ODABRANA POGLAVLJA TEORIJE REPREZENTACIJA

REPREZENTACIJE LOKALNO KOMPAKTNIH GRUPA

Prof. dr. sc. Hrvoje Kraljević

Predavanja održana na dodiplomskom studiju u ljetnom semestru 2007./2008.
PMF-Matematički odjel Sveučilišta u Zagrebu

Zagreb, lipanj 2008.

Sadržaj

Poglavlje 1

Lokalno kompaktne grupe

1.1 Funkcije i mjere na lokalno kompaktnim prostorima

Neka je T lokalno kompaktan Hausdorffov topološki prostor. Sa $C(T)$ ćemo označavati prostor svih neprekidnih funkcija $f : T \to \mathbb{C}$. Za $f \in C(T)$ stavljamo

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(t)|;\ t \in T\}.$$

Za $f \in C(T)$ neka je $Supp\, f$ **nosač funkcije** f :

$$Supp\, f = Cl(\{t \in T;\ f(t) \neq 0\}).$$

Pri tome $Cl(S)$ označava zatvarač podskupa $S \subseteq T$.

Neka je $C_0(T)$ potprostor svih funkcija iz $C(T)$ s kompaktnim nocačem. **Mjera** na T je svaki linearni funkcional $\mu : C_0(T) \to \mathbb{C}$ koji ima sljedeće svojstvo neprekidnosti: za svaki kompaktan skup $K \subseteq T$ postoji $M_K > 0$ tako da vrijedi:

$$f \in C_0(T), \quad Supp\, f \subseteq K \qquad \Longrightarrow \qquad |\mu(f)| \leq M_K \|f\|_\infty.$$

Sa $\mathfrak{M}(T)$ ćemo označavati skup svih mjera na T. Očito je $\mathfrak{M}(T)$ kompleksan vektorski prostor.

Neka je $C_0^r(T)$ realan vektorski prostor svih realnih funkcija iz $C_0(T)$. **Realna mjera** na T je mjera $\mu \in \mathfrak{M}(T)$ takva da je $\mu(f) \in \mathbb{R}\ \forall f \in C_0^r(T)$. Realan vektorski prostor realnih mjera označavat ćemo sa $\mathfrak{M}^r(T)$.

Lema 1.1.1. *Linearni funcional $\mu : C_0^r(T) \to \mathbb{R}$ proširuje se do mjere na T ako i samo ako za svaki kompaktan skup $K \subseteq T$ postoji $M_K > 0$ takav da vrijedi:*

$$f \in C_0^r(T), \quad Supp\, f \subseteq K \qquad \Longrightarrow \qquad |\mu(f)| \leq M_K \|f\|_\infty.$$

Dokaz: Uvjet je očito zadovoljen ako se μ proširuje do mjere na T.

Pretpostavimo da je uvjet zadovoljen. Definiramo proširenje $\mu : C_0(T) \to \mathbb{C}$ po linearnosti:

$$\mu(f_1 + if_2) = \mu(f_1) + i\mu(f_2), \qquad f_1, f_2 \in C_0^r(T).$$

Neka je $K \subseteq T$ kompaktan skup i neka je $M_K > 0$ takav da vrijedi uvjet iz iskaza leme. Neka je $g \in C_0(T)$ takva da je $Supp\, g \subseteq K$. Tada je $\mu(g) = |\mu(g)|\mathrm{e}^{i\alpha}$ za neki $\alpha \in \mathbb{R}$. Stavimo

$$\mathrm{e}^{-i\alpha} g = f_1 + if_2, \qquad f_1, f_2 \in C_0^r(T).$$

Tada je $Supp\, f_1 \subseteq K$ pa imamo redom

$$|\mu(g)| = \mathrm{e}^{-i\alpha}\mu(g) = \mu(\mathrm{e}^{-i\alpha} g) = \mu(f_1) + i\mu(f_2) = \mu(f_1) \leq M_K \|f_1\|_\infty \leq M_K \|g\|_\infty.$$

Dakle, proširenje μ je mjera na T.

Neka je $C_0^+(T)$ konus svih nenegativnih funkcija iz $C_0^r(T)$. Mjera $\mu \in \mathfrak{M}(T)$ zove se **pozitivna** ako je $\mu(f) \geq 0$ $\forall f \in C_0^+(T)$. Skup svih pozitivnih mjera na T označavat ćemo sa $\mathfrak{M}^+(T)$. Očito je $\mathfrak{M}^+(T) \subseteq \mathfrak{M}^r(T)$ i to je konus.

Sljedeća propozicija pokazuje da već sama pozitivnost linearnog funkcionala ima za posljedicu definirano svojstvo neprekidnosti.

Propozicija 1.1.2. *Neka je $\nu : C_0^+(T) \to \mathbb{R}_+ = [0, +\infty\rangle$ preslikavanje sa sljedeća dva svojstva:*

(*a*) $\nu(f+g) = \nu(f) + \nu(g)$ $\forall f, g \in C_0^+(T)$.

(*b*) $\nu(\alpha f) = \alpha\nu(f)$ $\forall \alpha \in \mathbb{R}_+$ *i* $\forall f \in C_0^+(T)$.

Tada se ν jedinstveno proširuje do mjere μ na T. Mjera μ je pozitivna.

Dokaz: Za $f \in C_0^r(T)$ definiramo $f^+, f^- \in C_0^+(T)$ sa

$$f^+(t) = \max\{f(t), 0\}, \qquad f^-(t) = -\min\{f(t), 0\}.$$

Tada je očito $f = f^+ - f^-$. Nadalje, ako su $\varphi, \psi \in C_0^+(T)$ takve da je $f = \varphi - \psi$, tada je $f^+ \leq \varphi$ i $f^- \leq \psi$ svuda na T.

Definiramo sada $\mu : C_0^r(T) \to \mathbb{R}$ sa

$$\mu(f) = \nu(f^+) - \nu(f^-), \qquad f \in C_0^r(T).$$

Za $\alpha > 0$ i $f \in C_0^r(T)$ očito je $(\alpha f)^+ = \alpha f^+$ i $(\alpha f)^- = \alpha f^-$. S druge strane, ako je $\alpha < 0$ i $f \in C_0^r(T)$, tada je $(\alpha f)^+ = -\alpha f^-$ i $(\alpha f)^- = -\alpha f^+$. Odatle korištenjem svojstva (b) iz iskaza propozicije lako slijedi da vrijedi

$$\mu(\alpha f) = \alpha\mu(f), \qquad f \in C_0^r(T), \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Neka su sada $f, g \in C_0^r(T)$. Tada je $f + g = f^+ + g^+ - (f^- + g^-)$, pa je $(f+g)^+ \leq f^+ + g^+$ i $(f+g)^- \leq f^- + g^-$. Slijedi da je

$$h = f^+ + g^+ - (f+g)^+ = f^- + g^- - (f+g)^- \in C_0^+(T).$$

Korištenjem svojstva (a) iz iskaza propozicije imamo redom:

$$\mu(f) + \mu(g) = \nu(f^+) - \nu(f^-) + \nu(g^+) - \nu(g^-) = \nu(f^+ + g^+) - \nu(f^- + g^-) =$$

$$= \nu((f+g)^+ + h) - \nu((f+g)^- + h) = \nu((f+g)^+) + \nu(h) - \nu((f+g)^-) - \nu(h) = \mu(f+g).$$

Na taj način dokazali smo da je $\mu : C_0^r(T) \to \mathbb{R}$ linearni funkcional.

Dokažimo sada da linearan funkcional $\mu : C_0^r(T) \to \mathbb{R}$ zadovoljava uvjet leme 1.1.1. Neka je $K \subseteq T$ kompaktan skup. Izaberimo $f_0 \in C_0^+(T)$ takvu da je $f_0(t) = 1$ $\forall t \in K$. Stavimo $M_K = \nu(f_0) \geq 0$. Ako je $f \in C_0^r(T)$ takva da je $\mathit{Supp}\, f \subseteq K$, tada je

$$f + \|f\|_\infty f_0 \in C_0^+(T) \qquad \text{i} \qquad \|f\|_\infty f_0 - f \in C_0^+(T),$$

pa je

$$\mu(f + \|f\|_\infty f_0) = \nu(f + \|f\|_\infty f_0) \geq 0 \qquad \text{i} \qquad \mu(\|f\|_\infty f_0 - f) = \nu(\|f\|_\infty f_0 - f) \geq 0,$$

a odatle je

$$-\|f\|_\infty M_K \leq \mu(f) \leq \|f\|_\infty M_K \qquad \Longrightarrow \qquad |\mu(f)| \leq M_K\|f\|_\infty.$$

Prema lemi 1.1.1. μ se proširuje do mjere na T. Kako je očito $\mu|C_0^+(T) = \nu$, mjera μ je pozitivna.

Za realne mjere $\mu, \nu \in \mathfrak{M}^r(T)$ pišemo $\mu \leq \nu$ (ili, ekvivalentno, $\nu \geq \mu$) ako je $\nu - \mu \in \mathfrak{M}^+(T)$. Kako je $\mathfrak{M}^+(T)$ konus, očito je $\leq$ relacija (parcijalnog) uređaja na $\mathfrak{M}^r(T)$ i vrijedi:

$$\nu, \mu, \omega \in \mathfrak{M}^r(T), \quad \nu \leq \mu \qquad \Longrightarrow \qquad \nu + \omega \leq \mu + \omega,$$

$$\nu, \mu \in \mathfrak{M}^r(T), \quad \nu \leq \mu, \quad \alpha \in \mathbb{R}_+ \qquad \Longrightarrow \qquad \alpha\nu \leq \alpha\mu,$$

$$\nu, \mu \in \mathfrak{M}^r(T), \quad \nu \leq \mu \qquad \Longrightarrow \qquad -\mu \leq -\nu.$$

Propozicija 1.1.3. *Za svaku realnu mjeru $\mu \in \mathfrak{M}^r(T)$ postoje jedinstvene pozitivne mjere $\mu^+, \mu^- \in \mathfrak{M}^+(T)$ sa sljedeća dva svojstva:*

(*a*) $\mu = \mu^+ - \mu^-$.

(*b*) *Ako su $\nu_1, \nu_2 \in \mathfrak{M}^+(T)$ takve da je $\mu = \nu_1 - \nu_2$ onda je $\mu^+ \leq \nu_1$ i $\mu^- \leq \nu_2$.*

Dokaz: Jedinstvenost je neposredna posljedica očigledne implikacije

$$\alpha, \beta \in \mathfrak{M}^r(T), \quad \alpha \leq \alpha \quad \text{i} \quad \beta \leq \alpha \qquad \Longrightarrow \qquad \alpha = \beta.$$

Dokažimo egzistenciju. Definiramo $\mu^+ : C_0^+(T) \to \mathbb{R}_+$ sa

$$\mu^+(f) = \sup\{\mu(g);\ g \in C_0^+(T),\ g \leq f\}, \qquad f \in C_0^+(T).$$

Očito je

$$\mu^+(\alpha f) = \alpha\mu(f), \qquad f \in C_0^+(T), \quad \alpha \in \mathbb{R}_+.$$

Nadalje, neka su $f_1, f_2 \in C_0^+(T)$. Tada imamo redom

$$\mu^+(f_1) + \mu^+(f_2) = \sup\{\mu(g_1);\ g_1 \in C_0^+(T),\ g_1 \leq f_1\} + \sup\{\mu(g_2);\ g_2 \in C_0^+(T),\ g_2 \leq f_2\} =$$

$$= \sup\{\mu(g_1 + g_2);\ g_1, g_2 \in C_0^+(T),\ g_1 \leq f_1,\ g_2 \leq f_2\} \leq$$

$$\leq \sup\{\mu(g);\ g \in C_0^+(T),\ g \leq f_1 + f_2\} = \mu^+(f_1 + f_2).$$

Dakle, dokazali smo nejednakost

$$\mu^+(f_1) + \mu^+(f_2) \leq \mu^+(f_1 + f_2), \qquad f_1, f_2 \in C_0^+(T).$$

Dokažimo sada da vrijedi i obrnuta nejednakost, dakle, jednakost. Neka je $g \in C_0^+(T)$ takva da je $g \leq f_1 + f_2$. Stavimo $g_1(t) = \min\{g(t), f_1(t)\}$, $g_2(t) = g(t) - g_1(t)$, $t \in T$. Tada su $g_1, g_2 \in C_0^r(T)$. Nadalje, očito je $g_1 \in C_0^+(T)$ i $g_1 \leq f_1$. Ako je $t \in T$ takav da je $g(t) \leq f_1(t)$, tada je $g_1(t) = g(t)$, pa je $g_2(t) = 0 \leq f_2(t)$. Ako je pak $t \in T$ takav da je $g(t) \geq f_1(t)$, tada je $g_1(t) = f_1(t)$, pa je $0 \leq g_2(t) = g(t) - f_1(t) \leq f_2(t)$. To pokazuje da je i $g_2 \in C_0^+(T)$ i da vrijedi $g_2 \leq f_2$. Prema tome je

$$\mu(g) = \mu(g_1) + \mu(g_2) \leq \mu^+(f_1) + \mu^+(f_2).$$

Ovo zaključivanje vrijedi za svaku $g \in C_0^+(T)$ takvu da je $g \leq f_1 + f_2$, pa slijedi tražena obrnuta nejednakost:

$$\mu^+(f_1 + f_2) = \sup\{\mu(g);\ g \in C_0^+(T),\ g \leq f_1 + f_2\} \leq \mu^+(f_1) + \mu^+(f_2).$$

Dakle, vrijedi jednakost

$$\mu^+(f_1 + f_2) = \mu^+(f_1) + \mu^+(f_2), \qquad f_1, f_2 \in C_0^+(T).$$

Prema propoziciji 1.1.2. μ^+ se jedinstveno proširuje do mjere μ^+ na T i $\mu^+ \in \mathfrak{M}^+(T)$.

Stavimo sada $\mu^- = \mu^+ - \mu \in \mathfrak{M}^r(T)$. Za proizvoljnu $f \in C_0^+(T)$ je $f \leq f$, pa je $\mu^+(f) \geq \mu(f)$, dakle, $\mu^-(f) \geq 0$. Zaključujemo da je $\mu^- \in \mathfrak{M}^+(T)$. Naravno, $\mu = \mu^+ - \mu^-$.

Napokon, pretpostavimo da su $\nu_1, \nu_2 \in \mathfrak{M}^+(T)$ takve da je $\mu = \nu_1 - \nu_2$. Za $f \in C_0^+(T)$ je tada

$$\mu^+(f) = \sup\{\mu(g);\ g \in C_0^+(T),\ g \leq f\} = \sup\{\nu_1(g) - \nu_2(g);\ g \in C_0^+(T),\ g \leq f\} \leq$$

$$\leq \sup\{\nu_1(g);\ g \in C_0^+(T),\ g \leq f\} = \nu_1(f).$$

Zaključujemo da je $\mu^+ \leq \nu_1$, a odatle je i $\mu^- = \mu^+ - \mu \leq \nu_1 - \mu = \nu_2$. Time je propozicija u potpunosti dokazana.

Za $\mu \in \mathfrak{M}^r(T)$ μ^+ se zove **pozitivni** a μ^- **negativni dio mjere** μ. Nadalje, mjera $|\mu| = \mu^+ + \mu^- \in \mathfrak{M}^+(T)$ se zove **apsolutna vrijednost mjere** $\mu \in \mathfrak{M}^r(T)$.

Propozicija 1.1.4. *Neka je* $\mu \in \mathfrak{M}^r(T)$.

(*a*) *Ako je* $\nu \in \mathfrak{M}^r(T)$ *takva da je* $\nu \leq \mu^+$ *i* $\nu \leq \mu^-$ *onda je* $\nu \leq 0$ *tj.* $-\nu \in \mathfrak{M}^+(T)$.

(*b*) *Za svaku* $f \in C_0^+(T)$ *vrijedi*

$$|\mu|(f) = \sup\{\mu(g);\ g \in C_0^r(T),\ |g| \leq f\}.$$

(*c*) *Za* $f \in C_0^r(T)$ *vrijedi* $|\mu(f)| \leq |\mu|(|f|)$.

Dokaz: (*a*) Stavimo $\nu_1 = \mu^+ - \nu$ i $\nu_2 = \mu^- - \nu$. Tada su $\nu_1, \nu_2 \in \mathfrak{M}^+(T)$ i $\mu = \nu_1 - \nu_2$. Prema propoziciji 1.1.3. odatle slijedi $\mu^+ \leq \nu_1$. To znači da je $-\nu = (\mu^+ - \nu) - \mu^+ = \nu_1 - \mu^+ \in \mathfrak{M}^+(T)$.

(*b*) Imamo redom

$$|\mu|(f) = \mu^+(f) + \mu^-(f) = 2\mu^+(f) - \mu(f) = 2\sup\{\mu(h);\ h \in C_0^+(T),\ h \leq f\} - \mu(f) =$$

$$= \sup\{\mu(h);\ h \in C_0^+(T),\ h \leq 2f\} - \mu(f) = \sup\{\mu(h-f);\ h \in C_0^+(T),\ h \leq 2f\} =$$

$$= \sup\{\mu(g);\ g \in C_0^r(T),\ -f \leq g \leq f\} = \sup\{\mu(g);\ |g| \leq f\}.$$

(*c*) Za $f \in C_0^r(T)$ očito vrijedi $|f| \in C_0^+(T)$ i $|f| \leq |f|$, pa iz (*b*) slijedi $|\mu|(|f|) \geq \mu(f)$. Budući da je $|-\mu| = |\mu|$ slijedi i $|\mu|(|f|) \geq -\mu(f)$. Dakle je $|\mu(f)| \leq |\mu|(|f|)$.

Za $\varphi \in C(T)$ i $\mu \in \mathfrak{M}(T)$ definiramo $\varphi\mu : C_0(T) \to \mathbb{C}$ sa

$$(\varphi\mu)(f) = \mu(\varphi f), \qquad f \in C_0(T).$$

Neka je $K \subseteq T$ kompaktan skup i neka je $M_K > 0$ takav da vrijedi

$$f \in C_0(K), \quad \mathit{Supp}\, f \subseteq K \qquad \Longrightarrow \qquad |\mu(f)| \leq M_K \|f\|_\infty.$$

Ako je $\mathit{Supp}\, f \subseteq K$ tada je i $\mathit{Supp}\, \varphi f \subseteq K$. Stoga vrijedi

$$|(\varphi\mu)(f)| = |\mu(\varphi f)| \leq \|\varphi f\|_\infty \leq M_K \|\varphi\|_K \|f\|_\infty,$$

uz oznaku

$$\|\varphi\|_K = \sup\{|\varphi(t)|;\ t \in K\}.$$

Time je dokazano da je $\varphi\mu \in \mathfrak{M}(T)$. Na taj način $\mathfrak{M}(T)$ je postao modul nad komutativnim prstenom $C(T)$. $\mathfrak{M}^r(T)$ je modul nad prstenom $C^r(T)$ i vrijedi:

$$\varphi \in C^+(T), \quad \mu \in \mathfrak{M}^+(T) \qquad \Longrightarrow \qquad \varphi\mu \in \mathfrak{M}^+(T).$$

Napokon, primijetimo da se kompleksno konjugiranje prenosi s funkcija na mjere:

$$\overline{\mu}(f) = \overline{\mu(\overline{f})}, \qquad \mu \in \mathfrak{M}(T),\ f \in C_0(T).$$

Tada su za svaku $\mu \in \mathfrak{M}(T)$ mjere

$$\operatorname{Re}\mu = \frac{1}{2}(\mu + \overline{\mu}) \quad \text{i} \quad \operatorname{Im}\mu = \frac{1}{2i}(\mu - \overline{\mu})$$

realne i vrijedi

$$\mu = \operatorname{Re}\mu + i\operatorname{Im}\mu.$$

1.2 Topološke grupe

Grupa G zove se **topološka grupa**, ako je G Hausdorffov topološki prostor i ako su preslikavanja $(x, y) \mapsto xy$ sa $G \times G$ u G i $x \mapsto x^{-1}$ sa G u G neprekidna. Topološka grupa G je **lokalno kompaktna**, (odnosno **kompaktna**, odnosno **diskretna**, odnosno **povezana**) ako je topološki prostor takav (lokalno kompaktan, kompaktan, diskretan, povezan).

Neka je G topološka grupa i $x \in G$. Definiramo preslikavanja $\lambda_x, \rho_x, \iota_x : G \to G$ sa

$$\lambda_x(y) = xy, \qquad \rho_x(y) = yx^{-1}, \qquad \iota_x(y) = xyx^{-1}, \qquad y \in G.$$

Tada su λ_x, ρ_x i ι_x homeomorfizmi sa G na G i vrijedi (e će stalno biti oznaka za jedinicu u grupi):

$$\lambda_e = \rho_e = \iota_e = id_G, \quad \lambda_x \circ \lambda_y = \lambda_{xy}, \quad \rho_x \circ \rho_y = \rho_{xy}, \quad \iota_x \circ \iota_y = \iota_{xy}, \quad \iota_x = \lambda_x \circ \rho_x = \rho_x \circ \lambda_x.$$

Kako su λ_x i ρ_x homeomorfizmi sa G na G, svaka okolina točke $x \in G$ ima oblik xU i Vx gdje su U i V okoline od e. Posebno, topološka grupa je lokalno kompaktna ako i samo ako jedinica u grupi ima kompaktnu okolinu.

Primijetimo još da ι_x ima i svojstvo $\iota_x(yz) = \iota_x(y)\iota_x(z)$, dakle, ι_x je ne samo homeomorfizam sa G na G nego i automorfizam grupe G.

U više navrata trebat će nam sljedeća topološka činjenica:

Lema 1.2.1. *Neka su X, Y i Z Hausdorffovi topološki prostori, $\varphi : X \times Y \to Z$ neprekidno preslikavanje, $K \subseteq X$ kompaktan skup i $U \subseteq Z$ otvoren skup. Tada je*

$$W = \{y \in Y;\ \varphi(x, y) \in U\ \forall x \in K\}$$

otvoren podskup od Y.

Dokaz: Neka je $y \in W$. Za svaku točku $x \in K$ tada imamo $\varphi(x, y) \in U$. Kako je skup U otvoren i preslikavanje φ neprekidno, postoje otvorena okolina $V_x \subseteq X$ točke x i otvorena okolina $\mathcal{O}_x \subseteq Y$ točke y takve da je $\varphi(V_x \times \mathcal{O}_x) \subseteq U$. $(V_x)_{x \in K}$ je otvoren pokrivač kompaktnog skupa K, pa postoji konačno mnogo točaka $x_1, x_2, \ldots, x_n \in K$ takvih da je

$$K \subseteq V_{x_1} \cup V_{x_2} \cup \cdots \cup V_{x_n}.$$

Stavimo

$$\mathcal{O} = \mathcal{O}_{x_1} \cap \mathcal{O}_{x_2} \cap \cdots \cap \mathcal{O}_{x_n}.$$

Tada je $\mathcal{O}$ otvorena okolina točke y u prostoru Y. Neka su $x \in K$ i $y' \in \mathcal{O}$. Tada je $x \in V_{x_j}$ za neki indeks $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, a vrijedi i $y' \in \mathcal{O}_{x_j}$. Stoga je $\varphi(x, y') \in U$. To pokazuje da je $\mathcal{O} \subseteq W$, a kako je točka $y \in W$ bila proizvoljna, zaključujemo da je W otvoren podskup od Y.

Za podskupove A, B grupe G upotrebljavat ćemo sljedeće oznake:

$$AB = \{ab;\ a \in A,\ b \in B\}, \quad A^{-1} = \{a^{-1};\ a \in A\},$$

$$A^1 = A, \quad A^n = AA^{n-1} = \{a_1, a_2 \cdots a_n;\ a_1, a_2, \ldots, a_n \in A\}.$$

Propozicija 1.2.2. *Neka je G topološka grupa.*

(a) Ako je skup $U \subseteq G$ otvoren i $S \subseteq G$ onda su skupovi US, SU i U^{-1} otvoreni.

(b) Ako je U okolina jedinice e onda postoji okolina V od e takva da je $V = V^{-1} \subseteq U$.

(*c*) *Ako je* U *okolina od* e *i* $n \in \mathbb{N}$ *onda postoji okolina* V *od* e *takva da je* $V^n \subseteq U$.

(*d*) *Ako su skupovi* $A, B \subseteq G$ *kompaktni, onda su i skupovi* AB *i* A^{-1} *kompaktni.*

Zadatak 1.1. *Dokažite propoziciju 1.2.2.*

Propozicija 1.2.3. *Neka je* G *topološka grupa*

(*a*) *Ako je skup* $A \subseteq G$ *zatvoren i* $K \subseteq G$ *kompaktan onda su skupovi* A^{-1}, KA *i* AK *zatvoreni.*

(*b*) *Ako je skup* $U \subseteq G$ *otvoren i ako je skup* $K \subseteq G$ *kompaktan i sadržan u* U, *onda postoji okolina* V *od* e, *takva da je* $KV \subseteq U$ *i* $VK \subseteq U$.

Dokaz: (a) Kako je $x \mapsto x^{-1}$ homeomorfizam sa G na G, skup A^{-1} je zatvoren. Nadalje, neka je preslikavanje $\varphi : G \times G \to G$ definirano sa $\varphi(x, y) = x^{-1}y$. To je preslikavanje neprekidno, pa je po lemi 1.2.1. skup

$$W = \{y \in G;\ x^{-1}y \in G \setminus A\ \forall x \in K\}$$

otvoren u G. Međutim, imamo

$$y \in W \iff x^{-1}y \in G \setminus A\ \forall x \in K \iff K^{-1}y \subseteq G \setminus A \iff K^{-1}y \cap A = \emptyset \iff y \notin KA.$$

Dakle, $W = G \setminus KA$, pa zaključujemo da je skup KA zatvoren. Odatle i iz tvrdnje (d) propozicije 1.2.2. slijedi da je i skup $AK = (K^{-1}A^{-1})^{-1}$ zatvoren.

(b) Neka je preslikavanje $\varphi : G \times G \to G$ definirano sa $\varphi(x, y) = xy$. To je preslikavanje neprekidno. Stavimo

$$V_1 = \{y \in G;\ \varphi(x, y) \in U\ \forall x \in K\} = \{y \in G;\ xy \in U\ \forall x \in K\}.$$

Tada je $e \in V_1$ i po lemi 1.2.1. skup V_1 je otvoren. Analogno je i skup

$$V_2 = \{y \in G;\ yx \in U\ \forall x \in K\}$$

otvoren i $e \in V_2$. Stoga je $V = V_1 \cap V_2$ okolina od e i vrijedi $VK \subseteq U$ i $KV \subseteq U$.

1.3 Invarijantne mjere na lokalno kompaktnim grupama

U cijeloj ovoj točki G označava lokalno kompaktnu grupu i e njenu jedinica.

Funkcija $f \in C(G)$ zove se **lijevo uniformno neprekidna** ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji okolina V od e takva da vrijedi

$$y \in xV \qquad \Longrightarrow \qquad |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Analogno, f je **desno uniformno neprekidna** ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji okolina V od e takva da vrijedi

$$y \in Vx \qquad \Longrightarrow \qquad |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Propozicija 1.3.1. *Svaka funkcija $f \in C_0(G)$ je i lijevo i desno uniformno neprekidna.*

Dokaz: Neka je $K = Supp\, f$ i $\varepsilon > 0$. Neka je $U = U^{-1}$ kompaktna okolina od e. Tada je po tvrdnji (d) propozicije 1.2.2. KU kompaktan podskup od G. Stavimo

$$W = \{y \in G;\ |f(xy) - f(x)| < \varepsilon\ \forall x \in KU\}.$$

Tada je $e \in W$. Neka je $\varphi : G \times G \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija definirana sa $\varphi(x, y) = |f(xy) - f(x)|$. Tada je

$$W = \{y \in G;\ \varphi(x, y) \in \langle -\infty, \varepsilon\rangle\ \forall x \in KU\}$$

pa je po lemi 1.2.1. W otvoren podskup od G. Prema tome, W je okolina od e u G.

Stavimo $V = W \cap U$. Neka su $x, y \in G$ takvi da je $y \in xV$, tj. $x^{-1}y \in V$. Dokazat ćemo da je tada $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Pretpostavimo prvo da $x \notin KU$. Kako je U okolina jednice, tada $x \notin K$, pa je $f(x) = 0$. Kad bi bilo $y \in K$, imali bismo

$$x = y\left(y^{-1}x\right) = y\left(x^{-1}y\right)^{-1} \in KV^{-1} \subseteq KU^{-1} = KU$$

suprotno pretpostavci. Dakle, vrijedi i $y \notin K$, pa je $f(y) = 0$. Stoga je u tom slučaju

$$|f(x) - f(y)| = 0 < \varepsilon.$$

Pretpostavimo sada da je $x \in KU$. Tada je $x^{-1}y \in V \subseteq W$, pa vrijedi

$$|f(x) - f(y)| = \left|f\left(x\left(x^{-1}y\right)\right) - f(x)\right| < \varepsilon.$$

Time je dokazano da je funkcija f lijevo uniformno neprekidna. Sasvim analogno dokazuje se da je f desno uniformno neprekidna (ili se primijeni dokazano na funkciju $x \mapsto f\left(x^{-1}\right)$).

Za $x \in G$ i za funkciju f na grupi G definiramo transformirane funkcije

$$\lambda_x f = f \circ \lambda_{x^{-1}}, \quad \rho_x f = f \circ \rho_{x^{-1}}, \quad \iota_x f = f \circ \iota_{x^{-1}},$$

tj.

$$(\lambda_x f)(y) = f\left(x^{-1}y\right), \quad (\rho_x f)(y) = f(yx), \quad (\iota_x f)(y) = f\left(x^{-1}yx\right), \quad y \in G.$$

Te se transformacije prenose i na mjere na grupi G : za $\mu \in \mathfrak{M}(G)$ i za $x \in G$ stavljamo

$$(\lambda_x\mu)(f) = \mu\left(\lambda_{x^{-1}}f\right), \quad (\rho_x\mu)(f) = \mu\left(\rho_{x^{-1}}f\right), \quad (\iota_x\mu)(f) = \mu\left(\iota_{x^{-1}}f\right), \quad f \in C_0(G).$$

Mjera $\mu \in \mathfrak{M}(G)$ zove se **lijevoinvarijantna** (odn., **desnoinvarijantna**) **mjera** na G ako je $\lambda_x\mu = \mu$ (odn., $\rho_x\mu = \mu$) $\forall x \in G$. Ako je k tome μ pozitivna i $\neq 0$, onda se μ zove **lijeva** (odn., **desna**) **Haarova mjera** na grupi G.

Prenošenjem invertiranja u grupi na funkcije a zatim na mjere dolazimo do bijekcije među lijevoinvarijantnim i desnoinvarijantnim mjerama na G. Naime, za funkciju f na grupi G definiramo novu funkciju $\check{f}$ relacijom

$$\check{f}(x) = f\left(x^{-1}\right), \qquad x \in G.$$

Tada imamo redom

$$(\rho_x \check{f})(y) = \check{f}(yx) = f\left(x^{-1}y^{-1}\right) = (\lambda_x f)\left(y^{-1}\right) = (\lambda_x f)\check{\ }(y), \qquad x, y \in G.$$

Prema tome, za svaku funkciju f na grupi G i za svaki $x \in G$ vrijedi

$$\rho_x \check{f} = (\lambda_x f)\check{\ } \qquad \text{i, analogno,} \qquad \lambda_x \check{f} = (\rho_x f)\check{\ }.$$

Za mjeru $\mu \in \mathfrak{M}(G)$ definiramo $\check{\mu} \in \mathfrak{M}(G)$ sa

$$\check{\mu}(f) = \mu(\check{f}), \qquad f \in C_0(G).$$

Iz gornjih relacija za funkcije slijede analogne relacije za mjere:

$$\rho_x \check{\mu} = (\lambda_x \mu)\check{\ } \qquad \text{i} \qquad \lambda_x \check{\mu} = (\rho_x \mu)\check{\ }, \qquad \mu \in \mathfrak{M}(G), \quad x \in G.$$

Prema tome, $\mu \mapsto \check{\mu}$ je involutivna bijekcija sa skupa svih lijevoinvarijantnih (odnosno, lijevih Haarovih) na skup svih desnoinvarijantnih (odnosno, desnih Haarovih) mjera na lokalno kompaktnoj grupi G. Stoga je dovoljno proučiti samo jednu vrstu $-$ npr. desnoinvarijantne i desne Haarove mjere.

Prema propoziciji 1.1.3. pozitivna mjera na G potpuno je određena svojom restrikcijom na $C_0^+(G)$. Dakle, desne Haarove mjere na grupi G potpuno su određene preslikavanjima $\mu : C_0^+(G) \to \mathbb{R}_+$ sa sljedećim svojstvima:

(A) $\mu(f_1 + f_2) = \mu(f_1) + \mu(f_2)$ $\forall f_1, f_2 \in C_0^+(G)$.

(B) $\mu(\alpha f) = \alpha\mu(f)$ $\forall \alpha \in \mathbb{R}_+$ i $\forall f \in C_0^+(G)$.

(C) $\mu(\rho_x f) = \mu(f)$ $\forall x \in G$ i $\forall f \in C_0^+(G)$.

(D) $\exists f \in C_0^+(G)$ takva da je $\mu(f) > 0$.

Osnovni je cilj ove točke da se dokaže egzistencija takvog preslikavanja $\mu : C_0^+(G) \to \mathbb{R}_+$. Vidjet ćemo da tada μ ne samo da zadovoljava (D) nego čak ima sljedeće jače svojstvo:

(D') $\mu(f) > 0$ $\forall f \in C_0^+(G) \setminus \{0\}$.

U daljnjem ćemo označavati $L = C_0^+(G)$. Za $f, g \in L$ pišemo $f \sim g$ ako postoje $n \in \mathbb{N}$, $f_1, f_2, \ldots, f_n \in L$ i $x_1, x_2, \ldots, x_n \in G$ takvi da je

$$f = \sum_{i=1}^{n} f_i \qquad \text{i} \qquad g = \sum_{i=1}^{n} \rho_{x_i} f_i.$$

Očito, svako preslikavanje $\mu : L \to \mathbb{R}_+$ sa svojstvima (a), (b) i (c) nužno ima svojstvo:

$$f, g \in L, \quad f \sim g \qquad \Longrightarrow \qquad \mu(f) = \mu(g).$$

Lema 1.3.2. *Neka su* $f, g_1, g_2, \ldots, g_n \in L$ *i neka je*

$$g = \sum_{i=1}^{n} g_i.$$

Tada vrijedi $f \sim g$ *ako i samo ako postoje* $f_1, f_2, \ldots, f_n \in L$ *takve da je*

$$f = \sum_{i=1}^{n} f_i \qquad i \qquad f_i \sim g_i \quad \forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}.$$

Dokaz: Očito vrijedi:

$$f_i \sim g_i \quad \forall i \qquad \Longrightarrow \qquad \sum_{i=1}^{n} f_i \sim \sum_{i=1}^{n} g_i.$$

Dokažimo obrat. Pretpostavimo da vrijedi

$$f \sim g = \sum_{i=1}^{n} g_i.$$

To znači da postoje $m \in \mathbb{N}$, $h_1, h_2, \ldots, h_m \in L$ i $x_1, x_2, \ldots, x_m \in G$ takvi da vrijedi

$$g = \sum_{j=1}^{m} h_j \qquad \text{i} \qquad f = \sum_{j=1}^{m} \rho_{x_j} h_j.$$

Definiramo sada funkcije $f_{ij} : G \to \mathbb{R}_+$ sa

$$f_{ij}(x) = \begin{cases} \dfrac{g_i(x) h_j(x)}{g(x)} & \text{ako je } g(x) > 0 \\[2ex] 0 & \text{ako je } g(x) = 0. \end{cases}$$

Funkcija f_{ij} očito je neprekidna u svakoj točki otvorenog skupa $A = \{x \in G;\ g(x) > 0\}$. Također, ona je identički nula, dakle, također neprekidna na otvorenom skupu $G \setminus Cl(A)$; napominjemo da je $Cl(A) = Supp\, g$. Neka je sada $x_0 \in \partial A = Cl(A) \setminus A$ i neka je $\varepsilon > 0$. Tada je $g(x_0) = 0$, dakle, i $f_{ij}(x_0) = 0$. Zbog neprekidnosti i pozitivnosti funkcije g postoji okolina $\mathcal{O}$ točke x_0 takva da vrijedi

$$x \in \mathcal{O} \qquad \Longrightarrow \qquad 0 \leq g(x) \leq \varepsilon.$$

Budući da su sve funkcije $g_1, g_2, \ldots, g_n, h_1, h_2, \ldots, h_m$ nenegativne, vrijedi $g_i \leq g$ i $h_j \leq g$. Dakle, ako je $x \in \mathcal{O} \cap A$, onda je $0 < g(x) \leq \varepsilon$, pa vrijedi

$$f_{ij}(x) = \frac{g_i(x) h_j(x)}{g(x)} = g_i(x) \frac{h_j(x)}{g(x)} \leq g_i(x) \leq g(x) \leq \varepsilon,$$

a ako je $x \in \mathcal{O} \setminus A$, onda je $f_{ij}(x) = 0 \leq \varepsilon$. Time je dokazano da je funkcija f_{ij} neprekidna i u svakoj točki $x_0 \in \partial A$, dakle, svuda na G. Nadalje, vidi se da za svaku točku $x \in G$ vrijedi $0 \leq f_{ij}(x) \leq g(x)$, pa zaključujemo da je $f_{ij} \in L$. Iz definicije funkcija f_{ij} neposredno slijedi da je

$$g_i = \sum_{j=1}^{m} f_{ij} \qquad \text{i} \qquad h_j = \sum_{i=1}^{n} f_{ij}.$$

Stavimo

$$f_i = \sum_{j=1}^{m} \rho_{x_j} f_{ij}, \qquad 1 \leq i \leq n.$$

Tada vrijedi $f_i \sim g_i$ $\forall i$. Nadalje,

$$\sum_{i=1}^{n} f_i = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \rho_{x_j} f_{ij} = \sum_{j=1}^{m} \rho_{x_j} \left[\sum_{i=1}^{n} f_{ij} \right] = \sum_{j=1}^{m} \rho_{x_j} h_j = f.$$

Lema 1.3.3. *$\sim$ je relacija ekvivalencije na skupu L.*

Zadatak 1.2. *Dokažite lemu 1.3.3.*

Uputa: Za dokaz tranzitivnosti $f \sim g \sim h \implies f \sim h$ primijenite definiciju relacije $\sim$ na $g \sim h$, a zatim na $f \sim g$ primijenite lemu 1.3.2.

Lema 1.3.4. *Neka je $f \in L$ i neka je $U \subseteq G$ otvoren neprazan skup. Tada postoji $\varphi \in L$ takva da je $Supp\,\varphi \subseteq U$ i $f \sim \varphi$.*

Dokaz: Neka je $V \neq \emptyset$ otvoren podskup od G takav da mu je zatvarač $Cl(V)$ kompaktan i sadržan u U. Tada je $(Vx)_{x \in G}$ otvoren pokrivač od G dakle i od svakog podskupa od G. Stoga za kompaktan skup $Supp\, f$ postoje točke $x_1, x_2, \ldots, x_n \in G$ takve da je

$$Supp\, f \subseteq Vx_1 \cup Vx_2 \cup \cdots \cup Vx_n.$$

Za svako $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ neka je $h_i \in L$ takva da vrijedi

$$h_i(x) = 1 \quad \forall x \in Vx_i \qquad \text{i} \qquad Supp\, h_i \subseteq Ux_i.$$

Stavimo

$$h = \sum_{i=1}^{n} h_i \in L.$$

Ako je $x \in Supp\, f$, tada je $x \in Vx_i$ za neko i pa slijedi $h_i(x) = 1$. Dakle, vrijedi

$$x \in Supp\, f \qquad \implies \qquad h(x) \geq 1.$$

Definiramo sada funkcije $f_1, f_2, \ldots, f_n : G \to \mathbb{R}_+$ sa

$$f_i(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x) h_i(x)}{h(x)} & \text{ako je } x \in Supp\, f \\ \\ 0 & \text{ako je } x \notin Supp\, f \end{cases} \qquad 1 \leq i \leq n.$$

Kao u dokazu leme 1.3.2. vidi se da su $f_1, f_2, \ldots, f_n \in L$. Ako je $x \notin Supp\, f$ imamo

$$f(x) = 0 = \sum_{i=1}^{n} f_i(x).$$

Ako je pak $x \in Supp\, f$ tada je

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{f(x) h_i(x)}{h(x)} = \frac{f(x)}{h(x)} \sum_{i=1}^{n} h_i(x) = f(x).$$

Dakle, vrijedi
$$f = \sum_{i=1}^{n} f_i.$$
Nadalje,
$$Supp\, f_i \subseteq Supp\, h_i \subseteq Ux_i.$$
Napokon, stavimo
$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} \rho_{x_i} f_i \in L.$$
Iz $Supp\, f_i \subseteq Ux_i$ slijedi da je $Supp\, \rho_{x_i} f_i \subseteq U \ \forall i$, dakle, $Supp\, \varphi \subseteq U$. Napokon, po konstrukciji vidimo da vrijedi $f \sim \varphi$.

Definirajmo sada relaciju $\succeq$ na L na sljedeći način: za $f, g \in L$ stavljamo $f \succeq g$ ako postoje $f', g' \in L$ takve da je $f' \sim f$, $g' \sim g$ i $f' \geq g'$.

Lema 1.3.5. *Relacija $\succeq$ ima sljedeća svojstva:*

(a) $f \succeq g$ ako i samo ako postoje $f_1, f_2 \in L$ takve da je $f = f_1 + f_2$ i $f_1 \sim g$.

(b) $f \succeq g$ ako i samo ako postoji $f' \in L$ takva da je $f' \sim f$ i $f' \geq g$.

(c) Ako je $f \succeq g$ i $g \succeq h$ onda je $f \succeq h$.

(d) Ako je $f \succeq g$ i $f' \succeq g'$ onda je $f + f' \succeq g + g'$.

(e) Ako je $f \succeq g$ i $\alpha \in \mathbb{R}_+$ onda je $\alpha f \succeq \alpha g$.

Dokaz: (a) Pretpostavimo da je $f \succeq g$ i neka su $f', g' \in L$ takve da je $f \sim f'$, $g \sim g'$ i $f' \geq g'$. Stavimo $h = f' - g'$. Kako je $f' \geq g'$, to je $h \in L$. Dakle, imamo
$$f \sim f' = g' + h, \qquad f, f', g', h \in L.$$
Po lemi 1.3.2. postoje $f_1, f_2 \in L$ takve da je
$$f = f_1 + f_2, \quad f_1 \sim g' \sim g, \quad f_2 \sim h.$$
Time je dokazana nužnost uvjeta, a dovoljnost je očigledna.

(b) Ponovo je netrivijalna samo nužnost. Neka je, dakle, $f \succeq g$. Zbog (a) postoje $f_1, f_2 \in L$ takve da je $f = f_1 + f_2$ i $f_1 \sim g$. Stavimo $f' = g + f_2$. Tada je $f \sim f'$ i $f' \geq g$.

(c) Zbog (a) iz $g \succeq h$ slijedi da postoje $g_1, g_2 \in L$ takve da je $g = g_1 + g_2$ i $g_1 \sim h$. Nadalje, zbog (b) $f \succeq g$ povlači da postoji $f' \in L$ takva da je $f' \sim f$ i $f' \geq g$. Tada je i $f' \geq g_1$, pa slijedi $f' \succeq g_1$, dakle i $f \succeq g_1$. Sada opet prema (a) postoje $f_1, f_2 \in L$ takve da je $f = f_1 + f_2$ i $f_1 \sim g_1$. Zbog leme 1.3.3. iz $f_1 \sim g_1$ i $g_1 \sim h$ slijedi $f_1 \sim h$, pa iz (a) slijedi $f \succeq h$.

(d) Ako je $f \succeq g$ i $f' \succeq g'$, onda prema (a) postoje $f_1, f_2, f_1', f_2' \in L$ takve da je $f = f_1 + f_2$, $f' = f_1' + f_2'$, $f_1 \sim g$ i $f_1' \sim g'$. Tada vrijedi $f + f' = (f_1 + f_1') + (f_2 + f_2')$ i $f_1 + f_1' \sim g + g'$, pa prema (a) imamo $f + f' \succeq g + g'$.

(e) Po definiciji iz $f \succeq g$ slijedi da postoje $f', g' \in L$ takve da je $f \sim f'$, $g \sim g'$ i $f' \geq g'$. No tada za $\alpha \in \mathbb{R}_+$ očito vrijedi $\alpha f \sim \alpha f'$, $\alpha g \sim \alpha g'$ i $\alpha f' \geq \alpha g'$. Dakle, $\alpha f \succeq \alpha g$.

Lema 1.3.6. *Neka su $f, g \in L$ i $g \neq 0$. Tada postoji $\alpha \in \mathbb{R}_+$ takav da vrijedi $\alpha g \succeq f$.*

Dokaz: Stavimo $U = \{x \in G;\ g(x) > 0\}$. Po lemi 1.3.4. postoji $\varphi \in L$ takva da je $Supp\,\varphi \subseteq U$ i $f \sim \varphi$. Tada je $g(x) > 0\ \forall x \in Supp\,\varphi$, a kako je $Supp\,\varphi$ kompaktan skup imamo

$$m = \min\{g(x);\ x \in Supp\,\varphi\} > 0.$$

Stavimo

$$M = \|\varphi\|_\infty = \max\{\varphi(x);\ x \in G\} \qquad \text{i} \qquad \alpha = \frac{M}{m}.$$

Tada imamo za $x \in Supp\,\varphi$

$$\alpha g(x) = \frac{M}{m} g(x) \geq M \geq \varphi(x),$$

a za $x \notin Supp\,\varphi$ je

$$\alpha g(x) \geq 0 = \varphi(x).$$

Dobili smo da je $\alpha g \geq \varphi$ i $\varphi \sim f$. Dakle, vrijedi $\alpha g \succeq f$.

Pretpostavimo da preslikavanje $\mu : L \to \mathbb{R}_+$ ima svojstva (A), (B), (C) i (D'). Neka je $g \in L$, $g \neq 0$. Tada je $\mu(g) > 0$, pa zamjenom funkcije g njenim umnoškom s pozitivnim brojem možemo postići da je $\mu(g) = 1$. Ako je $f \in L$ i $g \succeq f$ onda je nužno $\mu(f) \leq 1$. Nadalje, ako je $\alpha \in \mathbb{R}_+$ i $\alpha g \succeq f$ onda je $\mu(f) \leq \alpha$, a ako je $f \succeq \alpha g$ onda je $\mu(f) \geq \alpha$. Slijedi da za takvo preslikavanje μ i za $g \in L$ takvu da je $\mu(g) = 1$ nužno vrijedi

$$\sup\{\alpha \in \mathbb{R}_+;\ f \succeq \alpha g\} \leq \mu(f) \leq \inf\{\alpha \in \mathbb{R}_+;\ \alpha g \succeq f\}.$$

Naš je cilj da dokažemo da za $f, g \in L$, $g \neq 0$, vrijedi

$$\sup\{\alpha \in \mathbb{R}_+;\ f \succeq \alpha g\} = \inf\{\alpha \in \mathbb{R}_+;\ \alpha g \succeq f\}.$$

Fiksirat ćemo tada bilo koju funkciju $g \in L \setminus \{0\}$ i definirati $\mu_g(f)$ kao taj broj, a zatim dokazati da tako definirano preslikavanje $\mu_g : L \to \mathbb{R}_+$ ima svojstva (A), (B), (C) i (D').

Dokaz gornje jednakosti izvest ćemo iz sljedeće dvije propozicije, čije dokaze ćemo provesti naknadno:

Propozicija 1.3.7. *Neka je $f \in L \setminus \{0\}$ i neka je $\alpha \in \mathbb{R}_+$ takav da je $f \succeq \alpha f$. Tada je $\alpha \leq 1$.*

Propozicija 1.3.8. *Neka su $f, g \in L$, $g \neq 0$ i $\varepsilon > 0$. Tada postoji $\alpha \in \mathbb{R}_+$ takav da vrijedi $(1+\varepsilon)f \succeq \alpha g \succeq f$.*

Korolar 1.3.9. *Ako su $f, g \in L$ takve da je $f \succeq g$ i $g \succeq f$ onda je $f \sim g$.*

Dokaz: Prema tvrdnji (a) leme 1.3.5. iz $g \succeq f$ slijedi da postoje $g_1, g_2 \in L$ takve da je $g = g_1 + g_2$ i $g_1 \sim f$. Pretpostavimo da je $g_2 \neq 0$. Prema lemi 1.3.6. tada postoji $\varepsilon > 0$ takav da je $g_2 \succeq \varepsilon f$. Slijedi

$$f \succeq g = g_1 + g_2 \succeq f + \varepsilon f = (1+\varepsilon)f.$$

No to je u suprotnosti s propozicijom 1.3.7. Ova kontradikcija pokazuje da je $g_2 = 0$, dakle, $g = g_1 \sim f$.

Korolar 1.3.10. *Neka su $f, g \in L$ i $g \neq 0$. Tada vrijedi*

$$\sup\{\alpha \in \mathbb{R}_+;\ f \succeq \alpha g\} = \inf\{\alpha \in \mathbb{R}_+;\ \alpha g \succeq f\}.$$

Dokaz: Neka su $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}_+$ takvi da je $\alpha_2 g \succeq f \succeq \alpha_1 g$. Zbog tvrdnji (c) i (e) leme 1.3.5. odatle slijedi da je $g \succeq \frac{\alpha_1}{\alpha_2} g$, pa je zbog propozicije 1.3.7. $\frac{\alpha_1}{\alpha_2} \leq 1$, tj. $\alpha_1 \leq \alpha_2$. Time je dokazana nejednakost

$$\sup\{\alpha \in \mathbb{R}_+;\ f \succeq \alpha g\} \leq \inf\{\alpha \in \mathbb{R}_+;\ \alpha g \succeq f\}.$$

Dokažimo sada da vrijedi i obrnuta nejednakost. Prema propoziciji 1.3.8. za $\varepsilon > 0$ postoji $\beta \in \mathbb{R}_+$ takav da je $(1+\varepsilon)f \succeq \beta g \succeq f$. Stoga je

$$\inf\{\alpha \in \mathbb{R}_+;\ \alpha g \succeq f\} \leq \beta \leq \sup\{\alpha \in \mathbb{R}_+;\ (1+\varepsilon)f \succeq \alpha g\} = (1+\varepsilon)\sup\{\alpha \in \mathbb{R}_+;\ f \succeq \alpha g\}.$$

Kako je $\varepsilon > 0$ bio proizvoljan, slijedi tražena obrnuta nejednakost

$$\inf\{\alpha \in \mathbb{R}_+;\ \alpha g \succeq f\} \leq \sup\{\alpha \in \mathbb{R}_+;\ f \succeq \alpha g\}.$$

Kao što smo planirali, za $g \in L$, $g \neq 0$, definiramo preslikavanje $\mu_g : L \longrightarrow \mathbb{R}_+$ sa

$$\mu_g(f) = \sup\{\alpha \in \mathbb{R}_+;\ f \succeq \alpha g\} = \inf\{\alpha \in \mathbb{R}_+;\ \alpha g \succeq f\}.$$

Dokazat ćemo sada da preslikavanje μ_g zadovoljava uvjete (A), (B), (C) i (D').

(A) Neka su $f_1, f_2 \in L$. Ako su $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$ takvi da je $\alpha g \succeq f_1$ i $\beta g \succeq f_2$ tada prema tvrdnji (d) leme 1.3.5. vrijedi $(\alpha+\beta)g \succeq f_1 + f_2$. To pokazuje da je

$$\alpha + \beta \geq \inf\{\gamma \in \mathbb{R}_+;\ \gamma g \succeq f_1 + f_2\} = \mu_g(f_1 + f_2).$$

Uzevši infimume po takvima α i β nalazimo da vrijedi

$$\mu_g(f_1) + \mu_g(f_2) \geq \mu_g(f_1 + f_2).$$

Neka su sada $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$ takvi da je $f_1 \succeq \alpha g$ i $f_2 \succeq \beta g$. Tada je $f_1 + f_2 \succeq (\alpha+\beta)g$, dakle,

$$\alpha + \beta \leq \sup\{\gamma \in \mathbb{R}_+;\ f_1 + f_2 \succeq \gamma g\} = \mu_g(f_1 + f_2).$$

Uzevši sada supremume po takvima α i β dobivamo obrnutu nejednakost

$$\mu_g(f_1) + \mu_g(f_2) \leq \mu_g(f_1 + f_2).$$

Dakle, vrijedi jednakost

$$\mu_g(f_1 + f_2) = \mu_g(f_1) + \mu_g(f_2).$$

(B) Za $\alpha \in \mathbb{R}_+$ i $f \in L$ imamo

$$\mu_g(\alpha f) = \sup\{\beta \in \mathbb{R}_+;\ \alpha f \succeq \beta g\} = \alpha \sup\{\beta \in \mathbb{R}_+;\ f \succeq \beta g\} = \alpha \mu_g(f).$$

(C) Za $x \in G$ i $f \in L$ vrijedi $\rho_x f \sim f$. Prema tome,

$$\rho_x f \succeq \alpha g \qquad \Longleftrightarrow \qquad f \succeq \alpha g.$$

To znači da je $\mu_g(\rho_x f) = \mu_g(f)$.

(D') Neka je $f \in L$, $f \neq 0$. Prema propoziciji 1.3.8. postoji $\alpha \in \mathbb{R}_+$ takav da je $\alpha f \succeq g$. Tada je $\alpha > 0$ i za $\varepsilon = \frac{1}{\alpha} > 0$ vrijedi $f \succeq \varepsilon g$. Dakle,

$$\mu_g(f) = \sup\{\beta \in \mathbb{R}_+;\ f \succeq \beta g\} \geq \varepsilon > 0.$$

Teorem 1.3.11. (a) *Na lokalno kompaktnoj grupi G postoji desna Haarova mjera μ.*

(b) *Ako je μ desna Haarova mjera na G i $f \in C_0^+(G) \setminus \{0\}$, onda je $\mu(f) > 0$.*

(c) *Ako je μ desna Haarova mjera i ν desnoinvarijantna mjera na G postoji $\lambda \in \mathbb{C}$ takav da je $\nu = \lambda\mu$.*

Dokaz: Tvrdnja (a) već je dokazana: za $g \in L \setminus \{0\}$ konstruirana mjera μ_g je desna Haarova mjera.

Dokazat ćemo sada sljedeću tvrdnju koja će imati za posljedicu tvrdnje (b) i (c) :

(d) *Neka je $g \in L \setminus \{0\}$ i neka je μ desnoinvarijantna mjera na grupi G. Tada postoji $\lambda \in \mathbb{C}$ takav da je $\mu = \lambda\mu_g$.*

Možemo pisati

$$\mu = (\mu_1 - \mu_2) + i(\mu_3 - \mu_4), \quad \mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4 \in \mathfrak{M}^+(G),$$

pri čemu su

$$\mu_1 = (\operatorname{Re}\mu)^+, \quad \mu_2 = (\operatorname{Re}\mu)^-, \quad \mu_3 = (\operatorname{Im}\mu)^+, \quad \mu_4 = (\operatorname{Im}\mu)^-.$$

Tada su μ_1, μ_2, μ_3 i μ_4 pozitivne desnoinvarijatne mjere. To pokazuje da je tvrdnju (d) dovoljno dokazati u slučaju kad je μ pozitivna desnoinvarijatna mjera, tj. desna Haarova mjera.

Neka je, dakle, μ desna Haarova mjera i $g \in L \setminus \{0\}$. Ako su $f, h \in L$ i $f \sim h$ iz desnoinvarijantnosti mjere μ slijedi da je $\mu(f) = \mu(h)$. Nadalje, kako je mjera μ pozitivna, iz $f \geq h$ slijedi $\mu(f) \geq \mu(h)$. Prema tome vrijedi

$$f, h \in L, \quad f \succeq h \qquad \Longrightarrow \qquad \mu(f) \geq \mu(h).$$

Prema tome, ako je $\alpha \in \mathbb{R}_+$ takav da je $\alpha g \succeq f$ onda je $\alpha\mu(g) \geq \mu(f)$, a ako je $f \succeq \alpha g$, onda je $\alpha\mu(g) \leq \mu(f)$. Stoga imamo

$$\mu(g)\mu_g(f) = \mu(g) \cdot \inf\{\alpha \in \mathbb{R}_+;\ \alpha g \succeq f\} \geq \mu(f),$$

$$\mu(g)\mu_g(f) = \mu(g) \cdot \sup\{\alpha \in \mathbb{R}_+;\ f \succeq \alpha g\} \leq \mu(f).$$

Uz oznaku $\lambda = \mu(g)$ slijedi

$$\mu(f) = \lambda\mu_g(f) \quad \forall f \in L, \quad \text{dakle i} \quad \forall f \in C_0(G).$$

Dakle, $\mu = \lambda\mu_g$. Time je tvrdnja (d) dokazana.

(b) Neka je μ desna Haarova mjera na G i $f \in L \setminus \{0\}$. Prema (d) postoji $\lambda \in \mathbb{C}$ takav da je $\mu = \lambda\mu_f$. Budući da su μ i μ_f pozitivne mjere i $\mu \neq 0$, očito je $\lambda > 0$. Nadalje, prema dokazanom μ_f zadovoljava (D'), dakle je $\mu_f(f) > 0$. Odatle je $\mu(f) = \lambda\mu_f(f) > 0$.

(c) Neka je μ desna Haarova mjera na G i ν desnoinvarijantna mjera na G. Neka je $g \in L \setminus \{0\}$. Prema (d) postoje α i β takvi da je $\mu = \alpha\mu_g$ i $\nu = \beta\mu_g$. Kako je $\mu \neq 0$ to je $\alpha \neq 0$, pa za $\lambda = \dfrac{\beta}{\alpha}$ vrijedi $\nu = \beta\mu_g = \lambda\mu$.

Ostaje nam još da dokažemo propozicije 1.3.7. i 1.3.8. Za to nam treba još nekoliko pomoćnih tvrdnji.

Lema 1.3.12. *Neka su J i I neprazni skupovi i neka su $\mathcal{P}(J)$ i $\mathcal{P}(I)$ njihovi partitivni skupovi (skupovi svih podskupova). Neka je $f : \mathcal{P}(J) \to \mathcal{P}(I)$ preslikavanje sa sljedeća dva svojstva:*

(a) $f(S \cup T) = f(S) \cup f(T)\ \forall S, T \in \mathcal{P}(J)$.

(*b*) $|f(S)| \geq |S| \; \forall S \in \mathcal{P}(J)$.

($|A|$ označava broj elemenata konačnog skupa A). Tada postoji injekcija $\sigma : J \to I$ takva da je $\sigma(j) \in f(\{j\}) \; \forall j \in J$.

Dokaz provodimo indukcijom po $|J|$. Ako je $|J| = 1$ tvrdnja je trivijalna. Pretpostavimo da je $n \geq 2$ i da tvrdnja vrijedi ako je $|J| < n$. Neka je $|J| = n$.

Pretpostavimo najprije da postoji neprazan $J_1 \subsetneq J$ takav da je $|f(J_1)| = |J_1|$. Po pretpostavci indukcije postoji bijekcija $\sigma_1 : J_1 \to I_1 = f(J_1)$ takva da je $\sigma_1(j) \in f(\{j\}) \; \forall j \in J_1$. Neka je $J_2 = J \setminus J_1$ i $I_2 = I \setminus I_1$. Definiramo $g : \mathcal{P}(J_2) \to \mathcal{P}(I_2)$ sa

$$g(S) = f(S) \setminus f(J_1), \qquad S \in \mathcal{P}(J_2).$$

Tada očito vrijedi $g(S \cup T) = g(S) \cup g(T) \; \forall S, T \in \mathcal{P}(J_2)$. Nadalje, za $S \in \mathcal{P}(J_2)$ imamo

$$|S| = |(S \cup J_1)| - |J_1| \leq |f(S \cup J_1)| - |f(J_1)| = |(f(S) \cup f(J_1))| - |f(J_1)| = |(f(S) \setminus f(J_1))| = |g(S)|.$$

Ponovna primjena pretpostavke indukcije daje da postoji injekcija $\sigma_2 : J_2 \to I_2$ takva da je $\sigma_2(j) \in g(\{j\}) \; \forall j \in J_2$. Kako je $g(\{j\}) \subseteq f(\{j\})$, slijedi da je $\sigma_2(j) \in f(\{j\}) \; \forall j \in J_2$. Napokon, definiramo $\sigma : J \to I$ slaganjem preslikavanja σ_1 i σ_2 :

$$\sigma(j) = \begin{cases} \sigma_1(j) & \text{ako je } j \in J_1 \\ \\ \sigma_2(j) & \text{ako je } j \in J_2. \end{cases}$$

Tada je σ injekcija i vrijedi $\sigma(j) \in f(\{j\}) \; \forall j \in J$.

Pretpostavimo sada da je $|f(S)| > |S| \; \forall S \subsetneq J$, $S \neq \emptyset$. Izaberimo $j \in J$ i $i \in f(\{j\})$. Stavimo $J' = J \setminus \{j\}$ i $I' = I \setminus \{i\}$. Nadalje, definiramo $g : \mathcal{P}(J') \to \mathcal{P}(I')$ sa

$$g(S) = f(S) \setminus \{i\}, \qquad S \in \mathcal{P}(J').$$

Tada je očito $g(S \cup T) = g(S) \cup g(T) \; \forall S, T \in \mathcal{P}(J')$. Nadalje, za $S \in \mathcal{P}(J')$ je

$$|f(S)| > |S|, \qquad \text{dakle} \qquad |f(S)| \geq |S| + 1.$$

Stoga je

$$|g(S)| = |(f(S) \setminus \{i\})| \geq |f(S)| - 1 \geq |S|.$$

Po pretpostavci indukcije postoji injekcija $\sigma' : J' \to I'$ takva da je $\sigma'(k) \in g(\{k\}) \subseteq f(\{k\})$ $\forall k \in J'$. Definiramo sada $\sigma : J \to I$ sa $\sigma(j) = i$ i $\sigma|J' = \sigma'$. Tada je σ injekcija i vrijedi $\sigma(k) \in f(\{k\}) \; \forall k \in J$.

Neka su $U, V \subseteq G$. $U-$**mreža za skup** V je svaki skup $S \subseteq G$ takav da je $V \subseteq SU$. Ako skup V ima kompaktan zatvarač i ako skup U ima nepraznu nutrinu, onda iz osnovnog svojstva kompaktnih skupova slijedi da V ima konačnu $U-$mrežu. U tom slučaju sa $[U, V]$ označavamo minimum kardinalnih brojeva svih konačnih $U-$mreža za V. Dakle, $[U, V]$ je najmanji prirodan broj n takav da postoje $x_1, x_2, \ldots, x_n \in G$ takvi da je

$$V \subseteq x_1U \cup x_2U \cup \cdots \cup x_nU.$$

Ako su U, V, W skupovi s nepraznim nutrinama i kompaktnim zatvaračima, onda je $[U, W] \leq [U, V][V, W]$. Doista, ako je $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ $U-$mreža V i ako je $\{y_1, y_2, \ldots, y_m\}$ $V-$mreža za W, onda je

$$V \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} x_iU, \qquad W \subseteq \bigcup_{j=1}^{m} y_jV \qquad \Longrightarrow \qquad W \subseteq \bigcup_{j=1}^{m}\bigcup_{i=1}^{n} y_jx_iU,$$

dakle, $\{y_jx_i; \; 1 \leq j \leq m, \; 1 \leq i \leq n\}$ je $U-$mreža za W.

Lema 1.3.13. *Neka je $K \subseteq G$ neprazan kompaktan skup, N kompaktna okolina jedinice e u G i $U = U^{-1} \subseteq N$ otvorena okolina od e. Neka je $n = [U, KN]$, $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ $U-$mreža KN i $I = \{1, 2, \ldots, n\}$. Za $x \in G$ stavimo $J = \{j \in I;\ xx_j \in K\}$. Tada postoji injekcija $\sigma : J \to I$ takva da vrijedi $x_{\sigma(j)} \in xx_jU^2 \quad \forall j \in J$.*

Dokaz: Definirajmo najprije preslikavanje $f : \mathcal{P}(J) \to \mathcal{P}(I)$. Za bilo koji podskup $S \subseteq J$ stavimo

$$f(S) = \left\{ i \in I;\ \left(\bigcup_{j \in S} xx_jU \right) \cap x_iU \neq \emptyset \right\}.$$

Tada očito vrijedi $f(S \cup T) = f(S) \cup f(T)$, $S, T \in \mathcal{P}(J)$. Nadalje, za svako $j \in J$ imamo

$$xx_jU \subseteq KU \subseteq KN \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} x_iU.$$

Neka je $S \in \mathcal{P}(J)$. Tada za $j \in S$ i $i \in I \setminus f(S)$ vrijedi $xx_jU \cap x_iU = \emptyset$. To znači da je

$$\bigcup_{j \in S} xx_jU \subseteq \bigcup_{i \in f(S)} x_iU, \qquad \text{dakle} \qquad \bigcup_{j \in S} x_jU \subseteq \bigcup_{i \in f(S)} x^{-1}x_iU.$$

Kako je $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ $U-$mreža za skup KN, to pokazuje da je $|f(S)| \geq |S|$. Prema lemi 1.3.12. postoji injekcija $\sigma : J \to I$ takva da je

$$\sigma(j) \in f(\{j\}) = \{i \in I;\ xx_jU \cap x_iU \neq \emptyset\}, \quad \forall j \in J.$$

Dakle, vrijedi $xx_jU \cap x_{\sigma(j)}U \neq \emptyset \quad \forall j \in J$. Kako je $U = U^{-1}$, slijedi $x_{\sigma(j)} \in xx_jU^2 \quad \forall j \in J$.

Lema 1.3.14. *Neka je $A \subseteq G$ kompaktan skup, $\varepsilon > 0$, $m \in \mathbb{N}$ i $g_1, g_2, \ldots, g_m \in L \setminus \{0\}$. Tada postoje $n \in \mathbb{N}$ i $x_1, x_2, \ldots, x_n \in G$ takvi da je*

$$\left| \frac{\sum_{i=1}^{n} g_j(xx_i)}{\sum_{i=1}^{n} g_j(x_i)} - 1 \right| \leq \varepsilon \qquad \forall x \in A, \quad \forall j \in \{1, 2, \ldots, m\}.$$

Dokaz: Možemo pretpostaviti da je $e \in A = A^{-1}$ (ako nije tako, zamijenimo A sa skupom $A \cup A^{-1} \cup \{e\}$). Stavimo

$$K_0 = A \cdot \bigcup_{j=1}^{m} Supp\, g_j.$$

K_0 je kompaktan skup. Stavimo

$$\eta = \min_{1 \leq j \leq m} \max \{g_j(x);\ x \in G\}.$$

Tada je $0 < \eta \leq \max \{g_j(x);\ x \in G\}$ za svaki $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$. Nadalje, za svaki j stavimo

$$V_j = \left\{ x \in G;\ g_j(x) \geq \frac{2}{3}\eta \right\}, \qquad W_j = \left\{ x \in G;\ g_j(x) \geq \frac{1}{3}\eta \right\}.$$

Tada su V_j i W_j kompaktni skupovi s nepraznim nutrinama i V_j je sadržan u nutrini od W_j.

Neka je N kompaktna okolina od e takva da je $V_jN \subseteq W_j$ za $j = 1, 2, \ldots, m$. Neka je $\delta > 0$ takav da je

$$\delta \leq \frac{\eta\varepsilon}{3[V_j, K_0N]} \qquad \forall j \in \{1, 2, \ldots, m\}.$$

Nadalje, neka je $U = U^{-1} \subseteq N$ okolina od e takva da vrijedi

$$x^{-1}y \in U^2 \qquad \Longrightarrow \qquad |g_j(x) - g_j(y)| \leq \delta \quad \forall j \in \{1, 2, \ldots, m\};$$

egzistenciju takve okoline garantira činjenica da funkcije g_j imaju kompaktne nosače, dakle, one su ne samo neprekidne nego uniformno neprekidne.

Ostatak dokaza ove leme podijelit ćemo u tri koraka.

(1) *Neka je $n = [U, K_0N]$ i neka je $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ $U-$mreža za K_0N. Dokažimo da vrijedi*

$$\frac{n\delta}{\sum_{i=1}^n g_j(x_i)} \leq \varepsilon \qquad \text{za} \quad j = 1, 2, \ldots, m.$$

Doista, za svaki j imamo

$$K_0N \subseteq \bigcup_{i=1}^n x_iU \quad \text{i} \quad V_j \subseteq Supp\, g_j \subseteq K_0 \subseteq K_0N \qquad \Longrightarrow \qquad V_j \subseteq \bigcup_{i=1}^n x_iU.$$

To pokazuje da je

$$|\{i;\ 1 \leq i \leq n,\ V_j \cap x_iU \neq \emptyset\}| \geq [U, V_j] \geq \frac{[U, K_0N]}{[V_j, K_0N]} = \frac{n}{[V_j, K_0N]}.$$

Nadalje,

$$x_iU \cap V_j \neq \emptyset \qquad \Longrightarrow \qquad x_i \in V_jU \subseteq V_jN \subseteq W_j \qquad \Longrightarrow \qquad g_j(x_i) \geq \frac{\eta}{3}.$$

Dakle,

$$\sum_{i=1}^n g_j(x_i) \geq \frac{\eta}{3} \cdot \frac{n}{[V_j, K_0N]},$$

pa slijedi

$$\frac{n\delta}{\sum_{i=1}^n g_j(x_i)} \leq \delta \cdot \frac{3}{\eta} \cdot [V_j, K_0N] \leq \varepsilon.$$

(2) *Neka je $y \in A$, $K = yK_0$ i $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ $U-$mreža za $KN = yK_0N$, tj.*

$$KN \subseteq \bigcup_{i=1}^n y_iU.$$

Tada vrijedi

$$\sum_{i=1}^n g_j(xy_i) \leq \sum_{i=1}^n g(y_i) + n\delta \qquad \forall j \in \{1, 2, \ldots, m\}, \quad \forall x \in G.$$

Prije svega primijetimo da iz $g_j(xy_i) \neq 0$ slijedi $xy_i \in Supp\, g_j \subseteq K$, pa je $i \in J$. Neka je u toj situaciji $\sigma : J \to I = \{1, 2, \ldots, n\}$ injekcija iz leme 1.3.13., tj. $y_{\sigma(i)} \in xy_iU^2 \ \ \forall i \in J$. Tada je $(xy_i)^{-1}y_{\sigma(i)} \in U^2$, pa prema izboru skupa U vrijedi $|g_j(y_{\sigma(i)}) - g_j(xy_i)| \leq \delta \ \ \forall j$. Odatle slijedi

$$\sum_{i \in I} g_j(xy_i) = \sum_{i \in J} g_j(xy_i) \leq \sum_{i \in J} \big(g_j(y_{\sigma(i)}) + \delta\big) \leq \sum_{i \in I} (g_j(y_i) + \delta) = \sum_{i \in I} g_j(y_i) + n\delta.$$

(3) *Neka je ponovo* $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ $U-$*mreža za* K_0N. *Dokazat ćemo da je tada*

$$\left|\frac{\sum_{i\in I} g_j(xx_i)}{\sum_{i\in I} g_j(x_i)} - 1\right| \le \varepsilon \qquad \forall j \in \{1,2,\ldots,m\}, \quad \forall x \in A,$$

i time će lema 1.3.14. *biti dokazana.*

Prije svega, primijenimo **(2)** na slučaj $y = e \in A$, dakle, $K = K_0$. Možemo uzeti da je $y_i = x_i$ $\forall i \in I$. Slijedi

$$\sum_{i\in I} g_j(xx_i) \le \sum_{i\in I} g_j(x_i) + n\delta \qquad \forall j \in \{1,2,\ldots,m\}, \quad \forall x \in G.$$

Prema **(1)** odatle slijedi

$$\frac{\sum_{i\in I} g_j(xx_i)}{\sum_{i\in I} g_j(x_i)} \le 1 + \frac{n\delta}{\sum_{i\in I} g_j(x_i)} \le 1 + \varepsilon \qquad \forall j \in \{1,2,\ldots,m\}, \quad \forall x \in G.$$

Fiksirajmo sada $x \in A$ i stavimo $K = xK_0$. Primijenimo **(2)** na taj slučaj. Imamo

$$KN = xK_0N \subseteq \bigcup_{i\in I} xx_iU,$$

pa možemo uzeti $y_i = xx_i$ $\forall i \in I$. Slijedi

$$\sum_{i\in I} g_j(yy_i) \le \sum_{i\in I} g_j(y_i) + n\delta \qquad \forall j \in \{1,2,\ldots,m\}, \quad \forall y \in G.$$

Izaberemo li $y = x^{-1}$ dobivamo

$$\sum_{i\in I} g_j(x_i) \le \sum_{i\in I} g_j(xx_i) + n\delta \qquad \forall j \in \{1,2,\ldots,m\}.$$

Sada primjenom **(1)** slijedi

$$\frac{\sum_{i\in I} g_j(xx_i)}{\sum_{i\in I} g_j(x_i)} \ge 1 - \frac{n\delta}{\sum_{i\in I} g_j(x_i)} \ge 1 - \varepsilon \qquad \forall j \in \{1,2,\ldots,m\}.$$

Dakle, za svako $x \in A$ i za svako $j \in \{1,2,\ldots,m\}$ vrijedi

$$1 - \varepsilon \le \frac{\sum_{i\in I} g_j(xx_i)}{\sum_{i\in I} g_j(x_i)} \le 1 + \varepsilon.$$

Time je lema dokazana.

Lema 1.3.15. *Neka su* $f, g \in L \setminus \{0\}$ *takvi da je* $f \sim g$ *i neka je* $\varepsilon > 0$. *Tada postoje* $y_1, y_2, \ldots, y_n$ *iz* G *takvi da vrijedi*

$$\left|\frac{\sum_{i=1}^n g(y_i)}{\sum_{i=1}^n f(y_i)} - 1\right| \le \varepsilon.$$

Dokaz: Budući da je $f \sim g$, postoje $m \in \mathbb{N}$, $f_1, f_2, \ldots, f_m \in L$ i $z_1, z_2, \ldots, z_m \in G$ takvi da vrijedi

$$f(x) = \sum_{j=1}^m f_j(x), \qquad g(x) = \sum_{j=1}^m f_j(xz_j), \qquad x \in G.$$

Stavimo $A = \{z_2^{-1}, z_2^{-1}, \ldots, z_m^{-1}\}$ i $g_j = \check{f}_j$ za $j = 1, 2, \ldots, m$. Prema lemi 1.3.14. postoje $n \in \mathbb{N}$ i $x_1, x_2, \ldots, x_n \in G$ takvi da je

$$\left| \frac{\sum_{i=1}^n g_j(xx_i)}{\sum_{i=1}^n g_j(x_i)} - 1 \right| \leq \varepsilon \qquad \forall j \in \{1, 2, \ldots, m\}, \quad \forall x \in A,$$

tj.

$$\left| \frac{\sum_{i=1}^n g_j\left(z_k^{-1} x_i\right)}{\sum_{i=1}^n g_j(x_i)} - 1 \right| \leq \varepsilon \qquad \forall j, k \in \{1, 2, \ldots, m\},$$

tj.

$$\left| \frac{\sum_{i=1}^n f_j\left(x_i^{-1} z_k\right)}{\sum_{i=1}^n f_j\left(x_i^{-1}\right)} - 1 \right| \leq \varepsilon \qquad \forall j, k \in \{1, 2, \ldots, m\}.$$

Stavimo $y_i = x_i^{-1}$. Tada za $k = j$ dobivamo

$$\left| \frac{\sum_{i=1}^n f_j(y_i z_j)}{\sum_{i=1}^n f_j(y_i)} - 1 \right| \leq \varepsilon \qquad \forall j \in \{1, 2, \ldots, m\}.$$

Stavimo sada

$$\alpha_j = \sum_{i=1}^n f_j(y_i z_j), \qquad \beta_j = \sum_{i=1}^n f_j(y_i), \qquad j = 1, 2, \ldots, m$$

Tada imamo

$$\left| \frac{\alpha_j}{\beta_j} - 1 \right| \leq \varepsilon \qquad \forall j \in \{1, 2, \ldots, m\},$$

pa slijedi

$$\left| \sum_{j=1}^m \alpha_j - \sum_{j=1}^m \beta_j \right| \leq \sum_{j=1}^m |\alpha_j - \beta_j| \leq \varepsilon \cdot \sum_{j=1}^m \beta_j.$$

To znači da je

$$\varepsilon \geq \left| \frac{\sum_{j=1}^m \alpha_j}{\sum_{j=1}^m \beta_j} - 1 \right| = \left| \frac{\sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n f_j(y_i z_j)}{\sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n f_j(y_i)} - 1 \right| = \left| \frac{\sum_{i=1}^n g(y_i)}{\sum_{i=1}^n f(y_i)} - 1 \right|.$$

Dokaz propozicije 1.3.7. Neka su $f \in L \setminus \{0\}$ i $\alpha \in \mathbb{R}_+$ i pretpostavimo da je $f \succeq \alpha f$. Prema tvrdnji (b) leme 1.3.5. tada postoji $g \in L$ takva da je $f \sim g$ i $g(x) \geq \alpha f(x)$ $\forall x \in G$. Neka je $\varepsilon > 0$. Prema lemi 1.3.15. postoje $n \in \mathbb{N}$ i $y_1, y_2, \ldots, y_n \in G$ takvi da vrijedi

$$\frac{\sum_{i=1}^n g(y_i)}{\sum_{i=1}^n f(y_i)} \leq 1 + \varepsilon.$$

Zbog $g \geq \alpha f$ lijeva strana gornje nejednakosti je $\geq \alpha$. Dakle, vrijedi $\alpha \leq 1 + \varepsilon$, a kako je $\varepsilon > 0$ bio proizvoljan, zaključujemo da je $\alpha \leq 1$.

Lema 1.3.16. *Neka su $f \in L$ i $\varepsilon > 0$. Tada postoji okolina $U = U^{-1}$ od e takva da za svaku funkciju $g \in L \setminus \{0\}$ sa $\mathrm{Supp}\, g \subseteq U$ postoje $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}_+$ i $y_1, y_2, \ldots, y_n \in G$ sa svojstvima*

$$\left| f(x) - \sum_{i=1}^n \alpha_i g(xy_i) \right| \leq \varepsilon \quad \forall x \in G \qquad i \qquad \mathrm{Supp}\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \rho_{y_i} g \right) \subseteq U^2 \cdot \mathrm{Supp}\, f.$$

Dokaz: Neka je

$$M = \|f\|_\infty = \max\{|f(x)|;\ x \in G\}.$$

Neka su $\delta > 0$ i $\eta > 0$ takvi da je $M\eta + \delta(1+\eta) \leq \varepsilon$. Neka je $U = U^{-1}$ kompaktna okolina od e takva da vrijedi

$$xy^{-1} \in U \qquad \Longrightarrow \qquad |f(x) - f(y)| \leq \delta.$$

Stavimo $A = U^2 \cdot Supp\, f$; to je kompaktan podskup od G. Neka je $g \in L \setminus \{0\}$ takva da je $Supp\, g \subseteq U$. Po lemi 1.3.14. postoje $n \in \mathbb{N}$ i $y_1, y_2, \ldots, y_n \in G$ takvi da je

$$\left| \frac{\sum_{i=1}^n g(xy_i)}{\sum_{i=1}^n g(y_i)} - 1 \right| \leq \eta \qquad \forall x \in A.$$

Za $x \in A$ je tada

$$\left| f(x) - \frac{\sum_{i=1}^n f(x) g(xy_i)}{\sum_{i=1}^n g(y_i)} \right| \leq f(x)\eta.$$

Ako je $x \in A$ takav da je $g(xy_i) \neq 0$, tada je $xy_i \in U$, pa je $\left|f(x) - f\left(y_i^{-1}\right)\right| \leq \delta$. Prema tome, za $x \in A$ vrijedi

$$\left| \frac{\sum_{i=1}^n f(x) g(xy_i)}{\sum_{i=1}^n g(y_i)} - \frac{\sum_{i=1}^n f\left(y_i^{-1}\right) g(xy_i)}{\sum_{i=1}^n g(y_i)} \right| \leq$$

$$\leq \frac{\sum_{i=1}^n \left|f(x) - f\left(y_i^{-1}\right)\right| g(xy_i)}{\sum_{i=1}^n g(y_i)} \leq \delta \frac{\sum_{i=1}^n g(xy_i)}{\sum_{i=1}^n g(y_i)} \leq \delta(1+\eta).$$

Stavimo sada

$$\alpha_i = \frac{f\left(y_i^{-1}\right)}{\sum_{j=1}^n g(y_j)}, \qquad 1 \leq i \leq n.$$

Pomoću dobivenih nejednakosti za $x \in A$ izvodimo

$$\left| f(x) - \sum_{i=1}^n \alpha_i g(xy_i) \right| \leq \left| f(x) - \frac{\sum_{i=1}^n f(x) g(xy_i)}{\sum_{i=1}^n g(y_i)} \right| + \left| \frac{\sum_{i=1}^n f(x) g(xy_i)}{\sum_{i=1}^n g(y_i)} - \frac{\sum_{i=1}^n f\left(y_i^{-1}\right) g(xy_i)}{\sum_{i=1}^n g(y_i)} \right| \leq$$

$$\leq f(x)\eta + \delta(1+\eta) \leq M\eta + \delta(1+\eta) \leq \varepsilon.$$

Time smo dokazali da vrijedi

$$\left| f(x) - \sum_{i=1}^n \alpha_i g(xy_i) \right| \leq \varepsilon \qquad \forall x \in A.$$

Ustanovit ćemo sada da ako uklonimo neke indekse $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ nejednakost i dalje vrijedi za $x \in A$ ali i za $x \in G \setminus A$. Usput ćemo dobiti i tvrdnju o nosačima.

Stavimo

$$I = \{1, 2, \ldots, n\}, \qquad J = \{i \in I;\ Supp\ (\rho_{y_i} g) \subseteq A\}.$$

Neka je $i \in I \setminus J$. Tada postoji $y \in Supp\ (\rho_{y_i} g)$ takav da $y \notin A = U^2 \cdot Supp\, f$. Imamo

$$Supp\ (\rho_{y_i} g) = (Supp\,) y_i^{-1} \subseteq U y_i^{-1}.$$

Dakle, imamo redom

$$y \in U y_i^{-1} \quad \Longrightarrow \quad y_i \in y^{-1} U \quad \Longrightarrow \quad Supp\ (\rho_{y_i} g) \subseteq U y_i^{-1} \subseteq U\left(y^{-1} U\right)^{-1} = U^2 y.$$

Budući da je $U = U^{-1}$, iz $y \notin U^2 \cdot Supp\, f$ i iz dobivene inkluzije slijedi $Supp\,(\rho_{y_i} g) \cap Supp\, f = \emptyset$. Stoga imamo za $x \in Supp\, f$

$$\left| f(x) - \sum_{j \in J} \alpha_j g(xy_j) \right| = \left| f(x) - \sum_{i \in I} \alpha_i g(xy_i) \right| \leq \varepsilon;$$

za $x \in A \setminus Supp\, f$ je

$$\left| f(x) - \sum_{j \in J} \alpha_j g(xy_j) \right| = \sum_{j \in J} \alpha_j g(xy_j) \leq \sum_{i \in I} \alpha_i g(xy_i) = \left| f(x) - \sum_{i \in I} \alpha_i g(xy_i) \right| \leq \varepsilon;$$

napokon, za $x \in G \setminus A$ je $f(x) = g(xy_j) = 0\ \forall j \in J$ pa je opet

$$\left| f(x) - \sum_{j \in J} \alpha_j g(xy_j) \right| \leq \varepsilon.$$

Time smo dokazali da vrijedi

$$\left| f(x) - \sum_{j \in J} \alpha_j g(xy_j) \right| \leq \varepsilon \qquad \forall x \in G,$$

a izbor skupa J je bio takav da vrijedi i $Supp\,\big(\rho_{y_j} g\big) \subseteq U^2 \cdot Supp\, f\ \forall j \in J$.

Lema 1.3.17. *Neka su $f, g \in L$ takve da je $f \neq g$ i $f(x) \geq g(x)\ \forall x \in G$. Tada postoji $f' \in L$ takva da je $f' \sim f$ i da vrijedi $f'(x) > g(x)\ \forall x \in Supp\, g$.*

Dokaz: Neka je $h = f - g \in L \setminus \{0\}$ i $U = \{x \in G;\ h(x) > 0\}$. U je neprazan otvoren skup (s kompaktnim zatvaračem). Neka su $n \in \mathbb{N}$ i $x_1, x_2, \ldots, x_n \in G$ takvi da je

$$Supp\, g \subseteq Ux_1^{-1} \cup Ux_2^{-1} \cup \cdots \cup Ux_n^{-1}.$$

Stavimo

$$h_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \rho_{x_i} h \qquad \text{i} \qquad f' = g + h_1.$$

Budući da je $f = g + h$ i $h_1 \sim h$, vrijedi $f' \sim f$. Nadalje, za $x \in Supp\, g$ je $x \in Ux_i^{-1}$ za neki i pa imamo redom

$$xx_i \in U \quad \Longrightarrow \quad h(xx_i) > 0 \quad \Longrightarrow \quad h_1(x) > 0 \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = g(x) + h_1(x) > g(x).$$

Dokaz propozicije 1.3.8. Neka su $f, g \in L$, $g \neq 0$ i $\varepsilon > 0$. Treba dokazati da postoji $\alpha \in \mathbb{R}_+$ takav da vrijedi $(1+\varepsilon)f \succeq \alpha g \succeq f$. Ako je $f = 0$ možemo uzeti $\alpha = 0$. Pretpostavimo da je $f \neq 0$. Tada po lemi 1.3.17. postoji $h \in L$ takva da je $h \sim \left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right) f$ i da je $h(x) > f(x)\ \forall x \in Supp\, f$. Po istoj lemi postoji $k \in L$ takva da je $k \sim \frac{2+2\varepsilon}{2+\varepsilon} h$ i da je $k(x) > h(x)\ \forall x \in Supp\, h$. Tada je

$$k \sim \frac{2+2\varepsilon}{2+\varepsilon} \left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right) f = (1+\varepsilon) f.$$

Dakle, vrijedi

$$h \sim \left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right) f, \quad k \sim (1+\varepsilon) f, \quad h(x) > f(x)\ \ \forall x \in Supp\, f, \quad k(x) > h(x)\ \ \forall x \in Supp\, h.$$

Tada je $Supp\, h$ sadržan u nutrini $Int(Supp\, k)$ nosača od k, pa postoji kompaktan skup K takav da je

$$Supp\, h \subseteq Int(K) \subseteq K \subseteq Int(Supp\, k).$$

Neka je $U = U^{-1}$ okolina od e takva da je $U^2 \cdot Supp\, h \subseteq K$. Odaberimo $\varphi \in L$ tako da je $\varphi \sim g$ i $Supp\, \varphi \subseteq U$; to možemo zbog leme 1.3.4. Stavimo

$$\delta_1 = \min \{h(x) - f(x);\ x \in Supp\, f\} > 0, \quad \delta_2 = \min \{k(x) - h(x);\ x \in K\} > 0, \quad \delta = \min \{\delta_1, \delta_2\}.$$

Prema lemi 1.3.16. postoje $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}_+$ i $y_1, y_2, \ldots, y_n \in G$ takvi da vrijedi

$$\left| h(x) - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi(xy_i) \right| \leq \delta \qquad \forall x \in G$$

i

$$Supp\ (\rho_{y_i}\varphi) \subseteq U^2 \cdot Supp\, h \subseteq K, \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Za $x \in Supp\, f$ je tada

$$f(x) \leq h(x) - \delta \leq \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi(xy_i) \qquad \Longrightarrow \qquad f(x) \leq \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi(xy_i) \quad \forall x \in G.$$

Nadalje, za $x \in K$ je

$$k(x) \geq h(x) + \delta \geq \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi(xy_i).$$

Međutim,

$$Supp \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \rho_{y_i} \varphi \right) \subseteq K,$$

pa slijedi

$$k(x) \geq \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi(xy_i) \qquad \forall x \in G.$$

Dakle je

$$f \leq \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \rho_{y_i} \varphi \leq k.$$

Ali za $\alpha = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$ je

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \rho_{y_i} \varphi \sim \alpha\varphi \sim \alpha\ g.$$

Dakle,

$$(1 + \varepsilon) f \succeq \alpha g \succeq f.$$

1.4 Modularna funkcija

Neka je μ desna Haarova mjera na lokalno kompaktnoj grupi G. Tada za $x, y \in G$ vrijedi $\rho_x(\lambda_y\mu) = \lambda_y(\rho_x\mu) = \lambda_y\mu$, dakle, i $\lambda_y\mu$ je desna Haarova mjera na G. Prema teoremu 1.3.11. postoji $\Delta(y) > 0$ takav da je $\lambda_y\mu = \Delta(y)\mu$. Na taj način smo došli do funkcije $\Delta : G \to \mathbb{R}_+^* = \langle 0, +\infty\rangle$ takve da je

$$\lambda_y\mu = \Delta(y)\mu \qquad \forall y \in G. \qquad\qquad (*)$$

Kako je svaka desnoinvarijantna mjera proporcionalna desnoj Haarovoj mjeri, $(*)$ vrijedi za svaku desnoinvarijantnu mjeru μ.

Neka je sada μ lijevoinvarijantna mjera na G. Tada je mjera $\check{\mu}$ desnoinvarijantna, pa vrijedi

$$\lambda_y\check{\mu} = \Delta(y)\check{\mu} \qquad \forall y \in G.$$

Međutim, $\lambda_y\check{\mu} = (\rho_y\mu)\check{}$. Zaključujemo da vrijedi

$$\rho_y\mu = \Delta(y)\mu \qquad \forall y \in G \qquad\qquad (**)$$

za svaku lijevoinvarijatnu mjeru μ.

Funkcija $\Delta = \Delta_G$ zove se **modularna funkcija** grupe G.

Propozicija 1.4.1. *Modularna funkcija lokalno kompaktne grupe G je neprekidni homomorfizam grupe G u multiplikativnu grupu $\mathbb{R}_+^*$.*

Dokaz: Neka je μ desna Haarova mjera na G. Tada je za $x, y \in G$

$$\Delta(xy)\mu = \lambda_{xy}\mu = \lambda_x(\lambda_y\mu) = \Delta(y)\lambda_x\mu = \Delta(x)\Delta(y)\mu.$$

Dakle, $\Delta(xy) = \Delta(x)\Delta(y)$, odnosno, $\Delta : G \to \mathbb{R}_+^*$ je homomorfizam.

Neka je sada $f \in L = C_0^+(G)$ takva da je $\mu(f) = 1$. Imamo tada

$$\Delta(x) = \Delta(x)\mu(f) = (\lambda_x\mu)(f) = \mu(\lambda_{x^{-1}}f), \qquad x \in G.$$

Neka je točka $x_0 \in G$ proizvoljno odabrana. Neka je V kompaktna okolina od e i neka je $K = Supp\, f$. Neka je $M > 0$ takav da vrijedi

$$g \in C_0(G), \quad Supp\, g \subseteq x_0^{-1}VK \qquad \Longrightarrow \qquad |\mu(g)| \le M \cdot \|g\|_\infty.$$

Neka je $\varepsilon > 0$. Odaberimo okolinu $U = U^{-1} \subseteq V$ jedinice e takvu da vrijedi

$$xy^{-1} \in U \qquad \Longrightarrow \qquad |f(x) - f(y)| \le \frac{\varepsilon}{M}$$

(naime, funkcija f je uniformno neprekidna jer ima kompaktan nosač). Za $x \in Ux_0$ tada imamo

$$Supp\ (\lambda_{x^{-1}}f) = \{y \in G;\ xy \in K\} = x^{-1}K \subseteq (Ux_0)^{-1}K = x_0^{-1}UK \subseteq x_0^{-1}VK.$$

Očito je $x_0 \in Ux_0$, pa je, posebno, $Supp\,(\lambda_{x_0^{-1}}f) \subseteq x_0^{-1}VK$. Dakle,

$$x \in Ux_0 \qquad \Longrightarrow \qquad Supp\ \left(\lambda_{x^{-1}}f - \lambda_{x_0^{-1}}f\right) \subseteq x_0^{-1}VK.$$

Odavde slijedi

$$x \in Ux_0 \qquad \Longrightarrow \qquad |\Delta(x) - \Delta(x_0)| = |\mu(\lambda_{x^{-1}}f - \lambda_{x_0^{-1}}f)| \le M \cdot \|\lambda_{x^{-1}}f - \lambda_{x_0^{-1}}f\|_\infty.$$

Za svaki $y \in G$ i $x \in Ux_0$ je $(xy)(x_0y)^{-1} = xx_0^{-1} \in U$, pa vrijedi

$$|(\lambda_{x^{-1}}f)(y) - (\lambda_{x_0^{-1}}f)(y)| = |f(xy) - f(x_0y)| \leq \frac{\varepsilon}{M}.$$

Odatle je $|\lambda_{x^{-1}}f - \lambda_{x_0^{-1}}f\|_\infty \leq \dfrac{\varepsilon}{M}$. Prema tome, vrijedi

$$x \in Ux_0 \qquad \Longrightarrow \qquad |\Delta(x) - \Delta(x_0)| \leq \varepsilon.$$

Time je dokazano da je funkcija Δ neprekidna u svakoj točki $x_0 \in G$.

Propozicija 1.4.2. (a) *Za svaku desnoinvarijantnu mjeru μ na G vrijedi*

$$\check{\mu} = \Delta\mu.$$

(b) *Za svaku lijevoinvarijantnu mjeru μ na G vrijedi*

$$\check{\mu} = \frac{1}{\Delta}\mu.$$

Zadatak 1.3. *Dokažite propoziciju 1.4.2.*

Uputa: Najprije uočite da je dokaz tvrdnje (a) dovoljno provesti za pozitivnu, odnosno, desnu Haarovu mjeru μ. Zatim dokažite da su $\check{\mu}$ i $\Delta\mu$ lijeve Haarove mjere. Tvrdnju (b) svedite na tvrdnju (a) pomoću preslikavanja $\mu \mapsto \check{\mu}$.

Kad god imamo mjeru μ na G i $f \in C_0(G)$ uobičajen je integralni zapis

$$\mu(f) = \int_G f(x)\mathrm{d}\mu(x).$$

Uz integralni zapis svojstva desnoinvarijantne mjere μ izgledaju ovako

$$\int_G f(xy)\mathrm{d}\mu(x) = \int_G f(x)\mathrm{d}\mu(x), \qquad \int_G f(yx)\mathrm{d}\mu(x) = \Delta(y)\int_G f(x)\mathrm{d}\mu(x),$$

$$\int_G f\left(x^{-1}\right)\mathrm{d}\mu(x) = \int_G \Delta(x)f(x)\mathrm{d}\mu(x).$$

Slično, svojstva lijevoinvarijantne mjere μ uz integralni zapis su

$$\int_G f(yx)\mathrm{d}\mu(x) = \int_G f(x)\mathrm{d}\mu(x), \qquad \int_G f(xy)\mathrm{d}\mu(x) = \Delta\left(y^{-1}\right)\int_G f(x)\mathrm{d}\mu(x),$$

$$\int_G f\left(x^{-1}\right)\mathrm{d}\mu(x) = \int_G \Delta\left(x^{-1}\right)f(x)\mathrm{d}\mu(x).$$

Ako se radi o desnoj, odnosno lijevoj, Haarovoj mjeri, ove jednakosti vrijede ne samo za $f \in C_0(G)$ nego i za sve integrabilne funkcije f. U stvari, u trećim jednakostima funkcija $\check{f}$ treba biti integrabilna, a to u slučaju kad je modularna funkcija Δ netrivijalna (tj. $\Delta \not\equiv 1$) nije ekvivalentno integrabilnosti funkcije f.

Lokalno kompaktna grupa G zove se **unimodularna** ako je $\Delta_G \equiv 1$, tj. ako je svaka lijevoinvarijantna mjera ujedno i desnoinvarijantna, odnosno, ako postoji netrivijalna biinvarijantna mjera.

Propozicija 1.4.3. *Ako je grupa G diskretna, komutativna ili kompaktna ona je unimodularna.*

Dokaz: Pretpostavimo da je grupa G diskretna. Tada je $C_0(G)$ skup svih funkcija $f : G \to \mathbb{C}$ s konačnim nosačem. Dakle, postoji biinvarijatna Haarova mjera:

$$\mu(f) = \sum_{x \in Supp\, f} f(x), \qquad f \in C_0(G).$$

Slijedi da je G unimodularna.

Ako je G komutativna, lijevoinvarijantnost i desnoinvarijantnost je jedno te isto, dakle i u tom slučaju je G unimodularna.

Napokon, neka je G kompaktna grupa. Tada je područje vrijednosti neprekidne modularne funkcije Δ_G kompaktna podgrupa multiplikativne grupe $\mathbb{R}_+^*$. No takva je samo $\{1\}$, dakle, $\Delta_G \equiv 1$, pa je G unimodularna.

Napomenimo još da je **komutatorska podgrupa** G' grupe G, a to je podgrupa generirana svim elementima oblika $xyx^{-1}y^{-1}$, $x, y \in G$, sadržana u jezgri homomorfizma $\Delta_G : G \to \mathbb{R}_+^*$.

1.5 Grupovna algebra

Neka je G lokalno kompaktna grupa i neka je na G fiksirana neka desna Haarova mjera μ. Neka je Δ modularna funkcija grupe G. Za $f, g \in C_0(G)$ definiramo funkcije $f * g : G \to \mathbb{C}$ i $f^* : G \to \mathbb{C}$ relacijama

$$(f * g)(x) = \int_G f(xy^{-1})g(y)\mathrm{d}\mu(y) = \int_G f(y^{-1})g(yx)\mathrm{d}\mu(y) =$$

$$= \int_G f(xy)g(y^{-1})\mathrm{d}\check{\mu}(y) = \int_G f(y)g(y^{-1}x)\mathrm{d}\check{\mu}(y),$$

$$f^*(x) = \Delta(x^{-1})\overline{f(x^{-1})}, \quad \text{tj.} \quad f^* = (\Delta\overline{f})\check{}.$$

Propozicija 1.5.1. (*a*) *Za $f, g \in C_0(G)$ funkcije $f * g$ i f^* su neprekidne i vrijedi $Supp\,(f * g) \subseteq (Supp\,f)(Supp\,g)$ i $Supp\,f^* = (Supp\,f)^{-1}$. Dakle, $f * g, f^* \in C_0(G)$.*

(*b*) *$C_0(G)$ s množenjem $(f, g) \mapsto f * g$ je asocijativna algebra.*

(*c*) *Preslikavanje $f \mapsto f^*$ je antilinearno, $f^{**} = f$ i $(f * g)^* = g^* * f^*$. Drugim riječima, $C_0(G)$ je $*-$algebra.*

(*d*) *Za bilo koje $f, g \in C_0(G)$ i $x \in G$ vrijede jednakosti*

$$\lambda_x(f * g) = (\lambda_x f) * g, \qquad \rho_x(f * g) = f * \rho_x g, \qquad (\lambda_x f)^* * (\lambda_x g) = f^* * g,$$

$$\lambda_x f^* = \Delta(x)(\rho_x f)^*, \qquad \rho_x f^* = \Delta(x^{-1})(\lambda_x f)^*.$$

Dokaz: (*a*) Tvrdnje $f^* \in C_0(G)$ i $Supp\,f^* = (Supp\,f)^{-1}$ su očigledne.
Stavimo

$$A = Int(Supp\,f) = \{x \in G;\ f(x) \neq 0\} \qquad \text{i} \qquad B = Int(Supp\,g) = \{x \in G;\ g(x) \neq 0\}.$$

Ako je $x \in G$ takav da je $(f * g)(x) \neq 0$ onda postoji $y \in B$ takav da je $xy^{-1} \in A$. Tada je $x = (xy^{-1})y \in AB$. Slijedi

$$Supp\,(f * g) \subseteq Cl(AB) \subseteq Cl(A)Cl(B) = (Supp\,f)(Supp\,g).$$

Ostaje još da dokažemo neprekidnost funkcije $f * g$. Neka je $x_0 \in G$ i $\varepsilon > 0$. Stavimo $K = Supp\,g$. Neka je $N = N^{-1}$ kompaktna okolina od e i neka je $M > 0$ takav da vrijedi

$$h \in C_0(G), \quad Supp\,h \subseteq KNx_0^{-1} \qquad \Longrightarrow \qquad |\mu(h)| \leq M \cdot \|h\|_\infty.$$

Izaberimo sada okolinu $U \subseteq N$ jedinice e takvu da vrijedi

$$z^{-1}y \in U \qquad \Longrightarrow \qquad |g(y) - g(z)| \leq \frac{\varepsilon}{M \cdot \|f\|_\infty}.$$

Za $x \in x_0U$ sada imamo

$$|(f * g)(x) - (f * g)(x_0)| = \left| \int_G g(yx)f(y^{-1})\mathrm{d}\mu(y) - \int_G g(yx_0)f(y^{-1})\mathrm{d}\mu(y) \right| \leq$$

$$\int_G |g(yx) - g(yx_0)| \cdot |f(y^{-1})|\mathrm{d}\mu(y) \leq \|f\|_\infty \mu(|\rho_x g - \rho_{x_0} g|).$$

Kako su $x, x_0 \in x_0U \subseteq x_0N$, to je $Supp\,\rho_x g = Kx^{-1} \subseteq KNx_0^{-1}$ i $Supp\,\rho_{x_0} g \subseteq KNx_0^{-1}$ pa je i $Supp\,|\rho_x g - \rho_{x_0} g| \subseteq KNx_0^{-1}$. Prema tome je

$$\mu(|\rho_x g - \rho_{x_0} g|) \leq M \cdot \|\rho_x g - \rho_{x_0} g\|_\infty, \qquad x \in x_0U.$$

Dakle, za $x \in x_0U$ imamo

$$|(f * g)(x) - (f * g)(x_0)| \leq M \cdot \|f\|_\infty \cdot \|\rho_x g - \rho_{x_0} g\|_\infty.$$

Ocijenimo još normu razlike pomaka funkcije g. Ako je $x \in x_0U$, onda za bilo koji $y \in G$ vrijedi $(yx_0)^{-1}(yx) = x_0^{-1}x \in U$, dakle,

$$|(\rho_x g)(y) - (\rho_{x_0} g)(y)| = |g(yx) - g(yx_0)| \leq \frac{\varepsilon}{M \cdot \|f\|_\infty}.$$

Odatle je

$$\|\rho_x g - \rho_{x_0} g\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{M \cdot \|f\|_\infty}.$$

Prema tome,

$$x \in x_0U \qquad \Longrightarrow \qquad |(f * g)(x) - (f * g)(x_0)| \leq M \cdot \|f\|_\infty \cdot \frac{\varepsilon}{M \cdot \|f\|_\infty} = \varepsilon,$$

i time dokazana neprekidnost funkcije $f * g$ u bilo kojoj točki $x_0 \in G$.

Zadatak 1.4. *Dokažite tvrdnje (b), (c) i (d) propozicije 1.5.1.*

Za $f \in C_0(G)$ definiramo

$$\|f\|_1 = \int_G |f(x)| \mathrm{d}\check{\mu}(x) = \int_G |f(x^{-1})| \mathrm{d}\mu(x).$$

Tada je $\|\cdot\|_1$ norma na prostoru $C_0(G)$.

Propozicija 1.5.2. *Za $f, g \in C_0(G)$ vrijedi*

$$\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1, \qquad \|f^*\|_1 = \|f\|_1.$$

Drugim riječima, $C_0(G)$ je normirana $*-$algebra.

Zadatak 1.5. *Dokažite propoziciju 1.5.2.*

Popunjenjem algebre $C_0(G)$ po normi $\|\cdot\|_1$ dobivamo Banachovu $*-$algebru. Kao Banachov prostor to se popunjenje identificira s prostorom $L_1(G, \check{\mu})$ svih klasa $\check{\mu}-$integrabilnih funkcija na G; pri tome se dvije funkcije nalaze u istoj klasi ako i samo ako se podudaraju svuda osim na skupu mjere nula. Pokazuje se da se množenje i involucija mogu za predstavnike elemenata od $L_1(G, \check{\mu})$ pisati pomoću istih formula kao i za elemente $C_0(G)$ s tim da se jednakosti interpretiraju kao jednakosti "*gotovo svuda*" (odnosno, svuda osim na skupu mjere 0). Algebra $C_0(G)$, pa ni $L_1(G, \check{\mu})$, općenito nema jedinicu. Može se pokazati da $C_0(G)$ (odnosno, $L_1(G, \check{\mu})$) ima jedinicu ako i samo ako je grupa G diskretna. Tada je Haarova mjera $\mu = \check{\mu}$ zadana sa

$$\mu(f) = \sum_{x \in G} f(x) = \sum_{x \in Supp\, f} f(x),$$

a jedinica je

$$1(x) = \begin{cases} 1 & \text{ako je } x = e \\ \\ 0 & \text{ako je } x \neq e. \end{cases}$$

U mnogim važnim situacijama nepostojanje jedinice može nadomjestiti postojanje tzv. *aproksimativne jedinice*:

Propozicija 1.5.3. *Postoji hiperniz* $(\varphi_i)_{i\in I}$ *u* $C_0^+(G)$ *takav da za svaku funkciju* $f \in C_0(G)$ *vrijedi*

$$\lim_{i\in I} \|\varphi_i * f - f\|_1 = \lim_{i\in I} \|f * \varphi_i - f\|_1 = 0.$$

Pri tome je **hiperniz** naziv za familiju indeksiranu usmjerenim skupom. Nadalje, **usmjeren skup** je neprazan parcijalno uređen skup I takav da za bilo koje $i, j \in I$ postoji $k \in I$ takav da je $i \leq k$ i $j \leq k$. Nadalje, za hiperniz $(x_i)_{i\in I}$ u normiranom prostoru X kažemo da je **konvergentan**, ako postoji $x_0 \in X$ takav da vrijedi

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists i_0 \in I \quad \text{takav da} \quad i \in I,\ i_0 \leq i \qquad \Longrightarrow \qquad \|x_i - x_0\| \leq \varepsilon.$$

Ako postoji takav je x_0 jedinstven, zovemo ga **limes hiperniza** $(x_i)_{i\in I}$ i pišemo:

$$x_0 = \lim_{i\in I} x_i.$$

Konvergencija hiperniza generalizira se i na proizvoljan Hausdorffov topološki prostor: hiperniz $(t_i)_{i\in I}$ u Hausdorffovom topološkom prostoru T je konvergentan ako postoji $t_0 \in T$ takav da za svaku okolinu V točke t_0 postoji $i_0 \in I$ takav da vrijedi

$$i \in I,\ i_0 \leq i \qquad \Longrightarrow \qquad t_i \in V.$$

Iz činjenice da je prostor T Hausdorffov opet slijedi da je takav t_0 jedinstven (ukoliko postoji). I u tom općenitijem slučaju t_0 se zove limes hiperniza $(t_i)_{i\in I}$ i pišemo

$$t_0 = \lim_{i\in I} t_i.$$

Dokaz Propozicije 1.5.3.: Neka je I usmjeren skup svih kompaktnih okolina jedinice e uređen inkluzijom:

$$i \geq j \qquad \Longleftrightarrow \qquad i \subseteq j.$$

Za svaki $i \in I$ izaberimo $\varphi_i \in C_0^+(G)$ takvu da je $Supp\,\varphi_i \subseteq i$ i $\check{\mu}(\varphi_i) = 1$. Pokazat ćemo da taj hiperniz funkcija ima tražena svojstva.

Neka je $f \in C_0(G)$ i $i \in I$. Tada je

$$\|\varphi_i * f - f\|_1 = \int_G |(\varphi_i * f)(x^{-1}) - f(x^{-1})| \mathrm{d}\mu(x) =$$

$$= \int_G \left| \int_G \varphi_i(y^{-1}) f(yx^{-1}) \mathrm{d}\mu(y) - f(x^{-1}) \int_G \varphi_i(y^{-1}) \mathrm{d}\mu(y) \right| \mathrm{d}\mu(x) =$$

$$= \int_G \left| \int_G \varphi_i(y^{-1})[f(yx^{-1}) - f(x^{-1})] \mathrm{d}\mu(y) \right| \mathrm{d}\mu(x) \leq \int_G \varphi_i(y^{-1}) \int_G |f(yx^{-1}) - f(x^{-1})| \mathrm{d}\mu(x) \mathrm{d}\mu(y).$$

Neka je $\varepsilon > 0$. Stavimo $K = Supp\, f$ i neka je $N = N^{-1}$ kompaktna okolina jedinice e u grupi G. Tada je skup $K^{-1}N$ kompaktan, pa postoji $M > 0$ takav da vrijedi:

$$g \in C_0(G), \quad Supp\, g \subseteq K^{-1}N \qquad \Longrightarrow \qquad |\mu(g)| \leq M \cdot \|g\|_\infty.$$

Neka je $i_0 \in I$ takav da je $i_0 \subseteq N$ i da vrijedi:

$$a, b \in G, \quad ab^{-1} \in i_0 \qquad \Longrightarrow \qquad |f(b) - f(a)| \leq \frac{\varepsilon}{M}.$$

Neka je sada $i \in I$, $i \geq i_0$ (tj. $i \subseteq i_0$). Neka je $y \in G$ takav da je $\varphi_i(y^{-1}) \neq 0$. Tada je $y \in i^{-1} \subseteq i_0^{-1} \subseteq N^{-1} \subseteq N$. Stoga je

$$Supp\,(\lambda_{y^{-1}} f)\check{} = (Supp\,\lambda_{y^{-1}} f)^{-1} = (y^{-1}K)^{-1} = K^{-1}y \subseteq K^{-1}N \quad \text{i} \quad Supp\,\check{f} = K^{-1} \subseteq K^{-1}N.$$

Dakle, za takav element y je

$$\int_G |f(yx^{-1}) - f(x^{-1})| \mathrm{d}\mu(x) = \mu(|(\lambda_{y^{-1}} f)\check{} - \check{f}|) \leq M \cdot \|(\lambda_{y^{-1}} f)\check{} - \check{f}\|_\infty.$$

S druge strane, za takav y i za svaki $x \in G$ je $x^{-1}(yx^{-1})^{-1} = y^{-1} \in i \subseteq i_0$, pa vrijedi

$$|(\lambda_{y^{-1}} f)\check{}(x) - \check{f}(x)| = |f(yx^{-1}) - f(x^{-1})| \leq \frac{\varepsilon}{M}.$$

Slijedi

$$\|(\lambda_{y^{-1}} f)\check{} - \check{f}\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{M} \qquad \Longrightarrow \qquad \int_G |f(yx^{-1}) - f(x^{-1})| \mathrm{d}\mu(x) \leq M \cdot \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon.$$

Odatle i iz prve nejednakosti dobivamo

$$\|\varphi_i * f - f\|_1 \leq \varepsilon \int_g \varphi_i(y^{-1}) \mathrm{d}\mu(y) = \varepsilon \qquad \forall i \geq i_0.$$

Time je dokazano da vrijedi

$$\lim_{i \in I} \|\varphi_i * f - f\|_1 = 0.$$

Zadatak 1.6. *Dokažite da za izabran hiperniz $(\varphi_i)_{i \in I}$ i za svaku funkciju $f \in C_0(G)$ vrijedi:*

$$\lim_{i \in I} \|f * \varphi_i - f\|_1 = 0.$$

Male modifikacije dijela dokaza propozicije 1.5.3. daju sljedeću propoziciju, čije dvije tvrdnje će nam biti od koristi u teoriji reprezentacija lokalno kompaktnih grupa.

Propozicija 1.5.4. *Neka je $f \in C_0(G)$ i $\varepsilon > 0$. Neka su $\|\cdot\|_1$ L_1-norma i $\|\cdot\|_2$ L_2-norma na $C_0(G)$ u odnosu na lijevu Haarovu mjeru $\check{\mu}$ na grupi G :*

$$\|g\|_1 = \int_G |g(x)| d\check{\mu}(x), \qquad \|g\|_2 = \sqrt{\int_G |g(x)|^2 d\check{\mu}(x)}, \qquad g \in C_0(G).$$

Postoji okolina V jedinice e u grupi G takva da vrijedi

$$x \in V \qquad \Longrightarrow \qquad \|\lambda_x f - f\|_1 < \varepsilon \qquad i \qquad \|\lambda_x f - f\|_2 < \varepsilon.$$

Iste dvije tvrdnje vrijede i za norme definirane pomoću desne Haarove mjere μ.

Zadatak 1.7. *Dokažite propoziciju 1.5.4.*

Poglavlje 2

Unitarne reprezentacije

2.1 Definicije i osnovna svojstva

Unitarna reprezentacija lokalno kompaktne grupe G na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$ je homomorfizam π grupe G u grupu $U(\mathcal{H})$ unitarnih operatora na $\mathcal{H}$ takav da je preslikavanje $(x,\xi) \mapsto \pi(x)\xi$ sa $G \times \mathcal{H}$ u $\mathcal{H}$ neprekidno. Sljedeće dvije leme pokazuju da je ovo svojstvo neprekidnosti ekvivalentno prividno mnogo slabijim svojstvima.

Lema 2.1.1. *Neka $\pi : G \to U(\mathcal{H})$ homomorfizam grupa takav da je za svako $\xi \in \mathcal{H}$ funkcija $x \mapsto Re\,(\pi(x)\xi|\xi)$ neprekidna u jedinici e grupe G. Tada je π unitarna reprezentacija.*

Dokaz: Neka je $\xi_0 \in \mathcal{H}$, $x_0 \in G$ i $\varepsilon > 0$. Vrijednost funkcije $x \mapsto \mathrm{Re}\,(\pi(x)\pi(x_0)\xi_0|\pi(x_0)\xi_0)$ u točki e jednaka je $\|\xi_0\|^2$. Po pretpostavci ta je funkcija neprekidna u točki e pa postoji okolina U od e takva da vrijedi

$$a \in U \qquad \Longrightarrow \qquad \|\xi_0\|^2 - \mathrm{Re}\,(\pi(a)\pi(x_0)\xi_0|\pi(x_0)\xi_0) \le \frac{\varepsilon^2}{8}.$$

Za $x \in Ux_0$ (tj. $xx_0^{-1} \in U$) i za $\xi \in \mathcal{H}$ takav da je $\|\xi - \xi_0\| \le \frac{\varepsilon}{2}$ imamo redom

$$\|\pi(x)\xi - \pi(x_0)\xi_0\| \le \|\pi(x)\xi - \pi(x)\xi_0\| + \|\pi(x)\xi_0 - \pi(x_0)\xi_0\| =$$

$$= \|\xi - \xi_0\| + \sqrt{(\pi(x)\xi_0|\pi(x)\xi_0) + (\pi(x_0)\xi_0|\pi(x_0)\xi_0) - 2\mathrm{Re}\,(\pi(x)\xi_0|\pi(x_0)\xi_0)} =$$

$$= \|\xi - \xi_0\| + \sqrt{2[\|\xi_0\|^2 - \mathrm{Re}\,(\pi(xx_0^{-1})\pi(x_0)\xi_0|\pi(x_0)\xi_0)]} \le \frac{\varepsilon}{2} + \sqrt{2\frac{\varepsilon^2}{8}} = \varepsilon.$$

Time je dokazano da je preslikavanje $(x,\xi) \mapsto \pi(x)\xi$ neprekidno u svakoj točki $(x_0,\xi_0) \in G \times \mathcal{H}$.

Lema 2.1.2. *Neka je $\pi : G \to U(\mathcal{H})$ homomorfizam. Pretpostavimo da je preslikavanje $x \mapsto (\pi(x)\xi|\eta)$ sa G u $\mathbb{C}$ neprekidno u točki e za svaka dva vektora ξ i η iz totalnog podskupa $S \subseteq \mathcal{H}$ (tj. iz skupa koji razapinje gust potprostor od $\mathcal{H}$). Tada je π unitarna reprezentacija.*

Dokaz: Stavimo

$$\mathcal{H}_1 = \{\xi \in \mathcal{H};\ \text{preslikavanje } x \mapsto (\pi(x)\xi|\eta) \text{ je neprekidno u točki } e \text{ za svaki } \eta \in S\}.$$

Očito je $\mathcal{H}_1$ potprostor od $\mathcal{H}$ i po pretpostavci $S \subseteq \mathcal{H}_1$. Kako je S totalan, zaključujemo da je potprostor $\mathcal{H}_1$ gust u prostoru $\mathcal{H}$. Za $\xi \in \mathcal{H}$, $\xi_1, \eta \in \mathcal{H}_1$ i $x \in G$ vrijedi

$$|(\pi(x)\xi|\eta) - (\xi|\eta)| \le |(\pi(x)(\xi - \xi_1)|\eta)| + |(\pi(x)\xi_1|\eta) - (\xi_1|\eta)| + |(\xi_1 - \xi|\eta)| \le$$

$$\le 2\|\xi - \xi_1\| \cdot \|\eta\| + |(\pi(x)\xi_1|\eta) - (\xi_1|\eta)|.$$

Neka je $\xi \in \mathcal{H}$, $\eta \in S$, $\eta \neq 0$, i $\varepsilon > 0$. Izaberimo $\xi_1 \in \mathcal{H}_1$ tako da bude $\|\xi - \xi_1\| \leq \dfrac{\varepsilon}{3\|\eta\|}$. Nadalje, neka je U okolina od e u G takva da vrijedi

$$x \in U \qquad \Longrightarrow \qquad |(\pi(x)\xi_1|\eta) - (\xi_1|\eta)| \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Odatle i iz prethodne nejednakosti slijedi

$$x \in U \qquad \Longrightarrow \qquad |(\pi(x)\xi|\eta) - (\xi|\eta)| \leq 2\frac{\varepsilon}{3\|\eta\|} \cdot \|\eta\| + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Dakle, preslikavanje $x \mapsto (\pi(x)\xi|\eta)$ je neprekidno u točki e. Budući da je vektor $\eta \in S \setminus \{0\}$ bio proizvoljan, zaključujemo da je $\xi \in \mathcal{H}_1$. Time je dokazano da je $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}$, odnosno da je preslikavanje $x \mapsto (\pi(x)\xi|\eta)$ neprekidno u točki e za svaki $\xi \in \mathcal{H}$ i za svaki $\eta \in S$.

Stavimo sada

$$\mathcal{H}_2 = \{\eta \in \mathcal{H};\ \text{preslikavanje } x \mapsto (\pi(x)\xi|\eta) \text{ je neprekidno u točki } e \text{ za svaki } \xi \in \mathcal{H}\}.$$

Sasvim analogno nalazimo da je i $\mathcal{H}_2 = \mathcal{H}$.

Prema tome, preslikavanje $x \mapsto (\pi(x)\xi|\eta)$ je neprekidno u točki e za svaka dva vektora $\xi, \eta \in \mathcal{H}$. Sada tvrdnja leme slijedi iz prethodne leme.

Neka je π unitarna reprezentacija od G na $\mathcal{H}$. Zatvoren potprostor $\mathcal{K}$ od $\mathcal{H}$ zove se $\pi-$**invarijantan potprostor** ako je on invarijantan s obzirom na sve operatore $\pi(x)$, $x \in G$. U tom slučaju je $\pi(x)\mathcal{K} = \mathcal{K}$ $\forall x \in G$ i restrikcija $\pi_{\mathcal{K}}(x) = \pi(x)|\mathcal{K}$ je unitaran operator na Hilbertovom prostoru $\mathcal{K}$. Na taj način dobivamo unitarnu reprezentaciju $\pi_{\mathcal{K}}$ grupe G na Hilbertovom prostoru $\mathcal{K}$. Ta se reprezentacija zove **subreprezentacija** reprezentacije π. Kako je $\pi(x)^* = \pi(x^{-1})$ $\forall x \in G$, to je i ortogonalni komplement $\mathcal{L} = \mathcal{K}^{\perp}$ $\pi-$invarijantan potprostor. Tada je $\mathcal{H} = \mathcal{K} \oplus \mathcal{L}$; pišemo $\pi = \pi_{\mathcal{K}} \oplus \pi_{\mathcal{L}}$ i kažemo da je π ortogonalna suma svojih subreprezentacija $\pi_{\mathcal{K}}$ i $\pi_{\mathcal{L}}$. Općenitije, ako je $(\mathcal{H}_i)_{i \in I}$ familija zatvorenih $\pi-$invarijantnih potprostora takvih da je

$$\bigoplus_{i \in I} \mathcal{H}_i = \mathcal{H}$$

(tj. potprostori $\mathcal{H}_i$ su međusobno ortogonalni i suma im je gust potprostor od $\mathcal{H}$) onda pišemo

$$\pi = \bigoplus_{i \in I} \pi_{\mathcal{H}_i}.$$

Uzmimo sada da je $(\mathcal{H}_i)_{i \in I}$ familija Hilbertovih prostora i neka je za svako $i \in I$ zadana unitarna reprezentacija π_i od G na $\mathcal{H}_i$. Formirajmo ortogonalnu sumu tih Hilbertovih prostora:

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{i \in I} \mathcal{H}_i = \left\{ (\xi_i)_{i \in I};\ \xi_i \in \mathcal{H}_i\ \forall i \in I,\ \sum_{i \in I} \|\xi_i\|^2 < +\infty \right\}.$$

To je Hilberov prostor sa skalarnim produktom

$$((\xi_i)_{i \in I} \,|(\eta_i)_{i \in I}) = \sum_{i \in I} (\xi_i|\eta_i)_i,$$

gdje je sa $(\cdot\,|\,\cdot)_i$ označen skalarni produkt na prostoru $\mathcal{H}_i$. Nadalje, za svaki $x \in G$ možemo definirati $\pi(x) \in U(\mathcal{H})$ sa

$$\pi(x)(\xi_i)_{i \in I} = (\pi_i(x)\xi_i)_{i \in I}.$$

Zadatak 2.1. *Dokažite da je π unitarna reprezentacija grupe G na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$.*

I tu reprezentaciju zovemo **ortogonalnom sumom reprezentacija** π_i i pišemo

$$\pi = \bigoplus_{i\in I} \pi_i.$$

Neka je i dalje π unitarna reprezentacija lokalno kompaktne grupe G na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$. Vektor $\xi \in \mathcal{H}$ zove se **ciklički vektor** za reprezentaciju π ako je skup $\pi(G)\xi$ totalan u $\mathcal{H}$, odnosno ako mu je ortogonalni komplement $\{0\}$:

$$\eta \in \mathcal{H}, \quad (\pi(x)\xi|\eta) = 0 \quad \forall x \in G \qquad \Longrightarrow \qquad \eta = 0.$$

Ekvivalentno: $\mathcal{H}$ je jedini $\pi-$invarijantan zatvoren potprostor od $\mathcal{H}$ koji sadrži ξ. Ako postoji ciklički vektor, π se zove **ciklička reprezentacija**.

Reprezentacija π se zove **ireducibilna** ako je svaki vektor $\xi \in \mathcal{H} \setminus \{0\}$ ciklički za π. Ekvivalentno: $\mathcal{H}$ i $\{0\}$ su jedini zatvoreni $\pi-$invarijantni potprostori od $\mathcal{H}$. Ako reprezentacija π nije ireducibilna, ona se zove **reducibilna**. To znači da postoji zatvoren $\pi-$invarijantan potprostor $\mathcal{K}$ od $\mathcal{H}$ takav da je $\mathcal{K} \neq \{0\}$ i $\mathcal{K} \neq \mathcal{H}$.

Propozicija 2.1.3. *Svaka unitarna reprezentacija je ortogonalna suma cikličkih subreprezentacija.*

Za dokaz ove propozicije potrebna nam je:

ZORNOVA LEMA: *U svakom nepraznom induktivnom skupu $\mathcal{S}$ postoji bar jedan maksimalan element.*

Definicije pojmova iz iskaza Zornove leme su sljedeće:

Neka je $\mathcal{S}$ parcijalno uređen skup, tj. skup na kome je zadana binarna relacija $\leq$ sa sljedeća dva svojstva:

(a) *Antisimetričnost*: Za $s, t \in \mathcal{S}$ vrijedi $s \leq t$ i $t \leq s$ ako i samo ako je $s = t$.

(b) *Tranzitivnost*: Ako su $r, s, t \in \mathcal{S}$ i ako je $r \leq s$ i $s \leq t$, onda je $r \leq t$.

Podskup $\mathcal{T}$ parcijalno uređenog skupa $\mathcal{S}$ zove se **lanac**, ako je na njemu uređaj *linearan*, tj. ako za bilo koje $s, t \in \mathcal{T}$ vrijedi ili $s \leq t$ ili $t \leq s$. Za podskup $\mathcal{T}$ parcijalno uređenog skupa $\mathcal{S}$ kažemo da je **odozgo omeđen** ako postoji $s \in \mathcal{S}$ (tzv. **gornja međa** skupa $\mathcal{T}$) takav da je $t \leq s \ \forall t \in \mathcal{T}$. Za parcijalno uređen skup $\mathcal{S}$ kažemo da je **induktivan** ako je svaki lanac u $\mathcal{S}$ odozgo omeđen.

Za element s parcijalno uređenog skupa $\mathcal{S}$ kažemo da je **maksimalan** u $\mathcal{S}$ ako ne postoji $t \in \mathcal{S} \setminus \{s\}$ takav da je $s \leq t$. Drugim riječima, vrijedi:

$$t \in \mathcal{S}, \quad s \leq t \qquad \Longrightarrow \qquad t = s.$$

Napominjemo da je Zornova lema ekvivalentna tzv. Zermelovom aksiomu izbora:

ZERMELOV AKSIOM IZBORA: *Neka je I neprazan skup i neka je $(T_i)_{i\in I}$ familija nepraznih skupova. Tada je njihov Kartezijev produkt neprazan, tj. postoji bar jedna funkcija $f : I \to \bigcup_{i\in I} T_i$ takva da je $f(i) \in I \ \forall i \in I$.*

Dokaz Propozicije 2.1.3.: Neka je $\mathcal{P}(\mathcal{H})$ partitivni skup od $\mathcal{H}$ i neka je $\mathcal{F}$ skup svih podskupova F od $\mathcal{P}(\mathcal{H})$ sa sljedeća dva svojstva:

(a) Svaki $\mathcal{K} \in F$ je zatvoren $\pi-$invarijantan potprostor od $\mathcal{H}$ takav da je subreprezentacija $\pi_{\mathcal{K}}$ ciklička.

(b) Ako su $\mathcal{K}, \mathcal{L} \in F$ i $\mathcal{K} \neq \mathcal{L}$ onda je $\mathcal{K} \perp \mathcal{L}$.

Skup $\mathcal{F}$ nasljeđuje iz $\mathcal{P}(\mathcal{H})$ (parcijalni) uređaj inkluzijom. Parcijalno uređen skup $\mathcal{F}$ s tim uređajem je induktivan. Doista, neka je $\mathcal{G}$ lanac u $\mathcal{F}$. Dakle, $\mathcal{G}$ podskup od $\mathcal{F}$ takav da za $F, G \in \mathcal{G}$ vrijedi ili $F \subseteq G$ ili $G \subseteq F$. Stavimo

$$F = \bigcup_{G \in \mathcal{G}} G.$$

Dakle, F je skup svih zatvorenih $\pi-$invarijatnih potprostora $\mathcal{K}$ od $\mathcal{H}$ takvih da je subreprezentacija $\pi_{\mathcal{K}}$ ciklička i da je $\mathcal{K} \in G$ za neki $G \in \mathcal{G}$. Neka su $\mathcal{K}, \mathcal{L} \in F$ i $\mathcal{K} \neq \mathcal{L}$. Tada su $\mathcal{K} \in G$ i $\mathcal{L} \in H$ za neke $G, H \in \mathcal{G}$. Kako je $\mathcal{G}$ lanac, vrijedi ili $H \subseteq G$ ili $G \subseteq H$. Pretpostavimo ono prvo, $H \subseteq G$. Tada su $\mathcal{K}, \mathcal{L} \in G$, a kako je $G \in \mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$, zaključujemo da je $\mathcal{K} \perp \mathcal{L}$. Time smo dokazali da je $F \in \mathcal{F}$. Iz same definicije vidi se da je $G \subseteq F \ \ \forall G \in \mathcal{G}$, odnosno, da je F gornja međa skupa $\mathcal{G}$ u parcijalno uređenom skupu $\mathcal{F}$. Time je dokazano da je svaki lanac u $\mathcal{F}$ odozgo omeđen, odnosno, parcijalno uređen skup $\mathcal{F}$ je induktivan.

Po Zornovoj lemi $\mathcal{F}$ ima bar jedan maksimalan element F. Stavimo

$$\mathcal{H}_1 = \bigoplus_{\mathcal{K} \in F} \mathcal{K}.$$

Pretpostavimo da je $\mathcal{H}_1 \neq \mathcal{H}$. Neka je $\xi \in \mathcal{H}_1^{\perp} \setminus \{0\}$. Kako je $\mathcal{H}_1$ $\pi-$invarijantan, to je i $\mathcal{H}_1^{\perp}$ $\pi-$invarijantan. Dakle, $\pi(G)\xi \subseteq \mathcal{H}_1^{\perp}$. Neka je $\mathcal{L}$ zatvarač potprostora razapetog sa $\pi(G)\xi$. Tada je $\mathcal{L} \neq \{0\}$ zatvoren $\pi-$invarijantan potprostor od $\mathcal{H}$ i subreprezentacija $\pi_{\mathcal{L}}$ je ciklička (ξ joj je ciklički vektor). Nadalje, $\mathcal{L} \perp \mathcal{K} \ \ \forall \mathcal{K} \in F$, pa je $F \cup \{\mathcal{L}\} \in \mathcal{F}$ i $F \cup \{\mathcal{L}\} \supsetneq F$. No to je u suprotnosti s maksimalnošću F u $\mathcal{F}$. Ova kontradikcija pokazuje da je pretpostavka $\mathcal{H}_1 \neq \mathcal{H}$ bila pogrešna. Zaključujemo da je $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}$, dakle,

$$\pi = \bigoplus_{\mathcal{K} \in F} \pi_{\mathcal{K}}.$$

Time je propozicija 2.1.3. dokazana.

Neka su π_1 i π_2 unitarne reprezentacije od G na Hilbertovim prostorima $\mathcal{H}_1$ i $\mathcal{H}_2$. Operator $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ se zove **operator preplitanja** reprezentacije π_1 s reprezentacijom π_2 ako vrijedi

$$T\pi_1(x) = \pi_2(x)T \qquad \forall x \in G.$$

Skup svih takvih operatora preplitanja označavat ćemo sa $Hom_G(\pi_1, \pi_2)$. To je potprostor vektorskog prostora $\mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$, koji je zatvoren u odnosu na topologiju norme, ali i u odnosu na jaku topologiju, pa čak i u odnosu na slabu topologiju. Adjungiranje $T \mapsto T^*$ je bijekcija sa $Hom_G(\pi_1, \pi_2)$ na $Hom_G(\pi_2, \pi_1)$. Nadalje, za tri reprezentacije π_1, π_2 i π_3 je

$$Hom_G(\pi_2, \pi_3) Hom_G(\pi_1, \pi_2) \subseteq Hom_G(\pi_1, \pi_3).$$

Uočimo da je potprostor $Hom_G(\pi_1, \pi_2)$ Banachovog prostora $\mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ zatvoren i da je štoviše **slabo zatvoren**, tj. ako je $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ i ako je $(T_i)_{i \in I}$ hiperniz u $Hom_G(\pi_1, \pi_2)$ takav da je

$$\lim_{i \in I} (T_i\xi_1|\xi_2) = (T\xi_1|\xi_2) \qquad \forall \xi_1 \in \mathcal{H}_1 \quad \text{i} \quad \forall \xi_2 \in \mathcal{H}_2$$

onda je $T \in Hom_G(\pi_1, \pi_2)$.

Za reprezentacije π_1 i π_2 kažemo da su **ekvivalentne** ako postoji izometrički izomorfizam $U : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ takav da je

$$U\pi_1(x)U^{-1} = \pi_2(x) \qquad \forall x \in G.$$

Posebno je tada $U \in Hom_G(\pi_1, \pi_2)$. Pišemo $\pi_1 \sim \pi_2$. Očito je $\sim$ relacija ekvivalencije.

Propozicija 2.1.4. *Neka su π_1 i π_2 unitarne reprezentacije od G na Hilbertovim prostorima $\mathcal{H}_1$ i $\mathcal{H}_2$ i pretpostavimo da je π_1 ireducibilna. Sljedeće su tri svojstva međusobno ekvivalentna:*

(a) $Hom_G(\pi_1, \pi_2) \neq \{0\}$.

(b) $Hom_G(\pi_2, \pi_1) \neq \{0\}$.

(c) *Reprezentacija π_1 ekvivalentna je nekoj subreprezentaciji reprezentacije π_2.*

Dokaz: Ekvivalencija $(a) \iff (b)$ neposredna je posljedica jednakosti $Hom_G(\pi_2, \pi_1) = Hom_G(\pi_1, \pi_2)^*$.

Dokažimo sada da iz (b) slijedi (c). U tu svrhu podsjetimo se važnog *teorema o drugom korijenu iz pozitivnog operatora* na Hilbertovom prostoru. Ako je $\mathcal{H}$ Hilbertov prostor **pozitivan operator** na $\mathcal{H}$ je ograničen operator $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ koji je hermitski, tj. $A = A^*$ ili $(A\xi|\eta) = (\xi|A\eta)\ \forall \xi, \eta \in \mathcal{H}$, za koji vrijedi $(A\xi|\xi) \geq 0\ \forall \xi \in \mathcal{H}$. Bez dokaza navodimo:

Teorem 2.1.5. *Neka je B pozitivan operator na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$. Tada postoji jedinstven pozitivan operator A na $\mathcal{H}$ takav da je $A^2 = B$. Ako operator $C \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ komutira s operatorom B onda C komutira i s operatorom A.*

Neka je $T \in Hom_G(\pi_2, \pi_1) \setminus \{0\}$. Tada je $T^*T \in Hom_G(\pi_2)$ i to je pozitivan operator na $\mathcal{H}_2$. Stoga postoji jedinstven pozitivan operator $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_2)$ takav da je $A^2 = T^*T$. Nadalje, A komutira sa svakim ograničenim operatorom s kojim komutira T^*T. Posebno, $A \in Hom_G(\pi_2)$.

$T\mathcal{H}_2$ je potprostor od $\mathcal{H}_1$ koji je π_1-invarijantan:

$$\pi_1(x)T\xi = T\pi_2(x)\xi.$$

Njegov zatvarač $Cl(T\mathcal{H}_2)$ je zatvoren π_1-invarijantan potprostor od $\mathcal{H}_1$ koji je različit od $\{0\}$ jer je $T \neq 0$. Kako je reprezentacija π_1 ireducibilna, slijedi $Cl(T\mathcal{H}_2) = \mathcal{H}_1$. Dakle, potprostor $T\mathcal{H}_2$ je gust u Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}_1$. Definiramo sada linearan operator $U : T\mathcal{H}_2 \to \mathcal{H}_2$ sa

$$U(T\xi) = A\xi, \qquad \xi \in \mathcal{H}_2.$$

Za svaki $\xi \in \mathcal{H}_2$ imamo

$$\|A\xi\|^2 = (A\xi|A\xi) = (A^2\xi|\xi) = (T^*T\xi|\xi) = (T\xi|T\xi) = \|T\xi\|^2.$$

To pokazuje da je operator U dobro definiran i da je to izometrija sa $T\mathcal{H}_2$ u $\mathcal{H}_2$. Kako je potprostor $T\mathcal{H}_2$ gust u $\mathcal{H}_1$, U se proširuje do linearne izometrije sa $\mathcal{H}_1$ u $\mathcal{H}_2$, koju ćemo i dalje označavati sa U. Sada za $x \in G$ i $\xi \in \mathcal{H}_2$ imamo

$$\pi_2(x)UT\xi = \pi_2(x)A\xi = A\pi_2(x)\xi = UT\pi_2(x)\xi = U\pi_1(x)T\xi.$$

Odatle je

$$\pi_2(x)U = U\pi_1(x) \qquad \forall x \in G \qquad \Longrightarrow \qquad U \in Hom_G(\pi_1, \pi_2).$$

Kako je U izometrija sa $\mathcal{H}_1$ u $\mathcal{H}_2$, to je $U \neq 0$. Stavimo $\mathcal{K} = U\mathcal{H}_1$. Tada je $\mathcal{K}$ zatvoren potprostor od $\mathcal{H}_2$ koji je π_2-invarijantan. Tada je U izometrički izomorfizam sa $\mathcal{H}_1$ na $\mathcal{K}$ koji ostvaruje ekvivalenciju reprezentacije π_1 sa subreprezentacijom $(\pi_2)_{\mathcal{K}}$.

Napokon, implikacija $(c) \Longrightarrow (a)$ je očigledna.

Korolar 2.1.6. *Ireducibilne reprezentacije π_1 i π_2 su ekvivalentne onda i samo onda ako je $Hom_G(\pi_1, \pi_2) \neq \{0\}$.*

2.2 Veza reprezentacija grupa i grupovnih algebri

Neka je $\mathcal{A}$ normirana $*-$algebra. Neka je $\mathcal{H}$ Hilbertov prostor. Tada je algebra ograničenih operatora Banachova $*-$algebra s jedinicom. **Reprezentacija algebre** $\mathcal{A}$ na prostoru $\mathcal{H}$ je neprekidni $*-$homomorfizam algebri $\pi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Dakle, π je neprekidno linearno preslikavanje za koje vrijedi

$$\pi(ab) = \pi(a)\pi(b) \quad \text{i} \quad \pi(a^*) = \pi(a)^* \qquad \forall a, b \in \mathcal{A}.$$

Propozicija 2.2.1. *Neka je π reprezentacija od $\mathcal{A}$ na $\mathcal{H}$. Stavimo*

$$\mathcal{H}_0 = \{\xi \in \mathcal{H};\ \pi(a)\xi = 0\ \forall a \in \mathcal{A}\}$$

i neka je $\mathcal{H}_1$ zatvarač potprostora razapetog sa $\pi(\mathcal{A})\mathcal{H} = \{\pi(a)\xi;\ a \in \mathcal{A},\ \xi \in \mathcal{H}\}$. Tada su potprostori $\mathcal{H}_0$ i $\mathcal{H}_1$ $\pi-$invarijantni, $\mathcal{H}_0 \perp \mathcal{H}_1$ i $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 \dot{+} \mathcal{H}_1$; drugim riječima, $\mathcal{H}_0 = \mathcal{H}_1^\perp$, odnosno, $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_0^\perp$.

Dokaz: Očito su potprostori $\mathcal{H}_0$ i $\mathcal{H}_1$ $\pi-$invarijantni. Imamo sljedeći slijed ekvivalencija:

$$\xi \in \mathcal{H}_0 \iff \pi(a)\xi = 0\ \forall a \in \mathcal{A} \iff (\pi(a)\xi|\eta) = 0\ \forall a \in \mathcal{A},\ \forall \eta \in \mathcal{H} \iff$$

$$\iff (\xi|\pi(a^*)\eta) = 0\ \forall a \in \mathcal{A};\ \forall \eta \in \mathcal{H} \iff (\xi|\zeta) = 0\ \forall \zeta \in \mathcal{H}_1 \iff \xi \in \mathcal{H}_1^\perp.$$

Time je dokazano da je $\mathcal{H}_0 = \mathcal{H}_1^\perp$ a to upravo tvrdnja propozicije.

Reprezentacija π zove se **nedegenerirana** ako vrijedi

$$\xi \in \mathcal{H}, \quad \pi(a)\xi = 0\ \forall a \in \mathcal{A} \qquad \Longrightarrow \qquad \xi = 0.$$

Uz oznake iz propozicije 2.2.1 to znači da je $\mathcal{H}_0 = \{0\}$, a prema tvrdnji te propozicije to je ekvivalentno sa $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}$. Dakle, reprezentacija π je nedegenerirana ako i samo ako vektori oblika $\pi(a)\xi$, $a \in \mathcal{A}$, $\xi \in \mathcal{H}$, razapinju gusti potprostor od $\mathcal{H}$.

Za reprezentacije normiranih $*-$algebri imamo sasvim analogne definicije pojmova kao za unitarne reprezentacije lokalno kompaktnih grupa:

Reprezentacija π normirane $*-$algebre $\mathcal{A}$ na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$ zove se **ciklička** ako postoji vektor $\xi \in \mathcal{H}$ takav da je potprostor $\pi(\mathcal{A})\xi = \{\pi(a)\xi;\ a \in \mathcal{A}\}$ gust u $\mathcal{H}$, odnosno, ako za svaki $\eta \in \mathcal{H}$ postoji niz $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ u $\mathcal{A}$ takav da je

$$\eta = \lim_{n\to\infty} \pi(a_n)\xi.$$

Takav vektor ξ zove se **ciklički vektor** reprezentacije π.

Zadatak 2.2. *Dokažite da je ciklička reprezentacija nedegenerirana.*

Neka je i dalje π reprezentacija normirane $*-$algebre $\mathcal{A}$ na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$. Zatvoren potprostor $\mathcal{K}$ od $\mathcal{H}$ zove se $\pi-$**invarijantan** ako je on invarijantan s obzirom na svaki operator $\pi(a)$, $a \in \mathcal{A}$. Tada se definira **subreprezentacija** $\pi_\mathcal{K}$: to je reprezentacija od $\mathcal{A}$ na Hilbertovom prostoru $\mathcal{K}$ definirana pomoću restrikcije, tj. $\pi_\mathcal{K}(a) = \pi(a)|\mathcal{K}$, $a \in \mathcal{A}$. Tada je i ortogonalni komplement $\mathcal{K}^\perp$ $\pi-$invarijantan.

Reprezentacija π zove se **ireducibilna** ako je svaki vektor $\xi \neq 0$ ciklički.

Zadatak 2.3. *Dokažite da je reprezentacija π na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$ ireducibilna ako i samo ako ne postoji zatvoren $\pi-$invarijantan potprostor $\mathcal{K}$ različit od $\{0\}$ i od $\mathcal{H}$.*

Za reprezentacije π_1 i π_2 od $\mathcal{A}$ na Hilbertovim prostorima $\mathcal{H}_1$ i $\mathcal{H}_2$ definiramo

$$Hom_{\mathcal{A}}(\pi_1, \pi_2) = \{T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2);\ T\pi_1(a) = \pi_2(a)T\ \forall a \in \mathcal{A}\}.$$

Elementi $T \in Hom_{\mathcal{A}}(\pi_1, \pi_2)$ zovu se **operatori preplitanja** reprezentacije π_1 s reprezentacijom π_2. Ponovo je adjungiranje $T \mapsto T^*$ bijekcija sa $Hom_{\mathcal{A}}(\pi_1, \pi_2)$ na $Hom_{\mathcal{A}}(\pi_2, \pi_1)$, a za tri reprezentacije π_1, ∞_2 i π_3 vrijedi $Hom_{\mathcal{A}}(\pi_2, \pi_3)Hom_{\mathcal{A}}(\pi_1, \pi_2) \subseteq Hom_{\mathcal{A}}(\pi_1, \pi_3)$. Nadalje, potprostor $Hom_{\mathcal{A}}(\pi_1, \pi_2)$ Banachovog prostora $\mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ je zatvoren u odnosu na normu operatora, a kao i u slučaju unitarnih reprezentacija on je zatvoren i u odnosu na slabu topologiju.

Za reprezentacije π_1 i π_2 kažemo da su **ekvivalentne** ako postoji izometrički izomorfizam $U : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ takav da je

$$U\pi_1(a)U^{-1} = \pi_2(a) \qquad \forall a \in \mathcal{A}.$$

Tada pišemo $\pi_1 \sim \pi_2$ i to je relacija ekvivalencije.

Vrijede analogoni propozicija 2.1.3., 2.1.4. i korolara 2.1.6.:

Propozicija 2.2.2. *Svaka nedegenerirana reprezentacija normirane $*-$algebre $\mathcal{A}$ je ortogonalna suma cikličkih subreprezentacija.*

Propozicija 2.2.3. *Neka su π_1 i π_2 reprezentacije normirane $*-$algebre $\mathcal{A}$ na Hilbertovim prostorima $\mathcal{H}_1$ i $\mathcal{H}_2$ i pretpostavimo da je π_1 ireducibilna. Sljedeća su tri svojstva međusobno ekvivalentna:*

(a) $Hom_{\mathcal{A}}(\pi_1, \pi_2) \neq \{0\}$.

(b) $Hom_{\mathcal{A}}(\pi_2, \pi_1) \neq \{0\}$.

(c) *Reprezentacija π_1 ekvivalentna je nekoj subreprezentaciji reprezentacije π_2.*

Korolar 2.2.4. *Ako su π_1 i π_2 ireducibilne reprezentacije od $\mathcal{A}$ one su ekvivalentne ako i samo ako je $Hom_{\mathcal{A}}(\pi_1, \pi_2) \neq \{0\}$.*

Neka je sada π unitarna reprezentacija lokalno kompaktne grupe G na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$. Neka je μ desna Haarova mjera na G. Za $f \in C_0(G)$ (ili $f \in L_1(G, \check{\mu})$) definiramo preslikavanje $B_f : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ sa

$$B_f(\xi, \eta) = \int_G f(x)(\pi(x)\xi|\eta)\mathrm{d}\check{\mu}(x), \qquad \xi, \eta \in \mathcal{H}.$$

Tada je B_f seskvilinearna forma na $\mathcal{H}$. Nadalje,

$$|B_f(\xi, \eta)| = \left| \int_G f(x)(\pi(x)\xi|\eta)\mathrm{d}\check{\mu}(x) \right| \leq \int_G |f(x)| \cdot \|\pi(x)\| \cdot \|\xi\| \cdot \|\eta\| \mathrm{d}\check{\mu}(x).$$

Međutim, $\|\pi(x)\| = 1\ \ \forall x \in G$ pa slijedi

$$|B_f(\xi, \eta)| \leq \|f\|_1 \cdot \|\xi\| \cdot \|\eta\|, \qquad \xi, \eta \in \mathcal{H}.$$

Dakle, forma B_f je ograničena, odnosno, neprekidna. Prema tome postoji jedinstven $\pi(f) \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ takav da je

$$(\pi(f)\xi|\eta) = B_f(\xi, \eta) = \int_G f(x)(\pi(x)\xi|\eta)\mathrm{d}\check{\mu}(x), \qquad \forall \xi, \eta \in \mathcal{H},$$

i vrijedi

$$\|\pi(f)\| \leq \|f\|_1.$$

Pisat ćemo kraće
$$\pi(f)=\int_G f(x)\pi(x)\mathrm{d}\check{\mu}(x).$$

Primijetimo da je preslikavanje $\pi : C_0(G) \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ (ili $\pi : L_1(G,\check{\mu}) \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$) linearno. Nadalje, za $f,g \in C_0(G)$ (ili $f,g \in L_1(G,\check{\mu})$) imamo

$$\pi(f)\pi(g)=\int_G f(x)\pi(x)\mathrm{d}\check{\mu}(x)\cdot\int_G g(y)\pi(y)\mathrm{d}\check{\mu}(y)=\int_G\int_G f(x)g(y)\pi(xy)\mathrm{d}\check{\mu}(x)\mathrm{d}\check{\mu}(y)=$$

$$=\int_G\int_G f(x)g(x^{-1}y)\pi(y)\mathrm{d}\check{\mu}(x)\mathrm{d}\check{\mu}(y)=\int_G(f*g)(y)\pi(y)\mathrm{d}\check{\mu}(y)=\pi(f*g).$$

Također,
$$\pi(f^*)=\int_G \Delta(x^{-1})\overline{f(x^{-1})}\pi(x)\mathrm{d}\check{\mu}(x)=\int_G\overline{f(x)}\pi(x^{-1})\mathrm{d}\check{\mu}(x)=$$
$$=\int_G\overline{\varphi(x)}\pi(x)^*\mathrm{d}\check{\mu}(x)=\left[\int_G f(x)\pi(x)\mathrm{d}\check{\mu}(x)\right]^*=\pi(f)^*.$$

Prema tome $f \mapsto \pi(f)$ je reprezentacija normirane $*-$algebre $C_0(G)$ (odnosno, Banachove $*-$algebre $L_1(G,\check{\mu})$) na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$.

Dokažimo da je ta reprezentacija nedegenerirana. Neka je $\xi \in \mathcal{H}$ takav da je $\pi(f)\xi = 0$ $\forall f \in C_0(G)$. Pretpostavimo da je $\xi \neq 0$. Budući da je funkcija $x \mapsto (\pi(x)\xi|\xi)$ neprekidna, postoji okolina U jedinice e u grupi G takva da je $(\pi(x)\xi|\xi) \neq 0$ $\forall x \in U$. Neka je $\varphi \in C_0^+(G)\setminus\{0\}$ takva da je $Supp\,\varphi \subseteq U$. Definiramo sada funkciju $f : G \to \mathbb{C}$ sa

$$f(x)=\begin{cases}\varphi(x)\dfrac{|(\pi(x)\xi|\xi)|}{(\pi(x)\xi|\xi)} & \text{ako je } x\in U\\[2ex] 0 & \text{ako je } x\in G\setminus U.\end{cases}$$

Tada je $f \in C_0(G)$ i dobivamo

$$0=(\pi(f)\xi|\xi)=\int_G\varphi(x)\frac{|(\pi(x)\xi|\xi)|}{(\pi(x)\xi|\xi)}(\pi(x)\xi|\xi)\mathrm{d}\check{\mu}(x)=\int_G\varphi(x)|(\pi(x)\xi|\xi)|\mathrm{d}\check{\mu}(x)>0.$$

Ova kontradikcija pokazuje da je pretpostavka $\xi \neq 0$ bila pogrešna. Dakle, doista se radi o nedegeneriranoj reprezentaciji.

Prema tome, svakoj unitarnoj reprezentaciji π lokalno kompaktne grupe G na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$ pridružena je nedegenerirana reprezentacija normirane $*-$algebre $C_0(G)$ (odnosno, Banachove $*-$algebre $L_1(G,\check{\mu})$) na istom prostoru:

$$\pi(f)=\int_G f(x)\pi(x)\mathrm{d}\check{\mu}(x),\qquad f\in C_0(G)\quad(\text{ili } f\in L_1(G,\check{\mu})).$$

Primijetimo da za $y \in G$ vrijedi

$$\pi(y)\pi(f)=\int_G f(x)\pi(yx)\mathrm{d}\check{\mu}(x)=\int_G f(y^{-1}x)\pi(x)\mathrm{d}\check{\mu}(x)=\pi(\lambda_y f).$$

Ta formula nam je vodilja za obrnutu konstrukciju. Naime, neka je sada π nedegenerirana reprezentacija normirane $*-$algebre $C_0(G)$ na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$. Neka je $\mathcal{H}_1$ potprostor od

$\mathcal{H}$ razapet sa $\pi(C_0(G))\mathcal{H}$, koji je zbog nedegeneriranosti gust u $\mathcal{H}$. Za $x \in G$ definiramo linearan operator $\pi(x) : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_1$ po uzoru na gornju formulu:

$$\pi(x) \sum_{j=1}^{n} \pi(f_j)\xi_j = \sum_{j=1}^{n} \pi(\lambda_x f_j)\xi_j, \qquad f_1, f_2, \ldots, f_n \in C_0(G), \quad \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n \in \mathcal{H}.$$

Prije svega, treba dokazati da ova definicija uopće ima smisla, jer jasno je da gornji zapis vektora iz $\mathcal{H}_1$ nije nipošto jedinstven. Primjenom formule u tvrdnji (d) propozicije 1.5.1. imamo redom

$$\left\| \sum_{j=1}^{n} \pi(\lambda_x f_j)\xi_j \right\|^2 = \sum_{i,j=1}^{n} (\pi(\lambda_x f_i)\xi_i | \pi(\lambda_x f_j)\xi_j) = \sum_{i,j=1}^{n} (\pi((\lambda_x f_j)^* * (\lambda_x f_i))\xi_i | \xi_j) =$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} (\pi(f_j^* * f_i)\xi_i | \xi_j) = \sum_{i,j=1}^{n} (\pi(f_i)\xi_i | \pi(f_j)\xi_j) = \left\| \sum_{j=1}^{n} \pi(f_j)\xi_j \right\|^2.$$

Prema tome, vrijedi

$$\left\| \sum_{j=1}^{n} \pi(\lambda_x f_j)\xi_j \right\| = \left\| \sum_{j=1}^{n} \pi(f_j)\xi_j \right\| \qquad \forall x \in G, \ \forall f_1, \ldots, f_n \in C_0(G), \ \forall \xi_1, \ldots, \xi_n \in \mathcal{H}. \tag{2.1}$$

Odatle slijedi da je definicija operatora $\pi(x) : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_1$ smislena. Doista, pretpostavimo da su $f_1, \ldots, f_n, g_1, \ldots, g_m \in C_0(G)$ i $\xi_1, \ldots, \xi_n, \eta_1, \ldots, \eta_m \in \mathcal{H}$ takvi da je

$$\sum_{j=1}^{n} \pi(f_j)\xi_j = \sum_{k=1}^{m} \pi(g_k)\eta_k.$$

Primjena jednakosti (2.1) na funkcije $f_1, \ldots, f_n, -g_1, \ldots, -g_m$ i na vektore $\xi_1, \ldots, \xi_n, \eta_1, \ldots, \eta_m$ daje za $x \in G$

$$\left\| \sum_{j=1}^{n} \pi(\lambda_x f_j)\xi_j - \sum_{k=1}^{m} \pi(\lambda_x g_k)\eta_k \right\| = \left\| \sum_{j=1}^{n} \pi(f_j)\xi_j - \sum_{k=1}^{m} \pi(g_k)\eta_k \right\| = 0,$$

što znači da je

$$\sum_{j=1}^{n} \pi(\lambda_x f_j)\xi_j = \sum_{k=1}^{m} \pi(\lambda_x g_k)\eta_k.$$

Nadalje, iz (2.1) slijedi da je definirani operator $\pi(x) : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_1$ izometrija. Kako je $\mathcal{H}_1$ gust potprostor prostora $\mathcal{H}$, taj se operator po neprekidnosti jedinstveno produljuje do izometrije sa $\mathcal{H}$ u $\mathcal{H}$, koju ćemo također označavati sa $\pi(x)$. Za $x, y \in G$ imamo za svaku $f \in C_0(G)$ i svaki $\xi \in \mathcal{H}$

$$\pi(x)\pi(y)\pi(f)\xi = \pi(x)\pi(\lambda_y f)\xi = \pi(\lambda_x \lambda_y f)\xi = \pi(\lambda_{xy} f)\xi = \pi(xy)\pi(f)\xi.$$

Kako je $\pi(C_0(G))\mathcal{H}$ totalan skup u $\mathcal{H}$, zaključujemo da vrijedi $\pi(x)\pi(y) = \pi(xy)$. Očito je $\pi(e) = I_{\mathcal{H}}$ (jedinični operator na $\mathcal{H}$). Stoga je $\pi(x)\pi(x^{-1}) = I_{\mathcal{H}}$, što pokazuje da su izometrije $\pi(x)$ bijekcije, dakle, unitarni operatori na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$. To znači da je π homomorfizam grupe G u unitarnu grupu $U(\mathcal{H})$.

Dokažimo sada neprekidnost. Neka su $\xi \in \mathcal{H}$ i $f \in C_0(G)$. Tada je

$$\|\pi(x)\pi(f)\xi - \pi(f)\xi\| = \|\pi(\lambda_x f - f)\xi\| \le \|\pi(\lambda_x f - f)\| \cdot \|\xi\|.$$

Linearno preslikavanje π s normirane algebre $C_0(G)$ u Banachovu algebru $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ je neprekidno, dakle, ograničeno. Stoga postoji $M > 0$ takav da vrijedi

$$\|\pi(g)\| \leq M\|g\|_1 \qquad \forall g \in C_0(G).$$

Slijedi

$$\|\pi(x)\pi(f)\xi - \pi(f)\xi\| \leq M\|\lambda_x f - f\|_1\|\xi\|. \tag{2.2}$$

Neka je sada $\varepsilon > 0$ proizvoljno odabran. Prema propoziciji 1.5.4. postoji okolina V jedinice e u grupi G takva da vrijedi

$$x \in V \qquad \Longrightarrow \qquad \|\lambda_x f - f\|_1 < \frac{\varepsilon}{M\|\xi\|}. \tag{2.3}$$

Sada iz (2.2) i (2.3) slijedi

$$x \in V \qquad \Longrightarrow \qquad \|\pi(x)\pi(f)\xi - \pi(f)\xi\| \leq M\frac{\varepsilon}{M\|\xi\|}\|\xi\| = \varepsilon.$$

Time je dokazano da je preslikavanje $x \mapsto \pi(x)\pi(f)\xi$ sa G u $\mathcal{H}$ neprekidno u jedinici e grupe G za svaku funkciju $f \in C_0(G)$ i svaki vektor $\xi \in \mathcal{H}$. Kako je skup $\pi(C_0(G))\mathcal{H}$ totalan u $\mathcal{H}$, iz leme 2.1.2. slijedi da je homomorfizam $\pi : G \to U(\mathcal{H})$ unitarna reprezentacija grupe G na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$.

Označimo sada sa $\tilde{\pi}$ reprezentaciju normirane $*-$algebre $C_0(G)$ dobivenu iz reprezentacije π grupe G na prije opisani način:

$$\tilde{\pi}(g) = \int_G f(x)\pi(x)\mathrm{d}\check{\mu}(x) \qquad g \in C_0(G).$$

Dokazat ćemo sada da se $\tilde{\pi}$ podudara s polaznom reprezentacijom π od $C_0(G)$. Doista, za $f, g \in C_0(G)$ i $\xi, \eta \in \mathcal{H}$ imamo redom

$$(\tilde{\pi}(g)\pi(f)\xi|\eta) = \int_G g(x)(\pi(x)\pi(f)\xi|\eta)\mathrm{d}\check{\mu}(x) = \int_G g(x)(\pi(\lambda_x f)\xi|\eta)\mathrm{d}\check{\mu}(x),$$

a kako je preslikavanje $\pi : C_0(G) \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ linearno, slijedi

$$(\tilde{\pi}(g)\pi(f)\xi|\eta) = \int_G (\pi(g(x)\lambda_x f)\xi|\eta)\mathrm{d}\check{\mu}(x). \tag{2.4}$$

Nadalje, za $y \in G$ imamo

$$(g * f)(y) = \int_G g(x)f(x^{-1}y)\mathrm{d}\check{\mu}(x) = \int_G g(x)(\lambda_x f)(y)\mathrm{d}\check{\mu}(x).$$

Budući da je linearan operator $h \mapsto \pi(h)\xi$ sa $C_0(G)$ u $\mathcal{H}$ neprekidan, slijedi

$$(\pi(g * f)\xi|\eta) = \int_G (\pi(g(x)\lambda_x f)\xi|\eta)\mathrm{d}\check{\mu}(x).$$

Odatle i iz (2.4) dobivamo

$$\tilde{\pi}(g)\pi(f) = \pi(g * f) = \pi(g)\pi(f) \qquad \forall f, g \in C_0(G).$$

Budući da skup $\pi(C_0(G))\mathcal{H}$ po pretpostavci razapinje gust potprostor od $\mathcal{H}$ zaključujemo da je

$$\tilde{\pi}(g) = \pi(g) \qquad \forall g \in C_0(G).$$

Time je dokazana prva tvrdnja teorema:

Teorem 2.2.5. *Postoji bijekcija između unitarnih reprezentacija od G i nedegeneriranih reprezentacija normirane $*-$algebre $C_0(G)$. Ako odgovarajuće reprezentacije na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$ označimo istim znakom π onda je veza dana sa*

$$\pi(f) = \int_G f(x)\pi(x)d\check{\mu}(x), \qquad \pi(y)\pi(f)\xi = \pi(\lambda_y f)\xi, \qquad f \in C_0(G), \quad y \in G, \quad \xi \in \mathcal{H}.$$

Nadalje, vrijedi:

(a) *Zatvoren potprostor $\mathcal{H}_1$ od $\mathcal{H}$ je $\pi(G)-$invarijantan ako i samo ako je on $\pi(C_0(G))-$invarijantan.*

(b) *π je ireducibilna reprezentacija od G ako i samo ako je π ireducibilna reprezentacija od $C_0(G)$.*

(c) *Za $\xi \in \mathcal{H}$ najmanji zatvoren $\pi(G)-$invarijantan potprostor koji sadrži ξ je $Cl(\pi(C_0(G))\xi)$.*

(d) *Za reprezentacije π_1 i π_2 na $\mathcal{H}_1$ i $\mathcal{H}_2$ vrijedi $Hom_G(\pi_1, \pi_2) = Hom_{C_0(G)}(\pi_1, \pi_2)$. Tj. operator $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ je preplitanje za reprezentacije od G ako i samo je T preplitanje za reprezentacije od $C_0(G)$.*

(e) *π_1 i π_2 su ekvivalentne reprezentacije od G ako i samo ako su π_1 i π_2 ekvivalentne reprezentacije od $C_0(G)$.*

Dokaz: (a) Pretpostavimo da je $\mathcal{H}_1$ zatvoren $\pi(G)-$invarijantan potprostor. Neka su $\xi \in \mathcal{H}_1$, $\eta \in \mathcal{H}_1^\perp$ i $f \in C_0(G)$. Tada je

$$(\pi(f)\xi|\eta) = \int_G f(x)(\pi(x)\xi|\eta)\mathrm{d}\check{\mu}(x) = 0.$$

Dakle je $\pi(f)\xi \in \mathcal{H}_1^{\perp\perp} = \mathcal{H}_1$. Dakle, $\mathcal{H}_1$ je $\pi(C_0(G))-$invarijantan.

Pretpostavimo sada da je $\mathcal{H}_1$ zatvoren potprostor koji je $\pi(C_0(G))-$invarijantan. Neka je $\xi \in \mathcal{H}_1$, $f \in C_0(G)$ i $x \in G$. Tada je $\pi(x)\pi(f)\xi = \pi(\lambda_x f)\xi \in \mathcal{H}_1$. Iz definicije nedegeneriranosti slijedi da je subreprezentacija nedegenerirane reprezentacije i sama nedegenerirana. Dakle, skup $\pi(C_0(G))\mathcal{H}_1$ je totalan u $\mathcal{H}_1$. Slijedi da je potprostor $\mathcal{H}_1$ invarijantan za operator $\pi(x)$ $\forall x \in G$, tj. $\mathcal{H}_1$ je $\pi(G)-$invarijantan.

Tvrdnja (b) slijedi neposredno iz tvrdnje (a).

(c) Neka je $\mathcal{H}_1 = Cl(\pi(C_0(G)\xi)$. Tada je $\mathcal{H}_1$ zatvoren potprostor od $\mathcal{H}$ koji je $\pi(C_0(G))-$invarijantan, dakle i $\pi(G)-$invarijantan.

Zadatak 2.4. *Neka je $(\varphi_i)_{i\in I}$ hiperniz u $C_0^+(G)$ iz propozicije 1.5.3. Dokažite da je tada*

$$\eta = \lim_{i\in I} \pi(\varphi_i)\eta \qquad \forall \eta \in \mathcal{H}. \tag{2.5}$$

Uputa: Korištenjem propozicije 1.5.3. dokažite da (2.5) vrijedi za svaki vektor η oblika $\pi(f)\zeta$, $f \in C_0(G)$, $\zeta \in \mathcal{H}$. Zatim dokažite da je skup svih $\eta \in \mathcal{H}$ takvih da vrijedi (2.5) zatvoren potprostor od $\mathcal{H}$. Napokon, iskoristite nedegeneriranost reprezentacije π od $C_0(G)$.

Prema zadatku 2.4. vrijedi $\xi \in \mathcal{H}_1$. Neka je $\mathcal{H}_2 \subseteq \mathcal{H}_1$ zatvoren $\pi(G)-$invarijantan potprostor takav da je $\xi \in \mathcal{H}_2$. Prema (a) tada je $\mathcal{H}_2$ i $\pi(C_0(G))-$invarijantan potprostor, pa slijedi $\mathcal{H}_1 = Cl(\pi(C_0(G))\xi) \subseteq \mathcal{H}_2$, dakle $\mathcal{H}_2 = \mathcal{H}_1$.

(d) Neka je $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$. Pretpostavimo da je $T\pi_1(x) = \pi_2(x)T \quad \forall x \in G$. Za $f \in C_0(G)$, $\xi \in \mathcal{H}_1$ i $\eta \in \mathcal{H}_2$ imamo

$$(T\pi_1(f)\xi|\eta) = (\pi_1(f)\xi|T^*\eta) = \int_G f(x)(\pi_1(x)\xi|T^*\eta)\mathrm{d}\check{\mu}(x) =$$

$$\int_G f(x)(T\pi_1(x)\xi|\eta)\mathrm{d}\check{\mu}(x) = \int_G f(x)(\pi_2(x)T\xi|\eta)\mathrm{d}\check{\mu}(x) = (\pi_2(f)T\xi|\eta).$$

Odatle je $T\pi_1(f) = \pi_2(f)T \quad \forall f \in C_0(G)$.

Pretpostavimo sada da je $T\pi(f) = \pi_2(f)T \quad \forall f \in C_0(G)$. Za $x \in G$, $f \in C_0(G)$ i $\xi \in \mathcal{H}_1$ tada imamo

$$T\pi_1(x)\pi_1(f)\xi = T\pi_1(\lambda_x f)\xi = \pi_2(\lambda_x f)T\xi = \pi_2(x)\pi_2(f)T\xi = \pi_2(x)T\pi_1(f)\xi.$$

Budući da je $\pi_1(C_0(G))\mathcal{H}_1$ totalan skup u $\mathcal{H}_1$, slijedi $T\pi_1(x) = \pi_2(x)T \quad \forall x \in G$.

Tvrdnja (e) slijedi neposredno iz (d).

Formulama

$$(f|g)_\ell = \int_G f(x)\overline{g(x)}\mathrm{d}\check{\mu}(x) \qquad \text{i} \qquad (f|g)_r = \int_G f(x)\overline{g(x)}\mathrm{d}\mu(x), \qquad f, g \in C_0(G),$$

definirani su skalarni produkti na vektorskom prostoru $C_0(G)$. Popunjenja su Hilbertovi prostori koja označavamo sa $L_2(G, \check{\mu})$ i $L_2(G, \mu)$.

Za $x \in G$ definiramo linearne operatore $\pi_\ell(x), \pi_r(x) : C_0(G) \to C_0(G)$ sa

$$\pi_\ell(x)f = \lambda_x f, \qquad \pi_r(x)f = \rho_x f, \qquad f \in C_0(G).$$

Tada je za $x \in G$ i $f, g \in C_0(G)$:

$$(\pi_\ell(x)f|\pi_\ell(x)g)_\ell = \int_G f(x^{-1}y)\overline{g(x^{-1}y)}\mathrm{d}\check{\mu}(x) = \int_G f(y)\overline{g(y)}\mathrm{d}\check{\mu}(x) = (f|g)_\ell,$$

$$(\pi_r(x)f|\pi_r(x)g)_r = \int_G f(yx)\overline{g(yx)}\mathrm{d}\mu(x) = \int_G f(y)\overline{g(y)}\mathrm{d}\mu(x)) = (f|g)_r.$$

Dakle, $\pi_\ell(x)$ se produljuje do izometrije $L_2(G, \check{\mu})$ u $L_2(G, \check{\mu})$ i $\pi_r(x)$ se produljuje do izometrije $L_2(G, \mu)$ u $L_2(G, \mu)$. Te ćemo operatore također označavati sa $\pi_\ell(x)$ i $\pi_r(x)$. Kako je $\lambda_x \circ \lambda_y = \lambda_{xy}$ i $\rho_x \circ \rho_y = \rho_{xy}, \ \ x, y \in G$, vidimo da je $x \mapsto \pi_\ell(x)$ homomorfizam grupe G u grupu $U(L_2(G, \check{\mu}))$ i $x \mapsto \pi_r(x)$ je homomorfizam G u $U(L_2(G, \mu))$.

Norme na Hilbertovim prostorima $L_2(G, \check{\mu})$ i $L_2(G, \mu)$ označavamo sa $\|\cdot\|_\ell$ i $\|\cdot\|_r$. Za $f \in C_0(G)$ i $x \in G$ imamo

$$\|\pi_\ell(x)f - f\|_\ell^2 = \int_G |(\lambda_x f)(y) - f(y)|^2\mathrm{d}\check{\mu}(y), \quad \|\pi_r(x)f - f\|_r^2 = \int_G |(\rho_x f)(y) - f(y)|^2\mathrm{d}\mu(y) \quad (2.6)$$

Zadatak 2.5. *Dokažite da su π_ℓ i π_r unitarne reprezentacije od G na Hilbertovim prostorima $L_2(G, \check{\mu})$ i $L_2(G, \mu)$.*

Uputa: Iskoristite (2.6) i propoziciju 1.5.4. da dokažete da su za svaku $f \in C_0(G)$ funkcije $x \mapsto \pi_\ell(x)f$ i $x \mapsto \pi_r(x)f$ sa G u Hilbertove prostore $L_2(G, \check{\mu})$ i $L_2(G, \mu)$ neprekidne u točki e. Zatim koristite lemu 2.1.2.

Unitarna reprezentacija π_ℓ se zove **lijeva regularna reprezentacija** grupe G, a π_r je **desna regularna reprezentacija** grupe G.

Neka je $T : C_0(G) \to C_0(G)$ bijekcija zadana sa $Tf = \check{f}$. Tada je

$$\|Tf\|_r^2 = \int_G |\check{f}(x)|^2 \mathrm{d}\mu(x) = \int_G |f(x)|^2 \mathrm{d}\check{\mu}(x) = \|f\|_\ell^2.$$

Dakle, T se produljuje do izometričkog izomorfizma sa $L_2(G, \check{\mu})$ na $L_2(G, \mu)$. Za $x \in G$ i $f \in C_0(G)$ imamo

$$\pi_r(x)Tf = \rho_x \check{f} = (\lambda_x f)^\vee = T\pi_\ell(x)f.$$

Dakle, T ostvaruje ekvivalenciju reprezentacije π_ℓ s reprezentacijom π_r.

Ustanovimo sada kako djeluju pripadne reprezentacije grupovne algebre. Neka su $f, g \in C_0(G)$ i $x \in G$. Imamo

$$[\pi_\ell(f)g](x) = \int_G f(y)(\pi_\ell(y)g)(x)\mathrm{d}\check{\mu}(x) = \int_G f(y)g(y^{-1}x)\mathrm{d}\check{\mu}(x) = (f * g)(x),$$

$$[\pi_r(f)g](x) = \int_G f(y)g(xy)\mathrm{d}\check{\mu}(x) = \int_G g(xy)\check{f}(y^{-1})\mathrm{d}\check{\mu}(x) = (g * \check{f})(x).$$

Dakle,

$$\pi_\ell(f)g = f * g, \qquad \pi_r(f)g = g * \check{f}, \qquad f, g \in C_0(G).$$

Propozicija 2.2.6. *π_ℓ i π_r su vjerne reprezentacije od $C_0(G)$, tj.*

$$\pi_\ell(f) = 0 \implies f = 0 \qquad i \qquad \pi_r(f) = 0 \implies f = 0.$$

Dokaz: Neka je $f \in C_0(G)$ takva da je $\pi_r(f) = 0$. Tada je posebno $\pi_r(f)\overline{f} = 0$, pa imamo redom

$$0 = (\pi_r(f)\overline{f})(e) = (\overline{f} * \check{f})(e) = \int_G \overline{f(y)}\check{f}(y^{-1})\mathrm{d}\check{\mu}(y) = \int_G |f(y)|^2 \mathrm{d}\check{\mu}(y),$$

odakle slijedi $f = 0$.

Zadatak 2.6. *Dokažite da su π_ℓ i π_r vjerne reprezentacije od G, tj.*

$$\pi_\ell(a) = I_{L_2(G,\hat{\mu})} \implies a = e \qquad i \qquad \pi_r(a) = I_{L_2(G,\mu)} \implies a = e.$$

Za $f \in C_0(G)$ stavimo

$$\|f\| = \sup\{\|\pi(f)\|;\ \pi \text{ unitarna reprezentacija od } G\}.$$

Budući da za svaku unitarnu reprezentaciju π od G i za svaku funkciju $f \in C_0(G)$ vrijedi nejednakost $\|\pi(f)\| \leq \|f\|_1$, slijedi da je

$$\|f\| \leq \|f\|_1 \qquad \forall f \in C_0(G).$$

Dokažimo da je $\|\cdot\|$ norma na prostoru $C_0(G)$. Prije svega, očito je $\|f\| \geq 0$, a zbog propozicije 2.2.6. iz $\|f\| = 0$ slijedi $f = 0$. Relacije $\|\alpha f\| = |\alpha|\|f\|$ i $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$ slijede neposredno iz definicije. Štoviše, za svaku reprezentaciju π je $\pi(f * g) = \pi(f)\pi(g)$ i $\pi(f^*) = \pi(f)^*$. Slijedi $\|\pi(f * g)\| \leq \|\pi(f)\| \cdot \|\pi(g)\|$ i $\|\pi(f^*)\| = \|\pi(f)\|$, pa dobivamo $\|f * g\| \leq \|f\| \cdot \|g\|$ i $\|f^*\| = \|f\|$. Dakle, uz normu $\|\cdot\|$ $C_0(G)$ je normirana $*-$algebra. Norma $\|\cdot\|$ ima jedno važno svojstvo, koje nema norma $\|\cdot\|_1$:

$$\|f^* * f\| = \sup_\pi \|\pi(f)^*\pi(f)\| = \sup_\pi \|\pi(f)\|^2 = \|f\|^2.$$

Banachova $*-$algebra $\mathcal{A}$ u kojoj vrijedi $\|a^*a\| = \|a\|^2 \ \ \forall a \in \mathcal{A}$ zove se C^*-**algebra**.

Neka je $C^*(G)$ popunjenje od $C_0(G)$ po normi $\|\cdot\|$. Tada je $C^*(G)$ C^*-algebra; ona se zove **grupovna** C^*-**algebra** od G ili C^*-**algebra grupe** G.

Neka je π unitarna reprezentacija grupe G i pripadna nedegenerirana reprezentacija od $C_0(G)$. Tada je $\|\pi(f)\| \leq \|f\| \ \forall f \in C_0(G)$. Dakle, π se jedinstveno proširuje do nedegenerirane reprezentacije od $C^*(G)$ (nedegenerirana je jer njena slika sadrži $\pi(C_0(G))$). Obrnuto, neka je π nedegenerirana reprezentacija od $C^*(G)$. Kako je $\|f\| \leq \|f\|_1 \ \forall f \in C_0(G)$, restrikcija $\pi|C_0(G)$ je reprezentacija normirane $*-$algebre $(C_0(G), \|\cdot\|_1)$. Ona je nedegenerirana jer je $C_0(G)$ gusto u $C^*(G)$. Odatle i iz teorema 2.2.5. neposredno slijedi:

Teorem 2.2.7. *Bijekcija između unitarnih reprezentacija lokalno kompaktne grupe G i nedegeneriranih reprezentacija njene C^*-algebre $C^*(G)$ ima sljedeća svojstva:*

(a) *Zatvoren potprostor $\mathcal{H}_1$ od $\mathcal{H}$ je $\pi(G)-$invarijantan ako i samo ako je $\mathcal{H}_1$ $\pi(C^*(G))-$invarijantan.*

(b) *π je ireducibilna reprezentacija od G ako i samo ako je π ireducibilna reprezentacija od $C^*(G)$.*

(c) *Za $\xi \in \mathcal{H}$ najmanji zatvoren $\pi(G)-$invarijantan potprostor koji sadrži ξ je $Cl(\pi(C^*(G))\xi)$.*

(d) *$Hom_G(\pi_1, \pi_2) = Hom_{C^*(G)}(\pi_1, \pi_2)$.*

(e) *π_1 i π_2 su ekvivalentne reprezentacije od G ako i samo ako su π_1 i π_2 ekvivalentne reprezentacije od $C^*(G)$.*

Poglavlje 3

C^*-algebre i spektralna teorija

3.1 Spektar elementa Banachove algebre

Normirana algebra je asocijativna algebra $\mathcal{A}$ nad poljem $\mathbb{C}$ kompleksnih brojeva koja je ujedno normiran prostor i vrijedi

$$\|ab\| \leq \|a\|\|b\| \qquad \forall a, b \in \mathcal{A}.$$

Primijetimo da je u normiranoj algebri množenje $(a, b) \mapsto ab$ neprekidno preslikavanje sa $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$ u $\mathcal{A}$. Doista, za $a, b, c, d \in \mathcal{A}$ imamo

$$\|ab - cd\| = \|a(b - d) + (a - c)d\| \leq \|a\|\|b - d\| + \|a - c\|\|d\|.$$

Unitalna normirana algebra je normirana algebra s jedinicom e koja ima normu 1 :

$$\|e\| = 1.$$

Ukoliko je normiran prostor $\mathcal{A}$ potpun, odnosno, Banachov, (unitalna) normirana algebra zove se (**unitalna**) **Banachova algebra**.

Neka je $\mathcal{A}$ asocijativna algebra nad poljem $\mathbb{C}$. **Involucija** na algebri $\mathcal{A}$ je preslikavanje $a \mapsto a^*$ sa $\mathcal{A}$ u $\mathcal{A}$ sa svojstvima:

$$(a + b)^* = a^* + b^*, \qquad (\lambda a)^* = \overline{\lambda} a^*, \qquad (ab)^* = b^* a^*, \qquad a^{**} = a \qquad \forall a, b \in \mathcal{A}, \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}.$$

$*-$**algebra** je asocijativna algebra na kojoj je zadana involucija. Ako je ta algebra unitalna, njena jedinica e nužno zadovoljava $e^* = e$.

Normirana $*-$**algebra** je normirana algebra koja je ujedno $*-$algebra i vrijedi

$$\|a^*\| = \|a\| \qquad \forall a \in \mathcal{A}.$$

Banachova $*-$**algebra** je potpuna normirana $*-$algebra. C^*-**algebra** je Banachova $*-$algebra $\mathcal{A}$ u kojoj vrijedi

$$\|a^* a\| = \|a\|^2 \qquad \forall a \in \mathcal{A}.$$

Neka su $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ normirane algebre. **Homomorfizam normiranih algebri** je preslikavanje $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ koji je homomorfizam algebri, tj. vrijedi

$$\varphi(a + b) = \varphi(a) + \varphi(b), \qquad \varphi(\lambda a) = \lambda \varphi(a), \qquad \varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b) \qquad \forall a, b \in \mathcal{A}, \quad \forall \lambda \in \mathbb{C},$$

koji je neprekidan, odnosno, ograničen, tj. postoji $M > 0$ takav da je

$$\|\varphi(a)\| \leq M\|a\| \qquad \forall a \in \mathcal{A}.$$

Ako su $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ unitalne normirane algebre s jedinicama $e_{\mathcal{A}}$ i $e_{\mathcal{B}}$, **unitalni homomorfizam normiranih algebri** je homomorfizam normiranih algebri $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ takav da je

$$\varphi(e_{\mathcal{A}}) = e_{\mathcal{B}}.$$

Ako su $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ $*-$algebre, homomorfizam $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ zove se $*-$homomorfizam ako vrijedi

$$\varphi(a^*) = \varphi(a)^* \qquad \forall a \in \mathcal{A}.$$

Primjeri: 1. Neka je M kompaktan Hausdorffov topološki prostor. Tada prostor $C(M)$ svih neprekidnih funkcija $f : M \to \mathbb{C}$ postaje komutativna unitalna C^*-algebra, ako operacije, normu i involuciju definiramo ovako:

$$(f+g)(t) = f(t) + g(t), \quad (\lambda f)(t) = \lambda f(t), \quad (fg)(t) = f(t)g(t),$$

$$f^*(t) = \overline{f(t)}, \quad \|f\|_\infty = \max\{|f(t)|;\ t \in M\}, \qquad f, g \in C(M), \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad t \in M.$$

2. Neka je sada M lokalno kompaktan Hausdorffov topološki prostor i neka je $C_0(M)$ prostor svih neprekidnih funkcija $f : M \to \mathbb{C}$ s kompaktnim nosačem. Definiramo operacije, involuciju i normu na isti način kao u primjeru **1.** Tada je $C_0(M)$ normirana komutativna $*-$algebra koja nije unitalna ako prostor M nije kompaktan, a nije niti potpun. Njeno upotpunjenje se može identificirati sa $C_\infty(M)$. To je prostor svih neprekidnih funkcija $f : M \to \mathbb{C}$ takvih da je

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = 0.$$

Pri tome kažemo da funkcija $f : M \to \mathbb{C}$ **konvergira** prema $\lambda \in \mathbb{C}$ **u beskonačnosti** i pišemo

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lambda,$$

ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji kompaktan podskup $K \subseteq M$ takav da vrijedi

$$t \in M \setminus K \qquad \Longrightarrow \qquad |f(t) - \lambda| \leq \varepsilon.$$

$C_\infty(M)$ je komutativna C^*-algebra koja nije unitalna.

3. Neka je $\mathcal{H}$ normiran prostor. Algebra $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ svih ograničenih (odnosno, neprekidnih) linearnih operatora $A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ je unitalna normirana algebra uz normu definiranu sa

$$\|A\| = \sup\{\|A\xi\|;\ \xi \in \mathcal{H},\ \|\xi\| \leq 1\}.$$

Ako je prostor $\mathcal{H}$ Banachov, $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ je Banachova unitalna algebra. Ako je prostor $\mathcal{H}$ Hilbertov, onda je adjungiranje $A \mapsto A^*$, definirano sa

$$(A^*\xi|\eta) = (\xi|A\eta), \qquad \xi, \eta \in \mathcal{H},$$

involucija na algebri $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ i s njom je $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ unitalna C^*-algebra. Doista, u slučaju Hilbertovog prostora se pokazuje da norma operatora $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ zadovoljava

$$\|A\| = \sup\{|(A\xi|\eta)|;\ \xi, \eta \in \mathcal{H},\ \|\xi\| \leq 1,\ \|\eta\| \leq 1\}.$$

Odatle odmah slijedi da je $\|A^*\| = \|A\|\ \forall A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Nadalje, $\|A^*A\| \leq \|A^*\|\|A\| = \|A\|^2$. S druge strane, za $\xi \in \mathcal{H}$, $\|\xi\| = 1$, imamo

$$\|A^*A\xi\| \geq (A^*A\xi|\xi) = (A\xi|A\xi) = \|A\xi\|^2.$$

Supremum po svim jediničnim vektorima ξ daje obrnutu nejednakost $\|A^*A\| \geq \|A\|^2$. Prema tome vrijedi jednakost $\|A^*A\| = \|A\|^2 \ \forall A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$.

4. Ako je G lokalno kompaktna grupa, vidjeli smo da je grupovna algebra $C_0(G)$ normirana $*-$algebra, ako množenje, involuciju i normu definiramo ovako:

$$(f * g)(x) = \int_G f(y)g(y^{-1}x)\mathrm{d}\nu(y), \quad f^*(x) = \Delta(x^{-1})\overline{f(x^{-1})}, \quad \|f\|_1 = \int_G |f(x)|\mathrm{d}\nu(x).$$

Pri tome je ν lijeva Haarova mjera na G i Δ je modularna funkcija na grupi G. Ona je unitalna samo u slučaju kad je grupa G diskretna. Njeno popunjenje je Banachova $*-$algebra $L_1(G,\nu)$. Definirali smo i drugu normu na $C_0(G)$ sa

$$\|f\| = \sup\{\|\pi(f)\|;\ \pi \text{ unitarna reprezentacija grupe } G\}.$$

Popunjenje u odnosu na tu normu je C^*-algebra, označava se $C^*(G)$ i zove grupovna C^*-algebra grupe G.

Ako je $\mathcal{A}$ unitalna algebra, sa $\mathcal{A}^\times$ ćemo označavati multiplikativnu grupu njenih invertibilnih elemenata. **Spektar** elementa a unitalne algebre $\mathcal{A}$ je skup

$$\sigma(a) = \{\lambda \in \mathbb{C};\ \lambda e - a \notin \mathcal{A}^\times\}.$$

Zadatak 3.1. *Neka je $\mathcal{A}$ unitalna $*-$algebra i $a \in \mathcal{A}$. Dokažite:*

(*a*) *Ako je $a \in \mathcal{A}^\times$ onda je $a^* \in \mathcal{A}^\times$ i vrijedi $(a^*)^{-1} = (a^{-1})^*$.*

(*b*) *Vrijedi $\sigma(a^*) = \overline{\sigma(a)} = \{\overline{\lambda};\ \lambda \in \sigma(a)\}$.*

Zadatak 3.2. *Neka je $\mathcal{A}$ unitalna Banachova algebra i neka je $a \in \mathcal{A}$ takav da je $\|a\| < 1$. Dokažite da je tada $e - a \in \mathcal{A}^\times$ i da je*

$$(e-a)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n$$

pri čemu red apsolutno konvergira, tj. konvergira red normi $\sum \|a^n\|$.

Teorem 3.1.1. *Neka je $\mathcal{A}$ unitalna Banachova algebra.*

(*a*) *Za svaki $a \in \mathcal{A}$ je $\sigma(a) \subseteq K(0, \|a\|)$, tj. ako je $|\lambda| > \|a\|$ onda je $\lambda e - a \in \mathcal{A}^\times$.*

(*b*) *Ako je $a \in \mathcal{A}^\times$ i $\|b\| < \|a^{-1}\|^{-1}$ onda je $a - b \in \mathcal{A}^\times$ i vrijedi*

$$(a-b)^{-1} = a^{-1}\sum_{n=0}^{\infty} \left(ba^{-1}\right)^n$$

pri čemu red konvergira apsolutno.

(*c*) *Ako je $a \in \mathcal{A}^\times$ i ako je $\|b\| \leq \frac{1}{2}\|a^{-1}\|^{-1}$, onda je*

$$\left\|(a-b)^{-1} - a^{-1}\right\| \leq 2\left\|a^{-1}\right\|^2 \|b\| \qquad i \qquad \left\|(a-b)^{-1} - a^{-1} - a^{-1}ba^{-1}\right\| \leq \frac{1}{2}\left\|a^{-1}\right\|^3 \|b\|^2.$$

(*d*) *Grupa $\mathcal{A}^\times$ je otvoren podskup od $\mathcal{A}$.*

(*e*) *Za svaki $a \in \mathcal{A}$ spektar $\sigma(a)$ je kompaktan podskup od $\mathbb{C}$.*

(*f*) *Invertiranje $a \mapsto a^{-1}$ je neprekidno preslikavanje, dakle, homeomorfizam, sa $\mathcal{A}^\times$ na $\mathcal{A}^\times$.*

(*g*) *Invertiranje je diferencijabilno preslikavanje sa $\mathcal{A}^\times$ u $\mathcal{A}$.*

Pri tome, ako su $\mathcal{H}$ i $\mathcal{K}$ Banachovi prostori i $U \subseteq \mathcal{H}$ otvoren skup, funkcija $f : U \to \mathcal{K}$ se zove **diferencijabilna u točki** $x \in U$ ako postoji $D_x \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ takav da je

$$\lim_{y \to 0} \frac{\|f(x+y) - f(x) - D_x y\|}{\|y\|} = 0.$$

Dokaz: Tvrdnja (a) slijedi neposredno iz zadatka 3.2., jer je $(\lambda e - a) = \lambda(e - \frac{1}{\lambda} a)$, a iz $|\lambda| > \|a\|$ slijedi $\left\| \frac{1}{\lambda} a \right\| < 1$.

(b) Ako je $\|b\| < \|a^{-1}\|^{-1}$ onda je $\|ba^{-1}\| \leq \|b\| \, \|a^{-1}\| < 1$, pa je po zadatku 3.2. element $e - ba^{-1}$ invertibilan i njegov je invers

$$\left(e - ba^{-1}\right)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(ba^{-1}\right)^n .$$

No tada je i $a - b = (e - ba^{-1})\, a$ invertibilan i njegov je invers

$$(a-b)^{-1} = a^{-1} \left(e - ba^{-1}\right)^{-1} = a^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \left(ba^{-1}\right)^n .$$

(c) Iz (b) slijedi da je

$$(a-b)^{-1} - a^{-1} = a^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} \left(ba^{-1}\right)^n = a^{-1} b a^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \left(ba^{-1}\right)^n . \tag{3.1}$$

Kako je $\|ba^{-1}\| \leq \frac{1}{2}$, imamo

$$\left\| \sum_{n=0}^{\infty} \left(ba^{-1}\right)^n \right\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|ba^{-1}\|^n \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 2.$$

Odatle i iz (3.1) slijedi

$$\left\|(a-b)^{-1} - a^{-1}\right\| \leq 2 \left\|a^{-1} b a^{-1}\right\| \leq 2 \left\|a^{-1}\right\|^2 \|b\|.$$

Time je dokazana prva nejednakost u tvrdnji (c). Tvrdnja (d) slijedi neposredno iz tvrdnje (b). Naime, ako je $a \in \mathcal{A}^\times$, tvrdnja (b) pokazuje da $\mathcal{A}^\times$ sadrži otvorenu kuglu

$$K\left(a, \left\|a^{-1}\right\|^{-1}\right) = \left\{x \in \mathcal{A};\ \|x - a\| < \left\|a^{-1}\right\|^{-1}\right\}.$$

(e) Prema tvrdnji (a) spektar $\sigma(a)$ je ograničen podskup od $\mathbb{C}$. Nadalje, kako je $\lambda \mapsto \lambda e - a$ neprekidna funkcija sa $\mathbb{C}$ u $\mathcal{A}$, iz tvrdnje (d) slijedi da je

$$\mathbb{C} \setminus \sigma(a) = \{\lambda \in \mathbb{C};\ \lambda e - a \in \mathcal{A}^\times\}$$

otvoren podskup od $\mathbb{C}$. To znači da je skup $\sigma(a)$ zatvoren, dakle, kompaktan.

Tvrdnja (f) slijedi iz prve nejednakosti u tvrdnji (c). Doista, neka je $a \in \mathcal{A}^\infty$ i neka je $\varepsilon > 0$. Stavimo

$$\delta = \min\left\{ \frac{1}{2\left\|a^{-1}\right\|}, \frac{\varepsilon}{2\left\|a^{-1}\right\|} \right\}.$$

Ako je $\|x - a\| < \delta$ onda za $b = a - x$ vrijedi

$$\|b\| < \delta \leq \frac{1}{2\,\|a^{-1}\|},$$

pa zbog prve nejednakosti u (c) nalazimo

$$\left\|x^{-1} - a^{-1}\right\| = \left\|(a-b)^{-1} - a^{-1}\right\| \leq 2\left\|a^{-1}\right\|^2 \|b\| \leq 2\left\|a^{-1}\right\|^2 \delta \leq 2\left\|a^{-1}\right\|^2 \frac{\varepsilon}{2\,\|a^{-1}\|^2} = \varepsilon.$$

Time je dokazana neprekidnost preslikavanja $x \mapsto x^{-1}$ u bilo kojoj točki $a \in \mathcal{A}^\times$.

Zadatak 3.3. *Dokažite drugu nejednakost u tvrdnji* (c), *a odatle tvrdnju* (g) *teorema 3.1.1.*

Uputa: Linearan operator $D_x \in \mathcal{B}(\mathcal{A})$ iz definicije diferencijabilnosti funkcije $f(a) = a^{-1}$ u točki $x \in \mathcal{A}^\times$ bit će $D_x y = -x^{-1} y x^{-1}$.

Neka je i dalje $\mathcal{A}$ unitalna Banachova algebra s jedinicom e. **Rezolventa** elementa $a \in \mathcal{A}$ je funkcija $R_a : \mathbb{C} \setminus \sigma(a) \to \mathcal{A}$ definirana sa

$$R_a(\lambda) = (\lambda e - a)^{-1}, \qquad \lambda \in \mathbb{C} \setminus \sigma(a).$$

Prema tvrdnji (f) teorema 3.1.1. funkcija $R_a : \mathbb{C} \setminus \sigma(a) \to \mathcal{A}$ je neprekidna. Štoviše, prema tvrdnji (g) ona je i diferencijabilna u svakoj točki otvorenog skupa $\mathbb{C} \setminus \sigma(a)$. Prema tome, za svaki ograničen linearan funkcional $\varphi : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ funkcija $\lambda \mapsto \varphi(R_a(\lambda))$ sa $\mathbb{C} \setminus \sigma(a)$ u $\mathbb{C}$ je diferencijabilna, dakle, analitička.

Teorem 3.1.2. *Neka je* $\mathcal{A}$ *unitalna Banachova algebra i* $a \in \mathcal{A}$. *Tada je* $\sigma(a) \neq \emptyset$.

Dokaz: Pretpostavimo suprotno da je spektar $\sigma(a)$ prazan za neki $a \neq 0$. Tada je funkcija $R_a : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ diferencijabilna na cijeloj kompleksnoj ravnini, dakle, za svaki ograničen linearan funkcional $\varphi : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ funkcija $\lambda \to \varphi(R_a(\lambda))$ je analitička na $\mathbb{C}$, odnosno, to je cijela funkcija. Za $|\lambda| > 2\|a\|$ imamo $\|\lambda^{-1} a\| < 1$, pa iz zadatka 3.2. slijedi

$$R_a(\lambda) = (\lambda e - a)^{-1} = \lambda^{-1}(e - \lambda^{-1} a)^{-1} = \lambda^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda^{-1} a)^n.$$

Kako je zapravo $\|\lambda^{-1} a\| < \frac{1}{2}$, nalazimo

$$\|R_a(\lambda)\| \leq \frac{1}{|\lambda|} \sum_{n=0}^{\infty} \|\lambda^{-1} a\|^n \leq \frac{1}{|\lambda|} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{2}{|\lambda|} < \frac{1}{\|a\|}.$$

Stoga za bilo koji ograničeni linearan funkcional $\varphi : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ vrijedi

$$|\lambda| > 2\|a\| \qquad \Longrightarrow \qquad |\varphi(R_a)| \leq \frac{2\|\varphi\|}{|\lambda|} \leq \frac{\|\varphi\|}{\|a\|}.$$

S druge strane, cijela funkcija $\lambda \mapsto \varphi(R_a(\lambda))$ ograničena je na kompaktnom skupu

$$\overline{K}(0, 2\|a\|) = \{\lambda \in \mathbb{C};\ |\lambda| \leq 2\|a\|\}.$$

Stoga je ona ograničena na cijeloj kompleksnoj ravnini i kao takva je po Liouvilleovom teoremu konstanta. No kako je $|\varphi(R_a(\lambda)| \leq \dfrac{2\|\varphi\|}{|\lambda|}$, slijedi

$$\lim_{\lambda\to\infty} \varphi(R_a(\lambda)) = 0,$$

pa je konstanta $\varphi(R_a(\lambda))$ jednaka nuli. Dakle, vrijedi $\varphi(R_a(\lambda)) = 0$ za svaki $\lambda \in \mathbb{C}$ i za svaki ograničen linearan funkcional $\varphi : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$. Po Hahn$-$Banachovom teoremu slijedi da je $R_a(\lambda) = 0$, a to je nemoguće, jer je $R_a(\lambda) \in \mathcal{A}^\times$. Ova kontradikcija dokazuje tvrdnju teorema.

Teorem 3.1.3. (**Geljfand$-$Mazur**) *Neka je $\mathcal{A}$ unitalna Banachova algebra s jedinicom e koja je tijelo, tj. $\mathcal{A}^\times = \mathcal{A} \setminus \{0\}$. Tada je $\mathcal{A} = \mathbb{C}e = \{\lambda e;\ \lambda \in \mathbb{C}\}$.*

Dokaz: Ako je $a \notin \mathbb{C}e$, onda je $\lambda e - a \in \mathcal{A} \setminus \{0\} = \mathcal{A}^\times$ za svaki $\lambda \in \mathbb{C}$. No to znači da je $\sigma(a) = \emptyset$, a to je nemoguće po teoremu 3.1.2.

Za element a unitalne Banachove algebre $\mathcal{A}$ definiramo njegov **spektralni radijus**; to je broj

$$\nu(a) = \max\{|\lambda|;\ \lambda \in \sigma(a)\}.$$

Prema tvrdnji (a) teorema 3.1.1. znamo da je $\nu(a) \leq \|a\|$. Ustvari vrijedi

Teorem 3.1.4. *Za svaki element a unitalne Banachove algebre $\mathcal{A}$ vrijedi*

$$\nu(a) = \lim_{n\to\infty} \|a^n\|^{\frac{1}{n}}.$$

Dokaz: Vrijedi

$$\lambda^n e - a^n = (\lambda e - a)\sum_{j=0}^{n-1} \lambda^j a^{n-j-1}.$$

Odatle se vidi da iz invertibilnosti $\lambda^n e - a^n$ slijedi invertibilnost $\lambda e - a$. Prema tome, vrijedi

$$\lambda \in \sigma(a) \quad\Longrightarrow\quad \lambda^n \in \sigma(a^n) \quad\Longrightarrow\quad |\lambda|^n \leq \|a^n\| \quad\Longrightarrow\quad |\lambda| \leq \|a^n\|^{\frac{1}{n}}.$$

Odatle slijedi da je

$$\nu(x) \leq \lim\,\inf \|a^n\|^{\frac{1}{n}}. \tag{3.2}$$

S druge strane, pretpostavimo da je $|\lambda| > \lim\,\sup \|a^n\|^{\frac{1}{n}}$. Tada je

$$\frac{1}{|\lambda|} < \frac{1}{\lim\,\sup \|a^n\|^{\frac{1}{n}}},$$

pa iz teorije analitičkih funkcija znamo da konvergira red

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|a^n\|}{|\lambda|^n}.$$

No tada konvergira red u $\mathcal{A}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda^n} a^n.$$

Označimo njegovu sumu sa x, a parcijalne sume sa x_n :

$$x_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\lambda^k} a^k, \qquad x = \lim_{n\to\infty} x_n.$$

Tada je

$$\left(e - \frac{1}{\lambda}a\right) x_n = x_n \left(e - \frac{1}{\lambda}a\right) = e - \frac{1}{\lambda^n}a^n.$$

Iz konvergencije reda $\sum |\lambda|^{-n}\|a^n\|$ slijedi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\|a^n\|}{|\lambda^n|} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \lim_{n\to\infty} e - \frac{1}{\lambda^n}a^n = e,$$

pa nalazimo da je

$$\left(e - \frac{1}{\lambda}a\right) x = \lim_{n\to\infty} \left(e - \frac{1}{\lambda}a\right) x_n = e$$

i

$$x \left(e - \frac{1}{\lambda}a\right) = \lim_{n\to\infty} x_n \left(e - \frac{1}{\lambda}a\right) = e.$$

Dakle, element $e-\lambda^{-1}a$ je invertibilan, pa je invertibilan i $\lambda e-a = \lambda(e-\lambda^{-1}a)$. Dakle, $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\sigma(a)$. Iz dokazanog slijedi

$$\lim\sup \|a^n\|^{\frac{1}{n}} \leq \nu(a). \tag{3.3}$$

Iz (3.2) i (3.3) slijedi tvrdnja teorema.

Napomena. Nije teško dokazati da vrijedi i

$$\nu(a) = \inf\{\|a^n\|^{\frac{1}{n}};\ n \in \mathbb{N}\}.$$

Neka je sada $\mathcal{A}$ Banachova algebra koja nije nužno unitalna. Stavimo tada $\tilde{\mathcal{A}} = \mathcal{A} \times \mathbb{C}$ i u taj vektorski prostor uvodimo množenje i normu ovako

$$(a,\lambda)(b,\mu) = (ab + \lambda b + \mu a, \lambda\mu), \qquad (a,\lambda),(b,\mu) \in \tilde{\mathcal{A}},$$

$$\|(a,\lambda)\| = \|a\| + |\lambda|, \qquad (a,\lambda) \in \tilde{\mathcal{A}}.$$

Ako je $\mathcal{A}$ Banachova $*-$algebra, definiramo i preslikavanje $* : \tilde{\mathcal{A}} \to \tilde{\mathcal{A}}$ ovako:

$$(a,\lambda)^* = (a^*, \overline{\lambda}), \qquad (a,\lambda) \in \tilde{\mathcal{A}}.$$

Zadatak 3.4. *Dokažite da uz gornje definicije vrijedi:*

(a) *Ako je $\mathcal{A}$ Banachova algebra, $\tilde{\mathcal{A}}$ je unitalna Banachova algebra s jedinicom* $(0,1)$.

(b) *Ako je $\mathcal{A}$ Banachova $*-$algebra, $\tilde{\mathcal{A}}$ je unitalna Banachova $*-$algebra.*

(c) $a \mapsto (a,0)$ *je izometrički monomorfizam ($*-$monomorfizam) sa $\mathcal{A}$ u $\tilde{\mathcal{A}}$. Slika je maksimalni dvostani ideal u $\tilde{\mathcal{A}}$.*

(d) *Ako je $\mathcal{B}$ unitalna Banachova algebra ($*-$algebra) s jedinicom $e_{\mathcal{B}}$ i $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ neprekidni homomorfizam ($*-$homorfizam), onda je preslikavanje $\tilde{\varphi} : \tilde{\mathcal{A}} \to \mathcal{B}$, definirano sa*

$$\tilde{\varphi}((a,\lambda)) = \varphi(a) + \lambda e_{\mathcal{B}}, \qquad (a,\lambda) \in \tilde{\mathcal{A}},$$

neprekidni unitalni homomorfizam ($*-$homomorfizam).

Ovakvo *dodavanje jedinice* Banachovoj algebri omogućuje da se pojam spektralnog radijusa proširi i na slučaj neunitalne Banachove algebre $\mathcal{A}$:

$$\nu(a) = \max\{|\lambda|;\ \lambda \in \sigma_{\tilde{\mathcal{A}}}((a,0))\} = \lim_{n\to\infty} \|a^n\|^{\frac{1}{n}} = \inf\{\|a^n\|^{\frac{1}{n}};\ n \in \mathbb{N}\}, \qquad a \in \mathcal{A}.$$

Teorem 3.1.5. *Neka je $\mathcal{B}$ unitalna C^*-algebra, $\mathcal{A}$ Banachova $*-$algebra i $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ $*-$homomorfizam. Tada je $\|\varphi(a)\| \leq \|a\|$ $\forall a \in \mathcal{A}$. Posebno, ako je $\mathcal{H}$ Hilbertov prostor i $\pi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ $*-$homomorfizam, tada je π reprezentacija Banachove $*-$algebre $\mathcal{A}$ i vrijedi $\|\pi(a)\| \leq \|a\|$ $\forall a \in \mathcal{A}$.*

Dokaz: Za $b \in \mathcal{B}$ takav da je $b = b^*$ imamo $\|b^2\| = \|b^*b\| = \|b\|^2$. Odatle indukcijom po n nalazimo da za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $\left\|b^{2^n}\right\| = \|b\|^{2^n}$. Slijedi

$$\nu(b) = \lim_{n\to\infty} \|b^n\|^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \left\|b^{2^n}\right\|^{\frac{1}{2^n}} = \|b\|.$$

Pretpostavimo najprije da je $\mathcal{A}$ unitalna Banachova $*-$algebra i da je $\varphi(e_\mathcal{A}) = e_\mathcal{B}$, gdje su $e_\mathcal{A}$ i $e_\mathcal{A}$ jedinice u algebrama $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$. Ako je $x \in \mathcal{A}$ i $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \sigma(x)$, tada je $\lambda e_\mathcal{A} - x$ invertibilan, pa slijedi da je $\varphi(\lambda e_\mathcal{A} - x) = \lambda e_\mathcal{B} - \varphi(x)$ invertibilan u algebri $\mathcal{B}$, odnosno, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \sigma(\varphi(x))$. Time je dokazano da vrijedi $\sigma(\varphi(x)) \subseteq \sigma(x)$, a odatle je prema definiciji spektralnog radijusa $\nu(\varphi(x)) \leq \nu(x) \leq \|x\|$. Za $x \in \mathcal{A}$ element $b = \varphi(x^*x)$ ima svojstvo $b^* = b$, pa prema dokazanom imamo redom

$$\|\varphi(x)\|^2 = \|\varphi(x)^*\varphi(x)\| = \|\varphi(x^*x)\| = \|b\| = \nu(b) = \nu(\varphi(x^*x)) \leq \|x^*x\| \leq \|x^*\|\,\|x\| = \|x\|^2.$$

Pretpostavimo sada da je $\mathcal{A}$ unitalna ali da je $\varphi(e_\mathcal{A}) \neq e_\mathcal{B}$. Tada je $Cl(\varphi(\mathcal{A}))$ C^*-podalgebra od $\mathcal{B}$ u kojoj je element $\varphi(e_\mathcal{A})$ jedinica. Zamjena C^*-algebre $\mathcal{B}$ s tom unitalnom C^*-algebrom dovodi nas u već dokazani slučaj.

Napokon, neka je $\mathcal{A}$ neunitalna algebra. Tada kao prije formiramo unitalnu Banachovu $*-$algebru $\tilde{\mathcal{A}} = \mathcal{A} \times \mathbb{C}$, a iz $*-$homomorfizma φ kao u zadatku 3.4.(d) definiramo unitalni $*-$homomorfizam $\tilde{\varphi} : \tilde{\mathcal{A}} \to \mathcal{B}$ koji preslikava jedinicu u jedinicu, pa je prema dokazanom

$$\|\tilde{\varphi}((a,\lambda))\| \leq \|(a,\lambda)\| = \|a\| + |\lambda| \qquad \Longrightarrow \qquad \|\varphi(a)\| = \|\tilde{\varphi}((a,0))\| \leq \|(a,0)\| = \|a\|.$$

3.2 Geljfandova transformacija

Neka je $\mathcal{A}$ komutativna unitalna Banachova algebra s jedinicom e. **Karakter** na $\mathcal{A}$ je naziv za bilo koji netrivijalni homomorfizam algebri $\chi : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$. Skup svih karaktera na $\mathcal{A}$ označava se sa $\sigma(\mathcal{A})$ i zove **spektar** algebre $\mathcal{A}$. Primijetimo da ako je $\chi \in \sigma(\mathcal{A})$, onda zbog $\chi \neq 0$ postoji $a \in \mathcal{A}$ takav da je $\chi(a) \neq 0$. Tada je $\chi(a) = \chi(ae) = \chi(a)\chi(e)$, pa slijedi $\chi(e) = 1$. Dakle, svaki je karakter unitalni homomorfizam.

Teorem 3.2.1. *Neka je $\mathcal{A} \neq \{0\}$ komutativna unitalna Banachova algebra.*

(*a*) *Za $x \in \mathcal{A}^\times$ i $\chi \in \sigma(\mathcal{A})$ je $\chi(x) \neq 0$.*

(*b*) *Ako je $\chi \in \sigma(\mathcal{A})$, vrijedi $|\chi(x)| \leq \|x\|$ $\forall x \in \mathcal{A}$.*

(*c*) *$\sigma(\mathcal{A}) \neq \emptyset$ i $\chi \mapsto Ker\,\chi$ je bijekcija sa $\sigma(\mathcal{A})$ na skup svih maksimalnih ideala u $\mathcal{A}$.*

(*d*) *Za svaki $x \in \mathcal{A}$ je $\sigma(x) = \{\chi(x);\ \chi \in \sigma(\mathcal{A})\}$.*

Dokaz: (*a*) Očito je $\chi(x)\chi(x^{-1}) = \chi(e) = 1$, dakle, $\chi(x) \neq 0$.

(*b*) Kad bi bilo $|\chi(x)| > \|x\|$, onda bi prema tvrdnji (*a*) teorema 3.1.1. imali $\chi(x)e - x \in \mathcal{A}^\times$, pa bi prema (*a*) slijedilo $0 \neq \chi(\chi(x)e - x) = \chi(x) - \chi(x)$.

(*c*) Budući da je $\chi \in \sigma(\mathcal{A})$ homomorfizam, $Ker\,\chi$ je ideal u algebri $\mathcal{A}$. No χ je linearni funkcional različit od nule, dakle, $Ker\,\chi$ je potprostor od $\mathcal{A}$ kodimenzije 1. Odatle slijedi da je nužno ideal $Ker\,\chi$ maksimalan. Pretpostavimo sada da su $\chi, \chi' \in \sigma(\mathcal{A})$ takvi da je $Ker\,\chi = Ker\,\chi'$. Za $x \in \mathcal{A}$ je $\chi(x)e - x \in Ker\,\chi = Ker\,\chi'$, dakle,

$$0 = \chi'(\chi(x)e - x) = \chi(x) - \chi'(x) \qquad \Longrightarrow \qquad \chi(x) = \chi'(x).$$

Dakle, $\chi \mapsto Ker\,\chi$ je injekcija sa $\sigma(\mathcal{A})$ u skup svih maksimalnih ideala u $\mathcal{A}$.

Neka je sada $\mathcal{M}$ maksimalni ideal u $\mathcal{A}$. Tada je $\mathcal{A}/\mathcal{M}$ polje, pa prema Geljfand–Mazurovom teoremu 3.1.3. vrijedi $\mathcal{A}/\mathcal{M} = \mathbb{C}e_{\mathcal{A}/\mathcal{M}}$, odnosno, $\mathcal{A} = \mathcal{M} \dotplus \mathbb{C}e$. Definiramo sada preslikavanje $\chi : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ ovako:

$$\chi(a + \lambda e) = \lambda, \qquad a \in \mathcal{M},\ \lambda \in \mathbb{C}.$$

Tada je očito χ netrivijalan linearan funkcional. Nadalje, ako su $x, y \in \mathcal{A}$, postoje $a, b \in \mathcal{M}$ i $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ takvi da je $x = a + \lambda e$ i $y = b + \mu e$. Tada je $\chi(x) = \lambda$ i $\chi(y) = \mu$. Nadalje,

$$xy = ab + \lambda b + \mu a + \lambda\mu \qquad \text{i} \quad ab + \lambda b + \mu a \in \mathcal{M},$$

dakle,

$$\chi(xy) = \lambda\mu = \chi(x)\chi(y).$$

Prema tome, $\chi \in \sigma(\mathcal{A})$. Kako je očito $\mathcal{M} = Ker\,\chi$, time je dokazano da je $\chi \mapsto Ker\,\chi$ i surjekcija, dakle, to je bijekcija sa $\sigma(\mathcal{A})$ na skup svih maksimalnih ideala u $\mathcal{A}$.

(*d*) Za $\chi \in \sigma(\mathcal{A})$ kao u (*b*) imamo $\chi(\chi(x)e - x) = 0$, pa prema (*a*) slijedi da $\chi(x)e - x \notin \mathcal{A}^\times$, dakle, $\chi(x) \in \sigma(x)$. Time je dokazano

$$\{\chi(x);\ \chi \in \sigma(\mathcal{A})\} \subseteq \sigma(x).$$

S druge strane, ako je $\lambda \in \sigma(x)$, onda $\lambda e - x \notin \mathcal{A}^\times$, dakle, ideal $\mathcal{I} = \mathcal{A}(\lambda e - x) \neq \mathcal{A}$.

Zadatak 3.5. *Neka je $\mathcal{I} \neq \mathcal{A}$ ideal u komutativnoj unitalnoj algebri $\mathcal{A}$. Dokažite da je $\mathcal{I}$ sadržan u nekom maksimalnom idealu.*

Uputa: Koristite Zornovu lemu promatrajući skup $\{\mathcal{J};\ \mathcal{J} \text{ ideal u } \mathcal{A},\ \mathcal{I} \subseteq \mathcal{J} \neq \mathcal{A}\}$ parcijalno uređen inkluzijom. Za provjeru uvjeta Zornove leme uočite da je ideal $\mathcal{J}$ različit od $\mathcal{A}$ ako i samo ako $e \notin \mathcal{J}$.

Prema tome, gore definirani ideal $\mathcal{I} = \mathcal{A}(\lambda e - x)$ je sadržan u nekom maksimalnom idealu $\mathcal{M}$. Prema (c) postoji $\chi \in \sigma(\mathcal{A})$ takav da je $\mathcal{M} = Ker\,\chi$. Tada je $\lambda e - x \in Ker\,\chi$, dakle, $0 = \chi(\lambda e - x) = \lambda - \chi(x)$, tj. $\lambda = \chi(x)$. Time je dokazana i obrnuta inkluzija

$$\sigma(x) \subseteq \{\chi(x);\ \chi \in \sigma(\mathcal{A})\},$$

dakle, jednakost.

Prema tvrdnji (b) teorema 3.2.1. spektar $\sigma(\mathcal{A})$ komutativna unitalne Banachove algebre $\mathcal{A}$ sadržan je u zatvorenoj jediničnoj kugli duala $\mathcal{A}'$ Banachovog prostora $\mathcal{A}$. Promatrat ćemo sada na $\mathcal{A}'$ tzv. **slabu*−topologiju**, tj. topologiju za koju je baza okolina točke $f_0 \in \mathcal{A}'$ skup svih podskupova od $\mathcal{A}'$ oblika

$$\mathcal{U}(f_0; x_1, \ldots, x_n; \varepsilon) = \{f \in \mathcal{A}';\ |f(x_j) - f_0(x_j)| < \varepsilon \text{ za } j = 1, \ldots, n\},$$

za proizvoljne $n \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_n \in \mathcal{A}$ i $\varepsilon > 0$. To je najslabija topologija na $\mathcal{A}'$ za koju su sve funkcije $f \mapsto f(x)$, $x \in \mathcal{A}$, sa $\mathcal{A}'$ u $\mathbb{C}$ neprekidne. Lako se vidi da je u odnosu na tu topologiju $\mathcal{A}'$ Hausdorffov topološki prostor. Preslikavanje $F : T \to \mathcal{A}'$ sa topološkog prostora T je u odnosu na slabu $*$−topologiju na $\mathcal{A}'$ neprekidno ako i samo ako je za svaki $x \in \mathcal{A}$ kompleksna funkcija $t \mapsto [F(t)](x)$, $t \in T$, neprekidna.

Navodimo sada bez dokaza sljedeći teorem koji je za separabilan Banachov prostor dokazao S. Banach 1932. godine, a općenito L. Alaoglu 1940. godine. U stvari, dokaz tog teorema je relativno jednostavan, ako se iskoristi Tihonovljev teorem da je Kartezijejev produkt bilo koje familije kompaktnih Hausdorffovih topoloških prostora s produktnom topologijom kompaktan Hausdorffov topološki prostor.

Teorem 3.2.2. (**Banach−Alaoglu**) *Neka $\mathcal{A}$ Banachov prostor. Tada je zatvorena jedinična kugla*

$$\overline{K}_{\mathcal{A}'}(0,1) = \{f \in \mathcal{A}';\ \|f\| \leq 1\}$$

kompaktan podskup duala $\mathcal{A}'$ sa slabom*−topologijom.

Korolar 3.2.3. *Neka je $\mathcal{A}$ komutativna unitalna Banachova algebra. Tada je njen spektar $\sigma(\mathcal{A})$ kompaktan u odnosu na slabu*−topologiju duala $\mathcal{A}'$.*

Dokaz: Treba dokazati da je podskup $\sigma(\mathcal{A})$ zatvorene jedinične kugle u $\mathcal{A}'$ zatvoren u odnosu na slabu*−topologiju. No to je očito, jer je za svaki $x \in \mathcal{A}$ funkcija $f \mapsto f(x)$ sa $\mathcal{A}'$ u $\mathbb{C}$ neprekidna u odnosu na slabu*−topologiju i jer je

$$\sigma(\mathcal{A}) = \bigcap_{x,y \in \mathcal{A}} \{f \in \mathcal{A}';\ f(e) = 1,\ f(xy) = f(x)f(y)\}.$$

Neka je i dalje $\mathcal{A}$ komutativna unitalna Banachova algebra. Za $x \in \mathcal{A}$ definiramo funkciju $\hat{x} : \sigma(\mathcal{A}) \to \mathbb{C}$ ovako

$$\hat{x}(\chi) = \chi(x), \qquad \chi \in \sigma(\mathcal{A}).$$

Funkcija $\hat{x}$ je neprekidna na kompaktnom prostoru $\sigma(\mathcal{A})$. Preslikavanje $x \mapsto \hat{x}$ sa $\mathcal{A}$ u $C(\sigma(\mathcal{A}))$ se zove **Geljfandova transformacija**. Za $x, y \in \mathcal{A}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ i $\chi \in \sigma(\mathcal{A})$ imamo

$$(\alpha x + \beta y)\hat{}(\chi) = \chi(\alpha x + \beta y) = \alpha\chi(x) + \beta\chi(y) = (\alpha\hat{x} + \beta\hat{y})(\chi),$$

$$(xy)\hat{}(\chi) = \chi(xy) = \chi(x)\chi(y) = \hat{x}(\chi)\hat{y}(\chi) = (\hat{x}\hat{y})(\chi), \qquad \hat{e}(\chi) = \chi(e) = 1.$$

Prema tome, Geljfandova transformacija je unitalni homomorfizam algebre $\mathcal{A}$ u Banachovu algebru $C(\sigma(\mathcal{A}))$.

Teorem 3.2.4. *Neka je $\mathcal{A}$ komutativna unitalna Banachova algebra.*

(*a*) *Za $x \in \mathcal{A}$ spektar $\sigma(x)$ je slika funkcije $\hat{x}$.*

(*b*) *Vrijedi $\mathcal{A}^\times = \{x \in \mathcal{A};\ \hat{x}(\chi) \neq 0\ \forall \chi \in \sigma(\mathcal{A})\}$.*

(*c*) *Za $x \in \mathcal{A}$ je $\|\hat{x}\|_\infty = \nu(x) \leq \|x\|$.*

Dokaz: Tvrdnja (*a*) je malo drugačije formulirana tvrdnja (*d*) teorema 3.2.1.

(*b*) Prema tvrdnji (*a*) teorema 3.2.1. za $x \in \mathcal{A}^\times$ i $\chi \in \sigma(\mathcal{A})$ vrijedi $\hat{x}(\chi) \neq 0$. Obratno, ako je $\hat{x}(\chi) \neq 0\ \ \forall \chi \in \sigma(\mathcal{A})$, onda zbog (*a*) imamo

$$0 \notin \{\hat{x}(\chi);\ \chi \in \sigma(\mathcal{A})\} = \sigma(x),$$

a to znači da je $x \in \mathcal{A}^\times$.

Napokon, tvrdnja (*c*) slijedi neposredno iz (*b*) i iz definicije spektralnog radijusa.

Ako je $\mathcal{A}$ komutativna unitalna Banachova $*-$algebra, možemo se pitati da li Geljfandova transformacija prevodi involuciju u kompleksno konjugiranje. To općenito nije tako, a ako jest onda kažemo da je $\mathcal{A}$ **simetrična algebra**.

Teorem 3.2.5. *Neka je $\mathcal{A}$ komutativna unitalna Banachova $*-$algebra.*

(*a*) *$\mathcal{A}$ je simetrična ako i samo ako je za svaki hermitski element $x \in \mathcal{A}$ (tj. $x^* = x$) funkcija $\hat{x}$ realna.*

(*b*) *Ako je $\mathcal{A}$ C^*-algebra, ona je simetrična.*

(*c*) *Ako je $\mathcal{A}$ simetrična, podalgebra $\{\hat{x};\ x \in \mathcal{A}\}$ je gusta u $C(\sigma(\mathcal{A}))$.*

Dokaz: (*a*) Ako je $\mathcal{A}$ simetrična, za hermitski x je očito funkcija $\hat{x}$ realna. Obratno, pretpostavimo da je funkcija $\hat{x}$ realna za svaki hermistki element x. Proizvoljan $x \in \mathcal{A}$ može se napisati u obliku $x = y + iz$ gdje su y i z hermitski. Imamo $x^* = y - iz$, dakle, za $\chi \in \sigma(\mathcal{A})$ imamo

$$(x^*)\hat{}(\chi) = \chi(y - iz) = \chi(y) - i\chi(z) = \hat{y}(\chi) - i\hat{z}(\chi) = \overline{\hat{y}(\chi) + i\hat{z}(\chi)} = \overline{\hat{x}(\chi)}.$$

Dakle, algebra $\mathcal{A}$ je simetrična.

(*b*) Pretpostavimo sada da je $\mathcal{A}$ unitalna komutativna C^*-algebra i neka je $x = x^* \in \mathcal{A}$ i $\chi \in \sigma(\mathcal{A})$. Pišemo

$$\hat{x}(\chi) = \alpha + i\beta, \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Za $t \in \mathbb{R}$ stavimo $y = x + ite$. Tada je

$$\chi(y) = \alpha + i(\beta + t)$$

i

$$y^*y = (x - ite)(x + ite) = x^2 + t^2 e,$$

dakle, zbog tvrdnje (*b*) teorema 3.2.1. imamo

$$\alpha^2 + (\beta + t)^2 = |\chi(y)|^2 \leq \|y\|^2 = \|y^*y\| \leq \|x^2\| + t^2.$$

Prema tome, vrijedi

$$\alpha^2 + \beta^2 + 2\beta t \leq \|x^2\| \qquad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Odatle se vidi da mora biti $\beta = 0$, dakle, funkcija $\hat{x}$ je realna. Prema (*a*) slijedi da je algebra $\mathcal{A}$ simetrična.

Za dokaz tvrdnje (*c*) iskoristit ćemo poznati **Stone–Weierstrassov teorem**, koji navodimo bez dokaza:

Teorem 3.2.6. (**M.H.Stone–C.Weierstrass**) *Neka je M kompaktan Hausdorffov topološki prostor i neka je $\mathcal{B}$ unitalna $*-$podalgebra od $C(M)$ koja razlikuje točke od M, tj. takva da za $t, s \in M$, $t \neq s$, postoji $f \in \mathcal{B}$ takva da je $f(t) \neq f(s)$. Tada je $\mathcal{B}$ gusta u $C(M)$.*

Sada treba samo uočiti da je slika $\sigma(\mathcal{A}) = \{\hat{x};\ x \in \mathcal{A}\}$ unitalna podalgebra od $C(\sigma(\mathcal{A}))$, koja je $*-$podalgebra jer je $\mathcal{A}$ simetrična, i razlikuje točke od $\sigma(\mathcal{A})$: ako su $\chi, \chi' \in \sigma(\mathcal{A})$ i $\chi \neq \chi'$, onda postoji $x \in \mathcal{A}$ takav da je $\chi(x) \neq \chi'(x)$, što znači da je $\hat{x}(\chi) \neq \hat{x}(\chi')$.

Ako je komutativna Banachova algebra (ili simetrična Banachova $*-$algebra) $\mathcal{A}$ generirana jednim elementom, onda se njen spektar identificira sa spektrom tog elementa:

Teorem 3.2.7. *Neka je $\mathcal{A}$ komutativna unitalna Banachova algebra i $x \in \mathcal{A}$. Tada je $\hat{x}$ homeomorfizam sa $\sigma(\mathcal{A})$ na $\sigma(x)$ u svakom od sljedeća tri slučaja:*

(a) $\mathcal{A}$ je generirana sa x i e, tj. $\mathcal{A}$ je najmanja zatvorena unitalna podalgebra koja sadrži x.

(b) $x \in \mathcal{A}^\times$ i $\mathcal{A}$ je generirana sa x i x^{-1}.

(c) $\mathcal{A}$ je simetrična i generirana sa x, x^* i e.

Dokaz: Prema tvrdnji (a) teorema 3.2.4. $\hat{x}$ je surjekcija sa $\sigma(\mathcal{A})$ na $\sigma(x)$. Budući da su $\sigma(\mathcal{A})$ i $\sigma(x)$ kompaktni, dovoljno je dokazati da je funkcija $\hat{x}$ i injektivna u svakom od tri slučaja. No u svakom od tri slučaja $\chi \in \sigma(\mathcal{A})$ je potpuno određen sa $\chi(x)$ jer je u slučaju (a) $\chi(x^n) = (\chi(x))^n$ $\forall n \in \mathbb{Z}_+$, u slučaju (b) je k tome $\chi(x^{-1}) = (\chi(x))^{-1}$, dakle, $\chi(x^n) = (\chi(x))^n$ $\forall n \in \mathbb{Z}$, a u slučaju (c) je $\chi(x^*) = \overline{\chi(x)}$, dakle, $\chi(x^n x^{*m}) = (\chi(x))^n \left(\overline{\chi(x)}\right)^m$ $\forall n, m \in \mathbb{Z}_+$.

Zadatak 3.6. *Neka je M kompaktan Hausdorffov topološki prostor. Za $t \in M$ definiramo $\chi_t : C(M) \to \mathbb{C}$ kao evaluaciju u točki t : $\chi_t(f) = f(t)$, $f \in C(M)$. Dokažite da je $t \mapsto \chi_t$ homeomorfizam sa M na $\sigma(C(M))$. Ako pomoću tog homeomorfizma identificiramo t sa χ_t, dokažite da je Geljfandova transformacija identiteta.*

Upute: (1) Neprekidnost preslikavanja $t \mapsto \chi_t$ znači da ako hiperniz (t_i) konvergira prema t onda hiperniz (χ_{t_i}) konvergira prema χ_t u slaboj$^*-$topologiji na $\sigma(C(M)) \subseteq C(M)'$.

(2) $Ker\,\chi_t = C_t(M) = \{f \in C(M);\ f(t)\}$, a to je očito maksimalani ideal u $C(M)$. Treba dokazati da je svaki maksimalni ideal tog oblika, odnosno, da je za svaki pravi ideal $\mathcal{I} \neq C(M)$ sadržan u nekom takvom. To dokažite metodom suprotnog koristeći kompaktnost prostora M : ako za svaki $t \in M$ postoji $f_t \in \mathcal{I}$ takav da je $f_t(t) \neq 0$, otvoreni skupovi $\{s \in M;\ f_t(s) \neq 0\}$, $t \in M$, čine otvoren pokrivač od M, .

(3) Neprekidna bijekcija kompaktnih topoloških prostora je homeomorfizam.

Zadatak 3.7. *Neka je $\ell_1(\mathbb{Z})$ skup svih nizova $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ kompleksnih brojeva takvih da je $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |x_n| < +\infty$. Dokažite da je to unitalna komutativna Banachova algebra uz operacije i normu zadane sa*

$$(x_n)_{n\in\mathbb{Z}} + (y_n)_{n\in\mathbb{Z}} = (x_n + y_n)_{n\in\mathbb{Z}}, \quad \lambda(x_n)_{n\in\mathbb{Z}} = (\lambda x_n)_{n\in\mathbb{Z}}, \quad \|(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}\| = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |x_n|;$$

$$x = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}}, \quad y = (y_n)_{n\in\mathbb{Z}}, \quad z = xy \quad \Longleftrightarrow \quad z_n = \sum_{k\in\mathbb{Z}} x_k y_{n-k}.$$

Dokažite da se spektar $\sigma(\ell_1(\mathbb{Z}))$ može identificirati s jediničnom kružnicom u kompleksnoj ravnini

$$S = \{\lambda \in \mathbb{C};\ |\lambda| = 1\} = \{e^{i\alpha};\ \alpha \in \mathbb{R}\}$$

na takav način da Geljfandova transformacija postaje:

$$x = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell_1(\mathbb{Z}) \qquad \Longrightarrow \qquad \hat{x}(e^{i\alpha}) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x_n e^{in\alpha}.$$

Uputa: Ako je $x = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ definiran sa $x_n = 1$ za $n = 1$, $x_n = 0$ za $n \neq 1$, element x je invertibilan i Banachova algebra $\ell_1(\mathbb{Z})$ generirana je sa x i x^{-1}. Sada pokažite da je $\sigma(x) = S$.

Propozicija 3.2.8. *Neka je $\mathcal{A}$ komutativna unitalna Banachova algebra. Geljfandova transformacija od $\mathcal{A}$ je izometrija ako i samo ako je $\|x^2\| = \|x\|^2 \ \forall x \in \mathcal{A}$.*

Dokaz: Ako je $x \mapsto \hat{x}$ izometrija, onda je

$$\|x^2\| \leq \|x\|^2 = \|\hat{x}\|_\infty^2 = \|\hat{x}^2\|_\infty = \|x^2\| \quad \Longrightarrow \quad \|x^2\| = \|x\|^2.$$

Obratno, pretpostavimo da je $\|x^2\| = \|x\|^2 \ \forall x \in \mathcal{A}$. Tada slijedi da je $\|x^{2^k}\| = \|x\|^{2^k}$ za svaki $k \in \mathbb{N}$, a odatle pomoću teorema 3.1.4. i pomoću tvrdnje (c) teorema 3.2.4. imamo

$$\|\hat{x}\|_\infty = \nu(x) = \lim_{k\to\infty} \left\|x^{2^k}\right\|^{\frac{1}{2^k}} = \|x\|.$$

Teorem 3.2.9. (**I.M.Geljfand−M.Naimark**) *Neka je $\mathcal{A}$ komutativna unitalna $C*-$algebra. Tada je Geljfandova transformacija izometrički $*-$izomorfizam sa $\mathcal{A}$ na $C(\sigma(\mathcal{A}))$.*

Dokaz: Neka je $x \in \mathcal{A}$ i stavimo $y = x^*x$. Tada je $y^* = y$, pa imamo $\|y^2\| = \|y^*y\| = \|y\|^2$. Odatle kao u dokazu propozicije 3.2.8. slijedi $\|\hat{y}\|_\infty = \|y\|$. Stoga imamo

$$\|x\|^2 = \|x^*x\| = \|y\| = \|\hat{y}\|_\infty = \|\,|\hat{x}|^2\,\|_\infty = \|\hat{x}\|_\infty^2.$$

Dakle, $\|x\| = \|\hat{x}\|_\infty$ za svaki $x \in \mathcal{A}$, odnosno, $x \mapsto \hat{x}$ je izometrija. Dakle, to je preslikavanje injektivno i ima zatvorenu sliku $\sigma(\mathcal{A})$. Prema tvrdnji (c) teorema 3.2.5. ta je slika ne samo zatvorena nego i gusta u $C(\sigma(\mathcal{A}))$, dakle jednaka $C(\sigma(\mathcal{A}))$. Treba još samo primijetiti da je prema tvrdnji (b) teorema 3.2.5. izometrički izomorfizam $x \mapsto \hat{x}$ i $*-$homomorfizam.

U daljnjem će nam biti važno da se u nekim slučajevima spektar elementa u unitalnoj algebri podudara s njegovim spektrom u unitalnoj podalgebri koja ga sadrži.

Ako je K kompaktan podskup kompleksne ravnine $\mathbb{C}$, njegov komplement $\mathbb{C} \setminus K$ ima točno jednu neograničenu komponentu povezanosti. Ograničene komponente povezanosti od $\mathbb{C}\setminus K$ zovu se **rupe** od K.

Teorem 3.2.10. *Neka je $\mathcal{B}$ zatvorena unitalna podalgebra unitalne Banachove algebre $\mathcal{A}$.*

(a) *Grupa $\mathcal{B}^\times$ je otvoren i zatvoren podskup od $\mathcal{B} \cap \mathcal{A}^\times$.*

(b) *Za svaki $x \in \mathcal{B}$ je*

$$\sigma_{\mathcal{A}}(x) \subseteq \sigma_{\mathcal{B}}(x) \qquad i \qquad \partial\sigma_{\mathcal{B}}(x) \subseteq \partial\sigma_{\mathcal{A}}(x).$$

(c) *Ako je $x \in \mathcal{B}$ i ako $\sigma_{\mathcal{A}}(x)$ nema rupa, onda je $\sigma_{\mathcal{A}}(x) = \sigma_{\mathcal{B}}(x)$.*

Dokaz: (a) Očito je $\mathcal{B}^\times \subseteq \mathcal{A}^\times$, a kako je grupa $\mathcal{B}^\times$ prema tvrdnji (d) teorema 3.1.1. otvoren podskup od $\mathcal{B}$, vidimo da je $\mathcal{B}^\times$ otvoren podskup od $\mathcal{B}\cap\mathcal{A}^\times$. Pretpostavimo sada da je $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz u $\mathcal{B}^\times$ koji konvergira prema elementu $x \in \mathcal{B}\cap\mathcal{A}^\times$. Tada je $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz u $\mathcal{A}^\times$ koji konvergira prema elementu $x \in \mathcal{A}^\times$, a kako je prema tvrdnji (f) teorema 3.1.1. invertiranje neprekidno, slijedi da niz $(x_n^{-1})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira prema x^{-1}. No kako su $x_n^{-1} \in \mathcal{B}$ i kako je $\mathcal{B}$ zatvorena podalgebra od $\mathcal{A}$, slijedi da je $x^{-1} \in \mathcal{B}$, dakle, $x \in \mathcal{B}^\times$. To pokazuje da je $\mathcal{B}^\times$ i zatvoren podskup od $\mathcal{B} \cap \mathcal{A}^\times$.

(b) Ako je $x \in \mathcal{B}$, onda inkluzija $\sigma_{\mathcal{A}}(x) \subseteq \sigma_{\mathcal{B}}(x)$ slijedi neposredno iz inkluzije $\mathcal{B}^\times \subseteq \mathcal{A}^\times$. Pretpostavimo da je $\lambda \in \partial\sigma_{\mathcal{B}}(x)$. Tada postoji niz $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ u $\mathbb{C} \setminus \sigma_{\mathcal{B}}(x)$ koji konvergira prema λ.

To znači da su $\lambda_n e - x \in \mathcal{B}^\times$, ali $\lambda e - x \notin \mathcal{B}^\times$. Prema (a) tada $\lambda e - x \notin \mathcal{A}^\times$, odnosno, $\lambda \in \sigma_{\mathcal{A}}(x)$. S druge strane je $\lambda_n e - x \in \mathcal{A}^\times$ (jer je $\mathcal{B}^\times \subseteq \mathcal{A}^\times$), pa slijedi da je $\lambda \in \partial\sigma_{\mathcal{A}}(x)$. Time je dokazana inkluzija $\partial\sigma_{\mathcal{B}}(x) \subseteq \partial\sigma_{\mathcal{A}}(x)$.

Neka je $x \in \mathcal{B}$ takav da $\sigma_{\mathcal{A}}(x)$ nema rupa. To znači da je skup $\mathbb{C} \setminus \sigma_{\mathcal{A}}(x)$ povezan. No iz tvrdnje (a) slijedi da je $\mathbb{C} \setminus \sigma_{\mathcal{B}}(x)$ otvoren i zatvoren podskup od $\mathbb{C} \setminus \sigma_{\mathcal{A}}(x)$, a zbog povezanosti od $\mathbb{C} \setminus \sigma_{\mathcal{A}}(x)$ to znači jednakost $\mathbb{C} \setminus \sigma_{\mathcal{B}}(x) = \mathbb{C} \setminus \sigma_{\mathcal{A}}(x)$. Dakle, vrijedi $\sigma_{\mathcal{B}}(x) = \sigma_{\mathcal{A}}(x)$.

Zadatak 3.8. *Neka je $\mathcal{A}$ unitalna C^*-algebra i $x \in \mathcal{A}$. Dokažite:*

(a) *Ako je x unitaran, tj. $x^*x = xx^* = e$, onda je $\sigma(x) \subseteq S = \{\lambda \in \mathbb{C};\ |\lambda| = 1\}$.*

(b) *Ako je x hermitski, tj. $x = x^*$, onda je $\sigma(x) \subseteq \mathbb{R}$.*

Upute: (a) Upotrijebite $x^* = x^{-1}$, $\|x\| = \|x^*\| = 1$ i dokažite

$$\sigma(x^{-1}) = \sigma(x)^{-1} = \{\lambda^{-1};\ \lambda \in \sigma(x)\}.$$

(b) Dokažite da je za svaki $t \in \mathbb{R}$ element e^{itx} unitaran i da za svaki $a \in \mathcal{A}$ vrijedi $\sigma(e^a) = \{e^\lambda;\ \lambda \in \sigma(a)\}$.

Teorem 3.2.11. *Neka je $\mathcal{A}$ unitalna C^*-algebra i neka je $\mathcal{B}$ unitalna C^*-podalgebra. Tada je $\mathcal{B}^\times = \mathcal{B} \cap \mathcal{A}^\times$ i za svaki $x \in \mathcal{B}$ je $\sigma_{\mathcal{B}}(x) = \sigma_{\mathcal{A}}(x)$.*

Dokaz: Neka je $x \in \mathcal{B} \cap \mathcal{A}^\times$ i stavimo $y = x^*x$. Kako je y hermitski, to je prema zadatku 3.8. $\sigma_{\mathcal{A}}(y) \subseteq \mathbb{R}$, pa iz tvrdnje (c) teorema 3.2.10. slijedi da je $\sigma_{\mathcal{B}}(y) = \sigma_{\mathcal{A}}(y)$. Element x je invertibilan u $\mathcal{A}$, dakle i y je invertibilan u $\mathcal{A}$. To znači da je $0 \notin \sigma_{\mathcal{A}}(y)$. Dakle, $0 \notin \sigma_{\mathcal{B}}(y)$, a to znači da je $y \in \mathcal{B}^\times$. Tada je $x^{-1} = y^{-1}x^* \in \mathcal{B}$, dakle, $x \in \mathcal{B}^\times$. Time je dokazano da je $\mathcal{B} \cap \mathcal{A}^\times \subseteq \mathcal{B}^\times$, a kako je obrnuta inkluzija trivijalna, imamo jednakost. Odatle neposredno slijedi i druga tvrdnja.

Neka je sada $\mathcal{A}$ unitalna, ne nužno komutativna, C^*-algebra. Element $x \in \mathcal{A}$ zove se **normalan** ako je $xx^* = x^*x$. U tom slučaju je unitalna C^*-podalgebra $C^*(x)$ generirana sa x komutativna. Neka je $y \mapsto \hat{y}$, $y \in C^*(x)$, Geljfandova transformacija, koja je po Geljfand$-$Naimarkovom teoremu 3.2.9. izometrički $*-$izomorfizam sa $C^*(x)$ na algebru funkcija $C(\sigma(C^*(x)))$. Prema tvrdnji (c) teorema 3.2.7. $\hat{x}$ je homeomorfizam sa $\sigma(C^*(x))$ na $\sigma_{C^*(x)}(x)$. Međutim, prema teoremu 3.2.11. vrijedi $\sigma_{C^*(x)}(x)$ se poduadara sa spektrom $\sigma(x)$ u algebri $\mathcal{A}$. Dakle, uz identifikaciju $\sigma(C^*(x))$ sa $\sigma(x)$ ponmoću homeomorfizma $\hat{x}$, Geljfandova transformacija postaje izometrički $*-$izomorfizam $C^*(x)$ na $C(\sigma(x))$. Ako je $f \in C(\sigma(x))$, jedinstven element $y \in C^*(x)$, takav da je $\hat{y} = f$ označit ćemo sa $f(x)$. Na taj način $f \mapsto f(x)$ postaje izometrički $*-$izomorfizam C^*-algebre $C(\sigma(x))$ neprekidnih funkcija na spektru normalnog elementa $x \in \mathcal{A}$ na unitalnu C^*-podalgebru $C^*(x)$ od $\mathcal{A}$ generiranu s elemntom x.

Opisano pridržívanje $f \mapsto f(x)$ zove se **funkcionalni račun** za normalni element x C^*-algebre $\mathcal{A}$. Uočimo da to pridruživanje ima sljedeća svojstva:

(a) Ako je $f \in C(\sigma(x))$ polinom, tj.

$$f(\lambda) = \alpha_0 + \alpha_1\lambda + \alpha_2\lambda^2 + \cdots + \alpha_n\lambda^n, \qquad \lambda \in \sigma(x),$$

onda je

$$f(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \cdots + \alpha_n x^n.$$

(b) Ako je f kompleksno konjugiranje, $f(\lambda) = \overline{\lambda}$, $\lambda \in \sigma(x)$, onda je $f(x) = x^*$.

(c) Za funkcije $f, g \in C(\sigma(x))$ i za $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ vrijedi

$$(\alpha f + \beta g)(x) = \alpha f(x) + \beta g(x), \qquad (fg)(x) = f(x)g(x).$$

(d) Ako niz funkcija $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ u $C(\sigma(x))$ uniformno konvergira prema funkciji f, onda niz $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ u algebri $\mathcal{A}$ (tj. u algebri $C^*(x)$) konvergira prema $f(x)$.

Zadatak 3.9. (**Teorem o preslikavanju spektra**) *Neka je $\mathcal{A}$ unitalna C^*-algebra, $x \in \mathcal{A}$ normalan element i $f \in C(\sigma(x))$. Dokažite da je tada*

$$\sigma(f(x)) = f(\sigma(x)) = \{f(\lambda);\ \lambda \in \sigma(x)\}.$$

Funkcionalni račun omogućuje nam da dokažemo vrlo važnu karakterizaciju ireducibilnosti:

Teorem 3.2.12. *Neka je $\mathcal{H}$ Hilbertov prostor i neka je $\mathcal{S}$ podskup od $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ takav da je $\mathcal{S}^* = \mathcal{S}$. Sljedeća su dva svojstva ekvivalentna:*

(*a*) *$\mathcal{S}$ je ireducibilan, tj. ne postoji zatvoren potprostor $\mathcal{K}$ od $\mathcal{H}$ koji je $\mathcal{S}-$invarijantan, osim $\mathcal{K} = \{0\}$ i $\mathcal{K} = \mathcal{H}$.*

(*b*) *$\{T \in \mathcal{B}(\mathcal{H});\ TS = ST\ \forall S \in \mathcal{S}\} = \mathbb{C}I = \{\lambda I;\ \lambda \in \mathbb{C}\}$, pri čemu I označava jedinični operator na $\mathcal{H}$.*

Dokaz: $(b) \Rightarrow (a)$ Neka je $\mathcal{K}$ zatvoren $\mathcal{S}-$invarijantan potprostor od $\mathcal{H}$. Tada je i $\mathcal{K}^\perp$ $\mathcal{S}-$invarijantan, jer je $\mathcal{S}^* = \mathcal{S}$. Neka je P projektor $\mathcal{H}$ na $\mathcal{K}$ duž $\mathcal{K}^\perp$. Tada je $PS = SP\ \ \forall S \in \mathcal{S}$, pa iz (b) slijedi da je $P = \lambda I$ za neki $\lambda \in \mathbb{C}$. No P je projektor pa slijedi $\lambda I = P = P^2 = \lambda^2 I$, dakle, $\lambda = \lambda^2$, a to znači da je $\lambda = 0$ ili $\lambda = 1$. U prvom slučaju je $P = 0$, dakle, $\mathcal{K} = \{0\}$, a u drugom je $P = I$, dakle, $\mathcal{K} = \mathcal{H}$.

$(a) \Rightarrow (b)$ Sada pretpostavljamo da je skup $\mathcal{S}$ ireducibilan. Neka je $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ takav da je $TS = ST\ \ \forall S \in \mathcal{S}$. Pretpostavimo prvo da je $T = T^*$. Neka je $\mathcal{A}$ C^*-podalgebra od $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ generirana sa $\{I, T\}$. Tada je $AS = SA\ \ \forall A \in \mathcal{A}$ i $\forall S \in \mathcal{S}$. Nadalje, algebra $\mathcal{A}$ je izomorfna sa $C(\sigma(T))$. Pretpostavimo da $\sigma(T)$ nije jednočlan skup. Tada postoje $\varphi, \psi \in C(\sigma(T))$, $\varphi \neq 0$, $\psi \neq 0$, takvi da je $\varphi\psi = 0$. Stavimo $A = \varphi(T)$ i $B = \psi(T)$. Tada su $A, B \in \mathcal{A}$, $A \neq 0$, $B \neq 0$, $AB = 0$. Stavimo

$$\mathcal{K} = \operatorname{Ker} A = \{\xi \in \mathcal{H};\ A\xi = 0\}.$$

Tada je $\mathcal{K}$ zatvoren $\mathcal{S}-$invarijantan potprostor od $\mathcal{H}$. Nadalje, $B \neq 0$, pa postoji $\eta \in \mathcal{H}$ takav da je $\xi = B\eta \neq 0$. No tada je $A\xi = AB\eta = 0$, dakle, $\xi \in \mathcal{K}$. To pokazuje da je $\mathcal{K} \neq \{0\}$. Zbog ireducibilnosti je $\mathcal{K} = \mathcal{H}$. No to je u suprotnosti sa $A \neq 0$. Ova kontradikcija pokazuje da je $\sigma(T)$ jednočlan skup. No tada je $\dim \mathcal{A} = \dim C(\sigma(T)) = 1$, pa slijedi da je $\mathcal{A} = \mathbb{C}I$. Dakle, $T = \lambda I$ za neki $\lambda \in \mathbb{C}$ (u stvari, za neki $\lambda \in \mathbb{R}$, jer je T hermitski).

Uzmimo sada da je $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ proizvoljan takav da je $TS = ST\ \ \forall S \in \mathcal{S}$. Stavimo

$$T_1 = \frac{1}{2}(T + T^*), \quad T_2 = \frac{1}{2i}(T - T^*).$$

Tada su T_1 i T_2 hermitski i $T = T_1 + iT_2$. Budući da je $\mathcal{S} = \mathcal{S}^*$ slijedi

$$T_1 S = ST_1 \qquad \text{i} \qquad T_2 S = ST_2 \qquad \forall S \in \mathcal{S}.$$

Prema dokazanom postoje $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ takvi da je $T_1 = \lambda_1 I$ i $T_2 = \lambda_2 I$. Odatle za $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2 \in \mathbb{C}$ dobivamo $T = \lambda I$.

Neka je sada $\mathcal{A}$ neunitalna Banachova algebra. Ponovimo sada malo pažljivije konstrukciju iz dokaza teorema 3.1.5. Na kompleksnom vektorskom prostoru $\tilde{\mathcal{A}} = \mathcal{A} \times \mathbb{C}$ definiramo množenje sa

$$(a, \lambda)(b, \mu) = (ab + \lambda b + \mu a, \lambda\mu), \qquad (a, \lambda), (b, \mu) \in \tilde{\mathcal{A}}.$$

Tada $\tilde{\mathcal{A}}$ postaje unitalna algebra s jedinicom $e_{\tilde{\mathcal{A}}} = (0, 1)$. Nadalje, $a \mapsto (a, 0)$ je injektivni homomorfizam algebre $\mathcal{A}$ u algebru $\tilde{\mathcal{A}}$. Pomoću tog monomorfizma izvršimo identifikaciju algebre

$\mathcal{A}$ s podalgebrom od $\tilde{\mathcal{A}}$. Uz tu identifikaciju $\mathcal{A}$ je u stvari obostrani ideal u $\tilde{\mathcal{A}}$ kodimenzije 1 i $\tilde{\mathcal{A}} = \mathcal{A} \dotplus \mathbb{C}e_{\tilde{\mathcal{A}}}$.

Dopustiva norma na $\tilde{\mathcal{A}}$ je norma na prostoru $\tilde{\mathcal{A}}$ u odnosu na koju je $\tilde{\mathcal{A}}$ normirana unitalna algebra i koja se na $\mathcal{A}$ podudara s polaznom normom. Takve norme postoje; primjer je

$$\|a + \lambda e_{\tilde{\mathcal{A}}}\| = \|a\| + |\lambda|, \qquad a \in \mathcal{A}, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Uz svaku dopustivu normu $\tilde{\mathcal{A}}$ je Banachova unitalna algebra, jer je $\mathcal{A}$ potpuna i kodimenzije 1 :

Zadatak 3.10. *Neka je X normiran prostor i Y potprostor od X konačne kodimenzije. Uz pretpostavku da je normiran prostor Y potpun dokažite da je prostor X potpun.*

Neka je sada $\mathcal{A}$ komutativna neunitalna Banachova algebra. **Karakter** od $\mathcal{A}$ je linearan funkcional $f : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ takav da je $f \neq 0$ i $f(ab) = f(a)f(b) \ \ \forall a, b \in \mathcal{A}$. Neka je $\sigma(\mathcal{A})$ topološki prostor svih karaktera od $\mathcal{A}$ snabdjeven s topologijom proste konvergencije, odnosno, konvergencije po točkama. Podrazumijevamo da je $\tilde{\mathcal{A}}$ snabdjevena s nekom dopustivom normom.

Propozicija 3.2.13. *Neka je $\varphi_\infty \in \sigma(\tilde{\mathcal{A}})$ definiran sa $\varphi_\infty|\mathcal{A} = 0$, tj.*

$$\varphi_\infty(a + \lambda e_{\tilde{\mathcal{A}}}) = \lambda, \qquad a \in \mathcal{A}, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Tada je $\varphi \mapsto \varphi|\mathcal{A}$ homeomorfizam sa $\sigma(\tilde{\mathcal{A}}) \setminus \{\varphi_\infty\}$ na $\sigma(\mathcal{A})$. Posebno, $\sigma(\mathcal{A})$ je lokalno kompaktan Hausdorffov topološki prostor i $\sigma(\tilde{\mathcal{A}})$ je kompaktifikacija od $\sigma(\mathcal{A})$ s jednom točkom.

Dokaz: Za $\varphi \in \sigma(\tilde{\mathcal{A}}) \setminus \{\varphi_\infty\}$ je očito $\varphi|\mathcal{A} \in \sigma(\mathcal{A})$. Nadalje, ako su $\varphi, \psi \in \sigma(\tilde{\mathcal{A}}) \setminus \{\varphi_\infty\}$ takvi da je $\varphi|\mathcal{A} = \psi|\mathcal{A}$, onda je za $a \in \mathcal{A}$ i $\lambda \in \mathbb{C}$

$$\varphi(a + \lambda e_{\tilde{\mathcal{A}}}) = \varphi(a) + \lambda\varphi(1) = \varphi(a) + \lambda = \psi(a) + \lambda\psi(1) = \psi(a + \lambda e_{\tilde{\mathcal{A}}}),$$

pa slijedi $\varphi = \psi$. Dakle, preslikavanje $\varphi \mapsto \varphi|\mathcal{A}$ je injekcija sa $\sigma(\tilde{\mathcal{A}}) \setminus \{\varphi_\infty\}$ u $\sigma(\mathcal{A})$.

Neka je $f \in \sigma(\mathcal{A})$. Definiramo $\varphi : \tilde{\mathcal{A}} \to \mathbb{C}$ sa

$$\varphi(a + \lambda e_{\tilde{\mathcal{A}}}) = f(a) + \lambda, \qquad a \in \mathcal{A}, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Tada se provjerava da je $\varphi \in \sigma(\tilde{\mathcal{A}}) \setminus \{\varphi_\infty\}$ i očito je $\varphi|\mathcal{A} = f$.

Time je dokazano da je $\varphi \mapsto \varphi|\mathcal{A}$ bijekcija sa $\sigma(\tilde{\mathcal{A}}) \setminus \{\varphi_\infty\}$ na $\sigma(\mathcal{A})$. Napokon, ako je $(\varphi_i)_{i\in I}$ hiperniz u $\sigma(\tilde{\mathcal{A}}) \setminus \{\varphi_\infty\}$ i ako je $\varphi \in \sigma(\tilde{\mathcal{A}}) \setminus \{\varphi_\infty\}$ onda imamo ovaj slijed očiglednih ekvivalencija:

$$\varphi(a) = \lim_{i\in I} \varphi_i(a) \ \ \forall a \in \mathcal{A} \quad \Longleftrightarrow \quad \varphi(a) + \lambda = \lim_{i\in I} \varphi_i(a) + \lambda \ \ \forall a \in \mathcal{A}, \ \forall \lambda \in \mathbb{C} \quad \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \quad \varphi(a + \lambda e_{\tilde{\mathcal{A}}}) = \lim_{i\in I} \varphi_i(a + \lambda e_{\tilde{\mathcal{A}}}) \ \ \forall a \in \mathcal{A}, \ \forall \lambda \in \mathbb{C} \quad \Longleftrightarrow \quad \varphi(x) = \lim_{i\in I} \varphi_i(x) \ \ \forall x \in \tilde{\mathcal{A}}.$$

To pokazuje da je $\varphi \mapsto \varphi|\mathcal{A}$ homeomorfizam.

Za $x \in \mathcal{A}$ na isti način kao i u slučaju unitalnih algebri definiramo funkciju $\hat{x} : \sigma(\mathcal{A}) \to \mathbb{C}$ sa $\hat{x}(f) = f(x), \ \ f \in \sigma(\mathcal{A})$. I u ovom slučaju se $x \mapsto \hat{x}$ zove Geljfandova transformacija ili Geljfandov homomorfizam. To je homomorfizam algebre $\mathcal{A}$ u algebru $C(\sigma(\mathcal{A}))$. Za $x \in \mathcal{A}$ je $\varphi_\infty(x) = 0$. Dakle, neprekidna funkcija $\hat{x}$ na lokalno kompaktnom prostoru $\sigma(\mathcal{A})$ teži k nuli u beskonačnosti. Prema tome, Geljfandova transformacija je homomorfizam $\mathcal{A}$ u Banachovu algebru $C_\infty(\sigma(\mathcal{A}))$ svih neprekidnih funkcija na $\sigma(\mathcal{A})$ koje teže k nuli u beskonačnosti.

Neka je sada $\mathcal{A}$ neunitalna Banachova $*-$algebra. Tada i $\tilde{\mathcal{A}}$ postaje $*-$algebra uz proširenje involucije $*$ na sljedeći način:

$$(a, \lambda)^* = (a^*, \overline{\lambda}) \qquad \text{tj.} \qquad (a + \lambda e_{\tilde{\mathcal{A}}})^* = a^* + \overline{\lambda} e_{\tilde{\mathcal{A}}}, \qquad a \in \mathcal{A}, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Propozicija 3.2.14. *Neka je $\mathcal{A}$ neunitalna C^*-algebra. Tada na $\tilde{\mathcal{A}}$ postoji jedinstvena norma s kojom je $\tilde{\mathcal{A}}$ C^*-algebra s jedinicom. Ta je norma dopustiva.*

Dokaz: Prije svega, jedinstvenost slijedi neposredno iz teorema 3.1.5. Dakle, dokaz će biti potpun ako konstruiramo neku dopustivu normu na $\tilde{\mathcal{A}}$ u odnosu na koju je $\tilde{\mathcal{A}}$ C^*-algebra.

Za $x \in \tilde{\mathcal{A}}$ stavimo
$$\|\!|x|\!\| = \sup\{\|xa\|;\ a \in \mathcal{A},\ \|a\| \leq 1\}.$$
Tada je očito $x \mapsto \|\!|x|\!\|$ polunorma na $\tilde{\mathcal{A}}$ i vrijedi $\|\!|xy|\!\| \leq \|\!|x|\!\| \cdot \|\!|y|\!\|\ \ \forall x, y \in \tilde{\mathcal{A}}$.

Dokažimo da se to preslikavanje na $\mathcal{A}$ podudara s normom od $\mathcal{A}$, tj. da je
$$\|\!|x|\!\| = \|x\| \qquad \forall x \in \mathcal{A}.$$
To je očito ako je $x = 0$. Uzmimo da je $x \in \mathcal{A}$, $x \neq 0$. Tada za $a \in \mathcal{A}$, $\|a\| \leq 1$, vrijedi $\|xa\| \leq \|x\|$. Prema tome je $\|\!|x|\!\| \leq \|x\|$. Uzmimo $a = \|x\|^{-1}x^* \in \mathcal{A}$. Tada je $\|a\| = 1$ i
$$\|xa\| = \frac{1}{\|x\|}\|xx^*\| = \frac{1}{\|x\|}\|x^*\|^2 = \|x\|.$$
Stoga vrijedi i obrnuta nejednakost $\|\!|x|\!\| \geq \|x\|$. Time je dokazana tražena jednakost $\|\!|x|\!\| = \|x\|$.

Dokažimo sada da je $\|\!|\cdot|\!\|$ definitna, dakle, norma na $\tilde{\mathcal{A}}$. Neka je $x = b + \lambda e_{\tilde{\mathcal{A}}} \in \tilde{\mathcal{A}}$ ($b \in \mathcal{A}$, $\lambda \in \mathbb{C}$) takav da je $\|\!|x|\!\| = 0$. Pretpostavimo da je $\lambda \neq 0$. Stavimo $e = -\lambda^{-1}b \in \mathcal{A}$. Budući da je $\|\!|x|\!\| = 0$, za svaki $a \in \mathcal{A}$ vrijedi $xa = 0$, tj. $ba + \lambda a = 0$. Odatle je
$$ea = a \qquad \forall a \in \mathcal{A}.$$
Slijedi
$$ae^* = (ea^*)^* = (a^*)^* = a.$$
Prema tome, vrijedi
$$ea = a = ae^* \qquad \forall a \in \mathcal{A}.$$
Posebno, $e = ee^* = e^*$, pa zaključujemo da je e jedinica u algebri $\mathcal{A}$, suprotno pretpostavci da je $\mathcal{A}$ neunitalna algebra. Ova kontradikcija pokazuje da je nužno $\lambda = 0$. No tada je $x = a \in \mathcal{A}$, pa prema dokazanom slijedi $0 = \|\!|a|\!\| = \|a\|$, dakle, $x = a = 0$.

Prema tome, $\|\!|\cdot|\!\|$ je dopustiva norma na $\tilde{\mathcal{A}}$. S tom je normom $\tilde{\mathcal{A}}$ Banachova unitalna algebra.

Dokažimo sada da je
$$\|\!|z^*z|\!\| \geq \|\!|z|\!\|^2 \qquad \forall z \in \tilde{\mathcal{A}}.$$
U tu svrhu pretpostavimo prvo da je $\|\!|z|\!\| = 1$. Neka je $\rho < 1$ proizvoljan. Iz definicije norme $\|\!|\cdot|\!\|$ slijedi da postoji $y \in \mathcal{A}$ takav da je $\|y\| \leq 1$ i $\|zy\|^2 \geq \rho$. Budući da je $zy \in \mathcal{A}$, imamo redom
$$\rho \leq \|z\|^2 = \|(zy)^*(zy)\| = \|y^*(z^*z)y\| = \|\!|y^*(z^*z)y|\!\| \leq \|\!|y^*|\!\| \cdot \|\!|y|\!\| \cdot \|\!|z^*z|\!\| = \|y\|^2 \cdot \|\!|z^*z|\!\| \leq \|\!|z^*z|\!\|.$$
Zbog proizvoljnosti $\rho < 1$ zaključujemo da je $\|\!|z^*z|\!\| \geq 1$.

Uzmimo sada proizvoljan $z \in \tilde{\mathcal{A}}$, $z \neq 0$. Za $x = \|\!|z|\!\|^{-1}z$ je tada $\|\!|x|\!\| = 1$, pa je prema dokazanom $\|\!|x^*x|\!\| \geq 1$, odakle slijedi tražena nejednakost $\|\!|z^*z|\!\| \geq \|\!|z|\!\|^2$.

Sada za svaki $z \in \tilde{\mathcal{A}}$ imamo
$$\|\!|z|\!\|^2 \leq \|\!|z^*z|\!\| \leq \|\!|z^*|\!\| \cdot \|\!|z|\!\| \qquad \Longrightarrow \qquad \|\!|z|\!\| \leq \|\!|z^*|\!\|.$$
Primijenimo li dobivenu nejednakost na z^* umjesto z dobivamo i obrnutu nejednakost $\|\!|z|\!\| \geq \|\!|z^*|\!\|$, dakle, vrijedi jednakost
$$\|\!|z|\!\| = \|\!|z^*|\!\| \qquad \forall z \in \tilde{\mathcal{A}}.$$

Napokon,
$$\|\!|z|\!\|^2 \leq \|\!|z^*z|\!\| \leq \|\!|z^*|\!\| \cdot \|\!|z|\!\| = \|\!|z|\!\|^2 \qquad \Longrightarrow \qquad \|\!|z^*z|\!\| = \|\!|z|\!\|^2 \quad \forall z \in \tilde{\mathcal{A}}.$$

Teorem 3.2.15. *Neka je $\mathcal{A}$ komutativna C^*-algebra bez jedinice. Geljfandova transformacija je izometrički izomorfizam $\mathcal{A}$ na C^*-algebru $C_\infty(\sigma(\mathcal{A}))$ svih neprekidnih funkcija na $\sigma(\mathcal{A})$ koje teže k nuli u beskonačnosti.*

Dokaz: Uz prije uvedene oznake $f \mapsto f|\sigma(\mathcal{A})$ je izometrički izomorfizam C^*-algebre $\{g \in C(\sigma(\tilde{\mathcal{A}}));\ g(\varphi_\infty) = 0\}$ na C^*-algebru $C_\infty(\sigma(\mathcal{A}))$; pri tome se podrazumijevaju identifikacije $\mathcal{A} \subseteq \tilde{\mathcal{A}}$ i $\sigma(\mathcal{A}) = \sigma(\tilde{\mathcal{A}}) \setminus \{\varphi_\infty\}$. Nadalje, $x \mapsto \hat{x}$ je izometrički izomorfizam C^*-algebre $\tilde{\mathcal{A}}$ na algebru $C(\sigma(\tilde{\mathcal{A}}))$. Za $x \in \tilde{\mathcal{A}}$ imamo ekvivalencije

$$\hat{x}(\varphi_\infty) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \varphi_\infty(x) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x \in \mathcal{A}.$$

Dakle, pri tom izomorfiznu $\mathcal{A}$ se preslikava na C^*-algebru $\{g \in C(\sigma(\tilde{\mathcal{A}}));\ g(\varphi_\infty) = 0\}$. Prema tome, kompozicija dvaju izomorfizama je izometrički izomorfizam C^*-algebre $\mathcal{A}$ na C^*-algebru $C_\infty(\sigma(\mathcal{A}))$.

Zadatak 3.11. *Neka je $\mathcal{H}$ Hilbertov prostor i $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ hermitski operator, $A^* = A$, koji je pozitivan tj. $(A\xi|\xi) \geq 0\ \forall \xi \in \mathcal{H}$. Dokažite:*

(a) *Postoji jedinstven pozitivan operator $B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ takav da je $B^2 = A$.*

(b) *Operator B iz tvrdnje (a) komutira sa svakim $C \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ koji komutira sa A.*

(c) *Operator B iz tvrdnje (a) sadržan je u C^*-podalgebri od $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ generiranoj sa A.*

Uputa: Neka je $\mathcal{A}$ C^*-podalgebra od $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ generirana sa A. Ako je operator A invertibilan, $\mathcal{A}$ je izomorfna sa $C(\sigma(A))$, a ako je A neinvertibilan, iskoristite teorem 3.2.15. da dokažete da je (neunitalna) C^*-algebra $\mathcal{A}$ izomorfna s algebrom funkcija $\{\varphi \in C(\sigma(A));\ \varphi(0) = 0\}$. Dokažite da pozitivan operator ima spektar sadržan u $\mathbb{R}_+ = [0, \infty\rangle$. Sada koristite funkcionalni račun i upotrijebite jedinstvenu nenegativnu funkciju $\varphi \in C(\sigma(A))$ takvu da je $\varphi(t)^2 = t$, $\forall t \in \sigma(A)$, tj. $\varphi(t) = \sqrt{t}$.

Za dokaz jedinstvenosti u (a), ako je i C pozitivan operator takav da je $C^2 = A$, koristite funkcionalni račun za operator C, tj. promatrajte C^*-podalgebru od $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ generiranu sa C.

Poglavlje 4

Abelove lokalno kompaktne grupe

4.1 Dualna grupa

Propozicija 4.1.1. *Neka je π unitarna reprezentacija Abelove lokalno kompaktne grupe G na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H} \neq \{0\}$. Tada je* $\dim \mathcal{H} = 1$.

Dokaz: Po teoremu 3.2.12. operator $\pi(x)$ proporcionalan je sa jediničnim operatorom I na $\mathcal{H}$ $\forall x \in G$. To znači da svaki zatvoren potprostor od $\mathcal{H}$ $\pi-$invarijantan. Kako je reprezentacija ireducibilna, nužno je $\mathcal{H}$ jednodimenzionalan.

U daljnjem je G Abelova lokalno kompaktna grupa. Nadalje, fiksirajmo neku Haarovu mjeru μ na G. Primijetimo da su algebre $C_0(G)$, $L_1(G)$ i $C^*(G)$ komutativne.

Karakter od G je neprekidni homomorfizam χ grupe G u multiplikativnu grupu $T = \{\lambda \in \mathbb{C};\ |\lambda| = 1\}$. Dakle, karakter je ireducibilna unitarna reprezentacija od G. Označavat ćemo sa $\hat{G}$ skup svih karaktera od G. U taj skup uvodimo strukturu Abelove grupe pomoću množenja po točkama:

$$(\chi\chi')(x) = \chi(x)\chi'(x), \qquad \chi, \chi' \in \hat{G}, \quad x \in G.$$

Nadalje, za $\chi \in \hat{G}$ definiramo $\zeta_\chi : L_1(G) \to \mathbb{C}$ sa

$$\zeta_\chi(f) = \int_G f(x)\chi(x)\mathrm{d}\mu(x), \qquad f \in L_1(G).$$

Propozicija 4.1.2. $\chi \mapsto \zeta_\chi$ *je bijekcija sa* $\hat{G}$ *na* $\sigma(L_1(G))$.

Dokaz: Prema jednostavnom proširenju teorema 2.2.5. sa algebre $C_0(G)$ na algebru $L_1(G)$ za svaki karakter $\chi \in \hat{G}$ je ζ_χ nedegenerirana reprezentacija Banachove $*-$algebre $L_1(G)$ na jednodimenzionalnom prostoru. Dakle je $\zeta_\chi \in \sigma(L_1(G))$.

Pretpostavimo da su $\chi, \chi' \in \hat{G}$ takvi da je $\zeta_\chi = \zeta_{\chi'}$. Posebno, tada su ζ_χ i $\zeta_{\chi'}$ ekvivalentne reprezentacije od $L_1(G)$. Prema tvrdnji (e) teorema 2.2.5. tada su χ i χ' ekvivalentne reprezentacije od G. No to znači $\chi = \chi'$. Time je dokazano da je preslikavanje $\chi \mapsto \zeta_\chi$ injekcija.

Napokon, tvrdnja o surjektivnosti slijedila bi neposredno iz bijektivnosti skupova ireducibilnih reprezentacija u teoremu 2.2.5. kad bismo znali da je svaki $\zeta \in \sigma(L_1(G))$ $*-$homomorfizam, tj. da je $\zeta(f^*) = \overline{\zeta(f)}$, $\forall f \in L_1(G)$, ali to nije a priori jasno. Stoga moramo surjektivnost dokazati neovisno o teoremu 2.2.5. U tu svrhu koristit ćemo netrivijalnu činjenicu iz teorije mjere, a to je eksplicitni opis dualnog prostora $L_1(G, \mu)'$ Banachovog prostora $L_1(G, \mu)$. To je prostor $L_\infty(G, \mu)$ svih klasa ekvivalencije izmjerivih funkcija $\varphi : G \to \mathbb{C}$ koje su *bitno ograničene*, tj. za koje postoji zanemariv skup $N \subseteq G$, takav da je restrikcija $\varphi|(G\backslash N)$ ograničena; spomenute klase ekvivalencije su klase u odnosu na relaciju ekvivalencije:

$$\varphi \sim \psi \qquad \Longleftrightarrow \qquad \text{skup } \{x \in G;\ \varphi(x) \neq \psi(x)\} \text{ je zanemariv.}$$

Pri tome za skup kažemo da je *zanemariv*, ako je njegov presjek sa svakim kompaktnim skupom mjere 0. Nadalje, podskup S kompaktnog skupa je mjere 0, ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $f \in C_0^+(G)$ takva da je $f(x) = 1\ \forall x \in S$ i $\mu(f) \leq \varepsilon$. Norma $\|\cdot\|_\infty$ na prostoru $L_\infty(G, \mu)$ zadana je ovako:

$$\|\varphi\|_\infty = \inf M(\varphi), \qquad M(\varphi) = \{M \in \mathbb{R};\ \text{skup } \{x \in G;\ |\varphi(x)| > M\} \text{ je zanemariv}\}.$$

Svaki $\varphi \in L_\infty(G, \mu)$ definira element $\xi_\varphi \in L_1(G, \mu)'$ ovako:

$$\xi_\varphi(f) = \int_G \varphi(x) f(x) \mathrm{d}\mu(x), \qquad f \in L_1(G, \mu).$$

Tada je $\varphi \mapsto \xi_\varphi$ izometrički izomorfizam Banachovog prostora $L_\infty(G, \mu)$ na dualni prostor $L_1(G, \mu)'$, Banachovog prostora $L_1(G, \mu)$.

Neka je $\zeta \in \sigma(L_1(G))$. Tada je ζ neprekidni linearni funkcional na $L_1(G)$ i njegova je norma ≤ 1, tj.

$$|\zeta(f)| \leq \|f\|_1 \qquad \forall f \in L_1(G).$$

Neka je $\varphi \in L_\infty(G, \mu)$ takva da je $\zeta = \xi_\varphi$, tj.

$$\zeta(f) = \int_G \varphi(x) f(x) \mathrm{d}\mu(x), \qquad f \in L_1(G, \mu).$$

Za svaku funkciju $g \in L_1(G, \mu)$ tada imamo

$$\zeta(f) \int_G \varphi(x) g(x) \mathrm{d}\mu(x) = \zeta(f)\zeta(g) = \zeta(f * g) =$$

$$= \int_G \int_G \varphi(y) f(yx^{-1}) g(x) \mathrm{d}\mu(x) \mathrm{d}\mu(y) = \int_G \zeta(\lambda_x f) g(x) \mathrm{d}\mu(x).$$

Budući da je $g \in L_1(G, \mu)$ proizvoljna, slijedi da funkcije $\zeta(f)\varphi$ i $x \mapsto \zeta(\lambda_x f)$ predstavljaju isti element od $L_\infty(G, \mu)$, odnosno, razlikuju se samo na zanemarivom skupu. Funkciju φ možemo sada redefinirati (tj. promijeniti na tom zanemarivom skupu) tako da bude

$$\varphi(x) = \frac{\zeta(\lambda_x f)}{\zeta(f)} \qquad \forall x \in G.$$

Tada je φ neprekidna, budući da je ζ neprekidni linearni funkcional na $L_1(G, \mu)$ i budući da je po propoziciji 1.5.4. preslikavanje $x \mapsto \lambda_x f$ sa G u $L_1(G, \mu)$ neprekidno. Sada imamo za bilo koje $x, y \in G$

$$\varphi(xy)\zeta(f) = \zeta(\lambda_{xy} f) = \zeta(\lambda_x \lambda_y f) = \varphi(x)\varphi(y)\zeta(f) \qquad \Longrightarrow \qquad \varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y).$$

Napokon, $\varphi(x^n) = \varphi(x)^n\ \forall n \in \mathbb{Z}$, a kako je funkcija φ ograničena, zaključujemo da je $|\varphi(x)| = 1$ $\forall x \in G$. Prema tome, φ je neprekidni homomorfizam grupe G u grupu T.

Treba još samo uočiti da je $\zeta = \xi_\varphi = \zeta_\varphi$.

Propozicija 4.1.3. *$\zeta \mapsto \zeta | L_1(G)$ je homeomorfizam sa $\sigma(C^*(G))$ na $\sigma(L_1(G))$.*

Dokaz: Očito je $\zeta \mapsto \zeta | L_1(G)$ preslikavanje sa $\sigma(C^*(G))$ u $\sigma(L_1(G))$. Ono je injektivno, jer je $L_1(G)$ gusta podalgebra od $C^*(G)$. Neka je $\xi \in \sigma(L_1(G))$. Prema propoziciji 4.1.2. tada je $\xi = \zeta_\chi$ za neki $\chi \in \hat{G}$, dakle je ξ $*-$homomorfizam algebre $L_1(G)$ u $\mathbb{C}$. Prema teoremima 2.2.5. i 2.2.7. ξ se jedinstveno proširuje do $*-$homomorfizma $\zeta : C^*(G) \to \mathbb{C}$. Dakle, $\xi = \zeta | L_1(G)$ i $\zeta \in \sigma(C^*(G))$, i time je dokazana surjektivnost preslikavanja $\zeta \mapsto \zeta | L_1(G)$ sa $\sigma(C^*(G))$ na $\sigma(L_1(G))$.

Neka je ζ limes hiperniza $(\zeta_i)_{i \in I}$ u $\sigma(C^*(G))$. Tada je

$$\zeta(f) = \lim_{i \in I} \zeta_i(f) \qquad \forall f \in C^*(G) \quad \text{i, posebno,} \quad \forall f \in L_1(G).$$

Slijedi da je $\zeta | L_1(G)$ limes hiperniza $(\zeta_i | L_1(G))_{i \in I}$ u $\sigma(L_1(G))$. Time je dokazano da je preslikavanje $\zeta \mapsto \zeta | L_1(G)$ sa $\sigma(C^*(G))$ u $\sigma(L_1(G))$ neprekidno.

Pretpostavimo sada da je $(\zeta_i)_{i \in I}$ hiperniz u $\sigma(C^*(G))$ i $\zeta \in \sigma(C^*(G))$ i da vrijedi

$$\zeta | L_1(G) = \lim_{i \in I} \zeta_i | L_1(G) \qquad \text{u} \quad \sigma(L_1(G)),$$

tj. da je

$$\zeta(f) = \lim_{i \in I} \zeta_i(f) \qquad \forall f \in L_1(G).$$

Neka je $g \in C^*(G)$ i $\varepsilon > 0$. Izaberimo $f \in L_1(G)$ tako da u $C^*(G)$ vrijedi

$$\|g - f\| \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Nadalje, neka je $i_0 \in I$ takav da vrijedi

$$i \in I, \ \ i \geq i_0 \qquad \Longrightarrow \qquad |\zeta(f) - \zeta_i(f)| \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Za $i \in I$, $i \geq i_0$, imamo

$$|\zeta(g) - \zeta_i(g)| \leq |\zeta(g) - \zeta(f)| + |\zeta(f)\zeta_i(f)| + |\zeta_i(f) - \zeta_i(g)| =$$

$$= |\zeta(g - f)| + |\zeta(f) - \zeta_i(f)| + |\zeta_i(f - g)| \leq 2\|f - g\| + |\zeta(f) - \zeta_i(f)| \leq \varepsilon.$$

Time je dokazano da je

$$\zeta(g) = \lim_{i \in I} \zeta_i(g) \qquad \forall g \in C^*(G)$$

tj. da je

$$\zeta = \lim_{i \in I} \zeta_i \qquad \text{u} \quad \sigma(C^*(G)).$$

Prema tome, $\zeta \mapsto \zeta | L_1(G)$ je homeomorfizam sa $\sigma(C^*(G))$ na $\sigma(L_1(G))$.

Na osnovu propozicija 4.1.2. i 4.1.3. vršimo identifikaciju $\hat{G} = \sigma(L_1(G)) = \sigma(C^*(G))$. Posebno, umjesto uvedene oznake ζ_χ upotrebljavamo $\chi \in \hat{G}$ i kao oznaku za pripadne karaktere algebri $L_1(G)$ i $C^*(G)$. Na taj način $\hat{G}$ postaje lokalno kompaktan Hausdorffov topološki prostor.

Propozicija 4.1.4. *Preslikavanje $(\chi, x) \mapsto \chi(x)$ sa $\hat{G} \times G$ u T je neprekidno.*

Dokaz: Neka je $(\chi_0, x_0) \in \hat{G} \times G$. Izaberimo $f \in C_0(G)$ tako da je $\chi_0(f) = 1$. Sada za proizvoljan par $(\chi, x) \in \hat{G} \times G$ imamo

$$|\chi(\lambda_x f) - \chi_0(\lambda_{x_0} f)| \leq |\chi(\lambda_x f) - \chi(\lambda_{x_0} f)| + |\chi(\lambda_{x_0} f) - \chi_0(\lambda_{x_0} f)| =$$

$$= |\chi(\lambda_x f - \lambda_{x_0} f)| + |\chi(\lambda_{x_0} f) - \chi_0(\lambda_{x_0} f)| \leq \|\lambda_x f - \lambda_{x_0} f\|_1 + |\chi(\lambda_{x_0} f) - \chi_0(\lambda_{x_0} f)|$$

Odatle slijedi da je preslikavanje $(\chi, x) \mapsto \chi(\lambda_x f)$ neprekidno sa $\hat{G} \times G$ u $\mathbb{C}$ u točki (χ_0, x_0). Nadalje, preslikavanje $\chi \mapsto \chi(f)$ je neprekidno sa $\hat{G}$ u $\mathbb{C}$ i $\chi_0(f) = 1 \neq 0$. Prema tome, preslikavanje

$$(\chi, x) \mapsto \frac{\chi(\lambda_x f)}{\chi(f)} = \chi(x)$$

sa $\hat{G} \times G$ u $\mathbb{C}$ je neprekidno u točki (χ_0, x_0).

Teorem 4.1.5. (*a*) *Topologija prostora $\hat{G}$ promatranog kao prostor funkcija na G je topologija lokalno uniformne konvergencije (tj. uniformne konvergencije na svakom kompaktnom podskupu od G).*

(*b*) *$\hat{G}$ je lokalno kompaktna grupa.*

Dokaz: (*a*) Neka je $(\chi_i)_{i\in I}$ hiperniz u $\hat{G}$ i $\chi_0 \in \hat{G}$.

Pretpostavimo da hiperniz $(\chi_i)_{i\in I}$ konvergira lokalno uniformno prema χ_0, tj. da za svaki kompaktan skup $K \subseteq G$ hiperniz restrikcija $(\chi_i|K)_{i\in K}$ konvergira uniformno prema restrikciji $\chi_0|K$. Neka je $f \in C_0(G)$. Tada je *Supp* f kompaktan skup pa slijedi

$$\chi_0(f) = \int_G f(x)\chi_0(x)\mathrm{d}\mu(x) = \lim_{i\in I} \int_G f(x)\chi_i(x)\mathrm{d}\mu(x) = \lim_{i\in I} \chi_i(f).$$

Budući da je $C_0(G)$ gusto u $C^*(G)$, kao u dokazu propozicije 4.1.3. slijedi da hiperniz $(\chi_i)_{i\in I}$ konvergira prema χ_0 u $\hat{G} = \sigma(C^*(G))$.

Pretpostavimo sada obratno da hiperniz $(\chi_i)_{i\in I}$ konvergira prema χ_0 u odnosu na topologiju od $\hat{G}$. Neka je $K \subseteq G$ kompaktan skup i $\varepsilon > 0$. Stavimo

$$W = \{\chi \in \hat{G};\ |\chi(x) - \chi_0(x)| < \varepsilon\ \forall x \in K\}.$$

Budući da je prema propoziciji 4.1.4. preslikavanje $(\chi, x) \mapsto \chi(x)$ neprekidno na $\hat{G} \times G$, pomoću leme 1.2.1. zaključujemo da je W otvoren skup u $\hat{G}$. Budući da je $\chi_0 \in W$, W je okolina točke χ_0 u prostoru $\hat{G}$. Prema tome postoji $i_0 \in I$ takav da $i \geq i_0 \implies \chi_i \in W$, tj. da vrijedi

$$i \geq i_0 \qquad \Longrightarrow \qquad |\chi_i(x) - \chi_0(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in K.$$

Dakle, hiperniz restrikcija $(\chi_i|K)_{i\in I}$ konvergira uniformno prema restrikciji $\chi_0|K$.

(*b*) Budući da je $\chi^{-1}(x) = \overline{\chi(x)}$, očito je invertiranje $\chi \mapsto \chi^{-1}$ sa $\hat{G}$ u $\hat{G}$ neprekidno. Neka su $\chi_0, \chi_0' \in \hat{G}$, neka je $K \subseteq G$ kompaktan skup i neka je $\varepsilon > 0$. Ako su $\chi, \chi' \in \hat{G}$ takvi da je

$$|\chi(x) - \chi_0(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{i} \qquad |\chi'(x) - \chi_0'(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} \qquad \forall x \in K,$$

onda za $x \in K$ imamo

$$|(\chi\chi')(x) - (\chi_0\chi_0'(x)| \leq |\chi(x)\chi'(x) - \chi_0(x)\chi'(x)| + |\chi_0(x)\chi'(x) - \chi_0\chi_0'(x)| =$$

$$= |\chi(x) - \chi_0(x)| \cdot |\chi'(x)| + |\chi_0(x)| \cdot |\chi'(x) - \chi_0'(x)| = |\chi(x) - \chi_0(x)| + |\chi'(x) - \chi_0'(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Prema tome, ako χ teži prema χ_0 i ako χ' teži prema χ_0', onda $\chi\chi'$ teži prema $\chi_0\chi_0'$. Time je dokazano da je i množenje $(\chi, \chi') \mapsto \chi\chi'$ sa $\hat{G} \times \hat{G}$ u $\hat{G}$ neprekidno.

Lokalno kompaktna grupa $\hat{G}$ zove se **dualna grupa** grupe G.

Propozicija 4.1.6. *Za $x \in G$ definiramo $\eta(x) : \hat{G} \to T$ sa*

$$[\eta(x)](\chi) = \chi(x), \qquad \chi \in \hat{G}.$$

Tada je $\eta(x) \in \hat{\hat{G}}$ i $\eta : G \to \hat{\hat{G}}$ je neprekidni injektivni homomorfizam.

Dokaz: Budući da je svaki jednočlan skup $\{x\}$ kompaktan, preslikavanje $\eta(x) : \chi \mapsto \chi(x)$ je neprekidno sa $\hat{G}$ u T. Očito je to homomorfizam grupa. Dakle, vrijedi $\eta(x) \in \hat{\hat{G}}$, $\forall x \in G$. Nadalje, direktno se provjerava da je $\eta : G \to \hat{\hat{G}}$ homomorfizam grupa.

Dokažimo injektivnost. Neka su $x, y \in G$, $x \neq y$. Tada postoji $f \in C_0(G)$ takva da je $\lambda_x f \neq \lambda_y f$. $C_0(G)$ je podalgebra od $C^*(G)$, a algebra $C^*(G)$ je izomorfna sa $C(\hat{G})$ ako ima jedinicu, odnosno sa $C_\infty(\hat{G})$ ako nema jedinicu. Stoga postoji $\chi \in \hat{G}$ takav da je $(\lambda_x f)\hat{}(\chi) \neq (\lambda_y f)\hat{}(\chi)$, tj. $\chi(\lambda_x f) \neq \chi(\lambda_y f)$, tj. $\chi(x)\chi(f) \neq \chi(y)\chi(f)$. No tada je $\chi(f) \neq 0$ i slijedi $\chi(x) \neq \chi(y)$, odnosno, $[\eta(x)](\chi) \neq [\eta(y)](\chi)$. Dakle, je $\eta(x) \neq \eta(y)$ i dokazana je injektivnost preslikavanja $\eta : G \to \hat{\hat{G}}$.

Treba još dokazati da je preslikavanje $\eta : G \to \hat{\hat{G}}$ neprekidno. Neka je $(x_i)_{i \in I}$ konvergentan hiperniz u G i neka je $x_0 \in G$ njegov limes. Prema tvrdnji (a) teorema 4.1.5. primijenjenoj na Abelovu lokano kompaktnu grupu $\hat{G}$, treba dokazati da za svaki kompaktan podskup $K \subseteq \hat{G}$ hiperniz restrikcija $(\eta(x_i)|K)_{i \in I}$ konvergira uniformno prema restrikciji $\eta(x_0)|K$, odnosno da je

$$\lim_{i \in I} \chi(x_i) = \chi(x_0) \qquad \text{uniformno u odnosu na} \quad \chi \in K.$$

Neka je $\varepsilon > 0$. Prema propoziciji 4.1.4. za svaki $\chi \in K$ postoje otvorena okolina V_χ od χ u $\hat{G}$ i otvorena okolina W_χ od x_0 u G takve da vrijedi

$$(\chi', x') \in V_\chi \times W_\chi \qquad \Longrightarrow \qquad |\chi'(x') - \chi(x_0)| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Odatle slijedi

$$(\chi', x'), (\chi'', x'') \in V_\chi \times W_\chi \qquad \Longrightarrow \qquad |\chi'(x') - \chi''(x'')| \leq \varepsilon.$$

K je kompaktan, pa postoje $n \in \mathbb{N}$ i $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_n \in K$ takvi da je

$$K \subseteq V_{\chi_1} \cup V_{\chi_2} \cup \cdots \cup V_{\chi_n}.$$

Stavimo

$$W = W_{\chi_1} \cap W_{\chi_2} \cap \cdots \cap W_{\chi_n}.$$

Tada je W okolina od x_0 u G. Neka je $i_0 \in I$ takav da vrijedi

$$i \in I, \quad i \geq i_0 \qquad \Longrightarrow \qquad x_i \in W.$$

Neka je sada $\chi \in K$ proizvoljan. Tada je $\chi \in V_{\chi_j}$ za neko $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, a vrijedi i $x_0 \in W_{\chi_j}$. Dakle, za $i \geq i_0$ je $|\chi(x_i) - \chi(x_0)| \leq \varepsilon$. Time je dokazano da vrijedi

$$i \in I, \quad i \geq i_0 \qquad \Longrightarrow \qquad |\chi(x_i) - \chi(x_0)| \quad \forall \chi \in K.$$

Propozicija 4.1.7. *Ako je G kompaktna Abelova grupa i μ je normirana Haarova mjera na G, dualna grupa $\hat{G}$ je ortonormiran skup u $L_2(G, \mu)$.*

Dokaz: Ako je $\chi \in \hat{G}$, onda je $|\chi(x)| = 1$ za svaki $x \in G$, pa imamo

$$\|\chi\|_2^2 = \int_G |\chi(x)|_2^2 \mathrm{d}\mu = 1.$$

Neka su sada $\chi, \xi \in \hat{G}$, $\chi \neq \xi$. Neka je $x_0 \in G$ takav da je $\chi(x_0) \neq \xi(x_0)$. Stavimo

$$\omega = \chi\overline{\xi} = \chi\xi^{-1} \in \hat{G}.$$

Zbog invarijantnosti Haarove mjere μ nalazimo

$$(\chi|\xi) = \int_G \chi(x)\overline{\xi(x)}\mathrm{d}\mu(x) = \int_G \omega(x)\mathrm{d}\mu(x) = \int_G \omega(x_0x)\mathrm{d}\mu(x) = \omega(x_0)\int_G \omega(x)\mathrm{d}\mu(x) = \omega(x_0)(\chi|\xi).$$

Kako je $\omega(x_0) = \chi(x_0)\xi(x_0)^{-1} \neq 1$, slijedi $(\chi|\xi) = 0$.

Zadatak 4.1. *Neka je G Abelova lokalno kompaktna grupa. Dokažite da vrijedi:*

(*a*) *Ako je grupa G diskretna, onda je grupa $\hat{G}$ kompaktna.*

(*b*) *Ako je grupa G kompaktna, onda je grupa $\hat{G}$ diskretna.*

Uputa: (*a*) Za diskretnu grupu je Banachova algebra $L_1(G)$ unitalna.
(*b*) Dokažite da je $\{\chi \in \hat{G};\ |\mu(\chi)| > \frac{1}{2}\}$ otvoren podskup od $\hat{G}$, a zatim koristite propoziciju 4.1.7.

Zadatak 4.2. *Promatramo $\mathbb{R}$ kao aditivnu grupu. Za $\xi \in \mathbb{R}$ definiramo $\chi_\xi : \mathbb{R} \to T$ sa*

$$\chi_\xi(x) = e^{2\pi i\xi x}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Dokažite da je $\xi \mapsto \chi_\xi$ izomorfizam i homeomorfizam sa $\mathbb{R}$ na $\hat{\mathbb{R}}$.

Uputa: Za dokaz surjektivnosti uočite da za $\chi \in \hat{\mathbb{R}}$ vrijedi $\chi(0) = 1$, pa postoji $a > 0$ takav da je $A = \int_0^a \chi(t)\mathrm{d}t \neq 0$. Sada iz

$$\chi(x) = \frac{1}{A}\int_x^{a+x} \chi(t)\mathrm{d}t, \qquad x \in \mathbb{R},$$

zaključite da je funkcija χ diferencijabilna, izvedite za nju diferencijalnu jednadžbu prvog reda i riješite je.

Zadatak 4.3. *Za $n \in \mathbb{Z}$ definiramo $\chi_n : T \to T$ sa $\chi_n(\alpha) = \alpha^n$, $\alpha \in T$. Dokažite da je $n \mapsto \chi_n$ izomorfizam i homeomorfizam sa $\mathbb{Z}$ na $\hat{T}$.*

Zadatak 4.4. *Za $\alpha \in T$ definiramo $\chi_\alpha : \mathbb{Z} \to T$ sa $\chi_\alpha(n) = \alpha^n$, $n \in \mathbb{Z}$. Dokažite da je $\alpha \mapsto \chi_\alpha$ izomorfizam i homeomorfizam sa T na $\hat{\mathbb{Z}}$.*

Zadatak 4.5. *Neka je $\mathbb{Z}_k = \{0, 1, \ldots, k-1\} (= \mathbb{Z}/k\mathbb{Z})$ aditivna grupa cijelih brojeva modulo $k \in \mathbb{N}$. Za $m \in \mathbb{Z}_k$ definiramo $\chi_m : \mathbb{Z}_k \to T$ sa*

$$\chi_m(n) = e^{\frac{2\pi imn}{k}}, \qquad n \in \mathbb{Z}_k.$$

Dokažite da je tada $m \mapsto \chi_m$ izomorfizam grupe $\mathbb{Z}_k$ na grupu $\hat{\mathbb{Z}}_k$.

4.2 Konvolucija na unimodularnoj grupi

Neka je u daljnjem G proizvoljna lokalno kompaktna grupa (ne nužno Abelova pa čak, za sada, ne nužno unimodularna) i neka je μ desna Haarova mjera na G. Za $x \in G$ i $f \in L_1(G, \check{\mu})$ definirano je $\lambda_x f \in L_1(G, \check{\mu})$ sa

$$(\lambda_x f)(y) = f(x^{-1}y), \qquad y \in G.$$

U dokazu propozicije 1.5.3. vidjeli smo da je u slučaju $f \in C_0(G)$ preslikavanje $x \mapsto \lambda_x f$ neprekidno sa G u $L_1(G, \check{\mu})$. Budući da je $\lambda_x : L_1(G, \check{\mu}) \to L_1(G, \check{\mu})$ izometrija i budući da je $C_0(G)$ gusto u $L_1(G, \check{\mu})$, odatle slijedi da je preslikavanje $x \mapsto \lambda_x f$ sa G u $L_1(G, \check{\mu})$ neprekidno i za svaku $f \in L_1(G, \check{\mu})$:

$$\|\lambda_x f - \lambda_y f\|_1 \leq \|\lambda_x f - \lambda_x g\|_1 + \|\lambda_x g - \lambda_y g\|_1 + \|\lambda_y g - \lambda_y f\|_1 = 2\|f - g\|_1 + \|\lambda_x g - \lambda_y g\|_1.$$

Neka je sada π unitarna reprezentacija od G na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$. Tada je

$$\pi(\lambda_x f) = \pi(x)\pi(f), \qquad x \in G, \quad f \in L_1(G, \check{\mu}).$$

Budući da je operator $\pi(x)$ unitaran, slijedi

$$\|\pi(\lambda_x f)\| = \|\pi(f)\|, \qquad x \in G, \quad f \in L_1(G, \check{\mu}).$$

Sjetimo se da je $C^*(G)$ popunjenje algebre $L_1(G, \check{\mu})$ po normi $\| \cdot \|$ zadanoj sa

$$\|g\| = \sup \{\|\pi(g)\|;\ \pi \text{ unitarna reprezentacija grupe } G\}.$$

Slijedi

$$\|\lambda_x f\| = \|f\|, \qquad x \in G, \quad f \in L_1(G, \check{\mu}).$$

Prema tome, λ_x se proširuje do izometrije $\lambda_x : C^*(G) \to C^*(G)$. Kako je podalgebra $L_1(G, \check{\mu})$ gusta u $C^*(G)$ i $\|f\| \leq \|f\|_1$, $\forall f \in L_1(G, \check{\mu})$, slijedi da je $x \mapsto \lambda_x \varphi$ neprekidno sa G u $C^*(G)$ $\forall \varphi \in C^*(G)$. Nadalje, također zbog gustoće nalazimo da je $\lambda_{xy}\varphi = \lambda_x(\lambda_y \varphi)$, $x, y \in G$, $\varphi \in C^*(G)$.

Za $\varphi \in C_0(G)$ i $f \in L_2(G, \check{\mu})$ imamo

$$\pi_\ell(\varphi)f = \varphi * f \in L_2(G, \check{\mu})$$

gdje je

$$(\varphi * f)(x) = \int_G \varphi(y) f(y^{-1}x) \mathrm{d}\check{\mu}(x), \qquad x \in G.$$

Za $\varphi \in C^*(G)$ i $f \in L_2(G, \check{\mu})$ definiramo $\varphi * f \in L_2(G, \check{\mu})$ sa

$$\varphi * f = \pi_\ell(\varphi) f.$$

Tada je

$$\|\varphi * f\|_2 = \|\pi_\ell(\varphi) f\|_2 \leq \|\pi_\ell(\varphi)\| \cdot \|f\|_2 \leq \|\varphi\| \cdot \|f\|_2.$$

Posebno, $(\varphi, f) \mapsto \varphi * f$ je neprekidno bilinearno preslikavanje sa $C^*(G) \times L_2(G, \check{\mu})$ u $L_2(G, \check{\mu})$.

Zadatak 4.6. *Neka je I skup svih kompaktnih okolina od e u G promatran kao usmjeren skup parcijalno uređen obrnutom inkluzijom. Za svaku $i \in I$ izaberimo $\varphi_i \in C_0^+(G)$ takvu da je*

$$Supp\, \varphi_i \subseteq i \qquad i \qquad \int_G \varphi_i(x)\, d\check{\mu}(x) = 1.$$

Dokažite da tada vrijedi

$$\lim_{i\in I} \|f - \varphi_i * f\|_1 = 0 \qquad \forall f \in L_1(G, \check{\mu})$$

i

$$\lim_{i\in I} \|f - \varphi_i * f\|_2 = 0 \qquad \forall f \in L_2(G, \check{\mu}).$$

Do konca ovog odjeljka pretpostavljamo da je grupa G unimodularna, dakle $\check{\mu} = \mu$. Pisat ćemo $L_1(G) = L_1(G, \mu)$ i $L_2(G) = L_2(G, \mu)$. Tada je $f \mapsto \check{f}$ izometrija sa $L_1(G)$ na $L_1(G)$ i sa $L_2(G)$ na $L_2(G)$.

Neka je π unitarna reprezentacija grupe G na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$. Neka je $\overline{\mathcal{H}}$ konjugiran prostor od $\mathcal{H}$; kao aditivna grupa $\overline{\mathcal{H}}$ se podudara sa $\mathcal{H}$; množenje skalarom $\alpha \in \mathbb{C}$ definirano je sa $\alpha \cdot \xi = \overline{\alpha}\xi$; skalarni produkt je $(\xi|\eta)_{\overline{\mathcal{H}}} = (\eta|\xi)_{\mathcal{H}}$. Za $x \in G$ definiramo $\overline{\pi}(x) : \overline{\mathcal{H}} \to \overline{\mathcal{H}}$ sa $\overline{\pi}(x) = \pi(x)$. Tada je $\overline{\pi}$ unitarna reprezentacija grupe G na Hilbertovom prostoru $\overline{\mathcal{H}}$ i zove se **konjugirana reprezentacija** reprezentacije π. Za $f \in L_1(G)$ i $\xi, \eta \in \overline{\mathcal{H}} = \mathcal{H}$ imamo

$$(\pi(\check{f})\xi|\eta)_{\mathcal{H}} = \int_G f(x^{-1})(\pi(x)\xi|\eta)_{\mathcal{H}} \mathrm{d}\mu(x) = \int_G f(x)(\xi|\pi(x)\eta)_{\mathcal{H}} \mathrm{d}\mu(x) =$$

$$= \int_G f(x)(\overline{\pi}(x)\eta|\xi)_{\overline{\mathcal{H}}} \mathrm{d}\mu(x) = (\overline{\pi}(f)\eta|\xi)_{\overline{\mathcal{H}}}.$$

Odatle je $\|\pi(\check{f})\| = \|\overline{\pi}(f)\|$, pa slijedi da je za C^*−normu $\|\check{f}\| = \|f\| \ \ \forall f \in L_1(G)$. To pokazuje da se $f \mapsto \check{f}$ proširuje do linearne izometrije $\varphi \mapsto \check{\varphi}$ sa $C^*(G)$ na $C^*(G)$. Očito je

$$(\varphi * \psi)\check{} = \check{\psi} * \check{\varphi}, \qquad \check{\check{\varphi}} = \varphi, \qquad \varphi, \psi \in C^*(G).$$

Analogno kao prije λ_x sada se i ρ_x proširuje do izometrije $\rho_x : C^*(G) \to C^*(G)$. Ponovo je $x \mapsto \rho_x\varphi$ neprekidno sa G u $C^*(G) \ \ \forall \varphi \in C^*(G)$. Također, vrijedi $\rho_{xy}\varphi = \rho_x(\rho_y\varphi)$ za $x, y \in G$ i $\varphi \in C^*(G)$.

Za $\varphi \in C_0(G)$ i $f \in L_2(G)$ znamo da je

$$\pi_r(\varphi)f = f * \check{\varphi}.$$

Stoga za $\varphi \in C^*(G)$ i $f \in L_2(G)$ definiramo

$$f * \varphi = \pi_r(\check{\varphi})f.$$

Zadatak 4.7. *Neka su $\varphi, \psi \in C^*(G)$ i $f \in L_2(G)$. Dokažite da vrijedi*

(*a*) $\|f * \varphi\|_2 \leq \|f\|_2 \cdot \|\varphi\|$.

(*b*) $(\varphi * f) * \psi = \varphi * (f * \psi)$.

Uputa: Za dokaz tvrdnje (*b*) iskoristite da je $\pi_\ell(x)\pi_r(y) = \pi_r(y)\pi_\ell(x) \ \ \forall x, y \in G$ i odatle izvedite da vrijedi $\pi_\ell(\varphi)\pi_r(\psi) = \pi_r(\psi)\pi_\ell(\varphi)$.

Propozicija 4.2.1. *Neka su $f, g \in L_2(G)$.*

(*a*) *Za svaki $x \in G$ je $y \mapsto f(y)g(y^{-1}x)$ funkcija (točnije klasa funkcija) iz $L_1(G)$.*

(*b*) *Stavimo*

$$(f \bullet g)(x) = \int_G f(y)g(y^{-1}x)d\mu(y), \qquad x \in G.$$

Tada je $f \bullet g \in C_\infty(G)$ *i vrijedi*

$$|(f \bullet g)(x)| \leq \|f\|_2 \cdot \|g\|_2 \qquad \forall x \in G.$$

Posebno, $(f, g) \mapsto f \bullet g$ *je neprekidno bilinearno preslikavanje sa* $L_2(G) \times L_2(G)$ *u Banachov prostor* $C_\infty(G)$.

(*c*) *Ako je ili* $f \in L_1(G) \cap L_2(G)$ *ili* $g \in L_1(G) \cap L_2(G)$ *onda je* $f \bullet g \in L_2(g)$ *i u prostoru* $L_2(G)$ *vrijedi jednakost*

$$f \bullet g = f * g.$$

Dokaz: (*a*) Imamo $f(y)g(y^{-1}x) = (f \cdot \lambda_x \check{g})(y)$. Budući da je $g \in L_2(G)$ i grupa G je unimodularna, to je i $\check{g} \in L_2(G)$, dakle je i $\lambda_x \check{g} \in L_2(G)$. No produkt po točkama dvije funkcije iz $L_2(G)$ je element prostora $L_1(G)$, dakle, $f \cdot \lambda_x \check{g} \in L_1(G)$, odnosno, $y \mapsto f(y)g(y^{-1}x)$ je funkcija iz $L_1(G)$.

(*b*) Kako je prema dokazu (*a*) $f(y)g(y^{-1}x) = (f \cdot \lambda_x \check{g})(y)$, to je

$$|(f \bullet g)(x)| = |(f|\overline{\lambda_x \check{g}})| \leq \|f\|_2 \cdot \|\overline{\lambda_x \check{g}}\|_2 = \|f\|_2 \cdot \|g\|_2.$$

Neka su sada $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ i $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nizovi u $C_0(G)$ koji u $L_2(G)$ konvergiraju prema f i g. Dakle,

$$\lim_{n\to\infty} \|f - f_n\|_2 = \lim_{n\to\infty} \|g - g_n\|_2 = 0.$$

Tada je $f_n \bullet g_n = f_n * g_n \in C_0(G)$. Za bilo koji $x \in G$ imamo

$$|(f \bullet g)(x) - (f_n * g_n)(x)| = |(f|\overline{\lambda_x \check{g}}) - (f_n|\overline{\lambda_x \check{g}_n})| \leq$$

$$\leq |(f - f_n|\overline{\lambda_x \check{g}})| + |(f_n|\overline{\lambda_x (g - g_n)\check{}})| \leq \|f - f_n\|_2 \cdot \|g\|_2 + \|f_n\|_2 \cdot \|g - g_n\|_2.$$

Odatle slijedi da je

$$(f \bullet g)(x) = \lim_{n\to\infty} (f_n * g_n)(x) \quad \text{uniformno po} \quad x \in G.$$

Kako su $f_n * g_n \in C_0(G)$, zaključujemo da je $f \bullet g \in C_\infty(G)$.

Napokon, iz dokazanog je

$$\|f \bullet g\|_\infty \leq \|f_2\| \cdot \|g\|_2, \qquad f, g \in L_2(G).$$

Dakle, $(f, g) \mapsto f \bullet g$ je neprekidno bilinearno preslikavanje sa $L_2(G) \times L_2(G)$ u Banachov prostor $C_\infty(G)$.

(*c*) Dokazat ćemo najprije sljedeću tvrdnju:

Ako je $f \in L_1(G) \cap L_2(G)$, *onda postoji niz* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *u* $C_0(G)$ *koji konvergira prema* f *i u* $L_1(G)$ *i u* $L_2(G)$:

$$\lim_{n\to\infty} \|f - f_n\|_1 = \lim_{n\to\infty} \|f - f_n\|_2 = 0.$$

Neka su I i $(\varphi_i)_{i\in I}$ kao u zadatku 4.6. Za $n \in \mathbb{N}$ izaberemo $i_n \in I$ tako da je

$$\|\varphi_{i_n} * f - f\|_1 \leq \frac{1}{n} \qquad \text{i} \qquad \|\varphi_{i_n} * f - f\|_2 \leq \frac{1}{n}.$$

Stavimo

$$g_n = \varphi_{i_n} * f = \varphi_{i_n} \bullet f, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Kako je $f \in L_2(G)$ znamo da je i $g_n \in L_2(G)$. Nadalje, $\varphi_{i_n}, f \in L_1(G)$, pa je također $g_n \in L_1(G)$. Napokon, prema tvrdnji (b) vrijedi i $g_n \in C_\infty(G)$. Dakle, $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ je niz u $C_\infty(G) \cap L_1(G) \cap L_2(G)$.

Sada za svaki $n \in \mathbb{N}$ izaberimo $h_n \in C_0(G)$ tako da bude

$$\|h_n - g_n\|_1 \leq \frac{1}{n}.$$

Neka je $K_n \subseteq G$ kompaktan skup takav da je $Supp\, h_n \subseteq K_n$ i da vrijedi

$$x \in G \setminus K_n \qquad \Longrightarrow \qquad |g_n(x)| \leq \frac{1}{n}.$$

Izaberimo sada za svaki $n \in \mathbb{N}$ funkciju $\psi_n \in C_0(G)$ takvu da je $0 \leq \psi_n \leq 1$ i $\psi_n(x) = 1 \;\; \forall x \in K_n$. Napokon, neka je $f_n = \psi_n g_n \in C_0(G)$.

Provjerit ćemo sada da niz $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zadovoljava tvrdnju koju dokazujemo. Za svaki $x \in G$ i za $n \in \mathbb{N}$ je

$$|f_n(x) - g_n(x)| = |g_n(x)|(1 - \psi_n(x)) \leq |g_n(x)|,$$

jer je $0 \leq 1 - \psi_n \leq 1$, a također i

$$|f_n(x) - g_n(x)| = |g_n(x)|(1 - \psi_n(x)) \leq \frac{1}{n},$$

jer za $x \in K_n$ je $1 - \psi_n(x) = 0$, a za $x \in G \setminus K_n$ je $1 - \psi_n(x) \leq 1$ i $|g_n(x)| \leq \frac{1}{n}$. Sada imamo

$$x \in K_n \qquad \Longrightarrow \qquad |f_n(x) - g_n(x)| = 0 \leq |h_n(x) - g_n(x)|,$$

i

$$x \in G \setminus K_n \qquad \Longrightarrow \qquad |f_n(x) - g_n(x)| \leq |g_n(x)| = |g_n(x) - h_n(x)|,$$

jer je $Supp\, h_n \subseteq K_n$. Odatle je

$$\|f_n(x) - g_n(x)\|_1 \leq \frac{1}{n} \qquad \text{i} \qquad \|f_n - g_n\|_\infty \leq \frac{1}{n}.$$

Slijedi

$$\|f_n - g_n\|_2^2 = \int_G |f_n(x) - g_n(x)|^2 \mathrm{d}\mu(x) \leq \frac{1}{n} \cdot \|f_n - g_n\|_1 \leq \frac{1}{n^2},$$

dakle,

$$\|f_n - g_n\|_2 \leq \frac{1}{n}.$$

Odatle je

$$\|f_n - f\|_1 \leq \|f_n - g_n\|_1 + \|g_n - f\|_1 \leq \frac{2}{n} \qquad\qquad \|f_n - f\|_2 \leq \|f_n - g_n\|_2 + \|g_n - f\|_2 \leq \frac{2}{n}$$

i time je tvrdnja dokazana.

Pretpostavimo sada da je $f \in L_1(G) \cap L_2(G)$ i $g \in L_2(G)$. Neka je $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz u $C_0(G)$ koji teži prema f i u $L_1(G)$ i u $L_2(G)$. Tada je $f_n * g = f_n \bullet g$. Nadalje, prema razmatranjima prije zadatka 4.6. imamo

$$\|f * g - f_n * g\|_2 = \|(f - f_n) * g\|_2 \leq \|f - f_n\| \cdot \|g\|_2 \leq \|f - f_n\|_1 \cdot \|g\|_2,$$

a prema tvrdnji (b) je

$$\|f \bullet g - f_n * g\|_\infty = \|(f - f_n) \bullet g\|_\infty \leq \|f - f_n\|_2 \cdot \|g\|_2.$$

Prema tome je

$$f * g = \lim_{n\to\infty} f_n * g \quad \text{u } L_2(G) \qquad \text{i} \qquad f \bullet g = \lim_{n\to\infty} f_n * g \quad \text{u } C_\infty(G).$$

Odatle slijedi $f \bullet g \in L_2(G)$ i u $L_2(G)$ vrijedi jednakost $f \bullet g = f * g$.

U daljnjem ćemo sa $\mathcal{A}(G)$ označavati potprostor od $L_1(G)$ razapet sa

$$\{f * g;\ f, g \in L_1(G) \cap L_2(G)\}.$$

Zadatak 4.8. *Dokažite da su $L_1(G) \cap L_2(G)$ i $\mathcal{A}(G)$ obostrani ideali u algebri $L_1(G)$ i da je $\mathcal{A}(G) \subseteq L_1(G) \cap L_2(G) \cap C_\infty(G)$.*

Lema 4.2.2. *Postoji hiperniz $(\varphi_i)_{i\in I}$ u $\mathcal{A}(G) \cap C_0^+(G)$ takav da vrijedi*

$$\lim_{i\in I} \|f - \varphi_i * f\|_1 = 0 \qquad \forall f \in L_1(G) \qquad i \qquad \lim_{i\in I} \|f - \varphi_i * f\|_2 = 0 \qquad \forall f \in L_2(G).$$

Posebno, $\mathcal{A}(G)$ je gusto i u $L_1(G)$ i u $L_2(G)$. Nadalje, $\mathcal{A}(G)$ je gusto u $C^*(G)$.

Dokaz: Neka je I skup svih kompaktnih okolina od e u G. Za $i \in I$ izaberemo okolinu U_i od e takvu da je $U_i^2 \subseteq i$ i izaberemo $\psi_i \in C_0^+(G)$ takvu da je $Supp\,\psi_i \subseteq U_i$ i da je $\int_G \psi_i(x)\mathrm{d}\mu(x) = 1$. Stavimo $\varphi_i = \psi_i * \psi_i$, $i \in I$. Tada je $\varphi_i \in \mathcal{A}(G) \cap C_0^+(G)$, $Supp\,\varphi_i \subseteq U_i^2 \subseteq i$ i zbog lijeve invarijantnosti mjere μ vrijedi

$$\int_G \varphi_i(x)\mathrm{d}\mu(x) = \int_G \left[\int_G \psi_i(y)\psi_i(y^{-1}x)\mathrm{d}\mu(y)\right] \mathrm{d}\mu(x) =$$

$$= \int_G \psi_i(y) \left[\int_G \psi_i(y^{-1}x)\mathrm{d}\mu(x)\right] \mathrm{d}\mu(y) = \int_G \psi_i(y)\mathrm{d}\mu(y) = 1.$$

Sada iz zadatka 4.6. slijedi

$$\lim_{i\in I} \|f - \varphi_i * f\|_1 = 0 \qquad \forall f \in L_1(G) \qquad \text{i} \qquad \lim_{i\in I} \|f - \varphi_i * f\|_2 = 0 \qquad \forall f \in L_2(G).$$

Napokon, gustoća $\mathcal{A}(G)$ u $C^*(G)$ slijedi iz gustoće $\mathcal{A}(G)$ u $L_1(G)$, iz gustoće $L_1(G)$ u $C^*(G)$ i iz $\|f\| \leq \|f\|_1 \ \ \forall f \in L_1(G)$.

Zadatak 4.9. *Neka je $f \in \mathcal{A}(G)$. Tada su $\varphi \mapsto \varphi * f$ i $\varphi \mapsto f * \varphi$ neprekidni linearni operatori sa $C^*(G)$ u $C_\infty(G)$.*

Uputa: Može se pretpostaviti da je $f = f_1 * f_2$ gdje su $f_1, f_2 \in L_1(G) \cap L_2(G)$. Sada koristite tvrdnje (b) i (c) propozicije 4.2.1.

4.3 Fourierova transformacija

U cijeloj ovom odjeljku G je Abelova lokalno kompaktna grupa.

Definiramo izometričke izomorfizme C^*-algebri $\mathcal{F}, \overline{\mathcal{F}} : C^*(G) \to C_\infty(G)$ na sljedeći način:

$$\overline{\mathcal{F}}f = \hat{f}, \qquad \mathcal{F}f = \check{\hat{f}} \quad \text{tj.} \quad (\mathcal{F}f)(\chi) = \hat{f}(\chi^{-1}), \quad \chi \in \hat{G}.$$

Podsjećamo da smo izvršili identifikaciju $\hat{G} = \sigma(C^*(G))(= \sigma(L_1(G)))$. Nadalje, $\hat{f}$ je oznaka za Geljfandov transformat elementa $f \in C^*(G)$, a to je funkcija iz $C_\infty(\hat{G})$. Za $f \in L_1(G)$ i $\chi \in \hat{G}$ dobivamo integralne formule:

$$(\overline{\mathcal{F}}f)(\chi) = \hat{f}(\chi) = \chi(f) = \int_G \chi(x)f(x)\mathrm{d}\mu(x),$$

$$(\mathcal{F}f)(\chi) = \hat{f}(\chi^{-1}) = \chi^{-1}(f) = \int_G \chi^{-1}(x)f(x)\mathrm{d}\mu(x) = \int_G \overline{\chi(x)}f(x)\mathrm{d}\mu(x).$$

Ako postoji mogućnost dvojbe, pisat ćemo $\mathcal{F}_G$ i $\overline{\mathcal{F}}_G$ umjesto $\mathcal{F}$ i $\overline{\mathcal{F}}$. Restrikcija $\mathcal{F}|L_1(G)$ zove se **Fourierova transformacija** a $\overline{\mathcal{F}}|L_1(G)$ **Fourierova kotransformacija** na grupi G. To su neprekidni injektivni $*-$homomorfizmi Banachove algebre $L_1(G)$ u Banachovu algebru $C_\infty(\hat{G})$. Podsjećamo da je produkt u $L_1(G)$ definiran kao konvolucija

$$(f * g)(x) = \int_G f(y)g(y^{-1}x)\mathrm{d}\mu(x), \qquad f, g \in L_1(G), \quad x \in G,$$

a u $C_\infty(\hat{G})$ je produkt definiran kao množenje po točkama

$$(\varphi\psi)(\chi) = \varphi(\chi)\psi(\chi), \qquad \varphi, \psi \in C_\infty(\hat{G}), \quad \chi \in \hat{G}.$$

Involucija je u obje algebre definirana pomoću kompleksnog konjugiranja, a u slučaju $L_1(G)$ i invertiranja

$$f^*(x) = \overline{f(x^{-1})}, \qquad \varphi^*(\chi) = \overline{\varphi(\chi)}, \qquad f \in L_1(G), \quad x \in G, \quad \varphi \in C_\infty(\hat{G}), \quad \chi \in \hat{G}.$$

Napomenimo još da se može dogoditi da je grupa $\hat{G}$ kompaktna i tada je $C_\infty(\hat{G}) = C(\hat{G})$. Pokazat ćemo kasnije da je to tako ako i samo ako je grupa G diskretna.

Zadatak 4.10. *Neka su $x \in G$, $\chi \in \hat{G}$ i $f \in L_1(G)$. Dokažite*

(*a*) $[\mathcal{F}(\lambda_x f)](\chi) = \overline{\chi(x)}(\mathcal{F}f)(\chi)$ *i* $[\overline{\mathcal{F}}(\lambda_x f)](\chi) = \chi(x)(\overline{\mathcal{F}}f)(\chi)$.

(*b*) $\mathcal{F}(\chi f) = \lambda_\chi(\mathcal{F}f)$ *i* $\overline{\mathcal{F}}(\chi f) = \lambda_{\chi^{-1}}(\overline{\mathcal{F}}f)(\chi)$.

Neka je kao i prije $\mathcal{A}(G)$ potprostor razapet sa svim funkcijama oblika $f * g$ gdje su $f, g \in L_1(G) \cap L_2(G)$. Dokazali smo da je to ideal u $L_1(G)$ sadržan u $L_1(G) \cap L_2(G) \cap C_\infty(G)$. Nadalje, $\mathcal{A}(G)$ je gusto u $L_1(G)$, u $L_2(G)$ i u $C^*(G)$.

Lema 4.3.1. *Za $\chi \in \hat{G}$ i $f \in \mathcal{A}(G)$ je $\chi f \in \mathcal{A}(G)$.*

Dokaz: Lemu je dovoljno dokazati za $f = g * h$, gdje su $g, h \in L_1(G) \cap L_2(G)$. Tada je za $x \in G$

$$(\chi f)(x) = [\chi(g * h)](x) = \int_G \chi(x)g(y)h(y^{-1}x)\mathrm{d}\mu(y) =$$

$$= \int_G \chi(y)g(y)\chi(y^{-1}x)h(y^{-1}x)\mathrm{d}\mu(y) = [(\chi g) * (\chi h)](x).$$

Kako je $\chi : G \to \mathbb{C}$ neprekidno i $|\chi(x)| = 1 \ \ \forall x$, slijedi $\chi g, \chi h \in L_1(G) \cap L_2(G)$, dakle, $\chi f \in \mathcal{A}(G)$.

Propozicija 4.3.2. *Za svaku funkciju $f \in \mathcal{A}(G)$ postoji jedinstvena ograničena mjera μ_f na $\hat{G}$ takva da za svaki element $\varphi \in C^*(G)$ vrijedi*

$$(\varphi * f)(e) = \int_G (\mathcal{F}\varphi)(\chi)\, d\mu_f(\chi).$$

Napomena: Mjera ν na lokalno kompaktnom Hausdorffovom topološkom prostoru T zove se **ograničena mjera** ako se linearni funkcional $\nu : C_0(T) \to \mathbb{C}$ produljuje do ograničenog linearnog funkcionala na Banachovom prostoru $C_\infty(T)$. U tom slučaju se i to (jedinstveno) proširenje označava sa ν. Evidentno je da je za svaki ograničen linearni funkcional ν na Banachovom prostoru $C_\infty(T)$ njegova restrikcija $\nu|C_0(T)$ mjera na T. Stoga pojam *ograničena mjera na* T možemo identificirati s pojmom *ograničeni linearni funkcional na Banachovom prostoru* $C_\infty(T)$.

Dokaz: $\mathcal{F}$ je izometrija sa $C^*(G)$ na $C_\infty(\hat{G})$. Prema zadatku 4.9. preslikavanje $\mathcal{F}\varphi \mapsto (\varphi * f)(e)$ je neprekidni linearni funkcional na $C_\infty(\hat{G})$, tj. ograničena mjera na $\hat{G}$.

Teorem 4.3.3. (a) *Postoji jedinstvena mjera ν na $\hat{G}$ takva da je*

$$\mu_f = (\mathcal{F}f) \cdot \nu \qquad \forall f \in \mathcal{A}(G).$$

(b) *Za $f \in L_1(G)$ i $g \in \mathcal{A}(G)$ je*

$$\int_{\hat{G}} (\mathcal{F}f)(\chi)(\mathcal{F}g)(\chi)\, d\nu(\chi) = \int_G f(x) g(x^{-1})\, d\mu(x).$$

(c) *Za $f \in \mathcal{A}(G)$ je $\mathcal{F}f \in L_1(\hat{G}, \nu) \cap L_2(\hat{G}, \nu)$ i $\|\mathcal{F}f\|_{L_2(\hat{G},\nu)} = \|f\|_{L_2(G)}$.*

(d) *ν je Haarova mjera na grupi $\hat{G}$.*

Dokaz ćemo provesti putem niza pomoćnih tvrdnji.

Lema 4.3.4. *Ako su $f, g \in \mathcal{A}(G)$, onda je $(\mathcal{F}f) \cdot \mu_g = (\mathcal{F}g) \cdot \mu_f$.*

Dokaz: Za $\varphi \in C^*(G)$ imamo redom

$$[(\mathcal{F}f) \cdot \mu_g](\mathcal{F}\varphi) = \int_{\hat{G}} (\mathcal{F}\varphi)(\chi)(\mathcal{F}f)(\chi) \mathrm{d}\mu_g(\chi) = \int_{\hat{G}} [(\mathcal{F}\varphi) \cdot (\mathcal{F}f)](\chi) \mathrm{d}\mu_g(\chi) =$$

$$= \int_{\hat{G}} [\mathcal{F}(\varphi * f)](\chi) \mathrm{d}\mu_g(\chi) = [(\varphi * f) * g](e).$$

Zamjenom uloga f i g dobivamo

$$[(\mathcal{F}g) \cdot \mu_f](\mathcal{F}\varphi) = [(\varphi * g) * f](e).$$

Međutim, grupa G je komutativna, pa je $(\varphi * f) * g = (\varphi * g) * f$. Tvrdnja slijedi jer je $C_\infty(\hat{G}) = \mathcal{F}(C^*(G))$.

Lema 4.3.5. *Za $f \in \mathcal{A}(G)$ stavimo*

$$\Omega_f = Int(Supp\, \mathcal{F}f) = \{\chi \in \hat{G};\ (\mathcal{F}f)(\chi) \neq 0\}.$$

Tada je $\{\Omega_f;\ f \in \mathcal{A}(G)\}$ otvoren pokrivač od $\hat{G}$.

Dokaz: Doista $\mathcal{A}(G)$ je gusto u $C^*(G)$, pa je $\mathcal{F}(\mathcal{A}(G))$ gusto u $C_\infty(\hat{G})$. Slijedi da za svaki $\chi \in \hat{G}$ postoji $f \in \mathcal{A}(G)$ takva da je $(\mathcal{F}f)(\chi) \neq 0$, tj. $\chi \in \Omega_f$. Dakle, unija otvorenih skupova Ω_f, $f \in \mathcal{A}(G)$, je čitav prostor $\hat{G}$.

Lema 4.3.6. *Za $f \in \mathcal{A}(G)$ neka je ξ_f karakteristična funkcija skupa Ω_f. Tada je $\xi_f \cdot \mu_f = \mu_f$.*

Dokaz: Za $g \in \mathcal{A}(G)$ imamo redom zbog leme 4.3.4.

$$(\xi_f \cdot \mu_f)(\mathcal{F}g) = \int_{\hat{G}} \xi_f(\chi)(\mathcal{F}g)(\chi)\mathrm{d}\mu_f(\chi) = \int_{\hat{G}} \xi_f(\chi)\mathrm{d}[(\mathcal{F}g)\cdot\mu_f](\chi) = \int_{\hat{G}} \xi_f(\chi)\mathrm{d}[(\mathcal{F}f)\cdot\mu_g](\chi) =$$

$$= \int_{\hat{G}} \xi_f(\chi)(\mathcal{F}f)(\chi)\mathrm{d}\mu_g(\chi) = \int_{\hat{G}} (\mathcal{F}f)(\chi)\mathrm{d}\mu_g(\chi) = \int_{\hat{G}} (\mathcal{F}g)(\chi)\mathrm{d}\mu_f(\chi) = \mu_f(\mathcal{F}g).$$

Tvrdnja slijedi, jer je $\mathcal{A}(G)$ gusto u $C^*(G)$, pa je $\mathcal{F}(\mathcal{A}(G))$ gusto u $\mathcal{F}(C^*(G)) = C_\infty(\hat{G})$.

Lema 4.3.7. *Za $f \in \mathcal{A}(G)$ definiramo mjeru ν_f na Ω_f sa*

$$\nu_f = \frac{1}{(\mathcal{F}f)|\Omega_f} \cdot (\mu_f|\Omega_f).$$

Postoji mjera ν na $\hat{G}$ takva da je $\nu|\Omega_f = \nu_f \quad \forall f \in \mathcal{A}(G)$.

Dokaz: Prema lemama 4.3.4. i 4.3.6. je $\nu_f|\Omega_f \cap \Omega_g = \nu_g|\Omega_f \cap \Omega_g \quad \forall f, g \in \mathcal{A}(G)$. Budući da je prema lemi 4.3.5 $\{\Omega_f;\ f \in \mathcal{A}(G)\}$ otvoren pokrivač od $\hat{G}$ tvrdnja slijedi.

Dokaz teorema 4.3.3.: (a) Neka je ν mjera na $\hat{G}$ iz leme 4.3.7. Za $f \in \mathcal{A}(G)$ je tada

$$\xi_f \cdot \mu_f = \mu_f \qquad \text{i} \qquad \xi_f \cdot (\mathcal{F}f) \cdot \nu = (\mathcal{F}f) \cdot \nu.$$

Nadalje,

$$[(\mathcal{F}f) \cdot \nu]|\Omega_f = [(\mathcal{F})|\Omega_f] \cdot \nu_f = \mu_f|\Omega_f.$$

Odatle slijedi $(\mathcal{F}f) \cdot \nu = \mu_f$. Posebno je $\mathcal{F}f \in L_1(\hat{G}, \nu) \quad \forall f \in \mathcal{A}(G)$.

Treba još dokazati jedinstvenost. Neka je ν_1 druga takva mjera na $\hat{G}$. Tada je $(\mathcal{F}f)\cdot\nu = (\mathcal{F}f)\cdot\nu_1$ $\forall f \in \mathcal{A}(G)$, pa je $\nu|\Omega_f = \nu_1|\Omega_f \quad \forall f \in \mathcal{A}(G)$. Sada iz leme 4.3.5. slijedi $\nu = \nu_1$.

(b) Za $f \in L_1(G)$ i $g \in \mathcal{A}(G)$ imamo

$$\int_{\hat{G}} (\mathcal{F}f)(\chi)(\mathcal{F}g)(\chi)\mathrm{d}\nu(\chi) = \mu_g(\mathcal{F}f) = (f * g)(e) = \int_G f(x)g(x^{-1})\mathrm{d}\mu(x).$$

(c) Neka je $f \in \mathcal{A}(G)$. Tada znamo da je $\mathcal{F}f \in L_1(\hat{G}, \nu)$. Nadalje, $\mathcal{F}f \in C_\infty(\hat{G})$ pa je $\mathcal{F}f \in L_2(\hat{G}, \nu)$. Primijenimo sada (b) za $g = f^*$. Dobivamo

$$\|f\|^2_{L_2(G)} = \int_G |f(x)|^2\mathrm{d}\mu(x) = \int_G f(x)g(x^{-1})\mathrm{d}\mu(x) = \int_{\hat{G}} (\mathcal{F}f)(\chi)(\mathcal{F}g)(\chi)\mathrm{d}\nu(\chi) =$$

$$= \int_{\hat{G}} (\mathcal{F}f)(\chi)(\mathcal{F}f)^*(\chi)\mathrm{d}\nu(\chi) = \int_{\hat{G}} |(\mathcal{F}f)(\chi)|^2\mathrm{d}\nu(\chi) = \|\mathcal{F}f\|^2_{L_2(\hat{G},\nu)}.$$

(d) Iz (c) slijedi da je ν pozitivna mjera na $\hat{G}$ i da je $\nu \neq 0$. Neka su $f, g \in \mathcal{A}(G)$ i $\chi \in \hat{G}$. Prema (b), prema lemi 4.3.1 i prema tvrdnji (b) u zadatku 4.10. imamo redom

$$\nu(\mathcal{F}f \cdot \mathcal{F}g) = \int_G f(x)g(x^{-1})\mathrm{d}\mu(x) = \int_G (\chi f)(x)(\chi g)(x^{-1})\mathrm{d}\mu(x) =$$

$$= \nu(\mathcal{F}(\chi f) \cdot \mathcal{F}(\chi g)) = \nu(\lambda_\chi(\mathcal{F}f) \cdot \lambda_\chi(\mathcal{F}g)) = \nu(\lambda_\chi(\mathcal{F}f \cdot \mathcal{F}g)) = (\lambda_{\chi^{-1}}\nu)(\mathcal{F}f \cdot \mathcal{F}g).$$

Prema tome je

$$\mu_f(\mathcal{F}g) = [(\mathcal{F}f) \cdot (\lambda_{\chi^{-1}}\nu)](\mathcal{F}f) \qquad \forall g \in \mathcal{A}(G).$$

Budući da je $\mathcal{F}(\mathcal{A}(G))$ gusto u $C_\infty(\hat{G})$, odatle slijedi

$$\mu_f = (\mathcal{F}f) \cdot (\lambda_{\chi^{-1}}\nu) \qquad \forall f \in \mathcal{A}(G).$$

Iz jedinstvenosti u (a) slijedi

$$\nu = \lambda_{\chi^{-1}}\nu \qquad \forall \chi \in \hat{G}.$$

Dakle, ν je Haarova mjera na $\hat{G}$.

Za Haarovu mjeru ν na dualnoj grupi $\hat{G}$ iz prethodnog teorema kažemo da je **dualna** ili **pridružena** Haarovoj mjeri μ na G. U daljnjem ćemo pisati

$$\nu = \hat{\mu}.$$

Zadatak 4.11. *Zamijenimo μ sa $\mu_1 = a\mu$ gdje je $a > 0$. Neka je $\mathcal{F}_1$ Fourierova transformacija u odnosu na Haarovu mjeru μ_1 i $*_1$ konvolucija u odnosu na μ_1. Dokažite da je tada*

- (a) $\mathcal{F}_1 f = a\mathcal{F}f$ *za svaku* $f \in L_1(G) = L_1(G, \mu_1)$.
- (b) $f *_1 g = af * g$ *za bilo koje* $f, g \in L_1(G) = L_1(G, \mu_1)$.
- (c) $(\mu_1)_f = \mu_f$ *za svaku* $f \in L_1(G) = L_1(G, \mu_1)$.
- (d) $(a\mu)\hat{} = \frac{1}{a}\hat{\mu}$.

Ako su T_1 i T_2 lokalno kompaktni prostori, onda je i Kartezijev produkt $T_1 \times T_2$ lokalno kompaktan prostor. Za funkcije $f_1 : T_1 \to \mathbb{C}$ i $f_2 : T_2 \to \mathbb{C}$ neka je $f_1 \times f_2 : T_1 \times T_2 \to \mathbb{C}$ funkcija definirana sa

$$(f_1 \times f_2)(t_1, t_2) = f_1(t_1) f_2(t_2) \qquad (t_1, t_2) \in T_1 \times T_2.$$

Nadalje, ako su μ_1 i μ_2 mjere na T_1 i T_2, onda sa $\mu_1 \times \mu_2$ označavamo jedinstvenu mjeru na $T_1 \times T_2$ takvu da vrijedi

$$(\mu_1 \times \mu_2)(f_1 \times f_2) = \mu_1(f_1)\mu_2(f_2) \qquad \forall f_1 \in C_0(T_1) \text{ i } \forall f_2 \in C_0(T_2).$$

Posebno, $G \times \hat{G}$ je lokalno kompaktna grupa i očito je $\mu \times \hat{\mu}$ Haarova mjera na $G \times \hat{G}$. Iz tvrdnje (d) u zadatku 4.11. vidimo da ta Haarova mjera ne ovisi o izboru Haarove mjere μ na grupi G. Ta se mjera zove **kanonska Haarova mjera** na grupi $G \times \hat{G}$.

Teorem 4.3.8. **(Plancherel)** *Za $f \in L_1(G, \mu) \cap L_2(G, \mu)$ je $\mathcal{F}f \in L_2(\hat{G}, \hat{\mu})$. Preslikavanje $f \mapsto \mathcal{F}f$ sa $L_1(G, \mu) \cap L_2(G, \mu)$ u $L_2(\hat{G}, \hat{\mu})$ jednoznačno se proširuje do izometričkog izomorfizma Hilbertovog prostora $L_2(G, \mu)$ na Hilbertov prostor $L_2(\hat{G}, \hat{\mu})$.*

Dokaz: Prema tvrdnji (c) teorema 4.3.3. preslikavanje $f \mapsto \mathcal{F}f$ je izometrija sa unitarnog prostora $\mathcal{A}(G) \subseteq L_2(G, \mu)$ u Hilbertov prostor $L_2(\hat{G}, \hat{\mu})$. Budući da je potprostor $\mathcal{A}(G)$ gust u Hilbertovom prostoru $L_2(G, \mu)$, ta se izometrija jedinstveno proširuje do linearne izometrije $\Phi : L_2(G, \mu) \to L_2(\hat{G}, \hat{\mu})$. Pretpostavimo da je $\Phi(L_2(G, \mu)) \neq L_2(\hat{G}, \hat{\mu})$. Tada postoji $h \in L_2(\hat{G}, \hat{\mu})$ takav da je $h \neq 0$ i $\mathcal{F}f|\overline{h}) = 0 \;\; \forall f \in \mathcal{A}(G)$. Dakle,

$$\int_{\hat{G}} (\mathcal{F}f)(\chi) h(\chi) \mathrm{d}\hat{\mu}(\chi) = 0 \qquad \forall f \in \mathcal{A}(G).$$

Za $f, g \in \mathcal{A}(G)$ imamo $f * g \in \mathcal{A}(G)$ i $\mathcal{F}(f * g) = (\mathcal{F}f) \cdot (\mathcal{F}g)$. Prema tome je

$$\int_{\hat{G}} (\mathcal{F}f)(\chi)(\mathcal{F}g)(\chi)h(\chi)\mathrm{d}\hat{\mu}(\chi) = 0 \qquad \forall f, g \in \mathcal{A}(G).$$

Nadalje,

$$f \in \mathcal{A}(G) \qquad \Longrightarrow \qquad \mathcal{F}f \in L_2(\hat{G}, \hat{\mu}) \qquad \Longrightarrow \qquad h \cdot \mathcal{F}f \in L_1(\hat{G}, \hat{\mu}).$$

Prema tome, $h \cdot \mathcal{F}f \cdot \hat{\mu}$ je ograničena mjera na $\hat{G}$ $\forall f \in \mathcal{A}(G)$. Prema gornjem je

$$(h \cdot \mathcal{F}f \cdot \hat{\mu})(\mathcal{F}g) = 0 \qquad \forall g \in \mathcal{A}(G).$$

Kako je $\mathcal{F}(\mathcal{A}(G))$ gusto u $C_\infty(\hat{G})$, slijedi

$$h \cdot \mathcal{F}f\hat{\mu} = 0 \quad \text{tj.} \quad h \cdot \mathcal{F}f = 0 \quad \hat{\mu} - \text{lokalno gotovo svuda na } \hat{G} \ \forall f \in \mathcal{A}(G).$$

Budući da je $\{\Omega_f;\ f \in \mathcal{A}(G)\}$ otvoren pokrivač od $\hat{G}$, slijedi da je $h = 0$ $\hat{\mu}-$lokalno gotovo svuda na $\hat{G}$, a odatle slijedi da je $h = 0$ u prostoru $L_2(\hat{G}, \hat{\mu})$ suprotno pretpostavci. Ova kontradikcija dokazuje da je $\Phi(L_2(G, \mu)) = L_2(\hat{G}, \hat{\mu})$. Dakle, Φ je izometrički izomorfizam Hilbertovog prostora $L_2(G, \mu)$ na Hilbertov prostor $L_2(\hat{G}, \hat{\mu})$.

Neka je sada $f \in L_1(G, \mu) \cap L_2(G, \mu)$. Prema lemi 4.2.2. postoji hiperniz $(f_i)_{i \in I}$ u $\mathcal{A}(G)$ koji teži prema f i u $L_1(G, \mu)$ i u $L_2(G, \mu)$. Tada je $\mathcal{F}f_i = \Phi f_i$, pa slijedi

$$\Phi f = \lim_{i \in I} \mathcal{F}f_n \qquad \text{u prostoru } L_2(\hat{G}, \hat{\mu}).$$

Nadalje, $\|f - f_i\| \leq \|f - f_i\|_1$, pa $(f_i)_{i \in I}$ teži prema f i u $C^*(G)$. Kako je $\mathcal{F}$ izometrija sa $C^*(G)$ na $C_\infty(\hat{G})$, slijedi

$$\mathcal{F}f = \lim_{i \in I} \mathcal{F}f_i \qquad \text{u prostoru } C_\infty(\hat{G}).$$

Prema tome je $\mathcal{F}f = \Phi f$ za svaki $f \in L_1(G, \mu) \cap L_2(G, \mu)$, a ne samo za $f \in \mathcal{A}(G)$.

Dobivenu izometriju sa $L_2(G, \mu)$ na $L_2(\hat{G}, \hat{\mu})$ označavat ćemo također sa $\mathcal{F}$ ili sa $\mathcal{F}_G$ i zvat ćemo je također **Fourierova transformacija**. Sasvim analogno se $\overline{\mathcal{F}}$ proširuje do izometričkog izomorfizma sa $L_2(G, \mu)$ na $L_2(\hat{G}, \hat{\mu})$. Označavamo je i dalje sa $\overline{\mathcal{F}}$ ili sa $\overline{\mathcal{F}}_G$ i zovemo **Fourierova kotransformacija**.

4.4 Teorem dualiteta

I u cijelom ovom odjeljku G označava Abelovu lokalno kompaktnu grupu, s izuzetkom leme 4.4.3., propozicije 4.4.7. i korolara 4.4.8. i zadatka 4.13. Nadalje, koristimo i sve oznake uvedene u prethodnoj točki. Fiksirajmo Haarovu mjeru μ na G i njoj dualnu mjeru $\hat{\mu}$ na $\hat{G}$. Pisat ćemo $L_1(G,\mu) = L_1(G)$, $L_2(G,\mu) = L_2(G)$, $L_1(\hat{G},\hat{\mu}) = L_1(\hat{G})$ i $L_2(\hat{G},\hat{\mu}) = L_2(\hat{G})$.

Cilj nam je u ovoj točki dokazati da je preslikavanje $\eta \to \hat{\hat{G}}$, definirano sa

$$[\eta(x)](\chi) = \chi(x), \qquad x \in G, \quad \chi \in \hat{G},$$

za koje smo u propoziciji 4.1.6. ustanovili da je neprekidni injektivni homomorfizam, u stvari izomorfizam topoloških grupa preko kojega se grupa G može prirodno identificirati s dualnom grupom njene dualne grupe.

Propozicija 4.4.1. *(a) Ako je $f \in \mathcal{A}(G)$, tada je $\mathcal{F}_G f \in L_1(\hat{G}) \cap C_\infty(\hat{G}) \subseteq L_1(\hat{G}) \cap L_2(\hat{G})$.*

(b) Ako je $f \in L_2(G)$ takva da je $\mathcal{F}_G f \in L_1(\hat{G})$, onda je $\overline{\mathcal{F}}_{\hat{G}}\mathcal{F}_G f \in C_\infty(\hat{\hat{G}})$ i vrijedi

$$f = (\overline{\mathcal{F}}_{\hat{G}}\mathcal{F}_G f) \circ \eta \qquad \textit{u prostoru } L_2(G).$$

Dokaz: (a) Ako je $f \in \mathcal{A}(G) \subseteq C^*(G)$, tada je, naravno, $\mathcal{F}_G f \in C_\infty(\hat{G})$. Nadalje, za $g, h \in L_1(G) \cap L_2(G)$ su $\mathcal{F}_G g, \mathcal{F}_G h \in L_2(\hat{G})$, pa je $\mathcal{F}_G(g * h) = \mathcal{F}_G g \cdot \mathcal{F}_G h \in L_1(\hat{G})$. Kako funkcije $g * h$, $g, h \in L_1(G) \cap L_2(G)$, razapinju prostor $\mathcal{A}(G)$, zaključujemo da je $\mathcal{F}_G f \in L_1(\hat{G})$ $\forall f \in \mathcal{A}(G)$. Napokon, ako je $g \in L_1(\hat{G}) \cap C_\infty(\hat{G})$, onda je

$$\int_{\hat{G}} |g(\chi)|^2 \mathrm{d}\hat{\mu}(\chi) \leq \|g\|_{C_\infty(\hat{G})} \int_{\hat{G}} |g(\chi)| \mathrm{d}\hat{\mu}(\chi) = \|g\|_{C_\infty(\hat{G})} \|g\|_{L_1(\hat{G})}$$

dakle, $g \in L_2(\hat{G})$. Prema tome, $L_1(\hat{G}) \cap C_\infty(\hat{G}) \subseteq L_1(\hat{G}) \cap L_2(\hat{G})$.

(b) Neka je $f \in L_2(G)$, takva da je $\mathcal{F}_G f \in L_1(\hat{G})$. Stavimo $F = \mathcal{F}_G f$. Kako je $\mathcal{F}_G(L_2(G)) = L_2(\hat{G})$, zaključujemo da je $F \in L_1(\hat{G}) \cap L_2(\hat{G})$. Nadalje, $\overline{\mathcal{F}}_{\hat{G}}\mathcal{F}_G f = \overline{\mathcal{F}}_{\hat{G}} F \in C_\infty(\hat{\hat{G}})$, jer je $F \in L_1(\hat{G}) \subseteq C^*(\hat{G})$. Stavimo

$$\varphi = \left(\overline{\mathcal{F}}_{\hat{G}}\mathcal{F}_G f\right) \circ \eta = \left(\overline{\mathcal{F}}_{\hat{G}} F\right) \circ \eta.$$

Tada je φ neprekidna ograničena funkcija na G. Za $g \in L_1(G) \cap L_2(G)$ imamo

$$\int_G g(x)\varphi(x) \mathrm{d}\mu(x) = \int_G g(x) \left[\int_{\hat{G}} \chi(x) F(\chi) \mathrm{d}\hat{\mu}(\chi) \right] \mathrm{d}\mu(x).$$

Funkcija $(x, \chi) \mapsto g(x)F(\chi)\chi(x)$ je integrabilna na $G \times \hat{G}$ u odnosu na mjeru $\mu \otimes \hat{\mu}$, jer je $g \in L_1(G)$, $F \in L_1(\hat{G})$ i $|\chi(x)| = 1 \ \ \forall (x, \chi) \in G \times \hat{G}$. Primjenom Fubinijevog teorema slijedi

$$\int_G g(x)\varphi(x)\mathrm{d}\mu(x) = \int_{\hat{G}} F(\chi) \left[\int_G \chi(x) g(x) \mathrm{d}\mu(x) \right] \mathrm{d}\hat{\mu}(\chi) = \int_{\hat{G}} \left(\overline{\mathcal{F}}_G g\right)(\chi) F(\chi) \mathrm{d}\hat{\mu}(\chi).$$

Definiramo linearan funkcional $\Phi : L_1(G) \cap L_2(G) \to \mathbb{C}$ sa

$$\Phi(g) = \int_G g(x)\varphi(x)\mathrm{d}\mu(x), \qquad g \in L_1(G) \cap L_2(G).$$

Tada je

$$|\Phi(g)| = \left| \left(\overline{\mathcal{F}}_G g \,|\, \overline{F}\right)_{L_2(\hat{G})} \right| \leq \|\overline{\mathcal{F}}_G g\|_{L_2(\hat{G})} \|F\|_{L_2(\hat{G})} = \|g\|_{L_2(G)} \|F\|_{L_2(\hat{G})}.$$

To pokazuje da je funkcional Φ ograničen u odnosu na normu $\|\cdot\|_{L_2(G)}$. Prema Rieszovom teoremu postoji $\psi \in L_2(G)$ takva da je

$$\Phi(g) = \int_G \psi(x)g(x)\mathrm{d}\mu(x) \qquad \forall g \in L_1(G) \cap L_2(G).$$

Iz definicije funkcionala Φ sada slijedi da je $\varphi = \psi$, dakle, $\varphi \in L_2(G)$.

Prema teoremu 4.3.8. imamo

$$\int_G g(x)\varphi(x)\mathrm{d}\mu(x) = (\varphi|\overline{g})_{L_2(G)} = (\mathcal{F}_G\varphi\,|\mathcal{F}_G\overline{g})_{L_2(\hat{G})} =$$

$$= \int_{\hat{G}} \overline{(\mathcal{F}_G\overline{g})\,(\chi)}\,(\mathcal{F}_G\varphi)\,(\chi)\mathrm{d}\hat{\mu}(\chi) = \int_{\hat{G}} \left(\overline{\mathcal{F}}_G g\right)(\chi)\,(\mathcal{F}_G\varphi)\,(\chi)\mathrm{d}\hat{\mu}(\chi).$$

Prema tome, vrijedi

$$\int_{\hat{G}} \left(\overline{\mathcal{F}}_G g\right)(\chi)\,[F(\chi) - (\mathcal{F}_G\varphi)\,(\chi)]\,\mathrm{d}\hat{\mu}(\chi) = 0 \qquad \forall g \in L_1(G) \cap L_2(G).$$

Kako je $L_1(G) \cap L_2(G)$ gusto u $L_2(G)$, po Plancherelovom teoremu 4.3.8. je potprostor

$$\{\overline{\mathcal{F}}_G g;\; g \in L_1(G) \cap L_2(G)\}$$

gust u $L_2(\hat{G})$. Prema tome, u $L_2(\hat{G})$ vrijedi jednakost $F = \mathcal{F}_G\varphi$, tj. $\mathcal{F}_G f = \mathcal{F}_G\varphi$. Po Plancherelovom teoremu slijedi $f = \varphi$ u $L_2(G)$, a to je upravo tvrdnja koju dokazujemo.

Zadatak 4.12. *Dokažite da za $f \in \mathcal{A}(G)$ i $x \in G$ vrijedi*

$$f(x) = \int_{\hat{G}} \chi(x)\,(\mathcal{F}_G f)\,(\chi) d\hat{\mu}(\chi).$$

Uputa: Koristite tvrdnju (b) propozicije 4.4.1. i činjenicu da su funkcije f i $\left(\overline{\mathcal{F}}_{\hat{G}}\mathcal{F}_G f\right) \circ \eta$ neprekidne.

Lema 4.4.2. *Neka je skup $T \subseteq \hat{G}$ zatvoren i neka je $\chi \in \hat{G} \setminus T$. Tada postoji $f \in L_1(G)$ takva da je $(\mathcal{F}_G f)\,(\chi) = 1$ i $(\mathcal{F}_G f)\,|T = 0$.*

Dokaz: Imamo

$$\lambda_\chi\,(\mathcal{F}_G f) = \mathcal{F}_G(\chi \cdot f), \qquad \chi \in \hat{G}.$$

Dakle, bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $\chi = \varepsilon$ (jedinica u grupi $\hat{G}$). Tada $\varepsilon \notin T$ pa postoji kompaktna okolina $U = U^{-1}$ od ε u $\hat{G}$ takva da je $U^2 \cap T = \emptyset$. Neka je $H \in C_0^+(\hat{G})$ takva da je $\mathit{Supp}\, H \subseteq U$ i $H(\varepsilon) > 0$. Tada je $F = H * H \in C_0^+(\hat{G})$, $F|T = 0$, $F(\varepsilon) > 0$. Zamjenom funkcije H nekim njenim pozitivnim multiplom, možemo pretpostaviti da je $F(\varepsilon) = 1$. Dokazat ćemo sada da postoji $f \in L_1(G)$, takva da je $F = \mathcal{F}_G f$.

Imamo $H, F \in C_0^+(\hat{G}) \subseteq L_1(\hat{G}) \cap L_2(\hat{G})$. Neka su $h, f \in L_2(G)$ takve da u prostoru $L_2(\hat{G})$ vrijede jednakosti

$$H = \mathcal{F}_G h \qquad \text{i} \qquad F = \mathcal{F}_G f.$$

Imamo tada $f, h \in L_2(G)$ i $\mathcal{F}_G f, \mathcal{F}_G h \in L_1(\hat{G})$, pa je po tvrdnji (b) propozicije 4.4.1.

$$f = \left(\overline{\mathcal{F}}_{\hat{G}} F\right) \circ \eta \qquad \text{i} \qquad h = \left(\overline{\mathcal{F}}_{\hat{G}} H\right) \circ \eta \qquad \text{u prostoru } L_2(G).$$

Stoga je,

$$f = \left(\overline{\mathcal{F}}_{\hat{G}} F\right) \circ \eta = \left[\overline{\mathcal{F}}_{\hat{G}}(H * H)\right] \circ \eta = \left[\left(\overline{\mathcal{F}}_{\hat{G}} H\right) \cdot \left(\overline{\mathcal{F}}_{\hat{G}} H\right)\right] \circ \eta =$$

$$= \left[\left(\overline{\mathcal{F}}_{\hat{G}} H\right) \circ \eta\right] \cdot \left[\left(\overline{\mathcal{F}}_{\hat{G}} H\right) \circ \eta\right] = h \cdot h \in L_1(G),$$

jer je $h \in L_2(G)$.

Trebat će nam sljedeća topološka činjenica o podgrupama lokalno kompaktnih grupa:

Lema 4.4.3. *Neka je G lokalno kompaktna grupa i H podgrupa. Sljedeća su dva svojstva međusobno ekvivalentna:*

(a) *H je zatvorena.*

(b) *H je s induciranom topologijom lokalno kompaktna grupa.*

Dokaz: Očito iz (a) slijedi (b). Pretpostavimo da vrijedi (b). Tada postoji okolina $V = V^{-1}$ jedinice e u G takva da je skup $V \cap H$ kompaktan. Posebno, skup $V \cap H$ je zatvoren u V. Neka je x točka iz zatvarača $Cl(H)$ od H. Tada je $xV \cap H \neq \emptyset$, pa postoji $y \in xV \cap H$. Kako je $V = V^{-1}$, slijedi $x \in yV$. Skup $y(V \cap H) = (yV) \cap H$ je zatvoren u yV, jer je $V \cap H$ zatvoren u V. Stoga je $(yV) \cap H = (yV) \cap Cl(H)$. Sada je $x \in (yV) \cap Cl(H) = (yV) \cap H$, dakle, $x \in H$. Time je dokazano da je $Cl(H) = H$, odnosno, podgrupa H je zatvorena.

Teorem 4.4.4. (**Pontrjagin**) *Za Abelovu lokalno kompaktnu grupu G s Haarovom mjerom μ vrijedi:*

(a) *$\eta : G \to \hat{\hat{G}}$ je izomorfizam topoloških grupa.*

(b) *$\eta(\mu) = \hat{\hat{\mu}}$.*

(c) *Ako pomoću η identificiramo $\hat{\hat{G}}$ sa G, tada je preslikavanje $\overline{\mathcal{F}}_{\hat{G}} : L_2(\hat{G}) \to L_2(G)$ inverzno preslikavanju $\mathcal{F}_G : L_2(G) \to L_2(\hat{G})$.*

Dokaz: Već znamo da je $\eta : G \to \hat{\hat{G}}$ neprekidni injektivni homomorfizam. Dokazat ćemo najprije da je η homeomorfizam sa G na $\eta(G)$ snabdjeven s induciranom topologijom iz $\hat{\hat{G}}$. U tu svrhu treba dokazati da za svaki otvoren skup $U \subseteq G$ postoji otvoren skup $W \subseteq \hat{\hat{G}}$ takav da je $\eta^{-1}(W) \subseteq U$. Kako je η homomorfizam grupa, dovoljno je dokazati sljedeću tvrdnju:

> *Za svaku okolinu U jedinice $e = e_G$ u grupi G postoji okolina W jedinice $\mathfrak{e} = e_{\hat{\hat{G}}}$ u grupi $\hat{\hat{G}}$, takva da je $\eta^{-1}(W) \subseteq U$.*

Neka je U okolina od e u G. Neka je $V = V^{-1}$ kompaktna okolina od e u G takva da je $V^2 \subseteq U$. Izaberimo $f \in C_0^+(G)$ tako da je $Supp\, f \subseteq V$ i $\|f\|_2 = 1$. Stavimo $g = f^* * f$. Tada je $g \in \mathcal{A}(G)$, $Supp\, g \subseteq U$ i

$$g(e) = \int_G f^*(y) f(y^{-1}) \mathrm{d}\mu(y) = \int_G |f(y^{-1})|^2 \mathrm{d}\mu(y) = \int_G |f(y)|^2 \mathrm{d}\mu(y) = \|f\|_2^2 = 1.$$

Po tvrdnji (a) propozicije 4.4.1. iz $g \in \mathcal{A}(G)$ slijedi $\mathcal{F}_G g \in L_1(\hat{G})$. Topologija na $\hat{\hat{G}}$ je topologija proste konvergencije na $L_1(\hat{G})$; naime, $\hat{\hat{G}}$ se identificira sa spektrom $L_1(\hat{G})\hat{}$ komutativne Banachove algebre $L_1(\hat{G})$. Prema tome, postoji okolina W jedinice $\mathfrak{e}$ u $\hat{\hat{G}}$ takva da vrijedi:

$$\mathfrak{s} \in W \qquad \Longrightarrow \qquad |\mathfrak{s}\,(\mathcal{F}_G g) - \mathfrak{e}\,(\mathcal{F}_G g)| \leq \frac{1}{2}.$$

Međutim, za $\mathfrak{s} \in \hat{\hat{G}}$ je

$$\mathfrak{s}\,(\mathcal{F}_G g) = \int_{\hat{G}} \mathfrak{s}(\chi)\,(\mathcal{F}_G g)\,(\chi) \mathrm{d}\hat{\mu}(\chi) = \left(\overline{\mathcal{F}}_{\hat{G}} \mathcal{F}_G g\right)(\mathfrak{s}).$$

Dakle,

$$\mathfrak{s} \in W \qquad \Longrightarrow \qquad \left|\left(\overline{\mathcal{F}}_{\hat{G}} \mathcal{F}_G g\right)(\mathfrak{s}) - \left(\overline{\mathcal{F}}_{\hat{G}} \mathcal{F}_G g\right)(\mathfrak{e})\right| \leq \frac{1}{2}.$$

Neka je $x \in \eta^{-1}(W)$. Tada je $\eta(x) \in W$ i $\eta(e) = \mathfrak{e}$, pa slijedi

$$\left|\left[\left(\overline{\mathcal{F}}_{\hat{G}}\mathcal{F}_G g\right) \circ \eta\right](x) - \left[\left(\overline{\mathcal{F}}_{\hat{G}}\mathcal{F}_G g\right) \circ \eta\right](e)\right| \leq \frac{1}{2}.$$

Međutim, imamo $g \in \mathcal{A}(G)$, pa po zadatku 4.12. vrijedi $\left(\overline{\mathcal{F}}_{\hat{G}}\mathcal{F}_G g\right) \circ \eta = g$. Dakle, za $x \in \eta^{-1}(W)$ vrijedi $|g(x) - g(e)| \leq \frac{1}{2}$, dakle, $|g(x) - 1| \leq \frac{1}{2}$. Slijedi $g(x) \neq 0$ što znači da je $x \in Supp\, g \subseteq U$. Time je dokazano da vrijedi $\eta^{-1}(W) \subseteq U$.

Time smo dokazali da je η homeomorfizam sa G na svoju sliku $\eta(G)$. To znači da je $\eta(G)$ podgrupa od $\hat{\hat{G}}$, koja je s induciranom topologijom lokalno kompaktna. Pomoću leme 4.4.3. zaključujemo da je $\eta(G)$ zatvorena podgrupa od $\hat{\hat{G}}$.

Pretpostavimo da je $\eta(G) \neq \hat{\hat{G}}$. Prema lemi 4.4.2. tada postoji $f \in L_1(\hat{G})$ takva da je $\mathcal{F}_{\hat{G}} f | \eta(G) = 0$ i $f \neq 0$. Tada je $\left(\mathcal{F}_{\hat{G}} f\right)(\eta(x)) = 0 \quad \forall x \in G$, a to znači

$$0 = \int_{\hat{G}} \overline{[\eta(x)](\chi)} f(\chi) \mathrm{d}\hat{\mu}(\chi) = \int_{\hat{G}} \overline{\chi(x)} f(\chi) \mathrm{d}\hat{\mu}(\chi).$$

Neka je sada funkcija $u \in L_1(G)$ proizvoljna. Tada je funkcija $(x, \chi) \mapsto u(x)\overline{\chi(x)} f(\chi)$ na $G \times \hat{G}$ integrabilna u odnosu na mjeru $\mu \otimes \hat{\mu}$, pa je na nju primjenjiv Fubinijev teorem o zamjeni redoslijeda integracije. Dakle,

$$\int_{\hat{G}} f(\chi) \left(\mathcal{F}_G u\right)(\chi) \mathrm{d}\hat{\mu}(\chi) = \int_{\hat{G}} f(\chi) \left[\int_G \overline{\chi(x)} u(x) \mathrm{d}\mu(x)\right] \mathrm{d}\hat{\mu}(\chi) =$$

$$= \int_G u(x) \left[\int_{\hat{G}} \overline{\chi(x)} f(\chi) \mathrm{d}\hat{\mu}(\chi)\right] \mathrm{d}\mu(x) = 0.$$

Budući da je $\mathcal{F}_G(L_1(G))$ gusto u $C_\infty(\hat{G})$, odatle slijedi da je ograničena mjera $f \cdot \hat{\mu}$ na $\hat{G}$ jednaka nuli. No to je u suprotnosti sa $f \neq 0$. Ova kontradikcija pokazuje da je $\eta(G) = \hat{\hat{G}}$, dakle, $\eta : G \to \hat{\hat{G}}$ je izomorfizam topoloških grupa.

(b) $\overline{\mathcal{F}}_{\hat{G}}$ je izometrija sa $L_2(\hat{G})$ na $L_2\left(\hat{\hat{G}}, \hat{\hat{\mu}}\right)$. S druge strane, pomoću tvrdnje (b) propozicije 4.4.1. za $f \in \mathcal{A}(G)$ imamo

$$\left\|\overline{\mathcal{F}}_{\hat{G}}\mathcal{F}_G f\right\|_{L_2\left(\hat{\hat{G}}, \eta(\mu)\right)} = \left\|\left(\overline{\mathcal{F}}_{\hat{G}}\mathcal{F}_G f\right) \circ \eta\right\|_{L_2(G)} = \|f\|_{L_2(G)} = \|\mathcal{F}_G f\|_{L_2(\hat{G})}.$$

Budući da je $\mathcal{F}(\mathcal{A}(G))$ gusto u $L_2(\hat{G})$, odatle slijedi da je $\overline{\mathcal{F}}_{\hat{G}}$ ne samo izometrija sa $L_2(\hat{G})$ na $L_2\left(\hat{\hat{G}}, \hat{\hat{\mu}}\right)$ nego i izometrija sa $L_2(\hat{G})$ na $L_2\left(\hat{\hat{G}}, \eta(\mu)\right)$. Kako su $\hat{\hat{\mu}}$ i $\eta(\mu)$ Haarove mjere na $\hat{\hat{G}}$, slijedi da je $\eta(\mu) = \hat{\hat{\mu}}$.

(c) Budući da po propoziciji 4.4.1. vrijedi $\overline{\mathcal{F}}_{\hat{G}}\mathcal{F}_G f = f$ za svaku $f \in \mathcal{A}(G)$ i budući da je $\mathcal{A}(G)$ gusto u $L_2(G)$, slijedi da je $\overline{\mathcal{F}}_{\hat{G}}\mathcal{F}_G$ identiteta na $L_2(G)$.

Temeljem teorema 4.4.4. u daljnjem ćemo stalno pomoću η identificirati G sa $\hat{\hat{G}}$.

Teorem 4.4.5. *Neka je* $\mathcal{B}(G) = \{f \in L_1(G);\ \mathcal{F}_G f \in L_1(\hat{G})\}$. *Vrijedi:*

(a) $\mathcal{B}(G) = \{f \in L_1(G);\ \overline{\mathcal{F}}_G f \in L_1(\hat{G})\}$.

(b) $\mathcal{F}_G$ *(odnosno,* $\overline{\mathcal{F}}_G$*) je izomorfizam vektorskog prostora* $\mathcal{B}(G)$ *na vektorski prostor* $\mathcal{B}(\hat{G})$. *Njemu inverzni izomorfizam je* $\overline{\mathcal{F}}_{\hat{G}}$ *(odnosno,* $\mathcal{F}_{\hat{G}}$*).*

(c) $\mathcal{B}(G) = L_1(G) \cap \mathcal{F}_{\hat{G}}(L_1(\hat{G})) = L_1(G) \cap \overline{\mathcal{F}}_{\hat{G}}(L_1(\hat{G}))$. *Posebno,* $\mathcal{B}(G) \subseteq C_\infty(G)$.

(d) $\mathcal{B}(G)$ *je algebra i s obzirom na konvoluciju* $*$ *i s obzirom na množenje po točkama* $\cdot$. $\mathcal{F}_G$ *i* $\overline{\mathcal{F}}_G$ *su izomorfizmi algebre* $(\mathcal{B}(G), *)$ *na algebru* $(\mathcal{B}(\hat{G}), \cdot)$ *i algebre* $(\mathcal{B}(G), \cdot)$ *na algebru* $(\mathcal{B}(\hat{G}), *)$.

Dokaz: (a) Imamo $\left(\overline{\mathcal{F}}_G f\right)(\chi) = (\mathcal{F}_G f)(\chi^{-1})$, pa budući da je mjera $\hat{\mu}$ invarijantna u odnosu na invertiranje $\chi \mapsto \chi^{-1}$ slijedi

$$\mathcal{F}_G f \in L_1(\hat{G}) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \overline{\mathcal{F}}_G f \in L_1(\hat{G}).$$

(b) Za $f \in \mathcal{B}(G)$ je $\mathcal{F}_G f \in L_1(\hat{G})$. Nadalje, tada je $f \in L_1(G) \subseteq C^*(G)$ pa je $\mathcal{F}_G f \in C_\infty(\hat{G})$. Dakle,

$$f \in \mathcal{B}(G) \qquad \Longrightarrow \qquad \mathcal{F}_G f \in L_1(\hat{G}) \cap C_\infty(\hat{G}) = L_1(\hat{G}) \cap L_2(\hat{G}) \cap C_\infty(\hat{G}),$$

jer svaka ograničena integrabilna funkcija je kvadratno integrabilna, pa je $L_1(\hat{G}) \cap C_\infty(\hat{G}) \subseteq L_2(\hat{G})$.

Fiksirajmo sada $f \in \mathcal{B}(G)$ i stavimo $h = \overline{\mathcal{F}}_{\hat{G}} \mathcal{F}_G f$. Tada je $h \in L_2(G)$. Za $g \in C_0(\hat{G})$ imamo po Plancherelovom teoremu 4.3.8.:

$$\left(\mathcal{F}_{\hat{G}} g \middle| \overline{h}\right) = \left(g \middle| \overline{\mathcal{F}}_G \overline{h}\right) = \left(g \middle| \overline{\mathcal{F}_G h}\right).$$

Ali $\mathcal{F}_G f \in L_1(\hat{G}) \cap L_2(\hat{G})$, pa je opet po Plancherelovom teoremu

$$\mathcal{F}_G h = \mathcal{F}_G \overline{\mathcal{F}}_{\hat{G}} \mathcal{F}_G f = \mathcal{F}_G f \qquad \text{u prostoru } L_2(\hat{G}).$$

Odatle je

$$\left(\mathcal{F}_{\hat{G}} g \middle| \overline{h}\right) = \left(g \middle| \overline{\mathcal{F}_G f}\right) = \left(\mathcal{F}_{\hat{G}} g \middle| \overline{f}\right).$$

Budući da je $\mathcal{F}_{\hat{G}}(C_0(\hat{G}))$ gusto u $L_2(G)$, odatle slijedi $f = h$. Dakle, $f = \overline{\mathcal{F}}_{\hat{G}} \mathcal{F}_G f \in L_1(G)$.

Dakle, dokazali smo sljedeće dvije implikacije

$$f \in \mathcal{B}(G) \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{F}_G f \in L_1(\hat{G}) \qquad \text{i} \qquad f \in \mathcal{B}(G) \quad \Longrightarrow \quad \overline{\mathcal{F}}_{\hat{G}} \mathcal{F}_G f \in L_1(G).$$

Dakle, vrijedi

$$f \in \mathcal{B}(G) \qquad \Longrightarrow \qquad \mathcal{F}_G f \in \mathcal{B}(\hat{G}).$$

Također smo dokazali

$$f \in \mathcal{B}(G) \qquad \Longrightarrow \qquad \overline{\mathcal{F}}_{\hat{G}} \mathcal{F}_G f = f.$$

Zamijenimo li uloge $\mathcal{F}$ i $\overline{\mathcal{F}}$ analogno nalazimo

$$f \in \mathcal{B}(G) \qquad \Longrightarrow \qquad \overline{\mathcal{F}}_G f \in \mathcal{B}(\hat{G}) \quad \text{i} \quad \overline{\mathcal{F}}_{\hat{G}} \mathcal{F}_G f = f.$$

Nadalje, zamjenom uloga G i $\hat{G}$ dobivamo također

$$g \in \mathcal{B}(\hat{G}) \qquad \Longrightarrow \qquad \mathcal{F}_{\hat{G}} g \in \mathcal{B}(G) \quad \text{i} \quad \overline{\mathcal{F}}_G \mathcal{F}_G \mathcal{F}_{\hat{G}} g = g$$

i

$$g \in \mathcal{B}(\hat{G}) \qquad \Longrightarrow \qquad \overline{\mathcal{F}}_{\hat{G}} g \in \mathcal{B}(G) \quad \text{i} \quad \mathcal{F}_G \overline{\mathcal{F}}_G \mathcal{F}_{\hat{G}} g = g$$

Time je (b) dokazano.

(c) Neka je $f \in \mathcal{B}(G)$ i stavimo $g = \overline{\mathcal{F}}_G f \in \mathcal{B}(\hat{G}) \subseteq L_1(\hat{G})$. Tada je $f = \mathcal{F}_{\hat{G}} g$, pa je $f \in L_1(G) \cap \mathcal{F}_{\hat{G}}(L_1(\hat{G}))$.

Obratno, neka je $f \in L_1(G) \cap \mathcal{F}_{\hat{G}}(L_1(\hat{G})$. Neka je $g \in L_1(\hat{G})$ takva da je $f = \mathcal{F}_{\hat{G}} g$. Tada je $g \in \mathcal{B}(\hat{G})$, pa je $f \in \mathcal{F}_{\hat{G}}(\mathcal{B}(\hat{G})) = \mathcal{B}(G)$.

Time je dokazano $\mathcal{B}(G) = L_1(G) \cap \mathcal{F}_{\hat{G}}(L_1(\hat{G}))$. Sasvim analogno dokazuje se jednakost $\mathcal{B}(G) = L_1(G) \cap \overline{\mathcal{F}}_{\hat{G}}(L_1(\hat{G}))$.

(d) Neka su $f, g \in \mathcal{B}(G)$. Tada su posebno $f, g \in L_1(G)$, dakle i $f * g \in L_1(G)$. Nadalje, $\mathcal{F}_G f \in L_1(\hat{G})$ i $\mathcal{F}_G g \in C_\infty(\hat{G})$, pa slijedi da je $\mathcal{F}_G(f * g) = (\mathcal{F}_G f) \cdot (\mathcal{F}_G g) \in L_1(\hat{G})$. Dakle je $f * g \in \mathcal{B}(G)$. Time je dokazano da je $\mathcal{B}(G)$ algfebra u odnosu na $*$. Budući da je $\mathcal{F}_G$ izomorfizam $\mathcal{B}(G)$ na $\mathcal{B}(\hat{G})$ i budući da $\mathcal{F}$ prevodi operaciju $*$ u operaciju $\cdot$, zaključujemo da je $\mathcal{B}(\hat{G})$ algebra u odnosu na operaciju $\cdot$. Zamjenom G i $\hat{G}$ zaključujemo da je $\mathcal{B}(G)$ algebra i u odnosu na $\cdot$ i da je $\mathcal{B}(\hat{G})$ algebra i u odnosu na $*$. Sve tvrdnje slijede jer je $(\mathcal{F}_G|\mathcal{B}(G))^{-1} = \overline{\mathcal{F}}_{\hat{G}}|\mathcal{B}(\hat{G})$ i $\left(\overline{\mathcal{F}}_G|\mathcal{B}(G)\right)^{-1} = \mathcal{F}_{\hat{G}}|\mathcal{B}(\hat{G})$.

Korolar 4.4.6. *Ako su* $f, g \in L_2(G)$ *onda je* $\mathcal{F}_G(f \cdot g) = (\mathcal{F}_G f) * (\mathcal{F}_G g)$.

Napominjemo da smo u iskazu ovog korolara upotrijebili oznaku $*$ umjesto oznake $\bullet$ iz propozicije 4.2.1. To ne dovodi do nedoumice zbog tvrdnje (c) te propozicije.

Dokaz: Znamo da tvrdnja vrijedi ako su $f, g \in \mathcal{B}(G)$ i posebno za $f, g \in \mathcal{A}(G)$, jer je $\mathcal{A}(G) \subseteq \mathcal{B}(G)$. Budući da je $\mathcal{A}(G)$ gusto u $L_2(G)$, dovoljno je dokazati da su preslikavanja $(f, g) \mapsto \mathcal{F}_G(f \cdot g)$ i $(f, g) \mapsto (\mathcal{F}_G f) * (\mathcal{F}_G g)$ sa $L_2(G) \times L_2(G)$ u $C_\infty(\hat{G})$ neprekidna.

$(f, g) \mapsto \mathcal{F}_G(f \cdot g)$ je kompozicija dvaju neprekidnih preslikavanja: $(f, g) \mapsto f \cdot g$ sa $L_2(G) \times L_2(G)$ u $L_1(G)$ i $\mathcal{F}_G : L_1(G) \to C_\infty(\hat{G})$.

$(f, g) \mapsto (\mathcal{F}_G f) * (\mathcal{F}_G g)$ je također kompozicija dvaju neprekidnih preslikavanja: $(f, g) \mapsto (\mathcal{F}_G f, \mathcal{F}_G g)$ sa $L_2(G) \times L_2(G)$ u $L_2(\hat{G}) \times L_2(\hat{G})$ i $(\varphi, \psi) \mapsto \varphi * \psi$ sa $L_2(\hat{G}) \times L_2(\hat{G})$ u $C_\infty(\hat{G})$. Neprekidnost ovog posljednjeg preslikavanja slijedi primjenom tvrdnje (b) propozicije 4.2.1. na grupu $\hat{G}$.

Treba nam još nekoliko općih topoloških rezultata o lokalno kompaktnim grupama. Neka je G lokalno kompaktna grupa i H zatvorena podgrupa. Označimo sa $H\backslash G$ (odnosno, sa G/H) skup svih desnih $H-$klasa Hx (odnosno, svih lijevih $H-$klasa xH) u G. Promatrat ćemo samo G/H, a rezultati za $H\backslash G$ su sasvim analogni. Neka je $p : G \to G/H$ kanonska surjekcija $p(x) = xH$, $x \in G$. Snabdijmo sada G/H s tzv. **kvocijentnom topologijom**, tj. s najjačom topologijom za koju je preslikavanje p neprekidno: skup $U \subseteq G/H$ je otvoren ako i samo ako je skup $p^{-1}(U)$ otvoren u G.

Propozicija 4.4.7. (a) *Preslikavanje* p *je otvoreno, tj. za svaki otvoren skup* $V \subseteq G$ *njegova slika* $p(V)$ *je otvorena u* G/H.

(b) G/H *je Hausdorffov lokalno kompaktan topološki prostor.*

(c) *Ako je* $K \subseteq G/H$ *kompaktan skup, postoji kompaktan skup* $K_1 \subseteq G$ *takav da je* $p(K_1) = K$.

(d) *Ako je* T *topološki prostor, preslikavanje* $f : G/H \to T$ *je neprekidno ako i samo ako je kompozicija* $f \circ p : G \to T$ *neprekidna.*

Dokaz: (a) Neka je $V \subseteq G$ otvoren skup. Imamo

$$p^{-1}(p(V)) = \{x \in G;\ p(x) \in p(V)\} = \{x \in G;\ xH \subseteq VH\} = VH = \bigcup_{y \in H} Vy.$$

Dakle, $p^{-1}(p(V))$ je kao unija otvorenih skupova otvoren skup. Po definiciji topologije u G/H skup $p(V)$ je otvoren u G/H.

(b) Neka su $x, y \in G$ takvi da je $p(x) \neq p(y)$. To znači da je $y^{-1}x \notin H$, pa postoji kompaktna okolina V_1 od e u G takva da je $y^{-1}xV_1 \cap H = \emptyset$. Skup $y^{-1}xV_1$ je kompaktan, a H je zatvoren, dakle po tvrdnji (b) propozicije 1.2.3. postoji okolina V_2 od e u G takva da je $V_2^{-1}y^{-1}xV_1 \cap H = \emptyset$. Tada je $xV_1H \cap yV_2H = \emptyset$, tj. $p(xV_1) \cap p(yV_2) = \emptyset$. Prema (a) $p(xV_1)$ je okolina od $p(x)$, a $p(yV_2)$ je okolina od $p(y)$. To pokazuje da je topološki prostor G/H Hausdorffov. Budući da je p neprekidna i otvorena surjekcija, topološki prostor G/H je lokalno kompaktan.

(c) Za $x \in p^{-1}(K)$ neka je V_x relativno kompaktna otvorena okolina od x. Tada je

$$K \subseteq \bigcup_{x \in p^{-1}(K)} p(V_x),$$

pa zbog kompaktnosti od K postoje $x_1, x_2, \ldots, x_n \in p^{-1}(K)$ takvi da je

$$K \subseteq p(Vx_1) \cup p(Vx_2) \cup \cdots \cup p(Vx_n) = p\left(Vx_1 \cup Vx_2 \cup \cdots \cup Vx_n\right).$$

Stavimo

$$K_2 = p^{-1}(K) \cap (Vx_1 \cup Vx_2 \cup \cdots \cup Vx_n), \qquad K_1 = Cl(K_2).$$

Tada je K_1 kompaktan podskup od G. Nadalje, $p(K_2) = K$, a kako je preslikavanje p neprekidno, slijedi

$$p(Cl(K_2)) \subseteq Cl(p(K_2)) = Cl(K) = K.$$

Budući da je $K = p(K_2) \subseteq p(K_1)$, slijedi $K = p(K_1)$.

(d) Očito vrijedi implikacija

$$f \quad \text{neprekidno} \qquad \Longrightarrow \qquad f \circ p \quad \text{neprekidno}.$$

Pretpostavimo da je $f \circ p$ neprekidno preslikavanje i neka je $U \subseteq T$ otvoren skup. Tada je skup $p^{-1}(f^{-1}(U)) = (f \circ p)^{-1}(U)$ otvoren skup u G, pa je po definiciji topologije u G/H skup $f^{-1}(U)$ otvoren u G/H. Dakle, preslikavanje f je neprekidno.

Korolar 4.4.8. *Neka je G lokalno kompaktna grupa i H zatvorena normalna podgrupa. G/H je s kvocijentnom topologijom lokalno kompaktna grupa.*

Dokaz: Neka su $x, y \in G$ i neka je V okolina od $p(x)p(y)^{-1} = p(xy^{-1})$ u G/H. Tada je $p^{-1}(V)$ okolina od xy^{-1} u G, pa postoje okolina U_1 od x i okolina U_2 od y u G takve da je $U_1U_2^{-1} \subseteq p^{-1}(V)$. Prema tvrdnji (a) propozicije 4.4.7. $p(U_1)$ je okolina pd $p(x)$ i $p(U_2)$ je okolina od $p(y)$ u G/H. Nadalje, $p(U_1)p(U_2)^{-1} = p(U_1U_2^{-1}) \subseteq V$. To pokazuje da je preslikavanje $(\xi, \eta) \mapsto \xi\eta^{-1}$ sa $G/H \times G/H$ u G/H neprekidno, tj. G/H je topološka grupa.

Zadatak 4.13. *Neka su G i H lokalno kompaktne grupe, $f : G \to H$ neprekidni homomorfizam, $p : G \to G/(Ker f)$ kanonski epimorfizam i $\tilde{f} : G/(Ker f) \to H$ jedinstveni homomorfizam takav da je $f = \tilde{f} \circ p$. Dokažite da je homomorfizam $\tilde{f}$ neprekidan.*

Neka su sada G i H Abelove lokalno kompaktne grupe i $\varphi : G \to H$ neprekidni homomorfizam. Za $\xi \in \hat{H}$ je $\xi \circ \varphi \in \hat{G}$. Definiramo $\hat{\varphi} : \hat{H} \to \hat{G}$ sa

$$\hat{\varphi}(\xi) = \xi \circ \varphi, \qquad \text{tj.} \quad [\hat{\varphi}(\xi)](y) = \xi(\varphi(y)), \quad \xi \in \hat{H}, \ y \in G.$$

Tada je očito $\hat{\varphi}$ homomorfizam grupa. Neka je $(\xi_i)_{i \in I}$ hiperniz u $\hat{H}$ koji konvergira prema $\xi \in \hat{H}$. Prema tvrdnji (a) teorema 4.1.5. to znači da hiperniz $(\xi_i)_{i \in I}$ konvergira prema ξ lokalno uniformno na H. Tada hiperniz $(\hat{\varphi}(\xi_i))_{i \in I} = (\xi_i \circ \varphi)_{i \in I}$ konvergira prema $\hat{\varphi}(\xi) = \xi \circ \varphi$ lokalno uniformno na G, dakle, u topologiji prostora $\hat{G}$. To znači da je homorfizam $\hat{\varphi} : \hat{H} \to \hat{G}$ neprekidan.

Očito vrijedi

$$(\varphi \circ \psi)\hat{} = \hat{\psi} \circ \hat{\varphi};$$

$$\varphi = id_G \quad \Longrightarrow \quad \hat{\varphi} = id_{\hat{G}};$$

$$\varphi : G \to H, \quad \varphi(G) = \{e_H\} \quad \Longrightarrow \quad \hat{\varphi}(\hat{H}) = \{e_{\hat{G}}\};$$

$$\hat{\hat{\varphi}} = \varphi.$$

Dakle, $G \mapsto \hat{G}$, $\varphi \mapsto \hat{\varphi}$ je involutivni kontravarijantni funktor na kategoriji lokalno kompaktnih Abelovih grupa.

Propozicija 4.4.9. *Neka su G i H Abelove lokalno kompaktne grupe. Za $\chi \in \hat{G}$ i $\xi \in \hat{H}$ definiramo preslikavanje $\Phi(\chi, \xi) : G \times H \to T$ sa*

$$[\Phi(\chi, \xi)](x, y) = \chi(x)\xi(y), \qquad (x, y) \in G \times H.$$

Tada je Φ izomorfizam topoloških grupa sa $\hat{G} \times \hat{H}$ na $(G \times H)\hat{}$.

Dokaz: Očito je Φ neprekidni homomorfizam. Neka su $i : G \to G \times H$ i $j : H \to G \times H$ kanonski monomorfizmi, tj. $i(x) = (x, e_H)$, $j(y) = (e_G, y)$. Tada su $\hat{i} : (G \times H)\hat{} \to \hat{G}$ i $\hat{j} : (G \times H)\hat{} \to \hat{H}$ neprekidni homomorfizmi. Od njih složimo neprekidni homomorfizam $F : (G \times H)\hat{} \to \hat{G} \times \hat{H}$:

$$F(\varphi) = (\hat{i}(\varphi), \hat{j}(\varphi)), \qquad \varphi \in (G \times H)\hat{}.$$

Za $(\chi, \xi) \in \hat{G} \times \hat{H}$ imamo

$$(F \circ \Phi)(\chi, \xi) = F(\Phi(\chi, \xi)) = (\hat{i}(\Phi(\chi, \xi)), \hat{j}(\Phi(\chi, \xi))).$$

Nadalje, za $x \in G$ je

$$[\hat{i}(\Phi(\chi, \xi))](x) = [\Phi(\chi, \xi)](i(x)) = [\Phi(\chi, \xi)](x, e_H) = \chi(x)\xi(e_H) = \chi(x).$$

Dakle, $\hat{i}(\Phi(\chi, \xi)) = \chi$. Analogno je $\hat{j}(\Phi(\chi, \xi)) = \xi$. Prema tome,

$$(F \circ \Phi)(\chi, \xi) = (\chi, \xi) \qquad \forall (\chi, \xi) \in \hat{G} \times \hat{H},$$

a to znači da je $F \circ \Phi = id_{\hat{G} \times \hat{H}}$. S druge strane, za $\varphi \in (G \times H)\hat{}$ i za $(x, y) \in G \times H$ imamo

$$[(\Phi \circ F)(\varphi)](x, y) = [\Phi(F(\varphi))](x, y) = [\Phi(\hat{i}(\varphi), \hat{j}(\varphi))](x, y) = [\hat{i}(\varphi)](x)[\hat{j}(\varphi)](y) =$$

$$= \varphi(i(x))\varphi(j(y)) = \varphi(x, e_H)\varphi(e_G, y) = \varphi((x, e_H)(e_G, y)) = \varphi(x, y).$$

Prema tome,

$$(\Phi \circ F)(\varphi) = \varphi \qquad \forall \varphi \in (G \times H)\hat{},$$

a to znači da je $\Phi \circ F = id_{(G \times H)\hat{}}$. Time je dokazano da su neprekidni homomorfizmi topoloških grupa $\Phi : \hat{G} \times \hat{H} \to (G \times H)\hat{}$ i $F : (G \times H)\hat{} \to \hat{G} \times \hat{H}$ međusobno inverzni, dakle, radi se o izomorfizmima topoloških grupa.

Neka je $\varphi : G \to H$ neprekidni homomorfizam topoloških grupa. Kažemo da je φ **striktni morfizam** ako on inducira izomorfizam topoloških grupa sa $G/(\mathrm{Ker}\,\varphi)$ na $\varphi(G)$. Tada imamo egzaktni niz topoloških grupa:

$$\{e\} \longrightarrow \mathrm{Ker}\,\varphi \longrightarrow G \xrightarrow{\varphi} H \longrightarrow H/\varphi(G) \longrightarrow \{e\}.$$

Neka je G Abelova lokalno kompaktna grupa. Za podskup $S \subseteq G$ stavimo

$$S^\perp = \{\chi \in \hat{G};\ \chi(s) = 1\ \forall s \in S\}.$$

Očito je $S^\perp$ zatvorena podgrupa grupe $\hat{G}$.

Teorem 4.4.10. *Neka je H zatvorena podgrupa Abelove lokalno kompaktne grupe G. Stavimo $A = G/H$ i neka je $i : H \to G$ inkluzija, a $p : G \to A$ kanonski epimorfizam. Tada je $\hat{p}$ izomorfizam topoloških grupa sa $\hat{A}$ na podgrupu $H^\perp$ od $\hat{G}$ i $\hat{i}$ je striktni epimorfizam sa $\hat{G}$ na $\hat{H}$ s jezgrom $H^\perp$.*

Dokaz: **(1)** Dokažimo najprije da je homomorfizam $\hat{p} : \hat{A} \to \hat{G}$ injektivan. Doista, ako je $\alpha \in \hat{A}$ takav da je $\hat{p}(\alpha) = e_{\hat{G}}$, onda je $1 = [\hat{p}(\alpha)](x) = \alpha(p(x))$ za svaki $x \in G$. To znači da je $\alpha(a) = 1$ za svaki $a \in A$, dakle, $\alpha = e_{\hat{A}}$.

(2) Dokažimo sada da je $\hat{p}(\hat{A}) = H^\perp$. Doista, za $\alpha \in \hat{A}$ i $y \in H$ je

$$[\hat{p}(\alpha)](y) = \alpha(p(y)) = \alpha(e_A) = 1,$$

dakle, $\hat{p}(\alpha) \in H^\perp$. Neka je sada $\chi \in H^\perp$. Tada je $\chi(y) = 1 \ \ \forall y \in H$, dakle, $\chi(xy) = \chi(x) \ \ \forall x \in G$ i $\forall y \in H$. Sada iz zadatka 4.13. slijedi da postoji $\alpha \in \hat{A}$ takav da je $\chi = \alpha \circ p$, a to znači da je $\chi = \hat{p}(\alpha) \in \hat{p}(\hat{A})$.

Iz **(1)** i **(2)** slijedi da je $\hat{p}$ neprekidni bijektivni homomorfizam sa $\hat{A}$ na $H^\perp$.

(3) Dokažimo sada da je $\hat{p}$ izomorfizam topoloških grupa sa $\hat{A}$ na $H^\perp$. U tu svrhu treba još dokazati da je inverzno preslikavanje $H^\perp \to \hat{A}$ preslikavanja $\hat{p}$ neprekidno. Budući da je to preslikavanje homomorfizam grupa, dovoljno je dokazati njegovu neprekidnost u jedinici. Dakle, dovoljno je dokazati da za svaku okolinu U od $e_{\hat{A}}$ u $\hat{A}$ postoji okolina V od $e_{\hat{G}}$ u $\hat{G}$ takva da vrijedi

$$\alpha \in \hat{A}, \quad \hat{p}(\alpha) \in V \qquad \Longrightarrow \qquad \alpha \in U.$$

Neka je, dakle, U okolina od $e_{\hat{A}}$ u $\hat{A}$. Topologija na $\hat{A}$ je topologija lokalno uniformne konvergencije na A, dakle, postoje kompaktan podskup $K \subseteq A$ i $\varepsilon > 0$ takvi da vrijedi

$$\alpha \in \hat{A}, \quad |\alpha(a) - 1| \leq \varepsilon \quad \forall a \in K \qquad \Longrightarrow \qquad \alpha \in U.$$

Po tvrdnji (c) propozicije 4.4.7. postoji kompaktan skup $K_1 \subseteq G$ takav da je $p(K_1) = K$. Stavimo

$$V = \{\gamma \in \hat{G};\ |\gamma(x) - 1| \leq \varepsilon \ \ \forall x \in K_1\}.$$

Tada je V okolina od $e_{\hat{G}}$ u $\hat{G}$ i očito vrijedi

$$\alpha \in \hat{A}, \quad \hat{p}(\alpha) \in V \qquad \Longrightarrow \qquad |\alpha(p(x)) - 1| \leq \varepsilon \quad \forall x \in K_1 \qquad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \qquad |\alpha(a) - 1| \leq \varepsilon \quad \forall a \in p(K_1) = K \qquad \Longrightarrow \qquad \alpha \in U.$$

Time je dokazano da je $\hat{p} : \hat{A} \to H^\perp$ izomorfizam topoloških grupa.

(4) Dokažimo sada da je $\operatorname{Ker} \hat{i} = H^\perp$. Doista, za $\gamma \in \hat{G}$ imamo sljedeći slijed ekvivalencija:

$$\gamma \in H^\perp \qquad \Longleftrightarrow \qquad \gamma(y) = 1 \quad \forall x \in H \qquad \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \qquad (\gamma \circ i)(y) = 1 \quad \forall y \in H \qquad \Longleftrightarrow \qquad \hat{i}(\gamma) = e_{\hat{H}} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \gamma \in \operatorname{Ker} \hat{i}.$$

(5) Napokon, dokažimo da je $\hat{i}$ surjektivni striktni morfizam sa $\hat{G}$ na $\hat{H}$. Neka je B Abelova lokalno kompaktna grupa takva da je $\hat{G}/H^\perp = \hat{B}$, tj. u skladu s Pontrjaginovim teoremom B je dualna grupa od $\hat{G}/H^\perp$. Neka je $q : \hat{G} \to \hat{B}$ pripadni kanonski surjektivni striktni morfizam. Stavimo $\psi = \hat{q} : L \to G$. Tada je $q = \hat{\psi}$ i prema **(3)** ψ je injektivni striktni morfizam. Budući da je $\operatorname{Ker} \hat{i} = \operatorname{Ker} \hat{\psi}$, prema zadatku 4.13. postoji jedinstven homomorfizam $\eta : \hat{B} \to \hat{H}$ takav da je $\hat{i} = \eta \circ \hat{\psi}$. Neka je $\varphi = \hat{\eta} : H \to B$, tj. $\eta = \hat{\varphi}$. Tada je $\hat{i} = \hat{\varphi} \circ \hat{\psi}$, pa je $i = \psi \circ \varphi$.

Imamo

$$H = i(H) = \psi(\varphi(H)) \subseteq \psi(B).$$

Nadalje,

$$(\hat{\psi} \circ \hat{p})(\hat{A}) = \hat{\psi}(\hat{p}(\hat{A})) = \hat{\psi}(H^\perp) = \{e_{\hat{B}}\},$$

pa je $(p \circ \psi)(B) = \{e_A\}$, odnosno, $\psi(B) \subseteq \operatorname{Ker} p = H$. Dvije inkluzije pokazuju da je $\psi(B) = H$. Budući da je ψ injektivni striktni morfizam sa L u G, slijedi da je ψ izomorfizam topoloških grupa sa B na H. Kako je $i = \psi \circ \varphi$, iz činjenice da su $\psi : B \to H$ i $i : H \to H$ izomorfizmi topoloških grupa slijedi da je $\varphi : H \to B$ izomorfizam topoloških grupa, dakle, $\hat{\varphi} : \hat{B} \to \hat{H}$ je izomorfizam topoloških grupa. Time je dokazano da $\hat{i}$ inducira izomorfizam topoloških grupa sa $\hat{B} = \hat{G}/H^\perp = \hat{G}/\operatorname{Ker} \hat{i}$ na $\hat{H}$. Dakle, $\hat{i} : \hat{G} \to \hat{H}$ je surjektivni striktni morfizam.

Korolar 4.4.11. *Neka je G Abelova lokalno kompaktna grupa i $S \subseteq G$ podskup. Tada je $\left(S^\perp\right)^\perp$ zatvorena podgrupa od G generirana sa S (tj. najmanja zatvorena podgrupa koja sadrži skup S).*

Dokaz: Neka je H zatvorena podgrupa od G generirana skupom S. Upotrijebimo iznake iz prethodnog teorema i njegova dokaza. Tada je $\hat{i}$ surjektivni striktni morfizam $\hat{G}$ na $\hat{H}$ s jezgrom $H^\perp$, pa je $i = \hat{\hat{i}}$ izomorfizam sa $H = \hat{\hat{H}}$ na $\left(H^\perp\right)^\perp$. Budući da je i oznaka za preslikavanje inkluzije, zaključujemo da je $H = \left(H^\perp\right)^\perp$. Sada imamo:

$$S \subseteq H \qquad \Longrightarrow \qquad S^\perp \supseteq H^\perp \qquad \Longrightarrow \qquad \left(S^\perp\right)^\perp \subseteq \left(H^\perp\right)^\perp = H.$$

Budući da je $\left(S^\perp\right)^\perp$ zatvorena podgrupa od G koja očito sadrži skup S, vrijedi i obrnuta inkluzija $\left(S^\perp\right)^\perp \supseteq H$. Prema tome je $H = \left(S^\perp\right)^\perp$.

Jednostavna posljedica ovog korolara je:

Korolar 4.4.12. *Neka su S_i, $i \in I$, podskupovi Abelove lokalno kompaktne grupe G i $H_i = \left(S_i^\perp\right)^\perp$ zatvorena podgrupa od G generirana skupom S_i. Tada je $(\cup_{i\in I} S_i)^\perp = \cap_{i\in I} S_i^\perp$, a $(\cap_{i\in I} H_i)^\perp$ je zatvorena podgrupa od $\hat{G}$ generirana sa $\cup_{i\in I} S_i^\perp$.*

Korolar 4.4.13. *Neka je $\varphi : G \to H$ neprekidni homomorfizam Abelovih lokalno kompaktnih grupa. Sljedeća su dva svojstva međusobno ekvivalentna:*

(a) φ je striktni surjektivni morfizam.

(b) $\hat{\varphi}$ je striktni injektivni morfizam.

Dokaz: Implikacija $(a) \Rightarrow (b)$ je neposredna posljedica teorema 4.4.10.

Dokažimo sada implikaciju $(b) \Rightarrow (a)$. Pretpostavimo da je $\hat{\varphi}$ striktni injektivni morfizam. To znači da je $\hat{\varphi}$ izomorfizam grupe $\hat{G}$ na neku lokalno kompaktnu podgrupu, dakle, prema lemi 4.4.3. na zatvorenu podgrupu grupe $\hat{H}$. Primjena teorema 4.4.10. pokazuje da je tada φ surjektivni striktni morfizam.

Korolar 4.4.14. *Neka je $\varphi : G \to H$ neprekidni homomorfizam Abelovih lokalno kompaktnih grupa. Tada je φ striktni morfizam ako i samo ako je $\hat{\varphi}$ striktni morfizam.*

Dokaz: Dovoljno je dokazati jednu implikaciju zbog dualiteta $\hat{\hat{\varphi}} = \varphi$. Pretpostavimo da je φ striktni morfizam. Tada je $H_1 = \varphi(H)$ zatvorena podgrupa od H. Neka je $i : H_1 \to H$ monomorfizam inkluzije. Označimo sa $\varphi_0 : G \to H_1$ koji djeluje jednako kao φ. Kako je φ striktni morfizam, to je φ_0 striktni surjektivni morfizam. Prema korolaru 4.4.13. tada je $\hat{\varphi}_0 : \hat{H}_1 \to \hat{G}$ injektivni striktni morfizam. Nadalje, $i : H_1 \to H$ je injektivni striktni morfizam, pa je po istom korolaru $\hat{i} : \hat{H} \to \hat{H}_1$ surjektivni striktni morfizam. Imamo $\varphi = i \circ \varphi_0$, dakle, $\hat{\varphi} = \hat{\varphi}_0 \circ \hat{i}$. Kako je $\hat{i}$ surjektivni striktni morfizam i $\hat{\varphi}_0$ je injektivni striktni morfizam, dakle, izomorfizam na sliku, to je $\hat{\varphi} = \hat{\varphi}_0 \circ \hat{i}$ striktni morfizam.

Korolar 4.4.15. *Neka je $\varphi : G \to H$ neprekidni homomorfizam Abelovih lokalno kompaktnih grupa. Tada vrijedi*

$$Ker\,\hat{\varphi} = (Im\,\varphi)^\perp \qquad i \qquad (Ker\,\hat{\varphi})^\perp = Cl(Im\,\varphi).$$

Dakle, $\hat{\varphi}$ je injektivan ako i samo ako je $Im\,\varphi$ gusto u H.

Dokaz: Za $\chi \in \hat{H}$ vrijedi sljedeći slijed ekvivalencija:

$$\chi \in \operatorname{Ker}\hat{\varphi} \quad \Longleftrightarrow \quad [\hat{\varphi}(\chi)](x) = 1 \quad \forall x \in G \quad \Longleftrightarrow \quad \chi(\varphi(x)) = 1 \quad \forall x \in G \quad \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \quad \chi|\varphi(G) \equiv 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \chi \in (\operatorname{Im}\varphi)^\perp.$$

Dakle je $\operatorname{Ker}\hat{\varphi} = (\operatorname{Im}\varphi)^\perp$. Druga jednakost slijedi primjenom $\perp$ zbog korolara 4.4.11.

Za Abelovu lokalno kompaktnu grupu G i za $k \in \mathbb{Z}$ definiramo

$$G^{(k)} = \{x^k;\ x \in G\} \qquad \text{i} \qquad G_{(k)} = \{x \in G;\ x^k = e\}.$$

Korolar 4.4.16. *Za Abelovu lokalno kompaktnu grupu G i za $k \in \mathbb{Z}$ vrijedi*

$$\big(G^{(k)}\big)^\perp = \hat{G}_{(k)}, \qquad \big(\hat{G}^{(k)}\big)^\perp = G_{(k)}, \qquad \big(G_{(k)}\big)^\perp = Cl\big(\hat{G}^{(k)}\big) \qquad i \qquad \big(\hat{G}_{(k)}\big)^\perp = Cl\big(G^{(k)}\big).$$

Dokaz: Definiramo $\varphi_k : G \to G$ sa

$$\varphi_k(x) = x^k, \qquad x \in G.$$

Tada za $\hat{\varphi}_k : \hat{G} \to \hat{G}$ i za $\chi \in \hat{G}$ i $x \in G$ imamo

$$[\hat{\varphi}_k(\chi)](x) = \chi(\varphi_k(x)) = \chi(x^k) = [\chi(x)]^k = \chi^k(x).$$

Dakle,

$$\hat{\varphi}_k(\chi) = \chi^k, \qquad \chi \in \hat{G}.$$

Sada tvrdnje slijede iz korolara 4.4.15. jer je

$$\operatorname{Ker} \varphi_k = G_{(k)}, \qquad \operatorname{Ker} \hat{\varphi}_k = \hat{G}_{(k)}, \qquad \operatorname{Im} \varphi_k = G^{(k)} \qquad \text{i} \qquad \operatorname{Im} \hat{\varphi}_k = \hat{G}^{(k)}.$$

Za Abelovu grupu G kažemo da je **bez torzije** ako je $G_{(k)} = \{e\}\ \ \forall k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, tj. ako vrijedi

$$k \in \mathbb{Z}, \quad x \in G, \quad x^k = e \qquad k = 0 \quad \text{ili} \quad x = e.$$

Za Abelovu grupu G kažemo da je **djeljiva** ako je $G^{(k)} = G\ \ \forall k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, tj. ako vrijedi

$$x \in G, \quad k \in \mathbb{Z} \qquad \Longrightarrow \qquad \exists\, y \in G \text{ takav da je } x = y^k.$$

Korolar 4.4.17. *Neka je G Abelova lokalno kompaktna grupa.*

(*a*) *Ako je grupa G djeljiva, onda je njoj dualna grupa $\hat{G}$ bez torzije.*

(*b*) *Ako je dualna grupa $\hat{G}$ bez torzije, onda je podgrupa $G^{(k)}$ gusta u grupi $G\ \ \forall k \in \mathbb{Z}$.*

(*c*) *Pretpostavimo da je grupa G ili diskretna ili kompaktna. Tada je G djeljiva ako i samo ako je $\hat{G}$ bez torzije.*

Dokaz: Tvrdnje (a) i (b) su neposredne posljedice korolara 4.4.16. Ukoliko je grupa G diskretna ili kompaktna, onda je $G^{(k)}$ zatvorena podgrupa od G za svaki $k \in \mathbb{Z}$, pa tvrdnja (c) slijedi iz tvrdnji (a) i (b).

Propozicija 4.4.18. *Neka je G Abelova lokalno kompaktna grupa. Grupa G je kompaktna ako i samo ako je grupa $\hat{G}$ diskretna. Pretpostavimo da je tako i neka je μ normirana Haarova mjera na G, tj. $\mu(1_G) = 1$, $1_G(x) = 1\ \ \forall x \in G$. Tada je*

$$\hat{\mu}(f) = \sum_{\chi \in Supp\, f} f(\chi), \qquad f \in C_0(\hat{G}).$$

Dokaz: Pretpostavimo najprije da je grupa G kompaktna. Stavimo

$$V = \{\chi \in \hat{G};\ |\chi(x) - 1| \leq 1 \ \ \forall x \in G\}.$$

Budući da grupa G kompaktna, primjenom leme 1.2.1. zaključujemo da je V okolina jedinice $\varepsilon = e_{\hat{G}}$ u grupi $\hat{G}$. Sada je

$$|\chi(x)^k - 1| = |\chi(x^k) - 1| \leq 1 \qquad \forall \chi \in V, \quad \forall x \in G, \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

No za $\lambda \in T$ vrijedi $|\lambda^k - 1| \leq 1 \ \ \forall k \in \mathbb{Z}$ ako i samo ako je $\lambda = 1$. Dakle,

$$\chi(x) = 1 \qquad \forall \chi \in V, \quad \forall x \in G.$$

Drugim riječima, $V = \{\varepsilon\}$ i time je dokazano da grupa $\hat{G}$ diskretna.

Pretpostavimo sada da je grupa $\hat{G}$ diskretna i neka je μ Haarova mjera na G takva da je

$$\hat{\mu}(f) = \sum_{\chi \in Supp\, f} f(\chi) = \sum_{\chi \in \hat{G}} f(\chi), \qquad f \in C_0(\hat{G}).$$

Neka je $f \in C_0(\hat{G})$ zadana sa $f(\varepsilon) = 1$ i $f(\chi) = 0$ za $\chi \neq \varepsilon$. Za svaki $x \in G$ je tada

$$(\mathcal{F}_{\hat{G}} f)(x) = \int_{\hat{G}} \overline{\chi(x)} f(\chi) \mathrm{d}\hat{\mu}(\chi) = \overline{\varepsilon(x)} = 1.$$

Međutim, $\mathcal{F}_{\hat{G}} f \in C_\infty(G)$ pa slijedi $1_G \in C_\infty(G)$, a to je moguće samo ako je grupa G kompaktna.

Treba još ustanoviti da je Haarova mjeru $\mu = \hat{\hat{\mu}}$ na grupi G normirana, tj. da je $\mu(1_G) = 1$. Doista, vidjeli smo da je $1_G = \mathcal{F}_{\hat{G}} f$ za gore definiranu funkciju f. Stoga imamo

$$\mu(1_G) = \mu(\mathcal{F}_{\hat{G}} f) = \mu\left(|\mathcal{F}_{\hat{G}} f|^2\right) = \|\mathcal{F}_{\hat{G}} f\|^2_{L_2(G,\mu)} = \|f\|^2_{L_2(\hat{G},\hat{\mu})} = \hat{\mu}\left(|f|^2\right) = \sum_{\chi \in \hat{G}} |f(\chi)|^2 = 1.$$

Korolar 4.4.19. *Neka je G Abelova lokalno kompaktna grupa i H njena zatvorena podgrupa. Grupa H je kompaktna ako i samo ako je $H^\perp$ otvorena podgrupa od $\hat{G}$.*

Dokaz: Doista, otvorenost zatvorene podgrupe je nužna i dovoljna da bi kvocijentna grupa bila diskretna. Dakle, zbog teorema 4.4.10. i prethodne propozicije imamo sljedeći slijed ekvivalencija:

$$H^\perp \text{ otvorena} \iff \hat{G}/H^\perp \text{ diskretna} \iff \hat{H} \text{ diskretna} \iff H \text{ kompaktna.}$$

Na koncu ove točke dokazat ćemo da je u slučaju nediskretnog lokalno kompaktnog tijela njegova aditivna grupa samodualna.

Teorem 4.4.20. *Neka je K lokalno kompaktno nediskretno tijelo. Neka je $G = (K, +)$ njegova aditivna grupa i neka je $\chi \in \hat{G}$ netrivijalan karakter, $\chi \not\equiv 1$. Za $y \in G$ definiramo $\chi_y : G \to T$ sa $\chi_y(x) = \chi(xy)$, $x \in G$. Tada je $y \mapsto \chi_y$ izomorfizam topoloških grupa sa G na $\hat{G}$.*

Dokaz ćemo provesti rješavanjem niza zadataka.

Zadatak 4.14. *Dokažite da je $\chi_y \in \hat{G}$ za svaki $y \in G$.*

U daljnjem preslikavanje $y \mapsto \chi_y$ sa G u $\hat{G}$ označavamo sa ϑ.

Zadatak 4.15. *Dokažite da je $\vartheta : G \to \hat{G}$ homomorfizam grupa.*

Neka je u daljnjem $|\cdot|$ apsolutna vrijednost na tijelu K koja definira topologiju od K. Tada vrijedi

$$|x| \geq 0 \quad \forall x \in K,$$

$$x \neq 0 \implies |x| > 0,$$

$$|xy| = |x| \cdot |y| \quad \forall x, y \in K,$$

$$|x+y| \leq |x| + |y| \quad \forall x, y \in K.$$

Baza okolina nule u K (odnosno, baza okolina jedinice u G) tada je sastavljena od skupova

$$V_M = \{x \in G;\ |x| \leq M\}, \qquad M > 0,$$

i sve su te okoline kompaktne. Za $\varepsilon > 0$, $\varepsilon \leq 1$, i za $M > 0$ stavimo

$$U(\varepsilon, M) = \{\varphi \in \hat{G};\ |\varphi(x) - 1| \leq \varepsilon \quad \forall x \in V_M\}.$$

Tada skupovi $U(\varepsilon, M)$, $0 < \varepsilon \leq 1$, $M > 0$, tvore bazu okolina jedinice u $\hat{G}$.

Zadatak 4.16. *Dokažite da je homomorfizam $\vartheta : G \to \hat{G}$ neprekidan.*

Uputa: Dovoljno je dokazati neprekidnost u jedinici $e_G = 0$ grupe G. U tu svrhu za $\varepsilon > 0$, $\varepsilon \leq 1$, i za $M > 0$ izaberite $\delta > 0$ tako da vrijedi

$$z \in V_\delta \qquad \implies \qquad |\chi(z) - 1| \leq \varepsilon.$$

Uz oznaku $\eta = \dfrac{\delta}{M}$ dokažite da je $\vartheta(V_\eta) \subseteq U(\varepsilon, M)$.

Zadatak 4.17. *Dokažite da je ϑ injekcija.*

Zadatak 4.18. *Dokažite da je $\vartheta(G)$ gusta podgrupa od $\hat{G}$.*

Uputa: Koristite korolar 4.4.11.

Dokažimo sada da je $\vartheta : G \to \vartheta(G)$ homeomorfizam. Uz prije uvedene oznake treba dokazati da za svaki $\varepsilon > 0$, $\varepsilon \leq 1$, i svaki $M > 0$ postoji $\delta > 0$ takav da je $\vartheta^{-1}(U(\varepsilon, M)) \subseteq V_\delta$. Neka su, dakle, zadani $0 < \varepsilon \leq 1$ i $M > 0$. Podgrupa $\{\chi(x);\ x \in G\}$ grupe T različita je od $\{1\}$, pa postoji $x_0 \in G$ takav da je $|\chi(x_0) - 1| > \varepsilon$. Stavimo $\delta = M^{-1}|x_0| > 0$. Neka je $y \in \vartheta^{-1}(U(\varepsilon, M))$. Ako je $y = 0$, očito je $y \in V_\delta$. Pretpostavimo da je $y \neq 0$. Tada je

$$|\chi_y(x) - 1| \leq \varepsilon \qquad \forall x \in V_M.$$

Sada imamo redom

$$|\chi(x_0) - 1| > \varepsilon \qquad \implies \qquad |\chi_y(x_0 y^{-1}) - 1| > \varepsilon \qquad \implies \qquad x_0 y^{-1} \notin V_M \qquad \implies$$

$$\implies \qquad |x_0 y^{-1}| > M \qquad \implies \qquad |y| < M^{-1}|x_0| = \delta \qquad \implies \qquad y \in V_\delta.$$

Dakle je $\vartheta^{-1}(U(\varepsilon, M)) \subseteq V_\delta$.

Sada iz zadatka 4.18. i iz leme 4.4.3. slijedi $\vartheta(G) = \hat{G}$, pa je zbog zadataka 4.15., 4.16. i 4.17. ϑ izomorfizam topoloških grupa.

4.5 Mjere na kvocijentnim prostorima

Materijal prvog dijela ove točke nije vezan isključivo za Abelove, nego za proizvoljne lokalno kompaktne grupe i ima važnu ulogu u teoriji unitarnih reprezentacija općih lokalno kompaktnih grupa. Neka je G lokalno kompaktna grupa i H njena zatvorena podgrupa. Neka je ν desna Haarova mjera na grupi H. Za $f \in C_0(G)$ definiramo neprekidnu funkciju $F : G \to \mathbb{C}$ sa

$$F(x) = \int_H f(yx) \mathrm{d}\nu(y), \qquad x \in G.$$

Za $x \in G$ i $z \in H$ iz desne invarijantnosti mjere ν slijedi da je $F(zx) = F(x)$. Prema tome postoji jedinstvena funkcija $f_\nu : H \backslash G \to \mathbb{C}$ takva da je $f_\nu(p(x)) = F(x),\ x \in G$. Pri tome smo sa $p : G \to H\backslash G$ označili kanonsku surjekciju, $p(x) = Hx,\ x \in G$. Dakle,

$$f_\nu(p(x)) = \int_H f(yx) \mathrm{d}\nu(y), \qquad x \in G, \quad f \in C_0(G).$$

Funkcija $f_\nu \circ p = F$ je neprekidna, pa je prema tvrdnji (d) propozicije 4.4.7. i funkcija f_ν neprekidna. Nadalje, ako je $f_\nu(p(x)) \neq 0$, onda je nužno $f(yx) \neq 0$ za neku točku $y \in H$, dakle je $x \in H \cdot (Supp\, f)$, pa slijedi $p(x) \in p(Supp\, f)$. Time smo dokazali da je $Supp\, f_\nu \subseteq p(Supp\, f)$. Posebno je $f_\nu \in C_0(H\backslash G)$. Očito je $f \mapsto f_\nu$ linearan operator sa $C_0(G)$ u $C_0(H\backslash G)$, koji preslikava $C_0^+(G)$ u $C_0(H\backslash G)$.

Neka je sada $\varphi \in C_0^+(H\backslash G)$ i stavimo $K = Supp\, \varphi$. Prema tvrdnji (c) propozicije 4.4.7. postoji kompaktan skup $K_1 \subseteq G$ takav da je $p(K_1) = K$. Neka je $g \in C_0^+(G)$ takva da je $g(x) > 0$ $\forall x \in K_1$. Neka je $x \in HK_1$. Tada je $yx \in K_1$ za neki $y \in H$, dakle je $g(yx) > 0$ za neki $y \in H$. No tada je $g_\nu(p(x)) > 0$. Dakle, vrijedi.

$$x \in HK_1 \qquad \Longrightarrow \qquad g_\nu(p(x)) > 0.$$

S druge strane,

$$x \in G \setminus HK_1 \qquad \Longrightarrow \qquad p(x) \in (H\backslash G) \setminus p(K_1) = (H\backslash G) \setminus K \qquad \Longrightarrow \qquad \varphi(p(x)) = 0.$$

Definirajmo $\psi : G \to \mathbb{C}$ sa

$$\psi(x) = \begin{cases} \dfrac{\varphi(p(x))}{g_\nu(p(x))} & \text{ako je } g_\nu(p(x)) > 0 \\ 0 & \text{ako je } g_\nu(p(x)) = 0. \end{cases}$$

Stavimo

$$U_1 = G \setminus HK_1 \qquad \text{i} \qquad U_2 = \{x \in G;\ g_\nu(p(x)) > 0\}.$$

U_1 i U_2 su otvoreni podskupovi od G i prema dokazanom je $G = U_1 \cup U_2$. Budući da je $\varphi(p(x)) = 0$ za svaki $x \in U_1$, vrijedi $\psi|U_1 = 0$. Posebno, restrikcija $\psi|U_1$ je neprekidna. Očito je i restrikcija $\psi|U_2$ neprekidna. Prema tome, $\psi : G \to \mathbb{C}$ je neprekidna funkcija.

Uočimo sada da vrijedi

$$\varphi(p(x)) = \psi(x) g_\nu(p(x)) \qquad \forall x \in G.$$

Doista, ako je $x \in U_1$, onda je $\varphi(p(x)) = 0 = \psi(x) g_\nu(p(x))$, a ako je $x \in U_2$, onda jednakost slijedi neposredno iz definicije funkcije ψ. Nadalje, vrijedi

$$\psi(yx) = \psi(x) \qquad \forall y \in H, \quad \forall x \in G.$$

Definiramo $f = \psi g \in C_0^+(G)$. Imamo tada

$$f_\nu(p(x)) = \int_H g(yx)\psi(yx)\mathrm{d}\nu(y) = \psi(x)g_\nu(p(x)) = \varphi(p(x)).$$

Dakle, vrijedi $\varphi = f_\nu$. Budući da je prostor $C_0(H\backslash G)$ razapet s konusom $C_0^+(H\backslash G)$, dokazali smo:

Propozicija 4.5.1. *Uz uvedene oznake $f \mapsto f_\nu$ je linearna surjekcija sa $C_0(G)$ na $C_0(H\backslash G)$. Nadalje, vrijedi*

$$C_0^+(H\backslash G) = \{f_\nu;\ f \in C_0^+(G)\}.$$

Napokon, za svaku $f \in C_0(G)$ je $Supp\, f_\nu \subseteq p(Supp\, f)$.

Neka je sada $m \in \mathfrak{M}(H\backslash G)$. Definiramo preslikavanje $\nu m : C_0(G) \to \mathbb{C}$ sa

$$(\nu m)(f) = m(f_\nu), \qquad f \in C_0(G).$$

Tada je νm linearan funkcional na prostoru $C_0(G)$. Ako je $m \in \mathfrak{M}^+(H\backslash G)$, tada je $(\nu m)(f) = m(f_\nu) \geq 0$ za svaki $f \in C_0^+(G)$. Prema tome je $\nu m \in \mathfrak{M}^+(G)$. Budući da je preslikavanje $m \mapsto \nu m$ očito linearno i budući da konus $\mathfrak{M}^+(H\backslash G)$ razapinje prostor $\mathfrak{M}(H\backslash G)$, zaključujemo da je $\nu m \in \mathfrak{M}(G)\ \ \forall m \in \mathfrak{M}(H\backslash G)$. Dakle, $m \mapsto \nu m$ je linearan operator sa $\mathfrak{M}(H\backslash G)$ u $\mathfrak{M}(G)$. Kako je $f \mapsto f_\nu$ surjekcija sa $C_0(G)$ na $C_0(H\backslash G)$, to je $m \mapsto \nu m$ injekcija sa $\mathfrak{M}(H\backslash G)$ u $\mathfrak{M}(G)$.

Sa Δ_H označavamo modularnu funkciju grupe H. Za $y \in H$ i $f \in C_0(G)$ izvodimo

$$(\lambda_y f)_\nu(p(x)) = \int_H f(y^{-1}zx)\mathrm{d}\nu(z) = \Delta_H(y^{-1}) \int_H f(zx)\mathrm{d}\nu(z) = \Delta_H(y^{-1})f_\nu(p(x)).$$

Dakle,

$$(\lambda_y f)_\nu = \Delta_H(y^{-1})f_\nu, \qquad y \in H, \quad f \in C_0(G).$$

Dakle, imamo

$$[\lambda_y(\nu m)](f) = (\nu m)(\lambda_{y^{-1}} f) = \Delta_H(y)(\nu m)(f),$$

tj.

$$\lambda_y(\nu m) = \Delta_H(y)(\nu m), \qquad y \in H, \quad m \in \mathfrak{M}(H\backslash G).$$

Pretpostavimo sada da $\omega \in \mathfrak{M}(G)$ ima svojstvo

$$\lambda_y \omega = \Delta_H(y)\omega \qquad \forall y \in H.$$

Neka je $f \in C_0(G)$ u jezgri preslikavanja $f \mapsto f_\nu$, tj. $f_\nu = 0$. Izaberimo $\psi \in C_0^+(H\backslash G)$ takvu da je $\psi|p(Supp\, f) = 1$. Neka je $\varphi \in C_0^+(G)$ takva da je $\varphi_\nu = \psi$. Tada vrijedi

$$x \in G, \quad f(x) \neq 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \varphi_\nu(p(x)) = 1.$$

Stoga imamo redom

$$\omega(f) = \int_G f(x)\varphi_\nu(p(x))\mathrm{d}\omega(x) = \int_G f(x) \left[\int_H \varphi(yx)\mathrm{d}\nu(y)\right] \mathrm{d}\omega(x) =$$

$$= \int_H \left[\int_G f(x)\varphi(yx)\mathrm{d}\omega(x)\right] \mathrm{d}\nu(y) = \int_H \left[\int_G f(x)\varphi(yx)\frac{1}{\Delta_H(y^{-1})}\mathrm{d}(\lambda_{y^{-1}}\omega)(x)\right] \mathrm{d}\nu(y) =$$

$$= \int_H \left[\int_G f(y^{-1}x)\varphi(x)\Delta_H(y)\mathrm{d}\omega(x)\right] \mathrm{d}\nu(y) = \int_G \varphi(x) \left[\int_H f(y^{-1}x)\Delta_H(y)\mathrm{d}\nu(y)\right] \mathrm{d}\omega(x) =$$

$$= \int_G \varphi(x) \left[\int_H f(yx)\mathrm{d}\nu(y)\right] \mathrm{d}\omega(x) = \int_G \varphi(x)f_\nu(p(x))\mathrm{d}\omega(x) = 0.$$

Prema tome, linearan funkcional $\omega : C_0(G) \to \mathbb{C}$ poništava se na jezgri linearnog operatora $f \mapsto f_\nu$. Stoga postoji jedinstven linearan funkcional $m : C_0(H\backslash G) \to \mathbb{C}$ takav da je

$$\omega(f) = m(f_\nu) \qquad \forall f \in C_0(G).$$

Pretpostavimo sada da je $\omega \in \mathfrak{M}^+(G)$. Za $\varphi \in C_0^+(H\backslash G)$ izaberemo $f \in C_0^+(G)$ tako da bude $f_\nu = \varphi$. Tada je $m(\varphi) = \omega(f) \geq 0$. dakle, tada je $m \in \mathfrak{M}^+(H\backslash G)$. Vrijedi i obratno: ako je $m \in \mathfrak{M}^+(H\backslash G)$, onda je $\omega(f) = m(f_\nu) \geq 0 \;\; \forall f \in C_0^+(G)$, dakle, $\omega \in \mathfrak{M}^+(G)$.

Neka je sada opet $\omega \in \mathfrak{M}(G)$ takva da je $\lambda_y \omega = \Delta_H(y^{-1})\omega \;\; \forall y \in H$. Stavimo tada

$$\omega_1 = (\mathrm{Re}\,\omega)^+, \qquad \omega_2 = (\mathrm{Re}\,\omega)^-, \qquad \omega_3 = (\mathrm{Im}\,\omega)^+, \qquad \omega_4 = (\mathrm{Im}\,\omega)^-.$$

Tada je očito $\lambda_y \omega_j = \Delta_H(y)\omega_j \;\; \forall y \in H$ i za $j = 1,2,3,4$. Neka su m, m_1, m_2, m_3, m_4 linearni funkcionali na prostoru $C_0(H\backslash G)$ takvi da je

$$m(f_\nu) = \omega(f), \qquad m_j(f_\nu) = \omega_j(f), \qquad f \in C_0(G), \quad j = 1,2,3,4.$$

Prema gornjem tada su $m_1, m_2, m_3, m_4 \in \mathfrak{M}^+(H\backslash G)$. Dakle, $m = m_1 - m_2 + im_3 - im_4 \in \mathfrak{M}(H\backslash G)$.

Napokon, očito je $\nu m = \omega$. Time smo dokazali:

Propozicija 4.5.2. *$m \mapsto \nu m$ je izomorfizam vektorskog prostora $\mathfrak{M}(H\backslash G)$ na potprostor*

$$\{\omega \in \mathfrak{M}(G);\; \lambda_y \omega = \Delta_H(y)\omega \;\; \forall y \in H\}$$

prostora $\mathfrak{M}(G)$. Taj izomorfizam preslikava konus $\mathfrak{M}^+(H\backslash G)$ na skup

$$\{\omega \in \mathfrak{M}^+(G);\; \lambda_y \omega = \Delta_H(y)\omega \;\; \forall y \in H\}$$

Ako je mjera $\omega \in \mathfrak{M}(G)$ takva da je $\lambda_y \omega = \Delta_H(y)\omega \;\; \forall y \in H$, za jedinstvenu mjeru $m \in \mathfrak{M}(H\backslash G)$ takvu da je $\nu m = \omega$ pisat ćemo $m = \dfrac{\omega}{\nu}$.

Propozicija 4.5.3. *Neka je H normalna zatvorena podgrupa lokalno kompaktne grupe G, neka je ν desna Haarova mjera na H i neka je m desna Haarova mjera na $H\backslash G = G/H$. Tada je νm desna Haarova mjera na G.*

Dokaz: Za $f \in C_0(G)$ i $x, y \in G$ imamo

$$(\rho_x f)_\nu(p(y)) = \int_H (\rho_x f)(zy)\mathrm{d}\nu(z) = \int_H f(zyx)\mathrm{d}\nu(z) = f_\nu(p(yx)) = f_\nu(p(y)p(x)) = \rho_{p(x)} f_\nu(p(y)).$$

Dakle, $(\rho_x f)_\nu = \rho_{p(x)} f_\nu$, pa slijedi

$$(\rho_x(\nu m))(f) = (\nu m)(\rho_{x^{-1}} f) = m\left((\rho_{x^{-1}} f)_\nu\right) = m(\rho_{p(x)^{-1}} f_\nu) = (\rho_{p(x)} m)(f_\nu) = m(f_\nu) = (\nu m)(f).$$

Dakle je $\rho_x(\nu m) = \nu m \;\; \forall x \in G$. Time je propozicija dokazana.

Drugim riječima, u opisanoj situaciji je sa

$$\int_G f(x)\mathrm{d}\mu(x) = \int_{H\backslash G} \left[\int_H f(yx)\mathrm{d}\nu(y)\right] \mathrm{d}m(p(x)), \qquad f \in C_0(G),$$

zadana desna Haarova mjera μ na G.

Vratimo sa sada na Abelove lokalno kompaktne grupe. Tada je svaka zatvorena podgrupa normalna. Nadalje, Abelove grupe su unimodularne.

Teorem 4.5.4. *Neka je G Abelova lokalno kompaktna grupa, H njena zatvorena podgrupa, μ Haarova mjera na G i ν Haarova mjera na H. Tada je $m = \frac{\mu}{\nu}$ Haarova mjera na G/H. Nadalje, za dualne mjere $\hat{\mu}$, $\hat{\nu}$ i $\hat{m}$ uz identifikacije $\hat{H} = \hat{G}/H^\perp$ i $(G/H)\hat{} = H^\perp$ vrijedi $\hat{\nu} = \frac{\hat{\mu}}{\hat{m}}$.*

Dokaz: Neka je $f \in C_0(G)$, $f \neq 0$. Definiramo $\varphi : G \times \hat{G} \to \mathbb{C}$ sa

$$\varphi(x, \gamma) = \int_H f(yx)\gamma(y)\mathrm{d}\nu(y), \qquad (x, \gamma) \in G \times \hat{G}.$$

Lako se provjeri da je funkcija φ neprekidna. Nadalje, za $x \in G$ definiramo $F_x : H \to \mathbb{C}$ sa

$$F_x(y) = f(yx), \qquad y \in H.$$

Tada je očito $F_x \in C_0(H)$. Neka je $\hat{\iota} : \hat{G} \to \hat{G}/H^\perp = \hat{H}$ kanonska surjekcija. Za $\gamma \in \hat{G}$ imamo

$$\left(\overline{\mathcal{F}}_H F_x\right)(\hat{\iota}(\gamma)) = \int_H [\hat{\iota}(\gamma)](y) F_x(y)\mathrm{d}\nu(y) = \int_H \gamma(y) f(yx)\mathrm{d}\nu(y) = \varphi(x, \gamma).$$

Posebno, za fiksno $x \in G$ preslikavanje $\gamma \mapsto \varphi(x, \gamma)$ je konstantno na svakoj $H^\perp-$klasi $\hat{\iota}(\gamma) = \gamma H^\perp$. Nadalje, iz Plancherelovog teorema slijedi

$$\int_{\hat{G}/H^\perp} |\varphi(x, \gamma)|^2 \mathrm{d}\hat{\nu}(\hat{\iota}(\gamma)) = \int_H |f(yx)|^2 \mathrm{d}\nu(y), \qquad x \in G. \tag{4.1}$$

Za $x \in G$, $y \in H$ i $\gamma \in \hat{G}$ imamo

$$\gamma(yx)\varphi(yx, \gamma) = \gamma(y)\gamma(x) \int_H f(zyx)\gamma(z)\mathrm{d}\nu(z) =$$

$$= \gamma(x) \int_H f(zyx)\gamma(zy)\mathrm{d}\nu(z) = \gamma(x) \int_H f(zx)\gamma(z)\mathrm{d}\nu(z) = \gamma(x)\varphi(x, \gamma).$$

Dakle, za svako $\gamma \in \hat{G}$ možemo definirati funkciju $\Phi_\gamma \in C_0(G/H)$ sa

$$\Phi_\gamma(p(x)) = \gamma(x)\varphi(x, \gamma), \qquad x \in G.$$

Pri tome je $p : G \to G/H$ kanonski epimorfizam koji daje identifikaciju $\hat{p} : (G/H)\hat{} \to H^\perp$. $\overline{\mathcal{F}}_{G/H}\Phi_\gamma$ je funkcija na $(G/H)\hat{} = H^\perp$ dana za bilo koji $\eta \in H^\perp$ sa

$$\left(\overline{\mathcal{F}}_{G/H}\Phi_\gamma\right)(\eta) = \int_{G/H} \eta(p(x))\gamma(x)\varphi(x, \gamma)\mathrm{d}m(p(x)) =$$

$$= \int_{G/H} (\eta\gamma)(x) \left[\int_H f(yx)\gamma(y)\mathrm{d}\nu(y)\right] \mathrm{d}m(p(x)) = \int_{G/H} \left[\int_H (\eta\gamma)(yx) f(yx)\mathrm{d}\nu(y)\right] \mathrm{d}m(p(x)) =$$

$$= \int_G (\eta\gamma)(x) f(x)\mathrm{d}\mu(x) = \left(\overline{\mathcal{F}}_G f\right)(\eta\gamma).$$

Po Plancherelovom teoremu dobivamo

$$\int_{G/H} |\varphi(x, \gamma)|^2 \mathrm{d}m(p(x)) = \int_{H^\perp} \left|\left(\overline{\mathcal{F}}_G f\right)(\eta\gamma)\right|^2 \mathrm{d}\hat{m}(\eta), \qquad \gamma \in \hat{G}. \tag{4.2}$$

Sada imamo redom

$$
\begin{aligned}
\int_{\hat{G}} \left|\left(\mathcal{F}_G f\right)(\gamma)\right|^2 \mathrm{d}\hat{\mu}(\gamma) &= \int_G |f(x)|^2 \mathrm{d}\mu(x) = && \text{Plancherel} \\
&= \int_{G/H} \left[\int_H |f(yx)|^2 \mathrm{d}\nu(y)\right] \mathrm{d}m(p(x)) = && \text{jer je } \mu = \nu m \\
&= \int_{G/H} \left[\int_{\hat{G}/H^\perp} |\varphi(x,\gamma)|^2 \mathrm{d}\hat{\nu}(\hat{\imath}(\gamma))\right] \mathrm{d}m(p(x)) = && \text{zbog (4.1)} \\
&= \int_{\hat{G}/H^\perp} \left[\int_G /H |\varphi(x,\gamma)|^2 \mathrm{d}m(p(x))\right] \mathrm{d}\hat{\nu}(\hat{\imath}(\gamma)) = && \text{Fubini} \\
&= \int_{\hat{G}/H^\perp} \left[\int_{H^\perp} \left|\left(\mathcal{F}_G f\right)(\eta\gamma)\right|^2 \mathrm{d}\hat{m}(\eta)\right] \mathrm{d}\hat{\nu}(\hat{\imath}(\gamma)) = && \text{zbog (4.2)} \\
&= \int_{\hat{G}} \left|\left(\mathcal{F}_G f\right)(\gamma)\right|^2 \mathrm{d}(\hat{m}\hat{\nu})(\gamma) && \text{po definiciji } \hat{m}\hat{\nu}.
\end{aligned}
$$

Budući da su $\hat{\mu}$ i $\hat{m}\hat{\nu}$ Haarove mjere na $\hat{G}$, zbog $f \neq 0$ slijedi $\hat{\mu} = \hat{m}\hat{\nu}$, tj. $\hat{\nu} = \dfrac{\hat{\mu}}{\hat{m}}$.

Propozicija 4.5.5. *Neka je $G = (\mathbb{R}, +)$ i μ Lebesgueova mjera na $\mathbb{R}$ (tj. Haarova mjera na G takva da je $\mu([0,1]) = 1$). Za $a \in \mathbb{R}$ definiramo $\chi_a : G \to T$ sa*

$$\chi_a(b) = e^{2\pi i a b}, \qquad b \in \mathbb{R}.$$

Tada je $a \mapsto \chi_a$ izomorfizam topoloških grupa sa G na $\hat{G}$, pri kojem μ prelazi u $\hat{\mu}$.

Dokaz: Prva je tvrdnja neposredna posljedica teorema 4.4.20. To je također i tvrdnja iz zadatka 4.2. $\vartheta : a \mapsto \chi_a$ je izomorfizam topoloških grupa sa G na $\hat{G}$. Identificiramo G sa $\hat{G}$ pomoću tog izomorfizma ϑ. Imamo identifikaciju $T = G/\mathbb{Z}$, pa je po teoremu 4.4.10.

$$\hat{T} = \mathbb{Z}^\perp = \{a \in G;\ \mathrm{e}^{2\pi i a n} = 1 \ \ \forall n \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{Z}$$

i

$$\hat{\mathbb{Z}} = \hat{G}/\mathbb{Z}^\perp = G/\mathbb{Z} = T;$$

Napominjemo da su te dvije jednakosti upravo tvrdnje zadataka 4.3. i 4.4.

Neka je μ Lebesgueova mjera na $G\ (= \mathbb{R})$. Nadalje, neka je ν Haarova mjera na aditivnoj grupi $\mathbb{Z}$ definirana sa $\nu(f) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n)$. Napokon, neka je σ normirana Haarova mjera na kompaktnoj grupi $T = G/\mathbb{Z}$. Tada je očito $\sigma = \dfrac{\mu}{\nu}$. Po propoziciji 4.4.18. tada je $\hat{\sigma} = \nu$ i $\hat{\nu} = \sigma$. Nadalje, po teoremu 4.5.4. je $\hat{\nu} = \dfrac{\hat{\mu}}{\hat{\sigma}}$, pa je

$$\frac{\mu}{\nu} = \sigma = \hat{\nu} = \frac{\hat{\mu}}{\hat{\sigma}} = \frac{\hat{\mu}}{\nu}.$$

Dakle, $\hat{\mu} = \mu$.

Poglavlje 5

Reprezentacije kompaktnih grupa

5.1 Egzistencija ireducibilnih unitarnih reprezentacija

Teorem 5.1.1. (**Geljfand−Raikov**) *Neka je G lokalno kompaktna grupa, $x \in G$, $x \neq e$. Postoji ireducibilna unitarna reprezentacija π od G na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$ takva da je $\pi(x) \neq I = id_{\mathcal{H}}$.*

Taj fundamentalni teorem ne dokazujemo detaljno nego samo skiciramo korake u dokazu.

(1) Neka je $\mathcal{A}$ C^*−algebra. Linearni funkcional $f : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ zove se pozitivan ako je $f(x^*x) \geq 0$ $\forall x \in \mathcal{A}$. Svaki je takav funkcional neprekidan. Označimo sa $\mathcal{P}$ skup svih pozitivnih funkcionala na $\mathcal{A}$ norme ≤ 1. Tada je očito $\mathcal{P}$ slabo*−zatvoren podskup jedinične kugle u dualnom prostoru $\mathcal{A}'$, dakle sa slabom*−topologijom je $\mathcal{P}$ kompaktan Hausdorffov topološki prostor. Nadalje, $\mathcal{P}$ je konveksan podskup od $\mathcal{A}'$.

(2) Neka je $\mathcal{E}$ skup svih ekstremnih točaka od $\mathcal{E}$ različitih od 0. Po Krein−Millmanovom teoremu (to je zapravo posljedica geometrijskog oblika Hahn−Banachovog teorema) $\mathcal{P}$ je najmanji slabo*−zatvoren konveksan podskup od $\mathcal{A}'$ koji sadrži $\mathcal{E} \cup \{0\}$. Drugim riječima, $\mathcal{P}$ je slabi*−zatvarač skupa

$$\left\{\sum_{i=1}^{n} t_i f_i;\ n \in \mathbb{N},\ f_1, \ldots, f_n \in \mathcal{E},\ t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{R}_+,\ \sum_{i=1}^{n} t_i \leq 1\right\}.$$

(3) Neka je $f \in \mathcal{P}$. Za $x, y \in \mathcal{A}$ stavimo $(x|y) = f(y^*x)$. Tada je $(\,\cdot\,|\,\cdot\,)$ pozitivno semidefinitna hermitska forma na $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$ i

$$\mathcal{N}_f = \{x \in \mathcal{A};\ (x|x) = 0\} = \{x \in \mathcal{A};\ (x|y) = 0 \quad \forall y \in \mathcal{A}\}$$

je lijevi ideal u $\mathcal{A}$. Stavimo $\mathcal{V}_f = \mathcal{A}/\mathcal{N}_f$. Tada je $\mathcal{V}_f$ unitaran prostor sa skalarnim produktom

$$(x + \mathcal{N}_f | y + \mathcal{N}_f) = (x|y).$$

Neka je $\mathcal{H}_f$ Hilbertov prostor dobiven popunjenjem unitarnog prostora $\mathcal{V}_f$.

Za $x \in \mathcal{A}$ definiramo $\pi_f(x) : \mathcal{V}_f \to \mathcal{V}_f$ sa $\pi_f(x)(y + \mathcal{N}_f) = xy + \mathcal{N}_f$. Tada je

$$(\pi_f(x)\xi|\eta) = (\xi|\pi_f(x^*)\eta), \qquad \xi, \eta \in \mathcal{V}_f, \quad x \in \mathcal{A}.$$

Nadalje, π_f je homomorfizam algebre $\mathcal{A}$ u algebru $\mathcal{L}(\mathcal{V}_f)$ svih linearnih operatora na vektorskom prostoru $\mathcal{V}_f$. Nadalje, pokazuje se da je za svaki $x \in \mathcal{A}$ operator $\pi_f(x)$ ograničen u odnosu na skalarni produkt na $\mathcal{V}_f$ pa se jedinstveno produljuje do ograničenog operatora na popunjenju $\mathcal{H}_f$;

to produljenje također označavamo sa $\pi_f(x)$. Tada je π_f reprezentacija C^*-algebre $\mathcal{A}$ na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}_f$. Ova se konstrukcija reprezentacije polazeći od pozitivnog funkcionala zove Gelfand−Naimark−Segalova (ili GNS) konstrukcija.

(4) Ključna je činjenica da je za $\|f\| = 1$ reprezentacija π_f ireducibilna ako i samo ako je $f \in \mathcal{E}$.

(5) Neka je sada $\mathcal{A} = C^*(G)$, $x \in G$, $x \neq e$. Tada postoji $\varphi \in C_0(G) \subseteq C^*(G)$ takva da je $\lambda_x\varphi \neq \varphi$. Lijeva regularna reprezentacija π_ℓ je vjerna (tj. injektivna) na $C_0(G)$ pa postoji $\xi \in L_2(G)$, $\|\xi\|_2 = 1$, takav da je $(\pi_\ell(\lambda_x\varphi - \varphi)\xi|\xi) \neq 0$. Definiramo $f : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ sa $f(\psi) = (\pi_\ell(\psi)\xi|\xi)$. Tada je $f \in \mathcal{P}$ i $f(\lambda_x\varphi - \varphi) \neq 0$. Prema tome, postoji $g \in \mathcal{E}$ takav da je $g(\lambda_x\varphi - \varphi) \neq 0$. Tada je π_g ireducibilna reprezentacija od G.

Postoje nizovi $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ i $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ u $C_0(G)$ takvi da je $\psi = \lambda_x\varphi - \varphi = \lim_{n\to\infty} \sigma_n^* * \psi * \tau_n$ u $L_1(G)$, dakle, pogotovo u $C^*(G)$. Sada imamo

$$0 \neq g(\psi) = \lim_{n\to\infty} g(\sigma_n^* * \psi * \tau_n) = \lim_{n\to\infty} (\pi_g(\psi)(\tau_n + \mathcal{N}_g)|(\sigma_n + \mathcal{N}_g)),$$

pa imamo

$$\pi_g(\psi) \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad \pi_g(\lambda_x\varphi) \neq \pi_g(\varphi) \quad \Longrightarrow \quad \pi_g(x)\pi_g(\varphi) \neq \pi_g(\varphi) \quad \Longrightarrow \quad \pi_g(x) \neq I.$$

5.2 Ireducibilne reprezentacije kompaktnih grupa

U ostatku ovog poglavlja, G **je oznaka za kompaktnu grupu i** μ **za normiranu Haarovu mjeru na** G. Dakle, za konstantnu funkciju $1_G(x) = 1 \ \ \forall x \in G$ vrijedi $\mu(1_G) = 1$. $C(G)$ je Banachov prostor svih neprekidnih funkcija $f : G \to \mathbb{C}$ s normom

$$\|f\|_\infty = \max\{|f(x)|;\ x \in G\}.$$

Sa $L_1(G)$ i $L_2(G)$ označavat ćemo Banachov i Hilbertov prostor koji su popunjenja prostora $C(G)$ u odnosu na norme

$$\|f\|_1 = \int_G |f(x)|\mathrm{d}\mu(x) \qquad \text{i} \qquad \|f\|_2 = \sqrt{\int_G |f(x)|^2\mathrm{d}\mu(x)}.$$

$L_1(G)$ (odnosno, $L_2(G)$) identificira se s prostorom klasa ekvivalencije svih $\mu-$izmjerivih funkcija $f : G \to \mathbb{C}$ takvih da je funkcija $x \mapsto |f(x)|$ (odnosno, $x \mapsto |f(x)|^2$) integrabilna. Pri tome je relacije ekvivalencije jednakost $\mu-$skoro svuda, tj. f i g su ekvivalentne ako je skup $\{x \in G;\ f(x) \neq g(x)\}$ $\mu-$zanemariv:

$$\mu(\{x \in G;\ f(x) \neq g(x)\}) = 0.$$

Uz takvu interpretaciju norme na prostorima $L_1(G)$ i $L_2(G)$ zadane su gornjim formulama za bilo koje predstavnike klasa funkcija. Nadalje, ako su f i g predstavnici klasa iz $L_2(G)$ onda je funkcija $x \mapsto f(x)\overline{g(x)}$ integrabilna i sklarani produkt klasa iz $L_2(G)$ zapisuje se pomoću predstavnika kao integral te funkcije:

$$(f|g) = \int_G (f(x)|g(x))\mathrm{d}\mu(x).$$

U označavanju nećemo praviti razliku između funkcije i njene klase.

Teorem 5.2.1. (a) *Neka su π i π' neekvivalentne ireducibilne unitarne reprezentacije od G na Hilbertovim prostorima $\mathcal{H}$ i $\mathcal{H}'$. Za $\xi, \eta \in \mathcal{H}$ i $\xi', \eta' \in \mathcal{H}'$ vrijedi*

$$\int_G (\pi(x)\xi|\eta)\overline{(\pi'(x)\xi'|\eta')}\,d\mu(x) = 0.$$

(b) *Neka je π ireducibilna unitarna reprezentacija od G na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$. Tada je prostor $\mathcal{H}$ konačnodimenzionalan i ako je $n = \dim \mathcal{H}$, za $\xi, \eta, \xi', \eta' \in \mathcal{H}$ vrijedi*

$$\int_G (\pi(x)\xi|\eta)\overline{(\pi'(x)\xi'|\eta')}\,d\mu(x) = \frac{1}{n}(\xi|\xi')(\eta'|\eta).$$

Dokaz: (a) Neka su $\eta \in \mathcal{H}$ i $\eta' \in \mathcal{H}'$ proizvoljno odabrani. Definiramo seskvilinearnu formu $A : \mathcal{H} \times \mathcal{H}' \to \mathbb{C}$ formulom

$$A(\xi, \xi') = \int_G (\pi(x)\xi|\eta)\overline{\pi'(x)\xi'|\eta')}\mathrm{d}\mu(x), \qquad \xi \in \mathcal{H}, \quad \xi' \in \mathcal{H}'.$$

Stavimo $M = \|\eta\| \cdot \|\eta'\|$. Tada imamo

$$|A(\xi|\xi')| \leq M\|\xi\| \cdot \|\xi'\|, \qquad \forall \xi \in \mathcal{H}, \quad \forall \xi' \in \mathcal{H}'.$$

Prema tome, forma A je ograničena, pa po Rieszovom teoremu postoji $B \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{H}')$ takav da je

$$A(\xi, \xi') = (B\xi|\xi') \qquad \xi \in \mathcal{H}, \quad \xi' \in \mathcal{H}'.$$

Tada za svaki $y \in G$ i za $\xi \in \mathcal{H}$ i $\xi' \in \mathcal{H}'$ nalazimo

$$(B\pi(y)\xi|\xi') = \int_G (\pi(xy)\xi|\eta)\overline{(\pi'(x)\xi'|\eta')}\mathrm{d}\mu(x) =$$

$$= \int_G (\pi(x)\xi|\eta)\overline{(\pi'(xy^{-1})\xi'|\eta')}\mathrm{d}\mu(x) = (B\xi|\pi'(y^{-1}\xi') = (\pi'(y)B\xi|\xi').$$

Budući da su $\xi \in \mathcal{H}$ i $\xi' \in \mathcal{H}'$ bili proizvoljni, slijedi $B\pi(y) = \pi'(y)B \quad \forall y \in G$. Dakle, $B \in Hom_G(\pi, \pi')$. Jezgra $\mathcal{N}(B) = \{\xi \in \mathcal{H};\ B\xi = 0\}$ operatora B, koja je zatvoren potprostor od $\mathcal{H}$, je $\pi-$invarijantan potprostor od $\mathcal{H}$. Doista, za $y \in G$ imamo

$$\xi \in \mathcal{N}(B) \qquad \Longrightarrow \qquad B\pi(y)\xi = \pi'(y)B\xi = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \pi(y)\xi \in \mathcal{N}(B).$$

Kako je reprezentacija π ireducibilna, slijedi da je ili $\mathcal{N}(B) = \{0\}$ ili $\mathcal{N}(B) = \mathcal{H}$.

Pretpostavimo da je $\mathcal{N}(B) = \{0\}$, tj. da je B injekcija. Tada je $B^* \in Hom_G(\pi, \pi')$, pa je $B^*B \in Hom_G(\pi, \pi)$. Nadalje, kako je $\|B\xi\|^2 = (B^*B\xi|\xi)$ to je $\mathcal{N}(B^*B) = \mathcal{N}(B) = \{0\}$ i, posebno, $B^*B \neq 0$. Operator $B^*B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ je ne samo hermitski nego i pozitivan. Stoga prema zadatku 3.11, postoji jedinstven pozitivan operator $C \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ takav da je $C^2 = B^*B$. Sada za $\xi \in \mathcal{H}$ imamo

$$\|C\xi\|^2 = (C\xi|C\xi) = (C^2\xi|\xi) = (B^*B\xi|\xi) = (B\xi|B\xi) = \|B\xi\|^2.$$

Neka je $\mathcal{V} = \mathcal{R}(B) = \{B\xi;\ \xi \in \mathcal{H}\}$ područje vrijednosti operatora B. To je potprostor od $\mathcal{H}'$ koji je $\pi'-$invarijantan. Doista, za $\xi' \in \mathcal{V}$ postoji $\xi \in \mathcal{H}$ takav da je $\xi' = B\xi$. Tada za bilo koji $y \in G$ imamo

$$\pi'(y)\xi' = \pi'(y)B\xi = B\pi(y)\xi \in \mathcal{V}.$$

Prema tome, i zatvarač potprostora $\mathcal{V}$ u Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}'$ je $\pi'-$invarijantan. Kako je $B \neq 0$, to je $\mathcal{V} \neq \{0\}$, pa je zbog ireducibilnosti reprezentacije π' zatvarač od $\mathcal{V}$ jednak $\mathcal{H}'$. Dakle, $\mathcal{V} = \mathcal{R}(B)$ je gust potprostor Hilbertovog prostora $\mathcal{H}'$.

Definirajmo sada $U : \mathcal{V} \to \mathcal{H}$ sa

$$UB\xi = C\xi, \qquad \xi \in \mathcal{H}.$$

Definicija ima smisla jer je B injekcija. Nadalje, U je očito linearan operator i zbog dokazane jednakosti $\|C\xi\| = \|B\xi\|$ vidimo da je U izometrija sa $\mathcal{V}$ u $\mathcal{H}$. Kako je $\mathcal{V}$ gust potprostor od $\mathcal{H}'$, ta se izometrija jedinstveno produljuje do izometrije iz $\mathcal{B}(\mathcal{H}', \mathcal{H})$. Tu ćemo izometriju također označavati sa U. Kako je $B^*B \in Hom_G(\pi, \pi)$ to je i $C \in Hom_G(\pi, \pi)$. Stoga imamo za svaki $\xi \in \mathcal{H}$ i za svaki $y \in G$:

$$\pi(y)UB\xi = \pi(y)C\xi = C\pi(y)\xi = UB\pi(y)\xi = U\pi'(y)B\xi.$$

Time je dokazano da je $\pi(y)U\xi' = U\pi(y)\xi'$ za svaki $\xi' \in \mathcal{V}$, a budući da je $\mathcal{V}$ gust u $\mathcal{H}'$ slijedi $\pi(y)U = U\pi'(y)$, tj. vrijedi $U \in Hom_G(\pi', \pi)$. Stoga je područje vrijednosti izometrije U zatvoren $\pi-$invarijantan potprostor od $\mathcal{H}$, pa zbog ireducibilnosti reprezentacije π i zbog $U \neq 0$ slijedi da je područje vrijednosti od U čitav prostor $\mathcal{H}$. Dakle, U je izometrički izomorfizam Hilbertovog prostora $\mathcal{H}'$ na Hilbertov prostor $\mathcal{H}$. No kako je $U \in Hom_G(\pi', \pi)$, to ima za posljedicu $\pi' \sim \pi$, suprotno pretpostavci. Ova kontradikcija pokazuje da je pretpostavka $\mathcal{N}(B) = \{0\}$ neostvariva. Prema tome je $\mathcal{N}(B) \neq \{0\}$, pa zbog ireducibilnosti reprezentacije π slijedi $\mathcal{N}(B) = \mathcal{H}$, tj. $B = 0$. Tada slijedi $A(\xi, \xi') = 0 \ \ \forall \xi, \xi'$, a kako su na početku dokaza vektori η i η' bili proizvoljno odabrani, slijedi da vrijedi tvrdnja (a).

(b) Sasvim analogno dokazu tvrdnje (a) nalazimo da za dane $\eta \in \mathcal{H}$ i $\eta' \in \mathcal{H}'$ postoji $B \in Hom_G(\pi, \pi)$ takav da je

$$(B\xi|\xi') = \int_G (\pi(x)\xi|\eta)\overline{(\pi(x)\xi'|\eta')}\mathrm{d}\mu(x) \qquad \forall \xi, \xi' \in \mathcal{H}.$$

Međutim, kako je π ireducibilna, iz teorema 3.2.12. slijedi da postoji $\lambda(\eta, \eta') \in \mathbb{C}$ takav da je $B = \lambda(\eta, \eta')I$, gdje je I jedinični operator na $\mathcal{H}$. Dakle, došli smo do preslikavanja $\lambda : \mathcal{H} \times \mathcal{H}' \to \mathbb{C}$ takvog da vrijedi

$$\int_G (\pi(x)\xi|\eta)\overline{(\pi(x)\xi'|\eta')}\mathrm{d}\mu(x) = \lambda(\eta, \eta')(\xi|\xi') \qquad \forall \xi, \eta, \xi', \eta' \in \mathcal{H}.$$

Fiksirajmo sada $\xi_0 \in \mathcal{H}$, $\|\xi_0\| = 1$, i stavimo $c = \lambda(\xi_0, \xi_0)$. Imamo

$$\lambda(\eta, \eta') = \lambda(\eta, \eta')(\xi_0|\xi_0) = \int_G (\pi(x)\xi_0|\eta)\overline{(\pi(x)\xi_0|\eta')}\mathrm{d}\mu(x) = \int_G (\pi(x^{-1})\xi_0|\eta)\overline{(\pi(x^{-1})\xi_0|\eta')}\mathrm{d}\mu(x) =$$

$$= \int_G (\xi_0|\pi(x)\eta)\overline{(\xi_0|\pi(x)\eta')}\mathrm{d}\mu(x) = \int_G (\pi(x)\eta'|\xi_0)\overline{(\pi(x)\eta|\xi_0)}\mathrm{d}\mu(x) = \lambda(\xi_0, \xi_0)(\eta'|\eta) = c(\eta'|\eta).$$

Dakle je $\lambda(\eta, \eta') = c(\eta'|\eta) \quad \forall \eta, \eta' \in \mathcal{H}$.

Time smo dokazali da postoji $c \in \mathbb{C}$ takav da je

$$\int_G (\pi(x)\xi|\eta)\overline{(\pi(x)\xi'|\eta')}\mathrm{d}\mu(x) = c(\xi|\xi')(\eta'|\eta) \qquad \forall \xi, \xi', \eta, \eta' \in \mathcal{H}.$$

Nadalje,

$$c = \int_G |(\pi(x)\xi_0|\xi_0)|^2\mathrm{d}\mu(x) > 0.$$

Neka je ponovo $\xi_0 \in \mathcal{H}$, $\|\xi_0\| = 1$. Neka $m \in \mathbb{N}$ i neka su $e_1, e_2, \ldots, e_m$ ortonormirani vektori u $\mathcal{H}$. Za bilo koji $x \in G$ tada su vektori $\pi(x)e_1, \pi(x)e_2, \ldots, \pi(x)e_m$ ortonormirani. Zbog Besselove nejednakosti tada je

$$1 = \|\xi_0\|^2 \geq \sum_{i=1}^{m} |(\pi(x)e_i|\xi_0)|^2 = \sum_{i=1}^{m} (\pi(x)e_i|\xi_0)\overline{(\pi(x)e_i|\xi_0)} \qquad \forall x \in G.$$

Dakle,

$$1 \geq \sum_{i=1}^{m} (\pi(x)e_i|\xi_0)\overline{(\pi(x)e_i|\xi_0)}\mathrm{d}\mu(x) = c\sum_{i=1}^{m} \|e_i\|^2\|\xi_0\|^2 = mc.$$

Odatle je $m \leq \frac{1}{c}$, Pa slijedi $\dim \mathcal{H} \leq \frac{1}{c} < +\infty$. Ako je $n = \dim \mathcal{H}$ i ako je $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ ortonormirana baza od $\mathcal{H}$, gore umjesto Besselove nejednakosti imamo Parsevalovu jednakost, pa je $c = \frac{1}{n}$.

Za kompaktnu grupu gotovo ništa novo ne donosi napuštanje unitarnosti u definiciji reprezentacije. Razmotrimo zasada slučaj konačnodimenzionalnih reprezentacija. Ako je G bilo kakva grupa i ako je V vektorski prostor (nad poljem $\mathbb{C}$), onda se homomorfizam π grupe G u grupu $GL(V)$ svih linearnih bijekcija sa V na V zove **reprezentacija grupe G na vektorskom prostoru V**. U slučaju da je V topološki vektorski prostor, toj definiciji dodaje i zahtjev neprekidnosti svakog operatora $\pi(x)$, $x \in G$, a ako je k tome grupa G topološka, može se dodati i neki zahtjev neprekidnosti na preslikavanje $x \mapsto \pi(x)$ (slaba, jaka, uniformna,...). Ako je prostor V

konačnodimenzionalan, sve su te vrste neprekidnosti međusobno ekvivalentne. **Reprezentacija** topološke grupe G na konačnodimenzionalnom vektorskom prostoru V zove se **neprekidna** ako je preslikavanje π sa G u prostor $L(V)$ linearnih operatora na V neprekidno. Dovoljno je zahtijevati neprekidnost u jednoj točki, npr. u jedinici e grupe G.

Teorem 5.2.2. *Neka je π neprekidna reprezentacija kompaktne grupe G na konačnodimenzionalnom vektorskom prostoru V. Tada na V postoji skalarni produkt u odnosu na koji je reprezentacija π unitarna. Za svaki $\pi-$invarijantan potprostor V_1 od V postoji $\pi-$invarijantan potprostor V_2 takav da je $V = V_1 \dot{+} V_2$. Nadalje, postoje $\pi-$invarijantni potprostori $V_1, V_2, \ldots, V_s$ od V takvi da je $V = V_1 \dot{+} V_2 \dot{+} \cdots \dot{+} V_s$ i da su sve subreprezentacije $\pi_{V_1}, \pi_{V_2}, \ldots, \pi_{V_s}$ ireducibilne.*

Dokaz: Iz prve tvrdnje slijede ostale tvrdnje, zato jer ako je prostor V unitaran i ako je svaki operator $\pi(x),\ \ x \in G$, unitaran, onda iz $\pi-$invarijantnosti potprostora $W \subseteq V$ slijedi $\pi-$invarijantnost njegovog ortogonalnog komplementa $W^{\perp}$.

Neka je sada $\langle \cdot | \cdot \rangle$ bilo koji skalarni produkt na V. Tada iz neprekidnosti reprezentacije π slijedi da je za bilo koje $\xi, \eta \in V$ funkcija $x \mapsto \langle \pi(x)\xi | \eta \rangle$ sa G u $\mathbb{C}$ neprekidna. Neka je μ Haarova mjera na G. Tada je sa

$$(\xi|\eta) = \int_G \langle \pi(x)\xi|\eta\rangle \mathrm{d}\mu(x), \qquad \xi, \eta \in V,$$

zadan novi skalarni produkt i iz invarijantnosti mjere μ slijedi da su svi operatori $\pi(y),\ \ y \in G$, unitarni u odnosu na skalarni produkt $(\cdot|\cdot)$:

$$(\pi(y)\xi|\pi(y)\eta) = \int_G \langle \pi(x)\pi(y)\xi|\pi(x)\pi(y)\eta\rangle \mathrm{d}\mu(x) =$$

$$= \int_G \langle \pi(xy)\xi|\pi(xy)\eta\rangle \mathrm{d}\mu(x) = \int_G \langle \pi(x)\xi|\pi(x)\eta\rangle \mathrm{d}\mu(x) = (\xi|\eta).$$

5.3 Peter–Weylov teorem

U daljnjem je stalno G kompaktna grupa i μ normirana Haarova mjera na G. Tada je $C(G)$ algebra u odnosu na množenje po točkama i u odnosu na konvoluciju. Nadalje, $L_1(G)$ je također algebra u odnosu na konvoluciju.

Za konačnodimenzionalnu reprezentaciju π od G na V pišemo $\dim \pi = \dim V$ i taj se broj zove **dimenzija reprezentacije** π. Bez posebnog isticanja uvijek ćemo pretpostavljati da je konačnodimenzionalna reprezentacija neprekidna.

Za funkciju $f : G \to \mathbb{C}$ stavljamo

$$L(f) = span_{\mathbb{C}}\{\lambda_x f;\ x \in G\} \qquad \text{i} \qquad R(f) = span_{\mathbb{C}}\{\rho_x f;\ x \in \Gamma\}.$$

Te definicije imaju smisla i ako je f klasa funkcija u odnosu na mjeru μ; naime, ako je $x \in G$ i f, g su funkcije na G onda su $\lambda_x f$ i $\lambda_x g$ (odnosno, $\rho_x f$ i $\rho_x g$) $\mu-$ekvivalentne ako i samo ako su f i g $\mu-$ekvivalentne.

Nadalje, definiramo

$$L(G) = \{f \in L_2(G);\ \dim L(f) < +\infty\} \qquad \text{i} \qquad R(G) = \{f \in L_2(G);\ \dim R(f) < +\infty\}.$$

Očito je $L(f+g) \subseteq L(f)+L(g)$ i $R(f+g) \subseteq R(f)+R(g)$, pa slijedi da su $L(G)$ i $R(G)$ potprostori od $L_2(G)$.

Neka je sada π konačnodimenzionalna reprezentacija grupe G na vektorskom prostoru V i neka je V' dualni prostor od V. Za $\xi \in V$ i $\eta' \in V'$ definiramo funkciju $\varphi^\pi_{\xi,\eta'} : G \to \mathbb{C}$ sa

$$\varphi^\pi_{\xi,\eta'}(x) = \eta'(\pi(x)\xi), \qquad x \in G.$$

Sve takve funkcije su očito neprekidne. One se zovu **matrični koeficijenti reprezentacije** π. Sa $\Phi(\pi)$ označavamo potprostor od $C(G)$ razapet svim matričnim koeficijentima reprezentacije π :

$$\Phi(\pi) = span_{\mathbb{C}}\{\varphi^\pi_{\xi,\eta'};\ \xi \in V,\ \eta' \in V'\}.$$

Ako je $\{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\}$ baza od V i $\{\eta'_1, \eta'_2, \ldots, \eta'_n\}$ baza od V' onda je očito $\Phi(\pi)$ razapet sa $\{\varphi^\pi_{\xi_i,\eta'_j};\ 1 \le i,j \le n\}$. Dakle, prostor $\Phi(\pi)$ je konačnodimenzionalan i vrijedi $\dim \Phi(\pi) \le (\dim \pi)^2$. Ako su reprezentacije π i σ ekvivalentne (tj. ako u $Hom_G(\pi,\sigma)$ postoji izomorfizam) onda je očito $\Phi(\pi) = \Phi(\sigma)$.

Napokon stavimo

$$F(G) = \bigcup \{\Phi(\pi);\ \pi \ \text{konačnodimenzionalna reprezentacija}\}.$$

Teorem 5.3.1. *Vrijedi $L(G) = R(G) = F(G)$ i to je podalgebra od $(C(G), \cdot)$. Ona je gusta u $C(G)$ u odnosu na normu $\|\cdot\|_\infty$, gusta je u $L_1(G)$ u odnosu na $\|\cdot\|_1$ i gusta je u $L_2(G)$ u odnosu na $\|\cdot\|_2$. Također, $F(G)$ je gusta u C^*-algebri $C^*(G)$.*

Dokaz: Neka je π konačnodimenzionalna reprezentacija od G na V. Neka je $\{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\}$ baza od V i $\{\eta'_1, \eta'_2, \ldots, \eta'_n\}$ njoj dualna baza od V'. Za $1 \le i,j \le n$ i za $x, y \in G$ imamo

$$(\lambda_x \varphi^\pi_{\xi_i,\eta'_j})(y) = \varphi^\pi_{\xi_i,\eta'_j}(x^{-1}y) = \eta'_j(\pi(x^{-1})\pi(y)\xi_i) =$$

$$= \eta'_j\left(\pi(x^{-1})\sum_{k=1}^n \eta'_k(\pi(y)\xi_i)\xi_k\right) = \sum_{k=1}^n \eta'_k(\pi(y)\xi_i)\eta'_j(\pi(x^{-1})\xi_k).$$

Dakle je

$$\lambda_x \varphi^\pi_{\xi_i,\eta'_j} = \sum_{k=1}^n \varphi^\pi_{\xi_k,\eta'_j}(x^{-1})\varphi^\pi_{\xi_i,\eta'_k}.$$

Analogno je

$$\rho_x \varphi^\pi_{\xi_i,\eta'_j} = \sum_{k=1}^n \varphi^\pi_{\xi_i,\eta'_k}(x)\varphi^\pi_{\xi_k,\eta'_j}.$$

Prema tome je

$$\lambda_x \varphi^\pi_{\xi_i,\eta'_j} \in \Phi(\pi) \qquad \text{i} \qquad \rho_x \varphi^\pi_{\xi_i,\eta'_j} \in \Phi(\pi) \qquad \forall x, i, j.$$

Zaključujemo da je

$$L(\varphi^\pi_{\xi_i,\eta'_j}) \subseteq \Phi(\pi) \qquad \text{i} \qquad R(\varphi^\pi_{\xi_i,\eta'_j}) \subseteq \Phi(\pi) \qquad \forall i, j.$$

Kako je $\Phi(\pi)$ konačnodimenzionalan, slijedi da su svi matrični koeficijenti $\varphi^\pi_{\xi_i,\eta'_j}$ elementi i prostora $L(G)$ i prostora $R(G)$. Dakle, vrijedi

$$\Phi(\pi) \subseteq L(G) \cap R(G).$$

Budući da to vrijedi za svaku konačnodimenzionalnu reprezentaciju π, zaključujemo da je

$$F(G) \subseteq L(G) \cap R(G).$$

Neka je sada $f \in R(G)$. Tada je $R(f)$ konačnodimenzionalan potprostor od $L_2(G)$ invarijantan s obzirom na desnu regularnu reprezentaciju π_r od G. Neka je $V = R(f)$ i neka je π pripadna subreprezentacija, $\pi(x) = \pi_r(x)|V$. Za $g \in V$ tada je $\pi(x)g = \rho_x g$. Neka je $\delta \in V'$ definiran sa $\delta(g) = g(e)$. Tada imamo za $x \in G$:

$$\varphi^\pi_{f,\delta}(x) = \delta(\pi(x)f) = (\rho_x f)(e) = f(x).$$

Dakle, $f = \varphi^\pi_{f,\delta} \in \Phi(\pi) \subseteq F(G)$. Time je dokazano

$$R(G) \subseteq F(G).$$

Neka je sada $f \in L(G)$. Neka je V dualni prostor konačnodimenzionalnog vektorskog prostora $L(f)$, što možemo shvaćati i kao $V' = L(g)$. Neka je π reprezentacija od G na V definirana sa

$$(\pi(x)\xi)(g) = \xi(\lambda_{x^{-1}} g), \qquad \xi \in V, \quad g \in L(f).$$

Neka je $\delta \in V$ definirano sa $\delta(g) = g(e)$, $g \in L(f)$. Sada je

$$\varphi^\pi_{\delta,f}(x) = (\pi(x)\delta)(f) = \delta(\lambda_{x^{-1}} f) = (\lambda_{x^{-1}} f)(e) = f(x).$$

Dakle, $f = \varphi^\pi_{\delta,f} \in \Phi(\pi) \subseteq F(G)$. Time je dokazano da je

$$L(G) \subseteq F(G).$$

Iz dokazanih inkluzija

$$F(G) \subseteq L(G) \cap R(G), \qquad L(G) \subseteq F(G), \qquad R(G) \subseteq F(G)$$

slijedi

$$F(G) = L(G) = R(G).$$

Matrični koeficijenti su neprekidne funkcije, pa slijedi da je to potprostor od $C(G)$. Taj potprostor sadrži konstante i invarijantan je s obzirom na kompleksno konjugiranje, jer, npr. očito je da za funkciju f vrijedi

$$f \in L(G) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \overline{f} \in L(G).$$

Dokazat ćemo sada da je $F(G) = L(G) = R(G)$ podalgebra od $(C(G), \cdot)$. Neka su $f, g \in L(G)$. Tada imamo slijed implikacija

$$\lambda_x(f \cdot g) = (\lambda_x f) \cdot (\lambda_x g) \in L(f) \cdot L(g) \quad \forall x \in G \quad \Longrightarrow \quad L(f \cdot g) \subseteq span_{\mathbb{C}}\, L(f) \cdot L(g) \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad \dim\, L(f \cdot g) \leq (\dim\, L(f)) \cdot (\dim\, L(g)) < +\infty \quad \Longrightarrow \quad f \cdot g \in L(G).$$

Time je dokazano da je $L(G) = R(G) = F(G)$ podalgebra od $C(G)$ u odnosu na množenje po točkama.

Dokažimo sada da ta podalgebra razlikuje točke od G. Neka su $x, y \in G$, $x \neq y$. Po teoremu 5.1.1. postoji unitarna ireducibilna reprezentacija od G na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$ takva da je $\pi(x) \neq \pi(y)$. Prema teoremu 5.2.1. reprezentacija π je konačnodimenzionalna, pa je $\Phi(\pi) \subseteq F(G)$. Postoje $\xi \in \mathcal{H}$ i $\eta' \in \mathcal{H}'$ takvi da je $\eta'(\pi(x)\xi) \neq \eta'(\pi(y)\xi)$. No to znači da je $\varphi^{\pi}_{\xi,\eta'}(x) \neq \varphi^{\pi}_{\xi,\eta'}(y)$. Dakle, $F(G)$ razlikuje točke od G.

Dakle, dokazali smo da je $F(G)$ podalgebra od $C(G)$ u odnosu na množenje po točkama, da sadrži konstante, da je invarijantna na kompleksno konjugiranje i da razlikuje točke od G. Sada iz Stone–Weierstrassovog teorema slijedi da je $F(G)$ gusta u $C(G)$ u odnosu na $\|\cdot\|_\infty$. Budući da je $C(G)$ gusta u $L_1(G)$ u odnosu na $\|\cdot\|_1$ i u $L_2(G)$ u odnosu na $\|\cdot\|_2$ i budući da za $f \in C(G)$ zbog normiranosti mjere μ vrijedi

$$\|f\|_1 = \int_G |f(x)|\mathrm{d}\mu(x) \leq \|f\|_\infty \qquad \text{i} \qquad \|f\|_2 = \sqrt{\int_G |f(x)|^2 \mathrm{d}\mu(x)} \leq \|f\|_\infty,$$

slijedi da je $F(G)$ gusta u $L_1(G)$ s obzirom na $\|\cdot\|_1$ i u $L_2(G)$ s obzirom na $\|\cdot\|_2$. Napokon, $L_1(G)$ je gusta u $C^*(G)$ u odnosu na njenu C^*–normu $\|\cdot\|$, pa kako za $f \in L_1(G)$ vrijedi

$$\|f\| \leq \|f\|_1,$$

slijedi da je $F(G)$ gusta i u grupovnoj C^*–algebri $C^*(G)$.

U daljnjem sa $\hat{G}$ označavamo skup svih klasa ekvivalencije ireducibilnih unitarnih reprezentacija od G. Prema teoremima 5.2.1. i 5.2.2. to je ujedno skup svih klasa ekvivalencije ireducibilnih konačnodimenzionalnih reprezentacija od G. Za $\alpha \in \hat{G}$ izaberimo unitarnu reprezentaciju π^α na prostoru $\mathcal{H}^\alpha$ iz klase α. Nadalje, stavimo $d(\alpha) = \dim \mathcal{H}^\alpha$. Izaberimo ortonormiranu bazu $\{\xi_1^\alpha, \xi_2^\alpha, \ldots, \xi_{d(\alpha)}^\alpha\}$ prostora $\mathcal{H}^\alpha$ i za $x \in G$ neka su $\pi_{ij}^\alpha(x)$ matrični elementi operatora $\pi^\alpha(x)$ u toj bazi.

Teorem 5.3.2. **(Peter–Weyl)** $S = \{\sqrt{d(\alpha)}\pi_{ij}^\alpha;\ 1 \leq i, j \leq d(\alpha),\ \alpha \in \hat{G}\}$ *je ortonormirana baza Hilbertovog prostora* $L_2(G)$ *i algebarska baza vektorskog prostora* $F(G)$.

Dokaz: Za $\alpha, \beta \in \hat{G}$, $1 \leq i, j \leq d(\alpha)$ i $1 \leq k, \ell \leq d(\beta)$ vrijedi

$$(\sqrt{d(\alpha)}\pi_{ij}^\alpha | \sqrt{d(\beta)}\pi_{k\ell}^\beta) = \sqrt{d(\alpha)d(\beta)} \int_G \pi_{ij}^\alpha(x)\overline{\pi_{k\ell}^\beta(x)}\mathrm{d}\mu(x) =$$

$$= \sqrt{d(\alpha)d(\beta)} \int_G (\pi^\alpha \xi_j^\alpha | \xi_i^\alpha)\overline{(\pi^\beta(x)\xi_\ell^\beta | \xi_k^\beta)}\mathrm{d}\mu(x).$$

Prema tvrdnji (a) teorema 5.2.1. to je jednako nuli ako je $\alpha \neq \beta$. Nadalje, prema tvrdnji (b) istog teorema za $\alpha = \beta$ dobivamo

$$(\sqrt{d(\alpha)}\pi_{ij}^{\alpha}|\sqrt{d(\alpha)}\pi_{k\ell}^{\alpha}) = d(\alpha)\frac{1}{d(\alpha)}(\xi_i^{\alpha}|\xi_k^{\alpha})(\xi_j^{\alpha}|\xi_\ell^{\alpha}) = \delta_{ik}\delta_{j\ell}.$$

Dakle, vrijedi

$$(\sqrt{d(\alpha)}\pi_{ij}^{\alpha}|\sqrt{d(\beta)}\pi_{k\ell}^{\beta}) = \delta_{\alpha\beta}\delta_{ik}\delta_{j\ell}.$$

Dakle, S je ortonormiran skup u $L_2(G)$.

Imamo $\pi_{ij}^{\alpha} \in \Phi(\pi^{\alpha}) \subseteq F(G)$, pa slijedi da je $S \subseteq F(G)$. Neka je π proizvoljna konačnodimenzionalna reprezentacija od G na V. Prema teoremu 5.2.2. tada postoje $\pi-$invarijantni potprostori $V_1, V_2, \dots, V_s$ od V takvi da je $V = V_1 \dotplus V_2 \dotplus \cdots \dotplus V_s$ i da je svaka od subreprezentacija π_{V_i} ireducibilna. Neka je $\alpha_i \in \hat{G}$ klasa ekvivalencije ireducibilne reprezentacije π_{V_i}. U svakom V_i izaberemo bazu $\{e_1^i, e_2^i, \dots, e_{d(\alpha_i)}^i\}$ potprostora V_i u kojoj operator $\pi_{V_i}(x)$ ima matricu $(\pi_{k\ell}^{\alpha_i}(x))_{k,\ell=1}^{d(\alpha_i)}$. Tada je $\{e_j^i;\ 1 \leq j \leq d(\alpha_i),\ 1 \leq i \leq s\}$ baza prostora V. Neka je $\{f_j^i;\ 1 \leq j \leq d(\alpha_i),\ 1 \leq i \leq s\}$ njoj dualna baza od V'. Tada funkcije

$$\varphi_{e_j^i, f_\ell^k}^{\pi}, \qquad 1 \leq j \leq d(\alpha_i), \quad 1 \leq \ell \leq d(\alpha_k), \quad 1 \leq i, k \leq s$$

razapinju prostor $\Phi(\pi)$. Međutim, lako se vidi da je $\varphi_{e_j^i, f_\ell^k}^{\pi} = \delta_{ik}\pi_{\ell j}^{\alpha_i}$. To znači da funkcije

$$\pi_{\ell j}^{\alpha_i}, \qquad 1 \leq \ell, j \leq d(\alpha_i), \quad 1 \leq i \leq s$$

razapinju prostor $\Phi(\pi)$. Kako je π bila proizvoljna konačnodimenzionalna reprezentacija, zaključujemo da skup funkcija S razapinje vektorski prostor $F(G)$. No taj je skup ortonormiran u $L_2(G)$, dakle je linearno nezavisan. Time je dokazano da je S baza vektorskog prostora $F(G)$.

Napokon, skup S je ortonormiran u Hilbertovom prostoru $L_2(G)$ i razapinje potprostor $F(G)$ koji je prema teoremu 5.3.1. gust u $L_2(G)$. Dakle, S je ortonormirana baza Hilbertovog prostora $L_2(G)$.

5.4 Grupovne algebre. Karakteri

Prema propoziciji 4.2.1. za $f, g \in L_2(G)$ konvolucija $f * g$ je dobro definirana i to je funkcija iz $C_\infty(G) = C(G) \subseteq L_2(G)$. Prema tome, u slučaju kompaktne grupe G Hilbertov prostor $L_2(G)$ je algebra u odnosu na konvoluciju i vrijedi $L_2(G) * L_2(G) \subseteq C(G)$. Dakle, $C(G)$ je obostrani ideal u algebri $L_2(G)$. Nadalje, kako je kompaktna grupa unimodularna, $L_2(G)$ je i $*-$algebra u odnosu na involuciju $f^*(x) = \overline{f(x^{-1})}$. Kako je na unimodularnoj grupi Haarova mjera invarijantna u odnosu na invertiranje, slijedi i $\|f^*\|_2 = \|f\|_2 \ \ \forall f \in L_2(G)$.

Zadatak 5.1. *Dokažite:*

(a) *Za* $f, g \in L_2(G)$ *i* $x \in G$ *je* $(f * g)(x) = (f|(\rho_x g)^*) = (f|\lambda_x g^*)$.

(b) *Za* $f, g \in L_2(G)$ *je* $\|f * g\|_2 \leq \|f\|_2 \cdot \|g\|_2$; *drugim riječima,* $L_2(G)$ *je Banachova* $*-$*algebra.*

(c) *Za* $f, g \in L_2(G)$ *je* $(f|g) = (g^*|f^*)$.

(d) *Za* $f, g, h \in L_2(G)$ *je* $(f * g|h) = (f|h * g^*) = (g|f^* * h)$.

Zadatak 5.2. *Neka su* $\alpha, \beta \in \hat{G}$, $1 \leq i, j \leq d(\alpha)$, $1 \leq k, \ell \leq d(\beta)$, $x \in G$. *Dokažite:*

(a) $\rho_x \pi_{ij}^\alpha = \sum_{k=1}^{d(\alpha)} \pi_{kj}^\alpha(x) \pi_{ik}^\alpha$, $\lambda_x \pi_{ij}^\alpha = \sum_{k=1}^{d(\alpha)} \pi_{ik}^\alpha(x^{-1}) \pi_{kj}^\alpha$.

(b) $\left(\pi_{ij}^\alpha\right)^* = \pi_{ji}^\alpha$.

(c) $\pi_{ij}^\alpha * \pi_{k\ell}^\beta = \frac{1}{d(\alpha)} \delta_{\alpha\beta} \delta_{jk} \pi_{i\ell}^\alpha$.

Upute: Za tvrdnju (a) koristite činjenicu da je π^α reprezentacija.

Za tvrdnju (b) koristite činjenicu da je $\left[\pi_{ij}^\alpha(x)\right]_{i,j=1}^{d(\alpha)}$ unitarna matrica i njoj inverzna matrica je $\left[\pi_{ij}^\alpha(x^{-1})\right]_{i,j=1}^{d(\alpha)}$.

Tvrdnja (c) slijedi iz (a) i (b) i iz tvrdnje (a) zadatka 5.1.

Uvedimo sada oznake

$$C_\alpha(G) = \Phi(\pi^\alpha), \qquad \alpha \in \hat{G}.$$

Iz Peter$-$Weylovog teorema znamo da je

$$L_2(G) = \bigoplus_{\alpha \in \hat{G}} C_\alpha(G), \qquad F(G) = \sum_{\alpha \in \hat{G}} \dot{+}\, C_\alpha(G).$$

Propozicija 5.4.1. (a) *$F(G)$ je obostrani ideal u $L_2(G)$.*

(b) *Za* $\alpha \neq \beta$ *je* $C_\alpha(G) * C_\beta(G) = \{0\}$; $C_\alpha(G) * C_\alpha(G) \subseteq C_\alpha(G)$.

(c) $C_\alpha(G)^* = C_\alpha(G)$ *i to je obostrani ideal u* $L_2(G)$.

Dokaz: (a) Prema tvrdnji (d) propozicije 1.5.1. za $f \in L(G)$, $g \in R(G)$, $h \in L_2(G)$ i $x \in G$ je

$$\lambda_x(f * h) = (\lambda_x f) * h \qquad \text{i} \qquad \rho_x(h * g) = h * (\rho_x g).$$

Stoga je

$$L(f * h) = L(f) * h \quad \text{i} \quad R(h * g) = h * R(g) \qquad \Longrightarrow \qquad f * h \in L(G) \quad \text{i} \quad h * g \in R(G).$$

Kako je $F(G) = L(G) = R(G)$, to je obostrani ideal u $L_2(G)$.

Tvrdnja (b) slijedi neposredno iz tvrdnje (c) zadatka 5.2.

(c) Iz tvrdnje (c) zadatka 5.2. slijedi $C_\alpha(G)^* = C_\alpha(G)$. Kako je

$$F(G) = \sum_{\beta \in \hat{G}} \dot{+}\, C_\beta(G),$$

iz (b) slijedi da je $C_\alpha(G)$ obostrani ideal u $F(G)$. Nadalje, $\dim C_\alpha(G) = d(\alpha)^2 < +\infty$, pa je $C_\alpha(G)$ zatvoren potprostor od $L_2(G)$. Napokon, $F(G)$ je prema teoremu 5.3.2. gusto u $L_2(G)$ i konvolucija je prema tvrdnji (b) zadatka 5.1. neprekidno preslikavanje sa $L_2(G) \times L_2(G)$ u $L_2(G)$, pa slijedi da je $C_\alpha(G)$ obostrani ideal i u $L_2(G)$.

Neka je $Z_2(G)$ centar algebre $(L_2(G), *)$ $Z(G)$ centar algebre $(C(G), *)$ i $Z_F(G)$ centar algebre $(F(G), *)$.

Lema 5.4.2. (a) $Z(G) = Z_2(G) \cap C(G)$.

(b) $Z_F(G) = Z_2(G) \cap F(G) = Z(G) \cap F(G)$.

(c) $Z_2(G) = \{f \in L_2(G);\ \lambda_{x^{-1}} f = \rho_x f\ \forall x \in G\}$.

(d) $Z(G) = \{f \in C(G);\ f(xy) = f(yx)\ \forall x, y \in G\}$.

Dokaz: (a) Inkluzija $Z_2(G) \cap C(G) \subseteq Z(G)$ je očigledna. Neka su $f \in Z(G)$ i $g \in L_2(G)$. Kako je $C(G)$ gusto u $L_2(G)$, postoji niz $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ u $C(G)$ takav da vrijedi $g = \lim_{n\to\infty} g_n$ u prostoru $L_2(G)$. Po tvrdnji (b) zadatka 5.1. konvolucija je neprekidna na $L_2(G)$, pa imamo

$$f * g = f * \left(\lim_{n\to\infty} g_n\right) = \lim_{n\to\infty} f * g_n = \lim_{n\to\infty} g_n * f = \left(\lim_{n\to\infty} g_n\right) * f = g * f.$$

Zaključujemo da je $f \in Z_2(G)$. Time je dokazano da je $Z(G) \subseteq Z_2(G)$, što zajedno sa $Z(G) \subseteq C(G)$ i $Z_2(G) \cap C(G) \subseteq Z(G)$ daje jednakost $Z(G) = Z_2(G) \cap C(G)$.

(b) Budući da je i $F(G)$ gusto u $L_2(G)$, analogno kao u (a) dokazuje se jednakost $Z_F(G) = Z_2(G) \cap F(G)$. Napokon, kako je $F(G) \subseteq C(G)$, iz dokazanog i iz (a) slijedi

$$Z(G) \cap F(G) = Z_2(G) \cap C(G) \cap F(G) = Z_2(G) \cap F(G) = Z_F(G).$$

(c) Po tvrdnji (a) zadatka 5.1. za $f, g \in L_2(G)$ i $x \in G$ imamo

$$(f * g)(x) = (\lambda_{x^{-1}} f | g^*) \qquad \text{i} \qquad (g * f)(x) = (g | (\rho_x f)^*) = (\rho_x f | g^*).$$

Slijedi

$$f \in Z_2(G) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \lambda_{x^{-1}} f = \rho_x f \quad \forall x \in G.$$

(d) Za $f, g \in C(G)$ jednakost njihovih klasa u $L_2(G)$ znači isto što i jednakost tih funkcija po točkama. Dakle, zbog (a) za $f \in C(G)$ nalazimo

$$f \in Z(G) \quad \Longleftrightarrow \quad (\lambda_{x^{-1}} f)(y) = (\rho_x f)(y) \quad \forall x, y \in G \quad \Longleftrightarrow \quad f(xy) = f(yx) \quad \forall x, y \in G.$$

Razmotrimo sada lijevu i desnu regularnu reprezentaciju π_ℓ i π_r grupe G na Hilbertovom prostoru $L_2(G)$. Operatori $\pi_\ell(x)$ i $\pi_r(y)$ komutiraju $\forall x, y \in G$. Stavimo

$$\pi(y) = \pi_\ell(y)\pi_r(y) = \pi_r(y)\pi_\ell(y), \qquad y \in G.$$

Tada je π unitarna reprezentacija od G na $L_2(G)$. Imamo

$$(\pi(y)f)(x) = f(y^{-1}xy), \qquad x, y \in G, \quad f \in L_2(G).$$

Za konstantnu funkciju $1(x) \equiv 1$ imamo $1^* = 1 = 1 * 1$. Dakle, ako stavimo $E = \pi(1)$, onda je $E^* = E = E^2$, tj. E je ortogonalni projektor. Imamo

$$(Ef)(x) = \int_G f(y^{-1}xy)\mathrm{d}\mu(y), \qquad f \in L_2(G), \quad x \in G.$$

Lema 5.4.3. (*a*) *$EL_2(G) = Z_2(G)$.*

(*b*) *Restrikcija $E|C(G)$ je neprekidan operator na Banachovom prostoru $(C(G), \|\cdot\|_\infty)$ i $EC(G) = Z(G)$.*

Dokaz: (*a*) Za $f \in Z_2(G)$ imamo

$$\pi(y)f = \lambda_y\rho_y f = \lambda_y\lambda_{y^{-1}}f = f \qquad \Longrightarrow \qquad (Ef)(x) = \int_G (pi(y)f)(x)\mathrm{d}\mu(y) = f(x).$$

Dakle, $Z_2(G) \subseteq EL_2(G)$. Nadalje, za $x \in G$ imamo

$$\pi(x)E = \pi(x)\pi(1) = \pi(\lambda_x 1) = \pi(1) = E.$$

Prema tome, za $f \in L_2(G)$ je $Ef = \pi(x)Ef = \lambda_x\rho_x Ef$, pa slijedi $\lambda_{x^{-1}}Ef = \rho_x Ef \ \ \forall x \in G$. Sada pomoću tvrdnje (*c*) leme 5.4.2. zaključujemo da je $Ef \in Z_2(G)$. Dakle, dokazali smo i obrnutu inkluziju $EL_2(G) \subseteq Z_2(G)$.

(*b*) Neka je $f \in C(G)$. Dokažimo da je Ef neprekidna funkcija. Neka je $\varepsilon > 0$ i neka je U otvorena okolina od e u G takva da vrijedi

$$u, v \in G, \quad u^{-1}v \in U \qquad \Longrightarrow \qquad |f(u) - f(v)| \leq \varepsilon.$$

Stavimo

$$V = \{t \in G;\ wtw^{-1} \in U \ \forall w \in G\}.$$

Budući da je preslikavanje $(w, t) \mapsto wtw^{-1}$ sa $G \times G$ u G neprekidno i budući da je grupa G kompaktna, iz leme 1.2.1. slijedi da je V otvorena okolina od e u G. Ako su $x, z \in G$ takvi da je $z^{-1}x \in V$, onda za svaki $y \in G$ imamo

$$(y^{-1}zy)^{-1}(y^{-1}xy) = y^{-1}z^{-1}xy \in U \qquad \Longrightarrow \qquad |f(y^{-1}xy) - f(y^{-1}zy)| \leq \varepsilon.$$

Dakle,

$$z^{-1}x \in V \quad \Longrightarrow \quad |(Ef)(x) - (Ef)(z)| \leq \int_G |f(y^{-1}xy) - f(y^{-1}zy)|\mathrm{d}\mu(y) \leq \varepsilon.$$

Slijedi $Ef \in C(G)$. Time je dokazano da je $EC(G) \subseteq C(G)$.

Za $f \in C(G)$ je

$$\|Ef\|_\infty = \max_{x \in G}\left|\int_G f(y^{-1}xy)\mathrm{d}\mu(y)\right| \leq \|f\|_\infty.$$

Dakle, restrikcija $E|C(G)$ je neprekidan operator sa $C(G)$ u $C(G)$.

Napokon, za $f \in Z(G) \subseteq Z_2(G)$ je $Ef = f$. To znači da je $Z(G) \subseteq EC(G)$. S druge strane, pomoću tvrdnje (*a*) leme 5.4.2. dobivamo i obrnutu inkluziju

$$EC(G) \subseteq C(G) \cap EL_2(G) = C(G) \cap Z_(G) = Z(G),$$

pa imamo jednakost $EC(G) = Z(G)$.

Za svaku konačnodimenzionalnu reprezentaciju π od G definiramo $\chi^\pi \in F(G)$ sa

$$\chi^\pi(x) = \operatorname{Tr} \pi(x), \qquad x \in G.$$

Očito χ^π ovisi samo o klasi ekvivalencije reprezentacije π. Nadalje,

$$\chi^\pi(xy) = \operatorname{Tr} \pi(xy) = \operatorname{Tr} \pi(x)\pi(y) = \operatorname{Tr} \pi(y)\pi(x) = \operatorname{Tr} \pi(yx) = \chi^\pi(yx) \qquad \forall x, y \in G.$$

Dakle, $\chi^\pi \in Z_F(G)$. Funkcija χ^π zove se **karakter reprezentacije** π. Očito je

$$\chi^\pi(e) = \operatorname{Tr} \pi(e) = \operatorname{Tr} I = \dim \pi.$$

Za $\alpha \in \hat{G}$ stavimo

$$\chi^\alpha = \chi^{\pi^\alpha} = \sum_{i=1}^{d(\alpha)} \pi_{ii}^\alpha \in C_\alpha(G) \cap Z_F(G).$$

Zadatak 5.3. *Dokažite:*

(*a*) $E\pi_{ij}^\alpha = \dfrac{1}{d(\alpha)} \delta_{ij} \chi^\alpha, \;\; \alpha \in \hat{G}, \; 1 \le i, j \le d(\alpha).$

(*b*) $\chi^\alpha * \pi_{ij}^\beta = \dfrac{1}{d(\alpha)} \delta_{\alpha\beta} \pi_{ij}^\beta, \;\; \alpha, \beta \in \hat{G}, \; 1 \le i, j \le d(\beta).$

(*c*) $\chi^\alpha * \chi^\beta = \dfrac{1}{d(\alpha)} \delta_{\alpha\beta} \chi^\alpha, \;\; \alpha, \beta \in \hat{G}.$

(*d*) $(\chi^\alpha)^* = \chi^\alpha, \;\; \alpha \in \hat{G}.$

(*e*) $(\chi^\alpha | \chi^\beta) = \delta_{\alpha\beta}, \;\; \alpha, \beta \in \hat{G}.$

Teorem 5.4.4. (*a*) *Potprostor $Z_F(G)$ je gust u $(Z(G), \|\cdot\|_\infty)$ i u $(Z_2(G), \|\cdot\|_2)$.*

(*b*) *$\{\chi^\alpha;\, \alpha \in \hat{G}\}$ je baza vektorskog prostora $Z_F(G)$ i ortonormirana baza Hilbertovog prostora $Z_2(G)$.*

(*c*) *$C_\alpha(G) = \chi^\alpha * L_2(G) = \chi^\alpha * C(G) = \chi^\alpha * F(G)$.*

Dokaz: (*a*) Neka je $f \in Z(G)$ (odnosno, $f \in Z_2(G)$). Tada postoji niz $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ u $F(G)$ koji teži prema f u odnosu na normu $\|\cdot\|_\infty$ (odnosno, u odnosu na normu $\|\cdot\|_2$). Po lemi 5.4.3. tada niz $(Ef_n)_{n\in\mathbb{N}}$ teži prema $Ef = f$ u odnosu na normu $\|\cdot\|_\infty$ (odnosno, u odnosu na normu $\|\cdot\|_2$). Po tvrdnji (*a*) zadatka 5.3. vrijedi $Ef_n \in F(G) \;\; \forall n$, dakle, $Ef_n \in F(G) \cap Z_2(G) = Z_F(G)$.

(*b*) Po tvrdnji (*b*) propozicije 5.4.1. je

$$Z_F(G) = Z_F(G) \bigcap \left(\sum_{\alpha \in \hat{G}} \dot{+} C_\alpha(G) \right) = \sum_{\alpha \in \hat{G}} \dot{+} Z_F(G) \cap C_\alpha(G),$$

a iz tvrdnje (*a*) zadatka 5.3. slijedi da je $Z_F(G) \cap C_\alpha(G) = \mathbb{C} \cdot \chi^\alpha$. Prema tome, $\{\chi^\alpha;\, \alpha \in \hat{G}\}$ je baza vektorskog prostora $Z_F(G)$. Kako je prema (*a*) $Z_F(G)$ gusto u $Z_2(G)$ iz tvrdnje (*e*) zadatka 5.3. slijedi da je $\{\chi^\alpha;\, \alpha \in \hat{G}\}$ ortonormirana baza od $Z_2(G)$.

(*c*) Po tvrdnji (*b*) zadatka 5.3. vrijedi

$$\chi^\alpha * C_\beta(G) = \{0\} \quad \text{ako je } \alpha \neq \beta \qquad \text{i} \qquad \chi^\alpha * C_\alpha(G) = C_\alpha(G).$$

Kako je

$$L_2(G) = \bigoplus_{\alpha \in \hat{G}} C_\alpha(G) \qquad \text{i} \qquad F(G) = \sum_{\alpha \in \hat{G}} \dot{+}\, C_\alpha(G)$$

i kako je konvolucija sa $L_2(G) \times L_2(G)$ u $L_2(G)$ neprekidna, slijedi

$$\chi^\alpha * L_2(G) = \chi^\alpha * F(G) = C_\alpha(G).$$

Budući da je $F(G) \subseteq C(G) \subseteq L_2(G)$, imamo i $\chi^\alpha * C(G) = C_\alpha(G)$.

Neka je π proizvoljna reprezentacija od G na konačnodimenzionalnom prostoru V. Tada postoje $\pi-$invarijantni potprostori $V_1, V_2, \dots, V_s$ od V takvi da je $V = V_1 \dot{+} V_2 \dot{+} \cdots \dot{+} V_s$ i da su sve subreprezentacije π_{V_i}, $1 \le i \le s$, ireducibilne. Neka je $\alpha_i \in \hat{G}$ klasa reprezentacije π_{V_i}. Tada slijedi $\chi^\pi = \sum_{i=1}^s \chi^{\alpha_i}$. Kako su χ^α, $\alpha \in \hat{G}$, linearno nezavisni, broj $(\pi : \alpha)$ koliko puta se u rastavu reprezentacije π pojavljuje ireducibilna subreprezentacija iz klase α je neovisan o izboru gornjeg rastava. Naravno, imamo

$$\chi^\pi = \sum_{\alpha \in \hat{G}} (\pi : \alpha) \chi^\alpha.$$

Kako su χ^α ortonormirani, slijedi $(\pi : \alpha) = (\chi^\pi | \chi^\alpha)$. Broj $(\pi : \alpha)$ zove se **multiplicitet** od α u reprezentaciji π.

Iz gornjeg razmatranja zaključujemo:

Propozicija 5.4.5. *Neka su π i π' konačnodimenzionalne reprezentacije kompaktne grupe G i neka su χ^π i $\chi^{\pi'}$ njihovi karakteri. Nadalje, za $\alpha \in \hat{G}$ neka je χ^α karakter bilo koje reprezentacije iz klase α.*

(a) *Za svaki $\alpha \in \hat{G}$ vrijedi $(\pi : \alpha) = (\chi^\pi | \chi^\alpha)$.*

(b) *Reprezentacije π i π' od G su ekvivalentne ako i samo ako je $\chi^\pi = \chi^{\pi'}$.*

5.5 Dekompozicija unitarne reprezentacije

U ovom odjeljku π je proizvoljna unitarna reprezentacija kompaktne grupe G na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$. Kao i prije istim znakom π označavamo i pripadne reprezentacije grupovnih algebri

$$C(G) \subseteq L_2(G) \subseteq L_1(G) \subseteq C^*(G).$$

Podsjećamo da je

$$(\pi(f)\xi|\eta) = \int_G f(x)(\pi(x)\xi|\eta)\mathrm{d}\mu(x), \qquad f \in L_1(G), \quad \xi, \eta \in \mathcal{H}.$$

Definiramo ograničene operatore na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$:

$$E_{ij}^\alpha = d(\alpha)\pi\left(\overline{\pi_{ij}^\alpha}\right), \qquad E^\alpha = d(\alpha)\pi\left(\overline{\chi^\alpha}\right) = \sum_{i=1}^{d(\alpha)} E_{ii}^\alpha, \qquad \alpha \in \hat{G}, \quad 1 \leq i, j \leq d(\alpha).$$

Zadatak 5.4. *Dokažite da operatori E_{ij}^α i E^α zadovoljavaju:*

(*a*) $E_{ij}^\alpha E_{k\ell}^\beta = \delta_{\alpha\beta}\delta_{jk}E_{i\ell}^\alpha$ *za* $\alpha, \beta \in \hat{G},\ 1 \leq i, j \leq d(\alpha),\ 1 \leq k, \ell \leq d(\beta)$.

(*b*) $E^\alpha E^\beta = 0$ *za* $\alpha, \beta \in \hat{G},\ \alpha \neq \beta$.

(*c*) $(E^\alpha)^2 = E^\alpha = (E^\alpha)^*$ *za svaki* $\alpha \in \hat{G}$.

Uputa: Koristite zadatak 5.2. i činjenicu da je $f \mapsto \pi(f)$ reprezentacija Banachove $*-$algebre $L_1(G)$.

Prema tvrdnji (c) zadatka 5.4. za svaki $\alpha \in \hat{G}$ **operator** E^α **je ortogonalan projektor**. U daljnjem ćemo sa $\mathcal{H}_\alpha$ označavati njegovo područje vrijednosti:

$$\mathcal{H}_\alpha = E^\alpha\mathcal{H} = \{\xi \in \mathcal{H};\ E^\alpha\xi = \xi\}.$$

Prema tvrdnji (b) zadatka 5.4. **zatvoreni potprostori** $\mathcal{H}_\alpha$ **su međusobno ortogonalni**.

Za $\xi \in \mathcal{H}$ označimo sa $\mathcal{H}_\xi$ najmanji $\pi-$invarijantan potprostor od $\mathcal{H}$ koji sadrži vektor ξ :

$$\mathcal{H}_\xi = span\,\pi(G)\xi = span\,\{\pi(x)\xi;\ x \in G\}.$$

Nadalje, stavimo

$$\mathcal{H}_0 = \{\xi \in \mathcal{H};\ \text{potprostor } \mathcal{H}_\xi \text{ je konačnodimenzionalan}\}.$$

Teorem 5.5.1. *Neka je π unitarna reprezentacija kompaktne grupe G na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$. Uz uvedene oznake vrijedi:*

(*a*) *$\mathcal{H}_0$ je gust potprostor od $\mathcal{H}$ i vrijedi*

$$\mathcal{H}_0 = \sum_{\alpha \in \hat{G}} \dot{+}\, \mathcal{H}_\alpha.$$

(*b*) *Ako je V $\pi-$invarijantan potprostor od $\mathcal{H}$ takav da je subreprezentacija π_V ireducibilna iz klase $\alpha \in \hat{G}$, onda je $V \subseteq \mathcal{H}_\alpha$.*

(*c*) *$\mathcal{H}_\alpha$ je skup svih $\xi \in \mathcal{H}_0$ takvih da je $\pi_{\mathcal{H}_\xi}$ direktna suma reprezentacija iz klase α.*

Za dokaz će nam trebati:

Zadatak 5.5. *Neka je W vektorski prostor i σ homomorfizam grupe G u grupu $GL(W)$ svih invertibilnih linearnih operatora na W. Neka je $\alpha \in \hat{G}$ i neka su $w_1, w_2, \ldots, w_{d(\alpha)} \in W$ vektori od kojih je bar jedan različit od nule i vrijedi*

$$\sigma(x)w_j = \sum_{i=1}^{d(\alpha)} \pi_{ij}^\alpha(x)w_i \qquad \forall x \in G, \quad \forall j \in \{1, 2, \ldots, d(\alpha)\}.$$

Dokažite da su tada vektori $w_1, w_2, \ldots, w_{d(\alpha)}$ linearno nezavisni i razapinju potprostor U koji je invarijantan s obzirom na sve operatore $\sigma(x)$, $x \in G$, i da je $x \mapsto \sigma(x)|U$ ireducibilna reprezentacija od G iz klase α.

Uputa: Prvo uočite da iz neprekidnosti funkcija π_{ij}^α slijedi da je sa $\tau(x) = \sigma(x)|U$ definirana reprezentacija od G na U. Sada dokažite da je linearan operator $A : \mathcal{H}^\alpha \to U$ definiran sa $Ae_i^\alpha = w_i$, $i = 1, 2, \ldots, d(\alpha)$, surjektivno preplitanje π^α sa τ. Zatim koristite ireducibilnost reprezentacije π^α.

Dokaz teorema 5.5.1.: Budući da su potprostori $\mathcal{H}_\alpha$ međusobno ortogonalni, suma $\sum \mathcal{H}_\alpha$ je direktna. Stavimo

$$\mathcal{H}_1 = \sum_{\alpha \in \hat{G}} \dot{+} \mathcal{H}_\alpha.$$

Dokazat ćemo najprije da je potprostor $\mathcal{H}_1$ gust u $\mathcal{H}$. Pretpostavimo suprotno i neka je $0 \neq \eta \perp \mathcal{H}_1$. Za $\alpha \in \hat{G}$ i $i, j \in \{1, 2, \ldots, d(\alpha)\}$ vrijedi $E^\alpha E_{ij}^\alpha = E_{ij}^\alpha$. Slijedi da za svaki vektor $\xi \in \mathcal{H}$ vrijedi $E_{ij}^\alpha \xi \in \mathcal{H}_\alpha \subseteq \mathcal{H}_1$. Dakle,

$$(E_{ij}^\alpha \xi|\eta) = 0 \qquad \forall \xi \in \mathcal{H},\ \forall \alpha \in \hat{G},\ \forall i, j \in \{1, 2, \ldots, d(\alpha)\}.$$

To znači da je

$$\int_G \overline{\pi_{ij}^\alpha(x)}(\pi(x)\xi|\eta)\mathrm{d}\mu(x) = 0 \qquad \forall \xi \in \mathcal{H},\ \forall \alpha \in \hat{G},\ \forall i, j \in \{1, 2, \ldots, d(\alpha)\}.$$

Sada iz teorema 5.3.2. slijedi da je neprekidna funkcija $x \mapsto (\pi(x)\xi|\eta)$ svuda jednaka nuli za svaki $\xi \in \mathcal{H}$. Posebno za $x = e$ nalazimo $(\xi|\eta) = 0 \ \ \forall \xi \in \mathcal{H}$, suprotno pretpostavci $\eta \neq 0$. Ova kontradikcija pokazuje da je potprostor $\mathcal{H}_1$ gust u Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$.

Neka su $\xi, \eta \in \mathcal{H}$, $x \in G$, $\alpha \in \hat{G}$, $1 \leq i, j \leq d(\alpha)$. Tada imamo redom

$$(\pi(x)E_{ij}^\alpha \xi|\eta) = (E_{ij}^\alpha \xi|\pi(x^{-1})\eta) = d(\alpha) \int_G \overline{\pi_{ij}^\alpha(y)}(\pi(y)\xi|\pi(x^{-1})\eta)\mathrm{d}\mu(y) =$$

$$= d(\alpha) \int_G \overline{\pi_{ij}^\alpha(y)}(\pi(xy)\xi|\eta)\mathrm{d}\mu(y) = d(\alpha) \int_G \overline{\pi_{ij}^\alpha(x^{-1}y)}(\pi(y)\xi|\eta)\mathrm{d}\mu(y) =$$

$$= d(\alpha) \sum_{k=1}^{d(\alpha)} \overline{\pi_{ik}^\alpha(x^{-1})} \int_G \overline{\pi_{kj}^\alpha(y)}(\pi(y)\xi|\eta)\mathrm{d}\mu(y) = \sum_{k=1}^{d(\alpha)} \pi_{ki}^\alpha(x)(E_{kj}^\alpha \xi|\eta) = \left(\sum_{k=1}^{d(\alpha)} \pi_{ki}^\alpha(x)E_{kj}^\alpha \xi \middle| \eta \right).$$

Budući da to vrijedi za sve $\xi, \eta \in \mathcal{H}$ zaključujemo da je

$$\pi(x)E_{ij}^\alpha = \sum_{k=1}^{d(\alpha)} \pi_{ki}^\alpha(x)E_{kj}^\alpha, \qquad x \in G, \quad \alpha \in \hat{G}, \quad 1 \leq i, j \leq d(\alpha). \tag{5.1}$$

Iako nam u ovom dokazu to ne će trebati, napominjemo da se sličnim računom ili adjungiranjem relacije (5.1) dobiva da vrijedi

$$E_{ij}^{\alpha}\pi(x)=\sum_{k=1}^{d(\alpha)}\pi_{jk}^{\alpha}(x)E_{ik}^{\alpha},\qquad x\in G,\quad \alpha\in\hat{G},\quad 1\leq i,j\leq d(\alpha). \tag{5.2}$$

Neka je sada $\alpha\in\hat{G}$ i $\xi\in\mathcal{H}_{\alpha}$. Tada je $E^{\alpha}\xi=\xi$. Stavimo

$$W=span_{\mathbb{C}}\{E_{ij}^{\alpha}\xi;\ 1\leq i,j\leq d(\alpha)\}.$$

Tada je W konačnodimenzionalan potprostor od $\mathcal{H}$ i vrijedi

$$\xi=E^{\alpha}\xi=\sum_{i=1}^{d(\alpha)}E_{ii}^{\alpha}\xi\in W.$$

Nadalje, prema (5.1) potprostor W je $\pi-$invarijantan. Dakle, $span_{\mathbb{C}}(\pi(G)\xi)\subseteq W$, pa zaključujemo da je $\xi\in\mathcal{H}_0$. Time je dokazano da je $\mathcal{H}_{\alpha}\subseteq\mathcal{H}_0\ \ \forall\alpha\in\hat{G}$ pa slijedi $\mathcal{H}_1\subseteq\mathcal{H}_0$. Prema tome, potprostor $\mathcal{H}_0$ je gust u Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$.

Dokažimo sada tvrdnju (b). Neka je V $\pi-$invarijantan potprostor od $\mathcal{H}$ takav da je subreprezentacija π_V ireducibilna iz klase α. Tada u V možemo izabrati bazu $\{\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_{d(\alpha)}\}$ takvu da vrijedi

$$\pi(x)\xi_j=\sum_{i=1}^{\delta(\alpha)}\pi_{ij}^{\alpha}(x)\xi_i\qquad\forall x\in G,\ \forall j\in\{1,2,\dots,d(\alpha)\}.$$

Korištenjem Peter$-$Weylovog teorema 5.3.2. nalazimo da za svaki $\eta\in\mathcal{H}$ i bilo koje indekse $j,k,\ell\in\{1,2,\dots,d(\alpha)\}$ vrijedi

$$(E_{k\ell}^{\alpha}\xi_j|\eta)=d(\alpha)\int_G\overline{\pi_{k\ell}^{\alpha}(x)}(\pi(x)\xi_j|\eta)\mathrm{d}\mu(x)=$$

$$=d(\alpha)\int_G\overline{\pi_{k\ell}^{\alpha}(x)}\sum_{i=1}^{\alpha}\pi_{ij}^{\alpha}(x)(\xi_i|\eta)\mathrm{d}\mu(x)=d(\alpha)\sum_{i=1}^{d(\alpha)}\left(\pi_{ij}^{\alpha}|\pi_{k\ell}^{\alpha}\right)(\xi_i|\eta)=\sum_{i=1}^{d(\alpha)}\delta_{ik}\delta_{j\ell}(\xi_i|\eta)=\delta_{j\ell}(\xi_k|\eta).$$

Kako je $\eta\in\mathcal{H}$ bio proizvoljan, to znači da je

$$E_{k\ell}^{\alpha}\xi_j=\delta_{j\ell}\xi_k,\qquad\forall j,k,\ell\in\{1,2,\dots,d(\alpha)\}.$$

Odatle je

$$E^{\alpha}\xi_j=\sum_{k=1}^{d(\alpha)}E_{kk}^{\alpha}\xi_j=\sum_{k=1}^{d(\alpha)}\delta_{kj}\xi_k=\xi_j.$$

Slijedi $\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_{d(\alpha)}\in\mathcal{H}_{\alpha}$, dakle, $V\subseteq\mathcal{H}_{\alpha}$.

Neka je sada $\xi\in\mathcal{H}_0$. Tada je $\mathcal{H}_{\xi}$ konačnodimenzionalan $\pi-$invarijantan potprostor od $\mathcal{H}$. Stoga po teoremu 5.2.2. postoje $\pi-$invarijantni potprostori $W_1,W_2,\dots,W_s$ od $\mathcal{H}_{\xi}$ takvi da je $\mathcal{H}_{\xi}=W_1\dotplus W_2\dotplus\cdots\dotplus W_s$ i da su sve subreprezentacije π_{W_i}, $i=1,2,\dots,s$, ireducibilne. Označimo sa α_i klasu ekvivalencije reprezentacije π_{W_i}. Prema tvrdnji (b) tada je $W_i\subseteq\mathcal{H}_{\alpha_i}$, pa slijedi

$$\xi\in\mathcal{H}_{\xi}\subseteq\mathcal{H}_{\alpha_1}\dotplus\mathcal{H}_{\alpha_2}\dotplus\cdots\dotplus\mathcal{H}_{\alpha_s}\subseteq\mathcal{H}_1.$$

Zaključujemo da je $\mathcal{H}_0\subseteq\mathcal{H}_1$, pa zbog prije dokazane obrnute inkluzije imamo jednakost $\mathcal{H}_0=\mathcal{H}_1$. Time je dokazana tvrdnja (a).

Dokažimo sada tvrdnju (c). Prije svega, iz tvrdnje (b) slijedi inkluzija

$$\{\xi \in \mathcal{H}_0;\ \pi_{\mathcal{H}_\xi} \text{ je direktna suma reprezentacija iz klase } \alpha\} \subseteq \mathcal{H}_\alpha.$$

Za dokaz tvrdnje (c) treba još dokazati obrnutu inkluziju.

Neka je $\xi \in \mathcal{H}_\alpha$. Stavimo kao i prije

$$W = span\,\{E_{ij}^\alpha \xi;\ 1 \le i, j \le d(\alpha)\}.$$

Znamo da je $\mathcal{H}_\xi = span\,(\pi(G)\xi) \subseteq W$. Neka je $\eta \in \mathcal{H}_\xi^\perp$, tj. $(\pi(x)\xi|\eta) = 0\ \forall x \in G$. Tada je za $1 \le i, j \le d(\alpha)$

$$(E_{ij}^\alpha \xi|\eta) = d(\alpha) \int_G \overline{\pi_{ij}^\alpha(x)}(\pi(x)\xi|\eta \mathrm{d}\mu(x) = 0,$$

pa dobivamo da je $\eta \in W^\perp$. Iz dokazane inkluzije $\mathcal{H}_\xi^\perp \subseteq W^\perp$ slijedi $W \subseteq \mathcal{H}_\xi$. Time je dokazano da je

$$\mathcal{H}_\xi = W = span\,\{E_{ij}^\alpha \xi;\ 1 \le i, j \le d(\alpha)\}.$$

Stavimo sada

$$W_j = span_{\mathbb{C}}\,\{E_{ij}^\alpha \xi;\ 1 \le i \le d(\alpha)\}, \qquad j = 1, 2, \ldots, d(\alpha).$$

Sada iz jednakosti (5.1) i iz zadatka 5.5. slijedi da je za svaki j ili $W_j = \{0\}$ ili je W_j $\pi-$invarijantan potprostor i subreprezentacija π_{W_j} je ireducibilna iz klase α. Očito je $\mathcal{H}_\xi = W_1 + W_2 + \cdots + W_{d(\alpha)}$. Dokažimo još da postoje indeksi $1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_s \le d(\alpha)$ takvi da je $\mathcal{H}_\xi = W_{i_1} \dotplus \cdots \dotplus W_{i_s}$. Indekse i_k biramo induktivno: i_1 je prvi u nizu $1, 2, \ldots, d(\alpha)$ takav da je $W_{i_1} \neq \{0\}$; nakon što su izabrani $i_1, \ldots, i_{k-1}$, indeks i_k biramo kao prvi u nizu $i_{k-1} + 1, \ldots, d(\alpha)$ takav da

$$W_{i_k} \not\subseteq U_{k-1} = \sum_{j=1}^{k-1} \dotplus W_{i_j}.$$

Tada je $W_{i_k} \cap U_{k-1}$ invarijantan potprostor od W_{i_k} koji je različit od W_{i_k}, a kako je subreprezentacija $\pi_{W_{i_k}}$ ireducibilna, zaključujemo da je $W_{i_k} \cap U_{k-1} = \{0\}$, odnosno, suma $U_k = U_{k-1} + W_{i_k}$ je direktna. Ova induktivna konstrukcija vodi do traženih indeksa $1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_s \le d(\alpha)$ takvih da je $\mathcal{H}_\xi = U_s = W_{i_1} \dotplus W_{i_2} \dotplus \cdots \dotplus W_{i_s}$.

Time je dokazano da je za svaki $\xi \in \mathcal{H}_\alpha$ subreprezentacija $\pi_{\mathcal{H}_\xi}$ direktna suma ireducibilnih reprezentacija iz klase α, pa je dokazana i obrnuta inkluzija, odnosno, jednakost iz tvrdnje (c).

Korolar 5.5.2. (a) *Za desnu regularnu reprezentaciju π_r od G na $L_2(G)$ i za $E_r^\alpha = d(\alpha)\pi_r\,(\overline{\chi^\alpha})$ je $E_r^\alpha L_2(G) = C_\alpha(G)$.*

(b) *Za lijevu regularnu reprezentaciju π_ℓ od G na $L_2(G)$ i za $E_\ell^\alpha = d(\alpha)\pi_\ell\,(\overline{\chi^\alpha})$ je $E_\ell^\alpha L_2(G) = \overline{C_\alpha(G)} = \{\overline{f};\ f \in C_\alpha(G)\}$.*

Dokaz: Prilikom definicije reprezentacija π_ℓ i π_r prije iskaza propozicije 2.2.6. ustanovili smo da je $\pi_\ell(f)g = f * g$ i $\pi_r(f)g = g * \check{f}$. Koristeći tvrdnju ($c$) teorema 5.4.4. i tvrdnju (d) zadatka 5.3. izvodimo

$$E_r^\alpha L_2(G) = L_2(G) * \check{\overline{\chi^\alpha}} = L_2(G) * (\chi^\alpha)^* = L_2(G) * \chi^\alpha = C_\alpha(G);$$

$$E_\ell^\alpha L_2(G) = \overline{\chi^\alpha} * L_2(G) = \overline{\chi^\alpha * L_2(G)} = \overline{C_\alpha(G)}.$$

5.6 Plancherelov teorem za kompaktnu grupu

U ovoj točki uspostavit ćemo slične veze među funkcijama na G i na $\hat{G}$ kao u slučaju Abelovih lokalno kompaktnih grupa. Sjetimo se da je u slučaju Abelove kompaktne grupe G topologija na $\hat{G}$ diskretna. Tako ćemo i u slučaju opće kompaktne grupe G skup $\hat{G}$ njenih klasa ekvivalencije ireducibilnih reprezentacija promatrati kao topološki prostor s diskretnom topologijom, odnosno na funkcije definirane na $\hat{G}$ ne ćemo postavljati nikakve uvjete neprekidnosti.

Za svaku klasu $\alpha \in \hat{G}$ izaberimo kao i prije unitarnu reprezentaciju π^α klase α na konačnodimenzionalnom unitarnom prostoru $\mathcal{H}^\alpha$ dimenzije $d(\alpha)$. U slučaju Abelovih grupa sve su ireducibilne unitarne reprezentacije jednodimenzionalne i u tom slučaju promatrali smo skalarne funkcije na $\hat{G}$. U slučaju kompaktne grupe G promatrat ćemo prostore funkcija Φ na $\hat{G}$ koje nisu skalarne nego takve da je $\Phi(\alpha) \in \mathcal{L}(\mathcal{H}^\alpha)$ za svaki $\alpha \in \hat{G}$. Skup svih takvih funkcija, odnosno, Kartezijev produkt familije algebri operatora $(\mathcal{L}(\mathcal{H}^\alpha);\ \alpha \in \hat{G})$, označimo sa $\Pi(\hat{G})$. To je unitalna algebra u odnosu na operacije po točkama:

$$(\Phi+\Psi)(\alpha) = \Phi(\alpha)+\Psi(\alpha), \quad (\lambda\Phi)(\alpha) = \lambda\Phi(\alpha), \quad (\Phi\Psi)(\alpha) = \Phi(\alpha)\Psi(\alpha), \quad \Phi,\Psi \in \Pi(\hat{G}),\ \lambda \in \mathbb{C}.$$

Jedinica u toj algebri je funkcija Υ koja poprima kao vrijednosti u svim točkama jedinične operatore: $\Upsilon(\alpha) = I_{\mathcal{H}^\alpha}\ \forall \alpha \in \hat{G}$. Nadalje, uz definiciju involucije po točkama

$$\Phi^*(\alpha) = \Phi(\alpha)^*, \qquad \alpha \in \hat{G}$$

$\Pi(\hat{G})$ postaje $*-$algebra. Kako je topologija na $\hat{G}$ diskretna, pa je svaki podskup od $\hat{G}$ i otvoren i zatvoren, nosač funkcije $\Phi \in \Pi(\hat{G})$ definiramo sa

$$Supp\,\Phi = \{\alpha \in \hat{G};\ \Phi(\alpha) \neq 0\}.$$

Uočimo sada neke podalgebre od $\Pi(\hat{G})$. Neka je $C_0(\hat{G})$ skup svih funkcija $\Phi \in \Pi(\hat{G})$ s konačnim (tj. kompaktnim) nosačem. Neka je $C_\infty(\hat{G})$ skup svih $\Phi \in \Pi(\hat{G})$ koje teže k nuli u beskonačnosti. Konvergencija k nuli u beskonačnosti za funkciju $\Phi \in \Pi(\hat{G})$ u ovom slučaju znači da za svaki $\varepsilon > 0$ postoji konačan podskup $F \subseteq \hat{G}$ takav da vrijedi

$$\alpha \in \hat{G} \setminus F \qquad \Longrightarrow \qquad \|\Phi(\alpha)\|_\alpha \leq \varepsilon.$$

Pri tome je sa $\|\cdot\|_\alpha$ označena operatorska norma na prostoru $\mathcal{L}(\mathcal{H}^\alpha)$ dobivena iz norme na unitarnom prostoru $\mathcal{H}^\alpha$. Tada je $C_\infty(\hat{G})$ $*-$podalgebra od $\Pi(\hat{G})$. Definiramo normu na $C_\infty(\hat{G})$ sa

$$\|\Phi\|_\infty = \max\{\|\Phi(\alpha)\|_\alpha;\ \alpha \in \hat{G}\}.$$

Lako se vidi da uz tu normu $C_\infty(\hat{G})$ postaje C^*-algebra. $C_0(\hat{G})$ je $*-$podalgebra gusta u $C_\infty(\hat{G})$.

Definiramo sada $L_2(\hat{G})$ kao prostor svih funkcija $\Phi \in \Pi(\hat{G})$ sa svojstvom

$$\sum_{\alpha\in\hat{G}} d(\alpha)\mathrm{Tr}\,\Phi(\alpha)\Phi(\alpha)^* < +\infty.$$

Nije teško dokazati da je tada $L_2(\hat{G})$ Hilbertov prostor uz skalarni produkt definiran sa

$$(\Phi|\Psi) = \sum_{\alpha\in\hat{g}} d(\alpha)\mathrm{Tr}\,\Phi(\alpha)\Psi(\alpha)^*, \qquad \Phi,\Psi \in L_2(\hat{G}).$$

Norma izvedena iz tog skalarnog produkta je

$$\|\Phi\|_2 = \|\Phi\|_{L_2(\hat{G})} = \sqrt{\sum_{\alpha\in\hat{G}} d(\alpha)\mathrm{Tr}\,\Phi(\alpha)\Phi(\alpha)^*}, \qquad \Phi \in L_2(\hat{G}).$$

$\mathcal{L}(\mathcal{H}^\alpha)$ možemo identificirati s potprostorom od $L_2(\hat{G})$, ako operator $S \in \mathcal{L}(\mathcal{H}^\alpha)$ identificiramo s funkcijom

$$\mathcal{S}(\beta) = \begin{cases} S & \text{ako je } \beta = \alpha \\ \\ 0 & \text{ako je } \beta \neq \alpha. \end{cases}$$

Skalarni produkt na $\mathcal{L}(\mathcal{H}^\alpha)$ dan je sa $(S|T)_{[\alpha]} = d(\alpha)\mathrm{Tr}\, ST^*$. Uz takvu identifikaciju imamo

$$L_2(\hat{G}) = \bigoplus_{\alpha\in\hat{G}} \mathcal{L}(\mathcal{H}^\alpha), \qquad (\Phi|\Psi) = \sum_{\alpha\in\hat{G}} (\Phi(\alpha)|\Psi(\alpha))_{[\alpha]}, \qquad \|\Phi\|_2 = \sqrt{\sum_{\alpha\in\hat{G}} \|\Phi(\alpha)\|^2_{[\alpha]}}$$

Primijetimo da je $C_0(\hat{G})$ gust potprostor od $L_2(\hat{G})$. Štoviše, vrijedi

$$C_0(\hat{G}) = \sum_{\alpha\in\hat{G}} \dot{+}\, \mathcal{L}(\mathcal{H}^\alpha).$$

Uočimo da za $\Phi, \Psi \in L_2(\hat{G})$ nije nužno $\Phi\Psi \in L_2(\hat{G})$ ako grupa G nije Abelova. Dakle, općenito $L_2(\hat{G})$ nije podalgebra od $\Pi(\hat{G})$.

Prije iskaza sljedećeg teorema napomenimo da za kompaktnu grupu G vrijedi $L_2(G) \subseteq L_1(G)$. Stoga je za svaku funkciju (tj. klasu funkcija) $f \in L_2(G)$ i za svaku unitarnu reprezentaciju π od G dobro definiran operator $\pi(f)$.

Teorem 5.6.1. *Za $f \in L_2(G)$ definiramo $\mathcal{F}f \in \Pi(\hat{G})$ sa*

$$(\mathcal{F}f)(\alpha) = \pi^\alpha(f), \qquad \alpha \in \hat{G}.$$

(*a*) *$\mathcal{F}$ je izometrički izomorfizam Hilbertovog prostora $L_2(G)$ na Hilbertov prostor $L_2(\hat{G})$.*

(*b*) *Restrikcija $\mathcal{F}|F(G)$ je izomorfizam $*-$algebre $F(G)$ na $*-$algebru $C_0(\hat{G})$.*

(*c*) *$\mathcal{F}|F(G)$ se proširuje do izometričkog izomorfizma C^*-algebri sa $C^*(G)$ na $C_\infty(\hat{G})$.*

Dokaz: (*b*) Za $\alpha, \beta \in \hat{G}$ i za $1 \leq i, j \leq d(\alpha)$ izračunajmo matrične elemente operatora $\left(\mathcal{F}\overline{\pi^\alpha_{ij}}\right)(\beta) = \pi^\beta\left(\overline{\pi^\alpha_{ij}}\right)$. Te matrične elemente označimo sa $\pi^\beta\left(\overline{\pi^\alpha_{ij}}\right)_{k\ell}$, $1 \leq k, \ell \leq d(\beta)$. Prema Peter$-$Weylovom teoremu imamo

$$\pi^\beta\left(\overline{\pi^\alpha_{ij}}\right)_{k\ell} = \int_G \overline{\pi^\alpha_{ij}(x)}\pi^\beta_{k\ell}(x)\mathrm{d}\mu(x) = \left(\pi^\beta_{k\ell}\,\middle|\,\pi^\alpha_{ij}\right) = \frac{1}{d(\alpha)}\,\delta_{\alpha\beta}\,\delta_{ik}\,\delta_{j\ell}.$$

Posebno, vidimo da je $\mathcal{F}|\overline{C_\alpha(G)}$ izomorfizam prostora $\overline{C_\alpha(G)}$ na prostor $\mathcal{L}(\mathcal{H}^\alpha)$. Budući da je

$$F(G) = \overline{F(G)} = \sum_{\alpha\in\hat{G}} \dot{+}\, \overline{C_\alpha(G)} \qquad\qquad C_0(\hat{G}) = \sum_{\alpha\in\hat{G}} \dot{+}\, \mathcal{L}(\mathcal{H}^\alpha)$$

vidimo da je $\mathcal{F}|F(G)$ izomorfizam prostora $F(G)$ na prostor $C_0(\hat{G})$.

(*a*) Prema Peter$-$Weylovom teoremu $\{\sqrt{d(\alpha)}\pi^\alpha_{ij};\ \alpha \in \hat{G},\ 1 \leq i, j \leq d(\alpha)\}$ je ortonormirana baza Hilbertovog prostora $L_2(G)$. Njoj kompleksno konjugirana je također ortonormirana baza od $L_2(G)$. Dakle, za $f \in L_2(G)$ imamo u smislu L_2-konvergencije

$$f = \sum_\alpha \sum_{i,j} d(\alpha)\left(f\,\middle|\,\overline{\pi^\alpha_{ij}}\right)\overline{\pi^\alpha_{ij}},$$

i vrijedi Parsevalova jednakost za kvadrat norme

$$\|f\|_2^2 = \sum_{\alpha} \sum_{i,j} d(\alpha) \left| \left(f \,|\overline{\pi_{ij}^{\alpha}} \right) \right|^2 . \tag{5.3}$$

S druge strane, matrični elementi operatora $(\mathcal{F}f)(\alpha) = \pi^{\alpha}(f)$ su

$$\pi^{\alpha}(f)_{ij} = \int_G \pi_{ij}^{\alpha}(x) f(x) \mathrm{d}\mu(x) = \left(f \,|\overline{\pi_{ij}^{\alpha}} \right), \qquad 1 \leq i, j \leq d(\alpha).$$

Dakle,

$$\mathrm{Tr}\, \pi^{\alpha}(f) \pi^{\alpha}(f)^* = \sum_{i,j=1}^{d(\alpha)} \pi^{\alpha}(f)_{ij} \overline{\pi^{\alpha}(f)_{ij}} = \sum_{i,j} \left| \left(f \,|\overline{\pi_{ij}^{\alpha}} \right) \right|^2 .$$

Odatle slijedi da je $\mathcal{F}f \in L_2(\hat{G}$ i pomoću (5.3) nalazimo

$$\|\mathcal{F}f\|_2^2 = \sum_{\alpha} \sum_{i,j} d(\alpha) \mathrm{Tr}\, (\mathcal{F}f)(\alpha)(\mathcal{F}f)(\alpha)^* =$$

$$= \sum_{\alpha} \sum_{i,j} d(\alpha) \mathrm{Tr}\, \pi^{\alpha}(f) \pi^{\alpha}(f)^* = \sum_{\alpha} \sum_{i,j} d(\alpha) \left| \left(f \,|\overline{\pi_{ij}^{\alpha}} \right) \right|^2 = \|f\|_2^2.$$

Dakle, $\mathcal{F}(L_2(G)) \subseteq L_2(\hat{G})$ i $\mathcal{F} : L_2(G) \to L_2(\hat{G})$ je izometrija. Napokon, prema (a) je

$$C_0(\hat{G}) = \mathcal{F}(F(G)) \subseteq \mathcal{F}(L_2(G)),$$

a kako je $C_0(\hat{G})$ gusto u $L_2(\hat{G})$, zaključujemo da je $\mathcal{F}(L_2(G)) = L_2(\hat{G})$. Dakle, $\mathcal{F}$ je izometrički izomorfizam Hilbertovog prostora $L_2(G)$ na Hilbertov prostor $L_2(\hat{G})$.

(c) Za $f, g \in C(G)$ imamo za $\alpha \in \hat{G}$

$$(\mathcal{F}(f * g))(\alpha) = \pi^{\alpha}(f * g) = \pi^{\alpha}(f) \pi^{\alpha}(g) = (\mathcal{F}f)(\alpha)(\mathcal{F}g)(\alpha) = (\mathcal{F}f \cdot \mathcal{F}g)(\alpha),$$

$$(\mathcal{F}f)^*(\alpha) = (\mathcal{F}f)(\alpha)^* = \pi^{\alpha}(f)^* = \pi^{\alpha}(f^*) = (\mathcal{F}f^*)(\alpha).$$

Time je dokazano da je $\mathcal{F}|C(G)$ homomorfizam $*-$algebri.

Odredimo sada C^*-normu na $C(G)$ u odnosu na koju popunjenjem $C(G)$ dolazimo do grupovne C^*-algebre. Ta je norma općenito definirana sa

$$\|f\| = \sup \{\|\pi(f)\|;\ \pi \text{ unitarna reprezentacija od } G\}.$$

Neka je π unitarna reprezentacija od G na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$. Tada iz teorema 5.5.1. slijedi da postoje konačnodimenzionalni $\pi-$invarijantni potprostori $\mathcal{H}_i$, $i \in I$, od $\mathcal{H}$ takvi da je svaka subreprezentacija $\pi_{\mathcal{H}_i}$ ireducibilna i da je

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{i \in I} \mathcal{H}_i.$$

Ako je reprezentacija $\pi_{\mathcal{H}_i}$ iz klase $\alpha_i \in \hat{G}$ onda je $\|\pi_{\mathcal{H}_i}(f)\| = \|\pi^{\alpha_i}(f)\|_{\alpha_i}$, $f \in C(G)$, $i \in I$. Dakle, kako je za svaku $f \in C(G)$ i za svaki $i \in I$ potprostor $\mathcal{H}_i$ invarijantan s obzirom na operator $\pi(f)$ i $\pi(f)|\mathcal{H}_i = \pi_{\mathcal{H}_i}(f)$, nalazimo

$$\|\pi(f)\| = \sup \{\|\pi_{\mathcal{H}_i}(f)\|;\ i \in I\} = \sup \{\|\pi^{\alpha_i}(f)\|_{\alpha_i};\ i \in I\} \leq \sup \{\|\pi^{\alpha}(f)\|_{\alpha};\ \alpha \in \hat{G}\}.$$

Budući da to vrijedi za svaku unitarnu reprezentaciju π, zaključujemo da je

$$\|f\| = \sup\{\|\pi^\alpha(f)\|_\alpha;\ \alpha \in \hat{G}\}.$$

Označimo sa $\mathcal{A}(\hat{G})$ skup svih $\Phi \in \Pi(\hat{G})$ takvih da je

$$\sup\{\|\Phi(\alpha)\|_\alpha;\ \alpha \in \hat{G}\} < +\infty.$$

Tada je $\mathcal{A}(\hat{G})$ $*-$podalgebra od $\Pi(\hat{G})$ i to je C^*-algebra u odnosu na normu

$$\|\Phi\|_\infty = \sup\{\|\Phi(\alpha)\|_\alpha;\ \alpha \in \hat{G}\}, \qquad \Phi \in \mathcal{A}(\hat{G}).$$

Sada za $f \in C(G)$ imamo

$$\sup\{\|(\mathcal{F}f)(\alpha)\|_\alpha;\ \alpha \in \hat{G}\} = \sup\{\|\pi^\alpha(f)\|_\alpha;\ \alpha \in \hat{G}\} = \|f\|.$$

To pokazuje da je $\mathcal{F}f \in \mathcal{A}(\hat{G})$ za svaku $f \in C(G)$ i da je

$$\|\mathcal{F}f\|_\infty = \|f\| \qquad \forall f \in C(G).$$

Dakle, restrikcija $\mathcal{F}|C(G)$ je izometrija normirane $*-$algebre $C(G)$ s C^*-normom $\|\cdot\|$ u C^*-algebru $\mathcal{A}(\hat{G})$. Stoga se $\mathcal{F}|C(G)$ produljuje do izometričkog injektivnog homomorfizma C^*-algebri sa $C^*(G)$ u $\mathcal{A}(\hat{G})$. Taj izometrički monomorfizam $C^*(G) \to \mathcal{A}(\hat{G})$ označimo sa $\tilde{\mathcal{F}}$. Ostaje još da dokažemo da je slika $\tilde{\mathcal{F}}(C^*(G))$ tog monomorfizma upravo C^*-algebra $C_\infty(\hat{G})$.

Stavimo $\mathcal{B} = \tilde{\mathcal{F}}(C^*(G))$. Tada je $\mathcal{B}$ C^*-podalgebra od $\mathcal{A}(\hat{G})$ i $\tilde{\mathcal{F}}$ je izometrički izomorfizam sa $C^*(G)$ na $\mathcal{B}$. Očito je $\mathcal{F}(F(G)) \subseteq \mathcal{F}(C(G)) \subseteq \mathcal{B}$.

Algebra $F(G)$ je prema teoremu 5.3.1. gusta u $C(G)$ u odnosu na normu $\|\cdot\|_\infty$. Nadalje, budući da je mjera μ normirana, vrijedi

$$\|f\|_1 \leq \|f\|_\infty \qquad \forall f \in C(G).$$

Kako je $C(G)$ gusta u $L_1(G)$ u odnosu na normu $\|\cdot\|_1$, slijedi da je $F(G)$ gusta u $L_1(G)$ u odnosu na normu $\|\cdot\|_1$.

Analogno, $L_1(G)$ je gusta u $C^*(G)$ u odnosu na C^*-normu $\|\cdot\|$ i vrijedi

$$\|f\| \leq \|f\|_1 \qquad \forall f \in L_1(G).$$

Odatle i iz činjenice da je $F(G)$ gusta u $L_1(G)$ u odnosu na normu $\|\cdot\|_1$ zaključujemo da je algebra $F(G)$ gusta u $C^*(G)$ u odnosu na C^*-normu $\|\cdot\|$. No to znači da je $\mathcal{B}$ zatvarač od $\mathcal{F}(F(G))$ u C^*- algebri $\mathcal{A}(\hat{G})$. Kako je prema (*b*) $\mathcal{F}(F(G)) = C_0(\hat{G})$, slijedi da je $\mathcal{B}$ zatvarač od $C_0(\hat{G})$ u $\mathcal{A}(\hat{G})$. No prema uvodnim napomenama taj je zatvarač jednak $C_\infty(\hat{G})$. Dakle, $\mathcal{B} = \tilde{\mathcal{F}}(C^*(G)) = C_\infty(\hat{G})$. Time je dokazano da je produljenje $\tilde{\mathcal{F}}$ od $\mathcal{F}|C(G)$ izometrički izomorfizam C^*-algebri sa $C^*(G)$ na $C_\infty(\hat{G})$.

Bibliografija

[1] J. Dixmier, *C^*-algebras*, North−Holland Publ. Co. Amsterdam − New York − Oxford, 1977.

[2] G.B. Folland, *A Course in Abstract Harmonic Analysis*, CRC Press, Boca Raton, Florida, 1994.

[3] W. Fulton, J. Harris, *Representation Theory. A First Course*, Springer−Verlag, New York, 2004.

[4] R. Goodman, N.R. Wallach, *Representations and Invariants of the Classical Groups*, Cambridge University Press, Cambridge, 2003.

[5] M. Hall, *The Theory of Groups*, Macmillan, New York, 1959.

[6] E. Hewitt, K.A. Ross, *Abstract Harmonic Analysis*, Springer−Verlag, New York, 1994.

[7] A.W. Knapp, *Representation Theory of Semisimple Groups. An Overview Based on Examples*, Princeton University Press, Princeton − Oxford, 2001.

[8] M.A. Naimark, *Normed Rings*, P. Noordhoff N.V., Groningen, 1964.

[9] L. Pukanszky, *Leçons sur les représentations des groupes*, Dunod, Paris, 1967.

[10] J.−P. Serre, *Linear Representations of Finite Groups*, Springer−Verlag, New York − Heidelberg − Berlin, 1977.

[11] B. Simon, *Representations of Finite and Compact Groups*, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1996.

[12] E.B. Vinberg, *Lineinie predstavlenija grupp*, (na ruskom) Nauka, Moskva, 1985.

[13] S.H. Weintraub, *Representation Theory of Finite Groups: Algebra and Arithmetic*, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2003.

[14] H. Weyl, *The Theory of Groups and Quantum Mechanics*, Princeton Univ. Press, Princeton, 1931.

[15] H. Weyl, *The Classical Groups*, Princeton University Press, Princeton, 1946.

[16] E.P. Wigner, *Group Theory and its Applications to the Quantum Mechanics*, Academic Press, New York, 1959.

[17] D.P. Želobenko, *Compact Lie Groups and Their Representations*, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1973.