = 0\ \forall y \in \mathfrak{g}\}$ zove se **centar** Liejeve algebre $\mathfrak{g}$. To je ne samo Liejeva podalgebra od $\mathfrak{g}$ nego ideal u $\mathfrak{g}$.

Ako je $\mathfrak{h}$ Liejeva podalgebra od $\mathfrak{g}$, definiramo **normalizator** od $\mathfrak{h}$ u $\mathfrak{g}$:

$$N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) = \{x \in \mathfrak{g};\ [x,y] \in \mathfrak{h}\ \forall y \in \mathfrak{h}\}.$$

Zadatak 1.1.3. *Dokažite:*

(*a*) *$N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$ je Liejeva podalgebra od $\mathfrak{g}$ koja sadrži $\mathfrak{h}$.*

(*b*) *$\mathfrak{h}$ je ideal u $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$.*

(*c*) *Ako je $\mathfrak{k}$ Liejeva podalgebra od $\mathfrak{g}$ koja sadrži $\mathfrak{h}$ i ako je $\mathfrak{h}$ ideal u $\mathfrak{k}$ onda je $\mathfrak{k} \subseteq N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$.*

Primijetimo da ako su $\mathfrak{i}$ i $\mathfrak{j}$ ideali u Liejevoj algebri $\mathfrak{g}$, onda su $\mathfrak{i}+\mathfrak{j}$, $\mathfrak{i}\cap\mathfrak{j}$ i $[\mathfrak{i},\mathfrak{j}]$ također ideali u $\mathfrak{g}$; ovo posljednje slijedi pomoću Jacobijevog identiteta. Definiramo dva opadajuća niza ideala $(\mathfrak{g}^{(k)})_{k\in\mathbb{Z}_+}$ (tzv. **izvedeni niz** u $\mathfrak{g}$) i $(\mathfrak{g}^{k})_{k\in\mathbb{Z}_+}$ (tzv. **centralni silazni niz** u $\mathfrak{g}$) :

$$\mathfrak{g}^{(0)} = \mathfrak{g}^0 = \mathfrak{g}, \qquad \mathfrak{g}^{(k+1)} = [\mathfrak{g}^{(k)}, \mathfrak{g}^{(k)}], \qquad \mathfrak{g}^{k+1} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^k], \qquad k \in \mathbb{Z}_+.$$

Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ zove se **rješiva** ako je $\mathfrak{g}^{(k)} = \{0\}$ za neki $k \in \mathbb{Z}_+$, a **nilpotentna** ako je $\mathfrak{g}^k = \{0\}$ za neki $k \in \mathbb{Z}_+$. Svaka je nilpotentna Liejeva algebra rješiva. Svaka je komutativna Liejeva algebra nilpotentna.

Neka je $\mathfrak{g}$ realna Liejeva algebra uz identifikaciju $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}\times\{0\} \subset \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$, *tj.* $\left(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}\right)_{\mathbb{R}} = \mathfrak{g} \dot{+} i\mathfrak{g}$. Tada je očito $\left(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}\right)^k = \left(\mathfrak{g}^k\right)^{\mathbb{C}}$ i $\left(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}\right)^{(k)} = \left(\mathfrak{g}^{(k)}\right)^{\mathbb{C}}$. Prema tome, realna Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ je rješiva (odnosno, nilpotentna) ako i samo ako je kompleksna Liejeva algebra $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ rješiva (odnosno, nilpotentna). Nadalje, ako je $\mathfrak{g}$ kompleksna rješiva (odnosno, nilpotentna) Liejeva algebra, svaka je njena realna forma rješiva (odnosno, nilpotentna).

Propozicija 1.1.2. *Neka je $\mathfrak{g}$ Liejeva algebra, $\mathfrak{h}$ njena Liejeva podalgebra i $\mathfrak{i}$ i $\mathfrak{j}$ ideali u $\mathfrak{g}$.*

(*a*) *Ako je Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ rješiva, onda su i Liejeve algebre $\mathfrak{h}$ i $\mathfrak{g}/\mathfrak{i}$ rješive.*

(*b*) *Ako su Liejeve algebre $\mathfrak{i}$ i $\mathfrak{g}/\mathfrak{i}$ rješive, onda je i Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ rješiva.*

(*c*) *Ako su ideali $\mathfrak{i}$ i $\mathfrak{j}$ rješive Liejeve algebre onda je i ideal $\mathfrak{i}+\mathfrak{j}$ rješiva Liejeva algebra.*

Iz tvrdnje (*c*) slijedi da u svakoj Liejevoj algebri $\mathfrak{g}$ postoji najveći rješiv ideal, tj. rješivi ideal koji sadrži svaki drugi rješivi ideal u $\mathfrak{g}$. Taj se ideal zove **radikal** od $\mathfrak{g}$ i označava $\mathcal{R}(\mathfrak{g})$. Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ zove se **poluprosta** ako je $\mathcal{R}(\mathfrak{g}) = \{0\}$.

Propozicija 1.1.3. *Za svaku Liejevu algebru $\mathfrak{g}$ kvocijentna algebra $\mathfrak{g}/\mathcal{R}(\mathfrak{g})$ je poluprosta.*

Propozicija 1.1.4. *Neka je $\mathfrak{g}$ Liejeva algebra, $\mathfrak{h}$ njena Liejeva podalgebra i $\mathfrak{i}$ ideal u $\mathfrak{g}$.*

(*a*) *Ako je $\mathfrak{g}$ nilpotentna, onda su $\mathfrak{h}$ i $\mathfrak{g}/\mathfrak{i}$ nilpotentne.*

(*b*) *Ako je $\mathfrak{g}/Z(\mathfrak{g})$ nilpotentna, onda je i $\mathfrak{g}$ nilpotentna.*

(*c*) *Ako je $\mathfrak{g} \neq \{0\}$ nilpotentna Liejeva algebra, onda je $Z(\mathfrak{g}) \neq \{0\}$.*

Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ je nilpotentna ako i samo ako postoji prirodan broj n takav da je

$$(ad\,x_1)(ad\,x_2)\cdots(ad\,x_n) = 0 \qquad \forall x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathfrak{g}.$$

Posebno, tada je $(ad\,x)^n = 0\ \forall x \in \mathfrak{g}$, tj. svi operatori $ad\,x$, $x \in \mathfrak{g}$, su nilpotentni. Općenito, element x Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ zove se **ad−nilpotentan** ako je linearan operator $ad\,x$ nilpotentan. Vrlo netrivijalan je sljedeći tzv. **Engelov teorem**:

Teorem 1.1.5. *Ako je svaki element Liejeve algebre* $\mathfrak{g}$ *ad−nilpotentan, onda je Liejeva algebra* $\mathfrak{g}$ *nilpotentna.*

U dokazu se koristi sljedeći teorem koji je i sam za sebe vrlo važan:

Teorem 1.1.6. *Neka je* $V \neq \{0\}$ *konačnodimenzionalan vektorski prostor i* $\mathfrak{g}$ *Liejeva podalgebra od* $\mathfrak{gl}(V)$ *čiji je svaki element nilpotentan operator na* V. *Tada postoji* $v \in V$, $v \neq 0$, *takav da je* $Av = 0\ \forall A \in \mathfrak{g}$. *Nadalje, postoji baza u* V *u odnosu na koju svaki operator* $A \in \mathfrak{g}$ *ima striktno gornje trokutastu matricu.*

U slučaju $K = \mathbb{C}$ teorem 1.1.6. generalizira se na rješive Liejeve podalgebre od $\mathfrak{gl}(V)$:

Teorem 1.1.7. *Neka je* $V \neq \{0\}$ *konačnodimenzionalan kompleksan vektorski prostor i* $\mathfrak{g}$ *rješiva Liejeva podalgebra od* $\mathfrak{gl}(V)$. *Tada postoji vektor* $v \in V$, $v \neq 0$, *koji je svojstven za svaki operator* $A \in \mathfrak{g}$. *Nadalje, postoji baza u* V *u odnosu na koju svaki operator* $A \in \mathfrak{g}$ *ima gornje trokutastu matricu.*

Korolar 1.1.8. *Neka je* $\mathfrak{g}$ *kompleksna rješiva Liejeva algebra. U* $\mathfrak{g}$ *postoje ideali* $\mathfrak{j}_k$, $0 \leq k \leq n$, *takvi da je*

$$\{0\} = \mathfrak{j}_0 \subset \mathfrak{j}_1 \subset \cdots \subset \mathfrak{j}_n = \mathfrak{g} \qquad \text{i} \qquad \dim \mathfrak{j}_k = k \quad \forall k.$$

Skup $\mathfrak{n}(n, K)$ svih striktno gornje trokutastih kvadratnih matrica nad $K = \mathbb{R}$ ili $K = \mathbb{C}$ je nilpotentna Liejeva algebra. Nadalje, lako se vidi da za Liejevu algebru $\mathfrak{t}(n, K)$ vrijedi

$$[\mathfrak{t}(n, K), \mathfrak{t}(n, K)] = \mathfrak{n}(n, K).$$

Odatle i iz sljedećeg teorema, koji vrijedi i za realne i za kompleksne Liejeve algebre, slijedi da je $\mathfrak{t}(n, K)$ rješiva Liejeva algebra.

Teorem 1.1.9. *Liejeva algebra* $\mathfrak{g}$ *je rješiva ako i samo ako je svaki element* $x \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ *ad−nilpotentan, a to je ispunjeno ako i samo ako je prvi izvedeni ideal* $\mathfrak{g}^{(1)} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ *nilpotentna Liejeva algebra.*

Killingova forma na Liejevoj algebri $\mathfrak{g}$ je simetrična bilinearna forma $B = B_{\mathfrak{g}} : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to K$ definirana sa

$$B(x, y) = Tr\,(ad\,x)(ad\,y), \qquad x, y \in \mathfrak{g}.$$

Iz jednakosti $ad\,Dx = [D, ad\,x]$, $D \in Der(\mathfrak{g})$, $x \in \mathfrak{g}$, lako slijedi da je

$$B(Dx, y) + B(x, Dy) = 0 \qquad \forall x, y \in \mathfrak{g}, \quad \forall D \in Der(\mathfrak{g}).$$

To posebno vrijedi za unutarnje derivacije, a to se svojstvo može ovako zapisati:

$$B([x, y], z) = B(x, [y, z]) \qquad \forall x, y, z \in \mathfrak{g}.$$

Pomoću Killingove forme formulira se sljedeći tzv. **Cartanov kriterij rješivosti**:

Teorem 1.1.10. *Liejeva algebra* $\mathfrak{g}$ *je rješiva ako i samo ako je*

$$B(x, [y, z]) = 0 \qquad \forall x, y, z \in \mathfrak{g}.$$

Posebno, ako je Killingova forma trivijalna, $B(x, y) = 0\ \forall x, y \in \mathfrak{g}$, *onda je Liejeva algebra* $\mathfrak{g}$ *rješiva.*

Liejevu algebru $\mathfrak{g}$ nazvali smo poluprostom, ako joj je radikal $\mathcal{R}(\mathfrak{g}) = \{0\}$. To znači da u $\mathfrak{g}$ ne postoji rješiv ideal različit od $\{0\}$. Pretpostavimo da je $\mathfrak{j} \neq \{0\}$ rješiv ideal u Liejevoj algebri $\mathfrak{g}$. Tada je i $\mathfrak{j}^{(k)}$ ideal u $\mathfrak{g}$. Nadalje, ako je $\mathfrak{j}^{(k)} \neq \{0\}$ i $\mathfrak{j}^{(k+1)} = \{0\}$, tada je $[\mathfrak{j}^{(k)}, \mathfrak{j}^{(k)}] = \{0\}$, dakle, $\mathfrak{j}^{(k)}$ je Abelov ideal različit od $\{0\}$. Prema tome, Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ je poluprosta ako i samo ako ona ne sadrži nijedan Abelov ideal različit od $\{0\}$.

Važan je sljedeći kriterij poluprostote:

Teorem 1.1.11. *Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ je poluprosta ako i samo ako je njena Killingova forma B nedegenerirana, tj.*

$$x \in \mathfrak{g}, \quad B(x, y) = 0 \quad \forall y \in \mathfrak{g} \qquad \Longrightarrow \qquad x = 0.$$

Zadatak 1.1.4. *Neka je $\mathfrak{j}$ ideal u poluprostoj Liejevoj algebri $\mathfrak{g}$. Dokažite:*

(*a*) $B_{\mathfrak{j}} = B_{\mathfrak{g}}|\mathfrak{j} \times \mathfrak{j}$.

(*b*) $\mathfrak{j}$ *je poluprosta Liejeva algebra.*

(*c*) $\mathfrak{j}^{\perp} = \{x \in \mathfrak{g};\ B(x, y) = 0\ \forall y \in \mathfrak{j}\}$ *je ideal u* $\mathfrak{g}$.

(*d*) *Vrijedi* $\mathfrak{g} = \mathfrak{j} \dot{+} \mathfrak{j}^{\perp}$.

Promatramo li $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]^{\perp}$, iz prethodnog zadatka lako zaključujemo da je to $\{0\}$, dakle:

Propozicija 1.1.12. *Ako je $\mathfrak{g}$ poluprosta Liejeva algebra, onda je $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{g}$.*

Ako su $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2, \ldots, \mathfrak{g}_k$ Liejeve algebre onda je očito da se na sljedeći način u Kartezijev produkt $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_2 \times \cdots \times \mathfrak{g}_k$ uvodi struktura Liejeve algebre:

$$[(x_1, x_2, \ldots, x_k), (y_1, y_2, \ldots, y_k)] = ([x_1, y_1], [x_2, y_2], \ldots, [x_k, y_k]), \qquad x_j, y_j \in \mathfrak{g}_j, \quad j = 1, 2, \ldots, k.$$

Ta se Liejeva algebra zove **direktni produkt** Liejevih algebri $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2, \ldots, \mathfrak{g}_k$. Primijetimo da je tada za svaki j

$$\underbrace{\{0\} \times \cdots \times \{0\}}_{j-1} \times \mathfrak{g}_j \times \underbrace{\{0\} \times \cdots \times \{0\}}_{k-j} = \{(\underbrace{0, \ldots, 0}_{j-1}, x, \underbrace{0, \ldots, 0}_{k-j});\ x \in \mathfrak{g}_j\}$$

ideal u Liejevoj algebri $\mathfrak{g}$ koji je kao Liejeva algebra izomorfan $\mathfrak{g}_j$. Nadalje, kao vektorski prostor $\mathfrak{g}$ je direktna suma tih ideala.

Pretpostavimo sada da je $\mathfrak{g}$ Liejeva algebra i da su $\mathfrak{j}_1, \mathfrak{j}_2, \ldots, \mathfrak{j}_k$ ideali u $\mathfrak{g}$ takvi da je

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{j}_1 \dot{+} \mathfrak{j}_2 \dot{+} \cdots \dot{+} \mathfrak{j}_k.$$

Tada za $i \neq j$ imamo $[\mathfrak{j}_i, \mathfrak{j}_j] \subseteq \mathfrak{j}_i \cap \mathfrak{j}_j = \{0\}$. Stoga za $x_j, y_j \in \mathfrak{j}_j$, $j = 1, 2, \ldots, k$, vrijedi

$$[x_1 + x_2 + \cdots + x_k, y_1 + y_2 + \cdots + x_k] = [x_1, y_1] + [x_2, y_2] + \cdots + [x_k, y_k],$$

a to pokazuje da je Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ izomorfna direktnom produktu $\mathfrak{j}_1 \times \mathfrak{j}_2 \times \cdots \times \mathfrak{j}_k$.

Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ zove se **prosta**, ako je $\dim \mathfrak{g} \geq 2$ i ako $\mathfrak{g}$ ne sadrži nijedan netrivijalan ideal, tj. nijedan osim $\{0\}$ i $\mathfrak{g}$. Primijetimo da je svaka prosta Liejeva algebra poluprosta. Obrat ne vrijedi, ali iz tvrdnji zadatka 1.1.4. nije teško dokazati:

Teorem 1.1.13. *Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ je poluprosta ako i samo ako je ona izomorfna direktnom produktu prostih Liejevih algebri, odnosno, direktnoj sumi prostih ideala. Ako su $\mathfrak{g}_1, \ldots, \mathfrak{g}_k$ prosti ideali takvi da je $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \dot{+} \cdots \dot{+} \mathfrak{g}_k$, i ako je $\mathfrak{j} \neq \{0\}$ ideal u $\mathfrak{g}$ onda postoje $1 \leq j_1 < \cdots j_\ell \leq k$ takvi da je $\mathfrak{j} = \mathfrak{g}_{i_1} \dot{+} \cdots \dot{+} \mathfrak{g}_{i_\ell}$. Posebno, $\mathfrak{g}_1, \ldots, \mathfrak{g}_k$ su jedini prosti ideali u $\mathfrak{g}$.*

Zadatak 1.1.5. *Dokažite:*

(a) *Realna Liejeva algebra* $\mathfrak{g}$ *je poluprosta ako i samo ako je njena kompleksifikacija* $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ *poluprosta.*

(b) *Svaka realna forma proste kompleksne Liejeve algebre je prosta.*

Ovaj odjeljak završavamo s još jednom važnom činjenicom o poluprostim Liejevim algebrama:

Teorem 1.1.14. *Svaka je derivacija poluproste Liejeve algebre* $\mathfrak{g}$ *unutarnja: za svaku* $D \in Der(\mathfrak{g})$ *postoji* $x \in \mathfrak{g}$ *takav da je* $D = ad\, x$.

1.2 Reprezentacije

1.2.1 Osnovni pojmovi

Pojam reprezentacije definiramo za bilo koju od tri algebarske strukture $-$ grupa, unitalna algebra i Liejeva algebra:

(1) **Reprezentacija grupe** G s jedinicom e_G na vektorskom prostoru V je homomorfizam grupe G u grupu $GL(V)$ svih invertibilnih elemenata unitalne algebre $L(V)$. Drugim riječima, reprezentacija G na V je preslikavanje $\pi\colon G \to L(V)$ takvo da vrijedi

$$\pi(ab) = \pi(a)\pi(b) \quad \forall a, b \in G, \qquad \pi(e_G) = I_V.$$

(2) **Reprezentacija unitalne algebre** $\mathcal{A}$ s jedinicom $1_{\mathcal{A}}$ na vektorskom prostoru V je unitalni homomorfizam algebri $\pi : \mathcal{A} \to L(V)$. Drugim riječima reprezentacija $\mathcal{A}$ na V je preslikavanje $\pi\colon \mathcal{A} \to L(V)$ takvo da vrijedi

$$\pi(1_{\mathcal{A}}) = I_V, \quad \pi(\alpha x + \beta y) = \alpha\pi(x) + \beta\pi(y), \quad \pi(xy) = \pi(x)\pi(y), \quad \forall x, y \in \mathcal{A},\ \forall \alpha, \beta \in K.$$

(3) **Reprezentacija Liejeve algebre** $\mathfrak{g}$ nad poljem K na vektorskom prostoru V nad poljem K je homomorfizam Liejevih algebri $\pi\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$. Dakle, reprezentacija $\mathfrak{g}$ na V je preslikavanje $\pi\colon \mathfrak{g} \to L(V)$ takvo da vrijedi

$$\pi(\alpha x + \beta y) = \alpha\pi(x) + \beta\pi(y), \quad \pi([x, y]) = \pi(x)\pi(y) - \pi(y)\pi(x), \quad \forall x, y \in \mathfrak{g},\ \forall \alpha, \beta \in K.$$

U svakom od ta tri slučaja vektorski prostor V zovemo **prostorom reprezentacije** π. Ako je prostor V konačnodimenzionalan, **reprezentacija** π zove se **konačnodimenzionalna** i tada se prirodan broj (ili nula) $d(\pi) = \dim V$ zove **dimenzija reprezentacije** π.

U slučajevima (2) i (3) definicija se proširuje i na situaciju kad je $\mathcal{A}$ (odnosno, $\mathfrak{g}$) realna (Liejeva) algebra, a V kompleksan vektorski prostor. Tada se traži da su svi operatori $\pi(x)$ $\mathbb{C}-$linearni, a preslikavanje $x \mapsto \pi(x)$ je homomorfizam nad poljem $\mathbb{R}$.

Ako je reprezentacija π injektivni homomorfizam, kažemo da je π **vjerna reprezentacija**. Ako se radi o reprezentaciji grupe G, onda je jezgra

$$H = \operatorname{Ker}\pi = \{a \in G;\ \pi(a) = I\}$$

reprezentacije π normalna podgrupa grupe G i prijelazom na kvocijent dobivamo vjernu reprezentaciju $\tilde{\pi}$ kvocijentne grupe G/H :

$$\tilde{\pi}(aH) = \pi(a), \qquad aH \in G/H.$$

Slično, ako se radi o reprezentaciji unitalne ili Liejeve algebre $\mathcal{A}$, onda je jezgra

$$\mathcal{I} = \operatorname{Ker}\pi = \{a \in \mathcal{A};\ \pi(a) = 0\}$$

reprezentacije π ideal u toj algebri $\mathcal{A}$ i prijelazom na kvocijent dobivamo vjernu reprezentaciju unitalne ili Liejeve kvocijentne algebre $\mathcal{A}/\mathcal{I}$:

$$\tilde{\pi}(a + \mathcal{I}) = \pi(x), \qquad x + \mathcal{I} \in \mathcal{A}/\mathcal{I}.$$

U daljnjem je stalno $\mathcal{A}$ oznaka za bilo koju od spomenute tri algebarske strukture. Neka su π i ρ reprezentacije od $\mathcal{A}$ na vektorskim prostorima V i W nad istim poljem. Za linearan operator $A : V \to W$ kažemo da je $\mathcal{A}-$**ekvivarijantan** ako vrijedi

$$A\pi(a) = \rho(a)A \qquad \forall a \in \mathcal{A}.$$

Drugi naziv za takav operator A je **operator preplitanja** reprezentacija π i ρ. Skup svih takvih označavat ćemo sa $Hom_{\mathcal{A}}(V, W)$. To je potprostor prostora $L(V, W)$ svih linearnih operatora sa V u W. Kažemo da je reprezentacija π **ekvivalentna** reprezentaciji ρ i pišemo $\pi \simeq \rho$ ako postoji $A \in Hom_{\mathcal{A}}(V, W)$ koji je izomorfizam prostora V na prostor W. Očito je $\simeq$ relacija ekvivalencije.

Neka je π reprezentacija od $\mathcal{A}$ na vektorskom prostoru V. **Potprostor** W prostora V zove se $\pi-$**invarijantan** ako je invarijantan u odnosu na svaki operator $\pi(a)$, $a \in \mathcal{A}$:

$$w \in W, \quad a \in \mathcal{A} \qquad \Longrightarrow \qquad \pi(a)w \in W.$$

Suma i presjek bilo koje familije $\pi-$invarijantnih potprostora također su $\pi-$invarijantni potprostori.

Ako je W $\pi-$invarijantan potprostor onda restrikcijom i prijelazom na kvocijent možemo definirati reprezentaciju π_W na prostoru W i reprezentaciju $\pi_{V/W}$ na prostoru V/W :

$$\pi_W(a) = \pi(a)|W \in L(W); \qquad \pi_{V/W}(a)(v + W) = \pi(a)v + W, \quad a \in \mathcal{A},\ v \in V.$$

π_W se zove **subreprezentacija** a $\pi_{V/W}$ **kvocijentna reprezentacija** reprezentacije π. Kombinacijom ove dvije konstrukcije reprezentacija dolazimo do tzv. **subkvocijentne reprezentacije**: ako su U i W $\pi-$invarijantni potprostori od V i ako je $U \subseteq W$ onda je $\pi_{W/U}$ kvocijentna reprezentacija subreprezentacije π_W (ili subreprezentacija kvocijentne reprezentacije $\pi_{V/U}$).

Reprezentacija π od $\mathcal{A}$ na vektorskom prostoru V zove se **ireducibilna** ako postoje točno dva $\pi-$invarijantna potprostora od V. To znači da je $V \neq \{0\}$ i da su trivijalni potprostori $\{0\}$ i V jedini $\pi-$invarijantni potprostori od V, odnosno da V nema netrivijalnih $\pi-$invarijantnih potprostora. Reprezentacija je **reducibilna** ako nije ireducibilna.

Neka je π reprezentacija grupe G na vektorskom prostoru V. Stavimo

$$V^G = \{v \in V;\ \pi(a)v = v\ \ \forall a \in G\}.$$

Vektori iz V^G zovu se $G-$**invarijante** reprezentacije π. Potprostor $G-$invarijanata V^G je očito $\pi-$invarijantan. Štoviše, svaki potprostor od V^G je $\pi-$invarijantan.

Neka su π i ρ reprezentacije grupe G na vektorskim prostorima V i W nad istim poljem K. Na prostoru $L(V, W)$ tada možemo definirati reprezentaciju τ grupe G na sljedeći način:

$$\tau(a)(A) = \rho(a)A\pi(a^{-1}), \qquad A \in L(V, W), \quad a \in G.$$

Tada je očito $Hom_G(V, W)$ upravo $\tau-$invarijantan potprostor $L(V, W)^G$ svih $G-$invarijanata reprezentacije τ.

Neka je sada π reprezentacija Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ na vektorskom prostoru V. Tada se $\mathfrak{g}-$**invarijantama** zovu vektori $\pi-$invarijantnog potprostora

$$V^{\mathfrak{g}} = \{v \in V;\ \pi(x)v = 0\ \ \forall x \in \mathfrak{g}\}$$

Slično kao kod grupa, ako su π i ρ reprezentacije Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ na vektorskim prostorima V i W na prostoru $L(V,W)$ možemo definirati reprezentaciju τ od $\mathfrak{g}$ na sljedeći način:

$$\tau(x)(A) = \rho(x)A - A\pi(x), \qquad A \in L(V,W), \quad x \in \mathfrak{g}.$$

Tada je $Hom_{\mathfrak{g}}(V,W)$ upravo $\tau-$invarijantan potprostor $L(V,W)^{\mathfrak{g}}$ svih $\mathfrak{g}-$invarijanata reprezentacije τ.

Neka je π reprezentacija grupe G na vektorskom prostoru V nad poljem K. Na dualnom prostoru $V' = L(V,K)$ definiramo tzv. **kontragredijentnu** reprezentaciju π^t reprezentacije π :

$$\pi^t(a)f = (f \circ \pi)(a^{-1}), \qquad \text{tj.} \qquad (\pi^t(a)f)(v) = f(\pi(a^{-1})v), \qquad a \in G, \quad v \in V, \quad f \in V'.$$

Analogno, ako je π reprezentacija Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ na vektorskom prostoru V tada se na dualnom prostoru V' kontragredijentna reprezentacija π^t reprezentacije π definira ovako:

$$\pi^t(x)f = (f \circ \pi)(-x), \qquad \text{tj.} \qquad (\pi^t(x)f)(v) = -f(\pi(x)v), \qquad x \in \mathfrak{g}, \quad v \in V, \quad f \in V'.$$

Ovdje se u stvari radi o prethodnim konstrukcijama za trivijalnu reprezentaciju ρ grupe G na jednodimenzionalnom prostoru $W = K$ ($\rho(a) = 1\ \forall a \in G$), odnosno, za trivijalnu reprezentaciju ρ Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ na jednodimenzionalnom prostoru $W = K$ ($\rho(x) = 0\ \forall x \in \mathfrak{g}$).

Neka je sada zadana familija reprezentacija π_i, $i \in I$, od $\mathcal{A}$ na vektorskim prostorima V_i nad istim poljem. Tada na direktnoj sumi

$$\coprod_{i \in I} V_i = \left\{ f : I \to \bigcup_{i \in I} V_i;\ f(i) \in V_i\ \ \forall i \in I,\ \text{skup } \{i \in I;\ f(i) \neq 0\} \text{ je konačan} \right\}$$

definiramo reprezentaciju π od $\mathcal{A}$ na sljedeći način:

$$(\pi(x)f)(i) = \pi_i(x)f(i), \qquad x \in \mathcal{A}, \quad i \in I.$$

π se zove **direktna suma reprezentacija** π_i. Naravno, ako je π neka reprezentacija od $\mathcal{A}$ na vektorskom prostoru V i ako su V_i, $i \in I$, $\pi-$invarijantni potprostori od V takvi da je V njihova direktna suma, onda je reprezentacija π ekvivalentna direktnoj sumi njenih subreprezentacija π_{V_i}.

1.2.2 Potpuno reducibilne reprezentacije

Reprezentacija π od $\mathcal{A}$ na vektorskom prostoru V zove se **potpuno reducibilna**, ako za svaki $\pi-$invarijantan potprostor W postoji njegov $\pi-$invarijantan direktni komplement, tj. postoji $\pi-$invarijantan potprostor U takav da je $V = W \dot{+} U$. Naravno, svaka je ireducibilna reprezentacija potpuno reducibilna. Lako se vidi da vrijedi:

Propozicija 1.2.1. *Neka je π potpuno reducibilna reprezentacija od $\mathcal{A}$ na vektorskom prostoru V. Tada je svaka njena subkvocijentna reprezentacija potpuno reducibilna.*

Nadalje:

Teorem 1.2.2. *Neka je π reprezentacija od $\mathcal{A}$ na vektorskom prostoru V. Pretpostavimo da postoje $\pi-$invarijantni potprostori V_i, $i \in I$, takvi da je*

$$V = \sum_{i \in I} V_i$$

i da su sve subreprezentacije π_{V_i} ireducibilne.

(a) *Reprezentacija π je potpuno reducibilna.*

(b) *Ako je W $\pi-$invarijantan potprostor od V onda postoji $J \subseteq I$ takav da je suma potprostora*

$$U = \sum_{j\in J} V_j$$

direktna i da je $V = W \dotplus U$.

(c) *Postoji $K \subseteq I$ takav da je*

$$V = \sum_{k\in K} V_k$$

pri čemu je ta suma potprostora direktna.

Tvrdnje (a) i (c) tog teorema očito slijede iz tvrdnje (b). Tvrdnja (b) dokazuje se primjenom Zornove leme na inkluzijom parcijalno uređen skup $\mathcal{S}$ svih podskupova $J \subseteq I$ takvih da je suma potprostora

$$W + \sum_{j\in J} V_j$$

direktna.

U konačnodimenzionalnom slučaju iz teorema 1.2.2. neposredno slijedi:

Teorem 1.2.3. *Neka je π reprezentacija od $\mathcal{A}$ na konačnodimenzionalnom vektorskom prostoru $V \neq \{0\}$. Sljedeća su svojstva međusobno ekvivalentna:*

(a) *Reprezentacija π je potpuno reducibilna.*

(b) *Postoje $\pi-$invarijantni potprostori V_i, $i \in I$, takvi da su sve reprezentacije π_{V_i} ireducibilne i da je*

$$V = \sum_{i\in I} V_i.$$

(c) *Postoje $\pi-$invarijantni potprostori $V_1, V_2, \dots, V_n$ takvi da su reprezentacije $\pi_{V_1}, \pi_{V_2}, \dots, \pi_{V_n}$ ireducibilne i da je*

$$V = V_1 \dotplus V_2 \dotplus \cdots \dotplus V_n.$$

Teorem 1.2.4. (Schurova lema) *Neka su π i ρ ireducibilne reprezentacije od $\mathcal{A}$ na vektorskim prostorima V i W nad istim poljem K.*

(a) *Ako reprezentacije π i ρ nisu ekvivalentne onda je $Hom_{\mathcal{A}}(V, W) = \{0\}$.*

(b) *$End_{\mathcal{A}}(V) = Hom_{\mathcal{A}}(V, V)$ je tijelo, tj. svaki $0 \neq A \in End_{\mathcal{A}}$ je invertibilan.*

(c) *Ako je prostor V konačnodimenzionalan i kompleksan, onda je $End_{\mathcal{A}}(V) = \{\lambda I;\ \lambda \in K\}$.*

Zadatak 1.2.1. *Dokažite teorem 1.2.4.*

Uputa: (a) Za $A \in Hom_{\mathcal{A}}(V, W)$ uočite da je $Ker\, A$ $\pi-$invarijantan potprostor od V i da je $Im\, A$ $\rho-$invarijantan potprostor od W. (b) izvedite iz (a), a (c) iz (b) i iz činjenice da svaki $A \in L(V)$ ima bar jednu svojstvenu vrijednost $\lambda \in \mathbb{C}$, pa $A - \lambda I$ nije invertibilan.

Bez dokaza navodimo još sljedeći važan teorem u teoriji poluprostih Liejevih algebri:

Teorem 1.2.5. (**H. Weyl**) *Svaka konačnodimenzionalna reprezentacija poluproste Liejeve algebre je potpuno reducibilna.*

1.2.3 Moduli konačne duljine

Promatrat ćemo sada proizvoljne reprezentacije od $\mathcal{A}$. Dakle, ne ćemo pretpostavljati da je promatrana reprezentacija potpuno reducibilna niti da je vektorski prostor na kome operatori reprezentacije djeluju konačnodimenzionalan. Bit će nam spretnije koristiti tzv. *modulsku* a ne *reprezentacijsku* terminologiju. Prostor V na kome je zadana reprezentacija π od $\mathcal{A}$ zvat ćemo $\mathcal{A}-$**modul**. Potprostor W od V koji je $\pi-$invarijantan i na kome djeluje subreprezentacija π_W zove se $\mathcal{A}-$**podmodul** od V. Kvocijentni prostor V/W na kome djeluje kvocijentna reprezentacija $\pi_{V/W}$ zove se **kvocijentni modul** modula V po podmodulu W. Naravno, ako su $U \subseteq W$ podmoduli od V, onda se W/U zove **subkvocijentni modul** ili kraće **subkvocijent** od V. Ako je reprezentacija π na prostoru V ireducibilna, za V kažemo da je **ireducibilan modul** ili **prost modul**. Ako je reprezentacija π potpuno reducibilna, kažemo da je V **potpuno reducibilan modul** ili **poluprost modul**. Dakle, modul V je poluprost ako za svaki njegov podmodul W postoji podmodul U od V takav da je $V = W \dotplus U$.

U daljnjem ćemo uglavnom izostavljati prefiks $\mathcal{A}$ i govoriti samo modul, podmodul, ... a ne $\mathcal{A}-$modul, $\mathcal{A}-$podmodul. Nadalje, u oznaci operatora pripadne reprezentacije π izostavljamo znak π i za $v \in V$ i $x \in \mathcal{A}$ pišemo xv umjesto $\pi(x)v$.

Operatore preplitanja dviju reprezentacija zovemo i operatorima preplitanja pripadnih dvaju modula, a također i **homorfizmima** jednog **modula** u drugi. Ako su reprezentacije π i ρ na vektorskim prostorima V i W ekvivalentne, kažemo da su **moduli V i W ekvivalentni** ili **izomorfni** i pišemo $V \simeq W$.

Modul V zove se **Noetherin** ako je zadovoljen tzv. **"ascending chain condition"**:

(ACC) *Za svaki rastući niz podmodula $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ od V postoji m takav da je $V_n = V_m$ $\forall n \geq m$.*

Modul V zove se **Artinov** ako je zadovoljen tzv. **"descending chain condition"**:

(DCC) *Za svaki padajući niz podmodula $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ od V postoji m takav da je $V_n = V_m$ $\forall n \geq m$.*

Za modul V kažemo da zadovoljava **uvjet maksimuma** ako svaki neprazan skup $\mathcal{V}$ podmodula od V ima bar jedan maksimalan element W, tj. takav da ne postoji $U \in \mathcal{V}$ sa svojstvom $W \subsetneq U$. Modul V zadovoljava **uvjet minimuma** ako svaki neprazan skup $\mathcal{V}$ podmodula od V ima bar jedan minimalan element W, tj. takav da ne postoji $U \in \mathcal{V}$ sa svojstvom $U \subsetneq W$.

Za podskup S modula V sa $[S]$ označavamo presjek svih podmodula od V koji sadrže skup S. To je najmanji podmodul od V koji sadrži S i zove se **podmodul od V generiran skupom** S. Kažemo da je V **konačno generiran modul** ako postoji konačan skup $S \subseteq V$ takav da je $V = [S]$.

Teorem 1.2.6. (a) *Modul V je Noetherin ako i samo ako V zadovoljava uvjet maksimuma.*

(b) *Modul V je Artinov ako i samo ako V zadovoljava uvjet minimuma.*

(c) *Modul V je Noetherin ako i samo ako je svaki njegov podmodul konačno generiran.*

Dokaz: (a) Pretpostavimo da modul V zadovoljava uvjet maksimuma i neka je

$$V_1 \subseteq V_2 \subseteq V_3 \subseteq \cdots$$

rastući niz podmodula. Neka je $n \in \mathbb{N}$ takav da je V_n maksimalni element skupa $\mathcal{V} = \{V_m;\ m \in \mathbb{N}\}$. Za $m \geq n$ vrijedi $V_n \subseteq V_m$, pa iz maksimalnosti V_n slijedi $V_m = V_n$.

Obratno, pretpostavimo sada da je modul V Noetherin i neka je $\mathcal{V} \neq \emptyset$ skup njegovih podmodula. Pretpostavimo da $\mathcal{V}$ nema nijedan maksimalni element. To znači da za svaki $W \in \mathcal{V}$ postoji $U \in \mathcal{V}$ takav da vrijedi $W \subsetneq U$. No tada induktivno možemo formirati niz $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ elemenata od $\mathcal{V}$ takav da je $V_n \subsetneq V_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$, pa nije zadovoljen uvjet (ACC) suprotno pretpostavci da je modul V Noetherin. Ova kontradikcija pokazuje $\mathcal{V}$ ima bar jedan maksimalni element. Dakle, modul V zadovoljava uvjet maksimuma.

Tvrdnja (b) dokazuje se potpuno analogno.

(c) Pretpostavimo najprije da je modul V Noetherin i neka je W proizvoljan podmodul od V. Neka je $\mathcal{W}$ skup svih konačno generiranih podmodula od W. Skup $\mathcal{W}$ je neprazan jer je $\{0\} \in \mathcal{W}$. Prema dokazanoj tvrdnji (a) modul V zadovoljava uvjet maksimuma pa u skupu $\mathcal{W}$ postoji bar jedan maksimalan element W_0. Pretpostavimo da je $W_0 \neq W$. Neka je S konačan skup takav da je $W_0 = [S]$. Nadalje, neka je $w \in W \setminus W_0$. Tada je $W_1 = [S \cup \{w\}] \in \mathcal{W}$, vrijedi $W_0 \subseteq W_1$, a kako $w \notin W_0$ imamo $W_0 \neq W_1$. To je u suprotnosti s maksimalnosti od W_0 u skupu $\mathcal{W}$. Ova kontradikcija pokazuje da je $W_0 = W$ i time je dokazano da je $W \in \mathcal{W}$, tj. modul W je konačno generiran.

Pretpostavimo sada da je svaki podmodul od V konačno generiran i neka je

$$V_1 \subseteq V_2 \subseteq V_3 \subseteq \cdots$$

rastući niz podmodula od V. Tada je njihova unija $W = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} V_n$ podmodul od V i kao takav je konačno generiran. Neka je S konačan podskup od W takav da je $W = [S]$. Budući da je niz $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rastući, postoji $m \in \mathbb{N}$ takav da je $S \subseteq V_m$. No tada je $W = [S] \subseteq V_m$, dakle, $W = V_m$, a odatle slijedi $V_n = V_m$ $\forall n \geq m$. Prema tome, modul V zadovoljava uvjet (ACC), odnosno, V je Noetherin modul.

Zadatak 1.2.2. *Neka je V modul i W podmodul. Dokažite da je modul V Noetherin ako i samo ako su W i V/W Noetherini moduli.*

Zadatak 1.2.3. *Neka je V modul i W podmodul. Dokažite da je modul V Artinov ako i samo ako su W i V/W Artinovi moduli.*

Uputa: Neka je $\varphi : V \to V/W$ kvocijentni epimorfizam. Uočite da je

$$U \mapsto \varphi^{-1}(U) = \{v \in V;\ \varphi(v) \in U\}$$

bijekcija sa skupa svih podmodula od V/W na skup svih podmodula od V koji sadrže W.

Konačna filtracija modula V je konačan niz podmodula $\mathcal{V} = (V_0, V_1, \ldots, V_n)$ takav da je

$$\{0\} = V_0 \subseteq V_1 \subseteq \cdots \subseteq V_n = V.$$

Subkvocijenti V_j/V_{j-1}, $j = 1, \ldots, n$, zovu se **faktori filtracije** $\mathcal{V}$. Filtracija $\mathcal{V}$ je **striktna** ako je striktno rastuća, tj. su joj svi faktori različiti od $\{0\}$. **Duljina filtracije** $\mathcal{V}$ je broj njenih faktora različitih od $\{0\}$. To je upravo broj n, ako se radi o striktnoj filtraciji. Za dvije filtracije $\mathcal{V} = (V_0, V_1, \ldots, V_n)$ i $\mathcal{W} = (W_0, W_1, \ldots, W_m)$ kažemo da su **ekvivalentne** ako su im duljine jednake i postoji bijekcija između dvaju nizova faktora različitih od $\{0\}$ takva da su odgovarajući faktori izomorfni moduli. Kažemo da je filtracija $\mathcal{W} = (W_0, W_1, \ldots, W_m)$ **profinjenje filtracije** $\mathcal{V} = (V_0, V_1, \ldots, V_n)$ ako postoji striktno rastuće preslikavanje $\sigma : \{0, 1, \ldots, n\} \to \{0, 1, \ldots, m\}$ takvo da je $V_j = W_{\sigma(j)}$ $\forall j$. Kažemo da je $\mathcal{W}$ **pravo profinjenje** od $\mathcal{V}$ ako je duljina od $\mathcal{W}$ striktno veća od duljine od $\mathcal{V}$. **Kompozicioni niz modula** V je konačna filtracija od V čiji su svi faktori prosti moduli. Dakle, kompozicioni niz je striktna filtracija koja nema pravih profinjenja, odnosno, ekvivalentna je svakom svom profinjenju. Kažemo da je V **modul konačne duljine** ako on ima bar jedan kompozicioni niz.

Teorem 1.2.7. (**Jordan–Hölder**) *Svake dvije konačne filtracije modula V imaju međusobno ekvivalentna profinjenja. Posebno, svaka dva kompoziciona niza od V su međusobno ekvivalentna.*

Ovaj ćemo teorem dokazati pomoću sljedeće leme:

Lema 1.2.8. (**Zassenhaus**) *Neka su A_1, A_2, B_1, B_2 podmoduli modula V takvi da je $B_1 \subseteq A_1$ i $B_2 \subseteq A_2$. Tada je*

$$((A_1 \cap A_2) + B_1)/((A_1 \cap B_2) + B_1) \simeq ((A_1 \cap A_2) + B_2)/((B_1 \cap A_2) + B_2).$$

Dokaz ćemo provesti pomoću tzv. **Drugog teorema o izomorfizmu:** *Ako su U i W podmoduli modula V onda je preslikavanje $u + U \cap W \mapsto u + W$, $u \in U$, dobro definirano sa $U/(U \cap W)$ u $(U + W)/W$, i to je izomorfizam modula $U/(U \cap W)$ na modul $(U + W)/W$.* Primjenom tog teorema na $U = A_1 \cap A_2$ i $W = (A_1 \cap B_2) + B_1$ nalazimo

$$(A_1 \cap A_2)/(((A_1 \cap B_2) + B_1) \cap (A_1 \cap A_2)) \simeq ((A_1 \cap A_2) + (A_1 \cap B_2) + B_1)/((A_1 \cap B_2) + B_1),$$

a kako je $B_2 \subseteq A_2$, imamo $A_1 \cap B_2 \subseteq A_1 \cap A_2$, pa dobivamo

$$(A_1 \cap A_2)(((A_1 \cap B_2) + B_1) \cap (A_1 \cap A_2)) \simeq ((A_1 \cap A_2) + B_1)/((A_1 \cap B_2) + B_1).$$

Nadalje, imamo

$$((A_1 \cap B_2) + B_1) \cap (A_1 \cap A_2) = ((A_1 \cap B_2) + B_1) \cap A_2 = (A_1 \cap B_2) + (A_2 \cap B_1),$$

pa gornji izomorfizam poprima oblik

$$(A_1 \cap A_2)/((A_1 \cap B_2) + (A_2 \cap B_1)) \simeq ((A_1 \cap A_2) + B_1)/((A_1 \cap B_2) + B_1).$$

No lijeva strana je simetrična u odnosu na zamjenu indeksa 1 i 2. To znači da je modul s desne strane izomorfan modulu koji se iz njega dobije zamjenom indeksa 1 i 2, a to je upravo tvrdnja leme.

Dokaz teorema 1.2.7. Neka su $\mathcal{V} = (V_0, V_1, \dots, V_n)$ i $\mathcal{W} = (W_0, W_1, \dots, W_m)$ dvije konačne filtracije modula V. Definirajmo sada sljedeće podmodule modula V :

$$V_{ij} = (V_i \cap W_j) + V_{i-1} \quad \text{za} \quad 1 \le i \le n, \quad 0 \le j \le m,$$

i

$$W_{ji} = (V_i \cap W_j) + W_{j-1} \quad \text{za} \quad 0 \le i \le n, \quad 1 \le j \le m.$$

Tada je

$$\mathcal{V}' = (V_{10}, V_{11}, \dots, V_{1m}, V_{20}, V_{21}, \dots, V_{2m}, \dots\dots, V_{n0}, V_{n1}, \dots, V_{nm})$$

konačna filtracija od V koja je profinjenje filtracije $\mathcal{V}$; naime,

$$V_{10} = (V_1 \cap W_0) + V_0 = \{0\} = V_0; \quad V_{ij} = (V_i \cap W_j) + V_{i-1} \subseteq (V_i \cap W_{j+1}) + V_{i-1} = V_{i,j+1}, \quad \text{za} \quad j < m;$$

$$V_{im} = (V_i \cap W_m) + V_{i-1} = V_i + V_{i-1} = V_i = (V_{i+1} \cap W_0) + V_i = V_{i+1,0} \quad \text{za} \quad i < n;$$

$$V_{nm} = (V_n \cap W_m) + V_{n-1} = V = V_n.$$

Sasvim analogno je

$$\mathcal{W}' = (W_{10}, W_{11}, \dots, W_{1n}, W_{20}, W_{21}, \dots, W_{2n}, \dots\dots, W_{m0}, W_{m1}, \dots, W_{mn})$$

profinjenje filtracije $\mathcal{W}$. Dokažimo da su filtracije $\mathcal{V}'$ i $\mathcal{W}'$ međusobno ekvivalentne. Prije svega, za filtraciju $\mathcal{V}'$ treba samo promatrati subkvocijente $V_{ij}/V_{i,j-1}$ za $1 \leq i \leq n$ i za $1 \leq j \leq m$. Naime, za bilo koji $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ imamo

$$V_{i+1,0} = (V_{i+1} \cap W_0) + V_i = (V_{i+1} \cap \{0\}) + V_i = V_i$$

i

$$V_{im} = (V_i \cap W_m) + V_{i-1} = (V_i \cap V) + V_{i-1} = V_i + V_{i-1} = V_i,$$

pa su faktori $V_{i+1,0}/V_{im}$ trivijalni (jednaki $\{0\}$). Analogno su za drugu filtraciju $\mathcal{W}'$ faktori $W_{j+1,0}/W_{jn}$ trivijalni, pa treba promatrati samo faktore $W_{ji}/W_{j,i-1}$ za $1 \leq i \leq n$ i za $1 \leq j \leq m$. Međutim, po Zassenhausovoj lemi 1.2.8. primijenjenoj na podmodule $A_1 = V_i$, $A_2 = W_j$, $B_1 = V_{i-1}$ i $B_2 = W_{j-1}$ nalazimo da je

$$((V_i \cap W_j) + V_{i-1})/((V_i \cap W_{j-1}) + V_{i-1}) \simeq ((V_i \cap W_j) + W_{j-1})/((V_{i-1} \cap W_j) + W_{j-1}).$$

No to znači da je $V_{ij}/V_{i,j-1} \simeq W_{ji}/W_{j,i-1}$ za $1 \leq i \leq n$ i $1 \leq j \leq m$, odnosno, filtracije $\mathcal{V}'$ i $\mathcal{W}'$ su ekvivalentne. Time je Jordan−Hölderov teorem 1.2.7. dokazan.

Korolar 1.2.9. *Ako je V modul konačne duljine, svaka dva njegova kompoziciona niza su ekvivalentna. Nadalje, svaka striktna filtracija od V ima profinjenje koje je kompozicioni niz.*

Dokaz: Prva tvrdnja slijedi neposredno iz Jordan−Hölderovog teorema, budući da je kompozicioni niz ekvivalentan sa svakim svojim profinjenjem. Neka je $\mathcal{W}$ striktna filtracija i $\mathcal{V}$ kompozicioni niz modula V. Prema Jordan−Hölderovom teoremu postoji profinjenje $\mathcal{W}'$ od $\mathcal{W}$ koje je ekvivalentno kompozicionom nizu $\mathcal{V}$. No to znači da je svaki faktor od $\mathcal{W}'$ ili prost ili jednak $\{0\}$. Isključimo li neke članove filtracije $\mathcal{W}'$ dolazimo do striktne filtracije $\mathcal{W}''$ koja je profinjenje od $\mathcal{W}$ i koja je ekvivalentna kompozicionom nizu $\mathcal{V}$. Tada je $\mathcal{W}''$ kompozicioni niz modula V. Time je dokazana i druga tvrdnja korolara.

Prema tom korolaru svaka dva kompoziciona niza modula V konačne duljine imaju istu duljinu. Taj se broj zove **duljina modula** V i označava $\ell(V)$. Iz prethodnog korolara neposredno slijedi:

Korolar 1.2.10. *Ako je $\mathcal{V}$ bilo koja filtracija od V onda je njena duljina $\leq \ell(V)$. Striktna filtracija je kompozicioni niz ako i samo ako joj je duljina jednaka $\ell(V)$.*

Teorem 1.2.11. *Modul V je konačne duljine ako i samo ako je V i Noetherin modul i Artinov modul.*

Dokaz: Pretpostavimo da je V modul konačne duljine i neka je $n = \ell(V)$. Ako modul V nije bilo Noetherin bilo Artinov, očito postoji striktna konačna filtracija duljine $n+1$: nju možemo izabrati od članova beskonačnog striktno rastućeg ili striktno padajućeg niza podmodula (dodajući im $\{0\}$ i/ili V). No to je nemoguće zbog korolara 1.2.9. Ova kontradikcija pokazuje da je modul V nužno i Noetherin i Artinov.

Pretpostavimo sada da je modul V i Noetherin i Artinov. Stavimo $V_0 = \{0\}$. Ako je $V_0 = V$, jednočlan niz (V_0) je kompozicioni niz modula V. Ako je $V_0 \neq V$, neka je $\mathcal{S}$ skup svih podmodula W od V različitih od $V_0 = \{0\}$. Po pretpostavci V je Artinov modul pa neprazan skup $\mathcal{S}$ sadrži bar jedan minimalan element V_1. Zbog minimalnosti je tada $V_1/V_0 \simeq V_1$ prost modul. Pretpostavimo da je za neko $k \geq 1$ konstruiran striktno rastući niz podmodula

$$V_0 \subsetneq V_1 \subsetneq \cdots \subsetneq V_k$$

takav da su u slučaju svi subkvocijenti V_j/V_{j-1}, $1 \leq j \leq k$, prosti moduli. Ako je $V_k = V$, onda je $(V_0, V_1, \ldots, V_k)$ kompozicioni niz modula V. Pretpostavimo da je $V_k \neq V$. Neka je sada $\mathcal{S}$ skup svih podmodula od V kojima je V_k pravi podmodul. Neprazan skup $\mathcal{S}$ ima bar jedan minimalni element V_{k+1}. Tada je subkvocijent V_{k+1}/V_k prost modul. Na taj način induktivno dolazimo do konačnog ili beskonačnog striktno rastućeg niza podmodula

$$\{0\} = V_0 \subsetneq V_1 \subsetneq V_2 \subsetneq \cdots\cdots$$

takvih da su svi uzastopni subkvocijenti V_j/V_{j-1}, $j \geq 0$, prosti moduli. Budući da je modul V Noetherin, taj niz mora biti konačan, odnosno, $V_n = V$ za neki n. Tada je $(V_0, V_1, \ldots, V_n)$ kompozicioni niz modula V, dakle, V je modul konačne duljine.

Zadatak 1.2.4. *Neka je V modul i W podmodul. Dokažite da je V modul konačne duljine ako i samo ako su W i V/W moduli konačne duljine i da je tada $\ell(V) = \ell(W) + \ell(V/W)$.*

Zadatak 1.2.5. *Neka je V poluprost modul. Dokažite da je V modul konačne duljine ako i samo ako je V direktna suma konačno mnogo svojih prostih podmodula.*

Ako je V modul konačne duljine i W prost modul, broj faktora u kompozicionom nizu od V koji su izomorfni modulu W neovisan je o izboru kompozicionog niza $-$ naime, po Jordan$-$Hölderovom teoremu svaka dva kompoziciona niza su međusobno ekvivalentni. Taj se broj zove **multiplicitet modula W u modulu V**. Označimo taj broj sa $m(V, W)$.

Zadatak 1.2.6. *Neka je V modul konačne duljine i U njegov podmodul. Dokažite da za svaki prost modul W vrijedi $m(V, W) = m(U, W) + m(V/U, W)$.*

1.3 Kompleksne poluproste Liejeve algebre

U ovom ćemo odjeljku navesti velikom većinom bez dokaza niz činjenica o kompleksnim poluprostim Liejevim algebrama.

1.3.1 Cartanove podalgebre i korijenski rastav

Za proizvoljnu Liejevu algebru $\mathfrak{g}$ (nad bilo kojim poljem) **Cartanova podalgebra** je nilpotentna Liejeva podalgebra $\mathfrak{h}$ od $\mathfrak{g}$ takva da je $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$. Za kompleksnu Liejevu algebru $\mathfrak{g}$ Liejeva podalgebra $\mathfrak{h}$ od $\mathfrak{g}$ zove se **toralna podalgebra** ako je operator $ad\,x$ dijagonalizabilan za svaki $x \in \mathfrak{h}$. Maksimalni elementi u skupu svih toralnih podalgebri od $\mathfrak{g}$ zovu se **maksimalne toralne podalgebre** od $\mathfrak{g}$.

Propozicija 1.3.1. *Svaka toralna podalgebra poluproste kompleksne Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ je komutativna.*

Teorem 1.3.2. *Neka je $\mathfrak{h}$ Liejeva podalgebra kompleksne poluproste Liejeve algebre $\mathfrak{g}$. Sljedeća su dva svojstva međusobno ekvivalentna:*

(*a*) *$\mathfrak{h}$ je Cartanova podalgebra od $\mathfrak{g}$.*

(*b*) *$\mathfrak{h}$ je maksimalna toralna podalgebra od $\mathfrak{g}$.*

Neka je u daljnjem $\mathfrak{h}$ Cartanova podalgebra kompleksne Liejeve algebre $\mathfrak{g}$. Za linearan funkcional $\alpha \in \mathfrak{h}^*$ stavimo

$$\mathfrak{g}_\alpha = \{x \in \mathfrak{g};\ (ad\,h)x = \alpha(h)x\ \forall h \in \mathfrak{h}\}.$$

Element $\alpha \in \mathfrak{h}^*$ različit od 0 i takav da je $\mathfrak{g}_\alpha \neq \{0\}$ zove se **korijen** poluproste Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ u odnosu na Cartanovu podalgebru $\mathfrak{h}$. Skup svih korijena označimo sa $R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$:

$$R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) = \{\alpha \in \mathfrak{h}^*;\ \alpha \neq 0,\ \mathfrak{g}_\alpha \neq \{0\}\}.$$

Očito je $R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ konačan skup. Budući da je $ad\,\mathfrak{h} = \{ad\,h;\ h \in \mathfrak{h}\}$ skup dijagonalizabilnih operatora na vektorskom prostoru $\mathfrak{g}$ koji međusobno komutiraju, oni se svi mogu istovremeno dijagonalizirati, a kako je $h \mapsto ad\,h$ linearno preslikavanje, zaključujemo da je

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \dot{+} \sum_{\alpha \in R(\mathfrak{g},\mathfrak{h})} \dot{+}\, \mathfrak{g}_\alpha.$$

Preciznije

Teorem 1.3.3. *Neka je $\mathfrak{h}$ Cartanova podalgebra kompleksne poluproste Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ i neka je B Killingova forma od $\mathfrak{g}$.*

(*a*) $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{h}$, *dakle,*

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \dot{+} \sum_{\alpha \in R(\mathfrak{g},\mathfrak{h})} \dot{+}\, \mathfrak{g}_\alpha.$$

(*b*) $\dim \mathfrak{g}_\alpha = 1\ \ \forall \alpha \in R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$.

(*c*) $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] = \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$ *ako su $\alpha, \beta \in R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ takvi da je $\beta \neq -\alpha$, tj. $\alpha + \beta \neq 0$.*

(*d*) $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}] \neq \{0\}\ \ \forall \alpha \in R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$. *Za svaki $\alpha \in R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ postoji jedinstven element h_α u potprostoru $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}]$ od $\mathfrak{h}$ takav da je $\alpha\,(h_\alpha) = 2$.*

(e) *Skup* $\{h_\alpha;\ \alpha \in R(\mathfrak{g},\mathfrak{h})\}$ *razapinje* $\mathfrak{h}$.

(f) *Za* $\alpha \in R(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ *i za svaki* $x_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha \setminus \{0\}$ *postoji jedinstven* $y_\alpha \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ *takav da je* $[x_\alpha, y_\alpha] = h_\alpha$.

(g) *Ako je* $\alpha \in R(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ *i* $c \in \mathbb{C}$ *onda je* $c\alpha \in R(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ *ako i samo ako je* $c = \pm 1$.

(h) *Za* $\alpha, \beta \in R(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ *takve da je* $\beta \neq -\alpha$ *je* $B(\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta) = \{0\}$.

(i) *Restrikcija* $B|\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}$ *je nedegenerirana.*

(j) *Neka je* $\lambda \mapsto t_\lambda$ *izomorfizam dualnog prostora* $\mathfrak{h}^*$ *na prostor* $\mathfrak{h}$ *pridružen nedegeneriranoj bilinearnoj formi* $B|\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}$, *tj. za* $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ *je*

$$\lambda(h) = B(h, t_\lambda) \qquad \forall h \in \mathfrak{h}.$$

Tada je

$$h_\alpha = \frac{2}{B(t_\alpha, t_\alpha)} t_\alpha, \qquad \alpha \in R(\mathfrak{g},\mathfrak{h}).$$

(k) *Za* $\alpha \in R(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$, $x \in \mathfrak{g}_\alpha$ *i* $y \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ *vrijedi* $[x,y] = B(x,y)h_\alpha$. *Posebno, ako su* x_α *i* y_α *kao u* (f) *onda je* $B(x_\alpha, y_\alpha) = 1$.

1.3.2 Sistemi korijena

Neka je V vektorski prostor (nad poljem K gdje je $K = \mathbb{R}$ ili $K = \mathbb{C}$). **Pseudorefleksija** na prostoru V je linearan operator $\sigma : V \to V$ takav da je rang operatora $I_V - \sigma$ jednak 1. Izaberemo li bilo koji vektor $v \neq 0$ iz područja vrijednosti operatora $I_V - \sigma$ zbog linearnosti vidimo da za neki (jedinstven) linearan funkcional $f \in V^*$ vrijedi $(I_V - \sigma)x = f(x)v$ $\forall x \in V$. Dakle, pseudorefleksije su točno linearni operatori oblika $\sigma_{v,f}$, $v \in V$, $f \in V^*$, $v \neq 0$, $f \neq 0$. Pri tome $\sigma_{v,f}$ operator zadan sa

$$\sigma_{v,f}x = x - f(x)v, \qquad x \in V.$$

Dualni operator linearnog operatora $A \in L(V)$ označavamo sa A^t, tj.

$$(A^t f)(v) = f(Av), \qquad v \in V, \quad f \in V^*.$$

Zadatak 1.3.1. *Dokažite da je dualni operator pseudorefleksije* $\sigma_{v,f}$ *također pseudorefleksija i da uz uobičajenu identifikaciju prostora* V *s njegovim bidualom* V^{**} *vrijedi* $(\sigma_{v,f})^t = \sigma_{f,v}$:

$$\sigma_{f,v}g = g - g(v)f, \qquad g \in V^*.$$

Refleksija na prostoru V je pseudorefleksija σ takva da je $\sigma^2 = I_V$.

Zadatak 1.3.2. *Dokažite da je* $\sigma_{v,f}$ *refleksija ako i samo ako je* $f(v) = 2$.

Propozicija 1.3.4. *Neka je* R *konačan podskup od* V *koji razapinje* V *i koji ne sadrži* 0. *Za svaki* $\alpha \in R$ *postoji najviše jedna refleksija* σ *prostora* V *takva da je* $\sigma R = R$ *i* $\sigma\alpha = -\alpha$.

Sistem korijena u prostoru V je konačan podskup R od V takav da vrijedi

$(RS1)$ $0 \notin R$ i $V = span\, R$.

$(RS2)$ Za svaki $\alpha \in R$ postoji $\check{\alpha} \in V^*$ sa svojstvom $\check{\alpha}(\alpha) = 2$ (tj. $\sigma_{\alpha,\check{\alpha}}$ je refleksija) takav da je $\sigma_{\alpha,\check{\alpha}}R = R$.

$(RS3)$ Za $\alpha, \beta \in R$ vrijedi $\check{\alpha}(\beta) \in \mathbb{Z}$.

Primijetimo da je prema propoziciji 1.3.4. refleksija $\sigma_{\alpha,\check{\alpha}}$, a time i linearni funkcional $\check{\alpha}$, sa svojstvom $(RS2)$ potpuno određena sa α, pa $(RS3)$ ima smisla. Nadalje, možemo kraće pisati σ_α umjesto $\sigma_{\alpha,\check{\alpha}}$. Elementi skupa R zovu se **korijeni**, a dimenzija prostora V zove se **rang** sistema korijena R. **Grupa automorfizama** sistema korijena R je $Aut(R) = \{\omega \in GL(V);\ \omega R = R\}$. Njena podgrupa $W(R)$ generirana refleksijama σ_α, $\alpha \in R$, zove se **Weylova grupa** sistema korijena R. Budući da skup R razapinje prostor V, restrikcija $\omega \mapsto \omega|R$ je injektivni homomorfizam grupe $Aut(R)$ u grupu permutacija skupa R, a kako je skup R konačan, $Aut(R)$ je konačna podgrupa grupe $GL(V)$.

Propozicija 1.3.5. *Neka je R sistem korijena u prostoru V nad poljem $K = \mathbb{R}$ ili $\mathbb{C}$. Za $\alpha \in R$ vrijedi*

$$\{c \in K;\ c\alpha \in R\} \subseteq \left\{-2, -1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, 2\right\}.$$

Sistem korijena R zove se **reduciran** ako vrijedi

$$\alpha \in R \qquad \Longrightarrow \qquad 2\alpha \notin R.$$

Dakle, tada je za svaki korijen α i za $c \in K$ multipl $c\alpha$ korijen ako i samo ako je $c = \pm 1$. Sistem korijena R koji nije reduciran zove se **nereduciran**.

Propozicija 1.3.6. *Neka je R sistem korijena u vektorskom prostoru V.*

(*a*) *$W(R)$ je normalna podgrupa grupe $Aut(R)$.*

(*b*) *Za $\alpha \in R$ i $\omega \in Aut(R)$ je $\sigma_{\omega\alpha} = \omega\sigma_\alpha\omega^{-1}$ i $(\omega\alpha)\check{} = (\omega^t)^{-1}\check{\alpha}$.*

(*c*) *$\check{R} = \{\check{\alpha};\ \alpha \in R\}$ je sistem korijena u prostoru V^*.*

(*d*) *Za svaki $\alpha \in R$ je $\check{\check{\alpha}} = \alpha$.*

(*e*) *Za $\alpha, \beta \in R$ je $\sigma_{\check{\alpha}}\check{\beta} = (\sigma_\alpha\beta)\check{}$.*

(*f*) *Preslikavanje $\sigma \mapsto (\sigma^t)^{-1} = (\sigma^{-1})^t$ je izomorfizam grupe $Aut(R)$ na grupu $Aut(\check{R})$ i grupe $W(R)$ na grupu $W(\check{R})$.*

Zadatak 1.3.3. *Dokažite tvrdnje (b) i (c) propozicije 1.3.6.*

Za **sistem korijena** $\check{R}$ kažemo da je **dualan** sistemu korijena R. Nadalje, $\check{\alpha}$ se zove **dualan korijen** korijena $\alpha \in R$.

Propozicija 1.3.7. *Neka je R sistem korijena u kompleksnom vektorskom prostoru V. Tada vrijedi*

$$span_{\mathbb{R}}\, R = \{v \in V;\ \check{\alpha}(v) \in \mathbb{R}\ \forall \alpha \in R\}.$$

Taj realan vektorski prostor $V(R)$ je realna forma prostora V (tj. $V_{\mathbb{R}} = V(R) \dot{+} iV(R)$). Nadalje, dualni prostor $V(R)^*$ identificira se sa $span_{\mathbb{R}}\, \check{R}$. Napokon, R je sistem korijena u realnom vektorskom prostoru $V(R)$.

Propozicija 1.3.8. *Neka je R sistem korijena u realnom vektorskom prostoru V. Tada je sa*

$$(x|y) = \sum_{\alpha \in R} \check{\alpha}(x)\check{\alpha}(y), \qquad x, y \in V$$

zadan skalarni produkt na prostoru V i $Aut(R)$ je podgrupa grupe $O(V)$ ortogonalnih operatora na prostoru V.

Zadatak 1.3.4. *Dokažite propoziciju 1.3.8.*

Uputa: Za dokaz činjenice da je gornjom formulom definiran skalarni produkt iskoristite tvrdnju (c) propozicije 1.3.6. (posebno, da $\check{R}$ razapinje dualni prostor V^*), a za drugu tvrdnju koristite tvrdnju (b) iste propozicije.

Propozicija 1.3.9. *Neka je R sistem korijena u prostoru V i $X \subseteq R$. Stavimo*

$$\check{X} = \{\check{\alpha};\ \alpha \in X\}, \qquad V_X = span\, X, \qquad V'_X = span\, \check{X},$$
$$(V'_X)^0 = \{v \in V;\ f(v) = 0\ \forall f \in V'_X\} = \{v \in V;\ \check{\alpha}(v) = 0\ \forall \alpha \in X\},$$
$$(V_X)^0 = \{f \in V^*;\ f(v) = 0\ \forall v \in V_X\} = \{f \in V^*;\ f(\alpha) = 0\ \forall \alpha \in X\}.$$

Tada vrijedi:

(a) $V = V_X \dot{+} (V'_X)^0$ *i* $V^* = V'_X \dot{+} (V_X)^0$.

(b) *Restrikcija* $f \mapsto f|V_X$ *identificira prostor* V'_X *s dualnim prostorom* $(V_X)^*$ *prostora* V_X.

(c) $R \cap V_X$ *je sistem korijena u prostoru* V_X *i restrikcija na* $R \cap V_X$ *kanonske bijekcije* $\alpha \mapsto \check{\alpha}$ *sa* R *na* $\check{R}$ *uz identifikaciju iz* (b) *je upravo bijekcija sistema korijena* $R \cap V_X$ *na njemu dualan sistem korijena.*

Pretpostavimo sada da je konačnodimenzionalan vektorski prostor V direktna suma potprostora $V_1, \dots, V_s$ i da je za svako $i \in \{1, \dots, s\}$ zadan sistem korijena R_i u prostoru V_i. Tada se dualni prostor V^* identificira s direktnom sumom dualnih prostora $V_1^*, \dots, V_s^*$. Očito je $R = R_1 \cup \dots \cup R_s$ sistem korijena u prostoru V i vrijedi $\check{R} = \check{R}_1 \cup \dots \cup \check{R}_s$. Tada se R zove **direktna suma sistema korijena** $R_1, \dots, R_s$. Neka je $\alpha \in R_i$. Ako je $j \neq i$, jezgra od $\check{\alpha}$ sadrži potprostor V_j, dakle, $\sigma_\alpha | V_j = I_{V_j}$. S druge strane, $span\, \alpha \subseteq V_i$, prema tome, vrijedi $\sigma_\alpha V_i = V_i$. Te primjedbe pokazuju da se grupa $W(R)$ može identificirati s Kartezijevim produktom $W(R_1) \times \dots \times W(R_s)$.

Za **sistem korijena** R kažemo da je **ireducibilan** ako je $R \neq \emptyset$ i ako R nije direktna suma dvaju nepraznih sistema korijena.

Propozicija 1.3.10. *Sistem korijena $R \neq \emptyset$ u prostoru V je ireducibilan ako i samo ako je identična reprezentacija $\sigma \mapsto \sigma$ grupe $W(R)$ na prostoru V ireducibilna.*

Propozicija 1.3.11. *Neka je R sistem korijena u prostoru V. Tada je R direktna suma ireducibilnih sistema korijena $R_1, \dots, R_s$ i oni su jedinstveni do na poredak.*

Jedinstveno određeni ireducibilni sistemi korijena $R_1, \dots, R_s$ iz propozicije 1.3.10. zovu se **ireducibilne komponente** sistema korijena R.

Propozicija 1.3.12. *Neka je R sistem korijena u realnom vektorskom prostoru V, neka su $R_1, \dots$ $\dots, R_s$ ireducibilne komponente od R i $V_i = span\, R_i$, $i = 1, \dots, s$. Nadalje, neka je $(\,\cdot\,|\,\cdot\,)$ skalarni produkt na V u odnosu na koji su svi elementi grupe $W(R)$ ortogonalni operatori. Tada su potprostori V_i međusobno ortogonalni.*

Zadatak 1.3.5. *Dokažite propoziciju 1.3.12.*

Teorem 1.3.13. *Neka je $\mathfrak{g}$ kompleksna poluprosta Liejeva algebra i $\mathfrak{h}$ njena Cartanova podalgebra.*

(a) $R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ *je reduciran sistem korijena u vektorskom prostoru* $\mathfrak{h}^*$.

(b) *Za* $\alpha \in R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ *vrijedi* $\check{\alpha} = h_\alpha$.

(c) *Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ je prosta ako i samo ako je sistem korijena $R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ ireducibilan. Općenitije, ako je $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \dot{+} \dots \dot{+} \mathfrak{g}_s$ rastav poluproste Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ u direktnu sumu prostih ideala i ako je za svaki $i \in \{1, \dots, s\}$ $\mathfrak{h}_i$ Cartanova podalgebra od $\mathfrak{g}_i$, onda je $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_1 \dot{+} \dots \dot{+} \mathfrak{h}_s$ Cartanova podalgebra od $\mathfrak{g}$ i $R(\mathfrak{g}_i, \mathfrak{h}_i)$, $i = 1, \dots, s$, su ireducibilne komponente sistema korijena $R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$.*

1.3.3 Klasične kompleksne Liejeve algebre

U sva četiri sljedeća primjera $V \neq \{0\}$ je kompleksan konačnodimenzionalan vektorski prostor i $n = \dim V$.

1. Pretpostavljamo da je $n \geq 2$. Tada je $\mathfrak{sl}(V) = \{x \in \mathfrak{gl}(V);\ Tr\, x = 0\}$ prosta Liejeva algebra. Ona je naravno izomorfna Liejevoj algebri matrica $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C}) = \{x \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C});\ Tr\, x = 0\}$. Neka je $\mathfrak{h}$ skup svih dijagonalnih matrica u $\mathfrak{g}$. Tada je $\mathfrak{h}$ Cartanova podalgebra od $\mathfrak{g}$ i

$$R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) = \{\alpha_{ij};\ 1 \leq i, j \leq n,\ i \neq j\},$$

gdje je

$$\alpha_{ij}(diag(t_1, \ldots, t_n)) = t_i - t_j.$$

Nadalje, $\mathfrak{g}_{\alpha_{ij}}$ je potprostor svih matrica $x = [x_{pq}] \in \mathfrak{g}$ takvih da je $x_{pq} = 0$ ako je $p \neq i$ ili $q \neq j$. Dakle, $\mathfrak{g}_{\alpha_{ij}} = span\,\{e_{ij}\}$. Pri tome je u ovom i daljnjim primjerima e_{ij} oznaka za kvadratnu matricu $n-$tog reda koja ima 1 na presjecištu $i-$tog retka i $j-$tog stupca, a svi ostali su joj elementi jednaki 0. Tada je $h_{\alpha_{ij}} = e_{ii} - e_{jj} = [e_{ij}, e_{ji}]$. Nadalje, korijenski potprostor $\mathfrak{g}_{\alpha_{ij}}$ razapet je matricom e_{ij}.

$\mathfrak{sl}(V) \simeq \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ zove se **specijalna linearna Liejeva algebra**.

2. Neka je sada Q nedegenerirana bilinearna antisimetrična forma na prostoru V. Pokazuje se da je tada nužno dimenzija prostora V paran broj, $n = 2\ell$. Tada je

$$\mathfrak{sp}_Q(V) = \{x \in \mathfrak{gl}(V);\ Q(xv, w) + Q(v, xw) = 0\ \forall v, w \in V\}$$

prosta Liejeva algebra koja je sadržana u $\mathfrak{sl}(V)$. Nadalje, nije teško pokazati da postoji baza $\{e_1, \ldots, e_{2\ell}\}$ od V takva da vrijedi:

$$v = \sum_{i=1}^{2\ell} c_i e_i, \qquad w = \sum_{i=1}^{2\ell} d_i e_i \qquad \Longrightarrow \qquad Q(v, w) = \sum_{i=1}^{\ell} (c_i d_{\ell+1} - c_{\ell+i} d_i).$$

Pridruživanje linearnim operatorima matrica u toj bazi je izomorfizam Liejeve algebre $\mathfrak{sl}_Q(V)$ na Liejevu algebru

$$\mathfrak{sp}(2\ell, \mathbb{C}) = \{x \in \mathfrak{gl}(2\ell, \mathbb{C});\ sx = -x^t s\}, \quad \text{gdje je} \quad s = \begin{bmatrix} 0 & I_\ell \\ -I_\ell & 0 \end{bmatrix}.$$

Pri tome je I_ℓ oznaka za jediničnu matricu $\ell-$tog reda. $\mathfrak{sp}_Q(V) \simeq \mathfrak{sp}(2\ell, \mathbb{C})$ zove se **simplektička Liejeva algebra**.

Ako proizvoljnu matricu $x \in \mathfrak{gl}(2\ell, \mathbb{C})$ pišemo pomoću kvadratnih blokova $\ell-$tog reda kao $x = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, onda se lako vidi da je $x \in \mathfrak{sp}(2\ell, \mathbb{C})$ ako i samo ako je $d = -a^t$, $b^t = b$ i $c^t = c$. Dakle,

$$\mathfrak{sp}(2\ell, \mathbb{C}) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & -a^t \end{bmatrix};\ a, b, c \in \mathfrak{gl}(\ell, \mathbb{C}),\ b = b^t,\ c = c^t \right\}.$$

Primijetimo da je $\mathfrak{sp}(2, \mathbb{C}) = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$, dakle, nove primjere dobivamo samo za $\ell \geq 2$.

Neka je $\mathfrak{h}$ skup svih dijagonalnih matrica iz $\mathfrak{sp}(2\ell, \mathbb{C})$, tj.

$$\mathfrak{h} = \{diag(t_1, \ldots, t_\ell, -t_1, \ldots, -t_\ell);\ t_1, \ldots, t_\ell \in \mathbb{C}\}.$$

Tada je $\mathfrak{h}$ Cartanova podalgebra od $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}(2\ell, \mathbb{C})$. Nadalje,

$$R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) = \{\pm\alpha_i;\ 1 \le i \le \ell\} \cup \{\beta_{ij};\ 1 \le i, j \le \ell,\ i \ne j\} \cup \{\pm\gamma_{ij};\ 1 \le i < j \le \ell\},$$

uz oznake

$$\begin{aligned} \alpha_i(diag(t_1, \ldots, t_\ell, -t_1, \ldots, -t_\ell)) &= 2t_i, \qquad 1 \le i \le \ell; \\ \beta_{ij}(diag(t_1, \ldots, t_\ell, -t_1, \ldots, -t_\ell)) &= t_i - t_j, \qquad 1 \le i, j \le \ell, \quad i \ne j; \\ \gamma_{ij}(diag(t_1, \ldots, t_\ell, -t_1, \ldots, -t_\ell)) &= t_i + t_j, \qquad 1 \le i < j \le \ell. \end{aligned}$$

Nadalje, tada je

$$\begin{aligned} h_{\alpha_i} = -h_{-\alpha_i} &= e_{ii} - e_{\ell+i,\ell+i}, \qquad 1 \le i \le \ell, \\ h_{\beta_{ij}} &= e_{ii} - e_{jj} - e_{\ell+i,\ell+i} + e_{\ell+j,\ell+j}, \qquad 1 \le i, j \le \ell, \quad i \ne j, \quad -\beta_{ij} = \beta_{ji}, \\ h_{\gamma_{ij}} = -h_{-\gamma_{ij}} &= e_{ii} + e_{jj} - e_{\ell+i,\ell+i} - e_{\ell+j,\ell+j}, \qquad 1 \le i < j \le \ell. \end{aligned}$$

Korijenski potprostori su $\mathfrak{g}_\alpha = span\,\{e_\alpha\}$, $\alpha \in R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$, gdje su bazni vektori korijenskih potprostora e_α dani sa

$$\begin{aligned} e_{\alpha_i} &= e_{i,\ell+i}, \qquad e_{-\alpha_i} = e_{\ell+i,i}, \qquad 1 \le i \le \ell, \\ e_{\beta_{ij}} &= e_{ij} - e_{\ell+j,\ell+i}, \qquad 1 \le i, j \le \ell, \quad i \ne j, \quad -\beta_{ij} = \beta_{ji}, \\ e_{\gamma_{ij}} &= e_{i,\ell+j} + e_{j,\ell+i}, \qquad e_{-\gamma_{ij}} = e_{\ell+i,j} + e_{\ell+j,i}, \qquad 1 \le i < j \le \ell. \end{aligned}$$

3. Neka je $n = \dim V$ neparan broj veći od 1, $n = 2\ell + 1$, $\ell \in \mathbb{N}$, i neka je Q nedegenerirana simetrična bilinearna forma na V. Tada je

$$\mathfrak{o}_Q(V) = \{x \in \mathfrak{gl}(V);\ Q(xv, w) + Q(v, xw) = 0\ \forall v, w \in V\}$$

prosta Liejeva algebra koja je sadržana u $\mathfrak{sl}(V)$. Lako se vidi da postoji baza $\{e_0, e_1, \ldots, e_{2\ell}\}$ od V takva da vrijedi

$$v = \sum_{i=0}^{2\ell} c_i e_i, \qquad w = \sum_{i=0}^{2\ell} d_i e_i \qquad \Longrightarrow \qquad Q(v, w) = c_0 d_0 + \sum_{i=1}^{\ell} (c_i d_{\ell+i} + c_{\ell+i} d_i).$$

Preko te baze $\mathfrak{o}_Q(V)$ identificira se s Liejevom algebrom matrica

$$\mathfrak{o}(2\ell+1, \mathbb{C}) = \{x \in \mathfrak{gl}(2\ell+1, \mathbb{C});\ sx = -x^t s\}, \qquad \text{gdje je} \quad s = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_\ell \\ 0 & I_\ell & 0 \end{bmatrix}.$$

$\mathfrak{o}_Q(V) \simeq \mathfrak{o}(2\ell+1, \mathbb{C})$ zove se **ortogonalna Liejeva algebra**.

Proizvoljnu matricu $x \in \mathfrak{gl}(2\ell+1, \mathbb{C})$ zapišimo u blok−formi u skladu s blokovima u gornjoj matrici s :

$$x = \begin{bmatrix} \alpha & f & g \\ h^t & a & b \\ k^t & c & d \end{bmatrix}, \qquad \alpha \in \mathbb{C}, \quad f, g, h, k \in \mathbb{C}^\ell, \quad a, b, c, d \in \mathfrak{gl}(\ell, \mathbb{C}),$$

pri čemu smo $\mathbb{C}^\ell$ identificirali s prostorom jednorednih matrica duljine ℓ. Tada je $x \in \mathfrak{o}(2\ell+1, \mathbb{C})$ ako i samo ako je $\alpha = 0$, $d = -a^t$, $b^t = -b$, $c^t = -c$, $h = -g$ i $k = -f$. Dakle,

$$\mathfrak{o}(2\ell+1, \mathbb{C}) = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & f & g \\ -g^t & a & b \\ -f^t & c & -a^t \end{bmatrix};\ f, g \in \mathbb{C}^\ell,\ a, b, c \in \mathfrak{gl}(\ell, \mathbb{C}),\ b^t = -b,\ c^t = -c \right\}.$$

Neka je $\mathfrak{h}$ skup svih dijagonalnih matrica iz $\mathfrak{o}(2\ell+1,\mathbb{C})$, tj.

$$\mathfrak{h} = \{diag(0,t_1,\ldots,t_\ell,-t_1,\ldots,-t_\ell);\ t_1,\ldots,t_\ell \in \mathbb{C}\}.$$

Tada je $\mathfrak{h}$ Cartanova podalgebra od $\mathfrak{g} = \mathfrak{o}(2\ell+1,\mathbb{C})$. Nadalje,

$$R(\mathfrak{g},\mathfrak{h}) = \{\pm\alpha_i;\ 1 \le i \le \ell\} \cup \{\beta_{ij};\ 1 \le i,j \le \ell,\ i \ne j\} \cup \{\pm\gamma_{ij};\ 1 \le i < j \le \ell\},$$

uz oznake

$$\alpha_i(diag(0,t_1,\ldots,t_\ell,-t_1,\ldots,-t_\ell)) = t_i, \qquad 1 \le i \le \ell;$$

$$\beta_{ij}(diag(0,t_1,\ldots,t_\ell,-t_1,\ldots,-t_\ell)) = t_i - t_j, \qquad 1 \le i,j \le \ell, \quad i \ne j;$$

$$\gamma_{ij}(diag(0,t_1,\ldots,t_\ell,-t_1,\ldots,-t_\ell)) = t_i + t_j, \qquad 1 \le i < j \le \ell.$$

Koristimo uobičajenu oznaku e_{ij} za matricu s jedinicom na presjecištu $i-$tog retka i $j-$tog stupca i na svim ostalim mjestima 0, s tim da se sada indeksi i,j kreću skupom $\{0,1,\ldots,2\ell\}$. Tada je

$$h_{\alpha_i} = -h_{-\alpha_i} = 2e_{ii} - 2e_{\ell+i,\ell+i}, \qquad 1 \le i \le \ell,$$

$$h_{\beta_{ij}} = e_{ii} - e_{jj} - e_{\ell+i,\ell+i} + e_{\ell+j,\ell+j}, \qquad 1 \le i,j \le \ell, \quad i \ne j, \quad -\beta_{ij} = \beta_{ji},$$

$$h_{\gamma_{ij}} = -h_{-\gamma_{ij}} = e_{ii} + e_{jj} - e_{\ell+i,\ell+i} - e_{\ell+j,\ell+j}, \qquad 1 \le i < j \le \ell.$$

Korijenski potprostori su $\mathfrak{g}_\alpha = span\,\{e_\alpha\}$, $\alpha \in R(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$, gdje su bazni vektori korijenskih potprostora e_α dani sa

$$e_{\alpha_i} = e_{i,0} - e_{0,\ell+i}, \qquad e_{-\alpha_i} = e_{0,i} - e_{\ell+i,0}, \qquad 1 \le i \le \ell,$$

$$e_{\beta_{ij}} = e_{ij} - e_{\ell+j,\ell+i}, \qquad 1 \le i,j \le \ell, \quad i \ne j, \quad -\beta_{ij} = \beta_{ji},$$

$$e_{\gamma_{ij}} = e_{j,\ell+i} - e_{i,\ell+j}, \qquad e_{-\gamma_{ij}} = e_{\ell+i,j} - e_{\ell+j,i}, \qquad 1 \le i < j \le \ell.$$

Napomenimo još da se može dokazati da je Liejeva algebra $\mathfrak{o}(3,\mathbb{C})$ izomorfna Liejevoj algebri $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$, te da je Liejeva algebra $\mathfrak{o}(5,\mathbb{C})$ izomorfna Liejevoj algebri $\mathfrak{sp}(4,\mathbb{C})$.

4. Neka je $n = \dim V$ paran broj veći od 4, $n = 2\ell$, $\ell \in \mathbb{N}$, $\ell \ge 3$, i neka je Q nedegenerirana simetrična bilinearna forma na V. Tada je ponovo

$$\mathfrak{o}_Q(V) = \{x \in \mathfrak{gl}(V);\ Q(xv,w) + Q(v,xw) = 0\ \forall v,w \in V\}$$

prosta Liejeva algebra koja je sadržana u $\mathfrak{sl}(V)$. Napomenimo da je u slučaju $2-$dimenzionalnog prostora V Liejeva algebra $\mathfrak{o}_Q(V)$ komutativna, a u sluččaju $4-$dimenzionalnog prostora V Liejeva algebra $\mathfrak{o}_Q(V)$ doduše jest poluprosta, ali nije prosta nego je direktna suma dvaju prostih ideala koji su oba kao Liejeve algebre izomorfni sa $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$.

Sada postoji baza $\{e_1,\ldots,e_{2\ell}\}$ prostora V takva da vrijedi

$$v = \sum_{i=1}^{2\ell} c_i e_i, \qquad w = \sum_{i=1}^{2\ell} d_i e_i \qquad \Longrightarrow \qquad Q(v,w) = \sum_{i=1}^{\ell} (c_i d_{\ell+i} + c_{\ell+i} d_i).$$

Preko te baze $\mathfrak{o}_Q(V)$ identificira se s Liejevom algebrom matrica

$$\mathfrak{o}(2\ell,\mathbb{C}) = \{x \in \mathfrak{gl}(2\ell,\mathbb{C});\ sx = -x^t s\}, \qquad \text{gdje je} \quad s = \begin{bmatrix} 0 & I_\ell \\ I_\ell & 0 \end{bmatrix}.$$

$\mathfrak{o}_Q(V) \simeq \mathfrak{o}(2\ell, \mathbb{C})$ zove se **ortogonalna Liejeva algebra**, ovaj puta parnog formata.

Proizvoljnu matricu $x \in \mathfrak{gl}(2\ell, \mathbb{C})$ zapišimo u blok−formi:

$$x = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \qquad a, b, c, d \in \mathfrak{gl}(\ell, \mathbb{C}).$$

Tada je $x \in \mathfrak{o}(2\ell, \mathbb{C})$ ako i samo ako je $d = -a^t$, $b^t = -b$ i $c^t = -c$. Dakle,

$$\mathfrak{o}(2\ell, \mathbb{C}) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & -a^t \end{bmatrix};\ a, b, c \in \mathfrak{gl}(\ell, \mathbb{C}),\ b^t = -b,\ c^t = -c \right\}.$$

Neka je ponovo $\mathfrak{h}$ skup svih dijagonalnih matrica iz $\mathfrak{o}(2\ell, \mathbb{C})$, tj.

$$\mathfrak{h} = \{diag(t_1, \ldots, t_\ell, -t_1, \ldots, -t_\ell);\ t_1, \ldots, t_\ell \in \mathbb{C}\}.$$

Tada je $\mathfrak{h}$ Cartanova podalgebra od $\mathfrak{g} = \mathfrak{o}(2\ell, \mathbb{C})$. Nadalje,

$$R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) = \{\beta_{ij};\ 1 \leq i, j \leq \ell,\ i \neq j\} \cup \{\pm\gamma_{ij};\ 1 \leq i < j \leq \ell\},$$

uz oznake

$$\beta_{ij}(diag(t_1, \ldots, t_\ell, -t_1, \ldots, -t_\ell)) = t_i - t_j, \qquad 1 \leq i, j \leq \ell, \quad i \neq j;$$
$$\gamma_{ij}(diag(t_1, \ldots, t_\ell, -t_1, \ldots, -t_\ell)) = t_i + t_j, \qquad 1 \leq i < j \leq \ell.$$

Tada je

$$h_{\beta_{ij}} = e_{ii} - e_{jj} - e_{\ell+i,\ell+i} + e_{\ell+j,\ell+j}, \qquad 1 \leq i, j \leq \ell, \quad i \neq j, \quad -\beta_{ij} = \beta_{ji},$$
$$h_{\gamma_{ij}} = -h_{-\gamma_{ij}} = e_{ii} + e_{jj} - e_{\ell+i,\ell+i} - e_{\ell+j,\ell+j}, \qquad 1 \leq i < j \leq \ell.$$

Korijenski potprostori su $\mathfrak{g}_\alpha = span\,\{e_\alpha\}$, $\alpha \in R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$, gdje su bazni vektori korijenskih potprostora e_α dani sa

$$e_{\beta_{ij}} = e_{ij} - e_{\ell+j,\ell+i}, \qquad 1 \leq i, j \leq \ell, \quad i \neq j, \quad -\beta_{ij} = \beta_{ji},$$
$$e_{\gamma_{ij}} = e_{i,\ell+j} - e_{j,\ell+i}, \qquad e_{-\gamma_{ij}} = e_{\ell+j,i} - e_{\ell+i,j}, \qquad 1 \leq i < j \leq \ell.$$

Pokazuje se da je Liejeva algebra $\mathfrak{o}(6, \mathbb{C})$ izomorfna Liejevoj algebri $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$. Nadalje, nema drugih međusobnih izomorfizama osim ovih koje smo naveli: proste Liejeve algebre iz četiriju serija $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$, $n \geq 2$, $\mathfrak{o}(2\ell + 1, \mathbb{C})$, $\ell \geq 2$, $\mathfrak{sp}(2\ell, \mathbb{C})$, $\ell \geq 3$, $\mathfrak{o}(2\ell, \mathbb{C})$, $\ell \geq 4$, sve su međusobno neizomorfne.

Četiri vrste prostih Liejevih algebri iz ovih primjera zovu se **klasične kompleksne Liejeve algebre**.

1.3.4 Weylove komore i baze sistema korijena. Klasifikacija

U ovom pododjeljku promatrat ćemo sistem korijena R u realnom vektorskom prostoru V. Možemo pretpostavljati da je na V zadan skalarni produkt takav da su svi operatori iz $Aut(R)$ ortogonalni. Posebno, sve σ_α, $\alpha \in R$, su ortogonalne refleksije.

Za svaki $\alpha \in R$ skup $H_\alpha = \{v \in V;\ \sigma_\alpha v = v\} = Ker\,\check{\alpha}$ se zove **hiperravnina** određena s korijenom α. To je potprostor od V kodimenzije 1 i to je upravo ortogonalni komplement od α : $V = H_\alpha \oplus \mathbb{R}\alpha$. Komponente povezanosti otvorenog skupa

$$V \setminus \bigcup_{\alpha \in R} H_\alpha$$

zovu se **Weylove komore** sistema korijena R. Hiperravnina H_α zove se **zid Weylove komore** C ako je $H_\alpha \cap \overline{C} \neq \emptyset$, pri čemu je sa $\overline{C}$ označen zatvarač Weylove komore C.

Baza sistema korijena R je podskup B od R koji ima sljedeća dva svojstva:

$(B1)$ B je baza vektorskog prostora V.

$(B2)$ Za svaki $\beta \in R$ i označimo sa $c_\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \in B$, koeficijente u prikazu β u bazi B :

$$\beta = \sum_{\alpha \in B} c_\alpha \alpha.$$

Tada vrijedi ili $c_\alpha \in \mathbb{Z}_+ \ \forall \alpha \in B$ ili $-c_\alpha \in \mathbb{Z}_+ \ \forall \alpha \in B$.

Ako je B baza sistema korijena R onda ćemo korijene koji su sume korijena iz baze zvati **pozitivnim korijenima** u odnosu na bazu B. Skup svih pozitivnih korijena označimo sa $R_+(B)$. Preostali korijeni zovu se **negativni korijeni** u odnosu na bazu B; to su upravo elementi skupa $-R_+(B)$.

Neka je C Weylova komora. Tada za bilo koji $x \in C$ vrijedi $x \notin H_\alpha$, odnosno, $(\alpha|x) \neq 0$, $\forall \alpha \in R$. Stavimo $R_+(C) = \{\alpha \in R;\ (\alpha|x) > 0\}$ (napomenimo da se lako vidi da to ne ovisi o izboru vektora $x \in C$). Kažemo da su elementi skupa $R_+(C)$ **pozitivni korijeni** u odnosu na Weylovu komoru C.

Teorem 1.3.14. *Neka je R sistem korijena u realnom vektorskom prostoru V.*

(a) *Ako je C Weylova komora od R postoji jedinstvena baza B od R takva da je $R_+(C) = R_+(B)$. Označimo tu bazu sa $B(C)$.*

(b) *$C \mapsto B(C)$ je bijekcija sa skupa svih Weylovih komora od R na skup svih baza od R.*

(c) *Ako je C Weylova komora od R i $\omega \in Aut(R)$, onda je i $\omega(C)$ Weylova komora od R.*

(d) *Weylova grupa $W(R)$ djeluje prosto tranzitivno na skupu svih Weylovih komora od R. Drugim riječima, za proizvoljne Weylove komore C_1 i C_2 postoji jedinstven $\sigma \in W(R)$ takav da je $C_2 = \sigma(C_1)$.*

(e) *Ako je B baza od R i $\omega \in Aut(R)$, onda je i $\omega(B)$ baza od R. Weylova grupa djeluje prosto tranzitivno na skupu svih baza sistema korijena R.*

(f) *Zatvarač $\overline{C}$ bilo koje Weylove komore od R je fundamentalna domena za djelovanje Weylove grupe na prostoru V, tj. za svaki $v \in V$ postoji jedinstven $x \in \overline{C}$ takav da je $v = \sigma x$ za neki $\sigma \in W(R)$; drugim riječima, presjek svake $W(R)-$orbite $\{\sigma v;\ \sigma \in W(R)\}$ u prostoru V sa skupom $\overline{C}$ je jednočlan skup.*

(g) *Neka je B baza sistema korijena R. Weylova grupa $W(R)$ generirana je refleksijama σ_α, $\alpha \in B$.*

(h) *Neka je B baza sistema korijena R i $Aut_B(R) = \{\omega \in Aut(R);\ \omega(B) = B\}$. Grupa $Aut(R)$ je semidirektan produkt (normalne podgrupe) $W(R)$ i podgrupe $Aut_B(R)$.*

U daljnjem fiksiramo neki skalarni produkt $(\cdot|\cdot)$ na prostoru V takav da su svi operatori $\sigma \in W(R)$ ortogonalni operatori na V.

Propozicija 1.3.15. *Pretpostavimo da je sistem korijena R ireducibilan i reduciran. Tada je skup $\{(\alpha|\alpha);\ \alpha \in R\}$ ili jednočlan ili dvočlan. Ako je dvočlan, oblika je ili $\{r, 2r\}$ ili $\{r, 3r\}$ za neki $r \in \mathbb{R}_+^* = \langle 0, +\infty \rangle$.*

Ireducibilni nereducirani sistemi korijena u potpunosti se opisuju pomoću reduciranih. Ako je R sistem korijena, $\alpha \in R$ se zove **nedjeljivi korijen** ako $\frac{1}{2}\alpha \notin R$. Naravno, sistem korijena je reduciran ako i samo ako su svi njegovi korijeni nedjeljivi. U nereduciranom sistemu ima korijena koji nisu nedjeljivi. Ali i kod takvog sistema svi su korijeni u njegovoj bazi nedjeljivi. Naime, ako je B baza od R i ako pretpostavimo da $\alpha \in B$ nije nedjeljiv, tj. da je $\frac{1}{2}\alpha \in R$, onda dolazimo u kontradikciju s definicijom baze sistema korijena: korijen $\frac{1}{2}\alpha$ ne može se napisati u obliku $\sum_{\gamma \in B} c_\gamma \gamma$, gdje su svi $c_\gamma \in \mathbb{Z}$.

Teorem 1.3.16. (1) *Neka je R ireducibilan nereducirani sistem korijena u realnom prostoru V ranga ≥ 2.*

(*a*) *Skup R_0 svih nedjeljivih korijena je ireducibilan reducirani sistem korijena u V i vrijedi $W(R_0) = W(R)$.*

(*b*) *Neka je $r = \min\{(\alpha|\alpha);\ \alpha \in R\}$ i $A = \{\alpha \in R;\ (\alpha|\alpha) = r\}$. Svaka dva neproporcionalna korijena iz A su međusobno okomita.*

(*c*) *Neka je $B = \{\beta \in R;\ (\beta|\beta) = 2r\}$. Tada je $B \neq \emptyset$, $R_0 = A \cup B$ i $R = A \cup B \cup 2A$.*

(2) *Neka je sada R ireducibilan reducirani sistem korijena u realnom prostoru V takav da je za neki $r \in \mathbb{R}_+^*$:*

$$\{(\alpha|\alpha);\ \alpha \in R\} = \{r, 2r\}.$$

Neka je $A = \{\alpha \in R;\ (\alpha|\alpha) = r\}$ i pretpostavimo da su svaka dva neproporcionalna korijena iz A međusobno okomita. Tada je $R_1 = R \cup 2A$ ireducibilan nereducirani sistem korijena u V i R je skup svih nedjeljivih korijena sistema R_1.

Uvedimo sada oznake

$$n(\alpha,\beta) = 2\frac{(\alpha|\beta)}{(\beta|\beta)}, \qquad \alpha, \beta \in R.$$

Nije teško vidjeti da taj broj ne ovisi o izboru skalarnog produkta $(\,\cdot\,|\,\cdot\,)$ u odnosu na koji su svi elementi $\sigma \in W(R)$ ortogonalni operatori. Naime, prema propoziciji 1.3.12. ireducibilnbe komponente sistema korijena R međusobno su ortogonalne u odnosu na svaki takav skalarni produkt; nadalje, može se pokazati da je takav skalarni produkt jedinstven do na pozitivni multipl ako je sistem korijena R ireducibilan.

Propozicija 1.3.17. *Neka je R reducirani sistem korijena i $\alpha, \beta \in R$. Tada je*

$$n(\alpha,\beta)n(\beta,\alpha) \in \{0, 1, 2, 3\}.$$

Na temelju prethodne propozicije možemo definirati tzv. **Coxeterov graf** reduciranog sistema korijena R. Skup vrhova tog grafa je neka baza B sistema korijena R. Dva različita vrha $\alpha, \beta \in B$ tog grafa su spojena sa $n(\alpha,\beta)n(\beta,\alpha)$ spojnica.

Teorem 1.3.18. *Reducirani sistem korijena je ireducibilan ako i samo mu je Coxeterov graf povezan. Štoviše, vrhovi komponenata povezanosti Coxeterovog grafa su baze ireducibilnih komponenata od R.*

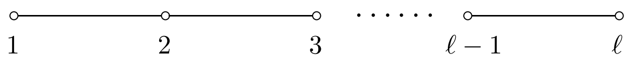
Ukoliko je reducirani sistem korijena R ireducibilan i svi su mu korijeni iste duljine, onda je $n(\alpha,\beta) = n(\beta,\alpha)$ za sve $\alpha, \beta \in B$, pa Coxeterov graf u potpunosti određuje sve brojeve $n(\alpha,\beta)$. Međutim, kad u R (a tada i u B) postoje korijeni različitih duljina onda Coxeterov graf ne daje informaciju koji njegovi vrhovi pripadaju duljim a koji kraćim korijenima. Da bismo i to fiksirali, kod svakog ćemo para vrhova koji su spojeni s dvije ili s tri spojnice dodati i strelicu koja je usmjerena prema kraćem od dvaju korijena. Ono što dobijemo zove se **Dynkinov dijagram** sistema korijena R.

Preciznom analizom mogućnosti može se doći do potpune klasifikacije ireducibilnih reduciranih sistema korijena do na izomorfizam. Pri tome, je **izomorfizam sistema korijena** R u prostoru V na sistem korijena R' u prostor V' izomorfizam $A : V \to V'$ vektorskih prostora takav da je $A(R) = R'$.

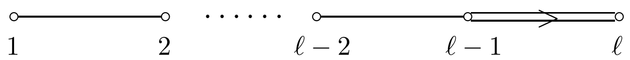
Teorem 1.3.19. *Neka su R i R' sistemi korijena u realnim vektorskim prostorima i neka su B i B' njihove baze. Tada je sistem korijena R izomorfan sistemu korijena R' ako i samo ako postoji bijekcija $\alpha \mapsto \alpha'$ sa B na B' takva da je $n(\alpha, \beta) = n(\alpha', \beta')$ $\forall \alpha, \beta \in B$. To je ispunjeno ako i samo ako sistemi korijena R i R' imaju iste Dynkinove dijagrame.*

Teorem 1.3.20. *Ako je R ireducibilan reduciran sistem korijena ranga ℓ, onda je njegov Dynkinov dijagram jedan od sljedećih, i svaki od tih dijagrama je Dynkinov dijagram nekog ireducibilnog reduciranog sistema korijena:*

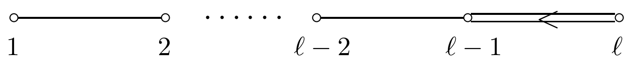
A_ℓ $(\ell \geq 1)$:



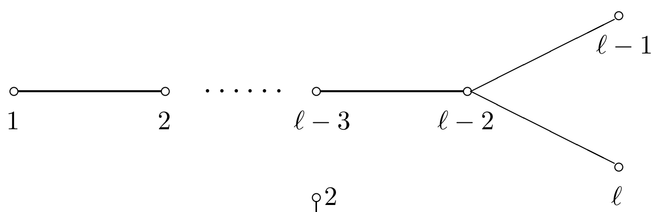
B_ℓ $(\ell \geq 2)$:



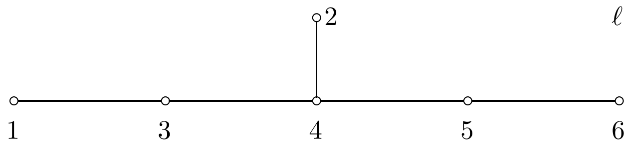
C_ℓ $(\ell \geq 3)$:



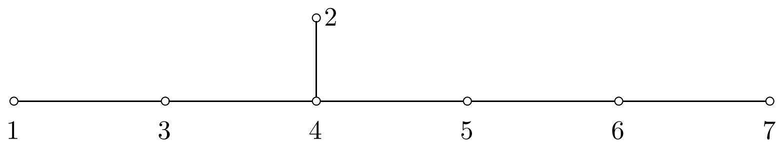
D_ℓ $(\ell \geq 4)$:



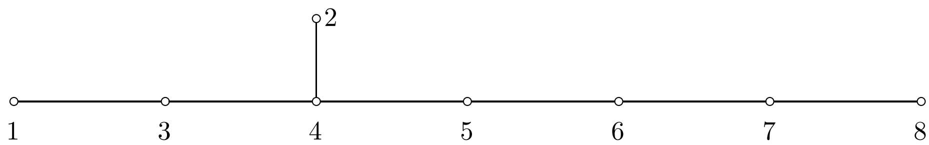
E_6 :



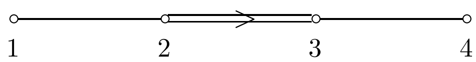
E_7 :



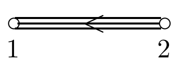
E_8 :



F_4 :



G_2 :



Razmotrimo sada u kakvoj su vezi Coxeterovi grafovi i Dynkinovi dijagrami sistema korijena i njemu dualnog sistema korijena. Neka je R sistem korijena u realnom vektorskom prostoru V. Neka je $(\,\cdot\,|\,\cdot\,)$ skalarni produkt na prostoru V takav da se Weylova grupa $W(R)$ sastoji od ortogonalnih operatora. Skalarni produkt definiran izomorfizam prostora V na dualni prostor V^*. Označimo taj izomorfizam sa Φ. Dakle,

$$(\Phi(w))(v) = (v|w), \qquad v, w \in V.$$

Označimo sa $\Psi : V^* \to V$ njemu inverzan izomorfizam:

$$(\Psi(f)|v) = f(v), \qquad f \in V^*, \quad v \in V.$$

Propozicija 1.3.21. *Uz uvedene oznake za dualni korijen $\check{\alpha}$ korijena $\alpha \in R$ vrijedi*

$$\Psi(\check{\alpha}) = \frac{2}{(\alpha|\alpha)}\alpha \qquad i \qquad (\Psi(\check{\alpha})|\Psi(\check{\alpha})) = \frac{4}{(\alpha|\alpha)}.$$

Dokaz: Refleksija $\sigma_\alpha \in W(R)$ pridružena korijenu $\alpha \in R$ je ortogonalna simetrija u odnosu na hiperravninu $\{\alpha\}^\perp = \{v \in V;\ (\alpha|v) = 0\}$. Dakle,

$$\sigma_\alpha v = v - \frac{2(\alpha|v)}{(\alpha|\alpha)}\alpha, \qquad v \in V.$$

S druge strane je

$$\sigma_\alpha v = v - \check{\alpha}(v)\alpha, \qquad v \in V.$$

Prema tome, imamo za svaki $v \in V$

$$(\Psi(\check{\alpha})|v) = \check{\alpha}(v) = \frac{2(\alpha|v)}{(\alpha|\alpha)} = \left(\frac{2}{(\alpha|\alpha)}\alpha \,\middle|\, v\right).$$

Odatle slijedi jednakost

$$\Psi(\check{\alpha}) = \frac{2}{(\alpha|\alpha)}\alpha.$$

Tvrdnja o kvadratu duljine vektora $\Psi(\check{\alpha})$ odatle slijedi direktnim računom:

$$(\Psi(\check{\alpha})|\Psi(\check{\alpha}) = \left(\frac{2}{(\alpha|\alpha)}\alpha \,\middle|\, \frac{2}{(\alpha|\alpha)}\alpha\right) = \frac{4(\alpha|\alpha)}{(\alpha|\alpha)^2} = \frac{4}{(\alpha|\alpha)}.$$

Zadatak 1.3.6. *Dokažite da uz uvedene oznake za $\alpha, \beta \in R$ vrijedi*

$$n(\alpha, \beta) = n(\check{\beta}, \check{\alpha})$$

Nadalje, ako sa $(\,\cdot\,|\,\cdot\,)$ označimo i skalarni produkt na prostoru V^* dobiven iz skalarnog produkta na prostoru V pomoću izomorfizma $\Phi : V \to V^*$, onda vrijedi

$$\frac{(\check{\alpha}|\check{\alpha})}{(\check{\beta}|\check{\beta})} = \frac{(\beta|\beta)}{(\alpha|\alpha)}.$$

Preslikavanje $\Psi : V^* \to V$ je izomorfizam vektorskog prostora V^* na vektorski prostor V. Stoga restrikcija na $\check{R}$ definira izomorfizam sistema korijena $\check{R}$ u prostoru V^* na sistem korijena $\Psi(\check{R})$ u prostoru V. Prema zadatku 1.3.6. za $\alpha, \beta \in R$ vrijedi

$$n(\alpha, \beta)n(\beta, \alpha) = n(\check{\alpha}, \check{\beta})n(\check{\beta}, \check{\alpha}) \qquad \forall \alpha, \beta \in R.$$

Nadalje, prema drugoj tvrdnji u tom zadatku ako korijeni $\alpha, \beta \in R$ nisu iste duljine i ako je korijen α dulji od korijena β, onda je dualni korijen $\check{\beta}$ dulji od dualnog korijena $\check{\alpha}$. Dakle, vrijedi

Teorem 1.3.22. *Neka je R sistem korijena u realnom vektorskom prostoru V i $\check{R}$ pripadni dualni sistem korijena u prostoru V^*. Coxeterov graf sistema korijena $\check{R}$ podudara se s Coxeterovim grafom sistema korijena R. Nadalje, Dynkinov dijagram od $\check{R}$ dobiva se iz Dynkinovog dijagrama sistema korijena R tako da se sve strelice u njemu usmjere suprotno.*

1.3.5 Klasifikacija prostih kompleksnih Liejevih algebri

Neka je sada $\mathfrak{g}$ kompleksna poluprosta Liejeva algebra, $\mathfrak{h}$ Cartanova podalgebra i $R = R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ pripadni sistem korijena u kompleksnom vektorskom prostoru $V = \mathfrak{h}^*$. Znamo da je tada R reducirani sistem korijena u realnom vektorskom prostoru $V(R) = span_{\mathbb{R}} R$ i $V(R)$ je realna forma prostora $\mathfrak{h}^*$. Nadalje, dualni sistem korijena u prostoru $V^* = \mathfrak{h}^{**} = \mathfrak{h}$ je $\check{R} = \{h_\alpha;\ \alpha \in R\}$. Realnu formu $V^*(\check{R}) = span_{\mathbb{R}}\{h_\alpha;\ \alpha \in R\}$ označavat ćemo sa $\mathfrak{h}(R)$ i ona se prema propoziciji 1.3.7. identificira s dualnim prostorom realnog prostora $V(R) = \mathfrak{h}^*(R)$.

Killingovu formu na Liejevoj algebri $\mathfrak{g}$ označimo sa B :

$$B(x, y) = Tr\,(ad\,x)(ad\,y), \qquad x, y \in \mathfrak{g}.$$

Ta je bilinearna forma nedegenerirana, a prema tvrdnji (i) teorema 1.3.3. njena restrikcija na $\mathfrak{h}\times\mathfrak{h}$, dakle i na $\mathfrak{h}(R) \times \mathfrak{h}(R)$, je također nedegenerirana.

Propozicija 1.3.23. *Bilinearna forma $B|\mathfrak{h}(R) \times \mathfrak{h}(R)$ je skalarni produkt na realnom vektorskom prostoru $\mathfrak{h}(R)$. Taj se skalarni produkt podudara sa skalarnim produktom iz propozicije 1.3.8. za dualni sistem korijena $\check{R} = \{h_\alpha;\ \alpha \in R\}$. Tj.*

$$(h|k) = \sum_{\alpha \in R} \alpha(h)\alpha(k), \qquad h, k \in \mathfrak{h}(R).$$

Dokaz: Za svaki $\alpha \in R$ izaberimo $x_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha \setminus \{0\}$. Nadalje, neka je $\{h_1, \ldots, h_\ell\}$ baza od $\mathfrak{h}$. Tada je $\{x_\alpha;\ \alpha \in R\} \cup \{h_1, \ldots, h_\ell\}$ baza od $\mathfrak{g}$ i u toj bazi svi operatori $ad\,h,\ h \in \mathfrak{h}$, imaju dijagonalne matrice:

$$(ad\,h)x_\alpha = \alpha(h)x_\alpha, \quad \alpha \in R, \qquad (ad\,h)h_j = 0, \quad j = 1, \ldots, \ell.$$

Stoga za $h, k \in \mathfrak{h}(R)$ operator $(ad\,h)(ad\,k)$ ima dijagonalnu matricu koja na dijagonali ima ℓ nula i brojeve $\alpha(h)\alpha(k),\ \alpha \in R$. Odatle slijedi tvrdnja.

Razmotrimo sada primjere tzv. klasičnih kompleksnih Liejevih algebri iz odjeljka 1.3.3. Za svaku od tih prostih Liejevih algebri identificirat ćemo jednu bazu i zapisati prikaz svih korijena pomoću te baze. Nadalje, utvrdit ćemo Dynkinov dijagram za svaki od pripadnih sistema korijena. U tu svrhu mogli bismo koristiti skalarni produkt u prostoru $\mathfrak{h}^*(R)$ iz propozicije 1.3.8. za sistem korijena R i njemu dualni sistem $\check{R} = \{h_\alpha;\ \alpha \in R\}$, tj.

$$(\lambda|\mu) = \sum_{\alpha \in R} \lambda\left(h_\alpha\right) \mu\left(h_\alpha\right), \qquad \lambda, \mu \in \mathfrak{h}^*(R) = span_{\mathbb{R}}(R). \tag{1.1}$$

Međutim, mnogo je jednostavnije koristiti jedan drugi skalarni produkt, tj. onaj koji se dobije iz simetrične bilinearne forme na $\mathfrak{g}$ definirane pomoću traga matrica, a ne traga na prostoru linearnih operatora $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$. Naime, ako je $\mathfrak{g}$ Liejeva podalgebra od $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$, simetrična bilinearna forma $A : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathbb{C}$ definirana sa

$$A(x, y) = Tr\,xy, \qquad x, y \in \mathfrak{g}. \tag{1.2}$$

invarijantna je s obzirom na adjungiranu reprezentaciju $z \mapsto ad\,z,\ z \in \mathfrak{g}$. Doista, za bilo koje $x, y, z \in \mathfrak{g}$ imamo redom

$$A((ad\,x)y, z) + A(y, (ad\,x)z) = Tr\,([x, y]z + y[x, z]) =$$

$$= Tr\,(xyz - yxz + yxz - yzx) = Tr\,xyz - Tr\,yzx = 0.$$

Propozicija 1.3.24. *Neka je* $\mathfrak{g}$ *prosta kompleksna Liejeva algebra i neka je* $A : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathbb{C}$ *bilinearna forma invarijantna s obzirom na adjungiranu reprezentaciju* $z \mapsto ad\, z$, $z \in \mathfrak{g}$. *Tada postoji* $c \in \mathbb{C}$ *takav da je* $A(x,y) = cB_{\mathfrak{g}}(x,y)$ $\forall x,y \in \mathfrak{g}$.

Dokaz: Budući da je bilinearna forma $B = B_{\mathfrak{g}}$ nedegenerirana, postoji jedinstven linearan operator $T : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ takav da je

$$A(x,y) = B(Tx,y) \qquad \forall x,y \in \mathfrak{g}.$$

Za $x,y,z \in \mathfrak{g}$ imamo redom

$$B(T(ad\, z)x,y) = A((ad\, z)x,y) = -A(x,(ad\, z)y) = -B(Tx,(ad\, z)y) = B((ad\, z)Tx,y).$$

Sada iz nedegeneriranosti Killingove forme B slijedi $T(ad\, z) = (ad\, z)T$ $\forall z \in \mathfrak{g}$. Dakle, T je preplitanje reprezentacije ad sa samom sobom. Međutim, kako je Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ prosta, reprezentacija ad je ireducibilna. Prema tvrdnji (c) Schurove leme (teorem 1.2.4.) postoji $c \in \mathbb{C}$ takav da je $T = cI_{\mathfrak{g}}$. Dakle, $A(x,y) = B(Tx,y) = B(cx,y) = cB(x,y)$.

Korolar 1.3.25. *Neka je* $\mathfrak{g}$ *klasična prosta kompleksna Liejeva algebra, tj.* $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$, $n \geq 2$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}(n,\mathbb{C})$, $n \in 2\mathbb{N}$, *ili* $\mathfrak{g} = \mathfrak{o}(n,\mathbb{C})$, $n = 3$ *ili* $n \geq 5$. *Tada je bilinearna forma* $A : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathbb{C}$ *definirana sa* (1.2) *proporcionalna Killingovoj formi* $B = B_{\mathfrak{g}}$. *Faktori proporcionalnosti su u tri slučaja* $\dfrac{1}{2n}$ *za* $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$, $\frac{1}{(n+2)}$ *za* $\mathfrak{sp}(n,\mathbb{C})$ *i* $\frac{1}{n-1}$ *za* $\mathfrak{o}(n,\mathbb{C})$, *tj.*

(a) $B_{\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})}(x,y) = 2n\, Tr\, xy$, $\forall x,y \in \mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$.

(b) $B_{\mathfrak{sp}(n,\mathbb{C})}(x,y) = (n+2) Tr\, xy$, $\forall x,y \in \mathfrak{sp}(n,\mathbb{C})$.

(c) $B_{\mathfrak{o}(n,\mathbb{C})}(x,y) = (n-1) Tr\, xy$, $\forall x,y \in \mathfrak{o}(n,\mathbb{C})$.

Dokaz: Prva tvrdnja neposredna je posljedica propozicije 1.3.24. Dakle, u svakom od tri slučaja vrijedi $A(x,y) = cB(x,y)$, $\forall x,y \in \mathfrak{g}$, gdje je $c \in \mathbb{C}$. Da bismo izračunali c, dovoljno je izračunati $A(x,x)$ i $B(x,x)$ za zgodno izabrani $x \in \mathfrak{g}$. Provedimo to za svaki od slučajeva. U njima ćemo upotrebljavati oznake iz četiri primjera u točki 1.3.3.

1. $\boldsymbol{\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(\ell+1),\ \ell \in \mathbb{N}}$**.** Izaberimo $x = h_{\alpha_1} = e_{11} - e_{22}$. Tada je $A(x,x) = Tr\, x^2 = 2$. Nadalje, svi elementi baze

$$\{e_{ii} - e_{i+1,i+1};\ 1 \leq i \leq \ell\} \cup \{e_{ij};\ 1 \leq i,j \leq \ell+1,\ i \neq j\}$$

Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ su svojstveni vektori operatora $ad\, x$:

$$(ad\, x)(e_{ii} - e_{i+1,i+1}) = 0, \qquad \text{za} \quad 1 \leq i \leq \ell;$$

$$(ad\, x)e_{12} = 2e_{12}; \qquad (ad\, x)e_{21} = -2e_{21};$$

$$(ad\, x)e_{1i} = e_{1i}, \quad (ad\, x)e_{i1} = -e_{i1}, \qquad \text{za} \quad 3 \leq i \leq \ell+1;$$

$$(ad\, x)e_{2i} = -e_{2i}, \quad (ad\, x)e_{i2} = e_{i2} \qquad \text{za} \quad 3 \leq i \leq \ell+1;$$

$$(ad\, x)e_{ij} = 0 \qquad \text{za} \quad i \neq j \quad \text{i} \quad \{i,j\} \cap \{1,2\} = \emptyset.$$

Prema tome,

$$B(x,x) = Tr\,(ad\, x)^2 = 2 \cdot 4 + 4(\ell - 1) = 4(\ell+1).$$

Dakle, u ovom je slučaju

$$c = \frac{2}{4(\ell+1)} = \frac{1}{2(\ell+1)}.$$

2. $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}(2\ell, \mathbb{C})$, $\ell \in \mathbb{N}$. U ovom slučaju biramo $x = h_{\alpha_1} = e_{11} - e_{\ell+1,\ell+1}$. Ponovo je $A(x,x) = Tr\, x^2 = 2$. Operator $ad\, x$ ima u bazi

$$\{h_{\alpha_i};\ 1 \leq i \leq \ell\} \cup \{e_{\alpha_i};\ 1 \leq i \leq \ell\}\{e_{\beta ij};\ 1 \leq i,j \leq \ell,\ i \neq j\} \cup \{e_{\pm\gamma_{ij}};\ 1 \leq i < j \leq \ell\}$$

Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ dijagonalnu matricu:

$$(ad\, x)h_{\alpha_i} = 0, \qquad \text{za} \quad 1 \leq i \leq \ell;$$
$$(ad\, x)e_{\alpha_1} = 2e_{\alpha_1}; \qquad (ad\, x)e_{-\alpha_1} = -2e_{-\alpha_1};$$
$$(ad\, x)e_{\alpha_i} = (ad\, x)e_{-\alpha_i} = 0 \quad \text{za} \quad 2 \leq i \leq \ell;$$
$$(ad\, x)e_{\beta_{1i}} = e_{\beta_{1i}}, \quad (ad\, x)e_{\beta_{i1}} = -e_{\beta_{i1}} \quad \text{za} \quad 2 \leq i \leq \ell;$$
$$(ad\, x)e_{\beta_{ij}} = 0 \quad \text{za} \quad 2 \leq i,j \leq \ell, \quad i \neq j;$$
$$(ad\, x)e_{\gamma_{1i}} = e_{\gamma_{1i}}, \quad (ad\, x)e_{-\gamma_{1i}} = -e_{-\gamma_{1i}}, \quad \text{za} \quad 2 \leq i \leq \ell;$$
$$(ad\, x)e_{\gamma_{ij}} = (ad\, x)e_{-\gamma_{ij}} = 0 \quad \text{za} \quad 2 \leq i < j \leq \ell.$$

Prema tome,

$$B(x,x) = 2 \cdot 4 + 4(\ell - 1) = 4(\ell + 1).$$

Dakle,

$$c = \frac{2}{4(\ell+1)} = \frac{1}{2(\ell+1)} = \frac{1}{2\ell+2}.$$

3. $\mathfrak{g} = \mathfrak{o}(2\ell+1, \mathbb{C})$, $\ell \in \mathbb{N}$. Biramo $x = \frac{1}{2}h_{\alpha_1} = e_{11} - e_{\ell+1,\ell+1}$. Ponovo je $A(x,x) = Tr\, x^2 = 2$. Sada operator $ad\, x$ djeluje na vektore baze

$$\{h_{\alpha_i};\ 1 \leq i \leq \ell\} \cup \{e_{\alpha_i};\ 1 \leq i \leq \ell\} \cup \{e_{\beta ij};\ 1 \leq i,j \leq \ell,\ i \neq j\} \cup \{e_{\pm\gamma_{ij}};\ 1 \leq i < j \leq \ell\}$$

Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ ovako:

$$(ad\, x)h_{\alpha_i} = 0, \qquad \text{za} \quad 1 \leq i \leq \ell;$$
$$(ad\, x)e_{\alpha_1} = e_{\alpha_1}; \qquad (ad\, x)e_{-\alpha_1} = -e_{-\alpha_1};$$
$$(ad\, x)e_{\alpha_i} = (ad\, x)e_{-\alpha_i} = 0 \quad \text{za} \quad 2 \leq i \leq \ell;$$
$$(ad\, x)e_{\beta_{1i}} = e_{\beta_{1i}}, \quad (ad\, x)e_{\beta_{i1}} = -e_{\beta_{i1}} \quad \text{za} \quad 2 \leq i \leq \ell;$$
$$(ad\, x)e_{\beta_{ij}} = 0 \quad \text{za} \quad 2 \leq i,j \leq \ell, \quad i \neq j;$$
$$(ad\, x)e_{\gamma_{1i}} = e_{\gamma_{1i}}, \quad (ad\, x)e_{-\gamma_{1i}} = -e_{-\gamma_{1i}}, \quad \text{za} \quad 2 \leq i \leq \ell;$$
$$(ad\, x)e_{\gamma_{ij}} = (ad\, x)e_{-\gamma_{ij}} = 0 \quad \text{za} \quad 2 \leq i < j \leq \ell.$$

Prema tome,

$$B(x,x) = 2 + 4(\ell - 1) = 2(2\ell - 1).$$

Dakle,

$$c = \frac{2}{2(2\ell-1)} = \frac{1}{2\ell-1} = \frac{1}{(2\ell+1)-2}.$$

4. $\mathfrak{g} = \mathfrak{o}(2\ell, \mathbb{C})$, $\ell \in \mathbb{N}$, $\ell \geq 3$. Biramo $x = h_{\beta_{12}} = e_{11} - e_{22} - e_{\ell+1,\ell+1} + e_{\ell+2,\ell+2}$. Sada je $A(x,x) = Tr\, x^2 = 4$. Nadalje, operator $ad\, x$ djeluje na vektore baze

$$\{h_{\beta_{i,\ell+i}};\ 1 \leq i \leq \ell\} \cup \{e_{\beta ij};\ 1 \leq i,j \leq \ell,\ i \neq j\} \cup \{e_{\pm\gamma_{ij}};\ 1 \leq i < j \leq \ell\}$$

Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ ovako:

$$(ad\,x)h_{\beta_{i,\ell+i}} = 0 \quad \text{za} \quad 1 \le i \le \ell;$$

$$(ad\,x)e_{\beta_{12}} = 2e_{\beta_{12}}, \qquad (ad\,x)e_{\beta_{21}} = -2e_{\beta_{21}};$$

$$(ad\,x)e_{\beta_{1i}} = e_{\beta_{1i}}, \quad (ad\,x)e_{\beta_{2i}} = -e_{\beta_{2i}}, \quad \text{za} \quad 3 \le i \le \ell;$$

$$(ad\,x)e_{\beta_{i1}} = -e_{\beta_{i1}}, \quad (ad\,x)e_{\beta_{i2}} = e_{\beta_{i2}}, \quad \text{za} \quad 3 \le i \le \ell;$$

$$(ad\,x)e_{\beta_{ij}} = 0 \quad \text{za} \quad 3 \le i, j \le \ell, \quad i \ne j;$$

$$(ad\,x)e_{\gamma_{12}} = (ad\,x)e_{-\gamma_{12}} = 0;$$

$$(ad\,x)e_{\gamma_{1i}} = e_{\gamma_{1i}}, \quad (ad\,x)e_{\gamma_{2i}} = -e_{\gamma_{2i}}, \quad \text{za} \quad 3 \le i \le \ell;$$

$$(ad\,x)e_{-\gamma_{1i}} = -e_{-\gamma_{1i}}, \quad (ad\,x)e_{-\gamma_{2i}} = e_{-\gamma_{2i}} \quad \text{za} \quad 3 \le i \le \ell;$$

$$(ad\,x)e_{\gamma_{ij}} = (ad\,x)e_{-\gamma_{ij}} = 0 \quad \text{za} \quad 3 \le i < j \le \ell.$$

Prema tome,

$$B(x, x) = 2 \cdot 4 + 8(\ell - 2) = 8(\ell - 1).$$

Dakle,

$$c = \frac{4}{8(\ell - 1)} = \frac{1}{2(\ell - 1)} = \frac{1}{2\ell - 2}.$$

Time je korolar 1.3.25. u potpunosti dokazan.

Napomena. Direktnim računom lako se vidi da (c) vrijedi i ako je $n = 2$ i ako je $n = 4$ iako pripadne Liejeve algebre nisu proste: $\mathfrak{o}(2, \mathbb{C})$ je komutativna, a $\mathfrak{o}(4, \mathbb{C})$ je direktna suma dvaju prostih ideala (izomorfnih sa $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$).

Posljedica je korolara 1.3.25. da se u slučaju kad je $\mathfrak{g}$ klasična prosta kompleksna Liejeva algebra umjesto skalarnog produkta induciran na $\mathfrak{h}(R)$ i na njegovu dualu $\mathfrak{h}^*(R)$ Killingovom formom B možemo koristiti skalarnim produktima induciranim bilinearnom formom $A : A(x, y) = Tr\,xy$, $x, y \in \mathfrak{g}$. Računanje s tim skalarnim produktom znatno je jednostavnije za dualni sistem korijena $\check{R} = \{h_\alpha;\ \alpha \in R\}$, a time zbog zadatka 1.3.6. i za sistem korijena R u prostoru $\mathfrak{h}^*$.

Sada ćemo identificirati Dynkinove dijagrame klasičnih prostih kompleksnih Liejevih algebri. I dalje upotrebljavamo oznake iz četiri primjera u točki 1.3.3. Kao što smo istaknuli složenija računanja nužna za utvrđivanje Dynkinovog dijagrama provodit ćemo za dualne sisteme korijena, jer tada imamo na raspolaganju jednostavniji skalarni produkt.

Specijalna linearna Liejeva algebra $\mathfrak{sl}(\ell + 1, \mathbb{C})$, $\ell \ge 1$

Stavimo $\alpha_i = \alpha_{i,i+1}$, $1 \le i \le \ell$. Lako se vidi da je tada

$$\alpha_{ij} = \alpha_i + \cdots + \alpha_{j-1}, \qquad 1 \le i < j \le \ell + 1,$$

$$\alpha_{ij} = -\alpha_{ji} = -\alpha_j - \cdots - \alpha_{i-1}, \qquad 1 \le j < i \le \ell + 1.$$

To pokazuje da je $B = \{\alpha_1, \dots, \alpha_\ell\}$ baza sistema korijena $R = R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$. Pripadni skup pozitivnih korijena je $R_+ = \{\alpha_{ij}; 1 \le i < j \le \ell + 1\}$.

Odredimo sada Dynkinov dijagram sistema korijena R i dualnog sistema korijena $\check{R} = \{h_\alpha\}_{\alpha \in R}$.

Koristimo li skalarni produkt $(h|k) = Tr\, hk,\ h, k \in \mathfrak{h}(R)$, dobivamo sljedeće rezultate za skalarne produkte $(h_{\alpha_i}|h_{\alpha_j}),\ 1 \leq i, j \leq \ell$:

$$(h_{\alpha_i}|h_{\alpha_i}) = Tr\,(e_{ii} - e_{i+1,i+1})^2 = Tr\,(e_{ii} + e_{i+1,i+1}) = 2$$

$$\big(h_{\alpha_i}|h_{\alpha_{i+1}}\big) = Tr\,(e_{ii} - e_{i+1,i+1})(e_{i+1,i+1} - e_{i+2,i+2}) = Tr\,(-e_{i+1,i+1}) = -1 \quad \text{za} \quad 1 \leq i \leq \ell - 1;$$

$$\big(h_{\alpha_i}|h_{\alpha_j}\big) = Tr\,(e_{ii} - e_{i+1,i+1})(e_{jj} - e_{j+1,j+1}) = 0 \quad \text{ako je} \quad 1 \leq i, j \leq \ell, \quad |i - j| \geq 2.$$

Odatle i iz zadataka 1.3.6. nalazimo

$$n(\alpha_i, \alpha_{i+1}) = n(h_{\alpha_{i+1}}, h_{\alpha_i}) = 2\frac{\big(h_{\alpha_{i+1}}|h_{\alpha_i}\big)}{(h_{\alpha_i}|h_{\alpha_i})} = 2\frac{-1}{2} = -1 = n(\alpha_{i+1}, \alpha_i) qu 1 \leq i \leq \ell - 1,$$

i

$$n(\alpha_i, \alpha_j) = 0 \qquad \text{ako je } |i - j| \geq 2.$$

To pokazuje da je Dynkinov dijagram sistema korijena $R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ tipa A_ℓ.

Ortogonalna Liejeva algebra $\mathfrak{o}(2\ell + 1, \mathbb{C}),\ \ell \geq 2$

Stavimo $\delta_i = \beta_{i,i+1}$ za $1 \leq i \leq \ell - 1$ i $\delta_\ell = \alpha_\ell$. Tada nalazimo

$$\alpha_i = \delta_i + \cdots + \delta_\ell, \qquad 1 \leq i \leq \ell,$$

$$\beta_{ij} = \delta_i + \cdots + \delta_{j-1}, \qquad 1 \leq i < j \leq \ell,$$

$$\gamma_{ij} = \delta_i + \cdots + \delta_{j-1} + 2\delta_j + \cdots + 2\delta_\ell, \qquad 1 \leq i < j \leq \ell.$$

Dakle, $\{\delta_1, \cdots, \delta_\ell\}$ je baza sistema korijena $R = R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ i skup pozitivnih korijena u odnosu na tu bazu je

$$R_+ = \{\alpha_i;\ 1 \leq i \leq \ell\} \cup \{\beta_{ij};\ 1 \leq i < j \leq \ell\} \cup \{\gamma_{ij};\ 1 \leq i < j \leq \ell\}.$$

Odredimo sada Coxeterov graf i Dynkinov dijagram od R. Imamo

$$h_{\delta_i} = e_{ii} - e_{i+1,i+1} - e_{\ell+i,\ell+i} + e_{\ell+i+1,\ell+i+1} \quad \text{za} \quad 1 \leq i \leq \ell - 1 \quad \text{i} \quad h_{\delta_\ell} = 2e_{\ell\ell} - 2e_{2\ell,2\ell}$$

pa je

$$(h_{\delta_i}|h_{\delta_i}) = Tr\,(e_{ii} - e_{i+1,i+1} - e_{\ell+i,\ell+i} + e_{\ell+i+1,\ell+i+1})^2 = 4 \quad \text{za } 1 \leq i \leq \ell - 1,$$

$$(h_{\delta_\ell}|h_{\delta_\ell}) = Tr\,(2e_{\ell\ell} - 2e_{2\ell,2\ell})^2 = 8,$$

$$\big(h_{\delta_i}|h_{\delta_{i+1}}\big) = Tr\,(e_{ii} - e_{i+1,i+1} - e_{\ell+i,\ell+i} + e_{\ell+i+1,\ell+i+1})(e_{i+1,i+1} - e_{i+2,i+2} - e_{\ell+i+1,\ell+i+1} + e_{\ell+i+2,\ell+i+2}) =$$
$$= Tr\,(-e_{i+1,i+1} - e_{\ell+i+1,\ell+i+1}) = -2 \quad \text{za} \quad 1 \leq i \leq \ell - 2,$$

$$\big(h_{\delta_{\ell-1}}|h_{\delta_\ell}\big) = Tr\,(e_{\ell-1,\ell-1} - e_{\ell\ell} - e_{2\ell-1,2\ell-1} + e_{2\ell,2\ell})(2e_{\ell\ell} - 2e_{2\ell,2\ell}) = Tr\,(-2e_{\ell\ell} - 2e_{2\ell,2\ell}) = -4.$$

Svi ostali međusobni skalarni produkti vektora baze h_{δ_i} jednaki su nuli, jer su produkti tih matrica jednaki nuli. Odatle imamo prema zadatku 1.3.6.

$$n(\delta_i, \delta_{i+1}) = n(h_{\delta_{i+1}}, h_{\delta_i}) = 2\frac{\big(h_{\delta_{i+1}}|h_{\delta_i}\big)}{(h_{\delta_i}|h_{\delta_i})} = 2\frac{-2}{4} = -1 = n(\delta_{i+1}, \delta_i) \quad \text{za} \quad 1 \leq i \leq \ell - 2,$$

$$n(\delta_{\ell-1}, \delta_\ell) = n(h_{\delta_\ell}, h_{\delta_{\ell-1}}) = 2\frac{\big(h_{\delta_\ell}|h_{\delta_{\ell-1}}\big)}{\big(h_{\delta_{\ell-1}}|h_{\delta_{\ell-1}}\big)} = 2\frac{-4}{4} = -2,$$

$$n(\delta_\ell, \delta_{\ell-1}) = n(h_{\delta_{\ell-1}}, h_{\delta_\ell}) = 2\frac{\big(h_{\delta_{\ell-1}}|h_{\delta_\ell}\big)}{(h_{\delta_\ell}|h_{\delta_\ell})} = 2\frac{-4}{8} = -1.$$

Nadalje, $n(\delta_i,\delta_j)=0$ ako je $|i-j|\geq 2$. Dakle,

$$n(\delta_i,\delta_{i+1})n(\delta_{i+1},\delta_i)=1 \qquad \text{za} \quad 1\leq i\leq \ell-2; \qquad n(\delta_{\ell-1},\delta_\ell)n(\delta_\ell,\delta_{\ell-1})=2.$$

Prema tome, u Coxeterovom grafu spojeni su samo vrhovi δ_i i δ_{i+1} za $1\leq i\leq\ell-1$ i to s jednom linijom za $1\leq i\ell-2$ i s dvije linije za $i=\ell-1$. Nadalje, omjeri kvadrata duljina korijena $\delta_{\ell-1}$ i δ_ℓ su

$$\frac{(\delta_{\ell-1}|\delta_{\ell-1})}{(\delta_\ell|\delta_\ell)}=\frac{(h_{\delta_\ell}|h_{\delta_\ell})}{\big(h_{\delta_{\ell-1}}|h_{\delta_{\ell-1}}\big)}=\frac{8}{4}=2.$$

Dakle, korijen $\delta_{\ell-1}$ dulji je od korijena δ_ℓ, pa u Dynkinovom dijagramu strelica je usmjerena od vrha $\delta_{\ell-1}$ prema vrhu δ_ℓ. To znači da je Dynkinov dijagram sistema korijena $R(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ tipa B_ℓ.

Simplektička Liejeva algebra $\mathfrak{sp}(2\ell,\mathbb{C})$, $\ell\geq 2$

Stavimo kao i u prethodnom primjeru $\delta_i=\beta_{i,i+1}$ za $1\leq i\leq\ell-1$ i $\delta_\ell=\alpha_\ell$. Tada je

$$\alpha_i=2\delta_i+\cdots+2\delta_{\ell-1}+\delta_\ell, \qquad 1\leq i\leq\ell,$$

$$\beta_{ij}=\delta_i+\cdots+\delta_{j-1}, \qquad 1\leq i<j\leq\ell,$$

$$\gamma_{ij}=\delta_i+\cdots+\delta_{j-1}+2\delta_j+\cdots+2\delta_{\ell-1}+\delta_\ell, \qquad 1\leq i<j\leq\ell.$$

Dakle, $\{\delta_1,\cdots,\delta_\ell\}$ je baza sistema korijena $R=R(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ i skup pozitivnih korijena u odnosu na tu bazu je

$$R_+=\{\alpha_i;\ 1\leq i\leq\ell\}\cup\{\beta_{ij};\ 1\leq i<j\leq\ell\}\cup\{\gamma_{ij};\ 1\leq i<j\leq\ell\}.$$

Računamo ponovo skalarne produkte $\big(h_{\delta_i}|h_{\delta_j}\big)$ vektora baze dualnog sistema korijena. Imamo

$$h_{\delta_i}=e_{ii}-e_{i+1,i+1}-e_{\ell+i,\ell+i}+e_{\ell+i+1,\ell+i+1} \quad \text{za} \quad 1\leq i\leq\ell-1; \qquad h_{\delta_\ell}=e_{\ell\ell}-e_{2\ell,2\ell}.$$

Prema tome, za $1\leq i\leq\ell-1$ je

$$(h_{\delta_i}|h_{\delta_i})=Tr\,(e_{ii}-e_{i+1,i+1}-e_{\ell+i,\ell+i}+e_{\ell+i+1,\ell+i+1})^2=Tr\,(e_{ii}+e_{i+1,i+1}+e_{\ell+i,\ell+i}+e_{\ell+i+1,\ell+i+1})=4,$$

a

$$(h_{\delta_\ell}|h_{\delta_\ell})=Tr\,(e_{\ell\ell}-e_{2\ell,2\ell})^2=Tr\,(e_{\ell\ell}+e_{2\ell,2\ell})=2.$$

Dakle, kvadrati duljina vektora baze $h_{\delta_1},\dots,h_{\delta_{\ell-1}}$ su međusobno jednaki kao i u prethodnom primjeru, ali sada je kvadrat duljine vektora h_{δ_ℓ} upola manji. Odredimo među kojim vrhovima postoje spojnice. Imamo

$$\big(h_{\delta_i}|h_{\delta_{i+1}}\big)=Tr\,(e_{ii}-e_{i+1,i+1}-e_{\ell+i,\ell+i}+e_{\ell+i+1,\ell+i+1})(e_{i+1,i+1}-e_{i+2,i+2}-e_{\ell+i+1,\ell+i+1}+e_{\ell+i+2,\ell+i+2})=$$

$$=Tr\,(-e_{i+1,i+1}-e_{\ell+i+1,\ell+i+1})=-2 \quad \text{za} \quad 1\leq i\leq\ell-2,$$

$$\big(h_{\delta_{\ell-1}}|h_{\delta_\ell}\big)=Tr\,(e_{\ell-1,\ell-1}-e_{\ell\ell}-e_{2\ell-1,2\ell-1}+e_{2\ell,2\ell})(e_{\ell\ell}-e_{2\ell,2\ell})=Tr\,(-e_{\ell\ell}-e_{2\ell,2\ell})=-2.$$

Svi ostali međusobni skalarni produkti vektora baze h_{δ_i} jednaki su nuli, jer su produkti tih matrica jednaki nuli. Prema zadatku 1.3.6. imamo

$$n(\delta_i,\delta_{i+1})=n(h_{\delta_{i+1}},h_{\delta_i})=2\frac{\big(h_{\delta_{i+1}}|h_{\delta_i}\big)}{(h_{\delta_i}|h_{\delta_i})}=2\frac{-2}{4}=-1=n(\delta_{i+1},\delta_i) \quad \text{za} \quad 1\leq i\leq\ell-2$$

$$n(\delta_{\ell-1},\delta_\ell)=n(h_{\delta_\ell},h_{\delta_{\ell-1}})=2\frac{\big(h_{\delta_\ell}|h_{\delta_{\ell-1}}\big)}{\big(h_{\delta_{\ell-1}}|h_{\delta_{\ell-1}}\big)}=2\frac{-2}{4}=-1,$$

$$n(\delta_\ell,\delta_{\ell-1})=n(h_{\delta_{\ell-1}},h_{\delta_\ell})=2\frac{\big(h_{\delta_{\ell-1}}|h_{\delta_\ell}\big)}{(h_{\delta_\ell}|h_{\delta_\ell})}=2\frac{-2}{2}=-2.$$

Dakle,

$$n(\delta_i,\delta_{i+1})n(\delta_{i+1},\delta_i)=1 \qquad \text{za} \quad 1\le i\le \ell-2; \qquad n(\delta_{\ell-1},\delta_\ell)n(\delta_\ell,\delta_{\ell-1})=2.$$

Prema tome, Coxeterov graf je isti kao i u prethodnom slučaju. Međutim, sada je korijen δ_ℓ dulji od korijena $\delta_{\ell-1}$, pa je strelica u Dynkinovom dijagramu okrenuta suprotno: od δ_ℓ prema $\delta_{\ell-1}$. Dakle, Dynkinov dijagram sistema korijena $R(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ je tipa C_ℓ.

Ortogonalna Liejeva algebra $\mathfrak{o}(2\ell,\mathbb{C})$, $\ell\ge 3$

Sada stavimo $\alpha_i=\beta_{i,i+1}$ za $q\le i\le \ell-1$ i $\alpha_\ell=\gamma_{\ell-1,\ell}$. Tada je

$$\beta_{ij}=\alpha_i+\cdots+\alpha_{j-1} \qquad 1\le i<j\le \ell,$$

$$\gamma_{ij}=\alpha_i+\cdots+\alpha_{j-1}+2\alpha_j+\cdots+2\alpha_{\ell-2}+\alpha_{l-1}+\alpha_\ell, \qquad 1\le i<j\le\ell.$$

Dakle, $\{\alpha_1,\ldots,\alpha_\ell\}$ je baza sistema korijena $R=R(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ i pripadni skup pozitivnih korijena je

$$R_+=\{\beta_{ij};\ 1\le i<j\le\ell\}\cup\{\gamma_{ij};\ 1\le i<j\le\ell\}.$$

Sada imamo

$$h_{\alpha_i}=h_{\beta_{i,i+1}}=e_{ii}-e_{i+1,i+1}-e_{\ell+i,\ell+i}+e_{\ell+i+1,\ell+i+1} \quad \text{za} \quad 1\le i\le\ell-1,$$

$$h_{\alpha_\ell}=h_{\gamma_{\ell-1,\ell}}=e_{\ell-1,\ell-1}+e_{\ell\ell}-e_{2\ell-1,2\ell-1}-e_{2\ell,2\ell}.$$

Prema tome, za $1\le i\le\ell-1$ je

$$(h_{\alpha_i}|h_{\alpha_i})=Tr\,(e_{ii}-e_{i+1,i+1}-e_{\ell+i,\ell+i}+e_{\ell+i+1,\ell+i+1})^2=Tr\,(e_{ii}+e_{i+1,i+1}+e_{\ell+i,\ell+i}+e_{\ell+i+1,\ell+i+1})=4,$$

$$(h_{\alpha_\ell}|h_{\alpha_\ell})=Tr\,(e_{\ell-1,\ell-1}+e_{\ell\ell}-e_{2\ell-1,2\ell-1}-e_{2\ell,2\ell})^2=Tr\,(e_{\ell-1,\ell-1}+e_{\ell\ell}+e_{2\ell-1,2\ell-1}+e_{2\ell,2\ell})=4.$$

Dakle, u ovom su slučaju duljine svih vektora baze od $\check{R}$ iste duljine, pa su i duljine svih vektora baze od R iste duljine. Odredimo sada koje spojnice među vrhovima postoje. Imamo za $1\le i\le \ell-2$

$$\big(h_{\alpha_i}|h_{\alpha_{i+1}}\big)=Tr\,(e_{ii}-e_{i+1,i+1}-e_{\ell+i,\ell+i}+e_{\ell+i+1,\ell+i+1})(e_{i+1,i+1}-e_{i+2,i+2}-e_{\ell+i+1,\ell+i+1}+e_{\ell+i+2,\ell+i+2})=$$

$$=Tr\,(-e_{i+1,i+1}-e_{\ell+i+1,\ell+i+1})=-2.$$

Nadalje,

$$\big(h_{\alpha_{\ell-2}}|h_{\alpha_\ell}\big)=Tr\,(e_{\ell-2,\ell-2}-e_{\ell-1,\ell-1}-e_{2\ell-2,2\ell-2}+e_{2\ell-1,2\ell-1})(e_{\ell-1,\ell-1}+e_{\ell\ell}-e_{2\ell-1,2\ell-1}-e_{2\ell,2\ell})=$$

$$=Tr\,\big(-e_{\ell-1,\ell-1}-e_{2\ell-1,2\ell-1}\big)=-2$$

ali

$$\big(h_{\alpha_{\ell-1}}|h_{\alpha_\ell}\big)=Tr\,(e_{\ell-1,\ell-1}-e_{\ell,\ell}-e_{2\ell-1,2\ell-1}+e_{2\ell,2\ell})(e_{\ell-1,\ell-1}+e_{\ell\ell}-e_{2\ell-1,2\ell-1}-e_{2\ell,2\ell})=$$

$$=Tr\,(e_{\ell-1,\ell-1}-e_{\ell\ell}+e_{2\ell-1,2\ell-1}-e_{2\ell,2\ell}))=0.$$

Svi ostali međusobni skalarni produkti vrhova h_{α_i} jednaki su nuli jer su svi međusobni produkti tih matrica jednaki nuli. Sada pomoću zadatka 1.3.6. slijedi

$$n(\alpha_i,\alpha_{i+1})=n(h_{\alpha_{i+1}},h_{\alpha_i})=2\frac{\big(h_{\alpha_{i+1}}|h_{\alpha_i}\big)}{(h_{\alpha_i}|h_{\alpha_i})}=2\frac{-2}{4}=-1=n(\alpha_{i+1},\alpha_i), \quad \text{za} \quad 1\le i\le\ell-2,$$

$$n(\alpha_{\ell-2},\alpha_\ell)=n(h_{\alpha_\ell},h_{\alpha_{\ell-2}})=2\frac{(h_{\alpha_\ell}|h_{\alpha_{\ell-2}})}{(h_{\alpha_{\ell-2}}|h_{\alpha_{\ell-2}})}=2\frac{-2}{4}=-1=n(\alpha_\ell,\alpha_{\ell-2}).$$

To znači da je Coxeterov graf sistema korijena $R(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$, a time i Dynkinov dijagram jer su svi korijeni iste duljine, tipa D_ℓ.

Na taj način ustanovili smo da za svaki ireducibilan reduciran sistem korijena R iz beskonačnih serija A_ℓ, B_ℓ, C_ℓ i D_ℓ postoji prosta kompleksna Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ i postoji njena Cartanova podalgebra $\mathfrak{h}$ takve da je sistem korijena R izomorfan sistemu korijena $R(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ u realnom prostoru $\mathfrak{h}(R)$. I za preostalih pet Dynkinovih dijagrama E_6, E_7, E_8, F_4 i G_2 postoji pripadna prosta kompleksna Liejeva algebra. To slijedi iz sljedećeg općeg teorema:

Teorem 1.3.26. (**Serre−ov teorem egzistencije**) *Neka je R reduciran sistem korijena u realnom vektorskom prostoru V. Tada postoji poluprosta kompleksna Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ i njena Cartanova podalgebra $\mathfrak{h}$ takva da je sistem korijena R izomorfan sistemu korijena $R(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ u realnom prostoru $\mathfrak{h}(R)=span_{\mathbb{R}}\,R(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$. Ako izaberemo bazu $B=\{\alpha_1,\ldots,\alpha_\ell\}$ sistema korijena R i stavimo $c_{ij}=n(\alpha_i,\alpha_j)$, ta se Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ može realizirati kao Liejeva algebra generirana sa 3ℓ generatora $\{h_i,x_i,y_i;\ 1\le i\le\ell\}$ i s relacijama:*

$(S1)$ $[h_i,h_j]=0$ *za sve* $i,j=1,\ldots,\ell$.

$(S2)$ $[x_i,y_i]=h_i$, $[x_i,y_j]=0$ *za* $i,j=1,\ldots,\ell$, $i\neq j$.

$(S3)$ $[h_i,x_j]=c_{ji}x_j$, $[h_i,y_j]=-c_{ji}y_j$ *za sve* $i,j=1,\ldots,\ell$.

(S_{ij}^+) $(ad\,x_i)^{-c_{ji}+1}(x_j)=0$ *za* $i,j=1,\ldots,\ell$.

(S_{ij}^-) $(ad\,x_i)^{-c_{ji}+1}(x_j)=0$ *za* $i,j=1,\ldots,\ell$.

Drugim riječima, ako je $\mathfrak{l}$ bilo koja Liejeva algebra i ako je $f:\{h_i,x_i,y_i;\ 1\le i\le\ell\}\to\mathfrak{l}$ preslikavanje sa svojstvom da slike $H_i=f(h_i)$, $X_i=f(x_i)$, $Y_i=f(y_i)$ zadovoljavaju gornje relacije u Liejevoj algebri $\mathfrak{l}$, onda se f jedinstveno proširuje do homomorfizma $F:\mathfrak{g}\to\mathfrak{l}$.

1.3.6 Automorfizmi

Grupu automorfizama Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ označavamo sa $Aut(\mathfrak{g})$:

$$Aut(\mathfrak{g})=\{A\in GL(\mathfrak{g});\ [Ax,Ay]=[x,y]\ \forall x,y\in\mathfrak{g}\}.$$

Ako je $\mathfrak{h}$ Cartanova podalgebra od $\mathfrak{g}$ i $A\in Aut(\mathfrak{g})$, onda je očito $A\mathfrak{h}$ također Cartanova podalgebra od $\mathfrak{g}$. Kažemo da je ta Cartanova podalgebra $Aut(\mathfrak{g})-$konjugirana Cartanovoj podalgebri $\mathfrak{h}$. Za kompleksne Liejeve algebre vrijedi i obratno i to čak s obzirom na podgrupu $Int(\mathfrak{g})$ tzv. **unutarnjih automorfizama** od $\mathfrak{g}$. Pri tome je $Int(\mathfrak{g})$ podgrupa od $Aut(\mathfrak{g})$ generirana sa svim automorfizmima oblika $e^{ad\,x}$, $x\in\mathfrak{g}$.

Teorem 1.3.27. *Neka je $\mathfrak{g}$ kompleksna Liejeva algebra i $\mathfrak{h}_1$ i $\mathfrak{h}_2$ njene Cartanove podalgebre. Tada postoji $A\in Int(\mathfrak{g})$ takav da je $\mathfrak{h}_2=A\mathfrak{h}_1$. Ako je Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ poluprosta, prijelazom na dual automorfizam A inducira izomorfizam sistema korijena $R(\mathfrak{g},\mathfrak{h}_1)$ na sistem korijena $R(\mathfrak{g},\mathfrak{h}_2)$.*

Napomenimo da vrijedi i više: automorfizam A u teoremu 1.3.27. možemo izabrati iz podgrupe $\mathcal{E}(\mathfrak{g})$ generirane automorfizmima oblika $e^{ad\,x}$, pri čemu je $x\in\mathfrak{g}$ tzv. **striktno** $ad-$**nilpotentan element** od $\mathfrak{g}$ tj. takav da postoje $y\in\mathfrak{g}$, $c\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$ i $k\in\mathbb{N}$ takvi da je $(cI_{\mathfrak{g}}-ad\,y)^k x=0$. Nije teško vidjeti da je tada $ad\,x$ nilpotentan operator, dakle, $e^{ad\,x}$ nije beskonačan red nego polinom od operatora $ad\,x$. Međutim, za poluprostu kompleksnu Liejevu algebru $\mathfrak{g}$ vrijedi $\mathcal{E}(\mathfrak{g})=Int(\mathfrak{g})$.

Bit će nam još važno da se svaki automorfizam sistema korijena $R(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ (točnije, svaki automorfizam dualnog sistema korijena $\{h_\alpha;\ \alpha\in R(\mathfrak{g},\mathfrak{h})\}$ u $\mathfrak{h}$) može proširiti do automorfizma od $\mathfrak{g}$. Štoviše vrijedi:

Teorem 1.3.28. *Neka su $\mathfrak{g}$ i $\mathfrak{g}'$ kompleksne poluproste Liejeve algebre, $\mathfrak{h}$ i $\mathfrak{h}'$ njihove Cartanove podalgebre i $R=R(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ i $R'=R(\mathfrak{g}',\mathfrak{h}')$ pripadni sistemi korijena. Neka je φ izomorfizam sistema korijena R na sistem korijena R'. Neka je B baza sistema korijena R; tada je $B'=\varphi(B)$ baza sistema korijena R'. Za svaki $\alpha\in B$ izaberimo $x_\alpha\in\mathfrak{g}_\alpha\setminus\{0\}$ i za svaki $\beta\in B'$ izaberimo $x'_\beta\in\mathfrak{g}'_\beta\setminus\{0\}$. Postoji jedinstven izomorfizam Liejevih algebri $\Phi:\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}'$ takav da vrijedi*

$$\Phi(h_\alpha)=h'_{\varphi(\alpha)}\qquad i\qquad \Phi(x_\alpha)=x'_{\varphi(\alpha)}\qquad \forall\alpha\in B.$$

Pri tome je za $\alpha\in R$ sa h_α označen jedinstveni element od $[\mathfrak{g}_\alpha,\mathfrak{g}_{-\alpha}]\subseteq\mathfrak{h}$ takav da je $\alpha(h_\alpha)=2$, te analogno za $\beta\in R'$ h'_β je jedinstveni element od $[\mathfrak{g}'_\beta,\mathfrak{g}'_{-\beta}]\subseteq\mathfrak{h}'$ takav da je $\beta(h'_\beta)=2$.

Korolar 1.3.29. *Neka je $\mathfrak{g}$ poluprosta kompleksna Liejeva algebra, $\mathfrak{h}$ njena Cartanova podalgebra, $R=R(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ pripadni sistem korijena i B baza sistema korijena R. Neka je $\omega\in Aut(R)$. Za svaki $\alpha\in B$ izaberimo $x_\alpha\in\mathfrak{g}_\alpha\setminus\{0\}$ i $x'_{\omega(\alpha)}\in\mathfrak{g}_{\omega(\alpha)}\setminus\{0\}$. Tada postoji jedinstven $\Omega\in Aut(\mathfrak{g})$ takav da je $\Omega(\mathfrak{h})=\mathfrak{h}$ i da vrijedi*

$$\Omega(x_\alpha)=x'_{\omega(\alpha)}\qquad i\qquad \Omega(h_\alpha)=h_{\omega(\alpha)}\qquad \forall\alpha\in B.$$

Zadatak 1.3.7. *Neka je $\mathfrak{g}$ kompleksna poluprosta Liejeva algebra, $\mathfrak{h}$ njena Cartanova podalgebra, $R=R(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ pripadni sistem korijena i za $\alpha\in R$ neka su $x_\alpha\in\mathfrak{g}_\alpha$ i $y_\alpha\in\mathfrak{g}_{-\alpha}$ izabrani tako da je $[x_\alpha,y_\alpha]=h_\alpha$, gdje je kao i obično h_α jedinstveni element iz $[\mathfrak{g}_\alpha,\mathfrak{g}_{-\alpha}]\subseteq\mathfrak{h}$ takav da je $\alpha(h_\alpha)=2$. Neka je $\tau_\alpha\in Int(\mathfrak{g})$ definiran sa $\tau_\alpha=\mathrm{e}^{ad\,x_\alpha}\mathrm{e}^{-ad\,y_\alpha}\mathrm{e}^{ad\,x_\alpha}$ i neka je $\sigma_\alpha\in W(R)$ refleksija u odnosu na korijen α, $\sigma_\alpha\lambda=\lambda-\lambda(h_\alpha)\alpha$, $\lambda\in\mathfrak{h}^*$. Označimo sa σ_α također refleksiju na $\mathfrak{h}$ u odnosu na dualni korijen $\check{\alpha}=h_\alpha:\sigma_\alpha h=h-\alpha(h)h_\alpha$. Dokažite da je tada $\tau_\alpha|\mathfrak{h}=\sigma_\alpha$.*

Uputa: Eksplicitno izračunajte djelovanje operatora $ad\,x_\alpha$, $ad\,y_\alpha$, $(ad\,x_\alpha)^2$ i $(ad\,y_\alpha)^2$ na $\mathfrak{h}=\mathbb{C}h_\alpha\dot{+}\mathfrak{h}^0$, $\mathfrak{h}^0=\{h\in\mathfrak{h};\ \alpha(h)=0\}$. Provjerite i da je $(ad\,x_\alpha)^3|\mathfrak{h}=(ad\,y_\alpha)^3|\mathfrak{h}=0$. Odatle eksplicitno odredite djelovanje τ_α na $\mathfrak{h}$.

Zadatak 1.3.8. *Uz oznake iz zadatka 1.3.7. neka je $\omega_\alpha\in Int(\mathfrak{g})$ definiran sa*

$$\omega_\alpha=\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}\,ad\,(x_\alpha-y_\alpha)}.$$

Dokažite da i za taj unutarnji automorfizam vrijedi $\omega_\alpha|\mathfrak{h}=\sigma_\alpha$.

Uputa: Sada treba induktivno po k izračunati djelovanje svih parnih i svih neparnih potencija $(ad\,(x_\alpha-y_\alpha))^{2k}$ i $(ad\,(x_\alpha-y_\alpha))^{2k+1}$ na h_α i na $\mathfrak{h}^0$ (oznaka iz prethodne upute), pa izvesti da je $\omega_\alpha|\mathfrak{h}^0$ identiteta kao i $\sigma_\alpha|\mathfrak{h}^0$ i da je

$$\omega_\alpha h_\alpha=(-\sin\pi)\,(x_\alpha+y_\alpha)+(\cos\pi)\,h_\alpha=-h_\alpha=\sigma_\alpha h_\alpha.$$

1.4 Univerzalna omotačka algebra

1.4.1 Tenzorski produkt

Neka su $V_1, \dots, V_n$ vektorski prostori nad poljem $K = \mathbb{R}$ ili $K = \mathbb{C}$. **Tenzorski produkt** prostora $V_1, \dots, V_n$ je uređen par (W, τ) koji ima sljedeća svojstva:

$(T1)$ W je vektorski prostor nad poljem K.

$(T2)$ τ je $n-$linearno preslikavanje sa $V_1 \times \cdots \times V_n$ u W.

$(T3)$ Za svaki vektorski prostor U nad poljem K i za svako $n-$linearno preslikavanje $\sigma : V_1 \times \cdots \times V_n \to U$ postoji jedinstven linearan operator $S : W \to U$ takav da je $\sigma = S \circ \tau$.

Aksiom $(T3)$ zove se **univerzalno svojstvo** u odnosu na $n-$linearna preslikavanja.

Tenzorski produkt postoji i jedinstven je do na izomorfizam:

Teorem 1.4.1. *Neka su $V_1, \dots, V_n$ vektorski prostori nad poljem K.*

(a) *Postoji tenzorski produkt vektorskih prostora $V_1, \dots, V_n$.*

(b) *Ako su (W, τ) i (U, σ) tenzorski produkti prostora $V_1, \dots, V_n$, jedinstven linearan operator $S : W \to U$ sa svojstvom $\sigma = S \circ \tau$ je izomorfizam vektorskih prostora.*

(c) *Uređen par (W, τ) sa svojstvima $(T1)$ i $(T2)$ je tenzorski produkt vektorskih prostora $V_1, \dots, V_n$ ako i samo ako vrijede sljedeća dva svojstva:*

(1) *Ako za svaki $j = 1, \dots, n$ izaberemo podskup S_j vektorskog prostora V_j koji ga razapinje, onda skup*
$$\tau(S_1, \dots, S_n) = \{\tau(v_1, \dots, v_n);\ v_1 \in S_1,\ \dots, v_n \in S_n\} \tag{1.3}$$
razapinje prostor W.

(2) *Ako za svaki $j = 1, \dots, n$ izaberemo linearno nezavisan podskup S_j vektorskog prostora V_j, onda je (1.3) linearno nezavisan podskup prostora W.*

Zadatak 1.4.1. *Dokažite tvrdnju (c) teorema 1.4.1.*

Neposredna je posljedica tvrdnje (c) teorema 1.4.1.:

Korolar 1.4.2. *Ako je (W, τ) tenzorski produkt vektorskih prostora $V_1, \dots, V_n$ i ako je B_j baza od V_j za $j = 1, \dots, n$, onda je $\tau(B_1, \dots, B_n)$ baza vektorskog prostora W.*

Propozicija 1.4.3. *Neka je (W, τ) tenzorski produkt prostora $V_1, \dots, V_n$ i (W', τ') tenzorski produkt prostora $V_1', \dots, V_n'$. Nadalje, neka su $A_i : V_i \to V_i'$ za $i = 1, \dots, n$ linearni operatori. Tada postoji jedinstven linearan operator $A : W \to W'$ takav da je $A \circ \tau = \tau' \circ (A_1 \times \cdots \times A_n)$, tj.*
$$A(\tau(v_1, \dots, v_n)) = \tau'(A_1 v_1, \dots, A_n v_n) \qquad \forall v_1 \in V_1,\ \dots, \forall v_n \in V_n.$$

Propozicija 1.4.4. *Neka su $m, n_1, \dots, n_m \in \mathbb{N}$ i neka su V_j^i za $j = 1, \dots, n_i$ i za $i = 1, \dots, m$ vektorski prostori nad poljem K. Nadalje, neka je za $i = 1, \dots, m$ (W^i, τ^i) tenzorski produkt vektorskih prostora $V_1^i, \dots, V_{n_i}^i$ i neka je (W, τ) tenzorski produkt vektorskih prostora $W^1, \dots, W^m$. Tada je $(W, \tau \circ (\tau^1 \times \cdots \times \tau^m))$ tenzorski produkt vektorskih prostora $V_1^1, \dots, V_{n_1}^1, \dots\dots, V_1^m, \dots, V_{n_m}^m$.*

Ako je (W,τ) tenzorski produkt vektorskih prostora $V_1,\dots,V_n$, uobičajeno je pisati

$$W = V_1 \otimes \cdots \otimes V_n \qquad \text{i} \qquad \tau(v_1,\dots,v_n) = v_1 \otimes \cdots \otimes v_n, \quad v_1 \in V_1,\ \dots\ , v_n \in V_n.$$

Dakle, uz takve oznake imamo:

(1) $(v_1,\dots,v_n) \mapsto v_1 \otimes \cdots \otimes v_n$ je $n-$linearno preslikavanje sa $V_1 \times \cdots \times V_n$ u $V_1 \otimes \cdots \otimes V_n$.

(2) Za svako $n-$linearno preslikavanje $\sigma : V_1 \times \cdots \times V_n \to U$ postoji jedinstven linearan operator $S : V_1 \otimes \cdots \otimes V_n \to U$ takav da je

$$S(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) = \sigma(v_1,\dots,v_n) \qquad \forall (v_1,\dots,v_n) \in V_1 \times \cdots \times V_n.$$

(3) Vektorski prostor $V_1 \otimes \cdots \otimes V_n$ razapet je vektorima oblika $v_1 \otimes \cdots \otimes v_n$, $v_1 \in V_1,\dots,v_n \in V_n$. Štoviše, ako je za $j = 1,\dots,n$ S_j podskup prostora V_j koji ga razapinje, onda je prostor $V_1 \otimes \cdots \otimes V_n$ razapet vektorima $v_1 \otimes \cdots \otimes v_n$ za $v_1 \in S_1,\dots,v_n \in S_n$.

(4) Ako je S_i linearno nezavisan podskup od V_i za svaki $i = 1,\dots,n$, onda je

$$\{v_1 \otimes \cdots \otimes v_n;\ v_i \in S_i,\ i = 1,\dots,n\}$$

linearno nezavisan podskup od $V_1 \otimes \cdots \otimes V_n$.

(5) Ako je $\{e_j^{(i)};\ j \in J_i\}$ baza prostora V_i za svaki $i = 1,\dots,n$, onda je

$$\{e_{j_1}^{(1)} \otimes \cdots \otimes e_{j_n}^{(n)};\ (j_1,\dots,j_n) \in J_1 \times \cdots \times J_n\}$$

baza prostora $V_1 \otimes \cdots \otimes V_n$.

(6) Ako su $A_i : V_i \to V_i'$ linearni operatori za $i = 1,\dots,n$, postoji jedinstven linearan operator $A : V_1 \otimes \cdots \otimes V_1 \to V_1' \otimes \cdots \otimes V_n'$ takav da je

$$A(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) = A_1 v_1 \otimes \cdots \otimes A_n v_n \qquad \forall v_1 \in V_1,\ \dots\ , \forall v_n \in V_n.$$

Pisat ćemo tada $A = A_1 \otimes \cdots \otimes A_n$.

(7) Moguća je identifikacija

$$(V_1^1 \otimes \cdots \otimes V_{n_1}^1) \otimes \cdots \otimes (V_1^m \otimes \cdots \otimes V_{n_m}^m) = V_1^1 \otimes \cdots \otimes V_{n_1}^1 \otimes \cdots \otimes V_1^m \otimes \cdots \otimes V_{n_m}^m$$

i to tako da bude

$$(v_1^1 \otimes \cdots \otimes v_{n_1}^1) \otimes \cdots \otimes (v_1^m \otimes \cdots \otimes v_{n_m}^m) = v_1^1 \otimes \cdots \otimes v_{n_1}^1 \otimes \cdots \otimes v_1^m \otimes \cdots \otimes v_{n_m}^m, \qquad \forall v_j^i \in V_j^i.$$

Zadatak 1.4.2. *Neka je V realan vektorski prostor. Dokažite da na realnom prostoru $\mathbb{C} \otimes V$ postoji jedinstvena struktura kompleksnog vektorskog prostora takva da vrijedi*

$$\alpha(\beta \otimes v) = \alpha\beta \otimes v \qquad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \quad \forall v \in V.$$

Nadalje, dokažite da je $1 \otimes V = \{1 \otimes v;\ v \in V\}$ realna forma kompleksnog prostora $\mathbb{C} \otimes V$ i da je $v \mapsto 1 \otimes v$ izomorfizam realnih prostora sa V na $1 \otimes V$. Odatle izvedite da je $(v_1, v_2) \mapsto 1 \otimes v_1 + i \otimes v_2$ izomorfizam kompleksifikacije $V^{\mathbb{C}}$ realnog prostora V na kompleksan prostor $\mathbb{C} \otimes V$.

1.4.2 Tenzorska, simetrična i polinomijalna algebra

Tenzorska algebra prostora V je uređen par $(\mathcal{T}, \tau)$ sa sljedećim svojstvima:

$(TA1)$ $\mathcal{T}$ je unitalna algebra (dakle, asocijativna algebra s jedinicom).

$(TA2)$ τ je linearan operator sa V u $\mathcal{T}$.

$(TA3)$ Za svaku unitalnu algebru $\mathcal{A}$ i svaki linearan operator $\sigma : V \to \mathcal{A}$ postoji jedinstven unitalan homomorfizam $\varphi : \mathcal{T} \to \mathcal{A}$ takav da je $\sigma = \varphi \circ \tau$.

Teorem 1.4.5. *Neka je V vektorski prostor nad poljem K.*

(a) *Postoji tenzorska algebra prostora V.*

(b) *Ako su $(\mathcal{T}, \tau)$ i $(\mathcal{S}, \sigma)$ tenzorske algebre od V, jedinstveni unitalni homomorfizam $\varphi : \mathcal{T} \to \mathcal{S}$ sa svojstvom $\sigma = \varphi \circ \tau$ je izomorfizam unitalnih algebri.*

(c) *Ako je S podskup od V koji razapinje V, onda $\tau(S)$ generira unitalnu algebru $\mathcal{T}$.*

(d) *Ako je $\{e_j;\ j \in J\}$ baza vektorskog prostora V onda je*

$$\{1_{\mathcal{T}}\} \cup \{\tau(e_{j_1}) \cdots \tau(e_{j_n});\ n \in \mathbb{N},\ j_1, \ldots, j_n \in J\}$$

baza vektorskog prostora $\mathcal{T}$.

Uobičajena je sljedeća realizacija tenzorske algebre vektorskog prostora V. Stavimo

$$T^0(V) = K, \quad T^1(V) = V, \quad T^n(V) = \underbrace{V \otimes \cdots \otimes V}_{n} \text{ za } n \in \mathbb{N},\ n \geq 2, \qquad T(V) = \coprod_{n \in \mathbb{Z}_+} T^n(V).$$

Korištenjem identifikacije

$$T^n(V) \otimes T^m(V) = (\underbrace{V \otimes \cdots \otimes V}_{n}) \otimes (\underbrace{V \otimes \cdots \otimes V}_{m}) = \underbrace{V \otimes \cdots \otimes V}_{n+m} = T^{n+m}(V)$$

dobivamo da postoji jedinstveno bilinearno preslikavanje $\mu : T(V) \times T(V) \to T(V)$ takvo da vrijedi

(a) $\mu(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n, w_1 \otimes \cdots \otimes w_m) = v_1 \otimes \cdots \otimes v_n \otimes w_1 \otimes \cdots \otimes w_m\ \ \forall v_1, \ldots, v_n, w_1, \ldots, w_m \in V.$

(b) S množenjem $uv = \mu(u, v)$, $u, v \in T(V)$, vektorski prostor $T(V)$ postaje unitalna algebra.

(c) Ako je $\tau : V \to T(V)$ identifikacija prostora V s potprostorom $T^1(V)$ od $T(V)$, $(T(V), \tau)$ je tenzorska algebra prostora V.

Simetrična algebra prostora V je uređen par $(\mathcal{S}, \sigma)$ sa sljedećim svojstvima:

$(SA1)$ $\mathcal{S}$ je komutativna unitalna algebra.

$(SA2)$ $\sigma : V \to \mathcal{S}$ je linearan operator.

$(SA3)$ Za svaku komutativnu unitalnu algebru $\mathcal{A}$ i za svaki linearan operator $\alpha : V \to \mathcal{A}$ postoji jedinstven unitalan homomorfizam $\varphi : \mathcal{S} \to \mathcal{A}$ takav da je $\alpha = \varphi \circ \sigma$.

Teorem 1.4.6. *Neka je V vektorski prostor.*

(a) *Postoji simetrična algebra prostora V.*

(b) *Ako su $(\mathcal{S}, \sigma)$ i $(\mathcal{O}, \omega)$ simetrične algebre od V, jedinstveni unitalni homomorfizam $\varphi : \mathcal{S} \to \mathcal{O}$ sa svojstvom $\omega = \varphi \circ \sigma$ je izomorfizam unitalnih algebri.*

(c) *Ako je $(\mathcal{S}, \sigma)$ simetrična algebra prostora V i ako skup $S \subseteq V$ razapinje prostor V onda $\sigma(S)$ generira unitalnu algebru $\mathcal{S}$.*

(d) *Ako je $(\mathcal{S}, \sigma)$ simetrična algebra prostora V i ako je $(e_i)_{i \in I}$ uređena baza od V, onda je*

$$\{1\} \cup \{\sigma(e_{i_1}) \cdots \sigma(e_{i_n});\ n \in \mathbb{N},\ i_1, \ldots, i_n \in I,\ i_1 \leq \cdots \leq i_n\}$$

baza vektorskog prostora V.

Uobičajena realizacija simetrične algebre vektorskog prostora V, a tako se ujedno dokazuje teorem 1.4.6., je $S(V) = T(V)/\mathcal{I}$, gdje je $\mathcal{I}$ dvostrani ideal u algebri $T(V)$ generiran skupom

$$\{v \otimes w - w \otimes v;\ v, w \in V\}$$

a linearno ulaganje $V \to S(V)$ dobiva se kompozicijom ulaganja $V \to T(V)$ i kvocijentnog epimorfizma $T(V) \to S(V)$.

Neka je $\mathcal{A}$ unitalna algebra. **Graduacija** na algebri $\mathcal{A}$ je niz $(\mathcal{A}^n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$ potprostora od $\mathcal{A}$ takav da vrijedi

$$\mathcal{A} = \sum_{n \in \mathbb{Z}_+} \dot{+} \mathcal{A}^n, \qquad \mathcal{A}^0 = K \cdot 1_{\mathcal{A}}, \qquad \mathcal{A}^n \mathcal{A}^m \subseteq \mathcal{A}^{n+m}.$$

Graduirana algebra je algebra na kojoj je zadana graduacija. Tada se elementi od $\mathcal{A}^n$ zovu **homogeni** elementi stupnja n. Nadalje, za svaki $x \in \mathcal{A}$ postoje jedinstveni $x_n \in \mathcal{A}^n$, $n \in \mathbb{Z}_+$, takvi da je skup $\{n \in \mathbb{Z}_+;\ x_n \neq 0\}$ konačan i da je

$$x = \sum_{n \in \mathbb{Z}_+} x_n.$$

Tada se x_n zove **homogena komponenta** elementa x stupnja n.

Uočimo sada da je $(T^n(V))_{n \in \mathbb{Z}_+}$ graduacija tenzorske algebre $T(V)$ vektorskog prostora V, dakle, $T(V)$ je graduirana algebra.

Neka je $\mathcal{A}$ graduirana algebra s graduacijom $(\mathcal{A}_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$. Za dvostrani **ideal** $\mathcal{I}$ u $\mathcal{A}$ kažemo da je **graduiran** ako je

$$\mathcal{I} = \sum_{n \in \mathbb{Z}_+} \mathcal{I} \cap \mathcal{A}_n.$$

U tom slučaju kvocijentna algebra $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ je graduirana s graduacijom $(\mathcal{A}_n/(\mathcal{I} \cap \mathcal{A}_n))_{n \in \mathbb{Z}_+}$.

Lako se vidi da je dvostrani ideal $\mathcal{I}$ generiran nekim skupom S sastavljenim od homogenih elemenata graduirane algebre $\mathcal{A}$,

$$\mathcal{I} = span\,\{asb;\ a, b \in \mathcal{A},\ s \in S\}$$

graduiran.

Malo prije definiran dvostrani ideal $\mathcal{I}$ u graduiranoj algebri $T(V)$ generiran je skupom homogenih elemenata

$$\{v \otimes w - w \otimes v;\ v, w \in V\} \subseteq T^2(V).$$

Prema tome, kvocijentna algebra $S(V)$ graduirana je s graduacijom $(S^n(V))_{n\in\mathbb{Z}_+}$, gdje je

$$S^n(V) = T^n(V)/(\mathcal{I}\cap T^n(V)).$$

Nadalje, kako je očito

$$\mathcal{I}\cap T^0(V) = \{0\} \quad \text{i} \quad \mathcal{I}\cap T^1(V) = \{0\},$$

vrijedi

$$S^0(V) = T^0(V) \quad \text{i} \quad S^1(V) = T^1(V).$$

Prema tome, vektorski prostor V identificira se s homogenim potprostorom $S^1(V)$ od $S(V)$ stupnja 1.

Neka je $\pi : T(V) \to S(V) = T(V)/\mathcal{I}$ kvocijentni epimorfizam. Uobičajeno je da se operacija množenja u $S(V)$ označava s točkom $\cdot$ a još češće bez ikakvog znaka, tj. $(a,b)\mapsto ab$. Prostor $S^n(V) = \pi(T^n(V))$ razapet je elementima oblika $v_1\cdots v_n$, $v_1,\ldots,v_n\in V$. Štoviše, ako je $(e_i)_{i\in I}$ uređena baza prostora V onda je

$$\{e_{i_1}\cdots e_{i_n};\ i_1,\ldots,i_n\in I,\ i_1\le\cdots\le i_n\}$$

baza prostora $S^n(V)$.

Zadatak 1.4.3. *Dokažite da u slučaju* $\dim V = N\in\mathbb{N}$ *za* $n\in\mathbb{N}$ *vrijedi*

$$\dim S^n(V) = \binom{n+N-1}{N-1} = \binom{n+N-1}{n}.$$

Definiramo $n-$linearan operator $\varphi_n : V^n \to S^n(V)$ sa

$$\varphi_n(v_1,\ldots,v_n) = v_1\cdots v_n, \qquad v_1,\ldots,v_n\in V.$$

Uočimo da je taj operator simetričan, tj. invarijantan s obzirom na bilo koju permutaciju varijabli:

$$\varphi_n(v_{\sigma(1)},\ldots,v_{\sigma(n)}) = \varphi_n(v_1,\ldots,v_n) \qquad \forall v_1,\ldots,v_n\in V, \quad \forall\sigma\in\mathcal{S}_n;$$

pri tome je $\mathcal{S}_n$ oznaka za simetričnu grupu $n-$tog reda, tj. za grupu permutacija skupa $\{1,\ldots,n\}$.

Propozicija 1.4.7. *Za svaki* $n\in\mathbb{N}$, $n\ge 2$, *uređen par* $(S^n(V),\varphi_n)$ *ima sljedeće univerzalno svojstvo: ako je* W *vektorski prostor i ako je* $\psi : V^n\to W$ $n-$*linearan simetričan operator, onda postoji jedinstven linearan operator* $\Psi : S^n(V)\to W$ *takav da je* $\psi = \Psi\circ\varphi_n$, *tj. da vrijedi*

$$\psi(v_1,\ldots,v_n) = \Psi(v_1\cdots v_n) \qquad \forall v_1,\ldots,v_n\in V.$$

Ovo možemo i malo drugačije formulirati:

Zadatak 1.4.4. *Neka su* V *i* W *vektorski prostori i* $n\in\mathbb{N}$, $n\ge 2$. *Za linearan operator* $A : S^n(V)\to W$ *definiramo* $\tilde{A} : V^n\to W$ *relacijom*

$$\tilde{A}(v_1,\ldots,v_n) = A(v_1\cdots v_n), \qquad v_1,\ldots,v_n\in V.$$

Pomoću propozicije 1.4.7. dokažite da je $A\mapsto\tilde{A}$ *izomorfizam vektorskog prostora* $L(S^n(V),W)$ *svih linearnih operatora sa* $S^n(V)$ *u* W *na vektorski prostor* $L_s(V^n,W)$ *svih* $n-$*linearnih simetričnih operatora sa* V^n *u* W. *Posebno, dualni prostor prostora* $S^n(V)$ *izomorfan je prostoru svih simetričnih* $n-$*linearnih formi* $V^n\to K$.

Konstruirat ćemo sada jedan direktni komplement jezgre $Ker\,\pi$ kvocijentnog epimorfizma sa $T(V)$ na $S(V)$, preciznije, za svaki n ćemo identificirati jedan direktni komplement $\tilde{S}^n(V)$ od $Ker\,\pi|T^n(V)$ u prostoru $T^n(V)$. Restrikcija $\pi|\tilde{S}^n(V)$ tada će biti izomorfizam prostora $\tilde{S}^n(V)$ na prostor $S^n(V)$.

Definiramo $n-$linearno preslikavanje sa V^n u $T^n(V)$ na sljedeći način:

$$(v_1, \ldots, v_n) \mapsto \frac{1}{n!} \sum_{\tau \in \mathcal{S}_n} v_{\tau(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\tau(n)}.$$

Prema univerzalnom svojstvu tenzorskog produkta tada postoji jedinstven linearan operator $\sigma_n : T^n(V) \to T^n(V)$ takav da vrijedi

$$\sigma_n(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) = \frac{1}{n!} \sum_{\tau \in \mathcal{S}_n} v_{\tau(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\tau(n)} \qquad \forall v_1, \ldots, v_n \in V.$$

Teorem 1.4.8. *Operator σ_n je projektor, tj. $\sigma_n^2 = \sigma_n$. Njegova jezgra je*

$$Ker\,\sigma_n = \{u \in T^n(V);\ \sigma_n(u) = 0\} = T^n(V) \cap \mathcal{I}.$$

Prema tome, ako sa $\tilde{S}^n(V)$ označimo sliku $\sigma_n(T^n(V))$ tog operatora, onda je

$$T^n(V) = \tilde{S}^n(V) \dotplus T^n(V) \cap \mathcal{I}.$$

Preslikavanje $\sigma_n : T^n(V) \to T^n(V)$ zove se **simetrizacija**, a također i složeno preslikavanje $\sigma : T(V) \to T(V)$, $\sigma|T^n(V) = \sigma_n$. Elementi od $\tilde{S}^n(V)$ zovu se **simetrični $n-$tenzori**. Vrijedi

$$Im\,\sigma = \tilde{S}(V) = \sum_{n \in \mathbb{Z}_+} \dotplus \tilde{S}^n(V).$$

Za vektorski prostor V označimo kao i obično sa V^* njemu dualan prostor svih linearnih funkcionala sa V u K. Tada je V^* potprostor unitalne komutativne algebre K^V svih funkcija sa V u K s operacijama definiranim po točkama. Unitalna podalgebra $\mathcal{P}(V)$ od K^V generirana sa V^* zove se **polinomijalna algebra nad prostorom** V, a njeni elementi **polinomijalne funkcije** na prostoru V. To je graduirana algebra s graduacijom $(\mathcal{P}^n(V))_{n \in \mathbb{Z}_+}$, gdje je $\mathcal{P}^0(V)$ potprostor konstantnih funkcija, $\mathcal{P}^1(V) = V^*$, a za $n \geq 2$ je $\mathcal{P}^n(V)$ potprostor od $\mathcal{P}(V)$ razapet svim produktima $f_1 \cdots f_n$, $f_1, \ldots, f_n \in V^*$.

Zadatak 1.4.5. (*a*) *Dokažite da je potprostor $\mathcal{P}^n(V)$ razapet svim potencijama f^n, $f \in V^*$; pri tome je, naravno, $f^n(v) = f(v)^n$, $v \in V$.*

(*b*) *Dokažite da za svaki $n \geq 2$ postoji jedinstven linearan operator Π_n sa $S^n(V^*)$ u $\mathcal{P}^n(V)$, koji svaki umnožak $f_1 \cdots f_n$, $f_1, \ldots, f_n \in V^*$, u algebri $S(V^*)$ preslikava u umnožak funkcija $f_1 \cdots f_n$ u algebri $\mathcal{P}(V)$. Nadalje, dokažite da je Π_n izomorfizam vektorskog prostora $S^n(V^*)$ na vektorski prostor $\mathcal{P}^n(V)$.*

(*c*) *Dokažite da je preslikavanje $\Pi : S(V^*) \to \mathcal{P}(V)$, definirano pomoću svojih restrikcija $\Pi|S^n(V^*) = \Pi_n$, (s tim da su $\Pi_0 : S^0(V^*) \to \mathcal{P}^0(V)$ i $\Pi_1 : S^1(V^*) \to \mathcal{P}^1(V)$ identitete) izomorfizam unitalnih algebri.*

Izomorfizam Π iz prethodnog zadatka upotrebljavat ćemo kao identifikaciju $\mathcal{P}(V) = S(V^*)$.

Sljedeća dva teorema daju dva načina proširenja djelovanja linearnog operatora sa vektorskog prostora na tenzorsku i na simetričnu algebru tog prostora; napominjemo da kao i obično svaki vektorski prostor V identificiramo s potprostorima $T^1(V)$ i $S^1(V)$ algebri $T(V)$ i $S(V)$.

Teorem 1.4.9. *Neka su V i W vektorski prostori i $A : V \to W$ linearan operator. Tada se A jedinstveno proširuje do unitalnih homomorfizama*

$$T(A) : T(V) \to T(W) \quad \text{i} \quad S(A) : S(V) \to S(W).$$

Ako je operator A surjektivan (injektivan, bijektivan) onda su i homomorfizmi $T(A)$ i $S(A)$ takvi. Ako je U vektorski prostor i $B : W \to U$ linearan operator, onda je

$$T(BA) = T(B) \circ T(A) \quad \text{i} \quad S(BA) = S(B) \circ S(A).$$

Posebno, $A \mapsto T(A)$ i $A \mapsto S(A)$ su homomorfizmi grupe $GL(V)$ u grupe automorfizama unitalnih algebri $Aut(T(V))$ i $Aut(S(V))$.

Teorem 1.4.10. *Neka je V vektorski prostor. Svaki linearan operator $A \in L(V) = \mathfrak{gl}(V)$ jedinstveno se proširuje do derivacija $D(A) \in Der(T(V))$ i $d(A) \in Der(S(V))$. Preslikavanja $D : \mathfrak{gl}(V) \to Der(T(V))$ i $d : \mathfrak{gl}(V) \to Der(S(V))$ su homomorfizmi Liejevih algebri. Nadalje, kvocijentni epimorfizam $\pi : T(V) \to S(V)$ je preplitanje reprezentacija D i d :*

$$d(A) \circ \pi = \pi \circ D(A).$$

Razmotrimo sada tenzorsku algebru $T(\mathfrak{g})$ i simetričnu algebru $S(\mathfrak{g})$ Liejeve algebre $\mathfrak{g}$. Tada imamo adjungiranu reprezentaciju $ad_{\mathfrak{g}}$ koja je homomorfizam Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ u Liejevu algebru $Der(\mathfrak{g})$ derivacija od $\mathfrak{g}$. Kombiniramo li to s teoremom 1.4.10. dobivamo:

Teorem 1.4.11. *Neka je $\mathfrak{g}$ Liejeva algebra. Postoje jedinstveni homomorfizmi*

$$ad_{T(\mathfrak{g})} : \mathfrak{g} \to Der(T(\mathfrak{g})) \quad \text{i} \quad ad_{S(\mathfrak{g})} : \mathfrak{g} \to Der(S(\mathfrak{g}))$$

takvi da je

$$(ad_{T(\mathfrak{g})}\, x)|\mathfrak{g} = ad_{\mathfrak{g}}\, x \quad \text{i} \quad (ad_{S(\mathfrak{g})}\, x)|\mathfrak{g} = ad_{\mathfrak{g}}\, x \quad \forall x \in \mathfrak{g}.$$

Zadatak 1.4.6. *Dokažite da za $x, x_1, \ldots, x_n \in \mathfrak{g}$ vrijedi*

$$(ad_{T(\mathfrak{g})}\, x)(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_1 \otimes \cdots \otimes [x, x_i] \otimes \cdots \otimes x_n$$

i

$$(ad_{S(\mathfrak{g})}\, x)(x_1 \cdots x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_1 \cdots [x, x_i] \cdots x_n.$$

1.4.3 Univerzalna omotačka algebra. PBW teorem

Neke je $\mathfrak{g}$ Liejeva algebra nad poljem $K = \mathbb{R}$ ili $K = \mathbb{C}$. Ako je $\mathcal{A}$ asocijativna algebra, **Liejev morfizam** sa $\mathfrak{g}$ u $\mathcal{A}$ je linearno preslikavanje $\varphi : \mathfrak{g} \to \mathcal{A}$ takvo da je

$$\varphi([x, y]) = \varphi(x)\varphi(y) - \varphi(y)\varphi(x) \qquad \forall x, y \in \mathfrak{g}.$$

Drugim riječima, φ je homomorfizam Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ u Liejevu algebru koja se iz $\mathcal{A}$ dobiva definicijom komutatora $[a, b] = ab - ba$, $a, b \in \mathcal{A}$. **Univerzalna omotačka algebra** Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ je uređen par $(\mathcal{U}, \varphi)$ sa svojstvima:

$(U1)$ $\mathcal{U}$ je unitalna algebra nad poljem K.

$(U2)$ φ je Liejev morfizam sa $\mathfrak{g}$ u $\mathcal{U}$.

$(U3)$ Ako je $\mathcal{A}$ unitalna algebra nad poljem K i ako je ψ Liejev morfizam sa $\mathfrak{g}$ u $\mathcal{A}$, onda postoji jedinstven unitalan homomorfizam $\Psi : \mathcal{U} \to \mathcal{A}$ takav da je $\psi = \Psi \circ \varphi$.

Teorem 1.4.12. *Neka je $\mathfrak{g}$ Liejeva algebra nad poljem K.*

(a) *Postoji univerzalna omotačka algebra $(\mathcal{U}, \varphi)$ od $\mathfrak{g}$.*

(b) *Ako su $(\mathcal{U}, \varphi)$ i $(\mathcal{V}, \psi)$ univerzalne omotačke algebre Liejeve algebre $\mathfrak{g}$, jedinstven unitalni homomorfizam $\Psi : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ sa svojstvom $\psi = \Psi \circ \varphi$ je izomorfizam unitalnih algebri.*

(c) *Ako je $(\mathcal{U}, \varphi)$ univerzalna omotačka algebra od $\mathfrak{g}$ onda potprostor $\varphi(\mathfrak{g})$ generira unitalnu algebru $\mathcal{U}$.*

Uobičajena konstrukcija univerzalne omotačke algebre dobiva se analogno konstrukciji simetrične algebre. Definiramo $U(\mathfrak{g}) = T(\mathfrak{g})/\mathcal{J}$, gdje je $\mathcal{J}$ dvostrani ideal u $T(\mathfrak{g})$ generiran skupom

$$\{x \otimes y - y \otimes x - [x, y];\ x, y \in \mathfrak{g}\}.$$

Ako sa $\iota : \mathfrak{g} \to U(\mathfrak{g})$ označimo restrikciju na $\mathfrak{g} = T^1(\mathfrak{g})$ kvocijentnog epimorfizma $\pi : T(\mathfrak{g}) \to U(\mathfrak{g})$,

$$\iota(x) = x + \mathcal{J}, \qquad x \in \mathfrak{g}$$

onda je $(U(\mathfrak{g}), \iota)$ univerzalna omotačka algebra Liejeve algebre $\mathfrak{g}$.

Ako je π reprezentacija Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ na vektorskom prostoru V, onda je π Liejev morfizam $\mathfrak{g}$ u unitalnu algebru $L(V)$ svih linearnih operatora na prostoru V. Prema univerzalnom svojstvu $(U3)$ postoji jedinstvena reprezentacija $\tilde{\pi}$ unitalne algebre $U(\mathfrak{g})$ na prostoru V takva da je $\pi(x) = \tilde{\pi}(\iota(x))\ \forall x \in \mathfrak{g}$. Nadalje, vrijedi

Teorem 1.4.13. (a) *$\pi \mapsto \tilde{\pi}$ je bijekcija sa skupa svih reprezentacija Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ na prostoru V na skup svih reprezentacija unitalne algebre $U(\mathfrak{g})$ na prostoru V.*

(b) *Potprostor W od V je $\pi-$invarijantan ako i samo ako je on $\tilde{\pi}-$invarijantan.*

(c) *Najmanji $\pi-$invarijantan potprostor od V koji sadrži vektor $v \in V$ je*

$$\tilde{\pi}(U(\mathfrak{g}))v = \{\tilde{\pi}(a)v;\ a \in U(\mathfrak{g})\}.$$

(d) *Reprezentacija π je ireducibilna ako i samo ako je reprezentacija $\tilde{\pi}$ ireducibilna.*

(e) *Reprezentacija π je ireducibilna ako i samo ako za svaki vektor $v \in V \setminus \{0\}$ vrijedi*

$$\tilde{\pi}(U(\mathfrak{g}))v = \{\tilde{\pi}(a)v;\ a \in U(\mathfrak{g})\} = V.$$

(f) *Ako su π i ρ reprezentacije od $\mathfrak{g}$ na prostorima V i W, onda je*

$$Hom_{\mathfrak{g}}(V, W) = Hom_{U(\mathfrak{g})}(V, W).$$

(g) *Reprezentacije π i ρ Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ su ekvivalentne ako i samo ako su $\tilde{\pi}$ i $\tilde{\rho}$ ekvivalentne reprezentacije unitalne algebre $U(\mathfrak{g})$.*

Primijetimo da se skup koji generira ideal $\mathcal{J}$ u graduiranoj algebri $T(\mathfrak{g})$ ne sastoji od homogenih elemenata (osim ako je Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ komutativna). Stoga ne možemo zaključiti da je ideal $\mathcal{J}$ graduiran; ustvari, pokazuje se da je taj ideal graduiran ako i samo ako je Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ komutativna, a tada je $U(\mathfrak{g}) = S(\mathfrak{g})$. Stoga ne možemo prenijeti graduaciju s algebre $T(\mathfrak{g})$ na algebru $U(\mathfrak{g})$. Međutim, moguće je uvesti tzv. *filtraciju*.

Neka je $\mathcal{A}$ unitalna algebra. **Filtracija** na algebri $\mathcal{A}$ je niz $(\mathcal{A}_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ potprostora od $\mathcal{A}$ takvih da je

$$\mathcal{A}_0 = K1_{\mathcal{A}}, \qquad \mathcal{A}_n \subseteq \mathcal{A}_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{Z}_+, \qquad \mathcal{A}_n\mathcal{A}_m \subseteq \mathcal{A}_{n+m} \quad \forall n, m \in \mathbb{Z}_+, \qquad \mathcal{A} = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}_+} \mathcal{A}_n.$$

Filtrirana algebra je unitalna algebra sa zadanom filtracijom. Ukoliko je $\mathcal{A}$ graduirana algebra s graduacijom $(\mathcal{A}^n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ onda možemo definirati filtraciju na $\mathcal{A}$ ovako:

$$\mathcal{A}_n = \sum_{k=0}^{n} \mathcal{A}^k, \qquad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Neka je sada $\mathcal{A}$ filtrirana algebra s filtracijom $(\mathcal{A}_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$. Definiramo vektorske prostore $Gr^n(\mathcal{A})$ ovako:

$$Gr^0(\mathcal{A}) = \mathcal{A}_0, \qquad Gr^n(\mathcal{A}) = \mathcal{A}_n/\mathcal{A}_{n-1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Nadalje, neka je $Gr(\mathcal{A})$ direktna suma vektorskih prostora $Gr^n(\mathcal{A})$:

$$Gr(\mathcal{A}) = \coprod_{n\in\mathbb{Z}_+} Gr^n(\mathcal{A}).$$

Za $n, m \in \mathbb{Z}_+$ definiramo sada bilinearno preslikavanje $\gamma_{n,m} : Gr^n(\mathcal{A}) \times Gr^m(\mathcal{A}) \to Gr^{n+m}(\mathcal{A})$ ovako:

$$\gamma_{n,m}(a + \mathcal{A}_{n-1}, b + \mathcal{A}_{m-1}) = ab + \mathcal{A}_{n+m-1}, \qquad a \in \mathcal{A}_n, \quad b \in \mathcal{A}_m;$$

pri tome podrazumijevamo da je $\mathcal{A}_{-1} = \{0\}$. Definicija je smislena, tj. ne ovisi o izboru predstavnika a i b klasa $a + \mathcal{A}_{n-1}$ i $b + \mathcal{A}_{m-1}$. Doista, ako su $a, a' \in \mathcal{A}_n$ i $b, b' \in \mathcal{A}_m$ takvi da je

$$a + \mathcal{A}_{n-1} = a' + \mathcal{A}_{n-1} \qquad \text{i} \qquad b + \mathcal{A}_{m-1} = b' + \mathcal{A}_{m-1},$$

onda je $a - a' \in \mathcal{A}_{n-1}$ i $b - b' \in \mathcal{A}_{m-1}$, pa imamo

$$a(b - b') \in \mathcal{A}_n\mathcal{A}_{m-1} \subseteq \mathcal{A}_{n+m-1} \quad \text{i} \quad (a - a')b' \in \mathcal{A}_{n-1}\mathcal{A}_m \subseteq \mathcal{A}_{n+m-1},$$

odakle slijedi

$$ab - a'b' = a(b - b') + (a - a')b' \in \mathcal{A}_{n+m-1},$$

dakle,

$$ab + \mathcal{A}_{n+m-1} = a'b' + \mathcal{A}_{n+m-1}.$$

Definiramo sada bilinearno preslikavanje $\gamma : Gr(\mathcal{A}) \times Gr(\mathcal{A}) \to Gr(\mathcal{A})$ ovako:

$$\gamma|Gr^n(\mathcal{A}) \times Gr^m(\mathcal{A}) = \gamma_{n,m} \qquad n, m \in \mathbb{Z}_+.$$

Nije teško dokazati da je $Gr(\mathcal{A})$ s operacijom množenja danom sa $\alpha\beta = \gamma(\alpha, \beta)$, $\alpha, \beta \in Gr(\mathcal{A})$, unitalna algebra i da je $(Gr^n(\mathcal{A}))_{n\in\mathbb{Z}_+}$ graduacija na $Gr(\mathcal{A})$.

Vratimo se sada na univerzalnu omotačku algebru $(U(\mathfrak{g}), \varphi)$ Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ konstruiranu kao prije:

$$U(\mathfrak{g}) = T(\mathfrak{g})/\mathcal{J}, \qquad \varphi(x) = x + \mathcal{J}, \qquad x \in \mathfrak{g},$$

$$\mathcal{J} = span\,\{a \otimes (x \otimes y - y \otimes x - [x, y]) \otimes b;\ a, b \in T(\mathfrak{g}),\ x, y \in \mathfrak{g}\}.$$

Neka je $\pi : T(\mathfrak{g}) \to U(\mathfrak{g})$ kvocijentni epimorfizam. Iz graduacije $(T^n(\mathfrak{g}))_{n\in\mathbb{Z}_+}$ tenzorske algebre $T(\mathfrak{g})$ definiramo filtraciju $(T_n(\mathfrak{g}))_{n\in\mathbb{Z}_+}$ te algebre:

$$T_n(\mathfrak{g}) = \sum_{k=0}^{n} T^n(\mathfrak{g}), \qquad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Tada je sa

$$U_n(\mathfrak{g}) = \pi(T_n(\mathfrak{g})), \qquad n \in \mathbb{Z}_+,$$

definirana filtracija $(U_n(\mathfrak{g}))_{n\in\mathbb{Z}_+}$ na algebri $U(\mathfrak{g})$. Pripadnu graduiranu algebru $Gr(U(\mathfrak{g}))$ označavat ćemo kraće sa $Gr(\mathfrak{g})$. Dakle,

$$Gr(\mathfrak{g}) = \coprod_{n\in\mathbb{Z}_+} Gr^n(\mathfrak{g}), \qquad Gr^0(\mathfrak{g}) = U_0(\mathfrak{g}), \quad Gr^n(\mathfrak{g}) = U_n(\mathfrak{g})/U_{n-1}(\mathfrak{g}), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Množenje na $Gr(\mathfrak{g})$ zadano je svojim restrikcijama na $Gr^n(\mathfrak{g}) \times Gr^m(\mathfrak{g})$

$$(a + U_{n-1}(\mathfrak{g}))(b + U_{m-1}(\mathfrak{g})) = ab + U_{n+m-1}(\mathfrak{g}), \qquad a \in U_n(\mathfrak{g}), \quad b \in U_m(\mathfrak{g})$$

s tim da podrazumijevamo da je $U_{-1}(\mathfrak{g}) = \{0\}$.

U vezi s ovim pojmovima najvažniji je rezultat da je za svaku Liejevu algebru $\mathfrak{g}$ graduirana algebra $Gr(\mathfrak{g})$ prirodno izomorfna simetričnoj algebri $S(\mathfrak{g})$ vektorskog prostora $\mathfrak{g}$. To je jedna od posljedica važnog i netrivijalnog **Poincare−Birkhoff−Witt−ovog teorema**:

Teorem 1.4.14. (**PBW−teorem**) *Neka je $(x_j)_{j\in J}$ uređena baza Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ i neka je $(U(\mathfrak{g}), \iota)$ univerzalna omotačka algebra od $\mathfrak{g}$. Tada je skup monoma*

$$\{1\} \cup \{\iota(x_{j_1}) \cdots \iota(x_{j_n});\ n \in \mathbb{N},\ j_1, \ldots, j_n \in J,\ j_1 \leq \cdots \leq j_n\}$$

baza vektorskog prostora $U(\mathfrak{g})$. Posebno, Liejev morfizam $\iota : \mathfrak{g} \to U(\mathfrak{g})$ je injektivan.

Naravno, ako je skup J konačan, npr. $J = \{1, \ldots, N\}$, tj. ako je Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ konačnodimenzionalna i $\{x_1, \ldots, x_N\}$ je njena uređena baza, onda se pripadna baza iz PBW−teorema može ovako pisati:

$$\{\iota(x_1)^{k_1} \cdots \iota(x_N)^{k_N};\ k_1, \ldots, k_N \in \mathbb{Z}_+\}.$$

Budući da temeljem PBW−teorema znamo da je Liejev morfizam $\iota : \mathfrak{g} \to U(\mathfrak{g})$ injektivan, možemo ga upotrijebiti kao identifikaciju $\mathfrak{g}$ s potprostorom od $U(\mathfrak{g})$. Tada imamo

$$U_0(\mathfrak{g}) = K1_{U(\mathfrak{g})} \qquad \text{i} \qquad U_1(\mathfrak{g}) = K1_{U(\mathfrak{g})} \dot{+} \mathfrak{g}.$$

Nadalje, potprostor $U_n(\mathfrak{g})$ je razapet sa 1 i svim produktima oblika $z_1 \cdots z_k$ gdje su $z_1, \ldots, z_k \in \mathfrak{g}$ i $k \leq n$. Univerzalno svojstvo od $U(\mathfrak{g})$ sada znači da se svaki Liejev morfizam sa $\mathfrak{g}$ u unitalnu algebru $\mathcal{A}$ jedinstveno proširuje do unitalnog homomorfizma sa $U(\mathfrak{g})$ u $\mathcal{A}$. To proširenje obično označavamo istim znakom kao i polazni Liejev morfizam. Posebno, ako je π reprezentacija Liejeve algebre $\mathfrak{g}$, njeno proširenje do reprezentacije unitalne algebre $U(\mathfrak{g})$ također označavamo sa π (umjesto oznake $\tilde{\pi}$ iz teorema 1.4.13.)

Analogno teoremima 1.4.9., 1.4.10. i 1.4.11. dobivamo:

Teorem 1.4.15. *Neka je $\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ homomorfizam Liejevih algebri. Tada se φ jedinstveno proširuje do unitalnog homomorfizma $U(\varphi) : U(\mathfrak{g}) \to U(\mathfrak{h})$. Ako je φ surjektivan (injektivan, bijektivan) onda je i $U(\varphi)$ takav. Ako je $\psi : \mathfrak{h} \to \mathfrak{k}$ također homomorfizam Liejevih algebri, onda je $U(\psi \circ \varphi) = U(\psi) \circ U(\varphi)$. Posebno, $\varphi \mapsto U(\varphi)$ je homomorfizam grupe $Aut(\mathfrak{g})$ u grupu $Aut(U(\mathfrak{g}))$ automorfizama unitalne algebre $U(\mathfrak{g})$.*

Teorem 1.4.16. *Neka je $\mathfrak{g}$ Liejeva algebra. Svaka derivacija $\delta \in Der(\mathfrak{g})$ Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ jedinstveno se proširuje do derivacije $U(\delta) \in Der(U(\mathfrak{g}))$ unitalne algebre $U(\mathfrak{g})$. Preslikavanje $\delta \to U(\delta)$ je homomorfizam Liejeve algebre $Der(\mathfrak{g})$ u Liejevu algebru $Der(U(\mathfrak{g}))$. Nadalje, kvocijentni epimorfizam $\pi : T(\mathfrak{g}) \to U(\mathfrak{g})$ je preplitanje dviju reprezentacija:*

$$U(\delta) \circ \pi = \pi \circ D(\delta) \qquad \forall \delta \in Der(\mathfrak{g}).$$

Adjungirana reprezentaciju $ad_{\mathfrak{g}}$ je homomorfizam Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ u Liejevu algebru $Der(\mathfrak{g})$ derivacija od $\mathfrak{g}$. Kombiniramo li to s teoremom 1.4.16. dobivamo:

Teorem 1.4.17. *Neka je $\mathfrak{g}$ Liejeva algebra. Postoji jedinstveni homomorfizam*

$$ad_{U(\mathfrak{g})} : \mathfrak{g} \to Der(U(\mathfrak{g}))$$

takav da je

$$(ad_{U(\mathfrak{g})}\, x)|\mathfrak{g} = ad_{\mathfrak{g}}\, x \qquad \forall x \in \mathfrak{g}.$$

Zadatak 1.4.7. *(a) Neka je $\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ homomorfizam Liejevih algebri. Dokažite da za bilo koje $x_1, \ldots, x_n \in \mathfrak{g}$ vrijedi*

$$U(\varphi)(x_1 \cdots x_n) = \varphi(x_1) \cdots \varphi(x_n).$$

(b) Neka je $\delta \in Der(\mathfrak{g})$ derivacija Liejeve algebre $\mathfrak{g}$. Dokažite da za $x_1, \ldots, x_n \in \mathfrak{g}$ vrijedi

$$U(\delta)(x_1 \cdots x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_1 \cdots \delta(x_i) \cdots x_n.$$

(c) Dokažite da za Liejevu algebru $\mathfrak{g}$, za $x \in \mathfrak{g}$ i za $u \in U(\mathfrak{g})$ vrijedi

$$(ad_{U(\mathfrak{g})}\, x)u = xu - ux.$$

Iz teorema 1.4.15. slijedi

Korolar 1.4.18. *Neka je $\mathfrak{h}$ Liejeva podalgebra Liejeve algebre $\mathfrak{g}$. Tada se inkluzija $x \mapsto x$ sa $\mathfrak{h}$ u $\mathfrak{g}$ jedinstveno proširuje do izomorfizma unitalne algebre $U(\mathfrak{h})$ na unitalnu podalgebru od $U(\mathfrak{g})$ generiranu sa $\mathfrak{h}$.*

Korolar 1.4.19. *Neka su $\mathfrak{a}$ i $\mathfrak{b}$ Liejeve podalgebre Liejeve algebre $\mathfrak{g}$, takve da je $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \dotplus \mathfrak{b}$. Uz identifikacije $U(\mathfrak{a}) \subseteq U(\mathfrak{g})$ i $U(\mathfrak{b}) \subseteq U(\mathfrak{g})$ iz korolara 1.4.18., postoji jedinstven lineran operator $\Phi : U(\mathfrak{a}) \otimes U(\mathfrak{b}) \to U(\mathfrak{g})$ takav da vrijedi*

$$\Phi(a \otimes b) = ab \qquad \forall a \in U(\mathfrak{a}) \quad \text{i} \quad \forall b \in U(\mathfrak{b}).$$

Φ je izomorfizam vektorskih prostora.

Neka je ponovo $\pi : T(\mathfrak{g}) \to U(\mathfrak{g}) = T(\mathfrak{g})/\mathcal{J}$ kvocijentni epimorfizam. Filtracija algebre $U(\mathfrak{g})$ definirana je kao $\pi-$slika filtracije od $T(\mathfrak{g})$:

$$U_n(\mathfrak{g}) = \pi(T_n(\mathfrak{g})), \qquad T_n(\mathfrak{g}) = \sum_{k=0}^{n} T^k(\mathfrak{g}).$$

Promatrajmo sada kompoziciju

$$T_n(\mathfrak{g}) \to (T_n(\mathfrak{g}) + \mathcal{J})/\mathcal{J} = U_n(\mathfrak{g}) \to Gr^n(\mathfrak{g}) = U_n(\mathfrak{g})/U_{n-1}(\mathfrak{g}).$$

Ta je kompozicija surjektivna, jer su oba preslikavanja surjektivna. Nadalje, potprostor $T_{n-1}(\mathfrak{g})$ sadržan je u jezgri te kompozicije. Budući da je $T_n(\mathfrak{g}) = T_{n-1}(\mathfrak{g}) \dotplus T^n(\mathfrak{g})$, dolazimo do linearnog preslikavanja

$$\tilde{\varphi}_n : T^n(\mathfrak{g}) \to Gr^n(\mathfrak{g}) = U_n(\mathfrak{g})/U_{n-1}(\mathfrak{g}).$$

Definiramo sada linearno preslikavanje $\tilde{\varphi} : T(\mathfrak{g}) \to Gr(\mathfrak{g})$ pomoću njegovih restrikcija:

$$\tilde{\varphi}|T^n(\mathfrak{g}) = \tilde{\varphi}_n, \qquad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Kao posljedicu PBW$-$teorema dobivamo

Teorem 1.4.20. *Definirano preslikavanje $\tilde{\varphi} : T(\mathfrak{g}) \to Gr(\mathfrak{g})$ je unitalni homomorfizam. Jezgra $Ker\,\tilde{\varphi}$ jednaka je dvostranom idealu $\mathcal{I}$ u $T(\mathfrak{g})$ generiranom skupom $\{x \otimes y - y \otimes x;\ x, y \in \mathfrak{g}\}$. Prijelazom na kvocijent $T(\mathfrak{g})/\mathcal{I} = S(\mathfrak{g})$ dobivamo izomorfizam $\varphi : S(\mathfrak{g}) \to Gr(\mathfrak{g})$. Za svaki $n \in \mathbb{Z}_+$ restrikcija $\varphi|S^n(\mathfrak{g})$ je izomorfizam prostora $S^n(\mathfrak{g})$ na prostor $Gr^n(\mathfrak{g})$.*

Korolar 1.4.21. *Neka je za $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, W potprostor od $T^n(\mathfrak{g})$ takav da je*

$$T^n(\mathfrak{g}) = W \dotplus T^n(\mathfrak{g}) \cap \mathcal{I},$$

tj. da je restrikcija kvocijentnog epimorfizma $T(\mathfrak{g}) \to S(\mathfrak{g}) = T(\mathfrak{g})/\mathcal{I}$ na potprostor W izomorfizam sa W na $S^n(\mathfrak{g})$. Neka je $\pi : T(\mathfrak{g}) \to U(\mathfrak{g}) = T(\mathfrak{g})/\mathcal{J}$ kvocijentni epimorfizam. Tada je restrikcija $\pi|W$ injektivna i vrijedi

$$U_n(\mathfrak{g}) = \pi(W) \dotplus U_{n-1}(\mathfrak{g}).$$

Primijenimo sada korolar 1.4.21. na potprostor $\tilde{S}^n(\mathfrak{g})$ simetričnih $n-$tenzora. To je potprostor od $T^n(\mathfrak{g})$ razapet elementima oblika

$$\sigma_n(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) = \frac{1}{n!} \sum_{\tau \in \mathcal{S}_n} x_{\tau(1)} \otimes \cdots \otimes x_{\tau(n)}, \qquad x_1, \ldots, x_n \in \mathfrak{g}.$$

Prema teoremu 1.4.8. je

$$T^n(\mathfrak{g}) = \tilde{S}^n(\mathfrak{g}) \dotplus T^n(\mathfrak{g}) \cap \mathcal{I},$$

pa je korolar 1.4.21. primjenjiv. Na taj način prijelazom na kvocijent $T(\mathfrak{g}) \to S(\mathfrak{g}) = T(\mathfrak{g})/\mathcal{I}$ dolazimo do izomorfizma prostora $S^n(\mathfrak{g})$ na direktni komplement potprostora $U_{n-1}(\mathfrak{g})$ u prostoru $U_n(\mathfrak{g})$. I to ćemo preslikavanje označiti sa σ_n; dakle,

$$U_n(\mathfrak{g}) = \sigma_n(S^n(\mathfrak{g})) \dotplus U_{n-1}(\mathfrak{g}),$$

gdje je

$$\sigma_n(x_1 \cdots x_n) = \frac{1}{n!} \sum_{\tau \in \mathcal{S}_n} x_{\tau(1)} \cdots x_{\tau(n)}, \qquad x_1, \ldots, x_n \in \mathfrak{g}.$$

Primijetimo da ovdje s lijeve strane $x_1 \cdots x_n$ predstavlja umnožak u algebri $S(\mathfrak{g})$ a s desne strane $x_{\tau(1)} \cdots x_{\tau(n)}$ predstavlja umnožak u algebri $U(\mathfrak{g})$. Ta preslikavanja σ_n po linearnosti proširimo do linearnog operatora $\sigma : S(\mathfrak{g}) \to U(\mathfrak{g})$, tj. $\sigma|S^n(\mathfrak{g}) = \sigma_n$, $n \in \mathbb{Z}_+$. I taj se operator zove **simetrizacija**.

Prema tome, kao posljedicu PBW−teorema imamo i prvu tvrdnju sljedećeg teorema. Druga se tvrdnja direktno provjerava.

Teorem 1.4.22. (*a*) *Simetrizacija $\sigma : S(\mathfrak{g}) \to U(\mathfrak{g})$ je izomorfizam vektorskih prostora i za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi*

$$U_n(\mathfrak{g}) = \sigma(S^n(\mathfrak{g})) \dot{+} U_{n-1}(\mathfrak{g}).$$

(*b*) *Izomorfizam $\varphi : S(\mathfrak{g}) \to Gr(\mathfrak{g})$ iz teorema 1.4.20. dobiva se iz simetrizacije $\sigma : S(\mathfrak{g}) \to U(\mathfrak{g})$ prijelazom na uzastopne kvocijente:*

$$\varphi(a) = \sigma(a) + U_{n-1}(\mathfrak{g}), \qquad a \in S^n(\mathfrak{g}).$$

Nadalje, imamo sljedeće korisne posljedice:

Propozicija 1.4.23. *Neka su $\mathfrak{a}$ i $\mathfrak{b}$ potprostori Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ takvi da je $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \dot{+} \mathfrak{b}$. Postoji jedinstven linearan operator $\Psi : S(\mathfrak{a}) \otimes S(\mathfrak{b}) \to U(\mathfrak{g})$ takav da je*

$$\Psi(a \otimes b) = \sigma(a)\sigma(b) \qquad \forall a \in S(\mathfrak{a}) \quad \text{i} \quad \forall b \in S(\mathfrak{b}).$$

Ψ je izomorfizam vektorskih prostora.

Propozicija 1.4.24. *Neka je $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \dot{+} \mathfrak{p}$, gdje je $\mathfrak{k}$ Liejeva podalgebra i $\mathfrak{p}$ potprostor Liejeve algebre $\mathfrak{g}$. Tada postoji jedinstven linearan operator $\Psi : U(\mathfrak{k}) \otimes S(\mathfrak{p}) \to U(\mathfrak{g})$ takav da je*

$$\Psi(a \otimes b) = a\sigma(b) \qquad \forall a \in U(\mathfrak{k}) \quad \text{i} \quad \forall b \in S(\mathfrak{b}).$$

Ψ je izomorfizam vektorskih prostora.

1.4.4 Centar univerzalne omotačke algebre

U daljnjem je $\mathfrak{g}$ kompleksna je poluprosta Liejeva algebra, $\mathfrak{h}$ njena Cartanova podalgebra, $R = R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ pripadni sisten korijena, $W = W(R)$ Weylova grupa sistema korijena R, B baza sistema korijena R. Elemente skupa $Q = span_{\mathbb{Z}} R$ zovemo **korijenske težine** sistema korijena R, $Q_+ = span_{\mathbb{Z}_+} B$ su **pozitivne** korijenske težine u odnosu na B. Tada su $R_+ = R \cap Q_+$ pozitivni korijeni u odnosu na bazu B.

Stavimo

$$\mathfrak{n} = \sum_{\alpha \in R_+} \dot{+} \mathfrak{g}_\alpha, \qquad \overline{\mathfrak{n}} = \sum_{\alpha \in R_+} \dot{+} \mathfrak{g}_{-\alpha}.$$

To su nilpotentne Liejeve podalgebre od $\mathfrak{g}$ i vrijedi

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{n} \dot{+} \mathfrak{h} \dot{+} \overline{\mathfrak{n}}.$$

Za korijen $\alpha \in R$ sa $h_\alpha \in \mathfrak{h}$ označavamo njemu dualni korijen: to je jedinstven element iz $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}]$ sa svojstvom $\alpha(h_\alpha) = 2$. Sa P i P_+ označavamo **integralne težine** i **dominantne integralne težine** sistema korijena R u prostoru $\mathfrak{h}^*$:

$$P = \{\lambda \in \mathfrak{h}^*;\ \lambda(h_\alpha) \in \mathbb{Z}\ \forall \alpha \in R\} = \{\lambda \in \mathfrak{h}^*;\ \lambda(h_\alpha) \in \mathbb{Z}\ \forall \alpha \in B\},$$

$$P_+ = \{\lambda \in \mathfrak{h}^*;\ \lambda(h_\alpha) \in \mathbb{Z}_+\ \forall \alpha \in R_+\} = \{\lambda \in \mathfrak{h}^*;\ \lambda(h_\alpha) \in \mathbb{Z}_+\ \forall \alpha \in B\}.$$

Elementi λ_α dualne baze u $\mathfrak{h}^*$ u odnosu na bazu $\{h_\alpha;\ \alpha \in B\}$ zovu se **fundamentalne težine** sistema korijena R u odnosu na bazu B. Dakle, funkcionali $\lambda_\alpha \in \mathfrak{h}^*$, $\alpha \in B$, definirani su sa

$$\lambda_\alpha(h_\beta) = \delta_{\alpha\beta}, \qquad \alpha, \beta \in B.$$

Fundamentalne težine su dominantne integralne težine i vrijedi

$$P = span_{\mathbb{Z}}\{\lambda_\alpha;\ \alpha \in B\} = \left\{\sum_{\alpha\in B} c_\alpha\lambda_\alpha;\ c_\alpha \in \mathbb{Z} \text{ za } \alpha \in B\right\},$$

$$P_+ = span_{\mathbb{Z}_+}\{\lambda_\alpha;\ \alpha \in B\} = \left\{\sum_{\alpha\in B} c_\alpha\lambda_\alpha;\ c_\alpha \in \mathbb{Z}_+ \text{ za } \alpha \in B\right\}.$$

Sa $\rho = \rho_B$ ćemo označavati polusumu pozitivnih korijena u odnosu na bazu B :

$$\rho = \rho_B = \frac{1}{2}\sum_{\alpha\in R_+} \alpha.$$

Pokazuje se da je ρ suma fundamentalnih težina:

$$\rho = \sum_{\alpha\in B} \lambda_\alpha.$$

Posebno, ρ je dominantna integralna težina.

Neka je $|R_+| = s$ i numerirajmo elemente od R_+ indeksima od 1 do s : $R_+ = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_s\}$. Za svaki $j \in \{1, \ldots, s\}$ izaberimo elemente $x_j \in \mathfrak{g}_{\alpha_j} \setminus \{0\}$ i $y_j \in \mathfrak{g}_{-\alpha_j}$. Napomenimo da do daljnjeg nije bitno da je izbor x_j i y_j usklađen tako da bude $[x_j, y_j] = h_{\alpha_j}$. Neka je $\{h_1, \ldots, h_\ell\}$ baza od $\mathfrak{h}$. Sada je

$$\{y_1, \ldots, y_s, h_1, \ldots, h_\ell, x_1, \ldots, x_s\}$$

baza od $\mathfrak{g}$. Za $q = (q_1, \ldots, q_s) \in \mathbb{Z}_+^s$, $m = (m_1, \ldots, m_\ell) \in \mathbb{Z}_+^\ell$ i $p = (p_1, \ldots, p_s) \in \mathbb{Z}_+^s$ definiramo elemente $u(q, m, p) \in U(\mathfrak{g})$ kao monome u elementima te baze od $\mathfrak{g}$:

$$u(q, m, p) = y_1^{q_1} \cdots y_s^{q_s} h_1^{m_1} \cdots h_\ell^{m_\ell} x_1^{p_1} \cdots x_s^{p_s}.$$

Po PBW−teoremu skup svih tih monoma $\{u(q, m, p);\ q, p \in \mathbb{Z}_+^s,\ m \in \mathbb{Z}_+^\ell\}$ je baza od $U(\mathfrak{g})$. Promatramo sada reprezentaciju $ad_{U(\mathfrak{g})}$ Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ na prostoru $U(\mathfrak{g})$ iz teorema 1.4.17. Ta je reprezentacija dobivena jedinstvenim proširenjem operatora adjungirane reprezentacije $ad_{\mathfrak{g}}\, x$, $x \in \mathfrak{g}$, do derivacija algebre $U(\mathfrak{g})$. Prema zadatku 1.4.7. imamo

$$(ad_{U(\mathfrak{g})}\, x)(x_1 \cdots x_n) = xx_1 \cdots x_n - x_q \cdots x_n x = \sum_{i=1}^n x_1 \cdots [x, x_i] \cdots x_n, \qquad x, x_1, \ldots, x_n \in \mathfrak{g}.$$

Budući da za $h \in \mathfrak{h}$ vrijedi

$$[h, y_j] = -\alpha_j(h)y_j, \qquad [h, h_i] = 0, \qquad [h, x_j] = \alpha_j(h)x_j, \qquad j = 1, \ldots, s, \qquad i = 1, \ldots, \ell,$$

nalazimo da su $u(q, m, p)$ svojstveni vektori svih operatora $ad_{U(\mathfrak{g})}\, h$, $h \in \mathfrak{h}$:

$$(ad_{U(\mathfrak{g})}\, h)u(q, m, p) = ((p_1 - q_1)\alpha_1 + \cdots + (p_s - q_s)\alpha_s)(h)u(q, m, p).$$

Prema tome,

$$U(\mathfrak{g}) = \sum_{\lambda \in Q} \dot{+} U(\mathfrak{g})_\lambda, \qquad U(\mathfrak{g})_\lambda = \{u \in U(\mathfrak{g});\ (ad_{U(\mathfrak{g})}\, h)u = \lambda(h)u\ \forall h \in \mathfrak{h}\}.$$

Za svaki $\lambda \in Q$ težinski potprostor $U(\mathfrak{g})_\lambda$ je beskonačnodimenzionalan i baza mu je

$$\{u(q,m,p);\ q,p \in \mathbb{Z}_+^s,\ m \in \mathbb{Z}_+^\ell,\ (p_1 - q_1)\alpha_1 + \cdots + (p_s - q_s)\alpha_s = \lambda\}.$$

Budući da je za svaki $h \in \mathfrak{h}$ operator $ad_{U(\mathfrak{g})}\, h$ derivacija algebre $U(\mathfrak{g})$, nalazimo da vrijedi nešto analogno graduaciji algebre $U(\mathfrak{g})$, ali sada u odnosu na aditivnu grupu Q a ne u odnosu na monoid $\mathbb{Z}_+$ ili u odnosu na grupu $\mathbb{Z}$:

$$U(\mathfrak{g})_\lambda U(\mathfrak{g})_\mu \subseteq U(\mathfrak{g})_{\lambda+\mu}, \qquad \lambda, \mu \in Q.$$

Posebno, potprostor $U(\mathfrak{g})_0$, koji je komutant od $\mathfrak{h}$ u $U(\mathfrak{g})$, je unitalna podalgebra od $U(\mathfrak{g})$.

Pokazuje se da vrijedi

Propozicija 1.4.25. *Neka je* $\mathcal{L} = U(\mathfrak{g})\mathfrak{n} \cap U(\mathfrak{g})_0$.

(*a*) *Vrijedi* $\mathcal{L} = \overline{\mathfrak{n}}U(\mathfrak{g}) \cap U(\mathfrak{g})_0$ *i to je dvostrani ideal u algebri* $U(\mathfrak{g})_0$.

(*b*) *Vrijedi* $U(\mathfrak{g})_0 = U(\mathfrak{h}) \dot{+} \mathcal{L}$.

Prema propoziciji 1.4.25. projektor φ algebre $U(\mathfrak{g})_0$ na podalgebru $U(\mathfrak{h})$ duž ideala $\mathcal{L}$ je unitalni epimorfizam algebri. Taj se epimorfizam zove **Harish−Chandrin homomorfizam** u odnosu na bazu B sistema korijena $R = R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$. Homomorfizam φ nije neovisan o izboru baze B od R.

Kako je Cartanova podalgebra $\mathfrak{h}$ komutativna Liejeva algebra, njena univerzalna omotačka algebra $U(\mathfrak{h})$ identificira se sa simetričnom algebrom $S(\mathfrak{h})$ prostora $\mathfrak{h}$ a to je prema zadatku 1.4.4. ujedno polinomijalna algebra $\mathcal{P}(\mathfrak{h}^*)$ nad dualnim prostorom $\mathfrak{h}^*$.

Neka je $Z(\mathfrak{g})$ **centar** univerzalne omotačke algebre $U(\mathfrak{g})$:

$$Z(\mathfrak{g}) = \{u \in U(\mathfrak{g});\ uv = vu\ \forall v \in U(\mathfrak{g})\} = \{u \in U(\mathfrak{g});\ (ad_{U(\mathfrak{g})}\, x)u = 0\ \forall x \in \mathfrak{g}\}.$$

Očito je $Z(\mathfrak{g}) \subseteq U(\mathfrak{g})_0$, pa se na svaki element $z \in Z(\mathfrak{g})$ može primijeniti Harish−Chandrin homomorfizam φ. Tada je $\varphi(z)$ element od $U(\mathfrak{h})$, dakle, to je polinomijalna funkcija na dualnom prostoru $\mathfrak{h}^*$. Evaluacija ta funkcije u bilo kojoj točki $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ definira unitalni homomorfizam $\chi_\lambda : Z(\mathfrak{g}) \to \mathbb{C}$:

$$\chi_\lambda(z) = (\varphi(z))(\lambda) \qquad \forall z \in Z(\mathfrak{g}) \quad \text{i} \quad \forall \lambda \in \mathfrak{h}^*.$$

Unitalni homomorfizmi $Z(\mathfrak{g}) \to \mathbb{C}$ zovu se **infinitezimalni karakteri**.

Ovisnost Harish−Chandrinog homomorfizma φ o izboru baze B sistema korijena R popravlja se pomoću vrlo jednostavnog automorfizma algebre $U(\mathfrak{h}) = S(\mathfrak{h}) = \mathcal{P}(\mathfrak{h}^*)$. Radi se o automorfizmu $\gamma = \gamma_B$ od $\mathcal{P}(\mathfrak{h}^*)$ koji polinomijalnu funkciju u na $\mathfrak{h}^*$ transformira u funkciju $\lambda \mapsto u(\lambda - \rho)$. Dakle,

$$(\gamma(u))(\lambda) = u(\lambda - \rho), \qquad \lambda \in \mathfrak{h}^*, \quad u \in U(\mathfrak{h}) = S(\mathfrak{h}) = \mathcal{P}(\mathfrak{h}^*). \tag{1.4}$$

Teorem 1.4.26. *Neka je* γ *automorfizam algebre* $U(\mathfrak{h}) = S(\mathfrak{h})$ *polinomijalnih funkcija na* $\mathfrak{h}^*$ *definiran sa* (1.4) *i neka je* $\varphi : U(\mathfrak{g})_0 \to U(\mathfrak{h})$ *Harish−Chandrin homomorfizam u odnosu na bazu* B. *Tada je restrikcija* $(\gamma \circ \varphi)|Z(\mathfrak{g})$ *neovisna o izboru baze* B *od* R *i to je izomorfizam centra* $Z(\mathfrak{g})$ *od* $U(\mathfrak{g})$ *na algebru* $S(\mathfrak{h})^W = \mathcal{P}(\mathfrak{h}^*)^W$ *polinomijalnih funkcija na* $\mathfrak{h}^*$ *invarijantnih u odnosu na Weylovu grupu* $W = W(R)$.

Izomorfizam $(\gamma \circ \varphi)|Z(\mathfrak{g})$ zove se **Harish–Chandrin izomorfizam** sa $Z(\mathfrak{g})$ na $S(\mathfrak{h})^W$. Označimo ga sa ω. Za infinitezimalni karakter χ_λ i za svaki $z \in Z(\mathfrak{g})$ vrijedi

$$\chi_\lambda(z) = (\varphi(z))(\lambda) = ((\gamma \circ \varphi)(z))(\lambda + \rho) = (\omega(z))(\lambda + \rho).$$

Teorem 1.4.27. $\lambda \mapsto \chi_\lambda$ *je surjekcija sa* $\mathfrak{h}^*$ *na skup svih infinitezimalnih karaktera. Nadalje, za* $\lambda, \lambda' \in \mathfrak{h}^*$ *vrijedi* $\chi_\lambda = \chi_{\lambda'}$ *ako i samo ako postoji* $\sigma \in W$ *takav da je* $\lambda' + \rho = \sigma(\lambda + \rho)$.

Struktura algebre $S(\mathfrak{g})^W$ može se vrlo precizno opisati zahvaljujući činjenici da je W konačna grupa generirana refleksijama:

Teorem 1.4.28. *Neka je R sistem korijena u realnom ili kompleksnom prostoru V, $W = W(R)$ Weylova grupa od R i $\ell = \dim V$ rang od R. Postoje homogeni elementi $f_1, \ldots, f_\ell \in S(V)^W$ koji su algebarski nezavisni i generiraju algebru $S(V)^W$. Posebno, unitalna algebra $S(V)^W$ izomorfna je algebri polinoma u ℓ varijabli. Stupnjevi $\nu_j = \deg f_j$, $j = 1, \ldots, \ell$, neovisni su (do na poredak) o izboru takvih elemenata $f_1, \ldots, f_\ell$ i vrijedi*

$$\nu_1 + \cdots + \nu_\ell = \ell + \frac{|R|}{2} \qquad \text{i} \qquad \nu_1 \cdots \nu_\ell = |W|.$$

Uz oznake iz teorema 1.4.28. brojevi $\nu_j - 1$, $1 \leq j \leq \ell$ se zovu **eksponenti** sistema korijena R ili grupe W. Za ireducibilne reducirane sisteme korijena eksponenti su:

A_ℓ :	$1, 2, \ldots, \ell;$	E_6 :	$1, 4, 5, 7, 8, 11;$
B_ℓ :	$1, 3, \ldots, 2\ell - 1;$	E_7 :	$1, 5, 7, 9, 11, 13, 17;$
C_ℓ :	$1, 3, \ldots, 2\ell - 1;$	E_8 :	$1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29;$
D_ℓ :	$1, 3, \ldots, 2\ell - 3, \ell - 1;$	F_4 :	$1, 5, 7, 11;$
		G_2 :	$1, 5.$

1.5 Nilradikal i najveći nilpotentni ideal

Lema 1.5.1. *Neka je* $\mathfrak{g}$ *Liejeva algebra,* $\mathfrak{h}$ *ideal u* $\mathfrak{g}$ *i* π *ireducibilna reprezentacija od* $\mathfrak{g}$*. Ako je operator* $\pi(y)$ *nilpotentan za svaki* $y \in \mathfrak{h}$*, onda je* $\mathfrak{h} \subseteq Ker\,\pi$*, tj.* $\pi(y) = 0$ *za svaki* $y \in \mathfrak{h}$*.*

Dokaz: Neka je $W = \{v \in V;\ \pi(y)v = 0\ \ \forall y \in \mathfrak{h}\}$. Prema teoremu 1.1.6. vrijedi $W \neq \{0\}$. Nadalje, potprostor W je $\pi-$invarijantan. Doista, neka je $v \in W$ i $x \in \mathfrak{g}$. Za $y \in \mathfrak{h}$ je i $[y, x] \in \mathfrak{h}$ pa je $\pi(y)v = \pi([y, x])v = 0$. Slijedi

$$\pi(y)\pi(x)v = \pi([y, x])v + \pi(x)\pi(y)v = 0.$$

Kako je $y \in \mathfrak{h}$ proizvoljan, zaključujemo da je $\pi(x)v \in W$. Budući da je reprezentacija π ireducibilna, slijedi $W = V$, odnosno, $\pi(y) = 0\ \ \forall y \in \mathfrak{h}$.

Lema 1.5.2. *Neka je* $\mathfrak{g}$ *Liejeva algebra,* $\mathfrak{h}$ *ideal u* $\mathfrak{g}$*,* π *reprezentacija od* $\mathfrak{g}$ *na konačnodimenzionalnom vektorskom prostoru* V *i neka je* $(V_0, V_1, \ldots, V_n)$ *kompozicioni niz od* V *u odnosu na reprezentaciju* π*; tj.*

$$\{0\} = V_0 \subseteq V_1 \subseteq \cdots \subseteq V_n = V$$

su $\pi-$*invarijantni potprostori i subkvocijentne reprezentacije* $\pi_{V_i/V_{i-1}}$ *na* V_i/V_{i-1} *su ireducibilne za* $i = 1, \ldots, n$*. Tada su sljedeća dva svojstva međusobno ekvivalentna:*

(*a*) *Za svaki* $y \in \mathfrak{h}$ *operator* $\pi(y)$ *je nilpotentan.*

(*b*) *Za svaki* $y \in \mathfrak{h}$ *i za svaki* $i \in \{1, \ldots, n\}$ *vrijedi* $\pi(y)V_i \subseteq V_{i-1}$*.*

U tom slučaju ideal $\mathfrak{h}$ *sadržan je u radikalu simetrične forme* B_π *pridružene reprezentaciji* π*,* $B_\pi(x, y) = Tr\,\pi(x)\pi(y)$*,* $x, y \in \mathfrak{g}$*, tj.* $B_\pi(x, y) = 0\ \ \forall x \in \mathfrak{g}$ *i* $\forall y \in \mathfrak{h}$*.*

Dokaz: $(b) \Rightarrow (a)$. Ako vrijedi (b) onda je očito $\pi(y)^n = 0\ \ \forall y \in \mathfrak{h}$.

$(a) \Rightarrow (b)$. Ako je operator $\pi(y)$ nilpotentan za svaki $y \in \mathfrak{h}$, onda je za svaki $i \in \{1, \ldots, n\}$, operator $\pi_{V_i/V_{i-1}}(y)$ nilpotentan za svaki $y \in \mathfrak{h}$. Tada prema lemi 1.5.1. nalazimo da vrijedi $\pi_{V_i/V_{i-1}}(y) = 0\ \ \forall y \in \mathfrak{h}$, dakle, $\pi(y)V_i \subseteq V_{i-1}\ \ \forall y \in \mathfrak{h}$ za $i = 1, \ldots, n$.

Napokon, pretpostavimo da su ispunjena svojstva (a) i (b). Za $x \in \mathfrak{g}$ i $y \in \mathfrak{h}$ je $\pi(y)V_i \subseteq V_{i-1}$, dakle, $\pi(x)\pi(y)V_i \subseteq \pi(x)V_{i-1} \subseteq V_{i-1}$. To pokazuje da je operator $\pi(x)\pi(y)$ nilpotentan za svaki $x \in \mathfrak{g}$ i svaki $y \in \mathfrak{h}$. Posebno, $B_\pi(x, y) = Tr\,\pi(x)\pi(y) = 0$.

Propozicija 1.5.3. *Neka je* $\mathfrak{g}$ *Liejeva algebra,* π *reprezentacija od* $\mathfrak{g}$ *na konačnodimenzionalnom vektorskom prostoru* V *i* $(V_0, V_1, \ldots, V_n)$ *kompozicioni niz od* V *u odnosu na reprezentaciju* π*.*

(*a*) *U skupu svih ideala* $\mathfrak{h}$ *u* $\mathfrak{g}$ *takvih da je operator* $\pi(y)$ *nilpotentan za svaki* $y \in \mathfrak{h}$ *postoji najveći element* $\mathfrak{n}_\pi$*.*

(*b*) $\mathfrak{n}_\pi = \{y \in \mathfrak{g};\ \pi(y)V_i \subseteq V_{i-1}\ \ \forall i \in \{1, \ldots, n\}\}$*.*

(*c*) *Vrijedi* $B_\pi(x, y) = Tr\,\pi(x)\pi(y) = 0\ \ \forall x \in \mathfrak{g}$ *i* $\forall y \in \mathfrak{n}_\pi$*.*

Dokaz: Stavimo

$$\mathfrak{n}_\pi = \{y \in \mathfrak{g};\ \pi(y)V_i \subseteq V_{i-1} \text{ za } i = 1, \ldots, n\}.$$

Očito je $\mathfrak{n}_\pi$ potprostor od $\mathfrak{g}$. Nadalje, za $x \in \mathfrak{g}$ je $\pi(x)V_i \subseteq V_i$ za svaki $i \in \{1, \ldots, n\}$. Dakle, za $x \in \mathfrak{g}$ i $y \in \mathfrak{n}_\pi$ je

$$\pi(x)\pi(y)V_i \subseteq \pi(x)V_{i-1} \subseteq V_{i-1} \quad \text{i} \quad \pi(y)\pi(x)V_i \subseteq \pi(y)V_i \subseteq V_{i-1}.$$

Slijedi

$$\pi([x,y])V_i \subseteq \pi(x)\pi(y)V_i + \pi(y)\pi(x)V_i \subseteq V_{i-1},$$

a kako to vrijedi za svaki $i \in \{1,\dots,n\}$ zaključujemo da je $[x,y] \in \mathfrak{n}_\pi$. To pokazuje da je $\mathfrak{n}_\pi$ ideal u Liejevoj algebri $\mathfrak{g}$. Sada iz leme 1.5.2. slijedi da je operator $\pi(y)$ nilpotentan za svaki $y \in \mathfrak{n}_\pi$. Također, iz iste leme slijedi da $\mathfrak{n}_\pi$ sadrži svaki ideal $\mathfrak{h}$ u $\mathfrak{g}$ sa svojstvom da je operator $\pi(y)$ nilpotentan za svaki $y \in \mathfrak{h}$ i da je $B_\pi(x,y) = 0\ \ \forall x \in \mathfrak{g}$ i $\forall y \in \mathfrak{n}_\pi$.

Ideal $\mathfrak{n}_\pi$ iz propozicije 1.5.3. zove se **najveći ideal nilpotencije** reprezentacije π. Uočimo da jednakost (b) vrijedi za svaki kompozicioni niz reprezentacije π. Ideal $\mathfrak{n}_\pi$ sadrži jezgru $Ker\,\pi$ reprezentacije π, i jednak joj je ako je reprezentacija π potpuno reducibilna, ali ne i općenito. Nadalje, važno je uočiti da se $\mathfrak{n}_\pi$ sastoji od elemenata $y \in \mathfrak{g}$ sa svojstvom da je operator $\pi(y)$ nilpotentan, ali ne moraju svi takvi elementi biti sadržani u $\mathfrak{n}_\pi$. $\mathfrak{n}_\pi$ je samo najveći ideal u skupu

$$\mathcal{N}_\pi = \{y \in \mathfrak{g};\ \text{operator } \pi(y) \text{ je nilpotentan}\}.$$

Lema 1.5.4. *Neka je $\mathfrak{g}$ Liejeva algebra i $\mathfrak{h}$ ideal u $\mathfrak{g}$. Tada je Liejeva algebra $\mathfrak{h}$ nilpotentna ako i samo ako je operator $ad_\mathfrak{g}\, y$ nilpotentan za svaki $y \in \mathfrak{h}$.*

Dokaz: Pretpostavimo da je Liejeva algebra $\mathfrak{h}$ nilpotentna. Za $y \in \mathfrak{h}$ tada je operator $ad_\mathfrak{h}\, y$ nilpotentan; budući da je $(ad_\mathfrak{g}\, y)\mathfrak{g} \subseteq \mathfrak{h}$, slijedi da je i operator $ad_\mathfrak{g}\, y$ nilpotentan za svaki $y \in \mathfrak{h}$.

Obratno, pretpostavimo da je operator $ad_\mathfrak{g}\, y$ nilpotentan za svaki $y \in \mathfrak{h}$. Tada je i njegova restrikcija $ad_\mathfrak{h}\, y$ nilpotentan operator za svaki $y \in \mathfrak{h}$. Sada iz Engelovog teorema 1.1.5, slijedi da je Liejeva algebra $\mathfrak{h}$ nilpotentna.

Zbog leme 1.5.4. primjena propozicije 1.5.3. na adjungiranu reprezentaciju $ad_\mathfrak{g}$ Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ ima za posljedicu:

Propozicija 1.5.5. *Neka je $\mathfrak{g}$ Liejeva algebra i neka je $(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_1, \dots, \mathfrak{g}_n)$ bilo koji kompozicioni niz prostora $\mathfrak{g}$ u odnosu na adjungiranu reprezentaciju $ad_\mathfrak{g}$.*

- (a) *U skupu svih nilpotentnih ideala u Liejevoj algebri $\mathfrak{g}$ postoji najveći element $\mathfrak{n}$.*
- (b) $\mathfrak{n} = \{y \in \mathfrak{g};\ [y, \mathfrak{g}_i] \subseteq \mathfrak{g}_{i-1} \text{ za } i = 1,\dots,n\}$.
- (c) *Za Killingovu formu $B_\mathfrak{g}$ od $\mathfrak{g}$ vrijedi $B_\mathfrak{g}(x,y) = 0\ \ \forall x \in \mathfrak{g}$ i $\forall y \in \mathfrak{n}$.*

Ideal $\mathfrak{n}$ iz propozicije 1.5.5. zove se **najveći nilpotentni ideal** u Liejevoj algebri $\mathfrak{g}$. Uočite da u kvocijentnoj Liejevoj algebri $\mathfrak{g}/\mathfrak{n}$ mogu postojati nilpotentni ideali različiti od $\{0\}$.

Nilradikal Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ je presjek $\mathfrak{s}$ jezgara svih ireducibilnih konačnodimenzionalnih reprezentacija od $\mathfrak{g}$. Naravno, tada postoji konačno mnogo ireducibilnih reprezentacija $\pi_1, \dots, \pi_n$ takvih da je $\mathfrak{s} = Ker\,\pi_1 \cap \cdots \cap Ker\,\pi_n$. Ako je π direktna suma reprezentacija $\pi_1, \dots, \pi_n$, slijedi da je $\mathfrak{s} = Ker\,\pi$. To znači da skup jezgara svih konačnodimenzionalnih potpuno reducibilnih reprezentacija od $\mathfrak{g}$ ima najmanji element i to je upravo nilradikal $\mathfrak{s}$. Prema propoziciji 1.5.3. slijedi:

Propozicija 1.5.6. *Neka je $\mathfrak{g}$ Liejeva algebra i $\mathfrak{s}$ njen nilradikal.*

- (a) *Ideal $\mathfrak{s}$ sadržan je u najvećem idealu nilpotencije svake konačnodimenzionalne reprezentacije od $\mathfrak{g}$.*
- (b) *Ideal $\mathfrak{s}$ sadržan je u najvećem nilpotentnom idealu $\mathfrak{n}$ od $\mathfrak{g}$.*
- (c) *Ideal $\mathfrak{s}$ je nilpotentan.*

Lema 1.5.7. *Neka je V konačnodimenzionalan vektorski prostor, $\mathfrak{g}$ Liejeva podalgebra od $\mathfrak{gl}(V)$ i $\mathfrak{a}$ komutativni ideal u $\mathfrak{g}$. Pretpostavimo da je identična reprezentacija od $\mathfrak{g}$ na V ireducibilna. Tada je $\mathfrak{a} \cap [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \{0\}$.*

Dokaz: Neka je S unitalna podalgebra od $L(V)$ generirana sa $\mathfrak{a}$. Algebra S je komutativna. Pretpostavimo da je $\mathfrak{b}$ ideal u $\mathfrak{g}$ sadržan u $\mathfrak{a}$ takav da je $Tr\, bs = 0 \ \forall b \in \mathfrak{b}$ i $\forall s \in S$. Tada je posebno $Tr\, b^n = 0$ za svaki $n \in \mathbb{N}$ i $\forall b \in \mathfrak{b}$. No to znači da je svaki $b \in \mathfrak{b}$ nilpotentan operator. Sada iz leme 1.5.1. slijedi da je $\mathfrak{b} = \{0\}$.

Promatrajmo sada ideal $[\mathfrak{a}, \mathfrak{g}]$ u $\mathfrak{g}$ sadržan u $\mathfrak{a}$. Za $x \in \mathfrak{g}$, $a \in \mathfrak{a}$ i $s \in S$ imamo

$$Tr\, [x, a]s = Tr\, (xas - axs) = Tr\, x(as - sa) = 0$$

jer je $as = sa$. Iz dokazanog slijedi da je $[\mathfrak{g}, \mathfrak{a}] = \{0\}$. Prema tome, vrijedi i $ys = sy \ \forall y \in \mathfrak{g}$ i $\forall s \in S$. Sada za $x, y \in \mathfrak{g}$ i $s \in S$ dobivamo

$$Tr\, [x, y]s = Tr\, (xys - yxs) = Tr\, x(ys - sy) = 0.$$

Primijenimo sada prvi dio dokaza na ideal $\mathfrak{b} = \mathfrak{a} \cap [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$. Slijedi $\mathfrak{a} \cap [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \{0\}$.

Teorem 1.5.8. *Neka je $\mathfrak{g}$ Liejeva algebra. Tada je nilradikal od $\mathfrak{g}$ jednak $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \cap \mathcal{R}(\mathfrak{g})$.*

Dokaz: Neka je $\mathfrak{s}$ nilradikal Liejeve algebre $\mathfrak{g}$. Neka je $\lambda \in \mathfrak{g}^*$ linearan funkcional takav da je $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \subseteq Ker\, \lambda$. Tada je λ ireducibilna reprezentacija od $\mathfrak{g}$, pa slijedi $\mathfrak{s} \subseteq Ker\, \lambda$. Budući da je očito

$$[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \bigcap \{Ker\, \lambda; \ \lambda \in \mathfrak{g}^*, \ Ker\, \lambda \supseteq [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]\},$$

slijedi $\mathfrak{s} \subseteq [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$. Nadalje, $\mathfrak{s}$ je prema tvrdnji (c) propozicije 1.5.6. nilpotentan ideal u $\mathfrak{g}$, dakle i rješivi ideal u $\mathfrak{g}$. Prema tome je $\mathfrak{s} \subseteq \mathcal{R}(\mathfrak{g})$. Time je dokazana inkluzija $\mathfrak{s} \subseteq [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \cap \mathcal{R}(\mathfrak{g})$.

Neka je sada π konačnodimenzionalna ireducibilna reprezentacija od $\mathfrak{g}$ na prostoru V. Označimo $\mathcal{R}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{r}$ i neka je $k \in \mathbb{Z}_+$ najmanji takav da je $\pi\left(\mathfrak{r}^{(k+1)}\right) = \{0\}$. Stavimo

$$\mathfrak{g}' = \pi(\mathfrak{g}) \qquad \text{i} \qquad \mathfrak{a}' = \pi\left(\mathfrak{r}^{(k)}\right) \neq \{0\}.$$

$\mathfrak{a}'$ je ideal u Liejevoj algebri $\mathfrak{g}'$ jer je $\mathfrak{r}^{(k)}$ ideal u Liejevoj algebri $\mathfrak{g}$. Taj je ideal komutativan jer je

$$[\mathfrak{a}', \mathfrak{a}'] = \left[\pi\left(\mathfrak{r}^{(k)}\right), \pi\left(\mathfrak{r}^{(k)}\right)\right] = \pi\left(\left[\mathfrak{r}^{(k)}, \mathfrak{r}^{(k)}\right]\right) = \pi\left(\mathfrak{r}^{(k+1)}\right) = \{0\}.$$

Sada je $\mathfrak{g}'$ Liejeva podalgebra od $\mathfrak{gl}(V)$ i identična reprezentacija od $\mathfrak{g}'$ na prostoru V je ireducibilna. Prema lemi 1.5.7. vrijedi $\{0\} = \mathfrak{a}' \cap [\mathfrak{g}', \mathfrak{g}'] \supseteq \pi\left(\mathfrak{r}^{(k)} \cap [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]\right)$. Kad bi bilo $k > 0$, onda bismo imali $\mathfrak{r}^{(k)} \subseteq [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, pa bi slijedilo $\pi\left(\mathfrak{r}^{(k)}\right) = \{0\}$, a to je suprotno definiciji broja k. Zaključujemo da je $k = 0$, dakle, $\pi([\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \cap \mathfrak{r}) = \pi\left([\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \cap \mathfrak{r}^{(0)}\right) = \{0\}$.

Time smo dokazali da je $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \cap \mathcal{R}(\mathfrak{g}) \subseteq Ker\, \pi$ za svaku konačnodimenzionalnu ireducibilnu reprezentaciju π od $\mathfrak{g}$, a odatle slijedi i obrnuta inkluzija $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \cap \mathcal{R}(\mathfrak{g}) \subseteq \mathfrak{s}$.

Zadatak 1.5.1. *Iz teorema 1.5.8. dokažite Liejev teorem 1.1.7. i teorem 1.1.9.*

Propozicija 1.5.9. *Neka je $\mathfrak{g}$ Liejeva algebra, $B_{\mathfrak{g}}$ njena Killingova forma i $\mathfrak{r} = \mathcal{R}(\mathfrak{g})$ njen radikal.*

(a) *Za svaku konačnodimenzionalnu reprezentaciju π i pridruženu simetričnu bilinearnu formu B_π vrijedi $B_\pi(x, y) = 0 \ \forall x \in \mathfrak{r}$ i $\forall y \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$.*

(b) $\mathfrak{r} = \{y \in \mathfrak{g}; \ B_{\mathfrak{g}}(x, y) = 0 \ \forall x \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]\}$.

Dokaz: (a) Prema teoremu 1.5.8. $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]\cap\mathfrak{r}$ je nilradikal od $\mathfrak{g}$, pa iz tvrdnje (a) propozicije 1.5.6. slijedi da je $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]\cap\mathfrak{r}$ sadržan u najvećem idealu nilpotencije reprezentacije π. Ako su $y,z\in\mathfrak{g}$ i $x\in\mathfrak{r}$ tada je $[x,y]\in[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]\cap\mathfrak{r}$. Stoga prema tvrdnji ($c$) propozicije 1.5.3. nalazimo

$$B_\pi(x,[y,z])=B_\pi([x,y],z)=0.$$

(b) Stavimo $\mathfrak{r}'=\{y\in\mathfrak{g};\ B_\mathfrak{g}(x,y)=0\ \ \forall x\in[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]\}$. Iz invarijantnosti forme $B_\mathfrak{g}$ slijedi da je $\mathfrak{r}'$ ideal u $\mathfrak{g}$. Prema tvrdnji (a) vrijedi $\mathfrak{r}\subseteq\mathfrak{r}'$. Neka je $\mathfrak{s}=ad_\mathfrak{g}\,\mathfrak{r}'$. Prema Cartanovom kriteriju (teorem 1.1.10.) Liejeva algebra $\mathfrak{s}$ je rješiva. Kako je Liejeva algebra $\mathfrak{s}$ izomorfna kvocijentnoj algebri od $\mathfrak{r}'$ po $Ker\,(ad_\mathfrak{g}|\mathfrak{r}')=Z(\mathfrak{g})\cap\mathfrak{r}'$, a to je komutativni, dakle, rješivi ideal u $\mathfrak{r}'$, iz tvrdnje (b) propozicije 1.1.4. slijedi da je Liejeva algebra $\mathfrak{r}'$ rješiva. No radikal $\mathfrak{r}=\mathcal{R}(\mathfrak{g})$ je najveći rješivi ideal u $\mathfrak{g}$, pa dobivamo i obrnutu inkluziju $\mathfrak{r}'\subseteq\mathfrak{r}$.

Zadatak 1.5.2. *Dokažite da je Liejeva algebra* $\mathfrak{g}$ *rješiva ako i samo ako je* $B_\mathfrak{g}([\mathfrak{g},\mathfrak{g}],\mathfrak{g})=\{0\}$.

Zadatak 1.5.3. *Neka je* $\mathfrak{g}$ *Liejeva algebra i* $\mathfrak{h}$ *ideal u* $\mathfrak{g}$. *Dokažite da je* $\mathcal{R}(\mathfrak{h})=\mathcal{R}(\mathfrak{g})\cap\mathfrak{h}$.

Propozicija 1.5.10. *Neka je* $\mathfrak{g}$ *Liejeva algebra,* $\mathfrak{r}=\mathcal{R}(\mathfrak{g})$ *njen radikal i* $\mathfrak{n}$ *njen najveći nilpoteni ideal. Tada je* $D\mathfrak{r}\subseteq\mathfrak{n}$ *za svaku* $D\in Der(\mathfrak{g})$. *Posebno,* $D\mathfrak{n}\subseteq\mathfrak{n}$ *i* $D\mathfrak{r}\subseteq\mathfrak{r}$ $\forall D\in Der(\mathfrak{g})$.

Dokaz: Neka je $D\in Der(\mathfrak{g})$. Neka je $\mathfrak{g}'$ vektorski prostor koji sadrži $\mathfrak{g}$ kao potprostor kodimenzije 1, i neka je $x_0\in\mathfrak{g}'\setminus\mathfrak{g}$. Tada na $\mathfrak{g}'$ postoji jedinstvena struktura Liejeve algebre takva da joj je $\mathfrak{g}$ podalgebra i da je $[x_0,x]=Dx\ \forall x\in\mathfrak{g}$. Tada je $\mathfrak{g}$ ideal u $\mathfrak{g}'$, pa je prema zadatku 1.5.3. $\mathfrak{r}\subseteq\mathcal{R}(\mathfrak{g}')$. Dakle, $D\mathfrak{r}=[x_0,\mathfrak{r}]\subseteq[\mathfrak{g}',\mathfrak{g}']\cap\mathcal{R}(\mathfrak{g}')=\mathfrak{s}'$. Za svaki $x\in\mathfrak{s}'$ operator $ad_{\mathfrak{g}'}x$ je prema teoremu 1.5.8. nilpotentan. Slijedi da je za svaki $x\in\mathfrak{s}'\cap\mathfrak{g}$ operator $ad_\mathfrak{g}x$ nilpotentan. Prema tome, $D\mathfrak{r}$ je sadržano u nilpotentnom idealu $\mathfrak{s}'\cap\mathfrak{g}$ od $\mathfrak{g}$, pa slijedi da je i da je $D\mathfrak{r}$ sadržano u najvećem nilpotentnom idealu $\mathfrak{n}$ u $\mathfrak{g}$.

Sljedeći zadatak nabraja nekoliko već dokazanih činjenica:

Zadatak 1.5.4. *Neka je* $\mathfrak{g}$ *Liejeva algebra,* $B_\mathfrak{g}$ *njena Killingova forma,* $\mathfrak{r}=\mathcal{R}(\mathfrak{g})$ *radikal od* $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{n}$ *najveći nilpotentan ideal u* $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{s}$ *nilradikal od* $\mathfrak{g}$ *i* $\mathfrak{p}=\{x\in\mathfrak{g};\ B_\mathfrak{g}(x,y)=0\ \forall x\in\mathfrak{g}\}$. *Dokažite da vrijedi*

$$\mathfrak{s}\subseteq\mathfrak{n}\subseteq\mathfrak{p}\subseteq\mathfrak{r}.$$

1.6 Reduktivne Liejeve algebre

Neka je $\mathfrak{g}$ Liejeva algebra. Za Liejevu podalgebru $\mathfrak{s}$ od $\mathfrak{g}$ kažemo da je **reduktivna u $\mathfrak{g}$** ako je reprezentacija $x \mapsto ad_{\mathfrak{g}}\, x$ Liejeve algebre $\mathfrak{s}$ na vektorskom prostoru $\mathfrak{g}$ (tj. restrikcija $ad_{\mathfrak{g}}|\mathfrak{s}$) potpuno reducibilna. Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ zove se **reduktivnom** ako je ona reduktivna u samoj sebi, tj. ako je njena adjungirana reprezentacija potpuno reducibilna. Naravno, ako je $\mathfrak{s}$ Liejeva podalgebra od $\mathfrak{g}$ reduktivna u $\mathfrak{g}$, onda je $\mathfrak{s}$ reduktivna Liejeva algebra, jer je $ad_{\mathfrak{s}}$ subreprezentacija restrikcije $ad_{\mathfrak{g}}|\mathfrak{s}$. Prema teoremima 1.1.13. i 1.2.3. svaka je poluprosta Liejeva algebra reduktivna. Nadalje, po Weylovom teoremu poluprosta Liejeva podalgebra Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ je reduktivna u $\mathfrak{g}$.

Zadatak 1.6.1. (*a*) *Neka je $\mathfrak{g}$ realna Liejeva algebra i $\mathfrak{s}$ njena Liejeva podalgebra. Dokažite da je $\mathfrak{s}$ reduktivna u $\mathfrak{g}$ ako i samo ako je njena kompleksifikacija $\mathfrak{s}^{\mathbb{C}}$ reduktivna u kompleksifikaciji $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ od $\mathfrak{g}$.*

(*b*) *Neka je $\mathfrak{g}$ kompleksna Liejeva algebra i $\mathfrak{s}$ njena Liejeva podalgebra. Dokažite da je $\mathfrak{s}$ reduktivna u $\mathfrak{g}$ ako i samo ako je realna Liejeva algebra $\mathfrak{s}_{\mathbb{R}}$ reduktivna u $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$.*

Teorem 1.6.1. *Neka je $\mathfrak{g}$ Liejeva algebra. Sljedećih je sedam svojstava međusobno ekvivalentno:*

(*a*) *Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ je reduktivna.*

(*b*) *Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ izomorfna je direktnom produktu poluproste Liejeve algebre i komutativne Liejeve algebre.*

(*c*) *Prvi izvedeni ideal $\mathfrak{g}^{(1)} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ je poluprosta Liejeva algebra.*

(*d*) $\mathfrak{g}^{(1)} \cap \mathcal{R}(\mathfrak{g}) = \{0\}$.

(*e*) $\mathcal{R}(\mathfrak{g}) = Z(\mathfrak{g})$.

(*f*) *Postoji vjerna konačnodimenzionalna potpuno reducibilna reprezentacija od $\mathfrak{g}$.*

(*g*) *Postoji konačnodimenzionalna reprezentacija π od $\mathfrak{g}$ takva da je pridružena simetrična bilinearna forma B_π na $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$, zadana sa $B_\pi(x, y) = Tr\, \pi(x)\pi(y)$, nedegenerirana.*

U tom slučaju je $\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \dotplus Z(\mathfrak{g})$.

Dokaz: (*a*) $\Rightarrow$ (*b*). Ako je reprezentacija ad potpuno reducibilna, Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ je prema teoremu 1.2.3. direktna suma potprostora $\mathfrak{g}_1, \ldots, \mathfrak{g}_k$ koji su $ad-$invarijantni i takvi da su pripadne subreprezentacije od ad ireducibilne. No to znači da su $\mathfrak{g}_1, \ldots, \mathfrak{g}_k$ minimalni ideali u $\mathfrak{g}$. Tada za svaki i Liejeva algebra $\mathfrak{g}_i$ nema netrivijalnih ideala. To znači da je ili $\mathfrak{g}_i$ prosta Liejeva algebra, ili je $\dim \mathfrak{g}_i = 1$, a tada je $\mathfrak{g}_i$ komutativna. Možemo pretpostaviti da je numeracija takva da su $\mathfrak{g}_1, \ldots, \mathfrak{g}_j$ proste i $\mathfrak{g}_{j+1}, \ldots, \mathfrak{g}_k$ jednodimenzionalne. Tada je očito

$$[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{g}_1 \dotplus \cdots \dotplus \mathfrak{g}_j \qquad \text{i} \qquad Z(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}_{j+1} \dotplus \cdots \dotplus \mathfrak{g}_k.$$

Odatle vidimo da vrijedi implikacija (*a*) $\Rightarrow$ (*b*) a također i posljednja tvrdnja teorema.

Implikacija (*b*) $\Rightarrow$ (*c*) je očita, a također i implikacija (*c*) $\Rightarrow$ (*d*), jer je $\mathfrak{g}^{(1)} \cap \mathcal{R}(\mathfrak{g})$ rješivi ideal u $\mathfrak{g}^{(1)}$.

(*d*) $\Rightarrow$ (*e*). Očito u svakoj Liejevoj algebri $\mathfrak{g}$ vrijedi $Z(\mathfrak{g}) \subseteq \mathcal{R}(\mathfrak{g})$, jer je $Z(\mathfrak{g})$ komutativan, dakle, rješivi, ideal u $\mathfrak{g}$. S druge strane, iz pretpostavke (*d*) slijedi

$$[\mathfrak{g}, \mathcal{R}(\mathfrak{g})] \subseteq [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \cap \mathcal{R}(\mathfrak{g}) = \{0\},$$

dakle, imamo i obrnutu inkluziju $\mathcal{R}(\mathfrak{g}) \subseteq Z(\mathfrak{g})$.

$(e) \Rightarrow (a)$. Pretpostavimo da je $\mathcal{R}(\mathfrak{g}) = Z(\mathfrak{g})$. Centar $Z(\mathfrak{g})$ je jezgra adjungirane reprezentacije $ad_{\mathfrak{g}}$ od $\mathfrak{g}$ na $\mathfrak{g}$. Prijelazom na kvocijent po jezgri dobivamo (vjernu) reprezentaciju kvocijentne algebre $\mathfrak{g}/\mathcal{R}(\mathfrak{g})$ na prostoru $\mathfrak{g}$. Prema propoziciji 1.1.3. kvocijentna algebra $\mathfrak{g}/\mathcal{R}(\mathfrak{g})$ je poluprosta, pa je po Weylovom teoremu 1.2.5. ta reprezentacija potpuno reducibilna. No to znači da je reprezentacija $ad_{\mathfrak{g}}$ od $\mathfrak{g}$ potpuno reducibilna, odnosno, Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ je reduktivna.

$(b) \Rightarrow (g)$. Pretpostavimo da je $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \times \mathfrak{k}$, gdje je $\mathfrak{h}$ poluprosta, a $\mathfrak{k}$ komutativna Liejeva algebra. Tada je Killingova forma $B_{\mathfrak{h}}$ Liejeve algebre $\mathfrak{h}$ nedegenerirana. Neka je $\{x_1, \ldots, x_n\}$ baza od $\mathfrak{k}$. Neka je V $n-$dimenzionalan vektorski prostor s bazom $e = \{e_1, \ldots, e_n\}$. Za linearan operator $A \in \mathfrak{gl}(V)$ označimo sa $A(e)$ matricu tog operatora u bazi e. Neka je $\rho : \mathfrak{k} \to \mathfrak{gl}(V)$ preslikavanje definirano sa

$$[\rho(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n)](e) = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha_n \end{bmatrix}.$$

Tada je ρ reprezentacija Liejeve algebre $\mathfrak{k}$. Nadalje, za pridruženu simetričnu bilinearnu formu B_ρ vrijedi $B_\rho(x_i, x_j) = \delta_{ij}$. To pokazuje da je forma B_ρ nedegenerirana. Sada na Kartezijevom produktu $X = \mathfrak{h} \times V$ definiramo reprezentaciju $\pi = ad_{\mathfrak{h}} \times \rho$ od $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \times \mathfrak{k}$:

$$\pi(x, z)(y, v) = ((ad_{\mathfrak{h}}\, x)y, \rho(z)v) = ([x, y], \rho(z)v), \qquad x, y \in \mathfrak{h}, \quad z \in \mathfrak{k}, \quad v \in V.$$

Za simetričnu bilinearnu formu B_π pridruženu toj reprezentaciji π vrijedi

$$B_\pi|\mathfrak{h} \times \mathfrak{h} = B_{\mathfrak{h}}, \quad B_\pi|\mathfrak{k} \times \mathfrak{k} = B_\rho, \quad B_\pi|\mathfrak{h} \times \mathfrak{k} = 0.$$

Kako su forme $B_{\mathfrak{h}}$ i B_ρ nedegenerirane, slijedi da je i forma B_π nedegenerirana.

$(g) \Rightarrow (f)$. Neka je π konačnodimenzionalna reprezentacija od $\mathfrak{g}$ takva da je pridružena forma B_π nedegenerirana. Neka je $(V_0, V_1, \ldots, V_n)$ kompozicioni niz reprezentacije π i neka je σ direktna suma ireducibilnih subkvocijentnih reprezentacija $\pi_{V_i/V_{i-1}}$ za $i = 1, \ldots, n$. Reprezentacija σ je potpuno reducibilna. Prema propoziciji 1.5.3. najveći ideal nilpotencije $\mathfrak{n}_\pi$ reprezentacije π je upravo jezgra $Ker\, \sigma$ reprezentacije σ. Nadalje, vrijedi $B_\pi(\mathfrak{n}_\pi, \mathfrak{g}) = \{0\}$, a kako je po pretpostavci forma B_π nedegenerirana, slijedi da je $Ker\, \sigma = \mathfrak{n}_\pi = \{0\}$. No to znači da je reprezentacija σ vjerna.

$(f) \Rightarrow (d)$. Jezgra svake potpuno reducibilne konačnodimenzionalne reprezentacije od $\mathfrak{g}$ sadrži nilradikal od $\mathfrak{g}$. Dakle, ako postoji vjerna potpuno reducibilna konačnodimenzionalna reprezentacija od $\mathfrak{g}$ jednak je $\{0\}$. Po teoremu 1.5.8. nilradikal od $\mathfrak{g}$ jednak je $\mathfrak{g}^{(1)} \cap [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$. Dakle, $\mathfrak{g}^{(1)} \cap [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \{0\}$.

Zadatak 1.6.2. *Dokažite da je direktni produkt reduktivnih Liejevih algebri reduktivna Liejeva algebra.*

Zadatak 1.6.3. *Neka je $\mathfrak{g}$ reduktivna Liejeva algebra i $\mathfrak{j}$ ideal u $\mathfrak{g}$. Dokažite da je*

$$\mathfrak{j} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \cap \mathfrak{j} \dotplus Z(\mathfrak{g}) \cap \mathfrak{j}$$

i da je Liejeva algebra $\mathfrak{j}$ reduktivna u $\mathfrak{g}$ i, posebno, reduktivna. Nadalje, dokažite da je i kvocijentna algebra $\mathfrak{g}/\mathfrak{j}$ reduktivna.

Propozicija 1.6.2. *Neka je $\mathfrak{g}$ Liejeva algebra, $\mathfrak{r} = \mathcal{R}(\mathfrak{g})$ njen radikal i $\mathfrak{s}$ njen nilradikal.*

(a) $\mathfrak{s} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{r}] = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \cap \mathfrak{r}$.

(b) *Za konačnodimenzionalnu reprezentaciju π od $\mathfrak{g}$ neka je B_π pridružena simetrična bilinearna forma na $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$, $B_\pi(x, y) = Tr\, \pi(x)\pi(y)$, $x, y \in \mathfrak{g}$, i $Rad\, B_\pi = \{y \in \mathfrak{g};\ B_\pi(x, y) = 0\ \forall x \in \mathfrak{g}\}$ radikal forme B_π. Tada je*

$$\mathfrak{s} = \bigcap \{Rad\, B_\pi;\ \pi \text{ konačnodimenzionalna reprezentacija od } \mathfrak{g}\}.$$

Dokaz: (a) Prema teoremu 1.5.8. vrijedi $\mathfrak{s} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \cap \mathfrak{r}$. Nadalje, očito je $[\mathfrak{g}, \mathfrak{r}] \subseteq [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \cap \mathfrak{r}$, odnosno, $[\mathfrak{g}, \mathfrak{r}] \subseteq \mathfrak{s}$. Neka je $\mathfrak{g}' = \mathfrak{g}/[\mathfrak{g}, \mathfrak{r}]$ i neka je $\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$ kanonski epimorfizam. Tada je $\mathfrak{r}' = \varphi(\mathfrak{r})$ radikal od $\mathfrak{g}'$. Slijedi $[\mathfrak{g}', \mathfrak{r}'] = \varphi([\mathfrak{g}, \mathfrak{r}]) = \{0\}$, odnosno, radikal $\mathfrak{r}'$ Liejeve algebre $\mathfrak{g}'$ jednak je njenom centru. Sada iz teorema 1.6.1. slijedi da je Liejeva algebra $\mathfrak{g}'$ reduktivna i da ima vjernu potpuno reducibilnu konačnodimenzionalnu reprezentaciju π'. Neka je $\pi = \pi' \circ \varphi$ pripadna podignuta reprezentacija od $\mathfrak{g}$. Tada je reprezentacija π potpuno reducibilna i $Ker\, \pi = Ker\, \varphi = [\mathfrak{g}, \mathfrak{r}]$. Kako je $\mathfrak{s}$ presjek jezgara konačnodimenzionalnih potpuno reducibilnih reprezentacija od $\mathfrak{g}$, slijedi da je $\mathfrak{s} \subseteq Ker\, \pi = [\mathfrak{g}, \mathfrak{r}]$. Time smo dokazali i obrnutu inkluziju $\mathfrak{s} \subseteq [\mathfrak{g}, \mathfrak{r}]$.

(b) Neka je

$$\mathfrak{t} = \bigcap \{Rad\, B_\pi;\ \pi \text{ konačnodimenzionalna reprezentacija od } \mathfrak{g}\}.$$

Prema tvrdnji (c) propozicije 1.5.3. tada je $\mathfrak{s} \subseteq \mathfrak{t}$. S druge strane, $\mathfrak{g}/\mathfrak{s}$ ima vjernu konačnodimenzionalnu potpuno reducibilnu reprezentaciju, pa po teoremu 1.6.1. ta Liejeva algebra ima konačnodimenzionalnu reprezentaciju ρ takvu da je pripadna forma B_ρ nedegenerirana. Neka je π reprezentacija od $\mathfrak{g}$ dobivena podizanjem od ρ : $\pi(x) = \rho(x + \mathfrak{s})$, $x \in \mathfrak{g}$. Tada je $Rad\, B_\pi = \mathfrak{s}$. Odatle slijedi obrnuta inkluzija $\mathfrak{t} \subseteq \mathfrak{s}$.

Korolar 1.6.3. *Neka je $\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$ epimorfizam Liejevih algebri i $\mathfrak{s}$ nilradikal od $\mathfrak{g}$. Tada je $\varphi(\mathfrak{s})$ nilradikal od $\mathfrak{g}'$. Nadalje, Liejeva algebra $\mathfrak{g}'$ je reduktivna ako i samo ako jezgra $Ker\, \varphi$ sadrži $\mathfrak{s}$.*

Dokaz: Neka su $\mathfrak{r} = \mathcal{R}(\mathfrak{g})$ i $\mathfrak{r}' = \mathcal{R}(\mathfrak{g}')$ radikali Liejevih algebri $\mathfrak{g}$ i $\mathfrak{g}'$. Tada je $\mathfrak{r}' = \varphi(\mathfrak{r})$. Iz propozicije 1.6.2. slijedi da je nilradikal od $\mathfrak{g}'$ jednak $[\mathfrak{g}', \mathfrak{r}'] = [\varphi(\mathfrak{g}), \varphi(\mathfrak{r})] = \varphi([\mathfrak{g}, \mathfrak{r}]) = \varphi(\mathfrak{s})$. Napokon, po teoremu 1.6.1. Liejeva algebra je reduktivna ako i samo ako joj je nilradikal jednak $\{0\}$. Prema tome, Liejeva algebra $\mathfrak{g}'$ je reduktivna ako i samo ako je $\varphi(\mathfrak{s}) = \{0\}$, odnosno, ako i samo ako $\mathfrak{s} \subseteq Ker\, \varphi$.

1.7 Kriteriji potpune reducibilnosti

Prije svega, uočimo da se kod razmatranja pitanja potpune reducibilnosti dovoljno ograničiti na kompleksne Liejeve algebre:

Propozicija 1.7.1. *Neka je $\mathfrak{g}$ realna Liejeva algebra i π njena reprezentacija na konačnodimenzionalnom realnom vektorskom prostoru V i neka je $\pi^{\mathbb{C}}$ njena kompleksifikacija, koja je reprezentacija kompleksifikacije $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ na kompleksifikaciji $V^{\mathbb{C}}$ prostora V :*

$$\pi^{\mathbb{C}}(x+iy)(v+iw)=\pi(x)v-\pi(y)w+i\pi(x)w+i\pi(y)v, \qquad x,y\in\mathfrak{g}, \quad v,w\in V.$$

(a) *Reprezentacija π je potpuno reducibilna ako i samo je njena kompleksifikacija $\pi^{\mathbb{C}}$ potpuno reducibilna reprezentacija kompleksne Liejeve algebre $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ na prostoru $V^{\mathbb{C}}$.*

(b) *Ako je reprezentacija $\pi^{\mathbb{C}}$ ireducibilna onda je i reprezentacija π ireducibilna.*

(c) *Ako je reprezentacija π ireducibilna, onda je reprezentacija $\pi^{\mathbb{C}}$ ili ireducibilna ili je direktna suma dvije međusobno ekvivalentne ireducibilne reprezentacije.*

Dokaz: Označimo sa $u\mapsto\overline{u}$ konjugaciju prostora $V^{\mathbb{C}}$ u odnosu na realnu formu V :

$$\overline{v+iw}=v-iw, \qquad v,w\in V.$$

Za potprostor U kompleksnog vektorskog prostora $V^{\mathbb{C}}$ vrijedi

$$U=\overline{U} \qquad \Longleftrightarrow \qquad U=U\cap V\dotplus i\,(U\cap V).$$

(c) Pretpostavimo da je reprezentacija π ireducibilna. Neka je $W\neq\{0\}$ $\pi^{\mathbb{C}}-$invarijantan potprostor kompleksnog prostora $V^{\mathbb{C}}$ takav da je subreprezentacija $\left(\pi^{\mathbb{C}}\right)_W$ ireducibilna. Tada je $\overline{W}$ potprostor od $V^{\mathbb{C}}$ koji je također $\pi^{\mathbb{C}}-$invarijantan, pa je i $U=W+\overline{W}$ $\pi^{\mathbb{C}}-$invarijantan potprostor od $V^{\mathbb{C}}$. Sada imamo $U=\overline{U}$, dakle, vrijedi $U=U\cap V\dotplus i\,(U\cap V)$. Iz $\pi^{\mathbb{C}}-$invarijantnosti potprostora U od $V^{\mathbb{C}}$ slijedi $\pi-$invarijantnost potprostora $U\cap V$ od V. Nadalje, kako je po pretpostavci $W\neq\{0\}$, vrijedi $U\neq\{0\}$, dakle i $U\cap V\neq\{0\}$. Sada iz ireducibilnosti reprezentacije π slijedi $U\cap V=V$, odnosno, $V\subseteq U$. No to znači da je $U=V^{\mathbb{C}}$. Time smo dokazali da je $W+\overline{W}=V^C$.

Imamo dvije mogućnosti:

(1) $X=W\cap\overline{W}\neq\{0\}$. Tada je X $\pi^{\mathbb{C}}-$invarijantan potprostor od $V^{\mathbb{C}}$ sa svojstvom $X=\overline{X}$. Kao i malo prije zaključujemo da je tada $X=V^{\mathbb{C}}$, a to znači da je $W=V^{\mathbb{C}}$, dakle, reprezentacija $\pi^{\mathbb{C}}$ je ireducibilna.

(2) $W\cap\overline{W}=\{0\}$. Tada je $V^{\mathbb{C}}=W\dotplus\overline{W}$, pa je reprezentacija $\pi^{\mathbb{C}}$ direktna suma svojih subreprezentacija $\left(\pi^{\mathbb{C}}\right)_W$ i $\left(\pi^{\mathbb{C}}\right)_{\overline{W}}$. Subreprezentacija $\left(\pi^{\mathbb{C}}\right)_W$ je po pretpostavci ireducibilna. Nadalje, $w\mapsto\overline{w}$, $w\in W$, je ekvivalencija reprezentacije $\left(\pi^{\mathbb{C}}\right)_W$ s reprezentacijom $\left(\pi^{\mathbb{C}}\right)_{\overline{W}}$. To znači da je i subreprezentacija $\left(\pi^{\mathbb{C}}\right)_{\overline{W}}$ ireducibilna i ona je ekvivalentna subreprezentaciji $\left(\pi^{\mathbb{C}}\right)_W$.

(b) Pretpostavimo sada da je reprezentacija $\pi^{\mathbb{C}}$ ireducibilna i neka je $W\neq\{0\}$ $\pi-$invarijantan potprostor od V. Tada je $W^{\mathbb{C}}=W\dotplus i\,W$ $\pi^{\mathbb{C}}-$invarijantan potprostor od $V^{\mathbb{C}}$ koji je različit od $\{0\}$. Zbog ireducibilnosti od $\pi^{\mathbb{C}}$ zaključujemo da je $W^{\mathbb{C}}=V^{\mathbb{C}}$, a odatle je $W=V$. Prema tome, reprezentacija π je ireducibilna.

(a) Pretpostavimo da je reprezentacija π potpuno reducibilna. Tada po teoremu 1.2.3. postoje $\pi-$invarijantni potprostori $V_1,\ldots,V_n$ od V takvi da su subreprezentacije $\pi_{V_1},\ldots,\pi_{V_n}$ ireducibilne i da je $V=V_1\dotplus\cdots\dotplus V_n$. Tada su $(V_1)^{\mathbb{C}},\ldots,(V_n)^{\mathbb{C}}$ $\pi^{\mathbb{C}}-$invarijatni potprostori od $V^{\mathbb{C}}$ i vrijedi $V^{\mathbb{C}}=(V_1)^{\mathbb{C}}\dotplus\cdots\dotplus(V_n)^{\mathbb{C}}$. Nadalje, za $i\in\{1,\ldots,n\}$ subreprezentacija $\left(\pi^{\mathbb{C}}\right)_{(V_i)^{\mathbb{C}}}$ je upravo kompleksifikacija $(\pi_{V_i})^{\mathbb{C}}$ ireducibilne reprezentacije π_{V_i}. Prema dokazanoj tvrdnji (c) subreprezentacija $\left(\pi^{\mathbb{C}}\right)_{(V_i)^{\mathbb{C}}}$ je ili ireducibilna ili je direktna suma dvije (međusobno ekvivalentne) ireducibilne reprezentacije. Prema tome, kompleksifikacija $\pi^{\mathbb{C}}$ reprezentacije π je direktna suma svojih ireducibilnih subreprezentacija; naravno, ako k označava broj tih sumanada, onda je

$n \leq k \leq 2n$. Prema teoremu 1.2.3. reprezentacija $\pi^{\mathbb{C}}$ je potpuno reducibilna.

Pretpostavimo sada da je reprezentacija $\pi^{\mathbb{C}}$ potpuno reducibilna. Tada je $\pi^{\mathbb{C}}|\mathfrak{g}$ reprezentacija Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ na realnom vektorskom prostoru $\left(V^{\mathbb{C}}\right)_{\mathbb{R}}$. Dokazat ćemo da je ta reprezentacija potpuno reducibilna. Tada će iz propozicije 1.2.1. slijediti da je i njena subreprezentacija $\pi = \left(\pi^{\mathbb{C}}|\mathfrak{g}\right)_V$ potpuno reducibilna. Zbog teorema 1.2.3. za dokaz potpune reducibilnosti reprezentacije $\pi^{\mathbb{C}}|\mathfrak{g}$ dovoljno je dokazati da je za svaku ireducibilnu reprezentaciju ρ Liejeve algebre $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ na kompleksnom prostoru W njena restrikcija $\rho|\mathfrak{g}$ potpuno reducibilna reprezentacija realne Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ na realnom prostoru $W_{\mathbb{R}}$.

Doista, neka je ρ ireducibilna reprezentacija kompleksne Liejeve algebre $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ na kompleksnom vektorskom prostoru W. Pretpostavimo da restrikcija $\rho|\mathfrak{g}$ nije ireducibilna reprezentacija realne Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ na realnom prostoru $W_{\mathbb{R}}$. Tada postoji $\rho|\mathfrak{g}-$invarijantan potprostor U realnog prostora $W_{\mathbb{R}}$ različit od $\{0\}$ i od $W_{\mathbb{R}}$. Tada je $X = U + i\,U$ $\rho-$invarijantan potprostor kompleksnog prostora W različit od $\{0\}$, pa zbog ireducibilnosti od ρ slijedi da je $X = W$. Promatramo li U i $i\,U$ kao potprostore realnog vektorskog prostora $W_{\mathbb{R}}$ zaključujemo da je $W_{\mathbb{R}} = U + i\,U$. Nadalje, $Y = U \cap i\,U$ je potprostor kompleksnog prostora W koji je $\rho|\mathfrak{g}-$invarijantan, dakle i $\rho-$invarijantan. Budući da je $U \neq W_{\mathbb{R}}$ pogotovo je $Y \neq W$. Sada iz ireducibilnosti reprezentacije ρ slijedi da je $Y = \{0\}$. Na taj način dokazali smo da je $W_{\mathbb{R}} = U \dotplus i\,U$. Prema tome, svaki $\rho|\mathfrak{g}-$invarijantan potprostor realnog prostora $W_{\mathbb{R}}$ ima $\rho|\mathfrak{g}-$invarijantan direktni komplement. Dakle, restrikcija $\rho|\mathfrak{g}$ je potpuno reducibilna reprezentacija realne Liejeve algebre $\mathfrak{g}$.

Napomena: Dokazi tvrdnji (b) i (c) u propoziciji 1.7.1. nisu koristili konačnodimenzionalnost. Međutim, za obje implikacije u dokazu tvrdnje (a) ključno je korištena pretpostavka da je reprezentacija π konačnodimenzionalna. Naime, beskonačnodimenzionalna potpuno reducibilna reprezentacija nije nužno direktna suma svojih ireducibilnih subreprezentacija.

Zadatak 1.7.1. *Neka je π potpuno reducibilna reprezentacija realne Liejeve algebre na beskonačnodimenzionalnom realnom vektorskom prostoru V. Dokažite da je njena kompleksifikacija $\pi^{\mathbb{C}}$ potpuno reducibilna reprezentacija kompleksne Liejeve algebre $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ na kompleksnom vektorskom prostoru $V^{\mathbb{C}}$.*

Uputa: Ako je W $\pi^{\mathbb{C}}-$invarijantan potprostor od $V^{\mathbb{C}}$ promatrajte $\pi^{\mathbb{C}}-$invarijantne potprostore $U = W + \overline{W}$ i $Z = W \cap \overline{W}$ sa svojstvom $U = \overline{U}$ i $Z = \overline{Z}$, dakle, $U_{\mathbb{R}} = U \cap V \dotplus i\,(U \cap V)$ i $Z_{\mathbb{R}} = Z \cap V \dotplus i\,(Z \cap V)$. Tada su $Z \cap V \subseteq U \cap V$ $\pi-$invarijantni potprostori od V, pa postoje $\pi-$invarijantan direktni komplement X od $Z \cap V$ u $U \cap V$ i $\pi-$invarijantan direktni komplement Y od $U \cap V$ u V.

Teorem 1.7.2. *Neka je $\mathfrak{g}$ Liejeva algebra, $\mathfrak{r} = \mathcal{R}(\mathfrak{g})$ njen radikal, π konačnodimenzionalna reprezentacija od $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}' = \pi(\mathfrak{g})$ i $\mathfrak{r}' = \pi(\mathfrak{r})$. Sljedeća su četiri svojstva međusobno ekvivalentna:*

(a) *Reprezentacija π je potpuno reducibilna.*

(b) *Liejeva algebra $\mathfrak{g}'$ je reduktivna i centar joj se sastoji od poluprostih operatora.*

(c) *$\mathfrak{r}'$ se sastoji od poluprostih operatora.*

(d) *Restrikcija $\pi|\mathfrak{r}$ je potpuno reducibilna reprezentacija.*

Dokaz: Prije svega, uočimo da u dokazu možemo pretpostavljati da je Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ kompleksna i da je π njena reprezentacija na kompleksnom konačnodimenzionalnom vektorskom prostoru V. To slijedi iz propozicije 1.7.1., iz zadatka 1.6.1. i iz očigledne činjenice da je linearan operator A na konačnodimenzionalnom realnom vektorskom prostoru V poluprost ako i samo ako je njegovo $\mathbb{C}-$linearno proširenje $A^{\mathbb{C}}$ poluprost (tj. dijagonalizabilan) operator na kompleksnom prostoru $V^{\mathbb{C}}$.

$(a) \Rightarrow (b)$. Pretpostavimo da je reprezentacija π potpuno reducibilna. Tada je identična reprezentacija $x \mapsto x$, $x \in \mathfrak{g}'$, vjerna potpuno reducibilna reprezentacija Liejeve algebre $\mathfrak{g}'$ na prostoru V. Po teoremu 1.6.1. Liejeva algebra $\mathfrak{g}'$ je reduktivna. Neka je $\mathfrak{z}'$ centar Liejeve algebre $\mathfrak{g}'$. Za $\lambda \in \mathfrak{z}'^*$ stavimo

$$V_\lambda = \{v \in V;\ xv = \lambda(x)v \ \ \forall x \in \mathfrak{z}'\}.$$

Budući da operatori $x \in \mathfrak{z}'$ komutiraju sa svim operatorima iz $\mathfrak{g}'$, lako se vidi da je svaki potprostor V_λ, $\lambda \in \mathfrak{z}'^*$, $\mathfrak{g}'-$invarijantan, odnosno, $\pi-$invarijantan. Nadalje, ti potprostori tvore direktnu sumu. Neka je

$$W = \sum_{\lambda \in \mathfrak{z}'^*} \dotplus V_\lambda.$$

Budući da je reprezentacija π potpuno reducibilna, postoji $\pi-$invarijantan potprostor U od V takav da je $V = W \dotplus U$. Pretpostavimo da je $U \neq \{0\}$. Operatori iz skupa $\{x|U;\ x \in \mathfrak{z}'\}$ međusobno komutiraju, pa imaju simultani svojstven vektor $v \neq 0$. To znači da postoji $\lambda \in \mathfrak{z}'^*$ takav da je

$$U_\lambda = \{u \in U;\ xu = \lambda(x)u \ \ \forall x \in \mathfrak{z}'\} \neq \{0\}.$$

Međutim, očito je $U_\lambda = V_\lambda \cap U$, pa slijedi $U_\lambda \subseteq W$. No to je u suprotnosti sa $W \cap U = \{0\}$. Ova kontradikcija pokazuje da je $U = \{0\}$, odnosno, $W = V$. Stoga je svaki operator $x \in \mathfrak{z}'$ poluprost:

$$x|V_\lambda = \lambda(x) I_{V_\lambda} \qquad \forall \lambda \in \mathfrak{z}'^*.$$

$(b) \Rightarrow (c)$. Ako je Liejeva algebra $\mathfrak{g}'$ reduktivna, po teoremu 1.6.1. njen je centar jednak njenom radikalu, $Z(\mathfrak{g}') = \mathcal{R}(\mathfrak{g}')$. Međutim, $\mathcal{R}((\mathfrak{g}') = \pi(\mathcal{R}(\mathfrak{g})) = \pi(\mathfrak{r}) = \mathfrak{r}'$. Po pretpostavci (b) $\mathfrak{r}'$ se sastoji od poluprostih operatora.

$(c) \Rightarrow (d)$. Prepostavimo sada da se $\mathfrak{r}' = \pi(\mathfrak{r})$ sastoji od poluprostih operatora. Imamo $[\mathfrak{g}', \mathfrak{r}'] \subseteq [\mathfrak{g}', \mathfrak{g}'] \cap \mathfrak{r}'$. Prema teoremu 1.5.8. $[\mathfrak{g}', \mathfrak{g}'] \cap \mathfrak{r}'$ je nilradikal Liejeve algebre $\mathfrak{g}'$, pa se sastoji od nilpotentnih operatora. Dakle, operatori iz $[\mathfrak{g}', \mathfrak{g}'] \cap \mathfrak{r}'$ su istovremeno poluprosti i nilpotentni, pa slijedi $[\mathfrak{g}', \mathfrak{g}'] \cap \mathfrak{r}' = \{0\}$. Odatle je i $[\mathfrak{r}', \mathfrak{r}'] = \{0\}$, tj. operatori iz $\mathfrak{r}'$ međusobno komutiraju. No tada se oni mogu simultano dijagonalizirati. Slijedi da je restrikcija $\pi|\mathfrak{r}$ potpuno reducibilna.

$(d) \Rightarrow (a)$. Pretpostavimo sada da je restrikcija $\pi' = \pi|\mathfrak{r}$ potpuno reducibilna reprezentacija. Neka je $\mathfrak{s}$ nilradikal od $\mathfrak{g}$. Operatori iz $\pi(\mathfrak{s}) = \pi'(\mathfrak{s})$ su nilpotentni pa slijedi da je ideal $\mathfrak{s}$ sadržan u najvećem idealu nilpotencije reprezentacije π'. Budući da je reprezentacija π' po pretpostavci potpuno reducibilna, slijedi da je $\pi'(\mathfrak{s}) = \{0\}$. Prema korolaru 1.6.3. Liejeva algebra $\mathfrak{g}'$ je reduktivna. No tada je po teoremu 1.6.1. radikal $\mathfrak{r}'$ Liejeve algebre $\mathfrak{g}'$ jednak njenom centru. To znači da je Liejeva algebra $\mathfrak{r}'$ komutativna. Nadalje, $\mathfrak{g}' = [\mathfrak{g}', \mathfrak{g}'] \dotplus \mathfrak{r}'$ i Liejeva algebra $[\mathfrak{g}', \mathfrak{g}']$ je poluprosta. Tada imamo kao i u dokazu $(a) \Rightarrow (b)$

$$V = \sum_{\lambda \in \mathfrak{r}'^*} \dotplus V_\lambda, \qquad V_\lambda = \{v \in V;\ xv = \lambda(x)v \ \ \forall x \in \mathfrak{r}'\}.$$

Svaki potprostor V_λ je $\mathfrak{g}'-$invarijantan, dakle $[\mathfrak{g}', \mathfrak{g}']-$invarijantan, a kako je Liejeva algebra $[\mathfrak{g}', \mathfrak{g}']$ poluprosta, iz Weylovog teorema potpune reducibilnosti slijedi da je identična reprezentacija od $[\mathfrak{g}', \mathfrak{g}']$ na svakom potprostoru V_λ potpuno reducibilna. Odatle očito slijedi da je reprezentacija π potpuno reducibilna.

Korolar 1.7.3. *Ako su π i ρ potpuno reducibilne konačnodimenzionalne reprezentacije Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ onda je i njihov tenzorski produkt $\pi \otimes \rho$ potpuno reducibilna reprezentacija od $\mathfrak{g}$.*

Dokaz: Možemo pretpostavljati da je Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ kompleksna i da su π i ρ potpuno reducibilne reprezentacije od $\mathfrak{g}$ na komleksnim konačnodimenzionalnim vektorskim prostorima V

i W. Neka je $\mathfrak{r} = \mathcal{R}(\mathfrak{g})$. Po teoremu 1.7.2. za svaki $x \in \mathfrak{r}$ operatori $\pi(x)$ i $\rho(x)$ su poluprosti, dakle, dijagonalizabilni. No tada je za svaki $x \in \mathfrak{r}$ operator $(\pi \otimes \rho)(x) = \pi(x) \otimes I_W + I_V \otimes \rho(x)$ dijagonalizabilan. Doista, ako je

$$V = V_1 \dotplus \cdots \dotplus V_n, \qquad \pi(x)|V_j = \lambda_j I_{V_j} \quad \text{za} \quad j = 1, \ldots, n, \quad \text{gdje su} \quad \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C},$$

$$W = W_1 \dotplus \cdots \dotplus W_m, \qquad \rho(x)|W_i = \mu_i I_{W_i} \quad \text{za} \quad i = 1, \ldots, m, \quad \text{gdje su} \quad \mu_1, \ldots, \mu_m \in \mathbb{C},$$

onda je $V \otimes W$ direktna suma potprostora $V_j \otimes W_i$, $1 \le j \le n$, $1 \le i \le m$, i vrijedi

$$(\pi \otimes \rho)(x)|V_j \otimes W_i = (\lambda_j + \mu_i) I_{V_j \otimes W_i}, \qquad 1 \le j \le n, \quad 1 \le i \le m.$$

Ponovna primjena teorema 1.7.2. povlači potpunu reducibilnost reprezentacije $\pi \otimes \rho$.

Korolar 1.7.4. *Neka je π potpuno reducibilna reprezentacija Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ na konačnodimenzionalnom vektorskom prostoru V i neka su π_T i π_S reprezentacije od $\mathfrak{g}$ dobivene iz π proširenjem operatora $\pi(x)$, $x \in \mathfrak{g}$, do derivacija tenzorske algebre $T(V)$ i simetrične algebre $S(V)$ u skladu s teoremom 1.4.10. Dakle,*

$$\left.\begin{aligned} \pi_T(x)(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) &= \sum_{i=1}^{n} v_1 \otimes \cdots \otimes v_{i-1} \otimes \pi(x)v_i \otimes v_{i+1} \otimes \cdots \otimes v_n, \\ \pi_S(x)(v_1 \cdots v_n) &= \sum_{i=1}^{n} v_1 \cdots v_{i-1}(\pi(x)v_i)v_{i+1} \cdots v_n, \end{aligned}\right\} \qquad v_1, \ldots, v_n \in V.$$

Reprezentacije π_T i π_S su potpuno reducibilne. Preciznije, obje su reprezentacije direktne sume konačnodimenzionalnih ireducibilnih reprezentacija od $\mathfrak{g}$.

Dokaz: Očito je svaki homogeni potprostor $T^n(V)$ π_T-invarijantan. Pripadna subreprezentacija je upravo tenzorski produkt n primjeraka reprezentacije π :

$$(\pi_T)_{T^n(V)} = \underbrace{\pi \otimes \cdots \otimes \pi}_{n}.$$

Prema korolaru 1.7.3. svaka od tih subreprezentacija je potpuno reducibilna, dakle, direktna suma konačnodimenzionalnih ireducibilnih subreprezentacija. Odatle slijedi tvrdnja za reprezentaciju π_T. Kako je π_S prema teoremu 1.4.10. ekvivalentna kvocijentnoj reprezentaciji od π_T, pomoću propozicije 1.2.1. dobivamo tvrdnju i za reprezentaciju π_S.

Korolar 1.7.5. *Neka je $\mathfrak{g}$ Liejeva algebra i $\mathfrak{h}$ Liejeva podalgebra reduktivna u $\mathfrak{g}$. Tada je reprezentacija σ od $\mathfrak{h}$ na $U(\mathfrak{g})$ dobivena proširenjem operatora $ad_{\mathfrak{g}}\, y$, $y \in \mathfrak{h}$, do derivacija unitalne algebre $U(\mathfrak{g})$, tj.*

$$\sigma(y)(x_1 \cdots x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_1 \cdots x_{i-1}[y, x_i]x_{i+1} \cdots x_n, \qquad x_1, \ldots, x_n \in \mathfrak{g},$$

potpuno reducibilna i ona je direktna suma konačnodimenzionalnih ireducibilnih subreprezentacija.

Dokaz: Tvrdnja slijedi neposredno iz korolara 1.7.4. primjenom propozicije 1.2.1. budući da je reprezentacija σ Liejeve algebre $\mathfrak{h}$ upravo kvocijentna reprezentacija reprezentacije $(ad_{\mathfrak{g}}|\mathfrak{h})_T$ na tenzorskoj algebri $T(\mathfrak{g})$.

Korolar 1.7.6. *Neka su π i ρ potpuno reducibilne reprezentacije Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ na konačnodimenzionalnim vektorskim prostorima V i W. Tada je potpuno reducibilna i pripadna reprezentacija ω na prostoru linearnih operatora $L(V, W)$:*

$$[\omega(x)](A) = \rho(x)A - A\pi(x), \qquad x \in \mathfrak{g}, \quad A \in L(V, W).$$

Dokaz: Iz potpune reducibilnosti reprezentacije π slijedi potpuna reducibilnost kontragredijentne reprezentacije π^t na dualnom prostoru V^* prostora V :

$$\{[\pi^t(x)](f)\}(v) = -f(\pi(x)v), \qquad x \in \mathfrak{g}, \quad f \in V^*, \quad v \in V.$$

Naime, ako je reprezentacija π ireducibilna, onda je i njoj kontragredijentna reprezentacija π^t ireducibilna: potprostor U od V je $\pi-$invarijantan ako i samo ako je njegov anihilator $U^0 = \{f \in V^*;\ f(u) = 0\ \forall u \in U\}$ π^t-invarijantan potprostor od V^*. Nadalje, ako je reprezentacija π ekvivalentna direktnoj sumi ireducibilnih reprezentacija $\pi_1, \ldots, \pi_n$, onda je njoj kontragredijentna reprezentacija ekvivalentna direktnoj sumi ireducibilnih reprezentacija $\pi_1^t, \ldots, \pi_n^t$. Preciznije, ako su $V_1, \ldots, V_n$ $\pi-$invarijantni potprostori od V takvi da je $V = V_1 \dotplus \cdots \dotplus V_n$ i da su subreprezentacije $\pi_{V_1}, \ldots, \pi_{V_n}$ ireducibilne, onda je

$$V^* = W_1 \dotplus \cdots \dotplus W_n, \qquad \text{gdje je} \quad W_j = (V_1 \dotplus V_{j-1} \dotplus V_{j+1} \dotplus \cdots \dotplus V_n)^0\,;$$

nadalje, lako se vidi da je subreprezentacija $(\pi^t)_{W_j}$ ekvivalentna kontragredijentnoj reprezentaciji $\left(\pi_{V_j}\right)^t$ subreprezentacije π_{V_j}, dakle, ireducibilna je.

Tvrdnja slijedi iz činjenice da je kanonski izomorfizam prostora $T : V^* \otimes W \to L(V, W)$ ekvivalencija reprezentacije $\pi^t \otimes \rho$ s reprezentacijom ω. Doista, izomorfizam T određen je svojim djelovanjem na elemente oblika $f \otimes w$, $f \in V^*$, $w \in W$, a na njima je zadan sa

$$[T(f \otimes w)]v = f(v)w, \qquad v \in V.$$

Nadalje, za $f \in V^*$, $w \in W$, $v \in V$ i $x \in \mathfrak{g}$ imamo redom:

$$[T((\pi^t \otimes \rho)(x)(f \otimes w))]v = [T((\pi^t(x)f) \otimes w + f \otimes (\rho(x)w))](v) =$$
$$= [T((\pi^t(x)f) \otimes w)](v) + [T(f \otimes (\rho(x)w))](v) = (\pi^t(x)f)(v)w + f(v)\rho(x)w =$$
$$= -f(\pi(x)v)w + f(v)\rho(x)w = -f(\pi(x)v)w + \rho(x)f(v)w =$$
$$= -[T(f \otimes w)\pi(x)]v + [\rho(x)T(f \otimes w)]v = \{\omega(x)[T(f \otimes w)]\}v.$$

Zbog proizvoljnosti $v \in V$ slijedi

$$[T \circ (\pi^t \otimes \rho)(x)](f \otimes w) = [\omega(x) \circ T](f \otimes w),$$

a kako vektori oblika $f \otimes w$, $f \in V^*$, $w \in W$, razapinju tenzorski produkt $V^* \otimes W$, slijedi da je izomorfizam T preplitanje reprezentacije $\pi^t \otimes \rho$ s reprezentacijom ω. Sada tvrdnja slijedi iz korolara 1.7.3.

Korolar 1.7.7. *Neka je π potpuno reducibilna konačnodimenzionalna reprezentacija Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ i neka je $\mathfrak{h}$ ideal u $\mathfrak{g}$.*

(*a*) *Restrikcija $\pi|\mathfrak{h}$ je potpuno reducibilna.*

(*b*) *Ako je reprezentacija π ireducibilna, restrikcija $\pi|\mathfrak{h}$ je direktna suma svojih međusobno ekvivalentnih ireducibilnih subreprezentacija.*

Dokaz: (*a*) Prijelazom na kvocijent po jezgri od π dokaz se svodi na slučaj kad je reprezentacija π vjerna. Tada je po teoremu 1.6.1. Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ reduktivna i možemo uzeti da je $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \dotplus \mathfrak{g}_2$, gdje je $\mathfrak{g}_1$ centar od $\mathfrak{g}$ i $\mathfrak{g}_2 = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ je poluprost ideal. Tada je $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_1 \dotplus \mathfrak{h}_2$, $\mathfrak{h}_1 = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_1$ je centar od $\mathfrak{h}$ i $\mathfrak{h}_2 = [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_2$. Prema teoremu 1.7.2. operatori $\pi(x)$, $x \in \mathfrak{g}_1$, su poluprosti, pa su posebno svi operatori $\pi(x)$, $x \in \mathfrak{h}_1$, poluprosti. Sada ponovna primjena teorema 1.7.2. povlači da je restrikcija $\pi|\mathfrak{h}$ potpuno reducibilna reprezentacija od $\mathfrak{h}$.

(b) Pretpostavimo sada da je reprezentacija π ireducibilna. Neka je W $\pi|\mathfrak{h}-$invarijantan potprostor od V takav da je subreprezentacija $(\pi|\mathfrak{h})_W$ ireducibilna. Neka je U suma svih $\pi|\mathfrak{h}-$invarijantnih potprostora X od V takvih da je subreprezentacija $(\pi|\mathfrak{h})_X$ ekvivalentna reprezentaciji $(\pi|\mathfrak{h})_W$. Tada je U maksimalni $\pi|\mathfrak{h}-$invarijantni potprostor od V takav da je pripadna subreprezentacija $(\pi|\mathfrak{h})_U$ direktna suma njenih ireducibilnih subreprezentacija koje su sve ekvivalentne s reprezentacijom $(\pi|\mathfrak{h})_W$. Primijetimo da je $W \subseteq U$, dakle, $U \neq \{0\}$. Dokazat ćemo da je potprostor U $\pi-$invarijantan. Budući da je reprezentacija π od $\mathfrak{g}$ ireducibilna, slijedit će da je $U = V$, odnosno, tvrdnja (b) bit će dokazana.

Neka je $\varphi : V \to V/U$ kvocijentno preslikavanje. Dovoljno je dokazati da za svaki $x \in \mathfrak{g}$ i svaki $u \in U$ vrijedi $\varphi(\pi(x)u) = 0$. Budući da je potprostor U $\pi|\mathfrak{h}-$invarijantan, preslikavanje φ je preplitanje reprezentacije $\pi|\mathfrak{h}$ s kvocijentnom reprezentacijom $(\pi|\mathfrak{h})_{V/U}$. Fiksirajmo $x \in \mathfrak{g}$ i neka je $F : U \to V/U$ linearno preslikavanje definirano sa $F(u) = \varphi(\pi(x)u)$, $u \in U$. Neka je $y \in \mathfrak{h}$ i $u \in U$. Tada je

$$(\pi|\mathfrak{h})_{V/U}(y)F(u) = (\pi|\mathfrak{h})_{V/U}(y)\varphi(\pi(x)u) = \varphi(\pi(y)\pi(x)u) = \varphi(\pi(x)\pi(y)u) + \varphi(\pi([y, x])u).$$

Budući da je $[y, x] \in \mathfrak{h}$, vrijedi $\pi([y, x])u \in U$, dakle, $\varphi(\pi([y, x])u) = 0$. Dakle,

$$(\pi|\mathfrak{h})_{V/U}(y)F(u) = \varphi(\pi(x)\pi(y)u) = F(\pi(y)u), \qquad u \in U, \quad y \in \mathfrak{h}.$$

Dakle, F je preplitanje reprezentacije $(\pi|\mathfrak{h})_U$ s reprezentacijom $(\pi|\mathfrak{h})_{V/U}$. Međutim, reprezentacije $(\pi|\mathfrak{h})_U$ i $(\pi|\mathfrak{h})_{V/U}$ Liejeve algebre $\mathfrak{h}$ su potpuno reducibilne i nijedna ireducibilna subreprezentacija prve nije ekvivalentna nijednoj ireducibilnoj subreprezentaciji druge. To je moguće samo ako je $F = 0$, odnosno, $F(U) = \{0\}$. Prema tome

$$\varphi(\pi(x)u) = 0 \qquad \forall u \in U, \qquad \Longrightarrow \qquad \pi(x)u \in U \qquad \forall u \in U.$$

Budući da je element $x \in \mathfrak{g}$ bio proizvoljan, slijedi da je potprostor U stvarno $\pi-$invarijantan.

Poglavlje 2

REALNE FORME LIEJEVIH ALGEBRI

2.1 Realne forme i konjugacije

Neka je V kompleksan vektorski prostor. Podsjećamo da je **realna forma** prostora V potprostor V_0 realnog vektorskog prostora $V_{\mathbb{R}}$ takav da je $V_{\mathbb{R}} = V_0 \dot{+} i\,V_0$. Tada je kompleksan prostor V prirodno izomorfan kompleksifikaciji $(V_0)^{\mathbb{C}}$ realnog prostora V_0; izomorfizam $V \to (V_0)^{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} V_0$ dan je sa $u + iv \mapsto 1 \otimes_{\mathbb{R}} u + i \otimes_{\mathbb{R}} v$, $u, v \in V_0$.

Ako je V kompleksan vektorski prostor, svako antilinearno involutivno preslikavanje $\sigma : V \to V$ zove se **konjugacija** prostora V. Dakle, konjugacija je preslikavanje σ sa svojstvima:

$$\sigma(\alpha v + \beta w) = \overline{\alpha}\sigma(v) + \overline{\beta}\sigma(w), \quad \forall v, w \in V, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}; \qquad \sigma(\sigma(v)) = v \quad \forall v \in V.$$

Za konjugaciju σ prostora V definiramo $V^\sigma = \{v \in V;\ \sigma(v) = v\}$.

Zadatak 2.1.1. *Dokažite da je $\sigma \mapsto V^\sigma$ bijekcija sa skupa svih konjugacija kompleksnog vektorskog prostora V na skup svih realnih formi od V.*

Neka je sada W realan vektorski prostor. **Kompleksna struktura** na prostoru W je $J \in GL(W)$ takav da vrijedi $J^2 = -I_V$. U tom slučaju definiramo množenje vektora iz W kompleksnim brojevima na sljedeći način:

$$(\alpha + i\beta)w = \alpha w + \beta J w, \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad w \in W.$$

Lako se vidi da uz tako definirano množenje $\mathbb{C} \times W \to W$ postaje W kompleksan vektorski prostor. Posebno, ako je V kompleksan vektorski prostor, na realnom prostoru $V_{\mathbb{R}}$ je sa $J_0 v = iv$, $v \in V$, zadana kompleksna struktura J_0 i kompleksan vektorski prostor koji se dobije pomoću te kompleksne strukture je upravo V.

Za kompleksan vektorski prostor V definiramo tzv. **kompleksno konjugiran vektorski prostor** $\overline{V}$; taj se prostor kao skup i kao aditivna grupa podudara sa V, ali množenje $*$ s kompleksnim skalarima je zadano drugačije: $\alpha * v = \overline{\alpha} v$, $\alpha \in \mathbb{C}$, $v \in \overline{V} = V$. Ako je i W kompleksan vektorski prostor, onda je svaki linearan operator $A : V \to W$ ujedno linearan operator sa $\overline{V}$ u $\overline{W}$. Nadalje, operator $A : V \to W$ je antilinearan ako i samo je on kao operator sa V u $\overline{W}$ linearan, i ujedno ako i samo ako je on kao operator sa $\overline{V}$ u W linearan.

Promatrajmo sada odgovarajuće pojmove u kategoriji Liejevih algebri. **Realna forma** kompleksne Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ je realna forma $\mathfrak{g}_0$ vektorskog prostora $\mathfrak{g}$ takva da vrijedi $[x, y] \in \mathfrak{g}_0$ $\forall x, y \in \mathfrak{g}_0$. Tada je, naravno, $\mathfrak{g}_0$ realna Liejeva algebra. Neka je $\sigma : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ pripadna konjugacija vektorskog prostora $\mathfrak{g}$. Dakle, $\sigma : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ je jedinstvena konjugacija vektorskog prostora $\mathfrak{g}$ takva da je $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g}^\sigma = \{x \in \mathfrak{g};\ \sigma(x) = x\}$. Tada za $x, y \in \mathfrak{g}_0$ vrijedi $\sigma(x + iy) = x - iy$. Prema tome, ako su $z, w \in \mathfrak{g}$ i $z = x + iy$, $w = u + iv$, gdje su $x, y, u, v \in \mathfrak{g}_0$, tada imamo

$$\sigma([z, w]) = \sigma([x + iy, u + iv]) = \sigma\left(([x, u] - [y, v]) + i([x, v] + [y, u])\right) =$$
$$= ([x, u] - [y, v]) - i([x, v] + [y, u]) = [x - iy, u - iv] = [\sigma(z), \sigma(w)].$$

Dakle, konjugacija σ ima svojstvo $\sigma([z, w]) = [\sigma(z), \sigma(w)]\ \forall z, w \in \mathfrak{g}$. Obratno, pretpostavimo da je σ konjugacija vektorskog prostora $\mathfrak{g}$ s takvim svojstvom. Za $x, y \in \mathfrak{g}^\sigma$ tada vrijedi

$$\sigma([x, y]) = [\sigma(x), \sigma(y)] = [x, y],$$

odnosno, $[x, y] \in \mathfrak{g}^\sigma$. Drugim riječima, $\mathfrak{g}^\sigma$ je realna forma Liejeve algebre $\mathfrak{g}$. Kažemo da je $\sigma : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ **konjugacija Liejeve algebre** $\mathfrak{g}$ ako je σ konjugacija vektorskog prostora $\mathfrak{g}$ takva da je $\mathfrak{g}^\sigma$ realna forma Liejeve algebre $\mathfrak{g}$. Upravo smo vidjeli da je to ispunjeno ako i samo ako vrijedi $\sigma([z, w]) = [\sigma(z), \sigma(w)]\ \forall z, w \in \mathfrak{g}$. Naravno, $\sigma \mapsto \mathfrak{g}^\sigma$ je bijekcija sa skupa svih konjugacija Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ na skup svih realnih formi Liejeve algebre $\mathfrak{g}$.

Primijetimo da neke vrlo jednostavne kompleksne Liejeve algebre ne postoji nijedna realna forma:

Zadatak 2.1.2. *Neka je $\mathfrak{g}$ trodimenzionalan kompleksan vektorski prostor s bazom $\{x, y, z\}$.*

(*a*) *Dokažite da na $\mathfrak{g}$ postoji struktura Liejeve algebre takva da je $[x, y] = y$, $[x, z] = iz$ i $[y, z] = 0$.*

(*b*) *Dokažite da kompleksna Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ iz (a) nema nijednu realnu formu.*

Neka su sada $\mathfrak{g}$ i $\mathfrak{h}$ dvije kompleksne Liejeve algebre i neka su $\mathfrak{g}_0$ i $\mathfrak{h}_0$ njihove realne forme. Svaki homomorfizam $\varphi : \mathfrak{g}_0 \to \mathfrak{h}_0$ realnih Liejevih algebri očito se jedinstveno proširuje do homomorfizma $\Phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ kompleksnih Liejevih algebri. Naravno, $\Phi(x + iy) = \varphi(x) + i\varphi(y)$, $x, y \in \mathfrak{g}_0$. Ako je φ izomorfizam, onda je i Φ izomorfizam. Posebno, svaki $\varphi \in Aut(\mathfrak{g}_0)$ jedinstveno se proširuje do $\Phi \in Aut(\mathfrak{g})$. Tada je $\varphi \mapsto \Phi$ injektivni homomorfizam grupa, koji možemo upotrijebiti kao identifikaciju grupe $Aut(\mathfrak{g}_0)$ s podgrupom $\{\Phi \in Aut(\mathfrak{g});\ \Phi(\mathfrak{g}_0) = \mathfrak{g}_0\}$ grupe $Aut(\mathfrak{g})$.

Propozicija 2.1.1. *Neka su $\mathfrak{g}_0$ i $\mathfrak{g}_1$ realne forme kompleksne Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ i neka su σ i τ pripadne konjugacije. Tada je $\mathfrak{g}_0 \simeq \mathfrak{g}_1$ ako i samo ako postoji $\Phi \in Aut(\mathfrak{g})$ takav da je $\tau = \Phi\sigma\Phi^{-1}$.*

Dokaz: Pretpostavimo da su realne Liejeve algebre $\mathfrak{g}_0$ i $\mathfrak{g}_1$ izomorfne i neka je $\varphi : \mathfrak{g}_0 \to \mathfrak{g}_1$ izomorfizam. Prema prethodnom razmatranju φ se produljuje do izomorfizma $\Phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$, tj. do $\Phi \in Aut(\mathfrak{g})$. Promatrajmo sada antilinearna prealikavanja $\Phi\sigma, \tau\Phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$. Za $x \in \mathfrak{g}_0$ je $\sigma(x) = x$ i $\tau(\varphi(x)) = \varphi(x)$. Dakle,

$$(\Phi\sigma)(x) = \Phi(\sigma(x)) = \Phi(x) = \varphi(x) \qquad \text{i} \qquad (\tau\Phi)(x) = \tau(\Phi(x)) = \tau(\varphi(x)) = \varphi(x).$$

To pokazuje da je $(\Phi\sigma)|\mathfrak{g}_0 = (\tau\Phi)|\mathfrak{g}_0$, a kako je $\mathfrak{g} = span_{\mathbb{C}}\,\mathfrak{g}_0$, slijedi da je $\Phi\sigma = \tau\Phi$, tj. $\tau = \Phi\sigma\Phi^{-1}$.

Pretpostavimo sada da za neki $\Phi \in Aut(\mathfrak{g})$ vrijedi $\tau = \Phi\sigma\Phi^{-1}$. Definiramo sada preslikavanje $\varphi : \mathfrak{g}_0 \to \mathfrak{g}$ kao restrikciju preslikavanja Φ. Tada je preslikavanje φ linearno nad $\mathbb{R}$ i vrijedi $\varphi([x, y]) = [\varphi(x), \varphi(y)]$ za $x, y \in \mathfrak{g}_0$. Nadalje, kako je $\tau\Phi = \Phi\sigma$, za svaki $x \in \mathfrak{g}_0$ imamo

$$\tau(\varphi(x)) = \tau(\Phi(x)) = (\tau\Phi)(x) = (\Phi\sigma)(x) = \Phi(\sigma(x)) = \Phi(x) = \varphi(x).$$

To znači da je $\varphi(\mathfrak{g}_0) \subseteq \mathfrak{g}^\tau = \mathfrak{g}_1$. Ako definiramo $\psi : \mathfrak{g}_1 \to \mathfrak{g}$ kao restrikciju od Φ^{-1}, analogno se vidi da je $\psi(\mathfrak{g}_1) \subseteq \mathfrak{g}_0$. Nadalje, $\varphi\psi = 1_{\mathfrak{g}_1}$ i $\psi\varphi = 1_{\mathfrak{g}_0}$. To pokazuje da je φ izomorfizam realnih Liejevih algebri sa $\mathfrak{g}_0$ na $\mathfrak{g}_1$.

Neka je sada $\mathfrak{g}_0$ realna Liejeva algebra i neka je J kompleksna struktura na realnom vektorskom prostoru $\mathfrak{g}_0$, tj. $J \in GL(\mathfrak{g}_0)$ i $J^2 = -I_{\mathfrak{g}_0}$. Tada znamo da $\mathfrak{g}_0$ postaje kompleksan vektorski prostor uz množenje kompleksnim brojevima zadanim sa $(\alpha + i\beta)x = \alpha x + \beta Jx$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $x \in \mathfrak{g}_0$.

Zadatak 2.1.3. *Uz uvedene oznake dokažite da su sljedeća svojstva međusobno ekvivalentna:*

(a) $\mathfrak{g}_0$ *je kompleksna Liejeva algebra uz definirano množenje skalarima* $\mathbb{C} \times \mathfrak{g}_0 \to \mathfrak{g}_0$.

(b) *Vrijedi* $J[x,y] = [Jx,y]$ $\forall x,y \in \mathfrak{g}_0$.

(c) *Vrijedi* $J[x,y] = [x,Jy]$ $\forall x,y \in \mathfrak{g}_0$.

Ako je $\mathfrak{g}$ kompleksna Liejeva algebra, kompleksno konjugiran prostor $\overline{\mathfrak{g}}$ je uz jednako definiran komutator također kompleksna Liejeva algebra. U odnosu na $\mathfrak{g}$ je zovemo **kompleksno konjugirana Liejeva algebra**. Identiteta $I_{\mathfrak{g}} : \mathfrak{g} \to \overline{\mathfrak{g}}$ je antilinearan izomorfizam Liejevih algebri. Preslikavanje $\varphi : \mathfrak{g} \to \overline{\mathfrak{g}}$ je izomorfizam Liejevih algebri ako i samo ako je φ antilinearni automorfizam Liejeve algebre $\mathfrak{g}$. Posebno, ako kompleksna Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ ima realnu formu $\mathfrak{g}_0$, onda je pripadna konjugacija $x+iy \mapsto x-iy$ antilinearni automorfizam od $\mathfrak{g}$, dakle, u tom slučaju vrijedi $\mathfrak{g} \simeq \overline{\mathfrak{g}}$.

Propozicija 2.1.2. *Za kompleksnu Liejevu algebru* $\mathfrak{g}$ *vrijedi* $(\mathfrak{g}_{\mathbb{R}})^{\mathbb{C}} \simeq \mathfrak{g} \times \overline{\mathfrak{g}}$.

Dokaz: Stavimo $\mathfrak{G} = \mathfrak{g} \times \overline{\mathfrak{g}}$. Tada je $\mathfrak{G}$ kompleksna Liejeva algebra. Definiramo preslikavanje $\Sigma : \mathfrak{G} \to \mathfrak{G}$ sa $\Sigma(x,y) = (y,x)$. Preslikavanje Σ je očito aditivno. Nadalje, za $\alpha \in \mathbb{C}$ i $(x,y) \in \mathfrak{G}$ je $\alpha(x,y) = (\alpha x, \overline{\alpha} y)$, dakle,

$$\Sigma(\alpha(x,y)) = \Sigma(\alpha x, \overline{\alpha} y) = (\overline{\alpha} y, \alpha x) = \overline{\alpha}(y,x) = \overline{\alpha}\Sigma(x,y).$$

Prema tome, preslikavanje Σ je antilinearno. Očito je $\Sigma^2 = I_{\mathfrak{G}}$, dakle, Σ je konjugacija na kompleksnoj Liejevoj algebri $\mathfrak{G}$. Pripadna realna forma je

$$\mathfrak{G}^{\Sigma} = \{(x,x);\ x \in \mathfrak{g}\}.$$

Preslikavanje $x \mapsto (x,x)$ je izomorfizam realnih Liejevih algebri sa $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ na $\mathfrak{G}^{\Sigma}$. $\mathbb{C}-$linearno proširenje je izomorfizam kompleksnih Liejevih algebri sa $(\mathfrak{g}_{\mathbb{R}})^{\mathbb{C}}$ na $\mathfrak{G}$.

Katkada je koristan sljedeći pojam: **kvaternionska struktura** na kompleksnom vektorskom prostoru V je antilinearna bijekcija $J : V \to V$ takva da je $J^2 = -I_V$. Dakle, J je kompleksna struktura na realnom vektorskom prostoru $V_{\mathbb{R}}$ koja antikomutira s kompleksnom strukturom J_0 koja $V_{\mathbb{R}}$ čini kompleksnim prostorom V, tj. zadanom sa $J_0 v = iv$, $v \in V_{\mathbb{R}} = V$. Promatrajmo sada tijelo kvaterniona $\mathbb{H} = span_{\mathbb{R}}\{1,i,j,k\}$ kao desni vektorski prostor nad $\mathbb{C}$ s bazom $\{1,j\}$. Dakle, kvaternion je element oblika $q = z + jw$, $z,w \in \mathbb{C}$, uz relacije $j^2 = -1$ i $jw = \overline{w}j$ za $w \in \mathbb{C}$. Ako je J kvaternionska struktura na kompleksnom vektorskom prostoru V, onda u V možemo uvesti strukturu desnog vektorskog prostora nad tijelom $\mathbb{H}$ na sljedeći način:

$$v(z+jw) = zv + wJv, \qquad v \in V, \quad z,w \in \mathbb{C}.$$

Naravno, svaki desni kvaternionski vektorski prostor V je ujedno kompleksan vektorski prostor i sa $Jv = jv$, $v \in V$, je na kompleksnom vektorskom prostoru V zadana kvaternionska struktura J. Operator $A : V \to V$ je $\mathbb{H}-$linearan ako i samo ako je $\mathbb{C}-$linearan i vrijedi $AJ = JA$.

Propozicija 2.1.3. *Neka je* $\mathfrak{g}$ *kompleksna Liejeva algebra i* $\overline{\mathfrak{g}}$ *njoj kompleksno konjugirana Liejeva algebra.*

(a) *Killingove forme Liejevih algebri* $\mathfrak{g}$ *i* $\overline{\mathfrak{g}}$ *su kompleksno konjugirane:*

$$B_{\overline{\mathfrak{g}}}(x,y) = \overline{B_{\mathfrak{g}}(x,y)} \qquad \forall x,y \in \mathfrak{g}.$$

(*b*) *Ako je σ antilinearni automorfizam Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ (tj. σ je izomorfizam $\mathfrak{g}$ na $\overline{\mathfrak{g}}$) onda je*

$$B_{\mathfrak{g}}(\sigma(x), \sigma(y)) = \overline{B_{\mathfrak{g}}(x, y)} \qquad \forall x, y \in \mathfrak{g}.$$

Dokaz: (*a*) Ako je $\{e_1, \ldots, e_n\}$ baza od $\mathfrak{g}$, to je ujedno baza od $\overline{\mathfrak{g}}$. Linearan operator $A : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ je ujedno linearan operator sa $\overline{\mathfrak{g}}$ u $\overline{\mathfrak{g}}$, a matrice tih dvaju linearnih operatora u istoj bazi su međusobno kompleksno konjugirane. To posebno vrijedi za linearan operator $(ad\, x)(ad\, y)$, $x, y \in \mathfrak{g}$, pa tvrdnja slijedi.

(*b*) Budući da je $\sigma : \mathfrak{g} \to \overline{\mathfrak{g}}$ izomorfizam Liejevih algebri, pomoću (*a*) za $x, y \in \mathfrak{g}$ nalazimo

$$B_{\mathfrak{g}}(x, y) = B_{\overline{\mathfrak{g}}}(\sigma(x), \sigma(y)) = \overline{B_{\mathfrak{g}}(\sigma(x), \sigma(y))} \qquad \Longrightarrow \qquad B_{\mathfrak{g}}(\sigma(x), \sigma(y)) = \overline{B_{\mathfrak{g}}(x, y)}.$$

Promatrajmo sada kompleksnu Liejevu algebru $\mathfrak{g}$ koja ima bar jednu realnu formu i fiksirajmo jednu konjugaciju τ od $\mathfrak{g}$. Ako je i σ konjugacija od $\mathfrak{g}$, onda je produkt $\sigma\tau$ $\mathbb{C}-$linearan operator na $\mathfrak{g}$, dakle, $\sigma\tau \in Aut(\mathfrak{g})$. Na taj način dolazimo do injekcije $\sigma \mapsto \sigma\tau$ sa skupa svih konjugacija Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ u grupu automorfizama $Aut(\mathfrak{g})$ od $\mathfrak{g}$. Odredimo sliku te bijekcije.

Ako je $\vartheta = \sigma\tau$, onda je $\tau\vartheta\tau = \tau\sigma\tau^2 = \tau\sigma = (\sigma\tau)^{-1} = \vartheta^{-1}$. Obratno, pretpostavimo da je $\vartheta \in Aut(\mathfrak{g})$ takav da je $\tau\vartheta\tau = \vartheta^{-1}$. Stavimo $\sigma = \vartheta\tau$. Tada je σ antilinearna bijekcija sa $\mathfrak{g}$ na $\mathfrak{g}$ i za $x, y \in \mathfrak{g}$ vrijedi $\sigma([x, y]) = [\sigma(x), \sigma(y)]$. Nadalje, $\sigma^2 = \vartheta\tau\vartheta\tau = \vartheta\vartheta^{-1} = I_{\mathfrak{g}}$. Dakle, σ je konjugacija Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ i vrijedi $\vartheta = \vartheta\tau^2 = \vartheta\tau\tau = \sigma\tau$.

Time smo dokazali da je $\sigma \mapsto \sigma\tau$ bijekcija sa skupa svih konjugacija Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ na skup $\{\vartheta \in Aut(\mathfrak{g});\ \tau\vartheta\tau = \vartheta^{-1}\}$.

Za konjugaciju σ stavimo $\vartheta = \sigma\tau$. Tada je $\vartheta^{-1} = \tau\sigma$, dakle, automorfizam ϑ involutivan ako i samo ako je $\sigma\tau = \tau\sigma$. To je ispunjeno ako i samo ako je $\tau(\mathfrak{g}^\sigma) = \mathfrak{g}^\sigma$. U tom slučaju i $\vartheta\sigma = \sigma\vartheta$, pa vrijedi i $\vartheta(\mathfrak{g}^\sigma) = \mathfrak{g}^\sigma$. No očito vrijedi i obrat: ako je $\vartheta(\mathfrak{g}^\sigma) = \mathfrak{g}^\sigma$, onda je $\tau(\mathfrak{g}^\sigma) = \tau(\sigma(\mathfrak{g}^\sigma)) = \vartheta(\mathfrak{g}^\sigma) = \mathfrak{g}^\sigma$.

Neka je sada σ konjugacija od $\mathfrak{g}$ i neka je $\varphi \in Aut(\mathfrak{g})$. Tada je i $\varphi\sigma\varphi^{-1}$ konjugacija od $\mathfrak{g}$. Stavimo $\vartheta = \sigma\tau$ i $\vartheta' = \varphi\sigma\varphi^{-1}\tau$. Tada je $\sigma = \vartheta\tau$, pa imamo

$$\vartheta' = \varphi\sigma\varphi^{-1}\tau = \varphi\vartheta\tau\varphi^{-1}\tau = \varphi\vartheta(\tau\varphi\tau)^{-1}.$$

Time smo dokazali:

Propozicija 2.1.4. *Neka je τ konjugacija kompleksne Liejeve algebre $\mathfrak{g}$. Za konjugaciju σ od $\mathfrak{g}$ stavimo $\Theta(\sigma) = \sigma\tau$.*

(*a*) *Θ je bijekcija sa skupa svih konjugacija Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ na skup $\{\vartheta \in Aut(\mathfrak{g});\ \tau\vartheta\tau = \vartheta^{-1}\}$.*

(*b*) *Za konjugaciju σ od $\mathfrak{g}$ i za $\vartheta = \Theta(\sigma) = \sigma\tau$ sljedeća su četiri svojstva međusobno ekvivalentna:*

(1) $\vartheta^2 = I_{\mathfrak{g}}$.

(2) $\sigma\tau = \tau\sigma$.

(3) $\tau(\mathfrak{g}^\sigma) = \mathfrak{g}^\sigma$.

(4) $\vartheta(\mathfrak{g}^\sigma) = \mathfrak{g}^\sigma$.

(*c*) *Neka je σ konjugacija Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ i $\varphi \in Aut(\mathfrak{g})$. Tada je*

$$\Theta\left(\varphi\sigma\varphi^{-1}\right) = \varphi\Theta(\sigma)(\tau\varphi\tau)^{-1}.$$

Ako je $\mathfrak{g}_0$ realna forma kompleksne Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ tada je očito Killingova forma od $\mathfrak{g}_0$ jednaka restrikciji Killingove forme od $\mathfrak{g}$: $B_{\mathfrak{g}_0} = B_{\mathfrak{g}}|\mathfrak{g}_0 \times \mathfrak{g}_0$. Posebno, kao što smo već istaknuli, Liejeva algebra $\mathfrak{g}_0$ je poluprosta ako i samo ako je $\mathfrak{g}$ poluprosta. Razmotrimo sada proste Liejeve algebre.

Teorem 2.1.5. *(a) Neka je $\mathfrak{g}$ kompleksna prosta Liejeva algebra. Tada je realna Liejeva algebra $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ prosta i svaka realna forma od $\mathfrak{g}$ je realna prosta Liejeva algebra.*

(b) Neka je $\mathfrak{g}_0$ realna prosta Liejeva algebra. Tada je $\mathfrak{g}_0 \simeq \mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ za neku kompleksnu prostu Liejevu algebru ili je $\mathfrak{g}_0$ izomorfna realnoj formi neke kompleksne proste Liejeve algebre.

Dokaz: (a) Neka je $\mathfrak{g}_0$ realna forma kompleksne proste Liejeve algebre $\mathfrak{g}$. Pretpostavimo da je $\mathfrak{c} \neq \{0\}$ ideal u $\mathfrak{g}_0$. Tada je $\mathfrak{c} + i\mathfrak{c}$ ideal u $\mathfrak{g}$ različit od $\{0\}$, a kako je $\mathfrak{g}$ prosta, dobivamo da je nužno $\mathfrak{c} + i\mathfrak{c} = \mathfrak{g}$. Odatle slijedi da je $\mathfrak{c} = \mathfrak{g}_0$. Dakle, realna forma kompleksne proste Liejeve algebre je prosta.

Neka je sada $\mathfrak{c} \neq \{0\}$ ideal u realnoj Liejevoj algebri $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$. Tada je i $i\mathfrak{c}$ ideal u $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$, pa su i $\mathfrak{c} + i\mathfrak{c}$ i $\mathfrak{c} \cap i\mathfrak{c}$ ideali u $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$. Međutim, $\mathfrak{c} + i\mathfrak{c}$ i $\mathfrak{c} \cap i\mathfrak{c}$ su potprostori kompleksnog prostora $\mathfrak{g}$, dakle, to su ideali u Liejevoj algebri $\mathfrak{g}$. Stoga je $\mathfrak{c} + i\mathfrak{c} = \mathfrak{g}$. Promatrajmo sada ideal $\mathfrak{c} \cap i\mathfrak{c}$. Pretpostavimo najprije da je $\mathfrak{c} \cap i\mathfrak{c} = \{0\}$. Tada je i $[\mathfrak{c}, i\mathfrak{c}] = \{0\}$, dakle, $[\mathfrak{c}, \mathfrak{c}] = \{0\}$. Prema tome, ideal $\mathfrak{c}$ je komutativan. Odatle slijedi da je Liejeva algebra $\mathfrak{g} = \mathfrak{c} + i\mathfrak{c}$ komutativna, suprotno pretpostavci da je $\mathfrak{g}$ prosta. Ova kontradikcija pokazuje da nije moguće da bude $\mathfrak{c} \cap i\mathfrak{c} = \{0\}$. Prema tome, vrijedi $\mathfrak{c} \cap i\mathfrak{c} = \mathfrak{g}$. Odatle je $\mathfrak{c} = \mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$. Tako smo dokazali da je realna Liejeva algebra $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ prosta.

(b) Neka je sada $\mathfrak{g}_0$ realna prosta Liejeva algebra i $\mathfrak{h} = (\mathfrak{g}_0)^{\mathbb{C}} = \mathfrak{g}_0 \dot{+} i\mathfrak{g}_0$ njena kompleksifikacija. Ako je kompleksna Liejeva algebra $\mathfrak{h}$ prosta, onda je $\mathfrak{g}_0$ realna forma kompleksne proste Liejeve algebre. Pretpostavimo sada da kompleksna Liejeva algebra $\mathfrak{h}$ nije prosta. Neka je $\mathfrak{c}$ ideal u kompleksnoj Liejevoj algebri $\mathfrak{h}$ različit od $\{0\}$ i od $\mathfrak{h}$. Označimo sa $z \mapsto \overline{z}$ konjugaciju od $\mathfrak{h}$ pridruženu realnoj formi $\mathfrak{g}_0 : \overline{x + iy} = x - iy$, $x, y \in \mathfrak{g}_0$. Tada je $\overline{\mathfrak{c}}$ ideal u $\mathfrak{h}$, pa su i $\mathfrak{a} = \mathfrak{c} + \overline{\mathfrak{c}}$ i $\mathfrak{b} = \mathfrak{c} \cap \overline{\mathfrak{c}}$ ideali u $\mathfrak{h}$. Budući da vrijedi $\mathfrak{a} = \overline{\mathfrak{a}}$ i $\mathfrak{b} = \overline{\mathfrak{b}}$, imamo

$$\mathfrak{a} = span_{\mathbb{C}}(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{g}_0) = (\mathfrak{a} \cap \mathfrak{g}_0) + i(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{g}_0) \qquad \text{i} \qquad \mathfrak{b} = span_{\mathbb{C}}(\mathfrak{b} \cap \mathfrak{g}_0) = (\mathfrak{b} \cap \mathfrak{g}_0) + i(\mathfrak{b} \cap \mathfrak{g}_0).$$

Budući da je po pretpostavci realna Liejeva algebra $\mathfrak{g}_0$ prosta, slijedi da je $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g}_0$ i $\mathfrak{b} \cap \mathfrak{g}_0 = \{0\}$. Odatle slijedi da je $\mathfrak{g}_0 \subseteq \mathfrak{a}$, dakle, $\mathfrak{h} = \mathfrak{a}$ i $\mathfrak{b} = \{0\}$. Prema tome, $\mathfrak{h} = \mathfrak{c} \dot{+} \overline{\mathfrak{c}}$. Definiramo sada preslikavanje $A : \mathfrak{h} \to \mathfrak{h}$ sa

$$A(x + \overline{y}) = ix - i\overline{y} = ix + \overline{iy}, \qquad x, y \in \mathfrak{c}.$$

Za $x, y \in \mathfrak{c}$ tada imamo $ix, iy \in \mathfrak{c}$ pa je

$$A^2(x + \overline{y}) = A(ix + \overline{iy}) = i(ix) - i(\overline{iy}) = -x - \overline{y}.$$

Dakle, vrijedi $A^2 = -I_{\mathfrak{h}}$.

Dokazat ćemo sada da je $A(\mathfrak{g}_0) \subseteq \mathfrak{g}_0$. Doista, neka je $z \in \mathfrak{g}_0$. To znači da je $z \in \mathfrak{h}$ i $z = \overline{z}$. Pišemo li z u obliku $z = x + \overline{y}$, gdje su $x, y \in \mathfrak{c}$, imamo

$$x + \overline{y} = z = \overline{z} = \overline{x} + y,$$

pa slijedi

$$x - y = \overline{x} - \overline{y} = \overline{x - y} \in \mathfrak{c} \cap \overline{\mathfrak{c}} = \{0\},$$

dakle, $x = y$. Prema tome svaki $z \in \mathfrak{g}_0$ ima oblik $z = x + \overline{x}$ za jedinstven $x \in \mathfrak{c}$. No tada je $A(z) = ix + \overline{ix} \in \mathfrak{g}_0$.

Neka je sada preslikavanje $J : \mathfrak{g}_0 \to \mathfrak{g}_0$ definirano kao restrikcija $A|\mathfrak{g}_0$. Dakle,

$$J(x + \overline{x}) = ix + \overline{ix} = ix - i\overline{x}, \qquad x \in \mathfrak{c}.$$

Tada je $J^2 = -I_{\mathfrak{g}_0}$, dakle, J je kompleksna struktura na realnom vektorskom prostoru $\mathfrak{g}_0$. Dokažimo da je J kompleksna struktura na realnoj Liejevoj algebri $\mathfrak{g}_0$. Doista, ako su $z, w \in \mathfrak{g}_0$ i ako su

$x, y \in \mathfrak{c}$ jedinstveni takvi da je $z = x + \overline{x}$ i $w = y + \overline{y}$, tada je $[x, \overline{y}] \in [\mathfrak{c}, \overline{\mathfrak{c}}] \subseteq \mathfrak{c} \cap \overline{\mathfrak{c}} = \{0\}$, dakle, $[x, \overline{y}] = 0$. Analogno je i $[\overline{x}, y] = \{0\}$. Prema tome,

$$[z, w] = [x + \overline{x}, y + \overline{y}] = [x, y] + [\overline{x}, \overline{y}] = [x, y] + \overline{[x, y]}.$$

Stoga je

$$J[z, w] = i[x, y] + \overline{i[x, y]} = [ix, y] + \overline{[ix, y]} = [ix, y] + [\overline{ix}, \overline{y}] = [ix + \overline{ix}, y + \overline{y}] = [Jz, w].$$

Prema zadatku 2.1.3. J je kompleksna struktura na realnoj Liejevoj algebri $\mathfrak{g}_0$. Označimo li pripadnu kompleksnu Liejevu algebru sa $\mathfrak{g}$, imamo $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g}_\mathbb{R}$.

Realna poluprosta Liejeva algebra $\mathfrak{g}_0$ zove se **rascjepiva** (ili **split**) ako za neku njenu Cartanovu podalgebru $\mathfrak{h}_0$ vrijedi

$$\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{h}_0 \dotplus \sum_{\alpha \in (\mathfrak{h}_0)^* \setminus \{0\}} \dotplus \, (\mathfrak{g}_0)_\alpha\,, \qquad (\mathfrak{g}_0)_\alpha = \{x \in \mathfrak{g}_0;\ [h, x] = \alpha(h)x \ \forall h \in \mathfrak{h}_0\}.$$

Naravno, tada je

$$R\,(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{h}_0) = \{\alpha \in (\mathfrak{h}_0)^*\,;\ \alpha \neq 0,\ (\mathfrak{g}_0)_\alpha \neq \{0\}\}$$

sistem korijena u realnom prostoru $(\mathfrak{h}_0)^*$. Ako je $\mathfrak{g}$ kompleksifikacija od $\mathfrak{g}_0$, onda je kompleksifikacija $\mathfrak{h}$ od $\mathfrak{h}_0$ Cartanova podalgebra od $\mathfrak{g}$ i za sistem korijena $R = R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ vrijedi

$$R\,(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{h}_0) = \{\alpha|\mathfrak{h}_0;\ \alpha \in R\} \qquad \text{i} \qquad \mathfrak{h}(\mathbb{R}) = \{h \in \mathfrak{h};\ \alpha(h) \in \mathbb{R}\ \forall \alpha \in R\} = \mathfrak{h}_0.$$

Primjer rascjepive realne proste Liejeve algebre je $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$.

Teorem 2.1.6. *Svaka kompleksna poluprosta Liejeva algebra ima rascjepivu realnu formu.*

Dokaz: Neka je $\mathfrak{g}$ kompleksna poluprosta Liejeva algebra i $\mathfrak{h}$ njena Cartanova podalgebra. Tada je $\mathfrak{h}$, ili preciznije $\overline{\mathfrak{h}}$, ujedno Cartanova podalgebra kompleksno konjugirane algebre $\overline{\mathfrak{g}}$. Neka je $R = R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ sistem korijena od $\mathfrak{g}$ u odnosu na $\mathfrak{h}$ i $\overline{R} = R\left(\overline{\mathfrak{g}}, \overline{\mathfrak{h}}\right)$ sistem korijena od $\overline{\mathfrak{g}}$ u odnosu na $\overline{\mathfrak{h}}$. Imamo korijenske rastave

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \dotplus \sum_{\alpha \in R} \dotplus\, \mathfrak{g}_\alpha \qquad \text{i} \qquad \overline{\mathfrak{g}} = \overline{\mathfrak{h}} \dotplus \sum_{\beta \in \overline{R}} \dotplus\, \overline{\mathfrak{g}}_\beta.$$

Pri tome je

$$\mathfrak{g}_\alpha = \{x \in \mathfrak{g};\ [h, x] = \alpha(h)x\ \forall h \in \mathfrak{h}\} \quad \text{za} \quad \alpha \in R$$

i

$$\overline{\mathfrak{g}}_\beta = \{x \in \mathfrak{g};\ [h, x] = \overline{\beta(h)}x\ \forall h \in \mathfrak{h}\} \quad \text{za} \quad \beta \in \overline{R};$$

u posljednjem izrazu imamo znak kompleksnog konjugiranja u skladu s definicijom množenja skalarima na Liejevoj algebri $\overline{\mathfrak{g}}$, odnosno, na $\overline{\mathfrak{h}}$. Odatle se vidi da je $\overline{R} = \{\overline{\alpha};\ \alpha \in R\}$ i za $\alpha \in R$ je $\overline{\mathfrak{g}}_{\overline{\alpha}} = \mathfrak{g}_\alpha$. Pri tome je $\overline{\alpha} : \mathfrak{h} \to \mathbb{C}$ funkcional definiran sa $\overline{\alpha}(h) = \overline{\alpha(h)}$; naravno, to je antilinearan funkcional na $\mathfrak{h}$, dakle, linearan funkcional na $\overline{\mathfrak{h}}$. Dakle, sistem korijena $\overline{R}$ određuje istu realnu formu $\mathfrak{h}(\mathbb{R})$ od $\overline{\mathfrak{h}} = \mathfrak{h}$ kao i sistem korijena R :

$$\mathfrak{h}(\mathbb{R}) = \{h \in \mathfrak{h};\ \alpha(h) \in \mathbb{R}\ \forall \alpha \in R\} = \{h \in \mathfrak{h};\ \beta(h) \in \mathbb{R}\ \forall \beta \in \overline{R}\}.$$

Nadalje, vrijedi $\alpha|\mathfrak{h}(\mathbb{R}) = \overline{\alpha}|\mathfrak{h}(\mathbb{R})\ \forall \alpha \in R$. Identificiramo li korijene iz R i iz $\overline{R}$ s njihovim restrikcijama na $\mathfrak{h}(\mathbb{R})$, dobivamo $\overline{R} = R$ i $\overline{\alpha} = \alpha\ \forall \alpha \in R$. Prema tvrdnji (a) propozicije 2.1.3. Killingove forme $B_{\mathfrak{g}}$ i $B_{\overline{\mathfrak{g}}}$ induciraju isti skalarni produkt na realnom prostoru $\mathfrak{h}(\mathbb{R})$, dakle i na $\mathfrak{h}^*(\mathbb{R}) = \mathfrak{h}(\mathbb{R})^*$. Neka je sada $B = \{\alpha_1, \dots, \alpha_\ell\}$ baza sistema korijena $R = \overline{R}$ i izaberimo $e_i \in \mathfrak{g}_{\alpha_i} = \overline{\mathfrak{g}}_{\overline{\alpha}_i}$, $f_i \in \mathfrak{g}_{-\alpha_i} = \overline{\mathfrak{g}}_{-\overline{\alpha}_i}$, $h_i \in [\mathfrak{g}_{\alpha_i}, \mathfrak{g}_{-\alpha_i}] = [\overline{\mathfrak{g}}_{\overline{\alpha}_i}, \overline{\mathfrak{g}}_{-\overline{\alpha}_i}]$ tako da bude $[e_i, f_i] = h_i$ i $\alpha_i(h_i) = \overline{\alpha}_i(h_i) = 2$ za $i = 1, \dots, \ell$. Prema teoremu 1.3.28. postoji jedinstven izomorfizam $\sigma : \mathfrak{g} \to \overline{\mathfrak{g}}$ takav da je

$$\sigma(h_i) = h_i, \qquad \sigma(e_i) = e_i, \qquad \sigma(f_i) = f_i, \qquad i = 1, \dots, \ell.$$

Tada je σ^2 automorfizam od $\mathfrak{g}$ koji ostavlja fiksnim generatore h_i, e_i, f_i Liejeve algebre $\mathfrak{g}$, pa slijedi da je $\sigma^2 = I_{\mathfrak{g}}$. Prema tome, σ je konjugacija Liejeve algebre $\mathfrak{g}$. Tada su e_i, f_i, h_i sadržani u pripadnoj realnoj formi $\mathfrak{g}^\sigma$. Nadalje, za svaki $\alpha \in R$ je $(\mathfrak{g}_\alpha)_{\mathbb{R}} = \mathfrak{g}_\alpha \cap \mathfrak{g}^\sigma \dotplus i\,(\mathfrak{g}_\alpha \cap \mathfrak{g}^\sigma)$, pa imamo

$$\mathfrak{g}^\sigma = \mathfrak{h}(\mathbb{R}) \dotplus \sum_{\alpha \in R} \dotplus\ (\mathfrak{g}^\sigma)_\alpha\,, \qquad \text{gdje je} \quad (\mathfrak{g}^\sigma)_\alpha = \mathfrak{g}_\alpha \cap \mathfrak{g}^\sigma = \{x \in \mathfrak{g}^\sigma;\ [h, x] = \alpha(h)\ \forall h \in \mathfrak{h}(\mathbb{R})\}.$$

Primjer 1. $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ je realna forma kompleksne Liejeve algebre $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$. Pripadna konjugacija je

$$\sigma : A = [\alpha_{ij}]_{i,j=1}^n \mapsto \overline{A} = [\overline{\alpha}_{ij}]_{i,j=1}^n.$$

Restrikcija $\sigma|\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ je konjugacija od $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ i pripadna realna forma je $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$.

Primjer 2. Neka su $p, q \in \mathbb{Z}_+$ takvi da je $p + q = n$ i neka je $H_{p,q}$ hermitska nedegenerirana forma na $M_{n,1}(\mathbb{C})$ zadana sa

$$H_{p,q}(z, w) = z_1\overline{w}_1 + \cdots + z_p\overline{w}_p - z_{p+1}\overline{w}_{p+1} - \cdots - z_n\overline{w}_n, \qquad z, w \in M_{n,1}(\mathbb{C}).$$

Tada je

$$\mathfrak{u}(p, q) = \{A \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C});\ H_{p,q}(Az, w) + H_{p,q}(z, Aw) = 0\ \ \forall z, w \in M_{n,1}(\mathbb{C})\}$$

realna Liejeva algebra. Vrijedi

$$\mathfrak{u}(p, q) = \{A \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C});\ AI_{p,q} + I_{p,q}A^* = 0\}\,, \qquad I_{p,q} = \begin{bmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_q \end{bmatrix},$$

gdje A^* označava adjungiranu matricu od A, tj. kompleksno konjugiranu od transponirane. Naravno, $\mathfrak{u}(0, n) = \mathfrak{u}(n, 0) = \mathfrak{u}(n)$ je Liejeva algebra svih kvadratnih antihermitskih matrica $n-$tog reda. Realna Liejeva algebra $\mathfrak{u}(p, q)$ je realna forma kompleksne Liejeve algebre $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ i pripadna konjugacija σ je

$$\sigma(A) = -I_{p,q}A^*I_{p,q}, \qquad A \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}).$$

Nadalje, restrikcija $\sigma|\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ je konjugacija kompleksne Liejeve algebre $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ i pripadna realna forma je $\mathfrak{su}(p, q) = \mathfrak{u}(p, q) \cap \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$.

Primjer 3. Pretpostavimo sada da je $n = 2m$ paran prirodan broj. Preslikavanje

$$M_{m,1}(\mathbb{H}) \ni q = \begin{bmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 + jw_1 \\ \vdots \\ z_m + jw_m \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_m \\ w_1 \\ \vdots \\ w_m \end{bmatrix} \in M_{n,1}(\mathbb{C})$$

je izomorfizam desnih vektorskih prostora nad $\mathbb{C}$. Pomoću tog izomorfizma identificirat ćemo $M_{m,1}(\mathbb{H})$ sa $M_{n,1}(\mathbb{C})$. To je ujedno desni vektorski prostor nad tijelom kvaterniona $\mathbb{H}$ i pripadna kvaternionska struktura J na kompleksnom vektorskom prostoru $M_{n,1}(\mathbb{C})$ je dana desnim množenjem $q \mapsto qj$ na $M_{m,1}(\mathbb{H})$. Tada je

$$J \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_m \\ w_1 \\ \vdots \\ w_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\overline{w}_1 \\ \vdots \\ -\overline{w}_m \\ \overline{z}_1 \\ \vdots \\ \overline{z}_m \end{bmatrix}$$

ili

$$J(v) = S_m \overline{v}, \quad v \in M_{n,1}(\mathbb{C}), \qquad \text{gdje je} \quad S_m = \begin{bmatrix} 0 & -I_m \\ I_m & 0 \end{bmatrix}.$$

Skup kvaternionskih $m \times m$ matrica $\mathfrak{gl}_(m, \mathbb{H})$ je realna Liejeva algebra i ona se može identificirati sa realnom Liejevom podalgebrom $\{A \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C});\ AJ = JA\}$ od $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$. Definiramo li $\sigma : \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) \to \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ sa

$$\sigma(A) = JXJ^{-1} = -S_m \overline{A} S_m, \qquad A \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}),$$

lako se vidi da je σ konjugacija kompleksne Liejeve algebre $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ i pripadna realna forma je upravo $\mathfrak{gl}(m, \mathbb{H})$:

$$\mathfrak{gl}(m, \mathbb{H}) = \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})^\sigma = \left\{ \begin{bmatrix} B & C \\ -\overline{C} & \overline{B} \end{bmatrix};\ B, C \in \mathfrak{gl}(m, \mathbb{C}) \right\}.$$

Restrikcija $\sigma | \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ je konjugacija proste Liejeve algebre $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ i pripadna realna forma je

$$\mathfrak{sl}(m, \mathbb{H}) = \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})^\sigma = \left\{ \begin{bmatrix} B & C \\ -\overline{C} & \overline{B} \end{bmatrix};\ B, C \in \mathfrak{gl}(m, \mathbb{C}),\ \mathrm{Re}\,\mathrm{Tr}\, B = 0 \right\}.$$

2.2 Kompaktne Liejeve algebre

Kompaktna Liejeva algebra je realna Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ na kojoj postoji skalarni produkt $(\cdot|\cdot)$ u odnosu na koji su svi operatori $ad_{\mathfrak{g}}\, x$, $x \in \mathfrak{g}$, antihermitski:

$$((ad\, x)y|z) + (y|(ad\, x)z) = 0 \qquad \forall x, y, z \in \mathfrak{g}.$$

Teorem 2.2.1. *Neka je $\mathfrak{g}$ realna Liejeva algebra.*

(*a*) *Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ je kompaktna ako i samo ako je $\mathfrak{g}$ reduktivna i njena Killingova forma $B_{\mathfrak{g}}$ je negativno semidefinitna.*

(*b*) *Ako je $\mathfrak{g}$ poluprosta, ona je kompaktna ako i samo ako je $Aut(\mathfrak{g})$ kompaktna podgrupa od $GL(\mathfrak{g})$.*

Dokaz: (*a*) Pretpostavimo da je Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ kompaktna i neka je $(\cdot|\cdot)$ skalarni produkt na $\mathfrak{g}$ u odnosu na koji su svi operatori $ad\, x$, $x \in \mathfrak{g}$, antihermitski. Neka je $\mathfrak{h}$ $ad-$invarijantan potprostor od $\mathfrak{g}$. Tada je i njegov ortogonalni komplement $\mathfrak{h}^{\perp}$ u unitarnom potprostoru $ad-$invarijantan. To pokazuje da je reprezentacija ad potpuno reducibilna, odnosno, Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ je reduktivna.

Neka je $x \in \mathfrak{g}$. Operator $ad\, x$ je antihermitski pa je njegov kvadrat $(ad\, x)^2$ hermitski. Nadalje, taj je operator na unitarnom prostoru $\mathfrak{g}$ negativno semidefinitan. Naime, za $y \in \mathfrak{g}$ imamo

$$\left((ad\, x)^2 y|y\right) = -\left((ad\, x)y|(ad\, x)y\right) \leq 0.$$

To znači da postoji ortonormirana baza $\{e_1, \ldots, e_n\}$ sastavljena od svojstvenih vektora operatora $(ad\, x)^2$ sa svojstvenim vrijednostima $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \langle -\infty, 0]$. Stoga je

$$B_{\mathfrak{g}}(x, x) = Tr\,(ad\, x)^2 = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n \leq 0.$$

Obratno, pretpostavimo da je Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ reduktivna i da je njena Killingova forma $B_{\mathfrak{g}}$ negativno semidefinitna. Tada je $\mathfrak{g} = Z(\mathfrak{g}) \dot{+} [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ i Liejeva algebra $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ je poluprosta. Nadalje, $B_{[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]}$ je restrikcija od $B_{\mathfrak{g}}$ na $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \times [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, pa je i $B_{[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]}$ negativno semidefinitna. Međutim, kako je $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ poluprosta, njena je Killingova forma nedegenerirana. Prema tome, simetrična forma $B_{[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]}$ je negativno definitna. Tada je sa $(x|y) = -B_{\mathfrak{g}}(x, y)$, $x, y \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, zadan skalarni produkt na $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$. Operatori $(ad\, x)|[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, $x \in \mathfrak{g}$, su svi antihermitski, jer je Killingova forma invarijantna:

$$((ad\, x)y|z) = -B_{\mathfrak{g}}([x, y], z) = B_{\mathfrak{g}}([y, x], z) = B_{\mathfrak{g}}(y, [x, z]) = -(y|(ad\, x)z).$$

Sada možemo proširiti skalarni produkt sa $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ na $\mathfrak{g} = Z(\mathfrak{g}) \dot{+} [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ tako da bude $Z(\mathfrak{g}) \perp [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$. Budući da su za svaki $x \in \mathfrak{g}$ potprostori $Z(\mathfrak{g})$ i $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ invarijantni s obzirom na operator $ad\, x$ i $(ad\, x)|Z(\mathfrak{g}) = 0$, slijedi da je operator $ad\, x$ antihermistki $\forall x \in \mathfrak{g}$.

(*b*) Pretpostavimo da je $\mathfrak{g}$ kompaktna poluprosta Liejeva algebra. Tada je prema (*a*) njena Killingova forma $B_{\mathfrak{g}}$ negativno definitna, pa je sa

$$(x|y) = -B_{\mathfrak{g}}(x, y), \qquad x, y \in \mathfrak{g},$$

zadan skalarni produkt na $\mathfrak{g}$. Taj je skalarni produkt invarijantan u odnosu na sve automorfizme od $\mathfrak{g}$. To znači da su svi automorfizmi od $\mathfrak{g}$ ortogonalni operatori na $\mathfrak{g}$. Prema tome, zatvorena podgrupa $Aut(\mathfrak{g})$ od $GL(\mathfrak{g})$ sadržana je u ortogonalnoj grupi $O(\mathfrak{g})$. Kako je ortogonalna grupa $O(\mathfrak{g})$ kompaktna i njena zatvorena podgrupa $Aut(\mathfrak{g})$ je kompaktna grupa.

Pretpostavimo sada da je grupa $Aut(\mathfrak{g})$ kompaktna. Tada na $\mathfrak{g}$ postoji $Aut(\mathfrak{g})-$invarijantan skalarni produkt $(\cdot|\cdot)$. Ta činjenica slijedi korištenjem Haarove mjere μ na kompaktnoj grupi

$Aut(\mathfrak{g})$. Naime, ako je $\langle\,\cdot\,|\,\cdot\,\rangle$ bilo koji skalarni produkt na realnom vektorskom prostoru $\mathfrak{g}$ onda je sa

$$(x|y) = \int_{Aut(\mathfrak{g})} \langle Ax|Ay\rangle \mathrm{d}\mu(A), \qquad x, y \in \mathfrak{g},$$

zadan skalarni produkt na $\mathfrak{g}$ koji je $Aut(\mathfrak{g})-$invarijantan: za $B \in Aut(\mathfrak{g})$ i za $x, y \in \mathfrak{g}$ zbog invarijantnosti mjere μ imamo

$$(Bx|By) = \int_{Aut(\mathfrak{g})} \langle ABx|ABy\rangle \mathrm{d}\mu(A) = \int_{Aut(\mathfrak{g})} \langle Ax|Ay\rangle \mathrm{d}\mu(A) = (x|y).$$

Za $x \in \mathfrak{g}$ je $\mathrm{e}^{t\,ad\,x} \in Aut(\mathfrak{g})$ za svaki $t \in \mathbb{R}$. Stoga za $y, z \in \mathfrak{g}$ vrijedi

$$\left(\mathrm{e}^{t\,ad\,x}y|\mathrm{e}^{t\,ad\,x}z\right) = (y|z) \qquad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Budući da je $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{e}^{t\,ad\,x} = (ad\,x)\mathrm{e}^{t\,ad\,x}$, slijedi

$$0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\mathrm{e}^{t\,ad\,x}y|\mathrm{e}^{t\,ad\,x}z\right) = \left((ad\,x)\mathrm{e}^{t\,ad\,x}y|\mathrm{e}^{t\,ad\,x}z\right) + \left(\mathrm{e}^{t\,ad\,x}y|(ad\,x)\mathrm{e}^{t\,ad\,x}z\right) \qquad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Uvrstimo li $t = 0$ dobivamo $((ad\,x)y|z) + (y|(ad\,x)z) = 0\ \forall x, y, z \in \mathfrak{g}$, odnosno, svi operatori $ad\,x$, $x \in \mathfrak{g}$, su antihermitski. Dakle, Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ je kompaktna.

Ako je σ bilo koja konjugacija Liejeve algebre $\mathfrak{g}$, definiramo preslikavanje $H_\sigma : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathbb{C}$ ovako:

$$H_\sigma(x, y) = -B_{\mathfrak{g}}(x, \sigma(y)), \qquad x, y \in \mathfrak{g}. \tag{2.1}$$

To je seskvilinearna forma na $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$.

Propozicija 2.2.2. *Neka je $\mathfrak{g}$ kompleksna Liejeva algebra, σ konjugacija od $\mathfrak{g}$ i H_σ seskvilinearna forma na $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ definirana formulom* (2.1).

(*a*) *H_σ je hermitska forma na $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ i $H_\sigma|\mathfrak{g}^\sigma \times \mathfrak{g}^\sigma = -B_{\mathfrak{g}}|\mathfrak{g}^\sigma \times \mathfrak{g}^\sigma = -B_{\mathfrak{g}^\sigma}$.*

(*b*) *Ako je $\omega \in Aut(\mathfrak{g})$ takav da je $\omega\sigma = \sigma\omega$, onda je $H_\sigma(\omega(x), \omega(y)) = H_\sigma(x, y)\ \forall x, y \in \mathfrak{g}$.*

(*c*) *Vrijedi $H_\sigma([x, u], v) + H_\sigma(u, [x, v])\ \forall x \in \mathfrak{g}^\sigma$ i $\forall u, v \in \mathfrak{g}$.*

(*d*) *Ako je Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ poluprosta, realna forma $\mathfrak{g}^\sigma$ je kompaktna ako i samo ako je hermitska forma H_σ pozitivno definitna: $H_\sigma(x, x) > 0\ \forall x \in \mathfrak{g} \setminus \{0\}$.*

Zadatak 2.2.1. *Dokažite propoziciju 2.2.2.*

Uputa: Tvrdnju (d) dokažite pomoću tvrdnje (a) i pomoću tvrdnje (a) teorema 2.2.1.

Teorem 2.2.3. *Svaka kompleksna poluprosta Liejeva algebra ima kompaktnu realnu formu.*

Dokaz: Upotrijebimo oznake iz konstrukcije rascjepive realne forme $\mathfrak{g}^\sigma$ u dokazu teorema 2.1.6. Neka je C Weylova komora u $\mathfrak{h}(\mathbb{R})^*$ pridružena izabranoj bazi $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell\}$ sistema korijena R. Tada je i $-C$ Weylova komora i pridružena baza od R je $\{-\alpha_1, \ldots, -\alpha_\ell\}$. Očito je $\alpha \mapsto -\alpha$ automorfizam sistema korijena R i taj automorfizam prevodi bazu $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell\}$ u bazu $\{-\alpha_1, \ldots, -\alpha_\ell\}$. Izaberimo kanonske generatore k_i, x_i, y_i od $\mathfrak{g}$ u odnosu na bazu $\{-\alpha_1, \ldots, -\alpha_\ell\}$ ovako:

$$k_i = -h_i, \qquad x_i = -f_i, \qquad y_i = -e_i, \qquad i = 1, \ldots \ell.$$

Prema teoremu 1.3.28. postoji jedinstven $\omega \in Aut(\mathfrak{g})$ takav da je

$$\omega(h_i) = k_i, \qquad \omega(e_i) = x_i, \qquad \omega(f_i) = y_i, \qquad i = 1, \ldots, \ell,$$

odnosno, takav da je

$$\omega(h_i) = -h_i, \qquad \omega(e_i) = -f_i, \qquad \omega(f_i) = -e_i, \qquad i = 1, \ldots, \ell.$$

Očito je $\omega^2 = I_{\mathfrak{g}}$. Taj se automorfizam zove **Weylova involucija** pridružena bazi $\{\alpha_i, \ldots, \alpha_\ell\}$ i sistemu generatora $\{h_i, e_i, f_i;\ i = 1, \ldots, \ell\}$.

Ako je σ konjugacija iz konstrukcije na koncu prethodnog odjeljka, vrijedi $\omega\sigma = \sigma\omega$ budući da su obje strane konjugacije od $\mathfrak{g}$ koje se podudaraju na generatorima h_i, e_i, f_i. Tu konjugaciju označimo sa τ. Dokazat ćemo sada da je pripadna realna forma $\mathfrak{g}^\tau$ kompaktna. Prije svega, uočimo da je $\tau(h_i) = -h_i$ za $i = 1, \ldots, \ell$. Budući da je $\{h_1, \ldots, h_\ell\}$ baza realnog vektorskog prostora $\mathfrak{h}(\mathbb{R})$, slijedi da je

$$\tau|\mathfrak{h}(\mathbb{R}) = -I_{\mathfrak{h}(\mathbb{R})}. \tag{2.2}$$

Nadalje, neka je $\alpha \in R = R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ i $x \in \mathfrak{g}_\alpha$. Primijenimo τ na obje strane jednakosti

$$[h, x] = \alpha(h)x, \qquad h \in \mathfrak{h}(\mathbb{R}).$$

Budući da je $\alpha(h) \in \mathbb{R}$ i $\tau(h) = -h$ za $h \in \mathfrak{h}(\mathbb{R})$, slijedi

$$[\tau(h), \tau(x)] = \alpha(h)\tau(x) \qquad \Longrightarrow \qquad [h, \tau(x)] = -\alpha(h)\tau(x) \qquad \forall h \in \mathfrak{h}(\mathbb{R}).$$

To pokazuje da vrijedi

$$\tau(\mathfrak{g}_\alpha) = \mathfrak{g}_{-\alpha} \qquad \forall \alpha \in R. \tag{2.3}$$

Promatrajmo sada Weylovu grupu $W(R)$ i njeno djelovanje na $\mathfrak{h}(\mathbb{R})$ dobiveno pomoću identifikacije $W(R)$ sa $W(\check{R})$ gdje je $\check{R}$ dualni sistem korijena u $\mathfrak{h}(\mathbb{R})$:

$$\check{R} = \{h_\alpha;\ \alpha \in R\} \qquad \text{gdje je} \quad h_\alpha \in [\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}] \quad \text{i} \quad \alpha(h_\alpha) = 2.$$

Neka je $w \in W(R)$. Tada se w može napisati kao produkt refleksija σ_i za neke korijene α_i iz izabrane baze od R. Prema zadatku 1.3.8. vrijedi $\sigma_i = \varphi_i|\mathfrak{h}(\mathbb{R})$, gdje je $\varphi_i \in Int(\mathfrak{g})$ zadan sa

$$\varphi_i = \mathrm{e}^{\frac{\pi}{2} ad\,(e_i - f_i)}.$$

Očito je tada $\varphi_i(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$. Nadalje, budući da je $\tau \in Aut\,(\mathfrak{g}_\mathbb{R})$, iz gornje definicije φ_i kao reda potencija operatora $ad\,(e_i - f_i)$ s realnim koeficijentima slijedi

$$\tau\varphi_i\tau^{-1} = \mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}\tau(ad\,(e_i - f_i))\tau^{-1}}.$$

Međutim, $\tau(ad\,(e_i - f_i))\tau^{-1} = ad\,(\tau(e_i - f_i)) = ad\,(e_i - f_i)$. Prema tome,

$$\tau\varphi_i\tau^{-1} = \mathrm{e}^{\frac{\pi}{2} ad\,(e_i - f_i)} = \varphi_i \qquad \Longrightarrow \qquad \tau\varphi_i = \varphi_i\tau.$$

Ako je $w = \sigma_{i_1} \cdots \sigma_{i_s}$, stavimo $\varphi = \varphi_{i_1} \cdots \varphi_{i_s}$. Tada je $\varphi \in Int(\mathfrak{g})$ i vrijedi

$$\varphi(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}, \qquad \varphi\tau = \tau\varphi, \qquad \varphi|\mathfrak{h}(\mathbb{R}) = w. \tag{2.4}$$

Da dokažemo da je realna forma $\mathfrak{g}^\tau$ kompaktna, prema tvrdnji (d) propozicije 2.2.2. treba dokazati da je hermitska forma H_τ na $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ pozitivno definitna. Iz formule (2.3) i iz $B_\mathfrak{g}(\mathfrak{h}, \mathfrak{g}_\alpha) = \{0\}$ $\forall \alpha \in R$ nalazimo

$$H_\tau(\mathfrak{h}, \mathfrak{g}_\alpha) = -B_\mathfrak{g}(\mathfrak{h}, \tau(\mathfrak{g}_\alpha)) = -B(\mathfrak{h}, \mathfrak{g}_{-\alpha}) = \{0\} \qquad \forall \alpha \in R.$$

Nadalje, vrijedi $B_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta) = \{0\}$ ako su $\alpha, \beta \in R$ i $\alpha \neq -\beta$. Prema tome, za $\alpha, \beta \in R$, $\alpha \neq \beta$, imamo

$$H_\tau(\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta) = -B_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g}_\alpha, \tau(\mathfrak{g}_\beta)) = -B_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\beta}) = \{0\}.$$

Dakle, svi potprostori u korijenskom rastavu Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ su međusobno ortogonalni u odnosu na hermitsku formu H_τ. Prema tome, treba još samo dokazati da su restrikcije $H_\tau|\mathfrak{h}\times\mathfrak{h}$ i $H_\tau|\mathfrak{g}_\alpha\times\mathfrak{g}_\alpha$ za $\alpha \in R$ pozitivno definitne.

Za $h \in \mathfrak{h}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ imamo prema (2.2)

$$H_\tau(h, h) = -B_{\mathfrak{g}}(h, \tau(h)) = B_{\mathfrak{g}}(h, h) > 0$$

budući da je $B_{\mathfrak{g}}|\mathfrak{h}(\mathbb{R}) \times \mathfrak{h}(\mathbb{R})$ skalarni produkt na realnom prostoru $\mathfrak{h}(\mathbb{R})$. Dakle, restrikcija hermitske forme H_τ na $\mathfrak{h}(\mathbb{R}) \times \mathfrak{h}(\mathbb{R})$ je pozitivno definitna. No odatle slijedi da je i restrikcija $H_\tau|\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}$ pozitivno definitna.

Za $i \in \{1, \ldots, \ell\}$ imamo

$$H_\tau(e_i, e_i) = -B_{\mathfrak{g}}(e_i, \tau(e_i)) = B_{\mathfrak{g}}(e_i, f_i) = 1$$

prema tvrdnji (k) teorema 1.3.3. Kako je $\dim \mathfrak{g}_{\alpha_i} = 1$, zaključujemo da je restrikcija $H_\tau|\mathfrak{g}_{\alpha_i} \times \mathfrak{g}_{\alpha_i}$ pozitivno definitna.

Proizvoljan $\alpha \in R$ sadržan je u nekoj bazi sistema korijena R. Budući da po teoremu 1.3.14. Weylova grupa djeluje tranzitivno na skupu svih baza od R, postoji $w \in W(R)$ takav da je $(w^{-1})^t \alpha = \alpha_i$ za neki $i \in \{1, \ldots, \ell\}$. Neka je $\varphi \in Int(\mathfrak{g})$ takav da vrijedi (2.4). Za $h \in \mathfrak{h}(\mathbb{R})$ i $x \in \mathfrak{g}_\alpha$ imamo

$$[h, \varphi(x)] = \varphi([\varphi^{-1}(h), x]) = \varphi([w^{-1}(h), x]) = \varphi(\alpha(w^{-1}(h))x) = \left((w^{-1})^t \alpha\right) \varphi(x) = \alpha_i(h)\varphi(x).$$

To pokazuje da je $\varphi(\mathfrak{g}_\alpha) = \mathfrak{g}_{\alpha_i}$. Ali prema tvrdnji (c) propozicije 2.2.2. automorfizam φ ostavlja invarijantnom formu H_τ. Slijedi da je i restrikcija $H_\tau|\mathfrak{g}_\alpha \times \mathfrak{g}_\alpha$ pozitivno definitna.

Time je teorem 2.2.3. u potpunosti dokazan.

Podsjetimo se sada nekih činjenica o operatorima na konačnodimenzionalnim unitarnim prostorima. Neka je u daljnjem V konačnodimenzionalan realan ili kompleksan unitaran prostor sa skalarnim produktom $(\cdot|\cdot)$. Za $A \in \mathfrak{gl}(V)$ sa A^* označavamo njemu adjungiran operator:

$$(Ax|y) = (x|A^*y), \qquad \forall x, y \in V.$$

Neka $H(V)$ označava skup svih hermitskih operatora na V :

$$H(V) = \{A \in \mathfrak{gl}(V);\ (Ax|y) = (x|Ay)\ \forall x, y \in V\} = \{A \in \mathfrak{gl}(V);\ A = A^*\}.$$

$H(V)$ je realan vektorski prostor; ako je prostor V kompleksan, $H(V)$ je realna forma prostora $\mathfrak{gl}(V)$. Svaki $A \in H(V)$ ima realan spektar $Sp(A)$ i ako za $\lambda \in Sp(A)$ sa $V_\lambda(A)$ označimo pripadni svojstveni potprostor, onda je prostor V ortogonalna suma potprostora $V_\lambda(A)$:

$$V = \bigoplus_{\lambda \in Sp(A)} V_\lambda(A).$$

Sa $P(V)$ označavamo skup svih pozitivno definitnih operatora na V :

$$P(V) = \{A \in H(V);\ (Ax|x) > 0\ \forall x \in V \setminus \{0\}\} = \{A \in H(V);\ Sp(A) \subseteq \mathbb{R}_+^* = \langle 0, +\infty\rangle\}.$$

Očito je $P(V)$ otvoren podskup realnog vektorskog prostora $H(V)$. Nadalje, svi operatori u $P(V)$ su regularni, $P(V) \subseteq GL(V)$.

Ako je $A \in H(V)$, onda je

$$Sp\left(\mathrm{e}^A\right) = \left\{\mathrm{e}^\lambda;\ \lambda \in Sp(A)\right\} \qquad \Longrightarrow \qquad \mathrm{e}^A \in P(V).$$

Dakle, $A \mapsto \mathrm{e}^A$ je preslikavanje sa $H(V)$ u $P(V)$. Primijetimo da je to preslikavanje bijektivno. Doista, možemo definirati njemu inverzno preslikavanje log ovako: ako je $B \in P(V)$ definiramo $A = \log B$ kao linearan operator u odnosu na koji su svi svojstveni potprostori operatora B invarijantni i $A|V_\lambda(B) = (\log \lambda)I_{V_\lambda(B)}\ \forall \lambda \in Sp(B)$. Pri tome je, naravno, za $\lambda > 0$ $\log \lambda$ jedinstven realan broj takav da je $\mathrm{e}^{\log \lambda} = \lambda$. Napokon, očito su oba preslikavanja $A \mapsto \mathrm{e}^A$ i $B \mapsto \log B$ neprekidna, dakle, to su homeomorfizmi sa $H(V)$ na $P(V)$, odnosno, sa $P(V)$ na $H(V)$.

Za $B \in P(V)$ i $t \in \mathbb{R}$ definiramo $B^t = \mathrm{e}^{t \log B}$. Tada je

$$B^t \in P(V) \quad \forall t \in \mathbb{R}, \qquad B^{t+s} = B^t B^s \quad \forall t, s \in \mathbb{R}, \qquad B^0 = I_V.$$

Ako su $B, C \in P(V)$ i za neki $D \in GL(V)$ vrijedi $C = DBD^{-1}$, onda je $\log C = D(\log B)D^{-1}$ i $C^t = DB^tD^{-1}\ \forall t \in \mathbb{R}$. U slučaju da je prostor V kompleksan, iste relacije vrijede i za svaku antilinearnu bijekciju D sa V na V, tj. za svaki izomorfizam $D : V \to \overline{V}$.

Lema 2.2.4. *Neka je $\mathfrak{g}$ realna ili kompleksna Liejeva algebra na kojoj je zadan skalarni produkt i neka je $\vartheta \in Aut(\mathfrak{g}) \cap P(\mathfrak{g})$. Tada je $\vartheta^t \in Aut(\mathfrak{g})\ \forall t \in \mathbb{R}$. Skup $Aut(\mathfrak{g}) \cap P(\mathfrak{g})$ sadržan je u komponenti povezanosti jedinice $Aut(\mathfrak{g})_0$ grupe $Aut(\mathfrak{g})$.*

Dokaz: Neka je $\mathfrak{g}_\lambda = \mathfrak{g}_\lambda(\vartheta)$ za $\lambda \in Sp(\vartheta)$. Tada imamo rastav u ortogonalnu sumu

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{\lambda \in Sp(\vartheta)} \mathfrak{g}_\lambda.$$

Za $x \in \mathfrak{g}_\lambda$ i $y \in \mathfrak{g}_\mu$ imamo

$$\vartheta[x, y] = [\vartheta x, \vartheta y] = [\lambda x, \mu y] = \lambda\mu[x, y] \qquad \Longrightarrow \qquad [x, y] \in \mathfrak{g}_{\lambda\mu}.$$

Prema tome, za $t \in \mathbb{R}$ je

$$\vartheta^t[x, y] = (\lambda\mu)^t[x, y] = [\lambda^t x, \mu^t y] = [\vartheta^t x, \vartheta^t y].$$

To znači da je $\vartheta^t \in Aut(\mathfrak{g})\ \forall t \in \mathbb{R}$. Primijetimo sada da je $t \mapsto \vartheta^t$, $t \in [0, 1]$, neprekidna funkcija i da je $\vartheta^0 = I_{\mathfrak{g}}$ i $\vartheta^1 = \vartheta$. Dakle, ϑ se nalazi u istoj komponenti povezanosti grupe $Aut(\mathfrak{g})$ u kojoj je i jedinica $I_{\mathfrak{g}}$.

Neka je u daljnjem $\mathfrak{g}$ kompleksna poluprosta Liejeva algebra. Fiksirajmo jednu kompaktnu realnu formu od $\mathfrak{g}$ i neka je τ pripadna konjugacija. Proučit ćemo sada pobliže preslikavanje $\Theta : \sigma \mapsto \sigma\tau$ iz propozicije 2.1.4. sa skupa svih konjugacija Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ na skup $\left\{\vartheta \in Aut(\mathfrak{g});\ \tau\vartheta\tau = \vartheta^{-1}\right\}$. Prema tvrdnji (d) propozicije 2.2.2. znamo da je $\mathfrak{g}$ unitaran prostor sa skalarnim produktom $(x|y) = H_\tau(x, y) = -B_{\mathfrak{g}}(x, \tau y)$.

Lema 2.2.5. (a) *Za svaku konjugaciju σ je $\vartheta = \Theta(\sigma) = \sigma\tau \in H(\mathfrak{g})$ i $\vartheta^2 \in P(\mathfrak{g})$.*

(b) *Za svaku involuciju $\vartheta \in Aut(\mathfrak{g})$ je $\psi = (\vartheta\tau)^2 \in P(\mathfrak{g}) \cap Aut(\mathfrak{g})$.*

Dokaz: (a) Za $x, y \in \mathfrak{g}$ imamo

$$(\vartheta x|y) = -B_{\mathfrak{g}}(\vartheta x, \tau y) = -B_{\mathfrak{g}}(x, \vartheta^{-1}\tau y) = -B_{\mathfrak{g}}(x, \tau\sigma\tau y) = (x|\vartheta y) \qquad \Longrightarrow \qquad \vartheta \in H(\mathfrak{g}).$$

Slijedi $\vartheta^2 \in P(\mathfrak{g})$.

(b) Za $x, y \in \mathfrak{g}$ imamo

$$(\psi x, y) = -B_{\mathfrak{g}}(\psi x, \tau y) = -B_{\mathfrak{g}}(x, \psi^{-1}\tau y) = -B_{\mathfrak{g}}(x, \tau\vartheta\tau\vartheta\tau y) = -B_{\mathfrak{g}}(x, \tau\psi y) = (x|\psi y),$$

dakle, $\psi \in H(\mathfrak{g})$. Nadalje, za $x \in \mathfrak{g} \setminus \{0\}$ je

$$(\psi x|x) = -B_{\mathfrak{g}}(\psi x, \tau x) = -B_{\mathfrak{g}}(\vartheta\tau\vartheta\tau x, \tau x) = -B_{\mathfrak{g}}(\tau\vartheta\tau x, \vartheta\tau x) =$$

$$= -B_{\mathfrak{g}}(\vartheta\tau x, \tau\vartheta\tau x) = (\vartheta\tau x|\vartheta\tau x) > 0.$$

Propozicija 2.2.6. *Neka je $\mathfrak{g}$ kompleksna poluprosta Liejeva algebra. Ako dvije kompaktne konjugacije od $\mathfrak{g}$ komutiraju one se podudaraju.*

Dokaz: Neka su τ i σ dvije konjugacije od $\mathfrak{g}$ koje su kompaktne i koje komutiraju. Tada je automorfizam $\vartheta = \sigma\tau$ involucija. Prema tvrdnji (b) propozicije 2.1.4. vrijedi $\vartheta(\mathfrak{g}^\sigma) = \mathfrak{g}^\sigma$. Slijedi

$$\mathfrak{g}^\sigma = \mathfrak{g}^\sigma_+ \oplus \mathfrak{g}^\sigma_-, \qquad \text{gdje su} \quad \mathfrak{g}^\sigma_\pm = \{x \in \mathfrak{g}^\sigma;\ \vartheta x = \pm x\}.$$

Pretpostavimo da je $x \in \mathfrak{g}^\sigma_-$ i $x \neq 0$. Tada znamo da je $H_\tau(x, x) > 0$ i $H_\sigma(x, x) > 0$. Međutim, $\vartheta = \tau\sigma$, dakle, $\tau = \vartheta\sigma$, a kako je $\sigma x = x$ i $\vartheta x = -x$, to je $\tau x = -x$. Odatle nalazimo

$$H_\sigma(x, x) = -B_{\mathfrak{g}}(x, \sigma x) = -B_{\mathfrak{g}}(x, x) = B_{\mathfrak{g}}(x, \tau x) = -H_\tau(x, x),$$

a to je u suprotnosti sa $H_\sigma(x, x) > 0$ i $H_\tau(x, x) > 0$. Ova kontradikcija pokazuje da je $\mathfrak{g}^\sigma_- = \{0\}$. No to znači da je $\mathfrak{g}^\sigma_+ = \mathfrak{g}^\sigma$, odnosno, $\vartheta|\mathfrak{g}^\sigma = I_{\mathfrak{g}^\sigma}$. Kako je ϑ linearan operator, slijedi $\vartheta = I_{\mathfrak{g}}$. Dakle, $\sigma\tau = I_{\mathfrak{g}}$, pa slijedi $\sigma = \tau$.

Propozicija 2.2.7. *Neka je $\mathfrak{g}$ kompleksna poluprosta Liejeva algebra, τ njena kompaktna konjugacija i σ bilo koja konjugacija od $\mathfrak{g}$. Postoji $\varphi \in Aut(\mathfrak{g})_0$ takav da konjugacija $\varphi\sigma\varphi^{-1}$ komutira s konjugacijom τ. Može se odabrati $\varphi = \psi^{-\frac{1}{4}}$ za $\psi = (\sigma\tau)^2$.*

Dokaz: Promatramo automorfizam $\vartheta = \sigma\tau \in Aut(\mathfrak{g})$. Po lemi 2.2.5. $\psi = \vartheta^2 \in P(\mathfrak{g}) \cap Aut(\mathfrak{g})$, dakle, po lemi 2.2.4. je $\psi \in Aut(\mathfrak{g})_0$ i $(\psi^t)_{t\in\mathbb{R}}$ je jednoparametarska podgrupa od $Aut(\mathfrak{g})_0$. Zbog tvrdnje (a) propozicije 2.1.4. vrijedi $\tau\vartheta\tau = \vartheta^{-1}$, a odatle je

$$\tau\psi\tau = \tau\vartheta^2\tau = (\tau\vartheta\tau)(\tau\vartheta\tau) = \vartheta^{-2} = \psi^{-1}.$$

Sada iz razmatranja prije iskaza leme 2.2.4. slijedi da je

$$\tau\psi^t\tau = \psi^{-t} \qquad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Analogno, iz $\vartheta\psi\vartheta^{-1} = \psi$ slijedi da je

$$\vartheta\psi^t\vartheta^{-1} = \psi^t \qquad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Stavimo sada $\varphi = \psi^t$ za neki $t \in \mathbb{R}$. Imamo

$$\left(\varphi\sigma\varphi^{-1}\right)\tau = \psi^t\sigma\psi^{-t}\tau = \psi^t\sigma\tau\psi^t = \psi^t\vartheta\psi^t = \psi^{2t}\vartheta$$

i

$$\tau\left(\varphi\sigma\varphi^{-1}\right) = \tau\psi^t\sigma\psi^{-t} = \psi^{-t}\tau\sigma\psi^{-t} = \psi^{-t}\vartheta^{-1}\psi^{-t} = \psi^{-2t}\vartheta^{-1}.$$

Ti se operatori podudaraju ako i samo ako je $\psi^{4t} = \vartheta^{-2}$, a kako je $\vartheta^2 = \psi$, vidimo da se gornji operatori podudaraju, odnosno da konjugacije τ i $\varphi\sigma\varphi^{-1}$ komutiraju ako i samo ako je $\psi^{4t} = \psi^{-1}$. Sada vidimo da automorfizam $\varphi = \psi^{-\frac{1}{4}} \in Aut(\mathfrak{g})_0$ zadovoljava tvrdnju propozicije.

Odatle i iz propozicije 2.2.6. neposredno slijedi:

Teorem 2.2.8. *Neka su τ i σ dvije kompaktne konjugacije kompleksne poluproste Liejeve algebre $\mathfrak{g}$. Postoji $\varphi \in Aut(\mathfrak{g})_0$ takav da je $\tau = \varphi\sigma\varphi^{-1}$, odnosno, $\varphi(\mathfrak{g}^\sigma) = \mathfrak{g}^\tau$. Može se odabrati $\varphi = ((\sigma\tau)^2)^{-\frac{1}{4}}$.*

Zadatak 2.2.2. *Neka je τ kompaktna konjugacija kompleksne poluproste Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ i neka je $\omega \in Aut(\mathfrak{g})$. Dokažite da postoji $\varphi \in Aut(\mathfrak{g})_0$ takav da je $\omega\tau\omega^{-1} = \varphi\tau\varphi^{-1}$.*

Propozicija 2.2.9. *Neka τ kompaktna konjugacija kompleksne Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ i neka je $\vartheta \in Aut(\mathfrak{g})$ involucija. Postoji $\varphi \in Aut(\mathfrak{g})_0$ takav da $\varphi\vartheta\varphi^{-1}$ komutira s τ. Može se izabrati $\varphi = \psi^{-\frac{1}{4}}$ za $\psi = (\vartheta\tau)^2 \in P(\mathfrak{g}) \cap Aut(\mathfrak{g}) \subseteq Aut(\mathfrak{g})_0$.*

Zadatak 2.2.3. *Dokažite propoziciju 2.2.9.*

Uputa: Oponašajte dokaz propozicije 2.2.7.

Neka je i dalje $\mathfrak{g}$ kompleksna poluprosta Liejeva algebra i neka je τ kompaktna konjugacija od $\mathfrak{g}$. Ako je σ bilo koja konjugacija od $\mathfrak{g}$, tada prema propoziciji 2.2.7. znamo da za $\psi = (\sigma\tau)^2$ i za $\varphi = \psi^{-\frac{1}{4}} \in Aut(\mathfrak{g})_0$ konjugacije $\varphi\sigma\varphi^{-1}$ i τ komutiraju. Definiramo tada $\Phi_\tau(\sigma) = \varphi\sigma\varphi^{-1}\tau$. Zbog komutiranja $\varphi\sigma\varphi^{-1}$ i τ automorfizam $\Phi_\tau(\sigma)$ je involucija. Dakle, Φ_τ je preslikavanje sa skupa svih konjugacija na $\mathfrak{g}$ u skup svih involucija u $Aut(\mathfrak{g})$.

Teorem 2.2.10. (*a*) *Preslikavanje Φ_τ inducira bijekciju sa skupa svih klasa $Aut(\mathfrak{g})_0-$konjugiranosti konjugacija od $\mathfrak{g}$ na skup svih klasa $Aut(\mathfrak{g})_0-$konjugiranosti involucija u $Aut(\mathfrak{g})$.*

(*b*) *Preslikavanje Φ_τ inducira bijekciju sa skupa svih klasa $Aut(\mathfrak{g})-$konjugiranosti konjugacija od $\mathfrak{g}$ na skup svih klasa $Aut(\mathfrak{g})-$konjugiranosti involucija u $Aut(\mathfrak{g})$.*

Dokaz: (*a*) Dokažimo najprije da preslikavanje Φ_τ inducira preslikavanje među klasama $Aut(\mathfrak{g})_0-$konjugiranosti. Neka su σ i σ_1 konjugacije od $\mathfrak{g}$ i neka je $\chi \in Aut(\mathfrak{g})_0$ takav da je $\sigma_1 = \chi\sigma\chi^{-1}$. Stavimo

$$\psi = (\sigma\tau)^2, \qquad \varphi = \psi^{-\frac{1}{4}}, \qquad \sigma' = \varphi\sigma\varphi^{-1}, \qquad \psi_1 = (\sigma_1\tau)^2, \qquad \varphi_1 = \psi_1^{-\frac{1}{4}}, \qquad \sigma_1' = \varphi_1\sigma_1\varphi_1^{-1}.$$

Tada konjugacije σ' i σ_1' komutiraju s τ. Vrijedi

$$\sigma_1' = \varphi_1\sigma_1\varphi_1^{-1} = \varphi_1\chi\sigma\chi^{-1}\varphi_1^{-1} = \varphi_1\chi\varphi^{-1}\sigma'\varphi\chi^{-1}\varphi_1^{-1} = \omega\sigma'\omega^{-1} \qquad \text{za} \quad \omega = \varphi_1\chi\varphi^{-1} \in Aut(\mathfrak{g})_0.$$

Konjugacija σ_1' komutira ne samo s kompaktnom konjugacijom τ nego i s kompaktnom konjugacijom $\omega\tau\omega^{-1}$:

$$\sigma_1'(\omega\tau\omega^{-1}) = \omega\sigma'\omega^{-1}\omega\tau\omega^{-1} = \omega\sigma'\tau\omega^{-1} = \omega\tau\sigma'\omega^{-1} = \omega\tau\omega^{-1}\sigma_1'\omega\omega^{-1} = (\omega\tau\omega^{-1})\sigma'.$$

Prema teoremu 2.2.8. postoji $\rho \in Aut(\mathfrak{g})_0$ takav da je $\rho\tau\rho^{-1} = \omega\tau\omega^{-1}$. Pri tome se može odabrati $\rho = \pi^{-\frac{1}{4}}$, gdje je $\pi = (\tau\omega\tau\omega^{-1})^2$. Tako odabran ρ komutira sa σ_1'. Doista, σ_1' komutira i sa τ i sa $\omega\tau\omega^{-1}$, dakle i sa $\pi = (\tau\omega\tau\omega^{-1})^2$, pa i sa $\rho = \pi^{-\frac{1}{4}}$. To znači da $\gamma = \rho^{-1}\omega \in Aut(\mathfrak{g})_0$ komutira s τ i vrijedi

$$\sigma_1' = \rho^{-1}\sigma_1\rho = \rho^{-1}\omega\sigma'\omega^{-1}\rho = \gamma\sigma'\gamma^{-1}.$$

Slijedi da su pripadne involucije $\vartheta = \Phi_\tau(\sigma) = \sigma'\tau$ i $\vartheta_1 = \Phi_\tau(\sigma_1) = \sigma_1'\tau$ $Aut(\mathfrak{g})_0-$konjugirane:

$$\vartheta_1 = \sigma_1'\tau = \gamma\sigma'\gamma^{-1}\tau = \gamma\sigma'\tau\gamma^{-1} = \gamma\vartheta\gamma^{-1}.$$

Dokažimo da je inducirano preslikavanje bijekcija sa skupa svih klasa $Aut(\mathfrak{g})_0-$konjugiranosti konjugacija od $\mathfrak{g}$ na skup svih klasa $Aut(\mathfrak{g})_0-$konjugiranosti involucija u $Aut(\mathfrak{g})$. Dokazujemo najprije surjektivnost. Neka je zadana involucija $\vartheta \in Aut(\mathfrak{g})$. Po propoziciji 2.2.9. postoji $\varphi \in Aut(\mathfrak{g})_0$ takav da involucija $\vartheta' = \varphi\vartheta\varphi^{-1}$ komutira s τ. Tada je $\sigma = \vartheta'\tau$ konjugacija od $\mathfrak{g}$. Budući da je $\sigma\tau = \tau\sigma$ vrijedi $\Phi_\tau(\sigma) = \sigma\tau = \vartheta'$. Dakle, preslikavanje inducirano sa Φ_τ preslikava klasu $Aut(\mathfrak{g})_0-$konjugiranosti konjugacije σ u klasu $Aut(\mathfrak{g})_0-$konjugiranosti involucije ϑ.

Dokažimo sada injektivnost. Pretpostavimo da su dane dvije konjugacije σ_1 i σ_2 od $\mathfrak{g}$ takve da su involucije $\vartheta_1 = \Phi_\tau(\sigma_1)$ i $\vartheta_2 = \Phi_\tau(\sigma_2)$ u istoj klasi $Aut(\mathfrak{g})_0-$konjugiranosti, tj. da postoji $\omega \in Aut(\mathfrak{g})_0$ takav da je $\vartheta_2 = \omega\vartheta_1\omega^{-1}$. Pri tome za $i = 1, 2$ imamo $\vartheta_i = \sigma_i'\tau$ gdje je σ_i' konjugacija koja komutira s τ i $Aut(\mathfrak{g})_0-$konjugirana je sa σ_i. Tada ϑ_2 komutira s kompaktnim konjugacijama τ i sa $\omega\tau\omega^{-1}$. Prema teoremu 2.2.8. postoji $\rho \in Aut(\mathfrak{g})_0$ koji komutira s ϑ_2 takav da je $\omega\tau\omega^{-1} = \rho\tau\rho^{-1}$. Tada $\gamma = \omega^{-1}\rho \in Aut(\mathfrak{g})_0$ komutira s τ i vrijedi $\vartheta_2 = \gamma\vartheta_1\gamma^{-1}$. Nadalje,

$$\sigma_2' = \vartheta_2\tau = \gamma\vartheta_1\gamma^{-1}\tau = \gamma\vartheta_1\tau\gamma^{-1} = \gamma\sigma_1'\gamma^{-1}.$$

Budući da je konjugacija σ_i $Aut(\mathfrak{g})_0-$konjugirana s konjugacijom σ_i', $i = 1, 2$, odatle slijedi da su konjugacije σ_1 i σ_2 $Aut(\mathfrak{g})_0-$konjugirane.

Time je tvrdnja (a) dokazana.

Zadatak 2.2.4. *Dokažite tvrdnju* (b).

Zadatak 2.2.5. *Dokažite da bijekcija u tvrdnji* (a) *teoremu 2.2.10. ne ovisi o izboru kompaktne konjugacije* τ *Liejeve algebre* $\mathfrak{g}$.

Uputa: Ako je τ_1 druga kompaktna konjugacija od $\mathfrak{g}$, prema teoremu 2.2.8. postoji $\varphi \in Aut(\mathfrak{g})_0$ takav da je $\tau_1 = \varphi\tau\varphi^{-1}$. Za konjugaciju σ od $\mathfrak{g}$ stavimo $\vartheta = \Phi_\tau(\sigma)$ i $\vartheta_1 = \Phi_{\tau_1}(\sigma)$. Tada je

$$\vartheta = \sigma'\tau \qquad \text{i} \qquad \vartheta_1 = \sigma''\tau_1,$$

gdje konjugacije σ' i σ'' komutiraju s τ i definirane su sa

$$\sigma' = \alpha\sigma\alpha^{-1}, \qquad \alpha = \gamma^{-\frac{1}{4}}, \qquad \gamma = (\sigma\tau)^2, \qquad \sigma'' = \beta\sigma\beta^{-1}, \qquad \beta = \delta^{-\frac{1}{4}}, \qquad \delta = (\sigma\tau_1)^2.$$

Koristeći te relacije treba dokazati da su involucije ϑ i ϑ_1 $Aut(\mathfrak{g})_0-$konjugirane.

Prema teoremu 2.2.8. skup svih kompaktnih konjugacija od $\mathfrak{g}$ tvori jednu klasu $Aut(\mathfrak{g})_0-$konjugiranosti. Kako je $\Phi_\tau(\tau) = I_\mathfrak{g}$ vidimo da je pridružena klasa $Aut(\mathfrak{g})_0-$konjugiranosti involucija u $Aut(\mathfrak{g})$ upravo trivijalna klasa $\{I_\mathfrak{g}\}$.

U primjerima **1.**, **2.** i **3.** u prethodnom odjeljku definirali smo realne forme $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$, $\mathfrak{su}(p, q)$, (za $p + q = n$) i $\mathfrak{sl}(m, \mathbb{H})$ (u slučaju kad je $n = 2m$ paran broj). Lako je provjeriti da pripadne konjugacije sve komutiraju s kompaktnom konjugacijom τ zadanom sa $\tau(A) = -A^*$, koja definira kompaktnu formu $\mathfrak{su}(n) = \mathfrak{su}(n, 0) = \mathfrak{su}(0, n)$. Prema tome, pripadne involucije dobiju se kao umnošci pojedine konjugacije s τ. Imamo redom:

1. Za rascjepivu realnu formu $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$ i konjugaciju $\sigma(A) = \overline{A}$, $A \in \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$, pripadna involucija je dana sa $\vartheta(A) = -A^T$ (gornji indeks "T" označava transponiranje, kako ne bi došlo do miješanja s potencijom $t \in \mathbb{R}$.)

2. Za realnu formu $\mathfrak{su}(p, q)$ i konjugaciju $\sigma(A) = -I_{p,q}A^*I_{p,q}$ pripadna involucija je dana sa $\vartheta(A) = I_{p,q}AI_{p,q}$.

3. Za $n = 2m$ i realnu formu $\mathfrak{sl}(m, \mathbb{H})$ i konjugaciju $\sigma(A) = S_m\overline{A}S_m^{-1}$ pripadna involucija dana je sa $\vartheta(A) = -S_mA^TS_m^{-1}$.

U propoziciji 2.1.2. za kompleksnu Liejevu algebru $\mathfrak{g}$ promatrali smo kompleksnu Liejevu algebru $\mathfrak{G} = \mathfrak{g} \times \overline{\mathfrak{g}}$ i u dokazu smo uočili konjugaciju Σ od $\mathfrak{G}$ zadanu sa $\Sigma(x, y) = (y, x)$ s pripadnom realnom formom $\mathfrak{G}^\Sigma = \{(x, x);\ x \in \mathfrak{g}\}$ koja je izomorfna s realnom Liejevom algebrom $\mathfrak{g}_\mathbb{R}$. Pretpostavimo sada da je $\mathfrak{g}$ poluprosta kompleksna Liejeva algebra i neka je τ njena kompaktna konjugacija. Tada je $\tau \times \tau$ kompaktna konjugacija od $\mathfrak{G}$ i pripadna kompaktna forma od $\mathfrak{G}$ je $\mathfrak{g}^\tau \times \mathfrak{g}^\tau$. Uočimo da konjugacija Σ komutira s kompaktnom konjugacijom $\tau \times \tau$. Prema tome, $\Phi_{\tau\times\tau}(\Sigma) = \Theta$, gdje je involucija $\Theta \in Aut(\mathfrak{G})$ dana sa $\Theta = \Sigma(\tau \times \tau)$, tj. $\Theta(x, y) = (\tau(y), \tau(x))$. Posebno, za $x, y \in \mathfrak{g}^\tau$ je $\Theta(x, y) = (y, x)$.

Poglavlje 3

LIEJEVE GRUPE

3.1 Diferencijalne i analitičke mnogostrukosti

Neka je M Hausdorffov topološki prostor i neka je $n \in \mathbb{N}$. $n-$**dimenzionalna karta** na M je uređen par (U, ψ) gdje je $U \subseteq M$ otvoren skup i ψ je homeomorfizam sa U na otvoren podskup od $\mathbb{R}^n$. Skup U zovemo **domena karte** (U, ψ). $n-$**dimenzionalni** $C^\infty-$**atlas** na M je skup $\mathcal{A}$ $n-$dimenzionalnih karata na M sa sljedećim svojstvima:

(i) Domene karata u skupu $\mathcal{A}$ pokrivaju M :

$$\bigcup_{(U,\psi)\in\mathcal{A}} U = M.$$

(ii) Ako su $(U, \psi), (V, \varphi) \in \mathcal{A}$ takve karte da je $U \cap V \neq \emptyset$, onda je

$$\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \longrightarrow \psi(U \cap V)$$

$C^\infty-$preslikavanje.

$n-$**dimenzionalna** $C^\infty-$**struktura** na M je $n-$dimenzionalni $C^\infty-$atlas $\mathcal{A}$ na M koji pored (i) i (ii) zadovoljava i svojstvo maksimalnosti:

(iii) Ako je (W, χ) $n-$dimenzionalna karta na M i ako su za svaku kartu $(U, \psi) \in \mathcal{A}$ takvu da je $U \cap W \neq \emptyset$ preslikavanja

$$\psi \circ \chi^{-1} : \chi(U \cap W) \longrightarrow \psi(U \cap W) \qquad \text{i} \qquad \chi \circ \psi^{-1} : \psi(U \cap W) \longrightarrow \chi(U \cap W)$$

klase C^∞, onda je $(W, \chi) \in \mathcal{A}$.

Očito je svaki $n-$dimenzionalni $C^\infty-$atlas sadržan u jedinstvenoj $n-$dimenzionalnoj $C^\infty-$strukturi.

Diferencijabilna mnogostrukost ili $C^\infty-$**mnogostrukost** je uređen par $(M, \mathcal{A})$, gdje je M Hausdorffov topološki prostor s prebrojivom bazom topologije, a $\mathcal{A}$ je $n-$dimenzionalna $C^\infty-$struktura na M za neki $n \in \mathbb{N}$. Pišemo tada $n = \dim M$.

Zamijenimo li svuda u prethodnim definicijama izraz $C^\infty-$*preslikavanje* s izrazom *analitičko preslikavanje*, dobivamo definicije pojmova $n-$dimenzionalni **analitički atlas**, $n-$dimenzionalna **analitička struktura** i **analitička mnogostrukost**. Svaka analitička mnogostrukost je ujedno diferencijabilna mnogostrukost.

Neka su M i N $C^\infty-$mnogostrukosti, $\dim M = m$, $\dim N = n$. Za preslikavanje $f : M \to N$ kažemo da je **klase** C^∞ ili da je f $C^\infty-$**preslikavanje** ako za svaku točku $p \in M$ postoje karte (U, ψ) na M i (V, φ) na N takve da je $p \in U$, $f(U) \subseteq V$ i da je

$$\varphi \circ f \circ \psi^{-1} : \psi(U) \longrightarrow \varphi(V)$$

$C^\infty-$preslikavanje iz $\mathbb{R}^m$ u $\mathbb{R}^n$. Ako je $f : M \to N$ bijekcija i ako su f i f^{-1} $C^\infty-$preslikavanja, onda se f zove **difeomorfizam**. Ukoliko su M i N analitičke mnogostrukosti i ako je difeomorfizam $f : M \to N$ analitičko preslikavanje, pomoću teorema o inverznom preslikavanju za analitičke funkcije n realnih varijabli lako se vidi da je inverzno preslikavanje $f^{-1} : N \to M$ također analitičko.

Primjeri:

(1) $M = \mathbb{R}^n$; tada je $\{(R^n, id_{\mathbb{R}^n})\}$ $C^\infty-$atlas. Jedinstvena $C^\infty-$struktura koja sadrži taj atlas zove se **standardna** $C^\infty-$**struktura** na $\mathbb{R}^n$, a jedinstvena analitička struktura koja sadrži taj atlas zove se **standardna analitička struktura** na R^n.

(2) Neka je $(M, \mathcal{A})$ $C^\infty-$mnogostrukost (odn. analitička mnogostrukost) i neka je $V \subseteq M$ otvoren skup. Tada je

$$\{(U \cap V, \psi | U \cap V);\ (U, \psi) \in \mathcal{A},\ U \cap V \neq \emptyset\}$$

$C^\infty-$atlas (odn. analitički atlas) na V. V se s pripadnom $C^\infty-$strukturom (odn. analitičkom strukturom) zove **otvorena podmnogostrukost** od M.

(3) Neka su $(M, \mathcal{A})$ i $(N, \mathcal{B})$ $C^\infty-$mnogostrukosti (odn. analitičke mnogostrukosti), $\dim M = m$, $\dim N = n$. Neka je

$$\mathcal{C} = \{(U \times V, \psi \times \varphi);\ (U, \psi) \in \mathcal{A},\ (V; \varphi) \in \mathcal{B}\},$$

pri čemu je $(\psi \times \varphi)(x, y) = (\psi(x), \varphi(y))$, $x \in U$, $y \in V$. Tada je $\mathcal{C}$ $(m + n)-$dimenzionalni $C^\infty-$atlas (odn. analitički atlas) na $M \times N$. S pripadnom $C^\infty-$strukturom (odn. analitičkom strukturom) $M \times N$ se zove **produkt mnogostrukosti** M i N.

Za $C^\infty-$mnogostrukost M sa $C^\infty(M)$ označavamo skup svih $C^\infty-$funkcija $f : M \to \mathbb{R}$. Uz operacije po točkama $C^\infty(M)$ je komutativna unitalna algebra.

Neka je M $C^\infty-$mnogostrukost i $\mathcal{U}$ otvoren pokrivač od M. **Particija jedinice** podređena pokrivaču $\mathcal{U}$ je niz $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ u $C^\infty(M)$ takav da vrijedi:

(i) Za svaki $n \in \mathbb{N}$ nosač

$$\operatorname{Supp} \varphi_n = Cl(\{p \in M;\ \varphi_n(p) \neq 0\})$$

je kompaktan skup sadržan u nekom $U \in \mathcal{U}$.

(ii) Za svaku točku $p \in M$ postoji otvorena okolina V točke p takva da je $\operatorname{Supp} \varphi_n \cap V \neq \emptyset$ za samo konačno mnogo $n \in \mathbb{N}$.

(iii) Za svaku točku $p \in M$ vrijedi

$$\varphi_n(p) \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad \text{i} \qquad \sum_{n \in \mathbb{N}} \varphi_n(p) = 1.$$

Bez dokaza navodimo:

Teorem 3.1.1. *Za svaki otvoren pokrivač $\mathcal{U}$ $C^\infty-$mnogostrukosti M postoji particija jedinice podređena pokrivaču $\mathcal{U}$.*

Neka je M $C^\infty-$mnogostrukost. **Tangencijalni vektor** na mnogostrukost M u točki $p \in M$ je linearan funkcional $X : C^\infty(M) \to \mathbb{R}$ sa svojstvom

$$X(fg) = X(f)g(p) + f(p)X(g) \qquad \forall f, g \in C^\infty(M).$$

Skup svih tangencijalnih vektora na mnogostrukost M u točki p označavamo sa $T_p(M)$. To je očito potprostor realnog prostora $C^\infty(M)^*$. Zove se **tangencijalni prostor** na mnogostrukost M u točki p.

Zadatak 3.1.1. *Dokažite da je $X(f) = 0$ za svaki $X \in T_p(M)$ i za svaku konstantnu funkciju f na mnogostrukosti M.*

Lema 3.1.2. *Ako se funkcije $f, g \in C^\infty(M)$ podudaraju na nekoj okolini točke $p \in M$ onda je $X(f) = X(g)$ $\forall X \in T_p(M)$. Posebno, ako je funkcija f konstantna na nekoj okolini točke $p \in M$, onda je $X(f) = 0$ $\forall X \in T_p(M)$.*

Dokaz: Dovoljno je dokazati da ako je funkcija $f \in C^\infty(M)$ jednaka nuli na nekoj okolini U točke p onda je $X(f) = 0$. U tu svrhu izaberimo $\varphi \in C^\infty(M)$ kojoj je nosač sadržan u U i $\varphi(p) = 1$. Tada je funkcija $\psi(q) = \varphi(q) + 1$, $q \in M$, jednaka 1 svuda na $M \setminus U$, pa vrijedi $f = f\psi$. Stoga je

$$X(f) = X(f\psi) = X(f)\psi(p) + f(p)X(\psi) = 2X(f),$$

jer je $\psi(p) = 2$ i $f(p) = 0$. Dakle, $X(f) = 0$.

Ovo svojstvo lokalnosti tangencijalnih vektora omogućuje nam da identificiramo tangencijalne prostore na M i na otvorenu podmnogostrukost U u svakoj točki $p \in U$:

Propozicija 3.1.3. *Neka je U otvorena podmnogostrukost mnogostrukosti M i neka je $p \in U$. Za $X \in T_p(U)$ definiramo $\tilde{X} : C^\infty(M) \to \mathbb{R}$ ovako:*

$$\tilde{X}(f) = X(f|U), \qquad f \in C^\infty(M).$$

Tada je $X \mapsto \tilde{X}$ izomorfizam prostora $T_p(U)$ na prostor $T_p(M)$.

Dokaz: Očito je $\tilde{X} \in T_p(M)$ $\forall X \in T_p(U)$. Nadalje, preslikavanje $X \mapsto \tilde{X}$ je očito linearno.

Pretpostavimo da je $X \in T_p(U)$ i da je $\tilde{X} = 0$. Za danu funkciju $f \in C^\infty(U)$ možemo izabrati $g \in C^\infty(M)$ s kompaktnim nosačem sadržanim u U koja se podudara s funkcijom f na nekoj okolini točke p. Stoga je po lemi 3.1.2.

$$X(f) = X(g|U) = \tilde{X}(g) = 0.$$

Dakle, $X = 0$ i time je dokazana injektivnost preslikavanja $X \mapsto \tilde{X}$.

Neka je $Y \in T_p(M)$. Izaberimo kompaktnu okolinu K točke p sadržanu u U i funkciju $\varphi \in C^\infty(U)$ s kompaktnim nosačem takvu da je $\varphi(q) = 1$ $\forall q \in K$. Za $f \in C^\infty(U)$ definiramo $F_f : M \to \mathbb{R}$ ovako:

$$F_f(q) = \begin{cases} f(q)\varphi(q) & \text{ako je } q \in U \\ 0 & \text{ako je } q \in M \setminus U. \end{cases}$$

Tada je $F_f \in C^\infty(M)$ i $F \mapsto F_f$ je linearno preslikavanje sa $C^\infty(U)$ u $C^\infty(M)$. Definiramo sada linearni funkcional $X : C^\infty(U) \to \mathbb{R}$ kao kompoziciju tog preslikavanja sa Y :

$$X(f) = Y(F_f), \qquad f \in C^\infty(U).$$

Za $f, g \in C^\infty(U)$ funkcije F_{fg} i $F_f F_g$ podudaraju se na okolini K točke p. Zbog leme 3.1.2. nalazimo:

$$X(fg) = Y(F_{fg}) = Y(F_f F_g) = Y(F_f)F_g(p) + F_f(p)Y(F_g) = X(f)g(p) + f(p)X(g).$$

Prema tome je $X \in T_p(U)$. Napokon, svaka funkcija $g \in C^\infty(M)$ podudara se s funkcijom $F_{g|U}$ na okolini K točke p pa ponovna primjena leme 3.1.2. daje

$$\tilde{X}(g) = X(g|U) = Y(F_{g|U}) = Y(g).$$

Dakle, $\tilde{X} = Y$ i time je dokazana i surjektivnost preslikavanja $X \mapsto \tilde{X}$.

Neka je $\varepsilon > 0$ i neka je $\sigma : \langle -\varepsilon, \varepsilon \rangle \to M$ $C^\infty-$preslikavanje takvo da je $\sigma(0) = p$. Tada se σ zove **glatka krivulja kroz točku** p. Definiramo tada $V_\sigma : C^\infty(M) \to \mathbb{R}$ sa

$$V_\sigma f = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(\sigma(t))\bigg|_{t=0}, \qquad f \in C^\infty(M).$$

Tada je $V_\sigma \in T_p(M)$ i zove se **tangencijalni vektor na krivulju** σ u točki p. Pomoću teorema egzistencije za sisteme običnih diferencijalnih jednadžbi prvog reda nije teško dokazati da vrijedi:

Teorem 3.1.4. *Neka je M $C^\infty-$mnogostrukost i $p \in M$. Tada vrijedi:*

$$T_p(M) = \{V_\sigma;\ \sigma \text{ je glatka krivulja kroz točku } p\}.$$

Neka je sada (U, ψ) karta na $n-$dimenzionalnoj mnogostrukosti M i $p \in M$. Neka su

$$x_1, x_2, \dots, x_n : U \to \mathbb{R}$$

koordinatne funkcije preslikavanja ψ :

$$\psi(q) = (x_1(q), x_2(q), \dots, x_n(q)), \qquad q \in U.$$

Neka je $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ standardna baza od $\mathbb{R}^n$. Za neki $\varepsilon > 0$ možemo definirati glatke krivulje $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n : \langle -\varepsilon, \varepsilon \rangle \to M$ kroz točku p :

$$\sigma_i(t) = \psi^{-1}(\psi(p) + te_i).$$

Za pripadne tangencijalne vektore upotrebljavamo oznake

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p = V_{\sigma_i}.$$

Zadatak 3.1.2. *Uz uvedene oznake dokažite da za proizvoljnu glatku krivulju σ kroz točku p vrijedi*

$$V_\sigma f = \sum_{i=1}^{n} \frac{d(x_i \circ \sigma)}{dt}(0) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p f, \qquad f \in C^\infty(M).$$

Odatle i iz teorema 3.1.4. neposredno slijedi:

Teorem 3.1.5. *Neka je M $n-$dimenzionalna mnogostrukost, (U,ψ) karta na M, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ koordinatne funkcije prelikavanja ψ i $p \in U$. Tada je*

$$\left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_p, \left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)_p, \ldots, \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)_p \right\}$$

baza realnog vektorskog prostora $T_p(M)$. Posebno, $\dim T_p(M) = \dim M$.

Neka je V realan konačnodimenzionalan vektorski prostor i neka je $\{e_1, \ldots, e_n\}$ baza od V. Neka je $\psi : V \to \mathbb{R}^n$ preslikavanje koje svakom vektoru $v \in V$ pridružuje $n-$torku njegovih koordinata u odabranoj bazi:

$$v = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \qquad \Longrightarrow \qquad \psi(v) = (x_1, \ldots, x_n).$$

Tada je ψ izomorfizam, dakle i homeomorfizam sa V na $\mathbb{R}^n$. Prema tome, (V,ψ) je karta na V i $\{(V,\psi)\}$ je atlas na V. $C^\infty-$struktura na V koja sadrži taj atlas (tj. kartu (V,ψ)) ne ovisi o izboru baze, budući da su koordinate vektora u jednoj bazi linearne funkcije koordinata tog vektora u drugoj bazi.

Vidjet ćemo sada da se tangencijalni prostor $T_v(V)$ za svaki $v \in V$ prirodno identificira sa samim prostorom V. Naime, za $w \in V$ definiramo $\sigma_w : \mathbb{R} \to V$ ovako:

$$\sigma_w(t) = v + tw, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Tada je σ_w glatka krivulja u mnogostrukosti V kroz točku v. Pripadni tangencijalni vektor $V_{\sigma_w} \in T_v(V)$ označimo sa $A(w)$:

$$A(w)f = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(v + tw)\bigg|_{t=0}, \qquad f \in C^\infty(M).$$

Tada je $A : V \to T_v(V)$ linearno preslikavanje. Za izabranu bazu $\{e_1, \ldots, e_n\}$ i pripadnu kartu (V,ψ) označimo sa $x_1, \ldots, x_n$ koordinatne funkcije:

$$\psi(u) = (x_1(u), \ldots, x_n(u)), \qquad u \in V.$$

Drugim riječima, $\{x_1, \ldots, x_n\}$ je dualna baza u dualnom prostoru V^* u odnosu na bazu $\{e_1, \ldots, e_n\}$ u prostoru V. Jednostavan račun pokazuje da vrijedi

$$A(e_i) = \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_v, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Dakle, operator A prevodi bazu $\{e_1, \ldots, e_n\}$ prostora V u bazu $\left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_v, \ldots, \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)_v \right\}$ tangencijalnog prostora $T_v(V)$. To pokazuje da je $A : V \to T_v(V)$ izomorfizam vektorskih prostora. Pomoću tog izomorfizma možemo identificirati prostor V s tangencijalnim prostorom $T_v(V)$. Dakle, vektor $w \in V$ identificira se s tangencijalnim vektorom

$$f \mapsto \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(v + tw)\bigg|_{t=0}, \qquad f \in C^\infty(V).$$

Neka su M i N diferencijabilne mnogostrukosti i $\Phi : M \to N$ $C^\infty-$preslikavanje. Za $p \in M$ definiramo $T_p(\Phi) : T_p(M) \to T_{\Phi(p)}(N)$ sa

$$[T_p(\Phi)X](f) = X(f \circ \Phi), \qquad f \in C^\infty(N), \quad X \in T_p(M).$$

Tada je $T_p(\Phi)$ linearan operator i zove se **diferencijal preslikavanja Φ u točki** p. Ako su $x_1, x_2, \ldots, x_m$ koordinatne funkcije za neku kartu (U, ψ) od M oko točke p i $y_1, y_2, \ldots, y_n$ koordinatne funkcije za neku kartu (V, φ) od N oko točke $\Phi(p)$, takvu da je $\Phi(U) \subseteq V$, onda operator $T_p(\Phi)$ djeluje na sljedeći način:

$$T_p(\Phi) \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \alpha_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p (y_j \circ f) \left(\frac{\partial}{\partial y_j} \right)_{\Phi(p)}, \qquad \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{R}.$$

Drugim riječima, matrica operatora $T_p(\Phi)$ u paru baza

$$\left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right)_p, \left(\frac{\partial}{\partial x_2} \right)_p, \ldots, \left(\frac{\partial}{\partial x_m} \right)_p \right\} \quad \text{prostora} \quad T_p(M)$$

i

$$\left\{ \left(\frac{\partial}{\partial y_1} \right)_{\Phi(p)}, \left(\frac{\partial}{\partial y_2} \right)_{\Phi(p)}, \ldots, \left(\frac{\partial}{\partial y_n} \right)_{\Phi(p)} \right\} \quad \text{prostora} \quad T_{\Phi(p)}(N)$$

je upravo Jacobijeva matrica preslikavanja $\varphi \circ \Phi \circ \psi^{-1}$.

Zadatak 3.1.3. *Neka su L, M i N $C^\infty-$mnogostrukosti i neka su $\Psi : L \to M$ i $\Phi : M \to N$ $C^\infty-$preslikavanja. Dokažite da je tada $\Phi \circ \Psi : L \to N$ $C^\infty-$preslikavanje i da za svaku točku $p \in L$ vrijedi $T_p(\Phi \circ \Psi) = T_{\Psi(p)}(\Phi) T_p(\Psi)$.*

Zadatak 3.1.4. *Neka je $\Phi : M \to N$ difeomorfizam $C^\infty-$mnogostrukosti. Dokažite da je tada* $\dim M = \dim N$.

Podmnogostrukost mnogostrukosti M je podskup $N \subseteq M$ koji ima svoju diferencijabilnu strukturu koja je takva da inkluzija $i : N \to M$ zadovoljava:

(*i*) i je $C^\infty-$preslikavanje;

(*ii*) $T_p(i) : T_p(N) \to T_p(M)$ je injekcija $\forall p \in N$.

Posebno, svaka otvorena podmnogostrukost je podmnogostrukost.

Za mnogostrukost M definiramo

$$T(M) = \bigcup_{p \in M} T_p(M) \qquad \text{(disjunktna unija)}$$

i neka je $\pi : T(M) \to M$ preslikavanje definirano sa $\pi(T_p(M)) = \{p\}$. Neka je $\mathcal{A}$ $C^\infty-$struktura mnogostrukosti M. Za $\xi \in \mathcal{A}$ pišemo $\xi = (U_\xi, \psi_\xi)$ i neka su $x_1^\xi, \ldots, x_n^\xi : U_\xi \to \mathbb{R}$ pripadne koordinatne funkcije: $\psi_\xi(p) = (x_1^\xi(p), \ldots, x_n^\xi(p))$, $p \in U_\xi$. Za $\xi \in \mathcal{A}$ definiramo preslikavanje

$$\Psi_\xi : \pi^{-1}(U_\xi) \longrightarrow \mathbb{R}^{2n}$$

na sljedeći način:

$$\Psi_\xi(v) = (x_1^\xi(p), \ldots, x_n^\xi(p), v_1, \ldots, v_n) \qquad \text{ako je} \qquad p \in U_\xi \quad \text{i} \quad v = \sum_{i=1}^{n} v_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p \in T_p(M).$$

Za $\xi \in \mathcal{A}$ neka je τ_ξ skup svih podskupova od $\pi^{-1}(U_\xi) \subseteq T(M)$ oblika $\Psi_\xi^{-1}(W)$, gdje je W otvoren podskup od $\psi_\xi(U_\xi) \times \mathbb{R}^n$. Neka je τ unija svih skupova τ_ξ, $\xi \in \mathcal{A}$. Pokazuje se da je τ baza topologije s kojom $T(M)$ postaje Hausdorffov topološki prostor s prebrojivom bazom topologije i preslikavanje $\pi : T(M) \to M$ je neprekidno. Nadalje, direktno se provjerava da je

$$\{(\pi^{-1}(U_\xi), \Psi_\xi);\ \xi \in \mathcal{A}\}$$

$C^\infty-$atlas na $T(M)$. Na taj način $T(M)$ postaje $2n-$dimenzionalna $C^\infty-$mnogostrukost. Tada je preslikavanje $\pi : T(M) \to M$ klase C^∞.

Vektorsko polje na mnogostrukosti M je svako $C^\infty-$preslikavanje $X : M \to T(M)$, $p \mapsto X_p$, takvo da je $X_p \in T_p(M)\ \forall p \in M$. Skup svih vektorskih polja označavamo sa $\mathcal{X}(M)$; to je realan vektorski prostor uz operacije po točkama:

$$(\alpha X)_p = \alpha X_p, \qquad (X+Y)_p = X_p + Y_p, \qquad \alpha \in \mathbb{R}, \quad X, Y \in \mathcal{X}(M), \quad p \in M.$$

Štoviše, $\mathcal{X}(M)$ je unitalni $C^\infty(M)-$modul uz množenje elemenata iz $\mathcal{X}(M)$ funkcijama iz $C^\infty(M)$ definirano također po točkama:

$$(fX)_p = f(p)X_p, \qquad f \in C^\infty(M), \quad X \in \mathcal{X}(M).$$

Liejeva algebra $Der(C^\infty(M))$ svih derivacija algebre $C^\infty(M)$ je unitalni $C^\infty(M)-$modul uz operaciju množenja definiranu sa

$$(fD)g = fDg, \qquad f, g \in C^\infty(M), \quad D \in Der(C^\infty(M)).$$

Teorem 3.1.6. *Za $X \in \mathcal{X}(M)$ definiramo $\overline{X} : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ sa*

$$[\overline{X}(f)](p) = X_p(f), \qquad f \in C^\infty(M), \quad p \in M.$$

Tada je $X \mapsto \overline{X}$ izomorfizam $C^\infty(M)-$modula $\mathcal{X}(M)$ na $C^\infty(M)-$modul $Der(C^\infty(M))$.

Zadatak 3.1.5. *Dokažite teorem 3.1.6.*

Preslikavanje $X \mapsto \overline{X}$ iz teorema 3.1.6. upotrebljavamo kao identifikaciju. Dakle, vektorska polja na mnogostrukosti M su derivacije algebre $C^\infty(M)$. Za tako shvaćeno vektorsko polje X i za $p \in M$, pripadni tangencijalni vektor $X_p \in T_p(M)$ definiran je sa $X_p f = (Xf)(p)$, $f \in C^\infty(M)$.

3.2 Liejeve grupe

Liejeva grupa je skup G sa svojstvima:

(i) G je grupa.

(ii) G je diferencijabilna mnogostrukost.

(iii) $(x, y) \mapsto xy^{-1}$ je $C^\infty-$preslikavanje sa $G \times G$ u G.

Naravno, tada je množenje $(x, y) \mapsto xy$ $C^\infty-$preslikavanje sa $G \times G$ u G, a invertiranje $x \mapsto x^{-1}$ je difeomorfizam sa G na G. Važna je činjenica, koju navodimo bez dokaza, da na svakoj Liejevoj grupi postoji prirodna struktura analitičke mnogostrukosti:

Teorem 3.2.1. *Neka je G Liejeva grupa. $C^\infty-$struktura mnogostrukosti G sadrži jedinstvenu analitičku strukturu takvu da je preslikavanje $(x, y) \mapsto xy^{-1}$ sa $G \times G$ u G analitičko.*

Neka je $\mathcal{A}$ konačnodimenzionalna realna unitalna algebra i neka je $G = \mathcal{A}^\times$ grupa njenih invertibilnih elemenata. Element $x \in \mathcal{A}$ je invertibilan ako i samo ako je regularan operator λ_x lijevog množenja sa $x : \lambda_x y = xy$, $y \in \mathcal{A}$. Dakle,

$$G = \{x \in \mathcal{A};\ \det(\lambda_x) \neq 0\}.$$

To pokazuje da je G otvoren podskup od $\mathcal{A}$. Kao vektorski prostor $\mathcal{A}$ je diferencijabilna mnogostrukost. Dakle i G je diferencijabilna mnogostrukost (otvorena podmnogostrukost od $\mathcal{A}$).

Prema razmatranjima u prethodnom odjeljku 3.1. za bilo koju točku $x \in G$ tangencijalni prostor $T_x(G)$ identificira se s tangencijalnim prostorom $T_x(\mathcal{A})$, a ovaj se opet s vektorskim prostorom $\mathcal{A}$. Identifikacija $\mathcal{A}$ sa $T_x(G)$ identificira element $y \in \mathcal{A}$ s tangencijalnim vektorom iz $T_x(G)$ danim sa

$$f \mapsto \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(x + ty)\bigg|_{t=0}, \qquad f \in C^\infty(G).$$

Posebno je važan slučaj algebre $L(V)$ svih linearnih operatora na konačnodimenzionalnom realnom vektorskom prostoru V. Dakle, $GL(V)$ je Liejeva grupa i za $x \in GL(V)$ tangencijalni prostor $T_x(GL(V))$ identificira se s prostorom $L(V)$. Izomorfna je Liejeva grupa $GL(n, \mathbb{R})$ svih regularnih kvadratnih matrica $n-$tog reda. Njen tangencijalni prostor u točki $x \in GL(n, \mathbb{R})$ identificira se s prostorom $M_n(\mathbb{R})$ svih kvadratnih matrica $n-$tog reda.

Neka je u daljnjem G Liejeva grupa. Za $x \in G$ definiramo preslikavanja $\lambda_x, \rho_x : G \to G$ ovako:

$$\lambda_x(y) = xy, \qquad \rho_x(y) = yx^{-1}, \qquad y \in G.$$

λ_x i ρ_x su analitički difeomorfizmi sa G na G. Nadalje, očito vrijedi $\lambda_x \circ \lambda_y = \lambda_{xy}$ i $\rho_x \circ \rho_y = \rho_{xy}$. **Vektorsko polje** $X \in \mathcal{X}(G)$ zove se **lijevoinvarijantno** ako vrijedi

$$T_y(\lambda_x)X_y = X_{xy} \qquad \forall x, y \in G.$$

Neka je $\mathfrak{g}$ potprostor od $\mathcal{X}(G)$ svih lijevoinvarijantnih vektorskih polja na G.

Propozicija 3.2.2. *$\mathfrak{g}$ je Liejeva podalgebra Liejeve algebre $Der(C^\infty(G)) = \mathcal{X}(G)$ svih vektorskih polja na G.*

Dokaz: Očito je $\mathfrak{g}$ potprostor. Neka su $X, Y \in \mathfrak{g}$. Za $x, y \in G$ i za $f \in C^\infty(G)$ imamo

$$(T_y(\lambda_x)[X,Y]_y)(f) = [X,Y]_y(f \circ \lambda_x) = \big([X,Y](f \circ \lambda_x)\big)(y) = (X(Y(f \circ \lambda_x)))(y) - (Y(X(f \circ \lambda_x)))(y).$$

Iz lijevoinvarijantnosti vektorskog polja Y slijedi

$$(Y(f \circ \lambda_x))(y) = Y_y(f \circ \lambda_x) = (T_y(\lambda_x)Y_y)f = Y_{xy}f = (Yf)(xy) = ((Yf) \circ \lambda_x)(y).$$

Prema tome,

$$Y(f \circ \lambda_x) = (Yf) \circ \lambda_x, \qquad Y \in \mathfrak{g}, \quad f \in C^\infty(G), \quad x \in G.$$

Odatle, uzevši u obzir da je i vektorsko polje X lijevoinvarijantno, dobivamo

$$X(Y(f \circ \lambda_x)) = X((Yf) \circ \lambda_x) = (X(Yf)) \circ \lambda_x \quad \text{i} \quad Y(X(f \circ \lambda_x)) = Y((Xf) \circ \lambda_x) = (Y(Xf)) \circ \lambda_x.$$

Dakle,

$$\begin{aligned}(T_y(\lambda_x)[X,Y]_y)(f) &= ((X(Yf)) \circ \lambda_x)(y) - (Y(Xf)) \circ \lambda_x)(y) = \\ &= (X(Yf))(xy) - (Y(Xf))(xy) = ([X,Y]f)(xy) = [X,Y]_{xy}(f).\end{aligned}$$

Kako je $f \in C^\infty(G)$ bila proizvoljna, to pokazuje da je $T_y(\lambda_x)[X,Y]_y = [X,Y]_{xy}$ $\forall x, y \in G$, odnosno, $[X,Y] \in \mathfrak{g}$.

Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ se zove **Liejeva algebra Liejeve grupe** G.

Propozicija 3.2.3. *Neka je e jedinica u Liejevoj grupi G. Preslikavanje $X \mapsto X_e$ je izomorfizam vektorskih prostora sa $\mathfrak{g}$ na $T_e(G)$.*

Skica dokaza: Očito je preslikavanje $X \mapsto X_e$ linearno. Neka su $X, Y \in \mathfrak{g}$ takvi da je $X_e = Y_e$. Tada za svaki $x \in G$ imamo

$$X_x = X_{xe} = T_e(\lambda_x)X_e = T_e(\lambda_x)Y_e = Y_{xe} = Y_x.$$

To znači da je $X = Y$. Time je dokazano da je preslikavanje $X \mapsto X_e$ injektivno.

Skicirat ćemo sada dokaz surjektivnosti. Neka je $v \in T_e(G)$. Za neki $\varepsilon > 0$ neka je $\sigma : \langle -\varepsilon, \varepsilon\rangle \to G$ glatka krivulja takva da je $\sigma(0) = e$ i $V_\sigma = v$. Za proizvoljan $y \in G$ definiramo $\sigma_y : \langle -\varepsilon, \varepsilon\rangle \to G$ sa $\sigma_y(t) = y\sigma(t)$, $-\varepsilon < t < \varepsilon$. Tada je σ_y glatka krivulja u G kroz točku y. Definiramo preslikavanje $X : y \mapsto X_y = V_{\sigma_y} \in T_y(G)$, $y \in G$. Pokazuje se da je tada X vektorsko polje, $X \in \mathcal{X}(G)$, i da je $T_y(\lambda_x)X_y = X_{xy}$ $\forall x, y \in G$. Dakle, $X \in \mathfrak{g}$. Sada imamo $X_e = V_{\sigma_e} = V_\sigma = v$.

Izomorfizam iz propozicije 3.2.3. upotrebljava se kao identifikacija. Dakle, Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ Liejeve grupe G identificira se s tangencijalnim prostorom $T_e(G)$ na G u jedinici e. Komutator $[X,Y]$ elemenata Liejeve algebre $T_e(G)$ definiran je zaobilazno: dobiva se tako da najprije X i Y shvatimo kao lijevoinvarijantna vektorska polja, zatim izračunamo komutator tih dviju derivacija algebre $C^\infty(G)$ i rezultat ponovo shvaćamo kao element od $T_e(G)$. Daljnje definicije i konstrukcije dovest će nas do direktne formule za komutator $[X,Y] \in T_e(G)$ elemenata $X, Y \in T_e(G)$.

Razmotrimo opet primjer konačnodimenzionalne realne unitalne algebre $\mathcal{A}$. Grupa G svih njenih invertibilnih elemenata je Liejeva grupa. Njena Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ identificira se s tangencijalnim prostorom $T_e(G)$ na G u jedinici e, a ovaj se identificira s prostorom $\mathcal{A}$.

Zadatak 3.2.1. *Dokažite da je pri opisanoj identifikaciji $\mathfrak{g}$ sa $\mathcal{A}$ komutator $[x,y]$ u Liejevoj algebri $\mathfrak{g}$ jednak $xy - yx$ u algebri $\mathcal{A}$.*

Rezultat prethodnog zadatka pokazuje da se Liejeva algebra Liejeve grupe $GL(V)$ (odnosno, Liejeve grupe $GL(n,\mathbb{R})$) identificira s Liejevom algebrom $\mathfrak{gl}(V)$ (odnosno, s Liejevom algebrom $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$).

Neka su sada G i H Liejeve grupe s Liejevim algebrama $\mathfrak{g}$ i $\mathfrak{h}$. Preslikavanje $\varphi : G \to G$ zove se **Liejev homomorfizam** ako je to homomorfizam grupa i analitičko preslikavanje.

Zadatak 3.2.2. *Neka je $\varphi : G \to H$ Liejev homomorfizam. Dokažite da je tada $T_e(\varphi)$ homomorfizam Liejeve algebre $T_e(G) = \mathfrak{g}$ u Liejevu algebru $T_e(H) = \mathfrak{h}$.*

Za element x Liejeve grupe G definiramo preslikavanje $Int(x) : G \to G$ sa $(Int(x))(y) = xyx^{-1}$. Očito je $Int(x)$ Liejev homomorfizam sa G u G. Homomorfizam $Int(x^{-1})$ je inverzno preslikavanje od $Int(x)$. Dakle, svaki $Int(x)$ je automorfizam grupe G i analitički difeomorfizam mnogostrukosti G. Dakle, preslikavanje $Ad(x) = T_e(Int(x))$ je regularan operator na Liejevoj algebri $T_e(G) = \mathfrak{g}$, tj. $Ad(x) \in GL(\mathfrak{g})$.

Propozicija 3.2.4. *Preslikavanje $Ad : G \to GL(\mathfrak{g})$ je Liejev homomorfizam.*

Dokaz: Za $x, y \in G$ imamo $Int(xy) = Int(x) \circ Int(y)$, pa slijedi

$$Ad(xy) = T_e(Int(xy)) = T_e(Int(x) \circ Int(y)) = T_e(Int(x))\, T_e(Int(y)) = Ad(x)\, Ad(y).$$

Prema tome, $Ad : G \to GL(\mathfrak{g})$ je homomorfizam grupa. Stoga je za dokaz analitičnosti dovoljno dokazati analitičnost na nekoj okolini jedinice. Neka je (U, φ) analitička karta na G takva da je $e \in U$ i $\varphi(e) = 0$. Neka je $V \subseteq U$ otvoren skup takav da je $e \in V$ i da za $x, y \in V$ vrijedi $xyx^{-1} \in U$. Analitičnost preslikavanja $(x, y) \mapsto xyx^{-1}$ sa $G \times G$ u G znači posebno da su koordinate točke xyx^{-1} analitičke funkcije koordinata točaka $x, y \in V$. Odatle slijedi da je preslikavanje Ad analitičko sa V u $L(\mathfrak{g})$, budući da se koordinate tog preslikavanja u točki $y \in V$ dobivaju parcijalnim deriviranjem koordinata točke xyx^{-1} po koordinatama točke $x \in V$ u točki $x = e$.

Neka je sada $\varphi : G \to H$ Liejev homomorfizam Liejevih grupa G i H s Liejevim algebrama $\mathfrak{g} = T_e(G)$ i $\mathfrak{h} = T_e(H)$. Radi preciznosti preslikavanja Int i Ad za grupe G i H označavamo sa Int_G i Ad_G, te sa Int_H i Ad_H. Za $x, y \in G$ je

$$\varphi((Int_G(x))(y)) = \varphi(xyx^{-1}) = \varphi(x)\varphi(y)\varphi(x)^{-1} = (Int_H(\varphi(x)))(\varphi(y)).$$

Dakle,

$$\varphi \circ Int_G(x) = Int_H(\varphi(x)) \circ \varphi,$$

pa slijedi

$$T_e(\varphi)T_e(Int_G(x)) = T_e(Int_H(\varphi(x)))T_e(\varphi).$$

Time smo dokazali:

Propozicija 3.2.5. *Neka je $\varphi : G \to H$ Liejev homomorfizam. Tada za svaku točku $x \in G$ vrijedi*

$$T_e(\varphi)Ad_G(x) = Ad_H(\varphi(x))T_e(\varphi).$$

Jednoparametarska podgrupa Liejeve grupe G je Liejev homomorfizam $\varphi : \mathbb{R} \to G$. Posebno, φ je glatka krivulja kroz e, pa je $V_\varphi \in T_e(G) = \mathfrak{g}$. Bez dokaza navodimo sljedeći fundamentalni teorem iz teorije Liejevih grupa; dokaz se temelji na teoremu egzistencije i jedinstvenosti za sisteme običnih linearnih diferencijalnih jednadžbi prvog reda.

Teorem 3.2.6. *Za svaki $X \in \mathfrak{g}$ postoji jedinstvena jednoparametarska podgrupa φ_X Liejeve grupe G takva da je $X = V_{\varphi_X}$. Preslikavanje $(X,t) \mapsto \varphi_X(t)$ sa $\mathfrak{g} \times \mathbb{R}$ u G je analitičko.*

Uz oznake iz teorema 3.2.6. definiramo **eksponencijalno preslikavanje** $\exp : \mathfrak{g} \to G$ sa

$$\exp X = \varphi_X(1), \qquad X \in \mathfrak{g} = T_e(G).$$

Zadatak 3.2.3. *Dokažite da je $\varphi_X(t) = \exp tX$, $t \in \mathbb{R}$, $X \in \mathfrak{g}$.*

Razmotrimo posebno Liejevu grupu $G = \mathcal{A}^\times$ za konačnodimenzionalnu realnu unitalnu algebru $\mathcal{A}$. Njenu smo Liejevu algebru identificirali s Liejevom algebrom $\mathcal{A}$ dobivenom iz asocijetivne algebre $\mathcal{A}$ zadavanjem komutatora $[x,y] = xy - yx$, $x,y \in \mathcal{A}$. Element $x \in \mathcal{A}$ identificira se s tangencijalnim vektorom na G u jedinici $e = 1_\mathcal{A}$ zadanim sa

$$f \ \mapsto \ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(e+tx)\bigg|_{t=0}, \qquad f \in C^\infty(G).$$

Neka je $x \in \mathcal{A}$. Tada je očito

$$\varphi : t \ \mapsto \ \mathrm{e}^{tx} = e + tx + \frac{t^2}{2!}x^2 + \frac{t^3}{3!}x^3 + \cdots, \qquad t \in \mathbb{R},$$

jednoparametarska podgrupa Liejeve grupe G.

Zadatak 3.2.4. *Uz gornje oznake dokažite da je $V_\varphi = x$, tj. da za svaku funkciju $f \in C^\infty(G)$ vrijedi*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f\left(e + tx + \frac{t^2}{2!} + \cdots\right)\bigg|_{t=0} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(e+tx)\bigg|_{t=0}.$$

Prema tome, u slučaju $G = \mathcal{A}^\times$ eksponencijalno preslikavanje dano je sa

$$\exp x = \mathrm{e}^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n, \qquad x \in \mathcal{A}.$$

Posebno to vrijedi za Liejevu grupu $G = GL(V)$ i njenu Liejevu algebru $\mathfrak{gl}(V)$, gdje je V konačnodimenzionalan realan vektorski prostor, a također i za Liejevu grupu $GL(n,\mathbb{R})$ i njenu Liejevu algebru $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$.

Važno svojstvo eksponencijalnog preslikavanja, koje navodimo bez dokaza, je analitičnost i lokalna difeomorfnost:

Teorem 3.2.7. *Neka je G Liejeva grupa i $\mathfrak{g}$ njena Liejeva algebra. Postoje otvorena okolina U nule u $\mathfrak{g}$ i otvorena okolina V jedinice u G takve da je restrikcija $\exp|U$ analitički difeomorfizam sa U na V.*

Jednostavna posljedica je:

Korolar 3.2.8. *Neka je G Liejeva grupa i $\mathfrak{g}$ njena Liejeva algebra. Tada je komponenta povezanosti jedinice G_0 u grupi G generirana skupom $\exp \mathfrak{g} = \{\exp X;\ X \in \mathfrak{g}\}$. Štoviše, za svaku otvorenu okolinu U nule u $\mathfrak{g}$ podgrupa G_0 generirana je sa $\exp U$:*

$$G_0 = \{(\exp X_1)(\exp X_2)\cdots(\exp X_n);\ n \in \mathbb{N},\ X_1, X_2, \ldots, X_n \in U\}.$$

Dokaz: Prije svega, kako je preslikavanje exp neprekidno, vrijedi $\exp \mathfrak{g} \subseteq G_0$. Neka je U otvorena okolina nule u $\mathfrak{g}$. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je U povezana i da je $U = -U$. Tada je $\exp U$ otvorena okolina jedinice u G sadržana u G_0 i vrijedi $(\exp U)^{-1} = \exp U$. Neka je G_1 podgrupa od G generirana skupom $\exp U$. Tada je G_1 unija skupova $(\exp U)^n$, $n \in \mathbb{N}$, koji su svi otvoreni i povezani. Dakle, G_1 je otvorena i povezana podgrupa od G. Grupa G je unija disjunknih skupova oblika xG_1, $x \in G$, koji su svi otvoreni. Dakle, komplement $G \setminus G_1$ je također otvoren skup. Prema tome, povezan podskup G_1 je i otvoren i zatvoren, pa slijedi da je on komponenta povezanosti od G, tj. da je $G_1 = G_0$.

Iz teorema 3.2.7. izvodi se i sljedeći netrivijalni rezultat:

Teorem 3.2.9. *Neka su G i H Liejeve grupe i $\varphi : G \to H$ neprekidni homomorfizam grupa. Tada je φ Liejev homomorfizam.*

Neka je sada $\psi : G \to H$ Liejev homomorfizam i neka su $\mathfrak{g}$ i $\mathfrak{h}$ Liejeve algebre Liejevih grupa G i H. Eksponencijalna preslikavanja $\mathfrak{g} \to G$ i $\mathfrak{h} \to H$ označimo sa $\exp_G$ i $\exp_H$. Za $X \in \mathfrak{g}$ preslikavanje $t \mapsto \exp tX$ je jedinstvena jednoparametarska podgrupa Liejeve grupe G s tangencijalnim vektorom u jedinici $e = e_G$ jednakim X. Kompozicijom tog preslikavanja s Liejevim homomorfizmom ψ dobivamo jednoparametarsku podgrupu $t \mapsto \psi(\exp_G tX)$ u Liejevoj grupi H. Pripadni tangencijalni vektor u jedinici $e = e_H$ grupe H na bilo koju funkciju $g \in C^\infty(H)$ djeluje ovako:

$$g \mapsto \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} g(\psi(\exp_G tX))\bigg|_{t=0} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} (g \circ \psi)(\exp_G tX)\bigg|_{t=0} = X(g \circ \psi) = [T_e(\psi)X]\,(g).$$

Zbog jedinstvenosti u teoremu 3.2.6. i zbog zadatka 3.2.4. dobivamo da je

$$\exp_H tT_e(\psi)X = \psi(\exp_G tX), \qquad t \in \mathbb{R}, \quad X \in \mathfrak{g} = T_e(G).$$

Dakle,

Propozicija 3.2.10. *Ako je $\psi : G \to H$ Liejev homomorfizam onda je*

$$\psi(\exp_G X) = \exp_H T_e(\psi)X$$

za svaki X iz Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ Liejeve grupe G.

Zadatak 3.2.5. *Neka je G Liejeva grupa, $\mathfrak{g} = T_e(G)$ njena Liejeva algebra. Za $X \in \mathfrak{g}$ označimo sa $\tilde{X}$ jedinstveno lijevoinvarijantno vektorsko polje na G takvo da je $\tilde{X}_e = X$. Dokažite da vrijedi*

$$(\tilde{X}^n f)(x \exp tX) = \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n} f(x \exp tX), \qquad X \in \mathfrak{g}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad x \in G.$$

Uputa: Treba samo dokazati da je $(\tilde{X}f)(\exp tX) = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(\exp tX)$. Odatle pomoću lijevoinvarijantnosti od $\tilde{X}$ slijedi da je $(\tilde{X}f)(x(\exp tX)) = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(x(\exp tX))$, a opća formula dobiva se jednostavnom indukcijom po n.

$H \subseteq G$ zove se **Liejeva podgrupa** Liejeve grupe G ako je to podgrupa koja je ujedno podmnogostrukost; dakle, H ima svoju strukturu mnogostrukosti takvu da je to Liejeva grupa, inkluzija $\iota : H \to G$ je Liejev homomorfizam i pripadni homomorfizam Liejevih algebri $T_e(\iota) : \mathfrak{h} \to \mathfrak{g}$ injektivan. Tada se pomoću $T_e(\iota)$ Liejeva algebra $\mathfrak{h}$ identificira s Liejevom podalgebrom Liejeve algebre $\mathfrak{g}$.

Teorem 3.2.11. *Neka je G Liejeva grupa s Liejevom algebrom $\mathfrak{g}$ i neka je $\mathfrak{h}$ Liejeva podalgebra od $\mathfrak{g}$. Postoji jedinstvena povezana Liejeva podgrupa H od G čija je Liejeva algebra jednaka $\mathfrak{h}$.*

Ovaj se teorem dokazuje tako da se promatra skup $\exp \mathfrak{h} \subseteq G$ i za H se uzme podgrupa generirana tim skupom. $C^\infty-$strukturu u H uvedemo najprije na okolinu jedinice pomoću $\exp|\mathfrak{h}$, a zatim pomacima i na cijelu grupu H.

Teorem 3.2.12. *Neka je G Liejeva grupa i H zatvorena podgrupa. Tada je H Liejeva podgrupa od G.*

Za dokaz ovog teorema najprije se pokaže da je

$$\mathfrak{h} = \{X \in \mathfrak{g};\ \exp tX \in H\ \forall t \in \mathbb{R}\}$$

Liejeva podalgebra od $\mathfrak{g}$, a zatim da je $\exp \mathfrak{h}$ okolina jedinice u grupi H.

Neka je i dalje G Liejeva grupa i $\mathfrak{g} = T_e(G)$ njena Liejeva algebra. Iz Liejevog homomorfizma $Ad : G \to GL(\mathfrak{g})$ dobivamo homomorfizam Liejevih algebri $T_e(Ad) : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$. Najavljena formula, koja daje komutator elemenata $X, Y \in \mathfrak{g} = T_e(G)$ bez korištenja njihova proširenja do lijevoinvarijantnih vektorskih polja na G, je

$$(T_e(Ad)X)(Y) = [X, Y], \qquad X, Y \in \mathfrak{g} = T_e(G).$$

Drugim riječima:

Teorem 3.2.13. *Za Liejevu grupu G i njenu Liejevu algebru $\mathfrak{g} = T_e(G)$ vrijedi $T_e(Ad) = ad$.*

Dokaz ove propozicije ćemo samo skicirati u posebnom slučaju $G = GL(n, \mathbb{R})$. Tada je dokaz je znatno jednostavniji budući da već znamo da je komutator u Liejevoj algebri $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ Liejeve grupe $GL(n, \mathbb{R})$ upravo komutator matrica. Također, diferencijali preslikavanja u tom se slučaju mogu računati jednostavnim deriviranjem matričnih funkcija.

Za bilo koju matricu $T \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ postoji $\varepsilon > 0$ takav da je $t \mapsto I + tT$, $-\varepsilon < t < \varepsilon$, glatka krivulja u Liejevoj grupi $GL(n, \mathbb{R})$ u jedinici I. Pripadni tangencijalni vektor je upravo T. Nadalje, za $A \in GL(n, \mathbb{R})$ je

$$(Int(A))(I + tT) = A(I + tT)A^{-1} = I + tATA^{-1},$$

pa slijedi

$$(Ad(A))(T) = ATA^{-1}, \qquad T \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}), \quad A \in GL(n, \mathbb{R}).$$

Za $S \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ i za male vrijednosti t imamo konvergentan red potencija u prostoru matrica

$$(I + tS)^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j t^j S^j = I - tS + t^2(\cdots\cdots).$$

Odatle slijedi

$$(Ad(I + tS))(T) = (I + tS)T(I + tS)^{-1} = T + t(ST - TS) + t^2(\cdots\cdots)$$

za male vrijednosti t. Odatle deriviranjem po t u nuli slijedi

$$(T_I(Ad)(S))(T) = ST - TS = [S, T].$$

Ako je G topološka grupa i H njena zatvorena podgrupa, tada je skup desnih $H-$klasa $M = G/H = \{gH;\ g \in G\}$ s kvocijentnom topologijom Hausdorffov topološki prostor, koji je lokalno kompaktan ako je grupa G lokalno kompaktna. Bez dokaza navodimo:

Teorem 3.2.14. *Neka je G Liejeva grupa i H njena zatvorena podgrupa. Nadalje, neka je $\mathfrak{g}$ Liejeva algebra od G i $\mathfrak{h}$ njena Liejeva podalgebra koja odgovara zatvorenoj podgrupi H :*

$$\mathfrak{h} = \{X \in \mathfrak{g};\ \exp tX \in H \ \ \forall t \in \mathbb{R}\}.$$

Na kvocijentnom prostoru $M = G/H$ postoji jedinstvena struktura $C^\infty-$mnogostrukosti (odnosno, analitičke mnogostrukosti) takva da je $(g, m) \mapsto gm$, $g \in G$, $m \in M$, $C^\infty-$preslikavanje (odnosno, analitičko preslikavanje) sa $G \times M$ u M. Ako je podgrupa H normalna, kvocijentna grupa G/H s tom strukturom je Liejeva grupa. Nadalje, tada je $\mathfrak{h}$ ideal u Liejevoj algebri $\mathfrak{g}$ i kvocijentna Liejeva algebra $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ prirodno se identificira s Liejevom algebrom Liejeve grupe G/H.

Analitička struktura (a time i $C^\infty-$struktura) na kvocijentnom prostoru $M = G/H$ u prethodnom teoremu dobiva se pomoću eksponencijalnog preslikavanja. Pokazuje se da je preslikavanje $\exp_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}} : X + \mathfrak{h} \mapsto (\exp X)H$ sa $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ u M dobro definirano i njegova restrikcija na neku otvorenu okolinu V nule u $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ je homeomorfizam sa V na otvorenu okolinu U točke $H = eH$ prostora M. Tada inverzno preslikavanje $(\exp_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}} |V)^{-1}$ komponirano s koordinatizacijom vektorskog prostora $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ definira kartu na M. Iz te karte pomakom na M dobivamo kartu oko svake točke $gH \in M$. Pokazuje se da je na taj način dobiven analitički atlas na M, i za pripadnu analitičku strukturu $(g, m) \mapsto gm$ je analitičko preslikavanje sa $G \times M$ u M.

3.3 Natkrivajuće grupe

Neka su X i Y povezani topološki prostori. Preslikavanje $f : Y \to X$ zove se **lokalni homeomorfizam** ako svaka točka $y \in Y$ ima otvorenu okolinu V takvu da je $f(V)$ otvoren podskup od X i $f|V$ je homeomorfizam sa V na $f(V)$. Za povezan otvoren podskup U od X kažemo da je **pravilno natkriven** s lokalnim homeomorfizmom $f : Y \to X$ ako je restrikcija preslikavanja $f|V$ na svaku komponentu povezanosti V skupa $f^{-1}(U)$ homeomorfizam sa V na U. Budući da je f lokalni homeomorfizam, dovoljno je zahtijevati da je svaka restrikcija $f|V$ bijekcija sa V na U. Za preslikavanje f kažemo da je **natkrivanje** ako svaka točka $x \in X$ ima povezanu otvorenu okolinu koja je pravilno natkrivena sa f. Naravno, svako natkrivanje je surjekcija. **Natkrivajući prostor** ili **natkrivač** topološkog prostora X je uređen par (Y, f), gdje je Y povezan topološki prostor i $f : Y \to X$ je natkrivanje. Ako je jasno o kojem preslikavanju f se radi, obično se sam prostor Y zove natkrivač od X ili natkrivajući prostor prostora X. Ako je $f : Y \to X$ natkrivanje, za svaku točku $x \in X$ skup $f^{-1}(x) = \{y \in Y;\ f(y) = x\}$ zove se **vlat** nad točkom x.

Zadatak 3.3.1. *Dokažite da sve vlati natkrivanja $f : Y \to X$ imaju isti kardinalni broj.*

Uputa: Dokažite da je za svaki (konačan ili beskonačan) kardinalni broj n skup

$$X_n = \{x \in X;\ Card\, f^{-1}(x) = n\}$$

otvoren u X.

Kardinalni broj iz zadatka 3.3.1. zove se **broj listova** natkrivanja f (ili natkrivača Y).

Za Hausdorffov topološki prostor T kažemo da je **lokalno povezan** ako za svaku točku $t_0 \in T$ svaka okolina od t_0 sadrži otvorenu povezanu okolinu od t_0. U tom slučaju lako se vidi da je svaka komponenta povezanosti otvorenog podskupa od T otvoren podskup od T. Naravno, svaka mnogostrukost je lokalno povezan prostor. Nadalje, ako je X povezan i lokalno povezan Hausdorffov topološki prostor i ako je (Y, f) natkrivač od X, onda je i prostor Y lokalno povezan.

Neka su (Y_1, f_1) i (Y_2, f_2) natkrivači od X. Za neprekidno preslikavanje $\varphi : Y_1 \to Y_2$ kažemo da **čuva vlati** ako je $f_2 \circ \varphi = f_1$. To znači da vrijedi $\varphi\left(f_1^{-1}(x)\right) \subseteq f_2^{-1}(x)\ \ \forall x \in X$.

Propozicija 3.3.1. *Neka su (Y_1, f_1) i (Y_2, f_2) natkrivači povezanog i lokalno povezanog Hausdorffovog topološkog prostora X.*

(*a*) *Ako neprekidno preslikavanje $\varphi : Y_1 \to Y_2$ čuva vlati onda je φ natkrivanje.*

(*b*) *Ako su $\varphi, \psi : Y_1 \to Y_2$ dva međusobno različita neprekidna preslikavanja koja čuvaju vlati onda je $\varphi(y) \neq \psi(y)\ \ \forall y \in Y_1$.*

Dokaz: (*a*) Neka je $y \in Y_2$ i neka je U povezana otvorena okolina točke $f_2(y) \in X$ koja je pravilno natkrivena i sa f_1 i sa f_2. Neka je $\{V_\alpha;\ \alpha \in \mathcal{A}\}$ skup svih komponenata povezanosti skupa $f_1^{-1}(U)$. Neka je V komponenta povezanosti skupa $f_2^{-1}(U)$ koja sadrži točku y. Za svako $\alpha \in \mathcal{A}$ skup $\varphi(V_\alpha)$ je povezan podskup od Y_2 sadržan u $f_2^{-1}(U)$, dakle je ili $\varphi(V_\alpha) \subseteq V$ ili je $\varphi(V_\alpha) \cap V = \emptyset$. Neka je

$$\mathcal{B}(y, U) = \{\alpha \in \mathcal{A};\ \varphi(V_\alpha) \subseteq V\}.$$

Imamo

$$\varphi^{-1}(V) \subseteq \varphi^{-1}\left(f : 2^{-1}(U)\right) = f_1^{-1}(U) = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} V_\alpha$$

pa zaključujemo da je

$$\varphi^{-1}(V) = \bigcup_{\alpha\in\mathcal{B}(y,U)} V_\alpha.$$

To znači da je $\{V_\alpha;\ \alpha \in \mathcal{B}(y,U)\}$ skup svih komponenata povezanosti skupa $\varphi^{-1}(V)$.

Označimo sa A skup svih točaka $y \in Y_2$ takvih da postoji povezana otvorena okolina U točke $f_2(y) \in X$ koja je pravilno natkrivena i sa f_1 i sa f_2 i takva da je definirani skup $\mathcal{B}(y,U)$ neprazan, a sa B komplement od A u W_2, dakle, skup svih točaka $y \in Y_2$ takvih da za svaku povezanu otvorenu okolinu U točke $f_2(y) \in X$ koja je pravilno natkrivena i sa f_1 i sa f_2 vrijedi $\mathcal{B}(y,U) = \emptyset$. Primijetimo da su A i B otvoreni podskupovi od Y_2. Doista, ako je $y \in A$ (odnosno, ako je $y \in B$) onda je uz prije uvedene oznake $V \subseteq A$ (odnosno, $V \subseteq B$), dakle, zajedno sa svakom svojom točkom skup A (odnosno, skup B) sadrži i okolinu te točke. Budući da je očito $A \neq \emptyset$, iz povezanosti prostora Y_2 slijedi da je $A = Y_2$ i $B = \emptyset$. Dakle, za svaku točku $y \in Y_2$ i za svaku povezanu otvorenu okolinu U točke $f_2(y) \in X$, koja je pravilno natkrivena i sa f_1 i sa f_2, vrijedi $\mathcal{B}(y,U) \neq \emptyset$. To prije svega pokazuje da je preslikavanje $\varphi : Y_1 \to Y_2$ surjektivno.

Nadalje, uz uvedene oznake znamo da je za $\alpha \in \mathcal{B}(y,U)$ restrikcija $f_1|V_\alpha$ homeomorfizam sa V_α na U. Također, restrikcija $f_2|V$ je homeomorfizam sa V na U. Budući da je $\varphi(V_\alpha) \subseteq V$ i $f_1 = f_2 \circ \varphi$ zaključujemo da je restrikcija $\varphi|V_\alpha$ homeomorfizam sa V_α na V za svaki $\alpha \in \mathcal{B}(y,U)$. Dakle, povezana otvorena okolina V točke $y \in Y_2$ je pravilno natkrivena sa φ. Kako je točka $y \in Y_2$ bila proizvoljna, zaključujemo da je preslikavanje φ natkrivanje.

(b) Pretpostavimo da je

$$S = \{y \in Y_1;\ \varphi(y) = \psi(y)\} \neq \emptyset.$$

Skup S je zatvoren, jer su preslikavanja φ i ψ neprekidna. Neka je $y_0 \in S$. Neka je U otvorena okolina točke $\varphi(y_0) = \psi(y_0)$ takva da je restrikcija $f_2|U$ injektivna. Neka je V otvorena okolina točke y_0 u Y_1 takva da je $\varphi(V) \subseteq U$ i $\psi(V) \subseteq U$. Za $y \in V$ imamo $f_2(\varphi(y)) = f_1(y) = f_2(\psi(y))$. Kako su $\varphi(y)$ i $\psi(y)$ točke iz U i kako je restrikcija $f_2|U$ injektivna, zaključujemo da je $\varphi(y) = \psi(y)$. Time je dokazano da je $V \subseteq S$. Dakle, S je otvoren piodskup od Y_1. Iz povezanosti prostora Y_1 slijedi da je $S = Y_1$, tj. $\varphi = \psi$.

Neka je $f : Y \to X$ natkrivanje. Neprekidna bijekcija $\varphi : Y \to Y$ koja čuva vlati, tj. za koju je $f \circ \varphi = f$, zove se $f-$**transformacija** prostora Y. Svaka $f-$transformacija je po tvrdnji (a) propozicije 3.3.1. homeomorfizam; naime, bijektivno natkrivanje je očito homeomorfizam. Skup svih $f-$transformacija tvori grupu s obzirom na kompoziciju; to je podgrupa grupe $Homeo(Y)$ svih homeomorfizama sa Y na Y. Tu ćemo grupu označavati sa $\mathcal{T}(f)$. Dakle,

$$\mathcal{T}(f) = \{\varphi \in Homeo(Y);\ f \circ \varphi = f\}.$$

Iz tvrdnje (b) propozicije 3.3.1. neposredno slijedi:

Teorem 3.3.2. *Neka je $f : Y \to X$ natkrivanje i $\varphi, \psi \in \mathcal{T}(f)$. Ako je $\varphi(y) = \psi(y)$ za neku točku $y \in Y$, onda je $\varphi = \psi$. Posebno, ako φ nije identiteta onda je $\varphi(y) \neq y \ \ \forall y \in Y$.*

Štoviše vrijedi i jače svojstvo grupe $\mathcal{T}(f)$ od onoga u drugoj tvrdnji prethodnog teorema:

Teorem 3.3.3. *Ako je $f : Y \to X$ natkrivanje, grupa $\mathcal{T}(f)$* **djeluje diskontinuirano** *na Y : svaka točka $y \in Y$ ima okolinu V takvu da je $V \cap \varphi(V) = \emptyset$ za svako preslikavanje $\varphi \in \mathcal{T}(f)$ osim identitete.*

Dokaz: Neka je V okolina točke y takva da je restrikcija $f|V$ injektivna. Neka je $\varphi \in \mathcal{T}(f)$ i pretpostavimo da je $V \cap \varphi(V) \neq \emptyset$. Stoga postoje točke $y_1, y_2 \in V$ takve da je $y_1 = \varphi(y_2)$. Tada je $f(y_1) = f(\varphi(y_2)) = (f \circ \varphi)(y_2) = f(y_2)$. Međutim, $f|V$ je po pretpostavci injekcija, pa slijedi $y_1 = y_2$. To znači da je $\varphi(y_1) = y_1$, a tada iz teorema 3.3.2. slijedi da je φ identiteta.

Put u topološkom prostoru X je neprekidno preslikavanje $\gamma : [0,1] \to X$. Točka $x = \gamma(0)$ zove se **početak** a točka $x' = \gamma(1)$ **svršetak** puta γ. Tada kažemo da je γ put u X od točke x do točke x'. Skup svih puteva u X od x do x' označimo sa $\mathcal{P}(X, x, x')$. Za puteve $\gamma, \delta \in \mathcal{P}(X, x, x')$ kažemo da su **homotopni** ako postoji familija puteva $(\gamma_s)_{s\in[0,1]}$ u $\mathcal{P}(X, x, x')$ takva da je preslikavanje $(s,t) \mapsto \gamma_s(t)$ sa $[0,1] \times [0,1]$ u X neprekidno i ako je $\gamma_0 = \gamma$ i $\gamma_1 = \delta$. Lako se vidi da je homotopnost relacija ekvivalencije na skupu $\mathcal{P}(X, x, x')$. **Relaciju homotopnosti označavat ćemo u daljnjem sa** $\approx$.

Ako su $\gamma \in \mathcal{P}(X, x, x')$ i $\delta \in \mathcal{P}(X, x', x'')$ definiramo tzv. **složeni put** $\gamma\delta \in \mathcal{P}(X, x, x'')$,

$$(\gamma\delta)(t) = \begin{cases} \gamma(2t) & 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ \delta(2t-1) & \frac{1}{2} < t \le 1. \end{cases}$$

i **inverzni put** $\gamma^- \in \mathcal{P}(X, x', x)$ puta γ,

$$\gamma^-(t) = \gamma(1-t) \qquad 0 \le t \le 1.$$

Topološki prostor X je **putevima povezan** ako je $\mathcal{P}(X, x, x') \neq \emptyset \ \forall x, x' \in X$. Lako se vidi da povezanost putevima povlači povezanost. Prostor X je **lokalno putevima povezan** ako svaka okolina svake točke $x \in X$ sadrži otvorenu okolinu od x koja je putevima povezana. U daljnjem kad god kažemo **topološki prostor** to će značiti **Hausdorffov lokalno putevima povezan topološki prostor**. Topologija svake mnogostrukosti ima to svojstvo: za $C^\infty-$mnogostrukost X povezanost je ekvivalentna povezanosti putevima. Štoviše, ako je X mnogostrukost i $x \in X$, komponenta povezanosti od X koja sadrži točku x (tj. najveći povezan podskup od X koji sadrži točku x) je skup $\{y \in X;\ \mathcal{P}(X, x, y) \neq \emptyset\}$ i taj je skup otvoren u X.

Za $x \in X$ elementi skupa $\mathcal{P}(X, x) := \mathcal{P}(X, x, x)$ zovu se **petlje** u prostoru X (s početkom u točki x). Za $\gamma, \delta \in \mathcal{P}(X, x)$ definiran je složen put $\gamma\delta$ i to je petlja iz $\mathcal{P}(X, x)$. Naravno, homotopnost petlji je relacija ekvivalencije na skupu $\mathcal{P}(X, x)$. Skup svih klasa homotopnosti u $\mathcal{P}(X, x)$ označavat ćemo sa $\Pi(X, x)$. Klasu homotopnosti petlje $\gamma \in \mathcal{P}(X, x)$ označavamo sa $[\gamma]$.

Teorem 3.3.4. *Neka je X putevima povezan topološki prostor. Preslikavanje*

$$\Pi(X, x) \times \Pi(X, x) \to \Pi(X, x), \qquad ([\gamma], [\delta]) \mapsto [\gamma\delta],$$

je dobro definirano, tj. klasa homotopnosti složene petlje $\gamma\delta$ ne ovisi o izboru predstavnika klasa homotopnosti $[\gamma]$ i $[\delta]$. S tako definiranom operacijom skup $\Pi(X, x)$ postaje grupa. Inverzni element od $[\gamma]$ je klasa suprotne petlje $[\gamma^-]$.

Dokaz: Neka su $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \in \mathcal{P}(X, x)$. Tada je

$$(\gamma_1(\gamma_2\gamma_3))(t) = \begin{cases} \gamma_1(2t) & 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ \gamma_2(4t-2) & \frac{1}{2} \le t \le \frac{3}{4} \\ \gamma_3(4t-3) & \frac{3}{4} \le t \le 1 \end{cases} \quad \text{i} \quad ((\gamma_1\gamma_2)\gamma_3)(t) = \begin{cases} \gamma_1(4t) & 0 \le t \le \frac{1}{4} \\ \gamma_2(4t-1) & \frac{1}{4} \le t \le \frac{1}{2} \\ \gamma_3(2t-1) & \frac{1}{2} \le t \le 1. \end{cases}$$

Stavimo

$$\gamma_s(t) = \gamma((1-s)t + s\tau(t)), \qquad 0 \le s \le 1, \quad 0 \le t \le 1,$$

gdje je $\gamma = (\gamma_1\gamma_2)\gamma_3$ i $\tau : [0,1] \to [0,1]$ je homeomorfizam zadan sa

$$\tau(t) = \begin{cases} \frac{t}{2} & 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ t - \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \le t \le \frac{3}{4} \\ 2t-1 & \frac{3}{4} \le t \le 1. \end{cases}$$

Tada je očito $(s,t) \mapsto \gamma_s(t)$ neprekidno preslikavanje sa $[0,1] \times [0,1]$ u X i vrijedi $\gamma_0 = (\gamma_1\gamma_2)\gamma_3$ i $\gamma_1 = \gamma_1(\gamma_2\gamma_3)$. To znači da su putevi $(\gamma_1\gamma_2)\gamma_3$ i $\gamma_1(\gamma_2\gamma_3)$ homotopni, pa slijedi asocijativnost operacije u $\Pi(X,x)$:

$$([\gamma_1][\gamma_2])[\gamma_3] = [(\gamma_1\gamma_2)\gamma_3] = [\gamma_1(\gamma_2\gamma_3)] = [\gamma_1]([\gamma_2][\gamma_3]).$$

Još jednostavnije se dokazuje da je klasa $[\iota_x]$ konstantne funkcije $\iota_x(t) = x$, $t \in [0,1]$, neutralni element s obzirom na operaciju u $\Pi(X,x)$ i da je $[\gamma^-]$ inverzni element klase $[\gamma] \in \Pi(X,x)$. Štoviše, nije teško vidjeti da vrijedi

Lema 3.3.5. *Neka je X putevima povezan topološki prostor i neka je γ put u prostoru X od točke x do točke y. Neka su ι_x i ι_y konstantni putevi (tj. petlje) u točkama x i y :*

$$\iota_x(t) = x \qquad \text{i} \qquad \iota_y(t) = y \qquad \forall t \in [0,1].$$

Tada vrijedi

$$\iota_x\gamma \approx \gamma, \qquad \gamma\iota_y \approx \gamma, \qquad \gamma\gamma^- \approx \iota_x, \qquad \gamma^-\gamma \approx \iota_y.$$

Grupa $\Pi(X,x)$ iz teorema 3.3.4. zove se **fundamentalna grupa** prostora X. Definicija grupe $\Pi(X,x)$ ovisi o izboru točke $x \in X$. Međutim, ta ovisnost je nebitna:

Propozicija 3.3.6. *Neka je X putevima povezan topološki prostor i neka je δ put u X od točke x do točke y. Tada je $[\gamma] \mapsto [\delta\gamma\delta^-]$ izomorfizam grupe $\Pi(X,y)$ na grupu $\Pi(X,x)$.*

Dokaz: Lako se vidi da za $\gamma, \gamma' \in \mathcal{P}(X,y)$ iz $\gamma \approx \gamma'$ slijedi $\delta\gamma\delta^- \approx \delta\gamma'\delta^-$. Prema tome, $\Phi : [\gamma] \mapsto [\delta\gamma\delta^-]$ je dobro definirano preslikavanje grupe $\Pi(X,y)$ u grupu $\Pi(X,x)$. To je homomorfizam grupa jer primjenom leme 3.3.5. nalazimo da za bilo koje petlje $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathcal{P}(X,y)$ vrijedi

$$\delta\gamma_1\delta^-\delta\gamma_2\delta^- \approx \delta\gamma_1\iota_y\gamma_2\delta^- \approx \delta\gamma_1\gamma_2\delta^-,$$

pa dobivamo

$$\Phi([\gamma_1][\gamma_2]) = \Phi([\gamma_1\gamma_2]) = [\delta\gamma_1\gamma_2\delta^-] = [\delta\gamma_1\delta^-\delta\gamma_2\delta^-] = [\delta\gamma_1\delta^-][\delta\gamma_2\delta^-] = \Phi([\gamma_1])\Phi([\gamma_2]).$$

Sasvim analogno, $\Psi : [\varepsilon] \mapsto [\delta^-\varepsilon\delta]$ je homomorfizam grupe $\Pi(X,x)$ u grupu $\Pi(X,y)$. Međutim, prema lemi 3.3.5. $\Phi \circ \Psi$ je identiteta na grupi $\Pi(X,x)$ i $\Psi \circ \Phi$ je identiteta na grupi $\Pi(X,y)$. Slijedi da je $\Phi : \Pi(X,y) \to \Pi(X,x)$ izomorfizam grupa.

Neka je $f : Y \to X$ natkrivanje, T topološki prostor i $\varphi : T \to X$ neprekidno preslikavanje. **Lift preslikavanja** φ (u odnosu na natkrivanje f) je neprekidno preslikavanje $\tilde{\varphi} : T \to Y$ takvo da vrijedi $\varphi = f \circ \tilde{\varphi}$.

Propozicija 3.3.7. *Neka je $f : Y \to X$ natkrivanje, T povezan topološki prostor, $\varphi : T \to X$ neprekidno preslikavanje i $\tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2 : T \to Y$ liftovi preslikavanja φ. Ako za neku točku $t_0 \in T$ vrijedi $\tilde{\varphi}_1(t_0) = \tilde{\varphi}_2(t_0)$, onda je $\tilde{\varphi}_1 = \tilde{\varphi}_2$.*

Dokaz: Neka je $A = \{t \in T;\ \tilde{\varphi}_1(t) = \tilde{\varphi}_2(t)\}$. Zbog neprekidnosti preslikavanja $\tilde{\varphi}_1$ i $\tilde{\varphi}_2$ skup A je zatvoren podskup od T. Neka je $t \in A$ i neka je slično kao u dokazu tvrdnje (b) propozicije 3.3.1. U otvorena okolina točke $\tilde{\varphi}_1(t) = \tilde{\varphi}_2(t)$ u Y takva da je restrikcija $f|U$ injektivna. Neka je V otvorena okolina točke t u prostoru T takva da je $\tilde{\varphi}_1(V) \subseteq U$ i da je $\tilde{\varphi}_2(V) \subseteq U$. Za $t' \in V$ imamo

$$f\left(\tilde{\varphi}_1(t')\right) = (f \circ \tilde{\varphi}_1)(t') = \varphi(t') = (f \circ \tilde{\varphi}_2)(t') = f\left(\tilde{\varphi}_2(t')\right).$$

Budući da su $\tilde{\varphi}_1(t'), \tilde{\varphi}_2(t') \in U$, iz injektivnosti restrikcije $f|U$ slijedi da je $\tilde{\varphi}_1(t') = \tilde{\varphi}_2(t')$, odnosno, $t' \in A$. Time je dokazano da svaka točka $t \in A$ ima okolinu V u prostoru T sadržanu u A. Dakle, skup A je ne samo zatvoren u T nego i otvoren u T. Kako je $t_0 \in A$, dakle, $A \neq \emptyset$, i kako je prostor T povezan, slijedi $A = T$, odnosno, $\tilde{\varphi}_1 = \tilde{\varphi}_2$.

Uz određene uvjete na prostor T ili na preslikavanje $\varphi : T \to X$ može se dokazati i egzistencija lifta $\tilde{\varphi} : T \to Y$ u odnosu na natkrivanje $f : Y \to X$. Nama će zasada trebati egzistencija samo u odnosu na sljedeće dvije jednostavne situacije:

Propozicija 3.3.8. *Neka je $f : Y \to X$ natkrivanje.*

(a) *Neka je $\gamma : [0,1] \to X$ neprekidno preslikavanje i neka je $y \in f^{-1}(\gamma(0))$. Postoji jedinstveni lift $\tilde{\gamma} : [0,1] \to Y$ od γ takav da je $\tilde{\gamma}(0) = y$.*

(b) *Neka je $H : [0,1] \times [0,1] \to X$ neprekidno preslikavanje i neka je $y \in f^{-1}(H(0,0))$. Postoji jedinstveni lift $\tilde{H} : [0,1] \times [0,1] \to Y$ od H takav da je $\tilde{H}(0,0) = y$.*

Dokaz: Prije svega, jedinstvenost i u (a) i u (b) slijedi iz propozicije 3.3.7.

(a) Označimo sa A skup svih $t \in [0,1]$ takvih da postoji lift $\tilde{\gamma}_t : [0,t] \to Y$ restrikcije $\gamma|[0,t]$ takav da je $\tilde{\gamma}_t(0) = y$. Očito je $0 \in A$, dakle, skup A je neprazan. Nadalje, ako je $t \in A$, onda je očito $[0,t] \subseteq A$. Neka je $t \in A$, $t < 1$, i neka je U povezana otvorena okolina točke $\gamma(t)$ u X koja je pravilno natkrivena sa f. Zbog neprekidnosti preslikavanja γ postoji $\varepsilon > 0$ takav da je $t + \varepsilon \leq 1$ i da je $\gamma([t, t+\varepsilon]) \subseteq U$. Neka je $y = \tilde{\gamma}_t(t)$ (ta se točka nalazi u vlati iznad točke $\gamma(t)$) i neka je V komponenta povezanosti od $f^{-1}(U)$ koja sadrži točku y. Budući da je $f|V$ homeomorfizam sa V na U postoji jedinstveno neprekidno preslikavanje $\delta : [t, t+\varepsilon] \to V$ takvo da je $f(\delta(s)) = \gamma(s)$ za svaki $s \in [t, t+\varepsilon]$. Tada je sa

$$\tilde{\gamma}_{t+\varepsilon}(s) = \begin{cases} \tilde{\gamma}_t(s) & \text{ako je } 0 \leq s \leq t \\ \\ \delta(s) & \text{ako je } t \leq s \leq t+\varepsilon \end{cases}$$

zadano neprekidno preslikavanje $\tilde{\gamma}_{t+\varepsilon} : [0, t+\varepsilon] \to Y$ koje je lift restrikcije $\gamma|[0, t+\varepsilon]$ i vrijedi $\tilde{\gamma}_{t+\varepsilon}(0) = y$. To pokazuje da je $t + \varepsilon \in A$, dakle, $[0, t+\varepsilon] \subseteq A$. Time je dokazano da je A otvoren podskup od $[0,1]$; štoviše, slijedi da je ili $A = [0,1]$ ili postoji $t \leq 1$ takav da je $A = [0, t\rangle$.

Pretpostavimo da vrijedi ovo drugo, tj. da je $A = [0, t\rangle$ za neki $t \in \langle 0, 1]$. Dakle, ne postoji lift $\tilde{\gamma}_t$ restrikcije $\gamma|[0,t]$ takav da je $\tilde{\gamma}_t(0) = y$, ali za svaki $s \in [0, t\rangle$ postoji lift $\tilde{\gamma}_s$ restrikcije $\gamma|[0,s]$ takav da je $\tilde{\gamma}_s(0) = y$. Neka je U povezana otvorena okolina točke $\gamma(t)$ u X koja je pravilno natkrivena sa f. Neka je $\varepsilon > 0$ takav da je $t - \varepsilon \geq 0$ i da je $\gamma([t-\varepsilon, t]) \subseteq U$. Slično kao malo prije neka je V komponenta povezanosti od $f^{-1}(U)$ koja sadrži točku $\tilde{\gamma}_{t-\varepsilon}(t-\varepsilon)$. Budući da je restrikcija $f|V$ homeomorfizam sa V na U, postoji jedinstveno neprekidno preslikavanje $\delta : [t-\varepsilon, t] \to V$ takvo da je $f(\delta(s)) = \gamma(s)$ za svaki $s \in [t-\varepsilon, t]$. Tada je sa

$$\tilde{\gamma}_t(s) = \begin{cases} \tilde{\gamma}_{t-\varepsilon}(s) & \text{ako je } 0 \leq s \leq t-\varepsilon] \\ \\ \delta(s) & \text{ako je } t-\varepsilon \leq s \leq t \end{cases}$$

zadano neprekidno preslikavanje $\tilde{\gamma}_t : [0,t] \to Y$ koje je lift restrikcije $\gamma|[0,t]$ i vrijedi $\tilde{\gamma}_t(0) = y$. To je suprotno pretpostavci da $t \notin A$. Ova kontradikcija pokazuje da je nužno $A = [0,1]$ i time je tvrdnja (a) dokazana.

(b) $s \mapsto H(s,0)$ je neprekidno preslikavanje sa $[0,1]$ u X, pa prema tvrdnji (a) postoji njegov lift $\delta : [0,1] \to Y$ takav da je $\delta(0) = y$. Tada je $\delta(s) \in f^{-1}(H(s,0))$ za svaki $s \in [0,1]$. Nadalje, za svaki $s \in [0,1]$ je $t \mapsto H(s,t)$ neprekidno preslikavanje sa $[0,1]$ u X, pa ponovna primjena tvrdnje (a) pokazuje da postoji njegov lift $\delta_s : [0,1] \to Y$ takav da je $\delta_s(0) = \delta(s)$. Definiramo sada preslikavanje $\tilde{H} : [0,1] \times [0,1] \to Y$ sa

$$\tilde{H}(s,t) = \delta_s(t), \qquad (s,t) \in [0,1] \times [0,1].$$

Tada je $\tilde{H}(0,0) = \delta_0(0) = \delta(0) = y$. Nadalje, kako je δ_s lift preslikavanja $t \mapsto H(s,t)$ za svaki $s \in [0,1]$, za svaki $(s,t) \in [0,1] \times [0,1]$ vrijedi $f(\tilde{H}(s,t)) = f(\delta_s(t)) = H(s,t)$. Tvrdnja (b) bit će dokazana ako pokažemo da je preslikavanje $\tilde{H} : [0,1] \times [0,1] \to Y$ neprekidno. Ta se činjenica dokazuje analogno tvrdnji (a) : definiramo

$$B = \{s \in [0,1];\ \text{restrikcija } \tilde{H}|[0,s] \times [0,1] \to Y \text{ je neprekidno}\}.$$

Očito je $0 \in B$, dakle, skup B je neprazan. Nadalje, iz $s \in B$ slijedi $[0,s] \subseteq B$. Slično kao u (a) dokazuje se da je skup B otvoren u $[0,1]$, dakle, da je ili $B = [0,1]$ ili $B = [0,s]$ za neki $s < 1$. Ova druga mogućnost vodi na kontradikciju slično kao u dokazu tvrdnje (a). Prema tome, $B = [0,1]$ što znači da je preslikavanje $\tilde{H} : [0,1] \times [0,1] \to Y$ neprekidno.

Neka je sada X povezana $C^\infty-$mnogostrukost (odnosno, analitička mnogostrukost) i neka je $f : Y \to X$ natkrivanje. Pomoću karata na X koje su pravilno natkrivene sa f dolazimo do $C^\infty-$atlasa (odnosno, analitičkog atlasa) na Y i za pripadnu strukturu mnogostrukosti na Y preslikavanje f je klase C^∞ (odnosno, analitičko). Nije teško vidjeti da je to jedinstvena struktura $C^\infty-$mnogostrukosti (odnosno, analitičke mnogostrukosti) na Y za koju je natkrivanje f preslikavanje klase C^∞ (odnosno, analitičko preslikavanje).

Neka je u daljnjem X povezana $C^\infty-$mnogostrukost i $f : Y \to X$ natkrivanje. Fiksirajmo točke $x \in X$ i $y \in f^{-1}(x)$. Prema tvrdnji (a) propozicije 3.3.8. za svaki put γ u X koji počinje u točki x postoji jedinstven put $\tilde{\gamma}$ u Y koji počinje u točki y koji je lift puta γ, tj. $f \circ \tilde{\gamma} = \gamma$.

Propozicija 3.3.9. *Uz uvedene oznake ako su γ i δ putevi u X koji počinju u točki x i koji su homotopni onda su putevi $\tilde{\gamma}$ i $\tilde{\delta}$ u Y homotopni. Posebno, tada je $\tilde{\gamma}(1) = \tilde{\delta}(1)$.*

Dokaz: Stavimo $x = \gamma(0) = \delta(0)$ i $x' = \gamma(1) = \delta(1)$, tj. $\gamma, \delta \in \mathcal{P}(X, x, x')$. Sada $\gamma \approx \delta$ znači da postoji familija puteva $(\gamma_s)_{s\in[0,1]}$ u $\mathcal{P}(X, x, x')$ takva da je preslikavanje $(s,t) \mapsto H(s,t) = \gamma_s(t)$ sa $[0,1] \times [0,1]$ u X neprekidno i da je $\gamma_0 = \gamma$ i $\gamma_1 = \delta$. Dakle, vrijedi

$$H(s,0) = x, \quad H(s,1) = x', \quad H(0,t) = \gamma(t), \quad H(1,t) = \delta(t) \qquad \forall s,t \in [0,1].$$

Prema tvrdnji (b) propozicije 3.3.8. postoji jedinstven lift $\tilde{H} : [0,1] \times [0,1] \to Y$ preslikavanja H takav da je $\tilde{H}(0,0) = y$. Stavimo

$$\vartheta_1(t) = \tilde{H}(0,t), \quad \vartheta_2(t) = \tilde{H}(1,t), \quad \vartheta_3(s) = \tilde{H}(s,0), \quad \vartheta_4(s) = \tilde{H}(s,1), \qquad t,s \in [0,1].$$

Tada su $\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3, \vartheta_4$ putevi u Y. Vrijedi

$$f(\vartheta_1(t)) = f(\tilde{H}(0,t)) = H(0,t) = \gamma(t) \qquad \text{i} \qquad \vartheta_1(0) = \tilde{H}(0,0) = y.$$

Dakle, ϑ_1 je lift puta γ koji počinje u točki y. Zbog propozicije 3.3.7. odnosno, zbog jedinstvenosti u tvrdnji (a) propozicije 3.3.8., slijedi da je $\vartheta_1 = \tilde{\gamma}$. Dakle,

$$\tilde{H}(0,t) = \tilde{\gamma}(t) \qquad \forall t \in [0,1]. \tag{3.1}$$

Vrijedi

$$f(\vartheta_3(s)) = f(\tilde{H}(s,0)) = H(s,0) = x \qquad \text{i} \qquad \vartheta_3(0) = \tilde{H}(0,0) = y.$$

Dakle, ϑ_3 i konstantan put ι_y su liftovi konstantnog puta ι_x i oba ta lifta počinju u točki y. Ponovo zbog jedinstvenosti lifta sa zadanim početkom slijedi da se ta dva lifta podudaraju, odnosno, ϑ_3 je konstantan put ι_y : To znači da je

$$\tilde{H}(s,0) = y \quad \forall s \in [0,1] \quad \text{i posebno} \quad \tilde{H}(1,0) = y. \tag{3.2}$$

Promatrajmo sada put ϑ_2. Prema (3.2) taj put počinje u točki $\vartheta_2(0) = \tilde{H}(1,0) = y$. Nadalje, imamo

$$f(\vartheta_2(t)) = f(\tilde{H}(1,t)) = H(1,t) = \delta(t).$$

Dakle, ϑ_2 i $\tilde{\delta}$ su liftovi puta δ koji oba počinju u točki y. Zbog jedinstvenosti liftova za zadanim početkom zaključujemo da je $\vartheta_2 = \tilde{\delta}$. Dakle,

$$\tilde{\delta}(t) = \tilde{H}(1,t) \quad \forall t \in [0,1] \quad \text{i posebno} \quad \tilde{H}(1,1) = \tilde{\delta}(1). \tag{3.3}$$

Napokon promatrajmo put ϑ_4 u Y. Taj put završava u točki

$$\vartheta_4(1) = \tilde{H}(1,1) = \tilde{\delta}(1).$$

Stavimo $y' = \tilde{\delta}(1)$. Tada je $y' \in Y$ točka koja leži u vlati iznad točke $x' = \gamma(1) = \delta(1)$. Nadalje, kako je $\tilde{H}$ lift od H, imamo

$$f(\vartheta_4(s)) = f(\tilde{H}(s,1)) = H(s,1) = x' \qquad \forall s \in [0,1].$$

Prema tome, put ϑ_4 i konstantan put $\iota_{y'}$ su liftovi konstantnog puta ι'_x koji oba završavaju u istoj točki. Zbog jedinstvenosti liftova sa zadanom jednom vrijednosti slijedi da se ti lftovi podudaraju, tj. da je ϑ_4 konstantan put $\iota_{y'}$. Dakle,

$$\tilde{H}(s,1) = y' \qquad \forall s \in [0,1]. \tag{3.4}$$

Napokon, jednakosti (3.1), (3.3), (3.2) i (3.4) uz oznaku $\omega_s(t) = \tilde{H}(s,t)$ izgledaju ovako

$$\omega_0(t) = \tilde{\gamma}(t), \quad \omega_1(t) = \tilde{\delta}(t), \quad \omega_s(0) = y, \quad \omega_s(1) = y' \qquad \forall s,t \in [0,1].$$

To znači da familija $(\omega_s)_{s\in[0,1]}$ uspostavlja homotopiju puteva $\tilde{\gamma}$ i $\tilde{\delta}$.

Iz propozicije 3.3.9. neposredno slijedi

Korolar 3.3.10. *Uz pretpostavke propozicije 3.3.9. i uz oznaku uvedenu prije te propozicije neka je $\gamma \in \mathcal{P}(X,x)$ i pretpostavimo da je klasa $[\gamma] \in \Pi(X,x)$ trivijalna, tj. da je petlja γ homotopna konstantnoj petlji. Tada je i klasa $[\tilde{\gamma}] \in \Pi(Y,y)$ trivijalna, tj. petlja $\tilde{\gamma}$ u Y homotopna je konstantnoj petlji.*

Propozicija 3.3.11. *Uz pretpostavke propozicije 3.3.9. i uz oznaku uvedenu prije te propozicije stavimo*

$$D = \{[\gamma] \in \Pi(X,x);\ \text{put } \tilde{\gamma} \text{ je petlja}\}.$$

Tada je D podgrupa grupe $\Pi(X,x)$ i preslikavanje $\gamma \to \tilde{\gamma}$ inducira izomorfizam grupe D na grupu $\Pi(Y,y)$. Inverzni izomorfizam induciran je preslikavanjem $\delta \mapsto f \circ \delta$.

Dokaz: Ako su $\tilde{\gamma}$ i $\tilde{\delta}$ petlje tada je očito $(\gamma\delta)\tilde{} = \tilde{\gamma}\tilde{\delta}$ i $(\gamma^-)\tilde{} = (\tilde{\gamma})^-$. To znači da je D podgrupa grupe $\Pi(X,x)$.

Neka je sada $\delta \in \mathcal{P}(Y,y)$. Tada je $\gamma = f \circ \delta \in \mathcal{P}(X,x)$ i očito je $\tilde{\gamma} = \delta$. Posebno, vrijedi $[\gamma] \in D$. Ako su petlje $\delta_1, \delta_2 \in \mathcal{P}(Y,y)$ homotopne, očito su i petlje $f \circ \delta_1, f \circ \delta_2 \in \mathcal{P}(X,x)$ homotopne. Dakle, $\delta \mapsto f \circ \delta$ inducira preslikavanje sa $\Pi(Y,y)$ u D. Lako se vidi da je to preslikavanje homomorfizam grupa. Kako je $f \circ \tilde{\gamma} = \gamma$, po definiciji grupe D taj je homomorfizam surjektivan. Dokažimo njegovu injektivnost. Neka su $\delta_1, \delta_2 \in \mathcal{P}(Y,y)$ takve da je $[f \circ \delta_1] = [f \circ \delta_2]$. Stavimo $\gamma_1 = f \circ \delta_1$ i $\gamma_2 = f \circ \delta_2$. Tada je $\delta_1 = \tilde{\gamma}_1$ i $\delta_2 = \tilde{\gamma}_2$. Petlje $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathcal{P}(X,x)$ su homotopne pa su po propoziciji 3.3.9. i petlje $\delta_1, \delta_2 \in \mathcal{P}(Y,y)$ homotopne, tj. $[\delta_1] = [\delta_2]$. Time je dokazana i injektivnost. Prema tome, preslikavanje $\delta \mapsto f \circ \delta$ inducira izomorfizam grupe $\Pi(Y,y)$ na grupu D. Kako je $f \circ \tilde{\gamma} = \gamma$ za svaku petlju $\gamma \in D$, propozicija je u potpunosti dokazana.

Oznaka: Za podgrupu D iz propozicije 3.3.11. pisat ćemo $D = D(f,y)$.

U teoriji natkrivanja mnogostrukosti ključan je sljedeći teorem:

Teorem 3.3.12. *Neka je X povezana $C^\infty-$mnogostrukost i $x \in X$. Za svaku podgrupu D grupe $\Pi(X,x)$ postoji natkrivanje $f : Y \to X$ i točka $y \in f^{-1}(x)$ takva da je $D(f,y) = D$.*

Dokaz se sastoji od niza koraka u kojima eksplicitno konstruiramo Y i f. Neka je S skup svih puteva u X s početkom u točki x. Na tom ćemo skupu sada definirati jednu relaciju ekvivalencije. Zatim ćemo na skupu Y svih klasa ekvivalencije definirati topologiju, strukturu $C^\infty-$mnogostrukosti i natkrivanje $f : Y \to X$.

(a) Za $\sigma_1, \sigma_2 \in S$ stavimo $\sigma_1 \sim_D \sigma_2$, ako putevi σ_1 i σ_2 završavaju u istoj točki, tj. $\sigma_1(1) = \sigma_2(1)$, i ako je $[\sigma_1\sigma_2^-] \in D$. Kako je D grupa, lako se provjeri da je $\sim_D$ relacija ekvivalencije na skupu S. Za $\sigma \in S$ sa $\langle\sigma\rangle$ ćemo označiti klasu ekvivalencije elementa σ u odnosu na tu relaciju. Neka je Y skup svih klasa ekvivalencije:

$$Y = \{\langle\sigma\rangle;\ \sigma \in S\}.$$

Definiramo preslikavanje $f : Y \to X$ sa

$$f(\langle\sigma\rangle) = \sigma(1), \qquad \sigma \in S.$$

To je preslikavanje dobro definirano, jer ako je $\langle\sigma_1\rangle = \langle\sigma_2\rangle$, tada je $\sigma_1 \sim_D \sigma_2$, dakle, $\sigma_1(1) = \sigma_2(1)$.

(b) Ako su $\sigma_1, \sigma_2 \in S$ takvi da je $\sigma_1(1) = \sigma_2(1)$ i ako su ti putevi homotopni, onda se lako vidi da je $\sigma_1\sigma_2^-$ petlja homotopna konstantnoj petlji ι_x. Drugim riječima, klasa $[\sigma_1\sigma_2^-]$ je jedinični element grupe $\Pi(X,x)$ i, posebno, $[\sigma_1\sigma_2^-] \in D$. To pokazuje da iz homotopnosti puteva $\sigma_1, \sigma_2 \in S$ slijedi $\sigma_1 \sim_D \sigma_2$, odnosno $\langle\sigma_1\rangle = \langle\sigma_2\rangle$:

$$\sigma_1, \sigma_2 \in S, \quad \sigma_1 \approx \sigma_2 \qquad \Longrightarrow \qquad \langle\sigma_1\rangle = \langle\sigma_2\rangle. \tag{3.5}$$

(c) Neka je $\mathcal{A}$ atlas $C^\infty-$mnogostrukosti X. Kao i obično za $\alpha \in \mathcal{A}$ stavimo $\alpha = (U_\alpha, \varphi_\alpha)$. Atlas $\mathcal{A}$ izaberimo tako da je $\varphi_\alpha(U_\alpha) = K(0,1)$ (otvorena jedinična kugla u $\mathbb{R}^n$) $\forall \alpha \in \mathcal{A}$. Za $\alpha \in \mathcal{A}$ stavimo $x_\alpha = \varphi_\alpha^-(0)$ i $P_\alpha = f^{-1}(x_\alpha)$. Neka je $y_\alpha = \langle\sigma_0\rangle \in P_\alpha$. Za $x' \in U_\alpha$ neka je σ put u U_α od točke x_α do točke x'. Tada složen put $\sigma_0\sigma$ određuje točku $\langle\sigma_0\sigma\rangle \in Y$. Ona ovisi o y_α i o x' ali ne i o izboru puta σ. Doista, neka je σ' drugi put u U_α od točke x_α do točke x'. Kako je $\varphi_\alpha(U_\alpha) = K(0,1)$, putevi σ i σ' su homotopni, pa slijedi da su i složeni putevi $\sigma_0\sigma$ i $\sigma_0\sigma'$ homotopni. Prema (3.5) odatle slijedi $\langle\sigma_0\sigma\rangle = \langle\sigma_0\sigma'\rangle$. Napokon, označimo sa $V_\alpha(y_\alpha)$ skup svih tako dobivenih točaka $\langle\sigma_0\sigma\rangle \in Y$.

(d) Dokazat ćemo sada da je restrikcija $f|V_\alpha(y_\alpha)$ bijekcija sa $V_\alpha(y_\alpha)$ na U_α. Po konstrukciji to je surjekcija. Dokažimo još da je $f|V_\alpha(y_\alpha)$ injekcija. Neka su $\langle\sigma_0\sigma_1\rangle, \langle\sigma_0\sigma_2\rangle \in V_\alpha(y_\alpha)$ takve da je $f(\langle\sigma_0\sigma_1\rangle) = f(\langle\sigma_0\sigma_2\rangle)$. To znači da je $(\sigma_0\sigma_1)(1) = (\sigma_0\sigma_2)(1)$, tj. $\sigma_1(1) = \sigma_2(1)$. Kao malo prije, budući da su σ_1 i σ_2 putevi u U_α s istim početkom x_α i s istim završetkom, zbog homeomorfnosti U_α sa $K(0,1)$ zaključujemo da su putevi σ_1 i σ_2 homotopni, pa prema (3.5) imamo redom

$$\sigma_1 \approx \sigma_2 \quad\Longrightarrow\quad \sigma_0\sigma_1 \approx \sigma_0\sigma_2 \quad\Longrightarrow\quad \langle\sigma_0\sigma_1\rangle = \langle\sigma_0\sigma_2\rangle.$$

Time je dokazano da je $f|V_\alpha(y_\alpha)$ injekcija.

(e) Dokazat ćemo sada da je $\{V_\alpha(y_\alpha);\ \alpha \in \mathcal{A},\ y_\alpha \in P_\alpha\}$ pokrivač od Y. U tu svrhu uzmimo proizvoljnu točku $y' = \langle\sigma\rangle \in Y$. Stavimo $x' = f(y') = \sigma(1)$. Neka je $\alpha \in \mathcal{A}$ takav da je $x' \in U_\alpha$. Neka je σ_1 put u U_α od točke x_α do točke x'. Tada je $\sigma_0 = \sigma\sigma_1^-$ put u X od točke x do točke x_α, pa je $y_\alpha = \langle\sigma_0\rangle \in P_\alpha$. Nadalje, prema (3.5)

$$\sigma_0\sigma_1 = \sigma\sigma_1^-\sigma_1 \approx \sigma \quad\Longrightarrow\quad \langle\sigma_0\sigma_1\rangle = \langle\sigma\rangle = q^*.$$

Zaključujemo da je $y' \in V_\alpha(y_\alpha)$. Kako je y' bila proizvoljna točka iz Y, time je dokazano da je $\{V_\alpha(y_\alpha);\ \alpha \in \mathcal{A},\ y_\alpha \in P_\alpha\}$ pokrivač od Y.

(f) Dokažimo sada da je $f^{-1}(U_\alpha)$ disjunktna unija skupova $V_\alpha(y_\alpha)$, $y_\alpha \in P_\alpha$. Neka je $y' \in f^{-1}(U_\alpha)$, tj. $y' = \langle\sigma\rangle \in Y$, gdje je σ put u U_α od točke x_α do točke $x' \in U_\alpha$. Dokaz tvrdnje (e) pokazuje da je tada $y' \in V_\alpha(y_\alpha)$ za neko $y_\alpha \in P_\alpha$. Dakle,

$$f^{-1}(U_\alpha) = \bigcup_{y_\alpha \in P_\alpha} V_\alpha(y_\alpha).$$

Treba još dokazati da je ta unija disjunktna. Neka su $y_1, y_2 \in P_\alpha$, $y_1 \neq y_2$. Neka je $y_1 = \langle\sigma_1\rangle$ i $y_2 = \langle\sigma_2\rangle$. Tada su σ_1 i σ_2 putevi u X od točke x do točke x_α, ali $[\sigma_1\sigma_2^-] \notin D$. Pretpostavimo da skupovi $V_\alpha(y_1)$ i $V_\alpha(y_2)$ nisu disjunktni i neka je $y' \in V_\alpha(y_1) \cap V_\alpha(y_2)$. Tada y' ima prikaze $y' = \langle\sigma_1\sigma\rangle$ i $y' = \langle\sigma_2\sigma'\rangle$, gdje su σ i σ' bilo koji putevi u U_α od točke x_α do točke $x' = f(y')$. Možemo uzeti da je $\sigma' = \sigma$. Kako je $\langle\sigma_1\sigma\rangle = \langle\sigma_2\sigma\rangle$, imamo

$$[\sigma_1\sigma_2^-] = [\sigma_1\sigma\sigma^-\sigma_2^-] = [(\sigma_1\sigma)(\sigma_2\sigma)^-] \in D,$$

suprotno pretpostavci. Ova kontradikcija pokazuje da je doista $V_\alpha(y_1) \cap V_\alpha(y_2) = \emptyset$.

(g) Uvodimo sada topologiju na Y zahtjevima da je svaki skup $V_\alpha(y_\alpha)$, $\alpha \in \mathcal{A}$, $y_\alpha \in P_\alpha$, otvoren u Y i da je svaka restrikcija $f|V_\alpha(y_\alpha)$, $\alpha \in \mathcal{A}$, $y_\alpha \in P_\alpha$, (za koju znamo da je injekcija) homeomorfizam sa $V_\alpha(y_\alpha)$ na U_α. Jasno je da je tada f lokalni homeomorfizam sa Y na X.

Dokažimo da je s uvedenom topologijom Y Hausdorffov topološki prostor. Neka su $y_1 \neq y_2$ točke iz Y.

Pretpostavimo prvo da je $x_1 = f(y_1) \neq x_2 = f(y_2)$. Neka su $\alpha, \beta \in \mathcal{A}$ takvi da je $x_1 \in U_\alpha$, $x_2 \in U_\beta$. Neka su $y_\alpha \in P_\alpha$ i $y_\beta \in P_\beta$ takvi da je $y_1 \in V_\alpha(y_\alpha)$ i $y_2 \in V_\beta(y_\beta)$. Neka je U otvorena okolina točke x_1 u U_α i V otvorena okolina točke x_2 u U_β takve da je $U \cap V = \emptyset$. Stavimo

$$U^* = \{z \in V_\alpha(y_\alpha);\ f(z) \in U\} \qquad \text{i} \qquad V^* = \{z \in V_\beta(y_\beta);\ f(z) \in V\}.$$

Po definiciji topologije na Y tada je U^* otvorena okolina točke y_1, V^* je otvorena okolina točke y_2 i vrijedi $f(U^* \cap V^*) \subseteq U \cap V = \emptyset$,dakle, $U^* \cap V^* = \emptyset$.

Pretpostavimo sada da je $f(y_1) = f(y_2) = x'$. Neka je $\alpha \in \mathcal{A}$ takav da je $x' \in U_\alpha$ i neka je σ put u U_α od točke x_α do točke x'. Stavimo $y_1 = \langle\sigma_1\rangle$ i $y_2 = \langle\sigma_2\rangle$. Tada su $\sigma_1\sigma^-$ i $\sigma_2\sigma^-$ putevi u X od točke x do točke x_α, pa su $z_1 = \langle\sigma_1\sigma^-\rangle$ i $z_2 = \langle\sigma_2\sigma^-\rangle$ elementi skupa P_α. Imamo

$$\left[\left(\sigma_1\sigma^-\right)\left(\sigma_2\sigma^-\right)^-\right] = \left[\sigma_1\sigma^-\sigma\sigma_2^-\right] = \left[\sigma_1\sigma_2^-\right] \notin D$$

jer je $y_1 \neq y_2$. Slijedi da je $z_1 \neq z_2$. Odatle je zbog (f)

$$V_\alpha(z_1) \cap V_\alpha(z_2) = \emptyset,$$

a po definiciji topologije na Y $V_\alpha(z_1)$ je otvorena okolina točke y_1 i $V_\alpha(z_2)$ je otvorena kolina točke y_2.

Time je dokazano da je topološki prostor Y Hausdorffov.

(h) Dokažimo sada da je topološki prostor Y povezan. Štoviše, dokazat ćemo da je prostor Y putevima povezan. Označimo sa $y \in Y$ klasu konstantne petlje s početkom u točki x :

$$y = \langle \iota_x \rangle, \qquad \iota_x(t) = x \quad \forall t \in [0,1].$$

Neka je y' proizvoljna točka u Y i neka je σ put u X s početkom u točki x takav da je $y' = \langle \sigma \rangle$. Za $\tau \in [0,1]$ neka je $\sigma_\tau : [0,1] \to X$ put s početkom u točki x definiran sa

$$\sigma_\tau(t) = \sigma(t\tau), \qquad t \in [0,1].$$

Primijetimo da je tada $\sigma_0 = \iota_x$, dakle, $\langle \sigma_0 \rangle = y$. Definiramo sada preslikavanje $\gamma : [0,1] \to Y$ sa

$$\gamma(\tau) = \langle \sigma_\tau \rangle, \qquad \tau \in [0,1].$$

Tada je

$$\gamma(0) = \langle \sigma_0 \rangle = y \qquad \text{i} \qquad \gamma(1) = \langle \sigma \rangle = y'.$$

Treba još dokazati da je preslikavanje $\gamma : [0,1] \to Y$ neprekidno, tj. da je γ put u Y. Neka je $t_0 \in [0,1]$. Neka su $\alpha \in \mathcal{A}$ i $y_\alpha \in P_\alpha$ takvi da je $\gamma(t_0) \in V_\alpha(y_\alpha)$. Tada je $\sigma(t_0) \in U_\alpha$. Neka je J otvorena okolina od t_0 u $[0,1]$ takva da je $\sigma(J) \subseteq U_\alpha$. Tada je

$$\gamma(J) \subseteq V_\alpha(y_\alpha) \qquad \text{i} \qquad (f \circ \gamma)|J = \sigma|J.$$

Budući da je $f|V_\alpha(y_\alpha)$ homeomorfizam sa $V_\alpha(y_\alpha)$ na U_α, vidimo da je restrikcija $\gamma|J$ neprekidna. Time je dokazano da je preslikavanje γ neprekidno u svakoj točki $t_0 \in [0,1]$.

(i) Prema (g) i (h) Y je povezan Hausdorffov topološki prostor. Nadalje,

$$\{(V_\alpha(y_\alpha), (\varphi_\alpha \circ f)|V_\alpha(y_\alpha));\ \alpha \in \mathcal{A}\ y_\alpha \in P_\alpha\}$$

je atlas na Y. Primijetimo još da svaka točka iz Y ima otvorenu okolinu koja je homeomorfna kugli $K(0,1)$ u $\mathbb{R}^n$. Odatle odmah slijedi da je prostor Y lokalno povezan (štoviše, lokalno putevima povezan). Zbog (f) preslikavanje $f : Y \to X$ je natkrivanje.

(j) Dokazat ćemo sada da je $D = D(f,y)$, gdje je kao prije $y = \langle \sigma_0 \rangle$ i $\sigma_0 = \iota_x$ je konstantan put u X s početkom u točki x. Neka je $[\sigma] \in D$. Prema tvrdnji (a) propozicije 3.3.8. postoji jedinstven lift $\tilde{\sigma}$ od σ s početkom u točki y. U (h) smo ustanovili da je sa

$$\gamma(\tau) = \langle \sigma_\tau \rangle, \qquad \sigma_\tau(t) = \sigma(t\tau), \qquad t, \tau \in [0,1],$$

zadan put γ u Y od točke y do točke $\langle \sigma \rangle$. Imamo

$$(f \circ \gamma)(\tau) = f(\gamma(\tau)) = f(\langle \sigma_\tau \rangle) = \sigma_\tau(1) = \sigma(\tau), \qquad \text{tj.} \qquad f \circ \gamma = \sigma.$$

Dakle, i γ je lift puta σ s početkom u točki y, pa zbog jedinstvenosti liftova s istim početkom slijedi $\gamma = \tilde{\sigma}$. Dakle,

$$\tilde{\sigma}(\tau) = \langle \sigma_\tau \rangle \qquad \forall \tau \in [0,1].$$

No tada je posebno
$$\tilde{\sigma}(1) = \langle \sigma_1 \rangle = \langle \sigma \rangle.$$
Po pretpostavci je $[\sigma] \in D$. Sada iz $\sigma\sigma_0^- \approx \sigma$ slijedi $[\sigma\sigma_0^-] = [\sigma]$, pa zaključujemo da je $[\sigma\sigma_0^-] \in D$. Po definiciji relacije ekvivalencije $\sim_D$ u skupu S iz (a) to znači da je
$$\langle \sigma \rangle = \langle \sigma_0 \rangle, \qquad \text{tj.} \qquad \tilde{\sigma}(1) = y.$$
Time smo dokazali da je $\tilde{\sigma}$ petlja u Y s početkom u točki y, a to znači da je $[\sigma] \in D(f, y)$. Na taj način dokazana je inkluzija $D \subseteq D(f, y)$.

Treba još dokazati obrnutu inkluziju. Neka je $[\sigma] \in D(f, y)$, tj. σ je petlja u X s početkom u točki x takva da je njezin jedinstven lift $\tilde{\sigma}$ s početkom u točki y petlja u Y. Tada je
$$\langle \sigma \rangle = \tilde{\sigma}(1) = y = \langle \sigma_0 \rangle,$$
pa slijedi $[\sigma] = [\sigma\sigma_0^-] \in D$. Time je dokazana i obrnuta inkluzija $D(f, y) \subseteq D$, dakle, imamo $D(f, y) = D$.

Teorem 3.3.13. *Neka su $f_1 : Y_1 \to X$ i $f_2 : Y_2 \to X$ natkrivanja povezane $C^\infty-$mnogostrukosti i neka su $x \in X$, $y_1 \in f_1^{-1}(x)$ i $y_2 \in f_2^{-1}(x)$.*

(a) *Ako je $D(f_1, y_1) \subseteq D(f_2, y_2)$ postoji jedinstveno preslikavanje $\varphi : Y_1 \to Y_2$ koje čuva vlati (tj. $f_1 = f_2 \circ \varphi$) i za koje je $\varphi(y_1) = y_2$. Preslikavanje φ je natkrivanje.*

(b) *Ako je $\varphi : Y_1 \to Y_2$ neprekidno preslikavanje koje čuva vlati i vrijedi $\varphi(y_1) = y_2$, onda je $D(f_1, y_1) \subseteq D(f_2, y_2)$.*

Dokaz: Za put γ u X s početkom u točki x u cijelom ćemo dokazu sa γ_1 (odnosno, sa γ_2) označavati jedinstven lift od γ u Y_1 (odnosno, u Y_2) s početkom u točki y_1 (odnosno, u točki y_2).

Dokažimo najprije sljedeću tvrdnju:

(A) *Ako je $y \in Y_1$ i ako su $\gamma, \delta \in \mathcal{P}(Y_1, y_1, y)$, tada je $(f_1 \circ \gamma)_2(1) = (f_1 \circ \delta)_2(1)$.*

Doista, imamo $(f_1 \circ \gamma)_1 = \gamma$ i $(f_1 \circ \delta)_1 = \delta$. Nadalje, $\left((f_1 \circ \gamma)(f_1 \circ \delta)^-\right)_1 = \gamma\delta^-$ je petlja u Y_1 s početkom u točki y_1. Stoga je $[(f_1 \circ \gamma)(f_1 \circ \delta)^-] \in D(f_1, y_1)$. Prema pretpostavci je $D(f_1, y_1) \subseteq D(f_2, y_2)$, pa slijedi $[(f_1 \circ \gamma)(f_1 \circ \delta)^-] \in D(f_2, y_2)$. Po definiciji grupe $D(f_2, y_2)$ slijedi da je $\left((f_1 \circ \gamma)(f_1 \circ \delta)^-\right)_2$ petlja u Y_2 s početkom u točki y_2. No ta je petlja jednaka $(f_1 \circ \gamma)_2\tau$, gdje je τ lift od $(f_1 \circ \delta)^-$ u Y_2 s početkom u točki $y' = (f_1 \circ \gamma)_2(1)$. Budući da se radi o petlji, put τ završava tamo gdje počinje put $(f_1 \circ \gamma)_2$, dakle u točki y_2. Kako je τ lift od $(f_1 \circ \delta)^-$, zaključujemo da je put τ^- upravo onaj lift puta $f_1 \circ \delta$ koji počinje u točki y_2, odnosno, $\tau^- = (f_1 \circ \delta)_2$. Odatle je
$$(f_1 \circ \delta)_2(1) = \tau^-(1) = \tau(0) = y' = (f_1 \circ \gamma)_2(1),$$
odnosno, tvrdnja (A) je dokazana.

Tvrdnja (A) pokazuje da možemo definirati preslikavanje $\varphi : Y_1 \to Y_2$ na sljedeći način:
$$\varphi(y) = (f_1 \circ \gamma)_2(1), \quad \text{gdje je } \gamma \text{ put u } Y_1 \text{ od točke } y_1 \text{ do točke } y.$$

Za $y = y_1$ možemo uzeti konstantan put $\gamma(t) = y_1$, pa vidimo da definirano preslikavanje ima traženo svojstvo $\varphi(y_1) = y_2$.

Neka je $y \in Y_1$ i neka γ put u Y_1 od točke y_1 do točke y. Tada imamo
$$f_2(\varphi(y)) = f_2\left((f_1 \circ \gamma)_2(1)\right) = \left(f_2 \circ (f_1 \circ \gamma)_2\right)(1) = (f_1 \circ \gamma)(1) = f_1(y).$$
Budući da je točka $y \in Y_1$ bila proizvoljna, na taj je način dokazano da preslikavanje φ ima i drugo traženo svojstvo $f_2 \circ \varphi = f_1$.

Treba još dokazati da je preslikavanje φ neprekidno. Neka je $y \in Y_1$ i neka je $U \subseteq X$ otvorena povezana okolina točke $f_1(y) = f_2(\varphi(y))$ koja je pravilno natkrivena i sa f_1 i sa f_2. Neka je V_1 ona komponenta povezanosti skupa $f_1^{-1}(U)$ koja sadrži točku y i neka je V_2 ona komponenta povezanosti skupa $f_2^{-1}(U)$ koja sadrži točku $\varphi(y)$. Neka je γ put u Y_1 od točke y_1 do točke y. Sada za bilo koju točku $z \in V_1$ izaberemo put γ_z u V_1 od točke y do točke z. Tada je $\gamma\gamma_z$ put u Y_1 od točke y_1 do točke z. Imamo

$$f_1 \circ (\gamma\gamma_z) = (f_1 \circ \gamma)(f_1 \circ \gamma_z)$$

i $f_1 \circ \gamma_z$ je put u U. Dakle, možemo pisati

$$(f_1 \circ (\gamma\gamma_z))_2 = (f_1 \circ \gamma)_2 \tau_z,$$

gdje je τ_z lift u Y_2 puta $f_1 \circ \gamma_z$ koji počinje u točki $\varphi(y)$. Kako je $f_2|V_2$ homeomorfizam sa V_2 na U, τ_z je put u V_2. Prema tome je

$$\varphi(z) = (f_1 \circ (\gamma\gamma_z))_2 (1) = \tau_z(1) \in V_2.$$

Time je dokazano da je $\varphi(V_1) \subseteq V_2$. Kako je $f_1|V_1$ homeomorfizam sa V_1 na U i kako je $f_2|V_2$ homeomorfizam sa V_2 na U, iz jednakosti $f_1 = f_2 \circ \varphi$ zaključujemo da je $\varphi|V_1$ homeomorfizam sa V_1 na V_2. Kako je točka $y \in Y_1$ bila proizvoljna, odatle posebno slijedi da je preslikavanje φ neprekidno.

Jedinstvenost preslikavanja φ slijedi iz tvrdnje (b) propozicije 3.3.1., a tvrdnja (a) iste propozicije pokazuje da je $\varphi : Y_1 \to Y_2$ natkrivanje.

(b) Neka je $\varphi : Y_1 \to Y_2$ neprekidno preslikavanje takvo da je $f_1 = f_2 \circ \varphi$ i $\varphi(y_1) = y_2$. Neka je $[\sigma] \in D(f_1, y_1)$. To znači da je petlja $\sigma \in \mathcal{P}(X, x)$ takva da je njezin lift σ_1 petlja. Tada je $\varphi \circ \sigma_1$ petlja u Y_2 s početkom u točki $\varphi(\sigma_1(0)) = \varphi(y_1) = y_2$. Nadalje,

$$f_2 \circ \varphi \circ \sigma_1 = f_1 \circ \sigma_1 = \sigma \qquad \Longrightarrow \qquad \varphi \circ \sigma_1 = \sigma_2.$$

Dakle, σ_2 je petlja, pa slijedi $[\sigma] \in D(f_2, y_2)$. Time je dokazana inkluzija $D(f_1, y_1) \subseteq D(f_2, y_2)$.

Propozicija 3.3.14. *Neka je X povezana mnogostrukost, $f : Y \to X$ natkrivanje, $x \in X$ i $y \in f^{-1}(x)$. Za $\sigma \in \mathcal{P}(X, x)$ neka je kao i prije $\tilde{\sigma} : [0, 1] \to Y$ jedinstven lift od σ koji počinje u točki y. Tada vrijedi*

$$D(f, \tilde{\sigma}(1)) = [\sigma] D(f, y) [\sigma]^{-1}$$

Dokaz: Stavimo $\tilde{\sigma}(1) = z$. Za put γ u X s početkom u točki x neka je $\tilde{\gamma}$ lift od γ s početkom u točki y, a $\overline{\gamma}$ lift od γ s početkom u točki z. Neka je $[\gamma] \in D(f, z)$. To znači da je γ petlja u X s početkom u točki x takva da je lift $\overline{\gamma}$ petlja. Tada je $\sigma^- \gamma \sigma$ također petlja u X s početkom u točki x. Nadalje, vrijedi

$$\left(\sigma^- \gamma \sigma\right)^{\tilde{}} = (\tilde{\sigma})^- \, \overline{\gamma} \tilde{\sigma},$$

dakle, to je petlja. To znači da vrijedi

$$[\sigma]^{-1} [\gamma] [\sigma] = [\sigma^- \gamma \sigma] \in D(f, y).$$

Time je dokazana inkluzija $[\sigma]^{-1} D(f, z) [\sigma] \subseteq D(f, y)$. Sasvim analogno dokazuje se da vrijedi $[\sigma] D(f, y) [\sigma]^{-1} \subseteq D(f, z)$ odakle slijedi obrnuta inkluzija $D(f, y) \subseteq [\sigma]^{-1} D(f, z) [z]$.

Za **natkrivanja** $f_1 : Y_1 \to X$ i $f_1 : Y_2 \to X$ povezane mnogostrukosti X kažemo da su **ekvivalentna** ako postoji neprekidna bijekcija $\varphi : Y_1 \to Y_2$ koja čuva vlati, tj. $f_1 = f_2 \circ \varphi$. Prema tvrdnji (a) propozicije 3.3.1. tada je φ natkrivanje, dakle, lokalni homeomorfizam. No kako je φ bijekcija, to je homeomorfizam; štoviše, nije teško vidjeti da je φ difeomorfizam. To pokazuje da je ekvivalentnost natkrivanja relacija ekvivalencije. Propozicija 3.3.14. i teorem 3.3.13. imaju za posljedicu:

Propozicija 3.3.15. *Neka su $f_1 : Y_1 \to X$ i $f_2 : Y_2 \to X$ natkrivanja povezane mnogostrukosti X i neka su $x \in X$, $y_1 \in f_1^{-1}(x)$ i $y_2 \in f_2^{-1}(x)$. Natkrivanja f_1 i f_2 su ekvivalentna ako samo ako su $D(f_1, y_1)$ i $D(f_2, y_2)$ konjugirane podgrupe fundamentalne grupe $\Pi(X, x)$, tj. vrijedi*

$$[\sigma]D(f_1, y_1)[\sigma]^{-1} = D(f_2, y_2) \quad \text{za neki element} \quad [\sigma] \in \Pi(X, x).$$

Dokaz: Pretpostavimo najprije da su podgrupe $D(f_1, y_1)$ i $D(f_2, y_2)$ fundamentalne grupe $\Pi(X, x)$ konjugirane i neka je $\sigma \in \mathcal{P}(X, x)$ takva da je

$$[\sigma]D(f_1, y_1)[\sigma]^{-1} = D(f_2, y_2).$$

Neka je σ_1 lift od σ u Y_1 s početkom u točki y_1 i stavimo $y_1' = \sigma_1(1)$. Tada je $y_1' \in f_1^{-1}(x)$ i prema propoziciji 3.3.14. vrijedi

$$D(f_1, y_1') = [\sigma]D(f_1, y_1)[\sigma]^{-1}, \quad \text{odnosno,} \quad D(f_1, y_1') = D(f_2, y_2).$$

To pokazuje da u dokazu ekvivalentnosti natkrivanja f_1 i f_2 možemo pretpostavljati da je $D(f_1, y_1) = D(f_2, y_2)$. Prema tvrdnji (a) teorema 3.3.13. tada postoje neprekidna preslikavanja $\varphi : Y_1 \to Y_2$ i $\psi : Y_2 \to Y_1$ takva da je $f_1 = f_2 \circ \varphi$, $\varphi(y_1) = y_2$, $f_2 = f_1 \circ \psi$ i $\psi(y_2) = y_1$. Tada je $\varphi \circ \psi : Y_2 \to Y_2$ neprekidno preslikavanje takvo da je $f_2 \circ (\varphi \circ \psi) = f_2$ i $(\varphi \circ \psi)(y_2) = y_2$. Prema tvrdnji (b) propozicije 3.3.1. tada je $\varphi \circ \psi$ identiteta na W_2 Sasvim analogno nalazimo da je $\psi \circ \varphi$ identiteta na Y_1. Posebno, φ je neprekidna bijekcija, pa zaključujemo da su natkrivanja f_1 i f_2 ekvivalentna.

Pretpostavimo sada da su f_1 i f_2 ekvivalentna natkrivanja i neka je $\varphi : Y_1 \to Y_2$ homeomorfizam takav da je $f_1 = f_2 \circ \varphi$. Stavimo $y_2' = \varphi(y_1)$ i neka je σ_2 put u Y_2 od točke y_2 do točke y_2'. Tada je $\sigma = f_2 \circ \sigma_2$ petlja u X s početkom u točki $x = f_2(y_2) = f_2(y_2')$. Prema propoziciji 3.3.14. tada je

$$D(f_2, y_2') = [\sigma]D(f_2, y_2)[\sigma]^{-1}. \tag{3.6}$$

It tvrdnje (b) teorema 3.3.13. primijenjene na preslikavanja φ i φ^{-1} slijedi

$$D(f_1, y_1) \subseteq D(f_2, y_2') \qquad \text{i} \qquad D(f_2, y_2') \subseteq D(f_1, y_1).$$

Odatle je $D(f_1, y_1) = D(f_2, y_2')$, pa iz (3.6) slijedi $D(f_1, y_1) = [\sigma]D(f_2, y_2)[\sigma]^{-1}$.

Sada se teorem 3.3.12. i propozicija 3.3.15. mogu spojiti u teorem:

Teorem 3.3.16. *Neka je X povezana mnogostrukost i $x \in X$. Preslikavanje $f \mapsto D(f, y)$, gdje je $f : Y \to X$ natkrivanje i $y \in f^{-1}(x)$, inducira bijekciju sa skupa svih klasa ekvivalencije natkrivanja mnogostrukosti X na skup svih klasa konjugiranosti podgrupa fundamentalne grupe.*

Za povezanu mnogostrukost X čija je fundamentalna grupa $\Pi(X, x)$ trivijalna, tj. svaka petlja u X homotopna je konstantnoj petlji, kažemo da je **jednostavno povezana**.

Teorem 3.3.17. *Neka je X povezana mnogostrukost.*

(a) *Postoji do na ekvivalenciju jedinstveno natkrivanje $\tilde{f} : \tilde{X} \to X$ takvo da je mnogostrukost $\tilde{X}$ jednostavno povezana.*

(b) *Neka je $\tilde{f} : \tilde{X} \to X$ kao u (a) i neka je $f : Y \to X$ natkrivanje. Izaberimo $x \in X$ i $\tilde{x} \in \tilde{f}^{-1}(x)$. Za svaku točku $y \in f^{-1}(x)$ postoji jedinstveno neprekidno preslikavanje $\varphi : \tilde{X} \to Y$ takvo da je $\tilde{f} = f \circ \varphi$ i $\varphi(\tilde{x}) = y$. Preslikavanje φ je natkrivanje.*

Zadatak 3.3.2. *Dokažite teorem 3.3.17.*

Uputa: Koristite propozicije 3.3.11. i 3.3.15. i teoreme 3.3.12. i 3.3.13.

Natkrivanje $f : \tilde{X} \to X$ takvo da je mnogostrukost $\tilde{X}$ jednostavno povezana zove se zbog univerzalnog svojstva iskazanog u tvrdnji (b) teorema 3.3.17. **univerzalno natkrivanje**. Naime, tvrdnja (b) teorema 3.3.17. kaže da univerzalno natkrivanje povezane mnogostrukosti X natkriva svako natkrivanje od X.

Ako je H podgrupa grupe G onda sa $N_G(H)$ označavamo tzv. **normalizator podgrupe** H **u grupi** G :

$$N_G(H) = \{g \in G;\ gHg^{-1} = H\}.$$

$N_G(H)$ je podgrupa grupe G, H je normalna podgrupa od $N_G(H)$ i $N_G(H)$ sadrži svaku podgrupu K od G koja sadrži H kao normalnu podgrupu.

Teorem 3.3.18. *Neka je X povezana mnogostrukost, $f : Y \to X$ natkrivanje, $x \in X$ i $y \in f^{-1}(x)$. Stavimo $D = D(f, y)$ i $N = N_{\Pi(X,x)}(D)$. Grupa $\mathcal{T}(f)$ izomorfna je kvocijentnoj grupi N/D.*

Dokaz: Definirat ćemo preslikavanje $\Phi : N \to \mathcal{T}(f)$. Neka je $[\sigma] \in N$. Neka je $\tilde{\sigma}$ jedinstven lift puta σ koji počinje u točki y. Stavimo $z = \tilde{\sigma}(1)$. Prema propoziciji 3.3.14. tada je

$$D(f, z) = [\sigma]D(f, y)[\sigma]^{-1} = D(f, y).$$

Sada prema tvrdnji (a) teorema 3.3.13. postoji jedinstveno preslikavanje $\varphi \in \mathcal{T}(f)$ takvo da je $\varphi(y) = z$. Stavljamo $\Phi([\sigma]) = \varphi$.

Dokažimo sada da je $\Phi : N \to \mathcal{T}(f)$ homomorfizam grupa. Neka su

$$[\sigma], [\sigma'] \in N, \qquad \varphi = \Phi([\sigma]), \qquad \varphi' = \Phi([\sigma']), \qquad \psi = \Phi([\sigma'][\sigma]).$$

Tada je $\psi(y) = (\sigma'\tilde{\sigma}(1)$. S druge strane je $\varphi(y) = z$. Prema dokazu tvrdnje (a) u teoremu 3.3.13. imamo

$$\varphi' = \overline{(f \circ \gamma)}(1), \quad \text{gdje je } \gamma \text{ put u } Y \text{ od točke } y \text{ do točke } z.$$

Pri tome za bilo koji put δ u X s početkom u točki x sa $\overline{\delta}$ označavamo njegov jedinstven lift u Y koji počinje u točki $(\sigma'\tilde{\ }(1)$. U gornjoj formuli kao put γ možemo izabrati upravo $\tilde{\sigma}$. Kako je $f \circ \tilde{\sigma} =$ nalazimo

$$\varphi'(z) = \overline{\sigma}(1) = (\sigma'\sigma)(1).$$

Prema tome, vrijedi

$$\Psi \in \mathcal{T}(f), \quad \varphi' \circ \varphi \in \mathcal{T}(f) \quad \text{i} \quad \psi(y) = (\varphi' \circ \varphi)(y).$$

Sada iz teorema 3.3.2. slijedi $\psi = \varphi' \circ \varphi$. Time je dokazano da je Φ homomorfizam grupa.

Slika bilo koje homomorfizma grupa izomorfna je kvocijentnoj grupi njegove domene po njegovoj jezgri. Dakle, teorem će biti dokazan ako pokažemo da je $\Phi : N \to \mathcal{T}(f)$ epimorfizam i da mi je jezgra jednaka D.

Prije svega, $\varphi = \Phi([\sigma])$ je identiteta ako i samo ako je $\tilde{\sigma}(1) = y$, tj. ako i samo ako je $\tilde{\sigma}$ petlja. To upravo znači da je $[\sigma] \in D$. Dakle, $D = \operatorname{Ker} \Phi$.

Neka je $\varphi \in \mathcal{T}(f)$. Neka je γ put u Y od točke y do točke $\varphi(y)$. Tada je $\sigma = f \circ \gamma$ petlja u X s početkom u točki x. Naravno, tada je $\tilde{\sigma} = \gamma$. Tvrdimo da je tada $[\sigma] \in N$. Doista, neka je δ bilo koja petlja u X s početkom u točki x takva da je $[\delta] \in D$, tj. da je $\tilde{\delta}$ petlja. Tada je $\sigma\delta\sigma^-$ petlja u X s početkom u točki x i $(\sigma\delta\sigma^-)\tilde{} = \tilde{\sigma}(\varphi \circ \tilde{\delta})(\tilde{\sigma})^-$ je petlja. To znači da je $[\sigma][\delta][\sigma]^{-1} = [\sigma\delta\sigma^-] \in D$. Kako je element $[\delta] \in D$ bio proizvoljan, to pokazuje da je $[\sigma]D[\sigma]^{-1} \subseteq D$. Sasvim analogno nalazimo da je i $[\sigma]^{-1}D[\sigma] \subseteq D$, odnosno, vrijedi i obrnuta inkluzija $D \subseteq [\sigma]D[\sigma]^{-1}$. Prema tome, imamo jednakost $[\sigma]D[\sigma]^{-1} = D$, odnosno, dokazano je da je $[\sigma] \in N$.

Stavimo sada $\psi = \Phi([\sigma])$. Tada su $\varphi, \psi \in \mathcal{T}(f)$ i vrijedi $\varphi(y) = \psi(y)$. Sada iz teorema 3.3.2. slijedi da je $\varphi = \psi$. Prema tome, imamo $\varphi = \Phi([\sigma])$, i time je dokazano da je $\Phi : N \to \mathcal{T}(f)$ epimorfizam.

Zadatak 3.3.3. *Neka je $f : \tilde{X} \to X$ univerzalno natkrivanje povezane mnogostrukosti X i $x \in X$. Dokažite da je tada fundamentalna grupa $\Pi(X, x)$ izomorfna je grupi $\mathcal{T}(f)$.*

Posljedica univerzalnog svojstva iz tvrdnje (b) teorema 3.3.17. je sljedeća važna činjenica:

Propozicija 3.3.19. *Neka je X povezana i jednostavno povezana $C^\infty-$mnogostrukost i neka je $f : Y \to X$ natkrivanje. Tada je f difeomorfizam.*

Dokaz: Identiteta $id_X : X \to X$ je natkrivanje. Fiksirajmo točku $x \in X$ i $y \in f^{-1}(x)$. Prema tvrdnji (b) teorema 3.3.17. postoji jedinstveno natkrivanje $\varphi : X \to Y$ takvo da je $id_X = f \circ \varphi$ i $\varphi(x) = y$. Preslikavanje $\varphi \circ f : Y \to Y$ čuva vlakna u odnosu na f :

$$f \circ (\varphi \circ f) = (f \circ \varphi) \circ f = f.$$

Naravno, i identiteta $id_Y : Y \to Y$ čuva vlakna u odnosu na f. Ta se dva preslikavanja podudaraju u točki y :

$$(\varphi \circ f)(y) = \varphi(f(y)) = \varphi(x) = y = id_Y(y).$$

Prema tvrdnji (b) propozicije 3.3.1. ta se dva preslikavanje podudaraju svuda na Y. Dakle, pronašli smo $C^\infty-$preslikavanje $\varphi : X \to Y$ takvo da je $f \circ \varphi = id_X$ i $\varphi \circ f = id_Y$. Time je dokazano da je $f : Y \to X$ difeomorfizam.

U mnogim situacijama pojavljuje se pitanje egzistencije i problem definicije funkcije na mnogostrukosti s određenim svojstvom, a to je svojstvo takve vrste da se vrlo lako vidi da svaka točka ima okolinu na kojoj je egzistencija takve funkcije trivijalna. Bez dokaza navodimo teorem koji ima za posljedicu potvrdan odgovor na pitanje egzistencije ako je mnogostrukost povezana i jednostavno povezana.

Teorem 3.3.20. (**Teorem monodromije**) *Neka je X povezana i jednostavno povezana $C^\infty-$mnogostrukost i neka je D otvoren povezan podskup od $X \times X$ koji sadrži $\Delta = \{(x, x);\ x \in X\}$. Nadalje, pretpostavimo da je zadana familija nepraznih skupova $(S_x)_{x \in X}$ parametriziranih točkama iz X i familija preslikavanja $(\varphi_{x,y})_{(x,y) \in D}$ parametrizirana točkama iz D sa sljedećim svojstvima:*

(a) $\varphi_{(x,y)}$ *je injekcija sa* S_x *u* S_y *za svaku točku* $(x, y) \in D$.

(b) $\varphi_{(x,x)} = id_{S_x}$ *za svaku točku* $x \in X$.

(c) Ako su $x, y, z \in X$ *takvi da su* $(x, y), (y, z), (x, z) \in D$, *onda je* $\varphi_{(x,z)} = \varphi_{(y,z)} \circ \varphi_{(x,y)}$.

Tada postoji preslikavanje $F : X \to \bigcup_{x \in X} S_x$ takvo da je $F(x) \in S_x\ \forall x \in X$ i da je $F(y) = \varphi_{(x,y)}(F(x))\ \forall (x, y) \in D$. Ako su F i F' dva takva preslikavanja onda je ili $F = F'$ ili je $F(x) \neq F'(x)\ \forall x \in X$.

Razmotrimo sada natkrivanja povezanih Liejevih grupa.

Teorem 3.3.21. *Neka je G povezana Liejeva grupa i neka je $f : \tilde{G} \to G$ univerzalno natkrivanje. Tada na mnogostrukosti $\tilde{G}$ postoji struktura grupe takva da je f homomorfizam i da je $\tilde{G}$ Liejeva grupa.*

Skica dokaza: Znamo da na $\tilde{G}$ postoji jedinstvena struktura analitičke mnogostrukosti takva da je natkrivanje f analitičko preslikavanje. Razmotrimo sada konstrukciju univerzalnog natkrivača $\tilde{G}$ iz dokaza teorema 3.3.12. U ovom slučaju D je trivijalna podgrupa grupe $\Pi(G, e)$. Neka je S skup svih puteva u G s početkom u jedinici e grupe G. Relacija ekvivalencije $\sim_D = \sim$ iz koraka (a) u tom dokazu sada je definirana ovako: za $\sigma_1, \sigma_2 \in S$ je $\sigma_1 \sim \sigma_2$ ako i samo ako putevi σ_1 i σ_2 završavaju u istoj točki i petlja $\sigma_1\sigma_2^-$ homotopna konstantnoj petlji. Lako se vidi da to upravo znači da su putevi σ_1 i σ_2 homotopni. Dakle, skup $\tilde{G}$ svih klasa ekvivalencije u S je upravo skup svih klasa homotopnosti puteva u S, a za klasu $\langle\sigma\rangle \in \tilde{G}$ je $f(\langle\sigma\rangle) = \sigma(1)$.

Definirat ćemo sada operaciju množenja $\tilde{G} \times \tilde{G} \to \tilde{G}$. Neka su $\langle\sigma\rangle, \langle\sigma'\rangle \in \tilde{G}$. Tada je σ' put u G od točke e do točke $\sigma'(1)$. Prema tome, $\sigma'_\sigma : t \mapsto \sigma(1)\sigma'(t)$, $t \in [0,1]$ je put u G od točke $\sigma(1)$ do točke $\sigma(1)\sigma'(1)$, pa možemo formirati složeni put $\sigma\sigma'_\sigma$ od točke e do točke $\sigma(1)\sigma'(1)$. Sada definiramo umnožak $\langle\sigma\rangle\langle\sigma'\rangle$ kao klasu homotopnosti tog puta:

$$\langle\sigma\rangle\langle\sigma'\rangle = \langle\sigma\sigma'_\sigma\rangle.$$

Pokazuje se da ova definicija ima smisla, tj. da desna strana ne ovisi o izboru predstavnika σ i σ' klasa homotopnosti $\langle\sigma\rangle$ i $\langle\sigma'\rangle$. Nadalje, elementarne homotopske konstrukcije pokazuju da je tako definirana operacija $\tilde{G} \times \tilde{G} \to \tilde{G}$ asocijativna, da je klasa $\tilde{e} = \langle\iota_e\rangle$ neutralni element za tu operaciju i da je $\langle\sigma(1)^{-1}\sigma^-\rangle$ inverz elemeta $\langle\sigma\rangle \in \tilde{G}$ u odnosu na tu operaciju. Prema tome, $\tilde{G}$ je grupa. Natkrivanje $f : \tilde{G} \to G$ je homomorfizam grupa:

$$f(\langle\sigma\rangle\langle\sigma'\rangle) = f(\langle\sigma\sigma'_\sigma\rangle) = \sigma'_\sigma(1) = \sigma(1)\sigma'(1) = f(\langle\sigma\rangle)f(\langle\sigma'\rangle).$$

Neka je U povezana otvorena okolina jedinice e u grupi G koja je pravilno natkrivena sa f. Nadalje, neka je $V \subseteq U$ povezana otvorena okolina od e takva da je $VV^{-1} \subseteq U$. Tada je i V pravilno natkrivena sa f, a odatle slijedi da je okolina $V \times V$ točke (e, e) u $G \times G$ pravilno natkrivena sa $f \times f : \tilde{G} \times \tilde{G} \to G \times G$. Ako je W komponenta povezanosti od $f^{-1}(V)$ koja sadrži točku $\tilde{e}$ onda je $W \times W$ komponenta povezanosti od $(f \times f)^{-1}(V \times V)$ koja sadrži točku $(\tilde{e}, \tilde{e})$. Nadalje, označimo sa T komponentu povezanosti od $f^{-1}(U)$ koja sadrži točku $\tilde{e}$. Tada je $f|T$ analitički difeomorfizam sa T na U i $(f \times f)|(W \times W)$ je analitički difeomorfizam sa $W \times W$ na $V \times V$. Sada analitičnost preslikavanja $x, y \mapsto xy^{-1}$ sa $V \times V$ u U povlači analitičnost preslikavanja $(\tilde{x}, \tilde{y}) \mapsto \tilde{x}\tilde{y}^{-1}$ sa $W \times W$ u T. Grupovnim pomacima dobivamo da je $(\tilde{x}, \tilde{y}) \mapsto \tilde{x}\tilde{y}^{-1}$ sa $\tilde{G} \times \tilde{G}$ u $\tilde{G}$ analitičko preslikavanje. Dakle, $\tilde{G}$ je s uvedenom operacijom Liejeva grupa.

Uočimo da je $\operatorname{Ker} f = f^{-1}(e)$ diskretan podskup od $\tilde{G}$, dakle, to je diskretna normalna podgrupa od $\tilde{G}$. Vrijedi općenitije:

Propozicija 3.3.22. *Neka je Γ diskretna podgrupa povezane Liejeve grupe G. Tada je preslikavanje $\pi : G \to G/\Gamma$ koje svakoj točki $g \in G$ pridružuje njenu desnu $\Gamma-$klasu $g\Gamma$, natkrivanje.*

Dokaz: Kvocijentna topologija na G/Γ definirana je tako da je skup $S \subseteq G/\Gamma$ otvoren u G/Γ ako i samo ako je $\pi^{-1}(S)$ otvoren podskup od G. Tada je kvocijentno preslikavanje $\pi : G \to G/\Gamma$ ne samo neprekidno nego i otvoreno, tj. za svaki otvoren podskup U od G njegova slika $\pi(U)$ je otvoren podskup od G/Γ. Doista, za $x \in G$ vrijedi redom

$$x \in \pi^{-1}(\pi(U)) \iff \pi(x) \in \pi(U) \iff \exists y \in U \text{ takav da je } \pi(x) = \pi(y), \text{ t.j. } x \in y\Gamma.$$

To znači da je

$$\pi^{-1}(\pi(U)) = U\Gamma = \bigcup_{h\in\Gamma} Uh$$

a taj je skup kao unija otvorenih skupova Uh, $h \in \Gamma$, otvoren u G. Po definiciji topologije na G/Γ to znači da je skup $\pi(U)$ otvoren u G/Γ.

Neka je U otvorena povezana okolina jedinice e u G takva da je $U \cap \Gamma = \{e\}$; takva U postoji jer je podgrupa Γ od G diskretna. Neka je V povezana otvorena okolina jedinice e u G takva da je $V^{-1}V \subseteq U$. Tada je $V^{-1}V \cap \Gamma = \{e\}$. Promatrajmo sada skupove oblika Vh za $h \in \Gamma$. Ti su skupovi međusobno disjunktni. Doista, ako su $v_1, v_2 \in V$ i $h_1, h_2 \in \Gamma$ takvi da je $v_1h_1 = v_2h_2$, tada je $v_2^{-1}v_1 = h_2h_1^{-1} \in V^{-1}V \cap \Gamma = \{e\}$, dakle, $v_1 = v_2$ i $h_1 = h_2$. Nadalje, slično se vidi da je restrikcija $\pi|Vh$ injektivna za svaki $h \in \Gamma$, štoviše to je bijekcija sa Vh na $\pi(V)$. Imamo

$$\pi^{-1}(\pi(V)) = \bigcup_{h\in\Gamma} Vh$$

i skupovi Vh su povezani. To pokazuje da je povezana otvorena okolina $\pi(V)$ točke $\pi(e) = \Gamma$ u G/Γ pravilno natkrivena sa π. Odatle pomacima na G/Γ dobivamo pravilno natkrivenu okolinu $\pi(gV) = \{gv\Gamma;\ v \in V\}$ proizvoljne točke $g\Gamma \in G/\Gamma$, $g \in G$, a to znači da je preslikavanje $\pi : G \to G/\Gamma$ natkrivanje.

U prethodnoj propoziciji π nije općenito homomorfizam grupa, jer nismo pretpostavili da je podgrupa Γ normalna.

Propozicija 3.3.23. *Neka je G povezana topološka grupa i Γ diskretna normalna podgrupa. Tada je Γ sadržana u centru $Z(G)$ grupe G.*

Zadatak 3.3.4. *Dokažite propoziciju 3.3.23.*

Uputa: Uočite da je $\forall h \in \Gamma$ sa $g \mapsto ghg^{-1}$ definirano neprekidno preslikavanje sa G u Γ.

Za topološke grupe G i H preslikavanje $f : G \to H$ zove se **lokalni izomorfizam**, ako je f homomorfizam grupa i postoje otvorene okoline U i V jedinica e_G i e_H u G i H takve da je restrikcija $f|U$ homeomorfizam sa U na V. Naravno, tada je homomorfizam $f : G \to H$ neprekidan. Obratno, ako pretpostavimo da je $f : G \to H$ neprekidan homomorfizam, da bi f bio lokalni izomorfizam dovoljno je pretpostaviti da postoje otvorene okoline U i V od e_G i e_H u G i H takve da je restrikcija $f|U$ bijekcija sa U na V.

Neka je $f : G \to H$ lokalni izomorfizam topoloških grupa. Ako je grupa H povezana, slika $\operatorname{Im} f = K$ sadrži okolinu jedinice V u grupi H. No tada za svaku točku $x \in K$ vrijedi $xV \subseteq K$. To pokazuje da je K otvorena podgrupa od H. Komplement $H \setminus K$ je unija desnih $K-$klasa hK, $h \in H \setminus K$, a one su sve otvoreni podskupovi od H. To pokazuje da je podgrupa K ne samo otvorena nego i zatvorena u H. Kako je po pretpostavci grupa H povezana, slijedi $H = K$, tj. f je epimorfizam.

Neka je sada $\Gamma = \operatorname{Ker} f$. To je zatvorena normalna podgrupa od G i f inducira izomorfizam topoloških grupa $G/\Gamma \to H$. Ako je U otvorena okolina jedinice e_G u G takva da je restrikcija $f|U$ injektivna, tada je $U \cap \Gamma = \{e_G\}$, što pokazuje da je podgrupa Γ diskretna. Posebno, u slučaju da su G i H povezane Liejeve grupe, zbog propozicija 3.3.22. i 3.3.23. dobivamo prvu tvrdnju sljedeće propozicije:

Propozicija 3.3.24. *Neka su G i H povezane Liejeve grupe i $f : G \to H$ lokalni izomorfizam. Tada je f natkrivanje i $\Gamma = \operatorname{Ker} f$ je diskretna centralna podgrupa od G. Ako je G jednostavno povezana, onda je fundamentalna grupa $\Pi(H, e_H)$ izomorfna grupi Γ.*

Dokaz druge tvrdnje: Ako je G jednostavo povezana, $f : G \to H$ je univerzalno natkrivanje. Prema teoremu 3.3.18. grupa $\mathcal{T}(f)$ izomorfna je kvocijentnoj grupi N/D, gdje je $D = D(f, e_G)$ i $N = N_{\Pi(H,e_H)}(D)$. Međutim,

$$D = D(f, e_G) = \{[\gamma] \in \Pi(H, e_H);\ \text{put } \tilde{\gamma} \text{ je petlja}\}.$$

Pri tome je $\tilde{\gamma}$ jedinstven lift od γ u G takav da je $\tilde{\gamma}(0) = e_G$. Neka je $\gamma \in \mathcal{P}(H, e_H)$ takva da je $\tilde{\gamma}$ petlja u G. Budući da je G jednostavno povezana, petlja $\tilde{\gamma}$ je homotopna konstantnoj petlji ι_{e_G} u G. No tada je i petlja $\gamma = f \circ \tilde{\gamma}$ homotopna konstantnoj petlji $f \circ \iota_{e_G} = \iota_{e_H}$ u H, odnosno $[\gamma]$ je jedinica u grupi $\Pi(H, e_H)$. To pokazuje da je D trivijalna podgrupa od $\Pi(H, e_H)$. No tada slijedi da je $N = N_{\Pi(H,e_H)}(D) = \Pi(H, e_H)$. Zaključujemo da je fundamentalna grupa $\Pi(H, e_H) = N/D$ izomorfna grupi $\mathcal{T}(f)$.

Napokon, $\mathcal{T}(f) = \{\varphi \in Homeo(G);\ f \circ \varphi = f\}$. To znači da je $\varphi \in Homeo(G)$ element grupe $\mathcal{T}(f)$ ako i samo ako je $f(\varphi(x)) = f(x)\ \forall x \in G$, tj. ako i samo ako je $x^{-1}\varphi(x) \in \Gamma\ \forall x \in G$. Preslikavanje $x \to x^{-1}\varphi(x)$ je neprekidno preslikavanje sa G u Γ za svaki $\varphi \in \mathcal{T}(f)$. Budući da je grupa Γ diskretna, a grupa G je povezana, zaključujemo da je to preslikavanje konstanta. Prema tome, za svaki $\varphi \in \mathcal{T}(f)$ postoji $h \in \Gamma$ takav da je $x^{-1}\varphi(x) = h$ za svaki $x \in G$, odnosno, $\varphi(x) = xh$ za svaki $x \in G$. Ako za $h \in \Gamma$ označimo sa $\varphi_h : G \to G$ homeomorfizam definiran sa $\varphi_h(x) = xh$, $x \in G$, onda vidimo da je

$$\mathcal{T}(f) = \{\varphi_h;\ h \in \Gamma\}.$$

Za $h, h' \in \Gamma$ i za $x \in G$ je

$$(\varphi_h \circ \varphi_{h'})(x) = \varphi_h(\varphi_{h'}(x)) = \varphi_h(h'x) = hh'x = \varphi_{hh'}(x).$$

To pokazuje da je $h \mapsto \varphi_h$ epimorfizam grupe Γ na grupu $\mathcal{T}(f)$. To je ujedno monomorfizam, jer je očito $\varphi_h \neq \varphi_{h'}$ za $h, h' \in \Gamma$, $h \neq h'$. Dakle, grupa $\mathcal{T}(f)$, a time i fundamentalna grupa $\Pi(H, e_H)$ je izomorfna grupi Γ.

3.4 Homomorfizmi i reprezentacije Liejevih grupa

Neka su G i H Liejeve grupe s Liejevim algebrama $\mathfrak{g} = T_e(G)$ i $\mathfrak{h} = T_e(H)$ i neka je f neprekidni homomorfizam sa G u H. Prema teoremu 3.2.9. f je Liejev homomorfizam (tj. analitičko preslikavanje). Nadalje, prema zadatku 3.2.2. njegov diferencijal $T_e(f) : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ je homomorfizam Liejevih algebri.

Teorem 3.4.1. *Neka su G i H Liejeve grupe s Liejevim algebrama $\mathfrak{g} = T_e(G)$ i $\mathfrak{h} = T_e(H)$ i s eksponencijalnim preslikavanjima $\exp_G : \mathfrak{g} \to G$ i $\exp_H : \mathfrak{h} \to H$. Neka je $f : G \to H$ neprekidni homomorfizam.*

(a) $f \circ \exp_G = \exp_H \circ T_e(f)$.

(b) *Ako je $\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ homomorfizam Liejevih algebri i ako je $f \circ \exp_G = \exp_H \circ \varphi$, onda je $\varphi = T_e(f)$.*

(c) *Ako je $g : H \to K$ neprekidni homomorfizam Liejevih grupa i $\mathfrak{k} = T_e(K)$, onda vrijedi $T_e(g \circ f) = T_e(g) \circ T_e(f)$.*

Dokaz: (a) Neka je $X \in \mathfrak{g}$. Tada je $t \mapsto \exp_G(tX)$ $1-$parametarska podgrupa od G, pa je $t \mapsto f(\exp_G(tX))$ $1-$parametarska podgrupa od H. Sada iz zadatka 3.2.3. slijedi da za njen tangencijalni vektor $T_e(f)X \in \mathfrak{h}$ vrijedi $f(\exp_G(tX)) = \exp_H(tT_e(X))$, $t \in \mathbb{R}$. Tvrdnja slijedi za $t = 1$.

(b) Za $X \in \mathfrak{g}$ vrijedi

$$\exp_H(\varphi(X)) = (\exp_H \circ\varphi)(X) = (f \circ \exp_G)(X) = (\exp_H \circ T_e(f))(X) = \exp_H(T_e(f)X).$$

Neka je U otvorena okolina nule u $\mathfrak{h}$ takva da je restrikcija $\exp_H |U$ injektivna. Nadalje, kako su φ i $T_e(f)$ linearni operatori sa $\mathfrak{g}$ u $\mathfrak{h}$, postoji otvorena okolina nule u $\mathfrak{g}$ takva da je $\varphi(V) \subseteq U$ i $T_e(f)(V) \subseteq U$. Tada iz gornje jednakosti slijedi da je $\varphi|V = T_e(f)|V$. No svaka otvorena okolina nule u konačnodimenzionalnom realnom vektorskom prostoru sadrži bazu tog prostora, pa iz linearnosti operatora φ i $T_e(f)$ slijedi $\varphi = T_e(f)$.

Tvrdnja (c) je neposredna posljedica lančanog pravila za diferencijal kompozicije diferencijabilnih preslikavanja.

Korolar 3.4.2. *Uz oznake iz teorema 3.4.1. vrijedi:*

(a) $\operatorname{Im} f = f(G)$ *je Liejeva podgrupa od H i njena je Liejeva algebra* $\operatorname{Im} \mathrm{T_e(f)} = \mathrm{T_e(f)}\mathfrak{g}$.

(b) *Ako je grupa H povezana, onda je f surjekcija ako i samo ako je $T_e(f)$ surjekcija.*

(c) $\operatorname{Ker} f$ *je zatvorena (dakle, Liejeva) podgrupa od G i* $\operatorname{Ker} T_e(f)$ *je njena Liejeva algebra.*

(d) *$T_e(f)$ je injektivan operator ako i samo ako je homomorfizam f lokalno injektivan, tj. ako i samo ako postoji okolina U jedinice e u G takva da je restrikcija $f|U$ injektivna.*

Dokaz: (c) Iz neprekidnosti f je jasno da je $\operatorname{Ker} f$ zatvorena, dakle, Liejeva, podgrupa od G. Nadalje, prema komentaru iza iskaza teorema 3.2.12. znamo da je njena Liejeva algebra

$$\{X \in \mathfrak{g};\ \exp_G(tX) \in \operatorname{Ker} f\ \forall t \in \mathbb{R}\} = \{X \in \mathfrak{g};\ f(\exp_G(tX)) = e\ \forall t \in \mathbb{R}\}.$$

Prema tvrdnji (a) teorema 3.4.1. to je jednako

$$\{X \in \mathfrak{g};\ \exp_H(T_e(f)(tX)) = e\ \forall t \in \mathbb{R}\} = \{X \in \mathfrak{g};\ T_e(f)X = 0\} = \operatorname{Ker} T_e(f).$$

(a) Homomorfizam f inducira izomorfizam grupa $G/(\operatorname{Ker} f)$ i $\operatorname{Im} f$. Kvocijentna grupa $G/(\operatorname{Ker} f)$ je Liejeva grupa, pa spomenutim izomorfizmom možemo na $\operatorname{Im} f$ definirati strukturu Liejeve grupe. Budući da je preslikavanje f analitičko, može se pokazati da je inkluzija $\operatorname{Im} f \hookrightarrow H$ analitičko preslikavanje, a zbog (c) diferencijal tog preslikavanja u jedinici grupe $G/(\operatorname{Ker} f)$ je injektivan. Prema tome, $\operatorname{Im} f = f(G)$ je Liejeva podgrupa od H. Njena je Liejeva algebra

$$\mathfrak{k} = \{Y \in \mathfrak{h};\ \exp_H(tY) \in f(G)\ \forall t \in \mathbb{R}\}.$$

Iz tvrdnje (a) teorema 3.4.1. slijedi da je $\operatorname{Im} T_e(f) \subseteq \mathfrak{k}$. Međutim, iz tvrdnje ($c$) i iz teorema o rangu i defektu za linearan operator $T_e(f)$ nalazimo

$$\dim \operatorname{Im} T_e(f) = \dim \mathfrak{g} - \dim \operatorname{Ker} T_e(f) = \dim G - \dim \operatorname{Ker} f = \dim G/(\operatorname{Ker} f) = \dim \operatorname{Im} f = \dim \mathfrak{k}$$

Odatle je $\mathfrak{k} = \operatorname{Im} T_e(f)$.

(b) Iz surjektivnosti f očito slijedi surjektivnost diferencijala $T_e(f)$. Pretpostavimo da je diferencijal $T_e(f)$ surjektivan. Iz tvrdnje (a) slijedi da $\operatorname{Im} f$ sadrži $\exp_H(\mathfrak{h})$, dakle, sadrži neku okolinu jedinice grupe H. Kao u dokazu korolara 3.2.8. vidimo da je zbog povezanosti grupe H podgrupa generirana s otvorenom okolinom jedinice u H jednaka čitavoj grupi H. Dakle, $f(G) = \operatorname{Im} f = H$.

(d) Ako je $f|U$ injektivno za neku otvorenu okolinu jedinice e u G, onda je diferencijal $T_e(f)$ preslikavanja f injektivan po teoremu o inverznom preslikavanju. Obratno, pretpostavimo da je $T_e(f)$ injektivan operator. Neka je U otvorena okolina jedinice u H takva da je $\exp_H|U$ injekcija i neka je V otvorena okolina jedinice u G, takva da je $f(V) \subseteq U$ i da je $\exp_G|V$ injekcija. Sada iz (a) slijedi da je $f|V$ injekcija.

Zadatak 3.4.1. *Neka su $f, g : G \to H$ neprekidni homomorfizmi Liejevih grupa takvi da je $T_e(f) = T_e(g)$ i neka je G_0 komponenta povezanosti grupe G koja sadrži jedinicu. Dokažite da je tada $f|G_0 = g|G_0$.*

Uputa: Koristite tvrdnju (a) teorema 3.4.1. i činjenicu da za svaku povezanu okolinu U jedinice u G vrijedi $G_0 = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U^n$.

Teorem 3.4.3. *Neka su G i H Liejeve grupe s Liejevim algebrama $\mathfrak{g}$ i $\mathfrak{h}$, i neka je $\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ homomorfizam Liejevih algebri. Ako je grupa G povezana i jednostavno povezana, postoji jedinstven Liejev homomorfizam $f : G \to H$ takav da je $\varphi = T_e(f)$.*

Ovaj ćemo teorem dokazati pomoću sljedeće posljedice teorema monodromije 3.3.20.; pri tome za proizvoljne topološke grupe G i H **lokalni homomorfizam** iz G u H je neprekidno preslikavanje $f : U \to H$, gdje je U otvorena okolina jedinice e u G i f ima svojstvo da ako su $x, y \in U$ takvi da je $xy \in U$, onda je $f(xy) = f(x)f(y)$.

Lema 3.4.4. *Neka je G povezana i jednostavno povezana Liejeva grupa i neka je f lokalni homomorfizam iz G u Liejevu grupu H. Tada postoji jedinstveno proširenje $F : G \to H$ preslikavanja f koje je Liejev morfizam.*

Dokaz: Jedinstvenost je neposredna posljedica činjenice da je zbog povezanosti grupa G generirana svakom okolinom jedinice e. Neka je U otvorena okolina od e u G koja je domena od f. Možemo pretpostaviti da je okolina U simetrična, tj. da je $U^{-1} = U$. Doista, ako nije tako, možemo zamijeniti U sa $U \cap U^{-1}$, a f sa $f|\left(U \cap U^{-1}\right)$. Nadalje, možemo pretpostaviti da je skup U povezan: ako nije možemo ga zamijeniti s onom njegovom komponentom povezanosti koja sadrži jedinicu e. Neka je

$$D = \{(x, y) \in G \times G;\ yx^{-1} \in U\}.$$

Skup D sadrži dijagonalu $\Delta = \{(x,x);\ x \in G\}$. Zbog neprekidnosti preslikavanja $(x,y) \mapsto yx^{-1}$ sa $G \times G$ u G, jasno je da je skup D otvoren u $G \times G$. Napokon, skup D je i povezan. Doista, neka je $(x,y) \in D$. Tada su $e, yx^{-1} \in U$ pa zbog povezanosti od U postoji put $\gamma : [0,1] \to U$ takav da je $\gamma(0) = e$ i $\gamma(1) = yx^{-1}$. Definiramo sada put $\Gamma : [0,1] \to G \times G$ sa

$$\Gamma(t) = (x, \gamma(t)x), \qquad t \in [0,1].$$

Za svako $t \in [0,1]$ je $\gamma(t)xx^{-1} = \gamma(t) \in U$, dakle, $\Gamma(t) \in D$. Nadalje, $\Gamma(0) = (x,x)$ i $\Gamma(1) = (x,y)$. Kako je grupa G povezana, njena dijagonala Δ je povezana. Dakle, ako su $(x,y), (x',y') \in D$ postoji put Γ^- u D od točke (x,y) do točke (x,x), zatim, postoji put Ω u $\Delta \subseteq D$ od točke (x,x) do točke (x',x'), i, napokon, postoji put Γ' u D od točke (x',x') do točke (x',y'). Slaganjem tih triju puteva dobivamo put u D od točke (x,y) do točke (x',y').

Sada za svaki $x \in G$ stavimo $S_x = H$. Nadalje, za $(x,y) \in D$ definiramo $\varphi_{(x,y)} : H \to H$ sa $\varphi_{(x,y)}(h) = f(yx^{-1})h$, $h \in H$. Provjerimo da familija preslikavanja $(\varphi_{(x,y)})_{(x,y)\in D}$ ima svojstva (a), (b) i (c) iz iskaza teorema monodromije 3.3.20.

(a) Kako je H grupa, svako je preslikavanje $\varphi_{(x,y)}$ injekcija sa H u H (štoviše, bijekcija sa H na H).

(b) $\varphi_{(x,x)}(h) = h = id_H(h)$, tj. $\varphi_{(x,x)} = id_H\ \forall x \in G$.

(c) Neka su $(x,y), (y,z), (x,z) \in D$. Tada su $yx^{-1}, zy^{-1} \in U$ i $(zy^{-1})(yx^{-1}) = zx^{-1} \in U$, pa je $f(zy^{-1})f(yx^{-1}) = f(zx^{-1})$. Dakle, za svaki $h \in H$ imamo redom

$$(\varphi_{(y,z)} \circ \varphi_{(x,y)})(h) = \varphi_{(y,z)}(\varphi_{(x,y)}(h)) = \varphi_{(y,z)}(f(yx^{-1})h) = f(zy^{-1})f(yx^{-1})h = f(zx^{-1})h = \varphi_{(x,z)}(h).$$

Prema teoremu monodromije postoji jedinstveno preslikavanje $F : G \to H$ takvo da je $F(e) = e$ i $F(y) = \varphi_{(x,y)}(F(x))\ \forall (x,y) \in D$. Ovo posljednje znači da vrijedi

$$x, y \in G, \quad yx^{-1} \in U \qquad \Longrightarrow \qquad F(y) = f(yx^{-1})F(x). \tag{3.7}$$

Ako u (3.7) uvrstimo $x = e$, nalazimo da za svaku točku $y \in U$ vrijedi $F(y) = f(y)F(e) = f(y)$. Dakle, $F|U = f$. Dokažimo sada da je $F : G \to H$ homomorfizam grupa. Za $x \in U$ i $y \in G$ imamo $y(xy)^{-1} = x^{-1} \in U$, pa iz (3.7) slijedi

$$F(y) = f\left(y(xy)^{-1}\right) F(xy) = f\left(x^{-1}\right) F(xy),$$

a kako je $f\left(x^{-1}\right) = f(x)^{-1}$, dobivamo

$$F(xy) = f(x)F(y), \qquad x \in U, \quad y \in G.$$

Odatle indukcijom po n nalazimo

$$F(x_1 \cdots x_n) = f(x_1) \cdots f(x_n), \qquad x_1, \ldots, x_n \in U. \tag{3.8}$$

Kako je grupa G povezana, vrijedi $G = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U^n$. Prema tome, ako su $x, y \in G$, postoje $n, m \in \mathbb{N}$ i $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m \in U$ takvi da je $x = x_1 \cdots x_n$ i $y = y_1 \cdots y_m$. Sada pomoću (3.8) nalazimo

$$F(xy) = F(x_1 \cdots x_n y_1 \cdots y_m) = f(x_1) \cdots f(x_n) f(y_1) \cdots f(y_m) =$$

$$= F(x_1 \cdots x_n) F(y_1 \cdots y_m) = F(x)F(y).$$

Time je dokazano da je F homomorfizam grupa. Jedinstvenost slijedi iz (3.8) i iz činjenice da je G unija podskupova U^n, $n \in \mathbb{N}$.

Skica dokaza teorema 3.4.3.: Neka su U i V otvorene okoline nule u $\mathfrak{g}$ i $\mathfrak{h}$ takve da su $\mathcal{U} = \exp_G(U)$ i $\mathcal{V} = \exp_H(V)$ otvorene okoline jedinica u grupama G i H, da su $\exp_G|U : U \to \mathcal{U}$ i $\exp_H|V : V \to \mathcal{V}$ difeomorfizmi i da je $\varphi(U) \subseteq V$. Definiramo sada preslikavanje $f : \mathcal{U} \to H$ sa

$$f(\exp_G X) = \exp_H \varphi(X), \qquad X \in U.$$

Iz svojstava eksponencijalnih preslikavanja može se dokazati da je tada f lokalni homomorfizam, a očito je $T_e(f) = \varphi$. Prema lemi 3.4.4. f se produljuje do homomorfizma sa G u H. Jedinstvenost slijedi iz zadatka 3.4.1.

It teorema 3.4.3 i iz tvrdnje (c) teorema 3.4.1. neposredno slijedi:

Korolar 3.4.5. *Neka je G povezana i jednostavno povezana Liejeva grupa. Tada je $f \mapsto T_e(f)$ izomorfizam sa grupe $Aut(G)$ svih Liejevih automorfizama od G na grupu $Aut(\mathfrak{g})$ svih automorfizama Liejeve algebre $\mathfrak{g}$.*

Dobivene rezultate iskoristit ćemo sada za reprezentacije Liejevih grupa i Liejevih algebri. Pri tome, **reprezentacija Liejeve grupe** G na konačnodimenzionalnom realnom ili kompleksnom prostoru V je neprekidni homomorfizam $\pi : G \to GL(V)$. $GL(V)$ je Liejeva grupa čija se Liejeva algebra identificira sa $\mathfrak{gl}(V)$, a eksponencijalno preslikavanje sa $A \mapsto \mathrm{e}^A$, $A \in \mathfrak{gl}(V)$. Tada je $T_e(\pi) : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ reprezentacija Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ na prostoru V.

Teorem 3.4.6. *Neka je G povezana Liejeva grupa i $\mathfrak{g}$ njena Liejeva algebra. Nadalje, neka su π i ρ reprezentacije Liejeve grupe G na realnim ili kompleksnim konačnodimenzionalnim vektorskim prostorima V i W.*

(a) *Potprostor V_1 od V je $\pi-$invarijantan ako i samo ako je V_1 $T_e(\pi)-$invarijantan.*

(b) *Reprezentacija π je ireducibilna ako i samo ako je reprezentacija $T_e(\pi)$ ireducibilna.*

(c) *Reprezentacija π je potpuno reducibilna ako i samo ako je reprezentacija $T_e(\pi)$ potpuno reducibilna.*

(d) *$Hom_{\mathfrak{g}}(V, W) = Hom_G(V, W)$.*

(e) *Ako je G jednostavno povezana, za svaku konačnodimenzionalnu reprezentaciju σ Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ postoji jedinstvena reprezentacija π Liejeve grupe G na istom prostoru takva da je $T_e(\pi) = \sigma$.*

Zadatak 3.4.2. *Neka je V konačnodimenzionalan realan ili kompleksan vektorski prostor, $A \in L(V)$, W potprostor od V i $v \in V$. Dokažite da je tada*

$$AW \subseteq W \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mathrm{e}^{tA}W \subseteq W \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

i

$$Av = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mathrm{e}^{tA}v = v \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Zadatak 3.4.3. *Dokažite teorem 3.4.6.*

Ako je π reprezentacija Liejeve grupe G na konačnodimenzionalnom realnom ili kompleksnom vektorskom prostoru V, uobičajeno je da se pripadna reprezentacija $T_e(\pi)$ njene Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ također označava sa π. Tada je

$$\pi(X) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\pi(\exp\, tX)\bigg|_{t=0} \quad \text{i} \quad \pi(\exp\, X) = \mathrm{e}^{\pi(X)}, \qquad X \in \mathfrak{g}.$$

Za potprostor W od V stavimo

$$Stab_G(W) = \{x \in G;\ \pi(x)W = W\}, \qquad Stab_{\mathfrak{g}}(W) = \{X \in \mathfrak{g};\ \pi(X)W \subseteq W\}.$$

Nadalje, za $v \in V$ stavimo

$$Fix_G(v) = \{x \in G;\ \pi(x)v = v\}, \qquad Fix_{\mathfrak{g}}(v) = \{X \in \mathfrak{g};\ \pi(X)v = 0\}.$$

Tada su $Stab_G(W)$ i $Fix_G(v)$ zatvorene podgrupe od G i iz zadatka 3.4.2. slijedi da je $Stab_{\mathfrak{g}}(W)$ Liejeva algebra od $Stab_G(W)$ i da je $Fix_{\mathfrak{g}}(v)$ Liejeva algebra od $Fix_G(v)$.

3.5 Grupa automorfizama Liejeve algebre

Neka je $\mathfrak{g}$ realna ili kompleksna Liejeva algebra. Tada je $Aut(\mathfrak{g})$ zatvorena podgrupa Liejeve grupe $GL(\mathfrak{g})$, dakle, $Aut(\mathfrak{g})$ je Liejeva grupa. Uz identifikaciju $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ s Liejevom algebrom od $GL(\mathfrak{g})$, Liejeva algebra od $Aut(\mathfrak{g})$ je

$$\mathfrak{h} = \{A \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{g});\ \mathrm{e}^{tA} \in Aut(\mathfrak{g})\ \forall t \in \mathbb{R}\}.$$

Sada imamo redom

$$A \in \mathfrak{h} \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{e}^{tA}[x,y] = [\mathrm{e}^{tA}x, \mathrm{e}^{tA}y]\ \forall t \in \mathbb{R} \text{ i } \forall x,y \in \mathfrak{g}.$$

Deriviranjem po t u nuli odatle dobivamo

$$A \in \mathfrak{h} \quad \Longrightarrow \quad A[x,y] = [Ax,y] + [x,Ay] \quad \Longrightarrow \quad A \in Der(\mathfrak{g}).$$

Time je dokazano da je $\mathfrak{h} \subseteq Der(\mathfrak{g})$. Obratno, ako je $A \in Der(\mathfrak{g})$, onda indukcijom nalazimo da za svaki $n \in \mathbb{N}$ i za $x,y \in \mathfrak{g}$ vrijedi

$$A^n[x,y] = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} [A^k x, A^{n-k} y].$$

Prema tome,

$$\mathrm{e}^{tA}[x,y] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} A^n[x,y] = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{t^n}{n!} \binom{n}{k} [A^k x, A^{n-k} y] =$$
$$= \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k x, \sum_{n=k}^{\infty} \frac{t^{n-k}}{(n-k)!} A^{n-k} y \right] = \left[\mathrm{e^{tA}x}, \mathrm{e^{tA}y}\right],$$

što pokazuje da je $\mathrm{e^{tA}} \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})\ \forall t \in \mathbb{R}$, odnosno, da je $A \in \mathfrak{h}$. Na taj način dokazali smo:

Propozicija 3.5.1. *Neka je $\mathfrak{g}$ realna ili kompleksna Liejeva algebra. Tada je $Der(\mathfrak{g})$ Liejeva algebra Liejeve grupe $Aut(\mathfrak{g})$.*

Grupa $Int(\mathfrak{g})$ unutarnjih automorfizama Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ generirana je svim automorfizmima oblika $\mathrm{e}^{ad\,x}$, $x \in \mathfrak{g}$. Tada je $Int(\mathfrak{g})$ Liejeva podgrupa Liejeve grupe $Aut(\mathfrak{g})$ i njena je Liejeva algebra $ad\,\mathfrak{g} = \{ad\,x;\ x \in \mathfrak{g}\}$. Budući da je $ad : \mathfrak{g} \to Der(\mathfrak{g})$ homomorfizam Liejevih algebri čija je jezgra

$$Ker\,ad = \{x \in \mathfrak{g};\ [x,y] = 0\ \forall y \in \mathfrak{g}\} = Z(\mathfrak{g})$$

centar Liejeve algebre $\mathfrak{g}$, vidimo da vrijedi:

Propozicija 3.5.2. *Adjungirana reprezentacija $ad : \mathfrak{g} \to Der(\mathfrak{g})$ inducira izomorfizam kvocijentne Liejeve algebre $\mathfrak{g}/Z(\mathfrak{g})$ na Liejevu algebru Liejeve grupe $Int(\mathfrak{g})$.*

Posebno, ako je Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ poluprosta, onda je $Z(\mathfrak{g}) = \{0\}$, odnosno, adjungirana reprezentacija ad je injektivna. Nadalje, u tom je slučaju svaka derivacija unutarnja, dakle, ad je izomorfizam $\mathfrak{g}$ na $Der(\mathfrak{g})$. Odatle i iz korolara 3.2.8. neposredno slijedi:

Propozicija 3.5.3. *Neka je $\mathfrak{g}$ poluprosta realna ili kompleksna Liejeva algebra. Tada je ad izomorfizam Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ na Liejevu algebru Liejeve grupe $Aut(\mathfrak{g})$. Nadalje, grupa $Int(\mathfrak{g})$ unutarnjih automorfizama od $\mathfrak{g}$ je komponenta povezanosti jedinice grupe $Aut(\mathfrak{g})$.*

Poglavlje 4

POLUPROSTE LIEJEVE GRUPE

4.1 Grupa automorfizama kompleksne poluproste Liejeve algebre

U ovom ćemo odjeljku zbog kasnijih primjena detaljno proučiti grupu $Aut(\mathfrak{g})$ automorfizama kompleksne poluproste Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ i neke njene podgrupe.

Podgrupa $Int(\mathfrak{g})$ od $Aut(\mathfrak{g})$ svih unutarnjih automorfizama od $\mathfrak{g}$, tj. grupa generirana svim automorfizmima oblika $\mathrm{e}^{ad\,x}$, $x \in \mathfrak{g}$, je prema propoziciji 3.5.3. komponenta povezanosti jedinice Liejeve grupe $Aut(\mathfrak{g})$.

Neka je $\mathfrak{h}$ Cartanova podalgebra od $\mathfrak{g}$ i $R = R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ pripadni sistem korijena. Podsjetimo se da za $\alpha \in R$ postoji jedinstven element $h_\alpha \in [\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}] \subseteq \mathfrak{h}$ takav da je $\alpha\,(h_\alpha) = 2$. Tada je

$$\check{R} = \{h_\alpha;\ \alpha \in R\}$$

sistem korijena u $\mathfrak{h}$ i to je upravo dualni sistem korijena od R. R i $\check{R}$ razapinju nad $\mathbb{R}$ realne forme $\mathfrak{h}^*(\mathbb{R})$ i $\mathfrak{h}(\mathbb{R})$ kompleksnih prostora $\mathfrak{h}^*$ i $\mathfrak{h}$. Vrijedi

$$\mathfrak{h}(\mathbb{R}) = span_{\mathbb{R}}\,\{h_\alpha;\ \alpha \in R\} = \{h \in \mathfrak{h};\ \alpha(h) \in \mathbb{R}\ \forall \alpha \in R\}, \qquad \mathfrak{h} = \mathfrak{h}(\mathbb{R}) \dot{+} i\mathfrak{h}(\mathbb{R}),$$

$$\mathfrak{h}^*(\mathbb{R}) = span_{\mathbb{R}}\,R = \{\lambda \in \mathfrak{h}^*;\ \lambda(h_\alpha) \in \mathbb{R}\ \forall \alpha \in R\}, \qquad \mathfrak{h}^* = \mathfrak{h}^*(\mathbb{R}) \dot{+} i\mathfrak{h}^*(\mathbb{R}).$$

Restrikcija $\lambda \to \lambda|\mathfrak{h}(\mathbb{R})$, $\lambda \in \mathfrak{h}^*(\mathbb{R})$, je izomorfizam realnog prostora $\mathfrak{h}^*(\mathbb{R})$ na dualni prostor $\mathfrak{h}(\mathbb{R})^*$ realnog prostora $\mathfrak{h}(\mathbb{R})$.

Neka su $W(R)$ i $W(\check{R})$ Weylove grupe sistema korijena R i $\check{R}$. Nadalje, neka su $Aut(R)$ i $Aut(\check{R})$ grupe automorfizama tih sistema korijena:

$$Aut(R) = \{\omega \in GL(\mathfrak{h}^*);\ \omega(R) = R\}, \qquad Aut(\check{R}) = \{\omega \in GL(\mathfrak{h});\ \omega(\check{R}) = \check{R}\}.$$

Tada je $\omega \mapsto \left(\omega^T\right)^{-1} = \left(\omega^{-1}\right)^T$ izomorfizam grupe $Aut(\check{R})$ na grupu $Aut(R)$; pri tome je A^T oznaka za dualan operator operatora $A : \mathfrak{h} \to \mathfrak{h}$, tj. $(A^T\lambda)(h) = \lambda(Ah)$ za $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ i $h \in \mathfrak{h}$. Taj izomorfizam prevodi podgrupu $W(\check{R})$ grupe $Aut(\check{R})$ na podgrupu $W(R)$ grupe $Aut(R)$. Mi ćemo taj izomorfizam upotrebljavati kao identifikaciju grupa $Aut(R)$ i $Aut(\check{R})$, a time i kao identifikaciju grupa $W(R)$ i $W(\check{R})$. Dakle, grupu $W(R)$ ćemo shvaćati kao podgrupu od $GL(\mathfrak{h}^*)$ generiranu refleksijama σ_α, $\alpha \in R$, prostora $\mathfrak{h}^*$, gdje je

$$\sigma_\alpha\lambda = \lambda - \lambda(h_\alpha)\alpha, \qquad \lambda \in \mathfrak{h}^*,\ \alpha \in R,$$

a ujedno i kao podgrupu od $GL(\mathfrak{h})$ generiranu refleksijama σ_α, $\alpha \in R$, gdje je

$$\sigma_\alpha h = h - \alpha(h)h_\alpha, \qquad h \in \mathfrak{h},\ \alpha \in R.$$

Uz opisanu identifikaciju $W(R)$ i $W(\check{R})$ imamo

$$(\sigma\lambda)(\sigma h) = \lambda(h), \qquad \lambda \in \mathfrak{h}^*, \quad h \in \mathfrak{h}, \quad \sigma \in W(R).$$

Budući da je σ_α^2 identiteta, imamo i

$$(\sigma_\alpha\lambda)(h) = \lambda(\sigma_\alpha h), \qquad \lambda \in \mathfrak{h}^*, \quad h \in \mathfrak{h}, \quad \alpha \in R.$$

Za Cartanovu podalgebru $\mathfrak{h}$ sa $Aut(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ ćemo označavati podgrupu od $Aut(\mathfrak{g})$ svih automorfizama koji ostavljaju $\mathfrak{h}$ invarijantnom:

$$Aut(\mathfrak{g},\mathfrak{h}) = \{\vartheta \in Aut(\mathfrak{g});\ \vartheta(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}\}.$$

Kao i obično sa $Aut(R)$ označavamo grupu automorfizama sistema korijena R :

$$Aut(R) = \{\omega \in GL(\mathfrak{h}^*);\ \omega(R) = R\}.$$

Naravno, $Aut(R)$ je konačna grupa koja sadrži Weylovu grupu $W(R)$.

Zadatak 4.1.1. *Neka je $\vartheta \in Aut(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$. Dokažite da vrijedi:*

(*a*) $(\vartheta|\mathfrak{h})^T(R) = R$.

(*b*) $\vartheta(\mathfrak{g}_\alpha) = \mathfrak{g}_{(\vartheta|\mathfrak{h})^T\alpha}$ *za svaki* $\alpha \in R$.

(*c*) $\vartheta(\mathfrak{h}(\mathbb{R})) = \mathfrak{h}(\mathbb{R})$.

(*d*) *Preslikavanje* $\Phi : \vartheta \mapsto \left((\vartheta|\mathfrak{h})^{-1}\right)^T = \left((\vartheta|\mathfrak{h})^T\right)^{-1}$ *je homomorfizam grupe* $Aut(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ *u grupu* $Aut(R)$.

Napomenimo da u skladu s identifikacijom grupa $Aut(\check{R})$ i $Aut(R)$ preslikavanje Φ iz tvrdnje (d) zadatka 4.1.1. postaje $\vartheta \mapsto \vartheta|\mathfrak{h}$.

Neka je B baza sistema korijena R. Definiramo sada podgrupu od $Aut(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$:

$$Aut(\mathfrak{g},\mathfrak{h},B) = \{\vartheta \in Aut(\mathfrak{g},\mathfrak{h});\ (\vartheta|\mathfrak{h})^T(B) = B\}.$$

Nadalje, definiramo podgrupu od $Aut(R)$:

$$Aut(R,B) = \{\omega \in Aut(R);\ \omega(B) = B\}.$$

Teorem 4.1.1. (*a*) *Preslikavanje* Φ *iz* (d) *u zadatku 4.1.1 je epimorfizam grupe* $Aut(\mathfrak{g},\mathfrak{h},B)$ *na grupu* $Aut(R,B)$.

(*b*) *Postoji monomorfizam* $\Psi : Aut(R,B) \to Aut(\mathfrak{g},\mathfrak{h},B)$ *takav da je* $\Phi\Psi = id_{Aut(R,B)}$.

(*c*) $\operatorname{Ker}\Phi = \exp(ad\,\mathfrak{h}) = \left\{e^{ad\,h};\ h \in \mathfrak{h}\right\}$.

(*d*) *Ako je* Ψ *monomorfizam iz* (d), *onda je* $Aut(\mathfrak{g},\mathfrak{h},B) = \exp(ad\,\mathfrak{h}) \rtimes \Psi(Aut(R,B))$.

Napomenimo da za grupu G i njene podgrupe A i B pišemo $G = A \rtimes B$ ili $G = B \ltimes A$ ako je A normalna podgrupa od G i ako za svaki $g \in G$ postoje jedinstveni $a \in A$ i $b \in B$ takvi da je $g = ab$; ovo posljednje znači da je $G = AB = \{ab;\ a \in A,\ b \in B\}$ i $A \cap B = \{e_G\}$. Ako su A i

B grupe i ako je zadan homomorfizam $b \mapsto \varphi_b$ grupe B u grupu $Aut(A)$ automorfizama grupe A, tada možemo na Kartezijevom produktu skupova $G = A \times B$ definirati strukturu grupe ovako:

$$(a, b)(a', b') = (a\varphi_b(a'), bb'), \qquad (a, b), (a', b') \in A \times B.$$

U tom slučaju je $a \mapsto (a, e_B)$ izomorfizam grupe A na podgrupu $A \times \{e_B\}$ grupe G i $b \mapsto (e_A, b)$ je izomorfizam grupe B na podgrupu $\{e_A\} \times B$ grupe G i ako te izomorfizme upotrijebimo kao identifikacije onda je $G = A \rtimes B$.

Dokaz: (a) i (b) Očito je $\Phi(Aut(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, B)) \subseteq Aut(R, B)$. Izaberimo neki sistem generatora $\{h_i, e_i, f_i;\ i = 1, \dots, \ell\}$ od $\mathfrak{g}$ pridružen bazi $B = \{\alpha_1, \dots, \alpha_\ell\}$. Dakle,

$$e_i \in \mathfrak{g}_{\alpha_i}, \quad f_i \in \mathfrak{g}_{-\alpha_i}, \quad h_i = [e_i, f_i], \quad \alpha_i(h_i) = 2.$$

Svaki $\omega \in Aut(R, B)$ određuje permutaciju $s \in \mathcal{S}_\ell$ skupa $\{1, \dots, \ell\} : \omega(\alpha_i) = \alpha_{s(i)}$. Prema teoremu 1.3.28. postoji jedinstven $\Psi(\omega) \in Aut(\mathfrak{g})$ takav da je

$$\Psi(\omega)(e_i) = e_{s(i)}, \quad \Psi(\omega)(f_i) = f_{s(i)}, \quad \Psi(\omega)(h_i) = h_{s(i)}, \qquad i = 1, \dots, \ell.$$

Tada je očito $\Psi(\omega) \in Aut(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, B)$. Nadalje, $\Psi : Aut(R, B) \to Aut(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, B)$ je homomorfizam grupa. Doista, neka su $\omega, \omega' \in Aut(R, B)$ i neka su $s, s' \in \mathcal{S}_\ell$ pripadne permutacije, tj. $\omega(\alpha_i) = \alpha_{s(i)}$ i $\omega'(\alpha_i) = \alpha_{s'(i)}$, $i = 1, \dots, \ell$. Tada imamo

$$(\omega \circ \omega')(\alpha_i) = \omega(\omega'(\alpha_i)) = \omega(\alpha_{s'(i)}) = \alpha_{s(s'(i))} = \alpha_{(s \circ s')(i)}.$$

Dakle,

$$\Psi(\omega \circ \omega')(e_i) = e_{(s\circ s')(i)} = e_{s(s'(i))} = \Psi(\omega)(e_{s'(i)}) = \Psi(\omega)(\Psi(\omega')(e_i)) = (\Psi(\omega) \circ \Psi(\omega'))(e_i)$$

i, analogno, $\Psi(\omega \circ \omega')(f_i) = (\Psi(\omega) \circ \Psi(\omega'))(f_i)$. Budući da skup $\{e_1, \dots, e_\ell, f_1, \dots, f_\ell\}$ generira Liejevu algebru $\mathfrak{g}$, zaključujemo da je $\Psi(\omega \circ \omega') = \Psi(\omega) \circ \Psi(\omega')\ \forall \omega, \omega' \in Aut(R, B)$, odnosno, Ψ je doista homomorfizam grupe $Aut(R, B)$ u grupu $Aut(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, B)$.

Neka je $s \in \mathcal{S}_\ell$ permutacija pridružena automorfizmu $\omega \in Aut(R, B)$. Budući da je ω automorfizam sistema korijena, vrijedi $(\omega(\alpha))(h_{\omega(\beta)}) = \alpha(h_\beta)\ \forall \alpha, \beta \in R$. Posebno, za $\alpha = \alpha_i$ i $\beta = \alpha_j$, $i, j \in \{1, \dots, \ell\}$, imamo $\omega(\alpha_i) = \alpha_{s(i)}$ i $\omega(\alpha_j) = \alpha_{s(j)}$. Prema tome, vrijedi

$$\alpha_{s(i)}(h_{s(j)}) = \alpha_i(h_j), \quad \text{dakle i} \quad \alpha_i(h_{s^{-1}(j)}) = \alpha_{s(i)}(h_j), \qquad 1 \le i, j \le \ell.$$

Stoga dobivamo redom

$$(\Phi(\Psi(\omega))(\alpha_i))(h_j) = \left(\left((\Psi(\omega)|\mathfrak{h})^{-1}\right)^T (\alpha_i)\right)(h_j) = \alpha_i\left(\Psi(\omega)^{-1}(h_j)\right) =$$

$$= \alpha_i(h_{s^{-1}(j)}) = \alpha_{s(i)}(h_j) = (\omega(\alpha_i))(h_j).$$

Budući da su $\{h_1, \dots, h_\ell\}$ i $\{\alpha_1, \dots, \alpha_\ell\}$ baze prostora $\mathfrak{h}$ i $\mathfrak{h}^*$, odatle slijedi da je $\Phi(\Psi(\omega)) = \omega$. Dakle, $\Phi\Psi = id_{Aut(R,B)}$. Odatle slijedi i injektivnost homomorfizma Ψ.

(c) Budući da je $\mathfrak{h}$ komutativna Liejeva algebra, $\exp(ad\,\mathfrak{h})$ je podgrupa od $Int(\mathfrak{g})$ i restrikcija svakog njenog elementa na $\mathfrak{h}$ je identiteta. Prema tome, vrijedi $\exp(ad\,\mathfrak{h}) \subseteq \mathrm{Ker}\,\Phi$. Neka je $\vartheta \in \mathrm{Ker}\,\Phi$, tj. $\vartheta \in Aut(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, B)$ i $\vartheta|\mathfrak{h} = I_\mathfrak{h}$. Tada vrijedi $\vartheta(\mathfrak{g}_\alpha) = \mathfrak{g}_\alpha$ za svaki $\alpha \in R$. Prema tome, postoje $c_1, \dots, c_\ell, d_1, \dots, d_\ell \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ takvi da je

$$\vartheta(e_i) = c_i e_i, \quad \vartheta(f_i) = d_i f_i, \quad \vartheta(h_i) = h_i, \qquad i = 1, \dots, \ell.$$

Iz $[e_i, f_i] = h_i$ slijedi da je $d_i = c_i^{-1}$, $i = 1, \ldots, \ell$. Izaberimo $h \in \mathfrak{h}$ tako da za neke vrijednosti logaritama od c_i bude $\alpha_i(h) = \log\, c_i$, $i = 1, \ldots, \ell$. Tada je

$$(ad\, h)e_i = (\log\, c_i)e_i \qquad \text{i} \qquad (ad\, h)f_i = -(\log\, c_i)f_i,$$

dakle

$$\mathrm{e}^{ad\, h}e_i = \mathrm{e}^{\log\, c_i}e_i = c_ie_i = \vartheta(e_i) \quad \text{i} \quad \mathrm{e}^{ad\, h}f_i = \mathrm{e}^{-\log\, c_i}f_i = c_i^{-1}f_i = d_if_i = \vartheta(f_i).$$

To znači da se automorfizmi ϑ i $\mathrm{e}^{ad\, h}$ podudaraju na generatorima e_i, f_i, $i = 1, \ldots, \ell$, pa se podudaraju svuda na $\mathfrak{g}$, odnosno, $\vartheta = \mathrm{e}^{ad\, h} \in \exp(ad\, \mathfrak{h})$.

Tvrdnja (d) slijedi iz tvrdnji (b) i (c) zbog sljedeće jednostavne činjenice iz teorije grupa:

Zadatak 4.1.2. *Neka su $\Phi : G \to H$ i $\Psi : H \to G$ homomorfizmi grupa takvi da je $\Phi\Psi = id_H$. Dokažite da je tada $G = \operatorname{Ker}\Phi \rtimes \operatorname{Im}\Psi$.*

Uočimo sada da uz fiksirane $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$ i B monomorfizam $\Psi : Aut(R, B) \to Aut(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, B)$ iz tvrdnje (b) teorema 4.1.1. nije jedinstveno određen. Za izabranu bazu $B = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell\}$ sistema korijena R u dokazu tvrdnje (b) monomorfizam Ψ bio je zadan nakon što smo izabrali kanonske generatore $\{e_i, h_i, f_i;\ 1 \leq i \leq \ell\}$ Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ pridružene bazi B; no ti kanonski generatori nisu jedinstveno određeni sa B.

Definiramo sada podgrupu

$$Int(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) = Int(\mathfrak{g}) \cap Aut(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) = \{\varphi \in Int(\mathfrak{g});\ \varphi(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}\}.$$

Teorem 4.1.2. (a) *Za svaki $\varphi \in Int(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ vrijedi $\varphi|\mathfrak{h} \in W(R)$.*

(b) *Preslikavanje $\varphi \mapsto \varphi|\mathfrak{h}$ je epimorfizam grupe $Int(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ na Weylovu grupu $W(R)$.*

(c) *Jezgra epimorfizma iz (b) je $\exp(ad\, \mathfrak{h})$. Posebno, $W(R) \simeq Int(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})/\exp(ad\, \mathfrak{h})$.*

(d) *Grupa $\exp(ad\, \mathfrak{h})$ je komponenta povezanosti jedinice grupe $Int(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$.*

Dokaz: Za dokaz tvrdnje (a) trebamo se prije svega podsjetiti pojma Engelovih podalgebri i njihove veze s Cartanovim podalgebrama.

Za kompleksan konačnodimenzionalan vektorski prostor V, linearan operator $A : V \to V$ i $\lambda \in \mathbb{C}$ sa $V_\lambda(A)$ ćemo označavati pripadni svojstveni potprostor operatora A,

$$V_\lambda(A) = \operatorname{Ker}(A - \lambda I) = \{v \in V;\ Av = \lambda v\},$$

a sa $V_{(\lambda)}(A)$ pripadni korijenski potprostor

$$V_{(\lambda)}(A) = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \operatorname{Ker}\left((A - \lambda I)^k\right) = \{v \in V;\ (A - \lambda I)^k v = 0 \text{ za neki } k \in \mathbb{N}\}.$$

Općenito je tada prostor V direktna suma korijenskih potprostora $V_{(\lambda)}(A)$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Naravno, $V_\lambda(A) \subseteq V_{(\lambda)}(A)$ za svaki $\lambda \in \mathbb{C}$. Nadalje, $V_{(\lambda)}(A) \neq \{0\}$ ako i samo ako je $\lambda \in Sp(A)$. Operator A je poluprost ako i samo ako je $V_{(\lambda)}(A) = V_\lambda(A)\ \forall \lambda \in Sp(A)$.

Zadatak 4.1.3. *Dokažite da vrijedi*

$$V_{(0)}(A) \subseteq V_{(1)}\left(\mathrm{e}^A\right). \tag{4.1}$$

Podalgebra $\mathfrak{l}$ Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ zove se **Engelova podalgebra** postoji $x \in \mathfrak{g}$ takav da je $\mathfrak{l} = \mathfrak{g}_{(0)}(ad\, x)$. Prema teoremu 4.2.4. u "PLA" Cartanove podalgebre su upravo minimalne Engelove podalgebre. Posebno, za našu kompleksnu poluprostu Liejevu algebru $\mathfrak{g}$ ranga $\mathfrak{l} = \dim \mathfrak{h}$ zaključujemo da vrijedi

$$\dim \mathfrak{g}_{(0)}(ad\, x) \geq \ell \qquad \forall x \in \mathfrak{g}. \tag{4.2}$$

Dokazat ćemo sada da vrijedi

$$\dim \mathfrak{g}_{(1)}(\varphi) \geq \ell \qquad \forall \varphi \in Int(\mathfrak{g}). \tag{4.3}$$

Prije svega, neka su U okolina jedinice u Liejevoj grupi $Int(\mathfrak{g})$ i V okolina nule u Liejevoj algebri $\mathfrak{g}$ takve da je $x \mapsto \mathrm{e}^{ad\, x}$ bijekcija sa V na U. Za $\varphi \in U$ tada imamo $\varphi = \mathrm{e}^{ad\, x}$ za neki $x \in V$, pa iz (4.1) i (4.2) slijedi

$$\dim \mathfrak{g}_{(1)}(\varphi) \geq \dim \mathfrak{g}_{(0)}(ad\, x) \geq \mathfrak{l}.$$

Prema tome, nejednakost (4.3) vrijedi za svaki $\varphi \in U$.

Uočimo sada da su koeficijenti svojstvenog polinoma $P_\varphi(\lambda) = \det(\lambda I - \varphi)$, $\varphi \in Int(\mathfrak{g})$, kao restrikcije polinomijalnih funkcija na $L(\mathfrak{g})$, analitičke funkcije na Liejevoj grupi $Int(\mathfrak{g})$. Prema tome, možemo pisati

$$P_\varphi(\lambda) = \sum_{k=0}^{n} (\lambda - 1)^k f_k(\varphi) \qquad (n = \dim \mathfrak{g}),$$

pri čemu su $f_0, \ldots, f_n$ analitičke funkcije na $Int(\mathfrak{g})$. Primijetimo sada da je $\dim \mathfrak{g}_{(1)}(\varphi)$ kratnost od 1 kao nultočke polinoma P_φ, tj.

$$\dim \mathfrak{g}_{(1)}(\varphi) = \min \{k;\ f_k(\varphi) \neq 0\}.$$

Prema dokazanom vrijedi

$$f_0(\varphi) = \cdots = f_{\ell-1}(\varphi) = 0 \qquad \forall \varphi \in U.$$

Kako su $f_0, \ldots, f_{\ell-1}$ analitičke funkcije na povezanoj grupi $Int(\mathfrak{g})$, slijedi da su te funkcije identički jednake nuli na cijeloj grupi $Int(\mathfrak{g})$. Odatle slijedi (4.3).

Ako je $\varphi \in Aut(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$, onda restrikcija $\varphi|\mathfrak{h}(\mathbb{R})$ permutira Weylove komore u $\mathfrak{h}(\mathbb{R})$. Dokazat ćemo sada tvrdnju:

(A) *Ako je $\varphi \in Int(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ takav da restrikcija $\varphi|\mathfrak{h}(\mathbb{R})$ fiksira neku Weylovu komoru C u $\mathfrak{h}(\mathbb{R})$, onda je $\varphi|\mathfrak{h}$ identiteta.*

Neka je R_+ skup pozitivnih korijena u odnosu na Weylovu komoru C :

$$R_+ = \{\alpha \in R;\ \alpha(h) > 0 \text{ za } h \in C\}.$$

Nadalje, neka je σ permutacija od R pridružena automorfizmu $\varphi|\mathfrak{h} \in Aut(R)$, tj.

$$\varphi\,(h_\alpha) = h_{\sigma\alpha}, \qquad \alpha \in R.$$

Tada je, naravno,

$$\varphi\,(\mathfrak{g}_\alpha) = \mathfrak{g}_{\sigma\alpha}, \qquad \alpha \in R.$$

Nadalje, iz $\varphi(C) = C$ slijedi $\sigma(R_+) = R_+$. Označimo sada sa G cikličku podgrupu grupe permutacija $\mathcal{S}(R)$ od R generiranu permutacijom σ. Neka je Ω skup svih $G-$orbita u R. Za $\mathcal{O} \in \Omega$ stavimo

$$\mathfrak{g}_{\mathcal{O}} = \sum_{\alpha \in \mathcal{O}} \dot{+}\, \mathfrak{g}_\alpha \qquad \text{i} \qquad \alpha_{\mathcal{O}} = \sum_{\alpha \in \mathcal{O}} \alpha.$$

Tada je

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \dotplus \sum_{\mathcal{O}\in\Omega} \dotplus \mathfrak{g}_{\mathcal{O}}. \tag{4.4}$$

Nadalje, iz $\sigma(R_+) = R_+$ slijedi da je svaka $G-$orbita $\mathcal{O} \in \Omega$ sadržana ili u R_+ ili u $R_- = -R_+$. To ima za posljedicu da je $\alpha_{\mathcal{O}} \neq 0\ \forall \mathcal{O} \in \Omega$.

Ako je $\mathcal{O} \in \Omega$ i $|\mathcal{O}| = q$, onda za $\alpha \in \mathcal{O}$ vrijedi $\mathcal{O} = \{\alpha, \sigma\alpha, \cdots, \sigma^{q-1}\alpha\}$ i $\sigma^q\alpha = \alpha$. Dakle,

$$\mathfrak{g}_{\mathcal{O}} = \mathfrak{g}_\alpha \dotplus \mathfrak{g}_{\sigma\alpha} \dotplus \cdots \dotplus \mathfrak{g}_{\sigma^{q-1}\alpha}.$$

Nadalje, $\varphi|\mathfrak{g}_{\sigma^j\alpha}$ je izomorfizam $\mathfrak{g}_{\sigma^j\alpha}$ na $\mathfrak{g}_{\sigma^{j+1}\alpha}$ za $j = 0, \ldots, q-2$, a $\varphi|\mathfrak{g}_{\sigma^{q-1}\alpha}$ je izomorfizam $\mathfrak{g}_{\sigma^{q-1}\alpha}$ na $\mathfrak{g}_\alpha$. Prema tome, ako je $x \in \mathfrak{g}_\alpha \setminus \{0\}$, onda je $\{x, \varphi(x), \ldots, \varphi^{q-1}(x)\}$ je baza vektorskog prostora $\mathfrak{g}_{\mathcal{O}}$. Vektor x je svojstven vektor operatora φ^q. Označimo pripadnu svojstvenu vrijednost sa $(-1)^q\mu_{\mathcal{O}}$. Tada je

$$\varphi(x) = \varphi(x),\ \varphi(\varphi(x) = \varphi^2(x),\ \cdots,\ \varphi(\varphi^{q-2}(x)) = \varphi^{q-1}(x),\ \varphi(\varphi^{q-1}(x)) = (-1)^q\mu_{\mathcal{O}}x.$$

Prema tome, matrica operatora $\varphi|\mathfrak{g}_{\mathcal{O}}$ u bazi $\{x, \varphi(x), \ldots, \varphi^{q-1}(x)\}$ je

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & (-1)^q\mu_{\mathcal{O}} \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Prema tome, svojstveni polinom restrikcije $\varphi|\mathfrak{g}_{\mathcal{O}}$ je

$$P_{\varphi|\mathfrak{g}_{\mathcal{O}}}(\lambda) = \det(\lambda I_{\mathfrak{g}_{\mathcal{O}}} - \varphi|\mathfrak{g}_{\mathcal{O}}) = \lambda^q - \mu_{\mathcal{O}}.$$

Neka je sada $h \in \mathfrak{h}$ i $\overline{\varphi} = \varphi e^{ad\,h}$. Tada je $\overline{\varphi} \in Int(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ i $\overline{\varphi}|\mathfrak{h}(\mathbb{R}) = \varphi|\mathfrak{h}(\mathbb{R})$. Budući da za $\beta \in R$ i $y \in \mathfrak{g}_\beta$ vrijedi $(ad\,h)y = \beta(h)y$, dobivamo

$$e^{ad\,h}y = e^{\beta(h)}y, \qquad \beta \in R, \quad y \in \mathfrak{g}_\beta.$$

Prema tome,

$$e^{ad\,h}\varphi^j(x) = e^{(\sigma^j\alpha)(h)}\varphi^j(x) \qquad \text{za} \quad j = 0, \ldots, q-1.$$

Dakle,

$$\overline{\varphi}\left(\varphi^j(x)\right) = e^{(\sigma^j\alpha)(h)}\varphi^{j+1}(x) \quad \text{za} \quad j = 0, \ldots, q-2 \quad \text{i} \quad \overline{\varphi}\left(\varphi^{q-1}(x)\right) = e^{(\sigma^{q-1}\alpha)(h)}(-1)^q\mu_{\mathcal{O}},$$

pa slijedi da restrikcija $\overline{\varphi}|\mathfrak{g}_{\mathcal{O}}$ ima matricu

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & (-1)^q e^{(\sigma^{q-1}\alpha)(h)}\mu_{\mathcal{O}} \\ e^{\alpha(h)} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & e^{(\sigma\alpha)(h)} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & e^{(\sigma^{q-2}\alpha)(h)} & 0 \end{bmatrix}.$$

Kako je $\alpha + \sigma\alpha + \cdots + \sigma^{q-1}\alpha = \alpha_{\mathcal{O}}$, zaljučujemo da je svojstveni polinom restrikcije $\overline{\varphi}|\mathfrak{g}_{\mathcal{O}}$ jednak

$$P_{\overline{\varphi}|\mathfrak{g}_{\mathcal{O}}}(\lambda) = \lambda^q - e^{\alpha_{\mathcal{O}}(h)}\mu_{\mathcal{O}}.$$

Budući da je $\alpha_{\mathcal{O}} \neq 0 \ \forall \mathcal{O} \in \Omega$, možemo izabrati $h \in \mathfrak{h}$ tako da bude $e^{\alpha_{\mathcal{O}}(h)}\mu_{\mathcal{O}} \neq 1 \ \forall \mathcal{O} \in \Omega$. No tada je $1 \notin Sp\,(\overline{\varphi}|\mathfrak{g}_{\mathcal{O}}) \ \forall \mathcal{O} \in \Omega$, a odatle

$$(\mathfrak{g}_{\mathcal{O}})_{(1)}\,(\overline{\varphi}|\mathfrak{g}_{\mathcal{O}}) = \{0\} \qquad \forall \mathcal{O} \in \Omega.$$

Budući da je rastav (4.4) invarijantan s obzirom na $\overline{\varphi}$, slijedi

$$\mathfrak{g}_{(1)}\,(\overline{\varphi}) = \mathfrak{h}_{(1)}\,(\overline{\varphi}|\mathfrak{h}) \dotplus \sum_{\mathcal{O}\in\Omega} \dotplus \ (\mathfrak{g}_{\mathcal{O}})_{(1)}\,(\overline{\varphi}|\mathfrak{g}_{\mathcal{O}}) = \mathfrak{h}_{(1)}\,(\overline{\varphi}|\mathfrak{h}) \subseteq \mathfrak{h}.$$

S druge strane, prema (4.3) vrijedi nejednakost $\dim \mathfrak{g}_{(1)}\,(\overline{\varphi}) \geq \ell = \dim \mathfrak{h}$, pa slijedi $\mathfrak{g}_{(1)}\,(\overline{\varphi}) = \mathfrak{h}$. Posebno, $Sp\,(\overline{\varphi}) = \{1\}$. Međutim, operator $\overline{\varphi}|\mathfrak{h}$ je poluprost. Naime, znamo da postoji skalarni produkt na realnoj formi $\mathfrak{h}(\mathbb{R})$ od $\mathfrak{h}$ u odnosu na koji su svi operatori iz $Aut(R)$ ortogonalni, dakle, poluprosti. Kako je $\overline{\varphi}|\mathfrak{h} \in Aut(R)$, operator $\overline{\varphi}|\mathfrak{h}(\mathbb{R})$ je poluprost, pa slijedi da je i njegova kompleksifikacija $\overline{\varphi}|\mathfrak{h}$ poluprost operator. To znači da je $\mathfrak{h}_1\,(\overline{\varphi}|\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}_{(1)}\,(\overline{\varphi}|\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$, pa zaključujemo da je $\varphi|\mathfrak{h} = \overline{\varphi}|\mathfrak{h} = I_{\mathfrak{h}}$.

Time je tvrdnja (A) u potpunosti dokazana.

Za proizvoljan $\varphi \in Int(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ i Weylovu komoru C u $\mathfrak{h}(\mathbb{R})$ je i $\varphi(C)$ Weylova komora u $\mathfrak{h}(\mathbb{R})$. Prema tvrdnji (d) teorema 1.3.14. postoji $\sigma \in W(R)$ takav da je $\varphi(C) = w(C)$. Iz zadatka 1.3.7. (ili iz zadatka 1.3.8.) slijedi da za svaki $\alpha \in R$ postoji $\omega_\alpha \in Int(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ takav da je $\omega_\alpha|\mathfrak{h} = \sigma_\alpha$. Kako je grupa $W(R)$ generirana refleksijama σ_α, $\alpha \in R$, slijedi da postoji $\psi \in Int(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ takav da je $\psi|\mathfrak{h} = \sigma$. Tada je $\varphi(C) = \psi(C)$, odnosno, $(\psi^{-1}\varphi)\,(C) = C$. No sada iz dokazane tvrdnje (A) slijedi $\psi^{-1}\varphi|\mathfrak{h} = I_{\mathfrak{h}}$, dakle, $\varphi|\mathfrak{h} = \psi|\mathfrak{h} = \sigma \in W(R)$.

(b) Prema tvrdnji (a) $\varphi|\mathfrak{h} \in W(R) \ \forall \varphi \in Int(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$. Nadalje, prema razmatranju u posljednjem odlomku dokaza tvrdnje (a) zaključujemo da je homomorfizam $\varphi \mapsto \varphi|\mathfrak{h}$ grupe $Int(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ u grupu $W(R)$ surjektivan.

(c) Neka je G jezgra epimorfizma iz (b), tj.

$$G = \{\varphi \in Int(\mathfrak{g}, \mathfrak{h});\ \varphi|\mathfrak{h} = I_{\mathfrak{h}}\}.$$

Očito je $\exp(ad\,\mathfrak{h}) \subseteq G$. S druge strane vrijedi $G \subseteq Aut(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, B)$ pa iz tvrdnje (c) teorema 4.1.1. slijedi obrnuta inkluzija $G \subseteq \exp(ad\,\mathfrak{h})$.

(d) Normalna podgrupa $\exp(ad\,\mathfrak{h})$ grupe $Int(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ je povezana. Nadalje, kako je kvocijentna grupa $Int(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})/\exp(ad\,\mathfrak{h})$ prema (c) konačna, $\exp(ad\,\mathfrak{h})$ je otvorena podgrupa grupe $Int(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$. Odatle slijedi tvrdnja.

Teorem 4.1.3. *Ako je* $\Psi : Aut(R, B) \to Aut(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, B)$ *monomorfizam iz tvrdnje* (b) *teorema 4.1.1., onda je* $Aut(\mathfrak{g}) = Int(\mathfrak{g}) \rtimes \Psi(Aut(R, B))$.

Dokaz: Neka je $\vartheta \in Aut(\mathfrak{g})$. Tada je $\vartheta(\mathfrak{h})$ Cartanova podalgebra od $\mathfrak{g}$, pa prema teoremu 1.3.27, postoji $\psi \in Int(\mathfrak{g})$ takav da je $\psi(\vartheta(\mathfrak{h})) = \mathfrak{h}$. Tada je $\psi\vartheta \in Aut(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$. Budući da je $(\psi\vartheta)(\check{R}) = \check{R}$, vrijedi $(\psi\vartheta)(\mathfrak{h}(\mathbb{R})) = \mathfrak{h}(\mathbb{R})$ i restrikcija $(\psi\vartheta)|\mathfrak{h}(\mathbb{R})$ permutira Weylove komore sistema korijena $\check{R}$ u prostoru $\mathfrak{h}(\mathbb{R})$. Neka je C Weylova komora u $\mathfrak{h}(\mathbb{R})$ pridružena bazi

$$\{h_\alpha;\ \alpha \in B\} = \{h_1, \ldots, h_\ell\}$$

sistema korijena $\check{R}$. Tada je i $(\psi\vartheta)(C)$ Weylova komora u $\mathfrak{h}(\mathbb{R})$. Uz spomenutu identifikaciju $W(\check{R}) = W(R)$ prema tvrdnji (d) teorema 1.3.14. postoji $w \in W(R)$ takav da je $w((\psi\vartheta)(C)) = C$. Prema tvrdnji (b) teorema 4.1.2. postoji $\varphi \in Int(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ takav da je $\varphi|\mathfrak{h} = w$. Sada je $\varphi\psi\vartheta \in Aut(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ i vrijedi $(\varphi\psi\vartheta)(C) = C$. Odatle slijedi da je $\vartheta_0 = \varphi\psi\vartheta \in Aut(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, B)$. Kako je $\vartheta = (\varphi\psi)^{-1}\vartheta_0$, time je dokazano da je $Aut(\mathfrak{g}) = Int(\mathfrak{g})Aut(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, B)$. Budući da je očito $\exp(ad\,\mathfrak{h}) \subseteq Int(\mathfrak{g})$, iz tvrdnje (d) teorema 4.1.1. slijedi rastav $Aut(\mathfrak{g}) = Int(\mathfrak{g})\Psi(Aut(R, B))$. Napokon, $Int(\mathfrak{g})$ je normalna podgrupa grupe $Aut(\mathfrak{g})$, pa treba još samo dokazati da je $Int(\mathfrak{g}) \cap \Psi(Aut(R, B)) = \{I_{\mathfrak{g}}\}$.

Iz $\Psi(Aut(R,B)) \subseteq Aut(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ slijedi

$$Int(\mathfrak{g}) \cap \Psi(Aut(R,B)) \subseteq Int(\mathfrak{g}) \cap Aut(\mathfrak{g},\mathfrak{h}) = Int(\mathfrak{g},\mathfrak{h}).$$

Stoga je

$$Int(\mathfrak{g}) \cap \Psi(Aut(R,B)) \subseteq Int(\mathfrak{g},\mathfrak{h}) \cap \Psi(Aut(R,B)).$$

Napokon, ako je $\omega \in Aut(R,B)$ takav da je $\Psi(\omega) \in Int(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$, tada je prema tvrdnji (a) teorema 4.1.2. $\Psi(\omega)|\mathfrak{h} \in W(R)$. Međutim, $\Psi(\omega)|\mathfrak{h} = \Phi(\Psi(\omega)) = \omega$. Weylova grupa djeluje prosto tranzitivno na skupu svih baza sistema korijena, a budući da je $\omega(B) = B$, slijedi da je ω identiteta. Tada je i $\Psi(\omega)$ identiteta $I_\mathfrak{g}$ i time je dokazano da je $Int(\mathfrak{g}) \cap \Psi(Aut(R,B)) = \{I_\mathfrak{g}\}$.

Neposredna posljedica teorema 4.1.3. je

Korolar 4.1.4. *Vrijedi* $Aut(\mathfrak{g})/Int(\mathfrak{g}) \simeq Aut(R,B)$.

Drugim riječima, kvocijentna grupa $Aut(\mathfrak{g})/Int(\mathfrak{g})$ izomorfna je grupi simetrija Dynkinovog dijagrama za $\mathfrak{g}$. Za proste Liejeve algebre tipa A_1, B_ℓ, C_ℓ, G_2, F_4, E_7 i E_8 ta je grupa trivijalna. Za A_ℓ, $\ell \geq 2$, D_ℓ, $\ell \geq 5$ i E_6 ta je grupa dvočlana, Napokon, za D_4 ta je grupa izomorfna grupi permutacija S_3. Za poluproste Liejeve algebre koje nisu proste, ali su njihovi prosti ideali međusobno neizomorfni, grupa simetrija Dynkinovog dijagrama je direktni produkt grupa simetrija Dynkinovih dijagrama prostih ideala. Ako su neki od prostih ideala međusobno izomorfni, onda postoje i simetrije koje permutiraju pripadne komponente povezanosti Dynkinovih dijagrama.

Druga je posljedica teorema 4.1.3.

Korolar 4.1.5. *Vrijedi* $Aut(\mathfrak{g},\mathfrak{h}) = Int(\mathfrak{g},\mathfrak{h}) \rtimes \Psi(Aut(R,B))$ *i* $Aut(\mathfrak{g},\mathfrak{h})/Int(\mathfrak{g},\mathfrak{h}) \simeq Aut(R,B)$.

Dokaz: Kako je $Int(\mathfrak{g})$ normalna podgrupa grupe $Aut(\mathfrak{g})$, $Int(\mathfrak{g},\mathfrak{h}) = Int(\mathfrak{g}) \cap Aut(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ je normalna podgrupa grupe $Aut(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$. Nadalje, po teoremu 4.1.3. je $Int(\mathfrak{g}) \cap \Psi(Aut(R,B)) = \{I_\mathfrak{g}\}$, pa je i $Int(\mathfrak{g},\mathfrak{h}) \cap \Psi(Aut(R,B)) = \{I_\mathfrak{g}\}$. Napokon, neka je $\varphi \in Aut(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$. Tada je $\varphi \in Aut(\mathfrak{g})$, pa prema teoremu 4.1.3. postoje $\psi \in Int(\mathfrak{g})$ i $\omega \in Aut(R,B)$ takvi da je $\varphi = \psi \circ \Psi(\omega)$. Kako je $\Psi(Aut(R,B)) \subseteq Aut(\mathfrak{g},\mathfrak{h},B) \subseteq Aut(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$, slijedi da je

$$\psi = \varphi \circ \Psi(\omega)^{-1} \in Aut(\mathfrak{g},\mathfrak{h}) \cap Int(\mathfrak{g}) = Int(\mathfrak{g},\mathfrak{h}).$$

Time je dokazano da je $Aut(\mathfrak{g},\mathfrak{h}) = Int(\mathfrak{g},\mathfrak{h})\Psi(Aut(R,B))$, pa slijedi tvrdnja korolara.

U odjeljku 2.2. ustanovili smo vezu između konjugacija kompleksne Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ i involutivnih automorfizama od $\mathfrak{g}$. Ta je veza sljedeća. Fiksirajmo kompaktnu konjugaciju τ od $\mathfrak{g}$. Ako je σ bilo koja konjugacija od $\mathfrak{g}$, tada je prema propoziciji 2.2.7. $\varphi = ((\sigma\tau)^2)^{-\frac{1}{4}} \in Int(\mathfrak{g})$ i konjugacije $\varphi\sigma\varphi^{-1}$ i τ komutiraju. Prema tome, $\Phi_\tau(\sigma) = \varphi\sigma\varphi^{-1}\tau \in Aut(\mathfrak{g})$ je involucija. Ta involucija komutira sa τ, odnosno, nalazi se u podgrupi $Aut_\tau(\mathfrak{g}) = \{\vartheta \in Aut(\mathfrak{g});\ \vartheta\tau = \tau\vartheta\}$ grupe $Aut(\mathfrak{g})$. Na taj način došli smo do preslikavanja Φ_τ sa skupa svih konjugacija u $\mathfrak{g}$ u skup svih involucija u grupi $Aut_\tau(\mathfrak{g})$. Prema tvrdnji (a) teorema 2.2.10. preslikavanje Φ_τ inducira bijekciju sa skupa svih klasa $Int(\mathfrak{g})-$konjugiranosti konjugacija od $\mathfrak{g}$ na skup svih klasa $Int(\mathfrak{g})-$konjugiranosti involucija u $Aut(\mathfrak{g})$. Dopuna teoremu 2.2.10. je

Propozicija 4.1.6. *Preslikavanje Φ_τ je surjekcija sa skupa svih konjugacija od $\mathfrak{g}$ na skup svih involucija u $Aut_\tau(\mathfrak{g})$.*

Dokaz: Neka je $\vartheta \in Aut_\tau(\mathfrak{g})$ involucija. Stavimo $\sigma = \vartheta\tau = \tau\vartheta$. Tada je σ konjugacija od $\mathfrak{g}$ koja komutira sa τ. Stoga je $(\sigma\tau)^2 = \sigma^2\tau^2 = I_\mathfrak{g}$, pa je $\Phi_\tau(\sigma) = \sigma\tau = \vartheta$.

Neka je σ konjugacija od $\mathfrak{g}$ i $\mathfrak{g}^\sigma = \{x \in \mathfrak{g};\ \sigma(x) = x\}$ pripadna realna forma. Ako je $\mathfrak{h}_0$ Cartanova podalgebra od $\mathfrak{g}^\sigma$, tada je $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_0^{\mathbb{C}} = span_{\mathbb{C}}\,\mathfrak{h}_0 = \mathfrak{h}_0 \dot{+} i\mathfrak{h}_0$ komutativna podalgebra od $\mathfrak{g}$ čiji su svi elementi poluprosti. Uočimo da je to maksimalna komutativna podalgebra od $\mathfrak{g}$, dakle, to je Cartanova podalgebra od $\mathfrak{g}$. Doista, ako je $x \in \mathfrak{g}$ takav da je $[x, \mathfrak{h}] = 0$, onda iz $\sigma(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$ slijedi i $[\sigma(x), \mathfrak{h}] = \{0\}$, prema tome, za $x_1 = \frac{1}{2}(x + \sigma(x))$ i $x_2 = \frac{1}{2i}(x - \sigma(x))$ vrijedi $[x_1, \mathfrak{h}] = [x_2, \mathfrak{h}] = \{0\}$. Međutim, $x_1, x_2 \in \mathfrak{g}^\tau$, a kako je $\mathfrak{h}_0$ maksimalna komutativna podalgebra od $\mathfrak{g}^\tau$, zaključujemo da su $x_1, x_2 \in \mathfrak{h}_0$, dakle, $x = x_1 + ix_2 \in \mathfrak{h}$.

Neka je sada τ kompaktna konjugacija od $\mathfrak{g}$. Tada su svi operatori $ad_{\mathfrak{g}^\tau}\, x$, $x \in \mathfrak{g}^\tau$ antihermitski na prostoru $\mathfrak{g}^\tau$ u odnosu na neki skalarni produkt na $\mathfrak{g}^\tau$, jer $\mathfrak{g}^\tau$ je kompaktna Liejeva algebra. To znači da su svi operatori $ad_{\mathfrak{g}^\tau}\, x$, $x \in \mathfrak{g}^\tau$, poluprosti. Prema tome, svaka komutativna podalgebra od $\mathfrak{g}^\tau$ je toralna. Slijedi da je svaka maksimalna komutativna podalgebra od $\mathfrak{g}^\tau$ Cartanova podalgebra od $\mathfrak{g}^\tau$. Ako je $\mathfrak{t}_0$ Cartanova podalgebra od $\mathfrak{g}^\tau$, tada su sve svojstvene vrijednosti svih operatora $ad_{\mathfrak{g}}\, x$ $x \in \mathfrak{t}_0$, čisto imaginarni brojevi. To znači da za $\mathfrak{t} = \mathfrak{t}_0^{\mathbb{C}} = \mathfrak{t}_0 \dot{+} i\mathfrak{t}_0$ i za svaki $\alpha \in R(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})$ vrijedi $\alpha(\mathfrak{t}_0) \subseteq i\mathbb{R}$ i $\alpha(i\mathfrak{t}_0) \subseteq \mathbb{R}$. Prema tome,

$$\mathfrak{t}(\mathbb{R}) = \{h \in \mathfrak{t};\ \alpha(h) \in \mathbb{R}\ \forall \alpha \in R(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})\} = i\mathfrak{t}_0.$$

Razmotrimo sada pobliže involutivne automorfizme kompleksne poluproste Liejeve algebre $\mathfrak{g}$. Ako je $\vartheta \in Aut(\mathfrak{g})$ involucija, prema propoziciji 2.2.9. postoji kompaktna konjugacija τ od $\mathfrak{g}$ koja komutira sa ϑ, tj. $\vartheta \in Aut_\tau(\mathfrak{g})$. Neka je $\mathfrak{u} = \mathfrak{g}^\tau = \{x \in \mathfrak{g};\ \tau(x) = x\}$ pripadna kompaktna forma od $\mathfrak{g}$. Sada iz $\vartheta\tau = \tau\vartheta$ slijedi da je $\vartheta(\mathfrak{u}) = \mathfrak{u}$. Nadalje, kako je ϑ involucija, imamo

$$\mathfrak{u} = \mathfrak{u}_+ \dot{+} \mathfrak{u}_-, \qquad \text{gdje je} \quad \mathfrak{u}_+ = \{x \in \mathfrak{u};\ \vartheta(x) = x\} \quad \text{i} \quad \mathfrak{u}_- = \{x \in \mathfrak{u};\ \vartheta(x) = -x\}.$$

Nadalje, iz činjenice da je ϑ automorfizam od $\mathfrak{g}$ slijedi

$$[\mathfrak{u}_+, \mathfrak{u}_+] \subseteq \mathfrak{u}_+, \qquad [\mathfrak{u}_+, \mathfrak{u}_-] \subseteq \mathfrak{u}_-, \qquad [\mathfrak{u}_-, \mathfrak{u}_-] \subseteq \mathfrak{u}_+.$$

Teorem 4.1.7. *Neka je τ kompaktna konjugacija od $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{u} = \mathfrak{g}^\tau$ pripadna kompaktna forma od $\mathfrak{g}$, $\vartheta \in Aut_\tau(\mathfrak{g})$ i $\mathfrak{u}_\pm = \{x \in \mathfrak{u};\ \vartheta(x) = \pm x\}$. Neka je $\mathfrak{b}$ maksimalna komutativna podalgebra od $\mathfrak{u}_+$.*

(*a*) *Centralizator od $\mathfrak{b}$ u $\mathfrak{g}$*

$$\mathfrak{h} = Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{b}) = \{y \in \mathfrak{g};\ [y, \mathfrak{b}] = \{0\}\}$$

je Cartanova podalgebra od $\mathfrak{g}$.

(*b*) *Vrijedi $\vartheta(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$, tj. $\vartheta \in Aut(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$.*

(*c*) *Postoji baza B sistema korijena $R = R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ takva da je $\vartheta \in Aut(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, B)$.*

Dokaz: (*b*) Kako je $\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{u}_+ = \{x \in \mathfrak{u};\ \vartheta(x) = x\}$, i kako je ϑ involucija, za $y \in \mathfrak{h}$ i za svaki $x \in \mathfrak{b}$ imamo $[\vartheta(y), x] = \vartheta([y, \vartheta(x)]) = \vartheta([y, x]) = 0$, dakle, $\vartheta(y) \in \mathfrak{h}$. Time je dokazano $\vartheta(\mathfrak{h}) \subseteq \mathfrak{h}$, a kako je ϑ automorfizam, to znači da je $\vartheta(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$.

(*a*) Stavimo

$$\mathfrak{h}_0 = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{u} = Z_{\mathfrak{u}}(\mathfrak{b}).$$

Za $x \in \mathfrak{h}$ i $y \in \mathfrak{b}$ je $\tau(y) = y$, pa imamo $[\tau(x), y] = \tau([x, \tau(y)]) = \tau([x, y]) = 0$. Prema tome, za $x \in \mathfrak{h}$ je i $\tau(x) \in \mathfrak{h}$. No tada su i $x_1 = \frac{1}{2}(x + \tau(x))$ i $x_2 = \frac{1}{2i}(x - \tau(x))$ elementi od $\mathfrak{h}$. Sada iz $x_1, x_2 \in \mathfrak{u}$ slijedi $x_1, x_2 \in \mathfrak{h}_0$. Time smo dokazali da je $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_0 \dot{+} i\mathfrak{h}_0$.

$\mathfrak{h}_0$ je Liejeva podalgebra kompaktne Liejeve algebre $\mathfrak{u}$, pa je i sama kompaktna. Prema teoremu 2.2.1. Liejeva algebra $\mathfrak{h}_0$ je reduktivna. Dakle, $\mathfrak{h}_0 = Z(\mathfrak{h}_0) \dot{+} [\mathfrak{h}_0, \mathfrak{h}_0]$ i Liejeva algebra $[\mathfrak{h}_0, \mathfrak{h}_0]$ je poluprosta.

Prema (b) je $\vartheta(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$, a kako je i $\vartheta(\mathfrak{u}) = \mathfrak{u}$, slijedi i $\vartheta(\mathfrak{h}_0) = \mathfrak{h}_0$. Stoga je

$$\mathfrak{h}_0 = \mathfrak{h}_0^+ \dotplus \mathfrak{h}_0^-, \qquad \text{gdje je} \quad \mathfrak{h}_0^{\pm} = \{x \in \mathfrak{h}_0;\ \vartheta(x) = \pm x\} = \mathfrak{h}_0 \cap \mathfrak{u}_{\pm} = Z_{\mathfrak{u}_{\pm}}(\mathfrak{b}).$$

Međutim, $\mathfrak{b}$ je maksimalna komutativna podalgebra od $\mathfrak{u}_+$, pa zaključujemo da je $Z_{\mathfrak{u}_+}(\mathfrak{b}) = \mathfrak{b}$, odnosno, $\mathfrak{h}_0^+ = \mathfrak{b}$. Stoga je

$$[\mathfrak{h}_0, \mathfrak{h}_0] = [\mathfrak{b}, \mathfrak{b}] + [\mathfrak{b}, \mathfrak{h}_0^-] + [\mathfrak{h}_0^-, \mathfrak{h}_0^-] = [\mathfrak{h}_0^-, \mathfrak{h}_0^-] \subseteq \mathfrak{h}_0 \cap [\mathfrak{u}_-, \mathfrak{u}_-] \subseteq \mathfrak{h}_0 \cap \mathfrak{u}_+ = \mathfrak{h}_0^+ = \mathfrak{b}.$$

Kako je $\mathfrak{b}$ komutativna, a $[\mathfrak{h}_0, \mathfrak{h}_0]$ poluprosta, slijedi $[\mathfrak{h}_0, \mathfrak{h}_0] = \{0\}$, odnosno, Liejeva algebra $\mathfrak{h}_0$ je komutativna. Budući da je $\mathfrak{h}_0 = Z_{\mathfrak{u}}(\mathfrak{b})$, zaključujemo da je $\mathfrak{h}_0$ maksimalna komutativna podalgebra od $\mathfrak{u}$. Ali Liejeva algebra $\mathfrak{u}$ je kompaktna, pa to znači da je $\mathfrak{h}_0$ Cartanova podalgebra od $\mathfrak{u}$. Dakle, $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_0 \dotplus i\mathfrak{h}_0$ je Cartanova podalgebra kompleksifikacije $\mathfrak{g}$ od $\mathfrak{u}$.

(c) Prema razmatranju prije iskaza teorema znamo da je $\mathfrak{h}(\mathbb{R}) = i\mathfrak{h}_0$, dakle, $\vartheta(\mathfrak{h}(\mathbb{R})) = \mathfrak{h}(\mathbb{R})$. Dokazat ćemo sada da postoji $x \in i\mathfrak{b}$ takav da je $\alpha(x) \neq 0\ \forall \alpha \in R = R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$. Doista, u suprotnom bi potprostor $i\mathfrak{b}$ bio sadržan u uniji potprostora $\operatorname{Ker}\alpha$, $\alpha \in R$, a odatle bi slijedilo da je $i\mathfrak{b} \subseteq \operatorname{Ker}\alpha$ za neki $\alpha \in R$. No tada bi bilo $\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha} \subseteq Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{b}) = \mathfrak{h}$, a to je nemoguće. Ova kontradikcija pokazuje da postoji $x \in i\mathfrak{b}$ takav da je $\alpha(x) \neq 0\ \forall \alpha \in R$. To znači da postoji Weylova komora C u $\mathfrak{h}(\mathbb{R})$ takva da je $C \cap i\mathfrak{b} \neq \emptyset$. Međutim, $\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{u}_+$, pa su elementi od $i\mathfrak{b}$ fiksni u odnosu na ϑ. Posebno, $\vartheta(x) = x$. To pokazuje da je $\vartheta(C) \cap C \neq \emptyset$, a budući da $\vartheta|\mathfrak{h}(\mathbb{R})$ permutira Weylove komore u $\mathfrak{h}(\mathbb{R})$, zaključujemo da je $\vartheta(C) = C$. Neka je B baza sistema korijena R takva da je $\{h_\alpha;\ \alpha \in B\}$ baza dualnog sistema korijena $\check{R}$ koja je pridružena Weylovoj komori C. Drugim riječima, B je baza od R takva da je pripadni skup pozitivnih korijena $R_+ = R_+(B)$ dan sa

$$R_+ = \{\alpha \in R;\ \alpha(C) \subseteq \mathbb{R}_+^*\}.$$

Tada je očito baza B invarijantna u odnosu na $(\vartheta|\mathfrak{h})^T$, odnosno, vrijedi $\vartheta \in Aut(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, B)$.

Zadatak 4.1.4. *Uz oznake iz teorema 4.1.7. dokažite da je involucija ϑ $\exp(ad\,\mathfrak{h})-$konjugirana involuciji ϑ_1 takvoj da je $\vartheta_1 = \psi\Psi(\omega) = \Psi(\omega)\psi$, pri čemu je $\Psi : Aut(R, B) \to Aut(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, B)$ monomorfizam iz teorema 4.1.1., $\omega \in Aut(R, B)$ je involucija, tj. $\omega^2 = I_{\mathfrak{h}^*}$, a $\psi = \mathrm{e}^{ad\,\frac{\pi}{2}ih}$, gdje je $h \in \mathfrak{h}$ takav da je $\alpha(h) \in 2\mathbb{Z}\ \forall \alpha \in R$.*

Uputa: Prema tvrdnji (d) teorema 4.1.1. imamo $\vartheta = \mathrm{e}^{ad\,x}\Psi(\omega)$, gdje je $x \in \mathfrak{h}$ i $\omega \in Aut(R, B)$. Iz $\vartheta^2 = I_{\mathfrak{g}}$ izvedite da je $\omega^2 = I_{\mathfrak{h}^*}$. Nadalje, $\vartheta|\mathfrak{h} = \Psi(\omega)|\mathfrak{h}$, pa je

$$\mathfrak{h}^{\pm} = \{x \in \mathfrak{h};\ \vartheta(x) = \pm x\} = \{x \in \mathfrak{h};\ \Psi(\omega)(x) = \pm x\}$$

i vrijedi $x = x_+ x_-$ za $x_+ = \frac{1}{2}(x + \Psi(\omega)x) \in \mathfrak{h}^+$ i $x_- = \frac{1}{2}(x - \Psi(\omega)(x)) \in \mathfrak{h}^-$. Sada za $u = x_+ \in \mathfrak{h}^+$ i $v = -\frac{1}{2}x \in \mathfrak{h}$ imamo $x = u + \Psi(\omega)(v) - v$. Odatle izvedite da je

$$\mathrm{e}^{ad\,x} = \mathrm{e}^{ad\,u}\Psi(\omega)\mathrm{e}^{ad\,v}\Psi(\omega)\left(\mathrm{e}^{ad\,v}\right)^{-1}.$$

Sada dokažite da $\psi = \mathrm{e}^{ad\,u}$ i $\Psi(\omega)$ komutiraju. Stavite $\vartheta_1 = \psi\Psi(\omega)$ i provjerite jednakost $\vartheta = \mathrm{e}^{ad\,v}\vartheta_1\left(\mathrm{e}^{ad\,v}\right)^{-1}$. Stoga je ϑ_1 involucija, pa je i $\psi^2 = I_{\mathfrak{g}}$. Sada stavite $h = \frac{2}{\pi i}u$ i iz $\psi^2 e_\alpha = e_\alpha$ za $\alpha \in R$ i $e_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$ izvedite da je $\alpha(h) \in 2\mathbb{Z}$ za svaki $\alpha \in R$.

4.2 Cartanove dekompozicije

Neka je $\mathfrak{g}$ kompleksna Liejeva algebra i τ kompaktna konjugacija od $\mathfrak{g}$. Kao u prethodnom odjeljku označimo sa $\mathfrak{u} = \mathfrak{g}^\tau = \{x \in \mathfrak{g};\ \tau(x) = x\}$ pripadnu kompaktnu formu od $\mathfrak{g}$. Ako je $\vartheta \in Aut_\tau(\mathfrak{g})$ involucija koja komutira sa τ, onda je $\sigma = \vartheta\tau = \tau\vartheta$ konjugacija od $\mathfrak{g}$ i znamo da je svaka konjugacija $Int(\mathfrak{g})-$konjugirana takvoj. Neka je $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g}^\sigma = \{x \in \mathfrak{g};\ \sigma(x) = x\}$ pripadna realna forma od $\mathfrak{g}$. Razmotrimo sada kako možemo opisati $\mathfrak{g}_0$ direktno iz $\mathfrak{u}$ i ϑ.

Involucija ϑ određuje rastav $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_+ \dot{+} \mathfrak{g}_-$, gdje je $\mathfrak{g}_\pm = \{x \in \mathfrak{g};\ \vartheta(x) = \pm x\}$. Involucija ϑ komutira i sa σ i sa τ, pa vrijedi $\vartheta(\mathfrak{g}_0) = \mathfrak{g}_0$ i $\vartheta(\mathfrak{u}) = \mathfrak{u}$ i imamo rastave

$$\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g}_0^+ \dot{+} \mathfrak{g}_0^-, \qquad \mathfrak{g}_0^\pm = \mathfrak{g}_0 \cap \mathfrak{g}_\pm = \{x \in \mathfrak{g}_0;\ \vartheta(x) = \pm x\}, \tag{4.5}$$

$$\mathfrak{u} = \mathfrak{u}_+ \dot{+} \mathfrak{u}_-, \qquad \mathfrak{u}_\pm = \mathfrak{u} \cap \mathfrak{g}_\pm = \{x \in \mathfrak{u};\ \vartheta(x) = \pm x\}. \tag{4.6}$$

Stavimo

$$\mathfrak{k} = \mathfrak{g}_0^+, \qquad \mathfrak{p} = \mathfrak{g}_0^-.$$

Budući da je $\vartheta = \tau\sigma$, vrijedi $\vartheta|\mathfrak{g}_0 = \tau|\mathfrak{g}_0$, a odatle je $\mathfrak{k} = \mathfrak{u}_+$ i $\mathfrak{p} = i\mathfrak{u}_-$. Prema tome, dekompozicije (4.5) i (4.6) poprimaju oblik

$$\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{k} \dot{+} \mathfrak{p}, \tag{4.7}$$

$$\mathfrak{u} = \mathfrak{k} \dot{+} i\mathfrak{p}. \tag{4.8}$$

Budući da je ϑ involutivni automorfizam, te su dekompozicije ortogonalne u odnosu na Killingovu formu. Doista, ako je $x \in \mathfrak{k}$ i $y \in \mathfrak{p}$, onda je $\vartheta(x) = x$ i $\vartheta(y) = -y$, a kako je Killingova forma $B_\mathfrak{g}$ invarijantna u odnosu na ϑ, imamo

$$B_\mathfrak{g}(x, y) = B_\mathfrak{g}(\vartheta(x), \vartheta(y)) = -B_\mathfrak{g}(x, y) \qquad \Longrightarrow \qquad B_\mathfrak{g}(x, y) = 0$$

Nadalje, iz činjenice da je ϑ automorfizam dobivamo i

$$[\mathfrak{k}, \mathfrak{k}] \subseteq \mathfrak{k}, \qquad [\mathfrak{k}, \mathfrak{p}] \subseteq \mathfrak{p}, \qquad [\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] \subseteq \mathfrak{k}. \tag{4.9}$$

Prema tvrdnji (d) propozicije 2.2.2. hermitska forma $H_\tau(x, y) = -B_\mathfrak{g}(x, \tau(x))$, $x, y \in \mathfrak{g}$, je skalarni produkt na $\mathfrak{g}$. Restrikcija $H_\tau|\mathfrak{g}_0 \times \mathfrak{g}_0$ je skalarni produkt na realnom prostoru $\mathfrak{g}_0$. Međutim, $\tau|\mathfrak{g}_0 = \vartheta|\mathfrak{g}_0$, pa imamo $H_\tau(x, y) = -B_\mathfrak{g}(x, \vartheta(y))$ za $x, y \in \mathfrak{g}_0$. Kako je $B_\mathfrak{g}|\mathfrak{g}_0 \times \mathfrak{g}_0 = B_{\mathfrak{g}_0}$, odatle slijedi

$$B_{\mathfrak{g}_0}(x, x) < 0 \quad \text{za} \quad x \in \mathfrak{k} \setminus \{0\}; \qquad B_{\mathfrak{g}_0}(y, y) > 0 \quad \text{za} \quad y \in \mathfrak{p} \setminus \{0\}. \tag{4.10}$$

Cartanova dekompozicija realne poluproste Liejeve algebre $\mathfrak{g}_0$ je uređen par $(\mathfrak{k}, \mathfrak{p})$ potprostora od $\mathfrak{g}_0$ takav da vrijedi (4.7), (4.9) i (4.10).

Teorem 4.2.1. *Neka je $\mathfrak{g}$ kompleksna poluprosta Liejeva algebra, σ konjugacija od $\mathfrak{g}$ i $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g}^\sigma$ pripadna realna forma od $\mathfrak{g}$.*

(*a*) *$(\mathfrak{k}, \mathfrak{p})$ je Cartanova dekompozicija od $\mathfrak{g}_0$ ako i samo ako postoji kompaktna forma $\mathfrak{u}$ od $\mathfrak{g}$ takva da pripadna konjugacija τ komutira sa σ i takva da je $\mathfrak{k} = \mathfrak{u}_+$ i $\mathfrak{p} = i\mathfrak{u}_-$; pri tome je $\mathfrak{u}_\pm = \{x \in \mathfrak{u};\ \sigma(x) = \pm x\}$.*

(*b*) *Ako su $(\mathfrak{k}, \mathfrak{p})$ i $(\mathfrak{k}', \mathfrak{p}')$ Cartanove dekompozicije od $\mathfrak{g}_0$, postoji $\varphi_0 \in Int(\mathfrak{g}_0)$ takav da je $\mathfrak{k}' = \varphi_0(\mathfrak{k})$ i $\mathfrak{p}' = \varphi_0(\mathfrak{p})$.*

(*c*) *Ako je $(\mathfrak{k}, \mathfrak{p})$ Cartanova dekompozicija od $\mathfrak{g}_0$, $\mathfrak{k}$ je kompaktna Liejeva podalgebra od $\mathfrak{g}_0$ i ona je reduktivna u $\mathfrak{g}_0$.*

Dokaz: (a) Dovoljnost uvjeta dokazali smo prije definicije pojma Cartanove dekompozicije. Pretpostavimo sada da je $(\mathfrak{k},\mathfrak{p})$ Cartanova dekompozicija od $\mathfrak{g}_0$. Definiramo preslikavanje $\vartheta:\mathfrak{g}_0\to\mathfrak{g}_0$ ovako:

$$\vartheta(x+y)=x-y,\quad x\in\mathfrak{k},\quad y\in\mathfrak{p}.$$

Sada iz (4.9) slijedi da je ϑ automorfizam od $\mathfrak{g}_0$, a iz definicije se vidi da je involutivan. Proširimo ga po $\mathbb{C}-$linearnosti do involutivnog automorfizma od $\mathfrak{g}$. Kako je $\vartheta(\mathfrak{g}_0)=\mathfrak{g}_0$ i $\mathfrak{g}_0=\mathfrak{g}^\sigma$, slijedi $\vartheta\sigma=\sigma\vartheta$, pa je sa $\tau=\vartheta\sigma$ definirana konjugacija od $\mathfrak{g}$ koja komutira sa σ (i sa ϑ). Dokažimo da je ta konjugacija kompaktna. Doista, kako je $\tau|\mathfrak{g}_0=\vartheta|\mathfrak{g}_0$, za $x\in\mathfrak{k}$ i $y\in\mathfrak{p}$ imamo

$$H_\tau(x+y,x+y)=-B_{\mathfrak{g}}(x+y,\tau(x+y))=-B_{\mathfrak{g}}(x+y,\vartheta(x+y))=$$
$$=-B_{\mathfrak{g}_0}(x+y,x-y)=-B_{\mathfrak{g}_0}(x,x)+B_{\mathfrak{g}_0}(y,y),$$

a to je prema (4.10) veće od nule ako je $x+y\neq0$. To pokazuje da je restrikcija hermitske forme H_τ na realnu formu $\mathfrak{g}_0$ od $\mathfrak{g}$ realna i pozitivno definitna. No tada za $z\in\mathfrak{g}\setminus\{0\}$ i $x,y\in\mathfrak{g}_0$ takve da je $z=x+iy$ imamo

$$H_\tau(z,z)=H_\tau(x+iy,x+iy)=H_\tau(x,x)+iH_\tau(x,y)-iH_\tau(y,x)+H_\tau(y,y)=H_\tau(x,x)+H_\tau(y,y)>0.$$

Dakle, hermitska forma H_τ na $\mathfrak{g}$ je pozitivno definitna, pa iz tvrdnje (d) propozicije 2.2.2. slijedi da je realna forma $\mathfrak{g}^\tau=\mathfrak{u}$ kompaktna, odnosno, τ je kompaktna konjugacija od $\mathfrak{g}$.

Iz definicije ϑ i τ vidi se da je $\vartheta|\mathfrak{g}_0=\tau|\mathfrak{g}_0$, pa nalazimo:

$$\mathfrak{k}=\{x\in\mathfrak{g}_0;\ \tau(x)=x\}=\mathfrak{g}_0\cap\mathfrak{u}=\{x\in\mathfrak{u};\ \sigma(x)=x\}=\mathfrak{u}_+;$$
$$\mathfrak{p}=\{x\in\mathfrak{g}_0;\ \tau(x)=-x\}=\mathfrak{g}_0\cap i\mathfrak{u}=i(i\mathfrak{g}_0\cap\mathfrak{u})=i\{x\in\mathfrak{u};\ \sigma(x)=-x\}=i\mathfrak{u}_-.$$

(b) Neka su $(\mathfrak{k},\mathfrak{p})$ i $(\mathfrak{k}',\mathfrak{p}')$ Cartanove dekompozicije od $\mathfrak{g}_0$. Prema (a) postoje kompaktne konjugacije τ i τ' od $\mathfrak{g}$ koje komutiraju sa σ i takve da za pripadne kompaktne forme $\mathfrak{u}=\mathfrak{g}^\tau$ i $\mathfrak{u}'=\mathfrak{g}^{\tau'}$ vrijedi

$$\mathfrak{k}=\mathfrak{u}_+,\qquad\mathfrak{p}=i\mathfrak{u}_-,\qquad\mathfrak{k}'=\mathfrak{u}'_+,\qquad\mathfrak{p}'=i\mathfrak{u}'_-,$$

pri čemu su

$$\mathfrak{u}_+=\{x\in\mathfrak{u};\ \sigma(x)=x\}=\mathfrak{u}\cap\mathfrak{g}_0,\qquad\mathfrak{u}_-=\{x\in\mathfrak{u};\ \sigma(x)=-x\}=\mathfrak{u}\cap i\mathfrak{g}_0,$$
$$\mathfrak{u}'_+=\{x\in\mathfrak{u}';\ \sigma(x)=x\}=\mathfrak{u}'\cap\mathfrak{g}_0,\qquad\mathfrak{u}'_-=\{x\in\mathfrak{u}';\ \sigma(x)=-x\}=\mathfrak{u}'\cap i\mathfrak{g}_0.$$

Prema teoremu 2.2.8. postoji $\varphi\in Int(\mathfrak{g})$ takav da je $\tau'=\varphi\tau\varphi^{-1}$. Nadalje, može se odabrati $\varphi=((\tau\tau')^2)^{-\frac14}$. Tada φ komutira sa σ, pa je $\varphi(\mathfrak{g}_0)=\mathfrak{g}_0$. Nadalje, iz $\tau'=\varphi\tau\varphi^{-1}$ slijedi $\varphi(\mathfrak{u})=\mathfrak{u}'$; doista, za $x\in\mathfrak{g}$ imamo

$$x\in\mathfrak{u}\iff\tau(x)=x\iff\varphi(\tau(x))=\varphi(x)\iff\tau'(\varphi(x))=\varphi(x)\iff\varphi(x)\in\mathfrak{u}'.$$

Prema tome,

$$\mathfrak{k}'=\mathfrak{u}'\cap\mathfrak{g}_0=\varphi(\mathfrak{u})\cap\varphi(\mathfrak{g}_0)=\varphi(\mathfrak{u}\cap\mathfrak{g}_0)=\varphi(\mathfrak{k}),$$
$$\mathfrak{p}'=i\mathfrak{u}'\cap\mathfrak{g}_0=\varphi(i\mathfrak{u})\cap\varphi(\mathfrak{g}_0)=\varphi(i\mathfrak{u}\cap\mathfrak{g}_0)=\varphi(\mathfrak{p}).$$

Napokon, φ je element $1-$parametarske podgrupe $\left(((\tau\tau')^2)^t\right)_{t\in\mathbb{R}}$ Liejeve grupe $Int(\mathfrak{g})$. Svaka je takva $1-$parametarska podgrupa oblika $\left(e^{t\,ad\,z}\right)_{t\in\mathbb{R}}$ za neki $z\in\mathfrak{g}$. Prema tome, postoji $z\in\mathfrak{g}$ takav da je $((\tau\tau')^2)^t=e^{t\,ad\,z}$ za svaki $t\in\mathbb{R}$. Kako τ i τ' komutiraju sa σ, slijedi da svi elementi te $1-$parametarske podgrupe komutiraju sa σ, dakle,

$$e^{t\,ad\,z}=\sigma e^{t\,ad\,z}\sigma\quad\forall t\in\mathbb{R}\quad\Longrightarrow\quad e^{t\,ad\,z}=e^{t\sigma(ad\,z)\sigma}\quad\forall t\in\mathbb{R}\quad\Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow\quad\sigma(ad\,z)\sigma=ad\,z\quad\Longrightarrow\quad ad\,\sigma(z)=ad\,z\quad\Longrightarrow\quad\sigma(z)=z\quad\Longrightarrow\quad z\in\mathfrak{g}_0.$$

Odatle slijedi da je $\varphi_0=\varphi|\mathfrak{g}_0\in Int(\mathfrak{g}_0)$ i vrijedi $\varphi_0(\mathfrak{k})=\mathfrak{k}'$ i $\varphi_0(\mathfrak{p})=\mathfrak{p}'$.

(c) Prva relacija u (4.9) pokazuje da je $\mathfrak{k}$ Liejeva podalgebra od $\mathfrak{g}_0$. Nadalje, zbog (4.10) je $-B_{\mathfrak{g}_0}|\mathfrak{k}\times\mathfrak{k}$ skalarni produkt na realnom vektorskom prostoru $\mathfrak{k}$, a iz svojstava Killingove forme slijedi da su svi operatori $ad_{\mathfrak{k}}\,z$, $z\in\mathfrak{k}$, antihermitski u odnosu na taj skalarni produkt. Prema tome, $\mathfrak{k}$ je kompaktna Liejeva algebra. Štoviše, svi operatori $ad_{\mathfrak{g}_0}\,z$, $z\in\mathfrak{k}$, su antihermitski na prostoru $\mathfrak{g}_0$ snabdjevenim skalarnim produktom $(x|y)_\vartheta=-B_{\mathfrak{g}_0}(x,\vartheta(y))$. Doista, za $z\in\mathfrak{k}$ je $\vartheta(z)=z$, pa imamo

$$((ad\,z)x|y)_\vartheta=-B_{\mathfrak{g}_0}([z,x],\vartheta(y)=B_{\mathfrak{g}_0}([x,z],\vartheta(y))=$$
$$=B_{\mathfrak{g}_0}(x,[z,\vartheta(y)])=B_{\mathfrak{g}_0}(x,\vartheta([z,y]))=-(x|(ad\,z)y)_\vartheta.$$

Prema tome, ako je V potprostor od $\mathfrak{g}_0$ koji je $ad_{\mathfrak{g}_0}(\mathfrak{k})-$invarijantan, onda je njegov ortogonalni komplement u $\mathfrak{g}_0$ u odnosu na skalarni produkt $(\,\cdot\,|\,\cdot\,)_\vartheta$. To znači da je reprezentacija $ad_{\mathfrak{g}_0}|\mathfrak{k}$ potpuno reducibilna, odnosno, Liejeva podalgebra $\mathfrak{k}$ je reduktivna u $\mathfrak{g}_0$.

Neka je $(\mathfrak{k},\mathfrak{p})$ Cartanova dekompozicija realne poluproste Liejeve algebre $\mathfrak{g}_0$ i $\vartheta\in Aut(\mathfrak{g}_0)$ pripadna involucija. Neka je $B=B_{\mathfrak{g}_0}$ Killingova forma od $\mathfrak{g}_0$. Tada je na realnom vektorskom prostoru $\mathfrak{g}_0$ formulom

$$(z|w)_\vartheta=-B(z,\vartheta(w)),\ z,w\in\mathfrak{g}_0,\quad \text{ili}\quad (x+y|u+v)_\vartheta=-B(x,u)+B(y,v),\ x,u\in\mathfrak{k},\ y,v\in\mathfrak{p},$$

zadan skalarni produkt. U sljedećem zadatku promatramo $\mathfrak{g}_0$ kao realan unitaran prostor snabdjeven s tim skalarnim produktom. Nadalje, za linearan operator $A\in L(\mathfrak{g}_0)$ sa A^* označavamo njemu adjungiran operator u odnosu na taj skalarni produkt.

Zadatak 4.2.1. *Dokažite da vrijedi*

(a) $\vartheta\varphi^*\vartheta=\varphi^{-1}\ \forall\varphi\in Aut(\mathfrak{g}_0)$.

(b) $\vartheta^*=\vartheta$.

(c) $ad\,\vartheta(x)=-(ad\,x)^*\ \forall x\in\mathfrak{g}_0$.

Zadatak 4.2.2. *Neka je $\mathfrak{g}$ kompleksna Liejeva algebra. Realnu Liejevu algebru $\mathfrak{g}_\mathbb{R}$ možemo promatrati kao realnu formu $\mathfrak{G}^\Sigma$ kompleksne Liejeve algebre $\mathfrak{G}=\mathfrak{g}\times\overline{\mathfrak{g}}$ kao u posljednjem odlomku odjeljka 2.2. pomoću izomorfizma $x\mapsto(x,x)$. Pri tome je $\Sigma(x,y)=(y,x)$. Ako je τ kompaktna konjugacija od $\mathfrak{g}$ znamo da je $\tau\times\tau$ kompaktna konjugacija od $\mathfrak{G}$ koja komutira sa Σ. Pripadnu Cartanovu dekompoziciju od $\mathfrak{G}^\Sigma$ prenesite inverznim izomorfizmom sa $\mathfrak{G}^\Sigma$ na $\mathfrak{g}_\mathbb{R}$.*

Zadatak 4.2.3. *Neka je*

$$\mathfrak{k}=\mathfrak{so}(n)=\{x\in\mathfrak{sl}(n,\mathbb{R});\ x^T=-x\},\qquad \mathfrak{p}=\{x\in\mathfrak{sl}(n,\mathbb{R});\ x^T=x\},$$

pri čemu je x^T oznaka za transponiranu matricu matrice x. Dokažite da je uređen par $(\mathfrak{k},\mathfrak{p})$ Cartanova dekompozicija od $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{R})$.

Zadatak 4.2.4. *Neka su $p,q\in\mathbb{N}$ i*

$$\mathfrak{k}=\left\{\begin{bmatrix} x & 0\\ 0 & y\end{bmatrix};\ x\in\mathfrak{u}(p),\ y\in\mathfrak{u}(q),\ Tr\,x+Tr\,y=0\right\}=\mathfrak{s}(\mathfrak{u}(p)\times\mathfrak{u}(q)),$$

$$\mathfrak{p}=\left\{\begin{bmatrix} 0 & z\\ z^* & 0\end{bmatrix};\ z\in M_{p,q}(\mathbb{C})\right\},$$

pri čemu je $z=\overline{z}^T\in M_{q,p}(\mathbb{C})$ adjungirana matrica matrice $z\in M_{p,q}(\mathbb{C})$. Dokažite da je $(\mathfrak{k},\mathfrak{p})$ Cartanova dekompozicija realne proste Liejeve algebre $\mathfrak{su}(p,q)$.

Zadatak 4.2.5. *Pronađite neku Cartanovu dekompoziciju realne proste Liejeve algebre $\mathfrak{sl}(m,\mathbb{H})$.*

4.3 Multiplikativne Cartanove dekompozicije

U ovom ćemo odjeljku proučiti multiplikativne Cartanove dekompozicije realnih poluprostih Liejevih grupa. Razmatranja ne ćemo provoditi u punoj općenitosti, nego samo za grupe automorfizama $Aut(\mathfrak{g}_0)$ i $Int(\mathfrak{g}_0)$ za realnu poluprostu Liejevu algebru $\mathfrak{g}_0$. Multiplikativna Cartanova dekompozicija bazira se na teoremu o polarnoj dekompoziciji za linearne operatore na (realnom) unitarnom prostoru.

U daljnjem je V realan konačnodimenzionalan unitaran prostor sa skalarnim produktom $(\cdot\,|\,\cdot)$. Sa a^* označavamo adjungiran operator linearnog operatora $a \in L(V)$. Nadalje, kao u odjeljku 2.2. sa $H(V)$ i $P(V)$ označimo prostor svih hermitskih (odnosno, simetričnih) operatora i skup svih pozitivno definitnih operatora u $L(V)$:

$$H(V) = \{a \in L(V);\ a = a^*\} = \{a \in L(V);\ (ax|y) = (x|ay)\ \forall x, y \in V\},$$

$$P(V) = \{a \in H(V);\ (ax|x) > 0\ \forall x \in V \setminus \{0\}\,\} = \{a \in H(V);\ Sp(a) \subseteq \mathbb{R}_+^* = \langle 0, +\infty\rangle\}.$$

U odjeljku 2.2. primijetili smo da je preslikavanje $\exp : H(V) \to P(V)$, tj. $a \mapsto \mathrm{e}^a$, homeomorfizam sa $H(V)$ na $P(V)$. Kako je $\exp a = \mathrm{e}^a$ definirano pomoću apsolutno konvergentnog reda operatora, vidimo da je $\exp : H(V) \to P(V)$ analitičko preslikavanje. Štoviše, i inverzno preslikavanje $\log : P(V) \to H(V)$ također je analitičko:

Propozicija 4.3.1. *Preslikavanje* $\exp : H(V) \to P(V)$ *je bianalitičko.*

Dokaz: Budući da je exp analitičko preslikavanje, treba još dokazati da je inverzno preslikavanje $\log : P(V) \to H(V)$ također analitičko. Po teoremu o inverznom preslikavanju dovoljno je dokazati da je za svaki $b \in H(V)$ diferencijal $T_b(\exp)$ izomorfizam tangencijalnog prostora $T_b(H(V))$ na tangencijalni prostor $T_{\mathrm{e}^b}(P(V))$. Budući da je $H(V)$ realan vektorski prostor, tangencijalni prostor na $H(V)$ u točki $b \in H(V)$ identificira se sa samim prostorom $H(V)$ tako da $a \in H(V)$ identificiramo s tangencijalnim vektorom na krivulju $t \mapsto b + ta$. Nadalje, kako je $P(V)$ otvorena podmnogostrukost od $H(V)$, za bilo koji $c \in P(V)$ tangencijalni prostor $T_c(P(V)$ također se identificira sa $H(V)$.

Neka je $b \in H(V)$. Pretpostavimo da je $a \in H(V)$ takav da je $T_b(\exp)a = 0$. Stavimo $\beta(t) = b + ta$ i $\gamma(t) = \exp\beta(t) = \mathrm{e}^{\beta(t)}$. Tada je $\gamma'(0) = T_b(\exp)a = 0$, $\gamma(0) = \mathrm{e}^b$, i $\beta'(0) = a$, pa deriviranjem jednakosti $\beta(t)\gamma(t) = \gamma(t)\beta(t)$ u točki $t = 0$, dobivamo $a\mathrm{e}^b = \mathrm{e}^b a$. Budući da je $b = \log\left(\mathrm{e}^b\right)$, slijedi $ab = ba$. No tada je $\gamma(t) = \mathrm{e}^b\mathrm{e}^{ta}$, dakle

$$0 = \gamma'(0) = \mathrm{e}^b a \qquad \Longrightarrow \qquad a = 0.$$

To pokazuje da je operator $T_b(\exp) : H(V) \to H(V)$ injekcija, dakle, izomorfizam, za svaki $b \in H(V)$.

Propozicija 4.3.2. *Preslikavanje* $\mu : O(V) \times P(V) \to GL(V)$, *definirano sa* $\mu(a, p) = ap$, *i preslikavanje* $\mu \circ (id_{O(V)} \times \exp) : O(V) \times H(V) \to GL(V)$ *(tj.* $(a, b) \mapsto a\mathrm{e}^b$*) su bianalitička.*

Dokaz: Neka je $a \in O(V)$, $b \in H(V)$ i $p = \mathrm{e}^b \in P(V)$. Stavimo $c = ap = a\mathrm{e}^b$. Tada je $c^* = pa^{-1}$, dakle, $\mathrm{e}^{2b} = p^2 = c^*c$. Odatle slijedi

$$b = \frac{1}{2}\log(c^*c), \quad p = \exp\left(\frac{1}{2}\log(c^*c)\right), \quad a = c\exp\left(-\frac{1}{2}\log(c^*c)\right). \tag{4.11}$$

To pokazuje da su b, p i a analitičke funkcije od c i propozicija je dokazana.

Neka je u daljnjem $\mathfrak{g}_0$ realna poluprosta Liejeva algebra, $B = B_{\mathfrak{g}_0}$ njena Killingova forma, $(\mathfrak{k}, \mathfrak{p})$ njena Cartanova dekompozicija i $\vartheta \in Aut(\mathfrak{g}_0)$ pripadna involucija, tj. $\vartheta(x+y) = x - y$, $x \in \mathfrak{k}$, $y \in \mathfrak{p}$. Promatramo $\mathfrak{g}_0$ kao realan unitaran prostor sa skalarnim produktom $(\cdot|\cdot) = (\cdot|\cdot)_\vartheta$:

$$(z|w) = -B(z, \vartheta(w)), \quad z, w \in \mathfrak{g}_0, \quad \text{tj.} \quad (x+y|u+v) = -B(x,u) + B(y,v), \quad x, u \in \mathfrak{k},\ y, v \in \mathfrak{p}.$$

Stavimo sada

$$K = Aut(\mathfrak{g}_0) \cap O(\mathfrak{g}_0), \qquad P = Aut(\mathfrak{g}_0) \cap P(\mathfrak{g}_0).$$

Očito je K kompaktna podgrupa od $Aut(\mathfrak{g}_0)$. Prema zadatku 4.2.1. vrijedi

$$K = \{\varphi \in Aut(\mathfrak{g}_0);\ \vartheta\varphi\vartheta = \varphi\}.$$

Budući da je $\mathfrak{g}_0 \simeq ad\,\mathfrak{g}_0$ Liejeva algebra od $Aut(\mathfrak{g}_0)$, Liejeva algebra od K je skup svih $x \in \mathfrak{g}_0$ takvih da je

$$\mathrm{e}^{t\,ad\,x} \in K\ \forall t \in \mathbb{R} \iff \vartheta \mathrm{e}^{t\,ad\,x}\vartheta = \mathrm{e}^{t\,ad\,x}\ \forall t \in \mathbb{R} \iff \mathrm{e}^{t\vartheta(ad\,x)\vartheta} = \mathrm{e}^{t\,ad\,x}\ \forall t \in \mathbb{R} \iff$$

$$\iff \mathrm{e}^{t\,ad\,\vartheta(x)} = \mathrm{e}^{t\,ad\,x}\ \forall t \in \mathbb{R} \iff ad\,\vartheta(x) = ad\,x \iff \vartheta(x) = x \iff x \in \mathfrak{k}.$$

Dakle, Liejeva algebra Liejeve grupe K identificira se s Liejevom podalgebrom $\mathfrak{k}$ od $\mathfrak{g}_0$.

Množenje μ iz propozicije 4.3.2. preslikava $K \times P$ u $Aut(\mathfrak{g}_0)$. Nadalje, ako je $z \in \mathfrak{p}$, onda je $\vartheta(z) = -z$, pa iz zadatka 4.2.1. slijedi da je $(ad\,z)^* = ad\,z$, odnosno, $ad\,z \in H(\mathfrak{g}_0)$, a odatle je $\mathrm{e}^{ad\,z} \in P$.

Teorem 4.3.3. (*a*) *Preslikavanja* $\mu : K \times P \to Aut(\mathfrak{g}_0)$ *i* $\mu \circ (id_K \times \exp\, ad) : K \times \mathfrak{p} \to Aut(\mathfrak{g}_0)$ *(tj.* $(\varphi, x) \mapsto \varphi \mathrm{e}^{ad\,x}$*) su bianalitička.*

(*b*) $K^0 = K \cap Int(\mathfrak{g}_0) = \{\varphi \in Int(\mathfrak{g}_0);\ \vartheta\varphi\vartheta = \varphi\}$ *je komponenta povezanosti jedinice grupe* K.

(*c*) *Restrikcije dvaju preslikavanja iz* (*a*) *su bianalitička preslikavanja sa* $K^0 \times P$*, odnosno, sa* $K^0 \times \mathfrak{p}$*, na* $Int(\mathfrak{g}_0)$.

Dokaz: (*a*) Zbog propozicije 4.3.2. dovoljno je dokazati da za svaki $c \in Aut(\mathfrak{g}_0)$ za operatore $a \in H(\mathfrak{g}_0)$ i $p \in P(\mathfrak{g}_0)$ definirane sa (4.11) vrijedi $a \in ad\,\mathfrak{p}$ i $p \in Aut(\mathfrak{g}_0)$. Prema zadatku 4.2.1. je $c^* \in Aut(\mathfrak{g}_0)$, dakle, $p^2 = c^*c \in Aut(\mathfrak{g}_0)$. No sada je po lemi 2.2.4. $p^t = \mathrm{e}^{t\log p} \in Int(\mathfrak{g}_0)\ \forall t \in \mathbb{R}$. Posebno je $p \in Int(\mathfrak{g}_0)$. Nadalje, iz $\mathrm{e}^{t\log p} \in Int(\mathfrak{g}_0)\ \forall t \in \mathbb{R}$ slijedi da je $a = \log p = ad\,z$ za neki $z \in \mathfrak{g}_0$. Tada je $(ad\,z)^* = ad\,z$, pa iz zadatka 4.2.1.(*c*) slijedi da je $\vartheta(z) = -z$, odnosno, $z \in \mathfrak{p}$. Dakle, $a \in ad\,\mathfrak{p}$.

(*c*) Neka je K^0 komponenta povezanosti jedinice u grupi K. Tada je $K^0 \times \mathfrak{p}$ komponenta povezanosti mnogostrukosti $K \times \mathfrak{p}$. Budući da je $\mu \circ (id_K \times \exp\, ad) : K \times \mathfrak{p} \to Aut(\mathfrak{g}_0)$ homeomorfizam, to preslikavanje preslikava komponente povezanosti na komponente povezanosti. Kako je slika od $K^0 \times \mathfrak{p}$ sadržana u komponenti povezanost $Int(\mathfrak{g}_0)$ od $Aut(\mathfrak{g}_0)$, ona mu je jednaka. Odatle slijede obje tvrdnje.

Tvrdnju (*b*) dobivamo neposredno iz tvrdnje (*c*), jer jednakost $K^0P = Int(\mathfrak{g})$ ima za posljedicu $K^0 \subseteq K \cap Int(\mathfrak{g}_0)$, a kako je $K \cap P = \{e\}$, vrijedi i obrnuta inkluzija $K \cap Int(\mathfrak{g}_0) = K \cap K^0P \subseteq K^0$.

Uređen par (K, P) zovemo **Cartanova dekompozicija grupe** $Aut(\mathfrak{g}_0)$ pridružena Cartanovoj involuciji ϑ od $\mathfrak{g}_0$. Tada je

$$K = \{\varphi \in Aut(\mathfrak{g}_0);\ \vartheta\varphi = \varphi\vartheta\}, \qquad P = \{\varphi \in Aut(\mathfrak{g}_0);\ \vartheta\varphi\vartheta = \varphi^{-1}\}$$

Analogno, (K^0, P) je Cartanova dekompozicija grupe $Int(\mathfrak{g}_0)$.

4.4 Konjugiranost maksimalnih kompaktnih podgrupa

Neka je i dalje $\mathfrak{g}_0$ realna poluprosta Liejeva algebra, B njena Killingova forma, $(\mathfrak{k}, \mathfrak{p})$ Cartanova dekompozicija od $\mathfrak{g}_0$, ϑ pripadna Cartanova involucija, $(\,\cdot\,|\,\cdot\,) = (\,\cdot\,|\,\cdot\,)_\vartheta$ pripadni skalarni produkt na $\mathfrak{g}_0$. Nadalje, neka su

$$K = Aut(\mathfrak{g}_0) \cap O(\mathfrak{g}_0) = \{\varphi \in Aut(\mathfrak{g}_0);\ \vartheta\varphi\vartheta = \varphi\}, \quad K^0 = K \cap Int(\mathfrak{g}_0), \quad P = Aut(\mathfrak{g}_0) \cap P(\mathfrak{g}_0).$$

Znamo da je K kompaktna podgrupa od $Aut(\mathfrak{g}_0)$ i da je K^0 njena komponenta povezanosti jedinice.

Teorem 4.4.1. *Uz uvedene oznake K je maksimalna kompaktna podgrupa od $Aut(\mathfrak{g}_0)$, a K^0 je maksimalna kompaktna podgrupa od $Int(\mathfrak{g}_0)$.*

Dokaz: Pretpostavimo da je L zatvorena podgrupa od $Aut(\mathfrak{g}_0)$, takva da $K \subsetneq L$. Prema teoremu 4.3.3. je $L = K(L \cap P)$, dakle, $L \cap P \neq \{e\}$. Neka je $p \in L \cap P$, $p \neq e$. Tada je $x = \log p \in \mathfrak{p}$ i $x \neq 0$. Prema tome, niz $(nx)_{n\in\mathbb{N}}$ teži u ∞. No tada $\exp -$slika tog niza $(p^n)_{n\in\mathbb{N}}$ u $L \cap P$ nema gomilišta. To pokazuje da grupa L nije kompaktna. Dakle, K je maksimalna kompaktna podgrupa od $Aut(\mathfrak{g}_0)$. Sasvim analogno pokazuje se da je K^0 maksimalna kompaktna podgrupa od $Int(\mathfrak{g}_0)$.

Prema tvrdnji (b) teorema 4.2.1. sve su Cartanove dekompozicije $Int(\mathfrak{g}_0)-$konjugirane. Odatle naravno slijedi da su sve kompaktne prodgrupe od $Aut(\mathfrak{g}_0)$, a također i sve kompaktne podgrupe od $Int(\mathfrak{g}_0)$, pridružene Cartanovim dekompozicijama međusobno $Int(\mathfrak{g}_0)-$konjugirane. Sve te podgrupe su maksimalne kompaktne podgrupe od $Aut(\mathfrak{g}_0)$, odnosno, od $Int(\mathfrak{g}_0)$. Međutim, nije jasno da je svaka maksimalna kompaktna podgrupa od $Aut(\mathfrak{g}_0)$, odnosno, od $Int(\mathfrak{g}_0)$, pridružena na taj način nekoj Cartanovoj dekompoziciji od $\mathfrak{g}_0$. Naime, neka je K maksimalna kompaktna podgrupa od $Aut(\mathfrak{g}_0)$ i $\mathfrak{k} \subseteq \mathfrak{g}_0$ njena Liejeva algebra. Identična reprezentacija $k \mapsto k$ kompaktne grupe K na realnom prostoru $\mathfrak{g}_0$ je potpuno reducibilna. Kako je $\mathfrak{k}$ $K-$invarijantan potprostor od $\mathfrak{g}_0$, postoji $K-$invarijantan potprostor $\mathfrak{p}$ od $\mathfrak{g}_0$ takav da je $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{k} \dotplus \mathfrak{p}$. Naravno, tada vrijedi $[\mathfrak{k}, \mathfrak{k}] \subseteq \mathfrak{k}$, a iz $K-$invarijantnosti potprostora $\mathfrak{p}$ lako slijedi da vrijedi $[\mathfrak{k}, \mathfrak{p}] \subseteq \mathfrak{p}$. Međutim, nije jasno da vrijedi i $[\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] \subseteq \mathfrak{k}$, pa ne možemo neposredno zaključiti da je $(\mathfrak{k}, \mathfrak{p})$ Cartanova dekompozicija od $\mathfrak{g}_0$.

Cilj je ovog odjeljka da dokažemo da su doista sve maksimalne kompaktne podgrupe od $Aut(\mathfrak{g}_0)$ (i od $Int(\mathfrak{g}_0)$) međusobno $Int(\mathfrak{g}_0)-$konjugirane.

U daljnjem opet promatramo proizvoljan konačnodimenzionalan realan unitaran prostor V. Kao i prije sa $H(V)$ označavamo potprostor svih hermitskih operatora u $L(V)$. Nadalje, neka je $P(V)$ otvoren konus u $H(V)$ svih pozitivno definitnih operatora. Definiramo analitičku funkciju $r : P(V) \times P(V) \to \mathbb{R}$ ovako:

$$r(b, c) = Tr\,(bc^{-1}), \qquad b, c \in P(V). \tag{4.12}$$

Nadalje, za svaki kompaktan podskup $\Omega \subseteq P(V)$ definiramo funkciju $\rho_\Omega : P(V) \to \mathbb{R}$ sa

$$\rho_\Omega(b) = \max\{r(b, c);\ c \in \Omega\}, \qquad b \in P(V). \tag{4.13}$$

Iz kompaktnosti skupa Ω lako se dokazuje da je funkcija ρ_Ω neprekidna.

Za proizvoljno fiksiran operator $b \in P(V)$ neka je $\{e_1, \ldots, e_n\}$ ortonormirana baza od V sastavljena od svojstvenih vektora operatora b i neka su $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ pripadne svojstvene vrijednosti:

$$be_i = \lambda_i e_i, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Za $c \in P(V)$ je i $c^{-1} \in P(V)$; neka je $[c_{ij}]_{i,j=1}^n$ matrica operatora c^{-1} u odabranoj bazi. Tada su $\lambda_i > 0$ i $c_{ii} > 0$ za $i = 1, \ldots, n$ i vrijedi

$$r(b, c) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i c_{ii}. \tag{4.14}$$

Pomoću ove formule ustanovit ćemo neka korisna svojstva funkcija r i ρ_Ω. U daljnjem sa $\| \cdot \|$ označavamo normu na unitarnom prostoru V i pripadnu operatorsku normu na $L(V)$. Za hermitski operator $a \in H(V)$ je

$$\|a\| = \max\{|\lambda|;\ \lambda \in Sp(a)\}.$$

Posebno, uz malo prije uvedene oznake je $\|b\| = \max\{\lambda_i;\ i = 1, \ldots, n\}$.

Lema 4.4.2. *Neka je Ω kompaktan podskup od $P(V)$. Postoji $m > 0$ takav da je*

$$\rho_\Omega(b) \geq m\|b\| \qquad \forall b \in P(V). \tag{4.15}$$

Dokaz: Fiksirajmo ortonormiranu bazu $e = \{e_1, \ldots, e_n\}$ od V. Tada je $\{ae;\ a \in O(V)\}$ skup svih ortonormiranih baza u V. Za $c \in P(V)$ i $a \in O(V)$ označimo sa $[m_{ij}(c, a)]_{i,j=1}^n$ matricu operatora c^{-1} u bazi ae. Tada su $m_{ii}(c, a) > 0$ za $i = 1, \ldots, n$. Funkcije $m_{ii} : \Omega \times O(V) \to \mathbb{R}_+^*$ su neprekidne, pa zbog kompaktnosti Ω i $O(V)$ postoji $m > 0$ takav da je

$$m_{ii}(c, a) \geq m \qquad \forall (c, a) \in \Omega \times O(V) \quad \text{za} \quad i = 1, \ldots, n.$$

Za $b \in P(V)$ neka je kao malo prije $Sp(b) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$. Tada iz (4.14) slijedi

$$r(b, c) \geq m \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \geq m\|b\| \qquad \forall c \in \Omega.$$

Kako je $b \in P(V)$ proizvoljan, slijedi (4.15).

Lema 4.4.3. *Neka je Ω kompaktan podskup od $P(V)$ i neka je F podskup od $P(V)$ koji je zatvoren u $H(V)$. Tada funkcija ρ_Ω dostiže svoj infimum na skupu F, tj. postoji $b_0 \in F$ takav da je $\rho_\Omega(b) \geq \rho_\Omega(b_0)$ za svaki $b \in F$.*

Dokaz: Neka je $b_1 \in F$ proizvoljno izabran. Stavimo

$$B = \{b \in F;\ \rho_\Omega(b) \leq \rho_\Omega(b_1)\}.$$

Skup B je kompaktan. Doista, taj je skup zatvoren u $H(V)$ zbog neprekidnosti funkcije ρ_Ω. Nadalje, iz leme 4.4.2. slijedi da je taj skup i ograničen (sadržan je u kugli $\|b\| \leq \frac{1}{m}\rho_\Omega(b_1)$). Neka je $b_0 \in B$ točka takva da je $\rho_\Omega(b) \geq \rho_\Omega(b_0)$ $\forall b \in B$. Tada je b_0 tražena točka iz F, jer je $b_1 \in B$, pa za $b \in F \setminus B$ imamo

$$\rho_\Omega(b) > \rho_\Omega(b_1) \geq \rho_\Omega(b_0).$$

Lema 4.4.4. *Neka je Ω kompaktan topološki prostor i $F : \mathbb{R} \times \Omega \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija takva da je za svaki $c \in \Omega$ funkcija $t \mapsto F(t, c)$ striktno konveksna na $\mathbb{R}$. Tada je funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definirana sa*

$$f(t) = \max\{F(t, c);\ c \in \Omega\}, \qquad t \in \mathbb{R},$$

striktno konveksna na $\mathbb{R}$.

Dokaz: Za fiksno $t \in \mathbb{R}$ realna funkcija $c \mapsto F(t,c)$ je neprekidna na kompaktnom prostoru Ω, pa postoji točka $c(t) \in \Omega$ takva da je $F(t,c) \leq F(t,c(t))\ \ \forall c \in \Omega$. Sada za proizvoljne realne brojeve $a < t < b$ imamo

$$f(t) = F(t,c(t)) < F(a,c(t))\frac{b-t}{b-a} + F(b,c(t))\frac{t-a}{b-a} \leq f(a)\frac{b-t}{b-a} + f(b)\frac{t-a}{b-a}.$$

Lema 4.4.5. *Neka je $b \in P(V)$ i neka je Ω kompaktan podskup od $P(V)$. Funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definirana sa*

$$f(t) = \rho_\Omega\left(b^t\right), \qquad t \in \mathbb{R},$$

je striktno konveksna na $\mathbb{R}$.

Dokaz: Izaberimo opet ortonormiranu bazu $\{e_1, \ldots, e_n\}$ od V sastavljenu od svojstvenih vektora operatora sa svojstvenim vrijednostima $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ i za $c \in \Omega$ neka je opet $[c_{ij}]_{i,j=1}^n$ matrica od c^{-1} u toj bazi. Tada je $b^t e_i = \lambda_i^t e_i$, pa imamo

$$r\left(b^t, c\right) = \sum_{i=1}^n c_{ii}\lambda_i^t = \sum_{i=1}^n c_{ii}\mathrm{e}^{t\log\lambda_i}.$$

Kako su svi $c_{ii} > 0$ funkcija $t \mapsto r\left(b^t, c\right)$ je striktno konveksna na $\mathbb{R}$. No prema lemi 4.4.4. tada je i funkcija

$$f(t) = \max\left\{r\left(b^t, c\right);\ c \in \Omega\right\}, \qquad t \in \mathbb{R},$$

striktno konveksna na $\mathbb{R}$.

Teorem 4.4.6. *Neka je (K, P) Cartanova dekompozicija od $G = Aut(\mathfrak{g}_0)$ i neka je L kompaktna podgrupa od G (odnosno, od $G^0 = Int(\mathfrak{g}_0)$.) Tada postoji $q \in P$ takav da je $q^{-1}Lq \subseteq K$ (odnosno, $q^{-1}Lq \subseteq K^0$).*

Dokaz: Neka je ϑ Cartanova involucija pridružena Cartanovoj dekompoziciji (K, P) od G. Neka je $B = B_{\mathfrak{g}_0}$ Killingova forma od $\mathfrak{g}_0$ i $(\,\cdot\,|\,\cdot\,) = (\,\cdot\,|\,\cdot\,)_\vartheta$ skalarni produkt na $\mathfrak{g}_0$ pridružen ϑ :

$$(x|y) = -B(x, \vartheta(y)), \qquad x, y \in \mathfrak{g}_0.$$

Tada je $K = G \cap O(\mathfrak{g}_0)$ i $P = G \cap P(\mathfrak{g}_0)$. Za $\varphi \in G$ i $p \in P$ prema zadatku 4.2.1. je $\varphi p \varphi^* \in G$. Očito je $\varphi p \varphi^* \in P(\mathfrak{g}_0)$. Prema tome, ako stavimo $T_\varphi(p) = \varphi p \varphi^*$, preslikavanje $\varphi \mapsto T_\varphi$ definira analitičko djelovanje Liejeve grupe G na analitičkoj mnogostrukosti P. To djelovanje je tranzitivno, jer za $p \in P$ je i $p^{\frac{1}{2}} \in P$ i vrijedi $T_{p^{\frac{1}{2}}}(e) = p$. Štoviše, djelovanje komponente povezanosti jedinice $G^0 = Int(\mathfrak{g}_0)$ od G također je tranzitivno na P jer je $P \subseteq G^0$. Stabilizator jedinice e pri tom djelovanju prema zadatku 4.2.1. je

$$\{\varphi \in G;\ \varphi\varphi^* = e\} = \{\varphi \in G;\ \varphi\vartheta\varphi^{-1}\vartheta = e\} = \{\varphi \in G;\ \varphi\vartheta = \vartheta\varphi\} = K.$$

Nadalje, stabilizator u G^0 je $G^0 \cap K = K^0$. Prema tome, preslikavanje $\varphi K \mapsto T_\varphi(e) = \varphi\varphi^*$ (odnosno, $\varphi K^0 \mapsto \varphi\varphi^*$) je analitički difeomorfizam sa G/K (odnosno, sa G^0/K^0) na P. Cilj nam je da dokažemo da postoji točka q mnogostrukosti P koja je fiksna za djelovanje grupe L. To znači da je točka qK mnogostrukosti G/K fiksna za lijevo djelovanje grupe L, odnosno

$$\varphi qK = qK \quad \forall \varphi \in L \qquad \Longrightarrow \qquad q^{-1}\varphi qK = K \quad \forall \varphi \in L \qquad \Longrightarrow \qquad q^{-1}Lq \subseteq K.$$

Ako je $L \subseteq G^0$, dobivamo $q^{-1}Lq \subseteq K \cap G^0 = K^0$.

Dakle, treba dokazati da na mnogostrukosti P postoji $L-$fiksna točka. Zbog teorema 4.3.3. skup $P = \exp(ad\,\mathfrak{p})$ je zatvoren u $G^0 = Int(\mathfrak{g}_0)$. Budući da se $\mathfrak{g}_0 \simeq ad\,\mathfrak{g}_0$ podudara sa svojom komutatorskom podalgebrom $[\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_0]$, vrijedi $Tr\,ad\,x = 0$ za svaki $x \in \mathfrak{g}_0$. To pokazuje da je $ad\,\mathfrak{g}_0 \subseteq \mathfrak{sl}(\mathfrak{g}_0)$, a odatle je $G^0 = Int(\mathfrak{g}_0) \subseteq SL(\mathfrak{g}_0)$. Kako je $G \cap SL(\mathfrak{g}_0)$ zatvorena podgrupa od $SL(\mathfrak{g}_0)$, a G^0 je zatvorena podgrupa od G, slijedi da je G^0 zatvorena podgrupa od $SL(\mathfrak{g}_0)$. No $SL(\mathfrak{g}_0)$ je zatvoren podskup od $L(\mathfrak{g}_0)$, pa zaključujemo da je $Int(\mathfrak{g}_0)$ zatvoren podskup prostora linearnih operatora $L(\mathfrak{g}_0)$. Prema tome, $P = \{\varphi \in G^0;\ \vartheta\varphi\vartheta = \varphi^{-1}\}$ je zatvoren podskup od $H(\mathfrak{g}_0)$.

Neka je $r : P \times P \to \mathbb{R}$ restrikcija funkcije definirane sa (4.12) za $V = \mathfrak{g}_0$, a za kompaktan podskup Ω od P neka je ρ_Ω restrikcija na P funkcije definirane sa (4.13). Primijenimo li lemu 4.4.3. na podskup $F = P$, zaključujemo da postoji točka $\varphi_0 \in P$ takva da je $\rho_\Omega(\varphi_0) \leq \rho_\Omega(\varphi)$ $\forall\varphi \in P$. Dokazat ćemo sada da je takva točka φ_0 jedinstvena. Prije svega, uočimo da je funkcija r invarijantna u odnosu na djelovanje grupe G na P. Doista, za $\alpha \in G$ i $\varphi, \psi \in P$ imamo

$$r(T_\alpha(\varphi), T_\alpha(\psi)) = r(\alpha\varphi\alpha^*, \alpha\psi\alpha^*) = Tr\ \left(\alpha\varphi\alpha^*(\alpha\psi\alpha^*)^{-1}\right) = Tr\ \left(\alpha\psi\alpha^*(\alpha^*)^{-1}\psi^{-1}\alpha^{-1}\right) =$$

$$= Tr\ \left(\alpha\varphi\psi^{-1}\alpha^{-1}\right) = Tr\ \left(\varphi\psi^{-1}\right) = r(\varphi, \psi).$$

Odatle slijedi da je

$$\rho_\Omega\left(T_\alpha(\varphi)\right) = \rho_{T_{\alpha^{-1}}(\Omega)}(\varphi), \qquad \alpha \in G, \quad \varphi \in P \tag{4.16}$$

Kako je djelovanje grupe G tranzitivno, možemo pretpostaviti da je $\varphi_0 = e$ jedinica u grupi G. Pretpostavimo da je i $\varphi \in P$ točka minimuma za funkciju ρ_Ω. Promatrajmo realnu funkciju f realne varijable t definiranu sa

$$f(t) = \rho_\Omega\left(\varphi^t\right), \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Tada su 0 i 1 dvije točke minimuma za funkciju f. Prema lemi 4.4.5. funkcija f je striktno konveksna na $\mathbb{R}$, pa dobivamo kontradikciju $f(t) < f(0) = f(1)$ za $0 < t < 1$.

Prema tome, za svaki kompaktan podskup Ω od P funkcija ρ_Ω ima jedinstvenu točku minimuma na P. Sada za Ω uzmimo $L-$orbitu jedinice na P, tj. $\Omega = \{\alpha\alpha^*;\ \alpha \in L\}$. To je $L-$invarijantan kompaktan podskup od P. Prema (4.16) funkcija ρ_Ω je $L-$invarijantna. Odatle slijedi da je jedinstvena točka minimuma funkcije ρ_Ω fiksna u odnosu na djelovanje grupe L.

Teorem 4.4.7. *Neka su K i L maksimalne kompaktne podgrupe grupe $G = Aut(\mathfrak{g}_0)$ (odnosno, grupe $G^0 = Int(\mathfrak{g}_0)$). Tada postoji $x \in G^0$ takav da je $L = xKx^{-1}$.*

Dokaz: Možemo pretpostaviti da je K prvi član Cartanove dekompozicije (K, P) od G (odnosno, od G^0). Prema teoremu 4.4.6. postoji $x \in P$ takav da je $x^{-1}Lx \subseteq K$. Budući da su $x^{-1}Lx$ i K maksimalne kompaktne podgrupe od G (odnosno, od G^0), slijedi $x^{-1}Lx = K$, tj. $L = xKx^{-1}$.

Korolar 4.4.8. *Svaka maksimalna kompaktna podgrupa grupe $G = Aut(\mathfrak{g}_0)$ (odnosno, grupe G^0) je prvi član neke Cartanove dekompozicije od G (odnosno, od G^0).*

4.5 Cartanovi potprostori

Neka je $(\mathfrak{k}, \mathfrak{p})$ Cartanova dekompozicija realne poluproste Liejeve algebre $\mathfrak{g}_0$ i neka je ϑ pripadna Cartanova involucija. Nadalje, neka su kao i prije

$$K = \{k \in Aut(\mathfrak{g}_0);\ \vartheta k = k\vartheta\}, \qquad K^0 = K \cap Int(\mathfrak{g}_0) = \text{komponenta povezanosti od } K,$$

$$P = \exp\, \mathfrak{p} = Aut(\mathfrak{g}_0) \cap P(\mathfrak{g}_0) = \left\{g \in Aut(\mathfrak{g}_0);\ \vartheta g \vartheta = g^{-1}\right\}.$$

Podsjetimo se da tada iz $[\mathfrak{k}, \mathfrak{p}] \subseteq \mathfrak{p}$ slijedi $k\mathfrak{p} = \mathfrak{p}\ \forall k \in K$. Nadalje, $Aut(\mathfrak{g}_0) = KP$ i $Int(\mathfrak{g}_0) = K^0P$.

Ako je Liejeva podalgebra $\mathfrak{a}$ od $\mathfrak{g}_0$ sadržana u $\mathfrak{p}$, ona je komutativna, jer je

$$[\mathfrak{a}, \mathfrak{a}] \subseteq \mathfrak{a} \cap [\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] \subseteq \mathfrak{a} \cap \mathfrak{k} \subseteq \mathfrak{p} \cap \mathfrak{k} = \{0\}.$$

Maksimalni elementi u skupu Liejevih podalgebri od $\mathfrak{g}_0$ sadržanih u $\mathfrak{p}$ zovu se **Cartanovi potprostori** od $\mathfrak{p}$. Ako je $\mathfrak{a}$ Cartanov potprostor od $\mathfrak{p}$ i $k \in K$, tada je očito i $k\mathfrak{a}$ Cartanov potprostor od $\mathfrak{p}$.

Teorem 4.5.1. *Ako su $\mathfrak{a}$ i $\mathfrak{a}'$ Cartanovi potprostori od $\mathfrak{p}$, postoji $k \in K^0$ takav da je $\mathfrak{a}' = k\mathfrak{a}$.*

Dokaz: Neka je B Killingova forma od $\mathfrak{g}_0$. Znamo da je restrikcija $B|\mathfrak{k} \times \mathfrak{k}$ negativno definitna, a restrikcija $B|\mathfrak{p} \times \mathfrak{p}$ je pozitivno definitna. Nadalje, Killingova forma B je $Aut(\mathfrak{g}_0)-$invarijantna. Fiksirajmo sada $y \in \mathfrak{a}$ i $y' \in \mathfrak{a}'$ i definiramo analitičku funkciju $f : K^0 \to \mathbb{R}$ sa

$$f(k) = B(ky, y'), \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Zbog kompaktnosti K^0 funkcija f dostiže svoj infimum na K^0, tj. postoji element $k \in K^0$ takav da je $f(k) \leq f(k')\ \forall k' \in K^0$. Za $x \in \mathfrak{k}$ definiramo analitičku funkciju $\varphi_x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sa

$$\varphi_x(t) = f\left(\mathrm{e}^{t\, ad\, x}k\right) = B\left(\mathrm{e}^{t\, ad\, x}ky, y'\right).$$

Tada funkcija φ_x ima minimum u nuli, pa joj je derivacija u nuli jednaka nuli:

$$0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} B\left(\mathrm{e}^{t\, ad\, x}ky, y'\right)\bigg|_{t=0} = B((ad\, x)ky, y') = B([x, ky], y') =$$

$$= -B(ky, [x, y']) = B(ky, [y', x]) = B([ky, y'], x).$$

Prema tome, $B([ky, y'], x) = 0\ \forall x \in \mathfrak{k}$. Kako je $[ky, y'] \in [\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] \subseteq \mathfrak{k}$, a restrikcija $B|\mathfrak{k} \times \mathfrak{k}$ je negativno definitna, slijedi $[ky, y'] = 0$. Kako je $y' \in \mathfrak{a}'$ bio proizvoljno odabran, slijedi $[ky, \mathfrak{a}'] = \{0\}$. Međutim, $\mathfrak{a}'$ je Cartanov potprostor od $\mathfrak{p}$, pa slijedi da je $ky \in \mathfrak{a}'$. Ali i element $y \in \mathfrak{a}$ je bio proizvoljno odabran, pa zaključujemo da je $k\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{a}'$. Kako su i $k\mathfrak{a}$ i $\mathfrak{a}'$ maksimalne podalgebre od $\mathfrak{g}_0$ sadržane u $\mathfrak{p}$, dobivamo jednakost $k\mathfrak{a} = \mathfrak{a}'$.

Cartanov potprostor Liejeve algebre $\mathfrak{g}_0$ je (komutativna) Liejeva podalgebra $\mathfrak{a}$ od $\mathfrak{g}_0$ takva da je $\mathfrak{a}$ Cartanov potprostor od $\mathfrak{p}$ za neku Cartanovu dekompoziciju $(\mathfrak{k}, \mathfrak{p})$ od $\mathfrak{g}_0$. Ako je $\mathfrak{a}$ Cartanov potprostor od $\mathfrak{g}_0$, onda je i $g\mathfrak{a}$ Cartanov potprostor od $\mathfrak{g}_0$ za svaki $g \in Aut(\mathfrak{g}_0)$.

Korolar 4.5.2. *Neka su $\mathfrak{a}$ i $\mathfrak{a}'$ Cartanovi potprostori od $\mathfrak{g}_0$. Postoji $g \in Int(\mathfrak{g}_0)$ takav da je $\mathfrak{a}' = g\mathfrak{a}$. Posebno,* $\dim\, \mathfrak{a} = \dim\, \mathfrak{a}'$.

Dimenzija Cartanovog potprostora od $\mathfrak{g}_0$ zove se **realni rang** poluproste Liejeve algebre $\mathfrak{g}_0$.

Zadatak 4.5.1. *Dokažite korolar 4.5.2.*

Uputa: Koristite tvrdnju (b) teorema 4.2.1.

Korolar 4.5.3. *Neka je $\mathfrak{a}$ Cartanov potprostor od $\mathfrak{p}$. Tada za svaki $x \in \mathfrak{p}$ postoje $y \in \mathfrak{a}$ i $k \in K^0$ takvi da je $x = ky$. Drugim riječima, vrijedi*

$$\mathfrak{p} = \bigcup_{k \in K^0} k\mathfrak{a}.$$

Zadatak 4.5.2. *Dokažite korolar 4.5.3.*

Uputa: Uočite da je $\mathbb{R}x$ Liejeva podalgebra od $\mathfrak{g}_0$ sadržana u $\mathfrak{p}$, dakle, x je sadržan u nekom Cartanovom potprostoru od $\mathfrak{p}$.

U daljnjem za Cartanov potprostor $\mathfrak{a}$ od $\mathfrak{p}$ sa A označavamo povezanu Liejevu podgrupu od $Int(\mathfrak{g}_0)$ s Liejevom algebrom $\mathfrak{a}$. Budući da je po teoremu 4.3.3. $\exp|\mathfrak{p}$ bianalitičko preslikavanje sa $\mathfrak{p}$ na P, vrijedi $A = \exp \mathfrak{a}$ i restrikcija $\exp|\mathfrak{a}$ je bianalitičko preslikavanje sa $\mathfrak{a}$ na A. Štoviše, kako je $\exp(x+y) = (\exp x)(\exp y)$ za $x, y \in \mathfrak{a}$, restrikcija $\exp|\mathfrak{a}$ je izomorfizam aditivne grupe $\mathfrak{a}$ na grupu A.

Korolar 4.5.4. *Uz uvedene oznake vrijedi*

$$P = \bigcup_{k \in K^0} kAk^{-1}.$$

Dokaz: Iz $k\mathfrak{p} = \mathfrak{p}\ \ \forall k \in K$ eksponenciranjem slijedi $kPk^{-1} = P\ \ \forall k \in K$. Posebno, imamo inkluziju

$$\bigcup_{k \in K^0} kAk^{-1} \subseteq P.$$

Neka je $p \in P$ i neka je x jedinstven element $\mathfrak{p}$ takav da je $p = \exp x = \mathrm{e}^{ad\,x}$. Prema korolaru 4.5.3. postoje $k \in K^0$ i $y \in \mathfrak{a}$ takvi da je $x = ky$. Tada za $a = \exp y = \mathrm{e}^{ad\,y}$ imamo

$$kak^{-1} = k\mathrm{e}^{ad\,y}k^{-1} = \mathrm{e}^{k(ad\,y)k^{-1}} = \mathrm{e}^{ad\,ky} = \mathrm{e}^{ad\,x} = p.$$

Prema tome, vrijedi i obrnuta inkluzija

$$P \subseteq \bigcup_{k \in K^0} kAk^{-1}.$$

Korolar 4.5.5. *Vrijedi $Aut(\mathfrak{g}_0) = KAK = KAK^0 = K^0AK$ i $Int(\mathfrak{g}_0) = K^0AK^0$.*

Zadatak 4.5.3. *Dokažite korolar 4.5.5.*

Zadatak 4.5.4. *Neka je $\mathfrak{g}$ kompleksna poluprosta Liejeva algebra. Dokažite da je svaki Cartanov potprostor od $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ oblika $i\mathfrak{t}_0$, gdje je $\mathfrak{t}_0$ Cartanova podalgebra neke kompaktne forme od $\mathfrak{g}$. Posebno, realni rang od $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ jednak je rangu kompleksne Liejeve algebre $\mathfrak{g}$.*

Za $\lambda \in \mathfrak{a}^*$ definiramo pripadni tzv. **restringirani korijenski potprostor** od $\mathfrak{g}_0$:

$$\mathfrak{g}_0^\lambda = \{x \in \mathfrak{g}_0;\ [h, x] = \lambda(h)x\ \forall h \in \mathfrak{a}\}.$$

Stavimo

$$R(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{a}) = \{\lambda \in \mathfrak{a}^*;\ \mathfrak{g}_0^\lambda \neq \{0\} \text{ i } \lambda \neq 0\}.$$

Elementi od $R(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{a})$ zovu se **restringirani korijeni** od $\mathfrak{g}_0$ u odnosu na Cartanov potprostor $\mathfrak{a}$.

Nadalje, definiramo Liejevu podalgebru $\mathfrak{m}$ od $\mathfrak{k}$ kao centralizator od $\mathfrak{a}$ u $\mathfrak{k}$:

$$\mathfrak{m} = Z_{\mathfrak{k}}(\mathfrak{a}) = \{x \in \mathfrak{k};\ [x, h] = 0\ \forall h \in \mathfrak{a}\}.$$

Teorem 4.5.6. *(a) Vrijedi*

$$\mathfrak{g}_0^0 = \mathfrak{m} \dotplus \mathfrak{a}, \qquad \mathfrak{g}_0 = \mathfrak{m} \dotplus \mathfrak{a} \dotplus \sum_{\lambda \in R(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{a})} \dotplus \mathfrak{g}_0^\lambda.$$

(b) *Za* $\lambda, \mu \in \mathfrak{a}^*$ *je* $[\mathfrak{g}_0^\lambda, \mathfrak{g}_0^\mu] \subseteq \mathfrak{g}_0^{\lambda+\mu}$.

(c) *Za* $\lambda \in \mathfrak{a}^*$ *je* $\vartheta(\mathfrak{g}_0^\lambda) = \mathfrak{g}_0^{-\lambda}$*; posebno,* $-R(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{a}) = R(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{a})$.

(d) *Liejeva podalgebra* $\mathfrak{m}$ *je reduktivna u* $\mathfrak{g}_0$.

(e) *Svaka maksimalna komutativna podalgebra* $\mathfrak{h}_\mathfrak{m}$ *od* $\mathfrak{m}$ *je Cartanova podalgebra od* $\mathfrak{m}$*, a suma* $\mathfrak{h}_0 = \mathfrak{h}_\mathfrak{m} \dotplus \mathfrak{a}$ *je Cartanova podalgebra od* $\mathfrak{g}_0$.

(f) *Uz oznake iz (e) neka je* $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_0^\mathbb{C} = \mathfrak{h}_0 \dotplus i\mathfrak{h}_0$ *pripadna Cartanova podalgebra kompleksifikacije* $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0^\mathbb{C}$ *i* $R = R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$*. Tada je*

$$R(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{a}) = \{\alpha|\mathfrak{a};\ \alpha \in R,\ \alpha|\mathfrak{a} \neq 0\}$$

i za svaki $\lambda \in R(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{a})$ *je*

$$\mathfrak{g}_0^\lambda = \mathfrak{g}_0 \bigcap \left(\sum_{\alpha \in R,\, \alpha|\mathfrak{a} = \lambda} \dotplus \mathfrak{g}_\alpha \right).$$

(g) *Uz oznake iz (e) stavimo* $R_\mathfrak{m} = \{\alpha \in R;\ \alpha|\mathfrak{a} = 0\}$*. Za* $\alpha \in R_\mathfrak{m}$ *vrijedi* $\mathfrak{g}_\alpha \subseteq \mathfrak{m}^\mathbb{C}$*. Štoviše,*

$$\mathfrak{m}^\mathbb{C} = (\mathfrak{h}_\mathfrak{m})^\mathbb{C} \dotplus \sum_{\alpha \in R_\mathfrak{m}} \dotplus \mathfrak{g}_\alpha.$$

Zadatak 4.5.5. *Dokažite tvrdnje (b) i (c) teorema 4.5.6.*

Dokaz teorema 4.5.6.: (a) Budući da su svi operatori $ad\,h$, $h \in \mathfrak{a}$, hermitski (u odnosu na skalarni produkt $(\cdot|\cdot)_\vartheta$) i međusobno komutiraju, prostor $\mathfrak{g}_0$ je direktna suma simultanih svojstvenih potprostora $\mathfrak{g}_0^\lambda$:

$$\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g}_0^0 \dotplus \sum_{\lambda \in R(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{a})} \dotplus \mathfrak{g}_0^\lambda.$$

Nadalje, očito je $\mathfrak{m} \dotplus \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{g}_0^0$. Uočimo sada da je $\vartheta \mathfrak{g}_0^0 = \mathfrak{g}_0^0$. Doista, $\vartheta|\mathfrak{p} = -I_\mathfrak{p}$, pa je $\vartheta(h) = -h$ $\forall h \in \mathfrak{a}$, a odatle za $x \in \mathfrak{g}_0^0$ imamo

$$[\vartheta(x), h] = -[\vartheta(x), \vartheta(h)] = -\vartheta([x, h]) = 0 \quad \forall h \in \mathfrak{a} \qquad \Longrightarrow \qquad \vartheta(x) \in \mathfrak{g}_0^0.$$

To znači da je $\mathfrak{g}_0^0 = \mathfrak{g}_0^0 \cap \mathfrak{k} \dotplus \mathfrak{g}_0^0 \cap \mathfrak{p}$. Međutim, $\mathfrak{g}_0^0 \cap \mathfrak{k} = \mathfrak{m}$, a kako je $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{g}_0^0 \cap \mathfrak{p}$, zbog maksimalnosti od $\mathfrak{a}$ slijedi $\mathfrak{g}_0^0 \cap \mathfrak{p} = \mathfrak{a}$.

(d) Svi operatori $ad\,x$ za $x \in \mathfrak{k}$ su antihermitski u odnosu na skalarni produkt $(\cdot|\cdot)_\vartheta$ na prostoru $\mathfrak{g}_0$. Posebno, vrijedi $(ad\,\mathfrak{m})^* = ad\,\mathfrak{m}$. Dakle, ako je $\mathfrak{c}$ potprostor od $\mathfrak{g}_0$ koji je $(ad\,\mathfrak{m})-$invarijantan, onda je njegov ortogonalni komplement $\mathfrak{c}^\perp$ također $(ad\,\mathfrak{m})-$invarijantan. To pokazuje da je reprezentacija $ad|\mathfrak{m}$ Liejeve algebre $\mathfrak{m}$ na prostoru $\mathfrak{g}_0$ potpuno redeucibilna, odnosno, da je $\mathfrak{m}$ reduktivna u $\mathfrak{g}_0$.

(e) Iz kompaktnosti Liejeve algebre $\mathfrak{m}$ slijedi da je svaka maksimalna komutativna podalgebra $\mathfrak{h}_\mathfrak{m}$ od $\mathfrak{m}$ Cartanova podalgebra od $\mathfrak{m}$. Nadalje, suma $\mathfrak{h}_0 = \mathfrak{h}_\mathfrak{m} \dotplus \mathfrak{a}$ je komutativna podalgebra od $\mathfrak{g}_0$ jer su i $\mathfrak{h}_\mathfrak{m}$ i $\mathfrak{a}$ komutativne i jer je $\mathfrak{h}_\mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{m} = Z_\mathfrak{k}(\mathfrak{a})$. Svi elementi od $\mathfrak{h}_\mathfrak{m}$ i od $\mathfrak{a}$ su poluprosti, pa zbog komutativnosti zaključujemo da se $\mathfrak{h}_0$ sastoji od poluprostih elemenata, odnosno, da je $\mathfrak{h}_0$

toralna podalgebra od $\mathfrak{g}_0$. Neka je $x \in Z_{\mathfrak{g}_0}(\mathfrak{h}_0)$. Tada je i $\vartheta(x) \in Z_{\mathfrak{g}_0}(\mathfrak{h}_0)$, jer je $\vartheta(\mathfrak{h}_0) = \mathfrak{h}_0$. Prema tome, $x \pm \vartheta(x) \in Z_{\mathfrak{g}_0}(\mathfrak{h}_0)$. Sada je

$$x + \vartheta(x) \in \mathfrak{k} \cap Z_{\mathfrak{g}_0}(\mathfrak{h}_0) = Z_{\mathfrak{k}}(\mathfrak{h}_0) \subseteq Z_{\mathfrak{m}}(\mathfrak{h}_{\mathfrak{m}}) = \mathfrak{h}_{\mathfrak{m}}$$

i

$$x - \vartheta(x) \in \mathfrak{p} \cap Z_{\mathfrak{g}_0}(\mathfrak{h}_0) = Z_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{h}_0) \subseteq Z_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{a}) = \mathfrak{a}.$$

Prema tome,

$$x = \frac{1}{2}(x + \vartheta(x)) + \frac{1}{2}(x - \vartheta(x)) \in \mathfrak{h}_{\mathfrak{m}} + \mathfrak{a} = \mathfrak{h}_0.$$

To pokazuje da je $Z_{\mathfrak{g}_0}(\mathfrak{h}_0) = \mathfrak{h}_0$, odnosno, $\mathfrak{h}_0$ je maksimalna komutativna podalgebra od $\mathfrak{g}_0$, a time i maksimalna toralna podalgebra od $\mathfrak{g}_0$, dakle, Cartanova podalgebra od $\mathfrak{g}_0$.

(f) Za $\lambda \in \mathfrak{a}^* \setminus \{0\}$ stavimo

$$\mathfrak{g}^\lambda = \sum_{\alpha \in R,\, \alpha|\mathfrak{a} = \lambda} \dot{+}\, \mathfrak{g}_\alpha.$$

Neka je $\{\alpha \in R;\ \alpha|\mathfrak{a} = \lambda\} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\}$. Neka je $x \in \mathfrak{g}^\lambda$. Tada postoje jedinstveni $x_i \in \mathfrak{g}_{\alpha_i}$, $i = 1, \ldots, k$, takvi da je $x = x_1 + \cdots + x_k$. Budući da je $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{h}$, za svaki $h \in \mathfrak{a}$ nalazimo

$$[h, x] = \sum_{i=1}^k [h, x_i] = \sum_{i=1}^k \alpha_i(h) x_i = \lambda(h) \sum_{i=1}^k x_i = \lambda(h) x.$$

To pokazuje da je

$$\mathfrak{g}_0 \cap \mathfrak{g}^\lambda \subseteq \mathfrak{g}_0^\lambda. \tag{4.17}$$

Za $x \in \mathfrak{g}_0^\lambda$, $h \in \mathfrak{a}$ i $h' \in \mathfrak{h}_0$ pomoću Jacobijevog identiteta dobivamo

$$[h, [h', x]] = [[h, h'], x] + [h', [h, x]] = [h', \lambda(h) x] = \alpha(h)[h', x].$$

Dakle, $[\mathfrak{h}_0, \mathfrak{g}_0^\lambda] \subseteq \mathfrak{g}_0^\lambda$, a odatle

$$\left[\mathfrak{h}, \left(\mathfrak{g}_0^\lambda\right)^{\mathbb{C}}\right] \subseteq \left(\mathfrak{g}_0^\lambda\right)^{\mathbb{C}} = \mathfrak{g}_0^\lambda \dot{+} i\mathfrak{g}_0^\lambda.$$

Operatori $ad_{\mathfrak{g}}\, h$, $h \in \mathfrak{h}$, su poluprosti i međusobno komutiraju. Pripadni svojstveni rastav prostora $\mathfrak{g}$ je

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \dot{+} \sum_{\alpha \in R} \dot{+}\, \mathfrak{g}_\alpha$$

pa za $ad_{\mathfrak{g}}\, \mathfrak{h}-$invarijantan potprostor $\left(\mathfrak{g}_0^\lambda\right)^{\mathbb{C}}$ dobivamo

$$\left(\mathfrak{g}_0^\lambda\right)^{\mathbb{C}} = \mathfrak{h} \cap \left(\mathfrak{g}_0^\lambda\right)^{\mathbb{C}} \dot{+} \sum_{\alpha \in R} \dot{+} \left(\mathfrak{g}_\alpha \cap \left(\mathfrak{g}_0^\lambda\right)^{\mathbb{C}}\right). \tag{4.18}$$

Očito je $\mathfrak{h} \cap \left(\mathfrak{g}_0^\lambda\right)^{\mathbb{C}} = \{0\}$. Kako su svi $\mathfrak{g}_\alpha$, $\alpha \in R$, jednodimenzionalni, vrijedi ili $\mathfrak{g}_\alpha \subseteq \left(\mathfrak{g}_0^\lambda\right)^{\mathbb{C}}$ ili $\mathfrak{g}_\alpha \cap \left(\mathfrak{g}_0^\lambda\right)^{\mathbb{C}} = \{0\}$. Pretpostavimo da je $\mathfrak{g}_\alpha \subseteq \left(\mathfrak{g}_0^\lambda\right)^{\mathbb{C}}$. Za $x \in \mathfrak{g}_\alpha$ i $x_1, x_2 \in \mathfrak{g}_0^\lambda$ takve da je $x = x_1 + i x_2$ imamo za svaki $h \in \mathfrak{a}$

$$\lambda(h) x = \lambda(h) x_1 + i\lambda(h) x_2 = [h, x_1] + i[h, x_2] = [h, x] = \alpha(h) x.$$

Dakle, iz $\mathfrak{g}_\alpha \subseteq \left(\mathfrak{g}_0^\lambda\right)^{\mathbb{C}}$ slijedi da je $\alpha|\mathfrak{a} = \lambda$. Prema tome, (4.18) poprima oblik

$$\left(\mathfrak{g}_0^\lambda\right)^{\mathbb{C}} = \sum_{\alpha \in R,\, \alpha|\mathfrak{a} = \lambda} \dot{+}\, \mathfrak{g}_\alpha = \mathfrak{g}^\lambda. \tag{4.19}$$

Sada iz (4.17) i (4.19) slijedi $\mathfrak{g}_0^\lambda = \mathfrak{g}_0 \cap \mathfrak{g}^\lambda$. To pokazuje da je $\lambda \in R(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{a})$ ako i samo ako je $\lambda = \alpha|\mathfrak{a}$ za neki $\alpha \in R$. Time je (f) u potpunosti dokazano.

(*g*) Za $\alpha \in R_{\mathfrak{m}}$ i $h \in \mathfrak{a}$ je $\alpha(h) = 0$. Dakle, $[\mathfrak{a}, \mathfrak{g}_\alpha] = \{0\}$, odnosno,

$$\mathfrak{g}_\alpha \subseteq Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{a}) = Z_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{a}) \dotplus Z_{\mathfrak{k}}(\mathfrak{a}) = \mathfrak{a}^{\mathbb{C}} \dotplus \mathfrak{m}^{\mathbb{C}}.$$

Neka je $x \in \mathfrak{g}_\alpha$. Tada je $x = x_1 + x_2$ za jedinstvene $x_1 \in \mathfrak{a}^{\mathbb{C}}$ i $x_2 \in \mathfrak{m}^{\mathbb{C}}$. Za $h \in \mathfrak{h}_{\mathfrak{m}}$ je tada $[h, x_1] = 0$, pa nalazimo

$$\alpha(h)x_1 + \alpha(h)x_2 = \alpha(h)x = [h, x] = [h, x_1] + [h, x_2] = [h, x_2].$$

Kako je $[h, x_2] \in \mathfrak{m}^{\mathbb{C}}$, slijedi $x_1 = 0$, odnosno, $x = x_2 \in \mathfrak{m}^{\mathbb{C}}$. Time je dokazano da je $\mathfrak{g}_\alpha \subseteq \mathfrak{m}^{\mathbb{C}}$ za svaki $\alpha \in R_{\mathfrak{m}}$.

$\mathfrak{m}^{\mathbb{C}}$ je očito $ad_{\mathfrak{g}}\mathfrak{h}-$invarijantan potprostor od $\mathfrak{g}$, pa imamo svojstveni rastav

$$\mathfrak{m}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{m}^{\mathbb{C}} \cap \mathfrak{h} \dotplus \sum_{\alpha \in R} \dotplus\, \mathfrak{m}^{\mathbb{C}} \cap \mathfrak{g}_\alpha.$$

Očito je $\mathfrak{m}^{\mathbb{C}} \cap \mathfrak{h} = (\mathfrak{h}_{\mathfrak{m}})^{\mathbb{C}}$. Nadalje, za $\alpha \in R_{\mathfrak{m}}$ smo vidjeli da je $\mathfrak{g}_\alpha \subseteq \mathfrak{m}^{\mathbb{C}}$, pa je $\mathfrak{m}^{\mathbb{C}} \cap \mathfrak{g}_\alpha = \mathfrak{g}_\alpha$. Napokon, za $\alpha \in R \setminus R_{\mathfrak{m}}$ je $\alpha|\mathfrak{a} \neq 0$, pa je $\mathfrak{m}^{\mathbb{C}} \cap \mathfrak{g}_\alpha = \{0\}$. Prema tome, gornji rastav poprima oblik

$$\mathfrak{m}^{\mathbb{C}} = (\mathfrak{h}_{\mathfrak{m}})^{\mathbb{C}} \dotplus \sum_{\alpha \in R_{\mathfrak{m}}} \dotplus\, \mathfrak{g}_\alpha.$$

4.6 Iwasawine dekompozicije

Zadržimo oznake iz prethodnog odjeljka: $\mathfrak{g}_0$ je realna poluprosta Liejeva algebra s kompleksifikacijom $\mathfrak{g}$, $(\mathfrak{k},\mathfrak{p})$ je Cartanova dekompozicija od $\mathfrak{g}_0$ s Cartanovom involucijom ϑ, $\mathfrak{a}$ je Cartanov potprostor od $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{m}=Z_{\mathfrak{k}}(\mathfrak{a})$, $\mathfrak{h}_{\mathfrak{m}}$ Cartanova podalgebra od $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{h}_0=\mathfrak{h}_{\mathfrak{m}}\dotplus\mathfrak{a}$ pripadna Cartanova podalgebra od $\mathfrak{g}_0$ s kompleksifikacijom $\mathfrak{h}$. Nadalje, za $\lambda\in\mathfrak{a}^*$ je $\mathfrak{g}_0^\lambda=\{x\in\mathfrak{g}_0;\ [h,x]=\lambda(h)x\ \forall h\in\mathfrak{a}\}$ i $R(\mathfrak{g}_0,\mathfrak{a})=\{\lambda\in\mathfrak{a}^*;\ \mathfrak{g}_0^\lambda\neq\{0\},\ \alpha\neq0\}$. Izaberimo u $\mathfrak{a}^*$ neku uređenu bazu $(\lambda_1,\ldots,\lambda_r)$ i neka je $<$ leksikografski uređaj na realnom vektorskom prostoru $\mathfrak{a}^*$ u odnosu na tu bazu. To znači da za $\lambda,\lambda'\in\mathfrak{a}^*$ vrijedi

$$\lambda<\lambda'\qquad\Longleftrightarrow\qquad\lambda'-\lambda=\sum_{i=k}^r c_i\lambda_i\quad\text{i } c_k>0 \text{ za neki } k\in\{1,\ldots,r\}.$$

Drugim riječima, ako je $\lambda=a_1\lambda_1+\cdots+a_r\lambda_r$ i $\lambda'=b_1+\cdots+b_r$ za neke $a_1,\ldots,a_r,b_1,\ldots,b_r\in\mathbb{R}$, onda je $\lambda<\lambda'$ ako i samo ako postoji $k\in\{1,\ldots,r\}$ takav da je $a_1=b_1,\ \ldots,a_{k-1}=b_{k-1},\ a_k<b_k$. Umjesto $\lambda<\lambda'$ pisat ćemo i $\lambda'>\lambda$. Očito za bilo koje međusobno različite $\lambda,\lambda'\in\mathfrak{a}^*$ vrijedi ili $\lambda<\lambda'$ ili $\lambda>\lambda'$. Posebno, za svaki $\lambda\in\mathfrak{a}^*\setminus\{0\}$ je ili $\lambda>0$ ili $\lambda<0$ (ali ne oboje). Nadalje, ako je $\lambda<\lambda'$ i $c\in\mathbb{R}_+^*$ onda je $c\lambda<c\lambda'$.

Stavimo sada

$$\Sigma=R(\mathfrak{g}_0,\mathfrak{a}),\qquad\Sigma_+=\{\lambda\in\Sigma;\ \lambda>0\},\qquad\Sigma_-=\{\lambda\in\Sigma;\ \lambda<0\}.$$

Tada je $\Sigma=\Sigma_+\cup\Sigma_-$ i $\Sigma_+\cap\Sigma_-=\emptyset$. Prema tvrdnji (c) teorema 4.5.6. vrijedi $-\Sigma=\Sigma$, a odatle je $\Sigma_-=-\Sigma_+$. Stavimo sada

$$\mathfrak{n}=\sum_{\lambda\in\Sigma_+}\dotplus\,\mathfrak{g}_0^\lambda,\qquad\overline{\mathfrak{n}}=\sum_{\lambda\in\Sigma_-}\dotplus\,\mathfrak{g}_0^\lambda.$$

Propozicija 4.6.1. (a) *$\mathfrak{n}$ i $\overline{\mathfrak{n}}$ su nilpotentne Liejeve podalgebre od $\mathfrak{g}_0$ i $\overline{\mathfrak{n}}=\vartheta(\mathfrak{n})$.*

(b) *$\mathfrak{s}=\mathfrak{a}\dotplus\mathfrak{n}$ je rješiva Liejeva podalgebra od $\mathfrak{g}_0$ i $[\mathfrak{s},\mathfrak{s}]=\mathfrak{n}$.*

(c) *Vrijedi $\mathfrak{g}_0=\overline{\mathfrak{n}}\dotplus\mathfrak{m}\dotplus\mathfrak{a}\dotplus\mathfrak{n}$.*

Zadatak 4.6.1. *Dokažite propoziciju 4.6.1.*

Uputa: Koristite tvrdnje (a), (b) i (c) teorema 4.5.6., jednakost $[\mathfrak{a},\mathfrak{g}_0^\lambda]=\mathfrak{g}_0^\lambda$ i teorem 1.1.9.

Teorem 4.6.2. (**Iwasawina dekompozicija Liejeve algebre**) *Uz uvedene oznake vrijedi*

$$\mathfrak{g}_0=\mathfrak{k}\dotplus\mathfrak{a}\dotplus\mathfrak{n}.$$

Dokaz: Prije svega, prema tvrdnji (c) propozicije 4.6.1. suma $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{n}$ i $\overline{\mathfrak{n}}$ je direktna. Pretpostavimo da je $x\in\mathfrak{k}\cap(\mathfrak{a}\dotplus\mathfrak{n})$. Tada je $x=\vartheta(x)\in\mathfrak{a}\dotplus\overline{\mathfrak{n}}$, pa slijedi $x\in(\mathfrak{a}\dotplus\mathfrak{n})\cap(\mathfrak{a}\dotplus\overline{\mathfrak{n}})=\mathfrak{a}$. No tada je $x\in\mathfrak{k}\cap\mathfrak{p}=\{0\}$, tj. $x=0$. Time je dokazano da je suma potprostora $\mathfrak{k}$, $\mathfrak{a}$ i $\mathfrak{n}$ direktna.

Prema tvrdnji (a) teorema 4.5.6. za bilo koji $x\in\mathfrak{g}_0$ postoje $h\in\mathfrak{a}$, $x_0\in\mathfrak{m}$ i $x_\lambda\in\mathfrak{g}_0^\lambda$ za $\lambda\in\Sigma$ takvi da je

$$x=h\,+\,x_0\,+\sum_{\lambda\in\Sigma}x_\lambda.$$

Tada je $x=y+h+z$ uz oznake

$$y=x_0\,+\sum_{\lambda\in\Sigma_+}(x_{-\lambda}+\vartheta(x_{-\lambda}))\quad\text{ i }\quad z=\sum_{\lambda\in\Sigma_+}(x_\lambda-\vartheta(x_{-\lambda}))\,.$$

Imamo $x_0\in\mathfrak{m}\subseteq\mathfrak{k}$; nadalje, $\vartheta\left(x_{-\lambda}+\vartheta(x_{-\lambda})\right)=x_{-\lambda}+\vartheta(x_{-\lambda})$ za svaki λ. To pokazuje da je $y\in\mathfrak{k}$. Nadalje, za $\lambda\in\Sigma_+$ je $x_\lambda\in\mathfrak{n}$ i $\vartheta(x_{-\lambda})\in\vartheta\left(\overline{\mathfrak{n}}\right)=\mathfrak{n}$, pa slijedi da je $z\in\mathfrak{n}$. Time je dokazano da je direktna suma $\mathfrak{k}\dotplus\mathfrak{a}\dotplus\mathfrak{n}$ jednaka čitavoj Liejevoj algebri $\mathfrak{g}_0$.

Sljedeći nam je cilj dokazati multiplikativne Iwasawine dekompozicije za grupe $Aut(\mathfrak{g}_0)$ i $Int(\mathfrak{g}_0)$. U tu svrhu promatrajmo najprije situaciju u općoj linearnoj grupi $GL(k, \mathbb{R})$. Neka je $N(k, \mathbb{R})$ skup svih gornje trokutastih realnih $k \times k$ matrica s jedinicama na dijagonali. To je očito zatvorena podgrupa od $GL(k, \mathbb{R})$. Neka je $\mathfrak{n}(k, \mathbb{R})$ njena Liejeva algebra; očito je $\mathfrak{n}(k, \mathbb{R})$ Liejeva algebra svih striktno gornje trokutastih matrica u $\mathfrak{gl}(k, \mathbb{R}) = M_k(\mathbb{R})$. Nadalje, neka je $A(k, \mathbb{R})$ skup svih realnih dijagonalnih $k \times k$ matrica čiji su svi dijagonalni elementi veći od nule. I to je zatvorena podgrupa od $GL(k, \mathbb{R})$ i njena Liejeva algebra $\mathfrak{a}(k, \mathbb{R})$ je skup svih dijagonalnih matrica u $M_k(\mathbb{R})$. Napokon, kao i obično sa $O(k, \mathbb{R})$ označavamo kompaktnu grupu svih ortogonalnih matrica u $GL(k, \mathbb{R})$.

Lema 4.6.3. $\exp : x \mapsto \mathrm{e}^x$ *je bianalitičko preslikavanje sa* $\mathfrak{n}(k, \mathbb{R})$ *na* $N(k, \mathbb{R})$.

Dokaz: Prije svega, jasno je da je $\exp : x \mapsto \mathrm{e}^x$ analitičko preslikavanje sa $\mathfrak{n}(k, \mathbb{R})$ u $N(k, \mathbb{R})$. Ako je $n \in N(k, \mathbb{R})$ onda je $n - I \in \mathfrak{n}(k, \mathbb{R})$, dakle, $n - I$ je nilpotentna matrica. Definiramo sada preslikavanje $\log : N(k, \mathbb{R}) \to M_k(\mathbb{R})$ sa

$$\log(n) = \sum_{j \in \mathbb{N}} \frac{(-1)^{j-1}}{j}(n - I)^j = \sum_{j=1}^{k-1} \frac{(-1)^{j-1}}{j}(n - I)^j.$$

Kako je $n - I \in \mathfrak{n}(k, \mathbb{R})$ i sve potencije $(n - I)^j$ su elementi od $\mathfrak{n}(k, \mathbb{R})$, dakle, log je analitičko preslikavanje sa $N(k, \mathbb{R})$ u $\mathfrak{n}(k, \mathbb{R})$. Za $x \in \mathfrak{n}(k, \mathbb{R})$ i $t \in \mathbb{R}$ stavimo $z(t) = e^{tx} - I$. Tada je

$$\log\left(\mathrm{e}^{tx}\right) = \sum_{j \in \mathbb{N}} \frac{(-1)^{j-1}}{j} z(t)^j,$$

pa slijedi

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \log\left(\mathrm{e}^{tx}\right) = \sum_{j \in \mathbb{N}} \frac{(-1)^{j-1}}{j} j z'(t) z(t)^{j-1} = z'(t) \sum_{j \in \mathbb{N}} (-z(t))^{j-1}.$$

Za svaku nilpotentnu matricu y vrijedi

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}_+} y^j = (I - y)^{-1}.$$

Posebno,

$$\sum_{j \in \mathbb{N}} (-z(t))^{j-1} = \sum_{j \in \mathbb{Z}_+} (-z(t))^j = (I + z(t))^{-1} = \left(\mathrm{e}^{tx}\right)^{-1} = \mathrm{e}^{-tx}.$$

Nadalje,

$$z'(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\mathrm{e}^{tx} - I\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{e}^{tx} = x\mathrm{e}^{tx}.$$

Prema tome,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \log\left(\mathrm{e}^{tx}\right) = x\mathrm{e}^{tx}\mathrm{e}^{-tx} = x.$$

Odatle slijedi da je $\log\left(\mathrm{e}^{tx}\right) = tx + y$ za neku matricu $y \in \mathfrak{n}(k, \mathbb{R})$. Za $t = 0$ nalazimo $y = \log(I) = 0$. Dakle, za $t = 1$ dobivamo

$$\log\left(\mathrm{e}^{x}\right) = x \qquad \text{za svaku matricu} \quad x \in \mathfrak{n}(k, \mathbb{R}).$$

Prema tome, preslikavanje $\log : N(k, \mathbb{R}) \to \mathfrak{n}(k, \mathbb{R})$ je lijevi invers od $\exp : \mathfrak{n}(k, \mathbb{R}) \to N(k, \mathbb{R})$.

S druge strane, analitičko preslikavanje $\exp : \mathfrak{n}(k, \mathbb{R}) \to N(k, \mathbb{R})$ je regularno u nuli. Doista, za $x \in T_0(\mathfrak{n}(k, \mathbb{R})) = \mathfrak{n}(k, \mathbb{R})$ je

$$T_0(\exp)x = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{e}^{tx}\bigg|_{t=0} = x,$$

dakle, diferencijal $T_0(\exp)$ je identiteta na $\mathfrak{n}(k,\mathbb{R})$. Prema tome, (a to znamo i za proizvoljnu Liejevu grupu) postoje okolina V nule u $\mathfrak{n}(k,\mathbb{R})$ i okolina U jedinice I u $N(k,\mathbb{R})$ takve da je $\exp|V$ bianalitičko preslikavanje sa V na U. Vidjeli smo da je preslikavanje $\log : N(k,\mathbb{R}) \to \mathfrak{n}(k,\mathbb{R})$ lijevi invers preslikavanja $\exp : \mathfrak{n}(k,\mathbb{R}) \to N(k,\mathbb{R})$, pa slijedi da je $\log|U$ lijevi invers preslikavanja $\exp|V$. No kako je $\exp|V$ bijekcija sa V na U, zaključujemo da je $\log|U$ i desni invers od $\exp|V$. Prema tome,

$$e^{\log(n)} = n \qquad \forall n \in U.$$

Kako su matrični elementi matrice $e^{\log(n)}$ polinomijalne funkcije matričnih elemenata matrice n, slijedi da gornja jednakost vrijedi svuda na $N(k,\mathbb{R})$:

$$e^{\log(n)} = n \qquad \forall n \in N(k,\mathbb{R}).$$

Prema tome, preslikavanje $\log : N(k,\mathbb{R}) \to \mathfrak{n}(k,\mathbb{R})$ je i desni invers eksponencijalnog preslikavanja $\exp : \mathfrak{n}(k,\mathbb{R}) \to N(k,\mathbb{R})$.

Lema 4.6.4. *Množenje $(k,a,n) \mapsto kan$ je bianalitičko preslikavanje sa $O(k,\mathbb{R})\times A(k,\mathbb{R})\times N(k,\mathbb{R})$ na $GL(k,\mathbb{R})$.*

Dokaz: Preslikavanje $(k,a,n) \mapsto kan$ je analitičko sa $O(k,\mathbb{R}) \times A(k,\mathbb{R}) \times N(k,\mathbb{R})$ u $GL(k,\mathbb{R})$.

To je preslikavanje injektivno. Doista, pretpostavimo da je $kan = k'a'n'$ za neke $k,k' \in O(k,\mathbb{R})$, $a,a' \in A(k,\mathbb{R})$ i $n,n' \in N(k,\mathbb{R})$. Tada je $(k')^{-1}k = a'n'n^{-1}a^{-1}$ ortogonalna matrica, a ujedno gornje trokutasta matrica sa strogo pozitivnim elementima na dijagonali. Slijedi da je to jedinična matrica I. Dakle, $k' = k$ i $an = a'n'$. Tada je $(a')^{-1}a = n'n^{-1}$ dijagonalna matrica, a ujedno gornje trokutasta matrica s jedinicama na dijagonali. Dakle, i to je jedinična matrica, pa nalazimo $a' = a$ i $n' = n$. Time je dokazana injektivnost množenja $(k,a,n) \mapsto kan$ sa $O(k,\mathbb{R}) \times A(k,\mathbb{R}) \times N(k,\mathbb{R})$ u $GL(k,\mathbb{R})$.

Lema će biti dokazana ako konstruiramo analitičko preslikavanje $g \mapsto (k(g),a(g),n(g))$ sa $GL(k,\mathbb{R})$ u $O(k,\mathbb{R})\times A(k,\mathbb{R})\times N(k,\mathbb{R})$ koje je desni invers množenja $(k,a,n) \mapsto kan$, tj. takvo da je $k(g)a(g)n(g) = g \;\; \forall g \in GL(k,\mathbb{R})$. Neka je $\{e_1,\ldots,e_k\}$ kanonska baza prostora jednostupčastih matrica $M_{k,1}(\mathbb{R})$. $M_{k,1}(k,\mathbb{R})$ je unitaran prostor sa standardnim skalarnim produktom koji čini bazu $\{e_1,\ldots,e_k\}$ ortonormiranom. Za $g \in GL(k,\mathbb{R})$ stavimo $v_i = g^{-1}e_i$, $i = 1,\ldots,k$. Na bazu $\{v_1,\ldots,v_k\}$ prostora $M_{k,1}(\mathbb{R})$ primijenimo Gram$-$Schmidtov postupak ortonormiranja i dobivenu ortonormiranu bazu od $M_{k,1}(\mathbb{R})$ označimo sa $\{u_1,\ldots,u_k\}$. Tada su vektori u_j induktivno zadani sa

$$u_1 = \|v_1\|^{-1}v_1, \qquad u_j = \left\| v_j - \sum_{i=1}^{j-1}(v_j|u_i)u_i \right\|^{-1} \left(v_j - \sum_{i=1}^{j-1}(v_j|u_i)u_i \right) \quad \text{za} \quad 2 \le j \le k.$$

Dakle, matrični elementi stupaca $u_1,\ldots,u_k$ su analitičke funkcije matričnih elemenata stupaca $v_1,\ldots,v_k$, a ovi su opet analitičke funkcije matričnih elemenata matrice g. Veza vektora $u_1,\ldots,u_k$ s vektorima $v_1,\ldots,v_k$ je gornje trokutasta

$$u_i = \sum_{j=1}^{i} a_{ji}v_j \qquad \text{i vrijedi} \quad a_{ii} > 0 \quad \forall i.$$

Kao što smo zaključili, matrični elementi a_{ji} te veze su analitičke funkcije matričnih elemenata matrice g.

Stavimo sada

$$a(g) = \begin{bmatrix} a_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{kk} \end{bmatrix} \qquad \text{i} \qquad n(g) = a(g)^{-1} \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & a_{kk} \end{bmatrix}.$$

Tada je $g \mapsto a(g)$ analitičko preslikavanje sa $GL(k,\mathbb{R})$ u $A(k,\mathbb{R})$, a $g \mapsto n(g)$ je analitičko preslikavanje sa $GL(k,\mathbb{R})$ u $N(k,\mathbb{R})$. Nadalje, vrijedi $a(g)n(g)v_i = u_i$, $i = 1,\dots,k$.

Napokon, ortogonalna grupa $O(k,\mathbb{R})$ djeluje prosto tranzitivno na skupu uređenih ortonormiranih baza od $M_{k,1}(\mathbb{R})$, pa postoji jedinstvena $k(g) \in O(k,\mathbb{R})$ takva da je $k(g)u_i = e_i$ za $i = 1,\dots,k$. Slijedi $k(g)a(g)n(g)g^{-1}e_i = e_i$ za $i = 1,\dots,k$, dakle, $g = k(g)a(g)n(g)$. Napokon, $k(g) = gn(g)^{-1}a(g)^{-1}$, pa je i preslikavanje $g \mapsto k(g)$ sa $GL(k,\mathbb{R})$ u $O(k,\mathbb{R})$ analitičko.

Sljedeća lema trebat će nam u ovom odjeljku samo za matrične grupe (tj. za zatvorene podgrupe od $GL(k,\mathbb{R})$) ali zbog kasnijih primjena iskazat ćemo je i dokazati za proizvoljne Liejeve grupe.

Lema 4.6.5. *Neka je G realna Liejeva grupa, $\mathfrak{g}_0$ njena Liejeva algebra i $\mathfrak{a}$ i $\mathfrak{b}$ Liejeve podalgebre od $\mathfrak{g}_0$ takve da je $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{a} \dot{+} \mathfrak{b}$ i neka su A i B povezane Liejeve podgrupe od G s Liejevim algebrama $\mathfrak{a}$ i $\mathfrak{b}$. Množenje $\psi : (a,b) \mapsto ab$ analitičko preslikavanje sa $A \times B$ u G koje je svuda regularno, tj. $T_{(a,b)}(\psi)$ je izomorfizam sa $T_{(a,b)}(A \times B) = \mathfrak{a} \times \mathfrak{b}$ na $T_{ab}(G) = \mathfrak{g}_0$ $\forall (a,b) \in A \times B$.*

Dokaz: Naravno, da je množenje $\psi : A \times B \to G$ analitičko preslikavanje. Nadalje, budući da je $\mathfrak{g}_0$ direktna suma $\mathfrak{a}$ i $\mathfrak{b}$, prostori $\mathfrak{g}_0$ i $\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}$ imaju istu dimenziju. Dakle, za dokaz regularnosti dovoljno je dokazati injektivnost diferencijala $T_{(a,b)}$ za svaku točku $(a,b) \in A \times B$.

Prije svega, primijetimo da smo već u iskazu leme iskoristili identifikaciju Liejeve algebre $\mathfrak{l}$ bilo koje Liejeve grupe L s Liejevom algebrom lijevoinvarijantnih vektorskih polja na L u skladu s propozicijom 3.2.3. Ako za $x \in \mathfrak{l}$ označimo sa $(x_g)_{g \in L}$ pripadno lijevoinvarijantno vektorsko polje onda je

$$x_g f = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(g \exp tx)\bigg|_{t=0}, \qquad f \in C^\infty(L), \quad g \in L, \quad x \in \mathfrak{l}. \tag{4.20}$$

Nadalje, podsjetimo se da je za bilo koje diferencijabilno preslikavanje mnogostrukosti $\psi : L \to M$ njegov diferencijal $T_g(\psi) : T_g(L) \to T_{\psi(g)}(M)$ u točki $g \in L$ linearan operator definiran sa

$$(T_g(\psi)X)\, f = X(f \circ \psi), \qquad X \in T_g(L), \quad f \in C^\infty(M). \tag{4.21}$$

Posebno, ako su L i M Liejeve grupe s Liejevim algebrama $\mathfrak{l}$ i $\mathfrak{m}$ i $\psi : L \to M$ je analitičko preslikavanje (ili samo $C^\infty-$preslikavanje) onda iz (4.20) i (4.21) imamo za $x \in \mathfrak{l}$, $g \in L$ i $f \in C^\infty(M)$:

$$(T_g(\psi)x_g)\, f = x_g(f \circ \psi) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f \circ \psi)(g \exp tx)\bigg|_{t=0} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(\psi(g \exp tx))\bigg|_{t=0}.$$

Primijenimo to sada na naš slučaj: $L = A \times B$, $\mathfrak{l} = \mathfrak{a} \times \mathfrak{b}$, $M = G$, $\mathfrak{m} = \mathfrak{g}_0$, $\psi(a,b) = ab$ za $a \in A$, $b \in B$. Tada za $(a,b) \in A \times B$, $(x,y) \in \mathfrak{a} \times \mathfrak{b}$ i $f \in C^\infty(G)$, uzevši u obzir da je $\exp_{\mathfrak{a}\times\mathfrak{b}} = \exp_{\mathfrak{a}} \times \exp_{\mathfrak{b}}$, nalazimo redom:

$$\left[T_{(a,b)}(\psi)(x,y)\right] f = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(\psi((a,b) \exp t(x,y)))\bigg|_{t=0} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(\psi((a,b)(\exp tx, \exp ty)))\bigg|_{t=0} =$$

$$= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(\psi(a(\exp tx), b(\exp ty)))\bigg|_{t=0} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(a(\exp tx)b(\exp ty))\bigg|_{t=0}.$$

Budući da je $T_{(a,b)}(\psi)$ linearan operator i $(x,y) = (x,0) + (0,y)$, možemo djelovanje od $T_{(a,b)}(\psi)$ računati odvojeno na $(x,0)$ i na $(0,y)$ i zatim rezultate zbrojiti. Imamo

$$\left[T_{(a,b)}(\psi)(x,0)\right] f = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(a(\exp tx)b)\bigg|_{t=0} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f\left(abb^{-1}(\exp tx)b\right)\bigg|_{t=0}.$$

Preslikavanje $g \to b^{-1}gb$ je unutarnji automorfizam $Int\,(b^{-1})$ Liejeve grupe G i njegov smo diferencijal označili sa $Ad\,b^{-1}$. Prema tome, $b^{-1}(\exp\,tx)b = \exp\,t(Ad\,b^{-1})x$, dakle,

$$\left[T_{(a,b)}(\psi)(x,0)\right] f = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f\left(ab\,\exp\,t(Ad\,b^{-1})x\right)\bigg|_{t=0} = \left[(Ad\,b^{-1})x\right]_{ab} f.$$

Drugi račun je jednostavniji

$$\left[T_{(a,b)}(\psi)(0,y)\right] f = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(ab(\exp\,ty))\bigg|_{t=0} = y_{ab} f.$$

Odatle je

$$T_{(a,b)}(\psi)(x,y) = \left[(Ad\,b^{-1})x + y\right]_{ab}.$$

Ako pretpostavimo da je $T_{(a,b)}(\psi)(x,y) = 0$, dobivamo $(Ad\,b^{-1})x + y = 0$, a odatle djelovanjem operatora $Ad\,b$ slijedi $x + (Ad\,b)y = 0$. Međutim, $x \in \mathfrak{a}$ i $(Ad\,b)y \in \mathfrak{b}$, pa kako je suma potprostora $\mathfrak{a}$ i $\mathfrak{n}$ direktna, zaključujemo da je $x = 0$ i $(Ad\,b)y = 0$, dakle, i $y = 0$. Time je dokazana tražena injektivnost.

Promatrat ćemo sada grupu automorfizama $Aut(\mathfrak{g}_0)$ realne poluproste Liejeve algebre $\mathfrak{g}_0$ i njenu komponentu povezanosti $Int(\mathfrak{g}_0)$ – grupu unutarnjih automorfizama od $\mathfrak{g}_0$. Neka je $(\mathfrak{k}, \mathfrak{p})$ Cartanova dekompozicija od $\mathfrak{g}_0$, ϑ pripadna Cartanova involucija, tj. $\vartheta(x+y) = x - y$ za $x \in \mathfrak{k}$ i $y \in \mathfrak{p}$, i $(\,\cdot\,|\,\cdot\,) = (\,\cdot\,|\,\cdot\,)_\vartheta$ skalarni produkt na $\mathfrak{g}_0$ određen sa ϑ :

$$(x|y) = -B(x, \vartheta(y)), \qquad x, y \in \mathfrak{g}_0;$$

pri tome je $B = B_{\mathfrak{g}_0}$ Killingova forma od $\mathfrak{g}_0$. Nadalje, označimo kao i prije sa K maksimalnu kompaktnu podgrupu od $Aut(\mathfrak{g}_0)$ s Liejevom algebrom $\mathfrak{k}$, odnosno,

$$K = \{k \in Aut(\mathfrak{g}_0);\ \vartheta k \vartheta = k\}.$$

Komponenta povezanosti K^0 od K je maksimalna kompaktna podgrupa od $Int(\mathfrak{g}_0)$ i vrijedi $K^0 = K \cap Int(\mathfrak{g}_0)$.

Neka je $\mathfrak{a}$ Cartanov potprostor od $\mathfrak{p}$ i $\Sigma = R(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{a})$ skup restringiranih korijena od $\mathfrak{g}_0$ u odnosu na $\mathfrak{a}$ i $\mathfrak{g}_0^\lambda$, $\lambda \in \Sigma$, pripadni korijenski potprostori. Stavimo $\mathfrak{m} = Z_{\mathfrak{k}}(\mathfrak{a})$. Neka je kao prije na $\mathfrak{a}^*$ zadan leksikografski uređaj u odnosu na neku bazu, neka je Σ_+ skup pozitivnih restringiranih korijena u odnosu na taj uređaj i

$$\mathfrak{n} = \sum_{\lambda \in \Sigma_+} \dot{+}\, \mathfrak{g}_0^\lambda.$$

Stavimo

$$A = \left\{\mathrm{e}^{ad\,x};\ x \in \mathfrak{a}\right\} \qquad \text{i} \qquad N = \left\{\mathrm{e}^{ad\,y};\ y \in \mathfrak{n}\right\}.$$

Teorem 4.6.6. *Uz uvedene oznake vrijedi:*

(a) *A je zatvorena podgrupa od $Int(\mathfrak{g}_0)$ i $\exp_{\mathfrak{a}} : x \mapsto \mathrm{e}^{ad\,x}$, $x \in \mathfrak{a}$, je izomorfizam aditivne Liejeve grupe $\mathfrak{a}$ na Liejevu grupu A.*

(b) *N je zatvorena podgrupa od $Int(\mathfrak{g}_0)$ i $\exp_{\mathfrak{n}} : y \mapsto \mathrm{e}^{ad\,y}$, $y \in \mathfrak{n}$, je bianalitičko preslikavanje sa $\mathfrak{n}$ na N.*

(c) *$AN = \{an;\ a \in A,\ b \in B\}$ je zatvorena podgrupa od $Int(\mathfrak{g}_0)$ i množenje $(a,n) \mapsto an$ je bianalitičko preslikavanje sa $A \times N$ na AN.*

(*d*) *Množenje* $(k, a, n) \mapsto kan$ *je bianalitičko preslikavanje sa* $K^0 \times A \times N$ *na* $Int(\mathfrak{g}_0)$.

(*e*) *Množenje* $(k, a, n) \mapsto kan$ *je bianalitičko preslikavanje sa* $K \times A \times N$ *na* $Aut(\mathfrak{g}_0)$.

Dokaz: (*a*) Prema teoremu 4.3.3. $P = \left\{e^{ad\,x};\ x \in \mathfrak{p}\right\}$ je zatvorena podmnogostrukost od $Int(\mathfrak{g}_0)$ i $\exp_{\mathfrak{p}} : x \mapsto e^{ad\,x}$ je bianalitičko preslikavanje sa $\mathfrak{p}$ na P. Slijedi da je slika A od $\mathfrak{a}$ pri tom preslikavanju zatvoren podskup od $Int(\mathfrak{g}_0)$. Nadalje, kako je $\mathfrak{a}$ komutativna Liejeva algebra, A je podgrupa od $Int(\mathfrak{g}_0)$ i $x \mapsto e^{ad\,x}$, $x \in \mathfrak{a}$, je homomorfizam aditivne grupe $\mathfrak{a}$ na grupu A. Iz bianalitičnosti preslikavanja $\exp_{\mathfrak{p}} : \mathfrak{p} \to P$ slijedi bianalitičnost $\exp_{\mathfrak{a}} : \mathfrak{a} \to A$.

(*b*) Numerirajmo sve restringirane korijene u Σ_+ po veličini u odnosu na izabrani leksikografski uređaj tako da je $\Sigma_+ = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_r\}$ i $\lambda_i < \lambda_j$ za $i < j$. Neka je

$$p_j = \dim \mathfrak{g}_0^{\lambda_j} \qquad \text{i} \qquad q = p_1 + \cdots + p_r = \dim \mathfrak{n}.$$

Izaberimo ortonormiranu bazu $\{x_1, \ldots, x_q\}$ od $\mathfrak{n}$ numeriranu tako da je $\{x_1, \ldots, x_{p_r}\}$ baza od $\mathfrak{g}_0^{\lambda_r}$, a $\{x_{p_r+\cdots+p_{j+1}+1}, \ldots, x_{p_r+\cdots+p_{j+1}+p_j}\}$ baza od $\mathfrak{g}_0^{\lambda_j}$ za $1 \leq j < r$. Izaberimo zatim ortonormiranu bazu $\{x_{q+1}, \ldots, x_{q+m}\}$ od $\mathfrak{m} \dotplus \mathfrak{a}$ ($m = \dim \mathfrak{m} + \dim \mathfrak{a}$). Napokon, stavimo $x_{q+m+j} = \vartheta(x_{q-j+1})$ za $1 \leq j \leq q$ i neka je $k = 2q + m = \dim \mathfrak{g}_0$. Tada je $\{x_1, \ldots, x_k\}$ je ortonormirana baza od $\mathfrak{g}_0$. U odnosu na tu bazu možemo identificirati $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g}_0)$ sa $\mathfrak{gl}(k, \mathbb{R})$, $GL(\mathfrak{g}_0)$ sa $GL(k, \mathbb{R})$ i $O(\mathfrak{g}_0)$ sa $O(k, \mathbb{R})$. Tako $Aut(\mathfrak{g}_0)$ i $Int(\mathfrak{g}_0)$ postaju zatvorene podgrupe matrične grupe $GL(k, \mathbb{R})$.

Prema izboru baze i iz $[\mathfrak{g}_0^{\lambda}, \mathfrak{g}_0^{\mu}] \subseteq \mathfrak{g}_0^{\lambda+\mu}$ slijedi da je $ad\,\mathfrak{n}$ Liejeva podalgebra od $\mathfrak{n}(k, \mathbb{R})$. Prema lemi 4.6.3. $x \mapsto e^x$ je bianalitičko preslikavanje sa $\mathfrak{n}(k, \mathbb{R})$ na $N(k, \mathbb{R})$, a $N(k, \mathbb{R})$ je zatvorena podgrupa od $GL(k, \mathbb{R})$. Kako je $ad\,\mathfrak{n}$ potprostor, dakle, zatvoren podskup od $\mathfrak{n}(k, \mathbb{R})$, slika N od $\mathfrak{n}$ pri preslikavanju $x \mapsto e^{ad\,x}$ je zatvoren podskup od $N(k, \mathbb{R})$, dakle, zatvoren podskup od $GL(k, \mathbb{R})$. Kako je $Int(\mathfrak{g}_0)$ zatvorena podgrupa od $GL(k, \mathbb{R})$ i kako je $N \subseteq Int(\mathfrak{g}_0)$, zaključujemo da je N zatvoren podskup od $Int(\mathfrak{g}_0)$. Napokon, budući da je $x \mapsto e^{ad\,x}$ bianalitičko preslikavanje sa $\mathfrak{n}(k, \mathbb{R})$ na $N(k, \mathbb{R})$, za svaku Liejevu podalgebru $\mathfrak{l}$ od $\mathfrak{n}(k, \mathbb{R})$ pripadna povezana Liejeva podgrupa L od $N(k, \mathbb{R})$ je jednaka $\{e^{ad\,x};\ x \in \mathfrak{l}\}$. Posebno, N je zatvorena podgrupa od $Int(\mathfrak{g}_0)$. Napokon, iz leme 4.6.3. slijedi da je $\exp_{\mathfrak{n}} : y \mapsto e^{ad\,y}$, $y \in \mathfrak{n}$, bianalitičko preslikavanje sa $\mathfrak{n}$ na N.

(*c*) Prije svega, uočimo da je stvarno AN podgrupa od $Int(\mathfrak{g}_0)$. Naime, za $a \in A$ i $n \in N$ vrijedi $ana^{-1} \in N$. Doista, neka su $x \in \mathfrak{a}$ i $y \in \mathfrak{n}$ takvi da je $a = e^{ad\,x}$ i $n = e^{ad\,y}$. Tada je

$$ana^{-1} = a\left(e^{ad\,y}\right)a^{-1} = e^{a(ad\,y)a^{-1}}.$$

Nadalje,

$$a(ad\,y)a^{-1} = e^{ad\,x}(ad\,y)\left(e^{ad\,x}\right)^{-1} = ad\,\left(e^{ad\,x}y\right).$$

Kako je $(ad\,x)\mathfrak{n} = [x, \mathfrak{n}] \subseteq \mathfrak{n}$, to je i $(ad\,x)^j\mathfrak{n} \subseteq \mathfrak{n}\ \forall j$, dakle, $e^{ad\,x}\mathfrak{n} = \mathfrak{n}$. Prema tome, $z = e^{ad\,x}y \in \mathfrak{n}$, pa slijedi

$$ana^{-1} = e^{ad\,z} \in N.$$

Posebno, za $a, a' \in A$ i $n, n' \in N$ imamo $(a')^{-1}na' \in N$, dakle,

$$ana'n' = aa'\,(a')^{-1}\,na'n' \in AN.$$

Nadalje, vrijedi i $an^{-1}a^{-1} \in N$, pa slijedi

$$(an)^{-1} = n^{-1}a^{-1} = a^{-1}an^{-1}a^{-1} \in AN.$$

Time je dokazano da je AN podgrupa od $Int(\mathfrak{g}_0)$. Sada iz leme 4.6.4. slijedi da je AN zatvoren podskup od $GL(k, \mathbb{R})$, dakle i od $Int(\mathfrak{g}_0)$, što znači da je AN zatvorena podgrupa od $Int(\mathfrak{g}_0)$.

Preslikavanje množenja $(a, n) \to an$ je analitička surjekcija sa $A \times N$ na AN. Zbog leme 4.6.4. to je preslikavanje injektivno. Dakle, $(a, n) \mapsto an$ je analitička bijekcija sa $A \times N$ na AN. Napokon, prema lemi 4.6.5. to je preslikavanje regularno u svakoj točki, dakle, ono je bianalitičko.

(d) Uz izabranu identifikaciju $GL(\mathfrak{g}_0)$ sa $GL(k, \mathbb{R})$ je

$$K = O(k, \mathbb{R}) \cap Aut(\mathfrak{g}_0) \qquad \text{i} \qquad K^0 = K \cap Int(\mathfrak{g}_0) = O(k, \mathbb{R}) \cap Int(\mathfrak{g}_0).$$

Iz leme 4.6.4. slijedi da je množenje $(k, a, n) \mapsto kan$ sa $K \times A \times N$ u $Aut(\mathfrak{g}_0)$ injektivno. Nadalje, prema tvrdnji (c) AN je zatvorena podgrupa od $Int(\mathfrak{g}_0)$ i množenje $(a, n) \mapsto an$ je bianalitičko sa $A \times N$ na AN. Budući da je grupa K^0 kompaktna, slijedi da je K^0AN zatvoren podskup od $Int(\mathfrak{g}_0)$. Preslikavanje množenja $\psi : (k, a, n) \mapsto kan$ je analitička bijekcija sa $K^0 \times A \times N$ na zatvoren podskup K^0AN od $Int(\mathfrak{g}_0)$. Sada je $\psi = \varphi \circ (id_{K^0} \times \chi)$, gdje je $\varphi : K^0 \times AN \to Int(\mathfrak{g}_0)$ množenje $(k, s) \mapsto ks$, $k \in K^0$, $s \in AN$, a χ je također množenje $(a, n) \mapsto an$ ali sa $A \times N$ na AN. Prema lemi 4.6.5. preslikavanja φ i χ su regularna u svakoj točki, pa slijedi da je i preslikavanje ψ regularno u svakoj točki. No tada je njegova slika K^0AN otvoren podskup od $Int(\mathfrak{g}_0)$. Kako već znamo da je taj podskup i zatvoren u $Int(\mathfrak{g}_0)$, zbog povezanosti $Int(\mathfrak{g}_0)$ slijedi da je $K^0AN = Int(\mathfrak{g}_0)$.

Dakle, množenje $\psi : K^0 \times A \times N \to Int(\mathfrak{g}_0)$ je analitička bijekcija, a kako je to preslikavanje u svakoj točki regularno, slijedi da je ono bianalitičko.

Time je dokazana tvrdnja (d). Iz nje slijedi i tvrdnja (e) jer je

$$Aut(\mathfrak{g}_0) = K\, Int(\mathfrak{g}_0) = KK^0AN = KAN,$$

a kao što smo već spomenuli preslikavanje množenja sa $K \times A \times N$ na $KAN = Aut(\mathfrak{g}_0)$ je ne samo surjekcija, nego i injekcija, dakle, bijekcija. Napokon, iz bianalitičnosti množenja u (d) slijedi i bianalitičnost množenja $K \times A \times N \to Aut(\mathfrak{g}_0)$.

4.7 Mala Weylova grupa

U ovom odjeljku cilj nam je da dokažemo da su sve Iwasawine dekompozicije Liejeve algebre $\mathfrak{g}_0$, a time i Liejevih grupa $Aut(\mathfrak{g}_0)$ i $Int(\mathfrak{g}_0)$, međusobno $Int(\mathfrak{g}_0)-$konjugirane. Prema tvrdnji (b) teorema 4.2.1. znamo da je podalgebra $\mathfrak{k}$ jedinstvena do na $Int(\mathfrak{g}_0)-$konjugiranost. Nadalje, ako smo izabrali $\mathfrak{k}$, a time i potprostor $\mathfrak{p}$, svi Cartanovi potprostori od $\mathfrak{p}$ su po teoremu 4.5.1. međusobno K^0-konjugirani. Napokon, pokazat ćemo da nakon što fiksiramo $\mathfrak{k}$ i $\mathfrak{a}$, razne mogućnosti za $\mathfrak{n}$ su također konjugirane. Usput ćemo dobiti da je skup restringiranih korijena $\Sigma = R(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{a})$ stvarno sistem korijena u prostoru $\mathfrak{a}^*$, i to **ne nužno reducirani**, a djelovanje njegove Weylove grupe $W(\Sigma)$, koju ćemo zvati **mala Weylova grupa**, opisat ćemo pomoću izvjesne podgrupe od K^0.

U daljnjem ćemo označavati $G = Int(\mathfrak{g}_0)$. Kao i prije označimo sa $\mathfrak{m}$ centralizator od $\mathfrak{a}$ u $\mathfrak{k}$,

$$\mathfrak{m} = Z_{\mathfrak{k}}(\mathfrak{a}) = \{x \in \mathfrak{k};\ [x,h] = 0\ \ \forall h \in \mathfrak{a}\}.$$

Nadalje, neka su M i M' centralizator i normalizator od $\mathfrak{a}$ u K^0 :

$$M = Z_{K^0}(\mathfrak{a}) = \{k \in K^0;\ k|\mathfrak{a} = I_{\mathfrak{a}}\}, \qquad M' = N_{K^0}(\mathfrak{a}) = \{k \in K^0;\ k\mathfrak{a} = \mathfrak{a}\}.$$

Treći član $\mathfrak{n}$ Iwasawine dekompozicije bio je određen izborom leksikografskog uređaja na $\mathfrak{a}^*$, odnosno, rastava skupa Σ restringiranih korijena na pozitivne Σ_+ i negativne $\Sigma_- = -\Sigma_+$:

$$\mathfrak{n} = \sum_{\lambda \in \Sigma_+} \dot{+}\, \mathfrak{g}_0^\lambda.$$

Nadalje, prema propoziciji 4.6.1. vrijedi

$$\mathfrak{g}_0 = \overline{\mathfrak{n}} \dot{+} \mathfrak{m} \dot{+} \mathfrak{a} \dot{+} \mathfrak{n}, \qquad \text{gdje je} \quad \overline{\mathfrak{n}} = \vartheta(\mathfrak{n}) = \sum_{\lambda \in \Sigma_-} \dot{+}\, \mathfrak{g}_0^\lambda.$$

Skalarni produkt $(\,\cdot\,|\,\cdot\,) = (\,\cdot\,|\,\cdot\,)_\vartheta$ inducira skalarni produkt na $\mathfrak{a}$. Preko tog skalarnog produkta dobivamo izomorfizam prostora $\mathfrak{a}^*$ s prostorom $\mathfrak{a}$ koji ćemo označiti sa $\lambda \mapsto t_\lambda$:

$$\lambda(h) = (t_\lambda|\,h)\,, \qquad \lambda \in \mathfrak{a}^*, \quad h \in \mathfrak{a},$$

a zbog $\vartheta|\mathfrak{a} = -I_{\mathfrak{a}}$ imamo

$$\lambda(h) = -B\,(t_\lambda, \vartheta(h)) = B\,(t_\lambda, h)\,, \qquad \lambda \in \mathfrak{a}^*, \quad h \in \mathfrak{a}.$$

Nadalje, skalarni produkt $(\,\cdot\,|\,\cdot\,)$ se pomoću tog izomorfizma prenosi na dualni prostor $\mathfrak{a}^*$:

$$(\lambda|\mu) = (t_\lambda|t_\mu) \qquad \lambda, \mu \in \mathfrak{a}^*.$$

Za restringirani korijen $\lambda \in \Sigma$ definiramo

$$h_\lambda = \frac{2}{(\lambda|\lambda)} t_\lambda.$$

Propozicija 4.7.1. *Neka je $\lambda \in \Sigma$ i $x_\lambda \in \mathfrak{g}_0^\lambda \setminus \{0\}$. Tada vrijedi*

(a) $[x_\lambda, \vartheta\,(x_\lambda)] = -\,(x_\lambda|\,x_\lambda)\,t_\lambda = B\,(x_\lambda, \vartheta\,(x_\lambda))\,t_\lambda.$

(*b*) *$\mathfrak{s} = span_{\mathbb{R}}\ \{x_\lambda, \vartheta(x_\lambda), t_\lambda\}$ je Liejeva podalgebra od $\mathfrak{g}_0$ i postoji izomorfizam $\varphi : \mathfrak{s} \to \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ takav da je*

$$\varphi\left(e_\lambda\right) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \varphi\left(e_{-\lambda}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \varphi\left(h_\lambda\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

gdje su

$$e_\lambda = \sqrt{\frac{2}{(\lambda|\lambda)\left(x_\lambda\,|x_\lambda\right)}}\,x_\lambda \qquad i \qquad e_{-\lambda} = -\vartheta\left(e_\lambda\right).$$

(*c*) *Uz oznake iz* (*b*) *je $k = \mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}ad(e_\lambda - e_{-\lambda})} \in M'$ i restrikcija $k|\mathfrak{a}$ je ortogonalna refleksija prostora $\mathfrak{a}$ u odnosu na hiperravninu $H_\lambda = \operatorname{Ker}\lambda$; posebno, $kh_\lambda = -h_\lambda$.*

Dokaz: (*a*) Vrijedi

$$\vartheta\left(x_\lambda\right) \in \vartheta\left(\mathfrak{g}_0^\lambda\right) = \mathfrak{g}_0^{-\lambda}, \qquad \Longrightarrow \qquad \left[x_\lambda, \vartheta\left(x_\lambda\right)\right] \in \mathfrak{g}_0^0 = \mathfrak{m} \dotplus \mathfrak{a}.$$

Nadalje,

$$\vartheta\left(\left[x_\lambda, \vartheta\left(x_\lambda\right)\right]\right) = \left[\vartheta\left(x_\lambda\right), x_\lambda\right] = -\left[x_\lambda, \vartheta\left(x_\lambda\right)\right],$$

pa slijedi da je $[x_\lambda, \vartheta(x_\lambda)] \in (\mathfrak{m} \dotplus \mathfrak{a}) \cap \mathfrak{p} = \mathfrak{a}$. Za proizvoljan $h \in \mathfrak{a}$ je $\vartheta(h) = -h$, pa zbog svojstva invarijantnosti Killingove forme $B = B_{\mathfrak{g}_0}$ i zbog $[h, \vartheta(x_\lambda)] = -\lambda(h)\vartheta(x_\lambda)$, imamo redom

$$\left(\left[x_\lambda, \vartheta\left(x_\lambda\right)\right]\middle|\, h\right) = -B\left(\left[x_\lambda, \vartheta\left(x_\lambda\right)\right], \vartheta(h)\right) = B\left(\left[x_\lambda, \vartheta\left(x_\lambda\right)\right], h\right) =$$

$$= B\left(x_\lambda, \left[\vartheta\left(x_\lambda\right), h\right]\right) = \lambda(h) B\left(x_\lambda, \vartheta\left(x_\lambda\right)\right) = B\left(t_\lambda, h\right) B\left(x_\lambda, \vartheta\left(x_\lambda\right)\right) =$$

$$= B\left(B\left(x_\lambda, \vartheta\left(x_\lambda\right)\right) t_\lambda, h\right) = -B\left(B\left(x_\lambda, \vartheta\left(x_\lambda\right)\right) t_\lambda, \vartheta(h)\right) = \left(B\left(x_\lambda, \vartheta\left(x_\lambda\right)\right) t_\lambda \middle|\, h\right).$$

Kako je $(\,\cdot\,|\,\cdot\,)$ skalarni produkt na $\mathfrak{a}$, tvrdnja je dokazana.

Zadatak 4.7.1. *Dokažite tvrdnje* (*b*) *i* (*c*) *propozicije 4.7.1.*

Uputa: Za (*b*) koristite tvrdnju (*a*) i $\lambda\left(t_\lambda\right) = \left(t_\lambda \middle| t_\lambda\right) = (\lambda|\lambda)$, dakle, $\lambda\left(h_\lambda\right) = 2$. Za (*c*) slično kao u zadatku 1.3.8. računajte djelovanje reda potencija

$$\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}ad(e_\lambda - e_{-\lambda})} = \sum_{k \in \mathbb{Z}_+} \frac{1}{k!}\left(\frac{\pi}{2} ad\ \left(e_\lambda - e_{-\lambda}\right)\right)^k$$

na $h \in H_\lambda = \operatorname{Ker}\lambda$, a zatim na ortogonalan vektor h_λ; naime, $\mathfrak{a} = H_\lambda \oplus \mathbb{R}h_\lambda$, jer za $h \in H_\lambda$ je $\left(t_\lambda\,|h\right) = \lambda(h) = 0$, dakle, i $\left(h_\lambda\,|h\right) = 0$.

Teorem 4.7.2. $\Sigma = R(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{a})$ *je sistem korijena u* $\mathfrak{a}^*$.

Dokaz: Pretpostavimo da je $\lambda(h) = 0\ \ \forall\lambda \in \Sigma$. Tada je $[h, \mathfrak{g}_0^\lambda] = \{0\}\ \ \forall\lambda \in S$, pa slijedi $[h, \mathfrak{g}_0] = \{0\}$, dakle, $h \in Z(\mathfrak{g}_0) = \{0\}$. to pokazuje da konačan skup Σ razapinje $\mathfrak{a}^*$.

Dokažimo sada da je $2\frac{(\mu|\lambda)}{(\lambda|\lambda)} \in \mathbb{Z}\ \ \forall\lambda, \mu \in \Sigma$. Za izabrani λ promatrajmo Liejevu podalgebru $\mathfrak{s}$ iz tvrdnje (*b*) propozicije 4.7.1. Tada je $ad|\mathfrak{s}$ reprezentacija realne Liejeve algebre $\mathfrak{s}$ na realnom prostoru $\mathfrak{g}_0$. Kompleksifikacijom i algebre i prostora dolazimo do reprezentacije kompleksne Liejeve algebre $\mathfrak{s}^{\mathbb{C}} \simeq \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ na kompleksnom prostoru $\mathfrak{g} = \left(\mathfrak{g}_0\right)^{\mathbb{C}}$. Prema teoremu 1.6.4. iz PLA sve svojstvene vrijednosti operatora $ad\,h_\lambda$ su cijeli brojevi. Za $\mu \in \Sigma$ svaki $x \in \mathfrak{g}_0^\mu$ je svojstven vektor operatora $ad\,h_\lambda$ sa svojstvenom vrijednosti $\mu\left(h_\lambda\right)$. Ali

$$\mu\left(h_\lambda\right) = \frac{2}{(\lambda|\lambda)}\mu\left(t_\lambda\right) = 2\frac{(\mu|\lambda)}{(\lambda|\lambda)} \qquad \Longrightarrow \qquad 2\frac{(\mu|\lambda)}{(\lambda|\lambda)} \in \mathbb{Z}.$$

Neka je σ_λ ortogonalna refleksija unitarnog prostora $\mathfrak{a}^*$ u odnosu na hiperravninu okomitu na λ. Treba dokazati da je $\sigma_\lambda(\mu) \in \Sigma$ $\forall \mu \in \Sigma$. Neka je $k \in M'$ element iz tvrdnje (c) propozicije 4.7.1. Prema toj tvrdnji $k|\mathfrak{a}$ je ortogonalna refleksija prostora $\mathfrak{a}$ u odnosu na hiperravninu $\operatorname{Ker}\lambda$. No tada je $\sigma_\lambda = \sigma_\lambda^{-1}$ upravo dualan operator od $k|\mathfrak{a}$, tj. vrijedi

$$(\sigma_\lambda \mu)(h) = \mu(kh) \qquad \forall \mu \in \mathfrak{a}^* \text{ i } \forall h \in \mathfrak{a}.$$

Stoga za $\mu \in \Sigma$ i $x \in \mathfrak{g}_0^\mu \setminus \{0\}$ i za svaki $h \in \mathfrak{a}$ imamo

$$[h, kx] = k[k^{-1}h, x] = \mu\left(k^{-1}h\right)kx = \left(\sigma_\lambda^{-1}\mu\right)(h)kx = (\sigma_\lambda \mu)(h)kx.$$

Prema tome

$$kx \in \mathfrak{g}_0^{\sigma_\lambda \mu} \setminus \{0\} \qquad \Longrightarrow \qquad \mathfrak{g}_0^{\sigma_\lambda \mu} \neq \{0\} \qquad \Longrightarrow \qquad \sigma_\lambda \mu \in \Sigma.$$

Time je teorem dokazan.

Dokaz prethodnog teorema daje nam i nešto više. Naime, dokazali smo da se svaka refleksija σ_λ, $\lambda \in \Sigma$, može realizirati kao dualni operator $(k|\mathfrak{a})^T$ za neki $k \in M' = N_{K^0}(\mathfrak{a})$ i da za taj element k vrijedi $k\mathfrak{g}_0^\mu = \mathfrak{g}_0^{\sigma_\lambda \mu}$ za svaki $\mu \in \Sigma$. Budući da je svaki element male Weylove grupe $W(\Sigma)$ produkt refleksija σ_λ, $\lambda \in \Sigma$, zaključujemo da vrijedi:

Korolar 4.7.3. *Za svaki $\sigma \in W(\Sigma)$ postoji $k \in M'$ takav da je $\sigma = \left(k^{-1}|\mathfrak{a}\right)^T$ i tada je $k\mathfrak{g}_0^\lambda = \mathfrak{g}_0^{\sigma\lambda}$ $\forall \lambda \in \Sigma$.*

Neka su $\mathfrak{n}$ i $\mathfrak{n}'$ dva izbora trećeg člana Iwasawine dekompozicije, tj.

$$\mathfrak{n} = \sum_{\lambda \in \Sigma_+} \dot{+}\, \mathfrak{g}_0^\lambda \qquad \text{i} \qquad \mathfrak{n}' = \sum_{\lambda \in (\Sigma_+)'} \dot{+}\, \mathfrak{g}_0^\lambda$$

gdje su Σ_+ i $(\Sigma_+)'$ skupovi pozitivnih korijena za dva (leksikografska) uređaja na $\mathfrak{a}^*$. Neka su B i B' baze sistema korijena Σ pridružena pozitivnim skupovima korijena Σ_+ i $(\Sigma_+)'$. Budući da Weylova grupa $W(\Sigma)$ djeluje tranzitivno na skupu baza sistema korijena Σ, postoji $\sigma \in W(\Sigma)$ takav da je $\sigma(B) = B'$, dakle i $\sigma(S_+) = (\Sigma_+)'$. Neka je $k \in M'$ kao u prethodnom korolaru takav da je $\sigma = \left(k^{-1}|\mathfrak{a}\right)^T$. Tada iz $k\mathfrak{g}_0^\lambda = \mathfrak{g}_0^{\sigma\lambda}$, $\lambda \in \Sigma_+$, slijedi $k\mathfrak{n} = \mathfrak{n}'$. Dakle, vrijedi:

Korolar 4.7.4. *Za svaka dva izbora $\mathfrak{n}$ i $\mathfrak{n}'$ trećeg člana Iwasawine dekompozicije od $\mathfrak{g}_0$ postoji $k \in M' = N_{K^0}(\mathfrak{a})$ takav da je $k\mathfrak{n} = \mathfrak{n}'$.*

U daljnjem ćemo (slično kao u odjeljku 4.1.) pomoću skalarnog produkta identificirati djelovanje automorfizama sistema korijena Σ i dualnog sistema korijena $\check{\Sigma} = \{h_\lambda;\ \lambda \in \Sigma\}$. Na taj način $k \mapsto k|\mathfrak{a}$ postaje homomorfizam sa M' u $Aut(\Sigma)$. Tada korolar 4.7.3. znači da je mala Weylova grupa $W(\Sigma)$ sadržana u slici tog homomorfizma. Naravno, jezgra tog homomorfizma je

$$M = Z_{K^0}(\mathfrak{a}) = \left\{k \in K^0;\ k|\mathfrak{a} = I_\mathfrak{a}\right\}.$$

Definiramo kvocijentnu grupu

$$W(G, A) = M'/M = N_{K^0}(\mathfrak{a})/Z_{K^0}(\mathfrak{a}).$$

Homomorfizam $k \mapsto k|\mathfrak{a}$ inducira izomorfizam te grupe s podgrupom grupe $Aut(\Sigma)$. Taj ćemo izomorfizam upotrijebiti kao identifikaciju. Na taj način mala Weylova grupa postaje podgrupa grupe $W(G, A)$. Slijedeći nam je cilj dokazati da vrijedi jednakost $W(G, A) = W(\Sigma)$. U tu svrhu najprije dokazujemo nekoliko lema.

Lema 4.7.5. $\mathfrak{m}$ *je Liejeva algebra i od* M *i od* M'. $W(G,A) = M'/M$ *je konačna grupa.*

Dokaz: Iz prve tvrdnje slijedi da je grupa $W(G,A) = M'/M$ diskretna. No ona je i kompaktna, jer je $M' \subseteq K^0$, pa zaključujemo da je konačna.

Liejeva algebra od $Z_{K^0}(\mathfrak{a})$ je

$$\{x \in \mathfrak{k};\ e^{t\,ad\,x} \in Z_{K^0}(\mathfrak{a})\ \forall t \in \mathbb{R}\} = \{x \in \mathfrak{k};\ (ad\,x)|\mathfrak{a} = 0\} = Z_{\mathfrak{k}}(\mathfrak{a}) = \mathfrak{m}.$$

Slično se vidi da je Liejeva algebra od $N_{K^0}(\mathfrak{a})$ jednaka normalizatoru od $\mathfrak{a}$ u $\mathfrak{k}$:

$$N_{\mathfrak{k}}(\mathfrak{a}) = \{x \in \mathfrak{k};\ [x,\mathfrak{a}] \subseteq \mathfrak{a}\}.$$

Neka je $x \in N_{\mathfrak{k}}(\mathfrak{a})$. Rastavimo x u skladu s korijenskim rastavom od $\mathfrak{g}_0$:

$$x = h_0 + x_0 + \sum_{\lambda \in \Sigma} x_\lambda, \qquad h_0 \in \mathfrak{a}, \quad x_0 \in \mathfrak{m}, \quad x_\lambda \in \mathfrak{g}_0^\lambda,\ \lambda \in \Sigma.$$

Budući da su $x, x_0 \in \mathfrak{k}$ i $h_0 \in \mathfrak{p}$, vrijedi $\vartheta(x) = x$, $\vartheta(h_0) = -h_0$ i $\vartheta(x_0) = x_0$, pa dobivamo

$$x = \frac{1}{2}(x + \vartheta(x)) = x_0 + \frac{1}{2}\sum_{\lambda \in \Sigma}(x_\lambda + \vartheta(x_\lambda)).$$

Kako je $\vartheta\left(\mathfrak{g}_0^\lambda\right) = \mathfrak{g}_0^{-\lambda}$, odatle slijedi za svaki $h \in \mathfrak{a}$:

$$[h,x] = \frac{1}{2}\sum_{\lambda \in \Sigma}\lambda(h)\,(x_\lambda - \vartheta(x_\lambda)) \in \mathfrak{n} \dotplus \overline{\mathfrak{n}}.$$

Međutim, $x \in N_{\mathfrak{k}}(\mathfrak{a})$, pa vrijedi i $[h,x] \in \mathfrak{a}$. Po tvrdnji (c) propozicije 4.6.1. je $\mathfrak{a} \cap (\mathfrak{n} \dotplus \overline{\mathfrak{n}}) = \{0\}$, pa slijedi $[h,x] = 0$, a kako je $h \in \mathfrak{a}$ bio proizvoljan, zaključujemo da je $x \in Z_{\mathfrak{k}}(\mathfrak{a}) = \mathfrak{m}$.

Time je lema dokazana.

Lema 4.7.6. *Ako je* $h \in \mathfrak{a}$ *takav da je* $\lambda(h) \neq 0\ \ \forall \lambda \in \Sigma$, *onda je* $Z_{\mathfrak{g}_0}(h) = \mathfrak{m} \dotplus \mathfrak{a}$, $Z_{\mathfrak{p}}(h) = \mathfrak{a}$ *i* $Z_{\mathfrak{g}}(h) = \mathfrak{m}^{\mathbb{C}} \dotplus \mathfrak{a}^{\mathbb{C}}$.

Dokaz: Element $x \in Z_{\mathfrak{g}_0}(h)$ napišimo u skladu s korijenskim rastavom od $\mathfrak{g}_0$:

$$x = x_0 + h_0 + \sum_{\lambda \in \Sigma} x_\lambda, \qquad x_0 \in \mathfrak{m},\ h_0 \in \mathfrak{a},\ x_\lambda \in \mathfrak{g}_0^\lambda \text{ za } \lambda \in \Sigma.$$

Slijedi

$$0 = [h,x] = \sum_{\lambda \in \Sigma}\lambda(h)x_\lambda.$$

Kako je korijenski rastav od $\mathfrak{g}_0$ direktna suma, slijedi $\lambda(h)x_\lambda = 0\ \ \forall \lambda \in \Sigma$, a kako je $\lambda(h) \neq 0$ $\forall \lambda \in \Sigma$, zaključujemo da je $x_\lambda = 0\ \ \forall \lambda \in \Sigma$. Dakle, $x = x_0 + h_0 \in \mathfrak{m} \dotplus \mathfrak{a}$. Time je dokazana jednakost $Z_{\mathfrak{g}_0}(h) = \mathfrak{m} \dotplus \mathfrak{a}$. Odatle slijedi

$$Z_{\mathfrak{p}}(h) = \mathfrak{p} \cap Z_{\mathfrak{g}_0}(h) = \mathfrak{p} \cap (\mathfrak{m} \dotplus \mathfrak{a}) = \mathfrak{a}.$$

Napokon, ako su $x, y \in \mathfrak{g}_0$, onda je $[h, x+iy] = [h,x] + i[h,y]$, pa vidimo da je $x + iy \in Z_{\mathfrak{g}}(h)$ ako i samo ako su $x, y \in Z_{\mathfrak{g}_0}(h)$. Dakle, $Z_{\mathfrak{g}}(h) = Z_{\mathfrak{g}_0}(h) \dotplus i\,Z_{\mathfrak{g}_0}(h) = \mathfrak{m}^{\mathbb{C}} \dotplus \mathfrak{a}^{\mathbb{C}}$.

Teorem 4.7.7. $W(G,A) = W(\Sigma)$.

Dokaz: Neka je Δ skup svih nedjeljivih korijena iz Σ. Tada je prema teoremu 1.3.16. Δ reducirani sistem korijena, $W(\Delta) = W(\Sigma)$ i $Aut(\Delta) = Aut(\Sigma)$. Uz prije opisanu identifikaciju $W(G,A)$ je podgrupa od $Aut(\Sigma) = Aut(\Delta)$. Posebno, svaki element grupe $W(G,A)$ inducira permutaciju sistema korijena Δ. Ta grupa sadrži Weylovu grupu $W(\Sigma) = W(\Delta)$. Sve baze sistema korijena Σ su sadržane u Δ i to su sve baze sistema korijena Δ. Nadalje, ako je B baza sistema korijena Δ, dakle, i Σ, označimo sa Δ_+ i Σ_+ pripadne skupove pozitivnih korijena. Tada je $\Delta_+ = \Sigma_+ \cap \Delta$. Nadalje, B je jedinstveno određena sa $\Delta_+ : \lambda \in \Delta$ je element baze B ako i samo ako ne postoje $\alpha, \beta \in \Delta_+$ takvi da je $\lambda = \alpha + \beta$. Weylova grupa djeluje prosto tranzitivno na skupu svih baza od Δ, pa prema tome djeluje prosto tranzitivno na skupu svih skupova pozitivnih korijena u Δ. Dakle, za dokaz teorema dovoljno je dokazati da iz $k\Delta_+ = \Delta_+$, $k \in M'$, slijedi da je $k|\mathfrak{a}$ identiteta, tj. da je $k \in M$.

Dakle, pretpostavimo da je $k \in M'$ takav da je $k\Delta_+ = \Delta_+$. Tada djelovanje $k|\mathfrak{a}$ inducira permutaciju od Δ_+. Stavimo sada

$$\delta = \frac{1}{2} \sum_{\lambda \in \Delta_+} \lambda.$$

Tada je $k\delta = \delta$. Prema lemi 3.5.6. u PLA za svaki $\lambda \in B$ je $\sigma_\lambda \delta = \delta - \lambda$, što znači da je $2\frac{(\delta|\lambda)}{(\lambda|\lambda)} = 1$. Odatle slijedi da je $(\delta|\lambda) > 0 \ \ \forall \lambda \in \Delta_+$, dakle i $\forall \lambda \in \Sigma_+$. Posebno, vrijedi

$$0 \neq (\delta|\lambda) = \lambda\left(t_\delta\right) \qquad \forall \lambda \in \Sigma.$$

Nadalje, za svaki $h \in \mathfrak{a}$ u skladu s identifikacijom djelovanja na $\mathfrak{a}$ i na $\mathfrak{a}^*$ imamo redom

$$\left(kt_\delta|\, h\right) = \left(t_\delta|\, k^{-1}h\right) = \delta\left(k^{-1}h\right) = \left(\left(k^{-1}\right)^T \delta\right)(h) = (k\delta)(h) = \delta(h) = \left(t_\delta|\, h\right).$$

Odatle slijedi $kt_\delta = t_\delta$.

Time smo dokazali da postoji $h \in \mathfrak{a}$ takav da je $kh = h$ i $\lambda(h) \neq 0 \ \ \forall \lambda \in \Sigma$. Znamo da je $\mathfrak{u} = \mathfrak{k} \dotplus i\mathfrak{p}$ kompaktna forma od $\mathfrak{g} = (\mathfrak{g}_0)^{\mathbb{C}}$. Neka je U pripadna maksimalna kompaktna podgrupa od $Int(\mathfrak{g})$. $\mathbb{C}-$linearnim proširenjem djelovanja sa $\mathfrak{g}_0$ na $\mathfrak{g}$, grupa $Int(\mathfrak{g}_0)$ postaje podgrupa od $Int(\mathfrak{g})$. Stoga je $K^0 \subseteq U$, dakle, $k \in U$. Stavimo sada S zatvarač podgrupe $\left\{e^{it\, ad\, h};\ t \in \mathbb{R}\right\}$ od U. Tada je S kompaktna povezana podgrupa od U. Dokazat ćemo sada da je $Z_U(S) \subseteq Z_U(\mathfrak{a})$. U tu svrhu koristit ćemo sljedeću činjenicu iz teorije kompaktnih Liejevih grupa, koju navodimo bez dokaza:

Teorem 4.7.8. *Neka je G kompaktna povezana Liejeva grupa s Liejevom algebrom $\mathfrak{g}$ i neka je S njena komutativna povezana zatvorena podgrupa s Liejevom algebrom $\mathfrak{s}$. Tada je centralizator $Z_G(S)$ od S u G povezana podgrupa od G. Posebno, njena je Liejeva algebra $Z_\mathfrak{g}(\mathfrak{s})$.*

Prema tome, za dokaz inkluzije $Z_U(S) \subseteq Z_U(\mathfrak{a})$ dovoljno je dokazati inkluziju $Z_\mathfrak{u}(\mathfrak{s}) \subseteq Z_\mathfrak{u}(\mathfrak{a})$. Nadalje, kako je $\left\{e^{it\, ad\, h};\ t \in \mathbb{R}\right\}$ gusta podgrupa od S, centralizator od $\mathfrak{s}$ jednak je centralizatoru elementa h. Dakle, koristeći lemu 4.7.6. nalazimo

$$Z_\mathfrak{u}(\mathfrak{s}) = \mathfrak{u} \cap Z_\mathfrak{g}(\mathfrak{s}) = \mathfrak{u} \cap Z_\mathfrak{g}(h) = (\mathfrak{k} \dotplus i\mathfrak{p}) \cap (\mathfrak{m}^{\mathbb{C}} \dotplus \mathfrak{a}^{\mathbb{C}}) = \mathfrak{m} \dotplus i\mathfrak{a} \subseteq Z_\mathfrak{u}(\mathfrak{a}).$$

Napokon, budući da je $kh = h$ imamo $k \in Z_U(S) \cap K^0 \subseteq Z_U(\mathfrak{a}) \cap K^0 = Z_{K^0}(\mathfrak{a}) = M$.

Time je teorem 4.7.7. u potpunosti dokazan.

4.8 Struktura povezanih poluprostih Liejevih grupa

U ovom ćemo odjeljku generalizirati strukturne rezultate o grupi $Int(\mathfrak{g}_0)$ na proizvoljne povezane poluproste Liejeve grupe.

Neka je G povezana poluprosta Liejeva grupa i $\mathfrak{g}_0$ njena Liejeva algebra. Za $x \in G$ automorfizam $Ad\,x$ Liejeve algebre $\mathfrak{g}_0$ definiran je kao diferencijal konjugiranja $Int(x) : g \mapsto xgx^{-1}$ grupe G.

Propozicija 4.8.1. *Ad je epimorfizam povezane poluproste Liejeve grupe G na grupu $Int(\mathfrak{g}_0)$ unutarnjih automorfizama Liejeve algebre $\mathfrak{g}_0$ od G. Njegova je jezgra centar Z grupe G. Nadalje, centar grupe $G/Z \simeq Int(\mathfrak{g}_0)$ je trivijalan.*

Dokaz: Znamo da je $Ad : G \to Aut(\mathfrak{g}_0)$ homomorfizam Liejevih grupa, a kako je grupa G povezana, to je $Ad(G) \subseteq Int(\mathfrak{g}_0)$. Nadalje, za $x \in \mathfrak{g}_0$ je $Ad \exp(x) = \mathrm{e}^{ad\,x}$. Prema tome, $Ad(G)$ sadrži okolinu jedinice u grupi $Int(\mathfrak{g}_0)$, pa je $Ad(G)$ otvorena podgrupa od $Int(\mathfrak{g}_0)$. No svaka otvorena podgrupa je i zatvorena, pa zbog povezanosti grupe $Int(\mathfrak{g}_0)$ zaključujemo da je $Ad(G) = Int(\mathfrak{g}_0)$.

Očito je $Z \subseteq \mathrm{Ker}\,Ad$. Da dokažemo obrnutu inkluziju, pretpostavimo da je $x \in \mathrm{Ker}\,Ad$, tj. $Ad(x) = I_{\mathfrak{g}_0}$. Tada za svaki $y \in \mathfrak{g}_0$ imamo

$$x(\exp y)x^{-1} = \exp{(Ad\,x)y} = \exp y \qquad \Longrightarrow \qquad x(\exp y) = (\exp y)x.$$

Prema tome, x komutira sa svakim elementom skupa $\exp \mathfrak{g}_0$. No taj skup sadrži okolinu jedinice u grupi G, dakle, zbog povezanosti generira čitavu grupu G. Odatle slijedi da je $x \in Z$.

Napokon, neka je g element centra grupe $Int(\mathfrak{g}_0)$. Tada za svaki $x \in \mathfrak{g}_0$ imamo redom

$$g\mathrm{e}^{t\,ad\,x} = \mathrm{e}^{t\,ad\,x}g \quad \Longrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}g\mathrm{e}^{t\,ad\,x}\bigg|_{t=0} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{e}^{t\,ad\,x}g\bigg|_{t=0} \quad \Longrightarrow \quad g(ad\,x) = (ad\,x)g.$$

Primijenimo li posljednju jednakost na proizvoljan $y \in \mathfrak{g}_0$, dobivamo $g[x, y] = [x, gy]$. Zamijenimo li y sa $g^{-1}y$ dobivamo redom

$$[x, y] = g[x, g^{-1}y] = [gx, y] = -[y, gx] = -g[y, x] = g[x, y].$$

Budući da komutatori $[x, y]$ razapinju cijelu Liejevu algebru $\mathfrak{g}_0$, slijedi da je $g = I_{\mathfrak{g}_0}$. Time je dokazano da je centar grupe $Int(\mathfrak{g}_0) \simeq G/Z$ trivijalan.

Teorem 4.8.2. *Neka je G povezana poluprosta Liejeva grupa, $\mathfrak{g}_0$ njena Liejeva algebra, ϑ Cartanova involucija od $\mathfrak{g}_0$, $(\mathfrak{k}, \mathfrak{p})$ pripadna Cartanova dekompozicija i K povezana Liejeva podgrupa od G s Liejevom algebrom $\mathfrak{k}$.*

(a) *Postoji $\Theta \in Aut(G)$ takav da mu je diferencijal ϑ. Vrijedi $\Theta^2 = id_G$.*

(b) *$K = \{g \in G;\ \Theta(g) = g\}$.*

(c) *$(k, x) \mapsto k(\exp x)$ je bianalitičko preslikavanje sa $K \times \mathfrak{p}$ na G.*

(d) *Podgrupa K je zatvorena.*

(e) *Centar Z grupe G sadržan je u K.*

(f) *Grupa K je kompaktna ako i samo ako je centar Z grupe G konačan. U tom slučaju je K maksimalna kompaktna podgrupa od G.*

(g) *Ako je centar Z konačan i ako je L kompaktna podgrupa od G, postoji $g \in G$ takav da je $L \subseteq gKg^{-1}$. Posebno, sve su maksimalne kompaktne podgrupe od G međusobno konjugirane u G.*

Dokaz: Prema propoziciji 4.8.1. preslikavanje $Ad : G \to Int(\mathfrak{g}_0)$ je epimorfizam kome je jezgra centar Z grupe G. Liejeva algebra od Z je centar Liejeve algebre $\mathfrak{g}_0$, dakle, $\{0\}$. Prema tome Z je diskretna podgrupa grupe G. To znači da je $Ad : G \to Int(\mathfrak{g}_0)$ natkrivanje.

Neka je K^0 maksimalna kompaktna podgrupa grupe $Int(\mathfrak{g}_0)$ s Liejevom algebrom $\mathfrak{k}$. Definiramo

$$K = Ad^{-1}\left(K^0\right) = \{k \in G;\ Ad\,k \in K^0\} = \{k \in G;\ \vartheta(Ad\,k) = (Ad\,k)\vartheta\}.$$

Tada je K zatvorena podgrupa od G koja sadrži Z i Liejeva algebra joj je $\mathfrak{k}$. Za sada još ne znamo da je K upravo ona podgrupa od G koja je definirana u iskazu teorema, jer još ne znamo da je grupa K povezana. Očito je $Ad|K : K \to K^0$ epimorfizam s jezgrom Z.

Definiramo sada preslikavanje $\psi : G/K \to Int(\mathfrak{g}_0)/K^0$ ovako:

$$\psi(gK) = (Ad\,g)K^0, \qquad g \in G.$$

Preslikavanje ψ je dobro definirano. Doista, pretpostavimo da su $g, g' \in G$ takvi da je $gK = g'K$. To znači da je $g = g'k$ za neki $k \in K$. Tada imamo

$$Ad\,g = (Ad\,g')(Ad\,k) \in (Ad\,g')K^0 \qquad \Longrightarrow \qquad (Ad\,g)K^0 = (Ad\,g')K^0.$$

Preslikavanje je ψ je bijekcija. Dokažimo najprije injektivnost. Neka su $g, g' \in G$ takvi da je $\psi(gK) = \psi(g'K)$. To znači da je $(Ad\,g)K^0 = (Ad\,g')K^0$, odnosno, postoji $k_0 \in K^0$ takav da je $Ad\,g = (Ad\,g')k_0$. Neka je $k \in K$ takav da je $Ad\,k = k_0$. Tada je $Ad\,g = (Ad\,g')(Ad\,k) = Ad\,(g'k)$, pa postoji $z \in Z$ takav da je $g = g'kz$. Ali $kz \in K$, pa slijedi $g \in g'K$, odnosno, $gK = g'K$. Dokažimo sada surjektivnost. Neka je $h \in Int(\mathfrak{g}_0)$. Izaberimo $g \in G$ tako da bude $Ad\,g = h$. Tada je $\psi(gK) = (Ad\,g)K^0 = hK^0$.

Preslikavanje ψ je homeomorfizam. Dokažimo najprije neprekidnost. Definiramo neprekidno preslikavanje $\Psi : G \to Int(\mathfrak{g}_0)/K^0$ ovako:

$$\Psi(g) = (Ad\,g)K^0, \qquad g \in G.$$

Preslikavanje Ψ je konstantno na $K-$klasama, jer za $g' = gk$, $k \in K$, imamo

$$\Psi(g') = \Psi(gk) = (Ad\,gk)K^0 = (Ad\,g)(Ad\,k)K^0 = (Ad\,g)K^0 = \Psi(g).$$

Po definiciji kvocijentne topologije prostora G/K preslikavanje $\psi(gK) = \Psi(g)$ sa G/K u $Int(\mathfrak{g}_0)/K^0$ je neprekidno. Dokažimo sada neprekidnost inverznog preslikavanja ψ^{-1}. Znamo da je $Ad : G \to Int(\mathfrak{g}_0)$ epimorfizam s jezgrom Z, pa on inducira izomorfizam Liejevih grupa $G/Z \to Int(\mathfrak{g}_0)$. Neka je $\varphi : Int(\mathfrak{g}_0) \to G/Z$ inverzni izomorfizam; dakle,

$$\varphi(h) = gZ \qquad \text{za } h \in Int(\mathfrak{g}_0) \text{ i za bilo koji } g \in G \text{ takav da je } Ad\,g = h,$$

odnosno,

$$\varphi(Ad\,g) = gZ \qquad g \in G.$$

Budući da je $Z \subseteq K$, preslikavanje $\pi : G/Z \to G/K$, zadano sa $\pi(gZ) = gK$, $g \in G$, je dobro definirano i neprekidno. Označimo sa $\Phi : Int(\mathfrak{g}_0) \to G/K$ kompoziciju $\pi \circ \varphi$. To je neprekidno preslikavanje koje je konstantno na K^0-klasama. Doista, neka su $h, h' \in Int(\mathfrak{g}_0)$ i $k_0 \in K^0$ takvi da je $h' = hk_0$. Izaberimo $g, g' \in G$ i $k \in K$ tako da bude $Ad\,g = h$, $Ad\,g' = h'$ i $Ad\,k = k_0$. Tada imamo redom

$$\Phi(h') = \Phi(hk_0) = \pi(\varphi(hk_0)) = \pi(\varphi(Ad\,gk)) = \pi(gkZ) =$$
$$= gkK = gK = \pi(gZ) = \pi(\varphi(Ad\,g)) = \pi(\varphi(h)) = \Phi(h).$$

Prema tome, preslikavanje Φ prijelazom na kvocijent definira neprekidno preslikavanje $\chi : Int\,(\mathfrak{g}_0)\,/K^0 \to G/K$:

$$\chi\left((Ad\,g)K^0\right) = gK, \qquad g \in G.$$

Po definiciji preslikavanja ψ vidimo da je $\chi = \psi^{-1}$. Dakle, i inverzno preslikavanje ψ^{-1} je neprekidno.

Prema dokazanom, topološki prostor G/K homeomorfan je prostoru $Int\,(\mathfrak{g}_0)\,/K^0$. Prema tvrdnji (c) teorema 4.3.3. preslikavanje $(k,x) \mapsto k\mathrm{e}^{ad\,x}$ je bianalitičko preslikavanje (dakle, homeomorfizam) sa $K^0 \times \mathfrak{p}$ na $Int\,(\mathfrak{g}_0)$. Odatle slijedi da je prostor $Int\,(\mathfrak{g}_0)\,/K^0$ homeomorfan vektorskom prostoru $\mathfrak{p}$: preslikavanje $x \mapsto \mathrm{e}^{ad\,x}K^0$ je homeomorfizam sa $\mathfrak{p}$ na $Int\,(\mathfrak{g}_0)\,/K^0$. Dakle, mnogostrukost $Int\,(\mathfrak{g}_0)\,/K^0$, a time i mnogostrukost G/K, je jednostavo povezana. Povezanost grupe K slijedi iz sljedeće leme:

Lema 4.8.3. *Neka je G povezana Liejeva grupa i K zatvorena podgrupa takva da je mnogostrukost G/K jednostavno povezana. Tada je grupa K povezana.*

Dokaz: Neka je K_0 komponenta povezanosti jedinice u grupi K. Tada je sa

$$\varphi(gK_0) = gK, \qquad g \in G,$$

dobro definirano surjektivno preslikavanje $\varphi : G/K_0 \to G/K$. To je prelikavanje neprekidno. Doista, neka su $\pi_0 : G \to G/K_0$ i $\pi : G \to G/K$ kvocijentna preslikavanja. Tada je $\pi = \varphi \circ \pi_0$, pa je za svaki otvoren podskup V prostora G/K skup $\varphi^{-1}(V) = \pi_0\left(\pi^{-1}(U)\right)$ otvoren u G/K_0.

Preslikavanje φ je otvoreno. Doista, ako je U otvoren podskup od G/K_0, onda jednakost $\varphi(U) = \pi\left(\pi_0^{-1}(U)\right)$ zbog otvorenosti preslikavanja π pokazuje da je $\varphi(U)$ otvoren podskup od G/K.

Dokazat ćemo sada da je preslikavanje φ natkrivanje. Komponenta povezanosti K_0 je otvorena podgrupa od K, pa postoji otvorena okolina jedinice e u G takva da je $K_0 = U \cap H$. Neka je V otvorena povezana okolina od e u G takva da je $V^{-1}V \subseteq U$. Tada je $V^{-1}V \cap H \subseteq H_0$. Skup $\pi(V) = VK$ je otvoren povezan podskup od G/K i on je okolina točke $K = eK$ u G/K. Skupovi $\pi_0(Vk) = VkK_0$ za $k \in K$ su otvoreni povezani podskupovi od G/K_0 i njihova je unija $\varphi^{-1}(\pi(V))$. Ako je za neke $k_1, k_2 \in K$ skup $Vk_1K_0 \cap Vk_2K_0$ neprazan onda je i $VK_0k_1 \cap VK_0k_2 \neq \emptyset$, jer je K_0 normalna podgrupa od K. Slijedi $V^{-1}VK_0 \cap K_0h_2h_1^{-1} \neq \emptyset$, a odatle je $V^{-1}V \cap K_0k_2k_1^{-1} \neq \emptyset$. Ali $V^{-1}V \cap K \subseteq K_0$, pa zaključujemo da je $k_2k_1^{-1} \in K_0$, odnosno, $k_1K_0 = k_2K_0$. To pokazuje da su različiti skupovi VkK_0 međusobno disjunktni. Dakle, to su komponente povezanosti skupa $\varphi^{-1}(\pi(V))$.

Budući da znamo da je preslikavanje φ neprekidno i otvoreno, treba još samo pokazati da je restrikcija φ na svaku komponentu povezanosti VkK_0 bijekcija na $\pi(V) = VK$. Naime, to će značiti da je okolina $\pi(V)$ točke $K = eK$ u G/K pravilno natkrivena sa φ, a kako grupa G djeluje tranzitivno na G/K, odatle će slijediti da svaka točka ima okolinu koja je pravilno natkrivena sa φ. Restrikcija $\varphi|VkK_0$ je očito surjekcija:

$$\varphi(VkK_0) = VkK = VK.$$

Pretpostavimo da su $v_1, v_2 \in V$ takvi da je $\varphi(v_1kK_0) = \varphi(v_2kK_0)$. To znači da je $v_1kK = v_2kK$, odnosno, postoji $k' \in K$ takav da je $v_1k = v_2kk'$. Odatle je $v_2^{-1}v_1 = kk'k^{-1} \in V^{-1}V \cap K \subseteq K_0$, dakle, $v_1 = v_2k_0$ za neki $k_0 \in K_0$, a to znači da je $v_1K_0 = v_2K_0$.

Dakle, preslikavanje $\varphi : G/K_0 \to G/K$ je natkrivanje. No kako je mnogostrukost G/K jednostavno povezana, prema propoziciji 3.3.19. to je preslikavanje bijekcija. To znači da je $K = K_0$, odnosno, grupa K je povezana.

Nastavljamo sada dokaz teorema 4.8.2. Do sada su dokazane tvrdnje (d) i (e). Nadalje, neposredno slijedi prva tvrdnja u (f). Dokažimo i drugu tvrdnju u (f). Neka je L kompaktna podgrupa od G koja sadrži K. Tada je $Ad\,L$ kompaktna podgrupa od $Int\,(\mathfrak{g}_0)$ koja sadrži $Ad\,K = K^0$, a kako je po teoremu 4.4.1. K^0 maksimalna kompaktna podgrupa od $Int\,(\mathfrak{g}_0)$, slijedi $Ad\,L = Ad\,K$. Budući da je $\operatorname{Ker} Ad = Z \subseteq K$, zaključujemo da je $L = K$.

Da bismo dokazali tvrdnju (c), odnosno, da je preslikavanje

$$\varphi_G : K \times \mathfrak{p} \to G, \qquad \varphi_G(k,x) = k(\exp\,x), \quad k \in K,\ x \in \mathfrak{p},$$

bianalitičko sa $K \times \mathfrak{p}$ na G, iskoristit ćemo dokazanu takvu tvrdnju za grupu $Int\,(\mathfrak{g}_0)$: po tvrdnji (c) teorema 4.3.3. preslikavanje

$$\varphi_{Int(\mathfrak{g}_0)} : K^0 \times \mathfrak{p} \to Int\,(\mathfrak{g}_0)\,, \qquad \varphi_{Int(\mathfrak{g}_0)}(h,x) = h\mathrm{e}^{ad\,x}, \quad h \in K^0,\ x \in \mathfrak{p},$$

je bianalitičko sa $K^0 \times \mathfrak{p}$ na $Int\,(\mathfrak{g}_0)$. Sada imamo komutativan dijagram:

$$\begin{tikzcd} K \times \mathfrak{p} \arrow[r, "\varphi_G"] \arrow[d, "Ad|K \times I_{\mathfrak{p}}"'] & G \arrow[d, "Ad"] \\ K^0 \times \mathfrak{p} \arrow[r, "\varphi_{Int(\mathfrak{g}_0)}"'] & Int\,(\mathfrak{g}_0) \end{tikzcd}$$

Uspravne strelice su natkrivanja a donja strelica je bianalitičko preslikavanje. Prema tome, treba još samo dokazati da je gornja strelica bijekcija. Ako su $k, k' \in K$ i $x, x' \in \mathfrak{p}$ takvi da je $k(\exp\,x) = k'(\exp\,x')$, primjenom preslikavanja Ad slijedi $(Ad\,k)\mathrm{e}^{ad\,x} = (Ad\,k')\mathrm{e}^{ad\,x'}$, a odatle je $x = x'$ zbog injektivnosti preslikavanja $\varphi_{Int(\mathfrak{g}_0)}$. Tada je, $k(\exp\,x) = k'(\exp\,x)$, pa dobivamo i $k = k'$. Dakle, preslikavanje φ_G je injektivno. Neka je sada $g \in G$. Tada zbog surjektivnosti preslikavanja $\varphi_{Int(\mathfrak{g}_0)}$ postoje $k_0 \in K^0$ i $x \in \mathfrak{p}$ takvi da je $Ad\,g = k_0\mathrm{e}^{ad\,x}$. Neka je $k \in K$ takav da je $Ad\,k = k_0$. Tada imamo

$$Ad\,g = (Ad\,k)(Ad\,(\exp\,x)) = Ad\,(k(\exp\,x)) \quad \Longrightarrow \quad g = zk(\exp\,x) \quad \text{za neki } z \in Z.$$

Kako je $Z \subseteq K$, to je $zk \in K$, dakle, $g = \varphi_G(zk, x)$. Time je dokazana i surjektivnost preslikavanja φ_G, odnosno, dokazana je tvrdnja (c).

Dokažimo sada tvrdnju (a). Neka je $\varphi : \tilde{G} \to G$ univerzalno natkrivanje. Tada komutira sljedeći dijagram:

$$\begin{tikzcd} \tilde{G} \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "Ad_{\tilde{G}}"'] & & G \arrow[dl, "Ad_G"] \\ & Int\,(\mathfrak{g}_0) & \end{tikzcd}$$

Budući da je Liejeva grupa $\tilde{G}$ jednostavno povezana, postoji jedinstven automorfizam $\tilde{\Theta} : \tilde{G} \to \tilde{G}$ s diferencijalom ϑ. $\tilde{\Theta}$ je involucija. Neka je $\tilde{K} = \varphi^{-1}(K) = \left(Ad_{\tilde{G}}\right)^{-1}(K^0)$ i neka je $\tilde{Z} = \operatorname{Ker} Ad_{\tilde{G}}$ centar grupe $\tilde{G}$. Sada iz $\vartheta|\mathfrak{k} = I_{\mathfrak{k}}$ slijedi $\tilde{\Theta}|\tilde{K} = id_{\tilde{K}}$, tj. $\tilde{K} \subseteq \operatorname{Ker} \tilde{\Theta}$. S druge strane, prema tvrdnji (e) za grupu $\tilde{G}$ vrijedi $\tilde{Z} \subseteq \tilde{K}$, pa slijedi $\operatorname{Ker} \varphi \subseteq \tilde{Z} \subseteq \tilde{K} \subseteq \operatorname{Ker} \tilde{\Theta}$. Dakle, involucija $\tilde{\Theta}$ se spušta do involucije $\Theta \in Aut(G)$ s diferencijalom ϑ. Time je dokazana tvrdnja (a).

Iz $\tilde{\Theta}|\tilde{K} = id_{\tilde{K}}$ slijedi $\Theta(k) = k\ \forall k \in K$. Neka je $g \in G$ takav da je $\Theta(g) = g$. Možemo pisati $g = k(\exp x)$ za neke $k \in K$ i $x \in \mathfrak{p}$. Kako je $\vartheta(x) = -x$, imamo redom

$$k(\exp x) = \Theta(k(\exp x)) = \Theta(k)\Theta(\exp x) = k(\exp \vartheta(x)) = k(\exp(-x)).$$

Odatle je $\exp x = \exp(-x)$, odnosno, $\exp(2x) = e_G$. Sada iz tvrdnje (c) slijedi $x = 0$, a to znači da je $g = k \in K$. Prema tome, $K = \{g \in G;\ \Theta(g) = g\}$, odnosno, dokazana je tvrdnja (b).

Ostaje nam još da dokažemo tvrdnju (g). Pretpostavimo da je centar Z grupe G konačan i neka je L kompaktna podgrupa od G. Tada je $Ad\, L$ kompaktna podgrupa od $Int\,(\mathfrak{g}_0)$ pa postoji $g_0 \in Int\,(\mathfrak{g}_0)$ takav da je $Ad\, L \subseteq g_0 K^0 g_0^{-1}$. Neka je $g \in G$ takav da je $Ad\, g = g_0$. Tada imamo

$$Ad\, L \subseteq (Ad\, g)(Ad\, K)(Ad\, g)^{-1} = Ad\,\left(gKg^{-1}\right).$$

Dakle, za $h \in L$ postoji $k \in K$ takav da je $Ad\, h = Ad\, gkg^{-1}$, pa slijedi

$$z = hgk^{-1}g^{-1} \in Ker\, Ad = Z \quad \Longrightarrow \quad h = zgkg^{-1} = gzkg^{-1} \in gKg^{-1}.$$

Time je dokazano da je $L \subseteq gKg^{-1}$, odnosno, dokazana je tvrdnja (g).

Teorem 4.8.4. *Neka je G povezana poluprosta Liejeva grupa s Liejevom algebrom $\mathfrak{g}_0$ i $(\mathfrak{k}, \mathfrak{a}, \mathfrak{n})$ Iwasawina dekompozicija od $\mathfrak{g}_0$. Neka su K, A i N povezane Liejeve podgrupe od G s Liejevim algebrama $\mathfrak{k}$, $\mathfrak{a}$ i $\mathfrak{n}$. Tada su grupe A i N zatvorene u G i jednostavno povezane. Množenje $(k, a, n) \mapsto kan$ je bianalitičko preslikavanje sa $K \times A \times N$ na G.*

Dokaz: Neka su $k_0 \in K$, $a_0 \in A$, $n_0 \in N$ i $g_0 = k_0 a_0 n_0 \in G$. Preslikavanje $Ad : G \to Int\,(\mathfrak{g}_0)$ je natkrivanje. Prema tome, točka g_0 ima otvorenu okolinu U takvu da je $Ad|U$ bianalitička bijekcija sa U na otvorenu okolinu $V = Ad\, U$ točke $Ad\, g_0$ u $Int\,(\mathfrak{g}_0)$. Sada množenje $(k, a, n) \mapsto kan$ možemo na okolini točke $(k_0, a_0, n_0) \in K \times A \times N$ faktorizirati na sljedeći način:

$$(k, a, n) \mapsto (Ad\, k, Ad\, a, Ad\, n) \mapsto (Ad\, k)(Ad\, a)(Ad\, n) = Ad\,(kan) \mapsto kan;$$

pri tome je posljednje preslikavanje inverzno od $Ad|U$. Svako od tih preslikavanja je analitičko i svuda regularno. Kako je točka $(k_0, a_0, n_0) \in K \times A \times N$ bila proizvoljna, zaključujemo da je množenje $(k, a, n) \mapsto kan$ analitičko i svuda regularno sa $K \times A \times N$ u G.

Neka su sada K^0, A^0 i N^0 povezane Liejeve podgrupe od $Int\,(\mathfrak{g}_0)$ s Liejevim algebrama $\mathfrak{k}$, $\mathfrak{a}$ i $\mathfrak{n}$. Budući da su grupe A i N povezane $Ad|A$ i $Ad|N$ su natkrivanja od A^0 i N^0. No kako su prema tvrdnjama (b) i (c) teorema 4.6.6. grupe A^0 i N^0 jednostavno povezane, $Ad|A$ i $Ad|N$ su biejkcije, tj. bianalitička preslikavanja sa A na A^0 i sa N na N^0. Prema tome, i grupe A i N su jednostavno povezane.

Dokažimo sada surjektivnost preslikavanja množenja sa $K \times A \times N$ u G. Neka je $g \in G$. Tada prema tvrdnji (d) teorema 4.6.6. postoje $k_0 \in K^0$, $a_0 \in A^0$ i $n_0 \in N^0$ takvi da je $Ad\, g = k_0 a_0 n_0$. Stavimo $a = (Ad|A)^{-1}(a_0) \in A$ i $n = (Ad|N)^{-1}(n_0) \in N$ i neka je $k \in K$ bilo koji element od $Ad^{-1}(k_0)$. Tada je $Ad(kan) = k_0 a_0 n_0 = Ad\, g$, dakle, $Ad\,(g(kan)^{-1}) = I_{\mathfrak{g}_0}$. No tada je $z = g(kan)^{-1}$ element centra Z grupe G. Kako je prema tvrdnji (e) teorema 4.8.2. $Z \subseteq K$, slijedi da je $g = zkan \in KAN$.

Ostaje nam još da dokažemo injektivnost množenja $K \times A \times N \to G$. Budući da je prema tvrdnji (c) teorema 4.6.6. množenje $A^0 \times N^0 \to A^0 N^0$ bijekcija, to je i množenje $A \times N \to AN$ bijekcija. Kao i u slučaju $Int\,(\mathfrak{g}_0)$ lako se vidi da je AN podgrupa od G. Stoga za injektivnost množenja $K \times A \times N \to G$ treba još samo dokazati da je $K \cap AN = \{e\}$. Neka je $g \in K \cap AN$. Tada je $Ad\, g \in K^0 \cap A^0 N^0 = \{I_{\mathfrak{g}_0}\}$, dakle, $Ad\, g = I_{\mathfrak{g}_0}$. Neka su $a \in A$ i $n \in N$ takvi da je $g = an$. Tada je $I_{\mathfrak{g}_0} = Ad\, g = (Ad\, a)(Ad\, n)$, pa iz injektivnosti množenja $A^0 \times N^0 \to Int\,(\mathfrak{g}_0)$ slijedi da je $Ad\, a = Ad\, n = I_{\mathfrak{g}_0}$. Budući da su $Ad|A$ i $Ad|N$ bijekcije sa A na A^0 i sa N na N^0, dobivamo $a = n = e$. Dakle, $g = an = e$.

U odjeljku 4.7. definirali smo podgrupe M i M' od K^0 kao centralizator i normalizator od $\mathfrak{a}$ u K^0, a prema teoremu 4.7.7. kvocijentna grupa M'/M identificira se s Weylovom grupom $W(\Sigma)$ sistema korijena $\Sigma = R(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{a})$. Označimo sada te podgrupe od K^0 sa M^0 i M'^0,

$$M^0 = Z_{K^0}(\mathfrak{a}) = \{k \in K^0;\ k|\mathfrak{a} = I_{\mathfrak{a}}\}, \qquad M'^0 = N_{K^0}(\mathfrak{a}) = \{k \in K^0;\ k\mathfrak{a} = \mathfrak{a}\},$$

i stavimo

$$M = Ad^{-1}\left(M^0\right) = Z_K(\mathfrak{a}) = \{g \in K;\ (Ad\, g)|\mathfrak{a} = I_{\mathfrak{a}}\},$$
$$M' = Ad^{-1}\left(M'^0\right) = N_K(\mathfrak{a}) = \{g \in K;\ (Ad\, g)\mathfrak{a} = \mathfrak{a}\}.$$

Tada je $M^0 \simeq M/Z$ i $M'^0 \simeq M'/Z$, dakle, $M'/M \simeq M'^0/M^0$. To pokazuje da se teorem 4.7.7. generalizira sa grupe $Int\,(\mathfrak{g}_0)$ na proizvoljnu povezanu poluprostu Liejevu grupu G s Liejevom algebrom $\mathfrak{g}_0$, odnosno, pomoću reprezentacije Ad grupe G na $\mathfrak{g}_0$ uz identifikaciju $\mathfrak{a}$ sa $\mathfrak{a}^*$ opisanu u odjeljku 4.7. dobivamo $W(\Sigma) = M'/M$. Napokon, primijetimo da su centralizator i normalizator od $\mathfrak{a}$ u K upravo centralizator i normalizator grupe $A = \exp_G \mathfrak{a}$ u grupi K :

$$M = Z_K(\mathfrak{a}) = Z_K(A) = \{k \in K;\ ka = ak\ \forall a \in A\},$$

$$M' = N_K(\mathfrak{a}) = N_K(A) = \{k \in K;\ kAk^{-1} = A\}.$$

Zadatak 4.8.1. *Neka je $G = SL(n, \mathbb{R})$ i $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$. Za Cartanovu dekompoziciju $(\mathfrak{k}, \mathfrak{p})$ iz zadatka 4.2.3. i pripadnu maksimalnu kompaktnu podgrupu $K = SO(n)$ od G izaberite neki Cartanov potprostor $\mathfrak{a}$ od $\mathfrak{p}$ i odredite $\Sigma = R(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{a})$, $\mathfrak{m} = Z_{\mathfrak{k}}(\mathfrak{a})$, $M = Z_K(\mathfrak{a})$ i $M' = N_K(\mathfrak{a})$. Nadalje, izračunajte* $\dim \mathfrak{g}_0^\lambda$ *za $\lambda \in \Sigma$.*

Zadatak 4.8.2. *Neka su $p, q \in \mathbb{N}$, $G = SU(p, q)$ i $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{su}(p, q)$. Za Cartanovu dekompoziciju iz zadatka 4.2.4. i pripadnu maksimalnu kompaktnu podgrupu $K = S(U(p) \times U(q))$ od G izaberite neki Cartanov potprostor $\mathfrak{a}$ od $\mathfrak{p}$ i odredite $\Sigma = R(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{a})$, $\mathfrak{m} = Z_{\mathfrak{k}}(\mathfrak{a})$, $M = Z_K(\mathfrak{a})$ i $M' = N_K(\mathfrak{a})$. Nadalje, izračunajte* $\dim \mathfrak{g}_0^\lambda$ *za $\lambda \in \Sigma$. Da li je sistem korijena Σ reduciran?*

Zadatak 4.8.3. *Neka su $p, q \in \mathbb{N}$ i neka je $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{o}(p, q)$ realna forma od $\mathfrak{g} = \mathfrak{o}(p+q, \mathbb{C})$ zadana sa*

$$\mathfrak{o}(p, q) = \left\{x \in M_{p+q}(\mathbb{R});\ x^T = -I_{p,q} x I_{p,q}\right\} \qquad \textit{gdje je} \quad I_{p,q} = \begin{bmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_q \end{bmatrix}.$$

Neka je $G = SO_0(p, q)$ komponenta povezanosti jedinice grupe

$$SO(p, q) = \left\{g \in GL(p+q, \mathbb{R});\ g^T = I_{p,q} g^{-1} I_{p,q}\right\}.$$

Neka su

$$\mathfrak{k} = \left\{\begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix};\ x \in \mathfrak{o}(p),\ y \in \mathfrak{o}(q)\right\} = \mathfrak{o}(p) \times \mathfrak{o}(q), \quad \mathfrak{p} = \left\{\begin{bmatrix} 0 & z \\ z^T & 0 \end{bmatrix};\ z \in M_{p,q}(\mathbb{R})\right\}.$$

Dokažite da je $(\mathfrak{k}, \mathfrak{p})$ Cartanova dekompozicija od $\mathfrak{o}(p, q)$ i da je pripadna maksimalna kompaktna podgrupa od G jednaka

$$K = SO(p) \times SO(q) = \left\{\begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix};\ x \in SO(p),\ y \in SO(q)\right\}.$$

Izaberite neki Cartanov potprostor $\mathfrak{a}$ od $\mathfrak{p}$ i odredite $\Sigma = R(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{a})$, $\mathfrak{m} = Z_{\mathfrak{k}}(\mathfrak{a})$, $M = Z_K(\mathfrak{a})$ i $M' = N_K(\mathfrak{a})$. Nadalje, izračunajte $\dim \mathfrak{g}_0^\lambda$ *za $\lambda \in \Sigma$. Koje su posebnosti slučajeva $p = q$ i $p = q+1$?*

4.9 Komutativne Liejeve grupe

Neka je V konačnodimenzionalan realan vektorski prostor. U odnosu na zbrajanje V je povezana Liejeva grupa. Njena je Liejeva algebra tangencijalni prostor na V u jedinici aditivne grupe V, odnosno, u nuli. Identifikacija je dana sa

$$vf = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(tv)\bigg|_{t=0}, \qquad v \in V, \quad f \in C^\infty(V).$$

Zadatak 4.9.1. *Neka je V konačnodimenzionalan realan vektorski prostor promatran kao Liejeva grupa u odnosu na zbrajanje. Dokažite da je $\exp_V : V \to V$ identiteta i da je $W \subseteq V$ povezana Liejeva podgrupa ako i samo ako je W potprostor prostora V. Posebno, svaka povezana Liejeva podgrupa od V je zatvorena.*

Propozicija 4.9.1. *Neka je G povezana komutativna Liejeva grupa i $\mathfrak{g}$ njena Liejeva algebra. Tada je $\exp_G : \mathfrak{g} \to G$ univerzalno natkrivanje od G.*

Dokaz: Preslikavanje $\exp_G$ je svuda regularno, dakle, njegova slika $\exp_G \mathfrak{g}$ je otvoren podskup od G. Nadalje, kako je Liejeva grupa G komutativna, njena Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ je komutativna. To znači da vrijedi $\exp_G(x + y) = (\exp_G x)(\exp_G y)$, $x, y \in \mathfrak{g}$, odnosno, $\exp_G$ je homomorfizam aditivne Liejeve grupe $\mathfrak{g}$ u Liejevu grupu G. To znači da je slika $\exp_G \mathfrak{g}$ podgrupa od G. To znači da je $\exp_G \mathfrak{g}$ otvorena, dakle, i zatvorena podgrupa od G. Ali po pretpostavci je G povezana grupa, pa slijedi da je $\exp_G \mathfrak{g} = G$. Budući da je preslikavanje $\exp_G$ svuda regularno, jezgra $\Gamma = \mathrm{Ker} \exp_G$ homomorfizma $\exp_G$ je diskretna podgrupa aditivne grupe $\mathfrak{g}$. No to znači da je $\exp_G : \mathfrak{g} \to G$ natkrivanje. To je univerzalno natkrivanje jer je $\mathfrak{g}$ vektorski prostor, dakle, jednostavno povezana mnogostrukost.

Proučit ćemo sada diskretne podgrupe konačnodimenzionalnog realnog vektorskog prostora V. Ako je Γ diskretna podgrupa od V, broj $\dim span_{\mathbb{R}} \Gamma$ zove se **rang** od Γ.

Teorem 4.9.2. *Neka je Γ diskretna podgrupa od V ranga r. Tada postoje linearno nezavisni vektori $v_1, \ldots, v_r$ u V takvi da je*

$$\Gamma = \{m_1 v_1 + \cdots + m_r v_r;\ m_1, \ldots, m_r \in \mathbb{Z}\},$$

tj. takvi da je $(m_1, \ldots, m_r) \mapsto m_1 v_1 + \cdots + m_r v_r$ izomorfizam sa $\mathbb{Z}^r$ na Γ.

Dokaz: Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $r = n = \dim V$, tj. da Γ razapinje V. Tada Γ sadrži neku bazu $\{e_1, \ldots, e_n\}$ od V. Dokazat ćemo sada sljedeću lemu:

Lema 4.9.3. *Neka je Γ diskretna podgrupa od V i $\{e_1, \ldots, e_n\}$ baza od V sadržana u Γ. Tada postoji $d \in \mathbb{N}$ takav da je*

$$\Gamma \subseteq \Delta = \mathbb{Z}\frac{1}{d}e_1 + \cdots + \mathbb{Z}\frac{1}{d}e_n.$$

Dokaz: Neka je

$$K = \{v \in V |\ v = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n,\ \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in [0, 1]\}.$$

K je kompaktan skup pa je presjek $\Gamma \cap K$ konačan. Uočimo da su $e_1, \ldots, e_n \in \Gamma \cap K$.

U daljnjem za $\lambda \in \mathbb{R}$ sa $[\lambda]$ označavamo najveći cijeli broj manji ili jednak λ, tj. jedinstven cijeli broj takav da je $[\lambda] \le \lambda < [\lambda] + 1$. Neka je $v \in \Gamma$. Tada je $v = \alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n$ za neke $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$. Stavimo $u = [\alpha_1] e_1 + \cdots + [\alpha_n] e_n \in \Gamma$. Tada je

$$v - u = (\alpha_1 - [\alpha_1]) e_1 + \cdots + (\alpha_n - [\alpha_n]) e_n \in \Gamma \cap K.$$

To pokazuje da je grupa Γ generirana sa $\Gamma \cap K$.

Pretpostavimo sada da je $v \in \Gamma \cap K$. Primijenimo li gornje razmatranje na vektor mv za $m \in \mathbb{N}$, dobivamo

$$\sum_{i=1}^{n} (m\alpha_i - [m\alpha_i])\, e_i \in \Gamma \cap K.$$

Budući da je skup $\Gamma \cap K$ konačan, postoje međusobno različiti $m, m' \in \mathbb{N}$ takvi da je

$$m\alpha_i - [m\alpha_i] = m'\alpha_i - [m'\alpha_i] \qquad \forall i \in \{1, \ldots, n\}.$$

Tada je

$$(m - m')\alpha_i = [m\alpha_i] - [m'\alpha_i] \in \mathbb{Z} \qquad \text{za} \quad i = 1, \ldots, n.$$

Prema tome, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ su racionalni brojevi. To pokazuje da su koordinate svih vektora u $\Gamma \cap K$ u bazi $\{e_1, \ldots, e_n\}$ racionalni brojevi. No tih vektora ima konačno mnogo, pa postoji $d \in \mathbb{N}$ takav da sve te koordinate leže u $\frac{1}{d}\mathbb{Z}$. Tada je

$$\Gamma \cap K \subseteq \mathbb{Z}\frac{1}{d}e_1 + \cdots + \mathbb{Z}\frac{1}{d}e_n,$$

a kako $\Gamma \cap K$ generira grupu Γ, slijedi tvrdnja leme.

Nastavimo sada dokaz teorema 4.9.2. Neka je $\{e_1, \ldots, e_n\}$ baza od V sadržana u Γ i neka je $d \in \mathbb{N}$ kao u lemi 4.9.3. tj. takav da je

$$\Gamma \subseteq \Delta = \mathbb{Z}a_1 + \cdots + \mathbb{Z}a_n, \qquad \text{gdje su} \quad a_i = \frac{1}{d}e_i \quad \text{za} \quad i = 1, \ldots, n.$$

Dakle, svaki se element $v \in \Gamma$ može napisati u obliku $m_1a_1 + \cdots + m_na_n$, gdje su $m_1, \ldots, m_n$ jedinstveno određeni cijeli brojevi. Za bilo koju uređenu bazu $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ od V sadržanu u Γ definiramo

$$D(v_1, v_2, \ldots, v_n) = \det \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n1} & m_{n2} & \cdots & m_{nn} \end{bmatrix}, \qquad v_i = \sum_{j=1}^{n} m_{ij}a_j, \quad 1 \le i, j \le n.$$

Tada je D funkcija sa skupa svih uređenih baza od V sadržanih u Γ u $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, pa postoji baza $\{v_1, \ldots, v_n\}$ takva da je apsolutna vrijednost $|D(v_1, \ldots, v_n)|$ najmanja moguća. Označimo sa Ω aditivnu podgrupu od V generiranu sa $\{v_1, \ldots, v_n\}$:

$$\Omega = \{m_1v_1 + \cdots + m_nv_n;\ m_1, \ldots, m_n \in \mathbb{Z}\}.$$

Očito je $\Omega \subseteq \Gamma$. Dokazat ćemo sada vrijedi i obrnuta inkluzija, odnosno, jednakost $\Gamma = \Omega$, i time će teorem 4.9.2. biti dokazan.

Neka je $v \in \Gamma$. Tada je $v = \lambda_1v_1 + \cdots + \lambda_nv_n$ za neke $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$. Tada je $u = [\lambda_1]\, v_1 + \cdots + [\alpha_n]\, v_n \in \Omega \subseteq \Gamma$. Dakle, $w = v - u \in \Gamma$ i vrijedi

$$w = \sum_{i=1}^{n} \alpha_iv_i, \qquad \text{gdje su} \quad \alpha_i = \lambda_i - [\lambda_i] \in [0, 1\rangle \quad \text{za} \quad i = 1, \ldots, n.$$

Pretpostavimo da je $w \neq 0$. Uz eventualnu promjenu numeracije možemo pretpostaviti da je $\alpha_1 > 0$. Tada je $\{w, v_2, \ldots, v_n\}$ baza od V sadržana u Γ. Ako su

$$v_i = \sum_{j=1}^{n} m_{ij}a_j \qquad \text{uz} \quad m_{ij} \in \mathbb{Z},$$

onda imamo

$$w = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i m_{ij} \right) a_j,$$

pa slijedi

$$D(w, v_2, \ldots, v_n) = \det \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i m_{i1} & \sum_{i=1}^{n} \alpha_i m_{i2} & \cdots & \sum_{i=1}^{n} \alpha_i m_{in} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n1} & m_{n2} & \cdots & m_{nn} \end{bmatrix} =$$

$$= \det \begin{bmatrix} \alpha_1 m_{11} & \alpha_1 m_{12} & \cdots & \alpha_1 m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n1} & m_{n2} & \cdots & m_{nn} \end{bmatrix} = \alpha_1 D(v_1, v_2, \ldots, v_n).$$

No kako je $0 < \alpha_1 < 1$, to je u suprotnosti s minimalnošću $|D(v_1, v_2, \ldots, v_n)|$. Ova kontradikcija pokazuje da je $w = 0$, odnosno, da je $v = u \in \Omega$.

Neka je sada G povezana komutativna Liejeva grupa. Prema propoziciji 4.9.1. preslikavanje $\exp_G : \mathfrak{g} \to G$ je univerzalno natkrivanje. Tada je $\Gamma = \operatorname{Ker} \exp_G$ diskretna podgrupa aditivne grupe $\mathfrak{g}$, pa prema teoremu 4.9.2. postoje linearno nezavisni $e_1, \ldots, e_r \in \mathfrak{g}$ takvi da je $(m_1, \ldots, m_r) \mapsto m_1 e_1 + \cdots + m_r e_r$ izomorfizam sa $\mathbb{Z}^r$ na Γ. Dopunimo vektore $e_1, \ldots, e_r$ do baze $\{e_1, \ldots, e_r, e_{r+1}, \ldots, e_n\}$ od $\mathfrak{g}$. Tada je $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \mapsto \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n$ izomorfizam Liejeve grupe $\mathbb{R}^n$ na Liejevu grupu $\mathfrak{g}$. Odatle dolazimo do izomorfizma Liejeve grupe $(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^r \times \mathbb{R}^{n-r}$ na $\mathfrak{g}/\Gamma \simeq G$. Kvocijentna grupa $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ identificira se s multiplikativnom grupom jedinične kružnice $S = \{\lambda \in \mathbb{C};\ |\lambda| = 1\}$ u kompleksnoj ravnini pomoću izomorfizma $\lambda + \mathbb{Z} \mapsto \mathrm{e}^{2\pi i \lambda}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Iz ovog razmatranja dobivamo potpunu klasifikaciju povezanih komutativnih Liejevih grupa:

Teorem 4.9.4. *Ako je G povezana $n-$dimenzionalna komutativna Liejeva grupa, postoji $r \in \{0, 1, \ldots, n\}$ takav da je G izomorfna Liejevoj grupi $S^r \times \mathbb{R}^{n-r}$.*

Posebno:

Korolar 4.9.5. *Jednodimenzionalna povezana Liejeva grupa izomorfna je ili sa $\mathbb{R}$ ili sa S.*

Nadalje:

Korolar 4.9.6. *Povezana kompaktna komutativna $n-$dimenzionalna Liejeva grupa izomorfna je grupi S^n.*

Upravo zbog tog korolara kompaktna povezana komutativna Liejeva grupa zove se **torus**.

Iz dobivenih rezultata jednostavno slijedi potpun opis zatvorenih podgrupa aditivne grupe vektorskog prostora:

Teorem 4.9.7. *Neka je V realan konačnodimenzionalan vektorski prostor promatran kao komutativna Liejeva grupa u odnosu na zbrajanje i neka je G zatvorena podgrupa od V. Tada postoje linearno nezavisni vektori $e_1, \ldots, e_r \in V$ i $k \in \{0, \ldots, r\}$ takvi da je*

$$(\lambda_1, \ldots, \lambda_k, m_{k+1}, \ldots, m_r) \mapsto \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_k e_k + m_{k+1} e_{k+1} + \cdots + m_r e_r$$

izomorfizam sa $\mathbb{R}^k \times \mathbb{Z}^{r-k}$ na G.

Dokaz: Prema zadatku 4.9.1. Liejeva algebra od V podudara se s V i to tako da je eksponencijalno preslikavanje identiteta na V i skup povezanih Liejevih podgrupa od V podudara se sa skupom potprostora od V. Prema tome, komponenta povezanosti G_0 zatvorene podgrupe G od V je potprostor od V. Neka je $k = \dim G_0$ i neka je $\{e_1, \ldots, e_k\}$ baza potprostora G_0. Tada je kvocijentna grupa V/G_0 upravo aditivna grupa kvocijentnog prostora V/G_0. Nadalje, G/G_0 je diskretna podgrupa aditivne grupe V/G_0. Neka je $r \geq k$ takav da je $r-k$ rang grupe G/G_0. Prema teoremu 4.9.2. postoje vektori $e_{k+1}, \ldots, e_r$ koji su linearno nezavisni modulo G_0 (tj. takvi da su vektori $e_{k+1}+G_0, \ldots, v_r+G_0$ linearno nezavisni u kvocijentnom vektorskom prostoru V/G_0) takvi da je

$$(m_{k+1}, \ldots, m_r) \mapsto \sum_{i=k+1}^{r} m_i\,(e_i + G_0)$$

izomorfizam $\mathbb{Z}^{r-k}$ na G/G_0.

Promatramo sada preslikavanje

$$(\lambda_1, \ldots, \lambda_k, m_{k+1}, \ldots, m_r) \mapsto \sum_{i=1}^{k} \lambda_i e_i + \sum_{i=k+1}^{r} m_i e_i$$

sa $\mathbb{R}^k \times \mathbb{Z}^{r-k}$ u V. To je injektivni homomorfizam aditivnih grupa. Označimo njegovu sliku sa G'. Tada je G' zatvorena podgrupa od V sadržana u G. Nadalje, grupa G' sadrži grupu G_0. Kvocijentna grupa G'/G_0 je diskretna podgrupa od V/G_0 koja sadrži vektore $e_{k+1} + G_0, \ldots, e_r + G_0$. Stoga je $G'/G_0 \supseteq G/G_0$, pa slijedi $G' \supseteq G$. Kako već znamo obrnutu inkluziju $G' \subseteq G$, zaključujemo da je $G' = G$. Time je teorem dokazan.

4.10 Torusi u kompaktnim Liejevim grupama

Kao što smo definirali u prethodnom odjeljku povezana komutativna kompaktna Liejeva grupa T zove se **torus**. Prema korolaru 4.9.6. $n-$dimenzionalan torus T izomorfan je Liejevoj grupi S^n.

Promatrat ćemo sada jednoparametarske podgrupe proizvoljne Liejeve grupe G i njihove zatvarače u G.

Propozicija 4.10.1. *Neka je G Liejeva grupa, $\mathfrak{g}$ njena Liejeva algebra, $x \in \mathfrak{g}\backslash\{0\}$ i H jednoparametarska podgrupa $\{\exp tx;\ t \in \mathbb{R}\}$. Tada je ili H zatvorena podgrupa od G izomorfna aditivnoj grupi $\mathbb{R}$, ili je njen zatvarač $\overline{H}$ torus, tj. podgrupa izomorfna Liejevoj grupi S^n za neki $n \in \mathbb{N}$.*

Dokaz: Naravno, ili je $t \mapsto \exp tx$ izomorfizam aditivne grupe $\mathbb{R}$ na grupu H, ili je grupa H izomorfna grupi S. U drugom slučaju H je kompaktna, dakle, zatvorena u G. Pretpostavimo sada da grupa H nije zatvorena u G. Tada je njen zatvarač $\overline{H}$ povezana komutativna podgrupa od G. Prema teoremu 4.9.4. grupa $\overline{H}$ izomorfna je Liejevoj grupi $S^p \times \mathbb{R}^q$ za neke $p, q \in \mathbb{Z}_+$. Univerzalni natkrivač od $\overline{H}$ je tada aditivna grupa $\mathbb{R}^{p+q}$, pa se Liejeva algebra od $\overline{H}$ može identificirati s $\mathbb{R}^{p+q}$ tako da je $\exp_{\overline{H}} : \mathbb{R}^{p+q} \to \overline{H}$ univerzalno nakrivanje. Možemo pretpostaviti da je $\operatorname{Ker} \exp_{\overline{H}} = \mathbb{Z}^p \times \{0\}$. Izabrani element $x \in \mathfrak{g}$ nalazi se u Liejevoj algebri od H, dakle i od $\overline{H}$, prema tome on određuje pravac $L = \{tx;\ t \in \mathbb{R}\}$ u $\mathbb{R}^{p+q}$. Neka je $\{e_1, \ldots, e_{p+q}\}$ kanonska baza od $\mathbb{R}^{p+q}$. Neka je K aditivna podgrupa od $\mathbb{R}^{p+q}$ generirana sa $L \cup \{e_1, \ldots, e_p\}$. Neka je U neprazan otvoren podskup od $\mathbb{R}^{p+q}$. Natkrivanje $\exp_{\overline{H}} : \mathbb{R}^{p+q} \to \overline{H}$ je otvoreno preslikavanje, dakle, $V = \exp_{\overline{H}}(U)$ je neprazan otvoren podskup od $\overline{H}$. Kako je grupa H gusta u svom zatvaraču $\overline{H}$, vrijedi $V \cap H \neq \emptyset$. Odatle slijedi $U \cap K \neq \emptyset$. Prema tome, podgrupa K je gusta u grupi $\mathbb{R}^{p+q}$. Odatle prije svega slijedi da vektori $x, e_1, \ldots, e_p$ razapinju čitav prostor $\mathbb{R}^{p+q}$. Prema tome, vrijedi $q \leq 1$.

Pretpostavimo da je $q = 1$. Tada je vektor x linearno nezavisan od vektora $e_1, \ldots, e_p$, pa slijedi da je K zatvorena podgrupa od $\mathbb{R}^{p+1}$. No ta je podgrupa prema dokazanom gusta u $\mathbb{R}^{p+1}$, prema tome, $K = \mathbb{R}^{p+1}$. To je moguće samo ako je $p = 0$. Tada je Liejeva grupa $\overline{H}$ jednodimenzionalna, a kako je i H jednodimenzionalna, slijedi da je $H = \overline{H}$, odnosno, H je zatvorena podgrupa od G. Prema korolaru 4.9.5. grupa H je izomorfna ili grupi $\mathbb{R}$ ili grupi $S = S^1$.

Ako je pak $q = 0$, onda je $\overline{H} \simeq \mathbb{R}^p / \operatorname{Ker} \exp_{\overline{H}} = \mathbb{R}^p / \mathbb{Z}^p = S^p$.

Dokazat ćemo sada da se svaki torus može dobiti na taj način:

Propozicija 4.10.2. *Neka je T torus s Liejevom algebrom $\mathfrak{t}$. Postoji $x \in \mathfrak{t}$ takav da je jednoparametarska podgrupa $\{\exp tx;\ t \in \mathbb{R}\}$ gusta u T.*

Dokaz: Možemo pretpostaviti da je $T = S^n$, $\mathfrak{t} = \mathbb{R}^n$ i

$$\exp(\xi_1, \ldots, \xi_n) = \left(\mathrm{e}^{2\pi i \xi_1}, \ldots, \mathrm{e}^{2\pi i \xi_n}\right), \qquad (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Neka je $\{e_1, \ldots, e_n\}$ standardna baza od $\mathbb{R}^n$. Prema dokazu propozicije 4.10.1. dovoljno je dokazati da postoji jednodimenzionalan potprostor L u $\mathbb{R}^n$ takav da je aditivna podgrupa od $\mathbb{R}^n$ generirana sa $L \cup \{e_1, \ldots, e_n\}$ gusta u $\mathbb{R}^n$.

Neka je L jednodimenzionalan potprostor od $\mathbb{R}^n$ i neka je H aditivna podgrupa od $\mathbb{R}^n$ generirana sa $L \cup \{e_1, \ldots, e_n\}$. Označimo sa $\overline{H}$ zatvarač od H. Tada je $\overline{H}$ zatvorena podgrupa Liejeve grupe $\mathbb{R}^n$. Prema teoremu 4.9.7. postoji baza $v_1, \ldots, v_n$ prostora $\mathbb{R}^n$ i $k \in \{0, \ldots, n\}$ takvi da je

$$\overline{H} = \{\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_k v_k + m_{k+1} v_{k+1} + \cdots + m_n v_n;\ \lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R},\ m_{k+1}, \ldots, m_n \in \mathbb{Z}\}.$$

Pretpostavimo da H nije gusta u $\mathbb{R}^n$, tj. da je $\overline{H} \neq \mathbb{R}^n$. Tada je $k < n$. Neka je f linearni funkcional na prostoru $\mathbb{R}^n$ definiran sa $f(v_i) = 0$ za $i = 1, \ldots, n-1$ i $f(v_n) = 1$. Tada je $f \neq 0$ i $f\left(\overline{H}\right) \subseteq \mathbb{Z}$.

Prema tome, ako podgrupa H nije gusta u $\mathbb{R}^n$, postoji netrivijalan linearan funkcional f na prostoru $\mathbb{R}^n$ takav da je $f(H) \subseteq \mathbb{Z}$. Stavimo $\alpha_i = f(e_i)$, $i = 1, \dots, n$. Budući da su $e_1, \dots, e_n \in H$, vrijedi $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{Z}$. Neka je $x = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in L \setminus \{0\}$. Kako je $f(L) \subseteq F(H) \subseteq \mathbb{Z}$, nužno je $f(L) = \{0\}$. Prema tome, vrijedi $\alpha_1\xi_1 + \cdots + \alpha_n\xi_n = 0$. To pokazuje da su $\xi_1, \dots, \xi_n$ linearno nezavisni nad poljem $\mathbb{Q}$. Kako je $\mathbb{R}$ beskonačnodimenzionalan vektorski prostor nad $\mathbb{Q}$, postoje $\xi_1, \dots, \xi_n \in \mathbb{R}$ koji su linearno nezavisni nad $\mathbb{Q}$. Ako stavimo $x = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ i $L = \{tx;\ t \in \mathbb{R}\}$, prema dokazanom aditivna podgrupa H generirana sa $L \cup \{e_1, \dots, e_n\}$ je gusta u $\mathbb{R}^n$. To znači da je jednoparametarska podgrupa $\{\exp tx;\ t \in \mathbb{R}\}$ gusta u S^n.

U ostatku ovog odjeljka G označava povezanu kompaktnu Liejevu grupu i $\mathfrak{g}$ njenu Liejevu algebru.

Propozicija 4.10.3. *Postoji skalarni produkt $(\cdot|\cdot)$ na $\mathfrak{g}$ takav da je $Ad\,G$ zatvorena podgrupa ortogonalne grupe $O(\mathfrak{g})$. U odnosu na taj skalarni produkt svi operatori $ad\,x$, $x \in \mathfrak{g}$, su antihermitski. Posebno, Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ je reduktivna.*

Dokaz: Budući da je G kompaktna, njena slika $Ad\,G$ je kompaktna, pa je to zatvorena podgrupa od $GL(\mathfrak{g})$. Neka je μ normirana Haarova mjera na G i neka je $\langle\cdot|\cdot\rangle$ bilo koji skalarni produkt na prostoru $\mathfrak{g}$. Tada je sa

$$(x|y) = \int_G \langle (Ad\,g)x | (Ad\,g)y \rangle \mathrm{d}\mu(g), \qquad x, y \in \mathfrak{g},$$

zadan skalarni produkt na $\mathfrak{g}$ i zbog desne invarijantnosti Haarove mjere vrijedi $Ad\,G \subseteq O(\mathfrak{g})$. Napokon, ako su $x, y, z \in \mathfrak{g}$ onda imamo

$$\left(\mathrm{e}^{t\,ad\,x}y \,\middle|\, \mathrm{e}^{t\,ad\,x}z\right) = (y|z) \qquad \forall t \in \mathbb{R},$$

a odatle deriviranjem po t u nuli dobivamo

$$((ad\,x)y|z) + (y|(ad\,x)z) = 0,$$

odnosno, operator $ad\,x$ je antihermitski.

Propozicija 4.10.4. (*a*) *Svaka komutativna Liejeva podalgebra od $\mathfrak{g}$ sadržana je u maksimalnoj komutativnoj Liejevoj podalgebri od $\mathfrak{g}$.*

(*b*) *Svaki torus u G sadržan je u maksimalnom torusu u G.*

(*c*) *Povezana Liejeva podgrupa T od G je maksimalni torus u G ako i samo ako je njena Liejeva algebra $\mathfrak{t}$ maksimalna komutativna Liejeva podalgebra od $\mathfrak{g}$.*

(*d*) $\mathfrak{t} \mapsto \exp \mathfrak{t}$ *je bijekcija sa skupa svih maksimalnih komutativnih Liejevih podalgebri od $\mathfrak{g}$ na skup svih maksimalnih torusa u G.*

Dokaz: Tvrdnja (*a*) je trivijalna, jer je Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ konačnodimenzionalna.

Pretpostavimo sada da je $\mathfrak{h}$ komutativna Liejeva podalgebra od $\mathfrak{g}$. Tada je $H = \exp_G(\mathfrak{h})$ komutativna povezana Liejeva podgrupa od G, pa je i njen zatvarač $\overline{H}$ komutativna povezana podgrupa od G, dakle, torus. Tada je Liejeva algebra $\mathfrak{h}'$ od $\overline{H}$ komutativna podalgebra od $\mathfrak{g}$ koja sadrži $\mathfrak{h}$.

Ako smo u prethodnom razmatranju za $\mathfrak{h}$ odabrali maksimalnu komutativnu Liejevu podalgebru od $\mathfrak{g}$, slijedi da je $\mathfrak{h}' = \mathfrak{h}$. No tada povezane Liejeve podgrupe H i $\overline{H}$ imaju istu Liejevu algebru, pa se podudaraju, $H = \overline{H}$, odnosno, H je torus. Neka je K torus u G koji sadrži H.

Njegova je Liejeva algebra $\mathfrak{k}$ komutativna i sadrži $\mathfrak{h}$. Zbog maksimalnosti od $\mathfrak{h}$, vrijedi $\mathfrak{k} = \mathfrak{h}$. To znači da je $K = H$. Time je dokazano da je torus H maksimalan u G.

Prema dokazanom, bijekcija sa skupa svih Liejevih podalgebri od $\mathfrak{g}$ na skup svih povezanih Liejevih podgrupa od G preslikava skup svih maksimalnih komutativnih Liejevih podalgebri od $\mathfrak{g}$ u skup svih maksimalnih torusa u G. Za dokaz tvrdnji (c) i (d) treba još samo dokazati da je to preslikavanje surjektivno. No ako je T maksimalni torus u G, onda je njegova Liejeva algebra $\mathfrak{t}$ komutativna podalgebra od $\mathfrak{g}$. Prema (a) ona je sadržana u nekoj maksimalnoj komutativnoj Liejevoj podalgebri $\mathfrak{h}$ od $\mathfrak{g}$. Tada znamo da je $H = \exp \mathfrak{h}$ maksimalan torus, a kako on sadrži T, zbog maksimalnosti T je $H = T$. No tada je $\mathfrak{t} = \mathfrak{h}$, što pokazuje da je $\mathfrak{t}$ maksimalna komutativna Liejeva podalgebra od $\mathfrak{g}$.

Napokon, dokažimo tvrdnju (b). Neka je T torus u G. Prema (a) njegova Liejeva algebra $\mathfrak{t}$ sadržana je u maksimalnoj komutativnoj Liejevoj podalgebri $\mathfrak{h}$ od $\mathfrak{g}$. Prema tvrdnji (c) $H = \exp \mathfrak{h}$ je maksimalan torus u G, a kako je $\mathfrak{t} \subseteq \mathfrak{h}$, vrijedi $T \subseteq H$.

Ako je $g \in G$ i T (maksimalni) torus u G, onda je $gTg^{-1} = (Int(g))(T)$ također (maksimalni) torus u G. Posebno, grupa G pomoću unutarnjih automorfizama djeluje na skupu svih maksimalnih torusa u G. Nadalje, ako je $\mathfrak{t}$ (maksimalna) komutativna Liejeva podalgebra od $\mathfrak{g}$, onda je i $(Ad\, g)(\mathfrak{t})$ (maksimalna) komutativna Liejeva podalgebra od $\mathfrak{g}$. Dakle, grupa G preko adjungirane reprezentacije Ad djeluje na skupu svih maksimalnih komutativnih Liejevih podalgebri od $\mathfrak{g}$. Cilj nam je dokazati da su oba ta djelovanja tranzitivna. U tu svrhu najprije dokazujemo lemu:

Lema 4.10.5. *Neka su $x, y \in \mathfrak{g}$. Postoji $g \in G$ takav da je $[(Ad\, g)x, y] = 0$.*

Dokaz: Prema propoziciji 4.10.3. postoji skalarni produkt $(\cdot|\cdot)$ na $\mathfrak{g}$ koji je $Ad(G)-$invarijantan. Promatrajmo funkciju $F : G \to \mathbb{R}$ definiranu sa $F(g) = ((Ad\, g)x|y)$, $g \in G$. Budući da je grupa G kompaktna, funkcija F poprima minimalnu vrijednost u nekoj točki $g_0 \in G$. Neka je $z \in \mathfrak{g}$. Tada diferencijabilna funkcija $t \mapsto F((\exp tz)g_0)$ ima minimum u točki $t = 0$. Međutim,

$$F((\exp tz)g_0) = ((Ad((\exp tz)g_0)x|\, y) = ((Ad(\exp tz))(Ad\, g_0)x|\, y) = \left(\mathrm{e}^{t\, ad\, z}(Ad\, g_0)x\middle|\, y\right).$$

Budući da su prema propoziciji 4.10.3. operatori $ad\, z$ i $ad\, y$ antihermitski, imamo redom

$$0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F((\exp tz)g_0)\bigg|_{t=0} = ((ad\, z)(Ad\, g_0)x|\, y) = -((Ad\, g_0)x|\,(ad\, z)y) =$$
$$= ((Ad\, g_0)x|\,(ad\, y)z) = -((ad\, y)(Ad\, g_0)x|\, z) = ([(Ad\, g_0)x, y]|\, z).$$

Kako je element $z \in \mathfrak{g}$ bio proizvoljan, slijedi $[(Ad\, g_0)x, y] = 0$.

Teorem 4.10.6. (a) *Kompaktna Liejeva grupa G djeluje pomoću unutarnjih automorfizama tranzitivno na skupu svih maksimalnih torusa u G.*

(b) *Grupa $Ad\, G$ djeluje tranzitivno na skupu svih maksimalnih komutativnih Liejevih podalgebri od $\mathfrak{g}$.*

Dokaz: Primijetimo da su zbog propozicije 4.10.4. tvrdnje (a) i (b) međusobno ekvivalentne. Dokazat ćemo tvrdnju (a).

Neka su T i T' maksimalni torusi u G i neka su $\mathfrak{t}$ i $\mathfrak{t}'$ njihove Liejeve algebre. Prema propoziciji 4.10.2. postoje $x \in \mathfrak{t}$ i $y \in \mathfrak{t}'$ takvi da su pripadne jednoparametarske podgrupe guste u T i u T'. Prema lemi 4.10.5. postoji $g \in G$ takav da je $[(Ad\, g)x, y] = 0$. Tada vektori $(Ad\, g)x$ i y razapinju komutativnu Liejevu podalgebru $\mathfrak{h}$ od $\mathfrak{g}$. Pripadna povezana Liejeva podgrupa $H = \exp \mathfrak{h}$ od G je komutativna. Prema tome, vrijedi

$$(\exp t\,(Ad\, g)x)(\exp sy) = (\exp sy)(\exp t\,(Ad\, g)x) \qquad \forall t, s \in \mathbb{R}.$$

Tu jednakost možemo zapisati i ovako:

$$g(\exp\, tx)g^{-1}(\exp\, sy) = (\exp\, sy)g(\exp\, tx)g^{-1} \qquad \forall t, s \in \mathbb{R}.$$

Budući da su jednoparametarske podgrupe $\{\exp\, tx;\ t \in \mathbb{R}\}$ i $\{\exp\, sy;\ s \in \mathbb{R}\}$ guste u T i T', slijedi

$$gtg^{-1}t' = t'gtg^{-1} \qquad \forall t \in T \quad \text{i} \quad \forall t' \in T'.$$

Očito je $T_g = gTg^{-1}$ maksimalni torus u G. Prema dokazanom njegovi elementi komutiraju sa svim elementima torusa T'. Prema tome, preslikavanje množenja $\varphi : T' \times T_g \to G$, $\varphi(t, s) = ts$, $t \in T'$, $s \in T_g$, je homomorfizam kompaktne Liejeve grupe $T' \times T_g$ u Liejevu grupu G. Slika S tog homomorfizma je povezana kompaktna komutativna podgrupa od G koja sadrži T' i T_g. Tada je S torus u G, pa zbog maksimalnosti torusa T' i T_g slijedi $T' = S = T_g = gTg^{-1}$.

4.11 Cartanove podalgebre realnih poluprostih Liejevih algebri

U ovom odjeljku $\mathfrak{g}_0$ označava realnu poluprostu Liejevu algebru i $\mathfrak{g} = (\mathfrak{g}_0)^{\mathbb{C}}$ njenu kompleksifikaciju. Liejeve podalgebre (i potprostore) od $\mathfrak{g}_0$ označavat ćemo malim gotskim slovima s indeksom "0", a isto slovo bez indeksa označavat će komplesifikaciju. Nadalje, konjugaciju od $\mathfrak{g}$ koja je pridružena realnoj formi $\mathfrak{g}_0$ označavat ćemo sa σ. Dakle, $\sigma(x+iy) = x - iy$ za $x, y \in \mathfrak{g}_0$ i $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g}^\sigma = \{z \in \mathfrak{g};\ \sigma(z) = z\}$.

Neka je ϑ Cartanova involucija od $\mathfrak{g}_0$ i $(\mathfrak{k}_0, \mathfrak{p}_0)$ pripadna Cartanova dekompozicija od $\mathfrak{g}_0$. Tada je $\mathfrak{k} = (\mathfrak{k}_0)^{\mathbb{C}}$ Liejeva podalgebra i $\mathfrak{p} = (\mathfrak{p}_0)^{\mathbb{C}}$ je potprostor kompleksne Liejeve algebre $\mathfrak{g}$. Naravno, $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \dot{+} \mathfrak{p}$ i taj je rastav ortogonalan u odnosu na Killingovu formu $B = B_{\mathfrak{g}}$. Kao i prije, $(\,\cdot\,|\,\cdot\,)_\vartheta$ će označavati skalarni produkt na realnom prostoru $\mathfrak{g}_0$ definiran Cartanovom involucijom ϑ :

$$(x|y)_\vartheta = -B(x, \vartheta(y)), \qquad x, y \in \mathfrak{g}_0,$$

ili

$$(x_1 + y_1|x_2 + y_2)_\vartheta = -B(x_1, x_2) + B(y_1, y_2), \qquad x_1, x_2 \in \mathfrak{k}_0, \quad y_1, y_2 \in \mathfrak{p}_0.$$

Istim znakom ϑ označavat ćemo $\mathbb{C}-$linearno proširenje involutivnog automorfizma ϑ sa $\mathfrak{g}_0$ na $\mathfrak{g}$. Tada je ϑ involutivni automorfizam kompleksne Liejeve algebre $\mathfrak{g}$. Nadalje, jedinstvenu konjugaciju od $\mathfrak{g}$ koja proširuje ϑ označavat ćemo sa τ_ϑ. Dakle, τ_ϑ je antilinearno proširenje involucije ϑ : $\tau_\vartheta(x+iy) = \vartheta(x) - i\vartheta(y) = \vartheta(x - iy)$, odnosno, $\tau_\vartheta = \vartheta\sigma = \sigma\vartheta$.

Zadatak 4.11.1. *Dokažite da je $\vartheta \mapsto \tau_\vartheta$ bijekcija sa skupa svih Cartanovih involucija od $\mathfrak{g}_0$ na skup svih kompaktnih konjugacija od $\mathfrak{g}$ koje komutiraju sa σ i da je $\tau \mapsto \vartheta_\tau = \tau|\mathfrak{g}_0$ inverzna bijekcija.*

Uputa: Da biste dokazali da je konjugacija τ_ϑ kompaktna, promatrajte jedinstveni skalarni produkt na kompleksnom prostoru $\mathfrak{g}$ koji proširuje $(\,\cdot\,|\,\cdot\,)_\vartheta$ i ustanovite da je taj skalarni produkt upravo hermitska forma H_{τ_ϑ} iz odjeljka 2.2.

Znamo da je $\mathfrak{h}_0$ Cartanova podalgebra od $\mathfrak{g}_0$ ako i samo ako je njena kompleksifikacija $\mathfrak{h}$ Cartanova podalgebra od $\mathfrak{g}$. Odatle i iz $Int(\mathfrak{g})-$konjugiranosti svih Cartanovih podalgebri od $\mathfrak{g}$ (teorem 1.3.27.) slijedi da su dimenzije svih Cartanovih podalgebri od $\mathfrak{g}_0$ jednake. Međutim, općenito nisu sve Cartanove podalgebre od $\mathfrak{g}_0$ konjugirane unutarnjim automorfizmima, pa čak ni proizvoljnim automorfizmima od $\mathfrak{g}_0$. Vidjet ćemo, međutim, da ima svega konačno mnogo klasa $Int\,(\mathfrak{g}_0)-$konjugiranosti Cartanovih podalgebri od $\mathfrak{g}_0$.

Zadatak 4.11.2. *Neka je $G = SL(2, \mathbb{R})$ i $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$. Dokažite da u $\mathfrak{g}_0$ postoje dvije klase $G-$konjugiranosti Cartanovih podalgebri i to su*

$$\{\mathbb{R}x;\ x \in \mathfrak{g}_0,\ \det x < 0\} \qquad i \qquad \{\mathbb{R}x;\ x \in \mathfrak{g}_0,\ \det x > 0\}.$$

Predstavnik prve klase $G-$konjugiranosti je $\mathbb{R}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, *a druge* $\mathbb{R}\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

U ovom zadatku vidimo da u svakoj klasi konjugiranosti postoji $\vartheta-$invarijantna Cartanova podalgebra, gdje je ϑ Cartanova involucija od $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ zadana sa $\vartheta(x) = -x^T$. To vrijedi i općenito:

Propozicija 4.11.1. (*a*) *Svaka je Cartanova podalgebra od* $\mathfrak{g}_0$ *invarijantna u odnosu na neku Cartanovu involuciju od* $\mathfrak{g}_0$.

(*b*) *Neka je* ϑ *Cartanova involucija od* $\mathfrak{g}_0$. *Svaka Cartanova podalgebra od* $\mathfrak{g}_0$ *je* $Int\,(\mathfrak{g}_0)-$*konjugirana* $\vartheta-$*invarijantnoj Cartanovoj podalgebri.*

Dokaz: (*a*) Neka je $\mathfrak{h}_0$ Cartanova podalgebra od $\mathfrak{g}_0$ i $\mathfrak{h}$ njena kompleksifikacija. Neka je kao i malo prije σ konjugacija od $\mathfrak{g}$ pridružena realnoj formi $\mathfrak{g}_0$. Nadalje, neka je τ kompaktna konjugacija od $\mathfrak{g}$ konstruirana pomoću Cartanove podalgebre $\mathfrak{h}$ kao u dokazu teorema 2.2.3. Tada je $\tau(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$.

Prema propoziciji 2.2.7. za $\varphi = ((\sigma\tau)^2)^{\frac{1}{4}} \in Int(\mathfrak{g})$ kompaktna konjugacija $\eta = \varphi\tau\varphi^{-1}$ od $\mathfrak{g}$ komutira sa σ. Kako je $\sigma(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$ i $\tau(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$, vrijedi $\varphi(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$, dakle i $\eta(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$. Budući da η i σ komutiraju, vrijedi i $\eta\,(\mathfrak{g}_0) = \mathfrak{g}_0$. Kako je $\mathfrak{h}_0 = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_0$, slijedi $\eta\,(\mathfrak{h}_0) = \mathfrak{h}_0$. Napokon, budući da je η kompaktna konjugacija od $\mathfrak{g}$ koja komutira sa σ, prema zadatku 4.11.1. restrikcija $\vartheta = \eta|\mathfrak{g}_0$ je Cartanova involucija od $\mathfrak{g}_0$. Za tu Cartanovu involuciju vrijedi $\vartheta\,(\mathfrak{h}_0) = \mathfrak{h}_0$.

(*b*) Neka su sada ϑ Cartanova involucija od $\mathfrak{g}_0$ i $\mathfrak{h}_0$ Cartanova podalgebra od $\mathfrak{g}_0$. Prema (*a*) postoji Cartanova involucija ϑ' od $\mathfrak{g}_0$ takva da je $\vartheta'\,(\mathfrak{h}_0) = \mathfrak{h}_0$. Neka su $(\mathfrak{k}_0, \mathfrak{p}_0)$ i $(\mathfrak{k}_0', \mathfrak{p}_0')$ Cartanove dekompozicije od $\mathfrak{g}_0$ određene Cartanovim involucijama ϑ i ϑ'. Prema tvrdnji (*b*) teorema 4.2.1. postoji $\varphi \in Int\,(\mathfrak{g}_0)$ takva da je $\mathfrak{k}_0' = \varphi\,(\mathfrak{k}_0)$ i $\mathfrak{p}_0' = \varphi\,(\mathfrak{p}_0)$, ili, ekvivalentno, da je $\vartheta' = \varphi\vartheta\varphi^{-1}$. Sada je $\mathfrak{h}_0' = \varphi^{-1}(\mathfrak{h}_0)$ Cartanova podalgebra od $\mathfrak{g}_0$ i ona je $\vartheta-$invarijantna:

$$\vartheta\,(\mathfrak{h}_0') = \vartheta\varphi^{-1}\,(\mathfrak{h}_0) = \varphi^{-1}\vartheta'\,(\mathfrak{h}_0) = \varphi^{-1}\,(\mathfrak{h}_0) = \mathfrak{h}_0'.$$

Dakle, u proučavanju klasa $Int\,(\mathfrak{g}_0)-$konjugiranosti Cartanovih podalgebri od $\mathfrak{g}_0$ bit će dovoljno promatrati $\vartheta-$invarijantne Cartanove podalgebre.

Neka je sada $\mathfrak{h}_0$ proizvoljna Cartanova podalgebra od $\mathfrak{g}_0$ i $\mathfrak{h}$ njena kompleksifikacija. Neka je $R = R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ pripadni sistem korijena kompleksne poluproste Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ i kao i obično stavimo

$$\mathfrak{h}(\mathbb{R}) = \{h \in \mathfrak{h};\ \alpha(h) \in \mathbb{R}\ \forall\alpha \in R\}.$$

Tada je $\sigma(\mathfrak{h}(\mathbb{R})) = \mathfrak{h}(\mathbb{R})$, dakle,

$$\mathfrak{h}(\mathbb{R}) = \mathfrak{h}^+(\mathbb{R}) \dotplus \mathfrak{h}^-(\mathbb{R}),$$

gdje su

$$\mathfrak{h}^+(\mathbb{R}) = \{h \in \mathfrak{h}(\mathbb{R});\ \sigma(h) = h\} = \mathfrak{h}(\mathbb{R}) \cap \mathfrak{g}_0 = \mathfrak{h}(\mathbb{R}) \cap \mathfrak{h}_0$$

i

$$\mathfrak{h}^-(\mathbb{R}) = \{h \in \mathfrak{h}(\mathbb{R});\ \sigma(h) = -h\} = \mathfrak{h}(\mathbb{R}) \cap i\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{h}(\mathbb{R}) \cap i\mathfrak{h}_0.$$

Nadalje, tada je $\mathfrak{h}_0 = \mathfrak{h}^+(\mathbb{R}) \dotplus i\mathfrak{h}^-(\mathbb{R})$. Potprostor $\mathfrak{h}^+(\mathbb{R}) = \mathfrak{h}(\mathbb{R}) \cap \mathfrak{h}_0$ od $\mathfrak{h}_0$ zove se **nekompaktni dio** ili **vektorski dio**, a potprostor $i\mathfrak{h}^-(\mathbb{R}) = i\mathfrak{h}(\mathbb{R}) \cap \mathfrak{h}_0$ **kompaktni dio** Cartanove podalgebre $\mathfrak{h}_0$ od $\mathfrak{g}_0$. Nadalje, $\dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{h}^+(\mathbb{R})$ zove se **nekompaktna dimenzija** ili **vektorska dimenzija** od $\mathfrak{h}_0$, a $\dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{h}^-(\mathbb{R})$ se zove **kompaktna dimenzija** od $\mathfrak{h}_0$. Neka je $\varphi \in Int\,(\mathfrak{g}_0)$ i $\mathfrak{h}_0' = \varphi\,(\mathfrak{h}_0)$. Tada je $\mathbb{C}-$linearno proširenje od φ, koje ćemo također označiti sa φ, automorfizam kompleksne Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ i vrijedi $\mathfrak{h}' = (\mathfrak{h}_0')^{\mathbb{C}} = \varphi(\mathfrak{h})$. Slijedi da je $\mathfrak{h}'(\mathbb{R}) = \varphi(\mathfrak{h}(\mathbb{R}))$, a odatle i iz $\varphi\,(\mathfrak{g}_0) = \mathfrak{g}_0$ dobivamo $\mathfrak{h}'^+(\mathbb{R}) = \varphi\,(\mathfrak{h}^+(\mathbb{R}))$ i $\mathfrak{h}'^-(\mathbb{R}) = \varphi\,(\mathfrak{h}^-(\mathbb{R}))$. Posebno, sve Cartanove podalgebre u jednoj klasi $Int\,(\mathfrak{g}_0)-$konjugiranosti imaju istu kompaktnu dimenziju, a također sve te Cartanove podalgebre imaju istu nekompaktnu dimenziju. Za Cartanovu podalgebru $\mathfrak{h}_0$ od $\mathfrak{g}_0$ kažemo da je **maksimalno kompaktna** ako je njena kompaktna dimenzija najveća moguća, odnosno, kažemo da je **maksimalno nekompaktna** ili **maksimalno vektorska** ako je njena vektorska dimenzija najveća moguća.

Zadatak 4.11.3. *Neka je ϑ Cartanova involucija od $\mathfrak{g}_0$, $(\mathfrak{k}_0, \mathfrak{p}_0)$ pripadna Cartanova dekompozicija i $\mathfrak{h}_0$ Cartanova podalgebra od $\mathfrak{g}_0$ koja je $\vartheta-$invarijantna. Stavimo*

$$\mathfrak{t}_0 = \mathfrak{h}_0 \cap \mathfrak{k}_0 = \{h \in \mathfrak{h}_0;\ \vartheta(h) = h\} \qquad i \qquad \mathfrak{a}_0 = \mathfrak{h}_0 \cap \mathfrak{p}_0 = \{h \in \mathfrak{h}_0;\ \vartheta(h) = -h\}.$$

Dokažite da je tada

$$\mathfrak{h}_0 = \mathfrak{t}_0 \dot{+} \mathfrak{a}_0, \quad \mathfrak{h}(\mathbb{R}) = i\mathfrak{t}_0 \dot{+} \mathfrak{a}_0, \quad \mathfrak{h}^+(\mathbb{R}) = \mathfrak{a}_0, \quad \mathfrak{h}^-(\mathbb{R}) = i\mathfrak{t}_0.$$

Uputa: Uočite da su operatori $ad_{\mathfrak{g}}\, x$, $x \in \mathfrak{k}_0$, na unitarnom prostoru $\mathfrak{g}$ antihermitski, dakle, imaju čisto imaginarne svojstvene vrijednosti, i da su operatori $ad_{\mathfrak{g}}\, y$, $y \in \mathfrak{p}_0$, hermitski, dakle, imaju realne svojstvene vrijednosti.

Neka je u daljnjem fiksirana Cartanova involucija ϑ i pripadna Cartanova dekompozicija $(\mathfrak{k}_0, \mathfrak{p}_0)$ od $\mathfrak{g}_0$. Nadalje, sa K označimo maksimalnu kompaktnu podgrupu od $Int\,(\mathfrak{g}_0)$ s Liejevom algebrom $\mathfrak{k}_0$. Znamo da je tada podgrupa K povezana i da je

$$K = \{\varphi \in Int\,(\mathfrak{g}_0)\,;\ \varphi\vartheta = \vartheta\varphi\}.$$

Neka je $\mathfrak{a}_0$ Cartanov potprostor od $\mathfrak{p}_0$. Stavimo $\mathfrak{m}_0 = Z_{\mathfrak{k}_0}(\mathfrak{a}_0)$ i neka je $\mathfrak{t}_0$ maksimalna komutativna podalgebra od $\mathfrak{m}_0$. Prema tvrdnji (e) teorema 4.5.6. tada je $\mathfrak{h}_0 = \mathfrak{t}_0 \dot{+} \mathfrak{a}_0$ Cartanova podalgebra od $\mathfrak{g}_0$ i ona je $\vartheta-$invarijantna, jer je $\vartheta(h) = h$ za $h \in \mathfrak{t}_0$ i $\vartheta(h) = -h$ za $h \in \mathfrak{a}_0$. Budući da je $\mathfrak{a}_0 = \mathfrak{h}_0 \cap \mathfrak{p}_0$ maksimalna u skupu svih komutativnih Liejevih podalgebri od $\mathfrak{g}_0$ sadržanih u $\mathfrak{p}_0$, Cartanova podalgebra $\mathfrak{h}_0$ je maksimalno nekompaktna.

Propozicija 4.11.2. (a) *Sve maksimalno nekompaktne $\vartheta-$invarijantne Cartanove podalgebre od $\mathfrak{g}_0$ su međusobno $K-$konjugirane.*

(b) *Sve maksimalno nekompaktne Cartanove podalgebre od $\mathfrak{g}_0$ su međusobno $Int\,(\mathfrak{g}_0)\,-$konjugirane.*

Dokaz: (a) Neka su $\mathfrak{h}_0$ i $\mathfrak{h}_0'$ maksimalno nekompaktne $\vartheta-$invarijantne Cartanove podalgebre od $\mathfrak{g}_0$. Tada su $\mathfrak{a}_0 = \mathfrak{h}_0 \cap \mathfrak{p}_0$ i $\mathfrak{a}_0' = \mathfrak{h}_0' \cap \mathfrak{p}_0$ Cartanovi potprostori od $\mathfrak{p}_0$, pa prema teoremu 4.5.1. postoji $k \in K$ takav da je $\mathfrak{a}_0' = k\mathfrak{a}_0$. Nadalje, $\mathfrak{t}_0 = \mathfrak{h}_0 \cap \mathfrak{k}_0$ je maksimalna komutativna podalgebra od $\mathfrak{m}_0 = Z_{\mathfrak{k}_0}(\mathfrak{a}_0)$, a $\mathfrak{t}_0' = \mathfrak{h}_0' \cap \mathfrak{k}_0$ je maksimalna komutativna podalgebra od $\mathfrak{m}_0' = Z_{\mathfrak{k}_0}(\mathfrak{a}_0')$. Tada je $k^{-1}\mathfrak{t}_0'$ maksimalna komutativna podalgebra od $k^{-1}\mathfrak{m}_0' = k^{-1}Z_{\mathfrak{k}_0}(\mathfrak{a}_0') = Z_{\mathfrak{k}_0}(k^{-1}\mathfrak{a}_0') = Z_{\mathfrak{k}_0}(\mathfrak{a}_0) = \mathfrak{m}_0$. Dakle, $\mathfrak{t}_0$ i $k^{-1}\mathfrak{t}_0'$ su maksimalne komutativne podalgebre Liejeve algebre $\mathfrak{m}_0 = Z_{\mathfrak{k}_0}(\mathfrak{a}_0)$. Nadalje, $M = Z_K(\mathfrak{a}_0)$ je zatvorena podgrupa kompaktne grupe K, dakle, M je kompaktna grupa, i njena je Liejeva algebra $\mathfrak{m}_0$. Prema tvrdnji (b) teorema 4.10.6. Liejeve podalgebre $\mathfrak{t}_0$ i $k^{-1}\mathfrak{t}_0'$ su $M-$konjugirane, tj. postoji $m \in M$ takav da je $k^{-1}\mathfrak{t}_0' = m\mathfrak{t}_0$. Tada je $km \in K$ i vrijedi $km\mathfrak{a}_0 = \mathfrak{a}_0'$ i $km\mathfrak{t}_0 = \mathfrak{t}_0'$, dakle, $km\mathfrak{h}_0 = \mathfrak{h}_0'$. Time je tvrdnja (a) dokazana.

(b) Neka su sada $\mathfrak{h}_0$ i $\mathfrak{h}_0'$ proizvoljne maksimalno nekompaktne Cartanove podalgebre od $\mathfrak{g}_0$. Prema tvrdnji (a) propozicije 4.11.1. postoje Cartanove involucije ϑ i ϑ' od $\mathfrak{g}_0$ takve da je $\vartheta(\mathfrak{h}_0) = \mathfrak{h}_0$ i $\vartheta'(\mathfrak{h}_0') = \mathfrak{h}_0'$. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je Cartanova involucija ϑ upravo ona koja je fiksirana prije iskaza ove propozicije. Prema tvrdnji (b) teorema 4.2.1. postoji $\varphi \in Int\,(\mathfrak{g}_0)$ takav da je $\vartheta' = \varphi\vartheta\varphi^{-1}$. Stavimo $\mathfrak{h}_0'' = \varphi^{-1}(\mathfrak{h}_0')$. Tada je i $\mathfrak{h}_0''$ maksimalno nekompaktna Cartanova podalgebra od $\mathfrak{g}_0$. Nadalje, vrijedi

$$\vartheta(\mathfrak{h}_0'') = \vartheta\varphi^{-1}(\mathfrak{h}_0') = \varphi^{-1}\vartheta'(\mathfrak{h}_0') = \varphi^{-1}(\mathfrak{h}_0') = \mathfrak{h}_0''.$$

Dakle, $\mathfrak{h}_0$ i $\mathfrak{h}_0''$ su $\vartheta-$invarijantne maksimalno nekompaktne Cartanove podalgebre od $\mathfrak{g}_0$. Prema tvrdnji (a) postoji $\psi \in K$ takav da je $\mathfrak{h}_0'' = \psi(\mathfrak{h}_0)$. Slijedi $\mathfrak{h}_0' = \varphi(\mathfrak{h}_0'') = \varphi\psi(\mathfrak{h}_0)$. Napokon, kako je K podgrupa od $Int\,(\mathfrak{g}_0)$, vrijedi $\varphi\psi \in Int\,(\mathfrak{g}_0)$. Time je i tvrdnja (b) dokazana.

Mala modifikacija dijela dokaza tvrdnje (a) propozicije 4.11.2. daje sljedeću generalizaciju:

Propozicija 4.11.3. *Neka su $\mathfrak{h}_0$ i $\mathfrak{h}_0'$ $\vartheta-$invarijantne Cartanove podalgebre od $\mathfrak{g}_0$ takve da je $\mathfrak{h}_0 \cap \mathfrak{p}_0 = \mathfrak{h}_0' \cap \mathfrak{p}_0$. Tada su $\mathfrak{h}_0$ i $\mathfrak{h}_0'$ $K-$konjugirane.*

Dokaz: Budući da su Cartanove podalgebre komutativne, presjeci $\mathfrak{h}_0 \cap \mathfrak{k}_0$ i $\mathfrak{h}_0' \cap \mathfrak{k}_0$ su sadržani u centralizatoru $\tilde{\mathfrak{m}}_0 = Z_{\mathfrak{k}_0}(\mathfrak{h}_0 \cap \mathfrak{p}_0)$. Nadalje, Cartanove podalgebre od $\mathfrak{g}_0$ su maksimalne komutativne podalgebre od $\mathfrak{g}_0$ pa slijedi da su $\mathfrak{h}_0 \cap \mathfrak{k}_0$ i $\mathfrak{h}_0' \cap \mathfrak{k}_0$ maksimalne komutativne podalgebre od $\tilde{\mathfrak{m}}_0$. Neka je $\tilde{M} = Z_K(\mathfrak{h}_0 \cap \mathfrak{p}_0)$. To je kompaktna Liejeva grupa s Liejevom algebrom $\tilde{\mathfrak{m}}_0$. Prema tvrdnji (b) teorema 4.10.6. postoji $\varphi \in \tilde{M} \subseteq K$ takav da je $\mathfrak{h}_0' \cap \mathfrak{k}_0 = \varphi(\mathfrak{h}_0 \cap \mathfrak{k}_0)$. Tada je restrikcija $\varphi|\mathfrak{h}_0 \cap \mathfrak{p}_0$ identiteta, dakle, $\varphi(\mathfrak{h}_0 \cap \mathfrak{p}_0) = \mathfrak{h}_0 \cap \mathfrak{p}_0 = \mathfrak{h}_0' \cap \mathfrak{p}_0$. Budući da su Cartanove podalgebre $\mathfrak{h}_0$ i $\mathfrak{h}_0'$ $\vartheta-$invarijantne, vrijedi

$$\mathfrak{h}_0 = \mathfrak{h}_0 \cap \mathfrak{k}_0 \dotplus \mathfrak{h}_0 \cap \mathfrak{p}_0 \qquad \text{i} \qquad \mathfrak{h}_0' = \mathfrak{h}_0' \cap \mathfrak{k}_0 \dotplus \mathfrak{h}_0' \cap \mathfrak{p}_0,$$

pa slijedi da je $\mathfrak{h}_0' = \varphi(\mathfrak{h}_0)$.

Propozicija 4.11.4. (a) *Neka je $\mathfrak{t}_0$ maksimalna komutativna podalgebra od $\mathfrak{k}_0$. Tada je $\mathfrak{h}_0 = Z_{\mathfrak{g}_0}(\mathfrak{t}_0)$ maksimalno kompaktna Cartanova podalgebra od $\mathfrak{g}_0$ koja je $\vartheta-$invarijantna. Vrijedi $\mathfrak{h}_0 \cap \mathfrak{k}_0 = \mathfrak{t}_0$.*

(b) *Sve maksimalno kompaktne $\vartheta-$invarijantne Cartanove podalgebre od $\mathfrak{g}_0$ su $K-$konjugirane.*

(c) *Sve maksimalno kompaktne Cartanove podalgebre od $\mathfrak{g}_0$ su $Int(\mathfrak{g}_0)-$konjugirane.*

Dokaz: (a) Liejeva podalgebra $\mathfrak{h}_0$ je očito $\vartheta-$invarijantna, pa vrijedi

$$\mathfrak{h}_0 = \mathfrak{h}_0 \cap \mathfrak{k}_0 \dotplus \mathfrak{h}_0 \cap \mathfrak{p}_0.$$

Nadalje, $\mathfrak{h}_0 \cap \mathfrak{k}_0 = Z_{\mathfrak{k}_0}(\mathfrak{t}_0)$, a kako je $\mathfrak{t}_0$ po pretpostavci maksimalna komutativna podalgebra od $\mathfrak{k}_0$, zaključujemo da je $\mathfrak{h}_0 \cap \mathfrak{k}_0 = \mathfrak{t}_0$.

Uočimo sada da je $\mathfrak{h}_0$ Liejeva podalgebra od $\mathfrak{g}_0$ koja je reduktivna u $\mathfrak{g}_0$. Doista, zbog $\vartheta-$invarijantnosti od $\mathfrak{h}_0$ pomoću tvrdnje (c) zadatka 4.2.1. zaključujemo da je Liejeva algebra operatora $ad\,\mathfrak{h}_0$ na unitarnom prostoru $\mathfrak{g}_0$ invarijantna u odnosu na adjungiranje, pa slijedi da je za svaki $ad\,\mathfrak{h}_0-$invarijantan potprostor od $\mathfrak{g}_0$ i njegov ortogonalni komplement je $ad\,\mathfrak{h}_0-$invarijantan. Posebno, Liejeva algebra $\mathfrak{h}_0$ je reduktivna. No tada je njen izvedeni ideal $[\mathfrak{h}_0, \mathfrak{h}_0]$ poluprosta Liejeva algebra. Međutim, kako je $[\mathfrak{h}_0, \mathfrak{t}_0] = \{0\}$, imamo redom

$$[\mathfrak{h}_0, \mathfrak{h}_0] = [\mathfrak{h}_0 \cap \mathfrak{p}_0, \mathfrak{h}_0 \cap \mathfrak{p}_0] \subseteq \mathfrak{h}_0 \cap \mathfrak{k}_0 = \mathfrak{t}_0.$$

Kako je $\mathfrak{t}_0$ komutativna, zaključujemo da je $[\mathfrak{h}_0, \mathfrak{h}_0] = \{0\}$, odnosno, $\mathfrak{h}_0$ je komutativna Liejeva podalgebra od $\mathfrak{g}_0$. Nadalje, vrijedi

$$Z_{\mathfrak{g}_0}(\mathfrak{h}_0) \subseteq Z_{\mathfrak{g}_0}(\mathfrak{t}_0) = \mathfrak{h}_0,$$

dakle, $\mathfrak{h}_0$ je maksimalna komutativna podalgebra od $\mathfrak{g}_0$. Stoga je njena kompleksifikacija $\mathfrak{h}$ maksimalna komutativna podalgebra od $\mathfrak{g}$. Kako je $\mathfrak{h}_0$ reduktivna u $\mathfrak{g}_0$, njena je kompleksifikacija $\mathfrak{h}$ reduktivna u $\mathfrak{g}$. Zbog komutativnosti $\mathfrak{h}$ je toralna podalgebra od $\mathfrak{g}$. Dakle, $\mathfrak{h}$ je maksimalna toralna podalgebra od $\mathfrak{g}$, odnosno, $\mathfrak{h}$ je Cartanova podalgebra od $\mathfrak{g}$.

Napokon, kako je $\mathfrak{h}_0 \cap \mathfrak{k}_0 = \mathfrak{t}_0$ maksimalna komutativna podalgebra od $\mathfrak{k}_0$, zaključujemo da je $\mathfrak{h}_0$ maksimalno kompaktna Cartanova podalgebra od $\mathfrak{g}_0$.

(b) Neka su $\mathfrak{h}_0$ i $\mathfrak{h}_0'$ maksimalno kompaktne $\vartheta-$invarijantne Cartanove podalgebre od $\mathfrak{g}_0$. Tada su $\mathfrak{t}_0 = \mathfrak{h}_0 \cap \mathfrak{k}_0$ i $\mathfrak{t}_0' = \mathfrak{h}_0' \cap \mathfrak{k}_0$ maksimalne komutativne podalgebre od $\mathfrak{k}_0$, pa zbog tvrdnje (a) vrijedi $\mathfrak{h}_0 = Z_{\mathfrak{g}_0}(\mathfrak{t}_0)$ i $\mathfrak{h}_0' = Z_{\mathfrak{g}_0}(\mathfrak{t}_0')$. Prema tvrdnji (b) teorema 4.10.6. postoji $\varphi \in K$ takav da je $\mathfrak{t}_0' = \varphi(\mathfrak{t}_0)$. No tada je

$$\varphi(\mathfrak{h}_0) = \varphi(Z_{\mathfrak{g}_0}(\mathfrak{t}_0)) = Z_{\mathfrak{g}_0}(\varphi(\mathfrak{t}_0)) = Z_{\mathfrak{g}_0}(\mathfrak{t}_0') = \mathfrak{h}_0'.$$

Zadatak 4.11.4. *Dokažite tvrdnju (c) propozicije 4.11.4.*

Uputa: Oponašajte dokaz tvrdnje (b) propozicije 4.11.2.

Lema 4.11.5. *Neka je $\mathfrak{a}_0$ Cartanov potprostor od $\mathfrak{p}_0$ i neka je $\mathfrak{h}_0$ $\vartheta-$invarijantna Cartanova podalgebra od $\mathfrak{g}_0$ takva da je $\mathfrak{h}_0 \cap \mathfrak{p}_0 \subseteq \mathfrak{a}_0$. Nadalje, neka je*

$$\Sigma = R(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{a}_0) \qquad i \qquad \Sigma' = \{\lambda \in \Sigma;\ \lambda(\mathfrak{h}_0 \cap \mathfrak{p}_0) = \{0\}\}.$$

Tada je

$$\mathfrak{h}_0 \cap \mathfrak{p}_0 = \bigcap_{\lambda \in \Sigma'} \operatorname{Ker} \lambda = \{h \in \mathfrak{a}_0;\ \lambda(h) = 0\ \ \forall \lambda \in \Sigma'\}.$$

Dokaz: Neka je

$$\mathfrak{a}_0' = \bigcap_{\lambda \in \Sigma'} \operatorname{Ker} \lambda = \{h \in \mathfrak{a}_0;\ \lambda(h) = 0\ \ \forall \lambda \in \Sigma'\}.$$

Tada je $\mathfrak{h}_0 \cap \mathfrak{p}_0 \subseteq \mathfrak{a}_0'$, a treba dokazati da vrijedi jednakost.

U tu svrhu ćemo najprije opisati podalgebru $Z_{\mathfrak{g}_0}(\mathfrak{h}_0 \cap \mathfrak{p}_0)$. Proizvoljan element $x \in Z_{\mathfrak{g}_0}(\mathfrak{h}_0 \cap \mathfrak{p}_0)$ prikažimo u skladu s rastavom $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{a}_0 \dotplus \mathfrak{m}_0 \dotplus \sum_{\lambda \in \Sigma} \dotplus \mathfrak{g}_0^\lambda$:

$$x = h_0 + x_0 + \sum_{\lambda \in \Sigma} x_\lambda, \qquad h_0 \in \mathfrak{a}_0, \quad x_0 \in \mathfrak{m}_0, \quad x_\lambda \in \mathfrak{g}_0^\lambda \quad \text{za} \quad \lambda \in \Sigma.$$

Za $h \in \mathfrak{h}_0 \cap \mathfrak{p}_0$ je $[h, x] = 0$, $[h, h_0] = 0$, $[h, x_0] = 0$ i $\lambda(h) = 0\ \forall \lambda \in \Sigma'$, pa nalazimo

$$0 = [h, x] = \sum_{\lambda \in \Sigma \setminus \Sigma'} \lambda(h) x_\lambda \qquad \Longrightarrow \qquad \lambda(h) x_\lambda = 0 \quad \forall h \in \mathfrak{h}_0 \cap \mathfrak{p}_0 \quad \text{i} \quad \forall \lambda \in \Sigma \setminus \Sigma'.$$

Budući da za $\lambda \in \Sigma \setminus \Sigma'$ vrijedi $\lambda(\mathfrak{h}_0 \cap \mathfrak{p}_0) \neq \{0\}$, zaključujemo da je $x_\lambda = 0\ \ \forall \lambda \in \Sigma \setminus \Sigma'$. Time smo dokazali da je

$$Z_{\mathfrak{g}_0}(\mathfrak{h}_0 \cap \mathfrak{p}_0) = \mathfrak{a}_0 \dotplus \mathfrak{m}_0 \dotplus \sum_{\lambda \in \Sigma'} \dotplus \mathfrak{g}_0^\lambda.$$

Prema tome, svaki $h \in \mathfrak{a}_0'$ komutira sa svakim elementom $x \in Z_{\mathfrak{g}_0}(\mathfrak{h}_0 \cap \mathfrak{p}_0)$. Kako je $\mathfrak{h}_0$ komutativna algebra, očito vrijedi $\mathfrak{h}_0 \subseteq Z_{\mathfrak{g}_0}(\mathfrak{h}_0 \cap \mathfrak{p}_0)$. Prema tome, svaki $h \in \mathfrak{a}_0'$ komutira sa svakim $x \in \mathfrak{h}_0$. Time je dokazano da je podalgebra $\mathfrak{h}_0 + \mathfrak{a}_0'$ komutativna. No kako je $\mathfrak{h}_0$ maksimalna komutativna podalgebra od $\mathfrak{g}_0$, slijedi $\mathfrak{a}_0' \subseteq \mathfrak{h}_0$, dakle, imamo traženu obrnutu inkluziju $\mathfrak{a}_0' \subseteq \mathfrak{h}_0 \cap \mathfrak{p}_0$.

Teorem 4.11.6. *Broj klasa $Int(\mathfrak{g}_0)-$konjugiranosti Cartanovih podalgebri u poluprostoj Liejevoj algebri $\mathfrak{g}_0$ je konačan.*

Dokaz: Fiksirajmo Cartanov potprostor $\mathfrak{a}_0$ od $\mathfrak{p}_0$. Neka je $\mathfrak{h}_0$ Cartanova podalgebra. Prema tvrdnji (b) možemo pretpostaviti da je $\mathfrak{h}_0$ $\vartheta-$invarijantna. Nadalje, prema teoremu 4.5.1. možemo pretpostaviti da je $\mathfrak{h}_0 \cap \mathfrak{p}_0 \subseteq \mathfrak{a}_0$. Prema lemi 4.11.5. postoji ukupno konačno mnogo mogućnosti za potprostor $\mathfrak{h}_0 \cap \mathfrak{p}_0$. Napokon, prema propoziciji 4.11.3. potprostor $\mathfrak{h}_0 \cap \mathfrak{p}_0$ određuje $\vartheta-$invarijantnu Cartanovu podalgebru $\mathfrak{h}_0$ do na $K-$konjugiranost.

Poglavlje 5

Klasifikacija realnih prostih Liejevih algebri

5.1 Cayleyeve transformacije

Klasifikacija realnih prostih Liejevih algebri bit će bazirana na maksimalno kompaktnim Cartanovim podalgebrama. Međutim, mnogo korisnih informacija o poluprostoj Liejevoj algebri $\mathfrak{g}_0$ dobiva se promatranjem maksimalno nekompaktne Cartanove podalgebre i pripadnog sistema restringiranih korijena. Da bismo mogli povezati dvije vrste informacija, poslužit ćemo se konjugiranošću kompleksifikacija tih dviju vrsta Cartanovih podalgebri u kompleksifikaciji $\mathfrak{g}$ od $\mathfrak{g}_0$. Ustvari, konstruirat ćemo eksplicitno odgovarajući element grupe $Int(\mathfrak{g})$ kao produkt tzv. Cayleyevih transformacija. Jedna od dviju vrsta Cayleyevih transformacija povećava za 1 kompaktnu dimenziju, dakle, smanjuje za 1 nekompaktnu dimenziju, a druga vrsta smanjuje za 1 kompaktnu dimenziju, a povećava za 1 nekompaktnu dimenziju.

Razmotrimo najprije slučaj $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$. Upravo na temelju tog posebnog slučaja modelirane su dvije vrste Cayleyevih transformacija u općem slučaju. Neka je $\{h,e,f\}$ standardna baza od $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$:

$$h = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad e = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad f = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

tako da je

$$[h,e] = 2e, \qquad [h,f] = -2f, \qquad [e,f] = h.$$

Tada je $\mathfrak{h}_0 = \mathbb{R}h$ maksimalno nekompaktna Cartanova podalgebra od $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$. Njena je nekompaktna dimenzija 1, a kompaktna joj je dimenzija 0. Maksimalno kompaktna Cartanova podalgebra je $\mathfrak{h}_0' = \mathbb{R}h'$, gdje je $h' = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Nekompaktna dimenzija od $\mathfrak{h}_0'$ je 0, a kompaktna joj je dimenzija 1. Neka su $\mathfrak{h}$ i $\mathfrak{h}'$ kompleksifikacije tih dviju Cartanovih podalgebri. Tada je $\mathfrak{h}(\mathbb{R}) = \mathfrak{h}_0$ i $\mathfrak{h}'(\mathbb{R}) = i\mathfrak{h}_0'$. Stavimo

$$h_1 = -ih' = \begin{bmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{bmatrix}, \quad e_1 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -i \\ -i & -1 \end{bmatrix}, \quad f_1 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{bmatrix},$$

tako da je

$$[h_1,e_1] = 2e_1, \qquad [h_1,f_1] = -2f_1, \qquad [e_1,f_1] = h_1.$$

Cayleyeva transformacija prve vrste u $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ je preslikavanje

$$C = Ad\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{bmatrix}\right) = Ad\left(\exp\frac{\pi}{4}(f_1 - e_1)\right) = \mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}ad\,(f_1-e_1)}.$$

Direktna provjera pokazuje da je

$$Ch_1 = h, \qquad Ce_1 = -ie, \qquad Cf_1 = if.$$

Cayleyeva transformacija druge vrste je

$$D = Ad\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{bmatrix}\right) = Ad\left(\exp i\frac{\pi}{4}(-f-e)\right) = \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}ad\,(-f-e)}.$$

Tada je upravo $D = C^{-1}$, pa imamo

$$Dh = h_1, \qquad De = ie_1, \qquad Df = -if_1.$$

Opće Cayleyeve transformacije konstruirat ćemo sada analogno polazeći od izabranog korijena i njemu pridružene Liejeve algebre $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ uronjene u kompleksifikaciju $\mathfrak{g}$ i to tako da ostaje po točkama fiksan onaj dio Cartanove podalgebre koji je ortogonalan na uronjenu $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$.

U daljnjem fiksiramo Cartanovu involuciju ϑ od $\mathfrak{g}_0$, a time i pripadnu Cartanovu dekompoziciju $(\mathfrak{k}_0, \mathfrak{p}_0)$ i maksimalnu kompaktnu podgrupu K od $Int\,(\mathfrak{g}_0)$. Cartanova involucija i Killingova forma definiraju skalarni produkt $(\,\cdot\,|\,\cdot\,)_\vartheta$ na $\mathfrak{g}_0$ koji se po seskvilinearnosti proširuje do skalarnog produkta na kompleksifikaciji $\mathfrak{g}$ koji ćemo označavati istim znakom. Taj je skalarni produkt upravo onaj koji je pridružen kompaktnoj konjugaciji τ_ϑ od $\mathfrak{g}$ koja je antilinearno proširenje od ϑ, odnosno, $\tau_\vartheta = \vartheta\sigma = \sigma\vartheta$. Kao i prije sa σ označavamo kojugaciju od $\mathfrak{g}$ pridruženu realnoj formi $\mathfrak{g}_0$.

Neka je $\mathfrak{h}_0$ proizvoljna $\vartheta-$invarijantna Cartanova podalgebra. Stavimo $\mathfrak{t}_0 = \mathfrak{h}_0 \cap \mathfrak{k}_0$ i $\mathfrak{a}_0 = \mathfrak{h}_0 \cap \mathfrak{p}_0$. Neka su $\mathfrak{h}$ i $\mathfrak{g}$ kompleksifikacije od $\mathfrak{h}_0$ i $\mathfrak{g}_0$ i $R = R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$. Tada prema zadatku 4.11.3. vrijedi $\mathfrak{h}(\mathbb{R}) = i\mathfrak{t}_0 \dotplus \mathfrak{a}_0$. Drugim riječima, za svaki $\alpha \in R$ je $\alpha\,(\mathfrak{t}_0) \subseteq i\mathbb{R}$ i $\alpha\,(\mathfrak{a}_0) \subseteq \mathbb{R}$. Korijen $\alpha \in R$ zove se **realan** ako je $\alpha\,(\mathfrak{h}_0) \subseteq \mathbb{R}$ ili, ekvivalentno, ako je $\alpha|\mathfrak{t}_0 = 0$. Korijen α zove se **imaginaran** ako je $\alpha\,(\mathfrak{h}_0) \subseteq i\mathbb{R}$ ili, ekvivalentno, ako je $\alpha|\mathfrak{a}_0 = 0$. Korijen koji nije ni realan ni imaginaran zove se **kompleksan**. Dakle, korijen $\alpha \in R$ je kompleksan ako i samo ako je $\alpha|\mathfrak{t}_0 \neq 0$ i $\alpha|\mathfrak{a}_0 \neq 0$.

Razlikovat ćemo dvije vrste imaginarnih korijena koje ćemo sada definirati. Prije svega, primijetimo da je linearno proširenje od ϑ na $\mathfrak{g}$ involutivni automorfizam od $\mathfrak{g}$ koji ostavlja invarijantnom Cartanovu podalgebru $\mathfrak{h}$. Prema tome, restrikcija $\vartheta|\mathfrak{h}$ je automorfizam dualnog sistema korijena $\check{R}$. Dualni operator $(\vartheta|\mathfrak{h})^T$ je involutivni automorfizam od R, koji ćemo u skladu s identifikacijom grupa $Aut\left(\check{R}\right)$ i $Aut(R)$ iz odjeljka 4.1. označavati također sa ϑ. Dakle, za $\alpha \in R$ je $\vartheta\alpha \in R$ i prema tvrdnji (b) u zadatku 4.1.1. $\vartheta\,(\mathfrak{g}_\alpha) = \mathfrak{g}_{\vartheta\alpha}$. Ako je korijen α imaginaran, onda je $\alpha|\mathfrak{a}_0 = 0$, pa zbog $\vartheta|\mathfrak{t}_0 = I_{\mathfrak{t}_0}$ slijedi da je $\vartheta\alpha = \alpha$. Prema tome, korijenski potprostor $\mathfrak{g}_\alpha$ je $\vartheta-$invarijantan, $\vartheta\,(\mathfrak{g}_\alpha) = \mathfrak{g}_\alpha$, dakle, $\mathfrak{g}_\alpha = (\mathfrak{g}_\alpha \cap \mathfrak{k}) \dotplus (\mathfrak{g}_\alpha \cap \mathfrak{p})$. Budući da je $\dim\,\mathfrak{g}_\alpha = 1$, imamo dvije mogućnosti: ili je $\mathfrak{g}_\alpha \subseteq \mathfrak{k}$, i tada se imaginaran korijen α zove **kompaktan**, ili je $\mathfrak{g}_\alpha \subseteq \mathfrak{p}$, i tada se α zove **nekompaktan** korijen.

Sada ćemo polazeći od $\vartheta-$invarijantne Cartanove podalgebre $\mathfrak{h}_0$ konstruirati dvije vrste Cayleyevih transformacija:

(1) Ako je β imaginaran nekompaktan korijen iz $R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ konstruirat ćemo novu $\vartheta-$invarijantnu Cartanovu podalgebru $\mathfrak{h}_0'$ koja ima za 1 veću nekompaktnu dimenziju nego $\mathfrak{h}_0$. Ova konstrukcija neće biti moguća samo ako je $\mathfrak{h}_0$ maksimalna nekompaktna Cartanova podalgebra, odnosno, ako je $\mathfrak{h}_0 \cap \mathfrak{p}_0$ Cartanov potprostor od $\mathfrak{p}_0$. U tom slučaju uopće nema imaginarnih nekompaktnih korijena: u skladu s tvrdnjom (g) teorema 4.5.6. svi imaginarni korijeni su kompaktni.

(2) Ako je α realan korijen iz $R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ konstruirat ćemo novu $\vartheta-$invarijantnu Cartanovu podalgebru koja ima za 1 manju nekompaktnu dimenziju od polazne. Ova konstrukcija neće biti moguća samo ako je polazna Cartanova podalgebra maksimalno kompaktna, odnosno ako je njen presjek s $\mathfrak{k}_0$ maksimalna komutativna podalgebra od $\mathfrak{k}_0$. To je slučaj onda i samo onda ako nema realnih korijena.

(1) Neka je $\mathfrak{h}_0$ $\vartheta-$invarijantna Cartanova podalgebra i $\beta \in R = R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ imaginaran nekompaktan korijen. Neka je $e_\beta \in \mathfrak{g}_\beta \setminus \{0\}$. Budući da je β imaginaran, vrijedi $\sigma(e_\beta) \in \mathfrak{g}_{-\beta}$. Doista, ako je $h \in \mathfrak{h}_0$ onda je $\beta(h) \in i\mathbb{R}$, pa je

$$[h, \sigma(e_\beta)] = \sigma([h, e_\beta]) = \sigma(\beta(h)e_\beta) = \overline{\beta(h)}\sigma(e_\beta) = -\beta(h)\sigma(e_\beta).$$

Neka je $\lambda \mapsto t_\lambda$ izomorfizam sa $\mathfrak{h}^*$ na $\mathfrak{h}$ induciran nedegeneriranom bilinearnom formom $B|\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}$. Dakle, za $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ označimo s $t_\lambda \in \mathfrak{h}$ jedinstven element takav da je $B(h, t_\lambda) = \lambda(h)\ \ \forall h \in \mathfrak{h}$. Tada vrijedi

$$[x, y] = B(x, y)t_\beta \qquad \text{za} \quad x \in \mathfrak{g}_\beta,\ y \in \mathfrak{g}_{-\beta}. \tag{5.1}$$

Doista, za proizvoljan $h \in \mathfrak{h}$ imamo redom

$$B([x, y], h) = B(x, [y, h]) = -B(x, [h, y]) = \beta(h)B(x, y) =$$

$$= \beta(B(x, y)h) = B(B(x, y)h, t_\beta) = B(B(x, y)t_\beta, h),$$

pa zbog nedegeneriranosti bilinearne forme $B|\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}$ slijedi (5.1). Primijenimo li (5.1) na korijenske vektore $e_\beta \in \mathfrak{g}_\beta$ i $\sigma(e_\beta) \in \mathfrak{g}_{-\beta}$, dobivamo

$$[e_\beta, \sigma(e_\beta)] = B(e_\beta, \sigma(e_\beta))\, t_\beta.$$

Kako je korijen β po pretpostavci nekompaktan, vrijedi $\mathfrak{g}_\beta \subseteq \mathfrak{p}$, dakle, $\vartheta(e_\beta) = -e_\beta$, pa nalazimo

$$B(e_\beta, \sigma(e_\beta)) = -B(e_\beta, \sigma\vartheta(e_\beta)) = -B(e_\beta, \tau_\vartheta(e_\beta)) = (e_\beta | e_\beta)_\vartheta > 0.$$

To pokazuje da korijenski vektor $e_\beta \in \mathfrak{g}_\beta \setminus \{0\}$ možemo izabrati tako da je $B(e_\beta, \sigma(e_\beta))$ jednak bilo kojem zadanom pozitivnom broju. Izaberimo ga tako da bude jednak $\frac{2}{(\beta|\beta)}$. Pri tome je $(\cdot|\cdot)$ skalarni produkt na $\mathfrak{h}^*$ prenesen sa $\mathfrak{h}$ pomoću izomorfizma $\lambda \mapsto t_\lambda$, tj. definiran sa $(\lambda|\mu) = (t_\lambda | t_\mu)_\vartheta$. Tada iz (5.1) slijedi

$$[e_\beta, \sigma(e_\beta)] = h_\beta, \qquad \text{gdje je} \quad h_\beta = \frac{2}{(\beta|\beta)} t_\beta.$$

Imamo

$$t_\beta = \frac{(\beta|\beta)}{2} h_\beta = \frac{(\beta|\beta)}{2} [e_\beta, \sigma(e_\beta)] \qquad \Longrightarrow \qquad \sigma(t_\beta) = \frac{(\beta|\beta)}{2} [\sigma(e_\beta, e_\beta] = -t_\beta.$$

Nadalje, $\vartheta(e_\beta) = -e_\beta$ i $\vartheta(\sigma(e_\beta)) = -\sigma(e_\beta)$, pa je

$$\vartheta(t_\beta) = \frac{(\beta|\beta)}{2} [\vartheta(e_\beta), \vartheta(\sigma(e_\beta))] = \frac{(\beta|\beta)}{2} [e_\beta, \sigma(e_\beta)] = t_\beta.$$

To znači da je $\tau_\vartheta(t_\beta) = \vartheta(\sigma(t_\beta)) = -t_\beta$. Prema tome,

$$B(t_\beta, t_\beta) = -B(t_\beta, \tau_\vartheta(t_\beta)) = (t_\beta | t_\beta)_\vartheta = (\beta|\beta),$$

pa slijedi

$$\beta(h_\beta) = \frac{2}{(\beta|\beta)} \beta(t_\beta) = \frac{2}{(\beta|\beta)} B(t_\beta, t_\beta) = 2.$$

To znači da je

$$[e_\beta, \sigma(e_\beta)] = h_\beta, \qquad [h_\beta, e_\beta] = 2e_\beta, \qquad [h_\beta, \sigma(e_\beta)] = -2\sigma(e_\beta).$$

Primijetimo da su elementi $e_\beta + \sigma(e_\beta)$ i $i(e_\beta - \sigma(e_\beta))$ fiksni za djelovanje konjugacije σ, dakle, leže u $\mathfrak{g}_0$. U vezi s našim razmatranjem primjera $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ korespondencija je sljedeća:

$$e_\beta \quad \longleftrightarrow \quad e_1 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -i \\ -i & -1 \end{bmatrix}, \qquad \sigma(e_\beta) \quad \longleftrightarrow \quad f_1 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{bmatrix},$$

$$h_\beta \quad \longleftrightarrow \quad h_1 = \begin{bmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{bmatrix}, \qquad \sigma(e_\beta) - e_\beta \quad \longleftrightarrow \quad f_1 - e_1 = \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}.$$

Definiramo sada Cayleyevu transformaciju prve vrste kao unutarnji automorfizam C_β kompleksne Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ analogan prije definiranom automorfizmu C od $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$:

$$C_\beta = \mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}\, ad\left(\sigma(e_\beta) - e_\beta\right)}$$

i stavimo $\mathfrak{h}_0' = \mathfrak{g}_0 \cap C_\beta(\mathfrak{h})$. Eksplicitni račun s operatorskim redom potencija koji definira automorfizam C_β daje

$$C_\beta(h_\beta) = e_\beta + \sigma(e_\beta), \quad C_\beta(e_\beta - \sigma(e_\beta)) = e_\beta - \sigma(e_\beta), \quad C_\beta(e_\beta + \sigma(e_\beta)) = -h_\beta.$$

Nadalje, C_β je identiteta na $\mathrm{Ker}\,(\beta|\mathfrak{h}_0)$. Prema tome, dobivamo

$$\mathfrak{h}_0' = \mathfrak{g}_0 \cap C_\beta(\mathfrak{h}) = \mathrm{Ker}\,(\beta|\mathfrak{h}_0) \,\oplus\, \mathbb{R}\,(e_\beta + \sigma(e_\beta)).$$

Napomenimo da vektor e_β nije jedinstveno određen postavljenim zahtjevom da bude

$$B(e_\beta, \sigma(e_\beta)) = \frac{2}{(\beta|\beta)}.$$

Tim je zahtjevom vektor e_β određen samo do na kompleksan multipl modula 1. Stoga ni Cartanova podalgebra $\mathfrak{h}_0'$ nije jedinstveno određena.

(2) Neka je sada $\mathfrak{h}_0'$ $\vartheta-$invarijantna Cartanova podalgebra od $\mathfrak{g}_0$ i $\alpha \in R' = R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}')$ realan korijen. Neka je $e_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha \setminus \{0\}$. Iz realnosti korijena α slijedi $\sigma(\mathfrak{g}_\alpha) = \mathfrak{g}_\alpha$, dakle, $\sigma(e_\alpha) \in \mathfrak{g}_\alpha$. Stoga možemo izabrati da bude $e_\alpha \in \mathfrak{g}_0$, odnosno, $\sigma(e_\alpha) = e_\alpha$. Nadalje, iz realnosti korijena α slijedi $\vartheta(e_\alpha) \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$. Iz formule (5.1) primijenjene na par $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}')$ slijedi

$$[e_\alpha, \vartheta(e_\alpha)] = B(e_\alpha, \vartheta(e_\alpha))\, t_\alpha.$$

Imamo

$$B(e_\alpha, \vartheta(e_\alpha)) = -\left(e_\alpha | \, e_\alpha\right)_\vartheta < 0.$$

Stoga možemo korijenski vektor e_α normirati tako da bude

$$B(e_\alpha, \vartheta(e_\alpha)) = -\frac{2}{(\alpha|\alpha)}.$$

Primijetimo da tim zahtjevom e_α ponovno nije jedinstveno određen, nego samo do na multipl modula 1. No sada je zahtjev da bude $e_\alpha \in \mathfrak{g}_0$, dakle, taj multipl može biti samo ± 1, odnosno, sada se nejedinstvenost svodi samo na predznak.

Stavimo

$$h_\alpha = \frac{2}{(\alpha|\alpha)} t_\alpha.$$

Sada imamo

$$[h_\alpha, e_\alpha] = 2e_\alpha, \qquad [h_\alpha, \vartheta(e_\alpha)] = -2\vartheta(e_\alpha), \qquad [e_\alpha, \vartheta(e_\alpha)] = -h_\alpha.$$

U vezi s našim razmatranjem primjera $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ sada je korespondencija sljedeća:

$$e_\alpha \quad \longleftrightarrow \quad e=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \vartheta\left(e_\alpha\right) \quad \longleftrightarrow \quad -f=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$h_\alpha \quad \longleftrightarrow \quad h=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \qquad i\left(\vartheta\left(e_\alpha\right)-e_\alpha\right) \quad \longleftrightarrow \quad -if-ie=\begin{bmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{bmatrix}.$$

Cayleyevu transformaciju druge vrste definiramo ovako

$$D_\alpha=\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}\,ad\,(\vartheta(e_\alpha)-e_\alpha)}$$

i stavljamo

$$\mathfrak{h}_0=\mathfrak{g}_0\cap D_\alpha\left(\mathfrak{h}'\right)=\operatorname{Ker}\,(\alpha|\mathfrak{h}_0')\,\oplus\,\mathbb{R}\left(e_\alpha+\vartheta\left(e_\alpha\right)\right).$$

Druga jednakost za $\mathfrak{h}_0$ slijedi slično kao u slučaju Cayleyeve transformacije prve vrste eksplicitnim izračunavanjem djelovanja operatorskog reda potencija kojim je definiran automorfizam D_α. Naime, taj račun daje

$$D_\alpha\left(h_\alpha\right)=i\left(e_\alpha+\vartheta\left(e_\alpha\right)\right), \quad D_\alpha\left(e_\alpha-\vartheta\left(e_\alpha\right)\right)=e_\alpha-\vartheta\left(e_\alpha\right), \quad D_\alpha\left(e_\alpha+\vartheta\left(e_\alpha\right)\right)=ih_\alpha.$$

Propozicija 5.1.1. *Dvije vrste Cayleyevih transformacija se mogu definirati tako da budu jedna drugoj inverzne. Precizno:*

(*a*) *Ako je β nekompaktan imaginaran korijen iz $R=R(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$, korijenski vektor $e_{C_\beta(\beta)}$ potreban za definiciju Cayleyeve transformacije $D_{C_\beta(\beta)}$ može se odabrati tako da bude jednak $iC_\beta\left(e_\beta\right)$. Uz takav izbor Cayleyeve transformacije C_β i $D_{C_\beta(\beta)}$ su međusobno inverzne.*

(*b*) *Ako je α realan korijen iz $R'=R\left(\mathfrak{g},\mathfrak{h}'\right)$, korijenski vektor $e_{D_\alpha(\alpha)}$ potreban za definiciju Cayleyeve transformacije $C_{D_\alpha(\alpha)}$ može se odabrati tako da bude jednak $-iD_\alpha\left(e_\alpha\right)$. Uz takav izbor Cayleyeve transformacije D_α i $C_{D_\alpha(\alpha)}$ su međusobno inverzne.*

Dokaz: Prema gornjim formulama za djelovanje automorfizma C_β imamo

$$C_\beta\left(e_\beta\right)=\frac{1}{2}C_\beta\left(e_\beta+\sigma\left(e_\beta\right)\right)+\frac{1}{2}C_\beta\left(e_\beta-\sigma\left(e_\beta\right)\right)=-\frac{1}{2}h_\beta+\frac{1}{2}\left(e_\beta-\sigma\left(e_\beta\right)\right).$$

Oba sumanda u posljednjem izrazu su u $i\mathfrak{g}_0$, pa slijedi da je $iC_\beta\left(e_\beta\right)\in\mathfrak{g}_0$. S druge strane, $h_\beta\in\mathfrak{k}$ i $e_\beta,\sigma\left(e_\beta\right)\in\mathfrak{p}$, pa imamo

$$\vartheta\left(C_\beta\left(e_\beta\right)\right)=-\frac{1}{2}h_\beta-\frac{1}{2}\left(e_\beta-\sigma\left(e_\beta\right)\right).$$

Stavimo $e_{C_\beta(\beta)}=iC_\beta\left(e_\beta\right)$. Sada iz $B\left(e_\beta,\sigma\left(e_\beta\right)\right)=\dfrac{2}{(\beta|\beta)}$, iz

$$B\left(h_\beta,h_\beta\right)=\frac{2}{(\beta|\beta)}B\left(h_\beta,t_\beta\right)=\frac{2}{(\beta|\beta)}\beta\left(h_\beta\right)=\frac{4}{(\beta|\beta)}$$

i iz $B\left(\mathfrak{h},\mathfrak{g}_\alpha\right)=B\left(\mathfrak{g}_\alpha,\mathfrak{g}_\alpha\right)=\{0\}$ slijedi

$$B\left(e_{C_\beta(b)},\vartheta\left(e_{C_\beta(b)}\right)\right)=-B\left(C_\beta\left(e_\beta\right),\vartheta\left(C_\beta\left(e_\beta\right)\right)\right)=-\frac{1}{4}B\left(h_\beta,h_\beta\right)+\frac{1}{4}B\left(e_\beta-\sigma\left(e_\beta\right),e_\beta-\sigma\left(e_\beta\right)\right)=$$

$$=-\frac{1}{(\beta|\beta)}-\frac{1}{4}B\left(e_\beta,\sigma\left(e_\beta\right)\right))-\frac{1}{4}B\left(\sigma\left(e_\beta\right),e_\beta\right)=-\frac{1}{(\beta|\beta)}-\frac{1}{4}\frac{2}{(\beta|\beta)}-\frac{1}{4}\frac{2}{(\beta|\beta)}=-\frac{2}{(\beta|\beta)}.$$

To pokazuje da je izabrani korijenski vektor $e_{C_\beta(\beta)}$ pravilno normaliziran. Sada računamo automorfizam $D_{C_\beta(\beta)}$ uz takav izbor korijenskog vektora:

$$D_{C_\beta(\beta)} = \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}\,ad\left(\vartheta(e_{C_\beta(\beta)})-e_{C_\beta(\beta)}\right)} =$$

$$= \mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}\,ad\left(C_\beta(e_\beta)-\vartheta(C_\beta(e_\beta))\right)} = \mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}\,ad\left(e_\beta-\sigma(e_\beta)\right)}.$$

Vidimo da je to upravo invers od

$$C_\beta = \mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}\,ad\left(\sigma(e_\beta)-e_\beta\right)}.$$

(b) U ovom slučaju prema formulama za djelovanje automorfizma D_α imamo

$$D_\alpha(e_\alpha) = \frac{1}{2}D_\alpha(e_\alpha+\vartheta(e_\alpha)) + \frac{1}{2}(e_\alpha-\vartheta(e_\alpha)) = \frac{i}{2}h_\alpha + \frac{1}{2}(e_\alpha-\vartheta(e_\alpha)).$$

Budući da su $h_\alpha, e_\alpha, \vartheta(e_\alpha) \in \mathfrak{g}_0$, imamo

$$\sigma(D_\alpha(e_\alpha)) = -\frac{i}{2}h_\alpha + \frac{1}{2}(e_\alpha-\vartheta(e_\alpha)).$$

Sada stavljamo $e_{D_\alpha(\alpha)} = -iD_\alpha(e_\alpha)$. Kako je $B(e_\alpha,\vartheta(e_\alpha)) = -\dfrac{2}{(\alpha|\alpha)}$, nalazimo

$$B\left(e_{D_\alpha(\alpha)},\sigma\left(e_{D_\alpha(\alpha)}\right)\right) = B(-iD_\alpha(e_\alpha),\sigma(-iD_\alpha(e_\alpha))) = B(D_\alpha(e_\alpha),\sigma(D_\alpha(e_\alpha))) =$$

$$= B\left(\frac{i}{2}h_\alpha+\frac{1}{2}(e_\alpha-\vartheta(e_\alpha)), -\frac{i}{2}h_\alpha+\frac{1}{2}(e_\alpha-\vartheta(e_\alpha))\right) = \frac{1}{4}B(h_\alpha,h_\alpha) - \frac{1}{2}B(e_\alpha,\vartheta(e_\alpha)).$$

Kao i prije imamo

$$B(h_\alpha,h_\alpha) = \frac{2}{(\alpha|\alpha)}B(t_\alpha,h_\alpha) = \frac{2}{(\alpha|\alpha)}\alpha(h_\alpha) = \frac{4}{(\alpha|\alpha)}.$$

Prema tome,

$$B\left(e_{D_\alpha(\alpha)},\sigma\left(e_{D_\alpha(\alpha)}\right)\right) = \frac{1}{(\alpha|\alpha)} + \frac{1}{(\alpha|\alpha)} = \frac{2}{(\alpha|\alpha)} = \frac{2}{(D_\alpha(\alpha)\,|D_\alpha(\alpha))},$$

a to pokazuje da je izabrani korijenski vektor $e_{D_\alpha(\alpha)}$ pravilno normaliziran. Sada za Cayleyevu transformaciju $C_{D_\alpha(\alpha)}$ dobivamo

$$C_{D_\alpha(\alpha)} = \mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}\,ad\left(\sigma(e_{D_\alpha(\alpha)})-e_{D_\alpha(\alpha)}\right)} =$$

$$\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}\,ad\,(D_\alpha(e_\alpha)+\sigma(D_\alpha(e_\alpha)))} = \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}\,ad\,(e_\alpha-\vartheta(e_\alpha))},$$

a to je upravo invers od

$$D_\alpha = \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}\,ad\,(\vartheta(e_\alpha)-e_\alpha)}$$

Propozicija 5.1.2. *Neka je $\mathfrak{h}_0$ $\vartheta-$invarijantna Cartanova podalgebra. Tada u $R = R(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ nema imaginarnih nekompaktnih korijena ako i samo ako je $\mathfrak{h}_0$ maksimalno nekompaktna, i nema realnih korijena ako i samo ako je $\mathfrak{h}_0$ maksimalno kompaktna Cartanova podalgebra.*

Dokaz: Pretpostavimo da je $\beta \in R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ imaginaran nekompaktan korijen. Tada možemo definirati Cayleyevu transformaciju prve vrste C_β i Cartanova podalgebra

$$\mathfrak{h}_0' = \mathfrak{g}_0 \cap C_\beta(\mathfrak{h}) = \mathrm{Ker}\ (\beta|\mathfrak{h}_0)\ \oplus\ \mathbb{R}(e_\beta + \sigma(e_\beta))$$

ima nekompaktnu dimenziju za 1 veću od $\mathfrak{h}_0$. Prema tome, Cartanova podalgebra $\mathfrak{h}_0$ nije maksimalno nekompaktna.

Analogno, ako je $\alpha \in R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ realan korijen, onda Cartanova podalgebra

$$\mathfrak{h}_0' = \mathfrak{g}_0 \cap D_\alpha(\mathfrak{h}) = \mathrm{Ker}\ (\alpha|\mathfrak{h}_0)\ \oplus\ \mathbb{R}(e_\alpha + \vartheta(e_\alpha))$$

ima kompaktnu dimenziju za 1 veću nego $\mathfrak{h}_0$. Prema tome, Cartanova podalgebra $\mathfrak{h}_0$ nije maksimalno kompaktna.

Pretpostavimo sada da u $R = R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ nema imaginarnbih nekompaktnih korijena. Imamo $\mathfrak{h}_0 = \mathfrak{t}_0 \dotplus \mathfrak{a}_0$, gdje je je $\mathfrak{t}_0 = \mathfrak{h}_0 \cap \mathfrak{k}_0$ i $\mathfrak{a}_0 = \mathfrak{h}_0 \cap \mathfrak{p}_0$. Sada imamo korijenski rastav

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \dotplus \sum_{\alpha \in R} \dotplus\, \mathfrak{g}_\alpha \tag{5.2}$$

Budući da su svi imaginarni korijeni kompaktni, nalazimo

$$Z_\mathfrak{g}(\mathfrak{a}_0) = \mathfrak{h} \dotplus \sum_{\alpha \in R,\ \alpha \text{ imaginaran}} \dotplus\, \mathfrak{g}_\alpha = \mathfrak{h} \dotplus \sum_{\alpha \in R,\ \alpha \text{ imaginaran kompaktan}} \dotplus\, \mathfrak{g}_\alpha,$$

pa slijedi

$$\mathfrak{p}_0 \cap Z_\mathfrak{g}(\mathfrak{a}_0) = \mathfrak{g}_0 \cap (\mathfrak{p} \cap Z_\mathfrak{g}(\mathfrak{a}_0)) = \mathfrak{g}_0 \cap (\mathfrak{p} \cap \mathfrak{h}) = \mathfrak{a}_0.$$

To pokazuje da je $\mathfrak{a}_0$ Cartanov potprostor od $\mathfrak{p}_0$, odnosno, Cartanova podalgebra $\mathfrak{h}_0$ je maksimalno nekompaktna.

Napokon, pretpostavimo da u R nema realnih korijena. Tada iz korijenskog rastava (5.2) dobivamo

$$Z_\mathfrak{g}(\mathfrak{t}_0) = \mathfrak{h} \dotplus \sum_{\alpha \in R, \alpha \text{ realan}} \dotplus\, \mathfrak{g}_\alpha = \mathfrak{h},$$

dakle,

$$Z_{\mathfrak{k}_0}(\mathfrak{t}_0) = \mathfrak{k}_0 \cap Z_\mathfrak{g}(\mathfrak{t}_0) = \mathfrak{k}_0 \cap \mathfrak{h} = \mathfrak{t}_0.$$

To pokazuje da je $\mathfrak{t}_0$ maksimalna komutativna podalgebra od $\mathfrak{k}_0$, pa slijedi da je Cartanova podalgebra $\mathfrak{h}_0$ maksimalno kompaktna.

Kada prelazimo iz $\mathfrak{h}_0'$ na $\mathfrak{h}_0$ pomoću Cayleyeve transformacije druge vrste D_α za realan $\alpha \in R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}')$, moguće je predvidjeti koji će biti realni korijeni za $\mathfrak{h}_0$. Da bismo proveli sukcesivno više Cayleyevih transformacija druge vrste potreban nam je konačan niz realnih korijena od kojih će jedan po jedan postajati imaginarni. Dakle, lako možemo provesti sukcesivno više Cayleyevih transformacija druge vrste ako imamo niz međusobno ortogonalnih realnih korijena.

Slično, kada pomoću Cayleyeve transformacije prve vrste C_β prelazimo iz $\mathfrak{h}_0$ na $\mathfrak{h}_0'$, možemo predvidjeti koji će biti imaginarni korijeni za $\mathfrak{h}_0'$. Međutim, na korijen α imamo dodatni zahtjev da bismo mogli konstruirati Cayleyevu transformaciju prve vrste C_α : osim što tražimo da je α imaginaran, on mora biti nekompaktnan. Sljedeća nam propozicija kaže kako predvidjeti koji imaginarni korijeni su nekompaktni nakon Cayleyeve transformacije.

Propozicija 5.1.3. *Neka je $\alpha \in R = R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ nekompaktan imaginaran korijen. Neka je korijen β okomit na α i takav da je $\alpha-$lanac kroz β simetričan oko β. Neka je $e_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha \setminus \{0\}$ pravilno normaliziran za konstrukciju Cayleyeve transformacije C_α i neka je $e_\beta \in \mathfrak{g}_\beta \setminus \{0\}$.*

(*a*) *Ako $\beta \pm \alpha \notin R$, tada je $C_\alpha(e_\beta) = e_\beta$. Dakle, ako je β imaginaran, tada je β kompaktan ako i samo ako je $C_\alpha(\beta)$ kompaktan.*

(*b*) *Ako su $\beta \pm \alpha \in R$, onda je*

$$C_\alpha(e_\beta) = \frac{1}{2}\left([\sigma(e_\alpha), e_\beta] - [e_\alpha, e_\beta]\right).$$

Dakle, ako je β imaginaran, tada je β kompaktan ako i samo ako je $C_\alpha(\beta)$ nekompaktan.

Dokaz: Imamo

$$C_\alpha = \mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}\,ad\,(\sigma(e_\alpha)-e_\alpha)} \qquad \text{i} \qquad [e_\alpha, \sigma(e_\alpha)] = h_\alpha.$$

(*a*) Sada e_β komutira i sa e_α i sa $\sigma(e_\alpha)$ pa je očito $C_\alpha(e_\beta) = e_\beta$. Ako je korijen β imaginaran, vektori e_β i $C_\alpha(e_\beta)$ su ili oba u $\mathfrak{k}$ ili su oba u $\mathfrak{p}$, jer su jednaki.

(*b*) Imamo

$$\frac{\pi}{4}\,ad\,(\sigma(e_\alpha) - e_\alpha)\,e_\beta = \frac{\pi}{4}\left([\sigma(e_\alpha), e_\beta] - [e_\alpha, e_\beta]\right),$$

$$\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 (ad\,(\sigma(e_\alpha) - e_\alpha))^2\,e_\beta = -\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 \left([e_\alpha, [\sigma(e_\alpha), e_\beta]] + [\sigma(e_\alpha), [e_\alpha, e_\beta]]\right).$$

Korištenjem rezultata o $\alpha-$lancima korijena može se pokazati da su i prvi i drugi sumand u posljednjoj zagradi jednaki $2e_\beta$. Dakle

$$\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 ad\,(\sigma(e_\alpha) - e_\alpha)\,e_\beta = -\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 e_\beta.$$

Odatle dobivamo

$$C_\alpha(e_\beta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!}\left(\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 (ad\,(\sigma(e_\alpha) - e_\alpha))^2\right)^n e_\beta +$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!}\frac{\pi}{4}\,ad\,(\sigma(e_\alpha) - e_\alpha)\left(\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 (ad\,(\sigma(e_\alpha) - e_\alpha))^2\right)^n e_\beta =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!}(-1)^n \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n} e_\beta + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!}(-1)^n \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n} \frac{\pi}{4}\left([\sigma(e_\alpha), e_\beta] - [e_\alpha, e_\beta]\right) =$$

$$= \left(\cos\frac{\pi}{2}\right) e_\beta + \frac{1}{2}\left(\sin\frac{\pi}{2}\right)\left([\sigma(e_\alpha), e_\beta] - [e_\alpha, e_\beta]\right) = \frac{1}{2}\left([\sigma(e_\alpha), e_\beta] - [e_\alpha, e_\beta]\right).$$

Ako je β imaginaran, vrijedi $C_\alpha(e_\beta) \in \mathfrak{k}$, ako i samo ako je $e_\beta \in \mathfrak{p}$, jer su $e_\alpha, \sigma(e_\alpha) \in \mathfrak{p}$.

Prisjetimo se da se dva ortogonalna korijena zovu **jako ortogonalni** ako $\beta \pm \alpha$ nisu korijeni. Propozicija 5.1.3. pokazuje da se niz Cayleyevih transformacija prve vrste C_β može vrlo lako provesti ako imamo niz međusobno jako ortogonalnih imaginarnih nekompaktnih korijena.

Ako su α i β ortogonalni ali ne jako ortogonalni, tada je

$$\|\beta \pm \alpha\|^2 = \|\beta\|^2 + \|\alpha\|^2,$$

dakle, postoje barem dvije duljine korijena. U stvari, mora biti $\|\beta\|^2 = \|\alpha\|^2$, inače bismo prema gornjoj jednakosti imali tri različite duljine korijena, a to nije moguće unutar ireducibilne komponente reduciranog sistema korijena. Sada gornja jednakost postaje

$$\|\beta \pm \alpha\|^2 = 2\|\alpha\|^2,$$

dakle, ireducibilna komponenta sistema korijena koja sadrži korijene α i β ima dvostruku liniju u Dynkinovom dijagramu. Dakle, kad god Dynkinov dijagram nema dvostrukih linija, ortogonalni korijeni su nužno jako ortogonalni.

5.2 Voganovi dijagrami

Neka je $\mathfrak{g}_0$ realna poluprosta Liejeva algebra, $\mathfrak{g}$ njena kompleksifikacija, ϑ Cartanova involucija od $\mathfrak{g}_0$ $\mathbb{C}-$linearno proširena na $\mathfrak{g}$, $(\mathfrak{k}_0, \mathfrak{p}_0)$ Cartanova dekompozicija od $\mathfrak{g}_0$ definirana sa ϑ, $(\mathfrak{k}, \mathfrak{p})$ njena kompleksifikacija i B Killingova forma od $\mathfrak{g}$. Neka je $(\cdot|\cdot)_\vartheta$ skalarni produkt na $\mathfrak{g}_0$ definiran sa $(x|y)_\vartheta = -B(x, \vartheta(y))$ i neka je istim znakom označen skalarni produkt na $\mathfrak{g}$ dobiven seskvilinearnim proširenjem. Tada znamo da je

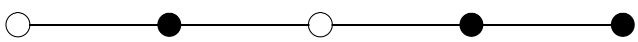
$$(x|y)_\vartheta = -B(x, \tau_\vartheta(y)), \qquad x, y \in \mathfrak{g},$$

gdje je τ_ϑ kompaktna konjugacija od $\mathfrak{g}$ dobivena antilinearnim proširenjem ϑ, odnosno, uz linearno proširenje ϑ je $\tau_\vartheta = \vartheta\sigma = \sigma\vartheta$, gdje je σ konjugacija od $\mathfrak{g}$ pridružena realnoj formi $\mathfrak{g}_0$.

Neka je $\mathfrak{h}_0$ maksimalno kompaktna $\vartheta-$invarijantna Cartanova podalgebra, $\mathfrak{t}_0 = \mathfrak{h}_0 \cap \mathfrak{k}_0$, $\mathfrak{a}_0 = \mathfrak{h}_0 \cap \mathfrak{p}_0$, dakle $\mathfrak{h}_0 = \mathfrak{t}_0 \oplus \mathfrak{a}_0$. Neka su $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{t}$ i $\mathfrak{a}$ kompleksifikacije od $\mathfrak{h}_0$, $\mathfrak{t}_0$ i $\mathfrak{a}_0$. Tada je $\mathfrak{h} = \mathfrak{t} \oplus \mathfrak{a}$. Neka je $R = R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$. Znamo da je tada $\mathfrak{h}(\mathbb{R}) = i\mathfrak{t}_0 \oplus \mathfrak{a}_0$. Budući da je Cartanova podalgebra $\mathfrak{h}_0$ maksimalno kompaktna, u R nema realnih korijena, što znači da je $\alpha|\mathfrak{t} \neq 0\ \forall\alpha \in R$.

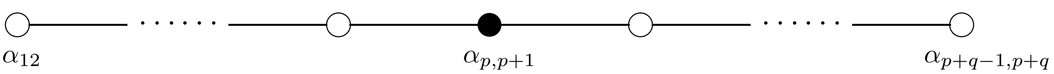
Izaberimo sada uređenu bazu od $\mathfrak{h}(\mathbb{R})$ sastavljenu od uređene baze od $i\mathfrak{t}_0$, a zatim od uređene baze od $\mathfrak{a}_0$. Pomoću te baze uvedimo leksikografski uređaj na $\mathfrak{h}^*(\mathbb{R})$ i neka je R_+ pripadni skup pozitivnih korijena. Budući da je $\vartheta|\mathfrak{t}_0 = I_{\mathfrak{t}_0}$ i $\vartheta|\mathfrak{a}_0 = -I_{\mathfrak{a}_0}$ i budući da nema realnih korijena, vrijedi $\vartheta(R_+) = R_+$. Posebno, ϑ permutira korijene u bazi od R određenoj sa R_+. Preciznije, iz $\vartheta|\mathfrak{t}_0 = I_{\mathfrak{t}_0}$ slijedi da ϑ fiksira korijene iz baze koji su imaginarni. Nadalje, kako je $\vartheta|\mathfrak{a}_0 = -I_{\mathfrak{a}_0}$, automorfizam ϑ permutira kompleksne korijene u bazi u $2-$ciklusima. **Voganov dijagram** trojke $(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{h}_0, R_+)$ je Dynkinov dijagram od R_+ u kome su dvostranim strelicama označene dvočlane $\vartheta-$orbite, a svi vrhovi su bijeli osim imaginarnih nekompaktnih $\vartheta-$fiksnih vrhova koji su crni.

Npr. za $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{su}(3,3)$ uzmimo $\vartheta(x) = -x^*$ i neka je $\mathfrak{h}_0 = \mathfrak{t}_0$ podalgebra svih dijagonalnih matrica u $\mathfrak{g}_0$. Tada je $R = \{\alpha_{ij};\ 1 \leq i, j \leq 6,\ i \neq j\}$, gdje su α_{ij} linearni funkcionali na $\mathfrak{h}$ definirani sa $\alpha_{ij}(diag(a_1, \ldots, a_6)) = a_i - a_j$, $i \neq j$. Dynkinov dijagram je tipa A_5 i svi su korijeni imaginarni, jer je $\mathfrak{a}_0 = \{0\}$. Nadalje, α_{ij} je kompaktan korijen ako su $i, j \in \{1,2,3\}$ ili $i, j \in \{4,5,6\}$, a nekompaktan ako je jedan od indeksa i, j u $\{1,2,3\}$ a drugi u $\{4,5,6\}$. Neka je sada R_+ izabran tako da je pripadna baza $\{\alpha_{12}, \alpha_{24}, \alpha_{45}, \alpha_{53}, \alpha_{36}\}$. U toj bazi su α_{12} i α_{45} kompaktni korijeni, a α_{24}, α_{53} i α_{36} su nekompaktni korijeni. Prema tome, Voganov dijagram je



Navodimo još dvije beskonačne serije primjera:

(1) $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{su}(p,q)$, $\vartheta(x) = -x^*$, $\mathfrak{h}_0 = \mathfrak{t}_0$ podalgebra svih dijagonalnih matrica. Uzmimo sada standardan uređaj tako da je $R_+ = \{\alpha_{ij};\ 1 \leq i < j \leq p+q\}$. Pripadna baza od R je $\{\alpha_{12}, \alpha_{23}, \ldots, \alpha_{p+q-1,p+q}\}$. Tada je α_{ij} kompaktan ako su $i, j \in \{1, \ldots, p\}$ ili $i, j \in \{p+1, \ldots, p+q\}$. Ostali su korijeni nekompaktni. Prema tome, među korijenima u bazi samo je $\alpha_{p,p+1}$ nekompaktan, a svi su ostali kompaktni. Dakle, Voganov dijagram je



Primijetimo da za $p = q = 3$, tj. za $\mathfrak{su}(3,3)$, dobivamo drugačiji Voganov dijagram nego malo prije. To pokazuje da je moguće da više različitih Voganovih dijagrama bude pridruženo istoj realnoj poluprostoj Liejevoj algebri. Različiti izbori za R_+ mogu voditi na različite Voganove dijagrame.

(2) $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{sl}(2n, \mathbb{R})$, $\vartheta(x) = -x^T$ i

$$\mathfrak{h}_0 = \left\{ \begin{bmatrix} \begin{matrix} x_1 & y_1 \\ -y_1 & x_1 \end{matrix} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \begin{matrix} x_2 & y_2 \\ -y_2 & x_2 \end{matrix} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \begin{matrix} x_n & y_n \\ -y_n & x_n \end{matrix} \end{bmatrix} ;\ x_j, y_j \in \mathbb{R},\ \sum_{j=1}^{n} x_j = 0 \right\}.$$

Tada potprostor $\mathfrak{t}_0 = \mathfrak{h}_0 \cap \mathfrak{k}_0$ čine sve matrice iz $\mathfrak{h}_0$ kod kojih su $x_1 = \cdots = x_n = 0$, a potprostor $\mathfrak{a}_0$ čine sve matrice iz $\mathfrak{h}_0$ kod kojih su $y_1 = \cdots = y_n = 0$. Stoga je

$$\mathfrak{h}(\mathbb{R}) = i\mathfrak{t}_0 \dotplus \mathfrak{a}_0 = \left\{ \begin{bmatrix} \begin{matrix} x_1 & -iy_1 \\ iy_1 & x_1 \end{matrix} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \begin{matrix} x_2 & -iy_2 \\ iy_2 & x_2 \end{matrix} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \begin{matrix} x_n & -iy_n \\ iy_n & x_n \end{matrix} \end{bmatrix} ;\ x_j, y_j \in \mathbb{R},\ \sum_{j=1}^{n} x_j = 0 \right\}.$$

Definiramo funkcionale $e_j, f_j \in \mathfrak{h}^*(\mathbb{R})$ koji djeluju samo na $j-$ti dijagonalni blok gornje matrice x i to ovako

$$e_j(x) = y_j, \qquad f_j(x) = x_j.$$

Pokazuje se da je

$$R = R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) = \{\pm e_j \pm e_k \pm (f_j - f_k);\ 1 \le j, k \le n,\ j \ne k\} \cup \{\pm 2e_\ell;\ 1 \le \ell \le n\}.$$

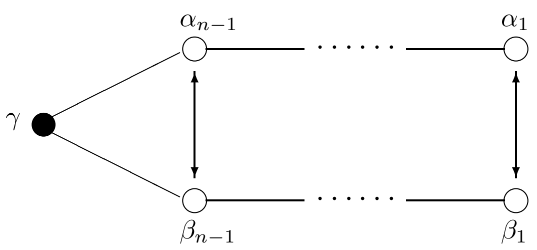
Imaginarni korijeni su oni koji uključuju samo funkcionale e_j, a realni su oni koji uključuju samo funkcionale f_j. Preostali su korijeni kompleksni. Prema tome, nema realnih korijena, pa zaključujemo da je Cartanova podalgebra $\mathfrak{h}_0$ maksimalno nekompaktna. Vrijedi $\vartheta(e_j) = e_j$ i $\vartheta(f_j) = -f_j$. Definiramo leksikografski uređaj pomoću sljedećeg redoslijeda funkcionala: $e_1, \ldots, e_n, f_1, \ldots, f_n$. Tada je

$$R_+ = \{e_j + e_k \pm (f_j - f_k);\ 1 \le j, k \le n,\ j \ne k\} \cup \{e_j - e_k \pm (f_j - f_k);\ 1 \le j < k \le n\} \cup \{2e_\ell;\ 1 \le \ell \le n\}.$$

Pripadna baza je $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}, \gamma, \beta_{n-1}, \ldots, \beta_1\}$ gdje su

$$\gamma = 2e_n, \quad \alpha_j = e_j - e_{j+1} + (f_j - f_{j+1}), \quad \beta_j = e_j - e_{j+1} - (f_j - f_{j+1}), \quad 1 \le j < n.$$

Samo je srednji korijen γ imaginaran i taj je nekompaktan. Ostali korijeni u bazi su kompleksni i $\vartheta(\alpha_j) = \beta_j$. Dakle, Voganov dijagram je



Znamo da ista realna poluprosta Liejeva algebra može imati više različitih Voganovih dijagrama. Međutim, Voganov dijagram do na izomorfizam određuje realnu poluprostu Liejevu algebru:

Teorem 5.2.1. *Neka su $\mathfrak{g}_0$ i $\mathfrak{g}_0'$ realne poluproste Liejeve algebre, $\mathfrak{h}_0$ i $\mathfrak{h}_0'$ njihove maksimalno kompaktne Cartanove podalgebre i R_+ i R_+' neki skupovi pozitivnih korijena u $R = R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ i u $R' = R(\mathfrak{g}', \mathfrak{h}')$. Pretpostavimo da trojke $(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{h}_0, R_+)$ i $\left(\mathfrak{g}_0', \mathfrak{h}_0', R_+'\right)$ imaju iste Voganove dijagrame. Tada su Liejeve algebre $\mathfrak{g}_0$ i $\mathfrak{g}_0'$ izomorfne.*

Skica dokaza: Budući da su Dynkinovi dijagrami kompleksifikacija $\mathfrak{g}$ i $\mathfrak{g}'$ isti, možemo bez smanjenja općenitosti pretpostavljati da je $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}'$, tj. da je $\mathfrak{g}$ kompleksifikacija i od $\mathfrak{g}_0$ i od $\mathfrak{g}_0'$.

Prema tvrdnji (b) propozicije 4.11.1. postoje Cartanove involucije ϑ od $\mathfrak{g}_0$ i ϑ' od $\mathfrak{g}_0'$ takve da je $\vartheta(\mathfrak{h}_0) = \mathfrak{h}_0$ i $\vartheta'(\mathfrak{h}_0') = \mathfrak{h}_0'$. Neka su $(\mathfrak{k}_0, \mathfrak{p}_0)$ i $(\mathfrak{k}_0', \mathfrak{p}_0')$ pripadne Cartanove dekompozicije od $\mathfrak{g}_0$ i od $\mathfrak{g}_0'$. Tada su $\mathfrak{u}_0 = \mathfrak{k}_0 \oplus i\mathfrak{p}_0$ i $\mathfrak{u}_0' = \mathfrak{k}_0' \oplus i\mathfrak{p}_0'$ kompaktne forme od $\mathfrak{g}$. Prema zadatku 4.2.2. kompaktna forma od $\mathfrak{g}$ je maksimalna kompaktna podalgebra od $\mathfrak{g}^{\mathbb{R}}$. Sada primjenom teorema 4.4.7. slijedi da postoji $\varphi \in Int\left(\mathfrak{g}^{\mathbb{R}}\right) = Int(\mathfrak{g})$ takav da je $\varphi(\mathfrak{u}_0') = \mathfrak{u}_0$. Realna forma $\varphi(\mathfrak{g}_0')$ od $\mathfrak{g}$ izomorfna je sa $\mathfrak{g}_0'$ i ima Cartanovu dekompoziciju $(\varphi(\mathfrak{k}_0'), \varphi(\mathfrak{p}_0'))$. Kako je

$$\varphi(\mathfrak{k}_0') + i\varphi(\mathfrak{p}_0') = \varphi(\mathfrak{k}_0' + i\mathfrak{p}_0') = \varphi(\mathfrak{u}_0') = \mathfrak{u}_0,$$

vidimo da možemo bez smanjenja općenitosti pretpostavljati da je $\mathfrak{u}_0' = \mathfrak{u}_0$. Sada je

$$\vartheta(\mathfrak{u}_0) = \mathfrak{u}_0 = \vartheta'(\mathfrak{u}_0).$$

Neka su

$$\mathfrak{t}_0 = \mathfrak{h}_0 \cap \mathfrak{k}_0, \quad \mathfrak{a}_0 = \mathfrak{h}_0 \cap \mathfrak{p}_0, \quad \mathfrak{t}_0' = \mathfrak{h}_0' \cap \mathfrak{k}_0', \quad \mathfrak{a}_0' = \mathfrak{h}_0' \cap \mathfrak{p}_0'.$$

Tada je $\mathfrak{h}_0 = \mathfrak{t}_0 \oplus \mathfrak{a}_0$ i $\mathfrak{h}_0' = \mathfrak{t}_0' \oplus \mathfrak{a}_0'$. Nadalje, $\mathfrak{t}_0 \oplus i\mathfrak{a}_0$ i $\mathfrak{t}_0' \oplus i\mathfrak{a}_0'$ su maksimalne komutativne podalgebre od $\mathfrak{u}_0$. Prema teoremu 4.10.6. postoji $\psi \in Int(\mathfrak{u}_0)$ takav da je $\psi(\mathfrak{t}_0' \oplus i\mathfrak{a}_0') = \mathfrak{t}_0 \oplus i\mathfrak{a}_0$. Dakle, bez smanjenja općenitosti možemo pretpostavljati da je $\mathfrak{t}_0' \oplus i\mathfrak{a}_0' = \mathfrak{t}_0 \oplus i\mathfrak{a}_0$. To znači da $\mathfrak{h}_0$ i $\mathfrak{h}_0'$ imaju istu kompleksifikaciju, tj. da je $\mathfrak{h}' = \mathfrak{h}$. Nadalje, $\mathfrak{u}_0 \cap \mathfrak{h} = \mathfrak{t}_0 \oplus i\mathfrak{a}_0 = \mathfrak{t}_0' \oplus i\mathfrak{a}_0'$ je maksimalna komutativna podalgebra od $\mathfrak{u}_0$.

Kako je $\mathfrak{g}' = \mathfrak{g}$ i $\mathfrak{h}' = \mathfrak{h}$, imamo $R' = R$. Dva izbora pozitivnih korijena u R i označavat ćemo i dalje sa R_+ i R_+'. Slično dokazima tvrdnji (a) i (b) teorema 4.1.2. pokazuje se da postoji $\chi \in Int(\mathfrak{u}_0)$ takav da je $\chi(\mathfrak{u}_0 \cap \mathfrak{h}) = \mathfrak{u}_0 \cap \mathfrak{h}$ i da je (uz preneseno djelovanje na dualu) $\chi\left(R_+'\right) = R_+$. Zamijenimo li sada $\mathfrak{g}_0'$ sa $\chi(\mathfrak{g}_0')$, vidimo da možemo bez smanjenja općenitosti pretpostavljati da je $R_+' = R_+$.

Sada jednakost Voganovih dijagrama pokazuje da ϑ i ϑ' definiraju isti automorfizam baze od R određene sa R_+. To znači da ϑ i ϑ' djeluju jednako na $\mathfrak{h}^*$, dakle i na $\mathfrak{h} : \vartheta(h) = \vartheta'(h) \ \ \forall h \in \mathfrak{h}$. Sada se pokazuje da je korijenske vektore $x_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$ moguće izabrati tako da bude:

$$\vartheta(x_\alpha) = x_\alpha = \vartheta'(x_\alpha) \qquad \text{ako je} \quad \alpha \quad \text{imaginaran "bijeli" korijen iz baze,}$$

$$\vartheta(x_\alpha) = -x_\alpha = \vartheta'(x_\alpha) \qquad \text{ako je} \quad \alpha \quad \text{imaginaran "crni" korijen iz baze,}$$

$$\vartheta(x_\alpha) = a_\alpha x_{\vartheta\alpha} \quad \text{i} \quad \vartheta'(x_\alpha) = b_\alpha x_{\vartheta\alpha} \qquad \text{ako je} \quad \alpha \quad \text{kompleksan korijen iz baze,}$$

a $a_\alpha, b_\alpha \in \mathbb{C}$ su brojevi modula 1 takvi da je $a_\alpha a_{\vartheta\alpha} = b_\alpha b_{\vartheta\alpha} = 1$. Izaberimo korijene $\sqrt{a_\alpha}$, $\sqrt{a_{\vartheta\alpha}}$, $\sqrt{b_\alpha}$ i $\sqrt{b_{\vartheta\alpha}}$ tako da bude $\sqrt{a_\alpha}\sqrt{a_{\vartheta\alpha}} = \sqrt{b_\alpha}\sqrt{b_{\vartheta\alpha}} = 1$. Sada je moguće izabrati $h, h' \in \mathfrak{u}_0 \cap \mathfrak{h}$ tako da bude $\alpha(h) = \alpha(h') = 0$ za sve imaginarne korijene α iz baze, a da za komplesne korijene α iz baze bude

$$\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\alpha(h)} = \sqrt{a_\alpha}, \quad \mathrm{e}^{\frac{1}{2}(\vartheta\alpha)(h)} = \sqrt{a_{\vartheta\alpha}}, \quad \mathrm{e}^{\frac{1}{2}\alpha(h')} = \sqrt{b_\alpha}, \quad \mathrm{e}^{\frac{1}{2}(\vartheta\alpha)(h')} = \sqrt{b_{\vartheta\alpha}}.$$

Račun pokazuje da za svaki korijen α iz baze vrijedi

$$\left(\vartheta' \circ \mathrm{e}^{\frac{1}{2}\,ad\,(h-h')}\right) x_\alpha = \left(\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\,ad\,(h-h')} \circ \vartheta\right) x_\alpha.$$

Budući da dva gornja automorfizma jednako djeluju i na $\mathfrak{h}$, slijedi da jednako djeluju svuda:

$$\vartheta' \circ \mathrm{e}^{\frac{1}{2}\,ad\,(h-h')} = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}\,ad\,(h-h')} \circ \vartheta.$$

Odatle slijedi

$$\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\,ad\,(h-h')}(\mathfrak{k}) \subseteq \mathfrak{k}' \quad \text{i} \quad \mathrm{e}^{\frac{1}{2}\,ad\,(h-h')}(\mathfrak{p}) \subseteq \mathfrak{p}'.$$

No kako je $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p} = \mathfrak{k}' \oplus \mathfrak{p}'$, slijede jednakosti

$$\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\,ad\,(h-h')}(\mathfrak{k}) = \mathfrak{k}' \quad \text{i} \quad \mathrm{e}^{\frac{1}{2}\,ad\,(h-h')}(\mathfrak{p}) = \mathfrak{p}'.$$

Budući da je podalgebra $\mathfrak{u}_0$ invarijantna s obzirom na automorfizam $\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\,ad\,(h-h')}$, zaključujemo da je

$$\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\,ad\,(h-h')}\,(\mathfrak{k}_0) = \mathfrak{k}_0' \quad \text{i} \quad \mathrm{e}^{\frac{1}{2}\,ad\,(h-h')}\,(\mathfrak{p}_0) = \mathfrak{p}_0',$$

a odatle je

$$\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\,ad\,(h-h')}\,(\mathfrak{g}_0) = \mathfrak{g}_0',$$

odnosno, teorem je dokazan.

Definiramo sada **apstraktni Voganov dijagram**. To je Dynkinov dijagram sa sljedećom dodatnom strukturom: zadan je automorfizam tog Dynkinovog dijagrama koji je ili identiteta ili je reda 2. Dvočlane orbite označene su dvostranim strelicama, a među fiksnim vrhovima neki su bijeli a neki crni. Naravno, svaki Voganov dijagram je ujedno apstraktni Voganov dijagram. Bez dokaza navodimo teorem egzistencije realne poluproste Liejeve algebre sa zadanim Voganovim dijagramom:

Teorem 5.2.2. *Svaki apstraktni Voganov dijagram je Voganov dijagram neke trojke* $(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{h}_0, R_+)$, *gdje je* $\mathfrak{g}_0$ *realna poluprosta Liejeva algebra,* $\mathfrak{h}_0$ *je njena Cartanova podalgebra i* R_+ *je neki skup pozitivnih korijena u* $R = R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$.

Prema tome, ako ustanovimo koji Voganovi dijagrami odgovaraju izomorfnim algebrama, dobit ćemo potpunu klasifikaciju.

5.3 Klasifikacija

Prema teoremu 2.1.5. realne proste Liejeve algebre dijele se u dvije skupine. Prvu čine algebre oblika $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ za neku kompleksnu prostu Liejevu algebru $\mathfrak{g}$. Drugu čine realne proste Liejeve algebre na kojima ne postoji kompleksna struktura i takve su upravo sve realne forme svih kompleksnih prostih Liejevih algebri. Neka je $\mathfrak{g}_0$ takva Liejeva algebra. Kako je kompleksifikacija $\mathfrak{g} = (\mathfrak{g}_0)^{\mathbb{C}}$ prosta, ona ima povezan Dynkinov dijagram. To znači da je za svaki Voganov dijagram od $\mathfrak{g}_0$ pripadni Dynkinov dijagram povezan. Iz teorema 5.2.1. znamo da neizomorfne realne proste Liejeve algebre ne mogu imati iste Voganove dijagrame. Nadalje, prema teoremu 5.2.2. svaki apstraktni Voganov dijagram s povezanim Dynkinovim dijagramom je Voganov dijagram neke trojke $(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{h}_0, R_+)$, gdje je $\mathfrak{g}_0$ nekompleksna realna prosta Liejeva algebra, $\mathfrak{h}_0$ njena Cartanova podalgebra i R_+ neki skup pozitivnih korijena u $R = R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$, pri čemu je $\mathfrak{g} = (\mathfrak{g}_0)^{\mathbb{C}}$ i $\mathfrak{h} = (\mathfrak{h}_0)^{\mathbb{C}}$. Za potpunu klasifikaciju trebamo pronaći sve apstraktne Voganove dijagrame i utvrditi koji od njih su suvišni, tj. koji su pridruženi izomorfnim realnim prostim Liejevim algebrama.

Prije svega, nema dvojbe što se tiče automorfizma Dynkinovog dijagrama. Jedini povezani Dynkinovi dijagrami koji imaju netrivijalni automorfizam reda 2 su A_n, D_n i E_6. U tim je slučajevima netrivijalni automorfizam reda 2 jedinstven do na automorfizam Dynkinovog dijagrama; zapravo, on je apsolutno jedinstven osim u slučaju D_4, kad postoje tri takva koji su međusobno konjugirani automorfizmima Dynkinovog dijagrama. Voganov dijagram za $\mathfrak{g}_0$ uključuje takav automorfizam ako i samo ako postoje kompleksni korijeni, a to ovisi isključivo o $\mathfrak{g}_0$. Dakle, neodređenost Voganovog dijagrama za $\mathfrak{g}_0$ nastaje isključivo zbog mogućnosti različitih izbora R_+. U velikoj mjeri ta se neodređenost smanjuje (ali ne uklanja potpuno) pomoću sljedećeg teorema, koji navodimo bez dokaza, prema kojemu uvijek možemo izabrati R_+ tako da najviše jedan vrh u Voganovom dijagramu bude crn, tj. da je najviše jedan imaginaran korijen u bazi sistema korijena nekompaktan.

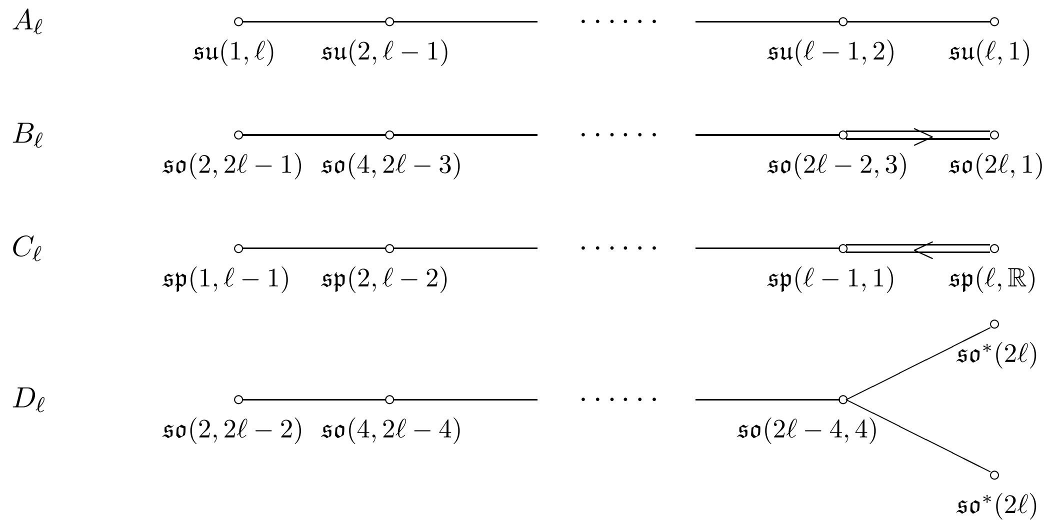
Teorem 5.3.1. (**Borel–de Siebenthal**) *Neka je $\mathfrak{g}_0$ nekompleksna prosta realna Liejeva algebra, ϑ njena Cartanova involucija i $\mathfrak{h}_0$ maksimalno kompaktna $\vartheta-$invarijantna Cartanova podalgebra od $\mathfrak{g}_0$. Tada postoji skup pozitivnih korijena R_+ sistema korijena $R = R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ takav da Voganov dijagram pridružen trojki $(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{h}_0, R_+)$ ima najviše jedan crni vrh. Nadalje, pretpostavimo da nema kompleksnih korijena* (*tj. automorfizam Dynkinovog dijagrama uključen u Voganov dijagram je identiteta*) *i da postoje imaginarni nekompaktni korijeni* (*tj. Liejeva algebra $\mathfrak{g}_0$ nije ni rascjepiva ni kompaktna*)*. Označimo sa $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell\}$ bazu od R koja odgovara izabranom pozitivnom skupu korijena R_+ i neka je $\{\omega_1, \ldots, \omega_\ell\}$ njoj biortogonalna baza* (*tj. skup fundamentalnih težina*)*. Izbor R_+ se može provesti tako da ako je α_i jedini crni vrh, onda vrijedi $(\omega_i - \omega_j \,|\omega_j\,) \leq 0$ za svaki $j \neq i$.*

Sada ćemo iskoristiti Borel–de Siebenthalov teorem kako bismo dobili potpunu klasifikaciju nekompleksnih prostih realnih Liejevih algebri. Postupak će biti sljedeći: Svakom apstraktnom Voganovom dijagramu s povezanim Dynkinovim dijagramom koji nije odbačen eliminacijskim uvjetima u Borel–de Siebenthalovom teoremu možemo prema teoremu 5.2.2. pridružiti nekompleksnu prostu realnu Liejevu algebru. Ukoliko je Dynkinov dijagram pridružen klasičnoj kompleksnoj prostoj Liejevoj algebri (tj. ako je tipa A_ℓ, B_ℓ, C_ℓ ili D_ℓ) konstruirat ćemo konkretnu realnu prostu Liejevu algebru matrica koja ima upravo taj Voganov dijagram i zatim ustanoviti sve izomorfizme među tako dobivenim algebrama. Ako je Dynkinov dijagram pridružen izuzetnoj kompleksnoj prostoj Liejevoj algebri (tj. ako je tipa E_6, E_7, E_8, F_4 ili G_2) nakon primjene elimininacijskih uvjeta svaku dobivenu realnu prostu Liejevu algebru ćemo imenovati i provjeriti neizomorfnost usporedbom podalgebri $\mathfrak{k}_0$, a u jednom slučaju utvrđiti izmorfnost unatoč elimininacije putem Borel–de Siebenthalovog teorema.

Budući da je po pretpostavci $\mathfrak{h}_0$ maksimalno kompaktna Cartanova podalgebra, nema realnih korijena. Pretpostavimo najprije da nema kompleksnih korijena, tj. da je automorfizam Dynkinovog dijagrama trivijalan. Tada su svi korijeni imaginarni. Ako nijedan vrh nije crn, tj. ako su svi korijeni kompaktni, radi se o kompaktnoj formi. U slučaju klasičnog Dynkinovog dijagrama, kompaktne realne forme su Liejeve algebre matrica $\mathfrak{su}(\ell+1)$ (tip A_ℓ), $\mathfrak{so}(2\ell+1)$ (tip B_ℓ), $\mathfrak{sp}(2\ell)$ (tip C_ℓ) i $\mathfrak{so}(2\ell)$ (tip D_ℓ).

Pretpostavimo sada da ima nekompaktnih imaginarnih korijena. U skladu s Borel–de Siebenthalovim eliminacijskim pravilom, možemo pretpostaviti da je R_+ izabran tako da je točno jedan korijen u pripadnoj bazi nekompaktan, tj. da je jedan vrh u Voganovom dijagramu crn.

Promatrat ćemo najprije klasične Dynkinove dijagrame. U tom slučaju ne će nam biti potrebno drugo eliminacijsko pravilo, nego ćemo direktnom provjerom ustanoviti da konkretne matrične realne proste Liejeve algebre odgovaraju svakom izboru crnog vrha:



Pri tome koristimo uobičajene oznake za realne matrične Liejeve algebre:

$$\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C}) = \{X \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C});\ Tr\,X = 0\} \qquad \text{za } n \geq 2,$$

$$\mathfrak{sl}(n,\mathbb{R}) = \{X \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R});\ Tr\,X = 0\} \qquad \text{za } n \geq 2,$$

$$\mathfrak{sl}(n,\mathbb{H}) = \{X \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{H});\ \mathrm{Re}(Tr\,X) = 0\} \qquad \text{za } n \geq 1,$$

$$\mathfrak{so}(n,\mathbb{C}) = \{X \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C});\ X + X^T = 0\} \qquad \text{za } n \geq 3,$$

$$\mathfrak{sp}(n,\mathbb{C}) = \{X \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C});\ X^T J_n + J_n X = 0\} \qquad \text{za } n \geq 1,$$

$$\mathfrak{su}(p,q) = \{X \in \mathfrak{sl}(p+q,\mathbb{C});\ X^* I_{p,q} + I_{p,q} X = 0\} \qquad \text{za } p+q \geq 2,$$

$$\mathfrak{so}(p,q) = \{X \in \mathfrak{gl}(p+q,\mathbb{R});\ X^T I_{p,q} + I_{p,q} X = 0\} \qquad \text{za } p+q \geq 3,$$

$$\mathfrak{sp}(p,q) = \{X \in \mathfrak{gl}(p+q,\mathbb{H});\ X^* I_{p,q} + I_{p,q} X = 0\} \qquad \text{za } p+q \geq 1,$$

$$\mathfrak{sp}(n,\mathbb{R}) = \{X \in \mathfrak{gl}(2n,\mathbb{R});\ X^t J_n + J_n X = 0\} \qquad \text{za } n \geq 1,$$

$$\mathfrak{so}^*(2n) = \{X \in \mathfrak{su}(n,n);\ X^T K_n + K_n X = 0\} \qquad \text{za } n \geq 2,$$

gdje su $I_{p,q}$, J_n i K_n sljedeće matrice:

$$I_{p,q} = \begin{bmatrix} I_p & 0 \\ \\ 0 & -I_q \end{bmatrix}, \qquad J_n = \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ \\ -I_n & 0 \end{bmatrix}, \qquad K_n = I_{n,n} J_n = \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ \\ I_n & 0 \end{bmatrix}.$$

Provjera za sve slučajeve je neposredna. Za slučaj A_ℓ radi se upravo o slučajevima iz primjera **(1)** u odjeljku 5.2. na str. 191 uz $p + q = \ell + 1$.

U slučaju B_ℓ neka je $p + q = 2\ell + 1$ i neka je p paran. Liejeva algebra $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{so}(p, q)$ sastoji se od svih realnih matrica oblika

$$\begin{bmatrix} a & b \\ \\ b^T & c \end{bmatrix}, \qquad a \in \mathfrak{gl}(p, \mathbb{R}), \quad \mathfrak{gl}(q, \mathbb{R}), \quad c \in M_{p,q}(\mathbb{R}), \quad a^T = -a, \quad c^T = -c,$$

a kompleksifikacija joj je $\mathfrak{so}(2\ell + 1, \mathbb{C})$. Za $\mathfrak{h}_0$ izaberimo skup svih blokdijagonalnih matrica čijih je prvih ℓ blokova formata 2×2 oblika $\begin{bmatrix} 0 & c \\ -c & 0 \end{bmatrix}$, $c \in \mathbb{R}$, a posljednji je blok 0 formata 1×1. Definiramo sada linearne funkcionale $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_\ell$ na $\mathfrak{h} = (\mathfrak{h}_0)^{\mathbb{C}}$ ovako

$$\varepsilon_j \left(diag \left(\begin{bmatrix} 0 & c_1 \\ -c_1 & 0 \end{bmatrix}, \ldots, \begin{bmatrix} 0 & c_\ell \\ -c_\ell & 0 \end{bmatrix}, 0 \right) \right) = c_j.$$

Tada je

$$R = R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) = \{\pm\varepsilon_i \pm \varepsilon_j;\ i \neq j\} \cup \{\pm\varepsilon_i\}.$$

Izaberimo

$$R_+ = \{\varepsilon_i + \varepsilon_j;\ 1 \leq i < j \leq \ell\} \cup \{\varepsilon_i - \varepsilon_j;\ 1 \leq i < j \leq \ell\} \cup \{e_i;\ 1 \leq i \leq \ell\}.$$

Tada se pokazuje da je pripadni Voganov dijagram upravo Dynkinov dijagram B_ℓ u kome je jedan vrh crn i to onaj na mjestu $\frac{p}{2}$.

U slučaju C_ℓ provjera za prvih $\ell - 1$ vrhova je potpuno analogna onoj za A_ℓ. Voganov dijagram u kome je posljednji vrh crn (taj odgovara duljem korijenu) dobiva se ovako. Promatrajmo Liejevu algebru $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{su}(\ell, \ell) \cap \mathfrak{sp}(\ell, \mathbb{C})$. To je realna forma od $\mathfrak{sp}(\ell, \mathbb{C})$ koja je konjugirana realnoj formi $\mathfrak{sp}(\ell, \mathbb{R})$. Doista, lako se vidi da je $\mathfrak{sp}(n, \mathbb{R}) = g\mathfrak{g}_0 g^{-1}$, gdje je $g = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} I_\ell & iI_\ell \\ iI_\ell & I_\ell \end{bmatrix}$. Sada izabiremo

$$\mathfrak{h}_0 = \{diag(ic_1, \ldots, ic_\ell, -ic_1, \ldots, -ic_\ell);\ c_1, \ldots, c_\ell \in \mathbb{R}\}.$$

Definiramo linearne funkcionale $\eta_1, \ldots, \eta_\ell$ na $\mathfrak{h} = (\mathfrak{h}_0)^{\mathbb{C}}$ ovako

$$\eta_j(diag(ic_1, \ldots, ic_\ell, -ic_1, \ldots, -ic_\ell)) = c_j.$$

Tada je

$$R = R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) = \{\pm\eta_i \pm \eta_j;\ i \neq j\} \cup \{\pm 2\eta_i\}.$$

Izaberimo

$$R_+ = \{\eta_i + \eta_j;\ 1 \leq i < j \leq \ell\} \cup \{\eta_i - \eta_j;\ 1 \leq i < j \leq \ell\} \cup \{2\eta_i;\ 1 \leq i \leq \ell\}.$$

Pripadna baza je $\{\eta_1 - \eta_2, \ldots, \eta_{\ell-1} - \eta_\ell, 2\eta_\ell\}$. Svi su korijeni u R imaginarni. Kompaktni su $\eta_i - \eta_j$, a nekompaktni $\pm(\eta_i + \eta_j)$ i $\pm 2\eta_i$. Prema tome, prvih $\ell - 1$ vrhova u Voganovom dijagramu (tj. $\eta_1 - \eta_2, \ldots, \eta_{\ell-1} - \eta_\ell$) je bijelo, a posljednji (tj. $2\eta_\ell$) je crn.

Za D_ℓ analiza za prvih $\ell - 2$ vrhova koristi realnu formu $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{so}(p,q)$ od $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(2\ell, \mathbb{C})$, gdje su p i q parni i $p+q = 2\ell$, i potpuno je analogna kao i u slučaju B_ℓ. Za bilo koji od posljednja dva vrha uzmimo $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{so}^*(2\ell)$. Tada je ponovo $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(2\ell, \mathbb{C})$. Sada za $\mathfrak{h}_0$ izabiremo istu podalgebru kao i u slučaju C_ℓ :

$$\mathfrak{h}_0 = \{diag(ic_1, \ldots, ic_\ell, -ic_1, \ldots, -ic_\ell);\ c_1, \ldots, c_\ell \in \mathbb{R}\}.$$

Definiramo linearne funkcionale $\eta_1, \ldots, \eta_\ell$ na $\mathfrak{h} = (\mathfrak{h}_0)^{\mathbb{C}}$ kao i u slučaju C_ℓ :

$$\eta_j(diag(ic_1, \ldots, ic_\ell, -ic_1, \ldots, -ic_\ell)) = c_j.$$

Sada je

$$R = R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) = \{\pm\eta_i \pm \eta_j;\ i \neq j\}.$$

Izaberimo

$$R_+ = \{\eta_i + \eta_j;\ 1 \leq i < j \leq \ell\} \cup \{\eta_i - \eta_j;\ 1 \leq i < j \leq \ell\}.$$

Pripadna baza sistema korijena R je sada $\{\eta_1 - \eta_2, \ldots, \eta_{\ell-2} - \eta_{\ell-1}, \eta_{\ell-1} - \eta_\ell, \eta_{\ell-1} + \eta_\ell\}$. Ponovo su svi korijeni u R imaginarni, kompaktni su $\eta_i - \eta_j$, a nekompaktni $\pm(\eta_i + \eta_j$. Dakle, u bazi je prvih $\ell - 1$ korijena $\eta_i - \eta_{i+1}$ kompaktno, a posljednji $\eta_{\ell-1} + \eta_\ell$ je nekompaktan. Dakle, Voganov dijagram je upravo bilo koji od ona dva preostala.

Promatrajmo sada izuzetne povezane Dynkinove dijagrame. Sada će nam trebati i drugo eliminacijsko pravilo iz Borel$-$de Siebenthalovog teorema: možemo odbaciti one slučajeve kod kojih je i indeks jedinog nekompaktnog korijena u bazi, a postoji indeks j takav da je $(\omega_i - \omega_j|\omega_j) > 0$. Opisat ćemo sada način korištenja tog kriterija u slučaju kad svi korijeni imaju istu duljinu, dakle u slučajevima E_6, E_7 i E_8.. Tada možemo pretpostaviti da je skalarni produkt tako normiran da su svi korijeni duljine $\sqrt{2}$. Neka je $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell\}$ baza pridružena odabranom skupu pozitivnih korijena R_+ sistema korijena $R = R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ odabrana tako da je točno jedan korijen iz baze nekompaktan, tj. samo jedan od vrhova u Voganovom dijagramu je crn. Neka je $\{\omega_1, \ldots, \omega_\ell\}$ pripadni skup fundamentalnih težina, tj. biortogonalna baza realnog unitarnog prostora $\mathfrak{h}^*(\mathbb{R})$ u odnosu na bazu $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell\}$. Tada možemo pisati

$$\alpha_i = \sum_{k=1}^{\ell} d_{ik}\omega_k, \quad 1 \leq i \leq \ell, \quad \text{gdje su} \quad d_{ik} = (\alpha_i|\, \alpha_k)\,.$$

Nadalje, ako je $[c_{pj}]$ inverzna matrica matrice $[d_{ik}]$, onda je

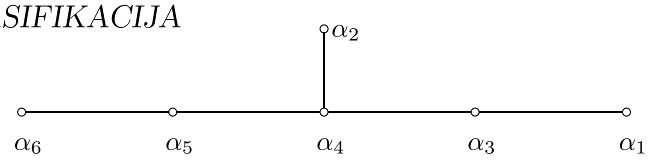
$$\omega_j = \sum_{p=1}^{\ell} c_{pj}\alpha_p, \qquad 1 \leq j \leq \ell.$$

Brojevi koji nas zanimaju su $(\omega_j|\, \omega_r) = c_{rj}$, $1 \leq r, j \leq \ell$.

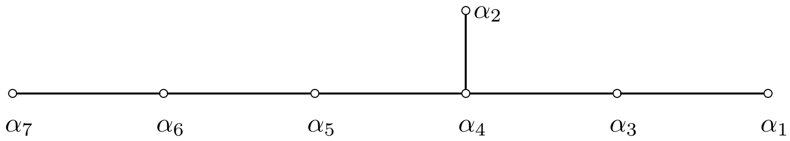
Kako svi korijeni imaju duljinu $\sqrt{2}$, tj. $\|\alpha_i\|^2 = 2\ \forall i$, $[d_{ik}]$ je upravo Cartanova matrica, dakle, koeficijenti c_{rj} dobivaju se invertiranjem Cartanove matrice. Ukoliko postoje dvije duljine korijena, tj. u slučajevima F_4 mi G_2, matrica $[d_{ik}]$ je jednostavna modifikacija Cartanove matrice, no mi ćemo u ta dva slučaja direktno izračunati međusobne skalarne produkte fundamentalnih težina.

Razmotrimo najprije slučajeve E_ℓ, $\ell = 6, 7, 8$. Korijene u bazi sistema korijena numerirat ćemo ovako:

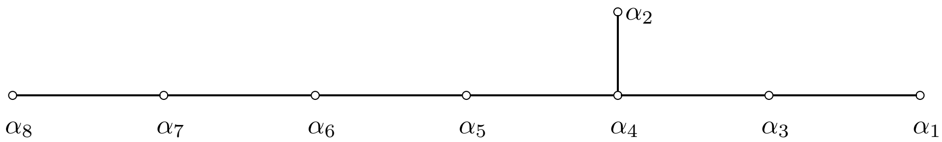
E_6 :



E_7 :



E_8 :



Cartanova matrica $[d_{ik}]$ i njoj inverzna matrica $[c_{rj}]$ za E_6 su:

$$[d_{ik}] = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad [c_{rj}] = [(\omega_j\,|\omega_r\,)] = \begin{bmatrix} \frac{4}{3} & 1 & \frac{5}{3} & 2 & \frac{4}{3} & \frac{2}{3} \\ 1 & 2 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ \frac{5}{3} & 2 & \frac{10}{3} & 4 & \frac{8}{3} & \frac{4}{3} \\ 2 & 3 & 4 & 6 & 4 & 2 \\ \frac{4}{3} & 2 & \frac{8}{3} & 4 & \frac{10}{3} & \frac{5}{3} \\ \frac{2}{3} & 1 & \frac{4}{3} & 2 & \frac{5}{3} & \frac{4}{3} \end{bmatrix}.$$

Dakle, skalarni produkti fundamentalnih težina su

$$(\omega_1|\omega_1) = \frac{4}{3},\ (\omega_1|\omega_2) = 1,\ (\omega_1|\omega_3) = \frac{5}{3},\ (\omega_1|\omega_4) = 2,\ (\omega_1|\omega_5) = \frac{4}{3},\ (\omega_1|\omega_6) = \frac{2}{3}, (\omega_2|\omega_2) = 2,$$

$$(\omega_2|\omega_3) = 2,\ (\omega_2|\omega_4) = 3,\ (\omega_2|\omega_5) = 2,\ (\omega_2|\omega_6) = 1,\ (\omega_3|\omega_3) = \frac{10}{3},\ (\omega_3|\omega_4) = 4, (\omega_3|\omega_5) = \frac{8}{3},$$

$$(\omega_3|\omega_6) = \frac{4}{3},\ (\omega_4|\omega_4) = 6,\ (\omega_4|\omega_5) = 4,\ (\omega_4|\omega_6) = 2,\ (\omega_5|\omega_5) = \frac{10}{3},\ (\omega_5|\omega_6) = \frac{5}{3}, (\omega_6|\omega_6) = \frac{4}{3}.$$

Analogno, za E_7 imamo:

$$[d_{ik}] = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad [c_{rj}] = [(\omega_j\,|\omega_r\,)] = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & \frac{7}{2} & 4 & 6 & \frac{9}{2} & 3 & \frac{3}{2} \\ 3 & 4 & 6 & 8 & 6 & 4 & 2 \\ 4 & 6 & 8 & 12 & 9 & 6 & 3 \\ 3 & \frac{9}{2} & 6 & 9 & \frac{15}{2} & 5 & \frac{5}{2} \\ 2 & 3 & 4 & 6 & 5 & 4 & 2 \\ 1 & \frac{3}{2} & 2 & 3 & \frac{5}{2} & 2 & \frac{3}{2} \end{bmatrix},$$

dakle,

$$(\omega_1|\omega_1) = 2,\ (\omega_1|\omega_2) = 2,\ (\omega_1|\omega_3) = 3,\ (\omega_1|\omega_4) = 4,\ (\omega_1|\omega_5) = 3,\ (\omega_1|\omega_6) = 2,\ (\omega_1|\omega_7) = 1,$$

$$(\omega_2|\omega_2) = \frac{7}{2},\ (\omega_2|\omega_3) = 4,\ (\omega_2|\omega_4) = 6,\ (\omega_2|\omega_5) = \frac{9}{2},\ (\omega_2|\omega_6) = 3,\ (\omega_2|\omega_7) = \frac{3}{2},\ (\omega_3|\omega_3) = 6,$$

$$(\omega_3|\omega_4) = 8,\ (\omega_3|\omega_5) = 6,\ (\omega_3|\omega_6) = 4,\ (\omega_3|\omega_7) = 2,\ (\omega_4|\omega_4) = 12,\ (\omega_4|\omega_5) = 9,\ (\omega_4|\omega_6) = 6,$$

$$(\omega_4|\omega_7) = 3,\ (\omega_5|\omega_5) = \frac{15}{2},\ (\omega_5|\omega_6) = 5,\ (\omega_5|\omega_7) = \frac{5}{2},\ (\omega_6|\omega_6) = 4,\ (\omega_6|\omega_7) = 2,\ (\omega_7|\omega_7) = \frac{3}{2}.$$

Rezultati za E_8 su:

$$[d_{ik}] = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \ [(\omega_j\,|\omega_r\,)] = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 7 & 10 & 8 & 6 & 4 & 2 \\ 5 & 8 & 10 & 15 & 12 & 9 & 6 & 3 \\ 7 & 10 & 14 & 20 & 16 & 12 & 8 & 4 \\ 10 & 15 & 20 & 30 & 24 & 18 & 12 & 6 \\ 8 & 12 & 16 & 24 & 20 & 15 & 10 & 5 \\ 6 & 9 & 12 & 18 & 15 & 12 & 8 & 4 \\ 4 & 6 & 8 & 12 & 10 & 8 & 6 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 \end{bmatrix},$$

odnosno,

$$(\omega_1|\omega_1) = 4,\ (\omega_1|\omega_2) = 5,\ (\omega_1|\omega_3) = 7,\ (\omega_1|\omega_4) = 10,\ (\omega_1|\omega_5) = 8,\ (\omega_1|\omega_6) = 6,\ (\omega_1|\omega_7) = 4,\ (\omega_1|\omega_8) = 2,$$

$$(\omega_2|\omega_2) = 8,\ (\omega_2|\omega_3) = 10,\ (\omega_2|\omega_4) = 15,\ (\omega_2|\omega_5) = 12,\ (\omega_2|\omega_6) = 9,\ (\omega_2|\omega_7) = 6,\ (\omega_2|\omega_8) = 3,$$

$$(\omega_3|\omega_3) = 14,\ (\omega_3|\omega_4) = 20,\ (\omega_3|\omega_5) = 16,\ (\omega_3|\omega_6) = 12,\ (\omega_3|\omega_7) = 8,\ (\omega_3|\omega_8) = 4,\ (\omega_4|\omega_4) = 30,$$

$$(\omega_4|\omega_5) = 24,\ (\omega_4|\omega_6) = 18,\ (\omega_4|\omega_7) = 12,\ (\omega_4|\omega_8) = 6,\ (\omega_5|\omega_5) = 20,\ (\omega_5|\omega_6) = 15,\ (\omega_5|\omega_7) = 10,$$

$$(\omega_5|\omega_8) = 5,\ (\omega_6|\omega_6) = 12,\ (\omega_6|\omega_7) = 8,\ (\omega_6|\omega_8) = 4,\ (\omega_7|\omega_7) = 6,\ (\omega_7|\omega_8) = 3,\ (\omega_8|\omega_8) = 2.$$

Sada ćemo temeljem drugog eliminacijskog pravila u Borel−de Siebenthalovom teoremu isključiti pojedine vrhove kao kandidate za crni vrh u Voganovom dijagramu.

U slučaju E_6 to su svi unutarnji vrhovi α_3, α_4 i α_5. Razlozi za isključivanje su sljedeći:

$$\alpha_3 :\ (\omega_3 - \omega_1|\omega_1) = (\omega_3|\omega_1) - (\omega_1|\omega_1) = \tfrac{5}{3} - \tfrac{4}{3} = \tfrac{1}{3} > 0,$$

$$\alpha_4 :\ (\omega_4 - \omega_1|\omega_1) = (\omega_4|\omega_1) - (\omega_1|\omega_1) = 2 - \tfrac{4}{3} = \tfrac{2}{3} > 0,$$

$$\alpha_5 :\ (\omega_5 - \omega_6|\omega_6) = (\omega_5|\omega_6) - (\omega_6|\omega_6) = \tfrac{5}{3} - \tfrac{4}{3} = \tfrac{1}{3} > 0.$$

U slučaju E_7 isključujemo također sve unutarnje vrhove α_3, α_4, α_5 i α_6 :

$$\alpha_3 :\ (\omega_3 - \omega_1|\omega_1) = (\omega_3|\omega_1) - (\omega_1|\omega_1) = 3 - 2 = 1 > 0,$$

$$\alpha_4 :\ (\omega_4 - \omega_1|\omega_1) = (\omega_4|\omega_1) - (\omega_1|\omega_1) = 4 - 2 = 2 > 0,$$

$$\alpha_5 :\ (\omega_5 - \omega_1|\omega_1) = (\omega_5|\omega_1) - (\omega_1|\omega_1) = 3 - 2 = 1 > 0,$$

$$\alpha_6 :\ (\omega_6 - \omega_7|\omega_7) = (\omega_6|\omega_7) - (\omega_7|\omega_7) = 2 - \tfrac{3}{2} = \tfrac{1}{2} > 0.$$

U slučaju E_8 pored svih unutarnjih vrhova α_3, α_4, α_5, α_6 i α_7 isključuje se i gornji rubni vrh α_2 :

$$\alpha_2 :\ (\omega_2 - \omega_1|\omega_1) = (\omega_2|\omega_1) - (\omega_1|\omega_1) = 5 - 4 = 1 > 0,$$

$$\alpha_3 :\ (\omega_3 - \omega_1|\omega_1) = (\omega_3|\omega_1) - (\omega_1|\omega_1) = 7 - 4 = 3 > 0,$$

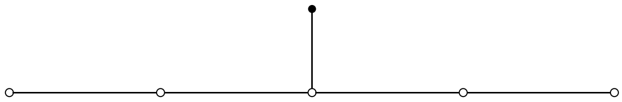
$$\alpha_4 :\ (\omega_4 - \omega_1|\omega_1) = (\omega_4|\omega_1) - (\omega_1|\omega_1) = 10 - 4 = 6 > 0,$$

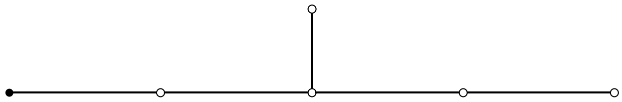
$$\alpha_5 :\ (\omega_5 - \omega_1|\omega_1) = (\omega_5|\omega_1) - (\omega_1|\omega_1) = 8 - 4 = 4 > 0,$$

$$\alpha_6 :\ (\omega_6 - \omega_1|\omega_1) = (\omega_6|\omega_1) - (\omega_1|\omega_1) = 6 - 4 = 2 > 0,$$

$$\alpha_7 :\ (\omega_7 - \omega_8|\omega_8) = (\omega_7|\omega_8) - (\omega_8|\omega_8) = 3 - 2 = 1 > 0.$$

Napokon, u slučaju E_6 dva Voganova dijagrama kod kojih su jedini crni vrhovi α_1 i α_6 su međusobno simetrična, dakle, pripadaju izomorfnim Liejevim algebrama. Sve u svemu, od tipova E_ℓ ostaju sljedeći mogući Voganovi dijagrami, uz koje navodimo i pripadne Liejeve podalgebre $\mathfrak{k}_0$, koje pokazuju da su te proste realne Liejeve algebre međusobno neizomorfne:

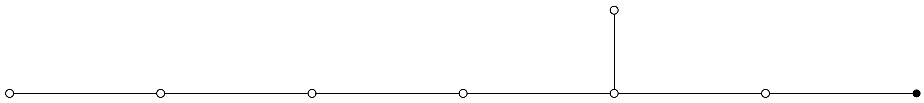
E_{II} :  $\mathfrak{k}_0 = \mathfrak{su}(6) \oplus \mathfrak{su}(2)$

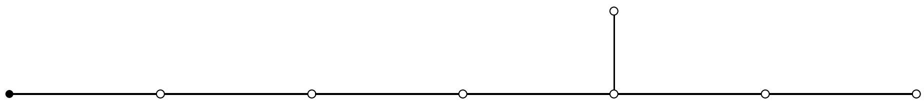
E_{III} :  $\mathfrak{k}_0 = \mathfrak{so}(10) \oplus \mathbb{R}$

E_V :  $\mathfrak{k}_0 = \mathfrak{su}(8)$

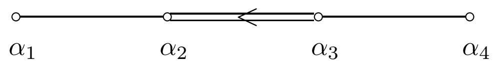
E_{VI} :  $\mathfrak{k}_0 = \mathfrak{so}(12) \oplus \mathfrak{su}(2)$

E_{VII} :  $\mathfrak{k}_0 = \mathfrak{e}_6 \oplus \mathbb{R}$

E_{VIII} :  $\mathfrak{k}_0 = \mathfrak{so}(16)$

E_{IX} :  $\mathfrak{k}_0 = \mathfrak{e}_7 \oplus \mathfrak{su}(2)$

Razmotrimo sada Dynkinov dijagram F_4. Korijene u bazi numeriramo ovako:



Tada su fundamentalne težine

$$\omega_1 = 2\alpha_1 + 3a_2 + 2\alpha_3 + \alpha_4, \qquad \omega_2 = 3\alpha_1 + 6\alpha_2 + 4\alpha_3 + 2\alpha_4,$$

$$\omega_3 = 4\alpha_1 + 8\alpha_2 + 6\alpha_3 + 3\alpha_4, \qquad \omega_4 = 2\alpha_1 + 4\alpha_2 + 3\alpha_3 + 2\alpha_4.$$

Ako skalarni produkt na prostoru $\mathfrak{h}^*(\mathbb{R})$ normiramo tako da vrijedi $\|\alpha_1\|^2 = \|\alpha_2\|^2 = 1$ i $\|\alpha_3\|^2 = \|\alpha_4\|^2 = 2$, međusobni skalarni produkti fundamentalnih težina su:

$$(\omega_1|\omega_1) = 1,\ (\omega_1|\omega_2) = \frac{3}{2},\ (\omega_1|\omega_3) = 2,\ (\omega_1|\omega_4) = 1,\ (\omega_2|\omega_2) = 3,$$

$$(\omega_2|\omega_3) = 4,\ (\omega_2|\omega_4) = 2,\ (\omega_3|\omega_3) = 6,\ (\omega_3|\omega_4) = 3,\ (\omega_4|\omega_4) = 2.$$

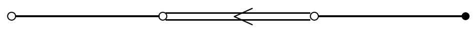
Odatle slijedi da u Voganovom dijagramu kao kandidate za jedini crni vrh možemo isključiti unutarnje vrhove α_2 i α_3 :

$\alpha_2 :\ (\omega_2 - \omega_1|\omega_1) = (\omega_2|\omega_1) - (\omega_1|\omega_1) = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2} > 0,$

$\alpha_3 :\ (\omega_3 - \omega_1|\omega_1) = (\omega_3|\omega_1) - (\omega_1|\omega_1) = 2 - 1 = 1 > 0.$

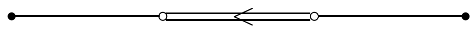
Ostaju sljedeće dvije međusobno neizomorfne mogućnosti:

F_I :



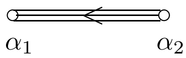
$\mathfrak{k}_0 = \mathfrak{sp}(3) \oplus \mathfrak{su}(2)$

F_{II} :



$\mathfrak{k}_0 = \mathfrak{so}(9)$

Napokon, razmotrimo G_2 :



Sada su fundamentalne težine $\omega_1 = 2\alpha_1 + \alpha_2$ i $\omega_2 = 3\alpha_1 + 2\alpha_2$ i ako skalarni produkt na prostoru $\mathfrak{h}^*(\mathbb{R})$ normiramo tako da vrijedi $\|\alpha_1\|^2 = 2$ i $\|\alpha_2\|^2 = 6$, onda su međusobni skalarni produkti fundamentalnih težina

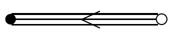
$$(\omega_1|\omega_1) = 2, \qquad (\omega_1|\omega_2) = 3, \qquad (\omega_2|\omega_2) = 6.$$

Odatle nalazimo da α_2 možemo isključiti kao crni vrh u Voganovom dijagramu:

$$(\omega_2 - \omega_1|\omega_1) = (\omega_2|\omega_1) - (\omega_1|\omega_1) = 3 - 2 = 1 > 0$$

i u ovom slučaju dobivamo samo jednu mogućnost za Voganov dijagram:

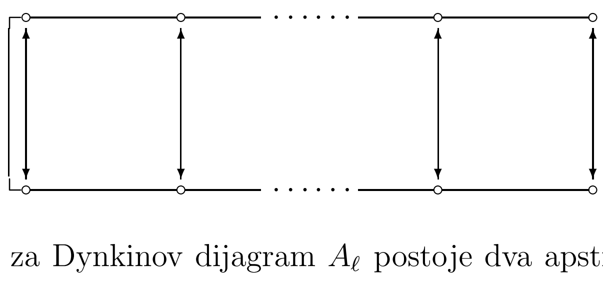
G :



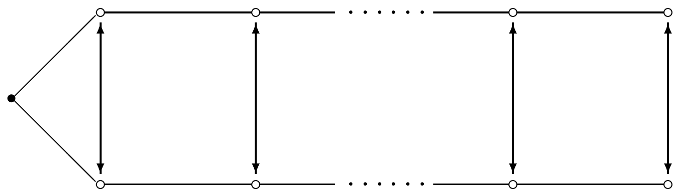
$\mathfrak{k}_0 = \mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(2)$

Razmotrimo sada slučajeve kad postoje kompleksni korijeni, tj. kad je automorfizam Dynkinovog dijagrama netrivijalan, dakle, reda 2. Već smo napomenuli da je to moguće samo za Dynkinove dijagrame A_ℓ, D_ℓ i E_6.

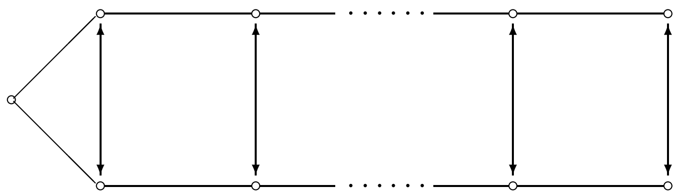
Za tip A_ℓ razlikujemo parne vrijednosti ℓ od neparnih. Ako je ℓ paran, postoji samo jedan apstraktni Voganov dijagram:



Ukoliko je ℓ neparan, za Dynkinov dijagram A_ℓ postoje dva apstraktna Voganova dijagrama sa strelicama:



i



Prvi od njih u skladu s razmatranjima u primjeru **(2)** u odjeljku 5.2. (str. 192) je Voganov dijagram realne proste Liejeve algebre $\mathfrak{sl}(\ell+1,\mathbb{R})$. Drugi je Voganov dijagram realne proste Liejeve algebre $\mathfrak{sl}\left(\frac{1}{2}(\ell+1),\mathbb{H}\right)$. Da se u to uvjerimo, izaberimo

$$\mathfrak{h}_0=\left\{diag\left(x_1+iy_1,\dots,x_{\frac{1}{2}(\ell+1)}+iy_{\frac{1}{2}(\ell+1)}\right);\ x_j,y_j\in\mathbb{R},\ x_1+\cdots+x_{\frac{1}{2}(\ell+1)}=0\right\}.$$

Definiramo sada linearne funkcionale e_j,f_j, $1\leq j\leq\frac{1}{2}(\ell+1)$, na $\mathfrak{h}_0$ ovako:

$$e_j\left(diag\left(x_1+iy_1,\dots,x_{\frac{1}{2}(\ell+1)}+iy_{\frac{1}{2}(\ell+1)}\right)\right)=iy_j,$$

$$f_j\left(diag\left(x_1+iy_1,\dots,x_{\frac{1}{2}(\ell+1)}+iy_{\frac{1}{2}(\ell+1)}\right)\right)=x_j.$$

Tada je formalno kao i u primjeru **(2)** u odjeljku 8.2.

$$R=R(\mathfrak{g},\mathfrak{h})=\{\pm e_j\pm e_k\pm(f_j-f_k;\ 1\leq j,k\leq\frac{1}{2}(\ell+1),\ j\neq k\}\cup\{\pm 2e_j;\ 1\leq j\leq\frac{1}{2}(\ell+1)\}.$$

U prvoj skupini su kompleksni korijeni, a u drugoj imaginarni i svi su imaginarni korijeni kompaktni.

Za tip D_ℓ analizirat ćemo Liejeve algebre $\mathfrak{so}(p,q)$, pri čemu su p i q neparni i $p+q=2\ell$. Imamo

$$\mathfrak{so}(p,q)=\left\{\begin{bmatrix} a & b \\ b^T & c\end{bmatrix};\ a\in\mathfrak{gl}(p,\mathbb{R}),\ c\in\mathfrak{gl}(q,\mathbb{R}),\ b\in M_{pq}(\mathbb{R}),\ a^T=-a,\ c^T=-c\right\}.$$

Za $\mathfrak{h}_0$ izabiremo algebru svih blokdijagonalnih matrica s blokovima formata 2×2. Prvih $\frac{1}{2}(p-1)$ i posljednjih $\frac{1}{2}(q-1)$ blokova su $\mathbb{R}J$, a preostali između tih dvaju nizova je blok $\mathbb{R}K$. Pri tome je

$$J=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0\end{bmatrix}\quad \text{i}\quad K=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0\end{bmatrix}.$$

Blokovi $\mathbb{R}J$ razapinju $\mathfrak{t}_0=\mathfrak{h}_0\cap\mathfrak{k}_0$, a blok $\mathbb{R}K$ daje $\mathfrak{a}_0=\mathfrak{h}_0\cap\mathfrak{p}_0$. Definirajmo sada linearne funkcionale ε_j na $\mathfrak{h}_0$ na sljedeći način: ako je blokdijagonalna matrica $X\in\mathfrak{h}_0$ dana sa

$$X=diag\left(x_1J,\dots,x_{\frac{1}{2}(p-1)}J,zK,y_1J,\dots,y_{\frac{1}{2}(q-1)}J\right)$$

onda je

$$\varepsilon_j(X) = x_j \quad \text{za } 1 \le j \le \frac{1}{2}(p-1), \quad \varepsilon_{\frac{1}{2}(p+1)}(X) = z, \quad \varepsilon_{j+\frac{1}{2}(p+1)}(X) = y_j \quad \text{za } 1 \le j \le \frac{1}{2}(q-1).$$

Tada je

$$R = R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) = \{\pm\varepsilon_i \pm \varepsilon_j;\ i \neq j\}.$$

Ako je jedan od indeksa i i j jednak $\frac{1}{2}(p+1)$, korijen $\pm\varepsilon_i \pm \varepsilon_j$ je kompleksan, a svi su ostali korijeni imaginarni.

Pretpostavimo da je $q = 1$. Izabiremo leksikografski uređaj na $\mathfrak{h}^*(\mathbb{R})$ u odnosu na uređenu bazu u $\mathfrak{h}(\mathbb{R}) = i\mathfrak{t}_0 \oplus \mathfrak{a}_0$ sastavljenu od baze u $i\mathfrak{t}_0$, a zatim od baze u $\mathfrak{a}_0$. Pripadna baza sistema korijena je tada

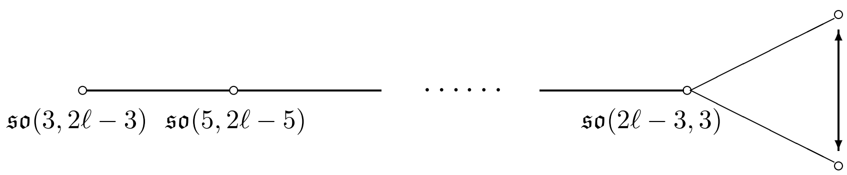
$$\{\varepsilon_1 - \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{\ell-2} - \varepsilon_{\ell-1}, \varepsilon_{\ell-1} - \varepsilon_\ell, \varepsilon_{\ell-1} + \varepsilon_\ell\}.$$

Posljednja dva su korijena kompleksna, a ostali su kompaktni imaginarni. Slična je situacija i za $p = 1$, samo treba obrnuti uređaj. To pokazuje da Voganov dijagram, u kome su svi vrhovi bijeli odgovara realnoj prostoj Liejevoj algebri $\mathfrak{so}(1, 2\ell - 1) \cong \mathfrak{so}(2\ell - 1, q)$.

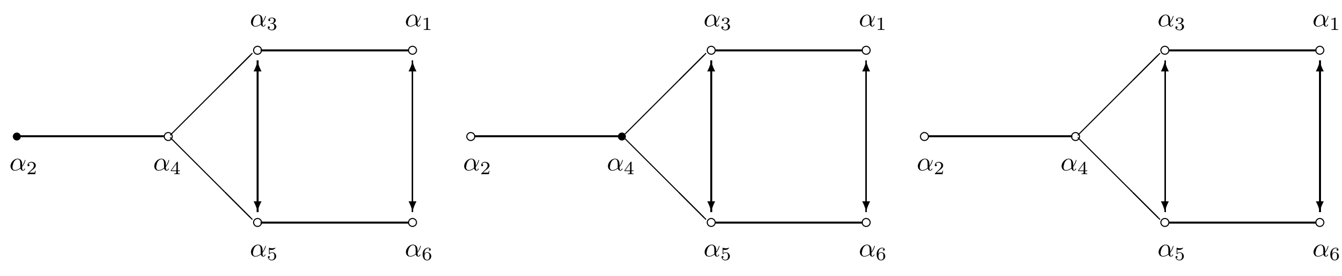
Pretpostavimo sada da su $p \ge 3$ i $q \ge 3$. Sada izabiremo uređaj kojem odgovara sljedeća baza sistema korijena:

$$\{\varepsilon_1 - \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{m-2} - \varepsilon_{m-1}, \varepsilon_{m-1} - \varepsilon_{m+1}, \varepsilon_{m+1} - \varepsilon_{m+2}, \dots, \varepsilon_{\ell-1} - \varepsilon_\ell, \varepsilon_\ell - \varepsilon_m, \varepsilon_\ell + \varepsilon_m\},$$

gdje smo stavili $m = \frac{1}{2}(p + 1)$. Sada su posljednja dva korijena kompleksna, ostali su imaginarni, među kojima je samo $\varepsilon_{m-1} - \varepsilon_{m+1}$ nekompaktan. To pokazuje da Liejeve algebre $\mathfrak{so}(p, q)$ daju sve mogućnosti za Voganov dijagram koji ima najviše jedan crni vrh i automorfizam Dynkinovog dijagrama reda 2:

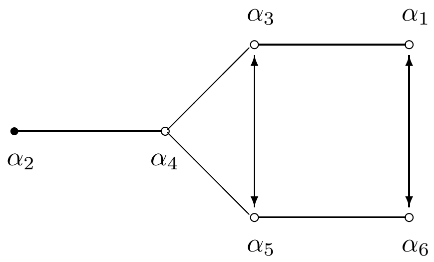


Razmotrimo napokon mogućnosti za Voganov dijagram s Dynkinovim dijagramom tipa E_6 i s netrivijalnim automorfizmom:



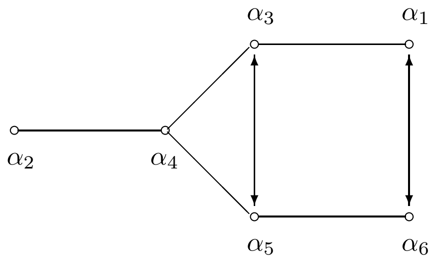
Primijetimo sada da drugi od gornjih Voganovih dijagrama daje prostu realnu Liejevu algebru koja je izomorfna onoj od prvog Voganovog dijagrama; doista, element Weylove grupe $\sigma = \sigma_{\alpha_4}\sigma_{\alpha_2}$ zamjenjuje upravo korijene α_2 i α_4, a kako σ komutira s djelovanjem Cartanove involucije na korijenima, σ ne mijenja vrstu korijena (kompleksan, kompaktan imaginaran, nekompaktan imaginaran). Prema tome, ostaju nam kao kandidati samo prvi, koji ćemo nazvati E_I, i treći, koji označavamo sa E_{IV}. Struktura pripadnih algebri $\mathfrak{k}_0$ dobiva se razmatranjem sistema korijena $R(\mathfrak{k}, \mathfrak{t})$ koji je jednak skupu svih ne$-$nul restrikcija na $\mathfrak{t}$ korijena iz $R = R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$. Na taj način dopunjava se tablica izuzetnih realnih prostih Liejevih algebri. Osim kompaktnih $\mathfrak{e}_6$, $\mathfrak{e}_7$, $\mathfrak{e}_8$, $\mathfrak{f}_4$ i $\mathfrak{g}_2$, i onih na str. 201 dobivamo još sljedeće dvije:

E_I :



$\mathfrak{k}_0 = \mathfrak{sp}(4)$

E_{IV} :



$\mathfrak{k}_0 = \mathfrak{f}_4$

Uzmemo li još u obzir sve moguće izomorfizme među klasičnim realnim Liejevim algebrama, a to su

$$\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}) \cong \mathfrak{so}(3,1), \qquad \mathfrak{so}(2,1) \cong \mathfrak{su}(1,1) \cong \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}) \cong \mathfrak{sp}(1,\mathbb{R}), \qquad \mathfrak{sp}(1,1) \cong \mathfrak{so}(4,1),$$

$$\mathfrak{so}^*(4) \cong \mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(1,1), \qquad \mathfrak{so}^*(6) \cong \mathfrak{su}(3,1), \qquad \mathfrak{so}^*(8) \cong \mathfrak{so}(6,2), \qquad \mathfrak{sl}(2,\mathbb{H}) \cong \mathfrak{so}(5,1),$$

dobivamo potpunu klasifikaciju realnih prostih Liejevih algebri:

Teorem 5.3.2. *Do na izomorfizam svaka se realna prosta Liejeva algabra nalazi u sljedećoj listi, svaka Liejeva algebra u toj listi je realna prosta Liejeva algebra i nijedne dvije Liejeve algebre u toj listi nisu međusobno izomorfne:*

(*a*) *Liejeva algebra* $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$, *gdje je* $\mathfrak{g}$ *kompleksna prosta Liejeva algebra tipa* A_ℓ, $\ell \geq 1$, B_ℓ, $\ell \geq 2$, C_ℓ, $\ell \geq 3$, D_ℓ, $\ell \geq 4$, E_6, E_7, E_8, F_4 *ili* G_2;

(*b*) *kompaktna forma jedne od kompleksnih prostih Liejevih algebri iz* (*a*);

(*c*) *klasične matrične Liejeve algebre*

$$\begin{array}{lll}
\mathfrak{su}(p,q), & p \geq q > 0, \quad p+q \geq 2, & \\
\mathfrak{so}(p,q), & p > q > 0, \quad p+q \geq 5 & \textit{neparno}, \\
\mathfrak{so}(p,q), & p \geq q > 0, \quad p+q \geq 8 & \textit{parno}, \\
\mathfrak{sp}(p,q), & p \geq q > 0, \quad p+q \geq 3, & \\
\mathfrak{sp}(\ell,\mathbb{R}), & \ell \geq 3, & \\
\mathfrak{so}*(2\ell), & \ell \geq 5, & \\
\mathfrak{sl}(\ell,\mathbb{R}), & \ell \geq 3 & \\
\mathfrak{sl}(\ell,\mathbb{H}), & \ell \geq 2; &
\end{array}$$

(*d*) *12 izuzetnih nekompleksnih nekompaktnih prostih Liejevih algebri* E_I, E_{II}, E_{III}, E_{IV}, E_V, E_{VI}, E_{VII}, E_{VIII}, E_{IX}, F_I, F_{II} *i* G *s Voganovim dijagramima na str. 201, 202 i 205.*

Primjenom Cayleyevih transformacija za prijelaz od maksimalno kompaktne do maksimalno nekompaktne Cartanove podalgebre možemo utvrditi tip sistema restringiranih korijena za svaku nekompaktnu od tih Liejevih algebri. Rezultate tih razmatranja dajemo bez izvoda u sljedećoj tablici. Podsjećamo da se dimenzija Cartanovog potprostora poluproste realne Liejeve algebre $\mathfrak{g}_0$ zove **realni rang** od $\mathfrak{g}_0$. Radi potpunosti navodimo u posljednjem stupcu podalgebre $\mathfrak{k}_0$.

$\mathfrak{g}_0$	realni rang	restringirani korijeni	$\mathfrak{k}_0$
$\mathfrak{g}_\mathbb{R}$, $\mathfrak{g}$ kompleksna ranga ℓ	ℓ	korijeni od $\mathfrak{g}$	kompaktna forma od $\mathfrak{g}$
$\mathfrak{su}(p,p)$	p	C_p	$\mathfrak{s}(\mathfrak{u}(p)\oplus\mathfrak{u}(p))$
$\mathfrak{su}(p,q),\ p>q$	q	$(BC)_q$	$\mathfrak{s}(\mathfrak{u}(p)\oplus\mathfrak{u}(q))$
$\mathfrak{so}(p,p)$	p	D_p	$\mathfrak{so}(p)\oplus\mathfrak{so}(p)$
$\mathfrak{so}(p,q),\ p>q$	q	B_q	$\mathfrak{so}(p)\oplus\mathfrak{so}(q)$
$\mathfrak{sp}(p,p)$	p	C_p	$\mathfrak{sp}(p)\oplus\mathfrak{sp}(p)$
$\mathfrak{sp}(p,q),\ p>q$	q	$(BC)_q$	$\mathfrak{sp}(p)\oplus\mathfrak{sp}(q)$
$\mathfrak{sp}(\ell,\mathbb{R})$	ℓ	C_ℓ	$\mathfrak{u}(\ell)$
$\mathfrak{so}^*(2\ell),\ \ell$ parno	$\frac{\ell}{2}$	$C_{\frac{\ell}{2}}$	$\mathfrak{u}(\ell)$
$\mathfrak{so}^*(2\ell),\ \ell$ neparno	$\frac{\ell-1}{2}$	$(BC)_{\frac{\ell-1}{2}}$	$\mathfrak{u}(\ell)$
$\mathfrak{sl}(\ell+1,\mathbb{R})$	ℓ	A_ℓ	$\mathfrak{so}(\ell+1)$
$\mathfrak{sl}(\ell+1,\mathbb{H})$	ℓ	A_ℓ	$\mathfrak{sp}(\ell+1)$
E_I	6	E_6	$\mathfrak{sp}(4)$
E_{II}	4	F_4	$\mathfrak{su}(6)\oplus\mathfrak{su}(2)$
E_{III}	2	$(BC)_2$	$\mathfrak{so}(10)\oplus\mathbb{R}$
E_{IV}	2	A_2	$\mathfrak{f}_4$
E_V	7	E_7	$\mathfrak{su}(8)$
E_{VI}	4	F_4	$\mathfrak{so}(12)\oplus\mathfrak{su}(2)$
E_{VII}	3	C_3	$\mathfrak{e}_6\oplus\mathbb{R}$
E_{VIII}	8	E_8	$\mathfrak{so}(16)$
E_{IX}	4	F_4	$\mathfrak{e}_7\oplus\mathbb{R}$
F_I	4	F_4	$\mathfrak{sp}(4)$
F_{II}	1	$(BC)_1$	$\mathfrak{f}_4$
G	2	G_2	$\mathfrak{su}(2)\oplus\mathfrak{su}(2)$

Bibliografija

[1] N. Bourbaki, *Lie Groups and Lie Algebras*, Ch. 1−3, Springer−Verlag, 2nd printing, Berlin−Heidelberg−New York−London−Paris−Tokyo, 1989; Ch. 4−6, Springer−Verlag, Berlin−Heidelberg−New York, 2002; Ch. 7−9, Springer−Verlag, Berlin−Heidelberg, 2005.

[2] C. Chevalley, *Théorie des groupes de Lie*, Hermann, Paris, 1968.

[3] J. Dixmier, *Enveloping Algebras*, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1996.

[4] K. Erdmann and M.J. Wildon, *Introduction to Lie Algebras*, Springer−Verlag, London, 2006.

[5] W. Fulton and J. Harris, *Representation Theory, A First Course*, Springer−Verlag, New York, 2004.

[6] W.A. de Graaf, *Lie Algebras: Theory and Algorithms*, North−Holland, Elsevier, Amsterdam−Lausanne−New York−Oxford−Shannon−Singapore−Tokyo, 2000.

[7] S. Helgason, *Differential Geometry, Lie Groups, and Symmetric Spaces*, Academic Press, New York−San Francisco−London, 1978.

[8] J.E. Humphreys, *Introduction to Lie Algebras and Representation Theory*, Springer−Verlag, Berlin−Heidelberg−New York, 1972.

[9] A.W. Knapp, *Lie Groups Beyond an Introduction*, 2nd ed., Birkhäuser, Boston−Basel−Berlin, 2002.

[10] A.W. Knapp, *Representations Theory of Semisimple Groups, An Overview Based on Examples*, Princeton Univ. Press, Princeton−Oxford, 1986.

[11] D.Miličić, *Lectures on Lie Groups*, www.math.utah.edu/∼milicic/lie.pdf

[12] A.L. Onishchik, *Lectures on Real Semisimple Lie Algebras and Their Representations*, ESI Lectures in Mathematics and Physics, European Mathematical Society, Zürich, 2004.

[13] N.R. Wallach, *Harmonic Analysis on Homogeneous Spaces*, Marcel Dekker, New York, 1973.

[14] G. Warner, *Harmonic Analysis on Semi-Simple Lie Groups I, II*, Springer−Verlag, Berlin−Heidelberg−New York, 1972.