RIEMANNOVE PLOHE

Prof. dr. sc. Hrvoje Kraljević

Predavanja održana na PMF−Matematičkom odjelu
Sveučilišta u Zagrebu
u zimskom semestru akademske godine 2005./2006.
u okviru izbornog kolegija "TEORIJA ANALITIČKIH FUNKCIJA"

Zagreb, siječanj 2006.

Sadržaj

Poglavlje 1

Holomorfne funkcije

Za $a \in \mathbb{C}$ i $r > 0$ upotrebljavat ćemo oznake

$$K(a,r) = \{z \in \mathbb{C};\ |z-a| < r\}, \qquad \overline{K}(a,r) = \{z \in \mathbb{C};\ |z-a| \leq r\},$$

$$K^*(a,r) = \{z \in \mathbb{C};\ 0 < |z-a| < r\}, \qquad S(a,r) = \{z \in \mathbb{C};\ |z-a| = r\}.$$

Ti se skupovi redom zovu **otvoren krug**, **zatvoren krug**, **punktirani krug** i **kružnica** sa središtem u točki a i radijusom r.

Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ otvoren skup i neka je zadana funkcija $f : \Omega \to \mathbb{C}$. Ako za točku $a \in \Omega$ postoji

$$\lim_{z \to a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a}$$

taj limes označavamo $f'(a)$ i zovemo **derivacija funkcije** f **u točki** a. Ako taj limes postoji za svaku točku $a \in \Omega$ tada kažemo da je funkcija f **holomorfna** na Ω. Tada se funkcija f' zove **derivacija funkcije** f.

Za otvoren skup $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ skup svih holomorfnih funkcija na Ω označavat ćemo sa $\mathcal{H}(\Omega)$. Uz operacije po točkama $\mathcal{H}(\Omega)$ je komutativna asocijativna unitalna algebra nad poljem $\mathbb{C}$ i vrijedi

$$(f+g)' = f' + g', \qquad (\lambda f)' = \lambda f', \qquad (fg)' = f'g + fg', \qquad f, g \in \mathcal{H}(\Omega), \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Ako su $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ i $g \in \mathcal{H}(\Omega_1)$, pri čemu je $\Omega_1 \subseteq \mathbb{C}$ otvoren skup takav da je $f(\Omega) \subseteq \Omega_1$, tada je $h = g \circ f \in \mathcal{H}(\Omega)$ i vrijedi

$$h'(a) = g'(f(a))f'(a), \qquad a \in \Omega.$$

Ako je $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ takva da je $f(z) \neq 0\ \forall z \in \Omega$ tada je $\dfrac{1}{f} \in \mathcal{H}(\Omega)$ i

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(a) = -\frac{f'(a)}{f(a)^2}, \qquad a \in \Omega.$$

Teorem 1.1. *Neka je $(c_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$ niz u $\mathbb{C}$ i stavimo*

$$R = \frac{1}{\limsup_{n \to \infty} |c_n|^{1/n}}.$$

(a) *Za $a \in \mathbb{C}$ i $z \in K(a,R)$ red*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

konvergira apsolutno. Taj red i red apsolutnih vrijednosti konvergiraju uniformno na $\overline{K}(a,r)$ za svaki $r < R$.

(*b*) *Za* $a \in \mathbb{C}$ *i* $z \in \mathbb{C} \setminus \overline{K}(a, R)$ *red u* (*a*) *ne konvergira u* $\mathbb{C}$.

(*c*) *Ako definiramo funkciju* $f : K(a, R) \to \mathbb{C}$ *kao sumu reda u* (*a*) *tada je* $f \in \mathcal{H}(K(a, R))$ *i vrijedi*

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n (z - a)^{n-1}, \qquad z \in K(a, R).$$

(*d*) *Za funkciju* f *iz* (*c*) *vrijedi* $f' \in \mathcal{H}(K(a, R))$ *i induktivno* $f^{(k)} = \left(f^{(k-1)}\right)' \in \mathcal{H}(K(a, R))$. *Nadalje,*

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} c_n (z - a)^{n-k}, \qquad z \in K(a, R).$$

Teorem 1.2. *Neka je* $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ *otvoren skup i* $f \in \mathcal{H}(\Omega)$.

(*a*) *Vrijedi* $f' \in \mathcal{H}(\Omega)$ *i induktivno* $f^{(n)} = \left(f^{(n-1)}\right)' \in \mathcal{H}(\Omega)$, $n \in \mathbb{N}$.

(*b*) *Neka su* $a \in \Omega$ *i* $r > 0$ *takvi da je* $K(a, r) \subseteq \Omega$. *Stavimo*

$$c_0 = f(a), \qquad c_1 = f'(a), \qquad c_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(a), \quad n \geq 2.$$

Tada je

$$r \leq \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} |c_n|^{1/n}}$$

i vrijedi

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n \qquad \forall z \in K(a, r).$$

Teorem 1.3. *Neka je* $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ *otvoren skup i* $f : \Omega \to \mathbb{C}$ *neprekidna funkcija. Pretpostavimo da je* $a \in \Omega$ *i da je funkcija* f *analitička na skupu* $\Omega \setminus \{a\}$. *Tada je* $f \in \mathcal{H}(\Omega)$.

Krivulja u otvorenom skupu $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ je neprekidno preslikavanje $\gamma : [a, b] \to \Omega$ ($-\infty < a < b < +\infty$). Skup $\gamma^* = \{\gamma(t);\ a \leq t \leq b\}$ zove se **trag krivulje** γ. $\gamma(a)$ je **početak**, a $\gamma(b)$ **svršetak** krivulje γ. Krivulja γ je **zatvorena** ako je $\gamma(a) = \gamma(b)$. **Put** u Ω je po dijelovima neprekidno diferencijabilna krivulja u Ω. Dakle, put u Ω je krivulja $\gamma : [a, b] \to \Omega$ takva da postoje $t_0 = a < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = b$ takvi da je restrikcija $\gamma|[t_{j-1}, t_j]$ neprekidno diferencijabilna funkcija za $j = 1, 2, \ldots, n$; u točkama $t_1, \ldots, t_{n-1}$ lijeva i desna derivacija od γ postoje, ali se ne moraju podudarati. **Petlja** je zatvorena krivulja koja je put.

Za svaki podskup $S \subseteq \mathbb{C}$ sa $C(S)$ ćemo označavati skup svih neprekidnih funkcija sa S u $\mathbb{C}$. $C(S)$ je kompleksan vektorski prostor. Ako je skup S kompaktan, sa

$$\|f\|_S = \max\{|f(s)|;\ s \in S\}$$

je zadana norma na prostoru $C(S)$.

Neka je $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ put i $f \in C(\gamma^*)$. Definiramo

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\mathrm{d}t.$$

Nadalje, definiramo **duljinu puta** γ sa

$$\ell(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)|\mathrm{d}t.$$

Zadatak 1.1. *Neka je* $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ *put i* $\varphi : [c,d] \to [a,b]$ *neprekidno diferencijabilna monotono rastuća bijekcija. Stavimo* $\gamma_1 = \gamma \circ \varphi$*. Dokažite da je*

$$\gamma_1^* = \gamma^*, \qquad \ell(\gamma_1) = \ell(\gamma), \qquad \int_{\gamma_1} f(z)\,dz = \int_\gamma f(z)\,dz \quad \forall f \in C(\gamma^*).$$

Zadatak 1.2. *Neka je* $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ *put i* $f \in C(\gamma^*)$*. Dokažite da je*

$$\left| \int_\gamma f(z)\,dz \right| \leq \ell(\gamma) \|f\|_{\gamma^*}.$$

Neka je Δ trokut u $\mathbb{C}$, tj. najmanji konveksan skup koji sadrži zadane tri nekolinearne točke u $\mathbb{C}$. Tada ćemo sa $\partial\Delta$ označavati pozitivno orijentirani rub trokuta Δ.

Teorem 1.4. (*Cauchyjev i Morerin teorem*) *Neka je* $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ *otvoren skup i* $f \in C(\Omega)$*. Funkcija* f *je holomorfna na* Ω *ako i samo ako za svaki zatvoren trokut* $\Delta \subseteq \Omega$ *vrijedi*

$$\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz = 0.$$

Zadatak 1.3. *Neka je* $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ *otvoren skup i neka su* f *i* f_n, $n \in \mathbb{N}$, *funkcije sa* Ω *u* $\mathbb{C}$*. Dokažite da su sljedeća tri svojstva međusobno ekvivalentna:*

(*a*) *Za svaki kompaktan skup* $K \subseteq \Omega$ *niz restrikcija* $(f_n|K)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergira uniformno prema restrikciji* $f|K$.

(*b*) *Ako su* $a \in \Omega$ *i* $r > 0$ *takvi da je* $\overline{K}(a,r) \subseteq \Omega$ *tada niz restrikcija* $(f_n|\overline{K}(a,r))_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergira uniformno prema restrikciji* $f|\overline{K}(a,r)$.

(*c*) *Za svaku točku* $a \in \Omega$ *postoji* $r > 0$ *takav da je* $K(a,r) \subseteq \Omega$ *i da niz restrikcija* $(f_n|K(a,r))_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergira uniformno prema restrikciji* $f|K(a,r)$.

U situaciji iz zadatka 1.3. reći ćemo da niz funkcija (f_n) **konvergira lokalno uniformno** na Ω prema funkciji f. Ako su sve funkcije f_n, $n \in \mathbb{N}$, neprekidne na Ω, tada iz svojstva (*c*) lako slijedi da je i funkcija f neprekidna na Ω.

Teorem 1.5. (*Weierstrass*) *Neka je* $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ *otvoren skup i neka je* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *niz u* $\mathcal{H}(\Omega)$ *koji na* Ω *lokalno uniformno konvergira prema funkciji* $f : \Omega \to \mathbb{C}$*. Tada je* $f \in \mathcal{H}(\Omega)$*. Nadalje, niz derivacija* $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergira lokalno uniformno na* Ω *prema derivaciji* f'.

Teorem 1.6. *Neka je* γ *put u* $\mathbb{C}$ *i* $g \in C(\gamma^*)$*. Stavimo*

$$f(z) = \int_\gamma \frac{g(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta, \qquad z \in \mathbb{C} \setminus \gamma^*.$$

Tada je $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus \gamma^*)$ *i za* $k \in \mathbb{N}$ *i* $z \in \mathbb{C} \setminus \gamma^*$ *vrijedi*

$$f^{(k)}(z) = k! \int_\gamma \frac{g(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}}\,d\zeta.$$

Teorem 1.7. (*Liouville*) *Neka je funkcija* $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ *ograničena. Tada je funkcija* f *konstantna.*

Neka je γ petlja u $\mathbb{C}$. Definiramo funkciju $Ind_\gamma : \mathbb{C} \setminus \gamma^* \to \mathbb{C}$ sa

$$Ind_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{\zeta - z} \mathrm{d}\zeta.$$

$Ind_\gamma(z)$ zove se **indeks** točke z u odnosu na petlju γ (katkada se kaže da je to indeks petlje γ u odnosu na točku z).

Teorem 1.8. *Neka je γ petlja u $\mathbb{C}$ i $\Omega = \mathbb{C} \setminus \gamma^*$.*

(*a*) $Ind_\gamma(z) \in \mathbb{Z}\ \forall z \in \Omega$.

(*b*) *Ind_γ je konstanta na svakoj komponenti povezanosti skupa Ω.*

(*c*) *Ind_γ je nula na neograničenoj komponenti povezanosti skupa Ω.*

Napomenimo da je skup γ^* kompaktan pa skup Ω ima točno jednu neograničenu komponentu povezanosti.

Dokaz: (*a*) Neka je $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ i neka je $S \subseteq [a, b]$ (konačan) skup svih točaka u kojima γ nije neprekidno diferencijabilna. Neka je $z \in \Omega$. Definiramo funkciju $\varphi : [a, b] \to \mathbb{C}$ sa

$$\varphi(t) = e^{\int_a^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s)-z} \mathrm{d}s}.$$

Tada se lako vidi da vrijedi

$$\varphi'(t) = \varphi(t) \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z}, \qquad t \in [a, b] \setminus S. \qquad (*)$$

Definiramo $\psi : [a, b] \to \mathbb{C}$ sa

$$\psi(t) = \frac{\varphi(t)}{\gamma(t) - z}.$$

Tada je funkcija ψ neprekidna i za $t \in [a, b] \setminus S$ pomoću $(*)$ nalazimo

$$\psi'(t) = \varphi'(t) \cdot \frac{1}{\gamma(t) - z} - \varphi(t) \cdot \frac{\gamma'(t)}{(\gamma(t) - z)^2} = 0.$$

Zaključujemo da je funkcija ψ konstantna na svakom otvorenom intervalu sadržanom u skupu $[a, b] \setminus S$. Budući da je funkcija ψ neprekidna, slijedi da je ψ konstantna na $[a, b]$. Posebno,

$$\frac{\varphi(a)}{\gamma(a) - z} = \psi(a) = \psi(b) = \frac{\varphi(b)}{\gamma(b) - z}.$$

Međutim, $\gamma(a) = \gamma(b)$ pa slijedi

$$\varphi(b) = \varphi(a).$$

Kako je očito $\varphi(a) = 1$, slijedi

$$1 = \varphi(b) = e^{2\pi i Ind_\gamma(z)},$$

a odatle je $Ind_\gamma(z) \in \mathbb{Z}$.

(*b*) Po teoremu 1.6. je $Ind_\gamma \in H(\Omega)$. Posebno, funkcija Ind_γ je neprekidna na Ω. Budući da je neprekidna slika povezanog skupa povezan skup, tvrdnja (*b*) slijedi iz tvrdnje (*a*).

(*c*) Neka je z točka u neograničenoj komponenti skupa Ω takva da je

$$|\zeta - z| > \frac{\ell(\gamma)}{2\pi} \qquad \forall \zeta \in \gamma^*.$$

Sada pomoću zadatka 1.2. slijedi $|Ind_\gamma(z)| < 1$, pa iz (*a*) zaključujemo da je $Ind_\gamma(z) = 0$. Zbog (*b*) Ind_γ je nula na cijeloj neograničenoj komponenti od Ω.

Zadatak 1.4. *Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ otvoren skup i $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Definiramo funkciju $g : \Omega \times \Omega \to \mathbb{C}$ na sljedeći način:*

$$g(z,w) = \begin{cases} \dfrac{f(z)-f(w)}{z-w} & w \neq z \\ \\ f'(z) & w = z \end{cases}$$

Dokažite da je tada funkcija g neprekidna i da je za svaku točku $w \in \Omega$ funkcija $z \mapsto g(z,w)$ holomorfna na Ω.

Uputa: Za $a \in \Omega$ i $\varepsilon > 0$ zbog neprekidnosti funkcije f' možemo izabrati $r > 0$ takav da je $K(a,r) \subseteq \Omega$ i da vrijedi

$$\zeta \in K(a,r) \qquad \Longrightarrow \qquad |f'(\zeta) - f'(a)| \leq \varepsilon.$$

Sada dokažite da za bilo koje $z, w \in K(a,r)$ (bilo različite, bilo jednake) vrijedi

$$g(z,w) = \int_0^1 f'(\gamma(t))\mathrm{d}t \qquad \text{za} \qquad \gamma(t) = (1-t)z + tw, \quad t \in [0,1].$$

Odatle dokažite neprekidnost funkcije g u točki (a,a). Za drugu tvrdnju koristite teorem 1.3.

Sada ćemo malo generalizirati pojam indeksa. Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ otvoren skup. **Lanac** u Ω je bilo koja (neuređena) $n-$torka $\Gamma = [\gamma_1, \ldots, \gamma_n]$ putova u Ω. U tom slučaju pišemo $\Gamma^* = \gamma_1^* \cup \cdots \cup \gamma_n^*$ i za funkciju $f \in C(\Gamma^*)$ definiramo

$$\int_\Gamma f(z)\mathrm{d}z = \sum_{j=1}^n \int_{\gamma_j} f(z)\mathrm{d}z.$$

Ako je svaki γ_j petlja, lanac Γ se zove **ciklus**. Za ciklus Γ u $\mathbb{C}$ definiramo indeks bilo koje točke $z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma^*$ u odnosu na Γ :

$$Ind_\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{1}{\zeta - z}\mathrm{d}\zeta = \sum_{j=1}^n Ind_{\gamma_j}(z).$$

Očigledno tvrdnje teorema 1.8. vrijede i ako u njegovu iskazu petlju γ zamijenimo bilo kojim ciklusom Γ u $\mathbb{C}$.

Teorem 1.9. (*Globalni Cauchyjev teorem*) *Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ otvoren skup i $f \in \mathcal{H}(\Omega)$.*

(*a*) *Neka je Γ ciklus u Ω takav da je $Ind_\Gamma(\alpha) = 0 \ \forall \alpha \in \mathbb{C} \setminus \Omega$. Tada je*

$$\int_\Gamma f(z)dz = 0 \qquad i \qquad Ind_\Gamma(z)f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(w)}{w-z}dw \quad \forall z \in \Omega \setminus \Gamma^*.$$

(*b*) *Neka su Γ_1 i Γ_2 ciklusi u Ω takvi da je $Ind_{\Gamma_1}(\alpha) = Ind_{\Gamma_2}(\alpha) \ \forall \alpha \in \mathbb{C} \setminus \Omega$. Tada je*

$$\int_{\Gamma_1} f(z)dz = \int_{\Gamma_2} f(z)dz.$$

Dokaz: (a) Definiramo $g : \Omega \times \Omega \to \mathbb{C}$ kao u zadatku 1.4. Tada je g neprekidna funkcija, pa možemo definirati $h : \Omega \to \mathbb{C}$ sa

$$h(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma g(z, w) \mathrm{d}w, \qquad z \in \Omega.$$

Kako je funkcija g neprekidna na $\Omega \times \Omega$, ona je uniformno neprekidna na svakom kompaktnom podskupu od $\Omega \times \Omega$. Dakle, ako je $z_0 \in \Omega$ i ako je $(z_n)_{b\in\mathbb{N}}$ niz u Ω takav da je $z_0 = \lim_{n\to\infty} z_n$, tada je

$$g(z_0, w) = \lim_{n\to\infty} g(z_n, w) \qquad \text{uniformno u odnosu na} \quad w \in \Gamma^*.$$

Odatle slijedi

$$h(z_0) = \lim_{n\to\infty} h(z_n).$$

Time je dokazano da je funkcija h neprekidna na Ω.

Neka je Δ trokut u Ω. Tada je

$$\int_{\partial\Delta} h(z)\mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Delta} \left[\int_\Gamma g(z, w)\mathrm{d}w \right] \mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi i} \int_\Omega \left[\int_{\partial\Delta} g(z, w)\mathrm{d}z \right] \mathrm{d}w = 0,$$

jer je prema zadatku 1.4. funkcija $z \mapsto g(z, w)$ holomorfna na Ω za svaku točku $w \in \Omega$ i zbog Cauchyjevog teorema 1.4. Sada prema Morerinom teoremu 1.4. zaključujemo da je $h \in \mathcal{H}(\Omega)$.

Stavimo

$$\Omega_1 = \{z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma^*;\ Ind_\Gamma(z) = 0\}.$$

Očito je Ω_1 otvoren skup. Po pretpostavci je $\mathbb{C} \setminus \Omega \subseteq \Omega_1$, tj. $\Omega \cup \Omega_1 = \mathbb{C}$. Definiramo funkciju $h_1 : \Omega_1 \to \mathbb{C}$ sa

$$h_1(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(w)}{w - z} \mathrm{d}w, \qquad z \in \Omega_1.$$

Prema teoremu 1.6. vrijedi $h_1 \in \mathcal{H}(\Omega_1)$. Za $z \in \Omega \cap \Omega_1$ imamo

$$h(z) = h_1(z) - f(z) Ind_\Gamma(z) = h_1(z).$$

To pokazuje da postoji $\varphi \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ takva da je $\varphi|\Omega = h$ i $\varphi|\Omega_1 = h_1$.

Zbog tvrdnje (c) teorema 1.8. Ω_1 sadrži neograničenu komponentu skupa $\mathbb{C} \setminus \Gamma^*$. Stoga imamo

$$\lim_{|z|\to\infty} \varphi(z) = \lim_{|z|\to\infty} h_1(z) = 0.$$

To pokazuje da je funkcija φ ograničena na $\mathbb{C}$, pa je prema Liouvilleovom teoremu 1.7. ta funkcija konstantna, dakle svuda jednaka nuli. Posebno je $h(z) = 0\ \forall z \in \Omega$. Odatle za $z \in \Omega \setminus \Gamma^*$ imamo

$$0 = h(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(w)}{w - z} \mathrm{d}w - f(z) Ind_\Gamma(z).$$

Time je druga jednakost u (a) dokazana.

Neka je $a \in \Omega \setminus \Gamma^*$. Stavimo $F(z) = (z - a) f(z)$, $z \in \Omega$. Tada je $F \in \mathcal{H}(\Omega)$ i primjenom dokazane jednakosti na funkciju F nalazimo

$$\int_\Gamma f(z)\mathrm{d}z = \int_\Gamma \frac{F(z)}{z - a} \mathrm{d}z = 2\pi i F(a) Ind_\Gamma(a) = 0,$$

jer je $F(a) = 0$. Time je i prva jednakost u (a) dokazana.

(b) Neka je $-\Gamma_2$ ciklus sastavljen od suprotnih petlji iz Γ_2 i neka je Γ unija ciklusa Γ_1 i $-\Gamma_2$. Tada očito vrijedi

$$\int_\Gamma = \int_{\Gamma_1} - \int_{\Gamma_2},$$

pa slijedi da je $Ind_\Gamma(\alpha) = 0\ \forall\alpha \in \mathbb{C} \setminus \Omega$. Prema (a) tada imamo za svaku $f \in \mathcal{H}(\Omega)$:

$$0 = \int_\Gamma f(z)\mathrm{d}z = \int_{\Gamma_1} f(z)\mathrm{d}z - \int_{\Gamma_2} f(z)\mathrm{d}z.$$

Dakle,

$$\int_{\Gamma_1} f(z)\mathrm{d}z = \int_{\Gamma_2} f(z)\mathrm{d}z.$$

Budući da znamo da je Ind_γ nula na neograničenoj komponenti skupa $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$, indeks se vrlo jednostavno računa u svakoj komponenti, jer se može pokazati da indeks poraste za 1 kada iz jedne u drugu komponentu povezanosti skupa $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$ dolazimo prelazeći put γ zdesna na lijevo.

Zadatak 1.5. *Neka su $a, b \in \mathbb{C}$, $b \neq 0$, i neka je $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ zadana sa*

$$\gamma(t) = a + be^{it};$$

tj. γ je pozitivno orijentirana kružnica sa središtem u točki a i radijusom $|b|$. Direktnim računom dokažite da je $Ind_\gamma(z) = 1\ \forall z \in K(a, |b|)$.

Otvoren povezan skup u $\mathbb{C}$ zove se **područje**.

Teorem 1.10. (*Teorem jedinstvenosti*) *Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ područje, $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ i $f \not\equiv 0$. Tada skup svih nultočaka*

$$N(f) = f^{-1}(0) = \{z \in \Omega;\ f(z) = 0\}$$

nema gomilišta u skupu Ω. Dakle, ako su $f, g \in \mathcal{H}(\Omega)$ takve da skup $\{z \in \Omega;\ f(z) = g(z)\}$ ima gomilište u Ω onda je $f \equiv g$.

Teorem 1.11. (*Princip maksimuma modula*) *Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ područje i neka je $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ nekonstantna funkcija. Tada ne postoji točka $z_0 \in \Omega$ takva da je*

$$|f(z_0)| \geq |f(z)| \qquad \forall z \in \Omega.$$

Teorem 1.12. (*Teorem o inverznoj funkciji*) *Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ otvoren skup, $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ i neka je točka $z_0 \in \Omega$ takva da je $f'(z_0) \neq 0$. Tada postoji otvorena okolina $V \subseteq \Omega$ točke z_0 takva da je $f(V)$ otvoren skup i da je restrikcija $f|V$ bijekcija sa V na $f(V)$. Nadalje, inverzna funkcija te bijekcije je holomorfna na $f(V)$.*

Dokaz: Funkcija $g : \Omega \times \Omega \to \mathbb{C}$ definirana u zadatku 1.4. je neprekidna. Stoga postoji otvorena okolina $V \subseteq \Omega$ točke z_0 takva da vrijedi

$$\left| \frac{f(z_1) - f(z_2)}{z_1 - z_2} \right| \geq \frac{1}{2}|f'(z_0)| \qquad \forall z_1, z_2 \in V.$$

Prema tome vrijedi

$$z_1, z_2 \in V \qquad \Longrightarrow \qquad |f(z_1) - f(z_2)| \geq \frac{1}{2}|f'(z_0)| \cdot |z_1 - z_2|. \qquad (*)$$

Budući da je $f'(z_0) \neq 0$, odatle slijedi da je $f|V$ injekcija. Također slijedi da je $|f'(z)| \geq \frac{1}{2}|f'(z_0|$ $\forall z \in V$. Posebno je $f'(z) \neq 0\ \forall z \in V$.

Dokažimo sada da je skup $f(V)$ otvoren. Neka je $\zeta \in V$. Neka je $r > 0$ takav da je $\overline{K}(\zeta, r) \subseteq V$. Prema $(*)$ postoji $\delta > 0$ takav da vrijedi

$$\left| f\left(\zeta + r\mathrm{e}^{it}\right) - f(\zeta) \right| \geq 2\delta \qquad \forall t \in \mathbb{R}. \qquad (**)$$

Neka je $\alpha \in \mathbb{C} \setminus f(V)$. Definiramo funkciju $h : V \to \mathbb{C}$ sa

$$h(z) = \frac{1}{\alpha - f(z)}, \qquad z \in V.$$

Tada je $h \in \mathcal{H}(V)$. Nadalje, prema zadatku 1.5. i prema drugoj jednakosti u tvrdnji (a) Cauchy-jevog teorema 1.9. vrijedi

$$h(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{h(w)}{w - \zeta} \mathrm{d}w,$$

gdje je $\gamma : [0, 2\pi] \to V$ definirana sa

$$\gamma(t) = \zeta + r\mathrm{e}^{it}, \qquad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Odatle pomoću zadatka 1.2. i pomoću nejednakosti $(**)$ nalazimo

$$\frac{1}{|\alpha - f(\zeta)|} = |h(\zeta)| \leq \max\{|h(\zeta + r\mathrm{e}^{it}|;\ 0 \leq t \leq 2\pi\} \leq \frac{1}{2\delta - |\alpha - f(\zeta)|}.$$

Odatle je $|\alpha - f(\zeta)| \geq \delta$ za svaki $\alpha \in \mathbb{C} \setminus f(V)$. Prema tome, vrijedi

$$|\alpha - f(\zeta)| < \delta \qquad \Longrightarrow \qquad \alpha \in f(V).$$

Drugim riječima, dokazali smo da je $K(f(\zeta), \delta) \subseteq f(V)$. Kako je točka $\zeta \in V$ bila proizvoljna, zaključujemo da je skup $f(V)$ otvoren.

Stavimo $U = f(V)$ i neka je $\varphi : U \to V$ inverzna funkcija bijekcije $f|V$ sa V na U. Neka je $u_0 \in U$ i stavimo $z_0 = \varphi(u_0) \in V$, tj. $u_0 = f(z_0)$. Za proizvoljnu $z \in V$ i $u = f(z) \in U$ imamo

$$\frac{\varphi(u) - \varphi(u_0)}{u - u_0} = \frac{z - z_0}{f(z) - f(z_0)}.$$

Kada u teži prema u_0, tada z teži prema z_0 zbog $(*)$. Budući da je $f'(z_0) \neq 0$, iz gornje jednakosti slijedi da postoji limes kada u teži prema u_0 :

$$\frac{1}{f'(z_0)} = \lim_{u \to u_0} \frac{\varphi(u) - \varphi(u_0)}{u - u_0}.$$

Time je dokazano da je funkcija φ holomorfna na U.

Teorem 1.13. *Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ područje i $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ nekonstantna funkcija. Neka je $z_0 \in \Omega$ i $w_0 = f(z_0)$ tako da je z_0 nultočka funkcije $f - w_0$. Pretpostavimo da je $m \in \mathbb{N}$ kratnost z_0 kao nultočke funkcije $f - w_0$. Postoji otvorena okolina $V \subseteq \Omega$ točke z_0 i postoji funkcija $\varphi \in \mathcal{H}(V)$ takve da vrijedi:*

(a) $f(z) = w_0 + [\varphi(z)]^m \ \forall z \in V$;

(b) $\varphi'(z) \neq 0 \ \forall z \in V$ *i* φ *je bijekcija sa* V *na* $K(0, r)$ *za neki* $r > 0$.

Napomena: Prema tome, f je $m : 1$ preslikavanje sa $V \setminus \{z_0\}$ na $K^*(w_0, r^m)$. Posebno, svaka točka $w_0 \in f(\Omega)$ je unutarnja točka skupa $f(\Omega)$, tj. skup $f(\Omega)$ je otvoren.

Dokaz: Iz teorema jedinstvenosti 1.10. slijedi da možemo pretpostaviti da je $\Omega = K(z_0, \delta)$ i da vrijedi $f(z) \neq w_0 \ \forall z \in K^*(z_0, \delta)$. Iz Taylorovog reda za funkciju $f - w_0$ slijedi da je

$$f(z) = w_0 + (z - z_0)^m g(z), \qquad z \in \Omega,$$

gdje je $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ i $g(z) \neq 0$ $\forall z \in \Omega$. Prema tome je $\dfrac{g'}{g} \in \mathcal{H}(\Omega)$, pa možemo pisati Taylorov red te funkcije oko točke z_0 :

$$\frac{g'(z)}{g(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \qquad z \in \Omega.$$

Definiramo $h \in \mathcal{H}(\Omega)$ sa

$$h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (z - z_0)^{n+1}, \qquad z \in \Omega.$$

Definicija je smislena jer je radijus konvergencije gornjeg reda potencija jednak radijusu konvergencije Taylorovog reda funkcije $\dfrac{g'}{g}$:

$$\limsup_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{n+1} \right|^{\frac{1}{n+1}} = \limsup_{n\to\infty} (n+1)^{-\frac{1}{n+1}} \left(|a_n|^{\frac{1}{n}} \right)^{\frac{n}{n+1}} = \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}},$$

budući da je

$$\lim_{n\to\infty} (n+1)^{-\frac{1}{n+1}} = 1 \qquad \text{i} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1.$$

Prema tvrdnji (c) teorema 1.1. imamo $h' = \dfrac{g'}{g}$, a odatle je

$$\left(g \cdot \mathrm{e}^{-h}\right)' = 0.$$

Dakle, funkcija $g \cdot \mathrm{e}^{-h}$ je konstantna, tj. postoji $\alpha \in \mathbb{C}$ takva da je $g = \alpha \mathrm{e}^{h}$. Kako je $g \neq 0$ to je $\alpha \neq 0$. Neka je $\beta \in \mathbb{C}$ takav da je $\alpha = \beta^m$. Definiramo funkciju $\varphi \in \mathcal{H}(\Omega)$ ovako:

$$\varphi(z) = \beta (z - z_0) \mathrm{e}^{\frac{h(z)}{m}}.$$

Tada je

$$\varphi(z)^m = \alpha (z - z_0)^m \mathrm{e}^{h(z)} = (z - z_0)^m g(z) = f(z) - w_0, \qquad z \in \Omega.$$

Nadalje, $\varphi(z_0) = 0$ i $\varphi'(z_0) = \beta \mathrm{e}^{\frac{h(z_0)}{m}} \neq 0$. Po teoremu 1.12. o inverznoj funkciji skup V s traženim svojstvima postoji.

Prema napomeni prije dokaza teorema 1.13. imamo

Korolar 1.1. *Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ područje i $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ nekonstantna funkcija. Tada je $f(\Omega)$ područje.*

Teorem 1.14. *Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ područje i neka je funkcija $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ injektivna. Tada je $f'(z) \neq 0$ $\forall z \in \Omega$ i $f^{-1} \in \mathcal{H}(f(\Omega))$.*

Zadatak 1.6. *Dokažite teorem 1.14.*

Uputa: Upotrijebite teorem 1.13. da dokažete da iz $f'(z) = 0$ slijedi da funkcija f nije injektivna na nekoj okolini točke z. Za drugu tvrdnju upotrijebite teorem 1.12.

Teorem 1.15. (*Schwarzova lema*) *Neka je $f \in \mathcal{H}(K(0,1))$ takva da je $f(0) = 0$ i $|f(z)| \leq 1$ $\forall z \in K(0,1)$. Tada vrijedi $|f(z)| \leq |z|$ $\forall z$ i $|f'(0)| \leq 1$. Ako je $|f(z)| = |z|$ za neku točku $z \neq 0$ ili ako je $|f'(0)| = 1$ onda postoji $\alpha \in \mathbb{C}$ takav da je $|\alpha| = 1$ i $f(z) = \alpha z$ $\forall z \in K(0,1)$.*

Dokaz: Prema zadatku 1.4. funkcija $g : K(0,1) \to \mathbb{C}$ definirana sa

$$g(z) = \begin{cases} \dfrac{f(z)}{z} & z \neq 0 \\ \\ f'(0) & z = 0 \end{cases}$$

holomorfna je na $K(0,1)$.

Na kružnici $|z| = r < 1$ vrijedi $|g(z)| \leq \dfrac{1}{r}$. Odatle pomoću principa maksimuma modula (teorem 1.11.) zaključujemo da vrijedi:

$$|z| \leq r \qquad \Longrightarrow \qquad |g(z)| \leq \frac{1}{r}.$$

Pustimo li da r teži prema 1 slijedi

$$|g(z)| \leq 1 \qquad \forall z \in K(0,1),$$

a to upravo daje nejednakosti koje treba dokazati. Ukoliko za neku točku $z \in K(0,1)$ vrijedi $|g(z)| = 1$, tada pomoću principa maksimuma modula nalazimo da je g konstanta modula 1.

Poglavlje 2

Izolirani singulariteti

Za kompleksnu funkciju f kompleksne varijable kažemo da ima **izoliran singularitet** u točki z_0 (ili da joj je točka z_0 izolirani singularitet), ako postoji $r > 0$ takav da je funkcija f holomorfna na punktiranom krugu $K^*(z_0, r)$, ali nije holomorfna na čitavom krugu $K(z_0, r)$. Dakle, jedna je mogućnost da funkcija f uopće nije definirana u točki z_0 (tj. točka z_0 nije u domeni $\mathcal{D}(f)$ funkcije f), ili je $z_0 \in \mathcal{D}(f)$ ali f nije holomorfna ni na jednoj otvorenoj okolini te točke.

Ako je tako i ako se funkcija f može definirati (ili redefinirati) u točki z_0 tako da ona postane holomorfna na čitavom krugu $K(z_0, r)$, onda se kaže da je singularitet z_0 **uklonjiv**. Nužan uvjet da bi singularitet z_0 bio uklonjiv jest da funkcija f ima limes u točki z_0; tada je taj limes jedina vrijednost funkcije f u točki z_0 uz koju funkcija f može postati holomorfna na okolini od z_0. Tada je funkcija f nužno ograničena na $K^*(z_0, \rho)$ za neki $\rho > 0$ (u stvari, za svaki $\rho < r$). Važna je činjenica da je zapravo taj na prvi pogled slabi zahtjev ne samo nužan nego i dovoljan za uklonjivost izoliranog singulariteta.

Teorem 2.1. *Izolirani singularitet z_0 funkcije f je uklonjiv ako i samo ako postoji $\rho > 0$ takav da je funkcija f definirana i ograničena na punktiranom krugu $K^*(z_0, \rho)$.*

Zadatak 2.1. *Dokažite dovoljnost uvjeta u teoremu 2.1.*

Uputa: Dokažite da iz ograničenosti funkcije $f|K^*(z_0, \rho)$ slijedi da je funkcija h definirana na $K(z_0, \rho)$ sa

$$h(z) = \begin{cases} 0 & \text{ako je} \quad z = z_0 \\ (z - z_0)^2 f(z) & \text{ako je} \quad z \in K^*(z_0, \rho), \end{cases}$$

holomorfna na $K(z_0, \rho)$. Zatim dokažite da Taylorov red funkcije h oko točke z_0 ima prva dva koeficijenta jednaka nuli, tj. da je

$$h(z) = \sum_{n=2}^{\infty} c_n (z - z_0)^n.$$

Zatim definirajte $f(z_0) = c_2$ i dokažite da je uz tu definiciju f holomorfna na $K(z_0, \rho)$.

Uzmimo sada da je z_0 neuklonjiv izolirani singularitet funkcije f. Promatrajmo tada niz funkcija

$$(z - z_0)f(z), \quad (z - z_0)^2 f(z), \quad (z - z_0)^3 f(z), \quad \cdots\cdots$$

Tada je z_0 izolirani singularitet svih tih funkcija. Ako je taj singularitet uklonjiv za funkciju $(z - z_0)^m f(z)$ za neki $m \in \mathbb{N}$, tada je on uklonjiv i za $(z - z_0)^n f(z)$ $\forall n \geq m$. U tom slučaju za

z_0 kažemo da je **pol** funkcije f. Kažemo da je z_0 **pol reda** m ako je singularitet z_0 uklonjiv za funkciju $(z-z_0)^m f(z)$, ali neuklonjiv za funkciju $(z-z_0)^{m-1}f(z)$. U tom slučaju ožito vrijedi

$$\lim_{z\to z_0} |f(z)| = +\infty.$$

Ako izolirani singularitet z_0 nije niti uklonjiv niti pol, onda kažemo da je z_0 **bitni singularitet** funkcije f.

Teorem 2.2. *Neka je z_0 bitni singularitet funkcije f i neka je $r>0$ takav da je $K^*(z_0,r)\subseteq \mathcal{D}(f)$. Tada je skup $f(K^*(z_0,r))$ gust u $\mathbb{C}$; dakle, za svaku točku $w\in\mathbb{C}$ postoji niz $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ u $K^*(z_0,r)$ takav da vrijedi*

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z_0 \qquad i \qquad \lim_{n\to\infty} f(z_n) = w.$$

Posebno, ne postoji niti konačan niti beskonačan

$$\lim_{z\to z_0} |f(z)|.$$

Dokaz: Pretpostavimo da skup $f(K^*(z_0,r))$ nije gust u $\mathbb{C}$. Tada postoji $w\in\mathbb{C}$ i $\rho>0$ takvi da je $K(w,\rho)\cap f(K^*(z_0,r))=\emptyset$. To znači da vrijedi

$$|f(z)-w|\geq\rho \qquad \forall z\in K^*(z_0,r). \qquad (*)$$

Definiramo sada $g: K^*(z_0,r)\to\mathbb{C}$ sa

$$g(z)=\frac{1}{f(z)-w}, \qquad z\in K^*(z_0,r).$$

Tada je $g\in\mathcal{H}(K^*(z_0,r))$ i zbog $(*)$ vrijedi

$$|g(z)|\leq\frac{1}{\rho} \qquad \forall z\in K^*(z_0,r).$$

Prema teoremu 2.1. točka z_0 je uklonjiv singularitet funkcije g, tj. funkcija g se proširuje do funkcije iz $\mathcal{H}(K(z_0,r))$.

Sada imamo dvije mogućnosti. Pretpostavimo prvo da z_0 nije nultočka tako proširene funkcije g. Iz neprekidnosti u točki z_0 slijedi da tada postoje $\varepsilon>0$ i $0<\delta\leq r$ takvi da je

$$|g(z)|\geq\varepsilon \qquad \forall z\in K(z_0,\delta).$$

Odatle slijedi

$$|f(z)|-|w|\leq|f(z)-w|\leq\frac{1}{\varepsilon} \qquad \Longrightarrow \qquad |f(z)|\leq|w|+\frac{1}{\varepsilon} \quad \forall z\in K^*(z_0,\delta),$$

a prema teoremu 2.1. tada je z_0 uklonjivi singularitet funkcije f, što je suprotno pretpostavci u teoremu.

Ostaje nam još mogućnost da je $g(z_0)=0$. Uzmimo da je z_0 nultočka funkcije g kratnosti $m\in\mathbb{N}$. Tada možemo pisati $g(z)=(z-z_0)^m h(z)$, gdje je $h\in\mathcal{H}(K(z_0,r))$ i $h(z_0)\neq 0$. Izaberemo sada $0<\delta\leq r$ tako da h nema nultočaka u krugu $K(z_0,\delta)$. Tada je sa

$$k(z)=\frac{1}{h(z)}, \qquad z\in K(z_0,\delta),$$

definirana funkcija $k \in \mathcal{H}(K(z_0, \delta))$. Sada slijedi

$$(z - z_0)^m f(z) = (z - z_0)^m w + k(z), \qquad z \in K^*(z_0, \delta),$$

što pokazuje da je točka z_0 pol funkcije f. Kako je i to isključeno pretpostavkom teorema, zaključujemo da je pretpostavka da $f(K^*(z_0, r))$ nije gusta u $\mathbb{C}$ nemoguća i time je teorem dokazan.

Proširena kompleksna ravnina definira se kao skup $\overline{C} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Topologija od $\overline{C}$ definirana je tako da se na skupu $\mathbb{C}$ ona podudara s topologijom kompleksne ravnine i da je baza okolina točke ∞ sastavljena od skupova

$$\overline{C} \setminus \overline{K}(0, r) = \{\infty\} \cup K(0, r, +\infty) = \{\infty\} \cup \{z \in \mathbb{C};\ |z| > r\}, \qquad r \in \mathbb{R}, \quad r \geq 0.$$

Ta se topologija može i geometrijski opisati:

Zadatak 2.2. *Neka je S sfera promjera 1 u $\mathbb{R}^3$ zadana sa*

$$S = \left\{(\xi, \eta, \zeta) \in \mathbb{R}^3;\ \xi^2 + \eta^2 + \left(\zeta - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\right\}.$$

Definiramo bijekciju $\Phi : \overline{\mathbb{C}} \to S$ tako da stavimo $\Phi(\infty) = (0, 0, 1)$ i da je za $z \in \mathbb{C}$ $\Phi(z)$ presjecište pravca određenog točkama $N = (0, 0, 1)$ i $(Re\, z, Im\, z, 0)$ s punktiranom sferom $S \setminus \{N\}$. Dokažite da je tada

$$\Phi(z) = \left(\frac{Re\, z}{1 + |z|^2}, \frac{Im\, z}{1 + |z|^2}, \frac{|z|^2}{1 + |z|^2}\right), \qquad z \in \mathbb{C}.$$

Nadalje, dokažite da je bijekcija Φ homeomorfizam sa $\overline{\mathbb{C}}$ na S, tj. da su preslikavanja $\Phi : \overline{\mathbb{C}} \to S$ i $\Phi^{-1} : S \to \overline{\mathbb{C}}$ neprekidna.

Primijetimo da niz $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ teži prema točki ∞ ako i samo ako niz apsolutnih vrijednosti $(|z_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ teži prema $+\infty$. Ako je z_0 izolirani singularitet funkcije $f \in \mathcal{H}(K^*(z_0, r))$ onda se ta funkcija proširuje do neprekidne funkcije sa $K(z_0, r)$ u $\overline{\mathbb{C}}$ ako i samo ako je z_0 ili uklonjiv singularitet ili pol funkcije f.

Bez dokaza navodimo:

Teorem 2.3. (**Laurentov razvoj**) *Neka su $0 \leq r < R \leq +\infty$ i neka je $f \in \mathcal{H}(K(z_0, r, R))$, gdje je $K(z_0, r, R)$ otvoren "kružni prsten"*

$$K(0, r, R) = \{z \in \mathbb{C};\ r < |z - z_0| < R\}.$$

Tada postoje jedinstveni $c_n \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{Z}$, takvi da vrijedi

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n (z - z_0)^n \qquad \forall z \in K(z_0, r, R).$$

Taj red konvergira apsolutno na $K(z_0, r, R)$ i red apsolutnih vrijednosti konvergira uniformno na zatvorenom kružnom vijencu

$$\overline{K}(z_0, \delta, \rho) = \{z \in \mathbb{C};\ \delta \leq |z - z_0| \leq \rho\}$$

ako je $r < \delta < \rho < R$. Nadalje, ako je γ pozitivno orijentirana kružnica sa središtem u točki z_0 i radijusom ρ, $r < \rho < R$, onda je

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz, \qquad n \in \mathbb{Z}.$$

Taj je teorem primjenjiv posebno na situaciju kad je $r = 0$. Tada je funkcija f definirana i holomorfna na skupu $K(z_0, 0, R) = K^*(z_0, R)$, dakle, točka z_0 je izolirani singularitet funkcije f. U tom slučaju koeficijent c_{-1} u gornjem Laurentovom razvoju zove se **reziduum** funkcije f u točki z_0 i pišemo

$$Res(f, z_0) = c_1 = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z.$$

Teorem 2.4. (**Teorem o reziduumima**) *Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ otvoren skup, $a_1, \ldots, a_n$ međusobno različite točke iz Ω, $f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus \{a_1, \ldots, a_n\})$ i neka je Γ ciklus u $\Omega \setminus \{a_1, \ldots, a_n\}$ takav da vrijedi*

$$Ind_\Gamma(\alpha) = 0 \qquad \forall \alpha \in \mathbb{C} \setminus \Omega.$$

Tada je

$$\int_\Gamma f(z)dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{n} Res(f, a_j) Ind_\Gamma(a_j).$$

Dokaz: Za svaki $j \in \{1, \ldots, n\}$ izaberemo $r_j > 0$ takav da je

$$K(a_j, r_j) \subseteq \Omega \setminus (\Gamma^* \cup \{a_1, \ldots, a_{j-1}, a_{j+1}, \ldots, a_n\})$$

i neka je γ_j pozitivno orijentirana kružnica sa središtem u točki a_j i radijusom ρ_j, $0 < \rho_j < r_j$. Stavimo $k_j = Ind_\Gamma(a_j)$. Nadalje, neka je $\Omega_1 = \Omega \setminus \{a_1, \ldots, a_n\}$ i $\Gamma = [\delta_1, \ldots, \delta_m]$, gdje su δ_i petlje u Ω_1. Za bilo koju petlju γ i za cijeli broj k sa γ^k označimo petlju dobivenu iz γ $k-$strukim obilaskom; preciznije, ako je $k = 0$ γ^k je konstanta, ako je $k > 0$ γ^k je $k-$struki obilazak petlje γ, a ako je $k < 0$ γ^k je $|k|-$struki obilazak suprotne petlje. Naravno,

$$\int_{\gamma^k} f(z)\mathrm{d}z = k\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z, \qquad \text{dakle} \qquad Ind_{\gamma^k}(a) = k \cdot Ind_\gamma(a) \quad \forall a \in \mathbb{C} \setminus \gamma^*. \qquad (*)$$

Definiramo sada novi ciklus Γ_1 u Ω_1 :

$$\Gamma_1 = [\delta_1, \ldots, \delta_m, \gamma_1^{-k_1}, \ldots, \gamma_n^{-k_n}]$$

Sada se iz $(*)$ lako provjerava da vrijedi

$$Ind_{\Gamma_1}(\alpha) = 0 \qquad \forall \alpha \in \mathbb{C} \setminus \Omega_1 = (\mathbb{C} \setminus \Omega) \cup \{a_1, \ldots, a_n\}.$$

Stoga iz prve jednakosti u tvrdnji (a) globalnog Cauchyjevog teorema 1.9. slijedi

$$0 = \int_{\Gamma_1} f(z)\mathrm{d}z = \int_\Gamma f(z)\mathrm{d}z - \sum_{j=1}^{n} k_j \int_{\gamma_j} f(z)\mathrm{d}z.$$

Odatle je

$$\int_\Gamma f(z)\mathrm{d}z = \sum_{j=1}^{n} k_j \int_{\gamma_j} f(z)\mathrm{d}z = 2\pi i \sum_{j=1}^{n} Res(f, a_j) Ind_\Gamma(a_j).$$

Zadatak 2.3. *Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ otvoren skup i neka je $a \in \Omega$ nultočka funkcije $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ kratnosti $m \in \mathbb{N}$. Dokažite da je tada točka a pol prvog reda funkcije $\frac{f'}{f}$ i da je*

$$Res\left(\frac{f'}{f}, a\right) = m.$$

Odatle izvedite da ako je a pol funkcije g reda m onda je a pol prvog reda funkcije $\frac{g'}{g}$ i

$$Res\left(\frac{g'}{g}, a\right) = -m.$$

Uputa: Za prvu tvrdnju zapišite f u obliku $f(z) = (z-a)^m h(z)$, a za drugu tvrdnju promatrajte funkciju $f = \dfrac{1}{g}$.

Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ otvoren skup, $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ i $S \subseteq \Omega$. Tada sa $N(f;S)$ označavamo sumu kratnosti svih nultočaka funkcije f u skupu S – to je cijeli broj ≥ 0 ili $+\infty$.

Za ciklus $\Gamma = [\gamma_1, \ldots, \gamma_n]$ u Ω i za $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ definiramo ciklus $f \circ \Gamma$ u $\mathbb{C}$:

$$f \circ \Gamma = [f \circ \gamma_1, \ldots, f \circ \gamma_n].$$

Teorem 2.5. *Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ otvoren skup, $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ i Γ ciklus u Ω takav da vrijedi*

$$Ind_\Gamma(\alpha) = 0 \qquad \forall \alpha \in \mathbb{C} \setminus \Omega.$$

Neka su $\Omega_1, \ldots, \Omega_k$ sve ograničene komponente skupa $\mathbb{C} \setminus \Gamma^*$ koje su sadržane u Ω i sa $Ind_\Gamma(\Omega_j)$ označimo $Ind_\Gamma(z)$ za bilo koju točku $z \in \Omega_j$. Tada za svaku točku $w \in \mathbb{C} \setminus (f \circ \Gamma)^*$ (tj. takvu da je $f(\zeta) \neq w \ \forall \zeta \in \Gamma^*$) vrijedi

$$\sum_{j=1}^{k} Ind_\Gamma(\Omega_j) \cdot N(f-w;\Omega_j) = Ind_{f\circ\Gamma}(w).$$

Dokaz: Neka je $\Gamma = [\gamma_1, \ldots, \gamma_n]$ pri čemu su $\gamma_j : [a_j, b_j] \to \Omega$ petlje. Za $j \in \{1, \ldots, k\}$ neka su $z_{j1}, \ldots, z_{jn_j}$ sve nultočke funkcije $f - w$ u skupu Ω_j i neka je m_{ji} kratnost nultočke z_{ji}. Tada je

$$Ind_\Gamma(z_{ji}) = Ind_\Gamma(\Omega_j) \qquad \text{i} \qquad N(f-w;\Omega_j) = \sum_{i=1}^{n_j} m_{ji},$$

a prema zadatku 2.2. imamo

$$Res\left(\frac{f'}{f-w}, z_{ji}\right) = m_{ji}.$$

Dakle,

$$\begin{aligned}
Ind_{f\circ\Gamma}(w) &= \frac{1}{2\pi i}\sum_{j=1}^{k}\int_{f\circ\gamma_j}\frac{1}{z-w}\mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi i}\sum_{j=1}^{k}\int_{a_j}^{b_j}\frac{(f\circ\gamma_j)'(t)}{(f\circ\gamma_j)(t)-w}\mathrm{d}t = \\
&= \frac{1}{2\pi i}\sum_{j=1}^{k}\int_{a_j}^{b_j}\frac{f'(\gamma_j(t))}{f(\gamma_j(t))-w}\gamma_j'(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi i}\sum_{j=1}^{k}\int_{\gamma_j}\frac{f'(z)}{f(z)-w}\mathrm{d}z = \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{f'(z)}{f(z)-w}\mathrm{d}z = \sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j} Res\left(\frac{f'}{f-w}, z_{ji}\right) Ind_\Gamma(z_{ji}) = \\
&= \sum_{j=1}^{k} Ind_\Gamma(\Omega_j)\left(\sum_{i=1}^{n_j} m_{ji}\right) = \sum_{j=1}^{k} Ind_\Gamma(\Omega_j)\cdot N(f-w;\Omega_j).
\end{aligned}$$

Naročito je primjenjiv sljedeći specijalni slučaj ovog općeg teorema:

Korolar 2.1. *Neka $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ otvoren skup i $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Neka je γ petlja u Ω, takva da $\mathbb{C}\setminus\gamma^*$ ima dvije komponente, da je ograničena komponenta D tog skupa sadržana u Ω i da vrijedi $Ind_\gamma(D) \neq 0$. Neka je $\delta = f \circ \gamma$. Tada vrijedi*

$$N(f-w;D) = \frac{Ind_\delta(w)}{Ind_\gamma(D)} \qquad \forall w \in \mathbb{C} \setminus \delta^*.$$

Za dokaz dosta općenite verzije Rouchéovog teorema treba nam sljedeća lema prema kojoj se $Ind_\gamma(z)$ ne mijenja ako se petlja γ malo promijeni (ne prelazeći točku z).

Lema 2.1. *Neka su $\gamma_1, \gamma_2 : [a,b] \to \mathbb{C}$ petlje i neka je točka $z \in \mathbb{C}$ takva da vrijedi*

$$|\gamma_1(t) - \gamma_2(t)| < |\gamma_1(t) - z| \qquad \forall t \in [a,b].$$

Tada je $z \in \mathbb{C} \setminus \gamma_1^*$, $z \in \mathbb{C} \setminus \gamma_2^*$ i vrijedi

$$Ind_{\gamma_1}(z) = Ind_{\gamma_2}(z).$$

Dokaz: Iz gornje nejednakost je očito da $z \notin \gamma_1^*$ i $z \notin \gamma_2^*$. Definiramo $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ sa

$$\gamma(t) = \frac{\gamma_2(t) - z}{\gamma_1(t) - z}.$$

Tada je γ petlja i iz pretpostavljene nejednakosti slijedi

$$|1 - \gamma(t)| < 1 \qquad \forall t \in [a,b].$$

To znači da je $\gamma^* \subseteq K(1,1)$. Prema tome, 0 se nalazi u neograničenoj komponenti skupa $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$. Prema tvrdnji (c) teorema 1.8. vrijedi $Ind_\gamma(0) = 0$. Međutim, iz definicije petlje γ direktnim računom nalazimo da je $Ind_\gamma(0) = Ind_{\gamma_2}(z) - Ind_{\gamma_1}(z)$.

Odatle ćemo sada izvesti Rouchéov teorem koji uspoređuje broj nultočaka funkcija koje se ne razlikuju mnogo na rubu područja.

Teorem 2.6. (**Rouchéov teorem**) *Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ otvoren skup, $f, g \in \mathcal{H}(\Omega)$, γ petlja u Ω takva da skup $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$ ima dvije komponente, da je ograničena komponenta D tog skupa sadržana u Ω i da je $Ind_\gamma(D) \neq 0$. Pretpostavimo da vrijedi*

$$|f(z) - g(z)| < |f(z)| \qquad \forall z \in \gamma^*.$$

Tada je

$$N(f;D) = N(g;D).$$

Dokaz: Stavimo $\gamma_1 = f \circ \gamma$ i $\gamma_2 = g \circ \gamma$. Tada vrijedi

$$|\gamma_1(t) - \gamma_2(t)| < |\gamma_1(t)| \qquad \forall t$$

pa pomoću leme 2.1. slijedi

$$Ind_{\gamma_1}(0) = Ind_{\gamma_2}(0).$$

Odatle i iz korolara 2.1. slijedi tvrdnja teorema.

Poglavlje 3

Neka globalna svojstva područja

U ovom poglavlju definirat ćemo nekoliko globalnih svojstava područja u kompleksnoj ravnini. Dokazat ćemo da su sva ta svojstva međusobno ekvivalentna.

Područje $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ zove se **primitivno** ako za svaku funkciju $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ postoji funkcija $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ takva da je $g'(z) = f(z)$ $\forall z \in \Omega$. Primijetimo da nisu sva područja primitivna:

Zadatak 3.1. *Dokažite da ne postoji* $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^*)$, $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, *takva da je*

$$f'(z) = \frac{1}{z} \qquad \forall z \in \mathbb{C}^*.$$

Područje $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ zove se **Cauchyjevo** ako u njemu vrijedi Cauchyjev teorem, odnosno, ako za svaku petlju γ u Ω i za svaku $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ vrijedi

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = 0.$$

Propozicija 3.1. *Područje* $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ *je Cauchyjevo ako i samo ako za svaku petlju* γ *u* Ω *i za svaku točku* $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \Omega$ *vrijedi* $Ind_\gamma(\alpha) = 0$.

Dokaz: Pretpostavimo da vrijedi $Ind_\gamma(\alpha) = 0$ za svaku petlju γ u Ω i za svaku točku $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \Omega$. Tada je prema prvoj formuli u tvrdnji (a) teorema 1.9. područje Ω Cauchyjevo.

Pretpostavimo sada da je područje Ω Cauchyjevo. Neka je $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \Omega$ i neka je γ petlja u Ω. Tada je sa

$$f(z) = \frac{1}{z-\alpha}, \qquad z \in \Omega,$$

definirana funkcija $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, pa kako je po pretpostavci područje Ω Cauchyjevo vrijedi

$$0 = \int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = \int_\gamma \frac{1}{z-\alpha}\mathrm{d}z = 2\pi i Ind_\gamma(\alpha).$$

Time je propozicija dokazana.

Propozicija 3.2. *Područje* $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ *je Cauchyjevo ako i samo ako je ono primitivno.*

Dokaz: Pretpostavimo da je područje $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ Cauchyjevo i neka je $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Fiksirajmo točku $a \in \Omega$. Ako su γ_1 i γ_2 dva puta u Ω od točke a do točke $z \in \Omega$, tada je put γ dobiven slaganjem puta γ_1 i suprotnog puta $-\gamma_2$ od puta γ_2 petlja, pa vrijedi

$$0 = \int_\gamma f(\zeta)\mathrm{d}\zeta = \int_{\gamma_1} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta - \int_{\gamma_2} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta.$$

To pokazuje da možemo definirati funkciju $g : \Omega \to \mathbb{C}$ na sljedeći način:

$$g(z) = \int_\gamma f(\zeta)\mathrm{d}\zeta \qquad \text{gdje je } \gamma \text{ put u } \Omega \text{ od točke } a \text{ do točke } z \in \Omega.$$

Neka je z_0 proizvoljna točka u Ω i neka je γ_0 put u Ω od točke a do točke z_0. Nadalje, neka je $r > 0$ takav da je $K(z_0, r) \subseteq \Omega$. Za $z \in K(z_0, r)$ neka je γ_z put u Ω koji je složen od puta γ_0 i ravnog segmenta $[z_0, z]$ od točke z_0 do točke z. Tada je

$$\frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0} = \frac{1}{z - z_0}\left(\int_{\gamma_z} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta - \int_{\gamma_0} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta\right) = \frac{1}{z - z_0}\int_{[z_0,z]} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta.$$

Ravni segment $[z_0, z]$ od točke z_0 do točke z možemo parametrizirati na sljedeći način:

$$\delta(t) = tz + (1 - t)z_0, \qquad 0 \le t \le 1.$$

Tada je $\delta'(t) = z - z_0 \ \forall t$, dakle

$$\frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0} = \int_0^1 f(tz + (1 - t)z_0)\mathrm{d}t,$$

odnosno,

$$\frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0} - f(z_0) = \int_0^1 [f(z_0 + t(z - z_0)) - f(z_0)]\mathrm{d}t, \qquad z \in K(z_0, r).$$

Odavde zbog neprekidnosti funkcije f u točki z_0 lako slijedi da je

$$f(z_0) = \lim_{z\to z_0} \frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0}.$$

Kako je točka $z_0 \in \Omega$ bila proizvoljna, time je dokazano da je $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ i $g' = f$. Kako je funkcija $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ bila proizvoljna, dokazali smo da je područje Ω primitivno.

Pretpostavimo sada da je područje $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ primitivno. Neka je $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ i neka je $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ takva da je $g' = f$. Za proizvoljan put $\gamma : [a, b] \to \Omega$ tada imamo

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = \int_a^b g'(\gamma(t))\gamma'(t)\mathrm{d}t = \int_a^b \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} g(\gamma(t))\mathrm{d}t = g(\gamma(b)) - g(\gamma(a)).$$

Ako je γ petlja, tj. $\gamma(a) = \gamma(b)$, slijedi

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = 0.$$

Dakle, područje Ω je Cauchyjevo.

Propozicija 3.3. *Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ područje takvo da je svaka komponenta povezanosti skupa $\mathbb{C} \setminus \Omega$ neograničena. Tada je područje Ω Cauchyjevo.*

Dokaz: Neka je γ petlja u Ω. Kako je $(\mathbb{C} \setminus \Omega) \subseteq (\mathbb{C} \setminus \gamma^*)$, svaka komponenta povezanosti skupa $\mathbb{C} \setminus \Omega$ sadržana je u nekoj komponenti povezanosti skupa $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$. Budući da je po pretpostavci svaka komponenta povezanosti skupa $\mathbb{C} \setminus \Omega$ neograničena, i budući da skup $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$ ima točno jednu neograničenu komponentu povezanosti, zaključujemo da je čitav skup $\mathbb{C} \setminus \Omega$ sadržan u neograničenoj komponenti skupa $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$. Prema tvrdnji (c) teorema 1.8. vrijedi $Ind_\gamma(\alpha) = 0$ $\forall \alpha \in \mathbb{C} \setminus \Omega$. Sada iz propozicije 3.1. slijedi da je područje Ω Cauchyjevo.

Zadatak 3.2. *Za skup $S \subseteq \mathbb{C}$ kažemo da je* **zvjezdast** *ako postoji točka $a \in S$ takva da je za svaku točku $z \in S$ ravni segment $[a, z]$ sadržan u S. Dokažite da je svako zvjezdasto područje $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ Cauchyjevo.*

Uputa: Dokažite da je svaka komponenta skupa $\mathbb{C} \setminus \Omega$ neograničena.

Dovoljan uvjet iz propozicije 3.3. postaje znatno jednostavniji ako kompleksnu ravninu $\mathbb{C}$ uronimo u proširenu kompleksnu ravninu $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$:

Zadatak 3.3. *Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ područje. Dokažite da je svaka komponenta povezanosti skupa $\mathbb{C} \setminus \Omega$ neograničena ako i samo ako je skup $\overline{\mathbb{C}} \setminus \Omega$ povezan.*

Uputa: Dokažite da je za svaku neograničenu komponentu povezanosti K skupa $\mathbb{C} \setminus \Omega$ skup $K \cup \{\infty\}$ povezan, a odatle izvedite povezanost skupa $\overline{\mathbb{C}} \setminus \Omega$ ukoliko je svaka komponenta povezanosti skupa $\mathbb{C} \setminus \Omega$ neograničena. Nadalje, dokažite da je svaka ograničena komponenta povezanosti skupa $\mathbb{C} \setminus \Omega$ ujedno komponenta povezanosti skupa $\overline{\mathbb{C}} \setminus \Omega$. Odatle izvedite da u slučaju postojanja ograničene komponente povezanosti skupa $\mathbb{C} \setminus \Omega$ skup $\overline{\mathbb{C}} \setminus \Omega = (\mathbb{C} \setminus \Omega) \cup \{\infty\}$ nije povezan.

Za područje $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ kažemo da ima **svojstvo logaritma** ako za svaku $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, takvu da je $N(f) = \emptyset$, tj. takvu da je $f(z) \neq 0\ \forall z \in \Omega$, postoji funkcija $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ takva da je $f(z) = \mathrm{e}^{g(z)}$ $\forall z \in \Omega$. Za prirodan broj $n \geq 2$ kažemo da područje Ω ima **svojstvo $n-$tog korijena** ako za svaku $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, takvu da je $N(f) = \emptyset$, postoji $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ takva da je $f(z) = [g(z)]^n\ \forall z \in \Omega$.

Propozicija 3.4. (a) *Primitivno područje ima svojstvo logaritma.*

(b) *Područje sa svojstvom logaritma ima svojstvo $n-$tog korijena za svaki prirodan broj $n \geq 2$.*

Dokaz: (a) Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ primitivno područje i neka je $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ funkcija bez nultočaka. Tada je $f'/f \in \mathcal{H}(\Omega)$, pa postoji funkcija $G \in \mathcal{H}(\Omega)$ takva da je $G' = f'/f$. Tada je

$$\left(f\mathrm{e}^{-G}\right)' = f'\mathrm{e}^{-G} - fG'\mathrm{e}^{-G} = 0,$$

dakle, funkcija $f\mathrm{e}^{-G}$ je konstanta $\alpha \in \mathbb{C}$. Kako f nema nultočaka, to je $\alpha \neq 0$, pa postoji $\beta \in \mathbb{C}$ takvo da je $\alpha = \mathrm{e}^{\beta}$. Za $g = \beta + G \in \mathcal{H}(\Omega)$ dobivamo $f = \mathrm{e}^g$.

(b) Pretpostavimo da je Ω područje sa svojstvom logaritma i neka je $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ funkcija bez nultočaka. Neka je $h \in \mathcal{H}(\Omega)$ takva da je $f = \mathrm{e}^h$. Stavimo

$$g(z) = \mathrm{e}^{\frac{h(z)}{n}}, \qquad z \in \Omega.$$

Tada je $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ i vrijedi $f(z) = [g(z)]^n\ \forall z \in \Omega$.

Zadatak 3.4. *Dokažite da za područje $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ i za $a \in \Omega$ područje $\Omega \setminus \{a\}$ nije primitivno i da nema svojstvo $n-$tog korijena ni za jedan prirodan broj $n \geq 2$.*

Neka su $\gamma, \delta : [a, b] \to \Omega$ krivulje u području Ω, takve da je $\gamma(a) = \delta(a) = z_1$ i $\gamma(b) = \delta(b) = z_2$. **Homotopija** u Ω od krivulje γ do krivulje δ je neprekidno preslikavanje $H : [a, b] \times [0, 1] \to \Omega$ takva da je

$$H(t, 0) = \gamma(t) \quad \forall t \in [a, b]; \qquad H(t, 1) = \delta(t) \quad \forall t \in [a, b];$$

$$H(a, s) = z_1 \quad \forall s \in [0, 1]; \qquad H(b, s) = z_2 \quad \forall s \in [0, 1].$$

Kažemo da su **krivulje** γ i δ **homotopne u** Ω, ako postoji homotopija u Ω od krivulje γ do krivulje δ. Ako su γ i δ putovi koji su homotopni u Ω, može se dokazati da postoji homotopija H u Ω od γ do δ takva da je za svaki $s \in [0, 1]$ krivulja $\gamma_s(t) = H(s, t)$ put.

Ako je $\gamma : [a,b] \to \Omega$ petlja u području Ω, kažemo da je ona nul−homotopna u Ω ako je ona homotopna u Ω s konstantnom petljom $\delta(t) = \gamma(a) = \gamma(b)$ $\forall t \in [a,b]$. Područje $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ zove se **jednostavno povezano** ako je svaka petlja u Ω nul−homotopna u Ω. Budući da se homotopija neke petlje s konstantnom petljom može shvaćati kao kontinuirano "stezanje" te petlje u točku, za očekivati je da će područje Ω biti jednostavno povezano ako i samo ako njegov komplement $\mathbb{C} \setminus \Omega$ "nema rupa", tj. ako nijedna komponenta povezanosti od $\mathbb{C} \setminus \Omega$ nije ograničena. Doista, to je ekvivalencija $(b) \Leftrightarrow (d)$ u sljedećem teoremu:

Teorem 3.1. *Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ područje. Tada je sljedećih deset svojstava međusobno ekvivalentno:*

(a) *Područje Ω homeomorfno je jediničnom krugu $K(0,1)$.*

(b) *Područje Ω je jednostavno povezano.*

(c) *Za svaku petlju γ u Ω i za svaku točku $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \Omega$ vrijedi $Ind_\gamma(\alpha) = 0$.*

(d) *Svaka komponenta skupa $\mathbb{C} \setminus \Omega$ je neograničena.*

(e) *Skup $\overline{\mathbb{C}} \setminus \Omega$ je povezan.*

(f) *Područje Ω je Cauchyjevo.*

(g) *Područje Ω je primitivno.*

(h) *Područje Ω ima svojstvo logaritma.*

(i) *Za svaki prirodan broj $n \geq 2$ područje Ω ima svojstvo $n-$tog korijena.*

(j) *Za neki prirodan broj $n \geq 2$ područje Ω ima svojstvo $n-$tog korijena.*

Dokažimo najprije lemu:

Lema 3.1. *Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ otvoren skup i $K \subseteq \Omega$ kompaktan skup. Tada postoji ciklus Γ u $\Omega \setminus K$ takav da je $Ind_\Gamma(\alpha) = 0$ $\forall \alpha \in \mathbb{C} \setminus \Omega$ i $Ind_\Gamma(a) = 1$ $\forall a \in K$.*

Dokaz: Skupovi K i $\mathbb{C} \setminus \Omega$ su disjunktni, K je kompaktan i $\mathbb{C} \setminus \Omega$ je zatvoren. Stoga je

$$d = \inf\{|z-w|;\ z \in K,\, w \in \mathbb{C} \setminus \Omega\} > 0.$$

(Ukoliko je $\Omega = \mathbb{C}$, za d uzimamo bilo koji pozitivan broj.) Neka je

$$\Sigma = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} (p_n \cup q_n),$$

gdje su p_n i q_n pravci

$$p_n = \left\{ z \in \mathbb{C};\ \operatorname{Re} z = \frac{nd}{2} \right\}, \qquad q_n = \left\{ z \in \mathbb{C};\ \operatorname{Im} z = \frac{nd}{2} \right\}.$$

Dakle, Σ je mreža u $\mathbb{C}$, koja se sastoji od ekvidistantnih pravaca udaljenih za $\frac{d}{2}$ paralelnih s realnom odnosno s imaginarnom osi. Na taj način ravnina $\mathbb{C}$ pokrivena je mrežom zatvorenih kvadrata Q sa stranicama duljine $\frac{d}{2}$. Za svaki od tih kvadrata Q označimo sa ∂Q njegov pozitivno orijentiran rub.

Za $a \in K \setminus \Sigma$ označimo sa Q_a jedini kvadrat iz konstruirane mreže, unutar kojega se točka a nalazi. Točka a nalazi se tada u neograničenoj komponenti skupa $\mathbb{C} \setminus \partial Q$ za svaki $Q \neq Q_a$ iz naše mreže. Prema tvrdnji (c) teorema 1.8. imamo

$$Ind_{\partial Q}(a) = 0 \qquad \forall Q \neq Q_a. \qquad (*)$$

Zadatak 3.5. *Dokažite da je*

$$Ind_{\partial Q_a}(a) = 1. \qquad (**)$$

Uputa: Izaberite $r > 0$ takav da je zatvoren krug $\overline{K}(a,r)$ sadržan u nutrini kvadrata Q_a. Zatim konstruirajte petlje γ_1 i γ_2 takve da je

$$\int_{\partial Q_a} - \int_{S(a,r)} = \int_{\gamma_1} + \int_{\gamma_2}$$

($S(a,r)$ ovdje označava pozitivno orijentiranu kružnicu sa središtem a i radijusom r), i takve da je točka a sadržana u neograničenoj komponenti od $\mathbb{C} \setminus \gamma_1^*$ i u neograničenoj komponenti od $\mathbb{C} \setminus \gamma_2^*$. Zatim koristite tvrdnju (c) teorema 1.8. i zadatak 1.5.

Neka su sada $Q_1, \ldots, Q_n$ svi zatvoreni kvadrati iz izabrane mreže koji se sijeku sa skupom K (njih ima konačno mnogo, jer je skup K kompaktan, dakle ograničen). Neka su $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{4n}$ orijentirani segmenti koji su, redom, glatki dijelovi petlji $\partial Q_1, \ldots, \partial Q_n$; dakle, pozitivno orijentirani rub ∂Q_j kvadrata Q_j satoji se od $\gamma_{4j-3}, \gamma_{4j-2}, \gamma_{4j-1}$ i γ_{4j}. Definiramo ciklus $\Gamma' = [\partial Q_1, \ldots, \partial Q_n]$. Prema $(*)$ i $(**)$ imamo

$$Ind_{\Gamma'}(a) = 1 \qquad \forall a \in K \setminus \Sigma. \qquad (\dagger)$$

Stranice svih promatranih kvadrata su duljine $\dfrac{d}{2}$ i zatvoreni kvadrati $Q_1, \ldots, Q_n$ sijeku se sa skupom K. Budući da je d udaljenost skupa K od skupa $\mathbb{C} \setminus \Omega$, nijedan od tih kvadrata ne siječe se sa skupom $\mathbb{C} \setminus \Omega$; doista, ako su $z_1, z_2 \in Q_j$, onda je

$$|z_1 - z_2| \leq \frac{d}{2} \cdot \sqrt{2} < d,$$

pa ne može biti $z_1 \in K$ i $z_2 \in \mathbb{C} \setminus \Omega$. Prema tome, $Q_j \subseteq \Omega$ i, posebno, Γ' je ciklus u Ω. Nadalje, svaka točka $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \Omega$ nalazi se izvan svakog od kvadrata $Q_1, \ldots, Q_n$, pa vrijedi

$$Ind_{\Gamma'}(\alpha) = 0 \qquad \forall \alpha \in \mathbb{C} \setminus \Omega. \qquad (\dagger\dagger)$$

Neka je sada Γ lanac koji se dobije iz lanca $\Gamma'' = [\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{4n}]$ izostavljanjem svih onih segmenata γ_j koji se sijeku sa skupom K. Drugim riječima, izostavljaju se sve one stranice kvadrata $Q_1, \ldots, Q_n$ koje se prilikom integracije duž ciklusa γ' prolaze u oba smjera. Jasno je da se segmenti u Γ mogu poredati tako da to bude ciklus. Nadalje, tada je $\Gamma^* \cap K = \emptyset$. Budući da je $\Gamma^* \subseteq \Gamma'^* \subseteq \Omega$, zaključujemo da je Γ ciklus u $\Omega \setminus K$.

Iz konstrukcije je jasno da je

$$\int_{\Gamma} = \int_{\Gamma''} = \int_{\Gamma'}.$$

Odatle i iz $(\dagger\dagger)$ slijedi da je

$$Ind_{\Gamma}(\alpha) = 0 \qquad \forall \alpha \mathbb{C} \setminus \Omega,$$

a iz $(\dagger)$ slijedi da je

$$Ind_{\Gamma}(a) = 1 \qquad \forall a \in K \setminus \Sigma.$$

Uzmimo sada da je $a \in K \cap \Sigma$. Imamo dvije mogućnosti:

(1) Točka a ne nalazi se u vrhu nijednog od kvadrata $Q_1, \ldots, Q_n$. Tada se točka a nalazi na stranici točno dvaju od tih kvadrata; možemo pretpostaviti da je numeracija takva da se a nalazi na stranicama kvadrata Q_1 i Q_2 i da su to stranice γ_4 i γ_5. Tada je $Q = Q_1 \cup Q_2$ zatvoreni pravokutnik

i njegov pozitivno orijentirani rub ∂Q sastoji se od orijentiranih segmenata $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_6, \gamma_7, \gamma_8$. Točka a nalazi se unutar pravokutnika Q i izvan kvadrata $Q_3, \ldots, Q_n$, pa vrijedi

$$Ind_{\partial Q}(a) = 1, \qquad Ind_{\partial Q_j}(a) = 0, \quad 3 \leq j \leq n.$$

Dakle, ako definiramo ciklus $\Gamma_1 = [\partial Q, \partial Q_3, \ldots, \partial Q_n]$, imamo

$$Ind_{\Gamma_1}(a) = 1.$$

Prije konstruirani ciklus Γ može se dobiti iz ciklusa Γ_1 izostavljanjem onih segmenata γ_j, $1 \leq j \leq 4n$, $j \neq 4$, $j \neq 5$, koji se sijeku sa skupom K, odnosno onih za koje je i suprotan segment u Γ_1. Tada je

$$\int_{\Gamma_1} = \int_{\Gamma}$$

pa zaključujemo da je za takvu točku a

$$Ind_{\Gamma}(a) = 1.$$

(2) Točka a nalazi se u vrhu točno četiriju kvadrata i možemo pretpostaviti da je numeracija takva da su to kvadrati Q_1, Q_2, Q_3 i Q_4. Nadalje, uzmimo da je numeracija stranica tih kvadrata takva da je točka a svršetak segmenata $\gamma_3, \gamma_7, \gamma_{11}$ i γ_{15} i da je ona početak segmenata $\gamma_4, \gamma_8, \gamma_{12}$ i γ_{16}. Neka je $Q = Q_1 \cup Q_2 \cup Q_3 \cup Q_4$. Tada je Q kvadrat sa stranicama duljine d i njegov pozitivno orijentirani rub ∂Q sastoji se od segmenata $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_5, \gamma_6, \gamma_9, \gamma_{10}, \gamma_{13}$ i γ_{14}. Sasvim analogno kao malo prije nalazimo da je

$$Ind_{\partial Q}(a) = 1, \qquad Ind_{\partial Q_j}(a) = 0, \quad 5 \leq j \leq n,$$

pa za ciklus $\Gamma_2 = [\partial Q, \partial Q_5, \ldots, \partial Q_n]$ imamo

$$Ind_{\Gamma}(a) = Ind_{\Gamma_2}(a) = 1.$$

Time je lema dokazana.

Dokaz teorema 3.1. Prema propozicijama 3.1., i 3.2. vrijede ekvivalencije $(c) \Leftrightarrow (f) \Leftrightarrow (g)$, a prema zadatku 3.3. imamo ekvivalenciju $(d) \Leftrightarrow (e)$. Prema propozicijama 3.3. i 3.4. vrijede implikacije $(d) \Rightarrow (f)$ i $(g) \Rightarrow (h) \Rightarrow (i)$. Implikacija $(i) \Rightarrow (j)$ je trivijalna. Budući da je jedinični krug $K(0,1)$ jednostavno povezano područje, vrijedi $(a) \Rightarrow (b)$. Prema klasičnom Cauchyjevom teoremu vrijedi $(b) \Rightarrow (f)$.

Pretpostavimo da ne vrijedi (e) tj. da je $\overline{\mathbb{C}} \setminus \Omega$ nepovezan skup. Budući da je taj skup zatvoren u $\overline{\mathbb{C}}$, postoje neprazni zatvoreni podskupovi A i B od $\overline{\mathbb{C}}$ takvi da je $A \cap B = \emptyset$ i $A \cup B = \overline{\mathbb{C}} \setminus \Omega$. Ω je podskup od $\mathbb{C}$, dakle, $\infty \notin \Omega$. To znači da $\infty \in A \cup B$. Zbog određenosti uzmimo da je $\infty \in B$. Skup $\overline{\mathbb{C}}$ je kompaktan, dakle i svaki njegov zatvoren podskup je kompaktan. Posebno, skup A je kompaktan i sadržan je u otvorenom skupu $\Omega_1 = \overline{\mathbb{C}} \setminus B \subseteq \mathbb{C}$. Prema lemi 3.1. postoji ciklus Γ u $\Omega_1 \setminus A = \Omega$, takav da je

$$Ind_{\Gamma}(a) = 1 \qquad \forall a \in A.$$

Neka su $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ petlje u Ω takve da je $\Gamma = [\gamma_1, \ldots, \gamma_n]$. Tada za bilo koju zadanu točku $a \in A$ vrijedi

$$Ind_{\gamma_1}(a) + \cdots + Ind_{\gamma_n}(a) = 1,$$

pa slijedi da je $Ind_{\gamma_j}(a) \neq 0$ za neki $j \in \{1, \ldots, n\}$. Kako je tada $a \in \mathbb{C} \setminus \Omega$, vidimo da ne vrijedi (c). Time je dokazana implikacija $(c) \Rightarrow (e)$.

Dokaz će biti potpun, ako još dokažemo da iz (j) slijedi (a). Pretpostavimo da vrijedi (j) tj. da za neki prirodan broj n područje Ω ima svojstvo $n-$tog korijena. U sljedećem poglavlju bit će dokazano da tada uz dodatni uvjet $\Omega \neq \mathbb{C}$ vrijedi tzv. Riemannov teorem da postoji bijekcija Φ sa Ω na otvoren jedinični krug $K(0,1)$ takva da su funkcije Φ i Φ^{-1} holomorfne. Tada su te funkcije neprekidne, pa je Φ homeomorfizam. Napokon, ako je $\Omega = \mathbb{C}$, tada homeomorfizam $\Phi : \mathbb{C} \to K(0,1)$ možemo eksplicitno napisati:

$$\Phi(z) = \frac{z}{1+|z|}, \qquad z \in \mathbb{C}; \qquad \Phi^{-1}(w) = \frac{w}{1-|w|}, \qquad w \in K(0,1).$$

Time je teorem 3.1. dokazan (uz pretpostavku da nam je poznat gore spomenuti Riemannov teorem).

Poglavlje 4

Riemannov teorem

Da bismo dokazali najavljeni Riemannov teorem potreban nam je niz teorema o nekim svojstvima skupova funkcija $S \subseteq \mathcal{H}(\Omega)$.

Zadatak 4.1. *Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ otvoren skup i neka je $S \subseteq \mathcal{H}(\Omega)$. Dokažite da su sljedeća tri svojstva skupa S holomorfnih funkcija međusobno ekvivalentna:*

(a) *Za svaki kompaktan skup $K \subseteq \Omega$ postoji $M > 0$ takav da vrijedi*

$$|f(z)| \leq M \qquad \forall z \in K, \quad \forall f \in S.$$

(b) *Za svaku točku $a \in \Omega$ i za svaki $r > 0$ takav da je $\overline{K}(a,r) \subseteq \Omega$ postoji $M > 0$ takav da vrijedi*

$$|f(z)| \leq M \qquad \forall z \in \overline{K}(a,r), \quad \forall f \in S.$$

(c) *Za svaku točku $a \in \Omega$ postoje $r > 0$ i $M > 0$ takvi da vrijedi $K(a,r) \subseteq \Omega$ i*

$$|f(z)| \leq M \qquad \forall z \in K(a,r), \quad \forall f \in S.$$

Ukoliko su ispunjeni međsubno ekvivalentni uvjeti iz tog zadatka kažemo da je skup funkcija S **lokalno uniformno ograničen** na Ω.

Propozicija 4.1. *Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ otvoren skup i neka je skup holomorfnih funkcija $S \subseteq \mathcal{H}(\Omega)$ lokalno uniformno ograničen. Tada je i skup njihovih derivacija $S' = \{f';\ f \in S\}$ lokalno uniformno ograničen.*

Dokaz: Neka je a točka iz Ω i neka je $R > 0$ takav da je $\overline{K}(a,R) \subseteq \Omega$. Po pretpostavci tada postoji $M > 0$ takav da vrijedi:

$$|f(z)| \leq M \qquad \forall z \in \overline{K}(a,R), \quad \forall f \in S. \qquad (*)$$

Neka je $r = R/2$ i $z \in K(a,r)$. Tada je $\overline{K}(z,r) \subseteq \overline{K}(a,R) \subseteq \Omega$, dakle za svaku funkciju $f \in S$ možemo pisati

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} \mathrm{d}\zeta$$

gdje je γ pozitivno orijentirana kružnica $S(z,r)$:

$$\gamma(t) = z + r\mathrm{e}^{it}, \qquad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Dakle,

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{f(z+r\mathrm{e}^{it})}{(r\mathrm{e}^{it})^2} ir\mathrm{e}^{it}\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi r}\int_0^{2\pi} f(z+r\mathrm{e}^{it})\mathrm{e}^{-it}\mathrm{d}t.$$

Odatle je zbog $(*)$

$$|f'(z)| \leq \frac{1}{2\pi r}\cdot M \cdot 2\pi = \frac{M}{r} = \frac{2M}{R}.$$

Budući da gornja nejednakost vrijedi za sve $f \in S$ i za sve točke $z \in K(a,r)$, zbog proizvoljnosti točke $a \in \Omega$ zaključujemo da skup S' ima svojstvo (c) iz zadatka 4.1. Dakle, skup funkcija S' je lokalno uniformno ograničen na Ω.

Za skup $S \subseteq \mathcal{H}(\Omega)$ kažemo da je **relativno kompaktan**, ako svaki niz $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ u S ima lokalno uniformno konvergentan podniz $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$; ako je pri tome i limes

$$\lim_{k\to\infty} f_{n_k}$$

uvijek sadržan u S, za skup S kažemo da je **kompaktan**.

Sasvim analogno kao u zadatku 4.1 dokazuje se da su sljedeća tri svojstva skupa funkcija $S \subseteq \mathcal{H}(\Omega)$ međusobno ekvivalentna:

(a) *Za svaki kompaktan skup $K \subseteq \Omega$ i za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takav da vrijedi*

$$z_1, z_2 \in K, \quad |z_1 - z_2| < \delta, \quad f \in S \qquad \Longrightarrow \qquad |f(z_1) - f(z_2)| < \varepsilon.$$

(b) *Za svaki zatvoren krug $\overline{K}(a,r) \subseteq \Omega$ i za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takav da vrijedi*

$$z_1, z_2 \in \overline{K}(a,r), \quad |z_1 - z_2| < \delta, \quad f \in S \qquad \Longrightarrow \qquad |f(z_1) - f(z_2)| < \varepsilon.$$

(c) *Za svaku točku $a \in \Omega$ postoji $r > 0$ takav da je $K(a,r) \subseteq \Omega$ i takav da za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takav da vrijedi*

$$z_1, z_2 \in K(a,r), \quad |z_1 - z_2| < \delta, \quad f \in S \qquad \Longrightarrow \qquad |f(z_1) - f(z_2)| < \varepsilon.$$

Ako su ti uvjeti ispunjeni za skup S kažemo da je **lokalno ekvikontinuiran** na Ω.

Teorem 4.1. *Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ otvoren skup i neka je skup holomorfnih funkcija $S \subseteq \mathcal{H}(\Omega)$ lokalno uniformno ograničen. Tada je skup S lokalno ekvikontinuiran na Ω.*

Dokaz: Neka je $K \subseteq \Omega$ kompaktan skup i neka je d udaljenost skupa K od skupa $\mathbb{C} \setminus \Omega$:

$$d = d(K, \mathbb{C}\setminus\Omega) = \min\{|z_1 - z_2|;\ z_1 \in K,\ z_2 \in \mathbb{C}\setminus\Omega\} > 0$$

(ako je $\Omega = \mathbb{C}$ za d možemo uzeti bilo koji pozitivan broj). Stavimo tada

$$L = \left\{z \in \mathbb{C};\ d(z,K) \leq \frac{d}{2}\right\}.$$

Tada je L kompaktan skup sadržan u Ω. Prema propoziciji 4.1. tada postoji $M > 0$ takav da vrijedi

$$|f'(z)| \leq M, \qquad \forall z \in L, \quad \forall f \in S.$$

Neka je $\varepsilon > 0$. Stavimo $\delta = \min\left\{\frac{d}{2}, \frac{\varepsilon}{M}\right\}$. Neka su $z_1, z_2 \in K$ takve da je $|z_1 - z_2| < \delta$ i neka je $f \in S$. Tada je $\gamma(t) = (1-t)z_1 + tz_2$, $0 \le t \le 1$, ravni segment u L od točke z_1 do točke z_2, pa nalazimo

$$|f(z_2) - f(z_1)| = \left|\int_\gamma f'(\zeta)\mathrm{d}\zeta\right| \le M|z_2 - z_1| < M \cdot \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon.$$

Time je teorem dokazan, jer su kompaktan skup $K \subseteq \Omega$ i $\varepsilon > 0$ bili proizvoljni.

Sljedeći teorem pokazuje da u slučaju lokalno uniformno ograničenog niza funkcija lokalno uniformna konvergencija slijedi iz obične konvergencije po točkama, pa čak i samo na gustom skupu točaka.

Teorem 4.2. (**Vitali**) *Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ otvoren skup, $\Sigma \subseteq \Omega$ gust skup u Ω, i $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz u $\mathcal{H}(\Omega)$ koji je lokalno uniformno ograničen i takav da je za svaku točku $z \in \Sigma$ niz $(f_n(z))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergentan u $\mathbb{C}$. Tada niz $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira lokalno uniformno na Ω prema funkciji $f \in \mathcal{H}(\Omega)$.*

Dokaz: Neka je K kompaktan podskup od Ω i neka je $\varepsilon > 0$. Stavimo ponovo

$$d = d(K, \mathbb{C} \setminus \Omega) = \min\{|z_1 - z_2|;\ z_1 \in K,\ z_2 \in \mathbb{C} \setminus \Omega\} > 0$$

i definiramo ponovo kompaktan podskup L od Ω sa

$$L = \left\{z \in \mathbb{C};\ d(z, K) < \frac{d}{2}\right\}.$$

Po teoremu 4.1. postoji $\delta > 0$ (uzimamo da je $2\delta \le d$) takav da vrijedi

$$z, z' \in L, \quad |z - z'| < \delta, \quad n \in \mathbb{N} \qquad \Longrightarrow \qquad |f_n(z) - f_n(z')| < \frac{\varepsilon}{3}. \qquad (*)$$

Budući da je skup K kompaktan, postoje točke $z_1, \ldots, z_N \in K$ takve da je

$$K \subseteq K\left(z_1, \frac{\delta}{2}\right) \cup \cdots \cup K\left(z_N, \frac{\delta}{2}\right) \subseteq L.$$

Budući da je skup Σ gust u Ω, za svako $j \in \{1, \ldots, N\}$ vrijedi $\Sigma \cap K\left(z_j, \frac{\delta}{2}\right) \neq \emptyset$, pa možemo izabrati $\zeta_j \in \Sigma \cap K\left(z_j, \frac{\delta}{2}\right)$. Po pretpostavci možemo izabrati $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da vrijedi

$$n, m \ge n_0, \quad j \in \{1, \ldots, N\} \qquad \Longrightarrow \qquad |f_n(\zeta_j) - f_m(\zeta_j)| < \frac{\varepsilon}{3}. \qquad (**)$$

Uzmimo sada proizvoljnu točku $z \in K$. Za neko $j \in \{1, \ldots, N\}$ je tada $z \in K\left(z_j, \frac{\delta}{2}\right)$, dakle, imamo $|z - \zeta_j| < \delta$. Kako je

$$|f_n(z) - f_m(z)| \le |f_n(z) - f_n(\zeta_j)| + |f_n(\zeta_j) - f_m(\zeta_j)| + |f_m(\zeta_j) - f_m(z)|,$$

pomoću $(*)$ i $(**)$ nalazimo

$$n, m \ge n_0 \qquad \Longrightarrow \qquad |f_n(z) - f_m(z)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \qquad (\dagger)$$

(†) pokazuje da je za svaku točku $z \in K$ niz $(f_n(z))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergentan u $\mathbb{C}$. Kako je kompaktan skup $K \subseteq \Omega$ bio proizvoljan, slijedi da je taj niz konvergentan u $\mathbb{C}$ za svaku točku $z \in \Omega$. Definiramo funkciju $f : \Omega \to \mathbb{C}$ sa

$$f(z) = \lim_{n\to\infty} f_n(z), \qquad z \in \Omega.$$

Sada iz (†) slijedi

$$n \geq n_0, \quad z \in K \qquad \Longrightarrow \qquad |f_n(z) - f(z)| \leq \varepsilon.$$

Prema tome, niz funkcija $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira lokalno uniformno na Ω prema funkciji f. Zbog Weierstrassovog teorema 1.5. vrijedi $f \in \mathcal{H}(\Omega)$.

Teorem 4.3. (**Montelov princip kompaktnosti**) *Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ otvoren skup i neka je skup $S \subseteq \mathcal{H}(\Omega)$ lokalno uniformno ograničen. Tada je skup S relativno kompaktan.*

Dokaz: Neka $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz u S. Izaberimo prebrojiv gust skup $\Sigma \subseteq \Omega$ i numerirajmo mu točke prirodnim brojevima:

$$\Sigma = \{z_n;\ n \in \mathbb{N}\}.$$

Niz kompleksnih brojeva $(f_n(z_1))_{n\in\mathbb{N}}$ je ograničen pa prema Bolzano−Weierstrassovom teoremu postoji podniz $(f_{n,1})_{n\in\mathbb{N}}$ niza $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ takav da je niz $(f_{n,1}(z_1))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergentan u $\mathbb{C}$. Sada je niz kompleksnih brojeva $(f_{n,1}(z_2))_{n\in\mathbb{N}}$ ograničen pa postoji podniz $(f_{n,2})_{n\in\mathbb{N}}$ niza $(f_{n,1})_{n\in\mathbb{N}}$ takav da je niz $(f_{n,2}(z_2))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergentan u $\mathbb{C}$. Budući da je tada $(f_{n,2}(z_1))_{n\in\mathbb{N}}$ podniz konvergentnog niza $(f_{n,1}(z_1))_{n\in\mathbb{N}}$, to je i niz $(f_{n,2}(z_1))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergentan u $\mathbb{C}$. Nastavljajući na taj način vidimo da za svaki $m \in \mathbb{N}$ možemo izabrati podniz $(f_{n,m+1})_{n\in\mathbb{N}}$ niza $(f_{n,m})_{n\in\mathbb{N}}$ takav da je niz brojeva $(f_{n,m+1}(z_{m+1}))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergentan. Za bilo koje $j \in \mathbb{N}$ je $(f_{n,n}(z_j))_{n\in\mathbb{N},n\geq j}$ podniz niza $(f_{n,j}(z_j))_{n\in\mathbb{N}}$. Prema tome za svaki $j \in \mathbb{N}$ niz brojeva $(f_{n,n}(z_j))_{n\in\mathbb{N}}$ je konvergentan.

Time je dokazano da podniz $(f_{n,n})_{n\in\mathbb{N}}$ niza $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zadovoljava pretpostavke Vitalijevog teorema 4.2. Prema tom teoremu niz $(f_{n,n})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira lokalno uniformno na Ω prema nekoj funkciji $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Budući da je $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bio proizvoljan niz u S, time je dokazano da je skup S relativno kompaktan.

Zadatak 4.2. *Dokažite Vitalijev teorem 4.2. za područje $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ uz slabiju pretpostavku da je $\Sigma \subseteq \Omega$ skup koji ima bar jedno gomilište u skup Ω.*

Uputa: Po Montelovom principu kompaktnosti (teorem 4.3) izaberite lokalno uniformno konvergentan podniz $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niza $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Iz pretpostavke da niz $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne konvergira lokalno uniformno prema funkciji $g = \lim_{n\to\infty} g_n$ pomoću dokazanog Vitalijevog teorema 4.2. zaključite da postoji točka $a \in \Omega$ takva da niz $(f_n(a))_{n\in\mathbb{N}}$ ima dva različita gomilišta $w_1 = g(a)$ i w_2. Zatim dokažite da postoji lokalno uniformno konvergentan podniz $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niza $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ takav da za $h = \lim_{n\to\infty} h_n$ vrijedi $h(a) = w_2$. Na kraju iskoristite teorem jedinstvenosti 1.10. za funkcije g i h da dođete do kontradikcije.

Teorem 4.4. (**Hurwitz**) *Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ otvoren skup i neka je $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz u $\mathcal{H}(\Omega)$ koji lokalno uniformno na Ω konvergira prema nekoj funkciji $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Neka je $z_0 \in \Omega$ izolirana nultočka funkcije f. Tada za svaki $r > 0$ takav da je $K(z_0, r) \subseteq \Omega$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svako $n \geq n_0$ funkcija f_n ima nultočku u skupu $K(z_0, r)$.*

Dokaz: Neka je $\rho > 0$ takav da je $\overline{K}(z_0, \rho) \subseteq \Omega$ i da je $f(z) \neq 0\ \forall z \in \overline{K}(z_0, \rho) \setminus \{z_0\}$. Neka je γ pozitivno orijentirana kružnica sa središtem u točki z_0 i radijusom ρ. Stavimo

$$\mu = \min\{|f(z)|;\ z \in \gamma^*\} > 0.$$

Kružnica γ^* je kompaktan skup sadržan u Ω, pa kako po pretpostavci niz $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira prema funkciji f lokalno uniformno na Ω, to niz restrikcija $(f_n|\gamma^*)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira uniformno prema restrikciji $f|\gamma^*$. Zbog toga postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da vrijedi

$$z \in \gamma^*, \quad n \geq n_0 \qquad \Longrightarrow \qquad |f_n(z) - f(z)| < \mu.$$

To znači da za svaki $n \geq n_0$ vrijedi

$$|f_n(z) - f(z)| < |f(z)| \qquad \forall z \in \gamma^*.$$

Prema Rouchéovom teoremu 2.6. odatle za svaki $n \geq n_0$ slijedi

$$N(f_n; K(z_0, \rho)) = N(f; K(z_0, \rho)) > 0.$$

Time je teorem dokazan.

Teorem 4.5. *Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ područje i neka je $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz injektivnih funkcija u $\mathcal{H}(\Omega)$. Pretpostavimo da niz $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lokalno uniformno na Ω konvergira prema nekoj nekonstantnoj funkciji f. Tada je funkcija f injektivna.*

Dokaz: Pretpostavimo suprotno i neka su $z_1, z_2 \in \Omega$ takve da je $z_1 \neq z_2$ i $f(z_1) = f(z_2)$. Definiramo niz $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ i funkciju g u $\mathcal{H}(\Omega)$ na sljedeći način:

$$g_n(z) = f_n(z) - f_n(z_2), \qquad g(z) = f(z) - f(z_2), \qquad z \in \Omega.$$

Neka je $0 < r \leq |z_1 - z_2|$ takav da je $K(z_1, r) \subseteq \Omega$. Tada niz $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira lokalno uniformno na Ω prema funkciji g i vrijedi $g(z_1) = 0$. Budući da je funkcija f nekonstantna, po teoremu jedinstvenosti 1.10. točka z_1 je izolirana nultočka funkcije g. Prema Hurwitzovom teoremu 4.4. postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za $n \geq n_0$ funkcija g_n ima nultočku u krugu $K(z_1, r)$. Za takav n i za neko $z_3 \in K(z_1, r)$ tada je $g_n(z_3) = 0$, tj. $f_n(z_3) = f_n(z_2)$. No to je nemoguće, jer je po pretpostavci funkcija f_n injektivna i jer je $z_2 \notin K(z_1, r)$, dakle, $z_3 \neq z_2$. Ova kontradikcija pokazuje da je pretpostavka o neinjektivnosti funkcije f bila pogrešna.

Trebat će nam još jedno svojstvo neprekidnog preslikavanja definiranog na kompaktnom skupu funkcija. Pri tome za otvoren skup $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ i za proizvoljan skup funkcija $S \subseteq \mathcal{H}(\Omega)$ kažemo da je preslikavanje $J : S \to \mathbb{C}$ **neprekidno** na S ako za svaku funkciju $f \in S$ i za svaki niz $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ u S koji konvergira lokalno uniformno na Ω prema funkciji f vrijedi

$$J(f) = \lim_{n\to\infty} J(f_n).$$

Sljedeća propozicija daje još jednu analogiju prostora holomorfnih funkcija $\mathcal{H}(\Omega)$ i Euklidskog prostora.

Propozicija 4.2. *Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ otvoren skup, neka je skup funkcija $S \subseteq \mathcal{H}(\Omega)$ kompaktan i neka je preslikavanje $J : S \to \mathbb{C}$ neprekidno. Tada postoji $f_0 \in S$ takva da vrijedi*

$$|J(f_0)| \geq |J(f)| \qquad \forall f \in S.$$

Drugim riječima, neprekidno preslikavanje na kompaktnom skupu holomorfnih funkcija dostiže svoj supremum.

Dokaz: Stavimo
$$A = \sup\{|J(f)|;\ f \in S\} \leq +\infty.$$
Neka je $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz u S takav da je
$$A = \lim_{n\to\infty} |J(f_n)|.$$
Budući da je po pretpostavci S kompaktan podskup od $\mathcal{H}(\Omega)$, postoji $f_0 \in S$ i podniz $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ niza $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ koji lokalno uniformno na Ω konvergira prema f_0. Zbog neprekidnosti preslikavanja J nalazimo da je
$$A = \lim_{k\to\infty} |J(f_{n_k})| = |J(f_0)| < +\infty.$$

Sljedećih nekoliko zadataka daje drugačiji opis topologije prostora holomorfnih funkcija $\mathcal{H}(\Omega)$.

Zadatak 4.3. *Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ neprazan otvoren skup. Za $n \in \mathbb{N}$ stavimo*
$$K_n = \left\{z \in \mathbb{C};\ |z| \leq n,\ d(z, \mathbb{C}\setminus\Omega) \geq \frac{1}{n}\right\}.$$
Dokažite da tada vrijedi:

(a) *Skup K_n je kompaktan za svaki $n \in \mathbb{N}$.*

(b) *Za svaki $n \in \mathbb{N}$ nutrina skupa K_n je*
$$Int(K_n) = \left\{z \in \mathbb{C};\ |z| < n,\ d(z, \mathbb{C}\setminus\Omega) > \frac{1}{n}\right\}.$$

(c) *Za svaki $n \in \mathbb{N}$ je $K_n \subseteq Int(K_{n+1})$.*

(d) $\Omega = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n$.

Dokažite da ako je $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz kompaktnih skupova takvih da vrijedi (c) i (d), tada vrijedi i

(e) *Za svaki kompaktan skup K postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je $K \subseteq K_n$.*

(f) *Za svaki $n \in \mathbb{N}$ svaka komponenta povezanosti skupa $\overline{\mathbb{C}} \setminus K_n$ sadrži neku komponentu povezanosti skupa $\overline{\mathbb{C}} \setminus \Omega$.*

Zadatak 4.4. *Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ neprazan otvoren skup i neka je $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz kompaktnih skupova sa svojstvima (c) i (d) iz zadatka 4.3. Za $n \in \mathbb{N}$ i za $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ stavimo*
$$\|f\|_n = \max\{|f(z)|;\ z \in K_n\}.$$
Dokažite da je preslikavanje $d : \mathcal{H}(\Omega) \times \mathcal{H}(\Omega) \to \mathbb{R}$ definirano sa
$$d(f,g) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{\|f-g\|_n}{1+\|f-g\|_n}, \qquad f,g \in \mathcal{H}(\Omega),$$
metrika na skupu $\mathcal{H}(\Omega)$, tj. da vrijedi

(a) $d(f,g) \geq 0 \quad \forall f,g \in \mathcal{H}(\Omega)$.

(b) *Za $f,g \in \mathcal{H}(\Omega)$ vrijedi $d(f,g) = 0$ ako i samo ako je $f = g$.*

(c) $d(f,g) = d(g,f) \quad \forall f,g \in \mathcal{H}(\Omega)$.

(d) $d(f,g) \leq d(f,h) + d(h,g) \quad \forall f,g,h \in \mathcal{H}(\Omega)$.

Zadatak 4.5. *Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ otvoren skup i neka je d metrika na skupu $\mathcal{H}(\Omega)$ iz zadatka 4.4. Dokažite da vrijedi:*

(*a*) *Niz $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ u $\mathcal{H}(\Omega)$ konvergira lokalno uniformno na Ω prema funkciji $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ ako i samo ako niz $(d(f_n, f))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira prema nuli.*

(*b*) *Dokažite da je metrički prostor $(\mathcal{H}(\Omega), d)$ potpun, tj. da u njemu vrijedi Cauchyjev kriterij konvergencije: niz $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ u $\mathcal{H}(\Omega)$ je konvergentan u odnosu na metriku d (tj. zbog (a) lokalno uniformno konvergentan) ako i samo ako vrijedi:*

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \exists n_0 \in \mathbb{N} \qquad \textit{takav da} \qquad n, m \geq n_0 \qquad \Longrightarrow \qquad d(f_n, f_m) < \varepsilon.$$

Zadatak 4.6. *U metričkom prostoru $\mathcal{H}(\Omega)$ topologija se uvodi na uobičajen način: skup $S \subseteq \mathcal{H}(\Omega)$ zove se otvoren ako za svaku $f_0 \in S$ postoji $r > 0$ takav da je*

$$K(f_0, r) = \{f \in \mathcal{H}(\Omega);\ d(f_0, f) < r\} \subseteq S;$$

skup $T \subseteq \mathcal{H}(\Omega)$ zove se zatvoren ako je njegov komplement $\mathcal{H}(\Omega) \setminus T$ otvoren. Dokažite da je skup $S \subseteq \mathcal{H}(\Omega)$ kompaktan (u smislu definicije na str. 30) ako i samo ako za svaku familiju $(U_i)_{i\in I}$ otvorenih skupova u $\mathcal{H}(\Omega)$ takvu da je

$$S \subseteq \bigcup_{i\in I} U_i$$

postoje $i_1, i_2, \ldots, i_n \in I$ takvi da je

$$S \subseteq U_{i_1} \cup U_{i_2} \cup \cdots \cup U_{i_n},$$

dakle, ako i samo ako svaki otvoren pokrivač od S sadrži konačan potpokrivač.

Neka su Ω_1 i Ω_2 područja u $\mathbb{C}$. Holomorfna bijekcija $\varphi : \Omega_1 \to \Omega_2$ zove se **izomorfizam područja** Ω_1 i Ω_2. Ako takvo preslikavanje φ postoji, kažemo da je područje Ω_1 **izomorfno** području Ω_2. Zbog određenih geometrijskih svojstava takvih preslikavanja φ (čuvanje kuteva) umjesto naziva *izomorfizam* katkada se upotrebljava naziv **konformna ekvivalencija**.

Zadatak 4.7. *Dokažite da je izomorfnost relacija ekvivalencije na skupu svih područja u $\mathbb{C}$.*

Zadatak 4.8. *Neka su Ω_1 i Ω_2 izomorfna područja u $\mathbb{C}$. Dokažite:*

(*a*) *Ako područje Ω_1 ima svojstvo logaritma, tada i područje Ω_2 ima svojstvo logaritma.*

(*b*) *Ako područje Ω_1 ima svojstvo $n-$tog korijena ($n \geq 2$), tada i područje Ω_2 ima svojstvo $n-$tog korijena.*

Teorem 4.6. *Ako je $\Omega \subsetneq \mathbb{C}$ područje sa svojstvom $n-$tog korijena za neki $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, onda je područje Ω izomorfno otvorenom jediničnom krugu $K(0,1)$.*

Dokaz: Neka je S skup svih holomorfnih injekcija $\psi : \Omega \to K(0,1)$. Prema Montelovom principu kompaktnosti (teorem 4.3.) skup $S \subseteq \mathcal{H}(\Omega)$ je relativno kompaktan.

Svojstvo $n-$tog korijena ključno je da bismo dokazali da je skup S neprazan. Neka je $w \in \mathbb{C}\setminus\Omega$. Tada je funkcija $z \mapsto z - w$ holomorfna i bez nultočaka u Ω, dakle postoji funkcija $\varphi \in \mathcal{H}(\Omega)$ takva da je $[\varphi(z)]^n = z - w$ $\forall z \in \Omega$. Očito je φ injekcija. Prema napomeni iza iskaza teorema 1.13. skup $\varphi(\Omega)$ je otvoren. Nadalje, $0 \notin \varphi(\Omega)$, pa postoje $a \in \mathbb{C}$ i $r > 0$ ($r < |a|$) takvi da je $K(a, r) \subseteq \varphi(\Omega)$. Neka je sada $\alpha \in \mathbb{C}$ takvo da je $\alpha \neq 1$ i $\alpha^n = 1$.

Tvrdimo da je tada

$$|\alpha\varphi(z) - a| \geq r \qquad \forall z \in \Omega. \qquad\qquad (*)$$

Pretpostavimo suprotno, tj. da za neku točku $z_1 \in \Omega$ vrijedi $\alpha\varphi(z_1) - a| < r$. Tada je

$$\alpha\varphi(z_1) \in K(a, r) \subseteq \varphi(\Omega),$$

pa postoji točka $z_2 \in \Omega$ takva da je $\varphi(z_2) = \alpha\varphi(z_1) \neq 0$. Tada je

$$[\varphi(z_2)]^n = \alpha^n[\varphi(z_1)]^n = [\varphi(z_1)]^n, \qquad \text{tj.} \qquad z_2 - w = z_1 - w.$$

No to je nemoguće jer je $\varphi(z_2) \neq \varphi(z_1)$. Time je dokazano da vrijedi $(*)$.

Stoga možemo definirati $\psi \in \mathcal{H}(\Omega)$ formulom

$$\psi(z) = \frac{\rho}{\alpha\varphi(z) - a}, \qquad z \in \Omega,$$

pri čemu je $0 < \rho < r$. Tada je $\psi \in S$, dakle je $S \neq \emptyset$.

Neka su u daljnjem fiksirani točka $a \in \Omega$ i funkcija $\varphi_1 \in S$. Budući da je φ_1 injekcija, prema teoremu 1.14. je $\varphi_1'(a) \neq 0$. Stavimo

$$S_1 = \{\varphi \in S;\ |\varphi'(a)| \geq |\varphi_1'(a)|\}.$$

Taj je skup funkcija kao podskup relativno kompaktnog skupa S i sam relativno kompaktan. okazat ćemo sada da je skup S_1 kompaktan. Po definiciji kompaktnosti treba dokazati da je S_1 zatvoren u odnosu na lokalno uniformnu konvergenciju, tj. da je limes lokalno uniformno konvergentnog niza fenkcija iz S_1 također funkcija iz S_1.

Dakle, neka je $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lokalno uniformno konvergentan niz funkcija iz S_1 i neka je $f = \lim_{n\to\infty} f_n$. Prema Weierstrassovom teoremu 1.5. tada vrijedi

$$|f'(a)| = \lim_{n\to\infty} |f_n'(a)| \geq |\varphi_1'(a)| > 0.$$

Posebno, funkcija f je nekonstantna, pa je prema teoremu 4.5. funkcija f injektivna. Za $z \in \Omega$ imamo zbog $f_n(\Omega) \subseteq K(0,1)$

$$|f(z)| = \lim_{n\to\infty} |f_n(z)| \leq 1.$$

Dakle, $f(\Omega) \subseteq \overline{K}(0,1)$. Međutim prema napomeni iza iskaza teorema 1.13. skup $f(\Omega)$ je otvoren. Stoga je $f(\Omega) \subseteq K(0,1)$. Time je dokazano da je $f \in S$, a kako smo već vidjeli da je $|f'(a)| \geq |\varphi_1'(a)|$, to je $f \in S_1$. Time je dokazano da je skup S_1 kompaktan.

Definiramo sada preslikavanje $J : S_1 \to \mathbb{C}$ sa $J(f) = f'(a)$. Prema Weierstrassovom teoremu 1.5. preslikavanje J je neprekidno, pa prema propoziciji 4.2. postoji funkcija $\varphi \in S_1$ takva da je $|J(\varphi)| \geq |J(f)|\ \forall f \in S_1$. To znači da je

$$|\varphi'(a)| \geq |f'(a)| \qquad \forall f \in S_1,$$

a tada je i

$$|\varphi'(a)| \geq |f'(a)| \qquad \forall f \in S. \qquad (**)$$

Zadatak 4.9. *Neka je za $\alpha \in K(0,1)$ funkcija $f_\alpha : K(0,1) \to \mathbb{C}$ definirana sa*

$$f_\alpha(z) = \frac{z - \alpha}{1 - \overline{\alpha}z}, \qquad z \in K(0,1).$$

Dokažite da je f_α izomorfizam kruga $K(0,1)$ na samog sebe i da vrijedi

$$(f_\alpha)^{-1} = f_{-\alpha}, \qquad f_\alpha(\alpha) = 0, \qquad f_\alpha'(\alpha) = \frac{1}{1 - |\alpha|^2}, \qquad f_\alpha(0) = -\alpha, \qquad f_\alpha'(0) = 1 - |\alpha|^2.$$

Dokazat ćemo sada da je $\varphi(a) = 0$. Pretpostavimo da nije tako i stavimo $\alpha = \varphi(a) \neq 0$. Definiramo $\psi \in S$ sa $\psi = f_\alpha \circ \varphi$; pri tome je $f_\alpha : K(0,1) \to K(0,1)$ izomorfizam iz zadatka 4.9. Tada imamo

$$|\psi'(a)| = |f'_\alpha(\alpha)| \cdot |\varphi'(a)| = \frac{|\varphi'(a)|}{1-|\alpha|^2} > |\varphi'(a)|.$$

No to je u suprotnosti sa $(**)$. Ova kontradikcija pokazuje da vrijedi $\varphi(a) = 0$.

Dokazat ćemo sada da je φ ne samo injekcija Ω u $K(0,1)$ nego i surjekcija. Pretpostavimo suprotno i neka je $\beta \in K(0,1) \setminus \varphi(\Omega)$. Tada je $\beta \neq 0$ jer je $0 \in \varphi(\Omega)$ (naime, $\varphi(a) = 0$). Budući da je β jedina nultočka funkcije f_β, funkcija $f_\beta \circ \varphi \in \mathcal{H}(\Omega)$ nema nultočaka u Ω. Prema pretpostavci o području Ω postoji funkcija $\psi \in \mathcal{H}(\Omega)$ takva da vrijedi

$$[\psi(z)]^n = f_\beta(\varphi(z)) \qquad \forall z \in \Omega.$$

Imamo

$$\varphi \in S \qquad \Longrightarrow \qquad f_\beta \circ \varphi \in S \qquad \Longrightarrow \qquad \psi \in S.$$

Stavimo $\gamma = \psi(a) \in K(0,1)$. Prema zadatku 4.9. tada je

$$\gamma^n = f_\beta(\varphi(a)) = f_\beta(0) = -\beta.$$

Stavimo

$$f = f_\gamma \circ \psi \in S.$$

Nadalje, neka je funkcija $\omega \in \mathcal{H}(K(0,1))$ definirana sa

$$\omega(z) = z^n, \qquad z \in K(0,1).$$

Prema zadatku 4.9. tada je $\psi = f_{-\gamma} \circ f$, dakle

$$f_\beta \circ \varphi = \omega \circ \psi = \omega \circ f_{-\gamma} \circ f.$$

Odatle je

$$\varphi = g \circ f, \qquad \text{gdje je} \qquad g = f_{-\beta} \circ \omega \circ f_{-\gamma} \in \mathcal{H}(K(0,1)).$$

Imamo $|g(z)| < 1$ za svako $z \in K(0,1)$ i

$$g(0) = f_{-\beta}(f_{-\gamma}(0)^n) = f_{-\beta}(\gamma^n) = f_{-\beta}(-\beta) = 0.$$

To znači da funkcija g zadovoljava uvjetima Schwarzove leme (teorem 1.15.). Preslikavanja $f_{-\beta}$ i $f_{-\gamma}$ su bijekcije sa $K(0,1)$ na $K(0,1)$, a ω nije bijekcija sa $K(0,1)$ na $K(0,1)$. Stoga funkcija g nije bijekcija sa $K(0,1)$ na $K(0,1)$. Schwarzova lema stoga povlači da je $|g'(0)| < 1$. Imamo

$$f(a) = f_\gamma(\psi(a)) = f_\gamma(\gamma) = 0 \quad \text{i} \quad \varphi = g \circ f \qquad \Longrightarrow \qquad \varphi'(a) = g'(0) f'(a).$$

Odatle je $|f'(a)| > |\varphi'(a)|$. No to je u suprotnosti sa $(**)$.

Ova kontradikcija dokazuje da je φ surjekcija sa Ω na $K(0,1)$. Kako je $\varphi \in S$, φ je izomorfizam područja Ω na krug $K(0,1)$.

Primjedba. Iz dokaza teorema 4.6. vidi se da za bilo koju točku $a \in \Omega$ postoji funkcija $\varphi \in \mathcal{H}(\Omega)$ koja je izomorfizam područja Ω na krug $K(0,1)$ i vrijedi $\varphi(a) = 0$; ta je funkcija onaj element skupa S na kome preslikavanje $f \mapsto |f'(a)|$ dostiže svoj maksimum.

Dokazani teorem 4.6. upotpunjuje dokaz teorema 3.1. Posebno, uvjet teorema 4.6. ispunjen je ako i samo ako je područje Ω jednostavno povezano. Dakle, možemo iskazati Riemannov teorem u njegovom uobičajenom obliku:

Teorem 4.7. (**B. Riemann**) *Svako jednostavno povezano područje $\Omega \neq \mathbb{C}$ izomorfno je otvorenom jediničnom krugu.*

Zadatak 4.10. *Dokažite da za funkciju g iz dokaza teorema 4.6. vrijedi*

$$g'(0) = n\gamma^{n-1}\frac{1-|\gamma|^2}{1-|\beta|^2}.$$

Izvedite iz toga da je $|g'(0)| < 1$.

Zadatak 4.11. *Neka je $\Omega \subsetneq \mathbb{C}$ jednostavo povezano područje koje je simetrično s obzirom na realnu os, tj.*

$$z \in \Omega \qquad \Longleftrightarrow \qquad \overline{z} \in \Omega.$$

Neka je f izomorfizam Ω na $K(0,1)$ takav da za $a = f^{-1}(0)$ vrijedi $f'(a) > 0$. Dokažite da je tada ili $Im\, f(z) > 0\ \forall z \in \Omega,\ Im\, z > 0$, ili je $Im\, f(z) < 0\ \forall z \in \Omega,\ Im\, z > 0$.

Zadatak 4.12. *Neka je $E = \{z \in \mathbb{C};\ Re\, z > 0\}$ i neka je $f : E \to \mathbb{C}$ holomorfna injekcija takva da je $f(E) \subseteq E$. Uz pretpostavku da postoji $x_0 > 0$ takav da je $f(x_0) = x_0$ dokažite da je $|f'(x_0)| \leq 1$.*

Zadatak 4.13. *Neka su $\Omega_1 \subsetneq \mathbb{C}$ i $\Omega_2 \subsetneq \mathbb{C}$ jednostavno povezana područja i neka je f izomorfizam Ω_1 na Ω_2. Neka je $a \in \Omega_1$ i $\alpha = f(a) \in \Omega_2$. Dokažite da za svaku holomorfnu injekciju $g : \Omega_1 \to \Omega_2$ takvu da je $g(a) = \alpha$ vrijedi $|g'(a)| \leq |f'(a)|$.*

Poglavlje 5

Aproksimacija pomoću racionalnih funkcija

U ovom poglavlju dokazat ćemo sljedeći teorem o mogućnosti aproksimacije holomorfnih funkcija pomoću racionalnih funkcija:

Teorem 5.1. (**C. Runge**) *Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ otvoren skup i neka je E zatvoren podskup od $\overline{\mathbb{C}} \setminus \Omega$ koji siječe svaku komponentu od $\overline{\mathbb{C}} \setminus \Omega$. Za svaku funkciju $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ postoji niz racionalnih funkcija $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ kojima svi polovi leže u skupu E takav da niz restrikcija $(f_n|\Omega)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira prema funkciji f lokalno uniformno na Ω.*

Pri tome za točku ∞ kažemo da je pol racionalne funkcije f ako je

$$f = \frac{P}{Q}, \qquad \text{gdje su } P \text{ i } Q \text{ polinomi i } \deg P > \deg Q.$$

U tom slučaju kažemo da je točka ∞ pol funkcije f reda $\deg P - \deg Q$.

U slučaju da je u Rungeovom teoremu skup $\overline{\mathbb{C}} \setminus \Omega$ povezan (a to za područje Ω znači da je jednostavno povezano), možemo uzeti $E = \{\infty\}$. Budući da je racionalna funkcija s jedinim polom u točki ∞ u stvari polinom, iz Rungeovog teorema neposredno slijedi:

Teorem 5.2. *Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ otvoren skup, takav da je skup $\overline{\mathbb{C}} \setminus \Omega$ povezan, i neka je $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Tada postoji niz polinoma $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ takav da niz restrikcija $(P_n|\Omega)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira prema funkciji f lokalno uniformno na Ω.*

Rungeov teorem 5.1. dokazat ćemo pomoću dvije leme, a plan dokaza je ovakav. Najprije ćemo dokazati da se za zadani kompaktan skup $K \subseteq \Omega$ restrikcija $f|K$ može po volji točno aproksimirati pomoću restrikcije $g|K$ racionalne funkcije g koja ima polove izvan K. Zatim ćemo $g|K$ aproksimirati restrikcijom $h|K$ druge racionalne funkcije h koja ima polove u skupu E. Napokon, da dođemo do traženog niza racionalnih funkcija, poslužit ćemo se nizom kompaktnih skupova iz zadatka 4.3.

Lema 5.1. *Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ otvoren skup, $K \subseteq \Omega$ kompaktan skup, $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ i $\varepsilon > 0$. Postoji racionalna funkcija g s polovima u skupu $\Omega \setminus K$ takva da vrijedi*

$$|f(z) - g(z)| \leq \varepsilon \qquad \forall z \in K.$$

Dokaz: Prema lemi 3.1. postoji ciklus Γ u $\Omega \setminus K$ takav da vrijedi

$$Ind_\Gamma(\alpha) = 0 \qquad \forall \alpha \in \mathbb{C} \setminus \Omega, \qquad\qquad Ind_\Gamma(a) = 1 \qquad \forall a \in K.$$

Prema drugoj formuli u tvrdnji (a) globalnog Cauchyjevog teorema 1.9. tada vrijedi

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \mathrm{d}\zeta, \qquad z \in K. \qquad (1)$$

Neka je $\Gamma = [\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n]$, gdje su $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ petlje u $\Omega \backslash K$. Fiksirajmo sada $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ i zbog jednostavnijih oznaka stavimo $\gamma = \gamma_j$. Neka je γ definirana na segmentu $[a, b]$ i neka je

$$r = d(\gamma^*, K) = \min\{|\gamma(t) - z|;\ t \in [a, b],\, z \in K\} > 0.$$

Tada vrijedi

$$t \in [a, b], \quad z \in K \qquad \Longrightarrow \qquad |\gamma(t) - z| \geq r. \qquad (2)$$

Izaberimo realan broj $M > 0$ takav da vrijedi:

$$t \in [a, b], \quad z \in K \qquad \Longrightarrow \qquad |z| \leq M, \quad |\gamma(t)| \leq M \quad \text{i} \quad |f(\gamma(t))| \leq M. \qquad (3)$$

Sada za $s, t \in [a, b]$ i $z \in K$ zbog (2) i (3) imamo redom

$$\left| \frac{f(\gamma(t))}{\gamma(t) - z} - \frac{f(\gamma(s))}{\gamma(s) - z} \right| \leq \frac{1}{r^2} |f(\gamma(t))\gamma(s) - f(\gamma(s))\gamma(t) - z[f(\gamma(t)) - f(\gamma(s))]| =$$

$$= \frac{1}{r^2} |f(\gamma(t))[\gamma(s) - \gamma(t)] + [f(\gamma(s)) - f(\gamma(t))]\gamma(t) - z[f(\gamma(t)) - f(\gamma(s))]| \leq$$

$$\leq \frac{1}{r^2} |f(\gamma(t))| \cdot |\gamma(s) - \gamma(t)| + \frac{1}{r^2} |\gamma(t)| \cdot |f(\gamma(s)) - f(\gamma(t))| + \frac{|z|}{r^2} |f(\gamma(s)) - f(\gamma(t))| \leq$$

$$\leq \frac{M}{r^2} |\gamma(s) - \gamma(t)| + \frac{2M}{r^2} |f(\gamma(s)) - f(\gamma(t))|.$$

Kako su funkcije γ i $f \circ \gamma$ uniformno neprekidne na segmentu $[a, b]$, gornja nejednakost pokazuje da možemo izabrati particiju $a = c_0 < c_1 < \cdots < c_m = b$ takvu da vrijedi

$$\left| \frac{f(\gamma(t))}{\gamma(t) - z} - \frac{f(\gamma(c_{k-1}))}{\gamma(c_{k-1}) - z} \right| \leq \frac{2\pi\varepsilon}{n\ell(\gamma)}, \qquad z \in K, \quad c_{k-1} \leq t \leq c_k, \quad k \in \{1, 2, \ldots, m\}. \qquad (4)$$

Možemo uzeti da su sve restrikcije $\gamma|[c_{k-1}, c_k]$ neprekidno diferencijabilne.

Definiramo sada racionalnu funkciju g_j sa

$$g_j(z) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^{m} f(\gamma(c_{k-1})) \frac{\gamma(c_k) - \gamma(c_{k-1})}{\gamma(c_{k-1}) - z}.$$

Funkcija g_j ima polove $\gamma(c_0), \gamma(c_1), \ldots, \gamma(c_{m-1}) \in \gamma^*$, dakle, izvan K. Pomoću (4) nalazimo da za $z \in K$ vrijedi

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \mathrm{d}\zeta - g_j(z) \right| = \frac{1}{2\pi} \left| \sum_{k=1}^{m} \int_{c_{k-1}}^{c_k} \left[\frac{f(\gamma(t))}{\gamma(t) - z} - \frac{f(\gamma(c_{k-1}))}{\gamma(c_{k-1}) - z} \right] \gamma'(t) \mathrm{d}t \right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{m} \int_{c_{k-1}}^{c_k} \left| \frac{f(\gamma(t))}{\gamma(t) - z} - \frac{f(\gamma(c_{k-1}))}{\gamma_{c_{k-1}} - z} \right| \cdot |\gamma'(t)| \mathrm{d}t \leq \frac{\varepsilon}{n\ell(\gamma)} \sum_{k=1}^{m} \int_{c_{k-1}}^{c_k} |\gamma'(t)| \mathrm{d}t.$$

Međutim,

$$\sum_{k=1}^{m} \int_{c_{k-1}}^{c_k} |\gamma'(t)| \mathrm{d}t = \ell(\gamma),$$

pa slijedi

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_j}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\mathrm{d}\zeta - g_j(z)\right| \leq \frac{\varepsilon}{n}, \qquad z \in K. \tag{5}$$

Istu konstrukciju provedemo za svaki $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ i stavimo $g = g_1 + g_2 + \cdots + g_n$. Tada je g racionalna funkcija s polovima u skupu γ^*, dakle, izvan K. Iz (1) i (5) slijedi za svaku točku $z \in K$:

$$|f(z) - g(z)| = \left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\mathrm{d}\zeta - g(z)\right| \leq \sum_{j=1}^{n}\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_j}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\mathrm{d}\zeta - g_j(z)\right| \leq \sum_{j=1}^{n}\frac{\varepsilon}{n} = \varepsilon.$$

Time je lema dokazana.

Kao što smo napomenuli, sljedeći korak u dokazu Rungeovog teorema jest da dokažemo da se funkcija g može na skupu K po volji dobro aproksimirati drugom racionalnom funkcijom kojoj su polovi u skupu E. U tu svrhu razmatrat ćemo najprije racionalne funkcije s jednim polom.

Lema 5.2. *Neka je $K \subseteq \mathbb{C}$ kompaktan skup i neka se točke $a, b \in \overline{C}$ nalaze u istoj komponenti skupa $\overline{\mathbb{C}} \setminus K$. Neka je g racionalna funkcija kojoj je jedini pol u točki a i neka je $\varepsilon > 0$. Postoji racionalna funkcija h kojoj je jedini pol u točki b, takva da je*

$$|g(z) - h(z)| \leq \varepsilon \qquad \forall z \in K. \tag{6}$$

Dokaz je podijeljen u četiri koraka.

(a) Uzmimo najprije da su $a, b \in \mathbb{C} \setminus K$, tj. da je $a \neq \infty$ i $b \neq \infty$ i da vrijedi

$$|a - b| < d(b, K) = \min\{|b - z|;\ z \in K\}.$$

Neka je $\rho = \dfrac{|a-b|}{d(b,K)}$. Tada je $0 \leq \rho < 1$ i imamo

$$\left|\frac{a-b}{z-b}\right| \leq \rho \qquad \forall z \in K. \tag{7}$$

Budući da racionalna funkcija g ima jedini pol u točki a, to postoji $n \in \mathbb{N}$ i polinom P stupnja $\leq n$ takvi da je

$$g(z) = \frac{P(z)}{(z-a)^n}.$$

Iz (7) slijedi da za svaku točku $z \in K$ vrijedi

$$g(z) = \frac{P(z)}{(z-b)^n}\cdot\left(\frac{z-b}{z-a}\right)^n = \frac{P(z)}{(z-b)^n}\cdot\left(1 - \frac{a-b}{z-b}\right)^{-n} = \frac{P(z)}{(z-b)^n}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\binom{k+n-1}{k}\left(\frac{a-b}{z-b}\right)^k$$

i pri tome red konvergira uniformno u odnosu na $z \in K$. Stoga postoji $m \in \mathbb{N}$ takav da za racionalnu funkciju

$$h(z) = \frac{P(z)}{(z-b)^n}\cdot\sum_{k=0}^{m}\binom{k+n-1}{k}\left(\frac{a-b}{z-b}\right)^k,$$

kojoj je očito jedini pol u točki b, vrijedi (6).

(b) I dalje pretpostavljamo da su $a, b \in \mathbb{C} \setminus K$. Ograničene komponente povezanosti skupa $\mathbb{C} \setminus K$ ujedno su komponente povezanosti skupa $\overline{\mathbb{C}} \setminus K$. Neka je Ω jedina neograničena komponenta povezanosti skupa $\mathbb{C} \setminus K$. Tada skup Ω sadrži $\mathbb{C} \setminus K(0,r) = \{z \in \mathbb{C};\ |z| \geq r\}$ za neki $r > 0$, pa slijedi da je skup $\Omega \cup \{\infty\}$ povezan; dakle, $\Omega \cup \{\infty\}$ je komponenta povezanosti skupa $\overline{\mathbb{C}} \setminus K$. Budući da se po pretpostavci točke a i b nalaze u istoj komponenti povezanosti skupa $\overline{\mathbb{C}} \setminus K$, iz ovog razmatranja izlazi da se točke a i b nalaze u istoj komponenti povezanosti skupa $\mathbb{C} \setminus K$. Stoga postoji put $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C} \setminus K$ takav da je $\gamma(0) = a$ i $\gamma(1) = b$. Tada je $\gamma^* \cap K = \emptyset$ pa slijedi

$$r = d(\gamma^*, K) = \min\{|\gamma(t) - z|;\ t \in [0,1],\ z \in K\} > 0. \tag{8}$$

Izaberimo particiju $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1$ takvu da je

$$|\gamma(t_{j-1}) - \gamma(t_j)| < r, \qquad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{9}$$

Iz (8) i (9) slijedi da za točke $a_j = \gamma(t_j)$, $j = 0, 1, \ldots, n$, vrijedi

$$|a_{j-1} - a_j| < d(a_j, K), \qquad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Prema (a) možemo naći redom racionalne funkcije $h_0 = g, h_1, \ldots, h_n$, takve da je a_j jedini pol od h_j i da vrijedi

$$|h_{j-1}(z) - h_j(z)| \leq \frac{\varepsilon}{n}, \qquad z \in K, \quad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{10}$$

Budući da je $h_0 = g$ iz (10) slijedi da za svako $z \in K$ vrijedi

$$|g(z) - h_n(z)| = \left|\sum_{j=1}^{n} [h_{j-1}(z) - h_j(z)]\right| \leq \sum_{j=1}^{n} |h_{j-1}(z) - h_j(z)| \leq \varepsilon.$$

Napokon, racionalna funkcija h_n ima jedini pol u točki $a_n = \gamma(t_n) = \gamma(1) = b$.

(c) Uzmimo sada da je $a \in \mathbb{C} \setminus K$ i $b = \infty$. Tada se točka a nalazi u komponenti povezanosti skupa $\overline{\mathbb{C}} \setminus K$ koja sadrži točku ∞, dakle, prema razmatranju u (b), u neograničenoj komponenti povezanosti Ω skupa $\mathbb{C} \setminus K$. Izaberimo točku $c \in \Omega$ takvu da je

$$c \neq 0 \qquad \text{i} \qquad |c| \geq 2|z| \quad \forall z \in K. \tag{11}$$

Prema (b) postoji racionalna funkcija f, koja ima jedini pol u točki c, takva da je

$$|g(z) - f(z)| \leq \frac{\varepsilon}{2} \qquad \forall z \in K. \tag{12}$$

Tada je

$$f(z) = \frac{P(z)}{(z-c)^n}, \qquad n \in \mathbb{N}, \quad P \quad \text{polinom stupnja } \leq n.$$

Prema (11) je

$$\left|\frac{z}{c}\right| \leq \frac{1}{2} \qquad \forall z \in K.$$

Stoga za $z \in K$ imamo

$$f(z) = \frac{P(z)}{(z-c)^n} = (-1)^n \frac{P(z)}{c^n} \cdot \left[1 - \frac{z}{c}\right]^{-n} = (-c)^{-n} P(z) \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+n-1}{k} c^{-k} z^k$$

i pri tome red konvergira uniformno u odnosu na $z \in K$. Dakle, postoji $m \in \mathbb{N}$ takav da za polinom

$$h(z) = (-c)^{-n} P(z) \sum_{k=0}^{m} \binom{k+n-1}{k} c^{-k} z^k$$

vrijedi

$$|f(z) - h(z)| \le \frac{\varepsilon}{2} \qquad \forall z \in K.$$

Odavde i iz (12) slijedi (6) i h je polinom, dakle, racionalna funkcija s jedinim polom u točki $b = \infty$.

(d) Uzmimo napokon da je $a = \infty$, dakle, g je polinom, i $b \in \mathbb{C} \setminus K$. Neka je

$$\varphi(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{z-b}, & z \in \mathbb{C} \setminus \{b\} \\ \infty & z = b \\ 0 & z = \infty. \end{cases}$$

Tada je φ homeomorfizam sa $\overline{\mathbb{C}}$ na $\overline{\mathbb{C}}$. Stoga je $\varphi(K) = K_1$ kompaktan podskup od $\mathbb{C}$ i točke $\varphi(a) = \varphi(\infty) = 0$ i $\varphi(b) = \infty$ se nalaze u istoj komponenti povezanosti $\varphi(\Omega \cup \{\infty\})$ skupa $\overline{\mathbb{C}} \setminus K_1$. Nadalje, $g \circ \varphi^{-1}$ je racionalna funkcija, kojoj je jedini pol u točki $\varphi(a) = 0$. Prema (c) postoji racionalna funkcija f, kojoj je jedini pol u točki $\varphi(b) = \infty$, tj. polinom, takva da je

$$|g(\varphi^{-1}(z)) - f(z)| \le \varepsilon \qquad \forall z \in K_1. \tag{13}$$

Stavimo li $h = f \circ \varphi$, onda je h racionalna funkcija kojoj je jedini pol u točki $\varphi^{-1}(\infty) = b$, i iz (13) slijedi (6).

Dokaz Rungeovog teorema 5.1: Neka je $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz kompaktnih skupova iz zadatka 4.3. Neka je $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ padajući niz strogo pozitivnih realnih brojeva koji konvergira prema 0.

Fiksirajmo $n \in \mathbb{N}$. Prema lemi 5.1. postoji racionalna funkcija g_n s polovima u skupu $\Omega \setminus K_n$ takva da vrijedi

$$|f(z) - g_n(z)| \le \frac{\varepsilon_n}{2} \qquad \forall z \in K_n. \tag{14}$$

Neka su $a_1, \ldots, a_m$ svi polovi funkcije g_n Tada za svako $j \in \{1, \ldots, m\}$ postoji racionalna funkcija r_j, kojoj je jedini pol u točki a_j, tako da je $g_n = r_1 + \cdots + r_m$. Za dano $j \in \{1, \ldots, m\}$ komponenta povezanosti skupa $\overline{\mathbb{C}} \setminus K_n$ koja sadrži točku a_j sadrži neku komponentu skupa $\overline{\mathbb{C}} \setminus \Omega$, dakle, po pretpostavci sadrži i neku točku $b_j \in E$. Po lemi 5.2. postoji racionalna funkcija h_j, kojoj je jedini pol u točki b_j, takva da vrijedi

$$|r_j(z) - h_j(z)| \le \frac{\varepsilon}{2m} \qquad \forall z \in K_n. \tag{15}$$

Sada je $f_n = h_1 + \cdots + h_m$ racionalna funkcija kojoj su polovi $b_1, \ldots, b_m \in E$ i iz (15) slijedi

$$|g_n(z) - f_n(z)| \le \sum_{j=1}^{m} |r_j(z) - h_j(z)| \le m \cdot \frac{\varepsilon_n}{2m} = \frac{\varepsilon_n}{2} \qquad \forall z \in K_n. \tag{16}$$

Iz (14) i (16) slijedi

$$|f(z) - f_n(z)| \le \varepsilon_n \qquad \forall z \in K_n. \tag{17}$$

Tako dolazimo do niza racionalnih funkcija $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ kojima su svi polovi sadržani u skupu E i vrijedi (17) za svako $n \in \mathbb{N}$. Neka je sada $K \subseteq \Omega$ proizvoljan kompaktan skup. Prema tvrdnjama (e) i (c) iz zadatka 4.3. postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $K \subseteq K_n$ za svako $n \ge n_0$. Sada iz (17) slijedi

$$|f(z) - f_n(z)| \le \varepsilon_n \qquad \forall z \in K \quad \text{i} \quad \forall n \ge n_0. \tag{18}$$

Budući da niz $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira prema 0, (18) pokazuje da niz restrikcija $(f_n|K)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira uniformno prema restrikciji $f|K$. Kako je $K \subseteq \Omega$ bio proizvoljan kompaktan skup, zaključujemo da niz $(f_n|\Omega)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira lokalno uniformno prema funkciji f. Time je Rungeov teorem dokazan.

Zadatak 5.1. *Neka je*

$$\Omega = K(0,1), \qquad \Omega_1 = K^*(0,1) = \{z \in \mathbb{C};\ 0 < |z| < 1\},$$

$$K = \overline{K}\left(0; \frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right) = \left\{z \in \mathbb{C};\ \frac{1}{4} \le |z| \le \frac{3}{4}\right\}.$$

Dokažite da postoji funkcija $f \in \mathcal{H}(\Omega_1)$ takva da ni za jedan niz $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ u $\mathcal{H}(\Omega)$ niz restrikcija $(f_n|K)_{n\in\mathbb{N}}$ ne konvergira uniformno prema restrikciji $f|K$.

Iz teorema 5.2. dobivamo još jednu karakterizaciju jednostavno povezanih područja:

Teorem 5.3. *Područje $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ je jednostavo povezano ako i samo ako za svaku funkciju $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ postoji niz polinoma $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ takav da niz restrikcija $(P_n|\Omega)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira lokalno uniformno prema funkciji f.*

Dokaz: Ako je područje Ω jednostavno povezano, prema teoremu 3.1. skup $\overline{\mathbb{C}} \setminus \Omega$ je povezan, pa prema teoremu 5.2. postoji niz polinoma $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ takav da niz restrikcija $(P_n|\Omega)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira lokalno uniformno prema funkciji f.

Dokažimo sada obrnutu implikaciju. Neka je $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ i neka je $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz polinoma takav da niz restrikcija $(P_n|\Omega)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira lokalno uniformno prema funkciji f. Neka je $\gamma : [a,b] \to \Omega$ petlja u Ω. Svaki polinom P_n ima primitivnu funkciju Q_n (polinom čiji je stupanj za 1 veći od stupnja polinoma P_n). Neka je $a = c_0 < c_1 < \cdots < c_m = b$ particija segmenta $[a,b]$ takva da su sve restrikcije $\gamma|[c_{j-1}, c_j]$ $(1 \le j \le m)$ neprekidno diferencijabilne. Sada imamo redom

$$\int_\gamma P_n(z)\mathrm{d}z = \int_\gamma Q_n'(z)\mathrm{d}z = \sum_{j=1}^m \int_{c_{j-1}}^{c_j} Q_n'(\gamma(t))\gamma'(t)\mathrm{d}t =$$

$$\sum_{j=1}^m \int_{c_{j-1}}^{c_j} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} Q_n(\gamma(t))\mathrm{d}t = \sum_{j=1}^m [Q_n(\gamma(c_j)) - Q_n(\gamma(c_{j-1}))] = Q_n(\gamma(b)) - Q_n(\gamma(a)) = 0.$$

Budući da niz restrikcija $(P_n|\gamma^*)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira uniformno prema restrikciji $f|\gamma^*$, slijedi

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = 0.$$

Time je dokazano da je područje Ω Cauchyjevo, pa prema teoremu 3.1. zaključujemo da je ono jednostavno povezano.

Poglavlje 6

Harmonijske funkcije

U ovom poglavlju identificiram kompleksnu ravninu $\mathbb{C}$ sa $\mathbb{R}^2$, tako da kompleksan broj $z \in \mathbb{C}$ identificiramo s točkom $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, gdje je $x =$Re$\,z$ i $y =$Im$\,z$. Funkcije kompleksne varijable z shvaćamo kao funkcije dviju realnih varijabli x i y.

Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ otvoren skup. **Funkcija** $u : \Omega \to \mathbb{R}$ zove se **harmonijska**, ako je ona klase C^2 (tj. druge parcijalne derivacije $\partial^2 u/\partial\, x$, $\partial^2 u/\partial\, x \partial\, y$, $\partial^2 u/\partial\, y \partial\, x$ i $\partial^2 u/\partial\, y^2$ postoje i neprekidne su na Ω) i ako ona zadovoljava Laplaceovu diferencijalnu jednadžbu na Ω :

$$\triangle\, u = \frac{\partial^2 u}{\partial\, x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial\, y^2} = 0.$$

Skup svih harmonijskih funkcija na Ω je realan vektorski prostor koji ćemo označavati sa $Har(\Omega)$.

Zadatak 6.1. *Neka je $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Dokažite da su tada funkcije $u =$Re$\,f$ i $v =$Im$\,f$ harmonijske.*

Ako je $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ jednostavno povezano područje onda vrijedi i obrat:

Propozicija 6.1. *Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ jednostavno povezano područje i neka je $u \in Har(\Omega)$. Tada postoji $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ takva da je $u =$Re$\,f$. Dvije takve funkcije razlikuju se za imaginarnu konstantu.*

Dokaz: Definirajmo realne funkcije U i V na području Ω :

$$U = \frac{\partial u}{\partial x}, \qquad V = -\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Kako je funkcija u klase C^2, to su funkcije U i V klase C^1. Nadalje, funkcije U i V zadovoljavaju Cauchy$-$Riemannove jednadžbe na Ω :

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial V}{\partial y},$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial V}{\partial x}.$$

Prema tome, funkcija $F = U + iV$ je holomorfna na Ω. Prema teoremu 3.1. jednostavno povezano područje je primitivno, stoga postoji $h \in \mathcal{H}(\Omega)$ takva da je $F = h'$. Stavimo sada $u_1 =$Re$\,h$, $v_1 =$Im$\,h$. Derivacija holomorfne funkcije može se zapisati pomoću parcijalnih derivacija njenog realnog dijela:

$$h' = \frac{\partial u_1}{\partial x} - i\frac{\partial u_1}{\partial y}.$$

Stoga nalazimo:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = U = \operatorname{Re} F = \operatorname{Re} h' = \frac{\partial u_1}{\partial x}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -V = -\operatorname{Im} F = -\operatorname{Im} h' = \frac{\partial u_1}{\partial y}.$$

Prema tome, vrijedi

$$\frac{\partial}{\partial x}(u - u_1) = \frac{\partial}{\partial y}(u - u_1) = 0.$$

Odatle slijedi da je $u - u_1$ realna konstanta α. Ako definiramo $f = h + \alpha \in \mathcal{H}(\Omega)$, dobivamo $\operatorname{Re} f = u$.

Neka i funkcija $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ ima svojstvo $\operatorname{Re} g = u$. Stavimo $k = f - g$ i neka su $u_2 = \operatorname{Re} k$, $v_2 = \operatorname{Im} k$. Tada je $u_2 = 0$, pa iz Cauchy−Riemannovih jednadžbi za funkciju k dobivamo da je

$$\frac{\partial v_2}{\partial x} = \frac{\partial v_2}{\partial y} = 0 \qquad \text{svuda na} \quad \Omega.$$

Prema tome, v_2 je realna konstanta β, a tada je $k = i\beta$.

Korolar 6.1. *Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ otvoren skup i $u \in Har(\Omega)$. Tada je funkcija u klase C^∞. Štoviše, funkcija u je analitička na Ω u sljedećem smislu: za svaku točku $(x_0, y_0) \in \Omega$ i za svaki $r > 0$ takav da je krug*

$$K((x_0, y_0), r) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < r^2\}$$

sadržan u Ω, postoje $\alpha_{jk} \in \mathbb{R}$, $j, k \in \mathbb{Z}_+$, takvi da vrijedi

$$u(x, y) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{jk}(x - x_0)^j (y - y_0)^k \qquad \forall (x, y) \in K((x_0, y_0), r).$$

Pri tome gornji red konvergira apsolutno i na svakom zatvorenom krugu

$$\overline{K}((x_0, y_0), \rho) = \{(x, y);\ (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leq \rho^2\}, \qquad \forall \rho < r$$

red apsolutnih vrijednosti konvergira uniformno. Koeficijenti α_{jk} jedinstveno su određeni funkcijom u i točkom (x_0, y_0).

Dokaz: Ako je $r > 0$ takav da je $K((x_0, y_0), r) \subseteq \Omega$, prema propoziciji 6.1. postoji $f \in \mathcal{H}(K(z_0, r))$, $z_0 = x_0 + iy_0$, takva da je restrikcija funkcije u na taj krug realni dio funkcije f. Sada iz tvrdnje (b) teorema 3.1 slijedi tvrdnja korolara, jer za $n \in \mathbb{N}$ i $z = x + iy \in K(z_0, r)$ vrijedi

$$(z - z_0)^n = \sum_{j=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} (-1)^j \binom{n}{2j} (x - x_0)^{n-2j} (y - y_0)^{2j}$$

a $[\alpha]$ je oznaka za najveći cijeli broj $k \leq \alpha$.

Propozicija 6.2. *Neka su Ω_1 i Ω_2 otvoreni podskupovi od $\mathbb{C}$ i neka je $\varphi \in \mathcal{H}(\Omega_1)$ takva da je $\varphi(\Omega_1) \subseteq \Omega_2$. Tada za svaku funkciju $u \in Har(\Omega_2)$ vrijedi $u \circ \varphi \in Har(\Omega_1)$.*

Dokaz: Označimo točke otvorenog skupa Ω_1 sa $z = x + iy$, a točke otvorenog skupa Ω_2 sa $\zeta = \xi + i\eta$. Nadalje, neka je $v = u \circ \varphi$ i neka su $\psi = \operatorname{Re} \varphi$ i $\chi = \operatorname{Im} \varphi$. Ako je $z = x + iy \in \Omega_2$ i $\zeta = \xi + i\eta = \varphi(z)$ onda je $\xi = \psi(x, y)$ i $\eta = \chi(x, y)$. Dakle,

$$v(x, y) = u(\psi(x, y), \chi(x, y)), \qquad z = x + iy \in \Omega_1.$$

Budući da su funkcije ψ i χ klase C^∞, očito je v funkcija klase C^2. Formalno zapisana pravila parcijalnog deriviranja su:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial \chi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \eta} \quad \text{i} \quad \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial \chi}{\partial y}\frac{\partial}{\partial \eta}.$$

Odatle redom nalazimo

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}u(\psi(x,y),\chi(x,y)) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}u(\psi(x,y),\chi(x,y)) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial \psi}{\partial x}\cdot\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial \chi}{\partial x}\cdot\frac{\partial u}{\partial \eta}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial \psi}{\partial y}\cdot\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial \chi}{\partial y}\cdot\frac{\partial u}{\partial \eta}\right] =$$

$$= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)^2\right] + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\left[\left(\frac{\partial \chi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \chi}{\partial y}\right)^2\right] +$$

$$+2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \chi}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \chi}{\partial y}\right)\right] + \frac{\partial u}{\partial \xi}\left[\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}\right] + \frac{\partial u}{\partial \eta}\left[\frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2}\right].$$

Četvrta i peta uglata zagrada jednake su nuli jer su ψ i χ realni i imaginarni dio holomorfne funkcije φ, dakle, to su harmonijske funkcije. Treća uglata zagrada jednaka je nuli zbog Cuchy−Riemannovih jednadžbi za funkcije ψ i χ :

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \chi}{\partial y} \qquad \text{i} \qquad \frac{\partial \psi}{\partial y} = -\frac{\partial \chi}{\partial x}.$$

Zbog tih jednadžbi nalazimo da su prve dvije uglate zagrade međusobno jednake, pa dobijemo da čitav izraz jednak nuli jer je funkcija u harmonijska. Dakle, funkcija v svuda na Ω_1 zadovoljava Laplaceovu diferencijalnu jednadžbu, što znači da je $v \in Har(\Omega_1)$.

Zadatak 6.2. *Dokažite propoziciju 6.2. koristeći propoziciju 6.1.*

Uputa: Za proizvoljnu točku $a \in \Omega_1$ izaberite $r > 0$ tako da je $K(\varphi(a), r) \subseteq \Omega_1$, a zatim $\rho > 0$ tako da je $\varphi(K(a,\rho)) \subseteq K(\varphi(a), r)$. Zatim promatrajte $u|K(\varphi(a), r)$ i iskoristite propoziciju 6.1.

Za područje $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ definiramo $\partial_\infty\Omega$ kao rub područja u $\overline{\mathbb{C}}$: $\partial_\infty\Omega = Cl_\infty(\Omega) \setminus \Omega$, pri čemu je $Cl_\infty(\Omega)$ zatvarač skupa Ω u $\overline{\mathbb{C}}$. **Dirichletov problem** za područje Ω glasi:

Za danu neprekidnu funkciju $g : \partial_\infty\Omega \to \mathbb{R}$ treba naći neprekidnu funkciju $u : Cl_\infty(\Omega) \to \mathbb{R}$, takvu da je $u|\partial_\infty\Omega = g$ i da je $u|\Omega \in Har(\Omega)$.

Kažemo da je Ω **Dirichletovo područje**, ako za svaku neprekidnu funkciju $g : \partial_\infty\Omega \to \mathbb{R}$ pripadni Dirichletov problem ima rješenje. Sljedeći teorem pokazuje da je otvoren krug Dirichletovo područje i daje eksplicitno rješenje Dirichletovog problema.

Teorem 6.1. *Neka je $a \in \mathbb{C}$, $R > 0$ i g realna funkcija definirana na kružnici $S(a,R) = \partial K(a,R)$ takva da je funkcija $t \mapsto g(a + Re^{it})$ integrabilna (u Riemannovom smislu) na segmentu $[0, 2\pi]$. Tada je formulom*

$$P_g(a + re^{i\varphi}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2Rr\cos(t-\varphi)} g(a + Re^{it})\,dt, \qquad 0 \le r < R,\ 0 \le \varphi \le 2\pi,$$

zadana funkcija $P_g \in Har(K(a,R))$. Ako je funkcija g neprekidna u točki $w \in S(a,R)$, onda je

$$g(w) = \lim_{z \to w,\, z \in K(a,R)} P_g(z).$$

Posebno, ako je funkcija g neprekidna na $S(a,R)$, onda je funkcija $u : \overline{K}(a,R) \to \mathbb{R}$, definirana sa

$$u|K(a,R) = P_g \quad i \quad u|S(a,R) = g$$

neprekidna na $\overline{K}(a,R)$.

Dokaz: Odmah se vidi da je tvrdnje teorema dovoljno dokazati u slučaju $R = 1$ i $a = 0$, jer se opći slučaj svodi na ovaj posebni jednostavnom zamjenom varijable $z \mapsto \zeta = \dfrac{z-a}{R}$. U slučaju $R = 1$, $a = 0$ gornja formula poprima oblik

$$P_g(r\mathrm{e}^{i\varphi}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(t-\varphi)} g(\mathrm{e}^{it})\mathrm{d}t, \qquad 0 \le r < 1,\ 0 \le \varphi \le 2\pi.$$

Neka je γ pozitivno orijentirana jedinična kružnica, tj.

$$\gamma(t) = \mathrm{e}^{it}, \qquad 0 \le t \le 2\pi.$$

Nadalje, neka je kao u iskazu teorema $g : \gamma^* \to \mathbb{R}$ funkcija takva da je funkcija $t \mapsto g(\mathrm{e}^{it})$ integrabilna na segmentu $[0, 2\pi]$. Definirajmo funkciju $F_g : K(0,1) \to \mathbb{C}$ formulom

$$F_g(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{(\zeta+z)g(\zeta)}{\zeta(\zeta-z)}\mathrm{d}\zeta, \qquad z \in K(0,1),$$

odnosno,

$$F_g(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{e}^{it}+z}{\mathrm{e}^{it}-z} g(\mathrm{e}^{it})\mathrm{d}t, \qquad z \in K(0,1).$$

Prema varijanti teorema 1.6. (za integrabilnu funkciju g) funkcija F_g je holomorfna na krugu $K(0,1)$. Imamo

$$\mathrm{Re}\frac{\mathrm{e}^{it}+r\mathrm{e}^{i\varphi}}{\mathrm{e}^{it}-r\mathrm{e}^{i\varphi}} = \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(t-\varphi)}.$$

Kako je funkcija g realna, odatle slijedi da je

$$\mathrm{Re}\, F_g(z) = P_g(z), \qquad z \in K(0,1).$$

Dakle, funkcija P_g je realni dio holomorfne funkcije F_g, pa pomoću zadatka 6.1. zaključujemo da je funkcija P_g harmonijska na krugu $K(0,1)$.

Primijetimo da je pridruživanje $g \mapsto P_g$ linearno:

$$P_{g+h} = P_g + P_h, \qquad P_{\alpha g} = \alpha P_g, \qquad \alpha \in \mathbb{R}. \qquad (1)$$

Nadalje, vrijedi

$$g \ge h \qquad \Longrightarrow \qquad P_g \ge P_h. \qquad (2)$$

Uzmimo sada da je funkcija g realna konstanta c i neka je $z \in K(0,1)$. Funkcija f_z definirana sa

$$f_z(\zeta) = \frac{\zeta+z}{\zeta(\zeta-z)}c$$

holomorfna je na području $\mathbb{C} \setminus \{0, z\}$. Ako je $z \ne 0$, po teoremu o reziduumima slijedi

$$F_c(z) = Res(f_z, 0) + Res(f_z, z) = -c + 2c = c.$$

U slučaju da je $z = 0$ imamo

$$f_0(\zeta) = \frac{c}{\zeta},$$

pa slijedi

$$F_c(0) = Res(f_0, 0) = c.$$

Kako je $P_g = \mathrm{Re}\, F_g$ odatle dobivamo

$$P_c(z) = c, \qquad z \in K(0,1), \quad c \in \mathbb{R}. \qquad (3)$$

Dokažimo sada drugu tvrdnju teorema. Neka je $w = \mathrm{e}^{is} \in S(0,1)$ točka u kojoj je funkcija g neprekidna. Pretpostavimo najprije da je $g(w) = 0$. Neka je $\varepsilon > 0$. Izaberimo $\delta > 0$ ($\delta \leq 2$) tako da vrijedi:

$$\zeta \in S(0,1), \quad |\zeta - w| \leq \delta \qquad \Longrightarrow \qquad |g(\zeta)| \leq \frac{\varepsilon}{2}. \qquad (4)$$

Definirajmo funkcije $g_1, g_2 : S(0,1) \to \mathbb{R}$ sa

$$g_1(\zeta) = \begin{cases} g(\zeta) & \text{ako je } |\zeta - w| < \delta, \\ 0 & \text{ako je } |\zeta - w| \geq \delta, \end{cases}$$

$$g_2(\zeta) = \begin{cases} 0 & \text{ako je } |\zeta - w| < \delta, \\ g(\zeta) & \text{ako je } |\zeta - w| \geq \delta, \end{cases}$$

Tada je $g = g_1 + g_2$, pa prema (1) imamo $P_g = P_{g_1} + P_{g_2}$. Nadalje, prema (4) vrijedi $-\frac{\varepsilon}{2} \leq g_1 \leq \frac{\varepsilon}{2}$, pa zbog (2) i (3) nalazimo

$$-\frac{\varepsilon}{2} = P_{-\frac{\varepsilon}{2}} \leq P_{g_1} \leq P_{\frac{\varepsilon}{2}} = \frac{\varepsilon}{2},$$

tj.

$$|P_{g_1}(z)| \leq \frac{\varepsilon}{2} \qquad \forall z \in K(0,1). \qquad (5)$$

Neka je sada $0 < \eta < \pi$ takvo da je

$$\{\zeta \in S(0,1);\ |\zeta - w| \geq \delta\} = \{\mathrm{e}^{it};\ s + \eta \leq t \leq s + 2\pi - \eta\}$$

(sjetimo se da je $w = \mathrm{e}^{is}$) i neka je σ put zadan sa

$$\sigma(t) = \mathrm{e}^{it}, \qquad s + \eta \leq t \leq s + 2\pi - \eta.$$

Prema definiciji funkcije g_2 imamo

$$F_{g_2}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\sigma \frac{\left(1 + \dfrac{z}{\zeta}\right) g(\zeta)}{(\zeta - z)} \mathrm{d}\zeta, \qquad z \in K(0,1).$$

Međutim, gornjom je formulom dobro definirana funkcija F_{g_2} na području $\mathbb{C} \setminus \sigma^*$ i ona je na tom području holomorfna. Posebno, funkcija F_{g_2} je neprekidna u točki $z = w$. Stoga imamo

$$\lim_{z \to w,\, z \in K(0,1)} P_{g_2}(z) = \lim_{z \to w,\, z \in K(0,1)} \mathrm{Re}\, F_{g_2}(z) = \mathrm{Re}\, F_{g_2}(w) =$$

$$= \mathrm{Re}\, \frac{1}{2\pi} \int_{s+\eta}^{s+2\pi-\eta} \frac{\mathrm{e}^{it} + w}{\mathrm{e}^{it} - w} g(\mathrm{e}^{it}) \mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi} \int_{s+\eta}^{s+2\pi-\eta} \frac{1 - |w|^2}{|\mathrm{e}^{it} - w|^2} g(\mathrm{e}^{it}) \mathrm{d}t = 0,$$

jer je $|w| = 1$ i $w \neq \mathrm{e}^{it}$ za $s + \eta \leq t \leq s + 2\pi - \eta$. Prema tome postoji $\rho > 0$ takav da vrijedi:

$$z \in K(0,1), \quad |z - w| < \rho \qquad \Longrightarrow \qquad |P_{g_2}(z)| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Odavde, iz (5) i iz $P_g = P_{g_1} + P_{g_2}$ slijedi

$$z \in K(0,1), \quad |z-w| < \rho \qquad \Longrightarrow \qquad |P_g(z)| \leq \varepsilon.$$

Budući da je po pretpostavci $g(w) = 0$, time je tvrdnja dokazana.

Uzmimo sada da je $g(w) \neq 0$ i stavimo

$$h(\zeta) = g(\zeta) - g(w), \qquad \zeta \in S(0,1).$$

Tada je $h(w) = 0$, pa iz dokazanog slijedi

$$\lim_{z \to w,\, z \in K(0,1)} P_h(z) = 0.$$

Međutim, prema (1) i (3) imamo

$$P_g(z) = P_h(z) + g(w), \qquad z \in K(0,1),$$

pa dobivamo

$$\lim_{z \to w,\, z \in K(0,1)} P_g(z) = g(w).$$

Za $0 \leq r < 1$ definiramo funkciju $P_r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sa

$$P_r(t) = \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos t}.$$

Familija funkcija $(P_r)_{0 \leq r < 1}$ naziva se **Poissonova jezgra**.

Zadatak 6.3. *Dokažite da je*

$$P_r(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} r^{|n|} e^{int} = Re\,\frac{1+r\,e^{it}}{1-r\,e^{it}}.$$

Zadatak 6.4. *Dokažite da je*

$$\int_0^{2\pi} P_r(t)\,dt = 2\pi, \qquad 0 \leq r < 1.$$

Zadatak 6.5. *Dokažite da je $P_r(t) > 0$ za svako $r \in [0,1\rangle$ i za svako $t \in \mathbb{R}$ i da je $P_r(t) < P_r(s)$, ako je $|t| < |s| \leq \pi$.*

Zadatak 6.6. *Dokažite da je*

$$\lim_{r \to 1} P_r(t) = 0 \qquad \forall t \in \langle 0, 2\pi \rangle$$

i da je ta konvergencija uniformna na svakom segmentu $[a,b] \subset \langle 0, 2\pi \rangle$.

Zadatak 6.7. *Dokažite teorem 6.1. bez korištenja rezultata o holomorfnim funkcijama.*

Uputa: Uočite da je za $g : S(0,1) \to \mathbb{R}$

$$P_g(re^{i\varphi}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_r(t-\varphi) g(\mathrm{e}^{it}) \mathrm{d}t.$$

Zatim koristite zadatke 6.4., 6.5. i 6.6.

Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ otvoren skup. Za neprekidnu funkciju $u : \Omega \to \mathbb{R}$ kažemo da ima **svojstvo srednje vrijednosti**, ako za svaki zatvoren krug $\overline{K}(a, r) \subseteq \Omega$ vrijedi

$$u(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(a + r\mathrm{e}^{i\varphi})\mathrm{d}\varphi. \tag{6}$$

Kažemo da funkcija u ima **lokalno svojstvo srednje vrijednosti**, ako za svaku točku $a \in \Omega$ postoji $R > 0$ takvo da je $K(a, R) \subseteq \Omega$ i da vrijedi (6) za svako $r \in [0, R\rangle$.

Propozicija 6.3. *Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ otvoren skup i $u \in Har(\Omega)$. Tada funkcija u ima svojstvo srednje vrijednosti.*

Dokaz: Neka su $a \in \Omega$ i $r > 0$ takvi da je $\overline{K}(a, r) \subseteq \Omega$. Tada možemo naći $R > r$ takav da je $K(a, R) \subseteq \Omega$. Funkcija $u|K(a, R)$ je harmonijska, a kako je krug $K(a, R)$ jednostavno povezano područje, prema propoziciji 6.1. postoji $f \in \mathcal{H}(K(a, R)$ takva da je $\mathrm{Re}\, f = u|K(a, R)$. Neka je γ pozitivno orijentirana kružnica sa središtem u točki a i radijusom r :

$$\gamma(\varphi) = a + r\mathrm{e}^{i\varphi}, \qquad \varphi \in [0, 2\pi].$$

Tada vrijedi

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z - a}\mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + r\mathrm{e}^{i\varphi})\mathrm{d}\varphi.$$

Uzimanjem realnog dijela nalazimo da vrijedi (6).

Propozicija 6.4. *Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ područje i neka je $u : \Omega \to \mathbb{R}$ nekonstantna neprekidna funkcija s lokalnim svojstvom srednje vrijednosti. Funkcija u ne poprima niti svoj supremum niti svoj infimum na području Ω.*

Dokaz: Pretpostavimo da je

$$M = \sup \{u(z);\ z \in \Omega\} < +\infty.$$

Nadalje, pretpostavimo da funkcija poprima svoj supremum u području Ω, tj. da je skup $U = \{z \in \Omega;\ u(z) = M\}$ neprazan. Zbog neprekidnosti funkcije u skup $\Omega \setminus U$ je otvoren. Neka je $a \in U$. Izaberimo $R > 0$ takvo da je $K(a, R) \subseteq \Omega$ i da vrijedi (6) $\forall r \in [0, R\rangle$. Neka je $\rho \in [0, R\rangle$. Pomnožimo sada obje strane jednakosti (6) sa r i integriramo po r od 0 do ρ. Dobivamo jednakost

$$M = u(a) = \frac{1}{\pi\rho^2} \int_0^\rho \int_0^{2\pi} u(a + r\mathrm{e}^{i\varphi})r\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi.,$$

a odavde je

$$\int_0^\rho \int_0^{2\pi} [M - u(a + r\mathrm{e}^{i\varphi})]r\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi = 0. \tag{7}$$

Podintegralna funkcija u (7) je neprekidna i nenegativna svuda na $\overline{K}(a, \rho)$, pa iz (7) slijedi da je ona svuda jednaka nuli. Stoga zaključujemo da je $\overline{K}(a, \rho) \subseteq U$. Time je dokazano da je skup U otvoren. Kako je i $\Omega \setminus U$ otvoren i kako je U po pretpostavci neprazan, iz povezanosti Ω slijedi $U = \Omega$. No to znači da je funkcija u konstantna, suprotno pretpostavci. Ova kontradikcija pokazuje da je $U = \emptyset$, tj. $u(z) < M\ \forall z \in \Omega$.

Primijenimo li dokazano na funkciju $-u$, zaključujemo da funkcija u ne poprima u području Ω ni svoj infimum.

Iz ove propozicije slijedi princip jedinstvenosti za funkcije s lokalnim svojstvom srednje vrijednosti:

Propozicija 6.5. *Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ područje, $Cl_\infty(\Omega)$ zatvarač područja Ω u prostoru $\overline{\mathbb{C}}$ i $\partial_\infty\Omega = Cl_\infty(\Omega) \setminus \Omega$ rub područja Ω u prostoru $\overline{\mathbb{C}}$. Neka su v i w neprekidne realne funkcije na $Cl_\infty(\Omega)$, čije restrikcije na Ω imaju lokalno svojstvo srednje vrijednosti. Ako je $v|\partial_\infty\Omega = w|\partial_\infty\Omega$, onda je $v = w$.*

Dokaz: $u = v - w$ je neprekidna funkcija na $Cl_\infty(\Omega)$, a kako je to kompaktan skup, vrijedi

$$\min\{u(\zeta);\ \zeta \in Cl_\infty(\Omega)\} \leq u(z) \leq \max\{u(\zeta);\ \zeta \in Cl_\infty(\Omega)\}, \qquad \forall z \in Cl_\infty(\Omega).$$

Nadalje, restrikcija $u|\Omega$ ima lokalno svojstvo srednje vrijednosti, stoga iz propozicije 6.4. slijedi

$$\max\{u(\zeta);\ \zeta \in Cl_\infty(\Omega)\} = \max\{u(\zeta);\ \zeta \in \partial_\infty\Omega\} \quad \text{i} \quad \min\{u(\zeta);\ \zeta \in Cl_\infty(\Omega)\} = \min\{u(\zeta);\ \zeta \in \partial_\infty\Omega\}.$$

Međutim, $u|\partial\Omega = v|\partial\Omega - w|\partial\Omega = 0$, pa slijedi $u(z) = 0\ \forall z \in Cl_\infty(\Omega)$, tj $v = w$.

Teorem 6.2. *Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ otvoren skup i neka je $u : \Omega \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija. Sljedeća su četiri svojstva međusobno ekvivalentna:*

(a) *Funkcija u je harmonijska.*

(b) *Funkcija u ima svojstvo srednje vrijednosti.*

(c) *Funkcija u ima lokalno svojstvo srednje vrijednosti.*

(d) *Druge parcijalne derivacije $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ i $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ postoje u svakoj točki od Ω i svuda na Ω vrijedi*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Dokaz: Prema propoziciji 6.3. vrijedi implikacija $(a) \Rightarrow (b)$. Implikacije $(b) \Rightarrow (c)$ i $(a) \Rightarrow (d)$ su trivijalne.

Pretpostavimo da vrijedi (c) tj. da funkcija u ima lokalno svojstvo srednje vrijednosti. Neka je $a \in \Omega$ i neka je $R > 0$ takav da je $\overline{K}(a,R) \subseteq \Omega$. Prema teoremu 6.1. postoji neprekidna funkcija $v : \overline{K}(a,R) \to \mathbb{R}$ takva da je $v|K(a,R)$ harmonijska i da vrijedi $v|S(a,R) = u|S(a,R)$. Budući da i $u|K(a,R)$ i $v|K(a,R)$ imaju lokalno svojstvo srednje vrijednosti, iz propozicije 6.5. slijedi $u|\overline{K}(a,R) = v$. Dakle, funkcija $u|K(a,R)$ je harmonijska. Budući da je točka $a \in \Omega$ bila proizvoljna, zaključujemo da je funkcija u harmonijska na Ω. Time je dokazana implikacija $(c) \Rightarrow (a)$.

Napokon, pretpostavimo da vrijedi (d). Neka je $a \in \Omega$. Izaberimo $r > 0$ tako da je $\overline{K}(a,r) \subseteq \Omega$ i neka je $v : \overline{K}(a,R) \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija, takva da je $v|K(a,r)$ harmonijska i da jke $v|S(a,r) = u|S(a,r)$. Neka je $\epsilon > 0$. Definiramo neprekidnu funkciju $w : \overline{K}(a,r) \to \mathbb{R}$ sa

$$w(z) = u(z) - v(z) + \varepsilon[\operatorname{Re}(z-a)]^2.$$

Neka je

$$M = \max\{w(z);\ z \in \overline{K}(a,r)\}$$

i pretpostavimo da postoji točka $z_0 \in K(a,r)$ takva da je $w(z_0) = M$. Tada je

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(z_0) \leq 0 \qquad \text{i} \qquad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}(z_0) \leq 0,$$

pa slijedi

$$0 \geq \triangle w = \triangle u - \triangle v + 2\varepsilon = 2\varepsilon,$$

a to je nemoguće. Ovca kontradikcija pokazuje da funkcija w ne poprima svoj maksimum ni u jednoj točki $z_0 \in K(a,r)$. Kako je $u|S(a,r) = v|S(a,r)$, to je $w(\zeta) = \varepsilon[\mathrm{Re}\,(\zeta - a)]^2$ za svaku točku $\zeta \in S(a,r)$. Slijedi

$$M = \max\{\varepsilon[\mathrm{Re}\,(\zeta - a)]^2;\ \zeta \in S(a,r)\} = \varepsilon r^2.$$

Dakle, vrijedi $w(z) < \varepsilon r^2\ \forall z \in K(a,r)$, a odatle je

$$u(z) < v(z) + \varepsilon(r^2 - [\mathrm{Re}\,(z-a)]^2) \qquad \forall z \in K(a,r).$$

Budući da je $\varepsilon > 0$ bio proizvoljan, zaključujemo da je $u(z) \leq v(z)\ \forall z \in K(a,r)$. Sasvim analogno dobivamo i da je $v(z) \leq u(z)\ \forall z \in K(a,r)$. Prema tome je $u|K(a,r) = v|K(a,r)$, pa slijedi da je funkcije u harmonijska na krugu $K(a,R$. Kako je točka $a \in \Omega$ bila proizvoljna, zaključujemo da je funkcija u harmonijska svuda na Ω. Time je dokazana i implikacija $(d) \Rightarrow (a)$.

Zadatak 6.8. *Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ otvoren skup i neka $u : \Omega \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija, takva da za svaki zatvoren krug $\overline{K}(a,R) \subseteq \Omega$ vrijedi*

$$u(a) = \frac{1}{\pi R^2}\int_0^R \int_0^{2\pi} u(a + r\,e^{i\varphi}) r\,dr\,d\varphi.$$

Dokažite da je tada $u \in Har(\Omega)$.

Teorem 6.3. *Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ otvoren skup i neka je $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lokalno uniformno konvergentan niz u $Har(\Omega)$. Tada je i funkcija $u = \lim_{n\to\infty} u_n$ harmonijska na Ω.*

Dokaz: Neka je $\overline{K}(a,r)$ zatvoren krug sadržan u Ω. Tada vrijedi

$$u_n(a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u_n(a + \mathrm{r}e^{i\varphi})\mathrm{d}\varphi, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Niz restrikcija $(u_n|S(a,r))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira uniformno prema restrikciji $u|S(a,r)$, pa iz gornjih jednakosti slijedi

$$u(a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(a + \mathrm{r}e^{i\varphi})\mathrm{d}\varphi.$$

Kako je zatvoren krug $\overline{K}(a,r) \subseteq \Omega$ bio proizvoljan, vidimo da funkcija u ima svojstvo srednje vrijednosti. Prema teoremu 6.2. dobivamo da je $u \in Har(\Omega)$.

Značajno je svojstvo harmonijskih funkcija da monotoni nizovi u $Har(\Omega)$ uvijek lokalno uniformno konvergiraju na području Ω :

Teorem 6.4. (**Harnack**) *Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ područje i neka je $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz u $Har(\Omega)$ takav da vrijedi*

$$u_n(z) \leq u_{n+1}(z) \qquad \forall z \in \Omega \quad i \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Ako je za neku točku $z \in \Omega$ niz realnih brojeva $(u_n(z))_{n\in\mathbb{N}}$ ograničen, onda niz $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira lokalno uniformno na Ω prema nekoj funkciji $u \in Har(\Omega)$. U protivnom niz $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira lokalno uniformno na Ω prema $+\infty$.

Za dokaz Harnackovog teorema treba nam sljedeća jednostavna posljedica teorema 6.1.

Lema 6.1. (**Harnackova nejednakost**) *Neka je* $u : \overline{K}(a, R) \to [0, +\infty\rangle$ *neprekidna funkcija takva da je restrikcija* $u|K(a, R)$ *harmonijska. Tada vrijedi*

$$\frac{R - |z-a|}{R + |z-a|} u(a) \le u(z) \le \frac{R + |z-a|}{R - |z-a|} u(a) \qquad \forall z \in K(a, R).$$

Dokaz: Neka je $z = a + re^{i\varphi} \in K(a, R)$ $(0 \le r < R,\ 0 \le \varphi \le 2\pi)$. Prema teoremu 6.1. vrijedi

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2Rr\cos(t - \varphi)} u(a + Re^{it}) \mathrm{d}t.$$

Naravno, za $z = a$, tj. $r = 0$, imamo

$$u(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(a + Re^{it}) \mathrm{d}t.$$

Jednostavan račun daje nam

$$R^2 + r^2 - 2rR\cos(t - \varphi) = |Re^{it} - re^{i\varphi}|^2.$$

Nadalje, očito je

$$(R - r)^2 \le |Re^{it} - re^{i\varphi}|^2 \le (R + R)^2.$$

Kako je $r = |z - a|$, slijedi

$$\frac{R - |z-a|}{R + |z-a|} \le \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2Rr\cos(t - \varphi)} \le \frac{R + |z-a|}{R - |z-a|}.$$

Odatle i iz gornjih integralnih formula slijedi tvrdnja.

Dokaz Harnackovog teorema: Možemo pretpostavljati da su sve funkcije u_n nenegativne svuda na Ω. Naime, ako to nije tako mogli bismo umjesto niza $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ promatrati niz $(u_n - u_1)_{n\in\mathbb{N}}$. Neka je $u : \Omega \to [0, +\infty]$ funkcija definirana sa

$$u(z) = \sup\{u_n(z);\ n \in \mathbb{N}\}, \qquad z \in \Omega.$$

Nadalje, neka su skupovi U i V zadani sa

$$U = \{z \in \Omega;\ u(z) < +\infty\}, \qquad V = \Omega \setminus U = \{z \in \Omega;\, q, u(z) = +\infty\}.$$

Za $a \in \Omega$ izaberimo $R > 0$ tako da je $\overline{K}(a, R) \subseteq \Omega$. Prema lemi 6.1. vrijedi

$$\frac{R - |z-a|}{R + |z-a|} u_n(a) \le u_n(z) \le \frac{R + |z-a|}{R - |z-a|} u_n(a) \qquad \forall z \in K(a, R) \quad \text{i} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Ako je $a \in U$, desna nejednakost povlači da je $u(z) < +\infty$ $\forall z \in K(a, R)$, tj. vrijedi $K(a, R) \subseteq U$. Ako je $a \in V$, lijeva nejednakost povlači da je $u(z) = +\infty$ $\forall z \in K(a, R)$, tj. vrijedi $K(a, R) \subseteq V$. Time je dokazano da su skupovi U i V otvoreni. Budući da je Ω područje, zaključujemo da je ili $U = \Omega$ i $V = \emptyset$ ili je $U = \emptyset$ i $V = \Omega$.

Pretpostavimo da je $U = \Omega$, tj. $u(z) < +\infty$ $\forall z \in \Omega$. Neka je $a \in \Omega$ i neka je $R > 0$ takvo da je $\overline{K}(a, R) \subseteq \Omega$. Neka je $\rho \in \langle 0, R\rangle$. Uzmimo $m \ge n$ i $z \in \overline{K}(, \rho)$ i primijenimo lemu 6.1. na funkciju $u_m - u_n$. Nalazimo

$$0 \le u_m(z) - u_n(z) \le \frac{R + |z-a|}{R - |z-a|}(u_m(a) - u_n(a)) \le \frac{R - \rho}{R - \rho}(u_m(a) - u_n(a)).$$

Budući da je

$$u(z) = \lim_{m\to\infty} u_m(z) \qquad \text{i} \qquad u(a) = \lim_{m\to\infty} u_m(a),$$

dobivamo

$$0 \le u(z) - u_n(z) \le \frac{R+\rho}{R-\rho}(u(a) - u_n(a)), \qquad \forall z \in \overline{K}(a,\rho) \quad \text{i} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

To pokazuje da niz restrikcija $(u_n|\overline{K}(a,\rho))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira uniformno prema restrikciji $u|\overline{K}(a,\rho)$. Budući da je točka $a \in \Omega$ bila proizvoljna, zaključujemo da niz $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira lokalno uniformno na Ω prema funkciji u. Sada iz teorema 6.3. slijedi da je $u \in Har(\Omega)$.

Uzmimo sada da je $V = \Omega$, tj. $u(z) = +\infty \ \forall z \in \Omega$. Neka je $a \in \Omega$ i ponovo izaberimo $R > 0$ tako da bude $\overline{K}(a,R) \subseteq \Omega$. Za $0 < \rho < R$ pomoću leme 6.1. nalazimo da vrijedi

$$u_n(z) \ge \frac{R-\rho}{R+\rho} u_n(a) \qquad \forall z \in \overline{k}(a,\rho) \quad \text{i} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Prema tome, niz restrikcija $(u_n|\overline{K}(a,\rho))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira uniformno prema $+\infty$, pa zaključujemo da niz $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lokalno uniformno na Ω konvergira prema $+\infty$.

Zadatak 6.9. *Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ područje, $K \subseteq \Omega$ kompaktan skup i $a \in \Omega$. Dokažite da postoje realni brojevi $m > 0$ i $M > 0$ takvi da vrijedi*

$$m\,u(a) \le u(z) \le Mu(a) \qquad \forall z \in K$$

za svaku nenegativnu funkciju $u \in Har(\Omega)$.

Zadatak 6.10. *Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ područje, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz u $\mathcal{H}(\Omega)$ i $u_n =$Re f_n. Pretpostavimo da vrijedi:*

(*a*) *Niz $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira lokalno uniformno na Ω prema nekoj funkciji $u \in Har(\Omega)$.*

(*b*) *Postoji točka $a \in \Omega$ takva da niz $(f_n(a))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira u $\mathbb{C}$.*

Dokažite da tada niz funkcija $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira lokalno uniformno na Ω prema nekoj funkciji iz $\mathcal{H}(\Omega)$.

U teoriji Riemannovih ploha trebat će nam općenitiji oblik Harnackovog teorema. Da ga iskažemo, podsjetimo se da se skup S koji je parcijalno uređen relacijom $\le$ zove **usmjeren**, ako vrijedi:

$$\forall s,t \in S \quad \exists u \in S \quad \text{takav da je} \quad s \le u \quad \text{i} \quad t \le u.$$

Ako je S usmjeren skup, onda se familija $(a_s)_{s\in S}$ bilo kakvih objekata indeksiranih elementima skupa S zove **hiperniz**. Ako je $(\lambda_s)_{s\in S}$ hiperniz točaka u $\mathbb{C}$ tada kažemo da taj niz konvergira prema $\lambda_0 \in \mathbb{C}$, ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $s_0 \in S$ takav da vrijedi

$$s \in S, \quad s_0 \le s \qquad \Longrightarrow \qquad |\lambda_s - \lambda_0| < \varepsilon.$$

Za hiperniz $(\lambda_s)_{s\in S}$ kažemo da konvergira prema ∞ ako za svaki $R > 0$ postoji $s_0 \in S$ takav da vrijedi

$$s \in S, \quad s_0 \le s \qquad \Longrightarrow \qquad |\lambda_s| > R.$$

Analogno definiramo konvergenciju hiperniza realnih brojeva prema $-\infty$ ili prema $+\infty$.

Naravno, definicija konvergencije točaka generalizira se i na proizvoljan topološki prostor T :

ako je $(a_s)_{s\in S}$ hiperniz točaka u T, kažemo da taj hiperniz konvergira prema točki $a_0 \in T$ ako za svaku okolinu U točke a_0 u prostoru T postoji $s_0 \in S$ takav da vrijedi:

$$s \in S, \quad s_0 \leq s \qquad \Longrightarrow \qquad a_s \in U.$$

U tom slučaju pišemo

$$a_0 = \lim_{s\in S} a_s.$$

Ako je topološki prostor T Hausdorffov i ako je hiperniz točaka u T konvergentan, lako se vidi da je njegov limes jedinstven.

Za hiperniz funkcija $(u_s)_{s\in S}$, $u_s : A \to \mathbb{C}$, kažemo da uniformno konvergira prema funkciji $u : A \to \mathbb{C}$ ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $s_0 \in S$ takav da vrijedi:

$$s \in S, \quad s_0 \leq s \qquad \Longrightarrow \qquad |u_s(a) - u(a)| < \varepsilon \quad \forall a \in A.$$

Naravno, ako je A topološki prostor i ako su sve funkcije u_s neprekidne, iz uniformne konvergencije slijedi da je i funkcija u neprekidna.

Neka je i dalje S usmjeren skup i neka je za svaki $s \in S$ zadan otvoren skup $\Omega_s \subseteq \mathbb{C}$ i to tako sa vrijedi

$$s, t \in S \qquad \Longrightarrow \qquad \Omega_s \subseteq \Omega_t.$$

Stavimo tada

$$\Omega = \bigcup_{s\in S} \Omega_s.$$

Nadalje, neka je za svaki $s \in S$ zadana funkcija $u_s : \Omega_s \to \mathbb{R}$ i neka je $u : \Omega \to \mathbb{R}$. Tada kažemo da **hiperniz funkcija** $(u_s)_{s\in S}$ **konvergira lokalno uniformno** na Ω prema funkciji u ako su zadovoljena sljedeća tri međusobno ekvivalentna uvjeta:

(a) Za svaki kompaktan podskup $K \subseteq \Omega$ postoji $s_0 \in S$ takav da je $K \subseteq \Omega_{s_0}$ i da hiperniz restrikcija $(u_s|K)_{s\in S,\, s_0\leq s}$ konvergira prema restrikciji $u|K$ uniformno na K.

(b) Za svaki zatvoren krug $\overline{K}(a,r) \subseteq \Omega$ postoji $s_0 \in S$ takav da je $\overline{K}(a,r) \subseteq \Omega_{s_0}$ i da hiperniz restrikcija $(u_s|\overline{K}(a,r))_{s\in S,\, s_0\leq s}$ konvergira prema restrikciji $u|\overline{K}(a,r)$ uniformno na $\overline{K}(a,r)$.

(c) Za svaku točku $a \in \Omega$ postoje $r > 0$ i $s_0 \in S$ takvi da je $K(a,r) \subseteq \Omega_{s_0}$ i da hiperniz restrikcija $(u_s|K(a,r))_{s\in S,\, s_0\leq s}$ konvergira prema restrikciji $u|K(a,r)$ uniformno na $K(a,r)$.

Teorem 6.5. *Neka je S usmjeren skup i neka su $\Omega_s \subseteq \mathbb{C}$ područja takva da vrijedi*

$$s, t \in S, \quad s \leq t \qquad \Longrightarrow \qquad \Omega_s \subseteq \Omega_t.$$

Stavimo

$$\Omega = \bigcup_{s\in S} \Omega_s.$$

Neka je za svaki $s \in S$ zadana $u_s \in Har(\Omega_s)$ i pretpostavimo da vrijedi:

$$s, t \in S, \quad s \leq t \qquad \Longrightarrow \qquad u_s(z) \leq u_t(z) \quad \forall z \in \Omega_s.$$

Ako je za neku točku $z \in \Omega$ i za $s_0 \in S$ takav da je $z \in \Omega_{s_0}$ hiperniz realnih brojeva $(u_s(z))_{s\in S,\, s_0\leq s}$ ograničen, onda hiperniz $(u_s)_{s\in S}$ konvergira lokalno uniformno na Ω prema nekoj funkciji $u \in Har(\Omega)$. U protivnom hiperniz $(u_s)_{s\in S}$ konvergira lokalno uniformno na Ω prema $+\infty$.

Zadatak 6.11. *Dokažite teorem 6.5.*

Poglavlje 7

Karakterizacija Dirichletovih područja

Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ otvoren skup. Neprekidna funkcija $v : \Omega \to \mathbb{R}$ zove se **subharmonijska**, ako za svaku točku $a \in \Omega$ postoji $R > 0$ takav da je $K(a, R) \subseteq \Omega$ i da vrijedi

$$v(a) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(a + r\mathrm{e}^{it})\mathrm{d}t \qquad \forall r \in [0, R\rangle.$$

Neprekidna funkcija $v : \Omega \to \mathbb{R}$ zove se **superharmonijska**, ako za svaku točku $a \in \Omega$ postoji $R > 0$ takav da je $K(a, R) \subseteq \Omega$ i da vrijedi

$$v(a) \geq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(a + r\mathrm{e}^{it})\mathrm{d}t \qquad \forall r \in [0, R\rangle.$$

Prema teoremu 6.2. funkcija je harmonijska ako i samo je i subharmonijska i superharmonijska. Funkcija v je subharmonijska ako i samo ako je funkcija $-v$ superharmonijska. Prema tome, iz svih tvrdnji o subharmonijskim funkcijama lagano se dobivaju analogne tvrdnje o superharmonijskim funkcijama.

Oznake: Skup svih subharmonijskih funkcija na otvorenom skupu Ω označavat ćemo sa $Sub(\Omega)$, a skup svih superharmonijskih sa $Super(\Omega)$.

Zadatak 7.1. *Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ otvoren skup i neka su $v_1, v_2 \in Sub(\Omega)$. Dokažite da vrijedi:*

(a) *Ako su $k_1, k_2 \in [0, +\infty\rangle$, onda je $k_1 v_1 + k_2 v_2 \in Sub(\Omega)$.*

(b) *Ako je funkcija $v = \max(v_1, v_2)$ definirana sa $v(z) = \max\{v_1(z), v_2(z)\}$, $z \in \Omega$, onda je $v \in Sub(\Omega)$.*

Princip maksimuma za harmonijske funkcije (propozicija 6.4.) generalizira se i na slučaj subharmonijskih funkcija:

Propozicija 7.1. *Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ područje i $v \in Sub(\Omega)$. Ako postoji točka $a \in \Omega$ takva da je $v(a) \geq v(z)$ $\forall z \in \Omega$, onda je funkcija v konstantna.*

Dokaz: Stavimo

$$M = \sup\{v(z);\ z \in \Omega\}$$

i pretpostavimo da je $M < +\infty$. Nadalje, pretpostavimo da je skup

$$U = \{z \in \Omega;\ v(z) = M\}$$

neprazan. Zbog neprekidnosti funkcije v skup $\Omega\backslash U$ je otvoren. Za bilo koju točku $a \in U$ izaberimo $R > 0$ tako da je $\overline{K}(a, R) \subseteq \Omega$ i da vrijedi

$$v(a) \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} v(a + r\mathrm{e}^{it})\mathrm{d}t \qquad \forall r \in [0, R\rangle.$$

Kao u dokazu propozicije 6.4. nalazimo da vrijedi

$$\int_0^R \int_0^{2\pi} [M - v(a + r\mathrm{e}^{i\varphi}]r\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi \leq 0.$$

Međutim, podintegralna funkcija je neprekidna i nenegativna, pa slijedi $v(z) = M \ \forall z \in \overline{K}(a, R)$. Dakle, $\overline{K}(a, R) \subseteq U$, a to zbog proizvoljnosti točke $a \in U$ pokazuje da je skup U otvoren. Kako je Ω područje, slijedi $U = \Omega$, dakle, funkcija v je konstantna.

Primijetimo da se princip minimuma iz propozicije 6.4. ne generalizira na slučaj subharmonijskih funkcija. Doista, nekonstantna subharmonijska funkcija može poprimiti svoj infimum na području Ω. Naravno, princip minimuma (ali ne i princip maksimuma) vrijedi za superharmonijske funkcije.

Ako je $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ otvoren skup, sa $Cl_\infty(\Omega)$ ćemo označavati njegov zatvarač u $\overline{\mathbb{C}}$, a sa $\partial_\infty\Omega = Cl_\infty(\Omega) \setminus \Omega$ njegov rub u $\overline{\mathbb{C}}$. Zatvarač i rub od Ω u $\mathbb{C}$ ćemo označavati sa $Cl(\Omega)$ i $\partial\Omega$. Naravno, za ograničen skup Ω je $Cl_\infty(\Omega) = Cl(\Omega)$ i $\partial_\infty\Omega = \partial\Omega$, a za neograničen je $Cl_\infty(\Omega) = Cl(\Omega) \cup \{\infty\}$ i $\partial_\infty\Omega = \partial\Omega \cup \{\infty\}$.

Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ otvoren skup i v realna funkcija definirana na skupu Ω. Za točku $a \in \partial_\infty\Omega$ definiramo **limes superior funkcije v u točki** a kao supremum skupa svih gomilišta svih nizova $(v(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$ takvih da je $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz u Ω koji konvergira prema točki a. Oznaka za limes superior funkcije $v : \Omega \to \mathbb{R}$ u točki $a \in \partial_\infty\Omega$ je

$$\limsup_{z\to a} v(z).$$

Zadatak 7.2. *Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ otvoren skup, $v : \Omega \to \mathbb{R}$ i $a \in \partial_\infty\Omega$. Neka je T skup svih $t \in \mathbb{R}$ takvih da za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $r > 0$ takav da vrijedi*

$$z \in \Omega \cap K(a, r) \qquad \Longrightarrow \qquad v(z) < t + \varepsilon.$$

Dokažite da je

$$\inf\, T = \limsup_{z\to a} v(z).$$

Napominjemo da za $a = \infty$ oznaka $K(\infty, r)$ predstavlja odgovarajuću otvorenu okolinu točke ∞ u $\overline{\mathbb{C}}$:

$$K(\infty, r) = \{\infty\} \cup \{z \in \mathbb{C};\ |z| > r\}.$$

Nadalje, podrazumijevamo da je $\inf \emptyset = +\infty$.

Bit će nam koristan sljedeći oblik principa maksimuma za subharmonijske funkcije

Propozicija 7.2. *Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ područje i neka je $v \in Sub(\Omega)$. Pretpostavimo da je*

$$\limsup_{z\to a} v(z) \leq 0 \qquad \forall a \in \partial_\infty\Omega. \qquad (1)$$

Tada je $v(z) \leq 0 \ \forall z \in \Omega$.

Dokaz: Pretpostavimo suprotno, tj. da je $v(z) > 0$ za neku točku $z \in \Omega$. Tada postoji $\varepsilon > 0$ takav da je skup
$$F = \{z \in \Omega;\ v(z) \geq \varepsilon\}$$
neprazan. Dokazat ćemo da je njegov komplement $\overline{\mathbb{C}} \setminus F$ u prostoru $\overline{\mathbb{C}}$ otvoren. Neka $a \in \overline{\mathbb{C}} \setminus F$. Imamo tri mogućnosti:

(a) $a \in \overline{\mathbb{C}} \setminus Cl_\infty(\Omega)$. Skup $\overline{\mathbb{C}} \setminus Cl_\infty(\Omega)$ je otvoren, pa postoji $r > 0$ takav da je $K(a,r) \subseteq \overline{\mathbb{C}} \setminus Cl_\infty(\Omega)$. Tada je pogotovo $K(a,r) \subseteq \overline{\mathbb{C}} \setminus F$.

(b) $a \in \partial_\infty \Omega$. Prema zadatku 7.2. postoji $r > 0$ takav da vrijedi
$$z \in \Omega \cap K(a,r) \qquad \Longrightarrow \qquad v(z) < \varepsilon. \qquad (2)$$
Odatle slijedi da je $K(a,r) \cap F = \emptyset$, dakle je $K(a,r) \subseteq \overline{\mathbb{C}} \setminus F$.

(c) $a \in \Omega$. Tada je $v(a) < \varepsilon$, pa zbog neprekidnosti funkcije v postoji $r > 0$ takav da je $K(a,r) \subseteq \Omega$ i $v(z) < \varepsilon\ \forall z \in K(a,r)$. Tada je ponovo $K(a,r) \cap F = \emptyset$, tj. $K(a,r) \subseteq \overline{\mathbb{C}} \setminus F$.

Dakle, skup $\overline{\mathbb{C}} \setminus F$ je otvoren, što znači da je skup F zatvoren u $\overline{\mathbb{C}}$. Kako je prostor $\overline{\mathbb{C}}$ kompaktan, zaključujemo da je skup F kompaktan. Funkcija $v|F$ je neprekidna, pa zbog kompaktnosti skupa F postoji točka $b \in F$ takva da je $v(z) \leq v(b)\ \forall z \in F$. Prema definiciji skupa F tada je i $v(z) \leq v(b)\ \forall z \in \Omega$. Sada iz propozicije 7.1. slijedi da je funkcija v konstanta $\geq \varepsilon$. No to je nespojivo s pretpostavkom u iskazu leme. Ova kontradikcija dokazuje da je $v(z) \leq 0\ \forall z \in \Omega$.

Oznaka: Za područje $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ćemo sa $Har_0(\Omega)$ označavati skup svih neprekidnih funkcija $u : Cl_\infty(\Omega) \to \mathbb{R}$, takvih da je $u|\Omega \in Har(\Omega)$.

Tada je $Har_0(\Omega)$ realan vektorski prostor i prema propoziciji 6.5. restrikcija $u \mapsto u|\Omega$ je linearna injekcija sa $Har_0(\Omega)$ u $Har(\Omega)$.

Teorem 7.1. *Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ otvoren skup i $v : \Omega \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija. Sljedeća su četiri svojstva međusobno ekvivalentna:*

(a) *Za svaku točku $a \in \Omega$ i za svaki $r > 0$ takav da je $\overline{K}(a,r) \subseteq \Omega$ vrijedi*
$$v(a) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(a + re^{it})\, dt.$$

(b) *Funkcija v je subharmonijska.*

(c) *Ako je U područje takvo da je $Cl_\infty(U) \subseteq \Omega$ i ako je funkcija $u \in Har_0(U)$ takva da je $v(\zeta) \leq u(\zeta)\ \forall \zeta \in \partial_\infty U$, onda je $v(z) \leq u(z)\ \forall z \in U$.*

(d) *Ako je $\overline{K}(a,r) \subseteq \Omega$ i ako je funkcija $u \in Har_0(K(a,r))$ takva da je $v(\zeta) \leq u(\zeta)\ \forall \zeta \in S(a,r)$, onda je $v(z) \leq u(z)\ \forall z \in K(a,r)$.*

Napomenimo da uvjet $Cl_\infty(U) \subseteq \Omega$ znači da je $\infty \notin Cl_\infty(U)$, dakle, područje U je ograničeno, a tada je zapravo $Cl_\infty(U) = Cl(U)$.

Dokaz: Implikacije $(a) \Longrightarrow (b)$ i $(c) \Longrightarrow (d)$ su očigledne.

$(b) \Longrightarrow (c)$ Neka je U područje takvo da je $Cl_\infty(U) \subseteq \Omega$ i neka je funkcija $u \in Har_0(U)$ takva da je $v(\zeta) \leq u(\zeta)\ \forall \zeta \in \partial_\infty U$. Stavimo $f = v|Cl_\infty(U) - u$. Funkcija f je neprekidna na skupu $Cl_\infty(U)$. Nadalje, kako su funkcije $v|U$ i $-u|U$ subharmonijske, prema tvrdnji (a) zadatka 7.1. funkcija $f|U$ je subharmonijska. Budući da je $f(\zeta) \leq 0\ \forall \zeta \in \partial_\infty U$, iz propozicije 7.2. slijedi da je $f(z) \leq 0\ \forall z \in U$. Dakle, $v(z) \leq u(z)\ \forall z \in U$.

$(d) \Longrightarrow (a)$ Neka je $\overline{K}(a,r) \subseteq \Omega$. Prema teoremu 6.1. tada postoji funkcija $u \in Har_0(K(a,r))$ takva da je $u|S(a,r) = v|S(a,r)$. Prema svojstvu (d) tada vrijedi $v(z) \leq u(z)\ \forall z \in K(a,r)$, pa imamo

$$v(a) \leq u(a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(a + r\mathrm{e}^{it})\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} v(a + r\mathrm{e}^{it})\mathrm{d}t.$$

Korolar 7.1. *Neka su Ω_1 i Ω_2 područja u $\mathbb{C}$ i neka je φ izomorfizam (tj. holomorfna bijekcija) područja Ω_1 na područje Ω_2. Neka je $v \in Sub(\Omega_2)$. Tada je $v \circ \varphi \in Sub(\Omega_1)$.*

Dokaz: Neka je U područje, takvo da je $Cl_\infty(U) \subseteq \Omega_1$ (dakle, $Cl_\infty(U) = Cl(U)$), i neka je funkcija $u \in Har_0(U)$ takva da je $(v \circ \varphi)(\zeta) \leq u(\zeta)\ \forall \zeta \in \partial_\infty U = \partial U$. Tada je $\varphi(U)$ područje. Nadalje, kako je skup $Cl(U)$ kompaktan, to je i $\varphi(Cl(U))$ kompaktan, dakle, zatvoren u $\mathbb{C}$. Kako je $\varphi(Cl(U)) \subseteq \varphi(\Omega_1) \subseteq \Omega_2$ i $\varphi(U) \subseteq \varphi(Cl(U))$, slijedi $Cl_\infty(\varphi(U)) = Cl(\varphi(U)) = \varphi(Cl(U))$. Dakle, vrijedi i $\partial_\infty \varphi(U) = \partial\varphi(U) = \varphi(\partial U)$. Funkcija $u \circ \varphi^{-1}$ neprekidna je na $\varphi(Cl(U))$. Nadalje, prema propoziciji 6.2. restrikcija $(u \circ \varphi^{-1})|\varphi(U)$ je harmonijska funkcija na području $\varphi(U)$. To pokazuje da je $u \circ \varphi^{-1} \in Har_0(\varphi(U))$. Za $w \in \partial\varphi(U)$ je $\zeta = \varphi^{-1}(w) \in \partial U$, pa imamo

$$v(w) = (v \circ \varphi)(\zeta) \leq u(\zeta) = (u \circ \varphi^{-1})(w).$$

Budući da je $v \in Sub(\Omega_2)$, prema teoremu 7.1. slijedi da je $v(z) \leq (u \circ \varphi^{-1})(z)\ \forall z \in \varphi(U)$, a odatle je $(v \circ \varphi)(z) \leq u(z)\ \forall z \in U$. Ponovna primjena teorema 7.1. sada daje $v \circ \varphi \in Sub(\Omega_1)$.

Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ otvoren skup i $v \in Sub(\Omega)$. Ako je $\overline{K}(a,r) \subseteq \Omega$, definiramo neprekidnu funkciju $v^{a,R} : \Omega \to \mathbb{R}$ na sljedeći način:

$$v^{a,R}|(\Omega \setminus K(a,R)) = v|(\Omega \setminus K(a,R)), \qquad v^{a,R}|\overline{K}(a,R) \in Har_0(K(a,R)).$$

Dakle, funkcija $v^{a,R}$ podudara se s funkcijom v van kruga $K(a,R)$, a na zatvorenom krugu $\overline{K}(a,R)$ to je jedinstvena neprekidna funkcija koja je harmonijska na otvorenom krugu $K(a,R)$, a na kružnici $S(a,R)$ se podudara sa $v|S(a,R)$. U skladu s oznakama iz teorema 6.1. imamo

$$v^{a,R}|K(a,R) = P_{v|S(a,R)}.$$

Propozicija 7.3. *Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ otvoren skup, $v \in Sub(\Omega)$ i $\overline{K}(a,R) \subseteq \Omega$. Tada je $v^{a,R} \in Sub(\Omega)$.*

Dokaz: Neka je $b \in \Omega \setminus K(a,R)$. Izaberimo $\rho > 0$ takav da je $K(b,\rho) \subseteq \Omega$. Budući da je prema svojstvu (d) iz teorema 7.1. $v \leq v^{a,R}$ svuda na Ω, to za svako $r \in [0,\rho\rangle$ vrijedi

$$v^{a,R}(b) = v(b) \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} v(b + r\mathrm{e}^{it})\mathrm{d}t \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} v^{a,R}(b + r\mathrm{e}^{it})\mathrm{d}t.$$

Neka je sada $b \in K(a,R)$ i neka je $\rho > 0$ takav da je $K(b,\rho) \subseteq K(a,R)$. Funkcija $v^{a,R}|K(a,R)$ je harmonijska, pa imao za svaki $r \in [0,\rho\rangle$

$$v^{a,R}(b) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} v^{a,R}(b + r\mathrm{e}^{it})\mathrm{d}t.$$

Dakle, funkcija $v^{a,R}$ je subharmonijska na Ω.

Primijetimo da iz teorema 6.1. i iz definicije funkcije $v^{a,R}$ slijedi:

$$v_1, v_2 \in Sub(\Omega), \quad \overline{K}(a,R) \subseteq \Omega, \quad v_1 \leq v_2 \qquad \Longrightarrow \qquad v_1^{a,R} \leq v_2^{a,R}. \qquad (3)$$

Za otvoren skup $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ neprazan skup $P \subseteq Sub(\Omega)$ zove se **Perronov skup** na Ω, ako su ispunjena sljedeća dva uvjeta:

$(P1)$ $v_1, v_2 \in P \quad \Longrightarrow \quad \max(v_1, v_2) \in P.$

$(P2)$ $v \in P,\ \overline{K}(a,R) \subseteq \Omega \quad \Longrightarrow \quad v^{a,R} \in P.$

Teorem 7.2. (**Perron**) *Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ područje i neka $P \subseteq Sub(\Omega)$ Perronov skup na Ω. Ako postoji točka $z_0 \in \Omega$ takva da je skup realnih brojeva $\{v(z_0);\ v \in P\}$ odozgo ograničen, onda je funkcija u, definirana sa*

$$u(z) = \sup\{v(z);\ v \in P\}, \qquad z \in \Omega,$$

harmonijska na Ω.

Dokaz: Definirajmo funkciju $u : \Omega \to \langle -\infty, +\infty]$ formulom u iskazu teorema. Nadalje, stavimo

$$U = \{z \in \Omega;\ u(z) < +\infty\}, \qquad V = \Omega \setminus U = \{z \in \Omega;\ u(z) = +\infty\}.$$

Po pretpostavci skup U je neprazan.

Neka je $a \in V$. Tada postoji niz $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ u P takav da je

$$\lim_{n\to\infty} v_n(a) = +\infty.$$

Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je niz funkcija $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rastući. Naime, ukoliko nije tako, možemo ga zamijeniti s nizom $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$, gdje je $w_n = \max(v_1, v_2, \ldots, v_n)$. Neka je $R > 0$ izabran tako da je $\overline{K}(a,R) \subseteq \Omega$. Prema (3) je tada $(v_n^{a,R})_{n\in\mathbb{N}}$ rastući niz u P i vrijedi $v_n \leq v_n^{a,R}$. Dakle,

$$\lim_{n\to\infty} v_n^{a,R}(a) = +\infty.$$

Funkcije $v_n^{a,R}|K(a,R)$ su harmonijske, pa iz Harnackovog teorema 6.4. slijedi

$$\lim_{n\to\infty} v_n^{a,R}(z) = +\infty \qquad \forall z \in K(a,R).$$

Prema tome je $u(z) = +\infty$ $\forall z \in K(a,R)$, odnosno, $K(a,R) \subseteq V$. Kako je točka $a \in V$ bila proizvoljna, dokazali smo da je skup V otvoren.

Neka je sada $a \in U$. Izaberimo niz $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ u P takav da je

$$\lim_{n\to\infty} v_n(a) = u(a).$$

Kao i malo prije možemo pretpostaviti da je niz $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rastući. Izaberimo $R > 0$ tako da je $\overline{K}(a,R) \subseteq \Omega$. Tada je i $(v_n^{a,R})_{n\in\mathbb{N}}$ rastući niz u P i

$$v_n \leq v_n^{a,R} \leq u, \qquad \text{dakle} \qquad \lim_{n\to\infty} v_n^{a,R}(a) = u(a).$$

Po Harnackovom teoremu 6.4. niz restrikcija $(v_n^{a,R}|K(a,R))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira lokalno uniformno prema nekoj harmonijskoj funkciji v na $K(a,R)$. Tvrdimo da je tada $u|K(a,R) = v$.

Neka je $b \in K(a,R)$. Izaberimo rastući niz $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ u P takav da je

$$\lim_{n\to\infty} w_n(b) = u(b).$$

Stavimo $f_n = \max(v_n, w_n)$. Tada je $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rastući niz u P i vrijedi

$$v_n \leq f_n \leq u \qquad \text{i} \qquad w_n \leq f_n \leq u.$$

Prema tome je

$$\lim_{n\to\infty} f_n(a) = u(a) = v(a) \qquad \text{i} \qquad \lim_{n\to\infty} f_n(b) = u(b).$$

Nadalje, $(f_n^{a,R})_{n\in\mathbb{N}}$ je rastući niz u P i vrijedi $f_n \leq f_n^{a,R} \leq u$, pa je

$$\lim_{n\to\infty} f_n^{a,R}(a) = u(a) = v(a) \qquad \text{i} \qquad \lim_{n\to\infty} f_n^{a,R}(b) = u(b).$$

Budući da je $u(a) < +\infty$, prema Harnackovom teoremu niz harmonijskih funkcija $(f_n^{a,R}|K(a,R))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira lokalno uniformno prema nekoj harmonijskoj funkciji f na $K(a,R)$. Tada je

$$f(a) = u(a) = v(a) \qquad \text{i} \qquad f(b) = u(b).$$

Imamo $v_n \leq f_n$, pa iz (3) slijedi $v_n^{a,R} \leq f_n^{a,R}$, a odatle je $v \leq f$. Dakle, za harmonijsku funkciju $v-f$ na $K(a,R)$ vrijedi $v-f \leq 0$. Međutim, $v(a)-f(a) = 0$, pa iz principa maksimuma (propozicija 6.4.) slijedi $v - f = 0$. Posebno je $u(b) = f(b) = v(b)$. Budući da je točka $b \in K(a,R)$ bila proizvoljna, zaključujemo da je $u|K(a,R) = v$. Posebno je $K(a,R) \subseteq U$.

Iz dokazanog slijedi da je neprazan skup Uotvoren i da je funkcija $u|U$ harmonijska. Međutim, prije smo vidjeli da je i $\Omega \setminus U = V$ otvoren skup, pa iz povezanosti Ω slijedi da je $U = \Omega$. Time je Perronov teorem dokazan.

Važnost Perronovog teorema je u tome što vrlo često omogućuje dokaz egzistencije harmonijske funkcije s nekim zadanim svojstvima i to zato što uvijek postoji veliko mnoštvo subharmonijskih funkcija i obično nije teško pronaći prikladan Perronov skup koji će nam dati traženu harmonijsku funkciju. Primjer takve situacije daje sljedeći način pokušaja rješavanja općeg Dirichletovog problema (u stvari, nešto generalnijeg problema).

Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ otvoren skup i neka je $f : \partial_\infty\Omega \to \mathbb{R}$ odozdo i odozgo ograničena funkcija. Tada ćemo sa $P(\Omega, f)$ označavati skup svih funkcija $v \in Sub(\Omega)$ sa sljedećim svojstvom:

(P) *Za svako $\varepsilon > 0$ i za svaku točku $\zeta \in \partial_\infty\Omega$ postoji $r > 0$ takav da vrijedi*

$$z \in K(\zeta, r) \cap \Omega \qquad \Longrightarrow \qquad v(z) \leq f(\zeta) + \varepsilon. \tag{4}$$

Zadatak 7.3. *Neka je $v \in Sub(\Omega)$. Dokažite da je $v \in P(\Omega, f)$ ako i samo ako vrijedi*

$$\limsup_{z\to\zeta} v(z) \leq f(\zeta) \qquad \forall \zeta \in \partial_\infty\Omega.$$

Propozicija 7.4. *$P(\Omega, f)$ je Perronov skup na Ω. Nadalje, vrijedi*

$$v(z) \leq \sup\{f(\zeta);\ \zeta \in \partial_\infty\Omega\} \qquad \forall v \in P(\Omega, f) \quad i \quad \forall z \in \Omega.$$

Dokaz: Funkcija f je po pretpostavci odozdo ograničena, stoga postoji $m \in \mathbb{R}$ takav da je $f(\zeta) \geq m\ \forall \zeta \in \partial_\infty\Omega$. Tada je očito svaka konstanta $\leq m$ element skupa $P(\Omega, f)$. Dakle, $P(\Omega, f)$ je neprazan podskup od $Sub(\Omega)$.

$(P1)$ Iz definicije skupa $P(\Omega, f)$ evidentno je da vrijedi

$$v_1, v_2 \in P(\Omega, f) \qquad \Longrightarrow \qquad \max(v_1, v_2) \in P(\Omega, f).$$

$(P2)$ Neka je $v \in P(\Omega, f)$ i $\overline{K}(a,R) \subseteq \Omega$. Za $\zeta \in \partial_\infty\Omega$ i $\varepsilon > 0$ možemo izabrati $r > 0$ tako da vrijedi (4) i da je $K(\zeta, r) \cap \overline{K}(a,R) = \emptyset$, odnosno, da je $K(\zeta, r) \cap \Omega \subseteq \Omega \setminus \overline{K}(a,R)$. Budući da je

$$v^{a,R}|(\Omega \setminus \overline{K}(a,R)) = v|(\Omega \setminus \overline{K}(a,R)),$$

slijedi

$$v^{a,R}|(K(\zeta, r) \cap \Omega) = v|(K(\zeta, r) \cap \Omega),$$

pa zbog (4) vrijedi

$$z \in K(\zeta, r) \cap \Omega \qquad \Longrightarrow \qquad v^{a,R}(z) \leq f(\zeta) + \varepsilon.$$

To znači da je $v^{a,R} \in P(\Omega, f)$.

Na taj način dokazali smo da je $P(\Omega, f)$ Perronov skup na području Ω.

Stavimo

$$M = \sup \{f(\zeta);\ \zeta \in \partial_\infty \Omega\}.$$

Neka je $v \in P(\Omega, f)$. Tada je $v - M$ subharmonijska funkcija na Ω. Za $\varepsilon > 0$ i $\zeta \in \partial_\infty \Omega$ izaberimo $r > 0$ tako da vrijedi (10). Tada imamo

$$z \in K(\zeta, r) \cap \Omega \qquad \Longrightarrow \qquad v(z) - M \leq \varepsilon.$$

Sada iz propozicije 7.2. slijedi $v(z) - M \leq 0$, tj. $v(z) \leq M\ \forall z \in \Omega$.

Za ograničenu funkciju $f : \partial_\infty \Omega \to \mathbb{R}$ definiramo funkciju $u_f : \Omega \to \mathbb{R}$ sa

$$u_f(z) = \sup \{v(z);\ v \in P(\Omega, f)\}, \qquad z \in \Omega.$$

Funkcija u_f zove se **Perronova funkcija** na području Ω pridružena funkciji f.

Teorem 7.3. *Neka je $f : \partial_\infty \Omega \to \mathbb{R}$ ograničena funkcija,*

$$m = \inf \{f(\zeta);\ \zeta \in \partial_\infty \Omega\} \qquad i \qquad M = \sup \{f(\zeta);\ \zeta \in \partial_\infty \Omega\}.$$

Perronova funkcija u_f na području Ω pridružena funkciji f harmonijska je na Ω i vrijedi

$$m \leq u_f(z) \leq M \qquad \forall z \in \Omega.$$

Dokaz: Konstanta m je element Perronovog skupa $P(\Omega, f)$, pa je jasno da vrijedi

$$u_f(z) \geq m \qquad \forall z \in \Omega.$$

Prema propoziciji 7.4. vrijedi

$$u_f(z) \leq M \qquad \forall z \in \Omega.$$

Napokon, prema Perronovom teoremu 7.2. je $u_f \in \mathcal{H}(\Omega)$.

Sljedeći teorem ukazuje na važnost Perronove funkcije u rješavanju Dirichletovog problema:

Teorem 7.4. *Neka je $u \in Har_0(\Omega)$ i $f = u|\partial_\infty \Omega$. Tada je $u|\Omega = u_f$.*

Dokaz: Neka je $\zeta \in \partial_\infty \Omega$ i $\varepsilon > 0$. Budući da je funkcija u neprekidna u točki ζ, postoji $r > 0$ takav da vrijedi

$$z \in K(\zeta, r) \cap Cl_\infty(\Omega) \qquad \Longrightarrow \qquad |u(z) - u(\zeta)| \leq \varepsilon. \qquad (5)$$

Kako je $u|\partial_\infty \Omega = f$, iz (5) slijedi da funkcija $v = u|\Omega$ ima svojstvo (P), odnosno, $u|\Omega \in P(\Omega, f)$. Sada iz definicije Perronove funkcije u_f slijedi

$$u(z) \leq u_f(z) \qquad \forall z \in \Omega. \qquad (6)$$

Neka je $v \in P(\Omega, f)$. Zbog neprekidnosti funkcije u nalazimo da je tada $v - u|\Omega \in P(\Omega, 0)$. Sada iz zadnje tvrdnje propozicije 7.4. slijedi da je

$$v(z) - u(z) \leq 0 \qquad \forall z \in \Omega.$$

Budući da je funkcija $v \in P(\Omega, f)$ bila proizvoljna, iz definicije Perronove funkcije u_f zaključujemo da vrijedi

$$u_f(z) \leq u(z) \qquad \forall z \in \Omega. \tag{7}$$

Dokazane nejednakosti (6) i (7) daju tvrdnju teorema.

Ovaj teorem pokazuje da ukoliko za danu neprekidnu funkciju $f : \partial_\infty \Omega \to \mathbb{R}$ postoji rješenje odgovarajućeg Dirichletovog problema, onda se to rješenje svuda na Ω podudara s Perronovom funkcijom u_f. Prema tome, Dirichletov problem za područje Ω i za danu neprekidnu funkciju $f : \partial_\infty \Omega \to \mathbb{R}$ ima rješenje ako i samo ako je funkcija $u : Cl_\infty(\Omega) \to \mathbb{R}$, definirana sa

$$u|\Omega = u_f \qquad \text{i} \qquad u|\partial_\infty \Omega = f$$

neprekidna svuda na $Cl_\infty(\Omega)$. Budući da je funkcija u_f neprekidna na Ω, a funkcija f neprekidna na $\partial_\infty \Omega$, vidimo da je gore definirana funkcija u neprekidna svuda na $Cl_\infty(\Omega)$ ako i samo ako za svaku točku $\zeta \in \partial_\infty \Omega$ vrijedi

$$f(\zeta) = \lim_{z \to \zeta} u_f(z).$$

Rezultati o Perronovoj funkciji omogućuju da se dokaže teorem koji daje nužan i dovoljan uvjet da bi područje $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ bilo Dirichletovo. Da bismo taj teorem iskazali uvodimo novi pojam. Kažemo da područje Ω ima **barijeru** u točki $a \in \partial_\infty \Omega$, ako za svako $\delta > 0$ postoji funkcija $\psi \in Super(\Omega)$ sa sljedeća tri svojstva:

$(B1)$ $0 \leq \psi \leq 1$.

$(B2)$ $\psi(z) = 1 \qquad \forall z \in \Omega \setminus K(a, \delta)$.

$(B3)$ $\lim_{z \to a} \psi(z) = 0$.

Teorem 7.5. *Područje Ω je Dirichletovo ako i samo ako ono ima barijeru u svakoj točki $a \in \partial_\infty \Omega$.*

Karakterizacija Dirichletovih područja u teoremu 7.5. nije sasvim zadovoljavajuća, budući da pitanje egzistencije rješenja Dirichletovog problema zamjenjuje s također vrlo teškim pitanjem egzistencije barijera u svakoj točki ruba područja. Naravno, poželjno bi bilo da se nađu jednostavni geometrijski ili topološki uvjeti, koji su nužni i dovoljni da područje bude Dirichletovo. Nažalost, takvi uvjeti za sada nisu poznati. Međutim, pomoću teorema 7.5. dokazat ćemo vrlo jednostavan i koristan dovoljan uvjet da područje ima barijeru u danoj točki svog ruba, a zatim i jednostavan dovoljan uvjet da područje bude Dirichletovo.

Teorem 7.6. *Neka je Ω područje u $\mathbb{C}$. Neka je $a \in \partial_\infty \Omega$ takva da komponenta povezanosti skupa $\overline{\mathbb{C}} \setminus \Omega$, koja sadrži točku a, nije jednaka $\{a\}$. Tada područje Ω ima barijeru u točki a.*

Iz teorema 7.5. i iz teorema 7.6. neposredno slijedi:

Teorem 7.7. *Neka je Ω područje u $\mathbb{C}$ takvo da nijedna komponenta povezanosti skupa $\overline{\mathbb{C}} \setminus \Omega$ nije jednočlan skup. Tada je područje Ω Dirichletovo.*

Korolar 7.2. *Jednostavno povezano područje $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ je Dirichletovo područje.*

Dokaz: Ako je $\Omega = \mathbb{C}$, tvrdnja je trivijalna. Ako je $\Omega \neq \mathbb{C}$, onda je skup $\overline{\mathbb{C}} \setminus \Omega$ prema teoremu 3.1. povezan i sadrži više od jedne točke, pa tvrdnja slijedi iz teorema 7.7.

Uvjet teorema 7.7. nije nužan. Npr. može se pokazati da je područje definirano sa

$$\Omega = K(0,1) \setminus \left[\{0\} \cup \bigcup_{n\in\mathbb{N},\, n\geq 2} S_n\right], \qquad S_n = \left\{\frac{1}{n}\mathrm{e}^{2\pi i t};\ -\frac{n-1}{2n} \leq t \leq \frac{n-1}{2n}\right\},$$

Dirichletovo, iako je $\{0\}$ jedna od komponenata povezanosti njegova komplementa.

Korolar 7.3. *Neka je $\Omega \subsetneq \mathbb{C}$ jednostavno povezano područje i neka su $K_1, \dots, K_n$ povezani međusobno disjunktni kompaktni podskupovi od Ω od kojih nijedan nije jednočlan skup. Tada je $\Omega \setminus (K_1 \cup \dots \cup K_n)$ Dirichletovo područje.*

Dokaz: Komponente povezanosti skupa

$$\overline{\mathbb{C}} \setminus (\Omega \setminus (K_1 \cup \dots \cup K_n)) = (\overline{\mathbb{C}} \setminus \Omega) \cup K_1 \cup \dots \cup K_n$$

su očito skupovi $\overline{\mathbb{C}} \setminus \Omega$, $K_1, \dots, K_n$. Svaki od tih skupova sadrži više od jedne točke. Prema teoremu 7.7. područje $\Omega \setminus (K_1 \cup \dots \cup K_n)$ je Dirichletovo.

Prema korolaru 7.3. ako su $a, b \in \mathbb{C}$ i ako su $r > 0$ i $R > 0$ takvi da je $\overline{K}(b,r) \subseteq K(a,R)$ tada je $K(a,R) \setminus \overline{K}(b,r)$ Dirichletovo područje. Dakle, ako su $f : S(a,R) \to \mathbb{R}$ i $g : S(b,r) \to \mathbb{R}$ neprekidne funkcije, onda postoji (jedinstvena) neprekidna funkcija $u : \overline{K}(a,R) \setminus K(b,r) \to \mathbb{R}$ takva da je $u|S(a,R) = f$, $u|S(b,r) = g$ i $u|(K(a,R)\setminus\overline{K}(b,r)) \in Har(K(a,R)\setminus\overline{K}(b,r))$. Posebno, ako su $0 < r < R < +\infty$ i $a \in \mathbb{C}$, onda je kružni vijenac

$$K(a;r,R) = \{z \in \mathbb{C};\ r < |z-a| < R\} = K(a,R) \setminus \overline{K}(a,r)$$

Dirichletovo područje.

Prije dokaza teorema 7.5. dokazat ćemo nekoliko lema.

Lema 7.1. *Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ Dirichletovo područje, $a \in \partial_\infty\Omega$ i $\delta > 0$. Postoji funkcija $\varphi \in Super(\Omega \cap K(a,\delta))$ sa sljedećim svojstvima:*

$(B1')$ $0 \leq \varphi \leq 1$.

$(B2')$ *Za svaku točku $\zeta \in \Omega \cap S(a,\delta)$ vrijedi* $\lim\limits_{z\to\zeta} \varphi(z) = 1$.

$(B3')$ $\lim\limits_{z\to a} \varphi(z) = 0$.

Dokaz: Izaberimo neprekidnu funkciju $g : \partial_\infty\Omega \to \mathbb{R}$ takvu da je $g(a) = 0$ i $0 < g(w) \leq 1$ za svaku točku $w \in \partial_\infty\Omega \setminus \{a\}$. Ako je $a \neq \infty$ možemo uzeti npr.

$$g(w) = \begin{cases} \dfrac{|w-a|}{1+|w-a|} & \text{ako je } w \in \partial_\infty\Omega \setminus \{\infty\} \\[2ex] 1 & \text{ako je } w = \infty \in \partial_\infty\Omega, \end{cases}$$

a u slučaju $a = \infty$ možemo uzeti

$$g(w) = \begin{cases} \dfrac{1}{1+|w|} & \text{ako je } w \in \partial_\infty\Omega \setminus \{\infty\} \\[2ex] 0 & \text{ako je } w = \infty. \end{cases}$$

Budući da je Ω po pretpostavci Dirichletovo područje, postoji funkcija $u \in Har_0(\Omega)$ takva da je $u|\partial_\infty\Omega = g$. Prema principu maksimuma za harmonijske funkcije (propozicija 6.4.) iz $0 < g \leq 1$ na $\partial_\infty\Omega \setminus \{a\}$ slijedi $0 < u(z) \leq 1$ za svaku točku $z \in Cl_\infty(\Omega) \setminus \{a\}$. Stavimo

$$c = \inf\{u(\zeta);\ \zeta \in \Omega \cap S(a,\delta)\}.$$

Tada je

$$c \geq \min\{u(\zeta);\ \zeta \in Cl_\infty(\Omega) \cap S(a,\delta)\} > 0.$$

Definirajmo sada funkciju $\tilde{\varphi} : \overline{K}(a,\delta) \cap Cl_\infty(\Omega) \to \mathbb{R}$ sa

$$\tilde{\varphi}(z) = \frac{1}{c}\min\{u(z), c\}, \qquad z \in \overline{K}(a,\delta) \cap Cl_\infty(\Omega).$$

Tada je funkcija $\tilde{\varphi}$ neprekidna na $\overline{K}(a,\delta) \cap Cl_\infty(\Omega)$ i vrijedi $\tilde{\varphi}(a) = 0$. Imamo

$$\zeta \in \Omega \cap S(a,\delta) \qquad \Longrightarrow \qquad u(\zeta) \geq c \qquad \Longrightarrow \qquad \tilde{\varphi}(\zeta) = 1.$$

Nadalje, restrikcija $\varphi = \tilde{\varphi}|(\Omega \cap K(a,\delta))$ je superharmonijska, kao minimum dvije superharmonijske funkcije (po analogonu tvrdnje (b) zadatka 7.1. za superharmonijske funkcije). Iz definicije funkcije $\tilde{\varphi}$ je jasno da vrijedi $(B1')$, a svojstva $(B2')$ i $(B3')$ slijede iz neprekidnosti funkcije $\tilde{\varphi}$.

Lema 7.2. *Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ područje, $a \in \partial_\infty\Omega$ i $\delta > 0$. Ako funkcija $\varphi \in Super(\Omega \cap K(a,\delta))$ ima svojstva $(B1')$, $(B2')$ i $(B3')$ iz leme 7.1. onda je funkcija $\psi : \Omega \to \mathbb{R}$, definirana sa*

$$\psi(z) = \begin{cases} \varphi(z) & \text{ako je } z \in \Omega \cap K(a,\delta) \\ \\ 1 & \text{ako je } z \in \Omega \setminus K(a,\delta), \end{cases}$$

superharmonijska na Ω.

Dokaz: Zbog $(B2')$ funkcija ψ neprekidna je svuda na Ω. Neka je $b \in \Omega$. imamo dvije mogućnosti:

(a) $b \in \Omega \setminus K(a,\delta)$. Tada je $\psi(b) = 1$. Kako je $\psi(z) \leq 1\ \forall z \in \Omega$, očito vrijedi

$$\psi(b) = 1 \geq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{d}t \geq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \psi(b + r\mathrm{e}^{it})\mathrm{d}t.$$

(b) $b \in \Omega \cap K(a,\delta)$. Izaberimo $\rho > 0$ tako da bude $K(b,\rho) \subseteq \Omega \cap K(a,\delta)$. Budući da je restrikcija $\psi|K(b,\rho) = \varphi|K(b,\rho)$ superharmonijska funkcija, za $0 \leq r < \rho$ imamo

$$\psi(b) \geq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \psi(b + r\mathrm{e}^{it})\mathrm{d}t.$$

Dakle, dokazali smo da je $\psi \in Super(\Omega)$.

Lema 7.3. *Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ područje koje ima barijeru u točki $a \in \partial_\infty\Omega$. Neka je $f : \partial_\infty\Omega \to \mathbb{R}$ ograničena funkcija koja je neprekidna u točki a. Tada vrijedi*

$$f(a) = \lim_{z \to a} u_f(z). \qquad (8)$$

Dokaz: Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostavljati da je $f(a) = 0$. Doista, u protivnom možemo promatrati funkciju $f - f(a)$ umjesto funkcije f, budući da je očito $u_{f-f(a)} = u_f - f(a)$.

Fiksirajmo proizvoljno $\varepsilon > 0$. Budući da je po pretpostavci funkcija f neprekidna u točki a i $f(a) = 0$, postoji $\delta > 0$ takvo da vrijedi

$$\zeta \in \partial_\infty \Omega \cap K(a, \delta) \qquad \Longrightarrow \qquad |f(\zeta)| < \varepsilon. \tag{9}$$

Neka je $\psi \in Super(\Omega)$ funkcija koja ima svojstva $(B1)$, $(B2)$ i $(B3)$.

Neka je

$$M = \sup \{|f(\zeta)|;\ \zeta \in \partial_\infty \Omega\}.$$

Funkcija $-M\psi - \varepsilon$ je subharmonijska na Ω. Tvrdimo da je ta funkcija element Perronovog skupa $P(\Omega, f)$. Doista, neka je $\zeta \in \partial_\infty \Omega$. Imamo dvije mogućnosti:

(a) $\zeta \in \partial_\infty \Omega \setminus K(a, \delta)$. Tada je zbog $(B2)$

$$\lim_{z \to \zeta} (-M\psi(z) - \varepsilon) = -M - \varepsilon < f(\zeta).$$

Prema tome, za dano $\eta > 0$ postoji $r > 0$ takav da vrijedi

$$z \in \Omega \cap K(\zeta, r) \qquad \Longrightarrow \qquad -M\psi(z) - \varepsilon < f(\zeta) + \eta.$$

(b) $\zeta \in \partial_\infty \Omega \cap K(a, \delta)$. Kako je $\psi \geq 0$ i kako je prema (9) $f(\zeta) > -\varepsilon$, to za svaku točku $z \in \Omega$ vrijedi

$$-M\psi(z) - \varepsilon \leq -\varepsilon < f(\zeta).$$

Time smo dokazali da je doista $-M\psi - \varepsilon \in P(\Omega, f)$. Prema definiciji Perronove funkcije u_f dobivamo

$$-M\psi(z) - \varepsilon \leq u_f(z) \qquad \forall z \in \Omega. \tag{10}$$

Uzmimo sada proizvoljnu funkciju $v \in P(\Omega, f)$. Funkcija $v - M\psi - \varepsilon$ subharmonijska je na Ω. Neka je $\zeta \in \partial_\infty \Omega$ i $\eta > 0$. Budući da je $v \in P(\Omega, f)$, postoji $r > 0$ takav da vrijedi

$$z \in \Omega \cap K(\zeta, r) \qquad \Longrightarrow \qquad v(z) < f(\zeta) + \eta. \tag{11}$$

Imamo opet dvije mogućnosti:

(a) $\zeta \in \partial_\infty \Omega \setminus \overline{K}(a, \delta)$. Možemo pretpostaviti da je $r > 0$ takav da je $K(\zeta, r) \cap K(a, \delta) = \emptyset$. Za $z \in K(\zeta, r) \cap \Omega$ je tada $\psi(z) = 1$, pa iz (11) i iz $f \leq M$ dobivamo

$$v(z) - M\psi(z) - \varepsilon < f(\zeta) + \eta - M - \varepsilon.$$

(b) $\zeta \in \partial_\infty \Omega \cap \overline{K}(a, \delta)$. Prema (9) je tada $f(\zeta) < \varepsilon$, pa zbog $\psi \geq 0$ zbog (11) dobivamo za $z \in K(\zeta, r) \cap \Omega$

$$v(z) - M\psi(z) - \varepsilon < f(\zeta) + \eta - M\psi(z) - \varepsilon < \eta - M\psi(z) \leq \eta.$$

Prema tome, za svaku točku $\zeta \in \partial_\infty \Omega$ i za svako $\eta > 0$ postoji $r > 0$ takav da vrijedi

$$z \in K(\zeta, r) \cap \Omega \qquad \Longrightarrow \qquad v(z) - M\psi(z) - \varepsilon < \eta.$$

Propozicija 7.2. sada povlači da je $v(z) \leq M\psi(z) + \varepsilon$ za svaku točku $z \in \Omega$. Budući da je funkcija $v \in P(\Omega, f)$ bila proizvoljno odabrana, iz definicije Perronove funkcije u_f slijedi:

$$u_f(z) \leq M\psi(z) + \varepsilon \qquad \forall z \in \Omega. \tag{12}$$

Prema (10) i (12) imamo

$$|u_f(z)| \leq M\psi(z) + \varepsilon \qquad \forall z \in \Omega.$$

Odavde i iz $(B3)$ slijedi da postoji $\rho > 0$ takvo da vrijedi

$$z \in K(a, \rho) \cap \Omega \qquad \Longrightarrow \qquad |u_f(z)| < 2\varepsilon.$$

Kako je $\varepsilon > 0$ bilo proizvoljno, zaključujemo da vrijedi (8).

Dokaz teorema 7.5: Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ Dirichletovo područje, $a \in \partial_\infty\Omega$ i $\delta > 0$. Neka je $\varphi \in Super(\Omega \cap K(a, \delta))$ funkcija koja ima svojstva $(B1')$, $(B2')$ i $(B3')$ iz leme 7.1. Neka je $\psi : \Omega \to \mathbb{R}$ funkcija definirana kao u lemi 7.2. Prema toj lemi je $\psi \in Super(\Omega)$, a iz definicije funkcije ψ i iz svojstava $(B1')$, $(B2')$ i $(B3')$ neposredno slijedi da vrijedi $(B1)$, $(B2)$ i $(B3)$. Prema tome, područje Ω ima barijeru u svakoj točki $a \in \partial_\infty\Omega$.

Pretpostavimo sada da Ω ima barijeru u svakoj točki $a \in \partial_\infty\Omega$. Neka je $f : \partial_\infty\Omega \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija. Definirajmo funkciju $u : Cl_\infty(\Omega) \to \mathbb{R}$ sa $u|\Omega = u_f$ i $u|\partial_\infty\Omega = f$. Prema lemi 7.3. funkcija u neprekidna je na $Cl_\infty(\Omega)$, pa zbog odlomka iza dokaza teorema 7.4. zaključujemo da je Ω Dirichletovo područje.

Prije nego što prijeđemo na dokaz teorema 7.6. dokazat ćemo još nekoliko lema.

Lema 7.4. *Neka je F zatvoren podskup od $\overline{\mathbb{C}}$ takav da je $\infty \in F$. Svaka komponenta povezanosti skupa $\overline{\mathbb{C}} \setminus F$ je jednostavno povezano područje.*

Dokaz: Neka je Ω komponenta povezanosti skupa $\overline{\mathbb{C}} \setminus F$. Uzmimo točku $a \in \partial_\infty\Omega$ i dokažimo da je skup $\Omega \cup \{a\}$ povezan. Neka je U neprazan podskup od $\Omega \cup \{a\}$, takav da su skupovi U i $V = (\Omega \cup \{a\}) \setminus U$ otvoreni u $\Omega \cup \{a\}$. Tada su skupovi $U \cap \Omega = U \setminus \{a\}$ i $V \cap \Omega = \Omega \setminus (U \setminus \{a\})$ otvoreni u Ω, pa iz povezanosti skupa Ω slijedi da je ili $U \setminus \{a\} = \emptyset$ ili $U \setminus \{a\} = \Omega$. Pretpostavimo da je $U \setminus \{a\} = \emptyset$. Tada je $U = \{a\}$, pa iz otvorenosti skupa U u $\Omega \cup \{a\}$ slijedi da postoji $r > 0$ takav da je $(\Omega \cup \{a\}) \cap K(a, r) \subseteq \{a\}$, t. j. $\Omega \cap K(a, r) = \emptyset$. Ali to je nemoguće, jer je $a \in \partial_\infty\Omega$. Ova kontradikcija pokazuje da je $U \setminus \{a\} = \Omega$. Kad bi bilo $a \notin U$, imali bismo da je $V = \{a\}$, dakle, opet bi $\{a\}$ bio otvoren podskup od $\Omega \cup \{a\}$, a vidjeli smo da je to nemoguće. Prema tome je $a \in U$, pa slijedi da je $U = \Omega \cup \{a\}$. Time je dokazano da je skup $\Omega \cup \{a\}$ povezan.

Budući da je Ω komponenta povezanosti skupa $\overline{\mathbb{C}} \setminus F$, zaključujemo da je $a \in F$ za svaku točku $a \in \partial_\infty\Omega$. Kako je F povezan skup i $F \cap (\Omega \cup \{a\}) \neq \emptyset$ to je i skup $\Omega \cup F = (\Omega \cup \{a\}) \cup F$ povezan.

Neka su sada Ω_j, $j \in J$, sve ostale komponente povezanosti skupa $\overline{\mathbb{C}} \setminus F$. Svaki od skupova $\Omega_j \cup F$ je povezan pa zaključujemo da je i skup

$$\bigcup_{j \in J} (\Omega_j \cup F) = \overline{\mathbb{C}} \setminus \Omega$$

povezan. Sada iz teorema 3.1. slijedi da je područje Ω jednostavno povezano.

Neka je $Gl(2, \mathbb{C})$ grupa svih invertibilnih kvadratnih matrica drugog reda nad poljem $\mathbb{C}$. Za $A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \in Gl(2, \mathbb{C})$ definiramo preslikavanje $\omega_A : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ sa

$$\omega_A(z) = \begin{cases} \dfrac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta} & \text{ako je } z \in \mathbb{C} \setminus \left\{-\dfrac{\delta}{\gamma}\right\} \\[2ex] \infty & \text{ako je } z = -\dfrac{\delta}{\gamma} \\[2ex] \dfrac{\alpha}{\gamma} & \text{ako je } z = \infty, \end{cases}$$

ukoliko je $\gamma \neq 0$, a ako je $\gamma = 0$ (dakle, $\delta \neq 0$) tada je ω_A definirano sa

$$\omega_A(z) = \begin{cases} \dfrac{\alpha}{\delta} z + \dfrac{\beta}{\delta} & \text{ako je } z \in \mathbb{C} \\[2ex] \infty & \text{ako je } z = \infty. \end{cases}$$

Preslikavanja ω_A, $A \in Gl(2, \mathbb{C})$ zovu se **Möbiusove transformacije**.

Zadatak 7.4. *Dokažite da vrijedi:*

(a) *Svaka Möbiusova transformacija je bijekcija sa* $\overline{\mathbb{C}}$ *na* $\overline{\mathbb{C}}$.

(b) *Möbiusove transformacije tvore podgrupu grupe svih bijekcija sa* $\overline{\mathbb{C}}$ *na* $\overline{\mathbb{C}}$ *uz kompoziciju kao grupovnu operaciju.*

(c) $A \mapsto \omega_A$ *je epimorfizam grupe* $Gl(2, C)$ *na Möbiusovu grupu (grupu svih Möbiusovih transformacija). Jezgra tog epimorfizma je* $\{\lambda I_2;\ \lambda \in \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}\}$, *gdje je* $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

(d) *Ako su točke* $a, b, c, d, e, f \in \overline{\mathbb{C}}$ *takve da je* $a \neq b \neq c \neq a$ *i* $d \neq e \neq f \neq d$ *postoji jedinstvena Möbiusova transformacija* ω *takva da je* $\omega(a) = d$, $\omega(b) = e$, $\omega(c) = f$.

Lema 7.5. *Neka je* $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ *područje,* $a \in \partial_\infty \Omega = \partial\Omega$ *i* ω *Möbiusova transformacija od* $\overline{\mathbb{C}}$ *takva da je* $\infty \notin \omega(\Omega)$. *Ako područje* Ω *ima barijeru u točki* a *onda područje* $\omega(\Omega)$ *ima barijeru u točki* $\omega(a)$.

Dokaz: Neka je $\varepsilon > 0$. izaberimo $\delta > 0$ tako da je $\omega(K(a, \delta)) \subseteq K(\omega(a), \varepsilon)$. Neka je $\psi \in Super(\Omega)$ funkcija sa svojstvima ($B1$), $B2$) i ($B3$). Prema korolaru 7.1. vrijedi $\tilde{\psi} = \psi \circ \omega^{-1} \in Super(\omega(\Omega))$. Očito je $0 \leq \tilde{\psi} \leq 1$. Nadalje, za $z \in \omega(\Omega) \setminus K(\omega(a), \varepsilon)$ je

$$\omega^{-1}(z) \in \Omega \setminus \omega^{-1}(K(\omega(a), \varepsilon)) \subseteq \Omega \setminus K(a, \delta),$$

pa je $\tilde{\psi}(z) = \psi(\omega^{-1}(z)) = 1$. Napokon,

$$\lim_{w \to \omega(a)} \tilde{\psi}(w) = \lim_{z \to a} \tilde{\psi}(\omega(z)) = \lim_{z \to a} \psi(z) = 0.$$

Prema tome, područje $\omega(\Omega)$ ima barijeru u točki $\omega(a)$.

Lema 7.6. *Neka su* $\langle t_k, s_k \rangle$, $k \in \mathbb{N}$, *međusobno disjunktni otvoreni intervali u* $\mathbb{R}$, *takvi da je*

$$\sum_{k=1}^{\infty} (s_k - t_k) = M < +\infty. \qquad (13)$$

Neka je $Ln : \mathbb{C} \setminus \langle -\infty, 0] \to \mathbb{C}$ glavna grana logaritamske funkcije:

$$Ln\left(re^{i\varphi}\right) = \ln r + i\varphi, \qquad r > 0,\ -\pi < \varphi < \pi.$$

Definirajmo funkcije h_k, $k \in \mathbb{N}$, na desnoj poluravnini $E = \{z \in \mathbb{C};\ Re\, z > 0\}$ sa

$$h_k(z) = Im\left(Ln\,\frac{z - it_k}{z - is_k}\right), \qquad z \in E. \tag{14}$$

Tada je sa

$$h(z) = \sum_{k=1}^{\infty} h_k(z), \qquad z \in E, \tag{15}$$

zadana harmonijska funkcija na desnoj poluravnini E i taj red konvergira lokalno uniformno na E. Nadalje, vrijedi

$$\lim_{x \to +\infty} h(x + iy) = 0, \qquad \textit{uniformno u odnosu na } y \in \mathbb{R}, \tag{16}$$

$$\lim_{z \to ic} h(z) = \pi, \qquad c \in \bigcup_{k=1}^{\infty} \langle t_k, s_k \rangle. \tag{17}$$

Dokaz: Iz (14) se lako izvodi da je $0 < h_k(z) < \pi$ za $z \in E$ i da je

$$h_k(x + iy) = \int_{t_k}^{s_k} \frac{x}{x^2 + (y - t)^2}\, \mathrm{d}t, \qquad x, y \in \mathbb{R},\ x > 0. \tag{18}$$

Odavde je za $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=1}^{n} h_k(x + iy) \le \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{x^2 + (y - t)^2}\, \mathrm{d}t = \pi. \tag{19}$$

Kako je svaka od funkcija h_k harmonijska i pozitivna na desnoj poluravnini E, prema Harnackovom teoremu 6.4. slijedi da je i funkcija h harmonijska na E i konvergencija u (15) je lokalno uniformna na E.

Iz (13) i (18) dobivamo za $x, y \in \mathbb{R}$, $x > 0$:

$$h(x + iy) = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{t_k}^{s_k} \frac{x}{x^2 + (y - t)^2}\, \mathrm{d}t \le \frac{1}{x} \sum_{k=1}^{\infty} \int_{t_k}^{s_k} \mathrm{d}t = \frac{M}{x}.$$

Odavde slijedi (17).

Fiksirajmo sada $k \in \mathbb{N}$ i zbog jednostavnije notacije stavimo $t_k = a$, $s_k = b$. Neka je $c \in \langle a, b \rangle$. Imamo

$$h_k(x + iy) = \mathrm{Im}\left(Ln\,\frac{x + iy - ia}{x + iy - ib}\right) = \mathrm{arc\,tg}\,\frac{y - a}{x} - \mathrm{arc\,tg}\,\frac{y - b}{x}. \tag{20}$$

Kada y teži prema c, a x teži prema nuli, prvi član s desne strane u (20) teži prema $\frac{\pi}{2}$, a drugi prema $-\frac{\pi}{2}$. Prema tome, imamo

$$\lim_{z \to ic} h_k(z) = \pi. \tag{21}$$

Nadalje, Za $a < y < b$ i $x > 0$ je

$$0 \leq h(x+iy) - h_k(x+iy) = \sum_{j \neq k} \int_{t_j}^{s_j} \frac{x}{x^2 + (y-t)^2} \, \mathrm{d}t \leq$$

$$\leq \int_{-\infty}^{a} \frac{x}{x^2 + (y-t)^2} \, \mathrm{d}t + \int_{b}^{+\infty} \frac{x}{x^2 + (y-t)^2} \, \mathrm{d}t \leq$$

$$\leq x \int_{-\infty}^{a} \frac{1}{(y-t)^2} \, \mathrm{d}t + x \int_{b}^{+\infty} \frac{1}{(y-t)^2} \, \mathrm{d}t = \frac{x}{y-a} + \frac{x}{b-y},$$

a to teži k nuli kada y teži prema c, a x teži prema nuli. Odavde i iz (21) slijedi (17).

Dokaz teorema 7.6: Neka je F komponenta povezanosti skupa $\overline{\mathbb{C}} \setminus \Omega$ koja sadrži točku a i neka je $b \in F$, $b \neq a$. Budući da skup $\{a, b\}$ nije povezan, postoji $c \in F \setminus \{a, b\}$. Neka je ω Möbiusova transformacija takva da je

$$\omega(a) = 0, \qquad \omega(b) = \infty, \qquad \omega(\infty) = c.$$

Tada je $\infty \notin \omega(\Omega)$. Prema lemi 7.5. dovoljno je dokazati da područje $\omega(\Omega)$ ima barijeru u točki 0. Dakle, u dokazu teorema možemo pretpostavljati da je $a = 0$ i da je točka ∞ sadržana u onoj komponenti povezanosti F skupa $\overline{\mathbb{C}} \setminus \Omega$, koja sadrži točku 0.

Neka je Ω_0 komponenta povezanosti skupa $\overline{\mathbb{C}} \setminus F$ koja sadrži područje Ω. Prema lemi 7.4. područje Ω_0 je jednostavno povezano. Nadalje, $0 \notin \Omega_0$, pa prema teoremu 3.1. postoji holomorfna funkcija f na Ω_0 takva da je $\mathrm{e}^{f(z)} = z \ \forall z \in \Omega_0$.

Neka je $\delta > 0$. Definirajmo funkciju $g : \Omega \to \mathbb{C}$ sa

$$g(z) = \ln \delta - f(z), \qquad z \in \Omega.$$

Tada je

$$\mathrm{e}^{Re\, g(z)} = \left| \mathrm{e}^{g(z)} \right| = \frac{\delta}{|z|},$$

pa za $z \in \Omega$ imamo:

$$\left. \begin{array}{lcl} \mathrm{Re}\, g(z) > 0 & \Longleftrightarrow & |z| < \delta, \\ \mathrm{Re}\, g(z) = 0 & \Longleftrightarrow & |z| = \delta, \\ \mathrm{Re}\, g(z) < 0 & \Longleftrightarrow & |z| > \delta. \end{array} \right\} \qquad (22)$$

Posebno, $g(\Omega \cap K(0, \delta))$ je podskup desne poluravnine E, a $g(\Omega \cap S(0, \delta))$ je podskup imaginarne osi $I = \{iy;\ y \in \mathbb{R}\}$.

Dokažimo da je skup $g(\Omega \cap S(0, \delta))$ otvoren u I. Neka je $z \in \Omega \cap S(0, \delta)$. Izaberimo $r > 0$ tako da je $K(z, r) \subseteq \Omega$. Funkcija g je holomorfna i nekonstantna (čak injektivna) na Ω, pa je prema korolaru 1.1. skup $g(K(z, r))$ otvoren u $\mathbb{C}$. Stoga je skup $g(K(z, r)) \cap I$ otvoren u I. Nadalje, $g(z) \in g(K(z, r)) \cap I$, a prema (22) je

$$g(K(z, r)) \cap I = g(K(z, r) \cap S(0, \delta)) \subseteq g(\Omega \cap S(0, \delta)).$$

Budući da je $g(z)$ bila proizvoljna točka skupa $g(\Omega \cap S(0, \delta))$, dokazano je da je skup $g(\Omega \cap S(0, \delta))$ otvoren u I.

Prema tome, vrijedi

$$g(\Omega \cap S(0, \delta)) = \bigcup_k \langle i t_k, i s_k \rangle,$$

pri čemu je $t_k < s_k$ i $\langle it_k, is_k\rangle$ su međusobno disjunktni otvoreni intervali na imaginarnoj osi. Interval $\langle it_k, is_k\rangle$ je slika nekog otvorenog luka γ_k kružnice $S(0,\delta)$, $\langle it_k, is_k\rangle = g(\gamma_k)$. Prema definiciji funkcije g, njoj inverzna funkcija dana je sa $g^{-1}(z) = \delta \mathrm{e}^{-z}$, pa imamo

$$\gamma_k = g^{-1}(\langle it_k, is_k\rangle) = \{\delta \mathrm{e}^{-it};\ t_k < t < s_k\}.$$

Prema tome, duljina luka γ_k jednaka je

$$\ell(\gamma_k) = \delta(s_k - t_k),$$

pa slijedi

$$\sum_k (s_k - t_k) = \frac{1}{\delta}\sum_k \ell(\gamma_k) \le \frac{2\pi\delta}{\delta} = 2\pi.$$

Definirajmo sada funkciju $h \in Har(E)$ kao u lemi 7.6. i neka je funkcija $\varphi : \Omega \cap K(0,\delta) \to \mathbb{R}$ definirana sa

$$\varphi(z) = \frac{1}{\pi} h(g(z)), \qquad z \in \Omega \cap K(0,\delta).$$

Tada je $\varphi \in Har(\Omega \cap K(0,\delta)) \subseteq Super(\Omega \cap K(0,\delta))$. Prema (19) je $0 \le \varphi \le 1$. Nadalje, iz (16) i iz

$$\lim_{z\to 0} \operatorname{Re} g(z) = +\infty$$

slijedi da je

$$\lim_{z\to 0} \varphi(z) = 0,$$

a iz (17) dobivamo da je

$$\lim_{z\to\zeta} \varphi(z) = 1, \qquad \forall \zeta \in \Omega \cap S(0,\delta).$$

Prema tome, funkcija φ ima svojstva $(B1')$, $(B2')$ i $(B3')$ iz leme 7.1. za točku $a = 0$. Definirajmo funkciju $\psi : \Omega \to \mathbb{R}$ sa

$$\psi|(\Omega \cap K(0,\delta)) = \varphi, \qquad \psi|(\Omega \setminus K(0,\delta)) = 1.$$

Prema lemi 7.2. tada je $\psi \in Super(\Omega)$ i ta funkcija ima svojstva $(B1)$, $(B2)$ i $(B3)$ za točku $a = 0$. Dakle, područje Ω ima barijeru u točki $a = 0$.

Na koncu ovog poglavlja generalizirat ćemo pojam subharmonijskih funkcija zbog kasnijih potreba u teoriji Riemannovih ploha. Generalizacija se sastoji u tome da dozvolimo i $-\infty$ kao vrijednost subharmonijske funkcije, uz uvjet da se to događa samo na skupu bez gomilišta. Za otvoren skup $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ i za neprekidnu funkciju $v : \Omega \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\} = [-\infty, +\infty\rangle$ kažemo da je subharmonijska, ako skup $v^{-1}(-\infty)$ nema gomilišta u Ω i ako je restrikcija $v|(\Omega \setminus v^{-1}(-\infty))$ subharmonijska kao funkcija s otvorenog skupa $\Omega \setminus v^{-1}(-\infty)$ u $\mathbb{R}$.

U vezi s ovom definicijom uočimo da je stvarno skup $\Omega \setminus \Gamma$ otvoren ukoliko je Γ podskup od Ω koji nema gomilišta u Ω. Doista, neka je $a \in \Omega \setminus \Gamma$. Tada točka a nije gomilište skupa Γ, pa postoji $r > 0$ takav da je $K(a,r) \cap \Gamma = \emptyset$, a ako smo $r > 0$ odabrali tako da je $K(a,r) \subseteq \Omega$, slijedi $K(a,r) \subseteq \Omega \setminus \Gamma$.

Nadalje, napominjemo da je neprekidna funkcija $v : \Omega \to [-\infty, +\infty\rangle$, takva da skup $v^{-1}(-\infty)$ nema gomilišta u Ω, subharmonijska ako i samo ako za svaku točku $a \in \Omega$ postoji $R > 0$ takav da je $K^*(a,R) \subseteq \Omega \setminus v^{-1}(-\infty)$ i da vrijedi

$$v(a) \le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} v(a + r\mathrm{e}^{it})\mathrm{d}t \qquad \forall r \in \langle 0, R\rangle.$$

Doista, ako je $v(a) = -\infty$ gornja je jednakost automatski ispunjena, a ako je $v(a) \in \mathbb{R}$ onda ta nejednakost slijedi iz zahtjeva da je restrikcija $v|(\Omega \setminus v^{-1}(-\infty))$ subharmonijska.

Sve dokazane tvrdnje o subharmonijskim funkcija jednostavno se generaliziraju i na slučaj ovih općenitijih subharmonijskih funkcija.

Ovakva generalizacija definicije subharmonijskih funkcija posebno je važna zbog sljedeće činjenice:

Lema 7.7. *Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ područje i neka je funkcija $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ nekonstantna. Tada je sa*

$$F(z) = \begin{cases} \ln|f(z)| & \text{ako je } f(z) \neq 0 \\ \\ -\infty & \text{ako je } f(z) = 0 \end{cases}$$

zadana subharmonijska funkcija na Ω.

Dokaz: Budući da je funkcija f nekonstantna, ona nije identički jednaka nuli. Prema teoremu jedinstvenosti 1.10. tada skup $N(f) = f^{-1}(0)$ nema gomilišta u Ω. No to je upravo skup $F^{-1}(-\infty)$.

Promatrajmo sada restrikciju $F|(\Omega \setminus N(f))$. Neka je $a \in \Omega \setminus N(f)$ i neka je $r > 0$ takav da je $K(a,r) \subseteq \Omega \setminus N(f)$. Tada se holomorfna funkcija f ne poništava nigdje na krugu $K(a,r)$. Otvoren krug $K(a,r)$ ima svojstvo logaritma, pa postoji $g \in \mathcal{H}(K(a,r))$ takva da je

$$f(z) = \mathrm{e}^{g(z)} \qquad \forall z \in K(a,r).$$

Sada imamo redom za $z \in K(a,r)$:

$$|f(z)| = \mathrm{e}^{Re\, g(z)} \qquad \Longrightarrow \qquad F(z) = \ln|f(z)| = \mathrm{Re}\, g(z).$$

Dakle, restrikcija $F|K(a,r)$ je realni dio holomorfne funkcije pa je prema zadatku 6.1. ta restrikcija harmonijska funkcija. Time je dokazano da je restrikcija $F|(\Omega \setminus N(f))$ harmonijska funkcija na $\Omega \setminus N(f)$, pa je ta restrikcija ujedno subharmonijska funkcija na $\Omega \setminus N(f)$. Time je lema dokazana.

Poglavlje 8

Plohe i natkrivanja

Podsjetimo da se **topološki prostor** T zove **povezan**, ako su T i $\emptyset$ jedini podskupovi od T koji su i otvoreni i zatvoreni. To znači da ne postoje neprazni otvoreni skupovi $U, V \subseteq T$ takvi da je $U \cap V = \emptyset$ i $U \cup V = T$. Maksimalni povezani podskupovi topološkog prostora T zovu se **komponente povezanosti** prostora T. Komponente povezanosti su međusobno disjunktni skupovi. Svaki je povezan podskup od T sadržan u jednoj komponenti povezanosti od T. Ako je T povezan topološki prostor i ako je f neprekidno preslikavanje prostora T u topološki prostor S, onda je $f(T)$ povezan podskup od S. Svaka komponenta povezanosti Hausdorffovog topološkog prostora T je otvoren i zatvoren podskup od T. Posebno, komponenta povezanosti otvorenog podskupa Hausdorffovog topološkog prostora je otvoren skup.

Neka je W Hausdorffov topološki prostor. **Karta** na W je uređen par (U, z) gdje je $U \subseteq W$ neprazan otvoren skup, a z je homeomorfizam sa U na otvoren podskup od $\mathbb{C}$. Ako je $\alpha = (U, z)$ karta na prostoru W, skup U se zove **domena karte** α, a z **koordinata karte** α ili **koordinatna funkcija karte** α. Tada ćemo pisati $U = U_\alpha$ i $z = z_\alpha$. Prostor W zove se **ploha** ako je W povezan i ako je svaka točka tog prostora sadržana u nekoj karti na W. **Atlas** na plohi W je familija karata $\mathcal{A} = (U_\alpha, z_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}$ takva da je $W = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} U_\alpha$.

Ako su W_1 i W_2 topološki prostori, za preslikavanje $f : W_1 \to W_2$ kažemo da je **lokalni homeomorfizam** ako svaka točka $p \in W_1$ ima otvorenu okolinu $U \subseteq W_1$ takvu da je skup $f(U)$ otvoren u W_2 i restrikcija $f|U$ je homeomorfizam sa U na $f(U)$.

Zadatak 8.1. *Neka je $f : W_1 \to W_2$ lokalni homeomorfizam i pretpostavimo da je W_1 Hausdorffov topološki prostor i da je W_2 ploha. Dokažite da je tada W_1 ploha.*

Neka je W ploha. **Područje** u W je otvoren povezan podskup $\Omega \subseteq W$. Za proizvoljnu točku a područja Ω neka je (U, z) karta na W takva da je $a \in U$. Tada je očito $(U \cap \Omega, z|(U \cap \Omega))$ karta na Ω. Dakle, svako područje u plohi W je i samo ploha.

Neka su W^* i W plohe i $f : W^* \to W$ lokalni homeomorfizam. Za područje $U \subseteq W$ kažemo da je **pravilno natkriveno** sa f ako je za svaku komponentu povezanosti V skupa $f^{-1}(U)$ restrikcija $f|V$ homeomorfizam sa V na U. Budući da je f lokalni homeomorfizam, dovoljno je zahtijevati da je $f|V$ bijekcija sa V na U. Preslikavanje f zove se **natkrivanje** ako svaka točka $p \in W$ ima povezanu otvorenu okolinu U koja je pravilno natkrivena sa f. U tom slučaju se uređen par (W^*, f), ili češće sama ploha W^*, zove **ploha natkrivanja** ili **natkrivajuća ploha** plohe W.

Svako područje sadržano u pravilno natkrivenom području je očito i samo pravilno natkriveno. Stoga se u definiciji pojma natkrivanja umjesto proizvoljnih otvorenih povezanih okolina mogu uzimati samo one koje su homeomorfne otvorenom krugu u ravnini.

Propozicija 8.1. *Neka je $W^* \to W$ natkrivanje. Za proizvoljne točke $p, q \in W$ vrijedi $Card\, f^{-1}(p) = Card\, f^{-1}(q)$.*

Dokaz: Za proizvoljan kardinalni broj n stavimo

$$W_n = \{p \in W;\ Card\, f^{-1}(p) = n\}.$$

Iz definicije natkrivanja neposredno slijedi da je W_n otvoren skup. Međutim, očito je

$$W \setminus W_n = \bigcup_{m \neq n} W_m,$$

dakle, i komplement $W \setminus W_n$ je otvoren. Sada iz povezanosti W slijedi da je ili $W_n = \emptyset$ ili $W_n = W$. Dakle, za jedinstven kardinalni broj n je $W = W_n$.

$Card\, f^{-1}(p)$, $p \in W$, zove se **broj listova** natkrivanja f (ili natkrivajuće plohe W^*). Za svaku točku $p^* \in f^{-1}(p)$ kažemo da **leži iznad točke** p. Skup $f^{-1}(p)$ zove se **vlat iznad točke** p.

Neka je $f : W^* \to W$ natkrivanje plohe W. Neka je T topološki prostor i neka je $\varphi : T \to W$ neprekidno preslikavanje. Svako neprekidno preslikavanje $\varphi^* : T \to W^*$ takvo da je $f \circ \varphi^* = \varphi$ zove se **lift preslikavanja** φ (u odnosu na $\varphi : T \to W$ neprekidno preslikavanjenatkrivanje f).

Zadatak 8.2. *Neka je $f : W^* \to W$ natkrivanje i neka su $\varphi_1, \varphi_2 : T \to W^*$ dva lifta neprekidnog preslikavanja $\varphi : T \to W$. Dokažite da je tada $\{t \in T;\ \varphi_1(t) = \varphi_2(t)\}$ otvoren i zatvoren podskup od T.*

Teorem 8.1. *Neka su W i W^* plohe, T povezan topološki prostor, $f : W^* \to W$ natkrivanje i $\varphi : T \to W$ neprekidno preslikavanje. Nadalje, neka je $t_0 \in T$, $\varphi(t_0) = p \in W$ i $p^* \in f^{-1}(p)$ bilo koja točka koja leži iznad točke p. Tada postoji jedinstven lift $\varphi^* : T \to W^*$ preslikavanja φ takav da je $\varphi(t_0) = p^*$.*

Dokaz: Označimo sa E skup svih točaka $t \in T$ takvih da postoji povezan podskup $S \subseteq T$ takav da su $t_0, t \in S$ i da postoji lift $\psi : S \to W^*$ restrikcije $\varphi|S$ takav da je $\psi(t_0) = p^*$. Tada je očito $t_0 \in E$, dakle, skup E je neprazan.

Dokažimo da je podskup $E \subseteq T$ otvoren. Neka je $t \in E$ i neka je S povezan podskup od T takav da su $t_0, t \in S$ i da postoji lift $\psi : S \to W^*$ restrikcije $\varphi|S$ takav da je $\psi(t_0) = p^*$. Neka je U povezana otvorena okolina točke $\varphi(t)$ u W koja je pravilno natkrivena sa f. Neka je V komponenta povezanosti skupa $f^{-1}(U) \subseteq W^*$ koja sadrži točku $\psi(t)$. Nadalje, $\varphi^{-1}(U)$ je otvoren podskup od T pa su sve njegove komponente povezanosti otvorene. Imamo $\varphi(t) \in U$, dakle je $t \in \varphi^{-1}(U)$. Neka je Z komponenta povezanosti skupa $\varphi^{-1}(U)$ koja sadrži točku t. Tada je $\varphi(Z) \subseteq U$, a kako je $f|V : V \to U$ homeomorfizam, možemo definirati neprekidno preslikavanje $\chi : Z \to V \subseteq W^*$ sa $\chi = (f|V)^{-1} \circ (\varphi|Z)$, tj.

$$\chi(\tau) = (f|V)^{-1}(\varphi(\tau)), \qquad \tau \in Z.$$

Dakle, vrijedi

$$f(\chi(\tau)) = \varphi(\tau) \qquad \forall \tau \in Z.$$

Dakle, χ je lift restrikcije $\varphi|Z$. Budući da je ψ lift restrikcije $\varphi|S$, vidimo da su $\chi|(S \cap Z)$ i $\chi|(S \cap Z)$ liftovi restrikcije $\varphi|(S \cap Z)$. Po konstrukciji je $t \in Z$, dakle, $t \in S \cap Z$. Imamo

$$\chi(t) = (f|V)^{-1}(\varphi(t)) = (f|V)^{-1}(f(\psi(t))) = \psi(t).$$

Prema tome, skup $B = \{\tau \in S \cap Z;\ \chi(\tau) = \psi(\tau)\}$ je neprazan. Prema zadatku 8.2. taj je skup otvoren i zatvoren u $S \cap Z$. Međutim, $S \cap Z$ je otvoren podskup od S, pa zaključujemo da je B

otvoren podskup od S. To znači da postoji otvoren podskup Z' od Z takav da je $B = S \cap Z'$. Tada je Z' otvoren podskup od T takav da vrijedi

$$t \in Z' \quad \text{i} \quad \psi|(S \cap Z') = \chi|(S \cap Z'.$$

Napokon, neka je Z'' komponenta povezanosti skupa Z' koja sadrži točku t. Tada je skup $S' = S \cup Z''$ povezan i vrijedi

$$\psi|(S \cap Z'') = \chi|(S \cap Z'').$$

Stoga postoji neprekidno preslikavanje $\omega : S' \to W^*$ takvo da je $\omega|S = \psi$ i $\omega|Z'' = \chi|Z''$. Kako su ψ i $\chi|Z''$ liftovi restrikcija $\varphi|S$ i $\varphi|Z''$, slijedi da je ω lift restrikcije $\varphi|S'$. Nadalje, $\omega(t_0) = \psi(t_0) = p^*$. Odatle slijedi da je $S' \subseteq E$ i, posebno, $Z'' \subseteq E$. Kao komponenta povezanosti otvorenog skupa Z' skup Z'' je otvoren. Budući da je $t \in Z''$, dokazali smo da skup E sadrži otvorenu okolinu točke t. Kako je t bila proizvoljna točka skupa E, slijedi da je E otvoren podskup od T.

Dokažimo sada da je i skup $T \setminus E$ otvoren. Neka je $t \in T \setminus E$. To znači da ne postoji povezan podskup S od T koji sadrži točke t_0 i t i lift $\psi : S \to W^*$ restrikcije $\varphi|S$ takav da je $\psi(t_0) = p^*$. Neka je U povezana otvorena okolina točke $\varphi(t)$ koja je pravilno natkrivena sa f. Neka je Z komponenta povezanosti skupa $\varphi^{-1}(U)$ koja sadrži točku t. Kako je $\varphi^{-1}(U)$ otvoren podskup od T, Z je otvorena okolina točke t. Pretpostavimo da je $E \cap Z \neq \emptyset$. Tada se sasvim analogno kao u prvom dijelu dokaza pokazuje da postoji otvorena okolina Z'' točke t i povezan podskup S' od T koji sadrži Z'' takav da postoji lift $\omega : S' \to W'$ restrikcije $\varphi|S'$ sa svojstvom $\omega(t_0) = p^*$. No to je nemoguće jer $t \notin E$. Ova kontradikcija pokazuje da je $E \cap Z = \emptyset$, tj. $Z \subseteq T \setminus E$. Kako je t bila proizvoljna točka skupa $T \setminus E$, dokazali smo da je skup $T \setminus E$ otvoren, tj. skup E je zatvoren u T.

Kako je $E \neq \emptyset$ neprazan otvoren i zatvoren podskup povezanog prostora T slijedi $E = T$. Time je dokazana egzistencija lifta $\psi : T \to W^*$ preslikavanja φ, takav da je $\psi(t_0) = p^*$.

Dokažimo još jedinstvenost takvog lifta. Neka su $\psi, \chi : T \to W^*$ liftovi preslikavanja φ takvi da je $\psi(t_0) = p^*$ i $\chi(t_0) = p^*$. Tada je skup $S = \{t \in T;\ \psi(t) = \chi(t)\}$ neprazan, a prema zadatku 8.2. taj je skup otvoren i zatvoren u T. Kako je po pretpostavci prostor T povezan, slijedi $S = T$. To znači da je $\psi = \chi$.

Lema 8.1. *Neka su $f_1 : W_1 \to W$ i $f_2 : W_2 \to W$ natkrivanja i neka su $\varphi, \psi : W_1 \to W_2$ neprekidna preslikavanja takva da je $f_2 \circ \varphi = f_1 = f_2 \circ \psi$. Tada vrijedi:*

(*a*) *φ i ψ su natkrivanja.*

(*b*) *Ako za neku točku $q \in W_1$ vrijedi $\varphi(q) = \psi(q)$ onda je $\varphi = \psi$.*

Dokaz: (*a*) Neka je $q \in W_2$ i neka je U povezana otvorena okolina točke $f_2(q) \in W$ koja je pravilno natkrivena i sa f_1 i sa f_2. Neka je $\{V_\alpha;\ \alpha \in \mathcal{A}\}$ skup svih komponenata povezanosti skupa $f_1^{-1}(U)$. Neka je V komponenta povezanosti skupa $f_2^{-1}(U)$ koja sadrži točku q. Za svako $\alpha \in \mathcal{A}$ $\varphi(V_\alpha)$ je povezan podskup od W_2 sadržan u $f_2^{-1}(U)$, dakle, ili je $\varphi(V_\alpha) \subseteq V$ ili je $\varphi(V_\alpha) \cap V = \emptyset$. Neka je

$$\mathcal{B} = \{\alpha \in \mathcal{A};\ \varphi(V_\alpha) \subseteq V\}.$$

Imamo

$$\varphi^{-1}(V) \subseteq \varphi^{-1}(f_2^{-1}(U)) = f_1^{-1}(U) = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} V_\alpha$$

pa zaključujemo da je

$$\varphi^{-1}(V) = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{B}} V_\alpha.$$

To znači da je $\{V_\alpha;\ \alpha \in \mathcal{B}\}$ skup svih komponenata povezanosti skupa $\varphi^{-1}(V)$.

Označimo sa A skup svih točaka $q \in W_2$ za koje je gore definirani skup $\mathcal{B}$ neprazan, a sa B

komplement od A u W_2, dakle, skup svih točaka $q \in W_2$ za koje je gore definirani skup $\mathcal{B}$ prazan. Primijetimo da su A i B otvoreni podskupovi od W_2. Doista, ako je $q \in A$ (odnosno, $q \in B$) onda je uz gornje oznake $V \subseteq A$ (odnosno, $V \subseteq B$), dakle, zajedno sa svakom svojom točkom skup A (odnosno, skup B) sadrži i okolinu te točke. Budući da je očito $A \neq \emptyset$, iz povezanosti prostora W_2 slijedi da je $A = W_2$ (i $B = \emptyset$). Dakle, za svaku točku $q \in W_2$ gore definirani skup $\mathcal{B}$ je neprazan. To pokazuje da je preslikavanje φ surjektivno.

Nadalje, uz uvedene oznake znamo da je za $\alpha \in \mathcal{B}$ restrikcija $f_1|V_\alpha$ homeomorfizam sa V_α na U. Također, restrikcija $f_2|V$ je restrikcija sa V na U. Budući da je $\varphi(V_\alpha) \subseteq V$ i $f_1 = f_2 \circ \varphi$ zaključujemo da je restrikcija $\varphi|V_\alpha$ homeomorfizam sa V_α na V za svaki $\alpha \in \mathcal{B}$. Dakle, povezana otvorena okolina V točke $q \in W_2$ je pravilno natkrivena sa φ. Kako je točka $q \in W_2$ bila proizvoljna, zaključujemo da je φ natkrivanje. Naravno, analogno se dokazuje da je i ψ natkrivanje.

Dokažimo sada tvrdnju (b). Pretpostavljamo da je

$$S = \{q \in W_1;\ \varphi(q) = \psi(q)\} \neq \emptyset.$$

Tada je skup S zatvoren, jer su preslikavanja φ i ψ neprekidna. Neka je $p \in S$. Neka je U otvorena okolina točke $\varphi(p) = \psi(p)$ takva da je restrikcija $f_2|U$ injektivna. Neka je V otvorena okolina točke p takva da je $\varphi(V) \subseteq U$ i $\psi(V) \subseteq U$. Za $q \in V$ imamo $f_2(\varphi(q)) = f_1(q) = f_2(\psi(q))$. Kako su $\varphi(q)$ i $\psi(q)$ točke iz U i kako je restrikcija $f_2|U$ injektivna, zaključujemo da je $\varphi(q) = \psi(q)$. Time je dokazano da je $V \subseteq S$. Dakle, S je otvoren podskup od W_1. Iz povezanosti prostora W_1 slijedi da je $S = W_1$, tj. $\varphi = \psi$.

Neka je $f : W^* \to W$ natkrivanje plohe W. Svaka neprekidna bijekcija $\varphi : W^* \to W^*$ sa svojstvom $f \circ \varphi = f$ zove se $f-$**transformacija** plohe W^*. Svaka $f-$transformacija je po tvrdnji (a) leme 8.1. homeomorfizam. Skup svih $f-$transformacija očito tvori grupu s obzirom na kompoziciju. Tu ćemo grupu označavati sa $\mathcal{T}(f)$.

Iz tvrdnje (b) leme 8.1. slijedi

Teorem 8.2. *Neka je $f : W^* \to W$ natkrivanje i neka su $\varphi, \psi \in \mathcal{T}(f)$. Ako je $\varphi(q) = \psi(q)$ za neku točku $q \in W^*$, onda je $\varphi = \psi$. Posebno, ako za neku točku $q \in W^*$ vrijedi $\varphi(q) = q$, onda je φ identiteta.*

Teorem 8.3. *Neka je $f : W^* \to W$ natkrivanje plohe W. Tada grupa $\mathcal{T}(f)$ djeluje diskontinuirano na W^*, tj. svaka točka $q \in W^*$ ima okolinu V takvu da je $V \cap \varphi(V) = \emptyset$ za svako preslikavanje $\varphi \in \mathcal{T}(f)$ osim identitete.*

Dokaz: Neka je V okolina točke q takva da je restrikcija $f|V$ injaktivna. Pretpostavimo da je $\varphi \in \mathcal{T}(f)$ i da vrijedi $V \cap \varphi(V) \neq \emptyset$. Neka je $q \in V \cap \varphi(V)$ i neka je $r \in V$ takva točka da je $q = \varphi(r)$. Tada je

$$f(q) = f(\varphi(r)) = (f \circ \varphi)(r) = f(r).$$

Odatle i iz injektivnosti restrikcije $f|V$ slijedi $q = r$. Tada je $\varphi(q) = q$, pa iz teorema 8.2. slijedi da je φ identiteta.

Proučavanje natkrivanja sada ćemo algebraizirati uvođenjem tzv. fundamentalne grupe. Za to nam trebaju još neki topološki pojmovi.

Neka je W ploha. **Krivulja** na W je neprekidno preslikavanje $\gamma : [0,1] \to W$. Tada se točka $a = \gamma(0)$ zove **početak** a točka $b = \gamma(1)$ **svršetak krivulje** γ. Kažemo tada da je γ krivulja od točke a do točke b. Za **krivulje** γ_1 i γ_2 kažemo da su **homotopne** ako počinju u istoj točki a, završavaju u istoj točki b i postoji neprekidno preslikavanje $H : [0,1] \times [0,1] \to W$ takvo da je

$$H(0,s) = a, \quad H(1,s) = b, \quad H(t,0) = \gamma_1(t), \quad H(t,1) = \gamma_2(t), \qquad \forall t, s \in [0,1].$$

Tada se H zove **homotopija od** γ_1 **do** γ_2. U opisanoj situaciji pišemo $\gamma_1 \approx \gamma_2$. Lako se vidi da je $\approx$ relacija ekvivalencije. Klase ekvivalencije zovu se **klase homotopije krivulja** na plohi W. Klasu homotopije krivulje γ označavat ćemo sa $[\gamma]$.

Ako su γ_1 i γ_2 krivulje na plohi W takve da je $\gamma_1(1) = \gamma_2(0)$, tj. da krivulja γ_2 počinje u svršetku krivulje γ_1, onda definiramo **složenu krivulju** $\gamma = \gamma_1\gamma_2$ sa

$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(2t) & 0 \leq t \leq \dfrac{1}{2} \\ \gamma_2(2t-1) & \dfrac{1}{2} < t \leq 1. \end{cases}$$

Neka su $\gamma_1 \approx \delta_1$ i $\gamma_2 \approx \delta_2$ i neka je H_1 homotopija od γ_1 do δ_1 i H_2 homotpoija od γ_2 do δ_2. Tada se lako vidi da je sa

$$H(t,s) = \begin{cases} H_1(2t,s) & 0 \leq t \leq \dfrac{1}{2},\ 0 \leq s \leq 1 \\ H_2(2t-1,s) & \dfrac{1}{2} < t \leq 1,\ 0 \leq s \leq 1 \end{cases}$$

definirana homotopija H od $\gamma_1\gamma_2$ do $\delta_1\delta_2$. To znači da klasa homotopije od $\gamma_1\gamma_2$ ovisi samo o klasama homotopije krivulja γ_1 i γ_2, a ne i o predstavnicima tih klasa. Stoga možemo definirati

$$[\gamma_1][\gamma_2] = [\gamma_1\gamma_2].$$

Za krivulju γ definiramo **suprotnu krivulju** γ^{-1} sa

$$\gamma^{-1}(t) = \gamma(1-t), \qquad t \in [0,1].$$

Ako je H homotopija od krivulje γ do krivulje δ, tada se lako vidi da je sa

$$H'(t,s) = H(1-t,s), \qquad t,s \in [0,1],$$

zadana homotopija od krivulje γ^{-1} do krivulje δ^{-1}. Stoga za svaku krivulju γ možemo definirati

$$[\gamma]^{-1} = [\gamma^{-1}].$$

Kod definicije produkta klasa homotopije nezgodno je što se ne mogu sve klase međusobno množiti. Zbog toga prelazimo na podskup skupa svih klasa na sljedeći način. Fiksirajmo točku $p \in W$ i označimo sa $\Pi(W,p)$ skup svih klasa homotopije zatvorenih krivulja na W koje počinju i završavaju u točki p. Sada se svaka dva elementa od $\Pi(W,p)$ mogu množiti i za $[\gamma_1],[\gamma_2] \in \Pi(W,p)$ vrijedi $[\gamma_1][\gamma_2] \in \Pi(W,p)$. Također, za $[\gamma] \in \Pi(W,p)$ je i $[\gamma]^{-1} \in \Pi(W,p)$.

Propozicija 8.2. $\Pi(W,p)$ *je grupa.*

Dokaz: Neka su γ_1, γ_2 i γ_3 zatvorene krivulje na plohi W koje počinju i završavaju u točki p. Tada je

$$(\gamma_1(\gamma_2\gamma_3))(t) = \begin{cases} \gamma_1(2t) & 0 \leq t \leq \dfrac{1}{2} \\ \gamma_2(4t-2) & \dfrac{1}{2} \leq t \leq \dfrac{3}{4} \\ \gamma_3(4t-3) & \dfrac{3}{4} \leq t \leq 1, \end{cases}$$

$$((\gamma_1\gamma_2)\gamma_3)(t) = \begin{cases} \gamma_1(4t) & 0 \le t \le \dfrac{1}{4} \\[2ex] \gamma_2(4t-1) & \dfrac{1}{4} \le t \le \dfrac{1}{2} \\[2ex] \gamma_3(2t-1) & \dfrac{1}{2} \le t \le 1. \end{cases}$$

Stavimo

$$H(t,s) = \gamma((1-s)t + s\tau(t)), \qquad 0 \le t \le 1, \quad 0 \le s \le 1,$$

gdje je $\gamma = (\gamma_1\gamma_2)\gamma_3$ i $\tau : [0,1] \to [0,1]$ je homeomorfizam zadan sa

$$\tau(t) = \begin{cases} \dfrac{t}{2} & 0 \le t \le \dfrac{1}{2} \\[2ex] t - \dfrac{1}{4} & \dfrac{1}{2} \le t \le \dfrac{3}{4} \\[2ex] 2t-1 & \dfrac{3}{4} \le t \le 1. \end{cases}$$

Tada se direktno provjerava da je H homotopija od $(\gamma_1\gamma_2)\gamma_3$ do $\gamma_1(\gamma_2\gamma_3)$. Odatle slijedi da je

$$(\gamma_1\gamma_2)\gamma_3 \approx \gamma_1(\gamma_2\gamma_3) \qquad \Longrightarrow \qquad ([\gamma_1][\gamma_2])[\gamma_3] = [(\gamma_1\gamma_2)\gamma_3] = [\gamma_1(\gamma_2\gamma_3)] = [\gamma_1]([\gamma_2][\gamma_3]).$$

Dakle, operacija u $\Pi(W,p)$ je asocijativna. Nadalje, lako se vidi da je klasa $[\iota_p]$ konstantne funkcije $\iota_p(t) = p$, $t \in [0,1]$, neutralni element s obzirom na operaciju u $\Pi(W,p)$ i da je $[\gamma]^{-1}$ inverzni element klase $[\gamma] \in \Pi(W,p)$:

Zadatak 8.3. *Neka je W ploha i neka je γ krivulja na plohi W od točke $p \in W$ do točke $q \in W$. Nadalje, neka su ι_p i ι_q konstantne krivulje*

$$\iota_p(t) = p \qquad i \qquad \iota_q(t) = q \qquad \forall t \in [0,1].$$

Dokažite da vrijedi

$$\iota_p\gamma \approx \gamma, \qquad \gamma\iota_q \approx \gamma, \qquad \gamma\gamma^{-1} \approx \iota_p, \qquad \gamma^{-1}\gamma \approx \iota_q.$$

Definicija grupe $\Pi(W,p)$ ovisi o izboru točke $p \in W$. Međutim, sljedeća propozicija pokazuje da je ta ovisnost nebitna.

Propozicija 8.3. *Neka je W ploha i neka su $p, q \in W$.*

(*a*) *Postoji krivulja δ na W takva da je $\delta(0) = p$ i $\delta(1) = q$.*

(*b*) *Ako je δ kao u* (*a*), *onda je $[\gamma] \mapsto [\delta\gamma\delta^{-1}]$ izomorfizam grupe $\Pi(W,q)$ na grupu $\Pi(W,p)$.*

Dokaz: (*a*) Neka je W_p skup svih točaka $x \in W$ sa svojstvom da je $\delta(0) = p$ i $\delta(1) = x$ za neku krivulju δ na W. Neka je $x \in W_p$ i neka je (U,z) holomorfna karta na W takva da je $x \in U$. Možemo pretpostaviti da je $z(U)$ otvoren krug u $\mathbb{C}$. Tada se lako vidi da je $U \subseteq W_p$; doista, za bilo koju točku $y \in U$ krivulju od p do y dobivamo slaganjem krivulje od p do x i krivulje koja se preslikavanjem z^{-1} dobiva iz ravnog segmenta od $z(x)$ do $z(y)$). To pokazuje da je W_p otvoren podskup od W. Sasvim analogno pokazuje se da je i komplement $W \setminus W_p$ otvoren podskup od W. Budući da je $W_p \neq \emptyset$ ($p \in W_p$) i da je prostor W povezan, zaključujemo da je $W = W_p$.

(b) Budući da iz $\gamma \approx \gamma'$ slijedi $\delta\gamma\delta^{-1} \approx \delta\gamma'\delta^{-1}$, vidimo da je $\varphi : [\gamma] \mapsto [\delta\gamma\delta^{-1}]$ dobro definirano preslikavanje grupe $\Pi(W, q)$ u grupu $\Pi(W, p)$. To je homomorfizam grupa jer primjenom zadatka 8.3. nalazimo da za bilo koje zatvorene krivulje γ_1 i γ_2 s početkom i završetkom u točki q vrijedi

$$\delta\gamma_1\delta^{-1}\delta\gamma_2\delta^{-1} \approx \delta\gamma_1\iota_q\gamma_2\delta^{-1} \approx \delta\gamma_1\gamma_2\delta^{-1},$$

a odatle je

$$\varphi([\gamma_1][\gamma_2]) = \varphi([\gamma_1\gamma_2]) = [\delta\gamma_1\gamma_2\delta^{-1}] = [\delta\gamma_1\delta^{-1}\delta\gamma_2\delta^{-1}] = [\delta\gamma_1\delta^{-1}][\delta\gamma_2\delta^{-1}] = \varphi([\gamma_1])\varphi([\gamma_2]).$$

Sasvim analogno, $\psi : [\varepsilon] \mapsto [\delta^{-1}\varepsilon\delta]$ je homomorfizam grupe $\Pi(W, p)$ u grupu $\Pi(W, q)$. Međutim, $\varphi \circ \psi$ je očito identiteta na grupi $\Pi(W, p)$ i $\psi \circ \varphi$ je identiteta na grupi $\Pi(W, q)$, pa slijedi da je φ izomorfizam grupa.

Zbog propozicije 8.3. vidi se da grupa $\Pi(W, p)$ ne ovisi bitno o izboru točke $p \in W$. Zbog toga ćemo katkada oznaku p izostavljati i apstraktnu grupu označavati sa $\Pi(W)$. $\Pi(W)$ se zove **fundamentalna grupa** plohe W. Za plohu W kažemo da je **jednostavno povezana**, ako je njena fundamentalna grupa $\Pi(W)$ trivijalna, tj. ako je svaka zatvorena krivulja na W homotopna točki (tj. konstanti).

Neka je i dalje W ploha i $f : W^* \to W$ natkrivanje. Fiksirajmo točke $p \in W$ i $p^* \in f^{-1}(p)$. Za svaku krivulju γ u W koja počinje u točki p prema teoremu 8.1. postoji jedinstvena krivulja u W^* koja počinje u točki p^* i koja je lift krivulje γ. Taj ćemo lift u daljnjem označavati γ^*. Istaknimo da lift γ^* ovisi o izboru točke p^* koja leži iznad početka p krivulje γ.

Propozicija 8.4. *Neka je $f : W^* \to W$ natkrivanje ploha i neka su fiksirane točka $p \in W$ i točka $p^* \in f^{-1}(p)$ koja leži iznad točke p. Ako su $\gamma_1, \gamma_2 : [0, 1] \to W$ homotopne krivulje s početkom u točki $p \in W$, onda su i krivulje γ_1^* i γ_2^* homotopne. Posebno, tada je $\gamma_1^*(1) = \gamma_2^*(1)$.*

Dokaz: Neka je $H : [0, 1] \times [0, 1] \to W$ homotopija od γ_1 do γ_2. Označimo sa q završetak krivulja γ_1 i γ_2 : $q = \gamma_1(1) = \gamma_2(1)$. Dakle, vrijedi

$$H(0, s) = p, \quad H(1, s) = q, \quad H(t, 0) = \gamma_1(t), \quad H(t, 1) = \gamma_2(t).$$

Prema teoremu 8.1. postoji jedinstven lift $H^* : [0, 1] \times [0, 1] \to W^*$ homotopije H takav da je $H^*(0, 0) = p^*$. Stavimo

$$\delta_1(t) = H^*(t, 0), \quad \delta_2(t) = H^*(t, 1), \quad \delta_3(s) = H^*(0, s), \quad \delta_4(s) = H^*(1, s), \quad t, s \in [0, 1].$$

Tada su $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4$ krivulje u W^*. Vrijedi

$$f(\delta_1(t)) = f(H^*(t, 0)) = H(t, 0) = \gamma_1(t) \qquad \text{i} \qquad \delta_1(0) = H^*(0, 0) = p^*.$$

Dakle, δ_1 je lift krivulje γ_1 koji počinje u točki p^*. Zbog jedinstvenosti u teoremu 8.1. slijedi $\delta_1 = \gamma_1^*$. Dakle

$$H^*(t, 0) = \gamma_1^*(t) \qquad \forall t \in [0, 1]. \tag{8.1}$$

Vrijedi

$$f(\delta_3(s)) = f(H^*(0, s)) = H(0, s) = p \qquad \text{i} \qquad \delta_3(0) = H^*(0, 0) = p^*.$$

Dakle, δ_3 i konstantna krivulja ι_{p^*} su liftovi konstantne krivulje ι_p koje obje počinju u točki p^*. Jedinstvenost u teoremu 8.1. pokazuje da se ta dva lifta podudaraju. Dakle, δ_3 je konstantna krivulja ι_{p^*}. To znači da je

$$H^*(0, s) = p^* \quad \forall s \in [0, 1] \quad \text{i posebno} \quad H^*(0, 1) = p^*. \tag{8.2}$$

Promatrajmo sada krivulju δ_2. Prema (8.2) ona počinje u točki

$$\delta_2(0) = H^*(0,1) = p^*.$$

Nadalje, imamo

$$f(\delta_2(t)) = f(H^*(t,1)) = H(t,1) = \gamma_2(t).$$

Dakle, δ_2 i γ_2^* su liftovi krivulje γ_2 koji oba počinju u točki p^*. Zbog jedinstvenosti u teoremu 8.1. zaključujemo da je $\delta_2 = \gamma_2^*$. Dakle,

$$\gamma_2^*(t) = H^*(t,1) \qquad \forall t \in [0,1] \quad \text{i posebno} \quad H^*(1,1) = \gamma_2^*(1). \tag{8.3}$$

Napokon, promatrajmo krivulju δ_4 u W^*. Ta krivulja završava u točki

$$\delta_4(1) = H^*(1,1) = \gamma_2^*(1).$$

Stavimo $q^* = \gamma_2^*(1)$. Tada je q^* točka koja leži iznad točke $q = \gamma_1(1) = \gamma_2(1)$. Nadalje, budući da je H^* lift od H, imamo

$$f(\delta_4(s)) = f(H^*(1,s)) = H(1,s) = q \qquad \forall s \in [0,1].$$

Prema tome, krivulja δ_4 i konstantna krivulja ι_{q^*} su liftovi konstantne krivulje ι_q koje obje završavaju u istoj točki. Sada jedinstvenost u teoremu 8.1. pokazuje da je δ_4 konstantna krivulja ι_{q^*}. Dakle,

$$H^*(1,s) = q^* \qquad \forall s \in [0,1]. \tag{8.4}$$

Sada (8.1), (8.2), (8.3) i (8.4) pokazuju da je H^* homotopija od krivulje γ_1^* do krivulje γ_2^*. Time je propozicija 8.4. dokazana.

Iz propozicije 8.4. neposredno slijedi:

Korolar 8.1. *Neka je $\gamma : [0,1] \to W$ zatvorena krivulja, $\gamma(0) = \gamma(1) = p$, koja je homotopna konstantnoj krivulji ι_p. Tada je γ^* zatvorena krivulja homotopna konstantnoj točki ι_{p^*}.*

Lema 8.2. *Neka je $f : W^* \to W$ natkrivanje ploha i neka su izabrane točka $p \in W$ i točka $p^* \in f^{-1}(p)$ koja leži iznad p. Stavimo*

$$D = \{[\gamma] \in \Pi(W,p);\ \textit{krivulja } \gamma^* \textit{ je zatvorena}\}.$$

Tada je D podgrupa grupe $\Pi(W,p)$, $\gamma \mapsto \gamma^*$ inducira izomorfizam grupe D na grupu $\Pi(W^*,p^*)$ i inverzni izomorfizam induciran je preslikavanjem $\delta \mapsto f \circ \delta$.

Dokaz: Ako su krivulje γ^* i δ^* zatvorene, onda je očito $(\gamma\delta)^* = \gamma^*\delta^*$. Nadalje, $(\gamma^{-1})^* = (\gamma^*)^{-1}$. Dakle, tada su i krivulje $(\gamma\delta)^*$ i $(\gamma^{-1})^*$ zatvorene, čime je dokazano da je D podgrupa grupe $\Pi(W,p)$.

Neka je δ zatvorena krivulja u W^* s početkom (i svršetkom) u točki p^*. Tada je $\gamma = f \circ \delta$ zatvorena krivulja u W s početkom u točki $f(p^*) = p$ i δ je lift od γ koji počinje u točki p^*, dakle je $\delta = \gamma^*$. Odatle je $[\gamma] \in D$. Ako su δ_1 i δ_2 zatvorene krivulje u W^* s početkom u točki p^*, koje su homotopne, tada su i krivulje $f \circ \delta_1$ i $f \circ \delta_2$ u W homotopne. Dakle, $\delta \mapsto f \circ \delta$ inducira preslikavanje sa $\Pi(W^*,p^*)$ u D. To je preslikavanje očito homomorfizam grupa. Kako je $f \circ \gamma^* = \gamma$, po definiciji D taj je homomorfizam surjektivan. Taj je homomorfizam i injektivan. Doista, neka su δ_1 i δ_2 zatvorene krivulje na plohi W^* s početkom (i svršetkom) u točki p^*, takve da je $[f \circ \delta_1] = [f \circ \delta_2]$. Stavimo $\gamma_1 = f \circ \delta_1$ i $g_2 = f \circ \delta_2$. Tada je $\delta_1 = \gamma_1^*$ i $\delta_2 = \gamma_2^*$. Stoga imamo zbog propozicije 8.4.

$$[\gamma_1] = [\gamma_2] \quad \Longrightarrow \quad \gamma_1 \approx \gamma_2 \quad \Longrightarrow \quad \delta_1 \approx \delta_2 \quad \Longrightarrow \quad [\delta_1] = [\delta_2].$$

Dakle, preslikavanje $\delta \mapsto f \circ \delta$ inducira izomorfizam grupe $\Pi(W^*, p^*)$ na grupu D. Budući da je $f \circ \gamma^* = \gamma$, lema je dokazana.

Oznaka: Za podgrupu D iz leme 8.2. pisat ćemo $D(f, p^*)$.

Lema 8.3. *Neka je W ploha, $p \in W$ i D podgrupa grupe $\Pi(W, p)$. Tada postoji natkrivanje $f : W^* \to W$ i točka $p^* \in f^{-1}(p)$ takvi da je $D(f, p^*) = D$.*

Dokaz se sastoji od niza koraka u kojima eksplicitno konstruiramo W^* i f.

(a) Neka je S skup svih krivulja u W s početkom u točki p. Za $\sigma_1, \sigma_2 \in S$ stavimo $\sigma_1 \sim \sigma_2$, ako krivulje σ_1 i σ_2 završavaju u istoj točki, tj. $\sigma_1(1) = \sigma_2(1)$, i ako je $[\sigma_1\sigma_2^{-1}] \in D$. Kako je D grupa, lako se provjeri da je $\sim$ relacija ekvivalencije na skupu S. Za $\sigma \in S$ sa $\langle\sigma\rangle$ ćemo označiti klasu ekvivalencije elementa σ. Neka je W^* skup svih klasa ekvivalencije:

$$W^* = \{\langle\sigma\rangle;\ \sigma \in S\}.$$

Definiramo preslikavanje $f : W^* \to W$ sa

$$f(\langle\sigma\rangle) = \sigma(1), \qquad \sigma \in S.$$

To je preslikavanje dobro definirano, jer ako je $\langle\sigma_1\rangle = \langle\sigma_2\rangle$, tada je $\sigma_1 \sim \sigma_2$, dakle, $\sigma_1(1) = \sigma_2(1)$.

Ako su $\sigma_1, \sigma_2 \in S$ takve da je $\sigma_1(1) = \sigma_2(1)$ i ako su te krivulje homotopne, onda je krivulja $\sigma_1\sigma_2^{-1}$ homotopna konstantnoj krivulji ι_p. Drugim riječima, klasa $[\sigma_1\sigma_2^{-1}]$ je jedinični element grupe $\Pi(W, p)$ i, posebno, $[\sigma_1\sigma_2^{-1}] \in D$. To pokazuje da iz homotopnosti krivulja $\sigma_1, \sigma_2 \in S$ slijedi $\sigma_1 \sim \sigma_2$, odnosno $\langle\sigma_1\rangle = \langle\sigma_2\rangle$:

$$\sigma_1, \sigma_2 \in S, \quad \sigma_1 \approx \sigma_2 \qquad \Longrightarrow \qquad \langle\sigma_1\rangle = \langle\sigma_2\rangle. \tag{8.5}$$

Neka je $\mathcal{A}$ atlas plohe W takav da je $z_\alpha(U_\alpha) = K(0, 1)\ \forall\alpha \in \mathcal{A}$. Za $\alpha \in \mathcal{A}$ stavimo $p_\alpha = z_\alpha^{-1}(0)$ i $P_\alpha = f^{-1}(p_\alpha)$. Neka je $p_\alpha^* = \langle\sigma_0\rangle \in P_\alpha$. Za $q \in U_\alpha$ neka je σ krivulja u U_α od točke p_α do točke q. Tada složena krivulja $\sigma_0\sigma$ određuje točku $\langle\sigma_0\sigma\rangle \in W^*$. Ona ovisi o p_α^* i o q ali ne i o izboru krivulje σ. Doista, neka je σ' druga krivulja u U_α od točke p_α do točke q. Kako je $z_\alpha(U_\alpha) = K(0, 1)$, krivulje σ i σ' su homotopne, pa slijedi da su i složene krivulje $\sigma_0\sigma$ i $\sigma_0\sigma'$ homotopne. Prema (8.5) odatle slijedi $\langle\sigma_0\sigma\rangle = \langle\sigma_0\sigma'\rangle$. Napokon, označimo sa $V_\alpha(p_\alpha^*)$ skup svih tako dobivenih točaka $\langle\sigma_0\sigma\rangle \in W^*$.

(b) Dokazat ćemo sada da je restrikcija $f|V_\alpha(p_\alpha^*)$ bijekcija sa $V_\alpha(p_\alpha^*)$ na U_α. Po konstrukciji to je surjekcija. Dokažimo još da je $f|V_\alpha(p_\alpha^*)$ injekcija. Neka su $\langle\sigma_0\sigma_1\rangle, \langle\sigma_0\sigma_2\rangle \in V_\alpha(p_\alpha^*)$ takve da je $f(\langle\sigma_0\sigma_1\rangle) = f(\langle\sigma_0\sigma_2\rangle)$. To znači da je $(\sigma_0\sigma_1)(1) = (\sigma_0\sigma_2)(1)$, tj. $\sigma_1(1) = \sigma_2(1)$. Kao malo prije, budući da su σ_1 i σ_2 krivulje u U_α s istim početkom p_α i s istim završetkom, zbog homeomorfnosti U_α sa $K(0, 1)$ zaključujemo da su krivulje σ_1 i σ_2 homotopne, pa prema (8.5) slijedi

$$\sigma_1 \approx \sigma_2 \qquad \Longrightarrow \qquad \sigma_0\sigma_1 \approx \sigma_0\sigma_2 \qquad \Longrightarrow \qquad \langle\sigma_0\sigma_1\rangle = \langle\sigma_0\sigma_2\rangle.$$

Time je dokazano da je $f|V_\alpha(p_\alpha^*)$ injekcija.

(c) Dokazat ćemo sada da je $\{V_\alpha(p_\alpha^*);\ \alpha \in \mathcal{A},\ p_\alpha^* \in P_\alpha\}$ pokrivač od W^*. U tu svrhu uzmimo proizvoljnu točku $q^* = \langle\sigma\rangle \in W^*$. Stavimo $q = f(q^*) = \sigma(1)$. Neka je $\alpha \in \mathcal{A}$ takav da je $q \in U_\alpha$. Neka je σ_1 krivulja u U_α od točke p_α do točke q. Tada je $\sigma_0 = \sigma\sigma_1^{-1}$ krivulja u W od točke p do točke p_α, pa je $p_\alpha^* = \langle\sigma_0\rangle \in P_\alpha$. Nadalje, prema (8.5)

$$\sigma_0\sigma_1 = \sigma\sigma_1^{-1}\sigma_1 \approx \sigma \qquad \Longrightarrow \qquad \langle\sigma_0\sigma_1\rangle = \langle\sigma\rangle = q^*.$$

Zaključujemo da je $q^* \in V_\alpha(p_\alpha^*)$. Kako je q^* bila proizvoljna točka iz W^*, time je dokazano da je $\{V_\alpha(p_\alpha^*);\ \alpha \in \mathcal{A},\ p_\alpha^* \in P_\alpha\}$ pokrivač od W^*.

(d) Dokažimo sada da je $f^{-1}(U_\alpha)$ disjunktna unija skupova $V_\alpha(p_\alpha^*)$, $p_\alpha^* \in P_\alpha$. Neka je $q^* \in f^{-1}(U_\alpha)$, tj. $q^* = \langle\sigma\rangle \in W^*$, gdje je σ krivulja u U_α od točke p_α do točke $q \in U_\alpha$. Dokaz tvrdnje (c) pokazuje da je tada $q^* \in V_\alpha(p_\alpha^*)$ za neko $p_\alpha^* \in P_\alpha$. Dakle,

$$f^{-1}(U_\alpha) = \bigcup_{p_\alpha^* \in P_\alpha} V_\alpha(p_\alpha^*).$$

Treba još dokazati da je ta unija disjunktna. Neka su $p_1^*, p_2^* \in P_\alpha$, $p_1^* \neq p_2^*$. Neka je $p_1^* = \langle\sigma_1\rangle$, $p_2^* = \langle\sigma_2\rangle$. Tada su σ_1 i σ_2 krivulje u W od točke p do točke p_α, ali $[\sigma_1\sigma_2^{-1}] \notin D$. Pretpostavimo da skupovi $V_\alpha(p_1^*)$ i $V_\alpha(p_2^*)$ nisu disjunktni i neka je $q^* \in V_\alpha(p_1^*) \cap V_\alpha(p_2^*)$. Tada q^* ima prikaze $q^* = \langle\sigma_1\sigma\rangle$ i $q^* = \langle\sigma_2\sigma'\rangle$, gdje su σ i σ' bilo koje krivulje u U_α od točke p_α do točke $q = f(q^*)$. Možemo uzeti da je $\sigma' = \sigma$. Kako je $\langle\sigma_1\sigma\rangle = \langle\sigma_2\sigma\rangle$, imamo

$$[\sigma_1\sigma_2^{-1}] = [\sigma_1\sigma\sigma^{-1}\sigma_2^{-1}] = [(\sigma_1\sigma)(\sigma_2\sigma)^{-1}] \in D,$$

suprotno pretpostavci. Ova kontradikcija pokazuje da je doista $V_\alpha(p_1^*) \cap V_\alpha(p_2^*) = \emptyset$.

(e) Uvodimo sada topologiju na W^* zahtjevima da je svaki skup $V_\alpha(p_\alpha^*)$, $\alpha \in \mathcal{A}$, $p_\alpha^* \in P_\alpha$, otvoren u W^* i da je svaka restrikcija $f|V_\alpha(p_\alpha^*)$, $\alpha \in \mathcal{A}$, $p_\alpha^* \in P_\alpha$, (za koju znamo da je injekcija) homeomorfizam sa $V_\alpha(p_\alpha^*)$ na U_α. Jasno je da je tada f lokalni homeomorfizam sa W^* na W.

Dokažimo da je s uvedenom topologijom W^* Hausdorffov topološki prostor. Neka su $q_1^*, q_2^* \in W^*$, $q_1^* \neq q_2^*$.

Pretpostavimo prvo da je $q_1 = f(q_1^*) \neq q_2 = f(q_2^*)$. Neka su $\alpha, \beta \in \mathcal{A}$ takvi da je $q_1 \in U_\alpha$, $q_2 \in U_\beta$. Neka su $p_\alpha^* \in P_\alpha$ i $p_\beta^* \in P_\beta$ takvi da je $q_1^* \in V_\alpha(p_\alpha^*)$ i $q_2^* \in V_\beta(p_\beta^*)$. Neka je U otvorena okolina točke q_1 u U_α i V otvorena okolina točke q_2 u U_β takve da je $U \cap V = \emptyset$. Stavimo

$$U^* = \{q^* \in V_\alpha(p_\alpha^*);\ f(q^*) \in U\} \quad \text{i} \quad V^* = \{q^* \in V_\beta(p_\beta^*);\ f(q^*) \in V\}.$$

Po definiciji topologije na W^* tada je U^* otvorena okolina točke q_1^*, V^* je otvorena okolina točke q_2^* i vrijedi

$$f(U^* \cap V^*) \subseteq U \cap V = \emptyset, \quad \text{dakle,} \quad U^* \cap V^* = \emptyset.$$

Pretpostavimo sada da je $f(q_1^*) = f(q_2^*) = q$. Neka je $\alpha \in \mathcal{A}$ takav da je $q \in U_\alpha$ i neka je σ krivulja u U_α od točke p_α do točke q. Stavimo $q_1^* = \langle\sigma_1\rangle$ i $q_2^* = \langle\sigma_2\rangle$. Tada su $\sigma_1\sigma^{-1}$ i $\sigma_2\sigma^{-1}$ krivulje u W od točke p do točke p_α, pa su $p_1^* = \langle\sigma_1\sigma^{-1}\rangle$ i $p_2^* = \langle\sigma_2\sigma^{-1}\rangle$ elementi skupa P_α. Imamo

$$\left[\left(\sigma_1\sigma^{-1}\right)\left(\sigma_2\sigma^{-1}\right)^{-1}\right] = \left[\sigma_1\sigma^{-1}\sigma\sigma_2^{-1}\right] = \left[\sigma_1\sigma_2^{-1}\right] \notin D$$

jer je $q_1^* \neq q_2^*$. Slijedi da je $p_1^* \neq p_2^*$. Odatle je zbog (d)

$$V_\alpha(p_1^*) \cap V_\alpha(p_2^*) = \emptyset,$$

a po definiciji topologije na W^* $V_\alpha(p_1^*)$ je otvorena okolina točke q_1^* i $V_\alpha(p_2^*)$ je otvorena kolina točke q_2^*.

Time je dokazano da je topološki prostor W^* Hausdorffov.

(f) Dokažimo sada da je topološki prostor W^* povezan. Označimo sa $p^* \in W^*$ klasu konstantne krivulje s početkom u točki p :

$$p^* = \langle\iota_p\rangle, \qquad \iota_p(t) = p \quad \forall t \in [0,1].$$

Neka je q^* proizvoljna točka u W^* i neka je σ krivulja u W s početkom u točki p takva da je $q^* = \langle\sigma\rangle$. Za $\tau \in [0,1]$ neka je $\sigma_\tau : [0,1] \to W$ krivulja s početkom u točki p definirana sa

$$\sigma_\tau(t) = \sigma(t\tau), \qquad t \in [0,1].$$

Primijetimo da je tada $\sigma_0 = \iota_p$, dakle, $\langle\sigma_0\rangle = p^*$. Definiramo sada preslikavanje $\gamma : [0,1] \to W^*$ sa

$$\gamma(\tau) = \langle\sigma_\tau\rangle, \qquad \tau \in [0,1].$$

Tada je

$$\gamma(0) = \langle\sigma_0\rangle = p^* \qquad \text{i} \qquad \gamma(1) = \langle\sigma\rangle = q^*.$$

Dokazat ćemo sada da je preslikavanje $\gamma : [0,1] \to W^*$ neprekidno, tj. da je γ krivulja u W^*. Time će biti dokazano da za svaku točku $q^* \in W^*$ postoji krivulja u W^* od točke p^* do točke q^*, a odatle je jasno da je topološki prostor W^* povezan.

Neka je $t_0 \in [0,1]$. Neka su $\alpha \in \mathcal{A}$ i $p^*_\alpha \in P_\alpha$ takvi da je $\gamma(t_0) \in V_\alpha(p^*_\alpha)$. Tada je $\sigma(t_0) \in U_\alpha$. Neka je J otvorena okolina od t_0 u $[0,1]$ takva da je $\sigma(J) \subseteq U_\alpha$. Tada je

$$\gamma(J) \subseteq V_\alpha(p^*_\alpha) \qquad \text{i} \qquad (f \circ \gamma)|J = \sigma|J.$$

Budući da je $f|V_\alpha(p^*_\alpha)$ homeomorfizam sa $V_\alpha(p^*_\alpha)$ na U_α, vidimo da je restrikcija $\gamma|J$ neprekidna. Time je dokazano da je preslikavanje γ neprekidno u svakoj točki $t_0 \in [0,1]$.

(*g*) Prema (*e*) i (*f*) W^* je povezan Hausdorffov topološki prostor. Nadalje,

$$\{(V_\alpha(p^*_\alpha), (z_\alpha \circ f)|V_\alpha(p^*_\alpha));\ \alpha \in \mathcal{A}\ p^*_\alpha \in P_\alpha\}$$

je atlas na W^*. Zbog (*d*) $f : W^* \to W$ je natkrivanje. Dokazat ćemo sada da je $D = D(f, p^*)$, gdje je kao prije $p^* = \langle\sigma_0\rangle$ i $\sigma_0 = \iota_p$ je konstantna krivulja u W s početkom u točki p.

Neka je $[\sigma] \in D$. Prema teoremu 8.1 postoji jedinstven lift σ^* od σ s početkom u točki p^*. U (*f*) smo ustanovili da je sa

$$\gamma(\tau) = \langle\sigma_\tau\rangle, \qquad \sigma_\tau(t) = \sigma(t\tau), \qquad t, \tau \in [0,1],$$

zadana krivulja γ u W^* od točke p^* do točke $\langle\sigma\rangle$. Imamo

$$(f \circ \gamma)(\tau) = f(\gamma(\tau)) = f(\langle\sigma_\tau\rangle) = \sigma_\tau(1) = \sigma(\tau), \qquad \text{tj.} \qquad f \circ \gamma = \sigma.$$

Dakle, γ je lift krivulje σ s početkom u točki p^*, pa slijedi $\gamma = \sigma^*$. Dakle,

$$\sigma^*(\tau) = \langle\sigma_\tau\rangle, \qquad \tau \in [0,1].$$

No tada je

$$\sigma^*(1) = \langle\sigma_1\rangle = \langle\sigma\rangle.$$

Po pretpostavci je $[\sigma] \in D$. Sada iz $\sigma\sigma_0^{-1} \approx \sigma$ slijedi $[\sigma\sigma_0^{-1}] = [\sigma]$, pa zaključujemo da je $[\sigma\sigma_0^{-1}] \in D$. Po definiciji relacije ekvivalencije $\sim$ u skupu S iz (*a*) to znači da je

$$\langle\sigma\rangle = \langle\sigma_0\rangle, \qquad \text{tj.} \qquad \sigma^*(1) = p^*.$$

Time smo dokazali da je σ^* zatvorena krivulja u W^* s početkom u točki p^*, a to znači da je $[\sigma] \in D(f, p^*)$. Na taj način dokazali smo inkluziju $D \subseteq D(f, p^*)$.

Treba još dokazati obrnutu inkluziju. Neka je $[\sigma] \in D(f, p^*)$, tj. σ je zatvorena krivulja u W s početkom u točki p takva da je njezin jedinstven lift σ^* s početkom u točki p^* zatvorena krivulja u W^*. Tada je

$$\langle\sigma\rangle = \sigma^*(1) = p^* = \langle\sigma_0\rangle,$$

pa slijedi $[\sigma] = [\sigma\sigma_0^{-1}] \in D$. Time je dokazana i obrnuta inkluzija $D(f, p^*) \subseteq D$, dakle, imamo $D(f, p^*) = D$.

Lema 8.4. *Neka su W, W_1 i W_2 plohe i $f_1 : W_1 \to W$ i $f_2 : W_2 \to W$ natkrivanja. Nadalje, neka su $p \in W$, $p_1 \in f_1^{-1}(p)$ i $p_2 \in f_2^{-1}(p)$.*

(*a*) *Ako je $D(f_1, p_1) \subseteq D(f_2, p_2)$ onda postoji jedinstveno neprekidno preslikavanje $\varphi : W_1 \to W_2$ takvo da je $f_1 = f_2 \circ \varphi$ i $\varphi(p_1) = p_2$. Preslikavanje φ je natkrivanje.*

(*b*) *Ako je $\varphi : W_1 \to W_2$ neprekidno preslikavanje takvo da je $f_1 = f_2 \circ \varphi$ i $\varphi(p_1) = p_2$, onda je $D(f_1, p_1) \subseteq D(f_2, p_2)$.*

Dokaz: Za krivulju γ u W s početkom u točki p u cijelom dokazu ćemo sa γ_1 (odnosno, sa γ_2) označavati jedinstven lift od γ u W_1 (odnosno, u W_2) s početkom u točki p_1 (odnosno, p_2).

(*a*) Neka je $q \in W_1$ i neka su γ i δ krivulje u W_1 od točke p_1 do točke q. Tvrdimo da tada vrijedi $(f_1 \circ \gamma)_2(1) = (f_1 \circ \delta)_2(1)$. Imamo

$$(f_1 \circ \gamma)_1 = \gamma, \qquad (f_1 \circ \delta)_1 = \delta$$

i

$$((f_1 \circ \gamma)(f_1 \circ \delta)^{-1})_1 = \gamma\delta^{-1}$$

je zatvorena krivulja u W_1 s početkom u točki p_1. Stoga je

$$[(f_1 \circ \gamma)(f_1 \circ \delta)^{-1}] \in D(f_1, p_1).$$

Prema pretpostavci odatle slijedi da je

$$[(f_1 \circ \gamma)(f_1 \circ \delta)^{-1}] \in D(f_2, p_2).$$

Prema tome, $((f_1 \circ \gamma)(f_1 \circ \delta)^{-1})_2$ je zatvorena krivulja u W_2 s početkom u točki p_2. No ta je krivulja jednaka $(f_1 \circ \gamma)_2\tau$, gdje je τ lift od $(f_1 \circ \delta)^{-1}$ u W_2 s početkom u točki $q' = (f_1 \circ \gamma)_2(1)$. Zbog zatvorenosti krivulje $(f_1 \circ \gamma)_2\tau$, krivulja τ završava tamo gdje počinje krivulja $(f_1 \circ \gamma)_2$, dakle u točki p_2. Kako je τ lift od $(f_1 \circ \delta)^{-1}$, zaključujemo da je krivulja τ^{-1} upravo onaj lift krivulje $f_1 \circ \delta$ koji počinje u točki p_2, odnosno,

$$\tau^{-1} = (f_1 \circ \delta)_2.$$

Odatle je

$$(f_1 \circ \delta)_2(1) = \tau^{-1}(1) = \tau(0) = q' = (f_1 \circ \gamma)_2(1).$$

Gornje razmatranje pokazuje da možemo definirati preslikavanje $\varphi : W_1 \to W_2$ na sljedeći način:

$$\varphi(q) = (f_1 \circ \gamma)_2(1), \qquad \text{gdje je } \gamma \text{ krivulja u } W_1 \text{ od točke } p_1 \text{ do točke } q.$$

Očito je tada $\varphi(p_1) = p_2$. Nadalje, neka je $q \in W_1$ i neka je γ krivulja u W_1 od točke p_1 do točke q. Tada imamo

$$f_2(\varphi(q)) = f_2((f_1 \circ \gamma)_2(1)) = (f_2 \circ (f_1 \circ \gamma)_2)(1) = (f_1 \circ \gamma)(1) = f_1(\gamma(1)) = f_1(q).$$

Budući da je točka $q \in W_1$ bila proizvoljna, na taj je način dokazano da je $f_2 \circ \varphi = f_1$.

Dokažimo još da je preslikavanje φ neprekidno. Neka je $q \in W_1$ i neka je $U \subseteq W$ otvorena povezana okolina točke $f_1(q)$ koja je pravilno natkrivena i sa f_1 i sa f_2. Neka je V_1 komponenta povezanosti skupa $f_1^{-1}(U)$ koja sadrži točku q i neka je V_2 komponente povezanosti skupa f_2^{-1} koja sadrži točku $\varphi(q)$ (naime, $f_2(\varphi(q)) = f_1(q)$). Neka je γ krivulja u W_1 od točke p_1 do točke q. Za bilo koju točku $r \in V_1$ izaberimo krivulju γ_r u V_1 od točke q do točke r. Tada je $\gamma\gamma_r$ krivulja u W_1 od točke p_1 do točke r. Imamo

$$f_1 \circ (\gamma\gamma_r) = (f_1 \circ \gamma)(f_1 \circ \gamma_r)$$

i $f_1 \circ \gamma_r$ je krivulja u U. Dakle, možemo pisati

$$(f_1 \circ (\gamma\gamma_r))_2 = (f_1 \circ \gamma)_2 \tau_r,$$

gdje je τ_r lift u W_2 krivulje $f_1 \circ \gamma_r$ koji počinje u točki $\varphi(q)$. Kako je $f_2|V_2$ homeomorfizam sa V_2 na U, τ_r je krivulja u V_2. Prema tome je

$$\varphi(r) = (f_1 \circ (\gamma\gamma_r))_2(1) = \tau_r(1) \in V_2.$$

Time je dokazano da je $\varphi(V_1) \subseteq V_2$. Kako je $f_1|V_1$ homeomorfizam sa V_1 na U i kako je $f_2|V_2$ homeomorfizam sa V_2 na U, zaključujemo da je $\varphi|V_1$ homeomorfizam sa V_1 na V_2. Posebno, preslikavanje φ je neprekidno, jer je točka $q \in W_1$ bila proizvoljna.

Jedinstvenost preslikavanja φ slijedi iz tvrdnje (b) leme 8.1., a tvrdnja (a) iste leme pokazuje da je φ natkrivanje.

(b) Neka je $\varphi : W_1 \to W_2$ neprekidno preslikavanje takvo da je $f_1 = f_2 \circ \varphi$ i $\varphi(p_1) = p_2$. Neka je $[\sigma] \in D(f_1, p_1)$. To znači da je σ zatvorena krivulja u W s početkom u točki p takva da je njezin lift σ_1 zatvorena krivulja. Tada je $\varphi \circ \sigma_1$ zatvorena krivulja u W_2 s početkom u točki $(\varphi(\sigma_1(0)) = \varphi(p_1) = p_2$. Nadalje,

$$f_2 \circ \varphi \circ \sigma_1 = f \circ \sigma_1 = \sigma \qquad \Longrightarrow \qquad \varphi \circ \sigma_1 = \sigma_2.$$

Dakle, σ_2 je zatvorena krivulja, pa slijedi $[\sigma] \in D(f_2, p_2)$. Time je dokazano da je

$$D(f_1, p_1) \subseteq D(f_2, p_2).$$

Lema 8.5. *Neka je $f : W^* \to W$ natkrivanje, $p \in W$ i $p^* \in f^{-1}(p)$. Za $[\sigma] \in \Pi(W, p)$ neka je σ^* lift od σ s početkom u točki p^*. Tada vrijedi*

$$D(f, \sigma^*(1)) = [\sigma]^{-1} D(f, p^*)[\sigma].$$

Dokaz: Stavimo $\sigma^*(1) = \overline{p}$. Za krivulju γ u W s početkom u točki p, neka je γ^* lift krivulje γ s početkom u točki p^*, a $\overline{\gamma}$ lift od γ s početkom u točki $\overline{p}$. Neka je $[\gamma] \in D(f, \overline{p})$. To znači da je γ zatvorena krivulja u W s početkom u točki p takva da je krivulja $\overline{\gamma}$ zatvorena. Tada je $\sigma\gamma\sigma^{-1}$ također zatvorena krivulja u W s početkom u točki p. Nadalje, vrijedi

$$(\sigma\gamma\sigma^{-1})^* = \sigma^* \overline{\gamma} (\sigma^*)^{-1},$$

dakle, ta je krivulja zatvorena. To znači da vrijedi

$$[\sigma][\gamma][\sigma]^{-1} = [\sigma\gamma\sigma^{-1}] \in D(f, p^*).$$

Time je dokazana inkluzija $[\sigma] D(f, \overline{p})[\sigma]^{-1} \subseteq D(f, p^*)$. Sasvim analogno dokazuje se da vrijedi $[\sigma]^{-1} D(f, p^*)[\sigma] \subseteq D(f, \overline{p})$ odakle slijedi obrnuta inkluzija $D(f, p^*) \subseteq [\sigma] D(f, \overline{p})[\sigma]^{-1}$.

Neka su $f_1 : W_1 \to W$ i $f_2 : W_2 \to W$ natkrivanja plohe W. Za ta **natkrivanja** kažemo da su **ekvivalentna**, ako postoji neprekidna bijekcija $\varphi : W_1 \to W_2$ takva da je $f_1 = f_2 \circ \varphi$. Iz tvrdnje (a) leme 8.1. slijedi da je tada φ lokalni homeomorfizam. Štoviše, iz bijektivnosti slijedi da je φ homeomorfizam. Dakle, ekvivalentnost natkrivanja je relacija ekvivalencije.

Lema 8.6. *Neka su $f_1 : W_1 \to W$ i $f_2 : W_2 \to W$ natkrivanja plohe W. Izaberimo $p \in W$, $p_1 \in f_1^{-1}(p)$ i $p_2 \in f_2^{-1}(p)$. Natkrivanja f_1 i f_2 su ekvivalentna ako i samo ako su $D(f_1, p_1)$ i $D(f_2, p_2)$ konjugirane podgrupe fundamentalne grupe $\Pi(W, p)$, tj. vrijedi*

$$[\sigma]^{-1} D(f_1, p_1)[\sigma] = D(f_2, p_2) \qquad \textit{za neki element} \qquad [\sigma] \in \Pi(W, p).$$

Dokaz: Pretpostavimo da su podgrupe $D(f_1,p_1)$ i $D(f_2,p_2)$ fundamentalne grupe $\Pi(W,p)$ konjugirane i neka σ zatvorena krivulja u W s početkom u točki p, takva da je

$$[\sigma]^{-1}D(f_1,p_1)[\sigma]=D(f_2,p_2).$$

Neka je σ_1 lift krivulje σ s početkom u točki p_1 i stavimo $p_1'=\sigma_1(1)$. Tada je $p_1'\in f_1^{-1}(p)$ i prema lemi 8.5. je

$$D(f_1,p_1')=[\sigma]^{-1}D(f_1,p_1)[\sigma].$$

Prema tome, u dokazu ekvivalentnosti natkrivanja f_1 i f_2 možemo pretpostavljati da je $D(f_1,p_1)=D(f_2,p_2)$. Prema tvrdnji (a) leme 8.4. tada postoje neprekidna preslikavanja $\varphi:W_1\to W_2$ i $\psi:W_2\to W_1$ takva da je $f_1=f_2\circ\varphi$, $\varphi(p_1)=p_2$, $f_2=f_1\circ\psi$, $\psi(p_2)=p_1$. Tada je $\varphi\circ\psi$ neprekidno preslikavanje sa W_2 u W_2, takvo da je $f_2\circ(\varphi\circ\psi)=f_2$ i $(\varphi\circ\psi)(p_2)=p_2$. Prema tvrdnji (b) leme 8.1. tada je $\varphi\circ\psi$ identitata na W_2. Sasvim analogno dokazuje se da je $\psi\circ\varphi$ identiteta na W_1. Posebno, φ je neprekidna bijekcija, pa zaključujemo da su natkrivanja f_1 i f_2 ekvivalentna.

Pretpostavimo sada da su f_1 i f_2 ekvivalentna natkrivanja i neka je $\varphi:W_1\to W_2$ homeomorfizam takav da je $f_1=f_2\circ\varphi$. Stavimo $p_2'=\varphi(p_1)$ i neka je σ_2 krivulja u W_2 od točke p_2 do točke p_2'. Tada je $\sigma=f_2\circ\sigma_2$ zatvorena krivulja u W s početkom u točki $p=f_2(p_2)=f_2(p_2')$. Prema lemi 8.5. tada je

$$D(f_2,p_2')=[\sigma]^{-1}D(f_2,p_2)[\sigma]. \qquad (*)$$

Iz tvrdnje (b) leme 8.4. primijenjene na preslikavanja φ i φ^{-1} slijedi

$$D(f_1,p_1)\subseteq D(f_2,p_2') \quad \text{i} \quad D(f_2,p_2')\subseteq D(f_1,p_1), \quad \text{dakle} \quad D(f_2,p_2')=D(f_1,p_1). \qquad (**)$$

Iz $(*)$ i $(**)$ slijedi da je $D(f_1,p_1)=[\sigma]^{-1}D(f_2,p_2)[\sigma]$.

Tvrdnje lema 8.3. i 8.6. možemo spojiti u teorem:

Teorem 8.4. *Neka je W ploha i $p\in W$. Preslikavanje $f\mapsto D(f,p^*)$, gdje je $f:W^*\to W$ natkrivanje i $p^*\in f^{-1}(p)$, inducira bijekciju sa skupa svih klasa ekvivalencije natkrivanja plohe W na skup svih klasa konjugiranosti podgrupa fundamentalne grupe $\Pi(W,p)$.*

Teorem 8.5. *Neka je W ploha.*

(a) *Postoji do na ekvivalenciju jedinstveno natkrivanje $f:\tilde{W}\to W$ takvo da je ploha $\tilde{W}$ jednostavno povezana.*

(b) *Neka su $f:\tilde{W}\to W$ i $g:W^*\to W$ natkrivanja i pretpostavimo da je ploha $\tilde{W}$ jednostavno povezana. Neka je $p\in W$ i $\tilde{p}\in f^{-1}(p)$. Za svaku točku $p^*\in g^{-1}(p)$ postoji jedinstveno neprekidno preslikavanje $\varphi:\tilde{W}\to W^*$ takvo da je $f=g\circ\varphi$ i $\varphi(\tilde{p})=p^*$. Preslikavanje φ je natkrivanje.*

Dokaz: (a) Prema lemi 8.2. fundamentalna grupa $\Pi(\tilde{W},\tilde{p})$ izomorfna je podgrupi $D(f,\tilde{p})$ fundamentalne grupe $\Pi(W,p)$. Prema tome, za f je dovoljno uzeti natkrivanje za koje je $D(f,\tilde{p})$ trivijalna grupa. Egzistencija takvog natkrivanja slijedi iz leme 8.3., a jedinstvenost do na ekvivalenciju iz leme 8.6.

Tvrdnja (b) slijedi neposredno iz tvrdnje (a) leme 8.4. jer je $D(f,\tilde{p})=\{1\}\subseteq D(g,p^*)$.

Natkrivanje $f:\tilde{W}\to W$, takvo da je ploha $\tilde{W}$ jednostavno povezana, zove se **univerzalno natkrivanje** plohe W. Naziv dolazi iz tvrdnje (b) teorema **??**: univerzalno natkrivanje neke plohe natkriva svako natkrivanje te plohe.

Ako je H podgrupa neke grupe G onda sa $N_G(H)$ označavamo tzv. **normalizator podgrupe H u grupi G :**

$$N_G(H) = \{g \in G;\ gHg^{-1} = H\}.$$

$N_G(H)$ je podgrupa grupe G, H je normalna podgrupa od $N_G(H)$ i $N_G(H)$ je najveća među svim podgrupama grupe G koje sadrže H kao normalnu podgrupu.

Teorem 8.6. *Neka je $f : W^* \to W$ natkrivanje plohe W i neka su $p \in W$ i $p^* \in f^{-1}(p)$. Stavimo $D = D(f, p^*)$ i $N = N_{\Pi(W,p)}(D)$. Grupa $\mathcal{T}(f)$ izomorfna je kvocijentnoj grupi N/D.*

Dokaz: Definirat ćemo preslikavanje $\Phi : N \to \mathcal{T}(f)$. Neka je $[\sigma] \in N$. Neka je σ^* jedinstven lift krivulje σ koji počinje u točki p^*. Stavimo $q^* = \sigma^*(1)$. Prema lemi 8.5. tada je

$$D(f, q^*) = [\sigma]^{-1} D(f, p^*)[\sigma] = D(f, p^*).$$

Sada prema tvrdnji (a) leme 8.4. postoji jedinstveno preslikavanje $\varphi \in \mathcal{T}(f)$ takvo da je $\varphi(p^*) = q^*$. Sada stavljamo $\Phi([\sigma]) = \varphi$.

Dokažimo sada da je preslikavanje Φ homomorfizam grupa. Neka su

$$[\sigma], [\sigma'] \in N, \qquad \varphi = \Phi([\sigma]), \qquad \varphi' = \Phi([\sigma']), \qquad \psi = \Phi([\sigma'][\sigma]).$$

Tada je $\psi(p^*) = (\sigma'\sigma)^*(1)$. S druge strane je $\varphi(p^*) = q^*$. Prema dokazu tvrdnje (a) u lemi 8.4. imamo:

$$\varphi'(q^*) = \overline{(f \circ \gamma)}(1), \quad \text{gdje je} \quad \gamma \quad \text{krivulja u} \quad W^* \quad \text{od točke} \quad p^* \quad \text{do točke} \quad q^*.$$

Pri tome za bilo koju krivulju δ u W s početkom u točki p sa $\overline{\delta}$ označavamo njezin jedinstveni lift koji počinje u točki $(\sigma')^*(1)$. U gornjoj formuli za krivulju γ možemo uzeti σ^*. Imamo $f \circ \sigma^* = \sigma$, pa nalazimo

$$\varphi'(q^*) = \overline{\sigma}(1) = (\sigma'\sigma)(1).$$

Prema tome, vrijedi

$$\psi \in \mathcal{T}(f), \quad \varphi' \circ \varphi \in \mathcal{T}(f) \quad \text{i} \quad \psi(p^*) = (\varphi' \circ \varphi)(p^*).$$

Sada iz teorema 8.4. slijedi $\psi = \varphi' \circ \varphi$. Time je dokazano da je Φ homomorfizam grupa.

Prema tzv. *prvom teoremu o izomorfizmu* znamo da je slika homomorfizma Φ izomorfna kvocijentnoj grupi domene po jezgri tog homomorfizma. Dakle, teorem će biti dokazan ako pokažemo da je Φ epimorfizam na grupu $\mathcal{T}(f)$ i da mu je jezgra jednaka D.

Prije svega, $\varphi = \Phi([\sigma])$ je identiteta ako i samo ako je $\sigma^*(1) = p^*$, tj. ako i samo ako je krivulja σ^* zatvorena. To upravo znači da je $[\sigma] \in D$. Time je dokazano da je grupa D jezgra homomorfizma Φ.

Dokažimo još da je Φ epimorfizam. Neka $\varphi \in \mathcal{T}(f)$. Neka je γ krivulja u W^* od točke p^* do točke $\varphi(p^*)$. Tada je $\sigma = f \circ \gamma$ zatvorena krivulja u W s početkom u točki p. Naravno, tada je $\sigma^* = \gamma$. Tvrdimo da je tada $[\sigma] \in N$. Doista, neka je δ bilo koja zatvorena krivulja u W s početkom u točki p takva da je $[\delta] \in D$, tj. da je i krivulja δ^* zatvorena. Tada je $\sigma\delta\sigma^{-1}$ zatvorena krivulja u W s početkom u točki p i krivulja

$$(\sigma\delta\sigma^{-1})^* = \sigma^*(\varphi \circ \delta^*)(\sigma^*)^{-1}$$

je zatvorena. To znači da je

$$[\sigma][\delta][\sigma]^{-1} = [\sigma\delta\sigma^{-1}] \in D.$$

Stavimo $\psi = \Phi([\sigma])$. Tada su $\varphi, \psi \in \mathcal{T}(f)$ i vrijedi $\varphi(p^*) = \psi(p^*)$. Sada iz teorema 8.4. slijedi $\varphi = \psi$. Dakle, $\varphi = \Phi([\sigma])$, i time je dokazana surjektivnost homomorfizma $\Phi : D \to \mathcal{T}(f)$.

Korolar 8.2. *Neka je* $f : \tilde{W} \to W$ *univerzalno natkrivanje plohe* W. *Tada je fundamentalna grupa* $\Pi(W)$ *izomorfna grupi* $\mathcal{T}(f)$.

Zadatak 8.4. *Dokažite korolar 8.2.*

Teorem 8.7. *Neka je* $f : \tilde{W} \to W$ *natkrivanje i pretpostavimo da je ploha* W *jednostavno povezana. Tada je* f *homeomorfizam.*

Dokaz: Neka je $p \in W$ i $\tilde{p} \in f^{-1}(p)$. Identiteta $id_W : W \to W$ je neprekidno preslikavanje i vrijedi $id_W(p) = p$. Prema teoremu 8.1. postoji jedinstveno neprekidno preslikavanje $g : W \to \tilde{W}$ takvo da je $g(p) = \tilde{p}$ i $f \circ g = id_W$. Neka je $h = g \circ f$. Tada je $h : \tilde{W} \to \tilde{W}$ neprekidno preslikavanje i vrijedi

$$f \circ h = f \circ (g \circ f) = (f \circ g) \circ f = id_W \circ f = f.$$

Dakle, h je $f-$transformacija plohe $\tilde{W}$, tj. $h \in \mathcal{T}(f)$. Prema teoremu 8.6. grupa $\mathcal{T}(f)$ je izomorfna kvocijentnoj grupi N/D, gdje je $D = D(f, \tilde{P}) \subseteq \Pi(W, p)$ i N je normalizator od D u grupi $\Pi(W, p)$. Međutim, po pretpostavci je ploha W jednostavno povezana, tj. grupa $\Pi(W, p)$ je trivijalna. Dakle, i grupa $\mathcal{T}(f)$ je trivijalna, $\mathcal{T}(f) = \{id_{\tilde{W}}\}$. Dakle, $h = id_{\tilde{W}}$. Prema tome, imamo

$$f \circ g = id_W \qquad \text{i} \qquad g \circ f = id_{\tilde{W}},$$

a to znači da je f homeomorfizam.

U mnogim situacijama pojavljuje se pitanje egzistencije i problem definicije funkcije na plohi s određenim svojstvom, a to je svojstvo takve vrste da se vrlo lako vidi da svaka točka ima okolinu na kojoj je egzistencija takve funkcije trivijalna. Dokazat ćemo sada teorem koji nam daje potvrdan odgovor na pitanje egzistencije ako je ploha u pitanju jednostavno povezana.

Teorem 8.8. (**Teorem monodromije**) *Neka je* W *jednostavno povezana ploha i neka su* $U_\alpha \subseteq W$, $\alpha \in \mathcal{A}$, *područja koja pokrivaju* W. *Pretpostavimo da je za svako* $\alpha \in \mathcal{A}$ *zadan neki neprazan skup funkcija* Φ_α *definiranih na području* U_α *i da vrijedi*

(*a*) *Ako su* $\alpha, \beta \in \mathcal{A}$, $\varphi \in \Phi_\alpha$ *i* $\psi \in \Phi_\beta$ *i ako je* V *komponenta povezanosti presjeka* $U_\alpha \cap U_\beta$, *onda je ili* $\varphi|V = \psi|V$ *ili je* $\varphi(p) \neq \psi(p)$ $\forall p \in V$.

(*b*) *Ako su* $\alpha, \beta \in \mathcal{A}$ *i ako je* V *komponenta povezanosti presjeka* $U_\alpha \cap U_\beta$ *onda za svaku* $\varphi \in \Phi_\alpha$ *postoji* $\psi \in \Phi_\beta$ *takva da je* $\varphi|V = \psi|V$.

Tada postoji funkcija φ *definirana na* W *takva da je* $\varphi|U_\alpha \in \Phi_\alpha$ $\forall \alpha \in \mathcal{A}$. *Ako su zadani* $\alpha \in \mathcal{A}$ *i* $\varphi_\alpha \in \Phi_\alpha$, *funkcija* φ *se može izabrati tako da je* $\varphi|U_\alpha = \varphi_\alpha$. *Ako su* φ *i* ψ *funkcije na* W *takve da je* $\varphi|U_\alpha \in \Phi_\alpha$ *i* $\psi|U_\alpha \in \Phi_\alpha$ $\forall \alpha \in \mathcal{A}$ *onda je ili* $\varphi = \psi$ *ili je* $\varphi(p) \neq \psi(p)$ $\forall p \in W$.

Dokaz: Neka je S skup svih parova (p, φ), gdje je $p \in U_\alpha$ i $\varphi \in \Phi_\alpha$ za neki $\alpha \in \mathcal{A}$. U skup S uvodimo relaciju $\sim$ na sljedeći način:

$$(p, \varphi) \sim (q, \psi) \qquad \Longleftrightarrow \qquad p = q \quad \text{i} \quad \varphi(p) = \psi(p).$$

Očito je $\sim$ relacija ekvivalencije na skupu S. Klasu ekvivalencije elementa $(p, \varphi) \in S$ označavat ćemo sa $[p, \varphi]$. Neka je $W^* = S/\sim$ skup svih klasa ekvivalencije. Neka je $f : W^* \to W$ preslikavanje definirano sa $f([p, \varphi]) = p$. Nadalje, za $\alpha \in \mathcal{A}$ i $\varphi \in \Phi_\alpha$ definiramo

$$U_{\alpha,\varphi} = \{[p, \varphi];\ p \in U_\alpha\}.$$

Tada je očito $f|U_{\alpha,\varphi}$ bijekcija sa $U_{\alpha,\varphi}$ na U_α.

Uočimo sada da postoji topologija na skupu W^* takva da je $f|U_{\alpha,\varphi}$ homeomorfizam sa $U_{\alpha,\varphi}$ na

U_α za svaki $\alpha \in \mathcal{A}$ i za svaku $\varphi \in \Phi_\alpha$. Doista, na taj način možemo uvesti topologiju na svaki skup $U_{\alpha,\varphi}$, $\alpha \in \mathcal{A}$, $\varphi \in \Phi_\alpha$. Ukoliko su $\alpha, \beta \in \mathcal{A}$, $\varphi \in \Phi_\alpha$ i $\psi \in \Phi_\beta$ takvi da je $U_{\alpha,\varphi} \cap U_{\beta,\psi} \neq \emptyset$, treba dokazati da se dvije topologije na presjeku $U_{\alpha,\varphi} \cap U_{\beta,\psi}$ podudaraju. U tu svrhu neka je $f = \varphi | U_{\alpha,\varphi}$ i $g = \varphi | U_{\beta,\psi}$. Treba dokazati da je kompozicija

$$[g|(U_\alpha \cap U_\beta)] \circ [f|(U_\alpha \cap U_\beta)]^{-1}$$

homemorfizam skupa $U_\alpha \cap U_\beta$. Međutim, ta je kompozicija identiteta, jer je za $p \in U_\alpha \cap U_\beta$:

$$\left([g|(U_\alpha \cap U_\beta)] \circ [f|(U_\alpha \cap U_\beta)]^{-1}\right)(p) = g([p,\varphi]) = f([p,\varphi]) = p.$$

Dokažimo da je topološki prostor W^* Hausdorffov. Neka su $[p,\varphi], [q,\psi] \in W^*$ i $[p,\varphi] \neq [q,\psi]$. Neka su $\alpha, \beta \in \mathcal{A}$, $p \in U_\alpha$, $\varphi \in \Phi_\alpha$, $q \in U_\beta$ i $\psi \in \Phi_\beta$. Pretpostavka $[p,\varphi] \neq [q,\psi]$ vodi na sljedeće dvije mogućnosti:

$p \neq q$. Neka su $V_1 \subseteq U_\alpha$ okolina točke p i $V_2 \subseteq U_\beta$ okolina točke b takve da je $V_1 \cap V_2 = \emptyset$. Tada je $U_1 = \{[r,\varphi];\ r \in V_1\}$ okolina točke $[p,\varphi]$ u W^*, $U_2 = \{[r,\psi];\ r \in V_2\}$ je okolina točke q u W^* i vrijedi $U_1 \cap U_2 = \emptyset$. Time je dokazano da je W^* Hausdorffov topološki prostor.

Druga je mogućnost $p = q$, a tada je $\varphi \neq \psi$. Prema svojstvu (a) je tada $\varphi(r) \neq \psi(r)$ za svaku točku r iz one komponente povezanosti V presjeka $U_\alpha \cap U_\beta$ koja sadrži točku p. Tada je $U_1 = \{[r,\varphi];\ r \in V\}$ okolina točke $[p,\varphi]$ u W^*, $U_2 = \{[p,\psi];\ r \in V\}$ je okolina točke $[p,\psi]$ u W^* i vrijedi $U_1 \cap U_2 = \emptyset$.

Dokažimo sada da je svaka komponenta povezanosti W_0^* od W^* ploha i da je restrikcija $f|W_0^* : W_0^* \to W$ natkrivanje. Doista, prema definiciji topologije na W^*, $f : W^* \to W$ je lokalni homeomorfizam, pa je i restrikcija $f|W_0^* \to W$ lokalni homeomorfizam. Prema zadatku 8.1. W_0^* je ploha.

Neka je $p^* = [p,\psi] \in f^{-1}(U_\alpha)$. Tada za neko $\beta \in \mathcal{A}$ vrijedi $p \in U_\alpha \cap U_\infty$ i $\psi \in \Phi_\beta$. Prema svojstvu (b) tada postoji funkcija $\varphi \in \Phi_\alpha$ takva da je $\varphi(p) = \psi(p)$. Tada je $p^* = [p,\varphi] \in U_{\alpha,\varphi}$. Dakle, svaka točka iz $f^{-1}(U_\alpha)$ sadržana je u $U_{\alpha,\varphi}$ za neku funkciju $\varphi \in \Phi_\alpha$. S druge strane, jasno je da vrijedi $U_{\alpha,\varphi} \subseteq f^{-1}(U_\alpha)$ za svaku funkciju $\varphi \in \Phi_\alpha$. Odatle zaključujemo

$$f^{-1}(U_\alpha) = \bigcup_{\varphi \Phi_\alpha} U_{\alpha,\varphi}.$$

Budući da je skup $U_{\alpha,\varphi}$ homeomorfan skupu U_α, on je povezan, pa je ili $U_{\alpha,\varphi} \subseteq W_0^*$ ili je $U_{\alpha,\varphi} \cap W_0^*$. Nadalje, za $\varphi, \psi \in \Phi_\alpha$ zbog svojstva (a) vrijedi ili $U_{\alpha,\varphi} = U_{\alpha,\psi}$ ili $U_{\alpha,\varphi} \cap U_{\alpha,\psi} = \emptyset$. Prema tome,

$$\{U_{\alpha,\varphi};\ \varphi \in \Phi_\alpha\}$$

je skup svih komponenata povezanosti skupa $f^{-1}(U_\alpha)$, a

$$\{U_{\alpha,\varphi};\ f \in \Phi_\alpha,\ U_{\alpha,\varphi} \subseteq W_0^*\}$$

je skup svih komponenata povezanosti skupa $(f|W_0^*)^{-1}(U_\alpha) = f^{-1}(U_\alpha) \cap W_0^*$.

Restrikcija $f|U_{\alpha,\varphi}$ je prema definiciji topologije na W^* homeomorfizam sa $U_{\alpha,\varphi}$ na U_α $\forall \varphi \in \Phi_\alpha$. Prema tome, ili je U_α pravilno natkriven sa $f|W_0^*$ ili je $f^{-1}(U_\alpha) \cap W_0^* = \emptyset$. Dokazat ćemo da je ovo drugo nemoguće. U tu svrhu stavimo

$$\mathcal{A}_1 = \{\alpha \in \mathcal{A};\ f^{-1}(U_\alpha) \cap W_0^* = \emptyset\}, \qquad \mathcal{A}_2 = \{\alpha \in \mathcal{A};\ f^{-1}(U_\alpha) \subseteq W_0^*\}.$$

Tada su

$$W_1 = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}_1} U_\alpha \qquad \text{i} \qquad W_2 = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}_2} U_\alpha$$

otvoreni podskupovi od W i vrijedi $W = W_1 \cup W_2$. Pretpostavimo da je $W_1 \cap W_2 \neq \emptyset$. Tada za neke $\alpha \in \mathcal{A}_1$ i $\beta \in \mathcal{A}_2$ vrijedi $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$. Kako je $f^{-1}(U_\beta) \subseteq W_0^*$, postoji $\varphi \in \Phi_\beta$ takav da je $U_{\beta,\varphi} \subseteq W_0^*$. Neka je $p \in U_\alpha \cap U_\beta$. Prema svojstvu (b) postoji funkcija $\psi \in \Phi_\alpha$ takva da je $\psi(p) = \varphi(p)$. Tada je

$$[p, \psi] \in f^{-1}(U_\alpha) \qquad \text{i} \qquad [p, \psi] = [p, \varphi] \in U_{\beta,\varphi} \subseteq W_0^*.$$

Međutim, to je nemoguće jer je $f^{-1}(U_\alpha) \cap W_0^* = \emptyset$. Ova kontradikcija pokazuje da je pretpostavka $W_1 \cap W_2 \neq \emptyset$ bila pogrešna, pa zaključujemo da je $W_1 \cap W_2 = \emptyset$. Kako je topološki prostor W povezan, slijedi da je ili $W_1 = \emptyset$ i $W_2 = W$ ili je $W_1 = W$ i $W_2 = \emptyset$. Međutim, $W_0^* \neq \emptyset$, što znači da je $A_2 \neq \emptyset$, dakle, $W_2 \neq \emptyset$. Time je dokazano da je $W_1 = \emptyset$ i $W_2 = W$, tj. $\mathcal{A}_1 = \emptyset$ i $\mathcal{A}_2 = \mathcal{A}$. Zaključujemo da je područje U_α pravilno natkriveno sa $f|W_0^*$ $\forall \alpha \in \mathcal{A}$. Prema tome, za svaku komponentu povezanosti W_0^* prostora W^* preslikavanje $f|W_0^* \to W$ je natkrivanje.

Neka je W_0^* komponenta povezanosti prostora W^*. Prema teoremu 8.7. svako natkrivanje jednostavno povezane plohe je homeomorfizam. Dakle, $f|W_0^* : W_0^* \to W$ je homeomorfizam. To znači da za svako $\alpha \in \mathcal{A}$ postoji funkcija $\varphi_\alpha \in \Phi_\alpha$ takva da je $f^{-1}(U_\alpha) \cap W_0^* = U_{\alpha,\varphi_\alpha}$. Neka su sada $\alpha, \beta \in \mathcal{A}$ takvi da je $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ i neka je $p \in U_\alpha \cap U_\beta$. Tada su $[p, \varphi_\alpha], [p, \varphi_\beta] \in W_0^*$ i $f([p, \varphi_\alpha]) = p = f([p, \varphi_\beta])$. Sada iz injektivnosti preslikavanja $f|W_0^*$ slijedi da je $[p, \varphi_\alpha] = [p, \varphi_\beta]$, a odatle je $\varphi_\alpha(p) = \varphi_\beta(p)$. Na taj način dokazali smo da vrijedi:

$$\alpha, \beta \in \mathcal{A}, \quad U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset \qquad \Longleftrightarrow \qquad \varphi_\alpha|(U_\alpha \cap U_\beta) = \varphi_\beta|(U_\alpha \cap U_\beta).$$

Prema tome, postoji funkcija φ na W takva da je $\varphi|U_\alpha = \varphi_\alpha$ $\forall \alpha \in \mathcal{A}$.

Dokažimo drugu tvrdnju teorema. Neka su izabrani $\alpha \in \mathcal{A}$ i $\varphi_\alpha \in \Phi_\alpha$. Tada za W_0^* izaberemo jedinstvenu komponentu povezanosti od W^* koja sadrži povezan skup $U_{\alpha,\varphi_\alpha}$. Konstrirana funkcija φ tada ima svojstvo $\varphi|U_\alpha = \varphi_\alpha$.

Napokon, dokažimo i treću tvrdnju. Neka su φ i ψ funkcije na W takve da je $\varphi|U_\alpha \in \Phi_\alpha$ i $\psi|U_\alpha \in \Phi_\alpha$ $\forall \alpha \in \mathcal{A}$. Stavimo

$$W_1 = \{q \in W;\ \varphi(q) = \psi(q)\}, \qquad W_2 = W \setminus W_1 = \{q \in W;\ \varphi(q) \neq \psi(q)\}.$$

Za svako $\alpha \in \mathcal{A}$ prema svojstvu (a) vrijedi ili $\varphi|U_\alpha = \psi|U_\alpha$ ili je $\varphi(q) \neq \psi(q)$ $\forall q \in U_\alpha$. Dakle, za svako $\alpha \in \mathcal{A}$ je ili $U_\alpha \subseteq W_1$ ili je $U_\alpha \subseteq W_2$. Time je dokazano da su W_1 i W_2 otvoreni skupovi, a kako su očito disjunktni i unija im je W, iz povezanosti W slijedi da vrijedi ili $W_1 = W$, i tada je $\varphi = \psi$, ili $W_2 = W$, a tada je $\varphi(q) \neq \psi(q)$ $\forall q \in W$.

Poglavlje 9

Riemannove plohe

Ako su α i β karte na plohi W takve da je $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, tada su $z_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ i $z_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ otvoreni podskupovi od $\mathbb{C}$ i preslikavanje

$$z_{\beta\alpha} = z_\beta \circ z_\alpha^{-1} | z_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$$

je homeomorfizam sa $z_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ na $z_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$. Za karte α i β kažemo da su **kompatibilne** ako je ili $U_\alpha \cap U_\beta = \emptyset$ ili je $z_{\beta\alpha}$ holomorfna funkcija na $z_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$. Tada je po teoremu 1.12. o inverznoj funkciji i funkcija $z_{\alpha\beta} = z_{\beta\alpha}^{-1}$ holomorfna na $z_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$. **Atlas** $\mathcal{A}$ na W zove se **holomorfan** ako su svake dvije karte $\alpha, \beta \in \mathcal{A}$ kompatibilne. **Riemannova ploha** je uređen par $(W, \mathcal{A})$ gdje je W ploha i $\mathcal{A}$ je holomorfni atlas na W.

Neka je $\mathfrak{A}$ skup svih holomorfnih atlasa na plohi W. Za atlase $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathfrak{A}$ ćemo reći da su **ekvivalentni** ako je $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ holomorfni atlas, tj. ako su svake dvije karte $\alpha \in \mathcal{A}$ i $\beta \in \mathcal{B}$ kompatibilne. Lako se vidi da je to relacija ekvivalencije na skupu $\mathfrak{A}$. Svaka klasa ekvivalencije sadrži najveći element − unija svih atlasa u toj klasi. Takvi se holomorfni atlasi zovu **maksimalni**. Holomorfni atlas $\mathcal{A}$ je maksimalan ako i samo ako vrijedi: *ako je α karta na W i ako je α kompatibilna sa svakom kartom $\beta \in \mathcal{A}$ onda je $\alpha \in \mathcal{A}$*. Naravno, svaki holomorfni atlas sadržan je u jedinstvenom maksimalnom holomorfnom atlasu.

Ako je iz konteksta jasno koji je holomorfni atlas na plohi W izabran, onda ćemo samu plohu W zvati Riemannovom plohom. Svaka karta iz pripadnog maksimalnog holomorfnog atlasa zove se **holomorfna karta** na Riemannovoj plohi W.

Zadatak 9.1. *Neka je*

$$S = \left\{ (\xi, \eta, \zeta) \in \mathbb{R}^3;\ \xi^2 + \eta^2 + \left(\zeta - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \right\}, \qquad U_1 = S \setminus \{(0,0,1)\}, \qquad U_2 = S \setminus \{(0,0,0)\}.$$

Neka su $z_1 : U_1 \to \mathbb{C}$ i $z_2 : U_2 \to \mathbb{C}$ preslikavanja definirana sa

$$z_1(\xi, \eta, \zeta) = \frac{\xi + i\eta}{1 - \zeta}, \qquad z_2(\xi, \eta, \zeta) = \frac{\xi - i\eta}{\zeta}.$$

Dokažite da su (U_1, z_1) i (U_2, z_2) karte na S koje su kompatibilne i tvore holomorfni atlas na S.

Riemannova ploha iz zadatka 9.1 zove se **Gaussova sfera** ili **Riemannova sfera**.

Neka su W_1 i W_2 Riemannove plohe. **Preslikavanje** $f : W_1 \to W_2$ zove se **holomorfno**, ako za svaku točku $p \in W_1$ postoje holomorfne karte α na W_1 i β na W_2 takve da vrijedi:

$$p \in U_\alpha, \qquad f(U_\alpha) \subseteq U_\beta, \qquad z_\beta \circ f \circ z_\alpha^{-1} \in \mathcal{H}(z_\alpha(U_\alpha)).$$

Zadatak 9.2. *Dokažite: ako su W_1 i W_2 Riemannove plohe i ako je $f : W_1 \to W_2$ holomorfno prelikavanje, tada za bilo koje holomorfne karte α na W_1 i β na W_2, takve da je $f(U_\alpha) \subseteq U_\beta$, vrijedi $z_\beta \circ f \circ z_\alpha^{-1} \in \mathcal{H}(z_\alpha(U_\alpha))$.*

Skup svih holomorfnih preslikavanja sa W_1 u W_2 označavat ćemo sa $\mathcal{H}(W_1, W_2)$. Pisat ćemo $\mathcal{H}(W)$ umjesto $\mathcal{H}(W, \mathbb{C})$. Ako je $f \in \mathcal{H}(W_1, W_2)$ i $g \in \mathcal{H}(W_2, W_3)$ onda je $g \circ f \in \mathcal{H}(W_1, W_3)$. Ako je $f \in \mathcal{H}(W_1, W_2)$ bijekcija, onda je jednostavna posljedica teorema o inverznoj funkciji da je $f^{-1} \in \mathcal{H}(W_2, W_1)$. U tom slučaju se f zove **izomorfizam** Riemannove plohe W_1 na Riemannovu plohu W_2. Ako postoji izomorfizam W_1 na W_2, kažemo da je Riemannova ploha W_1 **izomorfna** Riemannovoj plohi W_2. Očito je izomorfnost Riemannovih ploha relacija ekvivalencije. Ako je W Riemannova ploha, izomorfizam W na W zove se **automorfizam** Riemannove plohe W. Skup svih automorfizama Riemannove plohe W označavat ćemo $Aut(W)$. To je grupa s obzirom na operaciju kompozicije.

Ako je W Riemannova ploha, **područje** u W je otvoren povezan skup $V \subseteq W$. Tada je za svaku kartu (U, z) na W, takvu da je $U \cap V \neq \emptyset$, par $(U \cap V, z|U \cap V)$ karta na V. Neka je $\mathcal{A}$ holomorfni atlas Riemannove plohe W. Za područje $V \subseteq W$ stavimo $\mathcal{B} = \{\alpha \in \mathcal{A};\ U_\alpha \cap V \neq \emptyset\}$. Tada je $(U_\alpha \cap V, z_\alpha|U_\alpha \cap V)_{\alpha \in \mathcal{B}}$ holomorfni atlas na V. Za tako dobivenu Riemannovu plohu V kažemo da je **Riemannova potploha** od W.

Zadatak 9.3. *Neka su W_1 i W_2 Riemannove plohe i neka je V Riemannova potploha od W_1. Dokažite:*

(a) *Ako je $f \in \mathcal{H}(W_1, W_2)$, onda je $f|V \in \mathcal{H}(V, W_2)$.*

(b) *Ako je $f \in \mathcal{H}(W_2, W_1)$ i $f(W_2) \subseteq V$, onda je $f \in \mathcal{H}(W_2, V)$.*

Zadatak 9.4. *Neka su W_1 i W_2 Riemannove plohe i neka je preslikavanje $f \in \mathcal{H}(W_1, W_2)$ nekonstantno. Dokažite:*

(a) *Za svako područje $U \subseteq W_1$ restrikcija $f|U$ je nekonstantna.*

(b) *Slika $f(W_1)$ preslikavanja f je područje u W_2.*

Uputa: Koristite teorem 1.10. i korolar 1.1.

Zadatak 9.5. *Dokažite da je sa*

$$\varphi(z) = \left(\frac{Re\, z}{1 + |z|^2}, \frac{Im\, z}{1 + |z|^2}, \frac{|z|^2}{1 + |z|^2} \right), \qquad z \in \mathbb{C},$$

zadan izomorfizam sa $\mathbb{C}$ na Riemannovu potplohu $V = S \setminus \{(0, 0, 1)\}$ Gaussove sfere S.

Pojam holomorfnog preslikavanja jednostavno se generalizira i na situaciju kad domena nije nužno povezana. Ako su W_1 i W_2 Riemannove plohe i $U \subseteq W_1$ otvoren skup, **preslikavanje** $f : U \to W_2$ se zove **holomorfno** ako je njegova restrikcija na svaku komponentu povezanosti od U holomorfno preslikavanje. Skup svih holomorfnih preslikavanja $f : U \to W_2$ označavat ćemo također sa $\mathcal{H}(U, W_2)$, a umjesto $\mathcal{H}(U, \mathbb{C})$ pisat ćemo $\mathcal{H}(U)$.

Teorem 9.1. *Neka je W^* povezan Hausdorffov topološki prostor, neka je W Riemannova ploha i neka je $f : W^* \to W$ lokalni homeomorfizam. Tada na W^* postoji jedinstvena struktura Riemannove plohe takva da preslikavanje f holomorfno. Za tu strukturu karta (V, ζ) na W^* je holomorfna ako i samo ako je $f \circ \zeta^{-1}$ holomorfno preslikavanje sa $\zeta(V)$ u W. To je ujedno jedinstvena struktura Riemannove plohe na W^* koja ima sljedeće svojstvo:*

$$U \subseteq W \quad \text{otvoren skup}, \quad \varphi \in \mathcal{H}(U) \qquad \Longrightarrow \qquad \varphi \circ f \in \mathcal{H}(f^{-1}(U)).$$

Dokaz: (a) Najprije ćemo konstruirati jedan holomorfni atlas na W^* za koji je $f \in \mathcal{H}(W^*, W)$.

Neka je $p \in W^*$. Izaberimo otvorenu okolinu V_p točke p takvu da je $f|V_p$ homeomorfizam sa V_p na otvoren skup $U_p = f(V_p)$ i da je U_p domena holomorfne karte (U_p, z_p) na Riemannovoj plohi W. Definiramo tada $\zeta_p : V_p \to \mathbb{C}$ sa $\zeta_p = z_p \circ f|V_p$. Tada je očito (V_p, ζ_p) karta na W^*. Tako smo dobili na W^* atlas $(V_p, \zeta_p)_{p\in W^*}$. Dokažimo da je taj atlas holomorfan. Neka su $p, q \in W^*$ takve da je $V_p \cap V_q \neq \emptyset$. Za $x \in \zeta_p(V_p \cap V_q) = z_p(U_p \cap U_q)$, neka su $x_1^* \in V_p \cap V_q$ i $x_1 \in U_p \cap U_q$ jedinstvene točke takve da je $\zeta(x_1^*) = x$ i $z_p(x_1) = x$. Tada je $f(x_1^*) = x_1$, pa imamo

$$\zeta_{qp}(x) = (\zeta_q \circ \zeta_p^{-1})(x) = \zeta_q(\zeta_p^{-1}(x)) = \zeta_q(x_1^*) = (z_q \circ f)(x_1^*) = z_q(f(x_1^*)) = z_q(x_1) = z_{qp}(x).$$

Time je dokazano da je $\zeta_{qp}|\zeta_p(V_p \cap V_q) = z_{qp}|z_p(U_p \cap U_q)$ holomorfna funkcija, dakle, karte (V_p, ζ_p) i (V_q, ζ_q) su kompatibilne. Dakle, $(V_p, \zeta_p)_{p\in W^*}$ je holomorfni atlas na W^*.

Dokažimo sada da je za tu strukturu Riemannove plohe na W^* preslikavanje $f : W^* \to W$ holomorfno. Neka je $p \in W^*$. Tada je (V_p, ζ_p) holomorfna karta na W^*, (U_p, z_p) je holomorfna karta na W, $p \in V_p$, $f(V_p) = U_p$ i za $x \in \zeta_p(V_p) = z_p(U_p)$ imamo

$$(z_p \circ f \circ \zeta_p^{-1})(x) = (\zeta_p \circ \zeta_p^{-1})(x) = x.$$

Dakle, $z_p \circ f \circ \zeta_p^{-1}$ je identiteta na $\zeta_p(V_p)$ što je naravno holomorfna funkcija na $\zeta_p(V_p)$.

Time smo dokazali da postoji struktura Riemannove plohe na W^* takva da je preslikavanje $f : W^* \to W$ holomorfno.

(b) Neka je (V, ζ) karta na W^* takva da je $f \circ \zeta^{-1}$ holomorfno preslikavanje sa $\zeta(V)$ u W. Dokazat ćemo tada da je karta (V, ζ) holomorfna u odnosu na strukturu Riemannove plohe uvedenu u (a).

Neka je $p \in W^*$ takva da je $V_p \cap V \neq \emptyset$. Tada je $\zeta_p \circ \zeta^{-1} = z_p \circ f \circ \zeta^{-1}$, a to je holomorfna funkcija na $\zeta(V_p \cap V)$ jer je po pretpostavci preslikavanje sa $\zeta(V)$ u W. Dakle, (V, ζ) je kompatibilna sa svakom kartom (V_p, ζ_p), $p \in W^*$.

(c) Neka je sada $\mathcal{A}$ holomorfni atlas na W^* takav da je za pripadnu strukturu Riemannove plohe na W^* preslikavanje $f : W^* \to W$ holomorfno. Neka je $(V, \zeta) \in \mathcal{A}$. Tada je $f \circ \zeta^{-1}$ holomorfno preslikavanje sa $\zeta(V)$ u W. Time smo dokazali da sve katre atlasa $\mathcal{A}$ imaju svojstvo iz (b).

(d) Neka je sada (V, ζ) karta na W^* kompatibilna sa svim kartama (V_p, ζ_p) iz (a). Dokazat ćemo da tada karta (V, ζ) ima svojstvo iz (b).

Doista, neka je $x \in \zeta(V)$ i neka je $P \in V$ takva da je $\zeta(p) = x$. Karta (V, ζ) kompatibilna je s kartom (V_p, ζ_p), pa je $\zeta_p \circ \zeta^{-1}$ holomorfna funkcija na $\zeta(V \cap V_p)$. Međutim, $\zeta_p \circ \zeta^{-1} = z_p \circ f \circ \zeta^{-1}$, pa to pokazuje da je $f \circ \zeta^{-1}$ holomorfno preslikavanje sa otvorene okoline $\zeta(V \cap V_p) \subseteq \zeta(V)$ točke x u Riemannovu plohu W. Budući da je točka $x \in \zeta(V)$ bila proizvoljna, time je dokazano da je $f \circ \zeta^{-1}$ holomorfno preslikavanje sa $\zeta(V)$ u W. Dakle, karta (V, ζ) ima svojstvo iz (b).

(e) Uvedena struktura Riemannove plohe očito ima posljednje svojstvo iz iskaza teorema. Neka je sada $\mathcal{A}$ bilo koji holomorfni atlas na W^* takav da odgovarajuća struktura Riemannove plohe ima to svojstvo. Dokazat ćemo da tada svaka karta $(V, \zeta) \in \mathcal{A}$ ima svojstvo iz (b). Dakle, treba dokazati da je za svaku kartu $(V, \zeta) \in \mathcal{A}$ $f \circ \zeta^{-1}$ holomorfno preslikavanje sa $\zeta(V)$ u W.

Neka je $x \in \zeta(V)$, $p \in V$, $\zeta(p) = x$, $f(p) = q \in W$. Tada zbog neprekidnosti preslikavanja f možemo izabrati holomorfnu kartu (U, z) na W takvu da je $q \in U$ i $f^{-1}(U) \subseteq V$. Tada je z holomorfno preslikavanje sa U u $\mathbb{C}$, pa je $z \circ f$ holomorfno preslikavanje sa $f^{-1}(U)$ u $\mathbb{C}$. Tada je $z \circ f \circ \zeta^{-1}$ holomorfna funkcija na $\zeta(f^{-1}(U)) \subseteq \zeta(V)$. Budući da je $\zeta(f^{-1}(U))$ otvorena okolina točke x i da je x proizvoljna točka iz $\zeta(V)$, dokazali smo da je $f \circ \zeta^{-1}$ holomorfno preslikavanje sa $\zeta(V)$ u W. Prema tome, svaka karta iz $\mathcal{A}$ ima svojstvo iz (b).

Time je teorem 9.1. u potpunosti dokazan.

Napomena: Ako je kao u teoremu 9.1. $f : W^* \to W$ lokalni homeomorfizam, očito je skup $f(W^*)$ otvoren u W, a kako je preslikavanje f neprekidno taj je skup i povezan. Dakle, $f(W^*)$ je područje u W, odnosno, Riemannova potploha od W.

Teorem 9.1. je posebno primjenjiv na slučaj kad je $f : W^* \to W$ natkrivanje. Dakle, ako je W Riemannova ploha i $f : W^* \to W$ je natkrivanje, onda na plohi W^* postoji jedinstvena struktura Riemannove plohe takva da je preslikavanje f holomorfno. Nadalje, vrijedi sljedeća dopuna leme 8.1:

Lema 9.1. *Neka su $f_1 : W_1 \to W$ i $f_2 : W_2 \to W$ holomorfna natkrivanja Riemannove plohe W i neka je $\varphi : W_1 \to W_2$ neprekidno preslikavanje takvo da je $f_2 \circ \varphi = f_1$. Tada je preslikavanje φ holomorfno.*

Dokaz: Iz dokaza tvrdnje (a) u lemi 8.1. neposredno slijedi (uz tamo uvedene oznake) da je $f_1|V_\alpha$ izomorfizam Riemannove plohe V_α na Riemannovu plohu U i $f_2|V$ je izomorfizam Riemannove plohe V na Riemannovu plohu U. Odatle slijedi da je $\varphi|V_\alpha$ izomorfizam Riemannove plohe V_α na Riemannovu plohu V za svaki $\alpha \in \mathcal{B}$. Budući da je V okolina proizvoljne točke $q \in W_2$ i

$$\varphi^{-1}(V) = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{B}} V_\alpha$$

zaključujemo da je preslikavanje φ holomorfno.

Neka je W Riemannova ploha i $\Omega \subseteq W$ otvoren skup. Neprekidna funkcija $f : \Omega \to \mathbb{R}$ zove se **harmonijska** ako za svaku točku $p \in \Omega$ postoji holomorfna karta (U, z) na W takva da je $p \in U \subseteq \Omega$ i da je funkcija $f \circ z^{-1}$ harmonijska na $z(U)$. Skup svih harmonijskih funkcija na Ω označavamo sa $Har(\Omega)$. Naravno, $Har(\Omega)$ je realan vektorski prostor.

Analogno, za Riemannovu plohu W i za otvoren skup $\Omega \subseteq W$ neprekidna funkcija

$$v : \Omega \to [-\infty, +\infty\rangle$$

zove se **subharmonijska** na Ω, ako za svaku točku $p \in \Omega$ postoji holomorfna karta (U, z) na W takva da je $p \in U \subseteq \Omega$ i da je funkcija

$$v \circ z^{-1} : z(U) \to [-\infty, +\infty\rangle$$

subharmonijska na $z(U)$. Skup svih subharmonijskih funkcija na Ω označavat ćemo sa $Sub(\Omega)$. Očito je $Har(\Omega) \subseteq Sub(\Omega)$.

Propozicija 9.1. *Neka je W Riemannova ploha, $\Omega \subseteq W$ otvoren skup i $v \in Sub(\Omega)$. Tada skup $v^{-1}(-\infty)$ nema gomilišta u Ω.*

Dokaz: Pretpostavimo suprotno da postoji točka $p \in \Omega$ koja je gomilište skupa $v^{-1}(-\infty)$. Neka je $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz međusobno različitih točaka iz $v^{-1}(-\infty)$ takvih da je

$$p = \lim_{n\to\infty} p_n.$$

Neka je (U, z) holomorfna karta na W takva da je $p \in U \subseteq \Omega$ i da je funkcija $v \circ z^{-1}$ subharmonijska na $z(U)$. Za neko $n_0 \in \mathbb{N}$ tada vrijedi

$$n \geq n_0 \qquad \Longrightarrow \qquad p_n \in U.$$

Stavimo

$$\alpha = z(p), \qquad \alpha_n = z(p_n), \quad n \geq n_0.$$

Tada su točke α_n međusobno različite i vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \alpha.$$

Nadalje,

$$(v \circ z^{-1})(\alpha_n) = v(p_n) = -\infty \qquad \Longrightarrow \qquad \alpha_n \in \left(v \circ z^{-1}\right)^{-1}(-\infty)$$

pa slijedi da je točka $\alpha \in z(U)$ gomilište skupa $\left(v \circ z^{-1}\right)^{-1}(-\infty)$. No to je suprotno definiciji subharmonijske funkcije na otvorenom skupu u $\mathbb{C}$. Ova kontradikcija dokazuje da skup $v^{-1}(-\infty)$ nema gomilišta u Ω.

Zadatak 9.6. *Neka su W_1 i W_2 Riemannove plohe i $\Omega_1 \subseteq W_1$ i $\Omega_2 \subseteq W_2$ otvoreni skupovi.*

(*a*) *Neka je $\varphi : \Omega_1 \to W_2$ holomorfno preslikavanje takvo da je $\varphi(\Omega_1) \subseteq \Omega_2$ i neka je $f \in Har(\Omega_2)$. Dokažite da je tada $f \circ \varphi \in Har(\Omega_1)$.*

(*b*) *Neka je $\varphi : \Omega_1 \to W_2$ holomorfno prelikavanje koje je bijekcija sa Ω_1 na Ω_2 i neka je $v \in Sub(\Omega_2)$. Dokažite da je tada $v \circ \varphi \in Sub(\Omega_1)$.*

Uputa: Za (*a*) koristite propoziciju 6.2., a za (*b*) korolar 7.1.

Zadatak 9.7. *Neka je W Riemannova ploha, $\Omega \subseteq W$ otvoren skup, $f \in Har(\Omega)$, $v \in Sub(\Omega)$ i neka je (U, z) holomorfna karta na W takva da je $U \subseteq \Omega$. Dokažite da je tada $f \circ z^{-1} \in Har(z(U))$ i da je $v \circ z^{-1} \in Sub(z(U))$.*

Zadatak 9.8. *Neka je W Riemannova ploha, $\Omega \subseteq W$ otvoren skup i $v_1, v_2 \in Sub(\Omega)$. Dokažite da vrijedi:*

(*a*) *Ako su $k_1, k_2 \in [0, +\infty\rangle$, onda je $k_1 v_1 + k_2 v_2 \in Sub(\Omega)$. Pri tome se podrazumijeva da je $0 \cdot (-\infty) = 0$, $k \cdot (-\infty) = -\infty$ za $k > 0$, $-\infty + c = -\infty$ $\forall c \in [-\infty, +\infty\rangle$.*

(*b*) *Ako je funkcija $v = \max(v_1, v_2)$ definirana sa $v(p) = \max\{v_1(p), v_2(p)\}$, $p \in \Omega$, onda je $v \in Sub(\Omega)$.*

Uputa: Koristite zadatak 7.1.

Neka je W Riemannova ploha, $\Omega \subseteq W$ otvoren skup, $v \in Sub(\Omega)$, $\alpha = (U, z)$ holomorfna karta na W takva da je $U \subseteq \Omega$. Neka je $p \in U$ i neka je $r > 0$ takav da je

$$\overline{K}(z(p), r) \subseteq z(U) \qquad \text{i da je} \qquad z^{-1}(S(z(p), r)) \cap v^{-1}(-\infty) = \emptyset.$$

U tom slučaju postoji (jedinstvena) neprekidna funkcija $u : z^{-1}(\overline{K}(z(p), r) \to \mathbb{R}$ takva da je $u|z^{-1}(K(z(p), r))$ harmonijska i da je $u|z^{-1}(S(z(p), r)) = v|z^{-1}(S(z(p), r))$. Tada definiramo funkciju $v^{\alpha,p,r} : \Omega \to [-\infty, +\infty\rangle$ sa

$$v^{\alpha,p,r}(q) = \begin{cases} u(q) & \text{ako je } q \in z^{-1}(\overline{K}(z(p), r)) \\ \\ v(q) & \text{ako je } q \in \Omega \setminus z^{-1}(\overline{K}(z(p), r)). \end{cases}$$

Iz propozicije 7.3. i iz implikacije (3) nakon te propozicije neposredno slijedi:

Propozicija 9.2. *Neka je W Riemannova ploha, $\Omega \subseteq W$ otvoren skup, $v \in Sub(\Omega)$, $\alpha = (U, z)$ holomorfna karta na W takva da je $U \subseteq \Omega$, $p \in U$ i $r > 0$ takav da je $\overline{K}(z(p), r) \subseteq z(U)$. Tada je $v^{\alpha,p,r} \in Sub(\Omega)$ i $v \leq v^{\alpha,p,r}$ svuda na Ω. Nadalje, ako je $w \in Sub(\Omega)$ takva da je $w \leq v$ svuda na Ω, onda je $w^{\alpha,p,r} \leq v^{\alpha,p,r}$ svuda na Ω (ukoliko su α, p i r takvi da su funkcije $w^{\alpha,p,r}$ i $v^{\alpha,p,r}$ definirane).*

Princip maksimuma vrijedi i za subharmonijske funkcije na područjima Riemannove plohe:

Propozicija 9.3. *Neka je W Riemannova ploha, $\Omega \subseteq W$ područje i $v \in Sub(\Omega)$. Pretpostavimo da za neku točku $p \in \Omega$ vrijedi*

$$v(q) \le v(p) \qquad \forall q \in \Omega.$$

Tada je funkcija v konstantna.

Dokaz: Stavimo $A = \{q \in \Omega;\ v(q) = v(p)\}$. Tada je $A \neq \emptyset$ i A je zbog neprekidnosti funkcije v zatvoren podskup od Ω. Dokažimo da je A otvoren podskup od Ω. Neka je $q \in A$. Neka je (U, z) holomorfna karta na W takva da je $U \subseteq \Omega$, $q \in U$, $z(q) = 0$ i $z(U) = K(0, 1)$. Tada je funkcija $v \circ z^{-1}$ subharmonijska na $K(0, 1)$ i dostiže svoj supremum u 0. Prema propoziciji 7.1. funkcija $v \circ z^{-1}$ je konstantna. No to znači da je $U \subseteq A$. Time je dokazano da je skup A otvoren u Ω. Kako je Ω područje, slijedi $A = \Omega$, dakle, funkcija v je konstantna.

Korolar 9.1. *Neka je W Riemannova ploha i neka je $\Omega \subseteq W$ otvoren skup takav da je njegov zatvarač $Cl(\Omega)$ kompaktan i neka je $\partial\Omega = Cl(\Omega) \setminus \Omega$. Neka su zadane neprekidne funkcije $u : Cl(\Omega) \to \mathbb{R}$ i $v : Cl(\Omega) \to [-\infty, +\infty\rangle$ takve da vrijedi*

$$v|\Omega \in Sub(\Omega), \qquad u|\Omega \in Har(\Omega), \qquad v(q) \le u(q) \quad \forall q \in \partial\Omega.$$

Tada je $v \le u$ svuda na $Cl(\Omega)$.

Dokaz: Stavimo $w = v - u$. Tada je $w : Cl(\Omega) \to [-\infty, +\infty\rangle$ neprekidna funkcija i prema zadatku 9.8. restrikcija $w|\Omega$ je subharmonijska na Ω. Neka je Ω_1 bilo koja komponenta povezanosti od Ω. Tada je $Cl(\Omega_1) \subseteq Cl(\Omega)$ i $\partial\Omega_1 \subseteq \partial\Omega$. Stavimo

$$M = \max\{w(q);\ q \in Cl(\Omega_1)\}.$$

Pretpostavimo da je $w(q) = M$ za neko $q \in \Omega_1$. Prema propoziciji 9.3. tada je restrikcija $w|Cl(\Omega_1)$ konstantna, pa je $w(q) = M\ \forall q \in Cl(\Omega_1)$, dakle posebno za $q \in \partial\Omega_1 \subseteq \partial\Omega$. Sada iz pretpostavke $v(q) \le u(q)\ \forall q \in \partial\Omega$ slijedi da je $M \le 0$. Dakle, $w(q) \le 0\ \forall q \in Cl(\Omega_1)$, odnosno, $v(q) \le u(q)\ \forall q \in Cl(\Omega_1)$.

Pretpostavimo sada da je $w(q) < M\ \forall q \in \Omega_1$. Tada je

$$M = \max\{w(q);\ q \in \partial\Omega_1\} \le 0,$$

pa slijedi $w(q) < 0\ \forall q \in \Omega_1$, odnosno, $v(q) < u(q)\ \forall q \in \Omega_1$.

Dakle, u svakom slučaju je $v(q) \le u(q)\ \forall q \in \Omega_1$. Kako je Ω_1 bila proizvoljna komponenta povezanosti od Ω, slijedi $v(q) \le u(q)\ \forall q \in \Omega$.

Neka je W Riemannova ploha i $\Omega \subseteq W$ otvoren skup. Neprazan podskup P od $Sub(\Omega)$ zove se **Perronov skup** na Ω ako su ispunjena sljedeća dva uvjeta:

$(P1)$ $v_1, v_2 \in P \qquad \Longrightarrow \qquad \max(v_1, v_2) \in P.$

$(P2)$ Ako je $v \in P$, ako je $\alpha = (U, z)$ holomorfna karta na W takva da je $U \subseteq \Omega$, i ako su $p \in U$ i $r > 0$ takvi da je $\overline{K}(z(p), r) \subseteq z(U)$ i $v^{-1}(-\infty) \cap z^{-1}(S(z(p), r)) = \emptyset$, onda je $v^{\alpha,p,r} \in P$.

Propozicija 9.4. *Neka je W Riemannova ploha, $\Omega \subseteq W$ otvoren skup, P Perronov skup na Ω i $\alpha = (U, z)$ holomorfna karta na W takva da je $U \subseteq \Omega$. Tada je*

$$P_\alpha = \{v \circ z^{-1};\ v \in P\}$$

Perronov skup na $z(U)$.

Dokaz: $(P1)$ Neka su $f_1, f_2 \in P_\alpha$. Tada postoje $v_1, v_2 \in P$ takve da je $f_1 = v_1 \circ z^{-1}$ i $f_2 = v_2 \circ z^{-1}$, pa slijedi

$$\max(f_1, f_2) = \max(v_1 \circ z^{-1}, v_2 \circ z^{-1}) = \max(v_1, v_2) \circ z^{-1} \in P_\alpha.$$

$(P2)$ Neka je $f \in P_\alpha$ i $\overline{K}(a,R) \subseteq z(U)$. Treba dokazati da je $f^{a,R} \in P_\alpha$. Neka je $v \in P$ takva da je $f = v \circ z^{-1}$. Neka je $p = z^{-1}(a)$. Kako je P Perronov skup na Ω, vrijedi $v^{\alpha,p,R} \in P$. Lako se vidi da je tada $v^{\alpha,p,R} \circ z^{-1} = f^{a,R}$. Dakle, $f^{a,R} \in P_\alpha$.

Teorem 9.2. *Neka je W Riemannova ploha, $\Omega \subseteq W$ područje i P Perronov skup na Ω. Definiramo $u : \Omega \to [-\infty, +\infty]$ sa*

$$u(p) = \sup\{v(p);\ v \in P\}, \qquad p \in \Omega.$$

Tada je ili $u \in Har(\Omega)$ ili je $u(p) = +\infty\ \forall p \in \Omega$.

Dokaz: Dokažimo najprije da je $u(p) > -\infty\ \forall p \in \Omega$. Doista, neka je $p \in \Omega$ i neka je $v \in P$. Izaberimo holomorfnu kartu $\alpha = (U, z)$ na W takvu da je $p \in U \subseteq \Omega$ i neka je $r > 0$ takav da je $\overline{K}(z(p), r) \subseteq z(U)$ i $v^{-1}(-\infty) \cap z^{-1}(S(z(p), r)) = \emptyset$. Tada je $v^{\alpha,p,r} \in P$. Kako je restrikcija te funkcije na $z^{-1}(K(z(p), r))$ harmonijska funkcija, to je posebno $v^{\alpha,p,r}(p) > -\infty$. Slijedi da je i $u(p) > -\infty$.

Stavimo sada

$$A = \{p \in \Omega;\ u(p) = +\infty\} \qquad \text{i} \qquad B = \Omega \setminus A = \{p \in \Omega;\ u(p) < +\infty\}.$$

Dokažimo najprije da je skup A otvoren. Neka je $p \in A$. Neka je $\alpha = (U, z)$ holomorfna karta na W takva da je

$$p \in U \subseteq \Omega, \qquad z(p) = 0 \qquad \text{i} \qquad z(U) = K(0,1).$$

Stavimo

$$P_\alpha = \{v \circ z^{-1};\ v \in P\}.$$

Tada je prema propoziciji 9.4. P_α Perronov skup na $K(0,1)$. Stavimo

$$u_\alpha : K(0,1) \to \langle -\infty, +\infty], \qquad u_\alpha(\zeta) = \sup\{f(\zeta);\ f \in V_\alpha\}.$$

Očito je $u_\alpha = u \circ z^{-1}$. Imamo $u_\alpha(0) = u(p) = +\infty$. Prema Perronovom teoremu 7.2. tada je $u_\alpha(\zeta) = +\infty\ \forall \zeta \in K(0,1)$, pa slijedi da je $u(q) = +\infty\ \forall q \in U$. Zaključujemo da je $U \subseteq A$. Kako je točka $p \in A$ bila proizvoljna, dokazali smo da je skup A otvoren.

Dokažimo sada da je skup B otvoren i da je $u|B \in Har(B)$ ukoliko je $B \neq \emptyset$. Neka je $p \in B$. Neka je ponovo $\alpha = (U, z)$ holomorfna karta na W takva da je

$$p \in U \subseteq \Omega, \qquad z(p) = 0 \qquad \text{i} \qquad z(U) = K(0,1)$$

i definiramo ponovo Perronov skup P_α na $K(0,1)$ i funkciju $u_\alpha : K(0,1) \to \langle -\infty, +\infty]$:

$$P_\alpha = \{v \circ z^{-1};\ v \in P\}, \qquad u_\alpha(\zeta) = \sup\{f(\zeta);\ f \in P_\alpha\}.$$

Tada je $u_\alpha = u \circ z^{-1}$, pa je $u_\alpha(0) = u(p) < +\infty$. Prema Perronovom teoremu 7.2. tada je $u_\alpha \in Har(K(0,1))$. Dakle, $U \subseteq B$ i $u \circ z^{-1} \in Har(z(U))$. Odatle slijedi da je skup B otvoren i $u|B \in Har(B)$.

Zbog povezanosti Ω slijedi da je ili $\Omega = A$ ili $\Omega = B$ i time je teorem dokazan.

Poglavlje 10

Tip Riemannove plohe

Neka je W Riemannova ploha i neka je $p \in W$. Sa P_p označimo skup svih $v \in Sub(W \setminus \{p\})$ sa sljedeća dva svojstva:

(a) Postoji kompaktan skup $K \subseteq W$ takav da je

$$v(q) = 0 \qquad \forall q \in (W \setminus K) \setminus \{p\}.$$

(b) Za neku holomorfnu kartu $\alpha = (U, z)$ na W, takvu da je $p \in U$, funkcija

$$q \mapsto v(q) + \ln|z(q) - z(p)|, \qquad q \in U \setminus \{p\},$$

je odozgo ograničena na skupu $U \setminus \{p\}$.

Lema 10.1. *Neka je $v \in P_p$ i neka je (V, ζ) holomorfna karta na W takva da je $p \in V$. Postoji otvorena okolina $\mathcal{O} \subseteq V$ točke p takva da je funkcija $q \mapsto v(q) + \ln|\zeta(q) - \zeta(p)|$ odozgo ograničena na skupu $\mathcal{O} \setminus \{p\}$.*

Dokaz: Neka je (U, z) holomorfna karta na W za koju vrijedi (b). Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostavljati da je $z(p) = \zeta(p) = 0$. Neka su $f, g : U \cap V \setminus \{p\} \to [-\infty, +\infty\rangle$ definirane sa

$$f(q) = v(q) + \ln|z(q)|, \qquad g(q) = v(q) + \ln|\zeta(q)|.$$

Tada je f odozgo ograničena funkcija na $U \cap V \setminus \{p\}$ i

$$g(q) = f(q) + \ln\left|\frac{\zeta(q)}{z(q)}\right|.$$

Imamo

$$\frac{\zeta(q)}{z(q)} = \frac{(\zeta \circ z^{-1})(z(q))}{z(q)}.$$

Holomorfna funkcija $\zeta \circ z^{-1}$ je injektivna, pa prema teoremu 1.14. ta funkcija ima u nuli jednostruku nultočku. To znači da točka p nije nultočka funkcije $q \mapsto \dfrac{\zeta(q)}{z(q)}$. Odatle slijedi da je funkcija $\ln\left|\dfrac{\zeta(q)}{z(q)}\right|$ ograničena na nekoj otvorenoj okolini $\mathcal{O} \subseteq U \cap V$ točke p. Tada je funkcija g odozgo ograničena na $\mathcal{O} \setminus \{p\}$.

Propozicija 10.1. *Za Riemannovu plohu W i točku $p \in W$ P_p je Perronov skup na $W \setminus \{p\}$.*

Dokaz: Prije svega, skup P_p je neprazan jer je očito $0 \in P_p$.

$(P1)$ Neka su $v_1, v_2 \in P_p$ i $v = \max(v_1, v_2)$. Treba dokazati da je $v \in P_p$.

(a) Neka su $K_1, K_2 \subseteq W$ kompaktni skupovi takvi da je $v_1(q) = 0\ \forall q \in (W \setminus K_1) \setminus \{p\}$ i $v_2(q) = 0\ \forall q \in (W \setminus K_2) \setminus \{p\}$. Tada je $K = K_1 \cup K_2$ kompaktan skup i za

$$q \in (W \setminus K) \setminus \{p\} = [(W \setminus K_1) \setminus \{p\}] \cap [(W \setminus K_2) \setminus \{p\}]$$

očito vrijedi $v(q) = 0$.

(b) Neka je (U, z) holomorfna karta na W takva da je $p \in U$. Ponovo bez smanjenja općenitosti možemo pretpostavljati da je $z(p) = 0$. Neka su $f_1, f_2, f : U \setminus \{p\} \to [-\infty, +\infty\rangle$ funkcije definirane sa

$$f_1(q) = v_1(q) + \ln|z(q)|, \qquad f_2(q) = v_2(q) + \ln|z(q)|, \qquad f(q) = v(q) + \ln|z(q)|, \qquad q \in U \setminus \{p\}.$$

Tada je očito $f = \max(f_1, f_2)$. Budući da su $v_1, v_2 \in P_p$, prema lemi 10.1. postoji otvorena okolina $\mathcal{O} \subseteq U$ točke p takva da su funkcije f_1 i f_2 odozgo ograničene na $\mathcal{O} \setminus \{p\}$. Tada je $(\mathcal{O}, z|\mathcal{O})$ holomorfna karta na W, takva da je $p \in \mathcal{O}$ i funkcija f je odozgo ograničena na $\mathcal{O} \setminus \{p\}$.

Time smo dokazali da je $v \in P_p$.

$(P2)$ Neka je $v \in P_p$ i neka je $q \in W \setminus \{p\}$. Izaberimo holomorfnu kartu $\beta = (V, \zeta)$ na W takvu da je $q \in V \subseteq W \setminus \{p\}$ (posebno, $p \notin V$). Stavimo $a = \zeta(q)$. Neka je $r > 0$ takav da je $\overline{K}(a, r) \subseteq \zeta(V)$ i da je $\zeta^{-1}(S(a, r)) \cap v^{-1}(-\infty) = \emptyset$. Tada znamo da je $v^{\beta,q,r} \in Sub(W \setminus \{p\})$. Treba dokazati da je $v^{\beta,q,r} \in P_p$.

(a) Neka je K kompaktan podskup od W takav da je $v(p') = 0\ \forall p' \in (W \setminus K) \setminus \{p\}$. Tada je $L = K \cup \zeta^{-1}(\overline{K}(a, r))$ kompaktan podskup od W i vrijedi $v^{\beta,q,r}(p') = 0\ \forall p' \in (W \setminus L) \setminus \{p\}$.

(b) Neka je (U, z) holomorfna karta na W takva da je $p \in U$. Ponovo bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $z(p) = 0$, a također i da je $U \cap V = \emptyset$ (jer $p \notin V$). Neka je $\mathcal{O} \subseteq U$ otvorena okolina točke p takva da je funkcija $f : \mathcal{O} \setminus \{p\} \to [-\infty, +\infty\rangle$, zadana sa

$$f(p') = v(p') + \ln|z(p'|, \qquad p' \in \mathcal{O} \setminus p,$$

odozgo ograničena. Međutim, na skupu $U \setminus \{p\}$ vrijedi $v^{\beta,q,r} = v$, dakle ujedno je

$$f(p') = v^{\beta,q,r}(p') + \ln|z(p'|, \qquad p' \in \mathcal{O} \setminus \{p\}.$$

Time je dokazano da je $v^{\beta,q,r} \in P_p$.

Budući da P_p zadovoljava uvjete $(P1)$ i $(P2)$, P_p je Perronov skup na $W \setminus \{p\}$.

Za Riemannovu plohu W i za $p \in W$ stavimo

$$g_p(q) = \sup\{v(q);\ v \in P_p\}, \qquad q \in W \setminus \{p\}.$$

Prema teoremu 9.2. ili je $g_p \in Har(W \setminus \{p\})$, i tada se g_p zove **Greenova funkcija plohe** W **u odnosu na točku** p, ili je $g_p \equiv +\infty$ svuda na $W \setminus \{p\}$, a tada kažemo da **ploha** W **nema Greenovu funkciju u odnosu na točku** p.

Propozicija 10.2. *Pretpostavimo da Riemannova ploha W ima Greenovu funkciju u odnosu na neku točku $p \in W$.*

(a) $g_p(q) > 0 \quad \forall q \in W \setminus \{p\}$.

(b) Vrijedi $\lim\limits_{q \to p} g_p(q) = +\infty$. *Posebno, funkcija g_p nije konstantna.*

Dokaz: (b) Neka je (U, z) holomorfna karta na W takva da je

$$p \in U, \qquad z(p) = 0, \qquad z(U) = K(0, 2).$$

Definiramo funkciju $v : W \setminus \{p\} \to \mathbb{R}$ sa

$$v(q) = \begin{cases} -\ln|z(q)| & \text{ako je } q \in z^{-1}(K(0,1)) \setminus \{p\} \\ \\ 0 & \text{ako je } q \in W \setminus z^{-1}(K(0,1)). \end{cases}$$

Za $\zeta \in K(0, 2)$ je $(v \circ z^{-1})(\zeta) = \max(-\ln|\zeta|, 0)$. Dakle, funkcija v je subharmonijska na $U \setminus \{p\}$. Također, ta je funkcija subharmonijska na $W \setminus z^{-1}(\overline{K}(0, 1))$ (jer je tu jednaka nuli). Dakle, $v \in Sub(W \setminus \{p\})$. Funkcija v očito zadovoljava uvjete (a) i (b) iz definicije Perronovog skupa P_p. Dakle, $v \in P_p$. Prema tome,

$$g_p(q) \geq -\ln|z(q)| \qquad \forall q \in z^{-1}(K(0, 1)) \setminus \{p\}.$$

Budući da je

$$\lim_{q \to p} \ln|z(q)| = -\infty,$$

slijedi

$$\lim_{q \to p} g_p(q) = +\infty.$$

(a) Imamo $0 \in P_p$, pa vrijedi $g_p(q) \geq 0 \ \forall q \in W \setminus \{p\}$. Kad bi za neko $q \in W \setminus \{p\}$ bilo $g_p(q) = 0$, tada bi harmonijska (a time i subharmonijska) funkcija $-g_p$ poprimala svoj supremum na $W \setminus \{p\}$, pa bi prema propoziciji 9.3. ta funkcija bila konstantna. No to je isključeno zbog (b).

Korolar 10.1. *Neka je W kompaktna Riemannova ploha. Tada ne postoji Greenova funkcija od W u odnosu ni na jednu točku $p \in W$.*

Dokaz: Pretpostavimo da za neku točku $p \in W$ postoji Greenova funkcija g_p od W u odnosu na p. Budući da je

$$\lim_{q \to p} g_p(q) = +\infty$$

postoji otvorena okolina $\mathcal{O}$ točke p i točka $q' \in W \setminus \mathcal{O}$ takve da vrijedi

$$g_p(p') > g_p(q') \qquad \forall p' \in \mathcal{O} \setminus \{p\}.$$

Skup $W \setminus \mathcal{O}$ je kompaktan, pa postoji točka $q \in W \setminus \mathcal{O}$ takva da je

$$g_p(q) \leq g_p(q_1) \qquad \forall q_1 \in W \setminus \mathcal{O}.$$

Tada je

$$-g_p(q) \geq -g_p(q_1) \qquad \forall q_1 \in W \setminus \{p\}.$$

Prema propoziciji 9.3. subharmonijska funkcija $-g_p$ na $W \setminus \{p\}$ je konstantna. No to je suprotno tvrdnji (b) propozicije 10.2.

Neka je W nekompaktna Riemannova ploha i $K \subseteq W$ kompaktan skup s nepraznom nutrinom takav da je njegov komplement $W \setminus K$ povezan. Označimo sa P_K skup svih funkcija $v \in Sub(W \setminus K)$ sa sljedeća dva svojstva:

(a) $v(q) \leq 1 \quad \forall q \in W \setminus K.$

(b) $\forall \varepsilon > 0$ postoji kompaktan skup K_ε u W, koji sadrži skup K, takav da je $v(q) \leq \varepsilon \ \forall q \in W \setminus K_\varepsilon$.

Propozicija 10.3. *Neka je W nekompaktna Riemannova ploha i neka je K kompaktan podskup od W s nepraznom nutrinom takav da je njegov komplement $W \setminus K$ povezan. Tada je P_K Perronov skup na $W \setminus K$.*

Dokaz: Imamo $0 \in P_K$, dakle, $P_K \neq \emptyset$.
$(P1)$ Očito vrijedi

$$v_1, v_2 \in P_K \qquad \Longrightarrow \qquad \max(v_1, v_2) \in P_K.$$

$(P2)$ Neka je $v \in P_K$ i $p \in W \setminus K$. Neka je $\alpha = (U, z)$ holomorfna karta na W takva da je $p \in U \subseteq W \setminus K$ (dakle, $U \cap K = \emptyset$). Neka je $a = z(p)$ i neka je $r > 0$ takav da je $\overline{K}(a, r) \subseteq z(U)$ i da je $z^{-1}(S(a, r)) \cap v^{-1}(-\infty) = \emptyset$. Treba još dokazati da je tada $v^{\alpha,p,r} \in P_K$.
(a) Zbog propozicije 9.2. $v \leq 1$ povlači $v^{\alpha,p,r} \leq 1^{\alpha,p,r} = 1$.
(b) Neka je $\varepsilon > 0$ i neka je $K_\varepsilon \supseteq K$ kompaktan skup takav da vrijedi $v(q) \leq \varepsilon \ \forall q \in W \setminus K_\varepsilon$. Stavimo $K'_\varepsilon = K_\varepsilon \cup z^{-1}(\overline{K}(a, r))$ − to je kompaktan skup u W koji sadrži K. Na njegovom komplementu funkcija $v^{\alpha,p,r}$ se podudara s funkcijom v, pa vrijedi $v^{\alpha,p,r}(q) \leq \varepsilon \ \forall q \in W \setminus K'_\varepsilon$.
Dakle je $v^{\alpha,p,r} \in P_K$.

Propozicija 10.4. *Neka je W nekompaktna Riemannova ploha i K kompaktan podskup od W s nepraznom nutrinom takav da je njegov komplement $W \setminus K$ povezan. Definiramo funkciju $u_K \in Har(W \setminus K)$ sa*

$$u_K(q) = \sup\{v(q);\ v \in P_K\}, \qquad q \in W \setminus K.$$

Tada vrijedi $u_K(q) > 0 \quad \forall q \in W \setminus K$.

Dokaz: Imamo $0 \in P_K$, pa je $u_K(q) \geq 0 \ \forall q \in W \setminus K$. Dovoljno je dokazati da postoji $v \in P_K$ takva da je $v(p) > 0$ za neku točku $p \in W \setminus K$. Doista, tada je $-u_K(q) \leq 0 \ \forall q \in W \setminus K$ i $-u_K(p) < 0$. Kad bi za neku točku $q \in W \setminus K$ bilo $-u_K(q) = 0$, iz propozicije 9.3. bi slijedilo da je $-u_K(q) = 0 \ \forall q \in W \setminus K$, a to je u suprotnosti sa $-u_K(p) < 0$.
Neka je (U, z) holomorfna karta na W takva da je

$$z(U) = K(0, 3), \qquad z^{-1}(\overline{K}(0, 1)) \subseteq K, \qquad z^{-1}(K(0, 2)) \not\subseteq K.$$

Neka je p točka iz nutrine skupa K takva da je $z(p) = 0$. Definiramo $v : W \setminus K \to \mathbb{R}$ na sljedeći način:

$$v(q) = \begin{cases} 1 - \dfrac{\ln|z(q)|}{\ln 2} & \text{ako je } q \in (W \setminus K) \cap z^{-1}(K(0, 2)) \\ \\ 0 & \text{ako je } q \in (W \setminus K) \setminus z^{-1}(K(0, 2)). \end{cases}$$

Tada je $0 \leq v \leq 1$ i $v = 0$ izvan kompaktnog skupa $K \cup z^{-1}(\overline{K}(0, 2))$. Na otvorenom skupu $U = (W \setminus K) \cap z^{-1}(K(0, 3))$ imamo

$$v|U = \max(0, v_1), \qquad \text{gdje je} \qquad v_1(q) = 1 - \frac{\ln|z(q)|}{\ln 2}.$$

Budući da je funkcija v_1 harmonijska, ona je i subharmonijska, pa je i funkcija $v|U$ subharmonijska. Na otvorenom skupu $U_1 = (W \setminus K) \setminus z^{-1}(\overline{K}(0, 2))$ je $v|U_1 = 0$, dakle, također subharmonijska. Kako je $W \setminus K = U \cup U_1$, zaključujemo da je funkcija v subharmonijska. Uvjeti u definiciji Perronovog skupa P_K očito su za funkciju v zadovoljeni, pa slijedi da je $v \in P_K$. Napokon, za $q \in z^{-1}(K(0, 2)) \cap (W \setminus K) \neq \emptyset$ vrijedi $v(q) > 0$.

Prema tome, za svaku točku $q \in W \setminus K$ vrijedi $0 < u(q) \leq 1$. Zbog teorema 9.2. imamo sljedeće dvije mogućnosti:

(1) $u_K(q) = 1 \quad \forall q \in W \setminus K$; tada kažemo da **ploha** W **nema harmonijsku mjeru u odnosu na** K.

(2) $0 < u(q) < 1\ \forall W \setminus K$; tada se funkcija u_K zove **harmonijska mjera plohe** W **u odnosu na** K.

Neka je W nekompaktna Riemannova ploha i neka je K neprazan kompaktan podskup od W. Kažemo da **princip maksimuma vrijedi na** $W \setminus K$ ako je ispunjen sljedeći uvjet:

(M) Ako je $u \in Sub(W \setminus K)$ odozgo ograničena i ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji okolina $\mathcal{O}$ od K u W takva da je $u(q) \leq \varepsilon\ \forall q \in \mathcal{O} \setminus K$, tada je $u(q) \leq 0\ \forall q \in W \setminus K$.

Teorem 10.1. *Neka je W nekompaktna Riemannova ploha. Tada je sljedećih šest svojstava međusobno ekvivalentno:*

(a) *Za neku točku $p \in W$ postoji Greenova funkcija od W u odnosu na p.*

(b) *Za svaku točku $p \in W$ postoji Greenova funkcija od W u odnosu na p.*

(c) *Za neki kompaktan podskup K od W s nepraznom nutrinom, čiji je komplement $W \setminus K$ povezan, postoji harmonijska mjera od W u odnosu na K.*

(d) *Za svaki kompaktan podskup K od W s nepraznom nutrinom, čiji je komplement $W \setminus K$ povezan, postoji harmonijska mjera od W u odnosu na K.*

(e) *Za neki neprazan kompaktan podskup K od W ne vrijedi princip maksimuma na $W \setminus K$.*

(f) *Za svaki neprazan kompaktan podskup K od W ne vrijedi princip maksimuma na $W \setminus K$.*

Dokaz: Za $p \in W$ sa (G_p) označimo svojstvo:

(G_p) *Postoji Greenova funkcija od W u odnosu na p.*

Nadalje, za kompaktan podskup K od W s nepraznom nutrinom, čiji je komplement $W \setminus K$ povezan, sa (H_K) označimo tvrdnju:

(H_K) *Postoji harmonijska mjera od W u odnosu na K.*

Napokon, za neprazan kompaktan podskup K od W sa (M_K) označimo tvrdnju:

(M_K) *Princip maksimuma ne vrijedi na $W \setminus K$.*

Teorem će biti dokazan, ako dokažemo sljedeće tri tvrdnje:

(i) *Ako je K neprazan kompaktan podskup od W i ako je $p \in K$, onda vrijedi implikacija $(G_p) \Rightarrow (M_K)$.*

(ii) *Ako su K i L kompaktni podskupovi od W, takvi da je nutrina od L neprazna, zatim da je skup $W \setminus L$ povezan i da je $K \neq \emptyset$ onda vrijedi implikacija $(M_K) \Rightarrow (H_L)$.*

(iii) *Ako je K kompaktan podskup od W s povezanim komplementom $W \setminus K$, i ako je p točka iz nutrine skupa K, onda vrijedi implikacija $(H_K) \Rightarrow (G_p)$.*

Dokaz (*i*). Neka je K neprazan kompaktan podskup od W i $p \in K$. Pretpostavimo da vrijedi (G_p). Stavimo

$$m = \max\{-g_p(q);\ q \in K \setminus \{p\}\}.$$

Zbog propozicije 10.2. imamo $m < 0$. Definiramo funkciju $u : W \setminus K \to \mathbb{R}$ sa

$$u(q) = -m - g_p(q), \qquad q \in W \setminus K.$$

Tada je $u \in Har(W \setminus K)$, dakle i $u \in Sub(W \setminus K)$, i odozgo je ograničena. Dokažimo da za svako $\varepsilon > 0$ postoji otvorena okolina $\mathcal{O}$ skupa K takva da je $u(q) \le \varepsilon\ \forall q \in \mathcal{O} \setminus K$. Doista, neka je $\varepsilon > 0$. Za $q \in K \setminus \{p\}$ neka je $\mathcal{O}_q$ otvorena okolina točke q in $W \setminus \{p\}$ takva da je

$$-g_p(q') \le m + \varepsilon \qquad \forall q' \in \mathcal{O}_q.$$

Neka je $\mathcal{O}_p$ otvorena okolina točke p u W takva da vrijedi

$$-g_p(q') \le m + \varepsilon \qquad \forall q' \in \mathcal{O}_p \setminus \{p\}.$$

Tada je

$$\mathcal{O} = \bigcup_{q \in K} \mathcal{O}_q$$

otvorena okolina od K u W i vrijedi

$$u(q) \le \varepsilon \qquad \forall q \in \mathcal{O} \setminus K.$$

Pretpostavimo sada da (M_K) ne vrijedi, tj. da princip maksimuma vrijedi na skupu $W \setminus K$. Tada slijedi $u(q) \le 0\ \forall q \in W \setminus K$. Dakle je $-g_p(q) \le m\ \forall q \in W \setminus K$. No tada je

$$m = \max\{-g_p(q);\ q \in W \setminus \{p\}\}.$$

Odatle i iz propozicije 9.3. subharmonijska funkcija $-g_p$ je konstantna, suprotno tvrdnji (*b*) propozicije 10.2. Ova kontradikcija pokazuje da vrijedi (M_K).

Dokaz (*ii*) Neka je K neprazan kompaktan podskup od W i neka je L kompaktan podskup od W s nepraznom nutrinom i s povezanim komplementom $W \setminus L$. Pretpostavimo da (H_L) ne stoji, tj. da je $u_L \equiv 1$. Dokazat ćemo da tada (M_K) ne stoji, tj. da princip maksimuma vrijedi na skupu $W \setminus K$.

Najprije pretpostavimo da je $L \subseteq K$. Neka je $u \in Sub(W \setminus K)$ odozgo ograničena i neka za svako $\varepsilon > 0$ postoji otvorena okolina $\mathcal{O}$ od K u W takva da je

$$u(q) \le \varepsilon \qquad \forall q \in \mathcal{O} \setminus K.$$

Treba dokazati da je tada $u \le 0$. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $u \le 1$ (ako nije tako, podijelimo funkciju u s njenim supremumom na skupu $W \setminus K$). Neka je $v \in P_L$. Tvrdimo da je tada

$$v(q) + u(q) \le 1 \qquad \forall q \in W \setminus K.$$

Neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljno. Neka je K_1 kompaktna okolina skupa K takva da je

$$u(q) \le \varepsilon \qquad \forall q \in K_1 \setminus K.$$

Neka je $\mathcal{O}$ otvorena okolina od K_1 s kompaktnim zatvaračem, takva da je

$$v(q) \le \varepsilon \qquad \forall q \in W \setminus \mathcal{O}.$$

Stavimo $U = \mathcal{O}\backslash K_1$. To je otvoren skup u W s kompaktnim zatvaračem C. Neka je $S = \partial U = C\backslash U$. Lako se vidi da je tada

$$S \subseteq (W \setminus \mathcal{O}) \cup (K_1 \setminus K).$$

Neka je $f = (v+u)|C$. Tada je $f : C \to [-\infty, +\infty\rangle$ neprekidna funkcija i $f|U \in Sub(U)$. Neka je $s \in S$. Ako je $s \in W \setminus \mathcal{O}$ imamo $v(s) \le \varepsilon$, pa je $f(s) \le 1 + \varepsilon$. Ako je $s \in K_1 \setminus K$ imamo $u(s) \le \varepsilon$, pa je opet $f(s) \le 1 + \varepsilon$. Sada iz propozicije 9.3. slijedi

$$f(q) \le 1 + \varepsilon \qquad \forall q \in U = \mathcal{O} \setminus K_1.$$

Dakle, dokazali smo da je

$$v(q) + u(q) \le 1 + \varepsilon \qquad \forall q \in \mathcal{O} \setminus K_1.$$

Za $q \in W \setminus \mathcal{O}$ je $v(q) \le \varepsilon$, pa je također

$$v(q) + u(q) \le 1 + \varepsilon \qquad \forall q \in W \setminus \mathcal{O}.$$

Za $q \in K_1 \setminus K$ je $u(q) \le \varepsilon$, pa imamo i

$$v(q) + u(q) \le 1 + \varepsilon \qquad \forall q \in K_1 \setminus K.$$

Iz dokazanih triju nejednakosti slijedi

$$v(q) + u(q) \le 1 + \varepsilon \qquad \forall q \in W \setminus K.$$

Kako je $\varepsilon > 0$ bilo proizvoljno, dobivamo

$$v(q) + u(q) \le 1 \qquad \forall q \in W \setminus K.$$

Neka je $q \in W \setminus K$ i $\varepsilon > 0$. Imamo

$$1 = u_L(q) = \sup \{v(q);\ v \in P_L\},$$

pa postoji funkcija $v \in P_L$ takva da je $v(q) \ge 1 - \varepsilon$. Slijedi

$$u(q) \le 1 - v(q) \le \varepsilon.$$

Budući da je $\varepsilon > 0$ bilo prozvoljno, slijedi $u(q) \le 0$. Time je dokazano da u slučaju $L \subseteq K$ princip maksimuma vrijedi na skupu $W \setminus K$.

Neka su sada K i L proizvoljni. Neka je M kompaktan podskup od W takav da je $K \cup L$ sadržan u nutrini od M. Neka je funkcija $u \in Sub(W \setminus K)$ odozgo ograničena i takva da za svako $\varepsilon > 0$ postoji otvorena okolina $\mathcal{O}$ od K u W takva da je $u(q) \le \varepsilon\ \forall q \in \mathcal{O} \setminus K$. Treba dokazati da je tada $u \le 0$.

Prema prvom dijelu dokaza princip maksimuma vrijedi na skupu $W \setminus M$. Prema tome, ako je

$$m = \max \{u(p);\ p \in M \setminus Int(M)\},$$

tada vrijedi

$$u(q) \le m \qquad \forall q \in W \setminus M.$$

Pretpostavimo da je $m > 0$. Prema korolaru 9.1. vrijedi $u(q) \le m\ \forall q \in M \setminus K$. Dakle, funkcija u dostiže svoj supremum, pa je prema propoziciji 9.3. funkcija u konstanta > 0 na nekoj komponenti povezanosti skupa $W\backslash K$ (na onoj na kojoj funkcija u poprima vrijednost m). No to je u suprotnosti s pretpostavljenim ponašanjem funkcije u u okolini od K, jer svaka okolina od K siječe svaku komponentu skupa $W \setminus K$. Time je dokazano da je $m \leq 0$.

Neka je $\varepsilon > 0$. Neka je K_1 kompaktna okolina skupa K sadržana u nutrini $Int(M)$ skupa M, takva da je $u(q) \leq \varepsilon \ \forall q \in K_1 \setminus K$. Neka je $U = Int(M) \setminus K_1$. To je otvoren skup u W. Nadalje, zatvarač $C = Cl(U)$ skupa U je kompaktan i za skup $S = C \setminus U$ vrijedi

$$S \subseteq (K_1 \setminus K) \cup (M \setminus Int(M)).$$

Funkcija $u|C$ je neprekidna, $u|U \in Sub(U)$ i $u|S \leq \varepsilon$. Prema korolaru 9.1. tada vrijedi $u|U \leq \varepsilon$. Prema tome vrijedi $u|(M \setminus K) \leq \varepsilon$. Kako je $\varepsilon > 0$ bilo proizvoljno, zaključujemo da vrijedi $u|(M \setminus K) \leq 0$. Međutim, otprije znamo da je $u|(W \setminus M) \leq 0$. Dakle je $u \leq 0$. Time je dokazano da princip maksimuma vrijedi na skupu $W \setminus K$.

Dokaz (iii) Neka je K kompaktan podskup od W čiji je komplement $W \setminus K$ povezan i neka je p točka iz nutrine skupa K. Pretpostavimo da vrijedi (H_K), tj. $u_K(q) < 1 \ \forall q \in W \setminus K$. Treba dokazati da tada vrijedi $G_p)$, tj. da postoji Greenova funkcija od W u odnosu na točku p.

Neka je (U, z) holomorfna karta na W takva da je $U \setminus K$, $z(U) = K(0,3)$, $p \in U$, $z(p) = 0$. Stavimo

$$U_1 = z^{-1}(K(0,1)), \qquad K_1 = z^{-1}(\overline{K}(0,1)) = Cl(U_1), \qquad S_1 = z^{-1}(S(0,1)) = K_1 \setminus U_1,$$

$$U_2 = z^{-1}(K(0,2)), \qquad K_2 = z^{-1}(\overline{K}(0,2)) = Cl(U_2), \qquad S_2 = z^{-1}(S(0,2)) = K_2 \setminus U_2.$$

Očito vrijedi

$$\{v|(W \setminus K);\ v \in P_{K_1}\} \subseteq P_K.$$

Dakle, vrijedi

$$u_{K_1}(q) \leq u_K(q) \qquad \forall q \in W \setminus K.$$

Prema tome, vrijedi (H_{K_1}).

Tvrdimo da vrijedi

$$\lim_{q \to p',\, q \in W \setminus K_1} u_{K_1}(q) = 1 \qquad \forall p' \in S_1.$$

Da to dokažemo, definiramo $v : W \setminus K_1 \to \mathbb{R}$ sa

$$v(q) = \begin{cases} 1 - \dfrac{\ln|z(q)|}{\ln 2} & q \in U_2 \setminus K_1 \\[2ex] 0 & q \in W \setminus U_2. \end{cases}$$

Kao u dokazu propozicije 10.4. slijedi da je $v \in P_{K_1}$. Sada je

$$\lim_{q \to p',\, q \in W \setminus K_1} v(q) = 1 \qquad \forall p' \in S_1.$$

Budući da je $v \leq u_{K_1} \leq 1$, odatle slijedi

$$\lim_{q \to p',\, q \in W \setminus K_1} u_{K_1}(q) = 1 \qquad \forall p' \in S_1.$$

Prema tome, funkciju u_{K_1} možemo proširiti do neprekidne funkcije $W \to \mathbb{R}$ stavivši $u_{K_1}(q) = 1$ $\forall q \in K_1$.

Neka je $v \in P_p$. Stavimo

$$v^+ = \max(v, 0) \qquad \text{i} \qquad a = \max_{S_1} v^+ \geq 0.$$

Tvrdimo da vrijedi

$$v^+(q) \le a\, u_{K_1}(q) \qquad \forall q \in W \setminus K_1. \qquad (1)$$

Neka je $\mathcal{O}$ otvorena okolina od K_1 s kompaktnim zatvaračem takva da je $v^+(q) = 0\ \forall q \in W \setminus \mathcal{O}$. Tada je očito

$$v^+(q) \le a\, u_{K_1}(q) \qquad \forall q \in W \setminus \mathcal{O}. \qquad (2)$$

Budući da je $u_{K_1}(q) = 1\ \forall q \in S_1$, pa vrijedi

$$v^+(q) \le a\, u_{K_1}(q) \qquad \forall q \in S_1. \qquad (3)$$

Neka je $U = \mathcal{O} \setminus K_1$. Tada je skup U otvoren, njegov zatvarač $C = Cl(U)$ je kompaktan i vrijedi

$$S = C \setminus U \subseteq S_1 \cup (W \setminus \mathcal{O}). \qquad (4)$$

Imamo $v^+|U \in Sub(U)$ i $a\, u_{K_1} \in \mathcal{H}(U)$. Nadalje, funkcije $v^+|C$ i $a\, u_{K_1}|C$ su neprekidne i prema (2), (3) i (4) vrijedi $v^+|S \le a\, u_{K_1}|S$. Zbog korolara 9.1. slijedi $v^+|U \le a\, u_{K_1}|U$, tj. (1) vrijedi na skupu $U = \mathcal{O} \setminus K_1$. Odatle i iz (2) slijedi da (1) vrijedi na čitavom $W \setminus K_1$.

Iz (1) slijedi

$$\max_{S_2} v^+ \le \max_{S_1} v^+ \cdot \max_{S_2} u_{K_1}. \qquad (5)$$

Promotrimo sada funkciju $K_2 \setminus \{p\} \to \mathbb{R}$, $q \mapsto v^+(q) + 2\ln|z(q)|$. Ona je neprekidna, odozgo ograničena i subharmonijska na skupu $U_2 \setminus \{p\}$. Prema korolaru 9.1. maksimum joj se dostiže na rubu S_2. Prema tome je

$$\max\{v^+(q) + 2\ln|z(q)|;\ q \in S_1\} \le \max\{v^+(q) + 2\ln|z(q)|;\ q \in S_2\},$$

odnosno,

$$\max_{S_1} v^+ \le \max_{S_2} v^+ + 2\ln 2.$$

Odatle i iz (5) slijedi

$$\max_{S_1} v^+ \le 2\ln 2 + \max_{S_1} v^+ \cdot \max_{S_2} u_{K_1}.$$

Budući da je $\max\limits_{S_2} u_{K_1} < 1$, nalazimo

$$\max_{S_1} v^+ \le \frac{2\ln 2}{1 - \max\limits_{S_2} u_{K_1}}.$$

Kako je $v^+ \ge v$, odatle slijedi

$$v(q) \le \frac{2\ln 2}{1 - \max\limits_{S_2} u_{K_1}} < +\infty \qquad \forall q \in S_1.$$

Budući da je funkcija $v \in P_p$ bila proizvoljna, slijedi $g_p(q) < +\infty\ \forall q \in S_1$. Time je dokazano da vrijedi (G_p).

Neka je W Riemannova ploha. W se zove **hiperbolička** ako je nekompaktna i ima svojstva iz teorema 10.1., a **parabolička** ako je nekompaktna i nema svojstva iz teorema 10.1. Na taj način sve smo Riemannove plohe podijelili u tri tipa: kompaktne, hiperboličke i paraboličke.

Propozicija 10.5. *Neka je W parabolička Riemannova ploha i neka je funkcija $u \in Har(W)$ nekonstantna. Tada je*

$$\sup\{u(p);\ p \in W\} = +\infty \qquad i \qquad \inf\{u(p);\ p \in W\} = -\infty.$$

Dokaz: Pretpostavimo da je u odozgo ograničena. Neka su $p, q \in W$, $p \neq q$. Primjena principa maksimuma na $W \setminus \{p\}$ daje $u(q) \leq u(p)$. Analogno, princip maksimuma na $W \setminus \{q\}$ daje $u(p) \leq u(q)$. Dakle je $u(p) = u(q)$. Kako su točke p i q bile proizvoljne, zaključujemo da je funkcija u konstantna. No to je suprotno pretpostavci, pa ta kontradikcija dokazuje da funkcija u nije odozgo ograničena. Analogno, funkcija $-u$ nije odozgo ograničena, dakle u nije odozdo ograničena.

Proučit ćemo sada pobliže svojstva Greenove funkcije na hiperboličkoj plohi. U tu svrhu treba nam sljedeća činjenica o neuklonjivim izoliranim singularitetima holomorfnih funkcija:

Lema 10.2. *Neka je točka $a \in \mathbb{C}$ pol ili bitni singularitet funkcije f. Tada je točka a bitni singularitet funkcije $z \mapsto e^{f(z)}$.*

Dokaz: Pretpostavimo da je a bitni singularitet funkcije f. Neka je $\delta > 0$ i $\alpha \in \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Neka je $\beta \in \mathbb{C}$ takav da je $\alpha = \mathrm{e}^{\beta}$. Prema teoremu 2.2. skup $f(K^*(a, \delta))$ je gust u $\mathbb{C}$, pa postoji niz (z_n) u $K^*(a, \delta)$ takav da je

$$\beta = \lim_{n \to \infty} f(z_n).$$

Tada za funkciju $g = \mathrm{e}^f$ vrijedi

$$\lim_{n \to \infty} g(z_n) = \mathrm{e}^{\beta} = \alpha.$$

Time je dokazano da je $g(K^*(a, \delta))$ gusto u $\mathbb{C}$ pa slijedi da je točka a bitni singularitet funkcije g.

Pretpostavimo sada da je točka a pol funkcije f reda $m \in \mathbb{N}$. Tada za neki $\delta > 0$, za neku holomorfnu funkciju f_0 na krugu $K(a, \delta)$ i za neke $b_1, \ldots, b_m \in \mathbb{C}$ $(b_m \neq 0)$ vrijedi

$$f(z) = f_0(z) + \sum_{n=1}^{m} \frac{b_n}{(z-a)^n}, \qquad z \in K(a, \delta).$$

Sada je

$$g(z) = \mathrm{e}^{f(z)} = g_0(z) \cdot \mathrm{e}^{\frac{b_1}{z-a}} \cdot \mathrm{e}^{\frac{b_2}{(z-a)^2}} \cdots \mathrm{e}^{\frac{b_m}{(z-a)^m}}, \qquad g_0(z) = \mathrm{e}^{f_0(z)}.$$

Funkcija g_0 je holomorfna na $K(a, \delta)$ i $g_0(z) \neq 0$ $\forall z \in K(a, \delta)$. Prema tome, funkcija $h = \dfrac{g}{g_0}$ je holomorfna na $K^*(a, \delta)$. Pretpostavimo da je a uklonjiv singularitet ili pol funkcije g. Tada je a uklonjiv singularitet ili pol funkcije h. No to je nemoguće, jer je prema gornjoj formuli Laurentov razvoj funkcije h na $K^*(a, \delta)$ dan sa

$$h(z) = \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} \cdots \sum_{n_m=0}^{\infty} \frac{b_1^{n_1} b_2^{n_2} \cdots b_m^{n_m}}{n_1! n_2! \cdots n_m!} (z-a)^{-n_1 - 2n_2 - \cdots - mn_m},$$

dakle, taj razvoj ima beskonačno mnogo negativnih potencija.

Za izolirani singularitet harmonijske funkcije na Riemannovoj plohi vrijedi analogon teorema 2.1:

Propozicija 10.6. *Neka je W Riemannova ploha, $U \subseteq W$ otvoren skup, $p \in U$ i $u \in Har(U \setminus \{p\})$. Pretpostavimo da postoji otvorena okolina $\mathcal{O} \subseteq U$ točke p takva da je restrikcija $u|(\mathcal{O} \setminus \{p\})$ ograničena. Tada postoji $u_0 \in Har(U)$ takva da je $u = u_0|(U \setminus \{p\})$.*

Dokaz: Pomoću holomorfne karte propozicija se svodi na situaciju $W = U = \mathcal{O} = K(0, 1)$ i $p = 0$. Stavimo $D = K(0, 1)$, $D^* = K^*(0, 1)$. Imamo ograničenu funkciju $u \in Har(D^*)$. Treba dokazati da postoji $u_0 \in Har(D)$ takva da je $u_0|D^* = u$.

Neka je E desna poluravnina

$$E = \{z \in \mathbb{C};\ \operatorname{Re} z > 0\}.$$

Tada je $\varphi : E \to D^*$, $\varphi(z) = \mathrm{e}^{-z}$, natkrivanje. Lako se vidi da funkcija $f_1 \in \mathcal{H}(E)$ ima oblik $f_1 \circ \varphi$ za neku $f \in \mathcal{H}(D^*)$ ako i samo ako vrijedi $f_1(z + 2\pi i) = f_1(z)\ \forall z \in E$. Definiramo $u_1 \in Har(E)$ sa $u_1 = u \circ \varphi$. E je jednostavno povezano područje pa po propoziciji 6.1. postoji $f_1 \in \mathcal{H}(E)$ takva da je $u_1 = \operatorname{Re} f_1$. Stavimo $f_2(z) = f_1(z + 2\pi i)$. Tada je $\operatorname{Re} f_2(z) = u_1(z + 2\pi i) = u_1(z)$. Prema propoziciji 6.1. postoji $c \in \mathbb{R}$ takav da je $f_2 = f_1 + 2\pi i c$. Dakle,

$$f_1(z + 2\pi i) = f_1(z) + 2\pi i c \qquad \forall z \in E.$$

Definiramo $g_1 \in \mathcal{H}(E)$ sa $g_1(z) = f_1(z) - cz$. Tada je

$$g_1(z + 2\pi i) = g_1(z) \qquad \forall z \in E.$$

Stoga postoji $g \in \mathcal{H}(D^*)$ takva da je $g_1 = g \circ \varphi$. Tada je

$$\operatorname{Re} g(z) = u(z) + c \ln |z| \qquad \forall z \in D^*.$$

Doista, neka je $\zeta = \xi + i\eta \in E$ takva da je $z = \varphi(\zeta) = \mathrm{e}^{-\zeta}$. Imamo tada

$$u(z) = u_1(\zeta) = \operatorname{Re} f_1(\zeta) = \operatorname{Re}\,[g_1(\zeta) + c\zeta] = \operatorname{Re} g(z) + c\xi = \operatorname{Re} g(z) - c \ln |z|.$$

Definiramo sada $G \in \mathcal{H}(D^*)$ sa

$$G(z) = \mathrm{e}^{g(z)} \qquad z \in D^*.$$

Pretpostavimo da 0 nije uklonjiv singularitet funkcije g. Prema lemi 10.2. tada je 0 bitni singularitet funkcije G. Međutim,

$$|G(z)| = \mathrm{e}^{Re\, g(z)} = \mathrm{e}^{u(z)} |z|^c.$$

Funkcija u je po pretpostavci ograničena na D^*, pa je i funkcija e^u ograničena na D^*. Ako je $c < 0$, tada je

$$\lim_{z \to 0} |G(z)| = +\infty$$

a to je nemoguće jer je 0 bitni singularitet funkcije G. Ako je $c \geq 0$, tada je funkcija G ograničena na D^*, što je također nemoguće. Na taj način zaključujemo da funkcija g ima uklonjiv singularitet u 0. Dakle, $g = g_0|D^*$ za neku funkciju $g_0 \in \mathcal{H}(D)$. Sada zaključujenmo da ne može biti $c \neq 0$, jer je

$$\lim_{z \to 0} |G(z)| = \mathrm{e}^{Re\, g_0(0)} \in \langle 0, +\infty \rangle.$$

Dakle, $c = 0$, tj. $u = \operatorname{Re} g$. Stavimo li $u_0 = \operatorname{Re} g_0$, tada je $u_0 \in Har(D)$ i $u_0|D^* = u$.

Sada smo u mogućnosti precizno opisati ponašanje Greenove funkcije g_p u blizini točke p.

Propozicija 10.7. *Neka je W hiperbolička Riemannova ploha, $p \in W$, (U, z) holomorfna karta na W takva da je $p \in U$ i $z(p) = 0$. Postoji funkcija $u \in Har(U)$ takva da je*

$$g_p(q) + \ln |z(q)| = u(q) \qquad \forall q \in U \setminus \{p\}.$$

Dokaz: Neka je $v \in P_p$ i $\varepsilon > 0$. Promotrimo neprekidnu funkciju $\psi : U \setminus \{p\} \to [-\infty, +\infty\rangle$ definiranu sa

$$\psi(q) = v(q) + (1+\varepsilon) \ln |z(q)|, \qquad q \in U \setminus \{p\}.$$

Tada je funkcija ψ subharmonijska na $U \setminus \{p\}$ i vrijedi

$$\lim_{q \to p} \psi(q) = -\infty.$$

Prema tome, za svaki kompaktan podskup $K \subseteq U$ restrikcija $\psi|(K \setminus \{p\})$ je odozgo ograničena. Neka su $0 < r_1 < r_2$ takvi da je $\overline{K}(0, r_2) \subseteq z(U)$. Iz propozicije 9.3. sada slijedi da je

$$\max \{\psi(q);\ q \in z^{-1}(\overline{K}(0, r_2))\} = \max \{\psi(q);\ q \in z^{-1}(S(0, r_2))\}.$$

Odatle slijedi

$$\max \{\psi(q);\ |z(q)| = r_1\} \leq \max \{\psi(q);\ |z(q)| = r_2\},$$

odnosno,

$$\max \{v(q);\ |z(q)| = r_1\} + (1+\varepsilon) \ln r_1 \leq \max \{v(q);\ |z(q)| = r_2\} + (1+\varepsilon) \ln r_2.$$

To vrijedi za svako $\varepsilon > 0$, pa slijedi

$$\max \{v(q);\ |z(q)| = r_1\} + \ln r_1 \leq \max \{v(q);\ |z(q)| = r_2\} + \ln r_2.$$

Definiramo funkciju realne varijable $r \mapsto \mu(r)$ sa

$$\mu(r) = \max \{g_p(q);\ |z(q)| = r\}, \qquad \text{gdje je } r > 0 \text{ takav da je } \overline{K}(0, r) \subseteq z(U).$$

Domena te funkcije je ili $\langle 0, +\infty\rangle$ ili $\langle 0, R\rangle$ za neki $R > 0$. Budući da je Greenova funkcija g_p definirana kao supremum funkcija $v \in P_p$, iz dokazanog slijedi da je funkcija

$$r \mapsto \mu(r) + \ln r$$

neopadajuća. Prema tome, postoji otvorena okolina $\mathcal{O} \subseteq U$ točke p takva da je funkcija

$$q \mapsto g_p(q) + \ln |z(q)|$$

odozgo ograničena na $\mathcal{O} \setminus \{p\}$.

Fiksirajmo sada $r > 0$ tako da je $\overline{K}(0, r) \subseteq z(U)$ i neka je $v : W \setminus \{p\} \to [-\infty, +\infty\rangle$ funkcija definirana sa

$$v(q) = \begin{cases} \ln r - \ln |z(q)| & \text{ako je } q \in z^{-1}(K(0, r)) \setminus \{p\} \\ \\ 0 & \text{ako je } q \in W \setminus z^{-1}(K(0, r)). \end{cases}$$

Lako se vidi da je $v \in P_p$. Slijedi

$$g_p(q) \geq \ln r - \ln |z(q)| \qquad \forall q \in z^{-1}(K(0, r)) \setminus \{p\},$$

odnosno,

$$g_p(q) + \ln |z(q)| \geq \ln r \qquad \forall q \in z^{-1}(K(0, r)) \setminus \{p\}.$$

Prema tome, $\mathcal{O}$ možemo odabrati tako da je funkcija $q \mapsto g_p(q) + \ln |z(q)|$ i odozdo ograničena na $\mathcal{O} \setminus \{p\}$. Sada tvrdnja slijedi iz propozicije 10.6.

Zadatak 10.1. *Dokažite da je $\mathbb{C}$ parabolička Riemannova ploha.*

Uputa: Dokažite da je za bilo koji $r > 0$ sa

$$v_r(z) = \begin{cases} -\ln \dfrac{|z|}{r} & 0 < |z| < r \\ \\ 0 & |z| \geq r \end{cases}$$

zadana funkcija $v_r \in P_0$. Dokažite da odatle slijedi da je $g_0(1) = +\infty$.

Zadatak 10.2. *Dokažite da su $K(0,1)$ i $E = \{z \in \mathbb{C};\ Re\, z > 0\}$ hiperboličke Riemannove plohe.*

Uputa: Stavimo $K^* = K^*(0,1) = K(0,1) \setminus \{0\}$ i definiramo $u : K^* \to \mathbb{R}$ sa $u(z) = \ln|z| + 1$. Koristeći tu funkciju dokažite da na K^* ne vrijedi princip maksimuma. Napokon, konstruirajte Möbiusovu transformaciju ω koja je izomorfizam Riemannove plohe $K(0,1)$ na Riemannovu plohu E.

Poglavlje 11

Paraboličke i kompaktne Riemannove plohe

Važna sredstva za proučavanje Riemannovih ploha su Greenove funkcije, a također harmonijske mjere. Međutim, ta sredstva su nam na raspolaganju samo ako se radi o hiperboličkoj Riemannovoj plohi. U ovom poglavlju konstruirat ćemo neke korisne funkcije na paraboličkim i kompaktnim Riemannovim plohama.

Teorem 11.1. *Neka je W parabolička ili kompaktna Riemannova ploha, $p \in W$ i $\alpha = (U, z)$ holomorfna karta na W takva da je $p \in U$. Postoji jedna i samo jedna funkcija $u_{p,\alpha} \in Har(W \setminus \{p\})$ takva da vrijedi:*

(*a*) *Za svaku okolinu $\mathcal{O}$ točke p, restrikcija $u_{p,\alpha}|(W \setminus \mathcal{O})$ je ograničena.*

(*b*) *Vrijedi*

$$\lim_{q \to p} \left[u_{p,\alpha}(q) - Re \frac{1}{z(q) - z(p)} \right] = 0.$$

Da bismo ovaj teorem dokazali, dokazat ćemo najprije niz lema, koje zapravo predstavljaju konstrukciju funkcije $u_{p,\alpha}$.

Neka je W parabolička ili kompaktna Riemannova ploha i $p \in W$ i neka je $\alpha = (U, z)$ holomorfna karta na W takva da je $p \in U$. U toj situaciji za svaki $\rho > 0$ takav da je $\overline{K}(z(p), \rho) \subseteq z(U)$ stavljamo

$$K_{p,\alpha,\rho} = z^{-1}(K(z(p), \rho)), \qquad \overline{K}_{p,\alpha,\rho} = Cl(K_{p,\alpha,\rho}) = z^{-1}(\overline{K}(z(p), \rho)),$$

$$S_{p,\alpha,\rho} = \partial K_{p,\alpha,\rho} = \overline{K}_{p,\alpha,\rho} \setminus K_{p,\alpha,\rho} = z^{-1}(S(z(p), \rho)).$$

Nadalje, uz te oznake definiramo $P_{p,\alpha,\rho}$ kao skup svih funkcija $v \in Sub(W \setminus \overline{K}_{p,\alpha,\rho})$ sa sljedeća dva svojstva:

(*a*) Funkcija v je odozgo ograničena.

(*b*) Za svako $\varepsilon > 0$ postoji okolina $\mathcal{O}$ od $\overline{K}_{p,\alpha,\rho}$ u U takva da vrijedi

$$q \in \mathcal{O} \setminus \overline{K}_{p,\alpha,\rho} \qquad \Longrightarrow \qquad v(q) - \mathrm{Re}\, \frac{1}{z(q) - z(p)} \leq \varepsilon.$$

Napomenimo da se ništa ne gubi na općenitosti, ali se dobiva na jednostavnosti zapisa, ako u daljnjim razmatranjima pretpostavljamo da je $z(p) = 0$; tu situaciju iz opće dobivamo jednostavnom zamjenom koordinatne funkcije z s novom koordinatnom funkcijom $q \mapsto z(q) - z(p)$. Uz dodatnu pretpostavku $z(p) = 0$ naše definicije postaju: za $\rho > 0$ takav da je $\overline{K}(0, \rho) \subseteq z(U)$ je

$$K_{p,\alpha,\rho} = z^{-1}(K(0, \rho)), \qquad \overline{K}_{p,\alpha,\rho} = Cl(K_{p,\alpha,\rho}) = z^{-1}(\overline{K}(0, \rho)),$$
$$S_{p,\alpha,\rho} = \partial K_{p,\alpha,\rho} = \overline{K}_{p,\alpha,\rho} \setminus K_{p,\alpha,\rho} = z^{-1}(S(0, \rho)).$$

Nadalje, tada je $P_{p,\alpha,\rho}$ skup svih funkcija $v \in Sub(W \setminus \overline{K}_{p,\alpha,\rho})$ sa sljedeća dva svojstva:

(a) Funkcija v je odozgo ograničena.

(b) Za svako $\varepsilon > 0$ postoji okolina $\mathcal{O}$ od $\overline{K}_{p,\alpha,\rho}$ u U takva da vrijedi

$$q \in \mathcal{O} \setminus \overline{K}_{p,\alpha,\rho} \qquad \Longrightarrow \qquad v(q) - \operatorname{Re} \frac{1}{z(q)} \leq \varepsilon.$$

Lema 11.1. *$P_{p,\alpha,\rho}$ je Perronov skup na $W \setminus \overline{K}_{p,\alpha,\rho}$.*

Dokaz: Kao što smo spomenuli, pretpostavljat ćemo da je $z(p) = 0$. Svaka konstanta $\leq -\dfrac{1}{\rho}$ je očigledno element od $P_{p,\alpha,\rho}$, dakle je $P_{p,\alpha,\rho} \neq \emptyset$.

($P1$) Ako funkcije v_1 i v_2 zadovoljavaju uvjete (a) i (b) onda te uvjete očito zadovoljava i funkcija $\max(v_1, v_2)$. Dakle,

$$v_1, v_2 \in P_{p,\alpha,\rho} \qquad \Longrightarrow \qquad \max(v_1, v_2) \in P_{p,\alpha,\rho}.$$

($P2$) Neka je $v \in P_{p,\alpha,\rho}$ i $q_1 \in W \setminus \overline{K}_{p,\alpha,\rho}$ i neka je $\alpha_1 = (U_1, z_1)$ holomorfna karta na W takva da je $q_1 \in U_1 \subseteq W \setminus \overline{K}_{p,\alpha,\rho}$. Stavimo $a = z_1(q_1)$. Neka je $r > 0$ takav da je

$$\overline{K}(a, r) \subseteq z_1(U_1) \qquad \text{i} \qquad z_1^{-1}(S(a, r)) \cap v^{-1}(-\infty) = \emptyset$$

i formirajmo funkciju $v^{\alpha_1,q_1,r}$. Treba još dokazati da je $v^{\alpha_1,q_1,r} \in P_{p,\alpha,\rho}$.

(a) Funkcija $v^{\alpha_1,q_1,r}|z_1^{-1}(\overline{K}(a, r))$ je neprekidna, a kako je skup $z_1^{-1}(\overline{K}(a, r))$ kompaktan, ta je funkcija odozgo ograničena. Na komplementu od $z_1^{-1}(\overline{K}(a, r))$ funkcije v i $v^{\alpha_1,q_1,r}$ se podudaraju, pa je i tamo funkcija $v^{\alpha_1,q_1,r}$ odozgo ograničena. Dakle, funkcija $v^{\alpha_1,q_1,r}$ je odozgo ograničena na $W \setminus \overline{K}_{p,\alpha,\rho}$.

(b) Neka je $\varepsilon > 0$. Neka je $\mathcal{O}$ okolina od $\overline{K}_{p,\alpha,\rho}$ u U takva da vrijedi

$$q \in \mathcal{O} \setminus \overline{K}_{p,\alpha,\rho} \qquad \Longrightarrow \qquad v(q) - \operatorname{Re} \frac{1}{z(q)} \leq \varepsilon.$$

Imamo $\overline{K}_{p,\alpha,\rho} \cap z_1^{-1}(\overline{K}(a, r)) = \emptyset$, pa možemo pretpostaviti da smo izabrali okolinu $\mathcal{O}$ dovoljno malu da bude $\mathcal{O} \cap z_1^{-1}(\overline{K}(a, r)) = \emptyset$. Kako se funkcije v i $v^{\alpha_1,q_1,r}$ podudaraju izvan $z_1^{-1}(\overline{K}(a, r))$, one se podudaraju na $\mathcal{O} \setminus \overline{K}_{p,\alpha,\rho}$, pa nalazimo da vrijedi

$$q \in \mathcal{O} \setminus \overline{K}_{p,\alpha,\rho} \qquad \Longrightarrow \qquad v^{\alpha_1,q_1,r}(q) - \operatorname{Re} \frac{1}{z(q)} \leq \varepsilon.$$

Dakle, vrijedi $v^{\alpha_1,q_1,r} \in P_{p,\alpha,\rho}$.

Time je dokazano da je $P_{p,\alpha,\rho}$ Perronov skup na $W \setminus \overline{K}_{p,\alpha,\rho}$.

Uz uvedene oznake stavimo

$$u_{p,\alpha,\rho}(q) = \sup\{v(q);\ v \in P_{p,\alpha,\rho}\}, \qquad q \in W \setminus \overline{K}_{p,\alpha,\rho}.$$

Tada znamo da je ili $u_{p,\alpha,\rho} \equiv +\infty$ ili je $u_{p,\alpha,\rho} \in Har(W \setminus \overline{K}_{p,\alpha,\rho})$.

Lema 11.2. *Neka je W parabolička ili kompaktna Riemannova ploha. Tada je svaka od funkcija $u_{p,\alpha,\rho}$ harmonijska i ograničena. Štoviše, vrijedi*

$$-\frac{1}{\rho} \leq u_{p,\alpha,\rho}(q) \leq \frac{1}{\rho} \qquad \forall q \in W \setminus \overline{K}_{p,\alpha,\rho}.$$

Dokaz: Neka je $\varepsilon > 0$ i neka je $v \in P_{p,\alpha,\rho}$. Izaberimo okolinu $\mathcal{O}$ skupa $\overline{K}_{p,\alpha,\rho}$ u U takvu da vrijedi

$$q \in \mathcal{O} \setminus \overline{K}_{p,\alpha,\rho} \qquad \Longrightarrow \qquad v(q) \leq \varepsilon + \operatorname{Re} \frac{1}{z(q)}.$$

Za svaki $q \in U \setminus \overline{K}_{p,\alpha,\rho} \supseteq \mathcal{O} \setminus \overline{K}_{p,\alpha,\rho}$ je $|z(q)| > \rho$, dakle vrijedi

$$q \in \mathcal{O} \setminus \overline{K}_{p,\alpha,\rho} \qquad \Longrightarrow \qquad v(q) < \varepsilon + \frac{1}{\rho}. \qquad\qquad (*)$$

Pretpostavimo najprije da je ploha W parabolička. Funkcija $v \in P_{p,\alpha,\rho}$ je odozgo ograničena pa po principu maksimuma na $W \setminus \overline{K}_{p,\alpha,\rho}$ iz $(*)$ slijedi

$$v(q) \leq \frac{1}{\rho} \qquad \forall q \in W \setminus \overline{K}_{p,\alpha,\rho}.$$

To vrijedi za svaku funkciju $v \in P_{p,\alpha,\rho}$. Dakle, funkcija $u_{p,\alpha,\rho}$ je harmonijska i vrijedi

$$u_{p,\alpha,\rho}(q) \leq \frac{1}{\rho} \qquad \forall q \in W \setminus \overline{K}_{p,\alpha,\rho}.$$

Neka je sada ploha W kompaktna. Tada možemo uzeti da je okolina $\mathcal{O}$ kompaktna. Stavimo $\Omega = W \setminus \mathcal{O}$, $K = Cl(\Omega)$, $\partial\Omega = K \setminus \Omega \subseteq \mathcal{O}$. Tada je prema $(*)$

$$v(q) \leq \varepsilon + \frac{1}{\rho} \qquad \forall q \in \partial\Omega,$$

a kako je $K = Cl(\Omega)$ kompaktan skup, iz korolara 9.1. slijedi da je

$$v(q) \leq \varepsilon + \frac{1}{\rho} \qquad \forall q \in \Omega. \qquad\qquad (**)$$

Budući da je $\Omega \cup \mathcal{O} = W$, to je $\Omega \cup (\mathcal{O} \setminus \overline{K}_{p,\alpha,\rho}) = W \setminus \overline{K}_{p,\alpha,\rho}$, pa zbog $(*)$ i $(**)$ imamo

$$v(q) \leq \varepsilon + \frac{1}{\rho} \qquad \forall q \in W \setminus \overline{K}_{p,\alpha,\rho} \quad \text{i} \quad \forall v \in P_{p,\alpha,\rho}.$$

Stoga je

$$u_{p,\alpha,\rho}(q) \leq \varepsilon + \frac{1}{\rho} \qquad \forall q \in W \setminus \overline{K}_{p,\alpha,\rho}.$$

Međutim, $\varepsilon > 0$ je bio proizvoljan, pa zaključujemo da vrijedi

$$u_{p,\alpha,\rho}(q) \leq \frac{1}{\rho} \qquad \forall q \in W \setminus \overline{K}_{p,\alpha,\rho}.$$

Time je desna nejednakost u tvrdnji leme dokazana i za paraboličku i za kompaktnu Riemannovu plohu W.

Napokon, budući da je konstanta $-\dfrac{1}{\rho}$ očito element Perronovog skupa $P_{p,\alpha,\rho}$, slijedi i

$$u_{p,\alpha,\rho}(q) \geq -\frac{1}{\rho} \qquad \forall q \in W \setminus \overline{K}_{p,\alpha,\rho}.$$

Lema 11.3. *Neka je $f : S_{p,\alpha,\rho} \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija. Postoji ograničena neprekidna funkcija $v : W \setminus K_{p,\alpha,\rho} \to \mathbb{R}$, takva da je $v|(W \setminus \overline{K}_{p,\alpha,\rho}) \in Sub(W \setminus \overline{K}_{p,\alpha,\rho})$ i $v|S_{p,\alpha,\rho} = f$.*

Dokaz: Stavimo

$$\Omega = z(U), \qquad f_1 = f \circ z^{-1} : S(0,\rho) \to \mathbb{R}, \qquad m = \min\{f_1(z);\ z \in S(0,\rho)\}.$$

Neka je $r > \rho$ takav da je $\overline{K}(0,r) \subseteq \Omega$. Prema korolaru 7.3. i odlomku iza njega postoji neprekidna funkcija $u : \overline{K}(0,r) \setminus K(0,\rho) \to \mathbb{R}$ takva da vrijedi

$$u|(K(0,r) \setminus \overline{K}(0,\rho)) \in Har(K(0,r) \setminus \overline{K}(0,\rho)), \qquad u|S(0,\rho) = f_1, \qquad u|S(0,r) \equiv m.$$

Definiramo neprekidnu funkciju $v_1 : \Omega \setminus K(0,\rho) \to \mathbb{R}$ sa

$$v_1(z) = \begin{cases} u(z) & \text{ako je } z \in \overline{K}(0,r) \setminus K(0,\rho) \\ \\ m & \text{ako je } z \in \Omega \setminus \overline{K}(0,r). \end{cases}$$

Tada su restrikcije $v_1|(K(0,r) \setminus \overline{K}(0,\rho))$ i $v_1|(\Omega \setminus \overline{K}(0,r))$ harmonijske. Prema tome, restrikcija $v_1|((\Omega \setminus \overline{K}(0,\rho)) \setminus S(0,r))$ je harmonijska, a time i subharmonijska. Da bismo dokazali da je restrikcija $v_1|(\Omega\setminus\overline{K}(0,\rho))$ subharmonijska, treba još dokazati da vrijede nejednakosti iz svojstva (a) u teoremu 7.1. za svaku točku $a \in S(0,r)$. Za $a \in S(0,r)$ imamo $v_1(a) = m$. Za $z \in \overline{K}(0,r)\setminus K(0,\rho)$ je

$$v_1(z) \geq \min\{v_1(\zeta);\ \zeta \in S(0,\rho) \cup S(0,r)\} = m.$$

Za $z \in \Omega \setminus \overline{K}(0,r)$ je $v_1(z) = m$. Prema tome, vrijedi

$$v_1(z) \geq m \qquad \forall z \in \Omega \setminus K(0,\rho).$$

Dakle, ako je $s > 0$ takav da je $\overline{K}(a,s) \subseteq \Omega \setminus \overline{K}(0,\rho)$, tada je

$$v_1(a) = m \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v_1(a + s\mathrm{e}^{it})\mathrm{d}t.$$

Time je dokazano da je restrikcija $v_1|(\Omega \setminus \overline{K}(0,\rho))$ subharmonijska funkcija.

Definiramo sada neprekidnu funkciju $v : W \setminus K_{p,\alpha,\rho} \to \mathbb{R}$ sa

$$v(q) = \begin{cases} v_1(z(q)) & \text{ako je } q \in U \setminus K_{p,\alpha,\rho} \\ \\ m & \text{ako je } q \in W \setminus U. \end{cases}$$

Tada je funkcija v ograničena, $v|(W \setminus \overline{K}_{p,\alpha,\rho})$ je subharmonijska i $v|S_{p,\alpha,\rho} = f$.

Lema 11.4. *Ako je W parabolička ili kompaktna Riemannova ploha, za svaku točku $q_0 \in S_{p,\alpha,\rho}$ vrijedi*

$$\lim_{q \to q_0} u_{p,\alpha,\rho}(q) = Re\,\frac{1}{z(q_0) - z(p)}.$$

Dokaz: Kao i prije možemo pretpostavljati da je $z(p) = 0$. Prema lemi 11.3. postoji neprekidna i ograničena funkcija $v_1 : W \setminus K_{p,\alpha,\rho} \to \mathbb{R}$ takva da je

$$v_1|(W \setminus \overline{K}_{p,\alpha,\rho}) \in Sub(W \setminus \overline{K}_{p,\alpha,\rho}) \qquad \text{i} \qquad v_1(q) = \mathrm{Re}\,\frac{1}{z(q)} \quad \forall q \in S_{p,\alpha,\rho}.$$

Tada je očito $v_1|(W \setminus \overline{K}_{p,\alpha,\rho}) \in P_{p,\alpha,\rho}$. Prema tome je

$$u_{p,\alpha,\rho}(q) \geq v_1(q) \qquad \forall q \in W \setminus \overline{K}_{p,\alpha,\rho}. \qquad (1)$$

Neka je sada $v_2 : W \setminus K_{p,\alpha,\rho} \to \mathbb{R}$ neprekidna i ograničena funkcija takva da je

$$v_2|(W \setminus \overline{K}_{p,\alpha,\rho}) \in Sub(W \setminus \overline{K}_{p,\alpha,\rho}) \qquad \text{i} \qquad v_2(q) = -\operatorname{Re}\frac{1}{z(q)}, \quad \forall q \in S_{p,\alpha,\rho}.$$

Neka je $v \in P_{p,\alpha,\rho}$ proizvoljna. Tvrdimo da je tada

$$v(q) + v_2(q) \leq 0 \qquad \forall q \in W \setminus \overline{K}_{p,\alpha,\rho}. \qquad (2)$$

Neka je $\delta > 0$. Tada postoji okolina $\mathcal{O}$ skupa $\overline{K}_{p,\alpha,\rho}$ takva da vrijedi

$$q \in \mathcal{O} \setminus \overline{K}_{p,\alpha,\rho} \qquad \Longrightarrow \qquad v(q) \leq \operatorname{Re}\frac{1}{z(q)} + \frac{\delta}{2} \quad \text{i} \quad v_2(q) \leq -\operatorname{Re}\frac{1}{z(q)} + \frac{\delta}{2}.$$

Dakle,

$$q \in \mathcal{O} \setminus \overline{K}_{p,\alpha,\rho} \qquad \Longrightarrow \qquad v(q) + v_2(q) \leq \delta. \qquad (3)$$

Ako je ploha W parabolička, zbog principa maksimuma na $W \setminus \overline{K}_{p,\alpha,\rho}$ iz (3) slijedi (2) jer je funkcija $v + v_2$ ograničena. Pretpostavimo sada da je ploha W kompaktna. Možemo pretpostaviti da je okolina $\mathcal{O}$ kompkatna. Tada korolar 9.1., primijenjen na $W \setminus \mathcal{O}$ i na funkciju $v + v_2$, daje

$$v(q) + v_2(q) \leq \delta \qquad \forall q \in W \setminus \overline{K}_{p,\alpha,\rho} \quad \text{i} \quad \forall \delta > 0.$$

Prema tome, opet dobivamo (2). Iz (2) slijedi

$$u_{p,\alpha,\rho}(q) \leq -v_2(q) \qquad \forall q \in W \setminus \overline{K}_{p,\alpha,\rho}. \qquad (4)$$

Budući da za $q_0 \in S_{p,\alpha,\rho}$ vrijedi

$$\lim_{q \to q_0} v_1(q) = -\lim_{q \to q_0} v_2(q) = \operatorname{Re}\frac{1}{z(q_0)},$$

iz (1) i (4) slijedi tvrdnja leme.

Prema prethodnoj lemi u slučaju paraboličke ili kompaktne Riemannove plohe W, za točku $p \in W$, za holomorfnu kartu $\alpha = (U, z)$ na W takvu da je $p \in U$ i za $\rho > 0$ takav da je $\overline{K}(z(p), \rho) \subseteq z(U)$, funkcija $u_{p,\alpha,\rho} \in Har(W \setminus \overline{K}_{p,\alpha,\rho})$ definirana prije leme 11.2. može se proširiti do neprekidne funkcije sa $W \setminus K_{p,\alpha,\rho}$ u $\mathbb{R}$, koju ćemo označavati istim znakom $u_{p,\alpha,\rho}$, tako da stavimo

$$u_{p,\alpha,\rho}(q) = \operatorname{Re}\frac{1}{z(q) - z(p)}, \qquad q \in S_{p,\alpha,\rho}.$$

Generalizirat ćemo sada Harnackov teorem, odnosno, teorem 6.5. koji je općenitija verzija Harnackovog teorema, na slučaj Riemannovih ploha.

Teorem 11.2. (**Harnack**) *Neka je W Riemannova ploha, neka je S usmjeren skup i neka su $\Omega_s \subseteq W$, $s \in S$, i $\Omega \subseteq W$ područja. Nadalje, neka je za svaki $s \in S$ zadana $u_s \in Har(\Omega_s)$. Pretpostavimo da za svaku točku $q_0 \in \Omega$ postoji $s_0 \in S$ i otvorena okolina $U \subseteq \Omega$ točke q_0 tako da su ispunjena sljedeća dva uvjeta:*

(*a*) $\forall s \in S,\ s \geq s_0 \implies U \subseteq \Omega_s$, (*b*) $\forall t, s \in S,\ t \geq s \geq s_0 \implies u_s(q) \leq u_t(q)\ \forall q \in U$.

Tada vrijedi jedna od sljedećih dviju mogućnosti:

(1) *Za svaku točku* $q \in \Omega$ *hiperniz* $(u_s(q))_{s\in S}$ *konvergira prema* $+\infty$ *i ta je konvergencija lokalno uniformna na* Ω.

(2) *Hiperniz funkcija* $(u_s)_{s\in S}$ *konvergira lokalno uniformno na* Ω *prema funkciji* $u \in Har(\Omega)$.

Dokaz: U slučaju $W = \mathbb{C}$ to je upravo Harnackov teorem 6.5. U općem slučaju stavimo

$$u(q) = \lim_{s\in S} u_s(q) = \sup\{u_s(q);\ s \in S\},$$

$$A = \{q \in \Omega;\ u(q) = +\infty\}, \qquad B = \Omega \setminus A = \{q \in \Omega;\ u(q) < +\infty\}.$$

Prelaskom na situaciju u bilo kojoj holomorfnoj karti oko točke $q \in A$ ili $q \in B$ iz teorema 6.5. jednostavno slijedi da su i A i B otvoreni podskupovi od Ω, dakle, ili je $A = \Omega$ ili $B = \Omega$. Nadalje, pomoću karte nalazimo da svaka točka $q \in \Omega$ ima okolinu $\mathcal{O}$ na kojoj hiperniz restrikcija $(u_s|\mathcal{O})_{s\geq s_0}$ konvergira uniformno. Dakle, u slučaju $A = \Omega$ hiperniz $(u_s)_{s\in S}$ konvergira lokalno uniformno prema $+\infty$, a u slučaju $B = \Omega$ vrijedi $u \in Har(\Omega)$ i hiperniz $(u_s)_{s\in S}$ konvergira lokalno uniformno na Ω prema funkciji u.

Korolar 11.1. *Neka je* W *Riemannova ploha,* K *kompaktan podskup od* W *s nepraznom nutrinom i povezanim komplementom* $W \setminus K$*,* $\mathcal{F}$ *neki skup područja* $U \subseteq W$ *koja sadrže skup* K*. Pretpostavimo da je skup* $\mathcal{F}$ *usmjeren skup u odnosu na uređaj pomoću inkluzije* (*tj. da za bilo koje* $U, V \in \mathcal{F}$ *postoji* $T \in \mathcal{F}$ *takav da je* $U \cup V \subseteq T$) *i da je* $\mathcal{F}$ *pokrivač od* W*. Neka je* ω *harmonijska mjera od* W *u odnosu na* K *i za* $U \in \mathcal{F}$ *neka je* ω_U *harmonijska mjera od* U *u odnosu na* K*. Tada hiperniz* $(\omega_U)_{U\in\mathcal{F}}$ *konvergira lokalno uniformno na* $W \setminus K$ *prema* ω.

Dokaz: Prema teoremu 11.2. hiperniz $(\omega_U)_{U\in\mathcal{F}}$ konvergira lokalno uniformno na $W \setminus K$ prema nekoj funkciji $u \in Har(W \setminus K)$. Za $U \in \mathcal{F}$ vrijedi $\omega_U(q) \leq \omega(q)\ \forall q \in U \setminus K$. Odatle slijedi da je $u \leq \omega$ svuda na $W \setminus K$.

Neka je kao i prije sa P_K označen Perronov skup na $W \setminus K$ preko kojeg dolazimo do harmonijske mjere ω. Neka je $q \in W \setminus K$ i $\varepsilon > 0$. Neka je $v \in P_K$ takva da je $v(q) \geq \omega(q) - \varepsilon$. Tada postoji $U \in \mathcal{F}$ takvo da je $q \in U$ i da je restrikcija $v|(U \setminus K)$ element Perronovog skupa $P_{U,K}$ na skupu $U \setminus K$. Dakle, vrijedi $\omega_U(q) \geq v(q)$. Slijedi

$$u(q) \geq \omega_U(q) \geq v(q) \geq \omega(q)/\varepsilon.$$

Kako je $\varepsilon > 0$ bio proizvoljan, slijedi $u(q) \geq \omega(q)$. Budući da je točka $q \in W \setminus K$ bila proizvoljna, slijedi da je $u(q) \geq \omega$ svuda na $W \setminus K$. Prema tome je $u = \omega$.

Dokažimo sada jednu varijantu principa maksimuma za subharmonijske funkcije.

Lema 11.5. *Neka je* W *Riemannova ploha,* $\Omega \subseteq W$ *otvoren skup čiji je zatvarač* $C = Cl(\Omega)$ *u* W *kompaktan,* $\partial\Omega = C \setminus \Omega$ *rub skupa* Ω *u* W*,* Γ *gust podskup od* $\partial\Omega$*,* $\Omega' = \Omega \cup \Gamma$ *i neka je* $f : \Omega' \to [-\infty, +\infty\rangle$ *neprekidna funkcija takva da je* $f|\Omega \in Sub(\Omega)$ *i da je* $f|\Gamma \leq 0$*. Tada je* $f \leq 0$.

Dokaz: Izaberimo $\varepsilon > 0$. Za $p \in \Gamma$ neka je $\mathcal{O}_p$ kompaktna okolina točke p u W takva da vrijedi

$$q \in \Omega \cap \mathcal{O}_p \qquad \Longrightarrow \qquad f(q) \leq \varepsilon.$$

Budući da je Γ gust podskup od $\partial\Omega$, nutrine skupova $\mathcal{O}_p$, $p \in \Gamma$, tvore otvoren pokrivač kompaktnog skupa $\partial\Omega$. Stoga postoje točke $p_1, \ldots, p_n \in \Gamma$ takve da je

$$\Gamma \subseteq Int(\mathcal{O}_{p_1}) \cup \cdots \cup Int(\mathcal{O}_{p_n}).$$

Tada je

$$\partial\Omega \subseteq Int(\mathcal{O}_{p_1} \cup \cdots \cup \mathcal{O}_{p_n}).$$

Stavimo

$$U = \Omega \setminus (\mathcal{O}_{p_1} \cup \cdots \cup \mathcal{O}_{p_n}), \qquad K = Cl(U).$$

Tada je U otvoren skup i njegov zatvarač K je kompaktan. Neka je $\partial U = K \setminus U$ rub skupa U. Za točku $q \in \partial U$ neka je $(q_m)_{m\in\mathbb{N}}$ niz u U takav da je

$$q = \lim_{q\to\infty} q_m.$$

Tada imamo

$$q_m \notin \mathcal{O}_{p_j} \qquad \forall m \in \mathbb{N} \text{ i } \forall j \in \{1, \ldots, n\}$$

pa slijedi $q \notin \partial\Omega$. Time je dokazano $\partial U \subseteq C \setminus \partial\Omega = \Omega$, a kako je $\partial U \cap U = \emptyset$, slijedi

$$\partial U \subseteq \Omega \setminus U = \mathcal{O}_{p_1} \cup \cdots \cup \mathcal{O}_{p_n}.$$

Nadalje, $K = U \cup \partial U \subseteq \Omega$. Funkcija $f|K : K \to \mathbb{R}$ je neprekidna, $f|U \in Sub(U)$ i $f|\partial U \leq \varepsilon$. Odatle i iz korolara 9.1. slijedi

$$f|U = f[\Omega \setminus (\mathcal{O}_{p_1} \cup \cdots \cup \mathcal{O}_{p_n})] \leq \varepsilon.$$

Kako je i

$$f|[\Omega \cap (\mathcal{O}_{p_1} \cup \cdots \cup \mathcal{O}_{p_n})] \leq \varepsilon,$$

slijedi $f|\Omega \leq \varepsilon$. Budući da je $\varepsilon > 0$ bio proizvoljan, slijedi $f|\Omega \leq 0$.

U daljnjem sa $A : \langle 0, +\infty\rangle \to \mathbb{R}$ označavamo striktno rastuću funkciju

$$A(r) = \frac{4}{\pi} \operatorname{arc\,tg} r.$$

Tada je

$$\lim_{r\to 0} A(r) = 0 \qquad \text{i} \qquad \lim_{r\to +\infty} A(r) = 2.$$

Lema 11.6. *Neka su $0 < \rho < R < +\infty$ i neka su $\overline{K}(0, \rho, R)$ i $K(0, \rho, R)$ zatvoren i otvoren kružni vijenac u $\mathbb{C}$:*

$$\overline{K}(0, \rho, R) = \overline{K}(0, R) \setminus K(0, \rho) = \{z \in \mathbb{C};\ \rho \leq |z| \leq R\},$$
$$K(0, \rho, R) = K(0, R) \setminus \overline{K}(0, \rho) = \{z \in \mathbb{C};\ \rho < -|z| < R\}.$$

Nadalje, neka je $u : \overline{K}(0, \rho, R) \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija takva da je restrikcija $u|K(0, \rho, R)$ harmonijska i da je restrikcija $u|S(0, \rho)$ na unutarnji dio ruba konstantna. Stavimo

$$S_r(u) = \max\{u(z);\ z \in S(0, r)\} - \min\{u(z);\ z \in S(0, r)\}, \qquad \rho \leq r \leq R.$$

Tada vrijedi

$$S_r(u) \leq A\left(\frac{r}{R}\right) S_R(u) \qquad \forall r \in [\rho, R].$$

Dokaz: Zamjena varijable $z \mapsto \zeta = \dfrac{z}{R}$ svodi lemu na slučaj $R = 1$. U tom slučaju treba dokazati da je

$$S_r(u) \le A(r) S_1(u) \qquad \forall r \in [\rho, 1].$$

Fiksirajmo $r \in \langle \rho, 1\rangle$. Rotacijom (tj. množenjem varijable s konstantom modula 1) možemo postići da za neku točku $z_0 \in S(0,r)$ vrijedi

$$\max\{u(z);\ z \in S(0,r)\} = u(z_0), \qquad \min\{u(z);\ z \in S(0,r)\} = u(\overline{z_0}).$$

Stavimo:

$$\Omega = \{z \in \mathbb{C};\ \rho < |z| < 1,\ \mathrm{Im}\, z > 0\}, \quad C = Cl(\Omega) = \{z \in \mathbb{C};\ \rho \le |z| \le 1,\ \mathrm{Im}\, z \ge 0\},$$

$$\partial\Omega = C \setminus \Omega = [-1, -\rho] \cup \{\rho \mathrm{e}^{i\varphi};\ 0 < \varphi < \pi\} \cup [\rho, 1] \cup \{\mathrm{e}^{i\varphi};\ 0 < \varphi < \pi\}.$$

Tada je skup Ω otvoren, C je kompaktan i $\partial\Omega$ je rub od Ω. Definiramo neprekidnu funkciju $v : C \to \mathbb{R}$ sa

$$v(z) = u(z) - u(\overline{z}).$$

Tada je restrikcija $v|\Omega$ harmonijska. Nadalje, imamo

$$v(z) = 0 \qquad \text{za} \quad z \in [-1, -\rho] \cup [\rho, 1] \cup \{\rho \mathrm{e}^{i\varphi};\ 0 < \varphi < \pi\},$$

$$v(z) \le S_1(u) \qquad \text{za} \quad z \in \{\mathrm{e}^{i\varphi};\ 0 < \varphi < \pi\} \qquad \text{i} \qquad v(z_0) = S_r(u).$$

Stavimo $\Gamma = \partial\Omega \setminus \{-1, 1\}$ i $\Omega' = \Omega \cup \Gamma$ i definiramo $w : \Omega' \to \mathbb{R}$ sa

$$w(z) = \begin{cases} \mathrm{arc\,tg}\, \dfrac{2\,\mathrm{Im}\, z}{1 - |z|^2} & \text{ako je } z \in \Omega',\ |z| < 1 \\[2ex] \dfrac{\pi}{2} & \text{ako je } z \in \Omega',\ |z| = 1. \end{cases}$$

Lako se vidi da je funkcija w neprekidna, a direktna provjera pokazuje da je $w|\Omega$ harmonijska. Imamo

$$w(z) = \frac{\pi}{2} \qquad \text{za } z \in \{\mathrm{e}^{i\varphi};\ 0 < \varphi < \pi\},$$

$$w(z) = 0 \qquad \text{za } z \in \langle -1, -\rho] \cup [\rho, 1\rangle,$$

$$w(z) > 0 \qquad \text{za } z \in \{\rho \mathrm{e}^{i\varphi};\ 0 < \varphi < \pi\}.$$

Definiramo funkciju $f : \Omega' \to \mathbb{R}$ sa

$$f(z) = v(z) - \frac{2}{\pi} S_1(u) w(z).$$

Funkcija f je neprekidna, restrikcija $f|\Omega$ je harmonijska i $f|\Gamma \le 0$. Prema lemi 11.5. tada vrijedi $f \le 0$. Posebno, dobivamo

$$v(z_0) \le \frac{2}{\pi}\, S_1(u)\, w(z_0) \le \frac{2}{\pi}\, S_1(u) \max\{w(z);\ |z| = r,\ \mathrm{Im}\, z \ge 0\} =$$

$$= \frac{2}{\pi}\, w(ir)\, S_1(u) = \frac{2}{\pi}\, S_1(u)\, \mathrm{arc\,tg}\, \frac{2r}{1 - r^2} = \frac{4}{\pi}\, S_1(u)\, \mathrm{arc\,tg}\, r.$$

Dakle,

$$S_r(u) = v(z_0) \le A(r) S_1(u)$$

i time je lema dokazana.

U daljnjem ćemo pretpostavljati da je W parabolička ili kompaktna Riemannova ploha, $p \in W$ i da je $\alpha = (U, z)$ holomorfna karta na W takva da je $p \in U$. Neka je $R > 0$ takav da vrijedi $\overline{K}(z(p), R) \subseteq z(U)$. Tada je za svaki $\rho \in \langle 0, R]$ definirana neprekidna funkcija

$$u_{p,\alpha,\rho} : W \setminus K_{p,\alpha,\rho} \to \mathbb{R}$$

takva da je

$$u_{p,\alpha,\rho}|(W \setminus \overline{K}_{p,\alpha,\rho}) \in Har(W \setminus \overline{K}_{p,\alpha,\rho}) \quad \text{i} \quad u_{p,\alpha,\rho}(q) = \operatorname{Re} \frac{1}{z(q) - z(p)} \text{ za } q \in S_{p,\alpha,\rho}.$$

Stavimo u daljnjem $\Omega = z(U)$ i za $\rho \in \langle 0, R]$ neka je $u_\rho : \Omega \setminus K(z(p), \rho) \to \mathbb{R}$ funkcija definirana sa

$$u_\rho(\zeta) = (u_{p,\alpha,\rho} \circ z^{-1})(\zeta).$$

Tada je funkcija u_ρ neprekidna i vrijedi

$$u_\rho|(\Omega \setminus \overline{K}(z(p), \rho)) \in Har(\Omega \setminus \overline{K}(z(p), \rho)) \qquad \text{i} \qquad u_\rho(z) = \operatorname{Re} \frac{1}{z - z(p)} \quad \forall z \in S(0, \rho).$$

Lema 11.7. *Funkcije u_ρ zadovoljavaju*

$$\int_0^{2\pi} u_\rho(z(p) + r e^{it})\, dt = 0, \qquad 0 < \rho \le r \le R.$$

Skica dokaza: Kao i prije, bez smanjenja općenitosti možemo pretpostavljati da je $z(p) = 0$. Nadalje, dijeljenjem koordinatne funkcije sa R dobivamo situaciju da je $\overline{K}(0, 1) \subseteq z(U)$. Tada je neprekidna funkcija $u_{p,\alpha,\rho} : W \setminus K_{p,\alpha,\rho} \to \mathbb{R}$ definirana za svaki $\rho \in \langle 0, 1]$ i vrijedi

$$u_{p,\alpha,\rho}|(W \setminus \overline{K}_{p,\alpha,\rho}) \in Har(W \setminus \overline{K}_{p,\alpha,\rho}) \qquad \text{i} \qquad u_{p,\alpha,\rho}(q) = \operatorname{Re} \frac{1}{z(q)} \text{ za } q \in S_{p,\alpha,\rho}.$$

Dakle, neprekidna funkcija $u_\rho : \Omega \setminus K(0, \rho) \to \mathbb{R}$ definirana je za svaki $\rho \in \langle 0, 1]$ i vrijedi

$$u_\rho|(\Omega \setminus \overline{K}(0, \rho)) \in Har(\Omega \setminus \overline{K}(0, \rho)) \qquad \text{i} \qquad u_\rho(z) = \operatorname{Re} \frac{1}{z} \quad \forall z \in S(0, \rho).$$

U toj situaciji treba dokazati da funkcije u_ρ zadovoljavaju

$$\int_0^{2\pi} u_\rho(r\mathrm{e}^{it})\mathrm{d}t = 0, \qquad 0 < \rho \le r \le 1.$$

Za $\rho = r = 1$ tvrdnja leme je trivijalna, jer je $u_1(\mathrm{e}^{it}) = \cos t$. Fiksirajmo $\rho \in \langle 0, 1\rangle$ i definirajmo funkciju $F : [\rho, 1] \to \mathbb{R}$ sa

$$F(r) = \int_0^{2\pi} u_\rho(r\mathrm{e}^{it})\mathrm{d}t.$$

Funkcija u_ρ je neprekidna i restrikcija $u_\rho|(K(0,1) \setminus \overline{K}(0, \rho))$ je harmonijska, dakle klase C^∞. Odatle slijedi da je funkcija F neprekidna i da je restrikcija $F|\langle \rho, 1\rangle$ klase C^∞. Nadalje, za svaki $k \in \mathbb{N}$ možemo $k-$tu derivaciju računati deriviranjem pod znakom integrala:

$$F^{(k)}(r) = \int_0^{2\pi} \frac{\partial^k}{\partial r^k} u_\rho(r\mathrm{e}^{it})\mathrm{d}t.$$

Imamo

$$0 = (\Delta u_\rho)(r\mathrm{e}^{it}) = \frac{\partial^2}{\partial r^2} u_\rho(r\mathrm{e}^{it}) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} u_\rho(r\mathrm{e}^{it}) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} u_\rho(r\mathrm{e}^{it}),$$

pa slijedi

$$F''(r) + \frac{1}{r}F'(r) = \int_0^{2\pi} \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} u_\rho(r\mathrm{e}^{it}) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} u_\rho(r\mathrm{e}^{it})\right] \mathrm{d}t =$$

$$= -\frac{1}{r^2}\int_0^{2\pi} \frac{\partial^2}{\partial t^2} u_\rho(r\mathrm{e}^{it})\mathrm{d}t = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial t} u_\rho(r\mathrm{e}^{it})\Big|_0^{2\pi} = 0.$$

Iz gornje homogene diferencijalne jednadžbe za funkciju F slijedi da za neke $a, b \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$F(r) = a + b \ln r.$$

Imamo

$$u_\rho(\rho \mathrm{e}^{it}) = \frac{1}{\rho}\cos t,$$

pa je

$$F(\rho) = \frac{1}{\rho}\int_0^{2\pi} \cos t \mathrm{d}t = 0.$$

Stoga je

$$a + b\ln \rho = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad a = -b \ln \rho \qquad \Longrightarrow \qquad F(r) = b \ln \frac{r}{\rho}.$$

Nadalje,

$$F'(r) = \frac{b}{r} \qquad \Longrightarrow \qquad F'(\rho) = \frac{b}{\rho}.$$

Može se dokazati da je tada $F'(\rho) = 0$. Tada slijedi da je $b = 0$, a odatle je $F(r) = 0\ \forall r \in [\rho, 1]$, što je upravo tvrdnja leme. Dokaz činjenice da je $F'(\rho) = 0$ izostavljamo, jer je izrazito zaobilazan i koristi Greenovu formulu za površinske integrale po područjima u Riemannovoj plohi s glatkim rubom. Naime, bio nam nužan priličan angažman za uvođenje integralnog računa po područjima i po glatkim krivuljama na Riemannovoj plohi, a pogotovo za dokaz Stokesovog teorema i s njim povezane Greenove formule.

Lema 11.8. *Neka je W parabolička ili kompaktna Riemannova ploha, $\alpha = (U, z)$ holomorfna karta na W i $p \in U$. Postoji $u_{p,\alpha} \in Har(W \setminus \{p\})$ takva da za svaku točku $q \in W \setminus \{p\}$ vrijedi*

$$\lim_{\rho \to 0} u_{p,\alpha,\rho}(q) = u_{p,\alpha}(q). \qquad (*)$$

Nadalje, neka je $R > 0$ takav da je $\overline{K}(z(p), R) \subseteq z(U)$. Tada vrijedi:

(a) Konvergencija u $(*)$ je uniformna na $W \setminus K_{p,\alpha,r}$ $\forall r \in \langle 0, R]$.

(b) Restrikcija $u_{p,\alpha}|(W \setminus K_{p,\alpha,r})$ je ograničena $\forall r \in \langle 0, R]$

(c) $\displaystyle\lim_{q \to p}\left[u_{p,\alpha}(q) - Re\,\frac{1}{z(q) - z(p)}\right] = 0.$

Dokaz: Kao i prije, bez smanjenja općenitosti možemo pretpostavljati da je $z(p) = 0$ i da je $R = 1$.

Izaberimo $\rho \in \langle 0, 1\rangle$ i primijenimo lemu 11.6. na funkciju $u_\rho - \mathrm{Re}\,\frac{1}{z}$:

$$S_r\Big(u_\rho - \mathrm{Re}\,\frac{1}{z}\Big) \le A(r) S_1\Big(u_\rho - \mathrm{Re}\,\frac{1}{z}\Big) \qquad \forall r \in [\rho, 1].$$

Imamo

$$S_r\Big(u_\rho - \mathrm{Re}\,\frac{1}{z}\Big) \geq S_r(u_\rho) - S_r\Big(\mathrm{Re}\,\frac{1}{z}\Big) = S_r(u_\rho) - \frac{2}{r}$$

i

$$S_1\Big(u_\rho - \mathrm{Re}\,\frac{1}{z}\Big) \leq S_1(u_\rho) + S_1\Big(-\mathrm{Re}\,\frac{1}{z}\Big) = S_1(u_\rho) + 2.$$

Dakle, vrijedi

$$S_r(u_\rho) \leq \frac{2}{r} + A(r)[S_1(u_\rho) + 2], \qquad 0 < \rho \leq r \leq 1.$$

Promatrajmo restrikciju $u_{p,\alpha,\rho}|(W \setminus K_r)$. Ona dostiže svoj maksimum i minimum na S_r. Prema tome, vrijedi

$$\max_{S_1} u_{p,\alpha,\rho} \leq \max_{S_r} u_{p,\alpha,\rho} \qquad \text{i} \qquad \min_{S_1} u_{p,\alpha,\rho} \geq \min_{S_r} u_{p,\alpha,\rho}.$$

Odatle je

$$S_1(u_\rho) \leq S_r(u_\rho), \qquad 0 < \rho \leq r \leq 1.$$

Prema tome,

$$S_1(u_\rho) \leq \frac{2}{r} + A(r)[S_1(u_\rho) + 2],$$

a odatle

$$S_1(u_\rho) \leq 2\,\frac{A(r) + \frac{1}{r}}{1 - A(r)}, \qquad 0 < \rho \leq r \leq 1.$$

Fiksirajmo $r_0 \in \langle 0, 1\rangle$ i stavimo

$$C = \frac{A(r_0) + \frac{1}{r_0}}{1 - A(r_0)}.$$

Tada imamo

$$S_r\Big(u_\rho - \mathrm{Re}\,\frac{1}{z}\Big) \leq A(r) S_1\Big(u_\rho - \mathrm{Re}\,\frac{1}{z}\Big) \leq A(r)[2 + S_1(u_\rho)] \leq A(r)[2 + C], \quad 0 < \rho \leq r_0,\ \rho \leq r \leq 1.$$

Prema lemi 11.7. srednja vrijednost funkcije u_ρ po kružnici $S(0, r)$ je 0 za svaki $r \in [\rho, 1]$. Isto vrijedi i za funkciju $\mathrm{Re}\,\frac{1}{z}$, dakle i za funkciju $u_\rho - \mathrm{Re}\,\frac{1}{z}$. Prema tome, ta je funkcija na kružnici $S(0, r)$ ili svuda jednaka 0 ili poprima i pozitivne i negativne vrijednosti. Stoga imamo

$$\max_{S(0,r)} \Big|u_\rho - \mathrm{Re}\,\frac{1}{z}\Big| = \max\Big\{\max_{S(0,r)} \Big(u_\rho - \mathrm{Re}\,\frac{1}{z}\Big), -\min_{S(0,r)} \Big(u_\rho - \mathrm{Re}\,\frac{1}{z}\Big)\Big\},$$

pa slijedi

$$\max_{S(0,r)} \Big|u_\rho - \mathrm{Re}\,\frac{1}{z}\Big| \leq S_r\Big(u_\rho - \mathrm{Re}\,\frac{1}{z}\Big).$$

Dakle, vrijedi

$$\max_{S(0,r)} \Big|u_\rho - \mathrm{Re}\,\frac{1}{z}\Big| \leq A(r)[2 + C], \qquad 0 < \rho \leq r_0, \quad \rho \leq r \leq 1.$$

Tu nejednakost možemo pisati i ovako

$$\max_{S_r} \Big|u_{p,\alpha,\rho} - \mathrm{Re}\,\frac{1}{z}\Big| \leq A(r)[2 + C], \qquad 0 < \rho \leq r_0, \quad \rho \leq r \leq 1. \tag{1}$$

Odatle slijedi

$$\max_{S_{p,\alpha,\rho}} |u_{p,\alpha,\rho} - u_{\alpha,\rho'}| \leq 2A(\rho)[2 + C], \qquad 0 < \rho' \leq \rho \leq r_0.$$

Ako je ploha W parabolička, na gornju nejednakost primijenimo princip maksimuma na $W\backslash\overline{K}_{p,\alpha,\rho}$, a ako je W kompaktna, primijenimo korolar 9.1. Slijedi

$$|u_{p,\alpha,\rho}(q) - u_{\alpha,\rho'}(q)| \leq 2A(r)[2 + C], \qquad 0 < \rho \leq \rho' \leq r_0, \quad q \in W \setminus K_{p,\alpha,\rho}. \tag{2}$$

Neka je $\varepsilon >$ i izaberimo $r(\varepsilon) \in \langle 0, r_0]$ tako da bude

$$2A(r(\varepsilon))[2 + C] \leq \varepsilon.$$

Budući da je funkcija A monotono rastuća, iz (2) slijedi

$$|u_{p,\alpha,\rho}(q) - u_{\alpha,\rho'}(q)| \leq 2A(r)[2 + C], \qquad 0 < \rho \leq \rho' \leq r(\varepsilon), \quad q \in W \setminus K_{p,\alpha,\rho}. \tag{3}$$

Prema tome, postoji funkcija $u_{p,\alpha} : W \setminus \{p\} \to \mathbb{R}$ takva da je

$$u_{p,\alpha}(q) = \lim_{\rho \to 0} u_{p,\alpha,\rho}(q), \qquad q \in W \setminus \{p\}.$$

Iz (3) slijedi

$$|u_{p,\alpha,\rho}(q) - u_{p,\alpha}(q)| \leq \varepsilon, \qquad 0 < \rho \leq r(\varepsilon), \quad q \in W \setminus K_{p,\alpha,\rho}.$$

Prema tome, konvergencija u $(*)$ je uniformna na $W \setminus K_r$ $\forall r \in \langle 0, 1]$. Dakle, konvergencija je lokalno uniformna na $W \setminus \{p\}$, pa zaključujemo da je $u_{p,\alpha} \in Har(W \setminus \{p\})$. Nadalje, dobivamo i da je restrikcija $u_{p,\alpha}|(W \setminus K_r)$ ograničena $\forall r \in \langle 0, 1]$.

Prema (1) imamo

$$\max_{S_r} \left| u_{p,\alpha} - \mathrm{Re}\,\frac{1}{z} \right| \leq A(r)[2 + C] \qquad \forall r \in \langle 0, 1],$$

pa slijedi

$$\lim_{q \to p} \left| u_{p,\alpha}(q) - \mathrm{Re}\,\frac{1}{z} \right| = 0.$$

Dokaz teorema 11.1: Egzistencija funkcije $u_{p,\alpha}$ slijedi iz leme 11.8.

Dokažimo jedinstvenost. Pretpostavljamo i dalje da je $z(p) = 0$ i $R = 1$. Uzmimo da i funkcija u ima tražena svojstva. Neka je $r \in \langle 0, 1]$. Po principu maksimuma, ako je ploha W parabolička, odnosno, po korolaru 9.1., ako je ploha W kompaktna, slijedi

$$|u_{p,\alpha}(q) - u(q)| \leq \max_{S_r} |u_{p,\alpha} - u| \qquad \forall q \in W \setminus K_r. \tag{4}$$

Međutim, za svaku točku $q \in S_r$ je

$$|u_{p,\alpha}(q) - u(q)| \leq \left| u_{p,\alpha}(q) - \mathrm{Re}\,\frac{1}{z(q)} \right| + \left| u(q) - \mathrm{Re}\,\frac{1}{z(q)} \right|. \tag{5}$$

Prema pretpostavci je

$$\lim_{q \to p} \left| u_{p,\alpha}(q) - \mathrm{Re}\,\frac{1}{z(q)} \right| = \lim_{q \to p} \left| u(q) - \mathrm{Re}\,\frac{1}{z(q)} \right| = 0.$$

Dakle, za dano $\varepsilon > 0$ možemo izabrati $R > 0$ $(R \leq 1)$ tako da vrijedi

$$q \in \overline{K}_R \qquad \Longrightarrow \qquad \left| u_{p,\alpha}(q) - \mathrm{Re}\,\frac{1}{z(q)} \right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{i} \quad \left| u(q) - \mathrm{Re}\,\frac{1}{z(q)} \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Odatle i iz (4) i (5) slijedi da za svako $r \in \langle 0, R\rangle$ vrijedi

$$|u_{p,\alpha}(q) - u(q)| < \varepsilon \qquad \forall q \in W \setminus K_r. \tag{6}$$

Budući da (6) vrijedi za svako $r \in \langle 0, R\rangle$, zaključujemo da je

$$|u_{p,\alpha}(q) - u(q)| < \varepsilon \qquad \forall q \in \bigcup_{0<r<R} (W \setminus K_r) = W \setminus \{p\}.$$

Napokon, kako je $\varepsilon > 0$ bio proizvoljan, slijedi $u_{p,\alpha}(q) = u(q)$ $\forall q \in W \setminus \{p\}$.

Poglavlje 12

Jednostavno povezane Riemannove plohe

Važne posljedice teorema 8.8. u slučaju jednostavno povezanih Riemannovih ploha sadržane su u sljedećem teoremu:

Teorem 12.1. *Neka je W jednostavno povezana Riemannova ploha.*

(a) *Za svaku $u \in Har(W)$ postoji $f \in \mathcal{H}(W)$ takva da je $u = Re\, f$. Ako je i $g \in \mathcal{H}(W)$ takva da je $u = Re\, g$, onda je $f - g$ imaginarna konstanta.*

(b) *Ako je ploha W hiperbolička, za svaku točku $p \in W$ postoji $f_p \in \mathcal{H}(W)$ takva da vrijedi*

$$|f_p(q)| = e^{-g_p(q)} \qquad \forall q \in W \setminus \{p\}.$$

Ako i funkcija $F_p \in \mathcal{H}(W)$ ima svojstvo

$$|F_p(q)| = e^{-g_p(q)} \qquad \forall q \in W \setminus \{p\},$$

onda je kvocijent F_p/f_p konstanta modula 1.

(c) *Pretpostavimo da je ploha W parabolička ili kompaktna, neka je $p \in W$ i neka je $\alpha = (U, z)$ holomorfna karta na W takva da je $p \in U$. Tada postoji jedinstveno preslikavanje $f \in \mathcal{H}(W, \overline{\mathbb{C}})$ takvo da vrijedi*

$$\lim_{q \to p} \left[f(q) - \frac{1}{z(q) - z(p)} \right] = 0$$

i da je $f(W \setminus \mathcal{O})$ ograničen podskup od $\mathbb{C}$ za svaku okolinu $\mathcal{O} \subseteq W$ točke p.

Dokaz: (a) Neka je $(U_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}$ pokrivač od W područjima izomorfnim sa $K(0, 1)$. Za svako $\alpha \in \mathcal{A}$ neka je Φ_α skup svih $\varphi \in \mathcal{H}(U_\alpha)$ takvih da je $u|U_\alpha = \mathrm{Re}\,\varphi$. Prema propoziciji 6.1. $\Phi_\alpha \neq \emptyset$ $\forall \alpha \in \mathcal{A}$. Nadalje, prema istoj propoziciji, ako su $\varphi, \psi \in \Phi_\alpha$ onda je $\varphi - \psi$ imaginarna konstanta. Dokažimo da su ispunjeni uvjeti teorema 8.8.

Neka su $\alpha, \beta \in \mathcal{A}$, $\varphi \in \Phi_\alpha$ i $\psi \in \Phi_\beta$ i neka je V komponenta povezanosti presjeka $U_\alpha \cap U_\beta$. Neka je

$$U = \{p \in V;\ \varphi(p) = \psi(p)\}.$$

Tada je zbog neprekidnosti funkcija φ i ψ skup U zatvoren u V. Neka je $p \in U$. Izaberimo otvorenu okolinu $\mathcal{O}$ točke p sadržanu u V koja je kao Riemannova ploha izomorfna jediničnom krugu $K(0, 1)$. Tada je $\mathrm{Re}\,\varphi|\mathcal{O} = u|\mathcal{O} = \mathrm{Re}\,\psi|\mathcal{O}$, pa iz propozicije 6.1. slijedi da je ili $\varphi|\mathcal{O} - \psi|\mathcal{O}$ imaginarna konstanta. Budući da je $\varphi(p) = \psi(p)$ slijedi da je $\varphi(q) = \psi(q)$ $\forall q \in \mathcal{O}$, odnosno, $\mathcal{O} \subseteq U$. Time je dokazano da je U otvoren podskup od V. Budući da je V povezan, zaključujemo da je li $U = \emptyset$, odnosno, da je $\varphi(p) \neq \psi(p)$ $\forall p \in V$, ili je $U = V$, odnosno, $\varphi|V = \psi|V$. Time je dokazano da je ispunjen uvjet (a) teorema 8.8.

Pretpostavimo sada da su $\alpha, \beta \in \mathcal{A}$, neka je V komponenta povezanosti presjeka $U_\alpha \cap U_\beta$ i neka je $\varphi \in \Phi_\alpha$. Neka je $\chi \in \Phi_\beta$. Neka je $p \in V$ i neka je $\chi \in \Phi_\beta$. Tada je

$$\operatorname{Re}\varphi(p) - \operatorname{Re}\chi(p) = u(p) - u(p) = 0,$$

dakle, $\lambda = \varphi(p) - \chi(p) \in i\mathbb{R}$. Tada je $\psi = \chi + \lambda \in \Phi_\beta$ i vrijedi $\varphi(p) = \psi(p)$. Slijedi da je skup

$$U = \{q \in V;\ \varphi(q) = \psi(q)\}$$

neprazan. Kao i malo prije nalazimo da je taj skup otvoren i zatvoren u V, dakle, zbog povezanosti od V slijedi $U = V$. Dakle, $\varphi|V = \psi|V$. Time je dokazano da je i uvjet (b) teorema 8.8. ispunjen.

Sada iz teorema 8.8. slijedi da postoji $f : W \to \mathbb{C}$ takva da je $f|U_\alpha \in \Phi_\alpha$ $\forall \alpha \in \mathcal{A}$. Odatle slijedi da je $f|U_\alpha \in \mathcal{H}(U_\alpha)$ $\forall \alpha \in \mathcal{A}$, a kako je $(U_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}$ otvoren pokrivač od W, slijedi da je $f \in \mathcal{H}(W)$.

Neka je i $g \in \mathcal{H}(W)$ takva da je $g|U_\alpha \in \Phi_\alpha$ $\forall \alpha \in \mathcal{A}$. Tada je za bilo koje izabrano $\alpha \in \mathcal{A}$ funkcija $f|U_\alpha - g|U_\alpha$ imaginarna konstanta, pa po teoremu jedinstvenosti za holomorfne funkcije slijedi da je $f - g$ imaginarna konstanta.

(b) Neka je $(U_\beta)_{\beta \in \mathcal{A}'}$ pokrivač od $W \setminus \{p\}$ jednostavno povezanim područjima i neka je (U_α, z) holomorfna karta na W takva da je $p \in U_\alpha$ i $z(p) = 0$. Stavimo $\mathcal{A} = \mathcal{A}' \cup \{\alpha\}$. Za $\beta \in \mathcal{A}'$ neka je Ψ_β skup svih $\varphi \in \mathcal{H}(U_\beta)$ takvih da je $g_p|U_\beta = \operatorname{Re}\varphi$. Nadalje, neka je Ψ_α skup svih $\varphi \in \mathcal{H}(U_\alpha)$ takvih da je

$$g_p(q) + \ln|z(q)| = \operatorname{Re}\varphi(q) \qquad \forall q \in U_\alpha \setminus \{p\}.$$

Za bilo koje $\beta \in \mathcal{A}$ i za $\varphi, \psi \in \Psi_\beta$ tada je prema propoziciji 6.1. $\varphi - \psi$ imaginarna konstanta.

Za $\beta \in \mathcal{A} \setminus \{\alpha\}$ neka je $\Phi_\beta = \{e^{-\varphi};\ \varphi \in \Psi_\beta\}$. Nadalje, neka je Φ_α skup svih funkcija $f : U_\alpha \to \mathbb{C}$ takvih da za neku $\varphi \in \Psi_\alpha$ vrijedi

$$f(q) = \begin{cases} e^{-\varphi(q) + \ln|z(q)|} & \text{ako je } q \in U_\alpha \setminus \{p\} \\ \\ 0 & \text{ako je } q = p. \end{cases}$$

Dokažimo da familija $(U_\beta, \Phi_\beta)_{\beta \in \mathcal{A}}$ zadovoljava uvjeta teorema 8.8.

Neka su $\beta, \gamma \in \mathcal{A}$, $\varphi \in \Phi_\beta$, $\psi \in \Phi_\gamma$ i neka je V komponenta povezanosti presjeka $U_\beta \cap U_\gamma$.

Pretpostavimo najprije da je $\beta \neq \alpha$ i $\gamma \neq \alpha$. Tada je $\varphi = e^{-\varphi_1}$ i $\psi = e^{-\psi_1}$ za neke $\varphi_1 \in \Psi_\beta$ i $\psi_1 \in \Psi_\gamma$. Funkcije $\varphi_1|V$ i $\psi_1|V$ imaju obje realni dio jednak $g_p|V$, pa pomoću propozicije 6.1. zaključujemo da je $(\varphi_1 - \psi_1)|V$ imaginarna konstanta. Odatle slijedi da je $\varphi|V = \lambda\psi|V$ za neki $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| = 1$. Prema tome, ili je $\varphi|V = \psi|V$ ili je $\varphi(q) \neq \psi(q)$ $\forall q \in V$. Pretpostavimo sada da je $\beta = \alpha$ i $\gamma \neq \alpha$. Za neke $\varphi_1 \in \Psi_\alpha$ i $\psi_1 \in \Psi_\gamma$ tada vrijedi

$$\varphi(q) = e^{-\varphi_1(q) + \ln|z(q)|} \quad \forall q \in U_\alpha \setminus \{p\} \qquad \text{i} \qquad \psi = e^{-\psi_1}.$$

Imamo $p \notin U_\gamma$, dakle, $p \notin V$. Harmonijske funkcije $(\varphi_1 - \ln|z|)|V$ i $\psi_1|V$ imaju obje realni dio jednak $g_p|V$, pa pomoću propozicije 6.1. zaključujemo da se te dvije funkcije razlikuju za imaginarnu konstantu. Odatle je opet $\varphi|V = \lambda\psi|V$ za neki $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| = 1$, pa ponovo zaključujemo da je ili $\varphi|V = \psi|V$ ili je $\varphi(q) \neq \psi(q)$ $\forall q \in V$.

Napokon, neka je $\beta = \gamma = \alpha$. Tada je $V = U_\alpha$, i za neke $\varphi_1, \psi_1 \in \Psi_\alpha$ vrijedi

$$\varphi(q) = e^{-\varphi_1(q) + \ln|z(q)|} \qquad \text{i} \qquad \psi(q) = e^{-\psi_1(q) + \ln|z(q)|} \qquad \forall q \in U_\alpha \setminus \{p\}.$$

Pomoću propozicije 6.1. zaključujemo da je razlika $\varphi_1 - \psi_1$ imaginarna konstanta, pa opet vrijedi $\varphi = \lambda\psi$ za neki $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| = 1$. Prema tome, opet je ili $\varphi = \psi$ ili je $\varphi(q) \neq \psi(q)$ $\forall q$.

Time je dokazano da familija $(U_\beta, \Phi_\beta)_{\beta\in\mathcal{A}}$ zadovoljava uvjet (a) iz iskaza teorema 8.8.

Provjerimo sada uvjet (b) teorema 8.8. Neka su $\beta, \gamma \in \mathcal{A}$, $\varphi \in \Phi_\beta$ i neka je V komponenta povezanosti presjeka $U_\beta \cap U_\gamma$. Pretpostavimo najprije da je $\beta \neq \alpha$ i $\gamma \neq \alpha$. Imamo $\varphi = \mathrm{e}^{-\varphi_1}$ za neku $\varphi_1 \in \Psi_\beta$. Neka je $\psi_2 \in \Psi_\gamma$. Tada pomoću propozicije 6.1. nalazimo da je $\varphi_1|V = \psi_2|V + i\rho$ za neku konstantu $\rho \in \mathbb{R}$. Stavimo $\psi_1 = \psi_2 + i\rho$. Tada je $\psi_1 \in \Psi_\gamma$, $\psi = \mathrm{e}^{-\psi_1} \in \Phi_\gamma$ i $\varphi|V = \psi|V$. Sasvim analogno postupa se i ako je $\beta = \alpha$ ili $\gamma = \alpha$ ili oboje. Time smo dokazali da je ispunjen i uvjet (b) teorema 8.8.

Iz teorema 8.8. slijedi da postoji funkcija $f_p \in \mathcal{H}(W)$ takva da je $f_p|U_\beta \in \Phi_\beta$ $\forall\beta \in \mathcal{A}$. Tada je za $\beta \in \mathcal{A}'$ i za $q \in U_\beta$

$$|f_p(q)| = \left|\mathrm{e}^{-\varphi(q)}\right| = \mathrm{e}^{-Re\,\varphi(q)} = \mathrm{e}^{-g_p(q)},$$

a kako je

$$\bigcup_{\beta\in\mathcal{A}'} U_\beta = W \setminus \{p\},$$

slijedi

$$|f_p(q)| = \mathrm{e}^{-g_p(q)} \qquad \forall q \in W \setminus \{p\}.$$

Napokon, neka je i F_p funkcija iz $\mathcal{H}(W)$ takva da je

$$|F_p(q)| = \mathrm{e}^{-g_p(q)} \qquad \forall q \in W \setminus \{p\}.$$

Definiramo tada $F \in \mathcal{H}(W \setminus \{p\})$ kao kvocijent

$$F(q) = \frac{F_p(q)}{f_p(q)}, \qquad q \in W \setminus \{p\}.$$

Tada vrijedi

$$|F(q)| = 1 \qquad \forall q \in W \setminus \{p\}. \qquad (*)$$

Jednostavna je posljedica korolara 1.1. da je ili F konstanta ili je $F(W \setminus \{p\})$ područje u $\mathbb{C}$. Ova druga mogućnost ne dolazi u obzir jer je prema $(*)$ $F(W \setminus \{p\}) \subseteq S(0,1)$. Dakle, F je konstanta $\lambda \in \mathbb{C}$, a prema $(*)$ vrijedi $|\lambda| = 1$. To znači da je $F_p(q) = \lambda f_p(q)$ $\forall q \in W \setminus \{p\}$, a kako su $F_p, f_p \in \mathcal{H}(W)$, vrijedi i $F_p(p) = \lambda f_p(p)$.

(c) Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $z(p) = 0$, da je U jednostavno povezano područje i da je $\overline{K}(0,1) \subseteq z(U)$. Neka je $u \in Har(W \setminus \{p\})$ funkcija iz teorema 11.1. za kartu (U, z). Neka je ponovo $(U_\beta)_{\beta\in\mathcal{A}'}$ pokrivač od $W \setminus \{p\}$ jednostavno povezanim područjima. Stavimo $\mathcal{A} = \mathcal{A}' \cup \{\alpha\}$ i $U_\alpha = U$. Za $\beta \in \mathcal{A}'$ neka je Φ_β skup svih $\varphi \in \mathcal{H}(U_\beta)$ takvih da je $u|U_\alpha$. Treba još definirati Φ_α. Neka je Ψ skup svih $\psi \in \mathcal{H}(U)$ takvih da je

$$\mathrm{Re}\,\psi|(U \setminus \{p\}) = \left(u - \mathrm{Re}\,\frac{1}{z}\right)\Big|(U \setminus \{p\}).$$

Φ_α definiramo kao skup svih holomorfnih preslikavanja $\varphi \in \mathcal{H}(U, \overline{\mathbb{C}})$ takvih da za neku funkciju $\psi \in \Psi$ vrijedi

$$\varphi(q) = \begin{cases} \psi(q) + \dfrac{1}{z(q)} & \text{ako je } q \in U \setminus \{p\} \\[2ex] \infty & \text{ako je } q = p. \end{cases}$$

Sasvim analogno dokazu tvrdnje (b) provjerava se da familija $(U_\beta, \Phi_\beta)_{\beta\in\mathcal{A}}$ zadovoljava uvjete teorema 8.8. Prema tom teoremu postoji preslikavanje $g : W \to \overline{\mathbb{C}}$ takvo da je $g|U_\beta \in \Phi_\beta \ \forall\beta \in \mathcal{A}$. Tada funkcija

$$\Big(g - \frac{1}{z}\Big)|(U \setminus \{p\})$$

ima u točki p uklonjiv singularitet. To znači da na nekoj okolini točke p vrijedi

$$g(q) = \frac{1}{z(q)} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k z(q)^k.$$

Imamo $\operatorname{Re} g|(W \setminus \{p\}) = u$, dakle vrijedi

$$\lim_{q\to p} \operatorname{Re}\Big(g(q) - \frac{1}{z(q)}\Big) = 0.$$

Zbog toga je $a_0 \in i\mathbb{R}$. Stavimo $f = g - a_0$. Tada je $\operatorname{Re} f|(W \setminus \{p\} = u$ i vrijedi

$$\lim_{q\to p} \Big(f(q) - \frac{1}{z(q)}\Big) = 0.$$

Prema svojstvu (a) u teoremu 11.1. za svaku okolinu $\mathcal{O}$ točke p restrikcija $u|(W \setminus \mathcal{O})$ je ograničena, dakle, $\operatorname{Re} f|(W \setminus \mathcal{O})$ je ograničena.

Neka je sada $\tilde{\alpha} = (U, \zeta)$, gdje je $\zeta = -iz$. Neka je $\tilde{f}$ funkcija koja se preko karte $\tilde{\alpha}$ dobiva na isti način na koji smo funkciju f dobili preko karte α. Tada na okolini točke p imamo

$$f(q) = \frac{1}{z(q)} + a_1 z(q) + a_2 z(q)^2 + a_3 z(q)^3 + \cdots \tag{1}$$

i

$$\tilde{f}(q) = \frac{1}{\zeta(q)} + c_1 \zeta(q) + c_2 \zeta(q)^2 + c_3 \zeta(q)^3 + \cdots$$

tj.

$$\tilde{f}(q) = \frac{i}{z(q)} + b_1 z(q) + b_2 z(q)^2 + b_3 z(q)^3 + \cdots \tag{2}$$

za neke $a_j, b_j \in \mathbb{C}$, $j \in \mathbb{N}$. Dokazat ćemo sada da je $\tilde{f} = if$.

Neka je $\rho \in \langle 0, 1]$ i neka je $M > 0$ takav da vrijedi

$$|\operatorname{Re} f(q)| \leq M \qquad \text{i} \qquad |\operatorname{Re} \tilde{f}(q)| \leq M \qquad \forall q \in W \setminus K_{p,\alpha,\rho}. \tag{3}$$

Izaberimo sada točku $p_1 \in K_{p,\alpha,\rho}$ takvu da je

$$\operatorname{Re} f(p_1) > M \qquad \text{i} \qquad \operatorname{Re} \tilde{f}(p_1) > M. \tag{4}$$

Takav izbor je moguć: treba uzeti p_1 dovoljno blizu p i tako da je $\arg z(p_1) = \dfrac{\pi}{4}$. Sada vrijedi

$$q \in S_{p,\alpha,\rho} \quad \Longrightarrow \quad \operatorname{Re} f(q) \leq M \ \text{ i } \ \operatorname{Re} f(p_1) > M \quad \Longrightarrow \quad \operatorname{Re}(f(q) - f(p_1)) < 0. \tag{5}$$

Neka je n broj nultočaka funkcije $q \mapsto f(q) - f(p_1)$ u $K_{p,\alpha,\rho}$ brojenih s kratnostima (preciznije, n je zbroj kratnosti svih nultočaka funkcije $q \mapsto f(q) - f(p_1)$ u $K_{p,\alpha,\rho}$). Neka je m broj polova iste funkcije u $K_{p,\alpha,\rho}$ brojenih također s njihovim redovima (preciznije, m je zbroj redova svih polova funkcije $q \mapsto f(q) - f(p_1)$ u $K_{p,\alpha,\rho}$). Tada je $m = 1$. Dakle, prema *principu argumenta* (v. Teorem 54. u *Kraljević–Kurepa, Matematička analiza* IV/1, str. 195) ukupna promjena argumenta funkcije $q \mapsto f(q) - f(p_1)$ kada točka q obiđe $S_{p,\alpha,\rho}$ jednaka je $2\pi i(n-1)$. No kako je $\mathrm{Re}\,(f(q) - f(p_1)) < 0\ \forall q \in S_{p,\alpha,\rho}$, ta je promjena jednaka 0. Dakle, $n = 1$. To znači da je p_1 jedina nultočka funkcije $q \mapsto f(q) - f(p_1)$ u $K_{p,\alpha,\rho}$ i ona je jednostruka. Isto svojstvo ima i funkcija $q \mapsto \tilde{f}(q) - \tilde{f}(p_1)$. Nadalje, iz (3) i (4) se vidi da funkcije $q \mapsto f(q) - f(p_1)$ i $q \mapsto \tilde{f}(q) - \tilde{f}(p_1)$ nemaju nultočkaka izvan $K_{p,\alpha,\rho}$. Definiramo $F, \tilde{F} \in \mathcal{H}(W \setminus \{p_1\})$ sa

$$F(q) = \frac{f(q)}{f(q) - f(p_1)}, \qquad \tilde{F}(q) = \frac{\tilde{f}(q)}{\tilde{f}(q) - \tilde{f}(p_1)}.$$

Tada za neku okolinu $\mathcal{O} \subseteq K_{p,\alpha,\rho}$ točke p_1 imamo razvoje oblika

$$F(q) = \frac{A}{z(q) - z(p_1)} + B + C(z(q) - z(p_1)) + D(z(q) - z(p_1))^2 + \cdots\cdots \qquad q \in \mathcal{O} \setminus \{p_1\}, \tag{6}$$

$$\tilde{F}(q) = \frac{\tilde{A}}{z(q) - z(p_1)} + \tilde{B} + \tilde{C}(z(q) - z(p_1)) + \tilde{D}(z(q) - z(p_1))^2 + \cdots\cdots \qquad q \in \mathcal{O} \setminus \{p_1\}. \tag{7}$$

Prema (3), (4) i (5) za $q \in W \setminus K_{p,\alpha,\rho}$ imamo

$$|F(q)| = \left|1 + \frac{f(p_1)}{f(q) - f(p_1)}\right| \leq 1 + \frac{|f(p_1)|}{|f(p_1) - f(q)|} \leq 1 + \frac{|f(p_1)|}{\mathrm{Re}\,(f(p_1) - f(q))}.$$

Dakle,

$$|F(q)| \leq 1 + \frac{|f(p_1)|}{\mathrm{Re}\,f(p_1) - M} < +\infty \qquad \forall q \in W \setminus K_{p,\alpha,\rho}. \tag{8}$$

Sasvim analogno nalazimo da vrijedi i

$$|\tilde{F}(q)| \leq 1 + \frac{|\tilde{f}(p_1)|}{\mathrm{Re}\,\tilde{f}(p_1) - M} < +\infty \qquad \forall q \in W \setminus K_{p,\alpha,\rho}. \tag{9}$$

Nadalje, iz (6) i (7) slijedi da je za $q \in \mathcal{O} \setminus \{p_1\}$

$$\tilde{A}F(q) - A\tilde{F}(q) = (\tilde{A}B - A\tilde{B}) + (\tilde{A}C - A\tilde{C})(z(q) - z(p_1)) + (\tilde{A}D - A\tilde{D})(z(q) - z(p_1))^2 + \cdots\cdots$$

Prema tome, funkcija $\tilde{A}F - A\tilde{F} \in \mathcal{H}(W \setminus \{p_1\})$ ima u točki p_1 uklonjiv singularitet. Uklonimo li taj singularitet, dolazimo do funkcije $G \in \mathcal{H}(W)$, takve da je $G|(W \setminus \{p_1\}) = \tilde{A}F - A\tilde{F}$. Sada se iz (8) i (9) vidi da je funkcija G ograničena. Budući da je ploha W parabolička ili kompaktna, funkcija G jednaka je nekoj konstanti $\lambda \in \mathbb{C}$. Dakle, za svaku točku $q \in W \setminus \{p\}$ vrijedi

$$\tilde{A}\tilde{f}(q)[f(q) - f(p_1)] - Af(q)[\tilde{f}(q) - \tilde{f}(p_1)] = \lambda[f(q) - f(p_1)][\tilde{f}(q) - \tilde{f}(p_1)],$$

tj.

$$\tilde{f}(q)(cf(q) + d) = af(q) + b$$

uz oznake

$$a = -(A + C)\tilde{f}(p_1), \quad b = \lambda f(p_1)\tilde{f}(p_1), \quad c = \tilde{A} - \lambda - A, \quad d = (\lambda - \tilde{A})f(p_1). \tag{10}$$

Međutim, iz (1) i (2) nalazimo da na okolini točke p vrijedi

$$\tilde{f}(q)(cf(q) + d) = \frac{ic}{z(q)^2} + \frac{id}{z(q)} + c(b_1 + ia_1) + [db_1 + c(b_2 + ia_2)]z(q) + \cdots\cdots$$

$$af(q) + b = \frac{a}{z(q)} + b + aa_1 z(q) + aa_2 z(q)^2 + \cdots\cdots$$

Odatle usporedbom koeficijenata uz iste potencije nalazimo

$$c = 0, \quad a = id, \quad b = c(b_1 + ia_1) = 0.$$

Prema tome, vrijedi

$$\tilde{f}(q)d = idf(q).$$

Ustanovimo još da je $d \neq 0$. Doista, pretpostavimo da je $d = 0$. Kako je $f(p_1) \neq 0$, iz (10) slijedi $\lambda = \tilde{A}$, a zatim zbog $c = 0$ dobivamo da je $A = 0$. No to je nemoguće, jer funkcija F ima u točki p_1 pol prvog reda, a ne uklonjivi singularitet. Dakle, $d \neq 0$, pa slijedi $\tilde{f} = if$. Kako je $\operatorname{Re} \tilde{f}$ ograničena izvan bilo koje okoline točke p, slijedi da je $\operatorname{Im} f$ ograničena izvan okoline od p. Dakle, funkcija f je ograničena izvan bilo koje okoline točke p.

Time smo dokazali egzistenciju funkcije f s traženim svojstvima. Ako i funkcija g ima ta svojstva, onda je funkcija $f - g : W \to \mathbb{C}$ holomorfna i ograničena, dakle, konstanta. Ta je konstanta 0, jer je

$$\lim_{q \to p} (f(q) - g(q)) = 0.$$

Teorem 12.2. *Neka je W hiperbolička jednostavno povezana Riemannova ploha, $p \in W$ i $f_p \in \mathcal{H}(W \setminus \{p\})$ funkcija iz tvrdnje (b) teorema 12.1. Tada je funkcija f_p injektivna.*

Dokaz: Neka je $p_1 \in W$, $p_1 \neq p$. Definiramo funkciju $F \in \mathcal{H}(W)$ sa

$$F(q) = \frac{f_p(q) - f_p(p_1)}{1 - \overline{f_p(p_1)} f_p(q)}.$$

Definicija ima smisla za svaku točku $q \in W$. Doista, prema tvrdnji (a) propozicije 10.2. $g_p(q) > 0 \ \forall q \in W \setminus \{p\}$, dakle, $|f_p(q)| = \mathrm{e}^{-g_p(q)} < 1$. Nadalje, prema tvrdnji (b) iste propozicije je $\lim\limits_{q \to p} g_p(q) = +\infty$, dakle, $f_p(p) = 0$.

Primijetimo da za $a, b \in \mathbb{C}$ iz $|a| < 1$ i $|b| < 1$ slijedi

$$1 + |a|^2|b|^2 - |a|^2 - |b|^2 = (1 - |a|^2)(1 - |b|^2) > 0 \qquad \Longrightarrow \qquad 1 + |a|^2|b|^2 > |a|^2 + |b|^2.$$

Odatle je

$$|1 - \overline{a}b|^2 = 1 + |a|^2|b|^2 - 2\operatorname{Re}(\overline{a}b) > |a|^2 + |b|^2 - 2\operatorname{Re}(\overline{a}b) = |a - b|^2,$$

pa dobivamo

$$\left| \frac{a - b}{1 - \overline{a}b} \right| < 1.$$

Primijenimo li tu nejednakost na $a = f_p(q)$ i $b = f_p(p_1)$, zaključujemo da je

$$|F(q)| < 1 \qquad \forall q \in W.$$

Nadalje, imamo

$$F(p_1) = 0 \qquad \text{i} \qquad F(p) = -f_p(p_1).$$

Funkcija $z \mapsto \ln|z|$ je harmonijska na $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, pa slijedi da je funkcija $q \mapsto \ln|F(q)|$ harmonijska na području $W \setminus N(F)$, gdje je $N(F) = \{q \in W;\ F(q) = 0\}$. Posebno, funkcija $\ln|F|$ je subharmonijska na $W \setminus N(F)$.

Neka je $v \in P_{p_1}$ i $\varepsilon > 0$. Neka je U otvorena okolina točke p_1 u W takva da je zatvarač $Cl(U)$

kompaktan i da je $v|(W\setminus U)=0$. Tada je funkcija $v+(1+\varepsilon)\ln|F|$ subharmonijska na $W\setminus N(F)$ i

$$v(q)+(1+\varepsilon)\ln|F(q)|<0 \qquad \forall q\in (W\setminus N(F))\setminus U.$$

Naka je (U_1,z_1) holomorfna karta na W takva da je $p_1\in U_1$ i $z_1(p_1)=0$. Tada je

$$\lim_{q\to p_1}[v(q)+(1+\varepsilon)\ln|z_1(q)|]=-\infty.$$

Funkcija

$$q\mapsto \frac{F(q)}{z_1(q)}$$

je holomorfna na okolini točke p_1, dakle, funkcija $q\mapsto \ln\left|\frac{F(q)}{z_1(q)}\right|$ je odozgo ograničena na okolini od p_1. Prema tome je

$$\lim_{q\to p_1}[v(q)+(1+\varepsilon)\ln|F(q)|]=-\infty.$$

Dakle, funkcija $v+(1+\varepsilon)\ln|F|$ je neprekidna kao funkcija sa $Cl(U)=Cl(U\setminus\{p_1\}$ u $[-\infty,+\infty\rangle$, subharmonijska je na $U\setminus N(F)$ i striktno je manja od 0 na $\partial(U\setminus\{p_1\})=\partial U\cup\{p_1\}$. Prema korolaru 9.1. slijedi da je ta funkcija striktno manja od 0 svuda na U, dakle, i svuda na W. Kako je $\varepsilon>0$ bio proizvoljan, slijedi

$$v(q)+\ln|F(q)|\le 0 \qquad \forall q\in W\setminus\{p_1\}.$$

Budući da je funkcija $v\in P_{p_1}$ bila proizvoljna, slijedi

$$g_{p_1}(q)+\ln|F(q)|\le 0 \qquad \forall q\in W\setminus\{p_1\}. \tag{11}$$

To možemo pisati i ovako:

$$|F(q)|\le|f_{p_1}(q)| \qquad \forall q\in W.$$

Primijetimo da su za $q=p_1$ obje strane jednake 0. Stavimo u tu nejednakost $q=p$. Kako je $F(p)=-f_p(p_1)$, slijedi $|f_p(p_1)|\le|f_{p_1}(p)|$. Zamijenimo li u ovim razmatranjima uloge točaka p i p_1, dolazimo do obrnute nejednakosti $f_{p_1}(p)|\le|f_p(p_1)|$, dakle, vrijedi jednakost

$$|f_p(p_1)|=|f_{p_1}(p)|, \qquad p,p_1\in W,\ p_1\ne p.$$

Slijedi

$$g_{p_1}(p)+\ln|F(p)|=-\ln|f_{p_1}(p)|+\ln|f_p(p_1)|=0.$$

Prema (11) harmonijska funkcija $q\mapsto g_{p_1}(q)+\ln|F(q)|$, $q\in W\setminus N(F)$, dostiže svoj maksimum 0. Prema propoziciji 9.3. ta je funkcija identički jednaka 0, dakle,

$$\ln|F(q)|=-g_{p_1}(q) \qquad \forall q\in W\setminus\{p_1\},$$

a odatle je

$$|F(q)|=|f_{p_1}(q)| \qquad \forall q\in W.$$

Dakle, $q\mapsto \dfrac{f_{p_1}(q)}{F(q)}$ je holomorfna funkcija na W s konstantnim modulom 1. Zaključujemo, da za neki $\lambda\in\mathbb{C}$, $|\lambda|=1$, vrijedi

$$F(q)=\lambda f_{p_1}(q) \qquad \forall q\in W.$$

Odatle se vidi da vrijedi

$$q=p_1 \qquad\Longleftrightarrow\qquad F(q)=0 \qquad\Longleftrightarrow\qquad f_p(q)=f_p(p_1).$$

Dakle, funkcija f_p je injektivna na $W \setminus \{p\}$. No kako vrijedi

$$f_p(q) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad q = p,$$

vidimo da je f_p injektivna na W.

Neka je W parabolička ili kompaktna Riemannova ploha. Prema tvrdnji (c) teorema 12.1. za holomorfnu kartu $\alpha = (U, z)$ na W i za točku $p \in U$ postoji jedinstveno preslikavanje $f_{p,\alpha} \in \mathcal{H}(W, \overline{\mathbb{C}})$ takvo da vrijedi

$$\lim_{q \to p} \left[f_{p,\alpha}(q) - \frac{1}{z(q) - z(p)} \right] = 0$$

i da je $f_{p,\alpha}(W \setminus \mathcal{O})$ ograničen podskup od $\mathbb{C}$ za svaku okolinu $\mathcal{O}$ točke p.

Lema 12.1. *Neka je W parabolička ili kompaktna Riemannova ploha, neka su $\alpha = (U, z)$ i $\beta = (V, \zeta)$ holomorfne karte na W i neka su $p \in U$ i $q \in V$. Tada postoji Möbiusova transformacija $\omega : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ takva da vrijedi $f_{q,\beta} = \omega \circ f_{p,\alpha}$.*

Dokaz: Dokazat ćemo najprije lemu u specijalnom slučaju kad je $p = q \in U \cap V$. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $z(p) = \zeta(p) = 0$ i $U = V$. Stavimo tada $f = f_{p,\alpha}$ i $g = f_{p,\beta}$. Na okolini točke p tada vrijedi

$$f(q) = \frac{1}{z(q)} + a_1 z(q) + a_2 z(q)^2 + \cdots\cdots$$

$$g(q) = \frac{1}{\zeta(q)} + b_1 \zeta(q) + b_2 \zeta(q)^2 + \cdots\cdots$$

$$\zeta(q) = c_1 z(q) + c_2 z(q)^2 + \cdots\cdots, \qquad c_1 \neq 0.$$

Odatle slijedi (možda na manjoj okolini točke p)

$$g(q) = \frac{d}{z(q)} + d_0 + d_1 z(q) + d_2 z(q)^2 + \cdots\cdots, \qquad d \neq 0.$$

Stavimo $F(q) = g(q) - df(q)$. Tada je $F \in \mathcal{H}(W)$ koja je ograničena izvan svake okoline točke p, dakle ograničena je na W. Slijedi da je F konstanta $c \in \mathbb{C}$. Dakle, $g = df + c = \omega \circ f$, za Möbiusovu transformaciju $\omega(x) = dx + c$, $x \in \mathbb{C}$, $\omega(\infty) = \infty$.

Razmotrimo sada opći slučaj. U W uvodimo relaciju $\sim$ na sljedeći način: za $p, q \in W$ stavljamo $p \sim q$ ako za neke dvije holomorfne karte $\alpha = (U, z)$ i $\beta = (V, \zeta)$, takve da je $p \in U$ i $q \in V$, postoji Möbiusova transformacija ω takva da je $f_{q,\beta} = \omega \circ f_{p,\alpha}$. Budući da Möbiusove transformacije čine grupu, odmah se vidi da je $\sim$ relacija ekvivalencije. Nadalje, iz prvog dijela dokaza zaključujemo da u slučaju $p \sim q$ za svake dvije holomorfne karte $\alpha = (U, z)$ i $\beta = (V, \zeta)$ na W, takve da je $p \in U$ i $q \in V$, postoji Möbiusova transformacija ω takva da je $f_{q,\beta} = \omega \circ f_{p,\alpha}$.

Dokazat ćemo sada da je svaka klasa ekvivalencije otvoren podskup od W. Zbog povezanosti W odatle će slijediti da je čitava Riemannova ploha W jedna klasa ekvivalencije, a to je upravo tvrdnja leme.

Neka je $\mathcal{A}$ klasa ekvivalencije i $p \in \mathcal{A}$. Neka je $\alpha = (U, z)$ holomorfna karta na W takva da je $p \in U$, $z(p) = 0$, $\overline{K}(0, 1) \subseteq z(U)$. Stavimo kao i obično

$$K_r = z^{-1}(K(0, r)), \quad \overline{K}_r = z^{-1}(\overline{K}(0, r)), \quad S_r = \partial K_r = z^{-1}(S(0, r)), \qquad r \in \langle 0, 1].$$

Zbog jednostavnosti ćemo pisati $f_{p,\alpha} = f$. Neka je $M > 0$ izabran tako da je

$$|f(q)| < M \qquad \forall q \in W \setminus K_1.$$

Nadalje, neka je $r \in \langle 0, 1\rangle$ takav da vrijedi

$$q \in K_r \qquad \Longrightarrow \qquad |f(q)| > M.$$

Dokazat ćemo da je $K_r \subseteq \mathcal{A}$.

Neka je $p_1 \in K_r$. Definiramo funkciju F sa

$$F(q) = \frac{f(q)}{f(q) - f(p_1)}.$$

Za $q \in W \setminus K_1$ tada vrijedi

$$|F(q)| = \frac{|f(q)|}{|f(q) - f(p_1)|} \leq \frac{M}{|f(p_1)| - |f(q)|} \leq \frac{M}{|f(p_1)| - M} < +\infty.$$

Dakle, funkcija F je ograničena izvan K_1.

Neka je $t \in \mathbb{R}$ takav da je

$$f(p_1) = |f(p_1)| \mathrm{e}^{it}.$$

Tada vrijedi:

$$q \in S_1 \qquad \Longrightarrow \qquad \mathrm{Re}\,[\mathrm{e}^{-it}(f(q) - f(p_1))] = \mathrm{Re}\,[\mathrm{e}^{-it} f(q)] - |f(p_1)| \leq |f(q)| - |f(p_1)| < 0.$$

Sasvim analogno kao u dijelu dokaza teorema 12.2. zaključujemo da funkcija $q \mapsto \mathrm{e}^{-it}(f(q) - f(p_1))$, dakle, i funkcija $f - f(p_1)$, ima u točki p_1 jednostruku nultočku i to je jedina nultočka te funkcije u K_1. Prema tome, funkcija F ima u točki p_1 pol prvog reda i u K_1 nema drugih polova. Odatle slijedi da na nekoj okolini točke p_1 vrijedi razvoj oblika

$$F(q) = \frac{A}{z(q) - z(p_1)} + A_0 + A_1(z(q) - z(p_1)) + A_2(z(q) - z(p_1))^2 + \cdots\cdots$$

Neka je $g = f_{p_1,\alpha}$. Tada na okolini točke p_1 imamo razvoj oblika

$$g(q) = \frac{1}{z(q) - z(p_1)} + a_1(z(q) - z(p_1)) + a_2(z(q) - z(p_1))^2 + \cdots\cdots$$

Prema tome, funkcija $F - Ag \in \mathcal{H}(W)$ je ograničena, dakle, identički jednaka nekoj konstanti $\lambda \in \mathbb{C}$. Odatle je za svaku točku q

$$f(q) = Ag(q)(f(q) - f(p_1)) + \lambda(f(q) - f(p_1)).$$

Slijedi

$$g = \omega \circ f, \qquad \omega(x) = \frac{ax + b}{cx + d},$$

gdje je

$$a = 1 - \lambda, \quad b = \lambda f(p_1), \quad c = A, \quad d = -Af(p_1).$$

ω je Möbiusova transformacija, pa slijedi $p_1 \in \mathcal{A}$. Time smo dokazali $K_r \subseteq \mathcal{A}$. Dakle, $\mathcal{A}$ je otvoren podskup od W.

Teorem 12.3. *Neka je W jednostavno povezana parabolička ili kompaktna Riemannova ploha, $\alpha = (U, z)$ holomorfna karta na W, $p \in U$ i $f = f_{p,\alpha} : W \to \overline{\mathbb{C}}$ preslikavanje iz tvrdnje (c) teorema 12.1. Tada je f injekcija.*

Dokaz: Neka su točke $p_1, p_2 \in W$ takve da je $f(p_1) = f(p_2)$. Neka je $\beta = (V, \zeta)$ holomorfna karta na W takva da je $p_1 \in V$. Stavimo $g = f_{p_1,\beta}$. Prema lemi 12.1. postoji Möbiusova transformacija ω takva da je $g = \omega \circ f$. Imamo tada

$$g(p_2) = \omega(f(p_2)) = \omega(f(p_1)) = g(p_1) = \infty,$$

a kako je p_1 jedini pol funkcije g, (preciznije, vrijedi $g(W \setminus \{p_1\} \subseteq \mathbb{C})$ zaključujemo da je $p_2 = p_1$.

Teorem 12.4. (**Teorem uniformizacije**) *Neka je W jednostavno povezana Riemannova ploha.*

(*a*) *Ako je Riemannova ploha W hiperbolička, ona je izomorfna jediničnom krugu $K(0, 1)$.*

(*b*) *Ako je Riemannova ploha W parabolička, ona je izomorfna kompleksnoj ravnini $\mathbb{C}$.*

(*c*) *Ako je Riemannova ploha W kompaktna, ona je izomorfna Riemannovoj sferi $\overline{\mathbb{C}}$.*

Dokaz: Prema teoremima 12.2. i 12.3. postoji holomorfna injekcija $f : W \to \overline{\mathbb{C}}$. Pri tome, ako je W hiperbolička, onda je $f(W) \subseteq K(0, 1)$. Dakle, tada je $f(W)$ jednostavno povezano ograničeno područje u $\mathbb{C}$, pa je po Riemannovom teoremu 4.7. $f(W)$ je izomorfno jediničnom krugu $K(0, 1)$. Dakle, Riemannova ploha W izomorfna je $K(0, 1)$.

Pretpostavimo sada da je Riemannova ploha W parabolička. Tada je $f(W) \neq \overline{\mathbb{C}}$, jer ploha W nije kompaktna. Također, komplement $\overline{\mathbb{C}} \setminus f(W)$ se sastoji od jedne točke, inače bi po Riemannovom teoremu $f(W)$ bilo izomorfno $K(0, 1)$, dakle, Riemannova ploha W bila bi izomorfna Riemannovoj plohi $K(0, 1)$, a to nije moguće, jer je jedna parabolička, a druga hiperbolička. Prema tome je $\overline{\mathbb{C}} \setminus f(W) = \{z_0\}$, tj. $f(W) = \overline{\mathbb{C}} \setminus \{z_0\}$, za neku $z_0 \in \overline{\mathbb{C}}$. Međutim, neka Möbiusova transformacija ostvaruje izomorfizam Riemannove plohe $\overline{\mathbb{C}} \setminus \{z_0\}$ s Riemannovom plohom $\overline{\mathbb{C}} \setminus \{\infty\} = \mathbb{C}$. Dakle, Riemannova ploha W izomorfna je kompleksnoj ravnini $\mathbb{C}$.

Napokon, pretpostavimo da je W kompaktna Riemannova ploha. Tada je $f(W)$ otvoren kompaktan podskup od $\overline{\mathbb{C}}$, pa slijedi $f(W) = \overline{\mathbb{C}}$. Prema tome, f je izomorfizam W na $\overline{\mathbb{C}}$.

Poglavlje 13

Opis svih Riemannovih ploha

Neka je W Riemannova ploha i neka je $f : \tilde{W} \to W$ univerzalno natkrivanje, tj. takvo da je ploha $\tilde{W}$ jednostavno povezana. Prije teorema 8.2. za svako natkrivanje f definirali smo $\mathcal{T}(f)$ kao grupu svih $f-$transformacija plohe $\tilde{W}$, tj. svih homeomorfizama $\varphi : \tilde{W} \to \tilde{W}$ takvih da je $f \circ \varphi = f$, a prema lemi 9.1. svaka $f-$transformacija je holomorfno preslikavanje, dakle $\mathcal{T}(f)$ je podgrupa grupe $Aut(\tilde{W})$ svih automorfizama Riemannove plohe $\tilde{W}$. Prema korolaru 8.2. grupa $\mathcal{T}(f)$ izomorfna je fundamentalnoj grupi $\Pi(W)$ plohe W. Nadalje, prema tvrdnji (b) teorema 8.5. točke $p_1, p_2 \in \tilde{W}$ nalaze se iznad iste točke plohe W (tj. $f(p_1) = f(p_2)$) ako i samo ako postoji transformacija $\varphi \in \mathcal{T}(f)$ takva da je $p_2 = \varphi(p_1)$. Prema teoremu 8.2. ako je $\varphi \in \mathcal{T}(f)$ i $\varphi \neq id_{\tilde{W}}$ onda φ nema fiksnih točaka na plohi $\tilde{W}$. Štoviše, prema teoremu 8.3. **grupa $\mathcal{T}(f)$ djeluje diskontinuirano** na plohi $\tilde{W}$, tj. svaka točka $q \in \tilde{W}$ ima okolinu V takvu da vrijedi:

$$\varphi \in \mathcal{T}(f) \setminus \{id_{\tilde{W}}\} \qquad \Longrightarrow \qquad V \cap \varphi(V) = \emptyset.$$

Iz navedenog vidimo da, ako želimo opisati sve Riemannove plohe, važno nam je odrediti grupu $Aut(W)$ za svaku jednostavno povezanu Riemannovu plohu W, dakle, prema teoremu uniformizacije 12.4. za $W = K(0,1)$, $W = \mathbb{C}$ i $W = \overline{\mathbb{C}}$. Nadalje, važno je ustanoviti koji elementi $\varphi \in Aut(W)$ nemaju fiksnih točaka.

U poglavlju 7. uveli smo pojam Möbiusovih transformacija. To su sva preslikavanja oblika $\omega_A : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$, gdje je $A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \in Gl(2, \mathbb{C})$, zadana sa

$$\omega_A(z) = \begin{cases} \dfrac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} & \text{ako je } z \in \mathbb{C} \setminus \left\{ -\dfrac{\delta}{\gamma} \right\} \\[2ex] \infty & \text{ako je } z = -\dfrac{\delta}{\gamma} \\[2ex] \dfrac{\alpha}{\gamma} & \text{ako je } z = \infty, \end{cases}$$

ako je $\gamma \neq 0$, a ukoliko je $\gamma = 0$, a tada je nužno $\delta \neq 0$, onda je Möbiusova transformacija u stvari afina transformacija kompleksne ravnine $\mathbb{C}$ s fiksnom točkom ∞ :

$$\omega_A(z) = \begin{cases} \dfrac{\alpha}{\delta} z + \dfrac{\beta}{\delta} & \text{ako je } z \in \mathbb{C} \\[2ex] \infty & \text{ako je } z = \infty. \end{cases}$$

Sve Möbiusove transformacije čine grupu, tzv. Möbiusovu grupu, a sve afine transformacije čine podgrupu Möbiusove grupe.

Teorem 13.1. *(a) $Aut(\mathbb{C})$ je grupa svih afinih transformacija od $\mathbb{C}$, tj. svih preslikavanja $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ oblika $\varphi(z) = \alpha z + \beta$, $\alpha \in \mathbb{C}^*$, $\beta \in \mathbb{C}$. φ nema fiksne točke na $\mathbb{C}$ ako i samo ako je φ pomak, tj. $\alpha = 1$ i $\beta \neq 0$.*

(b) $Aut(\overline{\mathbb{C}})$ je Möbiusova grupa. Svaka Möbiusova transformacija ima fiksnu točku na $\overline{\mathbb{C}}$.

(c) Neka je $D = K(0,1)$ i $S = S(0,1)$. $Aut(D)$ je grupa svih transformacija $\varphi : D \to D$ oblika

$$\varphi(z) = \lambda \frac{z - a}{1 - \overline{a}z}, \qquad a, \lambda \in \mathbb{C},\ |a| < 1,\ |\lambda| = 1. \tag{13.1}$$

To je ujedno grupa svih transformacija oblika

$$\varphi(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\overline{\beta} z + \overline{\alpha}}, \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{C},\ |\alpha|^2 - |\beta|^2 = 1. \tag{13.2}$$

$\varphi \neq id_D$ nema fiksnih točaka u krugu D ako i samo ako sve fiksne točke te Möbiusove transformacije od $\overline{\mathbb{C}}$ leže na jediničnoj kružnici S.

Dokaz: (a) Sva preslikavanja opisanog oblika očito pripadaju grupi $Aut(\mathbb{C})$. Neka je $\varphi \in Aut(\mathbb{C})$. Tada je φ cijela funkcija, pa se može prikazati kao svuda u $\mathbb{C}$ konvergentan red potencija:

$$\varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \qquad a_n \in \mathbb{C}.$$

Definiramo funkciju $\psi \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^*)$ sa $\psi(z) = \varphi\left(\frac{1}{z}\right)$. Tada je

$$\psi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z^n}, \qquad z \in \mathbb{C}^*.$$

0 je izolirani singularitet funkcije ψ. Kad bi bekonačno mnogo koeficijenata a_n bilo različito od nule, tj. kad bi 0 bio bitni singularitet funkcije ψ, ta funkcija ne bi bila injektivna, dakle ni funkcija φ ne bi bila injektivna. To pokazuje da je 0 ili pol ili uklonjiv singularitet funkcije ψ. Dakle, funkcija φ je polinom:

$$\varphi(z) = \sum_{n=0}^{m} a_n z^n, \qquad a_0, a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{C}.$$

Napokon, iz bijektivnosti preslikavanja $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ slijedi da taj polinom ima jedinstvenu nultočku $\lambda \in \mathbb{C}$. Slijedi

$$\varphi(z) = a_0(z - \lambda)^m.$$

Ponovo zbog injektivnosti imamo $a_0 \neq 0$ i $m = 1$. Stavimo li $\alpha = a_0$ i $\beta = -a_0\lambda$, imamo

$$\varphi(z) = \alpha z + \beta, \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \quad \alpha \neq 0.$$

Napokon, ako je $\alpha \neq 1$, onda za

$$z_0 = \frac{\beta}{1 - \alpha} \qquad \text{vrijedi} \quad \varphi(z_0) = z_0.$$

Odatle slijedi i druga tvrdnja: φ nema fiksnih točaka ako i samo ako je $\alpha = 1$ i $\beta \neq 0$.

(b) Neka je $\mathcal{M}$ Möbiusova grupa. Očito je $\mathcal{M}$ podgrupa od $Aut(\overline{\mathbb{C}})$. Neka je $\varphi \in Aut(\overline{\mathbb{C}})$. Stavimo $a = \varphi(\infty)$ i neka je $\psi \in \mathcal{M}$ bilo koja Möbiusova transformacija takva da je $\psi(a) = \infty$. Takva transformacija ψ postoji: ako je $a = \infty$ možemo uzeti $\psi = id_{\overline{\mathbb{C}}}$, a ako je $a \in \mathbb{C}$ onda možemo uzeti

$$\psi = \omega_A, \qquad \text{gdje je} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -a \end{bmatrix},$$

jer je tada

$$\psi(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{z-a} & \text{ako je } z \in \mathbb{C} \setminus \{a\} \\ \infty & \text{ako je } z = a \\ 0 & \text{ako je } z = \infty. \end{cases}$$

Stavimo sada $\omega = \psi \circ \varphi$. Tada je $\omega \in Aut(\overline{\mathbb{C}})$ i $\omega(\infty) = \infty$, pa slijedi da je $\omega|\mathbb{C} \in Aut(\mathbb{C})$. Iz ($a$) sada slijedi da je

$$\omega(z) = \alpha z + \beta, \qquad \alpha \in \mathbb{C}^*, \quad \beta \in \mathbb{C}.$$

Odatle je

$$\omega = \omega_A \qquad \text{za} \quad A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

tj. $\omega \in \mathcal{M}$. Slijedi $\varphi = \psi^{-1} \circ \omega \in \mathcal{M}$. Time je dokazano da je $Aut(\overline{\mathbb{C}}) = \mathcal{M}$.

Napokon, svaka Möbiusova transformacija $\omega \in \mathcal{M}$ ima fiksnih točaka na $\overline{\mathbb{C}}$. Doista, neka je

$$\omega = \omega_A, \qquad A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}.$$

Ako je $\gamma \neq 0$, fiksne točke su rješenja kvadratne jednadžbe $\gamma z^2 + (\delta - \alpha)z - \beta = 0$, a ako je $\gamma = 0$, onda je $\omega(\infty) = \infty$.

(c) Već znamo, a i lako je direktno provjeriti, da sva preslikavanja $\varphi : D \to D$ oblika (13.1) jesu elementi grupe $Aut(D)$. Sva takva preslikavanja čine grupu, koju ćemo označiti sa $\mathcal{G}$, i to je podgrupa grupe $Aut(D)$.

Neka je $\varphi \in Aut(D)$. Neka je $z_0 = \varphi(0) \in D$. Neka $\tau \in \mathcal{G} \subseteq Aut(D)$ definirano sa

$$\tau(z) = \frac{z - z_0}{1 - \overline{z_0} z}, \qquad z \in D.$$

Tada je $\tau(z_0) = 0$, pa slijedi da za $\psi = \tau \circ \varphi \in Aut(D)$ vrijedi $\psi(0) = 0$. Nadalje, kako je $\psi \in Aut(D)$, vrijedi $|\psi(z)| < 1$ $\forall z \in D$. Po Schwartzovoj lemi (teorem 1.15.) slijedi da je $|\psi(z)| \leq |z|$ $\forall z \in D$. Vrijedi i $\psi^{-1} \in Aut(D)$ i $\psi^{-1}(0) = 0$, pa zaključujemo da je i $|\psi^{-1}(\zeta)| \leq |\zeta|$ $\forall \zeta \in D$. Za $\zeta = \psi(z)$, $z \in D$, dobivamo $|z| \leq |\psi(z)|$ $\forall z \in D$. Iz dvije nejednakosti slijedi jednakost $|\psi(z)| = |z|$ $\forall z \in D$. Sada iz Schwartzove leme slijedi da je ψ rotacija, tj. $\psi(z) = \lambda z$ za neko $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| = 1$. No tada je $\psi \in \mathcal{G}$, pa slijedi $\varphi = \tau^{-1} \circ \psi \in \mathcal{G}$. Time je dokazano $Aut(D) = \mathcal{G}$.

Zadatak 13.1. *Dokažite da je*

$$Aut(D) = \mathcal{G} = \left\{ \omega_A | D; \ A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \overline{\beta} & \overline{\alpha} \end{bmatrix}, \ \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \ |\alpha|^2 - |\beta|^2 = 1 \right\}.$$

Uputa: Ako je $\varphi(z) = \lambda \frac{z-a}{1-\overline{a}z}$, $|\lambda| = 1$, $|a| < 1$, uzmite $\alpha = \frac{\mu}{\sqrt{1-|a|^2}}$ i $\beta = -\frac{\mu a}{\sqrt{1-|a|^2}}$, gdje je μ takav da je $\mu^2 = \lambda$.

Treba još ustanoviti nužne i dovoljne uvjete da $\varphi \in Aut(D)$ nema fiksnih točaka na D. Neka je

$$\varphi(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\overline{\beta} z + \overline{\alpha}}, \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \quad |\alpha|^2 - |\beta|^2 = 1.$$

Promatrajmo φ kao element od $Aut(\overline{\mathbb{C}})$. Ako je $\beta = 0$, fiksne točke su 0 i ∞. Neka je $\beta \neq 0$. Fiksne točke od φ su tada u $\mathbb{C}$ i to su točno sva rješenja kvadratne jednadžbe

$$\overline{\beta} z^2 + (\overline{\alpha} - \alpha) z - \beta = 0.$$

Neka su z_1 i z_2 rješenja te jednadžbe. Tada je $z_1 z_2 = -\frac{\beta}{\overline{\beta}}$, dakle, vrijedi

$$|z_1| \cdot |z_2| = |z_1 z_2| = \frac{|\beta|}{|\overline{\beta}|} = 1.$$

Prema tome, ili φ ima fiksnu točku u D ili su sve fiksne točke od φ na $\overline{\mathbb{C}}$ modula 1, tj. iz S.

Teorem 13.2. *Neka je $\tilde{W}$ jednostavno povezana Riemannova ploha i neka je G podgrupa od $Aut(\tilde{W})$ koja djeluje na $\tilde{W}$ diskontinuirano (dakle, posebno, nijedan $\varphi \in G \setminus \{id_{\tilde{W}}\}$ nema fiksnih točaka na $\tilde{W}$). Neka je W skup svih $G-$orbita u $\tilde{W}$, tj. skup svih skupova oblika*

$$Gp = \{\varphi(p);\ \varphi \in G\}, \qquad p \in \tilde{W}.$$

Nadalje, neka je $f : \tilde{W} \to W$ preslikavanje koje svakoj točki iz $\tilde{W}$ pridružuje njenu $G-$orbitu, $f(p) = Gp$. Tada na W postoji (jedinstvena) srtuktura Riemannove plohe takva da je f natkrivanje. Nadalje, tada je $G = \mathcal{T}(f)$.

Dokaz: Neka je $\mathcal{A}$ holomorfni atlas na $\tilde{W}$ takav da je za svaku kartu $\alpha = (U_\alpha, z_\alpha) \in \mathcal{A}$ domena U_α povezana i da vrijedi:

$$\varphi \in G, \quad \varphi \neq id_{\tilde{W}} \qquad \Longrightarrow \qquad U_\alpha \cap \varphi(U_\alpha) = \emptyset.$$

Tada je $f|U_\alpha$ bijekcija sa U_α na $f(U_\alpha)$, $\forall \alpha \in \mathcal{A}$. Uvodimo na W topologiju zahtjevom da je za svako $\alpha \in \mathcal{A}$ skup $f(U_\alpha)$ otvoren u W i da je $f|U_\alpha$ homeomorfizam sa U_α na $f(U_\alpha)$. Tada je topološki prostor W povezan i svaka točka u njemu ima okolinu koja je homeomorfna otvorenom skupu u $\mathbb{C}$. Nadalje, za svako $\varphi \in G$ i za svaku kartu $\alpha \in \mathcal{A}$ restrikcija $f|\varphi(U_\alpha)$ je homeomorfizam sa $\varphi(U_\alpha)$ na $f(U_\alpha)$.

Zadatak 13.2. *Dokažite da je topološki prostor W Hausdorffov.*

Uputa: Za $p, q \in W$, $p \neq q$, izaberite $p_1, q_1 \in \tilde{W}$ takve da je

$$p = f(p_1) = Gp_1 \qquad \text{i} \qquad q = f(q_1) = Gq_1.$$

Razmatrajte sada odvojeno dvije mogućnosti:

(1) Postoje $\alpha \in \mathcal{A}$ i $\varphi, \psi \in G$ takvi da vrijedi $\varphi(p_1), \psi(q_1) \in U_\alpha$; u tom slučaju zbog jednostavnosti pišite p_1 umjesto $\varphi(p_1)$ i q_1 umjesto $\psi(q_1)$.

(2) Ne postoje takvi α, φ, ψ. U tom slučaju izaberite $\alpha \in \mathcal{A}$ tako da je $p_1 \in U_\alpha$, pa iskoristite činjenicu da je $\varphi(q_1) \notin U_\alpha \ \forall \varphi \in G$.

Prema tome, W je ploha i $f : \tilde{W} \to W$ je lokalni homeomorfizam.

Zadatak 13.3. *Dokažite da je $(f(U_\alpha))_{\alpha \in \mathcal{A}}$ otvoren pokrivač od W i da je svaki od skupova $f(U_\alpha)$ pravilno natkriven sa f.*

Uputa: Za kartu $\alpha \in \mathcal{A}$ dokažite da su $\varphi(U_\alpha)$, $\varphi \in G$, sve komponente povezanosti od $f^{-1}(f(U_\alpha))$.

Dakle, $f : \tilde{W} \to W$ je natkrivanje.

Zadatak 13.4. *Dokažite da je*

$$\left\{ \left(f(U_\alpha), z_\alpha \circ (f|U_\alpha)^{-1} \right) ; \ \alpha \in \mathcal{A} \right\}$$

holomorfni atlas na W.

Uputa: Provjerite jednakost $[z_\alpha \circ (f|U_\alpha)^{-1}] \circ [z_\beta \circ (f|U_\beta)^{-1}]^{-1} = z_\alpha \circ z_\beta^{-1}$.

Ostaje još da se dokaže da je $G = \mathcal{T}(f)$. Točke $p_1, p_2 \in \tilde{W}$ leže iznad iste točke iz W ako i samo ako je $p_2 = \varphi(p_1)$ za neko $\varphi \in G$, a također i ako i samo ako je $p_2 = \psi(p_1)$ za neko $\psi \in \mathcal{T}(f)$. Očito je $G \subseteq \mathcal{T}(f)$. Neka je $\psi \in \mathcal{T}(f)$. Za neku točku $p_1 \in \tilde{W}$ stavimo $p_2 = \psi(p_1)$. Tada točke p_1 i p_2 leže iznad iste točke iz W, pa postoji $\varphi \in G$ takva da je $p_2 = \varphi(p_1)$. Sada je $\varphi^{-1} \circ \psi \in \mathcal{T}(f)$ i $(\varphi^{-1} \circ \psi)(p_1) = p_1$. Prema teoremu 8.2. slijedi da je $\varphi^{-1} \circ \psi = id_{\tilde{W}}$. Dakle, $\psi = \varphi \in G$. Time je dokazana i inkluzija $\mathcal{T}(f) \subseteq G$, pa slijedi $\mathcal{T}(f) = G$.

Prema tvrdnji (b) teorema 13.1. svaki element od $Aut(\overline{\mathbb{C}})$ ima fiksnu točku u $\mathbb{C}$. Prema tome, ako je $f : \overline{\mathbb{C}} \to W$ natkrivanje, nužno je $\mathcal{T}(f) = \{id_{\overline{\mathbb{C}}}\}$, tj. f je izomorfizam Riem,annovih ploha.

Prema tvrdnji (a) teorema 13.1. ako je $f : \mathbb{C} \to W$ natkrivanje, onda je $\mathcal{T}(f)$ podgrupa grupe pomaka kompleksne ravnine $\mathbb{C}$, sastavljene od svih transformacija oblika $\varphi_b : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $\varphi_b(z) = z+b$, $b \in \mathbb{C}$. Naravno, $b \mapsto \varphi_b$ je izomorfizam aditivne grupe $\mathbb{C}$ na grupu pomaka. Grupa $\mathcal{T}(f)$ mora djelovati diskontinuirano, a to znači da je $\{b \in \mathbb{C}; \ \varphi_b \in \mathcal{T}(f)\}$ diskretna podgrupa aditivne grupe $\mathbb{C}$.

Zadatak 13.5. *Neka je $f : \mathbb{C} \to W$ natkrivanje koje nije izomorfizam Riemannovih ploha. Dokažite da tada vrijedi jedna od sljedeće dvije mogućnosti:*

(a) *Postoji $b \in \mathbb{C}^*$ takav da je*

$$\mathcal{T}(f) = \{\varphi_{nb}; \ n \in \mathbb{Z}\}.$$

U tom slučaju Riemannova ploha W izomorfna je Riemannovoj plohi $\mathbb{C}^*$.

(b) *Postoje $b, c \in \mathbb{C}$ koji su linearno nezavisni nad $\mathbb{R}$, tj. $\dfrac{b}{c} \notin \mathbb{R}$, takvi da je*

$$\mathcal{T}(f) = \{\varphi_{nb+mc}; \ n, m \in \mathbb{Z}\}.$$

Tada je ploha W homeomorfna torusu $S^2 = S \times S = \{(\lambda, \mu); \ |\lambda| = |\mu| = 1\}$.

Primijetimo da smo u (b) mogli kazati da je Riemannova ploha W izomorfna Riemannovoj plohi S^2. Međutim, valja imati na umu da na torusu S^2 postoje brojne neizomorfne strukture Riemannove plohe.

Na temelju dokazanog imamo sljedeći popis svih Riemannovih ploha:

Teorem 13.3. *Ako Riemannova ploha* W *nije izomorfna* $\overline{\mathbb{C}}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{C}^*$ *ili torusu, tada postoji podgrupa* Γ *od* $Aut(D)$ *koja se sastoji od transformacija bez fiksnih točaka u* D *koja djeluje diskontinuirano na* D, *tako da je ploha* W *izomorfna kvocijentnoj plohi* D/Γ *i ako je* $f : D \to W$ *odgovarajuće natkrivanje, onda je* $\mathcal{T}(f) = \Gamma$.