UVOD U TEORIJU C^*-ALGEBRI

Prof. dr. sc. Hrvoje Kraljević

Predavanja održana na PMF−Matematičkom odjelu
Sveučilišta u Zagrebu
u ljetnom semestru akademske godine 2006./2007.

Zagreb, lipanj 2006.

Sadržaj

Poglavlje 1

Osnovni pojmovi

1.1 Algebre

U cijelom kolegiju termin **algebra** označava kompleksnu asocijativnu algebru (osim što ćemo kod dokazivanja Stone-Weierstrassovog teorema promatrati i realne asocijativne algebre funkcija). Dakle, algebra je vektorski prostor $\mathcal{A}$ nad poljem $\mathbb{C}$ kompleksnih brojeva na kojem je zadana asocijativna binarna operacija $(a, b) \mapsto ab$ sa $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$ u $\mathcal{A}$ koja je bihomogena u odnosu na množenje skalarima i distributivna i slijeva i zdesna s obzirom na zbrajanje u $\mathcal{A}$:

$$a(bc) = (ab)c, \qquad \lambda(ab) = (\lambda a)b = a(\lambda b), \qquad a(b + c) = ab + ac,$$

$$(a + b)c = ac + bc, \qquad a, b, c \in \mathcal{A},\ \lambda \in \mathbb{C}.$$

Jedinica u algebri $\mathcal{A}$ je element $e \in \mathcal{A}$ takav da je

$$ea = ae = a \qquad \forall a \in \mathcal{A}.$$

Ako jedinica postoji, ona je jedinstvena i tada ćemo je najčešće označavati sa e. **Unitalna algebra** je algebra u kojoj postoji jedinica. Ako je $\mathcal{A}$ unitalna algebra sa $\mathcal{A}^\times$ označavamo grupu invertibilnih elemenata algebre $\mathcal{A}$:

$$\mathcal{A}^\times = \{a \in \mathcal{A};\ \exists a^{-1} \in \mathcal{A} \text{ takav da je } aa^{-1} = a^{-1}a = e\}.$$

Potprostor $\mathcal{B}$ algebre $\mathcal{A}$ zove se **podalgebra** ako vrijedi

$$a, b \in \mathcal{B} \qquad \Longrightarrow \qquad ab \in \mathcal{B}.$$

Naravno, tada je $\mathcal{B}$ algebra s obzirom na iste operacije (ili, točnije, s obzirom na operacije koje su definirane kao restrikcije operacija algebre $\mathcal{A}$). Ako je $\mathcal{A}$ unitalna algebra, $\mathcal{B}$ se zove **unitalna podalgebra** ako sadrži jedinicu algebre $\mathcal{A}$. Napomenimo da je moguće da je $\mathcal{B}$ unitalna algebra, ali da $\mathcal{B}$ nije unitalna podalgebra algebre $\mathcal{A}$: naime, mobuće je da $\mathcal{B}$ ima jedinicu, ali da ta jedinica nije jednaka jedinici u algebri $\mathcal{A}$.

Ako su $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ algebre, preslikavanje $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ se zove **homomorfizam algebri** ako je φ linearno i multiplikativno:

$$\varphi(\lambda a + \mu b) = \lambda\varphi(a) + \mu\varphi(b) \qquad \text{i} \qquad \varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b) \qquad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{C},\ \forall a, b \in \mathcal{A}.$$

Ako su $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ unitalne algebre s jedinicama $e_\mathcal{A}$ i $e_\mathcal{B}$ i ako vrijedi $\varphi(e_\mathcal{A}) = e_\mathcal{B}$ onda se φ zove **unitalni homomorfizam**. Injektivni homomorfizam zove se **monomorfizam**, surjektivni homomorfizam zove se **epimorfizam**, a bijektivni homomorfizam je **izomorfizam algebri**. Za algebre $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$

kažemo da su **izomorfne** ako postoji izomorfizam $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$. Očito je izomorfnost algebri relacija ekvivalencije.

Primjer unitalne algebre je algebra $\mathbb{C}[T]$ polinoma u jednoj varijabli nad poljem $\mathbb{C}$. To je skup svih nizova $(\alpha_n)_{n\geq 0}$ kompleksnih brojeva, takvih da je samo konačno članova različito do nule: $\exists m$ takav da vrijedi $\alpha_n = 0 \ \forall n > m$. Zbrajanje u $\mathbb{C}[T]$ i množenje skalarom definirani su po komponentama: $(\alpha_n) + (\beta_n) = (\alpha_n + \beta_n)$, $\lambda(\alpha_n) = (\lambda\alpha_n)$, a množenje na sljedeći način:

$$(\alpha_n)(\beta_n) = (\gamma_n), \qquad \text{gdje je} \qquad \gamma_n = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \beta_{n-k}.$$

$\mathbb{C}[T]$ je komutativna algebra i vrijedi $\mathbb{C}[T]^\times = \mathbb{C}^\times = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Obično pišemo $(0,1,0,\ldots) = T$. Tada je za bilo koji prirodan broj n $T^n = (0,\ldots,0,1,0,\ldots)$, tj. niz u kome su svi članovi nula osim jedinice na mjestu $n+1$. Uz dogovor $T^0 = (1,0,\ldots)$ (to je jedinica u algebri $\mathbb{C}[T]$), polinom $P = (\alpha_n)$, za koji je $\alpha_n = 0$ za svaki $n > m$, možemo ovako zapisati:

$$P = P(T) = \alpha_0 + \alpha_1 T + \alpha_2 T^2 + \ldots + \alpha_m T^m = \sum_{n=0}^{m} \alpha_n T^n.$$

Ako je $\mathcal{A}$ unitalna algebra s jedinicom e, $x \in \mathcal{A}$ i $P \in \mathbb{C}[T]$ kao gore onda pišemo:

$$P(x) = \alpha_0 e + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \ldots + \alpha_m x^m = \sum_{n=0}^{m} \alpha_n x^n.$$

Očito je $P \mapsto P(x)$ unitalni homomorfizam algebri $\Phi_x \colon \mathbb{C}[T] \to \mathcal{A}$. Njegova je slika najmanja unitalna podalgebra od $\mathcal{A}$ koja sadrži x; to je potprostor od $\mathcal{A}$ razapet svim potencijama $\{e, x, x^2, \ldots\}$ elementa x.

Ako je $\mathcal{A}$ unitalna algebra i $x \in \mathcal{A}$ definiramo **spektar** elementa x kao skup

$$\sigma(x) = \sigma_{\mathcal{A}}(x) = \{\lambda \in \mathbb{C};\ x - \lambda e \notin \mathcal{A}^\times\}.$$

Uočimo neke evidentne činjenice. Ako je algebra trivijalna, $\mathcal{A} = \{0\}$, onda je 0 jedinica u toj algebri, pa je $\mathcal{A}^\times = \mathcal{A} = \{0\}$. Stoga je u tom slučaju $\sigma_{\mathcal{A}}(0) = \emptyset$. Ako je algebra netrivijalna, $\mathcal{A} \neq \{0\}$, onda je $\sigma(\lambda e) = \{\lambda\}$ za svaki $\lambda \in \mathbb{C}$.

Propozicija 1.1. *Neka je $\mathcal{A}$ unitalna algebra.*

(*a*) *Za $x \in \mathcal{A}$ i za $P \in \mathbb{C}[T]$ vrijedi:*

$$\sigma(P(x)) = P(\sigma(x)) = \{P(\lambda);\ \lambda \in \sigma(x)\}.$$

(*b*) *Za $x \in \mathcal{A}^\times$ vrijedi:*

$$\sigma\left(x^{-1}\right) = \sigma(x)^{-1} = \{\lambda^{-1};\, \lambda \in \sigma(x)\}.$$

Dokaz: (*a*) Neka je $\lambda \in \sigma(x)$. Definiramo $Q = P - P(\lambda)$. Tada je $Q(\lambda) = 0$, pa postoji $R \in \mathbb{C}[T]$, takav da je

$$P(T) - P(\lambda) = (T - \lambda)R(T).$$

Primijenimo li na tu jednakost homomorfizam Φ_x slijedi:

$$P(x) - P(\lambda)e = (x - \lambda e)R(x).$$

Pretpostavimo da je $P(x) - P(\lambda)e \in \mathcal{A}^\times$ i stavimo $a = (P(x) - P(\lambda)e)^{-1}$. Slijedi

$$e = a\,(P(x) - P(\lambda)e) = aR(x)(x - \lambda e) = (x - \lambda e)aR(x).$$

Odatle slijedi da je $x - \lambda e \in \mathcal{A}^\times$, a to je suprotno pretpostavci $\lambda \in \sigma(x)$. Dakle, pretpostavka $P(x) - P(\lambda)e \in \mathcal{A}^\times$ je bila pogrešna, pa zaključujemo da je $P(x) - P(\lambda)e \notin \mathcal{A}^\times$, tj. $P(\lambda) \in \sigma(P(x))$. Time je dokazana inkluzija $P(\sigma(x)) \subseteq \sigma(P(x))$.

Dokažimo sada obrnutu inkluziju. Neka je $\mu \in \sigma(P(x))$. Polje $\mathbb{C}$ je algebarski zatvoreno, pa ako je m stupanj polinoma P, postoje skalari $\alpha \neq 0$ i $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ takvi da je

$$P(T) - \mu = \alpha \cdot (T - \lambda_1) \cdots (T - \lambda_m).$$

Za svaki $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$ tada je $P(\lambda_j) - \mu = 0$, tj. $\mu = P(\lambda_j)$. Primijenimo li na gornju jednakost homomorfizam Φ_x dobivamo

$$P(x) - \mu e = \alpha \cdot (x - \lambda_1 e) \cdots (x - \lambda_m e).$$

Kako je $\mu \in \sigma(P(x))$ to vrijedi $P(x) - \mu e \notin \mathcal{A}^\times$ pa slijedi da postoji $j \in \{1, \ldots, m\}$ takav da $x - \lambda_j e \notin \mathcal{A}^\times$, tj. $\lambda_j \in \sigma(x)$. No tada je $\mu = P(\lambda_j) \in P(\sigma(x))$. Time je dokazana i obrnuta inkluzija $\sigma(P(x)) \subseteq P(\sigma(x))$, dakle jednakost $\sigma(P(x)) = P(\sigma(x))$.

(*b*) Neka je $\lambda \in \sigma(x)$, tj. $\lambda e - x$ nije invertibilan. Imamo

$$\lambda e - x = -\lambda(\lambda^{-1} e - x^{-1})x,$$

odakle se vidi da $\lambda^{-1} e - x^{-1}$ nije invertibilan, dakle $\lambda^{-1} \in \sigma\left(x^{-1}\right)$. Time je dokazano da iz $\lambda \in \sigma(x)$ slijedi $\lambda^{-1} \in \sigma(x^{-1})$, tj. dokazana je inkluzija $\sigma(x)^{-1} \subseteq \sigma\left(x^{-1}\right)$. Zamjena uloga x i x^{-1} daje $\sigma\left(x^{-1}\right)^{-1} \subseteq \sigma(x)$, odnosno dobivamo obrnutu inkluziju $\sigma\left(x^{-1}\right) \subseteq \sigma(x)^{-1}$.

Zadatak 1.1. *Neka je $\mathcal{A} \neq \{0\}$ unitalna algebra i neka je element $x \in \mathcal{A}$ nilpotentan. Dokažite da je tada $\sigma(x) = \{0\}$.*

Zadatak 1.2. *Neka je $\varphi\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ unitalni homomorfizam unitalnih algebri i neka je $x \in \mathcal{A}$. Tada je $\sigma_{\mathcal{B}}(\varphi(x)) \subseteq \sigma_{\mathcal{A}}(x)$.*

Neka je $\mathcal{A}$ unitalna algebra. Stavimo

$$R(x, \lambda) = (\lambda e - x)^{-1}, \qquad x \in \mathcal{A},\ \ \lambda \in \mathbb{C} \setminus \sigma(x)$$

Funkcija $\lambda \mapsto R(x, \lambda)$ sa $\mathbb{C} \setminus \sigma(x)$ u $\mathcal{A}$ zove se **rezolventa** elementa x.

Zadatak 1.3. *Neka je $\mathcal{A}$ unitalna algebra.*

(*a*) *Dokažite da za $x \in \mathcal{A}$ i $\lambda, \mu \in \mathbb{C} \setminus \sigma(x)$ vrijedi*

$$(\lambda - \mu)R(x, \lambda)R(x, \mu) = R(x, \mu) - R(x, \lambda).$$

Posebno, $R(x, \lambda)$ i $R(x, \mu)$ komutiraju.

(*b*) *Dokažite da za $x, y \in \mathcal{A}$ i $\lambda \in \mathbb{C} \setminus (\sigma(x) \cup \sigma(y))$ vrijedi*

$$R(y, \lambda)(y - x)R(x, \lambda) = R(y, \lambda) - R(x, \lambda).$$

Zadatak 1.4. *Neka je $\mathcal{A}$ algebra. Na Kartezijevom produktu $\tilde{\mathcal{A}} = \mathbb{C} \times \mathcal{A}$ definiramo operaciju množenja na sljedeći način:*

$$(\lambda, x)(\mu, y) = (\lambda\mu, \lambda y + \mu x + xy), \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{C}, \ \ x, y \in \mathcal{A}.$$

Dokažite da je tada $\tilde{\mathcal{A}}$ unitalna algebra s jedinicom $\varepsilon = (1, 0)$ i da je $x \mapsto (0, x)$ monomorfizam algebre $\mathcal{A}$ u algebru $\tilde{\mathcal{A}}$.

Monomorfizam $x \mapsto (0, x)$ iz zadatka 1.4. upotrijebit ćemo kao identifikaciju. Na taj način $\mathcal{A}$ postaje podalgebra od $\tilde{\mathcal{A}}$ i imamo rastav $\tilde{\mathcal{A}} = \mathcal{A} \dot{+} \mathbb{C}\varepsilon$. Za algebru $\tilde{\mathcal{A}}$ kažemo da je iz algebre $\mathcal{A}$ dobivena **unitalizacijom** ili **dodavanjem jedinice**. Na taj način svaku algebru bez jedinice uranjamo u unitalnu algebru. No, primijetimo da konstrukcija ima smisla i kad polazna algebra $\mathcal{A}$ ima jedinicu.

Za bilo koji element $x \in \mathcal{A}$ definiramo

$$\sigma'(x) = \sigma_{\tilde{\mathcal{A}}}(x).$$

Primijetimo da je $0 \in \sigma'(x)$ $\forall x \in \mathcal{A}$.

Zadatak 1.5. *Ako je $\mathcal{A}$ unitalna algebra, onda je $\sigma'(x) = \sigma(x) \cup \{0\}$ za svaki $x \in \mathcal{A}$.*

Lijevi ideal u algebri $\mathcal{A}$ je potprostor $\mathcal{L}$ od $\mathcal{A}$ takav da je $\mathcal{L} \neq \mathcal{A}$ i da vrijedi:

$$x \in \mathcal{L} \ \text{ i } \ a \in \mathcal{A} \qquad \Longrightarrow \qquad ax \in \mathcal{L}.$$

Analogno, **desni ideal** je potprostor $\mathcal{R} \neq \mathcal{A}$ sa svojstvom:

$$x \in \mathcal{R} \ \text{ i } \ a \in \mathcal{A} \qquad \Longrightarrow \qquad xa \in \mathcal{R}.$$

Ako je $\mathcal{I}$ i lijevi i desni ideal, $\mathcal{I}$ se zove **obostrani ideal**, a katkada i samo **ideal**. Dakle, obostrani ideal je potprostor $\mathcal{I} \neq \mathcal{A}$ takav da vrijedi:

$$x \in \mathcal{I} \ \text{ i } \ a \in \mathcal{A} \qquad \mathbb{R} \qquad xa \in \mathcal{I} \ \text{ i } \ ax \in \mathcal{I}.$$

Ako je $\mathcal{A}$ unitalna algebra, primijetimo da za lijevi, desni ili obostrani ideal $\mathcal{I}$ vrijedi $e \notin \mathcal{I}$. štoviše, ako je $\mathcal{I}$ lijevi, desni ili obostrani ideal u $\mathcal{A}$ onda $\mathcal{I}$ ne sadrži nijedan invertibilni element, tj. $\mathcal{I} \cap \mathcal{A}^{\times} = \emptyset$.

Neka je $\mathcal{I}$ obostrani ideal u algebri $\mathcal{A}$. U kvocijentni vektorski prostor $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ uvodimo operaciju množenja na sljedeći način:

$$(x + \mathcal{I})(y + \mathcal{I}) = xy + \mathcal{I}, \quad x, y \in \mathcal{A}.$$

Iz činjenice da je $\mathcal{I}$ obostrani ideal slijedi da ta definicija ima smisla, tj. ne ovisi o izboru predstavnika x i y klasa kvocijentnog prostora. Doista, ako je $x + \mathcal{I} = x' + \mathcal{I}$ i $y + \mathcal{I} = y' + \mathcal{I}$ (tj. $x - x' \in \mathcal{I}$ i $x - x' \in \mathcal{I}$) onda je

$$xy - xy = x(y - y) + (x - x)y \in \mathcal{I},$$

dakle, $xy + \mathcal{I} = x'y' + \mathcal{I}$. S tako definiranim množenjem $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ postaje algebra i zove se **kvocijentna algebra** algebre $\mathcal{A}$ po idealu $\mathcal{I}$. Kvocijentno preslikavanje $\pi \colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}/\mathcal{I}$, koje element algebre $\mathcal{A}$ preslikava u njegovu klasu modulo $\mathcal{I}$ ($\pi(x) = x + \mathcal{I}$), je surjektivni homomorfizam algebri. Ako je e jedinica u algebri $\mathcal{A}$, njegova je klasa $\pi(e) = e + \mathcal{I}$ jedinica u kvocijentnoj algebri $\mathcal{A}/\mathcal{I}$. Napomenimo da je moguće da je $\mathcal{A}$ algebra bez jedinice, ali da je $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ unitalna algebra.

Ako je $\mathcal{A}$ algebra i $\tilde{\mathcal{A}}$ algebra dobivena iz nje dodavanjem jedinice, i ako pomoću injektivnog homomorfizma $x \mapsto (0, x)$ identificiramo $\mathcal{A}$ s njenom slikom u $\tilde{\mathcal{A}}$, $\mathcal{A}$ postaje ne samo podalgebra nego obostrani ideal u algebri $\tilde{\mathcal{A}}$.

Zadatak 1.6. *Neka je $\varphi\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ homomorfizam algebri. Dokažite da vrijedi:*

(*a*) *Slika $\varphi(\mathcal{A}) = \{\varphi(x);\ x \in \mathcal{A}\}$ homomorfizma φ je podalgebra od $\mathcal{B}$.*

(*b*) *Jezgra* $\ker \varphi = \{x \in \mathcal{A};\ \varphi(x) = 0\}$ *homomorfizma φ je obostrani ideal u algebri $\mathcal{A}$.*

(*c*) *Preslikavanje Φ definirano sa*

$$\Phi(x + \ker \varphi) = \varphi(x), \qquad x \in \mathcal{A},$$

je izomorfizam algebre $\mathcal{A}/(\ker \varphi)$ *na algebru $\varphi(\mathcal{A})$.*

1.2 Normirane i Banachove algebre

Normirana algebra je algebra $\mathcal{A}$ nad poljem $\mathbb{C}$ kompleksnih brojeva, na kojoj je zadana norma $x \mapsto \|x\|$ sa svojstvom

$$\|xy\| \le \|x\| \cdot \|y\| \qquad \forall x, y \in \mathcal{A}.$$

Ako je u odnosu na zadanu normu prostor $\mathcal{A}$ potpun (odnosno, ako je to Banachov prostor), $\mathcal{A}$ se zove **Banachova algebra**.

Neka je $\mathcal{A}$ normirana algebra i $\mathcal{I}$ zatvoren obostrani ideal u $\mathcal{A}$. Tada znamo da je sa

$$\|x + \mathcal{I}\| = \inf\{\|x + y\|;\ y \in \mathcal{I}\}, \qquad x \in \mathcal{A},$$

zadana norma na kvocijentnom prostoru $\mathcal{A}/\mathcal{I}$. S tom normom kvocijentna algebra $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ postaje normirana algebra. Doista, ako su $x_1, x_2 \in \mathcal{A}$, onda iz činjenice da je $\mathcal{I}$ obostrani ideal slijedi da je $x_1y_2 + y_1x_2 + y_1y_2 \in \mathcal{I}$ za bilo koje $y_1, y_2 \in \mathcal{I}$. Stoga imamo:

$$\|(x_1 + \mathcal{I})(x_2 + \mathcal{I})\| = \|x_1x_2 + \mathcal{I}\| = \inf\{\|x_1x_2 + y\|;\ y \in \mathcal{I}\} \le$$

$$\le \inf\{\|x_1x_2 + y_1x_2 + x_1y_2 + y_1y_2\|;\ y_1, y_2 \in \mathcal{I}\} =$$

$$= \inf\{\|(x_1 + y_1)(x_2 + y_2)\|;\ y_1, y_2 \in \mathcal{I}\} \le \{\|x_1 + y_1\| \cdot \|x_2 + y_2\|;\ y_1, y_2 \in \mathcal{I}\} =$$

$$= \inf\{\|x_1 + y_1\|;\ y_1 \in \mathcal{I}\} \cdot \inf\{\|x_2 + y_2\|;\ y_2 \in \mathcal{I}\} = \|x_1 + \mathcal{I}\| \cdot \|x_2 + \mathcal{I}\|.$$

Za svaku algebru $\mathcal{A}$ definiramo tzv. *suprotnu algebru* $\mathcal{A}^0$ koja se kao vektorski prostor podudara sa $\mathcal{A}$, a množenje $\diamond$ je definirano suprotnim redoslijedom u odnosu na originalno: $x \diamond y = yx$. Ako je $\mathcal{A}$ normirana algebra, očito je i $\mathcal{A}^0$ normirana algebra.

Neka je $\mathcal{A}$ normirana algebra. U algebri $\tilde{\mathcal{A}}$ dobivenoj iz $\mathcal{A}$ dodavanjem jedinice definiramo normu sa:

$$\|(\lambda, x)\| = |\lambda| + \|x\|, \qquad \lambda \in \mathbb{C},\ x \in \mathcal{A}.$$

Tada $\tilde{\mathcal{A}}$ postaje normirana algebra, jer je

$$\|(\lambda, x)(\mu, y)\| = \|(\lambda\mu, \lambda y + \mu x + xy\| = |\lambda\mu| + \|\lambda y + \mu x + xy\| \le$$

$$\leq |\lambda\mu| + \|\lambda y\| + \|\mu x\| + \|xy\| \leq |\lambda| \cdot |\mu| + |\lambda| \cdot \|y\| + |\mu| \cdot \|x\| + \|x\| \cdot \|y\| =$$
$$= (|\lambda| + \|x\|) \cdot (|\mu| + \|y\|) = \|(\lambda, x)\| \cdot \|(\mu, y)\|.$$

U toj unitalnoj normiranoj algebri jedinica ima normu 1: $\|(1, 0)\| = 1$.

Ako je X normiran prostor i $B(X)$ algebra svih ograničenih linearnih operatora $A\colon X \to X$, tada je sa
$$\|A\| = \sup\{\|Ax\|;\ x \in X, \|x\| = 1\}, \qquad A \in B(X),$$
zadana norma na prostoru $B(X)$, i taj je normiran prostor Banachov ako i samo ako je prostor X Banachov. Očito vrijedi $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$ za bilo koje operatore $A, B \in B(X)$, dakle $B(X)$ je s definiranom normom normirana algebra. To je unitalna algebra: jedinica je jedinični operator I. I u toj algebri jedinica ima normu 1: $\|I\| = 1$.

Neka je $\mathcal{A}$ normirana algebra. Za $x \in \mathcal{A}$ definiramo linearne operatore $L_x\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ i $R_x\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ sa
$$L_x y = xy, \qquad R_x y = yx, \qquad y \in \mathcal{A}.$$
Operatori L_x i R_x su ograničeni, jer je $\|L_x y\| \leq \|x\| \cdot \|y\|$ i $\|R_x y\| \leq \|x\| \cdot \|y\|$. Odatle se vidi da vrijedi:
$$\|L_x\| \leq \|x\|, \qquad \|R_x\| \leq \|x\|, \qquad x \in \mathcal{A}. \tag{1.1}$$
Preslikavanja $x \mapsto L_x$ i $x \mapsto R_x$ sa $\mathcal{A}$ u $B(\mathcal{A})$ su očito linearna i vrijedi $L_{xy} = L_x L_y$ i $R_{xy} = R_y R_x$. Dakle, $x \mapsto L_x$ je homomorfizam algebre $\mathcal{A}$ u algebru $B(\mathcal{A})$, a $x \mapsto R_x$ je homomorfizam suprotne algebre $\mathcal{A}^0$ u algebru $B(\mathcal{A})$. Zbog gornjih nejednakosti ti su homomorfizmi neprekidni. Ako je e jedinica u algebri $\mathcal{A}$ onda za svaki $x \in \mathcal{A}$ vrijedi $L_x e = x = R_x e$. Dakle, u tom su slučaju homomorfizmi $x \mapsto L_x$ i $x \mapsto R_x$ injektivni. Stoga su sa
$$\|x\|_l = \|L_x\| \qquad \text{i} \qquad \|x\|_r = \|R_x\|, \qquad x \in \mathcal{A},$$
definirane norme $\|\cdot\|_l$ i $\|\cdot\|_r$ na $\mathcal{A}$ u odnosu na koje su $\mathcal{A}$ i $\mathcal{A}^0$ normirane algebre. Kako je $\|x\| \leq \|L_x\| \cdot \|e\|$ i $\|x\| \leq \|R_x\| \cdot \|e\|$, zbog (1.1) vidimo da vrijedi
$$\|x\|_l \leq \|x\| \leq \|e\| \cdot \|x\|_l, \qquad \|x\|_r \leq \|x\| \leq \|e\| \cdot \|x\|_r, \qquad x \in \mathcal{A}.$$
Dakle, svaka od normi $\|\cdot\|_l$ i $\|\cdot\|_r$ na prostoru $\mathcal{A}$ ekvivalentna je polaznoj normi $\|\cdot\|$. Prema tome, dokazali smo:

Propozicija 1.2. *Neka je $\mathcal{A}$ normirana unitalna algebra s jedinicom e. Na prostoru $\mathcal{A}$ postoji ekvivalentna norma u odnosu na koju je $\mathcal{A}$ normirana algebra i e ima normu jednaku* 1.

Zbog ove propozicije ubuduće ćemo uvijek pretpostavljati da u unitalnoj normiranoj algebri $\mathcal{A}$ vrijedi $\|e\| = 1$. Napomenimo da iz gornjih nejednakosti slijedi: ako je $\mathcal{A}$ unitalna normirana algebra u kojoj vrijedi $\|e\| = 1$, onda je $\|x\|_l = \|x\|_r = \|x\|$, $\forall x \in \mathcal{A}$.

Razmotrimo sada nekoliko primjera.

Neka je K kompaktan Hausdorffov topološki prostor i neka je $C(K)$ skup svih neprekidnih funkcija $f\colon K \to \mathbb{C}$. S operacijama definiranim po točkama:
$$(f+g)(t) = f(t) + g(t), \qquad (\lambda f)(t) = \lambda f(t), \qquad (fg)(t) = f(t)g(t), \qquad t \in K,$$
$C(K)$ je komutativna unitalna algebra; jedinica e je konstantna funkcija $e(t) = 1$ $\forall t \in K$. Algebra $C(K)$ je Banachova uz normu
$$\|f\| = \max\{|f(t)|;\ t \in K\}.$$

Neka je Ω lokalno kompaktan Hausdorffov topološki prostor. To znači da svaka točka ima kompaktnu okolinu, tj. da se svaka točka nalazi u nutrini nekog kompaktnog podskupa od Ω. Za funkciju $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ i za kompleksan broj $L \in \mathbb{C}$ pišemo

$$L = \lim_{t\to\infty} f(t)$$

i kažemo da f teži prema L u beskonačnosti, ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji kompaktan podskup $K \subseteq \Omega$ takav da vrijedi:

$$t \in \Omega \setminus K \qquad \Longrightarrow \qquad |f(t) - L| \leq \varepsilon.$$

Primijetimo da ako je topološki prostor Ω ne samo lokalno kompaktan nego kompaktan, onda za svaku $f \in C(\Omega)$ vrijedi

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = 0.$$

Općenito, za bilo koji lokalno kompaktan prostor Ω stavimo

$$C_0(\Omega) = \{f \in C(\Omega);\ \lim_{t\to\infty} f(t) = 0\}.$$

To je Banachova algebra uz iste operacije kao u prethodnom primjeru. Ako prostor Ω nije kompaktan, $C_0(\Omega)$ ne sadrži konstantne funkcije pa $C_0(\Omega)$ nije unitalna algebra. Lako se vidi da dodavanjem jedinice dobivamo algebru izomorfnu algebri

$$C_1(\Omega) = \{f \in C(\Omega);\ \text{postoji } \lim_{t\to\infty} f(t) \in \mathbb{C}\}.$$

U vezi s ovim primjerom razmotrimo još tzv. *Aleksandrovljevu kompaktifikaciju* prostora Ω. Definiramo $\tilde{\Omega} = \Omega \cup \{\infty\}$ i u tom proširenom prostoru za otvorene okoline nove točke ∞ proglasimo sve skupove oblika $(\Omega \setminus K) \cup \{\infty\}$, gdje je K kompaktan podskup od Ω. Tada je $\tilde{\Omega}$ kompaktan Hausdorffov topološki prostor i moguće su sljedeće identifikacije:

$$C_1(\Omega) = C(\tilde{\Omega}), \qquad C_0(\Omega) = \{f \in C(\tilde{\Omega});\ f(\infty) = 0\}.$$

Općenito, za bilo koji topološki prostor Ω *kompaktifikacija* od Ω je naziv za bilo koji kompaktan prostor u kome je Ω otvoren gust podskup. Aleksandrovljeva kompaktifikacija je u određenom smislu minimalna, jer je komplement od Ω u $\tilde{\Omega}$ samo jedna točka.

Za neprekidnu funkciju $f\colon [0,1] \to \mathbb{C}$ kažemo da je **neprekidno derivabilna**, ako vrijedi:

(*a*) restrikcija $f|\langle 0,1\rangle$ je klase C^1, tj. ona je derivabilna u svakoj točki otvorenog intervala $\langle 0,1\rangle$ i njena derivacija f' je neprekidna funkcija na $\langle 0,1\rangle$;

(*b*) u točki 0 postoji desna derivacija

$$f'(0) = \lim_{t\searrow 0} \frac{1}{t}(f(t) - f(0))$$

i vrijedi

$$f'(0) = \lim_{t\searrow 0} f'(t);$$

(*c*) u točki 1 postoji lijeva derivacija

$$f'(1) = \lim_{t\nearrow 1} \frac{1}{1-t}(f(1) - f(t))$$

i vrijedi

$$f'(1) = \lim_{t\nearrow 1} f'(t).$$

Tako definirana funkcija $f'\colon [0,1] \to \mathbb{C}$ (derivacija funkcije f) je neprekidna. Skup svih neprekidno derivabilnih funkcija $f\colon [0,1] \to \mathbb{C}$ označavat ćemo sa $C^1([0,1])$. Induktivno definiramo za bilo koji prirodan broj n :

$$C^n([0,1]) = \{f \in C^1([0,1]);\ f' \in C^{n-1}([0,1])\}.$$

Nadalje, za $f \in C^n([0,1])$ stavljamo $f^{(0)} = f$ i za bilo koji $k \in \{1,\dots,n\}$ induktivno definiramo $f^{(k)} = (f^{(k-1)})'$. Pokazuje se da je $C^n([0,1])$ u odnosu na operacije po točkama i s normom

$$\|f\| = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \max\{|f^{(k)}(t)|;\ t \in [0,1]\}.$$

unitalna komutativna Banachova algebra.

Sa $l_1(\mathbb{Z})$ označimo Banachov prostor svih nizova $x = (\xi_n;\ n \in \mathbb{Z})$ takvih da je

$$\|x\|_1 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\xi_n| < +\infty.$$

Za $x = (\xi_n)$ i $y = (\eta_n)$ iz $l_1(\mathbb{Z})$ stavljamo

$$x \bullet y = (\zeta_n) \qquad \text{gdje je} \qquad \zeta_n = \sum_{p\in\mathbb{Z}} \xi_p \eta_{n-p};$$

napomenimo, da se lako dokazuje se da je za bilo koje $x, y \in l_1(\mathbb{Z})$ gornji red apsolutno konvergentan. S množenjem $\bullet$ i s normom $\|\cdot\|_1$ $l_1(\mathbb{Z})$ je unitalna komutativna Banachova algebra; jedinica je niz (ε_n), $\varepsilon_0 = 1$, $\varepsilon_n = 0\ \forall n \neq 0$.

Za $x = (\xi_n) \in l_1(\mathbb{Z})$ definiramo neprekidnu kompleksnu funkciju $\varphi(x)$ na jediničnoj kružnici $S = \{z \in \mathbb{C};\ |z| = 1\}$:

$$[\varphi(x)](z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \xi_n z^n, \qquad z \in S,$$

ili

$$[\varphi(x)](e^{it}) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \xi_n e^{int}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Pokazuje se da na taj način dobivamo unitalni homomorfizam unitalnih algebri $\varphi\colon l_1(\mathbb{Z}) \to C(S)$. Taj je homomorfizam injektivan. Naime, lako se izračuna da vrijedi

$$\xi_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [\varphi(x)](e^{it}) e^{-int}\,\mathrm{d}t, \qquad n \in \mathbb{Z}.$$

Promatrajmo sada zatvoren jedinični krug $D = \{z \in \mathbb{C};\ |z| \leq 1\}$ i njegovu nutrinu označimo sa $D^o = \{z \in \mathbb{C};\ |z| < 1\}$. Neka je $\mathcal{A}$ skup svih funkcija $f \in C(D)$ takvih da je restrikcija $f|D^o$ analitička. S operacijama po točkama i s maksimum normom

$$\|f\| = \max\{|f(z)|;\ z \in D\} = \max\{|f(z)|;\ z \in S\}$$

$\mathcal{A}$ je unitalna komutativna Banachova algebra. $\mathcal{A}$ je podalgebra od $C(D)$. Kako je analitička funkcija f potpuno određena svojim rubnim vrijednostima $f|S$, algebru $\mathcal{A}$ možemo shvaćati i kao podalgebru od $C(S)$.

Sljedeća dva teorema navodimo bez dokaza:

Teorem 1.1. *Neka je $\mathcal{A}$ normirana algebra i $x \in \mathcal{A}$. Niz $\left(\|x^n\|^{\frac{1}{n}};\, n \in \mathbb{N}\right)$ je konvergentan i vrijedi:*

$$\lim_{n\to\infty} \|x^n\|^{\frac{1}{n}} = \inf\{\|x^n\|^{\frac{1}{n}};\, n \in \mathbb{N}\}.$$

Za normiranu algebru $\mathcal{A}$ i za $x \in \mathcal{A}$ broj

$$\nu(x) = \lim_{n\to\infty} \|x^n\|^{\frac{1}{n}} = \inf_{n\in\mathbb{N}} \|x^n\|^{\frac{1}{n}}$$

zove se **spektralni radijus** elementa x. Očito vrijedi:

(a) $0 \leq \nu(x) \leq \|x\|,\ x \in \mathcal{A}$;

(b) $\nu(x^k) = \nu(x)^k,\ x \in \mathcal{A},\ k \in \mathbb{N}$;

(c) $\nu(\lambda x) = |\lambda| \cdot \nu(x),\ x \in \mathcal{A},\ \lambda \in \mathbb{C}$;

(d) Ekvivalentne norme daju isti spektralni radijus.

Teorem 1.2. *Neka je $\mathcal{A}$ unitalna Banachova algebra i neka je $x \in \mathcal{A}$ takav da je $\nu(x) < 1$. Tada je element $e - x$ invertibilan i vrijedi*

$$(e - x)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n,$$

pri čemu taj red apsolutno konvergira.

Teorem 1.3. *Neka $\mathcal{A}$ unitalna Banachova algebra.*

(a) *Ako je $x_0 \in \mathcal{A}$ lijevo (odnosno, desno) invertibilan, ako je y neki njegov lijevi (odnosno, desni) invers i ako je $x \in \mathcal{A}$ takav da je $\|x_0 - x\| < \frac{1}{\|y\|}$, onda je x lijevo (odnosno, desno) invertibilan.*

(b) *Neka je $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergentan niz lijevo (odnosno, desno) invertibilnih elemenata algebre $\mathcal{A}$ i neka je za $n \in \mathbb{N}$ y_n neki lijevi (odnosno, desni) invers od x_n. Pretpostavimo da je skup $\{y_n;\, n \in \mathbb{N}\}$ ograničen. Tada je element $x = \lim_{n\to\infty} x_n$ lijevo (odnosno, desno) invertibilan.*

Dokaz: (a) Imamo $yx_0 = e$, pa je

$$\nu(e - yx) = \nu(y(x_0 - x)) \leq \|y(x_0 - x)\| \leq \|y\| \cdot \|x_0 - x\| < 1.$$

Prema teoremu 1.2. element $e-(e-yx) = yx$ je invertibilan. Neka je $z = (yx)^{-1}$. Tada je $zyx = e$, što pokazuje da je x lijevo invertibilan. Dokaz u slučaju desno invertibilnog elementa x_0 sasvim je analogan: dokaže se da je $\nu(e - xy) < 1$, dakle xy je invertibilan; ako je $z = (xy)^{-1}$, slijedi $xyz = e$, dakle yz je desni invers od x.

(b) Neka je $M > 0$ takav da je $\|y_n\| \leq M\ \forall n \in \mathbb{N}$. Kako je $x = \lim_n x_n$ postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je $\|x_n - x\| < \frac{1}{M}$. Tada je $\|x_n - x\| < \frac{1}{\|y_n\|}$, pa zbog tvrdnje ($a$) slijedi da je x lijevo (odnosno, desno) invertibilan.

Time je teorem u potpunosti dokazan.

Teorem 1.4. *Neka je $\mathcal{A}$ unitalna Banachova algebra. Grupa $\mathcal{A}^\times$ je otvoren podskup od $\mathcal{A}$ i invertiranje $x \mapsto x^{-1}$ je neprekidno preslikavanje u svakoj točki $a \in \mathcal{A}^\times$.*

Dokaz: Neka je $a \in \mathcal{A}^\times$. Prema tvrdnji (a) teorema 1.3. svaki element otvorene kugle $K\left(a, \frac{1}{\|a^{-1}\|}\right)$ je i lijevo i desno invertibilan, dakle invertibilan. Slijedi

$$K\left(a, \frac{1}{\|a^{-1}\|}\right) \subseteq \mathcal{A}^\times,$$

što zbog proizvoljnosti $a \in \mathcal{A}^\times$ pokazuje da je skup $\mathcal{A}^\times$ otvoren.

Neka je i dalje $a \in \mathcal{A}^\times$. Stavimo $r = \frac{1}{2\cdot\|a^{-1}\|}$ i neka je $x \in \mathcal{A}^\times \cap K(a,r)$. Tada je $\|a-x\| < \frac{1}{2\cdot\|a^{-1}\|}$, pa imamo redom:

$$\|x^{-1}\| - \|a^{-1}\| \leq \|x^{-1} - a^{-1}\| = \|x^{-1}(a-x)a^{-1}\| \leq \|x^{-1}\| \cdot \|a-x\| \cdot \|a^{-1}\| < \frac{1}{2}\|x^{-1}\|.$$

Odatle je $\|x^{-1}\| < 2 \cdot \|a^{-1}\|$, pa slijedi:

$$\|x^{-1} - a^{-1}\| \leq \|x^{-1}\| \cdot \|a-x\| \cdot \|a^{-1}\| \leq 2 \cdot \|a^{-1}\|^2 \cdot \|a-x\|.$$

Odavde se vidi da je preslikavanje $x \mapsto x^{-1}$ neprekidno u točki a, a kako je a bila proizvoljna točka iz $\mathcal{A}$, teorem je u potpunosti dokazan.

Neka je Ω otvoren podskup od $\mathbb{C}$ i X Banachov prostor. **Funkcija** $f\colon \Omega \to X$ zove se **analitička** na Ω ako za svaku točku $\lambda_0 \in \Omega$ postoji $r > 0$ i postoje vektori $x_0, x_1, x_2, \ldots$ u X takvi da je:

$$f(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^n x_n \qquad \forall \lambda \in K(\lambda_0, r).$$

Teorem 1.5. *Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ otvoren skup, X Banachov prostor i $f\colon \Omega \to X$. Sljedeća su četiri svojstva međusobno ekvivalentna:*

(a) *Funkcija f je analitička na Ω.*

(b) *Za svaki $\lambda_0 \in \Omega$ postoji*

$$f'(\lambda_0) = \lim_{\lambda \to \lambda_0} \frac{f(\lambda) - f(\lambda_0)}{\lambda - \lambda_0}.$$

(c) *Ako su $\lambda_0 \in \Omega$ i $r > 0$ takvi da je $K(\lambda_0, r) \subseteq \Omega$, onda postoje vektori $x_n \in X$, $n \in \mathbb{N}$, takvi da je*

$$f(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^n x_n \qquad \forall \lambda \in K(\lambda_0, r).$$

U gornjem redu konvergencija je apsolutna.

(d) *Za svaki $\chi \in X'$ kompleksna funkcija $\lambda \mapsto \chi(f(\lambda))$ je analitička na Ω.*

Dokaz ovog teorema izostavljamo. Napominjemo da se međusobna ekvivalentnost svojstava (a), (b) i (c) dokazuje potpuno analogno kao i ekvivalentnost takvih svojstava za skalarnu funkciju $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$. Za dokaz ekvivalentnosti tvrdnje (d) s tvrdnjom (a) koristi se Hahn−Banachov teorem i njegova posljedica, koje također navodimo bez dokaza:

Teorem 1.6. (**Hahn−Banach**) *Neka je X normiran prostor, Y potprostor i $\varphi \in Y'$. Tada postoji $\Phi \in X'$ takav da je $\Phi|Y = \varphi$ i da vrijedi $\|\Phi\| = \|\varphi\|$. Drugim riječima, svaki neprekidni linearni funkcional na potprostoru normiranog prostora može se proširiti na čitav prostor bez povećanja norme.*

Korolar 1.1. *Neka je X normiran prostor i $x \in X$. Postoji $\varphi \in X'$ takav da je $\varphi(x) = \|x\|$ i $\|\varphi\| = 1$.*

Teorem 1.7. *Neka je $\mathcal{A}$ unitalna Banachova algebra i $x \in \mathcal{A}$.*

(*a*) *$\sigma(x)$ je neprazan kompaktan podskup od $\mathbb{C}$.*

(*b*) *$\nu(x) = \max\{|\lambda|;\ \lambda \in \sigma(x)\}$.*

(*c*) *Rezolventa $\lambda \mapsto R(x, \lambda)$ je analitička funkcija sa $\mathbb{C} \setminus \sigma(x)$ u $\mathcal{A}$. Ako su $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ i $r > 0$ takvi da je $K(\lambda_0, r) \subseteq \mathbb{C} \setminus \sigma(x)$, onda vrijedi:*

$$R(x, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (\lambda - \lambda_0)^n R(x, \lambda_0)^{n+1} \qquad \lambda \in K(\lambda_0, r).$$

Nadalje,

$$R(x, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda^{n+1}} x^n \qquad \text{ako je} \quad |\lambda| > \nu(x).$$

Posebno, $\lim_{\lambda \to \infty} R(x, \lambda) = 0$. Ovo posljednje možemo izreći i ovako: funkcija $\lambda \mapsto R(x, \lambda)$ analitička je u beskonačnosti i točka ∞ joj je nultočka.

Dokaz: Neka je $\lambda_0 \in \mathbb{C} \setminus \sigma(x)$. Stavimo $y = x - \lambda_0 e$. Tada je $y \in \mathcal{A}^\times$. Neka je $\lambda \in K\left(\lambda_0, \frac{1}{\|y^{-1}\|}\right)$. Imamo

$$\lambda e - x = (\lambda - \lambda_0)e - y = -y[e - (\lambda - \lambda_0)y^{-1}].$$

Nadalje, $\|(\lambda - \lambda_0)y^{-1}\| = |\lambda - \lambda_0| \cdot \|y^{-1}\| < 1$, pa iz teorema 1.2. slijedi da je $e - (\lambda - \lambda_0)y^{-1} \in \mathcal{A}^\times$, dakle prema gornjoj jednakosti $\lambda e - x \in \mathcal{A}^\times$. To pokazuje da je $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \sigma(x)$, dakle otvoren krug $K\left(\lambda_0, \frac{1}{\|y^{-1}\|}\right)$ je sadržan u $\mathbb{C} \setminus \sigma(x)$. Zaključujemo da je skup $\mathbb{C} \setminus \sigma(x)$ otvoren, odnosno, $\sigma(x)$ je zatvoren. Nadalje, iz teorema 1.2. slijedi:

$$R(x, \lambda) = (\lambda e - x)^{-1} = -y^{-1}[e - (\lambda - \lambda_0)y^{-1}]^{-1} = -y^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^n y^{-n} = -\sum_{n=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^n y^{-n-1}.$$

Međutim, $y^{-1} = (x - \lambda_0 e)^{-1} = -R(x, \lambda_0)$, pa slijedi

$$R(x, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (\lambda - \lambda_0)^n R(x, \lambda_0)^{n+1}.$$

Time je dokazano da je funkcija $\lambda \mapsto R(x, \lambda)$ analitička na otvorenom skupu $\mathbb{C} \setminus \sigma(x)$. Nadalje, dokazano je da vrijedi prva jednakost u tvrdnji (*c*) za $r = \frac{1}{\|x - \lambda_0 e\|^{-1}}$. Prema teoremu 1.5., ako je $r > 0$ takav da je $K(\lambda_0, r) \subseteq \mathbb{C} \setminus \sigma(x)$ onda postoje elementi $a_n \in \mathcal{A}$ takvi da je

$$R(x, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^n a_n \qquad \forall \lambda \in K(\lambda_0, r).$$

Usporedimo li taj red potencija s redom potencija kojeg smo dobili za $\lambda \in K(\lambda_0, \frac{1}{\|x - \lambda_0 e\|^{-1}})$ nalazimo da je $a_n = (-1)^n R(x, \lambda_0)^{n+1}$ $\forall n$. Drugim riječima, dokazana je prva jednakost u tvrdnji (*c*) za bilo koji $r > 0$ takav da je $K(\lambda_0, r) \subseteq \mathbb{C} \setminus \sigma(x)$.

Za $|\lambda| > \nu(x)$ imamo redom:

$$\nu\left(\frac{1}{\lambda} x\right) = \frac{1}{|\lambda|} \nu(x) < 1 \qquad \Longrightarrow \qquad e - \frac{1}{\lambda} x \in \mathcal{A}^\times \qquad \Longrightarrow \qquad \lambda \in \mathbb{C} \setminus \sigma(x).$$

Dakle, $\{\lambda \in \mathbb{C};\, |\lambda| > \nu(x)\} \subseteq \mathbb{C} \setminus \sigma(x)$, tj. $\sigma(x)$ je sadržan u zatvorenom krugu $\overline{K}(0, \nu(x))$ oko nule radijusa $\nu(x)$. Time je dokazana tvrdnja (a) osim činjenice da je spektar neprazan. Nadalje, po teoremu 1.2. za takve λ vrijedi

$$R(x, \lambda) = (\lambda e - x)^{-1} = \frac{1}{\lambda}\left(e - \frac{1}{\lambda}x\right)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda^{n+1}} x^n.$$

Time je dokazana i druga jednakost u tvrdnji (c).

Dokažimo sada da je $\sigma(x) \neq \emptyset$. Pretpostavimo suprotno da je $\sigma(x) = \emptyset$. Tada je funkcija $\lambda \mapsto R(x, \lambda)$ analitička na $\mathbb{C}$ i zbog (c) vrijedi $\lim_{\lambda \to \infty} R(x, \lambda) = 0$. Tada je za svaki $\varphi \in \mathcal{A}'$ skalarna funkcija $\lambda \mapsto \varphi(R(x, \lambda))$ analitička na $\mathbb{C}$ i ograničena, a to prema Liouvilleovom teoremu ima za posljedicu da je ona konstantna. Kako joj je limes u beskonačnosti jednak nuli zaključujemo da je $\varphi(R(x, \lambda)) = 0\ \forall \varphi \in \mathcal{A}'$. Slijedi $R(x, \lambda) \equiv 0$, a to je nemoguće. Ova kontradikcija pokazuje da je $\sigma(x) \neq \emptyset$ i time je tvrdnja (a) u potpunosti dokazana.

Treba još dokazati tvrdnju (b). Ako je $\nu(x) = 0$ onda iz

$$\sigma(x) \subseteq \overline{K}(0, \nu(x)) = \{0\}$$

i iz $\sigma(x) \neq \emptyset$ slijedi $\sigma(x) = \{0\}$, dakle tvrdnja (b) je u tom slučaju istinita. Pretpostavimo sada da je $\nu(x) > 0$. Znamo da je $\sigma(x) \subseteq \overline{K}(0, \nu(x))$, pa je za dokaz tvrdnje (b) dovoljno dokazati $\sigma(x) \not\subseteq K(0, \nu(x))$. Pretpostavimo suprotno, tj. $\sigma(x) \subseteq K(0, \nu(x))$. Kako je $\sigma(x)$ zatvoren, postoji r, $0 < r < \nu(x)$, takav da je $\sigma(x) \subseteq \overline{K}(0, r)$. Tada za $|\lambda| > r$ vrijedi

$$R(x, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda^{n+1}} x^n.$$

U tom je redu konvergencija apsolutna, a to ima za posljedicu da red

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|x^n\|}{\lambda^{n+1}}$$

konvergira za svaki $\lambda \in \mathbb{C},\ |\lambda| > r$. Zamijenimo sada kompleksnu varijablu i stavimo $\mu = \frac{1}{\lambda}$. Slijedi da je skalarna funkcija

$$F(\mu) = \sum_{n=0}^{\infty} \|x^n\| \mu^{n+1}$$

analitička na krugu $K(0, \frac{1}{r})$. Prema tome, za radijus konvergencije R gornjeg reda potencija vrijedi $R \geq \frac{1}{r}$. Međutim, radijus konvergencije je po Cauchy$-$Hadamardovoj formuli jednak

$$R = \frac{1}{\limsup_{n \to \infty} \|x^n\|^{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{\nu(x)}.$$

Odatle je $\frac{1}{\nu(x)} \geq \frac{1}{r}$, odnosno $r \geq \nu(x)$, a to je suprotno pretpostavci $r < \nu(x)$. Ova kontradikcija pokazuje da je tvrdnja (b) istinita i u slučaju $\nu(x) > 0$.

Teorem 1.8. (**Geljfand$-$Mazur**) *Neka je $\mathcal{A}$ unitalna Banachova algebra. Ako je $\mathcal{A}^\times = \mathcal{A} \setminus \{0\}$, tj. ako je $\mathcal{A}$ tijelo, onda je $\mathcal{A} = \mathbb{C}e$.*

Dokaz: Neka je $x \in \mathcal{A}$. Prema tvrdnji (a) teorema 1.7. $\sigma(x) \neq \emptyset$. Neka je $\lambda \in \sigma(x)$. Tada $\lambda e - x \notin \mathcal{A}^\times = \mathcal{A} \setminus \{0\}$, dakle $\lambda e - x = 0$, odnosno $x = \lambda e$.

1.3 Banachove $*-$algebre

Neka je $\mathcal{A}$ algebra. **Involucija** na $\mathcal{A}$ je preslikavanje $*:\mathcal{A}\to\mathcal{A}$ takvo da vrijedi

(a) $(x^*)^* = X,\ \forall x\in\mathcal{A}.$

(b) $(x+y)^* = x^*+y^*,\ \forall x,y\in\mathcal{A}.$

(c) $(\lambda x)^* = \overline{\lambda}x^*,\ \forall x\in\mathcal{A},\ \forall\lambda\in\mathbb{C}.$

(d) $(xy)^* = y^*x^*,\ \forall x,y\in\mathcal{A}.$

$*-$**algebra** je algebra na kojoj je zadana involucija. Zbog (a) je očito da je involucija uvijek bijekcija sa $\mathcal{A}$ na $\mathcal{A}$. Nadalje, ako je $\mathcal{A}$ unitalna algebra s jedinicom e i ako je $x\to x^*$ involucija na $\mathcal{A}$, tada je nužno $e^*=e$. Doista, iz svojstava (a) i (d) odmah se vidi da je e^* jedinica u algebri $\mathcal{A}$, pa je jednakost $e^*=e$ posljedica jedinstvenosti jedinice.

Najjednostavniji primjer involucije na algebri je kompleksno konjugiranje $\lambda\to\overline{\lambda}$ na algebri $\mathbb{C}$. Pomoću kompleksnog konjugiranja definira se i involucija na komutativnim algebrama $C(K)$ za kompaktan prostor K i na $C_0(\Omega)$ za lokalno kompaktan prostor Ω :

$$f^*(t)=\overline{f(t)}\qquad t\in K\quad\text{ili}\quad t\in\Omega.$$

Još jedan važan primjer involucije je adjungiranje na Banachovoj algebri $B(\mathcal{H})$ svih ograničenih operatora na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$: za $A\in B(\mathcal{H})$ je A^* jedinstven linearan operator sa svojstvom

$$(A\xi|\eta)=(\xi|A^*\eta)\qquad\forall\xi,\eta\in\mathcal{H}.$$

Neka je u daljnjem $\mathcal{A}$ $*-$algebra. Element $x\in\mathcal{A}$ zove se **hermitski**, ako je $x^*=x$, a **antihermitski** ako je $x^+=-x$. Nadalje, kažemo da je element x **normalan** ako vrijedi $xx^*=x^*x$. Napokon, ako je $\mathcal{A}$ unitalna $*-$algebra, element $x\in\mathcal{A}$ zove se **unitaran**, ako je $x^*x=xx^*=e$, tj. ako je $x\in\mathcal{A}^\times$ i $x^{-1}=x^*$. Naravno, hermitski, antihermitski i unitarni elementi su normalni. Hermitski elementi tvore realan potprostor prostora $\mathcal{A}$; taj ćemo realan vektorski prostor označavati sa $\mathcal{A}_h$. Skup svih antihermitskih elemenata je $i\mathcal{A}_h$ i vrijedi $\mathcal{A}=\mathcal{A}_h\dot{+}i\mathcal{A}_h$. Doista, za svaki $x\in\mathcal{A}$ postoje jedinstveni hermitski elementi x_1 i x_2 takvi da je $x=x_1+ix_2$. Ti su elementi dani sa

$$x_1=\frac{1}{2}(x+x^*),\qquad x_2=\frac{1}{2i}(x-x^*).$$

Primijetimo da je

$$xx^*=x_1^2+x_2^2+i(x_2x_1-x_1x_2),\qquad x^*x=x_1^2+x_2^2-i(x_2x_1-x_1x_2),$$

dakle, x je normalan ako i samo ako x_1 i x_2 komutiraju.

Ako je $\mathcal{A}$ unitalna $*-$algebra, odmah se vidi da je $x\in\mathcal{A}$ invertibilan ako i samo ako je x^* invertibilan i vrijedi $(x^*)^{-1}=(x^{-1})^*$. Budući da je $(\lambda e-x)^*=\overline{\lambda}e-x^*$, slijedi da je

$$\sigma(x^*)=\overline{\sigma(x)}=\{\overline{\lambda};\ \lambda\in\sigma(x)\}.$$

Normirana $*-$**algebra** je normirana algebra $\mathcal{A}$ na kojoj je zadana involucija $x\mapsto x^*$ sa svojstvom da je

$$\|x^*\|=\|x\|\qquad\forall x\in\mathcal{A}.$$

Ako je $\mathcal{A}$ i potpuna, tj. Banachova zove se **Banachova** $*-$**algebra**. U svim prije navedenim primjerima $\mathbb{C}$, $C(K)$, $C_0(\Omega)$ i $B(\mathcal{H})$ involucija ima traženo svojstvo, dakle, sve su to Banachove

$*-$algebre.

Neka je $\mathcal{A}$ normirana $*-$algebra i $\tilde{\mathcal{A}}$ unitalizacija algebre $\mathcal{A}$. Uz normu $\|(\lambda, x)\| = |\lambda| + \|x\|$ i involuciju $(\lambda, x)^* = (\overline{\lambda}, x^*)$ $\tilde{\mathcal{A}}$ postaje normirana $*-$algebra.

Neka je $\mathcal{A}$ $*-$algebra. Ako je $f : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ linearan funkcional na $\mathcal{A}$ tada je sa

$$f^*(x) = \overline{f(x^*)}, \qquad x \in \mathcal{A},$$

zadan također linearan funkcional na $\mathcal{A}$. Očito vrijedi

$$f^{**} = f, \qquad (f+g)^* = f^* + g^*, \qquad (\lambda f)^* = \overline{\lambda} f^*.$$

f se zove **hermitski funkcional**, ako vrijedi $f^* = f$. Naravno, svaki linearan funkcional f ima jedinstven prikaz u obliku $f = f_1 + if_2$, gdje su f_1 i f_2 hermitski funkcionali:

$$f_1 = \frac{1}{2}(f + f^*), \qquad f_2 = \frac{1}{2i}(f - f^*).$$

Linearan funkcional f na $\mathcal{A}$ je hermitski ako i samo ako vrijedi $f(\mathcal{A}_h) \subseteq \mathbb{R}$. Preslikavanje $f \mapsto f|\mathcal{A}_h$ je izomorfizam realnog vektorskog prostora svih hermitskih funkcionala na $\mathcal{A}$ na prostor svih $\mathbb{R}-$linearnih funkcionala na realnom vektorskom prostoru $\mathcal{A}_h$.

Neka je $\mathcal{A}$ normirana $*-$algebra. Ako je $f \in \mathcal{A}'$, tj. ako je f neprekidan linearan funkcional na $\mathcal{A}$, tada je i $f^* \in \mathcal{A}'$. Štoviše, vrijedi $\|f^*\| = \|f\|$; to je posljedica činjenice da je $x \mapsto x^*$ bijekcija zatvorene jedinične kugle

$$\overline{K}_{\mathcal{A}}(0,1) = \{x \in \mathcal{A};\ \|x\| \leq 1\}$$

u $\mathcal{A}$ na samu sebe.

Propozicija 1.3. *Neka je $\mathcal{A}$ normirana $*-$algebra. Tada je $f \mapsto f|\mathcal{A}_h$ izometrički izomorfizam realnog Banachovog prostora svih neprekidnih hermitskih linearnih funkcionala na $\mathcal{A}$ na prostor $(\mathcal{A}_h)'$.*

Dokaz: Iz $\mathbb{R}-$linearne bijekcije $f \mapsto f|\mathcal{A}_h$ s realnog prostora svih hermitskih linearnih funkcionala na $\mathcal{A}$ na prostor svih $\mathbb{R}-$linearnih funkcionala na $\mathcal{A}_h$ očito dobivamo $\mathbb{R}-$linearnu bijekciju s prostora svih neprekidnih hermitskih linearnih funkcionala na $\mathcal{A}$ na prostor svih neprekidnih $R-$linearnih funkcionala na $\mathcal{A}_h$. Doista, ako za hermitski linearan funkcional $f : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ stavimo $g = f|\mathcal{A}_h$, onda je

$$f(x) = g\left(\frac{1}{2}(x + x^*)\right) + ig\left(\frac{1}{2i}(x - x^*)\right),$$

pa se vidi da je f neprekidan ako i samo ako je g neprekidan. Treba još samo dokazati izometričnost, tj. da je uz gornje oznake $\|f\| = \|g\|$. Prije svega, jasno je da je $\|f\| \geq \|g\|$. S druge strane, neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljno odabran. Tada postoji $x \in \mathcal{A}$, $\|x\| \leq 1$, takav da je $|f(x)| \geq \|f\| - \varepsilon$. Pomnožimo li, ako treba, element x s brojem modula 1, vidimo da možemo pretpostaviti da je $f(x) \geq 0$, tj. $f(x) = |f(x)|$. Tada imamo

$$\left|g\left(\frac{1}{2}(x + x^*)\right)\right| = \frac{1}{2}|f(x) + f(x^*)| = f(x) \geq \|f\| - \varepsilon.$$

Budući da je

$$\left\|\frac{1}{2}(x + x^*)\right\| \leq \frac{1}{2}(\|x\| + \|x^*\|) = \|x\| \leq 1,$$

slijedi

$$\|g\| \geq \|f\| - \varepsilon.$$

Budući da je $\varepsilon > 0$ bio proizvoljan, dobivamo i obrnutu nejednakost $\|g\| \geq \|f\|$, dakle, jednakost $\|g\| = \|f\|$.

1.4 C^*-algebre. Unitalizacija

$\mathcal{A}$ se zove C^*-**algebra** ako je:

(a) $\mathcal{A}$ $*-$algebra;

(b) $\mathcal{A}$ Banachova algebra;

(c) $\|x^*x\| = \|x\|^2 \quad \forall x \in \mathcal{A}$.

U sva četiri primjera Banachovih $*-$algebri iz prethodnog odjeljka radi se o C^*-algebrama. To je evidentno za $\mathbb{C}$, $C(K)$ i $C_0(\Omega)$, a za algebru $B(\mathcal{H})$ to se dokazuje pomoću činjenice da za hermitski operator $A \in B(\mathcal{H})$ vrijedi

$$\|A\| = \sup\{|(Ax|x)|;\ x \in \mathcal{H},\ \|x\| \le 1\}.$$

Za svaki $A \in B(\mathcal{H})$ je operator A^*A hermitski, pa nalazimo

$$\|A^*A\| = \sup\{|(A^*Ax|x)|;\ x \in \mathcal{H},\ \|x\| \le 1\} = \sup\{|(Ax|Ax)|;\ x \in \mathcal{H},\ \|x\| \le 1\} =$$

$$= \sup\{\|Ax\|^2;\ x \in \mathcal{H},\ \|x\| \le 1\} = \|A\|^2.$$

Dakle, $\mathcal{A} = B(\mathcal{H})$ je doista C^*-algebra.

Propozicija 1.4. *Neka je $\mathcal{A}$ C^*-algebra i $x \in \mathcal{A}$. Tada je $\|x^*\| = \|x\|$.*

Zadatak 1.7. *Dokažite propoziciju 1.4.*

Propozicija 1.5. *Neka je $\mathcal{A}$ unitalna C^*-algebra i $x \in \mathcal{A}$.*

(a) *Ako je x hermitski, onda je $\sigma(x) \subseteq \mathbb{R}$.*

(b) *Ako je x unitaran, onda je $\sigma(x) \subseteq S = \{\lambda \in \mathbb{C};\ |\lambda| = 1\}$.*

Zadatak 1.8. *Dokažite propoziciju 1.5.*

Uputa: Najprije dokažite tvrdnju (b) i to pomoću tvrdnje (b) teorema 1.7., pomoću propozicije 1.4. i pomoću tvrdnje (b) propozicije 1.1. Zatim za hermitski element $x \in \mathcal{A}$ definirajte element $u \in \mathcal{A}$ na sljedeći način:

$$u = \mathrm{e}^{ix} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} x^n.$$

(Definicija elementa u ima smisla jer gornji red konvergira apsolutno, pa kako je algebra $\mathcal{A}$ potpuna taj red konvergira u $\mathcal{A}$). Zatim dokažite da je element u unitaran. Napokon, pomoću jednakosti

$$\lambda^n e - x^n = (\lambda e - x)(\lambda^{n-1}e + \lambda^{n-2}x + \cdots + \lambda x^{n-2} + x^{n-1}) = (\lambda^{n-1}e + \lambda^{n-2}x + \cdots + \lambda x^{n-2} + x^{n-1})(\lambda e - x),$$

dokažite da iz $\lambda \in \sigma(x)$ slijedi $\mathrm{e}^{i\lambda} \in \sigma(u)$, te iskoristite dokazanu tvrdnju (b).

Ako je $\mathcal{A}$ neunitalna C^*-algebra, algebra $\tilde{\mathcal{A}} = \mathcal{A} \dotplus \mathbb{C}e$ dobivena iz $\mathcal{A}$ unitalizacijom je Banachova algebra s normom

$$\|y + \lambda e\| = \|y\| + |\lambda\| \qquad y \in \mathcal{A},\ \lambda \in C.$$

Za $z \in \tilde{\mathcal{A}} = \mathcal{A} \dotplus \mathbb{C}e$, $z = y + \lambda e$, $y \in \mathcal{A}$, $\lambda \in \mathbb{C}$, stavimo $z^* = y^* + \overline{\lambda}e$. Tada je $z \mapsto z^*$ involucija na algebri $\tilde{\mathcal{A}}$. Doista, neka su $z, z' \in \tilde{\mathcal{A}}$ i $\alpha, \alpha' \in \mathbb{C}$. Tada je $z = y + \lambda e$ i $z' = y' + \lambda' e$ za neke $y, y' \in \mathcal{A}$ i $\lambda, \lambda' \in \mathbb{C}$. Imamo

$$(\alpha z + \alpha' z')^* = [(\alpha y + \alpha' y') + (\alpha\lambda + \alpha'\lambda')e]^* = (\alpha y + \alpha' y')^* + \overline{(\alpha\lambda + \alpha'\lambda')}e =$$

$$= \overline{\alpha}y^* + \overline{\alpha'}y'^* + \overline{\alpha}\overline{\lambda}e + \overline{\alpha'}\overline{\lambda'}e = \overline{\alpha}(y^* + \overline{\lambda}e) + \overline{\alpha'}(y'^* + \overline{\lambda'}e) = \overline{\alpha}z^* + \overline{\alpha'}z'^*;$$

$$(zz')^* = [(y + \lambda e)(y' + \lambda' e)]^* = [(yy' + \lambda y' + \lambda' y) + (\lambda\lambda')e]^* =$$

$$= (yy' + \lambda y' + \lambda' y)^* + \overline{\lambda\lambda'}e = y'^* y^* + \overline{\lambda}y'^* + \overline{\lambda'}y^* + \overline{\lambda\lambda'}e = (y'^* + \overline{\lambda'}e)(y^* + \overline{\lambda}e) = z'^* z^*;$$

$$z^{**} = (y^* + \overline{\lambda}e)^* = y + \lambda e = z.$$

Dakle, $\tilde{\mathcal{A}}$ je algebra s involucijom. Međutim, općenito norma na Banachovoj algebri $\tilde{\mathcal{A}}$ nema C^*-svojstvo, tj. ne vrijedi $\|z^*z\| = \|z\|^2$. Dokazat ćemo sada teorem koji ipak mogućuje relativno jednostavno baratanje s neunitalnim C^*-algebrama.

Teorem 1.9. *Neka je $\mathcal{A}$ neunitalna C^*-algebra. Tada se norma na $\mathcal{A}$ može se proširiti do norme na $\tilde{\mathcal{A}}$ s obzirom na koju je $\tilde{\mathcal{A}}$ unitalna C^*-algebra.*

Dokaz: Definiramo preslikavanje $\varphi\colon \tilde{\mathcal{A}} \to B(\mathcal{A})$ tako da je za $z \in \tilde{\mathcal{A}}$ operator $\varphi(z)$ definiran kao množenje slijeva sa z. Dakle, ako je $z = y + \lambda e$, $y \in \mathcal{A}$, $\lambda \in \mathbb{C}$, onda je

$$(\varphi(z))(x) = zx = yx + \lambda x, \qquad x \in \mathcal{A}.$$

Tada je očito φ unitalni homomorfizam unitalnih algebri $\tilde{\mathcal{A}}$ u $B(\mathcal{A})$. Primijetimo da je homomorfizam φ injektivan. Doista, neka je $z \in \tilde{\mathcal{A}}$ takav da je $\varphi(z) = 0$. Imamo $z = y + \lambda e$ za neke $y \in \mathcal{A}$ i $\lambda \in \mathbb{C}$ i $\varphi(z) = 0$ znači da vrijedi

$$yx + \lambda x = 0 \qquad \forall x \in \mathcal{A}.$$

Pretpostavimo da je $\lambda \neq 0$. Tada za element $u = -\lambda^{-1}y \in \mathcal{A}$ vrijedi $ux = x \ \forall x \in \mathcal{A}$, dakle u je lijeva jedinica za $\mathcal{A}$. Za svaki $x \in \mathcal{A}$ tada vrijedi $xu^* = x^{**}u^* = (ux^*)^* = x^{**} = x$, dakle u^* je desna jedinica za $\mathcal{A}$. No ako $\mathcal{A}$ ima i lijevu i desnu jedinicu, onda su one jednake, $u^* = u$, i to je jedinica algebre $\mathcal{A}$. To je u suprotnosti s pretpostavkom da $\mathcal{A}$ nema jedinicu. Ova kontradikcija pokazuje da je $\lambda = 0$, tj. $z = y \in \mathcal{A}$. Dakle, vrijedi $yx = 0 \ \forall x \in \mathcal{A}$. Za $x = y^*$ dobivamo

$$0 = \|yy^*\| = \|y^*\|^2 = \|y\|^2 \qquad \Longrightarrow \qquad y = 0.$$

Dakle, $z = 0$ odnosno dokazali smo da je $\ker \varphi = \{0\}$, što znači da je φ injekcija.

Pomoću operatorske norme $\|\cdot\|$ na prostoru $B(\mathcal{A})$

$$\|A\| = \sup\{\|Ax\|;\ x \in \mathcal{A},\ \|x\| \leq 1\}, \qquad A \in B(\mathcal{A})$$

zbog injektivnosti homomorfizma φ možemo definirati normu $\|\cdot\|_1$ na $\tilde{\mathcal{A}}$:

$$\|z\|_1 = \|\varphi(z)\|, \qquad z \in \tilde{\mathcal{A}}.$$

Dakle,

$$\|z\|_1 = \sup\{\|zx\|;\ x \in \mathcal{A},\ \|x\| \leq 1\}, \qquad z \in \tilde{\mathcal{A}}.$$

Uz normu $\|\cdot\|_1$ $\tilde{\mathcal{A}}$ postaje normirana algebra.

Dokažimo sada da norma $\|\cdot\|_1$ proširuje normu $\|\cdot\|$ na $\mathcal{A}$, tj. da je $\|y\|_1 = \|y\| \ \forall y \in \mathcal{A}$. Imamo

$$\|y\|_1 = \sup\{\|yx\|;\ x \in \mathcal{A},\ \|x\| \leq 1\} \leq \sup\{\|y\| \cdot \|x\|;\ x \in \mathcal{A},\ \|x\| \leq 1\} = \|y\|.$$

S druge strane imamo

$$\|y\|^2 = \|y^*\|^2 = \|yy^*\| = \|\varphi(y)y^*\| \leq \|\varphi(y)\| \cdot \|y^*\| = \|y\|_1 \cdot \|y\|.$$

Ako je $y \neq 0$ odatle slijedi nejednakost $\|y\| \leq \|y\|_1$ (koja vrijedi i ako je $y = 0$). Iz dvije suprotne nejednakosti slijedi jednakost:

$$\|y\|_1 = \|y\| \qquad \forall y \in \mathcal{A}.$$

Dokažimo sada da norma $\|\cdot\|_1$ na $*-$algebri $\tilde{\mathcal{A}}$ zadovoljava C^*-uvjet

$$\|z^*z\|_1 = \|z\|_1^2 \qquad \forall z \in \tilde{\mathcal{A}}.$$

Za svaki $z \in \tilde{\mathcal{A}}$ i za $x \in \mathcal{A}$ je $zx \in \mathcal{A}$. Nadalje, norma $\|\cdot\|$ na $*-$algebri $\mathcal{A}$ ima C^*-svojstvo, a vrijedi i $\|x^*\| = \|x\|$ za svaki $x \in \mathcal{A}$. Stoga imamo

$$\|z\|_1^2 = \sup\{\|zx\|^2;\, x \in \mathcal{A},\, \|x\| \leq 1\} = \sup\{\|(zx)^*zx\|;\, x \in \mathcal{A},\, \|x\| \leq 1\} =$$

$$= \sup\{\|x^*z^*zx\|;\, x \in \mathcal{A},\, \|x\| \leq 1\} \leq \sup\{\|x^*\| \cdot \|z^*zx\|;\, x \in \mathcal{A},\, \|x\| \leq 1\} =$$

$$= \sup\{\|z^*zx\|;\, x \in \mathcal{A},\, \|x\| \leq 1\} = \|z^*z\|_1 \leq \|z^*\|_1 \cdot \|z\|_1.$$

Odatle slijedi $\|z\|_1 \leq \|z^*\|_1 \ \forall z \in \tilde{\mathcal{A}}$, a zamjenom uloga z i z^* nalazimo da vrijedi i $\|z^*\|_1 \leq \|z\|_1$. Dakle, vrijedi jednakost $\|z^*\|_1 = \|z\|_1 \ \forall z \in \tilde{\mathcal{A}}$. Odatle i iz već dokazanog za svaki $z \in \tilde{\mathcal{A}}$ nalazimo

$$\|z\|_1^2 \leq \|z^*z\|_1 \leq \|z^*\|_1 \cdot \|z\|_1 = \|z\|_1^2 \qquad \Longrightarrow \qquad \|z^*z\|_1 = \|z\|_1^2.$$

Treba još samo dokazati da je algebra $\tilde{\mathcal{A}}$ potpuna u odnosu na normu $\|\cdot\|_1$. Budući da je norma $\|\cdot\|_1$ dobivena iz operatorske norme $\|\cdot\|$ pomoću injektivnog homomorfizma $\varphi\colon \tilde{\mathcal{A}} \to B(\mathcal{A})$ i budući da je s operatorskom normom $B(\mathcal{A})$ Banachova algebra, potpunost algebre $\tilde{\mathcal{A}}$ u odnosu na normu $\|\cdot\|_1$ slijedit će ako dokažemo da je slika $\varphi(\tilde{\mathcal{A}})$ algebre $\tilde{\mathcal{A}}$ pri preslikavanju φ zatvorena u $B(\mathcal{A})$. Označimo sa $I_{\mathcal{A}}$ operator identitete u $B(\mathcal{A})$, $I_{\mathcal{A}}x = x \ \forall x \in \mathcal{A}$. Očito je $\varphi(e) = I_{\mathcal{A}}$, dakle za $z = y + \lambda e \in \tilde{\mathcal{A}},\ y \in \mathcal{A},\ \lambda \in \mathbb{C}$, vrijedi $\varphi(z) = \varphi(y) + \lambda I_{\mathcal{A}}$. To znači da je $\varphi(\tilde{\mathcal{A}}) = \varphi(\mathcal{A}) + \mathbb{C}I_{\mathcal{A}}$. Algebra $\mathcal{A}$ je potpuna i φ je izometrija, pa slijedi da je slika $\varphi(\mathcal{A})$ algebre $\mathcal{A}$ potpuna, dakle i zatvorena u $B(\mathcal{A})$. Zatvorenost $\varphi(\tilde{\mathcal{A}})$ sada slijedi iz sljedeće općenite leme:

Lema 1.1. *Neka su Y i Z potprostori normiranog prostora X pri čemu je Y zatvoren, a Z konačnodimenzionalan. Tada je potprostor $Y + Z$ zatvoren.*

Dokaz: Prije svega uočimo da možemo pretpostaviti da je suma $Y + Z$ direktna. Naime, ako je $Y \cap Z \neq \{0\}$, onda možemo izabrati potprostor Z_1 od Z takav da je $Z = Y \cap Z \dotplus Z_1$, a tada je $Y + Z = Y \dotplus Z_1$.

Stavimo $W = Y \dotplus Z$ i neka je $P \in L(W)$ projektor prostora W na potprostor Z duž potprostora Y. Dokažimo da je P ograničen. Pretpostavimo suprotno, dakle da ne postoji $M > 0$ takav da je $\|Px\| \leq M\|x\| \ \forall x \in W$. Tada postoji niz $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ u W takav da je

$$\|Px_n\| = 1 \ \forall n \in \mathbb{N} \qquad \text{i} \qquad \lim_{n\to\infty} x_n = 0.$$

Budući da je potprostor Z konačnodimenzionalan, jedinična sfera u Z je kompaktan skup. Niz vektora $(Px_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sadržan je u toj jediničnoj sferi, pa taj niz ima konvergentan podniz. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da smo niz (x_n) izabrali tako da je niz $(Px_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergentan. Stavimo $z = \lim_{n\to\infty} Px_n$. Tada je $z \in Z$. Nadalje, $I_W - P$ je projektor na Y duž Z, dakle je $(I_W - P)x_n \in Y$ za svaki n. Kako je po pretpostavci potprostor Y zatvoren, slijedi da je $\lim_{n\to\infty}(I_W - P)x_n \in Y$. Međutim,

$$\lim_{n\to\infty}(I_W - P)x_n = \lim_{n\to\infty} x_n - \lim_{n\to\infty} Px_n = -z.$$

Dakle, $z \in Y \cap Z = \{0\}$, tj. $z = 0$. No to je u suprotnosti sa

$$\|z\| = \lim_{n\to\infty} \|Px_n\| = 1.$$

Ova kontradikcija pokazuje da je operator P ograničen.

Neka je sada $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz u W koji je konvergentan u X i neka je

$$x = \lim_{n\to\infty} x_n.$$

Da bismo dokazali zatvorenost potprostora $W = Y \dotplus Y$ dovoljno je dokazati da je $x \in W$. Kako je P ograničen operator kome je Z područje vrijednosti, niz $(Px_n)_{n\in\mathbb{N}}$ je Cauchyjev u Z. Međutim, prostor Z je konačnodimenzionalan, dakle potpun, pa slijedi da je niz $(Px_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergentan. Stavimo

$$z = \lim_{n\to\infty} Px_n \in Z.$$

Kako su (x_n) i (Px_n) konvergentni nizovi, to je i niz $((I_W - P)x_n)$ konvergentan. $I_W - P$ je projektor na Y duž Z, dakle $(I_W - P)x_n \in Y$ za svaki n. Kako je po pretpostavci potprostor Y zatvoren, slijedi da je

$$y = \lim_{n\to\infty} (I_W - P)x_n \in Y.$$

Dakle,

$$x = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} (I_W - P)x_n + \lim_{n\to\infty} Px_n = y + z \in Y \dotplus Z = W.$$

Poglavlje 2

Komutativne C^*-algebre

2.1 Karakteri

Neka je $\mathcal{A}$ algebra. **Karakter algebre** $\mathcal{A}$ je svaki homomorfizam algebri $\chi\colon \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ različit od nule. U daljnjem ćemo sa $X(\mathcal{A})$ označavati skup svih karaktera algebre $\mathcal{A}$.

Propozicija 2.1. *Neka je $\mathcal{A}$ unitalna algebra s jedinicom e i $\chi \in X(\mathcal{A})$. Tada je $\chi(e) = 1$.*

Dokaz: Imamo $\chi(e) = \chi(e^2) = \chi(e)^2$. Odatle slijedi da je ili $\chi(e) = 0$ ili $\chi(e) = 1$. Kad bi bilo $\chi(e) = 0$ onda bi za svaki $x \in \mathcal{A}$ vrijedilo

$$\chi(x) = \chi(xe) = \chi(x)\chi(e) = 0,$$

dakle tada bilo bi $\chi = 0$ suprotno pretpostavci da je $\chi \neq 0$. Dakle, $\chi(e) = 1$.

Propozicija 2.2. *Neka je $\mathcal{A}$ komutativna algebra i $\tilde{\mathcal{A}}$ njena unitalizacija identificirana sa $\mathcal{A} \dot{+} \mathbb{C}$. Za $\chi \in X(\mathcal{A})$ definiramo $\tilde{\chi} : \tilde{\mathcal{A}} \to \mathbb{C}$ sa*

$$\tilde{\chi}(a + \lambda) = \chi(a) + \lambda, \qquad a \in \mathcal{A}, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Tada je $\chi \mapsto \tilde{\chi}$ bijekcija sa $X(\mathcal{A})$ na $X(\tilde{\mathcal{A}}) \setminus \{\varphi_0\}$, pri čemu je $\varphi_0 \in X(\tilde{\mathcal{A}})$ definiran sa

$$\varphi_0(a + \lambda) = \lambda, \qquad a \in \mathcal{A}, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Zadatak 2.1. *Dokažite propoziciju 2.2.*

Teorem 2.1. *Neka je $\mathcal{A}$ komutativna Banachova algebra i neka je $\chi \in X(\mathcal{A})$. Tada je χ neprekidan linearan funkcional na $\mathcal{A}$ norme ≤ 1. Ako je algebra $\mathcal{A}$ unitalna i $\|e\| = 1$, onda je $\|\chi\| = 1$.*

Dokaz: Pretpostavimo da funkcional χ nije neprekidan, odnosno, ograničen ili da je χ ograničen, ali $\|\chi\| > 1$. Tada postoji $a \in \mathcal{A}$ takav da je $\chi(a) = 1$ i $\|a\| < 1$. Stavimo

$$b = a + a^2 + a^3 + \cdots = \sum_{n \in \mathbb{N}} a^n.$$

Tada vrijedi $a + ab = b$, a odatle je $\chi(b) = \chi(a+ab) = \chi(a) + \chi(a)\chi(b) = 1 + \chi(b)$, a to je nemoguće. Prema tome, χ je ograničen i $\|\chi\| \leq 1$. Napokon, ako je algebra $\mathcal{A}$ unitalna s jedinicom e i ako je $\|e\| = 1$, onda je prema propoziciji 2.1. $\chi(e) = 1$, pa imamo

$$1 \geq \|\chi\| = \sup\{|\chi(a)|;\ a \in \mathcal{A}, \|a\| = 1\} \geq |\chi(e)| = 1,$$

odakle slijedi $\|\chi\| = 1$.

Već smo spomenuli da invertibilni element unitalne algebre nije sadržan ni u jednom lijevom i ni u jednom desnom idealu. Vrijedi i preciznija tvrdnja:

Lema 2.1. *Neka je $\mathcal{A}$ unitalna algebra. Element $x \in \mathcal{A}$ je lijevoinvertibilan (odnosno, desnoinvertibilan) ako i samo ako x nije sadržan ni u jednom lijevom (odnosno, desnom) idealu.*

Zadatak 2.2. *Dokažite lemu 2.1.*

Propozicija 2.3. *Neka je $\mathcal{A}$ unitalna algebra i neka je $\mathcal{I}$ lijevi (odnosno desni, odnosno obostrani) ideal u $\mathcal{A}$. Postoji maksimalan lijevi (odnosno desni, odnosno obostrani) ideal u $\mathcal{A}$ koji sadrži $\mathcal{I}$.*

Dokaz ćemo provesti za lijeve ideale. Za desne i za obostrane dokaz je sasvim analogan. Neka je $\mathfrak{S}$ skup svih lijevih ideala koji sadrže $\mathcal{I}$. Skup $\mathfrak{S}$ je neprazan jer je $\mathcal{I} \in \mathfrak{S}$ i to je parcijalno uređen skup, ako uređaj definiramo pomoću inkluzije. Provjerimo da je ispunjen uvjet Zornove leme. Neka je $\mathfrak{L}$ lanac u $\mathfrak{S}$. Stavimo $\mathcal{J} = \bigcup_{\mathcal{K} \in \mathfrak{L}} \mathcal{K}$. Očito $\mathcal{J} \supseteq \mathcal{I}$. Nadalje, $\mathcal{J}$ je potprostor; doista, ako su $x, y \in \mathcal{J}$ i $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ onda po definiciji skupa $\mathcal{J}$ vrijedi $x \in \mathcal{K}$ i $y \in \mathcal{L}$ za neke $\mathcal{K}, \mathcal{L} \in \mathfrak{L}$. Kako je $\mathfrak{L}$ lanac, to je ili $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{L}$ ili $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{K}$. Možemo pretpostaviti da je $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{L}$. Tada su $x, y \in \mathcal{L}$, pa slijedi $\alpha x + \beta y \in \mathcal{L} \subseteq \mathcal{J}$. Dakle, $\mathcal{J}$ je potprostor. Nadalje, ako je $x \in \mathcal{J}$ onda je $x \in \mathcal{K}$ $\forall \mathcal{K} \in \mathfrak{L}$, dakle za svaki $a \in \mathcal{A}$ vrijedi $ax \in \mathcal{K}$ $\forall \mathcal{K} \in \mathfrak{L}$, jer je svaki $\mathcal{K} \in \mathfrak{L}$ lijevi ideal. Odatle je $ax \in \mathcal{J}$ $\forall a \in \mathcal{A}$. Da bismo zaključili da je $\mathcal{J}$ lijevi ideal, a tada i gornja ograda za $\mathfrak{L}$ u $\mathfrak{S}$, treba još samo provjeriti da je $\mathcal{J} \neq \mathcal{A}$. Međutim, prema lemi 2.1. $e \notin \mathcal{K}$ $\forall \mathcal{K} \in \mathfrak{L}$ pa slijedi $e \notin \mathcal{J}$, dakle $\mathcal{J} \neq \mathcal{A}$. Zornova lema sada povlači da u $\mathfrak{S}$ postoji maksimalan element, a to je očito maksimalan lijevi ideal koji sadrži $\mathcal{I}$.

Teorem 2.2. *Ako je $\mathcal{A}$ komutativna unitalna Banachova algebra, onda je $\chi \mapsto \ker \chi$ bijekcija sa $X(\mathcal{A})$ na skup svih maksimalnih ideala u $\mathcal{A}$.*

Dokaz: Dokažimo da je $\chi \mapsto \ker \chi$ injekcija sa $X(\mathcal{A})$ u skup svih maksimalnih ideala u $\mathcal{A}$. Doista, svaki $\chi \in X(\mathcal{A})$ je linearan funkcional na $\mathcal{A}$ koji je različit od nule, pa je $\ker \chi$ potprostor od $\mathcal{A}$ kodimenzije 1. Nadalje, zbog multiplikativnosti od χ, tj. zbog jednakosti $\chi(xy) = \chi(x)\chi(y)$ $\forall x, y \in \mathcal{A}$, $\ker \chi$ je ideal. Prema tome, $\ker \chi$ je maksimalan ideal u $\mathcal{A}$. Neka su $\chi_1, \chi_2 \in X(\mathcal{A})$ i $\chi_1 \neq \chi_2$. Tada postoji $x \in \mathcal{A}$ takav da je $\chi_1(x) \neq \chi_2(x)$. Za element $a = x - \chi_1(x)e$ imamo zbog propozicije 2.1.

$$\chi_1(a) = 0 \qquad \text{i} \qquad \chi_2(a) = \chi_2(x) - \chi_1(x) \neq 0.$$

Dakle, $a \in \ker \chi_1$ i $a \notin \ker \chi_2$, što pokazuje da je $\ker \chi_1 \neq \ker \chi_2$. Prema tome, $\chi \mapsto \ker \chi$ je injekcija sa $X(\mathcal{A})$ u skup svih maksimalnih ideala u algebri $\mathcal{A}$.

Dokažimo sada surjektivnost preslikavanja $\chi \mapsto \ker \chi$. Neka je $\mathcal{M}$ maksimalni ideal u algebri $\mathcal{A}$. Prema teoremu 1.2. otvorena jedinična kugla $K(e, 1)$ u algebri $\mathcal{A}$ sa središtem u e sadržana je u $\mathcal{A}^\times$, dakle, $K(e, 1) \cap \mathcal{M} = \emptyset$. Prema tome, zatvarač $Cl(\mathcal{M})$ ideala $\mathcal{M}$ nije jednak $\mathcal{A}$, nego je to ideal. Zbog maksimalnosti zaključujemo da je ideal $\mathcal{M}$ zatvoren. Tada je $\mathcal{A}/\mathcal{M}$ unitalna Banachova algebra, a zbog maksimalnosti ideala $\mathcal{M}$ u algebri $\mathcal{A}$ kvocijentna algebra $\mathcal{A}/\mathcal{M}$ nema ideala $\neq \{0\}$. Prema lemi 2.1. u kvocijentnoj algebri $\mathcal{A}/\mathcal{M}$ je svaki element osim nule invertibilan. Sada iz Gelfand$-$Mazurovog teorema 1.8. slijedi da je $\mathcal{A}/\mathcal{M} = \mathbb{C} \cdot (e + \mathcal{M})$. Dakle, za svaki $x \in \mathcal{A}$ postoji (očito jedinstven) skalar $\chi(x) \in \mathbb{C}$ takav da je $x - \chi(x)e \in \mathcal{M}$. Tako smo došli do preslikavanja $\chi \colon \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ i vrijedi $\mathcal{M} = \{x \in \mathcal{A};\ \chi(x) = 0\}$.

Dokažimo da je preslikavanje χ linearno. Neka su $x, y \in \mathcal{A}$ i $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Tada je

$$x - \chi(x)e \in \mathcal{M}, \qquad y - \chi(y)e \in \mathcal{M}, \qquad \alpha x + \beta y - \chi(\alpha x + \beta y)e \in \mathcal{M}.$$

Slijedi

$$[\chi(\alpha x + \beta y) - \alpha\chi(x) - \beta\chi(y)]e = \alpha[x - \chi(x)e] + \beta[y - \chi(y)e] - [\alpha x + \beta y - \chi(\alpha x + \beta y)] \in \mathcal{M}.$$

Kako je za svaki $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda \neq 0$, element λe invertibilan, dakle $\lambda e \notin \mathcal{M}$, zaključujemo da mora biti $\chi(\alpha x + \beta y) - \alpha\chi(x) - \beta\chi(y) = 0$. Dakle, χ je linearan funkcional na $\mathcal{A}$ i vrijedi $\ker \chi = \mathcal{M}$.

Treba još dokazati da je χ karakter. Neka su $x, y \in \mathcal{A}$. Tada je

$$x - \chi(x)e \in \mathcal{M}, \qquad y - \chi(y)e \in \mathcal{M} \qquad \text{i} \qquad xy - \chi(xy)e \in \mathcal{M}.$$

Odavde slijedi

$$[\chi(xy) - \chi(x)\chi(y)]e = [x - \chi(x)e]y + \chi(x)[y - \chi(y)e] - [xy - \chi(xy)e] \in \mathcal{M}.$$

Kao i malo prije zaključujemo da je $\chi(xy) - \chi(x)\chi(y) = 0$, odnosno $\chi(xy) = \chi(x)\chi(y)$.

Teorem 2.3. *Neka je $\mathcal{A}$ unitalna komutativna Banachova algebra i $x \in \mathcal{A}$. Tada je*

$$\sigma(x) = \{\chi(x);\ \chi \in X(\mathcal{A})\}.$$

Dokaz: Neka je $\chi \in X(\mathcal{A})$. Po propoziciji 2.1. je $x - \chi(x)e \in \ker \chi$, pa slijedi $x - \chi(x)e \notin \mathcal{A}^\times$. Dakle je $\chi(x) \in \sigma(x)$ i time je dokazana inkluzija $\{\chi(x);\ \chi \in X(\mathcal{A})\} \subseteq \sigma(x)$. Dokažimo i obrnutu inkluziju. Neka je $\lambda \in \sigma(x)$. Tada je $x - \lambda e \notin \mathcal{A}^\times$ pa iz leme 2.1. i iz propozicije 2.3. slijedi da postoji maksimalan ideal $\mathcal{M}$ takav da je $x - \lambda e \in \mathcal{M}$. Prema teoremu 2.2. postoji $\chi \in X(\mathcal{A})$ takav da je $\mathcal{M} = \ker \chi$. Tada je

$$0 = \chi(x - \lambda e) = \chi(x) - \lambda \qquad \Longrightarrow \qquad \lambda = \chi(x).$$

Time je dokazana i obrnuta inkluzija $\{\chi(x);\ \chi \in X(\mathcal{A})\} \supseteq \sigma(x)$.

Zadatak 2.3. *Neka je T kompaktan Hausdorffov topološki prostor i $C(T)$ unitalna komutativna Banachova algebra svih neprekidnih funkcija $f : T \to \mathbb{C}$ s operacijama definiranim po točkama*

$$(f+g)(t) = f(t) + g(t), \qquad (\lambda f)(t) = \lambda f(t), \qquad (fg)(t) = f(t)g(t),$$
$$f, g \in C(T), \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad t \in T,$$

i normom

$$\|f\| = \max\{|f(t)|;\ t \in T\}, \qquad f \in C(T).$$

Za $t \in T$ stavimo:

$$\mathcal{M}_t = \{f \in C(T);\ f(t) = 0\}, \qquad \varphi_t(f) = f(t), \quad f \in C(T).$$

Dokažite da je $t \mapsto \mathcal{M}_t$ bijekcija sa T na skup svih maksimalnih ideala algebre $C(T)$ i da je $t \mapsto \varphi_t$ bijekcija sa T na $X(C(T))$.

Zadatak 2.4. *Neka je T lokalno kompaktan nekompaktan Hausdorffov topološki prostor i $C_0(T)$ neunitalna komutativna Banachova algebra svih neprekidnih funkcija $f : T \to \mathbb{C}$ sa svojstvom $\lim_{t\to\infty} f(t) = 0$ s operacijama i normom kao u zadatku 2.3. Za $t \in T$ stavimo:*

$$\varphi_t(f) = f(t), \quad f \in C_0(T).$$

Dokažite da je $t \mapsto \varphi_t$ bijekcija sa T na $X(C_0(T))$.

Zadatak 2.5. *Uz oznake iz zadatka 2.3. i za zatvoren podskup $S \subseteq T$ stavimo*

$$\mathcal{I}_S = \{f \in C(T);\ f(s) = 0\ \forall s \in S\}.$$

Dokažite da je $S \mapsto \mathcal{I}_S$ bijekcija sa skupa svih nepraznih zatvorenih podskupova $S \subseteq T$ na skup svih zatvorenih ideala u algebri $C(T)$ i da je inverzna bijekcija $\mathcal{I} \mapsto T_{\mathcal{I}}$, gdje je

$$T_{\mathcal{I}} = \{t \in T;\ f(t) = 0\ \forall f \in \mathcal{I}\}.$$

2.2 Slaba topologija na dualu normiranog prostora

Neka je X normiran prostor. Dualni prostor X' svih neprekidnih linearnih funkcionala na X je Banachov prostor s normom

$$\|f\| = \sup\{|f(x)|;\ x \in X,\ \|x\| \leq 1\}.$$

Podsjetimo da je posljedica Hahn−Banachovog teorema da za svaki $x \in X$ postoji $f \in X'$ takav da je $\|f\| = 1$ i $f(x) = \|x\|$.

Promatrat ćemo sada na prostoru X' jednu drugu topologiju, tzv. **slabu topologiju**. Za tu topologiju bazu okolina točke $f_0 \in X'$ tvore svi skupovi oblika

$$U(f_0; x_1, \ldots, x_n; \varepsilon) = \{f \in X';\ |f(x_k) - f_0(x_k)| < \varepsilon \text{ za } k = 1, \ldots, n\},$$

pri čemu su $n \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_n \in X$ i $\varepsilon > 0$. To znači da da je skup $V \subseteq X'$ **slabo otvoren** (odnosno, otvoren u odnosu na slabu topologiju) ako za svaki $f_0 \in V$ postoje $n \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_n \in X$ i $\varepsilon > 0$ takvi da je $U(f_0; x_1, \ldots, x_n; \varepsilon) \subseteq V$.

U odnosu na slabu topologiju X' je Hausdorffov prostor. Doista, ako su $f, g \in X'$ i ako je $f \neq g$ onda postoji $x \in X$ takav da je $f(x) \neq g(x)$. Stavimo $\varepsilon = \frac{1}{2}|f(x) - g(x)|$. Tada je $U(f; x; \varepsilon) \cap U(g; x; \varepsilon) = \emptyset$. Doista, u protivnom bismo za $h \in U(f; x; \varepsilon) \cap U(g; x; \varepsilon)$ imali

$$2\varepsilon = |f(x) - g(x)| = |(f(x) - h(x)) + (g(x) - h(x))| \leq$$

$$\leq |f(x) - h(x)| + |g(x) - h(x)| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$$

a to je nemoguće.

Prema teoremu 2.1. za Banachovu algebru $\mathcal{A}$ je $X(\mathcal{A})$ podskup zatvorene jedinične kugle $\overline{K}(0,1) = \{f \in \mathcal{A}';\ \|f\| \leq 1\}$ u dualu $\mathcal{A}'$ algebre $\mathcal{A}$. Glavni cilj ovog poglavlja jest da dokažemo da je uz slabu topologiju $X(\mathcal{A})$ Hausdorffov topološki prostor koji je kompaktan ako je algebra $\mathcal{A}$ unitalna, a lokalno kompaktan nekompaktan ako je algebra $\mathcal{A}$ neunitalna. U tu svrhu najprije ćemo dokazati nekoliko teorema iz opće topologije koji će nam omogućiti da dokažemo teorem Banacha i Alaoglua po kome je zatvorena jedinična kugla u dualu normiranog prostora u odnosu na slabu topologiju kompaktan topološki prostor.

Propozicija 2.4. *Neka je X normiran prostor, T topološki prostor i neka je F funkcija sa T u dualni prostor X'. Funkcija F je slabo neprekidna (tj. neprekidna s obzirom na slabu topologiju u prostoru X') ako i samo ako je za svaki $x \in X$ funkcija $t \mapsto [F(t)](x)$ neprekidna sa T u $\mathbb{C}$.*

Zadatak 2.6. *Dokažite propoziciju 2.4.*

Neka su $T_1, \ldots, T_n$ topološki prostori. U Kartezijev produkt $T = T_1 \times \cdots \times T_n$ uvodi se tzv. *topologija produkta* tako da se kao baza otvorenih skupova u T uzme skup svih skupova oblika $V_1 \times \cdots \times V_n$, pri čemu je V_j otvoren skup u T_j za $j = 1, \ldots, n$.

Ova se definicija generalizira i na produkt beskonačno mnogo topoloških prostora. Neka je $(T_i,\ i \in I)$ bilo kakva familija topoloških prostora. U njihov produkt

$$T = \prod_{i \in I} T_i = \left\{ f \colon I \to \bigcup_{i \in I} T_i;\ f(i) \in T_i\ \ \forall i \in I \right\}$$

uvodi se tzv. **produktna topologija** tako da se kao baza otvorenih skupova u T uzme skup svih skupova oblika

$$U(i_1, \ldots, i_n; V_1, \ldots, V_n) = \{f \in T;\ f(i_k) \in V_k \text{ za } k = 1, \ldots, n\}$$

pri čemu je $n \in \mathbb{N}$, $i_1, \ldots, i_n \in I$, i za svaki $k \in \{1, \ldots, n\}$ je V_k otvoren skup u T_{i_k}. Ako sa $\pi_i \colon T \to T_i$ označimo $i-$tu projekciju (tj. $\pi_i(f) = f(i)$) onda je

$$U(i_1, \ldots, i_n; V_1, \ldots, V_n) = \pi_{i_1}^{-1}(V_1) \cap \cdots \cap \pi_{i_n}^{-1}(V_n).$$

Odatle se vidi da je svaka projekcija π_i neprekidno preslikavanje sa T u T_i. Štoviše, produktna topologija na T je najslabija među svim onim topologijama na T za koje su sve projekcije π_i neprekidne.

Ako su svi prostori T_i Hausdorffovi onda je i prostor T Hausdorffov. Doista, neka su $f, g \in T$ i $f \neq g$. Tada je $f(i) \neq g(i)$ za neki $i \in I$, pa zbog toga što je T_i Hausdorffov postoje otvoreni skupovi $U, V \subseteq T_i$ takvi da je $f(i) \in U$, $g(i) \in V$ i $U \cap V = \emptyset$. Tada su skupovi $U(i; U) = \pi_i^{-1}(U)$ i $U(i; V) = \pi_i^{-1}(V)$ otvoreni u T i vrijedi

$$f \in U(i; U), \qquad g \in U(i; V) \qquad \text{i} \qquad U(i; U) \cap U(i; V) = \pi_i^{-1}(U \cap V) = \emptyset.$$

Skup $\mathcal{S}$ otvorenih podskupova topološkog prostora T zove se **podbaza topologije** prostora T ako je skup svih konačnih presjeka

$$\{S_1 \cap \ldots \cap S_n;\ n \in \mathbb{N},\ S_1, \ldots, S_n \in \mathcal{S}\}$$

baza topologije prostora T.

Teorem 2.4. (**J.W. Alexander, 1939.**) *Neka je T topološki prostor i $\mathcal{S}$ podbaza topologije tog prostora. Ako svaki $\mathcal{S}-$pokrivač prostora T sadrži konačan potpokrivač, onda je prostor T kompaktan.*

Dokaz: Pretpostavimo da prostor T nije kompaktan. Dokazat ćemo da tada postoji $\mathcal{S}-$pokrivač od T koji ne sadrži nijedan konačan potpokrivač.

Neka je $\mathcal{P}$ skup svih otvorenih pokrivača od T koji ne sadrže konačan potpokrivač. Po pretpostavci skup $\mathcal{P}$ je neprazan. Uz relaciju inkluzije skup $\mathcal{P}$ je parcijalno uređen. On zadovoljava uvjet Zornove leme. Doista, ako je $\mathcal{Q}$ lanac u $\mathcal{P}$ onda je njegova unija $\mathcal{B} = \cup_{\mathcal{A} \in \mathcal{Q}} \mathcal{A}$ otvoren pokrivač od T koji ne sadrži konačan potpokrivač (jer bi to bio konačan potpokrivač nekog $\mathcal{A} \in \mathcal{Q}$), dakle je $\mathcal{B} \in \mathcal{P}$ i to je očito gornja međa za $\mathcal{Q}$.

Neka je sada Γ neki maksimalni element od $\mathcal{P}$. Tada je Γ otvoren pokrivač od T, Γ nema konačnih potpokrivača i ako je V bilo koji otvoren podskup od T koji nije element od Γ, onda $\Gamma \cup \{V\}$ ima konačan potpokrivač. To slijedi iz činjenice da je tada $\Gamma \subsetneq \Gamma \cup \{V\}$ što zbog maksimalnosti Γ u $\mathcal{P}$ ima za posljedicu da $\Gamma \cup \{V\} \notin \mathcal{P}$.

Stavimo $\tilde{\Gamma} = \Gamma \cap \mathcal{S}$. Tvrdimo da je tada $\tilde{\Gamma}$ pokrivač (dakle, $\mathcal{S}-$pokrivač) od T. Kad to ne bi bilo istina, postojala bi točka $t \in T$ koja nije ni u jednom članu od $\tilde{\Gamma}$. Međutim, $t \in W$ za neki $W \in \Gamma$ jer je Γ pokrivač od T. Kako je $\mathcal{S}$ bodbaza topologije prostora T postoje $V_1, \ldots, V_n \in \mathcal{S}$ takvi da je

$$t \in V_1 \cap \cdots \cap V_n \subseteq W.$$

Budući da točka t nije ni u jednom članu od $\tilde{\Gamma} = \Gamma \cap \mathcal{S}$ i jer su $V_1, \ldots, V_n \in \mathcal{S}$, zaključujemo da $V_j \notin \Gamma$ za $j = 1, \ldots, n$. Dakle, $\Gamma \cup \{V_j\}$ sadrži konačan potpokrivač za svaki $j \in \{1, \ldots, n\}$. Drugim riječima postoje $U_1^{(j)}, \ldots, U_{m_j}^{(j)} \in \Gamma$ takvi da je

$$T = U_1^{(j)} \cup \cdots \cup U_{m_j}^{(j)} \cup V_j \qquad \text{za} \qquad j = 1, \ldots, n.$$

Odavde slijedi

$$T = \bigcup_{j=1}^{n} \left(\bigcup_{i=1}^{m_j} U_i^{(j)} \right) \cup \left(\bigcap_{j=1}^{n} V_j \right) \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} \left(\bigcup_{i=1}^{m_j} U_i^{(j)} \right) \cup W.$$

Međutim, kako je $W \in \Gamma$ to bi značilo da je

$$\{W\} \cup \{U_i^{(j)};\ 1 \leq i \leq m_j,\ 1 \leq j \leq n\}$$

konačan potpokrivač od Γ, a takav ne postoji.

Ova kontradikcija dokazuje da je $\tilde{\Gamma}$ $\mathcal{S}-$pokrivač od T. Međutim, $\tilde{\Gamma}$ je potpokrivač od Γ, dakle $\tilde{\Gamma}$ ne može sadržavati konačan potpokrivač od T. Time je teorem dokazan.

Teorem 2.5. (**A.N.Tihonov, 1930.**) *Ako su svi topološki prostori T_i $(i \in I)$ kompaktni onda je i njihov produkt $T = \prod_{i\in I} T_i$ kompaktan.*

Dokaz: Neka je za svako $i \in I$ $\mathcal{S}_i$ skup svih podskupova od T oblika

$$\pi_i^{-1}(V) = \{f \in T;\ f(i) \in V\},$$

gdje je V otvoren podskup od T_i. Prema definiciji produktne topologije jasno je da je unija $\mathcal{S} = \cup_{i\in I}\mathcal{S}_i$ podbaza topologije prostora T.

Neka je Γ $\mathcal{S}-$pokrivač od T. Stavimo $\Gamma_i = \Gamma \cap \mathcal{S}_i$. Tvrdimo da barem jedan od skupova Γ_i pokriva T. Pretpostavimo da nije tako. Tada za svaki $i \in I$ postoji točka $t_i \in T$ koja nije u uniji članova od Γ_i. Svaki član od Γ_i je u $\mathcal{S}_i$. To znači da je svaki član od Γ_i oblika $\pi_i^{-1}(S)$ za neki $S \subseteq T_i$. Prema tome, ako stavimo $s_i = \pi_i(t_i)$, onda je skup $\pi_i^{-1}(\{s_i\})$ disjunktan sa svakim članom od Γ_i.

Neka je $f \in T$ definirano sa $f(i) = s_i,\ i \in I$. Tada je $f \in \cap_{i\in I}\pi_i^{-1}(\{s_i\})$, dakle f nije sadržana ni u jednom članu od $\Gamma = \cup_{i\in I}\Gamma_i$. Ali to je nemoguće, jer je Γ pokrivač od T.

Ova kontradikcija dokazuje da je Γ_i pokrivač od T za neko $i \in I$. Imamo $\Gamma_i = \{\pi_i^{-1}(V_j);\ j \in J\}$ za neke otvorene podskupove $V_j \subseteq T_i$. No tada je $\{V_j;\ j \in J\}$ otvoren pokrivač od T_i. Kako je T_i po pretpostavci kompaktan, postoje $j_1, \ldots, j_n \in J$ takvi da je

$$T_i = V_{j_1} \cup \cdots \cup V_{j_n}.$$

Slijedi

$$T = \pi_i^{-1}(T_i) = \pi_i^{-1}(V_{j_1}) \cup \cdots \cup \pi_i^{-1}(V_{j_n}).$$

Time je dokazano da svaki $\mathcal{S}-$pokrivač od T ima konačan potpokrivač. Prema teoremu 2.4. prostor T je kompaktan.

Sljedeći je teorem za separabilne prostore dokazao S. Banach 1932. godine, a općenito L. Alaoglu 1940. godine.

Teorem 2.6. (**Banach−Alaoglu**) *Neka X normiran prostor i*

$$K = \overline{K}_{X'}(0,1) = \{f \in X';\ \|f\| \leq 1\}.$$

Skup K je u odnosu na slabu topologiju dualnog prostora X' kompaktan skup.

Dokaz: Za svaki vektor $x \in X$ stavimo

$$D_x = \{\lambda \in \mathbb{C};\ |\lambda| \leq \|x\|\}.$$

Svaki od skupova D_x je kompaktan, pa je prema Tihonovljevom teoremu 2.5. kompaktan i njihov produkt

$$D = \prod_{x\in X} D_x = \{f\colon X \to \mathbb{C};\ |f(x)| \leq \|x\|\ \forall x \in X\}.$$

Za $f \in K$ i $x \in X$ je $|f(x)| \leq \|f\| \cdot \|x\| \leq \|x\|$. Dakle, $K \subseteq X' \cap D$. Na taj način na skupu K imamo dvije topologije; onu induciranu slabom topologijom na X' i onom induciranom produktnom topologijom na D. Dokazat ćemo sada sljedeće dvije tvrdnje:

(*a*) *Te dvije topologije na K se podudaraju.*

(*b*) *K je zatvoren podskup prostora D.*

Budući da je prostor D kompaktan, odatle će slijediti tvrdnja teorema.

Dokaz tvrdnje (*a*) : Neka je $f_0 \in K$. Izaberimo $n \in \mathbb{N},\ x_1, \ldots, x_n \in X$ i $\delta > 0$ i stavimo

$$W_1 = \{f \in X';\ |f(x_i) - f_0(x_i)| < \delta \text{ za } i = 1, \ldots, n\},$$

$$W_2 = \{f \in D;\ |f(x_i) - f_0(x_i)| < \delta \text{ za } i = 1, \ldots, n\},$$

Svi skupovi oblika W_1 predstavljaju bazu okolina točke f_0 u prostoru X' sa slabom topologijom, a svi skupovi oblika W_2 predstavljaju bazu okolina točke f_0 u prostoru D s produktnom topologijom. Kako je $K \subseteq X' \cap D$, vidimo da za bilo kako izabrane $n, x_1, \ldots, x_n, \delta$ vrijedi $W_1 \cap K = W_2 \cap K$. Time je tvrdnja (a) dokazana.

Dokaz tvrdnje (*b*) : Neka je f_0 točka iz zatvarača skupa K u prostoru D. Neka su $x, y \in X$ i $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Za proizvoljno $\varepsilon > 0$ je

$$U = \left\{ f \in D;\ |f(x) - f_0(x)| < \frac{\varepsilon}{1 + |\alpha| + |\beta|},\ |f(y) - f_0(y)| < \frac{\varepsilon}{1 + |\alpha| + |\beta|}, \right.$$
$$\left. |f(\alpha x + \beta y) - f_0(\alpha x + \beta y)| < \frac{\varepsilon}{1 + |\alpha| + |\beta|} \right\}$$

otvorena okolina točke f_0 u prostoru D. Kako je f_0 točka iz zatvarača skupa K u prostoru D, slijedi $U \cap K \neq \emptyset$. Neka je $f \in U \cap K$. Tada je $f \in X'$, dakle vrijedi $f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$. Stoga imamo redom:

$$|f_0(\alpha x + \beta y) - \alpha f_0(x) - \beta f_0(y)| =$$
$$= |f_0(\alpha x + \beta y) - f(\alpha x + \beta y) + \alpha(f(x) - f_0(x)) + \beta(f(y) - f_0(y))| \leq$$
$$\leq |f_0(\alpha x + \beta y) - f(\alpha x + \beta y)| + |\alpha| \cdot |f(x) - f_0(x)| + |\beta| \cdot |f(y) - f_0(y)| <$$
$$< (1 + |\alpha| + |\beta|) \frac{\varepsilon}{1 + |\alpha| + |\beta|} = \varepsilon.$$

Prema tome je $|f_0(\alpha x + \beta y) - \alpha f_0(x) - \beta f_0(y)| < \varepsilon$. Kako je $\varepsilon > 0$ bio proizvoljan, slijedi $f_0(\alpha x + \beta y) = \alpha f_0(x) + \beta f_0(y),\ x, y \in X,\ \alpha, \beta \in \mathbb{C}$, odnosno f_0 je linearan funkcional na prostoru X.

Napokon, $f_0 \in D$, pa po definiciji prostora D vrijedi $|f_0(x)| \leq \|x\|\ \forall x \in X$. To znači da je linearan funkcional f_0 ograničen, tj. $f_0 \in X'$, i da je $\|f_0\| \leq 1$, tj. $f_0 \in K$. Time smo dokazali da je skup K zatvoren u prostoru D, odnosno dokazana je i tvrdnja (b).

Teorem 2.7. *Neka je $\mathcal{A}$ komutativna Banachova algebra i neka je skup karaktera $X(\mathcal{A})$ snabdjeven slabom topologijom duala $\mathcal{A}'$. Ako je algebra $\mathcal{A}$ unitalna prostor $X(\mathcal{A})$ je kompaktan. Ako je algebra $\mathcal{A}$ neunitalna prostor $X(\mathcal{A})$ je lokalno kompaktan.*

Dokaz: Pretpostavimo prvo da $\mathcal{A}$ ima jedinicu. Prema teoremu 2.1. je

$$X(\mathcal{A}) \subseteq \{f \in \mathcal{A}';\ \|f\| \leq 1\}.$$

Dakle, zbog teorema 2.6. dovoljno je dokazati da je u odnosu na slabu topologiju skup $X(\mathcal{A})$ zatvoren podskup od $K = \{f \in \mathcal{A}';\ \|f\| \leq 1\}$.

Neka je $f_0 \in K$ u slabom zatvaraču od $X(\mathcal{A})$. Treba dokazati da je $f_0 \in X(\mathcal{A})$, odnosno da je

$$f_0(xy) = f_0(x) f_0(y)\ \ \forall x, y \in \mathcal{A} \qquad \text{i} \qquad f_0(e) = 1.$$

Neka su $x, y \in \mathcal{A}$. Uzmimo proizvoljan $\varepsilon > 0$ i neka je

$$W = \left\{ f \in \mathcal{A}';\ |f(e) - f_0(e)| < \varepsilon,\ |f(x) - f_0(x)| < \frac{\varepsilon}{1 + \|x\| + |f_0(y)|}, \right.$$

$$\left. |f(y) - f_0(y)| < \frac{\varepsilon}{1 + \|x\| + |f_0(y)|},\ |f(xy) - f_0(xy)| < \frac{\varepsilon}{1 + \|x\| + |f_0(y)|} \right\}.$$

Tada je W otvorena okolina točke f_0 u prostoru $\mathcal{A}'$ sa slabom topologijom, pa je $W \cap X(\mathcal{A}) \neq \emptyset$. Neka je $f \in W \cap X(\mathcal{A})$. Tada je prije svega $f(e) = 1$, pa slijedi

$$|1 - f_0(e)| = |f(e) - f_0(e)| < \varepsilon.$$

Kako je $\varepsilon > 0$ bio proizvoljan, slijedi da je $f_0(e) = 1$. Nadalje, kako je f karakter, vrijedi jednakost $f(xy) = f(x)f(y)$, pa imamo redom:

$$|f_0(xy) - f_0(x)f_0(y)| = |[f_0(xy) - f(xy)] + [f(x)f(y) - f_0(x)f_0(y)]| =$$

$$= |[f_0(xy) - f(xy)] + f(x)[f(y) - f_0(y)] + f_0(y)[f(x) - f_0(x)]| \leq$$

$$\leq |f_0(xy) - f(xy)| + |f(x)| \cdot |f(y) - f_0(y)| + |f_0(y)| \cdot |f(x) - f_0(x)| <$$

$$< (1 + \|x\| + |f_0(y)|)\frac{\varepsilon}{1 + \|x\| + |f_0(y)|} = \varepsilon.$$

Kako je $\varepsilon > 0$ bio proizvoljan slijedi da za bilo koje $x, y \in \mathcal{A}$ vrijedi jednakost $f_0(xy) = f_0(x)f_0(y)$. Dakle, $f_0 \in X(\mathcal{A})$.

Time je teorem dokazan ako je $\mathcal{A}$ unitalna algebra. Neka je sada $\mathcal{A}$ komutativna neunitalna Banachova algebra. Tada znamo da se $X(\mathcal{A})$ identificira sa $X(\tilde{\mathcal{A}}) \setminus \{\chi_0\}$, pri čemu je karakter $\chi_0 \in X(\tilde{\mathcal{A}})$ zadan sa $\chi_0(x + \lambda e) = \lambda,\ x \in \mathcal{A},\ \lambda \in \mathbb{C}$. Dakle, $X(\mathcal{A})$ je otvoren podskup kompaktnog prostora $X(\tilde{\mathcal{A}})$ i kao takav je lokalno kompaktan.

2.3 Geljfandova transformacija

Za komutativnu Banachovu algebru $\mathcal{A}$ i za $x \in \mathcal{A}$ definiramo funkciju $\Gamma_{\mathcal{A}}(x)\colon X(\mathcal{A}) \to \mathbb{C}$ sa

$$[\Gamma_{\mathcal{A}}(x)]\,(\chi) = \chi(x), \qquad \chi \in X(\mathcal{A}).$$

Po definiciji topologije od $X(\mathcal{A})$, sve funkcije $\Gamma_{\mathcal{A}}(x)$ su neprekidne. Dakle, $\Gamma_{\mathcal{A}}$ je preslikavanje sa $\mathcal{A}$ u algebru $C(X(\mathcal{A}))$ svih neprekidnih kompleksnih funkcija na kompaktnom ili lokalno kompaktnom Hausdorffovom topološkom prostoru $X(\mathcal{A})$. To se preslikavanje zove **Geljfandova transformacija** komutativne Banachove algebre $\mathcal{A}$.

Teorem 2.8. *Neka je $\mathcal{A}$ komutativna Banachova algebra.*

(a) *Geljfandova transformacija $\Gamma_{\mathcal{A}}$ je homomorfizam algebri, unitalni ako je $\mathcal{A}$ unitalna.*

(b) *Ako je $\mathcal{A}$ unitalna, vrijedi $\mathcal{A}^\times = \{x \in \mathcal{A};\ \Gamma_{\mathcal{A}}(x) \in C(X(\mathcal{A}))^\times\}$.*

(c) *Ako algebra $\mathcal{A}$ nije unitalna, $\Gamma_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}) \subseteq C_0(X(\mathcal{A}))$.*

(d) *Homomorfizam $\Gamma_{\mathcal{A}}$ je neprekidan. Štoviše, vrijedi $|\Gamma_{\mathcal{A}}(x)\|_\infty \leq \|x\|\ \ \forall x \in \mathcal{A}$.*

(e) *Algebra funkcija $\Gamma_{\mathcal{A}}(\mathcal{A})$ razlikuje točke od $X(\mathcal{A})$; tj. ako su $\chi, \psi \in X(\mathcal{A})$ i $\chi \neq \psi$, onda postoji funkcija $f \in \Gamma_{\mathcal{A}}(\mathcal{A})$ takva da je $f(\chi) \neq f(\psi)$.*

Dokaz: (a) Ako su $x, y \in \mathcal{A}$ i $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ onda za svaki $\chi \in X(\mathcal{A})$ imamo

$$[\alpha\Gamma_{\mathcal{A}}(x) + \beta\Gamma_{\mathcal{A}}(y)](\chi) = \alpha[\Gamma_{\mathcal{A}}(x)](\chi) + \beta[\Gamma_{\mathcal{A}}(y)](\chi) = \alpha\chi(x) + \beta\chi(y) =$$

$$= \chi(\alpha x + \beta y) = [\Gamma_{\mathcal{A}}(\alpha x + \beta y)](\chi), \qquad \text{tj.} \quad \Gamma_{\mathcal{A}}(\alpha x + \beta y) = \alpha\Gamma_{\mathcal{A}}(x) + \beta\Gamma_{\mathcal{A}}(y).$$

Nadalje, za $x, y \in \mathcal{A}$ imamo

$$[\Gamma_{\mathcal{A}}(x)\Gamma_{\mathcal{A}}(y)](\chi) = [\Gamma_{\mathcal{A}}(x)](\chi)\,[\Gamma_{\mathcal{A}}(y)](\chi) = \chi(x)\chi(y) = \chi(xy) = [\Gamma_{\mathcal{A}}(xy)](\chi),$$

tj. $\Gamma_{\mathcal{A}}(xy) = \Gamma_{\mathcal{A}}(x)\Gamma_{\mathcal{A}}(y)$. Time je dokazano da je $\Gamma_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \to C(X(\mathcal{A}))$ homomorfizam algebri.

Neka je $\mathcal{A}$ unitalna komutativna Banachova algebra s jedinicom e. Prema propoziciji 2.1. tada je $[\Gamma_{\mathcal{A}}(e)](\chi) = \chi(e) = 1 \ \forall \chi \in X(\mathcal{A})$, što znači da je funkcija $\Gamma_{\mathcal{A}}(e)$ identički jednaka 1, odnosno, to je jedinica u algebri $C(X(\mathcal{A}))$. Dakle, $\Gamma_{\mathcal{A}}$ je unitalni homomorfizam.

(b) Neka je i dalje $\mathcal{A}$ unitalna komutativna Banachova algebra. Prema teoremu 2.3. imamo redom

$$x \in \mathcal{A}^{\times} \iff 0 \notin \sigma(x) \iff [\Gamma_{\mathcal{A}}(x)](\chi) = \chi(x) \neq 0 \ \forall \chi \in X(\mathcal{A}) \iff \Gamma_{\mathcal{A}}(x) \in C(X(\mathcal{A}))^{\times}.$$

(c) Ako je $\mathcal{A}$ neunitalna algebra, dodavanjem jedinice dolazimo do komutativne unitalne Banachove algebre $\tilde{\mathcal{A}} = \mathcal{A} \dotplus \mathbb{C}$. Prema propoziciji 2.2. tada je $\chi \to \tilde{\chi}$ bijekcija sa $X(\mathcal{A})$ na $X(\tilde{\mathcal{A}}) \setminus \{\varphi_0\}$. Pri tome je za $\chi \in X(\mathcal{A})$ karakter $\tilde{\chi} \in X(\tilde{\mathcal{A}})$ definiran sa

$$\tilde{\chi}(x + \lambda) = \chi(x) + \lambda, \qquad x \in \mathcal{A}, \quad \lambda \in \mathbb{C},$$

a $\varphi_0 \in X(\tilde{\mathcal{A}})$ je definiran sa

$$\varphi_0(x + \lambda) = \lambda, \qquad x \in \mathcal{A}, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Inverzna bijekcija je restrikcija $\varphi \mapsto \varphi|\mathcal{A}$, $\varphi \in X(\tilde{\mathcal{A}}) \setminus \{\varphi_0\}$. Te bijekcije upotrijebimo kao identifikacije skupova $X(\mathcal{A})$ i $X(\tilde{\mathcal{A}}) \setminus \{\varphi_0\}$. Uz takvu identifikaciju očito za $x \in \mathcal{A} \subset \tilde{\mathcal{A}}$ vrijedi $\Gamma_{\mathcal{A}}(x) = \Gamma_{\tilde{\mathcal{A}}}(x)|X(\mathcal{A})$. Nadalje, imamo $[\Gamma_{\tilde{\mathcal{A}}}(x)](\varphi_0) = \varphi_0(x) = 0$. Kako je funkcija $\Gamma_{\tilde{\mathcal{A}}}(x)$ neprekidna na $X(\tilde{\mathcal{A}})$, slijedi

$$\lim_{\chi \to \infty} [\Gamma_{\mathcal{A}}(x)](\chi) = \lim_{\chi \to \varphi_0} [\Gamma_{\tilde{\mathcal{A}}}(x)](\chi) = [\Gamma_{\tilde{\mathcal{A}}}(x)](\varphi_0) = 0.$$

Prema tome, stvarno je $\Gamma_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}) \subseteq C_0(X(\mathcal{A}))$.

(d) Po teoremu 2.1. svaki $\chi \in X(\mathcal{A})$ je ograničen linearan funkcional i vrijedi $\|\chi\| \leq 1$. Stoga za $x \in \mathcal{A}$ i $\chi \in X(\mathcal{A})$ vrijedi

$$|[\Gamma_{\mathcal{A}}(x)](\chi)| = |\chi(x)| \leq \|\chi\| \cdot \|x\| \leq \|x\|.$$

Prema tome, za $x \in \mathcal{A}$ imamo

$$\|\Gamma_{\mathcal{A}}(x)\|_{\infty} = \max\{|[\Gamma_{\mathcal{A}}(x)](\chi)|;\ \chi \in X(\mathcal{A})\} \leq \|x\|.$$

(e) Ako su $\chi, \psi \in X(\mathcal{A})$ i $\chi \neq \psi$, onda postoji $x \in \mathcal{A}$ takav da je $\chi(x) \neq \psi(x)$. No to upravo znači da za funkciju $f = \Gamma_{\mathcal{A}}(x) \in \Gamma_{\mathcal{A}}(\mathcal{A})$ vrijedi $f(\chi) \neq f(\psi)$.

U daljnjem za element x komutativne Banachove algebre $\mathcal{A}$ njegovu Geljfandovu transformaciju $\Gamma_{\mathcal{A}}(x)$ označavat ćemo kraće sa $\hat{x}$. Dakle, $\hat{x}$ je kompleksna neprekidna funkcija na $X(\mathcal{A})$ definirana sa

$$\hat{x}(\chi) = \chi(x), \qquad \chi \in X(\mathcal{A}),\ x \in \mathcal{A}.$$

Teorem 2.9. *Neka je $\mathcal{A}$ komutativna Banachova algebra. Geljfandova transformacija je izometrija ako i samo ako je $\|x^2\| = \|x\|^2$ $\forall x \in \mathcal{A}$.*

Dokaz: Stavimo

$$r = \inf\left\{\frac{\|x^2\|}{\|x\|^2};\ x \in \mathcal{A}, x \neq 0\right\}, \qquad s = \inf\left\{\frac{\|\hat{x}\|_\infty}{\|x\|};\ x \in \mathcal{A}, x \neq 0\right\}.$$

Kako je $\|\hat{x}\|_\infty \leq \|x\|$ $\forall x \in \mathcal{A}$, $x \mapsto \hat{x}$ je izometrija ako i samo ako je $s = 1$. Nadalje, kako je $\|x^2\| \leq \|x\|^2$ $\forall x \in \mathcal{A}$, jednakost $\|x^2\| = \|x\|^2$ vrijedi za svaki $x \in \mathcal{A}$ ako i samo ako je $r = 1$.

Za svaki $x \in \mathcal{A}$ je tada $\|\hat{x}\|_\infty \geq s\|x\|$, pa dobivamo:

$$\|x^2\| \geq \|\hat{x}^2\|_\infty = \|\hat{x}\|_\infty^2 \geq s^2\|x\|^2.$$

Po definiciji broja r zaključujemo da je $s^2 \leq r$.

Za svaki $x \in \mathcal{A}$ je $\|x^2\| \geq r\|x\|^2$, pa indukcijom po n nalazimo da vrijedi

$$\left\|x^{2^n}\right\| \geq r^{2^n-1}\|x\|^{2^n}, \qquad n \in \mathbb{N},$$

odnosno,

$$\left\|x^{2^n}\right\|^{1/2^n} \geq r^{1-1/2^n}\|x\|, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Iz ove nejednakosti koristeći teorem 2.1., definiciju spektralnog radijusa (iza teorema 1.1.) i tvrdnju (b) teorema 1.7. nalazimo redom:

$$\|\hat{x}\|_\infty = \max\{|\hat{x}(\chi)|;\ \chi \in X(\mathcal{A})\} = \max\{|\chi(x)|;\ \chi \in X(\mathcal{A})\} = \max\{|\lambda|;\ \lambda \in \sigma(x)\} =$$

$$= \nu(x) = \lim_{n\to\infty}\|x^n\|^{1/n} = \lim_{n\to\infty}\left\|x^{2^n}\right\|^{1/2^n} \geq \lim_{n\to\infty} r^{1-1/2^n}\|x\| = r\|x\|.$$

Po definiciji broja s odatle slijedi $r \leq s$. Dakle, dokazali smo:

$$s^2 \leq r \leq s.$$

Iz ovih nejednakosti nalazimo

$$s > 1 \;\mathbb{R}\; s^2 > 1 \;\mathbb{R}\; r > 1; \qquad s < 1 \;\mathbb{R}\; r < 1;$$

$$r > 1 \;\mathbb{R}\; s > 1; \qquad r < 1 \;\mathbb{R}\; s^2 < 1 \;\mathbb{R}\; s < 1.$$

Prema tome, $s = 1$ ako i samo ako je $r = 1$, a to znači da je $x \mapsto \hat{x}$ izometrija ako samo ako je $\|x^2\| = \|x\|^2$ $\forall x \in \mathcal{A}$.

Time je teorem dokazan.

Za daljnje proučavanje svojstava Geljfandove transformacije treba nam tzv. **Teorem o otvorenom preslikavanju** koji navodimo bez dokaza:

Teorem 2.10. *Neka su X i Y Banachovi prostori i $A \in B(X,Y)$ surjekcija. Tada je A otvoreno preslikavanje, tj. za svaki otvoren podskup $U \subseteq X$ skup $A(U) = \{Ax;\ x \in U\}$ je otvoren u Y. Posebno, ako je $A \in B(X,Y)$ bijekcija onda je $A^{-1} \in B(Y,X)$.*

Teorem o otvorenom preslikavanju omogućuje nam da dokažemo dvije karakterizacije komutativnih Banachovih algebri čija je Geljfandova transformacija izomorfizam na zatvorenu podalgebru algebre funkcija.

Teorem 2.11. *Neka je $\mathcal{A}$ komutativna Banachova algebra i neka je*

$$\hat{\mathcal{A}} = \Gamma_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}) = \{\hat{x};\, x \in \mathcal{A}\}$$

(to je podalgebra algebre $C_0(X(\mathcal{A}))$). Sljedeća su tri svojstva međusobno ekvivalentna:

(a) *Geljfandova transformacija $\Gamma_{\mathcal{A}}$ je injektivna i algebra $\hat{\mathcal{A}}$ je zatvorena u $C_0(X(\mathcal{A}))$.*

(b) $s = \inf \left\{ \frac{\|\hat{x}\|_\infty}{\|x\|};\, x \in \mathcal{A},\, x \neq 0 \right\} > 0.$

(c) $r = \inf \left\{ \frac{\|x^2\|}{\|x\|^2};\, x \in \mathcal{A},\, x \neq 0 \right\} > 0.$

Dokaz: Iz dokaza teorema 2.9. znamo da vrijedi $(b) \iff (c)$.

Pretpostavimo da vrijedi (b). $s > 0$ ima za posljedicu da je $\|x\| \leq \frac{1}{s}\|\hat{x}\|_\infty$ $\forall x \in \mathcal{A}$. Prema tome, Geljfandova transformacija, koja je bijekcija sa $\mathcal{A}$ na $\hat{\mathcal{A}}$, i njoj inverzno preslikavanje su neprekidni. Stoga je algebra $\hat{\mathcal{A}}$ potpuna a odatle slijedi da je $\hat{\mathcal{A}}$ zatvorena u $C_0(X(\mathcal{A}))$. Time je dokazana implikacija $(b) \implies (a)$.

Ako je $x \mapsto \hat{x}$ injekcija i ako je slika $\hat{\mathcal{A}}$ tog preslikavanja zatvorena podalgebra od $C_0(X(\mathcal{A}))$, onda je $x \mapsto \hat{x}$ neprekidna linearna bijekcija s Banachovog prostora $\mathcal{A}$ na Banachov prostor $\hat{\mathcal{A}}$. Prema teoremu 2.10. inverzno je preslikavanje neprekidno, dakle ograničeno. To znači da postoji $M > 0$ takav da vrijedi $\|x\| \leq M\|\hat{x}\|_\infty$ $\forall x \in \mathcal{A}$. No odatle je $s \geq \frac{1}{M} > 0$. Time je dokazana i implikacija $(a) \implies (b)$.

U daljnjem nam treba i tzv. **Teorem o zatvorenom grafu** koji je jednostavna posljedica teorema o otvorenom preslikavanju:

Teorem 2.12. *Neka su X i Y Banachovi prostori i $A\colon X \to Y$ linearan operator. Operator A je ograničen ako samo ako je njegov graf*

$$\Gamma(A) = \{(x, Ax);\, x \in X\}$$

zatvoren potprostor Banachovog prostora

$$X \times Y = \{(x, y);\, x \in X,\, y \in Y\} \qquad (\text{ s normom } \|(x, y)\| = \|x\| + \|y\|).$$

Zadatak 2.7. *Koristeći teorem o otvorenom preslikavanju dokažite teorem o zatvorenom grafu.*

Uputa: Koristite bijekciju $(Ax, x) \mapsto x$ sa $\Gamma(A)$ na X.

Teorem 2.13. *Neka su $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ komutativne Banachove algebre i $\psi\colon \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ homomorfizam algebri. Ako je Geljfandova transformacija $\Gamma_{\mathcal{A}}$ injektivna, homomorfizam ψ je neprekidan.*

Dokaz: Prema teoremu 2.12. dovoljno je dokazati da je graf $\Gamma(\psi)$ zatvoren u prostoru $\mathcal{B} \times \mathcal{A}$. Neka su $x_n \in \mathcal{B}$ takvi da je niz $((x_n, \psi(x_n)),\, n \in \mathbb{N})$ konvergentan u $\mathcal{B} \times \mathcal{A}$. Stavimo

$$(x, y) = \lim_{n\to\infty} (x_n, \psi(x_n)), \qquad \text{tj.} \qquad x = \lim_{n\to\infty} x_n \ \text{ i } \ y = \lim_{n\to\infty} \psi(x_n).$$

Treba dokazati da je $(x, y) \in \Gamma(\psi)$, tj. da je $y = \psi(x)$.

Neka je $\chi \in X(\mathcal{A})$; stavimo $\kappa = \chi \circ \psi \in X(\mathcal{B})$. χ i κ su neprekidni pa imamo:

$$\chi(y) = \lim_{n\to\infty} \chi(\psi(x_n)) = \lim_{n\to\infty} \kappa(x_n) = \kappa(x) = \chi(\psi(x)).$$

Odatle je $\chi(y-\psi(x)) = 0\ \forall\chi \in X(\mathcal{A})$, a to znači da je $(y-\psi(x))\hat{} = 0$, odnosno $y-\psi(x)$ je u jezgri Geljfandove transformacije $\Gamma_{\mathcal{A}}$. No po pretpostavci je $\Gamma_{\mathcal{A}}$ injekcija, pa slijedi $y-\psi(x) = 0$, odnosno $y = \psi(x)$.

Sljedeći korolar neposredna je posljedica teorema 2.13:

Korolar 2.1. *Ako su $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ komutativne Banachove algebre s injektivnim Geljfandovim transformacijama $\Gamma_{\mathcal{A}}$ i $\Gamma_{\mathcal{B}}$ i ako je $\psi\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ izomorfizam algebri, onda je ψ homeomorfizam, tj. ψ i ψ^{-1} su neprekidni.*

Korolar 2.2. *Neka je $\mathcal{A}$ komutativna algebra takva da za svaki $x \in \mathcal{A}$, $x \neq 0$, postoji $\chi \in X(\mathcal{A})$ takav da je $\chi(x) \neq 0$. Sve norme na $\mathcal{A}$, u odnosu na koje je $\mathcal{A}$ Banachova algebra, međusobno su ekvivalentne.*

Zadatak 2.8. *Pomoću korolara 2.1. dokažite korolar 2.2.*

2.4 Stone−Weierstrassov teorem

Da bismo proučili sliku $\hat{\mathcal{A}}$ komutativne Banachove algebre $\mathcal{A}$ u algebri $C(X(\mathcal{A}))$ (odnosno u algebri $C_0(X(\mathcal{A}))$) proučit ćemo podalgebre od $C(K)$ (K kompaktan) s ciljem da pronađemo dovoljne uvjete da bi takva podalgebra bila gusta u $C(K)$.

U daljnjem do konca ovoga poglavlja K je kompaktan Hausdorffov topološki prostor. Neko vrijeme ćemo se baviti s realnom Banachovom algebrom $C(K,\mathbb{R})$ svih neprekidnih realnih funkcija na K.

Za bilo koje funkcije $x, y\colon K \to \mathbb{R}$ definiramo funkcije $x \vee y$ i $x \wedge y$ relacijama:

$$(x\vee y)(t) = \max\{x(t), y(t)\}, \qquad (x\wedge y)(t) = \min\{x(t), y(t)\}, \qquad t \in K.$$

Skup X funkcija sa K u $\mathbb{R}$ zove se **rešetka**, ako vrijedi:

$$x, y \in X \qquad \Longrightarrow \qquad x\vee y \in X \qquad \text{i} \qquad x \wedge y \in X.$$

Ako je x funkcija sa X u $\mathbb{R}$ sa $|x|$ označavamo funkciju koja je definirana sa $|x|(t) = |x(t)|$, $t \in K$. Lako se provjerava da vrijede jednakosti:

$$x \vee y = \frac{1}{2}(x+y+|x-y|), \qquad x\wedge y = \frac{1}{2}(x+y-|x-y|), \qquad |x| = x \vee (-x).$$

Prema tome, ako je X potprostor prostora $\mathbb{R}^K$ svih funkcija sa K u $\mathbb{R}$, X je rešetka ako i samo ako vrijedi

$$x \in X \qquad \Longrightarrow \qquad |x| \in X.$$

Očito je $C(K,\mathbb{R})$ rešetka.

Teorem 2.14. *Svaka zatvorena podalgebra $\mathcal{A}$ realne Banachove algebre $C(K,\mathbb{R})$ je rešetka.*

Dokaz: Pretpostavimo najprije da je $1 \in \mathcal{A}$. Neka je $x \in \mathcal{A}$, $x \neq 0$. Tada je $\|x\|_\infty > 0$ i $\|x\|_\infty \geq |x(t)|\ \forall x \in K$. Stoga imamo redom

$$|x|(t) = |x(t)| = \sqrt{x(t)^2} = \sqrt{\|x\|_\infty^2 - (\|x\|_\infty^2 - x(t)^2)} = \|x\|_\infty \cdot \sqrt{1 - \left(1 - \frac{x(t)^2}{\|x\|_\infty^2}\right)}.$$

Upotrijebit ćemo sada formulu razvoja u red potencija

$$\sqrt{1-\lambda} = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-3)!!}{(2n)!!}\lambda^n$$

koji konvergira uniformno na segmentu $0 \le \lambda \le 1$. Odatle imamo

$$|x|(t) = \|x\|_\infty \cdot \left[1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-3)!!}{(2n)!!}\left(1 - \frac{x(t)^2}{\|x\|_\infty^2}\right)^n\right],$$

a kako je $0 \le 1 - \dfrac{x(t)^2}{\|x\|_\infty^2} \le 1$ za svaki $t \in K$, zaključujemo da gornji red konvergira uniformno na K. No uniformna konvergencija znači upravo konvergenciju po normi u $C(K,\mathbb{R})$. Budući da je $\mathcal{A}$ podalgebra od $C(K,\mathbb{R})$, članovi gornjeg reda su elementi od $\mathcal{A}$. Kako je $\mathcal{A}$ zatvorena u $C(K,\mathbb{R})$, slijedi $|x| \in \mathcal{A}$. Time je dokazano da je $\mathcal{A}$ rešetka.

Pretpostavimo sada da $1 \notin \mathcal{A}$. Tada $\mathcal{A}$ ne sadrži nijednu konstantu osim 0. Stavimo $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A} \dot{+} \mathbb{R}$ – to je podalgebra od $C(K,\mathbb{R})$ koja sadrži sve konstante, dakle i 1.

Dokažimo da je $\mathcal{A}_1$ zatvorena podalgebra od $C(K,\mathbb{R})$. Neka je $(x_n+\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz u $\mathcal{A}_1$ ($x_n \in \mathcal{A}$, $\lambda_n \in \mathbb{R}$) koji konvergira u $C(K,\mathbb{R})$ i neka je $y = \lim_n(x_n+\lambda_n)$. Tvrdimo da je tada niz realnih brojeva $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ograničen. Pretpostavimo da nije tako. Tada postoji podniz $(\lambda_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ niza $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ takav da je $\lim_k \lambda_{n_k} = \pm\infty$. Tada imamo

$$\lim_{k\to\infty}\left(\frac{x_{n_k}}{\lambda_{n_k}} + 1\right) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad 1 = -\lim_{k\to\infty}\frac{x_{n_k}}{\lambda_{n_k}} \in \mathcal{A},$$

a to je suprotno pretpostavci da $1 \notin \mathcal{A}$. Time je dokazano da je niz $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ograničen u $\mathbb{R}$. Tada on ima neki konvergentan podniz $(\lambda_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$. Stavimo $\lambda = \lim_k \lambda_{n_k}$. Tada je

$$x = y - \lambda = \lim_{k\to\infty}(x_{n_k}+\lambda_{n_k}) - \lim_{k\to\infty}\lambda_{n_k} = \lim_{k\to\infty} x_{n_k} \in \mathcal{A}.$$

Prema tome, $y = x + \lambda \in \mathcal{A}_1$. Time je dokazano da je $\mathcal{A}_1$ zatvorena podalgebra od $C(K,\mathbb{R})$.

Prema prvom dijelu dokaza $\mathcal{A}_1$ je rešetka. Prema tome, za bilo koji element $x \in \mathcal{A} \subset \mathcal{A}_1$ je $|x| \in \mathcal{A}_1$, tj. $|x| = y + \lambda$ za neke $y \in \mathcal{A}$ i $\lambda \in \mathbb{R}$. Slijedi

$$x^2 = |x|^2 = \lambda^2 + 2\lambda y + y^2 \qquad \Longrightarrow \qquad \lambda^2 = x^2 - 2\lambda y - y^2.$$

Odavde slijedi $\lambda^2 \in \mathcal{A}$. Međutim, po pretpostavci $\mathcal{A}$ ne sadrži nijednu konstantu različitu od 0. Dakle, nužno je $\lambda = 0$, a to znači da je $|x| = y \in \mathcal{A}$. Time je dokazano da je $\mathcal{A}$ rešetka i u slučaju kad ne sadrži 1.

Teorem 2.15. *Neka je $\mathcal{A}$ podskup od $C(K,\mathbb{R})$ sa sljedećim svojstvima:*

(a) *$\mathcal{A}$ je rešetka.*

(b) *Za bilo koje međusobno različite točke $t, s \in K$ i za bilo koje $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ postoji $x \in \mathcal{A}$ takva da je $x(t) = \lambda$ i $x(s) = \mu$.*

Tada je skup $\mathcal{A}$ gust u $C(K,\mathbb{R})$.

Dokaz: Neka je $y \in C(K,\mathbb{R})$ i $\varepsilon > 0$. Treba dokazati da postoji $z \in \mathcal{A}$ takva da je $\|z-y\|_\infty \le \varepsilon$.

Za $t, s \in K$, $t \ne s$, izaberimo funkciju $x_{t,s} \in \mathcal{A}$ takvu da je $x_{t,s}(t) = y(t)$ i $x_{t,s}(s) = y(s)$. Stavimo

$$U_{t,s} = \{u \in K;\ x_{t,s}(u) < y(u) + \varepsilon\}, \qquad V_{t,s} = \{u \in K;\ x_{t,s}(u) > y(u) - \varepsilon\}.$$

Skupovi $U_{t,s}$ i $V_{t,s}$ su otvoreni i svaki od njih sadrži točke t i s. Fiksirajmo sada točku s. Tada je

$$\{U_{t,s};\ t \in K,\, t \neq s\}$$

otvoren pokrivač od K. Kako je K kompaktan, postoje točke $t_1, \dots, t_n \in K \setminus \{s\}$ takve da je

$$K = U_{t_1,s} \cup \cdots \cup U_{t_n,s}.$$

Stavimo

$$y_s = x_{t_1,s} \wedge \cdots \wedge x_{t_n,s} \in \mathcal{A}.$$

Po definiciji skupova $U_{t,s}$ tada vrijedi

$$y_s(u) < y(u) + \varepsilon \qquad \forall u \in K.$$

Nadalje, po definiciji skupova $V_{t,s}$ vrijedi i

$$y_s(u) > y(u) - \varepsilon \qquad \forall u \in V_s = V_{t_1,s} \cap \cdots \cap V_{t_n,s}.$$

Sve ovo mogli smo provesti za bilo koju točku $s \in K$. Tako dolazimo do otvorenog pokrivača $\{V_s;\ s \in K\}$ od K i do familije funkcija $\{y_s;\ s \in K\}$ u $\mathcal{A}$ takvih da je

$$y_s(u) < y(u) + \varepsilon \qquad \forall u \in K, \qquad y_s(u) > y(u) - \varepsilon \qquad \forall u \in V_s.$$

Zbog kompaktnosti K možemo naći točke $s_1, \dots, s_m \in K$ takve da je

$$K = V_{s_1} \cup \cdots \cup V_{s_m}.$$

Stavimo $z = y_{s_1} \vee \cdots \vee y_{s_m}$. Tada je $z \in \mathcal{A}$ i vrijedi

$$y(u) - \varepsilon < z(u) < y(u) + \varepsilon \qquad \forall u \in K.$$

To se može pisati i ovako:

$$-\varepsilon < z(u) - y(u) < \varepsilon \qquad \text{tj.} \qquad |z(u) - y(u)| < \varepsilon \qquad \forall u \in K.$$

Odatle slijedi $\|z - y\|_\infty < \varepsilon$.

Za skup $\mathcal{A}$ funkcija definiranih na K kažemo da **razdvaja točke** od K ako za bilo koje međusobno različite točke $t, s \in K$ postoji $x \in \mathcal{A}$ takva da je $x(t) \neq x(s)$.

Teorem 2.16. (**M.H. Stone**) *Neka je $\mathcal{A}$ podalgebra od $C(K, \mathbb{R})$ koja razdvaja točke od K. Tada je $\mathcal{A}$ gusta u $C(K, \mathbb{R})$ ili postoji točka $t_0 \in K$ takva da je $\mathcal{A}$ sadržana i gusta u maksimalnom idealu $C_{t_0}(K, \mathbb{R}) = \{x \in C(K, \mathbb{R});\ x(t_0) = 0\}$.*

Dokaz: Provest ćemo dokaz najprije uz dodatnu pretpostavku da za svaku točku $t_0 \in K$ postoji $x \in \mathcal{A}$ takva da je $x(t_0) \neq 0$.

Dokažimo da za bilo koje međusobno različite točke $t, s \in K$ postoji $x \in \mathcal{A}$ takva da je

$$x(t) \neq 0, \qquad x(t) \neq x(s).$$

Doista, postoje $y, z \in \mathcal{A}$ takve da je $y(t) \neq y(s)$ i $z(t) \neq 0$. Ako je $y(t) \neq 0$, gornja svojstva ima funkcija $x = y$. Ako je $y(t) = 0$ ali $z(t) \neq z(s)$, gornja svojstva ima funkcija $x = z$. Napokon, ako je $y(t) = 0$ i $z(t) = z(s)$, gornja svojstva ima funkcija $x = y + z$.

Dokažimo sada da za $t, s \in K,\ t \neq s$, postoji $x' \in \mathcal{A}$ takva da je $x'(t) \neq 0$ i $x'(s) = 0$. Doista, ako za malo prije izabranu funkciju x vrijedi $x(s) = 0$ možemo uzeti $x' = x$, a ako je $x(s) \neq 0$ tražena svojstva ima funkcija

$$x'(u) = \frac{x(u)}{x(s)} - \frac{x(u)^2}{x(s)^2}, \qquad u \in K.$$

Za takvu funkciju $x' \in \mathcal{A}$ stavimo

$$x_1(u) = \frac{x'(u)}{x'(t)}, \qquad u \in K.$$

Tada je $x_1 \in \mathcal{A}$ i vrijedi $x_1(t) = 1$ i $x_1(s) = 0$. Sasvim analogno pronalazimo funkciju $x_2 \in \mathcal{A}$ takvu da je $x_2(t) = 0$ i $x_2(s) = 1$. Sada za proizvoljne $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ funkcija $x = \lambda x_1 + \mu x_2 \in \mathcal{A}$ ima svojstva $x(t) = \lambda$ i $x(s) = \mu$. Prema tome, podalgebra $\mathcal{A}$ zadovoljava uvjet (b) teorema 2.15. Taj uvjet zadovoljava i zatvarač $Cl(\mathcal{A})$ od $\mathcal{A}$ u $C(K,\mathbb{R})$. Zbog teorema 2.14. zatvarač $Cl(\mathcal{A})$ zadovoljava i uvjet (a) teorema 2.15. Iz teorema 2.15. slijedi da je $Cl(\mathcal{A}) = C(K,\mathbb{R})$.

Pretpostavimo sada da nije ispunjena pretpostavka iz prvog dijela dokaza, tj. da se sve funkcije u $\mathcal{A}$ poništavaju u nekoj točki $t_0 \in K$, dakle $\mathcal{A} \subseteq C_{t_0}(K,\mathbb{R})$. Stavimo tada

$$\mathcal{A}_1 = \mathcal{A} \dotplus \mathbb{R} = \{x + \lambda;\ x \in \mathcal{A},\ \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Tada je $\mathcal{A}_1$ podalgebra od $C(K,\mathbb{R})$ koja zadovoljava uvjete iz iskaza teorema. Ta podalgebra zadovoljava i dodatni uvjet iz prvog dijela dokaza, pa zaključujemo da je $Cl(\mathcal{A}_1) = C(K,\mathbb{R})$. Neka su sada $z \in C_{t_0}(K,\mathbb{R})$ i $\varepsilon > 0$. Tada postoji $y \in \mathcal{A}_1$ takva da je $\|z - y\|_\infty < \varepsilon/2$. Tada je $y = x + \lambda$ za neke $x \in \mathcal{A}$ i $\lambda \in \mathbb{R}$. Imamo

$$|z(t) - x(t) - \lambda| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \forall t \in K.$$

Posebno, iz te nejednakosti za $t = t_0$ dobivamo $|\lambda| < \varepsilon/2$. Slijedi

$$|z(t) - x(t)| \leq |z(t) - x(t) - \lambda| + |\lambda| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \qquad \forall t \in K,$$

tj. $\|z - x\|_\infty < \varepsilon$. Time je dokazano da je podalgebra $\mathcal{A}$ gusta u $C_{t_0}(K,\mathbb{R})$.

Klasični Weierstrassov teorem posljedica je Stoneovog teorema:

Korolar 2.3. (**C. Weierstrass**) *Ako je K kompaktan podskup od $\mathbb{R}^n$, onda je svaka funkcija $x \in C(K,\mathbb{R})$ limes uniformno konvergentnog niza realnih polinoma na K (tj. funkcija na K koje su restrikcije realnih polinomijalnih funkcija u n varijabli).*

Zadatak 2.9. *Dokažite korolar 2.3.*

Teorem 2.17. *Neka je $\mathcal{A}$ kompleksna podalgebra od $C(K) = C(K,\mathbb{C})$ koja razdvaja točke od K i koja je zatvorena u odnosu na kompleksno konjugiranje, tj.*

$$x \in \mathcal{A} \qquad \Longrightarrow \qquad \overline{x} \in \mathcal{A} \qquad (\text{gdje je } \overline{x}(t) = \overline{x(t)}).$$

Tada je $\mathcal{A}$ gusta u $C(K)$ ili u $C_{t_0}(K) = \{x \in C(K);\ x(t_0) = 0\}$ za neku točku $t_0 \in K$.

Dokaz: Neka je $\mathcal{B} = Cl(\mathcal{A})$ (zatvarač od $\mathcal{A}$ u $C(K)$) i $\mathcal{C} = \mathcal{B} \cap C(K,\mathbb{R})$. Tada je $\mathcal{C}$ realna zatvorena podalgebra od $C(K,\mathbb{R})$. Nadalje, u smislu realnih vektorskih prostora je

$$\mathcal{B} = \mathcal{C} \dotplus i\mathcal{C};$$

to slijedi iz zatvorenosti $\mathcal{A}$ (dakle i $\mathcal{B}$) u odnosu na kompleksno konjugiranje, jer za svaku funkciju x je

$$x = \frac{1}{2}(x + \overline{x}) + i \cdot \frac{1}{2i}(x - \overline{x}),$$

a funkcije

$$\frac{1}{2}(x + \overline{x}) \qquad \text{i} \qquad \frac{1}{2i}(x - \overline{x})$$

poprimaju realne vrijednosti. Nadalje, $\mathcal{C}$ razdvaja točke od K. Doista, ako su $t, s \in K$, $t \neq s$, postoji $x \in \mathcal{B}$ takva da je $x(t) \neq x(s)$. Stavimo li

$$y = \frac{1}{2}(x + \overline{x}), \qquad z = \frac{1}{2i}(x - \overline{x}),$$

tada su $y, z \in \mathcal{C}$ i vrijedi

$$y(t) + iz(t) = x(t) \neq x(s) = y(s) + iz(s).$$

Odatle slijedi da je ili $y(t) \neq y(s)$ ili $z(t) \neq z(s)$ (ili oboje). Prema teoremu 2.16. je ili $\mathcal{C} = C(K, \mathbb{R})$ ili $\mathcal{C} = C_{t_0}(K, \mathbb{R})$ za neku točku $t_0 \in K$. U prvom slučaju je $\mathcal{B} = C(K)$, a u drugom $\mathcal{B} = C_{t_0}(K)$.

Zadatak 2.10. *Neka je $\mathcal{A}$ Banachova algebra svih neprekidnih funkcija $x : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ koje su periodičke s periodom 2π. Operacije u $\mathcal{A}$ definirane su po točkama*

$$(x + y)(t) = x(t) + y(t), \qquad (\lambda x)(t) = \lambda x(t), \qquad (xy)(t) = x(t)y(t), \qquad x, y \in \mathcal{A}, \quad \lambda \in \mathbb{C},$$

a norma je maksimum norma

$$\|x\| = \max\{|x(t)|;\ t \in \mathbb{R}\}, \qquad x \in \mathcal{A}.$$

Neka je $\mathcal{B}$ skup svih tzv. Fourierovih polinoma, tj. svih funkcija $x : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ oblika

$$x(t) = \sum_{k=m}^{n} \alpha_k e^{ikt}, \qquad m, n \in \mathbb{Z}, \quad m \leq n, \quad \alpha_k \in \mathbb{C}.$$

Dokažite da je $\mathcal{B}$ gusto u $\mathcal{A}$.

2.5 Funkcionalni račun

Teorem 2.18. *Neka je $\mathcal{A}$ komutativna C^*−algebra. Ako je algebra $\mathcal{A}$ unitalna, Geljfandova transformacija je izometrički $*$−izomorfizam sa $\mathcal{A}$ na $C(X(\mathcal{A}))$. Ako je $\mathcal{A}$ neunitalna, Geljfandova transformacija je izometrički $*$−izomorfizam sa $\mathcal{A}$ na $C_0(X(\mathcal{A}))$.*

Dokaz: Pretpostavimo najprije da je $\mathcal{A}$ unitalna. Neka je $x \in \mathcal{A}$ hermitski element. Za $\chi \in X(\mathcal{A})$ je prema teoremu 2.1. i prema tvrdnji (a) propozicije 1.5.

$$\hat{x}(\chi) = \chi(x) \in \sigma(x) \subseteq \mathbb{R}.$$

Dakle, ako je $x \in \mathcal{A}$ hermitski, funkcija $\hat{x}$ je realna.

Proizvoljan element $x \in \mathcal{A}$ može se napisati u obliku $x = x_1 + ix_2$ pri čemu su x_1 i x_2 hermitski. Doista, to je ispunjeno za

$$x_1 = \frac{1}{2}(x + x^*) \qquad \text{i} \qquad x_2 = \frac{1}{2i}(x - x^*).$$

Tada imamo $x^* = x_1 - ix_2$, pa nalazimo za svaki $\chi \in X(\mathcal{A})$

$$(x^*)\hat{}(\chi) = \hat{x}_1(\chi) - i\hat{x}_2(\chi) = \overline{\hat{x}_1(\chi) + i\hat{x}_2(\chi)} = \overline{\hat{x}(\chi)}.$$

To pokazuje da je Geljfandova transformacija $*-$homomorfizam C^*-algebre $\mathcal{A}$ u C^*-algebru $C(X(\mathcal{A}))$.

Neka su $\chi, \kappa \in X(\mathcal{A})$, $\chi \neq \kappa$. Tada postoji $x \in \mathcal{A}$ takav da je $\chi(x) \neq \kappa(x)$. To znači da je $\hat{x}(\chi) \neq \hat{x}(\kappa)$, pa zaključujemo da podalgebra $\hat{\mathcal{A}}$ od $C(X(\mathcal{A}))$ razdvaja točke od $X(\mathcal{A})$. Nadalje, za svaki $\chi \in X(\mathcal{A})$ je $\chi(e) = 1$, odnosno $\hat{e}(\chi) = 1 \neq 0$. Prema teoremu 2.17. podalgebra $\hat{\mathcal{A}}$ je gusta u $C(X(\mathcal{A}))$.

Treba još dokazati da je $x \mapsto \hat{x}$ izometrija. Tada će slijediti da je $\hat{\mathcal{A}}$ zatvorena u $C(X(\mathcal{A}))$, dakle $\hat{\mathcal{A}} = C(X(\mathcal{A}))$.

Za hermitski element $y \in \mathcal{A}$ je $\|y^2\| = \|y^*y\| = \|y\|^2$. Odatle indukcijom nalazimo da je

$$\|y\| = \left\|y^{2^n}\right\|^{\frac{1}{2^n}} \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Prijelazom na limes $n \to \infty$ dobivamo $\|y\| = \nu(y)$. Po tvrdnji (b) teorema 1.7. i po teoremu 2.1. imamo redom

$$\|y\| = \nu(y) = \max\{|\lambda|;\ \lambda \in \sigma(y)\} = \max\{|\chi(y)|;\ \chi \in X(\mathcal{A})\} = \max\{|\hat{y}(\chi)|;\ \chi \in X(\mathcal{A})\} = \|\hat{y}\|_\infty.$$

Ako je $x \in \mathcal{A}$ proizvoljan, onda je $y = x^*x$ hermitski, pa slijedi

$$\|x\|^2 = \|x^*x\| = \|(x^*x)\hat{}\|_\infty = \|(x^*)\hat{}\,\hat{x}\|_\infty = \|\overline{\hat{x}}\hat{x}\|_\infty = \|\hat{x}\|_\infty^2.$$

Time je teorem dokazan ako C^*-algebra $\mathcal{A}$ ima jedinicu.

Pretpostavimo sada da je $\mathcal{A}$ neunitalna. Prema teoremu 1.9. norma na $\mathcal{A}$ može se proširiti do norme na algebri $\tilde{\mathcal{A}}$, dobivenoj iz $\mathcal{A}$ unitalizacijom, na način da $\tilde{\mathcal{A}}$ postane C^*-algebra. Prema prvom dijelu dokaza Geljfandova transformacija je izometrički $*-$izomorfizam algebre $\tilde{\mathcal{A}}$ na algebru $C(X(\tilde{\mathcal{A}}))$. Označimo sa χ_0 jedini karakter algebre $\tilde{\mathcal{A}}$ koji je trivijalan na $\mathcal{A}$:

$$\chi_0(y + \lambda e) = \lambda, \qquad y \in \mathcal{A}, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Restrikcija $\chi \mapsto \chi|\mathcal{A}$ je bijekcija sa $X(\tilde{\mathcal{A}}) \setminus \{\chi_0\}$ na $X(\mathcal{A})$. Pomoću te bijekcije identificiramo $X(\tilde{\mathcal{A}}) \setminus \{\chi_0\}$ sa $X(\mathcal{A})$. Sada se algebra $C_0(X(\mathcal{A}))$ može identificirati s idealom

$$C_{\chi_0}(X(\tilde{\mathcal{A}})) = \{f \in C(X(\tilde{\mathcal{A}}));\ f(\chi_0) = 0\}$$

u algebri $C(X(\tilde{\mathcal{A}}))$. Identifikacija se dobiva pomoću restrikcije $f \mapsto f|X(\mathcal{A})$ koja je bijekcija sa $C_{\chi_0}(X(\tilde{\mathcal{A}}))$ na $C_0(X(\mathcal{A}))$.

Uz ove identifikacije Geljfandova transformacija algebre $\tilde{\mathcal{A}}$ je restrikcija Geljfandove transformacije algebre $\tilde{\mathcal{A}}$. Prema tome, to je izometrički $*-$homomorfizam algebre $\mathcal{A}$ u algebru $C(X(\tilde{\mathcal{A}}))$. Kako je $\hat{x}(\chi_0) = \chi_0(x) = 0$ za svaki $x \in \mathcal{A}$, slika algebre $\mathcal{A}$ pri Geljfandovoj transformaciji sadržana je u $C_{\chi_0}(X(\tilde{\mathcal{A}}))$ odnosno u $C_0(X(\mathcal{A}))$. Budući da je kodimenzija $\mathcal{A}$ u $\tilde{\mathcal{A}}$ jednaka 1, kodimenzija njene slike u slici od $\tilde{\mathcal{A}}$ također je jednaka 1. Međutim, slika od $\tilde{\mathcal{A}}$ je $C(X(\tilde{\mathcal{A}}))$, pa kako je kodimenzija od $C_0(X(\mathcal{A}))$ u $C(X(\tilde{\mathcal{A}}))$ jednaka 1, slijedi da je slika od $\mathcal{A}$ pri Geljfandovoj transformaciji jednaka $C_0(X(\mathcal{A}))$. Time je dokazana i tvrdnja teorema za slučaj neunitalne C^*-algebre.

Neka je $\mathcal{A}$ C^*-algebra. Za podalgebru $\mathcal{B}$ kažemo da je $*-$**podalgebra** ako je ona invarijantna s obzirom na involuciju, tj. ako vrijedi $x \in \mathcal{B} \;\Rightarrow\; x^* \in \mathcal{B}$. Ako je $\mathcal{B}$ zatvorena $*-$podalgebra, zvat ćemo je C^*-**podalgebra**. Ako još k tome algebra $\mathcal{A}$ unitalna i ako je njena jedinicu sadržana u $\mathcal{B}$, kažemo da je $\mathcal{B}$ **unitalna C^*-podalgebra**. Očito je presjek bilo koje familije unitalnih C^*-podalgebri ponovno unitalna C^*-podalgebra. Odatle slijedi da za bilo koji podskup $S \subseteq \mathcal{A}$ postoji najmanja unitalna C^*-podalgebra od $\mathcal{A}$ koja sadrži skup S. To je presjek svih C^*-podalgebri koje sadrže skup $S \cup \{e\}$. Za tu se C^*-podalgebru kaže da je **generirana skupom** S. To je zatvarač potprostora razapetog sa $S \cup S^* \cup \{e\}$ i sa svim mogućim produktima elemenata iz $S \cup S^*$.

Razmotrimo sada posebno komutativne C^*-algebre generirane s jednim elementom. Ako je $\mathcal{A}$ komutativna C^*-algebra generirana elementom $x \in \mathcal{A}$, onda je i $x^* \in \mathcal{A}$ pa je zbog komutativnosti algebre $\mathcal{A}$ element x normalan. Ako je $\mathcal{A}$ bilo koja unitalna C^*-algebra i ako je $x \in \mathcal{A}$ normalan element, unitalna C^*-podalgebra od $\mathcal{A}$ generirana elementom x je očito zatvarač potprostora razapetog s jedinicom, sa x, sa x^* i sa svim produktima koji se mogu formirati od elemenata x i x^*. Budući da x i x^* komutiraju ta je podalgebra zatvarač potprostora razapetog sa $\{x^n x^{*m};\ n, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$. Taj je potprostor upravo skup svih polinoma u dvije varijable od x i x^*. Dakle, unitalna C^*-podalgebra od $\mathcal{A}$ generirana normalnim elementom $x \in \mathcal{A}$ je zatvarač od

$$\{P(x, x^*);\ P \in \mathbb{C}[T_1, T_2]\}$$

Teorem 2.19. *Neka je $\mathcal{A}$ komutativna unitalna C^*-algebra generirana jednim elementom x. Tada je $\hat{x}$ homeomorfizam sa $X(\mathcal{A})$ na $\sigma(x)$.*

Dokaz: Znamo da je $\hat{x}$ neprekidno preslikavanje sa $X(\mathcal{A})$ u $\mathbb{C}$. Nadalje, prema teoremu 2.1. slika tog preslikavanja je $\sigma(x)$. Prema tome, $\hat{x}$ je neprekidna surjekcija sa $X(\mathcal{A})$ na $\sigma(x)$. Budući da su i $X(\mathcal{A})$ i $\sigma(x)$ kompaktni, i budući da je svaka bijekcija između dva komaktna Hausdorffova topološka prostora homeomorfizam, teorem će biti dokazan ako pokažemo da je $\hat{x}$ injekcija.

Neka su $\chi, \kappa \in X(\mathcal{A})$ takvi da je $\hat{x}(\chi) = \hat{x}(\kappa)$, tj. $\chi(x) = \kappa(x)$. Iz dijela dokaza teorema 2.18. slijedi da je tada

$$\chi(x^*) = \overline{\chi(x)} = \overline{\kappa(x)} = \kappa(x^*).$$

Kako su χ i κ homomorfizmi algebre $\mathcal{A}$ u $\mathbb{C}$, imamo

$$\chi(P(x, x^*)) = \kappa(P(x, x^*)) \qquad \forall P \in \mathbb{C}[T_1, T_2],$$

dakle, χ i κ se podudaraju na skupu $\{P(x, x^*);\ P \in \mathbb{C}[T_1, T_2]\}$. Međutim, taj je skup gust u $\mathcal{A}$ i homomorfizmi χ i κ su neprekidni, pa slijedi $\chi = \kappa$. Time je dokazana injektivnost preslikavanja $\hat{x}$.

Zadatak 2.11. *Neka je $\mathcal{A}$ komutativna unitalna C^*-algebra generirana jednim elementom x. Dokažite da za svaki $\lambda \in \sigma(x)$ postoji jedinstven $\chi_\lambda \in X(\mathcal{A})$ takav da je $\chi_\lambda(x) = \lambda$ i da je $\lambda \mapsto \chi_\lambda$ homeomorfizam sa $\sigma(x)$ na $X(\mathcal{A})$.*

Neka je sada $\mathcal{A}$ proizvoljna (ne nužno komutativna) unitalna C^*-algebra (npr. $B(\mathcal{H})$ za neki Hilbertov prostor $\mathcal{H}$). Neka je $x \in \mathcal{A}$ normalan element. C^*-podalgebra od $\mathcal{A}$ generirana sa x je zatvarač podalgebre svih polinoma $P(x, x^*)$ od x i x^*. Označimo je sa $\mathcal{B}$. Kako je x normalan algebra $\mathcal{B}$ je komutativna. Teoremi 2.18. i 2.19. pokazuju da Geljfandova transformacija daje izometrički $*-$izomorfizam sa $\mathcal{B}$ na $C(\sigma_{\mathcal{B}}(x))$. Posebno, za svaku funkciju $f \in C(\sigma_{\mathcal{B}}(x))$ postoji jedinstven $y \in \mathcal{B}$ kojeg Geljfandova transformacija preslikava u funkciju f. Taj ćemo element označiti sa $f(x)$. Pridruživanje $f \mapsto f(x)$ zove se **funkcionalni račun** u C^*-algebri $\mathcal{A}$ za normalni element x. Uz oznaku iz zadatka 2.11. je

$$f(x)\hat{}(\chi_\lambda) = f(\lambda), \qquad f \in C(\sigma_{\mathcal{B}}(x)),\ \ \lambda \in \sigma_{\mathcal{B}}(x).$$

Sljedeći teorem nabraja svojstva funkcionalnog računa i dokazuje se direktnim i jednostavnim računanjem:

Teorem 2.20. *Neka je $\mathcal{A}$ unitalna C^*-algebra i neka je element $x \in \mathcal{A}$ normalan. Neka je $\mathcal{B}$ unitalna C^*-podalgebra od $\mathcal{A}$ generirana elementom x i neka su $f, g \in C(\sigma_{\mathcal{B}}(x))$. Tada vrijedi:*

(*a*) *Ako je $f(\lambda) = 1 \ \forall \lambda \in \sigma_{\mathcal{B}}(x)$, onda je $f(x) = e$.*

(*b*) *Ako je $f(\lambda) = \lambda \ \forall \lambda \in \sigma_{\mathcal{B}}(x)$, onda je $f(x) = x$.*

(*c*) *Ako je $f(\lambda) = \overline{\lambda} \ \forall \lambda \in \sigma_{\mathcal{B}}(x)$, onda je $f(x) = x^*$.*

(*d*) *$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$.*

(*e*) *$(f \cdot g)(x) = f(x)g(x)$.*

Zadatak 2.12. *Dokažite teorem 2.20.*

U ovim razmatranjima i u tvrdnjama teorema 2.20. postoji jedna smetnja. Naime, pojavljuje se spektar $\sigma_{\mathcal{B}}(x)$ normalnog elementa x u podalgebri $\mathcal{B}$ a sve bi bilo ljepše i jednostavnije kad bi se konstrukcija i sve tvrdnje odnosile na spektar elementa x u čitavoj algebri $\mathcal{A}$. Teorija je značajna upravo zato jer se pokazuje da je za svaki x spektar $\sigma_{\mathcal{B}}(x)$ elementa x u podalgebri $\mathcal{B}$ jednak spektru $\sigma(x) = \sigma_{\mathcal{A}}(x)$ od x u algebri $\mathcal{A}$. Da bismo to dokazali, potrebna su nam još neka razmatranja iz opće teorije Banachovih algebri, koja se nadovezuju na rezultate iz poglavlja 2.

Neka je $\mathcal{A}$ algebra i neka je $x \in \mathcal{A}$. Element x zove se **lijevi** (odnosno, **desni**) **divizor nule** u algebri $\mathcal{A}$, ako postoji $y \in \mathcal{A}$, $y \neq 0$, takav da je $xy = 0$ (odnosno, $yx = 0$). Ako je algebra $\mathcal{A}$ normirana, x se zove **topološki lijevi** (odnosno, **desni**) **divizor nule** u algebri $\mathcal{A}$, ako postoji niz $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ u $\mathcal{A}$ takav da je $\|z_n\| = 1 \ \forall n \in \mathbb{N}$ i da je $\lim_{n \to \infty} xz_n = 0$ (odnosno, $\lim_{n \to \infty} z_n x = 0$). Svaki lijevi (odnosno, desni) divizor nule je i topološki lijevi (odnosno, desni) divizor nule; da se u to uvjerimo treba samo staviti $z_n = \frac{1}{\|y\|} y \ \forall n \in \mathbb{N}$.

Ako je x lijevi (odnosno, desni) divizor nule u $\mathcal{A}$, onda očito x nije lijevoinvertibilan (odnosno, desnoinvertibilan). Isto vrijedi i za topološke divizore nule. Doista, neka su $z_n \in \mathcal{A}$ takvi da je $\|z_n\| = 1 \ \forall n \in \mathbb{N}$ i da je $\lim_n xz_n = 0$. Pretpostavimo da je $y \in \mathcal{A}$ takav da je $yx = e$. Tada slijedi

$$0 = y \cdot \lim_{n \to \infty} xz_n = \lim_{n \to \infty} yxz_n = \lim_{n \to \infty} z_n,$$

a to je nespojivo sa $\|z_n\| = 1 \ \forall n \in \mathbb{N}$.

Lema 2.2. *Neka je $\mathcal{A}$ unitalna Banachova algebra i $x \in \mathcal{A}$ element koji nije lijevoinvertibilan* (*odnosno, desnoinvertibilan*)*, ali koji je limes niza* (x_n) *elemenata koji su lijevoinvertibilni* (*odnosno, desnoinvertibilni*)*. Tada je x topološki desni* (*odnosno, lijevi*) *divizor nule.*

Dokaz: Dokazujemo tvrdnju bez zagrada; ona druga dokazuje se sasvim analogno. Neka je $y_n \in \mathcal{A}$ lijevi invers od x_n. Sada iz tvrdnje (*b*) teorema 1.3. slijedi da niz brojeva $(\|y_n\|)$ nije ograničen. Prešavši na podnizove koje ponovno označimo sa (x_n) i (y_n) možemo pretpostaviti da je

$$\lim_{n \to \infty} \|y_n\| = +\infty.$$

Stavimo

$$z_n = \frac{1}{\|y_n\|} y_n \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Tada je $\|z_n\| = 1$ za svaki n. Imamo

$$\lim_{n \to \infty} z_n x_n = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{\|y_n\|} y_n x_n = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{\|y_n\|} e = 0.$$

S druge strane, budući da elementi z_n imaju normu 1 imamo

$$\|z_n(x - x_n)\| \leq \|x - x_n\| \qquad \forall n \in \mathbb{N},$$

a kako je $x = \lim_{n\to\infty} x_n$ iz gornje nejednakosti slijedi da je

$$\lim_{n\to\infty} z_n(x - x_n) = 0.$$

Prema tome,

$$0 = \lim_{n\to\infty} z_n x_n + \lim_{n\to\infty} z_n(x - x_n) = \lim_{n\to\infty} z_n x.$$

Dakle, x je topološki desni divizor nule.

Teorem 2.21. *Neka je $\mathcal{A}$ unitalna Banachova algebra, $\mathcal{B}$ zatvorena unitalna podalgebra i $x \in \mathcal{B}$. Tada je*

$$\sigma_{\mathcal{A}}(x) \subseteq \sigma_{\mathcal{B}}(x) \qquad i \qquad \partial\sigma_{\mathcal{B}}(x) \subseteq \partial\sigma_{\mathcal{A}}(x).$$

Pri tome je ∂S oznaka za rub skupa $S \subseteq \mathbb{C}$, tj. $\partial S = Cl(S) \cap Cl(\mathbb{C} \setminus S)$.

Dokaz: Za $\lambda \in \sigma_{\mathcal{A}}(x)$ element $\lambda e - x$ nije invertibilan u $\mathcal{A}$, pa pogotovo nije invertibilan u $\mathcal{B}$. Dakle, $\lambda \in \sigma_{\mathcal{B}}(x)$. Time je dokazana inkluzija $\sigma_{\mathcal{A}}(x) \subseteq \sigma_{\mathcal{B}}(x)$.

Neka je $\lambda \in \partial\sigma_{\mathcal{B}}(x)$. Tada postoji niz $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ u $\mathbb{C} \setminus \sigma_{\mathcal{B}}(x)$ koji konverira prema λ. Elementi $\lambda_n e - x$ su invertibilni u $\mathcal{B}$ i konvergiraju prema $\lambda e - x$ koji nije invertibilan u $\mathcal{B}$, dakle ili nije lijevoinvertibilan u $\mathcal{B}$ ili nije desnoinvertibilan u $\mathcal{B}$. Prema lemi 2.2. $\lambda e - x$ je topološki ili desni ili lijevi divizor nule u $\mathcal{B}$, dakle i u $\mathcal{A}$. Posebno, $\lambda e - x$ nije invertibilan u $\mathcal{A}$, a to znači da je $\lambda \in \sigma_{\mathcal{A}}(x)$. Budući da je $\sigma_{\mathcal{A}}(x) \subseteq \sigma_{\mathcal{B}}(x)$, λ ne može biti unutarnja točka od $\sigma_{\mathcal{A}}(x)$, pa slijedi $\lambda \in \partial\sigma_{\mathcal{A}}(x)$. Time je dokazana i inkluzija $\partial\sigma_{\mathcal{B}}(x) \subseteq \partial\sigma_{\mathcal{A}}(x)$.

Teorem 2.22. *Neka je $\mathcal{A}$ unitalna C^*-algebra, $\mathcal{B}$ unitalna C^*-podalgebra i $x \in \mathcal{B}$. Tada je $\sigma_{\mathcal{B}}(x) = \sigma_{\mathcal{A}}(x)$.*

Dokaz: Ako je $x \in \mathcal{B}$ hermitski, prema tvrdnji (a) propozicije 1.5. je $\sigma_{\mathcal{B}}(x) \subseteq \mathbb{R}$ i $\sigma_{\mathcal{A}}(x) \subseteq \mathbb{R}$. Stoga je $\partial\sigma_{\mathcal{B}}(x) = \sigma_{\mathcal{B}}(x)$ i $\partial\sigma_{\mathcal{A}}(x) = \sigma_{\mathcal{A}}(x)$. Zbog teorema 2.21. odatle slijedi $\sigma_{\mathcal{B}}(x) = \sigma_{\mathcal{A}}(x)$. Posebno, vrijedi

$$0 \notin \sigma_{\mathcal{B}}(x) \qquad \Longleftrightarrow \qquad 0 \notin \sigma_{\mathcal{A}}(x),$$

dakle, hermitski element $x \in \mathcal{B}$ je invertibilan u $\mathcal{B}$ ako i samo ako je on invertibilan u $\mathcal{A}$. Dokazat ćemo sada da ta ekvivalencija vrijedi za svaki a ne samo za hermitski element $x \in \mathcal{B}$.

Ako je $x \in \mathcal{B}$ invertibilan u $\mathcal{B}$ očito je x invertibilan i u $\mathcal{A}$. Pretpostavimo sada da je $x \in \mathcal{B}$ invertibilan u $\mathcal{A}$. Tada je i x^* invertibilan u $\mathcal{A}$, pa su x^*x i xx^* invertibilni u $\mathcal{A}$. Međutim, elementi x^*x i xx^* su hermitski, pa su prema dokazanom oni invertibilni u $\mathcal{B}$. Neka su y i z njihovi inversi u $\mathcal{B}$. Tada je $yx^*x = e$, pa slijedi da je x lijevoinvertibilan u $\mathcal{B}$. Nadalje, iz $xx^*z = e$ slijedi da je x i desnoinvertibilan u $\mathcal{B}$. To pokazuje da je x invertibilan u $\mathcal{B}$.

Sada za svaki $\lambda \in \mathbb{C}$ i svaki $x \in \mathcal{B}$ imamo

$$\lambda e - x \text{ nije invertibilan u } \mathcal{B} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \lambda e - x \text{ nije invertibilan u } \mathcal{A}.$$

To znači da vrijedi

$$\lambda \in \sigma_{\mathcal{B}}(x) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \lambda \in \sigma_{\mathcal{A}}(x).$$

Time je dokazana jednakost $\sigma_{\mathcal{B}}(x) = \sigma_{\mathcal{A}}(x)$.

Prema teoremima 2.18., 2.19., 2.20. i 2.22. za svaki normalan element x unitalne C^*-algebre $\mathcal{A}$ postoji jedinstven izometrički $*-$homomorfizam $f \mapsto f(x)$ sa C^*-algebre $C(\sigma(x))$ u C^*-algebru $\mathcal{A}$ takav da je $\mathrm{id}_{\sigma(x)}(x) = x$. Pri tome $\mathrm{id}_{\sigma(x)} \in C(\sigma(x))$ označava identitetu na $\sigma(x)$:

$$\mathrm{id}_{\sigma(x)}(\lambda) = \lambda \qquad \forall \lambda \in \sigma(x).$$

Teorem 2.23. *Neka je $\mathcal{A}$ unitalna C^*-algebra i $x\in\mathcal{A}$ normalan element. Tada je*

$$\sigma(f(x)) = f(\sigma(x)) = \{f(\lambda));\ \lambda\in\sigma(x)\} \qquad \forall f\in C(\sigma(x)).$$

Dokaz: Neka je $\mathcal{B}$ unitalna C^*-podalgebra generirana elementom x. Neka je $\lambda\in\sigma(x)$. Neka je $g\in C(\sigma(x))$ definirana sa

$$g(\mu) = f(\lambda) - f(\mu), \qquad \mu\in\sigma(x).$$

Tada je $g(\lambda) = 0$, dakle funkcija g nalazi se u idealu

$$C_\lambda(\sigma(x)) = \{h\in C(\sigma(x));\ h(\lambda) = 0\}$$

algebre $C(\sigma(x))$. No to znači da element g algebre $C(\sigma(x))$ nije invertibilan. Slijedi da ni njegova slika $g(x)$ u algebri $\mathcal{B}$ nije invertibilna. Dakle, $0 \in \sigma_{\mathcal{B}}(g(x))$, a po teoremu 2.22. to znači da je $0 \in \sigma_{\mathcal{A}}(g(x)) = \sigma(g(x))$, tj. $g(x)$ nije invertibilan u algebri $\mathcal{A}$. Međutim, $g(x) = f(\lambda)e - f(x)$. Dakle, $f(\lambda)\in\sigma(f(x))$. Time je dokazana inkluzija $f(\sigma(x)) \subseteq \sigma(f(x))$.

Dokažimo i obrnutu inkluziju. Neka je $\alpha\in\sigma(f(x))$, tj. $\alpha e - f(x)$ nije invertibilan u algebri $\mathcal{A}$, dakle ni u algebri $\mathcal{B}$. Neka je $g\in C(\sigma(x))$ definirana sa $g(\mu) = \alpha - f(\mu)$. Tada je $g(x) = \alpha e - f(x)$. To znači da element g algebre $C(\sigma(x))$ nije invertibilan, odnosno, postoji $\lambda\in\sigma(x)$ takav da je $g(\lambda) = 0$. Tada je $\alpha - f(\lambda) = 0$, tj. $\alpha = f(\lambda)$. Time je dokazana i obrnuta inkluzija $\sigma(f(x)) \subseteq f(\sigma(x))$.

Promatrajmo sada neunitalnu C^*-algebru $\mathcal{A}$ i neka je $\tilde{\mathcal{A}}$ njena unitalizacija. Neka je e jedinica u algebri $\tilde{\mathcal{A}}$. Kao obično identificiramo algebru $\mathcal{A}$ s obostranim idealom u $\tilde{\mathcal{A}}$, tako da je $\tilde{\mathcal{A}} = \mathcal{A} \dotplus \mathbb{C}e$. Naravno, ako je x normalni element C^*-algebre $\mathcal{A}$ funkcionalni račun provediv je u $\tilde{\mathcal{A}}$: preko Geljfandove transformacije dolazimo do izometričkog $*-$izomorfizma $\varphi \mapsto \varphi(x)$ sa C^*-algebre $C(\sigma'(x))$ na unitalnu C^*-podalgebru $C^*(x,e)$ od $\tilde{\mathcal{A}}$ generiranu elementom x. Pri tome je kao u odjeljku 1.1. sa $\sigma'(x)$ označen spektar $\sigma_{\tilde{\mathcal{A}}}(x)$ elementa $x \in \mathcal{A}$ u unitalizaciji $\tilde{\mathcal{A}}$. Naravno, $x \in \mathcal{A}$ nije invertibilan u $\tilde{\mathcal{A}}$, tj. $0 \in \sigma'(x)$ $\forall x \in \mathcal{A}$. Funkcionalni račun za normalni element $x \in \mathcal{A}$ može se provoditi potpuno unutar algebre $\mathcal{A}$ ako se ograničimo na funkcije φ sa svojstvom $\varphi(0) = 0$:

Teorem 2.24. *Neka je $\mathcal{A}$ neunitalna C^*-algebra i neka je $x \in \mathcal{A}$ normalni element. Za $\varphi \in C(\sigma'(x))$ vrijedi $\varphi(x) \in \mathcal{A}$ ako i samo ako je $\varphi(0) = 0$. Dakle, $\varphi \mapsto \varphi(x)$ je izometrički $*-$izomorfizam sa C^*-algebre*

$$C_0(\sigma'(x)) = \{\varphi \in C(\sigma'(x));\ \varphi(0) = 0\}$$

na C^*-podalgebru $C^*(x)$ od $\mathcal{A}$ generiranu elementom x. Pri tome je $C^*(x) = C^*(x,e) \cap \mathcal{A}$ i $C^*(x,e) = C^*(x) \dotplus \mathbb{C}e$ se prirodno identificira s unitalizacijom od $C^*(x)$.

Dokaz: Sve tvrdnje slijede iz činjenice da je $C^*(x)$ zatvarač podalgebre generirane sa x i x^*, tj. zatvarač potprostora razapetog sa $\{x^k\,(x^*)^\ell;\ k,\ell \in \mathbb{Z}_+,\ k+\ell > 0\}$. Doista, odatle se vidi da je $C^*(x) = C^*(x,e)$ i da je $C^*(x,e) = C^*(x) \dotplus \mathbb{C}e$. Nadalje, ako je $\varphi \in C_0(\sigma'(x))$ onda se φ može na $\sigma'(x)$ uniformno aproksimirati funkcijama oblika $\lambda \mapsto P(\lambda,\overline{\lambda})$, $\lambda \in \sigma'(x)$, gdje je $P \in \mathbb{C}[X,Y]$ polinom u dvije varijable takav da je $P(0,0) = 0$, tj. linearna kombinacija monoma oblika X^kY^ℓ, $k,\ell \in \mathbb{Z}_+$, $k+\ell > 0$. Odatle slijedi da je $\varphi(x)$ limes niza elemenata iz $C^*(x)$, dakle, $\varphi(x) \in C^*(x)$. Napokon, neka je $\varphi \in C(\sigma'(x))$ takva da je $\varphi(x) \in \mathcal{A}$. Neka je $\psi = \varphi - \varphi(0) \in C_0(\sigma'(x))$. Tada je $\varphi(x) = \psi(x) + \varphi(0)e$ i $\psi(x) \in C^*(x) \subseteq \mathcal{A}$, dakle, $\varphi(0)e = \varphi(x) - \psi(x) \in \mathcal{A} \cap \mathbb{C}e = \{0\}$, pa slijedi $\varphi(0) = 0$.

Poglavlje 3

Reprezentacije C^*-algebri

3.1 Uređaj u C^*-algebri

Neka je $\mathcal{A}$ C^*-algebra. Za element $x \in \mathcal{A}$ kažemo da je **pozitivan** i pišemo $x \geq 0$ ako je x hermitski, $x = x^*$, i ako je $\sigma'(x) \subseteq \mathbb{R}_+ = [0, +\infty\rangle$. Ako je C^*-algebra $\mathcal{A}$ unitalna, prema zadatku 1.5. za $x \in \mathcal{A}$ je $\sigma'(x) = \sigma(x) \cup \{0\}$, dakle, hermitski element $x \in \mathcal{A}$ je pozitivan ako i samo ako je $\sigma(x) \subseteq \mathbb{R}_+$. Skup svih hermitskih elemenata od $\mathcal{A}$ označavamo sa $\mathcal{A}_h$, a skup svih pozitivnih sa $\mathcal{A}_+$. Iz definicije je jasno da vrijedi $\mathcal{A}_+ = \tilde{\mathcal{A}}_+ \cap \mathcal{A}$.

Lema 3.1. *Za svaki $x \in \mathcal{A}_+$ postoji jedinstven $y \in \mathcal{A}_+$ takav da je $y^2 = x$.*

Dokaz: Imamo $\sigma'(x) \subseteq \mathbb{R}_+$. Neka je $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ neprekidna funkcija definirana sa $f(t) = \sqrt{t}$, $t \in \mathbb{R}_+$. Stavimo $y = f(x)$. Budući da je funkcija f realna, element y je hermitski. Nadalje, vrijedi $f(0) = 0$, pa po teoremu 2.24. zaključujemo da je $y \in \mathcal{A}$. Nadalje, po teoremu 2.23. vrijedi $\sigma'(y) = \{f(t);\ t \in \sigma'(x)\} \subseteq \mathbb{R}_+$, dakle, $y \in \mathcal{A}_+$. Kako je $f(t)^2 = t$ $\forall t$ vrijedi $y^2 = x$. Time je dokazana egzistencija. Dokažimo sada jedinstvenost. Neka je i $z \in \mathcal{A}_+$ takav da je $z^2 = x$. Neka je $\mathcal{B}$ C^*-podalgebra od $\mathcal{A}$ generirana sa z. Tada je $x = z^2 \in \mathcal{B}$, ali i $y \in \mathcal{B}$ jer y je funkcija od x. C^*-algebra $\mathcal{B}$ izomorfna je algebri $C^0(\sigma'(z))$ svih neprekidnih funkcija $\varphi : \sigma'(z) \to \mathbb{C}$ takvih da je $\varphi(0) = 0$. Tada je

$$\mathcal{B}_+ = \mathcal{A}_+ \cap \mathcal{B} = \{\varphi(y);\ \varphi \in C^0_+(\sigma'(z))\}, \quad C^0_+(\sigma'(z)) = \{\varphi \in C^0(\sigma'(z));\ \varphi(t) \geq 0\ fat \in \sigma'(z)\}.$$

Stavimo $\psi(t) = t^2,\ t \in \sigma'(z)$. Tada je $\psi(z) = x$. Nadalje, identiteta $id_{\sigma'(z)}(t) = t,\ t \in \sigma'(z)$, je jedina funkcija u $C^0_+(\sigma'(z))$ čiji je kvadrat jednak φ. Slijedi $y = id_{\sigma'(z)}(z) = z$.

Lema 3.2. *Za svaki $x \in \mathcal{A}_h$ postoje $y, z \in \mathcal{A}_+$ takvi da je $x = y - z$ i $yz = zy = 0$.*

Dokaz: Definiramo neprekidne funkcije $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ sa

$$f(t) = \frac{|t| + t}{2} = \begin{cases} t & \text{ako je } t \geq 0, \\ 0 & \text{ako je } t < 0, \end{cases} \qquad g(t) = f(-t) = \frac{|t| - t}{2} = \begin{cases} 0 & \text{ako je } t \geq 0, \\ -t & \text{ako je } t < 0. \end{cases}$$

Stavimo $y = f(x)$ i $z = g(x)$. Kako je $f(0) = g(0) = 0$, vrijedi $x, y \in \mathcal{A}$ bez obzira da li je $\mathcal{A}$ unitalna ili ne. Elementi y i z su hermitski jer su funkcije f i g realne, a pozitivni su po teoremu 2.23. jer su funkcije f i g svuda ≥ 0. Napokon, iz identiteta $f(t) - g(t) = t$ i $f(t)g(t) = 0$ $\forall t \in \mathbb{R}$ slijedi $x = y - z$ i $yz = zy = 0$.

Lema 3.3. *Neka je $\mathcal{A}$ C^*-algebra. Skup pozitivnih elemenata $\mathcal{A}_+$ je konus, tj. vrijedi*

(a) *Ako je $x \in \mathcal{A}_+$ i $t \in \mathbb{R}_+$ onda je $tx \in \mathcal{A}_+$.*

(b) *Ako su $x, y \in \mathcal{A}_+$ onda je $x + y \in \mathcal{A}_+$.*

Dokaz: U dokazu možemo pretpostavljati da je C^*-algebra $\mathcal{A}$ unitalna, budući da za neunitalnu $\mathcal{A}$ vrijedi $\mathcal{A}_+ = \tilde{\mathcal{A}}_+ \cap \mathcal{A}$.

(a) Ako je $x \in \mathcal{A}_+$ i $t \in \mathbb{R}_+$, onda je tx hermitski i vrijedi $\sigma(tx) = \{t\lambda;\ \lambda \in \sigma(x)\} \subseteq \mathbb{R}_+$, dakle, $tx \in \mathcal{A}_+$.

(b) Neka su $x, y \in \mathcal{A}_+$. Kako množenje s pozitivnim brojem prema (a) ne mijenja pripadnost $\mathcal{A}_+$, u dokazu možemo pretpostavljati da je $\|x\| \leq 1$ i $\|y\| \leq 1$. Tada je $\sigma(x) \subseteq [0,1]$, pa je i $\sigma(e-x) \subseteq [0,1]$. Kako je $e - x$ hermitski, norma mu je jednaka spektralnom radijusu, pa slijedi $\|e - x\| \leq 1$. Slično je i $\|e - y\| \leq 1$. Odatle je

$$\|2e - (x + y)\| = \|(e - x) + (e - y)\| \leq \|e - x\| + \|e - y\| \leq 2.$$

Dakle, $\sigma(2e - (x + y)) \subseteq [-2, 2]$, pa slijedi $\sigma(x + y) \subseteq [0, 4] \subseteq \mathbb{R}_+$, dakle, $x + y \in \mathcal{A}_+$.

Lema 3.4. *Ako za $z \in \mathcal{A}$ vrijedi $-z^*z \geq 0$, onda je $z = 0$.*

Dokaz: Koristit ćemo sljedeću jednostavnu činjenicu:

Zadatak 3.1. *Neka je $\mathcal{A}$ unitalna algebra i $x, y \in \mathcal{A}$. Dokažite da je tada $\sigma(xy) \cup \{0\} = \sigma(yx) \cup \{0\}$.*

Zbog zadatka 3.1. iz $-z^*z \geq 0$ slijedi $-zz^* \geq 0$. Iz leme 3.3. sada slijedi da je $-z^*z - zz^* \geq 0$. Stavimo $x = \frac{1}{2}(z + z^*)$ i $y = \frac{1}{2i}(z - z^*)$. Tada su x i y hermitski i vrijedi $z = x + iy$ i $z^* = x - iy$. Odatle je $-(x^2 + y^2) = \frac{1}{2}(-z^*z - zz^*) \geq 0$. No kako su očito $x^2 \geq 0$ i $y^2 \geq 0$, iz leme 3.3. slijedi i $x^2 + y^2 \geq 0$. To znači da je $\sigma(x^2 + y^2) = \{0\}$. Međutim, za svaki hermitski element je norma jednaka spektralnom radijusu, pa zaključujemo da je $x^2 + y^2 = 0$. Sada je $x^2 = -y^2$, pa je i $\sigma(x^2) = \sigma(y^2) = \{0\}$, dakle $x^2 = y^2 = 0$. Međutim, elementi x i y su hermitski, pa pomoću C^*-svojstva norme nalazimo $\|x\|^2 = \|x^2\| = 0$, tj. $x = 0$ i analogno $y = 0$. Slijedi $z = x + iy = 0$.

Teorem 3.1. *Neka je $\mathcal{A}$ C^*-algebra i neka je $x \in \mathcal{A}_h$. Sljedeća su svojstva međusobno ekvivalentna:*

(a) *$x \in \mathcal{A}_+$.*

(b) *Postoji $y \in \mathcal{A}_h$ takav da je $x = y^2$.*

(c) *Postoji $z \in \mathcal{A}$ takav da je $x = z^*z$.*

(d) *Za neki $t \geq \|x\|$ vrijedi $\|te - x\| \leq t$.*

(e) *Za svaki $t \geq \|x\|$ vrijedi $\|te - x\| \leq t$.*

Pri tome, ako je algebra $\mathcal{A}$ neunitalna u (d) i (e) podrazumijevamo da je uronjena u unitalizaciju $\tilde{\mathcal{A}}$ s jedinicom e. Napokon, konus $\mathcal{A}_+$ je zatvoren i vrijedi $\mathcal{A}_+ \cap (-\mathcal{A}_+) = \{0\}$.

Dokaz: Implikacija $(a) \implies (b)$ slijedi iz leme 3.1. a implikacija $(b) \implies (c)$ je trivijalna.

Dokažimo implikaciju $(c) \implies (a)$. Neka je $z \in \mathcal{A}$. Tada je element z^*z hermitski. Definiramo sada neprekidne funkcije $f, g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ sa

$$f(t) = \begin{cases} \sqrt{t} & \text{ako je } t \geq 0, \\ 0 & \text{ako je } t < 0, \end{cases} \qquad g(t) = \begin{cases} 0 & \text{ako je } t \geq 0, \\ \sqrt{-t} & \text{ako je } t < 0. \end{cases}$$

Tada je $fg = 0$ i $t = f(t)^2 - g(t)^2$. Dakle, pozitivni elementi $u = f(z^*z)$ i $v = g(z^*z)$ zadovoljavaju

$$uv = vu = 0 \qquad \text{i} \qquad z^*z = u^2 - v^2.$$

Slijedi

$$vz^*zv = vu^2v - v^4 = -v^4.$$

Stavimo li $w = zv$, dobivamo
$$-w^*w = -vz^*zv = v^4 \geq 0,$$
pa iz leme 3.4. slijedi $w = 0$. Odatle je $v^4 = 0$, pa slijedi $v = 0$, jer je element v hermitski. Dakle, vrijedi $z^*z = u^2$, a kako je element u hermitski, slijedi $z^*z \geq 0$, tj. $z^*z \in \mathcal{A}_+$.

Dokažimo sada implikaciju $(b) \implies (e)$. U dokazu te implikacije možemo bez smanjenja općenitosti pretpostavljati da je algebra $\mathcal{A}$ unitalna. Neka je $t \geq \|x\|$ i neka je $x = y^2$ za hermitski element y. Tada je $x = f(y)$, gdje je $f \in C(\sigma(y))$ funkcija $f(t) = t^2$. Budući da je funkcionalni račun $\varphi \mapsto \varphi(y)$ izometrički izomorfizam sa $C(\sigma(y))$ na unitalnu C^*−podalgebru generiranu sa y, imamo $\|x\| = \|f\|_\infty$. Stoga je $0 \leq f \leq \|x\| \leq t$, pa slijedi $0 \leq t - f \leq t$. Prema tome,
$$\|te - x\| = \|(t - f)(y)\| = \|t - f\|_\infty \leq t.$$

Budući da je implikacija $(e) \implies (d)$ trivijalna, dokaz ekvivalencije pet svojstava će biti potpun ako dokažemo implikaciju $(d) \implies (a)$. U dokazu te implikacije možemo također bez smanjenja općenitosti pretpostavljati da je algebra $\mathcal{A}$ unitalna. Dakle, pretpostavimo da za hermitski element $x \in \mathcal{A}$ i za neki $t \geq \|x\|$ vrijedi $\|te-x\| \leq t$. Neka je $g = id_{\sigma(x)} \in C(\sigma(x))$, tj. $g(\lambda) = \lambda \ \forall \lambda \in \sigma(x)$. Tada je $g(x) = x$, pa imamo
$$t \geq \|te - x\| = \|(t - g)(x)\| = \|t - g\|_\infty.$$
Odatle slijedi da je identiteta nenegativna funkcija na $\sigma(x)$, a to upravo znači da je $\sigma(x) \subseteq \mathbb{R}_+$, tj. da je $x \in \mathcal{A}_+$.

Dokažimo sada da je konus $\mathcal{A}_+$ zatvoren. Zbog dokazane ekvivalencije svojstva (d) s ostalim svojstvima imamo jednakost
$$\mathcal{A}_+ = \mathcal{A}_h \cap \{x \in \mathcal{A};\ \|(\|x\|e) - x\| \leq \|x\|\}.$$
Odatle slijedi zatvorenost konusa $\mathcal{A}_+$, budući da je skup $\mathcal{A}_h$ zatvoren zbog neprekidnosti involucije $x \mapsto x^*$, a drugi skup u gornjem presjeku je zatvoren zbog neprekidnosti norme.

Napokon, neka je $x \in \mathcal{A}_+ \cap (-\mathcal{A}_+)$. Prema svojstvu (c) postoji $z \in \mathcal{A}$ takav da je $x = z^*z$. No tada je i $-z^*z \in \mathcal{A}_+$, pa iz leme 3.4. slijedi $z = 0$, odnosno, $x = 0$.

Pomoću pojma pozitivnog elementa definiramo uređaj na realnom vektorskom prostoru $\mathcal{A}_h$. Za $x, y \in \mathcal{A}_h$ stavljamo $x \leq y$ ako je $y - x \in \mathcal{A}_+$; pišemo tada i $y \geq x$. Radi se doista o parcijalnom uređaju na $\mathcal{A}_h$:

- Ako su $x, y \in \mathcal{A}_h$ takvi da je $x \leq y$ i $y \leq x$, onda je $y - x \in \mathcal{A}_+ \cap (-\mathcal{A}_+)$, pa iz posljednje tvrdnje teorema 3.1. slijedi $y - x = 0$, odnosno, $x = y$.

- Neka su $x, y, z \in \mathcal{A}_h$ takvi da je $x \leq y$ i $y \leq z$. Tada su $y - x, z - y \in \mathcal{A}_+$, pa iz tvrdnje (b) leme 3.3. slijedi $z - x = (z - y) + (y - x) \in \mathcal{A}_+$, dakle, $x \leq z$.

Nadalje, taj uređaj poštuje strukturu realnog vektorskog prostora na $\mathcal{A}_h$:

- Ako su $x, y, z \in \mathcal{A}_h$ i ako je $x \leq y$, onda je $(y+z)-(x+z) = y-x \in \mathcal{A}_+$, dakle, $x+z \leq y+z$.

- Ako su $x, y \in \mathcal{A}_h$ takvi da je $x \leq y$ i ako je $t \in \mathbb{R}_+$, tada je $y - x \in \mathcal{A}_+$, pa iz tvrdnje (a) leme 3.3. slijedi $ty - tx = t(y - x) \in \mathcal{A}_+$, dakle, $tx \leq ty$.

Zadatak 3.2. *Neka su $x, y \in \mathcal{A}_h$ i $z \in \mathcal{A}$. Dokažite da iz $x \leq y$ slijedi $z^*xz \leq z^*yz$.*

Uputa: Primijenite lemu 3.1. na pozitivan element $y - x$.

Propozicija 3.1. *Pretpostavimo da je C^*-algebra $\mathcal{A}$ unitalna, da su $x, y \in \mathcal{A}_+$ invertibilni i da vrijedi $x \leq y$. Tada su $x^{-1}, y^{-1} \in \mathcal{A}_+$ i vrijedi $y^{-1} \leq x^{-1}$.*

Dokaz: Kako je općenito $(z^*)^{-1} = (z^{-1})^*$ za $z \in \mathcal{A}^\times$, elementi x^{-1} i y^{-1} su hermitski. Nadalje, iz tvrdnje (b) propozicije 1.1. slijedi da su pozitivni. Prema lemi 3.1. postoje $u, v \in \mathcal{A}_+$ takvi da je $u^2 = x$ i $v^2 = y$. Prema zadatku 3.2. imamo

$$e - v^{-1}xv^{-1} = v^{-1}(y-x)v^{-1} \geq 0.$$

Odatle je

$$\left(uv^{-1}\right)^* \left(uv^{-1}\right) = v^{-1}xv^{-1} \leq e,$$

pa slijedi

$$1 \geq \left\|\left(uv^{-1}\right)^* \left(uv^{-1}\right)\right\| = \left\|uv^{-1}\right\|^2 \qquad \Longrightarrow \qquad \left\|uv^{-1}\right\| \leq 1.$$

Adjungiranje ne mijenja normu, pa imamo i

$$\left\|v^{-1}u\right\| = \left\|\left(uv^{-1}\right)^*\right\| \leq 1,$$

a odatle je

$$1 \geq \left\|v^{-1}u\right\|^2 = \left\|\left(v^{-1}u\right)^* \left(v^{-1}u\right)\right\|,$$

pa slijedi

$$e \geq \left(v^{-1}u\right)^* \left(v^{-1}u\right) = uv^{-2}u \qquad \Longrightarrow \qquad e \geq uy^{-1}u.$$

Primjenom zadatka 3.2. iz posljednje nejednakosti nalazimo

$$x^{-1} = u^{-1}eu^{-1} \geq u^{-1}\left(uy^{-1}u\right)u^{-1} = y^{-1}.$$

Zadatak 3.3. *Neka su $x, y \in \mathcal{A}_+$ takvi da je $x \leq y$ i $xy = yx$ i neka je $n \in \mathbb{N}$. Dokažite da je $x^n \leq y^n$.*

Zadatak 3.4. *Neka su $x, y \in \mathcal{A}_+$ takvi da je $x \leq y$ i $xy = yx$ i neka su $u, v \in \mathcal{A}_+$ takvi da je $u^2 = x$ i $v^2 = y$. Dokažite da je tada $u \leq v$.*

Zadatak 3.5. *Neka je $x \in \mathcal{A}_h$ i neka je $n \in \mathbb{N}$ neparan broj. Dokažite da postoji jedinstven $y \in \mathcal{A}_h$ takav da je $y^n = x$.*

Zadatak 3.6. *Neka su $x, y \in \mathcal{A}_+$ takvi da je $x \leq y$. Dokažite da je tada $\|x\| \leq \|y\|$.*

Propozicija 3.2. *Neka je $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ $*-$homomorfizam C^*-algebri. Tada je $\varphi(\mathcal{A}_+) = \varphi(\mathcal{A}) \cap \mathcal{B}_+$.*

Dokaz: Ako je $x \in \mathcal{A}_+$, prema lemi 3.1. postoji $y \in \mathcal{A}_+$ takav da je $x = y^2$. Tada je

$$\varphi(x) = \varphi(y)^2 \qquad \text{i} \qquad \varphi(y)^* = \varphi(y^*) = \varphi(y),$$

pa je po teoremu 3.1. $\varphi(x) \in \mathcal{B}_+$. Dakle, $\varphi(\mathcal{A}_+) \subseteq \varphi(\mathcal{A}) \cap \mathcal{B}_+$.

Neka je $z \in \varphi(\mathcal{A}) \cap \mathcal{B}_+$ i neka je $x \in \mathcal{A}$ takav da je $z = \varphi(x)$. Tada je

$$\varphi(x^*) = \varphi(x)^* = z^* = z \qquad \Longrightarrow \qquad \varphi(x^*x) = z^2.$$

Imamo $x^*x \in \mathcal{A}_+$, pa postoji $y \in \mathcal{A}_+$ takav da je $y^2 = x^*x$. Sada je

$$\varphi(y)^2 = \varphi(y^2) = \varphi(x^*x) = z^2.$$

Prema dokazanom je $\varphi(\mathcal{A}_+) \subseteq \mathcal{B}_+$. To znači da su $\varphi(y)$ i z elementi od $\mathcal{B}_+$ s jednakim kvadratima. No tada iz jedinstvenosti u lemi 3.1. slijedi $z = \varphi(y) \in \varphi(\mathcal{A}_+)$. Time je dokazana i obrnuta inkluzija $\varphi(\mathcal{A}) \cap \mathcal{B}_+ \subseteq \varphi(\mathcal{A}_+)$.

3.2 Aproksimativne jedinice

Neka je $\mathcal{A}$ C^*-algebra. **Aproksimativna jedinica** u $\mathcal{A}$ je hiperniz $(e_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ u $\mathcal{A}_+$ sa svojstvima:

(a) Skup indeksa Λ je parcijalno uređen skup koji je usmjeren, tj. za bilo koje $\lambda, \mu \in \Lambda$ postoji $\nu \in \Lambda$ takav da je $\lambda \leq \nu$ i $\mu \leq \nu$.

(b) Hiperniz je rastući, tj. ako su $\lambda, \mu \in \Lambda$ i $\lambda \leq \mu$ onda je $e_\lambda \leq e_\mu$.

(c) $\|e_\lambda\| \leq 1 \ \ \forall \lambda \in \Lambda$.

(d) Za svaki $x \in \mathcal{A}$ je
$$\lim_{\lambda\in\Lambda} e_\lambda x = \lim_{\lambda\in\Lambda} x e_\lambda = x.$$

Pri tome, ako je Λ usmjeren skup, kažemo da **hiperniz** $(a_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ u $\mathcal{A}$ **konvergira prema** $a \in \mathcal{A}$, ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $\lambda_0 \in \Lambda$ takav da vrijedi
$$\lambda \in \Lambda,\ \lambda \geq \lambda_0 \qquad \Longrightarrow \qquad \|a_\lambda - a\| \leq \varepsilon.$$

Naravno, ako je algebra $\mathcal{A}$ unitalna tada za bilo koji usmjeren skup Λ dobivamo aproksimativnu jedinicu ako stavimo $e_\lambda = e \ \ \forall \lambda$.

Zadatak 3.7. *Neka je $\mathcal{A}$ unitalna C^*-algebra s jedinicom e i neka je $(e_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ hiperniz u $\mathcal{A}_+$ indeksiran usmjerenim parcijalno uređenim skupom Λ koja je rastući, tj. $\lambda \leq \mu \ \Rightarrow \ e_\lambda \leq e_\mu$, i takav da je $\|e_\lambda\| \leq 1 \ \forall \lambda$. Dokažite da je taj hiperniz aproksimativna jedinica algebre $\mathcal{A}$ ako i samo ako je*
$$\lim_{\lambda\in\Lambda} \|e_\lambda - e\| = 0.$$

Teorem 3.2. *Neka je $\mathcal{A}$ C^*-algebra i neka je $\mathcal{I}$ dvostrani ideal u $\mathcal{A}$ koji je gust u $\mathcal{A}$. Postoji aproksimativna jedinica u $\mathcal{A}$ sastavljena od elemenata ideala $\mathcal{I}$. Ukoliko je algebra $\mathcal{A}$ separabilna tada se može izabrati aproksimativna jedinica u $\mathcal{I}$ indeksirana prirodnim brojevima, tj. kao rastući niz.*

Dokaz: Neka je $\tilde{\mathcal{A}} = \mathcal{A} \dot{+} \mathbb{C}e$ unitalizacija od $\mathcal{A}$. $\mathcal{I}$ je dvostrani ideal i u algebri $\tilde{\mathcal{A}}$. Neka je Λ skup svih konačnih podskupova od $\mathcal{I}$ uređen inkluzijom. Naravno, taj je parcijalno uređen skup usmjeren. Za $\lambda = \{x_1, \dots, x_n\} \in \Lambda$ stavimo
$$a_\lambda = x_1 x_1^* + \cdots + x_n x_n^* \qquad \text{i} \qquad e_\lambda = a_\lambda \left(\frac{1}{n}e - a_\lambda\right)^{-1};$$
primijetimo da je e_λ doduše izračunat u $\tilde{\mathcal{A}}$, ali leži u $\mathcal{I}$, jer je $\mathcal{I}$ dvostrani ideal u $\tilde{\mathcal{A}}$.

Za $t \geq 0$ funkcija
$$t \mapsto \frac{t}{\frac{1}{n} + t}$$
poprima vrijednosti iz $[0, 1]$. Stoga je $0 \leq e_\lambda \leq e$.

Budući da a_λ i e_λ komutiraju, imamo
$$\sum_{i=1}^{n} [(e_\lambda - e)x_i][(e_\lambda - e)x_i]^* = (e_\lambda - e)a_\lambda(e_\lambda - e) = a_\lambda(e_\lambda - e)^2.$$

No kako je

$$e_\lambda - e = a_\lambda \left(\frac{1}{n}e + a_\lambda\right)^{-1} - e = \left(\frac{1}{n}e + a_\lambda\right)^{-1}\left[a_\lambda - \frac{1}{n}e - a_\lambda\right] = -\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}e + a_\lambda\right)^{-1},$$

slijedi

$$\sum_{i=1}^{n}[(e_\lambda - e)x_i][(e_\lambda - e)x_i]^* = \frac{1}{n^2}a_\lambda\left(\frac{1}{n}e + a_\lambda\right)^{-2} = \frac{1}{n^2}f(a_\lambda),$$

gdje je $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ funkcija

$$f(t) = \frac{t}{\left(\frac{1}{n} + t\right)^2}, \qquad t \geq 0.$$

Derivacija te funkcije

$$f'(t) = \frac{\frac{1}{n} - t}{\left(\frac{1}{n} + t\right)^3}$$

ima kao jedinu nultočku $\frac{1}{n}$, za $t < \frac{1}{n}$ je pozitivna, a za $t > \frac{1}{n}$ je negativna. Dakle, funkcija f poprima svoj maksimum u točki $\frac{1}{n}$ i taj je jednak

$$\frac{\frac{1}{n}}{\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n}\right)^2} = \frac{n}{4}.$$

Slijedi da je

$$\sum_{i=1}^{n}[(e_\lambda - e)x_i][(e_\lambda - e)x_i]^* \leq \frac{1}{n^2}\frac{n}{4}e = \frac{1}{4n}e.$$

Odatle je za svaki $i \in \{1, \dots, n\}$

$$[(e_\lambda - e)x_i][(e_\lambda - e)x_i]^* \leq \frac{1}{4n}e,$$

pa pomoću zadatka 3.6. slijedi

$$\|e_\lambda x_i - x_i\|^2 \leq \frac{1}{4n}.$$

Time smo dokazali da za svaki $n-$člani $\lambda \in \Lambda$ i za svaki $x \in \lambda$ vrijedi

$$\|e_\lambda x - x\| \leq \frac{1}{2\sqrt{n}}.$$

Neka je sada $x \in \mathcal{I}$ i neka je $\varepsilon > 0$. Neka je $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $n_0 \geq 1/4\varepsilon^2$ i neka je $\lambda_0 \in \Lambda$ n_0-člani skup koji sadrži x. Tada svaki $\lambda \geq \lambda_0$ također sadrži x i ima $n \geq n_0$ članova, pa je

$$\|e_\lambda x - x\| \leq \frac{1}{2\sqrt{n}} \leq \frac{1}{2\sqrt{n_0}} \leq \varepsilon.$$

Time je dokazano da vrijedi

$$\lim_{\lambda \in \Lambda} e_\lambda x = x \qquad \forall x \in \mathcal{I}.$$

Budući da je ideal $\mathcal{I}$ gust u $\mathcal{A}$, slijedi

$$\lim_{\lambda \in \Lambda} e_\lambda x = x \qquad \forall x \in \mathcal{A}.$$

Primjenom involucije na

$$\lim_{\lambda\in\Lambda} e_\lambda x^* = x^*$$

slijedi da je i

$$\lim_{\lambda\in\Lambda} x e_\lambda = x \qquad \forall x \in \mathcal{A}.$$

Treba još dokazati da iz $\lambda \le \mu$ slijedi $e_\lambda \le e_\mu$. Ako su $\lambda, \mu \in \Lambda$ takvi da je $\lambda \le \mu$, možemo pisati

$$\lambda = \{x_1, \dots, x_n\}, \qquad \mu = \{x_1, \dots, x_m\}, \qquad m \ge n.$$

Tada je

$$a_\lambda = \sum_{i=1}^n x_i x_i^* \le \sum_{i=1}^m x_i x_i^* = a_\mu.$$

Stoga je

$$\frac{1}{n}e + a_\lambda \le \frac{1}{n}e + a_\mu$$

a odatle i iz propozicije 3.1. slijedi

$$\left(\frac{1}{n}e + a_\lambda\right)^{-1} \ge \left(\frac{1}{n}e + a_\mu\right)^{-1}. \tag{3.1}$$

Nadalje, kako je $m \ge n$, vrijedi

$$\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n} + t\right)^{-1} \ge \frac{1}{m}\left(\frac{1}{m} + t\right)^{-1} \qquad \forall t \ge 0,$$

a odatle slijedi

$$\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n} + a_\mu\right)^{-1} \ge \frac{1}{m}\left(\frac{1}{m} + a_\mu\right)^{-1}. \tag{3.2}$$

Iz (3.1) i (3.2) nalazimo

$$e_\lambda = a_\lambda\left(\frac{1}{n}e + a_\lambda\right)^{-1} = e - \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}e + a_\lambda\right)^{-1} \le e - \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}e + a_\mu\right)^{-1} \le$$

$$\le e - \frac{1}{m}\left(\frac{1}{m}e + a_\mu\right)^{-1} = a_\mu\left(\frac{1}{m}e + a_\mu\right)^{-1} = e_\mu.$$

Napokon, pretpostavimo da je C^*-algebra $\mathcal{A}$ separabilna. Tada postoji prebrojiv skup $\{x_k;\ k \in \mathbb{N}\}$ u $\mathcal{I}$ koji je gust u $\mathcal{A}$. Stavimo tada $e_n = e_{\{x_1,\dots,x_n\}}$. Prethodni dokaz daje $0 \le e_n \le e_m$ za $n \le m$, $\|e_n\| \le 1\ \ \forall n \in \mathbb{N}$ i

$$\lim_{n\to\infty} \|e_n x_k - x_k\| = 0 \qquad \forall k \in \mathbb{N}. \tag{3.3}$$

Neka je sada $x \in \mathcal{A}$ i $\varepsilon > 0$. Budući da je skup $\{x_k;\ k \in \mathbb{N}\}$ gust u $\mathcal{A}$, postoji $k \in \mathbb{N}$ takav da je

$$\|x - x_k\| \le \frac{\varepsilon}{3}.$$

Sada zbog (3.3) postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da vrijedi

$$\|e_n x_k - x_k\| \le \frac{\varepsilon}{3} \qquad \forall n \ge n_0.$$

Stoga, koristeći činjenicu da je $\|e_n\| \leq 1$, za $n \geq n_0$ dobivamo

$$\|e_n x - x\| \leq \|e_n(x - x_k)\| + \|e_n x_k - x_k\| + \|x_k - x\| \leq 2\|x - x_k\| + \|e_n x_k - x_k\| \leq \frac{2\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Time je dokazano

$$\lim_{n\to\infty} e_n x = x \qquad \forall x \in \mathcal{A}.$$

Naravno, pomoću adjungiranja dobivamo i

$$\lim_{n\to\infty} x e_n = x \qquad \forall x \in \mathcal{A}.$$

Zadatak 3.8. *Neka je $\mathcal{A}$ C^*-algebra i $\mathcal{R}$ desni ideal u $\mathcal{A}$. Dokažite da postoji hiperniz $(e_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ u $\mathcal{R} \cap \mathcal{A}_+$, indeksiran usmjerenim skupom Λ, sa sljedećim svojstvima:*

(a) *Za $\lambda, \mu \in \Lambda$ i $\lambda \leq \mu$ vrijedi $e_\lambda \leq e_\mu$.*

(b) $\|e_\lambda\| \leq 1 \;\; \forall \lambda \in \Lambda$.

(c) *Vrijedi*

$$\lim_{\lambda\in\Lambda} e_\lambda x = x \qquad \forall x \in Cl(\mathcal{R}).$$

3.3 Zatvoreni ideali, kvocijenti i homomorfizmi C^*-algebri

Propozicija 3.3. *Neka je $\mathcal{A}$ C^*-algebra i neka je $\mathcal{J}$ zatvoren obostrani ideal u $\mathcal{A}$. Tada je $\mathcal{J}$ $*-$ideal, tj. $x \in \mathcal{J} \implies x^* \in \mathcal{J}$.*

Dokaz: Neka je $x \in \mathcal{J}$. Prema teoremu 3.2. u C^*-algebri $\mathcal{J}$ postoji aproksimativna jedinica, tj. hiperniz $(e_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ pozitivnih elemenata indeksiran usmjerenim skupom Λ takav da je

$$x = \lim_{\lambda\in\Lambda} x e_\lambda.$$

Budući da je adjungiranje $*$ neprekidno preslikavanje sa $\mathcal{A}$ u $\mathcal{A}$, slijedi

$$x^* = \lim_{\lambda\in\Lambda} e_\lambda x^*.$$

$\mathcal{J}$ je dvostrani ideal pa iz $e_\lambda \in \mathcal{J}$ slijedi $e_\lambda x^* \in \mathcal{J}$. Kako je ideal $\mathcal{J}$ zatvoren, zaključujemo da je $x^* \in \mathcal{J}$.

Ako je $\mathcal{J}$ obostrani zatvoren ideal u C^*-algebri $\mathcal{A}$, znamo da je kvocijentna algebra $\mathcal{A}/\mathcal{J}$ Banachova algebra s normom

$$\|x + \mathcal{J}\| = \inf\{\|x + y\|;\ y \in \mathcal{J}\}, \qquad x \in \mathcal{A}.$$

Budući da je $\mathcal{J}$ $*-$ideal, lako se provjeri da je sa

$$(x + \mathcal{J})^* = x^* + \mathcal{J}, \qquad x \in \mathcal{A},$$

definirana involucija na kvocijentnoj algebri $\mathcal{A}/\mathcal{J}$. Važno je da norma na $\mathcal{A}/\mathcal{J}$ ima C^*-svojstvo:

Propozicija 3.4. *Neka je $\mathcal{A}$ C^*-algebra i neka je $\mathcal{J}$ zatvoren obostrani ideal u $\mathcal{A}$. Tada je $\mathcal{A}/\mathcal{J}$ C^*-algebra.*

Dokaz: Neka je
$$E = \{u \in \mathcal{J};\ u = u^*,\ \sigma(u) \subseteq [0,1]\};$$
pri tome, ako je algebra $\mathcal{A}$ neunitalna, $\sigma(u)$ označava spektar elementa u u njenoj unitalizaciji $\tilde{\mathcal{A}}$. Tvrdimo da je tada
$$\|x + \mathcal{J}\| = \inf\{\|x - xu\|;\ u \in E\} \qquad \forall x \in \mathcal{A}.$$
Doista, kako je $xu \in \mathcal{J}$ za svaki $x \in \mathcal{A}$ i svaki $u \in E \subseteq \mathcal{J}$, očito vrijedi nejednakost
$$\|x + \mathcal{J}\| \leq \inf\{\|x - xu\|;\ u \in E\}.$$
Obrnuta nejednakost slijedit će ako dokažemo da za svaki $y \in \mathcal{J}$ postoji niz $u_n \in E$ takav da za svaki $x \in \mathcal{A}$ vrijedi
$$\|x + y\| \geq \inf\{\|x - xu_n\|;\ n \in \mathbb{N}\}.$$
Prema teoremu 3.2. postoji aproksimativna jedinica $(e_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ u E za C^*-algebru $\mathcal{J}$. Tada je za svaki $y \in \mathcal{J}$
$$y = \lim_{\lambda\in\Lambda} ye_\lambda$$
pa za svaki $y \in \mathcal{J}$ možemo izabrati podniz $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hiperniza $(e_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ takav da je
$$y = \lim_{n\to\infty} yu_n.$$
Za svaki $u \in E$ je $0 \leq u \leq e$, dakle, $\|e - u\| \leq 1$, i, posebno, $\|e - u_n\| \leq 1$ za svaki n. Stoga imamo redom
$$\|x + y\| \geq \liminf_{n\to\infty} \|(x + y)(e - u_n)\| = \liminf_{n\to\infty} \|(x - xu_n) + (y - yu_n)\| =$$
$$= \liminf_{n\to\infty} \|x - xu_n\| \geq \inf\{\|x - xu_n\|;\ n \in \mathbb{N}\},$$
jer je $\lim_{n\to\infty}(y - yu_n) = 0$.

Primjenom dokazane jednakosti nalazimo za svaki $x \in \mathcal{A}$ (računajući gdje je potrebno u algebri $\tilde{\mathcal{A}}$):
$$\|x+\mathcal{J}\|^2 = \inf\{\|x-xu\|^2;\ u \in E\} = \inf\{\|x(e-u)\|^2;\ u \in E\} = \inf\{\|(e-u)x^*x(e-u)\|;\ u \in E\} \leq$$
$$\leq \inf\{\|x^*x(e - u)\|;\ u \in E\} = \inf\{\|x^*x - x^*xu\|;\ u \in E\} = \|x^*x + \mathcal{J}\| = \|(x + \mathcal{J})^*(x + \mathcal{J})\|.$$
Time je dokazana nejednakost
$$\|x + \mathcal{J}\|^2 \leq \|(x + \mathcal{J})^*(x + \mathcal{J})\|.$$
Iz te nejednakosti kao u dokazu teorema 1.9. slijedi C^*-jednakost.

Teorem 3.3. *Neka su $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ C^*-algebre i neka je $\pi\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ $*-$homomorfizam.*

(*a*) *Operator π je neprekidan i norma mu je manja ili jednaka* 1.

(*b*) *Ako je homomorfizam π injektivan, on je izometrija.*

(*c*) *Slika $\pi(\mathcal{A})$ homomorfizma π je zatvorena i to je C^*-podalgebra od $\mathcal{B}$.*

(*d*) *Homomorfizam π inducira izometrički $*-$izomorfizam kvocijentne algebre $\mathcal{A}/\ker\pi$ na algebru $\pi(\mathcal{A})$.*

Dokaz: (*a*) Pretpostavimo prvo da su $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ unitalne C^*-algebre s jedinicama $e_\mathcal{A}$ i $e_\mathcal{B}$ i da je homomorfizam π unitalan, tj. $\pi(e_\mathcal{A}) = e_\mathcal{B}$. Tada π preslikava invertibilne elemente algebre $\mathcal{A}$ u invertibilne elemente algebre $\mathcal{B}$. Odatle slijedi da je $\sigma_\mathcal{B}(\pi(x)) \subseteq \sigma_\mathcal{A}(x)$ za svaki $x \in \mathcal{A}$. Budući da je norma svakog hermitskog (čak i normalnog) elementa unitalne C^*-algebre jednaka njegovom spektralnom radijusu, za svaki $x \in \mathcal{A}$ imamo redom:
$$\|\pi(x)\|^2 = \|\pi(x^*x)\| = \nu(\pi(x^*x)) \leq \nu(x^*x) = \|x^*x\| = \|x\|^2.$$
Time je tvrdnja (*a*) dokazana uz navedene pretpostavke.

Pretpostavimo sada samo da je algebra $\mathcal{A}$ unitalna s jedinicom $e_{\mathcal{A}}$. Možemo pretpostaviti da je slika $\pi(\mathcal{A})$ gusta u $\mathcal{B}$; ako nije tako, možemo bez smanjenja općenitosti promatrati zatvarač slike $\pi(\mathcal{A})$ umjesto C^*-algebre $\mathcal{B}$. $\pi(e_{\mathcal{A}})$ je jedinica za algebru $\pi(\mathcal{A})$, a kako je ova gusta u $\mathcal{B}$ zbog neprekidnosti množenja zaključujemo da je $\pi(e_{\mathcal{A}})$ jedinica u algebri $\mathcal{B}$. U tom slučaju tvrdnja je već dokazana.

Pretpostavimo napokon da je algebra $\mathcal{A}$ neunitalna i neka je $\tilde{\mathcal{A}} = \mathcal{A} \dot{+} \mathbb{C}e_{\mathcal{A}}$ njena unitalizacija. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je algebra $\mathcal{B}$ unitalna; naime, ako nije tako, algebru $\mathcal{B}$ možemo zamijeniti s njenom unitalizacijom. Definiramo sada $\tilde{\pi}\colon \tilde{\mathcal{A}} \to \mathcal{B}$ na sljedeći način:

$$\tilde{\pi}(x + \lambda e_{\mathcal{A}}) = \pi(x) + \lambda e_{\mathcal{B}}, \qquad x \in \mathcal{A},\ \lambda \in \mathbb{C}.$$

Lako se vidi da je na taj način definiran $*-$homomorfizam koji proširuje π. Sada iz dokazanog slijedi da je $\tilde{\pi}$, a time i njegova restrikcija π, neprekidan i norme manje ili jednake 1.

(b) Možemo pretpostavljati da su algebre $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ unitalne i da je homomorfizam π unitalan. Doista, ako nije tako, postupamo jednako kao u dokazu tvrdnje (a). Iz dokaza tvrdnje (a) vidi se da će izometričnost homomorfizma π slijediti ako dokažemo da za svaki hermitski element $z \in \mathcal{A}$ vrijedi jednakost $\sigma_{\mathcal{B}}(\pi(z)) = \sigma_{\mathcal{A}}(z)$. Već znamo da je $\sigma_{\mathcal{B}}(\pi(z)) \subseteq \sigma_{\mathcal{A}}(z)$. Pretpostavimo da ti skupovi nisu jednaki. Tada postoji neprekidna funkcija $f\colon \sigma_{\mathcal{A}}(z) \to \mathbb{R}$, takva da je $f \neq 0$, ali da je $f(\lambda) = 0$ za svaki $\lambda \in \sigma_{\mathcal{B}}(\pi(z))$. Iz Weierstrassovog teorema (korolar 2.3.) slijedi da je funkcija f uniformni limes niza polinoma. Za svaki polinom P je $P(\pi(z)) = \pi(P(z))$. Budući da je homomorfizam π neprekidan odatle slijedi da je $f(\pi(z)) = \pi(f(z))$. Međutim, to je nemoguće jer je $f(z) \neq 0$, $f(\pi(z)) = 0$ i po pretpostavci je π injekcija. Ova kontradikcija pokazuje da je nužno $\sigma_{\mathcal{B}}(\pi(z)) = \sigma_{\mathcal{A}}(z)$, što je i trebalo dokazati.

(d) slijedi iz (b). Ako je π injekcija, onda je prema (b) slika $\pi(\mathcal{A})$ potpuna, dakle zatvorena, podalgebra od $\mathcal{B}$. Zbog (d) slika $\pi(\mathcal{A})$ je zatvorena u $\mathcal{B}$ i ako π nije injekcija. Dakle, vrijedi i (c).

Korolar 3.1. *Neka je $\mathcal{A}$ C^*-algebra s normom $\|\cdot\|$ i neka je i $\|\cdot\|_1$ norma na $\mathcal{A}$ s obzirom na koju je $\mathcal{A}$ također C^*-algebra. Tada je $\|x\|_1 = \|x\|$ za svaki $x \in \mathcal{A}$.*

Dokaz: Tvrdnja slijedi neposrednom primjenom tvrdnje (b) teorema 3.3. jer je identiteta $\mathrm{id}_{\mathcal{A}}$ bijektivni $*-$homomorfizam C^*-algebre $\mathcal{A}$ s normom $\|\cdot\|$ na C^*-algebru $\mathcal{A}$ s normom $\|\cdot\|_1$.

3.4 Reprezentacije

Reprezentacija C^*-algebre $\mathcal{A}$ na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$ je $*-$homomorfizam $\pi\colon \mathcal{A} \to B(\mathcal{H})$. Pri tome je $B(\mathcal{H})$ C^*-algebra ograničenih linearnih operatora na $\mathcal{H}$ na kojoj je norma zadana sa

$$\|A\| = \sup\{\|A\xi\|;\ \xi \in \mathcal{H},\ \|\xi\| \leq 1\}, \qquad A \in B(\mathcal{H}),$$

a involucija je adjungiranje

$$(A^*\xi|\eta) = (\xi|A\eta) \qquad \forall \xi, \eta \in \mathcal{H}.$$

Zatvoren potprostor $\mathcal{K}$ prostora $\mathcal{H}$ zove se $\pi-$**invarijantan** ako je on invarijantan za svaki operator $\pi(x)$, $x \in \mathcal{A}$. U tom slučaju je pomoću restrikcija

$$\pi_{\mathcal{K}}(x) = \pi(x)|\mathcal{K}, \qquad x \in \mathcal{A},$$

definirana reprezentacija $\pi_{\mathcal{K}}$ od $\mathcal{A}$ na Hilbertovom prostoru $\mathcal{K}$ koja se zove **subreprezentacija** od π. Ako je $\mathcal{K}$ $\pi-$invarijantan potprostor onda je i njegov ortogonalni komplement $\mathcal{K}^\perp$ $\pi-$invarijantan. Doista, za $x \in \mathcal{A}$ i za $\xi \in \mathcal{K}^\perp$ imamo za svaki $\eta \in \mathcal{K}$

$$(\pi(x)\xi|\eta) = (\xi|\pi(x^*)\eta) = 0$$

jer je $\pi(x^*)\eta \in \mathcal{K}$. Dakle, $\pi(x)\xi \in \mathcal{K}^\perp$.

Zatvarač $Cl[\pi(\mathcal{A})\mathcal{H}]$ potprostora

$$[\pi(\mathcal{A})\mathcal{H}] = [\{\pi(x)\xi;\ x \in \mathcal{A},\ \xi \in \mathcal{H}\}]$$

očito je $\pi-$invarijantan. Stoga je i njegov ortogonalni komplement $(Cl[\pi(\mathcal{A})\mathcal{H}])^\perp = [\pi(\mathcal{A})\mathcal{H}]^\perp$ $\pi-$invarijantan potprostor. Za $\eta \in \mathcal{H}$ imamo redom

$$\eta \in [\pi(\mathcal{A})\mathcal{H}]^\perp \iff (\pi(x)\xi|\eta) = 0\ \forall \xi \in \mathcal{H} \text{ i } \forall x \in \mathcal{A} \iff$$

$$\iff (\xi|\pi(x^*)\eta) = 0\ \forall \xi \in \mathcal{H} \text{ i } \forall x \in \mathcal{A} \iff \pi(x^*)\eta = 0\ \forall x \in \mathcal{A} \iff \pi(x)\eta = 0\ \forall x \in \mathcal{A}.$$

Reprezentacija π zove se **nedegenerirana** ako je potprostor $[\pi(\mathcal{A})\mathcal{H}]$ gust u $\mathcal{H}$. Prema gornjem to je ekvivalentno uvjetu da iz $\pi(x)\eta = 0\ \forall x \in \mathcal{A}$ slijedi $\eta = 0$. Zbog toga je očito svaka subreprezentacija nedegenerirane reprezentacije i sama nedegenerirana.

Neka je π reprezentacija C^*-algebre $\mathcal{A}$ na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$. Ako je $\xi \in \mathcal{H}$, zatvarač $Cl(\pi(\mathcal{A})\xi)$ potprostora

$$\pi(\mathcal{A})\xi = \{\pi(x)\xi;\ x \in \mathcal{A}\}.$$

je očito invarijantan i zove se **ciklički potprostor**. **Reprezentacija** π se zove **ciklička**, odnosno, čitav se prostor $\mathcal{H}$ zove **ciklički prostor**, ako postoji vektor $\xi \in \mathcal{H}$ takav da je potprostor $\pi(\mathcal{A})\xi$ gust u $\mathcal{H}$. U tom se slučaju ξ zove **ciklički vektor** reprezentacije π.

Teorem 3.4. *Neka je π nedegenerirana reprezentacija C^*-algebre $\mathcal{A}$ na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$. Postoji skup cikličkih invarijantnih potprostora koji su međusobno ortogonalni i čija je suma gusta u $\mathcal{H}$.*

Dokaz: Neka je $\mathcal{P}$ skup svih skupova međusobno ortogonalnih cikličkih potprostora od $\mathcal{H}$. Taj je skup parcijalno uređen inkluzijom. Ako je $\mathcal{R}$ neki njegov linearno uređen podskup, onda je unija svih skupova iz $\mathcal{R}$ očito element od $\mathcal{P}$ i to je gornja međa za $\mathcal{R}$. Prema tome, parcijalno uređen skup $\mathcal{P}$ zadovoljava uvjet Zornove leme, pa u $\mathcal{P}$ postoji neki maksimalan element X. To znači da je X skup međusobno ortogonalnih cikličkih potprostora i ne postoji $Y \in \mathcal{P}$ takav da je $X \subsetneq Y$. Neka je ΣX suma svih potprostora iz X. Pretpostavimo da ΣX nije gust u $\mathcal{H}$. Tada je $\mathcal{K} = (\Sigma X)^\perp \neq \{0\}$. $\mathcal{K}$ je $\pi-$invarijantan potprostor od $\mathcal{H}$. Subreprezentacija $\pi_\mathcal{K}$ je nedegenerirana, pa $\mathcal{K}$ sadrži neki ciklički potprostor $\mathcal{L}$. No tada je $X \cup \{\mathcal{L}\} \in \mathcal{P}$ i $X \subsetneq X \cup \{\mathcal{L}\}$. To je nemoguće zbog maksimalnosti X u $\mathcal{P}$. Ova kontradikcija pokazuje da je ΣX gusto u $\mathcal{H}$.

Neka su π i σ reprezentacije C^*-algebre $\mathcal{A}$ na Hilbertovim prostorima $\mathcal{H}$ i $\mathcal{K}$. Reprezentacije π i σ zovu se **ekvivalentne** ako postoji izometrički izomorfizam $U\colon \mathcal{H} \to \mathcal{K}$, takav da je

$$U\pi(x) = \sigma(x)U\ \ \forall x \in \mathcal{A}.$$

Primijetimo da je ograničen operator $U \in B(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ izometrički izomorfizam sa $\mathcal{H}$ na $\mathcal{K}$ ako i samo ako je $UU^* = I_\mathcal{K}$ i $U^*U = I_\mathcal{H}$. Dakle, gornji se uvjet može zapisati i ovako:

$$U\pi(x)U^* = \sigma(x)\ \ \forall x \in \mathcal{A}.$$

U tom slučaju pišemo $\pi \sim \sigma$. Očito je $\sim$ relacija ekvivalencije na skupu svih reprezentacija C^*-algebre $\mathcal{A}$.

Teorem 3.5. *Neka je $\mathcal{J}$ zatvoren obostrani ideal u C^*-algebri $\mathcal{A}$ i neka je π nedegenerirana reprezentacija C^*-algebre $\mathcal{J}$ na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$. Postoji jedinstveno proširenje π do reprezentacije $\tilde{\pi}$ C^*-algebre $\mathcal{A}$ na prostoru $\mathcal{H}$. Ako su π i σ ekvivalentne nedegenerirane reprezentacije od $\mathcal{J}$, onda su njihova proširenja $\tilde{\pi}$ i $\tilde{\sigma}$ ekvivalentne reprezentacije od $\mathcal{A}$.*

Dokaz: Dokazat ćemo da za svaki $x \in \mathcal{A}$ postoji jedinstven $\tilde{\pi}(x) \in B(\mathcal{H})$ takav da vrijedi $\tilde{\pi}(x)\pi(y) = \pi(xy)\ \forall y \in \mathcal{J}$. Jedinstvenost je očita posljedica nedegeneriranosti reprezentacije π od $\mathcal{J}$ na $\mathcal{H}$. Ostaje nam da dokažemo egzistenciju.

Pretpostavimo najprije da je reprezentacija π ciklička, tj. da postoji $\xi \in \mathcal{H}$ takav da je potprostor $\pi(\mathcal{J})\xi$ gust u $\mathcal{H}$. Tvrdimo da je tada

$$\|\pi(xy)\xi\| \leq \|x\| \cdot \|\pi(y)\xi\|, \qquad \forall x \in \mathcal{A} \text{ i } \forall y \in \mathcal{J}.$$

Doista, neka je $y \in \mathcal{J}$ i neka je $(e_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ aproksimativna jedinica C^*-algebre $\mathcal{J}$. Tada je

$$y = \lim_{\lambda\in\Lambda} e_\lambda y$$

pa za svaki $x \in \mathcal{A}$ imamo

$$\|\pi(xy)\xi\| = \lim_{\lambda\in\Lambda} \|\pi(xe_\lambda y)\xi\| = \lim_{\lambda\in\Lambda} \|\pi(xe_\lambda)\pi(y)\xi\| \leq \sup_{\lambda\in\Lambda} \|xe_\lambda\| \cdot \|\pi(y)\xi\| \leq \|x\| \cdot \|\pi(y)\xi\|,$$

kao što smo i tvrdili. Iz dokazane nejednakosti slijedi da je za svaki $x \in \mathcal{A}$ sa $\pi(y)\xi \mapsto \pi(xy)\xi$ dobro definiran ograničen linearan operator na normiranom prostoru $\pi(\mathcal{J})\xi$. Taj je potprostor gust u $\mathcal{H}$, pa zaključujemo da postoji ograničen linearan operator $\tilde{\pi}(x)\colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ takav da je $\tilde{\pi}(x)\pi(y) = \pi(xy),\ x \in \mathcal{A},\ y \in \mathcal{J}$.

U općem slučaju prema teoremu 3.4. postoje međusobno ortogonalni ciklički potprostori $\mathcal{H}_i$, $i \in I$, čija je suma $\Sigma_i\mathcal{H}_i$ gusta u $\mathcal{H}$. Prema dokazanom za svaki $i \in I$ i za svaki $x \in \mathcal{A}$ postoji $\rho_i(x) \in B(\mathcal{H}_i)$ takav da je

$$\rho_i(x)\pi(y)|\mathcal{H}_i = \pi(xy)|\mathcal{H}_i \qquad \forall y \in \mathcal{J} \qquad \text{i} \qquad \|\rho_i(x)\| \leq \|x\|.$$

Definiramo $\rho(x)\colon \Sigma_i\mathcal{H}_i \to \Sigma_i\mathcal{H}_i$ tako da stavimo $\rho(x)|\mathcal{H}_i = \rho_i(x),\ i \in I$. Tada je $\rho(x)$ ograničen linearan operator na potrostoru $\Sigma_i\mathcal{H}_i$. No taj potprostor je gust u $\mathcal{H}$ pa se $\rho(x)$ proširuje do $\tilde{\pi}(x) \in B(\mathcal{H})$ s traženim svojstvom $\tilde{\pi}(x)\pi(y) = \pi(xy)$, $x \in \mathcal{A}$, $y \in \mathcal{J}$.

Iz jedinstvenosti operatora $\tilde{\pi}(x)$ sa zadanim svojstvom neposredno slijedi da je $\tilde{\pi}$ reprezentacija C^*-algebre $\mathcal{A}$ na prostoru $\mathcal{H}$ koja proširuje reprezentaciju π od $\mathcal{J}$ i to proširenje je jedinstveno. Time je dokazana prva tvrdnja teorema 3.5.

Dokažimo i drugu tvrdnju. Neka je $U \in B(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ izometrički izomorfizam takav da je

$$U\pi(y) = \sigma(y)U \qquad \forall y \in \mathcal{J}.$$

Tada za jedinstvena proširenja $\tilde{\pi}$ i $\tilde{\sigma}$ i za svaki $x \in \mathcal{A}$, $y \in \mathcal{J}$ i $\xi \in \mathcal{H}$ vrijedi:

$$U\tilde{\pi}(x)\pi(y)\xi = U\pi(xy)\xi = \sigma(xy)U\xi = \tilde{\sigma}(x)\sigma(y)U\xi = \tilde{\sigma}(x)U\pi(y)\xi.$$

Kako je reprezentacija π od $\mathcal{J}$ nedegenerirana, vektori $\pi(y)\xi$ razapinju gust potprostor od $\mathcal{H}$, pa slijedi $U\tilde{\pi}(x) = \tilde{\sigma}(x)U$ za svaki $x \in \mathcal{A}$. Dakle, reprezentacije $\tilde{\pi}$ i $\tilde{\sigma}$ su ekvivalentne.

3.5 Ireducibilne reprezentacije

Reprezentacija π C^*-algebre $\mathcal{A}$ na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$ zove se **reducibilna** ako postoji $\pi-$invarijantan potprostor od $\mathcal{H}$ koji je netrivijalan, odnosno koji je različit od $\{0\}$ i od $\mathcal{H}$. Ako netrivijalan $\pi-$invarijantan potprostor ne postoji, reprezentacija π zove se **ireducibilna**. To znači da nijedan netrivijalan hermitski projektor ne komutira sa svim operatorima $\pi(x)$, $x \in \mathcal{A}$. Očito je svaka ireducibilna reprezentacija na prostoru koji nije jednodimenzionalan nedegenerirana. Reprezentacija $\pi \neq 0$ je ireducibilna ako i samo ako je za svaki $\xi \in \mathcal{H}$, $\xi \neq 0$, potprostor $\pi(\mathcal{A})\xi$ gust u $\mathcal{H}$.

Teorem 3.6. *Neka je $\mathcal{A}$ C^*-algebra, $\mathcal{J}$ zatvoren obostrani ideal u $\mathcal{A}$ i π ireducibilna reprezentacija od $\mathcal{A}$ na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$. Ako je $\mathcal{J} \not\subseteq \ker\pi$, tj. $\pi(\mathcal{J}) \neq \{0\}$, onda je restrikcija $\pi|\mathcal{J}$ ireducibilna reprezentacija C^*-algebre $\mathcal{J}$ na prostoru $\mathcal{H}$. Nadalje, ako za ireducibilne reprezentacije π i σ od $\mathcal{A}$ vrijedi $\pi(\mathcal{J}) \neq \{0\}$ i $\sigma(\mathcal{J}) \neq \{0\}$ i ako su reprezentacije $\pi|\mathcal{J}$ i $\sigma|\mathcal{J}$ od $\mathcal{J}$ ekvivalentne, onda su reprezentacije π i σ ekvivalentne.*

Dokaz: Za prvu tvrdnju dovoljno je dokazati da je potprostor $\pi(\mathcal{J})\xi$ gust u $\mathcal{H}$ za svaki $\xi \in \mathcal{H}$, $\xi \neq 0$. Kako je $\mathcal{J}$ ideal u $\mathcal{A}$ očito je zatvarač $Cl(\pi(\mathcal{J})\xi)$ potprostora $\pi(\mathcal{J})\xi$ $\pi-$invarijantan potprostor od $\mathcal{H}$. Budući da je reprezentacija π ireducibilna, slijedi da je $Cl(\pi(\mathcal{J})\xi) = \mathcal{H}$ ili je $Cl(\pi(\mathcal{J})\xi) = \{0\}$. U drugom slučaju je $\pi(y)\xi = 0$ $\forall y \in \mathcal{J}$. Odatle imamo redom:

$$(\pi(y)\xi|\eta) = 0 \quad \forall y \in \mathcal{J},\ \forall \eta \in \mathcal{H} \quad \Longrightarrow \quad (\xi|\pi(y)\eta) = 0 \quad \forall y \in \mathcal{J},\ \forall \eta \in \mathcal{H} \quad \Longrightarrow \quad \xi \perp [\pi(\ J)\mathcal{H}].$$

Dakle, $[\pi(\mathcal{J})\mathcal{H}]^\perp \neq \{0\}$. No taj je potprostor $\pi-$invarijantan, pa zbog ireducibilnosti slijedi $[\pi(\mathcal{J})\mathcal{H}]^\perp = \mathcal{H}$. Odatle bi slijedilo da je $\pi(\mathcal{J}) = \{0\}$. No to je suprotno pretpostavci. Ova kontradikcija pokazuje da za svaki vektor $\xi \neq 0$ vrijedi $Cl(\pi(\mathcal{J})\xi) = \mathcal{H}$ i time je dokazano da je reprezentacija $\pi|\mathcal{J}$ ireducibilna.

Druga tvrdnja slijedi neposredno iz druge tvrdnje teorema 3.5.

Već smo spomenuli da je reprezentacija π C^*-algebre $\mathcal{A}$ na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$ ireducibilna ako i samo ako nema hermitskog projektora $P \in B(\mathcal{H})$ različitog od 0 i od I koji komutira sa svim operatorima $\pi(x)$, $x \in \mathcal{A}$. Stoga je u sljedećem teoremu jedna implikacija trivijalna:

Teorem 3.7. *Neka je π reprezentacija C^*-algebre $\mathcal{A}$ na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$. Reprezentacija π je ireducibilna ako i samo ako je*

$$\{A \in B(\mathcal{H});\ A\pi(x) = \pi(x)A\ \forall x \in \mathcal{A}\} = \mathbb{C}I = \{\lambda I;\ \lambda \in \mathbb{C}\}.$$

Dokaz: Pretpostavimo da vrijedi gornja jednakost. Neka je $P \in B(\mathcal{H})$ hermitski projektor takav da je $P\pi(x) = \pi(x)P$ za svaki $x \in \mathcal{A}$. Tada je $P = \lambda I$ za neki $\lambda \in \mathbb{C}$, a kako je P projektor, slijedi $\lambda^2 = \lambda$, dakle, ili je $\lambda = 0$ ili je $\lambda = 1$. To znači da je ili $P = 0$ ili je $P = I$, pa zaključujemo da je reprezentacija π ireducibilna.

Da dokažemo obrnutu implikaciju, treba nam *spektralni teorem za hermitske operatore na Hilbertovom prostoru.* Taj ćemo teorem sada obrazložiti i iskazati bez dokaza. (Radi se o teoremu 5.6. u kolegiju "*Kompaktni operatori*"). Prije svega, ako je $A \in B(\mathcal{H})$ hermitski operator koji je pozitivan, tj. takav da vrijedi $(A\xi|\xi) \geq 0$ $\forall \xi \in \mathcal{H}$, onda postoji jedinstven pozitivan operator B takav da je $B^2 = A$. Operator B zove se *drugi korijen iz operatora* A i označava sa $\sqrt{A}$. Ta je tvrdnja dokazana u kolegiju "*Kompaktni operatori*", a jednostavno slijedi i korištenjem funkcionalnog računa. Operator $\sqrt{A}$ ima svojstvo

$$\forall C \in B(\mathcal{H}), \qquad \sqrt{A}C = C\sqrt{A} \qquad \Longleftrightarrow \qquad AC = CA.$$

Ako je operator $A \in B(\mathcal{H})$ hermitski, onda je operator A^2 pozitivan. Definiramo tada operatore

$$A_+ = \frac{1}{2}\left(\sqrt{A^2} + A\right) \quad \text{i} \quad A_- = \frac{1}{2}\left(\sqrt{A^2} - A\right).$$

Pokazuje se da su tada operatori A_+ i A_- pozitivni i da vrijedi $A = A_+ - A_-$.

Za hermitski operator A i za $\lambda \in \mathbb{R}$ operator $\lambda I - A$ je također hermitski. Označimo sa E_λ ortogonalni projektor prostora $\mathcal{H}$ na jezgru $N((\lambda I - A)_-)$ operatora $(\lambda I - A)_-$. Tada se $\lambda \mapsto E_\lambda$ zove *spektralna funkcija hermitskog operatora A.*

Teorem 3.8. (**Spektralni teorem za ograničeni hermitski operator**) *Neka je $\lambda \mapsto E_\lambda$ spektralna funkcija hermitskog operatora $A \in B(\mathcal{H})$.*

(*a*) *Za $C \in B(\mathcal{H})$ vrijedi $AC = CA$ ako i samo ako je $E_\lambda C = CE_\lambda$ $\forall \lambda \in \mathbb{R}$.*

(*b*) *Za $\lambda \leq \mu$ vrijedi $E_\lambda E_\mu = E_\mu E_\lambda = E_\lambda$.*

(*c*) *Za svaki vektor $\xi \in \mathcal{H}$ funkcija $\lambda \mapsto E_\lambda \xi$ sa $\mathbb{R}$ u $\mathcal{H}$ je zdesna neprekidna, tj. za svaki $\lambda \in \mathbb{R}$ vrijedi*

$$\lim_{\mu \searrow \lambda} E_\mu \xi = E_\lambda \xi.$$

(*d*) *Stavimo*

$$m = \inf \{(A\xi|\xi);\ \xi \in \mathcal{H},\ \|\xi\| = 1\} \quad i \quad M = \sup \{(A\xi|\xi);\ \xi \in \mathcal{H},\ \|\xi\| = 1\}.$$

Tada vrijedi

$$\lambda < m \quad \Longrightarrow \quad E_\lambda = 0 \qquad i \qquad \lambda \geq M \quad \Longrightarrow \quad E_\lambda = I.$$

(*e*) *Neka su m i M kao u (d) i neka su $a < m$ i $b \geq M$. Neka je $P = \{\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ bilo koja subdivizija segmenta $[a, b]$:*

$$a = \lambda_0 < \lambda_1 < \cdots < \lambda_{n-1} < \lambda_n = b.$$

Tada vrijedi

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_{k-1}(E_{\lambda_k} - E_{\lambda_{k-1}}) \leq A \leq \sum_{k=1}^{n} \lambda_k (E_{\lambda_k} - E_{\lambda_{k-1}}).$$

Nadalje, uz oznaku $\delta(P) = \max\{\lambda_k - \lambda_{k-1};\ 1 \leq k \leq n\}$ i za bilo koje $\nu_k \in [\lambda_{k-1}, \lambda_k]$, $1 \leq k \leq n$, vrijedi

$$\left\| A - \sum_{k=1}^{n} \nu_k (E_{\lambda_k} - E_{\lambda_{k-1}}) \right\| \leq \delta(P).$$

Prijeđimo sada na dokaz druge implikacije u teoremu 3.7. Pretpostavimo da je reprezentacija π C^*−algebre $\mathcal{A}$ na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$ ireducibilna. Očito je

$$\mathbb{C}I \subseteq \{A \in B(\mathcal{H});\ A\pi(x) = \pi(x)A\ \forall x \in \mathcal{A}\}.$$

Treba još dokazati obrnutu inkluziju tj. treba dokazati da vrijedi:

$$A \in B(\mathcal{H}), \quad A\pi(x) = \pi(x)A \quad \forall x \in \mathcal{A} \qquad \Longrightarrow \qquad A = \lambda I \quad \text{za neki } \lambda \in \mathbb{C}.$$

Pretpostavimo najprije da je operator A hermitski. Neka je $\lambda \mapsto E_\lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$, spektralna funkcija operatora A. Prema tvrdnji (*a*) spektralnog teorema 3.8. tada vrijedi

$$E_\lambda \pi(x) = \pi(x) E_\lambda \qquad \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \text{i} \quad \forall x \in \mathcal{A}.$$

Svaki E_λ je ortogonalni projektor pa iz ireducibilnosti reprezentacije π slijedi da je za svaki $\lambda \in \mathbb{R}$ ili $E_\lambda = 0$ ili $E_\lambda = I$. Sada iz tvrdnje (b) spektralnog teorema zaključujemo da postoji $\mu \in \mathbb{R}$ takav da je $E_\lambda = 0$ $\forall \lambda < \mu$ i $E_\lambda = I$ $\forall \lambda > \mu$. Nadalje, zbog neprekidnosti zdesna (tvrdnja (c) spektralnog teorema) vrijedi $E_\mu = I$. Dakle, vrijedi

$$\lambda < \mu \quad \Longrightarrow \quad E_\lambda = 0, \qquad\qquad \lambda \geq \mu \quad \Longrightarrow \quad E_\lambda = I.$$

Neka su m, M, a, b kao u spektralnom teoremu:

$$m = \inf\{(A\xi|\xi);\ \xi \in \mathcal{H},\ \|\xi\| = 1\}, \quad M = \sup\{(A\xi|\xi);\ \xi \in \mathcal{H},\ \|\xi\| = 1\}, \quad a < m, \quad b \geq M.$$

Neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljan i neka je $P = \{\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ subdivizija segmenta $[a, b]$ takva da je $\lambda_k = \mu$ za neki $k \in \{1, \ldots, n-1\}$ i da je $\delta(P) \leq \varepsilon$, tj. $|\lambda_j - \lambda_{j-1}| \leq \varepsilon$ $\forall j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Stavimo

$$B = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j (E_{\lambda_j} - E_{\lambda_{j-1}}).$$

Prema tvrdnji (e) spektralnog teorema tada je $\|A - B\| \leq \varepsilon$. Nadalje,

$$E_{\lambda_0} = E_{\lambda_1} = \cdots = E_{\lambda_{k-1}} = 0 \quad \text{i} \quad E_{\lambda_k} = E_{\lambda_{k+1}} = \cdots = E_{\lambda_n} = I.$$

Prema tome,

$$E_{\lambda_j} - E_{\lambda_{j-1}} = \begin{cases} 0 & \text{ako je } 1 \leq j \leq k-1 \\ I & \text{ako je } j = k \\ 0 & \text{ako je } k+1 \leq j \leq n, \end{cases}$$

pa slijedi

$$B = \lambda_k I = \mu I.$$

Na taj način dokazali smo da je $\|A - \mu I\| \leq \varepsilon$, a kako je $\varepsilon > 0$ bio proizvoljan, zaključujemo da je $A = \mu I$.

Neka je sada da je $A \in B(\mathcal{H})$ proizvoljan (tj. ne nužno hermitski) i da vrijedi $A\pi(x) = \pi(x)A$ $\forall x \in \mathcal{A}$. Adjungiranjem te jednakosti zbog $\pi(x)^* = \pi(x^*)$ i zbog $\mathcal{A}^* = \mathcal{A}$ imamo redom

$$\pi(x)^* A^* = A^* \pi(x)^*\ \forall x \in \mathcal{A} \implies \pi(x^*) A^* = A^* \pi(x^*)\ \ \forall x \in \mathcal{A} \implies \pi(x) A^* = A^* \pi(x)\ \forall x \in \mathcal{A}.$$

Stavimo sada $A_1 = \frac{1}{2}(A + A^*)$ i $A_2 = \frac{1}{2i}(A - A^*)$. Tada je $A = A_1 + iA_2$, operatori A_1 i A_2 su hermitski i vrijedi

$$A_1 \pi(x) = \pi(x) A_1\ \forall x \in \mathcal{A} \quad \text{i} \quad A_2 \pi(x) = \pi(x) A_2\ \forall x \in \mathcal{A}.$$

Prema dokazanom postoje $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$ takvi da je $A_1 = \mu_1 I$ i $A_2 = \mu_2 I$. Sada za $\lambda = \mu_1 + i\mu_2 \in \mathbb{C}$ imamo

$$A = A_1 + iA_2 = \mu_1 I + i\mu_2 I = \lambda I.$$

Time je teorem u potpunosti dokazan.

3.6 Pozitivni funkcionali i reprezentacije

U daljnjem (sve do pred kraj ovog odjeljka) $\mathcal{A}$ predstavlja unitalnu C^*−algebru. Jedinicu ćemo označavati sa e.

Linearni funkcional f na $\mathcal{A}$ zove se **pozitivan**, ako je $f(x) \geq 0 \ \forall x \in \mathcal{A}_+$. Primijetimo da u definiciji pozitivnog funkcionala ne pretpostavljamo da je taj funkcional ograničen. Ipak, to će biti posljedica definicije.

Neka je π reprezentacija od $\mathcal{A}$ na Hilbertovom prostoru i neka je $\xi \in \mathcal{H}$. Tada je sa

$$f(x) = (\pi(x)\xi|\xi), \qquad x \in \mathcal{A},$$

definiran pozitivan linearan funkcional f na $\mathcal{A}$. Dokazat ćemo da se na taj način može dobiti svaki pozitivan linearan funkcional na $\mathcal{A}$.

Za svaki linearan funkcional f na C^*−algebri $\mathcal{A}$ relacijom

$$[x|y]_f = f(y^*x), \qquad x, y \in \mathcal{A},$$

definiran je seskvilinearan funkcional $[\cdot|\cdot]_f$ na $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$. Ako je funkcional f pozitivan, seskvilinearan funkcional $[\cdot|\cdot]_f$ je pozitivno semidefinitan, tj. vrijedi $[x|x]_f \geq 0 \ \forall x \in \mathcal{A}$. Tada vrijedi CBS−nejednakost (nejednakost Cauchy−Schwartz−Buniakowskog) koja iskazana pomoću f poprima oblik

$$|f(y^*x)|^2 \leq f(x^*x)f(y^*y) \qquad \forall x, y \in \mathcal{A}.$$

Teorem 3.9. (a) *Ako je f pozitivan funkcional na $\mathcal{A}$, onda je f ograničen i $\|f\| = f(e)$.*

(b) *Ako za ograničen linearni funkcional f na $\mathcal{A}$ vrijedi $\|f\| = f(e)$, onda je funkcional f pozitivan.*

Dokaz: (a) Neka je f pozitivan funkcional na $\mathcal{A}$ i neka je $z \in \mathcal{A}$, $\|z\| \leq 1$. Primjenom Schwarzove nejednakosti nalazimo

$$|f(z)|^2 = |f(e^*z)|^2 \leq f(z^*z)f(e^*e) = f(z^*z)f(e).$$

Dakle, da bismo dokazali da je f ograničen i da je $\|f\| \leq f(e)$ dovoljno je dokazati da vrijedi $f(z^*z) \leq f(e)$, odnosno da je $f(e - z^*z) \geq 0$. Međutim, kako je $\|z^*z\| = \|z\|^2 \leq 1$, za pozitivan element z^*z vrijedi $\sigma(z^*z) \subseteq [0, 1]$. Odatle je i $\sigma(e - z^*z) \subseteq [0, 1]$. Posebno, $e - z^*z \in \mathcal{A}_+$, pa slijedi $f(e - z^*z) \geq 0$. Time je dokazano da je f ograničen i da je $\|f\| \leq f(e)$. Obrnuta nejednakost $\|f\| \geq f(e)$ je evidentna, jer je $\|e\| = 1$.

(b) Neka je f ograničen linearan funkcional na $\mathcal{A}$ za koji je $\|f\| = f(e)$.

Dokažimo najprije da je $f(x) \in \mathbb{R}$ za svaki hermitski element $x \in \mathcal{A}$. Dodatna pretpostavka $\|x\| \leq 1$ ne smanjuje općenitost. Neka je, dakle, $x \in \mathcal{A}$, $x^* = x$, $\|x\| \leq 1$. Stavimo $f(x) = \alpha + i\beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Ukoliko je potrebno, zamijenimo x sa $-x$ da postignemo da je $\beta \geq 0$. Za bilo koji prirodan broj $r > 0$ imamo

$$\|re - ix\|^2 = \|(re - ix)^*(re - ix)\| = \|(re + ix)(re - ix)\| = \|r^2e + x^2\| \leq \|r^2e\| + \|x^2\| = r^2 + \|x\|^2,$$

a kako je $\|x\| \leq 1$ zaključujemo da je

$$\|re - ix\|^2 \leq r^2 + 1 \qquad \forall r > 0. \tag{3.4}$$

S druge strane, kako je $f(e) = \|f\|$, imamo

$$f(re - ix) = rf(e) - if(x) = r\|f\| + \beta - i\alpha,$$

dakle,

$$|f(re - ix)|^2 = (r\|f\| + \beta)^2 + \alpha^2 \qquad \forall r > 0. \tag{3.5}$$

Iz (3.4) i (3.5) dobivamo

$$(r\|f\| + \beta)^2 + \alpha^2 = |f(re - ix)|^2 \le \|f\|^2\|re - ix\|^2 \le (r^2 + 1)\|f\|^2,$$

pa slijedi

$$r^2\|f\|^2 + 2r\beta\|f\| + \beta^2 + \alpha^2 \le (r^2 + 1)\|f\|^2 \qquad \Longrightarrow \qquad 2r\beta\|f\| + \alpha^2 + \beta^2 \le \|f\|^2.$$

Kako to vrijedi za svaki $r > 0$, vidi se da nije moguće da je $\beta > 0$. Zaključujemo da je $\beta = 0$, tj. $f(x) = \alpha \in \mathbb{R}$. Time je dokazano da je $f(x) \in \mathbb{R}$ za svaki hermitski element $x \in \mathcal{A}$.

Treba dokazati da je $f(x) \ge 0$ za svaki $x \in \mathcal{A}_+$. Pretpostavimo da nije tako i neka je $x \in \mathcal{A}_+$ takav da $f(x) \not\ge 0$. Budući da je svaki pozitivan element hermitski, iz dokazanog slijedi da je tada $f(x) < 0$. Stavimo

$$g = \frac{1}{\|f\|}f \qquad (\text{tada je } \|g\| = g(e) = 1\,) \qquad \text{i} \qquad y = x - \frac{1}{2}\|x\|e.$$

Tada je $g(x) < 0$. Nadalje, budući da je element x pozitivan, vrijedi

$$\sigma(x) \subseteq [0, \|x\|] \qquad \Longrightarrow \qquad \sigma(y) \subseteq \left[-\frac{1}{2}\|x\|, \frac{1}{2}\|x\|\right].$$

Element y je hermitski pa mu je norma jednaka spektralnom radijusu. Slijedi $\|y\| \le \frac{1}{2}\|x\|$. Kako je $\|g\| = 1$, odatle slijedi $|g(y)| \le \frac{1}{2}\|x\|$. S druge strane, kako je $g(e) = 1$ i $g(x) < 0$, imamo

$$g(y) = g(x) - \frac{1}{2}\|x\| < -\frac{1}{2}\|x\| \qquad \Longrightarrow \qquad |g(y)| > \frac{1}{2}\|x\|.$$

Ova kontradikcija pokazuje da je pretpostavka $f(x) < 0$ za neki $x \in \mathcal{A}_+$ netočna. Dakle, funkcional f je pozitivan.

Lema 3.5. *Neka je f pozitivan funkcional na unitalnoj C^*-algebri $\mathcal{A}$. Tada vrijedi*

$$f(z^*) = \overline{f(z)} \qquad \forall z \in \mathcal{A}.$$

Nadalje, seskvilinearan funkcional definiran na $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$ sa

$$[x, y]_f = f(y^*x), \qquad x, y \in \mathcal{A},$$

je hermitski, tj. vrijedi $[y, x]_f = \overline{[x, y]_f}$.

Zadatak 3.9. *Dokažite lemu 3.5.*

Uputa: Iskoristite lemu 3.2. da dokažete da je $f(x) \in \mathbb{R}$ za svaki hermitski element $x \in \mathcal{A}$.

Teorem 3.10. (**Geljfand−Naimark−Segal**) *Neka je f pozitivni linearni funkcional na $\mathcal{A}$. Postoji ciklička reprezentacija π C^*-algebre $\mathcal{A}$ na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$ s cikličkim vektorom $\xi \in \mathcal{H}$ tako da je $f(x) = (\pi(x)\xi|\xi)$ za svaki $x \in \mathcal{A}$.*

Dokaz: Kao prije definiramo pozitivno semidefinitan seskvilinearan funkcional $[\cdot,\cdot]_f$ na $\mathcal{A}\times\mathcal{A}$, koji je prema lemi 3.5. hermitski:

$$[x,y]_f = f(y^*x), \qquad x,y\in\mathcal{A}.$$

Neka je za $x\in\mathcal{A}$ $\pi_0(x)\in B(\mathcal{A})$ definiran kao množenje slijeva sa x :

$$\pi_0(x)y = xy, \qquad y\in\mathcal{A}.$$

Za $x,y,z\in\mathcal{A}$ imamo

$$[\pi_0(x)y,z]_f = [xy,z]_f = f(z^*xy) = f((x^*z)^*y) = [y,x^*z]_f = [y,\pi_0(x^*)z]_f.$$

Neka je $z\in\mathcal{A}$ takav da je $[z,z]_f=0$. Zbog CBS$-$nejednakosti tada slijedi da je $[x,z]_f=0$ $\forall x\in\mathcal{A}$. To pokazuje da je

$$N=\{z\in\mathcal{A};\ [z,z]_f=0\}=\{z\in\mathcal{A};\ f(z^*z)=0\}$$

potprostor vektorskog prostora $\mathcal{A}$. Nadalje, zbog $[y,\pi_0(x)z]_f=[x^*y,z]_f$ vidimo da je potprostor N invarijantan s obzirom na sve operatore $\pi_0(x)$, $x\in\mathcal{A}$. To omogućuje da za svaki $x\in\mathcal{A}$ definiramo linearan operator $\pi(x)\colon \mathcal{A}/N\to\mathcal{A}/N$:

$$\pi(x)(y+N)=\pi_0(x)y+N=xy+N, \qquad y\in\mathcal{A}.$$

Nadalje, na kvocijentnom prostoru možemo definirati skalarni produkt:

$$(x+N|y+N)=[x,y]_f, \qquad x,y\in\mathcal{A}.$$

Lako se vidi da je tada π homomorfizam algebre $\mathcal{A}$ u algebru linearnih operatora na $\mathcal{A}/N$ i da vrijedi

$$(\pi(x)\xi|\eta)=(\xi|\pi(x^*)\eta), \qquad \xi,\eta\in\mathcal{A}/N,\ x\in\mathcal{A}.$$

Dokažimo sada da je svaki operator $\pi(x)$, $x\in\mathcal{A}$, na unitarnom prostoru $\mathcal{A}/N$ ograničen. Za $x\in\mathcal{A}$ i za svaki $y\in\mathcal{A}$ i $\eta=y+N\in\mathcal{A}/N$ imamo

$$\|\pi(x)\eta\|^2=(xy+N|xy+N)=[xy,xy]_f=f(y^*x^*xy).$$

Za fiksno $y\in\mathcal{A}$ definiramo linearan funkcional g na $\mathcal{A}$ relacijom $g(z)=f(y^*zy)$, $z\in\mathcal{A}$. Iz pozitivnosti f slijedi da za svaki $z\in\mathcal{A}$ vrijedi

$$g(z^*z)=f(y^*z^*zy)=f((zy)^*(zy))\geq 0.$$

Prema svojstvu (c) teorema 3.1. slijedi da je funkcional g pozitivan. Prema tvrdnji (a) teorema 3.9. slijedi da je $\|g\|=g(e)=f(y^*y)$. Stoga imamo

$$\|\pi(x)\eta\|^2=f(y^*x^*xy)=g(x^*x)\leq f(y^*y)\|x^*x\|=\|x\|^2[y,y]_f=\|x\|^2(\eta|\eta)=\|x\|^2\|\eta\|^2.$$

Time je dokazano da je svaki operator $\pi(x)$, $x\in\mathcal{A}$, na unitarnom prostoru $\mathcal{A}/N$ ograničen i da je $\|\pi(x)\|\leq\|x\|$.

Neka je sada $\mathcal{H}$ upotpunjenje unitarnog prostora $\mathcal{A}/N$. Zbog ograničenosti svaki se operator $\pi(x)$, $x\in\mathcal{A}$, na jedinstven način proširuje do ograničenog operatora na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$, kojeg ćemo također označiti sa $\pi(x)$. Preslikavanje $x\mapsto\pi(x)$ je homomorfizam algebre $\mathcal{A}$ u algebru $B(\mathcal{H})$ i vrijedi

$$(\pi(x)\xi|\eta)=(\xi|\pi(x^*)\eta), \qquad \forall\xi,\eta\in\mathcal{H}\ \forall x\in\mathcal{A}.$$

Dakle, π je reprezentacija C^*-algebre $\mathcal{A}$ na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$. Napokon, za vektor $\xi = e + N \in \mathcal{A}/N \subseteq \mathcal{H}$ i za svaki $x \in \mathcal{A}$ imamo

$$(\pi(x)\xi|\xi) = [xe, e]_f = f(exe) = f(x).$$

Dakle, svaki pozitivni linearni funkcional f na C^*-algebri $\mathcal{A}$ može se prikazati u obliku $f(x) = (\pi(x)\xi|\xi)$, gdje je π reprezentacija od $\mathcal{A}$ na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$ i $\xi \in \mathcal{H}$. Treba još samo primijetiti da možemo postići da je reprezenacija π ciklička i da je ξ njen ciklički vektor. Doista, ako nije tako, možemo $\mathcal{H}$ zamijeniti njegovim cikličkim zatvorenim invarijantnim potprostorom $\mathcal{K} = Cl(\pi(\mathcal{A})\xi)$ i reprezentaciju π njenom cikličkom subreprezentacijom $\sigma = \pi_{\mathcal{K}}$; tada evidentno vrijedi $f(x) = (\sigma(x)\xi|\xi)\ \forall x \in \mathcal{A}$.

U cijelom ovom poglavlju pretpostavljali smo da je promatrana C^*-algebra unitalna. Analogni rezultati za neunitalne C^*-algebre mogu se izvesti iz dokazanog pomoću unitalizacije. No često je svrhovitije, posebno u teoriji reprezentacija, raditi s neproširenom C^*-algebrom. U tu svrhu možemo upotrijebiti teorem 3.2. odnosno egzistenciju aproksimativne jedinice.

Zadatak 3.10. *Neka je π reprezentacija C^*-algebre $\mathcal{A}$ na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$. Dokažite da su sljedeća tri svojstva međusobno ekvivalentna:*

(a) *Reprezentacija π je nedegenerirana.*

(b) *Za svaki $\xi \in \mathcal{H}$ i svaku aproksimativnu jedinicu $(e_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ algebre $\mathcal{A}$ vrijedi*

$$\lim_{\lambda\in\Lambda} \|\pi(e_\lambda)\xi - \xi\| = 0.$$

(c) *Za svaki $\xi \in \mathcal{H}$ postoji aproksimativna jedinica $(e_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ algebre $\mathcal{A}$ takva da vrijedi*

$$\lim_{\lambda\in\Lambda} \|\pi(e_\lambda)\xi - \xi\| = 0.$$

Zadatak 3.11. *Neka je $\mathcal{A}$ C^*-algebra i $f : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ linearni funkcional. Dokažite da su sljedeća tri svojstva međusobno ekvivalentna:*

(a) *Funkcional f je pozitivan.*

(b) *Funkcional f je ograničen i za svaku aproksimativnu jedinicu $(e_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ algebre $\mathcal{A}$ vrijedi*

$$\|f\| = \lim_{\lambda\in\Lambda} f(e_\lambda).$$

(c) *Funkcional f je ograničen i postoji aproksimativna jedinica $(e_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ algebre $\mathcal{A}$ takva da vrijedi*

$$\|f\| = \lim_{\lambda\in\Lambda} f(e_\lambda).$$

Uputa: Za dokaz implikacije $(c) \implies (a)$ na odgovarajući način prilagodite dokaz implikacije $(b) \implies (a)$ teorema 3.9. Konkretnije, ako je $x \in \mathcal{A}$ hermitski i $f(x) = \alpha + i\beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\beta \geq 0$, dokažite da za $r > 0$ i za $\lambda \in \Lambda$ takav da je $r\|xe_\lambda - e_\lambda x\| < 1$ vrijedi $\|re_\lambda - ix\|^2 < r^2 + 2$. Odatle, slično kao u spomenutom dokazu, izvedite da je

$$2r\|f\|\beta + \alpha^2 + \beta^2 \leq 2\|f\|^2 \qquad \forall r > 0,$$

a odatle očito slijedi $\beta = 0$.

3.7 Stanja i čista stanja. Kriterij ireducibilnosti

Pozitivni linearni funkcional f na unitalnoj C^*-algebri $\mathcal{A}$ zove se **stanje**, ako je $f(e) = 1$. Prema tvrdnji (a) teorema 3.9. pozitivan ograničen linearan funkcional f je stanje ako i samo ako je $\|f\| = 1$. Označimo skup svih stanja na unitalnoj C^*-algebri $\mathcal{A}$ sa $S(\mathcal{A})$. Očito je $S(\mathcal{A})$ konveksan podskup dualnog prostora $\mathcal{A}'$, tj. vrijedi:

$$f, g \in S(\mathcal{A}) \text{ i } 0 \leq t \leq 1 \qquad \Longrightarrow \qquad tf + (1-t)g \in S(\mathcal{A}).$$

Ekstremne točke konveksnog skupa $S(\mathcal{A})$ zovu se **čista stanja**. Dakle, $f \in S(\mathcal{A})$ je čisto stanje ako i samo ako za bilo koje $g_1, g_2 \in S(\mathcal{A})$ iz jednakosti $f = tg_1 + (1-t)g_2$ za neki $t \in \mathbb{R}$, $0 < t < 1$, nužno slijedi da je $g_1 = g_2 = f$.

Teorem 3.11. *Neka je π ciklička reprezentacija unitalne C^*-algebre $\mathcal{A}$ na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$, neka je $\xi \in \mathcal{H}$ njen jedinični ciklički vektor i neka je stanje f definirano sa $f(x) = (\pi(x)\xi|\xi)$. Stanje f je čisto ako i samo ako je reprezentacija π ireducibilna.*

Dokaz: Pretpostavimo prvo da je f čisto stanje na $\mathcal{A}$. Neka je $P \in B(\mathcal{H})$ ortogonalan projektor koji komutira sa svim operatorima $\pi(x)$, $x \in \mathcal{A}$. Treba dokazati da je tada ili $P = 0$ ili $P = I$.

Pretpostavimo suprotno da je $P \neq 0$ i $P \neq I$. Tvrdimo da je tada $P\xi \neq 0$. Doista, iz $P\xi = 0$, bi za svaki $x \in \mathcal{A}$ slijedilo $P\pi(x)\xi = \pi(x)P\xi = 0$, a to bi značilo da je $P = 0$, jer je po pretpostavci potprostor $\pi(\mathcal{A})\xi$ gust u $\mathcal{H}$. Sasvim analogno zaključujemo da je i $(I-P)\xi \neq 0$, jer bi u protivnom bilo $I - P = 0$, tj. $P = I$. Stavimo sada $\eta = P\xi$ i $\zeta = (I-P)\xi$. Tada su η i ζ međusobno okomiti vektori različiti od nule i $\xi = \eta + \zeta$. Slijedi $1 = \|\eta\|^2 + \|\zeta\|^2$. Dakle, za broj $t = \|\eta\|^2$ vrijedi $0 < t < 1$. Definiramo sada linearne funkcionale g_1 i g_2 na $\mathcal{A}$:

$$g_1(x) = \frac{1}{t}(\pi(x)\xi|\eta), \qquad g_2(x) = \frac{1}{1-t}(\pi(x)\xi|\zeta), \qquad x \in \mathcal{A}.$$

Budući da je $P = P^*$ i $P\eta = \eta$, imamo za svaki $x \in \mathcal{A}$

$$g_1(x) = \frac{1}{t}(\pi(x)\xi|\eta) = \frac{1}{t}(\pi(x)\xi|P\eta) = \frac{1}{t}(P\pi(x)\xi|\eta) = \frac{1}{t}(\pi(x)P\xi|\eta) = \frac{1}{t}(\pi(x)\eta|\eta).$$

To pokazuje da je g_1 pozitivni funkcional na $\mathcal{A}$. Nadalje,

$$g_1(e) = \frac{1}{t}(\xi|\eta) = \frac{1}{t}(\xi|P\eta) = \frac{1}{t}(P\xi|\eta) = \frac{1}{t}(\eta|\eta) = 1,$$

dakle, g_1 je stanje, $g_1 \in S(\mathcal{A})$. Sasvim analogno, zbog $(I-P)^* = I - P$ i $(I-P)\zeta = \zeta$ nalazimo

$$g_2(x) = \frac{1}{1-t}(\pi(x)\zeta|\zeta) \qquad \text{i} \qquad g_2(e) = 1.$$

Dakle, i g_2 je stanje na $\mathcal{A}$, $g_2 \in S(\mathcal{A})$. Napokon, iz definicije g_1 i g_2 nalazimo za svaki $x \in \mathcal{A}$:

$$tg_1(x) + (1-t)g_2(x) = (\pi(x)\xi|\eta) + (\pi(x)\xi|\zeta) = (\pi(x)\xi|\eta + \zeta) = (\pi(x)\xi|\xi) = f(x).$$

Budući da je f stanje, odnosno ekstremna točka konveksnog skupa $S(\mathcal{A})$, odatle slijedi $g_1 = g_2 = f$. Dakle, za svaki $x \in \mathcal{A}$ imamo

$$(\pi(x)\xi|\xi) = f(x) = g_1(x) = \frac{1}{t}(\pi(x)\xi|\eta) = \frac{1}{t}(\pi(x)\xi|P\xi),$$

dakle,

$$(\pi(x)\xi|(P - tI)\xi) = 0 \qquad \forall \xi \in \mathcal{A}.$$

Kako je $\pi(\mathcal{A})\xi$ gusto u $\mathcal{H}$, slijedi $(P - tI)\xi = 0$, a odatle je za svaki $x \in \mathcal{A}$:

$$(P - tI)\pi(x)\xi = \pi(x)(P - tI)\xi = 0.$$

Ponovo zbog gustoće $\pi(\mathcal{A})\xi$ u $\mathcal{H}$ slijedi $P - tI = 0$, odnosno $P = tI$. No to je nemoguće jer je $0 < t < 1$. Ova kontradikcija pokazuje da je pretpostavka $P \neq 0$ i $P \neq I$ bila pogrešna. Dakle, ako ortogonalni projektor $P \in B(\mathcal{H})$ komutira sa svim operatorima $\pi(x)$, $x \in \mathcal{A}$, onda je nužno ili $P = 0$ ili $P = I$. To znači da je reprezentacija π ireducibilna.

Dokažimo sada obrnutu implikaciju. Pretpostavimo da je reprezentacija π ireducibilna i neka su $g_1, g_2 \in S(\mathcal{A})$ i $0 < t < 1$ takvi da je $f = tg_1 + (1 - t)g_2$. Definiramo sada seskvilinearan hermitski funkcional $[\cdot|\cdot]$ na gustom potprostoru $\pi(\mathcal{A})\xi$ prostora $\mathcal{H}$:

$$[\pi(x)\xi|\pi(y)\xi] = tg_1(y^*x), \qquad x, y \in \mathcal{A}.$$

Imamo

$$0 \leq tg_1(x^*x) = f(x^*x) - (1 - t)g_2(x^*x) \leq f(x^*x),$$

dakle,

$$0 \leq [\pi(x)\xi|\pi(x)\xi] \leq \|\pi(x)\xi\|^2.$$

To pokazuje da je hermitski funkcional $[\cdot|\cdot]$ pozitivno semidefinitan i ograničen. No tada postoji hermitski operator $A \in B(\mathcal{H})$ takav da je $[\eta|\zeta] = (\eta|A\zeta)$ za sve $\eta, \zeta \in \pi(\mathcal{A})\xi$. To znači da je

$$tg_1(z^*y) = [\pi(y)\xi|\pi(z)\xi] = (\pi(y)\xi|A\pi(z)\xi) \qquad \forall y, z \in \mathcal{A}.$$

Stoga za bilo koje $y, z \in \mathcal{A}$ imamo

$$(\pi(y)\xi|A\pi(x)\pi(z)\xi) = (\pi(y)\xi|A\pi(xz)\xi) = [\pi(y)\xi|\pi(xz)\xi] = tg_1((xz)^*y) = tg_1(z^*x^*y) =$$

$$= [\pi(x^*y)\xi|\pi(z)\xi] = (\pi(x^*y)\xi|A\pi(z)\xi) = (\pi(x)^*\pi(y)\xi|A\pi(z)\xi) = (\pi(y)\xi|\pi(x)A\pi(z)\xi).$$

Zbog gustoće $\pi(\mathcal{A})\xi$ u $\mathcal{H}$ odatle zaključujemo

$$(\eta|A\pi(x)\zeta) = (\eta|\pi(x)A\zeta) \qquad \forall \eta, \zeta \in \mathcal{H} \qquad \Longrightarrow \qquad A\pi(x) = \pi(x)A.$$

Dakle, operator A komutira sa svim operatorima $\pi(x)$, $x \in \mathcal{A}$. Kako je reprezentacija π ireducibilna, prema teoremu 3.7. odatle slijedi da je A skalarni multipl jediničnog operatora I, $A = \lambda I$. Pri tome je λ realan broj, jer je operator A hermitski. Dakle, za svaki $x \in \mathcal{A}$ imamo

$$tg_1(x) = (\pi(x)\xi|A\xi) = \lambda(\pi(x)\xi|\xi) = \lambda f(x).$$

Uvrstimo li $x = e$ zbog $f(e) = g_1(e) = 1$ nalazimo da je $t = \lambda$. Dakle, $g_1 = f$. Sada slijedi da je

$$g_2 = \frac{1}{1 - t}(f - tg_1) = \frac{1}{1 - t}(f - tf) = f.$$

Time je dokazano da je f ekstremna točka skupa $S(\mathcal{A})$, tj. f je čisto stanje.

3.8 Egzistencija vjerne reprezentacije

Cilj je ovog odjeljka da dokažemo slavni Geljfand−Naimarkov teorem da svaka C^*−algebra ima vjernu reprezentaciju, tj. da je svaka izometrički $*$−izomorfna C^*−podalgebri algebre $B(\mathcal{H})$ za neki Hilbertov prostor $\mathcal{H}$.

Teorem 3.12. *Neka je x hermitski element unitalne C^*−algebre $\mathcal{A}$. Tada postoji čisto stanje f na $\mathcal{A}$ takvo da je $|f(x)| = \|x\|$.*

Dokaz: Dokažimo najprije da postoji stanje $f \in S(\mathcal{A})$ takvo da je $|f(x)| = \|x\|$. Neka je $\mathcal{B}$ komutativna C^*−podalgebra od $\mathcal{A}$ generirana sa x i e. Prema teoremima 2.1., 2.18. i 2.19. zaključujemo da postoji $\omega \in X(\mathcal{B})$ takav da je $|\omega(x)| = \|x\|$. Tada je ω stanje na $\mathcal{B}$, jer je $\|\omega\| = \omega(e) = 1$. Po Hahn−Banachovom teoremu postoji $f \in \mathcal{A}'$ takav da je $f|\mathcal{B} = \omega$ i $\|f\| = 1$. Tada je $f(e) = \omega(e) = 1$, dakle f je stanje na $\mathcal{A}$. Nadalje, f proširuje ω, pa je $|f(x)| = \|x\|$.

Neka je sada

$$\Sigma = \{g \in S(\mathcal{A});\ g(x) = f(x)\}.$$

Očito je Σ zatvoren podskup jedinične sfere u prostoru $\mathcal{A}'$ u odnosu na slabu topologiju. Dakle, prostor Σ sa slabom topologijom je kompaktan. Nadalje, skup Σ je konveksan. Upotrijebit ćemo sada jedan opći teorem iz funkcionalne analize, koji je posljedica Hahn−Banachovog teorema i koji navodimo bez dokaza:

Teorem 3.13. (**Krein−Milman**) *Svaki neprazan konveksan podskup Σ duala X' normiranog prostora X, koji je kompaktan u odnosu na slabu topologiju od X', ima barem jednu ekstremnu točku.*

Neka je, dakle, $g \in \Sigma$ ekstremna točka akupa Σ. Teorem 3.12. će biti dokazan ako pokažemo da je tada g ekstremna točka skupa $S(\mathcal{A})$. Neka su $g_1, g_2 \in S(\mathcal{A})$ i $0 < t < 1$ takvi da je

$$g = tg_1 + (1-t)g_2.$$

Tada nejednakosti

$$|g_1(x)| \leq \|x\| = |f(x)| \qquad \text{i} \qquad |g_2(x)| \leq \|x\| = |f(x)|$$

zajedno sa

$$tg_1(x) + (1-t)g_2(x) = g(x) = f(x)$$

povlače da vrijedi $g_1(x) = g_2(x) = f(x)$, dakle $g_1, g_2 \in \Sigma$. Međutim, g je ekstremna točka od Σ, pa slijedi $g_1 = g_2 = g$. To pokazuje da je g ekstremna točka skupa $S(\mathcal{A})$.

Korolar 3.2. *Za svaki element $z \neq 0$ unitalne C^*−algebre $\mathcal{A}$ postoji ireducibilna reprezentacija π od $\mathcal{A}$ na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$ i jedinični vektor $\xi \in \mathcal{H}$ takvi da je $\|\pi(z)\xi\| = \|z\| > 0$.*

Dokaz: Primijenimo teorem 3.12. na hermitski element z^*z. Slijedi da postoji čisto stanje f na $\mathcal{A}$ takvo da je $f(z^*z) = \|z^*z\| = \|z\|^2$. Neka su π i ξ reprezentacija i jedinični vektor dobiveni pomoću teorema 3.10., tj. dobiveni tzv. GNS−konstrukcijom. Tada je

$$\|\pi(z)\xi\|^2 = (\pi(z)\xi|\pi(z)\xi) = (\pi(z^*z)\xi|\xi) = f(z^*z) = \|z\|^2.$$

Dakle, vrijedi $\|\pi(z)\xi\| = \|z\|$. Prema teoremu 3.11. tada je reprezentacija π ireducibilna. Time je korolar dokazan.

Teorem 3.14. (**Geljfand−Naimark**) *Svaka C^*−algebra $\mathcal{A}$ izometrički je izomorfna C^*−podalgebri od $B(\mathcal{H})$ za neki Hilbertov prostor $\mathcal{H}$.*

Dokaz: Treba dokazati da postoji izometrička reprezentacija algebre $\mathcal{A}$ na nekom Hilbertovom prostoru. Naravno, možemo pretpostaviti da je C^*-algebra $\mathcal{A}$ unitalna. Prema korolaru 3.2. za svaki $x \in \mathcal{A}$, $x \neq 0$, postoji reprezentacija π_x na nekom Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}_x$ takva da je $\|\pi_x(x)\|_x = \|x\|$; pri tome smo sa $\|\cdot\|_x$ označili normu na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}_x$ a također i na algebri operatora $B(\mathcal{H}_x)$. Neka je $\mathcal{H}$ skup svih funkcija

$$\varphi\colon \mathcal{A} \setminus \{0\} \to \bigcup_{x \in \mathcal{A}\setminus\{0\}} \mathcal{H}_x,$$

takvih da je $\varphi(x) \in \mathcal{H}_x \ \ \forall x \in \mathcal{A} \setminus \{0\}$ i da je

$$\sum_{x \in \mathcal{A}\setminus\{0\}} \|\varphi(x)\|_x^2 < +\infty.$$

Primijetimo da za svaki $\varphi \in \mathcal{H}$ vrijedi $\varphi(x) \neq 0$ za najviše prebrojivo mnogo $x \in \mathcal{A} \setminus \{0\}$. Lako se vidi da je tada $\mathcal{H}$ Hilbertov prostor sa skalarnim produktom

$$(\varphi|\psi) = \sum_{x \in \mathcal{A}\setminus\{0\}} (\varphi(x)|\psi(x))_x,$$

gdje je $(\cdot|\cdot)_x$ skalarni produkt na prostoru $\mathcal{H}_x$, $x \in \mathcal{A} \setminus \{0\}$. Nadalje, za $y \in \mathcal{A}$ definiramo operator $\pi(y)$ na prostoru $\mathcal{H}$:

$$(\pi(y)\varphi)(x) = \pi_x(y)\varphi(x), \qquad x \in \mathcal{A} \setminus \{0\}, \qquad \varphi \in \mathcal{H}.$$

Direktno se provjerava da je π reprezentacija C^*-algebre $\mathcal{A}$ na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$. Ako je $x \in \mathcal{A}$, $x \neq 0$, tada je $\|\pi_x(x)\|_x = \|x\| \neq 0$, odakle slijedi $\pi(x) \neq 0$. Prema tome, reprezentacija π je injektivna, dakle po tvrdnji (b) teorema 3.3. reprezentacija π je izometrija sa $\mathcal{A}$ u $B(\mathcal{H})$. Time je teorem u potpunosti dokazan.

Reprezentacija π dobivena u dokazu teorema 3.14. izgleda "*preglomazna*". U stvari, mogli smo definirati $\mathcal{H}$ kao znatno "*manji*" prostor; mogli smo npr. promatrati funkcije φ definirane ne na čitavom skupu $\mathcal{A} \setminus \{0\}$ nego samo na skupu $\mathcal{A}_+ \cap S(0,1)$ svih pozitivnih elemenata algebre $\mathcal{A}$ norme 1, pa čak i na bilo kojem njegovom gustom podskupu.

Zadatak 3.12. *Neka je $\mathcal{A}$ separabilna C^*-algebra. Dokažite da je $\mathcal{A}$ izometrički izomorfna C^*-podalgebri od $B(\mathcal{H})$ za neki separabilan Hilbertov prostor $\mathcal{H}$.*

Uputa: Neka je S prebrojiv gust podskup od $\mathcal{A}_+ \cap S(0,1)$. Sada oponašajte dokaz teorema 3.14 s tim da umjesto funkcija na skupu $\mathcal{A} \setminus \{0\}$ promatrate funkcije

$$\varphi\colon S \to \bigcup_{x \in S} \mathcal{H}_x \quad \text{takve da je} \quad \varphi(x) \in \mathcal{H}_x \ \forall x \in S \quad \text{i} \quad \sum_{x \in S} \|\varphi(x)\|_x^2 < +\infty.$$

Poglavlje 4

Kompaktni operatori u reprezentacijama C^*-algebri

4.1 Kompaktne C^*-algebre

Podsjetimo se osnovnih činjenica o kompaktnim operatorima na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$. Operator $A \in B(\mathcal{H})$ zove se kompaktan ako A preslikava jediničnu kuglu u $\mathcal{H}$ u relativno kompaktan podskup od $\mathcal{H}$. Tome je ekvivalentan zahtjev da za svaki ograničen niz (ξ_n) u $\mathcal{H}$ niz $(A\xi_n)$ ima konvergentan podniz. Skup svih kompaktnih operatora na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$ označavamo sa $K(\mathcal{H})$. To je zatvoren obostrani ideal u C^*-algebri $B(\mathcal{H})$ svih ograničenih linearnih operatora na $\mathcal{H}$. Za svaki $A \in K(\mathcal{H})$ spektar $\sigma(A)$ je ili konačan ili prebrojivo beskonačan. Ako je spektar beskonačan, onda je 0 jedino gomilište točaka spektra. Dakle, ako točke spektra numeriramo, tj.

$$\sigma(A) = \{\lambda_n;\ n \in \mathbb{N}\}, \qquad \lambda_n \neq \lambda_m \quad \text{ako je } n \neq m,$$

onda je

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_n = 0.$$

Ako je $\lambda \in \sigma(A) \setminus \{0\}$, onda je λ svojstvena vrijednost od A i svi potprostori $N((\lambda I - A)^n)$, $n \in \mathbb{N}$, su konačnodimenzionalni, a svi potprostori $R((\lambda I - A)^n)$, $n \in \mathbb{N}$, su zatvoreni i konačne kodimenzije u $\mathcal{H}$.

Neka je sada $A \in K(\mathcal{H})$ hermitski operator beskonačnog ranga. U kolegiju *Kompaktni operatori* dokazali smo da tada postoji ortonormiran niz $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ u $\mathcal{H}$ i niz $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ u $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ takav da vrijedi

$$A\xi = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n(\xi|\xi_n)\xi_n \quad \text{i} \quad \xi_0 = \xi - \sum_{n=1}^{\infty}(\xi|\xi_n)\xi_n \in N(A) \qquad \forall \xi \in X.$$

Tada je $N(A) = R(A)^{\perp}$, $Cl(R(A)) = N(A)^{\perp}$ i $\sigma(A) = \{0\} \cup \{\lambda_n;\ n \in \mathbb{N}\}$. Očito je tada $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ortonormirana baza u $N(A)^{\perp}$ a to je čitav prostor $\mathcal{H}$ ako i samo ako 0 nije svojstvena vrijednost operatora A.

Zadatak 4.1. *Neka je $A \in K(\mathcal{H})$ hermitski operator beskonačnog ranga i neka je*

$$\sigma(A) \setminus \{0\} = \{\lambda_n;\ n \in \mathbb{N}\}, \quad \textit{pri čemu je} \quad \lambda_n \neq \lambda_m \quad \textit{za} \quad n \neq m.$$

Neka je P_n ortogonalni projektor prostora $\mathcal{H}$ na svojstveni potprostor operatora A za svojstvenu vrijednost λ_n. Dokažite:

(a) *Svaki P_n je limes niza operatora oblika $\alpha_1 A + \alpha_2 A^2 + \cdots + \alpha_k A^k$. Posebno, operatori P_n sadržani su u svakoj C^*- podalgebri od $B(\mathcal{H})$ koja sadrži operator A.*

(b) *Vrijedi*

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \lambda_k P_k.$$

Uputa: Za prvu tvrdnju koristite funkcionalni račun, a za drugu dokažite da je

$$\left\| \sum_{k=n}^{\infty} \lambda_k P_k \right\| = \sup\{|\lambda_k|;\ k \geq n\}.$$

U daljnjem riječ *projektor* znači ortogonalan projektor, dakle, ograničen operator P takav da je $P^2 = P = P^*$. U skupu svih projektora relacija uređaja C^*-algebre $B(\mathcal{H})$ dana je sa

$$Q \leq P \qquad \Longleftrightarrow \qquad PQ = QP = Q.$$

Za projektore P i Q kažemo da su **međusobno ortogonalni** ako su im područja vrijednosti $R(P) = P\mathcal{H}$ i $R(Q) = Q\mathcal{H}$ međusobno ortogonalna. To je ispunjeno ako i samo ako je $PQ = 0$, a tada je i $QP = 0$.

Neka je $\mathcal{H}$ Hilbertov prostor. Svaka C^*-podalgebra $\mathcal{A}$ od $K(\mathcal{H})$ zove se **kompaktna C^*-algebra**. U tom slučaju sa $\pi_{\mathcal{A}}$ označavamo identičnu reprezentaciju od $\mathcal{A}$ na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$, tj. $\pi_{\mathcal{A}}(A) = A$ za svaki $A \in \mathcal{A}$. Kompaktna C^*-algebra zove se **nedegenerirana** ako je reprezentacija $\pi_{\mathcal{A}}$ nedegenerirana, tj. ako je potprostor $[\mathcal{A}\mathcal{H}]$ gust u $\mathcal{H}$. Tome je ekvivalentno da iz $A\xi = 0\ \forall A \in \mathcal{A}$ slijedi $\xi = 0$. Kompaktna C^*-algebra zove se **ireducibilna** ako je njena identična reprezentacija $\pi_{\mathcal{A}}$ ireducibilna, odnosno, ako je potprostor $\mathcal{A}\xi = \{A\xi;\ A \in \mathcal{A}\}$ gust u $\mathcal{H}$ za svaki $\xi \in \mathcal{H}$, $\xi \neq 0$.

Projektor P u kompaktnoj C^*-algebri $\mathcal{A}$ zove se **minimalan projektor** u algebri $\mathcal{A}$ ako ne postoji projektor $Q \in \mathcal{A}$ takav da je $Q \neq 0$, $Q \neq P$ i $Q \leq P$.

Propozicija 4.1. *Neka je $P \neq 0$ projektor u nedegeneriranoj kompaktnoj C^*-algebri $\mathcal{A}$. Tada je P minimalan projektor u algebri $\mathcal{A}$ ako i samo ako je $P\mathcal{A}P = \mathbb{C}P = \{\lambda P;\ \lambda \in \mathbb{C}\}$. Svaki projektor u $\mathcal{A}$ je konačnog ranga i ako je različit od 0 on je ili minimalan ili je suma međusobno ortogonalnih minimalnih projektora.*

Dokaz: Očito iz $P\mathcal{A}P = \mathbb{C}P$ slijedi da je P minimalan projektor u algebri $\mathcal{A}$. Doista, ako je $Q \in \mathcal{A}$ projektor različit od nule i ako je $Q \leq P$, onda je $Q = PQP \in P\mathcal{A}P = \mathbb{C}P$, dakle, $Q = \lambda P$ za neki $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Tada je $\lambda P = Q = Q^2 = \lambda^2 P^2 = \lambda^2 P$, dakle, $\lambda^2 = \lambda \neq 0$, tj. $\lambda = 1$, što znači da je $Q = P$.

Pretpostavimo sada da je P minimalan projektor u algebri $\mathcal{A}$. Da bismo dokazali da je tada $P\mathcal{A}P = \mathbb{C}P$ dovoljno je dokazati da je $PAP = \lambda P$ za svaki hermitski $A \in \mathcal{A}$. Ako je $A \in \mathcal{A}$ hermitski onda je PAP kompaktan hermitski operator pa prema zadatku 4.1. postoje $\lambda_n \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ i projektori $P_n \in \mathcal{A}$ takvi da je

$$PAP = \sum_n \lambda_n P_n \qquad \text{i} \qquad P_n P_m = 0 \quad \text{za} \quad n \neq m.$$

Imamo $PAP(I-P) = 0$, dakle, za svaki $\xi \in \mathcal{H}$ vrijedi

$$0 = PAP(I-P)\xi = \sum_n \lambda_n P_n (I-P)\xi,$$

a odatle, jer su $P_n\mathcal{H}$ međusobno okomiti, slijedi $P_n(I-P)\xi = 0\ \forall \xi \in \mathcal{H}$, tj. $P_n(I-P) = 0$, odnosno, $P_n = P_n P\ \forall n$. To znači da je $P_n \leq P\ \forall n$, a budući da je P minimalan projektor u algebri $\mathcal{A}$, slijedi da je ili $P_n = 0$ ili $P_n = P$. Dakle, $P_n \neq 0$ za točno jedan n pa je $PAP = \lambda_n P_n = \lambda_n P$.

Napokon, ako je P projektor u $\mathcal{A}$, onda je P konačnog ranga jer nema kompaktnih projektora beskonačnog ranga. Dokažimo i zadnju tvrdnju. Neka je $P \in \mathcal{A}$ projektor različit od nule koji nije minimalan u algebri $\mathcal{A}$. Tada postoji projektor $Q \in \mathcal{A}$ takav da je $Q \neq 0$, $Q \neq P$ i $Q \leq P$. U tom slučaju su Q i $P-Q$ su medjusobno ortogonalni projektori u algebri $\mathcal{A}$ i vrijedi $P = Q + (P-Q)$. Nadalje, tada je

$$\dim R(P) = \dim R(Q) + \dim R(P-Q), \quad \dim R(Q) < \dim R(P) \quad \text{i} \quad \dim R(P-Q) < \dim R(P).$$

Zbog konačnosti dimenzija nakon konačno mnogo takvih rastava (odnosno, indukcijom po rangu projektora P) dolazimo do prikaza projektora P kao sume međusobno ortogonalnih minimalnih projektora u algebri $\mathcal{A}$.

Teorem 4.1. *Neka je $\mathcal{A}$ ireducibilna kompaktna C^*-algebra na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$. Tada je $\mathcal{A} = K(\mathcal{H})$.*

Dokaz: Dokažimo najprije da algebra $\mathcal{A}$ sadrži neki projektor ranga 1. Doista, neka je P bilo koji minimalan projektor u algebri $\mathcal{A}$. Pretpostavimo da je rang od P veći od 1. Tada postoje $\xi, \eta \in P\mathcal{H}$ takvi da je $\xi \neq 0$, $\eta \neq 0$ i $\xi \perp \eta$. Neka je $A \in \mathcal{A}$ proizvoljan. Prema propoziciji 4.1. tada postoji $\lambda \in \mathbb{C}$ takav da je $PAP = \lambda P$. Slijedi

$$(\eta|A\xi) = (P\eta|AP\xi) = (\eta|PAP\xi) = (\eta|\lambda\xi) = \overline{\lambda}(\eta|\xi) = 0.$$

To pokazuje da je $\eta \perp \mathcal{A}\xi$. Međutim, ako je algebra $\mathcal{A}$ ireducibilna, onda je potprostor $\mathcal{A}\xi$ gust u $\mathcal{H}$. Tako smo došli do kontradikcije $0 \neq \eta \perp \mathcal{H}$. Ta kontradikcija pokazuje da je pretpostavka da je rang projektora P veći od 1 bila pogrešna.

Dokazat ćemo sada da algebra $\mathcal{A}$ sadrži svaki projektor ranga 1. Neka je $Q \in B(\mathcal{H})$ projektor ranga 1. Tada postoji $\eta \in \mathcal{H}$ takav da je

$$\|\eta\| = 1 \qquad \text{i} \qquad Q\xi = (\xi|\eta)\eta \quad \forall \xi \in \mathcal{H}.$$

Neka je $P \in \mathcal{A}$ projektor ranga 1 i neka je $\zeta \in \mathcal{H}$ takav da je

$$\|\zeta\| = 1 \qquad \text{i} \qquad P\xi = (\xi|\zeta)\zeta \quad \forall \xi \in \mathcal{H}.$$

Zbog ireducibilnosti algebre $\mathcal{A}$ potprostor $\mathcal{A}\zeta$ je gust u $\mathcal{H}$. Stoga postoji niz (B_n) u $\mathcal{A}$ takav da je

$$\eta = \lim_{n \to \infty} B_n \zeta.$$

Možemo pretpostaviti da je $B_n\zeta \neq 0$ za svaki n. Stavimo

$$A_n = \frac{1}{\|B_n\zeta\|} B_n \in \mathcal{A}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Kako je norma neprekidna, imamo

$$\lim_{n \to \infty} \|B_n\zeta\| = \|\eta\| = 1,$$

pa slijedi

$$\eta = \lim_{n \to \infty} A_n\zeta \qquad \text{i} \qquad \|A_n\zeta\| = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Za svaki $\xi \in \mathcal{H}$ sada imamo

$$\|A_nPA_n^*\xi - Q\xi\| = \|A_n(A_n^*\xi|\zeta)\zeta - (\xi|\eta)\eta\| = \|(\xi|A_n\zeta)A_n\zeta - (\xi|\eta)\eta\| \leq$$

$$\leq \|(\xi|A_n\zeta)A_n\zeta - (\xi|\eta)A_n\zeta\| + \|(\xi|\eta)A_n\zeta - (\xi|\eta)\eta\| = \|(\xi|Q_n\zeta - \eta)A_n\zeta\| + \|(\xi|\eta)(A_n\zeta - \eta)\| \leq$$
$$\leq \|\xi\| \cdot \|A_n\zeta - \eta\| \cdot \|A_n\zeta\| + \|\xi\| \cdot \|\eta\| \cdot \|A_n\zeta - \eta\| = 2\|\xi\| \cdot \|A_n\zeta - \eta\|.$$

Odavde je

$$\|A_nPA_n^* - Q\| = \sup\{\|(A_nPA_n^* - Q)\xi\|;\ \xi \in \mathcal{H},\ \|\xi\| \leq 1\} \leq 2\|A_n\zeta - \eta\|$$

Budući da je

$$\lim_{n\to\infty} A_n\zeta = \eta$$

slijedi

$$Q = \lim_{n\to\infty} A_nPA_n^*,$$

a kako je algebra $\mathcal{A}$ zatvorena u $B(\mathcal{H})$, slijedi $Q \in \mathcal{A}$.

Prema tome, algebra $\mathcal{A}$ sadrži svaki projektor konačnog ranga. Sada opet zbog zatvorenosti algebre $\mathcal{A}$ u $B(\mathcal{H})$ iz zadatka 4.1. slijedi da $\mathcal{A}$ sadrži svaki hermitski operator iz $K(\mathcal{H})$, dakle, $\mathcal{A} = K(\mathcal{H})$.

Korolar 4.1. $\{0\}$ *i* $K(\mathcal{H})$ *su jedini zatvoreni obostrani ideali u* C^*-*algebri* $K(\mathcal{H})$.

Dokaz: Neka je $\mathcal{A} \neq \{0\}$ zatvoren obostrani ideal u C^*-algebri $K(\mathcal{H})$. Neka je σ identična reprezentacija od $K(\mathcal{H})$ na prostoru $\mathcal{H} : \sigma(A) = A$. Tada je σ ireducibilna i $\sigma|\mathcal{A} \neq 0$ pa prema teoremu 3.6. slijedi da je reprezentacija $\sigma|\mathcal{A}$ ireducibilna, tj. C^*-algebra $\mathcal{A}$ je ireducibilna. Sada iz teorema 4.1. slijedi $\mathcal{A} = K(\mathcal{H})$.

Korolar 4.2. *Neka je* $\mathcal{B}$ C^*-*algebra i neka je* π *ireducibilna reprezentacija* C^*-*algebre* $\mathcal{B}$ *na Hilbertovom prostoru* $\mathcal{H}$ *takva da je* $\pi(\mathcal{B}) \cap K(\mathcal{H}) \neq \{0\}$. *Tada je* $K(\mathcal{H}) \subseteq \pi(\mathcal{B})$.

Dokaz: Neka je

$$\mathcal{I} = \{a \in \mathcal{B};\ \pi(a) \in K(\mathcal{H})\}.$$

Tada je $\mathcal{I}$ zatvoren obostrani ideal u algebri $\mathcal{B}$ i prema pretpostavci je $\pi|\mathcal{I} \neq 0$. Zbog teorema 3.6. reprezentacija $\pi|\mathcal{I}$ je ireducibilna. Dakle, $\pi(\mathcal{I})$ je ireducibilna C^*-podalgebra od $K(\mathcal{H})$. Prema teoremu 4.1. zaključujemo da je $\pi(\mathcal{I}) = K(\mathcal{H})$, a to znači da je $K(\mathcal{H}) \subseteq \pi(\mathcal{B})$.

Propozicija 4.2. *Neka je* P *minimalan projektor u nedegeneriranoj kompaktnoj* C^*-*algebri* $\mathcal{A}$ *na Hilbertovom prostoru* $\mathcal{H}$. *Neka je* $\xi \in R(P)$, $\|\xi\| = 1$. *Stavimo* $\mathcal{H}_0 = Cl(\mathcal{A}\xi)$. *Tada je* $\mathcal{A}|\mathcal{H}_0 = \{A|\mathcal{H}_0;\ A \in \mathcal{A}\} = K(\mathcal{H}_0)$.

Dokaz: Preslikavanje $A \mapsto A|\mathcal{H}_0$ je $*-$homomorfizam $\mathcal{A}$ u $K(\mathcal{H}_0)$ i slika mu je C^*-podalgebra $\mathcal{A}|\mathcal{H}_0$ od $K(\mathcal{H}_0)$. Tvrdnja će slijediti iz teorema 4.1. ako dokažemo da je algebra $\mathcal{A}|\mathcal{H}_0$ ireducibilna. U tu svrhu neka je $B \in B(\mathcal{H}_0)$ operator koji komutira sa svim restrikcijama $A|\mathcal{H}_0$, $A \in \mathcal{A}$. Treba dokazati da je B skalarni multipl jediničnog operatora na $\mathcal{H}_0$. Stavimo

$$C = B - (B\xi|\xi)I_{\mathcal{H}_0}.$$

Tada C komutira sa svim restrikcijama $A|\mathcal{H}_0$, $A \in \mathcal{A}$, i vrijedi $(C\xi|\xi) = 0$. Neka su $S, T \in \mathcal{A}$. Prema propoziciji 4.1 tada postoji $\lambda \in \mathbb{C}$ takav da je $PT^*SP = \lambda P$. Tada imamo redom

$$(CS\xi|T\xi) = (CSP\xi|TP\xi) = (PT^*CSP\xi|\xi) = (CPT^*SP\xi|\xi) = \lambda(CP\xi|\xi) = \lambda(C\xi|\xi) = 0.$$

Kako je $\mathcal{A}\xi$ gusto u $\mathcal{H}_0$, odatle slijedi $C = 0$. Dakle, $B = (B\xi|\xi)I_{\mathcal{H}_0}$.

Teorem 4.2. *Neka je $\mathcal{A}$ kompaktna nedegenerirana C^*-algebra na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$ i neka je π nedegenerirana reprezentacija od $\mathcal{A}$ na Hilbertovom prostoru $\mathcal{K}$. Postoji familija $(\mathcal{K}_i)_{i\in I}$ zatvorenih $\pi-$invarijantnih potprostora od $\mathcal{K}$ takva da je $\mathcal{K}_i \perp \mathcal{K}_j$ za $i \neq j$, da je suma potprostora $\mathcal{K}_i$ gusta u $\mathcal{K}$ i da je za svako $i \in I$ subreprezentacija $\pi_{\mathcal{K}_i}$ ekvivalentna subreprezentaciji identične reprezentaciji $\sigma : A \mapsto A$ algebre $\mathcal{A}$.*

Dokaz: Neka je A hermitski element algebre $\mathcal{A}$ takav da je $\pi(A) \neq 0$. Iz zadatka 4.1. slijedi da postoji projektor $P \in \mathcal{A}$ takav da je $\pi(P) \neq 0$. Zbog zadnje tvrdnje u propoziciji 4.1. postoji minimalan projektor P u algebri $\mathcal{A}$ takav da je $\pi(P) \neq 0$.

Za takav P prema propoziciji 4.1. postoji linearan funkcional $f : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ takav da je $PAP = f(A)P\ \forall A \in \mathcal{A}$. Neka je η jedinični vektor u $R(\pi(P))$ i neka je ξ jedinični vektor u $R(P)$. Tada je $\mathcal{K}_0 = Cl(\pi(\mathcal{A})\eta)$ zatvoren $\pi-$invarijantan potprostor od $\mathcal{K}$. Dokazat ćemo sada da je subreprezentacija $\pi_{\mathcal{K}_0}$ ekvivalentna subreprezentaciji identične reprezentaciji σ na $\sigma-$invarijantnom potprostoru $\mathcal{H}_0 = Cl(\mathcal{A}\xi)$. Doista, za $A \in \mathcal{A}$ imamo

$$\|\pi(A)\eta\|^2 = \|\pi(A)\pi(P)\eta\|^2 = \|\pi(AP)\eta\|^2 = (\pi(AP)\eta|\pi(AP)\eta) = (\pi(PA^*AP)\eta|\eta) =$$

$$= f(A^*A)(\pi(P)\eta|\eta) = f(A^*A) = (PA^*AP\xi|\xi) = (AP\xi|AP\xi) = (A\xi|A\xi) = \|A\xi\|^2.$$

Time je dokazano da je operator $U : A\xi \mapsto \pi(A)\eta$ linearna izometrija sa $\mathcal{A}\xi$ na $\pi(\mathcal{A})\eta$. Po neprekidnosti taj se operator proširuje do izometričkog izomorfizma prostora $\mathcal{H}_0$ na prostor $\mathcal{K}_0$ i to proširenje ćemo također označiti sa U. Za $A, B \in \mathcal{A}$ imamo

$$\pi_{\mathcal{K}_0}(B)U(A\xi) = \pi(B)U(A\xi) = \pi(B)\pi(A)\eta = \pi(BA)\eta = U(BA\xi) = U(\sigma_{\mathcal{H}_0}(B)A\xi)$$

Prema tome, restrikcije operatora $\pi_{\mathcal{K}_0}(B)U$ i $U\sigma_{\mathcal{H}_0}(B)$ na potprostor $\mathcal{A}\xi$ se podudaraju. Kako je to po definiciji gust potprostor prostora $\mathcal{H}_0$, slijedi da je $\pi_{\mathcal{K}_0}(B)U = U\sigma_{\mathcal{H}_0}(B)$, a kako to vrijedi za svaki $B \in \mathcal{A}$ dokazali smo da je subreprezentacija $\pi_{\mathcal{K}_0}$ reprezentacije π ekvivalentna subreprezentaciji $\sigma_{\mathcal{H}_0}$ identične reprezentacije σ.

Na taj način smo dokazali da svaka nedegenerirana reprezentacija algebre $\mathcal{A}$ ima subreprezentaciju koja je ekvivalentna subreprezentaciji identične reprezentacije σ.

Zadatak 4.2. *Pomoću Zornove leme završite dokaz teorema 4.2.*

Neka je π reprezentacija C^*-algebre $\mathcal{A}$ na Hilbertovom prostoru $\mathcal{K}$. Neka je n pozitivan kardinalni broj. Neka je $\mathcal{K}'$ Hilbertov prostor koji je ortogonalna suma n primjeraka prostora $\mathcal{K}$. To znači da je za neki skup I s kardinalnim brojem n

$$\mathcal{K}' = \left\{ (\xi_i)_{i\in I};\ \xi_i \in \mathcal{K},\ \sum_{i\in I} \|\xi_i\|^2 < +\infty \right\}$$

i operacije i skalarni produkt na $\mathcal{K}'$ su definirani sa

$$(\xi_i)_{i\in I} + (\eta_i)_{i\in I} = (\xi_i + \eta_i)_{i\in I}, \qquad \lambda(\xi_i)_{i\in I} = (\lambda\xi_i)_{i\in I}, \qquad ((\xi)_{i\in I}|(\eta_i)_{i\in I}) = \sum_{i\in I}(\xi_i|\eta_i).$$

Sada na Hilbertovom prostoru $\mathcal{K}'$ definiramo reprezentaciju $n \cdot \pi$ na sljedeći način:

$$(n \cdot \pi)(A)(\xi_i)_{i\in I} = (\pi(A)\xi_i)_{i\in I}.$$

Tako definiranu reprezentaciju $n \cdot \pi$ algebre $\mathcal{A}$ zovemo **multipl reprezentacije** π.

Zadatak 4.3. *Neka su π i ρ reprezentacije C^*-algebre $\mathcal{A}$ na Hilbertovim prostorima $\mathcal{H}$ i $\mathcal{K}$. Pretpostavimo da postoji familija $(\mathcal{K}_i)_{i\in I}$ međusobno ortogonalnih zatvorenih $\rho-$invarijatnih potprostora od $\mathcal{K}$ čija je suma gusta u $\mathcal{K}$ i takvi da je za svako $i \in I$ subreprezentacija $\rho_{\mathcal{K}_i}$ ekvivalentna reprezentaciji π. Dokažite da je tada reprezentacija ρ ekvivalentna multiplu $n \cdot \pi$, gdje je n kardinalni broj skupa I.*

Korolar 4.3. *Svaka nedegenerirana reprezentacija C^*-algebre $K(\mathcal{H})$ ekvivalentna je multiplu identične reprezentacije $\sigma : A \mapsto A$.*

Dokaz: Neka je π nedegenerirana reprezentacija C^*-algebre $K(\mathcal{H})$ na Hilbertovom prostoru $\mathcal{K}$. Prema teoremu 4.2. postoje međusobno ortogonalni $\pi-$invarijantni zatvoreni potprostori $\mathcal{K}_i$ od $\mathcal{K}$ čija suma je gusta u $\mathcal{K}$ i takvi da je za svako $i \in I$ subreprezentacija $\pi_{\mathcal{K}_i}$ ekvivalentna subreprezentaciji identične reprezentacije σ. Međutim, reprezentacija σ je ireducibilna, dakle, za svaki $i \in I$ subreprezentacija $\pi_{\mathcal{K}_i}$ je ekvivalentna identičnoj reprezentaciji σ. Prema zadatku 4.3. zaključujemo da je π ekvivalentna multiplu identične reprezentacije σ.

Odatle neposredno slijedi sljedeći korolar:

Korolar 4.4. *Neka je π ireducibilna reprezentacija C^*-algebre $K(\mathcal{H})$. Tada je π ekvivalentna identičnoj reprezentaciji σ.*

Korolar 4.5. *Neka su $\mathcal{H}$ i $\mathcal{K}$ Hilbertovi prostori.*

(*a*) *Neka je φ $*-$izomorfizam C^*-algebre $K(\mathcal{H})$ na C^*-algebru $K(\mathcal{K})$. Tada postoji izometrički izomorfizam $U : \mathcal{H} \to \mathcal{K}$ takav da je $\varphi(A) = UAU^*$ za svaki $A \in K(\mathcal{H})$.*

(*b*) *Neka je ψ $*-$izomorfizam C^*-algebre $B(\mathcal{H})$ na C^*-algebru $B(\mathcal{K})$. Tada postoji izometrički izomorfizam $U : \mathcal{H} \to \mathcal{K}$ takav da je $\psi(B) = UBU^*$ za svaki $B \in B(\mathcal{H})$.*

Dokaz: (*a*) Tada je φ ireducibilna reprezenatacija C^*-algebre $K(\mathcal{H})$ na Hilbertovom prostoru $\mathcal{K}$ pa je prema korolaru 4.4. ta reprezentacija ekvivalentna identičnoj reprezentaciji $\sigma : A \to A$ algebre $K(\mathcal{H})$ na prostoru $\mathcal{H}$. To znači da postoji izometrički izomorfizam $U : \mathcal{H} \to \mathcal{K}$ takav da je $U\sigma(A) = \varphi(A)U$ za svaki $A \in K(\mathcal{H})$. Kako je $\sigma(A) = A$ i $U^{-1} = U^*$ odatle slijedi $\varphi(A) = UAU^*$ za svaki $A \in K(\mathcal{H})$.

(*b*) Neka je $\varphi = \psi|K(\mathcal{H})$. Budući da je ψ ireducibilna vjerna reprezentacija C^*-algebre $B(\mathcal{H})$ i budući da je $K(\mathcal{H})$ zatvoren obostrani ideal u $B(\mathcal{H})$, prema teoremu 3.6. reprezentacija φ C^*-algebre $K(\mathcal{H})$ na prostoru $\mathcal{K}$ je ireducibilna. Prema korolaru 4.4. postoji izometrički izomorfizam $U : \mathcal{H} \to \mathcal{K}$ takav da je $\varphi(A) = UAU^*$ za svaki $A \in K(\mathcal{H})$. Sada iz zadnje tvrdnje teorema 3.6. slijedi da je također $\psi(B) = UBU^*$ za svaki $B \in B(\mathcal{H})$.

4.2 CCR$-$algebre i GCR$-$algebre

CCR$-$algebra je C^*-algebra $\mathcal{A}$ s svojstvom da je za svaku njenu ireducibilnu reprezentaciju π na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$ i za svaki $a \in \mathcal{A}$ operator $\pi(a)$ kompaktan. Tada je $\pi(\mathcal{A})$ ireducibilna kompaktna C^*-algebra, dakle prema teoremu 4.1. vrijedi $\pi(\mathcal{A}) = K(\mathcal{H})$. Prema teoremu 4.2. svaka je kompaktna C^*-algebra CCR$-$algebra. Nadalje, kako je svaka ireducibilna reprezentacija komutativne C^*-algebre jednodimenzionalna, svaka je komutativna C^*-algebra CCR$-$algebra.

Neka je π ireducibilna reprezentacija CCR$-$algebre $\mathcal{A}$ na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$. Tada je $\pi(\mathcal{A}) = K(\mathcal{H})$ pa slijedi da je kvocijentna algebra $\mathcal{A}/\mathrm{Ker}\,\pi$ izomorfna algebri $K(\mathcal{H})$. Prema korolaru 4.1. algebra $K(\mathcal{H})$ nema zatvorenih obostranih ideala različitih od $\{0\}$ i od $K(\mathcal{H})$. Odatle slijedi da je $\mathrm{Ker}\,\pi$ maksimalan obostrani ideal u C^*-algebri $\mathcal{A}$. Time smo dokazali:

Propozicija 4.3. *Neka je π ireducibilna reprezentacija CCR−algebre $\mathcal{A}$. Tada je jezgra te reprezentacije maksimalan obostrani ideal u $\mathcal{A}$.*

Propozicija 4.4. *Neka su π i σ ireducibilne reprezentacije CCR−algebre $\mathcal{A}$ takve da je $Ker\,\pi \subseteq Ker\,\sigma$. Tada je $\pi \simeq \sigma$.*

Dokaz: Neka su $\mathcal{H}$ i $\mathcal{K}$ Hilbertovi prostori reprezentacija π i σ. Tada je $\pi(\mathcal{A}) = K(\mathcal{H})$, a zbog $\mathrm{Ker}\,\pi \subseteq \mathrm{Ker}\,\sigma$ možemo definirati ireducibilnu reprezentaciju ω C^*- algebre $K(\mathcal{H})$ na Hilbertovom prostoru $\mathcal{K}$ na sljedeći način:

$$\omega(\pi(a)) = \sigma(a), \qquad a \in \mathcal{A}.$$

Prema korolaru 4.4. reprezentacija ω je ekvivalentna identičnoj reprezentaciji C^*-algebre $K(\mathcal{H})$. To znači da postoji izometrički izomorfizam $U : \mathcal{H} \to \mathcal{K}$ takav da je

$$UA = \omega(A)U \qquad \forall A \in K(\mathcal{H}).$$

Uvrstimo li ovdje $A = \pi(a)$, $a \in \mathcal{A}$, dobivamo

$$U\pi(a) = \omega(\pi(a))U = \sigma(a)U \qquad \forall a \in \mathcal{A}.$$

To znači da su reprezentacije π i σ ekvivalentne.

To posebno znači da je ireducibilna reprezentacija CCR−algebre $\mathcal{A}$ potpuno određena svojom jezgrom, tj. da je preslikavanje $\pi \to \mathrm{Ker}\,\pi$ injekcija sa skupa svih klasa ekvivalencije ireducibilnih reprezentacija algebre $\mathcal{A}$ u skup zatvorenih obostranih ideala u $\mathcal{A}$. To nipošto ne vrijedi za opće C^*-algebre, ali uskoro ćemo vidjeti da vrijedi i za jednu znatno širu klasu C^*-algebri.

Propozicija 4.5. *Neka je $\mathcal{A}$ CCR−algebra i $\mathcal{I} \neq \mathcal{A}$ obostrani zatvoreni ideal u $\mathcal{A}$. Tada je $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ CCR−algebra.*

Dokaz: Neka je π ireducibilna reprezentacija C^*-algebre $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$. Definiramo
$\sigma : \mathcal{A} \to B(\mathcal{H})$ sa

$$\sigma(x) = \pi(x + \mathcal{I}), \qquad x \in \mathcal{A}.$$

Tada je σ ireducibilna reprezentacija C^*-algebre $\mathcal{A}$ na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$, a kako je $\mathcal{A}$ CCR−algebra, slijedi $\sigma(\mathcal{A}) = K(\mathcal{H})$. Imamo $\sigma(\mathcal{A}) = \pi(\mathcal{A}/\mathcal{I})$, pa slijedi $\pi(\mathcal{A}/\mathcal{I}) = K(\mathcal{H})$. Budući da je π bila proizvoljna ireducibilna reprezentacija kvocijentne algebre $\mathcal{A}/\mathcal{I}$, zaključujemo da je $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ CCR−algebra.

Neka je $\mathcal{A}$ C^*- algebra i π njena ireducibilna reprezentacija na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$. Kako je $K(\mathcal{H})$ zatvoren obostrani ideal u $B(\mathcal{H})$, slijedi da je

$$\mathcal{C}_\pi = \{a \in \mathcal{A};\ \pi(a) \in K(\mathcal{H})\}$$

zatvoren obostrani ideal u $\mathcal{A}$. Naravno, $\mathrm{Ker}\,\pi \subseteq \mathcal{C}_\pi$, a može se dogoditi da je $\mathrm{Ker}\,\pi = \mathcal{C}_\pi$; to je upravo onda kad je $\pi(\mathcal{A}) \cap K(\mathcal{H}) = \{0\}$. Definiramo sada $\mathrm{CCR}(\mathcal{A})$ kao presjek svih ideala $\mathcal{C}_\pi$ za sve ireducibilne reprezentacije π. $\mathrm{CCR}(\mathcal{A})$ je skup svih $a \in \mathcal{A}$ takvih da je operator $\pi(a)$ kompaktan za svaku ireducibilnu reprezentaciju π algebre $\mathcal{A}$. Iz teorema 3.6. slijedi da je $\mathrm{CCR}(\mathcal{A})$ CCR−algebra i da $\mathrm{CCR}(\mathcal{A})$ sadrži svaki zatvoren CCR−ideal u algebri $\mathcal{A}$. Dakle, $\mathrm{CCR}(\mathcal{A})$ je najveći CCR−ideal u algebri $\mathcal{A}$.

GCR−algebra je C^*-algebra $\mathcal{A}$ takva da je $\mathrm{CCR}(\mathcal{A}/\mathcal{I}) \neq \{0\}$ za svaki zatvoren obostrani ideal $\mathcal{I} \neq \mathcal{A}$.

Propozicija 4.6. *Svaka CCR$-$algebra je GCR$-$algebra.*

Dokaz: Neka je $\mathcal{A}$ CCR$-$algebra i neka je $\mathcal{I} \neq \mathcal{A}$ zatvoren obostrani ideal u $\mathcal{A}$. Prema propoziciji 4.5. tada je $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ CCR$-$algebra, pa je CCR$(\mathcal{A}/\mathcal{I}) = \mathcal{A}/\mathcal{I} \neq \{0\}$.

Propozicija 4.7. *Neka je $\mathcal{A}$ GCR$-$algebra i neka je π ireducibilna reprezentacija C^*-algebre $\mathcal{A}$ na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$. Tada je $\pi(\mathcal{A}) \supseteq K(\mathcal{H})$.*

Dokaz: $\pi(\mathcal{A})$ je C^*-algebra izomorfna kvocijentnoj algebri $\mathcal{A}/(\mathrm{Ker}\,\pi)$. Budući da je $\mathcal{A}$ GCR$-$algebra, to je CCR$(\mathcal{A}/(\mathrm{Ker}\,\pi)) \neq \{0\}$. Slijedi da C^*-algebra $\pi(\mathcal{A})$ sadrži netrivijalan CCR$-$ideal $\mathcal{I}$. Budući da je $\pi(\mathcal{A})$ ireducibilna C^*-algebra operatora na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$, prema teoremu 3.6. identična reprezentacija od $\mathcal{I}$ je ireducibilna. Kako je $\mathcal{I}$ CCR$-$algebra, slijedi da je $\mathcal{I} = K(\mathcal{H}$. Dakle, $K(\mathcal{H}) \subseteq \pi(\mathcal{A})$.

Propozicija 4.8. *Neka su π i σ ireducibilne reprezentacije GCR$-$algebre $\mathcal{A}$ takve da je $Ker\pi = Ker\sigma$. Tada je $\pi \simeq \sigma$.*

Dokaz: Neka je $\mathcal{H}$ prostor reprezentacije π i neka je$\mathcal{K}$ prostor reprezentacije σ. Preslikavanje $\lambda : \pi(x) \mapsto \sigma(x)$, $x \in \mathcal{A}$, definira ireducibilnu reprezentaciju C^*-algebre $\pi(\mathcal{A})$ na Hilbertovom prostoru $\mathcal{K}$. C^*-algebra $\pi(\mathcal{A})$ sadrži $K(\mathcal{H})$ i iz teorema 3.6. slijedi da je restrikcija $\lambda|K(\mathcal{H})$ ireducibilna reprezentacija C^*-algebre $K(\mathcal{H})$ na Hilbertovom prostoru $\mathcal{K}$. Prema korolaru 4.4. reprezentacija $\lambda|K(\mathcal{H})$ je ekvivalentna identičnoj reprezentaciji od $K(\mathcal{H})$. Prema zadnjoj tvrdnji teorema 3.6. reprezentacija λ C^*-algebre $\pi(\mathcal{A})$ ekvivalentna je identičnoj reprezentaciji te algebre. Dakle, postoji izometrički izomorfizam $T : \mathcal{H} \to \mathcal{K}$ takav da je $TA = \lambda(A)T \ \forall A \in \pi(\mathcal{A})$. To znači da vrijedi $T\pi(x) = \lambda(\pi(x))T \ \forall x \in \mathcal{A}$, dakle, $T\pi(x) = \sigma(x)T \ \forall x \in \mathcal{A}$, odnosno, $\pi \simeq \sigma$.

Definicija GCR$-$algebre izrazito je neprikladna za provjeru da li je neka C^*-algebra GCR ili nije, jer ta provjera zahtijeva da najprije pronađemo sve zatvorene obostrane ideale u toj algebri. S definicijom CCR$-$algebre je znatno lakše baratati, jer treba provjeriti da su svi operatori u svakoj ireducibilnoj reprezentaciji te algebre kompaktni. Prema propoziciji 4.7. slično svojstvo ima svaka ireducibilna reprezentacija GCR$-$algebre: ona sadrži sve kompaktne operatore. Prirodno je postaviti pitanje da li je to svojstvo ne samo nužno nego i dovoljno da bi promatrana C^*-algebra bila GCR. To je stvarno tako, ali dokaz je vrlo kompliciran; to je dokazao James Glimm 1961. za separabilne C^*-algebre, a istovremeno i nešto jednostavnije Jacques Dixmier. Dokaz je Shoichiro Sakai 1966. generalizirao i na neseparabilne C^*-algebre. Istovremeno je dokazano da i svojstvo iz propozicije 4.8. karakterizira GCR$-$algebre.

Kompozicioni niz za C^*-algebru $\mathcal{A}$ je familija $(\mathcal{J}_\alpha;\ 0 \leq \alpha \leq \alpha_0)$ zatvorenih obostranih ideala u $\mathcal{A}$ indeksirana rednim brojevima α, $0 \leq \alpha \leq \alpha_0$, sa sljedećim svojstvima:

(1) Za avaki $\alpha < \alpha_0$ je $\mathcal{J}_\alpha \subsetneq \mathcal{J}_{\alpha+1}$.

(2) $\mathcal{J}_0 = \{0\}$ i $\mathcal{J}_{\alpha_0} = \mathcal{A}$.

(3) Ako je $\beta \leq \alpha_0$ granični redni broj, onda je $\mathcal{J}_\beta = Cl\left(\cup_{\alpha<\beta}\mathcal{J}_\alpha\right)$.

Teorem 4.3. *Neka je $\mathcal{A}$ C^*-algebra.*

(a) Ako je $\mathcal{A}$ GCR$-$algebra, onda $\mathcal{A}$ ima točno jedan kompozicioni niz $(\mathcal{J}_\alpha;\ 0 \leq \alpha \leq \alpha_0)$ takav da je $\mathcal{J}_{\alpha+1}/\mathcal{J}_\alpha =CCR(\mathcal{A}/\mathcal{J}_\alpha)$ za svaki $\alpha < \alpha_0$.

(b) Ako $\mathcal{A}$ ima kompozicioni niz $(\mathcal{J}_\alpha;\ 0 \leq \alpha \leq \alpha_0)$ takav da je kvocijentna algebra $\mathcal{J}_{\alpha+1}/\mathcal{J}_\alpha$ CCR$-$algebra za svaki $\alpha < \alpha_0$, onda je $\mathcal{A}$ GCR$-$algebra.

Dokaz: (a) Definirat ćemo familiju $(\mathcal{J}_\alpha)$ transfinitnom indukcijom. Stavimo $\mathcal{J}_0 = \{0\}$. Korak induktivne definicije je sljedeći: Neka je β redni broj takav da je $\mathcal{J}_\alpha$ definiran za svaki $\alpha < \beta$ i to tako da je zadovoljeno:

(1) Ako je $\alpha < \beta$ takav da je $\alpha + 1 < \beta$ onda je $\mathcal{J}_\alpha \subsetneq \mathcal{J}_{\alpha+1}$.

(2) $\mathcal{J}_0 = \{0\}$ (ovo je trivijalno ispunjeno).

(3) Ako je $\gamma < \beta$ granični redni broj, onda je $\mathcal{J}_\gamma = Cl\left(\cup_{\alpha<\gamma}\mathcal{J}_\alpha\right)$.

(4) $\mathcal{J}_{\alpha+1}/\mathcal{J}_\alpha =CCR(\mathcal{A}/\mathcal{J}_\alpha)$ za svaki $\alpha < \beta$ takav da je $\alpha + 1 < \beta$.

Sada razlikujemo dva moguća slučaja:

(A) β nije granični redni broj, tj. postoji redni broj γ takav da je $\beta = \gamma + 1$; drugim riječima, γ je neposredni prethodnik rednog broja β. Ako je $\mathcal{J}_\gamma = \mathcal{A}$, onda postupak završava sa $\alpha_0 = \gamma$. Ako je, pak, $\mathcal{J}_\gamma \neq \mathcal{A}$, onda stavljamo $\mathcal{J}_\beta =$CCR$(\mathcal{A}/\mathcal{J}_\gamma)$.

(B) β je granični redni broj. Tada stavljamo $J_\beta = Cl\left(\cup_{\alpha<\beta}J_\alpha\right)$.

Ovaj postupak transfinitne indukcije definira kompozicioni niz s traženim svojstvom. Treba još dokazati jedinstvenost takvog kompozicionog niza. Pretpostavimo suprotno, tj. da postoji dva takva međusobno različita kompoziciona niza $(\mathcal{K}_\alpha;\ 0 \le \alpha \le \beta_0)$ i $(\mathcal{J}_\alpha;\ 0 \le \alpha \le \alpha_0)$. Zbog određenosti pretpostavimo da je $\alpha_0 \le \beta_0$. Kad bi bilo $\mathcal{J}_\alpha = \mathcal{K}_\alpha$ za svaki $\alpha \le \alpha_0$ slijedilo bi $\mathcal{K}_{\alpha_0} = \mathcal{J}_{\alpha_0} = \mathcal{A}$, dakle, $\beta_0 = \alpha_0$, suprotno pretpostavci da su dva kompoziciona niza međusobno različiti. Prema tome, postoji redni broj $\gamma \le \alpha_0$ takav da je $\mathcal{J}_\gamma \neq \mathcal{K}_\gamma$. Neka je γ najmanji takav redni broj. Tada je $\gamma > 0$ jer je $\mathcal{J}_0 = \{0\} = \mathcal{K}_0$. Nadalje, prema svojstvu (3) iz definicije kompozicionog niza γ ne može biti granični redni broj. Stoga postoji neposredni prethodnik od γ, tj. redni broj δ takav da je $\gamma = \delta + 1$. Tada je $\mathcal{J}_\delta = \mathcal{K}_\delta$, pa slijedi

$$\mathcal{J}_\gamma/\mathcal{J}_\delta = CCR(\mathcal{A}/\mathcal{J}_\delta) = CCR(\mathcal{A}/\mathcal{K}_\delta) = \mathcal{K}_\gamma/\mathcal{K}_\delta,$$

a odatle je $\mathcal{J}_\gamma = \mathcal{K}_\gamma$ suprotno pretpostavci. Ova kontradikcija dokazuje jedinstvenost kompozicionog niza s traženim svojstvom.

(b) Neka je $(\mathcal{J}_\alpha;\ 0 \le \alpha \le \alpha_0)$ kompozicioni niz za C^*-algebru $\mathcal{A}$ takav da je svaki kvocijent $\mathcal{J}_{\alpha+1}/\mathcal{J}_\alpha$ CCR−algebra. Neka je $\mathcal{I} \neq \mathcal{A}$ zatvoren obostrani ideal u $\mathcal{A}$. Treba dokazati da kvocijentna algebra $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ sadrži CCR−ideal različit od $\{0\}$. Budući da je $\cup_\alpha \mathcal{J}_\alpha = \mathcal{A}$, slijedi da postoji najmanji redni broj γ takav da je $(\mathcal{J}_\gamma + \mathcal{I})/\mathcal{I} \neq \{0\}$. Tvrdimo da je tada $(\mathcal{J}_\gamma + \mathcal{I})/\mathcal{I}$ CCR−algebra i time će tvrdnja biti dokazana, jer je $(\mathcal{J}_\gamma + \mathcal{I})/\mathcal{I}$ zatvoren obostrani ideal u C^*-algebri $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ različit od nule.

Prije svega, očito je $\gamma > 0$. Nadalje, kad bi γ bio granični redni broj, imali bismo

$$(\mathcal{J}_\gamma + \mathcal{I})/\mathcal{I} = \bigcup_{\delta<\gamma}(\mathcal{J}_\delta + \mathcal{I})/\mathcal{I} = \{0\}$$

suprotno pretpostavci. Dakle, γ nije granični redni broj. Neka je δ neposredni prethodnik od γ, tj. $\delta + 1 = \gamma$. Tada je $(\mathcal{J}_\delta + \mathcal{I})/\mathcal{I} = \{0\}$, odnosno, $\mathcal{J}_\delta \subseteq \mathcal{I}$. Tada je $x + \mathcal{J}_\delta \mapsto x + \mathcal{I}$ $*-$epimorfizam CCR−algebre $\mathcal{J}_\gamma/\mathcal{J}_\delta$ na C^*-algebru $(\mathcal{J}_\gamma + \mathcal{I})/\mathcal{I}$. Prema tvrdnji ($d$) teorema 3.3. C^*-algebra $(\mathcal{J}_\gamma + \mathcal{I})/\mathcal{I}$ je izomorfna kvocijentnoj algebri CCR−algebre $\mathcal{J}_\gamma/\mathcal{J}_\delta$, pa je prema propoziciji 4.5. $(\mathcal{J}_\gamma + \mathcal{I})/\mathcal{I}$ CCR−algebra.

Zadatak 4.4. *Neka je $\mathcal{A}$ GCR−algebra i $\mathcal{I} \neq \mathcal{A}$ zatvoren obostrani ideal u $\mathcal{A}$. Dokažite da su $\mathcal{I}$ i $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ GCR−algebre.*

Zadatak 4.5. *C^*-algebra $\mathcal{A}$ zove se NGCR$-$algebra ako je $CCR(\mathcal{A}) = \{0\}$, tj. ako $\mathcal{A}$ ne sadrži nijedan zatvoren obostrani ideal $\mathcal{I} \neq \{0\}$ koji je CCR$-$algebra. Dokažite da svaka C^*-algebra $\mathcal{A}$ sadrži jedinstven zatvoren obostrani ideal $\mathcal{K}$ takav da je $\mathcal{K}$ GCR$-$algebra i da je $\mathcal{A}/\mathcal{K}$ NGCR$-$algebra.*

Zadatak 4.6. *Neka je $\mathcal{H} \neq \{0\}$ Hilbertov prostor i $\mathcal{A}$ ireducibilna C^*-podalgebra od $B(\mathcal{H})$. Dokažite da je $\mathcal{A}$ NGCR$-$algebra ako i samo ako je $\mathcal{A} \cap K(\mathcal{H}) = \{0\}$.*

Zadatak 4.7. *Neka je $\{e_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ ortonormirana baza Hilbertovog prostora $\mathcal{H}$ i neka je $S \in B(\mathcal{H})$ definiran sa $Se_n = e_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$. Neka je $C^*(S)$ najmanja C^*-podalgebra od $B(\mathcal{H})$ koja sadrži S. Dokažite da je $C^*(S)$ GCR$-$algebra i pronađite njen kompozicioni niz sa svojstvom iz tvrdnje (a) teorema 4.3.*

Poglavlje 5

Dodatni zadaci

Zadatak 5.1. *Neka je* $D = \{\lambda \in \mathbb{C};\ |\lambda| \leq 1\}$ *i* $K = \{\lambda \in \mathbb{C};\ |\lambda| < 1\}$. *Neka je* $\mathcal{A}$ *skup svih neprekidnih funkcija* $f : D \to \mathbb{C}$ *takvih da je restrikcija* $f|K$ *analitička na* K.

(a) *Dokažite da je* $\mathcal{A}$ *komutativna Banachova algebra u odnosu na operacije po točkama i normu*

$$\|f\| = \max\{|f(\lambda)|;\ \lambda \in D\}.$$

(b) *Dokažite da je sa* $f^*(\lambda) = \overline{f\left(\overline{\lambda}\right)}$ *definirana izometrička involucija na* $\mathcal{A}$.

(c) *Dokažite da postoji unitalni homomorfizam* $\omega : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ *koji nije* $*-$*homomorfizam, tj. koji ne zadovoljava* $\omega(f^*) = \overline{\omega(f)}$.

Zadatak 5.2. *Neka su* S *i* T *normalni ograničeni operatori na Hilbertovim prostorima* $\mathcal{H}$ *i* $\mathcal{K}$ *i neka su* $C^*(S)$ *i* $C^*(T)$ *unitalne* C^*-*algebre generirane s tim operatorima. Dokažite da je algebra* $C^*(S)$ $*-$*izomorfna algebri* $C^*(T)$ *ako i samo ako je spektar* $\sigma(S)$ *operatora* S *homeomorfan spektru* $\sigma(T)$ *operatora* T.

Zadatak 5.3. *Neka je* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *neprekidna funkcija i neka je* $\mathcal{A}$ *unitalna* C^*-*algebra. Dokažite da je* $x \mapsto f(x)$ *neprekidno preslikavanje sa* $\mathcal{A}_h = \{x \in \mathcal{A};\ x^* = x\}$ *u* $\mathcal{A}$.

Zadatak 5.4. *Neka je* $\mathcal{A}$ C^*-*algebra,* $\mathcal{J}$ *zatvoren obostrani ideal u* $\mathcal{A}$ *i* $\mathcal{B}$ C^*-*podalgebra od* $\mathcal{A}$. *Dokažite da je*

$$\mathcal{B} + \mathcal{J} = \{b + x;\ b \in \mathcal{B}, x \in \mathcal{J}\}$$

C^*-*podalgebra od* $\mathcal{A}$ *i da su* C^*-*algebre* $(\mathcal{B} + \mathcal{J})/\mathcal{J}$ *i* $\mathcal{B}/(\mathcal{B} \cap \mathcal{J})$ $*-$*izomorfne.*

Zadatak 5.5. *Neka je* $\mathcal{J}$ *zatvoren obostrani ideal u* C^*-*algebri* $\mathcal{A}$ *i neka je* $x \in \mathcal{A}$, $x^* = x$. *Pomoću funkcionalnog računa dokažite da postoji* $y \in \mathcal{J}$ *takav da je*

$$\|x + y\| = \inf\{\|x + z\|;\ z \in \mathcal{J}\}.$$

Zadatak 5.6. *Neka je* x *hermitski element* C^*-*algebre* $\mathcal{A}$. *Dokažite da postoje* $y, z \in \mathcal{A}_+$ *takvi da je*

$$\|y\| \leq \|x\|, \quad \|z\| \leq \|x\|, \quad yz = zy = 0, \quad x = y - z.$$

Da li su takvi y *i* z *jedinstveni?*

Zadatak 5.7. *Neka je* $\mathcal{A}$ *unitalna* C^*-*algebra i* $x \in \mathcal{A}$ *hermitski element takav da je* $\|x\| \leq 1$. *Dokažite da je* $x \in \mathcal{A}_+$ *ako i samo ako je* $\|e - x\| \leq 1$.

Zadatak 5.8. *Neka je $\mathcal{A}$ C^*-algebra i neka su $a_1, b_1, c_1, d_1, a_2, b_2, c_2, d_2 \in \mathcal{A}_+$ i $x \in \mathcal{A}$ takvi da je $a_1 \leq b_1$, $a_2 \leq b_2$, $c_1^2 = a_1$, $c_2^2 = a_2$, $d_1^2 = b_1$ i $d_2^2 = b_2$. Dokažite da tada vrijedi*

$$\|c_1 x\| \leq \|d_1 x\|, \quad \|x c_2\| \leq \|x d_2\| \quad i \quad \|c_1 x c_2\| \leq \|d_1 x d_2\|.$$

Zadatak 5.9. *Neka je $\mathcal{A}$ unitalna C^*-algebra i $\mathcal{U}$ multiplikativna grupa svih unitarnih elemenata algebre $\mathcal{A}$. Dokažite sljedeće tri tvrdnje:*

(a) *Ako je $u \in \mathcal{U}$ takav da je $\|e - u\| < 2$, onda postoji $x \in \mathcal{A}_h$ takav da je $u = e^{ix}$.*

(b) *Ako su $v, w \in \mathcal{U}$ takvi da je $\|v - w\| < 2$, onda postoji $y \in \mathcal{A}_h$ takav da je $v = we^{iy}$.*

(c) *Neka je $\mathcal{U}_1$ skup svih produkata oblika $e^{ix_1} \cdots e^{ix_n}$, gdje su $n \in \mathbb{N}$ i $x_1, \ldots, x_n \in \mathcal{A}_h$. Tada je skup $\mathcal{U}_1$ u odnosu na topologiju na $\mathcal{U}$ induciranu normom otvoren i zatvoren podskup od $\mathcal{U}$. Nadalje, skup $\mathcal{U}_1$ je putevima povezan, tj. za $u, v \in \mathcal{U}_1$ postoji neprekidna funkcija $\varphi : [0,1] \to \mathcal{U}_1$ takva da je $\varphi(0) = u$ i $\varphi(1) = v$.*

Zadatak 5.10. *Neka je $\mathcal{A}$ unitalna C^*-algebra i neka je $x \in \mathcal{A}_+$. Pretpostavimo da su $p, q \in \mathcal{A}$ međusobno ortogonalni projektori (tj. $p^2 = p = p^*$, $q^2 = q = q^*$ i $pq = qp = 0$) i pretpostavimo da je $pxp = 0$. Dokažite da je $pxq = 0$.*

Zadatak 5.11. *Neka je $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ $*-$epimorfizam C^*-algebri i neka su $b_1, b_2 \in \mathcal{B}_+$ takvi da je $b_1 b_2 = 0$. Dokažite da postoje $a_1, a_2 \in \mathcal{A}_+$ takvi da je $a_1 a_2 = 0$, $\varphi(a_1) = b_1$ i $\varphi(a_2) = b_2$.*

Zadatak 5.12. *Neka je $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ $+-$epimorfizam C^*-algebri i neka je $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz u $\mathcal{B}_+$ takav da je $b_n b_m = 0$ za $n \neq m$. Koristeći zadatak 5.11. dokažite da postoji niz $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ takav da je $a_n a_m = 0$ za $n \neq m$ i $\varphi(a_n) = b_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$.*

Uputa: Zamjenom b_n sa $t_n b_n$ za neke $t_n > 0$ može se postići da redovi $\sum_n b_n$ i $\sum_n \sqrt{b_n}$ konvergiraju u $\mathcal{B}$. Sada indukcijom po n dokažite da postoje $a_1, \ldots, a_n, x_n \in \mathcal{A}_+$ takvi da je $a_j a_k = 0$ za $j \neq k$, $a_j x_n = 0$ $\forall j$ i da vrijedi

$$\varphi(a_j) = b_j \quad \text{z} \quad j = 1, \ldots, n, \qquad \varphi(x_n) = \sum_{k>n} b_k.$$

Zadatak 5.13. *Neka je $\mathcal{A}$ unitalna komutativna C^*-algebra i neka su f i g međusobno različita čista stanja na $\mathcal{A}$. Dokažite da je tada $\|f - g\| = 2$.*

Zadatak 5.14. *Neka je $\mathcal{A}$ unitalna C^*-algebra i neka $u \in \mathcal{A}$ unitarni element. Za stanje f na $\mathcal{A}$ stavimo*

$$f_u(x) = f(uxu^*), \qquad x \in \mathcal{A}.$$

Dokažite da je i f_u stanje na $\mathcal{A}$ i da je ono čisto ako i samo ako je f čisto.

Zadatak 5.15. *Neka je $\mathcal{A}$ unitalna komutativna C^*-algebra. Pretpostavimo da postoji $r > 0$ takav da za svaka dva međusobno različita čista stanja f i g na $\mathcal{A}$ vrijedi $\|f - g\| \geq r$. Dokažite da je tada algebra $\mathcal{A}$ komutativna.*

Uputa: Za $h \in \mathcal{A}_h$ pokažite da je uz oznaku iz zadatka 5.14. $f_{e^{ith}} = f$ za svako čisto stanje f i svaki $t \in \mathbb{R}$. Izvedite odatle da je $f(xh - hx) = 0$ za svako čisto stanje f i za sve $x \in \mathcal{A}$ i $h \in \mathcal{A}_h$.

Zadatak 5.16. *Dokažite da za svaki pravi zatvoren dvostrani ideal $\mathcal{J}$ u C^*-algebri $\mathcal{A}$ postoji reprezentacija π od $\mathcal{A}$ čija je jezgra $\mathcal{J}$.*

Zadatak 5.17. *Neka je $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ $*-$homomorfizam C^*-algebri i neka je $\mathcal{J}$ zatvoren dvostrani ideal u $\mathcal{A}$. Dokažite da je $\varphi(\mathcal{J})$ zatvoren potprostor od $\mathcal{B}$.*

Zadatak 5.18. *Neka su $\mathcal{I}$ i $\mathcal{J}$ zatvoreni dvostrani ideali u C^*-algebri $\mathcal{A}$. Dokažite da je i dvostrani ideal $\mathcal{I} + \mathcal{J}$ zatvoren.*

Bibliografija

[1] William Arveson, *An Invitation to C^*-algebras*, Springer−Verlag, New York − Heidelberg − Berlin, 1976.

[2] George Bachman, Lawrence Narici, *Functional Analysis*, Academic Press, New York − San Francisco − London, 1966.

[3] John B. Conway, *A Course in Operator Theory*, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 20000.

[4] Kenneth R. Davidson, *C^*-algebras by Examples*, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1996.

[5] Jacques Dixmier, *C^*-algebras*, North−Holland Publishing Company, Amsterdam − New York − Oxford, 1977.

[6] Richard V. Kadison, John R. Ringrose, *Fundamentals of the Theory of Operator Algebras, Volume I: Elementary Theory*, Academic Press, San Diego, California, 1983.

[7] Richard V. Kadison, John R. Ringrose, *Fundamentals of the Theory of Operator Algebras, Volume II: Advanced Theory*, Academic Press, San Diego, California, 1983.

[8] Richard V. Kadison, John R. Ringrose, *Fundamentals of the Theory of Operator Algebras, Volume III: Elementary Theory - An Exercise Approach*, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1991.

[9] Richard V. Kadison, John R. Ringrose, *Fundamentals of the Theory of Operator Algebras, Volume III: Advanced Theory - An Exercise Approach*, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1991.

[10] Hrvoje Kraljević, *Kompaktni operatori*, PMF − Matematički odjel, Zagreb, siječanj 2007. (interna skripta)

[11] Svetozar Kurepa, *Funkcionalna analiza. Elementi teorije operatora*, Školska knjiga, Zagreb, 1981.

[12] Gerard J. Murphy, *C^*-algebras and operator theory*, Academic Press, Boston − San Diego − New York, 1990.

[13] Mark A. Naimark, *Normed rings*, P. Noordhoff N.V., Groningen, 1964.

[14] Walter Rudin, *Functional Analysis*, McGraw - Hill Book Company, New York, 1973.

[15] Angus E. Taylor, David C. Day *Introduction to Functional Analysis*, John Wiley & Sons, New York − Chichester − Brisbane − Toronto, 1980.