KOMPAKTNI OPERATORI

Prof. dr. sc. Hrvoje Kraljević

Predavanja održana na PMF−Matematičkom odjelu
Sveučilišta u Zagrebu
u zimskom semestru akademske godine 2007./2008.

Zagreb, siječanj 2008.

Sadržaj

Poglavlje 1

Opći teoremi funkcionalne analize

1.1 Vektorski prostori

Vektorski prostor (u ovom kolegiju isključivo nad poljem kompleksnih brojeva $\mathbb{C}$): neprazan skup V koji je komutativna grupa s obzirom na operaciju zbrajanja

$$+ : V \times V \to V, \qquad (v, w) \mapsto v + w,$$

i na kojem je definirana operacija množenja skalarima

$$\mathbb{C} \times V \to V, \qquad (\lambda, v) \mapsto \lambda v,$$

koja je distributivna s obzirom na obje operacije zbrajanja:

$$\lambda(v + w) = \lambda v + \lambda w \qquad \text{i} \qquad (\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v \qquad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{C},\ \forall v, w \in V,$$

ima svojstvo kvaziasocijativnosti:

$$(\lambda\mu)v = \lambda(\mu v) \qquad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{C},\ \forall v \in V,$$

i jedinica $1 \in \mathbb{C}$ je neutralna:

$$1v = v \qquad \forall v \in V.$$

Potprostor vektorskog prostora V je podskup $W \subseteq V$ koji je i sam vektorski prostor nad istim poljem s obzirom na iste operacije. To zapravo znači da je W neprazan podskup od V i da vrijedi:

$$v, w \in W \implies v + w \in W, \qquad v \in W \text{ i } \lambda \in \mathbb{C} \implies \lambda v \in W.$$

Činjenicu da je W potprostor vektorskog prostora V bilježimo ovako: $W \leq V$.

Iz definicije potprostora neposredno izlazi da je presjek bilo kojeg skupa potprostora prostora V ponovo potprostor od V.

Ako je S bilo koji podskup vektorskog prostora V, sa $[S]$ označavamo presjek svih potprostora od V koji sadrže skup S :

$$[S] = \bigcap_{S \subseteq W \leq V} W.$$

To je najmanji potprostor koji sadrži skup S. $[S]$ se zove **potprostor generiran** (ili **razapet**) skupom S. Kažemo još da skup S **razapinje** potprostor W, ako je $[S] = W$.

Linearna kombinacija vektora $x_1, x_2, \ldots, x_n \in V$ je vektor $v \in V$ koji se može zapisati u obliku:

$$v = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n, \qquad \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}.$$

Teorem 1.1. *Ako je V vektorski prostor i S neprazan podskup od V onda je $[S]$ skup svih linearnih kombinacija vektora iz skupa S, odnosno*

$$[S] = \{v \in V;\ \exists n \in \mathbb{N},\ \exists \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C},\ \exists x_1, \ldots, x_n \in S,\ \textit{takvi da je}\ v = \lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n\}.$$

Dokaz: Označimo sa X skup svih linearnih kombinacija vektora iz S. Lako se vidi da je X potprostor od V koji sadrži S. Stoga je $[S] \subseteq X$. Dokažimo da vrijedi i obrnuta inkluzija. Neka je W bilo koji potprostor koji sadrži S. Tada W sadrži i svaku linearnu kombinaciju vektora iz S. Drugim riječima, vrijedi $X \subseteq W$. Odatle slijedi

$$X \subseteq \bigcap_{S \subseteq W \leq V} W = [S].$$

Iz dvije inkluzije slijedi jednakost $[S] = X$.

Podskup S vektorskog prostora V zove se **linearno nezavisan** ako vrijedi:

$$x \in S \qquad \Longrightarrow \qquad x \notin [S \setminus \{x\}].$$

U suprotnom skup S zove se **linearno zavisan**; dakle, S je linearno zavisan ukoliko postoji $x \in S$ koji je linearna kombinacija preostalih vektora iz S, tj. za neko $n \in \mathbb{N}$ postoje vektori $x_1, x_2, \ldots, x_n \in S \setminus \{x\}$ i skalari $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ takvi da je $x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n$. Skup S je linearno zavisan ako i samo ako postoji prirodan broj n, postoje međusobno različiti vektori $x_1, x_2, \ldots, x_n \in S$ i postoje $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ takvi da je $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n = 0$.

Baza vektorskog prostora V je podskup B od V koji je linearno nezavisan i koji razapinje čitav prostor V. Tada se svaki vektor $x \in V$ može na jedinstven način zapisati kao linearna kombinacija vektora iz B, tj. postoji jedinstvena funkcija $\varphi : B \to \mathbb{C}$ koja ima samo konačno mnogo vrijednosti različitih od nule i za koju je:

$$x = \sum_{e \in B} \varphi(e) e.$$

Za vektorski prostor V kažemo da je **konačnodimenzionalan**, ako je razapet nekim svojim konačnim podskupom.

Uz napomenu da ćemo za bilo koji konačan skup S sa $|S|$ označavati broj elemenata skupa S, bez dokaza navodimo:

Teorem 1.2. *Neka je V konačnodimenzionalan vektorski prostor. Vrijedi:*

(*a*) *U V postoji konačna baza.*

(*b*) *Svaka je baza prostora V konačna.*

(*c*) *Ako su B i B' baze od V onda je $|B| = |B'|$. Taj se broj zove* **dimenzija** *vektorskog prostora V i označava* $\dim V$.

(*d*) *Ako je S linearno nezavisan podskup od V onda je skup S konačan i sadržan u nekoj bazi prostora V. Dakle, za svaki linearno nezavisan podskup S od V vrijedi $|S| \leq \dim V$. Posebno, ako je $|S| = \dim V$, onda je S baza od V.*

(*e*) *Ako skup S razapinje prostor V onda S sadrži neku bazu od V.*

(*f*) *Ako je W potprostor od V, onda je W konačnodimenzionalan i $\dim W \leq \dim V$ s tim da vrijedi znak jednakosti ako i samo ako je $W = V$.*

U stvari, analogan teorem vrijedi i za beskonačnodimenzionalne vektorske prostore:

Teorem 1.3. *Neka je V vektorski prostor.*

(a) *Postoji baza od V.*

(b) *Svaki linearno nezavisan podskup od V sadržan je u nekoj bazi od V.*

(c) *Svaki podskup od V koji razapinje čitav prostor V sadrži neku bazu od V.*

(d) *Ako su B i B' baze od V postoji bijekcija $\varphi : B \to B'$.*

(e) *Ako je B baza vektorskog prostora V i S linearno nezavisan podskup od V, postoji injekcija $\psi : S \to B$.*

Za dokaz teorema 1.3. treba koristiti Zermelov aksiom izbora, odnosno njemu ekvivalentnu Zornovu lemu, koje ćemo sada objasniti.

Neka je I neprazan skup i neka je $(X_i)_{i\in I}$ familija nepraznih skupova. Definiramo **direktni produkt** tih skupova kao skup svih funkcija izbora koje iz svakog skupa X_i biraju po jedan element:

$$\prod_{i\in I} X_i = \Big\{f : I \to \bigcup_{i\in I} X_i\,;\ f(i) \in X_i \ \ \forall i \in I\Big\}.$$

ZERMELOV AKSIOM IZBORA: *Ako je I neprazan skup i ako je $(X_i)_{i\in I}$ familija nepraznih skupova, onda je*

$$\prod_{i\in I} X_i \neq \emptyset.$$

Pokazuje se da je Zermelov aksiom izbora ekvivalentan Zornovoj lemi, koja se obično koristi u dokazima u funkcionalnoj analizi:

ZORNOVA LEMA: *Neka je $\mathcal{S} \neq \emptyset$ parcijalno uređen skup u kome svaki lanac ima gornju ogradu. Tada u skupu $\mathcal{S}$ postoji bar jedan maksimalan element.*

Definirajmo sve pojmove koji se koriste u iskazu Zornove leme. Prije svega, **parcijalno uređen skup** je skup $\mathcal{S}$ na kome je zadana relacija uređaja. **Relacija uređaja** na skupu $\mathcal{S}$ je binarna relacija $\leq$ koja je antisimetrična i tranzitivna, tj. koja ima sljedeća dva svojstva:

$$\forall x, y \in \mathcal{S}, \qquad x \leq y \ \text{ i } \ y \leq x \qquad \Longrightarrow \qquad x = y,$$

$$\forall x, y, z \in \mathcal{S}, \qquad x \leq y \ \text{ i } \ y \leq z \qquad \Longrightarrow \qquad x \leq z.$$

Ako je $\mathcal{S}$ parcijalno uređen skup, **lanac** u $\mathcal{S}$ je podskup $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{S}$ u kome su svaka dva elementa usporediva, tj. koji ima sljedeće svojstvo:

$$\forall x, y \in \mathcal{L} \ \text{ vrijedi ili } \ x \leq y \ \text{ ili } \ y \leq x.$$

Gornja ograda podskupa $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{S}$ je svaki element $x \in \mathcal{S}$ takav da je $y \leq x$ $\forall y \in \mathcal{T}$. Element $x \in \mathcal{S}$ zove se **maksimalan** ako vrijedi:

$$\forall y \in \mathcal{S}, \qquad x \leq y \qquad \Longrightarrow \qquad x = y;$$

drugim riječima, ne postoji $y \in \mathcal{S} \setminus \{x\}$ takav da je $x \leq y$.

Nama će u daljnjem trebati tvrdnje (a), (b) i (c) teorema 1.3., pa ćemo samo njih dokazati. One će biti jednostavne posljedice sljedeće leme, čiji će dokaz biti dobra ilustracija primjene Zornove leme:

Lema 1.1. *Neka je V vektorski prostor i neka su C i D podskupovi od V sa sljedećim svojstvima:*

(i) *Skup C je linearno nezavisan.*

(ii) $[D] = V$.

(iii) $C \subseteq D$.

Tada postoji baza B prostora V takva da je $C \subseteq B \subseteq D$.

Dokaz: Označimo sa $\mathcal{S}$ skup svih linearno nezavisnih podskupova S prostora V takvih da je $C \subseteq S \subseteq D$. Na skupu $\mathcal{S}$ inkluzija $\subseteq$ je relacija uređaja i s tom relacijom $\mathcal{S}$ je parcijalno uređen skup. Dokažimo da taj parcijalno uređen skup zadovoljava uvjet Zornove leme. Neka je $\mathcal{L}$ lanac u $\mathcal{S}$. Stavimo

$$M = \bigcup_{L \in \mathcal{L}} L.$$

Tada očito vrijedi $C \subseteq M \subseteq D$. Nadalje, skup M je linearno nezavisan. Doista, pretpostavimo da su $v_1, v_2, \ldots, v_n$ međusobno različiti vektori iz M i da su $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ takvi da je

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n = 0.$$

Budući da je M definiran kao unija skupova $L \in \mathcal{L}$, postoje $L_1, L_2, \ldots, L_n \in \mathcal{L}$ takvi da je $v_1 \in L_1, v_2 \in L_2, \ldots, v_n \in L_n$. Kako je $\mathcal{L}$ lanac, za neki $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ vrijedi $L_i \subseteq L_j$ $\forall i$. Tada je $v_1, v_2, \ldots, v_n \in L_j$, a kako je L_j linearno nezavisan, iz gornje jednakosti slijedi $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$. Time je dokazano da je skup M linearno nezavisan. Dakle, $M \in \mathcal{S}$. Kako očito vrijedi $L \subseteq M$ $\forall L \in \mathcal{L}$, zaključujemo da je M gornja ograda od $\mathcal{L}$ u $\mathcal{S}$. Time je dokazano da parcijalno uređen skup $\mathcal{S}$ zadovoljava uvjet Zornove leme: svaki lanac u $\mathcal{S}$ ima gornju ogradu u $\mathcal{S}$.

Po Zornovoj lemi postoji bar jedan maksimalni element B u $\mathcal{S}$. Tada je B linearno nezavisan podskup od V i vrijedi $C \subseteq B \subseteq D$. Da bismo utvrdili da je B baza prostora V, treba još dokazati da skup B razapinje čitav prostor V. Pretpostavimo suprotno, tj. $[B] \neq V$. Kako je po pretpostavci $[D] = V$, vrijedi $D \not\subseteq [B]$. Stoga postoji $x \in D$ takav da $x \notin [B]$. Stavimo $B' = B \cup \{x\}$. Iz linearne nezavisnosti od B i iz $x \notin [B]$ lako se dokazuje da je skup B' linearno nezavisan. Kako je očito $C \subseteq B' \subseteq D$, to je $B' \in \mathcal{S}$. Međutim, iz konstrukcije je očito da je $B \subseteq B'$ i $B \neq B'$ a to je u kontradikciji s maksimalnosti od B u $\mathcal{S}$. Ova kontradikcija pokazuje da je pretpostavka $[B] \neq V$ nemoguća i time je dokazano da je $[B] = V$. Dakle lema 1.1. je dokazana.

Dokaz tvrdnji (a), (b) i (c) teorema 1.3:
(a) Ako u lemi 1.1. uzmemo $C = \emptyset$ i $D = V$, ta lema postaje upravo tvrdnja (a).
(b) Ako u lemi 1.1. uzmemo $D = V$, dobivamo tvrdnju (b).
(c) Ako u lemi 1.1. uzmemo $C = \emptyset$, dobivamo tvrdnju (c).

Napomenimo da se i tvrdnja (e) teorema 1.3. može dokazati primjenom Zornove leme. U tu je svrhu potrebno na odgovarajući način uvesti relaciju uređaja u skup injekcija čije su domene podskupovi od S, a kodomena im je B. Napokon, tvrdnja (d) slijedi iz tvrdnje (e). Naime, posljedica tvrdnje (e) je da postoje injekcije $\psi : B' \to B$ i $\psi' : B \to B'$, a u teoriji skupova (preciznije, u teoriji kardinalnih brojeva) dokazuje se da tada postoji bijekcija $\varphi : B \to B'$.

Neka su X i Y potprostori vektorskog prostora V; za razliku od presjeka, unija $X \cup Y$ u pravilu nije potprostor. Precizno, to je potprostor ako i samo ako je ili $X \subseteq Y$ (i tada je $X \cup Y = Y$) ili $X \supseteq Y$ (i tada je $X \cup Y = X$). Definiramo sumu potprostora:

$$X + Y = [X \cup Y] = \{x + y;\ x \in X,\ y \in Y\}.$$

Zadatak 1.1. *Neka su X i Y potprostori vektorskog prostora V i neka je A baza potprostora $X \cap Y$. Dokažite da tada postoji baza B potprostora Y koja sadrži A i baza C potprostora Z koja sadrži A. Dokažite da je tada $B \cup C$ baza potprostora $X + Y$. U slučaju da su potprostori X i Y konačnodimenzionalni, dokažite odatle da je*

$$\dim(X + Y) = \dim X + \dim Y - \dim(X \cap Y).$$

Općenitije, za više potprostora $X_1, X_2, \ldots, X_n$ od V definiramo njihovu sumu kao najmanji potprostor koji ih sve sadrži:

$$X_1 + X_2 + \ldots + X_n = [X_1 \cup X_2 \cup \cdots \cup X_n] =$$

$$= \{x_1 + x_2 + \ldots + x_n;\ x_1 \in X_1, x_2 \in X_2, \ldots, x_n \in X_n\}.$$

Ako su svi ti potprostori konačnodimenzionalni i njihova je suma konačnodimenzionalna, ali za njihovu dimenziju formula nije tako jednostavna kao u slučaju dvaju potprostora.

Zadatak 1.2. *Neka su X, Y i Z konačnodimenzionalni potprostori vektorskog prostora V. Dokažite da je tada*

$$\dim(X + Y + Z) \leq \dim X + \dim Y + \dim Z -$$

$$- \dim(X \cap Y) - \dim(X \cap Z) - \dim(Y \cap Z) + \dim(X \cap Y \cap Z).$$

Sumu potprostora definiramo i za bilo koji skup Σ potprostora od V :

$$\sum_{X \in \Sigma} X = \left[\bigcup_{X \in \Sigma} X \right] =$$

$$= \{v \in V;\ \exists n \in \mathbb{N}, \exists X_1, \ldots, X_n \in \Sigma, \exists x_1 \in X_1, \ldots, x_n \in X_n \text{ takvi da je } v = x_1 + \cdots + x_n\}.$$

Dimenzija sume dvaju konačnodimenzionalnih potprostora X i Y je najveća moguća i jednaka $\dim X + \dim Y$ ako i samo ako je $X \cap Y = \{0\}$. U općem slučaju (a ne samo ako su potprostori X i Y konačnodimenzionalni), ako je $X \cap Y = \{0\}$ kažemo da je **suma** $X + Y$ **direktna** i umjesto $X + Y$ pišemo $X \dotplus Y$. Suma je direktna ako i samo ako za svaki $v \in X + Y$ postoje jedinstveni $x \in X$ i $y \in Y$ takvi da je $v = x + y$, ili, ekvivalentno, ako za $x \in X$ i $y \in Y$ vrijedi $x + y = 0$ ako i samo ako je $x = 0$ i $y = 0$.

Općenitije, za potprostore $X_1, X_2, \ldots, X_n$ vektorskog prostora V kažemo da **tvore direktnu sumu**, koju onda označavamo sa $X_1 \dotplus X_2 \dotplus \ldots \dotplus X_n$, ako za svaki vektor $v \in X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ postoje jedinstveni vektori $x_1 \in X_1, x_2 \in X_2, \ldots, x_n \in X_n$, takvi da je $v = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$, ili, ekvivalentno, ako za $x_1 \in X_1, x_2 \in X_2, \ldots, x_n \in X_n$ vrijedi $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 0$ ako i samo ako je $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$. Ako su tada $B_1, B_2, \ldots, B_n$ redom baze potprostora $X_1, X_2, \ldots, X_n$, onda je njihova (disjunktna) unija $B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_n$ baza direktne sume $X_1 \dotplus X_2 \dotplus \ldots \dotplus X_n$. Posebno, ako su svi ti potprostori konačnodimenzionalni, slijedi

$$\dim(X_1 \dotplus X_2 \dotplus \ldots \dotplus X_n) = \dim X_1 + \dim X_2 + \ldots + \dim X_n.$$

Ako je V vektorski prostor i X njegov potprostor, **direktni komplement** od X u V je svaki potprostor Y prostora V takav da je V direktna suma potprostora X i $Y : V = X \dotplus Y$.

Teorem 1.4. *Ako je V vektorski prostor i W njegov potprostor, onda postoji direktni komplement od W u V.*

Dokaz: Neka je C baza prostora W. Tada je C linearno nezavisan podskup od V pa prema tvrdnji (b) teorema 1.3. postoji baza B od V koja sadrži C. Stavimo sada $U = [B \setminus C]$.

Neka je $v \in V$ proizvoljan. Tada postoje $v_1, v_2, \ldots, v_n \in B$ i $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ takvi da je

$$v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n.$$

Uz eventualnu promjenu numeracije možemo pretpostaviti da za neki broj $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ vrijedi $v_1, \ldots, v_k \in C$ i $v_{k+1}, \ldots, v_n \in B \setminus C$. Stavimo tada

$$w = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_k v_k \qquad \text{i} \qquad u = \lambda_{k+1} v_{k+1} + \cdots + \lambda_n v_n.$$

Očito je tada $w \in W$, $u \in U$ i $v = w + u$. Time je dokazano da je $V = W + U$.

Treba još dokazati da je ta suma direktna. Neka je $v \in W \cap U$. Tada postoje međusobno različiti $x_1, \ldots, x_n \in C$, $y_1, \ldots, y_m \in B \setminus C$ i $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_m \in \mathbb{C}$ takvi da je

$$v = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n \qquad \text{i} \qquad v = \beta_1 y_1 + \cdots + \beta_m y_m.$$

Iz te dvije jednakosti slijedi:

$$\alpha_1 x_1 + \cdots \alpha_n x_n - \beta_1 y_1 - \cdots - \beta_m y_m = 0,$$

a budući da su $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m$ međusobno različiti vektori iz linearno nezavisnog skupa B, odatle slijedi da svi koeficijenti moraju biti jednaki nuli: $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = \beta_1 = \cdots = \beta_m = 0$. No tada je $v = 0$. Time smo dokazali da je $W \cap U = \{0\}$, odnosno suma je direktna: $V = W \dot{+} U$. Dakle, U je direktni komplement potprostora W u prostoru V.

Za skup S i za vektorski prostor V sa V^S ćemo označavati skup svih funkcija $\varphi : S \to V$. U taj skup uvodimo strukturu vektorskog prostora ovako:

$$(\varphi + \psi)(s) = \varphi(s) + \psi(s), \qquad (\lambda\varphi)(s) = \lambda\varphi(s), \qquad \varphi, \psi \in V^S,\ \lambda \in \mathbb{C},\ s \in S.$$

Zadatak 1.3. *Neka je $V \neq \{0\}$ vektorski prostor i S neprazan skup. Dokažite da je vektorski prostor V^S konačnodimenzionalan ako i samo ako je skup S konačan i prostor V konačnodimenzionalan i da tada vrijedi*

$$\dim V^S = |S| \cdot \dim V.$$

Preslikavanje s jednog vektorskog prostora u drugi zove se **operator**. Operator $A : V \to W$ zove se **linearan**, ako se on pravilno ponaša prema operacijama:

$$A(x + y) = A(x) + A(y), \qquad A(\lambda x) = \lambda A(x), \qquad x, y \in V,\ \lambda \in \mathbb{C}.$$

Skup svih linearnih operatora $A : V \to W$ je potprostor vektorskog prostora W^V. Taj ćemo potprostor označavati sa $L(V, W)$.

Za $A \in L(V, W)$ stavimo:

$$R(A) = \operatorname{im} A = \{Ax;\ x \in V\} \leq W \qquad N(A) = \ker A = \{x \in V;\ Ax = 0\} \leq V$$

Potprostor $R(A)$ prostora W zove se **slika** operatora A ili **područje vrijednosti** operatora A; potprostor $N(A)$ prostora V zove se **jezgra** operatora A ili **nulprostor** operatora A.

Ako je potprostor $R(A)$ konačnodimenzionalan, A se zove **operator konačnog ranga** a broj $r(A) = \dim R(A)$ se zove **rang** operatora A. Ako je potprostor $N(A)$ konačnodimenzionalan, broj $n(A) = \dim N(A)$ se zove **nulitet** operatora A. Bez dokaza navodimo:

Teorem 1.5. (**teorem o rangu i nulitetu**) *Ako je* $A \in L(V,W)$ *i ako je prostor* V *konačnodimenzionalan onda je* $\dim V = r(A) + n(A)$.

Razmotrimo još jednu konstrukciju koja se vrlo često koristi kad želimo isključiti neke vektore kao nebitne. To je **kvocijentni prostor**. Neka je V vektorski prostor i W njegov potprostor. U skupu V definiramo binarnu relaciju $\sim$ ovako:

$$\text{za } x, y \in V \text{ stavljamo } x \sim y \text{ ako i samo ako je } y - x \in W.$$

Lako se vidi da je to relacija ekvivalencije (zove se **jednakost modulo** W). Za $x \in V$ klasa ekvivalencije koja sadrži x je skup $x + W = \{x + w;\ w \in W\}$. Skup svih klasa ekvivalencije označavamo sa V/W i u njega uvodimo strukturu vektorskog prostora:

$$(x+W) + (y+W) = (x+y) + W, \qquad \lambda(x+W) = (\lambda x) + W, \qquad x, y \in V,\ \lambda \in \mathbb{C}.$$

Teorem 1.6. *Ako je vektorski prostor* V *konačnodimenzionalan i ako je* $W \leq V$, *onda je i kvocijentni prostor* V/W *konačnodimenzionalan i vrijedi*

$$\dim V/W = \dim V - \dim W.$$

Primijetimo da teorem 1.6. slijedi neposrednom primjenom teorema 1.5. na tzv. **kvocijentno preslikavanje** $\pi : V \to V/W$, koje svakom vektoru iz V pridružuje njegovu klasu u V/W : $\pi(x) = x + W$. Naime, operator π je linearan i očito je $N(\pi) = W$ i $R(\pi) = V/W$. Teorem se jednostavno dokazuje i direktno: ako je $\{e_1, e_2, \ldots, e_k\}$ baza od W i ako je dopunimo do baze $\{e_1, \ldots, e_k, e_{k+1}, \ldots, e_n\}$ od V onda se lako vidi da je $\{e_{k+1} + W, e_{k+2} + W, \ldots, e_n + W\}$ baza od V/W.

Izomorfizam vektorskog prostora V na vektorski prostor W je linearan operator $A : V \to W$ koji je bijekcija. Primijetimo da je linearan operator $A : V \to W$ injekcija ako i samo ako je $N(A) = \{0\}$. Naravno, A je surjekcija ako i samo ako je $R(A) = W$. Za vektorski prostor V kažemo da je **izomorfan** prostoru W ako postoji izomorfizam $A : V \to W$. Očito je *"biti izomorfan"* relacija ekvivalencije:

(a) Svaki je vektorski prostor V izomorfan samome sebi; izomorfizam sa V na V je npr. identiteta $I = I_V$.

(b) Ako je $A : V \to W$ izomorfizam, onda je inverzno preslikavanje $A^{-1} : W \to V$ također izomorfizam.

(c) Ako su $A : V \to W$ i $B : W \to U$ izomorfizmi, onda je i njihova kompozicija $BA : V \to U$ ($(BA)(v) = B(A(v)),\ v \in V$) također izomorfizam.

Neka je V vektorski prostor. Linearan operator $P \in L(V) = L(V,V)$ zove se **projektor** ako je $P^2 = P$.

Propozicija 1.1. *Neka je* V *vektorski prostor.*

(a) *Ako je* $P \in L(V)$ *projektor, onda je* $V = R(P) \dot{+} N(P)$. *Nadalje,* $R(P) = \{v \in V;\ Pv = v\}$.

(b) *Ako su* X *i* Y *potprostori od* V *takvi da je* $V = X \dot{+} Y$, *i ako je operator* $P : V \to V$ *definiran sa*

$$P(x+y) = x,\ \ x \in X,\ \ y \in Y,$$

onda je P *projektor,* $R(P) = X$ *i* $N(P) = Y$. *Nadalje, tada je* $I - P$ *projektor,* $R(I-P) = Y$ *i* $N(I-P) = X$.

Operator P iz tvrdnje (b) zove se **projektor prostora** V **na potprostor** X **duž potprostora** Y. Tada je $I - P$ projektor na Y duž X.

Dokaz: (a) Neka je $v \in R(P) \cap N(P)$. Kako je $v \in R(P)$, to postoji $w \in V$ takav da je $v = Pw$. Budući da je $v \in N(P)$ i jer je $P^2 = P$ nalazimo redom: $0 = Pv = P^2w = Pw = v$. Dakle, $R(P) \cap N(P) = \{0\}$, odnosno potprostori $R(P)$ i $N(P)$ tvore direktnu sumu.

Neka je $v \in V$. Stavimo $x = Pv \in R(P)$ i $y = v - x$. Tada je

$$Py = Pv - Px = Pv - P^2v = Pv - Pv = 0,$$

dakle, $y \in N(P)$. Iz definicije vektora y slijedi $v = x + y$ što pokazuje da je $V = R(P) + N(P)$. Dakle, vrijedi $V = R(P) \dot{+} N(P)$.

Napokon, očito iz $Pv = v$ slijedi $v \in R(P)$. Obratno, ako je $v \in R(P)$ i ako je $w \in V$ takav da je $v = Pw$, tada je $Pv = P^2w = Pw = v$.

(b) Neka je $v \in V$ proizvoljan i neka su $x \in X$ i $y \in Y$ takvi da je $v = x + y$. Tada je

$$P^2v = P(P(x+y)) = Px = P(x+0) = x = P(x+y) = Pv.$$

Kako je $v \in V$ bio proizvoljan, zaključujemo da je $P^2 = P$, tj. P je projektor. Jednakosti $R(P) = X$ i $N(P) = Y$ slijede odmah iz definicije operatora P.

Napokon, ako je P projektor, tada je

$$(I-P)^2 = I - 2P + P^2 = I - 2P + P = I - P,$$

dakle i $I - P$ je projektor. Jezgra i slika tog projektora su

$$N(I-P) = \{v \in V;\, (I-P)v = 0\} = \{v \in V;\, Pv = v\} = R(P) = X,$$

$$R(I-P) = \{v \in V;\, (I-P)v = v\} = \{v \in V;\, Pv = 0\} = N(P) = Y.$$

1.2 Normirani i Banachovi prostori

Norma na vektorskom prostoru X je preslikavanje

$$\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}_+ = [0, +\infty > \qquad (x \mapsto \|x\|)$$

sa sljedeća tri svojstva:

$$\|x\| = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 0; \qquad \|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|; \qquad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

Posljednje se svojstvo obično zove **nejednakost trokuta**. Vektorski prostor na kome je zadana norma zove se **normiran prostor**.

U svaki konačnodimenzionalan vektorski prostor X možemo na različite načine uvesti strukturu normiranog prostora. Npr. ako je $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ neka baza prostora X i ako za bilo koji vektor $x \in X$ sa $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ označimo redom njegove koordinate u toj bazi ($x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \ldots + \xi_n e_n$), onda svaka od sljedećih definicija daje normu na prostoru X :

$$\|x\|_\infty = \max\,\{|\xi_1|, |\xi_2|, \ldots, |\xi_n|\},$$

$$\|x\|_1 = |\xi_1| + |\xi_2| + \ldots + |\xi_n|,$$

$$\|x\|_2 = \sqrt{|\xi_1|^2 + |\xi_2|^2 + \ldots + |\xi_n|^2},$$

ili, općenitije, za bilo koji realan broj $p \geq 1$:

$$\|x\|_p = (|\xi_1|^p + |\xi_2|^p + \ldots + |\xi_n|^p)^{\frac{1}{p}}.$$

U normiranom prostoru X za svaki vektor $x_0 \in X$ i za svaki $r > 0$ definiramo tzv. **otvorenu kuglu sa središtem x_0 i radijusom r** :

$$K(x_0, r) = \{x \in X;\; \|x - x_0\| < r\}.$$

Pomoću otvorenih kugala definiramo osnovne topološke pojmove u X $-$ otvorene i zatvorene skupove. Podskup S normiranog prostora X zove se **otvoren**, ako za svaki $x_0 \in S$ postoji $r > 0$ takav da je $K(x_0, r) \subseteq S$. Podskup T od X zove se **zatvoren** ako je njegov komplement $X \setminus T$ otvoren. Očito su prazan skup $\emptyset$ i čitav prostor X istovremeno otvoreni i zatvoreni. Nije teško dokazati da su to jedini podskupovi od X koji su i otvoreni i zatvoreni. Svaka je otvorena kugla otvoren podskup od X; doista, iz nejednakosti trokuta neposredno slijedi da za svaki $x \in K(x_0, r)$ vrijedi $K(x, r - \|x - x_0\|) \subseteq K(x_0, r)$. Svaka točka $\{x\}$ je zatvoren podskup od X.

Lako se vidi da je unija bilo kojeg skupa otvorenih podskupova od X ponovo otvoren podskup od X. Kako je komplement presjeka unija komplemenata, odatle slijedi da je presjek bilo kojeg skupa zatvorenih podskupova od X ponovo zatvoren podskup od X. Zbog toga za svaki podskup S normiranog prostora X postoji najmanji zatvoren skup koji sadrži S $-$ to je presjek svih zatvorenih podskupova od X koji sadrže skup S. Taj se skup zove **zatvorenje** ili **zatvarač** od S i označava sa $\mathrm{Cl}(S)$ (po engl. *closure*). Također, postoji najveći otvoren skup koji je sadržan u skupu S $-$ to je unija svih otvorenih podskupova od X koji su sadržani u skupu S. Taj se skup zove **nutrina** od S i označava sa $\mathrm{Int}(S)$ (po engl. *interior*).

Zadatak 1.4. *Neka je X normiran prostor, $x_0 \in X$ i $r > 0$. Dokažite da je $Cl(K(x_0, r)) =$ $= \overline{K}(x_0, r) = \{x \in X;\; \|x - x_0\| \leq r\}$ i da je $Int(\overline{K}(x_0, r)) = K(x_0, r)$.*

Za **niz** $(x_n;\, n \in \mathbb{N})$ u normiranom prostoru X kažemo da je **konvergentan**, ako postoji $x_0 \in X$ takav da niz brojeva $(\|x_n - x_0\|;\, n \in \mathbb{N})$ konvergira prema nuli. Takav je vektor x_0 tada jedinstven, zovemo ga **limes niza** (x_n) i označavamo

$$x_0 = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim x_n.$$

Vektor x_0 je limes niza (x_n) ako i samo ako

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \text{takav da vrijedi implikacija} \qquad n \geq n_0 \quad \Longrightarrow \quad \|x_n - x_0\| < \varepsilon.$$

Pomoću konvergencije nizova u normiranom se prostoru mogu u potpunosti karakterizirati zatvorenost i zatvarač (pa, dakle, i otvorenost i nutrina):

Teorem 1.7. *Neka je S podskup normiranog prostora X.*

(a) *Skup S je zatvoren ako i samo ako je za svaki konvergentan niz $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ u X, čiji su članovi elementi skupa S, i limes tog niza element od S.*

(b) $Cl(S) = \{x \in X;\, x = \lim x_n \;\; \textit{za neki niz } (x_n) \textit{ u } S\}$.

Zadatak 1.5. *Dokažite teorem 1.7.*

Za podskup S normiranog prostora X kažemo da je **gust** u prostoru X, ako je $\mathrm{Cl}(S) = X$. Normiran prostor X zove se **separabilan**, ako postoji prebrojiv podskup od X koji je gust u X. Lako se vidi da je svaki konačnodimenzionalan normiran prostor separabilan: dovoljno je odabrati neku bazu i uočiti prebrojiv skup svih vektora za koje su i realni i imaginarni dijelovi koordinata u toj bazi racionalni brojevi.

Neka su X i Y normirani prostori i neka je φ funkcija s domenom $D(\varphi) \subseteq X$ i s vrijednostima u Y. Kažemo da je funkcija φ **neprekidna u točki** $x_0 \in D(\varphi)$ ako vrijedi:

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \;\; \text{takav da za } \; x \in D(\varphi) \qquad \|x - x_0\| < \delta \quad \Longrightarrow \quad \|\varphi(x) - \varphi(x_0)\| < \varepsilon.$$

Za funkciju φ kažemo kratko da je **neprekidna** ako je ona neprekidna u svakoj točki svoje domene.

Teorem 1.8. *Neka su X i Y normirani prostori i neka je φ funkcija s domenom $D(\varphi) \subseteq X$ i s vrijednostima u Y.*

(a) *Funkcija φ je neprekidna u točki $x_0 \in D(\varphi)$ ako i samo ako za svaki otvoren skup $U \subseteq Y$, koji sadrži točku $\varphi(x_0)$, postoji otvoren skup $V \subseteq X$, koji sadrži točku x_0, takav da je $\varphi(V \cap D(\varphi)) \subseteq U$.*

(b) *Funkcija φ je neprekidna ako i samo ako za svaki otvoren skup $U \subseteq Y$ postoji otvoren skup $V \subseteq X$ takav da je*

$$\varphi^{-1}(U) = \{x \in D(\varphi);\;\; \varphi(x) \in U\} = V \cap D(\varphi).$$

Posebno, ako je $D(\varphi) = X$, funkcija φ je neprekidna ako i samo ako je skup $\varphi^{-1}(U)$ otvoren u X za svaki otvoren podskup U od Y.

(c) *Funkcija φ je neprekidna u točki $x_0 \in D(\varphi)$ ako i samo ako za svaki niz (x_n) u $D(\varphi)$, koji konvergira prema x_0, je i niz $(\varphi(x_n))$ konvergentan i $\lim \varphi(x_n) = \varphi(x_0)$.*

Neka su X i Y normirani prostori. Za linearan operator $A{:}X \to Y$ kažemo da je **ograničen** ako postoji $M > 0$ takav da je

$$\|Ax\| \leq M\|x\|, \qquad \forall x \in X.$$

U tom slučaju najmanji takav M zove se **norma operatora** A. Normu operatora A označavamo sa $\|A\|$.

Teorem 1.9. *Neka su X i Y normirani prostori i $A \in L(X,Y)$. Sljedeća su tri svojstva međusobno ekvivalentna:*

(*a*) *Operator A je ograničen.*

(*b*) *Postoji točka $x_0 \in X$ u kojoj je operator $A{:}X \to Y$ neprekidan.*

(*c*) *Operator A je neprekidan.*

Skup svih ograničenih linearnih operatora $A{:}X \to Y$ označavat ćemo sa $B(X,Y)$. Iz definicije norme ograničenog operatora jasno je da vrijedi

$$\|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\|, \qquad \forall A \in B(X,Y),\ \forall x \in X.$$

Teorem 1.10. (*a*) *$B(X,Y)$ je potprostor vektorskog prostora $L(X,Y)$.*

(*b*) *Preslikavanje $A \mapsto \|A\|$ je norma na prostoru $B(X,Y)$.*

(*c*) *Ako je $A \in B(X,Y)$ i $B \in B(Y,Z)$ onda je $BA \in B(X,Z)$ i vrijedi:*

$$\|BA\| \leq \|B\| \cdot \|A\|.$$

(*d*) *Za $A \in B(X,Y)$ vrijedi $\|A\| = \sup\{\|Ax\|;\ x \in X,\ \|x\| \leq 1\}$.*

Zadatak 1.6. *Dokažite teorem 1.10.*

Ako su X i Y normirani prostori, linearan operator $A{:}X \to Y$ zove se **izometrija** ako vrijedi $\|Ax\| = \|x\|$ za svaki vektor $x \in X$. Očito je tada operator A ograničen i $\|A\| = 1$. Svaka izometrija je injekcija, jer za $x, y \in X$ imamo redom

$$Ax = Ay \implies \|x - y\| = \|A(x - y)\| = \|Ax - Ay\| = 0 \implies x - y = 0 \implies x = y.$$

Ako je izometrija A i surjekcija (dakle bijekcija sa X na Y) A se zove **izometrički izomorfizam** normiranog prostora X na normiran prostor Y. Ako postoji izometrički izomorfizam sa X na Y, normirani prostori X i Y zovu se **izometrički izomorfni**. Očito je izometrička izomorfnost relacija ekvivalencije među normiranim prostorima. Izometrički izomorfni prostori ni u čemu bitnom se ne razlikuju: tvrdnja dokazana za neki normiran prostor vrijedi i za sve normirane prostore koji su s njim izometrički izomorfni.

Neka je X normiran prostor i Y njegov potprostor. Tada je i Y normiran prostor s obzirom na istu normu (preciznije, s obzirom na restrikciju norme sa X na Y). Primijetimo da je i zatvarač $\mathrm{Cl}\,(Y)$ potprostora Y i sam potprostor.

Ako je Y zatvoren potprostor normiranog prostora X, na kvocijentnom prostoru X/Y definiramo nenegativnu funkciju $x + Y \mapsto \|x + Y\|$ ovako:

$$\|x + Y\| = \inf\{\|x + y\|;\ y \in Y\}.$$

Definicija ima smisla, tj. desna strana ne ovisi o izboru pretstavnika klase $x+Y$; doista, ako je $x+Y=x'+Y$, onda je $z=x-x'\in Y$, pa je $\{y-z;\ y\in Y\}=Y$ i nalazimo

$$\{\|x+y\|;\ y\in Y\}=\{\|x+(y-z)\|;\ y\in Y\}=\{\|x'+y\|;\ y\in Y\},$$

dakle vrijedi

$$\inf\{\|x+y\|;\, y\in Y\}=\inf\{\|x'+y\|;\, y\in Y\}.$$

Teorem 1.11. *Neka je X normiran prostor i Y njegov zatvoren potprostor. Funkcija*

$$x+Y\mapsto\|x+Y\|$$

je norma na kvocijentnom prostoru X/Y. Nadalje, kvocijentno preslikavanje $\pi{:}X\to X/Y$, definirano sa $\pi(x)=x+Y$, je neprekidno. Podskup V prostora X/Y je otvoren ako i samo ako je skup $\pi^{-1}(V)=\{x\in X\,;\ \pi(x)\in V\}$ otvoren u X. Preslikavanje π je i otvoreno, tj. za svaki otvoren podskup U prostora X je $\pi(U)=\{\pi(x)\,;\ x\in U\}$ otvoren podskup od X/Y.

Zadatak 1.7. *Dokažite teorem 1.11.*

Niz (x_n) u normiranom prostoru X zove se **Cauchyjev niz**, ako vrijedi:

$$\forall\varepsilon>0\ \exists n_0\in\mathbb{N}\quad\text{takav da}\quad n,m\geq n_0\implies\|x_n-x_m\|<\varepsilon.$$

Očito je svaki konvergentan niz Cauchyjev. U jednodimenzionalnom normiranom prostoru $\mathbb{C}$ vrijedi i obratno: niz (λ_n) u $\mathbb{C}$ je konvergentan ako i samo ako je on Cauchyjev $-$ to je poznati *Cauchyjev kriterij konvergencije*. U općem slučaju ne mora svaki Cauchyjev niz u normiranom prostoru X biti konvergentan. Normiran prostor X zovemo **potpunim** ako je u njemu svaki Cauchyjev niz konvergentan. Potpun normiran prostor zove se još **Banachov prostor**.

Istinitost sljedećeg teorema možemo odmah naslutiti kad se sjetimo da za jednodimenzionalan prostor $\mathbb{C}$ vrijedi Cauchyjev kriterij konvergencije.

Teorem 1.12. *Svaki konačnodimenzionalan normiran prostor je potpun.*

Taj teorem slijedi neposredno iz tvrdnji (a) i (b) sljedeće jednostavne leme:

Lema 1.2. *Neka je X konačnodimenzionalan normiran prostor i neka je $\{e_1,e_2,\ldots,e_m\}$ neka baza od X. Za bilo koji $x\in X$ sa $x(k)$ označimo njegovu $k-$tu koordinatu:*

$$x=x(1)e_1+x(2)e_2+\cdots+x(k)e_k+\cdots+x(m)e_m.$$

(a) *Niz $(x_n;\ n\in\mathbb{N})$ u X je Cauchyjev ako i samo ako je svaki od nizova brojeva $(x_n(k);\ n\in\mathbb{N})$ $(1\leq k\leq m)$ Cauchyjev.*

(b) *Niz $(x_n;\ n\in\mathbb{N})$ u X je konvergentan ako i samo ako je svaki od nizova brojeva $(x_n(k);\ n\in\mathbb{N})$ $(1\leq k\leq m)$ konvergentan. U tom slučaju je*

$$\left(\lim_{n\to\infty}x_n\right)(k)=\lim_{n\to\infty}x_n(k)\qquad\textit{za}\qquad k=1,2,\ldots,m.$$

(c) *Skup $S\subseteq X$ je* **ograničen** *(tj. za neki $M>0$ vrijedi $\|x\|\leq M$ za svaki $x\in S$) ako i samo ako je svaki od skupova brojeva $\{x(k)\,;\ x\in S\}$ $(1\leq k\leq m)$ ograničen.*

Zadatak 1.8. *Dokažite lemu 1.2.*

Niz (x_n) u normiranom prostoru X je zapravo funkcija $n \mapsto x_n$ sa $\mathbb{N}$ u X. Dakle, skup svih nizova u X je vektorski prostor $X^{\mathbb{N}}$. Sa $C(X)$ označimo skup svih Cauchyjevih nizova u X. Nadalje, sa $c(X)$ označavamo skup svih konvergentnih nizova u X, a sa $c_0(X)$ skup svih nul$-$nizova u X (nizova koji konvergiraju prema nuli). Lako se provjeri da su to sve potprostori od $X^{\mathbb{N}}$:

$$c_0(X) \leq c(X) \leq C(X) \leq X^{\mathbb{N}}.$$

Neka je $\underline{x} = (x_n) \in C(X)$. Iz nejednakosti trokuta slijedi $|\|x_n\| - \|x_m\|| \leq \|x_n - x_m\|$. To pokazuje da niz brojeva $(\|x_n\|)$ zadovoljava Cauchyjev kriterij konvergencije, pa je on konvergentan u $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty\rangle$. Njegov limes označimo sa $\|\underline{x}\|$:

$$\|\underline{x}\| = \lim_{n\to\infty} \|x_n\|.$$

Lako se provjerava da je $\|\lambda\underline{x}\| = |\lambda| \cdot \|\underline{x}\|$ $(\lambda \in \mathbb{C})$ i da vrijedi $\|\underline{x}+\underline{y}\| \leq \|\underline{x}\|+\|\underline{y}\|$. Nadalje, $\|\underline{x}\| = 0$ ako i samo ako je $\underline{x} \in c_0(X)$. Zbog činjenice da u prostoru $C(X)$ ima vektora $\underline{x}$ različitih od nule za koje je $\|\underline{x}\| = 0$ ne možemo reći da je na prostoru $C(X)$ definirana norma. "*Smetnja*" za to su nul$-$nizovi koji tvore potprostor $c_0(X)$. Da tu smetnju uklonimo prirodno je promatrati kvocijentni prostor $C(X)/c_0(X)$. Ako su $\underline{x}, \underline{y} \in C(X)$ i ako je $\underline{x}-\underline{y} \in c_0(X)$, tj. ako je u kvocijentnom prostoru $\underline{x} + c_0(X) = \underline{y} + c_0(X)$, onda je $\lim(x_n - y_n) = 0$, dakle je $\|\underline{x}\| = \lim x_n = \lim y_n = \|\underline{y}\|$. Stoga ima smisla definirati funkciju $\|\cdot\|$ na kvocijentnom prostoru $C(X)/c_0(X)$ na sljedeći način:

$$\|\underline{x} + c_0(X)\| = \|\underline{x}\|, \qquad \underline{x} \in C(X).$$

Iz navedenih svojstava funkcije $\underline{x} \mapsto \|\underline{x}\|$ neposredno slijedi:

Lema 1.3. *Tako definirana funkcija* $\|\cdot\|$ *je norma na kvocijentnom prostoru* $C(X)/c_0(X)$.

Dokazat ćemo sada još nekoliko činjenica o normiranom prostoru $C(X)/c_0(X)$.

Lema 1.4. *Neka je* $\varphi : X \to C(X)/c_0(X)$ *preslikavanje definirano tako da za* $x \in X$ *stavimo* $\varphi(x) = (x_n) + c_0(X)$, *gdje je* (x_n) *konstantan niz:* $x_n = x \ \forall n \in \mathbb{N}$. *Tada je* φ *linearna izometrija s normiranog prostora* X *u normiran prostor* $C(X)/c_0(X)$.

Dokaz: Očito je definirano preslikavanje $\varphi : X \to C(X)/c_0(X)$ linearan operator. Za $x \in X$ označimo sa $\underline{x}$ pripadni konstantan niz u X : $\underline{x} = (x_n)$, $x_n = x$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Tada imamo:

$$\varphi(x)\| = \|\underline{x} + c_0(X)\| = \lim_{n\to\infty} \|x_n\| = \|x\|.$$

Dakle, linearan operator φ je izometrija.

Lema 1.5. *Za svaki* $\underline{x} = (x_n) \in C(X)$ *niz* $(\varphi(x_n);\, n \in \mathbb{N})$ *u* $C(X)/c_0(X)$ *je konvergentan i limes mu je klasa od* $\underline{x}$ *u kvocijentnom prostoru* $C(X)/c_0(X)$:

$$\lim_{n\to\infty} \varphi(x_n) = \underline{x} + c_0(X).$$

Posebno, slika $R(\varphi) = Im(\varphi) = \varphi(X)$ *izometrije* φ *je gust potprostor prostora* $C(X)/c_0(X)$.

Dokaz: Neka je $\underline{x} = (x_n) \in C(X)$ i neka je $\varepsilon > 0$. Kako je niz (x_n) u normiranom prostoru X Cauchyjev, postoji prirodan broj n_0 takav da vrijedi:

$$n, m \geq n_0 \qquad \Rightarrow \qquad \|x_n - x_m\| < \varepsilon.$$

Za bilo koji $n \geq n_0$ sada imamo:

$$\|\varphi(x_n) - (\underline{x} + c_0(X))\| = \left\|\varphi(x_n) - \lim_{m\to\infty} \varphi(x_m)\right\| = \left\|\lim_{m\to\infty} \varphi(x_n - x_m)\right\| =$$

$$= \lim_{m\to\infty} \|\varphi(x_n - x_m)\| = \lim_{m\to\infty} \|x_n - x_m\| \leq \varepsilon.$$

To pokazuje da je niz $(\varphi(x_n);\, n \in \mathbb{N})$ u normiranom prostoru $C(X)/c_0(X)$ konvergentan i limes mu je $\underline{x} + c_0(X)$.

Lema 1.6. *Normiran prostor* $C(X)/c_0(X)$ *je potpun.*

Dokaz: Neka je $(\underline{x}(n);\, n \in \mathbb{N})$ niz u $C(X)$ takav da je niz klasa $(\underline{x}(n)+c_0(X))_{n\in\mathbb{N}}$ u normiranom prostoru $C(X)/c_0(X)$ Cauchyjev. Budući da je prema lemi 1.5. slika izometrije φ gusta u prostoru $C(X)/c_0(X)$, za svaki $n \in \mathbb{N}$ postoji vektor $x_n \in X$ takav da vrijedi

$$\|\varphi(x_n) - (\underline{x} + c_0(X))\| < \frac{1}{n}.$$

Tako dobiven niz (x_n) označimo sa $\underline{y}$. Koristeći nejednakost trokuta u normiranom prostoru $C(X)/c_0(X)$ i činjenicu da je φ linearna izometrija sa X u $C(X)/c_0(X)$, za bilo koje $n, m \in \mathbb{N}$ dobivamo:

$$\|x_n - x_m\| = \|\varphi(x_n - x_m)\| = \|\varphi(x_n) - \varphi(x_m)\| \leq$$
$$\leq \|\varphi(x_n) - (\underline{x}(n) + c_0(X))\| + \|(\underline{x}(n) + c_0(X)) - (\underline{x}(m) + c_0(X))\| + \|(\underline{x}(m) + c_0(X)) - \varphi(x_m)\| <$$
$$< \frac{1}{n} + \|(\underline{x}(n) + c_0(X)) - (\underline{x}(m) + c_0(X))\| + \frac{1}{m}.$$

Zbog činjenice da je $(\underline{x}(n) + c_0(X))_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyjev niz u normiranom prostoru $C(X)/c_0(X)$, to pokazuje da je niz $\underline{y} = (x_n)$ u normiranom prostoru X Cauchyjev, tj. $\underline{y} \in C(X)$. Napokon, za $n \in \mathbb{N}$ imamo:

$$\|(\underline{x}(n) + c_0(X)) - (\underline{y} + c_0(X))\| \leq \|(\underline{x}(n) + c_0(X)) - \varphi(x_n)\| + \|\varphi(x_n) - (\underline{y} + c_(X))\|.$$

Prema izboru vektora $x_n \in X$ prvi član s desne strane gornje nejednakosti je manji od $\frac{1}{n}$, dakle teži k nuli kada n teži k ∞. Drugi član s desne strane također teži k nuli zbog leme 1.5. Prema tome, i lijeva strana gornje nejednakosti teži k nuli kada n teži k ∞. Time smo dokazali da je $\underline{y} + c_0(X)$ limes niza $(\underline{x}(n) + c_0(X))_{n\in\mathbb{N}}$ u normiranom prostoru $C(X)/c_0(X)$. Dakle, svaki Cauchyjev niz u prostoru $C(X)/c_0(X)$ je konvergentan, što znači da je normiran prostor $C(X)/c_0(X)$ potpun.

Neka je X normiran prostor. **Upotpunjenje** od X (ili **popunjenje** od X) je uređen par $(\underline{X}, \varphi)$ gdje je $\underline{X}$ Banachov prostor, a φ je linearna izometrija sa X u $\underline{X}$ čija je slika gusta u $\underline{X}$.

Teorem 1.13. *Neka je* X *normiran prostor.*

(a) *Postoji popunjenje* $(\underline{X}, \varphi)$ *prostora* X.

(b) *Ako su* $(\underline{X}, \varphi)$ *i* $(\underline{Y}, \psi)$ *popunjenja od* X, *onda postoji jedinstven neprekidan linearan operator* $\pi : \underline{X} \to \underline{Y}$ *takav da za svaki* $x \in X$ *vrijedi* $\pi(\varphi(x)) = \psi(x)$. π *je izometrički izomorfizam Banachovog prostora* $\underline{X}$ *na Banachov prostor* $\underline{Y}$.

Dokaz: Tvrdnja (a) slijedi iz dokazanih lema 1.4., 1.5. i 1.6. Štoviše, pomoću tih lema dobivamo i sasvim konkretnu konstrukciju popunjenja od X: to je upravo kvocijentni prostor prostora svih Cauchyjevih nizova u X po potprostoru svih nul−nizova u X.

Dokažimo sada tvrdnju (b), prema kojoj je popunjenje u biti jedinstveno. Neka je $\underline{x} \in \underline{X}$ i neka je (x_n) niz u X takav da je $\underline{x} = \lim \varphi(x_n)$. Kako su φ i ψ linearne izometrije, za bilo koje $n, m \in \mathbb{N}$ imamo:

$$\|\psi(x_n) - \psi(x_m)\| = \|\psi(x_n - x_m)\| = \|x_n - x_m\| = \|\varphi(x_n - x_m)\| = \|\varphi(x_n) - \varphi(x_m)\|.$$

Kako je niz $(\varphi(x_n))$ u prostoru $\underline{X}$ konvergentan, on je Cauchyjev, pa zaključujemo da je i niz $(\psi(x_n))$ u prostoru $\underline{Y}$ Cauchyjev. No prostor $\underline{Y}$ je potpun pa je niz $(\psi(x_n))$ konvergentan. Njegov limes u prostoru $\underline{Y}$ označit ćemo sa $\pi(\underline{x})$:

$$\pi(\underline{x}) = \lim_{n\to\infty} \psi(x_n) \quad \text{gdje je} \quad (x_n) \quad \text{niz u } X \text{ takav da je} \quad \underline{x} = \lim_{n\to\infty} \varphi(x_n).$$

Da bi ova definicija preslikavanja $\pi : \underline{X} \to \underline{Y}$ uopće imala smisla, treba dokazati da ona ne ovisi o izboru niza (x_n). Neka je stoga i (y_n) niz u $\underline{X}$ takav da vrijedi $\underline{x} = \lim \varphi(y_n)$. Tada imamo:

$$\|\psi(x_n)-\psi(y_n)\| = \|\psi(x_n-y_n)\| = \|x_n-y_n\| = \|\varphi(x_n-y_n)\| =$$
$$= \|\varphi(x_n)-\varphi(y_n)\| \leq \|\varphi(x_n)-\underline{x}\| + \|\underline{x}-\varphi(y_n)\|.$$

Odavde se vidi da je $\lim\|\psi(x_n)-\psi(y_n)\| = 0$, pa zaključujemo da nizovi $(\psi(x_n))$ i $(\psi(y_n))$ u prostoru $\underline{Y}$ imaju isti limes. Do znači da je preslikavanje $\pi : \underline{X} \to \underline{Y}$ dobro definirano.

Dokažimo da je preslikavanje π linearno. Neka su $\underline{x}$ i $\underline{x}'$ vektori iz $\underline{X}$ i neka su $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$. Neka su (x_n) i (x_n') nizovi u X takvi da je $\underline{x} = \lim\varphi(x_n)$ i $\underline{x}' = \lim\varphi(x_n')$. Tada je $(\lambda x_n + \mu x_n')$ niz u X takav da je $\lambda\underline{x} + \mu\underline{x}' = \lim\varphi(\lambda x_n + \mu x_n')$. Sada je

$$\pi(\lambda\underline{x} + \mu\underline{x}') = \lim\psi(\lambda x_n + \mu x_n') = \lim(\lambda\psi(x_n) + \mu\psi(x_n')) = \lambda\pi(\underline{x}) + \mu\pi(\underline{x}'),$$

dakle dokazana je linearnost operatora π.

Dokažimo da je π izometrija. Neka je $\underline{x} \in \underline{X}$ i neka je $(x_n;\, n \in \mathbb{N})$ niz u X takav da vrijedi $\underline{x} = \lim\varphi(x_n)$. Tada po definiciji preslikavanja π imamo $\pi(\underline{x}) = \lim\psi(x_n)$. Kako su φ i ψ izometrije, imamo $\|\psi(x_n)\| = \|\varphi(x_n)\|$ za svaki n, pa slijedi

$$\|\pi(\underline{x})\| = \lim\|\psi(x_n)\| = \lim\|\varphi(x_n)\| = \|\underline{x}\|.$$

Dakle, $\pi : \underline{X} \to \underline{Y}$ je izometrija.

Posebno, π je injekcija. Dokažimo još da je π i surjekcija, dakle izometrički izomorfizam sa $\underline{X}$ na $\underline{Y}$. Neka je $\underline{y} \in \underline{Y}$. Budući da je po pretpostavci slika od ψ gusta u $\underline{Y}$, postoji niz (x_n) u X takav da je $\underline{y} = \lim\psi(x_n)$. Analogno kao prije kod definicije preslikavanja π dokazujemo da je tada niz $\varphi(x_n)$ konvergentan u prostoru $\underline{X}$. Stavimo $\underline{x} = \lim\varphi(x_n)$. Po definiciji preslikavanja π tada je $\pi(\underline{x}) = \underline{y}$. Time je dokazana surjektivnost preslikavanja π.

Preslikavanje π ima traženo svojstvo $\pi(\varphi(x)) = \psi(x)$ za svaki $x \in X$. Doista, za $x \in X$ stavimo $\underline{x} = \varphi(x)$. Tada za konstantan niz (x_n) $(x_n = x\ \forall n)$ imamo $\underline{x} = \lim\varphi(x_n)$, pa po definiciji preslikavanja π imamo $\pi(\underline{x}) = \lim\psi(x_n) = \psi(x)$. Dakle je $\pi(\varphi(x)) = \psi(x)$.

Napokon, dokažimo još jedinstvenost neprekidnog linearnog operatora π sa $\underline{X}$ u $\underline{Y}$ takvog da je $\pi(\varphi(x)) = \psi(x)$ za svaki $x \in X$. To slijedi iz neprekidnosti i iz činjenice da je slika $\varphi(X)$ od φ gusta u $\underline{X}$. Doista, neka je i ρ neprekidan linearni operator sa $\underline{X}$ u $\underline{Y}$ takav da je $\rho(\varphi(x)) = \psi(x)$ za svaki $x \in X$. Tada je $\pi(\varphi(x)) = \rho(\varphi(x))\ \forall x \in X$. Neka je $\underline{x} \in \underline{X}$. Zbog gustoće $\varphi(X)$ u $\underline{X}$ postoji niz (x_n) u X takav da je $\underline{x} = \lim\varphi(x_n)$. Stoga zbog neprekidnosti π i ρ i zbog tvrdnje (c) teorema 1.8. imamo redom

$$\pi(\underline{x}) = \pi(\lim\varphi(x_n)) = \lim\pi(\varphi(x_n)) = \lim\rho(\varphi(x_n)) = \rho(\lim\varphi(x_n)) = \rho(\underline{x}).$$

Kako je $\underline{x} \in \underline{X}$ bio proizvoljan, slijedi $\pi = \rho$.

Time je teorem 1.13. u potpunosti dokazan.

Upravo zbog jedinstvenosti iz tvrdnje (b) teorema 1.13. možemo si dozvoliti nepreciznost i za popunjenje $(\underline{X}, \varphi)$ normiranog prostora X identificirati prostor X s njegovom slikom $\varphi(X)$ u $\underline{X}$ (tj. za $x \in X$ podrazumijevamo da je $x = \varphi(x) \in \underline{X}$). Tada ćemo reći da je $\underline{X}$ popunjenje prostora X, a sam X postaje gust potprostor od $\underline{X}$.

Navedimo neke primjere beskonačnodimenzionalnih Banachovih prostora.

1. Neka su $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, i neka je $C([a,b])$ vektorski prostor svih neprekidnih funkcija $x : [a,b] \to \mathbb{C}$. Tada je sa

$$\|x\| = \max\{|x(t)|;\, a \leq t \leq b\}, \qquad x \in C([a,b]),$$

zadana norma na prostoru $C([a,b])$. U odnosu na tu normu prostor $C([a,b])$ je potpun, odnosno Banachov. Primijetimo da je konvergencija u odnosu na tu normu uniformna konvergencija neprekidnih funkcija na segmentu $[a,b]$, a činjenica da je prostor $C([a,b]$ potpun znači točno da je limes uniformno konvergentnog niza neprekidnih funkcija i sam neprekidna funkcija.

2. Neka je ℓ_∞ skup svih ograničenih nizova (ξ_n) u $\mathbb{C}$. ℓ_∞ je očito vektorski prostor i lako se vidi da je sa

$$\|x\|_\infty = \sup\{|\xi_n|;\ n \in \mathbb{N}\}, \qquad x = (\xi_n) \in \ell_\infty$$

zadana norma na prostoru ℓ_∞. Pokazuje se da je s tom normom prostor ℓ_∞ Banachov.

3. Neka je $p \geq 1$. Označimo sa ℓ_p skup svih nizova (ξ_n) u $\mathbb{C}$ takvih da je red $\sum_{n\in\mathbb{N}} |\xi_n|^p$ konvergentan. Pokazuje se da je tada ℓ_p vektorski prostor i da je sa

$$\|x\|_p = \left[\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^p\right]^{\frac{1}{p}}, \qquad x = (\xi_n) \in \ell_p,$$

zadana norma na prostoru ℓ_p s obzirom na koju je ℓ_p Banachov prostor.

4. Neka je ponovo $p \geq 1$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Označimo sa $\mathcal{L}_p([a,b])$ skup svih izmjerivih funkcija $x : [a,b] \to \mathbb{C}$ takvih da je funkcija $t \mapsto |x(t)|^p$ integrabilna. To je vektorski prostor i ako za $x \in \mathcal{L}_p([a,b])$ stavimo

$$\|x\|_p = \left[\int_a^b |x(t)|^p \mathrm{d}t\right]^{\frac{1}{p}},$$

onda funkcija $x \mapsto \|x\|_p$ sa $\mathcal{L}_p([a,b])$ u $\mathbb{R}_+$ ima svojstva

$\|\lambda x\|_p = |\lambda| \cdot \|x\|_p, \qquad x \in \mathcal{L}_p([a,b]),\ \lambda \in \mathbb{C};$

$\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p, \qquad x, y \in \mathcal{L}_p([a,b]);$

Za $x \in \mathcal{L}_p([a,b])$ vrijedi $\|x\|_p = 0$ ako i samo ako je $\{t \in [a,b];\ x(t) \neq 0\}$ skup mjere nula.

Skup $\mathcal{N}$ svih $x \in \mathcal{L}_p([a,b])$, takvih da je $\{t \in [a,b];\ x(t) \neq 0\}$ skup mjere nula, je očito potprostor. $\mathcal{N}$ je "*smetnja*" da bi $\|\cdot\|_p$ bila norma. Stoga prelazimo na kvocijentni prostor $L_p([a,b]) = \mathcal{L}_p([a,b])/\mathcal{N}$. Na tom je prostoru sa

$$\|x + \mathcal{N}\|_p = \|x\|_p, \qquad x \in \mathcal{L}_p([a,b]),$$

definirana norma. Pokazuje se da je s tom normom $L_p([a,b])$ Banachov prostor. Elementi od $L_p([a,b])$ su klase funkcija, pri čemu su dvije funkcije x i y u istoj klasi (tj. definiraju isti vektor u prostoru $L_p([a,b])$) ako i samo ako je $\{t \in [a,b];\ x(t) \neq y(t)\}$ skup mjere nula.
Napomenimo da za svaki $p \geq 1$ vektorski prostor $C([a,b])$ možemo shvatiti kao potprostor od $L_p([a,b])$. Doista, $C([a,b]) \subseteq \mathcal{L}_p([a,b])$ i $C([a,b]) \cap \mathcal{N} = \{0\}$, pa je $x \mapsto x + \mathcal{N}$ linearna injekcija sa $C([a,b])$ u $L_p([a,b])$ koju možemo upotrijebiti kao identifikaciju neprekidne funkcije s njenom klasom. Pokazuje se da je potprostor $C([a,b])$ gust u prostoru $L_p([a,b])$ za svaki $p \geq 1$.

Teorem 1.14. (*a*) *Neka je X normiran prostor i Y potprostor od X. Ako je normiran prostor Y potpun, onda je Y zatvoren potprostor od X.*

(*b*) *Neka je X Banachov prostor i Y zatvoren potprostor od X. Tada je normiran prostor Y potpun.*

(*c*) *Neka je X normiran, a Y Banachov prostor. Tada je normiran prostor $B(X,Y)$ potpun.*

Zadatak 1.9. *Dokažite teorem 1.14.*

1.3 Dualni prostor

Ako je Y konačnodimenzionalan normiran prostor, po tvrdnji (c) teorema 1.14. i po teoremu 1.12. prostor $B(X,Y)$ je Banachov za svaki normiran prostor X. Posebno, za svaki normiran prostor X prostor $B(X,\mathbb{C})$ svih ograničenih (tj. neprekidnih) linearnih funkcionala na X je Banachov. Taj se Banachov prostor zove **dual normiranog prostora** X i označava X' (za razliku od prostora svih linearnih funkcionala $L(X,\mathbb{C})$ kojeg ćemo označavati X^* i zvati **algebarski dual** od X). Prema tvrdnji (d) teorema 1.10. imamo ovu formulu za normu ograničenog linearnog funkcionala:

$$\|f\| = \sup\{|f(x)|;\ x\in X, \|x\|\le 1\}, \qquad f\in X'.$$

Sljedeći teorem predstavlja jedan od najvažnijih teorema funkcionalne analize.

Teorem 1.15. (**Hahn−Banach**) *Neka je X normiran prostor i Y potprostor od X. Za svaki $f\in Y'$ postoji $F\in X'$ takav da vrijedi $\|F\| = \|f\|$ i $F(y)=f(y)$ za svaki $y\in Y$.*

Drugim riječima, svaki se ograničeni linearan funkcional na potprostoru normiranog prostora može proširiti do ograničenog linearnog funkcionala na cijelom prostoru i to bez povećanja norme.

Originalni Banachov dokaz proveden je za normirane prostore nad $\mathbb{R}$; zapravo, Hahn−Banachov teorem i jest u svojoj biti realan teorem. Stoga ćemo privremeno odstupiti od promatranja isključivo kompleksnih vektorskih prostora i Hahn−Banachov teorem dokazati najprije za realne normirane prostore.

Naravno, svaki kompleksan vektorski prostor X ujedno je realan vektorski prostor. Nadalje, ako je $f: X\to\mathbb{C}$ $\mathbb{C}-$linearan funkcional, onda je sa $u(x) = \mathrm{Re}\, f(x)$, $x\in X$, definiran $\mathbb{R}-$linearan funkcional na X; taj se funkcional zove **realni dio** funkcionala f. U stvari, funkcional u potpuno određuje funkcional f :

Lema 1.7. *Neka je X kompleksan vektorski prostor.*

(a) *Neka je $f: X\to\mathbb{C}$ $\mathbb{C}-$linearan funkcional i $u: X\to\mathbb{R}$ njegov realni dio. Tada je*

$$f(x) = u(x) - iu(ix), \qquad x\in X. \tag{1.1}$$

(b) *Ako je $u: X\to\mathbb{R}$ $\mathbb{R}-$linearan funkcional na X i ako je preslikavanje $f: X\to\mathbb{C}$ definirano sa* (1.1), *onda je f $\mathbb{C}-$linearan funkcional na X.*

(c) *Ako je prostor X normiran i ako su funkcionali $f: X\to\mathbb{C}$ i $u: X\to\mathbb{R}$ vezani sa* (1.1), *funkcional f je ograničen ako i samo ako je funkcional u ograničen. U tom slučaju vrijedi $\|f\| = \|u\|$.*

Dokaz: (a) Za svaki $\lambda\in\mathbb{C}$ vrijedi $\lambda = \mathrm{Re}\,\lambda - i\,\mathrm{Re}\,(i\lambda)$. Odatle slijedi (1.1) jer je $\mathrm{Re}\,(if(x)) = \mathrm{Re}\, f(ix) = u(ix)$.

(b) Očito je $f(x+y) = f(x)+f(y)$ i $f(\alpha x) = \alpha f(x)$ $\forall x\in X$ i $\forall\alpha\in\mathbb{R}$. Nadalje, za $x\in X$ vrijedi

$$f(ix) = u(ix) - iu(-x) = u(ix) + iu(x) = i[u(x) - iu(ix)] = if(x).$$

Stoga za $\lambda = \alpha + i\beta$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, i za $x\in X$ imamo redom

$$f(\lambda x) = f(\alpha x + i\beta x) = f(\alpha x) + f(i\beta x) = \alpha f(x) + if(\beta x) = \alpha f(x) + i\beta f(x) = \lambda f(x).$$

(c) Kako je $u = \mathrm{Re}\, f(x)$, iz ograničenosti funkcionala f očito slijedi ograničenost funkcionala u. Obratno, ako je funkcional u ograničen, onda ograničenost funkcionala f slijedi iz (1.1).

Uzmimo da su funkcionali f i u ograničeni. Budući da je očito $|u(x)| \le |f(x)|$, $\forall x \in X$, slijedi $\|u\| \le \|f\|$. Neka je $x \in X$ proizvoljan i neka je $\lambda \in \mathbb{C}$ takav da je $|\lambda| = 1$ i $|f(x)| = \lambda f(x)$. Tada imamo

$$|f(x)| = \lambda f(x) = f(\lambda x) = u(\lambda x) \le \|u\| \cdot \|\lambda x\| = \|u\| \cdot \|x\|,$$

a odatle slijedi i obrnuta nejednakost $\|f\| \le \|u\|$.

Dokaz Hahn−Banachovog teorema za realan normiran prostor: Neka je X realan normiran prostor, Y potprostor i $f : Y \to \mathbb{R}$ ograničen $\mathbb{R}-$linearan funkcional. Ako je $f = 0$ očito tvrdnje teorema vrijede za $F = 0$. Pretpostavimo da je $f \neq 0$. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $\|f\| = 1$ i $Y \neq X$.

Pretpostavimo najprije da je $\dim X/Y = 1$. Neka je $x_0 \in X \setminus Y$, tako da je $X = Y \dotplus \mathbb{R}x_0$. Očigledno, preslikavanje $f_1 : X \to \mathbb{R}$ je linearan funkcional takav da vrijedi $f_1|Y = f$ ako i samo ako za neki $\alpha \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$f_1(x + \lambda x_0) = f(y) + \lambda\alpha, \qquad \forall x \in Y, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

Dokazat ćemo da se $\alpha \in \mathbb{R}$ može odabrati tako da bude $\|f_1\| = 1$. Budući da je sigurno $\|f_1\| \ge \|f\| = 1$, treba pokazati da se $\alpha \in \mathbb{R}$ može odabrati tako da vrijedi

$$|f(x) + \lambda\alpha| \le \|x + \lambda x_0\| \qquad \forall x \in Y, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

Zamijenimo u toj željenoj nejednakosti x sa $-\lambda x$ i podijelimo obje strane sa $|\lambda|$. Dobivamo da je nužan i dovoljan uvjet za $\|f_1\| = 1$ sljedeća nejednakost:

$$|f(x) - \alpha| \le \|x - x_0\| \qquad \forall x \in Y.$$

Budući da se radi o realnim brojevima, ta je nejednakost ekvivalentna sa

$$f(x) - \|x - x_0\| \le \alpha \le f(x) + \|x - x_0\| \qquad \forall x \in Y.$$

No takav $\alpha \in \mathbb{R}$ postoji ako i samo ako je

$$f(x) - \|x - x_0\| \le f(y) + \|y - x_0\| \qquad \forall x, y \in Y.$$

To je ispunjeno, jer za proizvoljne $x, y \in Y$ imamo

$$f(x) - f(y) = f(x - y) \le \|x - y\| = \|(x - x_0) - (y - x_0)\| \le \|x - x_0\| + \|y - x_0\|.$$

Time je realni Hahn−Banachov teorem dokazan u slučaju kad je Y potprostor od X kodimenzije 1. Opći slučaj dokazat ćemo pomoću Zornove leme. Neka je $\mathcal{S}$ skup svih uređenih parova (Z, g) gdje je Z potprostor od X takav da je $Y \subseteq Z$ i g je ograničen linearan funkcional na Z takav da je $g|Y = f$ i $\|g\| = 1$. Skup $\mathcal{S}$ neprazan jer je $(Y, f) \in \mathcal{S}$. Za $(Z, g), (U, h) \in \mathcal{S}$ stavimo $(Z, g) \le (U, h)$ ako i samo ako je $Z \subseteq U$ i $h|Z = g$. Uz tako definiranu relaciju $\mathcal{S}$ postaje parcijalno uređen skup.

Dokažimo da $\mathcal{S}$ zadovoljava uvjet Zornove leme. Neka je $\mathcal{T}$ lanac u $\mathcal{S}$. To znači da za $(Z, g), (U, h) \in \mathcal{T}$ vrijedi ili $Z \subseteq U$ i $h|Z = g$ ili $U \subseteq Z$ i $g|U = h$. Označimo sa U uniju svih potprostora $Z \subseteq X$ takvih da za neki ograničen linearan funkcional $g : Z \to \mathbb{R}$ vrijedi $(Z, g) \in \mathcal{T}$. Iz činjenice da je $\mathcal{T}$ lanac tada lako slijedi da je U potprostor od X. Nadalje, definiramo preslikavanje $h : U \to \mathbb{R}$ na sljedeći način: za $x \in U$ odaberimo $(Z, g) \in \mathcal{T}$ tako da je $x \in Z$ i tada stavimo $h(x) = g(x)$. Ova definicija ima smisla jer vrijednost $g(x)$ ne ovisi o tome koji smo $(Z, g) \in \mathcal{T}$ izabrali. Doista, ako je i $(V, k) \in \mathcal{T}$ takav da je $x \in V$, onda je ili $(Z, g) \le (V, k)$ ili je

$(V,k) \leq (Z,g)$. U prvom slučaju je $k|Z = g$, pa je $k(x) = g(x)$, a u drugom slučaju je $g|V = k$, pa je opet $k(x) = g(x)$. Nadalje, preslikavanje $h : U \to \mathbb{R}$ je linearan funkcional. Doista, ako su $x, y \in U$ iz činjenice da je $\mathcal{T}$ lanac slijedi da možemo izabrati $(Z,g) \in \mathcal{T}$ takav da je $x, y \in Z$. Tada za bilo koje $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ imamo

$$h(\alpha x + \beta y) = g(\alpha x + \beta y) = \alpha g(x) + \beta g(y) = \alpha h(x) + \beta h(y).$$

Iz definicije U je jasno da je $Y \subseteq U$, a iz definicije h da je $h|Y = f$. Napokon, neka je $x \in U$ takav da je $\|x\| \leq 1$. Izaberimo $(Z,g) \in \mathcal{T}$ tako da je $x \in Z$. Kako je $\|g\| = 1$, vrijedi $|h(x)| = |g(x)| \leq \|x\| \leq 1$. To pokazuje da je $|h(x)| \leq 1$ za svaki $x \in U$ takav da je $\|x\| \leq 1$. Dakle, funkcional h je ograničen i vrijedi $\|h\| \leq 1$. No kako je $h|Y = f$ vrijedi i obrnuta nejednakost $\|h\| \geq \|f\| = 1$. Prema tome je $\|h\| = 1$ i time je dokazano da je $(U,h) \in \mathcal{S}$. Ako je $(Z,g) \in \mathcal{T}$ onda je $Z \subseteq U$ i $h|Z = g$, dakle, $(Z,g) \leq (U,h)$. To znači da je (U,h) gornja ograda lanca $\mathcal{T}$. Time je dokazano da parcijalno uređen skup $\mathcal{S}$ zadovoljava uvjet Zornove leme.

Prema Zornovoj lemi $\mathcal{S}$ ima bar jedan maksimalan element (V,F). Pretpostavimo da je $V \neq X$. Neka je $x_0 \in X \setminus V$ i stavimo $W = V \dot{+} \mathbb{R}x_0$. Tada prema prvom dijelu dokaza primijenjenom na (V,F) umjesto (Y,f) postoji ograničen linearan funkcional $G : W \to \mathbb{R}$ takav da je $G|V = F$ i $\|G\| = 1$. No tada je $(W,G) \in \mathcal{S}$ i vrijedi $(V,F) \leq (W,G)$ i $(V,F) \neq (W,G)$ a to je u suprotnosti s maksimalnošcu od (V,F). To pokazuje da je $V = X$ i time je teorem dokazan.

Dokaz Hahn−Banachovog teorema za kompleksan normiran prostor: Neka je sada X kompleksan normiran prostor, Y potprostor i $f : Y \to \mathbb{C}$ ograničen $\mathbb{C}-$linearan funkcional. Neka je u realni dio od f. Prema realnom Hahn−Banachovom teoremu tada postoji $\mathbb{R}-$linearan funkcional $U : X \to \mathbb{R}$ takav da je $U|Y = u$ i $\|U\| = \|u\|$. Definiramo sada $F : X \to \mathbb{C}$ sa

$$F(x) = U(x) - iU(ix), \qquad x \in X.$$

Prema tvrdnji (b) leme 1.7. funkcional F $\mathbb{C}-$linearan. Za $y \in Y$ vrijedi

$$F(y) = U(y) - iU(iy) = u(y) - iu(iy) = f(y).$$

Dakle je $F|Y = f$. Napokon, prema tvrdnji (c) leme 1.7. vrijedi

$$\|F\| = \|U\| = \|u\| = \|f\|.$$

Time je Hahn−Banachov teorem u potpunosti dokazan.

Korolar 1.1. *Ako je X normiran prostor i $x \in X$ postoji neprekidan linearni funkcional $f \in X'$ takav da je $\|f\| = 1$ i $f(x) = \|x\|$.*

Dokaz korolara: Primijenimo teorem 1.15. na jednodimenzionalan potprostor Y razapet sa x i na funkcional $F \in Y'$ definiran sa $F(\lambda x) = \lambda\|x\|$.

1.4 Baireov teorem i njegove posljedice

U ovom ćemo odjeljku dokazati nekoliko fundamentalnih teorema funkcionalne analize kod kojih je ključna potpunost prostora za razliku od Hahn−Banachovog teorema, kod kojeg nismo trebali pretpostaviti potpunost. Ti se teoremi baziraju na sljedećem teoremu (koji zapravo vrijedi ne samo za Banachove prostore nego za proizvoljne potpune metričke prostore):

Teorem 1.16. (**Baire**) *Neka je X Banachov prostor i neka su U_n, $n \in \mathbb{N}$, otvoreni gusti podskupovi od X. Tada je i njihov presjek*

$$U = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$$

gust podskup od X.

Dokaz: Neka je $W \neq \emptyset$ proizvoljan otvoren podskup od X. Treba dokazati da je tada presjek $U \cap W$ neprazan.

Kako je skup U_1 otvoren i gust u X to je presjek $U_1 \cap W$ neprazan otvoren podskup od X. Stoga postoje $x_1 \in X$ i $\rho_1 \in \mathbb{R}$ takvi da je

$$\overline{K}(x_1, \rho_1) \subseteq U_1 \cap W \qquad \text{i} \qquad 0 < \rho_1 < 1. \tag{1.2}$$

Sada induktivno izabiremo parove $(x_n, \rho_n) \in X \times \mathbb{R}$ za sve $n \in \mathbb{N}$ i to na sljedeći način. Pretpostavimo da je $n \geq 2$ i da su $x_{n-1} \in X$ i $\rho_{n-1} \in \mathbb{R}$ izabrani. Tada zbog gustoće i otvorenosti skupa U_n zaključujemo da je skup $U_n \cap K(x_{n-1}, \rho_{n-1})$ neprazan i otvoren, pa postoje $x_n \in X$ i $\rho_n \in \mathbb{R}$ takvi da je

$$\overline{K}(x_n, \rho_n) \subseteq U_n \cap K(x_{n-1}, \rho_{n-1}) \qquad \text{i} \qquad 0 < \rho_n < \frac{1}{n}. \tag{1.3}$$

Promotrimo sada tako dobiveni niz $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ u X. Neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljan. Izaberimo $n_0 \in \mathbb{N}$ tako da je $n_0\varepsilon \geq 2$. Ako su $n, m \in \mathbb{N}$, veći od n_0, konstrukcija pokazuje da su $x_n, x_m \in K(x_{n_0}, \rho_{n_0})$. No tada je

$$\|x_n - x_m\| = \|x_n - x_{n_0} + x_{n_0} - x_m\| \leq \|x_n - x_{n_0}\| + \|x_m - x_{n_0}\| < \frac{1}{n_0} + \frac{1}{n_0} = \frac{2}{n_0} \leq \varepsilon.$$

To pokazuje da je $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyjev niz u X. Zbog potpunosti taj je niz konvergentan. Stavimo

$$x = \lim_{n\to\infty} x_n$$

Za $m > n$ vrijedi $x_m \in \overline{K}(x_n, \rho_n)$. Zbog zatvorenosti skupova $\overline{K}(x_n, \rho_n)$, $n \in \mathbb{N}$, zaključujemo da je x sadržan svim tim skupovima. No tada (1.3) pokazuje da je $x \in U_n \ \ \forall n \in \mathbb{N}$, dakle, $x \in U$. Nadalje, iz (1.2) se vidi da je $x \in W$. Dakle, $U \cap W \neq \emptyset$ i time je Baireov teorem dokazan.

Teorem 1.17. (**Teorem o otvorenom preslikavanju**) *Neka su X i Y Banachovi prostori i neka je $A \in B(X, Y)$ surjekcija.*

(*a*) *Neka su U i V otvorene jedinične kugle u prostorima X i Y:*

$$U = K_X(0, 1) = \{x \in X;\ \|x\| < 1\}, \qquad V = K_Y(0, 1) = \{y \in Y;\ \|y\| < 1\}.$$

Tada postoji $\delta > 0$ takav da je $\delta V \subseteq A(U)$.

(*b*) *A je otvoreno preslikavanje, tj. za svaki otvoren skup $\Omega \subseteq X$ je $A(\Omega)$ otvoren podskup od Y.*

(*c*) *Ako je A bijekcija, onda je $A^{-1} \in B(Y, X)$.*

Dokaz: (a) Kako je A surjekcija, za svaki $y \in Y$ postoji $x \in X$ takav da je $Ax = y$. Ako je $\|x\| < n$ za $n \in \mathbb{N}$, tada je $y \in A(kU)$. Prema tome, vrijedi

$$Y = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A(nU).$$

Stavimo sada $V_n = Y \setminus Cl(A(nU))$. Tada su V_n otvoreni podskupovi od Y i

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} V_n = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} [Y \setminus Cl(A(nU))] = Y \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{N}} Cl(A(nU)) = \emptyset.$$

Prema Baireovom teoremu ne mogu svi skupovi V_n biti gusti u Y. Prema tome, postoji $n \in \mathbb{N}$ i neprazan otvoren podskup W od Y takvi da je $W \cap V_n = \emptyset$. No to znači da je $W \subseteq Cl(A(nU))$.

Neka je $y_0 \in W$ i izaberimo $\rho > 0$ takav da je $K(y_0, \rho) \subseteq W$. Za svaki $y \in Y$ takav da je $\|y\| < \rho$ tada su $y_0, y_0 + y \in W \subseteq Cl(A(nU))$, pa postoje nizovi $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ i $(v_k)_{k \in \mathbb{N}}$ u nU takvi da vrijedi

$$y_0 = \lim_{k \to \infty} Au_k \qquad \text{i} \qquad y_0 + y = \lim_{k \to \infty} Av_k.$$

Stavimo $x_k = v_k - u_k$. Tada vrijedi

$$\|x_k\| \le \|v_k\| + \|u_k\| < 2n \qquad \text{i} \qquad y = \lim_{k \to \infty} Ax_k.$$

Prethodna konstrukcija provedena je za bilo koji $y \in Y$ takav da je $\|y\| < \rho$. Zbog linearnosti operatora A zaključujemo da je time dokazano da za $\delta = \dfrac{\rho}{2n}$ vrijedi

$$\forall y \in Y, \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists x \in X \qquad \text{takav da je} \quad \delta\|x\| \le \|y\| \quad \text{i} \quad \|y - Ax\| < \varepsilon. \tag{1.4}$$

Time gotovo da je dokazana tvrdnja: ona bi bila dokazana kad bismo u (1.4) na koncu umjesto $< \varepsilon$ mogli pisati $= 0$.

Fiksirajmo sada $y \in \delta V$ i $\varepsilon > 0$. Prema (1.4) postoji $x_1 \in X$ takav da je

$$\|x_1\| < 1 \qquad \text{i} \qquad \|y - Ax_1\| < 2^{-1}\delta\varepsilon.$$

Pretpostavimo sada da je $k \in \mathbb{N}$ i da su izabrani $x_1, \ldots, x_k \in X$ takvi da je

$$\|y - Ax_1 - \cdots - Ax_k\| \le 2^{-k}\delta\varepsilon, \qquad \|x_1\| < 1, \qquad \|x_j\| \le 2^{-j+1}\varepsilon \quad \text{za} \quad j = 2, \ldots, k. \tag{1.5}$$

Primijenimo sada (1.4) na vektor $y - Ax_1 - \cdots - Ax_k$ umjesto vektora y i na $2^{-k-1}\delta\varepsilon$ umjesto ε. Slijedi da postoji $x_{k+1} \in X$ takav da je

$$\delta\|x_{k+1}\| \le \|y - Ax_1 - \cdots - Ax_k\| < 2^{-k}\delta\varepsilon, \qquad \text{dakle,} \quad \|x_{k+1}\| < 2^{-k}\varepsilon$$

i da je

$$\|y - Ax_1 - \cdots - Ax_k - Ax_{k+1}\| < 2^{-k-1}\delta\varepsilon.$$

No to znači da vrijedi (1.5) za $k+1$ umjesto k. Time je dokazano da je moguće induktivno izabrati niz $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ u X takav da vrijedi (1.5) za svaki $k \in \mathbb{N}$.

Stavimo sada

$$z_k = x_1 + x_2 + \cdots + x_k.$$

Sada iz $\|x_{k+1}\| < 2^{-k}\varepsilon$ lako slijedi da je $(z_k)_{k \in \mathbb{N}}$ Cauchyjev niz u X. Kako je X potpun, taj je niz konvergentan. Stavimo

$$z = \lim_{k \to \infty} z_k.$$

Imamo

$$\|z_k\| = \|x_1 + x_2 + \cdots + x_k\| \leq \|x_1\| + \sum_{j=2}^{k} \|x_j\| < \|x_1\| + \sum_{j=2}^{k} 2^{-j+1}\varepsilon < \|x_1\| + \varepsilon.$$

Stoga je

$$\|z\| \leq \|x_1\| + \varepsilon < 1 + \varepsilon, \qquad \text{tj.} \quad z \in (1+\varepsilon)U$$

Operator A je ograničen, pa slijedi

$$Az = \lim_{k\to\infty} Az_k.$$

Prema (1.5) vidimo da je $\|y - Az_k\| < 2^{-k}\delta\varepsilon$, pa zaključujemo da je $Az = y$.

Na taj način smo dokazali da je $\delta V \subseteq A((1+\varepsilon)U)$, odnosno, da vrijedi

$$\frac{\delta}{1+\varepsilon} V \subseteq A(U) \qquad \forall \varepsilon > 0.$$

Odatle je

$$\delta V = \bigcup_{\varepsilon>0} \frac{\delta}{1+\varepsilon} V \subseteq A(U).$$

(b) Neka je $\Omega \subseteq X$ otvoren skup i neka je $y \in A(\Omega)$. Neka je $x \in \Omega$ takav da je $y = Ax$. Kako je Ω otvoren, postoji $\varepsilon > 0$ takav da je $K_X(x, \varepsilon) \subseteq \Omega$. Neka je $\delta > 0$ kao u (a). Za $z \in K_Y(y, \varepsilon\delta)$ tada je

$$z - y \in K_Y(0, \varepsilon\delta) = \varepsilon\delta V \subseteq \varepsilon A(U) = A(\varepsilon U) = A(K_X(0, \varepsilon)),$$

a kako je $y = Ax$ imamo

$$z \in Ax + A(K_X(0, \varepsilon)) = A(K_X(x, \varepsilon)) \subseteq A(\Omega).$$

Time je dokazano da je $K_Y(y, \varepsilon\delta) \subseteq A(\Omega)$, a kako je točka $y \in A(\Omega)$ bila proizvoljna, zaključujemo da je $A(\Omega)$ otvoren podskup od Y. Time je tvrdnja (b) dokazana.

Tvrdnja (c) slijedi neposredno iz tvrdnje (a), jer za bijekciju $A \in B(X, Y)$ inkluzija $\delta V \subseteq A(U)$ znači da je $\|A^{-1}y\| \leq \delta^{-1}$ za svaki $y \in Y$, $\|y\| \leq 1$; dakle, A^{-1} je ograničen (i $\|A\| \leq \delta^{-1}$).

Posljedica ovog teorema je još jedan vrlo netrivijalan i fundamentalan teorem linearne funkcionalne analize, teorem o zatvorenom grafu.

Napomenimo da se za svaki linearan operator $A \in L(X, Y)$ definira njegov **graf** kao skup

$$\Gamma(A) = \{(x, Ax);\ x \in X\}.$$

Iz linearnosti operatora A lako slijedi da je $\Gamma(A)$ potprostor vektorskog prostora $X \times Y$.

Zadatak 1.10. *Neka su X i Y normirani prostori. Dokažite da je sa*

$$\|(x, y)\| = \|x\| + \|y\|, \qquad (x, y) \in X \times Y,$$

zadana norma na vektorskom prostoru $X \times Y$ i da je s tom normom prostor $X \times Y$ potpun ako i samo ako su prostori X i Y potpuni.

Teorem 1.18. (**teorem o zatvorenom grafu**) *Neka su X i Y Banachovi prostori i $A \in L(X, Y)$. Operator A je ograničen ako i samo ako mu je graf $\Gamma(A)$ zatvoren potprostor od $X \times Y$.*

Zadatak 1.11. *Dokažite teorem 1.18.*

Uputa: Uočite da je $(x, Ax) \mapsto x$ linearna bijekcija sa $\Gamma(A)$ na X. Ako je $\Gamma(A)$ zatvoren potprostor od $X \times Y$, onda je to Banachov prostor pa se može primijeniti tvrdnja (c) teorema 1.17. o otvorenom preslikavanju.

Još jedna posljedica Baireovog teorema je sljedeći tzv. **teorem o uniformnoj ograničenosti**:

Teorem 1.19. (**Banach–Steinhaus**) *Neka je X Banachov i Y normiran prostor i neka je $\mathcal{S}$ podskup od $B(X, Y)$. Tada ili postoji $M > 0$ takav da je*

$$\|A\| \leq M \qquad \forall A \in \mathcal{S}$$

ili postoji gust podskup W od X takav da je

$$\sup\{\|Ax\|;\ A \in \mathcal{S}\} = +\infty \qquad \forall x \in W.$$

Dokaz: Stavimo

$$\varphi(x) = \sup\{\|Ax\|;\ A \in \mathcal{S}\}, \qquad x \in X,$$

i neka je

$$U_n = \{x \in X;\ \varphi(x) > n\}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Budući da je svaki $A \in \mathcal{S}$ neprekidan na X i budući da je norma na Y neprekidna funkcija sa Y u $\mathbb{R}$, svaka od funkcija $x \mapsto \|Ax\|$ je neprekidna na X. Odatle slijedi da je svaki od skupova U_n otvoren.

Pretpostavimo da postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da U_n nije gusto u X. To znači da postoji $x_0 \in X$ i $\rho > 0$ takvi da vrijedi

$$\|x\| \leq \rho \qquad \Longrightarrow \qquad x_0 + x \notin V_n, \qquad \text{tj.} \quad \varphi(x_0 + x) \leq n.$$

No to znači da vrijedi

$$\|x\| \leq \rho \qquad \Longrightarrow \qquad \|A(x_0 + x)\| \leq n \qquad \forall A \in \mathcal{S}.$$

Kako je $x = (x_0 + x) - x_0$, zaključujemo da vrijedi

$$\|x\| \leq \rho \qquad \|Ax\| \leq \|A(x_0 + x)\| + \|Ax_0\| \leq 2n \qquad \forall A \in \mathcal{S}$$

Dakle, vrijedi

$$\|A\| \leq \frac{2n}{\rho} \qquad \forall A \in \mathcal{S}.$$

Druga je mogućnost da je svaki od otvorenih skupova U_n gust u X. Tada je prema Baireovom teoremu i njihov presjek W gust u X. Još samo treba primijetiti da je u tom slučaju $\varphi(x) = +\infty$ $\forall x \in W$.

1.5 Unitarni i Hilbertovi prostori

Skalarni produkt na vektorskom prostoru X je preslikavanje sa $X \times X$ u $\mathbb{C}$ ($(x,y) \mapsto (x|y)$, tj. svakom uređenom paru vektora $(x,y) \in X \times X$ pridružen je skalar $(x|y) \in \mathbb{C}$) sa sljedećim svojstvima:

– *linearnost u prvoj varijabli*: $(\lambda x + \mu y|z) = \lambda(x|z) + \mu(y|z), \ \ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{C}, \ \forall x, y, z \in X$;

– *hermitska simetrija*: $(x|y) = \overline{(y|x)}, \ \ \forall x, y \in X$;

– *pozitivnost*: $(x|x) \geq 0, \ \ \forall x \in X$;

– *definitnost*: $(x|x) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x = 0.$

Vektorski prostor na kome je zadan skalarni produkt zove se **unitaran prostor**. Za skalarni produkt zbog linearnosti u prvoj varijabli i zbog hermitske simetrije vrijedi:

– *antilinearnost u drugoj varijabli*: $(x|\lambda y + \mu z) = \overline{\lambda}(x|y) + \overline{\mu}(x|z), \ \ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{C}, \ \forall x, y, z \in X.$

Teorem 1.20. *Neka je X unitaran prostor. Za $x \in X$ stavimo $\|x\| = \sqrt{(x|x)}$. Tada je funkcija $x \mapsto \|x\|$ norma na vektorskom prostoru X. Nadalje, vrijedi tzv.* **CSB−nejednakost** (*nejednakost Cauchy−Schwartz−Buniakowskog*)

$$|(x|y)| \leq \|x\| \cdot \|y\| \qquad \forall x, y \in X$$

pri čemu vrijedi znak jednakosti ako i samo ako su vektori x i y proporcionalni.

Zadatak 1.12. *Dokažite teorem 1.20.*

Uputa: Za dokaz CSB−nejednakosti, kao i nužnosti proporcionalnosti vektora x i y da bi vrijedila jednakost, u nejednakosti

$$0 \leq \|(x|y)y - (y|y)x\|^2$$

upotrijebite definiciju funkcije $\| \cdot \|$, a zatim koristite svojstva skalarnog produkta. Nejednakost trokuta za funkciju $x \mapsto \|x\|$ dokažite pomoću CSB−nejednakosti.

Topološke pojmove (otvorenost, zatvorenost, konvergenciju, neprekidnost, potpunost i sl.) u unitarnom prostoru definiramo u odnosu na normu iz teorema 1.20. Potpun unitaran prostor zove se **Hilbertov prostor**.

Posebnu važnost u Hilbertovim prostorima ima geometrijski pojam konveksnosti. Općenito se podskup S bilo kojeg (realnog ili kompleksnog) vektorskog prostora X zove **konveksan**, ako vrijedi

$$x, y \in S \qquad [x, y] \subseteq S,$$

pri čemu je $[x,y]$ oznaka za **segment** u prostoru X s vrhovima x i y :

$$[x, y] = \{tx + (1-t)y; \ 0 \leq t \leq 1\}.$$

Teorem 1.21. *Neka je X Hilbertov prostor i neka je S neprazan konveksan zatvoren podskup od X. Postoji jedinstven vektor $x_0 \in S$ takav da je $\|x_0\| \leq \|x\| \ \ \forall x \in S$.*

Dokaz: Jednostavan račun pokazuje da iz svojstava skalarnog produkta u bilo kojem unitarnom prostoru X vrijedi tzv. **jednakost paralelograma**:

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 \qquad \forall x, y \in X.$$

Stavimo

$$\delta = \inf \{\|x\|; x \in S\}.$$

Za bilo koje $x, y \in S$ primjena jednakosti paralelograma na vektore $\frac{1}{2}x$ i $\frac{1}{2}y$ daje

$$\frac{\|x-y\|^2}{4} + \left\|\frac{1}{2}(x+y)\right\|^2 = \frac{1}{2}\|x\|^2 + \frac{1}{2}\|y\|^2,$$

odnosno,

$$\|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 - 4\left\|\frac{1}{2}(x+y)\right\|^2.$$

Kako su $x, y \in S$, iz konveksnosti skupa S slijedi da je $\frac{1}{2}(x+y) \in S$. Stoga gornja jednakost ima za posljedicu sljedeću nejednakost:

$$\|x-y\|^2 \leq 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 - 4\delta^2 \qquad \forall x, y \in S. \tag{1.6}$$

Ako pretpostavimo da je $\|x\| = \|y\| = \delta$, iz te nejednakosti slijedi $\|x-y\| = 0$, dakle, $x = y$. Time je dokazana jedinstvenost u tvrdnji teorema.

Dokažimo još egzistenciju. Prema definiciji δ postoji niz $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ u S takav da je

$$\delta = \lim_{n\to\infty} \|x_n\|.$$

Dokazat ćemo sada da je $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyjev niz. Neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljan. δ^2 je limes niza $(\|x_n\|^2)_{n\in\mathbb{N}}$, pa postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da vrijedi

$$n \in \mathbb{N}, \quad n \geq n_0 \qquad \Longrightarrow \qquad \|x_n\|^2 < \delta^2 + \frac{\varepsilon^2}{4}.$$

Primijenimo sada nejednakost (1.6) na vektore x_n i x_m za $n, m \in \mathbb{N}$ takve da je $n \geq n_0$ i $m \geq n_0$. Dobivamo

$$\|x_n - x_m\|^2 \leq 2\|x_n\|^2 + 2\|x_m\|^2 - 4\delta^2 < 2\delta^2 + \frac{\varepsilon^2}{2} + 2\delta^2 + \frac{\varepsilon^2}{2} - 4\delta^2 = \varepsilon^2.$$

Dakle, vrijedi

$$n, m \geq n_0 \qquad \Longrightarrow \qquad \|x_n - x_m\| < \varepsilon,$$

odnosno, dokazali smo da je $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyjev niz. Prostor X je potpun pa zaključujemo da je taj niz konvergentan. Stavimo

$$x_0 = \lim_{n\to\infty} x_n.$$

Budući da je skup S zatvoren i $x_n \in S$ slijedi da je i $x_0 \in S$. Napokon, norma je neprekidna funkcija sa X u $\mathbb{R}$ pa dobivamo

$$\|x_0\| = \lim_{n\to\infty} \|x_n\| = \delta.$$

Time je dokazana i egzistencija u teoremu 1.21.

U Banachovom prostoru ne vrijedi teorem 1.21:

Zadatak 1.13. *Neka je* $C([0,1])$ *Banachov prostor svih neprekidnih funkcija* $f : [0,1] \to \mathbb{C}$ *s maksimum normom*

$$\|f\| = \max\{|f(t)|;\ t \in [0,1]\}, \qquad f \in C([0,1]).$$

Neka je

$$S = \left\{ f \in C([0,1]);\ \int_0^{\frac{1}{2}} f(t)dt - \int_{\frac{1}{2}}^1 f(t)dt = 1 \right\}.$$

Dokažite da je S *neprazan konveksan zatvoren podskup od* $C([0,1])$ *i da ne postoji* $f_0 \in S$ *takva da je* $\|f_0\| \le \|f\|\ \forall f \in S$.

Zadatak 1.14. *Neka je* $L_1([0,1])$ *Banachov prostor svih (klasa ekvivalencije) izmjerivih funkcija* $f : [0,1] \to \mathbb{C}$ *takvih da je funkcija* $t \mapsto |f(t)|$ *integrabilna u Lebesgueovom smislu s normom*

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|dt, \qquad f \in L_1([0,1]).$$

($L_1([0,1])$ *se može promatrati i kao popunjenje normiranog prostora* $C([0,1])$ *u odnosu na normu* $\|\cdot\|_1$*.) Neka je*

$$S = \left\{ f \in L_1([0,1]);\ \int_0^1 f(t)dt = 1 \right\}.$$

Dokažite da je S *neprazan zatvoren konveksan podskup od* $L_1([0,1])$ *i da je skup*

$$\{f \in S;\ \|f\|_1 \le \|g\|_1\ \forall g \in S\}$$

beskonačan. (U slučaju da se $L_1([0,1])$ *promatra kao popunjenje od* $C([0,1])$ *u odnosu na normu* $\|\cdot\|_1$*, onda se skup* S *definira kao zatvarač skupa*

$$\left\{ f \in C([0,1]);\ \int_0^1 f(t)dt = 1 \right\}$$

u prostoru $L_1([0,1])$*.)*

Za vektore x, y iz unitarnog prostora X kažemo da su **ortogonalni** ili **okomiti** jedan na drugoga i pišemo $x \perp y$ ako je $(x|y) = 0$. Za **vektor** $x \in X$ kažemo da je **ortogonalan na skup** $S \subseteq X$ i pišemo $x \perp S$ ako je $x \perp y$ za svaki $y \in Y$. Za **podskupove** S i T unitarnog prostora X kažemo da su **ortogonalni** i pišemo $S \perp T$ ako je $x \perp T$ za svaki $x \in S$. Za svaki podskup S unitarnog prostora X lako se vidi da je

$$S^\perp = \{x \in X;\ x \perp S\}$$

zatvoren potprostor od X. Nadalje,

$$S^\perp = [S]^\perp = (\mathrm{Cl}\,[S])^\perp \qquad \text{i} \qquad S^\perp \cap \mathrm{Cl}\,[S] = \{0\}.$$

Teorem 1.22. (**Teorem o ortogonalnoj projekciji**) *Neka je* X *Hilbertov prostor i* Y *njegov zatvoren potprostor. Tada je* $X = Y \dotplus Y^\perp$*. Nadalje, za bilo koji podskup* S *prostora* X *vrijedi* $Cl[S] = S^{\perp\perp} = \left(S^\perp\right)^\perp$.

Dokaz: Prije svega, očito je $Y \cap Y^\perp = \{0\}$. Doista, proizvoljan vektor $x \in Y \cap Y^\perp$ okomit je na samog sebe, tj. $(x|x) = 0$, dakle, $x = 0$. To pokazuje da je suma potprostora Y i $Y^\perp$ direktna.

Dokažimo sada da je $Y + Y^\perp = X$. Neka je $x \in X$ proizvoljan. Treba dokazati da postoje $y \in Y$ i $z \in Y^\perp$ takvi da je $x = y + z$. Budući da je Y zatvoren potprostor, skup $x + Y = \{x + y;\ y \in Y\}$

je zatvoren i konveksan. Prema teoremu 1.21. u skupu $x+Y$ postoji jedinstven vektor z najmanje norme. Dakle, vrijedi

$$\|z\| \le \|z-y\| \qquad \forall y \in Y. \tag{1.7}$$

Neka je u proizvoljan jedinični vektor iz Y. Tada je $(z|u)u \in Y$ pa prema (1.7) vrijedi

$$\|z\|^2 \le \|z-(z|u)u\|^2 = (z-(z|u)u|z-(z|u)u) =$$
$$= \|z\|^2 - (z|u)(u|z) - \overline{(z|u)}(z|u) + |(z|u)|^2 = \|z\|^2 - |(z|u)|^2.$$

Odatle slijedi $(z|u)=0$. Kako je u bio proizvoljan jedinični vektor iz Y, zaključujemo da je $z \in Y^\perp$. Stavimo sada $y = x-z$. Tada je naravno $x = y+z$, a kako je $z \in x+Y$, vidimo da je $y \in Y$. Time je dokazano da je $X = Y + Y^\perp$, dakle, $X = Y \dot{+} Y^\perp$.

Zadatak 1.15. *Dokažite drugu tvrdnju teorema 1.22: $Cl[S] = S^{\perp\perp}$.*

Ako su potprostori unitarnog prostora međusobno ortogonalni oni tvore direktnu sumu. Tada je uobičajeno da se umjesto znaka $\dot{+}$ upotrebljava znak $\oplus$. Dakle, u prethodnom teoremu imamo $X = Y \oplus Y^\perp$. Potprostor $Y^\perp$ zove se **ortogonalni komplement** potprostora Y u unitarnom prostoru. Za potprostor $Y^\perp$ upotrebljava se i oznaka $X \ominus Y$. Općenitije, ako su $Y \le Z \le X$ i ako je potprostor Y zatvoren u X tada je $Y^\perp \cap Z = Z \ominus Y$.

Ako su $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$ međusobno ortogonalni vektori različiti od nule, lako se vidi da su oni linearno nezavisni. Skup vektora S zove se **ortonormiran** ako su svi vektori $x \in S$ jedinični (tj. $\|x\| = 1$) i međusobno ortogonalni.

Teorem 1.23. (**Gram−Schmidtov postupak ortonormiranja**) *Neka je X unitaran prostor i neka je $x_1, x_2, x_3, \ldots$ konačan ili beskonačan linearno nezavisan niz vektora prostora X.*

(*a*) *Postoji ortonormiran niz $e_1, e_2, e_3, \ldots$ u X sa svojstvom da je*

$$[\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}] = [\{e_1, e_2, \ldots, e_k\}] \qquad \forall k.$$

(*b*) *Uz dodatni uvjet $(e_k|x_k) > 0 \ \forall k$ ortonormiran niz $e_1, e_2, e_3, \ldots$ iz tvrdnje (a) je jedinstven.*

Iz teorema 1.23. odmah slijedi da svaki konačnodimenzionalan unitaran prostor X ima ortonormiranu bazu. Štoviše, svaki ortonormiran skup u X može se dopuniti do ortonormirane baze od X.

Ako je $e = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ ortonormirana baza od X onda je $(e_i|e_j) = \delta_{ij}$, pa za svaki $x \in X$ imamo:

$$x = \sum_{j=1}^{n} (x|e_j)e_j.$$

Ako je $f = \{f_1, f_2, \ldots, f_m\}$ ortonormirana baza drugog unitarnog prostora Y i $A \in L(X,Y)$ onda je element matrice $A(f,e)$ tog operatora na presjecištu $i-$tog retka i $j-$tog stupca jednak $(Ae_j|f_i)$:

$$Ae_j = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} f_i, \qquad A(f,e) = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn} \end{bmatrix}, \qquad \alpha_{ij} = (Ae_j|f_i).$$

U slučaju beskonačnodimenzionalnih unitarnih prostora pojam ortonormirane baze definira se drugačije, tako da se dozvoli prikaz vektora ne samo kao linearne kombinacije nego i kao sume konvergentnog reda. Za beskonačnodimenzionalan unitaran prostor X ortonormiran podskup B zove se **ortonormirana baza** ako B razapinje gust potprostor od X : $\mathrm{Cl}([B]) = X$. Primijetimo da općenito ortonormirana baza B unitarnog prostora X ne mora biti baza vektorskog prostora X; naime, ne mora biti $[B] = X$, nego samo $\mathrm{Cl}([B]) = X$.

Teorem 1.24. *Neka je S ortonormiran podskup unitarnog prostora X.*

(a) *Za svaki $x \in X$ skup $\{e \in S;\ (x|e) \neq 0\}$ je konačan ili prebrojiv.*

(b) *Za svaki $x \in X$ vrijedi* **Besselova nejednakost***:*

$$\sum_{e \in S} |(x|e)|^2 \leq \|x\|^2.$$

(c) *Vektor $x \in X$ je u zatvaraču $Cl([S])$ potprostora razapetog skupom S ako i samo ako vrijedi* **Parsevalova jednakost***:*

$$\sum_{e \in S} |(x|e)|^2 = \|x\|^2.$$

(d) *Za svaki $x \in Cl([S])$ vrijedi*

$$x = \sum_{e \in S} (x|e)e.$$

(e) *Za $x, y \in Cl([S])$ vrijedi*

$$(x|y) = \sum_{e \in S} (x|e)(e|y);$$

pri tome je red s desne strane apsolutno konvergentan (a jednakost se također zove Parsevalova).

Dokaz: Dokazat ćemo najprije sljedeću lemu:

Lema 1.8. *Neka je F konačan ortonormiran podskup unitarnog prostora X i neka je $x \in X$. Stavimo*

$$y = \sum_{e \in F} (x|e)e.$$

(a) *Vrijedi*

$$\|x - y\| < \|x - z\| \qquad \forall z \in [F] \setminus \{y\}.$$

Drugim riječima, vektor y je jedinstvena najbolja aproksimacija vektora x vektorima iz potprostora $[F]$.

(b) *Vrijedi*

$$\sum_{e \in F} |(x|e)|^2 \leq \|x\|^2,$$

pri čemu vrijedi znak jednakosti ako i samo ako je $x \in [F]$.

Dokaz leme 1.8: Stavimo $F = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$. To je ortonormirana baza prostora $[F]$. Imamo

$$y = \sum_{k=1}^{n} (x|e_k)e_k.$$

Svaki vektor $z \in [F]$ može se napisati u obliku

$$z = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k.$$

Koristeći linearnost skalarnog produkta u prvom i antilinearnost u drugom argumentu dobivamo:

$$0 \leq \|x - z\|^2 = \left(x - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k \middle| x - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k \right) =$$

$$= (x|x) - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k (e_k|x) - \sum_{k=1}^{n} \overline{\alpha_k}(x|e_k) + \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k|^2 =$$

$$= \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |(x|e_k)|^2 + \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k - (x|e_k)|^2.$$

Ta je vrijednost striktno najmanja točno onda kad je posljednja suma jednaka nuli, a to znači $\alpha_k = (x|e_k)$ za svaki k, odnosno $z = y$. Time je dokazana tvrdnja (a). No slijedi i nejednakost u tvrdnji (b), jer za $z = y$ imamo:

$$0 \leq \|x - y\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |(x|e_k)|^2.$$

Znak jednakosti vrijedi ako i samo ako je $x = y$, odnosno, ako i samo ako je $x \in [F]$. Time je lema 1.8. u potpunosti dokazana.

Dokažimo sada tvrdnju (a) teorema 1.24. Za svaki prirodan broj n definiramo podskup S_n od S :

$$S_n = \left\{ e \in S;\ |(x|e)| \geq \frac{1}{n} \right\}.$$

Neka je F konačan podskup od S_n. Prema tvrdnji (b) leme 1.8. imamo:

$$\|x\|^2 \geq \sum_{e \in F} |(x|e)|^2 \geq \frac{|F|}{n^2}.$$

Dakle, broj elemenata $|F|$ bilo kojeg konačnog podskupa F skupa S_n ne može biti veći od $n^2\|x\|^2$. Slijedi da je svaki od skupova S_n konačan. Sada tvrdnja (a) slijedi iz evidentne skupovne jednakosti:

$$\{e \in S;\ (x|e) \neq 0\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} S_n.$$

Iz leme 1.8. i iz tvrdnje (a) slijedi tvrdnja (b). Doista, neka je $S_0 = \{e \in S;\ (x|e) \neq 0\}$. Ako S_0 nije konačan skup, prema tvrdnji (a) skup S_0 je prebrojivo beskonačan, pa mu elemente možemo numerirati prirodnim brojevima: $S_0 = \{e_n;\ n \in \mathbb{N}\}$. Tada je

$$\sum_{e \in S} |(x|e)|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |(x|e_n)|^2.$$

Kad bi to bilo veće od $\|x\|^2$, onda bismo imali

$$\sum_{k=1}^{n} |(x|e_k)|^2 > \|x\|^2 \qquad \text{za neki prirodan broj } n.$$

No to je nemoguće zbog tvrdnje (b) leme 1.8. Time je dokazana tvrdnja (b).

Pretpostavimo sada da je $x \in \mathrm{Cl}([S])$. Neka je $\varepsilon > 0$. Tada postoji $z \in [S]$ takav da je $\|x - z\| < \varepsilon$. Vektor z je linearna kombinacija vektora iz S, dakle postoji konačan skup $F \subseteq S$ takav da je $z \in [F]$. Prema tvrdnji (a) leme 1.8. slijedi:

$$\left\| x - \sum_{e \in F} (x|e)e \right\|^2 < \varepsilon^2.$$

Prema dokazu leme 1.8. lijeva strana ove nejednakosti jednaka je $\|x\|^2 - \sum_{e \in F} |(x|e)|^2$. Prema tome,

$$\forall \varepsilon > 0 \text{ postoji konačan skup } F \subseteq S \text{ takav da je} \qquad \|x\|^2 - \sum_{e \in F} |(x|e)|^2 < \varepsilon^2.$$

Kako je očito

$$\|x\|^2 - \sum_{e \in S} |(x|e)|^2 \leq \|x\|^2 - \sum_{e \in F} |(x|e)|^2,$$

zaključujemo da vrijedi

$$0 \leq \|x\|^2 - \sum_{e \in S} |(x|e)|^2 < \varepsilon^2 \qquad \forall \varepsilon > 0,$$

pa slijedi Parsevalova jednakost. Dakle, dokazali smo da Parsevalova jednakost vrijedi za svaki $x \in \mathrm{Cl}([S])$.

Pretpostavimo sada da za neki $x \in X$ vrijedi Parsevalova jednakost. Prema dokazanoj tvrdnji (a) možemo pisati

$$S_0 = \{e \in S;\ (x|e) \neq 0\} = \{e_n;\ n \in \mathbb{N}\}. \tag{1.8}$$

Za $n \in \mathbb{N}$ stavimo

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} (x|e_k)e_k.$$

Tada imamo prema dokazu leme 1.8.

$$\|x - x_n\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |(x|e_k)|^2.$$

Iz Parsevalove jednakosti slijedi da desna strana teži k nuli kada n teži u ∞. To pokazuje da je $x = \lim x_n$ i posebno $x \in \mathrm{Cl}([S])$. Time je dokazana tvrdnja (c), a slijedi i tvrdnja (d) jer za $x \in \mathrm{Cl}([S])$ imamo redom:

$$x = \lim_{n \to \infty} x_n = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} (x|e_k)e_k = \sum_{n=1}^{\infty} (x|e_n)e_n = \sum_{e \in S} (x|e)e.$$

Dokažimo još tvrdnju (e). Neka su $x, y \in \mathrm{Cl}([S])$. Imamo

$$2|(x|e)(e|y)| \leq |(x|e)|^2 + |(y|e)|^2,$$

pa zbog konvergencije redova u Besselovim nejednakostima za vektore x i y zaključujemo da red $\sum (x|e)(e|y)$ apsolutno konvergira. Nadalje, uz oznaku (1.8) imamo zbog tvrdnje (d) i zbog neprekidnosti skalarnog produkta:

$$(x|y) = \left(\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} (x|e_k)e_k \middle| y \right) = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} (x|e_k)(e_k|y) = \sum_{n=1}^{\infty} (x|e_n)(e_n|y) = \sum_{e \in S} (x|e)(e|y).$$

Time je teorem 1.24. u potpunosti dokazan.

Teorem 1.25. *U svakom Hilbertovom prostoru postoji ortonormirana baza. Svaki maksimalan ortonormiran podskup Hilbertovog prostora X je ortonormirana baza od X.*

Dokaz: Neka je $\mathcal{O}$ skup svih ortonormiranih skupova u Hilbertovom prostoru X. Skup $\mathcal{O}$ je parcijalno uređen s inkluzijom kao relacijom uređaja. Dokažimo da $\mathcal{O}$ zadovoljava uvjet Zornove leme. Neka je $\mathcal{L}$ lanac u $\mathcal{O}$. Stavimo

$$A = \bigcup_{B \in \mathcal{L}} B.$$

Skup A je ortonormiran. Naime, očito je svaki vektor iz A jedinični. Osim toga, ako su x i y međusobno različiti vektori iz A, onda zbog činjenice da je $\mathcal{L}$ lanac postoji $B \in \mathcal{L}$ takav da su $x, y \in B$; kako je skup B ortonormiran, slijedi $(x|y) = 0$. Dakle, $A \in \mathcal{O}$. Očito je $B \subseteq A$ $\forall B \in \mathcal{L}$, što znači da je A gornja ograda lanca $\mathcal{L}$.

Sada po Zornovoj lemi slijedi da postoji bar jedan maksimalan ortonormiran podskup od X. Neka je sada B bilo koji maksimalan ortonormiran podskup od X. Pretpostavimo da B nije ortonormirana baza od X, tj. da je $\mathrm{Cl}([B]) \neq X$. Kako je po teoremu 1.22. $\mathrm{Cl}([B]) = B^{\perp\perp}$, slijedi $B^{\perp} \neq \{0\}$. Izaberimo jedinični vektor $e \in B^{\perp}$. Tada je skup $B \cup \{e\}$ ortonormiran i sadrži B kao pravi podskup, što je nemoguće jer smo pretpostavili da je B maksimalan u skupu $\mathcal{O}$ svih ortonormiranih podskupova od X. Ova kontradikcija pokazuje da je pretpostavka da B nije ortonormirana baza od X bila pogrešna, pa zaključujemo da je B ortonormirana baza od X.

U separabilnom beskonačnodimenzionalnom unitarnom prostoru svaka je ortonormirana baza prebrojiva. To slijedi iz sljedeće propozicije:

Propozicija 1.2. *Svaki ortonormiran skup u separabilnom unitarnom prostoru X je konačan ili prebrojiv.*

Dokaz: Neka je K ortonormiran skup u X i neka je $S = \{x_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ prebrojiv gust podskup od X. Za $e \in K$ neka je $K_e = K(e, \frac{\sqrt{2}}{2})$. Definiramo prelikavanje $\varphi : K \to \mathbb{N}$ ovako:

$$\varphi(e) = \min\{n \in \mathbb{N};\ x_n \in K_e\}.$$

Za međusobno različite $e, f \in K$ imamo $(e|f) = (f|e) = 0$ i $\|e\| = \|f\| = 1$ pa slijedi

$$\|e - f\|^2 = (e - f|e - f) = \|e\|^2 - (e|f) - (f|e) + \|f\|^2 = 2 \qquad \Longrightarrow \qquad \|e - f\| = \sqrt{2}.$$

Zbog toga je $K_e \cap K_f = \emptyset$. Dakle, preslikavanje $\varphi : K \to \mathbb{N}$ je injekcija pa zaključujemo da je skup K konačan ili prebrojiv.

Ako je X unitaran prostor i $y \in X$ onda je sa $x \mapsto (x|y)$ zadan linearan funkcional na prostoru X koji je zbog CSB$-$nejednakosti neprekidan, tj. element od X'. Sljedeći teorem tvrdi da se u slučaju Hilbertovog prostora X na taj način dobiju svi neprekidni linearni funkcionali na X. Precizno, vrijedi sljedeći tzv. **teorem o reprezentaciji neprekidnog linearnog funkcionala**:

Teorem 1.26. (**F. Riesz**) *Neka je X Hilbertov prostor. Za svaki $f \in X'$ postoji jedinstven $y \in X$ takav da je $f(x) = (x|y)$ za svaki $x \in X$. Označimo li taj vektor y sa $\varphi(f)$, dobivamo preslikavanje $\varphi : X' \to X$ koje ima sljedeća svojstva:*

(*a*) *φ je bijekcija sa X' na X.*

(*b*) *Za svaki $f \in X'$ je $\|\varphi(f)\| = \|f\|$.*

(*c*) *Za $f, g \in X'$ i $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ vrijedi $\varphi(\lambda f + \mu g) = \overline{\lambda}\varphi(f) + \overline{\mu}\varphi(g)$.*

Drugim riječima, φ je antilinearna izometrija sa X' na X.

Dokaz: Neka je $f \in X'$. Ako je $f = 0$ očito za $y = 0$ vrijedi $f(x) = (x|y)\ \forall x \in X$. Pretpostavimo da je $f \neq 0$. Jezgra $N(f) = \{x \in X;\ f(x) = 0\}$ je zbog neprekidnosti funkcionala f zatvoren potprostor od X. Prema teoremu 1.22. imamo $X = N(f) \oplus N(f)^\perp$. Potprostor $N(f)^\perp$ je jednodimenzionalan. Doista, ako su x i y vektori iz $N(f)^\perp$ različiti od 0, onda imamo redom:

$$f(f(y)x - f(x)y) = 0 \quad \Longrightarrow \quad f(y)x - f(x)y \in N(f) \cap N(f)^\perp = \{0\} \quad \Longrightarrow \quad f(y)x = f(x)y.$$

Nadalje, iz $N(f) \cap N(f)^\perp = \{0\}$ slijedi $f(x) \neq 0$ i $f(y) \neq 0$. To pokazuje da su vektori x i y proporcionalni.

Neka je e jedinični vektor u $N(f)^\perp$. Neka je x bilo koji vektor iz X. Stavimo $y = \overline{f(e)}e$. Kako je

$$X = N(f) \dotplus N(f)^\perp \qquad \text{i} \qquad N(f)^\perp = \{\lambda e;\ \lambda \in \mathbb{C}\},$$

vrijedi $x = z + \lambda e$ za neke $z \in N(f)$ i $\lambda \in \mathbb{C}$. Sada je

$$f(x) = f(z + \lambda e) = f(z) + \lambda f(e) = \lambda f(e),$$

jer je $z \in N(f)$. Nadalje,

$$(x|y) = (z + \lambda e|\overline{f(e)}e) = f(e)(z|e) + \lambda f(e)(e|e) = \lambda f(e),$$

jer je vektor e jedinični i okomit na $N(f)$. Dakle, dokazali smo da vektor y ima traženo svojstvo $f(x) = (x|y)\ \forall x \in X$.

Dokažimo sada da je takav vektor y jedinstven. Pretpostavimo da i vektor y' ima svojstvo $f(x) = (x|y')\ \forall x \in X$. Tada je $(x|y - y') = 0\ \forall x \in X$, pa slijedi $y - y' = 0$, tj. $y' = y$.

Dakle, preslikavanje $\varphi : X' \to X$ iz iskaza teorema je dobro definirano. Iz definicije je jasno da je φ injekcija. To je i surjekcija, jer je za bilo koji $y \in X$ sa $f(x) = (x|y)$ zadan neprekidan linearan funkcional f na prostoru X i vrijedi $\varphi(f) = y$.

Za $f \in X'$ i za $y = \varphi(f)$ zbog CSB$-$nejednakosti imamo $|f(x)| = |(x|y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|$ pa slijedi $\|f\| \leq \|y\|$. Nadalje, imamo

$$\|f\| \cdot \|y\| \geq |f(y)| = |(y|y)| = \|y\|^2,$$

pa slijedi i obrnuta nejednakost $\|f\| \geq \|y\|$. Dakle, $\|f\| = \|y\| = \|\varphi(f)\|$, odnosno, φ je izometrija.

Napokon, ako su $f, g \in X'$ i $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, za svaki $x \in X$ je

$$(x|\overline{\lambda}\varphi(f) + \overline{\mu}\varphi(g)) = \lambda(x|\varphi(f)) + \mu(x|\varphi(g)) = \lambda f(x) + \mu g(x) = (\lambda f + \mu g)(x) = (x|\varphi(\lambda f + \mu g)).$$

Budući da je vektor $x \in X$ bio proizvoljan, slijedi $\varphi(\lambda f + \mu g) = \overline{\lambda}\varphi(f) + \overline{\mu}\varphi(g)$ i time je teorem 1.26. dokazan.

Koristeći tvrdnju (d) teorema 1.10. i korolar Hahn$-$Banachovog teorema 1.15., iz teorema 1.26. neposredno slijedi:

Korolar 1.2. *Ako su X i Y Hilbertovi prostori i $A \in B(X, Y)$ onda je*

$$\|A\| = \sup\{|(Ax|y)|;\ x \in X,\ y \in Y,\ \|x\| \leq 1,\ \|y\| \leq 1\}.$$

Teorem 1.27. *Neka su X i Y Hilbertovi prostori. Za svaki $A \in B(X, Y)$ postoji jedinstven $A^* \in B(Y, X)$ takav da vrijedi*

$$(Ax|y) = (x|A^*y) \qquad \forall x \in X,\ \ \forall y \in Y.$$

Preslikavanje $A \mapsto A^*$ ima sljedeća svojstva:

(*a*) *$A^{**} = A$ za svaki $A \in B(X,Y)$.*

(*b*) *$A \mapsto A^*$ je antilinearna izometrija sa $B(X,Y)$ na $B(Y,X)$.*

(*c*) *Za $A \in B(X,Y)$ i $B \in B(Y,Z)$ je $(BA)^* = A^*B^*$.*

Zadatak 1.16. *Dokažite teorem 1.27.*

Za operator A^* kažemo da je **adjungiran** operatoru A. Jezgre i slike dvaju operatora A i A^* su u uskoj vezi:

Propozicija 1.3. *Neka su X i Y Hilbertovi prostori i $A \in B(X,Y)$. Tada vrijedi:*

$$N(A) = R(A^*)^\perp, \qquad Cl(R(A)) = N(A^*)^\perp, \qquad N(A^*) = R(A)^\perp, \qquad Cl(R(A^*)) = N(A)^\perp.$$

Zadatak 1.17. *Dokažite propoziciju 1.3.*

Uputa: Pomoću druge tvrdnje u teoremu 1.22. i pomoću zamjene uloga operatora A i A^* dokažite najprije da su sve četiri jednakosti međusobno ekvivalentne, a zatim dokažite prvu od njih.

Za Hilbertov prostor X operator $A \in B(X) = B(X,X)$ zove se:

- **hermitski**, ako vrijedi $A^* = A$;
- **antihermitski**, ako vrijedi $A^* = -A$;
- **unitaran**, ako vrijedi $A^*A = AA^* = I$; tj. A je invertibilan u $B(X)$ i $A^{-1} = A^*$;
- **normalan**, ako vrijedi $A^*A = AA^*$; sve tri prethodne vrste (i hermitski i antihermitski i unitarni operatori) su normalni operatori.

Propozicija 1.4. *Neka je X Hilbertov prostor i $A \in B(X)$.*

(*a*) *Ako je operator A hermitski i $(Ax|x) = 0 \ \forall x \in X$ onda je $A = 0$.*

(*b*) *Operator A je normalan ako i samo ako je $\|Ax\| = \|A^*x\| \ \forall x \in X$.*

(*c*) *Ako je operator A normalan, onda je $N(A^*) = N(A)$.*

(*d*) *Ako je operator A normalan i ako su $x \in X$ i $\alpha \in \mathbb{C}$ takvi da je $Ax = \alpha x$, onda je $A^*x = \overline{\alpha}x$.*

Zadatak 1.18. *Dokažite propoziciju 1.4.*

Uputa: (*a*) Iz $(A(x+y)|x+y) = 0$ izvedite da je $\mathrm{Re}\,(Ax|y) = 0$ za bilo koje $x, y \in X$. Zatim zamjenom y sa iy zaključite da je i $\mathrm{Im}\,(Ax|y) = 0$ za bilo koje $x, y \in X$.
(*b*) Operator $AA^* - A^*A$ je hermitski.
Tvrdnju (*c*) izvedite iz (*b*).
(*d*) Uočite da je $A - \alpha I$ normalan operator.

Poglavlje 2

Kompaktni operatori

2.1 Kompaktni operatori na normiranim prostorima

Neka je X normiran prostor. Primijetimo da je tada X i metrički prostor uz metriku zadanu sa $d(x,y) = \|x-y\|$. Neka je S podskup prostora X. **Otvoren pokrivač** od S je familija $\{U_\alpha;\ \alpha \in \mathcal{A}\}$ otvorenih podskupova $U_\alpha \subseteq X$, takvih da je

$$S \subseteq \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} U_\alpha.$$

Skup S zove se **kompaktan**, ako za svaki otvoren pokrivač $\{U_\alpha;\ \alpha \in \mathcal{A}\}$ od S postoji konačno mnogo indeksa $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathcal{A}$ takvih da je $\{U_{\alpha_1}, U_{\alpha_2}, \ldots, U_{\alpha_n}\}$ pokrivač od S :

$$S \subseteq U_{\alpha_1} \cup U_{\alpha_2} \cup \cdots \cup U_{\alpha_n}.$$

Drugim riječima, skup S je kompaktan ako svaki njegov otvoren pokrivač ima konačan potpokrivač. Iz teorije metričkih prostora znamo da je S kompaktan ako i samo ako svaki niz u S ima konvergentan podniz čiji je limes u S.

Skup $S \subseteq X$ zove se **relativno kompaktan** ako svaki niz u S ima konvergentan podniz (bez zahtjeva da je limes tog podniza u S). Dakle, skup S je relativno kompaktan ako i samo ako je njegov zatvarač $\mathrm{Cl}(S)$ kompaktan.

Zadatak 2.1. *Dokažite da je podskup S Banachovog prostora X relativno kompaktan ako i samo ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji konačna $\varepsilon-$mreža skupa S. Pri tome je* **konačna $\varepsilon-$mreža** *skup $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subseteq S$ takav da je*

$$S \subseteq K(x_1, \varepsilon) \cup K(x_2, \varepsilon) \cup \cdots \cup K(x_n, \varepsilon).$$

Iz zadatka 2.1. slijedi da je svaki relativno kompaktan skup ograničen.

Ako je normiran prostor X konačnodimenzionalan, njegov je podskup S relativno kompaktan ako i samo ako je ograničen, a kompaktan ako i samo ako je ograničen i zatvoren. Posebno svaka **zatvorena kugla**

$$\overline{K}(x_0, r) = \{x \in X;\ \|x - x_0\| \leq r\}$$

je kompaktan podskup od X. Isto vrijedi i za svaku **sferu**

$$S(x_o, r) = \{x \in X;\ \|x - x_0\| = r\}.$$

Otvorene kugle u konačnodimenzionalnom normiranom prostoru su relativno kompaktni skupovi. Sljedeći teorem govori da to ne vrijedi u beskonačnodimenzionalnim prostorima.

Teorem 2.1. *Neka je X beskonačnodimenzionalan normiran prostor i neka su $x_0 \in X$ i $r > 0$. Tada niti zatvorena kugla $\overline{K}(x_0, r)$ niti otvorena kugla $K(x_0, r)$ niti sfera $S(x_0, r)$ nisu relativno kompaktni skupovi.*

Za dokaz teorema 2.1. treba nam sljedeća lema:

Lema 2.1. (**F. Riesz**) *Neka je X normiran prostor, $Y \neq X$ njegov zatvoren potprostor i $\varepsilon > 0$. Postoji vektor $x(\varepsilon) \in X$ takav da je $\|x(\varepsilon)\| = 1$ i $d(x(\varepsilon), Y) \geq 1 - \varepsilon$. Ako je potprostor Y konačnodimenzionalan, postoji vektor $x_0 \in X$ takav da je $\|x_0\| = 1$ i $d(x_0, Y) = 1$.*

Pri tome, za podskup S normiranog prostora X i za vektor $x \in X$ sa $d(x, S)$ označavamo udaljenost vektora x od skupa S :

$$d(x, S) = \inf\{\|x - y\|;\ y \in S\}.$$

Lako se vidi da je $d(x, S) = 0$ ako i samo ako je $x \in \mathrm{Cl}(S)$. Ako je prostor X unitaran, Y njegov potprostor i x_0 jedinični vektor okomit na potprostor Y, onda za svaki $y \in Y$ imamo:

$$\|x_0 - y\|^2 = \|x_0\|^2 + \|y\|^2 = 1 + \|y\|^2 \geq 1,$$

pa zbog $0 \in Y$ slijedi $d(x_0, Y) = 1$. Zbog toga, iako u normiranom prostoru nije definiran pojam okomitosti, vektor $x(\varepsilon)$ iz leme 2.1. možemo shvaćati kao vektor koji je ″približno okomit″ na potprostor Y.

Dokaz leme 2.1: Neka je $\varepsilon > 0$. Možemo pretpostavljati da je $\varepsilon < 1$. Označimo sa δ pozitivan broj $\dfrac{\varepsilon}{1-\varepsilon}$. Neka je z bilo koji vektor iz X koji nije u potprostoru Y. Stavimo $d = d(z, Y)$. Primijetimo da je $d > 0$ jer je potprostor Y zatvoren i $z \notin Y$. Kako je $d + d\delta > d$, postoji $y_0 \in Y$ takav da je $d \leq \|z - y_0\| \leq d + d\delta$. Neka je $x(\varepsilon)$ jedinični vektor u smjeru $z - y_0$:

$$x(\varepsilon) = \frac{1}{\|z - y_0\|}(z - y_0).$$

Tada za svaki $y \in Y$ imamo redom:

$$\|x(\varepsilon) - y\| = \frac{1}{\|z - y_0\|} \cdot \|z - (y_0 + \|z - y_0\|y)\| \geq \frac{d}{\|z - y_0\|} \geq \frac{d}{d + d\delta} = \frac{1}{1 + \delta} = 1 - \varepsilon.$$

Kako to vrijedi za svaki vektor $y \in Y$ slijedi $d(x(\varepsilon), Y) \geq 1 - \varepsilon$.

Pretpostavimo sada da je potprostor Y konačnodimenzionalan. Za izabrani vektor $z \in X \setminus Y$ i potprostor $Z = [Y \cup \{z\}] = Y \dotplus [\{z\}]$ je konačnodimenzionalan. Primijenimo sada dokazano na prostor Z, njegov potprostor Y i $\varepsilon = \frac{1}{n}$ $(n \in \mathbb{N})$. Zaključujemo da za svaki prirodan broj n postoji jedinični vektor x_n u konačnodimenzionalnom prostoru Z takav da je $d(x_n, Y) \geq 1 - \frac{1}{n}$. No zatvorena jedinična kugla u konačnodimenzionalnom prostoru Z je kompaktan skup, pa postoji konvergentan podniz (x_{n_k}) niza (x_n). Neka je $x_0 = \lim_{k\to\infty} x_{n_k}$. Tada je vektor x_0 jedinični. Nadalje, za svaki $k \in \mathbb{N}$ i za svaki vektor $y \in Y$ imamo

$$\|x_{n_k} - y\| \geq 1 - \frac{1}{n_k}.$$

Pustiši da k teži u ∞ odatle dobivamo $\|x_0 - y\| \geq 1$. Stoga vrijedi $d(x,Y) \geq 1$. S druge strane, kako je vektor x_0 jedinični i $0 \in Y$ dobivamo i obrnutu nejednakost:

$$d(x_0, Y) \leq \|x_0 - 0\| = \|x_0\| = 1.$$

Dakle, $d(x_0, Y) = 1$.

Dokaz teorema 2.1: Izaberimo jedinični vektor $e_1 \in X$ i stavimo $Y_1 = [\{e_1\}]$. Prema lemi 2.1. postoji jedinični vektor $e_2 \in X$ takav da je $d(e_2, Y_1) = 1$. Kako je $e_1 \in Y_2$, imamo $\|e_2 - e_1\| \geq 1$. Primijenimo li sada lemu 2.1. na potprostor $Y_2 = [\{e_1, e_2\}]$ zaključujemo da postoji jedinični vektor $e_3 \in X$ takav da je $d(e_3, Y_2) = 1$. Kako su e_1 i e_2 vektori u potprostoru Y_2, slijedi $\|e_3 - e_1\| \geq 1$ i $\|e_3 - e_2\| \geq 1$. Nastavimo na isti način i stavimo $Y_3 = [\{e_1, e_2, e_3\}]$. Primjenom leme 2.1. na potprostor Y_3 dolazimo do jediničnog vektora $e_4 \in X$ takvog da je $d(e_4, Y_3) = 1$, dakle $\|e_4 - e_1\| \geq 1$, $\|e_4 - e_2\| \geq 1$ i $\|e_4 - e_3\| \geq 1$. Korak po korak na taj način dolazimo do niza (e_n) jediničnih vektora takvih da je $\|e_m - e_n\| \geq 1$ za $m \neq n$. Taj niz očito nema konvergentan podniz, pa zaključujemo da jedinična sfera $S(0,1)$ sa središtem u nuli nije relativno kompaktan skup. Odatle evidentno slijedi da ni sfera $S(0,r) = rS(0,1) = \{rx;\, x \in S(0,1)\}$ za bilo koji $r > 0$ nije relativno kompaktan skup, pa niti sfera s nekim drugim središtem $S(x_0, r) = x_0 + S(0,r) = \{x_0 + x;\, x \in S(0,r)\}$. Kako svaka kugla (otvorena ili zatvorena) sadrži sfere kao podskupove, ni kugle nisu relativno kompaktni skupovi.

Iz teorema 2.1. slijedi da je dobro poznata karakterizacija kompaktnosti za podskupove euklidskog prostora (kompaktnost = ograničenost + zatvorenost) zapravo karakterizacija konačnodimenzionalnosti:

Korolar 2.1. (**F. Riesz**) *Normiran prostor je konačnodimenzionalan ako i samo ako je svaki njegov ograničen i zatvoren podskup kompaktan.*

Dokaz: Neka normiran prostor X ima svojstvo da je svaki njegov ograničen i zatvoren podskup kompaktan. Tada X ne može biti beskonačnodimenzionalan, jer bi u protivnom zatvorena kugla $\overline{K}(0,1)$ bila zatvoren i ograničen podskup koji nije relativno kompaktan, dakle ni kompaktan.

Neka su X i Y normirani prostori i $A : X \to Y$ linearan operator. A se zove **kompaktan operator** ako je $A\overline{K}(0,1) = \{Ax;\, x \in X, \|x\| \leq 1\}$ relativno kompaktan podskup od Y. Zbog nizovne karakterizacije relativne kompaktnosti slijedi da je operator A kompaktan ako i samo ako za svaki ograničen niz (x_n) u X niz (Ax_n) u Y ima konvergentan podniz, odnosno, ako i samo ako svaki ograničen niz (x_n) u X ima podniz (x_{n_k}) takav da je niz (Ax_{n_k}) u Y konvergentan.

Skup svih kompaktnih operatora sa X u Y označavat ćemo sa $K(X,Y)$.

Propozicija 2.1. *Svaki kompaktan operator je ograničen.*

Dokaz: Neka je $A : X \to Y$ kompaktan operator. Tada je skup $\{Ax;\, x \in X, \|x\| \leq 1\}$ relativno kompaktan, dakle i ograničen. Stoga postoji broj $M > 0$ takav da je $\|Ax\| \leq M$ za svaki $x \in X$ takav da je $\|x\| \leq 1$. Ako je sada x bilo koji vektor iz X različit od nule, onda je vektor $\frac{1}{\|x\|}x$ jedinični, pa slijedi

$$\frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \left\| A\Big(\frac{1}{\|x\|}x\Big) \right\| \leq M.$$

Dakle, $\|Ax\| \leq M\|x\| \;\forall x \in X$, odnosno operator A je ograničen. Prema tome, vrijedi $K(X,Y) \subseteq B(X,Y)$.

Teorem 2.2. *Neka su X, Y i Z normirani prostori.*

(*a*) *$K(X,Y)$ je potprostor od $B(X,Y)$.*

(*b*) *Za $A \in K(X,Y)$ i $B \in B(Y,Z)$ vrijedi $BA \in K(X,Z)$.*

(*c*) *Za $A \in B(X,Y)$ i $B \in K(Y,Z)$ vrijedi $BA \in K(X,Z)$.*

Dokaz: (a) Neka su $A, B \in K(X,Y)$ i $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Neka je (x_n) ograničen niz u X. Kako je operator A kompaktan, postoji podniz (u_n) niza (x_n) takav da je niz (Au_n) konvergentan. Kako je operator B kompaktan, postoji podniz (z_n) niza (u_n) takav da je niz (Bz_n) konvergentan. Niz (Az_n) je također konvergentan, jer je to podniz konvergentanog niza (Au_n). Stoga je i niz $((\alpha A + \beta B)z_n)$ konvergentan. To pokazuje da je operator $\alpha A + \beta B$ kompaktan, dakle $K(X,Y)$ je potprostor od $B(X,Y)$.

(b) Neka je (x_n) ograničen niz u X. Kako je operator A kompaktan, postoji podniz (u_n) niza (x_n) takav da je niz (Au_n) konvergentan u prostoru Y. Operator B je ograničen, dakle neprekidan, pa on preslikava svaki konvergentan niz u Y u konvergentan niz u Z. Dakle, niz (BAu_n) je konvergentan u prostoru Z. To pokazuje da je $BA \in K(X,Z)$.

(c) Neka je ponovo (x_n) ograničen niz u X. Kako je operator A ograničen, (Ax_n) je ograničen niz u Y. Kako je operator B kompaktan, niz (BAx_n) u prostoru Z ima konvergentan podniz. Dakle, dokazali smo da je i u tom slučaju $BA \in K(X,Z)$.

Time smo u potpunosti dokazali teorem 2.2.

Za normiran prostor X kraće pišemo $K(X) = K(X,X)$. Prostori $L(X) = L(X,X)$ i $B(X) = B(X,X)$ su uz množenje operatora asocijativne algebre.

Za bilo koju asocijativnu algebru $\mathcal{A}$ njen potprostor $\mathcal{I}$ zove se:

(a) **lijevi ideal**, ako je $\mathcal{AI} \subseteq \mathcal{I}$, tj. $a \in \mathcal{A}$, $x \in \mathcal{I} \Longrightarrow ax \in \mathcal{I}$;

(b) **desni ideal**, ako je $\mathcal{IA} \subseteq \mathcal{I}$, tj. $a \in \mathcal{A}$, $x \in \mathcal{I} \Longrightarrow xa \in \mathcal{I}$;

(c) **obostrani ideal** (ili samo **ideal**), ako je $\mathcal{I}$ i lijevi i desni ideal.

Ako je $\mathcal{A}$ asocijativna algebra s jedinicom i $\mathcal{I}$ ideal u $\mathcal{A}$, onda se na kvocijentnom prostoru $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ može uvesti struktura asocijativne algebre s jedinicom tako da umnožak klasa definiramo kao klasu umnoška njihovih predstavnika: $(a+\mathcal{I})(b+\mathcal{I}) = ab+\mathcal{I}$. Upravo činjenica da je $\mathcal{I}$ ideal ima za posljedicu da ta definicija ima smisla, tj. da iz $a+\mathcal{I} = a'+\mathcal{I}$ i $b+\mathcal{I} = b'+\mathcal{I}$ slijedi $ab+\mathcal{I} = a'b'+\mathcal{I}$. Doista, tada je $a-a' \in \mathcal{I}$ i $b-b' \in \mathcal{I}$ pa iz činjenice da je $\mathcal{I}$ i lijevi i desni ideal slijedi $ab-a'b' = a(b-b')+(a-a')b' \in \mathcal{I}$, dakle $ab+\mathcal{I} = a'b'+\mathcal{I}$. Jedinica u **kvocijentnoj algebri** $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ je klasa $e+\mathcal{I}$ jedinice e u algebri $\mathcal{A}$.

Teorem 2.2. ima sljedeću neposrednu posljedicu:

Korolar 2.2. *Ako je X normiran prostor, $K(X)$ je ideal u algebri $B(X)$.*

Teorem 2.3. *Neka su X i Y normirani prostori.*

(a) *Ako je ili X ili Y konačnodimenzionalan prostor, onda je $K(X,Y) = B(X,Y)$.*

(b) *Jedinični operator $I = I_X$ je kompaktan ako i samo ako je prostor X konačnodimenzionalan.*

(c) *Ako je prostor X beskonačnodimenzionalan i $A \in K(X)$, onda A nije invertibilan u algebri $B(X)$, tj. ne postoji $B \in B(X)$ takav da je $AB = BA = I$.*

Dokaz: (a) Pretpostavimo prvo da je prostor Y konačnodimenzionalan. Neka je $A \in B(X,Y)$ i neka je K zatvorena jedinična kugla u X. Kako je operator A ograničen to je AK ograničen podskup od Y. U konačnodimenzionalnom normiranom prostoru svaki je ograničen skup relativno kompaktan. Dakle skup AK je relativno kompaktan, što pokazuje da je operator A kompaktan. Kako je $A \in B(X,Y)$ bio proizvoljan, slijedi $B(X,Y) = K(X,Y)$.

Pretpostavimo sada da je prostor X konačnodimenzionalan. Neka je $A \in B(X,Y)$ i neka je

(x_n) ograničen niz u X. Tada zbog konačnodimenzionalnosti prostora X niz (x_n) ima konvergentan podniz (x_{n_k}). No tada je zbog neprekidnosti operatora A i niz (Ax_{n_k}) konvergentan u prostoru Y. Dakle, i u ovom slučaju je operator A kompaktan, pa je opet $B(X,Y) = K(X,Y)$.

(b) Ako je prostor X beskonačnodimenzionalan, po teoremu 2.1. zatvorena jedinična kugla $K = \overline{K}(0,1)$ u prostoru X nije relativno kompaktan skup. Kako je $K = IK$ zaključujemo da jedinični operator I nije kompaktan. S druge strane, ako je prostor X konačnodimenzionalan, onda je prema dokazanoj tvrdnji (a) $B(X) = K(X)$ i posebno $I \in K(X)$.

Tvrdnja (c) slijedi iz tvrdnje (b) i korolara 2.2. Doista, pretpostavimo suprotno da je neki kompaktan operator A invertibilan i neka je $B \in B(X)$ njegov invers. Tada je $AB = I$ pa iz korolara 2.2. slijedi $I \in K(X)$ a to nije tako zbog tvrdnje (b).

Teorem 2.4. *Neka je X normiran i Y Banachov prostor. Tada je $K(X,Y)$ zatvoren potprostor prostora $B(X,Y)$.*

Dokaz: Neka je (A_n) niz u $K(X,Y)$ koji je konvergentan u $B(X,Y)$ i neka je $A = \lim A_n$. Treba dokazati da je $A \in K(X,Y)$. Neka je K zatvorena jedinična kugla u prostoru X :

$$K = \overline{K}(0,1) = \{x \in X;\ \|x\| \leq 1\}.$$

Treba dokazati da je AK relativno kompaktan podskup od Y. Kako je prostor Y potpun relativna kompaktnost je prema zadatku 2.1. ekvivalentna s postojanjem konačne $\varepsilon-$mreže $\forall \varepsilon > 0$. Dakle, treba dokazati da za svaki $\varepsilon > 0$ skup AK ima konačnu $\varepsilon-$mrežu.

Neka je $\varepsilon > 0$. Zbog $A = \lim A_n$ postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je $\|A - A_n\| < \frac{\varepsilon}{3}$. Operator A_n je kompaktan, dakle skup A_nK je relativno kompaktan, dakle taj skup ima konačnu $\frac{\varepsilon}{3}-$mrežu. To znači da postoje $x_1, x_2, \ldots, x_m \in K$ takvi da je

$$A_nK \subseteq K\Big(A_nx_1, \frac{\varepsilon}{3}\Big) \cup K\Big(A_nx_2, \frac{\varepsilon}{3}\Big) \cup \cdots \cup K\Big(A_nx_m, \frac{\varepsilon}{3}\Big).$$

Tvrdimo da je tada $\{Ax_1, Ax_2, \ldots, Ax_m\}$ $\varepsilon-$mreža skupa AK, tj.

$$AK \subseteq K(Ax_1, \varepsilon) \cup K(Ax_2, \varepsilon) \cup \cdots \cup K(Ax_m, \varepsilon). \tag{2.1}$$

Doista, neka je $x \in K$. Tada je $A_nx \in A_nK$ pa postoji $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$ takav da je

$$A_nx \in K\Big(A_nx_j, \frac{\varepsilon}{3}\Big), \qquad \text{tj.} \qquad \|A_nx - A_nx_j\| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Slijedi

$$\|Ax - Ax_j\| \leq \|Ax - A_nx\| + \|A_nx - A_nx_j\| + \|A_nx_j - Ax_j\| \leq$$
$$\leq \|A - A_n\| \cdot \|x\| + \|A_nx - A_nx_j\| + \|A_n - A\| \cdot \|x_j\| < \frac{\varepsilon}{3} \cdot 1 + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} \cdot 1 = \varepsilon.$$

To pokazuje da je $Ax \in K(Ax_j, \varepsilon)$, a kako je $x \in K$ bio proizvoljan, zaključujemo da vrijedi (2.1). Time je teorem dokazan.

Neka su X i Y normirani prostori. Za $A \in B(X,Y)$ kažemo da je **operator konačnog ranga** ako mu je slika $R(A)$ konačnodimenzionalan potprostor od Y. U tom slučaju se broj $r(A) = \dim R(A)$ zove **rang operatora** A. Sa $F(X,Y)$ ćemo označavati skup svih operatora konačnog ranga u $B(X,Y)$.

Propozicija 2.2. *Neka su X, Y i Z normirani prostori.*

(*a*) *$F(X,Y)$ je potprostor od $B(X,Y)$ sadržan u $K(X,Y)$.*

(*b*) *Za $A \in F(X,Y)$ i $B \in B(Y,Z)$ vrijedi $BA \in F(X,Z)$ i $r(BA) \leq r(A)$.*

(*c*) *Za $A \in B(X,Y)$ i $B \in F(Y,Z)$ vrijedi $BA \in F(X,Z)$ i $r(BA) \leq r(B)$.*

(*d*) *$F(X) = F(X,X)$ je ideal u algebri $B(X)$.*

Dokaz: (*a*) Ako su $A, B \in F(X,Y)$ i $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, onda je $R(\alpha A + \beta B) \subseteq R(A) + R(B)$, dakle slika operatora $\alpha A + \beta B$ je konačnodimenzionalna, odnosno $\alpha A + \beta B \in F(X,Y)$. Dakle, $F(X,Y)$ je potprostor prostora $B(X,Y)$.

Neka je $A \in F(X,Y)$. Tada je $A \in B(X, R(A))$, pa iz tvrdnje (*a*) teorema 2.3. slijedi $A \in K(X, R(A))$, dakle i $A \in K(X,Y)$. Time smo dokazali da je $F(X,Y) \subseteq K(X,Y)$.

(*b*) Neka je $A \in F(X,Y)$ i $B \in B(Y,Z)$. Imamo $R(BA) = BR(A)$, pa ako izaberemo bazu $\{e_1, \ldots, e_n\}$ prostora $R(A)$ slijedi da vektori $Be_1, \ldots, Be_n$ razapinju prostor $R(BA)$. Dakle, taj je prostor konačnodimenzionalan i dimenzija mu je $\leq n = \dim R(A)$. Dakle, $BA \in F(X,Z)$ i $r(BA) \leq r(A)$.

(*c*) Neka je $A \in B(X,Y)$ i $B \in F(Y,Z)$. Tada je $R(BA) \subseteq R(B)$ pa očito vrijedi $BA \in F(X,Z)$ i $r(BA) \leq r(B)$.

Tvrdnja (*d*) neposredna je posljedica tvrdnji (*a*), (*b*) i (*c*).

Propozicija 2.3. *Neka su X i Y normirani prostori. Operator $A \in B(X,Y)$ je konačnog ranga ako i samo ako postoje linearno nezavisni vektori $e_1, e_2, \ldots, e_n$ u prostoru Y i linearno nezavisni funkcionali $f_1', f_2', \ldots, f_n'$ u dualu X' prostora X takvi da je*

$$Ax = \sum_{i=1}^{n} f_i'(x) e_i, \qquad x \in X. \tag{2.2}$$

Tada je $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ baza prostora $R(A)$, $\{f_1', f_2', \ldots, f_n'\}$ je baza prostora $R(A')$ i vrijedi

$$A'g' = \sum_{i=1}^{n} g'(e_i) f_i', \qquad g' \in Y'. \tag{2.3}$$

Posebno, dualni operator A' je operator konačnog ranga i $r(A') = r(A)$.

Dokaz: Pretpostavimo da su $e_1, e_2, \ldots, e_n$ linearno nezavisni vektori u prostoru Y i da su $f_1', f_2', \ldots, f_n' \in Y'$ takvi da vrijedi (2.2). Tada je potprostor $R(A)$ očito sadržan u $[\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}]$, pa slijedi da je A operator konačnog ranga.

Pretpostavimo sada da je $A \in B(X,Y)$ operator konačnog ranga i da je $\dim R(A) = n$. Neka je $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ baza od $R(A)$. Tada vrijedi (2.2) pri čemu su $f_1', f_2', \ldots, f_n'$ neka preslikavanja sa X u $\mathbb{C}$. Lako se vidi da su funkcionali $f_1', f_2', \ldots, f_n'$ linearni, a iz neprekidnosti operatora A slijedi i njihova neprekidnost. Dakle, $f_1', f_2', \ldots, f_n' \in X'$. Definiramo sada linearan operator $B : Y' \to X'$ relacijom

$$Bg' = \sum_{i=1}^{n} g'(e_i) f_i', \qquad g' \in Y'.$$

Kako su preslikavanja $g' \mapsto g'(e_i)$ sa Y' u $\mathbb{C}$ neprekidna to je i operator B neprekidan. Nadalje, za proizvoljan vektor $x \in X$ i proizvoljan funkcional $g' \in Y'$ imamo:

$$(A'g')(x) = g'(Ax) = g'\Big(\sum_{i=1}^{n} f_i'(x) e_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} f_i'(x) g'(e_i) = \Big(\sum_{i=1}^{n} g'(e_i) f_i'\Big)(x) = (Bg')(x).$$

Dakle, $B = A'$, odnosno vrijedi (2.3).

Dokažimo sada da su funkcionali $f_1', f_2', \ldots, f_n'$ linearno nezavisni. Neka su $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$ takvi da je $Ax_j = e_j$ za $j = 1, 2, \ldots, n$; takvi vektori x_j postoje jer su e_j vektori iz $R(A)$. Iz

$$e_j = Ax_j = \sum_{i=1}^{n} f_i'(x_j)e_i$$

neposredno slijedi $f_i'(x_j) = \delta_{ij}$. Dakle, ako je

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i' = 0$$

za neke $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$, onda za svaki $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ nalazimo:

$$0 = \Big(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i'\Big)(x_j) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i'(x_j) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \delta_{ij} = \lambda_j.$$

Dakle, funkcionali $f_1', f_2', \ldots, f_n'$ su linearno nezavisni.

Da bismo dokazali da je $\{f_1', f_2', \ldots, f_n'\}$ baza od $R(A')$ treba još samo ustanoviti da su funkcionali $f_1', f_2', \ldots, f_n'$ sadržani u $R(A')$, jer tada je iz (2.3) jasno da ti funkcionali razapinju $R(A')$. Neka je $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Definiramo linearan funkcional G_j' na konačnodimenzionalnom potprostoru $R(A) = [\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}]$ prostora Y sa

$$G_j'(e_i) = \delta_{ij}, \qquad \text{odnosno} \qquad G_j\Big(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i\Big) = \lambda_j.$$

Tada je $G_j' \in R(A)'$ pa prema Hahn−Banachovom teoremu 1.15. postoji $g_j' \in Y'$ čija je restrikcija na $R(A)$ jednaka G_j'. Sada je zbog (2.2) za svaki $x \in X$

$$(A'g_j')(x) = g_j'(Ax) = G_j'\Big(\sum_{i=1}^{n} f_i'(x)e_i\Big) = f_j'(x),$$

pa slijedi $f_j' = A'g_j' \in R(A')$.

Time je propozicija u potpunosti dokazana.

Propozicija 2.4. *Neka su X i Y Hilbertovi prostori. Operator $A \in B(X, Y)$ je konačnog ranga ako i samo ako postoje linearno nezavisni vektori $e_1, e_2, \ldots, e_n \in Y$ i linearno nezavisni vektori $f_1, f_2, \ldots, f_n \in X$ takvi da je*

$$Ax = \sum_{i=1}^{n} (x|f_i)e_i \qquad \forall x \in X.$$

Tada je

$$A^*y = \sum_{i=1}^{n} (y|e_i)f_i \qquad \forall y \in Y.$$

Nadalje, $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ je baza potprostora $R(A)$ i $\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ je baza potprostora $R(A^*)$. Posebno, A je konačnog ranga ako i samo ako je A^* konačnog ranga i tada je $r(A) = r(A^*)$.

Zadatak 2.2. *Dokažite propoziciju 2.4.*

Uputa: Koristite propoziciju 2.3. i Rieszov teorem 1.26. o reprezentaciji neprekidnih linearnih funkcionala na Hilbertovom prostoru.

Teorem 2.5. *Neka je X normiran i Y Hilbertov prostor. Operator $A \in B(X,Y)$ je kompaktan ako i samo ako je A limes niza operatora konačnog ranga. Drugim riječima,*

$$K(X,Y) = \mathrm{Cl}(F(X,Y)).$$

Dokaz: Neka je (A_n) niz u $F(X,Y)$ koji konvergira u $B(X,Y)$ i neka je $A = \lim A_n$. Po tvrdnji (a) propozicije 2.2. operatori A_n su kompaktni pa iz zatvorenosti od $K(X,Y)$ u $B(X,Y)$ (teorem 2.4.) slijedi $A \in K(X,Y)$. Time je dokazana inkluzija $\mathrm{Cl}(F(X,Y)) \subseteq K(X,Y)$.

Dokažimo sada obrnutu inkluziju $K(X,Y) \subseteq \mathrm{Cl}(F(X,Y))$ i pretpostavimo da je $A \in K(X,Y)$. Treba dokazati da za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $B \in F(X,Y)$ takav da je $\|A - B\| \leq \varepsilon$.

Neka je $K = \overline{K}(0,1) = \{x \in X;\ \|x\| \leq 1\}$ zatvorena jedinična kugla u prostoru X i neka je $\varepsilon > 0$. AK je relativno kompaktan podskup potpunog prostora Y pa on ima konačnu $\varepsilon-$mrežu, tj. postoje vektori $x_1, x_2, \ldots, x_n \in K$ takvi da je

$$AK \subseteq K(Ax_1, \varepsilon) \cup K(Ax_2, \varepsilon) \cup \cdots \cup K(Ax_n, \varepsilon).$$

Neka je $Z = [\{Ax_1, Ax_2, \ldots, Ax_n\}]$ i neka je $P \in B(Y)$ ortogonalni projektor prostora Y na potprostor Z. To znači da je P operator definiran sa

$$Py = z \qquad \text{ako je} \qquad y = z + u,\ \ z \in Z,\ \ u \in Z^{\perp}$$

(v. teorem 1.22. o ortogonalnoj projekciji). Stavimo $B = PA$. Tada je $R(B) \subseteq R(P) = Z$, dakle B je operator konačnog ranga: $B \in F(X,Y)$. Neka je $x \in K$. Tada je $Ax \in K(Ax_i, \varepsilon)$ za neki $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, tj. vrijedi $\|Ax - Ax_i\| < \varepsilon$. Rastavimo sada vektor Ax prostora Y u skladu s ortogonalnim rastavom $Y = Z \oplus Z^{\perp} : Ax = z + u,\ z \in Z,\ u \in Z^{\perp}$. Kako je $Ax_i \in Z$, nalazimo:

$$\varepsilon^2 > \|Ax - Ax_i\|^2 = \|u + (z - Ax_i)\|^2 = \|u\|^2 + \|z - Ax_i\|^2 \qquad \Longrightarrow \qquad \|u\| < \varepsilon.$$

Međutim, $z = PAx = Bx$, pa je $u = Ax - z = Ax - Bx = (A - B)x$. Tako smo dokazali da vrijedi $\|(A - B)x\| < \varepsilon, \quad \forall x \in K$, a to povlači da je $\|A - B\| \leq \varepsilon$.

Zadatak 2.3. *Neka su X i Y Hilbertovi prostori i $A \in B(X,Y)$. Dokažite da su sljedeća tri svojstva međusobno ekvivalentna:*

(a) $A \in K(X,Y)$;

(b) $A^* \in K(Y,X)$;

(c) $A^*A \in K(X)$.

Uputa: Za implikaciju $(c) \Longrightarrow (a)$ dokažite i koristite nejednakost

$$\|Ax - Ax'\|^2 \leq \|x - x'\| \cdot \|A^*Ax - A^*Ax'\|, \qquad x, x' \in X.$$

2.2 Spektar u Banachovim algebrama

Normirana algebra je asocijativna algebra $\mathcal{A}$ na kojoj je zadana norma $\|\cdot\|$ koja zadovoljava

$$\|xy\| \leq \|x\| \cdot \|y\| \qquad \forall x, y \in \mathcal{A}.$$

Ako k tome algebra $\mathcal{A}$ ima jedinicu e i ako vrijedi $\|e\| = 1$, $\mathcal{A}$ se zove **normirana algebra s jedinicom**. $\mathcal{A}$ je **Banachova algebra** ako je $\mathcal{A}$ normirana algebra koja je potpuna. Primijetimo da je operacija množenja neprekidna kao preslikavanje sa $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$ u $\mathcal{A}$ ($(x, y) \mapsto xy$). Dokaz je sljedeći:

$$\|xy - ab\| = \|(x-a)(y-b) + a(y-b) + (x-a)b\| \leq \|x-a\| \cdot \|y-b\| + \|a\| \cdot \|y-b\| + \|x-a\| \cdot \|b\|.$$

Neka je $\mathcal{A}$ normirana algebra. Broj

$$\nu(x) = \inf\{\|x^n\|^{\frac{1}{n}};\, n \in \mathbb{N}\}$$

nazivamo **spektralni radijus** elementa $x \in \mathcal{A}$. Dakle, spektralni radijus je funkcija ν sa $\mathcal{A}$ u $\mathbb{R}_+$.

Teorem 2.6. *Neka je $\mathcal{A}$ normirana algebra. Za svaki $x \in \mathcal{A}$ niz $(\|x^n\|^{\frac{1}{n}})_{n\in\mathbb{N}}$ je konvergentan i limes mu je spektralni radijus od x :*

$$\lim_{n\to\infty} \|x^n\|^{\frac{1}{n}} = \nu(x).$$

Nadalje, vrijedi:

(a) $0 \leq \nu(x) \leq \|x\|, \ \forall x \in \mathcal{A}.$

(b) $\nu(\lambda x) = |\lambda| \cdot \nu(x), \ \forall x \in \mathcal{A}, \ \forall \lambda \in \mathbb{C}.$

(c) $\nu(xy) = \nu(yx), \ \forall x, y \in \mathcal{A}.$

(d) $\nu(x^k) = [\nu(x)]^k, \ \forall x \in \mathcal{A}, \ \forall k \in \mathbb{N}.$

Dokaz: Za izabrani $x \in \mathcal{A}$ stavimo $\nu = \nu(x)$. Neka je $\varepsilon > 0$. Neka je $m \in \mathbb{N}$ takav da vrijedi

$$\|x^m\|^{\frac{1}{m}} \leq \nu + \varepsilon, \qquad \text{tj.} \qquad \|x^m\| \leq (\nu + \varepsilon)^m.$$

Za svaki prirodan broj n označimo s $p_n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ kvocijent, a s $q_n \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$ ostatak pri dijeljenju n sa m : $n = p_n m + q_n$. Tada je

$$1 = \frac{p_n m}{n} + \frac{q_n}{n}, \qquad n \in \mathbb{N}$$

pa zbog ograničenosti funkcije $n \mapsto q_n$ slijedi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{q_n}{n} = 0 \qquad \text{i} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{p_n m}{n} = 1.$$

Imamo redom

$$\|x^n\| = \|(x^m)^{p_n} x^{q_n}\| \leq \|x^m\|^{p_n} \cdot \|x\|^{q_n} \leq (\nu + \varepsilon)^{p_n m} \cdot \|x\|^{q_n},$$

pa slijedi

$$\|x^n\|^{\frac{1}{n}} \leq (\nu + \varepsilon)^{\frac{p_n m}{n}} \cdot \|x\|^{\frac{q_n}{n}}.$$

Pustimo li u toj nejednakosti da n teži u ∞, nalazimo da vrijedi:

$$\limsup \|x^n\|^{\frac{1}{n}} \leq \lim_{n\to\infty} [(\nu + \varepsilon)^{\frac{p_n m}{n}} \cdot \|x\|^{\frac{q_n}{n}}] = \nu + \varepsilon.$$

Budući da je $\varepsilon > 0$ bio proizvoljan, iz ove nejednakosti slijedi

$$\limsup \|x^n\|^{\frac{1}{n}} \leq \nu = \inf \|x^n\|^{\frac{1}{n}} \leq \liminf \|x^n\|^{\frac{1}{n}}.$$

Dakle,

$$\nu(x) = \limsup \|x^n\|^{\frac{1}{n}} = \liminf \|x^n\|^{\frac{1}{n}},$$

što ima za posljedicu da je niz brojeva $(\|x^n\|^{\frac{1}{n}};\, n \in \mathbb{N})$ konvergentan i da mu je limes jednak $\nu(x)$.

Tvrdnje (a) i (b) slijede neposredno iz definicije spektralnog radijusa.

Dokažimo tvrdnju (c). Za bilo koji prirodan broj n imamo $(xy)^{n+1} = x(yx)^n y$, pa slijedi

$$\|(xy)^{n+1}\| \leq \|x\| \cdot \|y\| \cdot \|(yx)^n\|.$$

Odatle je

$$\|(xy)^{n+1}\|^{\frac{1}{n+1}} \leq (\|x\| \cdot \|y\|)^{\frac{1}{n+1}} \cdot (\|((yx)^n\|^{\frac{1}{n}})^{\frac{n}{n+1}},$$

pa kad pustimo da n teži u ∞ zaključujemo da je $\nu(xy) \leq \nu(yx)$. Zamjenom uloga x i y imamo i obrnutu nejednakost $\nu(yx) \leq \nu(xy)$, dakle vrijedi jednakost $\nu(xy) = \nu(yx)$.

Napokon, za bilo koji prirodan broj k imamo redom:

$$\nu(x^k) = \lim_{n\to\infty} \|(x^k)^n\|^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} (\|x^{kn}\|^{\frac{1}{kn}})^k = \left[\lim_{n\to\infty} \|x^{kn}\|^{\frac{1}{kn}}\right]^k = [\nu(x)]^k.$$

Time je i tvrdnja (d) dokazana.

Neka je $\mathcal{A}$ asocijativna algebra s jedinicom e. Element $a \in \mathcal{A}$ zove se **invertibilan**, ako postoji $b \in \mathcal{A}$ takav da je $ba = ab = e$. Ako postoji, takav b je jedinstven, zove se **invers** elementa a i označava $b = a^{-1}$. Skup svih invertibilnih elemenata algebre $\mathcal{A}$ označavat ćemo sa $\mathcal{A}^*$. Očito je $\mathcal{A}^*$ grupa s obzirom na množenje.

Propozicija 2.5. *Neka je $\mathcal{A}$ normirana algebra s jedinicom. Tada je preslikavanje invertiranja $x \mapsto x^{-1}$ neprekidno sa $\mathcal{A}^*$ u $\mathcal{A}^*$.*

Zadatak 2.4. *Dokažite propoziciju 2.5.*

Uputa: Dokažite da za $a \in \mathcal{A}^*$, za $r = \frac{1}{2\cdot\|a^{-1}\|}$ i za $x \in \mathcal{A}^* \cap K(a, r)$ vrijedi

$$\|x^{-1} - a^{-1}\| \leq 2 \cdot \|a^{-1}\|^2 \cdot \|a - x\|.$$

Teorem 2.7. *Neka je $\mathcal{A}$ Banachova algebra s jedinicom e.*

(a) *Ako je $a \in \mathcal{A}$ i $\nu(a) < 1$, onda je $e - a \in \mathcal{A}^*$ i vrijedi*

$$(e - a)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n = e + a + a^2 + a^3 + \cdots,$$

pri čemu taj red konvergira apsolutno.

(b) *Ako je $a \in \mathcal{A}$ i $\|a\| < 1$, onda je $e - a \in \mathcal{A}^*$.*

(c) *Grupa $\mathcal{A}^*$ je otvoren podskup od $\mathcal{A}$.*

Dokaz: Prema Hadamardovom teoremu radijus konvergencije reda potencija $\sum \|a^n\|\lambda^n$ u $\mathbb{C}$ jednak je

$$r = \frac{1}{\limsup \|a^n\|^{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{\nu(a)} > 1.$$

Odavde slijedi da red $\sum \|a^n\|\lambda^n$ konvergira za $\lambda = 1$. Drugim riječima, red $\sum \|a^n\|$ konvergira, odnosno red $\sum a^n$ konvergira apsolutno. Budući da je po pretpostavci prostor $\mathcal{A}$ potpun, red $\sum a^n$ konvergira. Označimo njegovu sumu sa x, a parcijalne sume sa x_n :

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} a^n, \qquad x_n = e + a + a^2 + \cdots + a^{n-1}, \qquad x = \lim_{n\to\infty} x_n.$$

Imamo

$$(e-a)x_n = x_n(e-a) = e - a^n.$$

Budući da red $\sum \|a^n\|$ konvergira, imamo $\lim \|a^n\| = 0$, dakle i $\lim a^n = 0$. Pustimo li u gornjoj jednakosti da n teži u ∞, dobivamo

$$(e-a)x = x(e-a) = e$$

što pokazuje da je element $e - a$ invertibilan i $(e-a)^{-1} = x$.

Tvrdnja (b) slijedi neposredno iz tvrdnje (a), jer je $\nu(a) \leq \|a\|$.

(c) Neka je $a \in \mathcal{A}^*$. Neka je

$$x \in K\Big(a, \frac{1}{\|a^{-1}\|}\Big), \qquad \text{tj.} \qquad x \in \mathcal{A} \qquad \text{i} \qquad \|a - x\| < \frac{1}{\|a^{-1}\|}.$$

Stavimo $y = e - a^{-1}x$. Tada je

$$\|y\| = \|e - a^{-1}x\| = \|a^{-1}(a-x)\| \leq \|a^{-1}\| \cdot \|a - x\| < 1.$$

Stoga je prema dokazanoj tvrdnji (b) $a^{-1}x = e - y \in \mathcal{A}^*$. Kako je $a \in \mathcal{A}^*$ to je i $x = a(a^{-1}x) \in \mathcal{A}^*$. Tako smo dokazali da je

$$K\Big(a, \frac{1}{\|a^{-1}\|}\Big) \subseteq \mathcal{A}^*, \qquad \forall a \in \mathcal{A}^*.$$

Dakle, $\mathcal{A}^*$ je otvoren podskup od $\mathcal{A}$.

Neka je $\mathcal{A}$ asocijativna algebra s jedinicon e i neka je $a \in \mathcal{A}$. **Spektar** elementa a je skup

$$\sigma(a) = \{\lambda \in \mathbb{C};\ \lambda e - a \not\in \mathcal{A}^*\}.$$

Teorem 2.8. *Neka je $\mathcal{A}$ Banachova algebra s jedinicom i $a \in \mathcal{A}$. Tada je $\sigma(a)$ neprazan kompaktan podskup od $\mathbb{C}$. Preciznije, vrijedi:*

$$\sigma(a) \subseteq \overline{K}(0, \nu(a)) \qquad i \qquad \sigma(a) \cap S(0, \nu(a)) \neq \emptyset,$$

odnosno,

$$\nu(a) = \max\{|\lambda|;\ \lambda \in \sigma(a)\}.$$

Dokaz: Ako je $\lambda \in \mathbb{C}$ i $|\lambda| > \nu(a)$, onda je $\nu(\lambda^{-1}a) < 1$. Stoga je po tvrdnji (a) teorema 2.7. $e - \lambda^{-1}a \in \mathcal{A}^*$, pa slijedi da je i $\lambda e - a = \lambda(e - \lambda^{-1}a) \in \mathcal{A}^*$. Dakle, $\lambda \not\in \sigma(a)$. Time smo dokazali da je $\sigma(a) \subseteq \overline{K}(0, \nu(a))$. Posebno, $\sigma(a)$ je ograničen podskup od $\mathbb{C}$.

Dokažimo sada da je skup $\sigma(a)$ zatvoren, dakle kompaktan. Neka je $\lambda_0 \in \mathbb{C} \setminus \sigma(a)$. Tada je

$\lambda_0 e - a \in \mathcal{A}^*$, a kako je prema tvrdnji (c) teorema 2.7. skup $\mathcal{A}^*$ otvoren, postoji broj $r > 0$ takav da je $K(\lambda_0 e - a, r) \subseteq \mathcal{A}^*$, tj.

$$x \in \mathcal{A}, \ \|x - (\lambda_0 e - a)\| < r \qquad \Longrightarrow \qquad x \in \mathcal{A}^*.$$

Neka je $\lambda \in \mathbb{C}$ i $|\lambda - \lambda_0| < r$. Tada imamo redom

$$\|(\lambda e - a) - (\lambda_0 e - a)\| = |\lambda - \lambda_0| < r \qquad \Longrightarrow \qquad \lambda e - a \in \mathcal{A}^* \qquad \Longrightarrow \qquad \lambda \notin \sigma(a).$$

Time je dokazano da je $K(\lambda_0, r) \subseteq \mathbb{C} \setminus \sigma(a)$, dakle skup $\mathbb{C} \setminus \sigma(a)$ je otvoren, odnosno, $\sigma(a)$ je zatvoren.

Za dokaz teorema 2.8. dovoljno je još dokazati da je $\sigma(a) \cap S(0, \nu(a)) \neq \emptyset$. Pretpostavimo suprotno, tj. $\sigma(a) \cap S(0, \nu(a)) = \emptyset$. Označimo sa V zatvoren kružni vijenac u kompleksnoj ravnini sa središtem u 0, unutarnjim radijusom $\nu = \nu(a)$ i vanjskim radijusom $\nu + 1$:

$$V = \{\lambda \in \mathbb{C}; \ \nu \leq |\lambda| \leq \nu + 1\}.$$

Tada je $V \subseteq \mathbb{C} \setminus \sigma(a)$ pa možemo definirati funkciju $f : V \to \mathcal{A}$ sa

$$f(\lambda) = (e - \lambda^{-1} a)^{-1}.$$

Kako je prema propoziciji 2.5. invertiranje na $\mathcal{A}^*$ neprekidno, funkcija f je neprekidna. Budući da je skup V kompaktan, funkcija f je uniformno neprekidna na V.

Neka su $\varepsilon > 0$ i $n \in \mathbb{N}$ proizvoljni. Kako je $f : V \to \mathcal{A}$ uniformno neprekidna, postoji $\delta > 0$ (možemo uzeti da je $\delta \leq 1$) takav da vrijedi:

$$\lambda, \lambda' \in V, \ |\lambda - \lambda'| < \delta \qquad \Longrightarrow \qquad \|f(\lambda) - f(\lambda')\| < \varepsilon. \tag{2.4}$$

Nadalje, označimo sa $w_1, w_2, \ldots, w_n$ redom sve $n-$te korijene iz jedinice:

$$w_k = e^{\frac{2k\pi}{n} i}, \qquad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Tada je za svaki $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$

$$1 - \lambda^n = 1 - (w_k^{-1}\lambda)^n = (1 - w_k^{-1}\lambda)[1 + w_k^{-1}\lambda + w_k^{-2}\lambda^2 + \cdots + w_k^{1-n}\lambda^{n-1}].$$

U tu jednakost polinoma uvrstimo sada umjesto kompleksne varijable λ element $\lambda^{-1}a$ algebre $\mathcal{A}$ $(\lambda \in V)$. Dobivamo jednakost

$$e - \lambda^{-n}a^n = (e - w_k^{-1}\lambda^{-1}a)[e + w_k^{-1}\lambda^{-1}a + w_k^{-2}\lambda^{-2}a^2 + \cdots + w_k^{1-n}\lambda^{1-n}a^{n-1}],$$

a odatle slijedi

$$e + w_k^{-1}\lambda^{-1}a + w_k^{-2}\lambda^{-2}a^2 + \cdots + w_k^{1-n}\lambda^{1-n}a^{n-1} = (e - \lambda^{-n}a^n) f(w_k\lambda). \tag{2.5}$$

Za $n-$te korijene iz jedinice vrijedi

$$\sum_{k=1}^{n} w_k^j = 0 \qquad \forall j \in \{-1, -2, \ldots, 1-n\}.$$

Stoga, ako uzmemo jednakosti (2.5) za $k = 1, 2, \ldots, n$ i sve ih zbrojimo, dobivamo:

$$n \cdot e = (e - \lambda^{-n}a^n) \sum_{k=1}^{n} f(w_k\lambda).$$

Odavde se vidi da je $e - \lambda^{-n}a^n \in \mathcal{A}^*$ i

$$(e - \lambda^{-n}a^n)^{-1} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} f(w_k\lambda). \tag{2.6}$$

Neka je sada $\rho \in \mathbb{R}$ takav da je $0 < \rho - \nu < \delta$. Za svako k je $\nu w_k \in V$. Nadalje, kako je $\nu < \rho < \nu + \delta \leq \nu + 1$) imamo i $\rho w_k \in V$. Budući da je $|\rho w_k - \nu w_k| = \rho - \nu < \delta$, zbog (2.4) imamo $\|f(\rho w_k) - f(\nu w_k)\| < \varepsilon$, pa korištenjem (2.6) dobivamo:

$$\|(e - \rho^{-n}a^n)^{-1} - (e - \nu^{-n}a^n)^{-1}\| = \frac{1}{n} \cdot \left\| \sum_{k=1}^{n} [f(\rho w_k) - f(\nu w_k)] \right\| \leq$$

$$\leq \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} \|f(\rho w_k) - f(\nu w_k)\| < \frac{1}{n} \cdot n \cdot \varepsilon = \varepsilon.$$

Dakle, vrijedi:

$$0 < \rho - \nu < \delta \qquad \Longrightarrow \qquad \|(e - \rho^{-n}a^n)^{-1} - (e - \nu^{-n}a^n)^{-1}\| < \varepsilon \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Odatle slijedi:

$$0 < \rho - \nu < \delta \qquad \Longrightarrow \qquad \|e - (e - \nu^{-n}a^n)^{-1}\| < \|e - (e - \rho^{-n}a^n)^{-1}\| + \varepsilon \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{2.7}$$

Radijus konvergencije reda $\sum \|a^n\|\lambda^n$ jednak je ν^{-1}, dakle taj red konvergira ako uvrstimo $\lambda = \rho^{-1}$ (naime, $\rho > \nu$, dakle, $\rho^{-1} < \nu^{-1}$). Slijedi

$$\lim_{n\to\infty} \|a^n\|\rho^{-n} = 0, \qquad \text{dakle i} \qquad \lim_{n\to\infty} \rho^{-n}a^n = 0.$$

Odatle je

$$\lim_{n\to\infty} (e - \rho^{-n}a^n) = e,$$

a kako je invertiranje na $\mathcal{A}^*$ neprekidno, slijedi da je i

$$\lim_{n\to\infty} (e - \rho^{-n}a^n)^{-1} = e^{-1} = e.$$

Odatle i iz (2.7) zaključujemo:

$$\limsup \|e - (e - \nu^{-n}a^n)^{-1}\| \leq \varepsilon.$$

Kako je $\varepsilon > 0$ bio proizvoljan, $\limsup$ je zapravo $\lim$. Stoga redom dobivamo:

$$\lim_{n\to\infty} \|e - (e - \nu^{-n}a^n)^{-1}\| = 0 \implies \lim_{n\to\infty} (e - (e - \nu^{-n}a^n)^{-1}) = 0 \implies$$

$$\implies \lim_{n\to\infty} (e - \nu^{-n}a^n)^{-1} = e \implies \lim_{n\to\infty} (e - \nu^{-n}a^n) = e \implies \lim_{n\to\infty} \nu^{-n}a^n = 0.$$

No to je nemoguće jer je $\nu^n = [\nu(a)]^n = \nu(a^n) \leq \|a^n\|$, dakle $\|\nu^{-n}a^n\| = \nu^{-n}\|a^n\| \geq 1 \ \forall n$. Ova kontradikcija pokazuje da je pretpostavka $\sigma(a) \cap S(0, \nu(a)) = \emptyset$ bila pogrešna. Dakle, vrijedi $\sigma(a) \cap S(0, \nu(a)) \neq \emptyset$ i time je teorem u potpunosti dokazan.

2.3 Spektar operatora

Ako je X normiran prostor, tada je prema tvrdnjama (b) i (d) teorema 1.10. prostor $B(X)$ ograničenih linearnih operatora sa X u X normiran prostor s normom

$$A \mapsto \|A\| = \sup\{\|Ax\|;\ x \in X,\ \|x\| \leq 1\}.$$

Nadalje, prema tvrdnji (c) istoga teorema $B(X)$ je normirana algebra s jedinicom (jedinica je jedinični operator $I = I_X$). Stoga je za $A \in B(X)$ definiran spektar $\sigma(A)$: to je skup svih $\lambda \in \mathbb{C}$ takvih da operator $\lambda I - A$ nije invertibilan u $B(X)$, tj. da ne postoji $B \in B(X)$ takav da je $B(\lambda I - A) = (\lambda I - A)B = I$.

Da bi bilo $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \sigma(A)$ nužno je da operator $\lambda I - A$ bude bijekcija sa X na X. To općenito nije i dovoljno: treba još linearan operator $(\lambda I - A)^{-1}$ biti ograničen. Ako je λ svojstvena vrijednost operatora A (tj. ako je $Ax = \lambda x$ za neki vektor $x \neq 0$), onda $\lambda I - A$ nije injekcija, dakle ni bijekcija. Prema tome, svaka svojstvena vrijednost operatora A je točka spektra $\sigma(A)$. Ako je prostor X konačnodimenzionalan, svi linearni operatori sa X u X su ograničeni. Nadalje, po teoremu o rangu i nulitetu (koji se zove i teorem o rangu i defektu) linearan operator $B : X \to X$ je injekcija ako i samo ako je on surjekcija, dakle bijekcija. Prema tome, za konačnodimenzionalan prostor X i za $A \in B(X) = L(X)$ spektar $\sigma(A)$ operatora A je točno skup svih svojstvenih vrijednosti toga operatora. Dakle, u tom slučaju $\sigma(A)$ je neprazan konačan skup s najviše $\dim X$ elemenata. Ako je prostor X beskonačnodimenzionalan, situacija je znatno složenija. No dokazat ćemo da postoji velika sličnost s konačnodimenzionalnim slučajem ako se radi o kompaktnom operatoru.

Prema tvrdnji (c) teorema 1.14. ako je prostor X Banachov onda je $B(X)$ Banachova algebra s jedinicom. U tom slučaju za $A \in B(X)$ definiramo sljedeće međusobno disjunktne podskupove spektra $\sigma(A)$:

– **točkovni spektar** od A : $\sigma_p(A) = \{\lambda \in \mathbb{C};\ N(\lambda I - A) \neq \{0\}\} =$ skup svih svojstvenih vrijednosti operatora A;

– **kontinuirani spektar** od A : $\sigma_c(A) = \{\lambda \in \sigma(A);\ N(\lambda I - A) = \{0\},\ \mathrm{Cl}(R((\lambda I - A)) = X\}$;

– **rezidualni spektar** od A : $\sigma_r(A) = \{\lambda \in \mathbb{C};\ N(\lambda I - A) = \{0\},\ \mathrm{Cl}(R(\lambda I - A)) \neq X\}$.

Očito je $\sigma(A) = \sigma_p(A) \cup \sigma_c(A) \cup \sigma_r(A)$ (disjunktna unija). Ima operatora kojima su sva ta tri spektralna podskupa neprazna. Međutim, za normalan operator na Hilbertovom prostoru rezidualni je spektar prazan:

Propozicija 2.6. *Neka je X Hilbertov prostor i $A \in B(X)$ normalan operator. Tada je $\sigma_r(A) = \emptyset$.*

Zadatak 2.5. *Dokažite propoziciju 2.6.*

Uputa: Koristite propozicije 1.3. i 1.4.

Propozicija 2.7. *Neka je $\{e_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ ortonormirana baza beskonačnodimenzionalnog separabilnog Hilbertovog prostora X i neka je $(\lambda_n;\ n \in \mathbb{N})$ ograničen niz u $\mathbb{C}$. Postoji jedinstven $A \in B(X)$ takav da je $Ae_n = \lambda_n e_n\ \forall n$. Operator A je normalan i vrijedi:*

$$\sigma(A) = \mathrm{Cl}\left(\{\lambda_n;\ n \in \mathbb{N}\}\right), \qquad \sigma_p(A) = \{\lambda_n;\ n \in \mathbb{N}\},$$

$$Ax = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n (x|e_n) e_n, \qquad A^* x = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\lambda_n} (x|e_n) e_n, \qquad \forall x \in X.$$

Dokaz: Neka je $M > 0$ takav da je $|\lambda_n| \leq M \ \ \forall n$. Za $x \in X$ imamo

$$x = \sum_{k=1}^{\infty}(x|e_k)e_k \qquad \text{i} \qquad \|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty}|(x|e_k)|^2.$$

Stavimo li

$$y_n = \sum_{k=1}^{n}\lambda_k(x|e_k)e_k, \qquad n \in \mathbb{N},$$

imamo za $n < m$:

$$\|y_m - y_n\|^2 = \Big\| \sum_{k=n+1}^{m} \lambda_k(x|e_k)e_k \Big\|^2 = \sum_{k=n+1}^{m} |\lambda_k|^2 \cdot |(x|e_k)|^2 \leq M^2 \cdot \sum_{k=n+1}^{m} |(x|e_k)|^2,$$

pa iz konvergencije reda $\sum |(x|e_k)|^2$ slijedi da je niz (y_n) Cauchyjev, dakle konvergentan. Njegov limes označimo sa Ax. Dakle;

$$Ax = \sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k(x|e_k)e_k, \qquad x \in X.$$

Lako se vidi da je operator A linearan. Nadalje,

$$\|Ax\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty}|\lambda_k|^2 \cdot |(x|e_k)|^2 \leq M^2 \cdot \sum_{k=1}^{\infty}|(x|e_k)|^2 = M^2 \cdot \|x\|^2$$

pokazuje da je operator A ograničen i očito vrijedi $Ae_n = \lambda_n e_n \ \forall n$. Time je dokazana egzistencija.

Jedinstvenost neprekidnog linearnog operatora A sa svojstvom $Ae_n = e_n \ \forall n$ slijedi neposredno iz činjenice da je $\{e_n\}$ ortonormirana baza, što znači da je $\mathrm{Cl}\,([\{e_n;\ n \in \mathbb{N}\}]) = X$. Naime, uvjet na operator A ima za posljedicu da je A potpuno određen na potprostoru $[\{e_n;\ n \in \mathbb{N}\}]$. Zbog zahtjeva neprekidnosti slijedi da je A potpuno određen i na zatvaraču $\mathrm{Cl}\,([\{e_n;\ n \in \mathbb{N}\}]) = X$.

Izračunajmo sada djelovanje adjungiranog operatora od A :

$$A^*x = \sum_{n=1}^{\infty}(A^*x|e_n)e_n = \sum_{n=1}^{\infty}(x|Ae_n)e_n = \sum_{n=1}^{\infty}(x|\lambda_n e_n)e_n = \sum_{n=1}^{\infty}\overline{\lambda_n}(x|e_n)e_n.$$

Odavde je $A^*e_n = \overline{\lambda_n}e_n$, pa slijedi $(AA^* - A^*A)e_n = 0 \ \ \forall n$, dakle $AA^* - A^*A = 0$, tj. operator A je normalan.

Svi skalari λ_n su svojstvene vrijednosti operatora A. Dokažimo da operator A nema drugih svojstvenih vrijednosti. Pretpostavimo suprotno i neka je $\lambda \neq \lambda_n \ \ \forall n$ također svojstvena vrijednost operatora A. Neka je e pripadni jedinični svojstveni vektor: $\|e\| = 1, \ \ Ae = \lambda e$. Tada je

$$(\lambda - \lambda_n)(e|e_n) = (\lambda e|e_n) - (e|\overline{\lambda_n}e_n) = (Ae|e_n) - (e|A^*e_n) = 0.$$

Kako je $\lambda - \lambda_n \neq 0 \ \ \forall n$, slijedi $e \perp e_n \ \ \forall n$, a to je nemoguće jer je $\{e_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ ortonormirana baza od X. Ova kontradikcija pokazuje da je $\sigma_p(A) = \{\lambda_n;\ n \in \mathbb{N}\}$.

Stavimo $\sigma = \mathrm{Cl}\,[\sigma_p(A)]$. Kako je po teoremu 2.8. spektar $\sigma(A)$ od A zatvoren skup, očito je $\sigma \subseteq \sigma(A)$.

Treba još dokazati i obrnutu inkluziju $\sigma \supseteq \sigma(A)$. Neka je $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \sigma$. Tada za neko $\varepsilon > 0$ vrijedi $K(\lambda, \varepsilon) \subseteq \mathbb{C} \setminus \sigma$. Stoga imamo redom:

$$K(\lambda,\varepsilon) \cap \sigma_p(A) = \emptyset \qquad \Longrightarrow \qquad |\lambda - \lambda_n| \geq \varepsilon \quad \forall n \qquad \Longrightarrow \qquad \Big|\frac{1}{\lambda - \lambda_n}\Big| \leq \frac{1}{\varepsilon} \quad \forall n.$$

Prema već dokazanom, formulom

$$Bx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x|e_n)}{\lambda - \lambda_n} e_n, \qquad x \in X,$$

je zadan ograničen linearan operator B na X. Za svako $n \in \mathbb{N}$ je

$$(\lambda I - A)e_n = (\lambda - \lambda_n)e_n \qquad \text{i} \qquad Be_n = \frac{1}{\lambda - \lambda_n} e_n.$$

Stoga imamo:

$$B(\lambda I - A)e_n = (\lambda I - A)Be_n = e_n \quad \forall n \qquad \Longrightarrow \qquad B(\lambda I - A) = (\lambda I - A)B = I.$$

To pokazuje da je operator $\lambda I - A$ invertibilan u $B(X)$ pa zaključujemo da je $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \sigma(A)$. Dakle, dokazali smo da $\mathbb{C} \setminus \sigma \subseteq \mathbb{C} \setminus \sigma(A)$, a to znači da vrijedi obrnuta inkluzija $\sigma \supseteq \sigma(A)$.

Dakle, dokazana je jednakost $\sigma(A) = \sigma$ i time je teorem u potpunosti dokazan.

Korolar 2.3. *Neka $K \subseteq \mathbb{C}$ neprazan kompaktan skup. Postoji separabilan Hilbertov prostor X i normalan operator $A \in B(X)$ takav da je $\sigma(A) = K$.*

Dokaz: Dovoljno je uzeti niz $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ koji je gust u K, tj. takav da je $K = \mathrm{Cl}\left(\{\lambda_n;\, n \in \mathbb{N}\}\right)$, i primijeniti propoziciju 2.7.

Zadatak 2.6. *Neka je $\{e_n;\, n \in \mathbb{N}\}$ ortonormirana baza Hilbertovog prostora X. Dokažite da postoji jedinstven ograničen linearan operator $A : X \to X$ takav da je $Ae_n = e_{n+1}$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Kako adjungirani operator A^* djeluje na vektore e_n? Odredite $\sigma(A)$, $\sigma_p(A)$, $\sigma_c(A)$, $\sigma_r(A)$, $\sigma(A^*)$, $\sigma_p(A^*)$, $\sigma_c(A^*)$ i $\sigma_r(A^*)$.*

Zadatak 2.7. *Neka je $\{e_n;\, n \in \mathbb{Z}\}$ ortonormirana baza Hilbertovog prostora X. Dokažite da postoji jedinstven ograničen linearan operator $A : X \to X$ takav da je $Ae_n = e_{n+1}$ za svaki $n \in \mathbb{Z}$. Odredite $\sigma(A)$, $\sigma_p(A)$, $\sigma_c(A)$ i $\sigma_r(A)$.*

2.4 Spektar kompaktnog operatora

Teorem 2.9. *Neka je X normiran prostor, $A \in K(X)$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda \neq 0$. Za svaki prirodan broj n stavimo $N_n(\lambda) = N((\lambda I - A)^n)$ i $R_n(\lambda) = R((\lambda I - A)^n)$.*

(*a*) *Za svaki n je potprostor $N_n(\lambda)$ konačnodimenzionalan. Postoji n takav da je $N_n(\lambda) = N_{n+1}(\lambda)$.*

(*b*) *Za svaki n je potprostor $R_n(\lambda)$ zatvoren. Postoji n takav da je $R_n(\lambda) = R_{n+1}(\lambda)$.*

Dokaz: Imamo $\lambda I - A = \lambda(I - \lambda^{-1}A)$ i operator $\lambda^{-1}A$ je kompaktan. Nadalje, za svako n vrijedi

$$N((\lambda I - A)^n) = N((I - \lambda^{-1}A)^n) \qquad \text{i} \qquad R((\lambda I - A)^n) = R((I - \lambda^{-1}A)^n).$$

Prema tome, bez smanjenja općenitosti u dokazu možemo pretpostavljati da je $\lambda = 1$. U tom slučaju pisat ćemo kraće $N_n(1) = N_n$ i $R_n(1) = R_n$. Nadalje, stavimo $T = I - A$.

(*a*) Operator

$$U_n = T^n - I = -nA + \binom{n}{2}A^2 - \binom{n}{3}A^3 + \cdots + (-1)^n A^n$$

je kompaktan. Potprostor N_n invarijantan je s obzirom na operator A, dakle i s obzirom na operator U_n. N_n je jezgra operatora T^n, dakle restrikcija operatora T^n na potprostor N_n je nul−operator na tom potprostoru. Kako je $-U_n = I - T^n$, vidimo da je restrikcija operatora $-U_n$ na potprostor N_n jedinični operator na tom potprostoru. Budući da je operator U_n kompaktan, i kako je očito restrikcija kompaktnog operatora na zatvoren invarijantan potprostor također kompaktan operator, zaključujemo da je jedinični operator na potprostoru N_n kompaktan. Sada iz tvrdnje (*b*) teorema 2.3. slijedi da je potprostor N_n konačnodimenzionalan.

Dokažimo sada da postoji prirodan broj n takav da je $N_n = N_{n+1}$. Pretpostavimo suprotno: $N_n \neq N_{n+1}$ $\forall n$. Tada imamo striktno rastući niz konačnodimenzionalnih potprostora:

$$N_1 \subsetneq N_2 \subsetneq N_3 \subsetneq \cdots \subsetneq N_n \subsetneq N_{n+1} \subsetneq \cdots$$

Prema Rieszovoj lemi 2.1. za svaki $n \in \mathbb{N}$ postoji jedinični vektor $e_n \in N_{n+1}$ takav da je $d(e_n, N_n) = 1$. Za bilo koji n je $T^n T e_n = T^{n+1} e_n = 0$, dakle $Te_n \in N_n$. Nadalje, za bilo koje $m < n$ imamo $e_m \in N_{m+1} \subseteq N_n$ i $Te_m \in N_m \subseteq N_n$. Dakle je $z = Te_n - Te_m + e_m \in N_n$, pa slijedi:

$$\|Ae_n - Ae_m\| = \|e_n - z\| \geq d(e_n, N_n) = 1.$$

To pokazuje da niz (Ae_n) nema konvergentan podniz, a to je nemoguće jer je A kompaktan i svi vektori e_n su jedinični. Ova kontradikcija pokazuje da je pretpostavka $N_n \neq N_{n+1}$ $\forall n$ pogrešna. Dakle, postoji n takav da je $N_n = N_{n+1}$.

(*b*) Dokažimo sada da je potprostor R_n zatvoren za svaki $n \in \mathbb{N}$. Neka je $y \in \mathrm{Cl}\,(R_n)$. Tada postoji niz (x_k) u X, takav da je

$$y = \lim_{k \to \infty} T^n x_k.$$

Tvrdimo da je tada skup $\{d(x_k, N_n);\ k \in \mathbb{N}\}$ ograničen. Pretpostavimo suprotno. Tada postoji podniz (u_k) niza (x_k) takav da je $d(u_k, N_n) \geq k$ $\forall k$. Stavimo

$$z_k = \frac{1}{d(u_k, N_n)} u_k.$$

Tada je $d(z_k, N_n) = 1$ pa za svaki k možemo izabrati vektor $y_k \in N_n$ takav da je $\|z_k - y_k\| \leq 2$. Stavimo $v_k = z_k - y_k$. Niz (v_k) je ograničen, pa kako je operator $-U_n = I - T^n$ kompaktan, slijedi da niz $(-U_n v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ima konvergentan podniz. Zbog jednostavnijeg označavanja možemo pretpostaviti da smo podniz (u_k) niza (x_k) odabrali tako da je niz $(-U_n v_k)$ konvergentan. Stavimo

$$v = -\lim_{k\to\infty} U_n v_k.$$

Kako je $y_k \in N_n = N(T^n)$, imamo

$$v_k = I v_k = T^n v_k - U_n v_k = T^n z_k - T^n y_k - U_n v_k = T^n z_k - U_n v_k. \tag{2.8}$$

Iz definicije vektora z_k slijedi

$$T^n z_k = \frac{1}{d(u_k, N_n)} T^n u_k.$$

Niz (u_k) je podniz niza (x_k), pa dobivamo:

$$y = \lim_{k\to\infty} T^n x_k = \lim_{k\to\infty} T^n u_k.$$

Nadalje, $d(u_k, N_n) \geq k \ \forall k$, pa slijedi

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{d(u_k, N_n)} = 0.$$

Stoga je

$$\lim_{k\to\infty} T^n z_k = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{d(u_k, N_n)} T^n u_k = 0 \cdot y = 0.$$

Odatle i iz (2.8) zaključujemo da je

$$\lim_{k\to\infty} v_k = -\lim_{k\to\infty} U_n v_k = v,$$

pa slijedi

$$d(v, N_n) = \lim_{k\to\infty} d(v_k, N_n).$$

Međutim, $z_k = v_k + y_k$ i $y_k \in N_n$, pa je $d(v_k, N_n) = d(z_k, N_n) = 1$, odakle zaključujemo da je $d(v, N_n) = 1$. S druge strane, kako je operator T^n ograničen, dakle neprekidan, i kako je $T^n z_k = T^n v_k + T^n y_k = T^n v_k$ (naime, $y_k \in N_n = N(T^n)$), imamo

$$T^n v = \lim_{k\to\infty} T^n v_k = \lim_{k\to\infty} T^n z_k = 0,$$

tj. $v \in N_n$. To je u kontradikciji s upravo dokazanim $d(v, N_n) = 1$. Ova kontradikcija pokazuje da je pretpostavka o neograničenosti skupa $\{d(x_k, N_n);\ k \in \mathbb{N}\}$ bila pogrešna.

Dakle, postoji $M > 0$ takav da je $d(x_k, N_n) \leq M \ \forall k$. No tada za svaki k postoji vektor $a_k \in N_n$ takav da je $\|x_k - a_k\| \leq M + 1$. Stavimo $b_k = x_k - a_k$. Tada je niz (b_k) ograničen pa zbog kompaktnosti operatora $U_n = T^n - I$ zaključujemo da niz $(U_n b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ima konvergentan podniz. Zbog jednostavnijeg pisanja možemo pretpostaviti da smo na početku niz (x_k) izabrali tako da je niz $(U_n b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergentan. Stavimo

$$b = \lim_{k\to\infty} U_n b_k.$$

Niz (x_k) bio je izabran tako da je

$$y = \lim_{k\to\infty} T^n x_k.$$

Kako je $a_k \in N_n$ i $b_k = x_k - a_k$, imamo

$$T^n x_k = T^n b_k + T^n a_k = T^n b_k \qquad \Longrightarrow \qquad y = \lim_{k\to\infty} T^n b_k.$$

Odatle slijedi

$$y - b = \lim_{k\to\infty} T^n b_k - \lim_{k\to\infty} U_n b_k = \lim_{k\to\infty} (T^n - U_n) b_k = \lim_{k\to\infty} I b_k = \lim_{k\to\infty} b_k.$$

Zbog neprekidnosti operatora T^n odavde slijedi

$$y = \lim_{k\to\infty} T^n b_k = T^n (y - b).$$

To pokazuje da je $y \in R_n$, a kako je $y \in \mathrm{Cl}\,(R_n)$ bio proizvoljan, zaključujemo da je potprostor R_n zatvoren.

Treba još dokazati da je $R_{n+1} = R_n$ za neko n. Pretpostavimo suprotno, tj. da je $R_{n+1} \neq R_n$ $\forall n$. Tada imamo striktno padajući niz zatvorenih potprostora:

$$R_1 \supsetneq R_2 \supsetneq R_3 \supsetneq \cdots \supsetneq R_n \supsetneq R_{n+1} \supsetneq \cdots$$

Prema Rieszovoj lemi 2.1. tada za svaki $n \in \mathbb{N}$ postoji jedinični vektor $e_n \in R_n$ takav da je $d(e_n, R_{n+1}) \geq \frac{1}{2}$. Za svaki n je $Te_n \in TR_n = R_{n+1}$. Nadalje, za bilo koje $m > n$ je $e_m \in R_m \subseteq R_{n+1}$ i $Te_m \in R_{m+1} \subseteq R_{n+1}$. Dakle, stavimo li $z = Te_n - Te_m + e_m$, vrijedi $z \in R_{n+1}$, pa slijedi:

$$\|Ae_m - Ae_n\| = \|z - e_n\| \geq d(e_n, R_{n+1}) \geq \frac{1}{2}, \qquad \forall m \neq n.$$

To pokazuje da niz (Ae_n) nema konvergentan podniz, a to je nemoguće jer je operator A kompaktan i svi vektori e_n su jedinični. Ova kontradikcija pokazuje da je pretpostavka $R_n \neq R_{n+1}$ $\forall n$ pogrešna. Dakle, postoji n takav da je $R_n = R_{n+1}$.

Sljedećih nekoliko tvrdnji (propozicija 2.8. i teorem 2.10.) su čisto algebarske i vrijede za bilo koji linearan operator na bilo kojem vektorskom prostoru (a ne samo za ograničen operator na normiranom prostoru).

Propozicija 2.8. *Neka je X vektorski prostor i $T \in L(X)$.*

(a) Ako je $N(T^n) = N(T^{n+1})$ za neko n, onda je $N(T^m) = N(T^n)$ $\forall m \geq n$.

(b) Ako je $R(T^n) = R(T^{n+1})$ za neko n, onda je $R(T^m) = R(T^n)$ $\forall m \geq n$.

Dokaz: (a) Dovoljno je dokazati da je $N(T^{n+2}) = N(T^{n+1})$, jer tada tvrdnja slijedi indukcijom u odnosu na $m > n$. Očito je $N(T^{n+2}) \supseteq N(T^{n+1})$. Dokažimo i obrnutu inkluziju. Doista, imamo redom:

$$x \in N(T^{n+2}) \implies 0 = T^{n+2}x = T^{n+1}Tx \implies Tx \in N(T^{n+1}) = N(T^n) \implies$$
$$\implies 0 = T^n(Tx) = T^{n+1}x \implies x \in N(T^{n+1}).$$

Dakle, vrijedi i $N(T^{n+2}) \subseteq N(T^{n+1})$.

(b) Analogno, očito je $R(T^{n+1}) \supseteq R(T^{n+2})$, pa treba još dokazati da vrijedi i obrnuta inkluzija $R(T^{n+1}) \subseteq R(T^{n+2})$. Neka je $x \in R(T^{n+1})$ i neka je $y \in X$ takav da je $x = T^{n+1}y$. Imamo $T^n y \in R(T^n) = R(T^{n+1})$, pa postoji $u \in X$ takav da je $T^n y = T^{n+1}u$. Slijedi:

$$x = T^{n+1}y = T(T^n y) = T(T^{n+1}u) = T^{n+2}u \in R(T^{n+2}).$$

Time je dokazano $R(T^{n+1}) \subseteq R(T^{n+2})$.

Teorem 2.10. *Neka je $X \neq \{0\}$ vektorski prostor i $T \in L(X)$. Pretpostavimo da postoje $k \geq 0$ i $r \geq 0$ takvi da je $N(T^k) = N(T^{k+1})$ i $R(T^r) = R(T^{r+1})$ i neka su k i r najmanji takvi. [Kao obično stavljamo $T^0 = I$, dakle $N(T^0) = \{0\}$ i $R(T^0) = X$.]*

(*a*) $k = r$.

(*b*) $X = N(T^k) \dot{+} R(T^k)$.

(*c*) *Potprostori $N(T^k)$ i $R(T^k)$ su invarijantni s obzirom na operator T.*

(*d*) *Restrikcija $T|N(T^k)$ je nilpotentan operator. Ako je Y potprostor od X invarijantan s obzirom na operator T i ako je restrikcija $T|Y$ nilpotentan operator, onda je $Y \subseteq N(T^k)$.*

(*e*) *Restrikcija $T|R(T^k)$ je izomorfizam sa $R(T^k)$ na $R(T^k)$. Ako je Z potprostor od X takav da je $TZ = Z$, onda je $Z \subseteq R(T^k)$.*

Rastav prostora iz tvrdnje (*b*) zove se **Fittingova dekompozicija** s obzirom na operator T, a broj k zove se **nilindeks** operatora T. Istaknimo da teorem 2.10. nije primjenjiv na svaki linearan operator T, nego samo na onaj za kojeg su ispunjene dvije pretpostavke: postoji k takav da je $N(T^k) = N(T^{k+1})$ i postoji r takav da je $R(T^r) = R(T^{r+1})$. Samo takav operator ima nilindeks. Prema teoremu 2.9. takav je svaki operator oblika $\lambda I - A$, gdje je $\lambda \neq 0$ i A je kompaktan operator na normiranom prostoru. Nadalje, jasno je da je takav svaki linearan operator na konačnodimenzionalnom prostoru.

Dokaz teorema 2.10: (*a*) Ako je $k = 0$ očito je $r \geq k$. Pretpostavimo da je $k \geq 1$. Izaberimo vektor $x \in N(T^k) \setminus N(T^{k-1})$, tj. $T^k x = 0$ i $T^{k-1}x \neq 0$. Pretpostavimo da je $r < k$, dakle $R(T^{k-1}) = R(T^k)$. Tada postoji vektor $y \in X$ takav da je $T^{k-1}x = T^k y$. Odatle slijedi:

$$0 = T^k x = T^{k+1} y \implies y \in N(T^{k+1}) = N(T^k) \implies T^{k-1}x = T^k y = 0,$$

a to je suprotno izboru vektora x. Ova kontradikcija pokazuje da je pretpostavka $r < k$ bila pogrešna, pa zalključujemo da mora biti $r \geq k$.

Ako je $r = 0$ očito je $k \geq r$. Pretpostavimo da je $r \geq 1$. Neka je $x \in R(T^{r-1}) \setminus R(T^r)$. Tada je $x = T^{r-1}y$ za neki vektor $y \in X$. Stavimo $u = Tx$. Tada je $u = T^r y \in R(T^r) = R(T^{r+1})$, pa postoji $v \in X$ takav da je $u = T^{r+1}v$. Stavimo $z = Tv - y$. Tada iz $u = T^r y = T^{r+1}v$ slijedi:

$$T^r z = T^r(Tv - y) = T^{r+1}v - T^r y = u - u = 0.$$

S druge strane, kako je $x \notin R(T^r)$, imamo

$$T^{r-1}z = T^{r-1}(Tv - y) = T^r v - T^{r-1}y = T^r v - x \neq 0.$$

Prema tome vrijedi $z \in N(T^r) \setminus N(T^{r-1})$. To pokazuje da je $N(T^{r-1}) \subsetneq N(T^r)$, dakle je $k \geq r$.

Dvije dokazane nejednakosti $r \geq k$ i $k \geq r$ daju jednakost $k = r$.

(*b*) Neka je $x \in N(T^k) \cap R(T^k)$. Tada vrijedi $x = T^k y$ za neki $y \in X$. Imamo

$$0 = T^k x = T^{2k} y \qquad \implies \qquad y \in N(T^{2k}) = N(T^k) \qquad \implies \qquad x = T^k y = 0.$$

Dakle, $N(T^k) \cap R(T^k) = \{0\}$. Stoga je suma potprostora $N(T^k)$ i $R(T^k)$ direktna. Treba još dokazati da je ta direktna suma jednaka cijelom prostoru X. Neka je $x \in X$. Tada je

$$T^k x \in R(T^k) = R(T^{2k}) = T^k R(T^k),$$

pa postoji $y \in R(T^k)$ takav da je $T^k x = T^k y$. Stavimo sada $u = x - y$. Tada je

$$x = u + y, \qquad u \in N(T^k), \qquad y \in R(T^k).$$

Kako je $x \in X$ bio proizvoljan, zaključujemo da je $N(T^k) \dot{+} R(T^k) = X$.

Tvrdnja (c) je evidentna.

(d) Očito je $(T|N(T^k))^k = 0$, dakle restrikcija $T|N(T^k)$ je nilpotentan operator. Neka je Y potprostor od X invarijantan s obzirom na operator T i pretpostavimo da je operator $T|Y$ nilpotentan, npr. $(T|Y)^n = 0$. Tada je $T^n y = 0$ $\forall y \in Y$, pa slijedi $Y \subseteq N(T^n) \subseteq N(T^k)$.

(e) Imamo $TR(T^k) = R(T^{k+1}) = R(T^k)$. Dakle, restrikcija $T|R(T^k)$ je surjekcija sa $R(T^k)$ na $R(T^k)$. Dokažimo da je ta restrikcija i injekcija. Treba dokazati da za $x \in R(T^k)$ iz $Tx = 0$ slijedi $x = 0$. To je posljedica tvrdnje (b), jer tada je $x \in N(T) \subseteq N(T^k)$, pa nalazimo da je

$$x \in N(T^k) \cap R(T^k) = \{0\}.$$

Napokon, ako je $Z \leq X$ takav da je $TZ = Z$, onda je i $T^k Z = Z$, a odatle slijedi $Z \subseteq R(T^k)$.

Vratimo se sada opet na kompaktne operatore na normiranim prostorima.

Teorem 2.11. *Neka je X normiran prostor i $A \in K(X)$.*

(a) *Ako $\lambda \neq 0$ nije svojstvena vrijednost operatora A, onda je operator $\lambda I - A$ invertibilan u $B(X)$.*

(b) *Operator A ima najviše prebrojivo mnogo svojstvenih vrijednosti. Skup svih svojstvenih vrijednosti operatora A nema gomilišta različitog od* 0.

(c) *Neka je $\lambda \neq 0$ svojstvena vrijednost operatora A i neka je k nilindeks operatora $\lambda I - A$. Tada je $X = N((\lambda I - A)^k) \dot{+} R((\lambda I - A)^k)$. Restrikcija operatora $\lambda I - A$ na potprostor $R((\lambda I - A)^k)$ je invertibilan operator na normiranom prostoru $R((\lambda I - A)^k)$ (tj. $(\lambda I - A)$ je invertibilan element algebre $B(R((\lambda I - A)^k))$).*

Dokaz: (a) Ako $\lambda \neq 0$ nije svojstvena vrijednost od A, onda je $N(\lambda I - A) = \{0\}$, dakle nilindeks operatora $T = \lambda I - A$ jednak je 0. Tada je prema teoremu 2.10. $R(T) = X$ i T je bijekcija sa X na X. Treba još dokazati da je operator T invertibilan u algebri $B(X)$, tj. da je invers T^{-1} od T ograničen, odnosno neprekidan. Prema tvrdnji (b) teorema 1.8. u tu je svrhu dovoljno dokazati da je za svaki otvoren skup $U \subseteq X$ i skup $(T^{-1})^{-1}(U) = T(U)$ otvoren, ili, ekvivalentno, da je za svaki zatvoren skup $F \subseteq X$ i skup $T(F)$ zatvoren. U daljnjem ćemo pretpostavljati da je $\lambda = 1$. Time općenitost dokaza nije smanjena, jer je $\lambda I - A = \lambda(I - \lambda^{-1}A)$ i operator $\lambda^{-1}A$ je kompaktan.

Neka je F zatvoren podskup od X i $y \in \mathrm{Cl}\,(T(F))$. Treba dokazati da je $y \in T(F)$. Neka je (x_n) niz u F takav da je $y = \lim Tx_n$. Tvrdimo da je tada niz (x_n) ograničen. Tu ćemo činjenicu dokazati metodom suprotnog, pa pretpostavimo da je niz (x_n) neograničen. Tada postoji podniz (u_n) niza (x_n) takav da je $\|u_n\| \geq n$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Stavimo $z_n = \frac{1}{\|u_n\|}u_n$. Vektori z_n su jedinični, pa zbog kompaktnosti operatora A niz (Az_n) ima konvergentan podniz. Zbog jednostavnijeg označavanja možemo pretpostaviti da smo podniz (u_n) niza (x_n) izabrali tako da je niz (Az_n) konvergentan. Stavimo $z = \lim Az_n$. Imamo

$$z_n = Tz_n + Az_n = \frac{1}{\|u_n\|}Tu_n + Az_n.$$

Kako je (u_n) podniz niza (x_n), to je (Tu_n) odniz niza (Tx_n) pa vrijedi $y = \lim Tu_n$. Nadalje, iz $\|u_n\| \geq n$ slijedi $\lim \frac{1}{\|u_n\|} = 0$, pa dobivamo:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\|u_n\|} Tu_n = 0 \implies \lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\|u_n\|} Tu_n + \lim_{n\to\infty} Az_n = \lim_{n\to\infty} Az_n = z.$$

Kako su svi vektori z_n jedinični, to je i vektor z jedinični. Operator T je neprekidan pa imamo

$$Tz = \lim_{n\to\infty} Tz_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\|u_n\|} Tu_n = 0.$$

No T je bijekcija, pa slijedi $z = 0$, a to je nemoguće jer je $\|z\| = 1$.

Ova kontradikcija pokazuje da je pretpostavka neograničenosti niza (x_n) bila pogrešna, pa je time dokazano da je niz (x_n) ograničen. Zbog kompaktnosti operatora A niz (Ax_n) ima konvergentan podniz. Dakle, postoji podniz (v_n) niza (x_n) takav da je niz (Av_n) konvergentan. Stavimo $x = \lim Av_n$. Kako je (Tv_n) podniz niza (Tx_n) imamo $y = \lim Tv_n$. Nadalje, $T + A = I$, dakle $v_n = Tv_n + Av_v$. Zaključujemo da je niz (v_n) konvergentan i

$$\lim_{n\to\infty} v_n = \lim_{n\to\infty} Tv_n + \lim_{n\to\infty} Av_n = y + x.$$

Budući da su svi vektori v_n u skupu F i budući da je skup F zatvoren, slijedi $y + x \in F$. Napokon,

$$y = \lim_{n\to\infty} Tv_n = T\Big(\lim_{n\to\infty} v_n\Big) = T(y + x) \in T(F).$$

Time je dokazano da je skup $T(F)$ zatvoren. Dakle, operator T^{-1} je ograničen.

Tvrdnja (b) bit će dokazana ako pokažemo da je za svaki $\varepsilon > 0$ skup svih svojstvenih vrijednosti λ od A, takvih da je $|\lambda| \geq \varepsilon$, konačan. Pretpostavimo suprotno, dakle da za neki $\varepsilon > 0$ postoji niz $(\lambda_n;\, n \in \mathbb{N})$ međusobno različitih svojstvenih vrijednosti od A takvih da je $|\lambda_n| \geq \varepsilon\ \forall n$. Za svaki n izaberimo vektor $x_n \neq 0$ takav da je $Ax_n = \lambda_n x_n$. Stavimo $X_n = [\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}]$. Primijetimo da su vektori niza (x_n) linearno nezavisni. Doista, ako je

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n = 0,$$

primijenimo na tu jednakost operator $(\lambda_1 I - A) \cdots (\lambda_{k-1} I - A) \cdot (\lambda_{k+1} I - A) \cdots (\lambda_n I - A)$ za bilo koji $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Taj operator poništava vektore $x_1, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_n$ pa dobivamo

$$(\lambda_1 - \lambda_k) \cdots (\lambda_{k-1} - \lambda_k) \cdot (\lambda_{k+1} - \lambda_k) \cdots (\lambda_n - \lambda_k) \alpha_k x_k = 0.$$

Odavde slijedi da je $\alpha_k = 0$, a kako je $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ bio proizvoljan, time smo dokazali da su vektori $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ linearno nezavisni. Dakle, $\dim X_n = n\ \forall n$, pa imamo striktno rastući niz konačnodimenzionalnih potprostora

$$X_1 \subsetneq X_2 \subsetneq X_3 \subsetneq \cdots \subsetneq X_{n-1} \subsetneq X_n \subsetneq \cdots$$

Prema Rieszovoj lemi 2.1. tada za svaki $n \in \mathbb{N}$ postoji jedinični vektor $e_n \in X_n$ takav da je $d(e_n, X_{n-1}) = 1$.

Neka je $x \in X_n$. Tada je $x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n$ za neke skalare $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, pa slijedi

$$(\lambda_n I - A)x = \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j (\lambda_n - \lambda_j) x_j \in X_{n-1}.$$

Kako je x bio proizvoljan vektor potprostora X_n zaključujemo da je $(\lambda_n I - A)X_n \subseteq X_{n-1}$ Posebno je $(\lambda_n I - A)e_n \in X_{n-1}$, pa slijedi da je

$$Ae_n = \lambda_n e_n - (\lambda_n I - A)e_n \in X_n.$$

Neka je $m < n$. Tada je $Ae_m \in X_m \subseteq X_{n-1}$, pa za vektor $e = \lambda_n^{-1}(\lambda_n e_n - Ae_n + Ae_m)$ vrijedi $e \in X_{n-1}$. Slijedi

$$\|Ae_n - Ae_m\| = \|\lambda_n e_n - (\lambda_n e_n - Ae_n + Ae_m)\| = \|\lambda_n(e_n - e)\| =$$

$$= |\lambda_n| \cdot \|e_n - e\| \geq |\lambda_n| \cdot d(e_n, X_{n-1}) = |\lambda_n| \geq \varepsilon.$$

To pokazuje da niz (Ae_n) nema konvergentan podniz. No to je u suprotnosti s kompaktnosti operatora A, jer su svi vektori e_n jedinični. Ova kontradikcija pokazuje da je pretpostavka o beskonačnosti skupa $\{\lambda;\ \lambda$ je svojstvena vrijednost operatora A i $|\lambda| \geq \varepsilon\}$ bila pogrešna.

(c) Iz teorema 2.9. i 2.10. slijedi da je

$$X = N((\lambda I - A)^k) \dot{+} R((\lambda I - A)^k)$$

i da je restrikcija operatora $\lambda I - A$ na potprostor $Y = R((\lambda I - A)^k)$ bijekcija sa Y na Y. Treba još dokazati da je ta restrikcija invertibilan operator u normiranoj algebri $B(Y)$. Neka je $B = A|Y$. Tada je $\lambda I_Y - B = (\lambda I - A)|Y$ bijekcija sa Y na Y. Nadalje, potprostor Y je prema tvrdnji (b) teorema 2.9. zatvoren, pa je operator $B = A|Y$ kompaktan. To znači da λ nije svojstvena vrijednost operatora B. Iz tvrdnje (a) sada slijedi da je restrikcija $(\lambda I - A)|Y$ invertibilan operator u algebri $B(Y)$.

Zadatak 2.8. *Neka $A : \ell_2 \to \ell_2$ definiran sa*

$$A(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots) = \left(0, \frac{\xi_1}{2}, \frac{\xi_2}{2^2}, \frac{\xi_3}{2^3}, \ldots\right).$$

Dokažite da je operator A kompaktan. Odredite $\sigma(A)$ i $\sigma_p(A)$.

Teorem 2.12. (*Weylov teorem*) *Neka je X Banachov prostor, $S \in B(X)$ i $A \in K(X)$. Tada je $\sigma(S + A) \subseteq \sigma(S) \cup \sigma_p(S + A)$.*

Dokaz: Neka je $\lambda \in \sigma(S + A)$ i $\lambda \notin \sigma(S)$. Tada je operator $\lambda I - S$ invertibilan, a operator $\lambda I - (S + A)$ nije invertibilan. Uz oznaku $B = (\lambda I - S)^{-1} \in B(X)$ imamo

$$\lambda I - (S + A) = (\lambda I - S) - A = B^{-1} - A = B^{-1} - B^{-1}BA = B^{-1}(I - BA).$$

Slijedi da operator $I - BA$ nije invertibilan, dakle $1 \in \sigma(BA)$. No operator BA je kompaktan, pa prema tvrdnji (a) teorema 2.11. zaključujemo da je 1 svojstvena vrijednost operatora BA. Stoga postoji vektor $x \neq 0$ takav da je $BAx = x$. Sada dobivamo redom

$$Ax = (\lambda I - S)x \quad \Longrightarrow \quad (S + A)x = \lambda x \quad \Longrightarrow \quad \lambda \in \sigma_p(S + A).$$

Neka je X Banachov prostor i $A \in B(X)$. A se zove **Rieszov operator** ako ima sljedeća tri svojstva:

1. Za svaki $\lambda \neq 0$ potprostor $N((\lambda I - A)^n)$ je konačnodimenzionalan i postoji n takav da vrijedi $N((\lambda I - A)^n) = N((\lambda I - A)^{n+1})$.
2. Za svaki $\lambda \neq 0$ potprostor $R((\lambda I - A)^n)$ je zatvoren i postoji n takav da vrijedi $R((\lambda I - A)^n) = R((\lambda I - A)^{n+1})$.
3. Točkovni spektar $\sigma_p(A)$ operatora A nema gomilišta u skupu $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Zadatak 2.9. *Neka je A Rieszov operator na Banachovom prostoru X i neka je $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \sigma_p(A)$ i $\lambda \neq 0$. Dokažite da je operator $\lambda I - A$ invertibilan u algebri $B(X)$.*

Zadatak 2.10. *Neka je A Rieszov operator na Banachovom prostoru X. Dokažite da je skup $\sigma_p(A)$ konačan ili prebrojiv.*

Zadatak 2.11. *Neka je A Rieszov operator na Banachovom prostoru X i neka je $\lambda \in \sigma_p(A) \setminus \{0\}$. Dokažite da postoji zatvoren potprostor Y i konačnodimenzionalan potprostor Z prostora X takvi da vrijedi:*

(a) *$X = Y \dotplus Z$ i potprostori Y i Z su $A-$invarijantni.*

(b) *Operator $(\lambda I - A) \mid Y$ je invertibilan u algebri $B(Y)$.*

(c) *Ako je V zatvoren $A-$invarijantan potprostor od X takav da je operator $(\lambda I - A) \mid V$ invertibilan u algebri $B(V)$ onda je $V \subseteq Y$.*

(d) *Operator $(\lambda I - A) \mid Z$ je nilpotentan.*

(e) *Ako je W $A-$invarijantan potprostor od X takav da je operator $(\lambda I - A) \mid W$ nilpotentan onda je $W \subseteq Z$.*

2.5 Hiperinvarijantni potprostori

Neka je X Banachov prostor i $A \in B(X)$. Za **potprostor** Y prostora X kažemo da je **hiperinvarijantan** s obzirom na operator A ako je Y invarijantan s obzirom na svaki operator $B \in B(X)$ koji komutira sa A.

Teorem 2.13. (**Lomonosov, 1973.**) *Neka je $A \neq 0$ kompaktan operator na beskonačnodimenzionalnom Banachovom prostoru X. Tada u X postoji netrivijalan (tj. različit od $\{0\}$ i od X) zatvoren potprostor koji je hiperinvarijantan s obzirom na A.*

Dokaz: Neka je

$$\mathcal{T} = \{B \in B(X);\ \ AB = BA\}.$$

Očito je $\mathcal{T}$ podalgebra algebre $B(X)$. Treba dokazati da postoji zatvoren potprostor $\{0\} \neq Y \neq X$ koji je invarijantan s obzirom na sve operatore $B \in \mathcal{T}$.

Ako operator A ima svojstvenu vrijednost $\lambda_0 \neq 0$ tada je prema teoremu 2.9. pripadni svojstveni potprostor

$$Y = N(\lambda_0 I - A) = \{x \in X;\ \ Ax = \lambda_0 x\} \neq 0$$

konačnodimenzionalan, dakle je različit od X. Y je invarijantan s obzirom na svaki $B \in \mathcal{T}$:

$$x \in Y \quad \Longrightarrow \quad ABx = BAx = B(\lambda_0 x) = \lambda_0 Bx \quad \Longrightarrow \quad Bx \in Y.$$

U daljnjem pretpostavljamo da A nema svojstvenih vrijednosti različitih od nule. Prema teoremu 2.11. to znači da je $\sigma(A) = \{0\}$, dakle, spektralni radijus $\nu(A)$ jednak je nuli. Zamjenom operatora A s operatorom $\frac{1}{\|A\|}A$ vidimo da bez smanjenja općenitosti možemo pretpostavljati da je $\|A\| = 1$.

Dokaz provodimo metodom suprotnog: pretpostavljamo da je A kompaktan, da je $\nu(A) = 0$, da je $\|A\| = 1$ i da ne postoji netrivijalan zatvoren potprostor od X koji je invarijantan s obzirom na sve operatore $B \in \mathcal{T}$. Kako je za svaki vektor $x \neq 0$ potprostor

$$\mathrm{Cl}\{Bx;\ \ B \in \mathcal{T}\} \neq \{0\}$$

očito invarijantan s obzirom na svaki operator $B \in \mathcal{T}$, zaključujemo da je za svaki $x \neq 0$ potprostor $\{Bx;\ B \in \mathcal{T}\}$ gust u X.

Budući da je $\|A\| = 1$, postoji vektor x_0 takav da je $\|Ax\| > 1$. Tada je

$$\|x_0\| = \|A\| \cdot \|x_0\| \geq \|Ax_0\| > 1, \tag{2.9}$$

pa slijedi da zatvorena kugla

$$K = \{x \in X;\ \ \|x - x_0\| \leq 1\}$$

ne sadrži nulvektor. Sada za $B \in \mathcal{T}$ stavimo

$$U(B) = \{y \in X;\ \ \|By - x_0\| < 1\}.$$

Tada je $U(B)$ otvoren neprazan podskup od X, pa budući da je za svaki $x \neq 0$ potprostor $\{Bx;\ B \in \mathcal{T}\}$ gust u X, zaključujemo da vrijedi

$$\forall x \in X \setminus \{0\} \qquad \exists B \in \mathcal{T} \qquad \text{takav da je} \qquad \|Bx - x_0\| < 1, \qquad \text{tj.} \qquad x \in U(B).$$

Drugim riječima,

$$X \setminus \{0\} = \bigcup_{B \in \mathcal{T}} U(B) \tag{2.10}$$

Imamo

$$\alpha = \frac{\|Ax_0\| - 1}{2} > 0,$$

pa za svaki $x \in K$ vrijedi

$$1 + \alpha < \|Ax_0\| \leq \|A(x_0 - x)\| + \|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x_0 - x\| + \|Ax\| \leq 1 + \|Ax\|.$$

Dakle,

$$\|Ax\| > \alpha \quad \forall x \in K \qquad \Longrightarrow \qquad \|y\| \geq \alpha > 0 \quad \forall y \in \mathrm{Cl}(AK).$$

Dakle, $0 \notin \mathrm{Cl}(AK)$, odnosno $\mathrm{Cl}(AK) \subseteq X \setminus \{0\}$. Zbog (2.10) imamo

$$\mathrm{Cl}(AK) \subseteq \bigcup_{B \in \mathcal{T}} U(B).$$

Budući da je operator A kompaktan, skup $\mathrm{Cl}(AK)$ je kompaktan. Stoga postoji konačan podskup $\{B_1, B_2, \ldots, B_n\} \subseteq \mathcal{T}$ takav da je

$$\mathrm{Cl}(AK) \subseteq U(B_1) \cup U(B_1) \cup \cdots \cup U(B_n).$$

Stavimo

$$c = \max\{\|B_1\|, \|B_2\|, \ldots, \|B_n\|\}.$$

Kako je $x_0 \in K$ imamo $Ax_0 \in \mathrm{Cl}(AK)$ pa je $Ax_0 \in U(B_{i_1})$ za neki $i_1 \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Tada je $\|B_{i_1}Ax_0 - x_0\| < 1$, tj. $B_{i_1}Ax_0 \in K$. No tada je $AB_{i_1}Ax_0 \in \mathrm{Cl}(AK)$, pa postoji $i_2 \in \{1, 2, \ldots, n\}$ takav da je

$$AB_{i_1}Ax_0 \in U(B_{i_2}), \qquad \text{odnosno}, \qquad B_{i_2}AB_{i_1}Ax_0 \in K.$$

Nastavimo li na isti način, dolazimo do niza $(i_k)_{k\in\mathbb{N}}$ u skupu $\{1, 2, \ldots, n\}$ takvog da za svaki $p \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$B_{i_p}AB_{i_{p-1}}A \cdots AB_{i_1}Ax_0 \in K. \tag{2.11}$$

Budući da operator A komutira sa svim operatorima B_i, slijedi

$$x_p = B_{i_p}B_{i_{p-1}} \cdots B_{i_1}A^p x_0 \in K \qquad \forall p \in \mathbb{N}.$$

Kako je $\|B_i\| \leq c \quad \forall i$, odatle slijedi

$$\|x_p\| \leq \|B_{i_p}\| \cdot \|B_{i_{p-1}}\| \cdots \|B_{i_1}\| \cdot \|A^p\| \cdot \|x_0\| \leq c^p\|A^p\| \cdot \|x_0\| = \|(cA)^p\| \cdot \|x_0\|. \tag{2.12}$$

Budući da je

$$\lim_{p\to\infty} \|(cA)^p\|^{1/p} = c \lim \|A^p\|^{1/p} = c\nu(A) = 0,$$

red potencija $\sum_{p\in\mathbb{N}} \|(cA)^p\|\lambda^p$ konvergira za svaki $\lambda \in \mathbb{C}$ i, posebno, za $\lambda = 1$. Iz konvergencije reda $\sum_{p\in\mathbb{N}} \|(cA)^p\|$ slijedi

$$\lim_{p\to\infty} \|(cA)^p\| = 0. \tag{2.13}$$

Iz (2.12) i (2.13) nalazimo da je

$$\lim_{p\to\infty} \|x_p\| = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \lim_{p\to\infty} x_p = 0.$$

Kako je $x_p \in K$ to je $\|x_p - x_0\| \leq 1$, pa prijelazom na limes dobivamo

$$\|x_0\| = \lim_{p\to\infty} \|x_p - x_0\| \leq 1.$$

No to je u kontradikciji s (2.9). Ova kontradikcija dokazuje istinitost tvrdnje u teoremu.

Zadatak 2.12. *Neka je X Banachov prostor i $A \in B(X)$. Dokažite da je*

$$Y = \{x \in X;\ \text{niz } (\|A^n x\|)_{n\in\mathbb{N}} \text{ je ograničen}\}$$

potprostor od X koji je hiperinvarijantan s obzirom na operator A.

Zadatak 2.13. *Neka je X Hilbertov prostor i $A \in B(X)$ normalan operator. Dokažite da je*

$$Y = \{x \in X;\ \|A^n x\| \le \|x\| \quad \forall n \in \mathbb{N}\}$$

zatvoren potprostor od X koji je hiperinvarijantan s obzirom na operator A.

Poglavlje 3

Kompaktni operatori na unitarnim prostorima

3.1 Kompaktni simetrični operatori

Neka je X unitaran prostor. Linearan operator $A : X \to X$ zove se **simetričan** ako vrijedi

$$(Ax|y) = (x|Ay) \qquad \forall x, y \in X.$$

Naravno, ako je prostor X Hilbertov i operator A ograničen, A je simetričan ako i samo ako je on hermitski, tj. $A^* = A$.

Propozicija 3.1. *Neka je A ograničen simetričan operator na unitarnom prostoru X. Tada je*

$$\|A\| = \sup\{|(Ax|x)|;\ x \in X, \|x\| \leq 1\}.$$

Dokaz: Desnu stranu gornje jednakosti koju trebamo dokazati označimo sa M. Zbog korolara 1.2. primijenjenog na upotpunjenje prostora X nalazimo da je $M \leq \|A\|$. Dokažimo i obrnutu nejednakost. Neka su $x, y \in X$, $\|x\| \leq 1$, $\|y\| \leq 1$. Tada je

$$(A(x+y)|x+y) - (A(x-y)|x-y) = 4\text{Re}(Ax|y).$$

Kako za svaki $z \in X$ očito vrijedi $|(Az|z)| \leq M\|z\|^2$, iz gornje jednakosti i iz jednakosti paralelograma izvodimo:

$$4|\text{Re}(Ax|y)| \leq |(A(x+y)|x+y)| + |(A(x-y)|x-y)| \leq M(\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2) = 2M(\|x\|^2 + \|y\|^2) \leq 4M.$$

Dakle, vrijedi

$$|\text{Re}(Ax|y)| \leq M, \qquad x, y \in X, \|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1.$$

Za bilo koje $x, y \in X$, takve da je $\|x\| \leq 1$ i $\|y\| \leq 1$, neka je $\lambda \in \mathbb{C}$ takav da je $|\lambda| = 1$ i $|(Ax|y)| = \lambda(Ax|y)$. Tada imamo

$$|(Ax|y)| = \lambda(Ax|y) = (A(\lambda x)|y) = |\text{Re}(A(\lambda x)|y)| \leq M.$$

Primjenom korolara 1.2. slijedi $\|A\| \leq M$. Iz dvije nejednakosti zaključujemo da je $\|A\| = M$ i time je propozicija dokazana.

Ako je unitaran prostor X beskonačnodimenzionalan onda jedinična sfera

$$S = \{x \in X;\ \|x\| = 1\}$$

nije kompaktan, čak ni relativno kompaktan skup. Ipak, dokazat ćemo da se u formuli

$$\|A\| = \sup\{|(Ax|x)|;\ x \in S\}$$

za kompaktan simetričan operator A supremum dostiže, tj. radi se o maksimumu. Precizno:

Teorem 3.1. *Neka je X realan ili kompleksan unitaran prostor i neka je A kompaktan simetričan operator na X. Tada je ili $\|A\|$ ili $-\|A\|$ svojstvena vrijednost operatora A. Ako je e jedinični svojstveni vektor za tu svojstvenu vrijednost, onda je*

$$\|A\| = |(Ae|e)| = \sup\{|(Ax|x)|;\ x \in S\}.$$

Dokaz: Ako je $A = 0$, tvrdnja je trivijalna. Pretpostavimo da je $A \neq 0$. Iz propozicije 3.1. slijedi da postoji niz jediničnih vektora (z_n) takav da je

$$\|A\| = \lim_{n\to\infty} |(Az_n|z_n)|.$$

Budući da je $\|A\| \neq 0$ možemo pretpostaviti da je $(Az_n|z_n) \neq 0\ \forall n$. Nadalje, zbog simetričnosti operatora A svi brojevi $(Az_n|z_n)$ su realni. Stoga postoji podniz (y_n) niza (z_n) takav da su svi brojevi $(Ay_n|y_n)$ istog predznaka. Tada vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} (Ay_n|y_n) = \lambda,$$

gdje je $\lambda = \|A\|$ ako je $(Ay_n|y_n) > 0\ \forall n$, a $\lambda = -\|A\|$ ako je $(Ay_n|y_n) < 0\ \forall n$. Budući da je operator A kompaktan i svi su vektori y_n jedinični, postoji podniz (x_n) niza (y_n) takav da je niz (Ax_n) konvergentan u X. Neka je x limes tog niza i stavimo $v_n = Ax_n - \lambda x_n$. Tada imamo

$$\|v_n\|^2 = (Ax_n - \lambda x_n|Ax_n - \lambda x_n) = \|Ax_n\|^2 - 2\lambda(Ax_n|x_n) + \lambda^2 \leq 2\lambda^2 - 2\lambda(Ax_n|x_n),$$

jer je $\|Ax_n\|^2 \leq \|A\|^2 = \lambda^2$. Međutim, $\lambda = \lim(Ax_n|x_n)$ pa slijedi da desna strana gornje nejednakosti teži k nuli. Dakle, (v_n) je nul$-$niz. Kako je

$$x_n = \frac{1}{\lambda}Ax_n - \frac{1}{\lambda}v_n,$$

zaključujemo da je

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{1}{\lambda}\lim_{n\to\infty} Ax_n - \frac{1}{\lambda}\lim_{n\to\infty} v_n = \frac{1}{\lambda}x.$$

Kako su svi vektori x_n jedinični, slijedi $\|x\| = |\lambda|$ i, posebno, $x \neq 0$. Imamo

$$0 = \lim_{n\to\infty} v_n = \lim_{n\to\infty} Ax_n - \lim_{n\to\infty} \lambda x_n = A\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) - \lambda\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) = A\left(\frac{1}{\lambda}x\right) - \lambda\left(\frac{1}{\lambda}x\right),$$

a odatle je $Ax = \lambda x$. Dakle, λ je svojstvena vrijednost operatora A.

Neka je sada $e \in X$ jedinični vektor takav da je $Ae = \lambda e$. Tada je

$$(Ae|e) = (\lambda e|e) = \lambda(e|e) = \lambda = \pm\|A\| \qquad \Longrightarrow \qquad |(Ae|e)| = \|A\|.$$

Teorem 3.2. *Neka je X realan ili kompleksan unitaran prostor i $A \neq 0$ simetričan operator na X konačnog ranga. Postoje $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ i ortonormirani vektori $e_1, e_2, \ldots, e_n$ takvi da je*

$$|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \cdots \geq |\lambda_n| > 0 \qquad i \qquad Ax = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (x|e_i) e_i \qquad \forall x \in X.$$

Tada je $R(A) = [\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}]$, $N(A) = R(A)^\perp$ i $X = R(A) \dot{+} N(A)$.

Dokaz: Prema teoremu 3.1. postoje jedinični vektor $e_1 \in X$ i $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ takvi da je $|\lambda_1| = \|A\|$ i $Ae_1 = \lambda_1 e_1$. Stavimo $X_1 = X$ i

$$X_2 = \{e_1\}^\perp = \{x \in X;\ (x|e_1) = 0\}.$$

Potprostor X_2 je $A-$invarijantan:

$$(x|e_1) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad (Ax|e_1) = (x|Ae_1) = (x|\lambda_1 e_1) = \lambda_1 (x|e_1) = 0.$$

Neka je $A_2 \in L(X_2)$ restrikcija operatora $A_1 = A$ na potprostor $X_2 : A_2 x = Ax$, $x \in X$. Tada je A_2 kompaktan simetričan operator na unitarnom prostoru X_2 pa ako je $A_2 \neq 0$ po teoremu 3.1. postoje jedinični vektor $e_2 \in X_2$ i $\lambda_2 \in \mathbb{R}$ takvi da je $|\lambda_2| = \|A_2\|$ i $A_2 e_2 = \lambda_2 e_2$. Očito je $\|A_2\| \leq \|A\|$, dakle je $|\lambda_1| \geq |\lambda_2|$. Prema tome,

$$\|e_1\| = \|e_2\| = 1, \quad (e_1|e_2) = 0, \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \quad |\lambda_1| \geq |\lambda_2|, \quad Ae_1 = \lambda_1 e_1, \quad Ae_2 = \lambda_2 e_2.$$

Stavimo sada

$$X_3 = \{e_1, e_2\}^\perp = \{x \in X;\ (x|e_1) = (x|e_2) = 0\}.$$

Tada je potprostor X_3 $A-$invarijantan i neka je $A_3 = A|X_3 = A_2|X_3 \in L(X_3)$. Operator A_3 na unitarnom prostoru X_3 je kompaktan i simetričan, pa ako je $A_3 \neq 0$ po teoremu 3.1. postoji jedinični vektor $e_3 \in X_3$ i $\lambda_3 \in \mathbb{R}$ takvi da je $|\lambda_3| = \|A_3\| \leq \|A_2\| = |\lambda_2|$ i $A_3 e_3 = \lambda_3 e_3$. Dakle,

$$\|e_1\| = \|e_2\| = \|e_3\| = 1, \quad (e_1|e_2) = (e_1|e_3) = (e_2|e_3) = 0,$$

$$|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq |\lambda_3| > 0, \quad Ae_1 = \lambda_1 e_1, \quad Ae_2 = \lambda_2 e_2, \quad Ae_3 = \lambda_3 e_3.$$

Nastavimo li taj postupak dolazimo do ortonormiranih vektora $e_1, e_2, \ldots, e_k$ i realnih brojeva $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ takvih da je $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \cdots \geq |\lambda_k| > 0$ i $Ae_i = \lambda_i e_i$, $i = 1, 2, \ldots, k$. Potprostor

$$X_{k+1} = \{e_1, e_2, \ldots, e_k\}^\perp = \{x \in X;\ (x|e_i) = 0 \ \text{za} \ i = 1, 2, \ldots, k\}$$

je $A-$invarijantan i $A_{k+1} = A|X_{k+1} = A_k|X_{k+1}$ je kompaktan i simetričan operator na unitarnom prostoru X_{k+1}. Ako je $A_{k+1} \neq 0$ postupak se može nastaviti. Očito su $e_i \in R(A)$, pa kako je $R(A)$ konačnodimenzionalan, postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je $A_n \neq 0$ i $A_{n+1} = 0$. Neka je sada $x \in X$ proizvoljan. Njegova ortogonalna projekcija na potprostor $[\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}]$ je

$$\sum_{i=1}^{n} (x|e_i) e_i,$$

pa vrijedi

$$y = x - \sum_{i=1}^{n} (x|e_i) e_i \in X_{n+1} = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}^\perp.$$

Slijedi $Ay = A_{n+1} y = 0$, dakle,

$$Ax = \sum_{i=1}^{n} (x|e_i) Ae_i = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (x|e_i) e_i,$$

a to je upravo formula koju smo trebali dokazati. Iz te formule slijedi $R(A) = [\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}]$ i $N(A) = X_{n+1} = R(A)^\perp$. Time je teorem u potpunosti dokazan.

Teorem 3.3. *Neka je X unitaran prostor i A kompaktan simetričan operator na X beskonačnog ranga. Tada postoji ortonormiran niz $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ u X i niz $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ u $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ takvi da je*

$$|\lambda_n| \geq |\lambda_{n+1}| \quad \forall n \in \mathbb{N}, \qquad\qquad \lim_{n\to\infty} \lambda_n = 0,$$

$$Ax = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n (x|e_n) e_n \qquad \forall x \in X.$$

Posebno, $Ae_n = \lambda_n e_n$, dakle, λ_n su svojstvene vrijednosti operatora A. Štoviše, $\{\lambda_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ je skup svih svojstvenih vrijednosti od A različitih od nule. Ako je $\lambda \neq 0$ svojstvena vrijednost od A onda je

$$X_\lambda(A) = N(\lambda I - A) = \{x \in X;\ Ax = \lambda x\} = [\{e_n;\ n \in \mathbb{N},\, \lambda_n = \lambda\}].$$

Ortonormiran skup $\{e_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ u unitarnom prostoru X je maksimalan ako i samo ako 0 nije svojstvena vrijednost od A. Općenito je $N(A) = \{e_n;\ n \in \mathbb{N}\}^\perp$.

Dokaz: Koristimo teorem 3.1. na isti način kao u dokazu teorema 3.2. Međutim, sada je potprostor $R(A)$ beskonačnodimenzionalan, pa je $X_{n+1} \neq \{0\}$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Dakle, postupkom iz dokaza teorema 3.2. dolazimo do beskonačnog ortonormiranog niza $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ i beskonačnog niza $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ realnih brojeva različitih od nule, takvih da je

$$Ae_n = \lambda_n e_n \qquad \text{i} \qquad |\lambda_n| \geq |\lambda_{n+1}| \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Niz pozitivnih brojeva $(|\lambda_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ je monotono padajući pa postoji

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} |\lambda_n| \geq 0.$$

Pretpostavimo da je $\alpha > 0$. Stavimo

$$x_n = \frac{1}{\lambda_n} e_n, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Tada je niz $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ u X ograničen:

$$\|x_n\| = \frac{1}{|\lambda_n|}\|e_n\| = \frac{1}{|\lambda_n|} \leq \frac{1}{\alpha}.$$

Kako je $Ax_n = e_n$, iz kompaktnosti operatora A slijedi da niz $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ima konvergentan podniz. No to je nemoguće jer je niz $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ortonormiran. Ova kontradikcija dokazuje da je nužno $\alpha = 0$. Dakle,

$$\lim_{n\to\infty} |\lambda_n| = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \lim_{n\to\infty} \lambda_n = 0.$$

Neka je sada $x \in X$ proizvoljan. Za $n \in \mathbb{N}$ stavimo

$$y_n = x - \sum_{i=1}^{n} (x|e_i) e_i.$$

Tada je uz oznake iz dokaza teorema 3.2. $y_n \in X_{n+1}$, dakle

$$\|Ay_n\| = \|A_{n+1} y_n\| \leq \|A_{n+1}\| \|y_n\| = |\lambda_{n+1}| \|y_n\| \leq |\lambda_{n+1}| \|x\|.$$

Slijedi

$$\lim_{n\to\infty} \|Ay_n\| = 0,$$

a kako je

$$Ay_n = Ax - \sum_{i=1}^{n}(x|e_i)Ae_i = Ax - \sum_{i=1}^{n}\lambda_i(x|e_i)e_i,$$

slijedi

$$\lim_{n\to\infty}\left\|Ax - \sum_{i=1}^{n}\lambda_i(x|e_i)e_i\right\| = 0.$$

Time je dokazano

$$Ax = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(x|e_i)e_i = \sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n(x|e_n)e_n.$$

Neka je λ svojstvena vrijednost operatora A i neka je $x \neq 0$ takav da je $Ax = \lambda x$. Slijedi

$$\lambda x = \sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n(x|e_n)e_n.$$

Skalarni produkt s e_k daje

$$\lambda(x|e_k) = \lambda_k(x|e_k), \qquad \text{tj.} \qquad (\lambda - \lambda_k)(x|e_k) = 0.$$

Ako je $\lambda \neq \lambda_k\ \forall k \in \mathbb{N}$, tada je $(x|e_k) = 0\ \forall k \in \mathbb{N}$, pa slijedi $\lambda x = 0$. Kako je $x \neq 0$ zaključujemo da je $\lambda = 0$. Time je dokazano da je $\{\lambda_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ skup svih svojstvenih vrijednosti operatora A različitih od nule.

Neka je sada $\lambda \neq 0$ svojstvena vrijednost od A. Očito je $[\{e_n;\ \lambda_n = \lambda\}] \subseteq N(\lambda I - A)$. Dokažimo i obrnutu inkluziju. Neka je $x \in N(\lambda I - A)$, tj. $Ax = \lambda x$. Tada kao i malo prije nalazimo da je $(\lambda - \lambda_n)(x|e_n) = 0$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Odatle slijedi

$$\lambda x = Ax = \sum_{n\in\mathbb{N},\lambda_n=\lambda}\lambda(x|e_n)e_n \qquad \Longrightarrow \qquad x = \sum_{n\in\mathbb{N},\lambda_n=\lambda}(x|e_n)e_n \in [\{e_n;\ \lambda_n = \lambda\}].$$

Dakle, dokazali smo i obrnutu inkluziju $N(\lambda I - A) \subseteq [\{e_n;\ \lambda_n = \lambda\}]$.

Napokon, imamo

$$x \in N(A) \quad\Longleftrightarrow\quad Ax = 0 \quad\Longleftrightarrow\quad (x|e_n) = 0\ \forall n \in \mathbb{N} \quad\Longleftrightarrow\quad x \in \{e_n;\ n \in \mathbb{N}\}^{\perp}.$$

Dakle, $N(A) = \{e_n;\ n \in \mathbb{N}\}^{\perp}$. Odatle se vidi da je $N(A) = \{0\}$, tj. 0 nije svojstvena vrijednost operatora A, ako i samo ako je $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ maksimalan ortonormiran niz u prostoru X. Time je teorem u potpunosti dokazan.

Primijetimo da dokaz teorema 3.2. i 3.3. daje algoritam za izračunavanje svojstvenih vrijednosti i svojstvenih vektora simetričnog kompaktnog operatora na unitarnom prostoru. Nadalje, svaki vektor iz $R(A)$ se može napisati kao red svojstvenih vektora operatora A za svojstvene vrijednosti različite od nule.

Teorem 3.4. *Neka je X Hilbertov prostor i A kompaktan hermitski operator na X beskonačnog ranga. Neka su λ_n i e_n kao u teoremu 3.3. Tada za svaki $x \in X$ vrijedi*

$$x - \sum_{n=1}^{\infty}(x|e_n)e_n \in N(A).$$

Drugim riječima, $N(A) = R(A)^{\perp}$ i $Cl(R(A)) = N(A)^{\perp}$. Nadalje,

$$\sigma(A) = \{0\} \cup \{\lambda_n;\ n \in \mathbb{N}\}.$$

Dokaz: Prije svega primijetimo da konvergencija reda $\sum(x|e_n)e_n$ slijedi iz potpunosti prostora X i iz Besselove nejednakosti $\sum|(x|e_n)|^2 \leq \|x\|^2$. Stavimo li $x_0 = x - \sum(x|e_n)e_n$, zbog neprekidnosti operatora A iz teorema 3.3. slijedi

$$Ax_0 = Ax - \sum_{n=1}^{\infty}(x|e_n)Ae_n = Ax - \sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n(x|e_n)e_n = 0.$$

Odatle i iz teorema 2.11. slijede sve tvrdnje teorema.

Korolar 3.1. *Neka je X Hilbertov prostor A kompaktan hermitski operator na X. Tada je skup vektora $\{e_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ iz teorema 3.3. ortonormirana baza u X ako i samo ako 0 nije svojstvena vrijednost operatora A.*

Dokaz: Tvrdnja slijedi iz teorema 3.3. i iz teorema 1.25.

Zadatak 3.1. *Neka X Hilbertov prostor, A kompaktan hermitski operator na X i $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ i $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nizovi iz teorema 3.3.*

(a) *Neka je $\mu \in \mathbb{C}$ takav da $1/\mu$ nije svojstvena vrijednost operatora A i neka je $b \in X$. Tada jednadžba $x = b + \mu Ax$ ima jedinstveno rješenje $x \in X$ i ono je dano sa*

$$x = b + \mu\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda_n}{1-\mu\lambda_n}(b|e_n)e_n.$$

(b) *Ako je $\mu = 1/\lambda_k$ za neki $k \in \mathbb{N}$ onda jednadžba $x = b + \mu Ax$ ima rješenje ako i samo ako je $b \perp N(I - \mu A)$. U tom je slučaju ortogonalna projekcija x_0 rješenja x te jednadžbe na potprostor $N(I - \mu A)^{\perp}$ jedinstveno određena i dana redom*

$$x_0 = b + \mu\sum_{n\in\mathbb{N},\ \mu\lambda_n\neq 1}\frac{\lambda_n}{1-\mu\lambda_n}(b|e_n)e_n.$$

Skup svih rješenja je $\{x_0 + z;\ z \in N(I - \mu A)\}$.

Uputa: Uočite da je niz $\left(\dfrac{\lambda_n}{1-\mu\lambda_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ograničen.

Teorem 3.4. ima sljedeću generalizaciju na proizvoljne kompaktne operatore na Hilbertovim prostorima, što je ujedno i generalizacija propozicije 2.4:

Teorem 3.5. *Neka su X i Y Hilbertovi prostori i $B : X \to Y$ kompaktan operator beskonačnog ranga. Tada postoje ortonormirani nizovi $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ u X i $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ u Y i niz pozitivnih brojeva $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ takvi da vrijedi*

$$\mu_n \geq \mu_{n+1} > 0 \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \qquad \lim_{n\to\infty}\mu_n = 0,$$

i takvi da ako za proizvoljan $x \in X$ sa x_0 označimo ortogonalnu projekciju vektora x na potprostor $\{e_n;\ n \in \mathbb{N}\}^{\perp}$, onda je

$$x = x_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(x|e_n)e_n, \qquad Bx = \sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n(x|e_n)f_n, \qquad Bx_0 = 0.$$

Dokaz: Operator $A = B^*B$ je kompaktan hermitski operator na Hilbertovom prostoru X i neka su $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ i $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nizovi iz teorema 3.4. Tada je za svako $n \in \mathbb{N}$

$$\lambda_n = (Ae_n|e_n) = (B^*Be_n|e_n) = \|Be_n\|^2 > 0.$$

Neka je $\mu_n > 0$ takav da je $\mu_n^2 = \lambda_n$ i stavimo

$$f_n = \frac{1}{\mu_n}Be_n, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Tada je

$$(f_n|f_m) = \frac{(Be_n|Be_m)}{\mu_n\mu_m} = \frac{(Ae_n|e_m)}{\mu_n\mu_m} = \frac{\lambda_n\delta_{n,m}}{\mu_n\mu_m} = \delta_{n,m}.$$

Dakle, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ je ortonormiran niz u Y.

Za $x \in X$ imamo

$$x = x_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(x|e_n)e_n$$

pa primjenom neprekidnog operatora B dobivamo

$$Bx = Bx_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(x|e_n)Be_n = Bx_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\mu_n(x|e_n)f_n.$$

Napokon,

$$\|Bx_0\|^2 = (Bx_0|Bx_0) = (B^*Bx_0|x_0) = (Ax_0|x_0) = 0,$$

dakle, $Bx_0 = 0$. Time je teorem 3.5. u potpunosti dokazan.

Formula dana u teoremu 3.5. zove se **Schmidtov prikaz operatora** B.

3.2 Integralni operatori

Neka je K kompaktan Hausdorffov topološki prostor. Kao i obično sa $C(K)$ označavamo Banachov prostor svih neprekidnih funkcija $f : K \to \mathbb{C}$ s normom

$$\|f\|_\infty = \max\{|f(t)|;\ \ t \in K\}.$$

Za podskup $S \subseteq C(K)$ definiramo **dijametar** $\delta(S)$ skupa S sa

$$\delta(S) = \sup\{\|f - g\|_\infty;\ \ f, g \in S\}.$$

Skup S zove se **ograničen** ako je $\delta(S) < +\infty$.

Skup $S \subseteq C(K)$ zove se **ekvikontinuiran u točki** $t_0 \in K$ ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji otvoren skup $U \subseteq K$ takav da je $t_0 \in U$ i da za svaku funkciju $f \in S$ vrijedi

$$t \in U \qquad \Longrightarrow \qquad |f(t) - f(t_0)| < \varepsilon. \tag{3.1}$$

Skup $S \subseteq C(K)$ zove se **ekvikontinuiran** ako je S ekvikontinuiran u svakoj točki $t_0 \in K$.

Svaki je konačan podskup $S = \{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ od $C(K)$ ekvikontinuiran. Doista, neka je $t_0 \in K$ i $\varepsilon > 0$. Za svaki $i \in \{1, \ldots, n\}$ funkcija f_i je neprekidna u točki t_0 što znači da postoji otvoren skup $U_i \subseteq K$ takav da vrijedi

$$t \in U_i \qquad \Longrightarrow \qquad |f_i(t) - f_i(t_0)| < \varepsilon.$$

Tada očito za otvoren skup $U = U_1 \cap U_2 \cap \cdots \cap U_n$ i za svaku $f \in S = \{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ vrijedi (3.1).

Sljedeći teorem daje jednostavnu karakterizaciju relativno kompaktnih podskupova Banachovog prostora $C(K)$, koja podsjeća na situaciju u $\mathbb{R}^n$: skup $S \subseteq R^n$ je relativno kompaktan ako i samo ako je ograničen.

Teorem 3.6. (**Arzelà-Ascoli**) *Neka je K kompaktan Hausdorffov topološki prostor i $S \subseteq C(K)$. Skup S je relativno kompaktan u Banachovom prostoru $C(K)$ ako i samo ako je S ograničen i ekvikontinuiran.*

Za dokaz Arzelà-Ascolijevog teorema treba nam:

Zadatak 3.2. *Neka je $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz u $C(K)$ takav da je skup $\{f_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ ograničen i ekvikontinuiran i neka je $\varepsilon > 0$. Dokažite da tada niz $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ima podniz $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ takav da je*

$$\|g_p - g_q\|_\infty < \varepsilon \qquad \forall p, q \in \mathbb{N}.$$

Uputa: Koristeći kompaktnost prostora K dokažite da postoje otvoreni skupovi $U_1, \ldots, U_m$ koji pokrivaju K i točke $t_j \in U_j$ tako da za svaki $j \in \{1, \ldots, m\}$ vrijedi:

$$n \in \mathbb{N}, \quad t \in U(s) \qquad \Longrightarrow \qquad |f_n(t) - f_n(t_j)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Sada koristeći Bolzano−Weierstrassov teorem u $\mathbb{C}$ i promatrajući redom u m koraka vrijednosti konstruiranih podnizova u točkama $t_1, \ldots, t_m$ pokažite da postoji podniz $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niza $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ takav da je za svaki $j \in \{1, \ldots, m\}$ niz $(h_n(t_j))_{n\in\mathbb{N}}$ u $\mathbb{C}$ konvergentan. Napokon, za neko $n_0 \in \mathbb{N}$ podniz $g_n = h_{n_0+n}$, $n \in \mathbb{N}$, ima traženo svojstvo.

Dokaz teorema 3.6: Neka je S ograničen i ekvikontinuiran podskup od $C(K)$. Neka je (f_n) niz u S. Za $\varepsilon = 2^{-1}$ zadatak 3.2. daje podniz $(f_{1,n})_{n\in\mathbb{N}}$ niza $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ takav da je

$$\|f_{1,p} - f_{1,q}\|_\infty < \frac{1}{2} \qquad \forall p, q \in \mathbb{N}.$$

Primijenimo li sada zadatak 3.2. na niz $(f_{1,n})_{n\in\mathbb{N}}$ i na $\varepsilon = 2^{-2}$ dolazimo do podniza $(f_{2,n})_{n\in\mathbb{N}}$ niza $(f_{1,n})_{n\in\mathbb{N}}$ takvog da je

$$\|f_{2,p} - f_{2,q}\|_\infty < \frac{1}{2^2} \qquad \forall p, q \in \mathbb{N}.$$

Polazeći od niza $(f_{2,n})_{n\in\mathbb{N}}$ i $\varepsilon = 2^{-3}$ dolazimo do podniza $(f_{3,n})_{n\in\mathbb{N}}$ niza $(f_{2,n})_{n\in\mathbb{N}}$ takvog da je

$$\|f_{3,p} - f_{3,q}\|_\infty < \frac{1}{2^3} \qquad \forall p, q \in \mathbb{N}.$$

Na taj korak po korak dolazimo do beskonačnog niza nizova $(f_{k,n})_{n\in\mathbb{N}}$, $k \in \mathbb{N}$, takvih da je $(f_{1,n})_{n\in\mathbb{N}}$ podniz niza $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, da je za svaki $k \geq 2$ $(f_{k,n})_{n\in\mathbb{N}}$ podniz niza $(f_{k-1,n})_{n\in\mathbb{N}}$ i da vrijedi

$$\|f_{k,p} - f_{k,q}\|_\infty < \frac{1}{2^k} \qquad \forall k, p, q \in \mathbb{N}.$$

Stavimo li $S_k = \{f_{k,n};\ n \in \mathbb{N}\}$ imamo padajući niz skupova

$$S \supseteq S_1 \supseteq S_2 \supseteq S_3 \supseteq \cdots$$

takav da je $\delta(S_k) \leq 2^{-k}$.

Stavimo sada $h_k = f_{k,k}$, $k \in \mathbb{N}$. Tada je $(h_k)_{k\in\mathbb{N}}$ podniz niza $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljan. Neka je $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $\epsilon > 2^{-n_0}$. Za $p, q \geq n_0$ su tada $h_p \in S_p \subseteq S_{n_0}$ i $h_q \in S_q \subseteq S_{n_0}$ pa vrijedi

$$\|h_p - h_q\|_\infty \leq \delta(S_{n_0}) \leq \frac{1}{2^{n_0}} < \varepsilon.$$

Dakle, niz $(h_k)_{k\in\mathbb{N}}$ je Cauchyjev, a kako je prostor $C(K)$ potpun, taj je niz konvergentan u $C(K)$.

Time je dokazano da svaki niz u S ima podniz koji je konvergentan u $C(K)$, a to upravo znači da je skup S relativno kompaktan u $C(K)$.

Pretpostavimo sada da je S relativno kompaktan podskup Banachovog prostora $C(K)$. Neka su $t_0 \in K$ i $\varepsilon > 0$. Tada prema zadatku 2.1. skup S ima konačnu $\frac{\varepsilon}{3}$−mrežu $\{f_1, f_2, \ldots, f_m\}$. Dakle

$$\forall f \in S \quad \exists j \in \{1, 2, \ldots, m\} \qquad \text{takav da je} \qquad \|f - f_j\|_\infty < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Sve funkcije f_j su neprekidne u izabranoj točki t_0 i ima ih konačno mnogo pa postoji otvoren skup $U \subseteq K$ takav da je $t_0 \in U$ i da vrijedi

$$|f_j(t) - f_j(t_0)| < \frac{\varepsilon}{3} \qquad \forall t \in U, \quad \forall j \in \{1, 2, \ldots, m\}.$$

Sada iz gornje dvije nejednakosti nalazimo da za proizvoljno izabranu funkciju $f \in S$ i za $t \in U$ vrijedi

$$|f(t_0)-f(t)| \leq |f(t_0)-f_j(t_0)|+|f_j(t_0)-f_j(t)|+|f_j(t)-f(t)| \leq 2\|f-f_j\|_\infty+|f_j(t_0)-f_j(t)| \leq 2\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Dakle, skup S je ekvikontinuiran u točki t_0, a kako je t_0 bila proizvoljno odabrana točka iz K, skup S je ekvikontinuiran. Zbog zadatka 2.1. skup S je i ograničen.

U daljnjem sa Δ označavamo proizvoljan $n-$kvadar u $\mathbb{R}^n$ tj. skup oblika

$$\Delta = \{t = (t_1, t_2, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}^n;\ a_i \leq t_i \leq b_i \text{ za } i = 1, 2, \ldots, n\},$$

gdje su $-\infty < a_i < b_i < +\infty$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Prostor $C(\Delta)$ je Banachov u odnosu na maksimum normu

$$\|x\|_\infty = \max\{|x(t)|;\ t \in \Delta\}, \qquad x \in C(\Delta).$$

Taj prostor zvat ćemo *Banachov prostor* $C(\Delta)$. Termin *unitaran prostor* $C(\Delta)$ upotrebljavat ćemo za isti vektorski prostor $C(\Delta)$ snabdjeven skalarnim produktom

$$(x|y) = \int_\Delta x(t)\overline{y(t)}\mathrm{d}t = \int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2}\cdots\int_{a_n}^{b_n} x(t_1, t_2, \ldots, t_n)\overline{y(t_1, y_2, \ldots, t_n)}\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2\cdots\mathrm{d}t_n.$$

Normu u unitarnom prostoru $C(\Delta)$ označavat ćemo sa $\|\cdot\|_2$:

$$\|x\|_2 = \left(\int_\Delta |x(t)|^2\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Analogna značenja imaju termini Banachov prostor $C(\Delta\times\Delta)$ i unitaran prostor $C(\Delta\times\Delta)$.

Teorem 3.7. *Neka je $k \in C(\Delta\times\Delta)$ i neka je za $x \in C(\Delta)$ funkcija Ax na Δ definirana pomoću integrala*

$$(Ax)(s) = \int_\Delta k(s,t)x(t)\,dt, \qquad s \in \Delta.$$

Tada je A kompaktan operator

(*a*) *s unitarnog prostora $C(\Delta)$ u Banachov prostor $C(\Delta)$,*

(*b*) *s Banachovog prostora $C(\Delta)$ u Banachov prostor $C(\Delta)$,*

(*c*) *s unitarnog prostora $C(\Delta)$ u unitaran prostor $C(\Delta)$ i*

(*d*) *s Banachovog prostora $C(\Delta)$ u unitaran prostor $C(\Delta)$.*

Dokaz: (a) Stavimo $y = Ax$. Tada primjenom nejednakosti Cauchy$-$Schwarz$-$Buniakowskog na unitarnom prostoru $C(\Delta)$ za proizvoljne $s_1, s_2 \in \Delta$ dobivamo

$$|y(s_1) - y(s_2)| = \left|\int_\Delta (k(s_1,t) - k(s_2,t))x(t)\mathrm{d}t\right| \leq \left(\int_\Delta |k(s_1,t) - k(s_2,t)|^2\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_\Delta |x(t)|^2\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Kako je skup $\Delta\times\Delta$ kompaktan, funkcija k je uniformno neprekidna na $\Delta\times\Delta$. Stoga za dano $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takav da za $(s_1,t_1), (s_2,t_2) \in \Delta\times\Delta$ vrijed:

$$|s_1 - s_2| + |t_1 - t_2| \leq \delta \qquad \Longrightarrow \qquad |k(s_1,t_1) - k(s_2,t_2)| \leq \varepsilon.$$

Iz gornje nejednakosti stoga za $s_1, s_2 \in \Delta$, takve da je $|s_1 - s_2| \leq \delta$, slijedi

$$|y(s_1) - y(s_2)| \leq \varepsilon\sqrt{\mu(\Delta)}\|x\|_2,$$

gdje je $\mu(\Delta)$ mjera (ili volumen) $n-$kvadra Δ :

$$\mu(\Delta) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2)\cdots(b_n - a_n).$$

To pokazuje da je funkcija $y = Ax$ neprekidna na Δ. Dakle, A je linearan operator sa $C(\Delta)$ u $C(\Delta)$. Štoviše, vidi se da operator A jediničnu kuglu u unitarnom prostoru $C(\Delta)$ prevodi u ekvikontinuiran skup funkcija u $C(\Delta)$. Nadalje, neka je $M > 0$ takav da je

$$\int_\Delta |k(s,t)|^2 \mathrm{d}t \leq M \qquad \forall s \in \Delta.$$

Tada za $x \in X$, takav da je $\|x\|_2 \leq 1$, i za svaku točku $s \in \Delta$ nalazimo ponovo pomoću CSB−nejednakosti:

$$|y(s)| = \left| \int_\Delta k(s,t)x(t)\mathrm{d}t \right| \leq \left(\int_\Delta |k(s,t|^2 \mathrm{d}t \right)^{\frac{1}{2}} \|x\|_2 \leq \sqrt{M}.$$

Odatle slijedi da je A ograničen operator s unitarnog prostora $C(\Delta)$ u Banachov prostor $C(\Delta)$. Nadalje, ako je K_2 jedinična kugla u unitarnom prostoru $C(\Delta)$ skup funkcija AK_2 je ekvikontinuiran i ograničen, dakle po Arzelà−Ascolijevom teoremu taj je skup relativno kompaktan u Banachovom prostoru $C(\Delta)$. Time je dokazano da je A kompaktan kao operator s unitarnog prostora $C(\Delta)$ u Banachov prostor $C(\Delta)$.

Tvrdnje (b), (c) i (d) slijede neposredno iz tvrdnje (a) zbog nejednakosti među normama $\|\cdot\|_2$ i $\|\cdot\|_\infty$:

$$\|x\|_2 = \sqrt{\int_\Delta |x(t)|^2 \mathrm{d}t} \leq \sqrt{\mu(\Delta)} \|x\|_\infty.$$

Doista, neka su K_2 i K_∞ zatvorene jedinične kugle u $C(\Delta)$ u odnosu na $\|\cdot\|_2$ i $\|\cdot\|_\infty$. Iz gornje nejednakosti slijedi

$$\frac{1}{\sqrt{\mu(\Delta)}} K_\infty \subseteq K_2,$$

dakle, ako je AK_2 relativno kompaktan u odnosu na neku normu od $C(\Delta)$, onda je i AK_∞ relativno kompaktan u odnosu na tu istu normu. Nadalje, iz gornje nejednakosti slijedi

$$\|y_n - y\|_2 \leq \sqrt{\mu(\Delta)} \|y_n - y\|_\infty,$$

dakle, ako je neki niz (y_n) u $C(\Delta)$ konvergentan u odnosu na normu $\|\cdot\|_\infty$, onda je on konvergentan i u odnosu na normu $\|\cdot\|_2$.

Operator A iz teorema 3.7. zove se **integralni operator** a funkcija k je **jezgra** integralnog operatora A.

Upotpunjenje unitarnog prostora $C(\Delta)$ je Hilbertov prostor $L_2(\Delta)$ svih klasa izmjerivih funkcija $x : \Delta \to \mathbb{C}$ takvih da je funkcija $t \mapsto |x(t)|^2$ integrabilna. Budući da je operator A iz teorema 3.7. neprekidan s unitarnog prostora $C(\Delta)$ u Banachov prostor $C(\Delta)$ on se jedinstveno proširuje do neprekidnog operatora $\tilde{A}$ s Hilbertovog prostora $L_2(\Delta)$ u Banachov prostor $C(\Delta)$. Iz kompaktnosti operatora A slijedi kompaktnost operatora $\tilde{A}$. Nadalje, kako za svaku funkciju $x \in C(\Delta)$ vrijedi $\|x\|_2 \leq \sqrt{\mu(\Delta)} \|x\|_\infty$, neposredno dobivamo:

Korolar 3.2. *Neprekidno proširenje $\tilde{A}$ operatora A iz teorema 3.7. na Hilbertov prostor $L_2(\Delta)$ je kompaktan operator*

(a) *s Hilbertovog prostora $L_2(\Delta)$ u Banachov prostor $C(\Delta)$,*

(b) *s Hilbertovog prostora $L_2(\Delta)$ u unitaran prostor $C(\Delta)$ i*

(c) *s Hilbertovog prostora $L_2(\Delta)$ u Hilbertov prostor $L_2(\Delta)$.*

Napomenimo da se bez bitnih izmjena teorem 3.7. i korolar 3.2. mogu dokazati i uz slabije pretpostavke o funkciji $k : \Delta \times \Delta \to \mathbb{C}$. Nije nužno da je ta funkcija neprekidna. Dovoljno je npr. da je funkcija k izmjeriva i da postoji $M > 0$ takav da vrijedi

$$\int_\Delta (|k(s,t)| + |k(t,s)|)\,\mathrm{d}t \le M \qquad \forall s \in \Delta,$$

pa čak i ako ta nejednakost vrijedi za sve $s \in \Delta \setminus S$, gdje je $S \subseteq \Delta$ skup mjere nula.

Zadatak 3.3. *Za $f \in C([0,1])$ definiramo funkciju $Vf : [0,1] \to \mathbb{C}$ sa*

$$(Vf)(s) = \int_0^s f(t)\,dt, \qquad s \in [0,1].$$

Dokažite da je V kompaktan operator

(a) *s unitarnog prostora $C([0,1])$ u Banachov prostor $C([0,1])$,*

(b) *s Banachovog prostora $C([0,1])$ u Banachov prostor $C([0,1])$,*

(c) *s unitarnog prostora $C([0,1])$ u unitaran prostor $C([0,1])$ i*

(d) *s Banachovog prostora $C([0,1])$ u unitaran prostor $C([0,1])$.*

Integralni operator V iz prethodnog zadatka zove se **Volterrin operator**.

Zadatak 3.4. *Neka je $\tilde{V}$ neprekidno proširenje Volterrinog operatora V iz zadatka 3.3. na Hilbertov prostor $L_2([0,1])$. Dokažite da je $\tilde{V}$ kompaktan operator*

(a) *s Hilbertovog prostora $L_2([0,1])$ u Banachov prostor $C([0,1])$,*

(b) *s Hilbertovog prostora $L_2([0,1])$ u unitaran prostor $C([0,1])$ i*

(c) *s Hilbertovog prostora $L_2([0,1])$ u Hilbertov prostor $L_2([0,1])$.*

Zadatak 3.5. *Dokažite da za operatore $V \in B(C([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$ iz zadatka 3.3. i $\tilde{V} \in B(L_2([0,1]))$ iz zadatka 3.4. vrijedi $\sigma(V) = \sigma(\tilde{V}) = \{0\}$.*

Posljedica teorema 2.11. je sljedeća analogija Cramerovog teorema o sustavima linearnih algebarskih jednadžbi:

Teorem 3.8. (**Fredholmova alternativa**) *Neka je $k \in C(\Delta \times \Delta)$ i $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda \ne 0$. Integralna jednadžba*

$$\lambda x(s) - \int_\Delta k(s,t)x(t)\,dt = y(s), \qquad s \in \Delta,$$

ima jedinstveno rješenje za svaku funkciju $y \in C(\Delta)$ ako i samo ako pripadna homogena jednadžba

$$\lambda x(s) - \int_\Delta k(s,t)x(t)\,dt = 0, \qquad s \in \Delta,$$

ima samo trivijalno rješenje.

Dokaz: Neka je A integralni operator na Banachovom prostoru $C(\Delta)$ s jezgrom k :

$$(Ax)(s) = \int_{\Delta} k(s,t)x(t)\mathrm{d}t, \qquad s \in \Delta, \quad x \in C(\Delta).$$

Prema teoremu 3.7. operator A je kompaktan. Gornja nehomogena jednadžba ima oblik

$$\lambda x - Ax = y, \qquad \text{tj.} \quad (\lambda I - A)x = y.$$

Homogena jednadžba

$$Ax = \lambda x$$

ima netrivijalno rješenje ako i samo ako je λ svojstvena vrijednost operatora. Razmotrimo dvije mogućnosti:

Homogena jednadžba ima samo trivijalno rješenje. U tom slučaju $\lambda \neq 0$ nije svojstvena vrijednost operatora A, pa je prema tvrdnji (a) teorema 2.11. operator $\lambda I - A$ invertibilan u algebri $B(C(\Delta))$. Odatle slijedi da nehomogena jednadžba ima jedinstveno rješenje i ono je jednako

$$x = (\lambda I - A)^{-1} y.$$

Homogena jednadžba ima netrivijalno rješenje. Tada je λ svojstvena vrijednost operatora A. Označimo sa X_λ pripadni svojstveni potprostor

$$X_\lambda = \{x \in C(\Delta);\ Ax = \lambda x\} \neq \{0\}.$$

Ako je x_0 rješenje nehomogene jednadžbe, onda to rješenje nije jedinstveno. Doista, tada je

$$x_0 + X_\lambda = \{x_0 + x;\ x \in X_\lambda\}$$

skup svih rješenja nehomogene jednadžbe. Zaključujemo da ili nehomogena jednadžba uopće nema rješenja, ili je skup svih njenih rješenja beskonačan.

Propozicija 3.2. *Neka je $k \in C(\Delta \times \Delta)$ i neka je A operator iz teorema 3.7. promatran kao operator s unitarnog prostora $C(\Delta)$ u unitaran prostor $C(\Delta)$. Operator A je simetričan ako i samo ako je $k(s,t) = \overline{k(t,s)}$ $\forall s, t \in \Delta$.*

Dokaz: Lako se vidi da za $x, y \in C(\Delta)$ vrijedi

$$(Ax|y) - (x|Ay) = \int_{\Delta \times \Delta} [k(s,t) - \overline{k(t,s)}]x(t)\overline{y(s)}\mathrm{d}s\mathrm{d}t.$$

Odatle neposredno slijedi tvrdnja propozicije.

Pretpostavimo da funkcija $k \in C(\Delta \times \Delta)$ ima svojstvo hermitske simetrije $k(s,t) = \overline{k(t,s)}$ i da je pripadni operator A konačnog ranga (i različit od nule). Prema teoremu 3.2. postoje realni brojevi $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ različiti od nule i ortonormirani vektori $e_1, e_2, \ldots, e_n \in C(\Delta)$ takvi da je

$$Ax = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (x|e_i) e_i. \tag{3.2}$$

Tada je

$$Ae_i = \lambda_i e_i, \qquad \text{tj.} \qquad \int_{\Delta} k(s,t) e_i(t)\mathrm{d}t = \lambda_i e_i(s), \qquad \forall s \in \Delta, \quad \forall i. \tag{3.3}$$

Tvrdimo da tada vrijedi:

$$k(s,t) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i(s)\overline{e_i(t)}, \qquad s,t \in \Delta. \tag{3.4}$$

Doista, stavimo

$$\ell(s,t) = k(s,t) - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i(s)\overline{e_i(t)}.$$

Tada za svaku funkciju $x \in C(\Delta)$ i svaki $s \in \Delta$ nalazimo:

$$\int_\Delta \ell(s,t)x(t)\mathrm{d}t = \int_\Delta k(s,t)x(t)\mathrm{d}t - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i(s) \int_\Delta x(t)\overline{e_i(t)}\mathrm{d}t =$$

$$= (Ax)(s) - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (x|e_i) e_i(s) = 0$$

zbog (3.2). Odatle slijedi $\ell(s,t) = 0$ za sve $s,t \in \Delta$. Time smo dokazali (3.4).

Pretpostavimo sada da simetričan operator A nije konačnog ranga. Tada prema teoremu 3.3. postoji niz $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ realnih brojeva različitih od nule i ortonormiran niz $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ u unitarnom prostoru $C(\Delta)$ takvi da je $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = 0$, da vrijedi (3.3) za svaki $i \in \mathbb{N}$ i da je

$$Ax = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i (x|e_i) e_i, \qquad x \in C(\Delta). \tag{3.5}$$

Red u (3.5) konvergira u unitarnom prostoru $C(\Delta)$ i iz dosadašnjih teorema ne slijedi neposredno i konvergencija reda funkcija po točkama. Međutim, to jest istina, štoviše taj red funkcija konvergira uniformno na Δ, tj. konvergira u Banachovom prostoru $C(\Delta)$:

Teorem 3.9. (**Hilbert−Schmidt**) *Pretpostavimo da funkcija $k \in C(\Delta \times \Delta)$ imo svojstvo hermitske simetrije i da pripadni simetričan operator A nije konačnog ranga. Tada za svaku funkciju $x \in C(\Delta)$ red funkcija u* (3.5) *konvergira uniformno prema funkciji Ax. Drugim riječima, red u* (3.5) *konvergira u Banachovom prostoru $C(\Delta)$.*

Dokaz: Za $s \in \Delta$ iz (3.3) slijedi

$$\lambda_i\overline{e_i(s)} = \int_\Delta \overline{k(s,t)}\,\overline{e_i(t)}\,\mathrm{d}t.$$

Označimo li funkciju $t \mapsto \overline{k(s,t)}$ sa k_s, gornja jednakost može se zapisati ovako:

$$\lambda_i\overline{e_i(s)} = (k_s|e_i).$$

Neka je $M > 0$ takav da je

$$\int_\Delta |k(s,t)|^2\mathrm{d}t \le M \qquad \text{tj.} \qquad \|k_s\|^2 \le M \qquad \forall s \in \Delta.$$

Sada Besselova nejednakost za funkciju k_s povlači

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\lambda_i e_i(s)|^2 \le M \qquad \forall s \in \Delta. \tag{3.6}$$

Neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljan. Besselova nejednakost za funkciju x povlači da postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je

$$\sum_{i=n+1}^{\infty} |(x|e_i)|^2 \leq \varepsilon^2. \tag{3.7}$$

Za $p \in \mathbb{N}$ CSB$-$nejednakost u unitarnom prostoru $\mathbb{C}^p$ daje

$$\sum_{i=n+1}^{n+p} |\lambda_i(x|e_i)e_i(s)| \leq \left(\sum_{i=n+1}^{n+p} |\lambda_i e_i(s)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=n+1}^{n+p} |(x|e_i)|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Budući da to vrijedi za svaki $p \in \mathbb{N}$, pomoću (3.6) i (3.7) dobivamo

$$\sum_{i=n+1}^{\infty} |\lambda_i(x|e_i)e_i(s)| \leq \varepsilon\sqrt{M}, \qquad \forall s \in \Delta.$$

Time je dokazano da red u (3.5) konverira uniformno na Δ.

Teorem 3.10. *Pretpostavimo da $k \in C(\Delta\times\Delta)$ definira simetričan operator A beskonačnog ranga. Tada je*

$$k(s,t) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i e_i(s)\overline{e_i(t)}$$

pri čemu red konvergira u unitarnom prostoru $C(\Delta \times \Delta)$. Nadalje,

$$\int_{\Delta\times\Delta} |k(s,t)|^2 \mathrm{d}s\mathrm{d}t = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^2.$$

Dokaz: Pomoću (3.6) nalazimo

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \|\lambda_i e_i\|_2^2 = \int_\Delta \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i e_i(s)|^2 \mathrm{d}s \leq M\mu(\Delta),$$

a kako to vrijedi za svaki $n \in \mathbb{N}$ zaključujemo da red $\sum \lambda_i^2$ konvergira.

Funkcije $\varphi_i(s,t) = e_i(s)\overline{e_i(t)}$ su ortonormirane u unitarnom prostoru $C(\Delta \times \Delta)$, dakle i u Hilbertovom prostoru $L_2(\Delta\times\Delta)$. Stoga iz konvergencije reda $\sum \lambda_i^2$ slijedi da red $\sum \lambda_i\varphi_i$ konvergira prema nekom elementu $k_0 \in L_2(\Delta \times \Delta)$. Dokazat ćemo da je $k_0 = k$. Za $x, y \in C(\Delta)$ i za funkciju $f(s,t) = y(s)\overline{x(t)}$ iz $C(\Delta \times \Delta)$ imamo:

$$(k|f) = \int_{\Delta\times\Delta} k(s,t)\overline{y(s)}x(t)\mathrm{d}s\mathrm{d}t = \int_\Delta \overline{y(s)} \left(\int_\Delta k(s,t)x(t)\mathrm{d}t\right) \mathrm{d}s = \int_\Delta \overline{y(s)}(Ax)(s)\mathrm{d}s =$$

$$= (Ax|y) = \left(\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i(x|e_i) \middle| y\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i(x|e_i)(e_i|y) = \left(\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i\varphi_i \middle| f\right) = (k_0|f).$$

Dakle, vrijedi

$$(k - k_0|f) = 0 \tag{3.8}$$

za svaku funkciju $f \in C(\Delta \times \Delta)$ oblika $f(s,t) = y(s)\overline{x(t)}$. Prema Weierstrassovom teoremu takve funkcije razapinju gust potprostor Banachovog prostora $C(\Delta \times \Delta)$, pa slijedi da (3.8) vrijedi za svaku funkciju $f \in C(\Delta \times \Delta)$. Kako je $C(\Delta \times \Delta)$ gust potprostor Hilbertovog prostora $L_2(\Delta \times \Delta)$, vrijedi $C(\Delta \times \Delta)^{\perp} = \{0\}$, dakle, iz (7) slijedi $k - k_0 = 0$, tj. $k_0 = k$ kao što smo tvrdili. Napokon,

$$\|k\|_2^2 = (k|k) = \left(\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \varphi_i \middle| \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \varphi_j \right) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^2.$$

Time je teorem u potpunosti dokazan.

Može se dokazati da je uz pretpostavku pozitivnosti operatora A konvergencija u teoremu 3.10. uniformna:

Teorem 3.11. (**Mercer**) *Neka funkcija k zadovoljava uvjete teorema 3.10. i pretpostavimo da je $(Ax|x) \geq 0 \ \forall x \in C(\Delta)$. Tada red u teoremu 3.10. konvergira prema funkciji $k(s,t)$ uniformno na $\Delta \times \Delta$.*

Korolar 3.3. *Neka su k, A, λ_i i e_i kao u teoremu 3.10. Tada je*

$$(A^2 x)(s) = \int_{\Delta} h(s,t) x(t) \, dt, \qquad x \in C(\Delta),$$

pri čemu je

$$h(s,t) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^2 e_i(s) \overline{e_i(t)}$$

i konvergencija je uniformna na $\Delta \times \Delta$.

Zadatak 3.6. *Koristeći teorem 3.11. dokažite korolar 3.3.*

Poglavlje 4

Fredholmovi operatori i indeks

4.1 Pseudoinversi

Neka su X i Y Banachovi prostori i $T \in B(X,Y)$. Operator $S \in B(Y,X)$ zove se **pseudoinvers** operatora T ako vrijedi $TST = T$. Ako je T neprekidna linearna bijekcija sa X na Y onda je po teoremu 3.2. o otvorenom preslikavanju inverzni operator T^{-1} ograničen. U tom je slučaju očito T^{-1} pseudoinvers od T i to je jedini pseudoinvers od T. Doista, množenjem jednakosti $TST = T$ s lijeve i s desne strane s T^{-1} nalazimo $S = T^{-1}$.

Cilj je ovog poglavlja da dokažemo sljedeći teorem:

Teorem 4.1. *Neka su X i Y Banachovi prostori i $T \in B(X,Y)$. Sljedeća su tri svojstva međusobno ekvivalentna:*

(a) *Postoje ograničeni projektori $P \in B(X)$ i $Q \in B(Y)$ takvi da je*

$$N(P) = N(T) \qquad i \qquad R(Q) = R(T).$$

(b) *$R(T)$ je zatvoren potprostor od Y i postoje zatvoreni potprostori W od X i Z od Y takvi da vrijedi*

$$X = N(T) \dot{+} W \qquad i \qquad Y = Z \dot{+} R(T).$$

(c) *T ima pseudoinvers.*

Ako su ti uvjeti ispunjeni i ako je S pseudoinvers od T onda su ST i TS ograničeni projektori i vrijedi:

$$N(ST) = R(I - ST) = N(T) \qquad i \qquad R(TS) = N(I - TS) = R(T).$$

Da bismo taj teorem dokazali, moramo najprije proučiti pitanje egzistencije zatvorenog direktnog komplementa zatvorenog potprostora Banachovog prostora.

Svaki potprostor Y bilo kojeg vektorskog prostora X ima direktni komplement u X, tj. postoji potprostor Z vektorskog prostora X takav da je $X = Y \dot{+} Z$. Proučit ćemo sada pitanje egzistencije zatvorenog direktnog komplementa u slučaju kad je Y zatvoren potprostor normiranog prostora X. Odgovor na to pitanje je jednostavan, ako je potprostor Y konačnodimenzionalan:

Propozicija 4.1. *Neka je Y konačnodimenzionalan potprostor normiranog prostora X. Postoji zatvoren potprostor Z koji je direktni komplement od Y u X.*

Zadatak 4.1. *Dokažite propoziciju 4.1.*

Uputa: Vektore dualne baze od neke baze konačnodimenzionalnog prostora Y proširite po Hahn−Banachovom teoremu do neprekidnih funkcionala na X, a zatim promatrajte presjek jezgara tih funkcionala.

Propozicija 4.2. *Neka su Y i Z potprostori normiranog prostora X takvi da je Y zatvoren, Z konačnodimenzionalan i $Y \cap Z = \{0\}$. Tada za projektor P na Z duž Y vrijedi $P \in B(Y \dotplus Z)$. Nadalje, $Y \dotplus Z$ je zatvoren potprostor od X.*

Dokaz: Stavimo $W = Y \dotplus Z$. Pretpostavimo da $P \notin B(W)$, tj. da ne postoji $M > 0$ takav da je $\|Px\| \leq M\|x\|$ $\forall x \in W$. Tada postoji niz (x_n) u W takav da je

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0 \qquad \text{i} \qquad \|Px_n\| = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Budući da je Z konačnodimenzionalan, jedinična sfera $\{z \in Z;\ \|z\| = 1\}$ u Z je kompaktan skup. Kako su svi Px_n jedinični vektori u Z, zaključujemo da niz (Px_n) ima konvergentan podniz. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da smo niz (x_n) izabrali tako da je niz (Px_n) konvergentan. Stavimo

$$z = \lim_{n\to\infty} Px_n.$$

Tada je $z \in Z$; naime, potprostor Z je zatvoren jer je konačnodimenzionalan. Kako je $\lim x_n = 0$, imamo:

$$z = \lim_{n\to\infty} Px_n - \lim_{n\to\infty} x_n = -\lim_{n\to\infty} (I - P)x_n.$$

$I - P$ je projektor na Y duž Z, dakle $(I - P)x_n \in Y$ $\forall n$. Kako je po pretpostavci potprostor Y zatvoren, zaključujemo da je $z \in Y$. Dakle, $z \in Y \cap Z = \{0\}$ pa slijedi $z = 0$. No to je nemoguće jer je

$$\|z\| = \lim_{n\to\infty} \|Px_n\| = 1.$$

Ova kontradikcija pokazuje da je pretpostavka da o neograničenosti operatora P bila pogrešna. Time je dokazano da je projektor P ograničen operator.

Dokažimo sada da je $W = Y \dotplus Z$ zatvoren potprostor od X. Neka je (x_n) konvergentan niz u X čiji su svi elementi x_n u potprostoru W i neka je x limes tog niza. Treba dokazati da je $x \in W$. Kako su P i $I - P$ ograničeni operatori, oni su i neprekidni pa vrijedi

$$y = (I - P)x = \lim_{n\to\infty} (I - P)x_n \qquad \text{i} \qquad z = Px = \lim_{n\to\infty} Px_n.$$

Nadalje, imamo $(I - P)x_n \in Y$ i $Px_n \in Z$ $\forall n$. Kako su potprostori Y i Z zatvoreni, slijedi da je $y \in Y$ i $z \in Z$. Prema tome, imamo

$$x = (I - P)x + Px = y + z \in Y \dotplus Z = W.$$

Time je propozicija u potpunosti dokazana.

U dokazima prethodne dvije propozicije ključnu je ulogu imala konačnodimenzionalnost jednog potprostora. U proučavanju općenite situacije trebat će nam vrlo netrivijalni teoremi 1.17. (o otvorenom preslikavanju) i 1.18. (o zatvorenom grafu).

Propozicija 4.3. *Neka je X normiran prostor.*

(*a*) *Ako je P ograničen projektor na prostoru X, onda su potprostori $N(P)$ i $R(P)$ zatvoreni.*

(*b*) *Ako je prostor X Banachov, ako su Y i Z zatvoreni potprostori od X takvi da je $X = Y \dotplus Z$, i ako je P projektor na Y duž Z, onda je operator P ograničen.*

Dokaz: (a) Zatvorenost potprostora $N(P)$ slijedi iz ograničenosti, odnosno, neprekidnosti operatora P. Kako je i $I-P$ ograničen projektor i $N(I-P)=R(P)$, slijedi da je i potprostor $R(P)$ zatvoren.

(b) Prema teoremu 1.18. o zatvorenom grafu za dokaz tvrdnje (b) dovoljno je dokazati da operator $P \in L(X)$ ima zatvoren graf. Neka je $((x_n, Px_n);\, n \in \mathbb{N})$ niz u $\Gamma(P)$ koji je konvergentan u $X \times Y$. To znači da je (x_n) konvergentan niz u X, takav da je niz (Px_n) konvergentan u Y. Stavimo

$$x = \lim_{n\to\infty} x_n \qquad \text{i} \qquad y = \lim_{n\to\infty} Px_n, \qquad \text{dakle} \qquad \lim_{n\to\infty}(x_n, Px_n) = (x,y).$$

Treba dokazati da je $(x,y) \in \Gamma(P)$, tj. da je $y = Px$. P je projektor na potprostor Y, dakle $Px_n \in Y\ \forall n$. Kako je po pretpostavci potprostor Y zatvoren, slijedi da je $y = \lim Px_n \in Y$. Nadalje, iz $x = \lim x_n$ i $y = \lim Px_n$ slijedi:

$$x - y = \lim_{n\to\infty} x_n - \lim_{n\to\infty} Px_n = \lim_{n\to\infty}(I-P)x_n.$$

$I-P$ je projektor na potprostor Z, pa vrijedi $(I-P)x_n \in Z\ \forall n$. Po pretpostavci je i Z zatvoren, pa slijedi $x-y \in Z$. Dakle, imamo

$$x = y + (x-y), \qquad y \in Y, \qquad x-y \in Z.$$

Odatle je $y = Px$, a to je i trebalo dokazati.

Za **potprostor** Y vektorskog prostora X kažemo da je **konačne kodimenzije**, ako je kvocijentni prostor X/Y konačnodimenzionalan. U tom slučaju njegov je direktni komplement konačnodimenzionalan. Primijetimo da potprostor Y normiranog prostora X, koji je konačne kodimenzije, nije nužno zatvoren, čak ni ako je prostor X potpun. Primjer za to je jezgra linearnog funkcionala koji nije ograničen. Naime, za $f \in X^* \setminus X'$ potprostor $Y = N(f)$ je kodimenzije 1, ali taj potprostor nije zatvoren. Međutim, vrijedi:

Propozicija 4.4. *Neka su X i Y Banachovi prostori i $A \in B(X,Y)$. Ako je $R(A)$ potprostor od Y konačne kodimenzije, onda je $R(A)$ zatvoren potprostor od Y.*

Dokaz: Neka je Z direktni komplement potprostora $R(A)$ u prostoru Y; dakle, $Y = R(A) \dot{+} Z$. Tada je Z konačnodimenzionalan potprostor od Y. Definiramo operator $B : (X/N(A)) \times Z \to Y$ relacijom

$$B(x + N(A), z) = Ax + z, \quad x \in X, \;\; z \in Z.$$

Lako se vidi da je operator B dobro definiran (tj. da ne ovisi o izboru predstavnika x klase $x + N(A)$) i da je linearan. Dokažimo da je operator B ograničen. Neka je $x \in X$. Tada je

$$\|x + N(A)\| = \inf\{\|x+y\|;\, y \in N(A)\}.$$

Stoga za bilo kako izabrani $\varepsilon > 0$ postoji $y \in N(A)$ takav da je

$$\|x + N(A)\| \geq \|x+y\| - \varepsilon, \qquad \text{tj.} \qquad \|x+y\| \leq \|x+N(A)\| + \varepsilon.$$

Tada je $Ay = 0$, pa imamo redom:

$$\|B(x+N(A),z)\| = \|Ax+z\| = \|A(x+y)+z\| \leq \|A\|\cdot\|x+y\| + \|z\| \leq$$

$$\leq \|A\|\cdot(\|x+N(A)\|+\varepsilon) + \|z\| \leq (\|A\|+1)\cdot(\|x+N(A)\|+\varepsilon+\|z\|).$$

Kako je $\|x + N(A)\| + \|z\| = \|(x + N(A), z)\|$, dobivamo nejednakost

$$\|B(x + N(A), z)\| \leq (\|A\| + 1) \cdot (\|(x + N(A), z)\| + \varepsilon).$$

Međutim, $\varepsilon > 0$ je bio proizvoljan, pa odatle slijedi

$$\|(B(x + N(A), z)\| \leq (\|A\| + 1) \cdot \|(x + N(A), z)\|.$$

Dakle, linearan operator $B : (X/N(A)) \times Z \to Y$ je ograničen.

Očito je B surjekcija, jer smo pretpostavili da je $Y = R(A) \dot{+} Z$. Dokažimo još da je B injekcija. Neka je $(x+N(A), z) \in (X/N(A)) \times Z$ takav da je $B(x+N(A), z) = 0$. To znači da je $Ax+z = 0$. Imamo $Ax \in R(A)$ i $z \in Z$. Kako potprostori $R(A)$ i Z tvore direktnu sumu, slijedi $Ax = 0$ i $z = 0$. No $Ax = 0$ znači da je $x \in N(A)$, dakle, $x + N(A)$ je nul$-$vektor u kvocijentnom prostoru $X/N(A)$. Zaključujemo da je $(x+N(A), z)$ nulvektor u prostoru $(X/N(A)) \times Z$. Time je dokazano da je $N(B) = \{0\}$, odnosno, B je injekcija.

Dakle, B je neprekidna linearna bijekcija sa $(X/N(A)) \times Z$ na Y. Prema teoremu 1.17. slijedi da je inverzni operator B^{-1} ograničen. To znači da je za svaki zatvoren skup $F \subseteq (X/N(A)) \times Z$ skup $B(F) \subseteq Y$ također zatvoren. Napokon, $(X/N(A)) \times \{0\}$ je očito zatvoren potprostor od $(X/N(A)) \times Z$ pa zaključujemo da je $B((X/N(A)) \times \{0\}) = R(A)$ zatvoren potprostor od Y.

Dokaz teorema 4.1: Pretpostavimo da su $P \in B(X)$ i $Q \in B(Y)$ projektori takvi da vrijedi

$$N(P) = N(T) \qquad \text{i} \qquad R(Q) = R(T).$$

Tada je $W = R(P)$ zatvoren potprostor od X i $Z = N(Q)$ je zatvoren potprostor od Y. Nadalje, vrijedi

$$X = N(P) \dot{+} R(P) = N(T) \dot{+} W \qquad \text{i} \qquad Y = N(Q) \dot{+} R(Q) = Z \dot{+} R(T).$$

Time smo dokazali da iz (a) slijedi (b).

Pretpostavimo sada da je $R(T)$ zatvoren i da postoje zatvoreni potprostori W od X i Z od Y takvi da vrijedi

$$X = N(T) \dot{+} W \qquad \text{i} \qquad Y = Z \dot{+} R(T).$$

Neka je $A \in B(W, R(T))$ restrikcija operatora T na potprostor W. Tada je A ograničena linearna bijekcija Banachovog prostora W na Banachov prostor $R(T)$. Označimo sa B invers od A, promatran kao operator sa $R(T)$ u X. Prema teoremu 1.17. operator B je ograničen. Neka je Q projektor prostora Y na potprostor $R(T)$ duž potprostora Z. Prema tvrdnji (b) propozicije 4.3. Q je ograničen operator. Stavimo sada $S = BQ \in B(Y, X)$. Neka je x proizvoljan vektor u prostoru X. Neka su $u \in N(T)$ i $w \in W$ takvi da je $x = u + w$. Tada je

$$TSTx = TBQTw = TBTw = TBAw = Tw = Tx.$$

Dakle, vrijedi $TST = T$, što pokazuje da je S pseudoinvers od T. Time smo dokazali da iz (b) slijedi (c).

Pretpostavimo napokon da je $S \in B(Y, X)$ pseudoinvers operatora T, tj. da je $TST = T$. Stavimo

$$P = ST \in B(X) \qquad \text{i} \qquad Q = TS \in B(Y).$$

Tada je

$$P^2 = STST = ST = P \qquad \text{i} \qquad Q^2 = TSTS = TS = Q.$$

Dakle, P i Q su ograničeni projektori. Nadalje, očito vrijedi $N(T) \subseteq N(ST) = N(P)$. S druge strane vrijedi

$$x \in N(P) \qquad \Longrightarrow \qquad Tx = TSTx = TPx = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad x \in N(T).$$

Dakle, vrijedi i obrnuta inkluzija $N(P) \subseteq N(T)$ pa slijedi jednakost $N(T) = N(P)$. Nadalje, očito vrijedi $R(Q) = R(TS) \subseteq R(T)$. Da dokažemo obrnutu inkluziju uzmimo proizvoljan $y \in R(T)$. Neka je $x \in X$ takav da je $y = Tx$. Nalazimo

$$y = Tx = TSTx = QTx \in R(T).$$

Time je dokazana i obrnuta inkluzija $R(T) \subseteq R(Q)$ pa slijedi jednakost $R(T) = R(Q)$. Time je dokazano da iz (c) slijedi (a), a ujedno je dokazana i posljednja tvrdnja teorema.

Time je teorem u potpunosti dokazan.

Zadatak 4.2. *Neka su X i Y Banachovi prostori i neka su $T \in B(X,Y)$ i $S \in B(X,Y)$ takvi da operator $TST - T$ ima pseudoinvers. Dokažite da tada T ima pseudoinvers.*

Uputa: Ako je R pseudoinvers od $TST - T$, izmnožite i drugačije sortirajte članove u jednakosti

$$(TST - T)R(TST - T) = TST - T.$$

4.2 Fredholmovi operatori. Indeks

Neka su X i Y Banachovi prostori. $T \in B(X,Y)$ zove se **Fredholmov operator** ako je $N(T)$ konačnodimenzionalan potprostor od X i ako je $R(T)$ potprostor konačne kodimenzije u Y. Skup svih takvih označavat ćemo sa $\Phi(X,Y)$, a ako je $Y = X$ pišemo $\Phi(X,X) = \Phi(X)$. Primijetimo da je prema propoziciji 4.4. za svaki Fredholmov operator T s Banachovog prostora X u Banachov prostor Y potprostor $R(T)$ zatvoren u Y. Očito je svaka bijekcija iz $B(X,Y)$ Fredholmov operator.

Ako je $T \in B(X,Y)$ takav da je potprostor $N(T)$ konačnodimenzionalan, nenegativan cijeli broj $\dim N(T)$ označavat ćemo sa $n(T)$ i zvati **nulitet operatora** T. Ako je $R(T)$ potprostor konačne kodimenzije u Y, nenegativan cijeli broj $\dim Y(R(T)$ označavat ćemo sa $d(T)$ i zvati **defekt operatora** T. Za Fredholmov operator T definiramo **indeks operatora** T kao razliku nuliteta i defekta:

$$ind\,(T) = n(T) - d(T), \qquad T \in \Phi(X,Y).$$

Cilj je ovoga odjeljka da u čim većoj mjeri opišemo skup $\Phi(X,Y)$ i da proučimo svojstva funkcije $ind : \Phi(X,Y) \to \mathbb{Z}$.

Napomena: Ako su prostori X i Y konačnodimenzionalni, očito je svaki linearan operator T sa X u Y Fredholmov: $L(X,Y) = B(X,Y) = \Phi(X,Y)$. Nadalje, tada vrijedi teorem o rangu i nulitetu:

$$n(T) + \dim R(T) = \dim X.$$

Stoga je

$$d(T) = \dim(Y/R(T)) = \dim Y - \dim R(T) = \dim Y - \dim X + n(T).$$

Prema tome je

$$ind\,(T) = \dim X - \dim Y \qquad \forall T \in L(X,Y).$$

Posebno, ako je $X = Y$, svi linearni operatori imaju indeks nula:

$$ind\,(T) = 0 \qquad \forall T \in L(X).$$

Dokazat ćemo sada izuzetno značajan i netrivijalan teorem o aditivnosti indeksa:

Teorem 4.2. *Neka su X, Y i Z Banachovi prostori.*

(a) *Ako su $T \in \Phi(X,Y)$ i $S \in \Phi(Y,Z)$ onda je $ST \in \Phi(X,Z)$ i vrijedi:*

$$ind\,(ST) = ind\,(S) + ind\,(T).$$

(b) *Neka su $T \in B(X,Y)$ i $S \in B(Y,Z)$ takvi da je $ST \in \Phi(X,Z)$. Tada je $T \in \Phi(X,Y)$ ako i samo ako je $S \in \Phi(Y,Z)$.*

Za dokaz tog teorema trebaju nam neke jednostavne geometrijske činjenice sakupljene u sljedećem zadatku:

Zadatak 4.3. *Neka su X, Y i Z vektorski prostori i $T \in L(X,Y)$, $S \in L(Y,Z)$ linearni operatori. Neka su Y_1, Y_2 i Y_3 potprostori vektorskog prostora Y i neka je Z_1 potprostor vektorskog prostora Z takvi da je:*

$$R(T) = Y_1 \dotplus R(T) \cap N(S), \qquad N(S) = R(T) \cap N(S) \dotplus Y_2, \qquad Z = Z_1 \dotplus R(S),$$

$$Y = Y_1 \dotplus R(T) \cap N(S) \dotplus Y_2 \dotplus Y_3 = R(T) \dotplus Y_2 \dotplus Y_3 = Y_1 \dotplus N(S) \dotplus Y_3.$$

Dokažite da tada vrijedi sljedećih šest tvrdnji:

(*i*) *Restrikcija* $T|N(ST)$ *je surjekcija sa* $N(ST)$ *na* $R(T) \cap N(S)$, *koja inducira izomorfizam kvocijentnog prostora* $N(ST)/N(T)$ *na prostor* $R(T) \cap N(S)$.

(*ii*) *Restrikcija* $S|(Y_1 \dotplus Y_3)$ *je izomorfizam vektorskog prostora* $Y_1 \dotplus Y_3$ *na vektorski prostor* $R(S)$.

(*iii*) *Restrikcija* $S|Y_1$ *je izomorfizam vektorskog prostora* Y_1 *na vektorski prostor* $R(ST)$.

(*iv*) *Restrikcija* $S|Y_3$ *je injekcija, dakle ona je izomorfizam sa* Y_3 *na* SY_3.

(*v*) $R(S) = R(ST) \dotplus SY_3$.

(*vi*) $Z = Z_1 \dotplus R(ST) \dotplus SY_3$.

Dokaz teorema 4.2. (*a*) Budući da su potprostori $N(S)$ i $N(T)$ konačnodimenzionalni, iz tvrdnje (*i*) slijedi da je i potprostor $N(ST)$ konačnodimenzionalan. Iz tvrdnje (*i*) zadatka 4.3. nalazimo također da vrijedi:

$$n(ST) = n(T) + \dim[R(T) \cap N(S)]. \tag{4.1}$$

Kako je $T \in \Phi(X,Y)$, potprostor $R(T)$ je konačne kodimenzije u Y, pa zaključujemo da su potprostori Y_2 i Y_3 konačnodimenzionalni i da je

$$d(T) = \dim Y_2 + \dim Y_3. \tag{4.2}$$

Kako je $S \in \Phi(Y,Z)$ potprostor $R(S)$ je konačne kodimenzije u Z, pa zaključujemo da je potprostor Z_1 konačnodimenzionalan i dimenzija mu je jednaka $d(S)$. Po tvrdnji (*iv*) zadatka 4.3. je i potprostor SY_3 konačnodimenzionalan i dimenzija mu je jednaka $\dim Y_3$. Nadalje, po tvrdnji (*vi*) je $R(ST)$ potprostor od Z konačne kodimenzije i

$$d(ST) = \dim Z_1 + \dim SY_3 = d(S) + \dim Y_3. \tag{4.3}$$

Napokon, iz $N(S) = R(T) \cap N(S) \dotplus Y_2$ dobivamo

$$n(S) = \dim[R(T) \cap N(S)] + \dim Y_2. \tag{4.4}$$

Dokazali smo da je $N(ST)$ konačnodimenzionalan potprostor od X i da je $R(ST)$ potprostor konačne kodimenzije u prostoru Z. Dakle, $ST \in \Phi(X,Y)$, a korištenjem jednakosti (4.1), (4.2), (4.3) i (4.4) imamo redom

$$n(ST) + d(T) + d(S) = n(T) + \dim[R(T) \cap N(S)] + \dim Y_2 + \dim Y_3 + d(S) =$$

$$= n(T) + \dim[R(T) \cap N(S)] + \dim Y_2 + d(ST) = n(T) + n(S) + d(ST).$$

Odavde je

$$ind\,(ST) = n(ST) - d(ST) = n(T) + n(S) - d(T) - d(S) = ind\,(S) + ind\,(T).$$

Time je tvrdnja (*a*) dokazana.

Dokažimo sada tvrdnju (*b*). Pretpostavka je da je potprostor $N(ST)$ od X konačnodimenzionalan i da je potprostor $R(ST)$ konačne kodimenzije u Z. Kako je

$$N(T) \subseteq N(ST) \qquad \text{i} \qquad R(S) \supseteq R(ST),$$

slijedi da je $N(T)$ konačnodimenzionalan potprostor prostora X i da je $R(S)$ potprostor konačne kodimenzije u Z. Iz tvrdnji (*iv*) i (*v*) zadatka 4.3. sada slijedi da je Y_3 konačnodimenzionalan potprostor od Y.

Pretpostavimo najprije da je $S \in \Phi(Y,Z)$. Tada je $N(S)$ konačnodimenzionalan potprostor od Y, pa je i Y_2 kao potprostor od $N(S)$ konačnodimenzionalan. Odavde i iz jednakosti

$$Y = R(T) \dotplus Y_2 \dotplus Y_3$$

slijedi da je $R(T)$ potprostor konačne kodimenzije u Y. Dakle, $T \in \Phi(X,Y)$ i dokazali smo da iz $S \in \Phi(Y,Z)$ slijedi $T \in \Phi(X,Y)$.

Pretpostavimo sada da je $T \in \Phi(X,Y)$. Tada je potprostor $R(T)$ konačne kodimenzije u Y, pa iz $Y = R(T) \dotplus Y_2 \dotplus Y_3$ slijedi da je potprostor Y_2 konačnodimenzionalan. Prema tvrdnji (i) iz $ST \in \Phi(X,Z)$ slijedi da je $R(T) \cap N(S)$ konačnodimenzionalan potprostor, pa iz

$$N(S) = R(T) \cap N(S) \dotplus Y_2$$

zaključujemo da je $N(S)$ konačnodimenzionalan potprostor od Y. Dakle, $S \in \Phi(Y,Z)$ i dokazali smo da iz $T \in \Phi(X,Y)$ slijedi $S \in \Phi(Y,Z)$.

Time je teorem u potpunosti dokazan.

Teorem 4.3. *Neka su X i Y Banachovi prostori i neka je $T \in \Phi(X,Y)$.*

(a) *Postoji pseudoinvers operatora T.*

(b) *Ako je $S \in B(Y,X)$ pseudoinvers operatora T, onda je $S \in \Phi(Y,X)$ i $ind\,(S) = -ind\,(T)$.*

(c) *$ind\,(T) = 0$ ako i samo ako T ima pseudoinvers koji je bijekcija sa Y na X.*

Dokaz: (a) Budući da je potprostor $R(T)$ konačne kodimenzije u Y, postoji konačnodimenzionalan (dakle, zatvoren) potprostor Z od Y takav da je $Y = Z \dotplus R(T)$. Nadalje, prema propoziciji 4.1. postoji zatvoren potprostor W od X, takav da je $X = N(T) \dotplus W$. Sada iz teorema 4.1. slijedi da operator T ima pseudoinvers.

(b) Neka je $S \in B(Y,X)$ pseudoinvers operatora T. Prema tvrdnji (b) teorema 4.2. iz $T(ST) = T$ i iz $T \in \Phi(X,Y)$ slijedi da je $ST \in \Phi(X)$. Odavde, prema istoj tvrdnji slijedi da je $S \in \Phi(Y,X)$. Sada iz tvrdnje (a) teorema 4.2. slijedi da je

$$ind\,(T) = ind\,(TST) = ind\,(T) + ind\,(S) + ind\,(T) \qquad \Longrightarrow \qquad ind\,(S) = -ind\,(T).$$

(c) Pretpostavimo da je $S \in B(Y,X)$ pseudoinvers od T koji je bijekcija sa Y na X. Prema (b) je $S \in \Phi(Y,X)$, a kako je S bijekcija, to je $ind\,(S) = 0$. Sada iz (b) slijedi $ind\,(T) = 0$.

Treba još dokazati i obrnutu implikaciju. Pretpostavimo da je $ind\,(T) = 0$. Prema propoziciji 4.1. postoji zatvoren potprostor W od X, takav da je $X = N(T) \dotplus W$. Prema tvrdnji (b) teorema 1.14. prostor W je Banachov. Kako je W direktni komplement jezgre $N(T)$ u domeni X, lako se vidi da je restrikcija $T|W$ bijekcija sa W na $R(T)$. Po propoziciji 4.4. $R(T)$ je zatvoren potprostor od Y, dakle i $R(T)$ je Banachov prostor. Sada iz teorema 1.17. o otvorenom preslikavanju slijedi da je inverzni operator $A : R(T) \to W$ restrikcije $T|W$ ograničen.

Nadalje, neka je Z konačnodimenzionalan potprostor od Y takav da je $Y = Z \dotplus R(T)$. Kako je $ind\,(T) = 0$, nalazimo da je $n(T) = d(T)$, tj.

$$\dim N(T) = \dim(X/R(T)) = \dim Z.$$

Prema tome, postoji izomorfizam $B : Z \to N(T)$ tih dvaju konačnodimenzionalnih potprostora.

Označimo sada sa $S \in B(Y,X)$ direktnu sumu tih dvaju operatora B i A u skladu s rastavima $Y = Z \dotplus R(T)$ i $X = N(T) \dotplus W$, tj.

$$S(z+u) = Bz + Au, \qquad z \in Z, \ \ u \in R(T).$$

Tada je S bijekcija sa Y na X. Nadalje, uzmimo proizvoljan $x \in X$ i napišimo ga u obliku $x = v + w$, pri čemu su $v \in N(T)$ i $w \in W$. Tada je $Tx = Tw \in R(T)$, pa slijedi $STx = ATw$. Međutim, A je invers restrikcije $T|W$, pa dobivamo $STx = w$, a odavde $TSTx = Tw = Tx$. Zbog proizvoljnosti vektora $x \in X$ zaključujemo da je $TST = T$. Dakle, S je pseudoinvers od T.

Time je teorem 4.3. u potpunosti dokazan.

Ostatak ovog poglavlja bavi se proučavanjem veze između kompaktnih i Fredholmovih operatora i dokazivanjem nekoliko vrlo netrivijalnih i dalekosežnih svojstava funkcije *ind*. Zamršeniji dijelovi dokaza svrstani su u sljedeće dvije leme:

Lema 4.1. *Neka su X i Y Banachovi prostori, $T \in \Phi(X,Y)$ i $A \in F(X,Y)$. Ako je $ind\,(T) = 0$, onda je $T + A \in \Phi(X,Y)$ i $ind\,(T + A) = 0$.*

Dokaz: Pretpostavimo najprije da je $X = Y$, dakle $A \in F(X)$, i da je $T = I = I_X$. Neka su X_1, X_2 i X_3 potprostori od X takvi da je

$$N(A) = X_1 \dotplus N(A) \cap R(A), \qquad R(A) = N(A) \cap R(A) \dotplus X_2,$$

$$X = N(A) \dotplus X_2 \dotplus X_3 = X_1 \dotplus R(A) \dotplus X_3 = X_1 \dotplus N(A) \cap R(A) \dotplus X_2 \dotplus X_3.$$

Kvocijentni prostor $X/N(A)$ izomorfan je sa $R(A)$ i sa $X_2 \dotplus X_3$. Dakle, potprostori X_2 i X_3 su konačnodimenzionalni i

$$r(A) = R(A) = \dim X_2 + \dim X_3.$$

Nadalje, i potprostor

$$X_4 = R(A) \dotplus X_3$$

je konačnodimenzionalan. Potprostor X_4 je očito invarijantan s obzirom na operator $I + A$. Označimo sa $B \in L(X_4) = B(X_4)$ restrikciju operatora $I + A$ na potprostor X_3. Budući da se radi o konačnodimenzionalnom prostoru, za operator B vrijedi teorem o rangu i nulitetu, pa slijedi $n(B) = d(B)$. Ako je $x \in N(I + A)$, onda je $x = -Ax \in R(A)$. Stoga imamo

$$N(I + A) \subseteq R(A) \subseteq X_4 \qquad \Longrightarrow \qquad n(I + A) = n(B).$$

Imamo

$$X = X_1 \dotplus R(A) \dotplus X_3 = X_1 \dotplus X_3.$$

Operator $I + A$ je identiteta na X_1 i $(I + A)X_4 = R(B) \subseteq X_3$. Dakle,

$$R(I + A) = (I + A)X_1 \dotplus (I + A)X_4 = X_1 \dotplus R(B).$$

Neka je X_5 potprostor od X_4 takav da je $X_4 = R(B) \dotplus X_5$. Tada je $d(B) = \dim X_5$. Nadalje,

$$X = X_1 \dotplus R(A) \dotplus X_3 = X_1 \dotplus X_4 = X_1 \dotplus R(B) \dotplus X_5 = R(I + A) \dotplus X_5.$$

Dakle, X_5 je ujedno direktni komplement od $R(I + A)$ u X, pa slijedi

$$d(I + A) = \dim X_5 = d(B) \qquad \Longrightarrow \qquad ind\,(I + A) = n(I + A) - d(I + A) = n(B) - d(B) = 0.$$

Dokažimo sada lemu u općem slučaju, tj. $T \in \Phi(X,Y)$, $A \in F(X,Y)$ i $ind\,(T) = 0$. Prema tvrdnji (c) teorema 4.3. operator T ima pseudoinvers $S \in \Phi(Y,X)$ koji je bijekcija. Stavimo $P = I - ST$. Prema teoremu 4.1. P je projektor prostora X na $N(T)$, a kako je potprostor $N(T)$ konačnodimenzionalan, to je $P \in F(X)$. Sada je i $SA - P \in F(X)$, pa je prema dokazanom posebnom slučaju

$$I + SA - P \in \Phi(X) \qquad \text{i vrijedi} \qquad ind\,(I + SA - P) = 0.$$

Međutim,

$$T + A = S^{-1}(ST + SA) = S^{-1}(I + SA - P).$$

Kako je S^{-1} bijekcija to je $S^{-1} \in \Phi(X, Y)$ i $ind\,(S^{-1}) = 0$. Sada iz gornje jednakosti i iz tvrdnje (a) teorema 4.2. slijedi

$$T + A \in \Phi(X, Y) \qquad \text{i} \qquad ind\,(T + A) = ind\,(S^{-1}) + ind\,(I + SA - P) = 0.$$

Lema 4.2. *Neka su X i Y Banachovi prostori, $T \in \Phi(X, Y)$ i S bilo koji pseudoinvers od T. Pretpostavimo da je $B \in B(X, Y)$ takav da je $I + SB \in \Phi(X)$ i $ind\,(I + SB) = 0$. Tada je $T + B \in \Phi(X, Y)$ i $ind\,(T + B) = ind\,(T)$. Ako je k tome $I + SB$ bijekcija sa X na X, onda vrijedi još i $n(T + B) \leq n(T)$ i $d(T + B) \leq d(T)$.*

Dokaz: Neka je S pseudoinvers od $T \in \Phi(X, Y)$ i neka je $B \in B(X, Y)$ takav da je

$$I + SB \in \Phi(X) \qquad \text{i} \qquad ind\,(I + SB) = 0.$$

Stavimo $P = I - ST$. Tada je P projektor prostora X na konačnodimenzionalan potprostor $N(T)$ i vrijedi $S(T + B) = I + SB - P$. Kako je

$$I + SB \in \Phi(X), \qquad ind\,(I + SB) = 0 \qquad \text{i} \qquad P \in F(X),$$

iz leme 4.1. slijedi da je

$$S(T + B) = I + SB - P \in \Phi(X) \qquad \text{i} \qquad ind\,(S(T + B)) = 0.$$

Međutim $S \in \Phi(Y, X)$, pa iz tvrdnje (b) teorema 4.2. slijedi da je $T + B \in \Phi(X, Y)$. Prema tvrdnji (a) teorema 4.2. i tvrdnji (b) teorema 4.3. nalazimo

$$0 = ind\,(S(T + B)) = ind\,(S) + ind\,(T + B) = -ind\,(T) + ind\,(T + B).$$

Odatle je $ind\,(T + B) = ind\,(T)$.

Pretpostavimo sada da je $B \in B(X, Y)$ takav da je $I + SB$ bijekcija sa X na X. Neka je x vektor iz presjeka $N(T + B) \cap N(P)$. Tada je $(T + B)x = 0$ i $Px = 0$, pa imamo

$$0 = S(T + B)x = (I + SB - P)x = (I + SB)x \qquad \Longrightarrow \qquad x = 0.$$

Dakle, $N(T + B) \cap N(P) = \{0\}$, pa zaključujemo da je potprostor $N(T + B)$ sadržan u nekom direktnom komplementu od $N(P)$ u X. Međutim, P je projektor prostora X na potprostor $N(T)$, tj. $R(P) = N(T)$, dakle je $X = N(P) \dot{+} N(T)$. Odatle je

$$n(T + B) = \dim N(T + B) \leq \dim N(T) = n(T).$$

Odavde i iz jednakosti

$$n(T + B) - d(T + B) = ind\,(T + B) = ind\,(T) = n(T) - d(T)$$

slijedi i nejednakost $d(T + B) \leq d(T)$.

Teorem 4.4. *Neka su X i Y Banachovi prostori. Skup $\Phi(X, Y)$ je otvoren podskup od $B(X, Y)$ i preslikavanje $ind : \Phi(X, Y) \to \mathbb{Z}$ je neprekidno (dakle, lokalno konstantno). Drugim riječima, za svaki $T \in \Phi(X, Y)$ postoji $\varepsilon > 0$ takav da vrijedi:*

$$A \in B(X, Y) \;\; i \;\; \|T - A\| < \varepsilon \qquad \Longrightarrow \qquad A \in \Phi(X, Y) \;\; i \;\; ind\,(A) = ind\,(T).$$

Štoviše, $\varepsilon > 0$ se može tako odabrati da bude još i $n(A) \leq n(T)$ i $d(A) \leq d(T)$.

Dokaz: Neka je $T \in \Phi(X,Y)$. Prema tvrdnji (a) teorema 4.3. postoji pseudoinvers S operatora T, a prema tvrdnji (b) istoga teorema je $S \in \Phi(Y,X)$. Neka je $A \in B(X,Y)$ takav da je

$$\|A - T\| < \frac{1}{\|S\|}.$$

Sada za operator $B = A - T \in B(X,Y)$ imamo

$$\|B\| < \frac{1}{\|S\|} \qquad \Longrightarrow \qquad \|SB\| < 1.$$

Prema tvrdnji (b) teorema 2.7. operator $I + SB$ je invertibilan u algebri $B(X)$, dakle $I + SB$ je bijekcija sa X na X. Iz leme 4.2. sada slijedi

$$A = T + B \in \Phi(X,Y), \qquad ind\,(A) = ind\,(T), \qquad n(A) \le n(T), \qquad d(A) \le d(T).$$

Teorem 4.5. *Neka je X Banachov prostor, $A \in K(X)$ i $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda \neq 0$. Tada je $\lambda I - A \in \Phi(X)$ i $ind\,(\lambda I - A) = 0$.*

Dokaz: Prema tvrdnji (a) teorema 2.9. potprostor $N(\lambda I - A)$ je konačnodimenzionalan. Nadalje, ako sa k označimo nilindeks operatora $\lambda I - A$, onda je prema teoremu 2.11:

$$X = N((\lambda I - A)^k) \dotplus R((\lambda I - A)^k).$$

Po tvrdnji (a) teorema 2.9. potprostor $N((\lambda I - A)^k)$ je konačnodimenzionalan, pa zaključujemo da je potprostor $R((\lambda I - A)^k)$ konačne kodimenzije u X. Kako je $R((\lambda I - A)^k) \subseteq R(\lambda I - A)$, to je i potprostor $R(\lambda I - A)$ konačne kodimenzije u X. Dakle, dokazali smo da je $\lambda I - A \in \Phi(X)$.

Potprostori $Y = N((\lambda I - A)^k)$ i $Z = R((\lambda I - A)^k)$ su invarijantni s obzirom na operator $\lambda I - A$ i vrijedi $X = Y \dotplus Z$. Ako su B i C restrikcije, $B = (\lambda I - A)|Y$, $C = (\lambda I - A)|Z$, očito je $ind\,(\lambda I - A) = ind\,(B) + ind\,(C)$. Međutim, potprostor Y je konačnodimenzionalan, pa je po napomeni odmah iza definicije Fredholmovog operatora $ind\,(B) = 0$. Nadalje, po teoremu 2.11. operator C je bijekcija sa Z na Z, pa je i $ind\,(C) = 0$. Dakle, $ind\,(\lambda I - A) = 0$.

Teorem 4.6. *Za $T \in \Phi(X,Y)$ i $A \in K(X,Y)$ vrijedi*

$$T + A \in \Phi(X,Y) \qquad i \qquad ind\,(T + A) = ind\,(T).$$

Dokaz: Neka je $S \in \Phi(Y,X)$ bilo koji pseudoinvers operatora T. Prema tvrdnji (b) teorema 2.2. tada je $SA \in K(X)$. Iz teorema 4.5. sada slijedi da je $I + SA \in \Phi(X)$ i $ind\,(I + SA) = 0$. Po lemi 4.2. sada slijedi da je $T + A \in \Phi(X,Y)$ i $ind\,(T + A) = ind\,(T)$.

Za Banachov prostor X $B(X)$ je Banachova algebra s jedinicom $I = I_X$. Invertibilni elementi algebre $B(X)$ obično se zovu **regularni operatori** na Banachovom prostoru X. Prema teoremu 1.17. o otvorenom preslikavanju operator $T \in B(X)$ je regularan ako i samo ako je T bijekcija sa X na X. Prema tvrdnji (c) teorema 2.7. grupa $B(X)^*$ svih regularnih operatora na X je otvoren podskup Banachove algebre $B(X)$.

Skup $K(X)$ svih kompaktnih operatora sa X u X je prema korolaru 2.2. i teoremu 2.4. je zatvoren obostrani ideal u Banachovoj algebri $B(X)$. Kvocijentnu algebru $Cal(X) = B(X)/K(X)$ zvat ćemo **Calkinova algebra** prostora X; napominjemo da se u literaturi najčešće to ime upotrebljava samo u slučaju kad je X Hilbertov prostor. Grupa $Cal(X)^*$ svih invertibilnih elemenata algebre $Cal(X)$ je otvoren podskup od $Cal(X)$.

Teorem 4.7. *Neka je X Banachov prostor i $\pi : B(X) \to Cal(X)$ kvocijentni homomorfizam. Tada je*

$$\Phi(X) = \pi^{-1}(Cal(X)^*) = \{T \in B(X);\, \pi(T) \in Cal(X)^*\}.$$

Drugim riječima, operator $T \in B(X)$ je Fredholmov ako i samo ako postoji $S \in B(X)$ takav da su operatori $I - ST$ i $I - TS$ kompaktni. Štoviše, tada postoji $R \in B(X)$ takav da su $I - RT$ i $I - TR$ operatori konačnog ranga.

Dokaz: Pretpostavimo da je $\pi(T) \in Cal(X)^*$ i neka je $S \in B(X)$ takav da je $\pi(T)^{-1} = \pi(S)$. Tada za $A = I - ST$ i $B = I - TS$ vrijedi $\pi(A) = \pi(B) = 0$, tj. $A, B \in K(X)$. Po teoremu 4.5. je $ST = I - A \in \Phi(X)$ i $TS = I - B \in \Phi(X)$. Kako je $N(T) \subseteq N(ST)$, to je potprostor $N(T)$ konačnodimenzionalan. Nadalje, $R(T) \supseteq R(TS)$, pa zaključujemo da je potprostor $R(T)$ konačne kodimenzije u X. Dakle, $T \in \Phi(X)$.

Pretpostavimo sada da je $T \in \Phi(X)$. Neka je $S \in \Phi(X)$ pseudoinvers od T. Tada su po teoremu 4.1. ST i TS ograničeni projektori i vrijedi $R(I - ST) = N(T)$ i $R(I - TS) = N(S)$. Dakle, $I - ST, I - TS \in F(X) \subseteq K(X)$.

Sasvim analogan dokaz daje sljedeći općenitiji teorem:

Teorem 4.8. *Neka su X i Y Banachovi prostori i $T \in B(X, Y)$. Sljedeća su tri svojstva međusobno ekvivalentna:*

(*a*) $T \in \Phi(X, Y)$.

(*b*) *Postoji $S \in B(Y, X)$ takav da je $I_Y - TS \in K(Y)$ i $I_X - ST \in K(X)$.*

(*c*) *Postoji $R \in B(Y, X)$ takav da je $I_Y - TR \in F(Y)$ i $I_X - RT \in F(X)$.*

Zadatak 4.4. *Dokažite teorem 4.8.*

Teorem 4.9. *Neka su X i Y Banachovi prostori i $T \in B(X, Y)$. Sljedeća su tri svojstva međusobno ekvivalentna:*

(*a*) $T \in \Phi(X, Y)$ *i* $ind\,(T) = 0$.

(*b*) *Postoje bijekcija $A \in B(X, Y)$ i $K \in K(X, Y)$ takvi da je $T = A + K$.*

(*c*) *Postoje bijekcija $B \in B(X, Y)$ i $F \in F(X, Y)$ takvi da je $T = B + F$.*

Dokaz: Očigledno iz (c) slijedi (b), jer je $F(X, Y) \subseteq K(X, Y)$. Nadalje, svaka ograničena linearna bijekcija je Fredholmov operator indeksa nula (i nulitet i defekt su mu nula). Stoga po teoremu 4.6. vidimo da iz (b) slijedi (a).

Treba još dokazati da iz (a) slijedi (c). Pretpostavimo, dakle, da je $T \in \Phi(X, Y)$ i da je $ind\,(T) = 0$. Prema tvrdnji (c) teorema 4.3. operator T ima pseudoinvers S koji je bijekcija sa Y na X. Prema teoremu 1.17. o otvorenom preslikavanju inverzni operator $B = S^{-1}$ je ograničen i to je bijekcija sa X na Y. Stavimo $F = T - B$. Prema teoremu 4.1. $P = I_X - ST$ je projektor prostora X na konačnodimenzionalni potprostor $N(T)$. Posebno, $P \in F(X)$. Slijedi

$$F = B(ST - I_X) = -BP \in F(X, Y) \qquad \text{i} \qquad T = B + F.$$

Time je teorem u potpunosti dokazan.

Zadatak 4.5. *Neka su X i Y Banachovi prostori i neka je $T' \in B(Y', X')$ dualni operator operatora $T \in B(X, Y)$:*

$$(T'f)(x) = f(Tx), \qquad f \in Y', \quad x \in X.$$

Dokažite da je $T \in \Phi(X, Y)$ ako i samo ako je $T' \in \Phi(Y', X')$. Da li je tada $ind(T) = ind(T')$?

Lema 4.2. ima i svojevrstan obrat:

Zadatak 4.6. *Neka su X i Y Banachovi prostori i neka su $T \in \Phi(X, Y)$ i $A \in B(X, Y)$ takvi da je $T + A \in \Phi(X, Y)$ i $ind(T + A) = ind(T)$. Dokažite da za svaki pseudoinvers S operatora T vrijedi $I_X + SA \in \Phi(X)$ i $ind(I_X + SA) = 0$.*

Poglavlje 5

Spektralni teorem za ograničen hermitski operator

5.1 Pozitivni operatori

Neka je X Hilbertov prostor. Operator $A \in B(X)$ zove se **pozitivan** ako je

$$A = A^* \qquad \text{i} \qquad (Ax|x) \geq 0 \quad \forall x \in X.$$

Skup svih hermitskih operatora u $B(X)$ označavat ćemo sa $B_h(X)$, a skup svih pozitivnih sa $B_+(X)$. Za $A \in B_+(X)$ pišemo $A \geq 0$. Nadalje, za $A, B \in B_h(X)$ pišemo $A \leq B$ (ili $B \geq A$) ako je $B - A \geq 0$, tj. ako je $(Ax|x) \leq (Bx|x)$ $\forall x \in X$. Očito je $B_+(X)$ konveksan konus u realnom vektorskom prostoru $B_h(X)$, tj. vrijedi:

$$A, B \in B_+(X) \quad \text{i} \quad \lambda \in \mathbb{R},\ \lambda \geq 0 \qquad \Longrightarrow \qquad A + B \in B_+(X) \quad \text{i} \quad \lambda A \in B_+(X).$$

Nadalje, $B_h(X)$ je s relacijom $\leq$ parcijalno uređen skup.

Zadatak 5.1. *Dokažite da je svaki ortogonalni projektor P, tj. operator $P \in B(X)$ takav da je $P^2 = P = P^*$, pozitivan i da vrijedi $P \leq I$. Nadalje, ako su P i Q ortogonalni projektori na Hilbertovom prostoru X, dokažite da su sljedeća četiri svojstva međusobno ekvivalentna:*

(a) $P \leq Q$.

(b) $PQ = QP = P$.

(c) $R(P) \subseteq R(Q)$.

(d) $N(Q) \subseteq N(P)$.

Ako je $A \in B(X)$ onda je $A^*A \in B_h(X)$ i za svaki $x \in X$ vrijedi

$$(A^*Ax|x) = (Ax|Ax) = \|Ax\|^2 \geq 0,$$

dakle, $A^*A \in B_+(X)$. Posebno, ako je $A \in B_h(X)$ onda je $A^2 \in B_+(X)$.

Za svaki $A \in B_+(X)$ preslikavanje $(x, y) \mapsto (Ax|y)$ je pozitivno semidefinitna hermitska forma, pa za nju vrijedi nejednakost Cauchy−Schwarz−Buniakowskog:

$$|(Ax|y)|^2 \leq (Ax|x)(Ay|y) \qquad \forall x, y \in X. \tag{5.1}$$

Dokazat ćemo sada analogon teorema o konvergentnosti ograničenih monotonih nizova u $\mathbb{R}$.

Teorem 5.1. *Neka je $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz u $B_h(X)$ koji je rastući, tj. $A_n \leq A_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ i ograničen, tj.*

$$M = \sup\{\|A_n\|;\ n \in \mathbb{N}\} < +\infty.$$

Tada postoji $A \in B_h(X)$ takav da je

$$Ax = \lim_{n\to\infty} A_n x \qquad \forall x \in X \tag{5.2}$$

i vrijedi $A_n \leq A$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Dokaz: Za svaki $x \in X$ niz realnih brojeva $((A_n x|x))_{n\in\mathbb{N}}$ je rastući i ograničen. Dakle, taj je niz konvergentan u $\mathbb{R}$. Za $m \geq n$ je $A_m - A_n \geq 0$ pa nejednakost (5.1) primijenjena na operator $A_m - A_n$ daje za proizvoljne vektore $x, y \in X$:

$$|((A_m - A_n)x|y)|^2 \leq ((A_m - A_n)x|x)((A_m - A_n)y|y) \leq 2M[(A_m x|x) - (A_n x|x)]\|y\|^2.$$

Uvrstimo li $y = (A_m - A_n)x$, slijedi

$$\|A_m x - A_n x\|^2 \leq 2M[(A_m x|x) - (A_n x|x)].$$

Budući da je niz $((A_n x|x))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergentan u $\mathbb{R}$ iz gornje nejednakosti slijedi da je $(A_n x)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyjev niz u X. Kako je prostor X Hilbertov, dakle potpun, sa (5.2) je definiran linearan operator $A : X \to X$. Nadalje, vrijedi

$$\|A_n x\| \leq M\|x\| \quad \forall x \in X \qquad \text{i} \qquad (A_n x|y) = (x|A_n y) \quad \forall x, y \in X,$$

a odatle, kada pustimo da n teži u ∞, dobivamo

$$\|Ax\| \leq M\|x\| \quad \forall x \in X \qquad \text{i} \qquad (Ax|y) = (x|Ay) \quad \forall x, y \in X.$$

Dakle, $A \in B_h(X)$. Napokon, kada u nejednakosti

$$(A_n x|x) \leq (A_m x|x) \qquad \text{za} \quad n \leq m$$

pustimo da m teži u ∞, dobivamo

$$(A_n x|x) \leq (Ax|x) \qquad \forall x \in X \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad \text{tj.} \qquad A_n \leq A \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Time je teorem dokazan.

Naravno, zamjenom A_n sa $-A_n$ vidimo da analogna tvrdnja vrijedi i za padajuće ograničene nizove hermitskih operatora. Nadalje, naglasimo da se u teoremu 5.1. **ne tvrdi** da je operator A limes niza $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ u odnosu na normu $\|\cdot\|$ prostora $B(X)$, nego samo da vrijedi (5.2).

Korolar 5.1. *Neka je $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monotoni niz ortogonalnih projektora na Hilbertovom prostoru X. Tada je sa*

$$Px = \lim_{n\to\infty} P_n x \qquad x \in X \tag{5.3}$$

definiran ortogonalan projektor na prostoru X. Nadalje, ako je niz $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ padajući, onda je

$$R(P) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} R(P_n) \qquad i \qquad N(P) = Cl\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} N(P_n)\right)$$

a ako je taj niz rastući, onda je

$$N(P) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} N(P_n) \qquad i \qquad R(P) = Cl\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} R(P_n)\right).$$

Dokaz: Pretpostavimo najprije da je niz $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rastući. Za svaki ortogonalni projektor $P \neq 0$ je $\|P\| = 1$. Dakle, niz $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zadovoljava uvjete teorema 5.1. Prema tome, sa (5.3) definiran je operator $P \in B_h(X)$. Sada iz $P_n^2 = P_n$ $\forall n$ slijedi $P^2 = P$. Dakle, P je ortogonalni projektor. Nadalje, prema teoremu 5.1. je $P_n \leq P$ $\forall n \in \mathbb{N}$, a to prema zadatku 5.1. znači da je $N(P) \subseteq N(P_n)$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Odatle

$$N(P) \subseteq \bigcap_{n\in\mathbb{N}} N(P_n).$$

Obrnuta inkluzija slijedi neposredno iz (5.3).

Iz jednakosti za jezgre slijedi i jednakost za područja vrijednosti. Naime, za svaki ortogonalni projektor Q vrijedi $N(Q) = R(Q)^\perp$ i $R(Q) = N(Q)^\perp$. Nadalje, za vektorski potprostor Y Hilbertovog prostora X vrijedi $Cl(Y) = Y^{\perp\perp}$. Posebno, za zatvoren potprostor Z je $Z = Z^{\perp\perp}$. Stoga imamo redom

$$R(P)^\perp = N(P) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} N(P_n) = \left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} N(P_n)\right)^{\perp\perp} = \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} N(P_n)^\perp\right)^\perp,$$

pa slijedi

$$R(P) = \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} N(P_n)^\perp\right)^{\perp\perp} = Cl\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} R(P_n)\right).$$

Iz jednakosti dokazanih za rastuće nizove ortogonalnih projektora odmah slijede analogne jednakosti za padajuće nizove, jer za svaki ortogonalan projektor Q je i $I-Q$ ortogonalan projektor i vrijedi $R(I-Q) = N(Q)$ i $N(I-Q) = R(Q)$.

Zadatak 5.2. *Neka je $(P_t)_{t\in\mathbb{R}}$ rastuća familija ortogonalnih projektora na Hilbertovom prostoru X, tj. $P_t \leq P_s$ za $t < s$. Dokažite da tada za svaki $x \in X$ i za svaki $t \in \mathbb{R}$ postoje limesi*

$$P_{t-0}x = \lim_{s\nearrow t} P_s x \qquad i \qquad P_{t+0}x = \lim_{s\searrow t} P_s x.$$

Nadalje, dokažite da su P_{t-0} i P_{t+0} ortogonalni projektori i da je $P_{t-0} \leq P_t \leq P_{t+0}$.

Teorem 5.2. *Za $A \in B_+(X)$ postoji jedinstven $B \in B_+(X)$ takav da je $B^2 = A$. Ako je $C \in B(X)$ takav da je $CA = AC$, onda je $CB = BC$.*

Dokaz: Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $\|A\| \leq 1$. Tada je

$$0 \leq (Ax|x) \leq (x|x) \qquad \forall x \in X,$$

dakle, vrijedi $0 \leq A \leq I$. Stavimo $D = I - A \in B_+(X)$ i induktivno definiramo niz operatora $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$E_1 = 0, \qquad E_{n+1} = \frac{1}{2}(D + E_n^2), \quad n \in \mathbb{N}. \tag{5.4}$$

Tada su svi $E_n \in B_+(X)$. Nadalje, svaki E_n je polinom operatora D, pa možemo pisati

$$E_n = p_n(D), \qquad E_{n+1} - E_n = q_n(D),$$

gdje su p_n i q_n polinomi definirani induktivno sa

$$p_1(\lambda) = 0, \qquad p_{n+1}(\lambda) = \frac{1}{2}(\lambda + p_n(\lambda)^2), \qquad q_n(\lambda) = p_{n+1}(\lambda) - p_n(\lambda).$$

Iz te se definicije vidi da su svi koeficijenti polinoma p_n, $n \in \mathbb{N}$, nenegativni brojevi. Dokazat ćemo sada da su i koeficijenti polinoma q_n, $n \in \mathbb{N}$, nenegativni brojevi. Tu činjenicu dokazujemo indukcijom po $n \in \mathbb{N}$. Tvrdnja je očita za $n = 1$ jer je $q_1(\lambda) = \frac{1}{2}\lambda$. Provedimo sada korak indukcije. Pretpostavimo da su za neki $n \geq 2$ svi koeficijenti polinoma q_{n-1} nenegativni. Imamo

$$q_n(\lambda) = p_{n+1}(\lambda) - p_n(\lambda) = \frac{1}{2}[\lambda + p_n(\lambda)^2] - \frac{1}{2}[\lambda + p_{n-1}(\lambda)^2] = \frac{1}{2}[p_n(\lambda)^2 - p_{n-1}(\lambda)^2] =$$

$$= \frac{1}{2}[p_n(\lambda) + p_{n-1}(\lambda)][p_n(\lambda) - p_{n-1}(\lambda)] = \frac{1}{2}[p_n(\lambda) + p_{n-1}(\lambda)]q_{n-1}(\lambda).$$

Odatle slijedi da i polinom q_n ima sve koeficijente nenegativne.

Uočimo sada da za polinom p, kome su svi koeficijenti nenegativni, i za svaki $B \in B_+(X)$, vrijedi $p(B) \in B_+(X)$. Stoga iz dokazanog slijedi

$$E_n \geq 0 \qquad \text{i} \qquad E_n \leq E_{n+1} \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Iz $0 \leq A \leq I$ slijedi $0 \leq D \leq I$, pa je $\|D\| \leq 1$. Odatle i iz (5.4) indukcijom jednostavno slijedi da je $\|E_n\| \leq 1$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Sada teorem 5.1. povlači da postoji $E \in B_+(X)$ takav da vrijedi

$$Ex = \lim_{n\to\infty} E_n x \quad \forall x \in X, \qquad \|E\| \leq 1 \qquad \text{i} \qquad E_n \leq E \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Imamo

$$Ex = \lim_{n\to\infty} p_n(D)x$$

pa slijedi da operator E komutira sa svakim operatorom s kojim komutira D, dakle i sa svakim operatorom s kojim komutira A. Posebno, E komutira sa svim operatorima E_n, pa nalazimo za $x \in X$:

$$\|E^2x - E_n^2x\| = \|(E + E_n)(E - E_n)x\| \leq \|E + E_n\| \cdot \|Ex - E_nx\| \leq 2\|Ex - E_nx\|.$$

Pustimo li da n teži k ∞, nalazimo da je

$$E^2x = \lim_{n\to\infty} E_n^2x \qquad \forall x \in X.$$

Pustimo sada da u jednakosti

$$E_{n+1}x = \frac{1}{2}(Dx + E_n^2x) \qquad \forall x \in X$$

n teži u ∞. Dobivamo

$$Ex = \frac{1}{2}(Dx + E^2x) \qquad \forall x \in X.$$

Odatle je

$$E^2 - 2E = -D \qquad \Longrightarrow \qquad (I - E)^2 = I - 2E + E^2 = I - D = A.$$

Dakle, operator $B = I - E$ ima svojstvo $B^2 = A$. Nadalje, za svaki $x \in X$ vrijedi

$$(Bx|x) = (x|x) - (Ex|x) \geq \|x\|^2 - \|E\| \cdot \|x\|^2 \geq 0, \quad \text{jer je } \|E\| \leq 1.$$

Prema tome, $B \in B_+(X)$. Time je dokazana egzistencija, a dokazano je i da konstruirani operator $B = I - E$ komutira sa svakim operatorom C koji komutira sa A.

Dokažimo sada jedinstvenost. Neka je i $B_1 \in B_+(X)$ takav da je $B_1^2 = A$. Operator B_1 komutira sa $B_1^2 = A$, dakle komutira i sa B. Neka je $x \in X$. Tada za $y = (B_1 - B)x$ imamo

$$(B_1y|y) + (By|y) = ((B_1 + B)(B_1 - B)x|y) = ((B_1^2 - B^2)x|y) = ((A - A)x|y) = 0.$$

Kako su $(B_1y|y) \geq 0$ i $(By|y) \geq 0$, odatle slijedi da je

$$(B_1y|y) = (By|y) = 0.$$

Prema dokazanom postoje operatori $F_1, F \in B_+(X)$ takvi da je $F_1^2 = B_1$ i $F^2 = B$. Stoga je

$$\|F_1y\|^2 = (F_1y|F_1y) = (F_1^2y|y) = (B_1y|y) = 0 \quad \text{i} \quad \|Fy\|^2 = (Fy|Fy) = (F^2y|y) = (By|y) = 0.$$

Zaključujemo da je $F_1y = Fy = 0$, pa slijedi

$$B_1y = F_1^2y = 0 \qquad \text{i} \qquad By = F^2y = 0.$$

Odatle je

$$\|y\|^2 = (y|(B_1 - B)x) = ((B_1 - B)y|x) = 0,$$

odnosno, $0 = y = B_1x - Bx$. Drugim riječima, vrijedi $B_1x = Bx$, a kako je $x \in X$ bio proizvoljan, zaključujemo da je $B_1 = B$. Time je i jedinstvenost dokazana.

Jedinstveni operator $B \in B_+(X)$ takav da je $B^2 = A$ zove se **drugi korijen** iz operatora $A \in B_+(X)$. Pisat ćemo

$$B = \sqrt{A}.$$

Zadatak 5.3. *Neka su $A, B \in B_+(X)$ takvi da je $A^2 = B^2$. Dokažite da je tada $A = B$.*

Zadatak 5.4. *Neka su $A, B \in B_+(X)$. Dokažite da je $AB \in B_+(X)$ ako i samo ako je $AB = BA$.*

Zadatak 5.5. *Neka operatori $A, B, C \in B_h(X)$ međusobno komutiraju i pretpostavimo da je $A \leq B$ i $C \geq 0$. Dokažite da je tada $AC \leq BC$.*

Proučit ćemo sada vezu između dvaju operatora $A_1, A_2 \in B_h(X)$ takvih da je $A_1^2 = A_2^2$ i $A_1A_2 = A_2A_1$, bez pretpostavke da su A_1 i A_2 pozitivni.

Propozicija 5.1. *Neka su $A_1, A_2 \in B_h(X)$ takvi da je $A_1^2 = A_2^2$ i $A_1A_2 = A_2A_1$. Neka je P ortogonalni projektor prostora X na potprostor*

$$N(A_1 - A_2) = \{x \in X;\ A_1x = A_2x\}.$$

Tada vrijedi:

(*a*) *Ako $C \in B(X)$ komutira s $A_1 - A_2$ onda C komutira s P.*

(*b*) *$N(A_1) \subseteq R(P)$, tj. $A_1x = 0 \implies Px = x$.*

(*c*) *$A_1 = (2P - I)A_2$ i $A_2 = (2P - I)A_1$.*

Dokaz: (*a*) Neka je $Y = R(P) = N(A_1 - A_2)$. Neka operator $C \in B(X)$ komutira s operatorom $A_1 - A_2$. Za $y \in Y$ tada imamo

$$(A_1 - A_2)Cy = C(A_1 - A_2)y = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad Cy \in Y.$$

Dakle, vrijedi $CPx \in Y\ \forall x \in X$, pa slijedi $PCPx = CPx\ \forall x \in X$, odnosno, $PCP = CP$. Kako je operator $A_1 - A_2$ hermitski, to i operator C^* komutira sa $A_1 - A_2$, pa vrijedi i $PC^*P = C^*P$. Odatle adjungiranjem zbog $P^* = P$ slijedi $PCP = PC$. Prema tome je $PC = PCP = CP$.

(*b*) Iz $A_1x = 0$ slijedi

$$\|A_2x\|^2 = (A_2x|A_2x) = (A_2^2x|x) = (A_1^2x|x) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad A_2x = 0 \qquad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \qquad x \in N(A_1 - A_2) = R(P) \qquad \Longrightarrow \qquad Px = x.$$

(c) Zbog (b) imamo za svaki $x \in X$:

$$(A_1 - A_2)(A_1 + A_2)x = (A_1^2 - A_2^2)x = 0 \qquad (A_1 - A_2)x \in N(A_1 - A_2) = R(P),$$

pa slijedi $P(A_1 + A_2)x = (A_1 + A_2)x \ \forall x \in X$. Dakle,

$$P(A_1 + A_2) = A_1 + A_2. \tag{5.5}$$

Nadalje, za $x \in X$ je $Px \in R(P) = N(A_1 - A_2)$, pa kako prema (a) P komutira sa $A_1 - A_2$, slijedi $P(A_1 - A_2)x = (A_1 - A_2)Px = 0$. Dakle,

$$P(A_1 - A_2) = 0. \tag{5.6}$$

Zbrajanjem i oduzimanjem jednakosti (5.5) i (5.6) dobivamo

$$A_2 = (2P - I)A_1 \qquad \text{i} \qquad A_1 = (2P - I)A_2.$$

Teorem 5.3. *Za $A \in B_h(X)$ stavimo*

$$A_+ = \frac{1}{2}\left(\sqrt{A^2} + A\right) \qquad i \qquad A_- = \frac{1}{2}\left(\sqrt{A^2} - A\right).$$

Neka je P ortogonalni projektor prostora X na potprostor $N(A_-)$. Tada vrijedi:

(a) *$A_+, A_- \in B_+(X)$ i $A = A_+ - A_-$.*

(b) *Vrijedi $PA = P\sqrt{A^2} = A_+$, $(P - I)A = -(P - I)\sqrt{A^2} = A_-$ i $N(A) \subseteq R(P)$.*

(c) *Operator $C \in B(X)$ komutira s operatorom A ako i samo ako C komutira sa A_+, A_- i P.*

Dokaz: (c) Ako operator C komutira sa A, onda C komutira i sa A^2, dakle, prema teoremu 5.2. i sa $\sqrt{A^2}$. Odatle slijedi da C komutira sa A_+ i sa A_-. No tada je potprostor $R(P) = N(A_-)$ invarijantan s obzirom na operator C. Kako je A hermitski, i C^* komutira sa A, dakle, potprostor $R(P)$ je invarijantan i s obzirom na C^*. Odatle, kao u dokazu tvrdnje (a) teorema 5.1. slijedi $CP = PCP = PC$.

Obratno, ako C komutira sa A_+, A_- i P, onda C komutira i sa $A = A_+ - A_-$.

(b) Operator A komutira sa A^2, dakle i sa $\sqrt{A^2}$. Odatle slijedi da operatori A_+ i A_- komutiraju. Nadalje, iz tvrdnje (c) propozicije 5.1. primijenjene na operatore $A_1 = A$ i $A_2 = \sqrt{A^2}$, nalazimo da je $\sqrt{A^2} = (2P - I)A = 2PA - A$ i $A = (2P - I)\sqrt{A^2} = 2P\sqrt{A^2} - \sqrt{A^2}$, dakle,

$$PA = \frac{1}{2}\left(\sqrt{A^2} + A\right) = A_+ \qquad \text{i} \qquad P\sqrt{A^2} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{A^2} + A\right) = A_+.$$

Odatle je

$$(P - I)A = PA - A = A_+ - A = A_- \qquad \text{i} \qquad (P - I)\sqrt{A^2} = P\sqrt{A^2} - \sqrt{A^2} = A_+ - \sqrt{A^2} = -A_-.$$

Napokon, ako je $Ax = 0$, onda je $A^2x = 0$, pa slijedi

$$\left\|\sqrt{A^2}x\right\|^2 = \left(\sqrt{A^2}x \middle| \sqrt{A^2}x\right) = (A^2x|x) = 0,$$

dakle i $\sqrt{A^2}x = 0$. Odatle je $x \in N(A_-) = R(P)$.

(a) Jasno je da je $A = A_+ - A_-$. Treba još dokazati da su $A_+, A_- \in B_+(X)$. Međutim, P, $I - P$ i $\sqrt{A^2}$ su pozitivni operatori koji međusobno komutiraju, pa pomoću zadatka 5.4. zaključujemo da su i $A_+ = P\sqrt{A^2}$ i $A_- = (I - P)\sqrt{A^2}$ pozitivni.

Operatori A_+ i A_- iz teorema 5.3. zovu se **pozitivni** i **negativni dio** operatora $A \in B_h(X)$.

Zadatak 5.6. *Dokažite da za* $A, B \in B_h(X)$ *vrijedi*

$$A \leq B \quad i \quad B \leq A \qquad \Longleftrightarrow \qquad A = B.$$

Zadatak 5.7. *Neka su* $A, B \in B_+(X)$ *takvi da je* $A \leq B$ *i* $AB = BA$. *Dokažite da je tada* $\sqrt{A} \leq \sqrt{B}$ *i* $A^n \leq B^n$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Zadatak 5.8. *Dokažite da za svaki* $A \in B_h(X)$ *postoji jedinstven* $B \in B_h(X)$ *takav da je* $B^3 = A$.

5.2 Parcijalne izometrije i polarna forma

Teorem 5.4. *Neka su X i Y Hilbertovi prostori i $V \in B(X,Y)$. Sljedeća su svojstva međusobno ekvivalentna:*

(a) *$V^*V \in B(X)$ je projektor.*

(b) *$VV^* \in B(Y)$ je projektor.*

(c) *Postoji zatvoren potprostor X_1 od X takav da vrijedi*

$$\|Vx\| = \|x\| \qquad \forall x \in X_1 \qquad i \qquad Vx = 0 \qquad \forall x \in X_1^\perp.$$

(d) *Postoji zatvoren potprostor Y_1 od Y takav da vrijedi*

$$\|V^*y\| = \|y\| \qquad \forall y \in Y_1 \qquad i \qquad V^*y = 0 \qquad \forall y \in Y_1^\perp.$$

U tom slučaju, $R(V)$ je zatvoren potprostor od Y, $R(V^*)$ je zatvoren potprostor od X, V^*V je (ortogonalan) projektor prostora X na potprostor $R(V^*)$ duž potprostora $N(V)$, i VV^* je (ortogonalan) projektor prostora Y na potprostor $R(V)$ duž potprostora $N(V^*)$. Nadalje, restrikcija $V|R(V^*)$ je izometrički izomorfizam Hilbertovog prostora $R(V^*)$ na Hilbertov prostor $R(V)$.

Dokaz: Pretpostavimo najprije da je $P = V^*V$ projektor. Tada je $P^* = P$, dakle, P je ortogonalni projektor i vrijedi $X = R(P) \oplus N(P)$. Stavimo $X_1 = R(P)$. Tada imamo

$$x \in X_1 \implies Px = x \implies V^*Vx = x \implies$$
$$\implies \|Vx\|^2 = (Vx|Vx) = (V^*Vx|x) = (x|x) = \|x\|^2 \implies \|Vx\| = \|x\|$$

i

$$x \perp X_1 \implies x \in R(P)^\perp = N(P) \implies Px = 0 \implies$$
$$\implies \|Vx\|^2 = (V^*Vx|x) = (Px|x) = 0 \implies Vx = 0.$$

Time je dokazano da iz (a) slijedi (c).

Pretpostavimo sada da je X_1 zatvoren potprostor od X takav da vrijedi

$$\|Vx\| = \|x\| \qquad \forall x \in X_1 \qquad \text{i} \qquad Vx = 0 \qquad \forall x \in X_1^\perp.$$

Neka je P ortogonalni projektor na X_1. Za proizvoljan $x \in X$ pišemo $x = y + z$, $y \in X_1$, $z \in X_1^\perp$. Tada imamo

$$(V^*Vx|x) = (Vx|Vx) = (Vy|Vy) = (y|y) = (y|x) = (Px|x).$$

Dakle, $((V^*V - P)x|x) = 0\ \forall x \in X$, a kako je operator $V^*V - P$ hermitski, iz tvrdnje (a) propozicije 1.4. slijedi $V^*V - P = 0$. Dakle, $V^*V = P$ je projektor. Time je dokazano da iz (c) slijedi (a).

Dakle, vrijedi $(a) \iff (c)$, a zamjenom V sa V^* odatle dobivamo i $(b) \iff (d)$.

Iz dokaza $(a) \implies (c)$ vidi se da je $N(P) = N(V)$, pa iz propozicije 1.3. nalazimo

$$R(P) = N(P)^\perp = N(V)^\perp = Cl(R(V^*)).$$

Nadalje, za $x \in R(P)$ je $x = Px = V^*Vx \in R(V^*)$, pa zaključujemo da je zapravo $R(P) = R(V^*)$. Dakle, ako vrijede (a) i (c) onda je $R(V^*)$ zatvoren potprostor od X. Sasvim analogno, ako vrijede (b) i (d) onda je $R(V)$ zatvoren potprostor.

Pretpostavimo ponovo da vrijedi (a), dakle i (c) za $X_1 = R(P) = R(V^*)$ i $P = V^*V$. Tada je očito $R(V) = VX_1$ i restrikcija $V|X_1$ je izometrija sa $X_1 = R(V^*)$ na $VX_1 = R(V)$. Time je dokazano da iz (a) slijedi zadnja tvrdnja teorema. Nadalje, odatle slijedi da je i $R(V)$ zatvoren potprostor od Y. Napokon, stavimo $Q = VV^*$. Tada je očito $N(V^*) \subseteq N(Q)$. Nadalje,

$$y \in N(Q) \quad \Longrightarrow \quad Qy = 0 \quad \Longrightarrow \quad VV^*y = 0 \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad \|V^*y\|^2 = (V^*y|V^*y) = (VV^*y|y) = 0 \quad \Longrightarrow \quad V^*y = 0 \quad \Longrightarrow \quad y \in N(V^*).$$

Time je dokazana obrnuta inkluzija $N(Q) \subseteq N(V^*)$, dakle, vrijedi $N(V^*) = N(Q)$. Kako je $R(V)$ zatvoren potprostor od Y, pomoću propozicije 1.3. nalazimo

$$R(V) = N(V^*)^\perp = N(Q)^\perp \qquad \text{i} \qquad N(V^*) = R(V)^\perp.$$

Dakle,

$$Y = N(V^*) \oplus R(V).$$

Neka su sada $y \in R(V)$ i $z \in N(V^*) = N(Q)$. Tada je $y \in VR(V^*)$, tj. postoji $x \in R(V^*)$ takav da je $y = Vx$. Označimo ponovo $P = V^*V$. Vidjeli smo da je to ortogonalan projektor i da je $R(P) = R(V^*)$. Dakle, $Px = x$, pa imamo

$$Qy = VV^*y = VV^*Vx = VPx = Vx = y \qquad \text{i} \qquad Qz = 0.$$

Time je dokazano da je $Q = VV^*$ projektor. Dakle, dokazali smo da iz (a) slijedi (b). Sasvim analogno, iz (b) slijedi (a).

Time su sve tvrdnje teorema dokazane.

Ako su X i Y Hilbertovi prostori, operator $V \in B(X, Y)$ koji ima svojstva $(a) - (d)$ iz teorema 5.4. zove se **parcijalna izometrija** sa X u Y. Jasno je da je tada V^* parcijalna izometrija sa Y u X.

Teorem 5.5. *Neka su X i Y Hilbertovi prostori i $A \in B(X, Y)$. Neka je $H = \sqrt{A^*A}$ i $K = \sqrt{AA^*}$. Tada postoje parcijalne izometrije V i W sa X u Y takve da vrijedi*

$$A = VH = KW.$$

Ako je $X = Y$ i ako je A normalan operator, možemo uzeti da je $V = W$ unitaran operator na X koji komutira sa svakim operatorom $B \in B(X)$, takvim da je $BA = AB$ i $BA^* = A^*B$.

Dokaz: Prema propoziciji 1.3. je

$$X = N(H) \oplus Cl(R(H)).$$

Neka je P ortogonalni projektor prostora X na potprostor $Cl(R(H))$ (dakle, duž potprostora $N(H)$). Imamo $N(H) = N(A)$, dakle, za bilo koje $x, y \in X$ vrijedi

$$Hx = Hy \qquad \Longleftrightarrow \qquad Ax = Ay. \tag{5.7}$$

Definirat ćemo sada operator

$$V_1 : R(H) \longrightarrow R(A)$$

na sljedeći način. Za $y \in R(H)$ izaberemo $x \in X$ takav da je $y = Hx$. Tada stavljamo $V_1 y = Ax$. Zbog (5.7) V_1 je dobro definiran linearan operator i očito vrijedi $R(V_1) = R(A)$. Neka su sada $y, y' \in R(H)$ i neka su $x, x' \in X$ takvi da je $y = Hx$ i $y' = Hx'$. Tada imamo

$$(V_1 y|V_1 y') = (Ax|Ax') = (A^*Ax|x') = (H^2 x|x') = (Hx|Hx') = (y|y').$$

Dakle, V_1 je izometrički izomorfizam sa $R(H)$ na $R(A)$. Proširenjem po neprekidnosti dolazimo do izometričkog izomorfizma V_2 sa $Cl(R(H))$ na $Cl(R(A))$. Napokon, stavimo $V = V_2 P \in B(X,Y)$. Tada je V izometrija na zatvorenom potprostoru $Cl(R(H))$, a na njegovom ortogonalnom komplementu $N(H) = N(P)$ je restrikcija operatora V jednaka nuli. Prema teoremu 5.4. zaključujemo da je V parcijalna izometrija sa X u Y. Nadalje, jasno je da je $R(V) = Cl(R(A))$ i prema dokazu teorema 5.4. je $V^*V = P$.

Sada za proizvoljan $x \in X$ imamo $PHx = Hx$, dakle,

$$VHx = V_2PHx = V_2Hx = V_1Hx = Ax.$$

Time je dokazano da je $A = VH$. Primijenimo li dokazano na operator $A^* \in B(Y,X)$, zaključujemo da postoji parcijalna izometrija U sa Y u X, takva da je $A^* = UK$. No tada je $A = KU^*$ i $U^* = W$ je prema teoremu 5.4. parcijalna izometrija sa X u Y.

Pretpostavimo napokon da je $X = Y$ i da je operator $A \in B(X)$ normalan. Naravno, tada je $H = K$. Nadalje, iz tvrdnje (c) propozicije 1.4. vrijedi $N(A^*) = N(A) = N(H)$, a odatle i iz propozicije 1.3. je $Cl(R(A)) = Cl(R(A^*)) = Cl(R(H))$. Dakle, V_2 je izometrički izomorfizam sa $Cl(R(H))$ na $Cl(R(H))$, a to znači da je V_2 unitaran operator na Hilbertovom prostoru $Cl(R(H))$. Kako je

$$X = Cl(R(H)) \oplus N(H),$$

linearan operator $U : X \to X$ definiran sa $U(y+z) = V_2y + z$ za $y \in Cl(R(H))$ i $z \in N(H)$ je unitaran. Očito je $A = UH$.

Neka je sada $B \in B(X)$ operator koji komutira sa A i sa A^*. Tada B komutira i sa A^*A, dakle, i sa H. Za proizvoljan $x \in X$ imamo

$$BU(Hx) = BAx = ABx = UHBx = UB(Hx).$$

Dakle,

$$BUy = UBy \qquad \forall y \in R(H). \tag{5.8}$$

S druge strane, za $y \in N(H)$ je $Uy = y$. Nadalje, kako B komutira sa H to je potprostor $N(H)$ invarijantan s obzirom na operator B, dakle vrijedi $By \in N(H)$ za svaki $y \in N(H)$. Dakle,

$$BUy = By = UBy \qquad \forall y \in N(H). \tag{5.9}$$

Kako je $X = N(H) \oplus Cl(R(H))$, iz (5.8) i (5.9) slijedi $UB = BU$. Napokon, operatori B i H komutiraju, jer imamo

$$H^2 = A^*A = AA^* = UHHU^* \qquad \Longrightarrow \qquad UH^2 = H^2U \qquad \Longrightarrow \qquad UH = HU.$$

Prikazi operatora $A \in B(X,Y)$ u obliku $A = VH$ i $A = KW$, gdje su $H = \sqrt{A^*A}$, $K = \sqrt{AA^*}$ i V i W su parcijalne izometrije sa X u Y, zovu se **polarne forme** operatora A.

5.3 Spektralni teorem

U daljnjem je A hermitski operator na Hilbertovom prostoru X. Za $\lambda \in \mathbb{R}$ tada je i operator $\lambda I - A$ hermitski. Sa E_λ ćemo označavati ortogonalni projektor prostora X na potprostor $N((\lambda I - A)_-)$. Prema tvrdnji (b) teorema 5.3. tada je $N(\lambda I - A) \subseteq R(E_\lambda)$, dakle, vrijedi

$$Ax = \lambda x \qquad \Longrightarrow \qquad E_\lambda x = x.$$

Funkcija $\lambda \mapsto E_\lambda$ zove se **spektralna funkcija hermitskog operatora** A.

Teorem 5.6. (**Spektralni teorem**) *Neka je A hermitski operator na Hilbertovom prostoru X i neka je $\lambda \mapsto E_\lambda$ njegova spektralna funkcija.*

(a) *Za $C \in B(X)$ vrijedi $AC = CA$ ako i samo ako vrijedi $E_\lambda C = CE_\lambda \ \forall \lambda \in \mathbb{R}$.*

(b) *Za $\lambda \leq \mu$ vrijedi $E_\lambda \leq E_\mu$, tj. $E_\lambda E_\mu = E_\mu E_\lambda = E_\lambda$.*

(c) *Za svaki vektor $x \in X$ funkcija $\lambda \mapsto E_\lambda x$ sa $\mathbb{R}$ u X je zdesna neprekidna, tj. za svaki $\lambda \in \mathbb{R}$ vrijedi*

$$\lim_{\mu \searrow \lambda} E_\mu x = E_\lambda x.$$

(d) *Stavimo*

$$m = \inf\{(Ax|x);\ x \in X,\ \|x\| = 1\} \qquad i \qquad M = \sup\{(Ax|x);\ x \in X,\ \|x\| = 1\}.$$

Tada vrijedi

$$\lambda < m \quad \Longrightarrow \quad E_\lambda = 0 \qquad i \qquad \lambda \geq M \quad \Longrightarrow \quad E_\lambda = I.$$

(e) *Neka su m, M kao u (d), neka su $a < m$ i $b \geq M$ i neka je P particija segmenta $[a, b]$:*

$$a = \lambda_0 < \lambda_1 < \cdots \lambda_{n-1} < \lambda_n = b.$$

Tada vrijedi

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_{k-1}(E_{\lambda_k} - E_{\lambda_{k-1}}) \leq A \leq \sum_{k=1}^{n} \lambda_k(E_{\lambda_k} - E_{\lambda_{k-1}}). \tag{5.10}$$

Nadalje, ako su $\xi_k \in [\lambda_{k-1}, \lambda_k]$ i $\delta(P) = \max\{\lambda_k - \lambda_{k-1};\ 1 \leq k \leq n\}$, onda vrijedi

$$\left\| A - \sum_{k=1}^{n} \xi_k(E_{\lambda_k} - E_{\lambda_{k-1}}) \right\| \leq \delta(P). \tag{5.11}$$

Dokaz: (a) Neka je $C \in B(X)$ takav da je $CA = AC$ i neka je $\lambda \in \mathbb{R}$. Tada je

$$C(\lambda I - A) = (\lambda I - A)C,$$

pa iz tvrdnje (c) teorema 5.3. slijedi $CE_\lambda = E_\lambda C$. Na taj način dokazali smo da vrijedi

$$CA = AC \qquad \Longrightarrow \qquad CE_\lambda = E_\lambda C \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

Obrnuta implikacija u (a) bit će neposredna posljedica tvrdnje (e). No već iz dokazanog slijedi da je

$$E_\lambda E_\mu = E_\mu E_\lambda \qquad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

(*b*) Neka je $\lambda < \mu$. Stavimo $P = E_\lambda(I - E_\mu)$. Budući da operatori E_λ i E_μ međusobno komutiraju, iz definicije slijedi

$$E_\lambda P = P E_\lambda = P \qquad \Longrightarrow \qquad P \le E_\lambda$$

i

$$(I - E_\mu)P = P(I - E_\mu) = P \qquad \Longrightarrow \qquad P \le I - E_\mu.$$

Prema prvom dijelu tvrdnje (*b*) u teoremu 5.3., primijenjenom na operator $\lambda I - A$, nalazimo da vrijedi

$$E_\lambda(\lambda I - A) = (\lambda I - A)E_\lambda = (\lambda I - A)_+ \ge 0, \tag{5.12}$$

a prema drugom dijelu iste tvrdnje, primijenjenom na operator $\mu I - A$, dobivamo

$$(I - E_\mu)(\mu I - A) = (\mu I - A)(I - E_\mu) = -(\mu I - A)_- \le 0. \tag{5.13}$$

Za $y \in R(P)$ je $Py = y$, dakle i $E_\lambda y = y$ i $(I - E_\mu)y = y$, pa nalazimo

$$((\lambda I - A)y|y) = ((\lambda I - A)E_\lambda y|y) \ge 0 \qquad \text{i} \qquad ((\mu I - A)y|y) = ((\mu I - A)(I - E_\mu)y|y) \le 0.$$

Oduzmemo li prvu od tih dviju nejednakosti od druge, slijedi $(\mu - \lambda)(y|y) \le 0$, a kako je $\mu > \lambda$ slijedi $(y|y) \le 0$, dakle, $(y|y) = 0$, odnosno, $y = 0$. Time je dokazano da je $R(P) = \{0\}$, tj. $P = 0$. Dakle, vrijedi $E_\lambda = E_\lambda E_\mu = E_\mu E_\lambda$, odnosno, $E_\lambda \le E_\mu$.

(*c*) Za $\lambda < \mu$ i za poluotvoren interval $\Delta = \langle \lambda, \mu]$ stavimo $E(\Delta) = E_\mu - E_\lambda$. Tada je

$$E_\mu E(\Delta) = E_\mu^2 - E_\mu E_\lambda = E_\mu - E_\lambda = E(\Delta)$$

i

$$(I - E_\lambda)E(\Delta) = E_\mu - E_\lambda - E_\mu E_\lambda + E_\lambda^2 = E_\mu - E_\lambda - E_\lambda + E_\lambda = E(\Delta).$$

Dakle, zbog nejednakosti (5.12) i (5.13) i zbog zadatka 5.6. vrijedi

$$(\mu I - A)E(\Delta) = (\mu I - A)E_\mu \cdot E(\Delta) \ge 0 \qquad \text{i} \qquad (\lambda I - A)E(\Delta) = (\lambda I - A)(I - E_\lambda) \cdot E(\Delta) \le 0,$$

a odatle slijedi

$$\lambda E(\Delta) \le AE(\Delta) \le \mu E(\Delta). \tag{5.14}$$

Funkcija $\lambda \mapsto E_\lambda$ je rastuća i svi operatori E_λ su ortogonalni projektori. Prema zadatku 5.2. za svaki $\lambda \in \mathbb{R}$ i za svaki vektor $x \in X$ postoji limes zdesna

$$E_{\lambda+0}x = \lim_{\mu \searrow \lambda} E_\lambda x$$

i $E_{\lambda+0}$ je ortogonalni projektor takav da je $E_{\lambda+0} \ge E_\lambda$. Dakle, operator $Q = E_{\lambda+0} - E_\lambda$ je ortogonalni projektor. Zbog (5.14) za svaki $x \in X$ imamo

$$\lambda(E(\Delta)x|x) \le (E(\Delta)Ax|x) \le \mu(E(\Delta)x|x),$$

pa ako pustimo da $\mu \searrow \lambda$, dobivamo

$$\lambda(Qx|x) \le (QAx|x) \le \lambda(Qx|x) \qquad \forall x \in X.$$

Odavde je

$$((QA - \lambda Q)x|x) = 0 \qquad \forall x \in X. \tag{5.15}$$

Hermitski operatori A i Q komutiraju, pa imamo $(QA - \lambda Q)^* = AQ - \lambda Q = QA - \lambda Q$. Stoga iz (5.15) i iz propozicije 3.1. slijedi

$$AQ = QA = \lambda Q. \tag{5.16}$$

Neka je $x \in X$ i $y = Qx$. Tada zbog (5.16) imamo $Ay = \lambda y$, tj. $y \in N(\lambda I - A) \subseteq R(E_\lambda)$. Time je dokazano $E_\lambda y = y$, odnosno, $E_\lambda Qx = Qx$, a kako je vektor $x \in X$ bio proizvoljan, slijedi

$$E_\lambda Q = Q. \tag{5.17}$$

S druge strane je

$$E_\lambda(E_\mu - E_\lambda) = 0 \qquad \text{za} \quad \mu > \lambda,$$

pa slijedi

$$E_\lambda Q = 0. \tag{5.18}$$

Iz (5.17) i (5.18) dobivamo $Q = 0$, tj. $E_{\lambda+0} = E_\lambda$. Time je dokazano da je za svaki vektor $x \in X$ funkcija $\lambda \mapsto E_\lambda x$ zdesna neprekidna u svakoj točki iz $\mathbb{R}$.

(d) Neka je $\mu > M$ i za $x \in X$ stavimo $y = (I - E_\mu)x$. Tada je $(I - E_\mu)y = y$, pa pomoću (5.13) nalazimo

$$\mu(y|y) - (Ay|y) = ((\mu I - A)y|y) = ((\mu I - A)(I - E_\mu)y|y) \le 0.$$

Odatle je

$$\mu(y|y) \le (Ay|y) \le M(y|y).$$

Kako je $\mu > M$, slijedi $y = 0$, odnosno, $E_\mu x = x$. Međutim, vektor $x \in X$ je bio proizvoljan, pa zaključujemo da je $E_\mu = I$. Odavde i iz (c) zaključujemo da $E_\lambda = I$ vrijedi za $\lambda \ge M$.

Neka je sada $\lambda < m$ i za $x \in X$ stavimo $y = E_\lambda x$. Tada je $E_\lambda y = y$, pa pomoću (5.12) nalazimo

$$\lambda(y|y) - (Ay|y) = (((\lambda I - A)y|y) = ((\lambda I - A)E_\lambda y|y) \ge 0.$$

Odatle je

$$\lambda(y|y) \ge (Ay|y) \ge m(y|y).$$

Kako je $\lambda < m$, slijedi $y = 0$, odnosno, $E_\lambda x = 0$. Zbog proizvoljnosti vektora $x \in X$ zaključujemo da je $E_\lambda = 0$ za $\lambda < m$.

(e) Za zadanu particiju P segmenta $[a, b]$ ($a < m$, $M < b$) stavimo $\Delta_k = \langle \lambda_{k-1}, \lambda_k]$ i , kao u dokazu tvrdnje (c), $E(\Delta_k) = E_{\lambda_k} - E_{\lambda_{k-1}}$. Sada iz (5.14) dobivamo

$$\lambda_{k-1} E(\Delta_k) \le AE(\Delta_k) \le \lambda_k E(\Delta_k). \tag{5.19}$$

Nadalje, zbog tvrdnje (d) imamo

$$\sum_{k=1}^{n} E(\Delta_k) = E_b - E_a = I, \tag{5.20}$$

pa iz (5.19) sumiranjem po k od 1 do n dobivamo

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_{k-1} E(\Delta_k) \le A \le \sum_{k=1}^{n} \lambda_k E(\Delta_k), \tag{5.21}$$

odnosno, vrijedi (5.10).

Neka su sada $\xi_k \in [\lambda_{k-1}, \lambda_k]$ proizvoljni. Tada je očito

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_{k-1} E(\Delta_k) \le \sum_{k=1}^{n} \xi_k E(\Delta_k) \le \sum_{k=1}^{n} \lambda_k E(\Delta_k),$$

dakle, i

$$-\sum_{k=1}^{n}\lambda_k E(\Delta_k) \le -\sum_{k=1}^{n}\xi_k E(\Delta_k) \le -\sum_{k=1}^{n}\lambda_{k-1}E(\Delta_k).$$

Zbrajanjem tih nejednakosti sa (5.21) dobivamo

$$-\sum_{k=1}^{n}(\lambda_k-\lambda_{k-1})E(\Delta_k) \le A-\sum_{k=1}^{n}\xi_k E(\Delta_k) \le \sum_{k=1}^{n}(\lambda_k-\lambda_{k-1})E(\Delta_k). \tag{5.22}$$

Zadatak 5.9. *Neka su $B \in B_+(X)$ i $C \in B_h(X)$ takvi da je $-B \le C \le B$. Dokažite da je tada $\|C\| \le \|B\|$.*

Uputa: Koristite propoziciju 3.1.

Pomoću tog zadatka iz (5.22) slijedi

$$\left\|A-\sum_{k=1}^{n}\xi_k E(\Delta_k)\right\| \le \left\|\sum_{k=1}^{n}(\lambda_k-\lambda_{k-1})E(\Delta_k)\right\|. \tag{5.23}$$

Za svaki $k \in \{1,2\dots,n\}$ vrijedi $0<\lambda_k-\lambda_{k-1}\le\delta(P)$, pa zbog (5.20) imamo

$$0 \le \sum_{k=1}^{n}(\lambda_k-\lambda_{k-1})E(\Delta_k) \le \delta(P)\sum_{k=1}^{n}E(\Delta_k)=\delta(P)I.$$

Odatle i iz (5.23) pomoću zadatka 5.9. slijedi

$$\left\|A-\sum_{k=1}^{n}\xi_k E(\Delta_k)\right\| \le \delta(P), \tag{5.24}$$

odnosno, vrijedi (5.11).

Preostaje nam još da dokažemo drugu implikaciju u tvrdnji (a). Pretpostavimo da je $C \in B(X)$ takav da je $CE_\lambda = E_\lambda C\ \forall\lambda\in\mathbb{R}$. Tada uz oznake iz dokaza tvrdnje (e) vrijedi $CE(\Delta_k)=E(\Delta_k)C$ za svaki k. Stavimo

$$B=\sum_{k=1}^{n}\xi_k E(\Delta_k).$$

Tada je $BC=CB$ i prema (5.24) je $\|A-B\|\le\delta(P)$. Stoga je

$$\|AC-CA\|=\|(AC-BC)+(CB-CA)\|\le\|(A-B)C\|+\|C(B-A)\|\le 2\|C\|\cdot\|A-B\|\le 2\delta(P)\|C\|.$$

Budući da to vrijedi za svaku particiju P segmenta $[a,b]$ ($a<m$ i $M\le b$), zaključujemo da je $AC=CA$.

Zbog nejednakosti (5.11) obično se piše

$$A=\int_a^b \lambda \mathrm{d}E_\lambda.$$

Lako se vidi da tada za svaki $m\in\mathbb{N}$ vrijedi

$$A^m=\int_a^b \lambda^m \mathrm{d}E_\lambda,$$

dakle, za svaki polinom p s kompleksnim koeficijentima vrijedi

$$p(A) = \int_a^b p(\lambda)\mathrm{d}E_\lambda.$$

Lako se vidi da je $\sigma(A) \subseteq [m, M]$. Ako je $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ neprekidna funkcija i ako je $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bilo koji niz polinoma čije restrikcije na $[a, b]$ uniformno konvergiraju prema funkciji f onda se pokazuje da niz operatora

$$A_n = p_n(A) = \int_a^b p_n(\lambda)\mathrm{d}E_\lambda, \qquad n \in \mathbb{N},$$

konvergira po normi u $B(X)$ prema operatoru

$$\int_a^b f(\lambda)\mathrm{d}E_\lambda.$$

Stoga se definira

$$f(A) = \int_a^b f(\lambda)\mathrm{d}E_\lambda.$$

Može se dokazati da pridruživanje $f \mapsto f(A)$ ima svojstva:

Teorem 5.7. (a) *Ako je* $f|\sigma(A) = g|\sigma(A)$, *onda je* $f(A) = g(A)$.

(b) *Ako je* $f \equiv 1$ *onda je* $f(A) = I$.

(c) *Ako je* $f(\lambda) = \lambda\ \forall\lambda$ *onda je* $f(A) = A$.

(d) *Pridruživanje je linearno, tj.* $(\alpha f + \beta g)(A) = \alpha f(A) + \beta g(A)$.

(e) *Pridruživanje je multiplikativno, tj. ako je* $f(\lambda) = g(\lambda)h(\lambda)\ \forall\lambda$ *onda je* $f(A) = g(A)h(A)$.

(f) *Ako je* $g(\lambda) = \overline{f(\lambda)}\ \forall\lambda$ *onda je* $g(A) = f(A)^*$.

(g) *Pridruživanje je monotono, tj. ako je* $f(\lambda) \leq g(\lambda)\ \forall\lambda$ *onda je* $f(A) \leq g(A)$.

(h) *Pridruživanje je izometrija, tj.* $\|f(A)\| = \max\{|f(\lambda)|;\ \lambda \in \sigma(A)\}$.

(i) *Vrijedi teorem o preslikavanju spektra, tj.* $\sigma(f(A)) = f(\sigma(A)) = \{f(\lambda);\ \lambda \in \sigma(A)\}$.

(j) *Ako je* $C \in B(X)$ *i* $CA = AC$ *onda je* $Cf(A) = f(A)C$.

Nadalje, može se dokazati:

Teorem 5.8. *Neka je* $A \in B_h(X)$ *i neka je* $\lambda \mapsto E_\lambda$ *njegova spektralna funkcija.*

(a) *Za* $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ *vrijedi* $\lambda_0 \notin \sigma(A)$ *ako i samo ako je funkcija* $\lambda \mapsto E_\lambda$ *konstantna na nekoj okolini od* λ_0, *tj. ako postoji* $\varepsilon > 0$ *takav da je* $E_\lambda = E_\mu$ *za sve* $\lambda, \mu \in [\lambda_0 - \varepsilon, \lambda_0 + \varepsilon]$.

(b) *Točkovni spektar* $\sigma_p(A)$ *sastoji se od svih točaka* $\lambda \in \sigma(A)$ *u kojima funkcija* $\lambda \mapsto E_\lambda$ *ima prekid, tj.*

$$\sigma_p(A) = \{\lambda \in \sigma(A);\ E_\lambda \neq E_{\lambda-0}\}.$$

Tada je $E_\lambda - E_{\lambda-0}$ *ortogonalni projektor na svojstveni potprostor* $\{x \in X;\ Ax = \lambda x\}$.

(c) *Kontinuirani spektar* $\sigma_c(A)$ *sastoji se od svih točaka* $\lambda \in \sigma(A)$ *u kojima je funkcija* $\lambda \mapsto E_\lambda$ *neprekidna, tj.*

$$\sigma_c(A) = \{\lambda \in \sigma(A);\ E_\lambda = E_{\lambda-0}\}.$$

Naravno, zbog propozicije 2.6. je $\sigma_r(A) = \emptyset$, dakle, $\sigma_c(A) = \sigma(A) \setminus \sigma_p(A)$, pa tvrdnja (c) slijedi neposredno iz tvrdnje (b).

Poglavlje 6

Kompaktni operatori na Hilbertovom prostoru

6.1 Algebre kompaktnih operatora

U ovom poglavlju X je Hilbertov prostor. Tada je prema teoremima 2.2. i 2.4. $K(X)$ zatvoren obostrani ideal u Banachovoj algebri $B(X)$. Promatrat ćemo sada podalgebre algebre $K(X)$. Podalgebru $\mathcal{A}$ algebre $B(X)$ zovemo $*-$**podalgebrom** ako je $\mathcal{A}^* = \mathcal{A}$, tj. ako vrijedi

$$A \in \mathcal{A} \qquad \Longrightarrow \qquad A^* \in \mathcal{A}.$$

Za $*-$podalgebru $\mathcal{A}$ od $K(X)$ sa $\mathcal{P}(\mathcal{A})$ ćemo označavati skup svih ortogonalnih projektora u $\mathcal{A}$, tj.

$$\mathcal{P}(\mathcal{A}) = \{E \in \mathcal{A};\ E^2 = E = E^*\}.$$

Svaki je operator $E \in \mathcal{P}(\mathcal{A})$ kompaktan i očito je $E|R(E) = I_{R(E)}$, pa iz tvrdnje (b) teorema 2.3. slijedi da je slika $R(E)$ konačnodimenzionalna. Drugim riječima, svaki $E \in \mathcal{P}(\mathcal{A})$ je projektor konačnog ranga.

Skup $\mathcal{P}(\mathcal{A})$ je parcijalno uređen relacijom

$$E, F \in \mathcal{P}(\mathcal{A}), \qquad E \leq F \qquad \Longleftrightarrow \qquad EF = FE = E.$$

Iz zadatka 5.1. slijedi da za $E, F \in \mathcal{P}(\mathcal{A})$ vrijedi

$$E \leq F \qquad \Longleftrightarrow \qquad R(E) \subseteq R(F) \qquad \Longleftrightarrow \qquad (Ex|x) \leq (Fx|x) \quad \forall x \in X.$$

Za projektore $E, F \in \mathcal{P}(\mathcal{A})$ kažemo da su međusobno **ortogonalni** ako vrijedi $EF = 0$. Tada pišemo $E \perp F$. Naravno, iz $\mathcal{A}^* = \mathcal{A}$ slijedi da je tada i $FE = 0$.

Zadatak 6.1. *Dokažite da za $E, F \in \mathcal{P}(\mathcal{A})$ vrijedi $E \perp F$ ako i samo ako je $R(E) \perp R(F)$.*

Projektor $E \in \mathcal{P}(\mathcal{A})$ zove se **minimalan** u $\mathcal{A}$, ako je on minimalan element parcijalno uređenog skupa $\mathcal{P}(\mathcal{A}) \setminus \{0\}$, tj. ako je $E \neq 0$ i ako vrijedi:

$$F \in \mathcal{P}(\mathcal{A}), \quad F \leq E \qquad \Longrightarrow \qquad F = E \quad \text{ili} \quad F = 0.$$

Propozicija 6.1. (a) *$E \in \mathcal{P}(\mathcal{A}) \setminus \{0\}$ je minimalan ako i samo ako vrijedi*

$$E\mathcal{A}E = \mathbb{C}E, \qquad \textit{tj.} \quad \{EAE;\ A \in \mathcal{A}\} = \{\lambda E;\ \lambda \in \mathbb{C}\}.$$

(b) *Svaki $E \in \mathcal{P}(\mathcal{A}) \setminus \{0\}$ je konačna suma međusobno ortogonalnih minimalnih projektora u $\mathcal{A}$.*

Dokaz: (a) Pretpostavimo najprije da je $E\mathcal{A}E = \mathbb{C}E$. Neka je $F \in \mathcal{P}(\mathcal{A})$ i $F \leq E$. Tada je $F = EFE$, pa postoji $\lambda \in \mathbb{C}$ takav da je $F = \lambda E$. Kako su F i E projektori, imamo

$$\lambda E = F = F^2 = \lambda^2 E^2 = \lambda^2 E.$$

Kako je $E \neq 0$, slijedi $\lambda^2 = \lambda$, a to je moguće samo ako je $\lambda = 1$ ili $\lambda = 0$. Dakle, $F = E$ ili $F = 0$, i time je dokazano da je E minimalan projektor u algebri $\mathcal{A}$.

Pretpostavimo sada da je $E \in \mathcal{P}(\mathcal{A}) \setminus \{0\}$ minimalan projektor u algebri $\mathcal{A}$. Neka je $T \in \mathcal{A}$ hermitski, tj. $T^* = T$. Tada je ETE hermitski operator konačnog ranga. Po teoremu o dijagonalizaciji hermitskog operatora na konačnodimenzionalnom prostoru primijenjenom na restrikciju $ETE|R(E)$, potprostor $R(E)$ je ortogonalna suma svojstvenih potprostora tog operatora. Dakle, ako je $ETE \neq 0$, $\sigma(ETE|R(E)) \setminus \{0\} = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$ i $\lambda_i \neq \lambda_j$ za $i \neq j$, onda vrijedi

$$R(E) = X_0 \oplus X_1 \oplus \cdots \oplus X_n, \quad X_0 = N(ETE) \cap R(E), \quad X_j = \{x \in X;\ ETEx = \lambda_j x\}, \quad 1 \leq j \leq n.$$

Označimo sada sa F_j, $1 \leq j \leq n$, ortogonalni projektor prostora X na potprostor X_j, dakle, projektor duž potprostora

$$X_j^\perp = N(E) \oplus X_0 \oplus X_1 \oplus \cdots \oplus X_{j-1} \oplus X_{j+1} \oplus \cdots \oplus X_n.$$

Zadatak 6.2. *Dokažite da uz gornje oznake vrijedi*

$$ETE = \lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2 + \cdots + \lambda_n F_n.$$

Nadalje, dokažite da je $F_j = P_j(ETE)$, $j = 1, 2, \ldots, n$, gdje je svaki P_j polinom bez konstantnog člana.

Uputa: Za drugu tvrdnju promatrajte sustav jednadžbi

$$(ETE)^k = \lambda_1^k F_1 + \lambda_2^k F_2 + \cdots + \lambda_n^k F_n, \qquad 1 \leq k \leq n,$$

koji neposredno slijedi iz jednakosti za $k = 1$, i riješite taj sustav po $F_1, F_2, \ldots, F_n$.

Prema drugoj tvrdnji u prethodnom zadatku vrijedi $F_1, F_2, \ldots, F_n \in \mathcal{P}(\mathcal{A})$. Imamo $R(F_j) = X_j \subseteq R(E)$, dakle, prema zadatku 5.1. vrijedi $F_j \leq E$ za svaki j. Po pretpostavci je E minimalan, pa slijedi da je za svako j ili $F_j = E$ ili $F_j = 0$. Kako su projektori F_j međusobno ortogonalni, slijedi da je nužno $n = 1$ i $F_1 = E$. Dakle, vrijedi $ETE = \lambda_1 E$.

Napokon, svaki operator $T \in \mathcal{A}$ je oblika $T_1 + iT_2$, gdje su $T_1, T_2 \in \mathcal{A}$ hermitski, dakle, vrijedi $ETE = ET_1E + iET_2E = \lambda E$ za neki $\lambda \in \mathbb{C}$. Time je tvrdnja (a) dokazana.

(b) Ako $E \in \mathcal{P}(\mathcal{A}) \setminus \{0\}$ nije minimalan u $\mathcal{A}$ onda postoji $F_1 \in \mathcal{P}(\mathcal{A})$ takav da je $F_1 \neq E$, $F_1 \neq 0$ i $F_1 \leq E$. Tada isto vrijedi i za $F_2 = E - F_1$. Sada je $F_1 \perp F_2$ i $E = F_1 + F_2$. Budući da je $\dim R(E) = \dim R(F_1) + \dim R(F_2)$, tvrdnja slijedi indukcijom po $\dim R(E)$.

Podalgebra $\mathcal{A}$ od $B(X)$ zove se **ireducibilna** ako ne postoji zatvoren $\mathcal{A}-$invarijantan potprostor Y koji je netrivijalan, tj. $Y \neq X$ i $Y \neq \{0\}$.

Teorem 6.1. *Neka je X Hilbertov prostor i neka je $\mathcal{A}$ zatvorena ireducibilna $*-$podalgebra od $K(X)$. Tada je $\mathcal{A} = K(X)$.*

Dokaz: Dokažimo najprije da postoji $E \in \mathcal{P}(\mathcal{A})$ takav da je $\dim R(E) = 1$. Prema tvrdnji (b) propozicije 6.1. dovoljno je dokazati da je $\dim R(E) = 1$ za svaki minimalan projektor E u algebri $\mathcal{A}$. Doista, neka je $E \in \mathcal{P}(\mathcal{A}) \setminus \{0\}$ minimalan u $\mathcal{A}$. Neka je $x \in R(E)$, $x \neq 0$. Neka je Y zatvarač potprostora $\mathcal{A}x = \{Tx;\ T \in \mathcal{A}\}$. Kako je $x = Ex$, to je $x \in Y$, dakle, $Y \neq \{0\}$. Nadalje, očito je potprostor Y $\mathcal{A}-$invarijantan. Kako je po pretpostavci algebra $\mathcal{A}$ ireducibilna, zaključujemo da je $Y = X$. Drugim riječima, potprostor $\mathcal{A}x$ je gust u X. To je ekvivalentno jednakosti $(\mathcal{A}x)^\perp = \{0\}$.

Neka je sada $y \in R(E)$ i $y \perp x$. Neka je $T \in \mathcal{A}$. Prema tvrdnji (a) propozicije 6.1. tada je $ETE = \lambda E$ za neki $\lambda \in \mathbb{C}$. Dakle,

$$(y|Tx) = (Ey|TEx) = (y|ETEx) = (y|\lambda x) = \overline{\lambda}(y|x) = 0.$$

Kako to vrijedi za svaki $T \in \mathcal{A}$, dobivamo da je $y \perp \mathcal{A}x$, dakle, $y = 0$. Time je dokazano da je $R(E) = \mathbb{C}x$, tj. $\dim R(E) = 1$.

Dokažimo sada da $\mathcal{A}$ sadrži svaki ortogonalan projektor na prostoru X ranga 1. Doista, neka je F ortogonalan projektor na prostoru X ranga 1 i neka je $f \in R(F)$, $\|f\| = 1$. Tada se lako vidi da vrijedi $Fz = (z|f)f$ za svaki $z \in X$. Neka je $E \in \mathcal{P}(\mathcal{A})$ projektor ranga 1 i $e \in R(E)$, $\|e\| = 1$, dakle, $Ez = (z|e)e\ \forall z \in X$. Prema prethodnom odlomku tada je potprostor $\mathcal{A}e$ gust u X, pa postoji niz $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ u $\mathcal{A}$ takav da niz $(T_ne)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira prema f, a bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $\|T_ne\| = 1\ \forall n$; doista, možemo uzeti da su svi $T_ne \neq 0$, a zatim T_n zamijeniti sa $\dfrac{1}{\|T_ne\|}T_n$. Tada je $T_nET_n^* \in \mathcal{A}$ i za svaki $z \in X$ nalazimo

$$\|T_nET_n^*z - Fz\| = \|T_n(T_n^*z|e)e - (z|f)f\| = \|(z|T_ne)T_ne - (z|f)f\| =$$

$$= \|(z|T_ne)(T_ne - f) + (z|T_ne - f)f\| \leq \|z\| \cdot \|T_ne\| \cdot \|T_ne - f\| + \|z\| \cdot \|T_e - f\| \cdot \|f\| = 2\|z\|\|T_ne - f\|.$$

Kako to vrijedi za svaki $z \in X$, slijedi

$$\|T_nET_n^* - F\| \leq 2\|T_ne - f\| \qquad \Longrightarrow \qquad F = \lim_{n\to\infty} T_nET_n^*,$$

a kako je po pretpostavci algebra $\mathcal{A}$ zatvorena, slijedi $F \in \mathcal{A}$ kao što smo i tvrdili.

Iz dokazanog slijedi da $\mathcal{A}$ sadrži sve ortogonalne projektore na X konačnog ranga, a iz teorema o dijagonalizaciji hermitskih operatora na konačnodimenzionalnom prostoru slijedi da $\mathcal{A}$ sadrži sve operatore na X konačnog ranga. Dakle, $F(X) \subseteq \mathcal{A}$, a kako je prema teoremu 2.5. $K(X) = Cl(F(X))$, to je $K(X) \subseteq \mathcal{A}$, tj. $\mathcal{A} = K(X)$.

Teorem 6.2. *Neka je X Hilbertov prostor. Algebra $K(X)$ ne sadrži nijedan zatvoren obostrani ideal osim $K(X)$ i $\{0\}$.*

Dokaz: Neka je $\mathcal{A} \neq \{0\}$ zatvoren obostrani ideal u algebri $K(X)$. Za svaki $x \in X$, $x \neq 0$, tada je $Y = Cl(\mathcal{A}x)$ zatvoren potprostor od X koji je različit od $\{0\}$ i koji je $K(X)-$invarijantan; doista, za $T \in K(X)$ je $T\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}$, dakle, $T\mathcal{A}x \subseteq \mathcal{A}x$, pa zbog neprekidnosti operatora T slijedi $TY \subseteq Y$. Posebno, Y je invarijantan s obzirom na svaki projektor ranga 1, a to je moguće samo ako je $Y = X$. Time je dokazano da je potprostor $\mathcal{A}x$ gust u X za svaki vektor $x \neq 0$. Odatle slijedi da u X nema netrivijalnih zatvorenih $\mathcal{A}-$invarijantnih potprostora. Prema teoremu 6.1. zaključujemo da je nužno $\mathcal{A} = K(X)$.

Teorem 6.3. *Neka je X Hilbertov prostor i neka je $\mathcal{A}$ zatvorena ireducibilna $*-$podalgebra od $B(X)$. Tada je ili $\mathcal{A} \cap K(X) = \{0\}$ ili je $K(X) \subseteq \mathcal{A}$.*

Dokaz: Pretpostavimo da je $\mathcal{B} = \mathcal{A} \cap K(X) \neq \{0\}$. Tada je $\mathcal{B}$ zatvoren ideal u algebri $\mathcal{A}$. Odatle slično kao u dokazu teorema 6.2. nalazimo da je za svaki vektor $x \neq 0$ potprostor $\mathcal{B}x$ gust u X. Doista, za $T \in \mathcal{A}$ je $T\mathcal{B} \subseteq \mathcal{B}$, dakle, $T\mathcal{B}x \subseteq \mathcal{B}x$, pa po neprekidnosti slijedi da je $Cl(\mathcal{B}x) \neq \{0\}$ zatvoren $\mathcal{A}-$invarijantan potprostor od X, dakle, $Cl(\mathcal{B}x) = X$. Odatle slijedi da u X ne postoji netrivijalan $\mathcal{B}-$invarijantan potprostor, pa pomoću teorema 6.2. zaključujemo da je $\mathcal{B} = K(X)$. Time je dokazano da je $K(X) \subseteq \mathcal{A}$.

Zadatak 6.3. *Neka je* $\mathcal{A}$ *zatvorena* $*-$*podalgebra od* $K(X)$.

(a) *Neka je* $E \in \mathcal{P}(\mathcal{A}) \setminus \{0\}$ *minimalni projektor u* $\mathcal{A}$ *i neka je* $x \in R(E)$ *jedinični vektor. Stavimo* $Y = Cl(\mathcal{A}x)$. *Dokažite da je* $\mathcal{A}|Y = \{T|Y;\ T \in \mathcal{A}\} = K(Y)$.

(b) *Dokažite da postoje međusobno ortogonalni zatvoreni* $\mathcal{A}-$*invarijantni potprostori* X_i, $i \in I$, *takvi da je*

$$\mathcal{A}|X_i = K(X_i) \quad \forall i \in I \qquad i \qquad Cl\left(\sum_{i\in I} X_i\right) = X.$$

6.2 Hilbert−Schmidtovi operatori

Neka su X i Y Hilbertovi prostori. $A \in B(X,Y)$ se zove **Hilbert−Schmidtov operator** ako postoji ortonormirana baza $(e_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ takva da je skup $\{\alpha \in \mathcal{A};\ Ae_\alpha \neq 0\}$ konačan ili prebrojiv i da vrijedi

$$\sum_{\alpha\in\mathcal{A}} \|Ae_\alpha\|^2 < +\infty. \tag{6.1}$$

Skup svih Hilbert−Schmidtovih operatora sa X u Y označavat ćemo sa $\mathcal{HS}(X,Y)$. Pisat ćemo $\mathcal{HS}(X,X) = \mathcal{HS}(X)$.

Teorem 6.4. *Neka je $A \in \mathcal{HS}(X,Y)$.*

(*a*) *Za svaku ortonormiranu bazu $(e_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ je skup $\{\alpha \in \mathcal{A};\ Ae_\alpha \neq 0\}$ konačan ili prebrojiv i vrijedi* (6.1).

(*b*) *Za bilo koje dvije ortonormirane baze $(e_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ i $(e'_{\alpha'})_{\alpha'\in\mathcal{A}'}$ prostora X vrijedi*

$$\sum_{\alpha\in\mathcal{A}} \|Ae_\alpha\|^2 = \sum_{\alpha'\in\mathcal{A}'} \|Ae'_{\alpha'}\|^2.$$

(*c*) *Vrijedi $A^* \in \mathcal{HS}(Y,X)$ i za bilo koje ortonormirane baze $(e_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ od X i $(f_\beta)_{\beta\in\mathcal{B}}$ od Y vrijedi*

$$\sum_{\alpha\in\mathcal{A}} \|Ae_\alpha\|^2 = \sum_{\beta\in\mathcal{B}} \|A^*f_\beta\|^2. \tag{6.2}$$

Dokaz: Neka je $(e_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ ortonormirana baza prostora X za koju je $\mathcal{A}' = \{\alpha \in \mathcal{A};\ Ae_\alpha \neq 0\}$ konačan ili prebrojiv skup i za koju vrijedi (6.1). Nadalje, neka je $(f_\beta)_{\beta\in\mathcal{B}}$ bilo koja ortonormirana baza prostora Y. Dokazat ćemo da je tada skup $\{\beta \in \mathcal{B};\ A^*f_\beta \neq 0\}$ konačan ili prebrojiv i da vrijedi (6.2). Odatle uz zamjenu uloga A i A^* slijede sve tri tvrdnje teorema.

Prema tvrdnji (*a*) teorema 1.24. za svaki $\alpha \in \mathcal{A}$ skup $\mathcal{B}_\alpha = \{\beta \in \mathcal{B};\ (Ae_\alpha|f_\beta) \neq 0\}$ je konačan ili prebrojiv, a prema tvrdnji (*d*) istog teorema vrijedi

$$Ae_\alpha = \sum_{\beta\in\mathcal{B}} (Ae_\alpha|f_\beta)f_\beta.$$

Naravno, za $\alpha \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{A}'$ je $Ae_\alpha = 0$, pa vrijedi $\mathcal{B}_\alpha = \emptyset$. Stavimo

$$\mathcal{B}' = \bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}} \mathcal{B}_\alpha = \bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}'} \mathcal{B}_\alpha.$$

Budući da je skup $\mathcal{A}'$ po pretpostavci konačan ili prebrojiv, zaključujemo da je skup $\mathcal{B}'$ konačan ili prebrojiv.

Neka je $\beta \in \mathcal{B} \setminus \mathcal{B}'$. Tada vrijedi $\beta \notin \mathcal{B}_\alpha\ \forall \alpha \in \mathcal{A}$, pa slijedi

$$(e_\alpha|A^*f_\beta) = (Ae_\alpha|f_\beta) = 0 \quad \forall \alpha \in \mathcal{A} \qquad \Longrightarrow \qquad A^*f_\beta = 0.$$

Prema tome, skup $\{\beta \in \mathcal{B};\ A^*f_\beta \neq 0\}$ sadržan je u konačnom ili prebrojivom skupu $\mathcal{B}'$, pa je i sam konačan ili prebrojiv.

Prema tvrdnjama (*c*) i (*d*) teorema 1.24., primijenjenim na ortonormirane baze $(f_\beta)_{\beta\in\mathcal{B}}$ i $(e_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ i na vektore Ae_α i A^*f_β, nalazimo da vrijedi

$$Ae_\alpha = \sum_{\beta\in\mathcal{B}} (Ae_\alpha|f_\beta)f_\beta, \qquad \|Ae_\alpha\|^2 = \sum_{\beta\in\mathcal{B}} |(Ae_\alpha|f_\beta)|^2,$$

$$A^* f_\beta = \sum_{\alpha\in\mathcal{A}} (A^* f_\beta | e_\alpha) e_\alpha, \qquad \|A^* f_\beta\|^2 = \sum_{\alpha\in\mathcal{A}} |(A^* f_\beta | e_\alpha)|^2 = \sum_{\alpha\in\mathcal{A}} |(A e_\alpha | f_\beta)|^2.$$

Budući da svi redovi s kojima baratamo imaju sve članove ≥ 0, pa je zamjena u redoslijedu dvostrukih suma dozvoljena, nalazimo

$$\sum_{\beta\in\mathcal{B}} \|A^* f_\beta\|^2 = \sum_{\beta\in\mathcal{B}} \sum_{\alpha\in\mathcal{A}} |(A^* f_\beta | e_\alpha)|^2 = \sum_{\alpha\in\mathcal{A}} \sum_{\beta\in\mathcal{B}} |(A e_\alpha | f_\beta)|^2 = \sum_{\alpha\in\mathcal{A}} \|A e_\alpha\|^2.$$

Time su dokazane sve tri tvrdnje teorema.

Za Hilbertove prostore X i Y i za $A \in \mathcal{HS}(X, Y)$ stavljamo

$$\|A\|_{\mathcal{HS}} = \left(\sum_{\alpha\in\mathcal{A}} \|A e_\alpha\|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

za bilo koju ortonormiranu bazu $(e_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ prostora X. Prema tvrdnji (c) teorema 6.4. vrijedi

$$\|A\|_{\mathcal{HS}} = \|A^*\|_{\mathcal{HS}}.$$

Teorem 6.5. *Neka su X, Y i Z Hilbertovi prostori.*

(a) $\mathcal{HS}(X, Y)$ je potprostor prostora $B(X, Y)$ i $\|\cdot\|_{\mathcal{HS}}$ je norma na $\mathcal{HS}(X, Y)$ u odnosu na koju je prostor $\mathcal{HS}(X, Y)$ potpun.

(b) Za $A \in \mathcal{HS}(X, Y)$ vrijedi $\|A\| \leq \|A\|_{\mathcal{HS}}$.

(c) $F(X, Y)$ je potprostor od $\mathcal{HS}(X, Y)$, koji je gust u odnosu na normu $\|\cdot\|_{\mathcal{HS}}$.

(d) Ako su $A \in \mathcal{HS}(X, Y)$ i $B \in B(Y, Z)$ onda je $BA \in \mathcal{HS}(X, Z)$ i vrijedi

$$\|BA\|_{\mathcal{HS}} \leq \|B\| \cdot \|A\|_{\mathcal{HS}}.$$

(e) Ako su $A \in B(X, Y)$ i $B \in \mathcal{HS}(Y, Z)$ onda je $BA \in \mathcal{HS}(X, Z)$ i vrijedi

$$\|BA\|_{\mathcal{HS}} \leq \|B\|_{\mathcal{HS}} \cdot \|A\|.$$

(f) $\mathcal{HS}(X)$ je obostrani ideal u algebri $B(X)$ i to je Banachova algebra u odnosu na normu $\|\cdot\|_{\mathcal{HS}}$.

(g) Norma $\|\cdot\|_{\mathcal{HS}}$ na prostoru $\mathcal{HS}(X, Y)$ pridružena je skalarnom produktu

$$(A|B)_{\mathcal{HS}} = \sum_{\alpha\in\mathcal{A}} (A e_\alpha | B e_\alpha), \qquad A, B \in \mathcal{HS}(X, Y),$$

za bilo koju ortonormiranu bazu $(e_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ prostora X. Gornji red konvergira apsolutno i suma mu ne ovisi o izboru ortonormirane baze $(e_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$.

Dokaz: (b) Neka je $A \in \mathcal{HS}(X, Y)$ i neka je $\varepsilon > 0$. Po definicije norme $\|\cdot\|$ na prostoru $B(X, Y)$ postoji jedinični vektor $e \in X$ takav da je

$$\|A\|^2 < \varepsilon + \|Ae\|^2.$$

Neka je $(e_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ ortonormirana baza prostora X koja sadrži vektor e. Sada nalazimo

$$\|A\|^2 < \varepsilon + \|Ae\|^2 \leq \varepsilon + \sum_{\alpha\in\mathcal{A}} \|Ae_\alpha\|^2 = \varepsilon + \|A\|^2_{\mathcal{HS}}.$$

Budući da je $\varepsilon > 0$ bio proizvoljan, slijedi $\|A\| \leq \|A\|_{\mathcal{HS}}$.

(a) Pretpostavljat ćemo da su prostori X i Y beskonačnodimenzionalni; ako je neki od njih konačnodimenzionalan, dokaz se samo neznatno razlikuje u notaciji: umjesto nekih beskonačnih suma pojavljuju se konačne sume. Neka su $A, B \in \mathcal{HS}(X,Y)$, neka je $(e_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ ortonormirana baza od X i neka je $(f_\beta)_{\beta\in\mathcal{B}}$ ortonormirana baza od Y. Tada postoji prebrojiv skup $\mathcal{A}' \subseteq \mathcal{A}$ takav da je $Ae_\alpha = Be_\alpha = 0$ za $\alpha \in \mathcal{A}\setminus\mathcal{A}'$, dakle i $(A+B)e_\alpha = 0$ za $\alpha \in \mathcal{A}\setminus\mathcal{A}'$. Prema tome, skup $\{\alpha \in \mathcal{A};\ (A+B)e_\alpha \neq 0\}$ je konačan ili prebrojiv.

Budući da je unija prebrojivo mnogo prebrojivih skupova prebrojiv skup, prema tvrdnji (a) teorema 1.24. vidi se da postoji prebrojiv skup $\mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B}$ takav da je $(Ae_\alpha|f_\beta) = (Be_\alpha|f_\beta) = 0$ za svaki $\alpha \in \mathcal{A}'$ i za svaki $\beta \in \mathcal{B}\setminus\mathcal{B}'$. Oznake sada možemo promijeniti tako da je $\mathcal{A}' = \mathcal{B}' = \mathbb{N}$. Dakle, imamo $Ae_\alpha = Be_\alpha = 0\ \forall\alpha \in \mathcal{A}\setminus\mathcal{A}'$. Nadalje,

$$Ae_i = \sum_{j\in\mathbb{N}} (Ae_i|f_j)f_j, \qquad Be_i = \sum_{j\in\mathbb{N}} (Be_i|f_j)f_j, \qquad \forall i \in \mathbb{N},$$

dakle,

$$\|Ae_i\|^2 = \sum_{j\in\mathbb{N}} |(Ae_i|f_j)|^2, \qquad \|Be_i\|^2 = \sum_{j\in\mathbb{N}} |(Be_i|f_j)|^2, \qquad \|(A+B)e_i\|^2 = \sum_{j\in\mathbb{N}} |(Ae_i|f_j)+(Be_i|f_j)|^2.$$

Stoga je

$$\|A\|_{\mathcal{HS}} = \left(\sum_{(i,j)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} |(Ae_i|f_j)|^2\right)^{\frac{1}{2}}, \qquad \|B\|_{\mathcal{HS}} = \left(\sum_{(i,j)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} |(Be_i|f_j)|^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

pa primjenom nejednakosti trokuta u Hilbertovom prostoru $\ell_2(\mathbb{N}\times\mathbb{N})$ dobivamo

$$\left(\sum_{i\in\mathbb{N}} \|(A+B)e_i\|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{(i,j)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} |(Ae_i|f_j)+(Be_i|f_j)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\leq \left(\sum_{(i,j)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} |(Ae_i|f_j)|^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{(i,j)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} |(Be_i|f_j)|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \|A\|_{\mathcal{HS}} + \|B\|_{\mathcal{HS}}.$$

Prema tome je $A + B \in \mathcal{HS}(X,Y)$ i vrijedi

$$\|A+B\|_{\mathcal{HS}} \leq \|A\|_{\mathcal{HS}} + \|B\|_{\mathcal{HS}}.$$

Budući da očito vrijedi

$$A \in \mathcal{HS}(X,Y) \qquad \Longrightarrow \qquad \lambda A \in \mathcal{HS}(X,Y),$$

zaključujemo da je $\mathcal{HS}(X,Y)$ potprostor prostora $B(X,Y)$ i da $\|\cdot\|_{\mathcal{HS}}$ zadovoljava nejednakost trokuta. Ostala svojstva norme su očigledna:

$$\|A\|_{\mathcal{HS}} \geq 0;$$

$$\|A\|_{\mathcal{HS}} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad Ae_\alpha = 0 \quad \forall \alpha \in \mathcal{A} \qquad \Longrightarrow \qquad A = 0;$$

$$\|\lambda A\|_{\mathcal{HS}} = \left(\sum_{\alpha \in \mathcal{A}} \|\lambda A e_\alpha\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = |\lambda| \cdot \|A\|_{\mathcal{HS}}.$$

Dakle, $\| \cdot \|_{\mathcal{HS}}$ je norma na vektorskom prostoru $\mathcal{HS}(X, Y)$.

Treba još dokazati da je prostor $\mathcal{HS}(X, Y)$ u odnosu na normu $\| \cdot \|_{\mathcal{HS}}$ potpun. Neka je $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ niz u $\mathcal{HS}(X, Y)$ koji je Cauchyjev u odnosu na normu $\| \cdot \|_{\mathcal{HS}}$. Zbog tvrdnje (b) vidimo da je taj niz Cauchyjev i u odnosu na normu $\| \cdot \|$. Budući da je prostor $B(X, Y)$ potpun u odnosu na normu $\| \cdot \|$, postoji $A \in B(X, Y)$ takav da vrijedi

$$\lim_{n \to \infty} \|A_n - A\| = 0. \tag{6.3}$$

Budući da je niz $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Cauchyjev u odnosu na normu $\| \cdot \|_{\mathcal{HS}}$, za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ takav da vrijedi

$$n, m \geq n(\varepsilon) \qquad \Longrightarrow \qquad \|A_n - A_m\|_{\mathcal{HS}} \leq \varepsilon. \tag{6.4}$$

Cauchyjev niz je uvijek ograničen, pa postoji $M > 0$ takav da je

$$\|A_n\|_{\mathcal{HS}} \leq M \qquad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{6.5}$$

Neka je $(e_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}$ ortonormirana baza od X. Budući da je unija prebrojivo mnogo prebrojivih skupova prebrojiv skup, postoji prebrojiv skup $\mathcal{A}' \subseteq \mathcal{A}$ takav da vrijedi

$$A_n e_\alpha = 0 \qquad \forall \alpha \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{A}' \ \text{ i } \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Sada za $\alpha \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{A}'$ zbog (6.3) nalazimo

$$Ae_\alpha = \lim_{n \to \infty} A_n e_\alpha = 0.$$

Dakle, skup $\{\alpha \in \mathcal{A};\ Ae_\alpha \neq 0\}$ je sadržan u prebrojivom skupu $\mathcal{A}'$ pa slijedi da je taj skup konačan ili prebrojiv.

U daljnjem pretpostavljamo da je $\mathcal{A}' = \mathbb{N}$. Zbog (6.5) za $n, k \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\sum_{i=1}^{k} \|A_n e_i\|^2 \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} \|A_n e_i\|^2 = \|A_n\|_{\mathcal{HS}}^2 \leq M^2.$$

Sada zbog (6.3) nalazimo da za $k \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\sum_{i=1}^{k} \|Ae_i\|^2 = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{k} \|A_n e_i\|^2 \leq M^2.$$

Budući da to vrijedi za svaki $k \in \mathbb{N}$, slijedi

$$\sum_{\alpha \in \mathcal{A}} \|Ae_\alpha\|^2 = \sum_{i \in \mathbb{N}} \|Ae_i\|^2 \leq M^2 < +\infty.$$

Time smo dokazali da je $A \in \mathcal{HS}(X, Y)$.

Napokon, zbog (6.4) za svako $k \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$n, m \geq n(\varepsilon) \qquad \Longrightarrow \qquad \sum_{i=1}^{k} \|(A_n - A_m)e_i\|^2 \leq \varepsilon^2.$$

Pustimo li da n teži u $+\infty$, odatle nalazimo

$$m \geq n(\varepsilon) \qquad \Longrightarrow \qquad \sum_{i=1}^{k} \|(A - A_m)e_i\|^2 \leq \varepsilon^2,$$

pa zbog proizvoljnosti $k \in \mathbb{N}$ zaključujemo

$$m \geq n(\varepsilon) \qquad \Longrightarrow \qquad \sum_{i \in \mathbb{N}} \|(A - A_m)e_i\|^2 \leq \varepsilon^2 \qquad \Longrightarrow \qquad \|A - A_m\|_{\mathcal{HS}} \leq \varepsilon.$$

Time je potpunost prostora $\mathcal{HS}(X, Y)$ u odnosu na normu $\|\cdot\|_{\mathcal{HS}}$ dokazana.

(c) Očito je $F(X, Y)$ potprostor od $\mathcal{HS}(X, Y)$. Neka je $A \in \mathcal{HS}(X, Y)$ i neka je $(e_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}$ ortonormirana baza prostora X. Možemo pretpostaviti da je $\mathbb{N} \subseteq \mathcal{A}$ i da je $Ae_\alpha = 0 \ \forall \alpha \in \mathcal{A} \setminus \mathbb{N}$. Tada je

$$\|A\|_{\mathcal{HS}}^2 = \sum_{i \in \mathbb{N}} \|Ae_i\|^2.$$

Iz konvergencije gornjeg reda slijedi da za svaki $n \in \mathbb{N}$ postoji $p(n) \in \mathbb{N}$ takav da vrijedi

$$\sum_{i=p(n)+1}^{\infty} \|Ae_i\|^2 \leq \frac{1}{n^2}. \tag{6.6}$$

Sada za $n \in \mathbb{N}$ definiramo $A_n \in F(X, Y)$ sa

$$A_n x = \sum_{i=1}^{p(n)} (x|e_i) Ae_i, \qquad x \in X,$$

odnosno, sa

$$A_n e_i = \begin{cases} Ae_i & \text{za } 1 \leq i \leq p(n) \\ 0 & \text{za } i > p(n). \end{cases}$$

Tada je

$$(A - A_n)e_i = \begin{cases} 0 & \text{za } 1 \leq i \leq p(n) \\ Ae_i & \text{za } i > p(n). \end{cases}$$

Prema tome, zbog (6.6) nalazimo

$$\|A - A_n\|_{\mathcal{HS}} = \left(\sum_{i \in \mathbb{N}} \|(A - A_n)e_i\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{i=p(n)+1}^{\infty} \|Ae_i\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{1}{n}.$$

To znači da je

$$\lim_{n \to \infty} \|A - A_n\|_{\mathcal{HS}} = 0$$

i time je dokazano da je potprostor $F(X, Y)$ gust u prostoru $\mathcal{HS}(X, Y)$ u odnosu na normu $\|\cdot\|_{\mathcal{HS}}$.

Zadatak 6.4. *Dokažite tvrdnje* (d), (e), (f) *i* (g) *teorema 6.5.*

Uputa: Apsolutna konvergencija reda

$$\sum_{\alpha\in\mathcal{A}}(Ae_\alpha|Be_\alpha)$$

u tvrdnji (g) neposredno slijedi iz očite nejednakosti

$$|(Ae_\alpha|Be_\alpha)| \le \frac{1}{2}\left(\|Ae_\alpha\|^2 + \|Be_\alpha\|^2\right).$$

Iz tvrdnji (b) i (c) teorema 6.5. i iz teorema 2.5. neposredno slijedi

Korolar 6.1. *Za Hilbertove prostore X i Y $\mathcal{HS}(X,Y)$ je potprostor od $K(X,Y)$ koji je u njemu gust u odnosu na normu $\|\cdot\|$.*

Zadatak 6.5. *Neka je $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ortonormirana baza Hilbertovog prostora X i neka je $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz u $\mathbb{C}$ takav da vrijedi*

$$\lim_{n\to\infty}\alpha_n = 0 \qquad i \qquad \sum_{n\in\mathbb{N}}|\alpha_n|^2 = +\infty.$$

Dokažite da je sa

$$Ax = \sum_{i\in\mathbb{N}}\alpha_i(x|e_i)e_i, \qquad x\in X,$$

odnosno, sa

$$Ae_i = \alpha_i e_i, \qquad i\in\mathbb{N},$$

zadan operator $A\in K(X)\setminus\mathcal{HS}(X)$.

Uputa: Dokažite da za operatore $A_n\in F(X)$, definirane sa

$$A_n x = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i(x|e_i)e_i, \qquad x\in X, \quad n\in\mathbb{N},$$

i za brojeve

$$M_n = \sup\{|\alpha_k|;\ k>n\}, \qquad n\in\mathbb{N},$$

vrijedi

$$\|(A-A_n)x\|^2 \le M_n^2\|x\|^2 \qquad \forall x\in X.$$

Odatle zaključite da je $A\in K(X)$.

6.3 Nuklearni operatori

Neka su X i Y Hilbertovi prostori i neka je $A \in K(X,Y)$. Prema teoremu 3.5. postoje ortonormirani nizovi $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ u X i $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ u Y i niz pozitivnih brojeva $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ takvi da vrijedi

$$\mu_{n+1} \leq \mu_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad \text{i} \qquad \lim_{n\to\infty} \mu_n = 0,$$

i da je

$$Ax = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu_n (x|e_n) f_n \qquad \forall x \in X. \tag{6.7}$$

Formula (6.7) zove se **Schmidtov prikaz operatora** A. Nadalje, iz dokaza teorema 3.5. znamo da su μ_n pozitivni drugi korijeni iz svojstvenih vrijednosti kompaktnog pozitivnog operatora A^*A. Brojevi $\mu_n > 0$ zovu se **singularne vrijednosti operatora** A. Schmidtov prikaz (6.7) možemo tumačiti kao da je kompaktan operator A "izgrađen" od operatora $x \mapsto \mu_n(x|e_n)f_n$ ranga 1.

Propozicija 6.2. *Neka su X i Y Hilbertovi prostori i neka su $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz u X i $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz u Y takvi da vrijedi*

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \|a_n\| \cdot \|b_n\| < +\infty. \tag{6.8}$$

Tada je formulom

$$Ax = \sum_{n\in\mathbb{N}} (x|a_n) b_n \qquad x \in X \tag{6.9}$$

zadan operator $A \in B(X,Y)$, red u (6.9) apsolutno konvergira i vrijedi

$$\|A\| \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \|a_n\| \cdot \|b_n\|. \tag{6.10}$$

Dokaz: Iz (6.8) pomoću CSB−nejednakosti slijedi

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \|(x|a_n)b_n\| = \sum_{n\in\mathbb{N}} |(x|a_n)| \cdot \|b_n\| \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \|x\| \cdot \|a_n\| \cdot \|b_n\| = \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} \|a_n\| \cdot \|b_n\|\right) \cdot \|x\| < +\infty.$$

Odatle se vidi da red u (6.9) apsolutno konvergira, dakle i konvergira u Y, da je sa (6.9) zadan operator $A \in B(X,Y)$ i da vrijedi (6.10).

Neka su X i Y Hilbertovi prostori i neka je $A : X \to Y$ linearan operator. A se zove **nuklearan operator** ako postoje nizovi vektora $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ u X i $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ u Y takvi da vrijede (6.8) i (6.9). Skup svih nuklearnih operatora sa X u Y označavat ćemo sa $\mathcal{N}(X,Y)$. Naravno, ako je $A \in \mathcal{N}(X,Y)$, moguće je da postoji više parova nizova (a_n) i (b_n) takvih da vrijede (6.8) i (6.9). Za $A \in \mathcal{N}(X,Y)$ stavljamo

$$\|A\|_{\mathcal{N}} = \inf \sum_{n\in\mathbb{N}} \|a_n\| \cdot \|b_n\|,$$

gdje se infimum uzima po svim parovima nizova (a_n) i (b_n) takvih da vrijede (6.8) i (6.9).

Teorem 6.6. *Neka su X, Y i Z Hilbertovi prostori.*

(*a*) *Vrijedi $\mathcal{N}(X,Y) \subseteq \mathcal{HS}(X,Y)$ i*

$$\|A\|_{\mathcal{HS}} \leq \|A\|_{\mathcal{N}} \qquad \forall A \in \mathcal{N}(X,Y). \tag{6.11}$$

(*b*) *Ako je* $A \in \mathcal{N}(X,Y)$, *tada je* $A^* \in \mathcal{N}(Y,X)$ *i* $\|A^*\|_{\mathcal{N}} = \|A\|_{\mathcal{N}}$.

(*c*) *Ako su* $A \in \mathcal{HS}(X,Y)$ *i* $B \in \mathcal{HS}(Y,Z)$ *onda je* $BA \in \mathcal{N}(X,Z)$ *i* $\|BA\|_{\mathcal{N}} \le \|B\|_{\mathcal{HS}} \cdot \|A\|_{\mathcal{HS}}$.

(*d*) *Ako su* $A \in B(X,Y)$ *i* $B \in \mathcal{N}(Y,Z)$ *onda je* $BA \in \mathcal{N}(X,Z)$ *i* $\|BA\|_{\mathcal{N}} \le \|B\|_{\mathcal{N}} \cdot \|A\|$.

(*e*) *Ako su* $A \in \mathcal{N}(X,Y)$ *i* $B \in B(Y,Z)$ *onda je* $BA \in \mathcal{N}(X,Z)$ *i* $\|BA\|_{\mathcal{N}} \le \|B\| \cdot \|A\|_{\mathcal{N}}$.

(*f*) $\mathcal{N}(X,Y)$ *je potprostor od* $B(X,Y)$ *i* $\|\cdot\|_{\mathcal{N}}$ *je norma na prostoru* $\mathcal{N}(X,Y)$.

Dokaz: (*a*) Pretpostavimo da je $A \in \mathcal{N}(X,Y)$. Prema propoziciji 6.2. ako su $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ i $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nizovi u X i u Y takvi da vrijede (6.8) i (6.9), onda je $A \in B(X,Y)$ i vrijedi (6.10).

Neka je sada $(e_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ ortonormirana baza prostora X. Za svaki $\alpha \in \mathcal{A}$ je

$$Ae_\alpha = \sum_{n\in\mathbb{N}} (e_\alpha|a_n)b_n. \tag{6.12}$$

Nadalje, stavimo za $n \in \mathbb{N}$

$$\mathcal{A}_n = \{\alpha \in \mathcal{A};\ (e_\alpha|a_n) \neq 0\}.$$

Prema tvrdnji (*a*) teorema 1.24. svaki od skupova $\mathcal{A}_n$, $n \in \mathbb{N}$, je konačan ili prebrojiv. Dakle, i njihova unija $\mathcal{A}'$ je konačan ili prebrojiv skup. Sada se iz (6.12) vidi da je $Ae_\alpha = 0\ \forall \alpha \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{A}'$. Dakle, možemo pretpostaviti da je $\mathbb{N} \subseteq \mathcal{A}$ i da vrijedi

$$Ae_\alpha = 0 \qquad \forall \alpha \in \mathcal{A} \setminus \mathbb{N} \qquad \text{i} \qquad Ae_m = \sum_{n\in\mathbb{N}} (e_m|a_n)b_n \qquad \forall m \in \mathbb{N}.$$

Odatle slijedi

$$\sum_{\alpha\in\mathcal{A}} \|Ae_\alpha\|^2 = \sum_{m\in\mathbb{N}} \|Ae_m\|^2 = \sum_{m\in\mathbb{N}} \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} (e_m|a_n)b_n \middle| Ae_m \right) = \sum_{m\in\mathbb{N}} \sum_{n\in\mathbb{N}} (e_m|a_n) \left(b_n \middle| \sum_{k\in\mathbb{N}} (e_m|a_k)b_k \right) =$$

$$= \sum_{m,n,k\in\mathbb{N}} (a_k|e_m)(e_m|a_n)(b_n|b_k) = \sum_{n,k\in\mathbb{N}} \left(\sum_{m\in\mathbb{N}} (a_k|e_m)(e_m|a_n) \right) (b_n|b_k) = \sum_{n,k\in\mathbb{N}} (a_k|a_n)(b_n|b_k) \le$$

$$\le \sum_{n,k\in\mathbb{N}} |(a_k|a_n)| \cdot |(b_n|b_k)| \le \sum_{n,k\in\mathbb{N}} \|a_k\| \cdot \|a_n\| \cdot \|b_n\| \cdot \|b_k\| = \left(\sum_{k\in\mathbb{N}} \|a_k\| \cdot \|b_k\| \right) \cdot \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} \|a_n\| \cdot \|b_n\| \right) = M^2.$$

Čitamo li gornje jednakosti i nejednakosti obrnutim redom vidimo da su sve zamjene redoslijeda sumacije dozvoljene. Zaključujemo da je $A \in \mathcal{HS}(X,Y)$ i da vrijedi

$$\|A\|_{\mathcal{HS}} \le \sum_{n\in\mathbb{N}} \|a_n\| \cdot \|b_n\|$$

za bilo koje nizove $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ u X i $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ u Y takve da vrijede (6.8) i (6.9). Dakle, $\|A\|_{\mathcal{HS}}$ je manje ili jednako infimumu po svim takvim parovima nizova, tj. vrijedi (6.11).

(*b*) Pretpostavimo da je $A \in \mathcal{N}(X,Y)$ i neka su (a_n) i (b_n) nizovi u X i u Y takvi da vrijede (6.8) i (6.9). Stavimo ponovo

$$M = \sum_{n\in\mathbb{N}} \|a_n\| \cdot \|b_n\|.$$

Tada je za svaki $y \in Y$

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \|(y|b_n)a_n\| \le \sum_{n\in\mathbb{N}} \|y\| \cdot \|b_n\| \cdot \|a_n\| = M\|y\|.$$

Prema tome, možemo definirati $B \in B(Y,X)$ sa

$$By = \sum_{n\in\mathbb{N}} (y|b_n)a_n.$$

Naravno, tada je $B \in \mathcal{N}(Y,X)$. Nadalje, za $x \in X$ i $y \in Y$ imamo

$$(Ax|y) = \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} (x|a_n)b_n \,\middle|\, y \right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} (x|a_n)(b_n|y)$$

i

$$(x|By) = \left(x \,\middle|\, \sum_{n\in\mathbb{N}} (y|b_n)a_n \right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \overline{(y|b_n)}(x|a_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} (x|a_n)(b_n|y).$$

Dakle, $(Ax|y) = (x|By)$ i time je dokazano $B = A^*$. Nadalje, iz dokaza je jasno da je

$$\|A^*\|_{\mathcal{N}} = \inf \sum_{n\in\mathbb{N}} \|a_n\| \cdot \|b_n\| = \|A\|_{\mathcal{N}}.$$

(c) Neka su $A \in \mathcal{HS}(X,Y)$ i $B \in \mathcal{HS}(Y,Z)$. Neka su $(e_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ i $(f_\beta)_{\beta\in\mathcal{B}}$ ortonormirane baze u Hilbertovim prostorima X i Y. Kao i u više sličnih situacija do sada možemo pretpostavljati da je $\mathbb{N} \subseteq \mathcal{A}$ i $\mathbb{N} \subseteq \mathcal{B}$ i da je

$$Ae_\alpha = 0 \quad \forall\alpha \in \mathcal{A}\setminus\mathbb{N}, \qquad Bf_\beta = 0 \quad \forall\beta \in \mathcal{B}\setminus\mathbb{N} \qquad \text{i} \qquad Ax = \sum_{n\in\mathbb{N}} (Ax|f_n)f_n \quad \forall x \in X.$$

Stavimo $a_n = A^*f_n \in X$ i $b_n = Bf_n \in Z$ za $n \in \mathbb{N}$. Tada je za svaki $x \in X$

$$BAx = \sum_{n\in\mathbb{N}} (Ax|f_n)Bf_n = \sum_{n\in\mathbb{N}} (x|A^*f_n)Bf_n = \sum_{n\in\mathbb{N}} (x|a_n)b_n.$$

Nadalje, vrijedi

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \|a_n\|^2 = \sum_{n\in\mathbb{N}} \|A^*f_n\|^2 = \|A^*\|^2_{\mathcal{HS}} = \|A\|^2_{\mathcal{HS}} < +\infty$$

i

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \|b_n\|^2 = \sum_{n\in\mathbb{N}} \|Bf_n\|^2 = \|B\|^2_{\mathcal{HS}} < +\infty.$$

Prema tome, nizovi brojeva $(\|a_n\|)_{n\in\mathbb{N}}$ i $(\|b_n\|)_{n\in\mathbb{N}}$ su elementi Hilbertovog prostora ℓ_2 i vrijedi

$$\big\|(\|a_n\|)_{n\in\mathbb{N}}\big\|_{\ell_2} = \|A\|_{\mathcal{HS}} \qquad \text{i} \qquad \big\|(\|b_n\|)_{n\in\mathbb{N}}\big\|_{\ell_2} = \|B\|_{\mathcal{HS}}.$$

Odatle, primjenom CSB−nejednakosti u prostoru ℓ_2 nalazimo

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \|a_n\|\cdot\|b_n\| = \big((\|a_n\|)_{n\in\mathbb{N}} \big| (\|b_n\|)_{n\in\mathbb{N}}\big) \leq \big\|(\|a_n\|)_{n\in\mathbb{N}}\big\|_{\ell_2} \cdot \big\|(\|b_n\|)_{n\in\mathbb{N}}\big\|_{\ell_2} = \|A\|_{\mathcal{HS}}\cdot\|B\|_{\mathcal{HS}} < +\infty.$$

Dakle, $BA \in \mathcal{N}(X,Z)$ i budući da se norma $\|\cdot\|_{\mathcal{N}}$ dobiva kao infimum po parovima nizova u X i u Z vrijedi $\|BA\|_{\mathcal{N}} \leq \|B\|_{\mathcal{HS}} \cdot \|A\|_{\mathcal{HS}}$.

(d) Neka je $A \in \mathcal{N}(X,Y)$ i $B \in B(Y,Z)$. Neka su (a_n) i (b_n) nizovi u X i u Y takvi da vrijedi (6.8) i (6.9). Tada imamo za svaki $x \in X$

$$BAx = \sum_{n\in\mathbb{N}} (x|a_n)Bb_n$$

i

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \|a_n\| \cdot \|Bb_n\| \le \|B\| \sum_{n\in\mathbb{N}} \|a_n\| \cdot \|b_n\| < +\infty.$$

Time je dokazano da je $BA \in \mathcal{N}(X, Z)$. Nadalje, iz gornje nejednakosti slijedi

$$\|BA\|_{\mathcal{N}} \le \|B\| \sum_{n\in\mathbb{N}} \|a_n\| \cdot \|b_n\|,$$

za bilo koje nizove (a_n) u X i (b_n) u Y takve da vrijede (6.8) i (6.9). Budući da je norma $\|A\|_{\mathcal{N}}$ infimum po svim takvim parovima nizova, zaključujemo da je $\|BA\|_{\mathcal{N}} \le \|B\| \cdot \|A\|_{\mathcal{N}}$.

(e) Neka su sada $A \in B(X, Y)$ i $B \in \mathcal{N}(Y, Z)$. Prema (b) je tada

$$B^* \in \mathcal{N}(Z, Y) \qquad \text{i} \qquad \|B^*\|_{\mathcal{N}} = \|B\|_{\mathcal{N}}.$$

Dakle, prema (d) je

$$A^*B^* \in \mathcal{N}(Z, X) \qquad \text{i} \qquad \|A^*B^*\|_{\mathcal{N}} \le \|A^*\| \cdot \|B^*\|_{\mathcal{N}} = \|B\|_{\mathcal{N}} \cdot \|A\|.$$

Zbog (b) odatle slijedi da je

$$BA = (A^*B^*)^* \in \mathcal{N}(X, Z) \qquad \text{i} \qquad \|BA\|_{\mathcal{N}} = \|A^*B^*\|_{\mathcal{N}} \le \|B\|_{\mathcal{N}} \cdot \|A\|.$$

Neka su sada $A, B \in \mathcal{N}(X, Y)$ i neka su $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$. Neka su $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ i $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nizovi u X i $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ i $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nizovi u Y takvi da za svaki $x \in X$ vrijedi

$$Ax = \sum_{n\in\mathbb{N}} (x|a_n) b_n, \qquad \sum_{n\in\mathbb{N}} \|a_n\| \cdot \|b_n\| < +\infty, \tag{6.13}$$

$$Bx = \sum_{n\in\mathbb{N}} (x|c_n) d_n, \qquad \sum_{n\in\mathbb{N}} \|c_n\| \cdot \|d_n\| < +\infty. \tag{6.14}$$

Tada je

$$(\lambda A + \mu B)x = \sum_{n\in\mathbb{N}} (x|a_n) \lambda b_n + \sum_{n\in\mathbb{N}} (x|c_n) \mu d_n$$

i

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \|a_n\| \cdot \|\lambda b_n\| + \sum_{n\in\mathbb{N}} \|c_n\| \cdot \|\mu d_n\| = |\lambda| \sum_{n\in\mathbb{N}} \|a_n\| \cdot \|b_n\| + |\mu| \sum_{n\in\mathbb{N}} \|c_n\| \cdot \|d_n\| < +\infty.$$

Dakle, $\lambda A + \mu B \in \mathcal{N}(X, Y)$ i time je dokazano da je $\mathcal{N}(X, Y)$ potprostor prostora $B(X, Y)$.

Nadalje, za $A \in \mathcal{N}(X, Y)$ je očito $\|A\|_{\mathcal{N}} \ge 0$ i $\|A\|_{\mathcal{N}} = 0$ ako i samo ako je $A = 0$. Također, očito za $\lambda \in \mathbb{C}$ vrijedi $\|\lambda A\|_{\mathcal{N}} = |\lambda| \cdot \|A\|_{\mathcal{N}}$. Napokon, dokažimo i nejednakost trokuta. Neka su $A, B \in \mathcal{N}(X, Y)$. Imamo

$$\|A + B\|_{\mathcal{N}} \le \sum_{n\in\mathbb{N}} \|a_n\| \cdot \|b_n\| + \sum_{n\in\mathbb{N}} \|c_n\| \cdot \|d_n\|$$

za sve nizove (a_n) u X i (b_n) u Y takve da vrijedi (6.13) i sve nizove (c_n) u X i (d_n) u Y takve da vrijedi (6.14). Uzmemo li ovdje infimum po svim takvim parovima nizova (a_n) i (b_n), dobivamo

$$\|A + B\|_{\mathcal{N}} \le \|A\|_{\mathcal{N}} + \sum_{n\in\mathbb{N}} \|c_n\| \cdot \|d_n\|,$$

a odatle, uzimajući infimum po svim takvim parovima nizova (c_n) i (d_n) slijedi

$$\|A + B\|_{\mathcal{N}} \le \|A\|_{\mathcal{N}} + \|B\|_{\mathcal{N}}.$$

Teorem 6.7. *Neka su X i Y Hilbertovi prostori.*

(a) *Neka je $A \in B(X,Y)$. Tada je $A \in \mathcal{N}(X,Y)$ ako i samo ako za svaki par ortonormiranih nizova $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ u X i $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ u Y vrijedi*

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} |(Ae_n|f_n)| < +\infty. \tag{6.15}$$

U tom slučaju je

$$\|A\|_{\mathcal{N}} = \sup \sum_{n\in\mathbb{N}} |(Ae_n|f_n)|, \tag{6.16}$$

gdje se supremum uzima preko svih parova ortonormiranih nizova (e_n) i (f_n) u X i u Y.

(b) *Ako je $A \in \mathcal{N}(X,Y)$ onda je za svaki par ortonormiranih familija $(e_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ u X i $(f_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ u Y skup*

$$\{\alpha \in \mathcal{A};\ (Ae_\alpha|f_\alpha) \neq 0\}$$

konačan ili prebrojiv i vrijedi

$$\sum_{\alpha\in\mathcal{A}} |(Ae_\alpha|f_\alpha)| < +\infty.$$

(c) *Neka je $A \in K(X,Y)$ i neka su $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ortonormiran niz u X, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ortonormiran niz u Y i $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz brojeva ≥ 0 takvi da vrijedi (6.7). Tada je $A \in \mathcal{N}(X,Y)$ ako i samo ako je*

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu_n < +\infty \tag{6.17}$$

Nadalje, tada vrijedi

$$\|A\|_{\mathcal{N}} = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu_n. \tag{6.18}$$

Dokaz: Pretpostavimo da je $A \in \mathcal{N}(X,Y)$ i neka su $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ i $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nizovi u X i u Y takvi da vrijedi (6.8) i (6.9). Nadalje, neka su $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ i $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ortonormirani nizovi u X i u Y. Tada imamo redom

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} |(Ae_n|f_n)| = \sum_{n\in\mathbb{N}} \left| \sum_{k\in\mathbb{N}} (e_n|a_k)(b_k|f_n) \right| \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k\in\mathbb{N}} |(a_k|e_n)| \cdot |(b_k|f_n)| \leq$$

$$\leq \sum_{k\in\mathbb{N}} \left[\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} |(a_k|e_n)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} |(b_k|f_n)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right] \leq \sum_{k\in\mathbb{N}} \|a_k\| \cdot \|b_k\|.$$

Dakle, vrijedi

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} |(Ae_n|f_n)| \leq \sum_{k\in\mathbb{N}} \|a_k\| \cdot \|b_k\|$$

za svaki par nizova $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ u X i $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ takav da vrijede (6.8) i (6.9). Uzmemo li infimum po svim takvim parovima nizova, nalazimo da je

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} |(Ae_n|f_n)| \leq \|A\|_{\mathcal{N}}. \tag{6.19}$$

Time je dokazana implikacija $A \in \mathcal{N}(X,Y) \implies$ (6.15).

Dokažimo sada tvrdnju (b). Neka je $A \in \mathcal{N}(X,Y)$ i neka je $(e_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ ortonormirana familija u X i $(f_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ ortonormirana familija u Y. Pretpostavimo suprotno da je skup

$$\{\alpha \in \mathcal{A};\ (Ae_\alpha|f_\alpha) \neq 0\}$$

neprebrojiv. Tada postoji $k \in \mathbb{N}$ takav da je skup

$$\left\{\alpha \in \mathcal{A};\ |(Ae_\alpha|f_\alpha)| \geq \frac{1}{k}\right\}$$

beskonačan. No to znači da postoje ortonormirani nizovi $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ u X i $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ u Y takvi da je

$$|(Ae_n|f_n)| \geq \frac{1}{k} \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

No to je u suprotnosti sa (6.15). Ova kontradikcija pokazuje da vrijedi (b).

Vratimo se na dokaz tvrdnje (a). Pretpostavimo sada da je $A \in B(X,Y)$ takav da za svaki par ortonormiranih nizova $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ u X i $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ u Y vrijedi (6.15). Prema teoremu 5.5. možemo pisati $A = VH$, gdje je V parcijalna izometrija sa X u Y i $H = \sqrt{A^*A}$. Nadalje, prema dokazu teorema 5.5. možemo uzeti da je restrikcija $V|Cl(R(H))$ izometrija, a znamo i da je $P = V^*V$ ortogonalni projektor prostora X na potprostor $Cl(R(H))$. Neka je $(e_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ ortonormirana baza Hilbertovog prostora $Cl(R(H))$. Stavimo $f_\alpha = Ve_\alpha$, $\alpha \in \mathcal{A}$. Kako je $V|Cl(R(H))$ izometrija, slijedi da je $(f_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ ortonormirana familija u prostoru Y. Zbog (b) imamo

$$+\infty > \sum_{\alpha\in\mathcal{A}} |(Ae_\alpha|f_\alpha)| = \sum_{\alpha\in\mathcal{A}} |(VHe_\alpha|Ve_\alpha)| = \sum_{\alpha\in\mathcal{A}} |(PHe_\alpha|e_\alpha)| = \sum_{\alpha\in\mathcal{A}} |(He_\alpha|e_\alpha)|.$$

Neka je sada $K = \sqrt{H}$. Tada je $N(K) = N(H)$ dakle i $Cl(R(K)) = Cl(R(H))$. Izaberimo sada ortonormiranu bazu $(e_\beta)_{\beta\in\mathcal{B}}$ potprostora $N(K)$, s tim da je $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \emptyset$. Za $\mathcal{C} = \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ je tada $(e_\gamma)_{\gamma\in\mathcal{C}}$ ortonormirana baza od X i vrijedi

$$\sum_{\gamma\in\mathcal{C}} \|Ke_\gamma\|^2 = \sum_{\alpha\in\mathcal{A}} \|Ke_\alpha\|^2 = \sum_{\alpha\in\mathcal{A}} |(He_\alpha|e_\alpha)| < +\infty.$$

Dakle, $K \in \mathcal{HS}(X)$. Prema tvrdnji (c) teorema 6.6. tada je $H = K^2 \in \mathcal{N}(X)$, a tada iz tvrdnje ($d$) istog teorema slijedi da je $A = VH \in \mathcal{N}(X,Y)$.

Time je dokazana i obrnuta implikacija u tvrdnji (a). Dakle, operator $A \in B(X,Y)$ je nuklearan ako i samo ako za svaki par ortonormiranih nizova $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ u X i $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ u Y vrijedi (6.15). Nadalje, u prvom dijelu dokaza pokazali smo da za svaki takav par ortonormiranih nizova vrijedi nejednakost (6.19).

Pretpostavimo sada da je $A \in \mathcal{N}(X,Y)$ i neka su $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ortonormiran niz u X, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ortonormiran niz u Y i $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz nenegativnih brojeva izabrani tako da vrijedi Schmidtov prikaz (6.7). Tada je zbog (6.19)

$$\|A\|_{\mathcal{N}} \geq \sum_{n\in\mathbb{N}} |(Ae_n|f_n)| = \sum_{n\in\mathbb{N}} \left| \left(\sum_{m\in\mathbb{N}} \mu_m (e_n|e_m) f_m \,\middle|\, f_n \right) \right| = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu_n (f_n|f_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu_n,$$

dakle, vrijedi

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu_n \leq \|A\|_{\mathcal{N}}. \tag{6.20}$$

Stavimo sada $a_n = \mu_n e_n$ i $b_n = f_n$. Tada je

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \|a_n\| \cdot \|b_n\| = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu_n \|e_n\| \cdot \|f_n\| = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu_n < +\infty.$$

Nadalje, iz Schmidtovog prikaza (6.7) dobivamo da vrijedi

$$Ax = \sum_{n\in\mathbb{N}} (x|a_n) b_n \qquad \forall x \in X.$$

Sada iz definicije norme $\|\cdot\|_{\mathcal{N}}$ slijedi da je

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu_n = \sum_{n\in\mathbb{N}} \|a_n\| \cdot \|b_n\| \geq \|A\|_{\mathcal{N}}.$$

Odatle i iz (6.20) izlazi da vrijedi (6.18). Nadalje, zbog $(Ae_n|f_n) = \mu_n$ i zbog (6.19) nalazimo da vrijedi i (6.16). Time je tvrdnja (a) u potpunosti dokazana.

Napokon, pretpostavimo da je $A \in K(X,Y)$ i da je (6.7) Schmidtov prikaz operatora A, gdje je $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ortonormiran niz u X, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ortonormiran niz u Y i $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz nenegativnih brojeva. Pretpostavimo da vrijedi (6.17). Ostaje nam još da dokažemo da je tada $A \in \mathcal{N}(X,Y)$. Stavimo kao malo prije $a_n = \mu_n e_n$ i $b_n = f_n$. Tada vrijedi (6.9) i

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \|a_n\| \cdot \|b_n\| = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu_n < +\infty.$$

Po definiciji nuklearnih operatora slijedi da je $A \in \mathcal{N}(X,Y)$. Time je i tvrdnja (b) dokazana.

Zadatak 6.6. *Neka su X i Y Hilbertovi prostori. Dokažite da je $F(X,Y)$ gust potprostor od $\mathcal{N}(X,Y)$ u odnosu na normu $\|\cdot\|_{\mathcal{N}}$.*

Zadatak 6.7. *Neka su X i Y Hilbertovi prostori. Dokažite da je prostor $\mathcal{N}(X,Y)$ potpun u odnosu na nuklearnu normu $\|\cdot\|_{\mathcal{N}}$.*

Zadatak 6.8. *Neka je X Hilbertov prostor.*

(a) *Dokažite da je operator $A \in B(X)$ nuklearan ako samo ako je za svaku ortonormiranu bazu $(e_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ skup $\{\alpha \in \mathcal{A};\ (Ae_\alpha|e_\alpha) \neq 0\}$ konačan ili prebrojiv i red*

$$\sum_{\alpha\in\mathcal{A}} (Ae_\alpha|e_\alpha) \tag{6.21}$$

konvergira. Dokažite da u tom slučaju red (6.21) *apsolutno konvergira.*

(b) *Dokažite da za $A \in \mathcal{N}(X)$ suma reda u* (6.21) *ne ovisi o izboru ortonormirane baze $(e_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ prostora X.*

Za $A \in \mathcal{N}(X)$ i za bilo koju ortonormiranu bazu $(e_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ od X sumu reda (6.21) zovemo **trag nuklearnog operatora** A i označavamo $tr\, A$:

$$tr\, A = \sum_{\alpha\in\mathcal{A}} (Ae_\alpha|e_\alpha), \qquad (e_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}} \quad \text{ortonormirana baza od } X.$$

Zadatak 6.9. *Neka je X Hilbertov prostor. Dokažite:*

(a) $tr : A \mapsto tr\, A$ *je neprekidan linearan funkcional na Banachovom prostoru* $(\mathcal{N}(X), \|\cdot\|_{\mathcal{N}})$.

(b) *Norma funkcionala tr jednaka je* 1, *tj. vrijedi*

$$|tr\, A| \leq \|A\|_{\mathcal{N}} \qquad \forall A \in \mathcal{N}(X)$$

i dostiže se jednakost za neki $A \neq 0$.

(c) *Vrijedi*

$$tr\, A^* = \overline{tr\, A} \qquad \forall A \in \mathcal{N}(X).$$

Zadatak 6.10. *Neka je X Hilbertov prostor i neka su $A, B \in B(X)$ takvi da su $AB, BA \in \mathcal{N}(X)$. Dokažite da je tada*

$$tr\, AB = tr\, BA.$$

Zadatak 6.11. *Neka je X Hilbertov prostor i $A \in \mathcal{H}(X)$. Dokažite da je tada*

$$|tr\, A| \leq tr\, \sqrt{A^*A}.$$

Nadalje, ako je $A = A^*$ i ako je (λ_n) niz (konačan ili beskonačan) svih svojstvenih vrijednosti različitih od nule operatora A, pri čemu se svaka svojstvena vrijednost u tom nizu pojavljuje toliko puta kolika je dimenzija svojstvenog potprostora, dokažite da vrijedi

$$tr\, A = \sum_n \lambda_n.$$

Zadatak 6.12. *Neka je X Hilbertov prostor i za $A \in B(X)$ definiramo $f_A : \mathcal{N} \to \mathbb{C}$ sa*

$$f_A(B) = tr\, AB, \qquad B \in \mathcal{N}(X).$$

Dokažite da je $A \mapsto f_A$ izometrički izomorfizam sa Banachovog prostora $(B(X), \|\cdot\|)$ na dualni prostor Banachovog prostora $(\mathcal{N}(X), \|\cdot\|_{\mathcal{N}})$. Drugim riječima dokažite da je

$$|f_A(B)| \leq \|A\| \cdot \|B\|_{\mathcal{N}}, \qquad A \in B(X), \quad B \in \mathcal{N}(X),$$

da je

$$\|A\| = \sup \{|f_A(B)|;\ B \in \mathcal{N}(X),\ \|B\|_{\mathcal{N}} \leq 1\},$$

i da za svaki neprekidan linearan funkcional f na Banachovom prostoru $(\mathcal{N}(X), \|\cdot\|_{\mathcal{N}})$ postoji jedinstven $A \in B(X)$ takav da je $f = f_A$.

Bibliografija

[1] S. Kurepa, *Funkcionalna analiza − Elementi teorije operatora*, Školska knjiga, Zagreb, 1981.

[2] M. A. Naimark, *Normed Rings*, P. Noordhoff N. V., Groningen, 1964.

[3] G. J. Murphy, *C^*−algebras and Operator Theory*, Academic Press, Boston − San Diego − New York, 1990.

[4] R. V. Kadison, J. R. Ringrose, *Fundamentals of the Theory of Operator Algebras, vol. I: Elementary Theory*, Graduate Studies in Mathematics, Volume 15, American Mathematical Society, Providence R.I., 1997.

[5] A. E. Taylor, D. C. Lay, *Introduction to Functional Analysis*, J. Wiley, New York − Chichester − Brisbane − Toronto, 1980.

[6] R. A. Bonic, *Linear Functional Analysis*, Gordon and Breach Sci. Publ., New York − London − Paris, 1969.

[7] J. B. Conway, *A Course in Functional Analysis*, Graduate Texts in Mathematics, Springer−Verlag, New York − Berlin − Heidelberg − London − Paris − Tokyo − Hong Kong, 1990.

[8] J. B. Conway, *A Course in Operator Theory*, Graduate Studies in Mathematics, Volume 21, American Mathematical Society, Providence R.I., 2000.

[9] G. Bachman, L. Narici, *Functional Analysis*, Academic Press, New York − San Francisco − London, 1966.

[10] M. Schechter, *Priciples of Functional Analysis*, Academic Press, New York − London, 1971.