

# VEKTORSKI PROSTORI

Prof. dr. sc. Hrvoje Kraljević

Predavanja na Odjelu za matematiku  
Sveučilišta Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku  
u zimskom semestru akademske godine 2007./2008.

Osijek, prosinac 2007.



# Sadržaj

1	Konačnodimenzionalni prostori	5
2	Linearni operatori	19
3	Minimalni polinom i spektar	35
4	Invarijantni potprostori	47
5	Nilpotentni operatori	51
6	Fittingova dekompozicija	57
7	Jordanova forma matrice operatora	61
8	Unitarni prostori	69
9	Funkcije operatora	87



# Poglavlje 1

## Konačnodimenzionalni prostori

**Polje** je skup  $K$  s barem dva elementa na kome su zadane dvije komutativne i asocijativne binarne operacije, zbrajanje

$$+ : K \times K \rightarrow K, \quad (\alpha, \beta) \mapsto \alpha + \beta$$

i množenje

$$\cdot : K \times K \rightarrow K, \quad (\alpha, \beta) \mapsto \alpha\beta,$$

tako da vrijedi:

- (a)  $(K, +)$  je grupa s neutralnim elementom 0;
- (b)  $(K \setminus \{0\}, \cdot)$  je grupa s neutralnim elementom 1;
- (c) množenje je distributivno u odnosu na zbrajanje:  $\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$ .

Glavni primjeri polja su polje realnih brojeva  $\mathbb{R}$ , polje kompleksnih brojeva  $\mathbb{C}$  i polje racionalnih brojeva  $\mathbb{Q}$ .

**Vektorski prostor** nad poljem  $K$  je neprazan skup  $V$  koji je komutativna grupa s obzirom na operaciju zbrajanja ( $+ : V \times V \rightarrow V, (v, w) \mapsto v + w$ ) i na kojem je definirana operacija množenja elementima polja  $K$  (tj. preslikavanje  $K \times V \rightarrow V, (\lambda, v) \mapsto \lambda v$ ) koja je distributivna s obzirom na obje operacije zbrajanja:

$$\lambda(v + w) = \lambda v + \lambda w \quad \text{i} \quad (\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v \quad \forall \lambda, \mu \in K, \forall v, w \in V,$$

ima svojstvo kvaziasocijativnosti:

$$(\lambda\mu)v = \lambda(\mu v) \quad \forall \lambda, \mu \in K, \forall v \in V,$$

i jedinica 1 ima svojstvo:

$$1v = v \quad \forall v \in V.$$

**Potprostor** vektorskog prostora  $V$  je podskup  $W \subseteq V$  koji je i sam vektorski prostor nad istim poljem s obzirom na iste operacije. To zapravo znači da je  $W$  neprazan podskup od  $V$  i da vrijedi:

$$v, w \in W \Rightarrow v + w \in W, \quad v \in W \text{ i } \lambda \in K \Rightarrow \lambda v \in W.$$

Kada želimo iskazati da je  $W$  potprostor vektorskog prostora  $V$  pisat ćemo  $W \leq V$ .

**Propozicija 1.1** *Neka je  $V$  vektorski prostor nad poljem  $K$  i neka je  $\Sigma$  bilo koji skup potprostora od  $V$ . Tada je i presjek  $\bigcap_{W \in \Sigma} W$  svih potprostora iz  $\Sigma$  također potprostor od  $V$ .*

**Dokaz:** Označimo sa  $U$  presjek svih potprostora iz skupa  $\Sigma$ . Neka su  $v$  i  $w$  bilo koji vektori iz  $U$ . Kako je  $U$  presjek svih potprostora  $W \in \Sigma$ , to su  $v, w \in W$  za svaki  $W \in \Sigma$ . Kako je svaki  $W$  potprostor, odatle slijedi  $v + w \in W$  za svaki  $W \in \Sigma$ . Budući da je  $U$  presjek svih  $W \in \Sigma$  slijedi  $v + w \in U$ . Sasvim analogno dokazuje se da za svaki  $v \in U$  i za svaki  $\lambda \in K$  vrijedi  $\lambda v \in U$ .

Potprostor  $U$  iz prethodne propozicije je najveći potprostor koji je sadržan u svakom potprostoru iz skupa  $\Sigma$ ; dakle, ako je  $X \leq W$  za svaki  $W \in \Sigma$  onda vrijedi  $U \supseteq X$ .

Neka je sada  $S$  bilo kakav podskup vektorskog prostora  $V$ . Označimo sa  $\Sigma$  skup svih potprostora od  $V$  koji sadrže skup  $S$ :

$$\Sigma = \{X \leq V; X \supseteq S\}$$

Stavimo:

$$[S] = \bigcap_{W \in \Sigma} W.$$

Očito je  $[S]$  najmanji potprostor od  $V$  koji sadrži skup  $S$ : ako je  $W$  potprostor od  $V$  i ako  $W \supseteq S$ , onda  $W \supseteq [S]$ .

**Propozicija 1.2**  $[S]$  je skup svih linearnih kombinacija vektora iz  $S$ .

**Dokaz:** Dokažimo prvo da je svaka linearna kombinacija vektora iz  $S$  u  $[S]$ , a nakon toga da je svaki vektor  $v \in [S]$  linearna kombinacija vektora iz  $S$ . Neka je  $X$  skup svih linearnih kombinacija vektora iz  $S$ .  $[S]$  sadrži skup  $S$ , pa sadrži i sve linearne kombinacije vektora iz  $S$ , jer je  $[S]$  potprostor po propoziciji 1.1. Zaključujemo da vrijedi  $[S] \supseteq X$ .

Dokažimo i obrnutu inkluziju, a time i skupovnu jednakost. U tu svrhu najprije uočimo da je  $X$  potprostor. Doista neka su  $x$  i  $y$  vektori iz  $X$ . Svaki od njih je tada linearna kombinacija vektora iz  $S$ . Stoga postoje vektori  $x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_m$  iz  $S$  i skalari  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m$  iz  $K$ , takvi da je

$$x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n \quad \text{i} \quad y = \mu_1 y_1 + \mu_2 y_2 + \dots + \mu_m y_m.$$

Tada je

$$x + y = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n + \mu_1 y_1 + \mu_2 y_2 + \dots + \mu_m y_m,$$

dakle  $x + y$  je linearna kombinacija vektora iz  $S$ , odnosno  $x + y \in X$ . Nadalje, za bilo koji skalar  $\lambda \in K$  je

$$\lambda x = \lambda \lambda_1 x_1 + \lambda \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda \lambda_n x_n$$

linearna kombinacija vektora iz  $S$ , dakle  $\lambda x \in X$ . To pokazuje da je  $X$  potprostor. Svaki vektor  $v \in S$  je linearna kombinacija vektora iz  $S$  ( $v = 1v$ ) pa slijedi da potprostor  $X$  sadrži skup  $S$ . Budući da je  $[S]$  najmanji potprostor koji sadrži skup  $S$ , zaključujemo da vrijedi i obrnuta inkluzija  $[S] \subseteq X$ .

$[S]$  se zove **potprostor generiran skupom  $S$**  ili **potprostor razapet skupom  $S$** . Ako je  $W = [S]$  kažemo da **skup  $S$  razapinje potprostor  $W$** .

Neka je  $V$  vektorski prostor nad poljem  $K$  i neka je  $S$  podskup od  $V$ . Skup  $S$  je **linearno nezavisan** ako vrijedi:

$$x \notin [S \setminus \{x\}] \quad \forall x \in S.$$

Obratno,  $S$  je **linearno zavisan** ako je neki  $x \in S$  linearna kombinacija preostalih vektora iz  $S$ . Lako se vidi da je  $S$  linearno nezavisan ako i samo ako za bilo koje međusobno različite vektore  $x_1, x_2, \dots, x_n \in S$  vrijedi:

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in K, \quad \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n = 0 \implies \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0.$$

Skup je linearno zavisan ako i samo ako postoji  $n \in \mathbb{N}$  i postoje međusobno različiti vektori  $x_1, x_2, \dots, x_n \in S$  i postoje skalari  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in K \setminus \{0\}$  takvi da je

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n = 0.$$

**Lema 1.1** *Neka je  $S$  podskup vektorskog prostora  $V$  i neka je  $x \in S$ . Pretpostavimo da je  $x \in [S \setminus \{x\}]$ . Tada je  $[S \setminus \{x\}] = [S]$ .*

**Dokaz:** Kako je  $S \setminus \{x\} \subseteq S$  očito je  $[S \setminus \{x\}] \subseteq [S]$ . Nadalje, iz  $x \in [S \setminus \{x\}]$  slijedi  $S \subseteq [S \setminus \{x\}]$ , a odatle  $[S] \subseteq [S \setminus \{x\}]$ . Iz dvije inkluzije slijedi jednakost  $[S \setminus \{x\}] = [S]$ .

**Baza** vektorskog prostora  $V$  je podskup  $B$  od  $V$  sa sljedeća dva svojstva:

- (a) skup  $B$  je linearno nezavisan,
- (b)  $[B] = V$ .

Ako je  $B$  baza od  $V$ , svaki vektor iz  $V$  može se na jedinstven način prikazati kao linearna kombinacija vektora iz  $B$ . Precizno, za svaki  $x \in V$  postoji jedinstvena funkcija  $\varphi : B \rightarrow K$  koja ima sljedeća dva svojstva:

- (a) za samo konačno mnogo vektora  $v \in B$  je  $\varphi(v) \neq 0$ ;
- (b)  $x = \sum_{v \in B} \varphi(v)v$ .

Vektorski prostor  $V$  zove se **konačnodimenzionalan** ako postoji konačan skup  $S$  takav da je  $[S] = V$ . U daljnjem ćemo sa  $|A|$  označavati broj elemenata bilo kojeg konačnog skupa  $A$ .

**Teorem 1.1** *Neka je  $V$  konačnodimenzionalan vektorski prostor nad poljem  $K$ .*

- (a) *Postoji konačna baza prostora  $V$ .*
- (b) *Svaka baza prostora  $V$  je konačna.*
- (c) *Ako su  $B_1$  i  $B_2$  dvije baze od  $V$  onda je  $|B_1| = |B_2|$ . Broj elemenata bilo koje baze od  $V$  zove se **dimenzija** od  $V$  i označava  $\dim V$ , ili preciznije  $\dim_K V$ .*
- (d) *Ako je  $S$  linearno nezavisan podskup od  $V$ ,  $S$  je sadržan u nekoj bazi od  $V$ .*
- (e) *Ako je  $S$  podskup koji razapinje  $V$ , onda  $S$  sadrži neku bazu od  $V$ .*
- (f) *Ako je  $S$  linearno nezavisan podskup od  $V$  koji ima  $n = \dim V$  elemenata, onda je  $S$  baza od  $V$ .*
- (g) *Ako je  $W$  potprostor od  $V$ , onda je prostor  $W$  konačnodimenzionalan i  $\dim W \leq \dim V$ . Nadalje, znak jednakosti ( $\dim W = \dim V$ ) vrijedi ako i samo ako je  $W = V$ .*

**Dokaz:** Dokazujemo najprije tvrdnju:

- (e') *Ako je  $S$  konačan podskup od  $V$  koji razapinje  $V$ , onda  $S$  sadrži bazu od  $V$ .*

**Dokaz tvrdnje (e').** Imamo dvije mogućnosti: skup  $S$  je ili linearno nezavisan ili linearno zavisian. Ako je  $S$  linearno nezavisan onda je  $S$  baza od  $V$ . Ako je  $S$  linearno zavisian, onda postoji  $x \in S$  takav da je  $x \in [S \setminus \{x\}]$ . Prema lemi 1.1 tada za skup  $S_1 = S \setminus \{x\}$  vrijedi  $[S_1] = [S] = V$ . Sada ponovimo isti postupak sa skupom  $S_1$ . Kako je skup  $S$  konačan, nakon izuzimanja konačno mnogo vektora iz  $S$  dobit ćemo linearno nezavisan podskup od  $S$  koji razapinje prostor  $V$ , tj. doći ćemo do baze od  $V$  sadržane u  $S$ .

Iz dokazane tvrdnje (e') odmah slijedi tvrdnja (a).

Dokažimo sada sljedeću pomoćnu tvrdnju:

**Lema 1.2** *Ako je  $S$  konačan podskup vektorskog prostora  $V$  i ako je  $T$  linearno nezavisan podskup od  $[S]$  onda je skup  $T$  konačan i  $|T| \leq |S|$ .*

**Dokaz leme 1.2.** Tu ćemo tvrdnju dokazati matematičkom indukcijom u odnosu na broj  $|S|$  elemenata skupa  $S$ .

Baza indukcije: Pretpostavimo da je  $|S| = 1$ , tj.  $S = \{x\}$ . Neka je  $T$  linearno nezavisan podskup od  $[S]$ . Treba dokazati da skup  $T$  nema više od





skup linearno zavisan. Dakle, postoje  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in K$ , koji nisu svi jednaki nuli, takvi da je

$$\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 + \dots + \lambda_n z_n = 0.$$

Uvrstimo li  $z_k = y_k - \frac{\alpha_{k,n}}{\alpha_{n+1,n}} y_{n+1}$  za  $k = 1, 2, \dots, n$  nakon sređivanja dobivamo:

$$\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \dots + \lambda_n y_n + \lambda y_{n+1} = 0,$$

uz oznaku

$$\lambda = -\frac{\lambda_1 \alpha_{1,n}}{\alpha_{n+1,n}} - \frac{\lambda_2 \alpha_{2,n}}{\alpha_{n+1,n}} - \dots - \frac{\lambda_n \alpha_{n,n}}{\alpha_{n+1,n}}.$$

Budući da  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  nisu svi jednaki nuli, radi se o netrivialnoj linearnoj kombinaciji. Prema tome, skup  $\{y_1, y_2, \dots, y_{n+1}\}$  je linearno zavisan, što je u suprotnosti s pretpostavkom da je skup  $T$  linearno nezavisan. Ova kontradikcija pokazuje da nije moguće da skup  $T$  ima više od  $n$  elemenata, odnosno dokazali smo da je  $|T| \leq n$ .

Time je lema 1.2 u potpunosti dokazana.

Dokažimo sada tvrdnju (b). Ako je  $B_1$  konačna baza od  $V$  i  $B_2$  bilo koja baza od  $V$ , tada je  $B_2$  linearno nezavisan podskup od  $V = [B_1]$ , pa prema lemi 1.2 slijedi da je skup  $B_2$  konačan i  $|B_2| \leq |B_1|$ . Time je tvrdnja (b) dokazana, a slijedi i tvrdnja (c) jer se analogno zamjenivši uloge  $B_2$  i  $B_1$  dobiva da je  $|B_1| \leq |B_2|$ .

Da bismo dokazali tvrdnju (d) dokažimo najprije sljedeću lemu:

**Lema 1.3** *Neka je  $S$  linearno nezavisan podskup vektorskog prostora  $V$ . Pretpostavimo da je  $x \in V \setminus [S]$ . Tada je skup  $S \cup \{x\}$  linearno nezavisan.*

**Dokaz leme 1.3.** Neka su  $x_1, x_2, \dots, x_n$  međusobno različiti elementi od  $S$  i pretpostavimo da su skalari  $\lambda, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in K$  takvi da je

$$\lambda x + \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n = 0.$$

Treba dokazati da su svi koeficijenti  $\lambda, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  jednaki nuli. Kada bi  $\lambda$  bilo različito od nule iz gornje bi jednakosti slijedilo da se  $x$  može napisati kao linearna kombinacija vektora  $x_1, x_2, \dots, x_n$  a odatle da je  $x \in [S]$ , suprotno pretpostavci  $x \in V \setminus [S]$ . Prema tome je  $\lambda = 0$ . Sada iz gornje jednakosti izlazi da je  $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n = 0$ . Budući da je po pretpostavci skup  $S$  linearno nezavisan, slijedi  $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$ . Time je lema 1.3 dokazana.

Prijeđimo sada na dokaz tvrdnje (d). Označimo sa  $n$  dimenziju vektorskog prostora  $V$ . Neka je  $S$  linearno nezavisan podskup od  $V$ . Prema lemi 1.2 imamo  $|S| = k \leq n$ . Sada imamo dvije mogućnosti: ili je  $[S] = V$  ili je  $[S] \neq V$ . Ako je  $[S] = V$ , onda je  $S$  baza od  $V$ . Uzmimo da je  $[S] \neq V$ . Neka je  $x \in V \setminus [S]$ . Prema lemi 1.3 skup  $S^* = S \cup \{x\}$  je linearno nezavisan, pa je prema lemi 1.2  $|S^*| = k + 1 \leq n$ . Isto razmatranje sada možemo ponoviti za skup  $S^*$  umjesto skupa  $S$ . Razmatranje se ponavlja sve dok ne dođemo do baze od  $V$ , a to će se sigurno dogoditi jer svakim korakom dolazimo do linearno nezavisnog skupa

čiji se broj elemenata povećao za jedan. Prema lemi 1.2 tih koraka može biti najviše  $n - k$ .

Dokažimo sada tvrdnju (e). Neka  $S$  podskup od  $V$  koji ga razapinje:  $[S] = V$ . Neka je  $x_1$  vektor iz  $S$  različit od nule. Tada je skup  $S_1 = \{x_1\}$  linearno nezavisan. Ako je  $[S_1] = V$ , onda je  $S_1$  baza od  $V$ . Ako je  $[S_1] \neq V$ , onda skup  $S$  nije sadržan u  $[S_1]$ , pa možemo izabrati  $x_2 \in S \setminus [S_1]$ . Prema lemi 1.3 skup  $S_2 = \{x_1, x_2\}$  je linearno nezavisan. Razmatranje ponavljamo sa skupom  $S_2$  umjesto skupa  $S_1$ . Budući da linearno nezavisan skup prema lemi 1.2 ne može imati više od  $n = \dim V$  elemenata, nakon konačno mnogo koraka doći ćemo do baze od  $V$  koja je sadržana u  $S$ .

Dokažimo sada tvrdnju (f). Neka je  $S$  linearno nezavisan skup koji ima  $n = \dim V$  elemenata. Treba dokazati da je  $S$  baza od  $V$ , tj. da je  $[S] = V$ . Pretpostavimo suprotno, tj.  $[S] \neq V$ . No tada je za  $x \in V \setminus [S]$  prema lemi 1.3 skup  $S \cup \{x\}$  linearno nezavisan i ima  $n + 1 > \dim V$  elemenata, a to je nemoguće zbog leme 1.2. Stoga je pretpostavka  $[S] \neq V$  pogrešna, tj. vrijedi  $[S] = V$ .

Napokon, dokažimo još tvrdnju (g). Neka je  $W$  potprostor od  $V$  i neka je  $n = \dim V$ . Ako je  $W = \{0\}$ , onda je  $\dim W = 0$ . Pretpostavimo da je  $W \neq \{0\}$ . Neka je  $x_1 \in W, x_1 \neq 0$ . Tada je skup  $S_1 = \{x_1\}$  linearno nezavisan. Ako je  $[S_1] = W$ ,  $S_1$  je baza od  $W$ . Ako je  $[S_1] \neq W$ , uzmimo  $x_2 \in W \setminus [S_1]$ . Prema lemi 1.3  $S_2 = \{x_1, x_2\}$  je linearno nezavisan. Ako je  $[S_2] = W$ ,  $S_2$  je baza od  $W$ . Ako je  $[S_2] \neq W$ , uzmimo  $x_3 \in W \setminus [S_2]$ . Prema lemi 1.3  $S_3 = \{x_1, x_2, x_3\}$  je linearno nezavisan. Ovaj postupak nastavljamo sve dok ne dođemo do konačne baze od  $W$ . To će se sigurno dogoditi jer u svakom koraku dobivamo linearno nezavisan podskup od  $W \subseteq V$ , koji po lemi 1.2 ne može imati više od  $\dim W$  elemenata. Odavde slijedi da je potprostor  $W$  konačnodimenzionalan i da je  $\dim W \leq \dim V$ . Ako je  $\dim W = \dim V$ , onda baza od  $W$  ima  $\dim V$  elemenata, pa je po tvrdnji (e) to ujedno baza od  $V$ . No tada je očito  $W = V$ .

Prema propoziciji 1.1 presjek bilo koliko potprostora je opet potprostor. S unijom je drugačija situacija. Lako se može vidjeti da je već za dva potprostora  $U$  i  $W$  njihova unija  $U \cup W$  potprostor ako i samo ako je ili  $U \subseteq W$  (i tada je  $U \cup W = W$ ) ili  $W \subseteq U$  (i tada je  $U \cup W = U$ ). Međutim, za dva potprostora  $U$  i  $W$  možemo promatrati najmanji potprostor  $X$  koji sadrži oba ta potprostora, tj. koji sadrži  $U \cup W, X = [U \cup W]$ .

**Propozicija 1.3**  $[U \cup W] = \{u + w; u \in U, w \in W\}$ .

**Dokaz:** Ako su  $u \in U$  i  $w \in W$  onda su oba vektora sadržana u uniji  $U \cup W$  dakle i u  $[U \cup W]$ . Kako je  $[U \cup W]$  potprostor slijedi  $u + w \in [U \cup W]$ . Time je dokazana inkluzija

$$[U \cup W] \supseteq \{u + w; u \in U, w \in W\}.$$

Dokažimo i obratnu inkluziju. Neka je  $x \in [U \cup W]$ . Tada je prema propoziciji 1.2  $x$  linearna kombinacija vektora iz  $U \cup W$ . To znači da možemo naći vektore  $x_1, \dots, x_n \in U, y_1, \dots, y_m \in W$  i skalare  $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \mu_1, \dots, \mu_m \in K$ , takve da

je

$$x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n + \mu_1 y_1 + \mu_2 y_2 + \dots + \mu_m y_m.$$

Stavimo li  $u = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n$  i  $w = \mu_1 y_1 + \mu_2 y_2 + \dots + \mu_m y_m$  imamo  $u \in U, w \in W$  i  $x = u + w$ . Prema tome vrijedi i obrnuta inkluzija

$$[U \cup W] \subseteq \{u + w; u \in U, w \in W\},$$

odnosno vrijedi jednakost  $[U \cup W] = \{u + w; u \in U, w \in W\}$ .

Zbog toga se  $[U \cup W]$  zove **suma potprostora**  $U$  i  $W$  i označava  $U + W$ . Konstrukciju možemo napraviti i za više potprostora  $W_1, W_2, \dots, W_n$ :

$$\begin{aligned} W_1 + W_2 + \dots + W_n &= [W_1 \cup W_2 \cup \dots \cup W_n] = \\ &= \{w_1 + w_2 + \dots + w_n; w_1 \in W_1, w_2 \in W_2, \dots, w_n \in W_n\}, \end{aligned}$$

pa i za bilo koji skup  $\Sigma$  potprostora od  $V$ :

$$\begin{aligned} \sum_{W \in \Sigma} W &= [\bigcup_{W \in \Sigma} W] = \{v \in V; \exists n \in \mathbb{N}, \exists W_1, W_2, \dots, W_n \in \Sigma, \\ &\exists w_1 \in W_1, w_2 \in W_2, \dots, w_n \in W_n, \text{ t.d. } v = w_1 + w_2 + \dots + w_n\}. \end{aligned}$$

**Propozicija 1.4** *Ako su  $U$  i  $W$  konačnodimenzionalni potprostori vektorskog prostora  $V$ , onda je i potprostor  $U + W$  konačnodimenzionalan i vrijedi:*

$$\dim(U + W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W).$$

**Dokaz:** Neka je  $\dim U = p$ ,  $\dim W = q$  i  $\dim U \cap W = k$ . Zbog tvrdnje (g) teorema 1.1 je  $k \leq p$  i  $k \leq q$ . Konstruirat ćemo sada bazu od  $U + W$  koja ima  $p + q - k$  elemenata i time će propozicija biti dokazana, jer je dimenzija broj elemenata baze.

Neka je  $\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$  baza od  $U \cap W$ . Kako je  $U \cap W$  potprostor od  $U$ , prema tvrdnji (d) teorema 1.1 ta je baza od  $U \cap W$  sadržana u nekoj bazi od  $U$ , tj. možemo naći bazu od  $U$  oblika  $\{x_1, x_2, \dots, x_k, y_{k+1}, y_{k+2}, \dots, y_p\}$ . Analogno možemo naći bazu od  $W$  oblika  $\{x_1, x_2, \dots, x_k, z_{k+1}, z_{k+2}, \dots, z_q\}$ . Dokazat ćemo sada da je

$$B = \{x_1, x_2, \dots, x_k, y_{k+1}, y_{k+2}, \dots, y_p, z_{k+1}, z_{k+2}, \dots, z_q\}$$

baza od  $U + W$ .

Dokažimo najprije da je skup  $B$  linearno nezavisan. Neka su  $\alpha_1, \dots, \alpha_k, \beta_{k+1}, \dots, \beta_p, \gamma_{k+1}, \dots, \gamma_q$  skalari iz  $K$  takvi da je

$$\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_k x_k + \beta_{k+1} y_{k+1} + \dots + \beta_p y_p + \gamma_{k+1} z_{k+1} + \dots + \gamma_q z_q = 0.$$

Treba dokazati da su svi skalari  $\alpha_1, \dots, \alpha_k, \beta_{k+1}, \dots, \beta_p, \gamma_{k+1}, \dots, \gamma_q$  jednaki nuli. Gornja jednakost se može zapisati ovako:

$$\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_k x_k + \beta_{k+1} y_{k+1} + \dots + \beta_p y_p = -\gamma_{k+1} z_{k+1} - \dots - \gamma_q z_q.$$

Označimo li taj vektor sa  $x$ , lijeva strana pokazuje da je  $x \in U$ , a desna da je  $x \in W$ . Stoga je  $x \in U \cap W$ , a kako je  $\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$  baza od  $U \cap W$ , možemo naći skalare  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \in K$  takve da je

$$x = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_k x_k.$$

Kako je vektor  $x$  jednak desnoj strani prethodne jednakosti, imamo

$$\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_k x_k = -\gamma_{k+1} z_{k+1} - \dots - \gamma_q z_q,$$

odnosno

$$\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_k x_k + \gamma_{k+1} z_{k+1} + \dots + \gamma_q z_q = 0.$$

Budući da je  $\{x_1, x_2, \dots, x_k, z_{k+1}, z_{k+2}, \dots, z_q\}$  baza od  $W$ , taj je skup linearno nezavisan, pa iz gornje jednakosti slijedi da su svi koeficijenti jednaki nuli, a posebno  $\gamma_{k+1} = \dots = \gamma_q = 0$ . Tada je  $x = 0$ , pa slijedi i

$$\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_k x_k + \beta_{k+1} y_{k+1} + \dots + \beta_p y_p = 0.$$

Budući da je  $\{x_1, x_2, \dots, x_k, y_{k+1}, y_{k+2}, \dots, y_p\}$  baza od  $U$ , taj je skup linearno nezavisan, pa iz gornje jednakosti slijedi  $\alpha_1 = \dots = \alpha_k = \beta_{k+1} = \dots = \beta_p = 0$ . Dakle, svi koeficijenti  $\alpha_1, \dots, \alpha_k, \beta_{k+1}, \dots, \beta_p, \gamma_{k+1}, \dots, \gamma_q$  jednaki su nuli, pa smo time dokazali da je skup  $B$  linearno nezavisan.

Treba još dokazati da skup  $B$  razapinje potprostor  $U + W$ . Neka je  $x$  bilo koji vektor iz  $U + W$ . Tada je prema propoziciji 1.3  $x = u + w$  za neke  $u \in U$  i  $w \in W$ .  $\{x_1, \dots, x_k, y_{k+1}, \dots, y_p\}$  je baza od  $U$  i  $\{x_1, \dots, x_k, z_{k+1}, \dots, z_q\}$  je baza od  $W$ , pa možemo naći skalare  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_q$  iz  $K$  takve da je

$$u = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_k x_k + \alpha_{k+1} y_{k+1} + \dots + \alpha_p y_p$$

i

$$w = \beta_1 x_1 + \dots + \beta_k x_k + \beta_{k+1} z_{k+1} + \dots + \beta_q z_q.$$

Slijedi

$$\begin{aligned} x = u + w &= (\alpha_1 + \beta_1)x_1 + \dots + (\alpha_k + \beta_k)x_k + \\ &+ \alpha_{k+1}y_{k+1} + \dots + \alpha_p y_p + \beta_{k+1}z_{k+1} + \dots + \beta_q z_q. \end{aligned}$$

Posljednja jednakost pokazuje da je bilo bilo koji vektor  $x \in U + W$  linearna kombinacija vektora iz  $B$ , dakle  $B$  razapinje potprostor  $U + W$ .

Napomenimo da za dimenziju sume više potprostora nemamo tako jednostavnu formulu. Ako su  $X, Y$  i  $Z$  potprostori od  $V$  onda je moguće samo dokazati nejednakost

$$\begin{aligned} \dim(X + Y + Z) &\leq \dim X + \dim Y + \dim Z - \\ &- \dim(X \cap Y) - \dim(X \cap Z) - \dim(Y \cap Z) + \dim(X \cap Y \cap Z). \end{aligned}$$

Slične nejednakosti vrijede i u slučaju više konačnodimenzionalnih potprostora.

Prema propoziciji 1.4 dimenzija sume dvaju konačnodimenzionalnih potprostora je najveća i jednaka  $\dim U + \dim W$  ako i samo ako je  $U \cap W = \{0\}$ . U općem slučaju (a ne samo ako su potprostori konačnodimenzionalni), ako je  $U \cap W = \{0\}$  kažemo da je **suma**  $U + W$  **direktna** i umjesto  $U + W$  pišemo  $U \dot{+} W$ . Suma je direktna ako i samo ako za svaki  $v \in U + W$  postoje jedinstveni  $u \in U$  i  $w \in W$  takvi da je  $v = u + w$ , ili ekvivalentno, ako za  $u \in U$  i  $w \in W$  vrijedi  $u + w = 0$  ako i samo ako je  $u = 0$  i  $w = 0$ .

Općenitije, za potprostore  $W_1, W_2, \dots, W_n$  kažemo da tvore direktnu sumu, koju onda označavamo sa  $W_1 \dot{+} W_2 \dot{+} \dots \dot{+} W_n$ , ako za svaki vektor  $v$  iz potprostora  $W_1 + W_2 + \dots + W_n$  postoje jedinstveni vektori  $w_1 \in W_1, w_2 \in W_2, \dots, w_n \in W_n$ , takvi da je  $v = w_1 + w_2 + \dots + w_n$ , ili ekvivalentno, ako za bilo koje vektore  $w_1 \in W_1, w_2 \in W_2, \dots, w_n \in W_n$  vrijedi  $w_1 + w_2 + \dots + w_n = 0$  ako i samo ako je  $w_1 = w_2 = \dots = w_n = 0$ . Ako su  $B_1, B_2, \dots, B_n$  baze redom od  $W_1, W_2, \dots, W_n$ , onda je njihova unija  $B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_n$  baza direktne sume  $W_1 \dot{+} W_2 \dot{+} \dots \dot{+} W_n$ . Prema tome je

$$\dim(W_1 \dot{+} W_2 \dot{+} \dots \dot{+} W_n) = \dim W_1 + \dim W_2 + \dots + \dim W_n.$$

Ako je  $V$  vektorski prostor i  $X$  njegov potprostor, **direktni komplement** od  $X$  u  $V$  je svaki potprostor  $Y$  takav da je  $V = X \dot{+} Y$ .

**Propozicija 1.5** *Neka je  $V$  konačnodimenzionalan vektorski prostor i  $X$  njegov potprostor. Postoji direktni komplement od  $X$  u  $V$ .*

**Dokaz:** Neka je  $\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$  baza od  $X$ . Prema tvrdnji (d) teorema 1.1 postoje vektori  $x_{k+1}, \dots, x_n$  takvi da je  $\{x_1, x_2, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_n\}$  baza od  $V$ . Stavimo  $Y = [\{x_{k+1}, \dots, x_n\}]$ . Tada je  $Y$  potprostor od  $V$  i  $\{x_{k+1}, \dots, x_n\}$  je njegova baza. Svaki vektor  $v$  prostora  $V$  može se prikazati kao linearna kombinacija vektora baze od  $V$ :

$$v = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n.$$

Stavimo sada

$$x = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_k x_k \quad \text{i} \quad y = \alpha_{k+1} x_{k+1} + \dots + \alpha_n x_n.$$

Tada je  $x \in X$ ,  $y \in Y$  i  $v = x + y$ . Prema tome je  $V = X + Y$ . Nadalje, za  $v \in X \cap Y$  postoje  $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in K$  i  $\lambda_{k+1}, \dots, \lambda_n \in K$  takvi da je

$$v = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_k x_k \quad \text{i} \quad v = \lambda_{k+1} x_{k+1} + \dots + \lambda_n x_n.$$

Odatle je

$$\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_k x_k - \lambda_{k+1} x_{k+1} - \dots - \lambda_n x_n = 0.$$

Zbog linearne nezavisnosti baze  $\{x_1, x_2, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_n\}$  slijedi

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_k = \lambda_{k+1} = \dots = \lambda_n = 0.$$

Zaključujemo da je  $v = 0$ , a to pokazuje da je  $X \cap Y = \{0\}$ , odnosno  $V = X \dot{+} Y$ . Prema tome,  $Y$  je direktni komplement od  $X$  u  $V$ .

Razmatrat ćemo sada još jednu važnu konstrukciju u teoriji vektorskih prostora, a to je **kvocijentni prostor**. Neka je  $V$  vektorski prostor i  $W$  potprostor. U skupu  $V$  definiramo relaciju  $\sim$  na sljedeći način:

$$x \sim y \Leftrightarrow x - y \in W.$$

Dokažimo najprije da je  $\sim$  relacija ekvivalencije. Za bilo koji  $x \in V$  vrijedi  $x - x = 0 \in W$ , jer nulvektor je sadržan u svakom potprostoru. Prema tome je  $x \sim x$ . Nadalje, ako je  $x \sim y$ , tj.  $x - y \in W$ , onda je  $y - x = -(x - y) \in W$ , dakle vrijedi i  $y \sim x$ . Nadalje, iz  $x \sim y$  i  $y \sim z$  slijedi  $x - y \in W$  i  $y - z \in W$ , dakle i  $x - z = (x - y) + (y - z) \in W$ . Prema tome je  $x \sim z$ . Time je dokazano da je  $\sim$  relacija ekvivalencije.

Skup svih klasa ekvivalencije u skupu  $V$  u odnosu na tu relaciju ekvivalencije označavat ćemo sa  $V/W$ . Opisat ćemo sada поближе svaku pojedinu klasu ekvivalencije, tj. svaki element skupa  $V/W$ . Neka je  $x \in V$  i neka je  $[x]$  njegova klasa ekvivalencije, tj.  $[x] = \{y \in V; y \sim x\}$ . Ako je  $y \in [x]$  tada je  $w = y - x \in W$  i  $y = x + w$ . Dakle imamo inkluziju

$$[x] \subseteq \{x + w; w \in W\}.$$

Dokažimo i obrnutu inkluziju. Ako je  $w \in W$  i  $y = x + w$ , tada je  $y - x = w \in W$ , dakle  $y \sim x$  ili  $y \in [x]$ . Time je dokazana i obrnuta inkluzija

$$[x] \supseteq \{x + w; w \in W\},$$

tj. imamo jednakost  $[x] = \{x + w; w \in W\}$ . Stoga ćemo klasu ekvivalencije  $[x]$  koja sadrži vektor  $x$  označavati sa  $x + W$ :

$$[x] = x + W = \{x + w; w \in W\}.$$

U skup  $V/W$  uvest ćemo sada operaciju zbrajanja i množenja skalarima iz  $K$ :

$$(x + W) + (y + W) = (x + y) + W, \quad \lambda(x + W) = (\lambda x) + W.$$

Dokažimo da su ove operacije dobro definirane, tj. da rezultati ne ovise o izboru predstavnika klasa. Neka su  $x \sim x'$  i  $y \sim y'$ , tj.  $x + W = x' + W$  i  $y + W = y' + W$ . To znači da vrijedi  $x - x' \in W$  i  $y - y' \in W$ . Tada je

$$(x + y) - (x' + y') = (x - x') + (y - y') \in W,$$

dakle je  $(x + y) \sim (x' + y')$ , odnosno  $(x + y) + W = (x' + y') + W$ . Time smo dokazali da je zbrajanje u  $V/W$  dobro definirano. Sasvim analogno dokazuje se da je i množenje skalarom dobro definirano, tj. da je  $(\lambda x) + W = (\lambda x') + W$ .

S tako definiranim operacijama skup  $V/W$  postaje vektorski prostor nad poljem  $K$ . Doista, iz komutativnosti i asocijativnosti zbrajanja vektora u  $V$

neposredno slijedi komutativnost i asocijativnost zbrajanja elemenata skupa  $V/W$  :

$$\begin{aligned}(x + W) + (y + W) &= (x + y) + W = (y + x) + W = (y + W) + (x + W), \\ ((x + W) + (y + W)) + (z + W) &= ((x + y) + z) + W = \\ &= (x + (y + z)) + W = (x + W) + ((y + W) + (z + W)).\end{aligned}$$

Nadalje, element  $0 + W = W$  je neutralan u  $V/W$  u odnosu na zbrajanje, a element  $(-x) + W$  je suprotan elementu  $x + W$  u odnosu na zbrajanje u  $V/W$  :

$$\begin{aligned}(0 + W) + (x + W) &= (0 + x) + W = x + W, \\ (x + W) + ((-x) + W) &= (x - x) + W = 0 + W.\end{aligned}$$

Prema tome,  $V/W$  je u odnosu na definirano zbrajanje komutativna grupa. Neposredno se provjerava i odnos množenja skalarom prema zbrajanju u  $V/W$  :

$$\begin{aligned}\lambda((x + W) + (y + W)) &= \lambda((x + y) + W) = \lambda(x + y) + W = \\ &= (\lambda x + \lambda y) + W = (\lambda x + W) + (\lambda y + W) = \lambda(x + W) + \lambda(y + W); \\ (\lambda + \mu)(x + W) &= (\lambda + \mu)x + W = (\lambda x + \mu x) + W = \\ &= (\lambda x + W) + (\mu x + W) = \lambda(x + W) + \mu(x + W); \\ (\lambda\mu)(x + W) &= (\lambda\mu)x + W = \lambda(\mu x + W) = \lambda(\mu(x + W)).\end{aligned}$$

Time je dokazano da je  $V/W$  s definiranim operacijama vektorski prostor nad poljem  $K$ .  $V/W$  se zove **kvocijentni prostor prostora  $V$  po potprostoru  $W$** .

**Propozicija 1.6** *Ako je  $V$  konačnodimenzionalan vektorski prostor i  $W$  njegov potprostor, tada je i kvocijentni prostor  $V/W$  konačnodimenzionalan i vrijedi:*

$$\dim V/W = \dim V - \dim W.$$

**Dokaz:** Neka je  $k = \dim W$  i  $n = \dim V$  (naravno,  $k \leq n$ ). Izaberimo bazu  $\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$  od  $W$ . Prema tvrdnji (d) teorema 1.1 ona se može dopuniti do baze  $\{x_1, x_2, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_n\}$  od  $V$ . Dokazat ćemo sada da je  $\{x_{k+1} + W, \dots, x_n + W\}$  baza od  $V/W$  i time će propozicija biti dokazana jer je broj tih vektora u  $V/W$  jednak  $n - k$ .

Dokažimo najprije da je taj skup vektora u  $V/W$  linearno nezavisan. Neka su  $\lambda_{k+1}, \dots, \lambda_n \in K$  takvi da je

$$0 = \lambda_{k+1}(x_{k+1} + W) + \dots + \lambda_n(x_n + W) = (\lambda_{k+1}x_{k+1} + \dots + \lambda_nx_n) + W.$$

Dakle  $(\lambda_{k+1}x_{k+1} + \dots + \lambda_nx_n) \sim 0$  ili  $(\lambda_{k+1}x_{k+1} + \dots + \lambda_nx_n) \in W$ . Taj se vektor može prikazati kao linearna kombinacija vektora baze  $\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$  potprostora  $W$ , tj. postoje  $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in K$  takvi da je

$$\lambda_{k+1}x_{k+1} + \dots + \lambda_nx_n = \lambda_1x_1 + \dots + \lambda_kx_k.$$



Odatle slijedi

$$-\lambda_1 x_1 - \dots - \lambda_k x_k + \lambda_{k+1} x_{k+1} + \dots + \lambda_n x_n = 0.$$

Međutim, skup vektora  $\{x_1, x_2, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_n\}$  je baza od  $V$ , dakle taj je skup linearno nezavisan. Iz gornje jednakosti slijedi da su nužno svi koeficijenti jednaki nuli. Posebno,  $\lambda_{k+1} = \lambda_{k+2} = \dots = \lambda_n = 0$ . To pokazuje da je skup vektora  $\{x_{k+1} + W, \dots, x_n + W\}$  u vektorskom prostoru  $V/W$  linearno nezavisan.

Treba još dokazati da skup vektora  $\{x_{k+1} + W, \dots, x_n + W\}$  razapinje cijeli prostor  $V/W$ . Neka je  $x \in V$  proizvoljan (tj.  $x + W \in V/W$  je proizvoljan). Tada je  $x$  linearna kombinacija vektora baze  $\{x_1, \dots, x_n\}$  prostora  $V$ , tj. postoje  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$  takvi da je

$$x = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_k x_k + \lambda_{k+1} x_{k+1} + \dots + \lambda_n x_n.$$

Stavimo  $w = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_k x_k$ . Tada je  $w \in W$ , pa je

$$\begin{aligned} x + W &= (x - w) + W = (\lambda_{k+1} x_{k+1} + \dots + \lambda_n x_n) + W = \\ &= \lambda_{k+1}(x_{k+1} + W) + \dots + \lambda_n(x_n + W). \end{aligned}$$

Time je propozicija u potpunosti dokazana.

Za vektorski prostor  $V$  i njegov potprostor  $W$  preslikavanje  $\pi : V \rightarrow V/W$ , koje svakom vektoru  $x \in V$  pridružuje njegovu klasu ekvivalencije  $[x] = x + W$ , zove se **kvocijentno preslikavanje**:

$$\pi(x) = [x] = x + w, \quad x \in V.$$

Primijetimo da vrijedi:

$$\pi(x + y) = \pi(x) + \pi(y), \quad x, y \in V; \quad \pi(\lambda x) = \lambda \pi(x), \quad \lambda \in K, \quad x \in V.$$



## Poglavlje 2

# Linearni operatori

Ako su  $V$  i  $W$  vektorski prostori, svako preslikavanje  $A : V \rightarrow W$  zove se **operator**. Operator  $A$  je **aditivan** ako vrijedi:

$$A(x + y) = A(x) + A(y), \quad \forall x, y \in V.$$

Ako su  $V$  i  $W$  vektorski prostori nad istim poljem  $K$ , operator  $A$  je **homogen** ako vrijedi:

$$A(\lambda x) = \lambda A(x), \quad \forall \lambda \in K, \forall x \in V.$$

**Operator**  $A$  je **linearan**, ako je aditivan i homogen, tj. ako vrijedi:

$$A(\lambda x + \mu y) = \lambda A(x) + \mu A(y), \quad \forall \lambda, \mu \in K, \forall x, y \in V.$$

Ako je  $A$  linearan operator, obično se umjesto  $A(x)$  piše  $Ax$ .

Za vektorske prostore  $V$  i  $W$  nad istim poljem  $K$  sa  $L(V, W)$  ćemo označavati skup svih linearnih operatora  $A : V \rightarrow W$ . U taj skup uvodimo operaciju zbrajanja: ako su  $A, B \in L(V, W)$  sa  $A+B$  označavamo operator sa  $V$  u  $W$  definiran relacijom

$$(A + B)(v) = Av + Bv, \quad v \in V.$$

Nadalje, uvodimo i operaciju množenja elemenata od  $L(V, W)$  skalarima iz polja  $K$ : ako je  $A \in L(V, W)$  i  $\lambda \in K$  sa  $\lambda A$  označavamo operator sa  $V$  u  $W$  definiran relacijom

$$(\lambda A)(v) = \lambda(Av), \quad v \in V.$$

Lako se vidi da su tako definirani operatori  $A + B$  i  $\lambda A$  linearni, dakle elementi od  $L(V, W)$ . Također, jednostavno se dokazuje da uz tako definirane operacije skup  $L(V, W)$  svih linearnih operatora sa  $V$  u  $W$  postaje vektorski prostor nad poljem  $K$ .

Ako su  $V, W$  i  $U$  tri vektorska prostora i ako su  $A \in L(V, W)$  i  $B \in L(W, U)$  onda definiramo  $BA : V \rightarrow U$  kao kompoziciju funkcija:  $(BA)(v) = B(Av)$ ,

$v \in V$ . Tako definiran operator je linearan,  $BA \in L(V, U)$ , i zove se **produkt operatora**  $B$  i  $A$ . Tako definiran produkt ima svojstvo asocijativnosti: ako su  $A \in L(V, W)$ ,  $B \in L(W, U)$  i  $C \in L(U, X)$  onda je  $(CB)A = C(BA)$ .

Pri svakoj definiciji postavlja se pitanje smislenosti te definicije, a prije svega nije li skup definiranih objekata prazan. Egzistenciju mnoštva linearnih operatora u slučaju konačnodimenzionalne domene garantira sljedeća propozicija:

**Propozicija 2.1** *Neka su  $V$  i  $W$  vektorski prostori nad poljem  $K$  i pretpostavimo da je  $V$  konačnodimenzionalan. Neka je  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  baza od  $V$  i neka su  $w_1, w_2, \dots, w_n$  proizvoljni vektori iz  $W$ . Tada postoji jedinstven  $A \in L(V, W)$  takav da vrijedi*

$$Ae_j = w_j \text{ za } j = 1, 2, \dots, n.$$

**Dokaz:** Egzistencija: Svaki vektor  $x \in V$  na jedinstven način može se prikazati kao linearna kombinacija vektora baze:

$$x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n.$$

Za taj vektor  $x$  stavimo

$$A(x) = \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \dots + \alpha_n w_n.$$

Tako smo definirali operator  $A : V \rightarrow W$  za kojeg očito vrijedi  $A(e_j) = w_j$  za  $j = 1, 2, \dots, n$ . Dokažimo da je taj operator linearan. Neka su  $\lambda, \mu \in K$  i neka je pored  $x$  zadan još jedan vektor  $y \in V$  s prikazom u bazi:

$$y = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \dots + \beta_n e_n.$$

Tada je

$$A(y) = \beta_1 w_1 + \beta_2 w_2 + \dots + \beta_n w_n.$$

Nadalje,

$$(\lambda x + \mu y) = (\lambda \alpha_1 + \mu \beta_1) e_1 + (\lambda \alpha_2 + \mu \beta_2) e_2 + \dots + (\lambda \alpha_n + \mu \beta_n) e_n,$$

pa slijedi

$$\begin{aligned} A(\lambda x + \mu y) &= (\lambda \alpha_1 + \mu \beta_1) w_1 + (\lambda \alpha_2 + \mu \beta_2) w_2 + \dots + (\lambda \alpha_n + \mu \beta_n) w_n = \\ &= \lambda(\alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \dots + \alpha_n w_n) + \mu(\beta_1 w_1 + \beta_2 w_2 + \dots + \beta_n w_n) = \lambda A(x) + \mu A(y). \end{aligned}$$

Time je dokazana egzistencija.

Jedinstvenost: Pretpostavimo da su  $A, B \in L(V, W)$  takvi da je  $Ae_j = w_j$  i  $Be_j = w_j$  za  $j = 1, 2, \dots, n$ . Za proizvoljan vektor  $x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n$  iz prostora  $V$  zbog linearnosti operatora  $A$  i  $B$  imamo:

$$\begin{aligned} Ax &= \alpha_1 Ae_1 + \alpha_2 Ae_2 + \dots + \alpha_n Ae_n = \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \dots + \alpha_n w_n = \\ &= \alpha_1 Be_1 + \alpha_2 Be_2 + \dots + \alpha_n Be_n = Bx. \end{aligned}$$

Dakle,  $Ax = Bx$  za svaki vektor  $x \in V$ , a to znači  $A = B$  i jedinstvenost je dokazana.



Matrica s  $m$  redaka i  $n$  stupaca, koja se dobije tako da koeficijente u prikazu vektora  $Ae_j$  stavimo kao  $j$ -ti stupac, zove se **matrica operatora A u paru baza**  $(f, e)$  i označava  $A(f, e)$ :

$$A(f, e) = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \cdots & \alpha_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \alpha_{m3} & \cdots & \alpha_{mn} \end{bmatrix}$$

Dokazi tvrdnji sljedeće propozicije, koje izostavljamo, sastoje se u neposrednoj primjeni definicije matrice operatora u zadanom paru baza i definicija operacija u prostorima linearnih operatora.

**Propozicija 2.3** *Neka su  $V, W$  i  $U$  konačnodimenzionalni vektorski prostori nad istim poljem  $K$  i neka su redom  $e = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ ,  $f = \{f_1, f_2, \dots, f_m\}$  i  $g = \{g_1, g_2, \dots, g_p\}$  uređene baze tih prostora.*

(a) *Ako su  $A, B \in L(V, W)$  i  $\lambda, \mu \in K$ , onda je*

$$(\lambda A + \mu B)(f, e) = \lambda A(f, e) + \mu B(f, e).$$

(b) *Ako su  $A \in L(V, W)$  i  $B \in L(W, U)$ , onda je*

$$(BA)(g, e) = B(g, f)A(f, e).$$

Za vektorske prostore  $V$  i  $W$  nad istim poljem linearan operator  $A : V \rightarrow W$  zove se **izomorfizam** ako je  $A$  bijekcija sa  $V$  na  $W$ . Ako takav  $A$  postoji, kažemo da je vektorski prostor  $V$  **izomorfan** vektorskom prostoru  $W$  i pišemo  $V \simeq W$ . Operator identitete  $I = I_V : V \rightarrow V$  je očito izomorfizam, pa vrijedi  $V \simeq V$  za svaki vektorski prostor  $V$ . Nadalje, ako je  $A : V \rightarrow W$  izomorfizam, onda je i inverzno preslikavanje  $A^{-1} : W \rightarrow V$  izomorfizam. Dakle, iz  $V \simeq W$  slijedi  $W \simeq V$ . Napokon, ako su  $A : V \rightarrow W$  i  $B : W \rightarrow U$  izomorfizmi, onda je i njihov produkt  $BA : V \rightarrow U$  izomorfizam. Dakle, iz  $V \simeq W$  i  $W \simeq U$  slijedi  $V \simeq U$ . Ova razmatranja pokazuju da je *biti izomorfan* relacija ekvivalencije među vektorskim prostorima.

**Teorem 2.1** *Neka su  $V$  i  $W$  konačnodimenzionalni vektorski prostori nad istim poljem  $K$ .*

(1) *Neka je  $A \in L(V, W)$ . Tada su sljedeća četiri svojstva međusobno ekvivalentna:*

(a)  *$A$  je izomorfizam.*

(b) *Za neku bazu  $e = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  od  $V$ ,  $Ae = \{Ae_1, Ae_2, \dots, Ae_n\}$  je baza od  $W$ .*

(c) *Za svaku bazu  $e$  od  $V$  je  $Ae$  baza od  $W$ .*

(d) Postoje baze  $e$  od  $V$  i  $f$  od  $W$  takve da je  $A(f, e)$  jedinična matrica.

- (2) Vektorski prostori  $V$  i  $W$  su izomorfni ako i samo ako je  $\dim V = \dim W$ . Posebno, svaki  $n$ -dimenzionalan vektorski prostor nad poljem  $K$  izomorfan je vektorskom prostoru  $K^n$ .

**Dokaz:** (1) Evidentno je da  $(c) \Rightarrow (b)$ .

Dokažimo da  $(b) \Rightarrow (a)$ . Pretpostavljamo, dakle, da je  $Ae$  baza od  $W$  za neku bazu  $e$  od  $V$ . Treba dokazati da odatle slijedi da je  $A : V \rightarrow W$  bijekcija. Neka su  $x, y$  vektori iz  $V$  takvi da je  $Ax = Ay$ . Zbog linearnosti operatora  $A$  tada je  $A(x - y) = 0$ . Vektor  $x - y$  prikažemo kao linearnu kombinaciju vektora baze  $e$  prostora  $V$  :

$$x - y = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_n e_n.$$

Tada imamo:

$$0 = A(x - y) = \lambda_1 Ae_1 + \lambda_2 Ae_2 + \dots + \lambda_n Ae_n.$$

Po pretpostavci je  $Ae = \{Ae_1, Ae_2, \dots, Ae_n\}$  baza prostora  $W$  pa slijedi

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0.$$

Odatle je  $x - y = 0$ , odnosno  $x = y$ . Dakle,  $A$  je injekcija. Treba još dokazati da je  $A : V \rightarrow W$  surjekcija. Neka je  $w \in W$ . Vektor  $w$  prikažemo pomoću vektora baze  $Ae$  prostora  $W$  :

$$w = \lambda_1 Ae_1 + \lambda_2 Ae_2 + \dots + \lambda_n Ae_n.$$

Stavimo  $x = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n$ . Tada je očito  $Ax = w$ . Dakle je  $R(A) = W$ , tj.  $A$  je surjekcija. Time je dokazano da iz  $(b)$  slijedi  $(a)$ .

Dokažimo sada da iz  $(a)$  slijedi  $(c)$ . Pretpostavljamo da je  $A : V \rightarrow W$  izomorfizam i neka je  $e = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  bilo koja baza od  $V$ . Treba dokazati da je  $Ae = \{Ae_1, Ae_2, \dots, Ae_n\}$  baza od  $W$ . Dokažimo prvo linearnu nezavisnost od  $Ae$ . Neka su  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in K$  takvi da je

$$\lambda_1 Ae_1 + \lambda_2 Ae_2 + \dots + \lambda_n Ae_n = 0.$$

Zbog linearnosti operatora  $A$  slijedi  $A(\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_n e_n) = 0$ . Također je i  $A(0) = 0$ . Kako je po pretpostavci  $A$  izomorfizam, dakle i injekcija, iz jednakosti

$$A(\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_n e_n) = 0 = A(0)$$

slijedi

$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_n e_n = 0.$$

Međutim,  $e = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  je baza, dakle linearno nezavisan podskup od  $V$ , pa slijedi  $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$ . To pokazuje da je  $Ae$  linearno nezavisan podskup od  $W$ . Treba još dokazati da skup  $Ae$  razapinje čitav prostor  $W$ . Neka je  $w \in W$ . Kako je po pretpostavci  $A$  izomorfizam, dakle i surjekcija, postoji  $x \in V$

takav da je  $Ax = w$ . Vektor  $x$  prikažemo kao linearnu kombinaciju vektora baze  $e : x = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_n e_n$ . Tada zbog linearnosti operatora  $A$  imamo:

$$w = Ax = A(\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_n e_n) = \lambda_1 A e_1 + \lambda_2 A e_2 + \dots + \lambda_n A e_n.$$

Time je dokazano da je proizvoljan vektor  $w \in W$  linearna kombinacija vektora iz  $Ae$ . Dakle,  $Ae$  je baza od  $W$ , pa vrijedi (c).

Dokazali smo da su svojstva (a), (b) i (c) međusobno ekvivalentna. Dokazat ćemo sada da je svojstvo (b) ekvivalentno svojstvu (d) i time će tvrdnja (1) biti u potpunosti dokazana. Pretpostavimo da vrijedi (b) i neka je  $e$  baza od  $V$  takva da je  $f = Ae$  baza od  $W$ . Tada je

$$Ae_1 = f_1, Ae_2 = f_2, \dots, Ae_n = f_n,$$

pa vidimo da je  $A(f, e)$  jedinična matrica. Dakle, iz (b) slijedi (d). Pretpostavimo sada da vrijedi (d) i neka su  $e$  i  $f$  baze od  $V$  i  $W$  takve da je  $A(f, e)$  jedinična matrica. To znači da je

$$Ae_1 = f_1, Ae_2 = f_2, \dots, Ae_n = f_n,$$

tj.  $Ae = f$ . Dakle,  $e$  je baza od  $V$  takva da je  $Ae$  baza od  $W$ , tj. vrijedi (b).

(2) Pretpostavimo da je  $\dim V = \dim W = n$  i neka su  $e = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  baza od  $V$  i  $f = \{f_1, f_2, \dots, f_n\}$  baza od  $W$ . Prema propoziciji 2.1 postoji jedinstven  $A \in L(V, W)$  takav da je

$$Ae_1 = f_1, Ae_2 = f_2, \dots, Ae_n = f_n,$$

tj.  $Ae = f$ . Prema dokazanoj tvrdnji (1) (konkretno iz ekvivalentnosti svojstava (a) i (b)) slijedi da je  $A$  izomorfizam, tj. prostori  $V$  i  $W$  su izomorfni. Vrijedi i obrnuta implikacija, jer ako su prostori  $V$  i  $W$  izomorfni onda iz dokazane tvrdnje (1) evidentno slijedi da su im dimenzije jednake. Napokon, kako očito je  $\dim K^n = n$ . Doista, vektori

$$(1, 0, \dots, 0), (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, 1)$$

tvore bazu prostora  $K^n$  i ima ih  $n$ . Dakle, svaki je  $n$ -dimenzionalan vektorski prostor nad poljem  $K$  izomorfan prostoru  $K^n$ .

Time je teorem 2.1 u potpunosti dokazan.

**Teorem 2.2** *Neka su  $V$  i  $W$  konačnodimenzionalni vektorski prostori nad poljem  $K$  i neka su  $e = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  baza od  $V$  i  $f = \{f_1, f_2, \dots, f_m\}$  baza od  $W$ . Tada je  $A \mapsto A(f, e)$  izomorfizam vektorskog prostora  $L(V, W)$  na vektorski prostor  $M_{m,n}(K)$  svih matrica sa  $m$  redaka i  $n$  stupaca.*

**Dokaz:** Prema tvrdnji (a) propozicije 2.3 to je preslikavanje linearno.

Dokažimo da je to preslikavanje injektivno. Neka su  $A$  i  $B$  operatori iz  $L(V, W)$  takvi da je  $A(f, e) = B(f, e)$ . Iz definicije matrice operatora u određenom paru baza odatle slijedi da je  $Ae_1 = Be_1, Ae_2 = Be_2, \dots, Ae_n = Be_n$ . Iz jedinstvenosti u propoziciji 2.1 odatle slijedi  $A = B$ . Time je dokazano da je preslikavanje  $A \mapsto A(f, e)$  injektivno.





$w = Av$ . Kako je  $V = N(A) \dot{+} Y$  postoje  $z \in N(A)$  i  $y \in Y$  takvi da je  $v = z + y$ . Sada je  $w = Av = Az + Ay = Ay = \varphi(y)$ . Time je dokazano da je  $\varphi$  surjekcija i lema je u potpunosti dokazana.

**Dokaz teorema 2.3:** Prema propoziciji 1.5 postoji potprostor  $Y$  prostora  $V$  takav da je  $V = Y \dot{+} N(A)$ . Kako se radi o direktnoj sumi, to je

$$\dim V = \dim Y + \dim N(A) = \dim Y + d(A).$$

Prema upravo dokazanoj lemi 2.1 prostor  $Y$  izomorfan je prostoru  $R(A)$ , pa su im po tvrdnji (2) teorema 2.1 dimenzije iste:  $\dim Y = \dim R(A) = r(A)$ . Time je teorem 2.3 dokazan.

Promatrajmo sada situaciju  $V = W$ . Pišemo kraće  $L(V, V) = L(V)$ , te ako je  $e$  baza od  $V$  i  $A \in L(V)$  pišemo  $A(e)$  umjesto  $A(e, e)$ . Ako je  $\dim V = n$  onda je dimenzija prostora  $L(V)$  jednaka  $n^2$ , a  $A(e)$  je kvadratna matrica  $n$ -tog reda. Primijetimo da je u vektorskom prostoru  $L(V)$  osim operacija zbrajanja i množenja skalarom definirana i operacija množenja: za  $A, B \in L(V)$  je  $AB \in L(V)$ .

Za izomorfizam  $A : V \rightarrow V$  upotrebljavamo i naziv **regularan operator**. Primijetimo da iz teorema o rangju i defektu za operator  $A \in L(V)$  slijedi:

$$A \text{ injekcija} \iff d(A) = 0 \iff r(A) = n \iff A \text{ surjekcija}.$$

Dakle,  $A \in L(V)$  je injekcija ako i samo ako je  $A$  surjekcija, dakle, regularan operator.

Skup svih regularnih operatora na prostoru  $V$  je grupa s obzirom na množenje operatora. Tu grupu označavamo sa  $GL(V)$ . Ona je izomorfna grupi  $GL_n(K)$  regularnih kvadratnih matrica  $n$ -tog reda (izomorfizam je  $A \mapsto A(e)$  za bilo koju bazu  $e$  od  $V$ ). Ako je  $n > 1$  ta je grupa nekomutativna.

Neka su  $e = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  i  $e' = \{e'_1, e'_2, \dots, e'_n\}$  dvije baze od  $V$ . Prema propoziciji 2.1 postoji jedinstven linearan operator  $T : V \rightarrow V$  takav da je  $Te = e'$  (tj.  $Te_j = e'_j$  za  $j = 1, \dots, n$ ). Prema tvrdnji (1) teorema 2.1  $T$  je izomorfizam tj.  $T \in GL(V)$ .  $T$  se zove **operator prijelaza iz baze  $e$  u bazu  $e'$** . Ako sa  $\tau_{ij}$  označimo elemente kvadratne matrice  $T(e)$ , uočimo da za jedinični operator  $I = I_V$  na prostoru  $V$  vrijedi:

$$Ie'_j = e'_j = Te_j = \tau_{1j}e_1 + \tau_{2j}e_2 + \dots + \tau_{nj}e_n.$$

To pokazuje da je matrica operatora  $T$  u bazi  $e$  jednaka matrici jediničnog operatora  $I$  u paru baza  $(e, e')$ :

$$T(e) = I(e, e').$$

Ta činjenica omogućuje vrlo jednostavan dokaz veze između matrica istog operatora u raznim parovima baza:

**Propozicija 2.4** Neka su  $V$  i  $W$  konačnodimenzionalni vektorski prostori i  $A \in L(V, W)$ . Neka su  $e$  i  $e'$  baze od  $V$ ,  $f$  i  $f'$  baze od  $W$  i  $T \in GL(V)$  i  $S \in GL(W)$  pripadni operatori prijelaza:  $Te = e'$ ,  $Sf = f'$ . Tada je

$$A(f', e') = S(f)^{-1}A(f, e)T(e).$$

**Dokaz:** Prema tvrdnji (b) propozicije 2.3 i zbog jednakosti  $T(e) = I_V(e, e')$  i  $S(f) = I_W(f, f')$  imamo:

$$\begin{aligned} A(f, e)T(e) &= A(f, e)I_V(e, e') = (AI_V)(f, e') = A(f, e') = \\ &= (I_W A)(f, e') = I_W(f, f')A(f', e') = S(f)A(f', e') \end{aligned}$$

a množenjem slijeva s inverznom matricom od regularne matrice  $S(f)$  dobivamo upravo jednakost koju dokazujemo:  $A(f', e') = S(f)^{-1}A(f, e)T(e)$ .

**Teorem 2.4** Neka su  $V$  i  $W$  konačnodimenzionalni vektorski prostori i neka su  $A, B \in L(V, W)$ .

(1) Sljedeća su dva svojstva međusobno ekvivalentna:

- (a) Postoje  $T \in GL(V)$  i  $S \in GL(W)$  takvi da je  $A = SBT$ .
- (b)  $r(A) = r(B)$ .

(2) Vrijedi  $r(A) = r$  ako i samo ako postoje baze  $e$  od  $V$  i  $f$  od  $W$  takve da je  $A(f, e) = E_{m,n,r}$ . Pri tome je  $n = \dim V$ ,  $m = \dim W$  i  $E_{m,n,r}$  je matrica s  $m$  redaka i  $n$  stupaca koja ima sve elemente 0 osim jedinične matrice formata  $r \times r$  u gornjem lijevom kvadrantu.

**Dokaz:** Dokažimo najprije tvrdnju (2). Neka je  $A \in L(V, W)$ ,  $\dim V = n$ ,  $\dim W = m$  i pretpostavimo da je  $r(A) = r$ . Prema teoremu o rangui i defektu tada je  $d(A) = \dim N(A) = n - r$ . Prema propoziciji 1.5 postoji potprostor  $Y$  prostora  $V$  takav da je  $V = Y \dot{+} N(A)$  i tada je  $\dim Y = r$ . Izaberimo bazu  $\{e_1, e_2, \dots, e_r\}$  od  $Y$  i bazu  $\{e_{r+1}, e_{r+2}, \dots, e_n\}$  od  $N(A)$ . Tada je  $e = \{e_1, e_2, \dots, e_r, e_{r+1}, \dots, e_n\}$  baza od  $V$ . Nadalje, stavimo  $f_j = Ae_j$  za  $j = 1, 2, \dots, r$ . Po lemi 2.1  $\{f_1, \dots, f_r\}$  je baza od  $R(A)$ . Dopolnimo tu bazu do baze  $f = \{f_1, \dots, f_r, f_{r+1}, \dots, f_m\}$  od  $W$ . Tada imamo:

$$Ae_1 = f_1, Ae_2 = f_2, \dots, Ae_r = f_r, Ae_{r+1} = 0, \dots, Ae_n = 0.$$

To pokazuje da je  $A(f, e) = E_{m,n,r}$ .

Dokažimo sada obrat. Neka je  $A \in L(V, W)$  i neka su

$$e = \{e_1, \dots, e_r, e_{r+1}, \dots, e_n\} \quad \text{i} \quad f = \{f_1, \dots, f_r, f_{r+1}, \dots, f_m\}$$

baza prostora  $V$  i  $W$  takve da vrijedi  $A(f, e) = E_{m,n,r}$ . To znači da je

$$Ae_1 = f_1, \dots, Ae_r = f_r, Ae_{r+1} = 0, \dots, Ae_n = 0.$$

Budući da  $Ae_1, \dots, Ae_n$  razapinju  $R(A)$ , prema gornjim jednakostima je jasno da je  $\{f_1, \dots, f_r\}$  baza od  $R(A)$ . Stoga je  $r(A) = \dim R(A) = r$ . Time je tvrdnja (2) dokazana.

Dokažimo sada tvrdnju (1). Pretpostavimo da vrijedi  $r(A) = r(B) = r$ . Prema dokazanoj tvrdnji (2) postoje baze  $e$  i  $e'$  od  $V$  i baze  $f$  i  $f'$  od  $W$  takve da vrijedi  $A(f, e) = E_{m,n,r} = B(f', e')$ . Neka je  $T \in GL(V)$  operator prijelaza iz baze  $e$  u bazu  $e'$  i neka je  $S \in GL(W)$  operator prijelaza iz baze  $f'$  u bazu  $f$ . Primjenom propozicije 2.4 i tvrdnje (b) propozicije 2.3 (uz napomenu da je inverzni operator  $S^{-1}$  od  $S$  operator prijelaza iz baze  $f$  u bazu  $f'$  i da je  $(S^{-1})(f)^{-1} = S(f)$ ) dobivamo:

$$A(f, e) = B(f', e') = S(f)B(f, e)T(e) = (SBT)(f, e).$$

Kako je prema teoremu 2.2 preslikavanje  $C \mapsto C(f, e)$  izomorfizam sa  $L(V, W)$  na  $M_{m,n}(K)$ , odatle slijedi  $A = SBT$ . Time smo dokazali da (b)  $\Rightarrow$  (a).

Obrnutu implikaciju dokazat ćemo pomoću sljedeće leme:

**Lema 2.2** *Neka su  $V, W$  i  $U$  konačnodimenzionalni vektorski prostori i neka su  $A \in L(V, W)$  i  $B \in L(W, U)$ . Tada je  $r(BA) \leq r(A)$  i  $r(BA) \leq r(B)$ .*

**Dokaz:** Imamo  $R(BA) = \{BAx; x \in V\} \subseteq \{By; y \in W\} = R(B)$  pa slijedi  $r(BA) \leq r(B)$ . Nadalje, kako je  $R(A) = \{Ax; x \in V\}$  imamo

$$R(BA) = \{B(Ax); x \in V\} = \{By; y \in R(A)\}.$$

Stoga, ako je  $\{y_1, y_2, \dots, y_k\}$  baza od  $R(A)$ , onda skup  $\{By_1, By_2, \dots, By_k\}$  razapinje  $R(BA)$ , pa je  $r(BA) = \dim R(BA) \leq k = \dim R(A) = r(A)$ .

Dokažimo sada da u tvrdnji (1) teorema 2.4 iz (a) slijedi (b). Pretpostavimo, dakle, da su  $A, B \in L(V, W)$  i pretpostavimo da postoje  $S \in GL(W)$  i  $T \in GL(V)$  takvi da je  $A = SBT$ . Tada iz leme 2.2 slijedi redom:

$$r(A) = r(S(BT)) \leq r(BT) \leq r(B).$$

Kako je i  $B = S^{-1}AT^{-1}$ , analogno se dobiva i  $r(B) \leq r(A)$ . Iz dvije nejednakosti slijedi jednakost  $r(A) = r(B)$ . Dakle iz (a) slijedi (b) i time je tvrdnja (1) u teoremu 2.4 dokazana.

Neka je  $V$  vektorski prostor nad poljem  $K$ . Samo polje  $K$  je također vektorski prostor nad  $K$  i dimenzija mu je 1 (doista, ako je  $\alpha \in K$  različit od nule, onda je jednočlan skup  $\{\alpha\}$  očito linearno nezavisan i razapinje prostor  $K$ : svaki  $\beta \in K$  može se pisati  $\beta = \lambda\alpha$  za  $\lambda = \beta/\alpha \in K$ ; dakle,  $\{\alpha\}$  je baza vektorskog prostora  $K$  nad poljem  $K$ ). Vektorski prostor  $V' = L(V, K)$  zove se **dualni prostor** vektorskog prostora  $V$ . Njegovi se elementi zovu **linearni funkcionali** (ili **linearne forme**) na vektorskom prostoru  $V$ . Ako je  $V$  konačnodimenzionalan, onda je prema propoziciji 2.2 i dualan prostor  $V'$  konačnodimenzionalan i vrijedi  $\dim V' = \dim L(V, K) = (\dim V)(\dim K) = \dim V$ .

Prisjetimo se dokaza propozicije 2.2. Uzeli smo bazu  $e = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  prostora  $V$  i bazu  $f = \{f_1, f_2, \dots, f_m\}$  prostora  $W$  i onda smo pokazali da operatori  $E_{ij} \in L(V, W)$ , definirani sa

$$E_{ij}e_k = \delta_{jk}f_i, \quad 1 \leq i \leq m, \quad 1 \leq j \leq n, \quad 1 \leq k \leq n$$

tvore bazu prostora  $L(V, W)$ . Ako je  $e = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  baza prostora  $V$ , a za bazu jednodimenzionalnog prostora  $K$  uzmemo  $\{1\}$ , onda tim postupkom dolazimo do baze  $e' = \{e'_1, e'_2, \dots, e'_n\}$  prostora  $V'$ . Funkcionali  $e'_j$  definirani su sa  $e'_j(e_k) = \delta_{jk}$  ( $j, k \in \{1, 2, \dots, n\}$ ). Za bazu  $e'$  kažemo da je **dualna** bazi  $e$ .

Neja je  $e = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  baza prostora  $V$ , i  $e' = \{e'_1, e'_2, \dots, e'_n\}$  njoj dualna baza prostora  $V'$ . Za  $x \in V$  možemo pisati

$$x = \sum_{1 \leq k \leq n} \alpha_k e_k.$$

Primijenimo li na tu jednakost linearan funkcional  $e'_j$  dobivamo

$$e'_j(x) = \sum_{k=1}^n \alpha_k e'_j(e_k) = \sum_{k=1}^n \alpha_k \delta_{jk} = \alpha_j.$$

Dakle, za svaki  $x \in V$  vrijedi:

$$x = \sum_{j=1}^n e'_j(x) e_j.$$

Analogno, za  $f \in V'$  možemo pisati

$$f = \sum_{1 \leq j \leq n} \beta_j e'_j.$$

Primijenimo li taj linearan funkcional na vektor  $e_k$  dobivamo

$$f(e_k) = \sum_{j=1}^n \beta_j e'_j(e_k) = \sum_{j=1}^n \beta_j \delta_{jk} = \beta_k.$$

Dakle, za svaki  $f \in V'$  vrijedi:

$$f = \sum_{j=1}^n f(e_j) e'_j.$$

Neka su  $V$  i  $W$  vektorski prostori nad poljem  $K$  i neka je  $A \in L(V, W)$ . Za  $g \in W'$  definiramo preslikavanje  $A'(g) : V \rightarrow K$  relacijom

$$[A'(g)](v) = g(Av), \quad v \in V.$$

Iz linearnosti  $g$  i  $A$  odmah slijedi da je to preslikavanje linearno, tj.  $A'(g) \in V'$ . Na taj način definirali smo operator  $A' : W' \rightarrow V'$ . Taj je operator linearan, jer za  $\alpha, \beta \in K$  i za  $g, h \in W'$  imamo za svaki  $v \in V$ :

$$\begin{aligned} [A'(\alpha g + \beta h)](v) &= (\alpha g + \beta h)(Av) = \alpha g(Av) + \beta h(Av) = \\ &= \alpha [A'(g)](v) + \beta [A'(h)](v) = [\alpha A'(g) + \beta A'(h)](v). \end{aligned}$$

Za linearan operator  $A' \in L(W', V')$  kažemo da je **dualan** linearnom operatoru  $A \in L(V, W)$ .

**Teorem 2.5** (a)  $A \mapsto A'$  je linearno preslikavanje s prostora  $L(V, W)$  u prostor  $L(W', V')$ .

(b) Ako su  $A \in L(V, W)$  i  $B \in L(W, U)$  onda je  $(BA)' = A'B'$ .

(c) Ako su vektorski prostori  $V$  i  $W$  konačnodimenzionalni onda je  $A \mapsto A'$  izomorfizam vektorskog prostora  $L(V, W)$  na vektorski prostor  $L(W', V')$ .

**Dokaz:** (a) Za  $\alpha, \beta \in K$  i  $A, B \in L(V, W)$  i za bilo koji  $g \in W'$  i bilo koji  $v \in V$  imamo:

$$\begin{aligned} [(\alpha A + \beta B)'g](v) &= g((\alpha A + \beta B)v) = g(\alpha Av + \beta Bv) = \alpha g(Av) + \beta g(Bv) = \\ &= \alpha[A'g](v) + \beta[B'g](v) = [\alpha A'g + \beta B'g](v) = [(\alpha A' + \beta B')g](v). \end{aligned}$$

Budući da to vrijedi za svaki vektor  $v \in V$  slijedi  $(\alpha A + \beta B)'g = (\alpha A' + \beta B')g$ . Kako ta jednakost vrijedi za svaki funkcional  $g \in W'$  zaključujemo da vrijedi  $(\alpha A + \beta B)' = \alpha A' + \beta B'$ . Dakle, preslikavanje pridruživanja dualnog operatora  $A \mapsto A'$  je linearno.

(b) Za  $h \in U'$  i za  $v \in V$  nalazimo:

$$[(BA)'h](v) = h(BAv) = [B'h](Av) = [A'B'h](v).$$

Budući da to vrijedi za svaki vektor  $v \in V$  slijedi  $(BA)'h = A'B'h$ . Kako ta jednakost vrijedi za svaki funkcional  $h \in U'$  slijedi  $(BA)' = A'B'$ .

(c) Neka su  $e = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  i  $f = \{f_1, f_2, \dots, f_m\}$  baze od  $V$  i  $W$ . Označimo sa  $e' = \{e'_1, e'_2, \dots, e'_n\}$  i  $f' = \{f'_1, f'_2, \dots, f'_m\}$  njima dualne baze od  $V'$  i  $W'$ . Neka su operatori  $E_{ij} \in L(V, W)$  definirani kao u dokazu propozicije 2.2:  $E_{ij}e_k = \delta_{jk}f_i$ . Znamo da je tada  $\{E_{ij} : 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$  baza vektorskog prostora  $L(V, W)$ . Proučimo sada kako dualni operatori  $(E_{ij})'$  djeluju na vektore baze  $f'$ :

$$[(E_{ij})'f'_p](e_q) = f'_p(E_{ij}e_q) = \delta_{jq}f'_p(f_i) = \delta_{jq}\delta_{ip} = \delta_{ip}e'_j(e_q).$$

Budući da to vrijedi za svaki  $q = 1, \dots, n$ , zaključujemo da je  $(E_{ij})'f'_p = \delta_{ip}e'_j$ . Prema dokazu propozicije 2.2 (primijenjenom na baze  $f'$  od  $W'$  i  $e'$  od  $V'$ ) nalazimo da operatori  $(E_{ij})'$  za  $1 \leq j \leq n, 1 \leq i \leq m$ , tvore bazu prostora  $L(W', V')$ . Dakle,  $A \mapsto A'$  preslikava neku bazu prostora  $L(V, W)$  u bazu prostora  $L(W', V')$ . Prema tvrdnji (1) teorema 2.1 to je preslikavanje izomorfizam vektorskih prostora.

Neka su  $e, f, e'$  i  $f'$  baze iz dokaza tvrdnje (c) prethodnog teorema. Neka je  $A$  linearan operator sa  $V$  u  $W$ . Označimo sa  $\alpha_{ij}$  elemente matrice  $A(f, e)$  i sa  $\beta_{pq}$  elemente matrice  $A'(e', f')$ . Tada je  $Ae_j = \sum_{1 \leq i \leq m} \alpha_{ij}f_i$ . Primijenimo li funkcional  $f'_q$  na lijevu i desnu stranu te jednakosti, dobivamo

$$f'_q(Ae_j) = \sum_{i=1}^m \alpha_{ij}f'_q(f_i) = \sum_{i=1}^m \alpha_{ij}\delta_{iq} = \alpha_{qj}.$$

S druge strane je  $A'f'_q = \sum_{1 \leq p \leq n} \beta_{pq} e'_p$  i primijenimo li funkcionalne s obje strane te jednakosti na vektor  $e_j$  dobivamo

$$[A'f'_q](e_j) = \sum_{p=1}^n \beta_{pq} e'_p(e_j) = \sum_{p=1}^n \beta_{pq} \delta_{pj} = \beta_{jq}.$$

Prema definiciji dualnog operatora zaključujemo:

$$\beta_{jq} = [A'f'_q](e_j) = f'_q(Ae_j) = \alpha_{qj}.$$

Time smo dokazali:

**Propozicija 2.5** *Neka su  $V$  i  $W$  konačnodimenzionalni vektorski prostori,  $A$  linearan operator sa  $V$  u  $W$ ,  $e$  i  $f$  baze prostora  $V$  i  $W$ ,  $e'$  i  $f'$  njima dualne baze od  $V'$  i  $W'$ . Tada su matrice  $A(f, e)$  i  $A'(e', f')$  međusobno transponirane.*

Za podskup  $S$  vektorskog prostora  $V$  definiramo

$$S^0 = \{f \in V'; f(x) = 0 \forall x \in S\}.$$

Očito je  $S^0$  potprostor dualnog prostora  $V'$  za bilo koji podskup  $S$  vektorskog prostora  $V$ . Potprostor  $S^0$  zove se **anihilator** skupa  $S \subseteq V$ . Analogno, za podskup  $T$  dualnog prostora  $V'$  njegov anihilator je potprostor od  $V$ :

$$T^0 = \{x \in V; f(x) = 0 \forall f \in T\}.$$

Uz ove oznake moguća je dvojba: da li je anihilator  $T^0$  od  $T \subseteq V'$  potprostor od  $V$  ili mislimo na potprostor dualnog prostora  $V'' = (V')'$  od  $V'$ ? U konačnodimenzionalnom slučaju ta dvojba nestaje, jer se tzv. **bidual**  $V''$  prostora  $V$  može identificirati s prostorom  $V$ :

**Teorem 2.6** *Neka je  $V$  vektorski prostor nad poljem  $K$ . Za svaki  $v \in V$  definiramo preslikavanje  $\varphi(v) : V' \rightarrow K$  relacijom  $[\varphi(v)](f) = f(v)$ ,  $f \in V'$ . Tada je preslikavanje  $\varphi(v)$  linearno, tj.  $\varphi(v) \in V''$ . Nadalje, preslikavanje  $\varphi : V \rightarrow V''$  je linearno. Napokon, ako je prostor  $V$  konačnodimenzionalan,  $\varphi$  je izomorfizam prostora  $V$  na njegov bidual  $V''$ .*

**Dokaz:** Za  $\alpha, \beta \in K$  i  $f, g \in V'$  imamo:

$$[\varphi(v)](\alpha f + \beta g) = (\alpha f + \beta g)(v) = \alpha f(v) + \beta g(v) = \alpha[\varphi(v)](f) + \beta[\varphi(v)](g).$$

Dakle, preslikavanje  $\varphi(v) : V' \rightarrow K$  je linearno, tj.  $\varphi(v) \in V''$ .

Dokažimo sada da je preslikavanje  $\varphi : V \rightarrow V''$  linearno. Za  $\alpha, \beta \in K$  i  $v, w \in V$  imamo za svaki  $f \in V'$ :

$$\begin{aligned} [\varphi(\alpha v + \beta w)](f) &= f(\alpha v + \beta w) = \alpha f(v) + \beta f(w) = \\ &= \alpha[\varphi(v)](f) + \beta[\varphi(w)](f) = [\alpha\varphi(v) + \beta\varphi(w)](f). \end{aligned}$$

Kako to vrijedi za svaki funkcional  $f \in V'$ , slijedi  $\varphi(\alpha v + \beta w) = \alpha\varphi(v) + \beta\varphi(w)$ , tj. preslikavanje  $\varphi : V \rightarrow V''$  je linearno.

Napokon, pretpostavimo da je prostor  $V$  konačnodimenzionalan. Tada je  $\dim V = \dim V' = \dim V''$ . Dakle, po teoremu o rangui i defektu (teorem 2.3) primijenjenom na preslikavanje  $\varphi$  ( $r(\varphi) + d(\varphi) = \dim V$ ) vidimo da je za dokaz bijektivnosti preslikavanja  $\varphi$  dovoljno dokazati njegovu injektivnost, odnosno, da mu je jezgra jednaka  $\{0\}$ . Neka je  $v \in V$  takav da je  $\varphi(v) = 0$ . Neka je  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  baza od  $V$  i  $\{e'_1, e'_2, \dots, e'_n\}$  dualna baza od  $V'$ . Tada je

$$v = \sum_{j=1}^n e'_j(v)e_j.$$

Međutim, za svaki indeks  $j$  imamo

$$e'_j(v) = [\varphi(v)](e'_j) = 0,$$

pa slijedi  $v = 0$ . To pokazuje da je  $\varphi$  injekcija, dakle bijekcija, dakle izomorfizam sa  $V$  na  $V''$ .

Zbog teorema 2.6 u slučaju konačnodimenzionalnog prostora  $V$  pomoću izomorfizma  $\varphi$  možemo identificirati prostor  $V$  s njegovim bidualom  $V''$ . Dakle, vektor  $v \in V$  identificira se s linearnim funkcionalom  $f \mapsto f(v)$  na prostoru  $V'$ . Uz takvu identifikaciju za konačnodimenzionalne vektorske prostore  $V$  i  $W$  za  $A \in L(V, W)$  nalazimo da je  $A'' = A$ .

**Propozicija 2.6** *Neka je  $V$  konačnodimenzionalan vektorski prostor,  $S$  podskup od  $V$  ili od  $V'$  i  $W$  potprostor od  $V$  ili od  $V'$ .*

- (a)  $S^0 = [S]^0$ .
- (b)  $[S] = S^{00}$ ,  $W^{00} = W$ .
- (c)  $\dim W^0 = \dim V - \dim W$ .

(Pri tome podrazumijevamo da je bidual  $V''$  identificiran s prostorom  $V$  pomoću preslikavanja  $\varphi$  iz prethodnog teorema).

**Dokaz:** (a) Neka je  $S$  podskup od  $V$ . Iz  $S \subseteq [S]$  slijedi obrnuta inkluzija za anihilatore:  $S^0 \supseteq [S]^0$ . Neka je  $f \in S^0$  i neka je  $x \in [S]$ . Tada je  $x$  linearna kombinacija vektora iz  $S$  pa zbog linearnosti funkcionala  $f$  slijedi  $f(x) = 0$ . Dakle,  $f \in [S]^0$ , pa zaključujemo da vrijedi i obrnuta inkluzija  $S^0 \subseteq [S]^0$ .

(c) Neka je  $W \leq V$ . Izaberimo bazu  $\{e_1, e_2, \dots, e_k\}$  od  $W$  i nadopunimo je do baze  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  od  $V$ . Neka je  $\{e'_1, e'_2, \dots, e'_n\}$  dualna baza od  $V'$ . Tada funkcionali  $e'_{k+1}, \dots, e'_n$  poništavaju vektore  $e_1, \dots, e_k$ , dakle:

$$e'_{k+1}, \dots, e'_n \in \{e_1, e_2, \dots, e_k\}^0 = [\{e_1, e_2, \dots, e_k\}]^0 = W^0.$$

Neka je  $f \in W^0$ . Tada je  $f(e_1) = f(e_2) = \dots = f(e_k) = 0$  pa slijedi

$$f = \sum_{j=1}^n f(e_j)e'_j = \sum_{j=k+1}^n f(e_j)e'_j.$$



To pokazuje da funkcionali  $e'_{k+1}, \dots, e'_n$  razapinju potprostor  $W^0$  dualnog prostora  $V'$ , dakle  $\{e'_{k+1}, \dots, e'_n\}$  je baza od  $W^0$ . Odatle slijedi

$$\dim W^0 = n - k = \dim V - \dim W.$$

(b) Za potprostor  $W$  od  $V$  imamo očito  $W \subseteq W^{00}$ , a iz (c) slijedi

$$\dim W^{00} = \dim V' - \dim W^0 = \dim V - (\dim V - \dim W) = \dim W.$$

Dakle je  $W = W^{00}$ . Odatle za  $S \subseteq V$  vrijedi  $[S] = [S]^{00}$ , pa zbog (a) imamo  $[S] = [S]^{00} = ([S]^0)^0 = (S^0)^0 = S^{00}$ .

**Propozicija 2.7** *Neka su  $V$  i  $W$  konačnodimenzionalni vektorski prostori nad istim poljem i  $A \in L(V, W)$ .*

$$(a) \quad N(A') = R(A)^0, \quad N(A) = R(A')^0, \quad R(A') = N(A)^0, \quad R(A) = N(A')^0.$$

$$(b) \quad r(A) = r(A').$$

**Dokaz:** (a) Identificiramo li  $V$  sa  $V''$  i  $W$  sa  $W''$  na temelju teorema 2.6 vidi se da je prva jednakost ekvivalentna s drugom i da je treća jednakost ekvivalentna s četvrtom. Nadalje, iz tvrdnje (b) propozicije 2.6 slijedi da je prva jednakost ekvivalentna s četvrtom (i druga s trećom). Dakle, sve četiri jednakosti su međusobno ekvivalentne, pa je dovoljno dokazati jednu od njih, npr. prvu.

Za  $f \in W'$  imamo redom:

$$\begin{aligned} f \in N(A') &\iff A'f = 0 \iff (A'f)(v) = 0 \quad \forall v \in V \iff \\ \iff f(Av) = 0 \quad \forall v \in V &\iff f(w) = 0 \quad \forall w \in R(A) \iff f \in R(A)^0. \end{aligned}$$

Dakle,  $N(A') = R(A)^0$ .

(b) Iz (a), iz tvrdnje (c) propozicije 2.6 i iz teorema o rangui i defektu (teorem 2.3) imamo redom:

$$r(A) = \dim R(A) = \dim N(A')^0 = \dim W' - \dim N(A') = \dim W' - d(A') = r(A').$$



## Poglavlje 3

# Minimalni polinom i spektar

Funkcija  $P:K \rightarrow K$  zove se **polinom** ako je  $P(\lambda)$  linearna kombinacija potencija varijable  $\lambda$ :

$$P(\lambda) = \alpha_0 + \alpha_1\lambda + \alpha_2\lambda^2 + \cdots + \alpha_m\lambda^m.$$

Ako je  $\alpha_m \neq 0$  broj  $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  zove se **stupanj polinoma**  $P(\lambda)$  i označava  $\deg P(\lambda)$ . Dakle, stupanj je najveća potencija u polinomu  $P(\lambda)$ . Ako je  $\alpha_m = 1$  kažemo da je polinom  $P(\lambda)$  **normiran**.

Neka je  $V$  konačnodimenzionalan vektorski prostor nad poljem  $K$  i neka je  $A \in L(V) = L(V, V)$ . Definiramo potencije operatora  $A$ :  $A^0 = I$  (jedinični operator),  $A^1 = A$ ,  $A^2 = A \cdot A$ ,  $A^3 = A \cdot A^2 = A^2 \cdot A$ , i tako dalje, općenito  $A^k = A \cdot A^{k-1}$ . Potenciranje operatora ima sljedeća očigledna svojstva:

$$A^j \cdot A^k = A^{j+k}, \quad (A^j)^k = A^{jk}, \quad \forall j, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Linearna kombinacija potencija operatora  $A$  je polinom operatora  $A$ . Ako je

$$P(\lambda) = \alpha_0 + \alpha_1\lambda + \alpha_2\lambda^2 + \cdots + \alpha_m\lambda^m$$

bilo koji polinom u varijabli  $\lambda \in K$ , onda ćemo sa  $P(A)$  označiti polinom operatora  $A$  s istim koeficijentima  $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m \in K$ :

$$P(A) = \alpha_0 I + \alpha_1 A + \alpha_2 A^2 + \cdots + \alpha_m A^m.$$

Budući da je množenje operatora distributivno u odnosu na zbrajanje i budući da vrijedi  $A^j A^k = A^{j+k}$ , vrijede sljedeća pravila za računanje s polinomima danog operatora  $A$ :

$$R(\lambda) = P(\lambda) + Q(\lambda) \quad \implies \quad R(A) = P(A) + Q(A),$$

$$S(\lambda) = P(\lambda) \cdot Q(\lambda) \quad \implies \quad S(A) = P(A) \cdot Q(A).$$

Sa  $\mathcal{L}(A)$  označavat ćemo potprostor od  $L(V)$  razapet svim potencijama operatora  $A$ . To znači da je  $\mathcal{L}(A)$  skup svih linearnih kombinacija potencija  $I, A, A^2, \dots$ . Budući da su linearne kombinacije potencija upravo polinomi operatora  $A$ , imamo

$$\mathcal{L}(A) = [\{I, A, A^2, A^3, \dots\}] = [\{A^k; k \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}] = \{P(A); P(\lambda) \text{ polinom}\}.$$

Ako je dimenzija prostora  $V$  jednaka  $n$ , onda je dimenzija od  $L(V)$  jednaka  $n^2$ . Prema tome je  $\dim \mathcal{L}(A) \leq n^2$ . U stvari, ako je  $n \geq 2$  onda je  $\dim \mathcal{L}(A) < n^2$ . Doista,  $\dim \mathcal{L}(A) = n^2$  bi značilo da je  $\mathcal{L}(A) = L(V)$ . No to nije moguće, jer za bilo koje  $B, C \in \mathcal{L}(A)$  vrijedi  $BC = CB$ , a to nije istina za bilo koje  $B, C \in L(V)$ .

Posebno, operatori  $I, A, A^2, \dots$  ne mogu biti linearno nezavisni. Neka je  $m$  najmanji prirodan broj takav da je  $A^m \in [\{I, A, \dots, A^{m-1}\}]$ . Drugim riječima,  $m$  je takav da su  $I, A, \dots, A^{m-1}$  su linearno nezavisni, a  $I, A, \dots, A^{m-1}, A^m$  su linearno zavisni. Naravno,  $m \leq \dim \mathcal{L}(A)$ , dakle  $m \leq n^2$ . Neka su  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m$  skalari iz polja  $K$  takvi da je

$$A^m = \mu_1 A^{m-1} + \mu_2 A^{m-2} + \dots + \mu_{m-1} A + \mu_m I. \quad (3.1)$$

Označimo sa  $\mu_A(\lambda)$  polinom

$$\mu_A(\lambda) = \lambda^m - \mu_1 \lambda^{m-1} - \dots - \mu_{m-1} \lambda - \mu_m.$$

Tada je  $\mu_A(A) = 0$ . Polinom  $\mu_A(\lambda)$  zove se **minimalni polinom** operatora  $A$ . Minimalni polinom svakog operatora je normiran, tj. koeficijent uz najveću potenciju jednak je 1.

**Teorem 3.1** *Neka je  $V$  konačnodimenzionalan vektorski prostor,  $A \in L(V)$  i neka je  $m$  stupanj minimalnog polinoma  $\mu_A(\lambda)$  operatora  $A$ .*

- (a)  $\mu_A(\lambda)$  je polinom najnižeg stupnja među svim netrivialnim polinomima  $P(\lambda)$  takvima da je  $P(A) = 0$ .
- (b)  $\dim \mathcal{L}(A) = m$  i  $\mathcal{L}(A) = [\{I, A, A^2, \dots, A^{m-1}\}]$ . Drugim riječima,

$$\{I, A, A^2, \dots, A^{m-1}\}$$

je baza vektorskog prostora  $\mathcal{L}(A)$ .

- (c) Za polinom  $P(\lambda)$  vrijedi  $P(A) = 0$  ako i samo ako je polinom  $P(\lambda)$  djeljiv s polinomom  $\mu_A(\lambda)$ , tj. ako i samo ako je  $P(\lambda) = Q(\lambda)\mu_A(\lambda)$  za neki polinom  $Q(\lambda)$ .

**Dokaz:** Tvrdnja (a) slijedi neposredno iz činjenice da su operatori

$$I, A, A^2, \dots, A^{m-1}$$

linearno nezavisni, što znači da je  $P(A) \neq 0$  za svaki netrivialan polinom  $P(\lambda)$  stupnja  $< m$ .

(b) Jasno je da je  $[\{I, A, A^2, \dots, A^{m-1}\}] \subseteq \mathcal{L}(A)$ . Dokažimo da vrijedi i obrnuta inkluzija, dakle jednakost. Prije svega, iz (3.1) slijedi da je

$$A^m \in [\{I, A, A^2, \dots, A^{m-1}\}].$$

Pomnožimo li (3.1) sa  $A$  dobivamo

$$A^{m+1} = \mu_1 A^m + \mu_2 A^{m-1} + \dots + \mu_{m-1} A^2 + \mu_m A.$$

Budući da su  $A, A^2, \dots, A^{m-1}, A^m \in [\{I, A, A^2, \dots, A^{m-1}\}]$ , odatle slijedi

$$A^{m+1} \in [\{I, A, A^2, \dots, A^{m-1}\}].$$

Pomnožimo li sada jednakost (3.1) sa  $A^2$ , dobivamo

$$A^{m+2} = \mu_1 A^{m+1} + \mu_2 A^m + \dots + \mu_{m-1} A^3 + \mu_m A^2.$$

Budući da su  $A^2, A^3, \dots, A^m, A^{m+1} \in [\{I, A, A^2, \dots, A^{m-1}\}]$ , odatle slijedi

$$A^{m+2} \in [\{I, A, A^2, \dots, A^{m-1}\}].$$

Nastavimo li na taj način korak po korak nalazimo da su sve potencije operatora  $A$  sadržane u potprostoru  $[\{I, A, A^2, \dots, A^{m-1}\}]$ . Odatle slijedi tražena obrnuta inkluzija

$$\mathcal{L}(A) \subseteq [\{I, A, A^2, \dots, A^{m-1}\}].$$

Time smo dokazali da je  $\mathcal{L}(A) = [\{I, A, A^2, \dots, A^{m-1}\}]$ , a budući da su operatori  $I, A, A^2, \dots, A^{m-1}$  linearno nezavisni, nalazimo da je  $\{I, A, A^2, \dots, A^{m-1}\}$  baza od  $\mathcal{L}(A)$  i da je  $\dim \mathcal{L}(A) = m$ .

(c) Pretpostavimo da je polinom  $P(\lambda)$  djeljiv s polinomom  $\mu_A(\lambda)$ , tj. da je  $P(\lambda) = Q(\lambda)\mu_A(\lambda)$ . Tada je  $P(A) = Q(A)\mu_A(A)$ , pa iz  $\mu_A(A) = 0$  slijedi  $P(A) = 0$ .

Pretpostavimo sada da je  $P(\lambda)$  polinom takav da je  $P(A) = 0$ . Dijeljenjem polinoma  $P(\lambda)$  s polinomom  $\mu_A(\lambda)$  dolazimo do jednakosti oblika

$$P(\lambda) = Q(\lambda)\mu_A(\lambda) + R(\lambda),$$

pri čemu su  $Q(\lambda)$  i  $R(\lambda)$  polinomi i ostatak pri dijeljenju  $R(\lambda)$  je polinom stupnja manjeg od  $m$ , tj. vrijedi  $\deg R(\lambda) < \deg \mu_A(\lambda)$ . Uvrstimo li u gornju jednakost operator  $A$  umjesto varijable  $\lambda$  dolazimo do operatorske jednakosti

$$P(A) = Q(A)\mu_A(A) + R(A).$$

Kako je  $P(A) = \mu_A(A) = 0$ , odatle slijedi da je  $R(A) = 0$ . No kako je stupanj polinoma  $R(\lambda)$  manji od  $m$ , iz (a) zaključujemo da mora biti  $R(\lambda) = 0$ . To znači da je  $P(\lambda) = Q(\lambda)\mu_A(\lambda)$ , tj. polinom  $P(\lambda)$  je djeljiv s polinomom  $\mu_A(\lambda)$ .

Prisjetimo se da se operator  $A \in L(V)$  zove se **invertibilan** ili **regularan**, ako postoji  $B \in L(V)$  takav da je  $AB = BA = I$ . U tom slučaju takav operator

$B$  je jedinstven; doista, ako i za  $C \in L(V)$  vrijedi  $AC = CA = I$ , onda je  $B = BI = B(AC) = (BA)C = IC = C$ . Taj jedinstveni operator  $B$  zove se **invers** operatora  $A$  i označava sa  $A^{-1}$ . Poznavanje minimalnog polinoma operatora  $A$  omogućuje da odmah ustanovimo da li je operator  $A$  invertibilan ili nije i ako jest, da izračunamo invers  $A^{-1}$ :

**Teorem 3.2** *Neka je  $V$  konačnodimenzionalan vektorski prostor,  $A \in L(V)$  i neka je*

$$\mu_A(\lambda) = \lambda^m - \mu_1\lambda^{m-1} - \dots - \mu_{m-1}\lambda - \mu_m$$

*njegov minimalni polinom. Operator  $A$  je invertibilan ako i samo ako je  $\mu_A(0) \neq 0$ , tj. ako i samo ako je  $\mu_m \neq 0$ . U tom slučaju je*

$$A^{-1} = \frac{1}{\mu_m}A^{m-1} - \frac{\mu_1}{\mu_m}A^{m-2} - \dots - \frac{\mu_{m-2}}{\mu_m}A - \frac{\mu_{m-1}}{\mu_m}I. \quad (3.2)$$

*Dakle,  $A^{-1}$  je polinom od  $A$ , tj.  $A^{-1} \in \mathcal{L}(A)$ .*

**Dokaz:** Pretpostavimo da je operator  $A$  invertibilan. Treba dokazati da je tada  $\mu_m \neq 0$ . Pretpostavimo suprotno, tj. da je  $\mu_m = 0$ . Tada iz (3.1) nalazimo da je

$$A^m - \mu_1A^{m-1} - \dots - \mu_{m-2}A^2 - \mu_{m-1}A = 0.$$

Budući da je  $A^k \cdot A^{-1} = A^{k-1} \forall k \in \mathbb{N}$ , iz gornje jednakosti množenjem sa  $A$  dobivamo:

$$A^{m-1} - \mu_1A^{m-2} - \dots - \mu_{m-2}A - \mu_{m-1}I = 0.$$

No to je nemoguće, jer su operatori  $I, A, \dots, A^{m-1}$  linearno nezavisni. Ova kontradikcija pokazuje da je pretpostavka da je  $\mu_m = 0$  nemoguća, pa zaključujemo da je  $\mu_m \neq 0$ .

Dokažimo sada obrnutu implikaciju. Pretpostavimo da je  $\mu_m \neq 0$ . Tada iz (3.1) slijedi

$$I = \frac{1}{\mu_m}A^m - \frac{\mu_1}{\mu_m}A^{m-1} - \dots - \frac{\mu_{m-2}}{\mu_m}A^2 - \frac{\mu_{m-1}}{\mu_m}A.$$

Stavimo li

$$B = \frac{1}{\mu_m}A^{m-1} - \frac{\mu_1}{\mu_m}A^{m-2} - \dots - \frac{\mu_{m-2}}{\mu_m}A - \frac{\mu_{m-1}}{\mu_m}I$$

iz gornje jednakosti slijedi da je  $AB = BA = I$ . Dakle,  $A$  je invertibilan i  $A^{-1} = B$ , tj. vrijedi (3.2).

Time je teorem u potpunosti dokazan.

Primijetimo da je operator  $A \in L(V)$  invertibilan ako i samo ako je  $A$  bijekcija, tj. ako i samo ako je  $A$  izomorfizam prostora  $V$  na samoga sebe. Zbog teorema 2.3 o rang i defektu ( $r(A) + d(A) = \dim V$ ) znamo da je  $A$  bijekcija ako i samo ako je  $A$  injekcija, tj. ako i samo ako je  $N(A) = \{0\}$ .

Za konačnodimenzionalan vektorski prostor  $V$  i za  $A \in L(V)$  definiramo

**spektar**  $\sigma(A)$  operatora  $A$  kao skup svih skalara  $\lambda_0 \in K$  takvih da operator  $A - \lambda_0 I$  nije invertibilan:

$$\sigma(A) = \{ \lambda_0 \in K; A - \lambda_0 I \text{ nije invertibilan} \}.$$

Nadalje, skalar  $\lambda_0 \in K$  zove se **svojstvena vrijednost** operatora  $A$  ako postoji vektor  $v \neq 0$  takav da je  $Av = \lambda_0 v$ . Svaki se takav vektor  $v$  zove **svojstveni vektor** operatora  $A$  za svojestvenu vrijednost  $\lambda_0$ .

**Propozicija 3.1** *Neka je  $V$  konačnodimenzionalan vektorski prostor i  $A \in L(V)$ . Spektar  $\sigma(A)$  operatora  $A$  je skup svih svojestvenih vrijednosti tog operatora.*

**Dokaz:** Doista, imamo redom:

$$\begin{aligned} \lambda_0 \in \sigma(A) &\iff A - \lambda_0 I \text{ nije invertibilan} \iff N(A - \lambda_0 I) \neq \{0\} \iff \\ &\iff \exists v \neq 0 \text{ takav da je } (A - \lambda_0 I)v = 0 \iff \exists v \neq 0 \text{ takav da je } Av = \lambda_0 v. \end{aligned}$$

**Teorem 3.3** *Neka je  $V$  konačnodimenzionalan vektorski prostor i  $A \in L(V)$ . Tada je spektar operatora  $A$  skup svih nultočaka njegovog minimalnog polinoma.*

**Dokaz:** Spektar  $\sigma(A)$  operatora  $A$  je skup svih  $\lambda_0 \in K$  takvih da operator  $A - \lambda_0 I$  nije invertibilan. U teoremu 3.2 ustanovili smo kriterij invertibilnosti linearnog operatora, pa nalazimo

$$\sigma(A) = \{ \lambda_0 \in K; \mu_{A - \lambda_0 I}(0) = 0 \}.$$

Cilj nam je ustanoviti vezu minimalnog polinoma  $\mu_{A - \lambda_0 I}(\lambda)$  operatora  $A - \lambda_0 I$  s minimalnim polinomom  $\mu_A(\lambda)$  operatora  $A$ .

Po binomnoj formuli imamo za svaku potenciju  $k$ :

$$\begin{aligned} (A - \lambda_0 I)^k &= \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} A^j (-\lambda_0 I)^{k-j} = \sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} \binom{k}{j} \lambda_0^{k-j} A^j = \\ &= A^k - k\lambda_0 A^{k-1} + \binom{k}{2} \lambda_0^2 - \dots + (-1)^k \lambda_0^k I. \end{aligned}$$

Prema tome je  $(A - \lambda_0 I)^k \in \mathcal{L}(A) \forall k \geq 0$ , pa zaključujemo da vrijedi inkluzija  $\mathcal{L}(A - \lambda_0 I) \subseteq \mathcal{L}(A)$ . Ako stavimo  $B = A - \lambda_0 I$ , onda je  $A = B + \lambda_0 I$  pa sasvim analogno imamo i obrnutu inkluziju  $\mathcal{L}(A) \subseteq \mathcal{L}(B) = \mathcal{L}(A - \lambda_0 I)$ . Iz dvije inkluzije slijedi jednakost  $\mathcal{L}(A - \lambda_0 I) = \mathcal{L}(A)$ . Prema tvrdnji (b) teorema 3.1 zaključujemo da je  $\deg \mu_B(\lambda) = \deg \mu_A(\lambda)$ . Označimo taj stupanj sa  $m$  i neka je

$$\mu_A(\lambda) = \lambda^m - \mu_1 \lambda^{m-1} - \dots - \mu_{m-1} \lambda - \mu_m.$$

Definiramo polinom  $P(\lambda)$  sa

$$P(\lambda) = \mu_A(\lambda + \lambda_0) = (\lambda + \lambda_0)^m - \mu_1 (\lambda + \lambda_0)^{m-1} - \dots - \mu_{m-1} (\lambda + \lambda_0) - \mu_m.$$

Tada je  $P(\lambda)$  polinom stupnja  $m$  i ako u njega uvrstimo operator  $B = A - \lambda_0 I$ , nalazimo

$$P(B) = \mu_A(B + \lambda_0 I) = \mu_A(A) = 0.$$

Prema tvrdnji (c) teorema 3.1 polinom  $P(\lambda)$  djeljiv je s polinomom  $\mu_B(\lambda)$ . Međutim, oba polinoma su stupnja  $m$  i normirani su, tj. koeficijent uz najvišu potenciju  $\lambda^m$  jednak je 1. Odatle slijedi da je  $\mu_{A-\lambda_0 I}(\lambda) = \mu_B(\lambda) = P(\lambda)$ . Posebno,  $\mu_{A-\lambda_0 I}(0) = P(0) = \mu_A(\lambda_0)$ . Dakle, slijedi tvrdnja teorema:

$$\sigma(A) = \{\lambda_0 \in K; \mu_{A-\lambda_0 I}(0) = 0\} = \{\lambda_0 \in K; \mu_A(\lambda_0) = 0\}.$$

Prije smo uočili da za svaki  $A \in L(V)$  stupanj njegovog minimalnog polinoma  $\mu_A(\lambda)$  nije veći od  $(\dim V)^2$ , štoviše da u slučaju  $\dim V \geq 2$  vrijedi čak i  $\deg \mu_A(\lambda) < (\dim V)^2$ . U stvari, vrijedi znatno točnija nejednakost:

**Teorem 3.4** *Neka je  $V$  konačnodimenzionalan vektorski prostor i  $A \in L(V)$ . Tada je*

$$\deg \mu_A(\lambda) \leq \dim V.$$

**Dokaz** ćemo provesti matematičkom indukcijom u odnosu na  $\dim V$ .

Baza indukcije: Ako je  $\dim V = 1$ , onda je  $(\dim V)^2 = \dim V$ , pa je tvrdnja teorema trivijalna jer slijedi iz poznate nam nejednakosti  $\deg \mu_A(\lambda) \leq (\dim V)^2$ .

Korak indukcije: Neka je  $n \geq 2$  i pretpostavimo da je teorem dokazan ako je  $\dim V \leq n-1$ . Neka je  $\dim V = n$  i neka je  $v \in V, v \neq 0$ . Promatramo niz vektora  $v, Av, A^2v, A^3v, \dots$ . Budući da je dimenzija prostora jednaka  $n$ , u tom nizu ne može biti više od  $n$  linearno nezavisnih vektora. Prema tome, za neki  $m \leq n$  vektori  $v, Av, \dots, A^{m-1}v$  su linearno nezavisni, a vektori  $v, Av, \dots, A^{m-1}v, A^m v$  su linearno zavisni. To znači da je  $m$  najmanji broj takav da je vektor  $A^m v$  linearna kombinacija prethodnih vektora u promatranom nizu:

$$A^m v = \alpha_1 A^{m-1} v + \alpha_2 A^{m-2} v + \dots + \alpha_{m-1} Av + \alpha_m v. \quad (3.3)$$

Stavimo

$$W = [\{v, Av, \dots, A^{m-1}v\}].$$

Budući da su vektori  $v, Av, \dots, A^{m-1}v$  linearno nezavisni, oni tvore bazu potprostora  $W$ , dakle  $\dim W = m$ . Bilo koji vektor  $w \in W$  je linearna kombinacija vektora baze:

$$w = \beta_1 A^{m-1} v + \beta_2 A^{m-2} v + \dots + \beta_{m-1} Av + \beta_m v.$$

Djelujemo li operatorom  $A$  na vektor  $w$ , dobivamo

$$Aw = \beta_1 A^m v + \beta_2 A^{m-1} v + \dots + \beta_{m-1} A^2 v + \beta_m Av.$$

Pomoću jednakosti (3.3) odatle vidimo da je  $Aw \in W$ . Na taj način smo dokazali:

$$w \in W \quad \implies \quad Aw \in W. \quad (3.4)$$



Definiramo sada polinom  $P(\lambda)$  pomoću koeficijenata iz (3.3) :

$$P(\lambda) = \lambda^m - \alpha_1 \lambda^{m-1} - \dots - \alpha_{m-1} \lambda - \alpha_m.$$

Prema (3.3) vidimo da je  $P(A)v = 0$ . Djelujemo li na tu jednakost bilo kojom potencijom  $A^k$  operatora  $A$ , zbog činjenice da operatori  $A^k$  i  $P(A)$  komutiraju nalazimo  $P(A)A^k v = 0$ . Kako vektori oblika  $A^k v$  razapinju potprostor  $W$ , zaključujemo da vrijedi

$$P(A)w = 0 \quad \forall w \in W. \quad (3.5)$$

Razmatrat ćemo sada odvojeno dvije mogućnosti.

(a)  $m = n$ . Tada je  $W = V$  pa slijedi  $P(A) = 0$ . Iz teorema 3.1 sada slijedi da je

$$\deg \mu_A(\lambda) \leq \deg P(\lambda) = m = n,$$

pa je u tom slučaju dokazana tvrdnja teorema.

(b)  $m < n$ . Promatramo tada kvocijentni prostor  $U = V/W$  i definiramo linearni operator  $B : U \rightarrow U$  relacijom

$$B(x + W) = Ax + W, \quad x \in V.$$

Ova definicija ima smisla, jer desna strana ne ovisi o izboru predstavnika  $x$  klase  $x + W \in U$ . Doista, ako su  $x, y \in V$  takvi da je  $x + W = y + W$ , onda je  $x - y \in W$ , pa iz (3.4) slijedi  $Ax - Ay = A(x - y) \in W$ , dakle  $Ax + W = Ay + W$ .

Budući da je  $\dim U = \dim V - \dim W = n - m < n$ , po pretpostavci indukcije teorem vrijedi za prostor  $U$  i operator  $B$ . Dakle,

$$\deg \mu_B(\lambda) \leq n - m. \quad (3.6)$$

Iz definicije operatora  $B$  slijedi da je  $B^2(x + W) = B(Ax + W) = A^2x + W$ . U stvari, indukcijom po  $k$  nalazimo da je  $B^k(x + W) = A^k x + W \quad \forall k \in \mathbb{N}$  i  $\forall x \in V$ . Kako je polinom operatora linearna kombinacija potencija tog operatora, odatle slijedi da za svaki polinom  $Q(\lambda)$  vrijedi

$$Q(B)(x + W) = Q(A)x + W, \quad x \in V.$$

Kako je  $\mu_B(B) = 0$ , odatle zaključujemo

$$\mu_B(A)x + W = 0 \text{ u prostoru } U = V/W \implies \mu_B(A)x \in W \quad \forall x \in V.$$

Odatle i iz (3.5) slijedi  $P(A)\mu_B(A)x = 0 \quad \forall x \in V$ , odnosno  $P(A)\mu_B(A) = 0$ . Sada iz teorema 3.1 i iz (3.6) zaključujemo da je

$$\deg \mu_A(\lambda) \leq \deg [P(\lambda)\mu_B(\lambda)] = \deg P(\lambda) + \deg \mu_B(\lambda) \leq m + (n - m) = n.$$

Time je proveden korak indukcije, pa je teorem u potpunosti dokazan.

Na potpuno isti način kao za linearan operator definiramo minimalni polinom kvadratne matrice  $A \in M_n(K)$ : promatramo niz matrica  $I, A, A^2, \dots$  i uočimo najmanji  $m$  takav da je  $A^m$  linearna kombinacija nižih potencija matrice  $A$ :

$$A^m = \mu_1 A^{m-1} + \mu_2 A^{m-2} + \dots + \mu_{m-1} A + \mu_m I.$$

Minimalni polinom matrice  $A$  tada je

$$\mu_A(\lambda) = \lambda - \mu_1 \lambda^{m-1} - \dots - \mu_{m-1} \lambda - \mu_m.$$

Podsjetimo se definicije i svojstava determinante. Determinanta je funkcija  $\det : M_n(K) \rightarrow K$  definirana na skupu  $M_n(K)$  svih kvadratnih matrica  $n$ -tog reda. Determinanta svakoj matrici  $A$ , s elementima  $\alpha_{ij}$ ,  $1 \leq i, j \leq n$ , pridružuje skalar  $\det A$  definiran formulom:

$$\det A = \sum_{\sigma \in S(n)} \varepsilon(\sigma) \alpha_{1, \sigma(1)} \alpha_{2, \sigma(2)} \cdots \alpha_{n, \sigma(n)} = \sum_{\sigma \in S(n)} \varepsilon(\sigma) \alpha_{\sigma(1), 1} \alpha_{\sigma(2), 2} \cdots \alpha_{\sigma(n), n}.$$

Pri tome je  $S(n)$  grupa permutacija skupa  $\{1, 2, \dots, n\}$ , a  $\varepsilon(\sigma)$  je jednako 1 za parnu a  $-1$  za neparnu permutaciju  $\sigma$ . Determinanta ima sljedeća svojstva:

- (1) Ako je neki stupac (ili redak) matrice  $A$  sastavljen od samih nula, onda je  $\det A = 0$ .
- (2) Ako je matrica  $B$  dobivena iz matrice  $A$  zamjenom dvaju stupaca (ili dvaju redaka), onda je  $\det B = -\det A$ .
- (3) Ako je  $A$  gornjetrokutasta (ili donjetrokutasta) matrica kojoj su dijagonalni elementi  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ , onda je  $\det A = \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_n$ .
- (4) Ako je matrica  $B$  dobivena iz matrice  $A$  tako da su svi elementi nekog stupca (ili retka) pomnoženi istim skalarom  $\alpha$ , onda je  $\det B = \alpha \det A$ .
- (5) Ako je matrica  $B$  dobivena iz matrice  $A$  tako da je nekom stupcu dodan drugi stupac pomnožen bilo kojim skalarom  $\alpha$  (ili je nekom retku dodan drugi redak pomnožen s  $\alpha$ ), onda je  $\det B = \det A$ .
- (6) Za transponiranu matricu  $A^t$  matrice  $A$  vrijedi  $\det A^t = \det A$ .

Za kvadratnu matricu  $A \in M_n(K)$  s elementima  $\alpha_{ij}$  ( $i, j = 1, 2, \dots, n$ ) njena **adjunkta** je kvadratna matrica  $\tilde{A} \in M_n(K)$  čiji je element na presjecištu  $k$ -tog retka i  $i$ -tog stupca jednak  $\beta_{ki} = (-1)^{i+k} \det A_{ik}$ , a  $A_{ik}$  je matrica iz  $M_{n-1}(K)$  koja se iz matrice  $A$  dobiva brisanjem  $i$ -tog retka i  $k$ -tog stupca.

- (7) Vrijedi  $\tilde{A}A = A\tilde{A} = (\det A)I$ , odnosno

$$\sum_{k=1}^n (-1)^{i+k} \alpha_{jk} \det A_{ik} = \delta_{ij} \det A, \quad i, j \in \{1, 2, \dots, n\},$$

$$\sum_{k=1}^n (-1)^{i+k} \alpha_{kj} \det A_{ki} = \delta_{ij} \det A, \quad i, j \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

Prva od gornjih jednakosti predstavlja tzv. *razvoj determinante po  $j$ -tom retku* matrice  $A$ , a druga *razvoj po  $j$ -tom stupcu* te matrice.

Pored svojstava (1) – (7) vrijedi i tzv. Binnet-Cauchyjev teorem:

**Teorem 3.5** *Za matrice  $A, B \in M_n(K)$  je  $\det(AB) = (\det A)(\det B)$ .*

Iz tog teorema i iz svojstva (7) slijedi:

**Korolar 3.1** *Matrica  $A$  je regularna ako i samo ako je  $\det A \neq 0$ . U tom slučaju je  $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \tilde{A}$ .*

**Dokaz:** Ako je  $A$  regularna, iz  $AA^{-1} = I$  zbog teorema 3.5 slijedi

$$(\det A)(\det A^{-1}) = \det I = 1.$$

Prema tome je  $\det A \neq 0$ .

Pretpostavimo sada da je  $\det A \neq 0$  i stavimo

$$B = \frac{1}{\det A} \tilde{A}.$$

Tada iz svojstva (7) slijedi  $BA = AB = I$ , dakle  $A$  je regularna i  $A^{-1} = B$ .

Za kvadratnu matricu  $A = [\alpha_{ij}] \in M_n(K)$  definiramo polinom

$$\kappa_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - \alpha_{11} & -\alpha_{12} & \cdots & -\alpha_{1n} \\ -\alpha_{21} & \lambda - \alpha_{22} & \cdots & -\alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\alpha_{n1} & -\alpha_{n2} & \cdots & \lambda - \alpha_{nn} \end{vmatrix}.$$

$\kappa_A(\lambda)$  se zove **svojstveni** (ili **karakteristični**) **polinom** matrice  $A$ . Ako je  $A \in M_n(K)$ , njen svojstveni polinom  $\kappa_A(\lambda)$  je normiran i  $\deg \kappa_A(\lambda) = n$ :

$$\kappa_A(\lambda) = \lambda^n - \sigma_1 \lambda^{n-1} - \cdots - \sigma_{n-2} \lambda^2 - \sigma_{n-1} \lambda - \sigma_n.$$

**Teorem 3.6 (Hamilton-Cayley)** *Svaka matrica  $A \in M_n(K)$  poništava svoj svojstveni polinom:  $\kappa_A(A) = 0$ .*

**Dokaz:** Označimo sa  $B(\lambda)$  adjunkt matrice  $\lambda I - A$ . Po definiciji adjunkte je

$$B(\lambda) = \begin{bmatrix} \beta_{11}(\lambda) & \beta_{12}(\lambda) & \cdots & \beta_{1n}(\lambda) \\ \beta_{21}(\lambda) & \beta_{22}(\lambda) & \cdots & \beta_{2n}(\lambda) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_{n1}(\lambda) & \beta_{n2}(\lambda) & \cdots & \beta_{nn}(\lambda) \end{bmatrix},$$

pri čemu je  $\beta_{ij}(\lambda) = (-1)^{i+j} \det(\lambda I - A)_{ji}$ , a  $(\lambda I - A)_{ji}$  je kvadratna matrica reda  $n-1$  koja se iz matrice  $\lambda I - A$  dobije brisanjem  $j$ -tog retka i  $i$ -tog stupca. Stoga je svaki matrični element  $\beta_{ij}(\lambda)$  polinom stupnja  $\leq n-1$ :

$$\beta_{ij}(\lambda) = \alpha_{ij;n-1} \lambda^{n-1} + \alpha_{ij;n-2} \lambda^{n-2} + \cdots + \alpha_{ij;2} \lambda^2 + \alpha_{ij;1} \lambda + \alpha_{ij;0}.$$

Prema tome, možemo pisati

$$B(\lambda) = \lambda^{n-1}A_{n-1} + \lambda^{n-2}A_{n-2} + \cdots + \lambda^2A_2 + \lambda A_1 + A_0,$$

uz oznaku

$$A_k = \begin{bmatrix} \alpha_{11;k} & \alpha_{12;k} & \cdots & \alpha_{1n;k} \\ \alpha_{21;k} & \alpha_{22;k} & \cdots & \alpha_{2n;k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1;k} & \alpha_{n2;k} & \cdots & \alpha_{nn;k} \end{bmatrix}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Prema svojstvu (7) primijenjenom na matricu  $\lambda I - A$  nalazimo da vrijedi

$$(\lambda I - A) \cdot B(\lambda) = \det(\lambda I - A) \cdot I,$$

tj.

$$\begin{aligned} (\lambda I - A) \cdot (\lambda^{n-1}A_{n-1} + \lambda^{n-2}A_{n-2} + \cdots + \lambda^2A_2 + \lambda A_1 + A_0) = \\ = (\lambda^n - \sigma_1\lambda^{n-1} - \cdots - \sigma_{n-2}\lambda^2 - \sigma_{n-1}\lambda - \sigma_n) \cdot I. \end{aligned}$$

Ako su dva polinoma jednaka onda su im jednaki odgovarajući koeficijenti pa iz gornje jednakosti dobivamo sljedećih  $n+1$  jednakosti koeficijenata uz potencije  $\lambda^n, \lambda^{n-1}, \lambda^{n-2}, \dots, \lambda^j, \dots, \lambda^1, \lambda^0$ :

$$\begin{aligned} A_{n-1} &= I, \\ -AA_{n-1} + A_{n-2} &= -\sigma_1 I, \\ -AA_{n-2} + A_{n-3} &= -\sigma_2 I, \\ &\vdots \\ -AA_{n-j} + A_{n-j-1} &= -\sigma_j I, \\ &\vdots \\ -AA_1 + A_0 &= -\sigma_{n-1} I, \\ -AA_0 &= -\sigma_n I. \end{aligned}$$

Iz prvih  $n$  gornjih jednakosti dobivamo redom:

$$\begin{aligned} A_{n-1} &= I, \\ A_{n-2} &= A - \sigma_1 I, \\ A_{n-3} &= A^2 - \sigma_1 A - \sigma_2 I, \\ &\vdots \\ A_{n-j-1} &= A^j - \sigma_1 A^{j-1} - \cdots - \sigma_{j-1} A - \sigma_j I, \\ &\vdots \\ A_0 &= A^{n-1} - \sigma_1 A^{n-2} - \cdots - \sigma_{n-2} A - \sigma_{n-1} I. \end{aligned}$$

Posljednja od prethodnih  $n+1$  jednakosti može se napisati  $AA_0 - \sigma_n I = 0$  i uvrstimo li u nju gornji izraz za  $A_0$  dobivamo upravo tvrdnju teorema:

$$A^n - \sigma_1 A^{n-1} - \cdots - \sigma_{n-1} A - \sigma_n I = 0.$$

Neka je  $V$  konačnodimenzionalan vektorski prostor,  $A \in L(V)$ , i neka su  $e$  i  $e'$  dvije baze od  $V$ . Označimo sa  $S \in GL(V)$  operator prijelaza iz baze  $e$  u bazu  $e'$  (dakle,  $Se_j = e'_j, 1 \leq j \leq n$ ). Tada po propoziciji 2.4 za matrice operatora  $A$  u te dvije baze vrijedi  $A(e') = S(e)^{-1}A(e)S(e)$ . Po Binnet-Cauchyjevom teoremu 3.5 slijedi

$$\det A(e') = (\det(S(e)^{-1})) \cdot (\det A(e)) \cdot (\det S(e)).$$

Zbog  $S(e)^{-1}S(e) = I$  imamo  $(\det(S(e)^{-1})) \cdot (\det S(e)) = \det I = 1$ , pa iz gornje jednakosti dobivamo

$$\det A(e') = \det A(e).$$

Drugim riječima, determinanta matrice operatora ne ovisi o izboru baze. Stoga pojam determinante možemo proširiti i na operatore i definirati **determinantu operatora**:

$$\det A = \det A(e), \quad A \in L(V), \quad e \text{ bilo koja baza prostora } V.$$

Iz teorema 3.5 i njegovoga korolara 3.1 neposredno slijedi:

**Teorem 3.7** *Neka je  $V$  konačnodimenzionalan vektorski prostor i  $A, B \in L(V)$ .*

- (a) *Vrijedi  $\det(AB) = (\det A)(\det B)$ .*
- (b) *Operator  $A$  je regularan, tj.  $A \in GL(V)$ , ako i samo ako je  $\det A \neq 0$ .*

Uz oznake prije teorema 3.7 imamo:

$$\lambda I - A(e') = \lambda I - S(e)^{-1}A(e)S(e) = S(e)^{-1}(\lambda I - A(e))S(e).$$

Oдавde slijedi  $\kappa_{A(e)}(\lambda) = \kappa_{A(e')}(\lambda)$ , dakle svojstveni polinom matrice operatora ne ovisi o tome koju smo bazu odabrali. Stoga možemo definirati **svojstveni (ili karakteristični) polinom operatora**:

$$\kappa_A(\lambda) = \kappa_{A(e)}(\lambda), \quad A \in L(V), \quad e \text{ bilo koja baza prostora } V.$$

**Teorem 3.8** *Neka je  $V$  konačnodimenzionalan vektorski prostor i  $A \in L(V)$ .*

- (a)  $\kappa_A(A) = 0$ .
- (b) *Svojstveni polinom  $\kappa_A(\lambda)$  djeljiv je s minimalnim polinomom  $\mu_A(\lambda)$ .*
- (c)  $\sigma(A) = \{\lambda \in K; \kappa_A(\lambda) = 0\}$ .

**Dokaz:** Tvrdnja (a) slijedi iz teorema 3.6, a tvrdnja (b) je neposredna posljedica te tvrdnje (a) i tvrdnje (c) teorema 3.1. Napokon, zbog tvrdnje (b) teorema 3.7 imamo redom:

$$\lambda \in \sigma(A) \iff \lambda I - A \notin GL(V) \iff \det(\lambda I - A) = 0 \iff \kappa_A(\lambda) = 0.$$

Time je i tvrdnja (c) dokazana.



## Poglavlje 4

# Invarijantni potprostori

Neka je  $V$  vektorski prostor nad poljem  $K$  i  $A \in L(V)$ . **Potprostor**  $W \leq V$  zove se  **$A$ -invarijantan** (ili **potprostor invarijantan s obzirom na operator  $A$** ) ako vrijedi

$$w \in W \quad \implies \quad Aw \in W,$$

odnosno ako je  $AW \subseteq W$ .

Pretpostavimo da je  $W$  jednodimenzionalan  $A$ -invarijantan potprostor od  $V$ . Za bilo koji  $w \in W, w \neq 0$ , je tada  $W = [\{w\}] = \{\lambda w; \lambda \in K\}$ .  $Aw \in [\{w\}]$  znači da postoji  $\lambda \in K$  takav da je  $Aw = \lambda w$ . Dakle, tada su svi vektori iz  $W$  svojstveni vektori operatora  $A$ .

Za  $\lambda \in \sigma(A)$  upotrebljavat ćemo oznaku:

$$V_\lambda(A) = N(\lambda I - A) = \{v \in V; Av = \lambda v\}.$$

Dakle,  $V_\lambda(A)$  je potprostor koji se sastoji od svih svojstvenih vektora operatora  $A$  za svojstvenu vrijednost  $\lambda$ .

Ako je  $W$   $A$ -invarijantni potprostor od  $V$ , onda je restrikcija  $A|W \in L(W)$ . Očito je  $W_\lambda(A|W) = W \cap V_\lambda(A)$  i  $\sigma(A|W) \subseteq \sigma(A)$ . Precizno:

$$\sigma(A|W) = \{\lambda \in \sigma(A); W \cap V_\lambda(A) \neq \{0\}\}.$$

Pretpostavimo da je  $V = V_1 \dot{+} V_2$ , pri čemu su  $V_1$  i  $V_2$   $A$ -invarijantni potprostori od  $V$ . Ako je  $e' = \{e_1, e_2, \dots, e_k\}$  baza od  $V_1$  i  $e'' = \{e_{k+1}, e_{k+2}, \dots, e_n\}$  baza od  $V_2$ , onda je  $e = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  baza od  $V$ . Nadalje, matrica  $A(e)$  ima u gornjem lijevom dijelu matricu  $(A|V_1)(e')$ , u donjem desnom dijelu matricu  $(A|V_2)(e'')$ , a ostali elementi su svi jednaki nuli:

$$A(e) = \begin{bmatrix} (A|V_1)(e') & \vdots & 0 \\ \dots\dots\dots & \vdots & \dots\dots\dots \\ 0 & \vdots & (A|V_2)(e'') \end{bmatrix}$$

Općenitije, ako je  $V = V_1 \dot{+} V_2 \dot{+} \dots \dot{+} V_s$ , pri čemu su svi potprostori  $V_j$  ( $j = 1, 2, \dots, s$ )  $A$ -invarijantni, neka je za svako  $j \in \{1, 2, \dots, s\}$   $e^{(j)}$  baza od  $V_j$ . Neaka je  $e$  baza složena redom od tih baza  $e^{(1)}, e^{(2)}, \dots, e^{(s)}$ . Tada matrica  $A(e)$  ima redom na dijagonali od gornjeg lijevog do donjeg desnog kuta matrice  $(A | V_1)(e^{(1)}), (A | V_2)(e^{(2)}), \dots, (A | V_s)(e^{(s)})$ , a sve ostalo su nule. Posebno, matrica operatora  $A$  je tim jednostavnija i tim je lakše s njom računati čim je finiji rastav prostora  $V$  u direktnu sumu  $A$ -invarijantnih potprostora. Najjednostavnije je ako su svi potprostori jednodimenzionalni. Tada se odgovarajuća baza  $e$  sastoji od svojstvenih vektora operatora  $A$  i  $A(e)$  je dijagonalna matrica sa svojstvenim vrijednostima na dijagonali.

Neka je  $V = X \dot{+} Y$ . Tada se svaki vektor  $v \in V$  može na jedinstven način napisati u obliku  $v = x + y$ ,  $x \in X$ ,  $y \in Y$ . Stoga možemo definirati  $P : V \rightarrow V$  relacijom  $P(v) = x$ . Očito je

$$P \in L(V), \quad R(P) = X, \quad N(P) = Y.$$

Nadalje,

$$X = R(P) = \{v \in V; Pv = v\}.$$

Tako definiran linearan operator  $P$  zove se **projektor** prostora  $V$  na potprostor  $X$  duž potprostora  $Y$ .

**Propozicija 4.1** Operator  $P \in L(V)$  je projektor ako i samo ako je  $P^2 = P$ . Tada je  $V = R(P) \dot{+} N(P)$  i  $P$  je projektor na  $R(P)$  duž  $N(P)$ .

**Dokaz:** Pretpostavimo da je  $P$  projektor na  $X$  duž  $Y$ . Tada je  $V = X \dot{+} Y$  i vrijedi  $X = R(P)$  i  $Y = N(P)$ . Za  $x \in X$  je  $Px = x$ . Prema tome, za  $v = x + y$ ,  $x \in X$ ,  $y \in Y$ , imamo

$$P^2v = Px = x = Pv.$$

To pokazuje da je  $P^2v = Pv \forall v \in V$ , dakle  $P^2 = P$ .

Obratno, pretpostavimo sada da je  $P^2 = P$  i dokažimo da je  $P$  projektor na  $R(P)$  duž  $N(P)$ . Neka je  $v \in R(P) \cap N(P)$ . Tada je  $Pv = 0$  i  $v = Pw$  za neki  $w \in V$ . Slijedi

$$0 = Pv = P^2w = Pw = v.$$

Dakle,  $R(P) \cap N(P) = \{0\}$  pa je suma potprostora  $R(P)$  i  $N(P)$  direktna. Za svaki  $v \in V$  možemo pisati  $v = Pv + (v - Pv)$ ; imamo  $Pv \in R(P)$  i

$$P(v - Pv) = Pv - P^2v = Pv - Pv = 0,$$

dakle  $v - Pv \in N(P)$ . Time je dokazano  $V = R(P) \dot{+} N(P)$ . Za  $x \in R(P)$  je  $x = Pz$  za neki  $z \in V$ , pa je  $Px = P^2z = Pz = x$ . Stoga za  $v \in V$ ,  $v = x + y$ ,  $x \in R(P)$ ,  $y \in N(P)$ , imamo  $Pv = Px + Py = x$ . Time je dokazano da je  $P$  projektor na  $R(P)$  duž  $N(P)$ .

Ako je  $P$  projektor onda je  $(I - P)^2 = I - 2P + P^2 = I - P$ , dakle  $I - P$  je projektor. Očito je  $R(I - P) = N(P)$  i  $N(I - P) = R(P)$ . Dakle, ako je  $P$  projektor na  $X$  duž  $Y$ , onda je  $I - P$  projektor na  $Y$  duž  $X$ .



**Propozicija 4.2** *Neka je  $A \in L(V)$  i  $W \leq V$  i neka je  $P \in L(V)$  neki projektor prostora  $V$  na potprostor  $W$ . Potprostor  $W$  je  $A$ -invarijantan ako i samo ako je  $AP = PAP$ .*

**Dokaz:** Pretpostavimo da je potprostor  $W$   $A$ -invarijantan. Neka je  $P$  projektor na  $W$  duž nekog potprostora  $U$  (naravno, takvog da je  $V = W \dot{+} U$ ) i neka je  $v \in V$ . Neka su  $w \in W$  i  $u \in U$  takvi da je  $v = w + u$ . Tada je  $Pv = w$ , pa je  $APv = Aw$ . Međutim, po pretpostavci potprostor  $W$  je  $A$ -invarijantan pa je  $Aw \in W$ . Dakle, za svaki  $v \in V$  je  $APv \in W$ . Kako je

$$W = R(P) = \{x \in V; Px = x\}$$

zaključujemo da je  $PAPv = APv$ . To vrijedi za svaki  $v \in V$ , dakle,  $PAP = AP$ .

Pretpostavimo sada da je  $AP = PAP$ . Za  $w \in W = R(P)$  je  $Pw = w$ , pa zbog jednakosti  $AP = PAP$  zaključujemo

$$Aw = APw = PAPw \in R(P) = W.$$

Dakle, potprostor  $W$  je  $A$ -invarijantan.

**Propozicija 4.3** *Neka je  $A \in L(V)$ ,  $V = W \dot{+} U$ , i neka je  $P$  projektor na  $W$  duž  $U$ . Tada vrijedi  $AP = PA$  ako i samo ako su  $W$  i  $U$   $A$ -invarijantni.*

**Dokaz:** Ako su  $W$  i  $U$   $A$ -invarijantni, onda iz propozicije 4.2 slijedi

$$AP = PAP \quad \text{i} \quad A(I - P) = (I - P)A(I - P).$$

Iz druge jednakosti slijedi

$$A - AP = A - AP - PA + PAP, \quad \text{dakle} \quad PA = PAP.$$

Odatle i iz  $AP = PAP$  zaključujemo da vrijedi  $AP = PA$ .

Pretpostavimo da je  $AP = PA$ . Tada je  $PAP = AP^2 = AP$ , pa po propoziciji 4.2 zaključujemo da je potprostor  $W$   $A$ -invarijantan.  $I - P$  je projektor na  $U$  duž  $W$ . Imamo redom

$$(I - P)A(I - P) = A - PA - AP + PAP = A - PA = A - AP = A(I - P).$$

Stoga je i potprostor  $U$   $A$ -invarijantan.

Neka je

$$V = V_1 \dot{+} \dots \dot{+} V_s$$

i neka je  $P_i$  projektor na  $V_i$  duž potprostora

$$U_i = V_1 \dot{+} \dots \dot{+} V_{i-1} \dot{+} V_{i+1} \dot{+} \dots \dot{+} V_s.$$

Dakle, ako je  $v \in V$  i  $v = v_1 + \dots + v_s$ ,  $v_1 \in V_1, \dots, v_s \in V_s$ , onda je  $P_i v = v_i$ , pa slijedi

$$v = P_1 v + \dots + P_s v = (P_1 + \dots + P_s)v.$$

Kako to vrijedi za svaki  $v \in V$ , zaključujemo da je  $I = P_1 + \dots + P_s$ . Nadalje, za  $v \in V$  i za  $i \neq j$  imamo  $P_j v \in V_j \subseteq N(P_i)$ , dakle  $P_i P_j v = 0$ . To pokazuje da je  $P_i P_j = 0$  za  $i \neq j$ . Zajedno sa  $P_i^2 = P_i$  to možemo pisati ovako:

$$P_i P_j = \delta_{ij} P_i, \quad i, j \in \{1, 2, \dots, s\}.$$

Konačan niz operatora  $(P_1, \dots, P_s)$  sa svojstvima

$$I = P_1 + \dots + P_s, \quad P_i P_j = \delta_{ij} P_i \quad \forall i, j \in \{1, 2, \dots, s\}$$

zove se **dekompozicija jedinice**. U tom slučaju imamo rastav prostora  $V$  u direktnu sumu potprostora:

$$V = R(P_1) \dot{+} \dots \dot{+} R(P_s).$$

Nadalje, svi potprostori  $R(P_i)$  su  $A$ -invarijantni ako i samo ako operator  $A$  komutira sa svim projektorima  $P_1, \dots, P_s$ .

**Propozicija 4.4** *Ako operatori  $A, B \in L(V)$  komutiraju,  $AB = BA$ , onda su potprostori  $R(B)$  i  $N(B)$  invarijantni s obzirom na operator  $A$ .*

**Dokaz:** Ako je  $v \in N(B)$  onda imamo  $BAv = ABv = 0$ , dakle, vrijedi  $Av \in N(B)$ . Prema tome, potprostor  $N(B)$  je  $A$ -invarijantan.

Neka je  $v \in R(B)$  i neka je  $w \in V$  takav da je  $v = Bw$ . Tada je

$$Av = ABw = BA w \in R(B).$$

Dakle, i potprostor  $R(B)$  je  $A$ -invarijantan.

## Poglavlje 5

# Nilpotentni operatori

Neka je  $V$  vektorski prostor i  $A \in L(V)$  linearan operator.  $A$  se zove **nilpotentan operator** ako za neki prirodan broj  $k$  vrijedi  $A^k = 0$ . Naravno, tada je  $A^m = 0 \ \forall m \geq k$ . Najmanji prirodan broj  $p$  takav da je  $A^p = 0$  zove se **indeks nilpotentnosti** operatora  $A$ ; kažemo još da je operator  $A$  nilpotentan indeksa  $p$ . Naravno, vrijedi  $A^{p-1} \neq 0$ . Indeks nilpotentnosti ne može biti veći od dimenzije prostora  $V$ . To je neposredna posljedica sljedeće propozicije:

**Propozicija 5.1** *Neka je  $A \in L(V)$  nilpotentan operator indeksa  $p$  i neka je  $v \in V$  takav da je  $A^{p-1}v \neq 0$  (tj.  $v \in V \setminus N(A^{p-1})$ ). Tada su vektori  $v, Av, A^2v, \dots, A^{p-1}v$  linearno nezavisni.*

**Dokaz:** Neka je

$$\alpha_0 v + \alpha_1 Av + \alpha_2 A^2 v + \dots + \alpha_{p-1} A^{p-1} v = 0.$$

Ako na tu jednakost djelujemo s operatorom  $A^{p-1}$ , dobivamo

$$\alpha_0 A^{p-1} v + \alpha_1 A^p v + \alpha_2 A^{p+1} v + \dots + \alpha_{p-1} A^{2p-2} v = 0.$$

Međutim,  $A^j = 0$  za  $j = p, p+1, \dots, 2p-2$ , pa slijedi  $\alpha_0 A^{p-1} v = 0$ . Kako je  $A^{p-1} v \neq 0$ , zaključujemo da je  $\alpha_0 = 0$ . Sada slijedi

$$\alpha_1 Av + \alpha_2 A^2 v + \dots + \alpha_{p-1} A^{p-1} v = 0.$$

Na tu jednakost djelujemo s operatorom  $A^{p-2}$ . Slijedi  $\alpha_1 A^{p-1} v = 0$ , a odatle  $\alpha_1 = 0$ . Korak po korak primjenom operatora  $A^{p-3}, A^{p-4}, \dots, A$ , dobivamo da su  $\alpha_2 = 0, \alpha_3 = 0, \dots, \alpha_{p-1} = 0$  i time je propozicija dokazana.

Na svakom konačnodimenzionalnom vektorskom prostoru postoji nilpotentan operator indeksa  $n = \dim V$ . Doista, neka je  $e = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  baza od  $V$  i neka je  $A$  linearan operator na prostoru  $V$  zadan sa:

$$Ae_1 = 0, \quad Ae_j = e_{j-1} \quad \text{za } j = 2, \dots, n.$$

Tada je  $A^n = 0$  i  $A^{n-1}e_1 = e_n \neq 0$ , dakle  $A^{n-1} \neq 0$ . Prema tome  $A$  je operator indeksa  $n$ . Matrica operatora  $A$  u bazi  $e$ ,  $A(e) = [\alpha_{ij}]$  ima sve elementa jednake nuli osim  $n-1$  elemenata na prvoj gornjoj paraleli uz glavnu dijagonalu gdje su jedinice:  $\alpha_{ij} = 0$  za  $j \neq i+1$ ,  $\alpha_{i,i+1} = 1$  za  $i = 1, 2, \dots, n-1$ . Ta se matrica zove **elementarna Jordanova klijetka**  $n$ -tog reda i označava  $J_n$ :

$$J_n = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Ako je  $A \in L(V)$  bilo koji nilpotentan operator indeksa  $n = \dim V$ , izaberimo vektor  $v \in V$  takav da je  $A^{n-1}v \neq 0$ . Tada su po propoziciji 5.1 vektori  $v, Av, A^2v, \dots, A^{n-1}v$  linearno nezavisni. Budući da ih ima  $n$  oni tvore bazu od  $V$ . Numerirajmo ih u obrnutom redosljedju:  $e_j = A^{n-j}v$ ,  $1 \leq j \leq n$ . Tada je očito  $Ae_1 = 0$  i  $Ae_j = e_{j-1}$  za  $j = 2, \dots, n$ . Stoga je matrica operatora  $A$  u bazi  $e = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  upravo elementarna Jordanova klijetka  $n$ -tog reda:  $A(e) = J_n$ .

**Teorem 5.1** *Neka je  $A \in L(V)$  nilpotentan operator indeksa  $n = \dim V$ .*

- (a) *Postoji baza  $e$  od  $V$  takva da je  $A(e) = J_n$ .*  
 (b) *Ako je  $B \in L(V)$  takav da je  $AB = BA$ , onda postoji polinom  $P$  takav da je  $B = P(A)$ .*

**Dokaz:** Tvrdnja (a) dokazana je prije iskaza teorema. Dokažimo tvrdnju (b). Neka je  $e$  baza iz tvrdnje (a) i  $B(e) = [\beta_{ij}]$ . Izračunavanjem elemenata lijeve i desne strane matricne jednakosti  $J_n B(e) = B(e) J_n$  dobivamo:

$$\begin{aligned} \beta_{i+1,j} &= \beta_{i,j-1}, & 1 \leq i \leq n-1, & \quad 2 \leq j \leq n; \\ \beta_{i+1,1} &= 0, & 1 \leq i \leq n-1; & \quad 0 = \beta_{n,j-1}, \quad 2 \leq j \leq n. \end{aligned}$$

Oдавде slijedi:

$$\beta_{ij} = 0 \text{ za } i > j; \quad \beta_{1,j} = \beta_{2,j+1} = \dots = \beta_{n-j+1,n} \text{ za } j = 1, 2, \dots, n.$$

Dakle,  $B(e)$  je gornjetrokutasta matrica koja na glavnoj dijagonali ima sve elemente međusobno jednake, a isto vrijedi i za svaku paralelu iznad glavne dijagonale. Stavimo  $\beta_j = \beta_{1,j}$  za  $j = 1, 2, \dots, n$ . Uočimo da je  $(J_n)^j = A(e)^j$  matrica koja ima sve nule osim  $n-j$  elemenata na  $j$ -toj paraleli iznad glavne dijagonale gdje su jedinice. Slijedi

$$B(e) = \beta_1 I(e) + \beta_2 A(e) + \beta_3 A(e)^2 + \dots + \beta_n A(e)^{n-1}.$$

Dakle, ako definiramo polinom  $P(\lambda)$  s tim koeficijentima,

$$P = \beta_1 + \beta_2 \lambda + \beta_3 \lambda^2 + \dots + \beta_n \lambda^{n-1},$$

onda je  $B(e) = P(A(e))$ , dakle  $B(e) = P(A)(e)$ , dakle  $B = P(A)$ .

Ako je indeks nilpotentnosti operatora  $A \in L(V)$  manji od  $\dim V$ , onda se prostor rastavlja u direktnu sumu  $A$ -invarijantnih potprostora na način da su restrikcije operatora  $A$  na te potprostore nilpotentni operatori maksimalnih indeksa nilpotentnosti, tj. svaki je indeks nilpotentnosti jednak dimenziji odgovarajućeg invarijantnog potprostora. Precizno:

**Teorem 5.2** *Neka je  $A \in L(V)$  nilpotentan operator indeksa  $p < \dim V$ .*

- (a) *Postoje  $A$ -invarijantni potprostori  $V_1, V_2, \dots, V_s$  prostora  $V$  takvi da je  $V = V_1 \dot{+} V_2 \dot{+} \dots \dot{+} V_s$  i da je za svako  $j$  operator  $A_j = A|_{V_j}$  nilpotentan indeksa  $p_j = \dim V_j$ .*
- (b) *(Jedinstvenost) Broj potprostora u tom rastavu koji su dimenzije  $k$  jednak je*

$$r(A^{k+1}) + r(A^{k-1}) - 2r(A^k) \quad (A^0 = I).$$

**Dokaz:** (a) Dokaz ćemo provesti indukcijom po  $\dim V$ . Situacija  $\dim V = 1$  je nemoguća, jer bi indeks nilpotentnosti morao biti 0, a za svaki operator  $A$  je po dogovoru  $A^0 = I \neq 0$ .

Neka je  $\dim V = 2 \Rightarrow$  indeks nilpotentnosti je  $1 \Rightarrow A = 0$ . Tada svaki rastav prostora u direktnu sumu dva jednodimenzionalna potprostora zadovoljava tvrdnju. Time je baza indukcije dokazana.

Provedimo sada korak indukcije. Neka je  $n \geq 3$  i pretpostavimo da je tvrdnja (a) dokazana za sve vektorske prostore dimenzije manje od  $n$ . Neka je  $\dim V = n$ . Izaberimo  $v \in V$  takav da je  $A^{p-1}v \neq 0$ . Tada je  $p$ -dimenzionalan prostor razapet vektorima  $A^j v$ ,  $V_1 = [\{v, Av, A^2v, \dots, A^{p-1}v\}]$ ,  $A$ -invarijantan i restrikcija  $A_1 = A|_{V_1}$  je nilpotentan operator indeksa  $p_1 = p = \dim V_1$ .

Promatrajmo sada dualni prostor  $V'$  i dualni operator  $A'$ . Imamo

$$(A')^k = (A^k)',$$

pa vidimo da je  $A'$  nilpotentan operator istog indeksa  $p$ . Izaberimo  $f \in V'$  takav da je  $f(A^{p-1}v) \neq 0$ . Tada je

$$((A')^{p-1}f)(v) = f(A^{p-1}v) \neq 0,$$

dakle je  $(A')^{p-1}f \neq 0$ . Primjena propozicije 5.1 na operator  $A' \in L(V')$  i na  $f \in V'$  pokazuje da je potprostor

$$Y = [\{f, A'f, (A')^2f, \dots, (A')^{p-1}f\}],$$

prostora  $V'$   $p$ -dimenzionalan. Nadalje, očito je taj potprostor  $A'$ -invarijantan. Stavimo

$$\begin{aligned} X &= Y^0 = \{w \in V; g(w) = 0 \forall g \in Y\} = \\ &= \{w \in V; f(w) = (A'f)(w) = ((A')^2f)(w) = \dots = ((A')^{p-1}f)(w) = 0\} = \\ &= \{w \in V; f(w) = f(Aw) = f(A^2w) = \dots = f(A^{p-1}w) = 0\}. \end{aligned}$$

Prema tvrdnji (c) propozicije 2.6 nalazimo da je dimenzija potprostora  $X$  jednaka  $\dim V - \dim Y = n - p$ . Nadalje, potprostor  $X$  je  $A$ -invarijantan. Doista, neka je  $w \in X$ . Neka je  $g \in Y$ . Tada je  $A'g \in Y$  jer je  $Y$   $A'$ -invarijantan, pa slijedi  $g(Aw) = (A'g)(w) = 0$ . Dakle,  $g(Aw) = 0 \forall g \in Y$ , što pokazuje da je  $Aw \in X$ , a kako je vektor  $w \in X$  bio proizvoljan, dokazano je da je potprostor  $X$   $A$ -invarijantan. Neka je  $w \in X \cap V_1$ . Kako je  $w \in V_1$ , to je

$$w = \alpha_0 v + \alpha_1 Av + \dots + \alpha_{p-1} A^{p-1} v,$$

za neke skalare  $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{p-1}$ . Pretpostavimo da je  $w \neq 0$  i neka je  $j \in \{0, 1, \dots, p-1\}$  najmanji indeks takav da je  $\alpha_j \neq 0$ . Dakle,

$$w = \alpha_j A^j v + \alpha_{j+1} A^{j+1} v + \dots + \alpha_{p-1} A^{p-1} v.$$

Djelujemo li na lijevu i desnu stranu te jednakosti s operatorom  $A^{p-j-1}$  dobivamo

$$A^{p-j-1} w = \alpha_j A^{p-1} v.$$

Kako je  $w \in X$ , to vrijedi i  $A^{p-j-1} w \in X$ , jer je potprostor  $X$   $A$ -invarijantan. Budući da je  $\alpha_j \neq 0$ , iz gornje jednakosti slijedi  $A^{p-1} v \in X$ . Kako je  $X = Y^0$  i  $f \in Y$  slijedi  $f(A^{p-1} v) = 0$ , a to je u suprotnosti s izborom funkcionala  $f$ . Ova kontradikcija pokazuje da je naša pretpostavka  $w \neq 0$  bila pogrešna. Zaključujemo da mora biti  $w = 0$ . Time je dokazano da je  $X \cap V_1 = \{0\}$ . Dakle, suma potprostora  $X$  i  $V_1$  je direktna. Sada je

$$\dim(V_1 \dot{+} X) = \dim V_1 + \dim X = p + (n - p) = n = \dim V, \implies V_1 \dot{+} X = V.$$

Stavimo sada  $B = A | X$ . Tada je operator  $B \in L(X)$  nilpotentan, jer je  $B^p = A^p | X = 0$ . Neka je  $p_2 \leq p$  indeks nilpotentnosti operatora  $B$ . Ako je  $p_2 = \dim X$ , dokaz je gotov uz  $s = 2$ ,  $V_2 = X$ . Ako je  $p_2 < \dim X$ , primijenimo pretpostavku indukcije na operator  $B$ , što možemo jer je  $\dim X < n$ . Slijedi da postoje  $B$ -invarijantni potprostori  $V_2, \dots, V_s$  od  $X$  (dakle,  $A$ -invarijantni potprostori od  $V$ ) takvi da je  $X = V_2 \dot{+} \dots \dot{+} V_s$  i da je svaka restrikcija  $B | V_j = A | V_j$  ( $2 \leq j \leq s$ ) nilpotentan operator indeksa  $p_j = \dim V_j$ . No tada je

$$V = V_1 \dot{+} V_2 \dot{+} \dots \dot{+} V_s,$$

i time je tvrdnja (a) dokazana.

Dokažimo sada tvrdnju (b). Očito je

$$r(A) = r(A_1) + r(A_2) + \dots + r(A_s)$$

i za svaku potenciju  $k \geq 0$  vrijedi

$$r(A^k) = r(A_1^k) + r(A_2^k) + \dots + r(A_s^k).$$

Dakle je:

$$r(A^{k+1}) + r(A^{k-1}) - 2r(A^k) = \sum_{j=1}^s [r(A_j^{k+1}) + r(A_j^{k-1}) - 2r(A_j^k)].$$

Izračunajmo  $r(A_j^k)$ . Operator  $A_j$  je nilpotentan maksimalnog indeksa  $p_j = \dim V_j$ , pa on u nekoj bazi za matricu ima elementarnu Jordanovu klijetku  $p_j$ -tog reda. Stoga treba izračunati rang bilo koje potencije elementarne Jordanove klijetke  $J_r$   $r$ -tog reda. Matrica  $J_r^k$  ima sve elemente jednake nuli osim  $r - k$  jedinica na paraleli s glavnom dijagonalom. Dakle,  $r(J_r^k) = r - k$  za  $k = 0, 1, \dots, r$  i, naravno,  $r(J_r^k) = 0$  za  $k > r$ . Dakle, za  $k < p_j$  je

$$r(A_j^{k+1}) + r(A_j^{k-1}) - 2r(A_j^k) = p_j - k - 1 + p_j - k + 1 - 2p_j + 2k = 0;$$

za  $k = p_j$  je

$$r(A_j^{p_j+1}) + r(A_j^{p_j-1}) - 2r(A_j^{p_j}) = 0 + 1 - 2 \cdot 0 = 1;$$

za  $k > p_j$  je

$$r(A_j^{k+1}) + r(A_j^{k-1}) - 2r(A_j^k) = 0 + 0 - 2 \cdot 0 = 0.$$

Odatle je

$$r(A^{k+1}) + r(A^{k-1}) - 2r(A^k) = \sum_{j=1}^s [r(A_j^{k+1}) + r(A_j^{k-1}) - 2r(A_j^k)] = |\{j; p_j = k\}|,$$

a to je upravo tvrdnja (b).

Dokazani teorem pokazuje da za svaki nilpotentan operator  $A$  na konačnodimenzionalnom vektorskom prostoru  $V$  postoji baza  $e$  od  $V$  takva da je matrica  $A(e)$  blok-dijagonalna i na dijagonali su joj blokovi koji su elementarne Jordanove klijetke, s tim da je format najveće od njih  $p \times p$ , gdje je  $p$  indeks nilpotentnosti operatora  $A$ . Drugim riječima, matrica  $A(e)$  ima sve elemente jednake nuli osim na prvoj gornjoj paraleli uz glavnu dijagonalu gdje su raspoređene jedinice i nule (najprije  $p_1 - 1$  jedinica,  $p_1 = p$ , zatim jedna nula, zatim  $p_2 - 1$  jedinica,  $p_2 \leq p_1$ , zatim jedna nula, zatim  $p_3 - 1$  jedinica,  $p_3 \leq p_2$ , itd. i na koncu  $p_s - 1$  jedinica).





## Poglavlje 6

# Fittingova dekompozicija

Neka je  $V$  vektorski prostor i  $A \in L(V)$ . Tada jezgre potencija operatora  $A$  čine rastući niz potprostora:

$$N(A) \subseteq N(A^2) \subseteq N(A^3) \subseteq \dots,$$

a njihove slike padajući niz:

$$R(A) \supseteq R(A^2) \supseteq R(A^3) \supseteq \dots.$$

Ako na nekom mjestu u jednom od tih nizova potprostora vrijedi znak jednakosti, onda se taj niz stabilizira na tom mjestu:

**Propozicija 6.1** *Neka je  $V$  vektorski prostor i  $A \in L(V)$ .*

- (a) *Ako je  $k \geq 0$  takav da je  $N(A^k) = N(A^{k+1})$ , onda je  $N(A^m) = N(A^k)$  za svaki  $m \geq k$ .*
- (b) *Ako je  $k \geq 0$  takav da je  $R(A^k) = R(A^{k+1})$ , onda je  $R(A^m) = R(A^k)$  za svaki  $m \geq k$ .*

**Dokaz:** (a) Dovoljno je dokazati da je  $N(A^{k+2}) = N(A^{k+1})$ , jer tada tvrdnja slijedi indukcijom u odnosu na  $m > k$ . Očito je  $N(A^{k+2}) \supseteq N(A^{k+1})$ . Dokažimo i obrnutu inkluziju. Neka je  $v \in N(A^{k+2})$ . Tada imamo

$$\begin{aligned} 0 = A^{k+2}v = A^{k+1}(Av) &\implies Av \in N(A^{k+1}) = N(A^k) \implies \\ \implies 0 = A^k(Av) = A^{k+1}v &\implies v \in N(A^{k+1}). \end{aligned}$$

Dakle, vrijedi i  $N(A^{k+2}) \subseteq N(A^{k+1})$ .

(b) Analogno, dovoljno je dokazati  $R(A^{k+1}) \subseteq R(A^{k+2})$ . Neka je  $v \in R(A^{k+1})$  i neka je  $w \in V$  takav da je  $v = A^{k+1}w = A(A^k w)$ . Imamo  $A^k w \in R(A^k)$ , pa zbog pretpostavke da je  $R(A^k) = R(A^{k+1})$  zaključujemo da je  $A^k w \in R(A^{k+1})$ . Dakle, postoji  $u \in V$  takav da je  $A^k w = A^{k+1}u$ . Slijedi

$$v = A^{k+1}(w) = A(A^k w) = A(A^{k+1}u) = A^{k+2}u \in R(A^{k+2}).$$

Time je dokazana i obrnuta inkluzija, dakle,  $R(A^{k+1}) = R(A^{k+2})$ .

Ako je prostor  $V$  konačnodimenzionalan, niz jezgara (odnosno, slika) potencija operatora  $A$  ne može biti striktno rastući (odnosno, striktno padajući), jer svaki sljedeći striktno veći (odnosno, striktno manji) član ima dimenziju veću (odnosno, manju) barem za 1. Stoga postoje  $k \leq \dim V$  i  $r \leq \dim V$  takvi da vrijedi  $N(A^m) = N(A^k) \forall m \geq k$  i  $R(A^m) = R(A^r) \forall m \geq r$ .

**Teorem 6.1** *Neka je  $V \neq \{0\}$  vektorski prostor i  $A \in L(V)$ . Pretpostavimo da postoje  $k$  i  $r$  takvi da je  $N(A^k) = N(A^{k+1})$  i  $R(A^r) = R(A^{r+1})$  i neka su  $k$  i  $r$  najmanji takvi. Tada vrijedi  $k = r$  i  $V = N(A^k) \dot{+} R(A^k)$ .*

**Dokaz:** Razmatrat ćemo posebno slučaj konačnodimenzionalnog prostora  $V$ , jer nas taj slučaj najviše zanima i jer je dokaz u tom slučaju znatno jednostavniji. Po teoremu o rangui i defektu (teorem 2.3) vrijedi jednakost

$$\dim N(A^j) + \dim R(A^j) = \dim V \quad \forall j,$$

dakle vrijedi:

$$N(A^j) = N(A^{j+1}) \iff R(A^j) = R(A^{j+1}).$$

Stoga je očito  $k = r$  (i taj je broj  $\leq \dim V$ ). Neka je  $v \in N(A^k) \cap R(A^k)$ . Tada je  $v = A^k w$  za neki  $w \in V$ . Međutim,

$$0 = A^k v = A^{2k} w \implies w \in N(A^{2k}) = N(A^k) \implies v = A^k w = 0.$$

Dakle,  $N(A^k) \cap R(A^k) = \{0\}$ . Stoga je suma potprostora  $N(A^k)$  i  $R(A^k)$  direktna, a odatle i iz teorema o rangui i defektu slijedi

$$\dim(N(A^k) \dot{+} R(A^k)) = \dim N(A^k) + \dim R(A^k) = \dim V.$$

Dakle,  $V = N(A^k) \dot{+} R(A^k)$ .

Dokažimo sada teorem i u općem slučaju, tj. bez pretpostavke da je prostor  $V$  konačnodimenzionalan.

Ako je  $k = 0$  očito je  $r \geq k$ . Pretpostavimo da je  $k \geq 1$ . Neka je  $v \in N(A^k) \setminus N(A^{k-1})$ , dakle  $A^k v = 0$  i  $A^{k-1} v \neq 0$ . Pretpostavimo da je  $r < k$ , tj.  $R(A^{k-1}) = R(A^k)$ . Tada postoji  $w \in V$  takav da je  $A^{k-1} v = A^k w$ . Slijedi

$$0 = A^k v = A^{k+1} w \implies w \in N(A^{k+1}) = N(A^k) \implies A^{k-1} v = A^k w = 0$$

suprotno pretpostavci. Ova kontradikcija pokazuje da je pretpostavka  $r < k$  bila netočna, pa zaključujemo da mora biti  $r \geq k$ .

Ako je  $r = 0$  očito je  $k \geq r$ . Pretpostavimo da je  $r \geq 1$ . Neka je  $v \in R(A^{r-1}) \setminus R(A^r)$ . Tada je  $v = A^{r-1} w$  za neki  $w \in V$ . Stavimo  $u = Av$ . Tada je

$$u = A^r w \in R(A^r) = R(A^{r+1}),$$

pa postoji  $x \in V$  takav da je  $u = A^{r+1} x$ . Stavimo  $y = Ax - w$ . Tada je

$$A^r y = A^{r+1} x - A^r w = u - u = 0 \quad \text{i} \quad A^{r-1} y = A^r x - A^{r-1} w = A^r x - v \neq 0,$$

jer  $v \notin R(A^r)$ . Prema tome je  $y \in N(A^r) \setminus N(A^{r-1})$ . To pokazuje da je  $N(A^{r-1}) \subsetneq N(A^r)$ , dakle  $k \geq r$ .

Dvije dokazane nejednakosti  $r \geq k$  i  $k \geq r$  daju jednakost  $k = r$ .

Dokaz da je  $N(A^k) \cap R(A^k) = \{0\}$  nije koristio pretpostavku konačnodimenzionalnosti, pa vrijedi i u općem slučaju. Dakle, suma potprostora  $N(A^k)$  i  $R(A^k)$  je direktna. Neka je  $v \in V$ . Tada je

$$A^k v \in R(A^k) = R(A^{2k}) = A^k R(A^k),$$

pa postoji  $w \in R(A^k)$  takav da je  $A^k v = A^k w$ . Stavimo  $u = v - w$ . Tada je  $A^k u = A^k v - A^k w = 0$ , dakle,  $u \in N(A^k)$ . Prema tome, vrijedi

$$v = u + w, \quad w \in R(A^k), \quad u \in N(A^k).$$

Time je dokazano da je  $V = N(A^k) \dot{+} R(A^k)$ .

Neka je  $V \neq \{0\}$  konačnodimenzionalan vektorski prostor i  $A \in L(V)$ . Broj  $k$  iz teorema 6.1 zove se **nilindeks operatora**  $A$  i označava sa  $\nu(A)$ . Imamo  $\nu(A) \leq \dim V$ . Ako je  $\nu(A) > 0$ , tj. ako  $A$  nije regularan, onda vrijedi  $N(A^{\nu(A)-1}) \subsetneq N(A^{\nu(A)})$ ; štoviše, vrijedi  $N(A^{j-1}) \subsetneq N(A^j) \forall j \leq \nu(A)$ ; također,  $R(A^j) \subsetneq R(A^{j-1}) \forall j \leq \nu(A)$ .

Za konačnodimenzionalan vektorski prostor  $V$ , za  $A \in L(V)$  i za  $k = \nu(A)$ , potprostor  $V^0(A) = N(A^k)$  zove se **Fittingova 0-komponenta prostora**  $V$ , a  $V^1(A) = R(A^k)$  zove se **Fittingova 1-komponenta prostora**  $V$  (u odnosu na operator  $A$ ). Rastav

$$V = V^0(A) \dot{+} V^1(A)$$

zove se **Fittingova dekompozicija prostora**  $V$  u odnosu na operator  $A$ . Operator  $A|V^0(A)$  je **Fittingova 0-komponenta operatora**  $A$ , a  $A|V^1(A)$  je **Fittingova 1-komponenta operatora**  $A$ .

**Teorem 6.2** *Neka je  $V$  konačnodimenzionalan vektorski prostor,  $A \in L(V)$  i neka je  $k = \nu(A)$ .*

- (a) *Restrikcija  $A|V^0(A)$  je nilpotentan operator indeksa  $k$ . Ako je  $W$  potprostor od  $V$  koji je  $A$ -invarijantan i takav da je restrikcija  $A|W$  nilpotentan operator, onda je  $W \subseteq V^0(A)$ .*
- (b) *Restrikcija  $A|V^1(A) \in L(V^1(A))$  je regularan operator. Ako je  $W$  potprostor od  $V$  koji je  $A$ -invarijantan i takav da je  $A|W \in GL(W)$ , onda je  $W \subseteq V^1(A)$ .*

**Dokaz:** (a) Za  $C = A|V^0(A)$  očito vrijedi  $C^k = 0$  i  $C^{k-1} \neq 0$ . Dakle, operator  $C$  je nilpotentan indeksa  $k = \nu(A)$ . Pretpostavimo sada da je  $W$   $A$ -invarijantan potprostor od  $V$  takav da je operator  $D = A|W$  nilpotentan,  $D^j = 0$ . Tada je  $A^j w = 0 \forall w \in W$ , pa slijedi da je  $W \subseteq N(A^j) \subseteq V^0(A)$ .

(b) Imamo

$$AV^1(A) = AR(A^k) = R(A^{k+1}) = R(A^k) = V^1(A).$$

Dakle,  $A|_{V^1(A)}$  je surjektivan operator, a kako se radi o konačnodimenzionalnom prostoru slijedi da je  $E \in GL(V^1(A))$ . Pretpostavimo sada da je potprostor  $W$   $A$ -invarijantan i takav da je operator  $A|_W$  regularan,  $A|_W \in GL(W)$ . Tada imamo redom

$$AW = W \implies A^j W = W \forall j \implies W \subseteq R(A^j) \forall j \implies W \subseteq V^1(A).$$

Time je teorem u potpunosti dokazan.

## Poglavlje 7

# Jordanova forma matrice operatora

Neka su  $P(\lambda)$  i  $Q(\lambda)$  polinomi. Ako je polinom  $P(\lambda)$  djeljiv s polinomom  $Q(\lambda)$ , tj. ako postoji polinom  $R(\lambda)$  takav da je  $P(\lambda) = R(\lambda)Q(\lambda)$ , reći ćemo još da **polinom  $Q(\lambda)$  dijeli polinom  $P(\lambda)$**  i pisati  $Q(\lambda) | P(\lambda)$ .

Reći ćemo da su polinomi  $P(\lambda)$  i  $Q(\lambda)$  **relativno prosti**, ako ne postoji polinom stupnja  $\geq 1$  koji dijeli i  $P(\lambda)$  i  $Q(\lambda)$ .

Opisat ćemo sada tzv. *Euklidov algoritam* koji se temelji na postupku dijeljenja polinoma s ostatkom. Ako polinom  $P(\lambda)$  nije djeljiv s polinomom  $Q(\lambda)$ , onda postoje polinomi  $S_1(\lambda)$  i  $R_1(\lambda)$  takvi da je

$$P(\lambda) = S_1(\lambda)Q(\lambda) + R_1(\lambda), \quad \deg R_1(\lambda) < \deg Q(\lambda).$$

Ako  $Q(\lambda)$  nije djeljiv s  $R_1(\lambda)$ , onda postoje polinomi  $S_2(\lambda)$  i  $R_2(\lambda)$  takvi da je

$$Q(\lambda) = S_2(\lambda)R_1(\lambda) + R_2(\lambda), \quad \deg R_2(\lambda) < \deg R_1(\lambda).$$

Ako  $R_1(\lambda)$  nije djeljiv s  $R_2(\lambda)$ , onda postoje polinomi  $S_3(\lambda)$  i  $R_3(\lambda)$  takvi da je

$$R_1(\lambda) = S_3(\lambda)R_2(\lambda) + R_3(\lambda), \quad \deg R_3(\lambda) < \deg R_2(\lambda).$$

U svakom ovakvom koraku stupanj ostatka je striktno manji nego stupanj prethodnog ostatka. Prema tome, opisani postupak ne možemo nastavljati u nedogled, nego će se nakon konačno mnogo koraka dogoditi da ostatak dijeli prethodni ostatak. Drugim riječima, za neki  $k$  postoje netrivialni polinomi  $S_1(\lambda), S_2(\lambda), \dots, S_{k+1}$  i netrivialni polinomi  $R_1(\lambda), R_2(\lambda), \dots, R_k(\lambda)$  takvi da je

$$\deg R_1(\lambda) > \deg R_2(\lambda) > \dots > \deg R_{k-1} > \deg R_k(\lambda) \geq 0$$

i da vrijedi sljedeći sustav jednakosti

$$\begin{aligned}
 P(\lambda) &= S_1(\lambda)Q(\lambda) + R_1(\lambda) \\
 Q(\lambda) &= S_2(\lambda)R_1(\lambda) + R_2(\lambda) \\
 R_1(\lambda) &= S_3(\lambda)R_2(\lambda) + R_3(\lambda) \\
 &\vdots \\
 R_{j-1}(\lambda) &= S_{j+1}(\lambda)R_j(\lambda) + R_{j+1}(\lambda) \\
 &\vdots \\
 R_{k-2}(\lambda) &= S_k(\lambda)R_{k-1}(\lambda) + R_k(\lambda) \\
 R_{k-1}(\lambda) &= S_{k+1}(\lambda)R_k(\lambda).
 \end{aligned}$$

Računski postupak opisan gornjim sustavom zove se **Euklidov algoritam**. Ako vrijedi  $Q(\lambda) | P(\lambda)$ , algoritam završava već u prvom koraku, tj.  $R_1(\lambda) = 0$ .

Primijetimo sada da, krenuši u gornjem sustavu od posljednje jednakosti prema prvoj, redom zaključujemo:

$$\begin{aligned}
 R_k(\lambda) | R_{k-1}(\lambda) &\implies R_k(\lambda) | R_{k-2}(\lambda) \implies \dots \\
 \dots \implies R_k(\lambda) | R_1(\lambda) &\implies R_k(\lambda) | Q(\lambda) \implies R_k(\lambda) | P(\lambda).
 \end{aligned}$$

Dakle, polinom  $R_k(\lambda)$  dijeli i polinom  $P(\lambda)$  i polinom  $Q(\lambda)$ .

Pretpostavimo sada da polinom  $R(\lambda)$  dijeli i  $P(\lambda)$  i  $Q(\lambda)$ . Krenuši od prve jednakosti u gornjem sustavu prema pretposljednjoj sada redom zaključujemo:

$$\begin{aligned}
 R(\lambda) | R_1(\lambda) &\implies R(\lambda) | R_2(\lambda) \implies R(\lambda) | R_3(\lambda) \implies \dots \\
 \dots \implies R(\lambda) | R_{k-1}(\lambda) &\implies R(\lambda) | R_k(\lambda).
 \end{aligned}$$

Na taj način smo dokazali:

**Propozicija 7.1** *Neka su  $P(\lambda)$  i  $Q(\lambda)$  polinomi. Postoji polinom  $M(\lambda)$  sa sljedećim svojstvima:*

- (a)  $M(\lambda) | P(\lambda)$  i  $M(\lambda) | Q(\lambda)$ .
- (b) Ako je  $R(\lambda)$  polinom takav da  $R(\lambda) | P(\lambda)$  i  $R(\lambda) | Q(\lambda)$  tada  $R(\lambda) | M(\lambda)$ .

Polinom  $M(\lambda)$  sa svojstvima (a) i (b) iz propozicije 7.1 zove se **najveća zajednička mjera** polinoma  $P(\lambda)$  i  $Q(\lambda)$ . Euklidov algoritam je efikasan računski postupak za pronalaženje najveće zajedničke mjere bilo koja dva polinoma. Očito su sve najveće zajedničke mjere zadanih polinoma  $P(\lambda)$  i  $Q(\lambda)$  međusobno proporcionalne i točno jedna među njima je normirana. Jedinstvenu normiranu zajedničku mjeru polinoma  $P(\lambda)$  i  $Q(\lambda)$  označavat ćemo sa  $(P(\lambda), Q(\lambda))$ .

**Teorem 7.1** *Neka su  $P(\lambda)$  i  $Q(\lambda)$  polinomi.*

- (1) *Postoje polinomi  $A(\lambda)$  i  $B(\lambda)$  takvi da je*

$$(P(\lambda), Q(\lambda)) = A(\lambda)P(\lambda) + B(\lambda)Q(\lambda).$$

(2) *Sljedeća su tri svojstva međusobno ekvivalentna:*

(a) *Polinomi  $P(\lambda)$  i  $Q(\lambda)$  su relativno prosti.*

(b)  *$(P(\lambda), Q(\lambda)) = 1$ .*

(c) *Postoje polinomi  $A(\lambda)$  i  $B(\lambda)$  takvi da je  $A(\lambda)P(\lambda) + B(\lambda)Q(\lambda) = 1$ .*

**Dokaz:** (1) Krenuvši od prve prema pretposljednjoj jednakosti u sustavu koji opisuje Euklidov algoritam korak po korak nalazimo da za svaki  $j$  postoje polinomi  $A_j(\lambda)$  i  $B_j(\lambda)$  takvi da vrijedi  $R_j(\lambda) = A_j(\lambda)P(\lambda) + B_j(\lambda)Q(\lambda)$ . Time je tvrdnja (1) dokazana, jer je  $R_k(\lambda)$  najveća zajednička mjera, dakle polinom proporcionalan polinomu  $(P(\lambda), Q(\lambda))$ .

(2) Pretpostavimo da su polinomi  $P(\lambda)$  i  $Q(\lambda)$  relativno prosti. To znači da su samo polinomi stupnja nula, tj. konstante, istovremeni djelitelji polinoma  $P(\lambda)$  i  $Q(\lambda)$ . Dakle,  $(P(\lambda), Q(\lambda)) = 1$ . Time je dokazano da iz (a) slijedi (b). Nadalje, iz tvrdnje (1) vidimo da iz (b) slijedi (c). Napokon, pretpostavimo da vrijedi (c). Neka je  $R(\lambda)$  polinom koji dijeli i  $P(\lambda)$  i  $Q(\lambda)$ . Tada iz (c) slijedi da  $R(\lambda)$  dijeli  $A(\lambda)P(\lambda) + B(\lambda)Q(\lambda) = 1$ . Odatle slijedi da je stupanj polinoma  $R(\lambda)$  jednak nuli, tj.  $R(\lambda)$  je konstanta. To znači da ne postoji polinom stupnja  $\geq 1$  koji dijeli i  $P(\lambda)$  i  $Q(\lambda)$ , dakle  $P(\lambda)$  i  $Q(\lambda)$  su relativno prosti. Time je dokazano da iz (c) slijedi (a).

Ako je  $V$  konačnodimenzionalan vektorski prostor i  $A \in L(V)$  onda za svaki polinom  $P(\lambda)$  operator  $A$  komutira s  $P(A)$ , dakle prema propoziciji 4.4 potprostori  $N(P(A))$  i  $R(P(A))$  su  $A$ -invarijantni. Sljedeća propozicija pokazuje da time ništa ne dobivamo ako su polinomi  $P(\lambda)$  i  $\mu_A(\lambda)$  relativno prosti.

**Propozicija 7.2** *Neka je  $V$  konačnodimenzionalan vektorski prostor nad poljem  $K$ ,  $A \in L(V)$  i neka je  $P(\lambda)$  polinom. Tada su sljedeća dva svojstva međusobno ekvivalentna:*

(a) *Polinomi  $P(\lambda)$  i  $\mu_A(\lambda)$  su relativno prosti, tj.  $(P(\lambda), \mu_A(\lambda)) = 1$ .*

(b) *Operator  $P(A)$  je regularan, tj.  $N(P(A)) = \{0\}$  i  $R(P(A)) = V$ .*

**Dokaz:** Pretpostavimo da su polinomi  $P(\lambda)$  i  $\mu_A(\lambda)$  relativno prosti. Tada prema tvrdnji (2) teorema 7.1 postoje polinomi  $Q(\lambda)$  i  $R(\lambda)$  takvi da je

$$Q(\lambda)P(\lambda) + R(\lambda)\mu_A(\lambda) = 1.$$

Uvrštavanjem operatora  $A$  slijedi

$$Q(A)P(A) + R(A)\mu_A(A) = I.$$

Kako je  $\mu_A(A) = 0$  dobivamo

$$Q(A)P(A) = P(A)Q(A) = I.$$

Dakle, operator  $P(A)$  je regularan. Time je dokazana implikacija (a)  $\Rightarrow$  (b).

Pretpostavimo sada da je operator  $P(A)$  regularan. Treba dokazati da su

tada polinomi  $P(\lambda)$  i  $\mu_A(\lambda)$  relativno prosti. Pretpostavimo suprotno, tj. da postoji polinom  $Q(\lambda)$  stupnja većeg od nule koji dijeli i  $P(\lambda)$  i  $\mu_A(\lambda)$ . Neka su  $R(\lambda)$  i  $S(\lambda)$  polinomi takvi da je  $P(\lambda) = Q(\lambda)R(\lambda)$  i  $\mu_A = Q(\lambda)S(\lambda)$ . Tada je  $P(A) = Q(A)R(A)$ , pa iz regularnosti operatora  $P(A)$  slijedi da je i operator  $Q(A)$  regularan. Kako je  $0 = \mu_A(A) = Q(A)S(A)$ , regularnost operatora  $Q(A)$  ima za posljedicu da je  $S(A) = 0$ . No to je nemoguće zbog tvrdnje (a) teorema 3.1 i zbog  $\deg S(\lambda) < \deg \mu_A(\lambda)$ . Ova kontradikcija pokazuje da je pretpostavka da  $P(\lambda)$  i  $\mu_A(\lambda)$  nisu relativno prosti bila pogrešna, pa zaključujemo da je  $(P(\lambda), \mu_A(\lambda)) = 1$ . Time je dokazana i obrnuta implikacija (b)  $\Rightarrow$  (a).

Ukoliko se polinom  $P$  može rastaviti u produkt relativno prostih polinoma, potprostor  $N(P(A))$  rastavlja se u odgovarajuću direktnu sumu potprostora:

**Propozicija 7.3** *Neka je  $V$  konačnodimenzionalan vektorski prostor,  $A \in L(V)$ , i neka su  $P(\lambda)$ ,  $Q(\lambda)$  i  $R(\lambda)$  polinomi takvi da je  $P(\lambda) = Q(\lambda)R(\lambda)$  i da su  $Q(\lambda)$  i  $R(\lambda)$  relativno prosti. Tada je*

$$N(P(A)) = N(Q(A)) \dot{+} N(R(A)).$$

**Dokaz:** Budući da su  $Q(\lambda)$  i  $R(\lambda)$  relativno prosti, prema tvrdnji (2) teorema 7.1 postoje polinomi  $S(\lambda)$  i  $T(\lambda)$  takvi da je

$$\begin{aligned} 1 &= S(\lambda)Q(\lambda) + T(\lambda)R(\lambda) \implies I = S(A)Q(A) + T(A)R(A) \implies \\ &\implies v = S(A)Q(A)v + T(A)R(A)v, \quad \forall v \in V. \end{aligned}$$

Posebno, ako je  $v \in N(P(A))$ , stavimo  $y = S(A)Q(A)v$  i  $x = T(A)R(A)v$ . Slijedi  $v = x + y$  i pri tome imamo

$$\begin{aligned} Q(A)x &= Q(A)T(A)R(A)v = T(A)P(A)v = 0 \implies x \in N(Q(A)), \\ R(A)y &= R(A)S(A)Q(A)v = S(A)P(A)v = 0 \implies y \in N(R(A)). \end{aligned}$$

Time je dokazano da je  $N(P(A)) \subseteq N(Q(A)) + N(R(A))$ , a kako su  $N(Q(A))$  i  $N(R(A))$  očito sadržani u  $N(P(A))$ , zaključujemo da je

$$N(P(A)) = N(Q(A)) + N(R(A)).$$

Treba još dokazati da je ta suma direktna. Neka je  $v \in N(Q(A)) \cap N(R(A))$ . Tada je  $Q(A)v = R(A)v = 0$ , pa slijedi  $v = S(A)Q(A)v + T(A)R(A)v = 0$ . Dakle,  $N(Q(A)) \cap N(R(A)) = \{0\}$ , odnosno,

$$N(P(A)) = N(Q(A)) \dot{+} N(R(A)).$$

Za dokaz osnovnog teorema 7.2 o redukciji linearnih operatora treba nam još jedna činjenica o polinomima:

**Lema 7.1** *Neka su  $P(\lambda)$ ,  $Q(\lambda)$  i  $R(\lambda)$  polinomi takvi da su  $P(\lambda)$  i  $Q(\lambda)$  relativno prosti i da su  $P(\lambda)$  i  $R(\lambda)$  relativno prosti. Tada su polinomi  $P(\lambda)$  i  $Q(\lambda)R(\lambda)$  relativno prosti.*



**Dokaz:** Prema tvrdnji (2) teorema 7.1 iz pretpostavke slijedi da postoje polinomi  $A(\lambda)$ ,  $B(\lambda)$ ,  $C(\lambda)$  i  $D(\lambda)$  takvi da je

$$A(\lambda)P(\lambda) + B(\lambda)Q(\lambda) = 1 \quad \text{i} \quad C(\lambda)P(\lambda) + D(\lambda)R(\lambda) = 1.$$

Definiramo sada polinome  $E(\lambda)$  i  $F(\lambda)$  na sljedeći način:

$$E(\lambda) = A(\lambda)C(\lambda)P(\lambda) + A(\lambda)D(\lambda)R(\lambda) + B(\lambda)C(\lambda)Q(\lambda), \quad F(\lambda) = B(\lambda)D(\lambda).$$

Izostavljajući oznaku  $\lambda$  za varijablu polinoma tada imamo redom

$$\begin{aligned} EP + F(QR) &= ACP^2 + AD RP + BCQP + BDQR = \\ &= (AP)(CP) + (AP)(DR) + (BQ)(CP) + (BQ)(DR) = (AP + BQ)(CP + DR) = 1. \end{aligned}$$

Ponovnom primjenom tvrdnje (2) teorema 7.1 zaključujemo da su polinomi  $P(\lambda)$  i  $Q(\lambda)R(\lambda)$  relativno prosti.

**Teorem 7.2** *Neka je  $V$  konačnodimenzionalan vektorski prostor i  $A \in L(V)$ . Pretpostavimo da je*

$$\mu_A(\lambda) = \mu_1(\lambda) \cdot \mu_2(\lambda) \cdots \mu_s(\lambda), \quad (s \geq 2)$$

*pri čemu su  $\mu_1(\lambda), \mu_2(\lambda), \dots, \mu_s(\lambda)$  normirani polinomi takvi da su  $\mu_i(\lambda)$  i  $\mu_j(\lambda)$  relativno prosti za  $i \neq j$ . Stavimo  $V_j = N(\mu_j(A))$  za  $j = 1, 2, \dots, s$ .*

- (a) *Svaki od potprostora  $V_j$  je  $A$ -invarijantan.*
- (b)  $V = V_1 \dot{+} V_2 \dot{+} \cdots \dot{+} V_s$ .
- (c) *Za svaki  $j$  vrijedi  $\mu_j(\lambda) = \mu_{A|V_j}$ , tj.  $\mu_j(\lambda)$  je minimalni polinom restrikcije  $A|V_j$ .*

**Dokaz:** Tvrdnja (a) je neposredna posljedica propozicije 4.4.

Dokaz tvrdnji (b) i (c) provest ćemo matematičkom indukcijom u odnosu na  $s \geq 2$ .

Baza indukcije: Pretpostavljamo da je  $s = 2$ , tj. da je  $\mu_A(\lambda) = \mu_1(\lambda) \cdot \mu_2(\lambda)$  i da su  $\mu_1(\lambda)$  i  $\mu_2(\lambda)$  normirani polinomi koji su relativno prosti. Sada iz propozicije 7.2 slijedi

$$N(\mu_A(A)) = N(\mu_1(A)) \dot{+} N(\mu_2(A)),$$

a to je upravo tvrdnja (b) jer je  $\mu_A(A) = 0$ , dakle  $N(\mu_A(A)) = V$ .

Dokažimo da vrijedi i tvrdnja (c) u slučaju  $s = 2$ . Stavimo  $A_1 = A|V_1$ . Za bilo koji  $v \in V_1$  vrijedi  $\mu_1(A)v = 0$ . Međutim,  $\mu_1(A)|V_1 = \mu_1(A_1)$ , pa zaključujemo da je  $\mu_1(A_1)v = 0 \forall v \in V_1$ , dakle  $\mu_1(A_1) = 0$ . Primjenom tvrdnje (c) teorema 3.1 na operator  $A_1$  zaključujemo da je polinom  $\mu_1(\lambda)$  djeljiv s minimalnim polinomom  $\mu_{A_1}(\lambda)$  operatora  $A_1$ , tj. vrijedi  $\mu_{A_1}(\lambda) | \mu_1(\lambda)$ . Nadalje, stavimo  $P(\lambda) = \mu_{A_1}(\lambda)\mu_2(\lambda)$ . Za  $v \in V_1$  sada imamo

$$P(A)v = P(A_1)v = \mu_{A_1}(A_1)\mu_2(A_1)v = 0, \quad \text{jer je} \quad \mu_{A_1}(A_1) = 0.$$

Također, za  $v \in V_2$  imamo

$$P(A)v = \mu_{A_1}(A)\mu_2(A)v = 0, \quad \text{jer je} \quad v \in V_2 = N(\mu_2(A)).$$

Dakle, vrijedi  $P(A)|_{V_1} = 0$  i  $P(A)|_{V_2} = 0$ , a kako je  $V = V_1 \dot{+} V_2$  zaključujemo da je  $P(A) = 0$ . Ponovnom primjenom tvrdnje (c) teorema 3.1, sada na operator  $A$ , nalazimo da polinom  $\mu_A(\lambda)$  dijeli polinom  $P(\lambda)$ . Dakle, postoji polinom  $Q(\lambda)$  takav da je  $P(\lambda) = \mu_A(\lambda)Q(\lambda)$ . To znači da je  $\mu_{A_1}(\lambda)\mu_2(\lambda) = \mu_1(\lambda)\mu_2(\lambda)Q(\lambda)$ , pa slijedi  $\mu_{A_1}(\lambda) = \mu_1(\lambda)Q(\lambda)$ . Time smo dokazali da vrijedi  $\mu_1(\lambda) | \mu_{A_1}(\lambda)$  i  $\mu_{A_1}(\lambda) | \mu_1(\lambda)$ . Budući da su polinomi  $\mu_{A_1}(\lambda)$  i  $\mu_1(\lambda)$  normirani, zaključujemo da je  $\mu_1(\lambda) = \mu_{A_1}(\lambda) = \mu_{A|V_1}(\lambda)$ . Sasvim analogno nalazimo i  $\mu_2(\lambda) = \mu_{A|V_2}(\lambda)$ .

Time smo dokazali da tvrdnje (b) i (c) vrijede ako je  $s = 2$ , odnosno, u potpunosti je proveden dokaz baze indukcije.

**Korak indukcije:** Pretpostavimo sada da je  $s \geq 3$  i da su tvrdnje (b) i (c) dokazane u slučaju rastava minimalnog polinoma u produkt  $s - 1$  normiranih relativno prostih polinoma. Stavimo sada  $\mu' = \mu_2(\lambda) \cdots \mu_s(\lambda)$ ,  $V' = N(\mu'(A))$  i  $A' = A|_{V'}$ . Iz leme 7.1 slijedi da su polinomi  $\mu_1(\lambda)$  i  $\mu'(\lambda)$  relativno prosti. Prema dokazanoj bazi indukcije slijedi da je

$$V = V_1 \dot{+} V', \quad \mu_1(\lambda) = \mu_{A|V_1}(\lambda) \quad \text{i} \quad \mu'(\lambda) = \mu_{A'}(\lambda).$$

Sada iz pretpostavke indukcije slijedi da je

$$V' = V_2 \dot{+} \cdots \dot{+} V_s, \quad \text{dakle} \quad V = V_1 \dot{+} V_2 \dot{+} \cdots \dot{+} V_s,$$

i da je

$$\mu_j(\lambda) = \mu_{A'|V_j}(\lambda) = \mu_{A|V_j}(\lambda) \quad \text{za} \quad j = 2, \dots, s,$$

dakle,

$$\mu_j(\lambda) = \mu_{A|V_j}(\lambda) \quad \text{za} \quad j = 1, 2, \dots, s.$$

Time je korak indukcije proveden, pa je teorem u potpunosti dokazan.

**Napomena.** Fittingova dekompozicija može se provesti i pomoću teorema 7.2. Doista, ako 0 nije u  $\sigma(A)$ , tj. 0 nije nultočka od  $\mu_A(\lambda)$ , onda je po teoremu 3.2 operator  $A$  regularan, dakle  $V^0(A) = \{0\}$  i  $V^1(A) = V$ . Ako je 0  $k$ -struka nultočka polinoma  $\mu_A(\lambda)$ , onda je  $\mu_A = \lambda^k \nu(\lambda)$  i  $\nu(0) \neq 0$ . Tada su polinomi  $\lambda^k$  i  $\nu$  relativno prosti, pa zbog tvrdnje (b) teorema 7.2 vrijedi  $V = N(A^k) \dot{+} N(\nu(A))$ . Operator  $A|_{N(A^k)}$  je očito nilpotentan. Nadalje, po tvrdnji (c) teorema 7.2 je  $\mu_{A|N(\nu(A))}(\lambda) = \nu(\lambda)$  i  $\nu(0) \neq 0$ , pa po teoremu 3.2 slijedi da je operator  $A|_{N(\nu(A))}$  regularan. Dakle,  $V^0(A) = N(A^k)$  i  $V^1 = N(\nu(A))$ . Kako su polinomi  $\lambda^k$  i  $\nu(\lambda)$  relativno prosti, postoje polinomi  $P(\lambda)$  i  $Q(\lambda)$  takvi da je  $\lambda^k P(\lambda) + \nu(\lambda)Q(\lambda) = 1$ . Dakle,  $A^k P(A) + Q(A)\nu(A) = I$ . Iz te jednakosti zaključujemo

$$v \in N(\nu(A)) \implies v = A^k P(A)v + Q(A)\nu(A)v = A^k P(A)v \implies v \in R(A^k),$$

dakle,  $N(\nu(A)) \subseteq R(A^k)$ . Međutim, kako je  $V = N(A^k) \dot{+} N(\nu(A))$ , po teoremu 2.3 o rangu i defektu primijenjenom na operator  $A^k$  slijedi

$$\dim N(\nu(A)) = \dim V - \dim N(A^k) = \dim R(A^k).$$

Odavde i iz  $N(\nu(A)) \subseteq R(A^k)$  zaključujemo da je  $N(\nu(A)) = R(A^k)$ . Dakle,  $V^1(A) = R(A^k)$ .

Razmotrimo sada posebno slučaj kada je polje  $K$  algebarski zatvoreno, npr.  $K = \mathbb{C}$ . Tada svaki nekonstantan polinom ima nultočku. Ako je  $\alpha_1$  nultočka polinoma  $P(\lambda)$ , tj. ako je  $P(\alpha_1) = 0$ , onda je polinom  $P(\lambda)$  djeljiv s polinomom  $\lambda - \alpha_1$ . Doista, ako provedemo postupak dijeljenja polinoma  $P(\lambda)$  s polinomom  $\lambda - \alpha_1$  stupnja 1 dolazimo do jednakosti oblika  $P(\lambda) = (\lambda - \alpha_1)Q(\lambda) + R(\lambda)$ , pri čemu je  $\deg R(\lambda) < 1$ , dakle,  $R(\lambda)$  je konstanta,  $R(\lambda) \equiv \alpha \in \mathbb{C}$ . Ako u jednakost

$$P(\lambda) = (\lambda - \alpha_1)Q(\lambda) + \alpha$$

uvrstimo  $\lambda = \alpha_1$ , slijedi  $\alpha = 0$ . Dakle,  $P(\lambda) = (\lambda - \alpha_1)Q(\lambda)$ . Ukoliko je  $\deg Q(\lambda) \geq 1$ , onda i polinom  $Q(\lambda)$  ima neku nultočku  $\alpha_2$ , pa slijedi

$$P(\lambda) = (\lambda - \alpha_1)(\lambda - \alpha_2)R(\lambda),$$

za neki polinom  $R(\lambda)$  stupnja  $\deg P(\lambda) - 2$ . Nastavimo li taj postupak dolazimo do  $n = \deg P(\lambda)$  nultočaka  $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$  polinoma  $P(\lambda)$  i do konstante  $\alpha \in \mathbb{C}$ ,  $\alpha \neq 0$ , takvih da je

$$P(\lambda) = \alpha \cdot (\lambda - \alpha_1) \cdot (\lambda - \alpha_2) \cdots (\lambda - \alpha_n).$$

Među nultočkama  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  može biti i međusobno jednakih, odnosno neke nultočke polinoma  $P(\lambda)$  mogu biti višestruke. Možemo pretpostaviti da smo numeraciju nultočaka proveli tako da su  $\alpha_1, \dots, \alpha_s$  međusobno različite i da su  $\alpha_{n+1}, \dots, \alpha_n \in \{\alpha_1, \dots, \alpha_s\}$ . Ako je još k tome polinom  $P(\lambda)$  normiran, onda za neke prirodne brojeve  $p_1, \dots, p_s$  vrijedi

$$P(\lambda) = (\lambda - \alpha_1)^{p_1} (\lambda - \alpha_2)^{p_2} \cdots (\lambda - \alpha_s)^{p_s}, \quad \alpha_i \neq \alpha_j \text{ za } i \neq j.$$

Naravno, tada je  $\deg P(\lambda) = p_1 + p_2 + \cdots + p_s$ .

Neka su sada  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ ,  $\alpha \neq \beta$ . Tada za polinome

$$A(\lambda) = \frac{1}{\alpha - \beta} \lambda - \frac{\beta + 1}{\alpha - \beta} \quad \text{i} \quad B(\lambda) = -\frac{1}{\alpha - 1} \lambda + \frac{\alpha + 1}{\alpha - \beta}$$

nalazimo

$$\begin{aligned} A(\lambda)(\lambda - \alpha) + B(\lambda)(\lambda - \beta) &= \frac{(\lambda - \beta - 1)(\lambda - \alpha) - (\lambda - \alpha - 1)(\lambda - \beta)}{\alpha - \beta} = \\ &= \frac{\lambda^2 - (\alpha + \beta + 1)\lambda + \alpha(\beta + 1) - \lambda^2 + (\alpha + \beta + 1)\lambda - \beta(\alpha + 1)}{\alpha - \beta} = 1. \end{aligned}$$

Iz tvrdnje (2) teorema 7.1 slijedi da su polinomi  $\lambda - \alpha$  i  $\lambda - \beta$  relativno prosti ako su  $\alpha$  i  $\beta$  međusobno različiti. Prema lemi 7.1 i bilo koje potencije  $(\lambda - \alpha)^p$  i  $(\lambda - \beta)^q$  su relativno prosti polinomi.

Neka je sada  $V$  kompleksan konačnodimenzionalan vektorski prostor i  $A \in L(V)$ . Neka je  $\sigma(A) = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s\}$  pri čemu je  $\alpha_i \neq \alpha_j$  za  $i \neq j$ . Tada su  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  sve međusobno različite nultočke minimalnog polinoma  $\mu_A(\lambda)$  operatora  $A$  i prema pretodnom razmatranju imamo

$$\mu_A(\lambda) = (\lambda - \alpha_1)^{p_1} (\lambda - \alpha_2)^{p_2} \cdots (\lambda - \alpha_s)^{p_s}$$

za neke prirodne brojeve  $p_1, p_2, \dots, p_s$ . Nadalje, vidjeli smo da su za  $i \neq j$  polinomi  $(\lambda - \alpha_i)^{p_i}$  i  $(\lambda - \alpha_j)^{p_j}$  relativno prosti. Stavimo  $V_j = N((A - \alpha_j)^{p_j})$ . Po teoremu 7.2 tada su  $V_1, V_2, \dots, V_s$   $A$ -invarijantni potprostori i vrijedi:

$$V = V_1 \dot{+} V_2 \dot{+} \cdots \dot{+} V_s, \quad \mu_{A_j}(\lambda) = (\lambda - \alpha_j)^{p_j} \quad \text{za} \quad A_j = A|_{V_j}, \quad j = 1, 2, \dots, s.$$

Kako je  $(\lambda - \alpha_j)^{p_j}$  minimalni polinom operatora  $A_j = A|_{V_j}$ , zaključujemo da je operator  $A_j - \alpha_j I_{V_j}$  nilpotentan ( $I_{V_j}$  je oznaka za jedinični operator na prostoru  $V_j$ ) i da mu je indeks nilpotentnosti jednak  $p_j$ . Prema teoremima 5.1 i 5.2 slijedi da u nekoj bazi  $e^{(j)}$  potprostora  $V_j$  operator  $A_j - \alpha_j I_{V_j}$  ima matricu koja je blok-dijagonalna, a svaki blok na dijagonali je elementarna Jordanova klijetka, s tim da najveća od tih klijetki ima format  $p_j \times p_j$ . Tada i operator  $A_j$  ima u toj bazi blok-dijagonalnu matricu, a blokovi na dijagonali su oblika:

$$\begin{bmatrix} \alpha_j & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_j & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_j & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha_j & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \alpha_j \end{bmatrix}.$$

Na taj način dokazali smo teorem o Jordanovoj formi matrice linearnog operatora:

**Teorem 7.3** *Neka je  $V$  konačnodimenzionalan vektorski prostor nad algebarski zatvorenim poljem  $K$  (npr.  $K = \mathbb{C}$ ) i neka je  $A \in L(V)$ . Neka je*

$$\sigma(A) = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s\}, \quad \alpha_j \neq \alpha_k \quad \text{za} \quad j \neq k.$$

Dakle,

$$\mu_A(\lambda) = (\lambda - \alpha_1)^{p_1} (\lambda - \alpha_2)^{p_2} \cdots (\lambda - \alpha_s)^{p_s}, \quad p_1, p_2, \dots, p_k \in \mathbb{N}.$$

Stavimo

$$V_j = N((A - \alpha_j I_j)^{p_j}), \quad A_j = A|_{V_j}, \quad B_j = A_j - \alpha_j I_j$$

( $I_j$  je jedinični operator na prostoru  $V_j$ ).  $B_j$  je nilpotentan operator indeksa  $p_j$ . Postoji baza  $e$  prostora  $V$  (sastavljena redom od baza  $e^{(1)}, e^{(2)}, \dots, e^{(s)}$  potprostora  $V_1, V_2, \dots, V_s$ ) u kojoj operator  $A$  ima blok-dijagonalnu matricu (tzv. **Jordanova forma matrice operatora  $A$** ) čiji su blokovi  $\alpha_j I_j(e^{(j)}) + B_j(e^{(j)})$ ,  $1 \leq j \leq s$ . Nadalje, svaka matrica  $B_j(e^{(j)})$  je blok-dijagonalna i blokovi su joj elementarne Jordanove klijetke od kojih najveća ima format  $p_j \times p_j$ .

## Poglavlje 8

# Unitarni prostori

U ovoj točki polje  $K$  nad kojim promatramo vektorske prostore će stalno biti ili polje  $\mathbb{R}$  realnih brojeva ili polje  $\mathbb{C}$  kompleksnih brojeva. Vektorski prostor nad poljem  $\mathbb{R}$  obično se zove **realan vektorski prostor**, a nad poljem  $\mathbb{C}$  **kompleksan vektorski prostor**.

**Skalarni produkt** na vektorskom prostoru  $X$  je preslikavanje

$$(\cdot|\cdot) : X \times X \rightarrow K$$

(svakom uređenom paru vektora  $(x, y) \in X \times X$  pridružen je skalar  $(x|y) \in K$ ) sa sljedećim svojstvima:

linearnost u prvoj varijabli:

$$(\lambda x + \mu y|z) = \lambda(x|z) + \mu(y|z), \quad \lambda, \mu \in K, \quad x, y, z \in X;$$

hermitska simetrija:

$$(x|y) = \overline{(y|x)}, \quad x, y \in X;$$

(u slučaju  $K = \mathbb{R}$  svojstvo je  $(x|y) = (y|x)$  i kraće se zove simetrija)

pozitivnost:

$$(x|x) \geq 0, \quad x \in X;$$

definitnost:

$$(x|x) = 0 \quad \iff \quad x = 0.$$

Vektorski prostor na kome je zadan skalarni produkt zove se **unitaran prostor**. Skalarni produkt je zbog linearnosti u prvoj varijabli i zbog hermitske simetrije antilinearan u drugoj varijabli:  $(x|\lambda y + \mu y) = \bar{\lambda}(x|y) + \bar{\mu}(x|z)$ ; u slučaju  $K = \mathbb{R}$  imamo linearnost i u drugoj varijabli:  $(x|\lambda y + \mu z) = \lambda(x|y) + \mu(x|z)$ . Preslikavanje  $V \times V \rightarrow K$  zove se **bilinearno** ako je linearno i u prvoj varijabli i u drugoj varijabli; ako je  $V$  kompleksan vektorski prostor, preslikavanje  $V \times V \rightarrow \mathbb{C}$  zove se **seskvilinearno** ako je linearno u prvoj varijabli i antilinearno u drugoj varijabli. Dakle, skalarni produkt na realnom vektorskom prostoru je bilinearan, a na kompleksnom vektorskom prostoru seskvilinearan.

U unitarnom prostoru skalarni produkt dviju linearnih kombinacija može se računati član po član:

$$\left( \sum_{j=1}^n \alpha_j x_j \mid \sum_{k=1}^m \beta_k y_k \right) = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m \alpha_j \overline{\beta_k} (x_j \mid y_k).$$

**Teorem 8.1** *Neka je  $X$  unitaran prostor. Za  $x \in X$  stavimo  $\|x\| = \sqrt{(x|x)}$  (nenegativan drugi korijen). Tada funkcija  $x \mapsto \|x\|$  s vektorskog prostora  $X$  u skup  $\mathbb{R}_+ = \{\lambda \in \mathbb{R}; \lambda \geq 0\}$  ima sljedeća svojstva:*

- (a) za  $x \in X$  vrijedi  $\|x\| = 0$  ako i samo ako je  $x = 0$ ;
- (b) za  $x \in X$  i  $\lambda \in K$  vrijedi  $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$ ;
- (c) za  $x, y \in X$  vrijedi tzv. **nejednakost trokuta**:  $\|x\| + \|y\| \leq \|x + y\|$ .

Nadalje, za bilo koje  $x, y \in X$  vrijedi tzv. **nejednakost Cauchy–Schwarz–Bunyakovskog**:

$$|(x|y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|,$$

pri čemu vrijedi znak jednakosti ako i samo ako su  $x$  i  $y$  proporcionalni.

**Dokaz:** Svojstvo (a) neposredna je posljedica definitnosti skalarnog produkta. Svojstvo (b) posljedica je li-learnosti i hermitske simetrije:

$$\|\lambda x\|^2 = (\lambda x | \lambda x) = \lambda \overline{\lambda} (x|x) = |\lambda|^2 \|x\|^2.$$

Dokažimo sada nejednakost Cauchy–Schwarz–Bunyakovskog. Za vektore  $x, y \in X$  zbog pozitivnosti norme, linearnosti skalarnog produkta u prvoj varijabli i hermitske simetrije imamo redom:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \|(x|x)y - (y|x)x\|^2 = ((x|x)y - (y|x)x | (x|x)y - (y|x)x) = \\ &= \|x\|^4 \|y\|^2 - \|x\|^2 |(y|x)|^2 - \|x\|^2 (y|x)(x|y) + \|x\|^2 |(y|x)|^2 = \\ &= \|x\|^4 \|y\|^2 - \|x\|^2 |(x|y)|^2 = \|x\|^2 (\|x\|^2 \|y\|^2 - |(x|y)|^2). \end{aligned}$$

Ako je  $x = 0$ , očito je  $|(x|y)| = \|x\| \cdot \|y\|$  (obje strane su nula); nadalje, tada su  $x$  i  $y$  proporcionalni ( $x = 0 \cdot y$ ). Ako je  $x \neq 0$  tada je  $\|x\| \neq 0$  i iz gornje nejednakosti dijeljenjem sa  $\|x\|^2$  dobivamo  $0 \leq \|x\|^2 \|y\|^2 - |(x|y)|^2$ , a to je upravo nejednakost Cauchy–Schwarz–Bunyakovskog. Nadalje, iz definitnosti norme primijenjene na normu vektora  $(x|x)y - (y|x)x$  slijedi da u nejednakosti Cauchy–Schwarz–Bunyakovskog vrijedi znak jednakosti ako i samo ako je  $(x|x)y = (y|x)x$ , tj. ako i samo ako su  $x$  i  $y$  proporcionalni.

Ostaje nam da još dokažemo svojstvo (c). Za  $x, y \in X$  primjenom svojstava skalarnog produkta i nejednakosti Cauchy–Schwarz–Bunyakovskog nalazimo redom:

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 &= (x+y|x+y) = (x|x)+(x|y)+(y|x)+(y|y) = \|x\|^2+2\cdot\operatorname{Re}(x|y)+\|y\|^2 \leq \\ &\leq \|x\|^2 + 2 \cdot |(x|y)| + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2 \cdot \|x\| \cdot \|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2.\end{aligned}$$

Time je dokazana i nejednakost trokuta.

Funkcija  $x \mapsto \|x\|$  definirana na vektorskom prostoru  $X$  i s vrijednostima u skupu  $\mathbb{R}_+$  koja ima svojstva (a), (b) i (c) iz teorema 8.1 zove se **norma** na vektorskom prostoru  $X$ . Vektorski prostor na kome je zadana norma zove se **normiran prostor**.

Ako je  $X$  normiran prostor s normom  $\|\cdot\|$  postavlja se pitanje da li je možda ta norma dobivena iz nekog skalarnog produkta na prostoru  $X$ . Vrlo jednostavan odgovor na to pitanje, kojeg navodimo bez dokaza, vezan je uz jednu geometrijsku jednakost, koja vrijedi za bilo koji paralelogram u ravnini: zbroj kvadrata duljina stranica paralelograma jednak je zbroju kvadrata duljina njegovih dviju dijagonala.

**Teorem 8.2 (P. Jordan – J. von Neumann)** *Neka je  $X$  normiran prostor s normom  $x \mapsto \|x\|$ . Tada su sljedeća dva svojstva međusobno ekvivalentna:*

(a) *Postoji skalarni produkt  $(x, y) \mapsto (x|y)$  na  $X$  takav da je  $\|x\| = \sqrt{(x|x)}$ .*

(b) *Za bilo koje  $x, y \in X$  vrijedi tzv. **jednakost paralelograma**:*

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

*U tom je slučaju skalarni produkt sa svojstvom  $\|x\| = \sqrt{(x|x)}$  jedinstven i u slučaju polja  $K = \mathbb{R}$  zadan je sa:*

$$(x|y) = \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2),$$

*a u slučaju  $K = \mathbb{C}$  sa:*

$$(x|y) = \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 + i\|x + iy\|^2 - i\|x - iy\|^2).$$

Za vektore  $x, y$  iz unitarnog prostora  $X$  kažemo da su **ortogonalni** (ili **okomiti**) jedan na drugoga i pišemo  $x \perp y$  ako je  $(x|y) = 0$ . Za **vektor**  $x \in X$  kažemo da je **ortogonalan na podskup**  $S \subseteq X$  i pišemo  $x \perp S$  ako je  $x \perp y$  za svaki  $y \in S$ . Za podskupove  $S$  i  $T$  unitarnog prostora  $X$  kažemo da su međusobno **ortogonalni** i pišemo  $S \perp T$  ako je  $x \perp T$  za svaki  $x \in S$ . Za svaki podskup  $S$  unitarnog prostora  $X$  lako se vidi da je  $S^\perp = \{x \in X; x \perp S\}$  potprostor od  $X$ . Nadalje,  $S^\perp = [S]^\perp$  i  $S^\perp \cap [S] = \{0\}$ .

Podskup  $S \subseteq X$  zove se **ortogonalan** ako su bilo koja dva njegova elementa međusobno ortogonalna:  $x, y \in S, x \neq y \Rightarrow (x|y) = 0$ . Skup  $S$  zove se **ortonormiran**, ako je on ortogonalan i svaki  $x \in S$  je jedinični, tj.  $\|x\| = 1$ .

**Propozicija 8.1** *Ako je  $S$  ortogonalan podskup unitarnog prostora  $X$  i  $0 \notin S$ , onda je skup  $S$  linearno nezavisan.*

**Dokaz:** Neka su  $x_1, x_2, \dots, x_n \in S$  međusobno različiti vektori i neka su  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in K$  takvi da je  $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n = 0$ . Tada zbog međusobne ortogonalnosti vektora  $x_1, x_2, \dots, x_n$  za svaki  $j \in \{1, \dots, n\}$  imamo:

$$\begin{aligned} 0 &= (\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_j x_j + \dots + \lambda_n x_n | x_j) = \\ &= \lambda_1 (x_1 | x_j) + \dots + \lambda_j (x_j | x_j) + \dots + \lambda_n (x_n | x_j) = \lambda_j (x_j | x_j). \end{aligned}$$

Kako je  $(x_j | x_j) \neq 0$  slijedi  $\lambda_j = 0 \ \forall j$ . Dakle, skup  $S$  je linearno nezavisan.

Posebno, svaki ortonormiran skup je linearno nezavisan. Ortonormiran skup koji je baza od  $V$  zove se **ortonormirana baza** od  $V$ .

**Teorem 8.3** *Neka je  $\{e_1, \dots, e_k\}$  ortonormiran podskup unitarnog prostora  $X$  i neka je  $x \in X$ .*

(a) *Vrijedi tzv. Besselova nejednakost*

$$\sum_{j=1}^k |(x | e_j)|^2 \leq \|x\|^2.$$

*Pri tome vrijedi znak jednakosti ako i samo ako je  $x \in [\{e_1, \dots, e_k\}]$ . U tom slučaju je*

$$x = \sum_{j=1}^k (x | e_j) e_j.$$

(b) *Stavimo*

$$x_0 = \sum_{j=1}^k (x | e_j) e_j.$$

*Za svaki  $y \in [\{e_1, \dots, e_k\}]$ ,  $y \neq x_0$ , vrijedi striktna nejednakost*

$$\|x - x_0\| < \|x - y\|.$$

*Dakle,  $x_0$  je jedinstvena najbolja aproksimacija vektora  $x$  vektorom iz potprostora razapetog vektorima  $e_1, \dots, e_k$ .*

**Dokaz:** Dokažimo najprije tvrdnju (b). Neka je  $y \in [\{e_1, \dots, e_k\}]$ , dakle za neke skalare  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$  je

$$y = \sum_{j=1}^k \alpha_j e_j.$$

Primijetimo da je  $(e_i | e_j) = \delta_{ij}$ . Stoga imamo redom:



$$\begin{aligned}
& \|x - y\|^2 - \|x - x_0\|^2 = \\
& = \left( x - \sum_{j=1}^k \alpha_j e_j \middle| x - \sum_{j=1}^k \alpha_j e_j \right) - \left( x - \sum_{j=1}^k (x|e_j) e_j \middle| x - \sum_{j=1}^k (x|e_j) e_j \right) = \\
& = (x|x) - \sum_{j=1}^k \overline{\alpha_j} (x|e_j) - \sum_{j=1}^k \alpha_j \overline{(x|e_j)} + \sum_{j=1}^k |\alpha_j|^2 - \\
& - (x|x) + \sum_{j=1}^k \overline{(x|e_j)} (x|e_j) + \sum_{j=1}^k (x|e_j) \overline{(x|e_j)} - \sum_{j=1}^k |(x|e_j)|^2.
\end{aligned}$$

U posljednjem se izrazu skraćuju prvi i peti član, te sedmi i osmi član, pa ostaje

$$\begin{aligned}
& \|x - y\|^2 - \|x - x_0\|^2 = \\
& = \sum_{j=1}^k |\alpha_j|^2 - \sum_{j=1}^k \overline{\alpha_j} (x|e_j) - \sum_{j=1}^k \alpha_j \overline{(x|e_j)} + \sum_{j=1}^k |(x|e_j)|^2.
\end{aligned}$$

Odatle je

$$\|x - y\|^2 - \|x - x_0\|^2 = \sum_{j=1}^k |\alpha_j - (x|e_j)|^2.$$

Prema tome, ako je  $\alpha_j \neq (x|e_j)$  za bilo koji  $j \in \{1, 2, \dots, k\}$ , tj. ako je  $y \neq x_0$ , onda je  $\|x - y\|^2 - \|x - x_0\|^2 > 0$ , odnosno, imamo striktnu nejednakost  $\|x - x_0\| < \|x - y\|$ . Time je dokazana tvrdnja (b).

Dokažimo sada tvrdnju (a). Kao u dokazu tvrdnje (b) nalazimo:

$$0 \leq \left\| x - \sum_{j=1}^k (x|e_j) e_j \right\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{j=1}^k |(x|e_j)|^2.$$

Odatle slijedi Besselova nejednakost. Nadalje, vrijedi znak jednakosti ako i samo ako je

$$x = \sum_{j=1}^k (x|e_j) e_j.$$

No, koristeći tvrdnju (b) vidimo da je to ispunjeno ako i samo ako je  $x \in \{e_1, \dots, e_k\}$ .

Sljedeći teorem rješava pitanje egzistencije (pa čak i konstrukcije) ortonormirane baze u konačnodimenzionalnom unitarnom prostoru.

**Teorem 8.4 (Gram–Schmidt)** *Neka je  $x_1, x_2, x_3, \dots$  konačan ili beskonačan linearno nezavisan niz vektora u unitarnom prostoru  $X$ .*

(a) *Postoji ortonormiran niz  $e_1, e_2, e_3, \dots$  u  $X$  sa svojstvom da je*

$$[\{x_1, x_2, \dots, x_k\}] = [\{e_1, e_2, \dots, e_k\}] \quad \forall k. \quad (8.1)$$

(b) *Uz dodatni uvjet*

$$(e_k | x_k) > 0 \quad \forall k \quad (8.2)$$

*ortonormiran niz  $e_1, e_2, e_3, \dots$  iz tvrdnje (a) je jedinstven.*

**Dokaz:**  $[\{e_1\}] = [\{x_1\}]$  znači da je  $e_1 = \alpha x_1$  za neki skalar  $\alpha$ . Iz zahtjeva  $\|e_1\| = 1$  slijedi da mora biti  $|\alpha| = \frac{1}{\|x_1\|}$ . Nadalje,  $(e_1 | x_1) = \alpha \|x_1\|^2$ , pa dodatni zahtjev  $(e_1 | x_1) > 0$  znači da mora biti  $\alpha > 0$ . Dakle,  $\alpha = \frac{1}{\|x_1\|}$ , tj  $e_1 = \frac{1}{\|x_1\|} x_1$  je jedini jedinični vektor takav da je  $[\{e_1\}] = [\{x_1\}]$  i  $(e_1 | x_1) > 0$ .

Pretpostavimo da smo našli ortonormirane vektore  $e_1, \dots, e_n$  takve da vrijede (8.1) i (8.2) za  $k = 1, 2, \dots, n$ . Dokazat ćemo sada da postoji jedinstven jedinični vektor  $e_{n+1}$  takav da vrijede (8.1) i (8.2) za  $k = n + 1$ . Na taj način će teorem 8.4 matematičkom indukcijom biti u potpunosti dokazan.

Zahtjev (8.1) za  $k = n + 1$  znači da mora biti  $e_{n+1} \in [\{x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}\}]$ , a kako je po pretpostavci  $[\{x_1, x_2, \dots, x_n\}] = [\{e_1, \dots, e_n\}]$ , to znači da mora biti  $e_{n+1} \in [\{e_1, \dots, e_n, x_{n+1}\}]$ . Tražimo dakle vektor  $e_{n+1}$  u obliku

$$e_{n+1} = \alpha x_{n+1} + \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n.$$

Za  $1 \leq k \leq n$  mora biti  $0 = (e_{n+1} | e_k) = \alpha (x_{n+1} | e_k) + \alpha_k$ , a to znači  $\alpha_k = -\alpha (x_{n+1} | e_k)$  za  $k = 1, 2, \dots, n$ . Prema tome,

$$e_{n+1} = \alpha y, \text{ gdje je } y = x_{n+1} - (x_{n+1} | e_1) e_1 - (x_{n+1} | e_2) e_2 - \dots - (x_{n+1} | e_n) e_n.$$

Vektor  $e_{n+1}$  je jedinični ako i samo ako je  $|\alpha| = \frac{1}{\|y\|}$ . Nadalje, imamo

$$(e_{n+1} | x_{n+1}) = \alpha \left( x_{n+1} - \sum_{k=1}^n (x_{n+1} | e_k) e_k \mid x_{n+1} \right) = \alpha \left[ \|x_{n+1}\|^2 - \sum_{k=1}^n |(x_{n+1} | e_k)|^2 \right].$$

Prema tvrdnji (a) teorema 8.3 izraz u uglatoj zagradi je striktno pozitivan jer zbog linearne nezavisnosti vektor  $x_{n+1}$  nije u potprostoru  $[\{x_1, x_2, \dots, x_n\}] = [\{e_1, e_2, \dots, e_n\}]$ . Dakle  $(e_{n+1} | x_{n+1}) > 0$  ako i samo ako je  $\alpha > 0$ . To znači da mora biti  $\alpha = \frac{1}{\|y\|}$ . Dakle, postoji jedan i samo jedan jedinični vektor  $e_{n+1}$  takav da vrijede (8.1) i (8.2) za  $k = n + 1$ . To je vektor  $e_{n+1} = \frac{1}{\|y\|} y$  pri čemu je  $y = x_{n+1} - \sum_{1 \leq k \leq n} (x_{n+1} | e_k) e_k$ .

Za jedinstveni niz  $e_1, e_2, e_3, \dots$  iz tvrdnje (b) teorema 8.4 kažemo da je iz niza  $x_1, x_2, x_3, \dots$  dobiven **Gram–Schmidtovim postupkom ortonormiranja**.

**Korolar 8.1** Neka je  $X$  konačnodimenzionalan unitaran prostor. Tada postoji ortonormirana baza od  $X$ . Štoviše, svaki ortonormiran podskup od  $X$  sadržan je u nekoj ortonormiranoj bazi od  $X$ .

**Dokaz:** Neka je  $\{x_1, \dots, x_k\}$  ortonormiran podskup od  $X$ . Tada je taj skup linearno nezavisan, pa je sadržan u nekoj bazi  $\{x_1, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_n\}$  od  $X$ . Gram–Schmidtovim postupkom ortonormiranja dolazimo do ortonormirane baze  $\{e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_n\}$  od  $X$ . Iz dokaza teorema 8.4 i iz ortonormiranosti skupa  $\{x_1, \dots, x_k\}$  je jasno da je  $e_1 = x_1, \dots, e_k = x_k$ . Dakle, ortonormiran skup  $\{x_1, \dots, x_k\}$  sadržan je u ortonormiranoj bazi  $\{x_1, \dots, x_k, e_{k+1}, \dots, e_n\}$ .

Za vektore  $x_1, x_2, \dots, x_n$  unitarnog prostora  $X$  stavimo:

$$G(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{bmatrix} (x_1|x_1) & (x_1|x_2) & \cdots & (x_1|x_n) \\ (x_2|x_1) & (x_2|x_2) & \cdots & (x_2|x_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (x_n|x_1) & (x_n|x_2) & \cdots & (x_n|x_n) \end{bmatrix}$$

Dakle,  $G(x_1, x_2, \dots, x_n)$  je kvadratna matrica  $n$ -tog reda čiji je element u  $i$ -tom retku i  $j$ -tom stupcu jednak  $(x_i|x_j)$ . Ta se matrica zove **Gramova matrica** vektora  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Njena se determinanta označava  $\Gamma(x_1, x_2, \dots, x_n)$  i zove **Gramova determinanta** vektora  $x_1, x_2, \dots, x_n$ :

$$\Gamma(x_1, x_2, \dots, x_n) = \det \begin{bmatrix} (x_1|x_1) & (x_1|x_2) & \cdots & (x_1|x_n) \\ (x_2|x_1) & (x_2|x_2) & \cdots & (x_2|x_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (x_n|x_1) & (x_n|x_2) & \cdots & (x_n|x_n) \end{bmatrix}$$

**Teorem 8.5** Neka je  $X$  unitaran prostor. Vektori  $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$  su linearno nezavisni ako i samo ako je njihova Gramova matrica  $G(x_1, x_2, \dots, x_n)$  regularna, odnosno, ako i samo ako je  $\Gamma(x_1, x_2, \dots, x_n) \neq 0$ . U tom slučaju je  $\Gamma(x_1, x_2, \dots, x_n) > 0$ .

**Dokaz:** Pretpostavimo da su vektori  $x_1, x_2, \dots, x_n$  linearno zavisni i neka su  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  skalari (od kojih je barem jedan različit od nule) takvi da je  $\sum_{1 \leq k \leq n} \lambda_k x_k = 0$ . Tada za svaki  $j \in \{1, \dots, n\}$  vrijedi

$$0 = \left( \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k \middle| x_j \right) = \sum_{k=1}^n \lambda_k (x_k | x_j).$$

To znači da sljedeći homogen sustav od  $n$  linearnih jednadžbi sa  $n$  nepoznanica  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  ima netrivialno rješenje:

$$\begin{aligned} (x_1|x_1)\lambda_1 + (x_2|x_1)\lambda_2 + \dots + (x_n|x_1)\lambda_n &= 0 \\ (x_1|x_2)\lambda_1 + (x_2|x_2)\lambda_2 + \dots + (x_n|x_2)\lambda_n &= 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ (x_1|x_n)\lambda_1 + (x_2|x_n)\lambda_2 + \dots + (x_n|x_n)\lambda_n &= 0 \end{aligned} \tag{8.3}$$

To znači da je matrica tog sustava singularna. No, matrica sustava (8.3) je upravo transponirana matrica matrice  $G(x_1, x_2, \dots, x_n)$ . Time smo dokazali da iz linearne zavisnosti vektora  $x_1, x_2, \dots, x_n$  slijedi da je matrica  $G(x_1, x_2, \dots, x_n)$  singularna.

Pretpostavimo sada da je matrica  $G(x_1, x_2, \dots, x_n)$  singularna. Tada je i transponirana matrica singularna, što znači da sustav jednadžbi (8.3) ima netrivialno rješenje  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  (dakle,  $\lambda_j \neq 0$  za barem jedan indeks  $j$ ). Stavimo  $y = \sum_{1 \leq k \leq n} \lambda_k x_k$ . Sustav jednadžbi (8.3) može se kraće zapisati ovako

$$(y|x_j) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

To znači da je  $y \perp \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ . Međutim,  $y \in \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ , pa slijedi  $y \perp y$ , odnosno  $(y|y) = 0$ . No to je moguće samo ako je  $y = 0$ , tj.  $\sum_{1 \leq k \leq n} \lambda_k x_k = 0$ . To pokazuje da su vektori  $x_1, x_2, \dots, x_n$  linearno zavisni.

Dokazali smo da su vektori  $x_1, x_2, \dots, x_n$  linearno zavisni ako i samo ako je singularna njihova Gramova matrica  $G(x_1, x_2, \dots, x_n)$ . Ekvivalentno, vektori  $x_1, x_2, \dots, x_n$  su linearno nezavisni ako i samo ako je njihova Gramova matrica  $G(x_1, x_2, \dots, x_n)$  regularna.

Dokažimo još pozitivnost Gramove determinante. Pretpostavimo da su vektori  $x_1, x_2, \dots, x_n$  linearno nezavisni. Stavimo

$$x = \sum_{k=1}^n (-1)^{n+k} \alpha_k x_k,$$

pri čemu je  $\alpha_k$  determinanta matrice reda  $n-1$ , koja se iz Gramove matrice  $G(x_1, x_2, \dots, x_n)$  dobije tako da se izbriše  $k$ -ti redak i  $n$ -ti stupac. Vektor  $x$  možemo shvatiti kao razvoj po  $n$ -tom stupcu determinante matrice koja se iz  $G(x_1, x_2, \dots, x_n)$  dobije tako da se zadnji stupac zamijeni stupcem vektora  $x_1, x_2, \dots, x_n$ :

$$x = \det \begin{bmatrix} (x_1|x_1) & (x_1|x_2) & \cdots & (x_1|x_{n-1}) & x_1 \\ (x_2|x_1) & (x_2|x_2) & \cdots & (x_2|x_{n-1}) & x_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ (x_n|x_1) & (x_n|x_2) & \cdots & (x_n|x_{n-1}) & x_n \end{bmatrix}$$

Posebno, primijetimo da je  $\alpha_n = \Gamma(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$ .

Uz uvedene oznake imamo

$$(x|x_j) = \sum_{k=1}^n (-1)^{n+k} \alpha_k (x_k|x_j) = \Gamma_j(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

pri čemu je  $\Gamma_j(x_1, x_2, \dots, x_n)$  oznaka za determinantu matrice koja se iz Gramove matrice dobije tako da se zadnji stupac zamijeni  $j$ -tim stupcem iste matrice:

$$\Gamma_j(x_1, x_2, \dots, x_n) = \det \begin{bmatrix} (x_1|x_1) & (x_1|x_2) & \cdots & (x_1|x_{n-1}) & (x_1|x_j) \\ (x_2|x_1) & (x_2|x_2) & \cdots & (x_2|x_{n-1}) & (x_2|x_j) \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ (x_n|x_1) & (x_n|x_2) & \cdots & (x_n|x_{n-1}) & (x_n|x_j) \end{bmatrix}$$

Za  $1 \leq j \leq n-1$  u  $\Gamma_j(x_1, x_2, \dots, x_n)$  su  $j$ -ti i  $n$ -ti stupac jednaki, pa je  $\Gamma_j(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$ . Nadalje,  $\Gamma_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = \Gamma(x_1, x_2, \dots, x_n)$ . Dakle, vrijedi

$$(x|x_j) = 0 \quad \text{za} \quad j = 1, \dots, n-1 \quad \text{i} \quad (x|x_n) = \Gamma(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Odatle je

$$\begin{aligned} 0 \leq (x|x) &= \left( x \left| \sum_{k=1}^n (-1)^{n+k} \alpha_k x_k \right. \right) = \overline{\alpha_n} (x|x_n) = \\ &= \overline{\Gamma(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})} \Gamma(x_1, x_2, \dots, x_n). \end{aligned}$$

Isto zaključivanje mogli smo provesti za vektore  $x_1, \dots, x_k$  za bilo koji  $k$ . Dakle, vrijedi:

$$\overline{\Gamma(x_1, x_2, \dots, x_{k-1})} \Gamma(x_1, x_2, \dots, x_k) \geq 0 \quad \text{za} \quad k = 2, \dots, n.$$

Ali vektori  $x_1, x_2, \dots, x_n$  su linearno nezavisni, pa su sve determinante

$$\Gamma(x_1), \Gamma(x_1, x_2), \dots, \Gamma(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

različite od nule. Budući da vrijedi  $\Gamma(x_1) = \|x_1\|^2 > 0$ , iz gornje nejednakosti za  $k = 2$  slijedi  $\Gamma(x_1, x_2) > 0$ , odatle i iz gornje nejednakosti za  $k = 3$  slijedi  $\Gamma(x_1, x_2, x_3) > 0$ , i tako redom korak po korak sve do  $\Gamma(x_1, x_2, \dots, x_n) > 0$ .

**Napomena:** Nejednakost  $\Gamma(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq 0$ , s tim da vrijedi znak jednakosti ako i samo ako su vektori  $x_1, x_2, \dots, x_n$  linearno zavisni, je generalizacija nejednakosti Cauchy–Schwarz–Bunyakowskog, jer je

$$\Gamma(x, y) = \det \begin{bmatrix} (x|x) & (x|y) \\ (y|x) & (y|y) \end{bmatrix} = \|x\|^2 \|y\|^2 - |(x|y)|^2.$$

**Teorem 8.6** Neka je  $x_1, x_2, \dots$  linearno nezavisan niz u unitarnom prostoru  $X$ . Jedinstveni ortonormiran niz  $e_1, e_2, \dots$  iz tvrdnje (b) teorema 8.4 dan je formulama

$$e_1 = \frac{1}{\|x_1\|} x_1, \quad e_k = \frac{\det \begin{bmatrix} (x_1|x_1) & (x_1|x_2) & \cdots & (x_1|x_{k-1}) & x_1 \\ (x_2|x_1) & (x_2|x_2) & \cdots & (x_2|x_{k-1}) & x_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ (x_k|x_1) & (x_k|x_2) & \cdots & (x_k|x_{k-1}) & x_k \end{bmatrix}}{\sqrt{\Gamma(x_1, x_2, \dots, x_{k-1}) \Gamma(x_1, x_2, \dots, x_k)}}, \quad k \geq 2,$$

Dakle, za  $k \geq 2$  je  $e_k = \frac{1}{\sqrt{\Gamma(x_1, x_2, \dots, x_{k-1}) \Gamma(x_1, x_2, \dots, x_k)}} y_k$  pri čemu je vektor  $y_k$  zadan kao determinanta matrice koja se iz Gramove matrice  $G(x_1, x_2, \dots, x_k)$  dobije tako da se zadnji ( $k$ -ti) stupac zamijeni stupcem vektora  $x_1, x_2, \dots, x_k$  (preciznije,  $y_k$  je razvoj te determinante po zadnjem stupcu).

**Dokaz:** Neka su vektori  $y_k$  definirani kao u iskazu teorema:

$$y_1 = x_1, \quad y_k = \det \begin{bmatrix} (x_1|x_1) & (x_1|x_2) & \cdots & (x_1|x_{k-1}) & x_1 \\ (x_2|x_1) & (x_2|x_2) & \cdots & (x_2|x_{k-1}) & x_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ (x_k|x_1) & (x_k|x_2) & \cdots & (x_k|x_{k-1}) & x_k \end{bmatrix} \quad \text{za } k \geq 2.$$

U dokazu teorema 8.5 vidjeli smo da je tada:

$$(y_k|x_j) = 0 \quad \text{za } 1 \leq j \leq k-1; \quad (y_k|x_k) = \Gamma(x_1, x_2, \dots, x_k);$$

$$\|y_k\|^2 = \Gamma(x_1, x_2, \dots, x_{k-1})\Gamma(x_1, x_2, \dots, x_k).$$

Vektor  $y_j$  je linearna kombinacija vektora  $x_1, x_2, \dots, x_j$ . Stoga je

$$[\{y_1, \dots, y_k\}] \subseteq [\{x_1, \dots, x_k\}].$$

Nadalje, za  $j < k$  vektor  $y_j$  je linearna kombinacija vektora  $x_1, x_2, \dots, x_j$ , pa zbog  $(y_k|x_i) = 0$  za  $i < k$  slijedi  $(y_k|y_j) = 0$ . To pokazuje da su vektori niza  $y_1, y_2, y_3, \dots$  međusobno ortogonalni. Kako je

$$(y_k, x_k) = \Gamma(x_1, x_2, \dots, x_n) > 0,$$

to je  $y_k \neq 0 \quad \forall k$ . Iz propozicije 8.1 zaključujemo da su vektori  $y_1, y_2, y_3, \dots$  linearno nezavisni, pa slijedi  $\dim[\{y_1, \dots, y_k\}] = k$ . Zbog inkluzije  $[\{y_1, \dots, y_k\}] \subseteq [\{x_1, \dots, x_k\}]$  slijedi jednakost  $[\{y_1, \dots, y_k\}] = [\{x_1, \dots, x_k\}]$ . Napokon, neka su  $e_1, e_2, e_3, \dots$  vektori iz iskaza teorema:  $e_k = \frac{1}{\|y_k\|} y_k$ . Tada je  $e_1, e_2, e_3, \dots$  ortonormiran niz,  $[\{e_1, \dots, e_k\}] = [\{x_1, \dots, x_k\}] \quad \forall k$  i

$$(x_k|e_k) = \frac{(x_k|y_k)}{\sqrt{\Gamma(x_1, x_2, \dots, x_k)\Gamma(x_1, x_2, \dots, x_{k-1})}} = \sqrt{\frac{\Gamma(x_1, x_2, \dots, x_k)}{\Gamma(x_1, x_2, \dots, x_{k-1})}} > 0.$$

Time je teorem u potpunosti dokazan.

**Teorem 8.7 (teorem o ortogonalnoj projekciji)** *Neka je  $X$  unitaran prostor i  $Y$  konačnodimenzionalan potprostor. Tada je  $X = Y \dot{+} Y^\perp$ . Drugim riječima, za svaki vektor  $x \in X$  postoje jedinstveni vektori  $y \in Y$  i  $z \in Y^\perp$  takvi da je  $x = y + z$ . Nadalje, ako je  $X$  konačnodimenzionalan, vrijedi  $Y^{\perp\perp} = Y$ .*

**Dokaz:** Neka je  $\{e_1, \dots, e_n\}$  ortonormirana baza od  $Y$ . Za dani vektor  $x \in X$  stavimo

$$y = \sum_{1 \leq k \leq n} (x|e_k)e_k \quad \text{i} \quad z = x - y, \quad \text{dakle} \quad x = y + z.$$

Tada je  $y \in Y$ . Nadalje, za bilo koji  $j \in \{1, \dots, n\}$  je

$$(z|e_j) = (x|e_j) - \left( \sum_{k=1}^n (x|e_k)e_k | e_j \right) = (x|e_j) - \sum_{k=1}^n (x|e_k)\delta_{kj} = 0,$$

dakle  $z \perp [\{e_1, e_2, \dots, e_n\}] = Y$ . Treba još dokazati jedinstvenost takvih vektora. Ako pretpostavimo da su i  $y' \in Y$  i  $z' \perp Y$  takvi da je  $x = y' + z'$ , onda je  $y + z = y' + z'$ , dakle  $y - y' = z' - z$ . Označimo taj vektor sa  $u$ . Tada  $u = y - y'$  pokazuje da je  $u \in Y$ , a  $u = z' - z$  pokazuje da je  $u \perp Y$ . No tada je  $u \perp u$ , dakle  $(u|u) = 0$ , odakle slijedi  $u = 0$ . Dakle,  $y' = y$  i  $z' = z$ .

Dokažimo još posljednju tvrdnju. Prema dokazanom znamo da vrijedi  $\dim Y^\perp = \dim X - \dim Y$ , a odatle

$$\dim Y^{\perp\perp} = \dim X - \dim Y^\perp = \dim X - (\dim X - \dim Y) = \dim Y.$$

Kako je očito  $Y \subseteq Y^{\perp\perp}$ , slijedi  $Y^{\perp\perp} = Y$ .

Ako je  $e = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  ortonormirana baza od  $X$  onda je  $(e_j|e_k) = \delta_{jk}$ . Proizvoljan vektor  $x \in X$  može se napisati kao linearna kombinacija vektora baze:

$$x = \sum_{j=1}^n \alpha_j e_j.$$

Skalarni produkt obje strane te jednakosti s vektorom  $e_k$  daje

$$(x|e_k) = \left( \sum_{j=1}^n \alpha_j e_j | e_k \right) = \sum_{j=1}^n \alpha_j \delta_{jk} = \alpha_k.$$

Dakle, za svaki vektor  $x \in X$  vrijedi:

$$x = \sum_{j=1}^n (x|e_j) e_j.$$

Ako je  $f = \{f_1, f_2, \dots, f_m\}$  ortonormirana baza drugog unitarnog prostora  $Y$  i  $A \in L(X, Y)$  sličan račun pokazuje da je element matrice  $A(f, e)$  na presjecištu  $i$ -tog retka i  $j$ -tog stupca jednak  $\alpha_{ij} = (Ae_j|f_i)$ :

$$A(f, e) = \begin{bmatrix} (Ae_1|e_1) & (Ae_2|e_1) & \cdots & (Ae_n|e_1) \\ (Ae_1|e_2) & (Ae_2|e_2) & \cdots & (Ae_n|e_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (Ae_1|e_n) & (Ae_2|e_n) & \cdots & (Ae_n|e_n) \end{bmatrix}$$

Za konačnodimenzionalan unitaran prostor  $X$  svi linearni funkcionali na  $X$  mogu se opisati pomoću vektora prostora  $X$ :

**Teorem 8.8** *Neka je  $X$  konačnodimenzionalan unitaran prostor. Za svaki  $f \in X'$  postoji jedinstven  $y \in X$  takav da vrijedi  $f(x) = (x|y)$  za svaki  $x \in X$ . Označimo li taj  $y$  sa  $\varphi(f)$ , dobivamo preslikavanje  $\varphi : X' \rightarrow X$  sa svojstvima:*

(a)  $\varphi$  je bijekcija sa  $X'$  na  $X$ .

(b) Za  $f, g \in X'$  i  $\lambda, \mu \in K$  vrijedi  $\varphi(\lambda f + \mu g) = \bar{\lambda}\varphi(f) + \bar{\mu}\varphi(g)$ .

**Dokaz:** Neka je  $f \in X'$ . Ako je  $f = 0$  očito za  $y = 0$  vrijedi

$$f(x) = (x|y) \quad \forall x \in X.$$

Neka je  $f \neq 0$ . Jezgra  $N(f) = \{x \in X; f(x) = 0\}$  funkcionala  $f$  je potprostor od  $X$ . Prema teoremu 8.7 imamo  $X = N(f) \dot{+} N(f)^\perp$ . Rang funkcionala  $f$  jednak je 1, jer zbog  $f \neq 0$  imamo  $R(f) = K$ . Po teoremu o rangu i defektu (teorem 2.3) slijedi da je defekt  $d(f) = \dim N(f) = \dim X - 1$ . Kako je  $X = N(f) \dot{+} N(f)^\perp$ , zaključujemo da je potprostor  $N(f)^\perp$  jednodimenzionalan. Neka je  $e$  jedinični vektor u  $N(f)^\perp$ . Stavimo  $y = \overline{f(e)}e$ . Neka je  $x$  bilo koji vektor iz  $X$ . Kako je  $X = N(f) \dot{+} N(f)^\perp$ , postoje skalari  $\lambda \in \mathbb{C}$  i vektor  $z \in N(f)$  takvi da je  $x = \lambda e + z$ . Sada je

$$(x) = f(\lambda e + z) = \lambda f(e) + f(z) = \lambda f(e),$$

jer je  $z \in N(f)$ . Nadalje,

$$(x|y) = (\lambda e + z|\overline{f(e)}e) = \lambda f(e)(e|e) + f(e)(z|e) = \lambda f(e).$$

jer je vektor  $e$  jedinični i okomit na  $N(f)$ . Dakle, vektor  $y$  zadovoljava

$$f(x) = (x|y) \quad \forall x \in X.$$

Dokažimo sada da je takav vektor  $y$  jedinstven. Pretpostavimo da i  $y'$  ima svojstvo  $f(x) = (x|y') \forall x \in X$ . Tada je  $(x|y - y') = 0 \forall x \in X$ , pa slijedi  $y - y' = 0$ , tj.  $y = y'$ .

Dakle, preslikavanje  $\varphi : X' \rightarrow X$  iz iskaza teorema je dobro definirano. Iz definicije je jasno da je  $\varphi$  injekcija. To je i surjekcija, jer je za bilo koji  $y \in X$  sa  $f(x) = (x|y)$  zadan linearan funkcional  $f$  na prostoru  $X$  i  $\varphi(f) = y$ .

Napokon, ako su  $\lambda, \mu \in K$  i  $f, g \in X'$ , za svaki  $x \in X$  imamo

$$\begin{aligned} (x|\overline{\lambda}\varphi(f) + \overline{\mu}\varphi(g)) &= \lambda(x|\varphi(f)) + \mu(x|\varphi(g)) = \\ &= \lambda f(x) + \mu g(x) = (\lambda f + \mu g)(x) = (x|\varphi(\lambda f + \mu g)). \end{aligned}$$

Dakle je  $\varphi(\lambda f + \mu g) = \overline{\lambda}\varphi(f) + \overline{\mu}\varphi(g)$  i time je teorem 8.8 dokazan.

**Teorem 8.9** *Neka su  $X$  i  $Y$  konačnodimenzionalni unitarni prostori. Za svaki  $A \in L(X, Y)$  postoji jedinstven  $A^* \in L(Y, X)$  takav da je  $(Ax|y) = (x|A^*y)$  za svaki  $x \in X$  i svaki  $y \in Y$ . Vrijedi:*

- (a)  $A^{**} = A$  za svaki  $A \in L(X, Y)$ .
- (b)  $A \mapsto A^*$  je antilinearna bijekcija sa  $L(X, Y)$  na  $L(Y, X)$ .
- (c) Za  $A \in L(X, Y)$  i  $B \in L(Y, Z)$  je  $(BA)^* = A^*B^*$ .

**Dokaz:** Neka je  $A \in L(X, Y)$  i  $y \in Y$ . Tada je sa  $x \mapsto (Ax|y)$  definiran linearan funkcional na prostoru  $X$ . Prema teoremu 8.8 postoji jedinstven vektor iz  $X$ , označit ćemo ga sa  $A^*(y)$ , takav da vrijedi  $(Ax|y) = (x|A^*(y)) \forall x \in X$ .



Na taj način došli smo do dobro definiranog preslikavanja  $A^* : Y \rightarrow X$ .

Dokažimo da je operator  $A^*$  linearan. Za dane  $\lambda, \mu \in K$  i  $y, z \in Y$  i za bilo koji  $x \in X$  imamo

$$\begin{aligned} & (x|A^*(\lambda y + \mu z) - \lambda A^*(y) - \mu A^*(z)) = \\ &= (x|A^*(\lambda y + \mu z)) - \bar{\lambda}(x|A^*(y)) - \bar{\mu}(x|A^*(z)) = \\ &= (Ax|\lambda y + \mu z) - \bar{\lambda}(Ax|y) - \bar{\mu}(Ax|z) = 0, \end{aligned}$$

jer je skalarni produkt antilinearan u drugom argumentu. Kako to vrijedi za svaki vektor  $x \in X$  zaključujemo da je  $A^*(\lambda y + \mu z) = \lambda A^*(y) + \mu A^*(z)$ .

Očito je  $A^{**} = A$ , a odatle odmah slijedi da je preslikavanje  $A \mapsto A^*$  bijektivno. Doista, ako za  $B \in L(Y, X)$  stavimo  $A = B^*$ , onda je  $A^* = B^{**} = B$ . Dakle, preslikavanje  $A \mapsto A^*$  je surjektivno. Nadalje, ako su  $A, C \in L(X, Y)$  takvi da je  $A^* = C^*$ , onda imamo  $A = A^{**} = C^{**} = C$ . Dakle, to preslikavanje je i injektivno.

Dokažimo sada da je preslikavanje  $A \mapsto A^*$  antilinearano. Za  $\lambda, \mu \in K$  i  $A, B \in L(X, Y)$  imamo za svaki  $x \in X$  i svaki  $y \in Y$ :

$$\begin{aligned} & (x|(\lambda A + \mu B)^*y) = ((\lambda A + \mu B)x|y) = \lambda(Ax|y) + \mu(Bx|y) = \\ &= \lambda(x|A^*y) + \mu(x|B^*y) = (x|\bar{\lambda}A^*y + \bar{\mu}B^*y) = (x|(\bar{\lambda}A^* + \bar{\mu}B^*)y). \end{aligned}$$

Dakle je  $(\lambda A + \mu B)^* = \bar{\lambda}A^* + \bar{\mu}B^*$ , odnosno preslikavanje  $A \mapsto A^*$  je antilinearano.

Napokon, za unitarne prostore  $X, Y$  i  $Z$ , i za  $A \in B(X, Y)$ ,  $B \in B(Y, Z)$ ,  $x \in X$  i  $z \in Z$  imamo  $(x|A^*B^*z) = (Ax|B^*z) = (BAx|z) = (x|(BA)^*z)$ . Dakle je  $(BA)^* = A^*B^*$ .

Za operator  $A^*$  kažemo da je **adjungiran** operatoru  $A$ .

**Propozicija 8.2** *Neka su  $X$  i  $Y$  konačnodimenzionalni unitarni prostori i  $A \in L(X, Y)$ . Tada vrijedi*

$$N(A) = R(A^*)^\perp, \quad R(A) = N(A^*)^\perp, \quad N(A^*) = R(A)^\perp, \quad R(A^*) = N(A)^\perp.$$

**Dokaz:** Zbog činjenice  $A^{**} = A$  zamjenom uloga  $A$  i  $A^*$  vidimo da su međusobno ekvivalentne prva i treća jednakost, a isto tako i druga i četvrta jednakost. Nadalje, kako je po teoremu 8.7  $R(A)^{\perp\perp} = R(A)$ , druga i treća jednakost su međusobno ekvivalentne. Dakle, sve četiri jednakosti su međusobno ekvivalentne pa je dovoljno dokazati jednu od njih, npr. prvu. Za  $x \in X$  imamo redom:

$$\begin{aligned} x \in N(A) & \iff Ax = 0 \iff (Ax|y) = 0 \forall y \in Y \iff \\ & \iff (x|A^*y) = 0 \forall y \in Y \iff x \perp R(A^*). \end{aligned}$$

Dakle je  $N(A) = R(A^*)^\perp$ .

Za konačnodimenzionalan unitaran prostor  $X$  operator  $A \in L(X)$  zove se:

- **hermitski**, ako vrijedi  $A^* = A$ ;
- **antihermitski**, ako vrijedi  $A^* = -A$ ;
- **unitaran**, ako je  $AA^* = A^*A = I$ ; tj.  $A$  je invertibilan u  $L(X)$  i  $A^{-1} = A^*$ ;
- **normalan**, ako je  $AA^* = A^*A$ .

Primijetimo da su i hermitski i antihermitski i unitarni operatori normalni operatori.

**Propozicija 8.3** *Neka je  $X$  konačnodimenzionalan unitaran prostor i neka je  $A \in L(X)$ .*

- (a) *Ako je operator  $A$  hermitski i  $(Ax|x) = 0 \forall x \in X$  onda je  $A = 0$ .*
- (b) *Operator  $A$  je normalan ako i samo ako je  $\|Ax\| = \|A^*x\| \forall x \in X$ .*
- (c) *Ako je operator  $A$  normalan onda je  $N(A) = N(A^*)$ .*
- (d) *Ako je operator  $A$  normalan i  $Ax = \alpha x$  za  $x \in X$  i  $\alpha \in \mathbb{C}$ , onda je  $A^*x = \bar{\alpha}x$ .*

**Dokaz:** (a) Za bilo koje  $x, y \in X$  imamo:

$$\begin{aligned} 0 &= (A(x+y)|x+y) = (Ax|x) + (Ax|y) + (Ay|x) + (Ay|y) = \\ &= (Ax|y) + (y|Ax) = 2\operatorname{Re}(Ax|y). \end{aligned}$$

Dakle je  $\operatorname{Re}(Ax|y) = 0 \forall x, y \in X$ . Tada slijedi i

$$0 = \operatorname{Re}(Ax|iy) = \operatorname{Re}[-i(Ax|y)] = \operatorname{Im}(Ax|y).$$

Stoga je  $(Ax|y) = 0 \forall x, y \in X$ . Odatle slijedi  $Ax = 0 \forall x \in X$ , dakle  $A = 0$ .

(b) Pretpostavimo da je operator  $A$  normalan. Za  $x \in X$  tada imamo:

$$\|Ax\|^2 = (Ax|Ax) = (A^*Ax|x) = (AA^*x|x) = (A^*x|A^*x) = \|A^*x\|^2.$$

Obratno, ako pretpostavimo da vrijedi  $\|Ax\| = \|A^*x\| \forall x \in X$ , onda dobivamo:

$$\begin{aligned} 0 &= \|Ax\|^2 - \|A^*x\|^2 = (Ax|Ax) - (A^*x|A^*x) = \\ &= (A^*Ax|x) - (AA^*x|x) = ((A^*A - AA^*)x|x). \end{aligned}$$

Dakle, za hermitski operator  $B = A^*A - AA^*$  vrijedi  $(Bx|x) = 0 \forall x \in X$ . Prema

(a) slijedi  $B = 0$ , tj.  $A^*A = AA^*$ .

Tvrdnja (c) slijedi neposredno iz tvrdnje (b) ( $Ax = 0 \iff A^*x = 0$ ).

(d) Stavimo  $B = A - \alpha I$ . Tada je operator  $B$  normalan i  $B^* = A^* - \bar{\alpha}I$ . Zbog (c) nalazimo:

$$Ax = \alpha x \implies x \in N(B) \implies x \in N(B^*) \implies A^*x = \bar{\alpha}x.$$

**Teorem 8.10** *Neka je  $X$  konačnodimenzionalan kompleksan unitaran prostor i neka je  $A \in L(X)$ . Sljedeća su dva svojstva međusobno ekvivalentna:*

- (a) *Operator  $A$  je normalan.*
- (b) *Postoji ortonormirana baza  $e$  takva da je matrica  $A(e)$  dijagonalna.*

**Dokaz:** Pretpostavimo da vrijedi (b) i neka je  $e = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  ortonormirana baza od  $X$  takva da je matrica  $A(e)$  dijagonalna. Neka su  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  dijagonalni elementi matrice  $A(e)$ . To znači da je  $Ae_j = \alpha_j e_j$  za  $j = 1, 2, \dots, n$ . Prema tvrdnji (d) propozicije 8.3 tada je  $A^*e_j = \overline{\alpha_j}e_j$  za  $j = 1, 2, \dots, n$ , što znači da je i matrica  $A^*(e)$  dijagonalna. Dijagonalne matrice međusobno komutiraju pa imamo

$$(A^*A)(e) = A^*(e)A(e) = A(e)A^*(e) = (AA^*)(e).$$

Odatle slijedi da je  $AA^* = A^*A$ , odnosno operator  $A$  je normalan. Time je dokazano da iz (b) slijedi (a).

Dokažimo sada da iz (a) slijedi (b). Tu ćemo implikaciju dokazati matematičkom indukcijom u odnosu na  $\dim X$ . Baza indukcije  $\dim X = 1$  je trivijalna, jer je svaka matrica operatora na jednodimenzionalnom prostoru dijagonalna. Da provedemo korak indukcije, pretpostavimo da je  $n \geq 2$  i da je implikacija (a)  $\Rightarrow$  (b) dokazana ako je  $\dim X < n$ . Neka je  $\dim X = n$  i neka je operator  $A \in L(X)$  normalan. Neka  $\alpha$  neka svojstvena vrijednost od  $A$  i  $e_1$  neki pripadni jedinični svojstveni vektor:  $Ae_1 = \alpha e_1$ . Prema tvrdnji (d) propozicije 8.3 tada je  $A^*e = \overline{\alpha}e_1$ . Stavimo  $Y = [\{e_1\}]^\perp = \{x \in X; (x|e_1) = 0\}$ . Ako je  $x \in Y$ , imamo  $(Ax|e_1) = (x|A^*e_1) = (x|\overline{\alpha}e_1) = \alpha(x|e_1) = 0$ , tj.  $Ax \in Y$ . Dakle vrijedi  $x \in Y \Rightarrow Ax \in Y$ , tj. potprostor  $Y$  je  $A$ -invarijantan. Analogno se dokazuje da je  $Y$  i  $A^*$ -invarijantan. Restrikcija  $A|Y$  je normalan operator na unitarnom prostoru  $Y$ . Kako je  $\dim Y = \dim X - 1 = n - 1 < n$ , po pretpostavci indukcije postoji ortonormirana baza  $\{e_2, \dots, e_n\}$  od  $Y$  u kojoj operator  $A|Y$  ima dijagonalnu matricu. No tada je  $e = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  ortonormirana baza od  $X$  takva da je matrica  $A(e)$  dijagonalna.

Time je teorem u potpunosti dokazan.

Može se dokazati da vrijedi i više od implikacije (a)  $\Rightarrow$  (b): *Ako je  $X$  konačnodimenzionalan kompleksan unitaran prostor i ako je  $\mathfrak{A}$  podskup od  $L(X)$  koji se sastoji od normalnih operatora koji međusobno komutiraju, onda postoji ortonormirana baza  $e$  od  $X$ , takva da je matrica  $A(e)$  dijagonalna za svaki operator  $A \in \mathfrak{A}$ .*

Za konačnodimenzionalan unitaran prostor  $X$  označimo sa  $U(X)$  skup svih unitarnih operatora  $A \in L(X)$ .

**Propozicija 8.4**  *$U(X)$  je podgrupa grupe  $GL(X)$ .*

**Dokaz:** Po definiciji je svaki unitaran operator regularan, dakle vrijedi  $U(X) \subseteq GL(X)$ . Očito je  $I^* = I = I^{-1}$ , dakle,  $I \in U(X)$ . Za  $A, B \in U(X)$

imamo  $(AB)^* = B^*A^* = B^{-1}A^{-1} = (AB)^{-1}$ , dakle  $AB \in U(X)$ . Napokon, za  $A \in U(X)$  je  $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1} = (A^{-1})^{-1}$ , pa slijedi  $A^{-1} \in U(X)$ .

**Propozicija 8.5** *Operator  $A \in L(X)$  je unitaran ako i samo ako vrijedi*

$$(Ax|Ay) = (x|y) \quad \forall x, y \in X.$$

**Dokaz:** Ako je  $A \in U(X)$  onda je  $A^*A = I$ , pa za bilo koje vektore  $x, y \in X$  imamo

$$(Ax|Ay) = (x|A^*Ay) = (x|Iy) = (x|y).$$

Pretpostavimo da vrijedi  $(Ax|Ay) = (x|y) \quad \forall x, y \in X$ . Tada je

$$(x|A^*Ay) = (Ax|Ay) = (x|y) = (x|Iy) \quad \forall x, y \in X,$$

pa slijedi  $A^*A = I$ . Odatle je  $A^* = A^{-1}$ , dakle,  $A \in U(X)$ .

Grupa  $U(X)$  ima u odnosu na ortonormirane baze istu ulogu kao i grupa  $GL(X)$  u odnosu na proizvoljne baze:

**Teorem 8.11** *Neka je  $X$  konačnodimenzionalan unitaran prostor.*

- (a) *Ako je  $A \in L(X)$  i ako je za neku ortonormiranu bazu  $e = \{e_1, \dots, e_n\}$  od  $X$  i  $Ae = \{Ae_1, \dots, Ae_n\}$  ortonormirana baza od  $X$ , onda je  $A \in U(X)$ .*
- (b) *Ako je  $A \in U(X)$  i ako je  $e$  ortonormirana baza od  $X$  onda je i  $Ae$  ortonormirana baza od  $X$ .*

**Dokaz:** (a) Neka su  $x, y \in X$  i  $x = \sum_{k=1}^n \alpha_k e_k$ ,  $y = \sum_{k=1}^n \beta_k e_k$ . Tada imamo redom:

$$\begin{aligned} (Ax|Ay) &= \left( \sum_{k=1}^n \alpha_k Ae_k \middle| \sum_{j=1}^n \beta_j Ae_j \right) = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_k \bar{\beta}_j (Ae_k | Ae_j) = \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_k \bar{\beta}_j \delta_{kj} = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_k \bar{\beta}_j (e_k | e_j) = \left( \sum_{k=1}^n \alpha_k e_k \middle| \sum_{j=1}^n \beta_j e_j \right) = (x|y). \end{aligned}$$

(b) Neka je  $A \in U(X)$  i neka je  $e = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  ortonormirana baza od  $X$ . Tada je

$$(Ae_k | Ae_j) = (e_k | A^* Ae_j) = (e_k | e_j) = \delta_{kj}.$$

Dakle,  $Ae$  je ortonormirana baza od  $X$ .

Za hermitske operatore teorem 8.10 o dijagonalizaciji vrijedi ne samo za kompleksne nego i za realne unitarne prostore.

**Teorem 8.12** *Neka je  $X$  konačnodimenzionalan realan ili kompleksan vektorski prostor i  $A \in L(X)$  hermitski operator.*

- (a) *Svi koeficijenti i sve nultočke polinoma  $\mu_A(\lambda)$  su realni.*

(b) Postoji ortonormirana baza  $e$  prostora  $X$  sastavljena od svojstvenih vektora operatora  $A$ , tj. takva da je matrica  $A(e)$  dijagonalna.

**Dokaz:** (a) Pretpostavimo prvo da je  $K = \mathbb{C}$ . Neka je  $\alpha \in \sigma(A)$  i neka je  $e \in X$  pripadni jedinični svojstveni vektor. Tada je

$$\lambda = \lambda(e|e) = (\lambda e|e) = (Ae|e) = (e|Ae) = (e|\lambda e) = \overline{\lambda}(e|e) = \overline{\lambda} \implies \alpha \in \mathbb{R}.$$

Dakle,  $\sigma(A) \subseteq \mathbb{R}$ , pa slijedi da su sve nultočke polinoma  $\mu_a(\lambda)$  realne. Nadalje, tada je

$$\mu_A(\lambda) = (\lambda - \alpha_1)(\lambda - \alpha_2) \cdots (\lambda - \alpha_m) \quad \text{za neke } \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m \in \mathbb{R},$$

odakle slijedi da su svi koeficijenti polinoma  $\mu_A(\lambda)$  realni.

Neka je sada  $K = \mathbb{R}$ . Tada su očito svi koeficijenti polinoma  $\mu_A(\lambda)$  realni. Dokažimo još da su i u ovom slučaju sve nultočke polinoma  $\mu_A(\lambda)$  realne. Pretpostavimo suprotno, tj. da postoji  $\lambda_0 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$  takav da je  $\mu_A(\lambda_0) = 0$ . Budući da su koeficijenti polinoma  $\mu_A(\lambda)$  realni, slijedi da je i  $\overline{\lambda_0}$  nultočka polinoma  $\mu(\lambda)$ . Tada je polinom  $\mu_A(\lambda)$  djeljiv s realnim polinomom  $(\lambda - \lambda_0)(\lambda - \overline{\lambda_0})$ . Stavimo  $\lambda_0 = \sigma + i\rho$ , gdje su  $\sigma, \rho \in \mathbb{R}$  i  $\rho \neq 0$ . Tada je

$$(\lambda - \lambda_0)(\lambda - \overline{\lambda_0}) = (\lambda - \sigma - i\rho)(\lambda - \sigma + i\rho) = (\lambda - \sigma)^2 + \rho^2.$$

Dakle, za neki realni polinom  $\nu(\lambda)$  vrijedi

$$\mu_A(\lambda) = [(\lambda - \sigma)^2 + \rho^2]\nu(\lambda).$$

Odatle je

$$0 = \mu_A(A) = [(A - \sigma I)^2 + \rho^2 I]\nu(A).$$

Imamo  $\deg \nu(\lambda) = \deg \mu_A(\lambda) - 2 < \deg \mu_A(\lambda)$ , dakle  $\nu(A) \neq 0$ . To znači da postoji vektor  $x \in X$  takav da je  $y = \nu(A)x \neq 0$ . Tada je  $[(A - \sigma I)^2 + \rho^2 I]y = 0$ . Kako je operator  $A$  hermitski i  $\sigma \in \mathbb{R}$ , slijedi da je i operator  $A - \sigma I$  hermitski. Stoga imamo

$$\begin{aligned} 0 &= ([ (A - \sigma I)^2 + \rho^2 I ] y | y) = ((A - \sigma I)^2 y | y) + \rho^2 (y | y) = \\ &= ((A - \sigma I)y | (A - \sigma I)y) + \rho^2 (y | y) = \|(A - \sigma I)y\|^2 + \rho^2 \|y\|^2. \end{aligned}$$

No to je nemoguće, jer je  $\|(A - \sigma I)y\|^2 \geq 0$  i  $\rho^2 \|y\|^2 > 0$ . Ova kontradikcija pokazuje da je pogrešna bila pretpostavka o postojanju nultočke od  $\mu_A(\lambda)$  koja nije realna. Time je dokazano da je i u slučaju  $K = \mathbb{R}$  svaka nultočka polinoma  $\mu_A(\lambda)$  realna.

(b) Zbog (a) se dokaz implikacije (a)  $\implies$  (b) u teoremu 8.10 može bez izmjene provesti i ako je  $A$  hermitski operator na konačnodimenzionalnom realnom unitarnom prostoru  $X$ . Naime, uzmemo li bilo koju nultočku  $\alpha_1 \in \mathbb{R}$  minimalnog polinoma  $\mu_A(\lambda)$  operatora  $A$ , onda je  $\alpha_1 \in \sigma(A)$ , pa postoji jedinični vektor  $e_1 \in X$  takav da je  $Ae_1 = \alpha_1 e_1$ . Tada je  $Y = \{e_1\}^\perp$   $A$ -invarijantan potprostor:

$$y \perp e_1 \implies (Ay|e_1) = (y|Ae_1) = (y|\alpha_1 e_1) = \alpha_1 (y|e_1) = 0 \implies Ay \perp e_1.$$

Operator  $A|_Y$  je hermitski, pa koristeći matematičku indukciju dolazimo do ortonormirane baze  $\{e_2, \dots, e_n\}$  od  $Y$  sastavljene od svojstvenih vektora operatora  $A|_Y$ . No tada je  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  ortonormirana baza od  $X$  sastavljena od svojstvenih vektora operatora  $A$ .



## Poglavlje 9

# Funkcije operatora

U cijelom ovom poglavlju  $V$  predstavlja konačnodimenzionalan vektorski prostor nad poljem  $\mathbb{C}$  kompleksnih brojeva. Za svaki polinom  $P(\lambda)$  i svaki  $A \in L(V)$  dobro je definiran operator  $P(A)$  i pridruživanje  $P(\lambda) \mapsto P(A)$  prevodi računske operacije s polinomima u računske operacije s operatorima:

- (1) Ako je  $P(\lambda) = 1$ , onda je  $P(A) = I$ .
- (2) Ako je  $Q(\lambda) = \alpha P(\lambda)$ , onda je  $Q(A) = \alpha P(A)$  ( $\alpha \in \mathbb{C}$ ).
- (3) Ako je  $R(\lambda) = P(\lambda) + Q(\lambda)$ , onda je  $R(A) = P(A) + Q(A)$ .
- (4) Ako je  $S(\lambda) = P(\lambda)Q(\lambda)$ , onda je  $S(A) = P(A)Q(A)$ .

Označimo sa  $\mathcal{P}$  skup svih polinoma. To je podskup skupa svih funkcija  $\mathbb{C}^{\mathbb{C}}$  sa  $\mathbb{C}$  u  $\mathbb{C}$ . Cilj je ovog poglavlja da za svaki linearan operator  $A \in L(V)$  preslikavanje  $P(\lambda) \mapsto P(A)$  sa  $\mathcal{P}$  u  $L(V)$  proširimo do preslikavanja sa čim većeg podskupa od  $\mathbb{C}^{\mathbb{C}}$  u  $L(V)$ , ali tako da i dalje vrijede pravila (1) – (4).

Funkcije najbližije polinomima su redovi potencija

$$f(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \lambda^k, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Ako gornji red potencija konvergira za svaki  $\lambda \in \mathbb{C}$ , funkcija  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  koju taj red definira zove se **cijela funkcija**. U tom slučaju prirodno je pokušati definirati  $f(A)$  kao odgovarajući red potencija operatora  $A$ :

$$f(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k A^k, \quad A \in L(V).$$

Međutim, da bismo mogli promatrati redove potencija linearnog operatora, treba nam pojam konvergencije u prostoru operatora. Neka su  $V$  i  $W$  konačnodimenzionalni vektorski prostori nad poljem  $\mathbb{C}$ . Za niz  $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$  u  $L(V, W)$  i za

$A \in L(V, W)$  kažemo da **niz operatora**  $(A_k)$  **konvergira** prema operatoru  $A$  i pišemo

$$A = \lim_{k \rightarrow \infty} A_k$$

ako postoje baza  $e = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  prostora  $V$  i baza  $f = \{f_1, f_2, \dots, f_m\}$  prostora  $W$  takve da za matrice

$$A_k(f, e) = \begin{bmatrix} \alpha_{11}^{(k)} & \alpha_{12}^{(k)} & \cdots & \alpha_{1n}^{(k)} \\ \alpha_{21}^{(k)} & \alpha_{22}^{(k)} & \cdots & \alpha_{2n}^{(k)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1}^{(k)} & \alpha_{m2}^{(k)} & \cdots & \alpha_{mn}^{(k)} \end{bmatrix}, \quad A(f, e) = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn} \end{bmatrix}$$

vrijedi

$$\alpha_{ij} = \lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_{ij}^{(k)} \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, m\}, \quad \forall j \in \{1, 2, \dots, n\}. \quad (9.1)$$

Primijetimo da ta definicija konvergencije u prostoru  $L(V, W)$  samo prividno ovisi o tome koje smo baze  $e$  i  $f$  izabrali. Doista, neka su  $e' = \{e'_1, e'_2, \dots, e'_n\}$  druga baza od  $V$  i  $f' = \{f'_1, f'_2, \dots, f'_m\}$  druga baza od  $W$ . Neka su  $S \in GL(V)$  i  $T \in GL(W)$  operatori prijelaza:

$$S e_i = e'_i, \quad 1 \leq i \leq n, \quad T f_j = f'_j, \quad 1 \leq j \leq m.$$

Prema propoziciji 2.4 tada vrijedi

$$A_k(f', e') = S(f)^{-1} A_k(f, e) T(e), \quad k \in \mathbb{N}, \quad A(f', e') = S(f)^{-1} A(f, e) T(e). \quad (9.2)$$

Izaberimo oznake za elemente matrica:

$$A_k(f', e') = \begin{bmatrix} \beta_{11}^{(k)} & \beta_{12}^{(k)} & \cdots & \beta_{1n}^{(k)} \\ \beta_{21}^{(k)} & \beta_{22}^{(k)} & \cdots & \beta_{2n}^{(k)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_{m1}^{(k)} & \beta_{m2}^{(k)} & \cdots & \beta_{mn}^{(k)} \end{bmatrix}, \quad A(f', e') = \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \cdots & \beta_{1n} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \cdots & \beta_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_{m1} & \beta_{m2} & \cdots & \beta_{mn} \end{bmatrix},$$

$$S(f)^{-1} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1m} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{m1} & \sigma_{m2} & \cdots & \sigma_{mm} \end{bmatrix}, \quad T(e) = \begin{bmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \cdots & \tau_{1n} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \cdots & \tau_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tau_{n1} & \tau_{n2} & \cdots & \tau_{nn} \end{bmatrix}.$$

Pisane pomoću elemenata matrice jednakosti (9.2) izgledaju ovako:

$$\beta_{pq}^{(k)} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \sigma_{pi} \alpha_{ij}^{(k)} \tau_{jq} \quad (k \in \mathbb{N}) \quad \text{i} \quad \beta_{pq} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \sigma_{pi} \alpha_{ij} \tau_{jq}.$$

Iz tih jednakosti i iz (9.1) neposredno slijedi

$$\beta_{pq} = \lim_{k \rightarrow \infty} \beta_{pq}^{(k)} \quad \forall p \in \{1, 2, \dots, m\}, \quad \forall q \in \{1, 2, \dots, n\}.$$



Dakle, konvergencija matricnih elemenata iz definicije konvergencije operatora ispunjena je u svim parovima baza u dva vektorska prostora.

Za **red operatora**  $\sum_{k=0}^{\infty} A_k$  kažemo da **konvergira**, ako konvergira niz  $(S_k)$  parcijalnih suma, gdje je

$$S_k = \sum_{j=0}^k A_j.$$

Limes niza parcijalnih suma zove se tada suma toga reda.

**Propozicija 9.1** *Neka je  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  cijela funkcija:*

$$f(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \lambda^k, \quad \lambda \in \mathbb{C},$$

*i neka je  $A \in L(V)$ . Tada red operatora*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k A^k$$

*konvergira.*

**Dokaz:** Iz teorije analitičkih funkcija kompleksne varijable znamo da ako red potencija

$$\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \lambda^k$$

konvergira za svaki  $\lambda \in \mathbb{C}$ , onda taj red apsolutno konvergira za svaki  $\lambda \in \mathbb{C}$ , tj. konvergira red apsolutnih vrijednosti

$$\sum_{k=0}^{\infty} |\alpha_k| \cdot |\lambda|^k.$$

Neka je  $e = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  baza od  $V$  i neka su  $\alpha_{ij}$  elementi matrice operatora  $A$  u toj bazi:

$$A(e) = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn} \end{bmatrix}.$$

Nadalje, za bilo koji  $k \geq 0$  označimo sa  $\alpha_{ij}^{(k)}$  elemente matrice  $A^k(e) = A(e)^k$ :

$$A^k(e) = \begin{bmatrix} \alpha_{11}^{(k)} & \alpha_{12}^{(k)} & \cdots & \alpha_{1n}^{(k)} \\ \alpha_{21}^{(k)} & \alpha_{22}^{(k)} & \cdots & \alpha_{2n}^{(k)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1}^{(k)} & \alpha_{n2}^{(k)} & \cdots & \alpha_{nn}^{(k)} \end{bmatrix}.$$

Neka je  $M > 0$  takav da je  $|\alpha_{ij}| \leq M \quad \forall i, j$ . Tada za svako  $k \geq 0$  vrijedi

$$|\alpha_{ij}^{(k)}| \leq (nM)^k, \quad \forall i, j. \quad (9.3)$$

Dokazat ćemo nejednakost (9.3) indukcijom u odnosu na  $k \geq 0$ . Što se tiče baze indukcije, tj. za  $k = 0$ , nejednakost (9.3) je očito istinita, jer je  $A^0 = I$ , dakle,  $\alpha_{ij}^{(0)} = \delta_{ij}$ . Pretpostavimo sada da (9.3) vrijedi za neki  $k \geq 0$ . Tada zbog jednakosti  $A^{k+1} = A \cdot A^k$  imamo redom

$$|\alpha_{ij}^{(k+1)}| = \left| \sum_{\ell=1}^n \alpha_{i\ell} \alpha_{\ell j}^{(k)} \right| \leq \sum_{\ell=1}^n |\alpha_{i\ell}| \cdot |\alpha_{\ell j}^{(k)}| \leq \sum_{\ell=1}^n M(nM)^k = (nM)^{k+1}.$$

Time je proveden korak indukcije i time je dokazana nejednakost (9.3) za sve  $k \geq 0$ . Odatle slijedi da je  $|\alpha_k \alpha_{ij}^{(k)}| \leq (nM)^k$ , dakle red apsolutnih vrijednosti  $\sum_{k=0}^{\infty} |\alpha_k \alpha_{ij}^{(k)}|$  majoriziran je konvergentnim redom  $\sum_{k=0}^{\infty} |\alpha_{ij}| (nM)^k$ . Zaključujemo da svi redovi  $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \alpha_{ij}^{(k)}$ ,  $i, j \in \{1, \dots, n\}$ , konvergiraju apsolutno. No to znači da red operatora  $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k A^k$  konvergira.

Za cijelu funkciju  $f$  iz propozicije 9.1 i za operator  $A \in L(V)$  stavljamo

$$f(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k A^k.$$

Operator  $f(A)$  zove se **cijela funkcija operatora  $A$** .

**Propozicija 9.2** Neka su  $f, g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  cijele funkcije,  $\alpha \in \mathbb{C}$  i  $A \in L(V)$ . Tada je

$$(\alpha f)(A) = \alpha f(A), \quad (f + g)(A) = f(A) + g(A), \quad (f \cdot g)(A) = f(A)g(A).$$

**Dokaz:** Neka je

$$f(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \lambda^k \quad \text{i} \quad g(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k \lambda^k.$$

Tada je

$$(\alpha f)(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha \alpha_k \lambda^k \quad \text{i} \quad (f + g)(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} (\alpha_k + \beta_k) \lambda^k,$$

pa imamo redom

$$\begin{aligned} (\alpha f)(A) &= \sum_{k=0}^{\infty} \alpha \alpha_k A^k = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^m \alpha \alpha_k A^k = \lim_{m \rightarrow \infty} \alpha \sum_{k=0}^m \alpha_k A^k = \\ &= \alpha \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^m \alpha_k A^k = \alpha \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k A^k = \alpha f(A) \end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned}
(f+g)(A) &= \sum_{k=0}^{\infty} (\alpha_k + \beta_k) A^k = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^m (\alpha_k + \beta_k) A^k = \\
&= \lim_{m \rightarrow \infty} \left( \sum_{k=0}^m \alpha_k A^k + \sum_{k=0}^m \beta_k A^k \right) = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^m \alpha_k A^k + \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^m \beta_k A^k = \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k A^k + \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k A^k = f(A) + g(A).
\end{aligned}$$

Dokažimo još i treću jednakost. Neka je  $e$  baza prostora. Za bilo koji operator  $B \in L(V)$  sa  $B(e)_{ij}$  ćemo označiti element matrice  $B(e)$  na presjecištu  $i$ -tog retka i  $j$ -tog stupca. Prema dokazu propozicije 9.1 redovi matričnih elemenata apsolutno su konvergentni, pa u njihovom produktu možemo po volji mijenjati redosljed članova i po volji ih grupirati. Stoga imamo

$$\begin{aligned}
[f(A)g(A)](e)_{ij} &= \sum_{\ell=1}^n f(A)(e)_{i\ell} g(A)(e)_{\ell j} = \sum_{\ell=1}^n \left[ \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \alpha_{i\ell}^{(k)} \right] \cdot \left[ \sum_{s=0}^{\infty} \beta_s \alpha_{\ell j}^{(s)} \right] = \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \alpha_k \beta_s \sum_{\ell=1}^n \alpha_{i\ell}^{(k)} \alpha_{\ell j}^{(s)} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \alpha_{ij}^{(k+s)} = \sum_{m=0}^{\infty} \left( \sum_{r=0}^m \alpha_r \beta_{m-r} \right) \alpha_{ij}^{(m)}.
\end{aligned}$$

S druge strane imamo

$$(f \cdot g)(A) = \sum_{m=0}^{\infty} \left( \sum_{r=0}^m \alpha_r \beta_{m-r} \right) A^m,$$

pa slijedi

$$[(f \cdot g)(A)](e)_{ij} = \sum_{m=0}^{\infty} \left( \sum_{r=0}^m \alpha_r \beta_{m-r} \right) \alpha_{ij}^{(m)}.$$

Dakle, vrijedi  $[f(A)g(A)](e)_{ij} = [(f \cdot g)(A)](e)_{ij} \quad \forall i, j \in \{1, \dots, n\}$ , a to znači da je  $(f \cdot g)(A) = f(A)g(A)$ . Time je propozicija u potpunosti dokazana.

Primjeri operatorskih jednakosti vezanih uz identitete koje zadovoljavaju neke poznate cijele funkcije:

$$\sin A + i \cos A = e^{iA}, \quad (\cos A)^2 + (\sin A)^2 = I,$$

$$\sin 2A = 2 \sin A \cos A, \quad \cos 2A = (\cos A)^2 - (\sin A)^2.$$

Prema teoremu 7.3 za operator  $A \in L(V)$  postoji baza  $e$  prostora  $V$  u kojoj je

$$A(e) = \begin{bmatrix} \lambda_1 I_1 + J_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 I_2 + J_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_s I_s + J_s \end{bmatrix},$$

gdje je  $I_j$  jedinična matrica formata  $n_j \times n_j$ ,  $J_j$  je elementarna Jordanova klijetka formata  $n_j \times n_j$  i  $\sigma(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s\}$  (pri tome svojstvene vrijednosti  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$  ne moraju biti međusobno različite). Primijetimo sada da je  $k$ -ta potencija blok-dijagonalne matrice ponovo blok-dijagonalna matrica čiji su blokovi  $k$ -te potencije odgovarajućih blokova matrice koju potenciramo:

$$A^k(e) = \begin{bmatrix} (\lambda_1 I_1 + J_1)^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & (\lambda_2 I_2 + J_2)^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & (\lambda_s I_s + J_s)^k \end{bmatrix}.$$

Odatle slijedi da za cijelu funkciju

$$f(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \lambda^k$$

vrijedi

$$[f(A)](e) = \begin{bmatrix} f(\lambda_1 I_1 + J_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & f(\lambda_2 I_2 + J_2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & f(\lambda_s I_s + J_s) \end{bmatrix}.$$

Ovo nam je polazište za definiciju funkcije  $f(A)$  operatora  $A$  za općenitije funkcije  $f$ . Stoga ćemo u daljnjem promatrati problem definicije  $f(\lambda_0 I + J)$ , gdje je  $I$  jedinična matrica formata  $n \times n$ , a  $J$  je elementarna Jordanova klijetka istog formata.

**Lema 9.1** *Neka je  $f : K(\lambda_1, r) \rightarrow \mathbb{C}$  funkcija koja je definirana i analitička na krugu*

$$K(\lambda_1, r) = \{\lambda \in \mathbb{C}; |\lambda - \lambda_1| < r\}$$

*i neka je*

$$f(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k (\lambda - \lambda_1)^k$$

*njen Taylorov red oko točke  $\lambda_1$  (koji konvergira apsolutno za svaki  $\lambda \in K(\lambda_1, r)$ ). Za svaku točku  $\lambda_0 \in K(\lambda_1, r)$  red matrica*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k ((\lambda_0 - \lambda_1)I + J)^k$$

*konvergira i suma mu je*

$$f(\lambda_0)I + \frac{f'(\lambda_0)}{1!}J + \frac{f''(\lambda_0)}{2!}J^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(\lambda_0)}{(n-1)!}J^{n-1}.$$

**Dokaz:** Stavimo za bilo koji  $p \in \mathbb{N}$  :

$$S_p = \sum_{k=0}^p \alpha_k ((\lambda_0 - \lambda_1)I + J)^k \quad \text{i} \quad f_p(\lambda) = \sum_{k=0}^p \alpha_k (\lambda - \lambda_1)^k.$$

Primjenom binomnog poučka nalazimo za svaki  $k$  :

$$\begin{aligned} & ((\lambda_0 - \lambda_1)I + J)^k = \\ & = (\lambda_0 - \lambda_1)^k I + \binom{k}{1} (\lambda_0 - \lambda_1)^{k-1} J + \dots + \binom{k}{k-1} (\lambda_0 - \lambda_1) J^{k-1} + J^k. \end{aligned}$$

S druge strane, imamo

$$\binom{k}{j} (\lambda_0 - \lambda_1)^{k-j} = \frac{k!}{j!(k-j)!} (\lambda_0 - \lambda_1)^{k-j} = \frac{1}{j!} \frac{d^j}{d\lambda^j} (\lambda - \lambda_1)^k \Big|_{\lambda=\lambda_0},$$

pa nalazimo:

$$((\lambda_0 - \lambda_1)I + J)^k = \left[ (\lambda - \lambda_1)^k I + \frac{1}{1!} \frac{d}{d\lambda} (\lambda - \lambda_1)^k J + \dots + \frac{1}{k!} \frac{d^k}{d\lambda^k} (\lambda - \lambda_1)^k J^k \right] \Big|_{\lambda=\lambda_0}. \quad (9.4)$$

Za  $k \geq n$  imamo  $J^n = J^{n+1} = \dots = J^k = 0$ , pa u izrazu (9.4) ne treba pisati sve članove, nego samo do člana

$$\frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{d\lambda^{n-1}} (\lambda - \lambda_1)^k \Big|_{\lambda=\lambda_0} J^{n-1}.$$

S druge strane, za  $k < n - 1$  imamo

$$\frac{1}{j!} \frac{d^j}{d\lambda^j} (\lambda - \lambda_1)^k = 0 \quad \text{za} \quad j = k + 1, \dots, n - 1,$$

pa u izrazu (9.4) s desne strane možemo dopisati sumande

$$\frac{1}{(k+1)!} \frac{d^{k+1}}{d\lambda^{k+1}} (\lambda - \lambda_1)^k \Big|_{\lambda=\lambda_0} J^k + \dots + \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{d\lambda^{n-1}} (\lambda - \lambda_1)^k \Big|_{\lambda=\lambda_0} J^{n-1}.$$

Dakle, za svaki  $k \geq 0$  je

$$\begin{aligned} & ((\lambda_0 - \lambda_1)I + J)^k = \\ & = \left[ (\lambda - \lambda_1)^k I + \frac{1}{1!} \frac{d}{d\lambda} (\lambda - \lambda_1)^k J + \dots + \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{d\lambda^{n-1}} (\lambda - \lambda_1)^k J^{n-1} \right] \Big|_{\lambda=\lambda_0}. \end{aligned}$$

Pomnožimo li gornju jednakost sa  $\alpha_k$  i zbrojimo po  $k$  od 0 do  $p$ , s lijeve strane jednakosti dobivamo upravo prije definiranu matricu  $S_p$ . Dakle,

$$S_p = \sum_{k=0}^p \alpha_k \left[ (\lambda - \lambda_1)^k I + \frac{1}{1!} \frac{d}{d\lambda} (\lambda - \lambda_1)^k J + \dots \right]$$

$$\begin{aligned} & \cdots + \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{d\lambda^{n-1}} (\lambda - \lambda_1)^k J^{n-1} \Big|_{\lambda=\lambda_0} = \\ & = f_p(\lambda_0)I + \frac{1}{1!} f'_p(\lambda_0)J + \frac{1}{2!} f''_p(\lambda_0)J^2 + \cdots + \frac{1}{(n-1)!} f_p^{(n-1)}(\lambda_0)J^{n-1}. \end{aligned}$$

Odatle slijedi tvrdnja leme, jer je

$$\lim_{p \rightarrow \infty} f_p(\lambda_0) = f(\lambda_0) \quad \text{i} \quad \lim_{p \rightarrow \infty} f_p^{(j)}(\lambda_0) = f^{(j)}(\lambda_0) \quad \text{za } j = 1, \dots, n-1.$$

Iz leme 9.1 i iz razmatranja prije te leme nameće nam se kako da općenitije definiramo funkciju  $f(A)$  operatora  $A$  i za koje sve funkcije  $f$  je takva definicija moguća.

**Definicija 9.1** *Neka je  $A \in L(V)$  i  $\mu_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{p_1} (\lambda - \lambda_2)^{p_2} \cdots (\lambda - \lambda_t)^{p_t}$  pri čemu su  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_t \in \mathbb{C}$  međusobno različiti. Sa  $\mathcal{F}(A)$  označimo skup svih funkcija  $f$  iz  $\mathbb{C}$  u  $\mathbb{C}$  sa sljedećim svojstvima:*

- (1) *Domena  $D(f)$  funkcije  $f$  sadrži  $\sigma(A)$ .*
- (2) *Ako je  $p_j > 0$ ,  $D(f)$  sadrži neki krug  $K(\lambda_j, r_r)$  oko točke  $\lambda_j$  i na tom krugu je funkcija  $f$  analitička.*

*Neka je sada  $e$  baza prostora  $V$  u kojoj matrica operatora  $A$  ima Jordanovu formu kao u teoremu 7.3. Pri tome, ako je  $s > t$  onda se podrazumijeva da su  $\lambda_{t+1}, \dots, \lambda_s \in \sigma(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_t\}$ . Za  $f \in \mathcal{F}(A)$  za svaki  $j \in \{1, 2, \dots, s\}$  stavljamo*

$$f(\lambda_j I_j + J_j) = \begin{bmatrix} f(\lambda_j) & \frac{f'(\lambda_j)}{1!} & \frac{f''(\lambda_j)}{2!} & \cdots & \frac{f^{(p_j-2)}(\lambda_j)}{(p_j-2)!} & \frac{f^{(p_j-1)}(\lambda_j)}{(p_j-1)!} \\ 0 & f(\lambda_j) & \frac{f'(\lambda_j)}{1!} & \cdots & \frac{f^{(p_j-3)}(\lambda_j)}{(p_j-3)!} & \frac{f^{(p_j-2)}(\lambda_j)}{(p_j-2)!} \\ 0 & 0 & f(\lambda_j) & \cdots & \frac{f^{(p_j-4)}(\lambda_j)}{(p_j-4)!} & \frac{f^{(p_j-3)}(\lambda_j)}{(p_j-3)!} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & f(\lambda_j) & \frac{f'(\lambda_j)}{1!} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & f(\lambda_j) \end{bmatrix}.$$

*Tada funkciju  $f(A)$  operatora  $A$  definiramo pomoću matrice operatora  $f(A)$  u bazi  $e$ :*

$$[f(A)](e) = \begin{bmatrix} f(\lambda_1 I_1 + J_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & f(\lambda_2 I_2 + J_2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & f(\lambda_s I_s + J_s) \end{bmatrix}.$$

**Teorem 9.1** *Neka je  $V$  konačnodimenzionalan vektorski prostor nad  $\mathbb{C}$ ,  $A \in L(V)$ ,  $\sigma(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_t\}$ , pri čemu su  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_t$  međusobno različiti, i neka je*

$$\mu_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{p_1} (\lambda - \lambda_2)^{p_2} \cdots (\lambda - \lambda_t)^{p_t}.$$

- (a) Ako je  $f(\lambda) = 1 \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}$  onda je  $f \in \mathcal{F}(A)$  i  $f(A) = I$ .
- (b) Ako je  $f(\lambda) = \lambda \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}$  onda je  $f \in \mathcal{F}(A)$  i  $f(A) = A$ .
- (c) Neka su  $f, g \in \mathcal{F}(A)$  i  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ . Definiramo funkciju  $h$  tako da je  $D(h) = D(f) \cap D(g)$  i  $h(\lambda) = \alpha f(\lambda) + \beta g(\lambda)$ . Tada je

$$h \in \mathcal{F}(A) \quad i \quad h(A) = \alpha f(A) + \beta g(A).$$

- (d) Neka su  $f, g \in \mathcal{F}(A)$ . Definiramo funkciju  $h = fg$  tako da je  $D(h) = D(f) \cap D(g)$  i  $h(\lambda) = f(\lambda)g(\lambda)$ . Tada je

$$h \in \mathcal{F}(A) \quad i \quad h(A) = f(A)g(A).$$

- (e) Pretpostavimo da su  $f, g \in \mathcal{F}(A)$  takve da je  $f^{(k)}(\lambda_j) = g^{(k)}(\lambda_j)$  za  $0 \leq k \leq p_j - 1$  i za  $1 \leq j \leq t$ . Tada je  $f(A) = g(A)$ .

- (f) Neka je  $f \in \mathcal{F}(A)$  i neka je  $(f_k)$  niz u  $\mathcal{F}(A)$ . Pretpostavimo da vrijedi

$$f^{(i)}(\lambda_j) = \lim_{k \rightarrow \infty} f_k^{(i)}(\lambda_j) \quad \text{za } k = 0, 1, \dots, p_j - 1 \quad \text{i za } j = 1, 2, \dots, t.$$

Tada je

$$f(A) = \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(A).$$

- (g) Za  $f \in \mathcal{F}(A)$  vrijedi  $\sigma(f(A)) = f(\sigma(A)) = \{f(\lambda_1), f(\lambda_2), \dots, f(\lambda_t)\}$ .

**Dokaz:** Tvrdnje (a), (b), (c), (e) i (f) su očigledne.

(d) Stavimo  $V_j = N((A - \lambda_j I)^{p_j})$ ,  $1 \leq j \leq t$ . Tada znamo da su svi potprostori  $V_j$   $A$ -invarijantni i da je  $V = V_1 \dot{+} V_2 \dot{+} \dots \dot{+} V_t$ . Imamo redom

$$\begin{aligned} f(A)g(A)|V_j &= (f(A)|V_j) \cdot (g(A)|V_j) = f(A|V_j)g(A|V_j) = \\ &= \left( \sum_{i=0}^{p_j-1} \frac{f^{(i)}(\lambda_j)}{i!} J^i \right) \cdot \left( \sum_{k=0}^{p_j-1} \frac{g^{(k)}(\lambda_j)}{k!} J^k \right) = \sum_{\ell=0}^{p_j-1} \left( \sum_{k=0}^{\ell} \frac{f^{\ell-k}(\lambda_j)}{(\ell-k)!} \cdot \frac{g^{(k)}(\lambda_j)}{k!} \right) J^\ell = \\ &= \sum_{\ell=0}^{p_j-1} \left( \frac{1}{\ell!} \sum_{k=0}^{\ell} \binom{\ell}{k} f^{(\ell-k)}(\lambda_j) g^{(k)}(\lambda_j) \right) J^\ell = \sum_{\ell=0}^{p_j-1} \frac{h^{(\ell)}(\lambda_j)}{\ell!} J^\ell = h(A|V_j) = h(A)|V_j. \end{aligned}$$

Kako to vrijedi za sve  $j = 1, 2, \dots, t$  i kako je  $V = V_1 \dot{+} V_2 \dot{+} \dots \dot{+} V_t$ , slijedi  $f(A)g(A) = h(A)$ .

(g) Imamo redom ekvivalencije:

$$\begin{aligned} \lambda_0 \in \sigma(f(A)) &\iff \det(\lambda_0 I(e) - [f(A)](e)) = 0 \iff \\ \iff (\lambda_0 - f(\lambda_1))^{n_1} (\lambda_0 - f(\lambda_2))^{n_2} \dots (\lambda_0 - f(\lambda_t))^{n_t} = 0 & \quad (n_j = \dim V_j) \iff \\ \iff \lambda_0 \in \{f(\lambda_1), f(\lambda_2), \dots, f(\lambda_t)\}. & \end{aligned}$$

Na koncu ćemo dokazati još jednu važnu činjenicu, a to je da je  $f(A) \in \mathcal{L}(A)$  za svaku funkciju  $f \in \mathcal{F}(A)$ . U tu svrhu treba nam jedan važan interpolacioni teorem o polinomima, kojeg navodimo bez dokaza:

**Teorem 9.2 (Lagrange–Sylvester)** *Neka su  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_t \in \mathbb{C}$  međusobno različiti i neka su  $p_1, p_2, \dots, p_t \in \mathbb{N}$ . Nadalje, neka su zadani  $\beta_{ij} \in \mathbb{C}$  za  $i = 0, 1, \dots, p_j - 1$  i za  $j = 1, 2, \dots, t$ . Postoji jedinstven polinom  $P(\lambda)$  stupnja manjeg od  $p_1 + p_2 + \dots + p_t$  takav da vrijedi*

$$P^{(i)}(\lambda_j) = \beta_{ij}, \quad 0 \leq i \leq p_j - 1, \quad 1 \leq j \leq t.$$

Polinom  $P(\lambda)$  iz teorema 9.2 zove se **Lagrange–Sylvesterov interpolacioni polinom**, a ako je  $p_1 = p_2 = \dots = p_t = 1$  naziv je **Lagrangeov interpolacioni polinom**.

**Teorem 9.3** *Neka je  $A \in L(V)$ ,  $\deg \mu_A(\lambda) = m$  i  $f \in \mathcal{F}(A)$ . Postoji jedinstven polinom  $P(\lambda)$  stupnja  $< m$  takav da je  $P(A) = f(A)$ .*

**Dokaz:** Prema Lagrange–Sylvesterovom teoremu 9.2 postoji polinom  $P(\lambda)$  stupnja  $< m$  takav da je

$$P^{(i)}(\lambda_j) = f^{(i)}(\lambda_j), \quad 0 \leq i \leq p_j - 1, \quad 1 \leq j \leq t.$$

Prema tvrdnji (e) teorema 9.1 tada je  $f(A) = P(A)$ . Time je dokazana egzistencija.

Dokažimo još jedinstvenost. Neka su  $P(\lambda)$  i  $Q(\lambda)$  polinomi stupnja  $< m$  takvi da je  $f(A) = P(A)$  i  $f(A) = Q(A)$ . Tada za polinom  $S(\lambda) = P(\lambda) - Q(\lambda)$  vrijedi  $\deg S(\lambda) < m$  i  $S(A) = 0$ . Prema tvrdnji (a) teorema 3.1 slijedi  $S(\lambda) = 0$ , dakle  $P(\lambda) = Q(\lambda)$ .

Lagrange–Sylvesterov teorem 9.2 omogućuje efikasno izračunavanje funkcija operatora. Naime, za svaki par indeksa  $k \in \{0, 1, \dots, p_\ell - 1\}$  i  $\ell \in \{1, 2, \dots, t\}$  prema tom teoremu postoji jedinstven polinom  $G_{k\ell}(\lambda)$  stupnja  $< m$  takav da vrijedi

$$G_{k\ell}^i(\lambda_j) = \delta_{ik} \delta_{j\ell}.$$

Stavimo tada  $P_{k\ell} = G_{k\ell}(A)$ . Tada se iz formule za funkciju operatora lako vidi da je za svaku funkciju  $f \in \mathcal{F}(A)$

$$f(A) = \sum_{k=1}^t \left( \sum_{\ell=0}^{p_k-1} f^{(\ell)}(\lambda_k) P_{k\ell} \right).$$

Da bismo odredili operatore  $P_{k\ell}$ , čije poznavanje znači vrlo lako izračunavanje operatora  $f(A)$  za svaku funkciju  $f \in \mathcal{F}(A)$ , nije nam nužno pronalaziti polinome  $G_{k\ell}(\lambda)$ . Dovoljno je gornju jednakost napisati za funkcije  $f_s(\lambda) = \lambda^s$  za  $s = 0, 1, \dots, m$ . Tada dobivamo sustav od  $m$  jednadžbi s  $p_1 + p_2 + \dots + p_t = m$  nepoznanica  $P_{k\ell}$ :

$$A^s = \sum_{k=1}^t \left( \sum_{\ell=0}^{p_k-1} \frac{s!}{(s-\ell)!} \lambda_k^{s-\ell} P_{k\ell} \right) \quad 0 \leq s \leq m-1.$$

EksPLICITNIM rješavanjem tih jednadžbi dolazimo do operatora  $P_{k\ell}$ .



Primijetimo još da nije teško dokazati da je

$$\{P_{k\ell}; 0 \leq \ell \leq p_k - 1, 1 \leq k \leq t\}$$

baza vektorskog prostora  $\mathcal{L}(A)$ .



# Bibliografija

- [1] N. Bakić, A. Milas, *Zbirka zadataka iz linearne algebre*, PMF–Matematički odjel, Zagreb, 1996.
- [2] L. Čaklović, *Zbirka zadataka iz linearne algebre*, Školska knjiga, Zagreb, 1979.
- [3] I. M. Gelfand, *Lectures on linear algebra*, Interscience Publ. Inc., New York, 1961.
- [4] J. S. Gollan, *The linear algebra a beginning graduate student ought to know*, Kluwer Texts in the Mathematical Sciences, vol. 27, Kluwer Academic, 2004.
- [5] W. H. Greub, *Linear algebra*, Springer–Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1967.
- [6] P. R. Halmos, *Finite dimensional vector spaces*, Van Nostrand, New York, 1958.
- [7] K. Horvatić, *Linearna algebra*, Golden marketing – Tehnička knjiga, Zagreb, 2004.
- [8] S. Kurepa, *Konačno dimenzionalni vektorski prostori i primjene*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1967.
- [9] S. Kurepa, *Uvod u linearnu algebru*, Školska knjiga, Zagreb, 1987.
- [10] S. Lang, *Introduction to linear algebra*, Springer–Verlag, Berlin – Heidelberg – New York, 1986.
- [11] S. Lang, *Linear algebra*, Springer–Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 2004.
- [12] G. Strang, *Introduction to linear algebra*, Wellesley – Cambridge Press, 1998.