# POLUPROSTE LIEJEVE ALGEBRE

Prof. dr. sc. Hrvoje Kraljević

Predavanja održana u okviru poslijediplomskog studija
na PMF−Matematičkom odjelu Sveučilišta u Zagrebu
u akademskoj godini 2007./2008.

Zagreb, 30. svibnja 2008.

# Sadržaj

# Poglavlje 1

# LIEJEVE ALGEBRE

## 1.1 Osnovni pojmovi

**Algebra** nad poljem $K$ je vektorski prostor $\mathcal{A}$ nad poljem $K$ na kome je zadana $K-$bilinearna operacija $\mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$, $(a, b) \mapsto ab$, $a, b \in \mathcal{A}$, koju često zovemo **množenje**. Bilinearnost naravno znači **biaditivnost** ili **obostranu distributivnost** i $K-$**bihomogenost**:

$$a(b+c) = ab + ac, \qquad (a+b)c = ac + bc, \qquad \forall a, b, c \in \mathcal{A}$$

$$\lambda(ab) = (\lambda a)b = a(\lambda b), \qquad \forall a, b \in \mathcal{A}, \quad \forall \lambda \in K.$$

Za algebru $\mathcal{A}$ kažemo da je **asocijativna**, ukoliko vrijedi zakon asocijativnosti:

$$(ab)c = a(bc), \qquad a, b \in \mathcal{A}.$$

**Unitalna algebra** je asocijativna algebra $\mathcal{A}$ u kojoj postoji **jedinica**, tj. element $1 \in \mathcal{A}$ takav da je

$$1a = a1 = a \qquad \forall a \in \mathcal{A}.$$

Ističemo da ćemo se držati dogovora da naziv *unitalna algebra* podrazumijeva da se radi o *asocijativnoj* algebri, iako to nije standardno pravilo u literaturi.

Potprostor $\mathcal{B}$ algebre $\mathcal{A}$ zove se **podalgebra** od $\mathcal{A}$ ako vrijedi

$$a, b \in \mathcal{B} \qquad \Longrightarrow \qquad ab \in \mathcal{B}.$$

**Ideal** u algebri $\mathcal{A}$ je potprostor $\mathcal{I}$ od $\mathcal{A}$ takav da vrijedi

$$a \in \mathcal{A}, \quad b \in \mathcal{I} \qquad \Longrightarrow \qquad ab, ba \in \mathcal{I}.$$

Naravno, svaki ideal je i podalgebra. Napominjemo da ukoliko je samo jedan od gornjih dvaju zahtjeva ispunjen, kažemo da je $\mathcal{I}$ **lijevi ideal** ($a \in \mathcal{A}, b \in \mathcal{I} \ \Rightarrow \ ab \in \mathcal{I}$), odnosno, **desni ideal** ($a \in \mathcal{A}, b \in \mathcal{I} \ \Rightarrow \ ba \in \mathcal{I}$). Ako je $\mathcal{I}$ ideal u algebri $\mathcal{A}$ onda na kvocijentnom vektorskom prostoru $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ možemo definirati množenje sa

$$(a + \mathcal{I})(b + \mathcal{I}) = ab + \mathcal{I}, \qquad a, b \in \mathcal{A}.$$

Tako dobivena algebra zove se **kvocijentna algebra**. Naravno, ako je $\mathcal{A}$ asocijativna algebra, onda je i kvocijentna algebra $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ asocijativna. Ako je k tome $\mathcal{A}$ unitalna algebra s jedinicom 1 onda je i $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ unitalna algebra s jedinicom $1 + \mathcal{I}$.

Neka su $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ algebre nad istim poljem $K$. Preslikavanje $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ zove se **homomorfizam algebri** ako je $\varphi$ $K-$linearan operator sa svojstvom

$$\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b) \qquad \forall a, b \in \mathcal{A}.$$

Skup svih homomorfizama $\mathcal{A}$ u $\mathcal{B}$ označavat ćemo sa $Hom(\mathcal{A}, \mathcal{B})$; ako postoji dvojba oko polja $K$ nad kojim su algebre definirane, pisat ćemo $Hom_K(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ umjesto $Hom(\mathcal{A}, \mathcal{B})$. Primijetimo da je $Hom(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ potprostor vektorskog prostora $L(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ svih $K-$linearnih operatora $\mathcal{A} \to \mathcal{B}$. Primijetimo da je kompozicija homomorfizama algebri ponovo homomorfizam algebri; tj. ako su $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ i $\mathcal{C}$ algebre nad poljen $K$ onda vrijedi

$$\varphi \in Hom(\mathcal{A}, \mathcal{B}), \quad \psi \in Hom(\mathcal{B}, \mathcal{C}) \qquad \Longrightarrow \qquad \psi \circ \varphi \in Hom(\mathcal{A}, \mathcal{C}).$$

Homomorfizam $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ zove se **epimorfizam** ako je surjekcija, **monomorfizam** ako je injekcija, **izomorfizam** ako je i jedno i drugo, tj. bijekcija. Kompozicija epimorfizama je epimorfizam, kompozicija monomorfizama je monomorfizam, pa je i kompozicija izomorfizama izomorfizam. Nadalje, inverzno preslikavanje $\varphi^{-1} : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ izomorfizma $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ je također izomorfizam. Nadalje, identiteta $I_{\mathcal{A}}$ na algebri $\mathcal{A}$ ($I_{\mathcal{A}}(a) = a\ \forall a \in \mathcal{A}$) je izomorfizam $\mathcal{A}$ na $\mathcal{A}$. Prema tome, izomorfizmi definiraju relaciju ekvivalencije, koja se zove **izomorfnost algebri**: kažemo da je algebra $\mathcal{A}$ **izomorfna** algebri $\mathcal{B}$, i tada pišemo $\mathcal{A} \simeq \mathcal{B}$, ako postoji izomorfizam $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$.

Homorfizam algebre $\mathcal{A}$ u samu sebe zove se **endomorfizam** algebre $\mathcal{A}$. Umjesto $Hom(\mathcal{A}, \mathcal{A})$ pišemo $End(\mathcal{A})$. Očito je za svaku algebru $\mathcal{A}$ uz kompoziciju kao operaciju množenja $End(\mathcal{A})$ asocijativna algebra; štoviše, $End(\mathcal{A})$ je unitalna algebra i jedinica joj je $I_{\mathcal{A}}$. Endomorfizam algere $\mathcal{A}$ koji je ujedno bijekcija, tj. izomorfizam, zove se **automorfizam** algebre $\mathcal{A}$. Skup svih automorfizama od $\mathcal{A}$ označavamo $Aut(\mathcal{A})$; to je upravo grupa svih invertibilnih elemenata unitalne algebre $End(\mathcal{A})$.

Ako je $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ homomorfizam algebri, onda je njegova jezgra $Ker\,\varphi = \{a \in \mathcal{A};\ \varphi(a) = 0\}$ ideal u algebri $\mathcal{A}$ i njegova slika $Im\,\varphi = \varphi(\mathcal{A}) = \{\varphi(a);\ a \in \mathcal{A}\}$ je podalgebra od $\mathcal{B}$. Nadalje, preslikavanje $\Phi : \mathcal{A}/Ker\,\varphi \to Im\,\varphi = \varphi(\mathcal{A})$, definirano sa $\Phi(a + Ker\,\varphi) = \varphi(a)$, $a \in \mathcal{A}$, je izomorfizam kvocijentne algebre $\mathcal{A}/Ker\,\varphi$ na podalgebru $Im\,\varphi$ algebre $\mathcal{B}$.

Neka je $\mathcal{A}$ algebra nad poljem $K$. Linearan operator $D : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ zove se **derivacija algebre** $\mathcal{A}$ ako vrijedi

$$D(ab) = D(a)b + aD(b) \qquad \forall a, b \in \mathcal{A}.$$

Skup svih derivacija algebre $\mathcal{A}$ označavat ćemo sa $Der(\mathcal{A})$. Primijetimo da je $Der(\mathcal{A})$ potprostor vektorskog prostora $L(\mathcal{A}) = L(\mathcal{A}, \mathcal{A})$ svih linearnih operatora $\mathcal{A} \to \mathcal{A}$. Prostor $L(\mathcal{A})$ je unitalna algebra, ali $Der(\mathcal{A})$ općenito nije podalgebra, budući da kompizicija derivacija ne mora biti (i obično nije) derivacija. Međutim, neposredno se provjerava da vrijedi:

**Propozicija 1.1.1.** *Ako je $\mathcal{A}$ algebra i $D, E \in Der(\mathcal{A})$ onda je $DE - ED \in Der(\mathcal{A})$.*

**Liejeva algebra** nad poljem $K$ je algebra $\mathfrak{g}$, u kojoj se množenje obično označava sa $(x, y) \mapsto [x, y]$ i zove **komutator**, ukoliko su ispunjena sljedeća dva uvjeta:

$(L1)$ $[x, x] = 0 \ \ \forall x \in \mathfrak{g}$.

$(L2)$ $[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0 \ \ \forall x, y, z \in \mathcal{A}$.

Svojstvo $(L2)$ zove se **Jacobijev identitet**. Iz svojstva $(L1)$ slijedi

$$0 = [x + y, x + y] = [x, x] + [x, y] + [y, x] + [y, y] = [x, y] + [y, x],$$

dakle,

$(L1')$ $[x, y] = -[y, x] \ \ \forall x, y \in \mathfrak{g}$.

Napomenimo da i $(L1')$ povlači $(L1)$ ukoliko je karakteristika polja $K$ različita od 2 :

$$[x,x] = -[x,x] \qquad \Longrightarrow \qquad 2[x,x] = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad [x,x] = 0.$$

Važan primjer Liejevih algebri dobiva se iz asocijativnih algebri. Naime, ako je $\mathcal{A}$ asocijativna algebra i ako definiramo

$$[x,y] = xy - yx, \qquad x, y \in \mathcal{A},$$

onda se lako provjeri da je s operacijom $[\,\cdot\,,\,\cdot\,]$ $\mathcal{A}$ Liejeva algebra. Tu Liejevu algebru označavat ćemo sa $Lie(\mathcal{A})$. Ako je $\mathfrak{g}$ algebra i $\mathcal{A}$ asocijativna algebra onda ćemo preslikavanje $\varphi : \mathfrak{g} \to \mathcal{A}$, koje je homomorfizam Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ u Liejevu algebru $Lie(\mathcal{A})$, zvati **Liejev homorfizam** Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ u asocijativnu algebru $\mathcal{A}$. Posebni slučaj je kad je $\mathcal{A}$ zapravo asocijativna algebra $L(V)$ svih linearnih operatora na vektorskom prostoru $V$. U tom slučaju Liejev homomorfizam $\pi : \mathfrak{g} \to L(V)$ zove se **reprezentacija** Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ na vektorskom prostoru $V$. Dakle, reprezentacija Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ (nad polje $K$) na vektorskom prostoru $V$ (nad poljem $K$) je preslikavanje $\pi$ koje svakom elementu $x \in \mathfrak{g}$ pridružuje linearan operator $\pi(x) : V \to V$ ukoliko su zadovoljeni uvjeti:

$$\pi(x+y) = \pi(x) + \pi(y), \quad \pi(\lambda x) = \lambda\pi(x), \quad \pi([x,y]) = \pi(x)\pi(y) - \pi(y)\pi(x), \quad \forall x, y \in \mathfrak{g},\ \forall \lambda \in K.$$

Istaknimo, da prema propoziciji 1.1.1. za svaku (ne nužno asocijativnu) algebru $\mathcal{A}$ skup svih derivacija $Der(\mathcal{A})$ je Liejeva podalgebra Liejeve algebre $Lie(L(\mathcal{A}))$.

Mi ćemo se isključivo baviti konačnodimenzionalnim Liejevim algebrama. Međutim, vektorski prostori koje ćemo promatrati (pa ni asocijativne algebre) ne će uvijek biti konačnodimenzionalni.

Neka je $V$ konačnodimenzionalan vektorski prostor nad poljem $K$ i $n = \dim V$. Liejevu algebru $Lie(L(V))$ označavat ćemo sa $\mathfrak{gl}(V)$. Naravno, $\dim \mathfrak{gl}(V) = n^2$. Izaberemo li bazu prostoru $V$ dobivam izomorfizam Liejeve algebre $\mathfrak{gl}(V)$ s Liejevom algebrom $Lie(M_n(K))$ svih kvadratnih matrica $n \times n$; ova posljednja se obično označava $\mathfrak{gl}(n,K)$. **Linearna Liejeva algebra** je bilo koja Liejeva podalgebra od $\mathfrak{gl}(V)$ za konačnodimenzionalan vektorski prostor $V$. Dakle, linearna Liejeva algebra izomorfna je Liejevoj podalgebri od $\mathfrak{gl}(n,K)$. Napomenimo, da se linearna algebra $\mathfrak{gl}(V)$, pa i $\mathfrak{gl}(n,K)$, često zove **opća linearna Liejeva algebra**.

Lako je zapisati tablicu množenja Liejeve algebre $\mathfrak{gl}(n,K)$. Naime, ako sa $e_{ij}$ označimo $n \times n$ matricu kojoj su svi elementi 0 osim broja 1 na presjecištu $i-$tog retka i $j-$tog stupca, onda je $e_{ij}e_{k\ell} = \delta_{jk}e_{i\ell}$, pa imamo

$$[e_{ij}, e_{k\ell}] = \delta_{jk}e_{i\ell} - \delta_{i\ell}e_{kj}.$$

Razmotrimo sada neke serije linearnih Liejevih algebri, koje se zovu **klasične Liejeve algebre**.

**1.** Za konačnodimenzionalan prostor $V$ sa $\mathfrak{sl}(V)$ označavamo skup svih liearnih operatora kojima je trag jednak nuli; analogno, sa $\mathfrak{sl}(n,K)$ označavamo skup svih matrica $n \times n$ traga 0. Budući da je trag komutatora dvaju operatora, odnosno, dviju matrica, uvijek jednak nuli $\mathfrak{sl}(V)$ je Liejeva podalgebra od $\mathfrak{gl}(V)$ i $\mathfrak{sl}(n,K)$ je Liejeva podalgebra od $\mathfrak{gl}(n,K)$. Ta se Liejeva algebra zove se **specijalna linearna Liejeva algebra**. Ako je $\dim V = \ell + 1$ kaže se da je Liejeva algebra $\mathfrak{sl}(V)$ (odnosno, $\mathfrak{sl}(\ell+1,K)$) *tipa* $A_\ell$. Trag je netrivijalni linearni funkcional na prostoru $\mathfrak{gl}(V)$ (odnosno, na prostoru $\mathfrak{gl}(\ell+1,K)$ ) i $\mathfrak{sl}(V)$ (odnosno, $\mathfrak{sl}(\ell+1,K)$ ) je njegova jezgra. Dakle, $\dim \mathfrak{sl}(V) = \dim \mathfrak{sl}(\ell,K) = (\ell+1)^2 - 1 = \ell^2 + 2\ell$. Lako je napisati bazu od $\mathfrak{sl}(\ell+1,K)$ : to je npr.

$$\{e_{ij};\ i,j \in \{1,\ldots,\ell+1\}\ i \neq j\} \cup \{h_i = e_{ii} - e_{i+1,i+1};\ i \in \{1,\ldots,\ell\}\ \}.$$

Tu ćemo bazu zvati *standardna baza od* $\mathfrak{sl}(\ell+1,K)$.

**2.** Neka je $V$ vektorski prostor nad poljem $K$ i neka je $F : V \times V \to K$ nedegenerirana bilinearna forma na $V$ koja je antisimetrična, tj.

$$F(v,w) = -F(w,v) \qquad \forall v,w \in V.$$

**Nedegeneriranost** znači da vrijedi

$$v \in V, \quad F(v,w) = 0 \quad \forall w \in V \qquad \Longrightarrow \qquad v = 0.$$

**Zadatak 1.1.** *Neka je $F$ nedegenerirana antisimetrična bilinearna forma na vektorskom prostoru $V$. Dokažite da je tada dimenzija prostora $V$ paran broj $2\ell$ i da postoji baza $\{e_1,\dots,e_{2\ell}\}$ od $V$ takva da vrijedi:*

$$v = \sum_{i=1}^{2\ell} \alpha_i e_i, \quad w = \sum_{i=1}^{2\ell} \beta_i e_i \qquad \Longrightarrow \qquad F(v,w) = \sum_{i=1}^{\ell} \alpha_i \beta_{\ell+i} - \sum_{i=1}^{\ell} \alpha_{\ell+i} \beta_i.$$

Stavimo

$$\mathfrak{sp}(V) = \{x \in \mathfrak{gl}(V);\ F(x(v),w) + F(v,x(w)) = 0\ \forall v,w \in V\}$$

**Zadatak 1.2.** *Dokažite da je $\mathfrak{sp}(V)$ Liejeva podalgebra od $\mathfrak{gl}(V)$ sadržana u $\mathfrak{sl}(V)$.*

$\mathfrak{sp}(V)$ zove se **simplektička Liejeva algebra**. Ako je $\dim V = 2\ell$ kažemo da je Liejeva algebra $\mathfrak{sp}(V)$ *tipa $C_\ell$*.

Naravno, pomoću baze iz zadatka 1.1. lako se vidi da je $\mathfrak{sp}(V)$ izomorfna Liejevoj algebri matrica

$$\mathfrak{sp}(2\ell,K) = \{x \in \mathfrak{gl}(2\ell,K);\ sx = -x^t s\}, \quad \text{gdje je} \quad s = \begin{bmatrix} 0 & I_\ell \\ -I_\ell & 0 \end{bmatrix},$$

pri čemu je $I_\ell$ oznaka za jediničnu matricu $\ell \times \ell$.

**Zadatak 1.3.** *Dokažite da je* $\dim \mathfrak{sp}(2\ell,K) = 2\ell^2 + \ell$.

**Uputa:** Matricu $x \in \mathfrak{gl}(2\ell,K)$ pišite u obliku $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, gdje su $a,b,c,d \in \mathfrak{gl}(\ell,K)$, i zatim napišite uvjet $sx = -x^t s$ pomoću matrica $a,b,c,d$. Pomoću toga pokažite da je jedna baza od $\mathfrak{sp}(2\ell,K)$ dana sa

$$\{e_{ii} - e_{\ell+i,\ell+i};\ 1 \le i \le \ell\} \cup \{e_{ij} - e_{\ell+j,\ell+i};\ 1 \le i,j \le \ell,\ i \ne j\} \cup \{e_{i,\ell+i};\ 1 \le i \le \ell\} \cup$$

$$\cup \{e_{i,\ell+j} + e_{j,\ell+i};\ 1 \le i < j \le \ell\} \cup \{e_{\ell+i,i};\ 1 \le i \le \ell\} \cup \{e_{\ell+i,j} + e_{\ell+j,i};\ 1 \le i < j \le \ell\}.$$

Baza iz gornje upute zove se *standardna baza od* $\mathfrak{sp}(2\ell,K)$.

Neka je sada $V$ konačnodimenzionalan vektorski prostor nad poljem $K$ i neka je $F : V \times V \to K$ nedegenerirana bilinearna forma na $V$ koja je simetrična, tj.

$$F(v,w) = F(w,v) \qquad \forall v,w \in V.$$

Stavimo

$$\mathfrak{o}_F(V) = \{x \in \mathfrak{gl}(V);\ F(xv,w) + F(v,xw) = 0 \quad \forall v,w \in V\}.$$

**Zadatak 1.4.** *Dokažite da je $\mathfrak{o}_F(V)$ Liejeva podalgebra od $\mathfrak{gl}(V)$ sadržana u $\mathfrak{sl}(V)$.*

**Zadatak 1.5.** *Ako je $n =$* $\dim V$, *dokažite da je* $\dim \mathfrak{o}_F(V) = \dfrac{n(n-1)}{2}$.

$\mathfrak{o}_F(V)$ zove se **ortogonalna Liejeva algebra** na prostoru $V$ **u odnosu na formu** $F$. Kao što će se vidjeti u sljedećih nekoliko zadataka, ako je polje $K$ algebarski zatvoreno, gubi se razlika među Liejevim algebrama $\mathfrak{o}_F(V)$ za različite nedegenerirane simetrične bilinearne forme $F$. Stoga ćemo tada izostavljati oznaku $F$ i pisati samo $\mathfrak{o}(V)$. Razmatrat ćemo odvojeno prostore neparne i prostore parne dimenzije.

**3.** Pretpostavljamo da je $V$ neparnodimenzionalan vektorski prostor ($\dim V = 2\ell + 1$) nad algebarski zatvorenim poljem $K$ i da je $F$ nedegenerirana simetrična bilinearna forma na $V$.

**Zadatak 1.6.** *Dokažite da u $V$ postoji baza $\{e_0, e_1, \ldots, e_{2\ell}\}$ takva da je*

$$v = \sum_{i=0}^{2\ell} \alpha_i e_i, \quad w = \sum_{i=0}^{2\ell} \beta_i e_i \qquad \Longrightarrow \qquad F(v, w) = \alpha_0\beta_0 + \sum_{i=1}^{\ell} \alpha_i \beta_{\ell+i} + \sum_{i=1}^{\ell} \alpha_{\ell+i}\beta_i.$$

Kao i malo prije, pomoću baze iz zadatka 1.6. lako se vidi da je $\mathfrak{o}_F(V)$ izomorfna Liejevoj algebri matrica

$$\mathfrak{o}(2\ell+1, K) = \{x \in \mathfrak{gl}(2\ell+1, K);\ sx = -x^t s\}, \quad \text{gdje je} \quad s = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_\ell \\ 0 & I_\ell & 0 \end{bmatrix}.$$

**Zadatak 1.7.** *Dokažite da je* $\dim \mathfrak{o}(2\ell+1, K) = 2\ell^2 + \ell$ *i da je jedna baza od* $\mathfrak{o}(2\ell+1, K)$ *dana sa*

$$\{e_{ii} - e_{\ell+i,\ell+i};\ 1 \le i \le \ell\} \cup \{e_{0,\ell+i} - e_{i,0};\ 1 \le i \le \ell\} \cup \{e_{0,i} - e_{\ell+i,0};\ 1 \le i \le \ell\} \cup$$
$$\cup \{e_{ij} - e_{\ell+j,\ell+i};\ 1 \le i, j \le \ell,\ i \ne j\} \cup \{e_{i,\ell+j} - e_{j,\ell+i};\ 1 \le i < j \le \ell\} \cup \{e_{\ell+j,i} - e_{\ell+i,j};\ 1 \le i < j \le \ell\}.$$

Baza iz prethodnog zadatka zove se *standardna baza od* $\mathfrak{o}(2\ell+1, K)$. Za Liejevu algebru $\mathfrak{o}(V)$, odnosno, $\mathfrak{o}(2\ell+1, K)$, kažemo da je *tipa* $B_\ell$.

**4.** Neka je sada $V$ vektorski prostor parne dimenzije $2\ell$ i neka je $F$ simetrična nedegenerirana bilinearna forma na $V$.

**Zadatak 1.8.** *Dokažite da u prostoru $V$ postoji baza $\{e_1, \ldots, e_{2\ell}\}$ takva da je*

$$v = \sum_{i=1}^{2\ell} \alpha_i e_i, \quad w = \sum_{i=1}^{2\ell} \beta_i e_i \qquad \Longrightarrow \qquad F(v, w) = \sum_{i=1}^{\ell} \alpha_i \beta_{\ell+i} + \sum_{i=1}^{\ell} \alpha_{\ell+i}\beta_i.$$

Pomoću baze iz zadatka 1.8. nalazimo da je u ovom slučaju $\mathfrak{o}_F(V)$ izomorfna Liejevoj algebri matrica

$$\mathfrak{o}(2\ell, K) = \{x \in \mathfrak{gl}(2\ell, K);\ sx = -x^t s\}, \quad \text{gdje je} \quad s = \begin{bmatrix} 0 & I_\ell \\ I_\ell & 0 \end{bmatrix}.$$

**Zadatak 1.9.** *Dokažite da je* $\dim \mathfrak{o}(2\ell, K) = 2\ell^2 - \ell$ *i da je jedna baza od* $\mathfrak{o}(2\ell, K)$ *dana sa*

$$\{e_{ii} - e_{\ell+i,\ell+i};\ 1 \le i \le \ell\} \cup \{e_{ij} - e_{\ell+j,\ell+i};\ 1 \le i, j \le \ell,\ i \ne j\} \cup$$
$$\cup \{e_{i,\ell+j} - e_{j,\ell+i};\ 1 \le i < j \le \ell\} \cup \{e_{\ell+j,i} - e_{\ell+i,j};\ 1 \le i < j \le \ell\}.$$

I u ovom se slučaju baza iz zadatka 1.9. zove *standardna baza od* $\mathfrak{o}(2\ell, K)$. U ovom slučaju za ortogonalnu Liejevu algebru $\mathfrak{o}(V)$, odnosno, $\mathfrak{o}(2\ell, K)$, kažemo da je Liejeva algebra *tipa* $D_\ell$.

Navedimo još nekoliko Liejevih algebri matrica s kojima ćemo se susretati. Sa $\mathfrak{t}(n, K)$ označavamo Liejevu algebru svih **gornje trokutastih matrica** $n \times n$ :

$$\mathfrak{t}(n, K) = \{a = [\alpha_{ij}] \in \mathfrak{gl}(n, K);\ \alpha_{ij} = 0 \quad \text{ako je} \quad i > j\}.$$

Nadalje, $\mathfrak{n}(n, K)$ je Liejeva algebra svih **striktno gornje trokutastih matrica** $n \times n$ :

$$\mathfrak{n}(n, K) = \{a = [\alpha_{ij}] \in \mathfrak{gl}(n, K);\ \alpha_{ij} = 0 \quad \text{ako je} \quad i \geq j\}.$$

Napokon, $\mathfrak{d}(n, K)$ označava Liejevu algebru svih **dijagonalnih matrica** $n \times n$ :

$$\mathfrak{d}(n, K) = \{a = [\alpha_{ij}] \in \mathfrak{gl}(n, K);\ \alpha_{ij} = 0 \quad \text{ako je} \quad i \neq j\}.$$

Lako se vidi da je

$$\dim\, \mathfrak{t}(n, K) = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \dim\, \mathfrak{n}(n, K) = \frac{n(n-1)}{2}, \quad \dim\, \mathfrak{d}(n, K) = n.$$

Nadalje, vrijedi

$$\mathfrak{t}(n, K) = \mathfrak{d}(n, K) \dotplus \mathfrak{n}(n, K), \quad [\mathfrak{d}(n, K), \mathfrak{d}(n, K)] = \{0\}, \quad [\mathfrak{d}(n, K), \mathfrak{n}(n, K)] = \mathfrak{n}(n, K),$$

dakle,

$$[\mathfrak{t}(n, K), \mathfrak{t}(n, K)] = \mathfrak{n}(n, K).$$

Pri tome, za bilo koju Liejevu algebru $\mathfrak{g}$ i za bilo koje podskupove $A, B \subseteq \mathfrak{g}$ sa $[A, B]$ označavamo potprostor od $\mathfrak{g}$ razapet svim elementima oblika $[a, b]$, $a \in A$, $b \in B$ :

$$[A, B] = span_K\, \{[a, b];\ a \in A,\ b \in B\}.$$

Kao što smo već spomenuli, za svaku algebru $\mathcal{A}$ njene derivacije tvore Liejevu podalgebru $Der(\mathcal{A})$ od $Lie(L(\mathcal{A}))$. Posebno je tako u slučaju Liejeve algebre $\mathfrak{g}$. Tada je

$$Der(\mathfrak{g}) = \{D \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{g});\ D([x, y]) = [D(x), y] + [x, D(y)] \quad \forall x, y \in \mathfrak{g}\}.$$

Za bilo koji element $x \in \mathfrak{g}$ definiramo preslikavanje $ad\, x : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ na sljedeći način:

$$(ad\, x)(y) = [x, y], \qquad y \in \mathfrak{g}.$$

Iz bilinearnosti preslikavanja $(x, y) \mapsto [x, y]$ neposredno slijedi da su svi operatori $ad\, x$ linearni i da je $ad : \mathfrak{g} \to L(\mathfrak{g}),\ x \mapsto ad\, x$, linearno preslikavanje. Štoviše, vrijedi:

**Propozicija 1.1.2.** *Za svaku Liejevu algebru $\mathfrak{g}$ preslikavanje ad je homomorfizam Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ u Liejevu algebru $Der(\mathfrak{g})$. Posebno, ad je reprezentacija Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ na vektorskom prostoru $\mathfrak{g}$.*

**Dokaz:** Iz Jacobijevog identiteta $(L2)$ i iz antikomutativnosti $(L1')$ imamo redom za bilo koje $x, y, z \in \mathfrak{g}$

$$(ad\, x)([y, z]) = [x, [y, z]] = -[z, [x, y]] - [y, [z, x]] = [[x, y], z] + [y, [x, z]] = [(ad\, x)(y), z] + [y, (ad\, x)(z)],$$

što pokazuje da je $ad\, x \in Der(\mathfrak{g})$. Nadalje, koristeći ista pravila izvodimo i

$$(ad\, [x, y])(z) = [[x, y], z] = -[z, [x, y]] = [x, [y, z]] + [y, [z, x]] =$$

$$= [x, [y, z]] - [y, [x, z]] = (ad\, x)((ad\, y)(z)) - (ad\, y)((ad\, x)(z)),$$

dakle,

$$ad\,[x,y] = (ad\,x)(ad\,y) - (ad\,y)(ad\,x) = [ad\,x, ad\,y],$$

što pokazuje da je $ad : \mathfrak{g} \to Der(\mathfrak{g})$ homomorfizam Liejevih algebri, i, posebno, $ad$ je reprezentacija Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ na vektorskom prostoru $\mathfrak{g}$.

Derivacije Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ oblika $ad\,x$ za neki $x \in \mathfrak{g}$ zovu se **unutarnje derivacije** Liejeve algebre. Svi ostali elementi od $Der(\mathfrak{g})$ zovu se **vanjske derivacije** Liejeve algebre $\mathfrak{g}$.

**Propozicija 1.1.3.** *Skup $ad\,\mathfrak{g}$ svih unutarnjih derivacija Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ je ideal u Liejevoj algebri $Der(\mathfrak{g})$.*

**Dokaz:** Za $x, y \in \mathfrak{g}$ i $D \in Der(\mathfrak{g})$ imamo

$$[D, ad\,x](y) = D([x,y]) - [x, D(y)] = [D(x), y] + [x, D(y)] - [x, D(y)] = [D(x), y] = (ad\,D(x))(y).$$

Dakle, $[D, ad\,x] = ad\,D(x) \in ad\,\mathfrak{g}$.

Primjetimo da je jezgra homomorfizma $ad : \mathfrak{g} \to Der(\mathfrak{g})$, koja je naravno ideal u Liejevoj algebri $\mathfrak{g}$, jednaka

$$Z(\mathfrak{g}) = \{x \in \mathfrak{g};\ ad\,x = 0\} = \{x \in \mathfrak{g};\ [x,y] = 0\ \forall y \in \mathfrak{g}\}.$$

Taj se ideal u $\mathfrak{g}$ zove **centar** Liejeve algebre $\mathfrak{g}$. Liejeva algebra $Z(\mathfrak{g})$ ima svojstvo da je u njoj komutator trivijalan: $[x,y] = 0\ \forall x, y \in Z(\mathfrak{g})$. Općenito, za Liejevu algebru $\mathfrak{g}$ kažemo da je **komutativna** ili **Abelova** ako je $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \{0\}$, tj. $[x,y] = 0\ \forall x, y \in \mathfrak{g}$. Naravno, Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ je komutativna ako i samo ako je $Z(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}$.

Uočimo da je definicija komutativnosti za Liejeve algebre malo različita od uobičajene definicije komutativnosti. Naime, ako je $\mathcal{A}$ bilo koja algebra, ona se obično zove komutativna ili Abelova ako je $xy = yx\ \forall x, y \in \mathcal{A}$. U slučaju Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ zbog antikomutativnosti to je ekvivalentno uvjetu $2[x,y] = 0\ \forall x, y \in \mathfrak{g}$, a to je ekvivalentno našoj definiciji komutativnosti Liejeve algebre ukoliko je $char\,K \neq 2$. Međutim, ako je $char\,K = 2$, onda je svaka algebra s antikomutativnim množenjem ujedno i komutativna, jer je $-1 = 1$. Ipak, kod Liejeve algebre postavljamo jači zahtjev (inače bi svaka Liejeva algebra nad poljem karakteristike 2 bila komutativna).

Naravno, ako je $V$ bilo koji vektorski prostor, onda uz definiciju $[x,y] = 0\ \forall x, y \in V$ to postaje Abelova Liejeva algebra.

Općenito, neka je $\mathfrak{g}$ konačnodimenzionalna Liejeva algebra i neka je $\{e_1, \ldots, e_n\}$ baza vektorskog prostora. Tada možemo pisati

$$[e_i, e_j] = \sum_{k=1}^{n} c_{i,j,k} e_k, \qquad c_{i,j,k} \in K, \quad 1 \leq i, j, k \leq n.$$

Skalari $c_{i,j,k}$ zovu se **strukturne konstante** Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ u odnosu na bazu $\{e_1, \ldots, e_n\}$. Iz svojstava $(L1)$ i $(L2)$ jednostavno se izvodi koji su nužni i dovoljni uvjeti da bi zadanih $n^3$ skalara mogli biti strukturne konstante:

**Zadatak 1.10.** *Neka je $V$ vektorski prostor nad poljem $K$, $\{e_1, \ldots, e_n\}$ baza od $V$ i $c_{i,j,k} \in K$, $i, j, k \in \{1, \ldots, n\}$. Dokažite da na $V$ postoji struktura Liejeve algebre takva da vrijedi*

$$[e_i, e_j] = \sum_{k=1}^{n} c_{i,j,k} e_k \qquad \forall i, j \in \{1, \ldots, n\}$$

*ako i samo ako skalari* $c_{i,j,k}$ *zadovoljavaju*

$$c_{i,i,k} = 0 \qquad \forall i, k \in \{1, \ldots, n\}$$

*i*

$$\sum_{k=1}^{n} (c_{i,j,k} c_{k,\ell,m} + c_{j,\ell,k} c_{k,i,m} + c_{\ell,i,k} c_{k,j,m}) = 0 \qquad \forall i, j, \ell, m \in \{1, \ldots, n\}.$$

Neka je $\mathfrak{g}$ Liejeva algebra i $S \subseteq \mathfrak{g}$ bilo koji podskup. Tada stavljamo

$$C_{\mathfrak{g}}(S) = \{x \in \mathfrak{g};\ [x, y] = 0 \quad \forall y \in S\}.$$

Iz Jacobijevog identiteta lako slijedi da je $C_{\mathfrak{g}}(S)$ Liejeva podalgebra od $\mathfrak{g}$; ona se zove **centralizator** skupa $S$ u Liejevoj algebri $\mathfrak{g}$. Naravno, $Z(\mathfrak{g}) = C_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g})$.

Neka je sada $\mathfrak{h}$ Liejeva podalgebra od $\mathfrak{g}$. Tada definiramo

$$N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) = \{x \in \mathfrak{g};\ [x, \mathfrak{h}] \subseteq \mathfrak{h}\}.$$

$N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$ je Liejeva podalgebra od $\mathfrak{g}$ koja sadrži $\mathfrak{h}$ i $\mathfrak{h}$ je ideal u $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$. Štoviše, $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$ je najveća takva Liejeva podalgebra: ako je $\mathfrak{k}$ Liejeva podalgebra od $\mathfrak{g}$ koja sadrži $\mathfrak{h}$ i ako je $\mathfrak{h}$ ideal u $\mathfrak{k}$, onda je $\mathfrak{k} \subseteq N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$. Liejeva algebra $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$ zove se **normalizator** od $\mathfrak{h}$ u Liejevoj algebri $\mathfrak{g}$.

## 1.2 Rješive i nilpotentne Liejeve algebre

Ako su $\mathfrak{i}$ i $\mathfrak{j}$ ideali u Liejevoj algebri $\mathfrak{g}$, suma $\mathfrak{i}+\mathfrak{j}$ i presjek $\mathfrak{i}\cap\mathfrak{j}$ tih potprostora od $\mathfrak{g}$ su očito također ideali u $\mathfrak{g}$. Nadalje, iz Jacobijevog identiteta lako slijedi da je i

$$[\mathfrak{i},\mathfrak{j}] = span_K\,\{[x,y];\ x\in\mathfrak{i},\ y\in\mathfrak{j}\}$$

ideal u $\mathfrak{g}$.

Primijetimo da je ideal u Liejevoj algebri $\mathfrak{g}$ zapravo potprostor $\mathfrak{i}$ koji je invarijantan s obzirom na sve unutarnje derivacije:

$$(ad\,x)\mathfrak{i}\subseteq\mathfrak{i}\qquad\forall x\in\mathfrak{g}.$$

Potprostor $\mathfrak{j}$ od $\mathfrak{g}$ zove se **karakteristični ideal** u Liejevoj algebri $\mathfrak{g}$ ako je invarijantan s obzirom na sve derivacije Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ :

$$D\mathfrak{j}\subseteq\mathfrak{j}\qquad\forall D\in Der(\mathfrak{g}).$$

Malo prije spomenuta svojstva ideala vrijede i za karakteristične ideale: ako su $\mathfrak{i}$ i $\mathfrak{j}$ karakteristični ideali u Liejevoj algebri $\mathfrak{g}$ onda su $\mathfrak{i}+\mathfrak{j}$, $\mathfrak{i}\cap\mathfrak{j}$ i $[\mathfrak{i},\mathfrak{j}]$ karakteristični ideali u $\mathfrak{g}$.

Naravno, čitava Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ je karakteristični ideal u $\mathfrak{g}$. Stoga možemo induktivno definirati opadajuće nizove $\left(\mathfrak{g}^{(k)}\right)_{k\in\mathbb{Z}_+}$ i $\left(\mathfrak{g}^{k}\right)_{k\in\mathbb{Z}_+}$ karakterističnih ideala:

$$\mathfrak{g}^{(0)}=\mathfrak{g}^0=\mathfrak{g},\qquad \mathfrak{g}^{(k+1)}=[\mathfrak{g}^{(k)},\mathfrak{g}^{(k)}],\qquad \mathfrak{g}^{k+1}=[\mathfrak{g},\mathfrak{g}^k],\qquad k\in\mathbb{Z}_+.$$

Niz $\left(\mathfrak{g}^{(k)}\right)_{k\geq 0}$ zove se **izvedeni niz** u Liejevoj algebri $\mathfrak{g}$; niz $\left(\mathfrak{g}^{k}\right)_{k\geq 0}$ zove se **silazni centralni niz** u $\mathfrak{g}$.

Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ zove se **rješiva** ako je $\mathfrak{g}^{(k)}=\{0\}$ za neki $k\in\mathbb{Z}_+$, a **nilpotentna** ako je $\mathfrak{g}^k=\{0\}$ za neki $k\in\mathbb{Z}_+$. Budući da je očito $\mathfrak{g}^{(k)}\subseteq\mathfrak{g}^k$, jasno je da je svaka nilpotentna Liejeva algebra ujedno i rješiva Liejeva algebra. Naravno, svaka Abelova Liejeva algebra je nilpotentna, dakle i rješiva.

**Zadatak 1.11.** *Dokažite da je Liejeva algebra $\mathfrak{t}(n,K)$ rješiva i da je Liejeva algebra $\mathfrak{n}(n,K)$ nilpotentna.*

**Uputa:** Dokažite da je

$$\mathfrak{n}(n,K)^k=\{a=[\alpha_{ij}]\in\mathfrak{gl}(n,K);\ \alpha_{ij}=0\quad\text{ako je}\quad i+k\geq j\}$$

i iskoristite jednakost $\mathfrak{t}(n,K)^{(1)}=[\mathfrak{t}(n,K),\mathfrak{t}(n,K)]=\mathfrak{n}(n,K)$.

**Propozicija 1.2.1.** *Neka je $\mathfrak{g}$ Liejeva algebra, $\mathfrak{h}$ njena Liejeva podalgebra i $\mathfrak{i}$ i $\mathfrak{j}$ ideali u $\mathfrak{g}$.*

*(a) Ako je Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ rješiva onda su i Liejeve algebre $\mathfrak{h}$ i $\mathfrak{g}/\mathfrak{i}$ rješive.*

*(b) Ako su Liejeve algebre $\mathfrak{i}$ i $\mathfrak{g}/\mathfrak{i}$ rješive, onda je i Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ rješiva.*

*(c) Ako su ideali $\mathfrak{i}$ i $\mathfrak{j}$ rješive Liejeve algebre, onda je i ideal $\mathfrak{i}+\mathfrak{j}$ rješiva Liejeva algebra.*

**Dokaz:** $(a)$ Očito je $\mathfrak{h}^{(k)}\subseteq\mathfrak{g}^{(k)}$, pa iz rješivosti $\mathfrak{g}$ slijedi rješivost $\mathfrak{h}$. Nadalje, neka je $\varphi:\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}/\mathfrak{i}$ kvocijentni epimorfizam, $\varphi(x)=x+\mathfrak{i}$, $x\in\mathfrak{g}$. Indukcijom lako slijedi da je tada $(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^{(k)}=\varphi(\left(\mathfrak{g}^{(k)}\right)$ $\forall k\geq 0$, pa ponovo iz rješivosti $\mathfrak{g}$ slijedi rješivost $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$.

$(b)$ Pretpostavimo da su $m,n\geq 0$ takvi da je $(\mathfrak{g}/\mathfrak{i})^{(n)}=\{0\}$ i $\mathfrak{i}^{(m)}=\{0\}$. Uz oznaku

$\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}/\mathfrak{i}$ kao u $(a)$ imamo tada $\varphi\left(\mathfrak{g}^{(n)}\right) = (\mathfrak{g}/\mathfrak{i})^{(n)} = \{0\}$. Dakle, $\mathfrak{g}^{(n)} \subseteq Ker\,\varphi = \mathfrak{i}$. Kako je očito $\left(\mathfrak{g}^{(j)}\right)^{(k)} = \mathfrak{g}^{(j+k)}\ \ \forall j,k \geq 0$, slijedi

$$\mathfrak{g}^{(n+m)} = \left(\mathfrak{g}^{(n)}\right)^{(m)} \subseteq \mathfrak{i}^{(m)} = \{0\};$$

Dakle, Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ je rješiva.

$(c)$ Standardni algebarski teorem daje izomorfizam $x + \mathfrak{i} \mapsto x + \mathfrak{i} \cap \mathfrak{j},\ x \in \mathfrak{j}$, Liejeve algebre $(\mathfrak{i}+\mathfrak{j})/\mathfrak{i}$ na Liejevu algebru $\mathfrak{j}/(\mathfrak{i} \cap \mathfrak{j})$. Kako je Liejeva algebra $\mathfrak{j}$ po pretpostavci rješiva, iz $(a)$ slijedi da je i kvocijentna algebra $\mathfrak{j}/(\mathfrak{i} \cap \mathfrak{j})$ rješiva. Dakle i $(\mathfrak{i}+\mathfrak{j})/\mathfrak{i}$ je rješiva Liejeva algebra, a kako je i Liejeva algebra $\mathfrak{i}$ rješiva, iz $(b)$ zaključujemo da je $\mathfrak{i}+\mathfrak{j}$ rješiva Liejeva algebra.

Pomoću tvrdnje $(c)$ propozicije 1.2.1. zaključujemo da u svakoj Liejevoj algebri $\mathfrak{g}$ postoji najveći rješivi ideal, tj. rješivi ideal koji sadrži svaki drugi rješivi ideal u $\mathfrak{g}$. Taj ideal označavat ćemo sa $R(\mathfrak{g})$ i zvati **radikal** Liejeve algebre $\mathfrak{g}$.

**Propozicija 1.2.2.** *Za svaku Liejevu algebru $\mathfrak{g}$ vrijedi $R(\mathfrak{g}/R(\mathfrak{g})) = \{0\}$.*

**Dokaz:** Neka je $\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}/R(\mathfrak{g})$ kvocijentni epimorfizam i neka je $\mathfrak{j} = \varphi^{-1}(R(\mathfrak{g}/R(\mathfrak{g})))$. To je ideal u Liejevoj algebri $\mathfrak{g}$. Tada je $\mathfrak{j}/R(\mathfrak{g}) = \varphi(\mathfrak{j}) = R(\mathfrak{g}/R(\mathfrak{g}))$ rješiva Liejeva algebra, a također je $R(\mathfrak{g})$ rješiva Liejeva algebra. Prema tvrdnji $(c)$ propozicije 1.2.1. ideal $\mathfrak{j}$ je rješiva Liejeva algebra. No tada po definiciji radikala vrijedi $\mathfrak{j} \subseteq R(\mathfrak{g})$. Kako je $R(\mathfrak{g}) = Ker\,\varphi$, zaključujemo da je $R(\mathfrak{g}/R(\mathfrak{g})) = \varphi(\mathfrak{j}) = \{0\}$.

**Propozicija 1.2.3.** *Neka je $\mathfrak{g}$ Liejeva algebra, $\mathfrak{h}$ njena Liejeva podalgebra i $\mathfrak{i}$ ideal u $\mathfrak{g}$.*

$(a)$ *Ako je Lijeva algebra $\mathfrak{g}$ nilpotentna, onda su i Liejeve algebre $\mathfrak{h}$ i $\mathfrak{g}/\mathfrak{i}$ nilpotentne.*

$(b)$ *Ako je $\mathfrak{g}/Z(\mathfrak{g})$ nilpotentna Liejeva algebra, onda je i $\mathfrak{g}$ nilpotentna Liejeva algebra.*

$(c)$ *Ako je $\mathfrak{g} \neq \{0\}$ nilpotentna Liejeva algebra, onda je $Z(\mathfrak{g}) \neq \{0\}$.*

**Dokaz:** $(a)$ dobivamo potpuno analogno tvrdnji $(a)$ propozicije 1.2.1.

$(b)$ Neka je $\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}/Z(\mathfrak{g})$ kvocijentni epimorfizam. Analogno kao u dokazu tvrdnje $(a)$ propozicije 1.2.1. nalazimo da je $\varphi(\mathfrak{g}^k) = (\mathfrak{g}/Z(\mathfrak{g}))^k$. Dakle, ako je $(\mathfrak{g}/Z(\mathfrak{g}))^n = \{0\}$, slijedi da je $\mathfrak{g}^n \subseteq Ker\,\varphi = Z(\mathfrak{g})$, a odatle je $\mathfrak{g}^{n+1} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^n] \subseteq [\mathfrak{g}, Z(\mathfrak{g})] = \{0\}$.

$(c)$ Treba samo uočiti da posljednji član silaznog centralnog niza koji je $\neq \{0\}$ sadržan u $Z(\mathfrak{g})$.

Uvjet da je Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ nilpotentna može se ovako formulirati: postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je $(ad\,x_1)(ad\,x_2)\cdots(ad\,x_n) = 0\ \ \forall x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathfrak{g}$. Posebno, tada vrijedi $(ad\,x)^n = 0\ \ \forall x \in \mathfrak{g}$, tj. svi operatori $ad\,x,\ x \in \mathfrak{g}$, su nilpotentni. Općenito, za Liejevu algebru $\mathfrak{g}$ element $x \in \mathfrak{g}$ zove se **ad−nilpotentan** ako je linearan operator $ad\,x$ na prostoru $\mathfrak{g}$ nilpotentan. Dakle, svaki element nilpotentne Liejeve algebre je ad−nilpotentan. Važna je i netrivijalna činjenica da vrijedi i obrat:

**Teorem 1.2.4.** (**Engel**) *Ako je $\mathfrak{g}$ konačnodimenzionalna Liejeva algebra u kojoj je svaki element ad−nilpotentan, onda je Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ nilpotentna.*

Dokaz Engelovog teorema provest ćemo nakon određenih priprema.

**Lema 1.2.5.** *Neka je linearan operator $x \in \mathfrak{gl}(V)$ na vektorskom prostoru $V$ nilpotentan. Tada je $x$ ad−nilpotentan element Liejeve algebre $\mathfrak{gl}(V)$.*

**Dokaz:** Definirajmo linearne operatore $\lambda_x$ i $\rho_x$ na vektorskom prostoru $\mathfrak{gl}(V)$ kao množenje sa $x$ slijeva, odnosno, zdesna:

$$\lambda_x(y) = xy, \qquad \rho_x(y) = yx, \qquad y \in \mathfrak{gl}(V).$$

Tada za svaki prirodan broj $n$ vrijedi $(\lambda_x)^n = \lambda_{x^n}$ i $(\rho_x)^n = \rho_{x^n}$, pa zaključujemo da su operatori $\lambda_x$ i $\rho_x$ na prostoru $\mathfrak{gl}(V)$ nilpotentni. Nadalje, operatori $\lambda_x$ i $\rho_x$ komutiraju i $ad\, x = \lambda_x - \rho_x$, pa vrijedi binomna formula

$$(ad\, x)^m = \sum_{j=0}^{m} (-1)^{m-j} \binom{m}{j} (\lambda_x)^j \, (\rho_x)^{m-j}\,.$$

Posebno, ako je $n$ takav da je $x^n = 0$, iz gornje formule za $m = 2n$ slijedi $(ad\, x)^{2n} = 0$.

Primijetimo da je lako pronaći linearan operator $x \in \mathfrak{gl}(V)$ koji jest ad$-$nilpotentan, ali nije nilpotentan: takav je npr. operator identitete $I_V = I_V$.

**Teorem 1.2.6.** *Neka je $V \neq \{0\}$ konačnodimenzionalan vektorski prostor i neka je $\mathfrak{g}$ Liejeva podalgebra od $\mathfrak{gl}(V)$ koja se sastoji od nilpotentnih operatora. Tada postoji $v \in V$, $v \neq 0$ takav da je $x(v) = 0 \ \forall x \in \mathfrak{g}$.*

**Dokaz** provodimo indukcijom u odnosu na dim $\mathfrak{g} \geq 0$. Baza indukcije je slučaj dim $\mathfrak{g} = 0$ kad je tvrdnja teorema trivijalna. Napomenimo da je trivijalna i tvrdnja teorema u slučaju dim $\mathfrak{g} = 1$. Neka je sada $n \geq 2$ i pretpostavimo da je tvrdnja teorema dokazana za sve Liejeve podalgebre od $\mathfrak{gl}(V)$ čija je dimenzija manja od $n$. Pretpostavimo da je dim $\mathfrak{g} = n$ i neka je $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ Liejeva podalgebra od $\mathfrak{g}$ koja je netrivijalna: $\{0\} \neq \mathfrak{h} \neq \mathfrak{g}$. Svaki linearan operator $ad_{\mathfrak{g}}\, x$ za $x \in \mathfrak{h}$ je nilpotentan na vektorskom prostoru $\mathfrak{g}$. Kako je $\mathfrak{h}$ potprostor koji je invarijantan s obzirom na svaki operator $ad_{\mathfrak{g}}\, x$, $x \in \mathfrak{h}$, ti operatori induciraju nilpotentne operatore $\psi(x)$ na kvocijentnom prostoru $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ :

$$\psi(x)(y + \mathfrak{h}) = (ad_{\mathfrak{g}}\, x)(y) + \mathfrak{h} = [x, y], \qquad x \in \mathfrak{h}, \quad y \in \mathfrak{g}.$$

Tada je $\psi(\mathfrak{h})$ Liejeva podalgebra od $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})$ koja se sastoji od nilpotentnih operatora na prostoru $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$. Budući da je $\mathfrak{g}/\mathfrak{h} \neq \{0\}$ i budući da je dim $\psi(\mathfrak{h}) \leq$ dim $\mathfrak{h} <$ dim $\mathfrak{g} = n$, po pretpostavci indukcije postoji vektor $y + \mathfrak{h} \neq \mathfrak{h}$ (što znači da je $y \in \mathfrak{g} \setminus \mathfrak{h}$) takav da je $\psi(x)(y + \mathfrak{h}) = 0 \ \forall x \in \mathfrak{h}$. No to znači da je $[x, y] \in \mathfrak{h} \ \forall x \in \mathfrak{h}$, što znači da je $y \in N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$, a kako $y \notin \mathfrak{h}$, slijedi $\mathfrak{h} \subsetneq N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$. Pretpostavimo sada da smo Liejevu podalgebru $\mathfrak{h}$ od $\mathfrak{g}$ izabrali tako da je ona maksimalna, tj. da za svaku Liejevu podalgebru $\mathfrak{k}$ od $\mathfrak{g}$ iz $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{k}$ slijedi ili $\mathfrak{k} = \mathfrak{h}$ ili $\mathfrak{k} = \mathfrak{g}$. Tada zaključujemo da je $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{g}$, dakle, $\mathfrak{h}$ je ideal u $\mathfrak{g}$. Dokažimo da je tada dim $\mathfrak{g}/\mathfrak{h} = 1$. Doista, pretpostavimo suprotno da je dim $\mathfrak{g}/\mathfrak{h} \geq 2$. Neka je $\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ kvocijentni epimorfizam. Neka je $X$ jednodimenzionalni potprostor vektorskog prostora $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$. Tada je $X$ Liejeva podalgebra od $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ (naravno, komutativna) pa je njen totalni invers $\mathfrak{k} = \varphi^{-1}(X)$ Liejeva podalgebra od $\mathfrak{g}$. No tada je očito $\mathfrak{h} \subsetneq \mathfrak{k} \subsetneq \mathfrak{g}$, a to je u suprotnosti s pretpostavkom o maksimalnosti od $\mathfrak{h}$. Ova kontradikcija pokazuje da je dim $\mathfrak{g}/\mathfrak{h} = 1$. Prema tome, vrijedi $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + Kz$ za bilo koji $z \in \mathfrak{g} \setminus \mathfrak{h}$.

Po pretpostavci indukcije znamo da je potprostor

$$W = \{v \in V;\ y(v) = 0 \ \forall y \in \mathfrak{h}\}$$

različit od $\{0\}$. Budući da je $\mathfrak{h}$ ideal u Liejevoj algebri $\mathfrak{g}$, potprostor $W$ invarijantan je s obzirom na sve operatore $x \in \mathfrak{g}$. Naime, neka je $x \in \mathfrak{g}$ i $v \in W$. Tada za svaki $y \in \mathfrak{h}$ imamo $[x, y] \in \mathfrak{h}$, dakle,

$$y(x(v)) = x(y(v)) - [x, y](v) = 0.$$

To pokazuje da je doista $x(v) \in W$ za svaki $v \in W$ i svaki $x \in \mathfrak{g}$. Uzmimo sada bilo koji $z \in \mathfrak{g} \setminus \mathfrak{h}$. Restrikcija operatora $z$ na potprostor $W$ je nilpotentna, pa postoji $v \in W$, $v \neq 0$, takav da je $z(v) = 0$. Svaki $x \in \mathfrak{g}$ ima oblik $x = y + \lambda z$ za neke $y \in \mathfrak{h}$ i $\lambda \in K$, pa slijedi

$$x(v) = y(v) + \lambda z(v) = 0.$$

Time je proveden korak indukcije, odnosno, teorem 1.2.6. je u potpunosti dokazan.

**Dokaz Engelovog teorema 1.2.4.** Zadana je Liejeva algebra $\mathfrak{g} \neq \{0\}$ čiji su svi elementi ad$-$nilpotentni. Tada Liejeva podalgebra $ad\,\mathfrak{g}$ od $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ zadovoljava pretpostavke teorema 1.2.6. Prema tome, postoji $x \in \mathfrak{g}$, $x \neq 0$, takav da je $[\mathfrak{g}, x] = \{0\}$. To znači da je $x \in Z(\mathfrak{g})$, pa zaključujemo da je $Z(\mathfrak{g}) \neq \{0\}$. Uočimo sada da se kvocijentna Liejeva algebra $\mathfrak{g}/Z(\mathfrak{g})$ sastoji od ad$-$nilpotentnih elemenata i da je $\dim \mathfrak{g}/Z(\mathfrak{g}) < \dim \mathfrak{g}$. Korak indukcije po $\dim \mathfrak{g}$ pokazuje da je Liejeva algebra $\mathfrak{g}/Z(\mathfrak{g})$ nilpotentna. Prema tvrdnji $(b)$ propozcije 1.2.3. slijedi da je i Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ nilpotentna.

Neka je $V$ $n-$dimenzionalni vektorski prostor. Svaka $(n+1)-$torka $\mathcal{Z} = (V_0, V_1, \ldots, V_n)$ potprostora od $V$ takva da je

$$V_0 \subseteq V_1 \subseteq \cdots \subseteq V_n \qquad \text{i} \qquad \dim V_i = i \quad \forall i$$

zove se **zastava** u prostoru $V$. Naravno, tada je $V_0 = \{0\}$ i $V_n = V$. Za operator $x \in \mathfrak{gl}(V)$ kažemo da **stabilizira zastavu** $\mathcal{Z}$ ako su svi članovi od $\mathcal{Z}$ invarijatni s obzirom na operator $x$ : $xV_i \subseteq V_i$ $\forall i$.

**Korolar 1.2.7.** *Uz pretpostavke teorema 1.2.6. postoji zastava $\mathcal{Z} = (V_0, V_1, \ldots, V_n)$ u prostoru $V$ koju stabiliziraju svi operatori $x \in \mathfrak{g}$ i da vrijedi, štoviše, $xV_i \subseteq V_{i-1}$ za svaki $x \in \mathfrak{g}$ za svaki $i \geq 1$. Drugim riječima, postoji baza u prostoru $V$ u odnosu na koju matrice operatora iz $\mathfrak{g}$ tvore Liejevu podalgebru od $\mathfrak{n}(n, K)$.*

**Dokaz:** Prema teoremu 1.2.6. postoji $v \in V$, $v \neq 0$, takav da je $x(v) = 0$ za svaki $x \in \mathfrak{g}$. Stavimo $V_0 = \{0\}$ i $V_1 = Kv$ i neka je $W = V/V_1$. Operatori $\psi(x)$ koje elementi $x \in \mathfrak{g}$ induciraju na kvocijentnom prostoru $W$ su svi nilpotentni. Rezoniramo li induktivno po $\dim V$, zaključujemo da postoji zastava $\mathcal{Z}' = (W_0, W_1, \ldots, W_{n-1})$ u prostoru $W$ koju stabiliziraju svi operatori $\psi(x)$, $x \in \mathfrak{g}$, takva da je štoviše $\psi(x)W_i \subseteq W_{i-1}$ za svaki $x \in \mathfrak{g}$ i svaki $i \geq 1$. Neka je sada $\pi : V \to W$ kvocijentno preslikavanje. Ako stavimo $\pi^{-1}(W_i) = V_{i+1}$, dobivamo zastavu $\mathcal{Z} = (V_0, V_1, \ldots, V_n)$ u $V$ s traženim svojstvima.

**Korolar 1.2.8.** *Neka je $\mathfrak{g}$ nilpotentna Liejeva algebra i $\mathfrak{i} \neq \{0\}$ ideal u $\mathfrak{g}$. Tada je $\mathfrak{i} \cap Z(\mathfrak{g}) \neq \{0\}$.*

**Dokaz:** Za $x \in \mathfrak{g}$ neka je $ad_{\mathfrak{i}}\,x$ restrikcija od $ad\,x$ na (invarijantan) potprostor $\mathfrak{i}$. Kako su svi operatori $ad\,x$, , $x \in \mathfrak{g}$, nilpotentni, to su i njihove restrikcije $ad_{\mathfrak{i}}\,x$ nilpotentni operatori. Prema teoremu 1.2.6. postoji $y \in \mathfrak{i}$, $y \neq 0$, takav da je $(ad_{\mathfrak{i}}\,x) = 0$, odnosno, $[x, y] = 0$ $\forall x \in \mathfrak{g}$. No tada je $0 \neq y \in \mathfrak{i} \cap Z(\mathfrak{g})$.

Primijetimo da tvrdnja korolara primijenjena na $\mathfrak{i} = \mathfrak{g}$ pokazuje da je za svaku nilpotentnu Liejevu algebru $\mathfrak{g}$ centar $Z(\mathfrak{g}) \neq \{0\}$; to je već dokazano kao tvrdnja $(c)$ propozicije 1.2.3.

**U daljnjem pretpostavljamo da je polje $K$ algebarski zatvoreno, i da je** $char\,K = 0$. U tom slučaju teorem 1.2.6. generalizira se na rješive Liejeve algebre operatora:

**Teorem 1.2.9.** *Neka je $V$ konačnodimenzionalan vektorski prostor nad algebarski zatvorenim poljem karakteristike 0 i neka je $\mathfrak{g}$ rješiva podalgebra Liejeve algebre $\mathfrak{gl}(V)$. Tada postoji vektor $v \in V$, $v \neq 0$, koji je svojstven za svaki operator $x \in \mathfrak{g}$.*

**Dokaz** ćemo provesti indukcijom u odnosu na $\dim \mathfrak{g}$. Baza indukcije $\dim \mathfrak{g} = 0$ je trivijalna. Pretpostavimo sada da je $\dim \mathfrak{g} \geq 1$ i da je teorem dokazan za sve konačnodimenzionalne vektorske prostore $W$ i sve rješive Liejeve podalgebre od $\mathfrak{gl}(W)$ čija je dimenzija manja od $\dim \mathfrak{g}$. Dokaz ćemo provesti u nekoliko koraka.

(1) Budući da je Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ rješiva, vrijedi $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \neq \mathfrak{g}$. Neka je $\mathfrak{h}$ potprostor od $\mathfrak{g}$ kodimenzije 1 koji sadrži $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$. Tada je $[\mathfrak{g}, \mathfrak{h}] \subseteq [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \subseteq \mathfrak{h}$, dakle, $\mathfrak{h}$ je ideal. Kako je $\dim \mathfrak{h} = \dim \mathfrak{g} - 1 <$ $< \dim \mathfrak{g}$, po pretpostavci indukcije postoji $v \in V$, $v \neq 0$, koji je svojstven vektor svih operatora $y \in \mathfrak{h}$. Za $y \in \mathfrak{h}$ označimo sa $\lambda(y) \in K$ pripadnu svojstvenu vrijednost:

$$yv = \lambda(y)v, \qquad y \in \mathfrak{h}.$$

Očito je $\lambda : \mathfrak{h} \to K$ linearan funkcional. Stavimo sada

$$W = \{w \in V;\ yw = \lambda(y)w\ \forall y \in \mathfrak{h}\}.$$

Tada je $W \neq \{0\}$ potprostor od $V$.

(2) Dokažimo sada da je potprostor $W$ invarijantan s obzirom na sve operatore $x \in \mathfrak{g}$. Neka je $x \in \mathfrak{g}$ i $0 \neq w \in W$. Neka je $n$ najmanji prirodan broj takav da su vektori $w, xw, \ldots, x^n w$ linearno nezavisni. To naravno znači da su vektori $w, xw, \ldots, x^{n-1}w$ linearno nezavisni. Definiramo potprostore

$$W_0 = \{0\}, \qquad W_j = span_K\{w, xw, \ldots, x^{j-1}w\}, \quad j \in \mathbb{N}.$$

Tada očito vrijedi

$$\dim W_j = j \quad \text{za} \quad 0 \leq j \leq n \qquad \text{i} \qquad xW_{j-1} \subseteq W_j \quad \forall j \in \mathbb{N}.$$

Nadalje, kako je $x^n w$ linearna kombinacija vektora $w, xw, \ldots, x^{n-1}w$, lako se vidi da je $W_m = W_n$ $\forall m \geq n$. Posebno, potprostor $W_n$ je invarijantan s obzirom na operator $x$.

Dokazat ćemo sada da vrijedi

$$yx^j w - \lambda(y)x^j w \in W_j \qquad \forall y \in \mathfrak{h} \quad \text{i} \quad \forall j \in \mathbb{Z}_+. \tag{1.1}$$

Dokaz provodimo indukcijom u odnosu na $j \in \mathbb{Z}_+$. Prije svega, za $j = 0$ po definiciji potprostora $W$ imamo $yw = \lambda(y)w$, dakle, $yw - \lambda(y)w = 0 \in W_0$, odnosno, baza indukcije je dokazana. Provedimo sada korak indukcije. Neka je $j \geq 1$ i pretpostavimo da je dokazano da vrijedi

$$yx^{j-1}w - \lambda(y)x^{j-1}w \in W_{j-1} \qquad \forall y \in \mathfrak{h}.$$

Fiksirajmo sada bilo koji $y \in \mathfrak{h}$. Tada je i $[y, x] \in \mathfrak{h}$, pa imamo

$$yx^{j-1}w = \lambda(y)x^{j-1}w + u \quad \text{i} \quad [y, x]x^{j-1}w = \lambda([y, x])x^{j-1}w + v \quad \text{za neke } u, v \in W_{j-1}.$$

Odatle je

$$yx^j w = yxx^{j-1}w = xyx^{j-1}w + [y, x]x^{j-1}w = \lambda(y)x^j w + xu + \lambda([y, x])x^{j-1}w + v,$$

dakle,

$$yx^j w - \lambda(y)x^j w = xu + \lambda([y, x])x^{j-1}w + v \in W_j,$$

budući da je $W_{j-1} \subseteq W_j$ i $xW_{j-1} \subseteq W_j$. Time je korak indukcije proveden i (1.1) je dokazano.

Iz (1.1) slijedi da je svaki od potprostora $W_j$ invarijantan s obzirom na svaki operator $y \in \mathfrak{h}$. Nadalje, (1.1) pokazuje da za $y \in \mathfrak{h}$ restrikcija $y|W_n$ ima u bazi $\{w, x(w), \dots, x^{n-1}(w)\}$ gornje trokutastu matricu u kojoj su svi dijagonalni elementi jednaki $\lambda(y)$. Prema tome je

$$Tr\ (y|W_n) = n\lambda(y) \qquad \forall y \in \mathfrak{h}.$$

Posebno, vrijedi

$$Tr\ ([x,y]|W_n) = n\lambda([x,y]) \qquad \forall y \in \mathfrak{h}.$$

Međutim, potprostor $W_n$ je invarijantan s obzirom na $x$ i s obzirom na svaki $y \in \mathfrak{h}$; stoga je $[x,y]|W_n = [x|W_n, y|W_n]$, pa slijedi da je gornji trag jednak nuli. Budući da je po pretpostavci $K$ polje karakteristike 0, slijedi $\lambda([x,y]) = 0\ \ \forall y \in \mathfrak{h}$. Stoga imamo

$$yxw = xyw - [x,y]w = x(\lambda(y)w) - \lambda([x,y])w = \lambda(y)xw \qquad \Longrightarrow \qquad xw \in W.$$

Kako su $w \in W$ i $x \in \mathfrak{g}$ bili proizvoljno odabrani, zaključujemo da je potprostor $W$ invarijantan s obzirom na svaki operator $x \in \mathfrak{g}$.

(3) Za $z \in \mathfrak{g} \setminus \mathfrak{h}$ je $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \dotplus Kz$. Budući da je potprostor $W \neq \{0\}$ invarijatan s obzirom na operator $z$, postoje $v \in W$, $v \neq 0$, i $\alpha \in K$ takvi da je $zv = \alpha v$. Sada za bilo koji $x \in \mathfrak{g}$ imamo $x = y + \beta z$ za neke $y \in \mathfrak{h}$ i $\beta \in K$ pa slijedi

$$xv = yv + \beta zv = \lambda(y)v + \beta\alpha v = (\lambda(y) + \beta\alpha)v.$$

Dakle, vektor $v$ je svojstven za sve operatore $x \in \mathfrak{g}$. Time je teorem 1.2.9. u potpunosti dokazan.

**Teorem 1.2.10.** (**Lie**) *Neka je $V$ konačnodimenzionalan vektorski prostor nad algebarski zatvorenim poljem $K$ karakteristike 0 i neka je $\mathfrak{g}$ neka rješiva Liejeva podalgebra od $\mathfrak{gl}(V)$. Tada $\mathfrak{g}$ stabilizira neku zastavu u prostoru $V$. Drugim riječima, postoji baza prostora $V$ u kojoj svi operatori $x \in \mathfrak{g}$ imaju gornje trokutaste matrice.*

**Dokaz:** Ovaj teorem slijedi neposredno iz teorema 1.2.9. indukcijom po $\dim V$. U koraku indukcije, uz oznake iz dokaza prethodnog teorema, s vektorskog prostora $V$ prelazimo na kvocijentni prostor $V/Kv$. Kako je $\dim (V/Kv) = \dim V - 1 < \dim V$, po pretpostavci indukcije postoji zastava $(W_1, W_2, \dots, W_n)$ u prostoru $V/Kv$ ($W_1 = \{0\}$, $W_n = V/Kv$) koju stabiliziraju svi operatori koje na kvocijentu $V/Kv$ induciraju operatori $x \in \mathfrak{g}$. Neka je $\pi : V \to V/Kv$ kvocijentno preslikavanje. Stavimo $V_0 = \{0\}$ i $V_j = \pi^{-1}(W_j)$ za $j = 1, \dots, n$. Tada se lako vidi da $\mathfrak{g}$ stabilizira zastavu $(V_0, V_1, \dots, V_n)$ u prostoru $V$.

**Korolar 1.2.11.** *Neka je $\mathfrak{g}$ rješiva Liejeva algebra nad algebarski zatvorenim poljem $K$ karakteristike 0 i neka je $\pi$ njena reprezentacija na konačnodimenzionalnom vektorskom prostoru $V$. Tada u $V$ postoji zastava invarijantna s obzirom na sve operatore $\pi(x)$, $x \in \mathfrak{g}$.*

**Dokaz:** Treba samo primijetiti da je Liejeva podalgebra $Im\,\pi = \pi(\mathfrak{g})$ od $\mathfrak{gl}(V)$ izomorfna kvocijentnoj Liejevoj algebri $\mathfrak{g}/(Ker\,\pi)$, a ova je prema tvrdnji $(a)$ propozicije 1.2.1. rješiva.

Potprostor Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ koji je invarijantan s obzirom na sve operatore $ad\,x$, $x \in \mathfrak{g}$, je ideal u $\mathfrak{g}$. Dakle, iz korolara 1.2.11. primijenjenog na reprezentaciju $ad$ neposredno slijedi

**Korolar 1.2.12.** *Neka je $\mathfrak{g}$ konačnodimenzionalna rješiva Liejeva algebra nad algebarski zatvorenim poljem karakteristike 0. Tada u $\mathfrak{g}$ postoje ideali $\mathfrak{j}_k$, $k = 0, 1, \dots, n = \dim \mathfrak{g}$, takvi da je*

$$\{0\} = \mathfrak{j}_0 \subseteq \mathfrak{j}_1 \subseteq \cdots \subseteq \mathfrak{j}_n = \mathfrak{g} \qquad i \qquad \dim \mathfrak{j}_k = k \quad \forall k.$$

**Korolar 1.2.13.** *Neka je $\mathfrak{g}$ rješiva konačnodimenzionalna Liejeva algebra nad algebarski zatvorenim poljem $K$ karakteristike 0. Svaki $y \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ je ad$-$nilpotentan. Prvi izvedeni ideal $\mathfrak{g}^{(1)} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ je nilpotentna Liejeva algebra.*

**Dokaz:** Izaberimo zastavu ideala $(\mathfrak{j}_0, \mathfrak{j}_1, \ldots, \mathfrak{j}_n)$ kao u tvrdnji korolara 1.2.12. Uzmimo sada $x_k \in \mathfrak{j}_k \setminus \mathfrak{j}_{k-1}$ za $k = 1, \ldots, n$. Tada je $\{x_1, \ldots, x_n\}$ baza od $\mathfrak{g}$. Matrice operatora $ad\, x$, $x \in \mathfrak{g}$, pripadaju Liejevoj algebri $\mathfrak{t}(n, K)$. Slijedi da matrice operatora $ad\, y$, $y \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, pripadaju Liejevoj algebri $\mathfrak{n}(n, K)$. To pokazuje da je $ad\, y = ad_{\mathfrak{g}}\, y$ nilpotentan operator za svaki $y \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$.

Napokon, tada slijedi da je i operator $ad_{[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]}\, y$ nilpotentan za svaki $y \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$. Sada iz Engelovog teorema 1.2.4. slijedi da je Liejeva algebra $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ nilpotentna.

Napomenimo da tvrdnja prethodnog korolara vrijedi i u slučaju proizvoljnog polja $K$ karakteristike 0 a ne samo algebarski zatvorenog. Ta se činjenica izvodi pomoću proširenja polja skalara o kojem ćemo govoriti kasnije.

Sljedeći nam je cilj dokazati tzv. *Cartanov kriterij rješivosti*. U vezi s tim trebamo se podsjetiti pojma *Jordan$-$Chevalleyevog rastava* linearnog operatora. **Pri tome nam ne treba pretpostavka da je $K$ polje karakteristike 0, ali i dalje pretpostavljamo da je $K$ algebarski zatvoreno polje** (iako se tvrdnje mogu dokazati i u znatno općenitijem slučaju tzv. *savršenog polja*).

Neka je $V$ konačnodimenzionalan vektorski prostor nad $K$. Operator $x \in L(V)$ zove se **poluprost** ako je njegov minimalni polinom separabilan, tj. bez višestrukih nultočaka. To je ispunjeno ako i samo ako za svaki $x-$invarijantan potprostor $W$ od $V$ postoji $x-$invarijantan potprostor $U$ od $V$ takav da je $V = W \dot{+} U$. Također, $x$ je poluprost ako je dijagonalizabilan, odnosno, ako postoji baza u $V$ sastavljena od svojstvenih vektora operatora $x$. Ako su dva linearna operatora $x$ i $y$ poluprosti i ako komutiraju, onda se oni mogu istovremeno dijagonalizirati, pa su $x \pm y$ i $xy$ također poluprosti. Nadalje, ako je potprostor $W$ od $V$ invarijantan s obzirom na poluprost operator $x$, onda je i restrikcija $x|W$ poluprost operator.

**Teorem 1.2.14.** **(Jordan$-$Chevalleyev rastav)** *Neka je $V$ konačnodimenzionalan vektorski prostor nad algebarski zatvorenim poljem $K$ i neka je $x \in L(V)$.*

(*a*) *Postoje jedinstveni $x_s, x_n \in L(V)$ takvi da je $x_s$ poluprost, $x_n$ nilpotentan, $x_s x_n = x_n x_s$ i $x = x_s + x_n$.*

(*b*) *Postoje polinomi $P, Q \in K[T]$ takvi da je $P(0) = Q(0) = 0$, $x_s = P(x)$ i $x_n = Q(x)$.*

(*c*) *Ako su $U \subseteq W$ potprostori od $V$ sa svojstvom $xW \subseteq U$ onda vrijedi $x_s W \subseteq U$ i $x_n W \subseteq U$.*

Operator $x_s$ zove se **poluprosti dio** operatora $x$, a $x_n$ **nilpotentni dio** operatora $x$.

**Dokaz:** Neka je $\kappa_x = (T - \alpha_1)^{m_1} \cdots (T - \alpha_k)^{m_k}$ svojstveni polinom operatora $x$, pri čemu su $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in K$ međusobno različiti i $m_1, \ldots, m_k \in \mathbb{N}$. Tada su potprostori $V_j = Ker\,(x - \alpha_j I_V)^{m_j}$ $x-$invarijantni, svojstveni polinom restrikcije $x|V_j$ je $(T - \alpha_j)^{m_j}$ i vrijedi $V = V_1 \dot{+} \cdots \dot{+} V_k$. Pomoću *Kineskog teorema o ostacima* zaključujemo da u prstenu $K[T]$ postoji polinom $P$ takav da je

$$P - \alpha_j \in (T - \alpha_j)^{m_j} K[T], \quad j = 1, \ldots, k, \quad P \in TK[T].$$

(Posljednja kongruencija je suvišna ako je $0 \in \{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\}$, a ako $0 \notin \{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\}$ onda je stvarno polinom $T$ relativno prost sa svakim od polinoma $(T - \alpha_j)^{m_j}$). Stavimo $Q = T - P$. Naravno, tada je $P(0) = Q(0) = 0$.

Stavimo $x_s = P(x)$ i $x_n = Q(x)$. Tada $x_s$ i $x_n$ komutiraju i vrijedi $x = x_s + x_n$. Nadalje, kako su $x_s$ i $x_n$ polinomi od $x$, oni ostavljaju invarijantnim svaki od potprostora $V_j$. Nadalje, budući da je $(x-\alpha_j)^{m_j}|\,V_j = 0$ i budući da je polinom $P - \alpha_j$ kongruentan nuli modulo $(T-\alpha_j)^{m_j}$, vidi se da je $x_s|\,V_j = \alpha_j I_{V_j}$. Prema tome, operator $x_s$ je poluprost. Nadalje, kako je $x_n = x - x_s$, slijedi da je $(x_n|\,V_j)^{m_j} = 0$. Prema tome, operator $x_n$ je nilpotentan. Time je dokazana egzistencija u $(a)$ a dobiveni operatori $x_s$ i $x_n$ zadovoljavaju $(b)$. Nadalje, zbog $(b)$ vrijedi i $(c)$.

Treba još dokazati jedinstvenost u $(a)$. Neka su, dakle, $s$ poluprost i $n$ nilpotentan operator na $V$ takvi da je $sn = ns$ i $x = s + n$. Zbog $(b)$ sva četiri operatora $x_s$, $x_n$, $s$ i $n$ međusobno komutiraju. Stoga je operator $x_s - s$ poluprost i operator $n - x_n$ je nilpotentan. No kako je $x = x_s + x_n = s + n$, ta su dva operatora jednaka: $x_s - s = n - x_n$. Međutim, nul−operator je jedini operator koji je i poluprost i nilpotentan. Dakle, $s = x_s$ i $n = x_n$.

**Lema 1.2.15.** *Neka je $V$ konačnodimenzionalan vektorski prostor nad algebarski zatvorenim poljem $K$ i neka je operator $x \in \mathfrak{gl}(V)$ poluprost. Tada je i operator $ad\,x$ na prostoru $\mathfrak{gl}(V)$ poluprost.*

**Dokaz:** Neka je $\{e_1,\ldots,e_n\}$ baza od $V$ sastavljena od svojstvenih vektora operatora $x$ i neka su $\alpha_1,\ldots,\alpha_n \in K$ pripadne svojstvene vrijednosti:

$$xe_j = \alpha_j e_j, \qquad j = 1,\ldots,n.$$

Neka je $\{e_{jk};\ j,k \in \{1,\ldots,n\}\}$ pripadna baza od $\mathfrak{gl}(V)$ :

$$e_{jk}e_\ell = \delta_{k\ell}e_j, \qquad j,k,\ell = 1,\ldots,n.$$

Sada se lako provjerava da vrijedi

$$(ad\,x)e_{jk} = [x, e_{jk}] = (\alpha_j - \alpha_k)\,e_{jk}, \qquad j,k = 1,\ldots,n.$$

Prema tome, baza $\{e_{jk}\}$ od $\mathfrak{gl}(V)$ sastavljena je od svojstvenih vektora operatora $ad\,x$ i time je lema dokazana.

**Propozicija 1.2.16.** *Neka je $V$ konačnodimenzionalan vektoraki prostor nad algebarski zatvorenim poljem i neka je $x \in \mathfrak{gl}(V)$. Tada vrijedi $(ad\,x)_s = ad\,x_s$ i $(ad\,x)_n = ad\,x_n$.*

**Dokaz:** Imamo $ad\,x = ad\,x_s + ad\,x_n$ i $[ad\,x_s, ad\,x_n] = ad\,[x_s, x_n] = 0$. Nadalje, prema lemi 1.2.15. operator $ad\,x_s$ je poluprost, a prema lemi 1.2.5. operator $ad\,x_n$ je nilpotentan. Tvrdnje propozicije sada slijede iz jedinstvenosti u tvrdnji $(a)$ teorema 1.2.14.

**Propozicija 1.2.17.** *Neka je $\mathcal{A}$ konačnodimenzionalna algebra nad algebarski zatvorenim poljem $K$ i neka je $\delta \in Der(\mathcal{A})$. Tada su $\delta_s, \delta_n \in Der(\mathcal{A})$.*

**Dokaz:** Kako je $Der(\mathcal{A})$ vektorski prostor i $\delta_n = \delta - \delta_s$, dovoljno je dokazati da je $\delta_s \in Der(\mathcal{A})$. Neka je $\sigma(\delta)$ spektar operatora $\delta$. Tada je

$$\mathcal{A} = \sum_{\alpha\in\sigma(\delta)} \dot{+}\mathcal{A}_\alpha, \qquad \text{gdje je} \quad \mathcal{A}_\alpha = \{x \in \mathcal{A};\ \exists k \in \mathbb{N} \quad \text{t.d.} \quad (\delta - \alpha I_{\mathcal{A}})^k x = 0\}.$$

Nadalje, vrijedi $\sigma(\delta_s) = \sigma(\delta)$ i $\delta_s|\mathcal{A}_\alpha = \alpha I_{\mathcal{A}_\alpha}$.

**Zadatak 1.12.** *Dokažite indukcijom po $n \in \mathbb{N}$ da za bilo koje $\alpha, \beta \in K$ i $x, y \in \mathcal{A}$ vrijedi*

$$(\delta - (\alpha+\beta)I_{\mathcal{A}})^n\,(xy) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \Big((\delta - \alpha I_{\mathcal{A}})^{n-j}\,x\Big)\Big((\delta - \beta I_{\mathcal{A}})^j\,y\Big).$$

Za $x \in \mathcal{A}_\alpha$ i $y \in \mathcal{A}_\beta$ iz jednakosti u zadatku 1.12. slijedi da je $xy \in \mathcal{A}_{\alpha+\beta}$. Stoga je tada

$$\delta_s(xy) = (\alpha+\beta)xy = (\alpha x)y + x(\beta y) = (\delta_s x)y + x(\delta_s y).$$

Kako je $\mathcal{A}$ direktna suma potprostora $\mathcal{A}_\alpha$, $\alpha \in \sigma(\delta)$, gornja jednakost vrijedi za sve $x, y \in \mathcal{A}$, tj. $\delta_s \in Der(\mathcal{A})$.

**Lema 1.2.18.** *Neka je $V$ konačnodimenzionalan vektorski prostor nad algebarski zatvorenim poljem $K$ karakteristike* 0, *neka su $X \subseteq Y$ potprostori od $\mathfrak{gl}(V)$ i neka je*

$$\mathfrak{a} = \{x \in \mathfrak{gl}(V);\ [x, Y] \subseteq X\}.$$

*Ako za $x \in \mathfrak{a}$ vrijedi $Tr\, xy = 0$ $\forall y \in \mathfrak{a}$, onda je operator $x$ nilpotentan.*

**Dokaz:** Treba dokazati da za takav $x \in \mathfrak{a}$ vrijedi $x_s = 0$. Neka je $\{e_1, \ldots, e_n\}$ baza od $V$ sastavljena od svojstvenih vektora operatora $x_s$ i neka su $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K$ pripadne svojstvene vrijednosti: $x_s e_i = \alpha_i e_i$. Neka je $L$ vektorski potprostor od $K$ nad poljem $\mathbb{Q}$ racionalnih brojeva razapet sa $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$. Cilj nam je dokazati da je $L = \{0\}$, jer će to značiti da je $x_s = 0$. Kako je $L$ konačnodimenzionalan vektorski prostor, dovoljno je dokazati da je njegov dualni prostor $L^*$ jednak $\{0\}$, tj. da je nul$-$funkcional jedini linearni funkcional $f : L \to \mathbb{Q}$.

Neka je $f : L \to \mathbb{Q}$ linearni funkcional. Neka je $y \in \mathfrak{gl}(V)$ zadan sa

$$ye_i = f(\alpha_i)e_i, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Neka je kao i prije $\{e_{jk};\ 1 \leq j, k \leq n\}$ baza od $\mathfrak{gl}(V)$ dobivena iz baze $\{e_1, \ldots, e_n\}$ prostora $V$ :

$$e_{jk}e_\ell = \delta_{k\ell}e_j, \qquad j, k, \ell = 1, \ldots, n.$$

Kao što smo vidjeli u dokazu leme 1.2.15. tada je

$$(ad\, x_s)\, e_{jk} = (\alpha_j - \alpha_k)\, e_{jk} \qquad \text{i} \qquad (ad\, y)e_{jk} = (f(\alpha_j) - f(\alpha_k))\, e_{jk}. \tag{1.2}$$

Neka je sada $R \in K[T]$ Lagrangeov interpolacioni polinom definiran podacima

$$\{0\} \cup \{\alpha_j - \alpha_k;\ 1 \leq j, k \leq n\} \qquad \text{i} \qquad \{0\} \cup \{f(\alpha_j) - f(\alpha_k);\ 1 \leq j, k \leq n\},$$

tj. polinom najnižeg stupnja za koji je

$$R(0) = 0, \qquad R(\alpha_j - \alpha_k) = f(\alpha_j) - f(\alpha_k), \quad 1 \leq j, k \leq n.$$

Pri tome nema dvojbe ili kontradikcije u definiciji od $R$ budući da iz $\alpha_j - \alpha_k = \alpha_i - \alpha_\ell$ zbog $\mathbb{Q}-$linearnosti od $f$ slijedi $f(\alpha_j) - f(\alpha_k) = f(\alpha_i) - f(\alpha_\ell)$. Naravno, iz gornjih jednakosti (1.2) vidi se da vrijedi $R(ad\, x_s) = ad\, y$.

Prema propoziciji 1.2.16. znamo da je $ad\, x_s$ poluprosti dio operatora $ad\, x$. Prema tome, $ad\, x_s$ je polinom u $ad\, x$ bez konstantnog člana, pa slijedi da je i $ad\, y$ polinom u $ad\, x$ bez konstantnog člana. Po pretpostavci operator $ad\, x$ preslikava potprostor $Y$ u potprostor $X$. Slijedi da i $ad\, y$ preslikava $Y$ u $X$. Dakle, vrijedi $y \in \mathfrak{a}$. Po pretpostavci leme stoga imamo $Tr\,(xy) = 0$, pa slijedi

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i f(\alpha_i) = 0.$$

Lijeva strana je $\mathbb{Q}-$linearna kombinacija elemenata od $L$. Primijenimo li $\mathbb{Q}-$linearan funkcional $f$, slijedi

$$\sum_{i=1}^{m} f(\alpha_i)^2 = 0.$$

Kako su brojevi $f(\alpha_i)$ svi racionalni, slijedi da su svi jednaki nuli. Dakle, $f = 0$, budući da $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ razapinju $L$ nad $\mathbb{Q}$.

**Teorem 1.2.19.** (**Cartanov kriterij rješivosti**) *Neka je $V$ konačnodimenzionalan vektorski prostor nad algebarski zatvorenim poljem karakteristike $0$ i neka je $\mathfrak{g}$ Liejeva podalgebra od $\mathfrak{gl}(V)$ takva da vrijedi*

$$Tr\,xy = 0 \qquad \forall x \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \quad i \quad \forall y \in \mathfrak{g}.$$

*Tada je Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ rješiva.*

**Dokaz:** Primijenimo lemu 1.2.18. na prostor $V$ i na sljedeće potprostore $X$ i $Y$ od $\mathfrak{gl}(V)$ :

$$X = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}], \qquad Y = \mathfrak{g}.$$

Tada uz oznaku iz leme 1.2.18. imamo

$$\mathfrak{a} = \{x \in \mathfrak{gl}(V);\ [x, \mathfrak{g}] \subseteq [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]\}.$$

Očito je $\mathfrak{g} \subseteq \mathfrak{a}$. Pretpostavka je da je $Tr\,xy = 0\ \forall x \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ i $\forall y \in \mathfrak{g}$. Želimo ustanoviti da je svaki operator $x \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ nilpotentan. Ta će činjenica slijediti iz leme 1.2.18. ako dokažemo da je $Tr\,xy = 0\ \forall x \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ i $\forall y \in \mathfrak{a}$ a ne samo da je $Tr\,xy = 0\ \forall x \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ i $\forall y \in \mathfrak{g}$.

Svaki $x \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ je suma elemenata oblika $[x_1, x_2]$, gdje su $x_1, x_2 \in \mathfrak{g}$. S druge strane, za $y \in \mathfrak{a}$ imamo

$$Tr\,[x_1, x_2]y = Tr\,x_1[x_2, y] = Tr\,[x_2, y]x_1,$$

a to je jednako nuli jer po definiciji od $\mathfrak{a}$ je $[x_2, y] \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$. Time je dokazano da je svaki $x \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ nilpotentan. Sada iz teorema 1.2.6. slijedi da je Liejeva algebra $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ nilpotentna. Odatle slijedi da je Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ rješiva:

**Zadatak 1.13.** *Neka je $\mathfrak{g}$ Liejeva algebra, takva da je njen prvi izvedeni ideal $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ nilpotentna Liejeva algebra. Dokažite da je tada Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ rješiva.*

**Korolar 1.2.20.** *Neka je $\mathfrak{g}$ konačnodimenzionalna Liejeva algebra nad algebarski zatvorenim poljem karakteristike $0$ za koju vrijedi*

$$Tr\,(ad\,x)(ad\,y) = 0 \qquad \forall x \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \quad i \quad \forall y \in \mathfrak{g}.$$

*Tada je Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ rješiva.*

**Dokaz:** Primijenimo li teorem 1.2.19. na Liejevu podalgebru $ad\,\mathfrak{g}$ Liejeve algebre $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$, zaključujemo da je Liejeva algebra $ad\,\mathfrak{g}$ rješiva. Međutim, kako je $Ker\,ad = Z(\mathfrak{g})$, Liejeva algebra $ad\,\mathfrak{g}$ izomorfna je kvocijentnoj Liejevoj algebri $\mathfrak{g}/Z(\mathfrak{g})$, dakle, ta je kvocijentna Liejeva algebra rješiva. Budući da je Liejeva algebra $Z(\mathfrak{g})$ komutativna, ona je i rješiva, pa po tvrdnji ($b$) propozicije 1.2.1. slijedi da je i Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ rješiva.

## 1.3 Proste i poluproste Liejeve algebre

**U daljnjem promatramo isključivo konačnodimenzionalne Liejeve algebre.**

Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ zove se **poluprosta** ako je $R(\mathfrak{g}) = \{0\}$. To znači da $\mathfrak{g}$ ne sadrži nijedan rješivi ideal $\neq \{0\}$. Prema propoziciji 1.2.2. za svaku Liejevu algebru $\mathfrak{g}$ kvocijentna algebra $\mathfrak{g}/R(\mathfrak{g})$ je poluprosta.

**Zadatak 1.14.** *Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ je poluprosta ako i samo ako ona ne sadrži komutativni ideal $\neq \{0\}$.*

**Uputa:** U izvedenom nizu rješive Liejeve algebre posljednji član koji je različit od $\{0\}$ je komutativni karakteristični ideal.

Liejeva algebra $\mathfrak{g} \neq \{0\}$ zove se **prosta** ako nije komutativna i ako ne sadrži nijedan netrivijalan ideal (tj. nijedan ideal različit od $\{0\}$ i od $\mathfrak{g}$). Zahtjev nekomutativnosti znači samo da jednodimenzionalnu (komutativnu) Liejevu algebru, koja, naravno, ne sadrži netrivijalne ideale, ne smatramo prostom.

Neka je $\mathfrak{g}$ Liejeva algebra nad poljem $K$. **Killingova forma** je simetrična bilinearna forma $\kappa_{\mathfrak{g}} : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to K$ definirana sa

$$\kappa_{\mathfrak{g}}(x, y) = Tr\,(ad\,x)(ad\,y), \qquad x, y \in \mathfrak{g}.$$

**Zadatak 1.15.** *Dokažite da za svaku Liejevu algebru $\mathfrak{g}$ vrijedi*

$$\kappa_{\mathfrak{g}}(Dx, y) + \kappa_{\mathfrak{g}}(x, Dy) = 0 \qquad \forall x, y \in \mathfrak{g} \quad i \quad \forall D \in Der(\mathfrak{g}).$$

*Odatle izvedite da je*

$$\kappa_{\mathfrak{g}}([x, y], z) = \kappa_{\mathfrak{g}}(x, [y, z]) \qquad \forall x, y, z \in \mathfrak{g}.$$

**Uputa:** Koristite jednakost $ad\,Dx = [D, ad\,x]$ iz dokaza propozicije 1.1.3.

**Zadatak 1.16.** *Neka je $\mathfrak{j}$ ideal u Liejevoj algebri $\mathfrak{g}$. Dokažite da je $\kappa_{\mathfrak{j}} = \kappa_{\mathfrak{g}}|\mathfrak{j} \times \mathfrak{j}$.*

**Uputa:** Koristite jednostavnu činjenicu iz linearne algebre: Ako je $W$ potprostor konačnodimenzionalnog vektorskog prostora $V$ i ako $x \in L(V)$ ima sliku sadržanu u $W$, onda je $Tr\,x = Tr\,(x|W)$.

**U daljnjem stalno pretpostavljamo da je polje $K$ nad kojim radimo algebarski zatvoreno i karakteristike** 0.

**Teorem 1.3.1.** *Liejeva algebra $\mathfrak{g} \neq \{0\}$ je poluprosta ako i samo ako je njena Killingova forma $\kappa_{\mathfrak{g}}$ nedegenerirana.*

**Dokaz:** Pretpostavimo da je $\mathfrak{g}$ poluprosta Liejeva algebra, tj. da je $R(\mathfrak{g}) = \{0\}$. Stavimo

$$\mathfrak{r} = \{x \in \mathfrak{g};\ \kappa_{\mathfrak{g}}(x, y) = 0 \quad \forall y \in \mathfrak{g}\}.$$

Treba dokazati da je $\mathfrak{r} = \{0\}$.

Prije svega uočimo da iz zadatka 1.15. slijedi da je $\mathfrak{r}$ ideal u $\mathfrak{g}$. Nadalje, po definiciji $\mathfrak{r}$ vrijedi $\kappa_{\mathfrak{g}}(x, y) = 0$ $\forall x \in \mathfrak{r}$ i $\forall y \in \mathfrak{g}$, dakle, i $\forall y \in [\mathfrak{r}, \mathfrak{r}]$. Iz zadatka 1.16. slijedi da je

$$Tr\,(ad_{\mathfrak{r}}\,x)(ad_{\mathfrak{r}}\,y) = \kappa_{\mathfrak{r}}(x, y) = \kappa_{\mathfrak{g}}(x, y) = 0 \qquad \forall x \in \mathfrak{r} \quad i \quad \forall y \in [\mathfrak{r}, \mathfrak{r}].$$

Sada iz korolara 1.2.20. slijedi da je $\mathfrak{r}$ rješiv ideal u $\mathfrak{g}$, dakle, $\mathfrak{r} \subseteq R(\mathfrak{g})$. No kako je po pretpostavci $R(\mathfrak{g}) = \{0\}$ slijedi $\mathfrak{r} = \{0\}$.

Pretpostavimo sada da je

$$\mathfrak{r} = \{x \in \mathfrak{g};\ \kappa_{\mathfrak{g}}(x, y) = 0 \quad \forall y \in \mathfrak{g}\} = \{0\}.$$

Neka je $\mathfrak{j}$ komutativni ideal u $\mathfrak{g}$. Da bismo pokazali da je Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ poluprosta, dovoljno je dokazati da je $\mathfrak{j} \subseteq \mathfrak{r}$. Neka je $x \in \mathfrak{j}$. Za bilo koji $y \in \mathfrak{g}$ operator $(ad\, x)(ad\, y)$ ima sliku sadržanu u $\mathfrak{j}$, pa slijedi da njegov kvadrat $((ad\, x)(ad\, y))^2$ ima sliku sadržanu u $[\mathfrak{j}, \mathfrak{j}] = \{0\}$. Dakle, operator $(ad\, x)(ad\, y)$ je nilpotentan, pa mu je trag jednak 0. To znači da je $x \in \mathfrak{r}$, odnosno, dokazali smo da je $\mathfrak{j} \subseteq \mathfrak{r}$.

**Zadatak 1.17.** *Uočite da drugi dio dokaza vrijedi i bez pretpostavke da je $K$ polje karakteristike 0. Razmatranjem primjera $\mathfrak{sl}(3, K)/Z(\mathfrak{sl}(3, K))$ za $char\, K = 3$ pokažite da općenito ne vrijedi obrnuta implikacija u teoremu 1.3.1.*

Ako su $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2, \ldots, \mathfrak{g}_k$ Liejeve algebre nad poljem $K$ onda je očito da se na sljedeći načinu u Kartezijev produkt $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_2 \times \cdots \times \mathfrak{g}_k$ uvodi struktura Liejeve algebre:

$$[(x_1, x_2, \ldots, x_k), (y_1, y_2, \ldots, y_k)] = ([x_1, y_1], [x_2, y_2], \ldots, [x_k, y_k]), \qquad x_j, y_j \in \mathfrak{g}_j, \quad j = 1, 2, \ldots, k.$$

Ta se Liejeva algebra zove **direktni produkt** Liejevih algebri $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2, \ldots, \mathfrak{g}_k$. Primijetimo da je tada za svaki $j$

$$\underbrace{\{0\} \times \cdots \times \{0\}}_{j-1} \times \mathfrak{g}_j \times \underbrace{\{0\} \times \cdots \times \{0\}}_{k-j} = \{(\underbrace{0, \ldots, 0}_{j-1}, x, \underbrace{0, \ldots, 0}_{k-j});\ x \in \mathfrak{g}_j\}$$

ideal u Liejevoj algebri $\mathfrak{g}$ koji je kao Liejeva algebra izomorfan $\mathfrak{g}_j$. Nadalje, kao vektorski prostor $\mathfrak{g}$ je direktna suma tih ideala.

Pretpostavimo sada da je $\mathfrak{g}$ Liejeva algebra i da su $\mathfrak{j}_1, \mathfrak{j}_2, \ldots, \mathfrak{j}_k$ ideali u $\mathfrak{g}$ takvi da je

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{j}_1 \dotplus \mathfrak{j}_2 \dotplus \cdots \dotplus \mathfrak{j}_k.$$

Tada za $i \neq j$ imamo $[\mathfrak{j}_i, \mathfrak{j}_j] \subseteq \mathfrak{j}_i \cap \mathfrak{j}_j = \{0\}$. Stoga za $x_j, y_j \in \mathfrak{j}_j$, $j = 1, 2, \ldots, k$, vrijedi

$$[x_1 + x_2 + \cdots + x_k, y_1 + y_2 + \cdots + x_k] = [x_1, y_1] + [x_2, y_2] + \cdots + [x_k, y_k],$$

a to pokazuje da je Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ izomorfna direktnom produktu $\mathfrak{j}_1 \times \mathfrak{j}_2 \times \cdots \times \mathfrak{j}_k$.

**Propozicija 1.3.2.** *Neka je $\mathfrak{g}$ poluprosta Liejeva algebra i neka je $\mathfrak{j}$ ideal u $\mathfrak{g}$. Tada vrijedi*

(*a*) $\mathfrak{j}$ *je poluprosta Liejeva algebra.*

(*b*) $\mathfrak{j}^\perp = \{x \in \mathfrak{g};\ \kappa_{\mathfrak{g}}(x, y) = 0 \quad \forall y \in \mathfrak{j}\}$ *je ideal u* $\mathfrak{g}$.

(*c*) *Vrijedi* $\mathfrak{g} = \mathfrak{j} \dotplus \mathfrak{j}^\perp$.

**Dokaz:** (*b*) Za $x \in \mathfrak{j}^\perp$, $y \in \mathfrak{g}$ i $z \in \mathfrak{j}$ vrijedi $[y, z] \in \mathfrak{j}$, dakle,

$$\kappa_{\mathfrak{g}}([x, y], z) = \kappa_{\mathfrak{g}}(x, [y, z]) = 0.$$

To pokazuje da je $[x, y] \in \mathfrak{j}^\perp$ $\forall x \in \mathfrak{j}^\perp$ i $\forall y \in \mathfrak{g}$. Dakle, potprostor $\mathfrak{j}^\perp$ je ideal u Liejevoj algebri $\mathfrak{g}$.

(*c*) Zbog nedegeneriranosti forme $\kappa_{\mathfrak{g}}$ vrijedi $\dim \mathfrak{j} + \dim \mathfrak{j}^\perp = \dim \mathfrak{g}$. Nadalje, ako Cartanov kriterij primijenimo na Liejevu algebru $\mathfrak{j} \cap \mathfrak{j}^\perp$, zaključujemo da je ona rješiva. Međutim, $\mathfrak{j} \cap \mathfrak{j}^\perp$ je ideal u $\mathfrak{g}$, a kako je $\mathfrak{g}$ poluprosta, slijedi $\mathfrak{j} \cap \mathfrak{j}^\perp = \{0\}$. Zbog jednakosti dimenzija zaključujemo da je $\mathfrak{j} \dotplus \mathfrak{j}^\perp = \mathfrak{g}$.

(*a*) Iz (*c*) i iz nedegeneriranosti forme $\kappa_{\mathfrak{g}}$ slijedi da je i njena restrikcija $\kappa_{\mathfrak{g}}|\mathfrak{j} \times \mathfrak{j}$ nedegenerirana. Međutim, prema zadatku 1.16. vrijedi $\kappa_{\mathfrak{g}}|\mathfrak{j} \times \mathfrak{j} = \kappa_{\mathfrak{j}}$, pa pomoću teorema 1.3.1. zaključujemo da je Liejeva algebra $\mathfrak{j}$ poluprosta.

**Propozicija 1.3.3.** *Neka je $\mathfrak{g}$ poluprosta Liejeva algebra. Tada je $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]=\mathfrak{g}$.*

**Dokaz:** Neka je

$$\mathfrak{j}=[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]^\perp=\{x\in\mathfrak{g};\ \kappa_\mathfrak{g}(x,[y,z])=0\quad\forall y,z\in\mathfrak{g}\}.$$

$\mathfrak{j}$ je prema tvrdnji $(a)$ propozicije 1.3.2. ideal u $\mathfrak{g}$. Nadalje, prema zadatku 1.16. Killingova forma od $\mathfrak{j}$ je restrikcija na $\mathfrak{j}\times\mathfrak{j}$ Killingove forme od $\mathfrak{g}$, pa za $x\in\mathfrak{j}$ i $y\in[\mathfrak{j},\mathfrak{j}]\subseteq[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ vrijedi

$$Tr\,(ad_\mathfrak{j}\,x)(ad_\mathfrak{j}\,y)=\kappa_\mathfrak{j}(x,y)=\kappa_\mathfrak{g}(x,y)=0.$$

Sada po Cartanovom kriteriju rješivosti, točnije po njegovu korolaru 1.2.20., slijedi da je ideal $\mathfrak{j}$ rješiv. Budući da je Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ poluprosta, slijedi $\mathfrak{j}=\{0\}$, pa po tvrdnji $(c)$ propozicije 1.3.2. slijedi $\mathfrak{g}=[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]\dotplus\mathfrak{j}=[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$.

**Teorem 1.3.4.** *Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ je poluprosta ako i samo ako je ona izomorfna direktnom produktu prostih Liejevih algebri. Ako je $\mathfrak{g}\neq\{0\}$ poluprosta Liejeva algebra i $\mathfrak{g}=\mathfrak{g}_1\dotplus\mathfrak{g}_2\dotplus\cdots\dotplus\mathfrak{g}_k$, pri čemu su $\mathfrak{g}_1,\mathfrak{g}_2,\dots,\mathfrak{g}_k$ prosti ideali u $\mathfrak{g}$ i ako je $\mathfrak{j}\neq\{0\}$ ideal u $\mathfrak{g}$ onda postoje $1\le i_1<\cdots<i_\ell\le k$ takvi da je $\mathfrak{j}=\mathfrak{g}_{i_1}\dotplus\cdots\dotplus\mathfrak{g}_{i_\ell}$. Posebno, $\mathfrak{g}_1,\mathfrak{g}_2,\dots,\mathfrak{g}_k$ su jedini prosti ideali u $\mathfrak{g}$.*

**Dokaz:** Pretpostavimo da je $\mathfrak{g}=\mathfrak{g}_1\dotplus\mathfrak{g}_2\dotplus\cdots\dotplus\mathfrak{g}_k$, pri čemu su $\mathfrak{g}_1,\mathfrak{g}_2,\dots,\mathfrak{g}_k$ prosti ideali u $\mathfrak{g}$. Neka je $x\in\mathfrak{g}$ takav da je $\kappa_\mathfrak{g}(y,x)=0\ \ \forall y\in\mathfrak{g}$. Imamo

$$x=x_1+x_2+\cdots+x_k\quad\text{za neke}\quad x_1\in\mathfrak{g}_1,x_2\in\mathfrak{g}_2,\dots,x_k\in\mathfrak{g}_k.$$

Za $j\in\{1,2,\dots,k\}$ i $y\in\mathfrak{g}_j$ imamo $[y,\mathfrak{g}_i]=\{0\}$ za $i\neq j$, tj. $(ad\,y)|\mathfrak{g}_i=0$. Slijedi $\kappa_\mathfrak{g}(y,x_i)=0$ za $i\neq j$, dakle, vrijedi

$$\kappa_{\mathfrak{g}_j}(y,x_j)=\kappa_\mathfrak{g}(y,x_j)=\sum_{i=1}^k\kappa_\mathfrak{g}(y,x_i)=\kappa_\mathfrak{g}(y,x)=0\qquad\forall y\in\mathfrak{g}_j.$$

Kako je Liejeva algebra $\mathfrak{g}_j$ prosta, dakle i poluprosta, pomoću teorema 1.3.1. zaključujemo da je $x_j=0$. Kako je $j\in\{1,2,\dots,k\}$ bio proizvoljan, slijedi $x=0$. Time je dokazano da je Killingova forma $\kappa_\mathfrak{g}$ nedegenerirana, odnosno, po teoremu 1.3.1. Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ je poluprosta.

Pretpostavimo sada da je u toj situaciji $\mathfrak{j}\neq\{0\}$ ideal u $\mathfrak{g}$. Za bilo koji $j\in\{1,2,\dots,k\}$ tada je $[\mathfrak{j},\mathfrak{g}_j]$ ideal u $\mathfrak{g}_j$, a kako je $\mathfrak{g}_j$ prosta Liejeva algebra, mora biti ili $[\mathfrak{j},\mathfrak{g}_j]=\mathfrak{g}_j$ ili $[\mathfrak{j},\mathfrak{g}_j]=\{0\}$. S druge strane, prema tvrdnji $(a)$ propozicije 1.3.2. $\mathfrak{j}$ je poluprosta Liejeva algebra. Stoga je po propoziciji 1.3.3. $\mathfrak{j}=[\mathfrak{j},\mathfrak{j}]$. S druge strane, očito je $[\mathfrak{j},\mathfrak{j}^\perp]=\{0\}$. Stoga je po tvrdnji $(c)$ propozicije 1.3.2. $[\mathfrak{j},\mathfrak{g}]=[\mathfrak{j},\mathfrak{j}\dotplus\mathfrak{j}^\perp]=[\mathfrak{j},\mathfrak{j}]=\mathfrak{j}$. Dakle,

$$\mathfrak{j}=[\mathfrak{j},\mathfrak{g}]=[\mathfrak{j},\mathfrak{g}_1\dotplus\mathfrak{g}_2\dotplus\cdots\dotplus\mathfrak{g}_k]=[\mathfrak{j},\mathfrak{g}_1]\dotplus[\mathfrak{j},\mathfrak{g}_2]\dotplus\cdots\dotplus[\mathfrak{j},\mathfrak{g}_k].$$

Kako je za svaki $j$ ili $[\mathfrak{j},\mathfrak{g}_j]=\mathfrak{g}_j$ ili $[\mathfrak{j},\mathfrak{g}_j]=\{0\}$, slijedi da je za neke $1\le i_1<\cdots<i_\ell\le k$

$$\mathfrak{j}=\mathfrak{g}_{i_1}\dotplus\cdots\dotplus\mathfrak{g}_{i_\ell}.$$

Pretpostavimo sada da je $\mathfrak{g}\neq\{0\}$ proizvoljna poluprosta Liejeva algebra. Ako $\mathfrak{g}$ nije prosta, u $\mathfrak{g}$ postoji ideal $\mathfrak{j}$ različit i od $\{0\}$ i od $\mathfrak{g}$. Tada je po propoziciji 1.3.2. $\mathfrak{g}=\mathfrak{j}\dotplus\mathfrak{j}^\perp$ i ideali $\mathfrak{j}$ i $\mathfrak{j}^\perp$ su poluproste Liejeve algebre. Indukcijom po $\dim\mathfrak{g}$ slijedi da postoje prosti ideali $\mathfrak{g}_1,\mathfrak{g}_2,\dots,\mathfrak{g}_k$ takvi da je $\mathfrak{g}=\mathfrak{g}_1\dotplus\mathfrak{g}_2\dotplus\cdots\dotplus\mathfrak{g}_k$.

Time je teorem u potpunosti dokazan.

**Teorem 1.3.5.** *Neka je* $\mathfrak{g}$ *poluprosta Liejeva algebra. Tada je svaka njena derivacija unutarnja, tj.* $ad\,\mathfrak{g} = Der(\mathfrak{g})$.

**Dokaz:** Kako je $\mathfrak{g}$ poluprosta, ona nema komutativnih ideala $\neq \{0\}$. Posebno, $Z(\mathfrak{g}) = \{0\}$. To znači da je homomorfizam Liejevih algebri $ad : \mathfrak{g} \to Der(\mathfrak{g})$ injektivan. Drugim riječima, Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ izomorfna je s Liejevom podalgebrom $ad\,\mathfrak{g}$ od $Der(\mathfrak{g})$. Prema propoziciji 1.1.3. $ad\,\mathfrak{g}$ je ideal u Liejevoj algebri $Der(\mathfrak{g})$. Stoga je po zadatku 1.16. Killingova forma $\kappa_{ad\,\mathfrak{g}}$ Liejeve algebre $ad\,\mathfrak{g}$ restrikcija Killingove forme $\kappa_{Der(\mathfrak{g})}$ Liejeve algebre $Der(\mathfrak{g})$. Stavimo

$$A = (ad\,\mathfrak{g})^{\perp} = \{\delta \in Der(\mathfrak{g});\ \kappa_{Der(\mathfrak{g})}(\delta, ad\,x) = 0 \quad \forall x \in \mathfrak{g}\}.$$

Iz nedegeneriranosti od $\kappa_{Der(\mathfrak{g})}|(ad\,\mathfrak{g}) \times (ad\,\mathfrak{g}) = \kappa_{ad\,\mathfrak{g}}$ slijedi da je $A \cap (ad\,\mathfrak{g}) = \{0\}$. Međutim, i $A$ i $ad\,\mathfrak{g}$ su ideali u $Der(\mathfrak{g})$, pa slijedi da je $[A, ad\,\mathfrak{g}] = 0$. Dakle, za $\delta \in A$ i za $x \in \mathfrak{g}$ vrijedi $ad\,\delta x = [\delta, ad\,x] = 0$, a kako je $ad$ injekcija, slijedi $\delta x = 0\ \forall x \in \mathfrak{g}$. No to znači da je $\delta = 0\ \forall \delta \in A$. Dakle, $A = \{0\}$. Sada iz opće teorije bilinearnih formi slijedi

$$0 = \dim A \geq \dim Der(\mathfrak{g}) - \dim (ad\,\mathfrak{g}) \quad \Longrightarrow \quad \dim (ad\,\mathfrak{g}) \geq \dim Der(\mathfrak{g}) \quad \Longrightarrow \quad ad\,\mathfrak{g} = Der(\mathfrak{g}).$$

## 1.4 Reprezentacije, reducibilnost, ekvivalencija

Pojam reprezentacije definiramo ne samo za Liejeve algebre nego za bilo koju od četiri algebarske strukture − grupa, asocijativna algebra, unitalna algebra i Liejeva algebra:

(1) **Reprezentacija grupe** $G$ na vektorskom prostoru $V$ je homomorfizam grupe $G$ u grupu $GL(V)$ svih invertibilnih elemenata unitalne algebre $L(V)$. Drugim riječima, reprezentacija $G$ na $V$ je preslikavanje $\pi\colon G \to L(V)$ takvo da vrijedi

$$\pi(ab) = \pi(a)\pi(b) \quad \forall a, b \in G, \qquad \pi(e) = I.$$

(2) **Reprezentacija asocijativne algebre** $\mathcal{A}$ nad poljem $K$ na vektorskom prostoru $V$ nad istim poljem $K$ je homomorfizam algebri $\pi : \mathcal{A} \to L(V)$. Dakle, reprezentacija $\mathcal{A}$ na $V$ je preslikavanje $\pi\colon \mathcal{A} \to L(V)$ takvo da vrijedi

$$\pi(\alpha x + \beta y) = \alpha\pi(x) + \beta\pi(y), \qquad \pi(xy) = \pi(x)\pi(y), \qquad \forall x, y \in \mathcal{A},\ \forall \alpha, \beta \in K.$$

(3) **Reprezentacija unitalne algebre** $\mathcal{A}$ s jedinicom $1_{\mathcal{A}}$ na vektorskom prostoru $V$ je reprezentacija $\pi$ asocijativne algebre $\mathcal{A}$ na $V$ za koju je

$$\pi(1_{\mathcal{A}}) = I_V.$$

(4) **Reprezentacija Liejeve algebre** $\mathfrak{g}$ nad poljem $K$ na vektorskom prostoru $V$ nad poljem $K$ je homomorfizam Liejevih algebri $\pi\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$. Dakle, reprezentacija $\mathfrak{g}$ na $V$ je preslikavanje $\pi\colon \mathfrak{g} \to L(V)$ takvo da vrijedi

$$\pi(\alpha x+\beta y) = \alpha\pi(x)+\beta\pi(y), \qquad \pi([x, y]) = \pi(x)\pi(y)-\pi(y)\pi(x), \qquad \forall x, y \in \mathfrak{g},\ \forall \alpha, \beta \in K.$$

U svakom od ta četiri slučaja vektorski prostor $V$ tada zovemo **prostorom reprezentacije** $\pi$. Ako je prostor $V$ konačnodimenzionalan, **reprezentacija** $\pi$ zove se **konačnodimenzionalna** i tada se prirodan broj (ili nula) $d(\pi) = \dim V$ zove **dimenzija reprezentacije** $\pi$.

U slučajevima (2), (3) i (4) definicija se proširuje i na situaciju kad je $\mathcal{A}$ (odnosno, $\mathfrak{g}$) algebra (odnosno, Liejeva algebra) nad poljem $K$, a $V$ je vektorski prostor nad nekim proširenjem $L$ polja $K$. Tada se traži da su svi operatori $\pi(x)$ linearni nad poljem $L$, a preslikavanje $x \mapsto \pi(x)$ je homomorfizam nad poljem $K$.

Ako je reprezentacija $\pi$ injektivni homomorfizam, kažemo da je $\pi$ **vjerna reprezentacija**. Ako se radi o reprezentaciji grupe $G$, onda je jezgra

$$H = \ker\pi = \{a \in G;\ \pi(a) = I\}$$

reprezentacije $\pi$ normalna podgrupa grupe $G$ i prijelazom na kvocijent dobivamo vjernu reprezentaciju $\tilde{\pi}$ kvocijentne grupe $G/H$ :

$$\tilde{\pi}(aH) = \pi(a), \qquad aH \in G/H.$$

Slično, ako se radi o reprezentaciji asocijativne, unitalne ili Liejeve algebre $\mathcal{A}$, onda je jezgra

$$\mathcal{I} = \ker\pi = \{a \in \mathcal{A};\ \pi(a) = 0\}$$

reprezentacije $\pi$ ideal u toj algebri $\mathcal{A}$ i prijelazom na kvocijent dobivamo vjernu reprezentaciju asocijativne, unitalne ili Liejeve kvocijentne algebre $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ :

$$\tilde{\pi}(a + \mathcal{I}) = \pi(x), \qquad x + \mathcal{I} \in \mathcal{A}/\mathcal{I}.$$

U daljnjem je stalno $\mathcal{A}$ oznaka za bilo koju od spomenute četiri algebarske strukture. Neka su $\pi$ i $\rho$ reprezentacije od $\mathcal{A}$ na vektorskim prostorima $V$ i $W$ nad poljem $K$. Za linearan operator $A : V \to W$ kažemo da je $\mathcal{A}-$**ekvivarijantan** ako vrijedi

$$A\pi(a) = \rho(a)A \qquad \forall a \in \mathcal{A}.$$

Drugi naziv za takav operator $A$ je **operator preplitanja** reprezentacija $\pi$ i $\rho$. Skup svih takvih označavat ćemo sa $Hom_{\mathcal{A}}(V, W)$. To je potprostor prostora $L(V, W)$ svih linearnih operatora sa $V$ u $W$. Kažemo da je reprezentacija $\pi$ **ekvivalentna** reprezentaciji $\rho$ i pišemo $\pi \simeq \rho$ ako postoji $A \in Hom_{\mathcal{A}}(V, W)$ koji je izomorfizam prostora $V$ na prostor $W$. Očito je $\simeq$ relacija ekvivalencije.

Neka je $\pi$ reprezentacija od $\mathcal{A}$ na vektorskom prostoru $V$. **Potprostor** $W$ prostora $V$ zove se $\pi-$**invarijantan** ako je invarijantan u odnosu na svaki operator $\pi(a)$, $a \in \mathcal{A}$ :

$$w \in W, \quad a \in \mathcal{A} \qquad \Longrightarrow \qquad \pi(a)w \in W.$$

Očito su suma i presjek bilo koje familije $\pi-$invarijantnih potprostora također $\pi-$invarijantni potprostori.

Ako je $W$ $\pi-$invarijantan potprostor onda restrikcijom i prijelazom na kvocijent možemo definirati reprezentaciju $\pi_W$ na prostoru $W$ i reprezentaciju $\pi_{V/W}$ na prostoru $V/W$ :

$$\pi_W(a) = \pi(a)|W \in L(W); \qquad \pi_{V/W}(a)(v + W) = \pi(a)v + W, \quad a \in \mathcal{A},\ v \in V.$$

$\pi_W$ se zove **subreprezentacija** a $\pi_{V/W}$ **kvocijentna reprezentacija** reprezentacije $\pi$. Kombinacijom ove dvije konstrukcije reprezentacija dolazimo do tzv. **subkvocijentne reprezentacije**: ako su $U$ i $W$ $\pi-$invarijantni potprostori od $V$ i ako je $U \subseteq W$ onda je $\pi_{W/U}$ kvocijentna reprezentacija subreprezentacije $\pi_W$ (ili subreprezentacija kvocijentne reprezentacije $\pi_{V/U}$).

Neka je $\pi$ reprezentacija od $\mathcal{A}$ na konačnodimenzionalnom vektorskom prostoru $V$ i neka je $W$ $\pi-$invarijantan potprostor. Izaberimo bazu $e' = \{e_1, \ldots, e_k\}$ potprostora $W$ i dopunimo je do baze $e = \{e_1, \ldots, e_k, e_{k+1}, \ldots, e_n\}$ prostora $V$. Tada je $e'' = \{e_{k+1} + W, \ldots, e_n + W\}$ baza kvocijentnog prostora $V/W$. Ako za $a \in \mathcal{A}$ sa $\pi(a)[e]$, $\pi_W(a)[e']$ i $\pi_{V/W}(a)[e'']$ označimo redom matrice operatora $\pi(a)$, $\pi_W(a)$ i $\pi_{V/W}(a)$ u bazama $e$, $e'$ i $e''$ onda je

$$\pi(a)[e] = \begin{bmatrix} \pi_W(a)[e'] & A(a) \\ & \\ 0 & \pi_{V/W}(a)[e''] \end{bmatrix},$$

pri čemu je $A(a)$ neka matrica sa $k$ redaka i $n-k$ stupaca, a 0 je nul$-$matrica sa $n-k$ redaka i $k$ stupaca.

Reprezentacija $\pi$ od $\mathcal{A}$ na vektorskom prostoru $V$ zove se **ireducibilna** ako postoje točno dva $\pi-$invarijantna potprostora od $V$. To znači da je $V \neq \{0\}$ i da su trivijalni potprostori $\{0\}$ i $V$ jedini $\pi-$invarijantni potprostori od $V$, odnosno da $V$ nema netrivijalnih $\pi-$invarijantnih potprostora. Reprezentacija je **reducibilna** ako nije ireducibilna.

Neka je $\pi$ reprezentacija grupe $G$ na vektorskom prostoru $V$. Stavimo

$$V^G = \{v \in V;\ \pi(a)v = v\ \ \forall a \in G\}.$$

Vektori iz $V^G$ zovu se $G-$**invarijante** reprezentacije $\pi$. Potprostor $G-$invarijanata $V^G$ je očito $\pi-$invarijantan. Štoviše, svaki potprostor od $V^G$ je $\pi-$invarijantan.

Neka su $\pi$ i $\rho$ reprezentacije grupe $G$ na vektorskim prostorima $V$ i $W$ nad istim poljem $K$. Na prostoru $L(V, W)$ tada možemo definirati reprezentaciju $\tau$ grupe $G$ na sljedeći način:

$$\tau(a)(A) = \rho(a)A\pi(a^{-1}), \qquad A \in L(V, W), \quad a \in G.$$

Tada je očito $Hom_G(V, W)$ upravo $\tau-$invarijantan potprostor $L(V, W)^G$ svih $G-$invarijanata reprezentacije $\tau$.

Neka je sada $\pi$ reprezentacija Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ na vektorskom prostoru $V$. Tada se $\mathfrak{g}-$**invarijantama** zovu vektori $\pi-$invarijantnog potprostora

$$V^{\mathfrak{g}} = \{v \in V;\ \pi(x)v = 0\ \ \forall x \in \mathfrak{g}\}$$

Slično kao kod grupa, ako su $\pi$ i $\rho$ reprezentacije Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ na vektorskim prostorima $V$ i $W$ na prostoru $L(V, W)$ možemo definirati reprezentaciju $\tau$ od $\mathfrak{g}$ na sljedeći način:

$$\tau(x)(A) = \rho(x)A - A\pi(x), \qquad A \in L(V, W), \quad x \in \mathfrak{g}.$$

Tada je $Hom_{\mathfrak{g}}(V, W)$ upravo $\tau-$invarijantan potprostor $L(V, W)^{\mathfrak{g}}$ svih $\mathfrak{g}-$invarijanata reprezentacije $\tau$.

Neka je $\pi$ reprezentacija grupe $G$ na vektorskom prostoru $V$ nad poljem $K$. Na dualnom prostoru $V' = L(V, K)$ definiramo tzv. **kontragredijentnu** reprezentaciju $\pi^t$ reprezentacije $\pi$ :

$$\pi^t(a)f = f \circ \pi(a^{-1}), \qquad \text{tj.} \qquad (\pi^t(a)f)(v) = f(\pi(a^{-1})v), \qquad a \in G, \quad v \in V, \quad f \in V'.$$

Analogno, ako je $\pi$ reprezentacija Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ na vektorskom prostoru $V$ tada se na dualnom prostoru $V'$ kontragredijentna reprezentacija $\pi^t$ reprezentacije $\pi$ definira ovako:

$$\pi^t(x)f = -f \circ \pi(x), \qquad \text{tj.} \qquad (\pi^t(x)f)(v) = -f(\pi(x)v), \qquad x \in \mathfrak{g}, \quad v \in V, \quad f \in V'.$$

Ovdje se u stvari radi o prethodnim konstrukcijama za trivijalnu reprezentaciju $\rho$ grupe $G$ na jednodimenzionalnom prostoru $W = K$ ($\rho(a) = 1\ \forall a \in G$), odnosno, za trivijalnu reprezentaciju $\rho$ Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ na jednodimenzionalnom prostoru $W = K$ ($\rho(x) = 0\ \forall x \in \mathfrak{g}$).

Neka je sada zadana familija reprezentacija $\pi_i$, $i \in I$, od $\mathcal{A}$ na vektorskim prostorima $V_i$ nad istim poljem $K$. Tada na direktnoj sumi

$$\coprod_{i \in I} V_i = \left\{ f : I \to \bigcup_{i \in I} V_i;\ f(i) \in V_i\ \ \forall i \in I,\ \text{skup}\ \{i \in I;\ f(i) \neq 0\}\ \text{je konačan} \right\}$$

definiramo reprezentaciju $\pi$ od $\mathcal{A}$ na sljedeći način:

$$(\pi(x)f)(i) = \pi_i(x)f(i), \qquad x \in \mathcal{A}, \quad i \in I.$$

$\pi$ se zove **direktna suma reprezentacija** $\pi_i$. Naravno, ako je $\pi$ neka reprezentacija od $\mathcal{A}$ na vektorskom prostoru $V$ i ako su $V_i$, $i \in I$, $\pi-$invarijantni potprostori od $V$ takvi da je $V$ njihova direktna suma, onda je reprezentacija $\pi$ ekvivalentna direktnoj sumi njenih subreprezentacija $\pi_{V_i}$.

Reprezentacija $\pi$ od $\mathcal{A}$ na vektorskom prostoru $V$ zove se **potpuno reducibilna**, ako za svaki $\pi-$invarijantan potprostor $W$ postoji njegov $\pi-$invarijantan direktni komplement, tj. postoji $\pi-$invarijantan potprostor $U$ takav da je $V = W \dot{+} U$. Naravno, svaka je ireducibilna reprezentacija potpuno reducibilna.

**Zadatak 1.18.** *Neka je $\pi$ reprezentacija od $\mathcal{A}$ na vektorskom prostoru $V$.*

$(a)$ *Neka su $W$ i $U$ $\pi-$invarijantni potprostori od $V$ takvi da je $V = W \dot{+} U$. Dokažite da je tada $\pi_{V/W} \simeq \pi_U$.*

$(b)$ *Neka su $R$, $S$ i $T$ $\pi-$invarijantni potprostori takvi da je $V = R \dot{+} S = R \dot{+} T$. Dokažite da je tada $\pi_S \simeq \pi_T$.*

**Teorem 1.4.1.** *Neka je $\pi$ potpuno reducibilna reprezentacija od $\mathcal{A}$ na vektorskom prostoru $V$. Tada je svaka njena subkvocijentna reprezentacija potpuno reducibilna.*

**Dokaz:** Neka je $W$ $\pi-$invarijantan potprostor od $V$ i neka je $U$ $\pi_W-$invarijantan potprostor od $W$. Tada je $U$ $\pi-$invarijantan potprostor od $V$ pa zbog potpune reducibilnosti reprezentacije $\pi$ postoji $\pi-$invarijantan potprostor $S$ od $V$ takav da je $V = U \dot{+} S$. Tada je $T = S \cap W$ $\pi_W-$invarijantan potprostor od $W$ i vrijedi $W = U \dot{+} T$. Time je dokazano da je svaka subreprezentacija potpuno reducibilne reprezentacije i sama potpuno reducibilna.

Neka je sada $U$ $\pi_{V/W}-$invarijantan potprostor od $V/W$. Neka je $\varphi : V \to V/W$ kvocijentno preslikavanje, $\varphi(v) = v + W$. Tada je $S = \varphi^{-1}(U) = \{v \in V;\ v + W \in U\}$ $\pi-$invarijantan potprostor od $V$ pa zbog potpune reducibilnosti reprezentacije $\pi$ postoji potprostor $T$ od $V$ takav da je $V = S \dot{+} T$. Lako se vidi da je tada $R = \varphi(T)$ $\pi_{V/W}-$invarijantan potprostor od $V/W$ i da vrijedi $V/W = U \dot{+} R$. Time je dokazano da je svaka kvocijentna reprezentacija potpuno reducibilne reprezentacije i sama potpuno reducibilna.

**Teorem 1.4.2.** *Neka je $\pi$ reprezentacija od $\mathcal{A}$ na vektorskom prostoru $V$. Pretpostavimo da postoje $\pi-$invarijantni potprostori $V_i$, $i \in I$, takvi da je*

$$V = \sum_{i \in I} V_i$$

*i da su sve subreprezentacije $\pi_{V_i}$ ireducibilne.*

$(a)$ *Reprezentacija $\pi$ je potpuno reducibilna.*

$(b)$ *Ako je $W$ $\pi-$invarijantan potprostor od $V$ onda postoji $J \subseteq I$ takav da je suma potprostora*

$$U = \sum_{j \in J} V_j$$

*direktna i da je $V = W \dot{+} U$.*

$(c)$ *Postoji $K \subseteq I$ takav da je*

$$V = \sum_{k \in K} V_k$$

*pri čemu je ta suma potprostora direktna.*

**Dokaz:** Očito i $(a)$ i $(c)$ slijede iz $(b)$. Dokažimo $(b)$ Neka je $\mathcal{S}$ skup svih podskupova $J \subseteq I$ takvih da je suma potprostora

$$W + \sum_{j \in J} V_j$$

direktna. Skup $\mathcal{S}$ je s relacijom inkluzije parcijalno uređen. Dokažimo da taj parcijalno uređen skup zadovoljava uvjet Zornove leme. Neka je $\mathcal{T}$ lanac u $\mathcal{S}$. Stavimo

$$K = \bigcup_{J \in \mathcal{T}} J.$$

Dokažimo da je tada suma potprostora

$$W + \sum_{k \in K} V_k \tag{1.3}$$

direktna. Neka su $k_1, k_2, \ldots, k_n \in K$ međusobno različiti i neka su $w \in W$, $v_1 \in V_{k_1}$, $v_2 \in V_{k_2}$, $\ldots$, $v_n \in V_{k_n}$ takvi da je $w + v_1 + v_2 + \cdots + v_n = 0$. Budući da je $\mathcal{T}$ lanac, postoji $J \in \mathcal{T}$ takav da je $k_1, k_2, \ldots, k_n \in J$. Kako je $J \in \mathcal{S}$, suma potprostora

$$W + \sum_{j \in J} V_j$$

je direktna, pa iz jednakosti $w + v_1 + v_2 + \cdots + v_n = 0$ slijedi da je $w = v_1 = v_2 = \cdots = v_n = 0$. Time je dokazano da je suma potprostora (1.3) direktna. To znači da je $K \in \mathcal{S}$, a očito je $K$ gornja ograda lanca $\mathcal{T}$. Dakle, parcijalno uređen skup $\mathcal{S}$ zadovoljava uvjet Zornove leme. Stoga u skupu $\mathcal{S}$ postoji neki maksimalni element $J$. Stavimo

$$U = \sum_{j \in J} V_j, \qquad X = W + U = W \dot{+} U.$$

Treba dokazati da je $X = V$. Očito je $X$ $\pi-$invarijantan potprostor od $V$. Stoga je za bilo koji $i \in I$ $X \cap V_i$ $\pi_{V_i}-$invarijatni potprostor od $V_i$. Kako je po pretpostavci reprezentacija $\pi_{V_i}$ ireducibilna, to je ili $X \cap V_i = V_i$, odnosno, $V_i \subseteq X$, ili je $X \cap V_i = \{0\}$. Pretpostavimo da je $X \cap V_i = \{0\}$. To znači da je suma $X + V_i$ direktna, pa slijedi da je suma potprostora

$$W + \sum_{j \in J \cup \{i\}} V_j$$

direktna. To znači da je $J \cup \{i\} \in \mathcal{S}$. No to se protivi maksimalnosti $J$ u $\mathcal{S}$ jer je očito $J \subsetneq J \cup \{i\}$. Dakle, $X \cap V_i = \{0\}$ je nemoguće, pa slijedi da je $V_i \subseteq X$ za svaki $i \in I$. No kako je $V$ suma potprostora $V_i$, $i \in I$, slijedi $X = V$. Time je tvrdnja $(b)$ u potpunosti dokazana.

U konačnodimenzionalnom slučaju situacija je znatno jednostavnija. Naime, ako je $\pi$ reprezentacija od $\mathcal{A}$ na konačnodimenzionalnom vektorskom prostoru $V \neq \{0\}$, onda iz konačnodimenzionalnosti lako slijedi da svaki $\pi-$invarijantan potprostor $W \neq \{0\}$ sadrži $\pi-$invarijantan potprostor $U$ takav da je reprezentacija $\pi_U$ ireducibilna. Stoga iz teorema 1.4.2. neposredno slijedi:

**Teorem 1.4.3.** *Neka je $\pi$ reprezentacija od $\mathcal{A}$ na konačnodimenzionalnom vektorskom prostoru $V \neq \{0\}$. Sljedeća su svojstva međusobno ekvivalentna:*

$(a)$ *Reprezentacija $\pi$ je potpuno reducibilna.*

$(b)$ *Postoje $\pi-$invarijantni potprostori $V_i$, $i \in I$, takvi da su sve reprezentacije $\pi_{V_i}$ ireducibilne i da je*

$$V = \sum_{i \in I} V_i.$$

$(c)$ *Postoje $\pi-$invarijantni potprostori $V_1, V_2, \ldots, V_n$ takvi da su reprezentacije $\pi_{V_1}, \pi_{V_2}, \ldots, \pi_{V_n}$ ireducibilne i da je*

$$V = V_1 \dot{+} V_2 \dot{+} \cdots \dot{+} V_n.$$

U situaciji iz tvrdnje $(c)$ teorema 1.4.3. neka je $e(j) = \{e_1^{(j)}, e_2^{(j)}, \ldots, e_{m_j}^{(j)}\}$ baza potprostora $V_j$ i neka je $e$ baza prostora $V$ dobivena iz tih baza:

$$e = \{e_1^{(1)}, e_2^{(1)}, \ldots, e_{m_1}^{(1)}, e_1^{(2)}, e_2^{(2)}, \ldots, e_{m_2}^{(2)}, \ldots, e_1^{(n)}, e_2^{(n)}, \ldots, e_{m_n}^{(n)}\}.$$

Nadalje, za $a \in \mathcal{A}$ neka je $\pi(a)[e]$ matrica operatora $\pi(a)$ u bazi $e$ i $\pi_{V_j}(a)[e(j)]$ matrica operatora $\pi_{V_j}(a)$ u bazi $e(j)$, $j = 1, 2, \ldots, n$. Lako se vidi da je tada $\pi(a)[e]$ blok$-$dijagonalna matrica:

$$\pi(a)[e] = \begin{bmatrix} \pi_{V_1}(a)[e(1)] & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \pi_{V_2}(a)[e(2)] & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \pi_{V_n}(a)[e(n)] \end{bmatrix}.$$

**Teorem 1.4.4. (Schurova lema)** *Neka su $\pi$ i $\rho$ ireducibilne reprezentacije od $\mathcal{A}$ na vektorskim prostorima $V$ i $W$ nad poljem $K$.*

$(a)$ *Ako reprezentacije $\pi$ i $\rho$ nisu ekvivalentne onda je $Hom_{\mathcal{A}}(V,W) = \{0\}$.*

$(b)$ *$End_{\mathcal{A}}(V) = Hom_{\mathcal{A}}(V,V)$ je tijelo.*

$(c)$ *Ako je prostor $V$ konačnodimenzionalan i ako je polje $K$ algebarski zatvoreno, onda je $End_{\mathcal{A}}(V) = \{\lambda I;\ \lambda \in K\}$.*

**Dokaz:** $(a)$ Neka je $A \in Hom_{\mathcal{A}}(V,W)$. Tada je jezgra $N(A) = \{v \in V;\ Av = 0\}$ operatora $A$ $\pi-$invarijantan potprostor:

$$v \in N(A), \quad a \in G \qquad \Longrightarrow \qquad A\pi(a)v = \rho(a)Av = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \pi(a)v \in N(A).$$

Kako je reprezentacija $\pi$ ireducibilna, slijedi $N(A) = \{0\}$ ili $N(A) = V$. Pretpostavimo da je $N(A) = \{0\}$, tj. da je $A$ injekcija. Tada je područje vrijednosti $R(A) = \{Av;\ v \in V\}$ potprostor od $W$ različit od $\{0\}$. No taj je potprostor $\rho-$invarijantan. Doista, neka je $w \in R(A)$ i $a \in G$. Neka je $v \in V$ takav da je $w = Av$. Tada je

$$\rho(a)w = \rho(a)Av = A\pi(a)v \in R(A).$$

Kako je reprezentacija $\rho$ ireducibilna i $R(A) \neq \{0\}$, slijedi $R(A) = W$. No tada je $A$ izomorfizam pa slijedi $\pi \simeq \rho$ suprotno pretpostavci. Ova kontradikcija pokazuje da $N(A) = \{0\}$ nije moguće. Zaključujemo da je $N(A) = V$, odnosno, $A = 0$. Dakle, dokazali smo da je $Hom_{\mathcal{A}}(V,W) = \{0\}$.

$(b)$ Dokaz tvrdnje $(a)$ pokazuje da je svaki $A \in End_{\mathcal{A}}(V) \setminus \{0\}$ invertibilan. Dakle, $End_{\mathcal{A}}(V)$ je tijelo.

$(c)$ Neka je $A \in End_{\mathcal{A}}(V)$. Kako je prostor $V$ konačnodimenzionalan i polje $K$ je algebarski zatvoreno, spektar $\sigma(A)$ operatora $A$ je neprazan. Neka je $\lambda \in \sigma(A)$. Tada je operator $A - \lambda I$ iz $End_{\mathcal{A}}(V)$ singularan, a kako je prema tvrdnji $(b)$ $End_{\mathcal{A}}(V)$ tijelo, slijedi $A - \lambda I = 0$, odnosno, $A = \lambda I$.

**Teorem 1.4.5.** *Neka je $\pi$ ireducibilna konačnodimenzionalna reprezentacija grupe $G$ ili Liejeve algebre $\mathfrak{g}$. Tada je njoj kontragredijentna reprezentacija $\pi^t$ također ireducibilna.*

**Dokaz:** Dokazi za grupu i za Liejevu algebru su sasvim analogni. Provest ćemo dokaz za Liejevu algebru. Neka je $U \subseteq V'$ $\pi^t-$invarijantan potprostor. Tada je njegov anihilator

$$U^\circ = \{v \in V;\ f(v) = 0 \quad \forall f \in U\}$$

potprostor od $V$ koji je $\pi-$invarijantan:

$$v \in U^\circ,\ x \in \mathfrak{g},\ f \in U \qquad \Longrightarrow \qquad f(\pi(x)v) = -(\pi^t(x)f)(v) = 0,$$

jer je $\pi^t(x)f \in U$. Dakle,

$$v \in U^\circ,\ x \in \mathfrak{g} \qquad \Longrightarrow \qquad \pi(x)v \in U^\circ.$$

Kako je reprezentacija $\pi$ ireducibilna, slijedi da je ili $U^\circ = \{0\}$ ili $U^\circ = V$. Znamo da je

$$\dim V' = \dim V \qquad \text{i} \qquad \dim U^\circ = \dim V - \dim U.$$

Dakle, ili je $\dim U = \dim V'$, tj. $U = V'$, ili je $\dim U = 0$, tj. $U = \{0\}$. Time je dokazano da je reprezentacija $\pi^t$ ireducibilna.

**Zadatak 1.19.** *Neka su $\pi$ i $\rho$ reprezentacije od $\mathcal{A}$ na vektorskim prostorima $V$ i $W$. Ako je $X$ $\rho-$invarijantan potprostor od $W$ tada prostor $Hom_{\mathcal{A}}(V,X)$ možemo na prirodan način identificirati s potprostorom*

$$\{A \in Hom_{\mathcal{A}}(V,W);\ AV \subseteq X\}$$

*prostora $Hom_{\mathcal{A}}(V,W)$. Ukoliko je $W = X_1 \dotplus X_2 \dotplus \cdots \dotplus X_n$, pri čemu su $X_i$ $\rho-$invarijantni potprostori od $W$ dokažite da uz spomenutu identifikaciju prostora $Hom_{\mathcal{A}}(V,X_i)$ s potprostorima od $Hom_{\mathcal{A}}(V,W)$ vrijedi*

$$Hom_{\mathcal{A}}(V,W) = Hom_{\mathcal{A}}(V,X_1) \dotplus Hom_{\mathcal{A}}(V,X_2) \dotplus \cdots \dotplus Hom_{\mathcal{A}}(V,X_n).$$

**Zadatak 1.20.** *Neka su $\pi$ i $\rho$ reprezentacije od $\mathcal{A}$ na vektorskim prostorima $V$ i $W$.*

(*a*) *Ako je $X$ $\pi-$invarijantan potprostor prostora $V$, konstruirajte izomorfizam prostora $Hom_{\mathcal{A}}(V/X,W)$ s potprostorom*

$$\{A \in Hom_{\mathcal{A}}(V,W);\ A|X = 0\}$$

*prostora $Hom_{\mathcal{A}}(V,W)$.*

(*b*) *Ako je $V = X_1 \dotplus X_2 \dotplus \cdots \dotplus X_n$, gdje su $X_i$, $1 \le i \le n$, $\pi-$invarijantni potprostori prostora $V$, konstruirajte izomorfizme prostora $Hom_{\mathcal{A}}(X_i,W)$ s potprostorima $\mathcal{X}_i$ prostora $Hom_{\mathcal{A}}(V,W)$ i to tako da bude*

$$Hom_{\mathcal{A}}(V,W) = \mathcal{X}_1 \dotplus \mathcal{X}_2 \dotplus \cdots \dotplus \mathcal{X}_n.$$

**Teorem 1.4.6.** *Neka je $\pi$ potpuno reducibilna reprezentacija od $\mathcal{A}$ na konačnodimenzionalnom prostoru $V$ nad algebarski zatvorenim poljem $K$ i neka je $\rho$ ireducibilna reprezentacija od $\mathcal{A}$ na prostoru $W$ nad poljem $K$. Neka je $V = V_1 \dotplus V_2 \dotplus \cdots \dotplus V_n$, pri čemu je svaki od potprostora $V_i$ $\pi-$invarijantan i takav da je pripadna subreprezentacija $\pi_{V_i}$ ireducibilna. Tada je*

$$|\{i \in \{1,2,\ldots,n\};\ \pi_{V_i} \simeq \rho\}| = \dim\, Hom_{\mathcal{A}}(W,V) = \dim\, Hom_{\mathcal{A}}(V,W).$$

(*Pri tome $|S|$ označava broj elemenata konačnog skupa $S$*).

**Dokaz:** Prema zadatku 1.19. vrijedi

$$Hom_{\mathcal{A}}(W,V) = Hom_{\mathcal{A}}(W,V_1) \dotplus Hom_{\mathcal{A}}(W,V_2) \dotplus \cdots \dotplus Hom_{\mathcal{A}}(W,V_n). \tag{1.4}$$

Nadalje, prema Schurovoj lemi (teorem 1.4.4.) vrijedi

$$\dim\, Hom_{\mathcal{A}}(W, V_i) = \begin{cases} 1 & \text{ako je } \pi_{V_i} \simeq \rho \\ & \\ 0 & \text{ako je } \pi_{V_i} \not\simeq \rho. \end{cases}$$

Odatle i iz (1.4) slijedi jednakost

$$\dim\, Hom_{\mathcal{A}}(W, V) = |\{i \in \{1, 2, \ldots, n\};\ \pi_{V_i} \simeq \rho\}|.$$

Sasvim analogno, pomoću zadatka 1.20. dobivamo jednakost

$$\dim\, Hom_{\mathcal{A}}(V, W) = |\{i \in \{1, 2, \ldots, n\};\ \pi_{V_i} \simeq \rho\}|.$$

## 1.5 Weylov teorem o potpunoj reducibilnosti

**Ponovo promatramo isključivo konačnodimenzionalne Liejeve algebre nad algebarski zatvorenim poljem karakteristike** 0.

**Teorem 1.5.1.** *Neka je* $\mathfrak{g}$ *poluprosta Liejeva algebra i neka je* $\pi$ *vjerna reprezentacija od* $\mathfrak{g}$ *na konačnodimenzionalnom vektorskom prostoru* $V$.

$(a)$ *Simetrična bilinearna forma* $\kappa_\pi$ *na* $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$, *definirana sa*

$$\kappa_\pi(x, y) = Tr\, \pi(x)\pi(y), \qquad x, y \in \mathfrak{g},$$

*je nedegenerirana i ima svojstvo invarijantnosti:*

$$\kappa_\pi([x, y], z) = \kappa_\pi(x, [y, z]) \qquad \forall x, y, z \in \mathfrak{g}.$$

$(b)$ *Neka je* $\{x_1, \ldots, x_n\}$ *baza od* $\mathfrak{g}$ *i neka je* $\{y_1, \ldots, y_n\}$ *njoj dualna baza od* $\mathfrak{g}$ *u odnosu na formu* $\kappa_\pi$, *tj. jedinstvena baza od* $\mathfrak{g}$ *sa svojstvom* $\kappa_\pi(x_j, y_k) = \delta_{jk}$. *Definiramo operator* $C_\pi \in L(V)$ :

$$C_\pi = \sum_{j=1}^{n} \pi(x_j)\pi(y_j)$$

*Operator* $C_\pi$ *ne ovisi o izboru baze* $\{x_1, \ldots, x_n\}$ *od* $\mathfrak{g}$ *i vrijedi* $C_\pi \in End_{\mathfrak{g}}(V)$, *odnosno,* $C_\pi\pi(x) = \pi(x)C_\pi \ \ \forall x \in \mathfrak{g}$.

$(c)$ *Vrijedi* $Tr\, C_\pi = \dim\, \mathfrak{g}$.

**Dokaz:** $(a)$ Za $x, y, z \in \mathfrak{g}$ imamo

$$\kappa_\pi([x, y], z) - \kappa_\pi(x, [y, z]) = Tr\, \pi([x, y])\pi(z) - Tr\, \pi(x)\pi([y, z]) =$$

$$= Tr\, \pi(x)\pi(y)\pi(z) - Tr\, \pi(y)\pi(x)\pi(z) - Tr\, \pi(x)\pi(y)\pi(z) + Tr\, \pi(x)\pi(z)\pi(y) = 0,$$

jer se drugi i četvrti član dokidaju zbog invarijatnosti traga produkta operatora u odnosu na cikličke permutacije.

Stavimo sada

$$\mathfrak{r} = \{x \in \mathfrak{g};\ \kappa_\pi(x, y) = 0 \quad \forall y \in \mathfrak{g}\}.$$

Iz dokazane invarijatnosti forme $\kappa_\pi$ vidi se da je $\mathfrak{r}$ ideal u $\mathfrak{g}$. Nadalje, potpuno analogno dokazu u teoremu 1.3.1. s jedinom razlikom da se sada koristi teorem 1.2.19. a ne njegov korolar 1.2.20. slijedi da je $\pi(\mathfrak{r})$ rješiva Liejeva algebra. Kako je po pretpostavci reprezentacija $\pi$ vjerna, zaključujemo da je $\mathfrak{r}$ rješiv ideal u $\mathfrak{g}$, a kako je $\mathfrak{g}$ poluprosta, slijedi da je $\mathfrak{r} = \{0\}$. Time je dokazana nedegeneriranost forme $\kappa_\pi$.

$(b)$ Neka je $\{x_1', \ldots, x_n'\}$ druga baza od $\mathfrak{g}$ i neka je $\{y_1', \ldots, y_n'\}$ njoj dualna baza u odnosu na formu $\kappa_\pi$. Neka su $A = [\alpha_{ij}]_{i,j=1}^n$ i $B = [\beta_{ij}]_{i,j=1}^n$ matrice takve da je

$$x_j' = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} x_i, \qquad y_j' = \sum_{i=1}^{n} \beta_{ij} y_i, \qquad j = 1, \ldots, n.$$

Tada za bilo koje $j, k \in \{1, \ldots, n\}$ imamo

$$\delta_{jk} = \kappa_\pi(x_j', y_k') = \sum_{i,\ell=1}^{n} \alpha_{ij}\beta_{\ell k}\kappa_\pi(x_i, y_\ell) = \sum_{i,\ell=1}^{n} \alpha_{ij}\beta_{\ell k}\delta_{i\ell} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij}\beta_{ik}.$$

To pokazuje da je $B$ transponirana matrica inverzne matrice od $A$. Stoga vrijedi i

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ji}\beta_{ki} = \delta_{jk}, \qquad j,k \in \{1,\ldots,n\}.$$

Slijedi

$$\sum_{i=1}^{n} \pi(x_i')\pi(y_i') = \sum_{i,j,k=1}^{n} \alpha_{ji}\beta_{ki}\pi(x_j)\pi(y_k) = \sum_{j,k=1}^{n} \delta_{jk}\pi(x_j)\pi(y_k) = \sum_{j=1}^{n} \pi(x_j)\pi(y_j) = C_\pi.$$

Neka je sada $x \in \mathfrak{g}$. Neka su $\lambda_{ij}, \mu_{ij} \in K$ matrični elementi operatora $ad\, x$ u bazama $\{x_1,\ldots,x_n\}$ i $\{y_1,\ldots,y_n\}$ :

$$[x,x_j] = \sum_{i=1}^{n} \lambda_{ij}x_i, \qquad [x,y_j] = \sum_{i=1}^{n} \mu_{ij}y_i.$$

Sada imamo redom zbog invarijantnosti forme $\kappa_\pi$ :

$$\lambda_{ki} = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ji}\kappa_\pi(x_j,y_k) = \kappa_\pi([x,x_i],y_k) = -\kappa_\pi(x_i,[x,y_k]) = -\sum_{j=1}^{n} \mu_{jk}\kappa_\pi(x_i,y_j) = -\mu_{ik}.$$

Pomoću identiteta $[A,BC] = [A,B]C + B[A,C]$ u $L(V)$ nalazimo

$$[\pi(x),C_\pi] = \sum_{i=1}^{n}([\pi(x),\pi(x_i)]\pi(y_i) + \pi(x_i)[\pi(x),\pi(y_i)]) = \sum_{i=1}^{n}(\pi([x,x_i])\pi(y_i) + \pi(x_i)\pi([x,y_i]) =$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n}(\lambda_{ji}\pi(x_j)\pi(y_i) + \mu_{ji}\pi(x_i)\pi(y_j)) = \sum_{i,j=1}^{n} \lambda_{ji}\pi(x_j)\pi(y_i) - \sum_{i,j=1}^{n} \lambda_{ij}\pi(x_i)\pi(y_j) = 0.$$

$(c)$ Imamo

$$Tr\, C_\pi = \sum_{j=1}^{n} Tr\, \pi(x_j)\pi(y_j) = \sum_{j=1}^{n} \kappa_\pi(x_j,y_j) = n = \dim \mathfrak{g}.$$

Operator $C_\pi$ iz prethodnog teorema zove se **Casimirov operator reprezentacije** $\pi$. On je definiran uz pretpostavku da je reprezentacija $\pi$ vjerna. No ako reprezentacija $\pi$ nije vjerna, ona postaje vjerna prijelazom na kvocijentnu Liejevu algebru $\mathfrak{g}/Ker\,\pi$, koja je također poluprosta. Stoga je i u tom slučaju moguće definirati Casimirov operator − i njega ćemo označavati sa $C_\pi$.

**Zadatak 1.21.** *Dokažite da su Liejeve algebre* $\mathfrak{sl}(2,K)$ *i* $\mathfrak{sl}(3,K)$ *proste i izračunajte Casimirove operatore za*

$(a)$ *adjungiranu reprezentaciju ad Liejeve algebre* $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2,K)$;

$(b)$ *standardnu reprezentaciju Liejeve algebre* $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(3,K)$ *na prostoru* $M_{3,1}(K) \simeq K^3$.

**Propozicija 1.5.2.** *Neka je* $\pi$ *reprezentacija poluproste Liejeve algebre na konačnodimenzionalnom vektorskom prostoru* $V$. *Tada je* $\pi(\mathfrak{g}) \subseteq \mathfrak{sl}(V)$.

**Dokaz:** Prema propoziciji 1.3.3. vrijedi $\mathfrak{g} = [\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$. Stoga je

$$\pi(\mathfrak{g}) = [\pi(\mathfrak{g}),\pi(\mathfrak{g})] \subseteq [\mathfrak{gl}(V),\mathfrak{gl}(V)] \subseteq \mathfrak{sl}(V).$$

Odatle očito slijedi:

**Korolar 1.5.3.** *Neka je $\pi$ jednodimenzionalna reprezentacija poluproste Liejeve algebre $\mathfrak{g}$. Tada je $\pi(\mathfrak{g}) = \{0\}$.*

**Teorem 1.5.4.** (**H. Weyl**) *Svaka konačnodimenzionalna reprezentacija poluproste Liejeve algebre je potpuno reducibilna.*

**Dokaz:** Neka je $\pi$ reprezentacija poluproste Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ na prostoru $V$. Možemo pretpostaviti da je $V \neq \{0\}$ i $\pi \neq 0$. Neka je $W$ $\pi-$invarijantan potprostor od $V$. Dokaz egzistencije $\pi-$invarijantnog direktnog komplementa od $W$ u $V$ provest ćemo najprije uz dodatnu pretpostavku da je $W$ potprostor od $V$ kodimenzije 1. Pretpostavimo, nadalje, da je subreprezentacija $\pi_W$ ireducibilna. Neka je $C_\pi$ Casimirov operator reprezentacije $\pi$. Tada je $C_\pi W \subseteq W$ i $Ker\, C_\pi$ je $\pi-$invarijantan potprostor od $V$. Prema korolaru 1.5.3. kvocijentna reprezentacija $\pi_{V/W}$ je trivijalna, $\pi_{V/W}(\mathfrak{g}) = \{0\}$. To znači da vrijedi $\pi(\mathfrak{g})V \subseteq W$, a odatle po definiciji Casimirovog operatora slijedi $C_\pi V \subseteq W$. Kako je subreprezentacija $\pi_W$ ireducibilna, iz tvrdnje $(b)$ teorema 1.5.1. i iz tvrdnje $(c)$ Schurove leme (teorem 1.4.4.) slijedi da je $C_\pi|W = \lambda I_W$ za neki $\lambda \in K$. Slijedi $Tr\, C_\pi = \lambda \cdot \dim W$. Međutim, prema tvrdnji $(c)$ teorema 1.5.1. je $Tr\, C_\pi = \dim(\mathfrak{g}/Ker\,\pi) \neq 0$, pa slijedi da je $\lambda \neq 0$. Stoga je $Ker\, C_\pi \cap W = \{0\}$, pa je $Ker\, C_\pi$ direktni komplement od $W$ u $V$ koji je $\pi-$invarijantan.

I dalje pretpostavljamo da je $W$ $\pi-$invarijantan potprostor od $V$ kodimenzije 1, ali ne više nužno takav da je subreprezentacija $\pi_W$ ireducibilna. Dokaz sada provodimo indukcijom u odnosu na $\dim W$. Ako $\pi_W$ nije ireducibilna, postoji $\pi-$invarijantan potprostor $U$ od $W$ takav da je $\{0\} \neq U \neq W$. Tada je $W/U$ $\pi_{V/U}-$invarijantan potprostor od $V/U$ kodimenzije 1, pa po indukciji postoji jednodimenzionalan $\pi_{V/U}-$invarijantan potprostor $X$ od $V/U$ takav da je $V/U = W/U \dotplus X$. Možemo pisati $X = Y/U$ za neki $\pi-$invarijantan potprostor $Y$ od $V$ koji sadrži $U$. Kako je $\dim X = 1$, slijedi da je $U$ potprostor od $Y$ kodimenzije 1, pa ponovnom primjenom pretpostavke indukcije slijedi da postoji jednodimenzionalan $\pi-$invarijantan potprostor $Z$ od $Y$ takav da je $Y = U \dotplus Z$. Uočimo sada da je $V = W + Z$. Doista, neka je $v \in V$. Kako je $V/U = W/U \dotplus Y/U$, postoje $w \in W$ i $y \in Y$ takvi da je $v + U = (w + U) + (y + U)$, odnosno, $u = v - w - y \in U$. Nadalje, kako je $Y = U \dotplus Z$, vrijedi $y = u' + z$ za neke $u' \in U$ i $z \in Z$. Odatle je

$$v = w + y + u = w + u' + z + u = w' + z, \quad \text{gdje je} \quad w' = w + u + u' \in W.$$

Time je dokazano da je $V = W + Z$, a kako je

$$\dim Z = 1 = \dim V/W = \dim V - \dim W,$$

slijedi $V = W \dotplus Z$.

Razmotrimo sada opći slučaj. Neka je $W$ bilo koji $\pi-$invarijantan potprostor od $V$. Promatrajmo sada prostor linearnih operatora $L(V, W)$ i na njemu reprezentaciju $\tau$ od $\mathfrak{g}$ definiranu kao u odjeljku 1.4. sa

$$\tau(x)(A) = \pi_W(x)A - A\pi(x) = \pi(x)A - A\pi(x), \qquad A \in L(V, W), \quad x \in \mathfrak{g}.$$

Neka su $\mathcal{V}$ i $\mathcal{W}$ potprostori od $L(V, W)$ definirani na sljedeći način:

$$\mathcal{V} = \{A \in L(V, W);\ A|W = \lambda I_W \quad \text{za neki} \quad \lambda \in K\}, \qquad \mathcal{W} = \{A \in L(V, W);\ A|W = 0\}.$$

Očito je $\mathcal{W}$ potprostor od $\mathcal{V}$ kodimenzije 1. Nadalje, ti su potprostori od $L(V, W)$ $\tau-$invarijantni, štoviše vrijedi $\tau(x)\mathcal{V} \subseteq \mathcal{W}$ $\forall x \in \mathfrak{g}$. Doista, neka je $A \in \mathcal{V}$ i neka je $\lambda \in K$ takav da je $Aw = \lambda w$ $\forall w \in W$. Za $x \in \mathfrak{g}$ i $w \in W$ imamo

$$\tau(x)(A)w = \pi(x)Aw - A\pi(x)w = \pi(x)\lambda w - \lambda\pi(x)w = 0.$$

Kako je $w \in W$ bio proizvoljan, zaključujemo da je $\tau(x)(A)|W = 0$, odnosno, $\tau(x)(A) \in \mathcal{W}$. Kako je $A \in \mathcal{V}$ bio proizvoljan, dokazali smo da je $\tau(x)\mathcal{V} \subseteq \mathcal{W}$.

Prema prvom dijelu dokaza znamo da postoji $\tau-$invarijantan jednodimenzionalan potprostor $\mathcal{U}$ od $\mathcal{V}$ takav da je $\mathcal{V} = \mathcal{W} \dotplus \mathcal{U}$. Neka je $0 \neq A \in \mathcal{U}$. Tada je $A|W = \lambda I_W \neq 0$. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $A|W = I_W$. Prema korolaru 1.5.3. vrijedi $\tau(x)(A) = 0$ $\forall x \in \mathfrak{g}$. Stoga za svaki $v \in V$ imamo

$$0 = \tau(x)(A)v = \pi(x)Av - A\pi(x)v \quad \Longrightarrow \quad \pi(x)A = A\pi(x)\ \forall x \in \mathfrak{g} \quad \Longrightarrow \quad A \in End_{\mathfrak{g}}(V).$$

Stoga je jezgra $U = N(A)$ operatora $A$ potprostor od $V$ koji je $\pi-$invarijantan. Budući da $A$ preslikava $V$ u $W$ i $A|W = I_W$, vrijedi $W \cap U = \{0\}$. Nadalje, iz $A|W = I_W$ slijedi da je operator $A : V \to W$ surjekcija, $R(A) = W$. Sada po teoremu o rangu i defektu zaključujemo

$$\dim (W \dotplus U) = \dim W + \dim U = r(A) + d(A) = \dim V,$$

Prema tome je $W \dotplus U = V$.

Za linearan operator $x$ na konačnodimenzionalnom vektorskom prostoru $V$ znamo da postoje jedinstveni poluprost $x_s \in L(V)$ i jedinstveni nilpotentan $x_n \in L(V)$ takvi da vrijedi $x_s x_n = x_n x_s$ i $x = x_s + x_n$ (teorem 1.2.14.). Teorem 1.3.5., prema kojem je za poluprostu Liejevu algebru $\mathfrak{g}$ vrijedi $ad\,\mathfrak{g} = Der(\mathfrak{g})$, i propozicija 1.2.17., prema kojoj su poluprost i nilpotentan dio derivacije ponovo derivacije, omogućuje da se Jordan$-$Chevalleyev rastav s linearnih operatora prenese na elemente bilo koje konačnodimenzionalne poluproste Liejeve algebre $\mathfrak{g}$. Naime, za $x \in \mathfrak{g}$ su $(ad\,x)_s, (ad\,x)_n \in Der(\mathfrak{g}) = ad\,\mathfrak{g}$, a kako je $ad$ vjerna reprezentacija od $\mathfrak{g}$ postoje jedinstveni $x_{(s)}, x_{(n)} \in \mathfrak{g}$ takvi da je $ad\,x_{(s)} = (ad\,x)_s$ i $ad\,x_{(n)} = (ad\,x)_n$. Tada je

$$ad\,[x_{(s)}, x_{(n)}] = [ad\,x_{(s)}, ad\,x_{(n)}] = [(ad\,x)_s, (ad\,x)_n] = 0$$

i

$$ad\,(x_{(s)} + x_{(n)}) = ad\,x_{(s)} + ad\,x_{(n)} = (ad\,x)_s + (ad\,x)_n = ad\,x,$$

pa zbog vjernosti reprezentacije slijedi

$$[x_{(s)}, x_{(n)}] = 0 \qquad \text{i} \qquad x = x_{(s)} + x_{(n)}.$$

To se zove **apstraktni Jordan$-$Chevalleyev rastav** elementa poluproste Liejeve algebre.

Weylov teorem o potpunoj reducibilnosti ima važnu posljedicu da se apstraktni Jordan$-$Chevalleyev rastav podudara s običnim Jordan$-$Chevalleyevim rastavom ukoliko je $x$ element poluproste Liejeve podalgebre $\mathfrak{g}$ od $\mathfrak{gl}(V)$ :

**Teorem 1.5.5.** *Neka je $V$ konačnodimenzionalan vektorski prostor i neka je $\mathfrak{g}$ poluprosta Liejeva podalgebra od $\mathfrak{gl}(V)$. Neka je $x \in \mathfrak{g}$ i neka su $x_s$ i $x_n$ poluprost i nilpotentan dio linearnog operatora $x$. Tada su $x_s, x_n \in \mathfrak{g}$. Nadalje, ako je $x = x_{(s)} + x_{(n)}$ apstraktni Jordan$-$Chevalleyev rastav elementa $x$ u poluprostoj Liejevoj algebri $\mathfrak{g}$ onda je $x_{(s)} = x_s$ i $x_{(n)} = x_n$.*

**Dokaz:** Kako je $(ad_{\mathfrak{gl}(V)}\,x)\mathfrak{g} = [x, \mathfrak{g}] \subseteq \mathfrak{g}$, iz tvrdnje $(c)$ teorema 1.2.14. slijedi $(ad_{\mathfrak{gl}(V)}\,x)_s\mathfrak{g} \subseteq \mathfrak{g}$ i $(ad_{\mathfrak{gl}(V)}\,x)_n\mathfrak{g} \subseteq \mathfrak{g}$. Međutim, prema propoziciji 1.2.16. vrijedi $(ad_{\mathfrak{gl}(V)}\,x)_s = ad_{\mathfrak{gl}(V)}\,x_s$ i $(ad_{\mathfrak{gl}(V)}\,x)_n = ad_{\mathfrak{gl}(V)}\,x_n$. Zaključujemo da vrijedi $(ad_{\mathfrak{gl}(V)}\,x_s)\mathfrak{g} \subseteq \mathfrak{g}$ i $(ad_{\mathfrak{gl}(V)}\,x_n)\mathfrak{g} \subseteq \mathfrak{g}$, odnosno, $[x_s, \mathfrak{g}] \subseteq \mathfrak{g}$ i $[x_n, \mathfrak{g}] \subseteq \mathfrak{g}$. Drugim riječima, operatori $x_s$ i $x_n$ su elementi normalizatora $\mathfrak{n} = N_{\mathfrak{gl}(V)}(\mathfrak{g})$ Liejeve podalgebre $\mathfrak{g}$ u Liejevoj algebri $\mathfrak{gl}(V)$. Tada je $\mathfrak{g}$ ideal u $\mathfrak{n}$. Dokaz prve tvrdnje bio bi gotov kad bismo znali da je $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}$. Nažalost, to nikada nije istina: po propoziciji 1.3.3. vrijedi

$$\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \subseteq [\mathfrak{gl}(V), \mathfrak{gl}(V)] = \mathfrak{sl}(V),$$

a očito je jedinični operator $I_V$ element od $\mathfrak{n}$, ali ne i od $\mathfrak{sl}(V)$.

Za bilo koji potprostor $W$ od $V$ definiramo

$$\mathfrak{a}_W = \{y \in \mathfrak{gl}(V);\ yW \subseteq W \quad \text{i} \quad Tr(y|W) = 0\}.$$

Očito je $\mathfrak{a}_W$ Liejeva podalgebra od $\mathfrak{gl}(V)$, a kako je $\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ vrijedi $\mathfrak{g} \subseteq \mathfrak{a}_W$ za svaki $\mathfrak{g}-$invarijatan potprostor $W$ od $V$. Neka je

$$\mathfrak{g}^* = \mathfrak{n} \cap \bigcap \{\mathfrak{a}_W;\ W\ \mathfrak{g} - \text{invarijantan potprostor od } V\}.$$

Tada je $\mathfrak{g}^*$ Liejeva podalgebra od $\mathfrak{n}$ koja sadrži $\mathfrak{g}$. Nadalje, ako je $W$ $\mathfrak{g}-$invarijantan potprostor od $V$, onda po već spomenutoj tvrdnji $(c)$ teorema 1.2.14. vrijedi $x_sW \subseteq W$ i $x_nW \subseteq W$. Nadalje, operator $x_n$ je nilpotentan, pa je $Tr(x_n|W) = 0$; kako je $Tr(x|W) = 0$ i $x_s = x - x_n$, slijedi da je i $Tr(x_s|W) = 0$. Dakle, za svaki $\mathfrak{g}-$invarijatan potprostor $W$ od $V$ vrijedi $x_s, x_n \in \mathfrak{a}_W$. Zaključujemo da su $x_s, x_n \in \mathfrak{g}^*$.

Dokaz prve tvrdnje bit će potpun ako dokažemo da je $\mathfrak{g}^* = \mathfrak{g}$, a u tu svrhu poslužit će nam Weylov teorem 1.5.4. o potpunoj reducibilnosti koji ćemo primijeniti na reprezentaciju $ad_{\mathfrak{g}^*}|\mathfrak{g}$ poluproste Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ na prostoru $\mathfrak{g}^*$ i na identičnu reprezentaciju $x \to x$ od $\mathfrak{g}$ na prostoru $V$. Prije svega, postoji potprostor $\mathfrak{b}$ od $\mathfrak{g}^*$ takav da je $\mathfrak{g}^* = \mathfrak{g} \dotplus \mathfrak{b}$ i $[\mathfrak{g}, \mathfrak{b}] \subseteq \mathfrak{b}$. S druge strane, vrijedi $[\mathfrak{g}, \mathfrak{b}] \subseteq [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^*] \subseteq [\mathfrak{g}, \mathfrak{n}] \subseteq \mathfrak{g}$. Kako je $\mathfrak{g} \cap \mathfrak{b} = \{0\}$, zaključujemo da je $[\mathfrak{g}, \mathfrak{b}] = \{0\}$, odnosno, subreprezentacija od $ad_{\mathfrak{g}^*}|\mathfrak{g}$ na potprostoru $\mathfrak{b}$ je trivijalna. Neka je $W$ bilo koji $\mathfrak{g}-$invarijatan potprostor od $V$ na kome je reprezentacija $x \to x|W$ od $\mathfrak{g}$ ireducibilna. Neka je $y \in \mathfrak{b}$. Kako je $y \in \mathfrak{g}^*$, to je $y \in \mathfrak{a}_W$, pa je posebno potprostor $W$ invarijantan s obzirom na operator $y$. Budući da je $[y, \mathfrak{g}] = \{0\}$, prema tvrdnji $(c)$ Schurove leme (teorem 1.4.4.) iz ireducibilnosti reprezentacije $x \mapsto x|W$ slijedi da je $y|W = \lambda I_W$ za neki $\lambda \in K$. Međutim, $y \in \mathfrak{a}_W$ znači i da je $Tr(y|W) = 0$. Prema tome, $\lambda \cdot \dim W = 0$, a kako je $K$ polje karakteristike 0, slijedi $\lambda = 0$. Time smo dokazali da je $y|W = 0$ za svaki $\mathfrak{g}-$invarijantan potprostor $W$ od $V$ takav da je reprezentacija $x \mapsto x|W$ od $\mathfrak{g}$ ireducibilna. Po Weylovom teoremu 1.5.4. prostor $V$ je direktna suma takvih potprostora. Zaključujemo da je $y = 0$. Kako je $y \in \mathfrak{b}$ bio proizvoljan, slijedi $\mathfrak{b} = \{0\}$, odnosno, $\mathfrak{g}^* = \mathfrak{g}$. Time je dokazana prva tvrdnja teorema 1.5.5.:

$$x \in \mathfrak{g} \qquad \Longrightarrow \qquad x_s, x_n \in \mathfrak{g}.$$

Imamo

$$ad_{\mathfrak{g}}\, x = ad_{\mathfrak{g}}\, x_s + ad_{\mathfrak{g}}\, x_n \qquad \text{i} \qquad [ad_{\mathfrak{g}}\, x_s, ad_{\mathfrak{g}}\, x_n] = ad_{\mathfrak{g}}\, [x_s, x_n] = 0.$$

Kako je po lemi 1.2.15. operator $ad_{\mathfrak{gl}(V)}\, x_s$ poluprost, to je i njegova restrikcija $ad_{\mathfrak{g}}\, x_s$ na potprostor $\mathfrak{g}$ poluprost. Na isti način pomoću leme 1.2.5. zaključujemo da je operator $ad_{\mathfrak{g}}\, x_n$ nilpotentan. Zbog jedinstvenosti Jordan−Chevalleyevog rastava linearnog operatora $ad_{\mathfrak{g}}\, x$ slijedi

$$ad_{\mathfrak{g}}\, x_s = (ad_{\mathfrak{g}}\, x)_s = ad_{\mathfrak{g}}\, x_{(s)} \qquad \text{i} \qquad ad_{\mathfrak{g}}\, x_n = (ad_{\mathfrak{g}}\, x)_s = ad_{\mathfrak{g}}\, x_{(n)}.$$

Iz injektivnosti preslikavanja $ad_{\mathfrak{g}}$ slijedi $x_s = x_{(s)}$ i $x_n = x_{(n)}$.

**Teorem 1.5.6.** *Neka je $\pi$ reprezentacija poluproste Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ na prostoru $V$. Ako je element $x \in \mathfrak{g}$ poluprost (odnosno, nilpotentan) onda je i operator $\pi(x)$ poluprost (odnosno, nilpotentan). Nadalje, za svaki $x \in \mathfrak{g}$ vrijedi $\pi(x)_s = \pi(x_s)$ i $\pi(x)_n = \pi(x_n)$.*

**Zadatak 1.22.** *Dokažite teorem 1.5.6.*

**Uputa:** Uočite da je Liejeva podalgebra $\pi(\mathfrak{g})$ od $\mathfrak{gl}(V)$ izomorfna kvocijentnoj Liejevoj algebri $\mathfrak{g}/(Ker\,\pi)$, dakle, poluprosta. Sada primijenite teorem 1.5.5. na tu poluprostu Liejevu podalgebru od $\mathfrak{gl}(V)$ za dokaz druge tvrdnje, a zatim iz te tvrdnje dokažite prvu tvrdnju.

**Zadatak 1.23.** *Provedite drugačiji dokaz teorema 1.3.5. koristeći Weylov teorem o potpunoj reducibilnosti.*

**Uputa:** Za $\delta \in Der(\mathfrak{g})$ pokažite da je sa $\pi(x)(\lambda, y) = (0, \lambda\delta(x) + [x, y])$, $\lambda \in K$, $x, y \in \mathfrak{g}$, definirana reprezentacija $\pi$ od $\mathfrak{g}$ na prostoru $K \times \mathfrak{g}$ i da je $\mathfrak{g} = \{0\} \times \mathfrak{g}$ $\pi-$invarijantan potprostor od $K \times \mathfrak{g}$. Zatim promatrajte njegov $\pi-$invarijantan direktni komplement u $K \times \mathfrak{g}$ koji postoji po Weylovom teoremu.

## 1.6 Reprezentacije Liejeve algebre $\mathfrak{sl}(2,K)$

U Liejevoj algebri $\mathfrak{sl}(2,K)$ uočimo standardnu bazu $\{x,y,h\}$ definiranu sa

$$x=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix},\qquad y=\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix},\qquad h=\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}.$$

Tada vrijedi

$$[h,x]=2x,\qquad [h,y]=-2y,\qquad [x,y]=h. \tag{1.5}$$

Prema zadatku 1.21. $\mathfrak{sl}(2,K)$ je prosta Liejeva algebra. Nadalje, iz gornjih relacija se vidi da je baza $\{x,y,h\}$ od $\mathfrak{sl}(2,K)$ sastavljena od svojstvenih vektora operatora $ad\,h$. Dakle, element $h$ Liejeve algebre $\mathfrak{sl}(2,K)$ je poluprost. Nadalje, $(ad\,x)^3=(ad\,y)^3=0$, dakle, elementi $x$ i $y$ su nilpotentni. Prema teoremu 1.5.6. za svaku konačnodimenzionalnu reprezentaciju $\pi$ od $\mathfrak{sl}(2,K)$ operator $\pi(h)$ je poluprost, a operatori $\pi(x)$ i $\pi(y)$ su nilpotentni.

U daljnjem je $\pi$ reprezentacija Liejeve algebre $\mathfrak{sl}(2,K)$ na konačnodimenzionalnom vektorskom prostoru $V$ nad poljem $K$; podsjetimo se da pretpostavljamo da je $K$ algebarski zatvoreno polje karakteristike 0. Kako je operator $\pi(h)$ poluprost, on je dijagonalizabilan, tj. prostor $V$ je direktna suma njegovih svojstvenih potprostora. Za $\lambda\in K$ označimo sa $V_\lambda$ pripadni svojstveni potprostor od $\pi(h)$ :

$$V_\lambda=\{v\in V;\ \pi(h)v=\lambda v\}.$$

Svojstvene vrijednosti operatora $\pi(h)$ zvat ćemo **težinama** elementa $h$ u reprezentaciji $\pi$. Ako je $\lambda$ težina, $V_\lambda$ se zove **težinski potprostor** a njegovi elementi **težinski vektori**.

**Lema 1.6.1.** *Ako je $v\in V_\lambda$ onda je $\pi(x)v\in V_{\lambda+2}$ i $\pi(y)v\in V_{\lambda-2}$.*

**Zadatak 1.24.** *Pomoću relacija* (1.5) *dokažite lemu 1.6.1.*

Budući da je $V$ direktna suma potprostora $V_\lambda$, iz leme 1.6.1. se vidi da su operatori $\pi(x)$ i $\pi(y)$ nilpotentni, kao što smo već zaključili iz općeg teorema 1.5.6. Ako je $\lambda$ težina takva da $\lambda+2$ nije težina, onda za $v\in V_\lambda$ vrijedi $\pi(x)v=0$. Općenito, težinski vektor $v\neq 0$ sa svojstvom $\pi(x)v=0$ zove se **primitivni vektor** reprezentacije $\pi$.

**Propozicija 1.6.2.** *Neka je $v$ primitivni vektor težine $\lambda$, tj. $0\neq v\in V_\lambda$ i $\pi(x)v=0$. Stavimo*

$$v_{-1}=0,\quad v_0=v,\quad v_j=\frac{1}{j!}\pi(y)^jv,\quad j\in\mathbb{N}.$$

*Tada vrijedi*

$$\pi(h)v_j=(\lambda-2j)v_j,\quad \pi(x)v_j=(\lambda-j+1)v_{j-1},\quad \pi(y)v_j=(j+1)v_{j+1},\quad j\in\mathbb{Z}_+. \tag{1.6}$$

**Dokaz:** Prva jednakost slijedi neposredno iz leme 1.6.1. a treća iz definicije vektora $v_j$, $j\geq -1$. Drugu jednakost dokazujemo indukcijom po $j\geq 0$. Za $j=0$ tvrdnja vrijedi prema izboru vektora $v$ : $\pi(x)v_0=\pi(x)v=0=v_{-1}$. Za korak indukcije pretpostavimo da je $j\geq 0$ i da je dokazano $\pi(x)v_j=(\lambda-j+1)v_{j-1}$. Kako je prema trećoj relaciji $(j+1)v_{j+1}=\pi(y)v_j$ i $\pi(y)v_{j-1}=jv_j$, imamo redom

$$(j+1)\pi(x)v_{j+1}=\pi(x)\pi(y)v_j=[\pi(x),\pi(y)]v_j+\pi(y)\pi(x)v_j=\pi([x,y])v_j+(\lambda-j+1)\pi(y)v_{j-1}=$$

$$=\pi(h)v_j+(\lambda-j+1)jv_j=[\lambda-2j+(\lambda-j+1)j]v_j=[\lambda(j+1)-j(j+1)]v_j=(j+1)(\lambda-j)v_j.$$

Dakle,

$$\pi(x)v_{j+1}=(\lambda-j)v_j=[\lambda-(j+1)+1]v_{(j+1)-1},$$

i time je proveden korak indukcije za dokaz druge jednakosti.

Prema prvoj relaciji u (1.6) vektori $v_j$ su svojstveni vektori operatora $\pi(h)$ s međusobno različitim svojstvenim vrijednostima, dakle, svi oni koji su $\neq 0$ su linearno nezavisni. Budući da je prostor $V$ konačnodimenzionalan, postoji $m \in \mathbb{Z}_+$ takav da je $v_m \neq 0$ i $v_{m+1} = 0$. Sada formule (1.6) pokazuju da je potprostor od $V$ razapet vektorima $v_0, v_1, \dots, v_m$ $\pi-$invarijantan. Pretpostavimo li da je reprezentacija $\pi$ ireducibilna, zaključujemo da je $\{v_0, v_1, \dots, v_m\}$ baza prostora $V$. Nadalje, kako je $v_{m+1} = 0$, druga jednakost u (1.6) za $j = m + 1$ daje

$$0 = \pi(x)v_{m+1} = (\lambda - m)v_m.$$

Budući da je $v_m \neq 0$, zaključujemo da je $\lambda - m = 0$, odnosno, $\lambda = m$.

Primijetimo još da pomoću jednakosti (1.6) za $\lambda = m \in \mathbb{Z}_+$ možemo definirati $(m + 1)-$dimenzionalnu reprezentaciju Liejeve algebre $\mathfrak{sl}(2, K)$ :

**Zadatak 1.25.** *Neka je $V$ $(m + 1)-$dimenzionalan vektorski prostor $(m \in \mathbb{Z}_+)$ nad poljem $K$ i neka je $\{v_0, v_1, \dots, v_m\}$ baza prostora $V$. Dokažite da je formulama*

$$\begin{gathered}\pi_m(h)v_j = (m - 2j)v_j, \quad 0 \leq j \leq m, \\ \pi_m(x)v_0 = 0, \qquad \pi_m(x)v_j = (m - j + 1)v_{j-1}, \quad 1 \leq j \leq m, \\ \pi_m(y)v_j = (j + 1)v_{j+1}, \quad 0 \leq j \leq m - 1, \qquad \pi_m(y)v_m = 0,\end{gathered} \tag{1.7}$$

*zadana reprezentacija $\pi$ Liejeve algebre $\mathfrak{sl}(2, K)$ na prostoru $V$, koja je ireducibilna ako je $K$ polje karakteristike 0, ili je karakteristika od $K$ veća od $m$.*

**Uputa:** Za dokaz prve tvrdnje treba pomoću djelovanja na bazi provjeriti da vrijede sljedeće jednakosti operatora na $V$ :

$$\pi_m(h)\pi_m(x) - \pi_m(x)\pi_m(h) = 2\pi_m(x), \qquad \pi_m(h)\pi_m(y) - \pi_m(y)\pi_m(h) = -2\pi_m(y),$$

$$\pi_m(x)\pi_m(y) - \pi_m(y)\pi_m(x) = \pi_m(h).$$

Za dokaz ireducibilnosti uočite da $\pi_m-$invarijantan potprostor $W \neq \{0\}$ mora sadržavati neki od vektora $v_j$ (jer je invarijantan s obzirom na operator $\pi_m(h)$), a zatim da mora sadržavati sve vektore baze (jer je invarijantan s obzirom na operatore $\pi_m(x)$ i $\pi_m(y)$).

Na taj način, dokazali smo:

**Teorem 1.6.3.** *Neka je $K$ algebarski zatvoreno polje karakteristike* 0.

(*a*) *Za svaki $m \in \mathbb{Z}_+$ postoji do na ekvivalenciju jedinstvena ireducibilna $(m+1)-$dimenzionalna reprezentacija $\pi_m$ Liejeve algebre $\mathfrak{sl}(2, K)$.*

(*b*) *Sve težine elementa $h$ u reprezentaciji $\pi_m$ su $\{m, m - 2, m - 4, \dots, -m + 2, -m\}$. Svaki je težinski potprostor $V_j$ jednodimenzionalan.*

(*c*) *Postoji do na skalarni multipl $\neq 0$ jedinstven primitivni vektor reprezentacije $\pi_m$ i njegova težina je $m$.*

(*d*) *Postoji baza $\{v_0, v_1, \dots, v_m\}$ prostora reprezentacije $\pi_m$ takva da vrijede formule* (1.7).

**Teorem 1.6.4.** *Neka je $K$ algebarski zatvoreno polje karakteristike 0 i neka je $\pi$ konačnodimenzionalna reprezentacija Liejeve algebre $\mathfrak{sl}(2, K)$ na prostoru $V$.*

(*a*) *Sve su težine elementa $h$ u reprezentaciji $\pi$ cijeli brojevi.*

(b) *Za svaki* $j \in \mathbb{Z}_+$ *vrijedi* $\dim V_j = \dim V_{-j}$.

(c) *Ako je* $V = X_1 \dotplus \cdots \dotplus X_s$ *rastav prostora* $V$ *u direktnu sumu* $\pi-$*invarijantnih potprostora takvih da je svaka subreprezentacija* $\pi_{X_i}$ *ireducibilna, onda je* $s = \dim V_0 + \dim V_1$. *Preciznije,* $\dim V_0$ *je broj indeksa* $i \in \{1,\ldots,s\}$ *takvih da je* $\dim X_i$ *neparna, a* $\dim V_1$ *je broj indeksa* $i \in \{1,\ldots,s\}$ *takvih da je* $\dim X_i$ *parna.*

**Dokaz:** Prema Weylovom teoremu o potpunoj reducibilnosti postoji rastav

$$V = X_1 \dotplus \cdots \dotplus X_s,$$

gdje su svi potprostori $X_i$ $\pi-$invarijantni i sve su subreprezentacije $\pi_{X_i}$ ireducibilne. Svaka od tih subreprezentacija je prema teoremu 1.6.3. ekvivalentna nekoj od reprezentacija $\pi_m$ u kojima su sve težine elementa $h$ cijeli brojevi. Odatle neposredno slijedi tvrdnja $(a)$, a i tvrdnja $(b)$. Napokon, u svakoj neparnodimenzionalnoj ireducibilnoj reprezentaciji težinski potprostor za težinu 0 je jednodimenzionalan, a 1 nije težina, dok je s druge strane u svakoj parnodimenzionalnoj ireducibilnoj reprezentaciji težinski potprostor za težinu 1 jednodimenzionalan, a 0 nije težina. Odatle slijedi tvrdnja $(c)$.

Činjenica da vrijedi $\dim V_j = \dim V_{-j}$ za prostor $V$ bilo koje konačnodimenzionalne reprezentacije $\pi$ slijedi i kao posljedica lako provjerljive činjenice da je sa

$$\tau : \alpha x + \beta y + \gamma h \mapsto -\alpha y - \beta x - \gamma h$$

zadan automorfizam Liejeve algebre $\mathfrak{sl}(2,K)$, tj. njen izomorfizam na samu sebe, i pri tom automorfizmu element $h$ prelazi u $-h$. Napomenimo da se taj automorfizam $\tau$ može eksplicitno konstruirati pomoću adjungirane reprezentacije. U slučaju proizvoljne konačnodimenzionalne reprezentacije ista konstrukcija vodi na izomorfizam svakog težinskog potprostora $V_j$ na težinski potprostor $V_{-j}$. U tu svrhu uočimo da su za svaku konačnodimenzionalnu reprezentaciju $\pi$ na prostoru $V$ operatori $\pi(x)$ i $\pi(y)$ nilpotentni, pa su dobro definirani operatori

$$\mathrm{e}^{\pi(x)} = \sum_{k\in\mathbb{Z}_+} \frac{1}{k!}\pi(x)^k \qquad \text{i} \qquad \mathrm{e}^{\pi(y)} = \sum_{k\in\mathbb{Z}_+} \frac{1}{k!}\pi(y)^k.$$

Nadalje, to su elementi grupe $GL(V)$ jer su dobro definirani i operatori

$$\mathrm{e}^{-\pi(x)} = \sum_{k\in\mathbb{Z}_+} (-1)^k \frac{1}{k!}\pi(x)^k \qquad \text{i} \qquad \mathrm{e}^{-\pi(y)} = \sum_{k\in\mathbb{Z}_+} (-1)^k \frac{1}{k!}\pi(y)^k$$

i lako se provjeri da vrijedi

$$\mathrm{e}^{\pi(x)}\mathrm{e}^{-\pi(x)} = \mathrm{e}^{-\pi(x)}\mathrm{e}^{\pi(x)} = I_V \qquad \text{i} \qquad \mathrm{e}^{\pi(y)}\mathrm{e}^{-\pi(y)} = \mathrm{e}^{-\pi(y)}\mathrm{e}^{\pi(y)} = I_V.$$

Može se dokazati da vrijedi:

**Propozicija 1.6.5.** *Neka je* $\pi$ *konačnodimenzionalna reprezentacija Liejeve algebre* $\mathfrak{sl}(2,K)$ *na vektorskom prostoru* $V$, *pri čemu je* $K$ *algebarski zatvoreno polje karakteristike* 0. *Za operator* $A_\pi \in GL(V)$ *definiran sa*

$$A_\pi = e^{\pi(x)}e^{-\pi(y)}e^{\pi(x)}$$

*i za svaku težinu* $j$ *elementa* $h$ *u reprezentaciji* $\pi$ *vrijedi*

$$A_\pi V_j = V_{-j}.$$

*Nadalje, ako je*

$$\tau = A_{ad} = e^{ad\,x} e^{-ad\,y} e^{ad\,x}$$

*onda je* $\tau$ *automorfizam Liejeve algebre* $\mathfrak{sl}(2, K)$ *i vrijedi* $\tau(\alpha x + \beta y + \gamma h) = -\alpha y - \beta x - \gamma h$. *Napokon, za svaku konačnodimenzionalnu reprezentaciju* $\pi$ *vrijedi*

$$A_\pi \pi(z) A_\pi^{-1} = \pi(\tau(z)) \qquad \forall z \in \mathfrak{sl}(2, K).$$

**Zadatak 1.26.** *Neka je* $K[X, Y]$ *algebra polinoma u dvije varijable nad poljem* $K$. *Dokažite da postoji jedinstvena reprezentacija* $\rho$ *Liejeve algebre* $\mathfrak{sl}(2, K)$ *na vektorskom prostoru* $K[X, Y]$ *takva da je*

$$\rho(x) = Y \frac{\partial}{\partial X} \qquad i \qquad \rho(y) = X \frac{\partial}{\partial Y}.$$

*Dokažite da je potprostor* $K_m[X, Y]$ *homogenih polinoma stupnja* $m$ $\rho-$*invarijantan i da je subreprezentacija* $\rho_{K_m[X,Y]}$ *ireducibilna. Pronađite u njoj bazu kao u tvrdnji* (*d*) *teorema 1.6.3.*

**Uputa:** Promatrajte djelovanje operatora reprezentacije na homogene monome $X^j Y^k$.

**Zadatak 1.27.** *Neka je* $V$ *vektorski prostor nad algebarski zatvorenim poljem karakteristike* 0 *s prebrojivom bazom* $\{v_j;\ j \in \mathbb{Z}_+\}$ *i neka je* $\lambda \in K$.

(*a*) *Dokažite da je formulama* (1.6) *zadana reprezentacija* $\pi$ *Liejeve algebre* $\mathfrak{sl}(2, K)$ *na vektorskom prostoru* $V$, *koju označimo sa* $\pi_\lambda$, *i da svaki* $\pi_\lambda-$*invarijantni potprostor ima bar jedan primitivni vektor.*

(*b*) *Uz pretpostavku da je* $\lambda \in \mathbb{Z}_+$ *dokažite da je* $v_{\lambda+1}$ *primitivni vektor za reprezentaciju* $\pi_\lambda$. *Ako sa* $W$ *označimo najmanji* $\pi_\lambda-$*invarijantni potprostor koji sadrži vektor* $v_{\lambda+1}$, *dokažite da su subreprezentacija* $(\pi_\lambda)_W$ *i kvocijentna reprezentacija* $(\pi_\lambda)_{V/W}$ *ireducibilne, ali da* $\pi_\lambda$ *nije potpuno reducibilna. Nadalje, dokažite da je subreprezentacija* $(\pi_\lambda)_W$ *ekvivalentna reprezentaciji* $\pi_{-\lambda-2}$.

(*c*) *Dokažite da je reprezentacija* $\pi_\lambda$ *ireducibilna ako je* $\lambda \in K \setminus \mathbb{Z}_+$.

# Poglavlje 2

# STRUKTURA POLUPROSTIH LIEJEVIH ALGEBRI

## 2.1 Korijenski rastav poluproste Liejeve algebre

U ovom odjeljku $\mathfrak{g}$ označava poluprostu Liejevu algebru nad algebarski zatvorenim poljem $K$ karakteristike 0. Detaljno ćemo proučiti strukturu od $\mathfrak{g}$ promatrajući njenu adjungiranu reprezentaciju $ad = ad_{\mathfrak{g}}$. Pri tome će ključnu ulogu igrati Killingova forma $\kappa = \kappa_{\mathfrak{g}}$ i teoremi 1.6.3. i 1.6.4. o reprezentacijama Liejeve algebre $\mathfrak{sl}(2, K)$, budući da u slučaju $\mathfrak{g} \not\simeq \mathfrak{sl}(2, K)$ postoje brojne Liejeve podalgebre od $\mathfrak{g}$ izomorfne Liejevoj algebri $\mathfrak{sl}(2, K)$.

Liejeva podalgebra $\mathfrak{t}$ od $\mathfrak{g}$ zove se **toralna** ako su joj svi elementi poluprosti. Budući da nisu svi elementi od $\mathfrak{g}$ nilpotentni (jer bi inače po Engelovom teoremu Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ bila nilpotentna), postoji nenilpotentan $x \in \mathfrak{g}$. Tada je $x_s \neq 0$. Dakle, u $\mathfrak{g}$ postoje poluprosti elementi $\neq 0$. Ako je $h \in \mathfrak{g}$ poluprost element i $h \neq 0$ onda je $Kh = span_K \{h\}$ toralna podalgebra od $\mathfrak{g}$. Prema tome postoje toralne podalgebre $\neq \{0\}$.

**Lema 2.1.1.** *Svaka je toralna podalgebra poluproste Liejeve algebre Abelova.*

**Dokaz:** Neka je $\mathfrak{t}$ toralna podalgebra od $\mathfrak{g}$. Treba dokazati da je $ad_{\mathfrak{t}}\, x = 0 \ \ \forall x \in \mathfrak{t}$. Neka je $x \in \mathfrak{t}$ proizvoljan. Budući da je $ad\, x$ poluprost i njegova restrikcija $ad\, x|\mathfrak{t} = ad_{\mathfrak{t}}\, x$ je poluprost operator, dakle, dijagonalizabilan. Prema tome, treba dokazati da operator $ad_{\mathfrak{t}}\, x$ nema svojstvenih vrijednosti $\neq 0$. Pretpostavimo suprotno i neka su $y \in \mathfrak{t}$, $y \neq 0$, $\lambda \in K$, $\lambda \neq 0$, takvi da je $(ad_{\mathfrak{t}}\, x)y = = \lambda y$, tj. $[x, y] = \lambda y$. Tada je $(ad_{\mathfrak{t}}\, y)x = [y, x] = -\lambda y$ svojstveni vektor operatora $ad_{\mathfrak{t}}\, y$ sa svojstvenom vrijednošću 0. S druge strane, operator $ad_{\mathfrak{t}}\, y$ je dijagonalizabilan, pa se $x$ može napisati kao suma njegovih svojstvenih vektora, a kako je $(ad_{\mathfrak{t}}\, y)x \neq 0$ među tim svojstvenim vektorima postoje neki sa svojstvenom vrijednošću $\neq 0$. Drugim riječima, postoji $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K \setminus \{0\}$, $z_0 \in \mathfrak{t}$ i $z_1, \ldots, z_n \in \mathfrak{t} \setminus \{0\}$ takvi da je

$$x = z_0 + z_1 + \cdots + z_n, \qquad [y, z_0] = 0, \qquad [y, z_j] = \alpha_j z_j, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Slijedi

$$-\lambda y = (ad_{\mathfrak{t}}\, y)x = \alpha_1 z_1 + \cdots + \alpha_n z_n \qquad \Longrightarrow \qquad \alpha_1 z_1 + \cdots \alpha_n z_n + \lambda y = 0,$$

a to je nemoguće jer su $z_1, \ldots, z_n, y$ svojstveni vektori operatora $ad_{\mathfrak{t}}\, y$ za međusobno različite svojstvene vrijednosti i kao takvi su linearno nezavisni. Ova kontradikcija dokazuje tvrdnju.

Neka je u daljnjem $\mathfrak{h}$ **maksimalna toralna podalgebra** od $\mathfrak{g}$, tj. toralna podalgebra koja nije pravi podskup nijedne toralne podalgebre. Sa $\mathfrak{h}^*$ označimo dualni prostor od $\mathfrak{h}$, tj. prostor svih linearnih funkcionala $\alpha : \mathfrak{h} \to K$. Kako je $\mathfrak{h}$ Abelova podalgebra, $ad\, \mathfrak{h}$ je skup dijagonalizabilnih operatora na prostoru $\mathfrak{g}$ koji međusobno komutiraju. Stoga se oni mogu simultano dijagonalizirati. Drugim riječima, ako za $\alpha \in \mathfrak{h}^*$ stavimo

$$\mathfrak{g}_\alpha = \{x \in \mathfrak{g};\ [h, x] = \alpha(h)x \quad \forall h \in \mathfrak{h}\}$$

onda imamo rastav prostora $\mathfrak{g}$ u direktnu sumu:

$$\mathfrak{g} = \sum_{\alpha \in \mathfrak{h}^*} \dot{+} \mathfrak{g}_\alpha.$$

Primijetimo da je $\mathfrak{g}_0$ centralizator od $\mathfrak{h}$ u $\mathfrak{g}$ :

$$\mathfrak{g}_0 = C_\mathfrak{g}(\mathfrak{h}) = \{x \in \mathfrak{g};\ [x, h] = 0 \quad \forall h \in \mathfrak{h}\},$$

a kako je podalgebra $\mathfrak{h}$ Abelova, vrijedi $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}_0$. Stavimo

$$R = R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) = \{\alpha \in \mathfrak{h}^*;\ \alpha \neq 0,\ \mathfrak{g}_\alpha \neq \{0\}\}.$$

$R$ se zove **sistem korijena** od $\mathfrak{g}$ u odnosu na $\mathfrak{h}$, a elementi $\alpha \in R$ su **korijeni** od $\mathfrak{g}$ u odnosu na $\mathfrak{h}$. Rastav u direktnu sumu

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \dot{+} \sum_{\alpha \in R} \dot{+} \mathfrak{g}_\alpha \tag{2.1}$$

zove se **korijenski rastav** poluproste Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ u odnosu na maksimalnu toralnu podalgebru $\mathfrak{h}$.

**Propozicija 2.1.2.** *(a) Za $\alpha, \beta \in \mathfrak{h}^*$ je $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] \subseteq \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$.*

*(b) Ako je $x \in \mathfrak{g}_\alpha$ i $\alpha \neq 0$, onda je operator $ad\, x$ nilpotentan.*

*(c) Ako su $\alpha, \beta \in \mathfrak{h}^*$ takvi da je $\alpha + \beta \neq 0$, onda su $\mathfrak{g}_\alpha$ i $\mathfrak{g}_\beta$ ortogonalni u odnosu na Killingovu formu $\kappa = \kappa_\mathfrak{g}$. Tj.*

$$x \in \mathfrak{g}_\alpha, \quad y \in \mathfrak{g}_\beta, \quad \alpha + \beta \neq 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \kappa(x, y) = 0.$$

*(d) Restrikcija Killingove forme $\kappa|\mathfrak{g}_0 \times \mathfrak{g}_0$ je nedegenerirana.*

**Dokaz:** $(a)$ Neka su $x \in \mathfrak{g}_\alpha$, $y \in \mathfrak{g}_\beta$ i $h \in \mathfrak{h}$. Tada je $[h, x] = \alpha(h)x$ i $[h, y] = \beta(h)y$, pa prema Jacobijevom identitetu dobivamo

$$[h, [x, y]] = [[h, x], y] + [x, [h, y]] = \alpha(h)[x, y] + \beta(h)[x, y] = (\alpha + \beta)(h)[x, y].$$

Kako je $h \in \mathfrak{h}$ bio prozvoljan, zaključujemo da je $[x, y] \in \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$, a kako su $x \in \mathfrak{g}_\alpha$ i $y \in \mathfrak{g}_\beta$ bili prozvoljni, tvrdnja slijedi.

$(b)$ Ta tvrdnja slijedi iz tvrdnje $(a)$ budući da je skup $R \cup \{0\}$ konačan. Doista, ako je $\beta \in R \cup \{0\}$ i $y \in \mathfrak{g}_\beta$, onda za svaki prirodan broj $n$ prema $(a)$ vrijedi $(ad\, x)^n y \in \mathfrak{g}_{\beta+n\alpha}$, a kako je $\alpha \neq 0$, postoji $n$ takav da $\beta + n\alpha \notin R \cup \{0\}$, dakle, $\mathfrak{g}_{\beta+n\alpha} = \{0\}$, pa slijedi $(ad\, x)^n y = 0$. Prema tome, za dovoljno veliki $n_\beta \in \mathbb{N}$ vrijedi $(ad\, x)^{n_\beta}|\mathfrak{g}_\beta = 0$. Stavimo li sada $n = \max\{n_\beta;\ \beta \in R \cup \{0\}\}$, zbog korijenskog rastava (2.1) slijedi $(ad\, x)^n = 0$.

$(c)$ Za $h \in \mathfrak{h}$, $x \in \mathfrak{g}_\alpha$ i $y \in \mathfrak{g}_\beta$ zbog invarijatnosti Killingove forme $\kappa$ nalazimo

$$(\alpha + \beta)(h)\kappa(x, y) = \kappa(\alpha(h)x, y) + \kappa(x, \beta(h)y) =$$

$$= \kappa([h, x], y) + \kappa(x, [h, y]) = -\kappa([x, h], y) + \kappa(x, [h, y]) = 0.$$

Kako je $\alpha + \beta \neq 0$, možemo izabrati $h \in \mathfrak{h}$ tako da bude $(\alpha + \beta)(h) \neq 0$, pa slijedi $\kappa(x, y) = 0$.

$(d)$ Neka je $u \in \mathfrak{g}_0$ takav da je $\kappa(u, v) = 0\ \forall v \in \mathfrak{g}_0$. Prema $(c)$ vrijedi $\kappa(u, v) = 0\ \forall v \in \mathfrak{g}_\alpha$ i $\forall \alpha \in R$. Sada iz korijenskog rastava (2.1) slijedi $\kappa(u, v) = 0\ \forall v \in \mathfrak{g}$. Kako je Killingova forma $\kappa$ na $\mathfrak{g}$ nedegenerirana, slijedi $u = 0$.

**Propozicija 2.1.3.** *Ako je* $\mathfrak{h}$ *maksimalna toralna podalgebra od* $\mathfrak{g}$, *onda je* $\mathfrak{g}_0 = C_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$. *Posebno, korijenski rastav od* $\mathfrak{g}$ *u odnosu na* $\mathfrak{h}$ *je*

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \dotplus \sum_{\alpha \in R} \dotplus \, \mathfrak{g}_\alpha,$$

*gdje je* $R = R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$.

**Dokaz:** Stavimo

$$\mathfrak{z} = C_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) = \{x \in \mathfrak{g};\ [h, x] = 0 \quad \forall h \in \mathfrak{h}\}.$$

Dokaz da je $\mathfrak{z} = \mathfrak{h}$ provest ćemo u nizu koraka.

$(A)$ *Za* $x \in \mathfrak{z}$ *vrijedi* $x_s, x_n \in \mathfrak{z}$. Element $x$ nalazi se u $\mathfrak{z}$ ako i samo ako operator $ad\, x$ preslikava potprostor $\mathfrak{h}$ u potprostor $\{0\}$. Sada iz tvrdnje $(c)$ Jordan−Chevalleyevog teorema slijedi da i operatori $(ad\, x)_s$ i $(ad\, x)_n$ preslikavaju $\mathfrak{h}$ u $\{0\}$. Kako je prema teoremu 1.5.6. $(ad\, x)_s = ad\, x_s$ i $(ad\, x)_n = ad\, x_n$, zaključujemo da su $x_s, x_n \in \mathfrak{z}$.

$(B)$ *Svi poluprosti elementi iz* $\mathfrak{z}$ *leže u* $\mathfrak{h}$. Doista, neka je $x \in \mathfrak{z}$ poluprost. Suma poluprostih operatora koji komutiraju je također poluprost operator. Prema tome, $\mathfrak{h} + Kx$ je toralna podalgebra. Sada zbog maksimalnosti toralne podalgebre $\mathfrak{h}$ slijedi $x \in \mathfrak{h}$.

$(C)$ *Restrikcija Killingove forme* $\kappa|\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}$ *je nedegenerirana.* Pretpostavimo da je $h \in \mathfrak{h}$ takav da je $\kappa(h, k) = 0\ \forall k \in \mathfrak{h}$. Ako je $x \in \mathfrak{z}$ nilpotentan, onda je operator $(ad\, h)(ad\, x)$ nilpotentan, jer operatori $ad\, h$ i $ad\, x$ komutiraju. No tada je njegov trag jednak nuli, a to znači da je $\kappa(h, x) = 0$ za svaki nilpotentan element $x \in \mathfrak{z}$. Za proizvoljan $x \in \mathfrak{z}$ znamo prema $(A)$ da su $x_s, x_n \in \mathfrak{z}$. Nadalje, prema $(B)$ je tada $x_s \in \mathfrak{h}$. Dakle,

$$\kappa(h, x) = \kappa(h, x_s) + \kappa(x, x_n) = 0 \qquad \forall x \in \mathfrak{z}.$$

Iz tvrdnje $(d)$ propozicije 2.1.2. slijedi da je $h = 0$.

$(D)$ *Liejeva algebra* $\mathfrak{z}$ *je nilpotentna.* Ako je element $x \in \mathfrak{z}$ poluprost, onda je $x \in \mathfrak{h}$ prema $(B)$. Stoga je $ad_{\mathfrak{z}}\, x = 0$, pa je to nilpotentan operator. S druge strane, ako je $x \in \mathfrak{z}$ nilpotentan, onda je operator $ad\, x$ nilpotentan, pa je i njegova restrikcija $(ad\, x)|\mathfrak{z} = ad_{\mathfrak{z}}\, x$ nilpotentan operator. Neka je sada $x \in \mathfrak{z}$ proizvoljan. Tada je $x = x_s + x_n$, $x_s, x_n \in \mathfrak{z}$ i $[x_s, x_n] = 0$. Dakle, operatori $ad_{\mathfrak{z}}\, x_s$ i $ad_{\mathfrak{z}}\, x_n$ su nilpotentni i komutiraju, pa je i njihova suma $ad_{\mathfrak{z}}\, x_s + ad_{\mathfrak{z}}\, x_n = ad_{\mathfrak{z}}\, x$ nilpotentan operator. Sada iz Engelovog teorema 1.2.4. slijedi da je Liejeva algebra $\mathfrak{z}$ nilpotentna.

$(E)$ *Vrijedi* $\mathfrak{h} \cap [\mathfrak{z}, \mathfrak{z}] = \{0\}$. Budući da je $[\mathfrak{h}, \mathfrak{z}] = \{0\}$ iz invarijatnosti Killingove forme dobivamo

$$\kappa(\mathfrak{h}, [\mathfrak{z}, \mathfrak{z}]) = \kappa([\mathfrak{h}, \mathfrak{z}], \mathfrak{z}) = \kappa(\{0\}, \mathfrak{z}) = \{0\}.$$

Odatle je $\kappa(\mathfrak{h}, \mathfrak{h} \cap [\mathfrak{z}, \mathfrak{z}]) = \{0\}$, pa iz $(C)$ slijedi da je $\mathfrak{h} \cap [\mathfrak{z}, \mathfrak{z}] = \{0\}$.

$(F)$ *Liejeva algebra* $\mathfrak{z}$ *je Abelova.* Pretpostavimo suprotno da je $[\mathfrak{z}, \mathfrak{z}] \neq \{0\}$. Budući da je Liejeva algebra $\mathfrak{z}$ nilpotentna, po korolaru 1.2.8. vrijedi $Z(\mathfrak{z}) \cap [\mathfrak{z}, \mathfrak{z}] \neq \{0\}$; pri tome je $Z(\mathfrak{z})$ oznaka za centar od $\mathfrak{z}$. Neka je $z \in Z(\mathfrak{z}) \cap [\mathfrak{z}, \mathfrak{z}]$, $z \neq 0$. Prema $(B)$ i $(E)$ element $z$ ne može biti poluprost. Stoga je $0 \neq z_n \in \mathfrak{z}$. Kako je $z \in Z(\mathfrak{z})$, iz tvrdnje $(c)$ teorema 1.2.14. o Jordan−Chevalleyevom rastavu slijedi da je i $z_n \in Z(\mathfrak{z})$. No tada nilpotentan operator $ad\, z_n$ komutira sa svim operatorima $ad\, x$, $x \in \mathfrak{z}$, pa su i produkti $(ad\, z_n)(ad\, x)$ nilpotentni i kao takvi imaju trag jednak 0. To znači da je $\kappa(z_n, \mathfrak{z}) = \{0\}$, a to je suprotno tvrdnji $(d)$ propozicije 2.1.2. Ova kontradikcija pokazuje da je $[\mathfrak{z}, \mathfrak{z}] = \{0\}$, odnosno, Liejeva algebra $\mathfrak{z}$ je Abelova.

$(G)$ Napokon, pretpostavimo da je $\mathfrak{z} \neq \mathfrak{h}$. Prema $(A)$ i $(B)$ tada $\mathfrak{z}$ sadrži neki nilpotentan element $x \neq 0$. Prema $(F)$ tada su svi operatori $(ad\, x)(ad\, y)$, $y \in \mathfrak{z}$, nilpotentni, dakle trag im je 0, pa imamo

$$\kappa(x, y) = Tr\,(ad\, x)(ad\, y) = 0 \qquad \forall y \in \mathfrak{z}.$$

To je nemoguće zbog tvrdnje $(d)$ propozicije 2.1.2. Ova kontradikcija pokazuje da je $\mathfrak{z} = \mathfrak{h}$.

Zbog tvrdnje $(d)$ propozicije 2.1.2. iz propozicije 2.1.3. slijedi

**Korolar 2.1.4.** *Ako je $\mathfrak{h}$ maksimalna toralna podalgebra od $\mathfrak{g}$ onda je restrikcija Killingove forme $\kappa|\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}$ nedegenerirana.*

Prema ovom korolaru za svaki $\alpha \in \mathfrak{h}^*$ postoji jedinstven $t_\alpha \in \mathfrak{h}$ takav da vrijedi

$$\kappa(h, t_\alpha) = \alpha(h) \qquad \forall h \in \mathfrak{h}.$$

Sada ćemo izvesti preciznije informacije o korijenskom rastavu poluproste Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ u odnosu na maksimalnu toralnu podalgebru $\mathfrak{h}$. Neka je $R = R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$.

**Propozicija 2.1.5.** $(a)$ $\mathfrak{h}^* = span_K\, R.$

$(b)$ $-R = R$, *tj.* $\alpha \in R \Rightarrow -\alpha \in R.$

$(c)$ *Ako je* $\alpha \in R$, $x \in \mathfrak{g}_\alpha$ *i* $y \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$, *onda je* $[x, y] = \kappa(x, y)t_\alpha$.

$(d)$ *Za* $\alpha \in R$ *je* $\dim [\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}] = 1$ *i* $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}] = Kt_\alpha$.

$(e)$ $\alpha(t_\alpha) = \kappa(t_\alpha, t_\alpha) \neq 0 \;\; \forall \alpha \in R.$

$(f)$ *Za svaki* $\alpha \in R$ *postoji jedinstven* $h_\alpha \in [\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}]$ *takav da je* $\alpha(h_\alpha) = 2$. *Vrijedi*

$$h_\alpha = \frac{2}{\kappa(t_\alpha, t_\alpha)} t_\alpha = -h_{-\alpha}.$$

$(g)$ *Ako je* $\alpha \in R$ *i ako je* $x_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha \setminus \{0\}$ *onda postoji* $y_\alpha \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ *takav da je* $[x_\alpha, y_\alpha] = h_\alpha$. *Tada* $x_\alpha$, $y_\alpha$ *i* $h_\alpha$ *razapinju prostu trodimenzionalnu Liejevu podalgebru* $\mathfrak{s}_\alpha$ *od* $\mathfrak{g}$ *i postoji izomorfizam* $\varphi$ *Liejeve algebre* $\mathfrak{s}_\alpha$ *na Liejevu algebru* $\mathfrak{sl}(2, K)$ *takav da je*

$$\varphi(x_\alpha) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \varphi(y_\alpha) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \varphi(h_\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}. \tag{2.2}$$

**Dokaz:** $(a)$ Pretpostavimo da je $\mathfrak{h}^* \neq span_K\, R$. Tada postoji $h \in \mathfrak{h} \setminus \{0\}$ takav da je $\alpha(h) = 0$ $\forall \alpha \in R$. To znači da je $[h, \mathfrak{g}_\alpha] = \{0\}$ $\forall \alpha \in R$. Kako je i $[h, \mathfrak{h}] = \{0\}$, iz korijenskog rastava slijedi (2.1) slijedi $[h, \mathfrak{g}] = \{0\}$, tj. $h \in Z(\mathfrak{g}) = \{0\}$ suprotno pretpostavci da je $h \neq 0$. Ova kontradikcija dokazuje da je $\mathfrak{h}^* = span_K\, R$.

$(b)$ Neka je $\alpha \in R$. Pretpostavimo da $-\alpha \notin R$. Prema tvrdnji $(c)$ propozicije 2.1.2. tada je $\kappa(\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta) = \{0\}$, pa iz korijenskog rastava (2.1) slijedi $\kappa(\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}) = \{0\}$. No to je nemoguće jer je $\mathfrak{g}_\alpha \neq \{0\}$ i Killingova forma $\kappa$ je nedegenerirana. Ova kontradikcija pokazuje da je $-\alpha \in R$.

$(c)$ Neka su $\alpha \in R$, $x \in \mathfrak{g}_\alpha$, $y \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ i $h \in \mathfrak{h}$. Zbog invarijantnosti i simetričnosti Killingove forme $\kappa$ imamo redom

$$\kappa(h, [x, y]) = \kappa([h, x], y) = \alpha(h)\kappa(x, y) = \kappa(t_\alpha, h)\kappa(x, y) =$$

$$= \kappa(\kappa(x, y)t_\alpha, h) = \kappa(h, \kappa(x, y)t_\alpha).$$

Kako je $\kappa(x, y)t_\alpha \in \mathfrak{h}$ i kako je restrikcija $\kappa|\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}$ nedegenerirana, zbog proizvoljnosti elementa $h \in \mathfrak{h}$ zaključujemo da vrijedi $[x, y] = \kappa(x, y)t_\alpha$.

$(d)$ Tvrdnja $(c)$ pokazuje da je ili $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}] = \{0\}$ ili je $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}] = Kt_\alpha$. Neka je $x \in \mathfrak{g}_\alpha$, $x \neq 0$. Iz pretpostavke $\kappa(x, \mathfrak{g}_\alpha) = \{0\}$ kao u dokazu tvrdnje $(b)$ slijedi da je $\kappa(x, \mathfrak{g}) = \{0\}$, što je nemoguće jer je Killingova forma $\kappa$ nedegenerirana. Prema tome, postoji $y \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ takav da je $\kappa(x, y) \neq 0$.

Prema $(c)$ tada je $[x,y] \neq 0$. To dokazuje da je $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_{-\alpha}] \neq \{0\}$, dakle, $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}] = Kt_\alpha$.

$(e)$ Pretpostavimo da je $\alpha(t_\alpha) = 0$. To znači da je

$$[t_\alpha, x] = [t_\alpha, y] = 0 \qquad \forall x \in \mathfrak{g}_\alpha \quad \text{i} \quad \forall y \in \mathfrak{g}_{-\alpha}.$$

Kao u dokazu tvrdnje $(d)$ možemo izabrati $x \in \mathfrak{g}_\alpha$ i $y \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ tako da bude $\kappa(x,y) \neq 0$. Pomnožimo li jednog od njih pogodnim skalarom, vidimo da možemo pretpostaviti da je $\kappa(x,y) = 1$. Tada je prema tvrdnji $(c)$ imamo $[x,y] = t_\alpha$. Slijedi da je $\mathfrak{s} = span_K \{x, y, t_\alpha\}$ trodimenzionalna rješiva Liejeva podalgebra od $\mathfrak{g}$. Budući da je $ad_{\mathfrak{g}}$ vjerna reprezentacija, $\mathfrak{s}$ je izomorfna Liejevoj podalgebri $ad_{\mathfrak{g}} \mathfrak{s}$ od $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$. Iz Liejevog teorema 1.2.10. slijedi da je operator $ad_{\mathfrak{g}} s$ nilpotentan za svaki $s \in [\mathfrak{s}, \mathfrak{s}]$. Kako je $t_\alpha \in [\mathfrak{s}, \mathfrak{s}]$, zaključujemo da je operator $ad_{\mathfrak{g}} t_\alpha$ i nilpotentan i poluprost, a to je nemoguće jer je $t_\alpha \neq 0$. Ova kontradikcija pokazuje da je $\alpha(t_\alpha) \neq 0$.

$(f)$ Tvrdnja slijedi neposredno iz tvrdnji $(d)$ i $(e)$.

$(g)$ Za $x_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha \setminus \{0\}$ je $\kappa(x_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}) \neq \{0\}$, pa zbog $(e)$ možemo izabrati $y_\alpha \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ tako da bude

$$\kappa(x_\alpha, y_\alpha) = \frac{2}{\kappa(t_\alpha, t_\alpha)}.$$

Prema $(c)$ i uz oznaku $h_\alpha$ iz $(f)$ tada je

$$[x_\alpha, y_\alpha] = h_\alpha. \tag{2.3}$$

Nadalje, kako je $\alpha(h_\alpha) = 2$ imamo

$$[h_\alpha, x_\alpha] = 2x_\alpha \tag{2.4}$$

i

$$[h_\alpha, y_\alpha] = -2y_\alpha. \tag{2.5}$$

Sada (2.3), (2.4) i (2.5) pokazuju da je $\mathfrak{s}_\alpha = span_K \{x_\alpha, y_\alpha, h_\alpha\}$ trodimenzionalna Liejeva podalgebra od $\mathfrak{g}$ i da postoji izomorfizam $\varphi : \mathfrak{s}_\alpha \to \mathfrak{sl}(2, K)$ takav da vrijedi (2.2).

## 2.2 Svojstva sistema korijena

**Propozicija 2.2.1.** (*a*) *Vrijedi* $\dim \mathfrak{g}_\alpha = 1$ $\forall \alpha \in R$. *Posebno, za Liejevu podalgebru* $\mathfrak{s}_\alpha$ *iz tvrdnje* (*g*) *propozicije 2.1.5. vrijedi* $\mathfrak{s}_\alpha = \mathfrak{g}_\alpha \dot{+} \mathfrak{g}_{-\alpha} \dot{+} [\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}]$. *Nadalje, za svaki* $x_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha \setminus \{0\}$ *postoji jedinstven* $y_\alpha \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ *takav da je* $[x_\alpha, y_\alpha] = h_\alpha$.

(*b*) *Za svaki* $\alpha \in R$ *je* $K\alpha \cap R = \{\alpha, -\alpha\}$.

(*c*) *Ako su* $\alpha, \beta \in R$ *onda je* $\beta(h_\alpha) \in \mathbb{Z}$ *i* $\beta - \beta(h_\alpha)\alpha \in R$.

(*d*) *Ako su* $\alpha, \beta, \alpha + \beta \in R$ *onda je* $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] = \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$.

(*e*) *Neka su* $\alpha, \beta \in R$ *i* $\beta \neq \pm\alpha$. *Neka su* $q, r \in \mathbb{Z}_+$ *najveći takvi da su* $\beta - r\alpha \in R$ *i* $\beta + q\alpha \in R$. *Tada vrijedi*

$$\beta + j\alpha \in R \qquad \Longleftrightarrow \qquad j \in \{-r, -r+1, \ldots, q-1, q\}.$$

*Nadalje,* $\beta(h_\alpha) = r - q$.

(*f*) *Liejeva algebra* $\mathfrak{g}$ *generirana je sa* $\bigcup_{\alpha \in R} \mathfrak{g}_\alpha$.

**Dokaz:** Neka je $\alpha \in R$ i neka su $x_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$, $y_\alpha \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$, $h_\alpha \in [\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}]$ i $\mathfrak{s}_\alpha = span_K \{x_\alpha, y_\alpha, h_\alpha\}$ kao u propoziciji 2.1.5. Dakle, vrijedi $\alpha(h_\alpha) = 2$, i time je $h_\alpha$ kao element od $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}]$ jedinstveno određen, jer znamo da je $\dim [\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}] = 1$. Nadalje, vrijedi

$$[x_\alpha, y_\alpha] = h_\alpha, \qquad [h_\alpha, x_\alpha] = 2x_\alpha, \qquad [h_\alpha, y_\alpha] = -2y_\alpha,$$

pa imamo izomorfizam $\varphi : \mathfrak{s}_\alpha \to \mathfrak{sl}(2, K)$ uz

$$\varphi(x_\alpha) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \varphi(y_\alpha) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \varphi(h_\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Iskoristit ćemo sada dokazano u odjeljku 1.6. o reprezentacijama Liejeve algebre $\mathfrak{sl}(2, K) \simeq \mathfrak{s}_\alpha$ i primijeniti te rezultate na neke subreprezentacije reprezentacije $\rho = ad|\mathfrak{s}_\alpha$ Liejeve algebre $\mathfrak{s}_\alpha$.

Prije svega, stavimo

$$K_\alpha = \{c \in K;\ c\alpha \in R\}, \qquad \text{dakle,} \quad K\alpha \cap R = \{c\alpha;\ c \in K_\alpha\},$$

i neka je

$$X = \mathfrak{h} \dot{+} \sum_{c \in K_\alpha} \dot{+} \mathfrak{g}_{c\alpha}.$$

Tada iz leme 1.6.1. slijedi da je $X$ $\rho-$invarijantan potprostor od $\mathfrak{g}$. Promatrat ćemo sada pripadnu subreprezentaciju $\rho_X$ Liejeve algebre $\mathfrak{s}_\alpha$. Iz tvrdnje (*b*) teorema 1.6.4. znamo da su sve težine od $h_\alpha$ u reprezentaciji $\rho_X$ cijeli brojevi. S druge strane, te težine su 0 i $c\alpha(h_\alpha) = 2c$ za $c \in K_\alpha$. Odatle slijedi da je $2c \in \mathbb{Z}$ $\forall c \in K_\alpha$, odnosno, $K_\alpha \subseteq \frac{1}{2}\mathbb{Z}$.

Kao i prije, sa $X_n$ označimo težinski potprostor za $h_\alpha$ u reprezentaciji $\rho_X$ s težinom $n \in \mathbb{Z}$. Prema tvrdnji (*c*) teorema 1.6.4. znamo da je broj ireducibilnih konstituenata reprezentacije $\rho_X$ jednak $\dim X_0 + \dim X_1$. Štoviše, iz tvrdnje (*b*) teorema 1.6.3. znamo da su težine neke ireducibilne reprezentacije ili sve parne ili sve neparne, da je broj ireducibilnih konstituenata s parnim težinama jednak $\dim X_0$, te da je broj ireducibilnih konstituenata s neparnim težinama jednak $\dim X_1$.

Primijetimo sada da je $X_0 = \mathfrak{h}$. Prema tome, broj ireducibilnih konstituenata s parnim težinama jednak je $\ell = \dim \mathfrak{h}$. No te ireducibilne konstituente je vrlo lako eksplicitno naći. Prije svega, $(\ell - 1)-$dimenzionalni potprostor $Ker\,\alpha = \{h \in \mathfrak{h};\ \alpha(h) = 0\}$ je očito $\rho_X-$invarijantan i na njemu je subreprezentacija trivijalna, dakle, u njoj je sadržano $\ell - 1$ ireducibilnih konstituenata. Još jedan $\rho_X$–invarijantan potprostor od $X$ s ireducibilnom subreprezentacijom i s parnim težinama je $\mathfrak{s}_\alpha$ : težine su $0, 2, -2$. Time smo došli do ukupno $\ell$ ireducibilnih konstituenata s parnim težinama, što znači da takvih više nema. Odatle slijedi da $n\alpha \notin R$ za $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, odnosno, $K_\alpha \cap \mathbb{Z} = \{1, -1\}$. Posebno, $2\alpha \notin R$. Odatle možemo zaključiti da $\frac{1}{2}\alpha \notin R$; doista, kad bi $\beta = \frac{1}{2}\alpha$ bio korijen, to bi prema dokazanom značilo da $\alpha = 2\beta$ nije korijen. No $\frac{1}{2}\alpha \notin K_\alpha$ znači da je $X_1 = \{0\}$. Prema tome, u reprezentaciji $\rho_X$ uopće nema ireducibilnih konstituenata s neparnim težinama. Dakle, $X = \mathfrak{h} + \mathfrak{s}_\alpha$. To ima za posljedicu da je $\mathfrak{g}_\alpha = Kx_\alpha$, odnosno, $\dim \mathfrak{g}_\alpha = 1$. Nadalje, slijedi da je $K_\alpha \subseteq \mathbb{Z}$, odnosno, vrijedi $K_\alpha = \{1, -1\}$ ili $K\alpha \cap R = \{\alpha, -\alpha\}$. Prema tome, dokazane su tvrdnje $(a)$ i $(b)$.

Neka su sada $\alpha, \beta \in R$. Tada je $\beta(h_\alpha)$ jedna od težina elementa $h_\alpha \in \mathfrak{s}_\alpha$ u reprezentaciji $\rho = ad_\mathfrak{g}|\mathfrak{s}_\alpha$, pa iz tvrdnje $(a)$ teorema 1.6.4. slijedi da je $\beta(h_\alpha) \in \mathbb{Z}$, a to je prva tvrdnja u $(c)$.

Pretpostavimo sada da je $\beta \neq \pm\alpha$ i stavimo

$$Y = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \dot{+} \mathfrak{g}_{\beta+j\alpha}.$$

Očito je $Y$ $\rho$–invarijantan potprostor od $\mathfrak{g}$. Težine od $h_\alpha$ u pripadnoj subreprezentaciji su sve oblika $\beta(h_\alpha) + 2j$ za $j \in \mathbb{Z}$ (jer je $\alpha(h_\alpha) = 2$). Nadalje, svaki je težinski potprostor jednodimenzionalan i težine su ili sve parne ili su sve neparne. Posebno, ili je $\dim Y_0 = 1$ i $\dim Y_1 = 0$ ili je $\dim Y_0 = 0$ i $\dim Y_1 = 1$. U oba slučaju je $\dim Y_0 + \dim Y_1 = 1$, pa prema tvrdnji $(c)$ teorema 1.6.4. zaključujemo da je reprezentacija $\rho_Y$ Liejeve algebre $\mathfrak{s}_\alpha$ ireducibilna. Najveća težina je $\beta(h_\alpha)+2q$, a najmanja $\beta(h_\alpha)-2r$. Prema tvrdnji $(b)$ teorema 1.6.3. vrijedi $\beta(h_\alpha)-2r = -(\beta(h_\alpha)+2q)$, a odatle je $2\beta(h_\alpha) = 2r - 2q$, odnosno, $\beta(h_\alpha) = r - q$. Nadalje, iz iste tvrdnje vidimo da su težine od $h_\alpha$ u reprezentaciji $\rho_Y$ upravo svi brojevi oblika $\beta(h_\alpha)+2j$ za $j = -r, -r+1, \ldots, q-1, q$. To znači da je $\mathfrak{g}_{\beta+j\alpha} \neq \{0\}$, odnosno, $\beta + j\alpha \in R$, ako i samo ako je $j \in \mathbb{Z}$ i $-r \leq j \leq q$. Time je dokazana tvrdnja $(e)$.

Odatle slijedi i druga tvrdnja u $(c)$ za $\beta \neq \pm\alpha$, jer je $-r \leq -(r - q) \leq q$, dakle,

$$\beta - \beta(h_\alpha)\alpha = \beta - (r - q)\alpha \in R.$$

Ako je $\beta = \alpha$, onda je $\beta(h_\alpha) = 2$, pa je

$$\beta - \beta(h_\alpha)\alpha = \alpha - 2\alpha = -\alpha \in R.$$

Napokon, ako je $\beta = -\alpha$, onda je $\beta(h_\alpha) = -2$, pa je opet

$$\beta - \beta(h_\alpha)\alpha = -\alpha + 2\alpha = \alpha \in R.$$

Ako su $\alpha, \beta, \alpha + \beta \in R$, tada je $q \geq 1$. Iz teorije reprezentacija Liejeve algebre $\mathfrak{sl}(2, K) \simeq \mathfrak{s}_\alpha$ znamo da je $\rho_Y(x_\alpha) = ad_\mathfrak{g}\, x_\alpha|Y$ za svaku težinu $n$ manju od najveće surjekcija sa $Y_n$ na $Y_{n+2}$. Posebno, $ad\, x_\alpha \mathfrak{g}_\beta = \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$, dakle, $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] = \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$. Time je i tvrdnja $(e)$ dokazana.

Napokon, budući da je $\lambda \mapsto t_\lambda$ izomorfizam sa $\mathfrak{h}^*$ na $\mathfrak{h}$, iz tvrdnje $(a)$ propozicije 2.1.5. slijedi da $\{t_\alpha;\ \alpha \in R\}$ razapinje $\mathfrak{h}$. No tada i $\{h_\alpha;\ \alpha \in R\}$ razapinje $\mathfrak{h}$, što znači da je

$$\mathfrak{h} = \sum_{\alpha\in R} [\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}]$$

(naravno, ovo nije direktna suma). Odatle neposredno slijedi tvrdnja $(f)$.

Promatrajmo i dalje poluprostu Liejevu algebru $\mathfrak{g}$ nad algebarski zatvorenim poljem $K$ karakteristike 0, neka je $\mathfrak{h}$ maksimalna toralna podalgebra od $\mathfrak{g}$ i pripadni sistem korijena $R(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ označimo sa $R$ :

$$R = \{\alpha \in \mathfrak{h}^*;\ \alpha \neq 0,\ \mathfrak{g}_\alpha \neq \{0\}\}, \qquad \mathfrak{g}_\alpha = \{x \in \mathfrak{g};\ [h,x] = \alpha(h)x\ \forall h \in \mathfrak{h}\}.$$

Tada imamo korijenski rastav od $\mathfrak{g}$ :

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \dotplus \sum_{\alpha \in R} \dotplus\, \mathfrak{g}_\alpha.$$

Restrikcija Killingove forme $\kappa_\mathfrak{g}|\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}$ je nedegenerirana. Stoga smo mogli definirati izomorfizam $\lambda \mapsto t_\lambda$ prostora $\mathfrak{h}^*$ na prostor $\mathfrak{h}$ pomoću relacije

$$\lambda(h) = \kappa_\mathfrak{g}(h, t_\lambda) \qquad \forall h \in \mathfrak{h}.$$

Prenesimo sada pomoću izomorfizma $\lambda \mapsto t_\lambda$ formu $\kappa_\mathfrak{g}|\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}$ sa $\mathfrak{h}$ na $\mathfrak{h}^*$. Tu formu označimo sa $(\,\cdot\,|\,\cdot\,)$ :

$$(\lambda|\mu) = \kappa_\mathfrak{g}(t_\lambda, t_\mu) = Tr\,(ad_\mathfrak{g}\, t_\lambda)(ad_\mathfrak{g}\, t_\mu), \qquad \lambda, \mu \in \mathfrak{h}^*.$$

Prema tvrdnji $(a)$ propozicije 2.1.5. sistem korijena $R$ razapinje vektorski prostor $\mathfrak{h}^*$. Prema tome, postoji baza $B$ prostora $\mathfrak{h}^*$ sastavljena od korijena, odnosno $B \subseteq R$. Primijetimo sada da je za svaku takvu bazu $B$ sistem korijena $R$ sadržan u prostoru razapetom sa $B$ nad poljem $\mathbb{Q}$ racionalnih brojeva:

**Propozicija 2.2.2.** *Neka je $B = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell\} \subseteq R$ baza prostora $\mathfrak{h}^*$. Za svaki $\beta \in R$ je*

$$\beta = \sum_{i=1}^{\ell} c_i \alpha_i, \qquad c_i \in \mathbb{Q}.$$

*Drugim riječima, $R \subseteq span_\mathbb{Q} B$, odnosno, $span_\mathbb{Q} R = span_\mathbb{Q} B$. Nadalje, restrikcija forme $(\,\cdot\,|\,\cdot\,)$ na $span_\mathbb{Q} R \times span_\mathbb{Q} R$ je simetrična i pozitivno definitna.*

**Dokaz:** Za $\beta \in R$ naravno vrijedi

$$\beta = \sum_{i=1}^{\ell} c_i \alpha_i, \qquad c_i \in K.$$

Odatle slijedi

$$(\beta|\alpha_j) = \sum_{i=1}^{\ell} (\alpha_i|\alpha_j) c_i, \qquad j = 1, \ldots, \ell.$$

Za svako $j \in \{1, \ldots, \ell\}$ pomnožimo gornju jednakost sa $\dfrac{2}{(\alpha_j|\alpha_j)}$, pa dobivamo

$$2\frac{(\beta|\alpha_j)}{(\alpha_j|\alpha_j)} = \sum_{i=1}^{\ell} 2\frac{(\alpha_i|\alpha_j)}{(\alpha_j|\alpha_j)} c_i, \qquad j = 1, \ldots, \ell. \tag{2.6}$$

To možemo promatrati kao sustav od $\ell$ linearnih algebarskih jednadžbi sa $\ell$ nepoznanica $c_1, \ldots, c_\ell$. Primijetimo sada da su svi koeficijenti tog sustava cijeli brojevi. Doista, za svaki $\alpha \in R$, pa posebno za $\alpha = \alpha_j$, prema tvrdnji ($c$) propozicije 2.2.1. vrijedi $\beta(h_\alpha) \in \mathbb{Z}$. Međutim, prema tvrdnji ($f$) propozicije 2.1.5. vrijedi

$$h_\alpha = \frac{2}{\kappa_{\mathfrak{g}}(t_\alpha, t_\alpha)} t_\alpha,$$

dakle,

$$2\frac{(\beta|\alpha)}{(\alpha|\alpha)} = 2\frac{\beta(t_\alpha)}{\kappa_{\mathfrak{g}}(t_\alpha, t_\alpha)} = \beta\left(\frac{2}{\kappa_{\mathfrak{g}}(t_\alpha, t_\alpha)} t_\alpha\right) = \beta(h_\alpha) \in \mathbb{Z}.$$

Time je dokazano da su svi koeficijkenti sustava (2.6), tj.

$$2\frac{(\beta|\alpha_j)}{(\alpha_j|\alpha_j)} \quad \text{za} \quad j = 1, \dots, \ell \qquad \text{i} \qquad 2\frac{(\alpha_i|\alpha_j)}{(\alpha_j|\alpha_j)} \quad \text{za} \quad i, j = 1, \dots, \ell,$$

cijeli brojevi.

Budući da je forma $(\,\cdot\,|\,\cdot\,)$ na $\mathfrak{h}^* \times \mathfrak{h}^*$ nedegenerirana, njena je matrica u bilo kojoj bazi regularna. Posebno, to znači da je matrica s elementima $(\alpha_i|\alpha_j)$ regularna, pa je regularna i matrica koja se iz nje dobije množenjem svakog retka nekim skalarom različitim od nule. Prema tome, matrica s cjelobrojnim elementima $2\frac{(\alpha_i|\alpha_j)}{(\alpha_j|\alpha_j)}$ je regularna, pa njena inverzna ima sve elemente iz $\mathbb{Q}$. Odatle slijedi da su svi skalari $c_i$ racionalni brojevi. Time je dokazano da je $R \subseteq span_{\mathbb{Q}} B$, odnosno, $span_{\mathbb{Q}} R = span_{\mathbb{Q}} B$ za svaku bazu $B \subseteq R$ prostora $\mathfrak{h}^*$.

Dokažimo sada drugu tvrdnju. Naravno, kako je Killingova forma $\kappa_{\mathfrak{g}}$ simetrična, to je i forma $(\,\cdot\,|\,\cdot\,)$ na $\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}$, pa i njena restrikcija na $span_{\mathbb{Q}} R \times span_{\mathbb{Q}} R$, simetrična. Treba još dokazati pozitivnu definitnost. Imamo

$$(\lambda|\mu) = \kappa_{\mathfrak{g}}(t_\lambda, t_\mu) = Tr\,(ad_{\mathfrak{g}}\, t_\lambda)(ad_{\mathfrak{g}}\, t_\mu).$$

Neka je $\{h_1, \dots, h_\ell\}$ baza od $\mathfrak{h}$ i za svaki $\alpha \in R$ izaberimo $x_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha,\ x_\alpha \neq 0$. Tada je

$$\{h_1, \dots, h_\ell\} \cup \{x_\alpha;\ \alpha \in R\}$$

baza vektorskog prostora $\mathfrak{g}$. Za svaki $h \in \mathfrak{h}$ operator $ad_{\mathfrak{g}}\, h$ u toj bazi ima dijagonalnu matricu koja na dijagonali ima $\ell$ nula i brojeve $\alpha(h)$, $\alpha \in R$. Prema tome, za $h, k \in \mathfrak{h}$ je

$$\kappa_{\mathfrak{g}}(h, k) = \sum_{\alpha \in R} \alpha(h)\alpha(k).$$

Posebno, za $\lambda \in span_{\mathbb{Q}} R$ imamo

$$(\lambda|\lambda) = \sum_{\alpha \in R} \alpha(t_\lambda)^2 = \sum_{\alpha \in R} (\alpha|\lambda)^2.$$

Budući da su svi $(\alpha|\lambda) \in \mathbb{Q}$, zaključujemo da je gornja suma $\geq 0$, a jednaka je 0 samo ako je $(\alpha|\lambda) = 0\ \forall \alpha \in R$. Međutim, $R$ razapinje $\mathfrak{h}^*$ i forma $(\,\cdot\,|\,\cdot\,)$ je nedegenerirana, pa vidimo da iz $(\lambda|\lambda) = 0$ slijedi $\lambda = 0$. Time je dokazano da je forma $(\,\cdot\,|\,\cdot\,)$ na prostoru $span_{\mathbb{Q}} R$ pozitivno definitna.

Neka je sada $V$ realan unitaran prostor koji se iz vektorskog prostora $span_{\mathbb{Q}} R$ s formom $(\,\cdot\,|\,\cdot\,)$ dobiva proširenjem polja skalara sa $\mathbb{Q}$ do $\mathbb{R} : V = (span_{\mathbb{Q}} R) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$. Ako je $\{e_i;\ i \in I\}$ baza vektorskog prostora $\mathbb{R}$ nad poljem $\mathbb{Q}$, onda za svaki $v \in V$ postoje jedinstveni $v_i \in span_{\mathbb{Q}} R,\ i \in I$, takvi da je skup $\{i \in I;\ v_i \neq 0\}$ konačan i da je

$$v = \sum_{i \in I} e_i v_i.$$

Tada za $v, w \in V$ vrijedi

$$(v|w) = \sum_{i,j\in I} e_i e_j (v_i|w_j).$$

Konačan skup $R$ razapinje prostor $V$. Nadalje, ako je $\alpha \in R$ onda je $\mathbb{R}\alpha \cap R = \{\alpha, -\alpha\}$. Napokon, prema tvrdnji $(c)$ propozicije 2.2.1. za $\alpha, \beta \in R$ vrijedi $\beta(h_\alpha) \in \mathbb{Z}$ i $\beta - \beta(h_\alpha)\alpha \in R$. Broj $\beta(h_\alpha)$ može se napisati pomoću forme $(\,\cdot\,|\,\cdot\,)$. Naime, prema tvrdnji $(f)$ propozicije 2.1.5. je $h_\alpha = \dfrac{2}{\kappa_{\mathfrak{g}}(t_\alpha, t_\alpha)} t_\alpha$, pa imamo

$$\beta(h_\alpha) = 2\frac{\beta(t_\alpha)}{\kappa_{\mathfrak{g}}(t_\alpha, t_\alpha)} = 2\frac{\kappa_{\mathfrak{g}}(t_\beta, t_\alpha)}{\kappa_{\mathfrak{g}}(t_\alpha, t_\alpha)} = 2\frac{(\beta|\alpha)}{(\alpha|\alpha)}.$$

Prema tome, vrijedi

$$2\frac{(\beta|\alpha)}{(\alpha|\alpha)} \in \mathbb{Z} \quad \text{i} \quad \beta - 2\frac{(\beta|\alpha)}{(\alpha|\alpha)}\alpha \in R \qquad \forall \alpha, \beta \in R.$$

U sljedećem poglavlju proučit ćemo i u potpunosti klasificirati i opisati konačne podskupove konačnodimenzionalnih realnih vektorskih prostora s navedenim svojstvima.

# Poglavlje 3

# SISTEMI KORIJENA. WEYLOVA GRUPA

## 3.1 Refleksije

Neka je $V$ vektorski prostor nad poljem $K$. Linearan operator $\sigma \in L(V)$ zove se **pseudorefleksija**, ako je $I_V - \sigma$ operator ranga 1, tj. ako postoji vektor $v \in V,\ v \neq 0$, i linearan funkcional $f \in V^*,\ f \neq 0$, takvi da je

$$(I_V - \sigma)x = f(x)v \qquad \text{ili} \qquad \sigma x = x - f(x)v \qquad x \in V. \tag{3.1}$$

Pseudorefleksiju $\sigma$ definiranu kao u (3.1) pomoću vektora $v$ i linearnog funkcionala $f$ označavat ćemo sa $\sigma_{v,f}$. Slika operatora $I_V - \sigma_{v,f}$ razapeta je vektorom $v$, a jezgra tog operatora je jezgra linearnog funkcionala $f$. Primijetimo da je dualni operator pseudorefleksije $\sigma_{v,f}$ prostora $V$ pseudorefleksija $\sigma_{f,v}$ prostora $V^*$ :

$$\sigma_{f,v} g = g - g(v)f, \qquad g \in V^*.$$

Ako je $\sigma$ pseudorefleksija vektorskog prostora $V$ i $v \neq 0$ bilo koji vektor iz slike operatora $I_V - \sigma$, onda kažemo da je $\sigma$ **pseudorefleksija u odnosu na vektor** $v$. Nadalje, **hiperploha pseudorefleksije** $\sigma$ je naziv za jezgru operatora $I_V - \sigma$, tj. za potprostor $\{x \in V;\ \sigma x = x\}$ prostora $V$ kodimenzije 1.

Ukoliko je neki od operatora ireducibilne reprezentacije grupe pseudorefleksija, zaključak Schurove leme vrijedi i bez pretpostavke algebarske zatvorenosti polja i bez pretpostavke konačnodimenzionalnosti prostora:

**Propozicija 3.1.1.** *Neka je $\pi$ ireducibilna reprezentacija grupe $G$ na vektorskom prostoru $V$ nad poljem $K$ i pretpostavimo da je za neki $g \in G$ operator $\pi(g)$ pseudorefleksija. Tada samo skalarni multipli jediničnog operatora komutiraju sa svim operatorima $\pi(a)$ : $End_G(V) = \{\lambda I_V;\ \lambda \in K\}$.*

**Zadatak 3.1.** *Dokažite propoziciju 3.1.1.*

**Uputa:** Uočite da je jednodimenzionalni potprostor $Im\,(I_V - \pi(g))$ invarijantan s obzirom na $A \in End_G(V)$, pa $A$ ima netrivijalni svojstveni vektor.

Značajniju činjenicu imamo u slučaju konačnodimenzionalne reprezentacije:

**Propozicija 3.1.2.** *Neka je $\pi$ ireducibilna reprezentacija grupe $G$ na konačnodimenzionalnom vektorskom prostoru $V$ takva da je $\pi(g)$ pseudorefleksija za neki $g \in G$ i neka je $B \neq 0$ bilinearna forma na prostoru $V$ koja je $\pi-$invarijantna:*

$$B(\pi(a)v, \pi(a)w) = B(v, w) \qquad \forall v, w \in V \quad i \quad \forall a \in G.$$

*Tada je $B$ nedegenerirana i ili simetrična ili antisimetrična. Svaka bilinearna $\pi-$invarijantna forma na $V$ proporcionalna je formi $B$.*

**Dokaz:** Stavimo

$$X = \{v \in V;\ B(v,w) = 0 \quad \forall w \in V\} \qquad \text{i} \qquad Y = \{v \in V;\ B(w,v) = 0 \quad \forall w \in V\}.$$

Budući da je forma $B$ $\pi-$invarijantna, ti su potprostori $\pi-$invarijantni; npr.

$$v \in X \quad \Longrightarrow \quad B(\pi(a)v,w) = B(v,\pi(a)^{-1}w) = 0 \ \forall w \in V \text{ i } \forall a \in G \quad \Longrightarrow \quad \pi(a)v \in X \ \forall a \in G.$$

Kako je $B \neq 0$, to su $X \neq V$ i $Y \neq V$. Iz ireducibilnosti repreezentacije $\pi$ slijedi da su $X = Y = \{0\}$. Dakle, forma $B$ je nedegenerirana.

Kako je prostor $V$ konačnodimenzionalan, za svaku bilinearnu formu $C$ postoji jedinstven $A \in L(V)$ takav da je

$$C(v,w) = B(Av,w), \qquad v,w \in V.$$

Ako je $C$ $\pi-$invarijantna, onda je taj operator $A \in End_G(V)$. Doista, za $a \in G$, $v,w \in V$ imamo redom

$$B(A\pi(a)v,w) = C(\pi(a)v,w) = C(v,\pi(a)^{-1}w) = B(Av,\pi(a)^{-1}w) = B(\pi(a)Av,w),$$

pa iz nedegeneriranosti forme $B$ zaključujemo da je $A\pi(a) = \pi(a)A \ \ \forall a \in G$, tj. doista je $A \in End_G(V)$. Prema propoziciji 3.1.1. slijedi da je $A = \lambda I_V$ za neki $\lambda \in V$. Dakle, za svaku $\pi-$invarijantnu bilinearnu formu $C$ postoji $\lambda \in K$ takav da je $C = \lambda B$.

Posebno, to vrijedi za formu $C(v,w) = B(w,v)$. Dakle, postoji $\alpha \in K$ takav da je

$$B(w,v) = \alpha B(v,w) \qquad \forall v,w \in V.$$

No tada imamo

$$B(v,w) = \alpha B(w,v) = \alpha^2 B(v,w), \qquad v,w \in V,$$

a kako je $B \neq 0$, slijedi $\alpha^2 = 1$. Dakle, ili je $\alpha = 1$, što znači da je forma $B$ simetrična, ili je $\alpha = -1$, što znači da je forma $B$ antisimetrična.

**U ostatku ovog odjeljka pretpostavljamo da je $K$ polje karakteristike $\neq 2$.**

**Refleksija** na vektorskom prostoru $V$ nad poljem $K$ je pseudorefleksija $\sigma$ takva da je $\sigma^2 = I_V$. Ako je $\sigma$ refleksija, stavljamo

$$V_\sigma^+ = Ker(I_V - \sigma) = \{v \in V;\ \sigma v = v\} \qquad \text{i} \qquad V_\sigma^- = Ker(I_V + \sigma) = \{v \in V;\ \sigma v = -v\}.$$

**Propozicija 3.1.3.** *Neka je $\sigma \in L(V)$.*

(a) *Ako je $\sigma$ refleksija, onda je* $\dim V_\sigma^- = 1$ *i* $V = V_\sigma^+ \dotplus V_\sigma^-$.

(b) *Neka su $X, Y$ potprostori od $V$ takvi da je $V = X \dotplus Y$ i* $\dim X = 1$. *Pretpostavimo da vrijedi $\sigma x = -x$ za svaki $x \in X$ i $\sigma y = y$ za svaki $y \in Y$. Tada je $\sigma$ refleksija i vrijedi $X = V_\sigma^- = Im(I_V - \sigma)$ i $Y = V_\sigma^+$.*

**Zadatak 3.2.** *Dokažite propoziciju 3.1.3.*

**Korolar 3.1.4.** *Ako je $\sigma$ refleksija na konačnodimenzionalnom vektorskom prostoru $V$, onda je* $\det \sigma = -1$.

**Dokaz:** Iz propozicije 3.1.3. slijedi da u $V$ postoji baza u kojoj operator $\sigma$ ima matricu

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

**Propozicija 3.1.5.** *Neka je $\sigma$ refleksija na vektorskom prostoru $V$ i neka su $W$ potprostor od $V$ i $A \in L(V)$.*

(*a*) *Vrijedi $\sigma W \subseteq W$ ako i samo ako je ili $V_\sigma^- \subseteq W$ ili je $W \subseteq V_\sigma^+$.*

(*b*) *Vrijedi $A\sigma = \sigma A$ ako i samo su potprostori $V_\sigma^+$ i $V_\sigma^-$ invarijantni s obzirom na operator $A$.*

**Dokaz:** (*a*) Ako je $W \subseteq V_\sigma^+$, onda je $\sigma v = v \ \forall v \in W$, dakle, $W$ je $\sigma-$invarijantan. Pretpostavimo sada da je $V_\sigma^- \subseteq W$. Za $v \in W$ imamo

$$\sigma(\sigma v - v) = \sigma^2 v - \sigma v = v - \sigma v = -(\sigma v - v) \quad \Longrightarrow \quad \sigma v - v \in V_\sigma^- \subseteq W \quad \Longrightarrow \quad \sigma v = (\sigma v - v) + v \in W.$$

Dakle, ponovo je $W$ $\sigma-$invarijantan potprostor.

Pretpostavimo sada da je $W$ potprostor od $V$ koji je $s-$invarijantan. Ako $W$ nije sadržan u $V_\sigma^+$, postoji $v \in W$ takav da je $\sigma v \neq v$. Tada za vektor $w = \sigma v - v \neq 0$ vrijedi $w \in V_\sigma^-$, a kako je potprostor $V_\sigma^-$ jednodimenzionalan, vrijedi $V_\sigma^- = Kw$. S druge strane, kako je $\sigma W \subseteq W$, vrijedi $\sigma v \in W$, dakle i $w = \sigma v - v \in W$. Odatle je $V_\sigma^- = Kw \subseteq W$.

(*b*) Pretpostavimo da vrijedi $A\sigma = \sigma A$. Tada su svojstveni potprostori $V_\sigma^+$ i $V_\sigma^-$ operatora $\sigma$ invarijantni s obzirom na operator $A$.

Obratno, pretpostavimo sada da su potprostori $V_\sigma^+$ i $V_\sigma^-$ invarijantni s obzirom na operator $A$. Za $v \in V_\sigma^\pm$ je tada $Av \in V_\sigma^\pm$, dakle, $\sigma v = \pm v$ i $\sigma A v = \pm A v$. Odatle je

$$(A\sigma - \sigma A)v = A\sigma v - \sigma A v = \pm Av \mp Av = 0.$$

Dakle, operator $A\sigma - \sigma A$ se poništava i na $V_\sigma^+$ i na $V_\sigma^-$. Kako je $V = V_\sigma^+ \dot{+} V_\sigma^-$, slijedi $A\sigma - \sigma A = 0$, odnosno, $A\sigma = \sigma A$.

Posljedica ove propozicije je sljedeća činjenica koja će imati važne primjene:

**Propozicija 3.1.6.** *Neka su $\sigma$ i $\tau$ dvije međusobno različite refleksije vektorskog prostora $V$. Tada $\sigma$ i $\tau$ komutiraju ako i samo ako vrijedi $V_\sigma^- \subseteq V_\tau^+$ i $V_\tau^- \subseteq V_\sigma^+$.*

**Dokaz:** Pretpostavimo da je $V_\sigma^- \subseteq V_\tau^+$ i $V_\tau^- \subseteq V_\sigma^+$. Prema tvrdnji (*a*) propozicije 3.1.5. tada su potprostori $V_\tau^+$ i $V_\tau^-$ invarijantni s obzirom na operator $\sigma$. Sada iz tvrdnje (*b*) iste propozicije slijedi da $\sigma$ i $\tau$ komutiraju.

Pretpostavimo sada da refleksije $\sigma$ i $\tau$ komutiraju. Prema tvrdnji (*b*) prethodne propozicije potprostor $V_\sigma^-$ je invarijantan s obzirom na operator $\tau$. Prema tvrdnji (*a*) iste propozicije imamo sljedeće dvije mogućnosti:

(1) Vrijedi $V_\tau^- \subseteq V_\sigma^-$. Kako je $\dim V_\tau^- = 1 = \dim V_\sigma^-$, slijedi $V_\tau^- = V_\sigma^-$. Prema tome, $V_\sigma^- \not\subseteq V_\tau^+$. No kako je potprostor $V_\tau^+$ invarijantan s obzirom na operator $\sigma$, prema tvrdnji (*a*) prethodne propozicije vrijedi $V_\tau^+ \subseteq V_\sigma^+$. Kako su oba potprostora kodimenzije 1 u prostoru $V$, slijedi $V_\tau^+ = V_\sigma^+$. No tada je $\sigma = \tau$, suprotno pretpostavci.

(2) Prema tome, vrijedi $V_\sigma^- \subseteq V_\tau^+$. To znači da je $Im(I_V - \sigma) \subseteq Ker(I_V - \tau)$. Odatle je $(I_V - \tau)(I_V - \sigma) = 0$. Kako $\sigma$ i $\tau$ komutiraju, slijedi da je i $(I_V - \sigma)(I_V - \tau) = 0$, a odatle je $V_\tau^- = Im(I_V - \tau) \subseteq Ker(I_V - \sigma) = V_\sigma^+$.

**Zadatak 3.3.** *Neka su* $v \in V \setminus \{0\}$ *i* $f \in V^* \setminus \{0\}$. *Dokažite da je* $\sigma_{v,f}$ *refleksija ako i samo ako je* $f(v) = 2$, *odnosno,* $\sigma_{v,f}v = -v$.

**Propozicija 3.1.7.** *Neka je* $V$ *vektorski prostor nad poljem* $K$ *karakteristike* $0$ *i neka je* $R$ *konačan podskup od* $V$ *koji razapinje* $V$ *i koji ne sadrži* $0$. *Za svaki* $\alpha \in R$ *postoji najviše jedna refleksija* $\sigma$ *prostora* $V$ *takva da je* $\sigma R = R$ *i* $\sigma\alpha = -\alpha$.

**Dokaz:** Neka je
$$G = \{A \in GL(V);\ AR = R\}.$$
Budući da $R$ razapinje $V$, operator $A \in L(V)$ potpuno je određen svojom restrikcijom $A|R$. Prema tome, grupa $G$ izomorfna je podgrupi grupe permutacija skupa $R$. Dakle, grupa $G$ je konačna. Pretpostavimo sada da su $\sigma$ i $\tau$ refleksije od $V$ takve da je $\sigma R = R$, $\tau R = R$ i $\sigma\alpha = \tau\alpha = -\alpha$. Tada je $\omega = \sigma\tau \in G$, pa postoji $m \in \mathbb{N}$ takav da je $\omega^m = I_V$. S druge strane, vrijedi
$$\omega\alpha = \alpha. \tag{3.2}$$
Nadalje, $\sigma$ i $\tau$ su refleksije u odnosu na vektor $\alpha$, pa je $V_\sigma^- = K\alpha = V_\tau^-$, dakle, prema tvrdnji $(b)$ propozicije 3.1.3. imamo $Im(I_V - \sigma) = K\alpha = Im(I_V - \tau)$. Sada za svaki $v \in V$ imamo
$$v - \omega v = v - \sigma\tau v = v - \tau v + \tau v - \sigma(\tau v) = (I_V - \tau)v + (I_V - \sigma)tv \in Im(I_V - \tau) + Im(I_V - \sigma) = K\alpha.$$
Dakle, vrijedi
$$\omega v - v \in K\alpha \qquad \forall v \in V. \tag{3.3}$$
Iz (3.2) i (3.3) slijedi da postoji $f \in V^*$ takav da je
$$\omega v = v + f(v)\alpha \qquad \forall v \in V \qquad \text{i} \qquad f(\alpha) = 0.$$
Indukcijom po $n$ nalazimo
$$\omega^n v = v + nf(v)\alpha \qquad \forall v \in V \quad \text{i} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$
Posebno, za $n = m$ imamo
$$v = \omega^m v = v + mf(v)\alpha \quad \forall v \in V \qquad \Longrightarrow \qquad f(v) = 0 \quad \forall v \in V.$$
Prema tome je $\sigma\tau = \omega = I_V$, a kako je $\sigma^2 = I_V$, slijedi $\sigma = \tau$.

Neka je sada $V$ konačnodimenzionalan realan unitaran prostor sa skalarnim produktom $(\cdot\,|\,\cdot)$. **Refleksija** $\sigma$ prostora $V$ zove se **ortogonalna**, ako je $V_\sigma^+ \perp V_\sigma^-$.

**Zadatak 3.4.** *Neka je s refleksija konačnodimenzionalnog realnog unitarnog prostora* $V$. *Dokažite da su sljedeća tri svojstva međusobno ekvivalentna:*

(a) $\sigma$ *je ortogonalna projekcija.*

(b) $\sigma$ *je ortogonalan operator, odnosno,* $\sigma\sigma^* = \sigma^*\sigma = I_V$ ($\sigma^*$ *je oznaka za adjungiran operator operatora* $\sigma$).

(c) $\sigma$ *je hermitski operator, odnosno,* $\sigma^* = \sigma$.

**Propozicija 3.1.8.** *Neka je* $\sigma$ *ortogonalna refleksija na konačnodimenzionalnom realnom unitarnom prostoru* $V$ *i neka je* $W$ *potprostor prostora* $V$. *Sljedeća su tri svojstva međusobno ekvivalentna:*

$(a)$ *Potprostor $W$ je $\sigma-$invarijantan.*

$(b)$ *Ortogonalni komplement $W^\perp$ potprostora $W$ je $\sigma-$invarijantan.*

$(c)$ *Vrijedi $W \subseteq V_\sigma^+$ ili $W^\perp \subseteq V_\sigma^+$.*

**Dokaz:** Ekvivalencije $(a) \Leftrightarrow (c)$ i $(b) \Leftrightarrow (c)$ slijede iz $V_\sigma^- = (V_\sigma^+)^\perp$, odnosno, $V_\sigma^+ = (V_\sigma^-)^\perp$ i iz tvrdnje $(a)$ propozicije 3.1.5. jer imamo

$$W^\perp \subseteq V_\sigma^+ \quad \Longleftrightarrow \quad V_\sigma^- \subseteq W \qquad \text{i} \qquad W \subseteq V_\sigma^+ \quad \Longleftrightarrow \quad V_\sigma^- \subseteq W^\perp .$$

## 3.2 Sistemi korijena: definicija i osnovna svojstva

Neka je $V$ realan konačnodimenzionalan vektorski prostor. Za podskup $R \subseteq V$ kažemo da je **sistem korijena** u vektorskom prostoru $V$ ako su ispunjena sljedeća tri svojstva:

$(RS1)$ Skup $R$ je konačan, $0 \notin R$, $span\, R = V$.

$(RS2)$ Za svaki $\alpha \in R$ postoji $\check{\alpha} \in V^*$ takav je $\check{\alpha}(\alpha) = 2$ i da za refleksiju $\sigma_{\alpha,\check{\alpha}}$ vrijedi $\sigma_{\alpha,\check{\alpha}} R = R$.

$(RS3)$ Za $\alpha, \beta \in R$ vrijedi $\check{\alpha}(\beta) \in \mathbb{Z}$.

Primijetimo da je prema propoziciji 3.1.7. refleksija $\sigma_{\alpha,\check{\alpha}}$, a time i linearni funkcional $\check{\alpha}$, sa svojstvom $(RS2)$ potpuno određena sa $\alpha$, pa $(RS3)$ ima smisla. Pisat ćemo kraće $\sigma_{\alpha,\check{\alpha}} = \sigma_\alpha$. Dakle,

$$\sigma_\alpha v = v - \check{\alpha}(v)\alpha, \qquad v \in V.$$

Elementi od $R$ zovu se **korijeni**, a dimenzija prostora $V$ zove se **rang sistema korijena** $R$.

Definiramo **grupu automorfizama** sistema korijena $R$ :

$$Aut(R) = \{\omega \in GL(V);\ \omega R = R\}.$$

Njena podgrupa generirana refleksijama $\sigma_\alpha$ zove se **Weylova grupa** sistema korijena $R$ i označava sa $W(R)$ :

$$W(R) = \langle \sigma_\alpha;\ \alpha \in R\rangle.$$

Primijetimo da je svaki element $\omega \in Aut(R)$ potpuno određen svojom restrikcijom $\omega|R$, budući da skup $R$ razapinje vektorski prostor $V$. Prema tome je preslikavanje $\omega \mapsto \omega|R$ monomorfizam grupe $Aut(R)$ u grupu permutacija skupa $R$. Kako je skup $R$ konačan, njegova grupa permutacija je konačna. Prema tome, $Aut(R)$ je konačna podgrupa od $GL(V)$.

**Propozicija 3.2.1.** *$W(R)$ je normalna podgrupa grupe $Aut(R)$. Za $\alpha \in R$ i $\omega \in Aut(R)$ vrijedi $\sigma_{\omega\alpha} = \omega\sigma_\alpha\omega^{-1}$ i $(\omega\alpha)\check{} = (\omega^t)^{-1}\check{\alpha}$; pri tome je za $A \in L(V)$ sa $A^t \in L(V^*)$ označen dualni operator: $(A^t f)(v) = f(Av),\ v \in V,\ f \in V^*$.*

**Dokaz:** Neka je $\alpha \in R$ i $\omega \in Aut(R)$. Stavimo $\sigma = \omega\sigma_\alpha\omega^{-1}$. Vrijedi $\sigma^2 = \omega\sigma_\alpha^2\omega^{-1} = I_V$. Nadalje, $I_V - \sigma = \omega(I_V - \sigma_\alpha)\omega^{-1}$ je operator ranga 1. Zaključujemo da je $\sigma$ refleksija prostora $V$. Imamo za $v \in V$ :

$$v \in V_\sigma^- \iff \sigma v = -v \iff \omega\sigma_\alpha\omega^{-1}v = -v \iff$$

$$\iff \sigma_\alpha\omega^{-1}v = -\omega^{-1}v \iff \omega^{-1}v \in V_{\sigma_\alpha}^- \iff v \in \omega V_{\sigma_\alpha}^-.$$

Dakle, $V_\sigma^- = \omega V_{\sigma_\alpha}^-$. Međutim, $V_{\sigma_\alpha}^- = \mathbb{R}\alpha$, pa slijedi da je $V_\sigma^- = \mathbb{R}\omega\alpha$. Prema tome, $\sigma$ je refleksija u odnosu na vektor $\omega\alpha \in R$. Uočimo sada da je $\sigma R = R$. Doista, za $\beta \in R$ i $\gamma = \omega^{-1}\beta \in R$ vrijedi

$$\sigma\beta = \omega\sigma_\alpha\gamma \in \omega R = R.$$

Dakle, $\sigma R \subseteq R$, a kako je $\sigma^2 = I_V$, dobivamo $\sigma R = R$. Sada iz propozicije 3.1.7. slijedi $\sigma = \sigma_{\omega\alpha}$.

Sada za $v \in V,\ \alpha \in R$ i $\omega \in Aut(R)$ imamo redom

$$v - (\omega\alpha)\check{}(v)\omega\alpha = \sigma_{\omega\alpha}v = \omega\sigma_\alpha\omega^{-1}v = \omega[\omega^{-1}v - \check{\alpha}(\omega^{-1}v)\alpha] = v - \check{\alpha}(\omega^{-1}v)\omega\alpha = v - \left(\left(\omega^{-1}\right)^t\check{\alpha}\right)(v)\omega\alpha.$$

Odatle je $(\omega\alpha)\check{} = (\omega^{-1})^t\,\check{\alpha} = (\omega^t)^{-1}\,\check{\alpha}$.

Budući da refleksije $\sigma_\alpha,\ \alpha \in R$, generiraju podgrupu $W(R)$ grupe $Aut(R)$, iz dokazane jednakosti $\omega\sigma_\alpha\omega^{-1} = \sigma_{\omega\alpha}$ slijedi da je $W(R)$ normalna podgrupa grupe $Aut(R)$.

Ako je $G$ konačna podgrupa od $GL(V)$, onda na prostoru $V$ postoji skalarni produkt $(\cdot\,|\,\cdot)$ u odnosu na koji su svi operatori $g \in G$ ortogonalni, tj. $gg^* = g^*g = I_V$ ili $(gv|gw) = (v|w)$ za sve $v, w \in V$. Doista, ako je $\langle\cdot\,|\,\cdot\rangle$ bilo koji skalarni produkt na prostoru $V$, onda se lako vidi da je sa

$$(v|w) = \sum_{g \in G} \langle gv|gw\rangle, \qquad v, w \in V,$$

zadan skalarni produkt s traženim svojstvom.

**Lema 3.2.2.** *Neka je $R$ sistem korijena u realnom unitarnom prostoru $V$ takav da je $W(R)$ podgrupa ortogonalne grupe $O(V)$. Ako identificiramo $V$ i $V^*$ pomoću skalarnog produkta $(\cdot\,|\,\cdot)$ unitarnog prostora $V$, onda je*

$$\check{\alpha} = \frac{2}{(\alpha|\alpha)}\alpha \qquad \forall \alpha \in R.$$

**Dokaz:** Za $\alpha \in R$ definiramo linearan operator $s_\alpha : V \to V$ na sljedeći način:

$$s_\alpha v = v - 2\frac{(\alpha|v)}{(\alpha|\alpha)}\alpha, \qquad v \in V.$$

Tada vrijedi

$$s_\alpha \alpha = -\alpha \qquad \text{i} \qquad s_\alpha v = v \qquad \forall v \in \{\alpha\}^\perp.$$

Prema tome, $s_\alpha$ je ortogonalna refleksija u odnosu na vektor $\alpha$, odnosno, vrijedi $s_\alpha = \sigma_\alpha$. Za svaki $v \in V$ stoga imamo

$$v - \check{\alpha}(v)\alpha = \sigma_\alpha v = s_\alpha v = v - 2\frac{(\alpha|v)}{(\alpha|\alpha)}\alpha.$$

Odatle, uz identifikaciju $V^*$ sa $V$ pomoću skalarnog produkta $(\cdot\,|\,\cdot)$, imamo

$$(\check{\alpha}|v) = \check{\alpha}(v) = 2\frac{(\alpha|v)}{(\alpha|\alpha)} = \left(\frac{2}{(\alpha|\alpha)}\alpha \,\middle|\, v\right) \qquad \forall v \in V,$$

dakle,

$$\check{\alpha} = \frac{2}{(\alpha|\alpha)}\alpha \qquad \forall \alpha \in R.$$

**Propozicija 3.2.3.** *Neka je $R$ sistem korijena u $V$.*

(a) *$\check{R} = \{\check{\alpha};\ \alpha \in R\}$ je sistem korijena u $V^*$.*

(b) *Uz kanonsku identifikaciju $V^{**}$ sa $V$ za svaki $\alpha \in R$ vrijedi $\sigma_{\check{\alpha}} = \sigma_{\check{\alpha},\alpha}$, odnosno, $\check{\check{\alpha}} = \alpha$.*

(c) *Za $\alpha, \beta \in R$ je $\sigma_{\check{\alpha}}\check{\beta} = (\sigma_\alpha \beta)\check{}$.*

(d) *Preslikavanje $\sigma \mapsto (\sigma^t)^{-1} = (\sigma^{-1})^t$ je izomorfizam grupe $Aut(R)$ na grupu $Aut(\check{R})$ i grupe $W(R)$ na grupu $W(\check{R})$.*

**Dokaz:** Možemo pretpostaviti da je $V$ realan unitaran prostor takav da je $W(R)$ podgrupa ortogonalne grupe $O(V)$. Tada se pomoću skalarnog produkta u prostoru $V$ dualni prostor $V^*$ može identificirati s prostorom $V$, no kako bismo izbjegli nejasnoće razlikovat ćemo te prostore, a sa $\varphi : V \to V^*$ ćemo označiti izomorfizam definiran skalarnim produktom:

$$\varphi(v)(w) = (v|w), \qquad v, w \in V.$$

Formula u lemi 3.2.2. poprima oblik

$$\check{\alpha} = \frac{2}{(\alpha|\alpha)}\varphi(\alpha), \qquad \alpha \in R.$$

Kako je $\varphi$ izomorfizam, iz svojstva $(RS1)$ sistema korijena $R$ u prostoru $V$ slijedi da isto svojstvo ima skup $\check{R}$ u prostoru $V^*$. Skalarni produkt $(\,\cdot\,|\,\cdot\,)$ na prostoru $V$ pomoću izomorfizma $\varphi$ prenosi se u skalarni produkt na prostoru $V^*$ koji ćemo također označiti sa $(\,\cdot\,|\,\cdot\,)$ :

$$(\varphi(v)|\varphi(w)) = (v|w), \qquad v, w \in V.$$

Za $\alpha \in R$ označimo sa $\sigma_{\check{\alpha}}$ ortogonalnu refleksiju prostora $V^*$ u odnosu na $\check{\alpha}$ :

$$\sigma_{\check{\alpha}} f = f - 2\frac{(\check{\alpha}|f)}{(\check{\alpha}|\check{\alpha})}\check{\alpha}, \qquad f \in V^*.$$

Za svaki $\alpha \in R$ vrijedi

$$(\check{\alpha}|\check{\alpha}) = \left(\frac{2}{(\alpha|\alpha)}\varphi(\alpha)\,\middle|\,\frac{2}{(\alpha|\alpha)}\varphi(\alpha)\right) = \frac{4(\varphi(\alpha)|\varphi(\alpha))}{(\alpha|\alpha)^2} = \frac{4}{(\alpha|\alpha)},$$

pa slijedi za $f \in V^*$ :

$$\sigma_{\check{\alpha}} f = f - 2\frac{(\check{\alpha}|f)}{(\check{\alpha}|\check{\alpha})}\check{\alpha} = f - 2\frac{\left(\frac{2}{(\alpha|\alpha)}\varphi(\alpha)\,\middle|\,f\right)}{\frac{4}{(\alpha|\alpha)}}\check{\alpha} = f - (\varphi(\alpha)|f)\check{\alpha} = f - f(\alpha)\check{\alpha} = \sigma_{\check{\alpha},\alpha} f.$$

Kako je $f \in V^*$ bio proizvoljan, slijedi $\sigma_{\check{\alpha}} = \sigma_{\check{\alpha},\alpha}$.

Za $\alpha, \beta \in R$, odnosno, za $\check{\alpha}, \check{\beta} \in \check{R}$ imamo

$$\sigma_{\check{\alpha}}\check{\beta} = \check{\beta} - \check{\beta}(\alpha)\check{\alpha} = \frac{2}{(\beta|\beta)}\varphi(\beta) - \frac{2}{(\beta|\beta)}\varphi(\beta)(\alpha)\frac{2}{(\alpha|\alpha)}\varphi(\alpha) = \frac{2}{(\beta|\beta)}\left[\varphi(\beta) - 2\frac{(\alpha|\beta)}{(\alpha|\alpha)}\varphi(\alpha)\right] =$$

$$= \frac{2}{(\beta|\beta)}\varphi\left(\beta - 2\frac{(\alpha|\beta)}{(\alpha|\alpha)}\alpha\right) = \frac{2}{(\beta|\beta)}\varphi(\sigma_\alpha\beta) = \frac{2}{(\sigma_\alpha\beta|\sigma_\alpha\beta)}\varphi(\sigma_\alpha\beta).$$

Budući da je $\gamma = \sigma_\alpha\beta \in R$, slijedi

$$\sigma_{\check{\alpha}}\check{\beta} = \check{\gamma} \in \check{R}.$$

Time je dokazano i svojstvo $(RS2)$ za skup $\check{R}$ u prostoru $V^*$.

Napokon, skup $\check{R}$ u prostoru $V^*$ ima i svojstvo $(RS3)$. Naime, uz kanonsku identifikaciju $V^{**}$ sa $V$, prema dokazanom je $\check{\check{\alpha}} = \alpha$ za svaki $\alpha \in R$, pa za $\check{\alpha}, \check{\beta} \in \check{R}$ vrijedi $\check{\alpha}(\check{\beta}) = \check{\beta}(\alpha) \in \mathbb{Z}$.

Time je dokazana tvrdnja $(a)$, a ujedno i tvrdnje $(b)$ i $(c)$.

Dokažimo još tvrdnju $(d)$. Očito je $\Phi : A \mapsto \left(A^t\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^t$ izomorfizam grupe $GL(V)$ na grupu $GL(V^*)$. Treba dokazati da je $\Phi(W(R)) = W(\check{R})$ i $\Phi(Aut(R)) = Aut(\check{R})$.

Kao što smo već prije primijetili za bilo koje $f \in V^*$ i $v \in V$ dualni operator pseudorefleksije $\sigma_{v,f}$ prostora $V$,

$$\sigma_{v,f} w = w - f(w)v, \qquad w \in V,$$

je upravo pseudorefleksija $\sigma_{f,v}$ prostora $V^*$,

$$\sigma_{f,v} g = g - g(v)f, \qquad g \in V^*.$$

Doista, za $g \in V^*$ i $w \in V$ imamo redom

$$\left[(\sigma_{v,f})^t\, g\right](w) = g\left(\sigma_{v,f} w\right) = g(w - f(w)v) = g(w) - f(w)g(v) = [g - g(v)f](w) = \left[\sigma_{f,v} g\right](w).$$

Posebno, za $\alpha \in R$ i pripadni $\check{\alpha} \in \check{R}$ vrijedi prema $(b)$ :

$$\sigma_{\check{\alpha}} = \sigma_{\check{\alpha},\alpha} = (\sigma_{\alpha,\check{\alpha}})^t = (\sigma_\alpha)^t .$$

Kako je $\sigma_\alpha^2 = I_V$, to je $\sigma_\alpha = \sigma_\alpha^{-1}$, pa dobivamo

$$\Phi(\sigma_\alpha) = \left(\sigma_\alpha^{-1}\right)^t = (\sigma_\alpha)^t = \sigma_{\check{\alpha}}.$$

Budući da refleksije $\sigma_\alpha,\ \alpha \in R$, generiraju grupu $W(R)$, slijedi da je $\Phi(W(R))$ podgrupa od $GL(V^*)$ generirana refleksijama $\sigma_{\check{\alpha}},\ \check{\alpha} \in \check{R}$, a to je upravo grupa $W(\check{R})$.

Prema propoziciji 3.2.1. za $\omega \in Aut(R)$ i za $\alpha \in R$ je $(\omega\alpha)\check{} = (\omega^t)^{-1}\check{\alpha} = \Phi(\omega)\check{\alpha}$. Prema tome, za $\omega \in Aut(R)$ vrijedi $\Phi(\omega)\check{R} = \check{R}$, odnosno, $\Phi(\omega) \in Aut(\check{R})$. Time je dokazana inkluzija $\Phi(Aut(R)) \subseteq Aut(\check{R})$. Zamijenimo sada uloge $V$ i $V^*$ kao i uloge $R$ i $\check{R}$, što možemo uz prirodnu identifikaciju $V$ sa $V^{**}$ jer je tada $\check{\check{R}} = R$. Izomorfizam $\Phi$ treba zamijeniti s inverznim izomorfizmom $\Phi^{-1}$, pa dobivamo inkluziju $\Phi^{-1}(Aut(\check{R})) \subseteq Aut(R)$, dakle, $\Phi(Aut(R)) \supseteq Aut(\check{R})$. Dvije inkluzije daju jednakost $\Phi(Aut(R)) = Aut(\check{R})$.

Za **sistem korijena** $\check{R}$ kažemo da je **dualan sistemu korijena** $R$.

Neka je i dalje $R$ sistem korijena u prostoru $V$. Tada na prostoru $V$ postoji jedan istaknuti skalarni produkt sa svojstvom da je grupa $Aut(R)$ podgrupa pripadne ortogonalne grupe $O(V)$ realnog unitarnog prostora $V$ :

**Propozicija 3.2.4.** *Neka je $R$ sistem korijena u prostoru $V$. Tada je sa*

$$(v|w) = \sum_{\alpha \in R} \check{\alpha}(v)\check{\alpha}(w), \qquad v, w \in V,$$

*zadan skalarni produkt na prostoru $V$ i vrijedi $Aut(R) \subseteq O(V)$, tj.*

$$(\omega v|\omega w) = (v|w) \qquad \forall v, w \in V, \quad \forall \omega \in Aut(R).$$

**Dokaz:** Očito je preslikavanje $(v, w) \mapsto (v|w)$ simetrična bilinearna forma na prostoru $V$. Nadalje,

$$(v|v) = \sum_{\alpha \in R} (\check{\alpha}(v))^2 \geq 0$$

i $(v|v) = 0$ ako i samo ako je $\check{\alpha}(v) = 0\ \forall \alpha \in R$. Budući da funkcionali $\check{\alpha},\ \alpha \in R$, prema tvrdnji $(a)$ propozicije 3.2.3. razapinju čitav prostor $V^*$, zaključujemo da vrijedi $(v|v) = 0 \Leftrightarrow v = 0$. Time je dokazano da je $(\,\cdot\,|\,\cdot\,)$ skalarni produkt na prostoru $V$.

Za $\omega \in Aut(R)$ iz propozicije 3.2.3. znamo da je $\omega^t \in Aut(\check{R})$, dakle, $\omega^t\check{R} = \check{R}$. Prema tome, za $v, w \in V$ je

$$(\omega v|\omega w) = \sum_{\alpha \in R} \check{\alpha}(\omega v)\check{\alpha}(\omega w) = \sum_{\alpha \in R} (\omega^t\check{\alpha})(v)(\omega^t\check{\alpha})(w) = \sum_{\alpha \in R} \check{\alpha}(v)\check{\alpha}(w) = (v|w).$$

**Propozicija 3.2.5.** *Neka je $R$ sistem korijena u prostoru $V$ i neka je $X \subseteq R$. Stavimo*

$$V_X = span\, X \qquad i \qquad V'_X = span\, \{\check{\alpha};\ \alpha \in X\}.$$

*Nadalje, neka su*

$$(V'_X)^0 = \{v \in V;\ f(v) = 0\ \forall f \in V'_X\} \qquad i \qquad (V_X)^0 = \{f \in V^*;\ f(v) = 0\ \forall v \in V_X\}.$$

*Tada vrijedi:*

(a) *$V = V_X \dot{+} (V'_X)^0$ i $V^* = V'_X \dot{+} (V_X)^0$.*

(b) *Pomoću restrikcije $f \mapsto f|V_X$ prostor $V'_X$ identificira se s dualnim prostorom prostora $V_X$.*

(c) *$R \cap V_X$ je sistem korijena u prostoru $V_X$ i kanonska bijekcija sa $R \cap V_X$ na njemu dualan sistem korijena uz identifikaciju iz (b) postaje restrikcija na $R \cap V_X$ kanonske bijekcije $\alpha \mapsto \check{\alpha}$ sa $R$ na $\check{R}$.*

**Zadatak 3.5.** *Dokažite propoziciju 3.2.5.*

**Uputa:** Pomoću skalarnog produkta iz propozicije 3.2.4. identificirajte dualni prostor $V^*$ s prostorom $V$. Tada je $(V'_X)^0 = (V'_X)^\perp$ i $(V_X)^0 = (V_X)^\perp$. Nadalje, prema lemi 3.2.2. je $\check{\alpha} = \dfrac{2}{(\alpha|\alpha)}\alpha$ za svaki $\alpha \in R$.

Pretpostavimo sada da je konačnodimenzionalan realan vektorski prostor $V$ direktna suma potprostora $V_1, \dots, V_s$ i da je za svako $i \in \{1, \dots, s\}$ zadan sistem korijena $R_i$ u prostoru $V_i$. Tada se dualni prostor $V^*$ identificira s direktnom sumom dualnih prostora $V_1^*, \dots, V_s^*$. Očito je $R = R_1 \cup \cdots \cup R_s$ sistem korijena u prostoru $V$ i vrijedi $\check{R} = \check{R}_1 \cup \cdots \cup \check{R}_s$. Tada se $R$ zove **direktna suma sistema korijena** $R_1, \dots, R_s$. Neka je $\alpha \in R_i$. Ako je $j \neq i$, jezgra od $\check{\alpha}$ sadrži potprostor $V_j$, dakle, $\sigma_\alpha | V_j = I_{V_j}$. S druge strane, $K\alpha \subseteq V_i$, prema tome, vrijedi $\sigma_\alpha V_i = V_i$. Te primjedbe pokazuju da se grupa $W(R)$ može identificirati s Kartezijevim produktom $W(R_1) \times \cdots \times W(R_s)$.

Za **sistem korijena** $R$ kažemo da je **ireducibilan** ako je $R \neq \emptyset$ i ako $R$ nije direktna suma dva neprazna sistema korijena.

**Propozicija 3.2.6.** *Neka je konačnodimenzionalan vektorski prostor $V$ direktna suma potprostora*

$$V = V_1 \dot{+} \cdots \dot{+} V_s.$$

*Nadalje, neka je $R$ sistem korijena u prostoru $V$ i stavimo $R_i = R \cap V_i$, $i = 1, \dots, s$. Sljedeća su tri svojstva međusobno ekvivalentna:*

(a) *Potprostori $V_i$ su $W(R)-$invarijatni.*

(b) *$R \subseteq V_1 \cup \cdots \cup V_s$.*

(c) *Za svaki $i \in \{1, \dots, s\}$ skup $R_i$ je sistem korijena u prostoru $V_i$ i $R$ je direktna suma sistema korijena $R_1, \dots, R_s$.*

**Dokaz:** Implikacija $(c) \Rightarrow (a)$ slijedi neposredno iz razmatranja prije iskaza propozicije.

Pretpostavimo da vrijedi $(a)$. Neka je $\alpha \in R$ i $H = Ker\,\check{\alpha}$. Prema tvrdnji $(a)$ propozicije 3.1.5. svaki od potprostora $V_i$ je direktna suma potprostora od $H$ i potprostora od $K\alpha$. Prema tome, postoji $i \in \{1, \dots, s\}$ takav da je $K\alpha \subseteq V_i$. To pokazuje da je $\alpha \in V_1 \cup \cdots \cup V_s$ za svaki $\alpha \in R$. Time smo dokazali implikaciju $(a) \Rightarrow (b)$.

Pretpostavimo da vrijedi $(b)$. Tada je očito $V_i = span\,R_i$ za svaki $i \in \{1, \dots, s\}$. Prema propoziciji 3.2.5., $R_i$ je sistem korijena u prostoru $V_i$ za svaki $i$. Iz $(b)$ je jasno da je $R = R_1 \cup \cdots \cup R_s$, dakle, $R$ je direktna suma sistema korijena $R_i$, $i = 1, \dots, s$. Time je dokazana i implikacija $(b) \Rightarrow (c)$.

**Korolar 3.2.7.** *Sistem korijena $R \neq \emptyset$ u prostoru $V$ je ireducibilan ako i samo ako je identična reprezentacija $\sigma \mapsto \sigma$ grupe $W(R)$ na prostoru $V$ ireducibilna.*

**Dokaz:** Prema propoziciji 3.2.6. ako je sistem korijena $R$ reducibilan, onda je i identična reprezentacija grupe $W(R)$ reducibilna. Pretpostavimo sada da je identična reprezentacija grupe $W(R)$ reducibilna. Tada postoje $W(R)-$invarijantni potprostori $X \neq \{0\}$ i $Y \neq \{0\}$ od $V$ takvi da je $V = X \dot{+} Y$. Stavimo li $R_1 = R \cap X$ i $R_2 = R \cap Y$, iz implikacije $(a) \Rightarrow (c)$ u propoziciji 3.2.6. slijedi da je $R_1$ sistem korijena u $X$, da je $R_2$ sistem korijena u $Y$ i da je sistem korijena $R$ direktna suma $R_1$ i $R_2$. Dakle, sistem korijena $R$ je reducibilan.

**Propozicija 3.2.8.** *Neka je $R$ sistem korijena u prostoru $V$. Tada je $R$ direktna suma ireducibilnih sistema korijena $R_1, \dots, R_s$ i oni su jedinstveni do na poredak.*

**Dokaz:** Egzistencija rastava $R$ u direktnu sumu ireducibilnih sistema korijena dokazuje se indukcijom u odnosu na broj $|R|$ elemenata od $R$ : ako je $R$ neprazan i reducibilan, onda je $R$ direktna suma dva neprazna sistema korijena $R'$ i $R''$. Tada je $|R'| < |R|$ i $|R''| < |R|$, pa se pretpostavka indukcije može primijeniti na $R'$ i na $R''$.

Treba još dokazati jedinstvenost do na poredak. Neka je $R$ direktna suma ireducibilnih sistema korijena $R_1, \dots, R_s$. Neka je, nadalje, $R$ direktna suma sistema korijena $R'$ i $R''$. Za dokaz jedinstvenosti do na poredak dovoljno je dokazati da za svaki $i \in \{1, \dots, s\}$ vrijedi ili $R_i \subseteq R'$ ili $R_i \subseteq R''$. Neka su

$$V' = span\, R', \qquad V'' = span\, R'', \qquad V'_i = span\, R' \cap R_i, \qquad V''_i = span\, R'' \cap R_i.$$

Kako je suma $V'$ i $V''$ direktna, to je i suma $V'_i$ i $V''_i$ direktna. Međutim, vrijedi $R_i \subseteq R = R' \cup R''$, pa slijedi da je sistem korijena $R_i$ direktna suma sistema korijena $R' \cap R_i$ i $R'' \cap R_i$. Kako je sistem korijena $R_i$ ireducibilan, slijedi da je ili $R' \cap R_i = \emptyset$, i tada je $R_i \subseteq R''$, ili je $R'' \cap R_i = \emptyset$, i tada je $R_i \subseteq R'$.

Jedinstveno određeni ireducibilni sistemi korijena $R_1, \dots, R_s$ iz propozicije 3.2.8. zovu se **ireducibilne komponente** sistema korijena $R$. Primijetimo, da je za bilo kako izabrane realne brojeve $\lambda_i \neq 0$ unija skupova $\lambda_i R_i$ sistem korijena u prostoru $V$ i njemu dualan sistem je unija skupova $\lambda_i^{-1} \check{R}_i$, a Weylova grupa se podudara sa $W(R)$.

**Propozicija 3.2.9.** *Neka je $R$ sistem korijena u prostoru $V$, neka su $R_1, \dots, R_s$ ireducibilne komponente od $R$ i $V_i = span\, R_i$, $i = 1, \dots, s$. Nadalje, neka su $(\,\cdot\,|\,\cdot\,)$ i $\langle\,\cdot\,|\,\cdot\,\rangle$ skalarni produkti na $V$ u odnosu na koje su svi elementi grupe $W(R)$ ortogonalni operatori. Tada su potprostori $V_i$ međusobno ortogonalni u odnosu na oba skalarna produkta. Nadalje, restrikcije dvaju skalarnih produkata na $V_i \times V_i$ su proporcionalne $\forall i$.*

**Zadatak 3.6.** *Dokažite propoziciju 3.2.9.*

**Uputa:** Ako su $v_i \in V_i$, $v_j \in V_j$, $i \neq j$, uočite da za $\sigma \in W(R_j)$ vrijedi $\sigma v_i = v_i$, dakle, $(v_i|\sigma v_j) = (\sigma v_i|\sigma v_j) = (v_i|v_j)$, dakle, $(v_i|\sigma v_j - v_j) = 0$. Sada iskoristite ireducibilnost sistema korijena $R_j$, dakle, ireducibilnost identične reprezentacije grupe $W(R_j)$, da dokažete da je potprostor $V_j$ razapet vektorima oblika $\sigma v_j - v_j$, $v_j \in V_j$, $\sigma \in W(R_j)$. Napokon, za proporcionalnost restrikcija skalarnih produkata na svakom od potprostora $V_i$ iskoristite propoziciju 3.1.2.

## 3.3 Odnos između dvaju korijena

Neka je $R$ sistem korijena u prostoru $V$ i neka je $(\cdot|\cdot)$ skalarni produkt na prostoru $V$ izabran tako da su svi elementi Weylove grupe $W(R)$ ortogonalni operatori i neka je $\|\cdot\|$ pripadna norma. Tada možemo govoriti o duljini pojedinog korijena, kao i o kutu između dvaju korijena. Prema propoziciji 3.2.9. kut između dvaju korijena neovisan je o izboru skalarnog produkta. Također, ako korijeni $\alpha$ i $\beta$ pripadaju istoj ireducibilnoj komponenti, onda je kvocijent njihovih duljina također neovisan o izboru skalarnog produkta.

Kut između vektora $x, y \in V \setminus \{0\}$ označit ćemo sa $\sphericalangle(x, y)$. Dakle, $\sphericalangle(x, y)$ je jedinstveni broj iz segmenta $[0, \pi]$ takav da je

$$(x|y) = \|x\| \cdot \|y\| \cdot \cos \sphericalangle(x, y), \qquad \text{tj.} \qquad \cos \sphericalangle(x, y) = \frac{(x|y)}{\|x\| \cdot \|y\|}.$$

U daljnjem ćemo za korijene $\alpha, \beta \in R$ koristiti oznaku

$$n(\alpha, \beta) = \check{\beta}(\alpha) = 2\frac{(\alpha|\beta)}{\|\beta\|^2}.$$

Dakle,

$$\sigma_\beta \alpha = \alpha - n(\alpha, \beta)\beta. \tag{3.4}$$

Prema aksiomu $(RS3)$ je

$$n(\alpha, \beta) \in \mathbb{Z}, \quad \alpha, \beta \in R. \tag{3.5}$$

Nadalje, očito je

$$n(\alpha, \alpha) = 2, \quad \alpha \in R, \tag{3.6}$$

i

$$n(-\alpha, \beta) = n(\alpha, -\beta) = -n(\alpha, \beta), \quad \alpha, \beta \in R. \tag{3.7}$$

Nadalje, prema propoziciji 3.2.3. vrijedi

$$n(\check{\alpha}, \check{\beta}) = n(\beta, \alpha). \tag{3.8}$$

**Zadatak 3.7.** *Neka su $\alpha, \beta \in R$ neproporcionalni korijeni. Dokažite da su sljedeća četiri svojstva međusobno ekvivalentna:*

(*a*) $n(\alpha, \beta) = 0$,

(*b*) $n(\beta, \alpha) = 0$,

(*c*) $(\alpha, |\beta) = 0$,

(*d*) *refleksije $\sigma_\alpha$ i $\sigma_\beta$ komutiraju: $\sigma_\alpha\sigma_\beta = \sigma_\beta\sigma_\alpha$.*

**Zadatak 3.8.** *Neka su $\alpha, \beta \in R$. Dokažite da je tada*

$$n(\alpha, \beta)n(\beta, \alpha) = 4\cos^2 \sphericalangle(\alpha, \beta), \tag{3.9}$$

*a ako je $(\alpha|\beta) \neq 0$, onda vrijedi i*

$$\frac{n(\alpha, \beta)}{n(\beta, \alpha)} = \frac{\|\alpha\|^2}{\|\beta\|^2}. \tag{3.10}$$

Iz formula (3.9) i (3.10) i iz definicije cijelih brojeva $n(\alpha, \beta)$ i $n(\beta, \alpha)$ elementarni račun daje nam potpuni popis mogućnosti za geometrijski odnos dvaju korijena $\alpha$ i $\beta$ :

**Propozicija 3.3.1.** *Neka su $\alpha, \beta \in R$. Pretpostavimo da je $|n(\alpha, \beta)| \leq |n(\beta, \alpha)|$ (ako nije tako, zamijenimo uloge $\alpha$ i $\beta$). Postoje sljedeće mogućnosti za vrijednosti $n(\alpha, \beta)$ i $n(\beta, \alpha)$ :*

(1) $n(\alpha, \beta) = n(\beta, \alpha) = 0$; *tada je* $\sphericalangle(\alpha, \beta) = \frac{\pi}{2}$ *i produkt* $\sigma_\alpha \sigma_\beta$ *je reda* 2.

(2) $n(\alpha, \beta) = n(\beta, \alpha) = 1$; *tada je* $\sphericalangle(\alpha, \beta) = \frac{\pi}{3}$, $\|\beta\| = \|\alpha\|$ *i produkt* $\sigma_\alpha \sigma_\beta$ *je reda* 3.

(3) $n(\alpha, \beta) = n(\beta, \alpha) = -1$; *tada je* $\sphericalangle(\alpha, \beta) = \frac{2\pi}{3}$, $\|\beta\| = \|\alpha\|$ *i produkt* $\sigma_\alpha \sigma_\beta$ *je reda* 3.

(4) $n(\alpha, \beta) = 1$, $n(\beta, \alpha) = 2$; *tada je* $\sphericalangle(\alpha, \beta) = \frac{\pi}{4}$, $\|\beta\| = \sqrt{2}\|\alpha\|$ *i produkt* $\sigma_\alpha \sigma_\beta$ *je reda* 4.

(5) $n(\alpha, \beta) = -1$, $n(\beta, \alpha) = -2$; *tada je* $\sphericalangle(\alpha, \beta) = \frac{3\pi}{4}$, $\|\beta\| = \sqrt{2}\|\alpha\|$ *i produkt* $\sigma_\alpha \sigma_\beta$ *je reda* 4.

(6) $n(\alpha, \beta) = 1$, $n(\beta, \alpha) = 3$; *tada je* $\sphericalangle(\alpha, \beta) = \frac{\pi}{6}$, $\|\beta\| = \sqrt{3}\|\alpha\|$ *i produkt* $\sigma_\alpha \sigma_\beta$ *je reda* 6.

(7) $n(\alpha, \beta) = -1$, $n(\beta, \alpha) = -3$; *tada je* $\sphericalangle(\alpha, \beta) = \frac{5\pi}{6}$, $\|\beta\| = \sqrt{3}\|\alpha\|$ *i produkt* $\sigma_\alpha \sigma_\beta$ *je reda* 6.

(8) $n(\alpha, \beta) = n(\alpha, \beta) = 2$; *tada je* $\beta = \alpha$.

(9) $n(\alpha, \beta) = n(\alpha, \beta) = -2$; *tada je* $\beta = -\alpha$.

(10) $n(\alpha, \beta) = 1$, $n(\beta, \alpha) = 4$; *tada je* $\beta = 2\alpha$.

(11) $n(\alpha, \beta) = -1$, $n(\beta, \alpha) = -4$; *tada je* $\beta = -2\alpha$.

**Dokaz:** Prije svega, iz formule (3.9) vidi se da su $n(\alpha, \beta)$ i $n(\beta, \alpha)$ istog predznaka i umnožak im je 0, 1, 2, 3 ili 4. Odatle je jasno da su jedine njihove moguće vrijednosti upravo one popisane u (1) – (11). Ostatak u (1) je upravo zadatak 3.7. Razmotrimo sada (2) – (7). Tvrdnje o kutu između $\alpha$ i $\beta$ slijedi neposredno iz formule (3.10). Nadalje, uočimo da je u svim tim slučajevima potprostor $X = \mathit{span}\{\alpha, \beta\}$ od $V$ dvodimenzionalan, da je $Y = (Ker\,\check{\alpha}) \cap (Ker\,\check{\beta}) = X^\perp$, da su prema tvrdnji ($a$) propozicije 3.1.5. potprostori $X$ i $Y$ invarijantni s obzirom na $\sigma_\alpha$ i $\sigma_\beta$, i da vrijedi $\sigma_\alpha|Y = \sigma_\beta|Y = I_Y$. Prema tome, tvrdnje o redu umnoška $\sigma_\alpha\sigma_\beta \in W(R)$ dokazuju se promatranjem restrikcije na dvodimenzionalan potprostor $X$, odnosno, promatranjem djelovanja tog umnoška na korijene $\alpha$ i $\beta$; u daljnjem sa označimo $A \in L(X)$ restrikciju umnoška $\sigma_\alpha\sigma_\beta$ na dvodimenzionalan potprostor $X$.

U slučaju (2) imamo $\sigma_\alpha\alpha = -\alpha$, $\sigma_\alpha\beta = \beta - \alpha$, $\sigma_\beta\alpha = \alpha - \beta$ i $\sigma_\beta\beta = -\beta$, dakle, za operator $A = \sigma_\alpha\sigma_\beta|X$ vrijedi

$$A\alpha = -\beta,\ A\beta = \alpha - \beta,\ A^2\alpha = \beta - \alpha,\ A^2\beta = -\alpha,\ A^3\alpha = \alpha,\ A^3\beta = \beta.$$

Prema tome, $A$, a time i umnožak $\sigma_\alpha\sigma_\beta$ je reda 3.

(3) Sada je $\sigma_\alpha\alpha = -\alpha$, $\sigma_\alpha\beta = \beta + \alpha$, $\sigma_\beta\alpha = \alpha + \beta$ i $\sigma_\beta\beta = -\beta$, dakle,

$$A\alpha = \beta,\ A\beta = -\alpha - \beta,\ A^2\alpha = -\alpha - \beta,\ A^2\beta = \alpha,\ A^3\alpha = \alpha,\ A^3\beta = \beta.$$

(4) Sada je $\sigma_\alpha\alpha = -\alpha$, $\sigma_\alpha\beta = \beta - \alpha$, $\sigma_\beta\alpha = \alpha - 2\beta$ i $\sigma_\beta\beta = -\beta$, dakle,

$$A\alpha = \alpha - 2\beta,\ A\beta = \alpha - \beta,\ A^2\alpha = -\alpha,\ A^2\beta = -\beta,$$

$$A^3\alpha = -\alpha + 2\beta,\ A^3\beta = -\alpha + \beta,\ A^4\alpha = \alpha,\ A^4\beta = \beta.$$

(5) Sada je $\sigma_\alpha\alpha = -\alpha$, $\sigma_\alpha\beta = \beta + \alpha$, $\sigma_\beta\alpha = \alpha + 2\beta$ i $\sigma_\beta\beta = -\beta$, dakle,

$$A\alpha = \alpha + 2\beta,\ A\beta = -\alpha - \beta,\ A^2\alpha = -\alpha,\ A^2\beta = -\beta,$$

$$A^3\alpha = -\alpha - 2\beta,\ A^3\beta = \alpha + \beta,\ A^4\alpha = \alpha,\ A^4\beta = \beta.$$

(6) Sada je $\sigma_\alpha \alpha = -\alpha$, $\sigma_\alpha \beta = \beta - \alpha$, $\sigma_\beta \alpha = \alpha - 3\beta$ i $\sigma_\beta \beta = -\beta$, dakle,

$$A\alpha = 2\alpha - 3\beta,\ A\beta = \alpha - \beta,\ A^2\alpha = \alpha - 3\beta,\ A^2\beta = \alpha - 2\beta,\ A^3\alpha = -\alpha,\ A^3\beta = -\beta,$$

$$A^4\alpha = -2\alpha + 3\beta,\ A^4\beta = -\alpha + \beta,\ A^5\alpha = -\alpha + 3\beta,\ A^5\beta = -\alpha + 2\beta,\ A^6\alpha = \alpha,\ A^6\beta = \beta.$$

(7) Sada je $\sigma_\alpha \alpha = -\alpha$, $\sigma_\alpha \beta = \beta + \alpha$, $\sigma_\beta \alpha = \alpha + 3\beta$ i $\sigma_\beta \beta = -\beta$, dakle,

$$A\alpha = 2\alpha + 3\beta,\ A\beta = -\alpha - \beta,\ A^2\alpha = \alpha + 3\beta,\ A^2\beta = -\alpha - 2\beta,\ A^3\alpha = -\alpha,\ A^3\beta = -\beta,$$

$$A^4\alpha = -2\alpha - 3\beta,\ A^4\beta = \alpha + \beta,\ A^5\alpha = -\alpha - 3\beta,\ A^5\beta = \alpha + 2\beta,\ A^6\alpha = \alpha,\ A^6\beta = \beta.$$

Time su dokazane sve tvrdnje u (1) – (7).

(8) Prema definiciji $n(\alpha, \beta)$ i $n(\beta, \alpha)$ imamo da vrijedi $(\alpha|\beta) = (\alpha|\alpha) = (\beta|\beta)$. Odatle je $(\alpha - \beta|\alpha - \beta) = 0$, dakle, $\alpha - \beta = 0$ ili $\beta = \alpha$.

(9) Sada imamo $(\alpha|\beta) = -(\alpha, \alpha) = -(\beta|\beta)$, pa slijedi $(\alpha + \beta|\alpha + \beta) = 0$, dakle, $\beta = -\alpha$.

(10) Sada je $(\beta|\beta) = 2(\alpha|\beta) = 4(\alpha|\alpha)$, pa slijedi $(2\alpha - \beta|2\alpha - \beta) = 4(\alpha|\alpha) - 4(\alpha|\beta) + (\beta|\beta) = 0$, dakle, $\beta = 2\alpha$.

(11) Sada je $(\beta|\beta) = -2(\alpha|\beta) = 4(\alpha|\alpha)$, pa slijedi $(2\alpha + \beta|2\alpha + \beta) = 4(\alpha|\alpha) + 4(\alpha|\beta) + (\beta|\beta) = 0$, dakle, $\beta = -2\alpha$.

Time je propozicija u potpunosti dokazana.

Iz propozicije 3.3.1. neposredno slijedi:

**Propozicija 3.3.2.** (*a*) *Ako su $\alpha, \beta \in R$ i $\beta = c\alpha$ za $c \in \mathbb{R}$ onda je $c \in \left\{\pm 1, \pm\frac{1}{2}, \pm 2\right\}$.*

(*b*) *Ako $\alpha, \beta \in R$ nisu proporcionalni i ako je $\|\alpha\| \leq \|\beta\|$, onda je $n(\alpha, \beta) \in \{1, 0, -1\}$.*

Ako je korijen $\alpha \in R$ takav da $\frac{1}{2}\alpha \notin R$, onda se $\alpha$ zove **nedjeljivi korijen**.

**Teorem 3.3.3.** *Neka su $\alpha, \beta \in R$.*

(*a*) *Ako je $n(\alpha, \beta) > 0$ i $\alpha \neq \beta$, onda je $\alpha - \beta \in R$.*

(*b*) *Ako je $n(\alpha, \beta) < 0$ i $\alpha \neq -\beta$, onda je $\alpha + \beta \in R$.*

**Dokaz:** (*a*) Ako je $n(\alpha, \beta) > 0$, onda postoje sljedeće mogućnosti prema listi iz propozicije 3.3.1.:

(*I*) $n(\alpha, \beta) = 1$; tada je $\alpha - \beta = \sigma_\beta \alpha \in \sigma_\beta R = R$.

(*II*) $n(\beta, \alpha) = 1$; tada je $\beta - \alpha = \sigma_\alpha \beta \in R$, dakle, $\alpha - \beta = -(\beta - \alpha) \in -R = R$.

Tvrdnja (*b*) slijedi iz tvrdnje (*a*) zamjenom $\beta$ sa $-\beta$, jer je $n(\alpha, -\beta) = -n(\alpha, \beta)$.

**Korolar 3.3.4.** *Neka su $\alpha, \beta \in R$.*

(*a*) *Ako je $(\alpha|\beta) > 0$ i $\alpha \neq \beta$, onda je $\alpha - \beta \in R$.*

(*b*) *Ako je $(\alpha|\beta) < 0$ i $\alpha \neq -\beta$, onda je $\alpha + \beta \in R$.*

(*c*) *Ako $\alpha - \beta \notin R \cup \{0\}$ i $\alpha + \beta \notin R \cup \{0\}$, onda je $(\alpha|\beta) = 0$.*

**Dokaz:** Tvrdnje (*a*) i (*b*) slijede neposredno iz teorema 3.3.3. i iz definicije $n(\alpha, \beta)$. Tvrdnja (*c*) slijedi iz (*a*) i (*b*).

Moguće je da bude $\alpha + \beta \in R$ iako je $(\alpha|\beta) = 0$. Primjer za to je sistem korijena $R$ u $\mathbb{R}^2$ tipa $B_2$ :

$$R = \{(1, 0), (-1, 0), (0, 1), (0, -1), (1, 1), (1, -1), (-1, 1), (-1, -1)\}.$$

Naime, za $\alpha = (1, 0)$ i $\beta = (0, 1)$ je $\alpha, \beta \in R$ i $\alpha + \beta = (1, 1) \in R$, ali $(\alpha|\beta) = 0$.

Ukoliko su $\alpha, \beta \in R$ takvi da $\alpha - \beta \notin R \cup \{0\}$ i $\alpha + \beta \notin R \cup \{0\}$, onda za korijene $\alpha$ i $\beta$ kažemo da su **jako ortogonalni**.

**Propozicija 3.3.5.** *Neka su $\alpha, \beta \in R$ neproporcionalni korijeni.*

(a) *Neka je $I = \{j \in \mathbb{Z};\ \beta + j\alpha \in R\}$. Tada postoje $p, q \in \mathbb{Z}_+$ takvi da je*

$$I = [-q, p] \cap \mathbb{Z} = \{j \in \mathbb{Z};\ -q \leq j \leq p\}.$$

(b) *Neka je $S = \{\beta + j\alpha;\ j \in I\}$. Tada je*

$$\sigma_\alpha S = S \qquad i \qquad \sigma_\alpha(\beta + p\alpha) = \beta - q\alpha.$$

(c) $q - p = n(\beta, \alpha)$.

**Dokaz:** (a) Očito je $0 \in I$ (jer je $\beta \in R$). Stavimo

$$p = \max I \geq 0, \qquad -q = \min I.$$

Naravno, $I \subseteq [-q, p] \cap \mathbb{Z}$. Pretpostavimo da se radi o striktnoj inkluziji, tj da $[-q, p] \cap \mathbb{Z} \not\subseteq I$. Tada postoje $r, s \in [-q, p] \cap \mathbb{Z}$ sa sljedećim svojstvima:

$$s > r + 1, \qquad s \in I, \qquad r \in I, \qquad r + k \notin I \quad \text{za} \quad 1 \leq k \leq s - r - 1, \quad \text{tj.} \quad r + 1, \ldots, s - 1 \notin I.$$

Tada vrijedi $(\alpha|\beta + s\alpha) \leq 0$. Doista, kad bi bilo $(\alpha|\beta + s\alpha) > 0$, onda bi po tvrdnji (a) korolara 3.3.4. bilo $\beta + (s-1)\alpha = \beta + s\alpha - \alpha \in R$, a to nije jer $s - 1 \notin I$. Analogno, $(\alpha|\beta + r\alpha) \geq 0$, jer bi $(\alpha|\beta + r\alpha) < 0$ po tvrdnji (b) korolara 3.3.4. imalo za posljedicu $\beta + (r+1)\alpha = \beta + r\alpha + \alpha \in R$, a to nije tako jer $r + 1 \notin I$. Slijedi

$$(\alpha|\beta + s\alpha) \leq 0 \leq (\alpha|\beta + r\alpha) \qquad \Longrightarrow \qquad (\alpha|\beta) + s\|\alpha\|^2 \leq (\alpha|\beta) + r\|\alpha\|^2 \qquad \Longrightarrow \qquad s \leq r$$

a to je u suprotnosti sa $s > r + 1$. Ova kontradikcija pokazuje da je $I = [-q, p] \cap \mathbb{Z}$.

(b) i (c) Za $j \in I$ imamo

$$\sigma_\alpha(\beta + j\alpha) = \beta - n(\beta, \alpha)\alpha - j\alpha = \beta + (-j - n(\beta, \alpha))\alpha.$$

To pokazuje da je $\sigma_\alpha S \subseteq S$, a kako je $S$ konačan skup i operator $\sigma_\alpha$ je regularan, slijedi $\sigma_\alpha S = S$. Prema tome, $j \mapsto -j - n(\beta, \alpha)$ je bijekcija sa $I$ na $I$, a kako je to monotono padajuće preslikavanje, slijedi da je $-q = -p - n(\beta, \alpha)$. Dakle, $\sigma_\alpha(\beta + p\alpha) = \beta - q\alpha$ i $q - p = n(\beta, \alpha)$.

Skup $S$ iz prethodne propozicije zove se $\alpha-$**lanac korijena** određen sa $\beta$. Korijen $\beta - q\alpha$ zove se **početak** tog lanca, $\beta + p\alpha$ je njegov **svršetak**, a $p + q$ je njegova **duljina**. Primijetimo da duljina od $S$ nije jednaka broju $|S|$ korijena u lancu $S$ nego je za jedan manja: $p + q = |S| - 1$.

**Korolar 3.3.6.** *Neka je $S$ $\alpha-$lanac korijena s početkom $\gamma$. Tada je duljina od $S$ jednaka $-n(\gamma, \alpha)$ i taj je broj jednak* 0, 1, 2 *ili* 3.

**Zadatak 3.9.** *Dokažite korolar 3.3.6. Nadalje, dokažite da za međusobni odnos korijena $\alpha$ i $\gamma$ postoje sljedeće mogućnosti:*

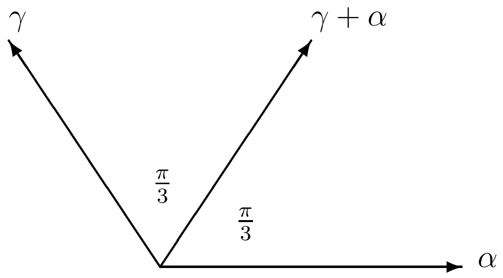
(1) *Ako je duljina od $S$ jednaka* 0, *onda je $n(\gamma, \alpha) = 0$, $(\alpha|\gamma) = 0$ i $\sphericalangle(\alpha, \gamma) = \frac{\pi}{2}$.*

(2) *Ako je duljina od $S$ jednaka* 1, *onda je $n(\gamma, \alpha) = -1$ i vrijedi jedna od sljedeće tri mogućnosti za $n(\alpha, \gamma)$ :*

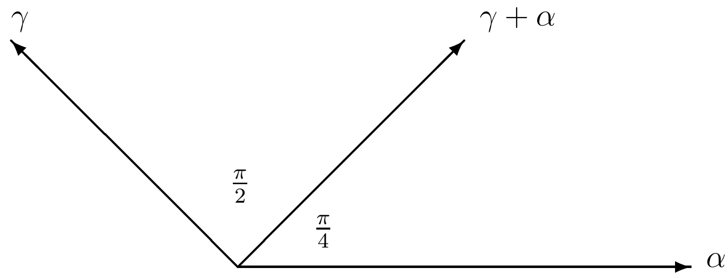
  (a) *$n(\alpha, \gamma) = -1$; tada je $(\alpha|\alpha) = (\gamma|\gamma)$, $(\alpha|\gamma) = -\frac{1}{2}(\alpha|\alpha)$ i $\sphericalangle(\alpha, \gamma) = \frac{2\pi}{3}$.*

(*b*) *$n(\alpha,\gamma)=-2$; tada je $(\alpha|\alpha)=2(\gamma|\gamma)$, $(\alpha|\gamma)=-\frac{1}{2}(\alpha|\alpha)$ i $\sphericalangle(\alpha,\gamma)=\frac{3\pi}{4}$.*

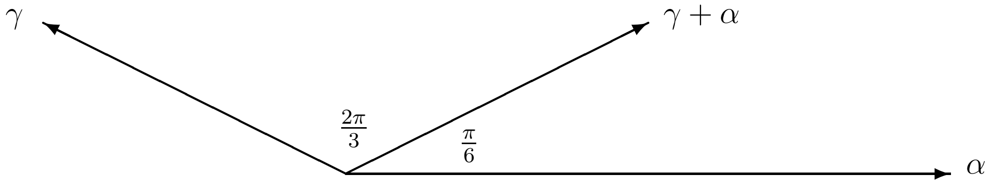
(*c*) *$n(\alpha,\gamma)=-3$; tada je $(\alpha|\alpha)=3(\gamma|\gamma)$, $(\alpha|\gamma)=-\frac{1}{2}(\alpha|\alpha)$ i $\sphericalangle(\alpha,\gamma)=\frac{5\pi}{6}$.*




(*a*)

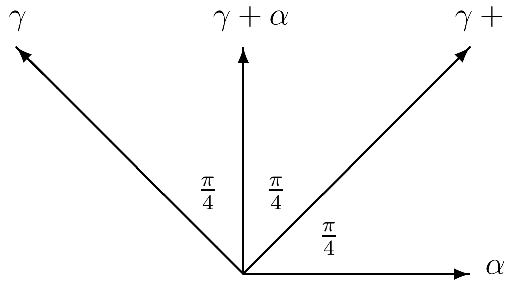



(*b*)

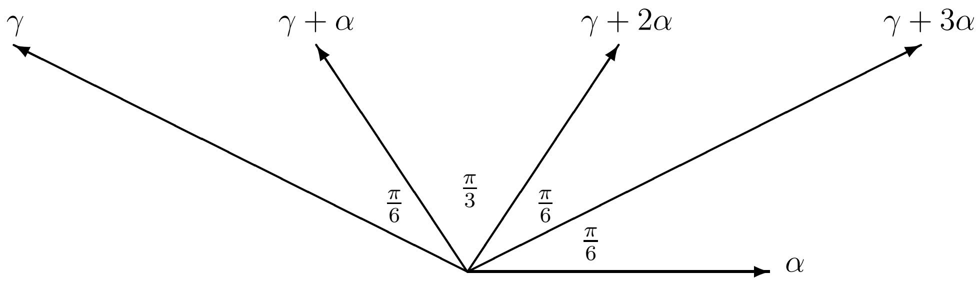



(*c*)

(3) *Ako je duljina od S jednaka 2, onda je $n(\gamma,\alpha)=-2$, $n(\alpha,\gamma)=-1$, $(\alpha|\alpha)=\frac{1}{2}(\gamma|\gamma)$, $(\alpha|\gamma)=-(\alpha|\alpha)$ i $\sphericalangle(\alpha,\gamma)=\frac{3\pi}{4}$.*

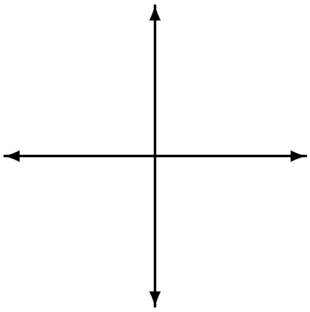



(4) *Ako je duljina od S jednaka 3, onda je $n(\gamma,\alpha)=-3$, $n(\alpha,\gamma)=-1$, $(\alpha|\alpha)=\frac{1}{3}(\gamma|\gamma)$, $(\alpha|\gamma)=-\frac{3}{2}(\alpha|\alpha)$ i $\sphericalangle(\alpha,\gamma)=\frac{5\pi}{6}$.*

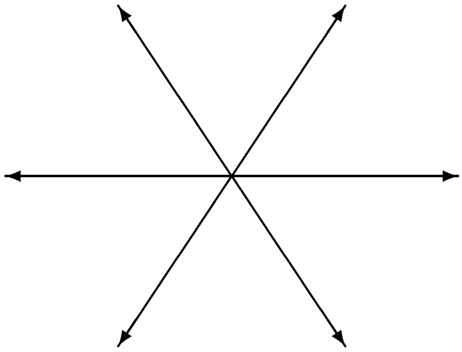



**Uputa:** Koristite propoziciju 3.3.1.

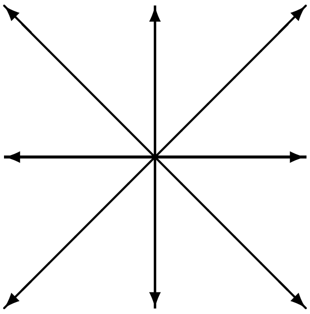
Iz primjera sistema korijena u ravnini tipova $A_1 \times A_1$, $A_2$, $B_2$, $BC_2$ i $G_2$ vidi se da su svi slučajevi iz zadatka 3.9. stvarno mogući:



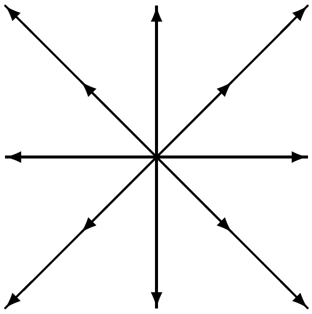
$A_1 \times A_1$



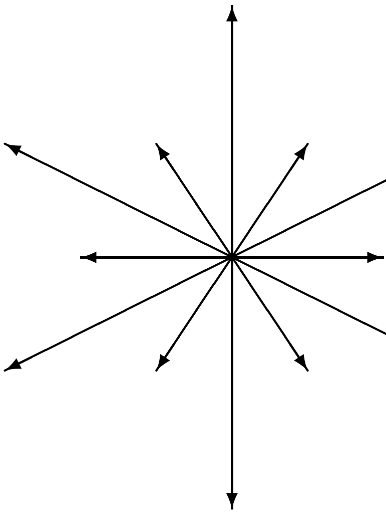
$A_2$



$B_2$



$BC_2$



$G_2$

**Propozicija 3.3.7.** *Neka su $\alpha$ i $\beta$ neproporcionalni korijeni takvi da je $\beta + \alpha$ korijen, tj. duljina $\alpha-$lanca $S$ određenog s $\beta$ je $\ell \geq 1$. Neka su $p \in \mathbb{N}$ i $q \in \mathbb{Z}_+$ kao u propoziciji 3.3.5. Tada je*

$$\frac{(\beta + \alpha|\beta + \alpha)}{(\beta|\beta)} = \frac{q+1}{p}. \tag{3.11}$$

**Dokaz:** Neka je $\gamma$ početak $\alpha-$lanca $S$. Prema zadatku 3.9. imamo sljedećih šest mogućnosti:

(1) $\ell = 1$; tada je $\beta = \gamma$, $q = 0$, $p = 1$ i $(\beta + \alpha|\beta + \alpha) = (\beta|\beta)$.

(2) $\ell = 2$ i $\beta = \gamma$; tada je $q = 0$, $p = 2$ i $(\beta + \alpha|\beta + \alpha) = \frac{1}{2}(\beta|\beta)$.

(3) $\ell = 2$ i $\beta = \gamma + \alpha$; tada je $q = 1$, $p = 1$ i $(\beta + \alpha|\beta + \alpha) = 2(\beta|\beta)$.

(4) $\ell = 3$ i $\beta = \gamma$; tada je $q = 0$, $p = 3$ i $(\beta + \alpha|\beta + \alpha) = \frac{1}{3}(\beta|\beta)$.

(5) $\ell = 3$ i $\beta = \gamma + \alpha$; tada je $q = 1$, $p = 2$ i $(\beta + \alpha|\beta + \alpha) = (\beta|\beta)$.

(6) $\ell = 3$ i $\beta = \gamma + 2\alpha$; tada je $q = 2$, $p = 1$ i $(\beta + \alpha|\beta + \alpha) = 3(\beta|\beta)$.

U svakom od tih slučajeva formula (3.11) se direktno provjerava.

**Propozicija 3.3.8.** *Pretpostavimo da je sistem korijena $R$ ireducibilan i da su $\alpha, \beta \in R$ takvi da je $\|\alpha\| = \|\beta\|$. Tada postoji $\sigma \in W(R)$ takav da je $\sigma\alpha = \beta$.*

**Dokaz:** Prema korolaru 3.2.7. identična reprezentacija $\sigma \mapsto \sigma$ grupe $W(R)$ je ireducibilna. Kako je $\alpha \neq 0$, potprostor od $V$ razapet sa $\{\tau\alpha;\ \tau \in W(R)\}$ nije $\{0\}$, dakle, jednak je $V$. Prema tome, postoji $\tau \in W(R)$ takav da je $(\tau\alpha|\beta) \neq 0$. Stavimo $\gamma = \tau\alpha$. Tada je $\|\gamma\| = \|\alpha\| = \|\beta\|$, pa je po formuli (3.10) $n(\gamma, \beta) = n(\beta, \gamma)$. Zamijenimo li $\beta$ ako treba sa $-\beta = \sigma_\beta\beta$, možemo pretpostaviti da je $n(\gamma, \beta) > 0$. Prema propoziciji 3.3.1. tada je ili $\gamma = \beta$, u kojem slučaju je $\beta = \tau\alpha$, ili je $n(\gamma, \beta) = n(\beta, \gamma) = 1$, a u tom slučaju nalazimo

$$\sigma_\gamma\sigma_\beta\sigma_\gamma\beta = \sigma_\gamma\sigma_\beta(\beta - \gamma) = \sigma_\gamma(-\beta - \gamma + \beta) = -\sigma_\gamma\gamma = \gamma = \tau\alpha.$$

Odatle je $\beta = \sigma_\gamma\sigma_\beta\sigma_\gamma\tau\alpha$ (ili $\sigma_\beta\beta = \sigma_\gamma\sigma_\beta\sigma_\gamma\tau\alpha$, dakle, $\beta = \sigma_\beta\sigma_\gamma\sigma_\beta\sigma_\gamma\tau\alpha$).

## 3.4 Reducirani i nereducirani sistemi korijena

Sistem korijena $R$ u prostoru $V$ zove se **reduciran** ako je svaki korijen $\alpha \in R$ **nedjeljiv**, dakle $\frac{1}{2}\alpha \notin R$. Ekvivalentno, reduciran je onaj sistem korijena za koji vrijedi $\mathbb{R}\alpha \cap R = \{\alpha, -\alpha\}$ $\forall \alpha \in R$. U protivnom se sistem korijena zove **nereduciran**. Dakle, sistem korijena $R$ je nereduciran ako postoji $\alpha \in R$ takav da je $2\alpha \in R$.

**Propozicija 3.4.1.** *Neka je $R$ ireducibilan reduciran sistem korijena.*

(*a*) *Vrijedi*

$$\frac{(\beta|\beta)}{(\alpha|\alpha)} \in \left\{1, 2, \frac{1}{2}, 3, \frac{1}{3}\right\}.$$

(*b*) *Skup $\{(\beta|\beta);\ \beta \in R\}$ je ili jednočlan ili dvočlan.*

**Dokaz:** (*a*) Budući da je sistem korijena $R$ ireducibilan, prema korolaru 3.2.7. identična reprezentacija $\sigma \mapsto \sigma$ Weylove grupe $W(R)$ na prostoru $V$ je ireducibilna. Prema tome, za svaki $\alpha \in R$ skup $W(R)\alpha = \{\sigma\alpha;\ \sigma \in W(R)\}$ razapinje prostor $V$. Odatle slijedi da za bilo koje $\alpha, \beta \in R$ postoji $\gamma \in R$ takav da je $(\alpha|\gamma) \neq 0$ i $(\gamma|\gamma) = (\beta|\beta)$. Budući da je po pretpostavci sistem korijena $R$ reduciran, u propoziciji 3.3.1. ne dolaze u obzir mogućnosti (10) i (11). Prema tome, ako korijeni nisu međusobno okomiti, dolaze u obzir samo mogućnosti $(2) - (9)$. Stoga je

$$\frac{(\beta|\beta)}{(\alpha|\alpha)} = \frac{(\gamma|\gamma)}{(\alpha|\alpha)} \in \left\{1, 2, \frac{1}{2}, 3, \frac{1}{3}\right\}$$

(*b*) Pomnožimo li skalarni produkt $(\,\cdot\,|\,\cdot\,)$ s nekim brojem $> 0$, možemo pretpostaviti da najkraći korijen ima duljinu 1. Dakle, postoji $\alpha \in R$ takav da je $(\alpha|\alpha) = 1$ i $\{(\beta|\beta);\ \beta \in R\} \subseteq \{1, 2, 3\}$. No kad bi postojali $\beta, \gamma \in R$ takvi da je $(\beta|\beta) = 2$ i $(\gamma|\gamma) = 3$, onda bi bilo

$$\frac{(\beta|\beta)}{(\gamma|\gamma)} = \frac{2}{3},$$

a to nije moguće prema (*a*). Prema tome,

$$\{(\beta|\beta);\ \beta \in R\} \subseteq \{1, 2\} \qquad \text{ili} \qquad \{(\beta|\beta);\ \beta \in R\} \subseteq \{1, 3\}.$$

**Propozicija 3.4.2.** *Neka je $R$ ireducibilan nereduciran sistem korijena u prostoru $V$ i pretpostavimo da je rang od $R$ barem 2, tj.* $\dim V \geq 2$.

(*a*) *Skup $R_0$ svih nedjeljivih korijena je ireducibilan reduciran sistem korijena u $V$ i vrijedi $W(R_0) = W(R)$.*

(*b*) *Neka je $r = \min\{(\alpha|\alpha);\ \alpha \in R\}$ i $A = \{\alpha \in R;\ (\alpha|\alpha) = r\}$. Svaka dva neproporcionalna korijena iz $A$ su međusobno okomiti.*

(*c*) *Neka je $B = \{\beta \in R;\ (\beta|\beta) = 2r\}$. Tada je $B \neq \emptyset$, $R_0 = A \cup B$ i $R = A \cup B \cup 2A$.*

**Dokaz:** (*a*) Ako je $\alpha \in R \setminus R_0$, tada je $\frac{1}{2}\alpha \in R$, ali $\frac{1}{2}(\frac{1}{2}\alpha) \notin R$, dakle, $\frac{1}{2}\alpha \in R_0$. Odatle sllijedi da je $span\, R_0 = span\, R = V$, dakle, skup $R_0$ zadovoljava aksiom $(RS1)$. Očito je da za sve $\alpha \in R$ vrijedi $\sigma_\alpha R_0 = R_0$, a odatle slijedi da vrijede i aksiomi $(RS2)$ i $(RS3)$, dakle, $R_0$ je sistem korijena u $V$, naravno, reduciran. Nadalje, iz $\alpha \in R \setminus R_0$ slijedi $\frac{1}{2}\alpha \in R_0$, a tada je očito $\sigma_\alpha = \sigma_{\frac{1}{2}\alpha}$. To pokazuje da je $W(R_0) = W(R)$. No tada je prema korolaru 3.2.7. sistem korijena $R_0$ ireducibilan.

(*b*) i (*c*) Budući da je $R$ nereduciran, postoji $\alpha \in R_0$ takav da je $2\alpha \in R$. Budući da je

$R_0$ ireducibilan i $\dim V \geq 2$, $\alpha$ ne može biti okomit na svaki njemu neproporcionalan korijen. Pretpostavimo da $\beta \in R_0$ nije proporcionalan korijenu $\alpha$ i da je $n(\beta, \alpha) \neq 0$. Zamijenimo li $\beta$ sa $-\beta$ ako je potrebno, možemo pretpostaviti da je $n(\beta, \alpha) > 0$. Imamo $\frac{1}{2}n(\beta, \alpha) = n(\beta, 2\alpha) \in \mathbb{Z}$, pa slijedi da je $n(\beta, \alpha) \in 2\mathbb{Z}$. Prema propoziciji 3.3.1. imamo tada $n(\beta, \alpha) = 2$ i $(\beta|\beta) = 2(\alpha|\alpha)$. Budući da je sistem korijena $R_0$ ireducibilan i reduciran, prema propoziciji 3.4.1. za svaki $\gamma \in R_0$ vrijedi ili $(\gamma|\gamma) = (\alpha|\alpha)$ ili $(\gamma|\gamma) = 2(\alpha|\alpha)$. Nadalje, za svaki $\gamma \in R \setminus R_0$ korijen $\frac{1}{2}\gamma \in R_0$ je takav da je $\left(\frac{1}{2}\gamma \middle| \frac{1}{2}\gamma\right) = (\alpha|\alpha)$. Prema tome, $r = (\alpha|\alpha)$, $B \neq \emptyset$, $R_0 = A \cup B$ i $R \subseteq A \cup B \cup 2A$. Međutim, ako je $\gamma \in A$, prema propoziciji 3.3.8. postoji $\sigma \in W(R)$ takav da je $\gamma = \sigma\alpha$, a odatle je $2\gamma = \sigma(2\alpha) \in R$. Dakle, $2A \subseteq R$, pa zaključujemo da je $R = A \cup B \cup 2A$.

Napokon, neka su $\gamma, \delta \in A$ neproporcionalni. Tada je

$$n(2\gamma, \delta) = 2n(\gamma, \delta) = 4n(\gamma, 2\delta) \in 4\mathbb{Z} \qquad \Longrightarrow \qquad n(\gamma, \delta) \in 2\mathbb{Z}.$$

S druge strane, korijeni $\gamma$ i $\delta$ imaju istu duljinu, pa prema propoziciji 3.3.1. vrijedi $|n(\gamma, \delta)| \leq 1$. Odatle slijedi $n(\gamma, \delta) = 0$, dakle, $(\gamma|\delta) = 0$.

**Propozicija 3.4.3.** *Pretpostavimo da je $R$ ireducibilan reduciran sistem korijena i da je*

$$\{(\alpha|\alpha);\ \alpha \in R\} = \{r, 2r\}$$

*za neki $r \in R_+^*$. Neka je $A = \{\alpha \in R;\ (\alpha|\alpha) = r\}$ i pretpostavimo da su svaka dva neproporcionalna korijena iz $A$ međusobno okomita. Tada je $R_1 = R \cup 2A$ ireducibilan nereduciran sistem korijena i $R$ je skup svih nedjeljivih korijena u $R_1$.*

**Dokaz:** Skup $R_1$ očito zadovoljava aksiome $(RS1)$ i $(RS3)$. Dokažimo da za $\alpha, \beta \in R_1$ vrijedi $\check{\alpha}(\beta) \in \mathbb{Z}$. To je jasno ako je $\alpha \in R$. Budući da je $(2\alpha)\check{} = \frac{1}{2}\check{\alpha}$ za $\alpha \in A$, jasno je i u slučaju da su $\alpha, \beta \in 2A$. Napokon, pretpostavimo da je $\beta \in R$ i da je $\alpha = 2\gamma$ za $\gamma \in A$.

(1) Ako je $\gamma = \pm\beta$, onda je $\check{\alpha}(\beta) = \pm\frac{1}{2}\check{\gamma}(\gamma) = \pm 1$.

(2) Ako korijen $\gamma$ nije proporcionalan korijenu $\beta$ i ako je $\beta \in A$, pretpostavljeno svojstvo od $A$ povlači da je $\check{\gamma}(\beta) = 0$, dakle i $\check{\alpha}(\beta) = 0$.

(3) Ako je $\beta \in R \setminus A$, tada je $(\beta|\beta) = 2r = 2(\gamma|\gamma)$, pa je prema propoziciji 3.3.1. $\check{\gamma}(\beta) \in \{0, 2, -2\}$. Dakle, $\check{\alpha}(\beta) = \frac{1}{2}\check{\gamma}(\beta) \in \mathbb{Z}$.

Time je dokazano da skup $R_1$ zadovoljava i aksiom $(RS2)$, dakle, $R_1$ je sistem korijena u $V$. Očito je sistem korijena $R_1$ nereduciran, a kako je $R$ ireducibilan, to je i $R_1$ ireducibilan. Po konstrukciji je jasno da je $R$ skup svih nedjeljivih korijena u $R_1$.

## 3.5 Weylove komore. Baze

I dalje je $R$ sistem korijena u realnom konačnodimenzionalnom prostoru $V$. Pretpostavljamo da je prostor $V$ unitaran i da su svi operatori iz grupe $Aut(R)$ ortogonalni. Posebno, za svaki korijen $\alpha \in R$ refleksija $\sigma_\alpha$ je ortogonalna.

Podskup $B$ od $R$ zove se **baza sistema korijena** $R$ ako vrijedi

$(B1)$ $B$ je baza vektorskog prostora $V$.

$(B2)$ Za svaki $\beta \in R$ i za $c_\alpha \in \mathbb{R},\ \alpha \in B$, takve da je

$$\beta = \sum_{\alpha \in B} c_\alpha \alpha$$

vrijedi ili $c_\alpha \in \mathbb{Z}_+\ \ \forall \alpha \in B$ ili $-c_\alpha \in \mathbb{Z}_+\ \ \forall \alpha \in B$.

Ako su $\beta$ i $c_\alpha$ kao u $(B2)$, definiramo **visinu korijena** $\beta$ u odnosu na bazu $B$ kao cijeli broj

$$ht_B\,\beta = \sum_{\alpha \in B} c_\alpha.$$

Ako su svi $c_\alpha \geq 0$, kažemo da je $\beta$ **pozitivan korijen** u odnosu na bazu $B$, a ako su svi $c_\alpha \leq 0$, kažemo da je $\beta$ **negativan korijen** u odnosu na bazu $B$. Skup svih pozitivnih (odnosno, negativnih) korijena u odnosu na $B$ označavat ćemo sa $R_+(B)$ (odnosno, $R_-(B)$ ). Očito je

$$R_-(B) = -R_+(B), \qquad R = R_+(B) \cup R_-(B), \qquad R_+(B) \cap R_-(B) = \emptyset.$$

Nadalje,

$$B = \{\beta \in R;\ ht_B(\beta) = 1\}.$$

Napokon, ako su $\beta, \gamma \in R_+(B)$ i ako je $\beta + \gamma \in R$, onda je $\beta + \gamma \in R_+(B)$.

**Lema 3.5.1.** *Neka je $B$ baza sistema korijena $R$. Za $\alpha, \beta \in B$, $\alpha \neq \beta$, vrijedi $\alpha - \beta \notin R$ i $(\alpha|\beta) \leq 0$.*

**Dokaz:** Doista, $\alpha - \beta \in R$ bi bilo u suprotnosti sa $(B2)$. Sada iz tvrdnje $(a)$ korolara 3.3.4. slijedi $(\alpha|\beta) \leq 0$.

Za svaki $\alpha \in R$ označimo

$$H_\alpha = V_{\sigma_\alpha}^+ = \{v \in V;\ \sigma_\alpha v = v\} = Ker\,\check{\alpha}.$$

$H_\alpha$ se zove **hiperravnina** određena s korijenom $\alpha$. To je potprostor od $V$ kodimenzije 1 i to je upravo ortogonalni komplement od $\alpha$.

Komponente povezanosti otvorenog skupa

$$V \setminus \bigcup_{\alpha \in R} H_\alpha$$

zovu se **Weylove komore** sistema korijena $R$. Izomorfizam $V \to V^*$ definiran pomoću skalarnog produkta $(\,\cdot\,|\,\cdot\,)$ preslikava korijen $\alpha \in R$ u multipl $\dfrac{2}{(\check{\alpha}|\check{\alpha})}\check{\alpha}$ dualnog korijena $\check{\alpha}$, dakle, preslikava hiperplohu $H_\alpha$ na hiperplohu $H_{\check{\alpha}}$. Prema tome, taj izomorfizam preslikava Weylove komore od $R$ na Weylove komore od $\check{R}$. Ako je $C$ Weylova komora od $R$, odgovarajuću Weylovu komoru od $\check{R}$

označavat ćemo sa $\check{C}$. Prema propoziciji 3.2.9. $\check{C}$ ovisi samo o $C$ a ne i o tome koji smo skalarni produkt u $V$ izabrali (takav da je $Aut(R)$ podgrupa odgovarajuće ortogonalne grupe).

Ako je $C$ Weylova komora, sa $\overline{C}$ ćemo označavati njen zatvarač u $V$. **Zid** Weylove komore je hiperploha $H_\alpha$, $\alpha \in R$, takva da je $\overline{C} \cap H_\alpha \neq \emptyset$.

Za vektor $x \in V$ koji nije sadržan ni u jednoj hiperplohi $H_\alpha$, $\alpha \in R$, kažemo da je **regularan**. Svaki regularan vektor $x \in V$ sadržan je u jedinstvenoj Weylovoj komori.

Za regularan vektor $x \in V$ i za svaki $\alpha \in R$ vrijedi $x \notin H_\alpha$, dakle, $(\alpha|x) \neq 0$. Definiramo

$$R_+(x) = \{\alpha \in R;\ (\alpha|x) > 0\}, \qquad R_-(x) = \{\alpha \in R;\ (\alpha|x) < 0\}.$$

Primijetimo da su $R_+(x)$ i $R_-(x)$ presjeci $R$ s dvama poluprostorima u $V$ određenih s hiperravninom $H_x = \{y \in V;\ (x|y) = 0$; ti poluprostori su komponente povezanosti skupa $V \setminus H_x$. $R_+(x)$ je skup svih korijena koji leže u istom poluprostoru kao i vektor $x$, tj. koji su s iste strane hiperravnine $H_x$ kao i $x$, a $R_-(x)$ su svi oni korijeni koji leže u onom drugom poluprostoru. Očito za svaki regularan vektor $x \in V$ vrijedi

$$R = R_+(x) \cup R_-(x), \qquad R_-(x) = -R_+(x), \qquad R_+(x) \cap R_-(x) = \emptyset.$$

Za korijen $\alpha \in R_+(x)$ kažemo da je **rastavljiv** (u odnosu na regularan vektor $x$), ako postoje $\beta, \gamma \in R_+(x)$ takvi da je $\alpha = \beta + \gamma$. U protivnom kažemo da je korijen $\alpha \in R_+(x)$ **nerastavljiv** (u odnosu na $x$). Označimo sa $B(x)$ skup svih nerastavljivih korijena $\alpha \in R_+(x)$.

Egzistencija baze sistema korijena nije a priori jasna. To osigurava sljedeći teorem:

**Teorem 3.5.2.** $(a)$ *Neka je vektor $x \in V$ regularan. Tada je $B(x)$ baza sistema korijena $R$.*

$(b)$ *Ako je $C$ Weylova komora od $R$ i $x, y \in C$ onda je $R_+(x) = R_+(y)$, $R_-(x) = R_-(y)$ i $B(x) = B(y)$.*

$(c)$ *Ako je $B$ baza sistema korijena $R$ onda postoji regularan vektor $x \in V$ takav da je $B = B(x)$.*

**Dokaz:** Dokaz tvrdnje $(a)$ ćemo provesti u 4 koraka:

(1) *Ako je $\beta \in R_+(x)$ onda postoje $b_\alpha \in \mathbb{Z}_+$, $\alpha \in B(x)$, takvi da je*

$$\beta = \sum_{\alpha \in B(x)} b_\alpha \alpha.$$

Pretpostavimo da to nije istina za neki $\beta \in R_+(x)$. Među svim takvima neka je $\beta$ izabran tako da je broj $(\beta|x)$ najmanji. Tada $\beta \notin B(x)$, pa postoje $\gamma, \delta \in R_+(x)$ takvi da je $\beta = \gamma + \delta$. Tada je $(\beta|x) = (\gamma|x) + (\delta|x)$, a kako je $(\gamma|x) > 0$ i $(\delta|x) > 0$, vrijedi $(\gamma|x) < (\beta|x)$ i $(\delta|x) < 0$. Prema izboru $\beta$ slijedi da je

$$\gamma = \sum_{\alpha \in B(x)} c_\alpha \alpha, \qquad \delta = \sum_{\alpha \in B(x)} d_\alpha \alpha, \qquad c_\alpha, d_\alpha \in \mathbb{Z}_+ \quad \forall \alpha \in B(x).$$

No tada je $b_\alpha = c_\alpha + d_\alpha \in \mathbb{Z}_+$ $\forall \alpha \in B(x)$ i očito je

$$\beta = \sum_{\alpha \in B(x)} b_\alpha \alpha$$

suprotno pretpostavci. Ova kontradikcija dokazuje tvrdnju (1).

(2) *Ako su* $\alpha, \beta \in B(x)$ *i* $\alpha \neq \beta$ *onda je* $(\alpha|\beta) \leq 0$.

U protivnom je prema tvrdnji $(a)$ korolara 3.3.4. $\alpha - \beta \in R$. Tada je ili $\alpha - \beta \in R_+(x)$ ili $\beta - \alpha \in R_+(x)$. U prvom slučaju je $\alpha = \beta + (\alpha - \beta)$ i $\beta, \alpha - \beta \in R_+(x)$, što je nemoguće, jer je korijen $\alpha \in R_+(x)$ nerastavljiv. U drugom slučaju je $\beta = \alpha + (\beta - \alpha)$ i $\alpha, \beta - \alpha \in R_+(x)$ što je opet nemoguće, jer je i korijen $\beta \in R_+(x)$ nerastavljiv. Ove kontradikcije dokazuju tvrdnju (2).

(3) *Skup vektora* $B(x)$ *je linearno nezavisan.*

Pretpostavimo da je

$$\sum_{\alpha \in B(x)} s_\alpha \alpha = 0, \qquad s_\alpha \in \mathbb{R}. \tag{3.12}$$

Stavimo

$$S = \{\alpha \in B(x);\ s_\alpha > 0\} \qquad \text{i} \qquad T = \{\beta \in B(x);\ s_\beta < 0\}.$$

Za $\beta \in T$ stavimo $t_\beta = -s_\beta > 0$. Tada je $S \cap T = \emptyset$ i vrijedi

$$\sum_{\alpha \in S} s_\alpha \alpha = \sum_{\beta \in T} t_\beta \beta.$$

Označimo taj vektor sa $y$. Tada je prema (2)

$$(y|y) = \sum_{\alpha \in S} \sum_{\beta \in T} s_\alpha t_\beta (\alpha|\beta) \leq 0,$$

pa slijedi $y = 0$. No tada je

$$0 = (x|y) = \sum_{\alpha \in S} s_\alpha (x|\alpha) = \sum_{\beta \in T} t_\beta (x|\beta).$$

No kako je $(x|\gamma) > 0$ za svaki $\gamma \in B(x)$, dakle, za svaki $\gamma \in S$ i za svaki $\gamma \in T$, gornje jednakosti pokazuju da je nužno $S = \emptyset$ i $T = \emptyset$. Prema tome, iz (3.12) slijedi $r_\alpha = 0$ $\forall \alpha \in B(x)$. Time je dokazano da je skup vektora $B(x)$ linearno nezavisan.

(4) *Skup korijena* $B(x)$ *je baza sistema korijena* $R$.

Kako je $R$ disjunktna unija $R_+(x)$ i $R_-(x) = -R_+(x)$, iz (1) slijedi da skup $B(x)$ zadovoljava uvjet $(B2)$. Nadalje, iz $(B2)$ slijedi da je *span* $B(x) = V$, pa zbog (4) zaključujemo da $B(x)$ zadovoljava i $B(1)$.

Time je tvrdnja $(a)$ dokazana.

$(b)$ Pretpostavimo da vektori $x$ i $y$ leže u istoj Weylovoj komori $C$ ali da $R_+(x) \neq R_+(y)$. To znači da postoji $\alpha \in R_+(x) \cap R_-(y)$. Tada je $(\alpha|x) > 0$ i $(\alpha|y) < 0$. Weylova komora $C$ je očito konveksan podskup od $V$, pa vrijedi $tx + (1-t)y \in C$ za svaki $t \in [0,1]$ : Funkcija $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definirana sa $f(t) = (\alpha|tx + (1-t)y) = t(\alpha|x) + (1-t)(\alpha|y)$ je neprekidna i vrijedi $f(0) < 0$ i $f(1) > 0$. Stoga postoji $t_0 \in \langle 0, 1 \rangle$ takav da je $f(t_0) = 0$. (Naravno, $t_0$ je jedinstven i jednak $\frac{(\alpha|y)}{(\alpha|y)-(\alpha|x)}$.) Tada za $z = t_0 x + (1-t_0)y \in C$ vrijedi $(\alpha|z) = 0$, dakle, $z \in H_\alpha$, a to je nemoguće, jer je $C \cap H_\alpha = \emptyset$ $\forall \alpha \in R$. Ova kontradikcija dokazuje tvrdnju $(b)$.

$(c)$ Neka je $B = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell\}$ baza sistema korijena $R$. Označimo sa $P_i$ onaj poluprostor određen hiperravninom $H_{\alpha_i}$ u kojem leži korijen $\alpha_i$ :

$$P_i = \{x \in V;\ (\alpha_i|x) > 0\}.$$

Tada je presjek

$$P_1 \cap \cdots \cap P_\ell = \{x \in V;\ (\alpha_i|x) > 0\ \forall i \in \{1, \ldots \ell\}\}.$$

neprazan:

**Zadatak 3.10.** *Neka je $\delta_i$ ortogonalna projekcija vektora $\alpha_i$ na jednodimenzionalan potprostor $(span\,\{\alpha_j;\ j \neq i\})^\perp$. Neka je $x = c_1\delta_1 + \cdots + c_\ell\delta_\ell$, gdje su $c_1, \ldots, c_\ell \in \mathbb{R}_+^* = \langle 0, \infty\rangle$. Dokažite da je tada $x \in P_i\ \forall i \in \{1, \ldots, \ell\}$.*

Usput uočimo da je tada zbog svojstva $(B2)$

$$P_1 \cap \cdots \cap P_\ell = \{x \in V;\ (\alpha|x) > 0\ \forall \alpha \in R_+(B)\},$$

pa je u stvari taj presjek jedna Weylova komora.

Neka je $x \in P_1 \cap \cdots \cap P_\ell$, tj. $(x|\alpha_i) > 0$ za $i = 1, \ldots, \ell$. Zbog $(B2)$ tada je vektor $x$ regularan i vrijedi $R_+(B) \subseteq R_+(x)$ i $R_-(B) \subseteq R_-(x)$. No kako je $R$ disjunktna unija $R_+(B)$ i $R_-(B)$ i disjunktna unija $R_+(x)$ i $R_-(x)$, slijede jednakosti $R_+(B) = R_+(x)$ i $R_-(B) = R_-(x)$. Iz jednakosti $R_+(B) = R_+(x)$ slijedi da se $B$ sastoji od nerastavljivih korijena u odnosu na $x$. To znači da je $B \subseteq B(x)$. Kako su i $B$ i $B(x)$ baze vektorskog prostora $V$, zaključujemo da je $B = B(x)$.

Prema tome, svakoj je Weylovoj komori $C$ pridružena sasvim određena baza od $R$ koju ćemo označavati sa $B(C)$; imamo $B(C) = B(x)$ za bilo koji $x \in C$. Pisat ćemo tada $R_+(C) = R_+(B(C))$ i $R_-(C) = R_-(B(C))$. Nadalje, $C \mapsto B(C)$ je bijekcija sa skupa svih Weylovih komora na skup svih baza od $R$. Inverznu bijekciju označavat ćemo sa $B \mapsto C(B)$. Iz gornjeg dokaza vidi se da je

$$C(B) = \bigcap_{\alpha \in B} \{x \in V;\ (x|\alpha) > 0\} = \{x \in V;\ (x|\alpha) > 0\ \forall \alpha \in B\}.$$

Dokazat ćemo sada nekoliko korisnih lema o svojstvima baze sistema korijena.

**U daljnjem pretpostavljamo da je sistem korijena $R$ reduciran tj. da je svaki korijen iz $R$ nedjeljiv. Nadalje, fiksirajmo neku (bilo koju) bazu $B$ sistema korijena $R$ . Neka je $C = C(B)$ je pripadna Weylova komora. Pisat ćemo $R_+ = R_+(B) = R_+(C)$ i $R_- = R_-(B) = R_-(C)$. Napokon, Weylovu grupu $W(R)$ sistema korijena $R$ označavat ćemo kraće sa $W$.**

**Lema 3.5.3.** *Ako je $\alpha \in R_+ \setminus B$, onda postoji $\beta \in B$ takav da je $\alpha - \beta \in R$. Tada je $\alpha - \beta \in R_+$.*

**Dokaz:** Kad bi bilo $(\alpha|\beta) \leq 0\ \ \forall \beta \in B$, tada bismo kao u koraku (3) dokaza tvrdnje $(a)$ teorema 3.5.2. mogli zaključiti da je skup $B \cup \{\alpha\}$ linearno nezavisan, što je nemoguće, jer je $B$ baza od $V$. Prema tome, postoji $\beta \in B$ takav da je $(\alpha|\beta) > 0$. Prema tvrdnji $(a)$ korolara 3.3.4. tada je $\alpha - \beta \in R$.

Tada $\alpha$ nije proporcionalan $\beta$, jer je i $\beta$ nedjeljiv. Prema tome je

$$\alpha = \sum_{\gamma \in B} c_\gamma \gamma, \qquad c_\gamma \geq 0 \quad \forall \gamma \in B, \qquad \exists \delta \in B \setminus \{\beta\}, \quad c_\delta > 0.$$

Stoga za korijen $\alpha - \beta$ vrijedi

$$\alpha - \beta = (c_\beta - 1)\beta + \sum_{\gamma \in B \setminus \{\beta\}} c_\gamma \gamma,$$

svi koeficijenti su cjelobrojni i bar jedan je striktno pozitivan. Prema $(B2)$ slijedi da su svi koeficijenti iz $\mathbb{Z}_+$, dakle, $\alpha - \beta \in R_+$.

**Lema 3.5.4.** *Svaki $\alpha \in R_+$ se može napisati u obliku $\alpha_1 + \cdots + \alpha_k$ pri čemu su $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in B$ (ne nužno različiti) izabrani tako da je svaka parcijalna suma $\alpha_1 + \cdots + \alpha_i$, $i = 1, \ldots, k$, korijen.*

**Zadatak 3.11.** *Dokažite lemu 3.5.4.*

**Uputa:** Dokaz provedite indukcijom u odnosu na $ht_B\alpha$ pomoću leme 3.5.3.

**Lema 3.5.5.** *Neka je $\alpha \in B$. Tada refleksija $\sigma_\alpha$ permutira skup $R_+ \setminus \{\alpha\}$.*

**Dokaz:** Neka je $\beta \in R_+ \setminus \{\alpha\}$. Očito je $\sigma_\alpha\beta \neq \alpha$ (jer je $\sigma_\alpha(-\alpha) = \alpha$ i $\beta \neq -\alpha$). Treba još dokazati da je korijen $\sigma_\alpha\beta$ pozitivan (u odnosu na $B$). Možemo pisati

$$\beta = \sum_{\gamma \in B} c_\gamma \gamma, \qquad c_\gamma \in \mathbb{Z}_+ \quad \forall \gamma \in B.$$

Budući da korijen $\beta$ nije proporcionalan korijenu $\alpha$, vrijedi $c_\gamma \neq 0$ za neki $\gamma \neq \alpha$. Tada je koeficijent od $\sigma_\alpha\beta = \beta - n(\beta, \alpha)\alpha$ uz taj element $\gamma \in B$ i dalje $c_\gamma$. Zbog $(B2)$ slijedi da je doista korijen $\sigma_\alpha\beta$ pozitivan.

Definiramo

$$\rho = \rho_B = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in R_+} \alpha. \tag{3.13}$$

**Lema 3.5.6.** *Za svaki $\alpha \in B$ je $\sigma_\alpha\rho = \rho - \alpha$.*

**Dokaz:** Tvrdnja slijedi neposredno iz leme 3.5.5.:

$$\sigma_\alpha\rho = \frac{1}{2} \sum_{\beta \in R_+ \setminus \{\alpha\}} \sigma_\alpha\beta + \frac{1}{2}\sigma_\alpha\alpha = \frac{1}{2} \sum_{\beta \in R_+ \setminus \{\alpha\}} \beta - \frac{1}{2}\alpha = \frac{1}{2} \sum_{\beta \in R_+} \beta - \alpha = \rho - \alpha.$$

**Lema 3.5.7.** *Neka su $\alpha_1, \ldots, \alpha_s \in B$ (ne nužno različiti) i neka su $\sigma_i = \sigma_{\alpha_i}$. Ako je korijen $\sigma_1 \cdots \sigma_{s-1}\alpha_s$ negativan, onda za neki indeks $t \in \{1, \ldots, s-1\}$ vrijedi*

$$\sigma_1 \cdots \sigma_s = \sigma_1 \cdots \sigma_{t-1}\sigma_{t+1} \cdots \sigma_{s-1}.$$

**Dokaz:** Stavimo

$$\beta_i = \sigma_{i+1} \cdots \sigma_{s-1}\alpha_s \quad \text{za} \quad i = 0, 1, \ldots, s-2, \qquad \beta_{s-1} = \alpha_s.$$

Vrijedi $\beta_0 \in R_-$ i $\beta_{s-1} \in R_+$. Neka je $t \in \{1, \ldots, s-1\}$ najmanji indeks takav da je $\beta_t \in R_+$. Tada je $\sigma_t\beta_t = \beta_{t-1} \in R_-$, pa iz leme 3.5.5. slijedi da je $\beta_t = \alpha_t$, odnosno,

$$\sigma_{t+1} \cdots \sigma_{s-1}\alpha_s = \alpha_t.$$

Sjetimo se sada da po propoziciji 3.2.1. za svaki $\tau \in W$ (štoviše, za svaki $\tau \in Aut(R)$) i za svaki korijen $\alpha \in R$ vrijedi

$$\tau\sigma_\alpha\tau^{-1} = \sigma_{\tau\alpha}.$$

Primijenimo li to na $\tau = \sigma_{t+1} \cdots \sigma_{s-1}$ i na $\alpha = \alpha_s$, imamo $\tau\alpha = \tau\alpha_s = \alpha_t$, $\sigma_\alpha = \sigma_s$ i $\sigma_{\tau\alpha} = \sigma_t$, pa dobivamo da je

$$\sigma_t = \tau\sigma_s\tau^{-1} = \sigma_{t+1} \cdots \sigma_{s-1}\sigma_s\sigma_{s-1} \cdots \sigma_{t+1}.$$

Odatle je

$$\sigma_t\sigma_{t+1} \cdots \sigma_{s-1}\sigma_s = \sigma_{t+1} \cdots \sigma_{s-1},$$

pa slijedi

$$\sigma_1 \cdots \sigma_s = \sigma_1 \cdots \sigma_{t-1}\sigma_t\sigma_{t+1} \cdots \sigma_{s-1}\sigma_s = \sigma_1 \cdots \sigma_{t-1}\sigma_{t+1} \cdots \sigma_{s-1}.$$

Time je lema dokazana.

U daljnjem sa $W'$ označavamo podgrupu Weylove grupe $W = W(R)$ generiranu refleksijama $\sigma_\alpha$ za $\alpha \in B$. Za sada to još ne znamo, ali pokazat će se da je zapravo $W' = W$. Svaki element $\sigma \in W'$ može se napisati u obliku $\sigma = \sigma_{\alpha_1} \cdots \sigma_{\alpha_s}$. Ako je pri tome $s \in \mathbb{Z}_+$ najmanji mogući, pisat ćemo $s = \ell(\sigma)$. Svaki prikaz elementa $\sigma \in W'$ u obliku produkta $s = \ell(\sigma)$ refleksija u odnosu na korijene iz $B$ zove se **reducirani prikaz** od $\sigma$ (u odnosu na bazu $B$.) Naravno, podrazumijevamo da je $\ell(1) = 0$, štoviše, vrijedi $\ell(\sigma) = 0$ ako i samo ako je $\sigma = 1$.

**Lema 3.5.8.** *Neka je $\sigma \in W'$ i neka je $\sigma = \sigma_{\alpha_1} \cdots \sigma_{\alpha_s}$ reducirani prikaz od $\sigma$ u odnosu na bazu $B$; dakle, $\alpha_1, \ldots, \alpha_s \in B$ i $s = \ell(\sigma)$. Tada je $\sigma\alpha_s \in R_-$.*

**Zadatak 3.12.** *Dokažite lemu 3.5.8.*

**Uputa:** Primijetite da je $\sigma\alpha_s = -\sigma_{\alpha_1} \cdots \sigma_{\alpha_{s-1}}\alpha_s$. Zatim koristite lemu 3.5.7. i minimalnost $s$ u prikazu elementa $\sigma$ u obliku produkta $s$ refleksija u odnosu na korijene iz $B$.

**Lema 3.5.9.** *Ako je vektor $x \in V$ regularan, onda postoji $\sigma \in W'$ takav da je $\sigma x \in C$, odnosno, $(\sigma x|\alpha) > 0 \ \ \forall \alpha \in B$.*

**Dokaz:** Neka je $\rho$ definiran sa (3.13). Izaberimo $\sigma \in W'$ tako da skalarni produkt $(\sigma x|\rho)$ bude najveći mogući. Za $\alpha \in B$ je tada $\sigma_\alpha\sigma \in W'$ pa po izboru $\sigma$ i po lemi 3.5.6. imamo

$$(\sigma x|\rho) \geq (\sigma_\alpha\sigma x|\rho) = (\sigma x|\sigma_\alpha\rho) = (\sigma x|\rho - \alpha) = (\sigma x|\rho) - (\sigma x|\alpha).$$

Odatle je $(\sigma x|\alpha) \geq 0 \ \ \forall \alpha \in B$. Pretpostavimo da je $(\sigma x|\alpha) = 0$ za neki $\alpha \in B$. Tada je $(x|\sigma^{-1}\alpha) = 0$, a to znači da je $x \in H_{\sigma^{-1}\alpha}$, a to je nemoguće jer je po pretpostavci vektor $x$ regularan. Prema tome, vrijedi $(\sigma x|\alpha) > 0 \ \ \forall \alpha \in B$.

**Lema 3.5.10.** *Svaki korijen $\alpha \in R$ pripada nekoj bazi od $R$.*

**Dokaz:** Sve hiperravnine $H_\beta$ za $\beta \in R \setminus \{\alpha, -\alpha\}$ su različite od $H_\alpha$. Stoga postoji $y \in H_\alpha$ takav da $y \notin H_\beta \ \ \forall \beta \in R \setminus \{\alpha, -\alpha\}$, odnosno, $(y|\beta) \neq 0 \ \ \forall \beta \in R \setminus \{\alpha, -\alpha\}$. Neka je

$$\varepsilon = \min\{|(y|\beta)|;\ \beta \in R \setminus \{\alpha, -\alpha\}\} > 0.$$

Izaberimo $x \in V$ dovoljno blizu $y$ tako da bude $0 < (x|\alpha) < \varepsilon$ i $|(x|\beta)| > \frac{1}{2}\varepsilon \ \ \forall \beta \in R \setminus \{\alpha, -\alpha\}$. Tada je vektor $x$ regularan, vrijedi $\alpha \in R_+(x)$ i korijen $\alpha$ je nerastavljiv u odnosu na $x$. Doista, kad bi bilo $\alpha = \beta + \gamma$ za neke $\beta, \gamma \in R_+(x)$, onda bismo imali $(x|\beta) > 0$ i $(x|\gamma) > 0$, a kako su $\beta, \gamma \in R \setminus \{\alpha, -\alpha\}$, slijedilo bi $(x|\beta) > \frac{1}{2}\varepsilon$ i $(x|\gamma) > \frac{1}{2}\varepsilon$, dakle,

$$\varepsilon > (x|\alpha) = (x|\beta) + (x|\gamma) > \varepsilon.$$

Ova kontradikcija dokazuje nerastavljivost korijena $\alpha$ u odnosu na $x$. Dakle, $\alpha \in B(x)$.

Weylova grupa $W$ djeluje na prostoru $V$. Nadalje, grupa $W$ djeluje i na skupu $\mathcal{C}$ svih Weylovih komora sistema korijena $R$ u prostoru $V$, a također na skupu $\mathcal{B}$ svih baza sistema korijena $R$ :

**Zadatak 3.13.** *Dokažite:*

(*a*) *Ako je $C \in \mathcal{C}$ i $\sigma \in W$, onda je i $\sigma C = \{\sigma x;\ x \in C\} \in \mathcal{C}$.*

(*b*) *Ako je $B \in \mathcal{B}$ i $\sigma \in W$, onda je i $\sigma B = \{\sigma\alpha;\ \alpha \in B\} \in \mathcal{B}$.*

(*c*) *Ako je $C \in \mathcal{C}$ i $\sigma \in W$, onda je $\sigma B(C) = B(\sigma C)$.*

**Lema 3.5.11.** *Ako je $\alpha \in R$, postoji $\sigma \in W'$ takav da je $\sigma\alpha \in B$.*

**Dokaz:** Prema lemi 3.5.10. $\alpha \in B'$ za neku bazu $B'$ sistema korijena $R$. Neka je $C' = C(B')$ pripadna Weylova komora. Bilo koji vektor $x \in C'$ je regularan, pa po lemi 3.5.9. postoji $\sigma \in W'$ takav da je $\sigma x \in C$. To znači da je $(\sigma C') \cap C \neq \emptyset$, a kako je prema tvrdnji $(a)$ zadatka 3.13. $\sigma C'$ Weylova komora, slijedi $\sigma C' = C$. No tada je po tvrdnji $(c)$ zadatka 3.13. $\sigma B' = B$, pa slijedi $\sigma\alpha \in B$.

Podsjetimo se sada nekih pojmova vezanih uz djelovanje neke grupe $G$ na nekom skupu $S$. Kaže se da grupa $G$ djeluje **tranzitivno** na $S$, ako za bilo koje $x, y \in S$ postoji $\sigma \in G$ takav da je $\sigma x = y$. To znači da je za svaki $x \in S$ preslikavanje $\sigma \mapsto \sigma x$ surjekcija sa $G$ na $S$. Ako je to preslikavanje bijekcija, kažemo da grupa $G$ djeluje na $S$ **prosto tranzitivno**.

**Teorem 3.5.12.** *Neka je $R$ reduciran sistem korijena u prostoru $V$.*

$(a)$ *Weylova grupa $W$ djeluje prosto tranzitivno na skupu $\mathcal{C}$ svih Weylovih komora sistema korijena $R$.*

$(b)$ *Weylova grupa $W$ djeluje prosto tranzitivno na skupu $\mathcal{B}$ svih baza sistema korijena $R$.*

$(c)$ *Ako je $B$ baza sistema korijena $R$, Weylova grupa $W$ generirana je refleksijama $\sigma_\alpha$, $\alpha \in B$, (tj. uz prethodne oznake vrijedi $W' = W$).*

**Dokaz:** Označimo kao i prije sa $W'$ podgrupu Weylove grupe $W$ generiranu refleksijama $\sigma_\alpha$, $\alpha \in B$. Da bismo dokazali $W' = W$ dovoljno je dokazati da je $\sigma_\alpha \in W'$ $\forall \alpha \in R$. Ako je $\alpha \in R$, prema lemi 3.5.11. postoji $\sigma \in W'$ takav da je $\beta = \sigma\alpha \in B$. Prema propoziciji 3.2.1. tada je $\sigma_\beta = \sigma\sigma_\alpha\sigma^{-1}$, dakle, $\sigma_\alpha = \sigma^{-1}\sigma_\beta\sigma \in W'$. Time je tvrdnja $(c)$ dokazana.

Primijetimo sada da su tvrdnje $(a)$ i $(b)$ međusobno ekvivalentne zbog tvrdnje $(c)$ zadatka 3.13. Neka su $C, C' \in \mathcal{C}$. Svaki vektor $x \in C'$ je regularan pa po lemi 3.5.9. postoji $\sigma \in W$ takav da je $\sigma x \in C$. Tada kao u dokazu leme 3.5.11. slijedi da je $\sigma C' = C$. Prema tome, Weylova grupa $W$ djeluje tranzitivno na skupu $\mathcal{C}$ svih Weylovih komora, dakle i na skupu $\mathcal{B}$ svih baza od $R$. Da bismo dokazali prostu tranzitivnost, dovoljno je dokazati da ako za neku bazu $B$ od $R$ i za neki $\sigma \in W$ vrijedi $\sigma B = B$, onda je nužno $\sigma = 1$.

Neka je, dakle, $B$ baza sistema korijena $R$ i neka je $\sigma \in W$ takav da je $\sigma B = B$. Pretpostavimo da je $\sigma \neq 1$. Tada se $\sigma$ prema tvrdnji $(c)$ može napisati kao produkt refleksija u odnosu na korijene iz $B$. Izaberemo li takav zapis s minimalnim brojem refleksija, lema 3.5.8. pokazuje da je tada $\sigma\alpha \in R_-$ za neki $\alpha \in B$. No to je u suprotnosti s pretpostavkom $\sigma B = B \subseteq R_+$. Ova kontradikcija pokazuje da je nužno $\sigma = 1$.

**Lema 3.5.13.** *Neka je $B$ baza od $R$, $R_+ = R_+(B)$, $R_- = R_-(B)$ i $\ell(\cdot) = \ell_B(\cdot)$. Za svaki $\sigma \in W$ je*

$$\ell(\sigma) = |\{\alpha \in R_+;\ \sigma\alpha \in R_-\}|\,.$$

**Dokaz:** Označimo

$$n(\sigma) = |\{\alpha \in R_+;\ \sigma\alpha \in R_-\}|\,, \qquad \sigma \in W.$$

Dokaz ćemo provesti indukcijom u odnosu na $\ell(\sigma)$. Baza indukcije $\ell(\sigma) = 0$ je trivijalna: ako je $\ell(\sigma) = 0$, onda je $\sigma = 1$, pa je očito i $n(\sigma) = 0$. Pretpostavimo sada da je $\sigma \in W$, $\ell(\sigma) = s \geq 1$, i da je za sve $\tau \in W$ za koje je $\ell(\tau) < s$ dokazano da je $\ell(\tau) = n(\tau)$. Neka je

$$\sigma = \sigma_{\alpha_1} \cdots \sigma_{\alpha_s}, \qquad \alpha_1, \ldots, \alpha_s \in B,$$

reducirani prikaz od $\sigma$ u odnosu na $B$. Prema lemi 3.5.8. tada je $\sigma\alpha_s \in R_-$. No tada lema 3.5.5. povlači da je $n(\sigma\sigma_{\alpha_s}) = n(\sigma) - 1$. S druge strane, $\sigma\sigma_{\alpha_s} = \sigma_{\alpha_1} \cdots \sigma_{\alpha_{s-1}}$ je očito reducirani prikaz, pa je $\ell(\sigma\sigma_{\alpha_s}) = s - 1 < s$. Po pretpostavci indukcije je $\ell(\sigma\sigma_{\alpha_s}) = n(\sigma\sigma_{\alpha_s})$, a odatle je

$$n(\sigma) = n(\sigma\sigma_{\alpha_s}) + 1 = \ell(\sigma\sigma_{\alpha_s}) + 1 = s - 1 + 1 = s = \ell(\sigma).$$

Promatrat ćemo sada djelovanje Weylove grupe na prostoru $V$.

Ako grupa $G$ djeluje na skupu $S$, skup $Gx = \{\sigma x;\ \sigma \in G\}$ zove se $G-$**orbita** elementa $x \in S$. Podskup $T \subseteq S$ zove se **fundamentalna domena** za djelovanje grupe $G$, ako je presjek $T$ sa svakom $G-$orbitom jednočlan skup. To znači da za svaki $x \in S$ postoji jedinstven $t \in T$ takav da je $x \in Gt$, tj. takav da za neki $\sigma \in G$ vrijedi $x = \sigma t$. Drugim riječima, $Gt$, $t \in T$, su sve $G-$orbite u $S$ i one su međusobno disjunktne. Dakle,

$$S = \bigcup_{t \in T} Gt \qquad \text{i za} \qquad t_1, t_2 \in T \qquad \text{iz} \qquad t_1 \neq t_2 \qquad \text{slijedi} \qquad Gt_1 \cap Gt_2 = \emptyset.$$

Cilj nam je dokazati da je zatvarač $\overline{C}$ bilo koje Weylove komore $C$ fundamentalna domena za djelovanje Weylove grupe $W$ na prostoru $V$, tj. da za svaki $x \in V$ postoji jedinstven $y \in \overline{C}$ takav da je $x \in Wy$, odnosno, takav da je $x = \sigma y$ za neki $\sigma \in W$.

**Lema 3.5.14.** *Neka je $C \in \mathcal{C}$ Weylova komora, $B = B(C) \in \mathcal{B}$ pripadna baza od $R$, $x \in \overline{C}$ i $\sigma \in W$. Tada postoje $c_\alpha \in \mathbb{R}_+$, $\alpha \in B$, takvi da je*

$$x - \sigma x = \sum_{\alpha \in B} c_\alpha \alpha.$$

**Dokaz:** Možemo pretpostaviti da je $\sigma \neq 1$. Neka je $s = \ell(\sigma)$ i neka je $\sigma = \sigma_{\alpha_1} \cdots \sigma_{\alpha_s}$, gdje su $\alpha_1, \ldots, \alpha_s \in B$, reducirani prikaz od $\sigma$ u odnosu na $B$. Tada je $\sigma^{-1} = \sigma_{\alpha_s} \cdots \sigma_{\alpha_1}$ reducirani prikaz od $\sigma^{-1}$, pa je i svaki parcijalni produkt $\sigma_{\alpha_s} \cdots \sigma_{\alpha_t}$, $1 \leq t \leq s$, reducirani prikaz. Stoga je po lemi 3.5.8. $\sigma_{\alpha_s} \cdots \sigma_{\alpha_{t+1}} \alpha_t \in R_+$ za svaki $t \in \{1, \ldots, s\}$. Budući da je

$$C = \{y \in V;\ (y|\alpha) > 0\ \forall \alpha \in B\} = \{y \in V;\ (y|\alpha) > 0\ \forall \alpha \in R_+\},$$

to je očito

$$\overline{C} = \{y \in V;\ (y|\alpha) \geq 0\ \forall \alpha \in B\} = \{y \in V;\ (y|\alpha) \geq 0\ \forall \alpha \in R_+\}.$$

Kako je po pretpostavci $x \in \overline{C}$, slijedi da za svaki $t \in \{1, \ldots, s\}$ vrijedi

$$(\sigma_{\alpha_{t+1}} \cdots \sigma_{\alpha_s} x | \alpha_t) = (x | \sigma_{\alpha_s} \cdots \sigma_{\alpha_{t+1}} \alpha_t) \geq 0.$$

Dakle, vrijedi

$$d_t = 2\frac{(\sigma_{\alpha_{t+1}} \cdots \sigma_{\alpha_s} x | \alpha_t)}{(\alpha_t|\alpha_t)} \geq 0.$$

Refleksija $\sigma_\alpha$ djeluje na prostoru $V$ po formuli

$$\sigma_\alpha v = v - 2\frac{(v|\alpha)}{(\alpha|\alpha)}\alpha, \qquad v \in V.$$

Odatle je

$$\sigma x = \sigma_{\alpha_1} \cdots \sigma_{\alpha_s} x = \sigma_{\alpha_2} \cdots \sigma_{\alpha_s} x - d_1 \alpha_1 =$$
$$= \sigma_{\alpha_3} \cdots \sigma_{\alpha_s} x - d_1\alpha_1 - d_2\alpha_2 = \cdots\cdots = x - d_1\alpha_1 - d_2\alpha_2 - \cdots - d_s\alpha_s,$$

dakle,

$$x - \sigma x = \sum_{i=1}^{s} d_i \alpha_i = \sum_{\alpha \in B} c_\alpha \alpha,$$

gdje je za svaki $\alpha \in B$

$$c_\alpha = \sum_{i \in I(\alpha)} d_i \geq 0, \qquad I(\alpha) = \{i \in \{1, \ldots, s\};\ \alpha_i = \alpha\}.$$

**Teorem 3.5.15.** *Zatvarač $\overline{C}$ bilo koje Weylove komore $C$ sistema korijena $R$ je fundamentalna domena za djelovanje Weylove grupe $W = W(R)$ na vektorskom prostoru $V$.*

**Dokaz:** Neka je $y \in V$ proizvoljan. Tada postoji Weylova komora $C'$ takva da je $y \in \overline{C'}$. Prema tvrdnji $(a)$ teorema 3.5.12. postoji $\sigma \in W$ takav da je $\sigma C = C'$. No tada je očito $\sigma\overline{C} = \overline{C'}$. To znači da je $y \in \sigma\overline{C}$, odnosno, postoji $x \in \overline{C}$ takav da je $y = \sigma x$. To dokazuje da unija svih $W-$orbita elemenata $x \in \overline{C}$ jednaka čitavom prostoru $V$.

Treba još dokazati da su te orbite međusobno disjunktne. Pretpostavimo da su $x, y \in \overline{C}$ i da se njihove $W-$orbite podudaraju, odnosno, da se $y$ nalazi u $W-$orbiti od $x$, tj. $y = \sigma x$ za neki $\sigma \in W$. Prema lemi 3.5.14. tada postoje $c_\alpha \in \mathbb{R}_+,\ \alpha \in B(C)$, takvi da je

$$x - y = \sum_{\alpha \in B(C)} c_\alpha \alpha.$$

S druge strane vrijedi $x = \sigma^{-1} y$ i $y \in \overline{C}$, pa po istoj lemi postoje $d_\alpha \in \mathbb{R}_+$, $\alpha \in B(C)$, takvi da je

$$y - x = \sum_{\alpha \in B(C)} d_\alpha \alpha.$$

Zbrajanjem posljednje dvije jednakosti slijedi

$$\sum_{\alpha \in B(C)} (c_\alpha + d_\alpha)\alpha = 0.$$

Kako je $B(C)$ baza vektorskog prostora $V$, slijedi da je $c_\alpha + d_\alpha = 0\ \ \forall \alpha \in B(C)$, pa iz nenegativnosti $c_\alpha$ i $d_\alpha$ slijedi $c_\alpha = d_\alpha = 0\ \ \forall \alpha \in B(C)$. Odatle je $x - y = 0$, odnosno, $x = y$.

Primijetimo da u dokazu prethodnog teorema nismo dobili da iz $\sigma x = y$ za neke $x, y \in \overline{C}$ i $\sigma \in W$ nužno slijedi $\sigma = 1$ (nego samo da je nužno $x = y$). No to je istina ako je $x \in C$. Doista, to slijedi iz proste tranzitivnosti djelovanja grupe $W$ na skupu $\mathcal{C}$ svih Weylovih komora: za $x \in C$ i $\sigma \in W$, $\sigma \neq 1$, vrijedi $\sigma x \notin C$. Međutim, ako je $x \in \overline{C} \setminus C$, odnosno, ako je $x$ u nekom zidu $H_\beta$ Weylove komore $C$, onda je npr. $\sigma_\beta x = x$ iako je $\sigma_\beta \neq 1$.

**Zadatak 3.14.** *Neka je $B$ baza sistema korijena $R \neq \emptyset$ i $\ell(\sigma) = \ell_B(\sigma)$, $\sigma \in W$. Stavimo*

$$sign(\sigma) = (-1)^{\ell(\sigma)}, \qquad \sigma \in W.$$

*Dokažite da je sign epimorfizam grupe $W$ na dvočlanu multiplikativnu grupu $\{1, -1\}$ koji ne ovisi o izboru baze $B$.*

**Zadatak 3.15.** *Dokažite da je $sign(\sigma_\beta) = -1$ za svaki korijen $\beta \in R$.*

**Zadatak 3.16.** *Neka je* $R_+ = R_+(B)$ *i* $R_- = R_-(B)$ *za bazu* $B$ *sistema korijena* $R$*. Dokažite da postoji jedinstven* $\sigma_0 \in W = W(R)$ *takav da je* $\sigma_0 R_+ = R_-$*. Nadalje, dokažite da svaki reducirani prikaz elementa* $\sigma_0$ *u odnosu na bazu* $B$ *mora sadržavati sve refleksije* $\sigma_\alpha,\ \alpha \in B$*. Što se može reći o* $\ell(\sigma_0) = \ell_B(\sigma_0)$*?*

**Zadatak 3.17.** *Neka je* $B$ *baza sistema korijena* $R$ *i neka je*

$$\lambda = \sum_{\alpha \in B} c_\alpha \alpha, \qquad c_\alpha \in \mathbb{Z}_+.$$

*Dokažite da tada vrijedi jedna od sljedeće dvije mogućnosti koje se međsobno isključuju:*

(1) $\lambda$ *je multipl nekog korijena.*

(2) *Postoji* $\sigma \in W$ *takav da je*

$$\sigma\lambda = \sum_{\alpha \in B} d_\alpha \alpha$$

*pri čemu je* $d_\beta > 0$ *za neki* $\beta \in B$ *i* $d_\gamma < 0$ *za neki* $\gamma \in B$*.*

**Uputa:** Uočite da ako $\lambda$ nije multipl korijena, onda hiperravnina

$$H_\lambda = \{x \in V;\ (x|\lambda) = 0\}$$

nije sadržana u uniji hiperravnina $H_\alpha$, $\alpha \in R$. Zatim izaberite $x \in H_\lambda$ takav da $x \notin H_\alpha$ $\forall \alpha \in R$. Zatim koristite teorem 3.5.12. da izaberete $\sigma \in W$ takav da je $\sigma x$ u Weylovoj komori određenoj sa $B$. Napokon, iskoristite da je $0 = (\lambda|x) = (\sigma\lambda|\sigma x)$ i prikaz $\sigma\lambda$ kao linearne kombinacije elemenata baze $B$.

**Zadatak 3.18.** *Neka je* $B$ *baza sistema korijena* $R$ *i definirajmo podgrupu grupe* $Aut(R)$ *ovako:*

$$Aut_B(R) = \{\omega \in Aut(R);\ \omega(B) = B\}.$$

*Tada je grupa* $Aut(R)$ *semidirektni produkt normalne podgrupe* $W(R)$ *i podgrupe* $Aut_B(R)$*, tj.*

$$Aut(R) = W(R)Aut_B(R) = \{\sigma\omega;\ \sigma \in W(R),\ \omega \in Aut_B(R)\} \qquad i \qquad Aut_B(R) \cap W(R) = \{1\}.$$

**Uputa:** Dokažite da je $\omega(B)$ baza sistema korijena $R$ za svaki $\omega \in Aut(R)$. Zatim primijenite tvrdnju $(b)$ teorema 3.5.12.

## 3.6 Coxeterovi grafovi. Dynkinovi dijagrami. Klasifikacija

Neka je $R$ reducirani sistem korijena ranga $\ell$ i neka je $B$ baza sistema korijena $R$. Izaberimo neki uređaj na $B$, tj. numerirajmo elemente prirodnim brojevima od 1 do $\ell$ : $B = \{\alpha_1, \dots, \alpha_\ell\}$. Kvadratna matrica $\ell-$tog reda $[n(\alpha_i, \alpha_j)]_{i,j=1}^{\ell}$ zove se **Cartanova matrica** sistema korijena $R$. Na primjer, reducirani sistemi korijena ranga 2 imaju Cartanove matrice:

$$A_1 \times A_1 : \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}; \qquad A_2 : \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}; \qquad B_2 : \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}; \qquad G_2 : \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Naravno, Cartanova matrica ovisi o izabranom uređaju baze, međutim, ta ovisnost nije ozbiljna $-$ radi se samo o permutaciji redaka i stupaca. U stvari, Cartanova matrica je do na permutaciju redaka i stupaca neovisna čak i o izboru baze, budući da prema tvrdnji $(b)$ teorema 3.5.12. Weylova grupa $W = W(R)$ djeluje (prosto) tranzitivno na skupu svih baza od $R$. Nadalje, iz formule

$$n(\alpha_i, \alpha_j) = 2\frac{(\alpha_i|\alpha_j)}{(\alpha_j|\alpha_j)}$$

se vidi da se Cartanova matrica dobiva iz Grammove matrice $G(\alpha_1, \dots, \alpha_\ell)$, koja je regularna zbog linearne nezavisnosti vektora $\alpha_1, \dots, \alpha_\ell$, množenjem s dijagonalnom matricom

$$diag\left(\frac{2}{(\alpha_1|\alpha_1)}, \dots, \frac{2}{(\alpha_\ell|\alpha_\ell)}\right)$$

čiji su svi elementi na dijagonali različiti od nule. Prema tome, Cartanova matrica sistema korijena je regularna. Sljedeći teorem pokazuje da Cartanova matrica određuje sistem korijena do na izomorfizam:

**Teorem 3.6.1.** *Neka su $R$ i $R'$ sistemi korijena u realnim unitarnim prostorima $V$ i $V'$ dimenzije $\ell$ i neka su $B = \{\alpha_1, \dots, \alpha_\ell\}$ i $B' = \{\alpha'_i, \dots, \alpha'_\ell\}$ uređene baze od $R$ i $R'$. Pretpostavimo da je $n(\alpha_i, \alpha_j) = n(\alpha'_i, \alpha'_j)$ $\forall i, j \in \{1, \dots, \ell\}$. Jedinstveni izomorfizam vektorskih prostora $A : V \to V'$ definiran sa $A\alpha_i = \alpha'_i$, $i = 1, \dots, \ell$, ima svojstva $AR = R'$ i $n(A\alpha, A\beta) = n(\alpha, \beta)$ $\forall \alpha, \beta \in R$.*

**Dokaz:** Ako su $i, j \in \{1, \dots, \ell\}$, imamo

$$\sigma_{A\alpha_i} A\alpha_j = \sigma_{\alpha'_i}\alpha'_j = \alpha'_j - n(\alpha'_j, \alpha'_i)\alpha'_i = A\alpha_j - n(\alpha_j, \alpha_i)A\alpha_i = A(\alpha_j - n(\alpha_j, \alpha_i)\alpha_i) = A\sigma_{\alpha_i}\alpha_j.$$

Budući da je $\{\alpha_j;\ j = 1, \dots, \ell\} = B$ baza vektorskog prostora $R$, odatle slijedi

$$\sigma_{A\alpha_i} A = A\sigma_{\alpha_i}, \quad \text{tj.} \quad \sigma_{\alpha'_i} = A\sigma_{\alpha_i}A^{-1}, \qquad i = 1, \dots, \ell.$$

Budući da je prema tvrdnji $(c)$ teorema 3.5.12. Weylova grupa $W = W(R)$ generirana refleksijama $\sigma_{\alpha_i}$, $i = 1, \dots, \ell$, a Weylova grupa $W' = W(R')$ generirana je refleksijama $\sigma_{\alpha'_i}$, $i = 1, \dots, \ell$, zaključujemo da je $\sigma \mapsto A\sigma A^{-1}$ izomorfizam grupe $W$ na grupu $W'$ koji preslikava refleksiju $\sigma_{\alpha_i}$ u refleksiju $\sigma_{\alpha'_i}$ za svaki $i \in \{1, \dots, \ell\}$. Međutim, prema lemi 3.5.11. svaki $\alpha \in R$ je u $W-$orbiti nekog korijena iz baze $B$. Dakle, postoji $\sigma \in W$ takav da je $\sigma\alpha_i = \alpha$ za neki $i \in \{1, \dots, \ell\}$. Stavimo li $\sigma' = A\sigma A^{-1} \in W'$, slijedi

$$A\alpha = (A\sigma A^{-1})A\alpha_i = \sigma'\alpha'_i \in R'.$$

Prema tome, vrijedi $AR \subseteq R'$. Zamjenom uloga $R \leftrightarrow R'$, $B \leftrightarrow B'$, $A \leftrightarrow A^{-1}$, dobivamo i $A^{-1}R' \subseteq R$, odnosno, $R' \subseteq AR$. Dakle, vrijedi $AR = R'$.

Uzmimo sada proizvoljni $\alpha \in R$. Neka su $\sigma \in W$ i $i \in \{1, \dots, \ell\}$ takvi da je $\alpha = \sigma\alpha_i$. Znamo da je

$$\sigma_{A\alpha_i} = A\sigma_{\alpha_i}A^{-1}.$$

Prema propoziciji 3.2.1. vrijedi

$$\tau\sigma_\beta\tau^{-1} = \sigma_{\tau\beta} \qquad \text{i} \qquad \omega\sigma_{\beta'}\omega^{-1} = \sigma_{\omega\beta'}$$

za bilo koje $\beta \in R$, $\tau \in W$, $\beta' \in R'$ i $\omega \in W'$. Stoga imamo redom

$$\sigma_{A\alpha} = \sigma_{A\sigma\alpha_i} = \sigma_{(A\sigma A^{-1})A\alpha_i} = \left(A\sigma A^{-1}\right)\sigma_{A\alpha_i}\left(A\sigma A^{-1}\right)^{-1} =$$

$$= \left(A\sigma A^{-1}\right)A\sigma_{\alpha_i}A^{-1}\left(A\sigma A^{-1}\right)^{-1} = A\sigma\sigma_{\alpha_i}\sigma^{-1}A^{-1} = A\sigma_{\sigma\alpha_i}A^{-1} = A\sigma_\alpha A^{-1}.$$

Dakle, vrijedi

$$\sigma_{A\alpha} = A\sigma_\alpha A^{-1} \qquad \forall \alpha \in R.$$

Stoga za bilo koje $\alpha, \beta \in R$ imamo

$$\sigma_{A\beta}A\alpha = A\alpha - n(A\alpha, A\beta)A\beta = A(\alpha - n(A\alpha, A\beta)\beta),$$

pa slijedi

$$\alpha - n(A\alpha, A\beta)\beta = A^{-1}\sigma_{A\beta}A\alpha = \sigma_\beta\alpha = \alpha - n(\alpha, \beta)\beta.$$

Odatle je

$$n(A\alpha, A\beta) = n(\alpha, \beta) \qquad \forall \alpha, \beta \in R.$$

Time je teorem 3.6.1. dokazan.

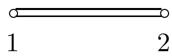
Neka je i dalje $R$ sistem korijena ranga $\ell$ i neka je $B = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell\}$ baza od $R$. Znamo da je tada svaki od brojeva $n(\alpha_i, \alpha_j)n(\alpha_j, \alpha_i)$ za $i \neq j$ jednak 0, 1, 2 ili 3. Definiramo **Coxeterov graf** od $R$ kao graf s vrhovima $\{1, \ldots, \ell\}$ pri čemu je za $i, j \in \{1, \ldots, \ell\}$, $i \neq j$, vrh $i$ spojen s vrhom $j$ sa $n(\alpha_i, \alpha_j)n(\alpha_j, \alpha_i)$ spojnica. Na primjer:

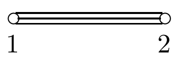
$A_1 \times A_1$ :



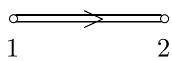
$A_2$ :

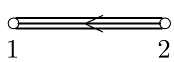


$B_2$ :



$G_2$ :



Ukoliko su svi korijeni u $R$ iste duljine, onda je $n(\alpha_i, \alpha_j) = n(\alpha_j, \alpha_i)$ za svaki $i, j$, pa stoga Coxeterov graf u potpunosti određuje brojeve $n(\alpha_i, \alpha_j)$, $i, j = 1, \ldots, \ell$. Međutim, kad se pojavljuju dvije dužine (npr. $B_2$ ili $G_2$), Coxeterov graf nam neće dati informaciju koji verteksi odgovaraju kraćim a koji duljim korijenima. Da bismo i to fiksirali, mi ćemo kod svakog para verteksa koji su spojeni s dvije ili s tri spojnice dodati i strelicu koja je usmjerena prema kraćem od dvaju korijena. Ono što dobijemo zove se **Dynkinov dijagram** sistema korijena $R$. Npr.

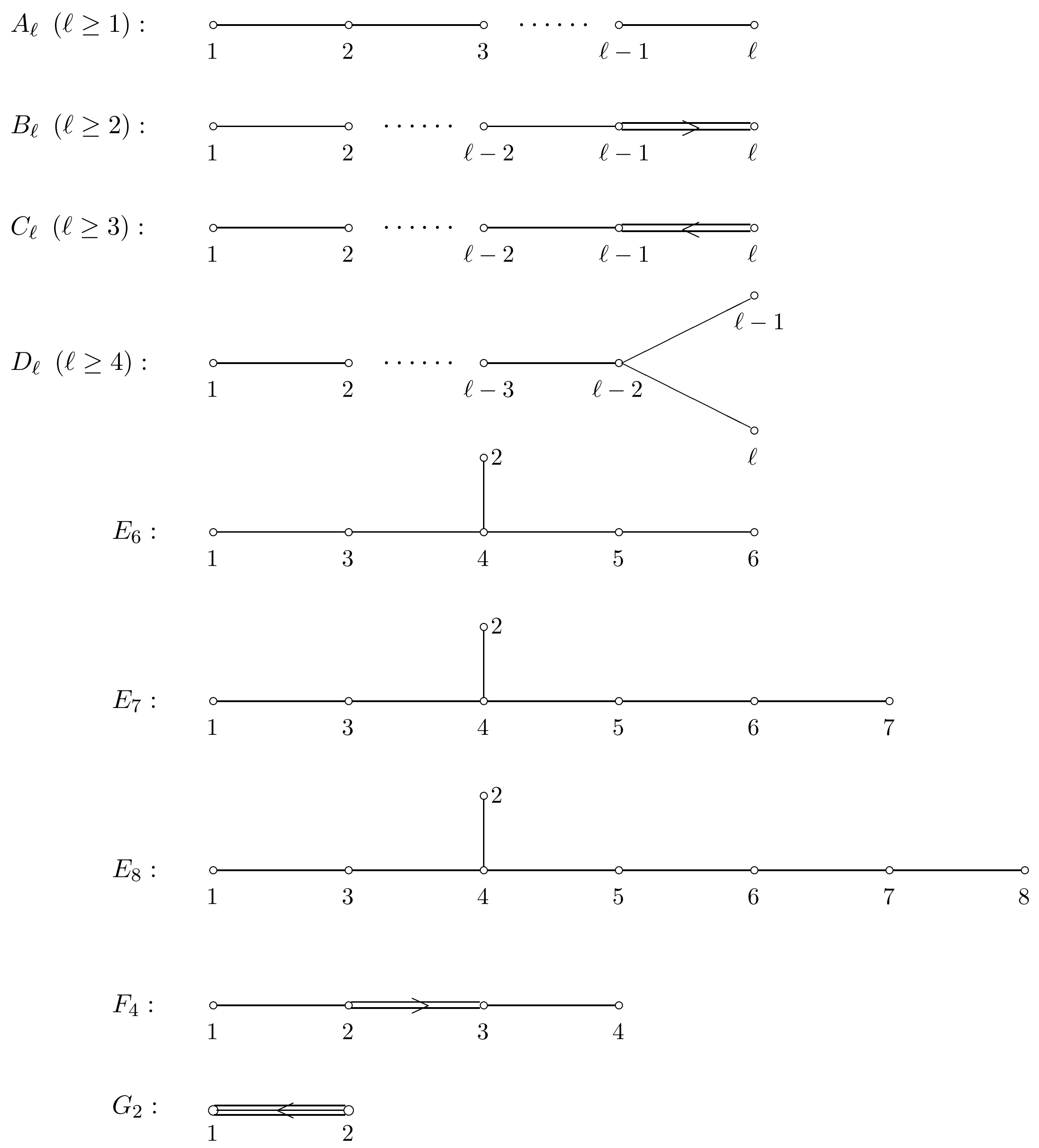
$B_2$ :



$G_2$ :


Sjetimo se da je sistem korijena $R$ ireducibilan ako i samo ako se $R$ (ili, ekvivalentno, njegova baza $B$) ne može rastaviti u disjunktnu uniju dvaju pravih podskupova, takvih da je svaki element prvog podskupa ortogonalan na svaki element drugog podskupa. Prema tome, *sistem korijena $R$ je ireducibilan, ako i samo ako je njegov Coxeterov graf povezan.* U općem slučaju Coxeterov će se graf sastojati od određenog broja komponenata povezanosti. Ako su $B_1, \dots, B_s$ odgovarajući podskupovi baze $B$ i ako je $V_j = span\, B_j$, onda imamo rastav u ortogonalnu sumu $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_s$ i za svaki $j \in \{1, \dots, s\}$ skup $R_j = V_j \cap R$ je ireducibilan sistem korijena u $V_j$ s bazom $B_j$.

Prema tome, da bismo klasificirali sve moguće ireducibilne reducirane sisteme korijena, treba pronaći sve moguće povezane Dynkinove dijagrame.

**Teorem 3.6.2.** *Ako je $R$ ireducibilan reduciran sistem korijena ranga $\ell$, onda je njegov Dynkinov dijagram jedan od sljedećih:*



Dokaz ovog teorema provest ćemo tako da najprije promatramo koje su sve mogućnosti za povezane Coxeterove grafove, a zatim da ustanovimo koji su svi mogući Dynkinovi dijagrami. Kod Coxeterog grafa nikakvu ulogu ne igraju duljine korijena iz baze. Stoga možemo pretpostaviti da su svi oni iste duljine, štoviše da su svi jedinični. Dakle, mi ćemo promatrati konačne skupove jediničnih vektora s tim da su kutovi među njima oni koje propisuje Coxeterov graf.

Služit ćemo se ovom privremenom definicijom: u realnom unitarnom prostoru $V$ za konačan skup linearno nezavisnih jediničnih vektora $\mathcal{A} = \{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n\}$ ćemo reći da je **dopustiv** ako vrijedi $(\varepsilon_i|\varepsilon_j) \leq 0$ za $i \neq j$ i $4(\varepsilon_i|\varepsilon_j)^2 \in \{0, 1, 2, 3\}$ za $i \neq j$. Primjer za takav skup vektora dobiva se iz baze sistema korijena ako svaki član baze normiramo, tj. pomnožimo ga s recipročnom vrijednošću njegove duljine. Svakom dopustivom skupu $\mathcal{A} = \{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n\}$ pridružit ćemo graf $\Gamma = \Gamma(\mathcal{A})$ sa skupom vrhova $\mathcal{A}$ s tim da su vrhovi $\varepsilon_i$ i $\varepsilon_j$ za $i \neq j$ spojeni sa $4(\varepsilon_i|\varepsilon_j)^2$ spojnica – dakle, ili nisu spojeni ili su spojeni sa jednom, dvije ili tri spojnice. Mi ćemo sada dokazati niz tvrdnji koje će na koncu dati sve moguće takve povezane grafove $\Gamma$. U prvih nekoliko tvrdnji ne pretpostavljamo da je graf $\Gamma$ dopustivog sistema vektora $\mathcal{A}$ povezan.

Prva je tvrdnja evidentna:

**Tvrdnja 1.** *Podskup $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ i sam je dopustiv skup vektora. Njegov graf $\Gamma(\mathcal{B})$ dobiva se iz grafa $\Gamma$ tako da izostavimo vrhove $\mathcal{A} \setminus \mathcal{B}$ i sve spojnice koje su incidentne nekom od vrhova iz $\mathcal{A} \setminus \mathcal{B}$.*

**Tvrdnja 2.** *Broj parova vrhova u $\Gamma$ koji su povezani s barem jednom spojnicom je $< n$.*

Dokaz: Stavimo
$$\varepsilon = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i.$$
Kako su $\varepsilon_i$ linearno nezavisni, to je $\varepsilon \neq 0$. Dakle,
$$0 < (\varepsilon|\varepsilon) = \sum_{i=1}^{n} (\varepsilon_i|\varepsilon_i) + 2 \sum_{i<j} (\varepsilon_i|\varepsilon_j),$$
a kako je $(\varepsilon_i|\varepsilon_i) = 1 \ \forall i$, slijedi
$$n > -2 \sum_{i<j} (\varepsilon_i|\varepsilon_j). \tag{3.14}$$
Neka su $i < j$ takvi da su vrhovi $\varepsilon_i$ i $\varepsilon_j$ spojeni s barem jednom spojnicom, tj. da je $(\varepsilon_i|\varepsilon_j) \neq 0$. Tada je $4(\varepsilon_i|\varepsilon_j)^2 \in \{1, 2, 3\}$ i $(\varepsilon_i|\varepsilon_j) < 0$, dakle, $-2(\varepsilon_i|\varepsilon_j) \in \{1, \sqrt{2}, \sqrt{3}\}$, pa vrijedi $-2(\varepsilon_i|\varepsilon_j) \geq 1$. Odatle i iz (3.14) slijedi tvrdnja 2.

**Tvrdnja 3.** *Graf $\Gamma$ je aciklički, tj. ne sadrži nijedan ciklus.*

**Dokaz:** Doista, ciklus u grafu $\Gamma$ bi bio podgraf grafa nekog podskupa $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$, koji je prema tvrdnji 1. također dopustiv. No tada taj graf $\Gamma(\mathcal{B})$ ne bi zadovoljavao tvrdnju 2.

**Tvrdnja 4.** *Svakom vrhu u grafu $\Gamma$ incidentne su najviše tri spojnice.*

**Dokaz:** Pretpostavimo da je $\alpha \in \mathcal{A}$ i da su $\beta_1, \dots, \beta_k \in \mathcal{A}$ međđusobno različiti vrhovi koji su povezani sa $\alpha$, svaki od njih jednom, s dvije ili s tri spojnice. Drugim riječima, $(\alpha|\beta_j) < 0$ za $j = 1, \dots, k$. Zbog tvrdnje 3. za $i \neq j$ vrhovi $\beta_i$ i $\beta_j$ nisu povezani, tj. $(\beta_i|\beta_j) = 0$. Budući da je skup $\mathcal{A}$ linearno nezavisan, u potprostoru *span* $\{\alpha, \beta_1, \dots, \beta_k\}$ postoji jedinični vektor $\beta_0$ okomit na vektore $\beta_1, \dots, \beta_k$. Budući da $\alpha \notin$ *span* $\{\beta_1, \dots, \beta_k\}$, očito je $(\alpha|\beta_0) \neq 0$. Sada je $\{\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_k\}$ ortonormirana baza potprostora *span* $\{\alpha, \beta_1, \dots, \beta_k\}$. Stoga imamo
$$\alpha = \sum_{i=0}^{k} (\alpha|\beta_i)\beta_i \quad \Longrightarrow \quad 1 = (\alpha|\alpha) = \sum_{i=0}^{k} (\alpha|\beta_i)^2 \quad \Longrightarrow \quad \sum_{i=1}^{k} (\alpha|\beta_i)^2 = 1 - (\alpha|\beta_0)^2 < 1.$$

Odatle je

$$\sum_{i=1}^{k} 4(\alpha|\beta_i)^2 < 4.$$

Odatle slijedi tvrdnja, jer je $4(\alpha|\beta_i)^2$ broj spojnica između $\alpha$ i $\beta_i$.

**Tvrdnja 5.** *Jedini povezan graf dopustivog skupa vektora koji sadrži trostruku spojnicu je Coxeterov graf* $G_2$.

**Dokaz:** To odmah slijedi iz tvrdnje 4.

**Tvrdnja 6.** *Neka je* $\mathcal{B}$ *podskup od* $\mathcal{A}$ *i pretpostavimo da mu je graf:*

$\Gamma(\mathcal{B})$ :



*Stavimo*

$$\alpha = \sum_{\beta \in \mathcal{B}} \beta.$$

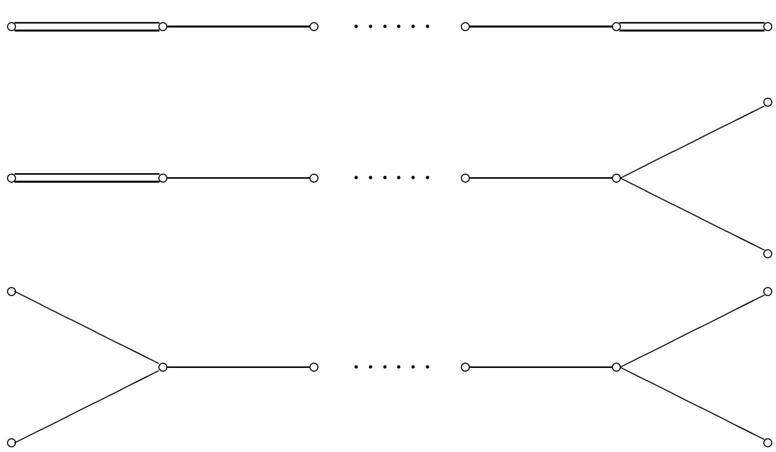
*Tada je* $\mathcal{C} = (\mathcal{A} \setminus \mathcal{B}) \cup \{\alpha\}$ *dopustiv skup vektora i graf mu se dobiva iz grafa* $\Gamma$ *tako da lanac* $\mathcal{B}$ *zamijenimo jednim vrhom* $\alpha$ *a svaku spojnicu s nekim vrhom iz* $\mathcal{B}$ *zamijenimo spojnicom s novim vrhom* $\alpha$.

**Dokaz:** Linearna nezavisnost skupa $\mathcal{C}$ je očigledna. Po pretpostavci je $\mathcal{B} = \{\beta_1, \ldots, \beta_k\}$ i $4(\beta_i|\beta_{i+1})^2 = 1$, odnosno, $2(\beta_i|\beta_{i+1}) = -1$ za $i = 1, \ldots, k-1$. Odatle je

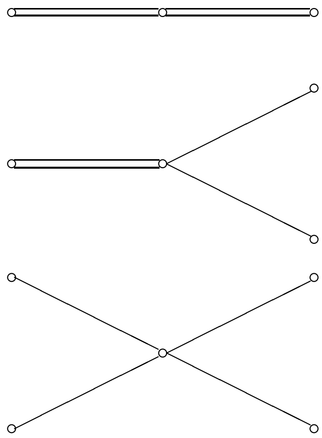
$$(\alpha|\alpha) = \sum_{i=1}^{k} (\beta_i|\beta_i) + 2\sum_{i<j} (\beta_i|\beta_j) = k - (k-1) = 1,$$

odnosno, $\alpha$ je jedinični vektor. Zbog tvrdnje 3. svaki $\gamma \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{B}$ može biti povezan najviše s jednim vrhom iz $\mathcal{B}$. Dakle, ili je $(\gamma|\alpha) = 0$ ili je $(\gamma|\alpha) = (\gamma|\beta_i)$ za neki (točno jedan) $i \in \{1, \ldots, k\}$. U svakom od tih slučajeva je $(\gamma|\alpha) \leq 0$ i $4(\gamma|\alpha)^2 \in \{0, 1, 2, 3\}$.

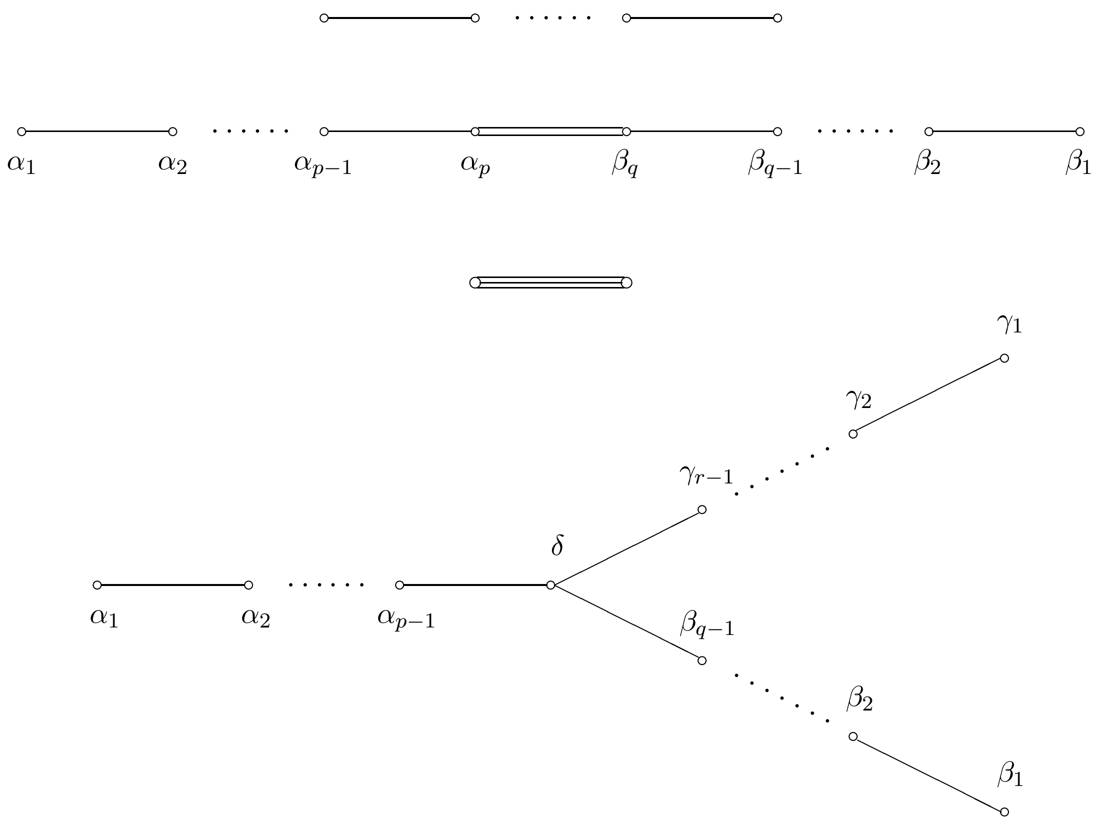
**Tvrdnja 7.** *Graf* $\Gamma$ *ne sadrži nijedan podgraf oblika:*



**Dokaz:** Pretpostavimo da se neki od tih grafova pojavljuje kao podgraf od $\Gamma$. To bi prema tvrdnji 1. bio graf nekog dopustivog skupa vektora. Međutim, tvrdnja 6. omogućuje da jednostavan lanac u srednjem dijelu tog grafa zamijenimo s jednim vrhom i dobiveni graf bi morao biti graf nekog dopustivog skupa vektora. No ta operacija vodi na jedan od sljedećih grafova, a oni svi narušuju tvrdnju 4. jer iz srednjeg vrha svakoga od njih izlaze četiri spojnice:



**Tvrdnja 8.** *Svaki povezani graf* $\Gamma$ *nekog dopustivog skupa vektora ima jedan od sljedećih oblika*:




**Dokaz:** Prije svega, prema tvrdnji 5. samo graf s dva vrha može sadržavati trostruku spojnicu. Nadalje, povezan graf koji sadrži više od jedne dvostruke spojnice, sadržavao bi kao podgraf prvi od grafova u tvrdnji 7. a prema toj tvrdnji to nije moguće. Graf koji sadrži i dvostruku spojnicu i račvanje, morao bi sadržavati kao podgraf drugi od grafova u tvrdnji 7. što je također nemoguće. Napokon, povezan graf koji sadrži samo jednostruke spojnice može prema tvrdnji 7. sadržavati najviše jedno račvanje.

**Tvrdnja 9.** *Jedini povezani grafovi drugog tipa iz tvrdnje* 8. *su sljedeći Coxeterovi grafovi*:

$B_\ell = C_\ell$ :



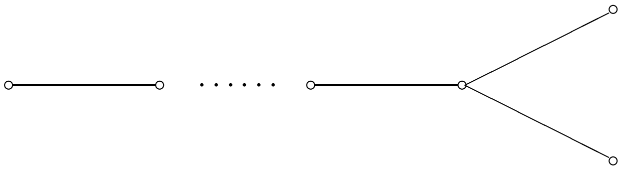
$F_4$ :



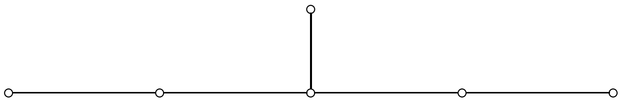
**Dokaz:** Stavimo
$$\alpha = \sum_{i=1}^{p} i\alpha_i, \qquad \beta = \sum_{j=1}^{q} j\beta_j.$$
Po pretpostavci je
$$2(\alpha_i|\alpha_{i+1}) = -1 \quad \text{za} \quad i = 1, \ldots, p-1 \qquad \text{i} \qquad (\alpha_i|\alpha_j) \quad \text{ako je} \quad |i-j| \geq 2.$$
Analogno, vrijedi
$$2(\beta_j|\alpha_{j+1}) = -1 \quad \text{za} \quad j = 1, \ldots, q-1 \qquad \text{i} \qquad (\beta_i|\beta_j) \quad \text{ako je} \quad |i-j| \geq 2.$$
Odatle slijedi
$$(\alpha|\alpha) = \sum_{i=1}^{p} i^2(\alpha_i|\alpha_i) + 2\sum_{i=1}^{p-1} i(i+1)(\alpha_i|\alpha_{i+1}) = \sum_{i=1}^{p} i^2 - \sum_{i=1}^{p-1}(i^2+i).$$
Dakle,
$$(\alpha|\alpha) = p^2 - \sum_{i=1}^{p-1} i = p^2 - \frac{p(p-1)}{2} = \frac{p(p+1)}{2}.$$
Sasvim analogno nalazimo da je
$$(\beta|\beta) = \frac{q(q+1)}{2}.$$
Budući da je $4(\alpha_p|\beta_q)^2 = 2$ i $(\alpha_i|\beta_j) = 0$ ako je $i < p$ ili $j < q$, imamo
$$(\alpha|\beta)^2 = p^2q^2(\alpha_p|\beta_q)^2 = \frac{p^2q^2}{2}.$$
Kako su $\alpha$ i $\beta$ očito linearno nezavisni, nejednakost Cauchy−Schwartz−Bunyakowskog nam daje $(\alpha|\beta)^2 < (\alpha|\alpha)(\beta|\beta)$, dakle,
$$\frac{p^2q^2}{2} < \frac{p(p+1)q(q+1)}{4}.$$
Odatle imamo redom
$$2pq < (p+1)(q+1) \qquad \Longrightarrow \qquad pq < p+q+1 \qquad \Longrightarrow \qquad (p-1)(q-1) < 2.$$
Dakle, lijeva strana posljednje jednakosti može biti jednaka ili 0 ili 1. U prvom slučaju je ili $p = 1$ ili $q = 1$ (ili oboje), a to nam daje prvi graf iz tvrdnje 9., tj. $B_\ell = C_\ell$. U drugom slučaju je nužno $p = q = 2$, a to nam daje drugi graf iz tvrdnje 9., tj. $F_4$.

**Tvrdnja 10.** *Jedini povezani grafovi četvrtog tipa iz tvrdnje* 8. *su sljedeći Coxeterovi grafovi*:

$D_\ell (\ell \geq 4)$ :

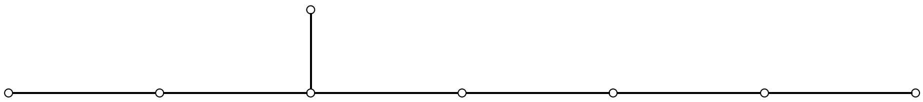


$E_6$ :



$E_7$ :

$E_8$ :



**Dokaz:** Stavimo

$$\alpha = \sum_{i=1}^{p-1} i\alpha_i, \qquad \beta = \sum_{j=1}^{q-1} j\beta_j, \qquad \gamma = \sum_{k=1}^{r-1} k\gamma_k.$$

Tada su $\alpha$, $\beta$ i $\gamma$ međusobno ortogonalni vektori i $\delta \notin span\,\{\alpha, \beta, \gamma\}$. Neka je $\varepsilon$ jedinični vektor u potprostoru $span\,\{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$ koji je okomit na potprostor $span\,\{\alpha, \beta, \gamma\}$ i neka su $\alpha_0$, $\beta_0$ i $\gamma_0$ vektori dobiveni normiranjem vektora $\alpha$; $\beta$ i $\gamma$ :

$$\alpha_0 = \frac{1}{\|\alpha\|}\alpha, \qquad \beta_0 = \frac{1}{\|\beta\|}\beta, \qquad \gamma_0 = \frac{1}{\|\gamma\|}\gamma.$$

Tada je $\{\varepsilon, \alpha_0, \beta_0, \gamma_0\}$ ortonormirana baza u potprostoru $span\,\{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$ pa imamo

$$1 = (\delta|\delta) = (\delta|\varepsilon)^2 + (\delta|\alpha_0)^2 + (\delta|\beta_0)^2 + (\delta|\gamma_0)^2,$$

a kako je $\delta \notin \{\alpha, \beta, \gamma\}$, to je $(\delta|\varepsilon) \neq 0$, pa dobivamo

$$\frac{(\delta|\alpha)^2}{(\alpha|\alpha)} + \frac{(\delta|\beta)^2}{(\beta|\beta)} + \frac{(\delta|\gamma)^2}{(\gamma|\gamma)} < 1. \tag{3.15}$$

Kao u dokazu tvrdnje 9. možemo izračunati

$$(\alpha|\alpha) = \frac{p(p-1)}{2}, \qquad (\beta|\beta) = \frac{q(q-1)}{2}, \qquad (\gamma|\gamma) = \frac{r(r-1)}{2}. \tag{3.16}$$

Nadalje, očito je $(\delta|\alpha) = (p-1)(\delta, \alpha_p)$. Kako je $4(\delta|\alpha_p)^2 = 1$ i $(\delta|\alpha_p) < 0$, imamo $2(\delta|\alpha_p) = -1$. Analogno zaključivanje vrijedi i za $\beta$ i $\gamma$. Stoga je

$$(\delta|\alpha) = -\frac{p-1}{2}, \qquad (\delta|\beta) = -\frac{q-1}{2}, \qquad (\delta|\gamma) = -\frac{r-1}{2}. \tag{3.17}$$

Pomoću jednakosti (3.16) i (3.17) nejednakost (3.15) poprima oblik

$$\frac{\frac{(p-1)^2}{4}}{\frac{p(p-1)}{2}} + \frac{\frac{(q-1)^2}{4}}{\frac{q(q-1)}{2}} + \frac{\frac{(r-1)^2}{4}}{\frac{r(r-1)}{2}} < 1,$$

odnosno,

$$\frac{p-1}{p} + \frac{q-1}{q} + \frac{r-1}{r} < 2.$$

Odatle slijedi da mora biti

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} > 1. \tag{3.18}$$

Možemo pretpostavljati da su sva tri broja $p$, $q$ i $r$ veći od 1. Doista, kad bi neki od njih bio jednak 1, imali bismo prvi graf iz tvrdnje 8. Nadalje, zamijenimo li oznake ako treba možemo pretpostaviti da je $p \geq q \geq r \geq 2$. Sada iz (3.18) slijedi

$$1 < \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} \leq \frac{3}{r},$$

a to znači da je nužno $r = 2$. Sada (3.18) poprima oblik

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} > \frac{1}{2}, \tag{3.19}$$

a kako je $p \geq q$, dobivamo

$$\frac{1}{2} < \frac{2}{q},$$

dakle, $2 \leq q < 4$. Ako je $q = 3$, onda iz (3.19) slijedi $p < 6$. Prema tome, mogućnosti za trojku $(p, q, r)$ su $(p, 2, 2)$, $p \geq 2$, što daje Coxeterov graf $D_{p+2}$, ili $(3, 3, 2)$, što daje $E_6$, ili $(4, 3, 2)$, što daje $E_7$ ili $(5, 3, 2)$, što daje $E_8$.

Iz dokazanog slijedi da je svaki of povezanih grafova dopustivog skupa vektora nužno jedan od Coxeterovih grafova tipova od $A$ do $G$. Posebno, Coxeterov graf ireducibilnog reduciranog sistema korijena je nužno jedan od tih. U slučaju prvog Coxeterovog grafa iz tvrdnje 9. imamo dvije mogućnosti za Dynkinov dijagram, $B_\ell$ i $C_\ell$. U svim ostalim slučajevima Coxeterov graf jedinstveno određuje pripadni Dynkinov dijagram.

Time je teorem 3.6.2. dokazan.

Sada ćemo ustanoviti da svaki od Dynkinovih dijagrama iz teorema 3.6.2. stvarno pripada nekom ireducibilnom reduciranom sistemu korijena. To ćemo provesti eksplicitnim konstrukcijama. U daljnjem je $\mathbb{R}^n$ realan unitaran prostor svih uređenih $n-$torki realnih brojeva sa standardnim skalarnim produktom

$$(x|y) = \xi_1\eta_1 + \xi_2\eta_2 + \cdots + \xi_n\eta_n, \qquad x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n), y = (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Nadalje, $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ označava standardnu ortonormiranu bazu u $\mathbb{R}^n : e_j$ ima $j-$tu koordinatu 1, a ostale 0. Aditivna podgrupa od $\mathbb{R}^n$ generirana s tom bazom je $\mathbb{Z}^n$.

Sada ćemo redom za svaki Dynkinov dijagram sa $\ell$ vrhova definirati realan unitaran prostor $V$ dimenzije $\ell$; to će uvijek biti ili $\mathbb{R}^\ell$ ili određeni potprostor od $\mathbb{R}^n$ za neki $n > \ell$. Zatim ćemo zadati konačan skup $R \subseteq V$, za koji se direktno može provjeriti da je sistem korijena u prostoru $V$, te njegova baza $B = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell\}$ i pripadni skup pozitivnih vektora $R_+ = R_+(B)$. Navest ćemo i pripadnu Cartanovu matricu $[n(\alpha_i,\alpha_j)]_{i,j=1}^{\ell}$, kao i polusumu pozitivnih korijena $\rho$. Također, u slučajevima $A_\ell$, $B_\ell$, $C_\ell$ i $D_\ell$ potpuno ćemo opisati Weylovu grupu $W=W(R)$. U svim slučajevima navest ćemo broj korijena $|R|$ i red Weylove grupe $|W|$.

**Tip** $A_\ell$ $(\ell\geq 1)$**:** $V$ je ortogonalni komplement vektora $e_1+\cdots+e_{\ell+1}$ u prostoru $\mathbb{R}^{\ell+1}$ :

$$V=\{x\in\mathbb{R}^{\ell+1};\ (x|e_1+\cdots+e_{\ell+1})=0\}=\{x=(\xi_1,\ldots,\xi_{\lambda+1})\in\mathbb{R}^{\ell+1};\ \xi_1+\cdots+\xi_{\ell+1}=0\}.$$

Nadalje,

$$R=\{\alpha\in\mathbb{Z}^{\ell+1}\cap V;\ (\alpha|\alpha)=2\}=\{\alpha_{ij}=e_i-e_j;\ i,j=1,\ldots,\ell+1,\ i\neq j\};$$

$$B=\{\alpha_1,\ldots,\alpha_\ell\},\qquad \alpha_i=\alpha_{i,i+1}=e_i-e_{i+1};\qquad R_+=\{\alpha_{ij};\ 1\leq i<j\leq\ell+1\}.$$

Prikazi pozitivnih korijena pomoću korijena iz baze $B$ su:

$$\alpha_{ij}=\alpha_i+\cdots+\alpha_{j-1},\qquad 1\leq i<j\leq\ell+1.$$

Cartanova matrica je:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Polusuma pozitivnih korijena je

$$\rho=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\ell}i(\ell-i+1)\alpha_i=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{\ell+1}(\ell-2j+1)e_j.$$

Refleksija $\sigma_{\alpha_i}$ zamjenjuje indekse $i$ i $i+1$ a ostale ostavlja na miru:

$$\sigma_{\alpha_i}(\xi_1,\ldots,\xi_i,\xi_{i+1},\ldots,\xi_{\ell+1})=(\xi_1,\ldots,\xi_{i+1},\xi_i,\ldots,\xi_{\ell+1}).$$

Prema tome, $\sigma_{\alpha_i}$ odgovara transpoziciji $(i,i+1)$ u simetričnoj grupi $\mathcal{S}_{\ell+1}$. Budući da te transpozicije generiraju čitavu grupu $\mathcal{S}_{\ell+1}$, zaključujemo da je Weylova grupa izomorfna grupi $\mathcal{S}_{\ell+1}$.

Napokon, $|R|=\ell(\ell+1)$ i $|W|=(\ell+1)!$.

**Tip** $B_\ell$ $(\ell\geq 2)$**:** Sada stavljamo

$$V=\mathbb{R}^\ell,\qquad R=\{\alpha\in\mathbb{Z}^\ell;\ (\alpha|\alpha)\in\{1,2\}\}=\{\pm e_i;\ 1\leq i\leq\ell\}\cup\{\pm e_i\pm e_j;\ i,j=1,\ldots,\ell,\ i\neq j\};$$

$$B=\{\alpha_1,\ldots,\alpha_\ell\},\qquad \alpha_i=e_i-e_{i+1}\quad\text{za}\quad 1\leq i\leq\ell-1,\qquad \alpha_\ell=e_\ell;$$
$$R_+=\{e_i;\ i=1,\ldots,\ell\}\cup\{e_i\pm e_j;\ 1\leq i<j\leq\ell\}.$$

Prikazi pozitivnih korijena pomoću korijena iz baze $B$ su:

$$e_i=\alpha_i+\cdots+\alpha_\ell\quad\text{za}\quad 1\leq i\leq\ell;$$

$$e_i-e_j=\alpha_i+\cdots+\alpha_{j-1}\quad\text{za}\quad 1\leq i<j\leq\ell;$$
$$e_i+e_j=\alpha_i+\ldots+\alpha_{j-1}+2\alpha_j+\cdots 2\alpha_\ell\quad\text{za}\quad 1\leq i<j\leq\ell.$$

Cartanova matrica je:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Polusuma pozitivnih korijena je

$$\rho = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\ell} i(2\ell - i)\alpha_i = \sum_{i=1}^{\ell}(2\ell - 2i + 1)e_i.$$

Weylova grupa $W$ djeluje na bazu $(e_1, \ldots, e_\ell)$ od $V$ permutacijama uz množenje nekih članova sa $-1$. Dakle, $W$ je izomorfna semidirektnom produktu grupe $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^\ell$ i grupe permutacija $\mathcal{S}_\ell$, pri čemu je $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^\ell$ normalna podgrupa, a na njoj djeluje grupa permutacija $\mathcal{S}_\ell$.

Napokon, $|R| = 2\ell^2$ i $|W| = 2^\ell \ell!$.

**Tip** $C_\ell$ $(\ell \geq 3)$**:** Uzimamo sada sistem korijena koji je dualan sistemu tipa $B_\ell$. Eksplicitno

$$V = \mathbb{R}^\ell, \qquad R = \{\pm 2e_i;\ 1 \leq i \leq \ell\} \cup \{\pm e_i \pm e_j;\ i, j = 1 \ldots, \ell,\ i \neq j\},$$

$$B = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell\}, \qquad \alpha_i = e_i - e_{i+1} \quad \text{za} \quad 1 \leq i \leq \ell - 1, \qquad \alpha_\ell = 2e_\ell;$$

$$R_+ = \{2e_i;\ 1 \leq i \leq \ell\} \cup \{e_i - e_j;\ 1 \leq i < j \leq \ell\} \cup \{e_i + e_j;\ 1 \leq i \leq \ell\}.$$

Prikazi pozitivnih korijena pomoću korijena iz baze $B$ su:

$$2e_i = 2\alpha_i + \cdots + 2\alpha_{\ell-1} + \alpha_\ell;$$

$$e_i - e_j = \alpha_i + \cdots + \alpha_{j-1} \quad \text{za} \quad 1 \leq i < j \leq \ell;$$

$$e_i + e_j = \alpha_i + \cdots + \alpha_{j-1} + 2\alpha_j + \cdots + 2\alpha_{\ell-1} + \alpha_\ell \quad \text{za} \quad 1 \leq i < j \leq \ell.$$

Cartanova matrica je transponirana Cartanovoj matrici sistema tipa $B_\ell$ :

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Polusuma pozitivnih korijena je

$$\rho = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\ell-1} i(2\ell - i + 1)\alpha_i + \frac{\ell(\ell+1)}{4}\alpha_\ell = \sum_{i=1}^{\ell}(\ell - i + 1)e_i.$$

Naravno, Weylova grupa za ovaj tip podudara se s Weylovom grupom za tip $B_\ell$, i isti su brojevi $|R| = 2\ell^2$ i $|W| = 2^\ell \ell!$.

**Tip** $D_\ell$ $(\ell \geq 4)$**:** Sada je

$$V = \mathbb{R}^\ell, \qquad R = \{\alpha \in \mathbb{Z}^\ell;\ (\alpha|\alpha) = 2\} = \{\pm e_i \pm e_j;\ i,j = 1,\dots,\ell,\ i \neq j\}.$$

Jedna baza $B = \{\alpha_1, \dots, \alpha_\ell\}$ od $R$ je dana sa

$$\alpha_i = e_i - e_{i+1} \quad \text{za} \quad 1 \leq i \leq \ell - 1, \qquad \alpha_\ell = e_{\ell-1} + e_\ell.$$

Tada je

$$R_+ = \{e_i \pm e_j;\ 1 \leq i < j \leq \ell\}.$$

Prikazi pozitivnih korijena pomoću korijena iz baze $B$ su:

$$e_i - e_j = \alpha_i + \cdots + \alpha_{j-1} \quad \text{za} \quad 1 \leq i < j \leq \ell;$$

$$e_i + e_j = \alpha_i + \cdots + \alpha_{j-1} + 2\alpha_j + \cdots + 2\alpha_{\ell-2} + \alpha_{\ell-1} + \alpha_\ell, \quad \text{za} \quad 1 \leq i > j \leq \ell - 2;$$

$$e_i + e_{\ell-1} = \alpha_i + \cdots + \alpha_\ell \quad \text{za} \quad 1 \leq i \leq \ell - 2;$$

$$e_i + e_\ell = \alpha_i + \cdots + \alpha_{\ell-2} + \alpha_\ell \quad \text{za} \quad 1 \leq i \leq \ell - 2; \qquad e_{\ell-1} + e_\ell = \alpha_\ell.$$

Cartanova matrica je

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Polusuma pozitivnih korijena je

$$\rho = \sum_{i=1}^{\ell-2} \left( i\ell - \frac{i(i+1)}{2} \right) \alpha_i + \frac{\ell(\ell-1)}{4}(\alpha_{\ell-1} + \alpha_\ell) = \sum_{i=1}^{\ell-1} (\ell - i) e_i$$

Weylova grupa je grupa permutacija vektora $e_1, \dots, e_\ell$ uz paran broj promjena predznaka. Dakle, $W$ je izomorfna semidirektnom produktu $(\mathbb{Z}/2Z)^{\ell-1}$ i $\mathcal{S}_\ell$.

Napokon, $|R| = 2\ell(\ell - 1)$ i $|W| = 2^{\ell-1}\ell!$.

**Tip** $E_\ell$ $(\ell = 6, 7, 8)$**:** Napisat ćemo samo $V$, $R$ i $B = \{\alpha_1, \dots, \alpha_8\}$ za $E_8$. Sistemi korijena $E_6$ i $E_7$ dobivaju se tako da se uzmu potprostori $V'$ i $V''$ od $V$ razapeti s prvih 6, odnosno, s prvih 7 vektora baze $B$; traženi sistemi korijena su tada $R \cap V'$ i $R \cap V''$.

Za $E_8$ uzimamo $V = \mathbb{R}^8$. Zatim stavimo

$$I = \mathbb{Z}^8 + \mathbb{Z}\frac{1}{2}e, \qquad \text{gdje je} \quad e = e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + e_5 + e_6 + e_7 + e_8,$$

i neka je $J$ aditivna podgrupa od $I$ dana sa

$$J = \left\{ \sum_{i=1}^{8} c_i e_i + \frac{c}{2} e;\ c_i, c \in \mathbb{Z},\ c + \sum_{i=1}^{8} c_i \in 2\mathbb{Z} \right\}.$$

Sada je

$$R = \{\alpha \in J;\ (\alpha|\alpha) = 2\} =$$

$$= \{\pm e_i \pm e_j;\ i,j \in \{1,\dots,8\},\ i \neq j\} \cup \left\{ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{8} (-1)^{k_i} e_i;\ k_i \in \{0,1\},\ \sum_{i_1}^{8} k_i \in 2\mathbb{Z} \right\}.$$

Jedna baza $B = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_8\}$ sistema korijena $R$ dana je sa

$$\alpha_1 = e_1 + e_8 - \frac{1}{2}e = \frac{1}{2}(e_1 - e_2 - e_3 - e_4 - e_5 - e_6 - e_7 + e_8), \quad \alpha_2 = e_1 + e_2, \quad \alpha_3 = e_2 - e_1,$$

$$\alpha_4 = e_3 - e_2, \quad \alpha_5 = e_4 - e_3, \quad \alpha_6 = e_5 - e_4, \quad \alpha_7 = e_6 - e_5, \quad \alpha_8 = e_7 - e_6.$$

Cartanove matrice za $E_6$, $E_7$ i $E_8$, njihove polusume pozitivnih korijena $\rho$ i njihovi brojevi korijena $|R|$ i redovi $|W|$ pripadnih Weylovih grupa su:

$$E_6 : \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad |R| = 72, \qquad |W| = 2^7 \cdot 3^4 \cdot 5 = 544.320,$$

$$\rho = 8\alpha_1 + 11\alpha_2 + 15\alpha_3 + 21\alpha_4 + 15\alpha_5 + 8\alpha_6 = e_2 + 2e_3 + 3e_4 + 4e_5 - 4e_6 - 4e_7 + 4e_8.$$

$$E_7 : \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix},$$

$$|R| = 126, \qquad |W| = 2^{10} \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7 = 30.481.920,$$

$$\rho = 17\alpha_1 + \frac{49}{2}\alpha_2 + 33\alpha_3 + 48\alpha_4 + \frac{75}{2}\alpha_5 + 26\alpha_6 + \frac{27}{2}\alpha_7 = e_2 + 2e_3 + 3e_4 + 4e_5 + 5e_6 - \frac{17}{2}e_7 + \frac{17}{2}e_8.$$

$$E_8 : \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix},$$

$$|R| = 240, \qquad |W| = 2^{14} \cdot 3^5 \cdot 5^2 \cdot 7 = 7.315.660.800$$

$$\rho = 46\alpha_1 + 68\alpha_2 + 91\alpha_3 + 135\alpha_4 + 110\alpha_5 + 84\alpha_6 + 57\alpha_7 + 29\alpha_8 = e_2 + 2e_3 + 3e_4 + 4e_5 + 5e_6 + 6e_7 + 23e_8.$$

**Tip** $F_4$**:** Sada je $V = \mathbb{R}^4$. Nadalje, promatramo diskretnu aditivnu podgrupu $I = \mathbb{Z}^4 + \frac{1}{2}\mathbb{Z}e$ od $\mathbb{R}^4$, gdje je $e = e_1 + e_2 + e_3 + e_4$ i stavimo

$$R = \{\alpha \in I;\ (\alpha|\alpha) \in \{1, 2\}\}.$$

Tada je

$$R = \{\pm e_i;\ i = 1, 2, 3, 4\} \cup \{\pm(e_i - e_j);\ 1 \le i < j \le 4\} \cup \left\{\frac{1}{2}(\pm e_1 \pm e_2 \pm e_3 \pm e_4)\right\}.$$

Jedna je baza $B = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$, gdje je

$$\alpha_1 = e_2 - e_3, \qquad \alpha_2 = e_3 - e_4, \qquad \alpha_3 = e_4, \qquad \alpha_4 = \frac{1}{2}(e_1 - e_2 - e_3 - e_4).$$

Cartanova matrica, brojevi $|R|$ i $|W|$ i polusuma pozitivnih korijena $\rho$ su:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad |R| = 48, \qquad |W| = 2^7 \cdot 3^2 = 1152,$$

$$\rho = 8\alpha_1 + 15\alpha_2 + 21\alpha_3 + 11\alpha_4 = \frac{1}{2}(11e_1 + 5e_2 + 3e_3 + e_4).$$

**Tip $G_2$:** Za $V$ uzimamo ortogonalni komplement od $e = e_1 + e_2 + e_3$ u $\mathbb{R}^3$, tj.

$$V = \{\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in \mathbb{R}^3;\ \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 0\}.$$

Sistem korijena je $R = \{\alpha \in \mathbb{Z}^3 \cap V;\ (\alpha|\alpha) \in \{2, 6\}\}$, tj.

$$R = \{\pm(e_1 - e_2), \pm(e_2 - e_3), \pm(e_1 - e_3), \pm(2e_1 - e_2 - e_3), \pm(2e_2 - e_1 - e_3), \pm(2e_3 - e_1 - e_2)\}.$$

Jedna je baza $B = \{\alpha_1, \alpha_2\}$, gdje su $\alpha_1 = e_1 - e_2$ i $\alpha_2 = -2e_1 + e_2 + e_3$. Tada je

$$R_+ = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2, 2\alpha_1 + \alpha_2, 3\alpha_1 + \alpha_2, 3\alpha_1 + 2\alpha_2\} =$$

$$= \{e_1 - e_2, -e_1 + e_3, -e_2 + e_3, -2e_1 + e_2 + e_3, e_1 - 2e_2 + e_3, -e_1 - e_2 + 2e_3\}.$$

Cartanova matrica, brojevi $|R|$ i $|W|$ i polusuma pozitivnih korijena $\rho$ su:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}, \qquad |R| = |W| = 12, \qquad \rho = 5\alpha_1 + 3\alpha_2 = -e_1 - 2e_2 + 3e_3.$$

Napokon, pretpostavimo sada da je $R$ ireducibilan *nereduciran* sistem korijena. Ako je rang od $R$ jednak 1, jasno je da je $R = \{2\alpha, \alpha, -\alpha, -2\alpha\}$ za neki $\alpha \neq 0$. Ako je rang od $R$ veći od 1, onda je prema propoziciji 3.4.2. skup $R_0$ svih nedjeljivih korijena ireducibilan reduciran sistem korijena s dvije duljine korijena čiji je omjer $\sqrt{2}$; skup $A$ kraćih korijena iz $R_0$ ima svojstvo da su svaka dva neproporcionalna elementa iz $A$ međusobno okomita; napokon, ako je $B$ skup duljih korijena iz $R_0$, onda je $R_0 = A \cup B$ i $R = R_0 \cup 2A$. Iz popisa reduciranih ireducibilnih sistema korijena vidi se da je nužno $R_0$ sistem korijena tipa $B_\ell$, a tada je $R$ unija $B_\ell$ i $C_\ell$, pa se za sistem korijena $R$ kaže da je tipa $BC_\ell$. Imamo

$$R = \{\pm e_i;\ 1 \leq i \leq \ell\} \cup \{\pm e_i \pm e_j;\ 1 \leq i < j \leq \ell\} \cup \{\pm 2e_i;\ 1 \leq i \leq \ell\}.$$

Ukupan broj korijena je $|R| = 2\ell(\ell+1)$. Kao bazu tog sistema korijena možemo uzeti prije izabranu bazu $B = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell\}$ od $R_0$. Tada je

$$R_+ = \{e_i;\ 1 \leq i \leq \ell\} \cup \{e_i \pm e_j;\ 1 \leq i < j \leq \ell\} \cup \{2e_i;\ 1 \leq i \leq \ell\},$$

a polusuma pozitivnih korijena je

$$\rho = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\ell} i(2\ell - i + 2)\alpha_i + \frac{\ell(\ell+5)}{4}\alpha_\ell = \sum_{i=1}^{\ell}(2\ell - 2i + 2)e_i.$$

## 3.7 Težine

Neka je $R$ sistem korijena u prostoru $V$. Definiramo

$$P(R) = \{\lambda \in V;\ \check{\alpha}(\lambda) \in \mathbb{Z}\ \forall \alpha \in R\}.$$

Očito je $P(R)$ aditivna podgrupa od $V$ koja sadrži $R$. Elementi od $P(R)$ zovu se **težine** u odnosu na sistem korijena $R$. Aditivnu podgrupu generiranu sa $R$ označavat ćemo sa $Q(R)$. Elementi od $Q(R)$ zovu se **korijenske težine**.

Neka je sada $B$ baza sistema korijena $R$ i $C = \{x \in V;\ \check{\alpha}(x) > 0\ \forall \alpha \in B\}$ pripadna Weylova komora i $\overline{C} = \{x \in V;\ \check{\alpha}(x) \geq 0\ \forall \alpha \in B\}$ njen zatvarač. Elementi skupa $P_+(R) = P(R) \cap \overline{C}$ zovu se **dominantne težine** u odnosu na bazu $B$ ili u odnosu na Weylovu komoru $C$. **Strogo dominantne težine** (u onosu na $B$ ili u odnosu na $C$) su elementi skupa $P_+^\circ(R) = P(R) \cap C$.

Znamo da je $\check{B} = \{\check{\alpha};\ \alpha \in B\}$ baza dualnog sistema korijena $\check{R}$. Posebno, $\check{B}$ je baza dualnog prostora $V^*$. Neka je $\{\lambda_\alpha;\ \alpha \in B\}$ baza od $V$ koja je dualna bazi $\check{B}$ od $V^*$ :

$$\check{\beta}(\lambda_\alpha) = \delta_{\alpha\beta} \qquad \alpha, \beta \in B.$$

Očito su $\lambda_\alpha$ težine. One se zovu **fundamentalne težine** u odnosu na bazu $B$ ili u odnosu na Weylovu komoru $C$.

**Zadatak 3.19.** *Dokažite da vrijedi*

$$C = \left\{\sum_{\alpha \in B} c_\alpha \lambda_\alpha;\ c_\alpha \in \mathbb{R}_+^* = \rangle 0, +\infty\rangle\ \forall \alpha \in B\right\}, \quad \overline{C} = \left\{\sum_{\alpha \in B} c_\alpha \lambda_\alpha;\ c_\alpha \in \mathbb{R}_+ = [0, +\infty\rangle\ \forall \alpha \in B\right\},$$

$$P_+(R) = \left\{\sum_{\alpha \in B} c_\alpha \lambda_\alpha;\ c_\alpha \in \mathbb{Z}_+\ \forall \alpha \in B\right\}, \quad P_+^\circ(R) = \left\{\sum_{\alpha \in B} c_\alpha \lambda_\alpha;\ c_\alpha \in \mathbb{N}\ \forall \alpha \in B\right\}.$$

Pretpostavimo sada da je prostor $V$ unitaran i da su sve refleksije $\sigma_\alpha,\ \alpha \in R$, ortogonalne. Ukoliko pomoću skalarnog produkta identificiramo dualni prostor $V^*$ s prostorom $V$, znamo da je $\check{\alpha} = \frac{2}{(\alpha|\alpha)}\alpha,\ \alpha \in R$. Prema tome, vrijedi

$$(\lambda_\alpha|\beta) = \frac{1}{2}(\alpha|\alpha)\delta_{\alpha\beta}, \qquad \alpha, \beta \in R.$$

Dakle, $\lambda_\alpha$ je vektor okomit na sve $\beta \in B \setminus \{\alpha\}$, a ortogonalna projekcija $\lambda_\alpha$ na pravac $\mathbb{R}\alpha$ je $\frac{1}{2}\alpha$.

**Propozicija 3.7.1.** *Neka je $B$ baza sistema korijena $R$. Tada je*

$$\rho = \frac{1}{2} \sum_{\beta \in R_+(B)} \beta = \sum_{\alpha \in B} \lambda_\alpha.$$

*Nadalje, $\rho$ je strogo dominantna težina u odnosu na $B$.*

**Dokaz:** Prema lemi 3.5.6. za svaki $\alpha \in B$ je $\sigma_\alpha \rho = \rho - \alpha$, pa imamo

$$(\rho - \alpha|\alpha) = (\sigma_\alpha \rho|\alpha) = (\rho|\sigma_\alpha \alpha) = -(\rho|\alpha) \quad \Longrightarrow \quad 2(\rho|\alpha) = (\alpha|\alpha) \quad \Longrightarrow \quad \check{\alpha}(\rho) = 1.$$

Kako je $\{\check{\alpha};\ \alpha \in B\}$ baza od $V^*$ koja je dualna bazi $\{\lambda_\alpha;\ \alpha \in B\}$ prostora $V$, to je

$$\rho = \sum_{\alpha \in B} \check{\alpha}(\rho)\lambda_\alpha = \sum_{\alpha \in B} \lambda_\alpha.$$

Posljednja tvrdnja slijedi iz zadatka 3.19.

Direktnim računom nalazimo:

**Propozicija 3.7.2.** *Neka je $B = \{\alpha_1, \dots, \alpha_\ell\}$ baza ireducibilnog sistema korijena iz eksplicitnog opisa u prethodnom odjeljku. Stavimo $\lambda_i = \lambda_{\alpha_i}$, $i = 1, \dots, \ell$. Tada vrijedi:*

**Tip $A_\ell$:**

$$\lambda_i = \sum_{j=1}^{i} e_j - \frac{i}{\ell+1} \sum_{j=1}^{\ell+1} e_j = \frac{1}{\ell+1} \left[ (\ell - i + 1) \sum_{j=1}^{i-1} j\alpha_j + i \sum_{j=i}^{\ell} (\ell - j + 1)\alpha_j \right], \qquad 1 \leq i \leq \ell.$$

**Tip $B_\ell$:**

$$\lambda_i = \sum_{j=1}^{i} e_j = \sum_{j=1}^{i-1} j\alpha_j + i \sum_{j=i}^{\ell} \alpha_j, \qquad 1 \leq i \leq \ell - 1,$$

$$\lambda_\ell = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\ell} e_j = \sum_{j=1}^{\ell} j\alpha_j.$$

**Tip $C_\ell$:**

$$\lambda_i = \sum_{j=1}^{i} e_j = \sum_{j=1}^{i-1} j\alpha_j + i \sum_{j=i}^{\ell-1} \alpha_j + \frac{i}{2}\alpha_\ell, \qquad 1 \leq i \leq \ell.$$

**Tip $D_\ell$:**

$$\lambda_i = \sum_{j=1}^{i} e_j = \sum_{j=1}^{i-1} j\alpha_j + i \sum_{j=i}^{\ell-2} \alpha_j + \frac{i}{2}(\alpha_{\ell-1} + \alpha_\ell), \qquad 1 \leq i \leq \ell - 2,$$

$$\lambda_{\ell-1} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\ell-1} e_j - \frac{1}{2} e_\ell = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\ell-2} j\alpha_j + \frac{\ell}{4}\alpha_{\ell-1} + \frac{\ell-2}{4}\alpha_\ell,$$

$$\lambda_\ell = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\ell} e_j = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\ell-2} j\alpha_j + \frac{\ell-2}{4}\alpha_{\ell-1} + \frac{\ell}{4}\alpha_\ell.$$

**Tip $E_6$:**

$$\lambda_1 = \frac{2}{3}(-e_6 - e_7 + e_8) = \frac{1}{3}(4\alpha_1 + 3\alpha_2 + 5\alpha_3 + 6\alpha_4 + 4\alpha_5 + 2\alpha_6),$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{2}(e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + e_5 - e_6 - e_7 + e_8)\alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 + 3\alpha_4 + 2\alpha_5 + \alpha_6,$$

$$\lambda_3 = \frac{1}{6}(-3e_1 + 3e_2 + 3e_3 + 3e_4 + 3e_5 - 5e_6 - 5e_7 + 5e_8) = \frac{1}{3}(5\alpha_1 + 6\alpha_2 + 10\alpha_3 + 12\alpha_4 + 8\alpha_5 + 4\alpha_6),$$

$$\lambda_4 = e_3 + e_4 + e_5 - e_6 - e_7 + e_8 = 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 4\alpha_3 + 6\alpha_4 + 4\alpha_5 + 2\alpha_6,$$

$$\lambda_5 = \frac{1}{3}(3e_4 + 3e_5 - 2e_6 - 2e_7 + 2e_8) = \frac{1}{3}(4\alpha_1 + 6\alpha_2 + 8\alpha_3 + 12\alpha_4 + 10\alpha_5 + 5\alpha_6),$$

$$\lambda_6 = \frac{1}{3}(3e_5 - e_6 - e_7 + e_8) = \frac{1}{3}(2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 4\alpha_3 + 6\alpha_4 + 5\alpha_5 + 4\alpha_6).$$

**Tip $E_7$:**

$$\lambda_1 = -e_7 + e_8 = 2\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + 4\alpha_4 + 3\alpha_5 + 2\alpha_6 + \alpha_7,$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{2}(e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + e_5 + e_6 - 2e_7 + 2e_8) = \frac{1}{2}(4\alpha_1 + 7\alpha_2 + 8\alpha_3 + 12\alpha_4 + 9\alpha_5 + 8\alpha_6 + 3\alpha_7),$$

$$\lambda_3 = \frac{1}{2}(-e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + e_5 + e_6 - 3e_7 + 3e_8) = 3\alpha_1 + 4\alpha_2 + 6\alpha_3 + 8\alpha_4 + 6\alpha_5 + 4\alpha_6 + 2\alpha_7,$$

$$\lambda_4 = e_3 + e_4 + e_5 + e_6 - 2e_7 + 2e_8 = 4\alpha_1 + 6\alpha_2 + 8\alpha_3 + 12\alpha_4 + 9\alpha_5 + 6\alpha_6 + 3\alpha_7,$$

$$\lambda_5 = \frac{1}{2}(2e_4 + 2e_5 + 2e_6 - -3e_7 + 3e_8) = \frac{1}{2}(6\alpha_1 + 9\alpha_2 + 12\alpha_3 + 18\alpha_4 + 15\alpha_5 + 10\alpha_6 + 5\alpha_7),$$

$$\lambda_6 = e_5 + e_6 - e_7 + e_8 = 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 4\alpha_3 + 6\alpha_4 + 5\alpha_5 + 4\alpha_6 + 2\alpha_7,$$

$$\lambda_7 = \frac{1}{2}(2e_6 - e_7 + e_8) = \frac{1}{2}(2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 4\alpha_3 + 6\alpha_4 + 5\alpha_5 + 4\alpha_6 + 3\alpha_7).$$

**Tip $E_8$:**

$$\lambda_1 = 2e_8 = 4\alpha_1 + 5\alpha_2 + 7\alpha_3 + 10\alpha_4 + 8\alpha_5 + 6\alpha_6 + 4\alpha_7 + 2\alpha_8,$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{2}(e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + e_5 + e_6 + e_7 + 5e_8) = 5\alpha_1 + 8\alpha_2 + 10\alpha_3 + 15\alpha_4 + 12\alpha_5 + 9\alpha_6 + 6\alpha_7 + 3\alpha_8,$$

$$\lambda_3 = \frac{1}{2}(-e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + e_5 + e_6 + e_7 + 7e_8) = 7\alpha_1 + 10\alpha_2 + 14\alpha_3 + 20\alpha_4 + 16\alpha_5 + 12\alpha_6 + 8\alpha_7 + 4\alpha_8,$$

$$\lambda_4 = e_3 + e_4 + e_5 + e_6 + e_7 + 5e_8 = 10\alpha_1 + 15\alpha_2 + 20\alpha_3 + 30\alpha_4 + 24\alpha_5 + 18\alpha_6 + 12\alpha_7 + 6\alpha_8,$$

$$\lambda_5 = e_4 + e_5 + e_6 + e_7 + 4e_8 = 8\alpha_1 + 12\alpha_2 + 16\alpha_3 + 24\alpha_4 + 20\alpha_5 + 15\alpha_6 + 10\alpha_7 + 5\alpha_8,$$

$$\lambda_6 = e_5 + e_6 + e_7 + 3e_8 = 6\alpha_1 + 9\alpha_2 + 12\alpha_3 + 18\alpha_4 + 15\alpha_5 + 12\alpha_6 + 8\alpha_7 + 4\alpha_8,$$

$$\lambda_7 = e_6 + e_7 + 2e_8 = 4\alpha_1 + 6\alpha_2 + 8\alpha_3 + 12\alpha_4 + 10\alpha_5 + 8\alpha_6 + 6\alpha_7 + 3\alpha_8,$$

$$\lambda_8 = e_7 + e_8 = 5\alpha_1 + 8\alpha_2 + 10\alpha_3 + 15\alpha_4 + 12\alpha_5 + 9\alpha_6 + 6\alpha_7 + 3\alpha_8,$$

**Tip $F_4$:**

$$\lambda_1 = e_1 + e_2 = 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 4\alpha_3 + 2\alpha_4,$$

$$\lambda_2 = 2e_1 + e_2 + e_3 = 3\alpha_1 + 6\alpha_2 + 8\alpha_3 + 4\alpha_4,$$

$$\lambda_3 = \frac{1}{2}(3e_1 + e_2 + e_3 + e_4) = 2\alpha_1 + 4\alpha_2 + 6\alpha_3 + 3\alpha_4,$$

$$\lambda_4 = e_1 = \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + 2\alpha_4.$$

**Tip $G_2$:**

$$\lambda_1 = -e_2 + e_3 = 2\alpha_1 + \alpha_2,$$

$$\lambda_2 = -e_1 - e_2 + 2e_3 = 3\alpha_1 + 2\alpha_2.$$

# Poglavlje 4

# CARTANOVE I BORELOVE PODALGEBRE. KONJUGIRANOST

## 4.1 Klasifikacija poluprostih Liejevih algebri

**U ovom je odjeljku $\mathfrak{g}$ poluprosta Liejeva algebra nad algebarski zatvorenim poljem $K$ karakteristike** 0. Neka je $\mathfrak{h}$ maksimalna toralna podalgebra od $\mathfrak{g}$ i $R = R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) \subseteq \mathfrak{h}^*$ sistem korijena od $\mathfrak{g}$ u odnosu na $\mathfrak{h}$. Prema propoziciji 2.2.2. $\mathbb{Q}-$potprostor $span_{\mathbb{Q}} R$ od $\mathfrak{h}^*$ razapet sa $R$ nad poljem $\mathbb{Q}$ je dimenzije $\ell = \dim_K \mathfrak{h}^*$. Proširenjem polja skalara sa $\mathbb{Q}$ na $\mathbb{R}$ dobivamo realan $\ell-$dimenzionalan vektorski prostor $V$ i skup $R$ je sistem korijena u prostoru $V$. Simetrična bilinearna forma na $\mathfrak{h}^* \times \mathfrak{h}^*$ dobivena po dualnosti iz restrikcije Killingove forme od $\mathfrak{g}$ na $\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}$ je nedegenerirana, njena restrikcija na $span_{\mathbb{Q}} R \times span_{\mathbb{Q}} R$ je pozitivno definitna i jedinstveno se proširuje do skalarnog produkta na prostoru $V$. U odnosu na taj skalarni produkt sve refleksije $\sigma_\alpha$, $\alpha \in R$, su ortogonalne, pa su i svi operatori iz Weylove grupe $W(R)$ ortogonalni (štoviše, može se pokazati da su i svi operatori iz grupe $Aut(R)$ ortogonalni).

Ako su $R$ i $R'$ sistemi korijena u realnim konačnodimenzionalnim vektorskim prostorima $V$ i $V'$, **izomorfizam sistema korijena** $R$ na sistem korijena $R'$ je bijekcija $\varphi : R \to R'$ koja je restrikcija izomorfizma vektorskih prostora $\Phi : V \to V'$. Budući da skup $R$ razapinje vektorski prostor $V$, takav izomorfizam $\Phi$ je jedinstven ukoliko postoji. Podsjećamo da je jedan kriterij izomorfnosti sistema korijena dan u teoremu 3.6.1. Prema tom teoremu sistemi korijena su izomorfni ako i samo ako imaju iste Cartanove matrice, odnosno, iste (ili točnije izomorfne) Dynkinove dijagrame.

Pretpostavimo sada da je $\pi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$ izomorfizam poluprostih Liejevih algebri nad $K$. Ako je $\mathfrak{h}$ maksimalna toralna podalgebra od $\mathfrak{g}$, onda je $\mathfrak{h}' = \pi(\mathfrak{h})$ maksimalna toralna podalgebra od $\mathfrak{g}'$. Neka su $R = R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ i $R' = R(\mathfrak{g}', \mathfrak{h}')$ pripadni sistemi korijena u $\mathfrak{h}^*$ i u $\mathfrak{h}'^*$. Tada je $\pi|\mathfrak{h}$ izomorfizam $\mathfrak{h}$ na $\mathfrak{h}'$, a dualni operator $\Psi : \mathfrak{h}^* \to \mathfrak{h}'^*$ inverznog izomorfizma $(\pi|\mathfrak{h})^{-1} : \mathfrak{h}' \to \mathfrak{h}$ je izomorfizam prostora $\mathfrak{h}^*$ na prostor $\mathfrak{h}'^*$. Kako je $\pi$ izomorfizam Liejevih algebri, lako se vidi da je $\pi(\mathfrak{g}_\alpha) = \mathfrak{g}'_{\Psi(\alpha)}$ za svaki $\alpha \in R$. Odatle je $\Psi(R) = R'$, pa je restrikcija $\Psi|span_{\mathbb{Q}} R$ izomorfizam racionalnog vektorskog prostora $span_{\mathbb{Q}} R$ na racionalni vektorski prostor $span_{\mathbb{Q}} R'$. Taj se izomorfizam proširuje do izomorfizma $\Phi$ realnog prostora $V = (span_{\mathbb{Q}} R) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$ na realni prostor $V' = (span_{\mathbb{Q}} R') \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$ takav da je $\Phi(R) = \Psi(R) = R'$. Drugim riječima, dobivamo izomorfizam sistema korijena $R$ i $R'$.

Cilj je ovog odjeljka da dokažemo da vrijedi i obrat, tj. da su dvije poluproste Liejeve algebre, koje imaju izomorfne sisteme korijena, izomorfne. Prije svega ćemo taj problem reducirati na slučaj prostih Liejevih algebri i ireducibilnih sistema korijena.

**Teorem 4.1.1.** *Neka je $\mathfrak{h}$ maksimalna toralna podalgebra od $\mathfrak{g}$ i $R = R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$. Tada je Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ prosta ako i samo ako je sistem korijena $R$ u realnom unitarnom prostoru $V = (span_{\mathbb{Q}} R) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$ ireducibilan. Štoviše, ako je $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \dotplus \cdots \dotplus \mathfrak{g}_s$ rastav od $\mathfrak{g}$ u direktnu sumu prostih ideala, onda je* *za svaki $j \in \{1, \ldots, s\}$ potprostor $\mathfrak{h}_j = \mathfrak{g}_j \cap \mathfrak{h}$ maksimalna toralna podalgebra od $\mathfrak{g}_j$ i pripadni sistem korijena $R_j = R(\mathfrak{g}_j, \mathfrak{h}_j)$ se prirodno može identificirati s podskupom od $R$. Tada je $R = R_1 \cup \cdots \cup R_s$ i to je dekompozicija od $R$ u ireducibilne komponente.*

**Dokaz:** Pretpostavimo da je Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ prosta i dokažimo da je tada sistem korijena $R$ ireducibilan. Pretpostavimo suprotno, tj. da je sistem korijena $R$ reducibilan: $R = R_1 \cup R_2$ pri čemu su $R_1$ i $R_2$ neprazni i međusobno ortogonalni. Ako su $\alpha \in R_1$ i $\beta \in R_2$, tada je $(\alpha + \beta|\alpha) = (\alpha|\alpha) \neq 0$, dakle, $\alpha + \beta \notin R_2$, i analogno $(\alpha + \beta|\beta) = (\beta|\beta) \neq 0$, dakle, $\alpha + \beta \notin R_1$. To znači da $\alpha + \beta$ nije korijen, pa slijedi $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] = \{0\}$. Označimo sa $\mathfrak{k}$ Liejevu podalgebru od $\mathfrak{g}$ generiranu s unijom svih $\mathfrak{g}_\alpha$, $\alpha \in R_1$. Prema dokazanom je $\mathfrak{g}_\beta \subseteq C_\mathfrak{g}(\mathfrak{k})$, a kako je centar $C_\mathfrak{g}(\mathfrak{g})$ od $\mathfrak{g}$ jednak $\{0\}$, zaključujemo da je $\mathfrak{k} \neq \mathfrak{g}$. Nadalje, vrijedi $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{k}] \subseteq \mathfrak{k}$ $\forall \alpha \in R_1$, dakle, i $\forall \alpha \in R$. Time je dokazano da je $\mathfrak{k}$ ideal u $\mathfrak{g}$ različit i od $\{0\}$ i od $\mathfrak{g}$, a to je u suprotnosti s pretpostavkom da je $\mathfrak{g}$ porosta Liejeva algebra. Ova kontradikcija pokazuje da je pretpostavka o reducibilnosti od $R$ pogrešna, odnosno, dokazano je da je sistem korijena $R$ ireducibilan.

Pretpostavimo sada da je poluprosta Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ nije prosta i neka je $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \dot{+} \cdots \dot{+} \mathfrak{g}_s$ njen rastav u direktnu sumu prostih ideala. Neka je $\mathfrak{h}$ maksimalna toralna podalgebra od $\mathfrak{g}$ i za $j \in \{1, \ldots, s\}$ stavimo $\mathfrak{h}_j = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_j$. Neka je $x \in \mathfrak{h}$ i $x = x_1 + \cdots + x_s$, gdje su $x_1 \in \mathfrak{g}_1, \ldots, x_s \in \mathfrak{g}_s$. Tada iz $[\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_j] = \{0\}$ za $i \neq j$ slijedi da je $ad_{\mathfrak{g}_j} x_j = (ad_\mathfrak{g} x)|\mathfrak{g}_j$, dakle, $x_j$ je poluprost element Liejeve algebre $\mathfrak{g}_j$, a time i poluprost element Liejeve algebre $\mathfrak{g}$, jer za $i \neq j$ su $\mathfrak{g}_j$ i $\mathfrak{g}_i$ međusobno različiti prosti ideali, pa je $[\mathfrak{g}_j, \mathfrak{g}_i] = \{0\}$, dakle, $(ad_\mathfrak{g} x_j)|\mathfrak{g}_i = 0$. Za proizvoljan $y \in \mathfrak{h}$ pišemo također $y = y_1 + \cdots + y_s$, gdje su $y_1 \in \mathfrak{g}_1, \ldots, y_s \in \mathfrak{g}_s$. Kako je $[\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_j] = \{0\}$ za $i \neq j$, imamo

$$0 = [x, y] = \sum_{j=1}^{s} [x_j, y_j] \qquad \Longrightarrow \qquad [x_j, y_j] = 0 \quad \forall j \in \{1, \ldots, s\}$$

jer je suma ideala $\mathfrak{g}_j$ direktna. Odatle slijedi da je za svaki $j \in \{1, \ldots, s\}$ i svaki $y \in \mathfrak{h}$

$$[x_j, y] = \sum_{i=1}^{s} [x_j, y_i] = 0.$$

To pokazuje da je $x_j \in C_\mathfrak{g}(\mathfrak{h})$, a kako je $x_j$ poluprost i $\mathfrak{h}$ je maksimalna toralna podalgebra, slijedi $x_j \in \mathfrak{h}$. Dakle, $x_j \in \mathfrak{h}_j$ $\forall j \in \{1, \ldots, s\}$, odnosno, $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_1 \dot{+} \cdots \dot{+} \mathfrak{h}_s$. Nadalje, ako je $x \in \mathfrak{g}_j$ poluprost element od $\mathfrak{g}_j$ koji komutira sa svim elementima od $\mathfrak{h}_j$, onda je $x$ poluprost element od $\mathfrak{g}$ koji komutira sa svim elementima od $\mathfrak{h}$, dakle, $x \in \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_j = \mathfrak{h}_j$. Time je dokazano da je $\mathfrak{h}_j$ maksimalna toralna podalgebra od $\mathfrak{g}_j$ za svaki $j \in \{1, \ldots, s\}$.

Neka je $R_j = R(\mathfrak{g}_j, \mathfrak{h}_j)$. Svaki $\alpha \in R_j$ možemo promatrati kao element od $\mathfrak{h}^*$ tako da stavimo $\alpha|\mathfrak{h}_i = 0$ za $i \neq j$. Tada je očito $\alpha \in R$ i $\mathfrak{g}_\alpha \subseteq \mathfrak{g}_j$. Prema tome, $R_1 \cup \cdots \cup R_s \subseteq R$. Neka je sada $\alpha \in R$. Kako je $[\mathfrak{h}, \mathfrak{g}_\alpha] = \mathfrak{g}_\alpha \neq \{0\}$, postoji $j \in \{1, \ldots, s\}$ takav da je $[\mathfrak{h}_j, \mathfrak{g}_\alpha] \neq \{0\}$. Kako je potprostor $\mathfrak{g}_\alpha$ jednodimenzionalan, slijedi da je $\mathfrak{g}_\alpha = [\mathfrak{h}_j, \mathfrak{g}_\alpha] \subseteq [\mathfrak{g}_j, \mathfrak{g}_\alpha] \subseteq \mathfrak{g}_j$. No tada je $\alpha|\mathfrak{h}_j \in R_j$ i $\alpha|\mathfrak{h}_i = 0$ za $i \neq j$. Uz prethodnu prirodnu identifikaciju $R_j$ kao podskupa od $R$ to znači da je $\alpha \in R_j$. Prema tome, vrijedi i obrnuta inkluzija $R \subseteq R_1 \cup \cdots \cup R_s$, dakle, jednakost $R = R_1 \cup \cdots \cup R_s$. Prema prvom dijelu dokaza sistemi korijena $R_1, \ldots, R_s$ su ireducibilni, odnosno, to su ireducibilne komponente sistema korijena $R$.

**Propozicija 4.1.2.** *Neka je $\mathfrak{h}$ maksimalna toralna podalgebra poluproste Liejeve algebre $\mathfrak{g}$, neka je $R = R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ sistem korijena od $\mathfrak{g}$ u odnosu na $\mathfrak{h}$ i neka je $B$ baza sistema korijena $R$. Tada je Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ generirana s unijom*

$$\bigcup_{\alpha \in B} (\mathfrak{g}_\alpha \cup \mathfrak{g}_{-a}).$$

**Dokaz:** Neka je $\mathfrak{g}'$ Liejeva podalgebra od $\mathfrak{g}$ generirana s gornjom unijom. Nadalje, neka je $\alpha \in R_+(B)$. Prema lemi 3.5.4. možemo pisati $\alpha = \alpha_1 + \cdots + \alpha_k$ pri čemu su $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in B$ izabrani tako da je svaka parcijalna suma $\alpha_1 + \cdots + \alpha_i$, $i = 1, \ldots, k$ korijen (naravno, pozitivan u odnosu na $B$). Nadalje, prema tvrdnji $(d)$ propozicije 2.2.1. vrijedi $[\mathfrak{g}_{\alpha_{i+1}}, \mathfrak{g}_{\alpha_1+\cdots+\alpha_i}] = \mathfrak{g}_{\alpha_1+\cdots+\alpha_{i+1}}$ za $i < k$, pa indukcijom po $k = ht_B(\alpha)$ zaključujemo da je $\mathfrak{g}_\alpha \subseteq \mathfrak{g}'$ za svaki $\alpha \in R_+(B)$. Sasvim analogno je $\mathfrak{g}_\alpha \subseteq \mathfrak{g}'$ za svaki $\alpha \in R_-(B)$. Sada iz tvrdnje $(f)$ propozicije 2.2.1. slijedi da je $\mathfrak{g}' = \mathfrak{g}$.

**Teorem 4.1.3.** *Neka su $\mathfrak{g}$ i $\mathfrak{g}'$ poluproste Liejeve algebre nad $K$, $\mathfrak{h}$ i $\mathfrak{h}'$ njihove maksimalne toralne podalgebre i $R = R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ i $R' = R(\mathfrak{g}', \mathfrak{h}')$ odgovarajući sistemi korijena. Neka je $\varphi$ izomorfizam sistema korijena $R$ na sistem korijena $R'$. Neka je $B$ baza sistema korijena $R$; tada je $B' = \varphi(B)$ baza sistema korijena $R'$. Za svaki $\alpha \in B$ izaberimo $x_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha \setminus \{0\}$ i za svaki $\beta \in B'$ izaberimo $x'_\beta \in \mathfrak{g}'_\beta \setminus \{0\}$. Postoji jedinstven izomorfizam Liejevih algebri $\pi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$ takav da vrijedi*

$$\pi(h_\alpha) = h'_{\varphi(\alpha)} \qquad i \qquad \pi(x_\alpha) = x'_{\varphi(\alpha)} \qquad \forall \alpha \in B.$$

*Pri tome je kao i u poglavlju 2. za bilo koji korijen $\alpha \in R$ sa $h_\alpha$ označen jedinstven element jednodimenzionalnog potprostora $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}]$ od $\mathfrak{h}$ takav da je $\alpha(h_\alpha) = 2$; analogno, za bilo koji $\beta \in R'$ je $h'_\beta \in [\mathfrak{g}'_\beta, \mathfrak{g}'_{-\beta}] \subseteq \mathfrak{h}'$ jedinstven takav da je $\beta(h'_\beta) = 2$.*

**Dokaz:** Dokažimo najprije jedinstvenost izomorfizma $\pi$. Pretpostavimo da su $\pi$ i $\rho$ izomorfizmi $\mathfrak{g}$ na $\mathfrak{g}'$ takvi da vrijedi

$$\pi(h_\alpha) = h'_{\varphi(\alpha)} = \rho(h_\alpha) \qquad \text{i} \qquad \pi(x_\alpha) = x'_{\varphi(\alpha)} = \rho(x_\alpha) \qquad \forall \alpha \in B. \tag{4.1}$$

Kako su $\mathfrak{g}_\alpha$ i $\mathfrak{g}_{-\alpha}$ jednodimenzionalni i $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}] = K h_\alpha$, za svaki $\alpha \in B$ postoji jedinstven $y_\alpha \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ takav da je $[x_\alpha, y_\alpha] = h_\alpha$. Sasvim analogno, za svaki $\beta \in B'$ postoji jedinstven $y'_\beta \in \mathfrak{g}'_{-\beta}$ takav da je $[x'_\beta, y'_\beta] = h'_\beta$. Kako su $\pi$ i $\rho$ izomorfizmi Liejevih algebri, iz (4.1) slijedi da vrijedi i

$$\pi(y_\alpha) = y'_{\varphi(\alpha)} = \rho(y_\alpha) \qquad \forall \alpha \in B.$$

Prema tome, $\pi$ i $\rho$ se podudaraju na uniji

$$\bigcup_{\alpha \in B} (\mathfrak{g}_\alpha \cup \mathfrak{g}_{-a}),$$

a ona prema propoziciji 4.1.2. generira Liejevu algebru $\mathfrak{g}$. Dakle, $\pi = \rho$.

Zbog teorema 4.1.1. u dokazu egzistencije možemo pretpostavljati da su $\mathfrak{g}$ i $\mathfrak{g}'$ proste Liejeve algebre. Formirajmo direktni produkt $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}'$; to je poluprosta Liejeva algebra čiji su jedini prosti ideali $\mathfrak{g} \times \{0\}$ i $\{0\} \times \mathfrak{g}'$, i to su svi ideali u $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}'$ osim $\{0\} \times \{0\}$ i čitave $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}'$. Kao i malo prije neka su $y_\alpha \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ za $\alpha \in B$ i $y'_\beta \in \mathfrak{g}'_{-\beta}$ za $\beta \in B'$ jedinstveni takvi da je $[x_\alpha, y_\alpha] = h_\alpha$ i $[x'_\beta, y'_\beta] = h'_\beta$. Neka je $\mathfrak{d}$ Liejeva podalgebra od $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}'$ generirana elementima $\overline{x}_\alpha = (x_\alpha, x'_{\varphi(\alpha)})$, $\overline{y}_\alpha = (y_\alpha, y'_{\varphi(\alpha)})$ i $\overline{h}_\alpha = (h_\alpha, h'_{\varphi(\alpha)})$ za $\alpha \in B$. Cilj nam je dokazati da su restrikcije projekcija $\mathfrak{d}$ na prvi i na drugi faktor u $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}'$ izomorfizmi sa $\mathfrak{d}$ na $\mathfrak{g}$ i na $\mathfrak{g}'$. Glavni problem pri tome je dokaz da je $\mathfrak{d} \neq \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}'$, i to ćemo dokazati zaobilazno.

Prije svega, u odjeljku 3.3. za $\alpha, \beta \in R$ smo uveli oznaku $n(\alpha, \beta) = \check{\beta}(\alpha)$. No uz identifikaciju duala od $\mathfrak{h}^*$ sa $\mathfrak{h}$ imamo $\check{\beta} = h_\beta$. Prema tome je $n(\alpha, \beta) = \alpha(h_\beta)$ za $\alpha, \beta \in R$. Analogno je $n(\alpha', \beta') = \alpha'(h'_{\beta'})$ za $\alpha', \beta' \in R'$. No kako je $\varphi$ izomorfizam sistema korijena $R$ na $R'$, vrijedi $n(\varphi(\alpha), \varphi(\beta)) = n(\alpha, \beta)$ $\forall \alpha, \beta \in R$. Prema tome, vrijedi

$$(\varphi(\alpha))(h'_{\varphi(\beta)}) = \alpha(h_\beta) \qquad \forall \alpha, \beta \in R. \tag{4.2}$$

Treba nam još jedna lema o ireducibilnim sistemima korijena, koju ćemo dokazati kasnije:

**Lema 4.1.4.** *Neka je $R$ ireducibilan sistem korijena u realnom prostoru $V$ i $B$ baza od $R$. Postoji korijen $\beta \in R_+(B)$ takav da je $\beta - \alpha \in \mathbb{Z}_+R_+(B) = \mathbb{Z}_+B$ za svaki $\alpha \in R_+(B)$. Vrijedi*

(a) *Ako je $\alpha \in R_+(B)$ i $\alpha \neq \beta$ onda je $ht_B\alpha < ht_B\beta$.*

(b) *Ako je $(\,\cdot\,|\,\cdot\,)$ skalarni produkt u $V$ u odnosu na koji su sve refleksije $\sigma_\alpha$, $\alpha \in R$, ortogonalne, onda je $(\beta|\alpha) \geq 0$ $\forall \alpha \in B$.*

(c) *U zapisu*
$$\beta = \sum_{\alpha \in B} k_\alpha \alpha, \qquad k_\alpha \in \mathbb{Z}_+,$$
*vrijedi $k_\alpha > 0$ $\forall \alpha \in B$.*

Korijen $\beta$ iz leme 4.1.4. zove se **maksimalan korijen** u $R$ u onosu na bazu $B$. Budući da su $\mathfrak{g}$ i $\mathfrak{g}'$ proste Liejeve algebre, sistemi korijena $R$ i $R'$ su prema teoremu 4.1.1. ireducibilni. Neka je $\beta$ maksimalan korijen u $R$ u odnosu na bazu $B$. Budući da je $\varphi : R \to R'$ izomorfizam sistema korijena, $\varphi(\beta)$ je maksimalan korijen u $R'$ u odnosu na bazu $\varphi(B) = B'$. Izaberimo proizvoljne $x \in \mathfrak{g}_\beta \setminus \{0\}$ i $x' \in \mathfrak{g}'_{\varphi(\beta)} \setminus \{0\}$ i stavimo $\overline{x} = (x, x')$. Neka je $\mathfrak{m}$ potprostor od $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}'$ razapet sa $\overline{x}$ i sa svim elementima oblika
$$(ad\,\overline{y}_{\alpha_1}) \cdots (ad\,\overline{y}_{\alpha_m})\overline{x}, \qquad m \in \mathbb{N}, \quad \alpha_1, \ldots, \alpha_m \in B \quad \text{(ne nužno različiti)}. \tag{4.3}$$
Kako je $[\mathfrak{g}_{-\alpha}, \mathfrak{g}_\gamma] \subseteq \mathfrak{g}_{\gamma-\alpha}$ i $[\mathfrak{g}'_{-\alpha'}, \mathfrak{g}'_{\gamma'}] \subseteq \mathfrak{g}'_{\gamma'-\alpha'}$, očito vrijedi
$$(ad\,\overline{y}_{\alpha_1}) \cdots (ad\,\overline{y}_{\alpha_m})\overline{x} \in \mathfrak{g}_{\beta - \sum_{i=1}^m \alpha_i} \times \mathfrak{g}'_{\varphi(\beta) - \sum_{i=1}^m \varphi(\alpha_i)}.$$
Odatle slijedi da je $\mathfrak{m} \cap (\mathfrak{g}_\beta \times \mathfrak{g}'_{\varphi(\beta)}) = K\overline{x}$. Prema tome, $\mathfrak{m}$ je pravi potprostor od $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}'$.

Tvrdimo sada da je potprostor $\mathfrak{m}$ invarijantan s obzirom na sve operatore iz $ad\,\mathfrak{d}$. Prije svega, po definiciji je $\mathfrak{m}$ invarijantan s obzirom na sve $ad\,\overline{y}_\alpha$, $\alpha \in B$. Sada ćemo indukcijom u odnosu na $m \in \mathbb{Z}_+$ dokazati da je za svaki $\alpha \in B$
$$(ad\,\overline{h}_\alpha)(ad\,\overline{y}_{\alpha_1}) \cdots (ad\,\overline{y}_{\alpha_m})\overline{x} \in \mathfrak{m} \qquad \forall \alpha_1, \ldots, \alpha_m \in B.$$
Prije svega, za $m = 0$ imamo zbog (4.2)
$$(ad\,\overline{h}_\alpha)\overline{x} = [(h_\alpha, h'_{\varphi(\alpha)}), (x, x')] = ([h_\alpha, x], [h'_{\varphi(\alpha)}, x']) =$$
$$= (\beta(h_\alpha)x, (\varphi(\beta))(h'_{\varphi(\alpha)})x') = (\beta(h_\alpha)x, \beta(h_\alpha)x') = \beta(h_\alpha)\overline{x} \in \mathfrak{m}.$$
Time je dokazana baza indukcije. Za korak indukcije primijetimo da je $[h_\alpha, y_{\alpha_1}] = cy_{\alpha_1}$, a zbog (4.2) i $[h'_{\varphi(\alpha)}, y'_{\varphi(\alpha_1)}] = cy'_{\varphi(\alpha_1)}$, gdje je $c = -\alpha_1(h_\alpha)$. Odatle je
$$[\overline{h}_\alpha, \overline{y}_{\alpha_1}] = [(h_\alpha, h'_{\varphi(\alpha)}), (y_{\alpha_1}, y'_{\varphi(\alpha_1)})] = ([h_\alpha, y_{\alpha_1}], [h'_{\varphi(\alpha)}, y'_{\varphi(\alpha_1)}]) = (cy_{\alpha_1}, cy'_{\varphi(\alpha_1)}) = c\overline{y}_{\alpha_1},$$
pa slijedi
$$(ad\,\overline{h}_\alpha)(ad\,\overline{y}_{\alpha_1})(ad\,\overline{y}_{\alpha_2}) \cdots (ad\,\overline{y}_{\alpha_m})\overline{x} =$$
$$= ad\,[\overline{h}_\alpha, \overline{y}_{\alpha_1}](ad\,\overline{y}_{\alpha_2}) \cdots (ad\,\overline{y}_{\alpha_m})\overline{x} + (ad\,\overline{y}_{\alpha_1})(ad\,\overline{h}_\alpha)(ad\,\overline{y}_{\alpha_2}) \cdots (ad\,\overline{y}_{\alpha_m})\overline{x} =$$
$$= c(ad\,\overline{y}_{\alpha_1}) \cdots (ad\,\overline{y}_{\alpha_m})\overline{x} + (ad\,\overline{y}_{\alpha_1})(ad\,\overline{h}_\alpha)(ad\,\overline{y}_{\alpha_2}) \cdots (ad\,\overline{y}_{\alpha_m})\overline{x},$$
a to je po pretpostavci indukcije element od $\mathfrak{m}$.

Promatrajmo sada djelovanje operatora $ad\,\overline{x}_\alpha$, $\alpha \in B$, na element oblika (4.3). Ponovo dokazujemo da je rezultat element od $\mathfrak{m}$ indukcijom u donosu na $m \geq 0$. Prije svega, za $m = 0$ imamo
$$(ad\,\overline{x}_\alpha)\overline{x} = ([x_\alpha, x], [x'_{\varphi(\alpha)}, x']) \in \mathfrak{g}_{\beta+\alpha} \times \mathfrak{g}_{\varphi(\beta)+\varphi(\alpha)} = \{0\} \times \{0\}$$

jer $\beta+\alpha \notin R$ i $\varphi(\beta)+\varphi(\alpha) \notin R'$. Time je baza indukcije dokazana. Prijeđimo na kortak indukcije. Ako je $\alpha_1 \neq \alpha$ onda $\alpha-\alpha_1$ nije korijen pa vrijedi $[x_\alpha, y_{\alpha_1}] = 0$, a također i $[x'_{\varphi(\alpha)}, y'_{\varphi(\alpha_1)}] = 0$, dakle i $[\overline{x}_\alpha, \overline{y}_{\alpha_1}] = 0$. Prema tome, u tom slučaju operatori $ad\,\overline{x}_\alpha$ i $ad\,\overline{y}_{\alpha_1}$ komutiraju i korak indukcije je trivijalan. Pretpostavimo sada da je $\alpha_1 = \alpha$. Imamo $[x_\alpha, y_\alpha] = h_\alpha$ i $[x'_{\varphi(\alpha)}, y'_{\varphi(\alpha)}] = h'_{\varphi(\alpha)}$, dakle, $[\overline{x}_\alpha, \overline{y}_\alpha] = \overline{h}_\alpha$. Odatle je

$$(ad\,\overline{x}_\alpha)(ad\,\overline{y}_{\alpha_1})\cdots(ad\,\overline{y}_{\alpha_m})\overline{x} = (ad\,\overline{x}_\alpha)(ad\,\overline{y}_\alpha)(ad\,\overline{y}_{\alpha_2})\cdots(ad\,\overline{y}_{\alpha_m})\overline{x} =$$

$$= ad\,\overline{h}_\alpha(ad\,\overline{y}_{\alpha_2})\cdots(ad\,\overline{y}_{\alpha_m})\overline{x} + (ad\,\overline{y}_\alpha)(ad\,\overline{x}_\alpha)(ad\,\overline{y}_{\alpha_2})\cdots(ad\,\overline{y}_{\alpha_m})\overline{x}.$$

Zbog dokazane invarijantnosti $\mathfrak{m}$ u odnosu na operator $ad\,h_\alpha$ iz gornje jednakosti slijedi korak indukcije.

Budući da je Liejeva podalgebra $\mathfrak{d}$ generirana sa skupom

$$\{\overline{x}_\alpha;\ \alpha \in B\} \cup \{\overline{y}_\alpha;\ \alpha \in B\} \cup \{\overline{h}_\alpha;\ \alpha \in B\}$$

zaključujemo da je stvarno potprostor $\mathfrak{m}$ invarijantan s obzirom na sve operatore iz $ad\,\mathfrak{d}$. Odatle slijedi da je $\mathfrak{d} \neq \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}'$. Doista, $\mathfrak{d} = \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}'$ bi značilo da je $\mathfrak{m}$ ideal u $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}'$ koji je različit od $\{0\}$, od $\mathfrak{g} \times \{0\}$, od $\{0\} \times \mathfrak{g}'$ i od $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}'$, a to je nemoguće.

Tvrdimo sada da su restrikcije na $\mathfrak{d}$ projekcija $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}'$ na prvi faktor $\mathfrak{g}$ i na drugi faktor $\mathfrak{g}'$ izomorfizmi Liejevih algebri. Označimo te restrikciju sa $\sigma$ i $\tau$. Dakle, $\sigma(y, y') = y$ i $\tau(y, y') = y'$ za $(y, y') \in \mathfrak{d}$. Očito su $\sigma$ i $\tau$ homomorfizmi Liejevih algebri. Nadalje, slika homomorfizma $\sigma$ sadrži $x_\alpha$, $y_\alpha$ i $h_\alpha$ za svaki $\alpha \in B$, pa je po propoziciji 4.1.2. $\sigma$ epimorfizam. Sasvim analogno, $\tau$ je epimorfizam $\mathfrak{d}$ na $\mathfrak{g}'$. Uočimo sada da je

$$Ker\,\sigma = \mathfrak{d} \cap (\{0\} \times \mathfrak{g}') \qquad \text{i} \qquad Ker\,\tau = \mathfrak{d} \cap (\mathfrak{g} \times \{0\}).$$

Pretpostavimo da je $Ker\,\tau \neq \{0\} \times \{0\}$. To znači da $\mathfrak{d}$ sadrži neki element oblika $(y, 0)$, gdje je $y \in \mathfrak{g}$ i $y \neq 0$. No tada $\mathfrak{d}$ sadrži sve elemente oblika

$$(\,(ad\,z_{\alpha_1})\cdots(ad\,z_{\alpha_s})y, 0), \qquad \alpha_1, \ldots, \alpha_s \in B \cup (-B),$$

pri čemu je $z_\alpha = x_\alpha$ i $z_{-\alpha} = y_\alpha$ za $\alpha \in B$. Iz propozicije 4.1.2. slijedi da svi takvi elementi razapinju ideal u $\mathfrak{g} \times \{0\}$ različit od $\{0\} \times \{0\}$, a kako je Liejeva algebra $\mathfrak{g} \times \{0\}$ prosta taj je ideal nužno jednak čitavoj algebri $\mathfrak{g} \times \{0\}$. Slijedi da je $\mathfrak{g} \times \{0\} \subseteq \mathfrak{d}$. Međutim, u definiciji podalgebre $\mathfrak{d}$ Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ i $\mathfrak{g}'$ sudjeluju sasvim simetrično, pa zaključujemo da je nužno i $\{0\} \times \mathfrak{g}' \subseteq \mathfrak{d}$. No to nije moguće, jer bi to značilo da je $\mathfrak{d} = \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}'$. Ova kontradikcija pokazuje da je $\tau$ monomorfizam, dakle, izomorfizam. Sasvim analogno i $\sigma$ je izomorfizam.

Sada je $\pi = \tau \circ \sigma^{-1}$ izomorfizam $\mathfrak{g}$ na $\mathfrak{g}'$. Za svaki $\alpha \in B$ vrijedi

$$\sigma(\overline{h}_\alpha) = h_\alpha, \qquad \sigma(\overline{x}_\alpha) = x_\alpha, \qquad \tau(\overline{h}_\alpha) = h'_{\varphi(\alpha)}, \qquad \tau(\overline{x}_\alpha) = x'_{\varphi(\alpha)}.$$

Prema tome,

$$\pi(h_\alpha) = \tau(\sigma^{-1}(h_\alpha)) = \tau(\overline{h}_\alpha) = h'_{\varphi(\alpha)} \qquad \text{i} \qquad \pi(x_\alpha) = \tau(\sigma^{-1}(x_\alpha)) = \tau(\overline{x}_\alpha) = x'_{\varphi(\alpha)}.$$

**Dokaz leme 4.1.4.:** Možemo pretpostavljati da je u $V$ zadan skalarni produkt $(\,\cdot\,|\,\cdot\,)$ u odnosu na koji su sve refleksije $\sigma_\alpha$, $\alpha \in R$, ortogonalne. U skup $Q(R) = \mathbb{Z}R = span_{\mathbb{Z}}\,R$ svih korijenskih težina uvodimo parcijalni uređaj $\succeq$ na sljedeći način:

$$x \succeq y \qquad \Longleftrightarrow \qquad y - x \in \mathbb{Z}_+B.$$

Neka je $\beta$ bilo koji maksimalan element od $R$ u odnosu na taj uređaj. Očito je $\beta \in R_+$. Stavimo

$$\beta = \sum_{\alpha \in B} k_\alpha \alpha, \qquad K_\alpha \in \mathbb{Z}_+.$$

Stavimo $B_1 = \{\alpha \in B;\ k_\alpha > 0\}$ i $B_2 = \{\alpha \in B;\ k_\alpha = 0\}$. Tada je $B_1 \cap B_2 = \emptyset$ i $B = B_1 \cup B_2$. Pretpostavimo da je $B_2 \neq \emptyset$. Po lemi 3.5.1. vrijedi $(\alpha|\beta) \leq 0\ \forall \alpha \in B_2$. Nadalje, kako je sistem korijena $R$ ireducibilan, barem jedan $\alpha \in B_2$ nije ortogonalan na $B_1$. Dakle, $(\alpha|\alpha') < 0$ za neki $\alpha' \in B_1$. No tada je $(\alpha|\beta) < 0$. Po korolaru 3.3.4. slijedi $\alpha + \beta \in R$. Međutim, $\beta \succeq \alpha + \beta$ i $\beta \neq \alpha + \beta$, što je u suprotnosti s izborom korijena $\beta$. Ova kontradikcija pokazuje da je nužno $B_2 = \emptyset$, odnosno da je $k_\alpha > 0\ \forall \alpha \in B$. Ovaj dokaz pokazuje i da je $(\alpha|\beta) \geq 0\ \forall \alpha \in B$, a kako je $B$ baza vektorskog prostora $V$, postoji $\alpha \in B$ takav da je $(\beta|\alpha) > 0$.

Neka je sada $\beta' \in R$ također maksimalan u odnosu na relaciju $\succeq$ . Prethodna razmatranja primjenjiva su i na $\beta'$, pa zaključujemo da je

$$\beta' = \sum_{\alpha \in B} n_\alpha \alpha, \qquad n_\alpha \in \mathbb{N}.$$

Budući da je $(\alpha|\beta) \geq 0\ \forall \alpha \in B$ i budući da postoji $\alpha \in B$ takav da je $(\alpha|\beta) > 0$ zaključujemo da je $(\beta', \beta) > 0$. Po korolaru 3.3.4. slijedi da je $\beta - \beta' \in R$. No tada je ili $\beta \succeq \beta'$ ili $\beta' \succeq \beta$. Budući da su $\beta$ i $\beta'$ maksimalni u odnosu na uređaj $\succeq$ u oba slučaja dobivamo da je $\beta = \beta'$.

Time su dokazane sve tvrdnje leme 4.1.4.

Teorem 4.1.3 ima kao neposrednu posljedicu sljedeću vezu između automorfizama sistema korijena i automorfizama poluproste Liejeve algebre:

**Teorem 4.1.5.** *Neka je $\mathfrak{g}$ poluprosta Liejeva algebra, $\mathfrak{h}$ njena maksimalna toralna podalgebra, $R = R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ pripadni sistem korijena i $B$ baza sistema korijena $R$. Neka je $\omega \in Aut(R)$. Za svaki $\alpha \in B$ izaberimo $x_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha \setminus \{0\}$ i $x'_{\omega(\alpha)} \in \mathfrak{g}_{\omega(\alpha)} \setminus \{0\}$. Tada postoji jedinstven automorfizam $\Omega$ Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ takav da je $\Omega(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$ i da vrijedi*

$$\Omega(x_\alpha) = x'_{\omega(\alpha)} \qquad i \qquad \Omega(h_\alpha) = h_{\omega(\alpha)} \qquad \forall \alpha \in B.$$

## 4.2 Engelove podalgebre

Neka je $V$ konačnodimenzionalni vektorski prostor nad poljem $K$. Za operator $A \in L(V)$ neka je $V = V_0(A) \dot{+} V_*(A)$ Fittingova dekompozicija prostora $V$ u odnosu na operator $A$. Dakle, vrijedi:

(a) $V_0(A)$ je unija monotonog niza potprostora $Ker\, A \subseteq Ker\, A^2 \subseteq Ker\, A^3 \subseteq \cdots\cdots$

(b) $V_*(A)$ je presjek monotonog niza potprostora $Im\, A \supseteq Im\, A^2 \supseteq Im\, A^3 \supseteq \cdots\cdots$

(c) Neka je $\mu_A \in K[T]$ minimalni polinom operatora $A$ i neka je $p \in \mathbb{Z}_+$ kratnost 0 kao nultočke od $\mu_A$, tj. $\mu_A = T^p \nu$, gdje je $\nu \in K[T]$ i $\nu(0) \neq 0$. Tada je $V_0(A) = Ker\, A^p = Im\, \nu(A)$ i $V_*(A) = Im\, A^p = Ker\, \nu(A)$.

(d) Potprostori $V_0(A)$ i $V_*(A)$ su $A-$invarijantni, restrikcija $A|V_0(A)$ je nilpotentan operator (indeksa $p$), a restrikcija $A|V_*(A) \in GL(V_*(A))$.

(e) Ako je $W$ $A-$invarijantan potprostor od $V$ takav da je restrikcija $A|W$ nilpotentan operator, onda je $W \subseteq V_0(A)$.

(f) Ako je $W$ potprostor od $V$ takav da je $AW = W$, dakle, ako je $W$ $A-$invarijantan i $A|W \in GL(W)$, onda je $W \subseteq V_*(A)$.

Pretpostavimo sada da je polje $K$ algebarski zatvoreno, neka je $\sigma(A)$ spektar od $A \in L(V)$ i neka je $\sigma_*(A) = \sigma(A) \setminus \{0\}$. Neka je za $\lambda \in \sigma(A)$ pripadni korijenski potprostor za operator $A$ označen sa $V_\lambda(A)$. Dakle,

$$V_\lambda(A) = \{v \in V;\ \exists k \in \mathbb{N} \text{ takav da je } (A - \lambda I)^k v = 0\} = V_0(A - \lambda I).$$

Nadalje, vrijedi

$$V_*(A) = \sum_{\lambda \in \sigma_*(A)} \dot{+} V_\lambda(A).$$

Sve ovo primjenjivo je na konačnodimenzionalnu Liejevu algebru $\mathfrak{g}$ nad $K$ i na operator $ad\, x$ za $x \in \mathfrak{g}$. Dakle, imamo

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0(ad\, x) \dot{+} \mathfrak{g}_*(ad\, x),$$

a ako je polje $K$ algebarski zatvoreno, onda je i

$$\mathfrak{g}_*(ad\, x) = \sum_{\lambda \in \sigma_*(ad\, x)} \dot{+} \mathfrak{g}_\lambda(ad\, x).$$

Također, ako je $\mathfrak{h}$ Liejeva podalgebra od $\mathfrak{g}$ koja je $ad\, x-$invarijantna, tj. $[x, \mathfrak{h}] \subseteq \mathfrak{h}$, onda je $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_0(ad\, x) \dot{+} \mathfrak{h}_*(ad\, x)$.

**Propozicija 4.2.1.** *Neka je $\mathfrak{g}$ konačnodimenzionalna Liejeva algebra nad poljem $K$, neka je $x \in \mathfrak{g}$ i neka su $\alpha, \beta \in K$. Tada vrijedi*

$$[\mathfrak{g}_\alpha(ad\, x), \mathfrak{g}_\beta(ad\, x)] \subseteq \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}(ad\, x).$$

*Posebno, $\mathfrak{g}_0(ad\, x)$ je Liejeva podalgebra od $\mathfrak{g}$. Nadalje, ako je $\alpha \in K$, $\alpha \neq 0$, svaki element od $\mathfrak{g}_\alpha(ad\, x)$ je $ad-$nilpotentan.*

**Zadatak 4.1.** *Dokažite propoziciju 4.2.1.*

**Uputa:** Primijenite formulu iz zadatka 1.12. na algebru $\mathcal{A} = \mathfrak{g}$ i na derivaciju $D = ad\, x$.

Liejeva podalgebra od $\mathfrak{g}$ oblika $\mathfrak{g}_0(ad\, x)$ zove se **Engelova podalgebra** od $\mathfrak{g}$.

**Lema 4.2.2.** *Neka je $\mathfrak{g}$ Liejeva algebra nad poljem $K$ i pretpostavimo da polje $K$ ima više od* $\dim \mathfrak{g}$ *elemenata. Neka je $\mathfrak{h}$ Liejeva podalgebra od $\mathfrak{g}$ i neka je $z \in \mathfrak{h}$ takav da je podalgebra $\mathfrak{g}_0(ad\, z)$ minimalna u skupu podalgebri $\{\mathfrak{g}_0(ad\, y);\ y \in \mathfrak{h}\}$. Pretpostavimo da je $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}_0(ad\, z)$. Tada je $\mathfrak{g}_0(ad\, z) \subseteq \mathfrak{g}_0(ad\, x)\ \ \forall x \in \mathfrak{h}$.*

**Dokaz:** Neka je $x \in \mathfrak{h}$ proizvoljno izabran. Kako je $\mathfrak{g}_0(ad\, z)$ podalgebra od $\mathfrak{g}$ koja sadrži $\mathfrak{h}$, ona je invarijantna s obzirom na svaki operator oblika

$$A(\lambda) = ad\,(z + \lambda(x - z)) = (1 - \lambda) ad\, z + \lambda ad\, x, \qquad \lambda \in K.$$

Stavimo $B(\lambda) = A(\lambda)|\mathfrak{g}_0(ad\, z)$ i neka je $C(\lambda)$ linearan operator koji $A(\lambda)$ inducira na kvocijentnom prostoru $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_0(ad\, z)$. Neka su $P_\lambda, Q_\lambda \in K[T]$ svojstveni polinomi operatora $B(\lambda), C(\lambda)$. Naravno, tada je produkt $P_\lambda Q_\lambda$ svojstveni polinom operatora $A(\lambda)$. Stavimo $n = \dim \mathfrak{g}$ i $r = \dim \mathfrak{g}_0(ad\, z)$. Tada je

$$P_\lambda = T^r + f_1(\lambda)T^{r-1} + \cdots + f_{r-1}(\lambda)T + f_r(\lambda), \quad Q_\lambda = T^{n-r} + g_1(\lambda)T^{n-r-1} + \cdots + g_{n-r-1}(\lambda)T + g_{n-r}(\lambda),$$

gdje su $f_1(\lambda), \ldots, f_r(\lambda), g_1(\lambda), \ldots, g_{n-r}(\lambda) \in K$. Izaberimo sada bazu u $\mathfrak{g}$ čijih je prvih $r$ vektora baza u $\mathfrak{g}_0(ad\, z)$. Promatranjem matrica operatora $A(\lambda)$, $B(\lambda)$ i $C(\lambda)$, lako se vidi da su $f_i(\lambda)$ i $g_j(\lambda)$ polinomi u varijabli $\lambda$ sa stupnjevima $\deg f_i \leq i$ i $\deg g_j \leq j$.

Budući da je $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0(ad\, z) \dotplus \mathfrak{g}_*(ad\, z)$ i $A(0) = ad\, z$ vidimo da je $Q_0$ svojstveni polinom restrikcije $(ad\, z)|\mathfrak{g}_*(ad\, z)$. No ta je restrikcija regularan operator pa je $g_{n-r}(0) \neq 0$. Posebno, vidimo da $g_{n-r}$ nije nul$-$polinom. Budući da polje $K$ ima više od $n$ elemenata, i budući da je $\deg g_{n-r} \leq n - r$, možemo izabrati međusobno različite $\lambda_1, \ldots, \lambda_{r+1} \in K$ takve da je $g_{n-r}(\lambda_k) \neq 0$ za $k = 1, \ldots, r + 1$. No tada su operatori $C(\lambda_k)$, $k = 1, \ldots, r + 1$, regularni. To su operatori koje na kvocijentnom prostoru $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_0(ad\, z)$ induciraju operatori $ad\,(z + \lambda_k(x - z))$, pa slijedi da je $\mathfrak{g}_0(ad\,(z+\lambda_k(x-z))) \subseteq \mathfrak{g}_0(ad\, z)$ za $k = 1, \ldots, r+1$. Zbog pretpostavke da je $\mathfrak{g}_0(ad\, z)$ minimalna u skupu podalgebri $\{\mathfrak{g}_0(ad\, y);\ y \in \mathfrak{h}\}$ slijedi da vrijedi jednakost $\mathfrak{g}_0(ad\, z) = \mathfrak{g}_0(ad\,(z+\lambda_k(x-z)))$ za $k = 1, \ldots, r + 1$. To znači da su operatori $B(\lambda_k) = (ad\,(z + \lambda_k(x - z)))|\mathfrak{g}_0(ad\, z)$, $k = 1, \ldots, r + 1$, nilpotentni. Prema tome je $P_{\lambda_k} = T^r$ za $k = 1, \ldots, r + 1$. Dakle, $f_i(\lambda_k) = 0$ za $1 \leq i \leq r$ i $1 \leq k \leq r + 1$. No kako je $\deg f_i \leq i \leq r$, zaključujemo da su $f_1, \ldots, f_r$ nul$-$polinomi. Dakle, $P_\lambda = T^r\ \ \forall \lambda \in K$, a to znači da je operator $B(\lambda)$ nilpotentan za svaki $\lambda \in K$. Prema tome, vrijedi $\mathfrak{g}_0(ad\, z) \subseteq \mathfrak{g}_0(ad\,(z + \lambda(x - z)))\ \ \forall \lambda \in K$ i $\forall x \in \mathfrak{h}$. Sada za $\lambda = 1$ dobivamo $\mathfrak{g}_0(ad\, z) \subseteq \mathfrak{g}_0(ad\, x)$ $\forall x \in \mathfrak{h}$.

**Propozicija 4.2.3.** *Neka je $\mathfrak{g}$ Liejeva algebra i $\mathfrak{h}$ Liejeva podalgebra koja sadrži neku Engelovu podalgebru od $\mathfrak{g}$. Tada je $N_\mathfrak{g}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$. Posebno, za svaku Engelovu podalgebru $\mathfrak{h}$ vrijedi $N_\mathfrak{g}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$.*

**Dokaz:** Neka je $\mathfrak{h} \supseteq \mathfrak{g}_0(ad\, x)$ i pretpostavimo da je $\mathfrak{h} \subsetneq N_\mathfrak{g}(\mathfrak{h})$. Operator $ad\, x$ inducira regularan operator na kvocijentnom prostoru $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_0(ad\, x)$, dakle, i na kvocijentnom prostoru $N_\mathfrak{g}(\mathfrak{h})/\mathfrak{h}$. Međutim, vrijedi $x \in \mathfrak{g}_0(ad\, x) \subseteq \mathfrak{h}$, dakle, $(ad\, x)N_\mathfrak{g}(\mathfrak{h}) = [x, N_\mathfrak{g}(\mathfrak{h})] \subseteq \mathfrak{h}$, pa slijedi da operator $ad\, x$ inducira nul$-$operator na kvocijentnom prostoru $N_\mathfrak{g}(\mathfrak{h})/\mathfrak{h}$. Ova kontradikcija pokazuje da nije moguće da bude $\mathfrak{h} \subsetneq N_\mathfrak{g}(\mathfrak{h})$, nego mora biti $N_\mathfrak{g}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$.

**Cartanova podalgebra** Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ je nilpotentna Liejeva podalgebra $\mathfrak{h}$ od $\mathfrak{g}$ takva da je $N_\mathfrak{g}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$. Primijetimo da nije *a priori* jasno da postoje Cartanove podalgebre. Međutim, ako je $\mathfrak{g}$ poluprosta Liejeva algebra nad algebarski zatvorenim poljem karakteristike 0, onda je svaka maksimalna toralna podalgebra $\mathfrak{h}$ Cartanova podalgebra od $\mathfrak{g}$. Naime, tada imamo korijenski rastav

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \dotplus \sum_{\alpha \in R(\mathfrak{g},\mathfrak{h})} \dotplus \mathfrak{g}_\alpha$$

i znamo da vrijedi $[\mathfrak{h}, \mathfrak{g}_\alpha] = \mathfrak{g}_\alpha \ \ \forall \alpha \in R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$, a odatle slijedi da je $N_\mathfrak{g}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$.

Sljedeći teorem pokazuje da Cartanove podalgebre postoje uvijek kad polje $K$ ima više od $\dim \mathfrak{g}$ elemenata.

**Teorem 4.2.4.** *Neka je $\mathfrak{g}$ konačnodimenzionalna Liejeva algebra nad poljem $K$ koje ima više od* $\dim \mathfrak{g}$ *elemenata. Liejeva podalgebra $\mathfrak{h}$ od $\mathfrak{g}$ je Cartanova ako i samo ako je $\mathfrak{h}$ minimalna u skupu* $\{\mathfrak{g}_0(ad\, x);\ x \in \mathfrak{g}\}$ *svih Engelovih podalgebri od* $\mathfrak{g}$.

**Dokaz:** Pretpostavimo da je $\mathfrak{h}$ minimalna u skupu svih Engelovih podalgebri od $\mathfrak{g}$. Dakle, $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_0(ad\, z)$ za neki $z \in \mathfrak{g}$ i ne postoji $x \in \mathfrak{g}$ takav da je $\mathfrak{g}_0(ad\, x) \subsetneq \mathfrak{h}$. Prema propoziciji 4.2.3. vrijedi $N_\mathfrak{g}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$. Nadalje, očito su pretpostavke leme 4.2.2. ispunjene: $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_0(ad\, z)$ i $\mathfrak{h}$ je minimalna u skupu $\{\mathfrak{g}_0(ad\, x);\ x \in \mathfrak{h}\}$. Prema toj lemi vrijedi $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}_0(ad\, x)\ \ \forall x \in \mathfrak{h}$. Kako je za svaki $x \in \mathfrak{h}$ restrikcija $(ad\, x)|\mathfrak{g}_0(ad\, x)$ nilpotentan operator, to je i operator $ad_\mathfrak{h}\, x = (ad\, x)|\mathfrak{h}$ nilpotentan za svaki $x \in \mathfrak{h}$. Sada iz Engelovog teorema 1.2.4. slijedi da je Liejeva algebra $\mathfrak{h}$ nilpotentna. Dakle, $\mathfrak{h}$ je Cartanova podalgebra od $\mathfrak{g}$.

Pretpostavimo sada da je $\mathfrak{h}$ Cartanova podalgebra od $\mathfrak{g}$. Budući da je Liejeva algebra $\mathfrak{h}$ nilpotentna, vrijedi $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}_0(ad\, x)\ \ \forall x \in \mathfrak{h}$. Tvrdimo da postoji $z \in \mathfrak{h}$ takav da je $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_0(ad\, z)$. Pretpostavimo da nije tako, nego da je $\mathfrak{h} \subsetneq \mathfrak{g}_0(ad\, x)\ \ \forall x \in \mathfrak{h}$. Neka je $z \in \mathfrak{h}$ takav da je podalgebra $\mathfrak{g}_0(ad\, z)$ minimalna u skupu podalgebri $\{\mathfrak{g}_0(ad\, x);\ x \in \mathfrak{h}\}$. Prema lemi 4.2.2. tada je $\mathfrak{g}_0(ad\, z) \subseteq \mathfrak{g}_0(ad\, x)\ \ \forall x \in \mathfrak{h}$. To znači da je za svaki $x \in \mathfrak{h}$ restrikcija $(ad\, x)|\mathfrak{g}_0(ad\, z)$ nilpotentan operator. Slijedi da je i operator $\pi(x)$ induciran sa $ad\, x$ na kvocijentnom prostoru $\mathfrak{g}_0(ad\, z)/\mathfrak{h}$ nilpotentan za svaki $x \in \mathfrak{h}$. Preslikavanje $x \mapsto \pi(x)$ je reprezentacija Liejeve algebre $\mathfrak{h}$, pa po teoremu 1.2.6. postoji vektor u prostoru $\mathfrak{g}_0(ad\, z)/\mathfrak{h}$ različit od nule koji poništavaju svi operatori $\pi(x)$, $x \in \mathfrak{h}$. Dakle, postoji $y \in \mathfrak{g}_0(ad\, z) \setminus \mathfrak{h}$ takav da je $[\mathfrak{h}, y] \subseteq \mathfrak{h}$. To znači da je $y \in N_\mathfrak{g}(\mathfrak{h})$ i dobili smo kontradikciju s pretpostavkom da je $N_\mathfrak{g}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$.

Dakle, postoji $z \in \mathfrak{h}$ takav da je $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_0(ad\, z)$. Prema tome, $\mathfrak{h}$ je Engelova podalgebra. Treba još dokazati da je ona minimalna u skupu svih Engelovih podalgebri od $\mathfrak{g}$. Već znamo da je ona ne samo minimalna u skupu svih podalgebri $\{\mathfrak{g}_0(ad\, x);\ x \in \mathfrak{h}\}$, nego čak vrijedi $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}_0(ad\, x)\ \ \forall x \in \mathfrak{h}$. Pretpostavimo da je $y \in \mathfrak{g}$ takav da je $\mathfrak{g}_0(ad\, y) \subseteq \mathfrak{h}$. Tada je $y \in \mathfrak{g}_0(ad\, y)$, dakle i $y \in \mathfrak{h}$. Prema tome vrijedi i obrnuta inkluzija $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}_0(ad\, y)$, dakle, jednakost $\mathfrak{g}_0(ad\, y) = \mathfrak{h}$.

**Korolar 4.2.5.** *Neka je $\mathfrak{g}$ poluprosta Liejeva algebra nad algebarski zatvorenim poljem karakteristike* 0. *Podalgebra $\mathfrak{h}$ od $\mathfrak{g}$ je Cartanova podalgebra od $\mathfrak{g}$ ako i samo ako je $\mathfrak{h}$ maksimalna toralna podalgebra od* $\mathfrak{g}$.

**Dokaz:** Već smo prije iskaza prethodnog teorema dokazali da je svaka maksimalna toralna podalgebra od $\mathfrak{g}$ Cartanova podalgebra od $\mathfrak{g}$.

Neka je $\mathfrak{h}$ proizvoljna Cartanova podalgebra od $\mathfrak{g}$. Neka je $x \in \mathfrak{g}$ i neka je $x = x_s + x_n$ njegov Jordanov rastav. Tada je $\mathfrak{g}_0(ad\, x_s) \subseteq \mathfrak{g}_0(ad\, x)$. Doista, za $y \in \mathfrak{g}_0(ad\, x_s)$ vrijedi $(ad\, x_s)^k y = 0$ za neki $k \in \mathbb{N}$. Neka je $p \in \mathbb{N}$ takav da je $(ad\, x_n)^p = 0$. Budući da operatori $ad\, x_s$ i $ad\, x_n$ komutiraju, primjena binomne formule nam daje

$$(ad\, x)^{k+p} y = (ad\, x_s + ad\, x_n)^{k+p} y = \sum_{j=0}^{k+p} \binom{k+p}{j} (ad\, x_n)^j (ad\, x_s)^{k+p-j} y = 0,$$

dakle, $y \in \mathfrak{g}_0(ad\, x)$. Nadalje, ako je $x \in \mathfrak{g}$ poluprost, onda zbog dijagonalizabilnosti operatora $ad\, x$ vrijedi $\mathfrak{g}_0(ad\, x) = C_{\mathfrak{g}}(x)$. Prema teoremu 4.2.4. $\mathfrak{h}$ je minimalna Engelova podalgebra od $\mathfrak{g}$, dakle, oblika $\mathfrak{g}_0(ad\, x)$. Prema prethodnim napomenama imamo tada $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_0(ad\, x_s) = C_{\mathfrak{g}}(x_s)$. Međutim, $C_{\mathfrak{g}}(x_s)$ sigurno sadrži neku maksimalnu toralnu podalgebru $\mathfrak{h}'$ od $\mathfrak{g}$. Tada je $\mathfrak{h}'$ Cartanova podalgebra, dakle minimalna Engelova podalgebra. Imamo $\mathfrak{h}' \subseteq \mathfrak{h}$, a kako je prema teoremu 4.2.4. i $\mathfrak{h}$ minimalna Engelova podalgebra od $\mathfrak{g}$, slijedi $\mathfrak{h}' = \mathfrak{h}$. Dakle, $\mathfrak{h}$ je maksimalna toralna podalgebra od $\mathfrak{g}$.

Iz dokaza prethodnog korolara neposredno slijedi:

**Korolar 4.2.6.** *Svaka Cartanova podalgebra poluproste Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ nad algebarski zatvorenim poljem karakteristike 0 je oblika $C_{\mathfrak{g}}(x)$ za neki poluprost element $x \in \mathfrak{g}$.*

Za poluprost element $x$ poluproste Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ takav da je $C_{\mathfrak{g}}(x)$ Cartanova podalgebra od $\mathfrak{g}$ kažemo da je **regularan poluprost**.

**Zadatak 4.2.** *Neka je $x$ poluprost element poluproste Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ nad algebarski zatvorenim poljem karakteristike 0. Dokažite da je $x$ regularan ako i samo ako je $x$ sadržan u točno jednoj Cartanovoj podalgebri od $\mathfrak{g}$.*

**Zadatak 4.3.** *Neka je $V$ $n-$dimenzionalan vektorski prostor nad algebarski zatvorenim poljem $K$ karakteristike 0.*

(a) *Dokažite da je poluprost element $x$ Liejeve algebre $\mathfrak{sl}(n, K)$ regularan ako i samo ako $x$ ima $n$ međusobno različitih svojstvenih vrijednosti.*

(b) *Neka je $n = \dim V$ paran broj. Pronađite jedan regularan poluprost element Liejeve algebre $\mathfrak{sp}(V)$.*

(c) *Pronađite (i za parnu i za neparnu dimenziju $n$) jedan regularan poluprost element Liejeve algebre $\mathfrak{o}(V)$.*

**Zadatak 4.4.** *Neka je $\mathfrak{g}$ poluprosta Liejeva algebra nad algebarski zatvorenim poljem karakteristike 0 i neka je $\mathfrak{h}$ Engelova podalgebra od $\mathfrak{g}$ koja je rješiva. Dokažite da je tada $\mathfrak{h}$ Cartanova podalgebra od $\mathfrak{g}$.*

**Uputa:** Dokažite da je rješiva Engelova podalgebra nužno nilpotentna, a zatim koristite propoziciju 4.2.3.

**Propozicija 4.2.7.** *Neka je $\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$ epimorfizam Liejevih algebri. Ako je $\mathfrak{h}$ Cartanova podalgebra od $\mathfrak{g}$ onda je $\varphi(\mathfrak{h})$ Cartanova podalgebra od $\mathfrak{g}'$.*

**Dokaz:** Slika $\varphi(\mathfrak{h})$ Liejeve algebre $\mathfrak{h}$ je izomorfna kvocijentnoj algebri od $\mathfrak{h}$ pa je prema tvrdnji $(a)$ propozicije 1.2.3. Liejeva algebra $\varphi(\mathfrak{h})$ nilpotentna. Stavimo $\mathfrak{a} = Ker\, \varphi$. Neka je $x' \in N_{\mathfrak{g}'}(\mathfrak{h}')$ i neka je $x \in \mathfrak{g}$ takav da je $x' = \varphi(x)$. Tada imamo

$$[x', \mathfrak{h}'] \subseteq \mathfrak{h}' \quad \Longrightarrow \quad [\varphi(x), \varphi(\mathfrak{h})] \subseteq \varphi(\mathfrak{h}) \quad \Longrightarrow \quad \varphi([x, \mathfrak{h}]) \subseteq \varphi(\mathfrak{h}) \quad [x, \mathfrak{h}] \subseteq \mathfrak{h} + \mathfrak{a}.$$

Odatle slijedi $[x, \mathfrak{h}+\mathfrak{a}] \subseteq \mathfrak{h}+\mathfrak{a}$ jer je $\mathfrak{a}$ ideal u $\mathfrak{g}$, dakle, $x \in N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}+\mathfrak{a})$. Međutim, Liejeva podalgebra $\mathfrak{h}+\mathfrak{a}$ od $\mathfrak{g}$ sadrži Cartanovu podalgebru $\mathfrak{h}$ od $\mathfrak{g}$, a ona je prema teoremu 4.2.4. minimalna Engelova podalgebra od $\mathfrak{g}$. Prema propoziciji 4.2.3. vrijedi $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h} + \mathfrak{a}) = \mathfrak{h} + \mathfrak{a}$. Dakle, $x \in \mathfrak{h} + \mathfrak{a}$, pa slijedi $x' = \varphi(x) \in \varphi(\mathfrak{h} + \mathfrak{a}) = \varphi(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}'$. Time je dokazano da je $N_{\mathfrak{g}'}(\mathfrak{h}') = \mathfrak{h}'$. Dakle, $\mathfrak{h}'$ je Cartanova podalgebra od $\mathfrak{g}'$.

**Zadatak 4.5.** *Neka je* $\mathfrak{h}$ *Cartanova podalgebra Liejeve algebre* $\mathfrak{g}$. *Dokažite da je* $\mathfrak{h}$ *maksimalna nilpotentna podalgebra od* $\mathfrak{g}$, *tj. da ne postoji nilpotentna podalgebra* $\mathfrak{k} \supsetneq \mathfrak{h}$. *Protuprimjerom pokažite da obrat ne vrijedi, tj. da je moguće da maksimalna nilpotentna podalgebra neke Liejeve algebre* $\mathfrak{g}$ *nije Cartanova podalgebra od* $\mathfrak{g}$.

**Uputa:** Protuprimjeri postoje već u Liejevoj algebri $\mathfrak{sl}(2, K)$.

**Propozicija 4.2.8.** *Neka je* $\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$ *epimorfizam Liejevih algebri i neka je* $\mathfrak{h}'$ *Cartanova podalgebra od* $\mathfrak{g}'$. *Tada je svaka Cartanova podalgebra Liejeve algebre* $\mathfrak{k} = \varphi^{-1}(\mathfrak{h}')$ *ujedno Cartanova podalgebra od* $\mathfrak{g}$.

**Dokaz:** Neka je $\mathfrak{h}$ Cartanova podalgebra Liejeve algebre $\mathfrak{k}$. Tada je $\mathfrak{h}$ nilpotentna Liejeva algebra i $N_{\mathfrak{k}}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$. Prema propoziciji 4.2.7. $\varphi(\mathfrak{h})$ je Cartanova podalgebra Liejeve algebre $\varphi(\mathfrak{k}) = \mathfrak{h}'$. Kako je Liejeva algebra $\mathfrak{h}'$ nilpotentna, iz zadatka 4.5. slijedi da je $\varphi(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}'$. Ako je $x \in N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$, tada je

$$\varphi(x) \in N_{\mathfrak{g}'}(\varphi(\mathfrak{h})) = N_{\mathfrak{g}'}(\mathfrak{h}') = \mathfrak{h}',$$

pa slijedi $x \in \varphi^{-1}(\mathfrak{h}') = \mathfrak{k}$, dakle, $x \in N_{\mathfrak{k}}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$. Time je dokazano da je $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$, odnosno, $\mathfrak{h}$ je Cartanova podalgebra od $\mathfrak{g}$.

## 4.3 Borelove podalgebre

**Borelova podalgebra** Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ je maksimalna rješiva Liejeva podalgebra $\mathfrak{b}$ od $\mathfrak{g}$. To znači da ne postoji rješiva podalgebra $\mathfrak{c}$ od $\mathfrak{g}$ takva da je $\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{c}$ i $\mathfrak{b} \neq \mathfrak{c}$.

**Propozicija 4.3.1.** *Ako je $\mathfrak{b}$ Borelova podalgebra Liejeve algebre $\mathfrak{g}$, onda je $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{b}) = \mathfrak{b}$.*

**Dokaz:** Neka je $x \in N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{b})$. Tada je $\mathfrak{c} = \mathfrak{b} + Kx$ Liejeva podalgebra od $\mathfrak{g}$ koja sadrži $\mathfrak{b}$. Nadalje, očito je $[\mathfrak{c}, \mathfrak{c}] \subseteq \mathfrak{b}$, pa slijedi da je $\mathfrak{c}$ rješiva. Dakle, $\mathfrak{c} = \mathfrak{b}$, tj. $x \in \mathfrak{b}$.

**Propozicija 4.3.2.** *Neka je $\mathfrak{g}$ Liejeva algebra, $R(\mathfrak{g})$ njen radikal i $\pi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}/R(\mathfrak{g})$ kvocijentni epimorfizam. Tada je $\mathfrak{c} \mapsto \pi^{-1}(\mathfrak{c})$ bijekcija sa skupa svih Borelovih podalgebri od $\mathfrak{g}/R(\mathfrak{g})$ na skup svih Borelovih podalgebri od $\mathfrak{g}$. Inverzno preslikavanje je $\mathfrak{b} \mapsto \mathfrak{b}/R(\mathfrak{g})$.*

**Dokaz:** Pretpostavimo da je $\mathfrak{c}$ Borelova podalgebra od $\mathfrak{g}/R(\mathfrak{g})$. Stavimo

$$\mathfrak{b} = \pi^{-1}(\mathfrak{c}) = \{x \in \mathfrak{g};\ \pi(x) \in \mathfrak{c}\}.$$

Tada je $R(\mathfrak{g}) \subseteq \mathfrak{b}$ i kvocijentna algebra $\mathfrak{b}/R(\mathfrak{g})$ je izomorfna sa $\mathfrak{c}$, dakle, rješiva je. Kako je i $R(\mathfrak{g})$ rješiva Liejeva algebra, prema tvrdnji $(b)$ propozicije 1.2.1. Liejeva algebra $\mathfrak{b}$ je rješiva. Dokažimo da je $\mathfrak{b}$ maksimalna rješiva podalgebra od $\mathfrak{g}$. Pretpostavimo da je $\mathfrak{d}$ rješiva podalgebra od $\mathfrak{g}$ koja sadrži $\mathfrak{b}$. Tada $\mathfrak{d}$ sadrži $R(\mathfrak{g})$ i kvocijentna algebra $\mathfrak{d}/R(\mathfrak{g})$ je po tvrdnji $(a)$ propoziciji 1.2.1. rješiva. Nadalje, $\mathfrak{d}/R(\mathfrak{g}) = \pi(\mathfrak{d}) \supseteq \pi(\mathfrak{b}) = \mathfrak{c}$, a kako je $\mathfrak{c}$ Borelova, slijedi $\mathfrak{d}/R(\mathfrak{g}) = \mathfrak{c}$, dakle,

$$\mathfrak{d} = \pi^{-1}(\mathfrak{d}/R(\mathfrak{g})) = \pi^{-1}(\mathfrak{c}) = \mathfrak{b}.$$

Prema tome, $\mathfrak{b} = \pi^{-1}(\mathfrak{c})$ je Borelova podalgebra od $\mathfrak{g}$.

Pretpostavimo sada da je $\mathfrak{b}$ Borelova podalgebra od $\mathfrak{g}$. Tada za Liejevu podalgebru $\mathfrak{d} = \mathfrak{b} + R(\mathfrak{g})$ od $\mathfrak{g}$ vrijedi $\mathfrak{d}/R(\mathfrak{g}) \simeq \mathfrak{b}/(\mathfrak{b} \cap R(\mathfrak{g}))$, a to je po tvrdnji $(a)$ propozicije 1.2.1. rješiva Liejeva algebra. Kako je i ideal $R(\mathfrak{g})$ rješiva Liejeva algebra, po tvrdnji $(b)$ iste propozicije slijedi da je Liejeva algebra $\mathfrak{d}$ rješiva. Kako $\mathfrak{d}$ sadrži Borelovu podalgebru $\mathfrak{b}$, slijedi $\mathfrak{d} = \mathfrak{b}$, odnosno, $R(\mathfrak{g}) \subseteq \mathfrak{b}$. Sada je $\mathfrak{b} = \pi^{-1}(\mathfrak{b}/R(\mathfrak{g}))$, a odatle slijede ostale tvrdnje.

Dakle, Borelove podalgebre bit će u potpunosti opisane, ako znamo opisati Borelove podalgebre poluproste Liejeve algebre.

**Propozicija 4.3.3.** *Neka je $\mathfrak{g}$ poluprosta Liejeva algebra nad algebarski zatvorenim poljem $K$ karakteristike $0$, neka je $\mathfrak{h}$ njena Cartanova (dakle, maksimalna toralna) podalgebra, $R = R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ pripadni sistem korijena, $B$ baza sistema korijena $R$ i $R_+ = R_+(B)$ pripadni skup pozitivnih korijena. Stavimo*

$$\mathfrak{n}(B) = \sum_{\alpha \in R_+} \dot{+}\, \mathfrak{g}_\alpha \qquad i \qquad \mathfrak{b}(B) = \mathfrak{h} \dot{+} \mathfrak{n}(B).$$

*Tada je $\mathfrak{n}(B)$ nilpotentna podalgebra od $\mathfrak{g}$, vrijedi $[\mathfrak{b}(B), \mathfrak{b}(B)] = \mathfrak{n}(B)$ i $\mathfrak{b}(B)$ je Borelova podalgebra od $\mathfrak{g}$.*

**Dokaz:** Prema propoziciji 2.1.2. vrijedi $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] \subseteq \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$ za sve $\alpha, \beta \in R$. Nadalje, ako su $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$ i $\alpha + \beta \in R$, onda je $\alpha + \beta \in R_+$. To pokazuje da je $\mathfrak{n}(B)$ Liejeva podalgebra od $\mathfrak{g}$.

Prisjetimo se sada pojma *visine korijena u odnosu na bazu $B$*. Svaki $\alpha \in R_+$ ima ovakav prikaz u bazi $B$ :

$$\alpha = \sum_{\gamma \in B} c_\gamma \gamma, \qquad c_\gamma \in \mathbb{Z}_+.$$

Tada je visina $ht_B\alpha$ korijena $\alpha$ u odnosu na bazu $B$ definirana sa

$$ht_B\alpha = \sum_{\gamma\in B} c_\gamma.$$

Tada je $ht_B$ preslikavanje sa $R_+$ u $\mathbb{N}$ i očito je $ht_B(\alpha+\beta) = h_B\alpha + ht_B\beta$ ako su $\alpha, \beta, \alpha+\beta \in R_+$. Neka je $k = \max\{ht_B\alpha;\ \alpha \in R_+\}$. Iako nam to u ovom dokazu nije bitno, napominjemo da iz leme 3.5.4. slijedi da je $ht_B(R_+) = \{1, \dots, k\}$. Definiramo sada

$$\mathfrak{n}_j = \sum_{\alpha\in R_+,\, ht_B\alpha\geq j} \dot{+}\, \mathfrak{g}_\alpha, \qquad j \in \mathbb{N}.$$

Tada su $\mathfrak{n}_j$ ideali u $\mathfrak{n}(B)$ i vrijedi

$$\mathfrak{n}(B) = \mathfrak{n}_1 \supseteq \mathfrak{n}_2 \supseteq \cdots \supseteq \mathfrak{n}_k \supseteq \mathfrak{n}_{k+1} = \{0\}.$$

Nadalje, $[\mathfrak{n}(B), \mathfrak{n}_j] \subseteq \mathfrak{n}_{j+1}$. Prema tome, Liejeva podalgebra $\mathfrak{n}(B)$ je nilpotentna.

Napokon, po definiciji $\mathfrak{g}_\alpha$ vrijedi $[\mathfrak{h}, \mathfrak{g}_\alpha] = \mathfrak{g}_\alpha\ \ \forall\alpha \in R$. Stoga je $[\mathfrak{h}, \mathfrak{n}(B)] = \mathfrak{n}(B)$. Kako je $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] = \{0\}$ i $[\mathfrak{n}(B), \mathfrak{n}(B)] \subseteq \mathfrak{n}(B)$, nalazimo

$$[\mathfrak{b}(B), \mathfrak{b}(B)] = [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] + [\mathfrak{h}, \mathfrak{n}(B)] + [\mathfrak{n}(B), \mathfrak{n}(B)] = \mathfrak{n}(B).$$

Kako je Liejeva algebra $\mathfrak{n}(B)$ nilpotentna, prema zadatku 1.13. Liejeva algebra $\mathfrak{b}(B)$ je rješiva.

Treba još dokazati da je $\mathfrak{b}(B)$ Borelova, tj. da je maksimalna u skupu svih rješivih podalgebri od $\mathfrak{g}$. Neka je $\mathfrak{k}$ Liejeva podalgebra od $\mathfrak{g}$ koja sadrži $\mathfrak{b}(B)$. Tada je potprostor $\mathfrak{k}$ od $\mathfrak{g}$ $ad\,\mathfrak{h}-$invarijantan. Stoga, ako pretpostavimo da je $\mathfrak{k} \neq \mathfrak{b}(B)$, podalgebra $\mathfrak{k}$ sadrži $\mathfrak{g}_\alpha$ za neki korijen $\alpha \in R_-$. Budući da $\mathfrak{k}$ sadrži $\mathfrak{g}_{-\alpha} \subseteq \mathfrak{b}(B)$, a također i $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-a}] \subseteq \mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{b}(B)$, zaključujemo da $\mathfrak{k}$ sadrži podalgebru koju smo u tvrdnji $(g)$ propozicije 2.1.5. označili sa $\mathfrak{s}_\alpha$. Ta je Liejeva algebra izomorfna sa $\mathfrak{sl}(2, K)$, dakle, prosta. Prema tvrdnji $(a)$ propozicije 1.2.1. Liejeva algebra $\mathfrak{k}$ ne može biti rješiva. Time je dokazano da je $\mathfrak{b}(B)$ Borelova podalgebra od $\mathfrak{g}$.

Ako je $\mathfrak{h}$ Cartanova podalgebra od $\mathfrak{g}$, podalgebre oblika $\mathfrak{b}(B)$ za neku bazu $B$ sistema korijena $R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ zovu se **standardne Borelove podalgebre** u odnosu na $\mathfrak{h}$. Vidjet ćemo da je svaka Borelova podalgebra $\mathfrak{b}$ poluproste Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ nad algebarski zatvorenim poljem karakteristike 0 standardna Borelova podalgebra od $\mathfrak{g}$, tj. da postoji Cartanova podalgebra $\mathfrak{h}$ od $\mathfrak{g}$ i baza $B$ sistema korijena $R = R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ takvi da je $\mathfrak{b} = \mathfrak{b}(B)$.

Trebat će nam sljedeća činjenica o Borelovim podalgebrama poluproste Liejeve algebre:

**Propozicija 4.3.4.** *Neka je $\mathfrak{b}$ Borelova podalgebra poluproste Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ nad algebarski zatvorenim poljem $K$ karakteristike 0. Za svaki $x \in \mathfrak{b}$ vrijedi $x_s \in \mathfrak{b}$ i $x_n \in \mathfrak{b}$.*

**Dokaz:** Prema teoremu 1.5.5. $ad\,x_s$ i $ad\,x_n$ su poluprosti i nilpotentni dio operatora $ad\,x$. Prema tvrdnji $(c)$ teorema 1.2.14. o Jordan−Chevalleyevom rastavu iz $(ad\,x)(\mathfrak{b}) \subseteq \mathfrak{b}$ slijedi $(ad\,x_s)(\mathfrak{b}) \subseteq \mathfrak{b}$ i $(ad\,x_n)(\mathfrak{b}) \subseteq \mathfrak{b}$. To znači da je $[x_s, \mathfrak{b}] \subseteq \mathfrak{b}$ i $[x_n, \mathfrak{b}] \subseteq \mathfrak{b}$, odnosno, $x_s, x_n \in N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{b})$. Po propoziciji 4.3.1. to znači da su $x_s, x_n \in \mathfrak{b}$.

## 4.4 Teoremi konjugiranosti

**U ovom odjeljku $\mathfrak{g}$ je Liejeva algebra nad algebarski zatvorenim poljem $K$ karakteristike** 0. Sa $Aut(\mathfrak{g})$ označavamo grupu svih automorfizama Liejeve algebre $\mathfrak{g}$. Ako je $x \in \mathfrak{g}$ $ad-$nilpotentan element, tj. ako je operator $ad\,x : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ nilpotentan, onda je dobro definiran operator $\mathrm{e}^{ad\,x} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ na sljedeći način

$$\mathrm{e}^{ad\,x} = \sum_{k \in \mathbb{Z}_+} \frac{1}{k!}(ad\,x)^k.$$

Naravno, zbog nilpotentnosti je gornja suma konačna.

**Zadatak 4.6.** *Neka je $x \in \mathfrak{g}$ $ad-$nilpotentan element. Dokažite:*

(a) $e^{ad\,x} \in Aut(\mathfrak{g})$.

(b) *Ako je i $y \in \mathfrak{g}$ $ad-$nilpotentan i $[x,y] = 0$, onda je i $x+y$ $ad-$nilpotentan i vrijedi* $e^{ad\,x}e^{ad\,y} = e^{ad\,(x+y)}$.

(c) *Inverzni operator od $e^{ad\,x}$ je $e^{-ad\,x}$.*

Podgrupa od $Aut(\mathfrak{g})$ generirana skupom

$$\{\mathrm{e}^{ad\,x};\ x \in \mathfrak{g} \quad ad - \text{nilpotentan}\}$$

označava se sa $Int(\mathfrak{g})$, a elementi od $Int(\mathfrak{g})$, dakle, automorfizmi oblika

$$\mathrm{e}^{ad\,x_1} \cdots \mathrm{e}^{ad\,x_k}, \qquad x_1, \ldots, x_k \in \mathfrak{g} \quad ad - \text{nilpotentni},$$

zovu se **unutarnji automorfizmi** Liejeve algebre $\mathfrak{g}$.

U ovom nam je odjeljku cilj da dokažemo da su bilo koje dvije Cartanove podalgebre $\mathfrak{h}$ i $\mathfrak{h}'$ $Int(\mathfrak{g})-$konjugirane, tj. da postoji $\varphi \in Int(\mathfrak{g})$ takav da je $\varphi(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}'$. Dokaz će u više navrata koristiti indukciju po dimenziji, a trebat će usput dokazati i da su svake dvije Borelove podalgebre $Int(\mathfrak{g})-$konjugirane. Zbog induktivnih dijelova dokaza bit će nam nemoguće koristiti grupu $Int(\mathfrak{g})$ zbog sljedeće mogućnosti koja se stvarno događa: ako je $\mathfrak{g}_1$ Liejeva podalgebra od $\mathfrak{g}$ i ako je element $x \in \mathfrak{g}_1$ $ad_{\mathfrak{g}_1}-$nilpotentan, pa je $\mathrm{e}^{ad_{\mathfrak{g}_1} x} \in Int(\mathfrak{g}_1)$, on ne mora biti $ad_{\mathfrak{g}}-$nilpotentan pa ne mora biti definiran $\mathrm{e}^{ad_{\mathfrak{g}} x}$. Stoga je vrlo nejasna veza između $Int(\mathfrak{g}_1)$ i $Int(\mathfrak{g})$. Slično je i u slučaju kvocijentnih Liejevih algebri. Zbog tih problema lakše će nam biti dokazati jaču tvrdnju da su svake dvije Cartanove podalgebre (i svake dvije Borelove podalgebre) $\mathcal{E}(\mathfrak{g})-$konjugirane, gdje je $\mathcal{E}(\mathfrak{g})$ podgrupa od $Int(\mathfrak{g})$ definirana tako da je jasnija veza tih grupa u slučaju Liejeve podalgebre ili kvocijentne Liejeve algebre, pa će biti mogući dokazi indukcijom po dimenziji.

Prijeđimo sada na definiciju grupe $\mathcal{E}(\mathfrak{g})$. Za element $x \in \mathfrak{g}$ kažemo da je **striktno** $ad-$**nilpotentan**, ako postoji $y \in \mathfrak{g}$ i neka svojstvena vrijednost $\lambda \neq 0$ operatora $ad\,y$ takvi da je $x \in \mathfrak{g}_\lambda(ad\,y)$, tj. da postoji neki $k \in \mathbb{N}$ takav da je $(\lambda I - ad\,y)^k x = 0$. Prema propoziciji 4.2.1. znamo da je svaki striktno $ad-$nilpotentan element ujedno i $ad-$nilpotentan. Označimo sa $\mathcal{N}(\mathfrak{g})$ skup svih striktno $ad-$nilpotentnih elemenata od $\mathfrak{g}$. Sa $\mathcal{E}(\mathfrak{g})$ označavamo podgrupu od $Int(\mathfrak{g})$ generiranu svim automorfizmima oblika $\mathrm{e}^{ad\,x}$, $x \in \mathcal{N}(\mathfrak{g})$. Pokazat će se da u slučaju poluproste Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ vrijedi $\mathcal{E}(\mathfrak{g}) = Int(\mathfrak{g})$, ali to nije tako za opću Liejevu algebru.

**Zadatak 4.7.** *Dokažite da su $Int(\mathfrak{g})$ i $\mathcal{E}(\mathfrak{g})$ normalne podgrupe od $Aut(\mathfrak{g})$.*

**Zadatak 4.8.** *Neka je $\mathfrak{k}$ Liejeva podalgebra od $\mathfrak{g}$. Dokažite da je $\mathcal{N}(\mathfrak{k}) \subseteq \mathcal{N}(\mathfrak{g})$.*

Ako je $\mathfrak{k}$ Liejeva podalgebra od $\mathfrak{g}$, onda definiramo $\mathcal{E}(\mathfrak{g};\mathfrak{k})$ kao podgrupu od $\mathcal{E}(\mathfrak{g})$ generiranu sa svim automorfizmima oblika $e^{ad_{\mathfrak{g}} x}$, $x \in \mathcal{N}(\mathfrak{k})$.

**Zadatak 4.9.** *Ako je $\mathfrak{k}$ Liejeva podalgebra od $\mathfrak{g}$, dokažite da je $\mathcal{E}(\mathfrak{k}) = \{\omega|\mathfrak{k};\ \omega \in \mathcal{E}(\mathfrak{g};\mathfrak{k})\}$.*

**Zadatak 4.10.** *Neka je $\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$ epimorfizam Liejevih algebri. Dokažite da tada za svaki $y \in \mathfrak{g}$ i svaki $\lambda \in K$ vrijedi $\varphi(\mathfrak{g}_\lambda(ad_{\mathfrak{g}}\, y)) = \mathfrak{g}'_\lambda(ad_{\mathfrak{g}'}\, \varphi(y))$. Izvedite odatle da je $\varphi(\mathcal{N}(\mathfrak{g})) = \mathcal{N}(\mathfrak{g}')$.*

**Propozicija 4.4.1.** *Neka je $\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$ epimorfizam Liejevih algebri. Tada za svaki $\omega' \in \mathcal{E}(\mathfrak{g}')$ postoji $\omega \in \mathcal{E}(\mathfrak{g})$ takav da je $\omega' \circ \varphi = \varphi \circ \omega$, tj. da sljedeći dijagram komutira:*

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{g} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\omega"'] & \mathfrak{g}' \arrow[d, "\omega'"] \\ \mathfrak{g} \arrow[r, "\varphi"'] & \mathfrak{g}' \end{tikzcd}$$

**Dokaz:** Tvrdnju je dovoljno dokazati u slučaju $\omega' = e^{ad_{\mathfrak{g}'} x'}$ za $x' \in \mathfrak{g}'$. Prema zadatku 4.10. tada postoji $x \in \mathfrak{g}$ takav da je $x' = \varphi(x)$. Za proizvoljan $y \in \mathfrak{g}$ tada imamo za neki $k \in \mathbb{N}$ :

$$\left(\varphi \circ e^{ad_{\mathfrak{g}} x}\right)(y) = \varphi\left(y + [x,y] + \frac{1}{2!}[x,[x,y]] + \cdots + \frac{1}{k!}[x,[x,\cdots[x,y]\cdots]]\right) =$$

$$= \varphi(y) + [x',\varphi(y)] + \frac{1}{2!}[x',[x',\varphi(y)]] + \cdots + \frac{1}{k!}[x',[x',\cdots[x',\varphi(y)]\cdots]] = \left(e^{ad_{\mathfrak{g}'} x'} \circ \varphi\right)(y).$$

Dakle, za $\omega' = e^{ad_{\mathfrak{g}'} x'}$ vrijedi $\varphi \circ \omega = \omega' \circ \varphi$.

Neka je sada $\mathfrak{h}$ Cartanova podalgebra poluproste Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ i neka je $R = R(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ pripadni sistem korijena. Tada svaka refleksija $\sigma_\alpha$, $\alpha \in R$, djeluje na $\mathfrak{h}^*$ a po dualnosti i na $\mathfrak{h}$. Prema teoremu 4.1.5. taj se automorfizam Liejeve algebre $\mathfrak{h}$ može proširiti do automorfizma od $\mathfrak{g}$. Sada ćemo jedno takvo proširenje eksplicitno napisati. Izaberimo $x_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$ i $y_\alpha \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ tako da bude $[x_\alpha, y_\alpha] = h_\alpha$. Tada su $x_\alpha, y_\alpha \in \mathcal{N}(\mathfrak{g})$, pa je

$$\tau_\alpha = e^{ad\, x_\alpha} e^{-ad\, y_\alpha} e^{ad\, x_\alpha} \in \mathcal{E}(\mathfrak{g}).$$

Promatrajmo djelovanje automorfizma $\tau_\alpha$ na $\mathfrak{h}$. Prije svega, imamo rastav $\mathfrak{h} = Ker\,\alpha \dot{+} Kh_\alpha$. Ako je $h \in Ker\,\alpha$, tj. $\alpha(h) = 0$, onda je $[x_\alpha, h] = [y_\alpha, h] = 0$, dakle, $(ad\, x_\alpha)h = (ad\, y_\alpha)h = 0$. Prema tome, vrijedi

$$\tau_\alpha(h) = h = \sigma_\alpha(h) \qquad \forall h \in Ker\,\alpha. \tag{4.4}$$

Promatrajmo sada djelovanje automorfizma $\tau_\alpha$ na $h_\alpha$. Imamo

$$(ad\, x_\alpha)h_\alpha = [x_\alpha, h_\alpha] = -\alpha(h_\alpha)x_\alpha = -2x_\alpha \quad \text{i} \quad (ad\, x_\alpha)^2 h_\alpha = 0.$$

Prema tome,

$$e^{ad\, x_\alpha} h_\alpha = h_\alpha + (ad\, x_\alpha)h_\alpha = h_\alpha - 2x_\alpha.$$

Nadalje,

$$(ad\, y_\alpha)h_\alpha = [y_\alpha, h_\alpha] = 2y_\alpha, \quad (ad\, y_\alpha)^2 h_\alpha = 0,$$

$$(ad\, y_\alpha)x_\alpha = -h_\alpha, \quad (ad\, y_\alpha)^2 x_\alpha = -2y_\alpha, \quad (ad\, y_\alpha)^3 x_\alpha = 0,$$

pa imamo

$$e^{-ad\, y_\alpha} h_\alpha = h_\alpha - (ad\, y_\alpha)h_\alpha = h_\alpha - 2y_\alpha$$

i

$$e^{-ad\, y_\alpha} x_\alpha = x_\alpha - (ad\, y_\alpha)x_\alpha + \frac{1}{2}(ad\, y_\alpha)^2 x_\alpha = x_\alpha + h_\alpha - y_\alpha.$$

Dakle,

$$e^{-ad\, y_\alpha} e^{ad\, x_\alpha} h_\alpha = e^{-ad\, y_\alpha} h_\alpha - 2e^{-ad\, y_\alpha} x_\alpha = h_\alpha - 2y_\alpha - 2x_\alpha - 2h_\alpha + 2y_\alpha = -h_\alpha - 2x_\alpha.$$

Napokon, kako je $(ad\, x_\alpha)x_\alpha = 0$ imamo $e^{ad\, x_\alpha} x_\alpha = x_\alpha$, dakle,

$$\tau_\alpha(h_\alpha) = -e^{ad\, x_\alpha} h_\alpha - 2e^{ad\, x_\alpha} x_\alpha = -h_\alpha + 2x_\alpha - 2x_\alpha = -h_\alpha = \sigma_\alpha(h_\alpha) \tag{4.5}$$

Jednakosti (4.4) i (4.5) pokazuju da je $\tau_\alpha(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$ i $\tau_\alpha|\mathfrak{h} = \sigma_\alpha$.

Budući da refleksije $\sigma_\alpha$ generiraju Weylovu grupu $W(R)$, iz dokazanog neposredno slijedi:

**Teorem 4.4.2.** *Neka je $\mathfrak{g}$ poluprosta Liejeva algebra nad algebarski zatvorenim poljem $K$ karakteristike $0$, neka je $\mathfrak{h}$ njena Cartanova podalgebra, neka je $R = R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ pripadni sistem korijena i $W(R)$ njegova Weylova grupa čije se djelovanje po dualnosti prenosi sa $\mathfrak{h}^*$ na $\mathfrak{h}$. Za svaki $\sigma \in W(R)$ postoji $\tau \in \mathcal{E}(\mathfrak{g})$ takav da je $\tau(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$ i $\tau|\mathfrak{h} = \sigma$.*

**Korolar 4.4.3.** *Uz pretpostavke i oznake teorema 4.4.2. neka su $B$ i $B'$ baze sistema korijena $R$. Tada su standardne Borelove podalgebre $\mathfrak{b}(B)$ i $\mathfrak{b}(B')$ $\mathcal{E}(\mathfrak{g})-$konjugirane. Preciznije, postoji $\tau \in \mathcal{E}(\mathfrak{g})$ takav da je $\tau(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$ i $\tau(\mathfrak{b}(B)) = \mathfrak{b}(B')$.*

### 4.4.1 Konjugiranost Cartanovih podalgebri rješive Liejeve algebre

**Teorem 4.4.4.** *Neka je $\mathfrak{g}$ rješiva Liejeva algebra i neka su $\mathfrak{h}_1$ i $\mathfrak{h}_2$ Cartanove podalgebre od $\mathfrak{g}$. Tada postoji $\omega \in \mathcal{E}(\mathfrak{g})$ takav da je $\omega(\mathfrak{h}_1) = \mathfrak{h}_2$.*

**Dokaz** ćemo provesti indukcijom po $\dim \mathfrak{g}$. Tvrdnja je trivijalna ako je Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ nilpotentna, jer tada je $\mathfrak{h}_1 = \mathfrak{g} = \mathfrak{h}_2$. Odatle slijedi i baza indukcije, jer ako je $\dim \mathfrak{g} = 1$, onda je $\mathfrak{g}$ komutativna, dakle, nilpotentna.

Pretpostavimo sada da je $\mathfrak{g}$ rješiva Liejeva algebra, koja nije nilpotentna i pretpostavimo da je tvrdnja teorema dokazana za sve rješive Liejeve algebre dimenzije manje od $\dim \mathfrak{g}$. Budući da je Liejeva algebra rješiva, ona ima komutativne ideale: npr. posljednji ideal $\mathfrak{g}^{(k)}$ u izvedenom nizu koji je različit od $\{0\}$, tj. $\mathfrak{g}^{(k)} \neq \{0\}$, $\mathfrak{g}^{(k+1)} = [\mathfrak{g}^{(k)}, \mathfrak{g}^{(k)}] = \{0\}$. Neka je $\mathfrak{a} \neq \{0\}$ komutativni ideal u $\mathfrak{g}$ najmanje dimenzije. Stavimo $\mathfrak{g}' = \mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ i neka je $\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$ kvocijentni epimorfizam. Prema propoziciji 4.2.7. tada su $\mathfrak{h}_1' = \varphi(\mathfrak{h}_1)$ i $\mathfrak{h}_2' = \varphi(\mathfrak{h}_2)$ Cartanove podalgebre od $\mathfrak{g}'$. Po pretpostavci indukcije postoji $\omega' \in \mathcal{E}(\mathfrak{g}')$ takav da je $\mathfrak{h}_2' = \omega'(\mathfrak{h}_1')$. Prema lemi 4.4.1. postoji $\omega \in \mathcal{E}(\mathfrak{g})$ takav da je $\omega' \circ \varphi = \varphi \circ \omega$. Stavimo $\mathfrak{k}_1 = \varphi^{-1}(\mathfrak{h}_1')$ i $\mathfrak{k}_2 = \varphi^{-1}(\mathfrak{h}_2')$.

**Zadatak 4.11.** *Dokažite da je $\omega(\mathfrak{k}_1) = \mathfrak{k}_2$.*

Stoga su $\mathfrak{h}_2$ i $\omega(\mathfrak{h}_1)$ Cartanove podalgebre Liejeve algebre $\mathfrak{k}_2$. Ako je $\mathfrak{k}_2 \neq \mathfrak{g}$, po pretpostavci indukcije postoji $\tau' \in \mathcal{E}(\mathfrak{k}_2)$ takav da je $\tau'(\omega(\mathfrak{h}_1)) = \mathfrak{h}_2$. Prema zadatku 4.9. postoji $\tau \in \mathcal{E}(\mathfrak{g}; \mathfrak{k}_2)$ takav da je $\tau' = \tau|\mathfrak{k}_2$. Tada slijedi $(\tau \circ \omega)(\mathfrak{h}_1) = \mathfrak{h}_2$, a kako je $\mathcal{E}(\mathfrak{g}; \mathfrak{k}) \subseteq \mathcal{E}(\mathfrak{g})$, imamo $\tau \circ \omega \in \mathcal{E}(\mathfrak{g})$. Prema tome, u slučaju $\mathfrak{k}_2 \neq \mathfrak{g}$ dokaz koraka indukcije je proveden.

Pretpostavimo sada da je $\mathfrak{k}_2 = \mathfrak{g}$. Kako je $\omega(\mathfrak{k}_1) = \mathfrak{k}_2 = \mathfrak{g}$, tada je i $\mathfrak{k}_1 = \mathfrak{g}$. To znači da je $\mathfrak{g} = \mathfrak{h}_1 + \mathfrak{a}$ i $\mathfrak{g} = \mathfrak{h}_2 + \mathfrak{a}$. U ovom slučaju treba eksplicitno konstruirati automorfizam iz $\mathcal{E}(\mathfrak{g})$ koji preslikava $\mathfrak{h}_1$ na $\mathfrak{h}_2$.

Prema teoremu 4.2.4. Cartanova podalgebra $\mathfrak{h}_1$ je oblika $\mathfrak{g}_0(ad\,x)$ za neki $x \in \mathfrak{g}$. Budući da je $\mathfrak{a}$ ideal u $\mathfrak{g}$, on je invarijantan s obzirom na operator $ad\,x$. Prema tome, vrijedi

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_0(ad\,x) \dot{+} \mathfrak{a}_*(ad\,x). \tag{4.6}$$

Međutim, kako je $\mathfrak{g} = \mathfrak{h}_1 + \mathfrak{a}$, oba sumanda u rastavu (4.6) su invarijantna u odnosu na $ad\,\mathfrak{g}$, tj. oba su ideali u $\mathfrak{g}$. Zbog minimalnosti dimenzije od $\mathfrak{a}$ slijedi da je ili $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_0(ad\,x)$ i $\mathfrak{a}_*(ad\,x) = \{0\}$, ili je $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_*(ad\,x)$ i $\mathfrak{a}_0(ad\,x) = \{0\}$. Prva mogućnost otpada, jer bi ona imala za posljedicu da je $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{h}_1$, dakle, $\mathfrak{g} = \mathfrak{h}_1$, a to je nemoguće jer smo pretpostavili da Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ nije nilpotentna. Dakle, vrijedi $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_*(ad\,x)$, a tada je očito $\mathfrak{a} = \mathfrak{g}_*(ad\,x)$.

Kako je $\mathfrak{g} = \mathfrak{h}_2 + \mathfrak{a}$, možemo pisati $x = y + z$, $y \in \mathfrak{h}_2$, $z \in \mathfrak{a} = \mathfrak{g}_*(ad\,x)$. Kako je restrikcija $(ad\,x)|\mathfrak{a} = (ad\,x)|\mathfrak{g}_*(ad\,x)$ regularan operator, postoji $w \in \mathfrak{a}$ takav da je $z = (ad\,x)w = [x, w]$. Ideal $\mathfrak{a}$ je komutativan, pa vrijedi $(ad\,w)^2 = 0$. Stavimo $\omega = e^{ad\,w} = I_{\mathfrak{g}} + ad\,w$. Sada imamo

$$\omega(x) = e^{ad\,w}x = x + [w, x] = x - z = y.$$

Odatle slijedi da je i $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_0(ad\,y)$ Cartanova podalgebra od $\mathfrak{g}$. Kako je $y \in \mathfrak{h}_2$, vrijedi $\mathfrak{h} \supseteq \mathfrak{h}_2$, a kako su i $\mathfrak{h}$ i $\mathfrak{h}_2$ Cartanove podalgebre od $\mathfrak{g}$, dakle, minimalne Engelove podalgebre od $\mathfrak{g}$, imamo jednakost $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_2$. Budući da je $\omega(x) = y$, nalazimo

$$\omega(\mathfrak{h}_1) = \omega(\mathfrak{g}_0(ad\,x)) = \mathfrak{g}_0(ad\,\omega(x)) = \mathfrak{g}_0(ad\,y) = \mathfrak{h} = \mathfrak{h}_2.$$

Treba još samo primijetiti da je $\omega \in \mathcal{E}(\mathfrak{g})$. Doista, kako je $w \in \mathfrak{a} = \mathfrak{g}_*(ad\,x)$, postoje svojstvene vrijednosti $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ operatora $ad\,x$ različite od nule i $w_i \in \mathfrak{g}_{\lambda_i}(ad\,x)$ za $i = 1, \ldots, s$ takvi da je $w = w_1 + \cdots + w_s$. Tada su svi $w_i \in \mathfrak{a}$, a kako je $\mathfrak{a}$ komutativan ideal, slijedi

$$\omega = e^{ad\,w} = e^{ad\,w_1} \circ \cdots \circ e^{ad\,w_s} \in \mathcal{E}(\mathfrak{g}).$$

### 4.4.2 Konjugiranost Borelovih podalgebri

**Teorem 4.4.5.** *Neka su $\mathfrak{b}_1$ i $\mathfrak{b}_2$ Borelove podalgebre Liejeve algebre $\mathfrak{g}$. Tada postoji $\omega \in \mathcal{E}(\mathfrak{g})$ takav da je $\omega(\mathfrak{b}_1) = \mathfrak{b}_2$.*

**Dokaz** ovog teorema je vrlo složen. Provest ćemo ga indukcijom po dim $\mathfrak{g}$. Baza indukcije dim $\mathfrak{g} = 1$ je trivijalna. Štoviše, tvrdnja je trivijalna ako je $\mathfrak{g}$ rješiva Liejeva algebra, jer tada je $\mathfrak{b}_1 = \mathfrak{g} = \mathfrak{b}_2$. Pretpostavimo da je $\mathfrak{g}$ Liejeva algebra koja nije rješiva i pretpostavimo da je teorem dokazan za Liejeve algebre dimenzije manje od dim $\mathfrak{g}$.

Pretpostavimo najprije da Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ nije poluprosta, tj. da je njen radikal $R(\mathfrak{g}) \neq \{0\}$. Stavimo $\mathfrak{g}' = \mathfrak{g}/R(\mathfrak{g})$ i neka je $\pi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$ kvocijentni epimorfizam. Prema propoziciji 4.3.2. tada je $\mathfrak{c} \mapsto \pi^{-1}(\mathfrak{c})$ bijekcija sa skupa svih Borelovih podalgebri od $\mathfrak{g}'$ na skup svih Borelovih podalgebri od $\mathfrak{g}$, a inverzno preslikavanje je $\mathfrak{b} \mapsto \pi(\mathfrak{b}) = \mathfrak{b}/R(\mathfrak{g})$. Prema tome, $\mathfrak{c}_1 = \pi(\mathfrak{b}_1)$ i $\mathfrak{c}_2 = \pi(\mathfrak{b}_2)$ su Borelove podalgebre od $\mathfrak{g}'$ i vrijedi $\mathfrak{b}_1 = \pi^{-1}(\mathfrak{c}_1)$ i $\mathfrak{b}_2 = \pi^{-1}(\mathfrak{c}_2)$. Kako je $R(\mathfrak{g}) \neq \{0\}$, to je dim $\mathfrak{g}' <$ dim $\mathfrak{g}$, pa po pretpostavci indukcije postoji $\omega' \in \mathcal{E}(\mathfrak{g}')$ takav da je $\omega'(\mathfrak{c}_1) = \mathfrak{c}_2$. Prema lemi 4.4.1. postoji $\omega \in \mathcal{E}(\mathfrak{g})$ takav da je $\omega' \circ \pi = \pi \circ \omega$. Tada slijedi

$$\pi(\omega(\mathfrak{b}_1)) = \omega'(\pi(\mathfrak{b}_1)) = \omega'(\mathfrak{c}_1) = \mathfrak{c}_2 = \pi(\mathfrak{b}_2).$$

Imamo $R(\mathfrak{g}) \subseteq \mathfrak{b}_1$ i $R(\mathfrak{g}) \subseteq \mathfrak{b}_2$. Kako je $R(\mathfrak{g})$ ideal, vrijedi $\omega(R(\mathfrak{g})) = R(\mathfrak{g})$, dakle, $R(\mathfrak{g}) \subseteq \omega(\mathfrak{b}_1)$. Stoga iz jednakosti $\pi(\omega(\mathfrak{b}_1)) = \pi(\mathfrak{b}_2)$ slijedi jednakost $\omega(\mathfrak{b}_1) = \mathfrak{b}_2$. Time je dokaz koraka indukcije proveden ako Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ nije poluprosta.

Pretpostavimo sada da je Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ poluprosta. Nadalje, u dokazu koraka indukcije možemo pretpostavljati da je jedna od dvije Borelove algebre, npr. $\mathfrak{b}_1$, standardna u odnosu na neku Cartanovu (=maksimalnu toralnu) podalgebru $\mathfrak{h}$ od $\mathfrak{g}$ i u odnosu na neku bazu $B$ sistema korijena $R = R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$. Doista, ako su Borelove podalgebre $\mathfrak{b}_1$ i $\mathfrak{b}_2$ $\mathcal{E}(\mathfrak{g})-$konjugirane istoj standardnoj Borelovoj podalgebri $\mathfrak{b}(B)$, onda su $\mathfrak{b}_1$ i $\mathfrak{b}_2$ i međusobno $\mathcal{E}(\mathfrak{g})-$konjugirane.

U dokazu $\mathcal{E}(\mathfrak{g})-$konjugiranosti $\mathfrak{b}_1$ i $\mathfrak{b}_2$ koristit ćemo silaznu indukciju po $\dim(\mathfrak{b}_1 \cap \mathfrak{b}_2)$. Baza indukcije je trivijalna, jer ako je $\mathfrak{b}_1 \cap \mathfrak{b}_2 = \mathfrak{b}_1$ ili $\mathfrak{b}_1 \cap \mathfrak{b}_2 = \mathfrak{b}_2$ tada je $\mathfrak{b}_1 = \mathfrak{b}_2$, pa se nema što dokazivati. Za dokaz koraka indukcije pretpostavljamo da je $\mathfrak{b}_1 \cap \mathfrak{b}_2 \subsetneq \mathfrak{b}_1$ i $\mathfrak{b}_1 \cap \mathfrak{b}_2 \subsetneq \mathfrak{b}_2$.

**(1)** Prvo pretpostavimo da je $\mathfrak{b}_1 \cap \mathfrak{b}_2 \neq \{0\}$. Označimo sa $\mathfrak{n}$ skup svih nilpotentnih elemenata od $\mathfrak{g}$ sadržanih u $\mathfrak{b}_1 \cap \mathfrak{b}_2$ :

$$\mathfrak{n} = \{x \in \mathfrak{b}_1 \cap \mathfrak{b}_2;\ ad_{\mathfrak{g}}\, x \text{ je nilpotentan operator}\}.$$

Po pretpostavci je $\mathfrak{b}_1$ standardna Borelova podalgebra od $\mathfrak{g}$, tj. postoje Cartanova podalgebra $\mathfrak{h}$ od $\mathfrak{g}$ i baza $B$ sistema korijena $R = R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ takvi da je

$$\mathfrak{b}_1 = \mathfrak{b}(B) = \mathfrak{h} \dot{+} \mathfrak{n}(B), \qquad \mathfrak{n}(B) = \sum_{\alpha \in R_+(B)} \dot{+}\, \mathfrak{g}_\alpha.$$

Tada je $\mathfrak{n}(B)$ skup svih nilpotentnih elemenata od $\mathfrak{g}$ sadržanih u $\mathfrak{b}_1$. Prema tome je $\mathfrak{n} = \mathfrak{n}(B) \cap \mathfrak{b}_2$. Time je dokazano da je $\mathfrak{n}$ potprostor od $\mathfrak{b}_1 \cap \mathfrak{b}_2$. Dokažimo da je $\mathfrak{n}$ ideal u Liejevoj algebri $\mathfrak{b}_1 \cap \mathfrak{b}_2$. Doista, neka su $x \in \mathfrak{b}_1 \cap \mathfrak{b}_2$ i $y \in \mathfrak{n}$. Tada je

$$ad_{\mathfrak{g}}\,[x, y] = [ad_{\mathfrak{g}}\, x, ad_{\mathfrak{g}}\, y] \in [ad_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{b}_1 \cap \mathfrak{b}_2), ad_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{b}_1 \cap \mathfrak{b}_2)].$$

Liejeva algebra $\mathfrak{b}_1 \cap \mathfrak{b}_2$ je rješiva, pa je i Liejeva podalgebra $ad_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{b}_1 \cap \mathfrak{b}_2)$ Liejeve algebre $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ rješiva. Po Liejevom teoremu 1.2.10. ta Liejeva algebra stabilizira neku zastavu u $\mathfrak{g}$, tj. postoji baza od $\mathfrak{g}$ u kojoj svi operatori $ad_{\mathfrak{g}}\, z$, $z \in \mathfrak{b}_1 \cap \mathfrak{b}_2$, imaju gornje trokutaste matrice. No tada su svi njihovi komutatori nilpotentni. Prema tome je $ad_{\mathfrak{g}}\,[x, y]$ nilpotentan operator, tj. $[x, y] \in \mathfrak{n}$. Time je dokazano da je $\mathfrak{n}$ ideal u Liejevoj algebri $\mathfrak{b}_1 \cap \mathfrak{b}_2$.

Imamo dvije mogućnosti:

**(1a)** $\mathfrak{n} \neq \{0\}$. Stavimo tada $\mathfrak{k} = N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{n})$. Budući da $\mathfrak{n}$ nije ideal u $\mathfrak{g}$, jer po tvrdnji $(a)$ propozicije 1.3.2. svaki je ideal poluproste Liejeve algebre i sam poluprosta Liejeva algebra, vrijedi $\mathfrak{k} \neq \mathfrak{g}$.

Promatrajmo sada reprezentaciju $\pi$ od $\mathfrak{n}$ koju na kvocijentnom prostoru $\mathfrak{b}_1/(\mathfrak{b}_1 \cap \mathfrak{b}_2)$ inducira restrikcija $ad_{\mathfrak{b}_1}|\mathfrak{n}$ adjungirane reprezentacije Liejeve algebre $\mathfrak{b}_1$ :

$$\pi(x)(y + \mathfrak{b}_1 \cap \mathfrak{b}_2) = [x, y] + \mathfrak{b}_1 \cap \mathfrak{b}_2, \qquad x \in \mathfrak{n},\ y \in \mathfrak{b}_1.$$

Tada je svaki operator $\pi(x)$, $x \in \mathfrak{n}$, nilpotentan, pa po teoremu 1.2.6. postoji vektor u prostoru $\mathfrak{b}_1/(\mathfrak{b}_1 \cap \mathfrak{b}_2)$ različit od nule koji poništavaju svi operatori $\pi(x)$, $x \in \mathfrak{n}$. Dakle, postoji $y \in \mathfrak{b}_1$ takav da $y \notin \mathfrak{b}_1 \cap \mathfrak{b}_2$ i da je $[x, y] \in \mathfrak{b}_1 \cap \mathfrak{b}_2\ \ \forall x \in \mathfrak{n}$. No tada je $[x, y] \in [\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_1]$, pa kao i malo prije zaključujemo da je $[x, y]$ nilpotentan element od $\mathfrak{g}$ za svaki $x \in \mathfrak{n}$. To znači da je $[x, y] \in \mathfrak{n}\ \forall x \in \mathfrak{n}$. Prema tome, vrijedi $y \in N_{\mathfrak{b}_1}(\mathfrak{n}) = \mathfrak{b}_1 \cap \mathfrak{k}$. Budući da $y \notin \mathfrak{b}_1 \cap \mathfrak{b}_2$, dokazali smo da je $\mathfrak{b}_1 \cap \mathfrak{b}_2 \subsetneq \mathfrak{b}_1 \cap \mathfrak{k}$. Sasvim analogno, promatranjem reprezentacije $\mathfrak{n}$ na kvocijentnom prostoru $\mathfrak{b}_2/(\mathfrak{b}_1 \cap \mathfrak{b}_2)$, dokazuje se i da je $\mathfrak{b}_1 \cap \mathfrak{b}_2 \subsetneq \mathfrak{b}_2 \cap \mathfrak{k}$.

$\mathfrak{b}_1 \cap \mathfrak{k}$ i $\mathfrak{b}_2 \cap \mathfrak{k}$ su rješive podalgebre Liejeve algebre $\mathfrak{k}$. Neka su $\mathfrak{c}_1$ i $\mathfrak{c}_2$ Borelove podalgebre od $\mathfrak{k}$ koje ih sadrže. Imamo tada

$$\{0\} \neq \mathfrak{n} \subseteq \mathfrak{b}_1 \cap \mathfrak{b}_2 \subsetneq \mathfrak{b}_1 \cap \mathfrak{k} \subseteq \mathfrak{c}_1 \subseteq \mathfrak{k} \subsetneq \mathfrak{g}$$

i

$$\{0\} \neq \mathfrak{n} \subseteq \mathfrak{b}_1 \cap \mathfrak{b}_2 \subsetneq \mathfrak{b}_2 \cap \mathfrak{k} \subseteq \mathfrak{c}_2 \subseteq \mathfrak{k} \subsetneq \mathfrak{g}.$$

Kako je $\mathfrak{k} \subsetneq \mathfrak{g}$, po pretpostavci indukcije (i po zadatku 4.9.) postoji $\sigma \in \mathcal{E}(\mathfrak{g};\mathfrak{k}) \subseteq \mathcal{E}(\mathfrak{g})$ takav da je $\sigma(\mathfrak{c}_1) = \mathfrak{c}_2$. Neka je sada $\mathfrak{b}_3$ Borelova podalgebra od $\mathfrak{g}$ koja sadrži rješivu podalgebru $\mathfrak{c}_2 = \sigma(\mathfrak{c}_1)$. Tada je

$$\mathfrak{b}_1 \cap \mathfrak{b}_3 \supseteq \mathfrak{b}_1 \cap \mathfrak{c}_2 \supsetneq \mathfrak{b}_1 \cap \mathfrak{b}_2$$

pa po drugoj indukciji (silaznoj po $\dim(\mathfrak{b}_1 \cap \mathfrak{b}_2)$) postoji $\tau \in \mathcal{E}(\mathfrak{g})$ takav da je $\tau(\mathfrak{b}_3) = \mathfrak{b}_1$. No tada je

$$(\tau \circ \sigma)(\mathfrak{c}_1) = \tau(\mathfrak{c}_2) \subseteq \tau(\mathfrak{b}_3) = \mathfrak{b}_1,$$

a odatle

$$\mathfrak{b}_1 \cap (\tau \circ \sigma)(\mathfrak{b}_2) \supseteq (\tau \circ \sigma)(\mathfrak{c}_1) \cap (\tau \circ \sigma)(\mathfrak{b}_2) = (\tau \circ \sigma)(\mathfrak{c}_1 \cap \mathfrak{b}_2) \supseteq (\tau \circ \sigma)(\mathfrak{k} \cap \mathfrak{b}_2) \supsetneq (\tau \circ \sigma)(\mathfrak{b}_1 \cap \mathfrak{b}_2).$$

Dakle, $\dim \mathfrak{b}_1 \cap (\tau \circ \sigma)(\mathfrak{b}_2) > \dim \mathfrak{b}_1 \cap \mathfrak{b}_2$. Primijenimo li ponovo pretpostavku druge indukcije, slijedi da postoji $\rho \in \mathcal{E}(\mathfrak{g})$ takav da je $(\rho \circ \tau \circ \sigma)(\mathfrak{b}_2) = \mathfrak{b}_1$. Time je dokaz koraka indukcije proveden u slučaju kad je $\mathfrak{n} \neq \{0\}$.

**(1b)** $\mathfrak{n} = \{0\}$, tj. presjek $\mathfrak{b}_1 \cap \mathfrak{b}_2$ ne sadrži nijedan nilpotentan element od $\mathfrak{g}$ različit od nule. Prema propoziciji 4.3.4. ako je $x \in \mathfrak{b}_1 \cap \mathfrak{b}_2$ onda su i $x_s, x_n \in \mathfrak{b}_1 \cap \mathfrak{b}_2$. Po pretpostavci je $x_n = 0$, dakle, $x = x_s$ $\forall x \in \mathfrak{b}_1 \cap \mathfrak{b}_2$. Drugim riječima, presjek $\mathfrak{t} = \mathfrak{b}_1 \cap \mathfrak{b}_2$ je toralna podalgebra od $\mathfrak{g}$. Iskoristimo sada pretpostavku da je $\mathfrak{b}_1$ standardna Borelova podalgebra od $\mathfrak{g}$, tj. da je $\mathfrak{b}_1 = \mathfrak{b}(B) = \mathfrak{h} \dotplus \mathfrak{n}(B)$ za neku Cartanovu podalgebru $\mathfrak{h}$ od $\mathfrak{g}$ i neku bazu $B$ sistema korijena $R = R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$. Prema propoziciji 4.3.3. tada je $[\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_1] = \mathfrak{n}(B)$. Kako je $\mathfrak{t} \cap \mathfrak{n}(B) = \{0\}$, slijedi $N_{\mathfrak{b}_1}(\mathfrak{t}) = C_{\mathfrak{b}_1}(\mathfrak{t})$. Neka je $\mathfrak{c}$ Cartanova podalgebra Liejeve algebre $C_{\mathfrak{b}_1}(\mathfrak{t})$. Tada je $\mathfrak{c}$ nilpotentna i vrijedi $\mathfrak{t} \subseteq N_{C_{\mathfrak{b}_1}(\mathfrak{t})}(\mathfrak{c}) = \mathfrak{c}$. Tada je i $N_{\mathfrak{b}_1}(\mathfrak{c}) = \mathfrak{c}$, dakle, $\mathfrak{c}$ je Cartanova podalgebra od $\mathfrak{b}_1$ koja sadrži $\mathfrak{t}$. Prema teoremu 4.4.4. postoji $\sigma \in \mathcal{E}(\mathfrak{g}; \mathfrak{b}_1) \subseteq \mathcal{E}(\mathfrak{g})$ takav da je $\sigma(\mathfrak{c}) = \mathfrak{h}$. Kako je $\sigma \in \mathcal{E}(\mathfrak{g}; \mathfrak{b}_1)$, vrijedi $\sigma(\mathfrak{b}_1) = \mathfrak{b}_1$. Stoga je $\mathfrak{b}_1 \cap \sigma(\mathfrak{b}_2) = \sigma(\mathfrak{b}_1) \cap \sigma(\mathfrak{b}_2) = \sigma(\mathfrak{b}_1 \cap \mathfrak{b}_2)$, a vrijedi i $\sigma(\mathfrak{t}) \subseteq \sigma(\mathfrak{c}) = \mathfrak{h}$. Prema tome, zamijenimo li $\mathfrak{b}_2$ sa $\sigma(\mathfrak{b}_2)$ vidimo da možemo pretpostavljati da je $\mathfrak{t} \subseteq \mathfrak{h}$.

Pretpostavimo najprije da je $\mathfrak{t} = \mathfrak{h}$. Očito je $\mathfrak{b}_2 \supsetneq \mathfrak{h}$, prema tome, postoji $\alpha \in R_-(B)$ takav da je $\mathfrak{g}_\alpha \subseteq \mathfrak{b}_2$. Prema teoremu 4.4.2. refleksija $\sigma_\alpha$ na $\mathfrak{h}$ produljuje se do automorfizma $\tau_\alpha \in \mathcal{E}(\mathfrak{g})$. Tada je nužno $\tau_\alpha(\mathfrak{g}_\beta) = \mathfrak{g}_{\sigma_\alpha \beta}$ $\forall \beta \in R$. Posebno je $\tau_\alpha(\mathfrak{g}_\alpha) = \mathfrak{g}_{-\alpha} \subseteq \mathfrak{b}(B)$. Odatle slijedi da za Borelovu podalgebru $\mathfrak{b}_3 = \tau_\alpha(\mathfrak{b}_2)$ vrijedi

$$\mathfrak{b}_1 \cap \mathfrak{b}_3 \supseteq \mathfrak{h} \dotplus \mathfrak{g}_{-\alpha} \supsetneq \mathfrak{h} = \mathfrak{b}_1 \cap \mathfrak{b}_2.$$

Primjena pretpostavke silazne indukcije daje da postoji $\tau \in \mathcal{E}(\mathfrak{g})$ takav da je $\tau(\mathfrak{b}_3) = \mathfrak{b}_1$. To znači da je $(\tau \circ \tau_\alpha)(\mathfrak{b}_2) = \mathfrak{b}_1$, pa je i u ovom slučaju proveden dokaz koraka prve indukcije.

Pretpostavimo sada da je $\mathfrak{t} \subsetneq \mathfrak{h}$. Tada ili $\mathfrak{b}_2$ centralizira $\mathfrak{t}$ ili ne.

Ako je $\mathfrak{b}_2 \subseteq C_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{t})$, moći ćemo primijeniti pretpostavku prve indukcije jer je $C_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{t}) \subsetneq \mathfrak{g}$; naime, inače bi bilo $\mathfrak{t} \subseteq C_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g}) = Z(\mathfrak{g}) = \{0\}$, a to nije jer je po pretpostavci $\mathfrak{t} = \mathfrak{b}_1 \cap \mathfrak{b}_2 \neq \{0\}$. Kako je $\mathfrak{h} \subseteq C_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{t})$, postoji Borelova podalgebra $\mathfrak{b}_3$ od $C_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{t})$ koja sadrži $\mathfrak{h}$. Primjena spomenute pretpostavke indukcije daje nam da postoji $\sigma \in \mathcal{E}(\mathfrak{g}; C_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{t})) \subseteq \mathcal{E}(\mathfrak{g})$ takav da je $\sigma(\mathfrak{b}_2) = \mathfrak{b}_3$. No tada je ujedno $\mathfrak{b}_3$ Borelova podalgebra od $\mathfrak{g}$ i ona sadrži $\mathfrak{h}$. Stoga je $\mathfrak{b}_1 \cap \mathfrak{b}_3 \supseteq \mathfrak{h} \supsetneq \mathfrak{t} = \mathfrak{b}_1 \cap \mathfrak{b}_2$, pa pretpostavka druge indukcije daje da postoji $\tau \in \mathcal{E}(\mathfrak{g})$ takav da je $\tau(\mathfrak{b}_3) = \mathfrak{b}_1$. Dakle, $(\tau \circ \sigma)(\mathfrak{b}_2) = \mathfrak{b}_1$, pa je i u ovom slučaju dokazan korak prve indukcije.

Ostaje nam druga mogućnost, tj. da $\mathfrak{b}_2$ ne centralizira $\mathfrak{t}$, odnosno, $\mathfrak{b}_2 \not\subseteq C_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{t})$. Tada postoji simultani svojstveni vektor $x \in \mathfrak{b}_2$, $x \neq 0$, za sve operatore iz $ad\,\mathfrak{t}$. Očito postoje $t \in \mathfrak{t}$ i $\lambda \in \mathbb{Q}$ takvi da je $\lambda > 0$ i $[t, x] = \lambda x$. Stavimo

$$R^+ = \{\alpha \in R;\ \alpha(t) \in \mathbb{Q},\ \alpha(t) > 0\}, \qquad \mathfrak{s} = \mathfrak{h} \dotplus \mathfrak{n}(R^+), \qquad \mathfrak{n}(R^+) = \sum_{\alpha \in R^+} \dotplus\, \mathfrak{g}_\alpha.$$

Tada je očito $\mathfrak{s}$ Liejeva podalgebra od $\mathfrak{g}$. Nadalje, vrijedi $[\mathfrak{h}, \mathfrak{n}(R^+)] = \mathfrak{n}(R^+)$, dakle, $[\mathfrak{s}, \mathfrak{s}] = \mathfrak{n}(R^+)$. Međutim, Liejeva algebra $\mathfrak{n}(R^+)$ je nilpotentna. Dokaz te činjenice je sasvim analogan dokazu tvrdnje iz propozicije 4.3.3. da je Liejeva algebra $\mathfrak{n}(B)$ nilpotentna, samo se sada umjesto $ht_B\alpha$ za $\alpha \in R_+(B)$ koristi $\alpha(t)$ za $\alpha \in R^+$. Prema zadatku 1.13. slijedi da je Liejeva algebra $\mathfrak{s}$ rješiva. Neka je $\mathfrak{b}_3$ Borelova podalgebra od $\mathfrak{g}$ koja sadrži $\mathfrak{s}$. Sada imamo

$$\mathfrak{b}_3 \cap \mathfrak{b}_2 \supseteq \mathfrak{t} \dot{+} Kx \supsetneq \mathfrak{t} = \mathfrak{b}_1 \cap \mathfrak{b}_2 \qquad \Longrightarrow \qquad \dim(\mathfrak{b}_3 \cap \mathfrak{b}_2) > \dim(\mathfrak{b}_1 \cap \mathfrak{b}_2).$$

Slično imamo

$$\mathfrak{b}_3 \cap \mathfrak{b}_1 \supseteq \mathfrak{h} \supsetneq \mathfrak{t} = \mathfrak{b}_1 \cap \mathfrak{b}_2 \qquad \Longrightarrow \qquad \dim(\mathfrak{b}_3 \cap \mathfrak{b}_1) > \dim(\mathfrak{b}_1 \cap \mathfrak{b}_2).$$

Stoga po pretpostavci druge (silazne) indukcije slijedi da postoji $\sigma \in \mathcal{E}(\mathfrak{g})$ takav da je $\sigma(\mathfrak{b}_1) = \mathfrak{b}_3$. No tada je $\mathfrak{b}_3$ standardna Borelova podalgebra od $\mathfrak{g}$ u odnosu na Cartanovu podalgebru $\sigma(\mathfrak{h})$. Sada je pretpostavka druge (silazne) indukcije primjenjiva i na Borelove podalgebre $\mathfrak{b}_2$ i $\mathfrak{b}_3$, pa postoji $\tau \in \mathcal{E}(\mathfrak{g})$ takav da je $\tau(\mathfrak{b}_3) = \mathfrak{b}_2$. Sada je $(\tau \circ \sigma)(\mathfrak{b}_1) = \mathfrak{b}_2$ i time je i u ovom slučaju proveden dokaz koraka prve indukcije.

**(2)** Ostaje nam slučaj $\mathfrak{b}_1 \cap \mathfrak{b}_2 = \{0\}$. Tada je $\dim \mathfrak{g} \geq \dim \mathfrak{b}_1 + \dim \mathfrak{b}_2$. Budući da je Borelova podalgebra $\mathfrak{b}_1$ standardna, znamo da je

$$\dim \mathfrak{b}_1 = \dim \mathfrak{h} + \frac{1}{2}|R(\mathfrak{g},\mathfrak{h})| = \frac{1}{2}(2\dim \mathfrak{h} + |R(\mathfrak{g},\mathfrak{h})|) > \frac{1}{2}(\dim \mathfrak{h} + |R(\mathfrak{g},\mathfrak{h})|) = \frac{1}{2}\dim \mathfrak{g}.$$

Slijedi

$$\dim \mathfrak{b}_2 < \frac{1}{2}\dim \mathfrak{g}. \tag{4.7}$$

Neka je $\mathfrak{t}$ maksimalna u skupu svih toralnih podalgebri od $\mathfrak{g}$ sadržanih u $\mathfrak{b}_2$. Pretpostavimo da je $\mathfrak{t} = \{0\}$. To znači da se $\mathfrak{b}_2$ sastoji od nilpotentnih elemenata, dakle, po Engelovom teoremu 1.2.4. Liejeva algebra $\mathfrak{b}_2$ je nilpotentna. S druge strane, prema propoziciji 4.3.1. je $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{b}_2) = \mathfrak{b}_2$. No to znači da je $\mathfrak{b}_2$ Cartanova podalgebra od $\mathfrak{g}$, a to je nemoguće jer je po korolaru 4.2.5. svaka Cartanova podalgebra od $\mathfrak{g}$ maksimalna toralna. Ova kontradikcija pokazuje da je pretpostavka $\mathfrak{t} = \{0\}$ pogrešna, odnosno, nužno je $\mathfrak{t} \neq \{0\}$. Neka je sada $\mathfrak{h}'$ Cartanova podalgebra od $\mathfrak{g}$ koja sadrži $\mathfrak{t}$. Neka je $B'$ bilo koja baza sistema korijena $R' = R(\mathfrak{g},\mathfrak{h}')$. Tada je $\mathfrak{b}_2 \cap \mathfrak{b}(B') \supseteq \mathfrak{t} \neq \{0\}$. Po prvom dijelu dokaza tada je $\mathfrak{b}_2$ $\mathcal{E}(\mathfrak{g})-$konjugirana standardnoj Borelovoj podalgebri $\mathfrak{b}(B')$, a odatle je kao i malo prije

$$\dim \mathfrak{b}_2 = \dim \mathfrak{b}(B') = \dim \mathfrak{h}' + \frac{1}{2}|R(\mathfrak{g},\mathfrak{h}')| > \frac{1}{2}\dim \mathfrak{g}.$$

No to je u suprotnosti s nejednakošću (4.7). Ova kontradikcija pokazuje da je pretpostavka $\mathfrak{b}_1 \cap \mathfrak{b}_2 = \{0\}$ nemoguća. Time je teorem u potpunosti dokazan.

### 4.4.3 Konjugiranost Cartanovih podalgebri opće Liejeve algebre

**Teorem 4.4.6.** *Neka su $\mathfrak{h}_1$ i $\mathfrak{h}_2$ Cartanove podalgebre Liejeve algebre $\mathfrak{g}$. Tada postoji $\omega \in \mathcal{E}(\mathfrak{g})$ takav da je $\omega(\mathfrak{h}_1) = \mathfrak{h}_2$.*

**Dokaz:** Liejeve podalgebre $\mathfrak{h}_1$ i $\mathfrak{h}_2$ su nilpotentne, dakle, rješive, pa postoje Borelove podalgebre $\mathfrak{b}_1$ i $\mathfrak{b}_2$ takve da je $\mathfrak{h}_1 \subseteq \mathfrak{b}_1$ i $\mathfrak{h}_2 \subseteq \mathfrak{b}_2$. Po teoremu 4.4.5. postoji $\sigma \in \mathcal{E}(\mathfrak{g})$ takav da je $\sigma(\mathfrak{b}_1) = \mathfrak{b}_2$. Sada su $\sigma(\mathfrak{h}_1)$ i $\mathfrak{h}_2$ Cartanove podalgebre od $\mathfrak{g}$ koje su sadržane u $\mathfrak{b}_2$, dakle, one su Cartanove podalgebre rješive algebre $\mathfrak{b}_2$. Prema teoremu 4.4.4. postoji $\tau \in \mathcal{E}(\mathfrak{g};\mathfrak{b}_2) \subseteq \mathcal{E}(\mathfrak{g})$ takav da je $\tau(\sigma(\mathfrak{h}_1)) = \mathfrak{h}_2$. Dakle, za $\omega = \tau \circ \sigma \in \mathcal{E}(\mathfrak{g})$ vrijedi $\omega(\mathfrak{h}_1) = \mathfrak{h}_2$.

# Poglavlje 5

# UNIVERZALNA OMOTAČKA ALGEBRA

## 5.1 Tenzorski produkt vektorskih prostora

Neka su $V_1, \ldots, V_n$ vektorski prostori nad poljem $K$. **Tenzorski produkt** prostora $V_1, \ldots, V_n$ je uređen par $(W, \tau)$ koji ima sljedeća svojstva:

$(T1)$ $W$ je vektorski prostor nad poljem $K$.

$(T2)$ $\tau$ je $n-$multilinearno preslikavanje sa $V_1 \times \cdots \times V_n$ u $W$.

$(T3)$ Za svaki vektorski prostor $U$ nad poljem $K$ i za svako $n-$multilinearno preslikavanje $\sigma : V_1 \times \cdots \times V_n \to U$ postoji jedinstven linearan operator $S : W \to U$ takav da je $\sigma = S \circ \tau$.

Aksiom $(T3)$ zove se **univerzalno svojstvo** u odnosu na $n-$multilinearna preslikavanja.

Tenzorski produkt postoji i jedinstven je do na izomorfizam:

**Teorem 5.1.1.** *Neka su $V_1, \ldots, V_n$ vektorski prostori nad poljem $K$.*

$(a)$ *Postoji tenzorski produkt vektorskih prostora $V_1, \ldots, V_n$.*

$(b)$ *Ako su $(W, \tau)$ i $(U, \sigma)$ tenzorski produkti prostora $V_1, \ldots, V_n$, jedinstven lineran operator $S : W \to U$ sa svojstvom $\sigma = S \circ \tau$ je izomorfizam vektorskih prostora.*

**Dokaz:** $(a)$ Za $i \in \{1, \ldots, n\}$ neka je $B_i = \{e^{(i)}_{j_i};\ j_i \in J_i\}$ baza vektorskog prostora $V_i$. Neka je $W$ vektorski prostor nad poljem $K$ s bazom $\{e_{j_1 \cdots j_n};\ (j_1, \ldots, j_n) \in J_1 \times \cdots \times J_n\}$. Neka je $\tau : V_1 \times \cdots \times V_n \to W$ jedinstveno $n-$multilinearno preslikavanje takvo da je

$$\tau(e^{(1)}_{j_1}, \ldots, e^{(n)}_{j_n}) = e_{j_1 \cdots j_n} \qquad \forall (j_1, \ldots, j_n) \in J_1 \times \cdots \times J_n,$$

tj.

$$\tau\left(\sum_{j_1 \in J_1} \alpha^{(1)}_{j_1} e^{(1)}_{j_1}, \ldots, \sum_{j_n \in J_n} \alpha^{(n)}_{j_n} e^{(n)}_{j_n}\right) = \sum_{(j_1,\ldots,j_n) \in J_1 \times \cdots \times J_n} \alpha^{(1)}_{j_1} \cdots \alpha^{(n)}_{j_n} e_{j_1 \cdots j_n}, \quad \alpha^{(i)}_{j_i} \in K.$$

Pretpostavimo sada da je $\sigma$ $n-$multilinearno preslikavanje sa $V_1 \times \cdots \times V_n$ u neki vektorski prostor $U$ nad poljem $K$. Definirajmo linearan operator $S : W \to U$ njegovim djelovanjem na bazu $\{e_{j_1 \cdots j_n};\ (j_1, \ldots, j_n) \in J_1 \times \cdots \times J_n\}$ prostora $W$ :

$$S(e_{j_1 \cdots j_n}) = \sigma(e^{(1)}_{j_1}, \ldots, e^{(n)}_{j_n}), \qquad (j_1, \ldots, j_n) \in J_1 \times \cdots \times J_n.$$

Tada se $n-$multilinearna preslikavanja $S\circ\tau$ i $\sigma$ sa $V_1\times\cdots\times V_n$ u $U$ podudaraju na svim $n-$torkama $(e_{j_1}^{(1)},\dots,e_{j_n}^{(n)})$, pa slijedi $S\circ\tau=\sigma$. Nadalje, jedinstvenost linearnog operatora $S$ s tim svojstvom neposredno slijedi iz činjenice da je $\{e_{j_1\cdots j_n};\ (j_1,\dots,j_n)\in J_1\times\cdots\times J_n\}$ baza vektorskog prostora $W$.

($b$) Prema svojstvu ($T3$) za tenzorski produkt $(U,\sigma)$ postoji linearan operator $T:U\to W$ takav da je $\tau=T\circ\sigma$. Tada je $T\circ S:W\to W$ linearan operator i vrijedi

$$(T\circ S)\circ\tau=T\circ(S\circ\tau)=T\circ\sigma=\tau.$$

Za jedinični operator $I_W:W\to W$ također vrijedi $I_W\circ\tau=\tau$. Sada iz jedinstvenosti u svojstvu ($T3$) tenzorskog produkta $(W,\tau)$ slijedi da je $T\circ S=I_W$. Sasvim analogno je

$$(S\circ T)\circ\sigma=\sigma=I_U\circ\sigma$$

pa iz jedinstvenosti u svojstvu ($T3$) tenzorskog produkta $(U,\sigma)$ slijedi da je $S\circ T=I_U$. To pokazuje da su $S:W\to U$ i $T:U\to W$ međusobno inverzni izomorfizmi vektorskih prostora.

**Propozicija 5.1.2.** *Neka su $V_1,\dots,V_n$ vektorski prostori nad poljem $K$ i neka je $(W,\tau)$ njihov tenzorski produkt.*

($a$) *Za svaki $i\in\{1,\dots,n\}$ neka je $S_i\subseteq V_i$ podskup koji razapinje vektorski prostor $V_i$. Tada skup $\tau(S_1\times\cdots\times S_n)$ razapinje vektorski prostor $W$.*

($b$) *Za svaki $i\in\{1,\dots,n\}$ neka je $S_i$ linearno nezavisan podskup vektorskog prostora $V_i$. Tada je $\tau(S_1\times\cdots\times S_n)$ linearno nezavisan podskup od $W$.*

($c$) *Za svaki $i\in\{1,\dots,n\}$ neka je $B_i=\{e_{j_i}^{(i)};\ j_i\in J_i\}$ baza vektorskog prostora $V_i$. Tada je*

$$\tau(B_1\times\cdots\times B_n)=\{\tau(e_{j_1}^{(1)},\dots,e_{j_n}^{(n)});\ (j_1,\dots,j_n)\in J_1\times\cdots\times J_n\}$$

*baza vektorskog prostora $W$.*

**Dokaz:** ($a$) Neka je $V$ potprostor od $W$ razapet skupom $\tau(S_1\times\cdots\times S_n)$. Budući da je preslikavanje $\tau$ $n-$multilinearno i budući da skup $S_i$ razapinje prostor $V_i$ za $i=1,\dots,n$, očito je $\tau(V_1\times\cdots\times V_n)$ sadržano u potprostoru $V$. Prema tome, preslikavanje $\tau$ možemo promatrati i kao $n-$multilinearno preslikavanje sa $V_1\times\cdots\times V_n$ u $V$. Prema svojstvu ($T3$) tenzorskog produkta $(W,\tau)$ postoji linearan operator $S:W\to V$ takav da je $\tau=S\circ\tau$. Operator $S$ možemo promatrati i kao linearan operator sa $W$ u $W$, pa zbog jedinstvenosti u ($T3$) slijedi da je $S=I_W$. No to znači da je $V=W$.

($c$) Kao u dokazu egzistencije tenzorskog produkta neka je $V$ vektorski prostor nad poljem $K$ s bazom $\{e_{j_1\cdots j_n};\ (j_1,\dots,j_n)\in J_1\times\cdots\times J_n\}$ i neka je $\sigma:V_1\times\cdots\times V_n\to V$ jedinstveno $n-$multilinearno preslikavanje takvo da je

$$\sigma(e_{j_1}^{(1)},\dots,e_{j_n}^{(n)})=e_{j_1\cdots j_n}\qquad\forall(j_1,\dots,j_n)\in J_1\times\cdots\times J_n.$$

Neka je $S:W\to V$ jedinstveni linearan operator takav da je $\sigma=S\circ\tau$. Tada je

$$S(\tau(e_{j_1}^{(1)},\dots,e_{j_n}^{(n)})=(S\circ\tau)(e_{j_1}^{(1)},\dots,e_{j_n}^{(n)})=\sigma(e_{j_1}^{(1)},\dots,e_{j_n}^{(n)})=e_{j_1\cdots j_n}.$$

Prema tome, linearan operator $S$ preslikava podskup $\tau(B_1\times\cdots\times B_n)$ prostora $W$ u linearno nezavisan podskup $\{e_{j_1\cdots j_n};\ (j_1,\dots,j_n)\in J_1\times\cdots\times J_n\}$ prostora $V$. Odatle slijedi da je i skup $\tau(B_1\times\cdots\times B_n)$ linearno nezavisan. Kako prema ($a$) taj skup razapinje prostor $W$ zaključujemo da je on baza vektorskog prostora $W$.

Tvrdnja ($b$) slijedi neposredno iz ($c$) jer svaki $S_i$ je podskup neke baze $B_i$ od $V_i$.

**Propozicija 5.1.3.** *Neka je $(W, \tau)$ tenzorski produkt prostora $V_1, \dots, V_n$ i $(W', \tau')$ tenzorski produkt prostora $V_1', \dots, V_n'$. Nadalje, neka su $A_i : V_i \to V_i'$ za $i = 1, \dots, n$ linearni operatori. Tada postoji jedinstven linearan operator $A : W \to W'$ takav da je $A \circ \tau = \tau' \circ (A_1 \times \cdots \times A_n)$, tj.*

$$A(\tau(v_1, \dots, v_n)) = \tau'(A_1 v_1, \dots, A_n v_n) \qquad \forall v_1 \in V_1, \dots, \forall v_n \in V_n.$$

**Dokaz:** Preslikavanje $\sigma = \tau' \circ (A_1 \times \cdots \times A_n)$, tj.

$$\sigma : (v_1, \dots, v_n) \mapsto \tau'(A_1, v_1, \dots, A_n v_n), \qquad (v_1, \dots, v_n) \in V_1 \times \cdots \times V_n,$$

je $n-$multilinearno preslikavanje sa $V_1 \times \cdots \times V_n$ u prostor $W'$. Stoga postoji jedinstven linearan operator $A : W \to W'$ takav da je $\sigma = A \circ \tau$.

**Propozicija 5.1.4.** *Neka su $m, n_1, \dots, n_m \in \mathbb{N}$ i neka su $V_j^i$ za $j = 1, \dots, n_i$ i za $i = 1, \dots, m$ vektorski prostori nad poljem $K$. Nadalje, neka je za $i = 1, \dots, m$ $(W^i, \tau^i)$ tenzorski produkt vektorskih prostora $V_1^i, \dots, V_{n_i}^i$ i neka je $(W, \tau)$ tenzorski produkt vektorskih prostora $W^1, \dots, W^m$. Tada je $(W, \tau \circ (\tau^1 \times \cdots \times \tau^m))$ tenzorski produkt vektorskih prostora $V_1^1, \dots, V_{n_1}^1, \dots\dots, V_1^m, \dots, V_{n_m}^m$.*

**Dokaz:** Dokaz ćemo provesti u slučaju $m = 2$. Dokaz u općem slučaju sasvim je analogan, samo uz kompliciranije pisanje.

Dakle, pretpostavljamo da su zadani vektorski prostori $V_1, \dots, V_n, V_1', \dots, V_m'$ nad poljem $K$, da je $(W, \tau)$ tenzorski produkt prostora $V_1, \dots, V_n$, da je $(W', \tau')$ tenzorski produkt prostora $V_1', \dots, V_m'$ i da je $(U, \sigma)$ tenzorski produkt prostora $W$ i $W'$. Treba dokazati da je $(U, \sigma \circ (\tau \times \tau'))$ tenzorski produkt prostora $V_1, \dots, V_n, V_1', \dots, V_m'$. To znači da treba dokazati da $(n+m)-$multilinearno preslikavanje

$$\sigma \circ (\tau \times \tau') : V_1 \times \cdots \times V_n \times V_1' \times \cdots \times V_m' \to U,$$

tj.

$$(v_1, \dots, v_n, v_1', \dots, v_m') \mapsto \sigma(\tau(v_1, \dots, v_n), \tau'(v_1', \dots, v_m')),$$

ima univerzalno svojstvo $(T3)$.

Neka je $V$ vektorski prostor i neka je $\omega : V_1 \times \cdots \times V_n \times V_1' \times \cdots \times V_m' \to V$ $(n+m)-$multilinearno preslikavanje. Za proizvoljno odabrane i fiksirane $v_1' \in V_1', \dots, v_m' \in V_m'$ promatrajmo preslikavanje

$$\omega_{v_1', \dots, v_m'} : (v_1, \dots, v_n) \mapsto \omega(v_1, \dots, v_n, v_1', \dots, v_m'), \qquad (v_1, \dots, v_n) \in V_1 \times \cdots \times V_n.$$

To je $n-$multilinearno preslikavanje sa $V_1 \times \cdots \times V_n$ u $V$. Kako je $(W, \tau)$ tenzorski produkt vektorskih prostora $V_1, \dots, V_n$, postoji jedinstven linearan operator $A(v_1', \dots, v_m') : W \to V$ takav da je $\omega_{v_1', \dots, v_m'} = A(v_1', \dots, v_m') \circ \tau$, tj. da vrijedi

$$\omega(v_1, \dots, v_n, v_1', \dots, v_m') = [A(v_1', \dots, v_m') \circ \tau](v_1, \dots, v_n), \qquad v_1 \in V_1, \dots, v_n \in V_n.$$

Ovu konstrukciju možemo provesti za bilo koju $m-$torku $(v_1', \dots, v_m') \in V_1' \times \circ \times V_m'$. Iz jedinstvenosti se lako provjerava da je $(v_1', \dots, v_m') \mapsto A(v_1', \dots, v_m')$ $m-$multilinearno preslikavanje sa $V_1' \times \cdots \times V_m'$ u vektorski prostor $L(W, V)$ svih linearnih operatora sa $W$ u $V$. Budući da je $(W', \tau')$ tenzorski produkt prostora $V_1', \dots, V_m'$, postoji (jedinstven) linearan operator $B : W' \to L(W, V)$ takav da je

$$A(v_1', \dots, v_m') = (B \circ \tau')(v_1', \dots, v_m') \qquad \forall v_1' \in V_1', \dots, \forall v_m' \in V_m'.$$

Promatrajmo sada preslikavanje $\gamma : W \times W' \to V$ definirano sa

$$\gamma(w, w') = B(w')w, \qquad w \in W, \ w' \in W'.$$

Tada je preslikavanje $\gamma$ bilinearno, pa kako je $(U,\sigma)$ tenzorski produkt prostora $W$ i $W'$, postoji linearan operator $C : U \to V$ takav da je $\gamma = C \circ \sigma$. Sada za $(n+m)-$multilinearno preslikavanje

$$C \circ [\sigma \circ (\tau \times \tau')] : V_1 \times \cdots \times V_n \times V_1' \times \cdots \times V_m' \to V$$

i za proizvoljne $v_1 \in V_1, \ldots, v_n \in V_n, v_1' \in V_1', \ldots, v_m' \in V_m'$ imamo redom

$$(C \circ [\sigma \circ (\tau \times \tau')](v_1, \ldots, v_n, v_1', \ldots, v_m') = (C \circ \sigma)(\tau(v_1, \ldots, v_n), \tau'(v_1', \ldots, v_m')) =$$

$$= \gamma(\tau(v_1, \ldots, v_n), \tau'(v_1', \ldots, v_m')) = [B(\tau'(v_1', \ldots, v_m'))](\tau(v_1, \ldots, v_n))$$

$$= A(v_1', \ldots, v_m')(\tau(v_1, \ldots, v_n)) = [A(v_1', \ldots, v_m') \circ \tau](v_1, \ldots, v_m) = \omega(v_1, \ldots, v_n, v_1', \ldots, v_m').$$

Prema tome, linearan operator $C : U \to V$ ima svojstvo $\omega = C \circ [\sigma \circ (\tau \times \tau')]$.

Jedinstvenost takvog linearnog operatora $C$ slijedi iz njegove potpune određenosti na skupu $\sigma(\tau(V_1 \times \cdots \times V_n) \times \tau'(V_1' \times \cdots \times V_m'))$, jer taj skup prema tvrdnji $(a)$ propozicije 5.1.2. razapinje vektorski prostor $U$.

Ako je $(W,\tau)$ tenzorski produkt vektorskih prostora $V_1, \ldots, V_n$, uobičajeno je pisati

$$W = V_1 \otimes \cdots \otimes V_n \qquad \text{i} \qquad \tau(v_1, \ldots, v_n) = v_1 \otimes \cdots \otimes v_n, \quad v_1 \in V_1, \ \ldots, v_n \in V_n.$$

Uz takve oznake imamo prema dokazanim propozicijama sljedeće činjenice:

(1) $(v_1, \ldots, v_n) \mapsto v_1 \otimes \cdots \otimes v_n$ je $n-$multilinearno preslikavanje sa $V_1 \times \cdots \times V_n$ u $V_1 \otimes \cdots \otimes V_n$.

(2) Za svako $n-$multilinearno preslikavanje $\sigma : V_1 \times \cdots \times V_n \to U$ postoji jedinstven linearan operator $S : V_1 \otimes \cdots \otimes V_n \to U$ takav da je

$$S(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) = \sigma(v_1, \ldots, v_n) \qquad \forall (v_1, \ldots, v_n) \in V_1 \times \cdots \times V_n.$$

(3) Vektorski prostor $V_1 \otimes \cdots \otimes V_n$ razapet je vektorima oblika $v_1 \otimes \cdots \otimes v_n$, $v_1 \in V_1, \ldots, v_n \in V_n$.

(4) Ako je $\{e_j^{(i)};\ j \in J_i\}$ baza prostora $V_i$ za svaki $i = 1, \ldots, n$, onda je

$$\{e_{j_1}^{(1)} \otimes \cdots \otimes e_{j_n}^{(n)};\ (j_1, \ldots, j_n) \in J_1 \times \cdots \times J_n\}$$

baza prostora $V_1 \otimes \cdots \otimes V_n$.

(5) Ako je $S_i$ linearno nezavisan podskup od $V_i$ za svaki $i = 1, \ldots, n$, onda je

$$\{v_1 \otimes \cdots \otimes v_n;\ v_i \in S_i,\ i = 1, \ldots, n\}$$

linearno nezavisan podskup od $V_1 \otimes \cdots \otimes V_n$.

(6) Ako su $A_i : V_i \to V_i'$ linearni operatori za $i = 1, \ldots, n$, postoji jedinstven linearan operator $A : V_1 \otimes \cdots \otimes V_1 \to V_1' \otimes \cdots \otimes V_n'$ takav da je

$$A(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) = A_1 v_1 \otimes \cdots \otimes A_n v_n \qquad \forall v_1 \in V_1, \ \ldots, \forall v_n \in V_n.$$

Pisat ćemo tada $A = A_1 \otimes \cdots \otimes A_n$.

(7) Moguća je identifikacija

$$(V_1^1 \otimes \cdots \otimes V_{n_1}^1) \otimes \cdots \otimes (V_1^m \otimes \cdots \otimes V_{n_m}^m) = V_1^1 \otimes \cdots \otimes V_{n_1}^1 \otimes \cdots \otimes V_1^m \otimes \cdots \otimes V_{n_m}^m$$

i pri toj identifikaciji je

$$(v_1^1 \otimes \cdots \otimes v_{n_1}^1) \otimes \cdots \otimes (v_1^m \otimes \cdots \otimes v_{n_m}^m) = v_1^1 \otimes \cdots \otimes v_{n_1}^1 \otimes \cdots \otimes v_1^m \otimes \cdots \otimes v_{n_m}^m, \qquad \forall v_j^i \in V_j^i.$$

Promatrajmo sada vektorski prostor $V$ nad poljem $K$ i neka je $L$ proširenje polja $K$. Tada polje $L$ možemo shvaćati kao vektorski prostor nad poljem $K$, pa možemo formirati vektorski prostor $L \otimes V$ nad poljem $K$. Za $\lambda \in L$ promatrajmo preslikavanje $\sigma_\lambda : L \times V \to L \otimes V$ definirano sa

$$\sigma_\lambda(\mu, v) = \lambda\mu \otimes v, \qquad \mu \in L, \ v \in V.$$

Tada je očito preslikvanje $\sigma_\lambda$ $K-$bilinearno. Stoga postoji jedinstven $K-$linearan operator $S_\lambda : L \otimes V \to L \otimes V$, takav da je

$$S_\lambda(\mu \otimes v) = \lambda\mu \otimes v \qquad \forall \mu \in L, \ \forall v \in V.$$

**Zadatak 5.1.** *Uz uvedene oznake dokažite da je sa*

$$\lambda w = S_\lambda w, \qquad \lambda \in L, \ w \in L \otimes V$$

*na $L \otimes V$ definirana struktura vektorskog prostora nad poljem $L$. Nadalje, dokažite da je $v \mapsto 1 \otimes v$ injektivan $K-$linearan operator sa $V$ u $L \otimes V$ i da je to izomorfizam vektorskih prostora u slučaju $L = K$.*

Tako definiran vektorski prostor $L \otimes V$ nad poljem $L$ označavamo sa $V^L$. Kažemo da je $V^L$ dobiven **proširenjem polja skalara** sa $K$ na $L$. Pomoću injektivnog $K-$linearnog operatora $v \mapsto 1 \otimes v$ možemo identificirati prostor $V$ s $K-$potprostorom $1 \otimes V = \{1 \otimes v; \ v \in V\}$ od $V^L$.

**Zadatak 5.2.** *Neka je $B$ baza vektorskog prostora $V$ nad poljem $K$. Uz identifikaciju prostora $V$ s $K-$potprostorom od $V^L$ (tj. $v = 1 \otimes v$ za $v \in V$) dokažite da je $B$ ujedno baza vektorskog prostora $V^L$ nad poljem $L$.*

Neka je i dalje $L$ proširenje polja $K$. Ako je $\mathcal{A}$ algebra nad poljem $K$ tada se množenje $(a, b) \mapsto ab$ na $\mathcal{A}$ jedinstveno proširuje do $L-$bilinearnog preslikavanja sa $\mathcal{A}^L \times \mathcal{A}^L$ u $\mathcal{A}^L$ i s tim preslikavanje $\mathcal{A}^L$ postaje algebra. Ona je asocijativna ako je $\mathcal{A}$ asocijativna, komutativna ako je $\mathcal{A}$ komutativna, unitalna ako je $\mathcal{A}$ unitalna, Liejeva ako je $\mathcal{A}$ Liejeva.

**Zadatak 5.3.** *Neka je $\mathfrak{g}$ Liejeva algebra nad poljem $K$ i neka je $L$ proširenje polja $K$. Dokažite:*

(*a*) *Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ je nilpotentna ako i samo ako je Liejeva algebra $\mathfrak{g}^L$ nilpotentna.*

(*b*) *Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ je rješiva ako i samo ako je Liejeva algebra $\mathfrak{g}^L$ rješiva.*

(*c*) *Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ je poluprosta ako i samo ako je Liejeva algebra $\mathfrak{g}^L$ poluprosta.*

(*d*) *Ako je Liejeva algebra $\mathfrak{g}^L$ prosta, onda je i Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ prosta. Primjerom pokažite da je moguće da $\mathfrak{g}$ bude prosta, ali da $\mathfrak{g}^L$ nije prosta (nego samo poluprosta).*

(*e*) *Neka su $\kappa$ i $\kappa^L$ Killingove forme Liejevih algebri $\mathfrak{g}$ i $\mathfrak{g}^L$. Dokažite da je $\kappa = \kappa^L|\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$.*

## 5.2 Tenzorska, simetrična i vanjska algebra

Neka je $V$ vektorski prostor nad poljem $K$. **Tenzorska algebra** prostora $V$ je uređen par $(\mathcal{T},\tau)$ sa sljedećim svojstvima:

$(TA1)$ $\mathcal{T}$ je unitalna algebra (dakle, asocijativna algebra s jedinicom).

$(TA2)$ $\tau$ je linearan operator sa $V$ u $\mathcal{T}$.

$(TA3)$ Za svaku unitalnu algebru $\mathcal{A}$ i svaki linearan operator $\sigma : V \to \mathcal{A}$ postoji jedinstven unitalan homomorfizam $\varphi : \mathcal{T} \to \mathcal{A}$ takav da je $\sigma = \varphi \circ \tau$.

**Teorem 5.2.1.** *Neka je $V$ vektorski prostor nad poljem $K$.*

*$(a)$ Postoji tenzorska algebra prostora $V$.*

*$(b)$ Ako su $(\mathcal{T},\tau)$ i $(\mathcal{S},\sigma)$ tenzorske algebre od $V$, jedinstveni unitalni homomorfizam $\varphi : \mathcal{T} \to \mathcal{S}$ sa svojstvom $\sigma = \varphi \circ \tau$ je izomorfizam unitalnih algebri.*

**Dokaz:** $(a)$ Stavimo

$$T^0(V) = K, \quad T^1(V) = V, \quad T^n(V) = \underbrace{V \otimes \cdots \otimes V}_{n} \text{ za } n \in \mathbb{N},\ n \geq 2, \qquad T(V) = \coprod_{n \in \mathbb{Z}_+} T^n(V).$$

Iz svojstava tenzorskog produkta i zbog činjenice da za bilo koje $n$ i $m$ imamo identifikaciju

$$\underbrace{V \otimes \cdots \otimes V}_{n} \otimes \underbrace{V \otimes \cdots \otimes V}_{m} = \underbrace{V \otimes \cdots \otimes V}_{n+m}$$

slijedi da postoji jedinstveno bilinearno preslikavanje $\Phi_{n,m} : T^n(V) \times T^m(V) \to T^{n+m}(V)$ takvo da je

$$\Phi_{n,m}(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n, y_1 \otimes \cdots \otimes y_m) = x_1 \otimes \cdots \otimes x_n \otimes y_1 \otimes \cdots \otimes y_m \qquad \forall x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m \in V.$$

Za $n, m, p \in \mathbb{Z}_+$ imamo identifikacije

$$[(\underbrace{V \otimes \cdots \otimes V}_{n}) \otimes (\underbrace{V \otimes \cdots \otimes V}_{m})] \otimes (\underbrace{V \otimes \cdots \otimes V}_{p}) = \underbrace{V \otimes \cdots \otimes V}_{n+m+p} =$$

$$= (\underbrace{V \otimes \cdots \otimes V}_{n}) \otimes [(\underbrace{V \otimes \cdots \otimes V}_{m}) \otimes (\underbrace{V \otimes \cdots \otimes V}_{k})],$$

odnosno,

$$[(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) \otimes (y_1 \otimes \cdots \otimes y_m)] \otimes (z_1 \otimes \cdots \otimes z_k) = x_1 \otimes \cdots \otimes x_n \otimes y_1 \otimes \cdots \otimes y_m \otimes z_1 \otimes \cdots \otimes z_k =$$

$$= (x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) \otimes [(y_1 \otimes \cdots \otimes y_m) \otimes (z_1 \otimes \cdots \otimes z_k)], \qquad x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m, z_1, \ldots, z_k \in V.$$

Odatle neposredno slijedi da za bilo koje $n, m, p \in \mathbb{Z}_+$ vrijedi

$$\Phi_{n+m,p}(\Phi_{n,m}(a,b),c) = \Phi_{n,m+p}(a, \Phi_{m,p}(b,c)), \qquad a \in T^n(V),\ b \in T^m(V),\ c \in T^p(V). \tag{5.1}$$

Bilo koje elemente $a, b \in T(V)$ možemo pisati kao sume konačno mnogo elemenata iz pojedinih direktnih sumanada $T^n(V)$ :

$$a = \sum_n a_n, \qquad b = \sum_n b_n, \qquad a_n, b_n \in T^n(V).$$

Definiramo
$$ab = \sum_{n,m} \Phi_{n,m}(a_n, b_m).$$
Tada je očito $(a, b) \mapsto ab$ bilinearno preslikavanje sa $T(V) \times T(V)$ u $T(V)$. Sada (5.1) pokazuje da je ta binarna operacija na $T(V)$ asocijativna i tako $T(V)$ postaje asocijativna algebra nad poljem $K$. Ta je algebra unitalna: jedinica je $1 \in K = T^0(V)$.

Preslikavanje $\tau : V \to T(V)$ definiramo kao identifikaciju prostora $V$ s potprostorom $T^1(V)$ od $T(V)$. Da bismo dokazali da je $(T(V), \tau)$ tenzorska algebra prostora $V$, treba provjeriti da vijrdi svojstvo $(TA3)$. Neka je, dakle, $\mathcal{A}$ unitalna algebra nad poljem $K$ i $\sigma : V \to \mathcal{A}$ linearan operator. Neka je $1_{\mathcal{A}}$ jedinica u algebri $\mathcal{A}$. Definiramo $\varphi_0 : T^0(V) \to \mathcal{A}$ sa
$$\varphi_0(\lambda) = \lambda 1_{\mathcal{A}}, \qquad \lambda \in T^0(V) = K.$$
Nadalje, neka je $\varphi_1 : T^1(V) \to \mathcal{A}$ definirano sa
$$\varphi_1(v) = \sigma(v), \qquad v \in T^1(V) = V.$$
Definirat ćemo sada linearne operatore $\varphi_n : T^n(V) \to \mathcal{A}$ za svaki $n \geq 2$. Prije svega, neka je $\psi_n : \underbrace{V \times \cdots \times V}_{n} \to \mathcal{A}$ $n-$multilinearno preslikavanje definirano sa
$$\psi_n(v_1, \ldots, v_n) = \sigma(v_1) \cdots \sigma(v_n), \qquad v_1, \ldots, v_n \in V.$$
Po definiciji tenzorskog produkta $T^n(V)$ postoji jedinstven linearan operator $\varphi_n : T^n(V) \to \mathcal{A}$ takav da je $\psi_n = \varphi_n \circ \tau_n$; pri tome je $\tau_n$ $n-$multilinearno preslikavanje sa $\underbrace{V \times \cdots \times V}_{n}$ u $\underbrace{V \otimes \cdots \otimes V}_{n}$ definirano sa
$$\tau_n(v_1, \ldots, v_n) = v_1 \otimes \cdots \otimes v_n, \qquad v_1, \ldots, v_n \in V.$$
Sada postoji jedinstven linearan operator $\varphi : T(V) \to \mathcal{A}$ takav da je $\varphi|T^n(V) = \varphi_n \ \ \forall n \in \mathbb{Z}_+$. Dakle, ako $a \in T(V)$ napišemo kao sumu elemenata $a_n \in T^n(V)$ za konačno mnogo $n \in \mathbb{Z}_+$, onda je
$$\varphi(a) = \sum_n \varphi_n(a_n).$$
Sada za $n, m \in \mathbb{Z}_+$ i $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m \in V$ vrijedi
$$\varphi(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n)\varphi(y_1 \otimes \cdots \otimes y_m) = \sigma(x_1) \cdots \sigma(x_n)\sigma(y_1) \cdots \sigma(y_m) =$$
$$= \varphi(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n \otimes y_1 \otimes \cdots \otimes y_m) = \varphi((x_1 \otimes \cdots \otimes x_n)(y_1 \otimes \cdots \otimes y_m)).$$
Kako elementi oblika $x_1 \otimes \cdots \otimes x_n$, $x_1, \ldots, x_n \in V$, $n \in \mathbb{Z}_+$, razapinju vektorski prostor $T(V)$, i kako je operator $\varphi : T(V) \to \mathcal{A}$ linearan, iz gornje jednakosti slijedi
$$\varphi(a)\varphi(b) = \varphi(ab) \qquad \forall a, b \in T(V).$$
Drugim riječima, $\varphi : T(V) \to \mathcal{A}$ je homomorfizam asocijativnih algebri. Kako je $\varphi|T^0(V) = \varphi_0$, taj je homomorfizam unitalan:
$$\varphi(1) = \varphi_0(1) = 1 \cdot 1_{\mathcal{A}} = 1_{\mathcal{A}}.$$
Nadalje, taj unitalan homorfizam ima traženo svojstvo: za svaki $v \in V$ je
$$(\varphi \circ \tau)(v) = \varphi(\tau(v)) = \varphi(v) = \varphi_1(v) = \sigma(v).$$

Dakle, vrijedi $\varphi \circ \tau = \sigma$.

Napokon, dokažimo jedinstvenost unitalnog homorfizma $\varphi : T(V) \to \mathcal{A}$ takvog da je $\varphi \circ \tau = \sigma$. Budući da je $\tau$ identifikacija $V$ s potprostorom $T^1(V)$, jednakost $\varphi \circ \tau = \sigma$ može se zapisati i ovako: $\varphi|V = \sigma$. No takav je unitalni homomorfizam jedinstven, budući da očito $V$ generiran unitalnu algebru $T(V)$.

$(b)$ Neka su $\mathcal{T}, \tau)$ i $(\mathcal{S}, \sigma)$ tenzorske algebre od $V$, neka je $\varphi : \mathcal{T} \to \mathcal{S}$ jedinstveni unitalni homomorfizam takav da je $\sigma = \varphi \circ \tau$ i neka je $\psi : \mathcal{S} \to \mathcal{T}$ jedinstven unitalan homomorfizam takav da je $\tau = \psi \circ \sigma$. Tada je

$$(\psi \circ \varphi) \circ \tau = \psi \circ (\varphi \circ \tau) = \psi \circ \sigma = \tau = id_{\mathcal{T}} \circ \tau \quad \text{i} \quad (\varphi \circ \psi) \circ \sigma = \varphi \circ (\psi \circ \sigma) = \varphi \circ \tau = \sigma = id_{\mathcal{S}} \circ \sigma,$$

pa iz jedinstvenosti u $(TA3)$ za tenzorske algebre $(\mathcal{T}, \tau)$ i $(\mathcal{S}, \sigma)$ slijedi da je $\psi \circ \varphi = id_{\mathcal{T}}$ i $\varphi \circ \psi = id_{\mathcal{S}}$. Dakle, $\varphi : \mathcal{T} \to \mathcal{S}$ i $\psi : \mathcal{S} \to \mathcal{T}$ su međusobno inverzni izomorfizmi unitalnih alhgebri $\mathcal{T}$ i $\mathcal{S}$.

**Propozicija 5.2.2.** *Neka je $V$ vektorski prostor nad poljem $K$ i neka je $(\mathcal{T}, \tau)$ tenzorska algebra prostora $V$.*

$(a)$ *Ako je $S$ podskup od $V$ koji razapinje $V$, onda $\tau(S)$ generira unitalnu algebru $\mathcal{T}$.*

$(b)$ *Ako je $\{e_j;\ j \in J\}$ baza vektorskog prostora $V$ onda je*

$$\{1_{\mathcal{T}}\} \cup \{\tau(e_{j_1}) \cdots \tau(e_{j_n});\ n \in \mathbb{N},\ j_1, \ldots, j_n \in J\}$$

*baza vektorskog prostora $\mathcal{T}$.*

**Zadatak 5.4.** *Dokažite propoziciju 5.2.2.*

Neka je $V$ vektorski prostor nad poljem $K$. **Simetrična algebra** prostora $V$ je uređen par $(\mathcal{S}, \sigma)$ sa sljedećim svojstvima:

$(SA1)$ $\mathcal{S}$ je komutativna unitalna algebra nad poljem $K$.

$(SA2)$ $\sigma : V \to \mathcal{S}$ je linearan operator.

$(SA3)$ Za svaku komutativnu unitalnu algebru $\mathcal{A}$ nad poljem $K$ i za svaki linearan operator $\alpha : V \to \mathcal{A}$ postoji jedinstven unitalan homomorfizam $\varphi : \mathcal{S} \to \mathcal{A}$ takav da je $\alpha = \varphi \circ \sigma$.

**Teorem 5.2.3.** *Neka je $V$ vektorski prostor nad poljem $K$.*

$(a)$ *Postoji simetrična algebra prostora $V$.*

$(b)$ *Ako su $(\mathcal{S}, \sigma)$ i $(\mathcal{O}, \omega)$ simetrične algebre od $V$, jedinstveni unitalni homomorfizam $\varphi : \mathcal{S} \to \mathcal{O}$ sa svojstvom $\omega = \varphi \circ \sigma$ je izomorfizam unitalnih algebri.*

**Dokaz:** $(a)$ Neka je $(T(V), \tau)$ tenzorska algebra od $V$ konstruirana u dokazu teorema 5.2.1. Neka je $\mathcal{I}$ obostrani ideal u algebri $T(V)$ generiran skupom $\{v \otimes w - w \otimes v;\ v, w \in V\}$. Stavimo $S(V) = T(V)/\mathcal{I}$ i neka je $\pi : T(V) \to S(V)$ kvocijentni epimorfizam. Stavimo $\sigma = \pi \circ \tau$. Tada je $\sigma$ linearan operator sa $V$ u $S(V)$.

Dokažimo da je unitalna algebra $S(V)$ komutativna. Budući da $V$ generira unitalnu algebru $T(V)$, i budući da je $\pi : T(V) \to S(V)$ unitalni epimorfizam, zaključujemo da $\pi(V)$ generira unitalnu algebru $S(V)$. Prema tome, za komutativnost od $S(V)$ dovoljno je dokazati da vrijedi

$$\pi(v)\pi(w) = \pi(w)\pi(v) \qquad \forall v, w \in V.$$

Međutim, $\pi(v)\pi(w) = \pi(v \otimes w)$ i $\pi(w)\pi(v) = \pi(w \otimes v)$, pa se ta jednakost može ekvivalentno ovako zapisati:

$$\pi(v \otimes w - w \otimes v) = 0.$$

No to je evidentno jer je $\mathcal{I} = Ker\,\pi$ i po definiciji ideala $\mathcal{I}$ je $v \otimes w - w \otimes v \in \mathcal{I}$.

Dokažimo sada da tako definirani par $(S(V), \sigma)$ ima svojstvo $(SA3)$. Neka je $\mathcal{A}$ komutativna unitalna algebra i neka je $\alpha : V \to \mathcal{A}$ linearan operator. Budući da je $(T(V), \tau)$ tenzorska algebra prostora $V$, postoji unitalni homomorfizam $\psi : T(V) \to \mathcal{A}$ takav da je $\alpha = \psi \circ \tau$. Ako su $v, w \in V$, zbog komutativnosti algebre $\mathcal{A}$ imamo

$$\psi(v \otimes w) = \psi(v)\psi(w) = \psi(w)\psi(v) = \psi(w \otimes v), \qquad \text{tj.} \quad \psi(v \otimes w - w \otimes v) = 0.$$

Dakle, vrijedi

$$v \otimes w - w \otimes v \in Ker\,\psi \qquad \forall v, w \in V.$$

Budući da elementi oblika $v\otimes w - w\otimes v$ generiraju obostrani ideal $\mathcal{I}$, slijedi $\mathcal{I} \subseteq Ker\,\psi$. Prema tome, $\psi$ se faktorizira kroz kvocijent $S(V) = T(V)/\mathcal{I}$, tj. postoji unitalni homomorfizam $\varphi : S(V) \to \mathcal{A}$ takav da je $\psi = \varphi \circ \pi$. Tada imamo

$$\alpha = \psi \circ \tau = (\varphi \circ \pi) \circ \tau = \varphi \circ (\pi \circ \tau) = \varphi \circ \sigma.$$

Jedinstvenost unitalnog homomorfizma $\varphi : S(V) \to \mathcal{A}$, takvog da je $\alpha = \varphi \circ \sigma$, slijedi iz činjenice da $\pi(V)$ generira unitalnu algebru $S(V)$.

Tvrdnja $(b)$ dokazuje se iz univerzalnog svojstva $(SA3)$ potpuno analogno kao i tvrdnje $(b)$ u teoremima 5.1.1. i 5.2.1.

Neka je $\mathcal{A}$ unitalna algebra. **Graduacija** na algebri $\mathcal{A}$ je niz $(\mathcal{A}^n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ potprostora od $\mathcal{A}$ takav da vrijedi

$$\mathcal{A} = \sum_{n\in\mathbb{Z}_+} \dot{+}\, \mathcal{A}^n, \qquad \mathcal{A}^0 = K \cdot 1_{\mathcal{A}}, \qquad \mathcal{A}^n\mathcal{A}^m \subseteq \mathcal{A}^{n+m}.$$

**Graduirana algebra** je algebra na kojoj je zadana graduacija. Tada se elementi od $\mathcal{A}^n$ zovu **homogeni stupnja** $n$. Nadalje, za svaki $x \in \mathcal{A}$ postoje jedinstveni $x_n \in \mathcal{A}^n$, $n \in \mathbb{Z}_+$, takvi da je skup $\{n \in \mathbb{Z}_+;\ x_n \neq 0\}$ konačan i da je

$$x = \sum_{n\in\mathbb{Z}_+} x_n.$$

Tada se $x_n$ zove **homogena komponenta** elementa $x$ stupnja $n$.

Uočimo sada da je $(T^n(V))_{n\in\mathbb{Z}_+}$ graduacija tenzorske algebre $T(V)$ vektorskog prostora $V$, dakle, $T(V)$ je graduirana algebra.

Neka je $\mathcal{A}$ graduirana algebra s graduacijom $(\mathcal{A}_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$. Za dvostrani **ideal** $\mathcal{I}$ u $\mathcal{A}$ kažemo da je **graduiran** ako je

$$\mathcal{I} = \sum_{n\in\mathbb{Z}_+} \mathcal{I} \cap \mathcal{A}_n.$$

U tom slučaju kvocijentna algebra $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ je graduirana s graduacijom $(\mathcal{A}_n/(\mathcal{I} \cap \mathcal{A}_n))_{n\in\mathbb{Z}_+}$.

**Zadatak 5.5.** *Neka je $S$ neki skup homogenih elemenata graduirane algebre $\mathcal{A}$ i neka je $\mathcal{I}$ dvostrani ideal generiran skupom $S$, tj.*

$$\mathcal{I} = span\,\{asb;\ a, b \in \mathcal{A},\ s \in S\}.$$

*Dokažite da je ideal $\mathcal{I}$ graduiran.*

Dvostrani ideal $\mathcal{I}$ u graduiranoj algebri $T(V)$ iz dokaza tvrdnje $(a)$ teorema 5.2.3. generiran je skupom homogenih elemenata

$$\{v \otimes w - w \otimes v;\ v, w \in V\} \subseteq T^2(V).$$

Prema zadatku 5.5. kvocijentna algebra $S(V)$ graduirana je s graduacijom $(S^n(V))_{n\in\mathbb{Z}_+}$, gdje je $S^n(V) = T^n(V)/(\mathcal{I} \cap T^n(V))$. Nadalje, kako je očito $\mathcal{I} \cap T^0(V) = \{0\}$ i $\mathcal{I} \cap T^1(V) = \{0\}$, vrijedi $S^0(V) = T^0(V)$ i $S^1(V) = T^1(V)$. Prema tome, vektorski prostor $V$ identificira se s homogenim potprostorom $S^1(V)$ od $S(V)$ stupnja 1.

Neka je $\pi : T(V) \to S(V) = T(V)/\mathcal{I}$ kvocijentni epimorfizam. Uobičajeno je da se operacija množenja u $S(V)$ označava s točkom $\cdot$ a još češće bez ikakvog znaka, tj. $(a, b) \mapsto ab$. Dakle, za $v_1, \dots, v_n \in V$ je $\pi(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) = v_1 \cdots v_n$. Budući da je prostor $T^n(V)$ razapet elementima oblika $v_1 \otimes \cdots \otimes v_n$, $v_1, \dots, v_n \in V$, slijedi da je prostor $S^n(V) = \pi(T^n(V))$ razapet elementima oblika $v_1 \cdots v_n$, $v_1, \dots, v_n \in V$. Primijetimo da je $n-$multilinearan operator $\varphi_n : V^n \to S^n(V)$, definiran sa $\varphi_n(v_1, \dots, v_n) = v_1 \cdots v_n$, simetričan, tj. invarijantan s obzirom na bilo koju permutaciju varijabli:

$$\varphi_n(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(n)}) = \varphi_n(v_1, \dots, v_n) \qquad \forall v_1, \dots, v_n \in V, \quad \forall \sigma \in \mathcal{S}_n;$$

pri tome je $\mathcal{S}_n$ oznaka za simetričnu grupu $n-$tog reda, tj. za grupu permutacija skupa $\{1, \dots, n\}$.

**Zadatak 5.6.** *Dokažite da za svaki $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, uređen par $(S^n(V), \varphi_n)$ ima sljedeće univerzalno svojstvo: ako je $W$ vektorski prostor i ako je $\psi : V^n \to W$ $n-$multilinearan simetričan operator, onda postoji jedinstven linearan operator $\Psi : S^n(V) \to W$ takav da je $\psi = \Psi \circ \varphi_n$, tj. da vrijedi*

$$\psi(v_1, \dots, v_n) = \Psi(v_1 \cdots v_n) \qquad \forall v_1, \dots, v_n \in V.$$

Drugačije formulirano:

**Zadatak 5.7.** *Za vektorski prostor $W$ i za linearan operator $A : S^n(V) \to W$ definiramo $\tilde{A} : V^n \to W$ relacijom*

$$\tilde{A}(v_1, \dots, v_n) = A(v_1 \cdots v_n), \qquad v_1, \dots, v_n \in V.$$

*Dokažite da je $A \mapsto \tilde{A}$ izomorfizam vektorskog prostora $L(S^n(V), W)$ svih linearnih operatora sa $S^n(V)$ u $W$ na vektorski prostor $L_s(V^n, W)$ svih $n-$multilinearnih simetričnih operatora sa $V^n$ u $W$. Posebno, dualni prostor prostora $S^n(V)$ izomorfan je prostoru svih simetričnih $n-$multilinearnih formi $V^n \to K$.*

Prema tvrdnji $(c)$ propozicije 5.1.2. ako je $\{e_j;\ j \in J\}$ baza vektorskog prostora $V$ onda je

$$\{e_{j_1} \otimes \cdots \otimes e_{j_n};\ j_1, \dots, j_n \in J\}$$

baza prostora $T^n(V)$. Kako bismo identificirali neku bazu prostora $S^n(V)$ moramo pretpostaviti da nam je zadana uređena baza $\{e_j;\ j \in J\}$ prostora $V$, tj. da je skup indeksa $J$ linearno uređen.

**Propozicija 5.2.4.** *Neka je $J$ linearno uređen skup i neka je $\{e_j;\ j \in J\}$ baza vektorskog prostora $V$. Za $n \in \mathbb{N}$ je*

$$\{e_{j_1} \cdots e_{j_n};\ j_1, \dots, j_n \in J,\ j_1 \leq \cdots \leq j_n\} =$$

$$= \{e_{j_1}^{k_1} \cdots e_{j_\ell}^{k_\ell};\ \ell, k_1, \dots, k_\ell \in \mathbb{N},\ j_1, \dots, j_\ell \in J,\ j_1 < \cdots < j_\ell,\ k_1 + \cdots + k_\ell = n\}$$

*baza vektorskog prostora $S^n(V)$.*

**Dokaz:** Navedeni skup je očito slika baze prostora $T^n(V)$ pri kvocijentnom preslikavanju $\pi_n : T^n(V) \to S^n(V)$. Dakle, taj skup razapinje prostor $S^n(V)$. Treba još dokazati njegovu linearnu nezavisnost. Uočimo sada da postoji jedinstven linearan operator $\varphi$ sa vektorskog prostora $V$ u komutativnu algebru $K\left[\{X_j\}_{j\in J}\right]$ polinoma u varijablama $X_j$, $j \in J$, s koeficijentima u polju $K$ takav da je $\varphi(e_j) = X_j \ \forall j \in J$. Prema univerzalnom svojstvu postoji jedinstven unitalan homomorfizam algebri $\Phi : S(V) \to K\left[\{X_j\}_{j\in J}\right]$ takav da je $\Phi|V = \varphi$. Tada je

$$\Phi(e_{j_1}^{k_1} \cdots e_{j_\ell}^{k_\ell}) = X_{j_1}^{k_1} \cdots X_{j_\ell}^{k_\ell}.$$

Različiti monomi u varijablama $X_j$ su linearno nezavisni, odakle slijedi tražena linearna nezavisnost.

Odatle neposredno slijedi:

**Korolar 5.2.5.** *Neka je $V$ konačnodimenzionalan vektorski prostor nad poljem $K$ i neka je $\{e_j;\ j = 1, \ldots, N\}$ baza od $V$. Za prirodan broj $n$ je*

$$\{e_1^{k_1} \cdots e_N^{k_N};\ k_1, \ldots, k_N \in \mathbb{Z}_+,\ k_1 + \cdots + k_N = n\} = \{e_{j_1} \cdots e_{j_n};\ 1 \le j_1 \le \cdots \le j_n \le N\}$$

*baza vektorskog prostora $S^n(V)$. Posebno,*

$$\dim S^n(V) = \binom{n+N-1}{N-1} = \binom{n+N-1}{n}.$$

Pretpostavimo u daljnjem da je $K$ polje karakteristike 0. Uz tu pretpostavku konstruirat ćemo direktni komplement jezgre $Ker\,\pi$ kvocijentnog epimorfizma sa $T(V)$ na $S(V)$, preciznije, za svaki $n$ ćemo identificirati jedan direktni komplement od $Ker\,\pi|T^n(V)$ u prostoru $T^n(V)$. Restrikcija $\pi$ na taj direktni komplement će tada biti izomorfizam na $S^n(V)$.

Definiramo $n-$multilinearno preslikavanje sa $V^n$ u $T^n(V)$ na sljedeći način:

$$(v_1, \ldots, v_n) \mapsto \frac{1}{n!} \sum_{\tau \in \mathcal{S}_n} v_{\tau(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\tau(n)}.$$

Prema univerzalnom svojstvu tenzorskog produkta tada postoji jedinstven linearan operator $\sigma_n : T^n(V) \to T^n(V)$ takav da vrijedi

$$\sigma_n(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) = \frac{1}{n!} \sum_{\tau \in \mathcal{S}_n} v_{\tau(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\tau(n)} \qquad \forall v_1, \ldots, v_n \in V.$$

Označimo sa $\tilde{S}^n(V)$ sliku operatora $\sigma_n$.

**Propozicija 5.2.6.** *Operator $\sigma_n$ je projektor i njegova jezgra je $T^n(V) \cap \mathcal{I}$. Posebno,*

$$T^n(V) = \tilde{S}^n(V) \dotplus T^n(V) \cap \mathcal{I}$$

*i restrikcija kvocijentnog epimorfizma $T(V) \to S(V) = T(V)/\mathcal{I}$ na potprostor $\tilde{S}^n(V)$ je izomorfizam prostora $\tilde{S}^n(V)$ na prostor $S^n(V)$.*

**Dokaz:** Imamo

$$\sigma_n^2(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) = \frac{1}{(n!)^2} \sum_{\rho, \tau \in \mathcal{S}_n} v_{\rho(\tau(1))} \otimes \cdots \otimes v_{\rho(\tau(n))} =$$

$$= \frac{1}{(n!)^2} \sum_{\rho \in \mathcal{S}_n} \sum_{\omega \in \mathcal{S}_n} v_{\omega(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\omega(n)} = \frac{1}{n!} \sum_{\rho \in \mathcal{S}_n} \sigma_n(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) = \sigma_n(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n).$$

To pokazuje da je $\sigma_n$ projektor.

Treba još dokazati da je $Ker\,\sigma_n = T^n(V) \cap \mathcal{I}$. Potprostor $T^n(V) \cap \mathcal{I}$ razapet je elementima oblika

$$x_1 \otimes \cdots \otimes x_r \otimes u \otimes v \otimes y_1 \otimes \cdots \otimes y_s - x_1 \otimes \cdots \otimes x_r \otimes v \otimes u \otimes y_1 \otimes \cdots \otimes y_s,$$

gdje su $x_1, \ldots, x_r, y_1, \ldots, y_s, u, v \in V$ i $r+s+2 = n$. Svaki je takav element u jezgri od $\sigma_n$. Prema tome, $T^n(V) \cap \mathcal{I} \subseteq Ker\,\sigma_n$. Pretpostavimo da je inkluzija striktna i neka je $t \in Ker\,\sigma_n$ takav da $t \notin T^n(V) \cap \mathcal{I}$. Jezgra restrikcije $\pi|T^n(V)$ je upravo $T^n(V) \cap \mathcal{I}$, dakle, $\pi(t) \neq 0$. Prema propoziciji 5.2.4. tenzorski produkti $n$ vektora baze od $V$ s nepadajućim indeksima preslikavaju se na bazu od $S^n(V)$. No kako je $S(V)$ komutativna algebra, i $\sigma_n-$slike tih tenzorskih produkata se preslikavaju na bazu od $S^n(V)$. To pokazuje da je $\pi(\tilde{S}^n(V)) = S^n(V)$. Neka je $s \in \tilde{S}^n(V) = Im\,\sigma_n$ takav da je $\pi(s) = \pi(t)$. Tada je $s - t \in Ker\,\pi|T^n(V) = T^n(V) \cap \mathcal{I} \subseteq Ker\,\sigma_n$. Kako je i $t \in Ker\,\sigma_n$, slijedi $s \in Ker\,s_n$. Dakle,

$$s \in Ker\,\sigma_n \cap Im\,\sigma_n = \{0\} \qquad \Longrightarrow \qquad s = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \pi(t) = \pi(s) = 0,$$

suprotno pretpostavci. Ova kontradikcija pokazuje da je $T^n(V) \cap \mathcal{I} = Ker\,\sigma_n$.

Preslikavanje $\sigma_n : T^n(V) \to T^n(V)$ zove se **simetrizacija**, a također i složeno preslikavanje $\sigma : T(V) \to T(V)$, $\sigma|T^n(V) = \sigma_n$. Elementi od $\tilde{S}^n(V)$ zovu se **simetrični $n-$tenzori**. Vrijedi

$$Im\,\sigma = \tilde{S}(V) = \sum_{n\in\mathbb{Z}_+} \dot{+} \tilde{S}^n(V).$$

Neka je sada $\mathcal{J}$ dvostrani ideal u tenzorskoj algebri $T(V)$ generiran skupom $\{v \otimes v;\ v \in V\}$ i neka je $\bigwedge(V) = T(V)/\mathcal{J}$. Ideal $\mathcal{J}$ je prema zadatku 5.5. graduiran, pa je i algebra $\bigwedge(V)$ graduirana:

$$\bigwedge(V) = \sum_{n\in\mathbb{Z}_+} \dot{+} \bigwedge^n(V), \qquad \bigwedge^n(V) = T^n(V)/(T^n(V) \cap \mathcal{J}).$$

Budući da je ideal $\mathcal{J}$ generiran podskupom od $T^2(V)$, vidimo da se $K$ i $V$ identificiraju sa $\bigwedge^0(V)$ i sa $\bigwedge^1(V)$. Naravno, $V$ generira unitalnu algebru $\bigwedge(V)$. Ta se algebra zove **vanjska algebra vektorskog prostora** $V$. Produkt u vanjskoj algebri $\bigwedge(V)$ označava se sa $\wedge$. Kako je

$$u \otimes v + v \otimes u = (u+v) \otimes (u+v) - u \otimes u - v \otimes v \in \mathcal{J},$$

to je $u \wedge v = -v \wedge u \ \ \forall u, v \in V$. Odatle slijedi

$$a \wedge b = (-1)^{mn} b \wedge a \qquad \text{za} \quad a \in \bigwedge^m(V) \quad \text{i} \quad b \in \bigwedge^n(V).$$

**Zadatak 5.8.** *Neka je $\varphi : V \to \bigwedge(V)$ restrikcija kvocijentnog epimorfizma $T(V) \to \bigwedge(V)$, (odnosno, identifikacija $V$ sa $\bigwedge^1(V)$ ). Dokažite da uređen par $(\bigwedge(V), \varphi)$ ima sljedeće univerzalno svojstvo: ako je $\mathcal{A}$ unitalna algebra i ako je $\psi : V \to \mathcal{A}$ linearan operator takav da je $\psi(v)^2 = 0$ $\forall v \in V$ onda postoji jedinstven unitalni homomorfizam algebri $\Psi : \bigwedge(V) \to \mathcal{A}$ takav da je $\psi = \Psi \circ \varphi$ (odnosno, $\Psi|V = \psi$).*

**Zadatak 5.9.** *Neka je $\iota_n : V^n \to \bigwedge^n(V)$ alternirajući $n-$multilinearni operator definiran sa*

$$\iota_n(v_1, \ldots, v_n) = v_1 \wedge \cdots \wedge v_n, \qquad v_1, \ldots, v_n \in V.$$

*Dokažite da par $(\bigwedge^n(V), \iota_n)$ ima sljedeće univerzalno svojstvo: za svaki vektorski prostor $W$ i za svaki alternirajući $n-$multilinearan operator $\ell : V^n \to W$ postoji jedinstven linearan operator $L : \bigwedge^n(V) \to W$ takav da je $\ell = L \circ \iota_n$, tj. da vrijedi*

$$L(v_1 \wedge \cdots \wedge v_n) = \ell(v_1, \ldots, v_n) \qquad \forall v_1, \ldots, v_n \in V.$$

**Propozicija 5.2.7.** *Neka je $J$ linearno uređen skup i neka je $\{e_j;\ j \in J\}$ baza vektorskog prostora $V$. Tada je*

$$\{e_{j_1} \wedge \cdots \wedge e_{j_n};\ j_1, \ldots, j_n \in J,\ j_1 < \cdots < j_n\}$$

*baza vektorskog prostora $\bigwedge^n(V)$.*

**Dokaz:** Budući da tenzorski monomi vektora baze stupnja $n$ tvore bazu od $T^n(V)$, gornji skup razapinje vektorski prostor $\bigwedge(V)$. Treba još dokazati da je taj skup linearno nezavisan. Za $j \in J$ neka je $f_j$ linearan funkcional na prostoru $V$ definiran sa $f_j(e_k) = \delta_{jk}$. Fiksirajmo sada $r_1, \ldots, r_n \in J$ takve da je $r_1 < \cdots < r_n$ i definirajmo preslikavanje $\ell_{r_1,\ldots,r_n} : V^n \to K$ ovako:

$$\ell_{r_1,\ldots,r_n}(v_1, \ldots, v_n) = \det\,[f_{r_i}(v_j)]_{i,j=1}^n, \qquad v_1, \ldots, v_n \in V.$$

To je $n-$multilinearna alternirajuća forma, pa po zadataku 5.9. postoji jedinstven linearan funkcional $L_{r_1,\ldots,r_n} : \bigwedge^n(V) \to K$ takav da je

$$L_{r_1,\ldots,r_n}(v_1 \wedge \cdots \wedge v_n) = \ell_{r_1,\ldots,r_n}(v_1, \ldots, v_n) \qquad \forall v_1, \ldots, v_n \in V.$$

Tada za $k_1, \ldots, k_n \in J$ takve da je $k_1 < \cdots < k_n$ vrijedi

$$L_{r_1,\ldots,r_n}(e_{k_1} \wedge \cdots \wedge e_{k_n}) = \det\,[f_{r_i}(e_{k_j})]_{i,j=1}^n = \begin{cases} 1 & \text{ako je } k_1 = r_1, \ldots, k_n = r_n \\ 0 & \text{inače.} \end{cases}$$

To dokazuje linearnu nezavisnost.

Odatle neposredno slijedi:

**Korolar 5.2.8.** *Neka je $V$ konačnodimenzionalan vektorski prostor nad poljem $K$,* $\dim V = N$. *Tada je $\bigwedge^n(V) = \{0\}$ za $n > N$ i*

$$\dim \bigwedge^n(V) = \binom{N}{n} \qquad \text{za } 0 \le n \le N.$$

Ako je polje $K$ karakteristike 0, možemo slično kao za simetričnu algebru identificirati direktni komplement od $T^n(V) \cap \mathcal{J}$ u prostoru $T^n(V)$. U ovom slučaju promatramo $n-$multilinearan operator

$$(v_1, \ldots, v_n) \mapsto \frac{1}{n!} \sum_{\tau \in \mathcal{S}_n} (sgn\,\tau) v_{\tau(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\tau(n)}$$

sa $V^n$ u $T^n(V)$ i neka je $\sigma'_n : T^n(V) \to T^n(V)$ pripadni linearan operator. Dakle,

$$\sigma'_n(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) = \frac{1}{n!} \sum_{\tau \in \mathcal{S}_n} (sgn\,\tau) v_{\tau(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\tau(n)} \qquad \text{za } v_1, \ldots, v_n \in V.$$

Operator $\sigma'_n$ se zove **antisimetrizacija**, a također i složeno preslikavanje $\sigma' : T(V) \to T(V)$, $\sigma'|T^n(V) = \sigma'_n$. Sliku operatora $\sigma'_n$ označavamo sa $\tilde{\bigwedge}^n(V)$ a elementi te slike zovu se **antisimetrični $n-$tenzori**.

**Propozicija 5.2.9.** *Operator $\sigma'_n$ je projektor i jezgra mu je $T^n(V) \cap \mathcal{J}$. Posebno,*

$$T^n(V) = \tilde{\bigwedge}^n(V) \dotplus T^n(V) \cap \mathcal{J}$$

*i restrikcija kvocijentnog epimorfizma $T(V) \to \bigwedge(V) = T(V)/\mathcal{J}$ na potprostor $\tilde{\bigwedge}^n(V)$ je izomorfizam prostora antisimetričnih $n-$tenzora $\tilde{\bigwedge}^n(V)$ na prostor $\bigwedge^n(V)$.*

**Zadatak 5.10.** *Dokažite propoziciju 5.2.9.*

**Uputa:** Slijedite dokaz propozicije 5.2.6.

Sljedeća dva teorema daju dva načina proširenja djelovanja linearnog operatora sa vektorskog prostora na tenzorsku, simetričnu i vanjsku algebru tog prostora; napominjemo da kao i obično svaki vektorski prostor $V$ identificiramo s potprostorima $T^1(V)$, $S^1(V)$ i $\bigwedge^1(V)$ algebri $T(V)$, $S(V)$ i $\bigwedge(V)$.

**Teorem 5.2.10.** *Neka su $V$ i $W$ vektorski prostori i $A : V \to W$ linearan operator. Tada se $A$ jedinstveno proširuje do unitalnih homomorfizama*

$$T(A) : T(V) \to T(W), \qquad S(A) : S(V) \to S(W), \qquad \bigwedge(A) \bigwedge(V) \to \bigwedge(W).$$

*Ako je operator $A$ surjektivan (injektivan, bijektivan) onda su i homomorfizmi $T(A)$, $S(A)$ i $\bigwedge(A)$ takvi. Ako je $U$ vektorski prostor i $B : W \to U$ linearan operator, onda je*

$$T(BA) = T(B) \circ T(A), \qquad S(BA) = S(B) \circ S(A), \qquad \bigwedge(BA) = \bigwedge(B) \circ \bigwedge(A).$$

*Posebno, $A \mapsto T(A)$, $A \mapsto S(A)$ i $A \mapsto \bigwedge(A)$ su homomorfizmi grupe $GL(V)$ u grupe automorfizama unitalnih algebri $T(V)$, $S(V)$ i $\bigwedge(V)$.*

**Dokaz:** $A$ je linearan operator sa $V$ u $W$, pa ga zbog spomenute identifikacije možemo shvaćati kao linearan operator sa $V$ u $T(V)$, sa $V$ u $S(W)$ i sa $V$ u $\bigwedge(W)$. U ovom posljednjem slučaju vrijedi $A(v)^2 = A(v) \wedge A(v) = 0$ za svaki $v \in V$. Prema univerzalnim svojstvima postoje jedinstvena proširenja operatora $A$ do unitalnih homomorfizama $T(A) : T(V) \to T(W)$, $S(A) : S(V) \to S(W)$ i $\bigwedge(A) : \bigwedge(V) \to \bigwedge(W)$.

Ako je linearan operator $A : V \to W$ surjektivan, onda slike unitalnih homomorfizama $T(A)$, $S(A)$ i $\bigwedge(A)$ sadrže potprostor $W$. Prema tome, slike tih unitalnih homomorfizama su unitalne podalgebre, pa kako $W$ generira svaku od unitalnih algebri $T(W)$, $S(W)$ i $\bigwedge(W)$, zaključujemo da su ti unitalni homomorfizmi surjektivni.

Neka je sada i $B : W \to U$ linearan operator. Tada unitalni homomorfizam

$$T(B) \circ T(A) : T(V) \to T(U)$$

očito proširuje linearan operator $BA : V \to U$, pa zbog jedistvenosti proširenja slijedi

$$T(B) \circ T(A) = T(BA).$$

Analogno je

$$S(B) \circ S(A) = S(BA) \qquad \text{i} \qquad \bigwedge(B) \circ \bigwedge(A) = \bigwedge(BA).$$

Pretpostavimo sada da je linearan operator $A : V \to W$ injektivan. Tada postoji linearan operator $B : W \to V$ takav da je $AB = I_W$. Prema dokazanom je

$$T(A) \circ T(B) = T(I_W), \qquad S(A) \circ S(B) = S(I_W) \qquad \text{i} \qquad \bigwedge(A) \circ \bigwedge(B) = \bigwedge(I_W).$$

Kako su očito $T(I_W)$, $S(I_W)$ i $\bigwedge(I_W)$ identitete na algebrama $T(W)$, $S(W)$ i $\bigwedge(W)$, zaključujemo da su homomorfizmi $T(A)$, $S(A)$ i $\bigwedge(A)$ injektivni. Odatle slijede i preostale tvrdnje teorema.

**Teorem 5.2.11.** *Neka je $V$ vektorski prostor. Svaki linearan operator $A \in L(V) = \mathfrak{gl}(V)$ jedinstveno se proširuje do derivacija $D(A) \in Der(T(V))$, $d(A) \in Der(S(V))$ i $\delta(A) \in Der\left(\bigwedge(V)\right)$. Preslikavanja $D : \mathfrak{gl}(V) \to Der(T(V))$, $d : \mathfrak{gl}(V) \to Der(S(V))$ i $\delta : \mathfrak{gl}(V) \to Der\left(\bigwedge(V)\right)$ su homomorfizmi Liejevih algebri. Nadalje, kvocijentni epimorfizam $\pi : T(V) \to S(V)$ je preplitanje reprezentacija $D$ i $d$ a kvocijentni epimorfizam $\pi' : T(V) \to \bigwedge(V)$ je preplitanje reprezentacija $D$ i $\delta$ :*

$$d(A) \circ \pi = \pi \circ D(A) \qquad i \qquad \delta(A) \circ \pi' = \pi' \circ D(A) \qquad \forall A \in \mathfrak{gl}(V).$$

**Dokaz:** Neka je za $n \in \mathbb{N}$ preslikavanje $\tilde{D}^n(A) : V^n \to T^n(V)$ definirano ovako:

$$\tilde{D}^n(A)(v_1, \dots, v_n) = \sum_{i=1}^{n} v_1 \otimes \cdots \otimes v_{i-1} \otimes Av_i \otimes v_{i+1} \otimes \cdots \otimes v_n, \qquad v_1, \dots, v_n \in V.$$

Tada je preslikavanje $\tilde{D}^n(A)$ $n-$multilinearno, pa po univerzalnom svojstvu postoji jedinstven linearan operator $D^n(A) : T^n(V) \to T^n(V)$ takav da vrijedi

$$D^n(A)(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) = \tilde{D}^n(A)(v_1, \dots, v_n) \qquad \forall v_1, \dots, v_n.$$

Stavimo još $D^0(A) = 0$. Definiramo sada $D(A) : T(V) \to T(V)$ kao jedinstven linearan operator takav da je $D(A)|T^n(V) = D^n(A)$ $\forall n \in \mathbb{Z}_+$.

Sada za $n, m \in \mathbb{N}$ i za $v_1, \dots, v_n, w_1, \dots, w_m \in V$ vrijedi

$$D(A)\left((v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) \cdot (w_1 \otimes \cdots \otimes w_m)\right) = D(A)(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n \otimes w_1 \otimes \cdots \otimes w_m) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} v_1 \otimes \cdots \otimes v_{i-1} \otimes Av_i \otimes v_{i+1} \otimes \cdots \otimes v_n \otimes w_1 \otimes \cdots \otimes w_m +$$

$$+ \sum_{j=1}^{m} v_1 \otimes \cdots \otimes v_n \otimes w_1 \otimes \cdots \otimes w_{j-1} \otimes Aw_j \otimes w_{j+1} \otimes \cdots \otimes w_m =$$

$$= [D(A)(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n)] \cdot (w_1 \otimes \cdots \otimes w_m) + (v_1 \otimes \cdots \otimes v_n)] \cdot [D(A)(w_1 \otimes \cdots \otimes w_m)].$$

Budući da 1 i elementi oblika $u_1 \otimes \cdots \otimes u_k$, $k \in \mathbb{N}$, $u_1, \dots, u_k \in V$, razapinju vektorski prostor $T(V)$, slijedi da vrijedi

$$D(A)(st) = [D(A)s]t + s[D(A)t] \qquad \forall s, t \in T(V),$$

odnosno, $D(A) \in Der(T(V))$. Po definiciji $D(A)$ proširuje linearan operator $A$, a jedinstvenost slijedi iz činjenice da je derivacija unitalne algebre potpuno određena s njenim vrijednostima na nekom skupu generatora te unitalne algebre.

Dokažimo sada da su ideali $\mathcal{I}$ (generiran sa $\{v \otimes w - w \otimes v;\ v, w \in V\}$) i $\mathcal{J}$ (generiran sa $\{v \otimes v;\ v \in V\}$) invarijatni u odnosu na operator $D(A)$. Doista, za $v, w \in V$ imamo

$$D(A)(v \otimes w - w \otimes v) = Av \otimes w + v \otimes Aw - Aw \otimes v - w \otimes Av = [Av \otimes w - w \otimes Av] + [v \otimes Aw - Aw \otimes v] \in \mathcal{I},$$

a također,

$$D(A)(v \otimes v) = Av \otimes v + v \otimes Av = (Av + v) \otimes (Av + v) - Av \otimes Av - v \otimes v \in \mathcal{J}.$$

Prijelazom na kvocijente po $\mathcal{I}$ i po $\mathcal{J}$ dobivamo linearne operatore $d(A) : S(V) \to S(V)$ i $\delta(A) : \bigwedge(V) \to \bigwedge(V)$,

$$d(A)(t + \mathcal{I}) = D(A)t + \mathcal{I}, \qquad \delta(A)(t + \mathcal{J}) = D(A)t + \mathcal{J}.$$

Lako se vidi da su $d(A)$ i $\delta(A)$ derivacije algebri $S(V)$ i $\bigwedge(V)$. Nadalje, kako je $V \cap \mathcal{I} = V \cap \mathcal{J} = \{0\}$, imamo $d(A)|V = D(A)|V = A$ i $\delta(A)|V = D(A)|V = A$. Jedinstvenost takvih proširenja operatora $A$ slijedi iz činjenice da $V$ generira unitalne algebre $S(V)$ i $\bigwedge(V)$. Iz definicije $d(A)$ i $\delta(A)$ nalazimo za svaki $t \in T(V)$ :

$$(d(A) \circ \pi)(t) = d(A)(t + \mathcal{I}) = D(A)t + \mathcal{I} = \pi(D(A)t) = (\pi \circ D(A))(t)$$

i

$$(\delta(A) \circ \pi')(t) = \delta(A)(t + \mathcal{J}) = D(A)t + \mathcal{J} = \pi'(D(A)t).$$

Prema tome, vrijedi

$$d(A) \circ \pi = \pi \circ D(A) \qquad \text{i} \qquad \delta(A) \circ \pi' = \pi' \circ D(A). \tag{5.2}$$

Napokon, za bilo koje $v_1, \ldots, v_n \in V$ i za $A, B \in \mathfrak{gl}(V)$ imamo

$$(D(A)D(B) - D(B)D(A))(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) = \sum_{1 \le i < j \le n} v_1 \otimes \cdots \otimes Av_i \otimes \cdots \otimes Bv_j \otimes \cdots \otimes v_n +$$

$$+ \sum_{1 \le j < i \le n} v_1 \otimes \cdots \otimes Bv_j \otimes \cdots \otimes Av_i \otimes \cdots \otimes v_n + \sum_{i=1}^{n} v_1 \otimes \cdots \otimes ABv_i \otimes \cdots \otimes v_n -$$

$$- \sum_{1 \le j < i \le n} v_1 \otimes \cdots \otimes Bv_j \otimes \cdots \otimes Av_i \otimes \cdots \otimes v_n - \sum_{1 \le i < j \le n} v_1 \otimes \cdots \otimes Av_i \otimes \cdots \otimes Bv_j \otimes \cdots \otimes v_n -$$

$$- \sum_{i=1}^{n} v_1 \otimes \cdots \otimes BAv_i \otimes \cdots \otimes v_n = \sum_{i=1}^{n} v_1 \otimes \cdots \otimes [A, B]v_i \otimes \cdots \otimes v_n = D([A, B])(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n).$$

Odatle slijedi $D([A, B]) = D(A)D(B) - D(B)D(A)$ tj. $D : \mathfrak{gl}(V) \to Der(T(V))$ je homomorfizam Liejevih algebri, posebno, to je reprezentacija Liejeve algebre $\mathfrak{gl}(V)$ na vektorskom prostoru $T(V)$. Prijelazom na kvocijente nalazimo da su i $d : \mathfrak{gl}(V) \to Der(S(V))$ i $\delta : \mathfrak{gl}(V) \to Der\left(\bigwedge(V)\right)$ homomorfizmi Liejevih algebri, dakle, reprezentacije Liejeve algebre $\mathfrak{gl}(V)$ na vektorskim prostorima $S(V)$ i $\bigwedge(V)$. Napokon, (5.2) pokazuje da je $\pi$ preplitanje reprezentacija $D$ i $d$ i da je $\pi'$ preplitanje reprezentacija $D$ i $\delta$.

## 5.3 Univerzalna omotačka algebra. PBW teorem

Neke je $\mathfrak{g}$ Liejeva algebra nad poljem $K$. Ako je $\mathcal{A}$ asocijativna algebra, **Liejev morfizam** sa $\mathfrak{g}$ u $\mathcal{A}$ je linearno preslikavanje $\varphi : \mathfrak{g} \to \mathcal{A}$ takvo da je

$$\varphi([x, y]) = \varphi(x)\varphi(y) - \varphi(y)\varphi(x) \qquad \forall x, y \in \mathfrak{g}.$$

Drugim riječima, $\varphi$ je homomorfizam Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ u Liejevu algebru koja se iz $\mathcal{A}$ dobiva definicijom komutatora $[a, b] = ab - ba,\ a, b \in \mathcal{A}$. **Univerzalna omotačka algebra** Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ je uređen par $(\mathcal{U}, \varphi)$ sa svojstvima:

$(U1)$ $\mathcal{U}$ je unitalna algebra nad poljem $K$.

$(U2)$ $\varphi$ je Liejev morfizam sa $\mathfrak{g}$ u $\mathcal{U}$.

$(U3)$ Ako je $\mathcal{A}$ unitalna algebra nad poljem $K$ i ako je $\psi$ Liejev morfizam sa $\mathfrak{g}$ u $\mathcal{A}$, onda postoji jedinstven unitalan morfizam $\Psi : \mathcal{U} \to \mathcal{A}$ takav da je $\psi = \Psi \circ \varphi$.

**Teorem 5.3.1.** *Neka je $\mathfrak{g}$ Liejeva algebra nad poljem $K$.*

$(a)$ *Postoji univerzalna omotačka algebra $(\mathcal{U}, \varphi)$ od $\mathfrak{g}$.*

$(b)$ *Ako je $(\mathcal{U}, \varphi)$ univerzalna omotačka algebra od $\mathfrak{g}$ onda potprostor $\varphi(\mathfrak{g})$ generira unitalnu algebru $\mathcal{U}$.*

$(c)$ *Ako su $(\mathcal{U}, \varphi)$ i $(\mathcal{V}, \psi)$ univerzalne omotačke algebre Liejeve algebre $\mathfrak{g}$, jedinstven unitalni homomorfizam $\Psi : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ sa svojstvom $\psi = \Psi \circ \varphi$ je izomorfizam unitalnih algebri.*

**Dokaz:** $(a)$ Neka je $T(\mathfrak{g})$ tenzorska algebra vektorskog prostora $\mathfrak{g}$ i neka je $\mathcal{K}$ dvostrani ideal u algebri $T(\mathfrak{g})$ generiran skupom

$$\{x \otimes y - y \otimes x - [x, y];\ x, y \in \mathfrak{g}\}.$$

Označimo sa $U(\mathfrak{g})$ kvocijentnu algebru $T(V)/\mathcal{K}$ i neka je $\iota : \mathfrak{g} \to U(\mathfrak{g})$ restrikcija na $\mathfrak{g} = T^1(\mathfrak{g})$ kvocijentnog epimorfizma $\pi : T(\mathfrak{g}) \to U(\mathfrak{g})$ :

$$\iota(x) = x + \mathcal{K}, \qquad x \in \mathfrak{g}.$$

Tada je $\iota$ linearno preslikavanje i to je Liejev morfizam:

$$\iota([x, y]) = [x, y] + \mathcal{K} = x \otimes y - y \otimes x + \mathcal{K} = (x + \mathcal{K})(y + \mathcal{K}) - (y + \mathcal{K})(x + \mathcal{K}) = \iota(x)\iota(y) - \iota(y)\iota(x).$$

Pretpostavimo sada da je $\psi$ Liejev morfizam Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ u unitalnu algebru $\mathcal{A}$. Tada je $\psi$ linearan operator, pa postoji unitalni homomorfizam algebri $\Omega : T(\mathfrak{g}) \to \mathcal{A}$ takav da je $\Omega|\mathfrak{g} = \psi$. Ako su $x, y \in \mathfrak{g}$ imamo

$$\Omega(x \otimes y - y \otimes x - [x, y]) = \Omega(x)\Omega(y) - \Omega(y)\Omega(x) - \Omega([x, y]) = \psi(x)\psi(y) - \psi(y)\psi(x) - \psi([x, y]) = 0$$

jer je $\psi$ Liejev morfizam. To pokazuje da je svaki element oblika $x \otimes y - y \otimes x - [x, y]$ u jezgri $Ker\,\Omega$. Odatle slijedi da je $\mathcal{K} \subseteq Ker\,\Omega$, pa možemo prijeći na kvocijent $U(\mathfrak{g}) = T(\mathfrak{g})/\mathcal{K}$ i definirati $\Psi : U(\mathfrak{g}) \to \mathcal{A}$

$$\Psi(t + \mathcal{K}) = \Omega(t), \qquad t \in T(\mathfrak{g}).$$

Tada je $\Psi$ unitalni homomorfizam i za $x \in \mathfrak{g}$ vrijedi

$$(\Psi \circ \iota)(x) = \Psi(\iota(x)) = \Psi(x + \mathcal{K}) = \Omega(x) = \psi(x).$$

Jedinstvenost homomorfizma $\Psi$ slijedi iz činjenice da $\mathfrak{g}$ generira unitalnu algebru $T(\mathfrak{g})$, dakle, $\iota(\mathfrak{g}) = \pi(\mathfrak{g})$ generira unitalnu algebru $U(\mathfrak{g}) = T(\mathfrak{g})/\mathcal{K} = \pi(T(\mathfrak{g}))$.

Tvrdnja $(c)$ dokazuje se potpuno analogno dokazima tvrdnji $(b)$ u teoremima 5.1.1., 5.2.1. i 5.2.3.

Napokon, kao što smo naveli na koncu dokaza tvrdnje $(a)$, tvrdnja $(c)$ vrijedi za konstruiranu univerzalnu omotačku algebru $(U(\mathfrak{g}), \iota)$. Sada za proizvoljnu univerzalnu omotačku algebru $(\mathcal{U}, \varphi)$ tvrdnja $(b)$ slijedi iz tvrdnje $(c)$.

**Teorem 5.3.2.** *Neka je $(U(\mathfrak{g}), \iota)$ univerzalna omotačka algebra Liejeve algebre $\mathfrak{g}$. Za svaku reprezentaciju $\pi$ Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ na vektorskom prostoru $V$ postoji jedinstvena reprezentacija $\tilde{\pi}$ unitalne algebre $U(\mathfrak{g})$ na $V$ takva da je $\pi(x) = \tilde{\pi}(\iota(x))$ $\forall x \in \mathfrak{g}$. $\pi \mapsto \tilde{\pi}$ je bijekcija sa skupa svih reprezentacija Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ na prostoru $V$ na skup svih reprezentacija unitalne algebre $U(\mathfrak{g})$ na prostoru $V$. Vrijedi:*

$(a)$ *Potprostor $W$ od $V$ je $\pi-$invarijantan ako i samo ako je on $\tilde{\pi}-$invarijantan.*

$(b)$ *Najmanji $\pi-$invarijantan potprostor od $V$ koji sadrži vektor $v \in V$ je*

$$\tilde{\pi}(U(\mathfrak{g}))v = \{\tilde{\pi}(a)v;\ a \in U(\mathfrak{g})\}.$$

$(c)$ *Reprezentacija $\pi$ je ireducibilna ako i samo ako je reprezentacija $\tilde{\pi}$ ireducibilna.*

$(d)$ *Reprezentacija $\pi$ je ireducibilna ako i samo ako za svaki vektor $v \in V \setminus \{0\}$ vrijedi*

$$\tilde{\pi}(U(\mathfrak{g}))v = \{\tilde{\pi}(a)v;\ a \in U(\mathfrak{g})\} = V.$$

$(e)$ *Ako su $\pi$ i $\rho$ reprezentacije od $\mathfrak{g}$ na prostorima $V$ i $W$, onda je*

$$Hom_{\mathfrak{g}}(V, W) = Hom_{U(\mathfrak{g})}(V, W).$$

$(f)$ *Reprezentacije $\pi$ i $\rho$ Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ su ekvivalentne ako i samo ako su $\tilde{\pi}$ i $\tilde{\rho}$ ekvivalentne reprezentacije unitalne algebre $U(\mathfrak{g})$.*

**Dokaz:** Reprezentacija $\pi$ Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ na vektorskom prostoru $V$ je ustvari Liejev morfizam $\mathfrak{g}$ u unitalnu algebru $L(V)$ svih linearnih operatora na prostoru $V$. Stoga po univerzalnom svojstvu postoji jedinstven unitalni homomorfizam $\tilde{\pi} : U(\mathfrak{g}) \to L(V)$ takav da je $\pi(x) = \tilde{\pi}(\iota(x))$ $\forall x \in \mathfrak{g}$. Tada je $\tilde{\pi}$ reprezentacija unitalne algebre $U(\mathfrak{g})$. Time je dokazana prva tvrdnja.

Ako je $\rho$ reprezentacija unitalne algebre $U(\mathfrak{g})$ na vektorskom prostoru $V$, definiramo preslikavanje $\pi : \mathfrak{g} \to L(V)$ sa $\pi(x) = \rho(\iota(x))$, $x \in \mathfrak{g}$. Preslikavanje $\pi$ je linearno, a kako je $\iota$ Liejev morfizam, za $x, y \in \mathfrak{g}$ vrijedi

$$\pi([x, y]) = \rho(\iota([x, y])) = \rho(\iota(x)\iota(y) - \iota(y)\iota(x)) =$$

$$= \rho(\iota(x))\rho(\iota(y)) - \rho(\iota(y))\rho(\iota(x)) = \pi(x)\pi(y) - \pi(y)\pi(x).$$

Dakle, $\pi$ je reprezentacija Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ na prostoru $V$ i očito vrijedi $\tilde{\pi} = \rho$. Odatle neposredno slijedi druga tvrdnja, odnosno, bijektivnost preslikavanja $\pi \mapsto \tilde{\pi}$.

**Zadatak 5.11.** *Dokažite tvrdnje $(a)$, $(b)$, $(c)$, $(d)$, $(e)$ i $(f)$ teorema 5.3.2.*

**Propozicija 5.3.3.** *Neka je $(U(\mathfrak{g}), \iota)$ univerzalna omotačka algebra Liejeve algebre $\mathfrak{g}$. Postoji jedinstven antiautomorfizam $a \mapsto a^t$ unitalne algebre $U(\mathfrak{g})$ takav da vrijedi $\iota(x)^t = -\iota(x)$ $\forall x \in \mathfrak{g}$.*

**Dokaz:** Ako postoji antihomomorfizam $a \to a^t$ unitalne algebre $U(\mathfrak{g})$ u samu sebe takav da vrijedi $\iota(x)^t = -\iota(x)\ \forall x \in \mathfrak{g}$ on je jedinstven, jer je prema tvrdnji $(b)$ teorema 5.3.1. unitalna algebra $U(\mathfrak{g})$ generirana potprostorom $\iota(\mathfrak{g})$. Dokažimo egzistenciju takvog antihomomorfizma. Za $n \in \mathbb{N}$ preslikavanje

$$(x_1, \ldots, x_n) \mapsto (-1)^n x_n \otimes \cdots \otimes x_1, \qquad x_1, \ldots, x_n \in \mathfrak{g},$$

je $n-$multilinearno sa $\mathfrak{g}^n$ u $T^n(\mathfrak{g})$. Zbog univerzalnog svojstva tenzorske potencije $T^n(\mathfrak{g})$ prostora $\mathfrak{g}$ postoji linearan operator $\varphi_n : T^n(\mathfrak{g}) \to T^n(\mathfrak{g})$ takav da vrijedi

$$\varphi_n(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) = (-1)^n x_n \otimes \cdots \otimes x_1 \qquad \forall x_1, \ldots, x_n \in \mathfrak{g}.$$

Neka je još $\varphi_0$ identiteta na $T^0(\mathfrak{g}) = K$. Definiramo sada linearan operator $\varphi : T(\mathfrak{g}) \to T(\mathfrak{g})$ sa $\varphi|T^n(\mathfrak{g}) = \varphi_n$. Za $n, m \in \mathbb{N}$ i za $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m \in \mathfrak{g}$ imamo

$$\varphi_{n+m}(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n \otimes y_1 \otimes \cdots \otimes y_m) = (-1)^{n+m} y_m \otimes \cdots \otimes y_1 \otimes x_n \otimes \cdots \otimes x_1 =$$

$$= (-1)^m y_m \otimes \cdots \otimes y_1 \otimes (-1)^n x_n \otimes \cdots \otimes x_1 = \varphi_m(y_1 \otimes \cdots y_m) \otimes \varphi_n(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n).$$

Odatle slijedi da je $\varphi$ antihomomorfizam unitalne algebre $T(\mathfrak{g})$ u samu sebe i vrijedi $\varphi(x) = -x$ $\forall x \in \mathfrak{g} = T^1(\mathfrak{g})$. Kompozicija s kvocijentnim epimorfizmom $\pi : T(\mathfrak{g}) \to U(\mathfrak{g}) = T(\mathfrak{g})/\mathcal{K}$ daje antihomomorfizam $\pi \circ \varphi$ unitalne algebre $T(\mathfrak{g})$ u unitalnu algebru $U(\mathfrak{g})$. Za $x, y \in \mathfrak{g}$ imamo

$$\varphi(x\otimes y - y\otimes x - [x,y]) = \varphi_2(x\otimes y) - \varphi_2(y\otimes x) - \varphi_1([x,y]) = y\otimes x - x\otimes y + [x,y] = y\otimes x - x\otimes y - [y,x] \in \mathcal{K},$$

dakle,

$$(\pi \circ \varphi)(x \otimes y - y \otimes x - [x, y]) = \pi(y \otimes x - x \otimes y - [y, x]) = 0.$$

Odatle slijedi da je ideal $\mathcal{K}$ sadržan u jezgri antihomomorfizma $\pi \circ \varphi$. Prijelazom na kvocijent dolazimo do antihomomorfizma $U(\mathfrak{g})$ u $U(\mathfrak{g})$ koji označimo sa $a \mapsto a^t$ :

$$(t + \mathcal{K})^t = \pi(\varphi(t)), \qquad t \in T(\mathfrak{g}).$$

Za $x \in \mathfrak{g}$ imamo

$$(\iota(x))^t = (x + \mathcal{K})^t = \pi(\varphi(x)) = \pi(-x) = -\pi(x) = -(x + \mathcal{K}) = -\iota(x).$$

Prema tome, postoji (i jedinstven je) antihomomorfizam $a \to a^t$ unitalne algebre $U(\mathfrak{g})$ u samu sebe takav da je $\iota(x)^t = -\iota(x)\ \forall x \in \mathfrak{g}$. Tada je $a \mapsto (a^t)^t$ homomorfizam unitalne algebre $U(\mathfrak{g})$ u samu sebe i za svaki $x \in \mathfrak{g}$ vrijedi

$$\left(\iota(x)^t\right)^t = (-\iota(x))^t = -\iota(x)^t = \iota(x).$$

Budući da potprostor $\iota(\mathfrak{g})$ generira unitalnu algebru $U(\mathfrak{g})$, slijedi da je $a \mapsto (a^t)^t$ identiteta. Prema tome, antihomomorfizam $a \mapsto a^t$ je bijekcija, odnosno, to je antiautomorfizam.

Preslikavanje $a \mapsto a^t$ zove se **transponiranje** na algebri $U(\mathfrak{g})$.

Primijetimo da se skup koji generira ideal $\mathcal{K}$ u graduiranoj algebri $T(\mathfrak{g})$ ne sastoji od homogenih elemenata (osim ako je Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ komutativna). Stoga ne možemo zaključiti da je ideal $\mathcal{K}$ graduiran, pa ni algebra $U(\mathfrak{g})$ nije graduirana. Međutim, moguće je uvesti tzv. *filtraciju*.

Neka je $\mathcal{A}$ unitalna algebra. **Filtracija** na algebri $\mathcal{A}$ je niz $(\mathcal{A}_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ potprostora od $\mathcal{A}$ takvih da je

$$\mathcal{A}_0 = K1_{\mathcal{A}}, \qquad \mathcal{A}_n \subseteq \mathcal{A}_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{Z}_+, \qquad \mathcal{A}_n\mathcal{A}_m \subseteq \mathcal{A}_{n+m} \quad \forall n, m \in \mathbb{Z}_+, \qquad \mathcal{A} = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}_+} \mathcal{A}_n.$$

**Filtrirana algebra** je unitalna algebra sa zadanom filtracijom. Ukoliko je $\mathcal{A}$ graduirana algebra s graduacijom $(\mathcal{A}^n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ onda možemo definirati filtraciju na $\mathcal{A}$ ovako:

$$\mathcal{A}_n = \sum_{k=0}^{n} \mathcal{A}^k, \qquad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Neka je sada $\mathcal{A}$ filtrirana algebra s filtracijom $(\mathcal{A}_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$. Definiramo vektorske prostore $Gr^n(\mathcal{A})$ ovako:

$$Gr^0(\mathcal{A}) = \mathcal{A}_0, \qquad Gr^n(\mathcal{A}) = \mathcal{A}_n/\mathcal{A}_{n-1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Nadalje, neka je $Gr(\mathcal{A})$ direktna suma vektorskih prostora $Gr^n(\mathcal{A})$ :

$$Gr(\mathcal{A}) = \coprod_{n\in\mathbb{Z}_+} Gr^n(\mathcal{A}).$$

Za $n, m \in \mathbb{Z}_+$ definiramo sada bilinearno preslikavanje $\gamma_{n,m} : Gr^n(\mathcal{A}) \times Gr^m(\mathcal{A}) \to Gr^{n+m}(\mathcal{A})$ ovako:

$$\gamma_{n,m}(a + \mathcal{A}_{n-1}, b + \mathcal{A}_{m-1}) = ab + \mathcal{A}_{n+m-1}, \qquad a \in \mathcal{A}_n, \quad b \in \mathcal{A}_m;$$

pri tome podrazumijevamo da je $\mathcal{A}_{-1} = \{0\}$. Definicija je smislena, tj. ne ovisi o izboru predstavnika $a$ i $b$ klasa $a + \mathcal{A}_{n-1}$ i $b + \mathcal{A}_{m-1}$. Doista, ako su $a, a' \in \mathcal{A}_n$ i $b, b' \in \mathcal{A}_m$ takvi da je

$$a + \mathcal{A}_{n-1} = a' + \mathcal{A}_{n-1} \qquad \text{i} \qquad b + \mathcal{A}_{m-1} = b' + \mathcal{A}_{m-1},$$

onda je $a - a' \in \mathcal{A}_{n-1}$ i $b - b' \in \mathcal{A}_{m-1}$, pa imamo

$$a(b - b') \in \mathcal{A}_n\mathcal{A}_{m-1} \subseteq \mathcal{A}_{n+m-1} \quad \text{i} \quad (a - a')b' \in \mathcal{A}_{n-1}\mathcal{A}_m \subseteq \mathcal{A}_{n+m-1},$$

odakle slijedi

$$ab - a'b' = a(b - b') + (a - a')b' \in \mathcal{A}_{n+m-1},$$

dakle,

$$ab + \mathcal{A}_{n+m-1} = a'b' + \mathcal{A}_{n+m-1}.$$

Definiramo sada bilinearno preslikavanje $\gamma : Gr(\mathcal{A}) \times Gr(\mathcal{A}) \to Gr(\mathcal{A})$ ovako:

$$\gamma|Gr^n(\mathcal{A}) \times Gr^m(\mathcal{A}) = \gamma_{n,m} \qquad n, m \in \mathbb{Z}_+.$$

**Zadatak 5.12.** *Uz gornje oznake dokažite da je $Gr(\mathcal{A})$ s operacijom množenja definiranom sa $\alpha\beta = \gamma(\alpha, \beta)$, $\alpha, \beta \in Gr(\mathcal{A})$, unitalna algebra i da je $(Gr^n(\mathcal{A}))_{n\in\mathbb{Z}_+}$ graduacija na $Gr(\mathcal{A})$.*

Vratimo se sada na univerzalnu omotačku algebru $(U(\mathfrak{g}), \varphi)$ Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ konstruiranu kao u dokazu teorema 5.3.1.:

$$U(\mathfrak{g}) = T(\mathfrak{g})/\mathcal{K}, \qquad \varphi(x) = x + \mathcal{K}, \qquad x \in \mathfrak{g},$$

$$\mathcal{K} = span\,\{a \otimes (x \otimes y - y \otimes x - [x, y]) \otimes b;\ a, b \in T(\mathfrak{g}),\ x, y \in \mathfrak{g}\}.$$

Neka je $\pi : T(\mathfrak{g}) \to U(\mathfrak{g})$ kvocijentni epimorfizam. Iz graduacije $(T^n(\mathfrak{g}))_{n\in\mathbb{Z}_+}$ tenzorske algebre $T(\mathfrak{g})$ definiramo kao malo prije filtraciju te algebre

$$T_n(\mathfrak{g}) = \sum_{k=0}^{n} T^n(\mathfrak{g}), \qquad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Tada je sa

$$U_n(\mathfrak{g}) = \pi(T_n(\mathfrak{g})), \qquad n \in \mathbb{Z}_+,$$

definirana filtracija $(U_n(\mathfrak{g}))_{n\in\mathbb{Z}_+}$ na algebri $U(\mathfrak{g})$. Pripadnu graduiranu algebru $Gr(U(\mathfrak{g}))$ označavat ćemo kraće sa $Gr(\mathfrak{g})$. Dakle,

$$Gr(\mathfrak{g}) = \coprod_{n\in\mathbb{Z}_+} Gr^n(\mathfrak{g}), \qquad Gr^n(\mathfrak{g}) = U_n(\mathfrak{g})/U_{n-1}(\mathfrak{g}), \quad n \in \mathbb{Z}_+, \qquad U_{-1}(\mathfrak{g}) = \{0\},$$

a množenje na $Gr(\mathfrak{g})$ je zadano svojim restrikcijama na $Gr^n(\mathfrak{g}) \times Gr^m(\mathfrak{g})$ :

$$(a + U_{n-1}(\mathfrak{g}))(b + U_{m-1}(\mathfrak{g})) = ab + U_{n+m-1}(\mathfrak{g}), \qquad a \in U_n(\mathfrak{g}), \quad b \in U_m(\mathfrak{g}).$$

U vezi s ovim pojmovima najvažniji je rezultat da je za svaku Liejevu algebru $\mathfrak{g}$ graduirana algebra $Gr(\mathfrak{g})$ prirodno izomorfna simetričnoj algebri $S(\mathfrak{g})$ vektorskog prostora $\mathfrak{g}$. To će biti jedna od posljedica **Poincare−Birkhoff−Witt−ovog teorema**:

**Teorem 5.3.4.** (**PBW−teorem**) *Neka je $J$ linearno uređen skup i neka je $(x_j)_{j\in J}$ baza Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ i neka je $(U(\mathfrak{g}), \iota)$ univerzalna omotačka algebra od $\mathfrak{g}$. Tada je skup monoma*

$$\{1\} \cup \{\iota(x_{j_1})^{k_1} \cdots \iota(x_{j_n})^{k_n};\ n \in \mathbb{N},\ j_1, \ldots, j_n \in J,\ j_1 < \cdots < j_n,\ k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{N}\}$$

*baza vektorskog prostora $U(\mathfrak{g})$. Posebno, Liejev morfizam $\iota : \mathfrak{g} \to U(\mathfrak{g})$ je injektivan.*

**Napomena:** *Ako je skup $J$ konačan, npr. $J = \{1, \ldots, N\}$, tj. ako je Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ konačnodimenzionalna i $\{x_1, \ldots, x_N\}$* je njena (*uređena*) *baza, onda se pripadna baza iz* PBW−*teorema može ovako pisati*:

$$\{\iota(x_1)^{k_1} \cdots \iota(x_N)^{k_N};\ k_1, \ldots, k_N \in \mathbb{Z}_+\}.$$

Za dokaz PBW−teorema ćemo najprije dokazati dvije leme iz kojih će slijediti da navedeni skup razapinje vektorski prostor $U(\mathfrak{g})$. Glavni je dio dokaza utvrđivanje linearne nezavisnosti. U tu svrhu konstruirat ćemo jednu reprezentaciju Liejeve algebre $\mathfrak{g}$, a time i unitalne algebre $U(\mathfrak{g})$, na algebri polinoma u varijablama $(X_j)_{j\in J}$ indeksiranim istim linearno uređenim skupom kao i izabrana baza od $\mathfrak{g}$.

**Lema 5.3.5.** *Ako su $z_1, \ldots, z_n \in \mathfrak{g}$ i ako je $\sigma \in \mathcal{S}_n$ onda je*

$$\iota(z_1) \cdots \iota(z_n) - \iota(z_{\sigma(1)}) \cdots \iota(z_{\sigma(n)}) \in U_{n-1}(\mathfrak{g}).$$

**Dokaz:** Budući da se svaka permutacija može zapisati kao produkt transpozicija susjednih indeksa, bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $\sigma$ transpozicija indeksa $j$ i $j+1$ :

$$\sigma(j) = j+1, \qquad \sigma(j+1) = j, \qquad \sigma(i) = i \quad \forall i \in \{1, \ldots, n\} \setminus \{j, j+1\}.$$

Kako je $\iota$ Liejev morfizam, to je

$$\iota(z_j)\iota(z_{j+1}) - \iota(z_{j+1})\iota(z_j) = \iota([z_j, z_{j+1}]),$$

pa imamo

$$\iota(z_1) \cdots \iota(z_n) - \iota(z_{\sigma(1)}) \cdots \iota(z_{\sigma(n)}) = \iota(z_1) \cdots \iota(z_{j-1})[\iota(z_j)\iota(z_{j+1}) - \iota(z_{j+1})\iota(z_j)]\iota(z_{j+2}) \cdots \iota(z_n) =$$

$$= \iota(z_1) \cdots \iota(z_{j-1})\iota([z_j, z_{j+1}])\iota(z_{j+2}) \cdots \iota(z_n) \in U_{n-1}(\mathfrak{g}).$$

U daljnjem ćemo sve do završetka dokaza PBW−teorema upotrebljavati sljedeće oznake: Za $j \in J$ stavljamo $y_j = \iota(x_j)$. Za bilo koju uređenu $n-$torku $I = (j_1, \dots, j_n) \in J^n$ elemenata iz $J$ stavljamo $y_I = y_{j_1} \cdots y_{j_n}$. Ako je $j \in J$ i $I = (j_1, \dots, j_n) \in J^n$ oznaka $j \le I$ znači da je $j \le j_k$ za svaki $k$, tj. da je $j \le \min\{j_1, \dots, j_n\}$. Podrazumijeva se da je $0-$torka prazan skup $\emptyset$ i da je $y_\emptyset = 1$. Za uređenu $n-$torku $I = (j_1, \dots, j_n) \in J^n$ kažemo da je **rastuća** ako je $j_k \le j_{k+1}$ za $k = 1, \dots, n-1$. Sa $J^{(n)}$ označavat ćemo skup svih rastućih uređenih $n-$torki elemenata iz $J$. Uz te se oznake skup iz iskaza PBW−teorema može ovako zapisati:

$$\{y_I;\ I \in J^{(n)},\ n \in \mathbb{Z}_+\}.$$

Ako je $j \in J$ i $I = (j_1, \dots, j_n) \in J^n$, onda pišemo $(j, I) = (j, j_1, \dots, j_n) \in J^{n+1}$. Naravno, ako je $I \in J^{(n)}$ i $j \le I$, onda je $(j, I) \in J^{(n+1)}$. Nadalje, ako je $n \in \mathbb{N}$ i $I \in J^{(n)}$ onda je $I = (j, I')$ za $j \in J$, $I' \in J^{(n-1)}$ i $j \le I'$.

**Lema 5.3.6.** *Skup $\{y_I;\ I \in J^{(k)},\ k \le n\}$ razapinje vektorski prostor $U_n(\mathfrak{g})$.*

**Dokaz:** Za $I = (j_1, \dots, j_k) \in J^k$ imamo

$$y_I = \iota(x_{j_1}) \cdots \iota(x_{j_k}) = \pi(x_{j_1}) \cdots \pi(x_{j_k}) = \pi(x_{j_1} \otimes \cdots \otimes x_{j_k}).$$

Budući da je $\{x_{j_1} \otimes \cdots \otimes x_{j_k};\ (j_1, \dots, j_k) \in J^k\}$ baza prostora $T^k(\mathfrak{g})$ vidi se da skup

$$\{y_I;\ I \in J^k,\ k \le n\}$$

razapinje prostor $\pi(T_n(\mathfrak{g})) = U_n(\mathfrak{g})$.

**Zadatak 5.13.** *Dovršite dokaz leme 5.3.6.*

**Uputa:** Pomoću leme 5.3.5. indukcijom u odnosu na $n \in \mathbb{Z}_+$ dokažite da je

$$span\,\{y_I;\ I \in J^k,\ k \le n\} = span\,\{y_I;\ I \in J^{(k)},\ k \le n\}.$$

**Dokaz PBW−teorema:** S obzirom na lemu 5.3.6. ostaje da se dokaže linearna nezavisnost skupa $\{y_I;\ I \in J^{(k)},\ k \le n\}$.

Neka je $\mathcal{P}$ algebra polinoma $K\,[(X_j)_{j \in J}]$ i za $n \in \mathbb{Z}_+$ neka je $\mathcal{P}_n$ potprostor od $\mathcal{P}$ svih polinoma totalnog stupnja $\le n$. Tada je očito $(\mathcal{P}_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$ filtracija algebre $\mathcal{P}$. Za $I = (j_1, \dots, j_n) \in J^n$ stavljamo $X_I = X_{j_1} \cdots X_{j_n} \in \mathcal{P}_n$. Konstruirat ćemo reprezentaciju $\omega$ Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ na vektorskom prostoru $\mathcal{P}$ takvu da vrijedi

$$\omega(x_j)X_I = X_j X_I \qquad \text{za} \quad j \in J, \quad I \in J^n, \quad j \le I. \tag{5.3}$$

Uz pretpostavku da smo takvu reprezentaciju konstruirali, dovršimo dokaz teorema. Prema teoremu 5.3.2. postoji reprezentacija $\tilde{\omega}$ unitalne algebre $U(\mathfrak{g})$ na prostoru $\mathcal{P}$ takva da vrijedi $\omega(x) = \tilde{\omega}(\iota(x))$ za svaki $x \in \mathfrak{g}$. No tada je

$$\tilde{\omega}(y_j)X_I = \tilde{\omega}(\iota(x_j))X_I = \omega(x_j)X_I = X_j X_I \qquad \text{ako je} \quad j \le I.$$

Ukoliko je $I = (j_1, \dots, j_n) \in J^{(n)}$, tj. $j_1 \le \cdots \le j_n$, tada slijedi korak po korak

$$\tilde{\omega}(y_I)1 = \tilde{\omega}(y_{j_1} \cdots y_{j_{n-1}})\tilde{\omega}(y_{j_n})1 = \tilde{\omega}(y_{j_1} \cdots y_{j_{n-1}})X_{j_n} =$$
$$= \tilde{\omega}(y_{j_1} \cdots y_{j_{n-2}})\tilde{\omega}(y_{j_{n-1}})X_{j_n} = \tilde{\omega}(y_{j_1} \cdots y_{j_{n-2}})X_{j_{n-1}}X_{j_n} = \cdots = X_{j_1} \cdots X_{j_n} = X_I.$$

Prema tome, linearan operator $a \mapsto \tilde{\omega}(a)1$ sa $U(\mathfrak{g})$ u $\mathcal{P}$ preslikava familiju $\{y_I;\ I \in J^{(n)},\ n \in \mathbb{Z}_+\}$ u linearno nezavisnu familiju $\{X_I;\ I \in J^{(n)},\ n \in \mathbb{Z}_+\}$ u prostoru $\mathcal{P}$. Odatle slijedi linearna nezavisnost familije $\{y_I;\ I \in J^{(n)},\ n \in \mathbb{Z}_+\}$ u prostoru $U(\mathfrak{g})$.

Ostaje nam da konstruiramo reprezentaciju $\omega$ od $\mathfrak{g}$ na $\mathcal{P}$ takvu da vrijedi (5.3). Za $x \in \mathfrak{g}$ operator $\omega(x) : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ definirat ćemo tako da induktivno u odnosu na $n \in \mathbb{Z}_+$ definiramo njegove restrikcije $\omega(x)|\mathcal{P}_n$, tako da bude $\omega(x)(\mathcal{P}_n) \subseteq \mathcal{P}_{n+1}$, da je preslikavanje $x \mapsto \omega(x)|\mathcal{P}_n$ linearno i da budu ispunjeni sljedeći uvjeti:

$(A_n)$ $\omega(x_j)X_I = X_jX_I$ za $j \in J$, $I \in J^n$, $j \leq I$;

$(B_n)$ $\omega(x_j)X_I - X_jX_I \in \mathcal{P}_n$ za sve $j \in J$ i sve $I \in J^n$;

$(C_n)$ $\omega(x_j)\omega(x_k)X_{I'} = \omega(x_k)\omega(x_j)X_{I'} + \omega([x_j, x_k])X_{I'}$ za sve $j, k \in J$ i sve $I' \in J^{n-1}$.

Ako takvu konstrukciju provedemo, $\omega$ će zbog $(C_n)$ biti reprezentacija, a zbog $(A_n)$ će zadovoljavati (5.3).

Za $n = 0$ definiramo $\omega(x_j)1 = X_j$, $j \in J$, i zatim linearno proširimo na $\mathfrak{g}$. Tada očito vrijede $(A_0)$ i $(B_0)$, a uvjet $(C_0)$ je prazan.

Induktivno za $n \geq 1$ pretpostavimo da je za svaki $x \in \mathfrak{g}$ definirana restrikcija $\omega(x)|\mathcal{P}_{n-1}$ tako da je preslikavanje $x \mapsto \omega(x)|\mathcal{P}_{n-1}$ linearno i da su ispunjeni uvjeti $(A_k)$, $(B_k)$ i $(C_k)$ za $k \leq n-1$. Sada treba za svaki $j \in J$ i za svaki $I \in J^{(n)}$ definirati $\omega(x_j)X_I$ i zatim po linearnosti proširiti na $\mathfrak{g}$ i to tako da budu ispunjeni uvjeti $(A_n)$, $(B_n)$ i $(C_n)$. Ako je $j \leq I$, kao definiciju upotrijebimo samo svojstvo $(A_n)$. Ako nije $j \leq I$, uzmimo da je $I = (j_1, \ldots, j_n)$ i stavimo $I' = (j_2, \ldots, j_n) \in J^{(n-1)}$; dakle, $j_1 < j$. Tada mora biti

$$\begin{aligned}
\omega(x_j)X_I &= \omega(x_j)X_{j_1}X_{I'} \\
&= \omega(x_j)\omega(x_{j_1})X_{I'} \\
&= \omega(x_{j_1})\omega(x_j)X_{I'} + \omega([x_j, x_{j_1}])X_{I'} && \text{zbog } (C_n) \\
&= \omega(x_{j_1})(X_jX_{I'} + w) + \omega([x_j, x_{j_1}])X_{I'} && \text{za neki } w \in \mathcal{P}_{n-1} \text{ zbog } (B_{n-1}) \\
&= X_{j_1}X_jX_{I'} + \omega(x_{j_1})w + \omega([x_j, x_{j_1}])X_{I'} \\
&= X_jX_I + \omega(x_{j_1})w + \omega([x_j, x_{j_1}])X_{I'}.
\end{aligned}$$

Posljednji izraz upotrijebimo za definiciju $\omega(x_j)X_I$. Tada vrijede $(A_n)$ i $(B_n)$ i treba još dokazati da vrijedi $(C_n)$.

Naša je konstrukcija provedena tako da $(C_n)$ vrijedi ako je $k < j$ i $k \leq I'$. Budući da je $[x_k, x_j] = -[x_j, x_k]$, vidimo da $(C_n)$ vrijedi i ako je $j < k$ i $j \leq I'$. Također, $(C_n)$ je trivijalno ispunjeno ako je $j = k$. Dakle, $(C_n)$ vrijedi kadgod je bilo $j \leq I'$ bilo $k \leq I'$. Uzmimo sada da je $I' = (\ell, I'')$, gdje je $I'' \in J^{n-2}$ i $\ell < j$ i $\ell < k$. Tada imamo redom

$$\begin{aligned}
\omega(x_k)X_{I'} &= \omega(x_k)Y_\ell Y_{I''} \\
&= \omega(x_k)\pi(x_\ell)X_{I''} \\
&= \omega(x_\ell)\omega(x_k)X_{I''} + \omega([x_k, x_\ell])X_{I''} && \text{zbog } (C_{n-1}).
\end{aligned}$$

Primijenimo sada $\omega(x_j)$ na jednakost prvog i posljednjeg člana u tom slijedu jednakosti. Dobivamo

$$\omega(x_j)\omega(x_k)X_{I'} = \omega(x_j)\omega(x_\ell)\omega(x_k)X_{I''} + \omega(x_j)\omega([x_k, x_\ell])X_{I''}.$$

Zbog $(C_{n-1})$ slijedi

$$\begin{aligned}
&\omega(x_j)\omega(x_k)X_{I'} = \\
&= \omega(x_\ell)\omega(x_j)\omega(x_k)X_{I''} + \omega([x_j, x_\ell])\omega(x_k)X_{I''} + \omega([x_k, x_\ell])\omega(x_j)X_{I''} + \omega([x_j, [x_k, x_\ell]])X_{I''}.
\end{aligned} \tag{5.4}$$

Zamijenimo li indekse $j$ i $k$ dobivamo

$$\begin{aligned}
&\omega(x_k)\omega(x_j)X_{I'} = \\
&= \omega(x_\ell)\omega(x_k)\omega(x_j)X_{I''} + \omega([x_k, x_\ell])\omega(x_j)X_{I''} + \omega([x_j, x_\ell])\omega(x_k)X_{I''} + \omega([x_k, [x_j, x_\ell]])X_{I''}.
\end{aligned} \tag{5.5}$$

Sada jednakost (5.5) oduzmemo od jednakosti (5.4). Tada se drugi i treći članovi desnih strana krate, pa dobivamo korištenjem $(C_{n-1})$ i Jacobijevog identiteta

$$\omega(x_j)\omega(x_k)X_{I'} - \omega(x_k)\omega(x_j)X_{I'} =$$
$$= \omega(x_\ell)\left[\omega(x_j)\omega(x_k)X_{I''} - \omega(x_k)\omega(x_j)X_{I''}\right] + \left[\omega([x_j,[x_k,x_\ell]]) - \omega([x_k,[x_j,x_\ell]])\right] X_{I''} =$$
$$= \omega(x_\ell)\omega([x_j,x_k])X_{I''} + \omega([[x_j,x_k],x_\ell])X_{I''} =$$
$$= \omega([x_j,x_k])\omega(x_\ell)X_{I''} = \omega([x_j,x_k])X_\ell X_{I''} = \omega([x_j,x_k])X_{I'}$$

Na taj način dobili smo $(C_n)$ i u preostalim slučajevima i time je dokaz PBW−teorema potpun.

Budući da sada znamo da je Liejev morfizam $\iota : \mathfrak{g} \to U(\mathfrak{g})$ injektivan, možemo ga upotrijebiti kao identifikaciju $\mathfrak{g}$ s potprostorom od $U(\mathfrak{g})$. Tada imamo

$$U_0(\mathfrak{g}) = K1_{U(\mathfrak{g})} \qquad \text{i} \qquad U_1(\mathfrak{g}) = K1_{U(\mathfrak{g})} \dot{+} \mathfrak{g}.$$

Nadalje, potprostor $U_n(\mathfrak{g})$ je razapet svim produktima oblika $z_1 \cdots z_k$ gdje su $z_1, \ldots, z_k \in \mathfrak{g}$ i $k \leq n$. Univerzalno svojstvo od $U(\mathfrak{g})$ sada znači da se svaki Liejev morfizam sa $\mathfrak{g}$ u unitalnu algebru $\mathcal{A}$ jedinstveno proširuje do unitalnog homomorfizma sa $U(\mathfrak{g})$ u $\mathcal{A}$.

**Korolar 5.3.7.** *Neka je $\mathfrak{h}$ Liejeva podalgebra Liejeve algebre $\mathfrak{g}$. Tada se inkluzija $x \mapsto x$ sa $\mathfrak{h}$ u $\mathfrak{g}$ jedinstveno proširuje do izomorfizma unitalne algebre $U(\mathfrak{h})$ na unitalnu podalgebru od $U(\mathfrak{g})$ generiranu sa $\mathfrak{h}$.*

**Dokaz:** Neka je $\rho : \mathfrak{h} \to \mathfrak{g}$ ta inkluzija. Kako smo $\mathfrak{g}$ identificirali s potprostorom od $U(\mathfrak{g})$, $\rho$ možemo shvaćati kao Liejev morfizam sa $\mathfrak{h}$ u unitalnu algebru $U(\mathfrak{g})$. Prema univerzalnom svojstvu od $U(\mathfrak{h})$ $\rho$ se jedinstveno proširuje do unitalnog homomorfizma $\tilde{\rho} : U(\mathfrak{h}) \to U(\mathfrak{g})$. Njegova je slika očito unitalna podalgebra od $U(\mathfrak{g})$ generirana sa $\mathfrak{h}$. Ako izaberemo (linearno uređenu) bazu od $\mathfrak{g}$ koja sadrži bazu od $\mathfrak{h}$, prema PBW−teoremu linearno preslikavanje $\tilde{\rho}$ preslikava elemente baze prostora $U(\mathfrak{h})$ u različite elemente baze prostora $U(\mathfrak{g})$. Prema tome, homomorfizam $\tilde{\rho}$ je injektivan, odnosno, to je izomorfizam na sliku.

**Korolar 5.3.8.** *Neka su $\mathfrak{a}$ i $\mathfrak{b}$ Liejeve podalgebre Liejeve algebre $\mathfrak{g}$, takve da je $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \dot{+} \mathfrak{b}$. Uz identifikacije $U(\mathfrak{a}) \subseteq U(\mathfrak{g})$ i $U(\mathfrak{b}) \subseteq U(\mathfrak{g})$ iz korolara 5.3.7. postoji jedinstven lineran operator $\Phi : U(\mathfrak{a}) \otimes U(\mathfrak{b}) \to U(\mathfrak{g})$ takav da vrijedi*

$$\Phi(a \otimes b) = ab \qquad \forall a \in U(\mathfrak{a}) \quad i \quad \forall b \in U(\mathfrak{b}).$$

*$\Phi$ je izomorfizam vektorskih prostora.*

**Dokaz:** Takav linearan operator $\Phi$ postoji zbog univerzalnog svojstva tenzorskog produkta vektorskih prostora, budući da je $(a, b) \mapsto ab$ bilinearno preslikavanje sa $U(\mathfrak{a}) \times U(\mathfrak{b})$ u $U(\mathfrak{g})$. Izaberimo sada baze $(x_j)_{j\in J}$ i $(y_k)_{k\in K}$ od $\mathfrak{a}$ i $\mathfrak{b}$, pri čemu su $J$ i $K$ linearno uređeni skupovi. Neka je $L$ disjuntna unija skupova $J$ i $K$. Linearno uredimo skup $L$ tako da se restrikcije tog uređaj na $J$ i na $K$ podudaraju s uređajima tih skupova i da vrijedi $j < k$ za svaki $j \in J$ i svaki $k \in K$. Stavimo za $\ell \in L$

$$z_\ell = \begin{cases} x_\ell & \text{ako je } \ell \in J \\ y_\ell & \text{ako je } \ell \in K. \end{cases}$$

Tada je $(z_\ell)_{\ell\in L}$ baza od $\mathfrak{g}$. Uz oznake kao u dokazu PBW−teoremu imamo da su redom

$$A = \{x_{j_1} \cdots x_{j_n};\ (j_1, \ldots, j_n) \in J^{(n)},\ n \in \mathbb{Z}_+\},$$
$$B = \{y_{k_1} \cdots y_{k_m};\ (k_1, \ldots, k_m) \in K^{(m)},\ m \in \mathbb{Z}_+\},$$
$$C = \{z_{\ell_1} \cdots z_{\ell_p};\ (\ell_1, \ldots, \ell_p) \in L^{(p)},\ p \in \mathbb{Z}_+\}$$

baze vektorskih prostora $U(\mathfrak{a})$, $U(\mathfrak{b})$ i $U(\mathfrak{g})$.

Nadalje, po tvrdnji $(c)$ propozicije 5.1.2.

$$A \otimes B = \{x_{j_1} \cdots x_{j_n} \otimes y_{k_1} \cdots y_{k_m};\ (j_1, \ldots, j_n) \in J^{(n)},\ (k_1, \ldots, k_m) \in K^{(m)},\ n, m \in \mathbb{Z}_+\}$$

je baza vektorskog prostora $U(\mathfrak{a}) \otimes U(\mathfrak{b})$. Operator $\Phi$ preslikava tu bazu bijektivno na bazu $C$ prostora $U(\mathfrak{g})$. Dakle, $\Phi$ je izomorfizam vektorskih prostora.

Neka je $\pi : T(\mathfrak{g}) \to U(\mathfrak{g}) = T(\mathfrak{g})/\mathcal{K}$ kvocijentni epimorfizam. Filtracija algebre $U(\mathfrak{g})$ definirana je kao $\pi-$slika filtracije od $T(\mathfrak{g})$ :

$$U_n(\mathfrak{g}) = \pi(T_n(\mathfrak{g})), \qquad T_n(\mathfrak{g}) = \sum_{k=0}^{n} T^k(\mathfrak{g}).$$

Promatrajmo sada kompoziciju

$$T_n(\mathfrak{g}) \to (T_n(\mathfrak{g}) + \mathcal{K})/\mathcal{K} = U_n(\mathfrak{g}) \to Gr^n(\mathfrak{g}) = U_n(\mathfrak{g})/U_{n-1}(\mathfrak{g}).$$

Ta je kompozicija surjektivna, jer su oba preslikavanja surjektivna. Nadalje, potprostor $T_{n-1}(\mathfrak{g})$ sadržan je u jezgri te kompozicije. Budući da je $T_n(\mathfrak{g}) = T_{n-1}(\mathfrak{g}) \dot{+} T^n(\mathfrak{g})$, dolazimo do linearnog preslikavanja

$$\tilde{\varphi}_n : T^n(\mathfrak{g}) \to Gr^n(\mathfrak{g}) = U_n(\mathfrak{g})/U_{n-1}(\mathfrak{g}).$$

Definiramo sada linearno preslikavanje $\tilde{\varphi} : T(\mathfrak{g}) \to Gr(\mathfrak{g})$ pomoću njegovih restrikcija:

$$\tilde{\varphi}|T^n(\mathfrak{g}) = \tilde{\varphi}_n, \qquad n \in \mathbb{Z}_+.$$

**Teorem 5.3.9.** *Definirano preslikavanje $\tilde{\varphi} : T(\mathfrak{g}) \to Gr(\mathfrak{g})$ je unitalni homomorfizam. Jezgra $Ker\,\tilde{\varphi}$ sadrži obostrani ideal $\mathcal{I}$ u $T(\mathfrak{g})$ generiran skupom $\{x \otimes y - y \otimes x;\ x, y \in \mathfrak{g}\}$. Prijelazom na kvocijent $T(\mathfrak{g})/\mathcal{I} = S(\mathfrak{g})$ dobivamo izomorfizam $\varphi : S(\mathfrak{g}) \to Gr(\mathfrak{g})$ i vrijedi $\varphi(S^n(\mathfrak{g})) = Gr^n(\mathfrak{g})$.*

**Dokaz:** Neka su $a \in T^n(\mathfrak{g})$ i $b \in T^m(\mathfrak{g})$, dakle, $a \otimes b \in T^{n+m}(\mathfrak{g})$. Tada je $a + \mathcal{K} \in U_n(\mathfrak{g})$ i $\tilde{\varphi}(a)$ možemo shvaćati kao klasu $a + T_{n-1}(\mathfrak{g}) + \mathcal{K}$ u $Gr^n(\mathfrak{g}) = U_n(\mathfrak{g})/U_{n-1}(\mathfrak{g})$, budući da iz homogenosti tenzora $a \in T^n(\mathfrak{g})$ slijedi da su sve komponente od $\tilde{\varphi}(a)$ u $Gr^k(\mathfrak{g})$ za $k \neq n$ jednake nuli. Ista argumentacija primjenjiva je i na elemente $b \in T^m(\mathfrak{g})$ i $a \otimes b \in T^{n+m}(\mathfrak{g})$. Dakle,

$$\tilde{\varphi}(a) = a + T_{n-1}(\mathfrak{g}) + \mathcal{K}, \quad \tilde{\varphi}(b) = b + T_{m-1}(\mathfrak{g}) + \mathcal{K}, \quad \tilde{\varphi}(a \otimes b) = a \otimes b + T_{n+m-1}(\mathfrak{g}) + \mathcal{K}.$$

Budući da je $\mathcal{K}$ ideal, slijedi $\tilde{\varphi}(a)\tilde{\varphi}(b) = \tilde{\varphi}(a \otimes b)$. Bilinearnim proširenjem na $T(\mathfrak{g}) \times T(\mathfrak{g})$ zaključujemo da je preslikavanje $\tilde{\varphi} : T(\mathfrak{g}) \to Gr(\mathfrak{g})$ homomorfizam algebri, očito unitalni.

Da dokažemo da je $\mathcal{I} \subseteq Ker\,\tilde{\varphi}$ dovoljno je dokazati da obostrani ideal $Ker\,\tilde{\varphi}$ sadrži generatore ideala $\mathcal{I}$, tj sve elemente oblika $x \otimes y - y \otimes x$, $x, y \in \mathfrak{g}$. Kako je $x \otimes y - y \otimes x - [x, y] \in \mathcal{K}$ i $[x, y] \in \mathfrak{g} = T^1(\mathfrak{g}) \subseteq T_1(\mathfrak{g})$, imamo

$$\tilde{\varphi}(x \otimes y - y \otimes x) = x \otimes y - y \otimes x + T_1(\mathfrak{g}) + \mathcal{K} = [x, y] + T_1(\mathfrak{g}) + \mathcal{K} = T_1(\mathfrak{g}) + \mathcal{K},$$

a to je nula u $Gr^2(\mathfrak{g}) \subseteq Gr(\mathfrak{g})$. Time je dokazano da je $\mathcal{I} \subseteq Ker\,\tilde{\varphi}$. Preslikavanje $\varphi : S(\mathfrak{g}) \to Gr(\mathfrak{g})$ dobiveno iz $\tilde{\varphi}$ prijelazom na kvocijent po $\mathcal{I}$ je tada homomorfizam unitalnih algebri.

Neka je sada $J$ linearno uređen skup i $(x_j)_{j \in J}$ baza od $\mathfrak{g}$. Prema propoziciji 5.2.4. monomi $x_{j_1}^{k_1} \cdots x_{j_\ell}^{k_\ell}$ za $\ell, k_1, \cdots, k_\ell \in \mathbb{N}$, $j_1, \ldots, j_\ell \in J$, $j_1 < \cdots < j_\ell$, $k_1 + \cdots + k_\ell = n$, tvore bazu od $S^n(\mathfrak{g})$. Razmotrimo djelovanje homomorfizma $\varphi : S(\mathfrak{g}) \to Gr(\mathfrak{g})$ na takav monom. Imamo

$$\varphi(x_{j_1}^{k_1} \cdots x_{j_\ell}^{k_\ell}) = \tilde{\varphi}(\underbrace{x_{j_1} \otimes \cdots \otimes x_{j_1}}_{k_1} \otimes \cdots \otimes \underbrace{x_{j_\ell} \otimes \cdots \otimes x_{j_\ell}}_{k_\ell}),$$

a to je jednako slici monoma $x_{j_1}^{k_1} \cdots x_{j_\ell}^{k_\ell} \in U_n(\mathfrak{g})$ u kvocijentu $U_n(\mathfrak{g})/U_{n-1}(\mathfrak{g})$. Međutim, prema PBW−teoremu ti monomi tvore bazu direktnog komplementa od $U_{n-1}(\mathfrak{g})$ u $U_n(\mathfrak{g})$, dakle, njihove slike tvore bazu kvocijentnog prostora $Gr^n(\mathfrak{g}) = U_n(\mathfrak{g})/U_{n-1}(\mathfrak{g})$. Time je dokazano da $\varphi$ preslikava bazu od $S(\mathfrak{g})$ na bazu od $Gr(\mathfrak{g})$. Dakle, homomorfizam $\varphi$ je izomorfizam. Iz dokaza slijedi i posljednja tvrdnja $\varphi(S^n(\mathfrak{g})) = Gr^n(\mathfrak{g})$.

Prema dokazu teorema 5.2.9. vidimo da za $j_1 < \cdots < j_\ell$ i za $k_1, \ldots, k_\ell \in \mathbb{N}$ takve da je $k_1 + \cdots + k_\ell = n$ vrijedi

$$\varphi(x_{j_1}^{k_1} \cdots x_{j_\ell}^{k_\ell}) = x_{j_1}^{k_1} \cdots x_{j_\ell}^{k_\ell} + U_{n-1}(\mathfrak{g}). \tag{5.6}$$

Dakle

$$\varphi^{-1}(x_{j_1}^{k_1} \cdots x_{j_\ell}^{k_\ell} + U_{n-1}(\mathfrak{g})) = x_{j_1}^{k_1} \cdots x_{j_\ell}^{k_\ell}. \tag{5.7}$$

Zbog leme 5.3.5. jednakosti (5.6) i (5.7) vrijede i bez pretpostavke $j_1 < \cdots < j_\ell$.

**Korolar 5.3.10.** *Neka je za $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $W$ potprostor od $T^n(\mathfrak{g})$ takav da je*

$$T^n(\mathfrak{g}) = W \dot{+} T^n(\mathfrak{g}) \cap \mathcal{I},$$

*tj. da je restrikcija kvocijentnog epimorfizma $T(\mathfrak{g}) \to S(\mathfrak{g}) = T(\mathfrak{g})/\mathcal{I}$ na potprostor $W$ izomorfizam sa $W$ na $S^n(\mathfrak{g})$. Neka je $\pi : T(\mathfrak{g}) \to U(\mathfrak{g}) = T(\mathfrak{g})/\mathcal{K}$ kvocijentni epimorfizam. Tada je restrikcija $\pi|W$ injektivna i vrijedi*

$$U_n(\mathfrak{g}) = \pi(W) \dot{+} U_{n-1}(\mathfrak{g}).$$

**Dokaz:** Promotrimo dijagram

$$\begin{tikzcd} T^n(\mathfrak{g}) \arrow[r] \arrow[d] & U_n(\mathfrak{g}) \arrow[d] \\ S^n(\mathfrak{g}) \arrow[r, "\varphi"'] & Gr^n(\mathfrak{g}) \end{tikzcd}$$

Činjenica da je taj dijagram komutativan ekvivalentna je tvrdnji teorema 5.3.9. da iz preslikavanja $\tilde{\varphi} : T^n(\mathfrak{g}) \to Gr^n(\mathfrak{g})$ prijelazom na kvocijent po $T^n(\mathfrak{g}) \cap \mathcal{I}$ dobivamo preslikavanje $\varphi : S^n(\mathfrak{g}) \to Gr^n(\mathfrak{g})$. Nadalje, po tom teoremu donja je strelica u tom dijagramu izomorfizam vektorskih prostora. Pretpostavka je da je lijeva strelica restringirana na potprostor $W$ izomorfizam sa $W$ na $S^n(\mathfrak{g})$. Zaključujemo da je restrikcija kompozicije gornje i desne strelice na potprostor $W$ izomorfizam sa $W$ na $Gr^n(\mathfrak{g})$. Odatle slijedi tvrdnja korolara.

Pretpostavljamo u daljnjem da je $K$ polje karakteristike 0. Primijenimo korolar 5.3.10. na prostor $\tilde{S}^n(\mathfrak{g})$ simetričnih $n$−tenzora. To je potprostor od $T^n(\mathfrak{g})$ razapet elementima oblika

$$\sigma_n(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) = \frac{1}{n!} \sum_{\tau \in \mathcal{S}_n} x_{\tau(1)} \otimes \cdots \otimes x_{\tau(n)}, \qquad x_1, \ldots, x_n \in \mathfrak{g}.$$

Prema propoziciji 5.2.6. vrijedi

$$T^n(\mathfrak{g}) = \tilde{S}^n(\mathfrak{g}) \dot{+} T^n(\mathfrak{g}) \cap \mathcal{I},$$

pa je korolar 5.3.10. primjenjiv. Na taj način prijelazom na kvocijent $T(\mathfrak{g}) \to S(\mathfrak{g}) = T(\mathfrak{g})/\mathcal{I}$ kao u propoziciji 5.2.6. dolazimo do izomorfizma prostora $S^n(\mathfrak{g})$ na direktni komplement potprostora $U_{n-1}(\mathfrak{g})$ u prostoru $U_n(\mathfrak{g})$. I to ćemo preslikavanje označiti sa $\sigma_n$; dakle,

$$U_n(\mathfrak{g}) = \sigma_n(S^n(\mathfrak{g})) \dot{+} U_{n-1}(\mathfrak{g}), \tag{5.8}$$

gdje je

$$\sigma_n(x_1 \cdots x_n) = \frac{1}{n!} \sum_{\tau \in \mathcal{S}_n} x_{\tau(1)} \cdots x_{\tau(n)}, \qquad x_1, \ldots, x_n \in \mathfrak{g}.$$

Primijetimo da ovdje s lijeve strane $x_1 \cdots x_n$ predstavlja umnožak u algebri $S(\mathfrak{g})$ a s desne strane $x_{\tau(1)} \cdots x_{\tau(n)}$ predstavlja umnožak u algebri $U(\mathfrak{g})$. Ta preslikavanja $\sigma_n$ po linearnosti proširimo do linearnog operatora $\sigma : S(\mathfrak{g}) \to U(\mathfrak{g})$, tj. $\sigma | S^n(\mathfrak{g}) = \sigma_n$, $n \in \mathbb{Z}_+$. I taj se operator zove **simetrizacija**.

**Propozicija 5.3.11.** *Izomorfizam $\varphi : S(\mathfrak{g}) \to Gr(\mathfrak{g})$ iz teorema 5.3.9. može se dobiti iz simetrizacije $\sigma : S(\mathfrak{g}) \to U(\mathfrak{g})$ prijelazom na uzastopne kvocijente:*

$$\varphi(a) = \sigma(a) + U_{n-1}(\mathfrak{g}), \qquad a \in S^n(\mathfrak{g}).$$

**Dokaz:** Neka je $(x_j)_{j \in J}$ linearno uređena baza od $\mathfrak{g}$. Znamo da tada umnošci $x_{j_1}^{k_1} \cdots x_{j_\ell}^{k_\ell}$ za $j_1 < \ldots < j_\ell$ i $k_1, \ldots, k_\ell \in \mathbb{N}$ takve da je $k_1 + \cdots + k_\ell = n$, tvore bazu prostora $S^n(\mathfrak{g})$. Monom $x_{j_1}^{k_1} \cdots x_{j_\ell}^{k_\ell}$ se djelovanjem $\sigma$ preslikava u simetriziranu sumu, ali po lemi 5.3.5. svaki je član te sume kongruentan modulo $U_{n-1}(\mathfrak{g})$ elementu $\frac{1}{n!} x_{j_1}^{k_1} \cdots x_{j_\ell}^{k_\ell} \in U_n(\mathfrak{g})$. Prijelazom na kvocijent $Gr^n(\mathfrak{g}) = U_n(\mathfrak{g})/U_{n-1}(\mathfrak{g})$ vidimo da se monom $x_{j_1}^{k_1} \cdots x_{j_\ell}^{k_\ell}$ preslikava u element

$$x_{j_1}^{k_1} \cdots x_{j_\ell}^{k_\ell} + U_{n-1}(\mathfrak{g}) = \varphi(x_{j_1}^{k_1} \cdots x_{j_\ell}^{k_\ell})$$

Linearnim proširenjem tvrdnja slijedi za svaki $a \in S^n(\mathfrak{g})$.

**Propozicija 5.3.12.** *Simetrizacija $\sigma : S(\mathfrak{g}) \to U(\mathfrak{g})$ je izomorfizam vektorskih prostora i za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi*

$$U_n(\mathfrak{g}) = \sigma(S^n(\mathfrak{g})) \dot{+} U_{n-1}(\mathfrak{g}).$$

**Dokaz:** Gornja je formula upravo (5.8). Odatle neposredno slijedi tvrdnja o izomorfizmu.

**Propozicija 5.3.13.** *Neka su $\mathfrak{a}$ i $\mathfrak{b}$ potprostori Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ takvi da je $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \dot{+} \mathfrak{b}$. Postoji jedinstven linearan operator $\Psi : S(\mathfrak{a}) \otimes S(\mathfrak{b}) \to U(\mathfrak{g})$ takav da je*

$$\Psi(a \otimes b) = \sigma(a)\sigma(b) \qquad \forall a \in S(\mathfrak{a}) \quad i \quad \forall b \in S(\mathfrak{b}).$$

*$\Psi$ je izomorfizam vektorskih prostora.*

**Zadatak 5.14.** *Dokažite propoziciju 5.3.13.*

**Uputa:** Koristite lemu 5.3.5. i propoziciju 5.3.12.

Kombinacijom tog izomorfizma i izomorfizma iz 5.3.12. za Liejevu podalgebru od $\mathfrak{g}$ neposredno slijedi:

**Korolar 5.3.14.** *Neka je $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \dot{+} \mathfrak{p}$, gdje je $\mathfrak{k}$ Liejeva podalgebra i $\mathfrak{p}$ potprostor Liejeve algebre $\mathfrak{g}$. Tada postoji jedinstven linearan operator $\Psi : U(\mathfrak{k}) \otimes S(\mathfrak{p}) \to U(\mathfrak{g})$ takav da je*

$$\Psi(a \otimes b) = a\sigma(b) \qquad \forall a \in U(\mathfrak{k}) \quad i \quad \forall b \in S(\mathfrak{b}).$$

*$\Psi$ je izomorfizam vektorskih prostora.*

**Zadatak 5.15.** *Za* $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ *i kao obično*

$$h = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

*neka je* $c$ *element od* $U(\mathfrak{g})$ *dan sa*

$$c = \frac{1}{2}h^2 + xy + yx = \frac{1}{2}h^2 + 2xy - h.$$

*Dokažite da je element* $c$ *sadržan u centru algebre* $U(\mathfrak{g})$*, tj. da je* $ca = ac$ $\forall a \in U(\mathfrak{g})$*. Nadalje, ako je* $\pi_n$ *ireducibilna* $n-$*dimenzionalna reprezentacija Liejeve algebre* $\mathfrak{g}$ *i* $\tilde{\pi}_n$ *njeno proširenje do reprezentacije unitalne algebre* $U(\mathfrak{g})$ *izračunajte djelovanje operatora* $\tilde{\pi}_n(c)$*.*

**Zadatak 5.16.** *Dokažite da univerzalna omotačka algebra* $U(\mathfrak{g})$ *Liejeve algebre* $\mathfrak{g}$ *nema djelitelja nule, tj. da za* $a, b \in U(\mathfrak{g}) \setminus \{0\}$ *vrijedi* $ab \neq 0$*.*

## 5.4 Teorem egzistencije za poluproste Liejeve algebre

U ovom ćemo odjeljku dokazati da za svaki reducirani sistem korijena $R$ i svako algebarski zatvoreno polje $K$ karakteristike 0 postoji poluprosta Liejeva algebra nad poljem $K$ takva da je za svaku njenu Cartanovu podalgebru $\mathfrak{h}$ sistem korijena $R(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ izomorfan sistemu korijena $R$. Napominjemo da to dosta jednostavno slijedi iz primjera u odjeljku 1.1. ako je $R$ ireducibilan sistem korijena tipa $A_n$, $B_n$, $C_n$ ili $D_n$. Dosta jednostavna je konstrukcija i proste Liejeve algebre sa sistemom korijena tipa $G_2$, ali za ostale izuzetne tipove $F_4$, $E_6$, $E_7$ i $E_8$ direktna je kostrukcija je također moguća, ali je vrlo komplicirana.

Neka je $K$ proizvoljno polje i neka je $S$ skup. **Slobodna Liejeva $K-$algebra nad skupom** $S$ je uređen par $(\mathfrak{g},\iota)$ gdje je $\mathfrak{g}$ Liejeva algebra nad poljem, $\iota$ je preslikavanje sa $S$ u $\mathfrak{g}$ i vrijedi *univerzalno svojstvo*: za svaku Liejevu $K-$algebru $\mathfrak{h}$ i za svako preslikavanje $\psi : S \to \mathfrak{h}$ postoji jedinstven homomorfizam Liejevih $K-$algebri $\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ takav da je $\psi = \varphi \circ \iota$.

**Teorem 5.4.1.** *Neka je $S$ skup i $K$ polje.*

($a$) *Postoji slobodna Liejeva $K-$algebra nad skupom $S$.*

($b$) *Ako su $(\mathfrak{g},\iota)$ i $(\mathfrak{h},\kappa)$ slobodne Liejeve $K-$algebre nad skupom $S$, jedinstveni homomorfizam Liejevih $K-$algebri $\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ sa svojstvom $\kappa = \varphi \circ \iota$ je izomorfizam.*

($c$) *Ako je $(\mathfrak{g},\iota)$ slobodna Liejeva $K-$algebra nad skupom $S$, preslikavanje $\iota : S \to \mathfrak{g}$ je injektivno, skup $\iota(S)$ je linearno nezavisan i taj skup generira Liejevu $K-$algebru $\mathfrak{g}$.*

**Dokaz:** ($a$) Neka je $V$ vektorski prostor nad poljem $K$ s bazom $(e_s)_{s\in S}$ i $T(V)$ tenzorska algebra prostora. $T(V)$ je unitalna algebra, pa je to i Liejeva ako definiramo komutator sa

$$[a,b] = a \otimes b - b \otimes a, \qquad a,b \in T(V).$$

Neka je $\mathfrak{g}$ Liejeva podalgebra od $T(V)$ generirana sa $\{e_s;\ s \in S\}$, odnosno, generirana sa $V$. Neka je $\iota : S \to \mathfrak{g}$ definirano sa $\iota(s) = e_s,\ s \in S$. Neka je $\mathfrak{h}$ Liejeva $K-$algebra i neka je $\psi : S \to \mathfrak{h}$ preslikavanje. Budući da je $(e_s)_{s\in S}$ baza od $V$ postoji jedinstven linearan operator $\Psi : V \to \mathfrak{h}$ takav da je $\Psi e_s = \psi(s)\ \forall s \in S$. Možemo shvaćati da je $\mathfrak{h} \subseteq U(\mathfrak{h})$, dakle, $\Psi$ je linearan operator sa vektorskog prostora $V$ u univerzalnu omotačku algebru $U(\mathfrak{h})$ Liejeve algebre $\mathfrak{h}$. Prema univerzalnom svojstvu tenzorske algebre postoji jedinstven unitalni homomorfizam $\Phi : T(V) \to U(\mathfrak{h})$ koji proširuje $\Psi$, tj. $\Phi|V = \Psi$; podsjećamo da je $V = T^1(V) \subseteq T(V)$. Neka je sada $\varphi = \Phi|\mathfrak{g}$. Tada je $\varphi : \mathfrak{g} \to U(\mathfrak{h})$ homomorfizam Liejevih algebri. Nadalje, kako je Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ generirana skupom $\{e_s;\ s \in S\}$, njena slika $\varphi(\mathfrak{g})$ generirana je skupom $\{\varphi(e_s);\ s \in S\}$. Međutim, za svaki $s \in S$ je

$$\varphi(e_s) = \Phi(e_s) = \psi(s) \in \mathfrak{h},$$

prema tome, slika $\varphi(\mathfrak{g})$ Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ sadržana je u $\mathfrak{h}$. Dakle, $\varphi$ je homomorfizam Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ u Liejevu algebru $\mathfrak{h}$. Taj homomorfizam ima traženo svojstvo, jer za svako $s \in S$ je

$$(\varphi \circ \iota)(s) = \varphi(\iota(s)) = \varphi(e_s) = \psi(s),$$

dakle, vrijedi $\psi = \varphi \circ \iota$. Napokon, takav homomorfizam $\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ je jedinstven, budući da je Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ generirana sa $\iota(S) = \{e_s;\ s \in S\}$.

Tvrdnja ($b$) dokazuje se sasvim analogno dokazima tvrdnji ($b$) u teoremima 5.1.1. i 5.2.1.

Napokon, tvrdnja ($c$) očito vrijedi za slobodnu Liejevu algebru konstruiranu u dokazu tvrdnje ($a$), a zbog tvrdnje ($b$) ona vrijedi i za svaku drugu slobodnu Liejevu algebru nad skupom $S$.

**Zadatak 5.17.** *Neka je $(\mathfrak{g}, \iota)$ slobodna Liejeva $K-$algebra nad skupom $S$. Uz identifikaciju $\mathfrak{g} \subseteq U(\mathfrak{g})$ dokažite da par $(U(\mathfrak{g}), S)$ ima sljedeće univerzalno svojstvo: ako je $\mathcal{A}$ unitalna $K-$algebra i $\varphi : S \to \mathcal{A}$ preslikavanje, onda postoji jedinstven unitalni homomorfizam $\Phi : U(\mathfrak{g}) \to \mathcal{A}$ takav da je $\varphi = \Phi \circ \iota$.*

Zbog tvrdnje $(c)$ u teoremu 5.4.1. preslikavanje $\iota : S \to \mathfrak{g}$ se može upotrijebiti kao identifikacija. Dakle, $S$ identificiramo s njegovom slikom $\iota(S)$. Sada univerzalno svojstvo glasi: svako preslikavanje skupa $S \subseteq \mathfrak{g}$ u Liejevu $K-$algebru $\mathfrak{h}$ jedinstveno se proširuje do homomorfizma Liejevih algebri $\mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$. Primijetimo da je zbog tvrdnje $(c)$ teorema 5.4.1. skup $S$ linearno nezavisan.

Neka je $\mathfrak{g}$ slobodna Liejeva $K-$algebra nad svojim podskupom $S$. Za svaki vektorski prostor $V$ nad poljem $K$ svako preslikavanje $\pi : S \to \mathfrak{gl}(V)$ jedinstveno se proširuje do reprezentacije Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ na vektorskom prostoru $V$.

Neka je i dalje $\mathfrak{g}$ slobodna Liejeva $K-$algebra nad poskupom $S = \{s_j;\ j \in J\} \subseteq \mathfrak{g}$. Neka je $R = \{r_i;\ i \in I\}$ neki podskup od $\mathfrak{g}$ i neka je $\mathfrak{r}$ ideal u $\mathfrak{g}$ generiran skupom $R$. Tada za kvocijentnu Liejevu algebru $\mathfrak{g}/\mathfrak{r}$ kažemo da je to **Liejeva algebra s generatorima** $s_j + \mathfrak{r}$, $j \in J$, **i relacijama** $r_i = 0$, $i \in I$.

**Zadatak 5.18.** *Opišite slobodnu Liejevu $K-$algebru nad jednočlanim skupom.*

Neka je u daljnjem $K$ algebarski zatvoreno polje karakteristike 0. Neka je $\mathfrak{g}$ poluprosta Liejeva algebra nad poljem $K$, naravno, konačnodimenzionalna, i neka je $\mathfrak{h}$ njena Cartanova podalgebra. Neka je $B = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell\}$ neka baza sistema korijena $R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$. Kao i prije za svaki korijen $\alpha \in R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ označimo sa $\mathfrak{g}_\alpha$ pripadni korijenski potprostor

$$\mathfrak{g}_\alpha = \{x \in \mathfrak{g};\ [h, x] = \alpha(h)x\ \forall h \in \mathfrak{h}\}.$$

To su jednodimenzionalni potprostori i $\mathfrak{g}$ je direktna suma $\mathfrak{h}$ i potprostora $\mathfrak{g}_\alpha$, $\alpha \in R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$. Nadalje,$[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}]$ je za svaki $\alpha \in R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ jednodimenzionalan potprostor od $\mathfrak{h}$ koji je direktni komplement od $Ker\,\alpha = \{h \in \mathfrak{h};\ \alpha(h) = 0\}$ :

$$\mathfrak{h} = [\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}] \dot{+} Ker\,\alpha.$$

Sa $h_\alpha$ označavamo kao i prije jedinstven element potprostora $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}]$ za koji vrijedi $\alpha(h_\alpha) = 2$. Tada je u stvari $\{h_\alpha;\ \alpha \in R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ dualni sistem korijena; preciznije, $span_\mathbb{R}\{h_\alpha;\ \alpha \in R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})\}$ je dualan sistemu korijena $span_\mathbb{R} R$ i uz oznake iz poglavlja 3. je $h_\alpha = \check{\alpha}$.

Stavimo kao u odjeljku 3.3. $n(\alpha, \beta) = \check{\beta}(\alpha)$, tj. $n(\alpha, \beta) = \alpha(h_\beta)$. Kraće ćemo pisati

$$h_i = h_{\alpha_i}, \qquad c_{ij} = n(\alpha_i, \alpha_j) = \alpha_i(h_j), \qquad i, j \in \{1, \ldots, \ell\}.$$

Nadalje, za svaki $i \in \{1, \ldots, \ell\}$ izaberimo $x_i \in \mathfrak{g}_{\alpha_i}$ i $y_i \in \mathfrak{g}_{-\alpha_i}$ tako da bude $[x_i, y_i] = h_i$.

**Propozicija 5.4.2.** *Uz uvedene oznake Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ generirana je skupom $\{x_i, y_i, h_i;\ i = = 1, \ldots \ell\}$ i vrijede sljedeće relacije:*

$(S1)$ $[h_i, h_j] = 0$ *za sve* $i, j = 1, \ldots, \ell$.

$(S2)$ $[x_i, y_i] = h_i$, $[x_i, y_j] = 0$ *za* $i, j = 1, \ldots, \ell$, $i \neq j$.

$(S3)$ $[h_i, x_j] = c_{ji}x_j$, $[h_i, y_j] = -c_{ji}y_j$ *za sve* $i, j = 1, \ldots, \ell$.

$(S_{ij}^+)$ $(ad\,x_i)^{-c_{ji}+1}(x_j) = 0$ *za* $i, j = 1, \ldots, \ell$, $i \neq j$.

$(S_{ij}^-)$ $(ad\,y_i)^{-c_{ji}+1}(y_j) = 0$ *za* $i, j = 1, \ldots, \ell$, $i \neq j$.

**Dokaz:** Prema propoziciji 4.1.2. Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ generirana je već skupom $\{x_i, y_i;\ i = = 1, \ldots, \ell\}$, dakle, pogotovo sa $\{x_i, y_i, h_i;\ i = 1, \ldots, \ell\}$. $(S1)$ je jasno, jer je $\mathfrak{h}$ komutativna podalgebra. Nadalje, po konstrukciji vrijedi prva jednakost u $(S2)$. Druga jednakost slijedi iz činjenice da je $[x_i, y_j] \in \mathfrak{g}_{\alpha_i - \alpha_j} = \{0\}$, jer $\alpha_i - \alpha_j$ nije korijen za $i \neq j$. $(S3)$ je također jasno po definiciji $c_{ji} = \alpha_j(h_i)$. Nadalje, $\alpha_i-$lanac kroz $\alpha_j$ je $\{\alpha_j, \alpha_j + \alpha_i, \ldots, \alpha_j + q\alpha_i\}$, gdje je $-q = n(\alpha_j, \alpha_i) = c_{ji}$ prema korolaru 3.3.6. Dakle, $\pm(\alpha_j + (q+1)\alpha_i)$ nije korijen, pa $(S_{ij}^+)$ i $(S_{ij}^-)$ slijede:

$$(ad\, x_i)^{q+1}(x_j) \in \mathfrak{g}_{\alpha_j + (q+1)\alpha_i} = \{0\}, \qquad (ad\, y_i)^{q+1}(y_j) \in \mathfrak{g}_{-\alpha_j - (q+1)\alpha_i} = \{0\}.$$

Cilj nam je da dokažemo Serreov teorem da je za proizvoljan reducirani sistem korijena $R$ i njegovu bazu $B = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell\}$ Liejeva algebra s generatorima $\{x_i, y_i, h_i;\ i = 1, \ldots, \ell\}$ i relacijama $(S1)$, $(S2)$, $(S3)$, $(S_{ij}^+)$ i $(S_{ij}^-)$ upravo poluprosta Liejeva algebra sa sistemom korijena $R$. Taj će nam teorem biti važan ne samo zbog toga jer ćemo tako znati da postoji pet izuzetnih prostih Liejevih algebri tipova $G_2$, $F_4$, $E_6$, $E_7$ i $E_8$, nego posebno zbog mogućnosti detaljnog opisa svih konačnodimenzionalnih ireducibilnih reprezentacija svake poluproste Liejeve algebre nad algebarski zatvorenim poljem karakteristike 0.

Neka je u daljnjem $R$ reducirani sistem korijena i $B = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell\}$ njegova baza. Stavimo opet $c_{ij} = n(\alpha_i, \alpha_j)$. Neka je $\hat{\mathfrak{g}}$ slobodna Liejeva algebra nad $3\ell-$članim podskupom

$$\hat{S} = \{\hat{x}_i, \hat{y}_i, \hat{h}_i;\ i = 1, \ldots, \ell\}.$$

Promatrat ćemo najprije relacije $(S1)$, $(S2)$ i $(S3)$. Neka je, dakle, $\hat{\mathfrak{k}}$ ideal u $\hat{\mathfrak{g}}$ generiran relacijama $(S1)$, $(S2)$ i $(S3)$, tj. ideal generiran skupom

$$\{[\hat{h}_i, \hat{h}_j],\ [\hat{x}_i, \hat{y}_j] - \delta_{ij}\hat{h}_i,\ [\hat{h}_i, \hat{x}_j] - c_{ji}\hat{x}_j,\ [\hat{h}_i, \hat{y}_j] + c_{ji}\hat{y}_j;\ i, j = 1, \ldots, \ell\}.$$

Stavimo $\mathfrak{g}_0 = \hat{\mathfrak{g}}/\hat{\mathfrak{k}}$ i neka su $x_i$, $y_i$, $h_i$ slike u $\mathfrak{g}_0$ elemenata $\hat{x}_i$, $\hat{y}_i$, $\hat{h}_i$. Napominjemo da će se vidjeti da je općenito Liejeva algebra $\mathfrak{g}_0$ beskonačnodimenzionalna. Da bismo proučili Liejevu algebru konstruirtat ćemo jednu njenu (beskonačnodimenzionalnu) reprezentaciju. Generalizacija te konstrukcije u sljedećem će nam poglavlju koristiti za dokaz egzistencije određenih ireducibilnih reprezentacija poluprostih Liejevih algebri.

Da bismo konstruirali reprezentaciju $\pi$ od $\mathfrak{g}_0$ treba samo zadati operatore $\pi(x_i)$, $\pi(y_i)$ i $\pi(h_i)$ tako da budu zadovoljene relacije $(S1)$, $(S2)$ i $S3)$. Neka je $V$ vektorski prostor nad poljem $K$ s bazom $\{v_1, \ldots, v_\ell\}$. Nadalje, neka je $W = T(V)$ tenzorska algebra nad prostorom $V$. U algebri $W$ množenje ćemo označavati bez znaka $\otimes$ Promatrat ćemo $W$ samo kao vektorski prostor, a zanemarit ćemo strukturu unitalne algebre. Znamo da je

$$\{1\} \cup \{v_{i_1} \cdots v_{i_n};\ n \in \mathbb{N},\ i_1, \ldots, i_n \in \{1, \ldots, \ell\}\,\}$$

baza vektorskog prostora $W$. Definiramo sada preslikavanje $\psi : \hat{S} \to \mathfrak{gl}(W)$ ovako:

$$\begin{aligned}
&\psi(\hat{h}_j)1 = 0,\\
&\psi(\hat{h}_j)v_{i_1} \cdots v_{i_n} = -(c_{i_1 j} + \cdots + c_{i_n j})v_{i_1} \cdots v_{i_n},\\
&\psi(\hat{y}_j)1 = v_j,\\
&\psi(\hat{y}_j)v_{i_1} \cdots v_{i_n} = v_j v_{i_1} \cdots v_{i_n},\\
&\psi(\hat{x}_j)1 = 0,\\
&\psi(\hat{x}_j)v_i = 0,\\
&\psi(\hat{x}_j)v_{i_1} \ldots v_{i_n} = v_{i_1}\psi(\hat{x}_j)v_{i_2} \cdots v_{i_n} - \delta_{i_1 j}(c_{i_2 j} + \cdots + c_{i_n j})v_{i_2} \cdots v_{i_n}, \quad n \geq 2.
\end{aligned}$$

Jedinstveno proširenje preslikavanja $\psi$ do homomorfizma Liejevih $K-$algebri $\hat{\mathfrak{g}} \to \mathfrak{gl}(W)$ označimo sa $\hat{\psi}$. Dakle, $\hat{\psi}$ je reprezentacija slobodne Liejeve algebre $\hat{\mathfrak{g}}$ na vektorskom prostoru $W$.

**Lema 5.4.3.** *Vrijedi* $\hat{\mathfrak{k}} \subseteq Ker\,\hat{\psi}$. *Prema tome, postoji reprezentacija* $\pi$ *Liejeve algebre* $\mathfrak{g}_0 = \hat{\mathfrak{g}}/\hat{\mathfrak{k}}$ *na prostoru* $W$ *takva da je* $\pi(a + \hat{\mathfrak{k}}) = \hat{\psi}(a)$ *za svaki* $a \in \hat{\mathfrak{g}}$.

**Dokaz:** Svi vektori izabrane baze prostora $W$ su svojstveni vektori svih operatora $\hat{\psi}(\hat{h}_j)$. Prema tome, ti operatori komutiraju, pa imamo $\hat{\psi}([\hat{h}_i, \hat{h}_j]) = 0$, odnosno, $[\hat{h}_i, \hat{h}_j] \in Ker\,\hat{\psi}$ za sve $i, j$.

Za $i, j \in \{1, \ldots, \ell\}$ imamo

$$\hat{\psi}([\hat{h}_i, \hat{y}_j] + c_{ji}\hat{y}_j)1 = \hat{\psi}(\hat{h}_i)\hat{\psi}(\hat{y}_j)1 - \hat{\psi}(\hat{y}_j)\hat{\psi}(\hat{h}_i)1 + c_{ji}\hat{\psi}(\hat{y}_j)1 = \hat{\psi}(\hat{h}_i)v_j + c_{ji}v_j = 0.$$

Nadalje, za $n \geq 2$ i $i_1, \ldots, i_n \in \{1, \ldots, \ell\}$, imamo

$$\hat{\psi}([\hat{h}_i, \hat{y}_j] + c_{ji}\hat{y}_j)v_{i_1} \cdots v_{i_n} = \hat{\psi}(\hat{h}_i)\hat{\psi}(\hat{y}_j)v_{i_1} \cdots v_{i_n} - \hat{\psi}(\hat{y}_j)\hat{\psi}(\hat{h}_i)v_{i_1} \cdots v_{i_n} + c_{ji}\hat{\psi}(\hat{y}_j)v_{i_1} \cdots v_{i_n} =$$

$$= \hat{\psi}(\hat{h}_i)v_j v_{i_1} \cdots v_{i_n} + (c_{i_1 i} + \cdots + c_{i_n i})\hat{\psi}(\hat{y}_j)v_{i_1} \cdots v_{i_n} + c_{ji}v_j v_{i_1} \cdots v_{i_n} =$$
$$= (-c_{ji} - c_{i_1 i} - \cdots - c_{i_n i} + c_{i_1 i} + \cdots + c_{i_n i} + c_{ji})v_j v_{i_1} \cdots v_{i_n} = 0$$

To pokazuje da je $\hat{\psi}([\hat{h}_i, \hat{y}_j] + c_{ji}\hat{y}_j) = 0$, odnosno, $[\hat{h}_i, \hat{y}_j] + c_{ji}\hat{y}_j \in Ker\,\hat{\psi}$ za sve $i, j$.

Promatrajmo sada djelovanje operatora $\hat{\psi}([\hat{x}_i, \hat{y}_j])$ na vektore baze prostora $W$ :

$$\hat{\psi}([\hat{x}_i, \hat{y}_j])1 = \hat{\psi}(\hat{x}_i)\hat{\psi}(\hat{y}_j)1 - \hat{\psi}(\hat{y}_j)\hat{\psi}(\hat{x}_i)1 = 0 = \delta_{ij}\hat{\psi}(\hat{h}_i)1;$$

$$\hat{\psi}([\hat{x}_i, \hat{y}_j])v_{i_1} \cdots v_{i_n} = \hat{\psi}(\hat{x}_i)\hat{\psi}(\hat{y}_j)v_{i_1} \cdots v_{i_n} - \hat{\psi}(\hat{y}_j)\hat{\psi}(\hat{x}_i)v_{i_1} \cdots v_{i_n} =$$
$$= \hat{\psi}(\hat{x}_i)v_j v_{i_1} \cdots v_{i_n} - v_j\hat{\psi}(\hat{x}_i)v_{i_1} \cdots v_{i_n} =$$
$$= -\delta_{ij}(c_{i_1 i} + \cdots + c_{i_n i})v_{i_1} \cdots v_{i_n} = \delta_{ij}\hat{\psi}(\hat{h}_i)v_{i_1} \cdots v_{i_n}.$$

Dakle, vrijedi $\hat{\psi}([\hat{x}_i, \hat{y}_j] - \delta_{ij}\hat{h}_i) = 0$, odnosno, $[\hat{x}_i, \hat{y}_j] - \delta_{ij}\hat{h}_i \in Ker\,\hat{\psi}$ za sve $i, j$.

Ostaje nam još proučiti djelovanje operatora $\hat{\psi}([\hat{h}_i, \hat{x}_j] - c_{ji}\hat{x}_j)$. Za to nam treba:

**Zadatak 5.19.**

$$\hat{\psi}(\hat{h}_i)\hat{\psi}(\hat{x}_j)v_{i_1} \cdots v_{i_n} = -(c_{i_1 i} + \cdots + c_{i_n i} - c_{ji})\hat{\psi}(\hat{x}_j)v_{i_1} \cdots v_{i_n}.$$

Razmotrimo sada djelovanje operatora $\hat{\psi}([\hat{h}_i, \hat{x}_j] - c_{ji}\hat{x}_j)$. Imamo

$$\hat{\psi}([\hat{h}_i, \hat{x}_j])1 = \hat{\psi}(\hat{h}_i)\hat{\psi}(\hat{x}_j)1 - \hat{\psi}(\hat{x}_j)\hat{\psi}(\hat{h}_i)1 = 0 = c_{ji}\hat{\psi}(\hat{x}_j)1.$$

Nadalje, pomoću jednakosti u zadatku 5.19. nalazimo

$$\hat{\psi}([\hat{h}_i, \hat{x}_j])v_{i_1} \cdots v_{i_n} = \hat{\psi}(\hat{h}_i)\hat{\psi}(\hat{x}_j)v_{i_1} \cdots v_{i_n} - \hat{\psi}(\hat{x}_j)\hat{\psi}(\hat{h}_i)v_{i_1} \cdots v_{i_n} =$$

$$= (\,-(c_{i_1 i} + \cdots + c_{i_n i} - c_{ji}) + (c_{i_1 i} + \cdots + c_{i_n i}))\hat{\psi}(\hat{x}_j)v_{i_1} \cdots v_{i_n} = c_{ji}\hat{\psi}(\hat{h}_i)v_{i_1} \cdots v_{i_n}.$$

Prema tome, $\hat{\psi}([\hat{h}_i, \hat{x}_j] - c_{ji}\hat{x}_j) = 0$, odnosno, vrijedi i $[\hat{h}_i, \hat{x}_j] - c_{ji}\hat{x}_j \in Ker\,\hat{\psi}$ za sve $i, j$.

**Teorem 5.4.4.** *Uz uvedene oznake neka je* $H$ *Liejeva podalgebra od* $\mathfrak{g}_0$ *generirana sa* $\{h_1, \ldots, h_\ell\}$, $X$ *Liejeva podalgebra od* $\mathfrak{g}_0$ *generirana sa* $\{x_1, \ldots, x_\ell\}$ *i* $Y$ *Liejeva podalgebra od* $\mathfrak{g}_0$ *generirana sa* $\{y_1, \ldots, y_\ell\}$. *Elementi* $h_1, \ldots, h_\ell$ *su linearno nezavisni i tvore bazu prostora* $H$. *Nadalje, vrijedi*

$$\mathfrak{g}_0 = X \dotplus H \dotplus Y.$$

**Dokaz:** Stavimo

$$\mathcal{H} = span_K\{\hat{h}_1, \ldots, \hat{h}_\ell\}, \quad \mathcal{X} = span_K\{\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_\ell\}, \quad \mathcal{Y} = span_K\{\hat{y}_1, \ldots, \hat{y}_\ell\}.$$

Pretpostavimo da je $\hat{h} \in \mathcal{H} \cap Ker\,\hat{\psi}$. Tada je $\hat{h} = \lambda_1\hat{h}_1 + \cdots + \lambda_\ell\hat{h}_\ell$ za neke $\lambda_1, \ldots, \lambda_\ell \in K$. Kako je po pretpostavci $\hat{\psi}(\hat{h}) = 0$, 0 je, naravno, jedina svojstvena vrijednost operatora $\hat{\psi}(\hat{h})$. Primijetimo sada da je za $i, j \in \{1, \ldots, \ell\}$ vektor $v_i$ svojstven vektor operatora $\hat{\psi}(\hat{h}_j)$ sa svostvenom vrijednosti $-c_{ij}$. Prema tome, $v_i$ je svojstven vektor operatora $\hat{\psi}(\hat{h})$ sa svojstvenom vrijednošću $-\sum_{j=1}^{\ell} c_{ij}\lambda_j$. Dakle, vrijedi

$$\sum_{j=1}^{\ell} c_{ij}\lambda_j = 0 \qquad \forall i \in \{1, \ldots, \ell\}.$$

Kako je Cartanova matrica $[c_{ij}]_{i,j=1}^{\ell}$ regularna, zaključujemo da je $\lambda_1 = \cdots = \lambda_\ell = 0$. Dakle, $\hat{h} = 0$ i time smo dokazali da je

$$\mathcal{H} \cap Ker\,\hat{\psi} = \{0\}. \tag{5.9}$$

Označimo sa $\chi : \hat{\mathfrak{g}} \to \mathfrak{g}_0 = \hat{\mathfrak{g}}/\hat{\mathfrak{k}}$ kvocijentni epimorfizam. Prema lemi 5.4.3. vrijedi

$$Ker\,\chi = \hat{\mathfrak{k}} \subseteq Ker\,\hat{\psi},$$

pa iz (5.9) slijedi da je $\mathcal{H} \cap Ker\,\chi = \{0\}$, odnosno, restrikcija $\chi|\mathcal{H}$ je injektivna. Dakle, ta je restrikcija izomorfizam potprostora $\mathcal{H}$ od $\hat{\mathfrak{g}}$ na potprostor $span_K\{h_1, \ldots, h_\ell\}$ od $\mathfrak{g}_0$. Kako je $[h_i, h_j] = 0\ \forall i, j$, zaključujemo da je $span_K\{h_1, \ldots, h_\ell\}$ komutativna $\ell-$dimenzionalna Liejeva podalgebra od $\mathfrak{g}_0$. Dakle,

$$H = span\{h_1, \ldots, h_\ell\} = Kh_1 \dotplus \cdots \dotplus Kh_\ell.$$

Sljedeći nam je cilj dokazati da je štoviše restrikcija $\chi|(\mathcal{X} \dotplus \mathcal{H} \dotplus \mathcal{Y})$ injektivna. Za svaki $i \in \{1, \ldots, \ell\}$ relacije $(S1)$, $(S2)$ i $(S3)$ pokazuju da vrijedi

$$[x_i, y_i] = h_i, \qquad [h_i, x_i] = 2x_i, \qquad [h_i, y_i] = -2y_i. \tag{5.10}$$

Prema tome, potprostor $span_K\{x_i, h_i, y_i\}$ je Liejeva podalgebra od $\mathfrak{g}_0$ i ona je homomorfna slika Liejeve algebre $\mathfrak{sl}(2, K)$. Prema dokazanom je $h_i \neq 0$. Kako je $\mathfrak{sl}(2, K)$ prosta Liejeva algebra, zaključujemo da je ona izomorfna Liejevoj podalgebri $span_K\{x_i, h_i, y_i\}$ od $\mathfrak{g}_0$. Posebno, suma $Kx_i + Kh_i + Ky_i$ je direktna. Uočimo sada da pored (5.10) vrijede i relacije

$$[h_i, h_j] = 0, \qquad [x_i, y_j] = 0, \qquad [h_i, x_j] = c_{ji}x_j, \qquad [h_i, y_j] = -c_{ji}y_j, \qquad \text{za } i \neq j. \tag{5.11}$$

**Zadatak 5.20.** *Dokažite da su vektori $x_1, \ldots, x_\ell, h_1, \ldots, h_\ell, y_1, \ldots, y_\ell$ linearno nezavisni.*

**Uputa:** Jednakosti (5.10) i (5.11) pokazuju da su svi ti vektori svojstveni za međusobno komutirajuće operatore $ad\,h_1, \ldots, ad\,h_\ell$ sa svojstvenim vrijednostima 0 i $\pm c_{ji}$. Sada iskoristite činjenicu da je matrica $[c_{ji}]$ regularna.

Kako je $\chi(\hat{x}_i) = x_i$, $\chi(\hat{h}_i) = h_i$ i $\chi(\hat{y}_i) = y_i$, iz zadatka 5.20. slijedi da je restrikcija $\chi|(\mathcal{X} \dotplus \mathcal{H} \dotplus \mathcal{Y})$ injektivna.

Stavimo sada $[x_i] = x_i$ i $[y_i] = y_i$ a za $n \geq 2$ i $i_1, \ldots, i_n \in \{1, \ldots, \ell\}$ induktivno definiramo

$$[x_{i_1} \cdots x_{i_n}] = [x_{i_1}, [x_{i_2} \cdots x_{i_n}]] \qquad \text{i} \qquad [y_{i_1} \cdots y_{i_n}] = [y_{i_1}, [y_{i_2} \cdots y_{i_n}]]. \tag{5.12}$$

Tada je očito

$$X = span_K\{[x_{i_1} \cdots x_{i_n}];\ n \in \mathbb{N},\ i_1, \ldots, i_n \in \{1, \ldots, \ell\}\} \tag{5.13}$$

i

$$Y = span_K\{[y_{i_1} \cdots y_{i_n}];\ n \in \mathbb{N},\ i_1, \ldots, i_n \in \{1, \ldots, \ell\}\}. \tag{5.14}$$

Korištenjem Jacobijevog identiteta indukcijom po $n \in \mathbb{N}$ lako se vidi da za bilo koje indekse $j, i_1, \ldots, i_n \in \{1, \ldots, \ell\}$ vrijede jednakosti

$$[h_j, [x_{i_1} \cdots x_{i_n}]] = (c_{i_1 j} + \cdots + c_{i_n j})[x_{i_1} \cdots x_{i_n}], \tag{5.15}$$

$$[h_j, [y_{i_1} \cdots y_{i_n}]] = -(c_{i_1 j} + \cdots + c_{i_n j})[y_{i_1} \cdots y_{i_n}] \tag{5.16}$$

To pokazuje da je

$$[H, X] \subseteq X \qquad \text{i} \qquad [H, Y] \subseteq Y. \tag{5.17}$$

Indukcijom po $n \geq 2$ dokazat ćemo sada da vrijedi

$$[y_j, [x_{i_1} \cdots x_{i_n}]] \in X \quad \text{i} \quad [x_j, [y_{i_1} \cdots y_{i_n}]] \in Y, \qquad n \geq 2,\ j, i_1, \ldots, i_n \in \{1, \ldots \ell\}. \tag{5.18}$$

Prije svega, imamo po Jacobijevom identitetu

$$[y_j, [x_{i_1} x_{i_2}]] = [[y_j, x_{i_1}], x_{i_2}] + [x_{i_1}, [y_j, x_{i_2}]].$$

Možemo pretpostaviti da je $i_1 \neq i_2$. Ako je $j \neq i_1$ i $j \neq i_2$ oba člana s desne strane gornje jednakosti jednaka su 0. Ako je $j = i_1$, dakle, $j \neq i_2$, desna strana gornje jednakosti jednaka je

$$[[y_j, x_j], x_{i_2}] = -[h_j, x_{i_2}] = -c_{i_2 j} x_{i_2} \in X.$$

Analogno, u slučaju $j = i_2 \neq i_1$ dobivamo

$$[y_j, [x_{i_1} x_j]] = [x_{i_1}, [y_j, x_j]] = -[x_{i_1}, h_j] = [h_j, x_{i_1}] = c_{i_1 j} x_{i_1} \in X.$$

Sasvim analogno dokazuje se i druga tvrdnja u (5.20) za $n = 2$. Time je dokazana baza indukcije $n = 2$ za tvrdnju (5.20). Korak indukcije slijedi također primjenom Jacobijevog identiteta: za $n \geq 3$ nalazimo redom

$$\begin{aligned}
[y_j, [x_{i_1} \cdots x_{i_n}]] = [y_j, [x_{i_1}, [x_{i_2} \cdots x_{i_n}]]] &= [[y_j, x_{i_1}], [x_{i_2} \cdots x_{i_n}]] + [x_{i_1}, [y_j, [x_{i_2} \cdots x_{i_n}]]] = \\
&= \delta_{j i_1} [h_j, [x_{i_2} \cdots x_{i_n}]] + [x_{i_1}, [y_j, [x_{i_2} \cdots x_{i_n}]]] = \\
&= -\delta_{j i_1} (c_{i_2 j} + \cdots + c_{i_n j})[x_{i_2} \cdots x_{i_n}] + [x_{i_1}, [y_j, [x_{i_2} \cdots x_{i_n}]]],
\end{aligned}$$

i analogno za drugu tvrdnju u (5.20). Kako je po pretpostavci $[y_j, [x_{i_2} \cdots x_{i_n}]] \in X$ (odnosno, $[x_j, [y_{i_2} \cdots y_{j_n}]] \in Y$) korak indukcije slijedi.

Budući da su $H$, $X$ i $Y$ Liejeve podalgebre od $\mathfrak{g}_0$, (5.19) i (5.20) imaju za posljedicu da je $X + H + Y$ Liejeva podalgebra od $\mathfrak{g}_0$. Budući da ta podalgebra sadrži generatore $h_i, x_i, y_i$, $i = 1, \ldots, \ell$, Liejeve algebre $\mathfrak{g}_0$, zaključujemo da je

$$\mathfrak{g}_0 = X + H + Y$$

Dokazat ćemo sada da je ta suma direktna. U tu svrhu za svaki $\lambda \in H^*$ definiramo potprostor $(\mathfrak{g}_0)_\lambda$ od $\mathfrak{g}_0$ ovako:

$$(\mathfrak{g}_0)_\lambda = \{x \in \mathfrak{g}_0;\ [h, x] = \lambda(h)x \ \forall h \in H\}.$$

Nadalje, svakom elementu $\alpha_i$ izabrane baze sistema korijena $R$ pridružimo linearan funkcional na $H$ označen također sa $\alpha_i$ i definiran ovako:

$$\alpha_i(h_j) = c_{ij}, \qquad i, j \in \{1, \ldots, \ell\}.$$

Definicija ima smisla jer je $\{h_1, \ldots, h_\ell\}$ baza vektorskog prostora $H$. Nadalje, kako je matrica $[c_{ij}]$ regularna, funkcionali $\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell$ čine bazu vektorskog prostora $H^*$. Označimo sa $S_+$ skup svih linearnih funkcionala na $H$ koji se mogu prikazati kao sume funkcionala $\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell$ i $S_- = -S_+$. Dakle,

$$S_+ = \{\alpha_{i_1} + \cdots + \alpha_{i_n};\ n \in \mathbb{N},\ i_1, \ldots, i_n \in \{1, \ldots, \ell\}\},$$

$$S_- = \{-\alpha_{i_1} - \cdots - \alpha_{i_n};\ n \in \mathbb{N},\ i_1, \ldots, i_n \in \{1, \ldots, \ell\}\}.$$

Dokažimo sada lemu:

**Lema 5.4.5.** *(a) Ako je $(\mathfrak{g}_0)_\lambda \neq 0$ onda je $\lambda \in S_+ \cup \{0\} \cup S_-$.*

*(b) Vrijedi*

$$H = (\mathfrak{g}_0)_0, \qquad X = \sum_{\lambda \in S_+} \dot{+}\, (\mathfrak{g}_0)_\lambda, \qquad Y = \sum_{\lambda \in S_-} \dot{+}\, (\mathfrak{g}_0)_\lambda.$$

*(c) Za $\lambda \in S_+$ je*

$$(\mathfrak{g}_0)_\lambda = span_K \{[x_{i_1} \cdots x_{i_n}];\ n \in \mathbb{N},\ \alpha_{i_1} + \cdots + \alpha_{i_n} = \lambda\}$$

*i*

$$(\mathfrak{g}_0)_{-\lambda} = span_K \{[y_{i_1} \cdots y_{i_n}];\ n \in \mathbb{N},\ \alpha_{i_1} + \cdots + \alpha_{i_n} = \lambda\}.$$

*(d) Svi potprostori $(\mathfrak{g}_0)_\lambda$ su konačnodimenzionalni.*

*(e) Za svaki $i \in \{1, \ldots, \ell\}$ je $\dim (\mathfrak{g}_0)_{\alpha_i} = \dim (\mathfrak{g}_0)_{-\alpha_i} = 1$.*

*(f) Ako su $k \in \mathbb{Z}$ i $i \in \{1, \ldots, \ell\}$ i ako je $(\mathfrak{g}_0)_{k\alpha_i} \neq \{0\}$, onda je $k \in \{0, \pm 1\}$.*

**Dokaz:** Iz jednakosti (5.17) i (5.18) slijedi da je

$$[x_{i_1} \cdots x_{i_n}] \in (\mathfrak{g}_0)_{\alpha_{i_1} + \cdots + \alpha_{i_n}} \quad \text{i} \quad [y_{i_1} \cdots y_{i_n}] \in (\mathfrak{g}_0)_{-\alpha_{i_1} - \cdots - \alpha_{i_n}}.$$

Odatle i iz (5.15) i iz (5.16) zaključujemo da vrijedi tvrdnja $(a)$. Nadalje, slijedi i da je

$$X = \sum_{\lambda \in S_+} (\mathfrak{g}_0)_\lambda \qquad \text{i} \qquad Y = \sum_{\lambda \in S_-} (\mathfrak{g}_0)_\lambda.$$

Budući da je $H \subseteq (\mathfrak{g}_0)_0$ i budući da je svaka suma simultanih svojstvenih potprostora za operatore $ad\, h$, $h \in H$, direktna, slijedi tvrdnja $(b)$, a odatle i tvrdnja $(c)$. Odatle slijedi i da je suma $\mathfrak{g}_0 = X + H + Y$ direktna, a time je dokazan teorem 5.4.4. Tvrdnja $(d)$ slijedi iz tvrdnje $(c)$ budući da je očito na samo konačno mnogo načina moguće funkcional $\lambda \in S_\pm$ zapisati u obliku $\pm$ sume funkcionala $\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell$. Napokon, tvrdnja $(e)$ i $(f)$ slijede također iz tvrdnje $(c)$. Doista, pretpostavimo da je $k \geq 2$. Budući da su $\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell$ linearno nezavisni, potprostor $(\mathfrak{g}_0)_{k\alpha_i}$ razapet je vektorom $[\underbrace{x_i \cdots x_i}_{k}] = 0$, i analogno, potprostor $(\mathfrak{g}_0)_{-k\alpha_i}$ je razapet vektorom $[\underbrace{y_i \cdots y_i}_{k}] = 0$. Dakle, $(\mathfrak{g}_0)_{k\alpha_i} = \{0\}$ za $|k| \geq 2$, tj. za $k \notin \{0, \pm 1\}$. S druge strane, potprostor $(\mathfrak{g}_0)_{\alpha_i}$ razapet je sa $[x_i] = x_i$, a potprostor $(\mathfrak{g}_0)_{-\alpha_i}$ sa $[y_i] = y_i$, pa imamo $\dim (\mathfrak{g}_0)_{\alpha_i} = \dim (\mathfrak{g}_0)_{-\alpha_i} = 1$.

U dokazu sljedeće leme trebat će nam činjenica koja se primjenom Jacobijevog identiteta jednostavno dokazuje indukcijom po $n$ :

**Zadatak 5.21.** *Neka je $\mathfrak{k}$ Liejeva algebra nad poljem $K$ i pretpostavimo da za $x, y, z \in \mathfrak{k}$ i $\alpha, \beta \in K$ vrijedi $(ad\, x)y = \alpha y$ i $(ad\, x)z = \beta z$. Tada je*

$$(ad\, x)(ad\, y)^n z = (\beta + n\alpha)(ad\, y)^n z, \qquad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Za $i, j \in \{1, \ldots, \ell\}$, $i \neq j$, definiramo sada sljedeće elemente u Liejevoj algebri $\mathfrak{g}_0$ :

$$x_{ij} = (ad\, x_i)^{-c_{ji}+1} x_j \in X, \qquad y_{ij} = (ad\, y_i)^{-c_{ji}+1} y_j.$$

Naravno, ti su elementi u vezi s relacijama $(S_{ij}^{\pm})$.

**Lema 5.4.6.** *Za $i, j, k \in \{1, \ldots, \ell\}$, $i \neq j$, vrijede jednakosti*

$$(ad\, h_k)x_{ij} = (c_{jk}c_{ik} - c_{ji}c_{ik})x_{ij}, \tag{5.19}$$

$$(ad\, h_k)y_{ij} = (c_{ji}c_{ik} - c_{jk} - c_{ik})y_{ij}, \tag{5.20}$$

$$(ad\, x_k)y_{ij} = 0, \tag{5.21}$$

$$(ad\, y_k)x_{ij} = 0. \tag{5.22}$$

**Dokaz:** Prve dvije jednakosti jednostavne su posljedice zadatka 5.21.

Dokažimo (5.21). Pretpostavimo najprije da je $k \neq i$. Tada je $[x_k, y_i] = 0$, pa operatori $ad\, x_k$ i $ad\, y_i$ komutiraju. Dakle,

$$(ad\, x_k)y_{ij} = (ad\, y_i)^{-c_{ji}+1}(ad\, x_k)y_j = \delta_{kj}(ad\, y_i)^{-c_{ji}+1}h_j.$$

Imamo dvije mogućnosti:

(1) $c_{ji} = 0$. Tada je i $c_{ij} = 0$, pa prema $(S3)$ dobivamo

$$(ad\, x_k)y_{ij} = \delta_{kj}(ad\, y_i)h_j = -\delta_{kj}[h_j, y_i] = \delta_{kj}c_{ij}y_i = 0.$$

(2) $c_{ji} \neq 0$. Tada je $c_{ji} \leq -1$, dakle, $m = -c_{ji} + 1 \geq 2$, pa dobivamo

$$(ad\, x_k)y_{ij} = \delta_{kj}(ad\, y_i)^m h_j = -\delta_{kj}(ad\, y_i)^{m-1}[h_j, y_i] = \delta_{kj}c_{ij}(ad\, y_i)^{m-1}y_i = 0,$$

jer je $m - 1 \geq 1$.

Pretpostavimo sada da je $k = i$. Stavimo $n = -c_{ji}$. Tada je $n \in \mathbb{Z}_+$ i vrijedi $[h_i, y_j] = ny_j$. Dokažimo sada da vrijedi

$$(ad\, x_i)(ad\, y_i)^p y_j = p(n - p + 1)(ad\, y_i)^{p-1}y_j \qquad \forall p \in \mathbb{N}. \tag{5.23}$$

Tu jednakost dokazujemo indukcijom u odnosu na $p \in \mathbb{N}$. Za $p = 1$ pomoću Jacobijevog identiteta nalazimo

$$(ad\, x_i)(ad\, y_i)y_j = [x_i, [y_i, y_j]] = [[x_i, y_i], y_j] + [y_i, [x_i, y_j]] = [h_i, y_j] = ny_j = 1(n - 1 + 1)(ad\, y_i)^{1-1}y_j$$

i time je baza indukcije dokazana. Pretpostavimo sada da je jednakost (5.23) dokazana za neki $p \in \mathbb{N}$. Da bismo proveli korak indukcije, uočimo da prema zadatku 5.21. vrijedi

$$[h_i, (ad\, y_i)^p y_j] = (n - 2p)(ad\, y_i)^p y_j \qquad \forall p \in \mathbb{Z}_+. \tag{5.24}$$

Stoga imamo redom

$$(ad\, x_i)(ad\, y_i)^{p+1}y_j = [x_i, [y_i, (ad\, y_i)^p y_j]] = [[x_i, y_i], (ad\, y_i)^p y_j] + [y_i, [x_i, (ad\, y_i)^p y_j]] =$$

$$= [h_i, (ad\, y_i)^p y_j] + p(n - p + 1)[y_i, (ad\, y_i)^{p-1}y_j] = (n - 2p + p(n - p + 1))(ad\, y_i)^p y_j =$$

$$= (p + 1)(n - p)(ad\, y_i)^p y_j = (p + 1)(n - (p + 1) + 1)(ad\, y_i)^p y_j.$$

Time je proveden korak indukcije i dokazana je jednakost (5.23) za sve $p \in \mathbb{N}$. Uvrstimo li u (5.23) $p = -c_{ji} + 1 = n + 1$, slijedi

$$(ad\, x_i)(ad\, y_i)^{-c_{ji}+1}y_j = 0, \qquad \text{tj.} \quad (ad\, x_i)y_{ij} = 0.$$

Time je jednakost (5.21) dokazana i u slučaju $k = i$.

Jednakost (5.22) dokazuje se sasvim analogno.

Vratimo se na konstrukciju poluproste Liejeve algebre sa zadanim sistemom korijena. Kao što je najavljeno to će biti Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ s generatorima $x_1, \dots, x_\ell, h_1, \dots, h_\ell, y_1, \dots, y_\ell$ i relacijama $(S1)$, $(S2)$, $(S3)$ i $S_{ij}^{\pm}$. Budući da smo već konstruirali algebru $\mathfrak{g}_0$ s istim generatorima, ali samo s relacijama $(S1)$, $(S2)$ i $(S3)$, Liejevu algebru $\mathfrak{g}$ možemo identificirati s kvocijentnom algebrom $\mathfrak{g}_0/\mathfrak{k}$, gdje je $\mathfrak{k}$ ideal u $\mathfrak{g}_0$ generiran elementima $x_{ij}$ i $y_{ij}$ za $i, j = 1, \dots, \ell$, $i \neq j$.

Označimo sa $I$ ideal u Liejevoj algebri $X$ generiran s elementima $x_{ij}$, $i \neq j$, a sa $J$ ideal u Liejevoj algebri $Y$ generiran s elementima $y_{ij}$, $i \neq j$.

**Lema 5.4.7.** *(a) $I$ i $J$ su ideali u Liejevoj algebri $\mathfrak{g}_0$.*

*(b) Vrijedi $\mathfrak{k} = X \dotplus Y$.*

**Dokaz:** $(a)$ Definiramo induktivno potprostore $I_n$, $n \in \mathbb{Z}_+$, od $X$ ovako

$$I_0 = span_K \{x_{ij};\ i, j \in \{1, \dots, \ell\},\ i \neq j\}, \qquad I_{n+1} = I_n + [X, I_n], \qquad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Tada je $I$ unija rastućeg niza potprostora $I_n$. Tvrdimo sada da za svaki $n \in \mathbb{Z}_+$ vrijedi

$$(ad\, h_k) I_n \subseteq I_n, \qquad k = 1, \dots, \ell. \tag{5.25}$$

Doista, za $n = 0$ to je posljedica jednakosti (5.19), tj. činjenice da je $I_0$ razapet svojstvenim vektorima $x_{ij}$ operatora $ad\, h_1, \dots, ad\, h_\ell$. Nadalje, Liejeva podalgebra $X$ također je razapeta svojstvenim vektorima $[x_{i_1} \cdots x_{i_n}]$ tih operatora pa vrijedi $(ad\, h_k)X \subseteq X$. Pretpostavimo li da (5.25) vrijedi za neki $n \in \mathbb{Z}_+$, primjenom Jacobijevog identiteta slijedi

$$(ad\, h_k)I_{n+1} = (ad\, h_k)I_n + (ad\, h_k)[X, I_n] \subseteq I_n + [(ad\, h_k)X, I_n] + [X, (ad\, h_k)I_n] \subseteq I_n + [X, I_n] = I_{n+1}.$$

Time je (5.25) dokazano za svaki $n \in \mathbb{Z}_+$. Odatle slijedi

$$[h_k, I] \subseteq I, \qquad k = 1, \dots, \ell. \tag{5.26}$$

Prema jednakosti (5.22) vrijedi $(ad\, y_k)I_0 = \{0\}$ za $k = 1, \dots, \ell$. Nadalje, iz (5.18) slijedi da je $(ad\, y_k)X \subseteq X + H$. Prema tome, ako pretpostavimo da je za neki $n \in \mathbb{Z}_+$ dokazano da vrijedi

$$(ad\, y_k)I_n \subseteq I_n, \qquad k = 1, \dots, \ell, \tag{5.27}$$

nalazimo

$$(ad\, y_k)I_{n+1} = (ad\, y_k)I_n + [(ad\, y_k)X, I_n] + [X, (ad\, y_k)I_n] \subseteq I_n + [X, I_n] + [H, I_n] + [X, I_n] = I_{n+1}.$$

Time je (5.27) dokazano za svaki $n \in \mathbb{Z}_+$ pa slijedi

$$[y_k, I] \subseteq I, \qquad k = 1, \dots, \ell. \tag{5.28}$$

Naravno, kako je $I$ ideal u Liejevoj algebri $X$ to je i

$$[x_k, I] \subseteq I, \qquad k = 1, \dots, \ell. \tag{5.29}$$

Budući da elementi $h_k, x_k, y_k$, $k = 1, \dots, \ell$, generiraju Liejevu algebru $\mathfrak{g}_0$, iz (5.26), (5.28) i (5.29) slijedi da je $I$ ideal u $\mathfrak{g}_0$.

Sasvim analogno dokazuje se i da je $J$ ideal u Liejevoj algebri $\mathfrak{g}_0$.

$(b)$ Očito je $X \dotplus Y \subseteq \mathfrak{k}$. S druge strane, iz $(a)$ slijedi da je $X \dotplus Y$ ideal u Liejevoj algebri $\mathfrak{g}_0$. Taj ideal sadrži sve elemente $x_{ij}$ i $y_{ij}$. Kako je $\mathfrak{k}$ najmanji ideal u $\mathfrak{g}_0$ koji sadrži sve element $x_{ij}$ i $y_{ij}$, vrijedi i obrnuta inkluzija $\mathfrak{k} \subseteq X \dotplus Y$. Dakle, $\mathfrak{k} = X \dotplus Y$.

Neka je $\varphi : \mathfrak{g}_0 \to \mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0/\mathfrak{k}$ kvocijentni epimorfizam. Budući da je $\mathfrak{g}_0 = X \dotplus H \dotplus Y$, iz leme 5.4.7. slijedi da je $\mathfrak{g} = \varphi(X) \dotplus \varphi(H) \dotplus \varphi(Y)$; $\varphi|H$ je izomorfizam $H$ na sliku koju ćemo označiti sa $\mathfrak{h}$; $\varphi|X$ je epimorfizam $X$ na sliku koju ćemo označiti sa $\mathfrak{n}$ i koja je izomorfna kvocijentnoj Liejevoj algebri $X/I$; analogno, $\varphi|Y$ je epimorfizam na sliku koju ćemo označiti sa $\overline{\mathfrak{n}}$ i koja je izomorfna kvocijentnoj Liejevoj algebri $Y/J$.

Kao u zadatku 5.20. pokazuje se da su vektori $\varphi(x_1), \ldots, \varphi(x_\ell), \varphi(h_1), \ldots, \varphi(h_\ell), \varphi(y_1), \ldots, \varphi(y_\ell)$ linearno nezavisni. Slijedi da je restrikcija $\varphi|span_K\{x_1, \ldots, x_\ell, h_1, \ldots, h_\ell, y_1, \ldots, y_\ell\}$ injektivna. Stoga ćemo je upotrijebiti kao identifikaciju i pisati $x_k, h_k, y_k$ umjesto $\varphi(x_k), \varphi(h_k), \varphi(y_k)$. Nadalje, dualni prostor $\mathfrak{h}^*$ može se identificirati s dualnim prostorom $H^*$. Budući da je Weylova grupa $W(R)$ generirana refleksijama $\sigma_i = \sigma_{\alpha_i}$, $i = 1, \ldots, \ell$, imamo prirodno djelovanje grupe $W(R)$ na prostoru $\mathfrak{h}^*$ :

$$\sigma_i \lambda = \lambda - \lambda(h_i)\alpha_i, \qquad \lambda \in \mathfrak{h}^*.$$

Nadalje, možemo shvaćati da su $S_\pm \subseteq \mathfrak{h}^*$. Kako je svaki pozitivni korijen u odnosu na bazu sistema korijena suma korijena iz te baze, vrijedi $R_+ \subseteq S_+$ i $R_- \subseteq S_-$. Stavimo sada

$$\mathfrak{g}_\lambda = \{x \in \mathfrak{g};\ [h, x] = \lambda(h)x\ \forall h \in \mathfrak{h}\}, \qquad \lambda \in \mathfrak{h}.$$

Iz injektivnosti $\varphi|H$ slijedi da je $\mathfrak{g}_\lambda = \varphi((\mathfrak{g}_0)_\lambda)$. Nadalje, iz lema 5.4.5. i 5.4.7. neposredno slijedi:

**Lema 5.4.8.** $(a)$ *Ako je* $\mathfrak{g}_\lambda \neq \{0\}$, *onda je* $\lambda \in S_+ \cup \{0\} \cup S_-$.

$(b)$ *Vrijedi*

$$\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_0, \qquad \mathfrak{n} = \sum_{\lambda \in S_+} \dotplus\, \mathfrak{g}_\lambda, \qquad \overline{\mathfrak{n}} = \sum_{\lambda \in S_-} \dotplus\, \mathfrak{g}_\lambda.$$

$(c)$ *Svi potprostori* $\mathfrak{g}_\lambda$ *su konačnodimenzionalni.*

$(d)$ *Za svaki* $i \in \{1, \ldots, \ell\}$ *vrijedi* $\dim \mathfrak{g}_{\alpha_i} = \dim \mathfrak{g}_{-\alpha_i} = 1$.

$(e)$ *Ako su* $k \in \mathbb{Z}$, $i \in \{1, \ldots, \ell\}$ *i* $\mathfrak{g}_{k\alpha_i} \neq \{0\}$ *onda je* $k \in \{0, \pm 1\}$.

Neka je $V$ vektorski prostor nad proizvoljnim poljem $K$ i $A : V \to V$ linearan operator. Za $k \in \mathbb{Z}_+$ sa $Ker\, A^k$ označavamo jezgru potencije $A^k$, tj. $Ker\, A^k = \{v \in V;\ A^k v = 0\}$. To je nepadajući niz potprostora

$$\{0\} = Ker\, A^0 \subseteq Ker\, A \subseteq Ker\, A^2 \subseteq \cdots\cdots \subseteq Ker\, A^n \subseteq Ker\, A^{n+1} \subseteq \cdots\cdots .$$

Ako je za neki $n$ $Ker\, A^n = Ker\, A^{n+1}$, tada se taj niz stabilizira, tj. $Ker\, A^m = Ker\, A^n\ \ \forall m \geq n$. Općenito stavljamo

$$\mathcal{N}(A) = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}_+} Ker\, A^n = \{v \in V;\ \exists n \in \mathbb{Z}_+ \text{ takav da je } A^n v = 0\}.$$

Za svaki $v \in \mathcal{N}(A) \setminus \{0\}$ postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je $A^n v = 0$ i $A^{n-1} v \neq 0$. Tada su vektori $v, Av, \ldots, A^{n-1}v$ linearno nezavisni i razapinju $n-$dimenzionalan potprostor $W$ koji je $A-$invarijantan i restrikcija $A|W$ je nilpotentan operator indeksa $n$. Prema tome, svaki vektor $v \in \mathcal{N}(A)$ sadržan je u $A-$invarijatnom konačnodimenzionalnom potprostoru $W$ takvom da je restrikcija $A|W$ nilpotentna.

Za operator $A$ kažemo da je **lokalno nilpotentan** ako je $\mathcal{N}(A) = V$, tj. ako za svaki $v \in V$ postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je $A^n v = 0$. U tom slučaju dobro je definiran linearan operator $e^A : V \to V$ sa

$$e^A v = \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} A^k v, \qquad v \in V.$$

Ako su $A$ i $B$ lokalno nilpotetni operatori koji komutiraju, tada se lako vidi da je i $A+B$ lokalno nilpotentan operator i vrijedi $e^{A+B} = e^A e^B$. Posebno, vidi se da za svaki lokalno nilpotentan operator $A$ vrijedi $e^A e^{-A} = I_V$. Dakle, $e^A \in GL(V)$.

**Zadatak 5.22.** *Neka je $\mathcal{A}$ algebra nad poljem $K$ i neka je $D \in Der(\mathcal{A})$ derivacija od $\mathcal{A}$ koja je lokalno nilpotentan operator na prostoru $\mathcal{A}$. Dokažite da je tada $e^D \in Aut(\mathcal{A})$.*

Element $x$ Liejeve algebre $\mathfrak{l}$ zove se **lokalno** $ad-$**nilpotentan** ako je linearan operator $ad\,x : \mathfrak{l} \to \mathfrak{l}$ lokalno nilpotentan. U tom je slučaju dobro definiran $e^{ad\,x}$, a prema zadatku 5.22. to je automorfizam Liejeve algebre $\mathfrak{l}$.

Vratimo se sada na Liejevu algebru $\mathfrak{g}_0 = \hat{\mathfrak{g}}/\hat{\mathfrak{k}} = X \dotplus H \dotplus Y$ i na njenu kvocijentnu algebru $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0/\mathfrak{k} = \mathfrak{n} \dotplus \mathfrak{h} \dotplus \overline{\mathfrak{n}}$.

**Lema 5.4.9.** *Elementi $x_i, y_i$, $i = 1, \ldots, \ell$, Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ su lokalno $ad-$nilpotentni.*

**Dokaz:** Neka je

$$M = \mathcal{N}(ad\,x_i) = \{x \in \mathfrak{g};\ \exists n \in \mathbb{N},\ \text{takav da je } (ad\,x_i)^n x = 0\}.$$

Potprostor $M$ od $\mathfrak{g}$ je zapravo Liejeva podalgebra. Doista, ako su $x, y \in M$ i ako su $n, m \in \mathbb{N}$ takvi da je $(ad\,x_i)^n x = 0$ i $(ad\,x_i)^m y = 0$, tada prema zadatku 1.12., primijenjenom na slučaj $\mathcal{A} = \mathfrak{g}$, $\delta = ad\,x_i$ i $\alpha = \beta = 0$ imamo

$$(ad\,x_i)^{n+m}[x, y] = \sum_{j=0}^{n+m} \binom{n+m}{j} [(ad\,x_i)^{n+m-j}x, (ad\,x_i)^j y] = 0,$$

dakle, vrijedi $[x, y] \in M$. Prema relacijama $(S2)$, $(S3)$ i $(S_{ij}^+)$ imamo

$$(ad\,x_i)^{-c_{ji}+1} x_j = 0, \quad \text{za } j \neq i; \qquad (ad\,x_i)x_i = 0; \qquad (ad\,x_i)y_j = 0 \quad \text{za } j \neq i;$$

$$(ad\,x_i)^3 y_i = (ad\,x_i)^2 h_i = -2(ad\,x_i)x_i = 0.$$

Prema tome, vrijedi $x_j, y_j \in M$ za $j = 1, \ldots, \ell$. Kako elementi $x_j, y_j$, $j = 1, \ldots, \ell$, generiraju Liejevu algebru $\mathfrak{g}$, zaključujemo da je $M = \mathfrak{g}$. Time je dokazano da su elementi $x_i$, $i = 1, \ldots, \ell$, lokalno $ad-$nilpotentni. Dokaz za $y_i$, $i = 1, \ldots, \ell$, potpuno je analogan.

Prema tome, možemo definirati $\tau_i \in Aut(\mathfrak{g})$ ovako

$$\tau_i = e^{ad\,x_i} e^{-ad\,y_i} e^{ad\,x_i}, \qquad i = 1, \ldots, \ell.$$

**Lema 5.4.10.** *(a) Za $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ i $i \in \{1, \ldots, \ell\}$ vrijedi $\tau_i \mathfrak{g}_\lambda = \mathfrak{g}_{\sigma_i \lambda}$.*

*(b) Ako su $\lambda, \mu \in \mathfrak{h}^*$ i ako postoji $\sigma \in W(R)$ takav da je $\mu = \sigma\lambda$, onda je* $\dim \mathfrak{g}_\mu = \dim \mathfrak{g}_\lambda$.

**Dokaz:** $(a)$ Neka su $x \in \mathfrak{g}_\lambda$ i $h \in \mathfrak{h}$. Kako je $\tau_i$ automorfizam Liejeve algebre $\mathfrak{g}$, imamo $[h, \tau_i x] = \tau_i[\tau_i^{-1}h, x]$. Izračunajmo sada $\tau_i^{-1}h$. Naravno,

$$\tau_i^{-1} = e^{-ad\,x_i} e^{ad\,y_i} e^{-ad\,x_i}.$$

Imamo redom

$$(ad\,x_i)h = [x_i, h] = -\alpha_i(h)x_i, \quad (ad\,x_i)^2 x_i = 0;$$

$$(ad\,x_i)x_i = 0;$$

$$(ad\, y_i)h = [y_i, h] = \alpha_i(h)y_i, \quad (ad\, y_i)^2 y_i = 0;$$
$$(ad\, y_i)x_i = [y_i, x_i] = -h_i, \quad (ad\, y_i)^2 x_i = -(ad\, y_i)h_i = -2y_i, \quad (ad\, y_i)^3 x_i = 0.$$

Dakle,

$$e^{-ad\, x_i}h = h - (ad\, x_i)h = h + \alpha_i(h)x_i;$$
$$e^{-ad\, x_i}x_i = x_i;$$
$$e^{ad\, y_i}h = h + (ad\, y_i)h = h + \alpha_i(h)y_i;$$
$$e^{ad\, y_i}x_i = x_i + (ad\, y_i)x_i + \frac{1}{2}(ad\, y_i)^2 x_i = x_i - h_i - y_i.$$

Napomenimo još da zbog $\alpha_i(h_i) = 2$ imamo

$$e^{-ad\, x_i}h_i = h_i + 2x_i.$$

Sada postupno računamo djelovanje automorfizma $\tau_i^{-1}$ na element $h \in \mathfrak{h}$ :

$$e^{ad\, y_i}e^{-ad\, x_i}h = e^{ad\, y_i}h + \alpha_i(h)e^{ad\, y_i}x_i = h + \alpha_i(h)y_i + \alpha_i(h)(x_i - h_i - y_i) = h + \alpha_i(h)x_i - \alpha_i(h)h_i;$$

$$\tau_i^{-1}h = e^{-ad\, x_i}h + \alpha_i(h)e^{-ad\, x_i}x_i - \alpha_i(h)e^{-ad\, x_i}h_i = h + \alpha_i(h)x_i + \alpha_i(h)x_i - \alpha_i(h)(h_i + 2x_i) = h - \alpha_i(h)h_i.$$

Stoga nalazimo

$$[h, \tau_i x] = \tau_i[\tau_i^{-1}h, x] = \tau_i([h, x] - \alpha_i(h)[h_i, x]) = \tau_i(\lambda(h)x - \alpha_i(h)\lambda(h_i)x) =$$
$$= (\lambda - \lambda(h_i)\alpha_i)(h)\tau_i x = (\sigma_i\lambda)(h)\tau_i x.$$

Dakle, vrijedi $\tau_i x \in \mathfrak{g}_{\sigma_i\lambda}$. Time je dokazano da je

$$\tau_i \mathfrak{g}_\lambda \subseteq \mathfrak{g}_{\sigma_i\lambda}.$$

Sasvim analogno dokazuje se da za $\mu \in \mathfrak{h}^*$ vrijedi i $\tau_i^{-1}\mathfrak{g}_\mu \subseteq \mathfrak{g}_{\sigma_i\mu}$ (naime, $\sigma_{-\alpha_i} = \sigma_{\alpha_i} = \sigma_i = \sigma_i^{-1}$). Posebno, za $\mu = \sigma_i\lambda$ dobivamo $\tau_i^{-1}\mathfrak{g}_{\sigma_i\lambda} \subseteq \mathfrak{g}_\lambda$, odnosno,

$$\tau_i \mathfrak{g}_\lambda \supseteq \mathfrak{g}_{\sigma_i\lambda}.$$

Dvije inkluzije daju traženu jednakost $\tau_i \mathfrak{g}_\lambda = \mathfrak{g}_{\sigma_i\lambda}$.

Tvrdnja $(b)$ slijedi neposredno iz tvrdnje $(a)$. Naime, svaki se element $\sigma$ Weylove grupe $W(R)$ može napisati kao produkt refleksija $\sigma_i$ :

$$\sigma = \sigma_{i_1} \cdots \sigma_{i_n}, \qquad i_1, \ldots, i_n \in \{1, \ldots, \ell\}.$$

Sada iz tvrdnje $(a)$ slijedi da je

$$\mathfrak{g}_\mu = \mathfrak{g}_{\sigma\lambda} = \tau_{i_1} \cdots \tau_{i_n} \mathfrak{g}_\lambda,$$

a kako su $\tau_{i_1}, \ldots, \tau_{i_n}$ automorfizmi, slijedi $\dim \mathfrak{g}_\mu = \dim \mathfrak{g}_\lambda$.

**Lema 5.4.11.** *Ako je $\alpha \in R$ onda je* $\dim \mathfrak{g}_\alpha = 1$ *i* $\mathfrak{g}_{k\alpha} = \{0\}$ *za* $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0, \pm 1\}$.

**Dokaz:** Prema lemi 3.5.11. postoji $\sigma \in W(R)$ takav da je $\sigma\alpha \in B$. Sada iz leme 5.4.10. i iz tvrdnje $(d)$ leme 5.4.8. slijedi $\dim \mathfrak{g}_\alpha = \dim \mathfrak{g}_{\sigma\alpha} = 1$. Nadalje, zbog tvrdnje $(e)$ leme 5.4.8. za $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0, \pm 1\}$ je $\dim \mathfrak{g}_{k\alpha} = \dim \mathfrak{g}_{k\sigma\alpha} = 0$, dakle, $\mathfrak{g}_{k\alpha} = \{0\}$.

**Lema 5.4.12.** *Ako je $\mathfrak{g}_\lambda \neq \{0\}$ onda je $\lambda \in R \cup \{0\}$. Nadalje, za $\alpha \in R$ je* $\dim \mathfrak{g}_\alpha = 1$. *Posebno, $\mathfrak{g}$ je konačnodimenzionalna Liejeva algebra i* $\dim \mathfrak{g} = \ell + |R|$.

**Dokaz:** Neka je $\mathfrak{g}_\lambda \neq \{0\}$ i pretpostavimo da $\lambda \notin R \cup \{0\}$. Tada je $\lambda \in S_+ \cup S_-$ i prema lemi 5.4.11. $\lambda$ nije proporcionalan nijednom korijenu. Sada iz zadatka 3.17. slijedi da postoji $\sigma \in W(R)$ takav da $\sigma\lambda \notin S_+ \cup \{0\} \cup S_-$. No tada je $\mathfrak{g}_{\sigma\lambda} = \{0\}$, što je zbog tvrdnje ($b$) leme 5.4.10. u suprotnosti s pretpostavkom $\mathfrak{g}_\lambda \neq \{0\}$. Ova kontradikcija pokazuje da je $\mathfrak{g}_\lambda \neq \{0\}$ samo za $\lambda \in R \cup \{0\}$.

**Lema 5.4.13.** *Za $\alpha \in R$ neka je $\mathfrak{g}^\alpha$ Liejeva podalgebra od $\mathfrak{g}$ generirana sa $\mathfrak{g}_\alpha \dot{+} \mathfrak{g}_{-\alpha}$. Tada je Liejeva algebra $\mathfrak{g}^\alpha$ izomorfna Liejevoj algebri $\mathfrak{sl}(2, K)$.*

**Dokaz:** Ako je $\alpha \in B$, tj. $\alpha = \alpha_i$ za neki $i \in \{1, \dots, \ell\}$, imamo $\mathfrak{g}_\alpha = Kx_i$ i $\mathfrak{g}_{-\alpha} = Ky_i$, a kako je

$$[x_i, y_i] = h_i, \qquad [h_i, x_i] = 2x_i, \qquad [h_i, y_i] = -2y_i,$$

slijedi da je $\mathfrak{g}^\alpha = Kx_i \dot{+} Kh_i \dot{+} Ky_i$ i $\mathfrak{g}^\alpha \approx \mathfrak{sl}(2, K)$. Neka je sada $\alpha \in R$ proizvoljan. Tada znamo da postoji $\sigma \in W(R)$ takav da je $\beta = \sigma\alpha \in B$. Nadalje, Weylova grupa $W(R)$ generirana je refleksijama $\sigma_1, \dots, \sigma_\ell$, pa postoji $n \in \mathbb{N}$ i $i_1, \dots, i_n \in \{1, \dots, \ell\}$ takvi da je $\sigma = \sigma_{i_1} \cdots \sigma_{i_n}$. Kao u dokazu tvrdnje ($b$) leme 5.4.10. tada za automorfizam $\tau = \tau_{i_1} \cdots \tau_{i_n}$ Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ vrijedi $\tau\mathfrak{g}_\alpha = \mathfrak{g}_\beta$. Kako je i $\sigma(-\alpha) = -\beta$, vrijedi također $\tau\mathfrak{g}_{-\alpha} = \mathfrak{g}_{-\beta}$. Budući da je $\tau$ automorfizam Liejeve algebre $\mathfrak{g}$, slijedi $\tau\mathfrak{g}^\alpha = \mathfrak{g}^\beta$. Dakle, $\mathfrak{g}^\alpha \approx \mathfrak{g}^\beta$, a kako je $\beta \in B$, iz dokazanog slijedi $\mathfrak{g}^\alpha \approx \mathfrak{sl}(2, K)$.

**Lema 5.4.14.** *Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ je poluprosta, $\mathfrak{h}$ je njena Cartanova podalgebra i uz uvedenu identifikaciju $R \subseteq \mathfrak{h}^*$ vrijedi $R = R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$.*

**Dokaz:** Pretpostavimo da je $\mathfrak{a}$ komutativni ideal u Liejevoj algebri $\mathfrak{g}$. Tada je $(ad\,\mathfrak{h})\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{a}$, pa vrijedi

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{a} \cap \mathfrak{h} \dot{+} \sum_{\alpha \in R} \dot{+} \, \mathfrak{a} \cap \mathfrak{g}_\alpha.$$

Za svaki $\alpha \in R$ prema lemi 5.4.13. Liejeva podalgebra $\mathfrak{g}^\alpha$ generirana sa $\mathfrak{g}_\alpha \dot{+} \mathfrak{g}_{-\alpha}$ izomorfna je Liejevoj algebri $\mathfrak{sl}(2, K)$, dakle, $\mathfrak{g}^\alpha$ je prosta. Slijedi da je $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{g}^\alpha = \{0\}$, a odatle i $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{g}_\alpha = \{0\}$ $\forall \alpha \in R$. Prema tome, vrijedi $\mathfrak{a} = \mathfrak{a} \cap \mathfrak{h}$, dakle, $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{h}$. No tada je $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{a}] \subseteq \mathfrak{g}_\alpha \cap \mathfrak{a} = \{0\}$ za svaki $\alpha \in R$. To znači da je

$$\mathfrak{a} \subseteq \bigcap_{\alpha \in R} Ker\,\alpha = \bigcap_{i=1}^{\ell} Ker\,\alpha_i.$$

Međutim, $\{\alpha_1, \dots, \alpha_\ell\}$ je baza prostora $\mathfrak{h}^*$, pa slijedi $\mathfrak{a} = \{0\}$. Time je dokazano da je Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ poluprosta.

Liejeva podalgebra $\mathfrak{h}$ od $\mathfrak{g}$ je komutativna, dakle, nilpotentna. Nadalje, vrijedi $[\mathfrak{h}, \mathfrak{g}_\alpha] = \mathfrak{g}_\alpha$ za svaki $\alpha \in R$, pa iz rastava

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \dot{+} \sum_{\alpha \in R} \dot{+} \, \mathfrak{g}_\alpha$$

slijedi $N_\mathfrak{g}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$. Dakle, $\mathfrak{h}$ je Cartanova podalgebra od $\mathfrak{g}$. Gornji rastav sada pokazuje da je $R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) = R$.

Ovim nizom lema dokazali smo **Serreov teorem**:

**Teorem 5.4.15.** *Neka je $R$ reduciran sistem korijena i $B = \{\alpha_1, \dots, \alpha_\ell\}$ njegova baza. Neka je $\mathfrak{g}$ Liejeva algebra generirana nad algebarski zatvorenim poljem $K$ karakteristike $0$ elementima $x_i, h_i, y_i$, $i = 1, \dots, \ell$, i relacijama ($S1$), ($S2$), ($S3$), ($S_{ij}^+$) i ($S_{ij}^-$). Tada je $\mathfrak{g}$ poluprosta Liejeva algebra, $\mathfrak{h} = span_K\,\{h_1, \dots, h_\ell\}$ je njena Cartanova podalgebra i sistem korijena $R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ izomorfan je sistemu korijena $R$. Preciznije, $R$ je izomorfan sistemu korijena $R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ u realnom vektorskom prostoru $(span_\mathbb{Q}\, R) \otimes_\mathbb{Q} \mathbb{R}$.*

Odatle slijedi i teorem o izomorfizmima:

**Teorem 5.4.16.** *Neka su* $\mathfrak{g}$ *i* $\mathfrak{g}'$ *poluproste Liejeve algebre nad algebarski zatvorenim poljem* $K$ *karakteristike* $0$, $\mathfrak{h}$ *i* $\mathfrak{h}'$ *njihove Cartanove podalgebre,* $R = R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$, $R' = R(\mathfrak{g}', \mathfrak{h}')$, *njihovi sistemi korijena. Neka je dan izomorfizam* $R \to R'$ *sistema korijena; dakle,* $R \to R'$ *je bijekcija koja se dobije kao restrikcija na* $R$ *nekog izomorfizma vektorskih prostora* $\varphi : \mathfrak{h}^* \to (\mathfrak{h}')^*$. *Neka je* $\pi = (\varphi^t)^{-1}$ *pripadni izomorfizam prostora* $\mathfrak{h}$ *na prostor* $\mathfrak{h}'$. *Neka su* $B$ *i* $B'$ *baze sistema korijena* $R$ *i* $R'$ *takve da je* $B' = \varphi(B)$. *Za svaki* $\alpha \in B$ *i svaki* $\alpha' \in B'$ *izaberimo proizvoljne* $x_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha \setminus \{0\}$ *i* $x_{\alpha'} \in \mathfrak{g}'_{\alpha'} \setminus \{0\}$. *Tada postoji jedinstven homomorfizam Liejevih algebri* $\Pi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$ *takav da je* $\Pi|\mathfrak{h} = \pi$ *i* $\Pi(x_\alpha) = x_{\varphi(\alpha)}$ $\forall \alpha \in B$. *Homomorfizam* $\Pi$ *je izomorfizam.*

**Dokaz:** Za svaki $\alpha \in B$ postoji jedinstven $y_\alpha \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ takav da je $[x_\alpha, y_\alpha] = h_\alpha$; analogno, za svaki $\alpha' \in B'$ postoji jedinstven $y_{\alpha'} \in \mathfrak{g}'_{-\alpha'}$ takav da je $[x_{\alpha'}, y_{\alpha'}] = h_{\alpha'}$. Budući da je $\varphi|R$ izomorfizam sistema korijena $R$ na sistem korijena $R'$, vidimo da elementi $h_{\alpha'}, x_{\alpha'}, y_{\alpha'}$, $\alpha' \in B'$, Liejeve algebre $\mathfrak{g}'$ zadovoljavaju iste relacije $(S1)$, $(S2)$, $(S3)$, $(S_{ij}^+)$ i $S_{ij}^-)$ kao i elementi $h_\alpha, x_\alpha, y_\alpha$, $\alpha \in B$, Liejeve algebre $\mathfrak{g}$. Prema tome, postoji jedinstven homomorfizam $\Pi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$ takav da je $\Pi(h_\alpha) = h_{\pi(\alpha)}$, $\Pi(x_\alpha) = x_{\varphi(\alpha)}$ i $\Pi(y_\alpha) = y_{\varphi(\alpha)}$ za svaki $\alpha \in B$. Sasvim analogno pokazuje se da postoji homomorfizam Liejevih algebri $\Pi' : \mathfrak{g}' \to \mathfrak{g}$ takav da je $\Pi'(h_{\alpha'}) = h_{\varphi^{-1}(\alpha')}$, $\Pi'(x_{\alpha'}) = x_{\varphi^{-1}(\alpha')}$ i $\Pi'(y_{\alpha'}) = y_{\varphi^{-1}(\alpha')}$ za svaki $\alpha' \in B'$. Tada je kompozicija $\Pi'\Pi$ (odnosno $\Pi\Pi'$) homomorfizam sa $\mathfrak{g}$ u $\mathfrak{g}$ (odnosno sa $\mathfrak{g}'$ u $\mathfrak{g}'$) koji ostavlja fiksnima generatore Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ (odnosno $\mathfrak{g}'$). Slijedi da se radi o identitetama: $\Pi'\Pi = id_{\mathfrak{g}}$, $\Pi\Pi' = id_{\mathfrak{g}'}$. Dakle, $\Pi$ je izomorfizam Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ na Liejevu algebru $\mathfrak{g}'$.

**Zadatak 5.23.** *Dokažite da je* $X$ *slobodna Liejeva algebra s generatorima* $x_1, \ldots, x_\ell$ *i da je* $Y$ *slobodna Liejeva algebra s generatorima* $y_1, \ldots, y_\ell$.

**Uputa:** Koristite konstruiranu reprezentaciju Liejeve algebre $\mathfrak{g}_0$ na vektorskom prostoru $V = K[X_1, \ldots, X_\ell]$.

**Zadatak 5.24.** *U slučaju kad je* $\ell = 1$, *tj.* $R = \{\alpha, -\alpha\}$, *nema relacija* $(S_{ij}^\pm)$, *pa je* $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g} \approx \mathfrak{sl}(2, K)$. *Dokažite da je u tom slučaju konstruirana reprezentacija na prostoru* $V = K[X]$ *ekvivalentna reprezentaciji* $\pi_\lambda$ *iz zadatka 1.27. za* $\lambda = 0$.

**Uputa:** Treba usporediti djelovanja na bazama dvaju vektorskih prostora; ekvivalencija će se moći konstruirati usklađivanjem numeracija dvaju baza i skalarnim faktorima.

**Zadatak 5.25.** *Dokažite da inkluzija Dynkinovih dijagrama dvaju sistema korijena* $R$ *i* $R'$ *povlači da postoji monomorfizam pripadnih poluprostih Liejevih algebri* $\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$.

**Uputa:** Inkluzija Dynkinovih dijagrama znači da za baze $B$ od $R$ i $B'$ od $R'$ postoji injekcija $\varphi : B \to B'$ takva da je $n(\alpha, \beta) = n(\varphi(\alpha), \varphi(\beta))$ $\forall \alpha, \beta \in B$. Za konstrukciju homomorfizma postupajte kao u dokazu teorema 5.4.16. Injektivnost će slijediti iz činjenice (koju treba dokazati pomoću teorema 5.4.16.) da je slika tog homomorfizma Liejeva podalgebra od $\mathfrak{g}'$ koja je izomorfna Liejevoj algebri $\mathfrak{g}$.

**Zadatak 5.26.** *Neka je* $\mathfrak{k} = X \dotplus Y$ *kao i prije ideal u Liejevoj algebri* $\mathfrak{g}_0$ *generiran elementima* $x_{ij}, y_{ij}$, $i, j = 1, \ldots, \ell$, $i \neq j$. *Nadalje, neka je* $\mathfrak{k}'$ *ideal u* $\mathfrak{g}_0$ *konačne kodimenzije. Dokažite da je tada* $\mathfrak{k} \subseteq \mathfrak{k}'$.

**Uputa:** Lokalno nilpotentan operator na konačnodimenzionalnom vektorskom prostoru je nilpotentan.

# Poglavlje 6

# REPREZENTACIJE POLUPROSTIH LIEJEVIH ALGEBRI

## 6.1 Inducirane reprezentacije Liejevih algebri

Neka je $\pi$ reprezentacija Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ na vektorskom prostoru $V$ nad poljem $K$. Tada znamo da se $\pi$ jedinstveno proširuje do reprezentacije unitalne algebre $U(\mathfrak{g})$, koju ćemo označavati istim znakom $\pi$. Naravno, vrijedi

$$\pi(x_1 \cdots x_k) = \pi(x_1) \cdots \pi(x_k), \qquad x_1, \ldots, x_k \in \mathfrak{g}.$$

Obratno, ako je zadana reprezentacija $\pi$ unitalne algebre $U(\mathfrak{g})$ na vektorskom prostoru $V$, onda je restrikcija $\pi|\mathfrak{g}$ reprezentacija Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ na prostoru $V$.

Spretno je u nekim situacijama reprezentacije od $U(\mathfrak{g})$ shvaćati kao strukture unitalnih lijevih modula nad prstenom $U(\mathfrak{g})$. Doista, ako je zadana reprezentacija $\pi$ unitalne algebre $U(\mathfrak{g})$ na vektorskom prostoru $V$, onda možemo definirati preslikavanje $U(\mathfrak{g}) \times V \to V$ ovako:

$$(u, v) \mapsto uv := \pi(u)v, \qquad u \in U(\mathfrak{g}), \quad v \in V.$$

Uz tako definirano preslikavanje $V$ postaje unitalni lijevi modul nad prstenom $U(\mathfrak{g})$ :

$$\begin{array}{ll} (u+u')v = uv + u'v, & u(v+v') = uv + uv', \\ (uu')v = u(u'v), & 1v = v, \end{array} \qquad \forall u, u' \in U(\mathfrak{g}),\ \forall v, v' \in V. \tag{6.1}$$

Obratno, ako je zadan unitalni lijevi modul $V$ nad prstenom $U(\mathfrak{g})$, tj. ako je zadana komutativna aditivna grupa $V$ i preslikavanje $(u, v) \mapsto uv$ sa $U(\mathfrak{g}) \times V$ u $V$ koje zadovoljava (6.1), onda je prije svega $V$ vektorski prostor nad poljem $K$ budući da je $K \subseteq U(\mathfrak{g})$. Nadalje, ako za $u \in U(\mathfrak{g})$ definiramo preslikavanje $\pi(u) : V \to V$, sa $\pi(u)v = uv,\ v \in V$, onda je $\pi(u)$ linearan operator na prostoru $V$ i $\pi$ je reprezentacija unitalne algebre $U(\mathfrak{g})$, dakle, i Liejeve algebre $\mathfrak{g}$, na vektorskom prostoru $V$. Očito subreprezentacije odgovaraju podmodulima, kvocijentne reprezentacije kvocijentnim modulima, preplitanja reprezentacija homomorfizmima modula. U daljnjem ćemo za Liejevu algebru $\mathfrak{g}$ umjesto *unitalan lijevi* $U(\mathfrak{g})-$*modul* govoriti kraće $U(\mathfrak{g})-$*modul*. Nadalje, ako je $V$ $U(\mathfrak{g})-$modul i ako je pripadna reprezentacija od $\mathfrak{g}$, odnosno, od $U(\mathfrak{g})$, ireducibilna, reći ćemo da je $V$ **ireducibilan** $U(\mathfrak{g})-$**modul**, ili **prost** $U(\mathfrak{g})-$**modul**. To znači da je $V \neq \{0\}$ i nema $U(\mathfrak{g})-$podmodula $W$ od $V$ različitog od $V$ i od $\{0\}$. Ekvivalentno, $V \neq \{0\}$ i $U(\mathfrak{g})v = V$ $\forall v \in V \setminus \{0\}$.

Tenzorski produkti mogu se sasvim analogno kao za vektorske prostore definirati i za module nad prstenima. No ako se radi o nekomutativnom prstenu, situacija je specifična. Neka je, dakle,

$\mathcal{R}$ unitalan prsten, općenito nekomutativan. Neka su $V$ unitalni desni $\mathcal{R}-$modul i $W$ unitalni lijevi $\mathcal{R}-$modul. Za komutativnu aditivnu grupu $\mathcal{A}$ preslikavanje $\varphi : V \times W \to \mathcal{A}$ zove se $\mathcal{R}-$**bimorfizam**, ako je to preslikavanje biaditivno, tj.

$$\varphi(v + v', w) = \varphi(v, w) + \varphi(v', w) \quad \text{i} \quad \varphi(v, w + w') = \varphi(v, w) + \varphi(v, w') \quad \forall v, v' \in V \text{ i } \forall w, w' \in W$$

i ako vrijedi

$$\varphi(vr, w) = \varphi(v, rw) \qquad \forall v \in V,\ \forall w \in W,\ \forall r \in \mathcal{R}.$$

**Tenzorski produkt** modula $V$ i $W$ zove se uređen par $(\mathcal{T}, \iota)$ takav da je

(1) $\mathcal{T}$ je komutativna aditivna grupa.

(2) $\iota$ je $\mathcal{R}-$bimorfizam sa $V \times W$ u $\mathcal{T}$.

(3) Za svaku komutativnu aditivnu grupu $\mathcal{A}$ i svaki $\mathcal{R}-$bimorfizam $\varphi : V \times W \to \mathcal{A}$ postoji jedinstven homomorfizam grupa $\Phi : \mathcal{T} \to \mathcal{A}$ takav da je $\varphi = \Phi \circ \iota$.

Analogno kao za vektorske prostore dokazuje se

**Teorem 6.1.1.** *Neka je $\mathcal{R}$ unitalan prsten, $V$ desni unitalni $\mathcal{R}-$modul i $W$ lijevi unitalni $\mathcal{R}-$modul.*

(*a*) *Postoji tenzorski produkt modula $V$ i $W$.*

(*b*) *Ako su $(\mathcal{T}, \iota)$ i $(\mathcal{T}', \iota')$ tenzorski produkti $\mathcal{R}-$modula $V$ i $W$, jedinstveni homomorfizam $\Phi : \mathcal{T} \to \mathcal{T}'$ sa svojstvom $\iota' = \Phi \circ \iota$ je izomorfizam grupa*

(*c*) *Ako je $(\mathcal{T}, \iota)$ tenzorski produkt modula $V$ i $W$ onda skup $\iota(V \times W)$ generira grupu $\mathcal{T}$.*

Tenzorski produkt nad prstenom $\mathcal{R}$ obično se označava znakom $\otimes_{\mathcal{R}}$, tj. grupa $\mathcal{T}$ se piše $V \otimes_{\mathcal{R}} W$, a bimorfizam $\iota$ je tada označen sa $\iota(v, w) = v \otimes_{\mathcal{R}} w$, $v \in V$, $w \in W$.

Nas će zanimati samo situacija kad je prsten $\mathcal{R}$ zapravo unitalna algebra nad poljem $K$, tj. ako je polje $K$ sadržano u prstenu $\mathcal{R}$. Tada je svaki (bilo lijevi, bilo desni) $\mathcal{R}-$modul ujedno vektorski prostor nad poljem $K$.

**Zadatak 6.1.** *Neka je $\mathcal{R}$ unitalna algebra nad poljem $K$, $V$ desni unitalni $\mathcal{R}-$modul i $W$ lijevi unitalni $\mathcal{R}-$modul. Neka je $U$ potprostor vektorskog prostora $V \otimes_K W$ razapet svim elementima oblika $vr \otimes_K w - v \otimes_K rw$, $v \in V$, $w \in W$, $r \in \mathcal{R}$. Dokažite da je tada kvocijentni prostor $\mathcal{T} = V \otimes_K W/U$ s preslikavanjem $\iota : V \times W \to \mathcal{T}$ zadanim sa $\iota(v, w) = v \otimes_K w + U$ tenzorski produkt $\mathcal{R}-$modula $V$ i $W$.*

Ukoliko je $\mathcal{S}$ također unitalna algebra nad poljem $K$ i ako je $V$ ne samo desni $\mathcal{R}-$modul nego i lijevi $\mathcal{S}-$modul i ako vrijedi

$$(sv)r = s(vr) \qquad \forall s \in \mathcal{S},\ \forall v \in V,\ \forall r \in \mathcal{R},$$

onda kažemo da je $V$ $(\mathcal{S}, \mathcal{R})-$**bimodul**. Ako je i dalje $W$ lijevi $\mathcal{R}-$modul, onda se lako vidi da na tenzorskom produktu $V \otimes_{\mathcal{R}} W$ postoji jedinstvena struktura lijevog $\mathcal{S}-$modula takva da vrijedi

$$s(v \otimes_{\mathcal{R}} w) = (sv) \otimes_{\mathcal{R}} w \qquad \forall s \in \mathcal{S},\ \forall v \in V, \forall w \in W.$$

Analogno, za $(\mathcal{R}, \mathcal{S})-$bimodul $W$ na $V \otimes_{\mathcal{R}} W$ postoji prirodna struktura desnog $\mathcal{S}-$modula.

Neka je sada $\mathfrak{g}$ Liejeva algebra nad poljem $K$, neka je $\mathfrak{b}$ njena Liejeva podalgebra i neka je $\sigma$ reprezentacija Liejeve algebre $\mathfrak{b}$ na vektorskom prostoru $W$. Tada $W$ ima strukturu $U(\mathfrak{b})-$modula. Nadalje, $U(\mathfrak{b})$ možemo shvaćati kao unitalnu podalgebru od $U(\mathfrak{g})$ generiranu sa $\mathfrak{b}$. Prema tome, množenje $(g,b) \mapsto gb$, $g \in U(\mathfrak{g})$, $b \in U(\mathfrak{b})$, definira na $U(\mathfrak{g})$ strukturu unitalnog desnog $U(\mathfrak{b})-$modula. Ujedno je $U(\mathfrak{g})$ unitalni lijevi $U(\mathfrak{g})-$modul, a zbog asocijativnosti $U(\mathfrak{g})$ je zapravo $(U(\mathfrak{g}), U(\mathfrak{b}))-$bimodul. Prema tome, možemo formirati tenzorski produkt $U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{b})} W$ i to je (lijevi unitalni) $U(\mathfrak{g})-$modul. Na taj način dolazimo do reprezentacije $\pi$ Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ na vektorskom prostoru $V = U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{b})} W$. Za tu reprezentaciju $\pi$ Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ kažemo da je **inducirana reprezentacijom** $\sigma$ podalgebre $\mathfrak{b}$, a također za $U(\mathfrak{g})-$modul $V$ kažemo da je **inducirani $U(\mathfrak{b})-$modulom** $W$; pišemo

$$\pi = Ind_{\mathfrak{b}}^{\mathfrak{g}} \sigma, \qquad V = Ind_{\mathfrak{b}}^{\mathfrak{g}} W.$$

Iz PBW−teorema slijedi da je $U(\mathfrak{g})$ slobodan desni $U(\mathfrak{b})-$modul. Doista, ako je $\{x_1, \ldots, x_m\}$ baza direktnog komplementa od $\mathfrak{b}$ u $\mathfrak{g}$, onda se dopunjavanjem te baze s bazom od $\mathfrak{b}$ do baze od $\mathfrak{g}$ lako vidi da je

$$\{x_1^{n_1} \cdots x_m^{n_m};\ (n_1, \ldots, n_m) \in \mathbb{Z}_+^m\}$$

baza desnog $U(\mathfrak{b})-$modula $U(\mathfrak{g})$. Odatle slijedi da je $w \mapsto 1 \otimes_{U(\mathfrak{b})} w$ linearna injekcija prostora $W$ u prostor $V = Ind_{\mathfrak{b}}^{\mathfrak{g}} W$ i to preslikavanje je homomorfizam lijevih $U(\mathfrak{b})-$modula, odnosno, preplitanje reprezentacije $\sigma$ s reprezentacijom $\pi|\mathfrak{b}$. Tu injekciju možemo upotrijebiti kao identifikaciju, pa $W$ postaje potprostor od $V$ koji je $\sigma-$invarijantan, odnosno, to je $U(\mathfrak{b})-$podmodul od $V$. Naravno, $U(\mathfrak{g})-$modul $V$ generiran je sa $W$. Takvo uranjanje $W$ u $V$ ima univerzalno svojstvo; naime, pomoću univerzalnog svojstva tenzorskog produkta nije teško dokazati da vrijedi:

**Propozicija 6.1.2.** *Neka je $\mathfrak{b}$ Liejeva podalgebra Liejeve algebre $\mathfrak{g}$, $W$ $U(\mathfrak{b})-$modul, $V$ $U(\mathfrak{g})-$modul induciran sa $W$. Ako je $V'$ $U(\mathfrak{g})-$modul i ako je $\psi : W \to V'$ preplitanje reprezentacija od $\mathfrak{b}$, tj. homomorfizam $U(\mathfrak{b})-$modula, onda se $\psi$ jedinstveno proširuje do preplitanja $\Psi : V \to V'$ reprezentacija od $\mathfrak{g}$, odnosno do homomorfizma $U(\mathfrak{g})-$modula. Nadalje, opisano pridruživanje $\psi \mapsto \Psi$ je izomorfizam prostora $Hom_{\mathfrak{b}}(W, V')$ na prostor $Hom_{\mathfrak{g}}(V, V')$; inverzni izomorfizam je restrikcija $\Psi \mapsto \Psi|W$.*

I dalje je $\{x_1, \ldots, x_m\}$ baza direktnog komplementa od $\mathfrak{b}$ u $\mathfrak{g}$. Za $\underline{n} = (n_1, \ldots, n_m) \in \mathbb{Z}_+^m$ pišemo $x^{\underline{n}} = x_1^{n_1} \cdots x_m^{n_m}$. Opisano uranjanje $w \mapsto 1 \otimes_{U(\mathfrak{b})}$ $U(\mathfrak{b})-$modula $W$ u inducirani $U(\mathfrak{g})-$modul $V = Ind_{\mathfrak{b}}^{\mathfrak{g}} W$ ima za posljedicu da za proizvoljan $v \in V$ postoje jedinstveni $w_{\underline{n}} \in W$, $\underline{n} \in \mathbb{Z}_+^m$, među kojima je samo konačno mnogo njih različito od nule, takvi da je

$$v = \sum_{\underline{n} \in \mathbb{Z}_+^m} x^{\underline{n}} \otimes_{U(\mathfrak{b})} w_{\underline{n}}. \tag{6.2}$$

Drugim riječima, vrijedi

$$V = \sum_{\underline{n} \in \mathbb{Z}_+^m} \dot{+}\, x^{\underline{n}} \otimes_{U(\mathfrak{b})} W.$$

Neka je $\pi = Ind_{\mathfrak{b}}^{\mathfrak{g}} \sigma$ inducirana reprezentacija. Tada uz identifikaciju $W = 1 \otimes_{U(\mathfrak{b})} W$ imamo $x^{\underline{n}} \otimes_{U(\mathfrak{b})} w = \pi(x^{\underline{n}})w$, $w \in W$, pa umjesto (6.2) možemo pisati

$$v = \sum_{\underline{n} \in \mathbb{Z}_+^m} \pi(x^{\underline{n}}) w_{\underline{n}}.$$

Ako je $u \in U(\mathfrak{g})$ proizvoljan, operator $\pi(u)$ se može izračunati na sljedeći način. Za svaki $\underline{n} \in \mathbb{Z}_+^m$ možemo pisati

$$u x^{\underline{n}} = \sum_{\underline{k} \in \mathbb{Z}_+^m} x^{\underline{k}} u_{\underline{k}\,\underline{n}}, \qquad u_{\underline{k}\,\underline{n}} \in U(\mathfrak{b}).$$

Tada za $w \in W$ vrijedi

$$\pi(u)(\pi(x^{\underline{n}})w) = \left(\sum_{\underline{k}} x^{\underline{k}} u_{\underline{k}\,\underline{n}}\right)(1 \otimes_{U(\mathfrak{b})} w) = \sum_{\underline{k}} x^{\underline{k}} \otimes_{U(\mathfrak{b})} u_{\underline{k}\,\underline{n}} w = \sum_{\underline{k}} \pi(x^{\underline{k}})(u_{\underline{k}\,\underline{n}} w).$$

**Propozicija 6.1.3.** *Neka su $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{b}$, $\sigma$, $W$, $\pi$, $V$ kao i do sada, uz identifikaciju $W \subseteq V$. Neka je $J$ jezgra od $\sigma$ u $U(\mathfrak{b})$.*

(*a*) *Lijevi ideal $U(\mathfrak{g})J$ generiran sa $J$ u $U(\mathfrak{g})$ jednak je anihilatoru od $W$ u $U(\mathfrak{g})$ :*

$$U(\mathfrak{g})J = span_K \{ua;\ u \in U(\mathfrak{g}),\ a \in J\} = \{u \in U(\mathfrak{g});\ uw = 0\ \forall w \in W\}.$$

(*b*) *Jezgra od $\pi$ u $U(\mathfrak{g})$ je najveći dvostrani ideal u $U(\mathfrak{g})$ sadržan u lijevom idealu $U(\mathfrak{g})J$.*

**Dokaz:** (*a*) Budući da je $J$ dvostrani, pa dakle i lijevi ideal u $U(\mathfrak{b})$, vrijedi

$$U(\mathfrak{g})J = \sum_{\underline{n}} x^{\underline{n}} J.$$

Sada za $u \in U(\mathfrak{g})$ pišemo

$$u = \sum_{\underline{n}} x^{\underline{n}} u_{\underline{n}}, \qquad u_{\underline{n}} \in U(\mathfrak{b}),$$

pa imamo sljedeći slijed ekvivalencija

$$uW = \{0\} \iff \sum_{\underline{n}} x^{\underline{n}} \otimes_{U(\mathfrak{b})} u_{\underline{n}} W = \{0\} \iff u_{\underline{n}} W = \{0\}\ \forall \underline{n} \iff$$

$$\iff u_{\underline{n}} \in J\ \forall \underline{n} \iff u \in U(\mathfrak{g})J.$$

(*b*) Neka je $u \in U(\mathfrak{g})$. Budući da $W$ generira $U(\mathfrak{g})-$modul $V$, tj. $V = U(\mathfrak{g})W$, imamo koristeći dokazanu tvrdnju (*a*)

$$u \in Ker\,\pi \iff u(U(\mathfrak{g})W) = \{0\} \iff uU(\mathfrak{g}) \subseteq U(\mathfrak{g})J \iff U(\mathfrak{g})uU(\mathfrak{g}) \subseteq U(\mathfrak{g})J.$$

Time je i tvrdnja (*b*) dokazana.

**Propozicija 6.1.4.** *Neka je $\mathfrak{b}$ Liejeva algebra i neka je $\sigma : \mathfrak{b} \to K$ jednodimenzionalna reprezentacija od $\mathfrak{b}$. Označimo sa $N$ jezgru te reprezentacije u $U(\mathfrak{b})$. Tada je $N$ lijevi ideal u $U(\mathfrak{b})$ generiran skupom $\{x - \sigma(x);\ x \in \mathfrak{b}\}$ i ujedno desni ideal u $U(\mathfrak{b})$ generiran tim skupom.*

**Dokaz:** Označimo sa $L$ lijevi, a sa $R$ desni ideal u algebri $U(\mathfrak{b})$ generiran sa $\{x - \sigma(x);\ x \in \mathfrak{b}\}$. Očito je $L \subseteq N$. S druge strane, neka je $\{x_1, \ldots, x_n\}$ baza od $\mathfrak{b}$ takva da je $\tau(x_j) = 0$ za $j = 2, \ldots, n$. Svaki element $x_1^{m_1} \cdots x_n^{m_n}$ baze od $U(\mathfrak{b})$ takav da je $m_2 + \cdots + m_n > 0$ leži u $L$. Također, za svaki $m_1 \in \mathbb{N}$ je $x^{m_1} - \sigma(x)^{m_1} \in L$. To pokazuje da je $L$ potprostor od $U(\mathfrak{b})$ kodimenzije $\leq 1$, pa zaključujemo da je $L = N$. Sasvim analogno dokazuje se da je i $R = N$.

**Propozicija 6.1.5.** *Neka su $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{b}$, $\sigma$, $W$, $\pi$, $V$ kao i ranije, ponovo uz identifikaciju $W \subseteq V$. Pretpostavimo da je $w \in W$ takav da je $W = U(\mathfrak{b})w$ i neka je $L = \{x \in U(\mathfrak{b});\ \sigma(x)w = 0\}$ anihilator vektora $w$ u $U(\mathfrak{b})$.*

(*a*) *Vrijedi $V = U(\mathfrak{g})w$ i jezgra surjektivnog preslikavanja $\varphi : u \mapsto uw$ sa $U(\mathfrak{g})$ na $V$ je lijevi ideal $U(\mathfrak{g})L$ u $U(\mathfrak{g})$ generiran sa $L$.*

(*b*) *Neka je* $\psi : U(\mathfrak{g})/U(\mathfrak{g})L \to V$ *izomorfizam vektorskih prostora dobiven iz* $\varphi$ *prijelazom na kvocijent. Ako* $U(\mathfrak{g})/U(\mathfrak{g})L$ *snabdijemo strukturom* $U(\mathfrak{g})-$*modula dobivenom iz množenja slijeva na* $U(\mathfrak{g})$, *onda je* $\psi$ *izomorfizam* $U(\mathfrak{g})-$*modula.*

(*c*) *Ako je reprezentacija* $\sigma$ *jednodimenzionalna,* $\dim W = 1$, *onda je* $U(\mathfrak{g})L$ *lijevi ideal u* $U(\mathfrak{g})$ *generiran skupom* $\{x - \sigma(x);\ x \in \mathfrak{b}\}$.

**Dokaz:** (*a*) Imamo $U(\mathfrak{b})w = W$, dakle je $U(\mathfrak{g})w = U(\mathfrak{g})W = V$. Da bismo odredili jezgru surjekcije $u \mapsto uw$ izaberimo bazu $\{x_1, \ldots, x_s\}$ direktnog komplementa od $\mathfrak{b}$ u $\mathfrak{g}$ i koristimo oznake uvedene iza propozicije 6.1.2. Neka je $u \in U(\mathfrak{g})$ i neka su $u_{\underline{n}} \in U(\mathfrak{b})$, $\underline{n} \in \mathbb{Z}_+^s$, jedinstveni elementi takvi da je

$$u = \sum_{\underline{n} \in \mathbb{Z}_+^s} x^{\underline{n}} u_{\underline{n}}.$$

Tada imamo slijed ekvivalencija:

$$uw = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \sum_{\underline{n}} x^{\underline{n}} \otimes u_{\underline{n}} w = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad u_{\underline{n}} w = 0 \ \forall \underline{n} \quad \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \quad u_{\underline{n}} \in L \ \forall \underline{n} \quad \Longleftrightarrow \quad u \in U(\mathfrak{g})L.$$

Dakle, $Ker\, \varphi = U(\mathfrak{g})L$ i time je dokazana tvrdnja (*a*). Očito je $\varphi$ homomomrfizam $U(\mathfrak{g})-$modula pa slijedi (*b*). Napokon, tvrdnja (*c*) slijedi neposredno iz propozicije 6.1.4.

## 6.2 Vermaovi moduli

U ostatku ovog poglavlja $K$ je algebarski zatvoreno polje karakteristike 0 i $\mathfrak{g}$ je poluprosta Liejeva algebra nad poljem $K$. Nadalje, $\mathfrak{h}$ je Cartanova podalgebra od $\mathfrak{g}$ i $R = R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ pripadni sistem korijena. Neka je $B$ neka baza sistema korijena $R$ i neka su $R_+$ i $R_- = -R_+$ pripadni skupovi pozitivnih i negativnih korijena u odnosu na bazu $B$. Kao i obično stavljamo

$$\mathfrak{g}_\alpha = \{x \in \mathfrak{g};\ [h, x] = \alpha(h)x\ \forall h \in \mathfrak{h}\}, \qquad \alpha \in R.$$

Tada imamo korijenski rastav

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \dotplus \sum_{\alpha \in R} \dotplus\, \mathfrak{g}_\alpha.$$

Stavimo kao prije

$$\mathfrak{n} = \sum_{\alpha \in R_+} \dotplus\, \mathfrak{g}_\alpha, \qquad \overline{\mathfrak{n}} = \sum_{\alpha \in R_-} \dotplus\, \mathfrak{g}_\alpha,$$

dakle, $\mathfrak{g} = \mathfrak{n} \dotplus \mathfrak{h} \dotplus \overline{\mathfrak{n}}$. Nadalje, neka je $\mathfrak{b} = \mathfrak{h} \dotplus \mathfrak{n}$. Tada je $\mathfrak{b}$ Borelova podalgebra od $\mathfrak{g}$ i $\mathfrak{g} = \mathfrak{b} \dotplus \overline{\mathfrak{n}}$.

Kao i prije stavimo $Q = span_{\mathbb{Z}}\, B = span_{\mathbb{Z}}\, R$ – to je skup tzv. **korijenskih težina** – i neka je

$$Q_+ = \mathbb{Z}_+ B = \left\{ \sum_{\alpha \in B} n_\alpha \alpha;\ n_\alpha \in \mathbb{Z}_+ \text{ za } \alpha \in B \right\}.$$

Naravno, vrijedi

$$Q_+ = \mathbb{Z}_+ R_+ = \left\{ \sum_{\alpha \in R_+} n_\alpha \alpha;\ n_\alpha \in \mathbb{Z}_+ \text{ za } \alpha \in R_+ \right\}.$$

Za $\lambda \in Q_+$ označimo sa $\mathcal{P}(\lambda)$ broj načina da se $\lambda$ napiše kao $\mathbb{Z}_+$–linearna kombinacija pozitivnih korijena. Dakle, ako je $|R_+| = s$, numerirajmo sve pozitivne korijene: $R_+ = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_s\}$. Tada je

$$\mathcal{P}(\lambda) = \left| \left\{ (c_1, \ldots, c_s) \in \mathbb{Z}_+^s;\ \lambda = \sum_{i=1}^{s} c_i \alpha_i \right\} \right|.$$

Funkcija $\mathcal{P} : \mathbb{Q}_+ \to \mathbb{N}$ se zove **Kostantova funkcija** sistema korijena $R$ u odnosu na bazu $B$.

Neka je kao i u odjeljku 3.7. za svaki $\alpha \in B$ sa $\lambda_\alpha$ označena pripadna fundamentalna težina: $\{\lambda_\alpha;\ \alpha \in B\}$ je dualna baza od $\mathfrak{h}^*$ u odnosu na bazu $\{h_\alpha;\ \alpha \in B\}$ prostora $\mathfrak{h}$, tj. $\lambda_\alpha(h_\beta) = \delta_{\alpha\beta}$. Nadalje, polusumu pozitivnih korijena označimo sa $\rho$. Prema propoziciji 3.7.1. je

$$\rho = \frac{1}{2} \sum_{\beta \in R_+} \beta = \sum_{\alpha \in B} \lambda_\alpha.$$

Stoga vrijedi

$$\rho(h_\alpha) = 1 \qquad \forall \alpha \in B. \tag{6.3}$$

Neka je $\pi$ reprezentacija Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ na vektorskom prostoru $V$. Za $\mu \in \mathfrak{h}^*$ stavimo

$$V_\mu = \{v \in V;\ \pi(h)v = \mu(h)v\ \forall h \in \mathfrak{h}\}.$$

Ako je $V_\mu \neq \{0\}$, $\mu$ se zove **težina reprezentacije** $\pi$, a $V_\mu$ se zove **težinski potprostor** od $V$. Ukoliko je taj potprostor konačnodimenzionalan, broj $\dim V_\mu$ zove se **multiplicitet** težine $\mu$ u reprezentaciji $\pi$. Ako je $V_\mu = \{0\}$, odnosno ako $\mu$ nije težina reprezentacije $\pi$, kažemo da je $\mu$ težina od $\mu$ multipliciteta 0. Za vektor $v \in V_\mu$ kažemo da je **težinski vektor težine** $\mu$.

**Propozicija 6.2.1.** *Neka je $\pi$ reprezentacija od $\mathfrak{g}$ na vektorskom prostoru $V$.*

(a) *Suma $V'$ potprostora $V_\mu$, $\mu \in \mathfrak{h}^*$, je direktna.*

(b) *Za $\alpha \in R$ i $\mu \in \mathfrak{h}^*$ vrijedi $\pi(\mathfrak{g}_\alpha)V_\mu \subseteq V_{\mu+\alpha}$.*

(c) *Potprostor $V'$ je $\pi-$invarijantan.*

**Zadatak 6.2.** *Dokažite propoziciju 6.2.1.*

Naravno, može se dogoditi da reprezentacija od $\mathfrak{g}$ nema nijednu težinu. Mi ćemo u ovom poglavlju promatrati samo tzv. **$\mathfrak{h}-$težinske reprezentacije**, tj. samo takve reprezentacije na prostoru $V$ da vrijedi

$$V = \sum_{\mu \in \mathfrak{h}^*} \dot{+} V_\mu.$$

Takve su sve konačnodimenzionalne reprezentacije:

**Propozicija 6.2.2.** *Svaka konačnodimenzionalna reprezentacija Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ je $\mathfrak{h}-$težinska.*

**Dokaz:** Neka je $\pi$ reprezentacija od $\mathfrak{g}$ na konačnodimenzionalnom prostoru $V$. Zbog Weylovog teorema 1.5.4. o potpunoj reducibilnosti možemo pretpostaviti da je reprezentacija $\pi$ ireducibilna. No tada je zbog tvrdnje $(c)$ propozicije 6.2.1. dovoljno dokazati da reprezentacija $\pi$ ima bar jednu težinu $\mu \in \mathfrak{h}^*$. Kako je Borelova podalgebra $\mathfrak{b} = \mathfrak{h} \dot{+} \mathfrak{n}$ rješiva, na njenu sliku $\pi(\mathfrak{b}) \subseteq \mathfrak{gl}(V)$ možemo primijeniti teorem 1.2.9. Slijedi da postoji vektor $v \neq 0$ koji je svojstven za sve operatore $\pi(x)$, $x \in \mathfrak{b}$. Dakle, postoji linearan funkcional $\lambda \in \mathfrak{b}^*$ takav da je

$$\pi(x)v = \lambda(x)v \qquad \forall x \in \mathfrak{b}.$$

Posebno, vidimo da je $v \in V_\mu$ za $\mu = \lambda|\mathfrak{h} \in \mathfrak{h}^*$, tj. $V_\mu \neq \{0\}$.

Neka je $\lambda \in \mathfrak{h}^*$. Definiramo jednodimenzionalnu reprezentaciju $\tau_\lambda$ od $\mathfrak{b}$ na prostoru $W_\lambda = K$ ovako:

$$\tau_\lambda(h+n) = \lambda(h), \qquad h \in \mathfrak{h}, \quad n \in \mathfrak{n}.$$

Neka je

$$\sigma_\lambda = Ind_{\mathfrak{b}}^{\mathfrak{g}} \tau_\lambda, \qquad M(\lambda) = Ind_{\mathfrak{b}}^{\mathfrak{g}} W_\lambda = U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{b})} K.$$

Tako definiran $U(\mathfrak{g})-$modul zove se **Vermaov modul** pridružen $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$, $B$, $\lambda$.

U daljnjem ćemo pisati $\otimes$ umjesto $\otimes_{U(\mathfrak{b})}$. Budući da je $\overline{\mathfrak{n}}$ direktni komplement od $\mathfrak{b}$ u $\mathfrak{g}$, prema razmatranjima prije i iza propozicije 6.1.2. vidimo da je $u \mapsto u \otimes 1 = \sigma_\lambda(u)(1 \otimes 1)$ izomorfizam vektorskog prostora $U(\overline{\mathfrak{n}})$ na vektorski prostor $M(\lambda)$. Očito je to homomorfizam lijevih $U(\overline{\mathfrak{n}})-$modula.

**Propozicija 6.2.3.** *Neka je $\lambda \in \mathfrak{h}^*$.*

(a) *Reprezentacija $\sigma_\lambda$ je $\mathfrak{h}-$težinska:*

$$M(\lambda) = \sum_{\mu \in \mathfrak{h}^*} \dot{+} M(\lambda)_\mu.$$

(b) *$\mu \in \mathfrak{h}^*$ je težina reprezentacije $\sigma_\lambda$ ako i samo ako je $\lambda - \mu \in Q_+$ :*

$$M(\lambda)_\mu \neq \{0\} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mu \in \lambda - Q_+.$$

(c) *Multiplicitet težine $\mu \in \lambda - Q_+$ reprezentacije $\sigma_\lambda$ jednak je $\mathcal{P}(\lambda - \mu)$ :*

$$\dim M(\lambda)_\mu = \mathcal{P}(\lambda - \mu) \qquad \forall \mu \in \lambda - Q_+.$$

(d) *Vrijedi*

$$M(\lambda)_\lambda = 1 \otimes K, \qquad M(\lambda) = U(\overline{\mathfrak{n}})M(\lambda)_\lambda, \qquad \mathfrak{n}M(\lambda)_\lambda = \{0\}.$$

**Dokaz:** Neka je $|R_+| = s$ i numerirajmo pozitivne korijene: $R_+ = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_s\}$. Za svaki $j \in \{1, \ldots, s\}$ neka je $y_j \in \mathfrak{g}_{-\alpha_j} \setminus \{0\}$. Tada je $\{y_1, \ldots, y_s\}$ baza od $\overline{\mathfrak{n}}$, dakle,

$$\{y_1^{n_1} \cdots y_s^{n_s};\ (n_1, \ldots, n_s) \in \mathbb{Z}_+^s\}$$

je baza vektorskog prostora $U(\overline{\mathfrak{n}})$. Slijedi da je

$$\{y_1^{n_1} \cdots y_s^{n_s} \otimes 1;\ (n_1, \ldots, n_s) \in \mathbb{Z}_+^s\}$$

baza vektorskog prostora $M(\lambda)$. Sada ćemo izračunati djelovanje proizvoljnog $h \in \mathfrak{h}$ na vektore te baze. Budući da je $[h, y_i] = -\alpha_i(h)y_i$, indukcijom po $k = n_1 + \cdots + n_s \in \mathbb{Z}_+$ lako slijedi da u algebri $U(\mathfrak{g})$ vrijedi

$$[h, y_1^{n_1} \cdots y_s^{n_s}] = (-n_1\alpha_1 - \cdots - n_s\alpha_s)(h)y_1^{n_1} \cdots y_s^{n_s}.$$

Stoga je

$$\begin{aligned}
\sigma_\lambda(h)(y_1^{n_1} \cdots y_s^{n_s} \otimes 1) &= \sigma_\lambda(h)\sigma_\lambda(y_1^{n_1} \cdots y_s^{n_s})(1 \otimes 1) = \\
= \sigma_\lambda(h)([h, y_1^{n_1} \cdots y_s^{n_s}])(1 \otimes 1) &+ \sigma_\lambda(h)(y_1^{n_1} \cdots y_s^{n_s})\sigma_\lambda(h)(1 \otimes 1) = \\
= (-n_1\alpha_1 - \cdots - n_s\alpha_s)(h)y_1^{n_1} &\cdots y_s^{n_s} \otimes 1 + y_1^{n_1} \cdots y_s^{n_s} h \otimes 1.
\end{aligned}$$

Kako je $\otimes$ zapravo $\otimes_{U(\mathfrak{b})}$, i kako je $h \in \mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{b}$, imamo $1 \cdot h \otimes 1 = 1 \otimes h \cdot 1 = \lambda(h)(1 \otimes 1)$, pa slijedi

$$\sigma_\lambda(h)(y_1^{n_1} \cdots y_s^{n_s} \otimes 1) = (\lambda - n_1\alpha_1 - \cdots - n_s\alpha_s)(h)(y_1^{n_1} \cdots y_s^{n_s} \otimes 1).$$

Odatle i iz propozicije 6.2.1. slijede sve tvrdnje ove propozicije.

Vermaov modul ima univerzalno svojstvo u odnosu na cikličke $U(\mathfrak{g})-$module s cikličkim vektorom koji je težinski i poništen sa $\mathfrak{n}$ :

**Propozicija 6.2.4.** *Neka je $V$ $U(\mathfrak{g})-$modul, $\lambda \in \mathfrak{h}^*$, $v \in V_\lambda$ vektor takav da je $\mathfrak{n}v = \{0\}$ i $V = U(\mathfrak{g})v$.*

(a) *Postoji jedinstveno preplitanje $\varphi : M(\lambda) \to V$ takvo da je $\varphi(1 \otimes 1) = v$. $\varphi$ je surjekcija Vermaovog modula $M(\lambda)$ na modul $V$.*

(b) *Modul $V$ je $\mathfrak{h}-$težinski; za svaku njegovu težinu $\mu$ vrijedi $\lambda - \mu \in Q_+$, težinski potprostor $V_\mu$ je konačnodimenzionalan i $V_\lambda = Kv$; dakle, ako je $V \neq \{0\}$, onda je* $\dim V_\lambda = 1$.

(c) *Vrijedi $V = U(\overline{\mathfrak{n}})v$.*

(d) *Ako je $T : V \to V$ preplitanje, onda je $T = cI_V$ za neki $c \in K$.*

(e) *Postoji unitalni homomorfizam $\chi$ centra $Z(\mathfrak{g})$ algebre $U(\mathfrak{g})$ u polje $K$ takav da je $zw = \chi(z)w$ za svaki $z \in Z(\mathfrak{g})$ i svaki $w \in V$.*

(f) *Preplitanje $\varphi$ je izomorfizam ako i samo ako je $V \neq \{0\}$ i za svaki $u \in U(\overline{\mathfrak{n}}) \setminus \{0\}$ linearan operator $w \mapsto uw$ sa $V$ u $V$ je injektivan.*

**Dokaz:** Tvrdnja $(a)$ slijedi neposredno iz propozicije 6.1.2. Tvrdnje $(b)$ slijedi iz surjektivnosti $\varphi$ i iz $\varphi(M(\lambda)_\mu) = V_\mu \ \forall\mu \in \mathfrak{h}^*$. Tvrdnja $(c)$ je posljedica PBW−teorema:

$$V = U(\mathfrak{g})v = U(\overline{\mathfrak{n}})U(\mathfrak{b})v = U(\overline{\mathfrak{n}})v.$$

Neka je $T : V \to V$ preplitanje, odnosno, homomorfizam $U(\mathfrak{g})$−modula. Za svaki $h \in \mathfrak{h}$ imamo $hTv = Thv = \lambda(h)Tv$, dakle, vrijedi $Tv \in V_\lambda = Kv$. Stoga je $Tv = cv$ za neki $c \in K$. No svaki $w \in V$ ima po pretpostavci oblik $w = uv$ za neki $u \in U(\mathfrak{g})$. Slijedi $Tw = Tuv = uTv = ucv = cw$, dakle, $T = cI_V$. Time je dokazana tvrdnja $(d)$. Odatle odmah slijedi tvrdnja $(e)$, jer za $z \in Z(\mathfrak{g})$ prelikavanje $w \mapsto zw$ sa $V$ u $V$ je preplitanje.

Ako je $\varphi$ izomorfizam, injektivnost operatora $w \mapsto uw$ za $u \in U(\overline{\mathfrak{n}})$ slijedi iz prije spomenute činjenice da je $u \mapsto u(1 \otimes 1)$ izomorfizam $U(\overline{\mathfrak{n}})$−modula $U(\overline{\mathfrak{n}})$ na Vermaov modul $M(\lambda)$ i iz činjenice da prsten $U(\overline{\mathfrak{n}})$ nema djelitelja nule (zadatak 5.16.). Napokon, pretpostavimo da $\varphi$ nije izomorfizam. Tada $\varphi$ nije injekcija, pa postoji $u \in U(\overline{\mathfrak{n}}) \setminus \{0\}$ takav da je $\varphi(u \otimes 1) = 0$. Slijedi

$$uv = u\varphi(1 \otimes 1) = \varphi(\sigma_\lambda(u)(1 \otimes 1)) = \varphi(u \otimes 1) = 0.$$

Prema tome, ako je $V \neq \{0\}$, dakle, $v \neq 0$, linearan operator $w \mapsto uw$ nije injekcija.

Svaki unitalni homomorfizam $\chi : Z(\mathfrak{g}) \to K$ zove se **infinitezimalni karakter**. $\chi$ se zove infinitezimalni karakter reprezentacije $\pi$ Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ na prostoru $V$ (ili infinitezimalni karakter $U(\mathfrak{g})$−modula $V$) ako je $\pi(z) = \chi(z)I_V$ za svaki $z \in V$. Iz tvrdnje $(e)$ propozicije 6.2.4. slijedi da Vermaov modul $M(\lambda)$ ima infinitezimalni karakter. Njega ćemo označavati sa $\chi_\lambda$.

**Propozicija 6.2.5.** *Neka je $\lambda \in \mathfrak{h}^*$.*

$(a)$ *Svaki pravi $U(\mathfrak{g})$−podmodul od $M(\lambda)$ sadržan je u potprostoru*

$$M_+(\lambda) = \sum_{\mu \neq \lambda} M(\lambda)_\mu.$$

$(b)$ *Postoji najveći pravi $U(\mathfrak{g})$−podmodul $K(\lambda)$ od $M(\lambda)$. Kvocijentni $U(\mathfrak{g})$−modul $L(\lambda) = M(\lambda)/K(\lambda)$ je prost, tj. kvocijentna reprezentacija $\pi_\lambda = (\sigma_\lambda)_{M(\lambda)/K(\lambda)}$ je ireducibilna.*

**Dokaz:** $(a)$ Neka je $V$ $U(\mathfrak{g})$−podmodul od $M(\lambda)$ različit od $M(\lambda)$. Tada je $V$ $U(\mathfrak{h})$−podmodul od $M(\lambda)$ pa vrijedi

$$V = \sum_{\mu \in (\lambda - Q_+)} \dot{+} V_\mu \qquad \text{i} \qquad V_\mu = V \cap M(\lambda)_\mu \qquad \forall \mu.$$

Budući da je $\dim M(\lambda)_\lambda = 1$ i $U(\mathfrak{g})M(\lambda)_\lambda = M(\lambda)$, iz $V \neq M(\lambda)$ slijedi da je $V \cap M(\lambda)_\lambda = \{0\}$. Prema tome je

$$V = \sum_{\mu \neq \lambda} \dot{+} V \cap M(\lambda)_\mu \subseteq M_+(\lambda).$$

$(b)$ Neka je $K$ suma svih pravih $U(\mathfrak{g})$−podmodula od $M(\lambda)$. Tada je $K(\lambda)$ $U(\mathfrak{g})$−podmodul od $M(\lambda)$ koji sadrži svaki pravi $U(\mathfrak{g})$−podmodul od $M(\lambda)$. Kako je prema $(a)$ svaki pravi $U(\mathfrak{g})$−podmodul od $M(\lambda)$ sadržan u $M_+(\lambda)$, slijedi da je i $K(\lambda) \subseteq M_+(\lambda)$, dakle, $K(\lambda) \neq M(\lambda)$.

**Propozicija 6.2.6.** *Neka je $V$ ireducibilan $U(\mathfrak{g})$−modul i neka je $\lambda \in \mathfrak{h}^*$. Pretpostavimo da postoji $v \in V_\lambda \setminus \{0\}$ takav da je $\mathfrak{n}v = \{0\}$. Tada je modul $V$ izomorfan modulu $L(\lambda)$, odnosno, reprezentacija od $\mathfrak{g}$ na $V$ ekvivalentna je reprezentaciji $\pi_\lambda$.*

**Dokaz:** Kako je $U(\mathfrak{g})-$modul $V$ ireducibilan, vrijedi $U(\mathfrak{g})v = V$. Prema tvrdnji $(a)$ propozicije 6.2.4. postoji surjektivno preplitanje $\varphi : M(\lambda) \to V$. Tada je modul $V$ izomorfan kvocijentnom modulu $M(\lambda)/(Ker\,\varphi)$. Budući da je $\varphi \neq \{0\}$, to je $Ker\,\varphi \neq M(\lambda)$, pa je uz oznaku iz propozicije 6.2.5. $Ker\,\varphi \subseteq K(\lambda)$. Sada iz ireducibilnosti kvocijentnog modula $M(\lambda)/(Ker\,\varphi)$ slijedi da je $Ker\,\varphi = K(\lambda)$, dakle, modul $V$ je izomorfan modulu $M(\lambda)/K(\lambda) = L(\lambda)$.

**Propozicija 6.2.7.** *Pretpostavimo da za* $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ *i* $\alpha \in B$ *vrijedi* $m = \lambda(h_\alpha) \in \mathbb{Z}_+$. *Neka su* $v \in M(\lambda)_\lambda \setminus \{0\}$ *i* $y \in \mathfrak{g}_{-\alpha} \setminus \{0\}$. *Stavimo* $v' = y^{m+1}v$ *i neka je* $V$ $U(\mathfrak{g})-$*podmodul od* $M(\lambda)$ *generiran sa* $v'$, $V = U(\mathfrak{g})v'$. *Tada je* $U(\mathfrak{g})-$*modul* $V$ *izomorfan modulu* $M(\sigma_\alpha(\lambda + \rho) - \rho)$.

Za dokaz će nam trebati sljedeća činjenica, koja se jednostavno dokazuje indukcijom u odnosu na $m \in \mathbb{Z}_+$ :

**Zadatak 6.3.** *Neka je* $\mathcal{A}$ *unitalna algebra i* $x, y, h \in \mathcal{A}$ *takvi da je* $[h, y] = -2y$ *i* $[x, y] = h$. *Tada je*

$$[x, y^{m+1}] = (m + 1)(h + m)y^m = (m + 1)y^m(h - m) \qquad \forall m \in \mathbb{Z}_+.$$

**Dokaz propozicije 6.2.7.**: Budući da je $u \mapsto uv$ izomorfizam vektorskog prostora $U(\overline{\mathfrak{n}})$ na vektorski prostor $M(\lambda)$, vrijedi $v' \neq 0$. Nadalje, kako je prema (6.3) $\rho(h_\alpha) = 1$, imamo

$$\sigma_\alpha(\lambda + \rho) - \rho = \lambda + \rho - (\lambda + \rho)(h_\alpha)\alpha - \rho = \lambda - (m + 1)\alpha,$$

pa je prema tvrdnji $(b)$ propozicije 6.2.1.

$$v' = y^{m+1}v \in M(\lambda)_{\lambda-(m+1)\alpha} = M(\lambda)_{\sigma_\alpha(\lambda+\rho)-\rho}.$$

Za $\beta \in B \setminus \{\alpha\}$ vrijedi $[\mathfrak{g}_{-\alpha}, \mathfrak{g}_\beta] = \{0\}$ jer $\beta - \alpha \notin R$. Odatle i iz $\mathfrak{g}_\beta v = \{0\}$ slijedi $\mathfrak{g}_\beta v' = \{0\}$. Nadalje, neka je $x \in \mathfrak{g}_\alpha$ takav da je $[x, y] = h_\alpha$. Tada zbog jednakosti u zadatku 6.3. i zbog $xv = 0$ nalazimo

$$xv' = xy^{m+1}v = [x, y^{m+1}]v + y^{m+1}xv = (m + 1)y^m(h_\alpha - m)v = m(\lambda(h_\alpha) - m)y^m v = 0.$$

Time je dokazano da vrijedi $\mathfrak{n}v' = \{0\}$. Sada po tvrdnji $(a)$ propozicije 6.2.4. postoji epimorfizam $U(\mathfrak{g})-$modula $\varphi : M(\sigma_\alpha(\lambda + \rho) - \rho) \to V$. No kako je za svaki $u \in U(\overline{\mathfrak{n}}) \setminus \{0\}$ preslikavanje $w \mapsto uw$ injektivan linearan operator na $M(\lambda)$, njegova restrikcija na potprostor $V$ je također injektivna. Sada tvrdnja $(f)$ propozicije 6.2.4. pokazuje da je $\varphi : M(\sigma_\alpha(\lambda+\rho)-\rho) \to V$ izomorfizam $U(\mathfrak{g})-$modula.

## 6.3 Konačnodimenzionalne reprezentacije

U daljnjem sa $P$ označavamo skup svih težina sistema korijena $R = R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$. Dakle,

$$P = \{\lambda \in \mathfrak{h}^*;\ \lambda(h_\alpha) \in \mathbb{Z}\ \forall \alpha \in R\} = \{\lambda \in \mathfrak{h}^*;\ \lambda(h_\alpha) \in \mathbb{Z}\ \forall \alpha \in B\}.$$

Nadalje, neka je $P_+$ skup svih dominantnih težina sistema korijena $R$ u odnosu na bazu $B$ :

$$P_+ = \{\lambda \in \mathfrak{h}^*;\ \lambda(h_\alpha) \in \mathbb{Z}_+\ \forall \alpha \in R_+\} = \{\lambda \in \mathfrak{h}^*;\ \lambda(h_\alpha) \in \mathbb{Z}_+\ \forall \alpha \in B\}.$$

Ako je $\pi$ reprezentacija od $\mathfrak{g}$ na prostoru $V$, težinom od $\pi$ i dalje će se nazivati svaki linearni funkcional $\mu \in \mathfrak{h}^*$ takav da je $V_\mu = \{v \in V;\ \pi(h)v = \mu(h)v\ \forall h \in \mathfrak{h}\} \neq \{0\}$. Da izbjegnemo nedoumice, težine sistema korijena $R$, odnosno elemente od $P$, nazivat ćemo **integralne težine**, a elemente od $P_+$ **dominantne integralne težine**.

**Propozicija 6.3.1.** *Neka je $\pi$ konačnodimenzionalna reprezentacija od $\mathfrak{g}$ na prostoru $V$. Svaka težina od $\pi$ je integralna. Nadalje, za svaki $\mu \in \mathfrak{h}^*$ i za svaki element $\sigma$ Weylove grupe $W = W(R)$ vrijedi* $\dim V_\mu = \dim V_{\sigma\mu}$.

**Dokaz:** Neka je $\alpha \in R$. Neka su $x_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$ i $y_\alpha \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ takvi da je $[x_\alpha, y_\alpha] = h_\alpha$; podsjećamo da je $h_\alpha$ jedinstven element iz $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}] \subseteq \mathfrak{h}$ takav da je $\alpha(h_\alpha) = 2$. Tada je $\mathfrak{s}_\alpha = span\,\{x_\alpha, h_\alpha, y_\alpha\}$ trodimenzionalna Liejeva podalgebra od $\mathfrak{g}$ i linearno proširenje preslikavanja

$$x_\alpha \mapsto \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad h_\alpha \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \qquad y_\alpha \mapsto \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

je izomorfizam Liejeve algebre $\mathfrak{s}_\alpha$ na Liejevu algebru $\mathfrak{sl}(2, K)$. Restrikcija $\pi|\mathfrak{s}_\alpha$ je konačnodimenzionalna reprezentacija od $\mathfrak{s}_\alpha$, pa su po tvrdnji $(a)$ teorema 1.6.4. sve svojstvene vrijednosti operatora $\pi(h_\alpha)$ cijeli brojevi. Dakle, vrijedi $\mu(h_\alpha) \in \mathbb{Z}$ za svaku težinu $\mu$ reprezentacije $\pi$. Kako je $\alpha \in R$ bio proizvoljan, prva je tvrdnja dokazana.

Za drugu ćemo tvrdnju također koristiti izomorfnost $\mathfrak{s}_\alpha$ sa $\mathfrak{sl}(2, K)$ i rezultate odjeljka 1.6. Neka je $\mu \in \mathfrak{h}^*$ težina reprezentacije $\pi$ i neka je $\alpha \in R$. Stavimo $m = \mu(h_\alpha)$. Neka je

$$V = V^{(1)} \dotplus \cdots \dotplus V^{(s)}$$

rastav prostora $V$ u direktnu sumu $\pi|\mathfrak{s}_\alpha-$invarijantnih potprostora na kojima su pripadne subreprezentacije Liejeve algebre $\mathfrak{s}_\alpha$ ireducibilne. Stavimo $n_j = \dim V^{(j)}$. Neka su $V_k^{(j)}$ težinski potprostori:

$$V_k^{(j)} = \{v \in V^{(j)};\ \pi(h_\alpha)v = kv\}.$$

Znamo da tada vrijedi $V_k^{(j)} \neq \{0\}$ ako i samo ako je $-n_j \leq k \leq n_j$ i $n_j - k \in 2\mathbb{Z}$ i u tom je slučaju $\dim V_k^{(j)} = 1$. Nadalje, iz eksplicitnih formula za djelovanje restrikcija operatora $\pi(x_\alpha)$ i $\pi(y_\alpha)$ slijedi da je u slučaju $k \geq 0$ restrikcija $\pi(y_\alpha)^k|V_k^{(j)}$ izomorfizam sa $V_k^{(j)}$ na $V_{-k}^{(j)}$, a restrikcija $\pi(x_\alpha)^k|V_{-k}^{(j)}$ je izomorfizam sa $V_{-k}^{(j)}$ na $V_k^{(j)}$. Primijetimo sada da iz $\mu(h_\alpha) = m$ slijedi

$$V_\mu = V_\mu \cap V_m^{(1)} \dotplus \cdots \dotplus V_\mu \cap V_m^{(s)},$$

a kako je svaki potprostor $V_m^{(j)}$ ili $\{0\}$ ili je jednodimenzionalan, zaključujemo da je težinski potprostor $V_\mu$ direktna suma nekih od potprostora $V_m^{(j)}$; preciznije, vidi se da je $V_\mu$ direktna suma točno svih onih $V_m^{(j)}$ za koje je $-n_j \leq m \leq n_j$ i $n_j - m \in 2\mathbb{Z}$. Odatle slijedi da je u slučaju $m \geq 0$ restrikcija $\pi(y_\alpha)^m|V_\mu$ injektivna, a u slučaju $m \leq 0$ restrikcija $\pi(x_\alpha)^{-m}|V_\mu$ je injektivna. Prema tvrdnji $(b)$ propozicije 6.2.1. u prvom slučaju vrijedi $\pi(y_\alpha)^m V_\mu \subseteq V_{\mu - m\alpha}$, a u drugom $\pi(x_\alpha)^{-m}V_\mu \subseteq V_{\mu-m\alpha}$. Dakle, zbog spomenutih injektivnosti imamo u oba slučaja da je $\dim V_\mu \leq \dim V_{\mu-m\alpha}$. Međutim, vrijedi $\mu - m\alpha = \mu - \mu(h_\alpha)\alpha = \sigma_\alpha\mu$. Dakle, dokazali smo da je

$$\dim V_\mu \leq \dim V_{\sigma_\alpha\mu} \qquad \forall\mu \in \mathfrak{h}^* \quad \text{i} \quad \forall\alpha \in R.$$

Kako je $\sigma_\alpha^2$ identiteta, vrijede i obrnute nejednakosti

$$\dim V_{\sigma_\alpha\mu} \leq \dim V_{\sigma_\alpha^2\mu} = \dim V_\mu \qquad \forall\mu \in \mathfrak{h}^* \quad \text{i} \quad \forall\alpha \in R.$$

Dakle, dokazali smo da vrijede jednakosti

$$\dim V_\mu = \dim V_{\sigma_\alpha\mu} \qquad \forall\mu \in \mathfrak{h}^* \quad \text{i} \quad \forall\alpha \in R.$$

Budući da refleksije $\sigma_\alpha$, $\alpha \in R$, generiraju Weylovu grupu $W(R)$, slijedi druga tvrdnja propozicije:

$$\dim V_\mu = \dim V_{\sigma\mu} \qquad \forall\mu \in \mathfrak{h}^* \quad \text{i} \quad \forall\sigma \in W(R).$$

**Zadatak 6.4.** *Dokažite da je za svaki $\alpha \in R$ restrikcija operatora $e^{\pi(x_\alpha)}e^{-\pi(y_\alpha)}e^{\pi(x_\alpha)}$ na težinski potprostor $V_\mu$ izomorfizam $V_\mu$ na $V_{\sigma_\alpha\mu}$.*

**Uputa:** Indukcijom po $k \in \mathbb{N}$ izračunajte komutatore operatora $\pi(h)$, $h \in \mathfrak{h}$, s potencijama $\pi(x_\alpha)^k$ i $\pi(y_\alpha)^k$, a odatle i komutatore operatora $\pi(h)$, $h \in \mathfrak{h}$, s operatorom $e^{\pi(x_\alpha)}e^{-\pi(y_\alpha)}e^{\pi(x_\alpha)}$.

Neka je kao i u prethodnom odjeljku za $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ sa $M(\lambda)$ označen Vermaov modul pridružen $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$, $B$, $\lambda$, i neka je $\sigma_\lambda$ pripadna reprezentacija od $\mathfrak{g}$. Nadalje, neka je $L(\lambda)$ jedinstven ireducibilni kvocijent modula $M(\lambda)$. Sa $\pi_\lambda$ ćemo označavati (ireducibilnu) reprezentaciju od $\mathfrak{g}$ na $L(\lambda)$. Nadalje, označimo sa $(\,\cdot\,|\,\cdot\,)$ bilinearnu formu koju na $\mathfrak{h}^*\times\mathfrak{h}^*$ po dualnosti definira restrikcija Killingove forme $\kappa = \kappa_{\mathfrak{g}}$ od $\mathfrak{g}$ na $\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}$. Podsjećamo da je tada restrikcija forme $(\,\cdot\,|\,\cdot\,)$ na $\mathbb{Q}-$potprostor $span_{\mathbb{Q}}\, R$ pozitivno definitna, pa definira skalarni produkt na realnom vektorskom prostoru $(span_{\mathbb{Q}}\, R) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$. Taj je skalarni produkt invarijantan u odnosu na sve elemente Weylove grupe $W = W(R)$, štoviše i u odnosu na sve elemente grupe $Aut(R)$.

**Propozicija 6.3.2.** *Neka je $\pi$ konačnodimenzionalna ireducibilna reprezentacija od $\mathfrak{g}$ na prostoru $V$.*

(*a*) *Postoji jedinstven $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ takav da je $\pi$ ekvivalentna reprezentaciji $\pi_\lambda$.*

(*b*) *Vrijedi $\lambda \in P_+$ i $\dim V_\lambda = 1$.*

(*c*) *Ako je $\mu$ težina od $\pi$, tj. ako je $V_\mu \neq \{0\}$, onda je $\lambda - \mu \in Q_+$ i vrijedi $(\mu|\mu) \leq (\lambda|\lambda)$.*

**Dokaz:** Budući da je prostor $V$ konačnodimenzionalan, postoji težina $\lambda$ od $\pi$ takva da za svaki pozitivni korijen $\alpha \in R_+$ $\lambda+\alpha$ nije težina od $\pi$. To znači da je $\pi(\mathfrak{n})V_\lambda = \{0\}$. No tada iz propozicije 6.2.6. slijedi da je reprezentacija $\pi$ ekvivalentna reprezentaciji $\pi_\lambda$. Nadalje, iz tvrdnje (*b*) propozicije 6.2.4. slijedi da je $\dim V_\lambda = 1$. Za $\alpha \in R_+$ izaberimo kao obično $x_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$ i $y_\alpha \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ tako da bude $[x_\alpha, y_\alpha] = h_\alpha$. Za $v \in V_\lambda\backslash\{0\}$ je tada $\pi(x_\alpha)v = 0$, pa iz teorije reprezentacija od $\mathfrak{sl}(2,K) \approx \mathfrak{s}_\alpha$ slijedi da je $\lambda(h_\alpha) \in \mathbb{Z}_+$ (preciznije, $\lambda(h_\alpha)+1$ je jednako dimenziji $U(\mathfrak{s}_\alpha)-$podmodula generiranog sa $v$). Kako je $\alpha \in R_+$ proizvoljan, zaključujemo da je $\lambda \in P_+$. Iz tvrdnje (*b*) propozicije 6.2.4. slijedi da za svaku težinu $\mu$ reprezentacije $\pi \simeq \pi_\lambda$ vrijedi $\lambda - \mu \in Q_+$. Odatle slijedi jedinstvenost u tvrdnji (*a*) : ako je $\pi_\lambda \simeq \pi_{\lambda'}$, onda je $\lambda - \lambda' \in Q_+$ i $\lambda' - \lambda \in Q_+$, pa je $\lambda - \lambda' \in Q_+ \cap (-Q_+) = \{0\}$, odnosno, $\lambda = \lambda'$.

Treba još dokazati da je $(\mu|\mu) \leq (\lambda|\lambda)$ za svaku težinu $\mu$ reprezentacije $\pi \simeq \pi_\lambda$. Kako je $P_+$ presjek $P$ sa zatvaračem Weylove komore određene sa $B$ (u realnom vektorskom prostoru

$(span_{\mathbb{Q}}\, R)\otimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{R})$, i kako je prema teoremu 3.5.15. zatvarač bilo koje Weylove komore fundamentalna domena za djelovanje Weylove grupe $W(R)$, za svaku težinu $\mu$ reprezentacije $\pi$ postoji $\sigma \in W(R)$ takav da je $\sigma\mu \in P_+$. Budući da je prema propoziciji 6.3.1. $\mu$ težina od $\pi$ ako i samo ako je $\sigma\mu$ težina od $\pi$ i budući da je $(\sigma\mu|\sigma\mu) = (\mu|\mu)$, u dokazu nejednakosti $(\mu|\mu) \leq (\lambda|\lambda)$ možemo pretpostavljati da je $\mu \in P_+$. No tada je i $\lambda + \mu \in P_+$. S druge strane je $\lambda - \mu \in Q_+$, pa postoje $c_\alpha \in \mathbb{Z}_+$, $\alpha \in B$, takvi da je

$$\lambda - \mu = \sum_{\alpha\in B} c_\alpha \alpha.$$

No tada je

$$(\lambda|\lambda) - (\mu|\mu) = (\lambda + \mu|\lambda - \mu) = \sum_{\alpha\in B} c_\alpha(\lambda + \mu|\alpha).$$

Uz oznake iz odjeljaka 2.1. i 2.2. imamo za svaki $\alpha \in B$

$$(\lambda + \mu|\alpha) = (\lambda + \mu)(t_\alpha) = \frac{(\alpha|\alpha)}{2}(\lambda + \mu)(h_\alpha) \geq 0.$$

Slijedi da je $(\lambda|\lambda) - (\mu|\mu) \geq 0$, odnosno, $(\mu|\mu) \leq (\lambda|\lambda)$.

**Lema 6.3.3.** *Neka je $V \neq \{0\}$ $U(\mathfrak{g})-$modul s reprezentacijom $\pi$. Pretpostavimo da za neki $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ i neki $v \in V_\lambda$ vrijedi $\pi(\mathfrak{n})v = \{0\}$ i $\pi(U(\mathfrak{g}))v = V$. Nadalje, izaberimo $y_\alpha \in \mathfrak{g}_{-\alpha} \setminus \{0\}$, $\alpha \in B$, i pretpostavimo da za svaki $\alpha \in B$ vrijedi $\pi(y_\alpha)^m v = 0$ za neki $m \in \mathbb{N}$. Tada je reprezentacija $\pi$ ireducibilna i konačnodimenzionalna.*

**Dokaz:** Neka je $\Pi$ skup svih težina reprezentacije $\pi$, $\mu \in \Pi$, $\alpha \in B$. U vezi s izabranim $y_\alpha \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ izaberimo kao i obično $x_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$ tako da bude $[x_\alpha, y_\alpha] = h_\alpha$ i neka je

$$\mathfrak{s}_\alpha = span_K\,\{x_\alpha, h_\alpha, y_\alpha\} \approx \mathfrak{sl}(2, K).$$

Stavimo $v_j = \pi(y_\alpha)^j v$, $j \in \mathbb{Z}_+$, i neka je $m$ najveći sa svojstvom $v_m \neq 0$. Tada znamo da je potprostor $span\,\{v_0, \ldots, v_m\}$ invarijantan u odnosu na restrikciju $\pi|\mathfrak{s}_\alpha$ i pripadna je subreprezentacija od $\mathfrak{s}_\alpha$ ireducibilna. Prema tome, suma $V'$ svih konačnodimenzionalnih $\pi|\mathfrak{s}_\alpha-$invarijantnih potprostora od $V$, na kojima je subreprezentacija od $\pi|\mathfrak{s}_\alpha$ ireducibilna, različita je od $\{0\}$ i sadrži vektor $v$.

**Zadatak 6.5.** *Dokažite da je potprostor $V'$ $\pi-$invarijantan.*

**Uputa:** Dokažite da je jedinstven lineran operator $T : \mathfrak{g} \otimes V \to V$, takav da je

$$T(x \otimes w) = \pi(x)w, \qquad x \in \mathfrak{g}, \quad w \in V,$$

preplitanje reprezentacije $(ad_{\mathfrak{g}}|\mathfrak{s}_\alpha) \otimes (\pi|\mathfrak{s}_\alpha)$ s reprezentacijom $\pi|\mathfrak{s}_\alpha$.

Prema tome, kako je $\pi(U(\mathfrak{g}))v = V$, zaključujemo da je $V' = V$. Odatle slijedi da je $V$ direktna suma konačnodimenzionalnih $\pi|\mathfrak{s}_\alpha-$invarijantnih potprostora $T_i$, $i \in I$, na kojima je subreprezentacija od $\pi|\mathfrak{s}_\alpha$ ireducibilna.

Neka je $w \in V_\mu \setminus \{0\}$. Tada možemo pisati $w = \sum_{i\in I} w_i$, gdje su $w_i \in T_i$ za svaki $i \in I$ (i, naravno, samo ih je konačno mnogo različitih od 0). Tada je $\pi(h_\alpha)w = \mu(h_\alpha)w$, a kako su svi potprostori $T_i$ $\pi(h_\alpha)-$invarijantni, slijedi da je $\pi(h_\alpha)w_i = \mu(h_\alpha)w_i$ za svaki $i \in I$. Stavimo $\mu(h_\alpha) = n$. Kako je $w \neq 0$, to je $w_i \neq 0$ za barem jedan indeks $i \in I$, pa zaključujemo da je $n \in \mathbb{Z}$. Ako je $n \geq 0$, onda je kao u dokazu propozicije 6.3.1. $\pi(y_\alpha)^n w_i \neq 0$ za svaki $i \in I$ takav da je $w_i \neq 0$. Prema tome je $\pi(y_\alpha)^n w \neq 0$, a kako je $\pi(y_\alpha)^n V_\mu \subseteq V_{\mu - n\alpha} = V_{\sigma_\alpha\mu}$, slijedi da je $\sigma_\alpha\mu \in \Pi$. Do istog zaključka dolazimo i ako je $n \leq 0$; u tom slučaju koristimo se s operatorom $\pi(x_\alpha)^{-n}$ umjesto operatora $\pi(y_\alpha)^n$.

Na taj smo način dokazali da je $\Pi \subseteq P$ i da je $\sigma_\alpha \Pi = \Pi$ $\forall \alpha \in B$, dakle, $\sigma \Pi = \Pi$ $\forall \sigma \in W$. Međutim, svaka $W-$orbita u $P$ siječe se sa $P_+$. Prema tvrdnji $(b)$ propozicije 6.2.4. slijedi da je skup $\Pi \cap P_+$ konačan, dakle, i $\Pi$ je konačan skup, a po istoj tvrdnji svaki je težinski potprostor $V_\mu$, $\mu \in \Pi$, konačnodimenzionalan. Prema tome, prostor $V$ je konačnodimenzionalan. Prema Weylovom teoremu o potpunoj reducibilnosti vrijedi $V = S_1 \dot{+} \cdots \dot{+} S_p$, gdje su $S_1, \ldots, S_p$ $\pi-$invarijantni potprostori takvi da su subreprezentacije $\pi_{S_1}, \ldots, \pi_{S_p}$ ireducibilne. Kako je po tvrdnji $(b)$ propozicije 6.2.4. $\dim V_\lambda = 1$, slijedi da je $V_\lambda \subseteq S_j$ za neki $j$. No tada je $V = \pi(U(\mathfrak{g}))V_\lambda = S_j$. Dakle, $p = 1$, odnosno, reprezentacija $\pi$ je ireducibilna.

**Lema 6.3.4.** *Neka je $\lambda \in P_+$. Označimo sa $K(\lambda)$ najveći pravi $U(\mathfrak{g})-$podmodul od $M(\lambda)$ i neka je $v \in M(\lambda)_\lambda \setminus \{0\}$. Za svaki $\alpha \in B$ neka je $m_\alpha = \lambda(h_\alpha)$ i izaberimo $y_\alpha \in \mathfrak{g}_{-\alpha} \setminus \{0\}$. Tada je*

$$K(\lambda) = \sum_{\alpha \in B} U(\mathfrak{g}) y_\alpha^{m_\alpha + 1} v = \sum_{\alpha \in B} U(\overline{\mathfrak{n}}) y_\alpha^{m_\alpha + 1} v.$$

*Nadalje, potprostor $K(\lambda)$ od $M(\lambda)$ je konačne kodimenzije.*

**Dokaz:** Za $\alpha \in B$ označimo sa $Y_\alpha$ $U(\mathfrak{g})-$podmodul od $M(\lambda)$ generiran sa $y_\alpha^{m_\alpha+1} v$. Prema propoziciji 6.2.7. modul $Y_\alpha$ je izomorfan Vermaovom modulu $M(\sigma_\alpha(\lambda + \rho) - \rho)$. Posebno, zbog tvrdnje $(d)$ propozicije 6.2.3. je $Y_\alpha = U(\overline{\mathfrak{n}}) y_\alpha^{m_\alpha+1} v$. Budući da je $\lambda + \rho$ sadržan u Weylovoj komori određenoj sa $B$, vrijedi $\sigma_\alpha(\lambda+\rho) \neq \lambda+\rho$, odnosno, $\sigma_\alpha(\lambda+\rho)-\rho \neq \lambda$. To pokazuje da je $Y_\alpha \neq M(\lambda)$. Dakle, vrijedi $Y_\alpha \subseteq K(\lambda)$ za svaki $\alpha \in B$. Prema tome je

$$K' = \sum_{\alpha \in B} Y_\alpha \subseteq K(\lambda).$$

Iz leme 6.3.3. slijedi da je prostor $M(\lambda)/K'$ konačnodimenzionalan i reprezentacija na njemu je ireducibilna. Odatle slijedi da je $K(\lambda) = K'$ i time je lema dokazana.

**Teorem 6.3.5.** *Preslikavanje $\lambda \mapsto L(\lambda)$ inducira bijekciju sa $P_+$ na skup svih klasa ekvivalencije ireducibilnih konačnodimenzionalnih reprezentacija od $\mathfrak{g}$. Drugim riječima, vrijedi:*

$(a)$ *Reprezentacija $\pi_\lambda$ je konačnodimenzionalna ako i samo ako je $\lambda \in P_+$.*

$(b)$ *Za međusobno različite $\lambda, \lambda' \in P_+$ reprezentacije $\pi_\lambda$ i $\pi_{\lambda'}$ su neekvivalentne.*

$(c)$ *Svaka ireducibilna konačnodimenzionalna reprezentacija od $\mathfrak{g}$ ekvivalentna je nekoj reprezentaciji $\pi_\lambda$ za $\lambda \in P_+$.*

**Dokaz:** Ako je $\lambda \in P_+$ iz leme 6.3.4. slijedi da je reprezentacija $\pi_\lambda$ ireducibilna i konačnodimenzionalna. Obratno, ako je $\pi$ konačnodimenzionalna ireducibilna reprezentacija onda prema propoziciji 6.3.2. postoji jedinstven $\lambda \in P_+$ takav da je $\pi \simeq \pi_\lambda$. Time su dokazane sve tri tvrdnje teorema.

**Zadatak 6.6.** *Neka je $V$ ciklički $U(\mathfrak{g})-$modul s cikličkim vektorom $v$, tj. $V = U(\mathfrak{g})v$. Stavimo*

$$I = Ann_{U(\mathfrak{g})}(v) = \{u \in U(\mathfrak{g});\ uv = 0\}.$$

*Dokažite da je tada $I$ lijevi ideal u $U(\mathfrak{g})$, odnosno, da je $I$ podmodul lijevog $U(\mathfrak{g})-$modula $U(\mathfrak{g})$, i da je modul $V$ izomorfan kvocijentnom modulu $U(\mathfrak{g})/I$.*

**Uputa:** $u \mapsto uv$ je epimorfizam lijevog $U(\mathfrak{g})-$modula $U(\mathfrak{g})$ na $V$.

U sljedećoj propoziciji izračunat ćemo anihilatore kanonskih cikličkih vektora modula $M(\lambda)$ za $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ i modula $L(\lambda)$ za $\lambda \in P_+$.

**Propozicija 6.3.6.** *Neka je* $\lambda \in \mathfrak{h}^*$, $v \in M(\lambda)_\lambda \setminus \{0\}$, $v' \in L(\lambda)_\lambda \setminus \{0\}$, $I = Ann_{U(\mathfrak{g})}(v)$ *i* $I' = Ann_{U(\mathfrak{g})}(v')$.

(*a*) *Vrijedi* $I = U(\mathfrak{g})\mathfrak{n} + \sum_{h\in\mathfrak{h}} U(\mathfrak{g})(h - \lambda(h))$.

(*b*) $I'$ *je najveći lijevi ideal u* $U(\mathfrak{g})$ *različit od* $U(\mathfrak{g})$ *koji sadrži* $I$.

(*c*) *Ako je* $\lambda \in P_+$, *za svaki* $\alpha \in B$ *stavimo* $m_\alpha = \lambda(h_\alpha)$ *i izaberimo* $y_\alpha \in \mathfrak{g}_{-\alpha} \setminus \{0\}$. *Tada je*

$$I' = I + \sum_{\alpha\in B} U(\mathfrak{g}) y_\alpha^{m_\alpha+1} = I + \sum_{\alpha\in B} U(\overline{\mathfrak{n}}) y_\alpha^{m_\alpha+1}.$$

**Dokaz:** Tvrdnja (*a*) slijedi direktno iz tvrdnje (*c*) propozicije 6.1.5.
(*b*) Za svaki $U(\mathfrak{g})-$podmodul $T$ od $M(\lambda)$ neka je

$$I_T = \{u \in U(\mathfrak{g});\ uv \in T\}.$$

**Zadatak 6.7.** *Dokažite da je* $T \mapsto I_T$ *bijekcija sa skupa svih* $U(\mathfrak{g})-$*podmodula od* $M(\lambda)$ *na skup svih lijevih ideala u* $U(\mathfrak{g})$ *koji sadrže* $I$ *i da je ta bijekcija obostrano monotono rastuća u smislu da za podmodule* $T$ *i* $T'$ *vrijedi* $T \subseteq T'$ *ako i samo ako je* $I_T \subseteq I_{T'}$.

Ako sa $K(\lambda)$ označimo kao i prije najveći pravi podmodul od $M(\lambda)$ onda je $L(\lambda) = M(\lambda)/K(\lambda)$, dakle, $v'$ je proporcionalan klasi $v + K(\lambda)$, dakle,

$$I' = \{u \in U(\mathfrak{g});\ uv' = 0\} = \{u \in U(\mathfrak{g});\ u(v+K(\lambda)) = 0 \text{ u kvocijentnom modulu } M(\lambda)/K(\lambda)\} =$$

$$= \{u \in U(\mathfrak{g});\ uv \in K(\lambda)\} = I_K(\lambda).$$

Odatle slijedi tvrdnja (*b*).
(*c*) Prema lemi 6.3.4. imamo za $u \in U(\mathfrak{g})$ :

$$u \in I' \quad \Longleftrightarrow \quad uv \in K(\lambda) \quad \Longleftrightarrow \quad \exists u_1 \in \sum_{\alpha\in B} U(\mathfrak{g}) y_\alpha^{m_\alpha+1} \quad \text{takav da je} \quad uv = u_1 v.$$

Kako je tada $u - u_1 \in I$, slijedi da je posljednje ekvivalentno sa

$$u \in I + \sum_{\alpha\in B} U(\mathfrak{g}) y_\alpha^{m_\alpha+1}.$$

Time je dokazana prva jednakost u (*c*). Druga jednakost slijedi potpuno analogno koristeći drugu jednakost u lemi 6.3.4.:

$$K(\lambda) = \sum_{\alpha\in B} U(\overline{\mathfrak{n}}) y_\alpha^{m_\alpha+1} v.$$

## 6.4 Polinomijalne invarijante

Neka je $V$ konačnodimenzionalan vektorski prostor nad poljem $K$ karakteristike 0. Tada simetričnu algebru $S(V^*)$ dualnog prostora $V^*$ možemo identificirati s unitalnom podalgebrom algebre $K^V$ svih funkcija $V \to K$ generiranu sa $V^*$. Takve se funkcije $V \to K$ zovu **polinomijalne funkcije** na vektorskom prostoru $V$. Napomenimo, da iz propozicije 5.2.6. slijedi da za svaki homogeni element $f \in S^n(V^*)$ postoji jedinstvena $n-$multilinearna simetrična forma $g : V \times \cdots \times V \to K$ takva da je

$$f(v) = g(v, \ldots, v), \qquad \forall v \in V.$$

Ako je na prostoru $V$ zadana reprezentacija $\pi$ Liejeve algebre $\mathfrak{g}$, operatori reprezentacije se prema teoremu 5.2.11. jedinstveno proširuju do homomorfizma Liejevih algebri $\mathfrak{g} \to Der(S(V))$, koji ćemo također označiti sa $\pi$. Analogno, operatori kontragredijentne reprezentacije $\pi^t$ od $\mathfrak{g}$ na dualnom prostoru $V^*$ jedinstveno se proširuju do homomorfizma Liejevih algebri $\mathfrak{g} \to Der(S(V^*))$, koji ćemo također označiti sa $\pi^t$.

Analogno, ako je na prostoru $V$ zadana reprezentacija $\pi$ grupe $G$, operatori reprezentacije se prema teoremu 5.2.10. jedinstveno se proširuju do homomorfizma grupe $G$ u grupu $Aut(S(V))$ automorfizama unitalne algebre $S(V)$, a isto tako se operatori kontragredijentne reprezentacije $\pi^t$ na dualnom prostoru $V^*$ proširuju do homomorfizma $G \to Aut(S(V^*))$.

U ovom je odjeljku $\mathfrak{g}$ poluprosta Liejeva algebra nad algebarski zatvorenim poljem $K$ karakteristike 0, $\mathfrak{h}$ njena Cartanova podalgebra, $R = R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ pripadni sistem korijena, $W = W(R)$ Weylova grupa sistema korijena $R$. Tada na prostoru $\mathfrak{g}$ imamo adjungiranu reprezentaciju $ad$ Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ : $(ad\, x)y = [x, y]$, $x, y \in \mathfrak{g}$. Kontragredijentna reprezentacija $ad^t$ adjungirane reprezentacije djeluje na dualnom prostoru $\mathfrak{g}^*$ :

$$((ad^t\, x)f)(y) = -f((ad\, x)y) = -f([x, y]), \qquad x, y \in \mathfrak{g},\ f \in \mathfrak{g}^*.$$

U skladu s dogovorom sa $ad^t$ označavamo i pripadni homomorfizam $\mathfrak{g} \to Der(S(\mathfrak{g}^*))$. Element $f \in S(\mathfrak{g}^*)$ zovemo $\mathfrak{g}-$**invarijantnim** ako vrijedi $(ad^t\, x)f = 0\ \forall x \in \mathfrak{g}$. Skup svih $\mathfrak{g}-$invarijantnih polinomijalnih funkcija $f \in S(\mathfrak{g}^*)$ na $\mathfrak{g}$ označavamo sa $S(\mathfrak{g}^*)^{\mathfrak{g}}$. Lako se vidi da je to graduirana unitalna podalgebra od $S(\mathfrak{g}^*)$.

Kao i prije, sa $Aut(\mathfrak{g})$ označavamo grupu automorfizama Liejeve algebre $\mathfrak{g}$, a sa $Int(\mathfrak{g})$ njenu podgrupu unutarnjih automorfizama, tj. podgrupu generiranu svim automorfizmima oblika $e^{ad\, x}$ za $ad-$nilpotentne elemente $x \in \mathfrak{g}$. Tada grupe $Aut(\mathfrak{g})$ i $Int(\mathfrak{g})$ djeluju na dualnom prostoru pomoću kontragredijentne od identične reprezentacije, pa tako i automorfizmima na algebri polinomijalnih funkcija $S(\mathfrak{g}^*)$. Tada element $\vartheta \in Aut(\mathfrak{g})$ preslikava polinomijalnu funkciju $f \in S(\mathfrak{g}^*)$ u funkciju $x \mapsto f(\vartheta^{-1}x)$, tj. u funkciju $f \circ \vartheta^{-1}$. Podalgebru $Int(\mathfrak{g})-$invarijanata od $S(\mathfrak{g}^*)$ označavamo sa $S(\mathfrak{g}^*)^{Int(\mathfrak{g})}$ :

$$S(\mathfrak{g}^*)^{Int(\mathfrak{g})} = \{f \in S(\mathfrak{g}^*);\ f \circ \vartheta = f\ \forall \vartheta \in Int(\mathfrak{g})\}.$$

Očito je i to graduirana unitalna podalgebra od $S(\mathfrak{g}^*)$.

**Lema 6.4.1.** $S(\mathfrak{g}^*)^{\mathfrak{g}} = S(\mathfrak{g}^*)^{Int(\mathfrak{g})}$.

**Dokaz:** Kako su obje podalgebre graduirane, dovoljno je dokazati da je homogeni element $f \in S^n(\mathfrak{g}^*)$ $\mathfrak{g}-$invarijatan ako i samo ako je on $Int(\mathfrak{g})-$invarijantan. Za takav $f$ neka je $g : \mathfrak{g} \times \cdots \times \mathfrak{g} \to K$ jedinstvena simetrična $n-$multilinearna forma takva da je $f(x) = g(x, \ldots, x)$ $\forall x \in \mathfrak{g}$. Razmotrimo sada sljedeća četiri svojstva forme $g$ :

($a$) Za proizvoljne $x, x_1, \ldots, x_n \in \mathfrak{g}$ vrijedi

$$g([x, x_1], x_2, \ldots, x_n) + \cdots + g(x_1, \ldots, x_{n-1}, [x, x_n]) = 0.$$

($b$) Za svaki $\vartheta \in Int(\mathfrak{g})$ i za proizvoljne $x_1, \ldots, x_n \in \mathfrak{g}$ vrijedi

$$g(\vartheta x_1, \ldots, \vartheta x_n) = g(x_1, \ldots, x_n).$$

($c$) Za svaki $ad-$nilpotentan element $x \in \mathfrak{g}$ i za proizvoljne $x_1, \ldots, x_n \in \mathfrak{g}$ vrijedi

$$g([x, x_1], x_2, \ldots, x_n) + \cdots + g(x_1, \ldots, x_{n-1}, [x, x_n]) = 0.$$

($d$) Za svaki $\lambda \in K$, za svaki $ad-$nilpotentan element $x \in \mathfrak{g}$ i za proizvoljne $x_1, \ldots, x_n \in \mathfrak{g}$ vrijedi

$$g(e^{\lambda ad\, x} x_1, \ldots, e^{\lambda ad\, x} x_n) = g(x_1, \ldots, x_n).$$

Tada vrijedi $f \in S^n(\mathfrak{g}^*)^{\mathfrak{g}}$ ako i samo ako $g$ ima svojstvo ($a$). Također, vrijedi $f \in S^n(\mathfrak{g}^*)^{Int(\mathfrak{g})}$ ako i samo ako $g$ ima svojstvo ($b$). Prema tome, lema će biti dokazana ako pokažemo da su svojstva ($a$), ($b$), ($c$) i ($d$) međusobno ekvivalentna.

Implikacije ($a$) $\Rightarrow$ ($c$) i ($b$) $\Rightarrow$ ($d$) su očigledne. Budući da je Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ generirana svojim $ad-$nilpotentnim elementima, vrijedi obrnuta implikacija ($c$) $\Rightarrow$ ($a$). Obrnuta implikacija ($d$) $\Rightarrow$ ($b$) vrijedi zbog definicije grupe $Int(\mathfrak{g})$.

Neka su $x_1, \ldots, x_n \in \mathfrak{g}$ i neka je $x$ $ad-$nilpotentan element od $\mathfrak{g}$. Promatrajmo funkciju $F : K \to K$ definiranu pomoću lijeve strane jednakosti u ($d$) :

$$F(\lambda) = g(e^{\lambda ad\, x} x_1, \ldots, e^{\lambda ad\, x} x_n), \qquad \lambda \in K.$$

Tada je $F$ polinom i lako se izračuna njegova formalna derivacija u točki $\lambda = 0$ :

$$F'(0) = g([x, x_1], x_2, \ldots, x_n) + \cdots + g(x_1, \ldots, x_{n-1}, [x, x_n]).$$

Svojstvo ($d$) znači da je polinom $F$ konstantan. Tada je $F'(0) = 0$, pa iz gornje jednakosti vidimo da vrijedi ($c$). Prema tome ($d$) $\Rightarrow$ ($c$).

Napokon, dokažimo obrnutu implikaciju ($c$) $\Rightarrow$ ($d$). Označimo sa $\pi$ reprezentaciju Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ na prostoru $\tilde{S}^n(\mathfrak{g}^*)$ simetričnih $n-$multilinearnih formi $h : \mathfrak{g} \times \cdots \times \mathfrak{g} \to K$ izvedenu iz kontragredijentne reprezentacije adjungirane reprezentacije od $\mathfrak{g}$. Nadalje, neka je $\sigma$ reprezentacija grupe $Int(\mathfrak{g})$ na istom prostoru izvedenu iz kontragredijentne reprezentacije od identične reprezentacije te grupe na $\mathfrak{g}$. Tada se može dokazati da je za $ad-$nilpotentan element $x \in \mathfrak{g}$ operator $\pi(x)$ nilpotentan i da vrijedi $\sigma(e^{ad\, x}) = e^{\pi(x)}$. Nadalje, svojstvo ($c$) znači da je $\pi(x)g = 0$ za svaki $ad-$nilpotentan element $x \in \mathfrak{g}$. No tada je $e^{\lambda\pi(x)}g = g$ za svaki $\lambda \in K$ i svaki $ad-$nilpotentan element $x \in \mathfrak{g}$. To znači da je $\sigma(e^{\lambda ad\, x})g = g$ za svaki $\lambda \in K$ i za svaki $ad-$nilpotentan element $x \in \mathfrak{g}$. Ovo posljednje je upravo svojstvo ($d$).

Funkcije iz $S(\mathfrak{g}^*)^{\mathfrak{g}} = S(\mathfrak{g}^*)^{Int(\mathfrak{g})}$ zovu se **polinomijalne invarijante** na $\mathfrak{g}$.

Promatrajmo sada algebru $S(\mathfrak{h}^*)$ polinomijalnih funkcija na Cartanovoj podalgebri $\mathfrak{h}$. Na toj algebri automorfizmima djeluje Weylova grupa $W = W(R)$. Označimo sa $S(\mathfrak{h}^*)^W$ podalgebru (graduiranu, unitalnu) svih $f \in S(\mathfrak{h}^*)$ takvih da je $f \circ \sigma = f$ $\forall \sigma \in W$.

**Lema 6.4.2.** *Neka je $\pi$ konačnodimenzionalna reprezentacija od $\mathfrak{g}$ i neka je $n \in \mathbb{Z}_+$. Funkcija $f : x \mapsto Tr(\pi(x)^n)$ na $\mathfrak{g}$ je polinomijalna invarijanta, tj. element od $S(\mathfrak{g}^*)^{\mathfrak{g}}$.*

**Dokaz:** Očito je $f \in S^n(\mathfrak{g}^*)$. Jedinstvena simetrična $n-$multilinearna forma $g : \mathfrak{g}\times\cdots\times\mathfrak{g} \to K$, takva da je $f(x) = g(x, \ldots, x)$ $\forall x \in \mathfrak{g}$, dana je sa

$$g(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{n!}\sum_{\tau\in\mathcal{S}_n} Tr(\pi(x_{\tau(1)}), \ldots, \pi(x_{\tau(n)})), \qquad x_1, \ldots, x_n \in \mathfrak{g}.$$

Budući da je $\pi([x, y]) = \pi(x)\pi(y) - \pi(y)\pi(x)$, za $x, x_1, \ldots, x_n \in \mathfrak{g}$ imamo

$$g([x, x_1], x_2, \ldots, x_n) + \cdots + g(x_1, \ldots, x_{n-1}, [x, x_n]) =$$

$$= \sum_{\tau\in\mathcal{S}_n}\sum_{i=1}^{n} Tr(\pi(x_{\tau(1)})\cdots(\pi(x)\pi(x_{\tau(i)}) - \pi(x_{\tau(i)})\pi(x))\cdots\pi(x_{\sigma(n)})) =$$

$$= \sum_{\tau\in\mathcal{S}_n} Tr(\pi(x)\pi(x_{\tau(1)})\cdots\pi(x_{\tau(n)}) - \pi(x_{\tau(1)})\cdots\pi(x_{\tau(n)})\pi(x)) = 0.$$

Sada iz dokaza leme 6.4.1 slijedi $f \in S(\mathfrak{g}^*)^{\mathfrak{g}}$.

**Lema 6.4.3.** *Za $n \in \mathbb{Z}_+$ svaki element od $S^n(\mathfrak{h}^*)^W$ je linearna kombinacija polinomijalnih funkcija na $\mathfrak{h}$ oblika $x \mapsto Tr(\pi(x)^n)$, gdje je $\pi$ konačnodimenzionalna reprezentacija od $\mathfrak{g}$.*

**Dokaz:** Funkcije $\lambda^n$, $\lambda \in P$, razapinju vektorski prostor $S^n(\mathfrak{h}^*)$. Za svaki $f \in S(\mathfrak{h}^*)$ stavimo

$$Wf = \sum_{\sigma\in W} f \circ \sigma.$$

Tada je, naravno, $S(\mathfrak{h}^*)^W = \{Wf;\ f \in S(\mathfrak{h}^*)\}$. Budući da svaka $W-$orbita u $P$ siječe $P_+$, zaključujemo da funkcije $W\lambda^n$, $\lambda \in P_+$, razapinju vektorski prostor $S^n(\mathfrak{h}^*)^W$. Lema će biti dokazana ako pokažemo da je za svaki $\lambda \in P_+$ funkcija $W\lambda^n$ linearna kombinacija funkcija na $\mathfrak{h}$ oblika kao u iskazu leme.

Neka je $\lambda \in P_+$. Stavimo $E_\lambda = P_+\cap(\lambda-Q_+)\setminus\{\lambda\}$. Neka je $\pi$ ireducibilna konačnodimenzionalna reprezentacija od $\mathfrak{g}$ s najvećom težinom $\lambda$. Prema propoziciji 6.3.1. funkcija $g : x \mapsto Tr\,\pi(x)^n$ na $\mathfrak{h}$ je linearna kombinacija funkcija $W\mu^n$ za sve one težine $\mu$ reprezentacije $\pi$ koje pripadaju $P_+$ i u toj je linearnoj kombinaciji koeficijent uz $W\lambda^n$ je jednak 1 (jer je težinski potprostor reprezentacije $\pi$ za težinu $\lambda$ jednodimenzionalan). Stoga je funkcija $W\lambda^n$ linearna kombinacija funkcije $g$ i funkcija $W\mu^n$ za $\mu \in E_\lambda$. Budući da za svaki $\mu \in E_\lambda$ očito vrijedi $E_\mu \subseteq E_\lambda \setminus \{\lambda\}$, to je $|E_\mu| < |E_\lambda|$, pa tvrdnja slijedi indukcijom po $|E_\lambda|$.

**Teorem 6.4.4.** *Neka je $\iota : S(\mathfrak{g}^*) \to S(\mathfrak{h}^*)$ homomorfizam definiran restrikcijom.*

(a) *Restrikcija $\iota|S(\mathfrak{g}^*)^{\mathfrak{g}}$ je izomorfizam algebre $S(\mathfrak{g}^*)^{\mathfrak{g}}$ na algebru $S(\mathfrak{h}^*)^W$.*

(b) *Za $n \in \mathbb{Z}_+$ vektorski prostor $S^n(\mathfrak{g}^*)^{\mathfrak{g}}$ je skup svih linearnih kombinacija funkcija oblika $x \mapsto Tr\,\pi(x)^n$, gdje je $\pi$ konačnodimenzionalna reprezentacija od $\mathfrak{g}$.*

Za dokaz ovog dalekosežnog teorema trebaju nam neke elementarne činjenice iz algebarske geometrije.

Neka je $n \in \mathbb{N}$. Neka je $K[X] = K[X_1, \ldots, X_n]$ algebra polinoma u $n$ varijabli s koeficijentima iz $K$. Za ideal $I$ u $K[X]$ stavimo

$$\mathcal{V}(I) = \{\lambda \in K^n;\ f(\lambda) = 0\ \forall f \in I\}.$$

Na skup $K^n$ uvodimo sada tzv. **topologiju Zariskog** kao onu za koju je

$$\{\mathcal{V}(I);\ I \text{ ideal u } K[X]\}$$

skup svih zatvorenih podskupova od $K^n$. Definicija ima smisla jer su očito $\emptyset$ i $K^n$ zatvoreni skupovi i jer su konačne unije i proizvoljni presjeci zatvorenih skupova zatvoreni skupovi:

$$\mathcal{V}(I_1) \cup \cdots \cup \mathcal{V}(I_m) = \mathcal{V}(I_1 \cdots I_m), \qquad \bigcap_{\alpha \in \mathcal{A}} \mathcal{V}(I_\alpha) = \mathcal{V}\left(\sum_{\alpha \in \mathcal{A}} I_\alpha\right).$$

**Polinomijalne funkcije** na $K^n$ su funkcije oblika $\lambda \mapsto f(\lambda)$ za $f \in K[X]$. Svaka je takva funkcija očito neprekidna u odnosu na topologiju Zariskog. Budući da je polje $K$ beskonačno, polinomijalna funkcija koja je definirana polinomom $f \in K[X] \setminus \{0\}$ nije identički jednaka nuli.

Podskup $S \subseteq K^n$ zove se **ireducibilan** ako ne postoje zatvoreni podskupovi $V_1, V_2 \subseteq K^n$ takvi da je $S \subseteq V_1 \cup V_2$, ali $S \not\subseteq V_1$ i $S \not\subseteq V_2$.

**Lema 6.4.5.** *Čitav prostor $K^n$ je ireducibilan.*

**Dokaz:** Pretpostavimo da su $I_1$ i $I_2$ ideali u $K[X]$ takvi da je $K^n = \mathcal{V}(I_1) \cup \mathcal{V}(I_2)$ ali $\mathcal{V}(I_1) \neq K^n$ i $\mathcal{V}(I_2) \neq K^n$. Tada su $I_1 \neq \{0\}$ i $I_2 \neq \{0\}$. Neka su $f \in I_1 \setminus \{0\}$ i $g \in I_2 \setminus \{0\}$. Tada je $fg \neq 0$, ali polinomijalna funkcija $\lambda \mapsto f(\lambda)g(\lambda)$ iščezava i na $\mathcal{V}(I_1)$ i na $\mathcal{V}(I_2)$, dakle, na $K^n$, a to je nemoguće.

**Korolar 6.4.6.** *Svaki neprazan otvoren podskup od $K^n$ je gust u $K^n$ u odnosu na topologiju Zariskog.*

**Dokaz:** Neka je $U$ neprazan otvoren podskup od $K^n$. Pretpostavimo da $U$ nije gust u $K^n$. Tada postoji neprazan otvoren podskup $V$ od $K^n$ takav da je $U \cap V = \emptyset$. Tada su $K^n \setminus U$ i $K^n \setminus V$ zatvoreni podskupovi različiti od $K^n$ čija je unija jednaka $K^n$. No to je nemoguće zbog leme 6.4.5.

Ako u $\mathfrak{g}$ izaberemo bazu $\{x_1, \ldots, x_n\}$ Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ se identificira sa $K^n$, pa na njoj možemo promatrati topologiju Zariskog. Lako se vidi da ta topologija ne ovisi o izboru baze u $\mathfrak{g}$. Polinomijalne funkcije na $\mathfrak{g}$ su upravo one dobivene iz elemenata od $K[X] = K[X_1, \ldots, X_n]$. U odnosu na izabranu bazu operator $ad\,x$ ima $n \times n$ matricu čiji su elementi linearne, dakle, polinomijalne funkcije od $x \in \mathfrak{g}$. Neka je $T$ formalna varijabla i neka je $P_x(T) \in K[T]$ svojstveni polinom operatora $ad\,x$. Tada je

$$P_x(T) = \sum_{i=0}^{n} c_i(x) T^i$$

i svaki $c_i$ je polinomijalna funkcija na $\mathfrak{g}$. Operator $ad\,x$ je singularan za svaki $x \in \mathfrak{g}$, dakle, $c_0 = 0$. Definiramo $\rho-$**rang** Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ kao najmanji $m \in \mathbb{N}$ takav da polinomijalna funkcija $c_m$ nije identički jednaka nuli. Element $x \in \mathfrak{g}$ zove se $\rho-$**regularan** ako je $c_m(x) \neq 0$. Dakle, $x$ je $\rho-$regularan ako i samo ako je nil$-$indeks operatora $ad\,x$ najmanji mogući, tj. algebarski multiplicitet svojstvene vrijednosti 0 operatora $ad\,x$ je najmanji mogući. Za $x \in \mathfrak{g}$ označimo kao i obično sa $x_s$ njegov poluprosti dio. Operatori $ad\,x$ i $ad\,x_s$ imaju isti svojstveni poplinom, pa zaključujemo da je element $x$ $\rho-$regularan ako i samo ako je njegov poluprosti dio $x_s$ takav. To pokazuje da postoje poluprosti $\rho-$regularni elementi.

Skup $\mathcal{R}$ svih $\rho-$regularnih elemenata u $\mathfrak{g}$ je otvoren u odnosu na topologiju Zariskog. Prema korolaru 6.4.6. skup $\mathcal{R}$ je gust u $\mathfrak{g}$.

Neka je $x \in \mathfrak{g}$ poluprost element. Tada $x$ leži u nekoj maksimalnoj toralnoj podalgebri, dakle, u nekoj Cartanovoj podalgebri. Prema teoremu konjugiranosti Cartanovih podalgebri 4.4.6. postoji $\vartheta \in Int(\mathfrak{g})$ takav da je $h = \vartheta(x) \in \mathfrak{h}$. Za $h \in \mathfrak{h}$ vrijedi $\mathfrak{h} \subseteq C_{\mathfrak{g}}(h)$, dakle,

$$\dim C_{\mathfrak{g}}(h) \geq \dim \mathfrak{h} = \ell = \text{ rang od } \mathfrak{g}.$$

Znamo da postoje elementi $h \in \mathfrak{h}$ takvi da je $C_{\mathfrak{g}}(h) = \mathfrak{h}$ − takve smo zvali *regularni elementi* od $\mathfrak{h}$. Za takav element $h$ algebarski multiplicitet svojstvene vrijednosti 0 operatora $ad\,h$ jednak je njegovom geometrijskom multiplicitetu − tj. svaki korijenski vektor za $ad\,h$ je ujedno svojstveni vektor za $ad\,h$. Budući da smo vidjeli da postoje $\rho-$regularni poluprosti elementi, oni su ujedno regularni poluprosti elementi, pa vrijedi $m = \ell$. Nadalje, 0 je jedini nilpotentni element koji se nalazi u centralizatoru regularnog poluprostog elementa. Prema tome, ako je element $x \in \mathfrak{g}$ $\rho-$regularan, onda je nužno $x = x_s$. Time smo dokazali da je $\mathcal{R}$ skup svih regularnih poluprostih elemenata od $\mathfrak{g}$. Tim više vrijedi

**Propozicija 6.4.7.** *Skup svih poluprostih elemenata u $\mathfrak{g}$ je gust u $\mathfrak{g}$ u odnosu na topologiju Zariskog.*

**Dokaz teorema 6.4.4.:** (1) Račun nakon iskaza propozicije 4.4.1. pokazuje da za svaki $\alpha \in R$ postoji $\tau_\alpha \in Int(\mathfrak{g})$ takav da je $\tau_\alpha \mathfrak{h} = \mathfrak{h}$ i da je restrikcija $\tau_\alpha|\mathfrak{h}$ upravo refleksija $\sigma_\alpha$ u odnosu na korijen $\alpha$. Budući da refleksije $\sigma_\alpha$, $\alpha \in R$, generiraju Weylovu grupu $W$, slijedi da za svaki $\sigma \in W$ postoji $\vartheta \in Int(\mathfrak{g})$ takav da je $\sigma|\mathfrak{h} = \mathfrak{h}$ i $\vartheta|\mathfrak{h} = \sigma$. Kako je prema lemi 6.4.1. $S(\mathfrak{g}^*)^{\mathfrak{g}} = S(\mathfrak{g}^*)^{Int(\mathfrak{g})}$, zaključujemo da je $\iota(S(\mathfrak{g}^*)^{\mathfrak{g}}) \subseteq S(\mathfrak{h}^*)^W$.

(2) Dokažimo sada injektivnost restrikcije $\iota|S(\mathfrak{g}^*)^{\mathfrak{g}}$. Neka je polinomijalna funkcija $f \in S(\mathfrak{g}^*)^{\mathfrak{g}}$ takva da je $f|\mathfrak{h} = 0$. Neka je $x \in \mathfrak{g}$ poluprost element. Tada je $x$ sadržan u nekoj Caranovoj podalgebri, pa prema teoremu 4.4.6. o konjugiranosti Cartanovih podalgebri postoji $\vartheta \in Int(\mathfrak{g})$ takav da je $\vartheta(x) \in \mathfrak{h}$. Kako je po lemi 6.4.1. funkcija $f$ $Int(\mathfrak{g})-$invarijantna, slijedi $f(x) = 0$. Prema tome, polinomijalna funkcija $f$ poništava se na svakom poluprostorm elementu $x \in \mathfrak{g}$. Prema propoziciji 6.4.7. slijedi $f = 0$.

(3) Neka je $A_n$ skup svih linearnih kombinacija funkcija oblika $x \mapsto Tr\,\pi(x)^n$, gdje je $\pi$ konačnodimenzionalna reprezentacija od $\mathfrak{g}$. Prema lemama 6.4.1. i 6.4.2. vrijedi $A_n \subseteq S^n(\mathfrak{g}^*)^{\mathfrak{g}}$ i $\iota(A_n) \supseteq S^n(\mathfrak{h}^*)^W$. Zbog (1) i (2) odatle slijede obje tvrdnje $(a)$ i $(b)$.

Killingova forma $\kappa_{\mathfrak{g}}$ na poluprostoj algebri $\mathfrak{g}$ je nedegenerirana, pa definira izomorfizam $x \mapsto f_x$ sa $\mathfrak{g}$ na $\mathfrak{g}^*$ :

$$f_x(y) = \kappa_{\mathfrak{g}}(x, y), \qquad x, y \in \mathfrak{g}.$$

Taj se izomorfizam jedinstveno proširuje do izomorfizma unitalnih algebri $K_{\mathfrak{g}} : S(\mathfrak{g}) \to S(\mathfrak{g}^*)$. Nadalje, restrikcija Killingove forme $\kappa_{\mathfrak{g}}|\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}$ na Cartanovu podalgebru $\mathfrak{h}$ također je nedegenerirana bilinearna forma, pa definira izomorfizam sa $\mathfrak{h}$ na $\mathfrak{h}^*$ koji se jedinstveno proširuje do izomorfizma unitalnih algebri $K_{\mathfrak{h}} : S(\mathfrak{h}) \to S(\mathfrak{h}^*)$.

**Propozicija 6.4.8.** *Neka je $J$ ideal u algebri $S(\mathfrak{g})$ generiran sa $\mathfrak{n} \dotplus \overline{\mathfrak{n}}$.*

$(a)$ *Izomorfizam $K_{\mathfrak{h}} : S(\mathfrak{h}) \to S(\mathfrak{h}^*)$ je preplitanje reprezentacija Weylove grupe $W$, pa definira ekvivalenciju tih reprezentacija.*

$(b)$ *Izomorfizam $K_{\mathfrak{g}} : S(\mathfrak{g}) \to S(\mathfrak{g}^*)$ je preplitanje reprezentacija Liejeve algebre $\mathfrak{g}$, dobivenih jedinstvenim proširenjima operatora adjungirane reprezentacije i njoj kontragredijentne reprezentacije, pa definira ekvivalenciju tih reprezentacija.*

$(c)$ *Vrijedi $S(\mathfrak{g}) = S(\mathfrak{h}) \dotplus J$. Neka je $\jmath : S(\mathfrak{g}) \to S(\mathfrak{h})$ pripadni epimorfizam algebri (tj. projektor duž potprostora $J$).*

$(d)$ *Vrijedi $\iota \circ K_{\mathfrak{g}} = K_{\mathfrak{h}} \circ \jmath$; pri tome je $\iota : S(\mathfrak{g}^*) \to S(\mathfrak{h}^*)$ epimorfizam definiran restrikcijom sa $\mathfrak{g}$ na $\mathfrak{h}$.*

**Dokaz:** Neka su $\pi$ i $\pi^*$ reprezentacije grupe $W$ pomoću automorfizama unitalnih algebri $S(\mathfrak{h})$ i $S(\mathfrak{h}^*)$. Neka su $\sigma \in W$, $h \in \mathfrak{h} \subseteq S(\mathfrak{h})$ i $f = K_{\mathfrak{h}}(h) \in \mathfrak{h}^* \subseteq S(\mathfrak{h}^*)$. Tada za svaki $k \in \mathfrak{h}$ zbog invarijantnosti restrikcije $\kappa_{\mathfrak{g}}|\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}$ na djelovanje Weylove grupe vrijedi

$$(K_{\mathfrak{h}}\pi(\sigma)h)(k) = \kappa_{\mathfrak{g}}(\pi(\sigma)h, k) = \kappa_{\mathfrak{g}}(h, \pi(\sigma^{-1})k) = (K_{\mathfrak{h}}h)(\pi(\sigma^{-1})k) = (\pi^*(\sigma)K_{\mathfrak{h}}h)(k).$$

Dakle, $K_{\mathfrak{h}}\pi(\sigma)|\mathfrak{h} = \pi*(\sigma)K_{\mathfrak{h}}|\mathfrak{h}$ za svaki $\sigma \in W$. Budući da $\mathfrak{h}$ generira unitalnu algebru $S(\mathfrak{h})$, odatle slijedi jednakost $K_{\mathfrak{h}}\pi(\sigma) = \pi^*(\sigma)K_{\mathfrak{h}}\ \ \forall \sigma \in W$. Time je tvrdnja $(a)$ dokazana.

Tvrdnja $(b)$ dokazuje se potpuno analagno koristeći invarijatnost Killingove forme $\kappa_{\mathfrak{g}}$ u odnosu na adjungiranu reprezentaciju:

$$\kappa_{\mathfrak{g}}((ad\, x)y, z) = -\kappa_{\mathfrak{g}}(y, (ad\, x)z) \qquad \forall x, y, z \in \mathfrak{g}.$$

Tvrdnja $(c)$ je očita.

Preslikavanja $\iota$, $\jmath$, $K_{\mathfrak{g}}$ i $K_{\mathfrak{h}}$ su unitalni homomorfizmi algebri, pa je jednakost u tvrdnji $(d)$ dovoljno dokazati na nekom skupu koji generira unitalnu algebru $S(\mathfrak{g})$, npr. na $\mathfrak{g}$. Neka je $x \in \mathfrak{g}$. Za bilo koji $h \in \mathfrak{h}$ tada imamo redom

$$((\iota \circ K_{\mathfrak{g}})(x))(h) = (\iota(K_{\mathfrak{g}}(x)))(h) = (K_{\mathfrak{g}}(x))(h) = \kappa_{\mathfrak{g}}(x, h) =$$

$$= \kappa_{\mathfrak{g}}(\jmath(x), h) = (K_{\mathfrak{h}}(\jmath(x)))(h) = ((K_{\mathfrak{h}} \circ \jmath)(x))(h).$$

Pri tome smo za treću jednakost koristili činjenicu da je potprostor $\mathfrak{n} \dot{+} \overline{\mathfrak{n}}$ ortogonalan na $\mathfrak{h}$ u odnosu na Killingovu formu. Budući da je $h \in \mathfrak{h}$ bio proizvoljan, iz gornje jednakosti slijedi da je $(\iota K_{\mathfrak{g}})(x) = (K_{\mathfrak{h}} \circ j)(x)$ za svaki $x \in \mathfrak{g}$. Time je i tvrdnja $(d)$ dokazana.

Iz propozicije 6.4.8. neposredno slijedi:

**Teorem 6.4.9.** *Neka su $J$ i $\jmath$ kao u propoziciji 6.4.8. Neka je $S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$ podalgebra svih $\mathfrak{g}-$invarijanata u algebri $S(\mathfrak{g})$ (u odnosu na proširenje adjungirane reprezentacije od $\mathfrak{g}$). Tada je restrikcija $\jmath|S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$ izomorfizam algebre $S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$ na algebru $S(\mathfrak{g})^W$.*

Struktura algebre $S(\mathfrak{g})^W \approx S(\mathfrak{g}^*)^W$ može se vrlo precizno opisati zahvaljujući činjenici da je $W$ konačna grupa generirana refleksijama. Bez dokaza navodimo:

**Teorem 6.4.10.** *Neka je $R$ sistem korijena u prostoru $V$, $W = W(R)$ Weylova grupa od $R$ i $\ell = \dim V$ rang od $R$. Postoje homogeni elementi $f_1, \ldots, f_\ell \in S(V)^W$ koji su algebarski nezavisni i generiraju algebru $S(V)^W$. Posebno, unitalna algebra $S(V)^W$ izomorfna je algebri polinoma u $\ell$ varijabli. Stupnjevi $\nu_j = \deg f_j$, $j = 1, \ldots, \ell$, neovisni su (do na poredak) o izboru takvih elemenata $f_1, \ldots, f_\ell$ i vrijedi*

$$\nu_1 + \cdots + \nu_\ell = \ell + \frac{|R|}{2}.$$

U sljedećem ćemo odjeljku ustanoviti da je centar $Z(\mathfrak{g})$ univerzalne omotačke algebre $U(\mathfrak{g})$ poluproste Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ nad algebarski zatvorenim poljem karakteristike 0 izomorfan algebri invarijanata $S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$ u simetričnoj algebri Liejeve algebre $\mathfrak{g}$, odnosno, algebri polinomijalnih invarijanata $S(\mathfrak{g}^*)^{\mathfrak{g}}$, a time i algebri $W-$invarijanata $S(\mathfrak{h}^*)^W \approx S(\mathfrak{h})^W$. Dakle, centar $Z(\mathfrak{g})$ od $U(\mathfrak{g})$ je izomorfan algebri polinoma u $\ell = \dim \mathfrak{h}$ varijabli.

## 6.5 Harish–Chandrin homomorfizam

**Do konca ovog poglavlja $\mathfrak{g}$ je poluprosta Liejeva algebra nad algebarski zatvorenim poljem** $K$ **karakteristike** 0, $\mathfrak{h}$ **Cartanova podalgebra od** $\mathfrak{g}$, $R = R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ **pripadni sisten korijena**, $W = W(R)$ **Weylova grupa sistema korijena** $R$, $B$ **baza sistema korijena** $R$, $Q = span_{\mathbb{Z}} R$ **korijenske težine sistema korijena** $R$, $Q_+ = span_{\mathbb{Z}_+} B$ **pozitivne korijenske težine u odnosu na** $B$, $R_+ = R \cap Q_+$ **pozitivni korijeni u odnosu na** $B$.

Stavimo kao i prije

$$\mathfrak{n} = \sum_{\alpha \in R_+} \dot{+}\, \mathfrak{g}_\alpha, \qquad \overline{\mathfrak{n}} = \sum_{\alpha \in R_+} \dot{+}\, \mathfrak{g}_{-\alpha}, \qquad \mathfrak{b} = \mathfrak{h} \dot{+} \mathfrak{n}.$$

Za korijen $\alpha \in R$ sa $h_\alpha \in \mathfrak{h}$ označavamo njemu dualni korijen: to je jedinstven element iz $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}]$ sa svojstvom $\alpha(h_\alpha) = 2$. Sa $P$ i $P_+$ označavamo **integralne težine** i **dominantne integralne težine** sistema korijena $R$ u prostoru $\mathfrak{h}^*$ :

$$P = \{\lambda \in \mathfrak{h}^*;\ \lambda(h_\alpha) \in \mathbb{Z}\ \forall \alpha \in R\} = \{\lambda \in \mathfrak{h}^*;\ \lambda(h_\alpha) \in \mathbb{Z}\ \forall \alpha \in B\},$$

$$P_+ = \{\lambda \in \mathfrak{h}^*;\ \lambda(h_\alpha) \in \mathbb{Z}_+\ \forall \alpha \in R_+\} = \{\lambda \in \mathfrak{h}^*;\ \lambda(h_\alpha) \in \mathbb{Z}_+\ \forall \alpha \in B\}.$$

Elementi $\lambda_\alpha$ dualne baze u $\mathfrak{h}^*$ u odnosu na bazu $\{h_\alpha;\ \alpha \in B\}$ zovu se **fundamentalne težine sistema korijena** $R$ **u odnosu na bazu** $B$. Dakle, funkcionali $\lambda_\alpha \in \mathfrak{h}^*$, $\alpha \in B$, definirani su sa

$$\lambda_\alpha(h_\beta) = \delta_{\alpha\beta}, \qquad \alpha, \beta \in B.$$

Očito su fundamentalne težine dominantne integralne težine. Stoviše, vrijedi

$$P = span_{\mathbb{Z}}\{\lambda_\alpha;\ \alpha \in B\} = \left\{\sum_{\alpha \in B} c_\alpha \lambda_\alpha;\ c_\alpha \in \mathbb{Z} \text{ za } \alpha \in B\right\},$$

$$P_+ = span_{\mathbb{Z}_+}\{\lambda_\alpha;\ \alpha \in B\} = \left\{\sum_{\alpha \in B} c_\alpha \lambda_\alpha;\ c_\alpha \in \mathbb{Z}_+ \text{ za } \alpha \in B\right\}.$$

Sa $\rho = \rho_B$ ćemo označavati polusumu pozitivnih korijena u odnosu na bazu $B$ :

$$\rho = \rho_B = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in R_+} \alpha.$$

$\rho$ je dominantna integralna težina i jednaka je sumi fundamentalnih težina:

$$\rho = \sum_{\alpha \in B} \lambda_\alpha.$$

$\mathcal{P}$ će označavati *Kostantovu funkciju* u odnosu na bazu $B$. Dakle, ako je $s = |R_+|$ i $R_+ = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_s\}$, $\mathcal{P}$ je funkcija sa $Q_+$ u $\mathbb{N}$ definirana sa

$$\mathcal{P}(\lambda) = \left| \left\{ (c_1, \ldots, c_s) \in \mathbb{Z}_+^s;\ \lambda = \sum_{i=1}^{s} c_i \alpha_i \right\} \right|.$$

Kostantovu funkciju nekada je spretnije shvaćati kao funkciju sa $\mathfrak{h}^*$ u $\mathbb{Z}$ (ili u $K$) s tim da je $\mathcal{P}(\lambda) = 0$ za $\lambda \in \mathfrak{h}^* \setminus Q_+$.

Neka je i dalje $|R_+| = s$ i numerirajmo elemente od $R_+$ indeksima od 1 do $s : R_+ = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_s\}$. Nekada je zgodno pretpostaviti da je $B = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell\}$. Za svaki $j \in \{1, \ldots, s\}$ izaberimo elemente $x_j \in \mathfrak{g}_{\alpha_j} \setminus \{0\}$ i $y_j \in \mathfrak{g}_{-\alpha_j}$. Napomenimo da do daljnjeg nije bitno da je izbor $x_j$ i $y_j$ usklađen tako da bude $[x_j, y_j] = h_{\alpha_j}$. Neka je $\{h_1, \ldots, h_\ell\}$ baza od $\mathfrak{h}$. Možemo npr. uzeti da je $B = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell\}$ i $h_j = h_{\alpha_j}$ za $j = 1, \ldots, \ell$, ali takav izbor u daljnjem nije nužan. Sada je

$$\{y_1, \ldots, y_s, h_1, \ldots, h_\ell, x_1, \ldots, x_s\}$$

baza od $\mathfrak{g}$. Za $q = (q_1, \ldots, q_s) \in \mathbb{Z}_+^s$, $m = (m_1, \ldots, m_\ell) \in \mathbb{Z}_+^\ell$ i $p = (p_1, \ldots, p_s) \in \mathbb{Z}_+^s$ definiramo elemente $u(q, m, p) \in U(\mathfrak{g})$ kao monome u elementima te baze od $\mathfrak{g}$ :

$$u(q, m, p) = y_1^{q_1} \cdots y_s^{q_s} h_1^{m_1} \cdots h_\ell^{m_\ell} x_1^{p_1} \cdots x_s^{p_s}.$$

Po PBW–teoremu skup svih tih monoma $\{u(q, m, p);\ q, p \in \mathbb{Z}_+^s,\ m \in \mathbb{Z}_+^\ell\}$ je baza od $U(\mathfrak{g})$. Promatramo sada na prostoru $U(\mathfrak{g})$ reprezentaciju Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ dobivenu jedinstvenim proširenjem operatora adjungirane reprezentacije $ad_{\mathfrak{g}}\, x$, $x \in \mathfrak{g}$, do derivacija algebre $U(\mathfrak{g})$. Tu ćemo reprezentaciju označavati sa $ad_{U(\mathfrak{g})}$. Očito je

$$(ad_{U(\mathfrak{g})}\, x)u = xu - ux, \qquad x \in \mathfrak{g}, \quad u \in U(\mathfrak{g}).$$

Budući da za $h \in \mathfrak{h}$ vrijedi

$$[h, y_j] = -\alpha_j(h) y_j, \qquad [h, h_i] = 0, \qquad [h, x_j] = \alpha_j(h) x_j, \qquad j = 1, \ldots, s, \qquad i = 1, \ldots, \ell,$$

nalazimo da su $u(q, m, p)$ težinski vektori reprezentacije $ad_{U(\mathfrak{g})}$ :

$$(ad_{U(\mathfrak{g})}\, h)u(q, m, p) = ((p_1 - q_1)\alpha_1 + \cdots + (p_s - q_s)\alpha_s)u(q, m, p).$$

Prema tome, reprezentacija $ad_{U(\mathfrak{g})}$ je težinska i vrijedi

$$U(\mathfrak{g}) = \sum_{\lambda \in Q} \dot{+}\, U(\mathfrak{g})_\lambda.$$

Za svaki $\lambda \in Q$ težinski potprostor $U(\mathfrak{g})_\lambda$ je beskonačnodimenzionalan i baza mu je

$$\{u(q, m, p);\ q, p \in \mathbb{Z}_+^s,\ m \in \mathbb{Z}_+^\ell,\ (p_1 - q_1)\alpha_1 + \cdots + (p_s - q_s)\alpha_s = \lambda\}.$$

Budući da je za svaki $h \in \mathfrak{h}$ operator $ad_{U(\mathfrak{g})}\, h$ derivacija algebre $U(\mathfrak{g})$, nalazimo da vrijedi nešto analogno graduaciji, ali sada sa $Q$ a ne sa $\mathbb{Z}_+$ ili sa $\mathbb{Z}$ :

$$U(\mathfrak{g})_\lambda U(\mathfrak{g})_\mu \subseteq U(\mathfrak{g})_{\lambda+\mu}, \qquad \lambda, \mu \in Q.$$

Posebno, potprostor $U(\mathfrak{g})_0$, koji je komutant od $\mathfrak{h}$ u $U(\mathfrak{g})$, je unitalna podalgebra od $U(\mathfrak{g})$.

**Propozicija 6.5.1.** *Neka je* $\mathcal{L} = U(\mathfrak{g})\mathfrak{n} \cap U(\mathfrak{g})_0$.

(*a*) *Vrijedi* $\mathcal{L} = \overline{\mathfrak{n}}U(\mathfrak{g}) \cap U(\mathfrak{g})_0$ *i to je dvostrani ideal u algebri* $U(\mathfrak{g})_0$.

(*b*) *Vrijedi* $U(\mathfrak{g})_0 = U(\mathfrak{h}) \dot{+} \mathcal{L}$.

**Dokaz:** (*a*) Baza od $U(\mathfrak{g})\mathfrak{n}$ je $\{u(q, m, p);\ q, p \in \mathbb{Z}_+^s,\ m \in \mathbb{Z}_+^\ell,\ p_1 + \cdots + p_s > 0\}$, a baza od $\overline{\mathfrak{n}}U(\mathfrak{g})$ je $\{u(q, m, p);\ q, p \in \mathbb{Z}_+^s,\ m \in \mathbb{Z}_+^\ell,\ q_1 + \cdots + q_s > 0\}$. S druge strane, vrijedi

$$u(q, m, p) \in U(\mathfrak{g})_0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad p_1\alpha_1 + \cdots + p_s\alpha_s = q_1\alpha_1 + \cdots + q_s\alpha_s.$$

To pokazuje da je

$$U(\mathfrak{g})\mathfrak{n} \cap U(\mathfrak{g})_0 = \overline{\mathfrak{n}}U(\mathfrak{g}) \cap U(\mathfrak{g})_0 = span\,\{u(q,m,p);\ q,p \in \mathbb{Z}_+^s \setminus \{0\},\ m \in \mathbb{Z}_+^\ell\}.$$

Prema jednakosti $\mathcal{L} = U(\mathfrak{g})\mathfrak{n} \cap U(\mathfrak{g})_0$ to je desni ideal u $U(\mathfrak{g})_0$, a iz $\mathcal{L} = \overline{\mathfrak{n}}U(\mathfrak{g}) \cap U(\mathfrak{g})_0$ se vidi da je to i lijevi ideal u $U(\mathfrak{g})_0$. Dakle, $\mathcal{L}$ je dvostrani ideal u algebri $U(\mathfrak{g})_0$.

Tvrdnja $(b)$ slijedi iz sljedećih ekvivalencija koje očito vrijede za svaki $u(q,m,p) \in U(\mathfrak{g})_0$ :

$$u(q,m,p) \in U(\mathfrak{h}) \iff p_1 = \cdots = p_s = q_1 = \cdots = q_s = 0 \iff p_1 + \cdots + p_s + q_1 + \cdots + q_s = 0$$

i

$$u(q,m,p) \in \mathcal{L} \qquad \iff \qquad p_1 + \cdots + p_s + q_1 + \cdots + q_s > 0.$$

Time je propozicija 6.5.1. dokazana.

Prema propoziciji 6.5.1. projektor $\varphi$ algebre $U(\mathfrak{g})_0$ na podalgebru $U(\mathfrak{h})$ duž ideala $\mathcal{L}$ je unitalni epimorfizam algebri. Taj se epimorfizam zove **Harish−Chandrin homomorfizam** u odnosu na bazu $B$ sistema korijena $R = R(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$. Primijetimo da $\varphi$ nije neovisan o izboru baze $B$ od $R$.

Kako je Cartanova podalgebra $\mathfrak{h}$ komutativna Liejeva algebra, njena univerzalna omotačka algebra $U(\mathfrak{h})$ identificira se sa simetričnom algebrom $S(\mathfrak{h})$ prostora $\mathfrak{h}$ a to je ujedno algebra polinomijalnih funkcija na dualnom prostoru $\mathfrak{h}^*$.

Za svaki $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ definirali smo u odjeljku 6.2. infinitezimalni karakter $\chi_\lambda$. On je definiran kao unitalni homomorfizam sa centra $Z(\mathfrak{g})$ univerzalne omotačke algebre $U(\mathfrak{g})$ u polje $K$ takav da vrijedi $\sigma_\lambda(z) = \chi_\lambda(z)I_{M(\lambda)}$. Pri tome je $M(\lambda)$ oznaka za Vermaov modul određen sa $\lambda$ i $\sigma_\lambda$ je oznaka za pripadnu reprezentaciju od $\mathfrak{g}$ i od $U(\mathfrak{g})$. Prema tvrdnji $(e)$ propozicije 6.2.4. za ciklički $U(\mathfrak{g})-$modul $V$ s cikličkim vektorom $v \in V_\lambda$ takvim da je $\mathfrak{n}v = \{0\}$ vrijedi $zw = \chi_\lambda(z)w\ \forall z \in Z(\mathfrak{g})$.

Očito je $Z(\mathfrak{g}) \subseteq U(\mathfrak{g})_0$, pa se na svaki element $z \in Z(\mathfrak{g})$ može primijeniti Harish−Chandrin homomorfizam $\varphi$. Tada je $\varphi(z)$ element od $U(\mathfrak{h})$, dakle, to je polinomijalna funkcija na dualnom prostoru $\mathfrak{h}^*$. Važna je činjenica da je njena vrijednost u točki $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ je upravo $\chi_\lambda(z)$ :

**Propozicija 6.5.2.** *Neka je $\varphi : U(\mathfrak{g})_0 \to U(\mathfrak{h})$ Harish−Chandrin homomorfizam u odnosu na bazu $B$ od $R = R(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$. Vrijedi*

$$\chi_\lambda(z) = (\varphi(z))(\lambda) \qquad \forall z \in Z(\mathfrak{g}) \quad i \quad \forall \lambda \in \mathfrak{h}^*.$$

**Dokaz:** Neka je $V$ ciklički $U(\mathfrak{g})-$modul s cikličkim vektorom $v \in V_\lambda$ takvim da je $\mathfrak{n}v = \{0\}$. Za $z \in Z(\mathfrak{g}) \subseteq U(\mathfrak{g})_0$ prema tvrdnji $(b)$ propozicije 6.5.1. vrijedi $z \in U(\mathfrak{h}) \dot{+} U(\mathfrak{g})\mathfrak{n}$ i $\varphi(z)$ je upravo komponenta od $z$ u $U(\mathfrak{h})$ u tom rastavu. Drugim riječima, postoje $u_1,\ldots,u_k \in U(\mathfrak{g})$ i $t_1,\ldots,t_k \in \mathfrak{n}$ takvi da je

$$z = \varphi(z) + u_1t_1 + \cdots + u_kt_k.$$

Kako je po pretpostavci $t_1v = \cdots = t_kv = 0$, dobivamo

$$\chi_\lambda(z)v = zv = \varphi(z)v + u_1t_1v + \cdots + u_kt_kv = \varphi(z)v. \tag{6.4}$$

Nadalje, ciklički vektor $v$ je težinski i težina mu je $\lambda$. To znači da vrijedi $hv = \lambda(h)v\ \ \forall h \in \mathfrak{h}$. Stoga za bilo koji element $h_1^{m_1}\cdots h_\ell^{m_\ell}$ baze od $U(\mathfrak{h})$ vrijedi $h_1^{m_1}\cdots h_\ell^{m_\ell}v = \lambda(h_1)^{m_1}\cdots\lambda(h_\ell)^{m_\ell}v$. Uz identifikaciju $U(\mathfrak{h})$ s algebrom polinomijalnih funkcija na $\mathfrak{h}^*$ skalar $\lambda(h_1)^{m_1}\cdots\lambda(h_\ell)^{m_\ell}$ je upravo vrijednost polinomijalne funkcije $h_1^{m_1}\cdots h_\ell^{m_\ell}$ u točki $\lambda$. Dakle, za svaki $u \in U(\mathfrak{h})$ vrijedi $uv = u(\lambda)v$. Posebno je $\varphi(z)v = (\varphi(z))(\lambda)v$. Odatle i iz (6.4) slijedi tvrdnja propozicije.

Ovisnost Harish–Chandrinog homomorfizma $\varphi$ o izboru baze $B$ sistema korijena $R$ popravlja se pomoću vrlo jednostavnog automorfizma algebre $U(\mathfrak{h}) = S(\mathfrak{h})$. Radi se o automorfizmu $\gamma = \gamma_B$ od $S(\mathfrak{h})$ koji polinomijalnu funkciju $u$ na $\mathfrak{h}^*$ transformira u funkciju $\lambda \mapsto u(\lambda - \rho)$. Dakle,

$$(\gamma(u))(\lambda) = u(\lambda - \rho), \qquad \lambda \in \mathfrak{h}^*, \quad u \in U(\mathfrak{h}) = S(\mathfrak{h}). \tag{6.5}$$

**Teorem 6.5.3.** *Neka je $\gamma$ automorfizam algebre $U(\mathfrak{h}) = S(\mathfrak{h})$ polinomijalnih funkcija na $\mathfrak{h}^*$ definiran sa (6.5) i neka je $\varphi : U(\mathfrak{g})_0 \to U(\mathfrak{h})$ Harish–Chandrin homomorfizam u odnosu na bazu $B$. Tada je restrikcija $(\gamma \circ \varphi)|Z(\mathfrak{g})$ neovisna o izboru baze $B$ od $R$ i to je izomorfizam centra $Z(\mathfrak{g})$ od $U(\mathfrak{g})$ na algebru $S(\mathfrak{h})^W$ polinomijalnih funkcija na $\mathfrak{h}^*$ invarijantnih u odnosu na Weylovu grupu $W = W(R)$.*

**Dokaz:** (1) Neka je $\alpha \in B$ i $\lambda \in P_+$. Prema propoziciji 6.2.7. Vermaov modul $M(\sigma_\alpha(\lambda+\rho)-\rho)$ izomorfan je podmodulu Vermaovog modula $M(\lambda)$. Odatle slijedi da je $\chi_\lambda = \chi_{\sigma_\alpha(\lambda+\rho)-\rho}$. Prema propoziciji 6.5.2. zaključujemo da za svaki $z \in Z(\mathfrak{g})$ vrijedi

$$(\varphi(z))(\lambda) = (\varphi(z))(\sigma_\alpha(\lambda + \rho) - \rho).$$

Dakle, polinomijalna funkcija $\varphi(z)$ poprima na skupu dominantnih težina $P_+$ iste vrijednosti kao i polinomijalna funkcija $\lambda \mapsto (\varphi(z))(\sigma_\alpha(\lambda+\rho)-\rho)$. No tada se te polinomijalne funkcije podudaraju svuda na $\mathfrak{h}^*$, odnosno, vrijedi

$$(\varphi(z))(\lambda) = (\varphi(z))(\sigma_\alpha(\lambda + \rho) - \rho) \qquad \forall \lambda \in \mathfrak{h}^*, \quad \forall z \in Z(\mathfrak{h}), \quad \forall \alpha \in B.$$

Zamijenimo li u toj jednakosti $\lambda$ sa $\lambda - \rho$, nalazimo

$$((\gamma \circ \varphi)(z))(\lambda) = (\varphi(z))(\lambda - \rho) = (\varphi(z))(\sigma_\alpha \lambda - \rho) = ((\gamma \circ \varphi)(z))(\sigma_\alpha \lambda) = ((\gamma \circ \varphi)(z) \circ \sigma_\alpha)(\lambda).$$

Prema tome, vrijedi $(\gamma \circ \varphi)(z) \circ \sigma_\alpha = (\gamma \circ \varphi)(z)$ za svaki $\alpha \in B$. Budući da refleksije $\sigma_\alpha$, $\alpha \in B$, generiraju Weylovu grupu $W$, zaključujemo da je polinomijalna funkcija $(\gamma \circ \varphi)(z)$ na dualu $\mathfrak{h}^*$ Cartanove podalgebre $\mathfrak{h}$ $W$–invarijantna za svaki element $z$ centra $Z(\mathfrak{g})$ univerzalne omotačke algebre. Dakle, dokazali smo da je $(\gamma \circ \varphi)(Z(\mathfrak{g})) \subseteq S(\mathfrak{h})^W$.

(2) Označimo sa $\eta$ izomorfizam algebre $S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$ na algebru $S(\mathfrak{h})^W$ iz teorema 6.4.9. Dakle, $\eta = \jmath|S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$, gdje je $\jmath : S(\mathfrak{g}) \to S(\mathfrak{h})$ projektor u skladu s dekompozicijom $S(\mathfrak{g}) = S(\mathfrak{h}) \dotplus J$ i $J$ je ideal u algebri $S(\mathfrak{g})$ generiran sa $\mathfrak{n} \dotplus \overline{\mathfrak{n}}$.

Neka je $\sigma : S(\mathfrak{g}) \to U(\mathfrak{g})$ simetrizacija iz odjeljka 5.3. To je linearan operator sa svojstvom da je

$$\sigma(x_1 \cdots x_n) = \frac{1}{n!} \sum_{\tau \in \mathcal{S}_n} x_{\tau(1)} \cdots x_{\tau(n)} \qquad \forall x_1, \ldots, x_n \in \mathfrak{g}.$$

Ovdje $x_1 \cdots x_n$ s lijeve strane označava umnožak u simetričnoj algebri $S(\mathfrak{g})$, a $x_{\tau(1)} \cdots x_{\tau(n)}$ s desne strane označava umnožak u univerzalnoj omotačkoj algebri $U(\mathfrak{g})$. Prema propoziciji 5.3.12. simetrizacija $\sigma$ je izomorfizam vektorskih prostora i on je u skladu s graduacijom algebre $S(\mathfrak{g})$ i filtracijom algebre $U(\mathfrak{g})$ na sljedeći način:

$$U_n(\mathfrak{g}) = \sigma(S^n(\mathfrak{g})) \dotplus U_{n-1}(\mathfrak{g}) \qquad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{6.6}$$

Pri tome je $U_n(\mathfrak{g})$ potprostor od $U(\mathfrak{g})$ razapet svim produktima $x_1 \cdots x_n$ elemenata $x_1, \ldots, x_n \in \mathfrak{g}$. Dakle, ako sa $(S_n(\mathfrak{g}))_{n \in \mathbb{Z}_+}$ označimo filtraciju algebre $S(\mathfrak{g})$ pridruženu graduaciji $(S^n(\mathfrak{g}))_{n \in \mathbb{Z}_+}$, tj.

$$S_n(\mathfrak{g}) = S^0(\mathfrak{g}) \dotplus S^1(\mathfrak{g}) \dotplus \cdots \dotplus S^n(\mathfrak{g}),$$

onda je restrikcija $\sigma|S_n(\mathfrak{g})$ izomorfizam prostora $S_n(\mathfrak{g})$ na prostor $U_n(\mathfrak{g})$ za svaki $n \in \mathbb{Z}_+$.

Označimo sada sa $\Sigma : U(\mathfrak{g}) \to S(\mathfrak{g})$ izomorfizam inverzan simetrizaciji $\sigma$. Tada je za svaki $n \in \mathbb{Z}_+$ restrikcija $\Sigma|U_n(\mathfrak{g})$ izomorfizam vektorskog prostora $U_n(\mathfrak{g})$ na vektorski prostor $S_n(\mathfrak{g})$.

Neka je $\vartheta = \Sigma|Z(\mathfrak{g})$ restrikcija izomorfizma $\Sigma$ na centar $Z(\mathfrak{g})$ od $U(\mathfrak{g})$. Budući da izomorfizam $\Sigma : U(\mathfrak{g}) \to S(\mathfrak{g})$ ostvaruje ekvivalenciju reprezentacija $ad_{U(\mathfrak{g})}$ i $ad_{S(\mathfrak{g})}$ Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ pomoću derivacija algebri $U(\mathfrak{g})$ i $S(\mathfrak{g})$ dobivenih jedinstvenim proširenjima operatora adjungirane reprezentacije od $\mathfrak{g}$ i budući da su $Z(\mathfrak{g})$ i $S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$ potprostori invarijanata u odnosu na te reprezentacije, imamo $\vartheta(Z(\mathfrak{g})) = \Sigma(Z(\mathfrak{g})) = S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$,

Iz izabrane baze $\{y_1, \dots, y_s, h_1, \dots, h_\ell, x_1, \dots, x_s\}$ Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ formirajmo sada bazu prostora $S(\mathfrak{g})$ : za $q, p \in \mathbb{Z}_+^s$ i $m \in \mathbb{Z}_+^\ell$ neka je $v(q, m, p)$ monom u $S(\mathfrak{g})$ definiran sa

$$v(q, m, p) = y_1^{q_1} \cdots y_s^{q_s} h_1^{m_1} \cdots h_\ell^{m_\ell} x_1^{p_1} \cdots x_s^{p_s}.$$

Tada je

$$\{v(q, m, p);\ q, p \in \mathbb{Z}_+^s,\ m \in \mathbb{Z}_+^\ell\}$$

baza vektorskog prostora $S(\mathfrak{g})$. Očito je za $n \in \mathbb{Z}_+$

$$\{v(q, m, p);\ q, p \in \mathbb{Z}_+^s,\ m \in \mathbb{Z}_+^\ell,\ |q| + |m| + |p| = n\}$$

baza od $S^n(\mathfrak{g})$, a

$$\{v(q, m, p);\ q, p \in \mathbb{Z}_+^s,\ m \in \mathbb{Z}_+^\ell,\ |q| + |m| + |p| \leq n\}$$

je baza od $S_n(\mathfrak{g})$; ovdje smo upotrijebili oznake

$$|q| = q_1 + \cdots + q_s, \quad |m| = m_1 + \cdots + m_\ell \quad \text{i} \quad |p| = p_1 + \cdots + p_s \quad \text{za} \quad q, p \in \mathbb{Z}_+^s,\ m \in \mathbb{Z}_+^\ell$$

Primijetimo da iz (6.6) i iz definicije simetrizacije $\sigma$ slijedi da je

$$\sigma(v(q, m, p)) - u(q, m, p) \in U_{|q|+|m|+|p|-1}(\mathfrak{g}), \qquad q, p \in \mathbb{Z}_+^s,\ m \in \mathbb{Z}_+^\ell.$$

Odatle je

$$\Sigma(u(q, m, p)) - v(q, m, p) \in S_{|q|+|m|+|p|-1}(\mathfrak{g}), \qquad q, p \in \mathbb{Z}_+^s,\ m \in \mathbb{Z}_+^\ell. \tag{6.7}$$

Neka je sada $n \in \mathbb{Z}_+$ i $z \in Z(\mathfrak{g}) \cap U_n(\mathfrak{g})$. Tada za neke skalare $c(q, m, p) \in K$ vrijedi

$$z = \sum_{|q|+|m|+|p| \leq n} c(q, m, p) u(q, m, p).$$

Budući da je $\vartheta : Z(\mathfrak{g}) \to S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$ definirano kao restrikcija $\Sigma|Z(\mathfrak{g})$, iz (6.7) dobivamo

$$\vartheta(z) - \sum_{|q|+|m|+|p| \leq n} c(q, m, p) v(q, m, p) \in S_{n-1}(\mathfrak{g}),$$

dakle i

$$\vartheta(z) - \sum_{|q|+|m|+|p| = n} c(q, m, p) v(q, m, p) \in S_{n-1}(\mathfrak{g}).$$

Kako je $\eta$ restrikcija na $S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$ projektora $\jmath : S(\mathfrak{g}) \to S(\mathfrak{h})$ u skladu s rastavom $S(\mathfrak{g}) = S(\mathfrak{h}) \dot{+} J$, a monom $v(q, m, p)$ je u idealu $J$ ako je bilo $|q| > 0$ bilo $|p| > 0$, vidimo da je

$$\eta(\vartheta(z)) - \sum_{m \in \mathbb{Z}_+^\ell,\, |m| = n} c(0, m, 0) v(0, m, 0) \in S_{n-1}(\mathfrak{g}).$$

S druge strane je

$$\varphi(z) = \sum_{m \in \mathbb{Z}_+^\ell,\, |m| \leq n} c(0, m, 0) u(0, m, 0).$$

Uz identifikaciju $U(\mathfrak{h})$ sa $S(\mathfrak{h})$ imamo $u(0, m, 0) = v(0, m, 0)$. Prema tome, vrijedi

$$(\eta \circ \vartheta)(z) - \varphi(z) \in S_{n-1}(\mathfrak{g}) \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall z \in Z(\mathfrak{g}) \cap U_n(\mathfrak{g}). \tag{6.8}$$

(3) Filtracije na algebrama $U(\mathfrak{g})$ i $S(\mathfrak{g})$ induciraju filtracije na podalgebrama $Z(\mathfrak{g})$, $S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$ i $S(\mathfrak{h})^W$, a iz tih filtriranih algebri dobivamo graduirane algebre $Gr(Z(\mathfrak{g}))$, $Gr(S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}})$ i $Gr(S(\mathfrak{h})^W)$. Izomorfizmi $\vartheta$ i $\eta$, dakle i njihova kompozicija $\eta\circ\vartheta$, su kompatibilni s filtracijama. Prema tome, iz izomorfizma vektorskih prostora $\eta\circ\vartheta : Z(\mathfrak{g}) \to S(\mathfrak{h})^W$ prijelazom na graduirane algebre dobivamo izomorfizam vektorskih prostora $Gr(\eta\circ\vartheta) : Gr(Z(\mathfrak{g})) \to Gr(S(\mathfrak{h})^W)$.

Iz (6.8) slijedi da je $Gr(\eta\circ\vartheta) = Gr(\varphi|Z(\mathfrak{g}))$. Nadalje, iz definicije preslikavanja $\gamma : S(\mathfrak{h}) \to S(\mathfrak{h})$ vidi se da je $Gr(\gamma)$ identiteta. Prema tome, $Gr(\gamma\circ\varphi|Z(\mathfrak{g}))$ je izomorfizam vektorskih prostora sa $Gr(Z(\mathfrak{g}))$ na $Gr(S(\mathfrak{h})^W)$. Odatle slijedi da je

$$\gamma\circ\varphi|Z(\mathfrak{g}) : Z(\mathfrak{g}) \to S(\mathfrak{h})^W$$

izomorfizam vektorskih prostora, a kako znamo da je to homomorfizam algebri, zaključujemo da je to izomorfizam algebri.

(4) Neka je $\lambda \in P_+$ i neka je $V$ prost konačnodimenzionalan $U(\mathfrak{g})-$modul s najvećom težinom $\lambda$. Tada je $\chi_\lambda$ pripadni infinitezimalni karakter. Neka je $\sigma \in W$. Tada je $\sigma(B)$ baza sistema korijena $R$. Neka su $\varphi'$ i $\gamma'$ homomorfizmi u odnosu na bazu $\sigma(B)$ analogni homomorfizmima $\varphi$ i $\gamma$ u odnosu na bazu $B$. Tada je očito $\sigma\lambda$ najveća težina modula $V$ u odnosu na bazu $\sigma(B)$ od $R$. Neka je $z \in Z(\mathfrak{g})$ proizvoljan. Primijenimo li propoziciju 6.5.2. na baze $B$ i $\sigma(B)$, nalazimo

$$(\varphi(z))(\lambda) = \chi_\lambda(z) = (\varphi'(z))(\sigma\lambda).$$

Odatle i pomoću dokazanog u (1) nalazimo

$$((\gamma\circ\varphi)(z))(\sigma\lambda+\sigma\rho)) = ((\gamma\circ\varphi)(z))(\lambda+\rho) = (\varphi(z))(\lambda) = (\varphi'(z))(\sigma\lambda) = ((\gamma'\circ\varphi')(z))(\sigma\lambda+\sigma\rho).$$

U posljednjoj jednakosti iskoristili smo očiglednu činjenicu da je $\rho_{\sigma(B)} = \sigma\rho_B = \sigma\rho$. Dakle, polinomijalne funkcije $(\gamma\circ\varphi)(z)$ i $(\gamma'\circ\varphi')(z)$ podudaraju se na skupu $\sigma(P_+)+\sigma\rho$. Odatle slijedi da su one jednake svuda na $\mathfrak{h}^*$. Time je dokazana neovisnost izomorfizma $(\gamma\circ\varphi)|Z(\mathfrak{g})$ o izboru baze $B$ sistema korijena $R$.

Izomorfizam $(\gamma\circ\varphi)|Z(\mathfrak{g})$ zove se **Harish–Chandrin izomorfizam** sa $Z(\mathfrak{g})$ na $S(\mathfrak{h})^W$. Označimo ga sa $\omega$. Prema propoziciji 6.5.2. za infinitezimalni karakter $\chi_\lambda$ i za svaki $z \in Z(\mathfrak{g})$ vrijedi

$$\chi_\lambda(z) = (\varphi(z))(\lambda) = ((\gamma\circ\varphi)(z))(\lambda+\rho) = (\omega(z))(\lambda+\rho).$$

**Teorem 6.5.4.** *$\lambda \mapsto \chi_\lambda$ je surjekcija sa $\mathfrak{h}^*$ na skup svih infinitezimalnih karaktera. Nadalje, za $\lambda, \lambda' \in \mathfrak{h}^*$ vrijedi $\chi_\lambda = \chi_{\lambda'}$ ako i samo ako postoji $\sigma \in W$ takav da je $\lambda'+\rho = \sigma(\lambda+\rho)$.*

**Dokaz:** Za $\lambda, \lambda' \in \mathfrak{h}^*$ imamo

$$\chi_\lambda(z) = (\omega(z))(\lambda+\rho) \quad \text{i} \quad \chi_{\lambda'}(z) = (\omega(z))(\lambda'+\rho) \qquad \forall z \in Z(\mathfrak{g}).$$

Budući da je $\omega(z) \in S(\mathfrak{h})^W$, ako je $\lambda'+\rho = \sigma(\lambda+\rho)$ za neki $\sigma \in W$, slijedi $\chi_\lambda = \chi_{\lambda'}$.

Pretpostavimo sada da takav $\sigma \in W$ ne postoji, tj. da je

$$W(\lambda'+\rho) \cap W(\lambda+\rho) = \emptyset.$$

Tada postoji polinomijalna funkcija $p$ na $\mathfrak{h}^*$ takva da je $p|W(\lambda+\rho) = 1$ i $p|W(\lambda'+\rho) = 0$. Možemo pretpostaviti da je polinomijalna funkcija $p$ $W-$invarijantna. Doista, ako nije tako, možemo je zamijeniti sa

$$\frac{1}{|W|}\sum_{\sigma\in W}\sigma p.$$

Neka je $z \in Z(\mathfrak{g})$ takav da je $\omega(z) = p$. Tada je

$$\chi_\lambda(z) = (\omega(z))(\lambda + \rho) = p(\lambda + \rho) = 1 \qquad \text{i} \qquad \chi_{\lambda'}(z) = (\omega(z))(\lambda' + \rho) = p(\lambda' + \rho) = 0.$$

Dakle, $\chi_\lambda \neq \chi_{\lambda'}$.

Treba još dokazati da je preslikavanje $\lambda \mapsto \chi_\lambda$ surjekcija sa $\mathfrak{h}^*$ na skup svih infinitezimalnih karaktera od $Z(\mathfrak{g})$. Taj ćemo dio dokaza samo skicirati. Tvrdnja slijedi iz nekih osnovnih rezultata iz komutativne algebre i iz Galoisove teorije. Iz komutativne algebre nam treba jednostavna činjenica da je svaki unitalni homomorfizam algebre polinoma $K[X_1, \ldots, X_\ell]$ u $\ell$ varijabli u polje $K$ evaluacija $P \mapsto P(a)$ u nekoj točki $a \in K^\ell$. Prema tome, svaki unitalni homomorfizam $S(\mathfrak{h}) \to K$ ima oblik $p \mapsto p(\lambda)$ za neki $\lambda \in \mathfrak{h}^*$. Galoisova teorija nam treba da bismo zaključili da se svaki unitalni homomorfizam $S(\mathfrak{h})^W \to K$ može produljiti do homomorfizma $S(\mathfrak{h}) \to K$. Naime, pokazuje se da je polje razlomaka prstena $S(\mathfrak{h})$ Galoisovo proširenje polja razlomaka prstena $S(\mathfrak{h})^W$ i da je $W$ Galoisova grupa tog proširenja. Odatle i iz tzv. Hilbertovog teorema o bazi izvodi se da je svaki element prstena $S(\mathfrak{h})$ cio nad podprstenom $S(\mathfrak{h})^W$, a odatle se dokazuje mogućnost proširenja.

## 6.6 Karakteri

Neka je $\mathbb{Z}^{\mathfrak{h}^*}$ aditivna grupa svih funkcija $f : \mathfrak{h}^* \to \mathbb{Z}$. Za $f \in \mathbb{Z}^{\mathfrak{h}^*}$ definiramo **nosač** funkcije $f$ :

$$Supp\, f = \{\lambda \in \mathfrak{h}^*;\ f(\lambda) \neq 0\}.$$

Za svaki $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ neka je $e^\lambda \in \mathbb{Z}^{\mathfrak{h}^*}$ definirana sa $Supp\, e^\lambda = \{\lambda\}$, $e^\lambda(\lambda) = 1$, tj.

$$e^\lambda(\mu) = \begin{cases} 1 & \text{ako je } \mu = \lambda \\ 0 & \text{ako je } \mu \neq \lambda. \end{cases}$$

Funkcije $f \in \mathbb{Z}^{\mathfrak{h}^*}$ s konačnim nosačem čine aditivnu podgrupu koju ćemo označavati sa $\mathbb{Z}[\mathfrak{h}^*]$. Očito je $\{e^\lambda;\ \lambda \in \mathfrak{h}^*\}$ baza $\mathbb{Z}-$modula $\mathbb{Z}[\mathfrak{h}^*]$ : za $f \in \mathbb{Z}[\mathfrak{h}^*]$ je

$$f = \sum_{\lambda \in \mathfrak{h}^*} f(\lambda) e^\lambda. \tag{6.9}$$

Formulu (6.9) pisat ćemo kao formalnu jednakost i u slučaju proizvoljne funkcije $f \in \mathbb{Z}^{\mathfrak{h}^*}$.

Sa $\mathbb{Z}\langle\mathfrak{h}^*\rangle$ označavat ćemo aditivnu podgrupu (ili $\mathbb{Z}-$podmodul) od $\mathbb{Z}^{\mathfrak{h}^*}$ svih funkcija $f \in \mathbb{Z}^{\mathfrak{h}^*}$ čiji je nosač sadržan u uniji konačno mnogo skupova oblika $\nu - Q_+$, $\nu \in \mathfrak{h}^*$.

**Zadatak 6.8.** *Neka su $f, g \in \mathbb{Z}\langle\mathfrak{h}^*\rangle$.*

(*a*) *Dokažite da je za svaki $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ skup*

$$\{\mu \in \mathfrak{h}^*;\ f(\mu) g(\lambda - \mu) \neq 0\}$$

*konačan, pa je sljedećom jednakošću dobro definirana funkcija $f \bullet g : \mathfrak{h}^* \to \mathbb{Z}$ :*

$$(f \bullet g)(\lambda) = \sum_{\mu \in \mathfrak{h}^*} f(\mu) g(\lambda - \mu).$$

(*b*) *Dokažite da je $f \bullet g \in \mathbb{Z}\langle\mathfrak{h}^*\rangle$, da s operacijom množenja $(f, g) \mapsto f \bullet g$ aditivna grupa $\mathbb{Z}\langle\mathfrak{h}^*\rangle$ postaje komutativan unitalan prsten i da je $\mathbb{Z}[\mathfrak{h}^*]$ unitalan potprsten od $\mathbb{Z}\langle\mathfrak{h}^*\rangle$.*

Primijetimo da uz oznaku (6.9) za $f, g \in \mathbb{Z}\langle\mathfrak{h}^*\rangle$ vrijedi

$$\left(\sum_{\lambda \in \mathfrak{h}^*} f(\lambda) e^\lambda\right) \bullet \left(\sum_{\mu \in \mathfrak{h}^*} g(\mu) e^\mu\right) = \sum_{\nu \in \mathfrak{h}^*} \left(\sum_{\lambda + \mu = \nu} f(\lambda) g(\mu)\right) e^\nu. \tag{6.10}$$

Posebno, $e^\lambda \bullet e^\mu = e^{\lambda + \mu}$.

Neka je $\pi$ reprezentacija Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ na vektorskom prostoru, odnosno, $V$ je $U(\mathfrak{g})-$modul. Kažemo da **modul $V$ ima karakter** ako je modul $V$ težinski i svaki je njegov težinski potprostor konačnodimenzionalan, tj. ako je

$$V = \sum_{\mu \in \mathfrak{h}^*} \dot{+}\, V_\mu \qquad \text{i} \qquad \dim V_\mu < +\infty \quad \forall \mu \in \mathfrak{h}^*.$$

Tada je $\mu \mapsto \dim V_\mu$, $\mu \in \mathfrak{h}^*$, funkcija iz $\mathbb{Z}^{\mathfrak{h}^*}$, zove se **karakter modula $V$** (ili **karakter reprezentacije** $\pi$) i označava sa $ch_V$ ili $ch_\pi$.

**Zadatak 6.9.** *Neka je $V$ $U(\mathfrak{g})-$modul koji ima karakter i neka je $V'$ podmodul. Dokažite da moduli $V'$ i $V/V'$ imaju karaktere i da je*

$$ch_V = ch_{V'} + ch_{V/V'}.$$

**Zadatak 6.10.** *Neka su $V_1$ i $V_2$ $U(\mathfrak{g})-$moduli koji imaju karaktere i pretpostavimo da su njihovi karakteri $ch_{V_1}$ i $ch_{V_2}$ funkcije iz $\mathbb{Z}\langle\mathfrak{h}^*\rangle$. Dokažite da tada i modul $V_1 \otimes V_2$ ima karakter, da je $ch_{V_1\otimes V_2} \in \mathbb{Z}\langle\mathfrak{h}^*\rangle$ i da vrijedi*

$$ch_{V_1\otimes V_2} = ch_{V_1} \bullet ch_{V_2}.$$

Weylova grupa $W(R)$ djeluje na $Z^{\mathfrak{h}^*}$ na sljedeći način:

$$(\sigma f)(\lambda) = f(\sigma^{-1}\lambda), \qquad \sigma \in W(R), \quad f \in \mathbb{Z}^{\mathfrak{h}^*}, \quad \lambda \in \mathfrak{h}^*.$$

Tada je $\sigma e^\lambda = e^{\sigma\lambda}$, pa vidimo da je $\sigma\mathbb{Z}[\mathfrak{h}^*] = \mathbb{Z}[\mathfrak{h}^*]$ za svaki $\sigma \in W(R)$. Međutim, lako se vidi da je $\sigma\mathbb{Z}\langle\mathfrak{h}^*\rangle \neq \mathbb{Z}\langle\mathfrak{h}^*\rangle$ za $\sigma \in W$, $\sigma \neq id$.

Promatrat ćemo sada unitalni potprsten

$$\mathbb{Z}[P] = \{f \in \mathbb{Z}[\mathfrak{h}^*];\ Supp\, f \subseteq P\}$$

prstena $\mathbb{Z}[\mathfrak{h}^*]$. Očito je $\{e^\lambda;\ \lambda \in P\}$ baza $\mathbb{Z}-$modula $\mathbb{Z}[P]$.

**Propozicija 6.6.1.** *Prsten $\mathbb{Z}[P]$ je faktorijalan.*

**Dokaz:** Neka je $B = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell\}$. Nadalje, neka su $\lambda_j = \lambda_{\alpha_j}$ fundamentalne težine sistema korijena $R$ u odnosu na bazu $B$. Tada je $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_\ell\}$ baza $\mathbb{Z}-$modula $P$, pa je

$$\{e^{n_1\lambda_1+\cdots+n_\ell\lambda_\ell};\ n_1, \ldots, n_\ell \in \mathbb{Z}\}$$

baza $\mathbb{Z}-$modula $\mathbb{Z}[P]$. Promatrajmo sada prsten $\mathbb{Z}[X_1, \ldots, X_\ell, X_1^{-1}, \ldots, X_\ell^{-1}]$ koji kao $\mathbb{Z}-$modul ima bazu $\{X_1^{n_1} \cdots X_\ell^{n_\ell};\ n_1, \ldots, n_\ell \in \mathbb{Z}\}$. Jedinstveno $\mathbb{Z}-$linearno preslikavanje

$$\Phi : K[X_1, \ldots, X_\ell, X_1^{-1}, \ldots, X_\ell^{-1}] \to \mathbb{Z}[P]$$

takvo da je

$$\Phi(X_1^{n_1} \cdots X_\ell^{n_\ell}) = e^{n_1\lambda_1+\cdots+n_\ell\lambda_\ell} \qquad \forall n_1, \ldots, n_\ell \in \mathbb{Z}$$

je izomorfizam $\mathbb{Z}-$modula. No to je i multiplikativno preslikavanje; doista, za $n_1, \ldots, m_\ell \in \mathbb{Z}$ imamo

$$\Phi((X_1^{n_1} \cdots X_\ell^{n_\ell})(X_1^{m_1} \cdots X_\ell^{m_\ell})) = \Phi(X_1^{n_1+m_1} \cdots X_\ell^{n_\ell+m_\ell}) = e^{(n_1+m_1)\lambda_1+\cdots(n_\ell+m_\ell)\lambda_\ell} =$$

$$= e^{n_1\lambda_1+\cdots n_\ell\lambda_\ell} \bullet e^{m_1\lambda_1+\cdots m_\ell\lambda_\ell} = \Phi(X_1^{n_1} \cdots X_\ell^{n_\ell}) \bullet \Phi(X_1^{m_1} \cdots X_\ell^{m_\ell}).$$

Prema tome, $\Phi$ je izomorfizam unitalnih prstenova. Kako je $\mathbb{Z}$ faktorijalan prsten, prsten polinoma $\mathbb{Z}[X_1, \ldots, X_\ell]$ je faktorijalan. Nadalje, prsten $\mathbb{Z}[X_1, \ldots, X_\ell, X_1^{-1}, \ldots, X_\ell^{-1}]$ je izomorfan prstenu razlomaka prstena $\mathbb{Z}[X_1, \ldots, X_\ell]$, prema tome, i taj je prsten faktorijalan. Dakle, i njemu izomorfan prsten $\mathbb{Z}[P]$ je faktorijalan.

Metodama komutativne algebre može se dokazati da vrijedi:

**Propozicija 6.6.2.** *Ako $\lambda, \mu \in P$ nisu proporcionalni onda su elementi $1 - e^\lambda$ i $1 - e^\mu$ prstena $\mathbb{Z}[P]$ relativno prosti.*

Jedan korak u dokazu propozicije 6.6.2. je:

**Zadatak 6.11.** *Neka su $\lambda$ i $\mu$ neproporcionalni elementi od $P$. Dokažite da tada postoji baza $\{\nu_1,\dots,\nu_\ell\}$ $\mathbb{Z}-$modula $P$ i brojevi $j,n\in\mathbb{N}$, $m\in\mathbb{Z}$, takvi da je $\lambda=j\nu_1$ i $\mu=m\nu_1+n\nu_2$.*

Kao i u odjeljku 3.5. neka je $sign(\sigma)$ parnost elementa $\sigma\in W$. Prema zadatku 3.14. vrijedi $sign(\sigma)=(-1)^{\ell(\sigma)}$, gdje je $\ell(\sigma)$ duljina elementa $\sigma$ u odnosu na bilo koju bazu sistema korijena $R$, npr. u odnosu na izabranu bazu $B$. U zgodno izabranoj bazi refleksija ima dijagonalnu matricu čiji je jedan element na dijagonali jednak $-1$ a svi ostali su jednaki 1. Prema tome, determinanta svake refleksije jednaka je $-1$. Odatle slijedi da je $sign(\sigma)$ jednako determinanti linearnog operatora $\sigma$.

Element $f\in\mathbb{Z}[P]$ zove se **invarijantan** ako je $\sigma f=f\ \ \forall\sigma\in W$, a **antiinvarijantan** ako je $\sigma f=sign(\sigma)f\ \ \forall\sigma\in W$. Neka je $\mathbb{Z}[P]^W$ skup svih invarijantnih, a $\mathbb{Z}[P]_W$ skup svih antiinvarijantnih elemenata od $\mathbb{Z}[P]$. Očito su $\mathbb{Z}[P]^W$ i $\mathbb{Z}[P]_W$ $\mathbb{Z}-$podmoduli od $\mathbb{Z}[P]$, a $\mathbb{Z}[P]^W$ je i unitalni potprsten od $\mathbb{Z}[P]$.

Definiramo sada preslikavanje $J:\mathbb{Z}[P]\to\mathbb{Z}[P]$ ovako:

$$J(f)=\sum_{\sigma\in W}sign(\sigma)\sigma f,\qquad f\in\mathbb{Z}[P].$$

**Zadatak 6.12.** *Dokažite da je*

$$J^2=|W|^2I_{\mathbb{Z}[P]}\qquad i\qquad \mathbb{Z}[P]_W=J\mathbb{Z}[P]=\{f\in\mathbb{Z}[P];\ J(f)=|W|f\}.$$

*Drugim riječima, $\frac{1}{|W|}J$ je projektor $\mathbb{Z}-$modula $\mathbb{Z}[P]$ na podmodul $\mathbb{Z}[P]_W$.*

Neka je $C$ Weylova komora u $span_{\mathbb{R}}R$ pridružena bazi $B$ i $\overline{C}$ njen zatvarač. Dakle,

$$C=\{c_1\lambda_1+\cdots+c_\ell\lambda_\ell;\ c_1,\dots,c_\ell\in\langle 0,+\infty\rangle\},\quad \overline{C}=\{c_1\lambda_1+\cdots+c_\ell\lambda_\ell;\ c_1,\dots,c_\ell\in[0,+\infty\rangle\}.$$

Tada je

$$P_+=P\cap\overline{C}=\{c_1\lambda_1+\cdots+c_\ell\lambda_\ell;\ c_1,\dots,c_\ell\in\mathbb{Z}_+\}.$$

Stavimo

$$P_{++}=P\cap C=\{c_1\lambda_1+\cdots+c_\ell\lambda_\ell;\ c_1,\dots,c_\ell\in\mathbb{N}\}.$$

Dakle, $P_{++}$ je skup svih strogo dominantnih integralnih težina sistema korijena $R$ (u odnosu na bazu $B$).

**Propozicija 6.6.3.** *$\{J(e^\lambda);\ \lambda\in P_{++}\}$ je baza $\mathbb{Z}-$modula $\mathbb{Z}[P]_W$.*

**Dokaz:** Za $\lambda\in P_{++}$ elementi $\sigma\lambda$, $\sigma\in W$, leže u različitim Weylovim komorama, dakle, oni su svi međusobno različiti. Odatle slijedi da su $J(e^\lambda)$, $\lambda\in P_{++}$, linearno nezavisni nad $\mathbb{Z}$. Štoviše, taj je skup linearno nezavisan nad bilo kojim poljem $K$ karakteristike 0, naravno, u vektorskom prostoru $K[P]$ definiranom analogno $\mathbb{Z}-$modulu $\mathbb{Z}[P]$.

Neka je $f\in\mathbb{Z}[P]_W$. Naravno, nosač $Supp\,f$ je $W-$invarijantan podskup od $P$. Promatrat ćemo sada $P$ smješten u realan vektorski prostor $V=span_{\mathbb{R}}R=(span_{\mathbb{Q}}R)\otimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{R}$. Za $\alpha\in R$ neka je $H_\alpha=\{\lambda\in V;\ \sigma_\alpha\lambda=\lambda\}$ fiksna hiperravnina refleksije $\sigma_\alpha$ u prostoru $V$. Pretpostavimo sada da je $(Supp\,f)\cap H_\alpha\neq\emptyset$ za neki $\alpha\in R$ i neka je $\lambda_0\in(Supp\,f)\cap H_\alpha$. Tada je $\sigma_\alpha\lambda_0=\lambda_0$. S druge strane je $sign(\sigma_\alpha)=-1$, dakle je $\sigma_\alpha f=-f$. Odatle je

$$\sum_{\lambda\in Supp\,f}f(\lambda)e^\lambda=f=-\sigma_\alpha f=-\sum_{\lambda\in Supp\,f}f(\lambda)\sigma_\alpha e^\lambda=-\sum_{\lambda\in Supp\,f}f(\lambda)e^{\sigma_\alpha\lambda},$$

pa slijedi $f(\lambda_0) = -f(\lambda_0)$, tj. $f(\lambda_0) = 0$. To je u suprotnosti s pretpostavkom da je $\lambda_0 \in Supp\, f$. Ova kontradikcija pokazuje da je $(Supp\, f) \cap H_\alpha = \emptyset$ $\forall \alpha \in R$. Prema tome, nosač $Supp\, f$ je sadržan u komplementu unije hiperravnina $H_\alpha$, $\alpha \in R$, a to je unija svih Weylovih komora u prostoru $V$. Weylova grupa djeluje prosto tranzitivno na skupu svih Weylovih komora, dakle, svaki element nosača $Supp\, f$ na jedinstven se način može pisati u obliku $\sigma\lambda$, $\lambda \in P \cap C = P_{++}$, $\sigma \in W$. Dakle,

$$f = \sum_{\lambda \in P_{++}} \sum_{\sigma \in W} f(\sigma\lambda) e^{\sigma\lambda}.$$

Međutim, za svaki $\sigma \in W$ i svaki $\lambda \in P$ imamo

$$f(\sigma\lambda) = (\sigma^{-1} f)(\lambda) = sign(\sigma^{-1}) f(\lambda) = sign(\sigma) f(\lambda).$$

Stoga iz prethodne jednakosti nalazimo

$$f = \sum_{\lambda \in P_{++}} \sum_{\sigma \in W} sign(\sigma) f(\lambda) e^{\sigma\lambda} = \sum_{\lambda \in P_{++}} f(\lambda) J(e^\lambda).$$

Dakle, svaka $f \in \mathbb{Z}[P]_W$ je linearna kombinacija funkcija $J(e^\lambda)$, $\lambda \in P_{++}$. Time je propozicija dokazana.

Kao i prije označimo sa $\rho$ polusumu pozitivnih korijena:

$$\rho = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in R_+} \alpha.$$

Definirajmo sada $q \in \mathbb{Z}[\mathfrak{h}^*]$ na sljedeći način:

$$q = \prod_{\alpha \in R_+} (e^{\frac{\alpha}{2}} - e^{-\frac{\alpha}{2}}) = e^\rho \bullet \prod_{\alpha \in R_+} (1 - e^{-\alpha}) = e^{-\rho} \bullet \prod_{\alpha \in R_+} (e^\alpha - 1);$$

pri tome se, naravno, znak $\prod$ odnosi na produkt u prstenu $\mathbb{Z}[\mathfrak{h}^*]$, ili u daljnjem i na produkt u prstenu $\mathbb{Z}\langle\mathfrak{h}^*\rangle$. Iz drugog (i trećeg) prikaza vidi se da je $Supp\, q \subseteq P$, dakle, $q \in \mathbb{Z}[P]$.

**Propozicija 6.6.4.** $(a)$ *Vrijedi* $q \in \mathbb{Z}[P]_W$.

$(b)$ *Vrijedi*

$$q = J(e^\rho) = \sum_{\sigma \in W} sign(\sigma) e^{\sigma\rho}.$$

$(c)$ *Za svaki* $\lambda \in P$ *element* $J(e^\lambda)$ *je u prstenu* $\mathbb{Z}[P]$ *djeljiv sa* $q$.

$(d)$ $f \mapsto q \bullet f$ *je bijekcija sa* $\mathbb{Z}[P]^W$ *na* $\mathbb{Z}[P]_W$.

**Dokaz:** $(a)$ Prema lemi 3.5.5. za $\alpha \in B$ refleksija $\sigma_\alpha$ permutira skup $R_+ \setminus \{\alpha\}$ i, naravno, $\sigma_\alpha \alpha = -\alpha$. Dakle,

$$\sigma_\alpha q = \prod_{\beta \in R_+} (e^{\frac{\sigma_\alpha \beta}{2}} - e^{-\frac{\sigma_\alpha \beta}{2}}) = (e^{-\frac{\alpha}{2}} - e^{\frac{\alpha}{2}}) \bullet \prod_{\beta \in R_+ \setminus \{\alpha\}} (e^{\frac{\beta}{2}} - e^{-\frac{\beta}{2}}) = -q = sign(\sigma_\alpha) q.$$

Budući da refleksije $\sigma_\alpha$, $\alpha \in B$, generiraju grupu $W$, odatle slijedi $\sigma q = sign(\sigma) q$ $\forall \sigma \in W$, odnosno, $q \in \mathbb{Z}[P]_W$.

$(b)$ Prema propoziciji 6.6.3. vrijedi

$$q = \sum_{\lambda \in P_{++}} c_\lambda J(e^\lambda) \quad \text{za neke } c_\lambda \in \mathbb{Z};$$

pri tome je, naravno, $c_\lambda \neq 0$ za samo konačno mnogo $\lambda$. S druge strane, iz jednakosti

$$q = e^\rho \bullet \prod_{\alpha \in R_+} (1 - e^{-\alpha})$$

vidimo da je $Supp\, q \subseteq \rho - Q_+$ i da je $q(\rho) = 1$. Kako je $P_{++} \cap (\rho - Q_+) = \{\rho\}$, odatle slijedi da je $q(\lambda) = 0$ za svaki $\lambda \in P_{++} \setminus \{\rho\}$. Prema tome, $Supp\, q = \{\sigma\rho;\ \sigma \in W\}$, a kako je $q$ antiinvarijantan element vrijedi $q(\sigma\rho) = sign(\sigma) q(\rho) = sign(\sigma)$. Dakle,

$$q = \sum_{\sigma \in W} sign(\sigma) e^{\sigma\rho} = J(e^\rho).$$

($c$) Neka je $\alpha \in R$ i neka je $A$ skup predstavnika svih lijevih klasa u grupi $W$ u odnosu na podgrupu $\{id, \sigma_\alpha\}$. To znači da je $W = A \cup \sigma_\alpha A$ disjunktna unija. Neka je sada $\lambda \in P$. Tada imamo

$$J(e^\lambda) = \sum_{\sigma \in A} sign(\sigma) e^{\sigma\lambda} + \sum_{\sigma \in A} sign(\sigma_\alpha \sigma) e^{\sigma_\alpha \sigma \lambda}.$$

Za $\sigma \in A$ imamo $\sigma_\alpha \sigma \lambda = \sigma\lambda + n(\sigma)\alpha$ za neki $n(\sigma) \in \mathbb{Z}$. Nadalje, $sign(\sigma_\alpha \sigma) = -sign(\sigma)$. Dakle,

$$J(e^\lambda) = \sum_{\sigma \in A} sign(\sigma) e^{\sigma\lambda} \bullet (1 - e^{n(\sigma)\alpha}).$$

Ako je $n(\sigma) \geq 0$, očito je element $1 - e^{n(\sigma)\alpha} = 1 - (e^\alpha)^{n(\sigma)}$ djeljiv sa $1 - e^\alpha$. On je djeljiv sa $1 - e^\alpha$ i ako je $n(\sigma) < 0$ jer je $1 - e^{n(\sigma)\alpha} = -e^{n(\sigma)\alpha} \bullet (1 - e^{-n(\sigma)\alpha})$. Dakle, $J(e^\lambda)$ je u prstenu $\mathbb{Z}[P]$ djeljiv sa $1 - e^\alpha$ za svaki $\alpha \in R$. Kako je sistem korijena $R = R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ reduciran, svaka dva korijena $\alpha, \beta \in R_+$ su neproporcionalna. Prema propoziciji 6.6.2. za $\alpha, \beta \in R_+$, $\alpha \neq \beta$, elementi $1 - e^\alpha$ i $1 - e^\beta$ prstena $\mathbb{Z}[P]$ su relativno prosti. Kako je prema propoziciji 6.6.1. prsten $\mathbb{Z}[P]$ faktorijalan, slijedi da je $J(e^\lambda)$ djeljiv s produktom $\prod_{\alpha \in R_+} (1 - e^\alpha)$, dakle i sa $q = e^{-\rho} \bullet \prod_{\alpha \in R_+} (1 - e^\alpha)$.

($d$) Ako je $f \in \mathbb{Z}[P]^W$, očito je $q \bullet f \in \mathbb{Z}[P]_W$. Neka je $g \in \mathbb{Z}[P]_W$. Prema propoziciji 6.6.3. $g$ je $\mathbb{Z}-$linearna kombinacija elemenata $J(e^\lambda)$, $\lambda \in P_{++}$. Stoga je prema tvrdnji ($c$) element $g$ u prstenu $\mathbb{Z}[P]$ djeljiv sa $q$. Neka je $f \in \mathbb{Z}[P]$ takav da je $g = q \bullet f$. Tada za svaki $\sigma \in W$ imamo

$$sign(\sigma)(q \bullet f) = sign(\sigma) g = \sigma g = (\sigma q) \bullet (\sigma f) = sign(\sigma) q \bullet (\sigma f).$$

Prsten $\mathbb{Z}[P]$ je integralna domena, pa slijedi $\sigma f = f\ \forall \sigma \in W$, tj. $f \in \mathbb{Z}[P]^W$. Prema tome, $f \mapsto q \bullet f$ je surjekcija sa $\mathbb{Z}[P]^W$ na $\mathbb{Z}[P]_W$. Zbog integralnosti prstena $\mathbb{Z}[P]$ to je preslikavanje i injekcija, dakle, bijekcija.

Definiramo sada sljedeći element prstena $\mathbb{Z}\langle \mathfrak{h}^* \rangle$ :

$$\mathcal{K} = \sum_{\gamma \in Q_+} \mathcal{P}(\gamma) e^{-\gamma}$$

gdje je $\mathcal{P} : Q_+ \to \mathbb{N}$ kao i prije oznaka za Kostantovu funkciju. Nadalje, za $\alpha \in R_+$ neka je $f_\alpha \in \mathbb{Z}\langle \mathfrak{h}^* \rangle$ funkcija definirana sa

$$f_\alpha(\lambda) = \begin{cases} 1 & \text{ako je } \lambda \in Z_+ \alpha \\ 0 & \text{inače} \end{cases}, \qquad \text{tj.} \quad f_\alpha = \sum_{k \in \mathbb{Z}_+} e^{-k\alpha}.$$

**Propozicija 6.6.5.** *U prstenu $\mathbb{Z}\langle\mathfrak{h}^*\rangle$ vrijede jednakosti*

(*a*)
$$\mathcal{K} = \prod_{\alpha\in R_+} f_\alpha.$$

(*b*)
$$\mathcal{K} \bullet e^{-\rho} \bullet q = 1.$$

*Posebno, element $q$ je invertibilan u prstenu $\mathbb{Z}\langle\mathfrak{h}^*\rangle$.*

**Dokaz:** (*a*) Neka je $|R_+| = s$ i numerirajmo pozitivne korijene od 1 do $s : R_+ = \{\alpha_1, \dots, \alpha_s\}$. Budući da je Kostantova fukcija $\mathcal{P}$ definirana sa

$$\mathcal{P}(\lambda) = \left|\left\{(k_1, \dots, k_s) \in \mathbb{Z}_+^s;\ \lambda = \sum_{i=1}^s k_i\alpha_i\right\}\right|,$$

iz formule (6.10) slijedi

$$\prod_{j=1}^s f_{\alpha_j} = \prod_{j=1}^s \left(\sum_{k_j\in\mathbb{Z}_+} e^{-k_j\alpha_j}\right) =$$

$$= \sum_{\lambda\in Q_+}\left(\sum_{(k_1,\dots,k_s)\in\mathbb{Z}_+^s,\ -\lambda=-k_1\alpha_1-\cdots-k_s\alpha_s} 1\right) e^{-\lambda} = \sum_{\lambda\in Q_+}\mathcal{P}(\lambda)e^{-\lambda} = \mathcal{K}.$$

(*b*) U prstenu $\mathbb{Z}\langle\mathfrak{h}^*\rangle$ za svaki $\alpha \in R_+$ očito vrijedi

$$(1 - e^{-\alpha}) \bullet f_\alpha = (1 - e^{-\alpha}) \bullet (1 + e^{-\alpha} + e^{-2\alpha} + \cdots) = 1.$$

Odatle i iz (*a*) nalazimo

$$\mathcal{K} \bullet e^{-\rho} \bullet q = \prod_{\alpha\in R_+} f_\alpha \bullet e^{-\rho} \bullet e^{\rho} \bullet \prod_{\alpha\in R_+}(1 - e^{-\alpha}) = \prod_{\alpha\in R_+} f_\alpha \bullet (1 - e^{-\alpha}) = 1.$$

**Propozicija 6.6.6.** *Za $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ Vermaov modul $M(\lambda)$ ima karakter, on je u $\mathbb{Z}\langle\mathfrak{h}^*\rangle$ i vrijedi*

$$ch_{M(\lambda)} = q^{-1} \bullet e^{\lambda+\rho}.$$

**Dokaz:** Prema propoziciji 6.2.3. modul $M(\lambda)$ je težinski i njegove težine čine skup $\lambda - Q_+$. Nadalje, svaki je težinski potprostor konačnodimenzionalan i multiplicitet težine $\mu \in \lambda - Q_+$ jednak je $\mathcal{P}(\lambda - \mu)$. Dakle, modul $M(\lambda)$ ima karakter $ch_{M(\lambda)} \in \mathbb{Z}\langle\mathfrak{h}^*\rangle$ i vrijedi

$$ch_{M(\lambda)}(\mu) = \dim M(\lambda)_\mu = \mathcal{P}(\lambda - \mu), \qquad \forall\mu \in \lambda - Q_+.$$

Odatle je

$$ch_{M(\lambda)} = \sum_{\gamma\in Q_+}\mathcal{P}(\gamma)e^{\lambda-\gamma} = e^\lambda\mathcal{K}.$$

Prema tvrdnji (*b*) propozicije 6.6.5. u prstenu $\mathbb{Z}\langle\mathfrak{h}^*\rangle$ vrijedi $\mathcal{K} = q^{-1}e^\rho$, pa slijedi

$$ch_{M(\lambda)} = e^\lambda q^{-1}e^\rho = q^{-1}e^{\lambda+\rho}.$$

**Lema 6.6.7.** *Neka je* $\lambda_0 \in \mathfrak{h}^*$ *i neka je* $V$ $U(\mathfrak{g})-$*modul sa sljedećim svojstvima:*

$(a)$ *Modul* $V$ *ima infinitezimalni karakter* $\chi_{\lambda_0}$.

$(b)$ *Modul* $V$ *ima karakter i* $ch_V \in \mathbb{Z}\langle\mathfrak{h}^*\rangle$.

*Neka je*

$$D_V = \{\lambda \in W(\lambda_0 + \rho) - \rho;\ (\lambda + Q_+) \cap Supp\, ch_V \neq \emptyset\}.$$

*Tada je* $ch_V$ $\mathbb{Z}-$*linearna kombinacija karaktera* $ch_{M(\lambda)}$ *za* $\lambda \in D_V$.

**Dokaz:** Pretpostavimo da je $V \neq \{0\}$. Neka je $\mu$ element nosača $Supp\, ch_V$ takav da je $(\mu + Q_+) \cap Supp\, ch_V = \{\mu\}$. Stavimo $m = ch_V(\mu) = \dim V_\mu$. Budući da je $V_{\mu+\alpha} = \{0\}$ za svaki $\alpha \in R_+$, vrijedi $\mathfrak{n}V_\mu = \{0\}$. Prema tvrdnji $(a)$ propozicije 6.2.4. postoji preplitanje $\varphi : M(\mu)^m \to V$ takvo da je restrikcija $\varphi|(M(\mu)_\mu)^m$ bijekcija sa $(M(\mu)_\mu)^m$ na $V_\mu$. Prema tome, infinitezimalni karakter $\chi_\mu$ od $M(\mu)$ jednak je $\chi_{\lambda_0}$. Prema teoremu 6.5.4. slijedi $\mu \in W(\lambda_0 + \rho) - \rho$, dakle, $\mu \in D_V$. To pokazuje da je $D_V \neq \emptyset$.

Ako je $D_V = \emptyset$, onda je prema dokazanom $V = \{0\}$ i tvrdnja je trivijalna. Dokaz ćemo sada provesti indukcijom u odnosu na $|D_V| \in \mathbb{Z}_+$. Neka su $\mu, m, \varphi$ kao malo prije. Neka je $U$ jezgra preplitanja $\varphi$, $W$ slika od $\varphi$ i $T = V/W$. Tada imamo egzaktan niz preplitanja

$$\{0\} \longrightarrow U \longrightarrow M(\mu)^m \xrightarrow{\varphi} V \longrightarrow T \longrightarrow \{0\}.$$

Prema propoziciji 6.6.6. i prema zadatku 6.9. moduli $U$ i $T$ imaju karaktere koji pripadaju $\mathbb{Z}\langle\mathfrak{h}^*\rangle$ i iz gornjeg egzaktnog niza slijedi

$$ch_U - ch_{M(\mu)^m} + ch_V - ch_T = 0,$$

odnosno,

$$ch_V = m \cdot ch_{M(\mu)} - ch_U + ch_T. \tag{6.11}$$

Nadalje, moduli $U$ i $T$ imaju infinitezimalni karakter $\chi_{\lambda_0}$. Očito je $D_T \subseteq D_V$. Nadalje,

$$(\mu + Q_+) \cap Supp\, ch_V = \{\mu\} \quad \Longrightarrow \quad \mu \notin Supp\, ch_T \quad \Longrightarrow \quad \mu \notin D_T.$$

To pokazuje da je $|D_T| < |D_V|$.

Ako je $\lambda \in D_U$, tada je

$$(\lambda + Q_+) \cap Supp\, ch_T \neq \emptyset.$$

Međutim, $U$ je podmodul od $M(\mu)^m$, pa je pogotovo

$$\emptyset \neq (\lambda + Q_+) \cap Supp\, ch_{M(\mu)} = (\lambda + Q_+) \cap (\mu - Q_+).$$

Odatle je $\mu \in \lambda + Q_+$, pa zaključujemo da je

$$(\lambda + Q_+) \cap Supp\, ch_V \neq \emptyset,$$

odnosno da je $\lambda \in D_V$. Time je dokazano da je i $D_U \subseteq D_V$. Napokon, kako je $\varphi|(M(\mu)_\mu)^m$ injekcija to je $U \cap (M(\mu)_\mu)^m = \{0\}$, dakle, $\mu \notin D_U$. Prema tome je i $|D_U| < |D_V|$.

Dokazano pokazuje da se pretpostavka indukcije može primijeniti na module $U$ i $T$, pa tvrdnja slijedi i za modul $V$ zbog jednakosti (6.11).

**Teorem 6.6.8.** (**Weylova formula karaktera**) *Neka je* $V$ *konačnodimenzionalan* $U(\mathfrak{g})-$*modul s najvećom težinom* $\lambda \in P_+$. *Tada u prstenu* $\mathbb{Z}[P]$ *vrijedi jednakost*

$$\left(\sum_{\sigma \in W} sign(\sigma) e^{\sigma\rho}\right) \bullet ch_V = \sum_{\sigma \in W} sign(\sigma) e^{\sigma(\lambda+\rho)}.$$

**Dokaz:** Modul $V$ izomorfan je kvocijentnom modulu $L(\lambda)$ Vermaovog modula $M(\lambda)$, pa on ima infinitezimalni karakter $\chi_\lambda$. Prema propoziciji 6.6.6. i prema lemi 6.6.7. $q \bullet ch_V$ je $\mathbb{Z}-$linearna kombinacija funkcija $e^{\sigma(\lambda+\rho)}$, $\sigma \in W$. Za $\sigma \in W$ vrijedi $\sigma q = sign(\sigma)q$, a prema prema propoziciji 6.3.1. je $\sigma ch_V = ch_V$. Prema tome, element $q \bullet ch_V$ je antiinvarijantan. Dakle, postoji $c \in \mathbb{Z}$ takav da je

$$q \bullet ch_V = c \sum_{\sigma \in W} sign(\sigma) e^{\sigma(\lambda+\rho)}.$$

Napokon, za svaku težinu $\mu \neq \lambda$ modula $V$ je $\lambda - \mu \in Q_+ \setminus \{0\}$. Kako je

$$q = e^\rho \bullet \prod_{\alpha \in R_+} (1 - e^{-\alpha}),$$

slijedi da je u prikazu $q \bullet ch_V$ koeficijent uz $e^{\lambda+\rho}$ jednak 1. To pokazuje da je $c = 1$ i time je teorem dokazan.

**Korolar 6.6.9.** (**Kostantova formula**) *Neka je $V$ konačnodimenzionalan $U(\mathfrak{g})-$modul s najvećom težinom $\lambda$. Tada je*

$$ch_V(\mu) = \dim\, V_\mu = \sum_{\sigma \in W} sign(\sigma) \mathcal{P}(\sigma(\lambda+\rho) - (\mu+\rho)).$$

**Dokaz:** Zbog tvrdnje $(b)$ propozicije 6.6.5. imamo

$$ch_V = (\mathcal{K} \bullet e^{-\rho}) \bullet (q \bullet ch_V) = \left( \sum_{\gamma \in Q_+} \mathcal{P}(\gamma) e^{-\gamma-\rho} \right) \bullet \left( \sum_{\sigma \in W} sign(\sigma) e^{\sigma(\lambda+\rho)} \right).$$

Dakle,

$$ch_V(\mu) = \sum_{\gamma \in Q_+,\ \sigma \in W,\ -\rho-\gamma+\sigma(\lambda+\rho)=\mu} \mathcal{P}(\gamma) sign(\sigma) = \sum_{\sigma \in W} sign(\sigma) \mathcal{P}(\sigma(\lambda+\rho) - \mu - \rho).$$

**Teorem 6.6.10.** *Neka je $V$ konačnodimenzionalan $U(\mathfrak{g})-$modul s najvećom težinom $\lambda$. Tada je*

$$\dim\, V = \frac{\prod_{\alpha \in R_+} (\lambda+\rho|\alpha)}{\prod_{\alpha \in R_+} (\rho|\alpha)} = \prod_{\alpha \in R_+} \left( 1 + \frac{(\lambda|\alpha)}{(\rho|\alpha)} \right).$$

*Pri tome je $(\,\cdot\,|\,\cdot\,)$ bilo koji $W-$invarijantni skalarni produkt na $span_{\mathbb{R}} R$ (npr. onaj dobiven iz Killingove forme ili onaj iz propozicije* 3.2.4).

**Dokaz:** Kako je $V$ direktna suma svojih težinskih potprostora, očito je

$$\dim\, V = \sum_{\mu \in \mathfrak{h}^*} \dim\, V_\mu.$$

Za $\nu \in P$ neka je $\varphi_\nu$ jedinstveno $\mathbb{Z}-$linearno preslikavanje prstena $\mathbb{Z}[P]$ u prsten formalnih redova $\mathbb{R}[[T]]$ u jednoj varijabli s koeficijentima iz $\mathbb{R}$ takvo da vrijedi

$$\varphi_\nu(e^\mu) = e^{(\nu|\mu)T} = \sum_{k \in \mathbb{Z}_+} \frac{(\nu|\mu)^k}{k!} T^k, \qquad \mu \in P.$$

Tada je za proizvoljne $\lambda, \mu \in P$

$$\varphi_\nu(e^\mu \bullet e^\lambda) = \varphi_\nu(e^{\mu+\lambda}) = e^{(\nu|\mu+\lambda)T} = e^{(\nu|\mu)T} e^{(\nu|\lambda)T} = \varphi_\nu(e^\mu)\varphi_\nu(e^\lambda).$$

To pokazuje da je preslikavanje $\varphi_\nu$ homomorfizam prstenova za svaki $\nu \in P$. Očito je taj homomorfizam unitalan.

Uočimo sada da je za $\nu \in P$ formalni red $\varphi_\nu(ch_V)$ jednak

$$\varphi_\nu(ch_V) = \varphi_\nu \left( \sum_\mu (\dim V_\mu) e^\mu \right) = \sum_\mu (\dim V_\mu) e^{(\nu|\mu)T}.$$

Prema tome, za bilo koji $\nu \in P$ konstantni član formalnog reda $\varphi_\nu(ch_V)$ jednak je

$$\sum_\mu \dim V_\mu = \dim V.$$

Za $\mu, \nu \in P$ imamo

$$\varphi_\nu(J(e^\mu)) = \sum_{\sigma \in W} sign(\sigma) e^{(\nu|\sigma\mu)T} = \sum_{\sigma \in W} sign(\sigma^{-1}) e^{(\sigma^{-1}\nu|\mu)T} = \varphi_\mu(J(e^\nu)).$$

Posebno, imamo

$$\varphi_\rho(J(e^\mu)) = \varphi_\mu(J(e^\rho)) = \varphi_\mu(q) = \varphi_\mu \left( e^\rho \bullet \prod_{\alpha \in R_+} (1 - e^{-\alpha}) \right) = e^{(\mu|\rho)T} \prod_{\alpha \in R_+} \left(1 - e^{-(\mu|\alpha)T}\right).$$

Stavimo li kao i prije $|R_+| = s$, slijedi

$$\varphi_\rho(J(e^\mu)) \equiv T^s \prod_{\alpha \in R_+} (\mu|\alpha) \qquad \left(\mathrm{mod}\ \ T^{s+1}\mathbb{R}[[T]]\right). \tag{6.12}$$

Weylova formula karaktera može se pisati $J(e^{\lambda+\rho}) = J(e^\rho) \bullet ch_V$. Odatle primjenom $\varphi_\rho$ dobivamo

$$\varphi_\rho(J(e^{\lambda+\rho})) = \varphi_\rho(J(e^\rho))\varphi_\rho(ch_V),$$

pa iz (6.12) slijedi

$$T^s \prod_{\alpha \in R_+} (\lambda + \rho|\alpha) \equiv \varphi_\rho(ch_V) \cdot T^s \prod_{\alpha \in R_+} (\rho|\alpha) \qquad \left(\mathrm{mod}\ \ T^{s+1}\mathbb{R}[[T]]\right).$$

To znači da postoji formalni red $P \in \mathbb{R}[[T]]$ takav da je

$$\varphi_\rho(ch_V) \cdot T^s \prod_{\alpha \in R_+} (\rho|\alpha) = T^s \prod_{\alpha \in R_+} (\lambda + \rho|\alpha) + T^{s+1}P.$$

Skratimo li sa $T^s$, dobivamo

$$\varphi_\rho(ch_V) \prod_{\alpha \in R_+} (\rho|\alpha) = \prod_{\alpha \in R_+} (\lambda + \rho|\alpha) + TP.$$

Konstantni član desne strane je $\prod_{\alpha \in R_+}(\lambda + \rho|\alpha)$. Kako je $\dim V$ konstantni član formalnog reda $\varphi_\rho(ch_V)$, tvrdnja teorema slijedi.

**Teorem 6.6.11.** *Neka su $V$ i $U$ prosti $U(\mathfrak{g})-$moduli s najvećim težinama $\lambda$ i $\mu$. Multiplicitet $m(\lambda, \mu; \nu)$ prostog $U(\mathfrak{g})-$modula s najvećom težinom $\nu$ u tenzorskom produktu $V \otimes U$ jednak je*

$$m(\lambda, \mu; \nu) = \sum_{\sigma, \tau \in W} sign(\sigma\tau) \mathcal{P}(\tau(\lambda + \rho) + \sigma(\mu + \rho) - \nu - 2\rho).$$

**Dokaz:** Stavimo
$$ch_V = \sum_{\omega \in P} m_\omega e^\omega.$$
Nadalje, za $\xi \in P_+$ neka je $ch_\xi$ karakter prostog $U(\mathfrak{g})-$modula s najvećom težinom $\xi$. Tada vrijedi
$$ch_V \bullet ch_U = ch_{V \otimes U} = \sum_{\xi \in P_+} m(\lambda, \mu; \xi) ch_\xi.$$
Pomnožimo li obje strane sa $q$, zbog Weylove formule karaktera primijenjene na $ch_\xi$ i na $ch_U$ dobivamo
$$\sum_{\xi \in P_+} m(\lambda, \mu; \xi) J(e^{\xi+\rho}) = ch_V \bullet J(e^{\mu+\rho}) = \left( \sum_{\omega \in P} m_\omega e^\omega \right) \bullet \left( \sum_{\sigma \in W} sign(\sigma) e^{\sigma(\mu+\rho)} \right).$$
Odatle je
$$\sum_{\xi \in P_+} m(\lambda, \mu; \xi) J(e^{\xi+\rho}) = \sum_{\gamma \in P} \left( \sum_{\sigma \in W} sign(\sigma) m_{\gamma+\rho-\sigma(\mu+\rho)} \right) e^{\gamma+\rho}. \tag{6.13}$$
Ako je $\xi \in P_+$, onda je $\xi + \rho \in P_{++}$, pa za svaki $\sigma \in W$, $\sigma \neq id$, vrijedi $\sigma(\xi+\rho) \notin P_+$. Prema tome, koeficijent uz $e^{\nu+\rho}$ u izrazu $\sum_{\xi \in P_+} m(\lambda, \mu; \xi) J(e^{\xi+\rho})$ jednak je $m(\lambda, \mu; \nu)$. Sada iz (6.13) dobivamo
$$m(\lambda, \mu; \nu) = \sum_{\sigma \in W} sign(\sigma) m_{\nu+\rho-\sigma(\mu+\rho)},$$
a odatle pomoću Kostantove formule nalazimo
$$m(\lambda, \mu; \nu) = \sum_{\sigma, \tau \in W} sign(\sigma) sign(\tau) \mathcal{P}(\tau(\lambda+\rho) - (\nu + \rho - \sigma(\mu+\rho) + \rho)).$$
To je upravo tvrdnja teorema, jer je
$$\tau(\lambda+\rho) - (\nu+\rho-\sigma(\mu+\rho)+\rho) = \tau(\lambda+\rho) + \sigma(\mu+\rho) - \nu - 2\rho \quad \text{i} \quad sign(\sigma)sign(\tau) = sign(\sigma\tau).$$

# Bibliografija


[1] N. Bourbaki, *Lie Groups and Lie Algebras*, Ch. 1−3, Springer−Verlag, 2nd printing, Berlin−Heidelberg−New York−London−Paris−Tokyo, 1989; Ch. 4−6, Springer−Verlag, Berlin−Heidelberg−New York, 2002; Ch. 7−9, Springer−Verlag, Berlin−Heidelberg, 2005.

[2] C. Chevalley, *Théorie des groupes de Lie*, Hermann, Paris, 1968.

[3] J. Dixmier, *Enveloping Algebras*, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1996.

[4] K. Erdmann and M.J. Wildon, *Introduction to Lie Algebras*, Springer−Verlag, London, 2006.

[5] W. Fulton and J. Harris, *Representation Theory, A First Course*, Springer−Verlag, New York, 2004.

[6] W.A. de Graaf, *Lie Algebras: Theory and Algorithms*, North−Holland, Elsevier, Amsterdam−Lausanne−New York−Oxford−Shannon−Singapore−Tokyo, 2000.

[7] S. Helgason, *Differential Geometry, Lie Groups, and Symmetric Spaces*, Academic Press, New York−San Francisco−London, 1978.

[8] J.E. Humphreys, *Introduction to Lie Algebras and Representation Theory*, Springer−Verlag, Berlin−Heidelberg−New York, 1972.

[9] A.W. Knapp, *Lie Groups Beyond an Introduction*, 2nd ed., Birkhäuser, Boston−Basel−Berlin, 2002.

[10] A.W. Knapp, *Representations Theory of Semisimple Groups, An Overview Based on Examples*, Princeton Univ. Press, Princeton−Oxford, 1986.

[11] A.W. Knapp, *Lie Groups, Lie Algebras, and Cohomology*, Princeton Univ. Press, Princeton, 1988.

[12] A.W. Knapp and D.A. Vogan, *Cohomological Induction and Unitary Representations*, Princeton Univ. Press, Princeton, 1995.

[13] D.Miličić, *Lectures on Lie groups*, www.math.utah.edu/∼milicic/lie.pdf

[14] C. Procesi, *Lie Groups, An Approach through Invariants and Representations*, Springer−Verlag, New York 2007.

[15] N.R. Wallach, *Harmonic analysis on homogeneous spaces*, Marcel Dekker, New York, 1973.

[16] N.R. Wallach, *Real Reductive Groups I*, Academic Press, Boston−San Diego−New York−Berkeley−London−Sidney−Tokyo−Toronto, 1988.

[17] N.R. Wallach, *Real Reductive Groups II*, Academic Press, Boston−San Diego−New York−London−Sidney−Tokyo−Toronto, 1992.

[18] G. Warner, *Harmonic Analysis on Semi-Simple Lie Groups I, II*, Springer−Verlag, Berlin−Heidelberg−New York, 1972.