HARISH–CHANDRINI MODULI

Prof. dr. sc. Hrvoje Kraljević

Predavanja održana na poslijediplomskom studiju 2004./2005.
PMF–Matematički odjel Sveučilista u Zagrebu

Zagreb, srpanj 2005.

Sadržaj

Poglavlje 1

Moduli

Neka je R prsten (unitalan ili neunitalan). **Dobra kategorija** $\mathcal{C}$ $R-$modula sastoji se od:

(a) klase lijevih (ili desnih) $R-$modula, koja je zatvorena u odnosu na uzimanje podmodula, kvocijentnih modula i konačnih direktnih suma;

(b) skupova $Hom_R(A, B)$ svih $R-$homomorfizama sa A u B, za bilo koje A, B iz klase (a).

$k-$**algebra** je naziv za asocijativnu algebru nad poljem k. Ako je R unitalna $k-$algebra i V unitalni lijevi (odnosno, desni) $R-$modul, onda je V vektorski prostor nad k uz množenje skalarima definirano sa

$$\lambda v = (\lambda 1)v \qquad [\text{odnosno} \quad \lambda v = v(\lambda 1)] \qquad \lambda \in k, \quad v \in V.$$

Tada vrijedi

$$\lambda(av) = (\lambda a)v = a(\lambda v), \qquad \lambda \in k, \quad a \in R, \quad v \in V$$

i analogno za desne module.

Za prsten R označimo sa $\mathcal{I}(R)$ skup svih idempotenata prstena R tj. skup svih $p \in R$ takvih da je $p^2 = p$. $\mathcal{I}(R)$ je parcijalno uređen skup s relacijom uređaja definiranom sa

$$p \leq q \qquad \Longleftrightarrow \qquad pq = qp = p.$$

Prsten R zove se **aproksimativno unitalan** ako je $\mathcal{I}(R)$ usmjeren skup, tj. za bilo koje $p, q \in \mathcal{I}(R)$ postoji $r \in \mathcal{I}(R)$ takav da je $p \leq r$ i $q \leq r$, i ako za svaki $a \in R$ postoji $p \in \mathcal{I}(R)$ takav da je $pa = ap = a$. U tom slučaju (lijevi) $R-$**modul** V zove se **aproksimativno unitalan** ako za svaki $v \in V$ postoji $p \in \mathcal{I}(R)$ takav da je $pv = v$.

Prsten R je aproksimativno unitalan ako i samo ako u R postoji aproksimativna jedinica, tj. familija $(e_i;\ i \in I)$ u R, gdje je I usmjeren skup i vrijedi:

(a) $i \leq j \quad \Longrightarrow \quad e_i e_j = e_j e_i = e_i$;

(b) $\forall a \in R\ \exists i \in I$ takav da vrijedi $e_i a = a e_i = a$.

Zadatak 1.1 *Neka je R aproksimativno unitalna $k-$algebra i neka je V aproksimativno unitalan lijevi (odnosno, desni) $R-$modul. Dokažite da na V postoji jedinstvena struktura vektorskog prostora nad k takva da vrijedi*

$$\lambda(av) = (\lambda a)v = a(\lambda v), \quad [\textit{odnosno}, \quad \lambda(va) = (\lambda v)a = v(\lambda a)] \qquad \forall \lambda \in k, \quad \forall a \in R, \quad \forall v \in V.$$

Zadatak 1.2 *Neka je R aproksimativno unitalna $k-$algebra i neka su X i Y aproksimativno unitalni $R-$moduli. Dokažite da je tada*

$$\varphi(\lambda x) = \lambda\varphi(x), \qquad \forall\varphi \in Hom_R(X,Y), \quad \forall\lambda \in k, \quad \forall x \in X.$$

Posebno, $Hom_R(X,Y)$ je potprostor od $Hom_k(X,Y)$.

Neka je R prsten, X desni $R-$modul i Y lijevi $R-$modul. **Bimorfizam** $X \times Y$ u komutativnu (aditivnu) grupu Z je preslikavanje $\varphi : X \times Y \to Z$ sa svojstvima

$\varphi(x_1 + x_2, y) = \varphi(x_1, y) + \varphi(x_2, y)$, $x_1, x_2 \in X$, $y \in Y$;

$\varphi(x, y_1 + y_2) = \varphi(x, y_1) + \varphi(x, y_2)$, $x \in X$, $y_1, y_2 \in Y$;

$\varphi(xa, y) = \varphi(x, ay)$, $x \in X$, $y \in Y$, $a \in R$.

Tenzorski produkt X i Y nad R je uređen par (Z, φ), gdje je Z komutativna grupa, φ je bimorfizam $X \times Y$ u Z i vrijedi tzv. *univerzalno svojstvo*:

Ako je $\psi : X \times Y \to U$ bimorfizam, postoji jedinstven morfizam komutativnih grupa $\chi : Z \to U$ takav da je $\psi = \chi \circ \varphi$.

Pokazuje se da tenzorski produkt postoji i da je jedinstven do na izomorfizam. Pišemo $Z = X \otimes_R Y$ i $\varphi(x,y) = x \otimes y$. Skup $\{x \otimes y;\ x \in X,\ y \in Y\}$ generira grupu $X \otimes_R Y$.

Zadatak 1.3 *Neka je R aproksimativno unitalna $k-$algebra i neka su X i Y aproksimativno unitalni desni i lijevi $R-$modul. Dokažite da tada u $X \otimes_R Y$ vrijedi*

$$(\lambda x) \otimes y = x \otimes (\lambda y), \qquad \forall\lambda \in k, \quad \forall x \in X, \quad \forall y \in Y.$$

Dakle, $X \otimes_R Y$ je vektorski prostor nad k. Dokažite da je vektorski prostor $X \otimes_R Y$ izomorfan kvocijentnom prostoru

$$(X \otimes_k Y)/[\{xa \otimes y - x \otimes ay;\ x \in X,\ y \in Y,\ a \in R\}].$$

Propozicija 1.1 *Neka su R i S aproksimativno unitalne $k-$algebre. Tada vrijedi:*

(1) *Neka su X desni $R-$modul, Y $(R,S)-$bimodul i Z desni $S-$modul. Tada imamo izomorfizam vektorskih prostora nqd k :*

$$Hom_S(X \otimes_R Y, Z) \simeq Hom_R(X, Hom_S(Y,Z)).$$

(2) *Neka su X lijevi $R-$modul, Y $(S,R)-$bimodul i Z lijevi $S-$modul. Tada imamo izomorfizam vektorskih prostora nad k :*

$$Hom_S(Y \otimes_R X, Z) \simeq Hom_R(X, Hom_S(Y,Z)).$$

(3) *Neka su X desni $R-$modul, Y $(R,S)-$bimodul i Z lijevi $S-$modul. Tada imamo izomorfizam vektorskih prostora nad k :*

$$(X \otimes_R Y) \otimes_S Z \simeq X \otimes_R (Y \otimes_S Z).$$

Neka je R prsten i $\mathcal{C}$ dobra kategorija lijevih $R-$modula (analogno za desne $R-$module). Modul u kategoriji $\mathcal{C}$ zove se **potpuno reducibilan** ako je on direktna suma ireducibilnih podmodula.

Propozicija 1.2 *Neka je V modul u $\mathcal{C}$ i neka je $(V_s;\ s \in S)$ familija ireducibilnih $R-$podmodula od V. Tada je podmodul*

$$\sum_{s\in S} V_s$$

potpuno reducibilan. Preciznije, postoji $T \subseteq S$ takav da je

$$\sum_{s\in S} V_s = \coprod_{t\in T} V_t.$$

Dokaz: Nazovimo podskup $U \subseteq S$ nezavisnim ako je suma $\sum_{u\in U} V_u$ direktna. Primjenom Zornove leme lako se vidi da skup svih nezavisnih podskupova od S ima maksimalan element T u odnosu na relaciju inkluzije i da je tada

$$\sum_{s\in S} V_s = \coprod_{t\in T} V_t.$$

Propozicija 1.3 *Neka je V potpuno reducibilan modul iz $\mathcal{C}$ i neka je W podmodul.*

(a) Modul V/W je potpuno reducibilan.

(b) W je direktni sumand u V.

(c) Modul W je potpuno reducibilan.

Preciznije, ako je

$$V = \coprod_{s\in S} V_s$$

gdje su V_s, $s \in S$, ireducibilni podmoduli, onda postoji $T \subseteq S$ takav da je

$$V = W \dot{+} V_T, \qquad V_T = \coprod_{t\in T} V_t,$$

i tada je $x \mapsto x + W$ izomorfizam V_T na V/W. Nadalje, modul W je izomorfan modulu $V_{S\setminus T}$.

Dokaz: (a) Za podmodul $X \leq V$ pišemo $\overline{X} = (X + W)/W \leq V/W$. Za svaki $s \in S$ tada je ili $\overline{V}_s = 0$ ili je $\overline{V}_s$ ireducibilan. Stavimo

$$U = \{s \in S;\ \overline{V}_s \text{ je ireducibilan}\}.$$

Tada je

$$V/W = \sum_{s\in U} \overline{V}_s$$

pa iz propozicije 1.2. slijedi da postoji $T \subseteq U$ takav da je

$$V/W = \coprod_{t\in T} \overline{V}_t.$$

Tada je restrikcija kvocijentnog morfizma $V_T \to V/W$ izomorfizam, dakle, modul V/W je potpuno reducibilan.

(b) Iz dokazanog u (a) slijedi $V = W \dot{+} V_T$.

(c) Iz dokazanog u (b) i iz pretpostavki slijedi $W \simeq V/V_T \simeq V_{S\setminus T}$.

Iz propozicije 1.3. neposredno slijedi:

Propozicija 1.4 *Potpuno reducibilni moduli u dobroj kategoriji $\mathcal{C}$ tvore dobru kategoriju. Preciznije, vrijedi:*

(a) *Ako je V potpuno reducibilan onda je svaki njegov podmodul i svaki kvocijent potpuno reducibilan.*

(b) *Suma (ne samo direktna i ne samo konačna) potpuno reducibilnih podmodula je potpuno reducibilan podmodul.*

(c) *Svaki modul V u $\mathcal{C}$ ima jedinstven maksimalan potpuno reducibilan podmodul $soc(V)$; ($soc(V)$ zove se* **sokl modula** *V). $soc(V)$ je suma svih ireducibilnih podmodula od V.*

Propozicija 1.5 *Neka je E ireducibilna modul u kategoriji $\mathcal{C}$ i neka za modul V u kategoriji $\mathcal{C}$ vrijedi*

$$V = \coprod_{s \in S} V_s,$$

gdje su V_s, $s \in S$, ireducibilni podmoduli od V. Tada je

$$Hom_R(E, V) = \coprod_{s \in S} Hom_R(E, V_s).$$

Dokaz: Za $s \in S$ neka je $p_s : V \to V$ projektor na podmodul V_s duž podmodula

$$W_s = \coprod_{t \in S \setminus \{s\}} V_t.$$

Nadalje, za $\varphi \in Hom_R(E, V)$ stavimo $\varphi_s = p_s \circ \varphi$. Budući da je V direktna suma podmodula V_s slijedi da je za svaki $e \in E$ za samo konačno mnogo $s \in S$ vrijedi $\varphi_s(e) \neq 0$ i da je

$$\varphi(e) = \sum_{s \in S} \varphi_s(e).$$

Treba dokazati da je skup $\{s \in S;\ \varphi_s \neq 0\}$ konačan. To je očito ako je $\varphi = 0$. Uzmimo da je $\varphi \neq 0$. Tada je $\varphi(E)$ ireducibilan podmodul od V. Neka je $e \in E$, $e \neq 0$. Tada za neke $s_1, s_2, \ldots, s_n \in S$ i neke $v_i \in V_{s_i}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, vrijedi $\varphi(e) = v_1, v_2 + \cdots + v_n$. Stavimo

$$W = V_{s_1} \dot{+} V_{s_2} \dot{+} \cdots \dot{+} V_{s_n}.$$

Tada je $\varphi(E) \cap W \neq 0$, pa iz ireducibilnosti $\varphi(E)$ slijedi $\varphi(E) \subseteq W$. Stoga je $\varphi_s = 0$ za $s \in S \setminus \{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$.

Propozicija 1.6 (Schurova lema) *Neka su E i F ireducibilni $R-$moduli u dobroj kategoriji $\mathcal{C}$.*

(a) *Ako $E \not\simeq F$ onda je $Hom_R(E, F) = \{0\}$.*

(b) *$End_R(E) = Hom_R(E, E)$ je tijelo.*

(c) *Ako je R asocijativna algebra nad algebarski zatvorenim poljem k i $\dim_k E < Card\, k$, onda je $End_R(E) = k \cdot id_E = \{\lambda \cdot id_E;\ \lambda \in k\}$.*

Dokaz: (a) i (b) : Neka je $\varphi \in Hom_R(E,F)$, $\varphi \neq 0$. Tada je $\operatorname{Ker}\varphi \neq E$ podmodul od E pa iz ireducibilnosti E slijedi $\operatorname{Ker}\varphi = 0$. Dakle, φ je injekcija. Nadalje, $\operatorname{Im}\varphi \neq 0$ je podmodul od F, pa iz ireducibilnosti F slijedi da je $\operatorname{Im}\varphi = F$. Dakle, φ je i surjekcija. To znači da je svaki $\varphi \in Hom_R(E,F) \setminus \{0\}$ izomorfizam.

(c) Neka je $e \in E$, $e \neq 0$. Tada je $\varphi \mapsto \varphi(e)$ $k-$linearna injekcija sa $End_R(E)$ u E pa slijedi da je $\dim_k End_R(E) < \operatorname{Card} k$. Pretpostavimo suprotno tvrdnji (c) da je $End_R(E) \neq k \cdot id_E$ i neka je $\varphi \in End_R(E)$, $\varphi \neq \lambda id_E$ $\forall \lambda \in k$. Najmanje podtijelo od $End_R(E)$ koje sadrži $k \cdot id_E \cup \{\varphi\}$ je polje izomorfno polju $k(\varphi)$. Kako je $\varphi \notin k \cdot id_E$, iz algebarske zatvorenosti polja k slijedi da je φ transcendentan nad k. Dakle $k(\varphi)$ je izomorfno polju $k(X)$ racionalnih funkcija u jednoj varijabli nad k. Kako je familija $(X-\alpha)_{\alpha \in k}$ linearno nezavisna nad k, dolazimo do kontradikcije:

$$\dim_k End_R(E) \geq \dim_k k(X) \geq \operatorname{Card} k > \dim_k End_R(E).$$

Propozicija 1.7 *Neka je R aproksimativno unitalna $k-$algebra, $\mathcal{C}$ dobra kategorija aporoksimativno unitalnih $R-$modula, E ireducibilan modul u $\mathcal{C}$ i V modul u $\mathcal{C}$. Stavimo*

$$V^E = Hom_R(E,V).$$

(a) *Neka je V_E suma svih podmodula od V izomorfnih s modulom E. Za $\varphi \in V^E$ je $\varphi(E) \subseteq V_E$, dakle, $V^E = Hom_R(E, V_E)$.*

(b) *V^E je unitalni desni D_E-modul, gdje je $D_E = End_R(E)$. E je unitalni lijevi D_E-modul.*

(c) *$V^E \otimes_{D_E} E$ promatramo kao lijevi $R-$modul s djelovanjem R na drugi faktor. Postoji homomorfizam lijevih $R-$modula $\Phi : V^E \otimes_{D_E} E \to V$ takav da je $\Phi(\psi \otimes e) = \psi(e)$ za $\psi \in V^E$ i $e \in E$. Φ je monomorfizam i slika mu je V_E. Dakle, Φ je izomorfizam sa $V^E \otimes_{D_E} E$ na V_E.*

(d) *$W \mapsto Hom_R(E,W)$ je bijekcija sa skupa svih lijevih $R-$podmodula od V_E na skup svih desnih D_E-podmodula od V^E. Inverzno preslikavanje je $X \mapsto \Phi(X \otimes_{D_E} E)$.*

(e) *Za modul W u kategoriji $\mathcal{C}$ i za $\varphi \in Hom_R(V_E, W_E)$ stavimo $\varphi^E = \cdot \circ \varphi$, tj. za $\psi \in Hom_R(E,V)$ stavimo $\varphi^E(\psi) = \psi \circ \varphi$. Tada je $\varphi^E \in Hom_{D_E}(V^E, W^E)$. Neka su $\Phi_V : V^E \otimes_{D_E} E \to V_E$ i $\Phi_W : W^E \otimes_{D_E} E \to W_E$ izomorfizmi iz (c) za module V i W. Tada je $\varphi \mapsto \varphi^E$ izomorfizam sa $Hom_R(V_E, W_E)$ na $Hom_{D_E}(V^E, W^E)$ i vrijedi*

$$\varphi(\Phi_V(\psi \otimes e)) = \Phi_W(\varphi^E(\psi) \otimes e), \qquad e \in E, \quad \psi \in V^E.$$

Podmodul V_E iz tvrdnje (a) propozicije 1.7. zove se **izotipni podmodul** od V tipa E.

Zadatak 1.4 *Dokažite propoziciju 1.7.*

Korolar 1.1 *Neka je V potpuno reducibilan modul u $\mathcal{C}$ i W modul u $\mathcal{C}$. Označimo sa $\hat{\mathcal{C}}$ skup svih klasa izomorfnosti ireducibilnih modula u $\mathcal{C}$. Tada vrijedi:*

(a) $V = \coprod_{E \in \hat{\mathcal{C}}} V_E \simeq \coprod_{E \in \hat{\mathcal{C}}} (V^E \otimes_{D_E} E)$.

(b) *Skup svih podmodula od V u bijekciji je sa skupom svih familija $(X^E;\ E \in \hat{\mathcal{C}})$ desnih D_E-podmodula od V^E.*

(c) *$Hom_R(V,W) = Hom_R(V, soc(W)) \simeq \prod_{E \in \hat{\mathcal{C}}} Hom_{D_E}(V^E, W^E)$. Tj. $R-$homomorfizam sa V u W određen je zadavanjem proizvoljnog D_E-homomorfizma sa V^E u W^E za svaki $E \in \hat{\mathcal{C}}$.*

Zadatak 1.5 *Dokažite korolar 1.1.*

Do konca ovog poglavlja $\mathcal{C}$ označava dobru kategoriju $R-$modula za neki prsten R.

Konačna filtracija modula M iz $\mathcal{C}$ je konačan padajući niz $R-$podmodula

$$M = M_0 \supseteq M_1 \supseteq \cdots \supseteq M_n = 0. \qquad (*)$$

Moduli M_{j-1}/M_j, $1 \leq j \leq n$, zovu se **uzastopni kvocijenti** filtracije $(*)$. Konačna filtracija $(*)$ zove se **kompozicioni niz** modula M, ako su svi uzastopni kvocijenti ireducibilni (posebno, svi su različiti od 0). Uzastopni kvocijenti tada se zovu **kompozicioni faktori**. Modul M je **konačne duljine** ako ima neki kompozicioni niz.

Propozicija 1.8 *Neka je M modul konačne duljine i M' podmodul. Sljedeća su dva svojstva međusobno ekvivalentna:*

(a) *M je konačne duljine.*

(b) *M' i M/M' su konačne duljine.*

Korolar 1.2 *Puna potkategorija $\mathcal{C}_F$ svih modula konačne duljine iz dobre kategorije $\mathcal{C}$ je dobra kategorija.*

Zadatak 1.6 *Dokažite propoziciju 1.8.*

Lema 1.1 (Drugi teorem o izomorfizmu) *Neka je M modul i N i P njegovi podmoduli. Tada je*

$$(N + P)/P \simeq N/(N \cap P)$$

i izomorfizam je dan sa $(n + p) + P \mapsto n + N \cap P$.

Lema 1.2 (Zassenhaus) *Neka je M modul i M_1, M_2, M_1' i M_2' njegovi podmoduli takvi da je $M_1' \subseteq M_1$ i $M_2' \subseteq M_2$. Tada je*

$$[M_1 \cap M_2 + M_1']/[M_1 \cap M_2' + M_1'] \simeq [M_1 \cap M_2 + M_2']/[M_1' \cap M_2 + M_2'].$$

Dokaz: Iz leme 1.1. slijedi

$$(M_1 \cap M_2)/[\{(M_1 \cap M_2') + M_1'\} \cap (M_1 \cap M_2)] \simeq (M_1 \cap M_2 + M_1 \cap M_2' + M_1')/(M_1 \cap M_2' + M_1') =$$

$$= (M_1 \cap M_2 + M_1')/(M_1 \cap M_2' + M_1').$$

Nadalje,

$$(M_1 \cap M_2' + M_1') \cap (M_1 \cap M_2) = (M_1 \cap M_2' + M_1') \cap M_2 = M_1 \cap M_2' + M_1' \cap M_2.$$

Dakle, imamo

$$(M_1 \cap M_2)/(M_1 \cap M_2' + M_1' \cap M_2) \simeq (M_1 \cap M_2 + M_1')/(M_1 \cap M_2' + M_1').$$

Ovdje je lijeva strana simetrična u odnosu na zamjenu indeksa 1 i 2, pa i desna strana mora biti simetrična u odnosu na takvu zamjenu.

Za konačnu filtraciju

$$N = N_0 \supseteq N_1 \supseteq \cdots \supseteq N_n = 0$$

kažemo da je **profinjenje** konačne filtracije

$$M = M_0 \supseteq M_1 \supseteq \cdots \supseteq M_m = 0$$

ako postoji injekcija $f : \{0, 1, \ldots, m\} \to \{0, 1, \ldots, n\}$ takva da je $M_i = N_{f(i)}$ za $i = 0, 1, \ldots, m$. Dvije gornje filtracije zovu se **ekvivalentne** ako je $m = n$ i ako postoji permutacija σ skupa $\{0, 1, \ldots, n\}$ takva da je

$$M_i/M_{i+1} \simeq N_{\sigma(i)}/N_{\sigma(i)+1} \qquad \text{za} \quad i = 0, 1, \ldots, n$$

(uz dogovor $M_{n+1} = N_{n+1} = 0$).

Teorem 1.1 (Schreier) *Svake dvije konačne filtracije imaju profinjenja koja su međusobno ekvivalentna.*

Korolar 1.3 *Neka je M modul u $\mathcal{C}_F$.*

(*a*) *Svaka konačna filtracija s uzastopnim kvocijentima različitim od* 0 *može se profiniti do kompozicionog niza.*

(*b*) *Svaka dva kompoziciona niza modula M su ekvivalentna.*

Zadatak 1.7 *Dokažite teorem 1.1. i korolar 1.3.*

Uputa: Za filtracije

$$M = M_= \supseteq M_1 \supseteq M_2 \supseteq \cdots \supseteq M_m = 0 \qquad \text{i} \qquad M = N_0 \supseteq N_1 \supseteq N_2 \supseteq \cdots \supseteq N_n = 0$$

stavimo

$$M_{ij} = M_i \cap N_j + M_{i+1}, \qquad 0 \le j \le n, \quad 0 \le i \le m-1,$$
$$N_{ji} = M_i \cap N_j + N_{j+1}, \qquad 0 \le i \le m, \quad 0 \le j \le n-1.$$

Budući da je $M_{in} = M_{i+1} = M_{i+1,0}$ i $N_{jm} = N_{j+1} = N_{j+1,0}$ imamo profinjenja gornjih dviju filtracija

$$M = M_{00} \supseteq M_{01} \supseteq \cdots \supseteq M_{0n} \supseteq M_{10} \supseteq M_{11} \supseteq \cdots \supseteq M_{1n} \supseteq \cdots\cdots \supseteq M_{m-1,0} \supseteq M_{m-1,1} \supseteq \cdots \supseteq M_{m-1,n} = 0$$

i

$$M = N_{00} \supseteq N_{01} \supseteq \cdots \supseteq N_{0m} \supseteq N_{10} \supseteq N_{11} \supseteq \cdots \supseteq N_{1m} \supseteq \cdots\cdots \supseteq N_{n-1,0} \supseteq N_{n-1,1} \supseteq \cdots \supseteq N_{n-1,m} = 0.$$

Sada primjenom leme 1.2. zaključite da je $M_{ij}/M_{i,j+1} \simeq N_{ji}/N_{j,i+1}$.

Duljina modula M je prirodan broj n (ili $n = 0$) takav da M ima kompozicioni niz

$$M = M_0 \supseteq M_1 \supseteq \cdots \supseteq M_n = 0.$$

Tada pišemo $n = \ell(M)$.

Zadatak 1.8 *Dokažite da za $M' \subseteq M$ iz $\mathcal{C}_F$ vrijedi:*

$$\ell(M) = \ell(M') + \ell(M/M');$$

$$\ell(M') \le \ell(M);$$
$$\ell(M') = \ell(M) \quad \Longrightarrow \quad M' = M;$$
$$\ell(M/M') \le \ell(M);$$
$$\ell(M/M') = \ell(M) \quad \Longrightarrow \quad M' = 0.$$

Dobra **kategorija** $\mathcal{C}$ zove se **mala** ako je klasa objekata iz $\mathcal{C}$ skup; taj skup označavamo $Ob(\mathcal{C})$. Tada se definira **Grothendieckova grupa** $K(\mathcal{C})$ kategorije $\mathcal{C}$ na sljedeći način. Najprije formiramo slobodnu Abelovu grupu $\mathcal{F}(\mathcal{C})$ nad skupom $Ob(\mathcal{C})$. Zatim formiramo podgrupu $\mathcal{N}(\mathcal{C})$ grupe $\mathcal{F}(\mathcal{C})$ generiranu skupom

$$\{A - B + C;\ 0 \to A \to B \to C \to 0 \quad \text{egzaktni niz u} \quad \mathcal{C}\}.$$

Napokon, definiramo $K(\mathcal{C}) = \mathcal{F}(\mathcal{C})/\mathcal{N}(\mathcal{C})$. Tada su izomorfni moduli predstavljeni istim elementom grupe $K(\mathcal{C})$, jer ako je $A \simeq B$ onda imamo egzaktan niz $0 \to A \to B \to 0 \to 0$ pa je $A - B \in \mathcal{N}(\mathcal{C})$.

Ako u dobroj kategoriji $\mathcal{C}$ klasa objekata sadrži skup koji sadrži bar jedan modul iz svake klase izomorfnosti, onda se iz $\mathcal{C}$ može konstruirati mala dobra puna potkategorija u čijem skupu objekata je sadržan bar jedan modul iz svake klase izomorfnosti modula u $\mathcal{C}$.

Propozicija 1.9 *Neka je $\mathcal{C}$ mala dobra kategorija konačnodimenzionalnih vektorskih prostora nad poljem k. Tada postoji homomorfizam* $\dim : K(\mathcal{C}) \to \mathbb{Z}$ *takav da je* $\dim(A) = \dim_k A$ *za svaki $A \in Ob(\mathcal{C})$. Taj je homomorfizam izomorfizam.*

Zadatak 1.9 *Pomoću relacije $(A \dotplus B) = (A) + (B)$, gdje za $A \in Ob(\mathcal{C})$ sa (A) označavamo njegovu klasu u $K(\mathcal{C})$, dokažite propoziciju 1.9.*

Poglavlje 2

Homološka algebra

U daljnjem je R prsten i $\mathcal{C}$ dobra kategorija $R-$modula (lijevih, ali sve vrijedi i za desne). **Kompleks** u $\mathcal{C}$ je konačan ili beskonačan niz modula i morfizama u jednom od oblika

$$X: \quad \cdots \longleftarrow X_{n-1} \overset{\partial_{n-1}}{\longleftarrow} X_n \overset{\partial_n}{\longleftarrow} X_{n+1} \longleftarrow \cdots$$

$$Y: \quad \cdots \longrightarrow Y_{n-1} \overset{d_{n-1}}{\longrightarrow} Y_n \overset{d_n}{\longrightarrow} Y_{n+1} \longrightarrow \cdots$$

pri čemu vrijedi $\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0$ (odnosno, $d_n \circ d_{n-1} = 0$) za svaki n. **Homologija** kompleksa X s padajućim indeksima je

$$H_n(X) = (\operatorname{Ker} \partial_{n-1})/(\operatorname{Im} \partial_n)$$

a **kohomologija** kompleksa Y s rastućim indeksima je

$$H^n(Y) = (\operatorname{Ker} d_n)/(\operatorname{Im} d_{n-1}).$$

Dvije vrste kompleksa svode se na isto zamjenom n sa $-n$. Kompleks X je **egzaktan** na mjestu X_n ako je $\operatorname{Im} \partial_n = \operatorname{Ker} \partial_{n-1}$. Kažemo da je X **egzaktan niz** ili **egzaktan kompleks** ako je egzaktan na svakom mjestu.

Ako imamo dijagram u $\mathcal{C}$ oblika

$$\begin{array}{ccccccccc}
X: & \cdots & \longleftarrow & X_{n-1} & \overset{\partial_{n-1}}{\longleftarrow} & X_n & \overset{\partial_n}{\longleftarrow} & X_{n+1} & \longleftarrow & \cdots \\
 & & & \downarrow F_{n-1} & & \downarrow F_n & & \downarrow F_{n+1} & & \\
X': & \cdots & \longleftarrow & X'_{n-1} & \overset{\partial'_{n-1}}{\longleftarrow} & X'_n & \overset{\partial'_n}{\longleftarrow} & X'_{n+1} & \longleftarrow & \cdots
\end{array}$$

u kojem su X i X' kompleksi i svi kvadrati komutiraju (tj. $F_{n-1} \circ \partial_{n-1} = \partial'_{n-1} \circ F_n \ \forall n$), kažemo da je $F = \{F_n\}$ **lančano preslikavanje** (ili **kolančano** u analognoj situaciji kad su indeksi rastući). Lančano preslikavanje $F = \{F_n\}$ daje preslikavanje na homologijama također označeno s $F = \{F_n\}$, $F_n : H_n(X) \to H_n(X')$. Ako je u gornjem dijagramu $X_{-2} = X'_{-2} = 0$, $X_{-1} = M$, $X'_{-1} = M'$ i $F_{-1} = f$, onda F zovemo **lančano preslikavanje nad morfizmom** $f : M \to M'$ (odnosno, u analognoj situaciji za rastuće indekse, **kolančano preslikavanje nad** f).

Neka su $F : X \to X'$ i $G : X \to X'$ dva lančana preslikavanja kompleksa s padajućim indeksima. Za sistem $s = \{s_n\}$ morfizama u $\mathcal{C}$ kažemo da je **homotopija** između F i G, ako je

$$s_n : X_n \to X'_{n+1} \qquad \text{i vrijedi} \qquad \partial'_n \circ s_n + s_{n-1} \circ \partial_{n-1} = F_n - G_n \qquad \forall n.$$

Definicija u analognom slučaju kolančanih preslikavanja $F, G : Y \to Y'$ kompleksa s rastućim indeksima je

$$s_n : Y_n \to Y'_{n-1} \qquad \text{i vrijedi} \qquad d_{n-1} \circ s_n + s_{n+1} \circ d_n = F_n - G_n \qquad \forall n.$$

Homotopna lančana (kolančana) preslikavanja induciraju ista preslikavanja na homologijama (kohomologijama).

Za modul P u $\mathcal{C}$ kažemo da je **projektivan** u $\mathcal{C}$ ako za svaki dijagram

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[d, "\tau"] & \\ 0 & B \arrow[l] & C \arrow[l, "\psi"'] \end{tikzcd}$$

koji je egzaktan na mjestu B (tj. ψ je surjekcija) postoji $\sigma : P \to C$ takav da dobiveni dijagram

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[d, "\tau"] \arrow[dr, "\sigma"] & \\ 0 & B \arrow[l] & C \arrow[l, "\psi"'] \end{tikzcd}$$

komutira (tj. da je $\tau = \psi \circ \sigma$). Ako je P projektivan i ako je

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[d, "\tau"] & \\ A' & A \arrow[l, "\varphi"'] & A'' \arrow[l, "\psi"'] \end{tikzcd}$$

dijagram u $\mathcal{C}$ koji je egzaktan na mjestu A (tj. $\operatorname{Im}\psi = \operatorname{Ker}\varphi$), i ako je $\varphi \circ \tau = 0$, tada postoji $\sigma : P \to A''$ takav da dijagram

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[d, "\tau"] \arrow[dr, "\sigma"] & \\ A' & A \arrow[l, "\varphi"'] & A'' \arrow[l, "\psi"'] \end{tikzcd}$$

komutira (tj. $\tau = \psi \circ \sigma$).

U kategoriji $\mathcal{C}$ se egzaktan niz

$$0 \longleftarrow M \longleftarrow X_0 \longleftarrow X_1 \longleftarrow X_2 \longleftarrow \cdots\cdots,$$

u kome su svi moduli $X_0, X_1, X_2, \ldots$ projektivni, zove **projektivna rezolucija** modula M.

Za modul I u $\mathcal{C}$ kažemo da je **injektivan** u $\mathcal{C}$ ako za svaki dijagram

$$\begin{tikzcd} & P & \\ 0 \arrow[r] & B \arrow[u, "\tau"] \arrow[r, "\varphi"] & C \end{tikzcd}$$

koji je egzaktan na mjestu B (tj. φ je injekcija) postoji $\sigma : C \to I$ takav da dobiveni dijagram

$$\begin{tikzcd} & I & \\ 0 \arrow[r] & B \arrow[u, "\tau"] \arrow[r, "\varphi"] & C \arrow[ul, "\sigma"'] \end{tikzcd}$$

komutira (tj. da je $\tau = \sigma \circ \varphi$). Ako je I injektivan i ako je

$$\begin{tikzcd} & I & \\ A' \arrow[r, "\psi"] & A \arrow[u, "\tau"] \arrow[r, "\varphi"] & A'' \end{tikzcd}$$

dijagram u $\mathcal{C}$ koji je egzaktan na mjestu A (tj. $\mathrm{Im}\,\psi = \mathrm{Ker}\,\varphi$), i ako je $\tau \circ \psi = 0$, tada postoji $\sigma : A'' \to I$ takav da dijagram

$$\begin{array}{ccccc} & & I & & \\ & & \uparrow\tau & \nwarrow\sigma & \\ A' & \xrightarrow{\psi} & A & \xrightarrow{\varphi} & A'' \end{array}$$

komutira (tj. $\tau = \sigma \circ \varphi$).

U kategoriji $\mathcal{C}$ se egzaktan niz

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow X_0 \longrightarrow X_1 \longrightarrow X_2 \longrightarrow \cdots\cdots,$$

u kome su svi moduli $X_0, X_1, X_2, \ldots$ injektivni, zove **injektivna rezolucija** modula M.

Propozicija 2.1 *(a) Neka su zadani kompleksi X i X' i morfizam $f : M \to M'$ u sljedećem dijagramu u $\mathcal{C}$:*

$$\begin{array}{cccccccccccc} X: & 0 & \longleftarrow & M & \longleftarrow & X_0 & \longleftarrow & X_1 & \longleftarrow & X_2 & \longleftarrow & \cdots\cdots \\ & & & \downarrow f & & \downarrow F_0 & & \downarrow F_1 & & \downarrow F_2 & & \\ X': & 0 & \longleftarrow & M' & \longleftarrow & X'_0 & \longleftarrow & X'_1 & \longleftarrow & X'_2 & \longleftarrow & \cdots\cdots \end{array}$$

Nadalje, pretpostavimo da je X' egzaktan i da su svi X_n projektivni. Tada postoji gore označeno lančano preslikavanje $F : X \to X'$ nad f. Ako su $F : X \to X'$ i $G : X \to X'$ dva lančana preslikavanja nad f onda su F i G homotopni.

(b) Neka su zadani kompleksi X i X' i morfizam $f : M \to M'$ u sljedećem dijagramu u $\mathcal{C}$:

$$\begin{array}{cccccccccccc} X: & 0 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & X_0 & \longrightarrow & X_1 & \longrightarrow & X_2 & \longrightarrow & \cdots\cdots \\ & & & \downarrow f & & \downarrow F_0 & & \downarrow F_1 & & \downarrow F_2 & & \\ X': & 0 & \longrightarrow & M' & \longrightarrow & X'_0 & \longrightarrow & X'_1 & \longrightarrow & X'_2 & \longrightarrow & \cdots\cdots \end{array}$$

Nadalje, pretpostavimo da je X egzaktan i da su svi X'_n injektivni. Tada postoji gore označeno kolančano preslikavanje $F : X \to X'$ nad f. Ako su $F : X \to X'$ i $G : X \to X'$ dva kolančana preslikavanja nad f onda su F i G homotopni.

U daljnjem uglavnom radimo s dvije dobre kategorije. Ako nije posebno drugačije istaknuto, $\mathcal{C}$ je dobra kategorija (lijevih) $R-$modula, a $\mathcal{C}'$ je dobra kategorija (lijevih) $S-$modula.

Kovarijantan funktor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ je pridruživanje modula $F(A)$ iz $\mathcal{C}'$ svakom modulu A iz $\mathcal{C}$ i morfizma $F(\varphi) \in Hom_S(F(A), F(B))$ svakom morfizmu $\varphi \in Hom_R(A, B)$ tako da vrijedi:

(*i*) $F(id_A) = id_{F(A)}$.

(*ii*) $F(\varphi \circ \psi) = F(\varphi) \circ F(\psi)$.

Kontravarijantan funktor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ je pridruživanje modula $F(A)$ iz $\mathcal{C}'$ svakom modulu A iz $\mathcal{C}$ i morfizma $F(\varphi) \in Hom_S(F(B), F(A))$ svakom morfizmu $\varphi \in Hom_R(A, B)$ tako da vrijedi:

(*i*) $F(id_A) = id_{F(A)}$.

(*ii*) $F(\varphi \circ \psi) = F(\psi) \circ F(\varphi)$.

Funktor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ zove se **aditivan** ako vrijedi

$$F(\varphi + \psi) = F(\varphi) + F(\psi) \qquad \forall \varphi, \psi \in Hom_R(A, B) \quad \text{i} \quad \forall A, B \quad \text{u kategoriji} \quad \mathcal{C}.$$

Aditivni funktor šalje $0-$morfizam u $0-$morfizam, $0-$modul u $0-$modul, kompleks u kompleks, konačnu direktnu sumu u konačnu direktnu sumu.

U daljnjem ćemo stalno pretpostavljati da su funktori s kojima radimo aditivni

Funktor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ je **egzaktan** ako transformira svaki egzaktan niz u egzaktan niz. Funktor F je egzaktan ako i samo ako je egzaktan na svim tzv. *kratkim egzaktnim nizovima*:

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0.$$

Ako je X kompleks i F je egzaktan funktor, tada F prevodi homologiju ili kohomologiju od X u homologiju ili kohomologiju od $F(X)$.

Funktor F je **lijevo egzaktan** ako je za svaki kratki egzaktni niz

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0 \qquad \text{ako je} \quad F \quad \text{kovarijantan},$$

odnosno,

$$0 \longleftarrow A \longleftarrow B \longleftarrow C \longleftarrow 0 \qquad \text{ako je} \quad F \quad \text{kontravarijantan},$$

niz

$$0 \longrightarrow F(A) \longrightarrow F(B) \longrightarrow F(C)$$

egzaktan. Ako je F lijevo egzaktan, onda egzaktnost četveročlanog niza 0, A, B, C povlači egzaktnost gornjeg četveročlanog niza 0, $F(A)$, $F(B)$, $F(C)$.

Funktor F je **desno egzaktan** ako je za svaki gornji kratki egzaktni niz 0, A, B, C, 0 niz

$$F(A) \longrightarrow F(B) \longrightarrow F(C) \longrightarrow 0$$

egzaktan. Ako je F desno egzaktan, onda egzaktnost četveročlanog niza A, B, C, 0 povlači egzaktnost gornjeg četveročlanog niza $F(A)$, $F(B)$, $F(C)$, 0.

Funktor F koji je ili lijevo egzaktan ili desno egzaktan zvat ćemo **jednostrano egzaktan**.

Propozicija 2.2 *Neka je $\mathcal{C}$ dobra kategorija lijevih $R-$modula i $\mathcal{A}$ dobra kategorija svih $\mathbb{Z}-$modula (tj. Abelovih grupa).*

(a) *Ako je V modul u $\mathcal{C}$ onda je $Hom_R(\cdot, V)$ lijevo egzaktan kontravarijantan funktor $\mathcal{C}$ u $\mathcal{A}$.*

(b) *Ako je U modul u $\mathcal{C}$ onda je $Hom_R(U, \cdot)$ lijevo egzaktan kovarijantan funktor $\mathcal{C}$ u $\mathcal{A}$.*

(c) *Ako je U desni $R-$modul onda je $U \otimes_R (\cdot)$ desno egzaktan kovarijantan funktor $\mathcal{C}$ u $\mathcal{A}$.*

Tvrdnje vrijede i ako je $\mathcal{C}$ dobra kategorija aproksimativno unitalnih lijevih $R-$modula za aproksimativno unitalnu $k-$algebru, a $\mathcal{A}$ dobra kategorija svih vektorskih prostora nad k (u (c) treba pretpostaviti da je U aproksimativno unitalni desni $R-$modul).

Propozicija 2.3 (a) *Modul P je projektivan ako i samo ako je funktor $Hom_R(P, \cdot)$ egzaktan.*
(b) *Modul I je injektivan ako i samo ako je funktor $Hom_R(\cdot, I)$ egzaktan.*

U dobroj kategoriji svih vektorskih prostora nad poljem k svaki je modul projektivan i injektivan. Za svaki V su tada funktori $Hom_k(\cdot, V)$, $Hom_k(V, \cdot)$ i $V \otimes_k (\cdot)$ egzaktni.

Neka su $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ istovrsni funktori, tj. ili su oba kovarijantni ili su oba kontravarijantni. **Prirodno preslikavanje** F u G je sistem $T = (T_A)$ morfizama u $\mathcal{C}'$, pri čemu je $T_A \in Hom_S(F(A), G(A))$ za svaki modul A u kategoriji $\mathcal{C}$, takav da kad god je $\varphi \in Hom_R(A, B)$ onda komutira dijagram

$$\begin{array}{ccc} F(A) & \xrightarrow{T_A} & G(A) \\ F(\varphi)\downarrow & & \downarrow G(\varphi) \\ F(B) & \xrightarrow{T_B} & G(B) \end{array}$$

ako su F i G kovarijantni, odnosno dijagram

$$\begin{array}{ccc} F(A) & \xrightarrow{T_A} & G(A) \\ F(\varphi)\uparrow & & \uparrow G(\varphi) \\ F(B) & \xrightarrow{T_B} & G(B) \end{array}$$

ako su F i G kontravarijantni. Takav T zove se **prirodni izomorfizam** funktora F s funktorom G ako je T_A izomorfizam za svaki modul A u kategoriji $\mathcal{C}$. U tom slučaju je $T^{-1} = \left(T_A^{-1}\right)$ prirodni izomorfizam funtora G s funktorom F. Prirodno izomorfni funktori imaju ista svojstva egzaktnosti, tj. oba su egzaktni ili lijevo egzaktni ili desno egzaktni.

Propozicija 2.4 *Neka je k polje i A, B, C vektorski prostori nad k. Postoji jedinstveno $k-$linearno preslikavanje*

$$\Phi : Hom_k(A \otimes_k B, C) \longrightarrow Hom_k(A, Hom_k(B, C))$$

takvo da je

$$\{[\Phi(\varphi)](a)\}(b) = \varphi(a \otimes b) \qquad \forall \varphi \in Hom_k(A \otimes_k B, C), \quad \forall a \in A, \quad \forall b \in B.$$

Φ je izomorfizam i to prirodni u svakoj varijabli u sljedećem smislu: ako bilo koja dva od A, B i C fiksiramo, tada je Φ prirodni izomorfizam dvaju odgovarajućih funktora:

$$Hom_k((\cdot) \otimes_k B, C) \longrightarrow Hom_k(\cdot, Hom_k(B, C)) \qquad (kontravarijantan\ funktor),$$

$$Hom_k(A \otimes_k (\cdot), C) \longrightarrow Hom_k(A, Hom_k(\cdot, C)) \qquad (kontravarijantan\ funktor),$$

$$Hom_k(A \otimes_k B, \cdot) \longrightarrow Hom_k(A, Hom_k(B, \cdot)) \qquad (kovarijantan\ funktor).$$

Zadatak 2.1 *Dokažite propoziciju 2.4.*

Propozicija 2.5 *Neka je k polje i A, B i C vektorski prostori nad k. Postoji jedinstveno $k-$linearno preslikavanje*

$$\Phi : (A \otimes_k B) \otimes_k C \longrightarrow A \otimes_k (B \otimes_k C)$$

takvo da vrijedi

$$\Phi((a \otimes b) \otimes c) = a \otimes (b \otimes c) \qquad \forall a \in A, \quad \forall b \in B, \quad \forall c \in C.$$

Tada je Φ izomorfizam koji je prirodan u svakoj varijabli.

Propozicija 2.6 *Neka su R i S aproksimativno unitalne $k-$algebre, $\mathcal{A}$ dobra kategorija aproksimativno unitalnih lijevih $R-$modula, $\mathcal{B}$ dobra kategorija aproksimativno unitalnih $(S,R)-$bimodula i $\mathcal{C}$ dobra kategorija aproksimativno unitalnih lijevih $S-$modula. Izomorfizam iz propozicije 2.4.*

$$\Phi : Hom_k(A \otimes_k B, C) \longrightarrow Hom_k(A, Hom_k(B, C))$$

za A iz $\mathcal{A}$, B iz $\mathcal{B}$ i C iz $\mathcal{C}$ uz očiti izomorfizam $B \otimes_k A \to A \otimes_k B$ inducira izomorfizam vektorskih prostora nad k

$$\Psi : Hom_S(B \otimes_R A, C) \longrightarrow Hom_R(A, Hom_S(B, C))$$

i taj je izomorfizam prirodan u svakoj varijabli.

Zadatak 2.2 *Dokažite propoziciju 2.6.*

Propozicija 2.7 *Neka su R i S aproksimativno unitalne $k-$algebre, $\mathcal{A}$ dobra kategorija aproksimativno unitalnih desnih $R-$modula, $\mathcal{B}$ dobra kategorija aproksimativno unitalnih $(R,S)-$bimodula i $\mathcal{C}$ dobra kategorija aproksimativno unitalnih lijevih $S-$modula. Izomorfizam iz propozicije 2.5.*

$$\Phi : (A \otimes_k B) \otimes_k C \longrightarrow A \otimes_k (B \otimes_k C)$$

za A iz $\mathcal{A}$, B iz $\mathcal{B}$ i C iz $\mathcal{C}$ inducira izomorfizam vektorskih prostora nad k

$$\Psi : (A \otimes_R B) \otimes_S C \longrightarrow A \otimes_R (B \otimes_S C)$$

koji je prirodan u svakoj varijabli.

Propozicija 2.8 *Neka su R i S prsteni, $\mathcal{C}$ dobra kategorija lijevih $R-$modula i $\mathcal{C}'$ dobra kategorija lijevih $S-$modula.*

(a) *Neka su U i U' moduli u $\mathcal{C}'$ i pretpostavimo da za svaki modul V u $\mathcal{C}'$ postoji izomorfizam*

$$\Phi_V : Hom_S(U, V) \longrightarrow Hom_S(U', V)$$

takav da je $\Phi = (\Phi_V)$ prirodni izomorfizam funktora $Hom_S(U, \cdot)$ s funktorom $Hom_S(U', \cdot)$. Tada je

$$\Phi_{U'}^{-1}(id_{U'}) : U \longrightarrow U'$$

izomorfizam.

(b) *Neka su $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ istovrsni funktori i pretpostavimo da za svaki modul A u $\mathcal{C}$ i za svaki modul V u $\mathcal{C}'$ postoji izomorfizam*

$$\Phi_{A,V} : Hom_S(F(A), V) \longrightarrow Hom_S(G(A), V)$$

takav da je za svaki A $\Phi_A = (\Phi_{A,V})_V$ prirodni izomorfizam funktora $Hom_S(F(A), \cdot)$ s funktorom $Hom_S(G(A), \cdot)$ i da je za svaki V $\Phi_V = (\Phi_{A,V})_A$ prirodni izomorfizam funktora $Hom_S(F(\cdot), V)$ s funktorom $Hom_S(G(\cdot), V)$. Za svaki modul A u $\mathcal{C}$ stavimo

$$\Psi_A = \Phi_{A,G(A)}.$$

Tada je $\Psi = (Psi_A)$ prirodni izomorfizam funktors F s funktorom G.

Zadatak 2.3 *Dokažite propoziciju 2.8.*

Napomena. Analogne tvrdnje vrijede uz zamjenu dviju varijabli u $Hom_S(\cdot,\cdot)$.

Za dobru kategoriju $\mathcal{C}$ kažemo da ima **dosta projektivnih** ako je svaki modul u $\mathcal{C}$ izomorfan kvocijentu projektivnog modula u $\mathcal{C}$. Tada svaki modul u $\mathcal{C}$ ima projektivnu rezoluciju u $\mathcal{C}$. Kažemo da $\mathcal{C}$ ima **dosta injektivnih** ako je svaki modul u $\mathcal{C}$ izomorfan podmodulu injektivnog modula u $\mathcal{C}$. Tada svaki modul u $\mathcal{C}$ ima injektivnu rezoluciju u $\mathcal{C}$.

U daljnjem pretpostavljamo da dobre kategorije $\mathcal{C}$ i $\mathcal{C}'$ $R-$modula, odnosno $S-$modula, imaju dosta projektivnih i dosta injektivnih. Neka je $F:\mathcal{C}\to\mathcal{C}'$ jednostrano egzaktan aditivni funktor. Za modul M u $\mathcal{C}$ formiramo projektivnu ili injektivnu rezoluciju od M ovisno o situaciji:

Egzaktnost	F	Rezolucija	$n-$ti izvedeni funktor
desna	kovarijantan	projektivna	F_n
desna	kontravarijantan	injektivna	F_n
lijeva	kovarijantan	injektivna	F^n
lijeva	kontravarijantan	projektivna	F^n

Primjenimo F na tu rezoluciju, ispustimo član $F(M)$ i $n-$tu homologiju, odnosno kohomologiju, dobivenog kompleksa označimo sa $F_n(M)$, odnosno sa $F^n(M)$. To je definicija djelovanja funktora F_n, odn. F^n, na module. Definirat ćemo sada djelovanje tih funktora na morfizme. Ako je $\varphi: M\to M'$ morfizam u $\mathcal{C}$, formiramo rezolucije X od M i X' od M', povežemo ih sa φ i formiramo lančano, odn. kolančano, preslikavanje $\Phi: X\to X'$ nad φ. Tada je $F(\Phi): F(X)\to F(X')$, ako je F kovarijantan, tj. $F(\Phi): F(X')\to F(X)$, ako je F kontravarijantan, lančano, odn. kolančano, preslikavanje koje inducira morfizme na homologijama, odn. kohomologijama, koje označavamo sa $F_n(\varphi)$, odn. $F^n(\varphi)$. Na taj način su definirani funktori F_n, odn. F^n, za $n\geq 0$. oni su dobro definirani do na prirodni izomorfizam. Funktor F_n, odn. F^n zove se $n-$**ti izvedeni funktor** funktora F. Funktor F_0, odn. F^0, je prirodno izomorfan funktoru F. Napokon, prirodno izomorfni izomorfni funktori imaju prirodno izomorfne izvedene funktore.

Vrlo često je zgodnije izračunavati izvedene funktore koristeći općenitije rezolucije $-$ ne nužno projektivne, odnosno, injektivne. Da to opišemo zbog određenosti promatramo desno egzaktan kovarijantan funktor $F:\mathcal{C}\to\mathcal{C}'$. Modul X u $\mathcal{C}$ zove se **aciklički** u odnosu na funktor F ako je $F_n(X)=0\ \forall n>0$. Projektivni modul P aciklički je u odnosu na svaki takav funktor F jer se $F_n(P)$ može izračunati iz projektivne rezolucije:

$$0\longleftarrow P\overset{id}{\longleftarrow} P\longleftarrow 0\longleftarrow 0\longleftarrow 0\longleftarrow\cdots\cdots$$

Aciklička rezolucija modula M (u odnosu na funktor F) je egzaktan kompleks

$$0\longleftarrow M\longleftarrow X_0\longleftarrow X_1\longleftarrow X_2\longleftarrow\cdots\cdots$$

kod kojeg je modul X_n aciklički u odnosu na F za svaki $n\geq 0$.

Propozicija 2.9 *Neka je $F:\mathcal{C}\to\mathcal{C}'$ jednostrano egzaktan aditivan funktor i neka je X aciklička rezolucija modula M u odnosu na F. Tada homologija, odn. kohomologija, kompleksa $F(X)$ daje izvedene funktore $F_n(M)$, odn. $F^n(M)$.*

Zadatak 2.4 *Dokažite propoziciju 2.9. u slučajevima:*

(a) *F je kovarijantan desno egzaktan funktor;*

(b) *F je kontravarijantan lijevo egzaktan funktor.*

Propozicija 2.10 *Neka je $G : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ jednostrano egzaktan aditivan funktor s izvedenim funktorima G_n, odn. G^n. Neka je $F : \mathcal{C}' \to \mathcal{C}''$ egzaktan aditivan funktor.*

(*a*) *Ako je F kovarijantan, tada je $F \circ G$ jednostrano egzaktan i vrijedi $(F \circ G)_n \simeq F \circ G_n$, odn. $(F \circ G)^n \simeq F \circ G^n$.*

(*b*) *Ako je F kontravarijantan, tada je $F \circ G$ jednostrano egzaktan i $(F \circ G)^n \simeq F \circ G_n$, odn. $(F \circ G)_n \simeq F \circ G^n$.*

Propozicija 2.11 *Neka su $\tilde{\mathcal{C}}$, $\mathcal{C}$ i $\mathcal{C}'$ dobre kategorije i pretpostavimo da $\tilde{\mathcal{C}}$ i $\mathcal{C}$ imaju dosta projektivnih i dosta injektivnih. Neka je $F : \tilde{\mathcal{C}} \to \mathcal{C}$ egzaktan aditivan funktor i $G : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ jednostrano egzaktan aditivan funktor s izvedenim funktorima G_n, odn. G^n. Pretpostavimo da vrijedi jedna od sljedeće četiri mogućnosti:*

(*a*) *F je kovarijantan, G_n, odn. G^n, definirani su preko projektivnih rezolucija i F prevodi projektivne u projektivne.*

(*b*) *F je kovarijantan, G_n, odn. G^n, definirani su preko injektivnih rezolucija i F prevodi injektivne u injektivne.*

(*c*) *F je kontravarijantan, G_n, odn. G^n, definirani su preko projektivnih rezolucija i F prevodi injektivne u projektivne.*

(*d*) *F je kontravarijantan, G_n, odn. G^n, definirani su preko injektivnih rezolucija i F prevodi projektivne u injektivne.*

Tada je $G \circ F$ jednostrano egzaktan i $(G \circ F)_n \simeq G_n \circ F$, odn. $(G \circ F)^n \simeq G^n \circ F$.

Neka je u dobroj kategoriji $\mathcal{C}$ zadan dijagram

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{\psi} & B & \xrightarrow{\varphi} & C & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \varphi_A & & \downarrow \varphi_B & & \downarrow \varphi_C & & \\ 0 & \longrightarrow & A' & \xrightarrow{\psi'} & B' & \xrightarrow{\varphi'} & C' & \longrightarrow & 0 \end{array} \qquad (*)$$

u kome su reci egzaktni i kvadrati komutativni. Neka je $x \in \operatorname{Ker} \varphi_C$. Kako je φ epimorfizam, postoji $b \in B$ takav da je $x = \varphi(b)$. Tada je

$$0 = \varphi_C(x) = (\varphi_C \circ \varphi)(b) = (\varphi' \circ \varphi_B)(b) = \varphi'(\varphi_B(b)).$$

Dakle, $\varphi_B(b) \in \operatorname{Ker} \varphi' = \operatorname{Im} \psi'$, pa postoji $a' \in A'$ takav da je $\varphi_B(b) = \psi'(a')$. Sada definiramo $\rho : \operatorname{Ker} \varphi_C \to A'/\operatorname{Im} \varphi_A$ tako da stavimo

$$\rho(x) = a' + \operatorname{Im} \varphi_A.$$

Zadatak 2.5 *Dokažite:*

(*a*) *ρ je dobro definiran.*

(*b*) *$Ker\, \rho = \varphi(Ker\, \varphi_B)$.*

(*c*) *$Im\, \rho = \psi'^{-1}(Im\, \varphi_B)/Im\, \varphi_A$.*

Definirani morfizam ρ zove se **vezni morfizam** pridružen dijagramu $(*)$.

Neka je sada u dobroj kategoriji $\mathcal{C}$ zadan komutativan dijagram

$$\begin{array}{ccc} B_{n+1} & \stackrel{\varphi_{n+1}}{\longrightarrow} & C_{n+1} \\ \psi_B \downarrow & & \downarrow \psi_C \\ B_n & \stackrel{\varphi_n}{\longrightarrow} & C_n \\ \varphi_B \downarrow & & \downarrow \varphi_C \\ B_{n-1} & \stackrel{\varphi_{n-1}}{\longrightarrow} & C_{n-1} \end{array}$$

u kome su stupci kompleksi, tj. $\varphi_B \circ \psi_B = 0$ i $\varphi_C \circ \psi_C = 0$. Neka je $b \in \operatorname{Ker} \varphi_B$, tj. $b \in B_n$ i $\varphi_B(b) = 0$. Tada je

$$\varphi_C(\varphi_n(b)) = (\varphi_C \circ \varphi_n)(b) = (\varphi_{n-1} \circ \varphi_B)(b) = \varphi_{n-1}(\varphi_B(b)) = 0.$$

Dakle, vrijedi:

$$b \in \operatorname{Ker} \varphi_B \qquad \Longrightarrow \qquad \varphi_n(b) \in \operatorname{Ker} \varphi_C.$$

Stoga možemo definirati

$$\Phi : \operatorname{Ker} \varphi_B \longrightarrow \operatorname{Ker} \varphi_C / \operatorname{Im} \psi_C \qquad \text{sa} \qquad \Phi(b) = \varphi_n(b) + \operatorname{Im} \psi_C.$$

Tada je očito

$$\operatorname{Im} \Phi = \Phi(\operatorname{Ker} \varphi_B) = \varphi_n(\operatorname{Ker} \varphi_B)/\operatorname{Im}\psi_C.$$

Nadalje, vrijedi $b \in \operatorname{Ker} \Phi$ ako i samo ako je $b \in \operatorname{Ker} \varphi_B$ i $\varphi_n(b) \in \operatorname{Im} \psi_C$, dakle,

$$\operatorname{Ker} \Phi = \operatorname{Ker} \varphi_B \cap \varphi_n^{-1}(\operatorname{Im} \psi_C).$$

Po pretpostavci je

$$\operatorname{Im} \psi_B \subseteq \operatorname{Ker} \varphi_B.$$

Nadalje, ako je $b \in \operatorname{Im} \psi_B$ onda postoji $x \in B_{n+1}$ takav da je $b = \psi_B(x)$. Slijedi

$$\varphi_n(b) = \varphi_n(\psi_B(x)) = (\varphi_n \circ \psi_B)(x) = (\psi_c \circ \varphi_{n+1})(x) = \psi_C(\varphi_{n+1}(x)) \in \operatorname{Im} \psi_C.$$

To znači da je $b \in \varphi_n^{-1}(\operatorname{Im} \psi_C)$. Prema tome, vrijedi

$$\operatorname{Im} \psi_B \subseteq \operatorname{Ker} \varphi_B \cap \varphi_n^{-1}(\operatorname{Im} \psi_C) \qquad \Longrightarrow \qquad \operatorname{Im} \psi_B \subseteq \operatorname{Ker} \Phi.$$

Zaključujemo da možemo definirati morfizam

$$\Phi_n : \operatorname{Ker} \varphi_B / \operatorname{Im} \psi_B \longrightarrow \operatorname{Ker} \varphi_C / \operatorname{Im} \psi_C$$

relacijom

$$\Phi_n(b + \operatorname{Im} \psi_B) = \varphi_n(b) + \operatorname{Im} \psi_C.$$

Neka je sada zadan beskonačan komutativan dijagram

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & A_{n+1} & \xrightarrow{\psi_{n+1}} & B_{n+1} & \xrightarrow{\varphi_{n+1}} & C_{n+1} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow \alpha_n & & \downarrow \beta_n & & \downarrow \gamma_n & & \\
0 & \longrightarrow & A_n & \xrightarrow{\psi_n} & B_n & \xrightarrow{\varphi_n} & C_n & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow \alpha_{n-1} & & \downarrow \beta_{n-1} & & \downarrow \gamma_{n-1} & & \\
0 & \longrightarrow & A_{n-1} & \xrightarrow{\psi_{n-1}} & B_{n-1} & \xrightarrow{\varphi_{n-1}} & C_{n-1} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots & &
\end{array}
$$

u kojem su stupci A, B i C kompleksi i u kojem su svi reci egzaktni. Tada prema zadatku 2.5. za svaki n imamo vezni morfizam

$$\rho_n : H_{n+1}(C) \longrightarrow H_n(A),$$

morfizam φ_n inducira morfizam

$$\Phi_n : H_n(B) \longrightarrow H_n(C),$$

a morfizam ψ_n inducira morfizam

$$\Psi_n : H_n(A) \longrightarrow H_n(B).$$

Na taj način dolazimo do beskonačnog niza morfizama

$$\cdots\cdots \longrightarrow H_{n+1}(B) \xrightarrow{\Phi_{n+1}} H_{n+1}(C) \xrightarrow{\rho_n} H_n(A) \xrightarrow{\Psi_n} H_n(B) \xrightarrow{\Phi_n} H_n(C) \xrightarrow{\rho_{n-1}} H_{n-1}(A) \longrightarrow \cdots\cdots$$

Zadatak 2.6 *Dokažite da je taj niz egzaktan.*

Uputa: Neposredna primjena zadatka 2.5. i konstrukcije nakon njega.

Taj se niz zove **dugi egzaktni homološki niz**. Sasvim analogno definira se **dugi egzaktni kohomološki niz**.

Propozicija 2.12 *Neka je*

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\psi} B \xrightarrow{\varphi} C \longrightarrow 0$$

kratki egzaktni niz u dobroj kategoriji $\mathcal{C}$. Tada su sljedeća tri svojstva međusobno ekvivalentna:

(a) *Postoji $\overline{\varphi} : C \to B$ takav da je $\varphi \circ \overline{\varphi} = id_C$.*

(b) *Postoji $\overline{\psi} : B \to A$ takav da je $\overline{\psi} \circ \psi = id_A$.*

(c) *$B \simeq A \dotplus C$, pri čemu ψ odgovara inkluziji $A \to A \dotplus C$, a φ odgovara projekciji $A \dotplus C \to C$.*

U tom slučaju kažemo da je kratki egzaktni niz **rascjepiv**.

Propozicija 2.13 *Neka je*

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

kratki egzaktni niz u kategoriji $\mathcal{C}$ u kome je ili A injektivan ili je C projektivan. Tada je taj niz rascjepiv.

Propozicija 2.14 *Neka je u dobroj kategoriji $\mathcal{C}$ zadan rascjepiv kratki egzaktni niz*

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0.$$

Neka su X i Z projektivne rezolucije od A i C. Tada postoji projektivna rezolucija Y od B takva da je $Y_n = X_n \dotplus Z_n$ i da je sljedeći dijagram komutativan

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C & \longrightarrow & 0 \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
0 & \longrightarrow & X_0 & \longrightarrow & Y_0 & \longrightarrow & Z_0 & \longrightarrow & 0 \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
0 & \longrightarrow & X_1 & \longrightarrow & Y_1 & \longrightarrow & Z_1 & \longrightarrow & 0 \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots & &
\end{array}$$

pri čemu je $X_n \to Y_n$ inkluzija, a $Y_n \to Z_n$ projekcija.

Propozicija 2.15 *Neka je u dobroj kategoriji $\mathcal{C}$ zadan rascjepiv kratki egzaktni niz*

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0.$$

Neka su X i Z injektivne rezolucije od A i C. Tada postoji injektivna rezolucija Y od B takva da je $Y_n = X_n \dotplus Z_n$ i da je sljedeći dijagram komutativan

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & X_0 & \longrightarrow & Y_0 & \longrightarrow & Z_0 & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & X_1 & \longrightarrow & Y_1 & \longrightarrow & Z_1 & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots & &
\end{array}$$

pri čemu je $X_n \to Y_n$ inkluzija, a $Y_n \to Z_n$ projekcija.

Propozicija 2.16 *Neka je $\mathcal{C}$ dobra kategorija s dosta projektivnih, odn. s dosta injektivnih, i neka je $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ jednostrano egzaktan aditivan funktor. Neka je*

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

rascjepiv kratki egzaktni niz u $\mathcal{C}$. Tada izvedeni funktori od F na A, B i C daju dugi egzaktni niz kako slijedi:

(a) *F kovarijantan desno egzaktan:*

$$0 \longleftarrow F(C) \longleftarrow F(B) \longleftarrow F(A) \longleftarrow F_1(C) \longleftarrow F_1(B) \longleftarrow F_1(A) \longleftarrow \cdots\cdots$$

(b) *F kontravarijantan desno egzaktan:*

$$0 \longleftarrow F(A) \longleftarrow F(B) \longleftarrow F(C) \longleftarrow F_1(A) \longleftarrow F_1(B) \longleftarrow F_1(C) \longleftarrow \cdots\cdots$$

(c) *F kovarijantan lijevo egzaktan:*

$$0 \longrightarrow F(A) \longrightarrow F(B) \longrightarrow F(C) \longrightarrow F_1(A) \longrightarrow F_1(B) \longrightarrow F_1(C) \longrightarrow \cdots\cdots$$

(d) *F kontravarijantan lijevo egzaktan:*

$$0 \longrightarrow F(C) \longrightarrow F(B) \longrightarrow F(A) \longrightarrow F_1(C) \longrightarrow F_1(B) \longrightarrow F_1(A) \longrightarrow \cdots\cdots$$

Zadatak 2.7 *Dokažite jednu od tvrdnji ((a), (b), (c) ili (d)) u propoziciji 2.16.*

Propozicija 2.17 *Neka su $\mathcal{C}$ i $\mathcal{C}'$ dobre male kategorije i $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ egzaktan funktor. Označimo sa (M) klasu modula M u Grothendieckovoj grupi. Preslikavanje $A \mapsto (F(A))$ jedinstveno se proširuje do homomorfizma $\mathcal{F}(Ob(\mathcal{C})) \to K(\mathcal{C}')$ i zatim spušta do homomorfizma $K(\mathcal{C}) \to K(\mathcal{C}')$.*

Dokaz: Zbog određenosti pretpostavimo da je funktor F kovarijantan. Egzistencija i jedinstvenost proširenja preslikavanja $A \mapsto (F(A))$ do homomorfizma $\mathcal{F}(Ob(\mathcal{C})) \to K(\mathcal{C}')$ slijedi neposredno iz činjenice da je $\mathcal{F}(Ob(\mathcal{C}))$ slobodna Abelova grupa nad skupom $Ob(\mathcal{C})$. Ako je

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

egzaktan niz u $\mathcal{C}$ onda je

$$0 \longrightarrow F(A) \longrightarrow F(B) \longrightarrow F(C) \longrightarrow 0$$

egzaktan niz u $\mathcal{C}'$. Dakle, $F(B) - F(C) - F(A) \in \mathcal{N}(\mathcal{C}')$. Budući da skup

$$\{B - A - C;\, 0 \to A \to B \to C \to 0 \text{ je egzaktan}\}$$

generira podgrupu $\mathcal{N}(\mathcal{C})$, slijedi da homomorfizam induciran sa F preslikava $\mathcal{N}(\mathcal{C})$ u $\mathcal{N}(\mathcal{C}')$. Stoga se taj homomorfizam može spustiti do homomorfizma grupe $K(\mathcal{C}) = \mathcal{F}(Ob(\mathcal{C}))/\mathcal{N}(\mathcal{C})$ u grupu $K(\mathcal{C}') = \mathcal{F}(Ob(\mathcal{C}'))/\mathcal{N}(\mathcal{C}')$.

Korolar 2.1 *Neka je $\mathcal{C}$ mala dobra kategorija čiji su objekti uz drugu strukturu i konačnodimenzionalni vektorski prostori nad poljem k i čiji su morfizmi $k-$linearni. Tada se $A \mapsto \dim_k A$ proširuje do homomorfizma $\mathcal{F}(Ob(\mathcal{C})) \to \mathbb{Z}$ koji se spušta do homomorfizma $K(\mathcal{C}) \to \mathbb{Z}$.*

Dokaz: Neka je $\mathcal{C}'$ mala dobra kategorija "svih" konačnodimenzionalnih vektorskih prostora nad k i neka je $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ zaboravni funktor. Funktor F je egzaktan pa iz propozicije 2.17. slijedi da on definira homomorfizam $K(\mathcal{C})$ u $K(\mathcal{C}')$. Tvrdnja slijedi kompozicijom tog homomorfizma s homomorfizmom iz propozicije 1.8.

Teorem 2.1 (Euler−Poincaréov princip) *Neka je*

$$X : \qquad 0 \xrightarrow{d_{-1}} X_0 \xrightarrow{d_0} X_1 \xrightarrow{d_1} X_2 \xrightarrow{d_2} \cdots\cdots \xrightarrow{d_{n-1}} X_n \xrightarrow{d_n} 0$$

konačni kompleks u maloj dobroj kategoriji $\mathcal{C}$. Tada u Grothendieckovoj grupi $K(\mathcal{C})$ vrijedi

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i (X_i) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i (H^i(X)).$$

Dokaz: Kratki egzaktni nizovi

$$0 \longrightarrow \operatorname{Ker} d_i \longrightarrow X_i \longrightarrow \operatorname{Im} d_i \longrightarrow 0 \quad \text{i} \quad 0 \longrightarrow \operatorname{Im} d_{i-1} \longrightarrow \operatorname{Ker} d_i \longrightarrow H^i(X) \longrightarrow 0$$

u kategoriji $\mathcal{C}$ daju u grupi $K(\mathcal{C})$ identitete

$$(X_i) = (\operatorname{Ker} d_i) + (\operatorname{Im} d_i) \quad \text{i} \quad (H^i(X)) = (\operatorname{Ker} d_i) - (\operatorname{Im} d_{i-1}), \qquad 0 \le i \le n.$$

Iz tih identiteta formiramo alternirajuće sume

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i (X_i) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i (\operatorname{Ker} d_i) + \sum_{i=0}^{n} (-1)^i (\operatorname{Im} d_i)$$

i

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i (H^i(X)) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i (\operatorname{Ker} d_i) - \sum_{i=0}^{n} (-1)^i (\operatorname{Im} d_{i-1}) =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} (-1)^i (\operatorname{Ker} d_i) - (\operatorname{Im} d_{-1}) + \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i (\operatorname{Im} d_i).$$

Kako su $\operatorname{Im} d_{-1} = 0$ i $\operatorname{Im} d_n = 0$, tvrdnja slijedi.

Korolar 2.2 *Neka je $\mathcal{C}$ mala dobra kategorija i neka je*

$$0 \longrightarrow X_0 \longrightarrow X_1 \longrightarrow X_2 \longrightarrow \cdots\cdots \longrightarrow X_n \longrightarrow 0$$

egzaktni niz u $\mathcal{C}$. Tada u Grothendieckovoj grupi $K(\mathcal{C})$ vrijedi

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i (X_i) = 0.$$

Dokaz: Doista, tada su svi $H^i(X) = 0$, $0 \le i \le n$.

Poglavlje 3

Liejeve grupe i Liejeve algebre

Neka je M Hausdorffov topološki prostor i neka je $n \in \mathbb{N}$. $n-$**dimenzionalna karta** na M je uređen par (U, ψ) gdje je $U \subseteq M$ otvoren skup i ψ je homeomorfizam sa U na otvoren podskup od $\mathbb{R}^n$. Skup U zovemo **domena karte** (U, ψ). $n-$**dimenzionalni** $C^\infty-$**atlas** na M je skup $\mathcal{A}$ $n-$dimenzionalnih karata na M sa sljedećim svojstvima:

(i) Domene karata u skupu $\mathcal{A}$ pokrivaju M :

$$\bigcup_{(U,\psi)\in\mathcal{A}} U = M.$$

(ii) Ako su $(U, \psi), (V, \varphi) \in \mathcal{A}$ takve karte da je $U \cap V \neq \emptyset$, onda je

$$\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \longrightarrow \psi(U \cap V)$$

$C^\infty-$preslikavanje.

$n-$**dimenzionalna** $C^\infty-$**struktura** na M je $n-$dimenzionalni $C^\infty-$atlas $\mathcal{A}$ na M koji pored (i) i (ii) zadovoljava i svojstvo maksimalnosti:

(iii) Ako je (W, χ) $n-$dimenzionalna karta na M i ako su za svaku kartu $(U, \psi) \in \mathcal{A}$ takvu da je $U \cap W \neq \emptyset$

$$\psi \circ \chi^{-1} : \chi(U \cap W) \longrightarrow \psi(U \cap W) \qquad \text{i} \qquad \chi \circ \psi^{-1} : \psi(U \cap W) \longrightarrow \chi(U \cap W)$$

$C^\infty-$preslikavanja, onda je $(W, \chi) \in \mathcal{A}$.

Očito je svaki $n-$dimenzionalni $C^\infty-$atlas sadržan u jedinstvenoj $n-$dimenzionalnoj $C^\infty-$strukturi.

Diferencijabilna mnogostrukost ili $C^\infty-$**mnogostrukost** je uređen par $(M, \mathcal{A})$, gdje je M Hausdorffov topološki prostor s prebrojivom bazom topologije, a $\mathcal{A}$ je $n-$dimenzionalna $C^\infty-$struktura na M za neki $n \in \mathbb{N}$. Pišemo tada $n = \dim M$.

Zamijenimo li svuda u prethodnim definicijama izraz $C^\infty-$*preslikavanje* s izrazom *realno−analitičko preslikavanje*, dobivamo definicije pojmova $n-$dimenzionalni **analitički atlas**, $n-$dimenzionalna **analitička struktura** i **analitička mnogostrukost**. Svaka analitička mnogostrukost je ujedno diferencijabilna mnogostrukost.

Neka su M i N $C^\infty-$mnogostrukosti, $\dim M = m$, $\dim N = n$. Za $f : M \to N$ kažemo da je $C^\infty-$**preslikavanje** ako $\forall p \in M$ postoje karte (U, ψ) na M i (V, φ) na N takve da je $p \in U$, $f(U) \subseteq V$ i da je

$$\varphi \circ f \circ \psi^{-1} : \psi(U) \longrightarrow \varphi(V)$$

$C^\infty-$preslikavanje iz $\mathbb{R}^m$ u $\mathbb{R}^n$. Ako je $f : M \to N$ bijekcija i ako su f i f^{-1} $C^\infty-$preslikavanja, onda se f zove **difeomorfizam**.

Primjeri:

(1) $M = \mathbb{R}^n$; tada je $\{(R^n, id_{\mathbb{R}^n})\}$ $C^\infty-$atlas. Jedinstvena $C^\infty-$struktura koja sadrži taj atlas zove se **standardna $C^\infty-$struktura** na $\mathbb{R}^n$, a jedinstvena analitička struktura koja sadrži taj atlas zove se **standardna analitička struktura** na R^n.

(2) Neka je $(M, \mathcal{A})$ $C^\infty-$mnogostrukost (odn. analitička mnogostrukost) i neka je $V \subseteq M$ otvoren skup. Tada je

$$\{(U \cap V, \psi | U \cap V);\ (U, \psi) \in \mathcal{A},\ U \cap V \neq \emptyset\}$$

$C^\infty-$atlas (odn. analitički atlas) na V. V se s pripadnom $C^\infty-$strukturom (odn. analitičkom strukturom) zove **otvorena podmnogostrukost** od M.

(3) Neka su $(M, \mathcal{A})$ i $(N, \mathcal{B})$ $C^\infty-$mnogostrukosti (odn. analitičke mnogostrukosti), $\dim M = m$, $\dim N = n$. Neka je

$$\mathcal{C} = \{(U \times V, \psi \times \varphi);\ (U, \psi) \in \mathcal{A},\ (V; \varphi) \in \mathcal{B}\},$$

pri čemu je $(\psi \times \varphi)(x, y) = (\psi(x), \varphi(y))$, $x \in U$, $y \in V$. Tada je $\mathcal{C}$ $(m + n)-$dimenzionalni $C^\infty-$atlas (odn. analitički atlas) na $M \times N$. S pripadnom $C^\infty-$strukturom (odn. analitičkom strukturom) $M \times N$ se zove **produkt mnogostrukosti** M i N.

Za $C^\infty-$mnogostrukost M sa $C^\infty(M)$ označavamo skup svih $C^\infty-$funkcija $f : M \to \mathbb{R}$. Uz operacije po točkama $C^\infty(M)$ je komutativna algebra.

Neka je M $C^\infty-$mnogostrukost i $\mathcal{U}$ otvoren pokrivač od M. **Particija jedinice** podređena pokrivaču $\mathcal{U}$ je niz $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ u $C^\infty(M)$ takav da vrijedi:

(i) Za svaki $n \in \mathbb{N}$ nosač

$$\operatorname{Supp} \varphi_n = Cl(\{p \in M;\ \varphi_n(p) \neq 0\})$$

je kompaktan skup sadržan u nekom $U \in \mathcal{U}$.

(ii) Za svaku točku $p \in M$ postoji otvorena okolina V točke p takva da je $\operatorname{Supp} \varphi_n \cap V \neq \emptyset$ za samo konačno mnogo $n \in \mathbb{N}$.

(iii) Za svaku točku $p \in M$ vrijedi

$$\varphi_n(p) \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad \text{i} \qquad \sum_{n \in \mathbb{N}} \varphi_n(p) = 1.$$

Teorem 3.1 *Za svaki otvoren pokrivač $\mathcal{U}$ $C^\infty-$mnogostrukosti M postoji particija jedinice podređena pokrivaču $\mathcal{U}$.*

Neka je M $C^\infty-$mnogostrukost i $p \in M$. Definiramo **tangencijalni prostor** na mnogostrukost M u točki p :

$$T_p(M) = \{X : C^\infty \to \mathbb{R};\ X \text{ je linearno i vrijedi } X(fg) = (Xf)g(p) + f(p)(Xg)\ \forall f, g \in C^\infty(M)\}.$$

Očito je $T_p(M)$ realni vektorski prostor. Elementi od $T_p(M)$ zovu se **tangencijalni vektori** na mnogostrukost M u točki p. Neka je $\varepsilon > 0$ i neka je $\sigma : \langle -\varepsilon, \varepsilon \rangle \to M$ $C^\infty-$preslikavanje takvo da je $\sigma(0) = p$. Tada se σ zove **glatka krivulja** kroz točku p. Definiramo tada $V_\sigma : C^\infty(M) \to \mathbb{R}$ sa

$$V_\sigma f = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(\sigma(t))\Big|_{t=0}, \qquad f \in C^\infty(M).$$

Tada je $V_\sigma \in T_p(M)$ i zove se **tangencijalni vektor na krivulju** σ u točki p. Pomoću teorema egzistencije za sisteme običnih diferencijalnih jednadžbi prvog reda dokazuje se da vrijedi:

Teorem 3.2 *Neka je M $C^\infty-$mnogostrukost i $p \in M$. Tada vrijedi:*

$$T_p(M) = \{V_\sigma;\ \sigma \textit{ je glatka krivulja kroz točku} p\}.$$

Neka je sada (U, ψ) karta na $n-$dimenzionalnoj mnogostrukosti M i $p \in M$. Neka su

$$x_1, x_2, \ldots, x_n : U \to \mathbb{R}$$

koordinatne funkcije preslikavanja ψ :

$$\psi(q) = (x_1(q), x_2(q), \ldots, x_n(q)), \qquad q \in U.$$

Neka je $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ standardna baza od $\mathbb{R}^n$. Za neki $\varepsilon > 0$ možemo definirati glatke krivulje $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n : \langle -\varepsilon, \varepsilon \rangle \to M$ kroz točku p :

$$\sigma_i(t) = \psi^{-1}(\psi(p) + te_i).$$

Za pripadne tangencijalne vektore upotrebljavamo oznake

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p = V_{\sigma_i}.$$

Ako je σ proizvoljna glatka krivulja kroz točku p onda se lako dobiva

$$V_\sigma f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\mathrm{d}(x_i \circ \sigma)}{\mathrm{d}t}(0) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p f, \qquad f \in C^\infty(M).$$

Odatle i iz teorema 3.2. neposredno slijedi:

Teorem 3.3 *Neka je M $n-$dimenzionalna mnogostrukost, (U, ψ) karta na M, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ koordinatne funkcije prelikavanja ψ i $p \in U$. Tada je*

$$\left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_p, \left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)_p, \ldots, \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)_p \right\}$$

baza realnog vektorskog prostora $T_p(M)$. Posebno, $\dim T_p(M) = \dim M$.

Neka su M i N diferencijabilne mnogostrukosti i $\Phi : M \to N$ $C^\infty-$preslikavanje. Za $p \in M$ definiramo $T_p(\Phi) : T_p(M) \to T_{\Phi(p)}(N)$ sa

$$[T_p(\Phi)X](f) = X(f \circ \Phi), \qquad f \in C^\infty(N), \quad X \in T_p(M).$$

Tada je $T_p(\Phi)$ linearan operator i zove se **diferencijal** od Φ u točki p. Ako su $x_1, x_2, \ldots, x_m$ koordinatne funkcije za neku katru (U, ψ) od M oko točke p i $y_1, y_2, \ldots, y_n$ koordinatne funkcije za neku kartu (V, φ) od N oko točke $\Phi(p)$, takvu da je $\Phi(U) \subseteq V$, onda operator $T_p(\Phi)$ djeluje na sljedeći način:

$$T_p(\Phi) \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \alpha_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p (y_j \circ f) \left(\frac{\partial}{\partial y_j} \right)_{\Phi(p)}, \qquad \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{R}.$$

Drugim riječima, matrica operatora $T_p(\Phi)$ u paru baza

$$\left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right)_p, \left(\frac{\partial}{\partial x_2} \right)_p, \ldots, \left(\frac{\partial}{\partial x_m} \right)_p \right\} \quad \text{prostora} \quad T_p(M)$$

i

$$\left\{ \left(\frac{\partial}{\partial y_1} \right)_{\Phi(p)}, \left(\frac{\partial}{\partial y_2} \right)_{\Phi(p)}, \ldots, \left(\frac{\partial}{\partial y_n} \right)_{\Phi(p)} \right\} \quad \text{prostora} \quad T_{\Phi(p)}(N)$$

je upravo Jacobijeva matrica preslikavanja $\varphi \circ \Phi \circ \psi^{-1}$.

Podmnogostrukost mnogostrukosti M je podskup $N \subseteq M$ koji ima svoju diferencijabilnu strukturu koja je takva da inkluzija $i : N \to M$ zadovoljava:

(i) i je $C^\infty-$preslikavanje;

(ii) $T_p(i) : T_p(N) \to T_p(M)$ je injekcija $\forall p \in N$.

Posebno, svaka otvorena podmnogostrukost je podmnogostrukost.

Za mnogostrukost M definiramo

$$T(M) = \bigcup_{p \in M} T_p(M) \qquad \text{(disjunktna unija)}.$$

Neka je $\mathcal{A}$ $C^\infty-$struktura mnogostrukosti M. Za $\xi \in \mathcal{A}$ pišemo

$$\xi = (U_\xi, \psi_\xi), \qquad \psi_\xi = (x_1^\xi, x_2^\xi, \ldots, x_n^\xi).$$

Neka je $\pi : T(M) \to M$ definirano sa $\pi(T_p(M)) = \{p\}$. Za $\xi \in \mathcal{A}$ definiramo

$$\Psi_\xi : \pi^{-1}(U_\xi) \longrightarrow \psi_\xi(U_\xi) \times \mathbb{R}^n$$

na sljedeći način:

$$\Psi_\xi(v) = (\psi_\xi(p), v_1, v_2, \ldots, v_n) \qquad \text{ako je} \qquad p \in U_\xi \quad \text{i} \quad v = \sum_{i=1}^{n} v_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p \in T_p(M).$$

Za $\xi \in \mathcal{A}$ neka je τ_ξ skup svih podskupova od $\pi^{-1}(U_\xi) \subseteq T(M)$ oblika $\Psi_\xi^{-1}(W)$, gdje je W otvoren podskup od $\psi_\xi \times \mathbb{R}^n$. Neka je τ unija svih skupova τ_ξ, $\xi \in \mathcal{A}$. Tada je τ baza topologije s kojom $T(M)$ postaje Hausdorffov topološki prostor s prebrojivom bazom topologije i preslikavanje $\pi : T(M) \to M$ je neprekidno. Nadalje, direktno se provjerava da je

$$\{(\pi^{-1}(U_\xi), \Psi_\xi);\ \xi \in \mathcal{A}\}$$

$C^\infty-$atlas na $T(M)$. Uz pripadnu $C^\infty-$strukturu π je $C^\infty-$preslikavanje.

Vektorsko polje na mnogostrukosti M je svako $C^\infty-$preslikavanje $X : M \to T(M)$, $p \mapsto X_p$, takvo da je $X_p \in T_p(M)$ $\forall p \in M$. Skup svih vektorskih polja označavamo sa $\mathcal{X}(M)$; to je realan vektorski prostor uz operacije po točkama:

$$(\alpha X)_p = \alpha X_p, \qquad (X+Y)_p = X_p + Y_p, \qquad \alpha \in \mathbb{R}, \quad X, Y \in \mathcal{X}(M), \quad p \in M.$$

Štoviše, $\mathcal{X}(M)$ je $C^\infty(M)-$modul uz množenje elemenata iz $\mathcal{X}(M)$ funkcijama iz $C^\infty(M)$ definirano također po točkama:

$$(fX)_p = f(p)X_p, \qquad f \in C^\infty(M), \quad X \in \mathcal{X}(M).$$

Derivacija algebre $C^\infty(M)$ je linearno preslikavanje $D : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ takvo da vrijedi

$$D(fg) = (Df)g + f(Dg) \qquad \forall f, g \in C^\infty(M).$$

Neka je $\mathcal{D}(M)$ skup svih derivacija algebre $C^\infty(M)$. To je realan vektorski prostor. Štoviše, $\mathcal{D}(M)$ je $C^\infty(M)-$modul uz

$$(fD)g = f(Dg), \qquad f, g \in C^\infty(M), \quad D \in \mathcal{D}(M).$$

Teorem 3.4 *Za $X \in \mathcal{X}(M)$ definiramo $\overline{X} : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ sa*

$$[\overline{X}(f)](p) = X_p(f), \qquad f \in C^\infty(M), \quad p \in M.$$

Tada je $X \mapsto \overline{X}$ izomorfizam $C^\infty(M)-$modula $\mathcal{X}(M)$ na $C^\infty(M)-$modul $\mathcal{D}(M)$.

Zadatak 3.1 *Dokažite teorem 3.4.*

Liejeva algebra nad poljem K je vektorski prostor $\mathfrak{g}$ nad K s operacijom $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$, $(X, Y) \mapsto [X, Y]$, sa svojstvima:

(i) Preslikavanje $(X, Y) \mapsto [X, Y]$ je bilinearno.

(ii) $[X, X] = 0$ $\forall X \in \mathfrak{g}$.

(iii) Vrijedi tzv. *Jacobijev identitet*:

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0 \qquad \forall X, Y, Z \in \mathfrak{g}.$$

Neka je $\mathcal{A}$ asocijativna algebra nad poljem K. Lako se provjeri da uz operaciju $[a, b] = ab - ba$, $a, b \in \mathcal{A}$, $\mathcal{A}$ postaje Liejeva algebra.

Zadatak 3.2 *Dokažite da je $\mathcal{D}(M)$ Liejeva podalgebra asocijativne algebre $L(C^\infty(M))$ svih linearnih operatora $C^\infty(M) \to C^\infty(M)$.*

Liejeva grupa je skup G sa svojstvima:

(i) G je grupa.

(ii) G je diferencijabilna mnogostrukost.

(iii) $(x, y) \mapsto xy^{-1}$ je $C^\infty-$preslikavanje sa $G \times G$ u G.

Teorem 3.5 *Neka je G Liejeva grupa. $C^\infty-$struktura mnogostrukosti G sadrži jedinstvenu analitičku strukturu takvu da je preslikavanje $(x, y) \mapsto xy^{-1}$ sa $G \times G$ u G analitičko.*

Neka je u daljnjem G Liejeva grupa. Jedinicu u grupi G označavat ćemo sa e. Za $x \in G$ definiramo preslikavanja $\lambda_x, \rho_x : G \to G$ ovako:

$$\lambda_x(g) = xg, \qquad \rho_x(g) = gx^{-1}, \qquad g \in G.$$

λ_x i ρ_x su analitički difeomorfizmi sa G na G. **Vektorsko polje** $X \in \mathcal{X}(G)$ zove se **lijevoinvarijantno** ako vrijedi

$$T_g(\lambda_x)X_g = X_{xg} \qquad \forall x, g \in G.$$

Neka je $\mathfrak{g}$ potprostor od $\mathcal{X}$ svih lijevoinvarijantnih vektorskih polja na G.

Teorem 3.6 (*a*) *$X \mapsto X_e$ je izomorfizam vektorskih prostora sa $\mathfrak{g}$ na $T_e(G)$.*
(*b*) *$\mathfrak{g}$ je Liejeva algebra, tj. $X, Y \in \mathfrak{g} \implies [X, Y] \in \mathfrak{g}$.*

Zadatak 3.3 *Dokažite teorem 3.6.*

Uputa za surjektivnost u (a) : Za $v \in T_e(G)$ izaberimo glatku krivulju $\sigma : \langle -\varepsilon, \varepsilon\rangle \to G$ takvu da je $\sigma(0) = e$ i $V_\sigma = v$. Definiramo $\varphi_g(t) = g\sigma(t)$, $\varepsilon < t < \varepsilon$. Tada je φ_g glatka krivulja u G kroz točku g. Definiramo preslikavanje $X : g \mapsto X_g = V_{\varphi_g} \in T_g(G)$. Dokažite da je tada $X \in \mathcal{X}$ i $T_g(\lambda_x)X_g = X_{xg}$, dakle $X \in \mathfrak{g}$, i da vrijedi $X_e = v$.

$\mathfrak{g}$ se zove **Liejeva algebra Liejeve grupe** G.

Neka su sada G i H Liejeve grupe s Liejevim algebrama $\mathfrak{g}$ i $\mathfrak{h}$. Preslikavanje $\varphi : G \to G$ zove se **Liejev homomorfizam** ako je to homomorfizam grupa i analitičko preslikavanje.

Zadatak 3.4 *Neka je $\varphi : G \to H$ Liejev homomorfizam. Dokažite da je tada $T_e(\varphi)$ homomorfizam Liejeve algebre $T_e(G) \simeq \mathfrak{g}$ na Liejevu algebru $T_e(H) \simeq \mathfrak{h}$.*

$H \subseteq G$ zove se **Liejeva podgrupa** Liejeve grupe G ako je to podgrupa koja ima svoju strukturu mnogostrukosti takvu da je to Liejeva grupa, ako je inkluzija $i : H \to G$ Liejev homomorfizam i ako je pripadni homomorfizam Liejevih algebri $T_e(i) : \mathfrak{h} \to \mathfrak{g}$ injektivan. Tada se pomoću $T_e(i)$ Liejeva algebra $\mathfrak{h}$ identificira s Liejevom podalgebrom Liejeve algebre $\mathfrak{g}$.

Jednoparametarska podgrupa Liejeve grupe G je Liejev homomorfizam $\varphi : \mathbb{R} \to G$. Posebno, φ je glatka krivulja kroz e, pa je $V_\varphi \in T_e(G) = \mathfrak{g}$.

Teorem 3.7 *Za svaki $X \in \mathfrak{g}$ postoji jedinstvena jednoparametarska podgrupa φ_X od G takva da je $X = V_{\varphi_X}$. Preslikavanje $(X, t) \mapsto \varphi_X(t)$ sa $\mathfrak{g} \times \mathbb{R}$ u G je analitičko.*

Uz oznake iz teorema 3.7. definiramo **eksponencijalno preslikavanje** $\exp : \mathfrak{g} \to G$ sa

$$\exp X = \varphi_X(1), \qquad X \in \mathfrak{g} = T_e(G).$$

Zadatak 3.5 *Dokažite da je $\varphi_X(t) = \exp tX$.*

Teorem 3.8 *Postoje okolina U nule u $\mathfrak{g}$ i okolina V jedinice u G takve da je $\exp|U$ analitički difeomorfizam sa U na V.*

Teorem 3.9 *Neka su G i H Liejeve grupe i $\varphi : G \to H$ neprekidni homorfizam grupa. Tada je φ Liejev homomorfizam.*

Taj se teorem dokazuje tako da se pomoću teorema egzistencije sistema diferencijalnih jednadžbi prvog reda dokaže da za svaki $X \in \mathfrak{g}$ postoji $Y \in \mathfrak{h}$ takav da je $\varphi(\exp tX) = \exp tY$.

Za element g Liejeve grupe G definiramo preslikavanje $Int\, g : G \to G$ sa

$$(Int\, g)(x) = gxg^{-1}, \qquad x \in G.$$

Očito je $Int\, g$ analitički digeomorfizam sa G na G za svaki $g \in G$. Diferencijal tog preslikavanja u jedinici označimo sa $Ad\, g$. Dakle,

$$Ad\, g : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}, \qquad Ad\, g = T_e(Int\, g).$$

Zadatak 3.6 *Dokažite da je $g \mapsto Ad\, g$ homomorfizam grupe G u grupu $Aut(\mathfrak{g})$ svih automorfizama Liejeve algebre $\mathfrak{g}$.*

Za Liejevu algebru $\mathfrak{g}$ i za $X \in \mathfrak{g}$ definiramo prelikavanje

$$ad\, X : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}, \qquad (ad\, X)Y = [X, Y].$$

Iz Jacobijevog identiteta lako slijedi da je linearan operator $ad\, X$ derivacija Liejeve algebre $\mathfrak{g}$, tj. da vrijedi

$$(ad\, X)[Y, Z] = [(ad\, X)Y, Z] + [Y, (ad\, X)Z], \qquad X, Y, Z \in \mathfrak{g}.$$

Nadalje, $X \mapsto ad\, X$ je homomorfizam Liejeve algebre u Liejevu algebru $Der(\mathfrak{g})$ svih derivacija Liejeve algebre, tj. to preslikavanje pored linearnosti ima i svojstvo

$$ad\, [X, Y] = (ad\, X)(ad\, Y) - (ad\, Y)(ad\, X), \qquad X, Y \in \mathfrak{g}.$$

Zadatak 3.7 *Neka je G Liejeva grupa i $\mathfrak{g}$ njena Liejeva algebra. Dokažite da za svaki $X \in \mathfrak{g}$ vrijedi*

$$Ad\, (\exp X) = \mathrm{e}^{ad\, X}.$$

Teorem 3.10 *Neka je G Liejeva grupa s Liejevom algebrom $\mathfrak{g}$ i neka je $\mathfrak{h}$ Liejeva podalgebra od $\mathfrak{g}$. Postoji jedinstvena povezana Liejeva podgrupa H od G čija je Liejeva algebra jednaka $\mathfrak{h}$.*

Ovaj se teorem dokazuje tako da se promatra skup $\exp \mathfrak{h} \subseteq G$ i za H se uzme podgrupa generirana tim skupom. $C^\infty-$strukturu u H uvedemo najprije na okolinu jedinice pomoću $\exp|\mathfrak{h}$, a zatim pomacima i na cijelu grupu H.

Teorem 3.11 *Neka je G Liejeva grupa i H zatvorena podgrupa. Tada je H Liejeva podgrupa.*

Za dokaz ovog teorema najprije se pokaže da je

$$\mathfrak{h} = \{X \in \mathfrak{g};\ \exp tX \in H\ \forall t \in \mathbb{R}\}$$

Liejeva podalgebra od $\mathfrak{g}$, a zatim da je $\exp \mathfrak{h}$ okolina jedinice u grupi H.

Teorem 3.12 *Neka je G Liejeva grupa i H zatvorena normalna podgrupa.*

- (*a*) *Na kvocijentnoj grupi G/H postoji jedinstvena $C^\infty-$struktura takva da je G/H Liejeva grupa i da je kvocijentni epimorfizam $G \to G/H$ Liejev homomorfizam.*
- (*b*) *Liejeva algebra $\mathfrak{h}$ Liejeve grupe H je ideal u $\mathfrak{g}$ i vrijedi $T_e(G/H) \simeq \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$.*

Neka je sada $\mathfrak{g}$ proizvoljna konačnodimenzionalna Liejeva algebra nad nekim poljem K. **Linearizacija** Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ je linearno preslikavanje $\varphi : \mathfrak{g} \to \mathcal{A}$, gdje je $\mathcal{A}$ asocijativna algebra nad K i vrijedi

$$\varphi([x, y]) = \varphi(x)\varphi(y) - \varphi(y)\varphi(x) \qquad \forall x, y \in \mathfrak{g}.$$

Univerzalna omotačka algebra Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ je uređen par (U, φ) takav da vrijedi:

(i) U je asocijativna algebra nad K.

(b) $\varphi : \mathfrak{g} \to U$ je linearizacija.

(c) Ako je $\psi : \mathfrak{g} \to \mathcal{A}$ linearizacija, onda postoji homomorfizam asocijativnih algebri $\chi : U \to \mathcal{A}$ takav da je $\psi = \chi \circ \varphi$.

Iz definicije je jasno da je univerzalna omotačka algebra jedinstvena do na izomorfizam, ukoliko uopće postoji.

Konstruirat ćemo univerzalnu omotačku algebru proizvoljne Liejeve algebre $\mathfrak{g}$. Najprije stavimo

$$T^0(\mathfrak{g}) = K, \qquad T^1(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}, \qquad T^n(\mathfrak{g}) = \underbrace{\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \otimes \cdots \otimes \mathfrak{g}}_{n \text{ faktora}}, \quad n \geq 2$$

a zatim sa $T(\mathfrak{g})$ označimo direktnu sumu svih tih vektorskih prostora:

$$T(\mathfrak{g}) = \coprod_{n \geq 0} T^n(\mathfrak{g}),$$

Na $T(\mathfrak{g})$ postoji jedinstvena struktura asocijativne algebre takva da vrijedi

$$(x_1 \otimes x_2 \otimes \cdots \otimes x_n)(y_1 \otimes y_2 \otimes \cdots \otimes y_m) = x_1 \otimes x_2 \otimes \cdots \otimes x_n \otimes y_1 \otimes y_2 \otimes \cdots \otimes y_m$$

$$\forall x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_m \in \mathfrak{g}.$$

Tako definirana asocijativna algebra $T(\mathfrak{g})$ zove se **tenzorska algebra** nad vektorskim prostorom $\mathfrak{g}$. Neka je J obostrani ideal u algebri $T(\mathfrak{g})$ generiran skupom

$$\{x \otimes y - y \otimes x - [x, y];\ x, y \in \mathfrak{g}\}.$$

Teorem 3.13 (Poncare–Birkhoff–Witt) (a) *$U(\mathfrak{g}) = T(\mathfrak{g})/J$ s linearizacijom*

$$\varphi(x) = x + J, \qquad x \in \mathfrak{g},$$

je univerzalna omotačka algebra Liejeve algebre $\mathfrak{g}$.

(b) *$\varphi : \mathfrak{g} \to U(\mathfrak{g})$ je injekcija.*

(c) *Ako je $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ baza vektorskog prostora $\mathfrak{g}$ onda je*

$$\{\varphi(x_1)^{m_1}\varphi(x_2)^{m_2} \cdots \varphi(x_n)^{m_n};\ m_1, m_2, \ldots, m_n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$$

baza vektorskog prostora $U(\mathfrak{g})$.

Budući da je linearizacija φ injekcija, Liejevu algebru $\mathfrak{g}$ možemo identificirati s $\operatorname{Im}\varphi$, što je Liejeva podalgebra asocijativne algebre $U(\mathfrak{g})$. Dakle, $\varphi(x) = x$, $x \in \mathfrak{g}$. Uz takvu identifikaciju imamo u algebri $U(\mathfrak{g})$:

$$[x, y] = xy - yx, \qquad x, y \in \mathfrak{g} \subseteq U(\mathfrak{g}).$$

Poglavlje 4

Distribucije s kompaktnim nosačem

Neka je M $n-$dimenzionalna diferencijabilna mnogostrukost. Sa $\mathcal{E}(M)$ ćemo označavati kompleksifikaciju algebre $C^\infty(M)$, tj. skup svih $C^\infty-$funkcija $f : M \to \mathbb{C}$. Nadalje, $\mathcal{E}_c(M)$ je oznaka za podalgebru funkcija iz $\mathcal{E}(M)$ s kompaktnim nosačem.

Posljedica postojanja prebrojive baze topologije od M jest da postoji niz $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ kompaktnih podskupova od M takav da je

$$K_n \subseteq Int(K_{n+1}) \quad \forall n \in \mathbb{N}, \qquad \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n = M.$$

Tada za svaki kompaktan $K \subseteq M$ postoji n takav da je $K \subseteq K_n$.

Sada ćemo topologizirati vektorski prostor $\mathcal{E}(M)$ i to najprije za slučaj kad je $M = V$ otvoren podskup od $\mathbb{R}^n$. Za $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_+^n$, $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N} \cup \{0\}$ pišemo:

$$\partial^\alpha = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_2} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n} = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}, \qquad |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n.$$

Ako želimo istaknuti varijable po kojima deriviramo, pisat ćemo ∂_x^α umjesto ∂^α.

Za $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^n$, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, $\beta = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$, definiramo:

$$\beta \leq \alpha \qquad \Longleftrightarrow \qquad \beta_j \leq \alpha_j \quad \forall j \in \{1, 2, \ldots, n\}.$$

Leibnitzovo pravilo za primjenu ∂^α na produkt dviju funkcija $f, g \in \mathcal{E}(V)$ glasi:

$$\partial^\alpha(fg) = \sum_{\beta \leq \alpha} c_{\beta,\alpha} (\partial^\beta f)(\partial^{\alpha-\beta} g),$$

pri čemu su $c_{\beta,\alpha}$ neovisni o f i g.

Neka je $U \subseteq \mathbb{R}^m$, neka je $\varphi : U \to V$ $C^\infty-$preslikavanje i neka je $f \in \mathcal{E}(V)$. Tada je $f \circ \varphi \in \mathcal{E}(U)$ i za svaki $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ vrijedi

$$\partial^\alpha(f \circ \varphi) = \sum_{\beta \in \mathbb{Z}_+^n,\ |beta| \leq |\alpha|} \varphi_{\beta,\alpha} \cdot (\partial^\beta f \circ \varphi)$$

gdje su funkcije $\varphi_{\beta,\alpha} \in \mathcal{E}(V)$ neovisne o f.

Za svaki kompaktan podskup $K \subseteq V$ i svaki $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ definiramo polunormu na prostoru $\mathcal{E}(V)$:

$$\|f\|_{V,K,\alpha} = \max\{|(\partial^\alpha f)(x)|;\ x \in K\}, \qquad f \in \mathcal{E}(V).$$

Vratimo se sada na opću $n-$dimenzionalnu diferencijabilnu mnogostrukost M. Neka je (U, φ) karta mnogostrukosti M. Nadalje, neka je $K \subseteq U$ kompaktan skup i $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$. Za $f \in \mathcal{E}(M)$ je $f \circ \varphi^{-1} \in \mathcal{E}(\varphi(U))$ pa ima smisla definirati polunormu $\|\cdot\|_{U,\varphi,K,\alpha}$ na $\mathcal{E}(M)$ relacijom

$$\|f\|_{U,\varphi,K,\alpha} = \|f \circ \varphi^{-1}\|_{\varphi(U),\varphi(K),\alpha}.$$

Ta kolekcija polunormi za razne uređene četvorke (U, φ, K, α) definira topologiju prostora $\mathcal{E}(M)$. Bazu otvorenih okolina nule čine skupovi

$$\mathcal{U}_{F,\varepsilon} = \{f \in \mathcal{E};\ \|f\|_{U,\varphi,K,\alpha} < \varepsilon \quad \forall (U, \varphi, K, \alpha) \in F\}$$

gdje je $\varepsilon > 0$ i F je konačan skup uređenih četvorki (U, φ, K, α). Bazu otvorenih okolina bilo kojeg drugog elementa $g \in \mathcal{E}(M)$ čine skupovi

$$\mathcal{U}_{F,\varepsilon}(g) = \{f \in \mathcal{E}(M);\ f - g \in \mathcal{U}_{F,\varepsilon}\}.$$

Na taj način $\mathcal{E}(M)$ postaje lokalno konveksan Hausdorffov linearan topološki prostor.

Lako se vidi iz Leibnitzove formule da je množenje po točkama kao preslikavanje sa $\mathcal{E}(M) \times \mathcal{E}(M)$ u $\mathcal{E}(M)$ neprekidno.

Zanimat će nas da utvrdimo kriterije neprekidnosti linearnih operatora sa $\mathcal{E}(M)$ u $\mathcal{V}$ i sa $\mathcal{V}$ u $\mathcal{E}(M)$, gdje je $\mathcal{V}$ također lokalno konveksan linearan topološki prostor na kome je topologija definirana nekim skupom polunormi.

Ako su $\mathcal{H}$ i $\mathcal{K}$ takvi prostori i ako su topologije na njima definirane pomoću skupova polunormi

$$\{\|\cdot\|_\gamma;\ \gamma \in \Gamma\} \qquad \text{i} \qquad \{\|\cdot\|_\delta;\ \delta \in \Delta\},$$

onda je linearan operator $A : \mathcal{H} \to \mathcal{K}$ neprekidan ako i samo ako za svaki $\delta \in \Delta$ postoji konačan podskup $F \subseteq \Gamma$ i postoji $C_{\delta,F} > 0$ takvi da je

$$\|Af\|_\delta \le C_{\delta,F} \sum_{\gamma \in F} \|f\|_\gamma \qquad \forall f \in \mathcal{H}.$$

Propozicija 4.1 *Topologija prostora $\mathcal{E}(M)$ je metrizabilna.*

Zadatak 4.1 (*a*) *Neka je $\mathcal{A}$ atlas mnogostrukosti M takav da je za svaki $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$ zatvarač $Cl(U)$ kompaktan. Neka je $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ niz u $\mathcal{E}(M)$ koji je particija jedinice pokrivača $\{U;\ (U, \varphi) \in \mathcal{A}\}$ od M. Nadalje, za $k \in \mathbb{N}$ neka je $(U_k, \varphi_k) \in \mathcal{A}$ karta takva da je*

$$K_k = Supp\, p_k \subseteq U_k.$$

Dokažite da prebrojiv skup polunormi

$$\{\|\cdot\|_{U_k,\varphi_k,K_k,\alpha};\ k \in \mathbb{N},\, \alpha \in \mathbb{Z}_+^n\}$$

definira topologiju prostora $\mathcal{E}(M)$.

(*b*) *Neka je*

$$\{\|\cdot\|_{U_k,\varphi_k,K_k,\alpha};\ k \in \mathbb{N},\, \alpha \in \mathbb{Z}_+^n\} = \{\|\cdot\|_n;\ n \in \mathbb{N}\}.$$

Dokažite da metrika

$$d(f, g) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \frac{\|f - g\|_n}{1 + \|f - g\|_n}, \qquad f, g \in \mathcal{E}(M),$$

definira topologiju prostora $\mathcal{E}(M)$.

Uputa: (a) Neka je $\mathcal{H}$ prostor $\mathcal{E}(M)$ s tim skupom polunormi. Treba dokazati da je identiteta $I : \mathcal{H} \to \mathcal{E}(M)$ neprekidna (jer očito je inverzna identiteta $I : \mathcal{E}(M) \to \mathcal{H}$ neprekidna). Dakle treba dokazati da vrijedi nejednakost oblika

$$\|f\|_{U,\varphi,K,\alpha} \leq C \sum_{(k,\beta)\in F} \|f\|_{U_k,\varphi_k,K_k,\beta} \qquad \forall f.$$

Konačan skup F izabire se na sljedeći način: najprije izaberemo $N \in \mathbb{N}$ takav da je

$$\sum_{k=1}^{N} p_k(x) = 1 \qquad \forall x \in K,$$

a zatim stavimo

$$F = \{(k,\beta);\ k \leq N,\ |\beta| \leq |\alpha|\}.$$

Posljedica propozicije 4.1. jest da se topologija prostora $\mathcal{E}(M)$ može u potpunosti opisati pomoću nizova. Nadalje, ako je $f \in \mathcal{E}(M)$ i ako je $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz u $\mathcal{E}(M)$, onda

$$f = \lim_{n\to\infty} f_n \qquad \text{u} \quad \mathcal{E}(M)$$

znači da je

$$\lim_{n\to\infty} \|f - f_n\|_{U,\varphi,K,\alpha} = 0 \qquad \forall (U,\varphi,K,\alpha),$$

a to znači da niz $(f - f_n)$ i nizovi $k-$tih derivacija tog niza $\forall k \in \mathbb{N}$ u svakoj karti lokalno uniformno konvergiraju prema nuli.

U daljnjem sa $\mathcal{E}'(M)$ označavamo dual linearnog topološkog prostora $\mathcal{E}(M)$, tj. prostor svih neprekidnih linearnih funkcionala $T : \mathcal{E}(M) \to \mathbb{C}$. Za linearni funkcional $T : \mathcal{E}(M) \to \mathbb{C}$ neprekidnost znači da postoji konačan skup F uređenih četvorki (U,φ,K,α) i $C > 0$ takvi da je

$$|T(f)| \leq C \sum_{(U,\varphi,K,\alpha)\in F} \|f\|_{U,\varphi,K,\alpha} \qquad \forall f \in \mathcal{E}(M).$$

Elementi prostora $\mathcal{E}'(M)$ zovu se **distribucije** na mnogostrukosti M **s kompaktnim nosačem**.

Primjer 1. $p \in M$, $\delta_p : \mathcal{E}(M) \to \mathbb{C}$, $\delta_p(f) = f(p)$.

Primjer 2. $V \subseteq \mathbb{R}^n$ otvoren, $K \subseteq V$ kompaktan, μ Borelova mjera na V s nosačem sadržanim u K, $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$, $T_{\mu,\alpha} : \mathcal{E}(M) \to \mathbb{C}$

$$T_{\mu,\alpha}(f) = \int_V (\partial^\alpha f)(x) \mathrm{d}\mu(x).$$

Zadatak 4.2 *Dokažite da su linearni funkcionali u primjerima* 1. *i* 2. *distribucije s kompaktnim nosačem.*

Za $T \in \mathcal{E}'(M)$ i za $h \in \mathcal{E}(M)$ definiramo $hT : \mathcal{E}(M) \to \mathbb{C}$ sa

$$(hT)(f) = T(hf), \qquad f \in \mathcal{E}(M).$$

Pomoću Leibnitzovog pravila lako se vidi da je $f \mapsto hf$ neprekidan linearan operator sa $\mathcal{E}(M)$ u $\mathcal{E}(M)$. Odatle slijedi da je $hT \in \mathcal{E}'(M)$. Na taj način $\mathcal{E}'(M)$ postaje modul nad komutativnom $\mathbb{C}-$algebrom $\mathcal{E}(M)$.

Neka je $T \in \mathcal{E}'(M)$. Sa $Supp\,T$ označavamo komplement unije svih otvorenih podskupova $U \subseteq M$ takvih da je $T|\mathcal{E}_c(U) = 0$. $Supp\,T$ je zatvoren podskup od M i zove se **nosač distribucije** T.

Zadatak 4.3 *Dokažite:*

(a) $T = 0$ *je jedina distribucija s praznim nosačem.*

(b) $Supp(T_1 + T_2) \subseteq Supp\, T_1 \cup Supp\, T_2$ *za* $T_1, T_2 \in \mathcal{E}'(M)$.

(c) $Supp(hT) \subseteq Supp\, h \cap Supp\, T$ *za* $h \in \mathcal{E}(M)$ *i* $T \in \mathcal{E}'(M)$.

Propozicija 4.2 *Neka su* U_α, $\alpha \in A$, *otvoreni podskupovi od* M *i neka je* $T \in \mathcal{E}'(M)$. *Ako je*

$$T|\mathcal{E}_c(U_\alpha) = 0 \qquad \forall \alpha \in A$$

onda je

$$T|\mathcal{E}_c\left(\cup_{\alpha \in A} U_\alpha\right) = 0.$$

Dokaz: Neka je $f \in \mathcal{E}_c(\cup_{\alpha \in A} U_\alpha)$. Tada zbog kompaktnosti skupa $Supp\, f$ postoji konačno mnogo indeksa $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in A$ takvih da je $Supp\, f \subseteq U_{\alpha_1} \cup \cdots \cup U_{\alpha_n}$. Dakle, propoziciju je dovoljno dokazati za konačan skup A. Indukcijom po broju elemenata skupa A vidimo da je dovoljno propoziciju dokazati za dvočlani skup A. Dakle, treba dokazati

$$T|\mathcal{E}_c(U_1) = T|\mathcal{E}_c(U_2) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad T|\mathcal{E}_c(U_1 \cup U_2) = 0.$$

Neka je $f \in \mathcal{E}_c(U_1 \cup U_2)$. Neka je $v \subseteq M$ otvoren skup s kompaktnim zatvaračem $\overline{V}$ i takav da je

$$Supp\, f \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq U_1 \cup U_2.$$

Stavimo

$$V_1 = U_1 \cap V, \qquad V_2 = U_2 \cap V, \qquad V_0 = M \setminus Supp\, f.$$

Tada je $\{V_1, V_2, V_0\}$ otvoren pokrivač od M, pa po teoremu 3.1. postoji particija jedinice $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_0\}$ u $\mathcal{E}(M)$ podređena tom pokrivaču. To posebno znači da su nosači $Supp\, \varphi_1$ i $Supp\, \varphi_2$ kompaktni, da je $Supp\, \varphi_1 \subseteq U_1$, $Supp\, \varphi_2 \subseteq U_2$ i $Supp\, \varphi_0 \cap Supp\, f = \emptyset$ i da je $\varphi_(x) - \varphi_2(x) + \varphi_0(x) = 1$ $\forall x \in M$. Slijedi

$$f = \varphi_1 f + \varphi_2 f + \varphi_0 f = \varphi_1 f + \varphi_2 f, \qquad \varphi_1 f \in \mathcal{E}_c(U_1), \quad \varphi_2 f \in \mathcal{E}_c(U_2).$$

Odatle je

$$T(f) = T(\varphi_1 f) + T(\varphi_2 f) = 0.$$

Korolar 4.1 *Za* $T \in \mathcal{E}'(M)$ *je* $T|\mathcal{E}_c(M \setminus Supp\, T) = 0$.

Dokaz: Po definiciji nosača postoje otvoreni skupovi $U_\alpha \subseteq M$, $\alpha \in A$, takvi da je $T|\mathcal{E}_c(U_\alpha) = 0$ $\forall \alpha$ i da je $Supp\, T = M \setminus \cup_{\alpha \in A} U_\alpha$. No tada je $M \setminus Supp\, T = \cup_{\alpha \in A} U_\alpha$, pa tvrnja slijedi iz propozicije 4.2.

Korolar 4.2 *Neka je* $T \in \mathcal{E}'(M)$ *i neka je* $U \subseteq M$ *otvoren skup takav da je* $Supp\, T \subseteq U$. *Ako je* $f \in \mathcal{E}(M)$ *takva da je* $f|U = 0$, *onda je* $T(f) = 0$.

Dokaz: Neka je $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ niz kompaktnih podskupova od M takvih da je

$$K_n \subseteq Int\, K_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad \text{i} \qquad M = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n.$$

Neka je $\varphi_n \in \mathcal{E}C(M)$ takva da je $\varphi_n|K_n = 1$. Tada je očito $f\varphi_n \in \mathcal{E}_c(M \setminus Supp\, T)$ i vrijedi

$$f = \lim_{n \to \infty} f\varphi_n \quad \text{u prostoru} \quad \mathcal{E}(M).$$

Prema korolaru 4.1. je $T(f\varphi_n) = 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Zbog neprekidnosti funkcionala $T : \mathcal{E}(M) \to \mathbb{C}$ slijedi $T(f) = 0$.

Propozicija 4.3 *Za svaku distribuciju $T \in \mathcal{E}'(M)$ njen nosač $Supp\, T$ je kompaktan skup.*

Dokaz: Neka su K_n kao u dokazu korolara 4.2. Pretpostavimo da $Supp\, T$ nije kompaktan skup. Tada $Supp\, T \nsubseteq K_n\ \forall n$. Izaberimo $f_n \in \mathcal{E}_c(M \setminus K_n)$ takve da je $T(f_n) \neq 0$. Stavimo

$$h_n = \frac{1}{T(f_n)} f_n, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Tada su $h_n \in \mathcal{E}_c(M \setminus K_n)$ i vrijedi $T(h_n) = 1\ \forall n$.

Neka je $K \subseteq M$ proizvoljan kompaktan skup. Tada postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $K \subseteq K_n$ $\forall n \geq n_0$. Slijedi da su za svako $n \geq n_0$ funkcija h_n i sve njene derivacije jednake nuli na skupu K. Odatle zaključujemo da vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} h_n = 0 \qquad \text{u prostoru} \quad \mathcal{E}(M).$$

Zbog neprekidnosti T dolazimo do kontradikcije:

$$0 = T\left(\lim_{n\to\infty} h_n\right) = \lim_{n\to\infty} T(h_n) = 1.$$

Propozicija 4.4 *Neka je $T \in \mathcal{E}'(M)$ i $K = Supp\, T$. Neka je K' kompaktan podskup od M takav da je $Int\, K \subseteq K'$. Pretpostavimo da T zadovoljava nejednakost*

$$|T(f)| \leq C \sum_{(U,\varphi,L,\alpha)\in F} \|f\|_{U,\varphi,L,\alpha} \qquad \forall f \in \mathcal{E}(M)$$

za $C > 0$ i za konačan skup uređenih četvorki F. Tada T zadovoljava i nejednakost oblika

$$|T(f)| \leq C' \sum_{(U,\varphi,L\cap K',\alpha')\in F'} \|f\|_{U,\varphi,L\cap K',\alpha'} \qquad \forall f \in \mathcal{E}(M)$$

gdje je $C' > 0$ i

$$F' = \{(U, \varphi, L \cap K', \alpha');\ \exists \alpha \text{ takav da je } \alpha' \leq \alpha \text{ i } (U, \varphi, L, \alpha) \in F\}.$$

Dokaz: Neka je $\chi \in \mathcal{E}_c(M)$ takva da je $\chi = 1$ na okolini od K i da je $\chi|M \setminus K' = 0$. Tada je $(1 - \chi)f = 0$ na okolini od K. Po korolaru 4.2. zaključujemo

$$T((1-\chi)f) = 0 \quad \Longrightarrow \quad T(f) = T(\chi f) \quad \Longrightarrow \quad |T(f)| = |T(\chi f)| \leq C \sum_F \|\chi f\|_{U,\varphi,L,\alpha}.$$

Tvrdnja slijedi primjenom Leibnitzovog pravila, jer je $\chi|M \setminus K' = 0$.

Bit će nam važno proširiti područje definicije distribucije i na jednu klasu vektorsko$-$značnih funkcija.

Neka je V vektorski prostor nad $\mathbb{C}$; ukoliko, je V beskonačnodimenzionalan uzimamo ga bez ikakve topologije, a koristit ćemo se samo s prirodnom topologijom na konačnodimenzionalnim potprostorima od V. Neka je M diferencijabilna mnogostrukost. Definiramo

$$\mathcal{E}(M,V)_f = \{\varphi : M \to V;\ \exists U \leq V,\ \dim U < \infty,\ \varphi(M) \subseteq U,\ \varphi : M \to U \text{ je} C^\infty - \text{preslikavanje}\}.$$

Očito je $\mathcal{E}(M,V)_f$ vektorski prostor i uz množenje po točkama to je $\mathcal{E}(M)-$modul.

Zadatak 4.4 *Dokažite da postoji linearan operator* $A : \mathcal{E}(M) \otimes_{\mathbb{C}} V \to \mathcal{E}(M,V)_f$ *takav da je*

$$A(f \otimes v)(p) = f(p)v \qquad \forall f \in \mathcal{E}(M), \quad \forall v \in V, \quad \forall p \in M.$$

Nadalje, dokažite da je A *izomorfizam vektorskih prostora i da je inverzni izomorfizam dan na sljedeći način: Ako je* $\varphi \in \mathcal{E}(M,V)_f$ *izaberimo konačnodimenzionalan potprostor* U *od* V *takav da je* $\varphi(M) \subseteq U$. *Nadalje, neka je* $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ *baza prostora* U *i neka je* $\{e_1^*, e_2^*, \ldots, e_n^*\}$ *dualna baza dualnog prostora* U^* *prostora* U, *tj.* $e_i^*(e_j) = \delta_{ij}$. *Tada je*

$$A^{-1}(\varphi) = \sum_{i=1}^{n} e_i^*(\varphi) \otimes e_i,$$

pri čemu je $e_i^*(\varphi) \in \mathcal{E}(M)$ *definirana sa* $[e_i^*(\varphi)](p) = e_i^*(\varphi(p))$, $p \in M$.

Sada ćemo za $T \in \mathcal{E}'(M)$ definirati $T : \mathcal{E}(M,V)_f \to V$ kao $(T \otimes I_V) \circ A^{-1}$, gdje je A linearan operator iz prethodnog zadatka. Dakle, ako je $\varphi \in \mathcal{E}(M,V)_f$, onda prema tom zadatku postoje $e_1, e_2, \ldots, e_n \in V$ i $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n \in \mathcal{E}(M)$ takvi da je

$$\varphi(p) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(p) e_j.$$

Tada stavljamo

$$T(\varphi) = \sum_{i=1}^{n} T(\varphi_i) e_i.$$

Dakle,

$$T\left(\sum_{i=1}^{n} \varphi_i(\cdot) e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} T(\varphi_i) e_i, \qquad e_1, e_2, \ldots, e_n \in V, \quad \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n \in \mathcal{E}(M).$$

Ako je $A : V \to W$ linearan operator, za $f \in \mathcal{E}(M,V)_f$ je sa $(Af)(p) = Af(p)$, $p \in M$, definirana funkcija $Af \in \mathcal{E}(M,W)_f$ i preslikavanje $f \mapsto Af$ je linearan operator sa $\mathcal{E}(M,V)_f$ u $\mathcal{E}(M,W)_f$ i vrijedi

$$T(Af) = AT(f) \qquad T \in \mathcal{E}'(M), \quad f \in \mathcal{E}(M,V)_f. \qquad (*)$$

Doista, ako identificiramo $\mathcal{E}(M,V)_f$ s prostorom $\mathcal{E}(M) \otimes V$, pa preslikavanje $f \mapsto Af$ zapravo predstavlja linearan operator $I_{\mathcal{E}(M)} \otimes A$, dok djelovanje distribucije $T \in \mathcal{E}'(M)$ na prostor $\mathcal{E}(M,V)$, odnosno na $\mathcal{E}(M,W)$ predstavlja linearan operator $T \otimes I_V$, odnosno $T \otimes I_W$, dokaz jednakosti $(*)$ je sljedeći:

$$(T \otimes I_W)(I_{\mathcal{E}(M)} \otimes A) = T \otimes A = (I_{\mathbb{C}} \otimes A)(T \otimes I_V).$$

Nadalje, definiramo $\mathcal{E}'(M,V)_f$ kao vektorski prostor svih linearnih operatora $T : \mathcal{E}(M) \to V$ takvih da je prostor $T(\mathcal{E}(M))$ konačnodimenzionalan i da je operator $T : \mathcal{E}(M) \to T(\mathcal{E}(M))$ neprekidan. Lako se vidi da je tada

$$\mathcal{E}'(M,V)_f \simeq \mathcal{E}'(M) \otimes_{\mathbb{C}} V.$$

Zgodnija će nam biti drugačija interpretacija. Naime, $\mathcal{E}'(M)$ i $\mathcal{E}(M,V)$ su moduli nad komutativnom algebrom $\mathcal{E}(M)$ i imamo redom

$$\mathcal{E}'(M) \otimes_{\mathbb{C}} V \simeq [\mathcal{E}'(M) \otimes_{\mathcal{E}(M)} \mathcal{E}(M)] \otimes_{\mathbb{C}} V \simeq \mathcal{E}'(M) \otimes_{\mathcal{E}(M)} [\mathcal{E}(M) \otimes_{\mathbb{C}} V] \simeq \mathcal{E}'(M) \otimes_{\mathcal{E}(M)} \mathcal{E}(M,V)_f.$$

Dakle,

$$\mathcal{E}'(M)\otimes_{\mathbb{C}} V \simeq \mathcal{E}'(M)\otimes_{\mathcal{E}(M)} \mathcal{E}(M,V)_f$$

pri čemu je izomorfizam s lijeva na desno takav da

$$T\otimes_{\mathbb{C}} v \mapsto T\otimes_{\mathcal{E}(M)} \underline{v}, \qquad T\in\mathcal{E}'(M), \quad v\in V,$$

a $\underline{v}$ je oznaka za konstantnu funkciju $\underline{v}(x)=v\ \forall x\in M$. Izračunajmo i inverzni izomorfizam. Neka su $v(\cdot)\in\mathcal{E}(M,V)_f$ i $T\in\mathcal{E}'(M)$. Neka je $\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$ baza konačnodimenzionalnog potprostora koji sadrži $\{v(x);\ x\in M\}$. Tada postoje $f_1,f_2,\ldots,f_n\in\mathcal{E}(M)$ takve da je

$$v(x)=\sum_{j=1}^{n} f_j(x)v_j, \qquad x\in M.$$

Tada u $\mathcal{E}'(M)\otimes_{\mathcal{E}(M)}\mathcal{E}(M,V)_f$ imamo

$$T\otimes v(\cdot)=\sum_{j=1}^{n} T\otimes f_jv_j=\sum_{j=1}^{n} f_jT\otimes v_j.$$

Dakle, inverzni izomorfizam dan je sa

$$T\otimes_{\mathcal{E}(M)} v(\cdot)\mapsto \sum_{j=1}^{n} f_jT\otimes_{\mathbb{C}} v_j.$$

Teorem 4.1 (Fubini) *Neka su M i N diferencijabilne mnogostrukosti, $S\in\mathcal{E}(M)$, $T\in\mathcal{E}(N)$ i $f\in\mathcal{E}(M\times N)$. Za $x\in M$ definiramo funkciju $f_x\in\mathcal{E}(N)$ sa $f_x(y)=f(x,y)$, $y\in N$. Analogno, za $y\in N$ definiramo $f_y\in\mathcal{E}(M)$ sa $f_y(x)=f(x,y)$, $x\in M$.*

(a) *Definiramo funkcije $\mathcal{T}f:M\to\mathbb{C}$ i $\mathcal{S}f:N\to\mathbb{C}$ sa*

$$(\mathcal{T}f)(x)=T(f_x), \qquad x\in M,$$

$$(\mathcal{S}f)(y)=S(f_y), \qquad y\in N.$$

Tada su $\mathcal{T}f\in\mathcal{E}(M)$ i $\mathcal{S}f\in\mathcal{E}(N)$. Nadalje, $\mathcal{T}:\mathcal{E}(M\times N)\to\mathcal{E}(M)$ i $\mathcal{S}:\mathcal{E}(M\times N)\to\mathcal{E}(N)$ su neprekidni linearni operatori.

(b) *Postoji jedinstvena $S\times T\in\mathcal{E}'(M\times N)$ takva da je*

$$(S\times T)(\varphi\times\psi)=S(\varphi)T(\psi) \qquad \forall\varphi\in\mathcal{E}(M), \quad \forall\psi\in\mathcal{E}(N).$$

Pri tome je za $\varphi\in\mathcal{E}(M)$ i $\psi\in\mathcal{E}(N)$ funkcija $\varphi\times\psi\in\mathcal{E}(M\times N)$ definirana sa

$$(\varphi\times\psi)(x,y)=\varphi(x)\psi(y), \qquad x\in M, \quad y\in N.$$

Nadalje, za svaku funkciju $f\in\mathcal{E}(M\times N)$ vrijedi

$$(S\times T)(f)=S(\mathcal{T}f)=T(\mathcal{S}f).$$

Neka su M i N diferencijabilne mnogostrukosti i neka je $\varphi:N\to M$ $C^\infty-$preslikavanje. Za $T\in\mathcal{E}'(N)$ definiramo $\varphi_*(T):\mathcal{E}(M)\to\mathbb{C}$ sa

$$[\varphi_*(T)](f)=T(f\circ\varphi), \qquad f\in\mathcal{E}(M).$$

Zadatak 4.5 *(a) Uz uvedenu oznaku dokažite da je* $\varphi_*(T) \in \mathcal{E}'(M)$ *i da vrijedi*

$$Supp\, \varphi_*(T) \subseteq \varphi(Supp\, T).$$

(b) Dokažite da je preslikavanje $\varphi_* : \mathcal{E}'(N) \to \mathcal{E}'(M)$ *neprekidno, ako su prostori* $\mathcal{E}'(M)$ *i* $\mathcal{E}'(N)$ *snabdjeveni slabim topologijama, tj. topologijama koje su definirane polunormama*

$$\|S\|_f = |S(f)|, \quad S \in \mathcal{E}'(M), \quad f \in \mathcal{E}(M); \qquad \|T\|_g = |T(g)|, \quad T \in \mathcal{E}'(N), \quad g \in \mathcal{E}(N).$$

(c) Ako je i $\psi : M \to P$ $C^\infty-$*preslikavanje diferencijabilnih mnogostrukosti dokažite da je*

$$(\psi \circ \varphi)_* = \psi_* \circ \varphi_*.$$

Ukoliko je u gornjoj situaciji $\varphi : N \to M$ injekcija, zanima nas obratna konstrukcija, tj. mogu li se elementi od $\mathcal{E}'(M)$, čiji je nosač sadržan u $\varphi(N)$, konstruirati iz elemenata od $\mathcal{E}'(N)$. Pozitivan odgovor na to pitanje dat ćemo u slučaju da je $M = N \times P$ i da je za neku točku $p \in P$ preslikavanje $\varphi : N \to M$ definirano sa

$$\varphi(x) = (x, p), \qquad x \in N.$$

Zadatak 4.6 *Dokažite da je u tom slučaju*

$$\varphi_*(T) = T \times \delta_p \qquad \forall T \in \mathcal{E}'(N).$$

Neka je M $n-$dimenzionalna diferencijabilna mnogostrukost i $T \in \mathcal{E}'(M)$. Po definiciji neprekidnosti tada postoji konačan skup F uređenih četvorki (U, φ, K, α), pri čemu je (U, φ) karta mnogostrukosti M, K je kompaktan podskup od U i $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$, i postoji $C > 0$ takvi da je

$$|T(f)| \leq C \sum_F \|f\|_{U,\varphi,K,\alpha} \qquad \forall f \in \mathcal{E}(M). \qquad (*)$$

Stavimo tada

$$ord\, F = \max\{|\alpha|;\ (U, \varphi, K, \alpha) \in F\}$$

i

$$ord\, T = \min\{ord\, F;\ \exists C > 0 \text{ takav da vrijedi } (*)\}.$$

Teorem 4.2 (L.Schwartz) *Neka je* $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n)$ *takva da je* $Supp\, T \subseteq \mathbb{R}^m \times \{0\}$ *i neka je* $k = ord\, T$. *Tada postoje jedinstvene* $T_\beta \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^m)$, $\beta \in \mathbb{Z}_+^n$, $|\beta| \leq k$, *takve da je*

$$T = \sum_{|\beta| \leq k} T_\beta \times \partial^\beta,$$

pri čemu je ∂^β *oznaka za parcijalnu derivaciju u točki* $0 \in \mathbb{R}^n$:

$$\partial^\beta = \left. \frac{\partial^{|\beta|}}{\partial x_1^{\beta_1} \partial x_2^{\beta_2} \cdots \partial x_n^{\beta_n}} \right|_{x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0}.$$

Nadalje, za svaki multiindeks β *vrijedi* $ord\, T_\beta \leq k - |\beta|$.

Korolar 4.3 *Neka su N i P diferencijabilne mnogostrukosti, $p \in P$ i $T \in \mathcal{E}'(N \times P)$ takva da je $\mathit{Supp}\, T \subseteq N \times \{p\}$. Neka je $k = \mathit{ord}\, T$. Ako je (U, φ) karta mnogostrukosti P takva da je $p \in U$ i $\varphi(p) = 0$, neka je*

$$D^\beta = (\varphi^{-1})_*(h \mapsto (\partial^\beta h)(0)) \in \mathcal{E}'(P).$$

Tada T ima prikaz

$$T = \sum_{|\beta| \leq k} T_\beta \times D^\beta, \qquad T_\beta \in \mathcal{E}'(N), \qquad \mathit{ord}\, T_\beta \leq k - |\beta|.$$

Često će u daljnjem biti spretno koristiti tzv. integralnu notaciju za djelovanje distribucija na funkcije. Tako ako su $T \in \mathcal{E}'(M)$ i $f \in \mathcal{E}(M)$ pisat ćemo

$$T(f) = \langle T, f \rangle = \int_M f(x) \mathrm{d}T(x).$$

Uz takvu notaciju jednakosti u Fubinijevom teoremu 4.1. izgledaju ovako:

$$\int_{M \times N} f(x,y) \mathrm{d}(T \times S)(x,y) = \int_M \left(\int_N f(x,y) \mathrm{d}T(y) \right) \mathrm{d}S(x) = \int_N \left(\int_M f(x,y) \mathrm{d}S(x) \right) \mathrm{d}T(y).$$

Poglavlje 5

Distribucije na Liejevim grupama

U ovom paragrafu upotrebljavat ćemo sljedeće oznake

G je (realna) Liejeva grupa.

G_0 je komponenta povezanosti od G koja sadrži jedinicu e grupe G. G_0 je otvorena (i zatvorena) normalna podgrupa od G.

$\mathfrak{g}_0 = Lie(G) = Lie(G_0)$ je Liejeva algebra Liejevih grupa G i G_0.

$\mathfrak{g}$ je kompleksifikacija Liejeve algebre $\mathfrak{g}_0$.

$U(\mathfrak{g})$ je univerzalna omotačka algebra od $\mathfrak{g}$.

Nadalje, sa λ i ρ ćemo označavati tzv. **lijevu** i **desnu regularnu reprezentaciju** grupe G na prostoru $\mathcal{E}(G)$:

$$[\lambda(g)f](x) = f(g^{-1}x), \qquad [\rho(g)f](x) = f(xg), \qquad f \in \mathcal{E}(G), \quad x, g \in G.$$

Za $Y \in \mathfrak{g}_0$ definiramo

$$[\lambda(Y)f](x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(\exp(-tY)x)\bigg|_{t=0}, \quad [\rho(Y)f](x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(x\exp(tY))\bigg|_{t=0}, \quad f \in \mathcal{E}(G), \quad x \in G.$$

Zadatak 5.1 *Dokažite da su ovako definirani λ i ρ linearizacije Liejeve algebre $\mathfrak{g}_0$, tj. homomorfizmi Liejeve algebre $\mathfrak{g}_0$ u asocijativnu algebru $\mathcal{L}(\mathcal{E}(G))$, tj. reprezentacije Liejeve algebre $\mathfrak{g}_0$ na vektorskom prostoru $\mathcal{E}(G)$.*

Reprezentacije λ i ρ se kompleksificiraju do reprezentacija od $\mathfrak{g}$, a zatim po univerzalnom svojstvu to postaju reprezentacije asocijativne algebre $U(\mathfrak{g})$. Drugim riječima, prostor $\mathcal{E}(G)$ na dva načina postaje unitalni lijevi $U(\mathfrak{g})-$modul. Dva djelovanja $U(\mathfrak{g})$ na $\mathcal{E}(G)$ očito komutiraju:

$$\lambda(u)\rho(v) = \rho(v)\lambda(u) \qquad \forall u, v \in U(\mathfrak{g}).$$

Po dualnosti dobivamo reprezentacije od G, $\mathfrak{g}_0$ i $U(\mathfrak{g})$ na prostoru distribucija $\mathcal{E}'(G)$, tako da za $T \in \mathcal{E}'(G)$ i za $\mathcal{E}(G)$ stavimo

$$\begin{aligned}
\langle \lambda(g)T, f\rangle &= \langle T, \lambda(g^{-1})f\rangle, \quad g \in G,\\
\langle \rho(g)T, f\rangle &= \langle T, \rho(g^{-1})f\rangle, \quad g \in G,\\
\langle \lambda(Y)T, f\rangle &= -\langle T, \lambda(Y)f\rangle, \quad Y \in \mathfrak{g}_0,\\
\langle \rho(Y)T, f\rangle &= \langle T, \rho(Y)f\rangle, \quad Y \in \mathfrak{g}_0,\\
\langle \lambda(u)T, f\rangle &= \langle T, \lambda(u^t)f\rangle, \quad u \in U(\mathfrak{g}),\\
\langle \rho(u)T, f\rangle &= \langle T, \rho(u^t)f\rangle, \quad u \in U(\mathfrak{g}).
\end{aligned}$$

Pri tome je $u \mapsto u^t$ tzv. **transponiranje** tj. antiautomorfizam algebre $U(\mathfrak{g})$ iz sljedećeg zadatka:

Zadatak 5.2 *Dokažite da postoji jedinstveno linearno preslikavanje $u \mapsto u^t$ sa $U(\mathfrak{g})$ u $U(\mathfrak{g})$ takvo da vrijedi*

$$X^t = -X \quad za \quad X \in \mathfrak{g}; \qquad (uv)^t = v^t u^t \quad za \quad u, v \in U(\mathfrak{g}).$$

Nadalje, dokažite da je $u \mapsto u^t$ involucija i bijekcija.

Za $u \in U(\mathfrak{g})$ i $f \in \mathcal{E}(G)$ definiramo $\partial(u)f \in \mathbb{C}$ formulom

$$\partial(u)f = (\rho(u)f)(e).$$

Zadatak 5.3 *Dokažite da je $u \mapsto \partial(u)$ linearna injekcija sa $U(\mathfrak{g})$ u $\mathcal{E}'(G)$ i da za svaki $u \in U(\mathfrak{g}) \setminus \{0\}$ vrijedi $\mathrm{Supp}\, \partial(u) = \{e\}$.*

Definiramo sada transponiranje i na $\mathcal{E}(G)$ i na $\mathcal{E}'(G)$:

$$f^t(x) = f(x^{-1}), \qquad f \in \mathcal{E}(G), \quad x \in G,$$

$$T^t(f) = T(f^t), \qquad T \in \mathcal{E}'(G), \quad f \in \mathcal{E}(G).$$

Zapravo, ako sa $i : G \to G$ označimo invertiranje ($i(x) = x^{-1}$) onda je

$$T^t = i_*(T).$$

U integralnoj notaciji je

$$\int_G f(x) \mathrm{d}T^t(x) = \int_G f(x^{-1}) \mathrm{d}T(x).$$

Neka je $m : G \times G \to G$ operacija množenja: $m(x, y) = xy$. Za $S, T \in \mathcal{E}'(G)$ definiramo njihovu **konvoluciju** $S * T \in \mathcal{E}'(G)$ formulom

$$S * T = m_*(S \times T),$$

tj. u integralnoj notaciji

$$\langle S * T, f \rangle = \int_G \int_G f(xy) \mathrm{d}S(x) \mathrm{d}T(y), \qquad f \in \mathcal{E}(G).$$

Propozicija 5.1 *Uz tako definiranu operaciju $*$ $\mathcal{E}'(G)$ je unitalna asocijativna algebra s jedinicom δ_e. Transponiranje je involutivni antiautomorfizam.*

Dokaz: Neka je $m_1 : G \times G \times G \to G$ definirano sa

$$m_1(a, b, c) = [m \circ (1, m)](a, b, c) = a(bc).$$

Tada je

$$(m_1)_* = m_* \circ (1, m)_* = m_* \circ (1_*, m_*).$$

Dakle, za $R, S, T \in \mathcal{E}'(G)$ imamo

$$R*(S*T) = m_*(R \times (S*T)) = m_*(R \times m_*(S \times T)) = [m_* \circ (1_*, m_*)](R \times S \times T) = (m_1)_*(R \times S \times T).$$

Analogno, ako $m_2 : G \times G \times G \to G$ definiramo sa $m_2(a, b, c) = (ab)c$, nalazimo da je

$$(R * S) * T = (m_2)_*(R \times S \times T).$$

Međutim, množenje u grupi G je asocijativno, pa vrijedi $m_1 = m_2$, dakle i $(m_1)_* = (m_2)_*$. Slijedi $R * (S * T) = (R * S) * T$.

Transponiranje je očito involutivno.

Napokon, definiramo preslikavanja

$$\begin{array}{ll} i : G \to G & i(x) = x^{-1} \\ s : G \times G \to G \times G & s(x,y) = (y,x) \\ n_1 : G \times G \to G & n_1 = i \circ m \quad \text{tj.} \quad n_1(a,b) = (ab)^{-1} \\ n_2 : G \times G \to G & n_2 = m \circ (i,i) \circ s \quad \text{tj.} \quad n_2(a,b) = b^{-1}a^{-1}. \end{array}$$

Tada je $n_1 = n_2$ dakle i $(n_1)_* = (n_2)_*$. Nadalje, za $S, T \in \mathcal{E}'(G)$ imamo

$$(n_1)_*(S \times T) = (i_* \circ m_*)(S \times T) = i_*(S * T) = (S * T)^t,$$

$$(n_2)_*(S \times T) = (m_* \circ (i_*, i_*) \circ s_*)(S \times T) = m_*((i_*, i_*)(T \times S)) = m_*(T^t \times S^t) = T^t * S^t.$$

Zadatak 5.4 *Dokažite da je $\partial : U(\mathfrak{g}) \to \mathcal{E}'(G)$ homomorfizam algebri, tj.*

$$\partial(uv) = \partial(u) * \partial(v), \qquad u, v \in U(\mathfrak{g}).$$

Nadalje, dokažite da vrijedi

$$\partial(u^t) = \partial(u)^t, \qquad u \in U(\mathfrak{g}),$$

$$\lambda(g)T = \delta_g * T, \qquad \rho(g)T = T * \delta_{g^{-1}}, \qquad g \in G, \quad T \in \mathcal{E}'(G),$$

$$\partial((Ad\, g)u) = \delta_g * \partial(u) * \delta_{g^{-1}}, \qquad g \in G, \quad u \in U(\mathfrak{g}).$$

Možemo reći da konvolucijska algebra $\mathcal{E}'(G)$ "sadrži" algebru $U(\mathfrak{g})$, ali i grupu G preko $g \mapsto \delta_g$ jer se lako vidi da je $\delta_g * \delta_h = \delta_{gh}$. Nadalje, vrijedi $(\delta_g)^t = \delta_{g^{-1}}$.

Neka je M lokalno kompaktan Hausdorffov topološki prostor i $C_c(M)$ prostor neprekidnih funkcija $f : M \to \mathbb{C}$ s kompaktnim nosačem. Za kompaktan skup $K \subseteq M$ stavimo

$$C_K(M) = \{f \in C_c(M);\ Supp\, f \subseteq K\}.$$

$C_K(M)$ je potprostor vektorskog prostora $C_c(M)$ i to je Banachov prostor s normom

$$\|f\|_K = \max\{|f(x)|;\ x \in K\}.$$

Mjera na M (katkada se kaže *Radonova mjera*) je linearni funkcional $\mu : C_c(M) \to \mathbb{C}$ takav da je restrikcija $\mu|C_K(M)$ neprekidna za svaki kompaktan skup $K \subseteq M$. Dakle, za svaki kompaktan $K \subseteq M$ postoji $c(K) > 0$ takav da je

$$|\mu(f)| \leq c(K)\|f\|_K \qquad \forall f \in C_K(M).$$

Teorem 5.1 *Neka je $\mu : C_c(M) \to \mathbb{C}$ linearan funkcional koji je pozitivan, tj. takav da vrijedi:*

$$f \in C_c(M), \quad f(x) \geq 0 \quad \forall x \in M \qquad \Longrightarrow \qquad \mu(f) \geq 0.$$

Tada je μ mjera na M.

To su tzv. **pozitivne mjere** na M. Označavat ćemo sa $\mathfrak{M}(M)$ vektorski prostor svih mjera na M, a sa $\mathfrak{M}_+(M)$ podskup svih pozitivnih mjera na M. Za mjeru $\mu \in \mathfrak{M}(M)$ i za $f \in C_c(M)$ upotrebljavamo i integralnu notaciju:

$$\mu(f) = \int_M f(x) \mathrm{d}\mu(x).$$

Nosač mjere μ označavat ćemo sa $Supp\,\mu$. To je komplement unije svih otvorenih podskupova $U \subseteq M$ takvih da vrijedi:

$$f \in C_c(M), \quad Supp\, f \subseteq U \qquad \Longrightarrow \qquad \mu(f) = 0.$$

Ekvivalentno, $Supp\,\mu$ je najmanji zatvoren skup $T \subseteq M$ takav da vrijedi:

$$f \in C_c(M), \quad Supp\, f \cap T = \emptyset \qquad \Longrightarrow \qquad \mu(f) = 0.$$

Neka je sada G lokalno kompaktna grupa. Tada na prostoru $C_c(M)$ djeluju lijeva i desna regularna reprezentacija λ i ρ od G :

$$[\lambda(g)f](x) = f(g^{-1}x), \qquad [\rho(g)f](x) = f(xg), \qquad f \in C_c(M), x, g \in G.$$

Po dualnosti imamo reprezentacije i na prostoru $\mathfrak{M}(G)$:

$$[\lambda(g)\mu](f) = \mu(\lambda(g^{-1})f), \qquad [\rho(g)\mu](f) = \mu(\rho(g^{-1})f), \qquad \mu \in \mathfrak{M}(M), f \in C_c(M), g \in G.$$

Teorem 5.2 *Neka je G lokalno kompaktna grupa. Potprostori*

$$\mathfrak{M}_l(G) = \{\mu \in \mathfrak{M}(G);\ \lambda(g)\mu = \mu\ \forall g \in G\} \quad i \quad \mathfrak{M}_r(G) = \{\mu \in \mathfrak{M}(G);\ \rho(g)\mu = \mu\ \forall g \in G\}$$

su jednodimenzionalni. Nadalje, $\mathfrak{M}_l(G) \cap \mathfrak{M}_+(G) \neq \{0\}$ i $\mathfrak{M}_r(G) \cap \mathfrak{M}_+(G) \neq \{0\}$. Za $\mu_l \in \mathfrak{M}_l(G) \cap \mathfrak{M}_+(G)$, $\mu_l \neq 0$, i za $\mu_r \in \mathfrak{M}_r(G) \cap \mathfrak{M}_+(G)$, $\mu_r \neq 0$, vrijedi:

(*a*) *$Supp\,\mu_l = Supp\,\mu_r = G$. Štoviše, ako je $f \in C_c(G) \setminus \{0\}$ takva da je $f(g) \geq 0\ \forall g \in G$ onda je $\mu_l(f) > 0$ i $\mu_r(f) > 0$.*

(*b*) *Postoji neprekidni homomorfizam Δ grupe G u multiplikativnu grupu $\mathbb{R}_+^* = \langle 0, +\infty\rangle$ takav da je*
$$\rho(g)\mu_l = \Delta(g)\mu_l \quad i \quad \lambda(g)\mu_r = \Delta(g^{-1})\mu_r.$$

Zadatak 5.5 *Dokažite tvrdnju (b) teorema 5.2.*

Tvrdnja (b) teorema 5.2. u integralnoj notaciji izgleda ovako:

$$\int_G f(xg^{-1})\mathrm{d}\mu_l(x) = \Delta(g)\int_G f(x)\mathrm{d}\mu_l(x), \qquad \int_G f(gx)\mathrm{d}\mu_r(x) = \Delta(g^{-1})\int_G f(x)\mathrm{d}\mu_r(x).$$

μ_l se zove **lijeva Haarova mjera** na grupi G, a μ_r je **desna Haarova mjera** na grupi G. Δ je **modularna funkcija** na grupi G. Grupa G zove se **unimodularna** ako joj je modularna funkcija identički jednaka 1, tj. ako je desna Haarova mjera ujedno i lijeva Haarova mjera, $\mathfrak{M}_r(G) = \mathfrak{M}_l(G)$.

Ako je grupa G kompaktna, onda je $\Delta(G)$ kompaktna podgrupa multiplikativne grupe $\mathbb{R}_+^*$, dakle, $\Delta(G) = \{1\}$. To znači da je svaka kompaktna grupa unimodularna. Naravno, i svaka komutativna lokalno kompaktna grupa je unimodularna.

Propozicija 5.2 *Neka je G lokalno kompaktna grupa, μ_r desna Haarova mjera na G, μ_l lijeva Haarova mjera na G, Δ modularna funkcija grupe G. Za svaku funkciju $f \in C_c(G)$ vrijedi:*

$$\int_G f(x^{-1})d\mu_r(x) = \int_G \Delta(x^{-1})f(x)d\mu_r(x) \quad i \quad \int_G f(x^{-1})d\mu_l(x) = \int_G \Delta(x)f(x)d\mu_l(x).$$

Posebno, ako je grupa G unimodularna i $\mu_r = \mu_l = \mu$:

$$\int_G f(x^{-1})d\mu(x) = \int_G f(x)d\mu(x).$$

Zadatak 5.6 *Dokažite propoziciju 5.2.*

Neka je M diferencijabilna mnogostrukost i $\mu \in \mathfrak{M}(M)$ takva da je $K = Supp\,\mu$ kompaktan skup. Pomoću teorema o particiji jedinice (teorem 3.1.) lako se vidi da postoji $\varphi \in \mathcal{E}_c(M)$ takva da je $\varphi(x) = 1\ \forall x \in K$. Za svaku $f \in \mathcal{E}(M)$ tada je $\varphi f \in C_c(M)$ pa na nju možemo primijeniti mjeru μ. U opisanoj situaciji po definiciji stavljamo

$$\mu(f) = \mu(\varphi f), \qquad f \in \mathcal{E}(M).$$

Definicija ima smisla, jer ako je i $\psi \in \mathcal{E}_c(M)$ funkcija koja zadovoljava $\psi(x) = 1\ \forall x \in K$, onda je $(\varphi - \psi)|K = 0$, dakle i $(\varphi f - \psi f)|K = 0$ za svaku $f \in \mathcal{E}(M)$, pa slijedi $\mu(\varphi f - \psi f) = 0$, tj. $\mu(\varphi f) = \mu(\psi f)$.

Na taj način vidimo da je dobro definiran linearan funkcional $f \mapsto \mu(f)$ na prostoru $\mathcal{E}(M)$, a nije teško dokazati da je taj funkcional element od $\mathcal{E}'(M)$ i da je nosač te distribucije upravo $Supp\,\mu$. Nadalje, ako je $\mu(f) = 0\ \forall f \in \mathcal{E}(M)$, pomoću aproksimacije neprekidnih funkcija s kompaktnim nosačem $C^\infty-$funkcijama može dokazati da je tada $\mu = 0$. To znači da mjere na M s kompaktnim nosačem možemo smatrati i elementima prostora $\mathcal{E}'(M)$, tj. distribucijama na M s kompatnim nosačem.

Neka je sada $\mu \in \mathfrak{M}(M)$ proizvoljna i $h \in C_c(M)$. Definiramo tada mjeru $h\mu$ formulom

$$(h\mu)(f) = \mu(hf), \qquad \text{tj.} \qquad \int_M f(x)\mathrm{d}(h\mu)(x) = \int_M h(x)f(x)\mathrm{d}\mu(x), \qquad f \in C_c(M).$$

Tada se lako vidi da je $Supp\,h\mu \subseteq Supp\mu \cap Supp\,h$, dakle, kompaktan skup. Stoga možemo shvaćati i $h\mu \in \mathcal{E}'(M)$. U stvari, imamo bilinearno preslikavanje $(h, \mu) \mapsto h\mu$ sa $C_c(M) \times \mathfrak{M}(M)$ u $\mathcal{E}'(M)$.

Neka je opet G Liejeva grupa i fiksirajmo neku desnu Haarovu mjeru μ_r na grupi G. Za $h \in \mathcal{E}_c(G)$ je tada $h\mu_r \in \mathcal{E}'(G)$:

$$(h\mu_r)(f) = \int_G f(x)h(x)\mathrm{d}\mu_r(x), \qquad f \in \mathcal{E}(G).$$

Izračunajmo sada konvolucije $h\mu_r * T$ i $T * h\mu_r$ za $T \in \mathcal{E}'(G)$; u tim računima koristimo Fubinijev teorem 4.1. i desnu invarijantnost mjere μ_r.

$$[h\mu_r * T](f) = \int_{G\times G} f(xy)h(x)\mathrm{d}\mu_r(x)\mathrm{d}T(y) = \int_{G\times G} f(x)h(xy^{-1})\mathrm{d}\mu_r(x)\mathrm{d}T(y) =$$

$$= \int_G \left[\int_G h(xy^{-1})\mathrm{d}T(y)\right] f(x)\mathrm{d}\mu_r(x) = \int_G \left[\int_G (\rho(x^{-1})h^t)(y)\mathrm{d}T(y)\right] f(x)\mathrm{d}\mu_r(x).$$

Analogno,

$$[T * h\mu_r](f) = \int_{G\times G} f(xy)h(y)\mathrm{d}T(x)\mathrm{d}\mu_r(y) = \int_{G\times G} \Delta(x^{-1})h(x^{-1}y)f(y)\mathrm{d}T(x)\mathrm{d}\mu_r(y) =$$

$$= \int_G \left[\int_G \Delta(x^{-1})(\lambda(y)h^t)(x)\mathrm{d}T(x)\right] f(y)\mathrm{d}\mu_r(y) = \int_G \left[\int_G \left(\frac{1}{\Delta}\lambda(y)h^t\right)(x)\mathrm{d}T(x)\right] f(y)\mathrm{d}\mu_r(y).$$

Dobivene jednakosti mogu se zapisati ovako:

$$h\mu_r * T = \langle T, \rho(\cdot^{-1})h^t\rangle\mu_r, \qquad T * h\mu_r = \left\langle T, \frac{1}{\Delta}\lambda(\cdot)h^t\right\rangle.$$

Te formule navode na ideju da se definiraju konvolucije $h * T$ i $T * h$ za $T \in \mathcal{E}'(G)$ i $h \in \mathcal{E}_c(G)$, pa čak i za $h \in \mathcal{E}(G)$, direktno, tj. bez posredovanja mjere μ_r :

$$(h * T)(x) = \langle T, \rho(x^{-1})h^t \rangle = \int_G h(xy^{-1} \mathrm{d}T(y)$$

i

$$(T * h)(x) = \left\langle T, \frac{1}{\Delta}\lambda(x)h^t \right\rangle = \int_G \Delta(y^{-1})h(y^{-1}x)\mathrm{d}T(y).$$

Prema Fubinijevom teoremu 4.1. vrijedi $h * T \in \mathcal{E}(G)$ i $T * h \in \mathcal{E}(G)$.

Propozicija 5.3 *S tako definiranim operacijama $\mathcal{E}(G)$ je obostrani unitalni modul nad algebrom $\mathcal{E}'(G)$. Drugim riječima, obje konvolucije su bilinearne i za proizvoljne $T, S \in \mathcal{E}'(G)$ i $h \in \mathcal{E}(G)$ vrijedi*

$$(T * S) * h = T * (S * h), \qquad h * (T * S) = (h * T) * S, \qquad (T * h) * S = T * (h * S).$$

Nadalje, $\mathcal{E}_c(G)$ je i lijevi i desni $\mathcal{E}'(G)-$podmodul od $\mathcal{E}(G)$.

Zadatak 5.7 *Dokažite propoziciju 5.3.*

Zadatak 5.8 *Dokažite da vrijedi:*

(a) $T(f) = (f^t * T)(e) = \left(T * \left(\frac{1}{\Delta} f^t\right)\right)(e)$ *za* $f \in \mathcal{E}(G)$ *i* $T \in \mathcal{E}'(G)$.

(b) $\partial(u) * f = \frac{1}{\Delta}\lambda(u)(\Delta f)$ *za* $u \in U(\mathfrak{g})$ *i* $f \in \mathcal{E}(G)$.

(c) $f * \partial(u) = \rho(u^t)f$ *za* $u \in U(\mathfrak{g})$ *i* $f \in \mathcal{E}(G)$.

Nadalje, dokažite sljedeće specijalizacije za $h \in \mathcal{E}(G)$ i $k \in \mathcal{E}_c(G)$:

$$(h * k\mu_r)(x) = \int_G h(xy^{-1})k(y)\,d\mu_r(y) \qquad i \qquad (k\mu_r * h)(x) = \int_G k(xy^{-1})h(y)\,d\mu_r(y).$$

Poglavlje 6

Reprezentacije kompaktnih grupa

Neka je K grupa. **Reprezentacija** grupe K je homomorfizam $\pi : K \to GL(V)$ za neki vektorski prostor V. Drugim riječima, za svaki $k \in K$ zadan je linearan operator $\pi(k) : V \to V$ i vrijedi

$$\pi(kh) = \pi(k)\pi(h), \quad k, h \in K; \qquad \pi(e) = I_V.$$

Za potprostor $W \leq V$ kažemo da je $\pi-$**invarijantan**, ako je invarijantan u odnosu na svaki operator $\pi(k)$, $k \in K$. U tom slučaju definiramo **subreprezentaciju** π_W na prostoru W i **kvocijentnu reprezentaciju** $\pi_{V/W}$ na prostoru V/W :

$$\pi_W(k)w = \pi(k)w, \quad w \in W; \qquad \pi_{V/W}(k)(v + W) = \pi(k)v + W, \quad v \in V.$$

Ako su $U \leq W \leq V$ $\pi-$invarijantni potprostori onda se definira tzv. **subkvocijentna reprezentacija** $\pi_{W/U}$ ili kao subreprezentacija $(\pi_{V/U})_{W/U}$ kvocijentne reprezentacije $\pi_{V/U}$ ili kao kvocijentna reprezentacija $(\pi_W)_{W/U}$ subreprezentacije π_W.

Reprezentacija π zove se **ireducibilna** ako je $V \neq \{0\}$ i ako V nema netrivijalnih $\pi-$invarijantnih potprostora.

Neka je sada K topološka grupa, V linearni topološki prostor i π reprezentacija grupe K na prostoru V. Reprezentacija π zove se **neprekidna** ako je $k \mapsto \pi(k)v$ neprekidno preslikavanje sa K u V za svaki $v \in V$. Ako je V konačnodimenzionalan vektorski prostor (nad $\mathbb{R}$ ili nad $\mathbb{C}$), reprezentacija π je neprekidna ako i samo ako je $\pi : K \to L(V)$ neprekidnbo preslikavanje.

Ako je π reprezentacija grupe K na unitarnom prostoru V, π se zove **unitarna** ako je

$$(\pi(k)v|\pi(k)w) = (v|w) \qquad \forall k \in K, \quad \forall v, w \in V.$$

Teorem 6.1 *Neka je π neprekidna reprezentacija kompaktne grupe K na unitarnom prostoru V sa skalarnim produktom $(\cdot|\cdot)$. Neka je μ Haarova mjera na grupi K. Za $v, w \in V$ stavimo*

$$\langle v|w\rangle = \int_K (\pi(k)v|\pi(k)w)\,d\mu(k).$$

Tada je $\langle\cdot|\cdot\rangle$ skalarni produkt na V i reprezentacija π je u odnosu na taj skalarni produkt neprekidna i unitarna. Ako je prostor V Hilbertov, skalarni produkt $\langle\cdot|\cdot\rangle$ ekvivalentan je skalarnom produktu $(\cdot|\cdot)$ tj. postoje $m > 0$ i $M > 0$ takvi da vrijedi

$$m(v|v) \leq \langle v|v\rangle \leq M(v|v) \qquad \forall v \in V.$$

Korolar 6.1 *Neka je π neprekidna reprezentacija kompaktne grupe K na konačnodimenzionalnom realnom ili kompleksnom vektorskom prostoru V. Postoje $\pi-$invarijantni potprostori $V_1, \ldots, V_s$ takvi da je $V = V_1 \dotplus \cdots \dotplus V_s$ i da je reprezentacija π_{V_j} ireducibilna za $j = 1, \ldots, s$.*

Reprezentacija π i ρ na prostorima V i W zovu se **ekvivalentne** ako postoji izomorfizam $A : V \to W$ takav da je

$$\rho(k)A = A\pi(k), \quad \text{tj.} \quad \rho(k) = A\pi(k)A^{-1} \qquad \forall k \in K.$$

U daljnjem ćemo stalno sa $\hat{K}$ označavati skup svih klasa ekvivalencije neprekidnih konačnodimenzionalnih kompleksnih reprezentacija od K. Za $\alpha \in \hat{K}$ prema teoremu 6.1. možemo izabrati unitarnu reprezentaciju $\pi^\alpha \in \alpha$ na prostoru V_α. Nadalje, neka je $n(\alpha) = \dim V_\alpha$ i neka je $\{e_1^\alpha, e_2^\alpha, \ldots, e_{n(\alpha)}^\alpha\}$ ortonormirana baza prostora V_α. Neka su $\pi_{ij}^\alpha(x)$ matrični elementi operatora $\pi^\alpha(x)$ u toj bazi:

$$\pi^\alpha(k)e_j^\alpha = \sum_{i=1}^{n(\alpha)} \pi_{ij}^\alpha(x)e_i^\alpha.$$

Teorem 6.2 (Peter−Weyl) *Neka je K kompaktna grupa i μ Haarova mjera na grupi K. Neka je*

$$\mu(K) = \mu(1_K) = \int_K d\mu(x).$$

Tada je

$$\left\{ \sqrt{\frac{n(\alpha)}{\mu(K)}}\pi_{ij}^\alpha;\ 1 \leq i, j \leq n(\alpha),\ \alpha \in \hat{K} \right\}$$

ortonormirana baza Hilbertovog prostora $L_2(K)$. Potprostor razapet s tom bazom gust je u Banachovom prostoru $C(K)$:

Dakle, posebno imamo relacije ortogonalnosti:

$$(\pi_{ij}^\alpha | \pi_{k\ell}^\beta) = \int_K \pi_{ij}^\alpha(x)\overline{\pi_{k\ell}^\beta(x)}\mathrm{d}\mu(x) = \frac{\mu(K)}{n(\alpha)}\delta_{\alpha\beta}\delta_{ik}\delta_{j\ell}.$$

Za $f, g \in C(K)$ definiramo konvoluciju $f * g \in C(K)$ sa

$$(f * g)(x(= \int_K f(xy^{-1})g(y)\mathrm{d}\mu(y).$$

Zadatak 6.1 *Uz tako definirano množenje $C(K)$ je asocijativna algebra.*

Direktan račun korištenjem relacija ortogonalnosti i unitarnosti reprezentacija π^α daje

$$(\pi_{ij}^\alpha * \pi_{k\ell}^\beta)(x) = \int_K \pi_{ij}^\alpha(xy^{-1})\pi_{k\ell}^\beta(y)\mathrm{d}\mu(y) = \int_K \sum_{p=1}^{n(\alpha)} \pi_{ip}^\alpha(x)\pi_{pj}^\alpha(y^{-1})\pi_{k\ell}^\beta(y)\mathrm{d}\mu(y) =$$

$$= \sum_{p=1}^{n(\alpha)} \pi_{ip}^\alpha(x) \int_K \overline{\pi_{jp}^\alpha(y)}\mathrm{d}\mu(y) = \sum_{p=1}^{n(\alpha)} \pi_{ip}^\alpha(x)(\pi_{k\ell}^\beta | \pi_{jp}^\alpha) = \frac{\mu(K)}{n(\alpha)}\delta_{\alpha\beta}\delta_{jk}\pi_{i\ell}^\alpha(x).$$

Dakle,

$$\pi_{ij}^\alpha * \pi_{k\ell}^\beta = \frac{\mu(K)}{n(\alpha)}\delta_{\alpha\beta}\delta_{jk}\pi_{i\ell}^\alpha.$$

Karakter konačnodimenzionalne reprezentacije π na prostoru V je funkcija χ_π na grupi K definirana sa

$$\chi_\pi(x) = \mathrm{Tr}\,\pi(x).$$

Tada je $\chi_\pi(xy) = \chi_\pi(yx)$ $\forall x, y \in K$. Takve se funkcije zovu **centralne**. Skup svih kompleksnih neprekidnih centralnih funkcija na K označavat ćemo sa $Z(K)$. Dakle,

$$Z(K) = \{f \in C(K);\ f(xy) = f(yx)\ \forall x, y \in K\}.$$

Nadalje, stavljamo

$$Z_2(K) = \{f \in L_2(K);\ f(xy) = f(yx) \text{ gotovo svuda na } K \times K\}.$$

Teorem 6.3 $Z(K) = \{f \in C(K);\ f * \varphi = \varphi * f\ \forall \varphi \in C(K)\}$.

Zadatak 6.2 *Dokažite teorem 6.3.*

Teorem 6.4 *Označimo sa χ^α karakter reprezentacije π^α, $\alpha \in \hat{K}$.*

$$\left\{\frac{1}{\mu(K)}\chi^\alpha;\ \alpha \in \hat{K}\right\}$$

je ortonormirana baza Hilbertovog prostora $Z_2(K)$. Potprostor razapet s tom bazom gust je u Banachovom prostoru $Z(K)$.

Zadatak 6.3 *Pomoću Peter–Weylovog teorema dokažite teorem 6.4.*

Izračunajmo konvolucije karaktera ireducibilnih reprezentacija:

$$\chi^\alpha * \chi^\beta = \sum_{i=1}^{n(\alpha)}\sum_{j=1}^{n(\beta)} \pi^\alpha_{ii} * \pi^\beta_{jj} = \frac{\mu(K)}{n(\alpha)}\delta_{\alpha\beta}\sum_{i,j=1}^{n(\alpha)} \delta_{ij}\pi^\alpha_{ij} = \frac{\mu(K)}{n(\alpha)}\delta_{\alpha\beta}\sum_{i=1}^{n(\alpha)} \pi^\alpha_{ii} = \frac{\mu(K)}{n(\alpha)}\delta_{\alpha\beta}\chi^\alpha.$$

Neka je sada π neprekidna reprezentacija grupe K na konačnodimenzionalnom kompleksnom vektorskom prostoru V. Rastavimo V kao u korolaru 6.1.

$$V = V_1 \dot{+} V_2 \dot{+} \cdots \dot{+} V_s, \qquad \pi_{V_j} \ \text{ ireducibilna za } \ j = 1, 2, \ldots, s.$$

Tada za $\alpha \in \hat{K}$ stavljamo

$$m(\alpha, \pi) = \#\{j \in \{1, 2, \ldots, s\};\ \pi_{V_j} \in \alpha\}.$$

Tada je

$$\chi_\pi = \chi_{\pi_{V_1}} + \chi_{\pi_{V_2}} + \cdots + \chi_{\pi_{V_s}} = \sum_{\alpha\hat{K}} m(\alpha, \pi)\chi^\alpha.$$

Odatle neposredno slijedi:

$$m(\alpha, \pi) = \frac{1}{\mu(K)}(\chi_\pi|\chi^\alpha).$$

Neka je sada K kompaktna Liejeva grupa. Za $\alpha \in \hat{K}$ definiramo distribucije $\chi_\alpha \in \mathcal{E}'(K)$ sa

$$\chi_\alpha = \frac{n(\alpha)}{\mu(K)}\chi^{\alpha^*}\mu.$$

Pri tome je α^* oznaka za klasu kontragredijentnih reprezentacija reprezentacijama iz klase α, dakle,

$$\pi_{ij}^{\alpha^*}(x) = \overline{\pi_{ij}^{\alpha}(x)} = \pi_{ji}^{\alpha}(x^{-1}) \qquad \Longrightarrow \qquad \chi^{\alpha^*}(x) = \overline{\chi^{\alpha}(x)} = \chi^{\alpha}(x^{-1}).$$

Za $f \in \mathcal{E}(G)$ i $\alpha, \beta \in \hat{K}$ imamo redom

$$(\chi_\alpha * \chi_\beta)(f) = \frac{n(\alpha)n(\beta)}{\mu(K)^2} \int_{K\times K} f(xy)\chi^{\alpha^*}(x)\chi^{\beta^*}\mathrm{d}\mu(x)\mathrm{d}\mu(y) =$$

$$= \frac{n(\alpha)n(\beta)}{\mu(K)^2} \int_K \left[\int_K f(x)\chi^{\alpha^*}(xy^{-1})\mathrm{d}\mu(x)\right] \chi^{\beta^*}(y)\mathrm{d}\mu(y) =$$

$$= \frac{n(\alpha)n(\beta)}{\mu(K)^2} \int_K f(x) \left[\int_K \chi^{\alpha^*}(xy^{-1})\chi^{\beta^*}(y)\mathrm{d}\mu(y)\right] \mathrm{d}\mu(x) =$$

$$= \frac{n(\alpha)n(\beta)}{\mu(K)^2} \int_K f(x)(\chi^{\alpha^*} * \chi^{\beta^*})(x)\mathrm{d}\mu(x) = \delta_{\alpha\beta}\frac{n(\alpha)}{\mu(K)} \int_K f(x)\chi^{\alpha^*}(x)\mathrm{d}\mu(x) = \delta_{\alpha\beta}\chi_\alpha(f).$$

Dakle,

$$\chi_\alpha * \chi_\beta = \delta_{\alpha\beta}\chi_\alpha.$$

Dakle, χ_α, $\alpha \in \hat{K}$, su idempotenti u algebri $\mathcal{E}'(K)$ i međusobni su im produkti jednaki nuli.

Neka je π reprezentacija kompaktne grupe K na kompleksnom vektorskom prostoru V. Vektor $v \in V$ zove se **formalno $K-$konačan** ako je sadržan u konačnodimenzionalnom $\pi-$invarijantnom potprostoru od V. Drugim riječima to znači da je potprostor

$$[\pi(K)v] = \{\alpha_1\pi(x_1)v + \cdots + \alpha_n\pi(x_n)v;\ n \in \mathbb{N},\, x_1, \ldots, x_n \in K,\, \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{C}\}$$

konačnodimenzionalan. Ako je subreprezentacija $\pi_{[\pi(K)v]}$ neprekidna, v se zove **$K-$konačan vektor**. Skup svih $K-$konačnih vektora označavat ćemo sa V_K :

$$V_K = \{v \in V;\ \dim[\pi(K)v] < \infty,\, k \mapsto \pi(k)|[\pi(K)v] \text{ je neprekidno}\}.$$

Zadatak 6.4 *Dokažite da je V_K $\pi-$invarijantni potprostor prostora V.*

Reprezentacija π kompaktne grupe K na prostoru V zove se **lokalno konačna** ako je $V_K = V$. Dakle, svaki vektor $v \in V$ sadržan je u konačnodimenzionalnom $\pi-$invarijantnom potprostoru takvom da je pripadna subreprezentacija neprekidna.

Zadatak 6.5 *Dokažite:*

(a) *Subreprezentacija lokalno konačne reprezentacije je lokalno konačna.*

(b) *Kvocijentna reprezentacija lokalno konačne reprezentacije je lokalno konačna.*

(c) *Direktna suma proizvoljne familije lokalno konačnih reprezentacija je lokalno konačna.*

Pri tome je direktna suma reprezentacija definirana kako slijedi. Neka je I proizvoljan skup i neka je za svaki $i \in I$ definirana reprezentacija π_i grupe K na prostoru V_i. Direktan produkt prostora V_i je

$$V = \prod_{i\in I} V_i = \left\{ f : I \to \bigcup_{i\in I} V_i;\ f(i) \in V_i\, \forall i \in I \right\}.$$

To je vektorski prostor uz operacije po točkama: $(f+g)(i) = f(i) + g(i)$, $(\lambda f)(i) = \lambda f(i)$. Na tom prostoru za svako $x \in K$ definiramo operator $\pi(x)$ relacijom

$$(\pi(x)f)(i) = \pi_i(x)f(i), \qquad f \in \prod_{i\in I} V_i, \quad i \in I.$$

Lako se vidi da je π reprezentacija grupe K na vektorskom prostoru V. Ta se reprezentacija zove **direktan produkt reprezentacija** π_i.

Direktna suma prostora V_i je potprostor direktnog produkta

$$W = \coprod_{i\in I} V_i = \left\{ f \in \prod_{i\in I} V_i;\ \text{skup}\, \{i \in I;\ f(i) \neq 0\}\, \text{je konačan} \right\}.$$

Očito je W $\pi-$invarijantan potprostor prostora V. Subreprezentacija π_W zove se **direktna suma reprezentacija** π_i.

Napomenimo da oznaku $\coprod$ upotrebljavamo i za direktnu sumu familije potprostora nekog vektorskog prostora V. Naime, ako su V_i, $i \in I$, potprostori od V onda možemo definirati preslikavanje

$$\Phi : \coprod_{i\in I} V_i \to V$$

relacijom

$$\Phi(f) = \sum_{i\in I} f(i), \qquad f \in \coprod_{i\in I} V_i.$$

Tada je Φ linearan operator i njegova slika je suma potprostora V_i. Suma familije potprostora V_i je direktna ako i samo ako je operator Φ injektivan. Tu činjenicu zapisujemo

$$\sum_{i\in I} V_i = \coprod_{i\in I} V_i.$$

Ako je π reprezentacija kompaktne grupe K na prostoru V, njenu subreprezentaciju na $\pi-$invarijantnom potprostoru V_K označavat ćemo sa π_K. Iz same je definicije jasno da je π_K lokalno konačna reprezentacija. Nadalje, ona je najveća lokalno konačna subreprezentacija od π u sljedećem smislu: ako je $W \leq V$ $\pi-$invarijantan potprostor takav da je subreprezentacija π_W lokalno konačna, onda je $W \subseteq V_K$.

Neka je kao i prije $\hat{K}$ skup svih klasa ekvivalencije kompleksnih konačnodimenzionalnih neprekidnih ireducibilnih reprezentacija kompaktne grupe K. Za konačnodimenzionalnu ireducibilnu neprekidnu reprezentaciju π kažemo da je **tipa** α, ako je $\alpha \in \hat{K}$ njena klasa ekvivalencije.

Propozicija 6.1 *Neka je π lokalno konačna reprezentacija kompaktne grupe K na prostoru V.*

(*a*) *Prostor V je direktna suma konačnodimenzionalnih $\pi-$invarijantnih potprostora takvih da je na svakom od njih pripadna subreprezentacija neprekidna i ireducibilna.*

(*b*) *Za $\gamma \in \hat{K}$ označimo sa V_γ sumu svih $\pi-$invarijantnih potprostora W takvih da je $\pi_W \in \gamma$. Tada se V_γ može zapisati kao direktna suma takvih potprostora. Nadalje, vrijedi*

$$V = \coprod_{\gamma\in\hat{K}} V_\gamma.$$

(c) *Ako je W $\pi-$invarijantni potprostor od V postoji $\pi-$invarijantan potprostor W' takav da je $V = W \dotplus W'$.*

Dokaz: Neka je $\mathbb{C}[K]$ grupovna algebra grupe K nad poljem $\mathbb{C}$. To je po definiciji asocijativna unitalna algebra s bazom $\{a_x;\ x \in K\}$ takvom da je $a_x a_y = a_{xy}$. Unitalni lijevi $\mathbb{C}[K]-$moduli su upravo prostori proizvoljnih reprezentacija od K. Lokalno konačne reprezentacije tvore dobru kategoriju $\mathcal{C}$ lijevih $\mathbb{C}[K]-$modula.

Zadatak 6.6 *Pomoću propozicija 1.1. i 1.2. završite dokaz propozicije 6.1.*

Kada se V_γ napiše kao direktna suma ireducibilnih subreprezentacija tipa γ, broj sumanada zove se multiplicitet $m(\gamma, \pi)$ od γ u reprezentaciji π. Naravno, ako je V_γ beskonačnodimenzionalan onda je $m(\gamma, \pi) = \dim V_\gamma$. Ako je $\dim V_\gamma < \infty$, onda je

$$m(\gamma, \pi) = \frac{\dim V_\gamma}{n(\gamma)}.$$

Potprostor V_γ zove se $K-$**izotipna komponenta** reprezentacije π na prostoru V.

U daljnjem je π lokalno konačna reprezentacija kompaktne Liejeve grupe K na kompleksnom prostoru V. Za $T \in \mathcal{E}'(G)$ i za $v \in V$ stavljamo

$$\pi(T)v = \langle T, \pi(\cdot)v \rangle_V.$$

Pri tome za $f \in \mathcal{E}(K, V)_f$ pišemo

$$\langle T, f \rangle_V = T(f), \qquad T \in \mathcal{E}'(G),$$

u smislu 5. Očito je $\pi(T) : V \to V$ linearan operator. Nadalje, $T \mapsto \pi(T)$ je linearno preslikavanje. Ako je V^* dualan prostor prostora V i $v^* \in V^*$, onda je

$$\langle \pi(T)v, v^* \rangle = \langle T, \langle \pi(\cdot)v, v^* \rangle \rangle.$$

Za $v \in V$ je $k \mapsto \pi(k)|[\pi(K)v]$ neprekidna reprezentacija, dakle to je prema teoremu 3.9. Liejev homomorfizam Liejeve grupe K u Liejevu grupu $GL([\pi(K)v])$. Posebno, $k \mapsto \pi(k)v$ je analitičko preslikavanje sa K u konačnodimenzionalan potprostor $[\pi(K)v]$ prostora V. Stoga je za svaki $X \in \mathfrak{k}_0 = Lie(K)$ dobro definirano

$$\pi(X)v = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \pi(\exp tX)v \bigg|_{t=0}.$$

Tada je $X \mapsto \pi(X)$ linearizacija Liejeve algebre $\mathfrak{k}_0$ u asocijativnu algebru linearnih operatora $L(V)$. Kompleksifikacijom dolazimo do liearizacije kompleksne Liejeve algebre $\mathfrak{k}$ u $L(V)$. Univerzalno svojstvo daje homomorfizam $u \mapsto \pi(u)$ algebre $U(\mathfrak{k})$ u $L(V)$.

Propozicija 6.2 *Uz uvedene oznake vrijedi:*

(a) $\pi(\delta_x) = \pi(x)$, $x \in K$.

(b) $\pi(\partial(u)) = \pi(u)$, $u \in U(\mathfrak{k})$.

(c) $\pi(f\mu)v = \int_K f(x)\pi(x)v\,d\mu(x)$, $f \in \mathcal{E}(K)$, $v \in V$.

(d) $\pi(T * S) = \pi(T)\pi(S)$, $T, S \in \mathcal{E}'(K)$.

(e) $\pi(\lambda(x)T) = \pi(x)\pi(T)$, $x \in K$, $T \in \mathcal{E}'(K)$.

(f) $\pi(\rho(x)T) = \pi(T)\pi(x^{-1})$, $x \in K$, $T \in \mathcal{E}'(K)$.

Dokaz: (a) $\pi(\delta_x)v = \langle \delta_x, \pi(\cdot)v\rangle_V = \pi(x)v$.
(d) Za $T, S \in \mathcal{E}'(K)$ i $v \in V$ imamo redom

$$\pi(T)\pi(S)v = \langle T, \pi(\cdot)\pi(S)v\rangle_V = \int_K \pi(x)\pi(S)v\mathrm{d}T(x) = \int_K \pi(x)\left[\int_K \pi(y)v\mathrm{d}S(y)\right]\mathrm{d}T(x) =$$

$$= \int_{K\times K} \pi(xy)v\mathrm{d}T(x)\mathrm{d}S(y) = \langle T * S, \pi(\cdot)v\rangle_V = \pi(T * S)v.$$

(b) Prema zadatku 5.4 je $\partial(u)\partial(v) = \partial(u) * \partial(v)$. Dakle, zbog (d) je dovoljno dokazati tvrdnju (b) za $u = X \in \mathfrak{k}_0$. U tom slučaju nalazimo

$$\langle \pi(\partial(X))v, v^*\rangle = \langle \partial(X), \langle \pi(\cdot)v, v^*\rangle\rangle = (\rho(X)\langle \pi(\cdot)v, v^*\rangle)(e) =$$

$$= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle \pi(\exp\, tX)v, v^*\rangle\bigg|_{t=0} = \langle \pi(X)v, v^*\rangle.$$

(c) $\pi(f\mu)v = \langle f\mu, \pi(\cdot)v\rangle_V = \int_K f(x)\pi(x)v\mathrm{d}\mu(x)$.
(e) Iza zadatka 4.4. naveli smo formulu

$$T(A\varphi) = AT(\varphi),$$

odnosno,

$$\langle T, A\varphi(\cdot)\rangle_W = A\langle T, \varphi(\cdot)\rangle_V \qquad A \in L(V, W), \quad T \in \mathcal{E}'(M), \quad \varphi \in \mathcal{E}(M, V)_f. \qquad (*)$$

Stoga imamo

$$\pi(\lambda(x)T)v = \langle \lambda(x)T, \pi(\cdot)v\rangle_V = \langle T, \lambda(x^{-1})\pi(\cdot)v\rangle_V = \langle T, \pi(x\cdot)v\rangle_V =$$

$$= \langle T, \pi(x)\pi(\cdot)v\rangle_V = \pi(x)\langle T, \pi(\cdot)v\rangle_V = \pi(x)\pi(T)v.$$

(f) Slično kao u (e) nalazimo

$$\pi(\rho(x)T)v = \langle \rho(x)T, \pi(\cdot)v\rangle_V = \langle T\rho(x^{-1})\pi(\cdot)v\rangle_V =$$

$$= \langle T, \pi(\cdot x^{-1})v\rangle_V = \langle T, \pi(\cdot)\pi(x^{-1})v\rangle_V = \pi(T)\pi(x^{-1})v.$$

Propozicija 6.3 (a) *Neka je π lokalno konačna reprezentacija kompaktne Liejeve grupe K na prostoru V, neka je W $\pi-$invarijantan potprostor od V i neka je $T \in \mathcal{E}'(K)$. Tada je $\pi_W(T) = \pi(T)|W$.*

(b) *Neka su π i π' lokalno konačne reprezentacije kompaktne Liejeve grupe K na prostorima V i V'. Nadalje, neka je $E : V \to V'$ linearan $K-$ekvivarijantan operator, tj. takav da je $\pi'(x)E = E\pi(X)$ $\forall x \in K$. Tada je $\pi'(T)E = E\pi(T)$ $\forall T \in \mathcal{E}'(K)$.*

(c) *Neka je π neprekidna reprezentacija kompaktne Liejeve grupe K na konačnodimenzionalnom prostoru V. Tada je*

$$\pi(T) = \langle T, \pi\rangle_{L(V)} \quad i \quad \pi(f\mu) = \int_K f(x)\pi(x)d\mu(x).$$

Dokaz: (a) Za $w \in W$ imamo

$$\pi(T)w = \langle T, \pi(\cdot)w\rangle_V = \langle T, \pi_W(\cdot)w\rangle_W = \pi_W(T)w.$$

(b) Za $v \in V$ imamo

$$E\pi(T)v = E\rangle T, \pi(\cdot)v\rangle_V = \langle T, E\pi(\cdot)v\rangle_{V'} = \langle T, \pi'(\cdot)Ev\rangle_{V'} = \pi'(T)Ev.$$

(c) Za $v \in V$ zbog formule $(*)$ primijenjene na linearan operator $A \mapsto Av$ sa $L(V)$ u V imamo

$$\pi(T)v = \langle T, \pi(\cdot)v\rangle_V = \langle T, \pi\rangle_{L(V)}v.$$

Napokon,

$$\langle \pi(f\mu)v, v^*\rangle = \int_K f(x)\langle \pi(x)v, v^*\rangle \mathrm{d}\mu(x) = \left\langle \left(\int_K f(x)\pi(x)\mathrm{d}\mu(x)\right) v, v^* \right\rangle.$$

Propozicija 6.4 *Neka je π lokalno konačna reprezentacija kompaktne Liejeve grupe K na prostoru V i neka je*

$$V = \coprod_{\gamma\in\hat{K}} V_\gamma$$

rastav na $K-$izotipne komponente. Tada je $\pi(\chi_\gamma)$ projketor prostora V na potprostpor V_γ duž potprostora

$$W_\gamma = \coprod_{\beta\in\hat{K}\setminus\{\gamma\}} V_\beta.$$

Dokaz: Neka je $W \leq V$ $\pi-$invarijantan potprostor takav da je π_W ireducibilna tipa γ i neka je $\{v_1, \ldots, v_{n(\gamma)}\}$ baza od W takva da je

$$\pi(x)v_j = \sum_{i=1}^{n(\gamma)} \pi_{ij}^\gamma(x)v_i.$$

Tada imamo redom

$$\pi(\chi_\gamma)v_j = \frac{n(\gamma)}{\mu(K)}\int_K \chi^{\gamma^*}(x)\pi(x)v_j\mathrm{d}\mu(x) = \frac{n(\gamma)}{\mu(K)}\sum_{i=1}^{n(\gamma)}\int_K \overline{\chi^\gamma(x)}\pi_{ij}^\gamma(x)v_i\mathrm{d}\mu(x) =$$

$$= \frac{n(\gamma)}{\mu(K)}\sum_{i=1}^{n(\gamma)}\sum_{\ell=1}^{n(\gamma)}\int_K \pi_{ij}^\gamma(x)\overline{\pi_{\ell\ell}^\gamma(x)}\mathrm{d}\mu(x)v_i = \frac{n(\gamma)}{\mu(K)}\frac{\mu(K)}{n(\gamma)}\sum_{\ell,i=1}^{n(\gamma)}\delta_{i\ell}\delta_{j\ell}v_i = \sum_{\ell=1}^{n(\gamma)}\delta_{j\ell}v_\ell = v_j.$$

Odatle se vidi da je $\pi(\chi_\gamma)|W = I_W$. Dakle, vrijedi $\pi(\chi_\gamma)|V_\gamma = I_{V_\gamma}$. Napokon, ako je $\beta \neq \gamma$ i $v \in V_\beta$, onda je prema dokazanom $\pi(\chi_\beta)v = v$. Kako je $\chi_\gamma * \chi_\beta = 0$, nalazimo

$$\pi(\chi_\gamma)v = \pi(\chi_\gamma)\pi(\chi_\beta)v = \pi(\chi_\gamma * \chi_\beta)v = 0.$$

Dakle, $\pi(\chi_\gamma)|W_\gamma = 0$ i time je tvrdnja dokazana jer je $V = V_\gamma \dot{+} W_\gamma$.

Poglavlje 7

Heckeova algebra kompaktne Liejeve grupe

Promatrat ćemo sada lijevu i desnu regularnu reprezentaciju kompaktne Liejeve grupe K na $\mathcal{E}(K)$ i na $\mathcal{E}'(K)$. Kao i prije te ćemo dvije reprezentacije označavati sa λ i ρ.

Za $\gamma \in \hat{K}$ neka je π^γ konačnodimenzionalna neprekidna ireducibilna reprezentacija grupe K tipa γ i neka je F_γ prostor te reprezentacije. Uzmimo da smo taj izbor obavili tako da je za svaki $\gamma \in \hat{K}$ π^{γ^*} kontragredijentna reprezentacija od π^γ. Dakle, pretpostavljamo da je F_{γ^*} dualni prostor prostora F_γ i da je

$$\langle \pi^\gamma(x)v, v^* \rangle = \langle v, \pi^{\gamma^*}(x^{-1})v^* \rangle, \qquad v \in F_\gamma, \quad v^* \in F_{\gamma^*}, \quad x \in K.$$

Gore definirana funkcija na K je diferencijabilna, čak i nalitička. Svaku takvu funkciju nazivamo **matrični koeficijent** reprezentacije π^γ − oznaka:

$$f_{v^*,v}(x) = \langle \pi^\gamma(x)v, v^* \rangle, \qquad v \in F_\gamma, \quad v^* \in F_{\gamma^*}, \qquad x \in K.$$

Imamo $f_{v^*,v} \in \mathcal{E}(K)$. Fiksiramo $v \in F_\gamma$ i definiramo $A_v : F_{\gamma^*} \to \mathcal{E}(K)$ sa

$$A_v(v^*) = f_{v^*,v}, \qquad v^* \in F_{\gamma^*}.$$

Očito je A_v linearan operator. Nadalje,

$$(A_v \pi^{\gamma^*}(y)v^*)(x) = f_{\pi^{\gamma^*}(y)v^*,v}(x) = \langle \pi^\gamma(x)v, \pi^{\gamma^*}(y)v^* \rangle = \langle \pi^\gamma(y^{-1})\pi^\gamma(x)v, v^* \rangle =$$

$$= \langle \pi^\gamma(y^{-1}x)v, v^* \rangle = f_{v^*,v}(y^{-1}x) = (\lambda(y)f_{v^*,v})(x) = (\lambda(y)A_v v^*)(x).$$

Dakle,

$$A_v \pi^{\gamma^*}(y) = \lambda(y)A_v \qquad \forall v \in F_\gamma, \quad \forall y \in K.$$

Odatle slijedi da je

$$f_{v^*,v} \in \mathcal{E}(K)_{\lambda,\gamma^*} \qquad v^* \in F_{\gamma^*}, \quad v \in F_\gamma.$$

Pri tome smo sa $\mathcal{E}(K)_{\lambda,\gamma^*}$ označili $K-$izotipnu komponentu tipa γ^* reprezentacije λ na prostoru $\mathcal{E}(K)$.

Slično, za $v^* \in F_{\gamma^*}$ definiramo linearan operator $B_{v^*} : F_\gamma \to \mathcal{E}(K)$ sa

$$B_{v^*}v = f_{v^*,v}, \qquad v \in F_\gamma.$$

Analogno kao malo prije nalazimo

$$B_{v^*}\pi^\gamma(y) = \rho(y)B_{v^*}, \qquad \forall v^* \in F_{\gamma^*}, \quad \forall y \in K.$$

Dakle,

$$f_{v^*,v} \in \mathcal{E}(K)_{\rho,\gamma}, \qquad v^* \in F_{\gamma^*}, \quad v \in F_\gamma.$$

Bilinearno preslikavanje $(v^*, v) \mapsto f_{v^*,v}$ zbog univerzalnog svojstva tenzorskog produkta faktorizira se kroz linearno preslikavanje

$$M_\gamma : F_{\gamma^*} \otimes_{\mathbb{C}} F_\gamma \to \mathcal{E}(K)$$

tako da je

$$M_\gamma(v^* \otimes v) = f_{v^*,v} = \langle \pi^\gamma(\cdot)v, v^* \rangle, \qquad v \in F_\gamma, \quad v^* \in F_{\gamma^*}.$$

Zadatak 7.1 *Neka su π i π' ireducibilne reprezentacije grupa K i K' na konačnodimenzionalnim kompleksnim prostorima V i V'. Dokažite da je tada sa*

$$(\pi \otimes \pi')(x, x')(v \otimes v') = \pi(x)v \otimes \pi'(x')v'$$

definirana ireducibilna reprezentacija grupe $K \times K'$ na prostoru $V \otimes_{\mathbb{C}} V'$.

Prema tome, $\pi^{\gamma^*} \otimes \pi^\gamma$ je ireducibilna reprezentacija grupe $K \times K$ na prostoru $F_{\gamma^*} \otimes_{\mathbb{C}} F_\gamma$. Imamo

$$[M_\gamma(\pi^{\gamma^*} \otimes \pi^\gamma)(y, z)(v^* \otimes v)](x) = [M_\gamma(\pi^{\gamma^*}(y)v^* \otimes \pi^\gamma(z)v)](x) =$$

$$= f_{\pi^{\gamma^*}(y)v^*, \pi^\gamma(z)v}(x) = f_{v^*,v}(y^{-1}xz) = (\lambda(y)\rho(z)f_{v^*,v})(x) = [\lambda(y)\rho(z)M_\gamma(v^* \otimes v)](x).$$

Dakle,

$$M_\gamma(\pi^{\gamma^*} \otimes \pi^\gamma)(y, z) = \lambda(y)\rho(z)M_\gamma = (\lambda \times \rho)(y, z)M_\gamma.$$

Pri tome smo sa $\lambda \times \rho$ označili reprezentaciju grupe $K \times K$ na prostoru $\mathcal{E}(K)$ definiranu sa

$$[(\lambda \times \rho)(y, z)f](x) = [\lambda(y)\rho(z)f](x) = f(y^{-1}xz).$$

Kako je reprezentacija $\pi^{\gamma^*} \otimes \pi^\gamma$ grupe $K \times K$ ireducibilna, slijedi da je operator M_γ injektivan.

Propozicija 7.1 *Za $\gamma \in \hat{K}$ vrijedi*

$$\mathcal{E}(K)_{\lambda,\gamma^*} = \mathcal{E}(K)_{\rho,\gamma} = M_\gamma(F_{\gamma^*} \otimes_{\mathbb{C}} F_\gamma).$$

Nadalje, vrijedi $\mathcal{E}(K)_{K,\lambda} = \mathcal{E}(K)_{K,\rho}$. Pri tome je sa $\mathcal{E}(K)_{K,\lambda}$, odnosno, sa $\mathcal{E}(K)_{K,\rho}$, označen potprostor $K-$konačnih vektora u prostoru $\mathcal{E}(K)$ u odnosu na reprezentaciju λ, odnosno, u odnosu na reprezentaciju ρ.

Dokaz: Znamo da je $M_\gamma(F_{\gamma^*} \otimes_{\mathbb{C}} F_\gamma)$ konačnodimenzionalan potprostor i od $\mathcal{E}(K)_{\lambda,\gamma^*}$ i od $\mathcal{E}(K)_{\rho,\gamma}$. Prostor $\mathcal{E}(K)$ je unitaran u odnosu na skalarni produkt

$$(f|g) = \int_K f(x)\overline{g(x)}\mathrm{d}(x).$$

Neka je $f \in \mathcal{E}(K)_{\rho,\gamma}$, $f \perp M_\gamma(F_{\gamma^*} \otimes_{\mathbb{C}} F_\gamma)$. Tada je posebno

$$f \perp \rho(x)\chi^\gamma \qquad \forall x \in K.$$

Tada imamo redom za svaki $y \in K$:

$$f(y) = [\rho(\chi_\gamma)f](y) = \frac{n(\gamma)}{\mu(K)} \int_K \chi^{\gamma^*}(x)[\rho(x)f](y)\mathrm{d}\mu(x) = \frac{n(\gamma)}{\mu(K)} \int_K \overline{\chi^\gamma(x)}f(yx)\mathrm{d}\mu(x) =$$

$$= \frac{n(\gamma)}{\mu(K)} \int_K \overline{\chi^\gamma(y^{-1}x)}f(x)\mathrm{d}\mu(x) = \frac{n(\gamma)}{\mu(K)} \int_K \overline{\chi^\gamma(xy^{-1})}f(x)\mathrm{d}\mu(x) =$$

$$= \frac{n(\gamma)}{\mu(K)} \int_K \overline{(\rho(y^{-1})\chi^\gamma)(x)} f(x) \mathrm{d}\mu(x) = \frac{n(\gamma)}{\mu(K)} (f|\rho(y^{-1})\chi^\gamma) = 0.$$

Dakle, $f = 0$ i time smo dokazali da je $M_\gamma(F_{\gamma^*} \otimes_{\mathbb{C}} F_\gamma) = \mathcal{E}(K)_{\rho,\gamma}$.

Ako pretpostavimo da je $f \in \mathcal{E}(K)_{\lambda,\gamma^*}$ i $f \perp M_\gamma(F_{\gamma^*} \otimes_{\mathbb{C}} F_\gamma)$, onda je

$$f \perp \lambda(x)\chi^\gamma \qquad \forall x \in K$$

i imamo sličan račun:

$$f(y) = [\lambda(\chi_{\gamma^*})f](y) = \frac{n(\gamma)}{\mu(K)} \int_K \chi^\gamma(x)[\lambda(x)f](y) \mathrm{d}\mu(x) = \frac{n(\gamma)}{\mu(K)} \int_K \chi^\gamma(x) f(x^{-1}y) \mathrm{d}\mu(x) =$$

$$= \frac{n(\gamma)}{\mu(K)} \int_K \chi(x^{-1}) f(xy) \mathrm{d}\mu(x) = \frac{n(\gamma)}{\mu(K)} \int_K \chi^\gamma(yx^{-1}) f(x) \mathrm{d}\mu(x) = \frac{n(\gamma)}{\mu(K)} \int_K \chi^\gamma(x^{-1}y) f(x) \mathrm{d}\mu(x) =$$

$$= \frac{n(\gamma)}{\mu(K)} \int_K \overline{\chi^\gamma(y^{-1}x)} f(x) \mathrm{d}\mu(x) = \frac{n(\gamma)}{\mu(K)} \int_K \overline{\lambda(y)\chi^\gamma)(x)} f(x) \mathrm{d}\mu(x) = \frac{n(\gamma)}{\mu(K)} (f|\lambda(y)\chi^\gamma) = 0.$$

Dakle, $f = 0$ i time je dokazano i $\mathcal{E}(K)_{\lambda,\gamma^*} = M_\gamma(F_{\gamma^*} \otimes_{\mathbb{C}} F_\gamma)$.

Napokon, imamo

$$\mathcal{E}(K)_{K,\lambda} = \coprod_{\alpha \in \hat{K}} \mathcal{E}(K)_{\lambda,\alpha} \qquad \text{i} \qquad \mathcal{E}(K)_{K,\rho} = \coprod_{\beta \in \hat{K}} \mathcal{E}(K)_{\rho,\beta}$$

pa slijedi i jednakost $\mathcal{E}(K)_{K,\lambda} = \mathcal{E}(K)_{K,\rho}$.

Definiramo

$$C(K) = \mathcal{E}(K)_K \quad (= \mathcal{E}(K)_{K,\lambda} = \mathcal{E}(K)_{K,\rho}).$$

Stavimo

$$C_\gamma(K) = M_\gamma(F_{\gamma^*} \otimes_{\mathbb{C}} F_\gamma) \qquad \gamma \in \hat{K}$$

Budući da je i lijeva i desna regularnba raprezentacija na $C(K)$ lokalno konačna, po propoziciji 6.1. i propoziciji 7.1:

$$C(K) = \coprod_{\gamma \in \hat{K}} C_\gamma(K) = \coprod_{\gamma \in \hat{K}} M_\gamma(F_{\gamma^*} \otimes_{\mathbb{C}} F_\gamma).$$

Pri tome grupa K na potprostoru $M_\gamma(F_{\gamma^*} \otimes_{\mathbb{C}} F_\gamma)$ u odnosu na reprezentaciju ρ kao π^γ na F_γ i trivijalno na F_{γ^*}, a u odnosu na λ kao π^{γ^*} na F_{γ^*} i trivijalno na F_γ.

Propozicija 7.2 *(a)* $\lambda(T)\varphi = T * \varphi \quad \forall T \in \mathcal{E}'(K) \quad i \quad \forall \varphi \in C(K)$.
(b) $\rho(T)\varphi = \varphi * T^t \quad \forall T \in \mathcal{E}'(K) \quad i \quad \forall \varphi \in C(K)$.

Dokaz: *(a)* Za $T \in \mathcal{E}'(K)$ i $\varphi \in \mathcal{E}(K)$ imali smo formule

$$(T * \varphi)(x) = \langle T, \lambda(x)\varphi^t \rangle = \int_K \varphi(y^{-1}x) \mathrm{d}T(y)$$

i

$$(\varphi * T)(x) = \langle T, \rho(x^{-1})\varphi^t \rangle = \int_K \varphi(xy^{-1}) \mathrm{d}T(y).$$

Slijedi za $\varphi \in C(K)$:

$$[\lambda(T)\varphi](x) = \int_K [\lambda(y)\varphi](x) \mathrm{d}T(y) = \int_K \varphi(y^{-1}x) \mathrm{d}T(y) = (T * \varphi)(x),$$

$$[\rho(T)\varphi](x) = \int_K [\rho(y)\varphi](x) \mathrm{d}T(y) = \int_K \varphi(xy) \mathrm{d}T(y) = \int_K \varphi(xy^{-1}) \mathrm{d}T^t(y) = (\varphi * T^t)(x).$$

Propozicija 7.3 *Distribucije χ_γ (koje su prema računu nakon teorema 6.4. idempotenti u algebri $\mathcal{E}'(K)$) su centralne:*

$$\chi_\gamma * T = T * \chi_\gamma \qquad \forall T \in \mathcal{E}'(K), \quad \forall \gamma \in \hat{K}.$$

Dokaz: Za $f \in \mathcal{E}(K)$, $T \in \mathcal{E}'(K)$ i $\gamma \in \hat{K}$ imamo redom

$$\langle \chi_\gamma * T, f\rangle = \int_K \int_K f(xy)\mathrm{d}\chi_\gamma(x)\mathrm{d}T(y) = \frac{n(\gamma)}{\mu(K)} \int_K \left[\int_K f(xy)\chi^{\gamma^*}(x)\mathrm{d}\mu(x)\right] \mathrm{d}T(y) =$$

$$= \frac{n(\gamma)}{\mu(K)} \int_K \left[\int_K f(x)\chi^{\gamma^*}(xy^{-1})\mathrm{d}\mu(x)\right] \mathrm{d}T(y) = \frac{n(\gamma)}{\mu(K)} \int_K \left[\int_K f(x)\chi^{\gamma^*}(y^{-1}x)\mathrm{d}\mu(x)\right] \mathrm{d}T(y) =$$

$$= \frac{n(\gamma)}{\mu(K)} \int_K \left[\int_K f(yx)\chi^{\gamma^*}(x)\mathrm{d}\mu(x)\right] \mathrm{d}T(y) = \int_K \int_K f(yx)\mathrm{d}\chi_\gamma(x)\mathrm{d}T(y) = \langle T * \chi_\gamma, f\rangle.$$

Propozicija 7.4 *Neka su $\mathcal{E}'(K)_{K,\lambda}$ i $\mathcal{E}'(K)_{K,\rho}$ potprostori $K-$konačnih vektora u prostoru $\mathcal{E}'(K)$ u odnosu na reprezentacije λ i ρ. Djelovanje $\mathcal{E}'(K)$ na $\mathcal{E}'(K)_{K,\lambda}$ i na $\mathcal{E}'(K)_{K,\rho}$ dano je sa*

$$\lambda(T)S = T * S, \qquad S \in \mathcal{E}'(K)_{K,\lambda}, \quad T \in \mathcal{E}'(K),$$

$$\rho(T)S = S * T^t, \qquad S \in \mathcal{E}'(K)_{K,\rho}, \quad T \in \mathcal{E}'(K).$$

Nadalje,

$$\mathcal{E}'(K)_{K,\lambda} = \mathcal{E}'(K)_{K,\rho} = \{f\mu;\ f \in C(K)\}.$$

Dokaz: Za lokalno konačnu reprezentaciju π na prostoru V i za $T \in \mathcal{E}'(K)$ operator $\pi(T)$ definiran je sa

$$\pi(T)v = \langle T, \pi(\cdot)v\rangle_V, \qquad v \in V$$

ili

$$\langle \pi(T)v, v^*\rangle = \langle T, \langle \pi(\cdot)v, v^*\rangle\rangle, \qquad v \in V, \quad v^* \in V^*.$$

Primijenimo to na situaciju $\pi = \lambda$ i $V = \mathcal{E}'(K)_{K,\lambda}$. Dakle, za $f \in \mathcal{E}(K)$ i za $S \in V$ imamo

$$\langle \lambda(T)S, f\rangle = \langle T, \langle \lambda(\cdot)S, f\rangle\rangle = \langle T, \langle S, \lambda(\cdot)^{-1}f\rangle\rangle = \int_K \langle S, \lambda(y^{-1})f\rangle \mathrm{d}T(y) =$$

$$= \int_K \left[\int_K [\lambda(y^{-1})f](x)\mathrm{d}S(x)\right] \mathrm{d}T(y) = \int_K \int_K f(yx)\mathrm{d}S(x)\mathrm{d}T(y) = \langle T * S, f\rangle.$$

Dakle, $\lambda(T)S = T * S$.

Zadatak 7.2 *Dokažite da za $S \in \mathcal{E}'(K)_{K,\rho}$ i za $f \in \mathcal{E}(K)$ vrijedi $\langle \rho(T)S, f\rangle = \langle S * T^t, f\rangle$, dakle, da vrijedi $\rho(T)S = S * T^t$.*

Treba još dokazati zadnju tvrdnju propozicije 7.4. Neka je $S \in \mathcal{E}'(K)_{\lambda,\gamma}$, $\gamma \in \hat{K}$. Tada je prema propoziciji 6.4. i prema dokazanoj tvrdnji ove propozicije

$$S = \lambda(\chi_\gamma)S = \chi_\gamma * S = f\mu, \quad \text{gdje je} \quad f = \frac{n(\gamma)}{\mu(K)}(\chi^{\gamma^*} * S).$$

Kako je $\chi^{\gamma^*} \in \mathcal{E}(K)$ i $S \in \mathcal{E}'(K)$ to je $f \in \mathcal{E}(K)$, a kako je ta funkcija slijeva $K-$konačna, to je $f \in C(K)$. Time je dokazano

$$\mathcal{E}'(K)_{\lambda,\gamma} \subseteq \{f\mu;\ f \in C(K)\} \qquad \forall \gamma \in \hat{K}.$$

Prema tvrdnji (b) propozicije 6.1. vrijedi

$$\mathcal{E}'(K)_{K,\lambda} = \coprod_{\gamma\in\hat{K}} \mathcal{E}'(K)_{\lambda,\gamma}$$

pa zaključujemo da je

$$\mathcal{E}'(K)_{K,\lambda} \subseteq \{f\mu;\ f \in C(K)\}.$$

Budući da je obrnuta inkluzija očigledna imamo jednakost

$$\mathcal{E}'(K)_{K,\lambda} = \{f\mu;\ f \in C(K)\}.$$

Sasvim analogno dokazuje se i jednakost

$$\mathcal{E}'(K)_{K,\rho} = \{f\mu;\ f \in C(K)\}.$$

Definiramo sada

$$R(K) = \mathcal{E}'(K)_{K,\lambda} = \mathcal{E}'(K)_{K,\rho} = \{f\mu;\ f \in C(K)\}.$$

Zbog propozicije 7.4. $R(K)$ je obostrani ideal u algebri $\mathcal{E}'(K)$. $R(K)$ se zove **Heckeova algebra** kompaktne Liejeve grupe K.

Prema propoziciji 7.4. preslikavanje $A : f \mapsto f\mu$ je izomorfizam prostora $C(K)$ na prostor $R(K)$. Za $f, g \in C(K)$ i $x \in K$ imamo redom

$$\langle\lambda(x)Af, g\rangle = \langle Af, \lambda(x^{-1})g\rangle = \langle f\mu; \lambda(x^{-1})g\rangle = \int_K [\lambda(x^{-1})g](y)f(y)\mathrm{d}\mu(y) = \int_K g(xy)f(y)\mathrm{d}\mu(y) =$$

$$= \int_K g(y)f(x^{-1}y)\mathrm{d}\mu(y) = \int_K g(y)[\lambda(x)f](y)\mathrm{d}\mu(y) = \langle\lambda(x)f\mu, g\rangle = \langle A\lambda(x)f, g\rangle.$$

Dakle, vrijedi

$$\lambda(x)A = A\lambda(x) \qquad \forall x \in K$$

i sasvim analogno

$$\rho(x)A = A\rho(x) \qquad \forall x \in K.$$

Prema tome, izomorfizam A ostvaruje ekvivalenciju lijevih regularnih reprezentacija grupe K na prostorima $C(K)$ i $R(K)$ a također i ekvivalencije desnih regularnih reprezentacija na tim prostorima. Zbog toga A inducira izomorfizme

$$\mathcal{E}(K)_{\lambda,\gamma^*} \longrightarrow \mathcal{E}'(K)_{\lambda,\gamma^*} \qquad \text{i} \qquad \mathcal{E}(K)_{\rho,\gamma} \longrightarrow \mathcal{E}'(K)_{\rho,\gamma}.$$

Međutim, prema propoziciji 7.1. je $\mathcal{E}(K)_{\lambda,\gamma^*} = \mathcal{E}(K)_{\rho,\gamma}$ i taj smo potprostor označili sa $C_\gamma(K)$. Slijedi da vrijedi i $\mathcal{E}'(K)_{\lambda,\gamma^*} = \mathcal{E}'(K)_{\rho,\gamma}$ i taj ćemo potprostor označiti sa $R_{\gamma'}(K)$. Dakle,

$$R_\gamma(K) = \mathcal{E}'(K)_{\lambda,\gamma} = \mathcal{E}'(K)_{\rho,\gamma^*}.$$

Slijedi

$$R(K) = \coprod_{\gamma\in\hat{K}} R_\gamma(K)$$

i ova se dekompozicija odnosi i na lijevu i na desnu regularnu reprezentaciju od K na $R(K)$.

Imamo

$$R_\gamma(K) = \{f\mu;\ f \in C_{\gamma^*}(K)\}.$$

Dakle, prostor C_{γ^*} izomorfan je prostoru $R_\gamma(K)$. Izomorfizam je dan sa $f \mapsto f\mu$, dakle, ovisi o izboru Haarove mjere μ. Ustanovit ćemo sada prirodnu dualnost između prostora $R_\gamma(K)$ i $C_\gamma(K)$, neovisnu o izboru Haarove mjere. Prema računu na početku ovoga poglavlja znamo da vrijedi

$$\lambda(x)f_{v^*,v} = f_{\pi^{\gamma^*}(x)v^*,v} \quad \text{i} \quad \rho(x)f_{v^*,v} = f_{v^*,\pi^\gamma(x)v}, \qquad x \in K,\ v \in F_\gamma,\ v^* \in F_{\gamma^*}.$$

Odatle slijedi

$$\lambda(T)f_{v^*,v} = f_{\pi^{\gamma^*}(T)v^*,v} \quad \text{i} \quad \rho(T)f_{v^*,v} = f_{v^*,\pi^\gamma(T)v}, \qquad t \in \mathcal{E}'(K),\ v \in F_\gamma,\ v^* \in F_{\gamma^*}.$$

Propozicija 7.5 *(a) $R_\gamma(K)$ je obostrani ideal u $R(K)$ (i u $\mathcal{E}'(K)$).*
(b) $T \mapsto \pi^\gamma(T)$ je izomorfizam algebre $R_\gamma(K)$ na algebru $End_{\mathbb{C}}(F_\gamma)$.
(c) $(T,\varphi) \mapsto \langle T,\varphi\rangle$ je nedegenerirana bilinearna forma na $R_\gamma(K) \times C_\gamma(K)$; vrijedi

$$\langle T, f_{v^*,v}\rangle = \langle \pi^\gamma(T)v, v^*\rangle, \qquad v \in F_\gamma, \quad v^* \in F_{\gamma^*}, \quad T \in R_\gamma(K).$$

Dokaz: (a) Potprostor $R_\gamma(K) = \mathcal{E}'(K)_{\lambda,\gamma}$ razapet je unijom slika svih linearnih operatora $E : F_\gamma \to R(K)$ koji prepliću reprezentacije π^γ i λ, tj. takvih da je

$$E\pi^\gamma(x) = \lambda(x)E \qquad \forall x \in K.$$

Neka je E takav operator i neka je $v \in F_\gamma$. Tada za $S \in R(K)$ (pa čak i za $S \in \mathcal{E}'(K)$) prema propoziciji 7.2. imamo:

$$S * Ev = \lambda(S)Ev = E\pi^\gamma(S)v.$$

Odatle slijedi da je $S * R_\gamma(K) \subseteq R_\gamma(K)$. Sasvim analogno nalazimo da iz $R_\gamma(K) = \mathcal{E}'(K)_{\rho,\gamma^*}$ slijedi $R_\gamma(K) * S \subseteq R_\gamma(K)$.

(b) Znamo da je $T \mapsto \pi^\gamma(T)$ homomorfizam algebre $R_\gamma(K)$ u algebru $End_{\mathbb{C}}(F_\gamma)$. Imamo

$$R_\gamma(K) = \mathcal{E}'(K)_{\lambda,\gamma} \simeq \mathcal{E}(K)_{\lambda,\gamma} = M_{\gamma^*}(F_\gamma \otimes_{\mathbb{C}} F_{\gamma^*}).$$

Budući da je M_{γ^*} injekcija, to je

$$\dim\, R_\gamma(K) = (\dim\, F_\gamma)^2 = \dim\, End_{\mathbb{C}}(F_\gamma).$$

Dakle, dovoljno je dokazati da je prelikavanja $T \mapsto \pi^\gamma(T)$ injektivno na $R_\gamma(K)$.

Neka je $T \in R_\gamma(K)$ takav da je $\pi^\gamma(T) = 0$. Tada za $v \in F_\gamma$ i $v^* \in F_{\gamma^*}$ imamo

$$\rho(T)f_{v^*,v} = f_{v^*,\pi^\gamma(T)v} = f_{v^*,0} = 0.$$

Zbog tvrdnje (B) propozicije 7.2. slijedi

$$0 = [\rho(T)f_{v^*,v}](e) = (f_{v^*,v}T^t)(e) = \langle T^t, f^t_{v^*,v}\rangle = \langle T, f_{v^*,v}\rangle.$$

Kako je $T \in R_\gamma(K)$, postoji $f \in C_{\gamma^*}(K)$ takva da je $T = f\mu$. Neka je sada $\{v_1,\ldots,v_{n(\gamma)}\}$ baza od F_γ i neka je $\{v_1^*,\ldots,v_{n(\gamma)}^*\}$ njoj dualna baza od F_{γ^*}. Tada možemo pisati

$$f = \sum_{i,j=1}^{n(\gamma)} c_{ij} f_{v_i,v_j^*}, \qquad c_{ij} \in \mathbb{C}.$$

Slijedi

$$0 = \langle T, f_{v^*,v}\rangle = \int_K f(x)f_{v^*,v}(x)\mathrm{d}\mu(x) = \sum_{i,j} c_{ij}\int_K f_{v_i,v_j^*}(x)f_{v^*,v}(x)\mathrm{d}\mu(x) =$$

$$= \sum_{i,j} c_{ij}\int_K \langle v_i, \pi^{\gamma^*}(x)v_j^*\rangle\langle \pi^\gamma(x)v, v^*\rangle\mathrm{d}\mu(x) = \sum_{i,j} c_{ij}\int_K \langle \pi^\gamma(x^{-1})v_i, v_j^*\rangle\langle \pi^\gamma v, v^*\rangle\mathrm{d}\mu(x).$$

Zadatak 7.3 *Neka je π neprekidna ireducibilna reprezentacija kompaktne grupe K na konačno-dimenzionalnom kompleksnom prostoru V i neka je π^* njoj dualna reprezentacija na dualnom prostoru V^*. Iz relacija ortogonalnosti u Peter– Weylovom teoremu dokažite da za $v, w \in V$ i $v^*, w^* \in V^*$ vrijedi*

$$\int_K \langle \pi(x)v, v^* \rangle \langle \pi(x^{-1})w, w^* \rangle d\mu(x) = \frac{\mu(K)}{n(\pi)} \langle v, w^* \rangle \langle w, v^* \rangle.$$

Primjenom tog zadatka na prethodni račun nalazimo

$$\sum_{i,j} c_{ij} \langle v_i, v^* \rangle \langle v, v_j^* \rangle = 0 \qquad \forall v \in F_\gamma, \quad \forall v^* \in F_{\gamma^*}.$$

Stavimo li ovdje $v = v_k$ i $v^* = v_\ell^*$, dobivamo

$$0 = \sum_{i,j} c_{ij} \delta_{i\ell} \delta_{kj} = c_{\ell k} \qquad \forall \ell, k,$$

pa slijedi $f = 0$, dakle i $T = 0$.

(c) Što se tiče jednakosti u tvrdnji (c), ona odmah slijedi iz činjenice da su po definiciji obje strane jednake

$$\langle T, \langle \pi^\gamma(\cdot)v, v^* \rangle.$$

Tvrdnja slijedi iz te jednakosti jer je $T \mapsto \pi^\gamma(T)$ prema (b) izomorfizam sa $R_\gamma(K)$ na $End_{\mathbb{C}}(F_\gamma)$.

Propozicija 7.6 *Neka je π lokalno konačna reprezentacija kompaktne Liejeve grupe K na prostoru V i $\gamma \in \hat{K}$. Stavimo*

$$M = Hom_K(R_\gamma(K), V) = \{\varphi \in Hom_{\mathbb{C}}(R_\gamma(K), V);\ \varphi(\lambda(x)T) = \pi(x)\varphi(T)\, \forall x \in K, \forall T \in R_\gamma(K)\}.$$

Definiramo reprezentaciju $\tilde{\pi}$ grupe K na prostoru M sa

$$[\tilde{\pi}(x)\varphi](T) = \varphi(T * \delta_x), \qquad x \in K.$$

Nadalje, za $\varphi \in M$ stavimo $v_\varphi = \varphi(\chi_\gamma) \in V$. Tada je $\varphi \mapsto v_\varphi$ izomorfizam sa M na V_γ koji ostvaruje ekvivalenciju $\tilde{\pi} \simeq \pi_{V_\gamma}$.

Dokaz: Prije svega, stvarno je $v_\varphi \in V_\gamma$:

$$\pi(\chi_\gamma)v_\varphi = \pi(\chi_\gamma)\varphi(\chi_\gamma) = \varphi(\lambda(\chi_\gamma)\chi_\gamma) = \varphi(\chi_\gamma * \chi_\gamma) = \varphi(\chi_\gamma) = v_\varphi.$$

Dakle, $\varphi \mapsto v_\varphi$ je linearno preslikavanje sa M u V_γ. To preslikavanje prepliće reprezentacije $\tilde{\pi}$ i π, jer za svaki $x \in K$ imamo redom primjenom propozicija 7.3., 7.4. i 6.2:

$$v_{\tilde{\pi}(x)\varphi} = [\tilde{\pi}(x)\varphi](\chi_\gamma) = \varphi(\chi_\gamma * \delta_x) = \varphi(\delta_x * \chi_\gamma) = \varphi(\lambda(\delta_x)\chi_\gamma) = \varphi(\lambda(x)\chi_\gamma) = \pi(x)\varphi(\chi_\gamma) = \pi(x)v_\varphi.$$

Definiramo sada preslikavanje $v \mapsto \varphi_v$, $v \in V_\gamma$:

$$\varphi_v(T) = \pi(T)v, \qquad T \in R_\gamma(K).$$

Tada je $\varphi_v \in M$, jer za $x \in K$ i $T \in R_\gamma(K)$ imamo

$$\varphi_v(\lambda(x)T) = \pi(\lambda(x)T)v = \pi(k)\pi(T)v = \pi(k)\varphi_v(T).$$

Tvrdnja o izomorfizmu slijedi iz činjenice da su preslikavanja $\varphi \mapsto v_\varphi$ i $v \mapsto \varphi_v$ međusobno inverzna. Doista, za $T \in R_\gamma(K)$ je $T * \chi_\gamma = T$, pa za $\varphi \in M$ imamo

$$\varphi_{v_\varphi}(T) = \pi(T)v_\varphi = \pi(T)\varphi(\chi_\gamma) = \varphi(\lambda(T)\chi_\gamma) = \varphi(T * \chi_\gamma) = \varphi(T).$$

S druge strane za $v \in V_\gamma$ imamo

$$v_{\varphi_v} = \varphi_v(\chi_\gamma) = \pi(\chi_\gamma)v = v.$$

Neka je π lokalno konačna reprezentacija kompaktne Liejeve grupe K na prostoru V. Sada ćemo izvesti analogon izomorfizma

$$\mathcal{E}'(K) \otimes_{\mathbb{C}} V \simeq \mathcal{E}'(K)_{\mathcal{E}(K)}\mathcal{E}(K,V)_f$$

za $R(K)$ umjesto $\mathcal{E}'(K)$ i $C(K)$ umjesto $\mathcal{E}(K)$.

Prema zadatku 4.4. imamo

$$\mathcal{E}(K) \otimes_{\mathbb{C}} V \simeq \mathcal{E}(K,V)_f$$

pri čemu je izomorfizam slijeva na desno dan sa

$$E : \varphi \otimes v \mapsto \varphi(\cdot)v.$$

Na prostoru $\mathcal{E}(K,V)_f$ definiramo reprezentacije L i R grupe K :

$$[L(x)F](y) = \pi(x)F(x^{-1}y), \qquad [R(x)F](y) = \pi(x)F(yx), \qquad x, y \in K, \quad F \in \mathcal{E}(K,V)_f.$$

Tada za $\varphi \in \mathcal{E}(K)$, $v \in V$ i $x, y \in K$ imamo redom

$$[L(x)E(\varphi \otimes v)](y) = \pi(x)[E(\varphi \otimes v)](x^{-1}y) = \pi(x)\varphi(x^{-1}y)v =$$
$$= \varphi(x^{-1}y)\pi(x)v = [\lambda(x)\varphi](y)\pi(x)v = [E(\lambda(x)\varphi \otimes \pi(x)v)](x)$$

i

$$[R(x)E(\varphi \otimes v)](y) = \pi(x)[E(\varphi \otimes v)](yx) = \pi(x)\varphi(yx)v =$$
$$= \varphi(yx)\pi(x)v = [\rho(x)\varphi](y)\pi(x)v = [E(\rho(x)\varphi \otimes \pi(x)v)](x).$$

Dakle, vrijedi

$$L(x)E = E(\lambda \otimes \pi)(x) \quad \text{i} \quad R(x)E = E(\rho \otimes \pi)(x), \qquad x \in K.$$

Propozicija 7.7 *Neka je π lokalno konačna reprezentacija kompaktne Liejeve grupe K. Tada je potprostor $K-$konačnih vektora prostora $\mathcal{E}(K) \otimes_{\mathbb{C}} V$ u odnosu na reprezentaciju $\lambda \otimes \pi$ i u odnosu na reprezentaciju $\rho \otimes \pi$ jednak*

$$(\mathcal{E}(K) \otimes_{\mathbb{C}} V)_K = C(K) \otimes_{\mathbb{C}} V.$$

Dokaz: Desna strana sadržana je u lijevoj, i to bez obzira da li promatramo $K-$konačnost u odnosu na $\lambda \otimes \pi$ ili u odnosu na $\rho \otimes \pi$, jer očito je tenzorski produkt lokalno konačnih reprezentacija i sama likalno konačna.

Dokažimo obrat. Neka su $v_1, \ldots, v_n \in V$ linearno nezavisni vektori i neka su $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in \mathcal{E}(K)$ takve da je element

$$\sum_{j=1}^{n} \varphi_j \otimes v_j \in \mathcal{E}(K) \otimes_{\mathbb{C}} V$$

$K-$konačan u odnosu na $\lambda \otimes \pi$ ili u odnosu na $\rho \otimes \pi$. Treba dokazati da su tada $\varphi_j \in C(K)$ $\forall j = 1, \ldots, n$. Pri tome možemo bez gubitka općenitosti pretpostaviti da je prostor V konačnodimenzionalan; doista, umjesto prostora V možemo promatrati najmanji $\pi-$invarijantan potprostor od V koji sadrži vektore $v_1, \ldots, v_n$.

Zbog konačnodimenzionalnosti kontragredijentna reprezentacija π^* na dualnom prostoru V^* je lokalno konačna. Jedinstveno linearno preslikavanje $V \otimes_{\mathbb{C}} V^* \to \mathbb{C}$, takvo da $v \otimes v^* \mapsto \langle v, v^* \rangle$, je $K-$ekvivarijantno. Slijedi da je i inducirano preslikavanje

$$(\mathcal{E}(K) \otimes_{\mathbb{C}} V) \otimes_{\mathbb{C}} V^* \longrightarrow \mathcal{E}(K)$$

također $K-$ekvivarijatno u odnosu na reprezentacije $\lambda \otimes \pi) \otimes \pi^*$ i λ i u odnosu na reprezentacije $(\rho \otimes \pi) \otimes \pi^*$ i ρ. Slijedi da se pri tom preslikavanju $(\mathcal{E}(K) \otimes_{\mathbb{C}} V)_K \otimes_{\mathbb{C}} V^*$ preslikava u $C(K)$.

Nadopunimo linearno nezavisan skup $\{v_1, \ldots, v_n\}$ u V do baze B prostora V. Neka je B^* njoj dualna baza prostora V^* i neka su $v_1^*, \ldots, v_n^*$ članovi te baze takvi da je $\langle v_j, v_i^* \rangle = \delta_{ij}$. Tada pri gornjem preslikavanju imamo

$$\left(\sum_j \varphi_j \otimes v_j \right) \otimes v_i^* \mapsto \varphi_i.$$

Time je dokazano da su $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in C(K)$.

Za lokalno konačnu reprezentaciju π na prostoru V definiramo

$$C(K, V) = (\mathcal{E}(K, V)_f)_K.$$

Dakle,

$$C(K, V) \simeq C(K) \otimes_{\mathbb{C}} V.$$

Lema 7.1 *Za $T \in R(K)$ i $\varphi \in C(K)$ je $\varphi T \in R(K)$.*

Dokaz: Imamo $T = f\mu$ za neku $f \in C(K)$. Dakle, $\varphi T = \varphi f \mu$. φ i f su sume matričnih koeficijenata konačnodimenzionalnih reprezentacija. Dakle, i φf je linearna kombinacija matričnih koeficijenata konačnodimenzionalnih reprezentacija jer je

$$f_{v^*, v} \cdot f_{w^*, w} = f_{v^* \otimes w^*, v \otimes w}.$$

Prema tome je $\varphi f \in C(K)$, pa slijedi da je $\varphi T = \varphi f \mu \in R(K)$.

Propozicija 7.8 *Neka je π lokalno konačna reprezentacija kompaktne Liejeve grupe K na prostoru V. Tada je*

$$R(K) \otimes_{\mathbb{C}} V \simeq R(K) \otimes_{C(K)} C(K, V)$$

kao vektorski prostori. Izomorfizam slijeva na desno dan je sa

$$T \otimes_{\mathbb{C}} v \mapsto T \otimes_{C(K)} \underline{v}, \qquad T \in R(K), \quad v \in V,$$

gdje je $\underline{v}$ konstantna funkcija $\underline{v}(x) = v \ \forall x \in K$.

Dokaz:

$$R(K) \otimes_{\mathbb{C}} V \simeq (R(K) \otimes_{C(K)} C(K)) \otimes_{\mathbb{C}} V \simeq R(K) \otimes_{C(K)} (C(K) \otimes_{\mathbb{C}} V) \simeq R(K) \otimes_{C(K)} C(K, V).$$

Napomena: U propoziciji 7.8. $C(K)$ je komutativna $\mathbb{C}-$algebra u odnosu na množenje funkcija po točkama, $R(K)$ je $C(K)-$modul u odnosu na uobičajeno množenje distribucija funkcijama, dakle ono koje se promatra u lemi 7.1., a $C(K,V)$ je $C(K)-$modul u odnosu na množenje po točkama.

Trebat će nam eksplicitno i preslikavanje zdesna na lijevo, tj. inverzni izomorfizam u propoziciji 7.8.

Neka je $v(\cdot) \in C(K,V)$. Neka je $\{v_i\}$ baza konačnodimenzionalnog potprostora od V koji sadrži sliku funkcije $v(\cdot)$. Neka je $\{v_i^*\}$ dualna baza dualnog prostora tog konačnodimenzionalnog potprostora. Dakle,

$$v(x) = \sum_i \langle v(x), v_i^* \rangle v_i.$$

Prema dokazu propozicije 7.8. svaka funkcija $\langle v(\cdot), v_i^* \rangle$ je u $C(K)$. Neka je $T \in R(K)$, dakle, $T \otimes_{C(K)} v(\cdot)$ je tipični generator prostora $R(K) \otimes_{C(K)} C(K,V)$. Po lemi 7.1. je $\langle v(\cdot), v_i^* \rangle T \in R(K)$. Dakle,

$$T \otimes_{C(K)} v(\cdot) = \sum_i T \otimes_{C(K)} \langle v(\cdot), v_i^* \rangle v_i = \sum_i \langle v(\cdot), v_i^* \rangle T \otimes_{C(K)} v_i.$$

To pokazuje da je inverzni izomorfizam $R(K) \otimes_{C(K)} C(K,V) \to R(K) \otimes_{\mathbb{C}} V$ dan sa

$$T \otimes_{C(K)} v(\cdot) \mapsto \sum_i \langle v(\cdot), v_i^* \rangle T \otimes_{\mathbb{C}} v_i.$$

Propozicija 7.9 $R(K)^t = R(K)$.

Dokaz: Za $T \in \mathcal{E}'(K)$. transponirana distribucija T^t definirana je sa

$$T^t(\varphi) = T(\varphi^t), \qquad \text{gdje je} \quad \varphi^t(x) = \varphi(x^{-1}), \qquad \varphi \in \mathcal{E}(K), \quad x \in K.$$

Nadalje, za $S, T \in \mathcal{E}'(K)$ vrijedi $(S * T)^t = T^t * S^t$. Stoga prema formulama iz zadatka 5.4. imamo za $x \in K$ i $T \in \mathcal{E}'(K)$

$$(\lambda(x)T)^t = (\delta_x * T)^t = T^t * (\delta_x)^t = T^t * \delta_{x^{-1}} = \rho(x)T^t.$$

Dakle, T je lijevo $K-$konačna ako i samo ako je T^t desno $K-$konačna. No lijeva i desna $K-$konačnost u $\mathcal{E}'(K)$ je jedno te isto. Dakle, $T \in R(K) \iff T^t \in R(K)$.

Razmotrimo ponovo distribucije χ_α, $\alpha \in \hat{K}$. Prema računu iza zadatka 6.3. vrijedi

$$\chi_\alpha * \chi_\beta = \delta_{\alpha\beta}\chi_\alpha.$$

Drugim riječima, χ_α su idempotenti u algebri $\mathcal{E}'(K)$ i njihovi međusobni produkti su jednaki nuli. Za konačan podskup $A \subseteq \hat{K}$ stavljamo

$$\chi_A = \sum_{\alpha \in A} \chi_\alpha.$$

Slijedi

$$\chi_A * \chi_B = \chi_{A \cap B}, \qquad A, B \subseteq \hat{K}.$$

Posebno, svaki χ_A je idempotent u algebri $\mathcal{E}'(K)$. Za $\gamma \in \hat{K}$ je

$$T * \chi_\gamma = \chi_\gamma * T \qquad \forall T \in \mathcal{E}'(K)$$

i

$$R(K) = \coprod_{\gamma \in \hat{K}} R_\gamma(K), \qquad R_\gamma(K) = \chi_\gamma * \mathcal{E}'(K) = \mathcal{E}'(K) * \chi_\gamma.$$

Posebno, ako su $\alpha, \beta \in \hat{K}$ i $T \in R_\beta(K)$ onda je

$$\chi_\alpha * T = T * \chi_\alpha = \delta_{\alpha\beta} T.$$

Dakle, za svaki konačan skup $A \subseteq \hat{K}$ i za $T \in \mathcal{E}'(K)$ vrijedi

$$\chi_A * T = T * \chi_A,$$

a ako je $T \in R_\alpha(K)$, onda je

$$\chi_A * T = T * \chi_A = \begin{cases} T & \alpha \in A \\ 0 & \alpha \notin A. \end{cases}$$

Propozicija 7.10 *Skup* $\{\chi_A;$ *A je konačan podskup od* $\hat{K}\}$ *uređen inkluzijom, tj.*

$$\chi_A \leq \chi_B \qquad \Longleftrightarrow \qquad A \subseteq B,$$

je aproksimativna jedinica u algebri $R(K)$*. Dakle, algebra* $R(K)$ *je aproksimativno unitalna.*

Dokaz: Tvrdnja slijedi neposredno iz prethodnih jednakosti, jer je

$$R(K) = \coprod_{\gamma \in \hat{K}} R_\gamma(K).$$

Teorem 7.1 *Neka je* π *lokalno konačna reprezentacija kompaktne Liejeve grupe* K *na prostoru* V*.*

(a) *Za* $T \in R(K)$ *i za* $v \in V$ *stavimo*

$$Tv = \pi(T)v.$$

Tada V *postaje aproksimativno unitalan lijevi* $R(K)-$*modul i na taj način dobiju se svi aproksimativno unitalni* $R(K)-$*moduli.*

(b) *Potprostor* $W \leq V$ *je* $\pi-$*invarijantan ako i samo je* W $R(K)-$*podmodul.*

(c) *Neka su* π *i* ρ *lokalno konačne reprezentacije od* K *na prostorima* V *i* W*. Tada je*

$$Hom_K(V, W) = Hom_{R(K)}(V, W).$$

Drugim riječima, $A : V \to W$ *je linearno* $K-$*ekvivarijantno preslikavanje ako i samo ako je* A *homomorfizam* $R(K)-$*modula.*

Dokaz: (a) Neka je $v \in V$. Budući da je reprezentacija π lokalno konačna, postoji konačan skup

$$A = \{\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n\} \subseteq \hat{K}$$

takav da je $v \in V_{\gamma_1} \dot{+} V_{\gamma_2} \dot{+} \cdots \dot{+} V_{\gamma_n}$. Tada je $\pi(\chi_A)v = v$, dakle, $\chi_A v = v$. Dakle, V je aproksimativno unitalan $R(K)-$modul.

Neka je sada V aproksimativno unitalan $R(K)-$modul. Treba dokazati da na V postoji lokalno konačna reprezentacija π od K takva da je $Tv = \pi(T)v$ za svaki $v \in V$ i svaku $T \in R(K)$.

Iz zadatka 1.1. znamo da na V postoji jedinstvena struktura kompleksnog vektorskog prostora takva da je $(T, v) \to Tv$ $\mathbb{C}-$bilinearno preslikavanje sa $R(K) \times V$ u V. Neka je $v \in V$ i neka je $A \subseteq \hat{K}$ konačan skup takav da je $\chi_A v = v$. Definiramo

$$\pi(T)v = (T * \chi_A)v, \qquad T \in \mathcal{K}'(K).$$

Prije svaga dokažimo da je $\pi(T)v$ dobro definirano, tj. da je neovisno o izboru konačnog skupa A takvog da je $\chi_A v = v$. Neka je i $B \subseteq \hat{K}$ takav da je $\chi_B v = v$. Tada je

$$(T * \chi_A)v = (T * \chi_A)(\chi_B v) = [(T * \chi_A) * \chi_B]v = [T * (\chi_A * \chi_B)]v =$$

$$= [T * (\chi_B * \chi_A)]v = [(T * \chi_B) * \chi_A]v = (T * \chi_B)(\chi_A v) = (T * \chi_B)v.$$

Dakle, $\pi(T)v$ je dobro definirano za bilo koje $T \in \mathcal{E}'(K)$ i $v \in V$.

Neka su $v_1, v_2 \in V$ i $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$. Neka je A konačan podskup od $\hat{K}$ takav da je $\chi_A v_1 = v_1$ i $\chi_A v_2 = v_2$. Tada je $\chi_A(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2$, pa imamo

$$\pi(T)(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = (T * \chi_A)(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = \alpha_1 (T * \chi_A)v_1 + \alpha_2 (T * \chi_A)v_2 = \alpha_1 \pi(T)v_1 + \alpha_2 \pi(T)v_2.$$

Dakle, operator $\pi(T)$ je linearan za svaku $T \in \mathcal{E}'(K)$.

Jednako lako se vidi da je preslikavanje $T \mapsto \pi(T)$ linearno. Neka su $S, T \in \mathcal{E}'(K)$ i $v \in V$. Izaberimo konačan skup $A \subseteq \hat{K}$ takav da je $\chi_A v = v$ i $\chi_A \pi(T)v = \pi(T)v$. Slijedi

$$\pi(S)\pi(T)v = (S * \chi_A)(\pi(T)v) = (S * \chi_A)((T * \chi_A)v) = ((S * \chi_A) * (T * \chi_A))v =$$

$$= (S * \chi_A * T\chi_A)v = (S * T * \chi_A * \chi_A)v = (S * T\chi_A)v = \pi(S * T)v.$$

Dakle, $\pi(S)\pi(T) = \pi(S * T)$. Nadalje, jedinica u algebri $\mathcal{E}'(K)$ je δ_e i imamo

$$\pi(\delta_e)v = (\delta_e * \chi_A)v = \chi_A v = v,$$

tj. $\pi(\delta_e) = I_V$. Dakle, $\pi : \mathcal{E}'(K) \to Hom_{\mathbb{C}}(V)$ je unitalni homomorfizam unitalnih algebri.

Za $x \in K$ stavimo $\pi(x) = \pi(\delta_x)$. Tada je očito $x \mapsto \pi(x)$ reprezentacija grupe K na prostoru V. Za $v \in V$ izaberimo konačan skup $A \subseteq \hat{K}$ takav da je $\chi_A v = v$. Tada je

$$\pi(\mathcal{E}'(K))v = (\mathcal{E}'(K) * \chi_A)v = \sum_{\gamma \in A} R_\gamma(K)v.$$

Taj je potprostor $\pi-$invarijantan. Nadalje, taj je potprostor konačnodimenzionalan jer je prema propziciji 7.6. $R_\gamma(K) \simeq End_{\mathbb{C}}(F_\gamma)$, dakle, dim $R_\gamma(K) = n(\gamma)^2$. Time smo dokazali da je svaki vektor u prostoru V formalno $K-$konačan.

Dokažimo da je reprezentacija π lokalno konačna, neka je W bilo koji konačnodimenzionalan $\pi-$invarijantan potprostor od V. Treba dokazati da je za svaki $w \in W$ preslikavanje $x \mapsto \pi(x)w$ sa K u W neprekidno. Izaberimo konačan podskup A od $\hat{K}$ takav da je $\chi_A w = w\ \forall w \in W$. Primijetimo da je preslikavanje $x \mapsto \lambda(x)\chi_A$ neprekidno sa K u konačnodimenzionalan potprostor

$$R_A(K) = \sum_{\alpha \in A} R_\alpha(K)$$

od $R(K)$. Nadalje, za $w \in W$ preslikavanje $T \mapsto Tw$ sa $R_A(K)$ u W je linearan operator između konačnodimenzionalnih vektorskih prostora, dakle to preslikavanje je neprekidno. Napokon, uoimo da je za $w \in W$ preslikavanje $x \mapsto \pi(x)w$ kompozicija tih dvaju preslikavanja:

$$\pi(x)w = \pi(\delta_x)w = (\delta_x * \chi_A)w = (\lambda(x)\chi_A)w.$$

Dakle, preslikavanje $x \mapsto \pi(x)w$ sa K u W je neprekidno za svaki $w \in W$.

Time je dokazano da je ovako konstruirana reprezentacija π grupe K na prostoru V lokalno konačna. Za tu reprezentaciju od K je pripadna reprezentacija od $\mathcal{E}'(K)$ je upravo $T \mapsto \pi(T)$.

Doista, neka je $T \in \mathcal{E}'(K)$ i neka je $v \in V$. Izaberimo konačan skup $A \subseteq \hat{K}$ takav da je $\chi_A v = v$. Tada je

$$\langle T, \pi(\cdot)v\rangle_V = \langle T, (\delta_. * \chi_A)v\rangle_V = \langle T, (\lambda(\cdot)\chi_A)v\rangle_V = (\lambda(T)\chi_A)v = (T * \chi_A)v = \pi(T)v.$$

Treba još provjeriti da restrikcija reprezentacije π algebre $\mathcal{E}'(K)$ na podalgebru $R(K)$ daje na prostoru V istu strukturu $R(K)-$modula od koje smo krenuli. Stoga uzmimo $T \in R(K)$, $v \in V$ i $A \subseteq \hat{K}$ takav da je $\chi_A v = v$. Prema gornjem računu je

$$\pi(T)v = (T * \chi_A)v = T(\chi_A v) = Tv.$$

Da bi tvrdnja (a) bila u potpunosti dokazana, treba još provjeriti da li polazeći od lokalno konačne reprezentacije od K nakon dvije konstrukcije dolazimo na istu reprezentaciju od K. Neka je π lokalno konačna reprezentacija grupe K na prostoru V. Uvedimo na V na opisani način strukturu $R(K)-$modula i neka je π_{novo} reprezentacija od K do koje dolazimo opisanom konstrukcijom iz tog aproksimativno unitalnog $R(K)-$modula V. Neka su $x \in K$, $v \in V$ i $A \subseteq \hat{K}$ takav da je $\chi_A v = v$. Tada je

$$\pi_{novo}(x)v = (\delta_x * \chi_A)v = \pi(\delta_x * \chi_A)v = \pi(\delta_x)\pi(\chi_A)v = \pi(x)\chi_A v = \pi(x)v.$$

Tvrdnja (b) je očita.

(c) Neka je $U \in Hom_K(V, W)$. Tada je prema tvrdnji (b) propozicije 6.3. $U\pi(T) = \rho(T)U$ za svaku $T \in \mathcal{E}'(K)$, dakle, pogotovo za svaku $T \in R(K)$. Slijedi da je $U \in Hom_{R(K)}(V, W)$.

Obratno, neka je $U \in Hom_{R(K)}(V, W)$. Neka je $v \in V$ i neka je $A \subseteq \hat{K}$ takav da je $\chi_A v = v$ i $\chi_A Uv = Uv$. Slijedi za svaki $x \in K$

$$U\pi(x)v = U(\delta_x * \chi_A)v = (\delta_x * \chi_A)Uv = \rho(x)Uv.$$

Dakle, $U \in Hom_K(V, W)$.

Razmotrimo još jednom izomorfizam iz propozicije 7.8.

$$R(K) \otimes_{\mathbb{C}} V \simeq R(K) \otimes_{C(K)} C(K, V).$$

On je slijeva na desno dan sa

$$T \otimes_{\mathbb{C}} v \mapsto T \otimes_{C(K)} \underline{v}, \qquad T \in R(K), \quad v \in V,$$

gdje je $\underline{v} : K \to V$ konstantna funkcija $\underline{v}(x) = v \; \forall x \in K$. Izračunali smo da je inverzni izomorfizam dan sa

$$T \otimes_{C(K)} v(\cdot) \mapsto \sum_i \langle v(\cdot), v_i^*\rangle T \otimes_{\mathbb{C}} v_i.$$

Pri tome je za $v(\cdot) \in C(K, V)$ $\{v_i\}$ baza konačnodimenzionalnog potprostora od V koji sadrži $v(K)$ i $\{v_i^*\}$ je njoj dualna baza dualnog prostora tog konačnodimenzionalnog potprostora. Uzmimo sada da je funkcija $v(\cdot)$ oblika $v(x) = \pi(x)v$ za neki $v \in V$. Tada treba uzeti bazu $\{v_i\}$ konačnodimenzionalnog $\pi-$invarijantnog potprostora W koji sadrži vektor v, a $\{v_i^*\}$ je dualna baza dualnog prostora W^*. Tada za $T \in R(K)$ imamo

$$T \otimes_{C(K)} \pi(\cdot)v \mapsto \sum_i \langle \pi(\cdot)v, v_i^*\rangle T \otimes_{\mathbb{C}} v_i.$$

Neka je $A \subseteq \hat{K}$ konačan skup takav da je

$$\langle \pi(\cdot)v, v_i^*\rangle T * \chi_A = \langle \pi(\cdot)v, v_i^*\rangle T \qquad \forall i, \quad \forall v \in W.$$

Prema propoziciji 7.4. imamo

$$\langle \pi(\cdot)v, v_i^*\rangle T * \chi_A = \lambda(\langle \pi(\cdot)v, v_i^*\rangle T)\chi_A = \int_K \lambda(x)\chi_A \mathrm{d}(\langle \pi(\cdot)v, v_i^*\rangle T)(x) = \int_K \langle \pi(x)v, v_i^*\rangle \lambda(x)\chi_A \mathrm{d}T(x).$$

Slijedi

$$\sum_i \langle \pi(\cdot)v, v_i^*\rangle T \otimes_{\mathbb{C}} v_i = \sum_i \langle \pi(\cdot)v, v_i^*\rangle T * \chi_A \otimes_{\mathbb{C}} v_i = \sum_i \int_K \langle \pi(x)v, v_i^*\rangle \lambda(x)\chi_A \otimes_{\mathbb{C}} v_i \mathrm{d}T(x) =$$

$$= \int_K \left(\lambda(x)\chi_A \otimes_{\mathbb{C}} \sum_i \langle \pi(x)v, v_i^*\rangle v_i \right) \mathrm{d}T(x) = \int_K (\lambda(x)\chi_A \otimes_{\mathbb{C}} \pi(x)v) \mathrm{d}T(x).$$

Dakle, u opisanoj situaciji izomorfizam $R(K) \otimes_{C(K)} C(K,V) \to R(K) \otimes_{\mathbb{C}} V$ dan je sa

$$T \otimes_{C(K)} \pi(\cdot)v \mapsto \int_K (\lambda(x)\chi_A \otimes_{\mathbb{C}} \pi(x)v) \mathrm{d}T(x).$$

Poglavlje 8

Heckeova algebra grupovnog para

Imenom **par** zvat ćemo svaki uređen par $(\mathfrak{g}, K)$ takav da vrijedi

(i) K je kompaktna Liejeva grupa i $\mathfrak{g}$ je konačnodimenzionalna komplesna Liejeva algebra.

(ii) Kompleksifikacija $\mathfrak{k}$ Liejeve algebre $\mathfrak{k}_0$ Liejeve grupe K je Liejeva podalgebra od $\mathfrak{g}$.

(iii) Zadan je neprekidni homomorfizam

$$Ad : K \longrightarrow Aut(\mathfrak{g})$$

takav da je

$$Ad(x)|\mathfrak{k} = Ad_{\mathfrak{k}}(x) \qquad \forall x \in K.$$

Par $(\mathfrak{g}, K)$ zove se **grupovni par** ako postoji Liejeva grupa G takva da vrijedi:

(a) K je kompaktna podgrupa od G.

(b) $\mathfrak{g}$ je kompleksifikacija Liejeve algebre $\mathfrak{g}_0$ Liejeve grupe G.

(c) $Ad = Ad_{\mathfrak{g}}|K$.

Reprezentacija para $(\mathfrak{g}, K)$ je uređen par (π, V) takav da vrijedi:

(1) V je $U(\mathfrak{g})-$modul; posebno, V je kompleksan vektorski prostor.

(2) π je lokalno konačna reprezentacija grupe K na prostoru V.

(3) $[(Ad\,x)u]v = \pi(x)(u(\pi(x^{-1})v)), \quad \forall x \in K, \forall u \in U(\mathfrak{g}), \forall v \in V.$

(4) Ako je W konačnodimenzionalan $\pi-$invarijantan potprostor od V, diferencijal preslikavanja $x \mapsto \pi(x)|W$ podudara se s restrikcijom na $\mathfrak{k}_0$ djelovanja $\mathfrak{g}$ na $U(\mathfrak{g})-$modulu V.

U takvom slučaju kažemo još da je V $(\mathfrak{g}, K)-$**modul**.

Ako je grupa K povezana, tada je djelovanje K potpuno određeno djelovanjem $\mathfrak{k}_0$ pa je uvjet (3) nepotrebno posebno postavljati, jer on slijedi iz uvjeta (4).

Dva primjera da nije svaki par grupovni:

1. Neka je G poluprosta jednostavno povezana realna Liejeva grupa, $\mathfrak{g}_0$ njena Liejeva algebra, $\mathfrak{g}$ kompleksifikacija od $\mathfrak{g}_0$, T' neki netrivijalni torus u G, T netrivijalno konačnolisno natkrivanje od T'. Tada je $(\mathfrak{g}, T)$ par, ali T nije podgrupa nijedne Liejeve grupe s Liejevom algebrom $\mathfrak{g}_0$, dakle,

$(\mathfrak{g}, T)$ nije grupovni par.

2. Neka je $K = \{e\}$ i neka je $\mathfrak{g}$ komleksna Liejeve algebra koja nije kompleksifikacija neke realne Liejeve algebre (takve postoje za svaku dimenziju ≥ 3). Tada je $(\mathfrak{g}, K)$ par koji nije grupovni.

U ovom poglavlju promatramo grupovni par $(\mathfrak{g}, K)$ s Liejevom grupom G. Zbog jednostavnije notacije pretpostavljat ćemo da je grupa G unimodularna – dakle, Haarova mjera na G je obostrano invarijantna i invarijantna je na invertiranje (odnosno, u odnosu na transponiranje).

Heckeova algebra $R(\mathfrak{g}, K)$ grupovnog para $(\mathfrak{g}, K)$ je konvolucijska algebra svih lijevo $K-$konačnih distribucija na G s kompaktnim nosačem sadržanim u K. To je stvarno podalgebra konvolucijske algebre $\mathcal{E}'(G)$ jer vrijedi

$$Supp\,(S * T) \subseteq (Supp\,S) \cdot (Supp\,T).$$

Vidjet ćemo kasnije da je lijeva $K-$konačnost distribucije s nosačem sadržanim u K ekvivalentna s desnom $K-$konačnosti. Dakle, elementi od $R(\mathfrak{g}, K)$ su obostrano $K-$konačni. Nadalje, vidjet ćemo da izbor grupe G do na izomorfizam ne utječe na algebru $R(\mathfrak{g}, K)$.

Zadatak 8.1 *Neka je $K = \{e\}$. Dokažite da je $R(\mathfrak{g}, \{e\}) \simeq U(\mathfrak{g})$.*

Uputa: Koristite rezultate 5. poglavlja i korolar 4.3. Schwartzovog teorema da dokažete da je $u \mapsto \partial(u)$ izomorfizam sa $U(\mathfrak{g})$ na algebru $R(\mathfrak{g}, \{e\})$ distribucija na G s nosačem sadržanim u $\{e\}$.

Primjedba: Ako je $\mathfrak{g} = \mathfrak{k}$ i $G = K$ onda je $R(\mathfrak{k}, K) = R(K)$.

Opisat ćemo sada neke elemente od $R(\mathfrak{g}, K)$. Neka je $i : K \to G$ inkluzija i $T \in R(K)$. Definiramo $i_*(T) \in \mathcal{E}'(G)$ kao u 4. poglavlju:

$$i_*(T)(f) = T(T \circ i) = T(f|K), \qquad f \in \mathcal{E}(G).$$

Prema zadatku 4.5. tada je

$$Supp\, i_*(T) \subseteq i(Supp\,T) = Supp\,T \subseteq K.$$

Nadalje, distribucija $i_*(T)$ je lijevo $K-$konačna. Doista, za $x \in K$ je $\lambda(x)i_*(T) = \lambda(i(x))i_*(T)$, pa za $f \in \mathcal{E}(G)$ imamo

$$\langle \lambda(x)i_*(T), f\rangle = \langle \lambda(i(x))i_*(T), f\rangle = \langle i_*(T), \lambda(i(x^{-1}))f\rangle = \langle T, [\lambda(i(x^{-1}))f] \circ i\rangle =$$

$$= \langle T, \lambda(x^{-1})(f \circ i)\rangle = \langle \lambda(x)T, f \circ i\rangle = \langle i_*(\lambda(x)T), f\rangle.$$

Dakle, vrijedi $\lambda(x)i_*(T) = i_*(\lambda(x)T)$, pa i lijeve $K-$konačnosti od T slijedi lijeva $K-$konačnost od $i_*(T)$.

Kako je očito i_* injekcija, trivijalne oznake i i i_* u daljnjem izostavljamo.

Neka je $u \in U(\mathfrak{g})$. Tada je $\partial(u) \in \mathcal{E}'(G)$, a prema zadatku 8.1. je $Supp\,\partial(u) \subseteq \{e\} \subseteq K$. Ako je $T \in R(K)$ onda je $T * \partial(u) \in \mathcal{E}'(G)$ i vrijedi

$$Supp\,(T * \partial(u)) \subseteq (Supp\,T)(Supp\,\partial(u)) \subseteq Supp\,T \subseteq K.$$

Nadalje, za $x \in K$ imamo

$$\lambda(x)(T * \partial(u)) = \delta_x * (T * \partial(u)) = (\delta_x * T) * \partial(u).$$

Odatle slijedi da je distribucija $T * \partial(u)$ lijevo $K-$konačna.

Prema tome, imamo bilinearno preslikavanje $(T, u) \mapsto T * \partial(u)$ sa $R(K) \times U(\mathfrak{g})$ u $R(\mathfrak{g}, K)$. Zbog univerzalnog svojstva tenzorskog produkta dolazimo do linearnog preslikavanja

$$\Phi : R(K) \otimes_{\mathbb{C}} U(\mathfrak{g}) \longrightarrow R(\mathfrak{g}, K) \qquad \text{takvog da je} \quad \Phi(T \otimes_{\mathbb{C}} u) = T * \partial(u), \quad T \in R(K),\, u \in U(\mathfrak{g}).$$

Ako su $T \in R(K)$, $u \in U(\mathfrak{g})$ i $v \in U(\mathfrak{k})$, onda je

$$\Phi(T * \partial(v) \otimes_{\mathbb{C}} u) = (T * \partial(v)) * \partial(u) = T * (\partial(v) * \partial(u)) = T * \partial(vu) = \Phi(T \otimes_{\mathbb{C}} vu).$$

Prema tome, potprostor U razapet sa

$$\{T * \partial(v) \otimes_{\mathbb{C}} u - T \otimes_{\mathbb{C}} vu;\ T \in R(K),\, u \in U(\mathfrak{g}),\, v \in U(\mathfrak{k})\}$$

sadržan je u jezgri linearnog preslikavanja Φ. Međutim,

$$R(K) \otimes_{\mathbb{C}} U(\mathfrak{g})/U \simeq R(K) \otimes_{U(\mathfrak{k})} U(\mathfrak{g}).$$

Prijelazom na kvocijent dolazimo do linearnog preslikavanja

$$\Phi : R(K) \otimes_{U(\mathfrak{k})} U(\mathfrak{g}) \longrightarrow R(\mathfrak{g}, K), \qquad \text{takvog da je} \quad \Phi(T \otimes_{U(\mathfrak{k})} u) = T * \partial(u).$$

Nešto kasnije dokazat ćemo da je to izomorfizam vektorskih prostora. Prvo dokažimo:

Propozicija 8.1 *Neka je G unimodularna Liejeva grupe i H njena zatvorena podgrupa. Neka je $\mathcal{E}'(G, H)$ algebra distribucija na G s kompaktnim nosačem sadržanim u H.*

(*a*) *Postoji jedinstven linearan operator*

$$\Phi : \mathcal{E}'(H) \otimes_{U(\mathfrak{h})} U(\mathfrak{g}) \longrightarrow \mathcal{E}'(G, H)$$

takav da je

$$\Phi(T \otimes_{U(\mathfrak{h})} u) = T * \partial(u), \quad T \in \mathcal{E}'(H),\ u \in U(\mathfrak{g}).$$

(*b*) *Φ je izomorfizam vektorskih prostora.*

(*c*) *Vrijedi $\Phi(S * T \otimes_{U(\mathfrak{h})} u) = S * \Phi(T \otimes_{U(\mathfrak{h})} u)$ za $S, T \in \mathcal{E}'(H)$ i $u \in U(\mathfrak{g})$.*

(*d*) *Vrijedi $\Phi(T \otimes_{U(\mathfrak{h})} uv) = \rho(v^t)\Phi(T \otimes_{U(\mathfrak{h})} u)$ za $T \in \mathcal{E}'(H)$ i $u, v \in U(\mathfrak{g})$.*

Dokaz: (*a*) Neka su $T \in \mathcal{E}'(H)$ i $u \in U(\mathfrak{g})$. Tada je

$$\mathit{Supp}\, T * \partial(u) \subseteq (\mathit{Supp}\, T)(\mathit{Supp}\, \partial(u)) \subseteq \mathit{Supp}\, T \subseteq H.$$

Dakle, $T * \partial(u) \in \mathcal{E}'(G, H)$, pa imamo bilinearno preslikavanje $(T, u) \mapsto T * \partial(u)$ sa $\mathcal{E}'(H) \times U(\mathfrak{g})$ u $\mathcal{E}'(G, H)$. Zbog univerzalnog svojstva tenzorskog produkta dolazimo do linearnog preslikavanja

$$\mathcal{E}'(H) \otimes_{\mathbb{C}} U(\mathfrak{g}) \longrightarrow \mathcal{E}'(G, H) \qquad \text{takvog da} \quad T \otimes_{\mathbb{C}} u \mapsto T * \partial(u).$$

Sasvim analogno kao malo prije dokazuje se da se to linearno preslikavanje spušta do linearnog preslikavanja

$$\Phi : \mathcal{E}'(H) \otimes_{U(\mathfrak{h})} U(\mathfrak{g}) \longrightarrow \mathcal{E}'(G, H) \qquad \text{takvog da je} \quad \Phi(T \otimes_{U(\mathfrak{h})} u) = T * \partial(u).$$

(b) Dokažimo prvo da je Φ injekcija. Neka je $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{h}_0 \dot{+} \mathcal{P}_\prime$, gdje je $\mathfrak{h}_0$ Liejeva algebra grupe H i $\mathcal{P}_\wr$ je potprostor od $\mathfrak{g}_0$. Neka je $X_1, \ldots, X_\ell\}$ baza od $\mathcal{P}_\prime$ i neka je $\mathcal{P}$ kompleksifikacija prostora $\mathfrak{h}_0$. Prije svega, za $T \in \mathcal{E}'(H)$, $u \in U(\mathfrak{g})$ i $f \in \mathcal{E}(G)$ imamo

$$\langle T * \partial(u), f\rangle = \langle \rho(u^t)T, f\rangle = \langle T, \rho(u)f\rangle = \langle T, (\rho(u)f)|H\rangle.$$

Neka je sada $a \in \mathcal{E}'(H) \otimes_{U(\mathfrak{h})} U(\mathfrak{g})$ takav da je $\Phi(a) = 0$. Možemo pisati

$$a = \sum_n T_n \otimes_{U(\mathfrak{h})} u_n, \qquad T_n \in \mathcal{E}'(H), \quad u_n \in U(\mathfrak{g}).$$

Tada prema gornjem računu imamo

$$\sum_n \langle T_n, (\rho(u_n)f)|H\rangle = 0.$$

Prema PBW−teoremu 3.13. možemo pretpostavljati da su svi u_n koji se pojavljuju u prikazu elementa a međusobno različiti monomi oblika $X_1^{j_1} \cdots X_\ell^{j_\ell}$.

Zadatak 8.2 *Dokažite da je diferencijal preslikavanja sa $H \times \mathbb{R}^\ell$ u G, zadanog sa*

$$(h, x_1, x_2, \ldots, x_\ell) \mapsto h(\exp\, x_1X_1)(\exp\, x_2X_2)\cdots(\exp\, x_\ell X_\ell),$$

u točki $(e, 0, 0, \ldots, 0)$ izomorfizam vektorskog prostora $\mathfrak{h}_0 \otimes \mathbb{R}^\ell$ na vektorski prostor $\mathfrak{g}_0$, dakle, da je to preslikavanje lokalni difeomorfizam otvorenog skupa oblika $U \times V$, gdje je U otvorena okolina točke e u H i V otvorena okolina točke $(0, 0, \ldots, 0)$ u $\mathbb{R}^\ell$, na otvorenu okolinu W točke e u G.

Zadatak 8.3 *Uz oznake iz prethodnog zadatka neka je $f_1 \in \mathcal{E}(H)$ takva da je $Supp\, f_1 \subseteq U$ i $f_2 \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^\ell)$ takva da je $Supp\, f_2 \subseteq V$. Dokažite da postoji $f \in \mathcal{E}(G)$ takva da je*

$$f(h(\exp\, x_1X_1)(\exp\, x_2X_2)\cdots(\exp\, x_\ell X_\ell) = f_1(h)f_2(x_1, x_2, \ldots, x_\ell)$$

i da vrijedi

$$X_1^{j_1}X_2^{j_2}\cdots X_\ell^{j_\ell}f = f_1(e)\cdot\frac{\partial^{j_1+j_2+\cdots+j_\ell}f_2}{\partial x_1^{j_1}\partial x_2^{j_2}\cdots\partial x_\ell^{j_\ell}}(0, 0, \ldots, 0).$$

Funkciju f_2 u prethodnom zadatku možemo odabrati tako da je za zadanu $\ell-$torku $(j_1, j_2, \ldots, j_\ell)$ gornja derivacija jednaka 1, a za sve ostale $\ell-$torke 0. Npr. možemo uzeti da je na nekoj okolini nule u $\mathbb{R}^\ell$

$$f_2(x_1, x_2, \ldots, x_\ell) = \frac{x_1^{j_1}x_2^{j_2}\cdots x_\ell^{j_\ell}}{j_1!j_2!\cdots j_\ell!}.$$

Slijedi da je

$$\langle T_n, f_1\rangle = 0$$

za svaki n i za svaku funkciju $f_1 \in \mathcal{E}(H)$ takvu da je $Supp\, f_1 \subseteq U$. Prema tome, $e \notin Supp\, T_n$. Za $h \in H$ je

$$0 = \lambda(h)\Phi(a) = \Phi(\lambda(h)a).$$

Nadalje,

$$\lambda(h)a = \sum_n \lambda(h)T_n \otimes_{U(\mathfrak{h})} u_n.$$

Odatle za svaki n slijedi da $e \notin Supp\, \lambda(h)T_n$, $\forall h \in H$, dakle, $h \notin Supp\, T_n$, $\forall h \in H$. To znači da je $Supp\, T_n = \emptyset$, odnosno $T_n = 0$ za svaki n. Dakle, $a = 0$ i time je dokazana injektivnost preslikavanja Φ.

Dokažimo sada surjektivnost preslikavanja Φ. Neka je $T \in \mathcal{E}'(G,H)$. Koristeći particiju jedinice dokaz možemo reducirati na slučaj kad je $Supp\, T$ sadržan u maloj $G-$okolini točke $h_0 \in H$. Možemo pretpostaviti da je okolina tako odabrana da imamo difeomorfizam

$$(h, x_1, x_2, \ldots, x_\ell) \mapsto h_0 h(\exp\, x_1 X_1)(\exp\, x_2 X_2) \cdots (\exp\, x_\ell X_\ell)$$

s okoline točke $(e, 0, 0, \ldots, 0)$ u $\mathbb{R}^\ell$ na tu $G-$okolinu točke h_0. Korolar 4.3. Schwartzovog teorema pokazuje da tada T ima oblik (preko gornjeg difeomorfizma):

$$\sum_n T_n \times \partial(u_n)$$

dakle, oblik

$$\sum_n T_n * \partial(u_n).$$

Tada je $T \in \mathrm{Im}\,\Phi$. Time je dokazana i surjektivnost preslikavanja Φ.

(c) Imamo

$$\Phi(S * T \otimes_{U(\mathfrak{h})} u) = (S * T) * \partial(u) = S * (T * \partial(u)) = S * \Phi(T \otimes_{U(\mathfrak{h})} u).$$

(d) Koristeći tvrdnju (c) zadatka 5.8. imamo redom

$$\Phi(T \otimes_{U(\mathfrak{h})} uv) = T*\partial(uv) = T*(\partial(u)*(\partial(v)) = (T*\partial(u))*\partial(v) = \rho(v^t)(T*\partial(u)) = \rho(v^t)\Phi(T \otimes_{U(\mathfrak{h})} u).$$

Teorem 8.1 *Neka je $(\mathfrak{g}, K)$ grupovni par s unimodularnom Liejevom grupom G i $R(\mathfrak{g}, K)$ njegova Heckeova algebra. Postoji jedinstven izomorfizam vektorskih prostora*

$$R(K) \otimes_{U(\mathfrak{k})} U(\mathfrak{g}) \longrightarrow R(\mathfrak{g}, K)$$

takav da

$$T \otimes_{U(\mathfrak{k})} u \mapsto T * \partial(u), \qquad T \in R(K),\ u \in U(\mathfrak{g}).$$

Inverzni izomorfizam šalje lijevo djelovanje $\mathcal{E}'(K)$ na $R(\mathfrak{g}, K)$ u lijevo djelovanje $\mathcal{E}'(K)$ na $R(K)$ i desno djelovanje $U(\mathfrak{g})$ na $R(\mathfrak{g}, K)$ u desno djelovanje (tj. množenje zdesna) $U(\mathfrak{g})$ na $U(\mathfrak{g})$.

Dokaz: Prema propoziciji 8.1. znamo da je

$$R(K) \otimes_{U(\mathfrak{k})} U(\mathfrak{g}) \longrightarrow \mathcal{E}'(G, K), \qquad T \otimes_{U(\mathfrak{k})} u \mapsto T * \partial(u),$$

injekcija. Nadalje, Za $T \in R(K)$ i $u \in U(\mathfrak{g})$ znamo da je $T * \partial(u) \in R(\mathfrak{g}, K)$. Dakle, imamo injekciju

$$R(K) \otimes_{U(\mathfrak{k})} U(\mathfrak{g}) \longrightarrow R(\mathfrak{g}, K), \qquad T \otimes_{U(\mathfrak{k})} U \mapsto T * \partial(u).$$

Treba još dokazati da je to i surjekcija.

Neka je $T \in R(\mathfrak{g}, K) \subseteq \mathcal{E}'(G, K)$. Prema propoziciji 8.1. možemo pisati

$$T = \sum_i T_i * \partial(u_i), \qquad T_1 \in \mathcal{E}'(K),\ u_i \in U(\mathfrak{g}).$$

Prema teoremu 7.1. primijenjenom na reprezentaciju λ grupe K na prostoru $R(\mathfrak{g}, K)$ slijedi da postoji konačan skup $A \subseteq \hat{K}$ takav da je $\lambda(\chi_A)T = T$, tj. $T = \chi_A * T$. Slijedi

$$T = \chi_A * T = \sum_i (\chi_A * T_1) * \partial(u_i).$$

Međutim, $R(K)$ je obostrani ideal u algebri $\mathcal{E}'(K)$, pa iz $\chi_A \in R(K)$ slijedi da je $\chi_A * T_i \in R(K)$ $\forall i$. Time je dokazana i surjektivnost.

Tvrdnje o djelovanjima slijede neposredno iz tvrdnji (c) i (d) propozicije 8.1.

Propozicija 8.2 *Neka su $S, T \in R(K)$ i $u, v \in U(\mathfrak{g})$. Neka je $\{u_i\}$ baza konačnodimenzionalnog potprostora $[(Ad\,K)u]$ i $\{u_i^*\}$ njoj dualna baza dualnog prostora. Neka su*

$$T_i = \langle Ad\,(\cdot)^{-1}u, u_i^*\rangle T.$$

Tada je

$$(S * \partial(u)) * (T * \partial(v)) = \sum_i (S * T_i) * \partial(u_i v).$$

Dokaz: Za $f \in \mathcal{E}(G)$ imamo

$$\langle \partial(u) * T, f\rangle = \langle \lambda(u)T, f\rangle = \langle T, \lambda(u^t)f\rangle.$$

Stavimo

$$\varphi_i(x) = \langle (Ad\,x^{-1})u, u_i^*\rangle, \qquad x \in K.$$

Tada je

$$(Ad\,x^{-1})u = \sum_i \varphi_i(x)u_i.$$

Zadatak 8.4 *Dokažite da je*

$$[\lambda(u^t)f](x) = [\rho((Ad\,x)^{-1}u)f](x).$$

Slijedi

$$[\lambda(u^t)f](x) = \sum_i \varphi_i(x)[\rho(u_i)f](x) \qquad \Longrightarrow \qquad \lambda(u^t)f = \sum_i \varphi_i\rho(u_i)f,$$

dakle,

$$\langle \partial(u) * T, f\rangle = \langle T, \lambda(u^t)f\rangle = \sum_i \langle T, \varphi_i\rho(u_i)f\rangle = \sum_i \langle \varphi_i T, \rho(u_i)f\rangle =$$

$$= \sum_i \langle T_i, \rho(u_i)f\rangle = \sum_i \langle \rho(u_i^t)T_i, f\rangle = \sum_i \langle T_i * \partial(u_i), f\rangle.$$

Prema tome,

$$\partial(u) * T = \sum_i T_i * \partial(u_i),$$

pa slijedi

$$S * \partial(u) * T * \partial(v) = \sum_i S * T_i * \partial(u_i v).$$

Propozicija 8.3 *Svaki element od $R(\mathfrak{g}, K)$ je obostrano $K-$konačan.*

Dokaz: Za $T \in R(K)$ i $u \in U(\mathfrak{g})$ imamo

$$\rho(x)[T * \partial(u)] = T * \partial(u) * \delta_{x^{-1}} = (T * \delta_{x^{-1}}) * (\delta_x * \partial(u) * \delta_{x^{-1}}) = (\rho(x)T) * \partial((Ad\,x)u).$$

Kada x ide po K desna strana ostaje u slici konačnodimenzionalnog potprostora

$$[\rho(K)T] \otimes_{U(\mathfrak{k})} [(Ad\,K)u]$$

pri izomorfizmu iz teorema 8.1. Dakle, potprostor $[\rho(K)(T * \partial(u)]$ je konačnodimenzionalan.

Propozicija 8.4 *Algebra $R(\mathfrak{g}, K)$ je aproksimativno unitalna i invarijantna je na transponiranje u algebri $\mathcal{E}'(G)$.*

Dokaz: Neka je $T \in R(K)$. Za neki konačan skup $A \subseteq \hat{K}$ vrijedi $\chi_A * T = T$. Slijedi za bilo koji $u \in U(\mathfrak{g})$

$$\chi_A * (T * \partial(u)) = (\chi_A * T) * \partial(u) = T * \partial(u).$$

Time je dokazano da je $\{\chi_A;\ A \text{ konačan podskup od } \hat{K}\}$ aproksimativna jedinica algebre $R(\mathfrak{g}, K)$, dakle, ta je algebra aproksimativno unitalna.

Neka je $T \in \mathcal{E}'(G, K)$. Tada se lako vidi da je

$$Supp\, T^t = (Supp\, T)^{-1},$$

dakle, $T^t \in \mathcal{E}'(G, K)$. Stoga prema propoziciji 8.3. vrijedi $T \in R(\mathfrak{g}, K) \Longleftrightarrow T^t \in R(\mathfrak{g}, K)$.

Poglavlje 9

Slabi parovi

Cilj nam je definirati aproksimativno unitalnu algebru $R(\mathfrak{g}, K)$ za opći par $(\mathfrak{g}, K)$ i to na način da su aproksimativno unitalni $R(\mathfrak{g}, K)-$moduli isto što i $(\mathfrak{g}, K)-$moduli. Kao vektorski prostor $R(\mathfrak{g}, K)$ će biti $R(K)\otimes_{U(\mathfrak{k})}U(\mathfrak{g})$, a množenje na tom prostoru ćemo definirati. Tu konstrukciju ćemo provesti u dva koraka. Najprije ćemo definirati algebru $R(U(\mathfrak{g}), K)$, koja se kao vektorski prostor podudara sa $R(K) \otimes_{\mathbb{C}} U(\mathfrak{g})$, i u tom koraku ćemo zaboraviti da je $U(\mathfrak{k}) \subseteq U(\mathfrak{g})$ i da $U(\mathfrak{k})$ djeluje zdesna na $R(K)$, a u drugom koraku ćemo prijeći na kvocijent $R(K) \otimes_{\mathbb{C}} U(\mathfrak{g}) \to R(K) \otimes_{U(\mathfrak{k})} U(\mathfrak{g})$.

Slabi par je uređen par $(\mathcal{A}, K)$ takav da vrijedi:

(i) K je kompaktna Liejeva grupa.

(ii) $\mathcal{A}$ je kompleksna asocijativna unitalna algebra.

(iii) Zadana je lokalno konačna reprezentacija

$$Ad : K \longrightarrow Aut(\mathcal{A}).$$

Primjer slabog para je $(U(\mathfrak{g}), K)$ ako je $(\mathfrak{g}, K)$ par.

$(\mathcal{A}, K)-$**modul** je lijevi $\mathcal{A}-$modul V (dakle i vektorski prostor nad $\mathbb{C}$) na kome je zadana lokalno konačna reprezentacija π grupe K tako da vrijedi:

$$\pi(x)(av) = [(Ad\, x)a](\pi(x)v), \qquad x \in K,\ a \in \mathcal{A},\ v \in V.$$

Sjetimo se da je

$$R(K) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{A} \simeq R(K) \otimes_{C(K)} C(K, \mathcal{A}).$$

Pri tome je izomorfizam slijeva na desno dan sa

$$T \otimes_{\mathbb{C}} a \mapsto T \otimes_{C(K)} \underline{a}$$

gdje je $\underline{a}$ konstantna funkcija $x \mapsto a$, $x \in K$. Inverzni izomorfizam zdesna na lijevo dan je na sljedeći način: neka je $F \in C(K, \mathcal{A})$, neka je V konačnodimenzionalan $Ad-$invarijantan potprostor od $\mathcal{A}$ koji sadrži $F(K)$, neka je $\{a_i\}$ baza od V i neka je $\{a_i^*\}$ dualna baza od V^*; tada je inverzni izomorfizam dana sa

$$T \otimes_{C(K)} F \mapsto \sum_i \langle F(\cdot), a_i^* \rangle T \otimes_{\mathbb{C}} a_i, \qquad T \in R(K).$$

Propozicija 9.1 *Postoji izomorfizam vektorskih prostora*

$$\tau : R(K) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A} \otimes_{\mathbb{C}} R(K)$$

takav da za $T \in R(K)$ i $a \in \mathcal{A}$ vrijedi:

Neka je V konačnodimenzionalan $Ad-$invarijantan potprostor od $\mathcal{A}$ koji sadrži a, neka je $\{a_i\}$ baza od V i neka je $\{a_i^*\}$ dualna baza od V^*. Tada je

$$\tau(T \otimes_{\mathbb{C}} a) = \sum_i a_i \otimes_{\mathbb{C}} \langle Ad(\cdot)a, a_i^* \rangle T, \qquad \tau^{-1}(a \otimes_{\mathbb{C}} T) = \sum_i \langle Ad(\cdot)^{-1}a, a_i^* \rangle T \otimes_{\mathbb{C}} a_i.$$

Zadatak 9.1 *Dokažite propoziciju 9.1. koristeći izomorfizam*

$$R(K) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{A} \simeq R(K) \otimes_{C(K)} C(K, \mathcal{A})$$

iz propozicije 7.8 i analogni zomorfizam

$$\mathcal{A} \otimes_{\mathbb{C}} R(K) \simeq C(K, \mathcal{A}) \otimes_{\mathbb{C}} R(K).$$

Propozicija 9.2 *Postoji jedinstveno bilinearno preslikavanje*

$$\Phi : (R(K \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{A}) \times (R(K) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{A}) \to R(K) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{A}$$

takvo da vrijedi:

Ako su $S, T \in R(K)$, $a, b \in \mathcal{A}$, $\{a_i\}$ baza konačnodimenzionalnog $Ad-$invarijantnog potproszora V od $\mathcal{A}$ koji sadrži a i $\{a_i^*\}$ dualna baza od V^* onda je

$$\Phi(S \otimes_{\mathbb{C}} a, T \otimes_{\mathbb{C}} b) = \sum_i S * T_i \otimes_{\mathbb{C}} a_i b, \qquad T_i = \langle Ad(\cdot)^{-1}a, a_i^* \rangle T.$$

Dokaz: Budući da $\{S \otimes_{\mathbb{C}} a;\ S \in R(K),\ a \in \mathcal{A}\}$ razapinje prostor $R(K) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{A}$, jedinstvenost je očigledna.

Dokažimo egzistenciju. Prema propoziciji 9.1. imamo izomorfizam

$$\tau^{-1} : \mathcal{A} \otimes_{\mathbb{C}} R(K) \longrightarrow R(K) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{A}$$

takav da uz uvedene oznake vrijedi

$$\tau^{-1}(a \otimes_{\mathbb{C}} T) = \sum_i T_i \otimes_{\mathbb{C}} a_i.$$

Definiramo sada preslikavanje

$$\psi : [\mathcal{A} \otimes_{\mathbb{C}} R(K)] \times \mathcal{A} \longrightarrow R(K) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{A}$$

na sljedeći način:

$$\psi(\sigma, b) = \tau^{-1}(\sigma)b, \qquad \sigma \in \mathcal{A} \otimes R(K),\ b \in \mathcal{A},$$

pri čemu je $R(K) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{A}$ na prirodan način desni $\mathcal{A}-$modul. Budući da je τ^{-1} linearno, preslikavanje ψ je bilinearno. Stoga postoji jedinstveno linearno preslikavanje

$$\Psi : \mathcal{A} \otimes_{\mathbb{C}} R(K) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{A} \longrightarrow R(K) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{A}$$

takvo da vrijedi

$$\Psi(\sigma \otimes_{\mathbb{C}} b) = \tau^{-1}(\sigma)b, \qquad \sigma \in \mathcal{A} \otimes_{\mathbb{C}} R(K),\ b \in \mathcal{A}.$$

Tada je za $a, b \in \mathcal{A}$ i $T \in R(K)$:

$$\Psi(a \otimes_{\mathbb{C}} T \otimes_{\mathbb{C}} b) = \tau^{-1}(a \otimes_{\mathbb{C}} T)b = \sum_i T_i \otimes_{\mathbb{C}} a_i b.$$

Definiramo sada preslikavanje

$$\omega : R(K) \times (\mathcal{A} \otimes_{\mathbb{C}} R(K) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{A}) \longrightarrow R(K) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{A}$$

na sljedeći način:

$$\omega(S, \alpha) = S * \Psi(\alpha), \qquad S \in R(K),\ \alpha \in \mathcal{A} \otimes_{\mathbb{C}} R(K) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{A},$$

pri čemu je $R(K) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{A}$ na prirodan način preko konvolucije lijevi $R(K)-$modul. Tada je preslikavanje ω bilinearno, pa postoji linearno preslikavanje

$$\Omega : R(K) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{A} \otimes_{\mathbb{C}} R(K) \otimes \mathcal{A} \longrightarrow R(K) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{A}$$

takvo da je

$$\Omega(S \otimes_{\mathbb{C}} \alpha) = \omega(S, \alpha), \qquad S \in R(K),\ \alpha \in \mathcal{A} \otimes_{\mathbb{C}} R(K) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{A}.$$

Tada za $S, T \in R(K)$ i $a, b \in \mathcal{A}$ imamo

$$\Omega(S \otimes_{\mathbb{C}} a \otimes_{\mathbb{C}} T \otimes_{\mathbb{C}} b) = \omega(S, a \otimes_{\mathbb{C}} T \otimes_{\mathbb{C}} b) = S * \Psi(a \otimes_{\mathbb{C}} T \otimes_{\mathbb{C}} b) = \sum_i S * T_i \otimes_{\mathbb{C}} a_i b.$$

Sada za $\lambda, \mu \in R(K) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{A}$ definiramo

$$\Phi(\lambda, \mu) = \Omega(\lambda \otimes_{\mathbb{C}} \mu).$$

Budući da je $(\lambda, \mu) \mapsto \lambda \otimes_{\mathbb{C}} \mu$ bilinearno i Ω linearno, slijedi da je preslikavanje Φ bilinearno. Očito Φ ima traženo svojstvo.

Pomoću preslikavanja Φ iz propozicije 9.2. definiramo produkt na vektorskom prostoru $R(K) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{A}$:

$$\alpha \cdot \beta = \Phi(\alpha, \beta) \qquad \alpha, \beta \in R(K) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{A}.$$

To množenje jest bilinearno, a da bismo dokazali da je asocijativno, trebaju nam još neka razmatranja o $(\mathcal{A}, K)-$modulima.

Propozicija 9.3 *Neka je V $(\mathcal{A}, K)-$modul s reprezentacijom π grupe K. Postoje jedinstvena linearna preslikavanja*

$$\mu_1 : R(K) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{A} \longrightarrow L(V), \qquad \mu_2 : \mathcal{A} \otimes_{\mathbb{C}} R(K) \longrightarrow L(V)$$

takva da je

$$\mu_1(T \otimes_{\mathbb{C}} a)v = \pi(T)(av), \qquad \mu_2(a \otimes_{\mathbb{C}} T)v = a(\pi(T)v), \qquad a \in \mathcal{A},\ T \in R(K),\ v \in V.$$

Nadalje za izomorfizam $\tau : R(K) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{A} \to \mathcal{A} \otimes_{\mathbb{C}} R(K)$ iz propozicije 9.1. vrijedi

$$\mu_1 = \mu_2 \circ \tau, \qquad \mu_2 = \mu_1 \circ \tau^{-1}.$$

Dokaz: Za $T \in R(K)$ i $a \in \mathcal{A}$ definiramo preslikavanje $A(T,a) : V \to V$ na sljedeći način:

$$A(T,a)v = \pi(T)(av), \qquad v \in V.$$

Operator $A(T,a)$ je očito linearan i preslikavanje $(T,a) \mapsto A(T,a)$ je bilinearno sa $R(K) \times \mathcal{A}$ u $L(V)$. Po univerzalnom svojstvu tenzorskog produkta postoji jedinstveno linearno preslikavanje $\mu_1 : R(K) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{A} \to L(V)$ takvo da je

$$\mu_1(T \otimes_{\mathbb{C}} a) = \pi(T)(av), \qquad T \in R(K),\ a \in \mathcal{A},\ v \in V.$$

Sasvim analogno postoji jedinstveno linearno preslikavanje $\mu_2 : \mathcal{A} \otimes_{\mathbb{C}} R(K) \to L(V)$ takvo da je

$$\mu_2(a \otimes_{\mathbb{C}} T) = a(\pi(T)v), \qquad a \in \mathcal{A},\ T \in R(K),\ v \in V.$$

Neka su sada $T \in R(K)$ i $a \in \mathcal{A}$, neka je $\{a_i\}$ baza konačnodimenzionalnog $Ad-$invarijantnog potprostora od $\mathcal{A}$ koji sadrži a i $\{a_i^*\}$ njoj dualna baza. dualnog prostora. Tada je

$$(\mu_2 \circ \tau)(T \otimes_{\mathbb{C}} a)v = \mu_2\left(\sum_i a_i \otimes_{\mathbb{C}} \langle Ad(\cdot)a, a_i^*\rangle T\right) v = \sum_i a_i \pi(\langle Ad(\cdot)a, a_i^*\rangle T)v.$$

Imamo

$$\pi(\langle Ad(\cdot)a, a_i^*\rangle T)v = [\langle Ad(\cdot)a, a_i^*\rangle T](\pi(\cdot)v) = T(\langle Ad(\cdot)a, a_i^*\rangle \pi(\cdot)v) = \int_K \langle (Ad\,x)a, a_i^*\rangle \pi(x)v\mathrm{d}T(x).$$

Dakle,

$$(\mu_2 \circ \tau)(T \otimes_{\mathbb{C}} a)v = \sum_i \int_K \langle (Ad\,x)a, a_i^*\rangle \pi(x)v\mathrm{d}T(x) = \int_K \left[\sum_i \langle (Ad\,x)a, a_i^*\rangle a_i\right] \pi(x)v\mathrm{d}T(x) =$$

$$= \int_K [(Ad\,x)a]\pi(x)v\mathrm{d}T(x) = \int_K \pi(x)(av)\mathrm{d}T(x) = \pi(T)(av) = \mu_1(T \otimes_{\mathbb{C}} a)v.$$

Time je propozicija dokazana.

Vektorski prostor $\mathcal{A} \otimes_{\mathbb{C}} R(K)$ je očito lijevi $\mathcal{A}-$modul uz djelovanje

$$a(b \otimes_{\mathbb{C}} T) = ab \otimes_{\mathbb{C}} T, \qquad a, b \in \mathcal{A},\ T \in R(K).$$

Nadalje, Ad je lokalno konačna reprezentacija grupe K na prostoru $\mathcal{A}$ i λ je lokalno konačna reprezentacija od K na $R(K)$, dakle, $\omega = Ad \otimes \lambda$ je lokalno konačna reprezentacija od K na prostoru $\mathcal{A} \otimes_{\mathbb{C}} R(K)$.

Propozicija 9.4 *Uz tako definiranu reprezentaciju ω $\mathcal{A} \otimes_{\mathbb{C}} R(K)$ je $(\mathcal{A}, K)-$modul.*

Dokaz: Za $x \in K$, $a, b \in \mathcal{A}$ i $T \in R(K)$ imamo redom

$$\omega(x)(a(b \otimes_{\mathbb{C}} T)) = \omega(x)(ab \otimes_{\mathbb{C}} T) = (Ad\,x)(ab) \otimes_{\mathbb{C}} \lambda(x)T =$$

$$= [(Ad\,x)a][(Ad\,x)b] \otimes_{\mathbb{C}} \lambda(x)T = [(Ad\,x)a] = [(Ad\,x)a]((Ad\,x)b \otimes_{\mathbb{C}} \lambda(x)T) = [(Ad\,x)a]\omega(x)(b \otimes_{\mathbb{C}} T).$$

Time je dokazano da je $\mathcal{A} \otimes_{\mathbb{C}} R(K)$ s reprezentacijom ω $(\mathcal{A}, K)-$modul.

Tu strukturu $(\mathcal{A}, K)-$modula prenesemo sa $\mathcal{A} \otimes_{\mathbb{C}} R(K)$ na $R(K) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{A}$ pomoću izomorfizma τ^{-1}. Tada $R(K) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{A}$ postaje $(\mathcal{A}, K)-$modul uz lijevo djelovanje od $\mathcal{A}$ dano sa

$$a[\tau^{-1}(b \otimes_{\mathbb{C}} T] = \tau^{-1}(ab \otimes_{\mathbb{C}} T)$$

i uz reprezentaciju π grupe K definiranu sa

$$\pi(x)[\tau^{-1}(b \otimes_{\mathbb{C}} T)] = \tau^{-1}((Ad\, x)b \otimes_{\mathbb{C}} \lambda(x)T).$$

Za tu strukturu $(\mathcal{A}, K)-$modula imamo odgovarajuće linearno preslikavanje

$$\mu_1 : R(K) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{A} \longrightarrow L(R(K) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{A})$$

iz propozicije 9.3. takvo da je

$$\mu_1(S \otimes_{\mathbb{C}} a)\alpha = \pi(S)a\alpha, \qquad \alpha \in R(K) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{A},\ a \in \mathcal{A},\ S \in R(K).$$

Pomoću tog preslikavanja možemo također definirati bilinearno množenje

$$(\alpha, \beta) \mapsto \mu_1(\alpha)\beta$$

na vektorskom prostoru $R(K) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{A}$. Cilj nam je da dokažemo da se to množenje podudara s onim prije definiranim. To će nam potom omogućiti da dokažemo asocijativnost.

Da bismo to dokazali, prijeći ćemo na izomorfne vektorske prostore

$$R(K) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{A} \simeq R(K) \otimes_{C(K)} C(K, \mathcal{A}), \qquad \mathcal{A} \otimes_{\mathbb{C}} R(K) \simeq C(K, \mathcal{A} \otimes_{C(K)} R(K)$$

i na njima raspoznati izomorfizme τ i τ^{-1}.

U daljnjem izvršimo identifikacije

$$R(K) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{A} = R(K) \otimes_{C(K)} C(K, \mathcal{A}) \qquad \text{i} \mathcal{A} \otimes_{\mathbb{C}} R(K) = C(K, \mathcal{A} \otimes_{C(K)} R(K)$$

i to tako da za $T \in R(K)$ i za $a \in \mathcal{A}$ i za konstantnu funkciju $x \mapsto a$, koju označavamo sa $\underline{a}$, vrijedi

$$T \otimes_{\mathbb{C}} a = T \otimes_{C(K)} \underline{a} \qquad \text{i} \qquad a \otimes_{\mathbb{C}} T = \underline{a} \otimes_{C(K)} T.$$

Propozicija 9.5 *Uz uvedene identifikacije za $T \in R(K)$ i za funkciju $a(\cdot) \in C(K, \mathcal{A})$ vrijedi*

$$\tau(T \otimes_{C(K)} a(\cdot)) = Ad(\cdot)a(\cdot) \otimes_{C(K)} T, \qquad \tau^{-1}(a(\cdot) \otimes_{C(K)} T) = T \otimes_{C(K)} Ad(\cdot)^{-1}a(\cdot).$$

Dokaz: Dovoljno je dokazati prvu jednakost, jer druga slijedi primjenom τ^{-1} i zamjenom funkcije $a(\cdot)$ s funkcijom $Ad(\cdot)^{-1}a(\cdot)$. Dokažimo najprije tu jednakost u slučaju da je funkcija $a(\cdot) \in C(K, \mathcal{A})$ konstantna, tj. $a(\cdot) = \underline{a}$, $a \in \mathcal{A}$. Neka je $\{a_i\}$ baza $Ad-$invarijantnog konačnodimenzionalnog potprostora od $\mathcal{A}$ koji sadrži a i neka je $\{a_i^*\}$ dualna baza. Prema propoziciji 9.1. je

$$\tau(T \otimes_{C(K)} \underline{a} = \tau(T \otimes_{\mathbb{C}} a) = \sum_i a_i \otimes_{\mathbb{C}} \langle Ad(\cdot)a, a_i^* \rangle T =$$

$$= \sum_i \underline{a_i} \otimes_{C(K)} \langle Ad(\cdot)a, a_i^* \rangle T = \sum_i \langle Ad(\cdot)a, a_i^* \rangle a_i \otimes_{C(K)} T = Ad(\cdot)a \otimes_{C(K)} T.$$

Neka je sada $a(\cdot) \in C(K, \mathcal{A})$ proizvoljna. To znači da je njena slika $a(K)$ sadržana u $Ad-$invarijantnom konačnodimenzionalnom potprostoru V od $\mathcal{A}$ i da je funkcija $x \mapsto a(x)$ sa K u V klase C^∞. Neka je $\{a_i\}$ baza od V i $\{a_i^*\}$ njoj dualna baza od V^*. Tada je

$$a(\cdot) = \sum_i \langle a(\cdot), a_i^* \rangle a_i,$$

pa imamo

$$\tau(T \otimes_{C(K)} a(\cdot)) = \sum_i \tau(T \otimes_{C(K)} \langle a(\cdot), a_i^* \rangle a_i) = \sum_i \tau(\langle a(\cdot), a_i^* \rangle T \otimes_{C(K)} a_i) =$$

$$= \sum_i Ad(\cdot)a_i \otimes_{C(K)} \langle a(\cdot), a_i^* \rangle T = \sum_i \langle a(\cdot), a_i^* \rangle Ad(\cdot) a_i \otimes_{C(K)} T =$$

$$= Ad(\cdot) \left[\sum_i \langle a(\cdot), a_i^* \rangle a_i \right] \otimes_{C(K)} T = Ad(\cdot)a(\cdot) \otimes_{C(K)} T.$$

Propozicija 9.6 *Uz uvedene identifikacije za $x \in K$, $a \in \mathcal{A}$, $T \in R(K)$ i $b(\cdot) \in C(K, \mathcal{A})$ vrijedi*

$$\pi(x)(T \otimes_{C(K)} b(\cdot)) = \lambda(x)T \otimes_{C(K)} \lambda(x)b(\cdot), \qquad a(T \otimes_{C(K)} b(\cdot)) = T \otimes_{C(K)} [Ad(\cdot)^{-1}a]b(\cdot).$$

Dokaz: Imamo

$$\pi(x)\tau^{-1}(a \otimes_{\mathbb{C}} S) = \tau^{-1}((Ad\, x)a \otimes_{\mathbb{C}} \lambda(x)S). \qquad (*)$$

Neka je $\beta \in R(K) \otimes_{C(K)} C(K, \mathcal{A})$ oblika

$$\beta = \tau^{-1}(b(\cdot) \otimes_{C(K)} T) = T \otimes_{C(K)} Ad(\cdot)^{-1} b(\cdot).$$

Prevest ćemo β u sumu elemenata oblika $\tau^{-1}(a \otimes_{\mathbb{C}} S)$ i zatim primjeniti formulu $(*)$.

Neka je V konačnodimenzionalan $Ad-$invarijantan potprostor od $\mathcal{A}$ koji sadrži $b(K)$, neka je $\{a_i\}$ baza od V i neka je $\{a_i^*\}$ dualna baza od V^*. Tada je

$$b(\cdot) = \sum_i \langle b(\cdot), a_i^* \rangle a_i,$$

dakle,

$$\beta = \tau^{-1} \left(\sum_i \langle b(\cdot), a_i^{-1} \rangle a_i \otimes_{C(K)} T \right) = \sum_i \tau^{-1}(a_i \otimes_{\mathbb{C}} \langle b(\cdot), a_i^* \rangle T).$$

Pomoću formule $(*)$ imamo

$$\pi(x)\beta = \sum_i \tau^{-1}((Ad\, x)a_i \otimes_{\mathbb{C}} \langle b(x^{-1}\cdot), a_i^* \lambda(x)T) =$$

$$= \tau^{-1} \left((Ad\, x) \left[\sum_i \langle b(x^{-1}\cdot), a_i^* \rangle a_i \right] \otimes_{C(K)} \lambda(x)T \right) = \tau^{-1}((Ad\, x)b(x^{-1}\cdot) \otimes_{C(K)} \lambda(x)T).$$

Dakle,

$$\pi(x)(b(\cdot) \otimes_{C(K)} T) = \tau^{-1}((Ad\, x)b(x^{-1}\cdot) \otimes_{C(K)} \lambda(x)T).$$

Prema propoziciji 9.5. slijedi

$$\pi(x)(T \otimes_{C(K)} Ad(\cdot)^{-1}b(\cdot)) = \lambda(x)T \otimes_{C(K)} Ad(\cdot)^{-1}(Ad\, x)b(x^{-1}\cdot).$$

Uvrstimo li ovdje $Ad(\cdot)b(\cdot)$ umjesto $b(\cdot)$, dobivamo

$$\pi(x)(T \otimes_{C(K)} b(\cdot)) = \lambda(x)T \otimes_{C(K)} Ad(\cdot)^{-1}(Ad\, x)Ad(x^{-1}\cdot)b(x^{-1}\cdot) =$$

$$= \lambda(x)T \otimes_{C(K)} b(x^{-1}\cdot) = \lambda(x)T \otimes_{C(K)} \lambda(x)b(\cdot).$$

Time je prva jednakost dokazana.

Za dokaz druge jednakosti imamo sličan račun:

$$a\beta = a\tau^{-1}(b(\cdot)\otimes_{C(K)} T) = a\tau^{-1}\left(\sum_i \langle b(\cdot), a_i^*\rangle a_i \otimes_{C(K)} T\right) = a\tau^{-1}\left(\sum_i a_i \otimes_{\mathbb{C}} \langle b(\cdot), a_i^*\rangle T\right) =$$

$$= \tau^{-1}\left(\sum_i a a_i \otimes_{\mathbb{C}} \langle b(\cdot), a_i^*\rangle T\right) = \tau^{-1}\left(a\left[\sum_i \langle b(\cdot), a_i^*\rangle a_i\right]\otimes_{C(K)} T\right) = \tau^{-1}(ab(\cdot)\otimes_{C(K)} T).$$

Dakle,

$$a\tau^{-1}(b(\cdot)\otimes_{C(K)} T) = \tau^{-1}(ab(\cdot)\otimes_{C(K)} T).$$

Prema propoziciji 9.5. je

$$a(T\otimes_{C(K)} Ad(\cdot)^{-1}b(\cdot)) = T\otimes_{C(K)} Ad(\cdot)^{-1}[ab(\cdot)].$$

Uvrstimo li ovdje $Ad(\cdot)b(\cdot)$ umjesto $b(\cdot)$, dobivamo

$$a(T\otimes_{C(K)} b(\cdot)) = T\otimes_{C(K)} Ad(\cdot)^{-1}[aAd(\cdot)b(\cdot)] = T\otimes_{C(K)} [Ad(\cdot)^{-1}a]b(\cdot).$$

Propozicija 9.7 *Za $\alpha, \beta \in R(K)\otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{A})R(K)\otimes_{C(K)} C(K,\mathcal{A})$ vrijedi*

$$\alpha\cdot\beta = \mu_1(\alpha)\beta.$$

Dokaz: Tvrdnju je dovoljno dokazati za

$$\alpha = S\otimes_{\mathbb{C}} a, \qquad \beta = T\otimes_{\mathbb{C}} b, \qquad S,T\in R(K), \quad a,b\in\mathcal{A}.$$

Neka je kao i prije V konačnodimenzionalan $Ad-$invarijantan potprostor od $\mathcal{A}$ koji sadrži a, $\{a_i\}$ baza od V, $\{a_i^*\}$ dualna baza od V^*. Uz oznaku $T_i = \langle Ad(\cdot)^{-1}a, a_i^*\rangle T$ imamo redom

$$\mu_1(S\otimes_{\mathbb{C}} a)(T\otimes_{\mathbb{C}} b) = \pi(S)(a(T\otimes_{\mathbb{C}} b)) = \pi(S)(T\otimes_{C(K)}[Ad(\cdot)^{-1}a]b) =$$

$$= \pi(S)\left(T\otimes_{C(K)}\sum_i \langle Ad(\cdot)^{-1}a, a_i^*\rangle a_i b\right) = \pi(S)\left(\sum_i T_i\otimes_{\mathbb{C}} a_i b\right) = \int_K \sum_i \pi(x)(T_i\otimes_{\mathbb{C}} a_i b)\mathrm{d}S(x).$$

Prema propoziciji 9.6. to je dalje jednako

$$\int_K \sum_i \lambda(x)T_i\otimes_{\mathbb{C}} a_i b\,\mathrm{d}S(x) = \sum_i S * T_i \otimes_{\mathbb{C}} a_i b = (S\otimes_{\mathbb{C}} a)\cdot(T\otimes_{\mathbb{C}} b).$$

Teorem 9.1 *Neka je $(\mathcal{A}, K)$ slabi par. Množenje na $R(K)\otimes_{\mathbb{C}}\mathcal{A}$ je asocijativno i uz to množenje $R(K)\otimes_{\mathbb{C}}\mathcal{A}$ je aproksimativno unitalna algebra. Ako je V $(\mathcal{A},K)-$modul, preslikavanje $\mu_1 : R(K)\otimes_{\mathbb{C}}\mathcal{A}\to L(V)$ iz propozicije 9.3. je homomorfizam algebri.*

Dokaz: (1) Neka je V $(\mathcal{A}, K)-$modul s reprezentacijom π. Dokazat ćemo da je tada

$$\mu_1(\alpha)(\mu_1(\beta)v) = \mu_1(\alpha\cdot\beta)v, \qquad v\in V,\ \alpha,\beta\in R(K)\otimes_{\mathbb{C}}\mathcal{A}.$$

Tu jednakost dovoljno je dokazati u slučaju

$$\alpha = S\otimes_{\mathbb{C}} a, \qquad \beta = T\otimes_{\mathbb{C}} b, \qquad S,T\in R(K), \quad a,b\in\mathcal{A}.$$

Uz prije uvedene oznake korištenjem propozicija 9.1., 9.2. i 9.3. tada imamo redom

$$\mu_1(\alpha)(\mu_1(\beta)v) = \mu_1(\alpha)(\pi(T)(bv)) = \pi(S)(a\pi(T)(bv)) = \pi(S)(\mu_2(a \otimes_{\mathbb{C}} T)(bv)) =$$

$$= \pi(S)((\mu_1 \circ \tau^{-1})(a \otimes_{\mathbb{C}} T)(bv)) = \pi(S)\left(\mu_1\left(\sum_i T_i \otimes_{\mathbb{C}} a_i\right)(bv)\right) = \pi(S)\sum_i \pi(T_i)(a_i bv) =$$

$$= \sum_i \pi(S * T_i)(a_i bv) = \mu_1\left(\sum_i S * T_i \otimes_{\mathbb{C}} a_i b\right)v = \mu_1(\alpha \cdot \beta)v.$$

(2) Uzmimo sada da je $V = R(K) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{A}$. Prema propoziciji 9.7. i prema (1) za $\alpha, \beta, \gamma \in R(K) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{A}$ imamo

$$\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) = \mu_1(\alpha)(\mu_1(\beta)\gamma) = \mu_1(\alpha \cdot \beta)\gamma = (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma.$$

Dakle, množenje je asocijativno.

(3) U daljnjem izostavljamo oznaku τ, tj. identificiramo $R(K) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{A}$ sa $\mathcal{A} \otimes_{\mathbb{C}} R(K)$ i to tako da vrijedi:

Ako su $a \in \mathcal{A}$ i $T \in R(K)$ i ako je $\{a_i\}$ baza konačnodimenzionalnog $Ad-$invarijantnog potprostora od $\mathcal{A}$ koji sadrži a i $\{a_i^*\}$ njoj dualna baza, onda je

$$a \otimes_{\mathbb{C}} T = \sum_i \langle Ad(\cdot)^{-1}a, a_i^*\rangle T \otimes_{\mathbb{C}} a_i, \qquad T \otimes_{\mathbb{C}} a = \sum_i a_i \otimes_{\mathbb{C}} \langle Ad(\cdot)a, a_i^*\rangle T.$$

Nadalje, uz te oznake i za $S \in R(K)$ i $b \in \mathcal{A}$ je

$$(S \otimes_{\mathbb{C}} a) \cdot (T \otimes_{\mathbb{C}} b) = \sum_i S * \langle Ad(\cdot)^{-1}a, a_i^*\rangle T \otimes_{\mathbb{C}} a_i b.$$

Primijetimo da je tada

$$T \otimes_{\mathbb{C}} 1 = 1 \otimes_{\mathbb{C}} T \qquad \forall T \in R(K)$$

gdje je 1 jedinica u algebri $\mathcal{A}$. Doista, tada je $\{1\}$ baza jednodimenzionalnog potprostora koji je $Ad-$invarijantan, jer je po pretpostavci $Ad\,x$ automorfizam unitalne algebre $\mathcal{A}$. Nadalje, vrijedi

$$(S \otimes_{\mathbb{C}} 1) \cdot (T \otimes_{\mathbb{C}} b) = s * T \otimes_{\mathbb{C}} b, \qquad (b \otimes_{\mathbb{C}} T) \cdot (1 \otimes_{\mathbb{C}} S) = b \otimes_{\mathbb{C}} T * S.$$

Dakle, $T \mapsto T \otimes_{\mathbb{C}} 1$ je (očito injektivni) homomorfizam algebre $R(K)$ u algebru $R(K) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{A}$.

(4) Treba još dokazati da je algebra $R(K) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{A}$ aproksimativno unitalna. Precizno, dokazat ćemo da je

$$\{\chi_A \otimes_{\mathbb{C}} 1;\ A \text{ konačan podskup od } \hat{K}\}$$

aproksimativna jedinica u algebri $R(K) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{A}$. Doista, članovi tog skupa jesu idempotenti i

$$(\chi_A \otimes_{\mathbb{C}} 1) \cdot (\chi_B \otimes_{\mathbb{C}} 1) = \chi_A * \chi_B \otimes_{\mathbb{C}} 1 = \chi_{A \cap B} \otimes_{\mathbb{C}} 1.$$

Nqka je $\alpha \in R(K) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{A}$. Tada je α konačna suma oblika

$$\alpha = \sum_i S_i \otimes_{\mathbb{C}} a_i, \qquad S_i \in R(K),\ a_i \in \mathcal{A}.$$

Neka je $A \subseteq \hat{K}$ konačan skup takav da je $\chi_A * S_i = S_i\ \forall i$. Tada je očito

$$(\chi_A \otimes_{\mathbb{C}} 1) \cdot \alpha = \alpha.$$

S druge strane, α se može pisati i kao konačna suma oblika

$$\alpha = \sum_j b_j \otimes_{\mathbb{C}} T_j, \qquad b_j \in \mathcal{A}, \ T_j \in R(K).$$

Neka je $B \subseteq \hat{K}$ konačan skup takav da je $T_j * \chi_B = T_j \ \forall j$. Tada je očito

$$\alpha \cdot (\chi_B \otimes_{\mathbb{C}} 1) = \alpha \cdot (1 \otimes_{\mathbb{C}} \chi_B) = \alpha.$$

Stavimo sada $C = A \cup B$. Tada je

$$\chi_C * \chi_A = \chi_A * \chi_C = \chi_A \qquad \text{i} \qquad \chi_C * \chi_B = \chi_B * \chi_C = \chi_B,$$

dakle,

$$(\chi_C \otimes_{\mathbb{C}} 1) \cdot \alpha = (\chi_C \otimes_{\mathbb{C}} 1) \cdot (\chi_A \otimes_{\mathbb{C}} 1) \cdot \alpha = (\chi_C * \chi_A \otimes_{\mathbb{C}} 1) \cdot \alpha = (\chi_A \otimes_{\mathbb{C}} 1) \cdot \alpha = \alpha,$$

$$\alpha \cdot (\chi_C \otimes_{\mathbb{C}} 1) = \alpha \cdot (\chi_B \otimes_{\mathbb{C}} 1) \cdot (\chi_C \otimes_{\mathbb{C}} 1) = \alpha \cdot (\chi_B * \chi_C \otimes_{\mathbb{C}} 1) = \alpha \cdot (\chi_B \otimes_{\mathbb{C}} 1) = \alpha.$$

Time je teorem u potpunosti dokazan.

Definiramo **Heckeovu algebru slabog para** $(\mathcal{A}, K)$ kao algebru

$$R(\mathcal{A}, K) = R(K) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{A} = \mathcal{A} \otimes_{\mathbb{C}} R(K)$$

uz definirano množenje. Ako je V $(\mathcal{A}, K)-$modul, u daljnjem izostavljamo oznaku $\mu_1 = \mu_2$. Dakle, V postaje lijevi $R(\mathcal{A}, K)-$modul i vrijedi

$$(T \otimes_{\mathbb{C}} a)v = \pi(T)(av), \qquad (a \otimes_{\mathbb{C}} T)v = a(\pi(T)v).$$

Teorem 9.2 *Neka je V $(\mathcal{A}, K)-$modul. Tada je V kao $R(\mathcal{A}, K)-$modul aproksimativno unitalan. Svaki se aproksimativno unitalan $R(\mathcal{A}, K)-$modul dobiva na taj način iz jedinstvenog $(\mathcal{A}, K)-$modula. Napokon, za dva $(\mathcal{A}, K)-$modula V i W vrijedi*

$$Hom_{\mathcal{A},K}(V, W) = Hom_{R(\mathcal{A},K)}(V, W).$$

Dokaz: Prema teoremu 7.1. V je aproksimativno unitalni $R(K)-$modul, a prema konstrukciji aproksimativno unitalne jedinice u algebri $R(\mathcal{A}, K)$ neposredno slijedi da je V aproksimativno unitalan $R(\mathcal{A}, K)-$modul.

Neka je sada V aproksimativno unitalan $R(\mathcal{A}, K)-$modul. Smještanjem $R(K)$ u $R(\mathcal{A}, K)$ kao $1 \otimes_{\mathbb{C}} R(K) = R(K) \otimes_{\mathbb{C}} 1$ slijedi da je V aproksimativno unitalan $R(K)-$modul Prema teoremu 7.1. postoji jedinstvena lokalno konačna reprezentacija π grupe K na prostoru V takva da je

$$(T \otimes_{\mathbb{C}} 1)v = \pi(T)v, \qquad T \in R(K), \ v \in V.$$

Tada je

$$\pi(x) = \pi(\delta_x), \qquad x \in K.$$

Definirat ćemo sada na V strukturu lijevog $\mathcal{A}-$modula. Za $v \in V$ neka je $A \subseteq \hat{K}$ konačan skup takav da je $\pi(\chi_A)v = v$. Tada stavljamo

$$av = (a \otimes_{\mathbb{C}} \chi_A)v, \qquad a \in \mathcal{A}.$$

Prije svega, dokažimo da je ova definicija smislena, tj. da ne ovisi o izboru konačnog skupa $A \subseteq \hat{K}$ takvog da je $\pi(\chi_A)v$. Neka je i $B \subseteq \hat{K}$ konačan skup takav da je $\pi(\chi_B)v = v$. Tada je

$$\pi(\chi_{A\cap B})v = \pi(\chi_A * \chi_B)v = \pi(\chi_A)\pi(\chi_B)v = \pi(\chi_A)v = v.$$

Stoga imamo redom

$$(a \otimes_{\mathbb{C}} \chi_{A\cap B})v = (a \otimes_{\mathbb{C}} \chi_A)(1 \otimes_{\mathbb{C}} \chi_B)v = (a \otimes_{\mathbb{C}} \chi_A)(\chi_B \otimes_{\mathbb{C}} 1)v = (a \otimes_{\mathbb{C}} \chi_A)\pi(\chi_B)v = (a \otimes_{\mathbb{C}} \chi_A)v.$$

Sasvim analogno dobiva se i $(a \otimes_{\mathbb{C}} \chi_{A\cap B})v = (a \otimes_{\mathbb{C}} \chi_B)v$. Dakle,

$$(a \otimes_{\mathbb{C}} \chi_A)v = (a \otimes_{\mathbb{C}} \chi_B)v.$$

Očito je preslikavanje $a \mapsto av$ linearno. Nadalje, neka su $v, w \in V$ i $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Neka je $A \subseteq \hat{K}$ konačan skup takav da je $\pi(\chi_A)v = v$ i $\pi(\chi_A)w = w$. Tada je i $\pi(\chi_A)(\alpha v + \beta w) = \alpha v + \beta w$. Dakle,

$$a(\alpha v + \beta w) = (a \otimes_{\mathbb{C}} \chi_A)(\alpha v + \beta w) = \alpha(a \otimes_{\mathbb{C}} \chi_A)v + \beta(a \otimes_{\mathbb{C}} \chi_A)w = \alpha av + \beta aw.$$

Dakle, i preslikavanje $v \mapsto av$ je linearno.

Očito imamo

$$1v = (1 \otimes_{\mathbb{C}} \chi_A)v = (\chi \otimes_{\mathbb{C}} 1)v = \pi(\chi_A)v = v.$$

Treba još dokazati kvaziasocijativnost:

$$b(av) = (ba)v, \qquad a, b \in \mathcal{A},\ v \in V.$$

U tu svrhu najprije izaberimo konačan skup $A \subseteq \hat{K}$ takav da je $\pi(\chi_A)v = v$. Zatim izberimo konačan skup $B \subseteq \hat{K}$ koji sadrži A i koji je takav da je $(\chi_B \otimes_{\mathbb{C}} 1)(a \otimes_{\mathbb{C}} \chi_A) = a \otimes_{\mathbb{C}} \chi_A$; to možemo jer je $\{\chi_B \otimes_{\mathbb{C}} 1\}$ aproksimativna jedinica algebre $R(\mathcal{A}, K)$. Tada vrijedi

$$\pi(\chi_B)(av) = (\chi_B \otimes_{\mathbb{C}} 1)((a \otimes_{\mathbb{C}} \chi_A)v) = ((\chi_B \otimes_{\mathbb{C}} 1)(a \otimes_{\mathbb{C}} \chi_A))v = (a \otimes_{\mathbb{C}} \chi_A)v = av.$$

Stoga je

$$b(av) = (b \otimes_{\mathbb{C}} \chi_B)((a \otimes_{\mathbb{C}} \chi_A)v) = ((b \otimes_{\mathbb{C}} \chi_B)(a \otimes_{\mathbb{C}} \chi_A))v = [(b \otimes_{\mathbb{C}} 1)(1 \otimes_{\mathbb{C}} \chi_B)(a \otimes_{\mathbb{C}} \chi_A)]v =$$

$$= [(b \otimes_{\mathbb{C}} 1)(\chi_B \otimes_{\mathbb{C}} 1)(a \otimes_{\mathbb{C}} \chi_A)]v = [(b \otimes_{\mathbb{C}} 1)(a \otimes_{\mathbb{C}} \chi_A)]v = (ba \otimes_{\mathbb{C}} \chi_A)v = (ba)v.$$

Dakle, V je unitalni lijevi $\mathcal{A}-$modul.

Treba vidjeti da je na taj način V postao $(\mathcal{A}, K)-$modul, tj. da vrijedi

$$\pi(x)(av) = [(Ad\, x)a](\pi(x)v), \qquad x \in K,\ a \in \mathcal{A},\ v \in V.$$

Neka su $A, B \subseteq \hat{K}$ kao malo prije:

$$A \subseteq B, \quad \pi(\chi_A)v = v, \quad \pi(\chi_B)av = av, \quad (\chi_B \otimes_{\mathbb{C}} 1)(a \otimes_{\mathbb{C}} \chi_A) = aV\chi_A.$$

Tada je

$$\pi(x)(av) = \pi(\delta_x)\pi(\chi_B)(av) = \pi(\delta_x * \chi_B)(av) = (\delta_x * \chi_B \otimes_{\mathbb{C}} 1)((a \otimes_{\mathbb{C}} \chi_A)v) =$$

$$= [(\delta_x \otimes_{\mathbb{C}} 1)(\chi_B \otimes_{\mathbb{C}} 1)(a \otimes_{\mathbb{C}} \chi_A)]v = [(\delta_x \otimes_{\mathbb{C}} 1)(a \otimes_{\mathbb{C}} \chi_A)]v = [(Ad\, x)a \otimes_{\mathbb{C}} \delta_x * \chi_A]v.$$

Skup $\{\delta_x * \chi_A;\ x \in K\}$ razapinje konačnodimenzionalan potprostor od $R(K)$ pa možemo pretpostaviti da smo $B \supseteq A$ izabrali tako da da vrijedi

$$\chi_B * (\delta_x * \chi_A) = (\delta_x * \chi_A) * \chi_B = \delta_x * \chi_A \qquad \forall x \in K.$$

Tada imamo dalje

$$\pi(x)(av) = [(Ad\,x)a \otimes_{\mathbb{C}} \chi_B * \delta_x * \chi_A]v = ((Ad\,x)a \otimes_{\mathbb{C}} \chi_B)(1 \otimes_{\mathbb{C}} \delta_x * \chi_A)v =$$

$$= ((Ad\,x)a \otimes_{\mathbb{C}} \chi_B)(\pi(\delta_x * \chi_A)v) = (Ad\,x)a \otimes_{\mathbb{C}} \chi_B)(\pi(x)\pi(\chi_A)v) = ((Ad\,x)a \otimes_{\mathbb{C}} \chi_B)(\pi(x)v).$$

Međutim,

$$\pi(\chi_B)(\pi(x)v) = \pi(\chi_B)[\pi(\delta_x)\pi(\chi_A)v] = \pi(\chi_B * \delta_x * \chi_A)v = \pi(\delta_x * \chi_A) = \pi(x)\pi(\chi_A)v = \pi(x)v.$$

Prema tome,

$$\pi(x)(av) = [(Ad\,x)a](\pi(x)v).$$

Time je dokazano da je V $(\mathcal{A}, K)-$modul.

Neka su π i ρ reprezentacije grupe K na $(\mathcal{A}, K)-$modulima V i W i neka je $E \in Hom_{\mathcal{A},K}(V, W)$. Dakle, $E \in L(V, W)$ i vrijedi

$$E(\pi(x)v) = \rho(x)(Ev), \qquad E(av) = a(Ev), \qquad x \in K,\ a \in \mathcal{A},\ v \in V.$$

Iz prve od tih jednakosti slijedi

$$E(\pi(T)v) = \rho(T)(Ev), \qquad T \in R(K),\ v \in V.$$

Dakle,

$$(T \otimes_{\mathbb{C}} a)(Ev) = qrho(T)(a(Ev)) = \rho(T)(E(av)) = E(\pi(T)(av)) = E((T \otimes_{\mathbb{C}} a)v).$$

Dakle, $E \in Hom_{R(\mathcal{A},K)}(V, W)$, tj.

$$(T \otimes_{\mathbb{C}} a)(Ev) = E((T \otimes_{\mathbb{C}} a)v), \qquad T \in R(K),\ a \in \mathcal{A},\ v \in V.$$

Slijedi

$$\rho(T)(a(Ev)) = E(\pi(T)(av)), \qquad T \in R(K),\ a \in \mathcal{A},\ v \in V. \qquad (*)$$

Za $a = 1$ imamo

$$\rho(T)(Ev) = E(\pi(T)v), \qquad T \in R(K),\ v \in V.$$

Odatle je

$$\rho(\delta_x)(Ev) = E(\pi(\delta_x)v) \qquad x \in K,\ v \in V,$$

dakle,

$$\rho(x)E = E\pi(x) \qquad \forall x \in K.$$

Dakle, $E \in Hom_K(V, W)$.

Neka je $a \in \mathcal{A}$ i $v \in V$. Izaberimo konačan skup $A \subseteq \hat{K}$ takav da je

$$\rho(\chi_A)(a(Ev)) = a(Ev) \qquad \text{i} \qquad \pi(\chi_A)(av) = av.$$

Sada u $(*)$ stavimo $T = \chi_A$. Slijedi

$$\rho(\chi_A)(a(Ev)) = E(\pi(\chi_A)(av)) \qquad \Longrightarrow \qquad a(Ev) = E(av).$$

Dakle je i $E \in Hom_{\mathcal{A}}(V, W)$, pa zaključujemo da je $E \in Hom_{\mathcal{A},K}(V, W)$.

Sasvim analogno možemo promatrati i desne module. Pri tome **desni** $(\mathcal{A}, K)-$**modul** V je:

(1) V je desni $\mathcal{A}-$modul.

(2) Grupa K djeluje zdesna lokalno konačno na V $-$ to djelovanje označavamo $v \mapsto vx$, $x \in K$.

(3) Vrijedi
$$(va)x = (vx)((Ad\, x)^{-1}a), \qquad x \in K,\ a \in \mathcal{A},\ v \in V.$$

Sasvim analogno prethodnom teoremu dokazuje se

Teorem 9.3 *Neka je V desni $(\mathcal{A}, K)-$modul. Tada na V postoji jedinstvena struktura desnog $R(\mathcal{A}, K)-$modula takva da je*

$$(v(a \otimes_{\mathbb{C}} T) = (va)T, \qquad v \in V,\ a \in \mathcal{A},\ T \in R(K).$$

Tada je V aproksimativno unitalan desni $R(\mathcal{A}, K)-$modul. Svaki aproksimativno unitalan desni $R(\mathcal{A}, K)-$modul dobiva se na taj način iz jedinstvenog desnog $(\mathcal{A}, K)-$modula. Napokon, ako su V i W dva takva modula, onda je

$$Hom_{\mathcal{A},K}(V, W) = Hom_{R(\mathcal{A},K)}(V, W).$$

Posebno, kako je $R(\mathcal{A}, K)$ i aproksimativno unitalan lijevi $R(\dashv, K)-$modul i aproksimativno unitalan desni $R(\mathcal{A}, K)-$modul, dobivamo lijevo i desno djelovanje K i $\mathcal{A}$ na $R(\mathcal{A}, K)$:

$$a(b \otimes_{\mathbb{C}} T) = ab \otimes_{\mathbb{C}} T, \qquad (T \otimes_{\mathbb{C}} b)a = T \otimes_{\mathbb{C}} ba, \qquad a, b \in \mathcal{A},\ T \in R(K),$$

$$x(b \otimes_{\mathbb{C}} T) = (Ad\, x)b \otimes_{\mathbb{C}} \lambda(x)T, \qquad (T \otimes_{\mathbb{C}} b)x = \rho(x^{-1})T \otimes_{\mathbb{C}} (Ad\, x^{-1})b, \qquad x \in K,\ b \in \mathcal{A},\ T \in R(K).$$

Za $x \in K$, $T \in R(K)$ i $b \in \mathcal{A}$ vrijede i formule

$$x(T \otimes_{\mathbb{C}} b) = \delta_x * T \otimes_{\mathbb{C}} b = \lambda(x) \otimes_{\mathbb{C}} b, \qquad (b \otimes_{\mathbb{C}} T)x = b \otimes_{\mathbb{C}} T * \delta_x = b \otimes_{\mathbb{C}} \rho(x^{-1})T.$$

Poglavlje 10

Heckeova algebra para $(\mathfrak{g}, K)$

Ako je $(\mathfrak{g}, K)$ par onda je $(U(\mathfrak{g}), K)$ slabi par. Ako je V $(\mathfrak{g}, K)-$modul, onda je V $(U(\mathfrak{g}), K)-$modul, dakle i aproksimativno unitalan lijevi $R(U(\mathfrak{g}), K)-$modul. Svaki aproksimativno unitalan lijevi $R(U(\mathfrak{g}), K)-$modul jest $(U(\mathfrak{g}), K)-$modul, ali to ne mora biti i $(\mathfrak{g}, K)-$modul, jer nije uzeto u obzir da je $U(\mathfrak{k}) \subseteq U(\mathfrak{g})$, Stoga s algebre $R(U(\mathfrak{g}), K)$ treba prijeći na odgovarajući kvocijent.

Lema 10.1 *Neka je I_ℓ potprostor od $R(U(\mathfrak{g}), K)$ definiran sa*

$$I_\ell = [\{b \otimes_{\mathbb{C}} \partial(v) * T - bv \otimes_{\mathbb{C}} T;\ b \in U(\mathfrak{g}),\ v \in U(\mathfrak{k}),\ T \in R(K)\}].$$

I_ℓ je lijevi ideal u algebri $R(U(\mathfrak{g}), K)$.

Dokaz: Lijevi ideali u $R(U(\mathfrak{g}), K)$ su upravo podmoduli od $R(U(\mathfrak{g}), K)$, ako $R(U(\mathfrak{g}), K)$ promatramo kao lijevi $R(U(\mathfrak{g}), K)-$modul, dakle kao $(U(\mathfrak{g}), K)-$modul. Prema tome, treba dokazati da je potprostor I_ℓ lijevi $U(\mathfrak{g})-$podmodul koji je invarijantan za lijevo djelovanje grupe K na $R(U(\mathfrak{g}), K)$. Neka su $a, b \in U(\mathfrak{g})$, $v \in U(\mathfrak{k})$ i $T \in R(K)$. Tada je

$$a[b \otimes_{\mathbb{C}} \partial(v) * T - bv \otimes_{\mathbb{C}} T] = ab \otimes_{\mathbb{C}} \partial(v) * T - abv \otimes_{\mathbb{C}} T \in I_\ell.$$

Nadalje, za $x \in K$ je prema zadatku 5.4 $\lambda(x)S = \delta_x * S$ za $S \in \mathcal{E}'(K)$ i $\partial((Ad\,x)v) = \delta_x * \partial(v) * \delta_{x^{-1}}$ pa imamo

$$x[b \otimes_{\mathbb{C}} \partial(v) * T - bv \otimes_{\mathbb{C}} T] = (Ad\,x)b \otimes_{\mathbb{C}} \lambda(x)[\partial(v) * T] - (Ad\,x)(bv) \otimes_{\mathbb{C}} \lambda(x)T =$$

$$= (Ad\,x)b \otimes_{\mathbb{C}} \delta_x * \partial(v) * T - [(Ad\,x)b][(Ad\,x)v] \otimes_{\mathbb{C}} \lambda(x)T = (Ad\,x)b \otimes_{\mathbb{C}} (\delta_x * \partial(v) * \delta_{-1}) * (\delta_x * T) =$$
$$= (Ad\,x)b \otimes_{\mathbb{C}} \partial((Ad\,x)v) * \lambda(x)T - [(Ad\,x)b][(Ad\,x)v] \otimes_{\mathbb{C}} \lambda(x)T \in I_\ell.$$

Lema 10.2 *Neka je I_r potprostor od $R(U(\mathfrak{g}), K)$ definiran sa*

$$I_r = [\{S \otimes_{\mathbb{C}} ua - S * \partial(u(\otimes_{\mathbb{C}} a;\ S \in R(K),\ u \in U(\mathfrak{k}),\ a \in U(\mathfrak{g})\}].$$

Tada je I_r desni ideal u algebri $R(U(\mathfrak{g}), K)$.

Zadatak 10.1 *Dokažite lemu 10.2.*

Lema 10.3 *Neka je V $(\mathfrak{g}, K)-$modul, dakle i $(U(\mathfrak{g}), K)-$modul, dakle i lijevi $R(U(\mathfrak{g}), K)-$modul. Tada vrijedi*

$$\alpha z = 0 \qquad \forall \alpha \in I_\ell \cup I_r \quad i \quad \forall z \in V.$$

Dokaz: Izostavljat ćemo oznaku π za reprezentaciju grupe K na prostoru V i pisati za $K-$djelovanje $z \mapsto xz$, $x \in K$, $z \in V$, dakle, i za lijevo djelovanje $R(K)$ na V pišemo $z \mapsto Tz$, $T \in R(K)$, $z \in V$. Neka su $b \in U(\mathfrak{g})$, $v \in U(\mathfrak{k})$, $T \in R(K)$ i $z \in V$. Tada je

$$(b \otimes_{\mathbb{C}} \partial(v) * T)z = b[(\partial(v) * T)z] = b[\partial(v)(Tz)].$$

Kako se radi o $(\mathfrak{g}, K)-$modulu, djelovanje $U(\mathfrak{k})$ dobiveno je iz djelovanja od $\mathfrak{k}$, a ovo je dobiveno kao kompleksifikacija diferencijala djelovanja od K. Dakle,

$$\partial(v)z = vz, \qquad v \in U(\mathfrak{k}),\ v \in V.$$

Slijedi,

$$(b \otimes_{\mathbb{C}} \partial(v) * T)z = b(v(Tz)).$$

Nadalje,

$$(bv \otimes_{\mathbb{C}} T)z = (bv)(Tz) = b(v(Tz)).$$

Prema tome,

$$(b \otimes_{\mathbb{C}} \partial(v) * T - bv \otimes_{\mathbb{C}} T)z = 0,$$

a odatle slijedi da je

$$\alpha z = 0 \qquad \forall \alpha \in I_\ell \quad \text{i} \quad \forall z \in V.$$

Analogno, za $S \in R(K)$, $u \in U(\mathfrak{k})$, $a \in U(\mathfrak{g})$ i $z \in V$ imamo

$$(S \otimes_{\mathbb{C}} ua - (S * \partial(u)) \otimes_{\mathbb{C}} a)z = S((ua)z) - (S * (\partial(u))(az) = S(u(az)) - S(\partial(u)(az)) = 0$$

jer je $\partial(u)(az) = u(az)$. Dakle, vrijedi i

$$\alpha z = 0 \qquad \forall \alpha \in I_r \quad \text{i} \quad \forall z \in V.$$

Lema 10.4 *Vrijedi $I_\ell = I_r$, dakle, to je obostrani ideal u algebri $R(U(\mathfrak{g}), K)$.*

Dokaz: Neka je

$$V = U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{k})} R(K).$$

Na prostoru V definirat ćemo strukturu $(\mathfrak{g}, K)-$modula.

Prije svega, za $X \in \mathfrak{g}$ definiramo preslikavanje

$$(b, T) \mapsto Xb \otimes_{U(\mathfrak{k})} T$$

sa $U(\mathfrak{g}) \times R(K)$ u V. To je preslikavanje bilinearno i za $v \in U(\mathfrak{k})$ vrijedi

$$Xbv \otimes_{U(\mathfrak{k})} T = Xb \otimes_{U(\mathfrak{k})} \partial(v) * T.$$

Po univerzalnom svojstvu tenzorskog produkta $\otimes_{U(\mathfrak{k})}$ slijedi da postoji jedinstveno linearno preslikavanje $\alpha \mapsto X\alpha$ sa V u V takvo da je

$$X(b \otimes_{U(\mathfrak{k})} T) = Xb \otimes_{U(\mathfrak{k})} T \qquad \forall b \in U(\mathfrak{g}) \quad \text{i} \quad \forall T \in R(K).$$

Lako se vidi da je na taj način definirana reprezentacija Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ na prostoru V.

Nadalje, za $x \in K$ definiramo preslikavanje

$$(b, T) \mapsto (Ad\, x)b \otimes_{U(\mathfrak{k})} \lambda(x)T$$

sa $U(\mathfrak{g}) \times R(K)$ u V. Očito je to preslikavanje bilinearno, pa postoji jedinstveno linearno preslikavanje

$$U(\mathfrak{g}) \otimes_{\mathbb{C}} R(K) \longrightarrow V$$

takvo da vrijedi

$$b \otimes_{\mathbb{C}} T \mapsto (Ad\, x)b \otimes_{U(\mathfrak{k})} \lambda(x)T.$$

Prema dokazu leme 10.1. to se preslikavanje faktorizira do linearnog preslikavanja $V \to V$. Lako se vidi da se na taj način dobiva reprezentacija grupe K. To je kvocijentna reprezentacija reprezentacije $Ad \otimes_{\mathbb{C}} \lambda$. Budući da su reprezentacije Ad i λ na $U(\mathfrak{g})$ i $R(K)$ lokalno konačne, to je i reprezentacija $Ad \otimes_{\mathbb{C}} \lambda$ lokalno konačna. Odatle slijedi da je i njena kvocijentna reprezentacija na prostoru V lokalno konačna.

Dokažimo da smo na taj način na prostoru V definirali strukturu $(U(\mathfrak{g}), K)-$modula. Doista, za $x \in K$, $a, b \in U(\mathfrak{g})$ i $T \in R(K)$ imamo

$$x[a(b \otimes_{U(\mathfrak{k})} T)] = x(ab \otimes_{U(\mathfrak{k})} T) = (Ad\, x)(ab) \otimes_{U(\mathfrak{k})} \lambda(x)T =$$

$$= [(Ad\, x)a][(Ad\, x)b] \otimes_{U(\mathfrak{k})} \lambda(x)T = [(Ad\, x)a]((Ad\, x)b \otimes_{U(\mathfrak{k})} \lambda(x)T) = [(Ad\, x)a][x(b \otimes_{U(\mathfrak{k})} T)].$$

Dakle, V je $(U(\mathfrak{g}), K)-$modul. Dokažimo sada da je V i $(\mathfrak{g}, K)-$modul, tj. da je diferencijal djelovanja od K upravo djelovanje od $\mathfrak{k}_0$ dobiveno restrikcijom sa $\mathfrak{g}$ na $\mathfrak{k}_0$. Diferencijal djelovanja od K je

$$ad\, X \otimes_{U(\mathfrak{k})} I_{R(K)} + I_{U(\mathfrak{g})} \otimes_{U(\mathfrak{k})} \lambda(X),$$

a djelovanje od $X \in \mathfrak{k}_0 \subseteq \mathfrak{g} \subseteq U(\mathfrak{g})$ je

$$\lambda(X) \otimes_{U(\mathfrak{k})} I_{R(K)}.$$

Ta se dva djelovanja od $\mathfrak{k}_0$ podudaraju, jer za $b \in U(\mathfrak{g})$, $T \in R(K)$ i $X \in \mathfrak{k}_0$ imamo

$$[ad\, X \otimes_{U(\mathfrak{k})} + I_{U(\mathfrak{g})} \otimes_{U(\mathfrak{k})} \lambda(X)](b \otimes_{U(\mathfrak{k})} T) = (Xb - bX) \otimes_{U(\mathfrak{k})} T + b \otimes_{U(\mathfrak{k})} \partial(X) * T =$$

$$= Xb \otimes_{U(\mathfrak{k})} T - bX \otimes_{U(\mathfrak{k})} T + bX \otimes_{U(\mathfrak{k})} T = Xb \otimes_{U(\mathfrak{k})} T = (\lambda(X) \otimes_{U(\mathfrak{k})} T_{R(K)})(b \otimes_{U(\mathfrak{k})} T).$$

Dakle, V je $(\mathfrak{g}, K)-$modul.

Budući da je V $(U(\mathfrak{g}), K)-$modul, V je aproksimativno unitalan lijevi $R(U(\mathfrak{g}), K)-$modul. Sama algebra $R(U(\mathfrak{g}), K)$ je također aproksimativno unitalan lijevi $R(U(\mathfrak{g}), K)-$modul. Neka je $\varphi : R(U(\mathfrak{g}), K) \to V$ kanonski epimorfizam lijevih $R(U(\mathfrak{g}), K)-$modula. Jezgra tog epimorfizma je I_ℓ, pa imamo egzaktan niz lijevih $R(U(\mathfrak{g}), K)-$modula

$$0 \longrightarrow I_\ell \longrightarrow R(U(\mathfrak{g}), K) \longrightarrow V \longrightarrow 0.$$

Neka je

$$J = \{\alpha \in R(U(\mathfrak{g}), K);\ \alpha z = 0\ \forall z \in V\}.$$

Tada je J obostrani ideal u $R(U(\mathfrak{g}), K)$ i prema lemi 10.3. je $I_\ell \subseteq J$. Neka je $\alpha \in J$. Izaberimo konačan skup $A \subseteq \hat{K}$. takav da je $\alpha(1 \otimes_{\mathbb{C}} \chi_A) = \alpha$ u $R(U(\mathfrak{g}), K)$. Primijenimo φ na tu jednakost. Kako je φ homomorfizam lijevih $R(U(\mathfrak{g}), K)-$modula, slijedi

$$\varphi(\alpha) = \varphi(\alpha(1 \otimes_{\mathbb{C}} \chi_A)) = \alpha\varphi(1 \otimes_{\mathbb{C}} \chi_A) = 0$$

jer je $\alpha \in J$. Odatle slijedi da je $\alpha \in \operatorname{Ker} \varphi = I_\ell$.

Na taj način dokazali smo da je $I_\ell = J$. Prema lemi 10.3. slijedi da je $I_r \subseteq I_\ell$. Sasvim analogno imitiranjem ovog dokaza za desne module pomoću analogona leme 10.3. pokazuje se da je i $I_\ell \subseteq I_r$.

Time je dokazano da je $I_\ell = I_r$.

Uvodimo sada oznaku $I_\mathfrak{k} = I_\ell = I_r$. To je obostrani ideal u algebri $R(U(\mathfrak{g}), K)$. Definiramo **Heckeovu algebru para** $(\mathfrak{g}, K)$ kao kvocijentnu algebru:

$$R(\mathfrak{g}, K) = R(U(\mathfrak{g}), K)/I_\mathfrak{k} = R(K) \otimes_{U(\mathfrak{k})} U(\mathfrak{g}) = U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{k})} R(K).$$

Elementi od $R(\mathfrak{g}, K)$ su konačne sume elemenata oblika $S \otimes_{U(\mathfrak{k})} a$, a ujedno konačne sume elemenata oblika $b \otimes_{U(\mathfrak{k})} T$. Pišemo T umjesto $T \otimes_{U(\mathfrak{k})} 1 = 1 \otimes_{U(\mathfrak{k})} T$. Na taj način algebra $R(K)$ postaje podalgebra od $R(\mathfrak{g}, K)$. Elementi $\chi_A = \chi_A \otimes_{U(\mathfrak{k})} 1 = 1 \otimes_{U(\mathfrak{k})} \chi_A$, A konačan podskup od $\hat{K}$, tvore aproksimativnu jedinicu u algebri $R(K)$, dakle i u algebri $R(\mathfrak{g}, K)$. Prema tome, $R(\mathfrak{g}, K)$ je aproksimativno unitalna algebra.

Zadatak 10.2 *Dokažite da postoji jedinstven linearan operator*

$$R(K) \otimes_{U(\mathfrak{k})} U(\mathfrak{g}) \longrightarrow R(K) \otimes_{C(K, U(\mathfrak{k}))} C(K, U(\mathfrak{g}))$$

takav da vrijedi

$$T \otimes_{U(\mathfrak{k})} u \mapsto T \otimes_{C(K,U(\mathfrak{k}))} \underline{u}, \qquad T \in R(K),\ u \in U(\mathfrak{g}),\ \underline{u}(x) = u\ \forall x \in K,$$

i da postoji jedinstven linearan operator

$$U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{k})} R(K) \longrightarrow C(K, U(\mathfrak{g})) \otimes_{C(K,U(\mathfrak{k}))} R(K)$$

takav da vrijedi

$$u \otimes_{U(\mathfrak{k})} T \mapsto \underline{u} \otimes_{C(K,U(\mathfrak{k}))} T, \qquad u \in U(\mathfrak{g}),\ T \in R(K).$$

Nadalje, dokažite da su oba linearna operatora izomorfizmi vektorskih prostora.

Pomoću prethodnog zadatka imamo identifikacije

$$R(\mathfrak{g}, K) = R(K) \otimes_{C(K,U(\mathfrak{k}))} C(K, U(\mathfrak{g})) = C(K, U(\mathfrak{g})) \otimes_{C(K,U(\mathfrak{k}))} R(K).$$

Teorem 10.1 *Neka je $(\mathfrak{g}, K)$ par i $R(\mathfrak{g}, K)$ njegova Heckeova algebra.*

(a) *Neka je V $(\mathfrak{g}, K)-$modul. Na prostoru V postoji jedinstvena struktura lijevog $R(\mathfrak{g}, K)-$modula takva da vrijedi*

$$(a \otimes_{U(\mathfrak{k})} T)z = a(Tz), \qquad a \in U(\mathfrak{g}),\ T \in R(K),\ z \in V.$$

Tada vrijedi i

$$(T \otimes_{U(\mathfrak{k})} a)z = T(az), \qquad T \in R(K),\ a \in U(\mathfrak{g}),\ z \in V.$$

Tako definiran lijevi $R(\mathfrak{g}, K)-$modul V je aproksimativno unitalan.

(b) *Neka je V aproksimativno unitalan lijevi $R(\mathfrak{g}, K)-$modul. Tada na V postoji jedinstvena struktura $(\mathfrak{g}, K)-$modula takva da vrijede formule u (a).*

(c) *Ako su V i W $(\mathfrak{g}, K)-$moduli onda je*

$$Hom_{\mathfrak{g},K}(V, W) = Hom_{R(\mathfrak{g},K)}(V, W).$$

Dokaz: (a) Neka je V $(\mathfrak{g}, K)-$modul. Tada je V ujedno $(U(\mathfrak{g}), K)-$modul za slabi par $(U(\mathfrak{g}), K)$, dakle po teoremu 9.2. V je aproksimativno unitalan $R(U(\mathfrak{g}), K)-$modul. Prema lemama 10.3. i 10.4. V postaje aproksimativno unitalan $R(\mathfrak{g}, K)-$modul. Formule su neposredna posljedica analognih formula za djelovanje $R(U(\mathfrak{g}), K)$.

(b) Neka je V aproksimativno unitalan $R(\mathfrak{g}, K)-$modul. Tada je V aproksimativno unitalan $R(U(\mathfrak{g}), K)-$modul u kome ideal $I_{\mathfrak{k}}$ djeluje trivijalno. Dakle, posebno je

$$(bv \otimes_{\mathbb{C}} T)z = (b \otimes_{\mathbb{C}} \partial(v) * T)z, \qquad b \in U(\mathfrak{g}),\ v \in U(\mathfrak{k}),\ T \in R(K),\ z \in V.$$

Po teoremu 9.2. V je $(U(\mathfrak{g}), K)-$modul takav da vrijede formule u (a). Slijedi

$$(bv)(Tz) = b((\partial(v) * T)z), \qquad b \in U(\mathfrak{g}),\ v \in U(\mathfrak{k}),\ T \in R(K),\ z \in V.$$

Međutim, vrijedi i $(\partial(v) * T)z = \partial(v)(Tz)$. Dakle,

$$(bv)(Tz) = b(\partial(v)(Tz)), \qquad b \in U(\mathfrak{g}),\ v \in U(\mathfrak{k}),\ T \in R(K),\ z \in V.$$

Sada za dani $z \in V$ uzmimo $T = \chi_A$, gdje je $A \subseteq \hat{K}$ konačan skup takav da je $\chi_A z = z$. Slijedi

$$(bv)z = b(\partial(v)z), \qquad b \in U(\mathfrak{g}),\ v \in U(\mathfrak{k}),\ z \in V.$$

Posebno, za $b = 1$ dobivamo

$$vz = \partial(v)z, \qquad v \in U(\mathfrak{k}),\ z \in V.$$

Prema tome, po tvrdnji (b) propozicije 6.2. djelovanje $v \in U(\mathfrak{k})$ kao elementa od $U(\mathfrak{g})$ je isto kao ono dobiveno iz djelovanja K. Dakle, V je $(\mathfrak{g}, K)-$modul.

Tvrdnja (c) slijedi iz teorema 9.2:

$$Hom\mathfrak{g}, K(V, W) = Hom_{U(\mathfrak{g}),K}(V, W) = Hom_{R(U(\mathfrak{g}),K)}(V, W) = Hom_{R(\mathfrak{g},K)}(V, W).$$

Heckeova algebra $R(\mathfrak{g}, K)$ je i sama aproksimativno unitalan lijevi $R(\mathfrak{g}, K)-$modul. Po prethodnom teoremu $R(\mathfrak{g}, K)$ je $(\mathfrak{g}, K)-$modul, a djelovanja slijeva od $\mathfrak{g}$ (tj. $U(\mathfrak{g})$) i od K su ovakva:

$$a(b \otimes_{U(\mathfrak{k})} T) = ab \otimes_{U(\mathfrak{k})} T, \quad a, b \in U(\mathfrak{g}),\ T \in R(K),$$

$$a(T \otimes_{U(\mathfrak{k})} b) = T \otimes_{C(K,U(\mathfrak{k}))} (Ad(\cdot)^{-1}a)b, \quad a, b \in U(\mathfrak{g}),\ T \in R(K),$$

$$x(b \otimes_{U(\mathfrak{k})} T) = (Ad\, x)b \otimes_{U(\mathfrak{k})} \lambda(x)T, \quad x \in K,\ b \in U(\mathfrak{g}),\ T \in R(K),$$

$$x(T \otimes_{U(\mathfrak{k})} b) = \lambda(x)T \otimes_{U(\mathfrak{k})} b = \delta_x * T \otimes_{U(\mathfrak{k})} b, \quad x \in K,\ T \in R(K),\ b \in U(\mathfrak{g}).$$

Djelovanje $R(K)$ (štoviše i $\mathcal{E}'(K)$) slijeva na $R(\mathfrak{g}, K)$, dobiveno iz lokalno konačnog djelovanja grupe K, dano je sa

$$S(T \otimes_{U(\mathfrak{k})} b) = \lambda(S)T \otimes_{U(\mathfrak{k})} b = S * T \otimes_{U(\mathfrak{k})} b, \qquad S \in \mathcal{E}'(K),\ T \in R(K),\ b \in U(\mathfrak{g}).$$

S očitim izmjenama sve se ovo može analogno provesti za desne module. Pri tome, **desni** $(\mathfrak{g}, K)-$**modul** je desni $U(\mathfrak{g})-$modul V na kome grupa K djeluje zdesna i vrijedi:

(i) Pridružena reprezentacija π od K, definirana sa $\pi(x)z = zx^{-1}$, $x \in K$, $z \in V$, je lokalno konačna.

(ii) Diferencijal $K-$djelovanja je restrikcija na $\mathfrak{k}_0$ od $\mathfrak{g}-$djelovanja.

(*iii*) $z((Ad\,x)u) = ((zx)u)x^{-1}, \ \forall z \in V, \forall x \in K, \forall u \in U(\mathfrak{g})$.

Sasvim analogno teoremu 10.1. dokazuje se

Teorem 10.2 *Neka je $(\mathfrak{g}, K)$ par i $R(\mathfrak{g}, K)$ njegova Heckeova algebra.*

(*a*) *Neka je V desni $(\mathfrak{g}, K)-$modul. Na V postoji jedinstvena struktura desnog $R(\mathfrak{g}, K)-$modula takva da vrijedi*

$$z(T \otimes_{U(\mathfrak{k})} b) = (zT)b, \qquad z \in V, \ T \in R(K), \ b \in U(\mathfrak{g}).$$

Tada vrijedi i

$$z(b \otimes_{U(\mathfrak{k})} T) = (zb)T, \qquad z \in V, \ b \in U(\mathfrak{g}), \ T \in R(K).$$

Tako definiran desni $R(\mathfrak{g}, K)-$modul V je aproksimativno unitalan.

(*b*) *Neka je V aproksimativno unitalan desni $R(\mathfrak{g}, K)-$modul. Tada na V postoji jedinstvena struktura desnog $(\mathfrak{g}, K)-$modula takva da vrijede formule u (a).*

(*c*) *Ako su V i W desni $(\mathfrak{g}, K)-$moduli onda je*

$$Hom_{\mathfrak{g},K}(V, W) = Hom_{R(\mathfrak{g},K)}(V, W).$$

Sama algebra $R(\mathfrak{g}, K)$ je aproksimativno unitalan desni $R(\mathfrak{g}, K)-$modul, pa je prema teoremu 10.2. $R(\mathfrak{g}, K)$ desni $(\mathfrak{g}, K)-$modul s djelovanjima

$$(b \otimes_{U(\mathfrak{k})} T)a = b(Ad(\cdot)a) \otimes_{C(K,U(\mathfrak{k}))} T, \quad a, b \in U(\mathfrak{g}), \ T \in R(K),$$

$$(T \otimes_{U(\mathfrak{k})} b)a = T \otimes_{U(\mathfrak{k})} ba, \quad T \in R(K), \ a, b \in U(\mathfrak{g}),$$

$$(b \otimes_{U(\mathfrak{k})} T)x = b \otimes_{U(\mathfrak{k})} \rho(x)^{-1}T = b \otimes_{U(\mathfrak{k})} T * \delta_x, \quad b \in U(\mathfrak{g}), \ T \in R(K), \ x \in K,$$

$$(T \otimes_{U(\mathfrak{k})} b)x = \rho(x)^{-1}T \otimes_{U(\mathfrak{k})} (Ad\,x)^{-1}b, \quad T \in R(K), \ b \in U(\mathfrak{g}), \ x \in K.$$

Nadalje, za odatle dobiveno djelovanje algebre $\mathcal{E}'(K)$ zdesna vrijedi

$$(b \otimes_{U(\mathfrak{k})} T)S = b \otimes_{U(\mathfrak{k})} \rho(S^t)T = b \otimes_{U(\mathfrak{k})} T * S, \qquad b \in U(\mathfrak{g}), \ T \in R(K), \ S \in \mathcal{E}'(K).$$

Jednakosti prostora homomorfizama u teoremima 10.1. i 10.2. imaju svoj analogon za tenzorske produkta:

Teorem 10.3 *Neka je $(\mathfrak{g}, K)$ par i $R(\mathfrak{g}, K)$ njegova Heckeova algebra. Neka je V desni $(\mathfrak{g}, K)-$modul i neka je W $(\mathfrak{g}, K)-$modul, dakle, V je desni $R(\mathfrak{g}, K)-$modul i W je lijevi $R(\mathfrak{g}, K)-$modul. Tada je vektorski prostor $V \otimes_{R(\mathfrak{g},K)} W$ kvocijentni prostor prostora $V \otimes_{\mathbb{C}} W$ po potprostoru razapetom sa*

$$\{vX \otimes_{\mathbb{C}} w - v \otimes_{\mathbb{C}} Xw; \ v \in V, \ w \in W, \ X \in \mathfrak{g}\} \cup \{vx \otimes_{\mathbb{C}} w - v \otimes_{\mathbb{C}} xw; \ v \in V, \ w \in W, \ x \in K\}.$$

Drugim riječima, možemo formalno pisati

$$V \otimes_{R(\mathfrak{g},K)} W = V \otimes_{\mathfrak{g},K} W.$$

Dokaz: Treba dokazati da se taj potprostor, kojeg ćemo označiti sa I podudara s potprostorom J razapetim skupom

$$\{v\alpha \otimes_{\mathbb{C}} w - v \otimes_{\mathbb{C}} \alpha w;\ v \in V,\ w \in W,\ \alpha \in R(\mathfrak{g}, K)\}.$$

Neka su $v \in V$, $w \in W$ i $X \in \mathfrak{g}$. Neka je $A \subseteq \hat{K}$ konačan skup takav da je

$$(vX)\chi_A = vX \qquad \text{i} \qquad \chi_A w = w.$$

Tada za $\alpha = X \otimes_{\mathbb{C}} \chi_A$ imamo

$$vX \otimes_{\mathbb{C}} w - v \otimes_{\mathbb{C}} Xw = (vX)\chi_A \otimes_{\mathbb{C}} w - v \otimes_{\mathbb{C}} X(\chi_A w) = v\alpha \otimes_{\mathbb{C}} w - x \otimes_{\mathbb{C}} \alpha w.$$

Dakle,

$$\{vX \otimes_{\mathbb{C}} w - v \otimes_{\mathbb{C}} Xw;\ v \in V,\ w \in W,\ X \in \mathfrak{g}\} \subseteq \{v\alpha \otimes_{\mathbb{C}} w - v \otimes_{\mathbb{C}} \alpha w;\ v \in V,\ w \in W,\ \alpha \in R(\mathfrak{g}, K)\}. \ (*)$$

Neka su $v \in V$, $w \in W$ i $x \in K$. Neka je $A \subseteq \hat{k}$ konačan skup takav da je

$$v\chi_A = v \qquad \text{i} \qquad \chi_A w = w.$$

Distribucija χ_A je u centru od $\mathcal{E}'(K)$ pa posebno vrijedi $\delta_x * \chi_A = \chi_A * \delta_x$. Označimo taj element od $R(K) \subseteq R(\mathfrak{g}, K)$ sa α. Tada imamo

$$vx \otimes_{\mathbb{C}} w - v \otimes_{\mathbb{C}} xw = v\delta_x \otimes_{\mathbb{C}} w - v \otimes_{\mathbb{C}} \delta_x w = (v\chi_A)\delta_x \otimes_{\mathbb{C}} w - v \otimes_{\mathbb{C}} \delta_x(\chi_A w) = v\alpha \otimes_{\mathbb{C}} w - v \otimes_{\mathbb{C}} \alpha w.$$

Dakle, vrijedi i

$$\{vx \otimes_{\mathbb{C}} w - v \otimes_{\mathbb{C}} xw;\ v \in V,\ w \in W,\ x \in K\} \subseteq \{v\alpha \otimes_{\mathbb{C}} w - v \otimes_{\mathbb{C}} \alpha w;\ q, v \in V,\ w \in W,\ \alpha \in R(\mathfrak{g}, K)\}. \ (**)$$

Inkluzije $(*)$ i $(**)$ imaju za posljedicu $I \subseteq J$.

Dokažimo i obrnutu inkluziju. Neka su $v \in V$ i $w \in W$ i neka je najprije

$$\alpha = T \in R(K) \subseteq R(\mathfrak{g}, K).$$

Tada je

$$v\alpha \otimes_{\mathbb{C}} w - v \otimes_{\mathbb{C}} \alpha w = vT \otimes_{\mathbb{C}} w - v \otimes_{\mathbb{C}} Tw = \int_K (vx \otimes_{\mathbb{C}} w - v \otimes_{\mathbb{C}} xw) \mathrm{d}T(x).$$

Neka su $x_1, x_2, \ldots, x_n \in K$ takvi da je

$$\{vx_1 \otimes_{\mathbb{C}} w - v \otimes_{\mathbb{C}} x_1 w, vx_2 \otimes_{\mathbb{C}} w - v \otimes_{\mathbb{C}} x_2 w, \ldots, vx_n \otimes_{\mathbb{C}} w - v \otimes_{\mathbb{C}} x_n w\}$$

baza potprostora od $V \otimes_{\mathbb{C}} W$ razapetog sa $\{vx \otimes_{\mathbb{C}} w - v \otimes_{\mathbb{C}} xw;\ x \in K\}$. Tada za neke $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ iz $\mathcal{E}(K)$ vrijedi

$$vx \otimes_{\mathbb{C}} w - v \otimes_{\mathbb{C}} xw = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x)(vx_i \otimes_{\mathbb{C}} w - v \otimes_{\mathbb{C}} x_i w), \qquad x \in K.$$

Odatle je

$$v\alpha \otimes_{\mathbb{C}} w - v \otimes_{\mathbb{C}} \alpha w = \sum_{i=1}^{n} T(\varphi_i)(vx_i \otimes_{\mathbb{C}} w - v \otimes_{\mathbb{C}} x_i w) \in J.$$

Treba to dokazati i ako je $\alpha = u \otimes_{U(\mathfrak{k})} T$, $u \in U(\mathfrak{g})$, $T \in R(K)$. Tvrdnju da za takav α vrijedi

$$v\alpha \otimes_{\mathbb{C}} w - v \otimes_{\mathbb{C}} \alpha w \in J \qquad \forall v \in V \quad \text{i} \quad \forall w \in W$$

dokazujemo indukcijom po $n \geq 0$ za $u \in U_n(\mathfrak{g})$. Pri tome je $(U_n(\mathfrak{g}))$ filtracija od $U(\mathfrak{g})$ zadana sa

$$U_0(\mathfrak{g}) = \mathbb{C}, \qquad U_1(\mathfrak{g}) = \mathbb{C} \dot{+} \mathfrak{g},\ U_n(\mathfrak{g}) = [U_{n-1}(\mathfrak{g}) \cup \{Xu;\ X \in \mathfrak{g},\, u \in U_{n-1}(\mathfrak{g})\}] \quad n \geq 2.$$

Baza indukcije: $n = 0 \Longrightarrow u = \lambda \in \mathbb{C} \Longrightarrow \alpha = \lambda T \in R(K)$, a u toj situaciji tvrdnja je već dokazana.

Korak indukcije: Pretpostavimo da za $\alpha = u \otimes_{U(\mathfrak{k})} T$ vrijedi

$$v\alpha \otimes_{\mathbb{C}} w - v \otimes_{\mathbb{C}} \alpha w \in J \qquad \forall v \in V \quad \text{i} \quad \forall w \in W.$$

Treba dokazati da za $X \in \mathfrak{g}$ i za $\beta = Xu \otimes_{U(\mathfrak{k})} T$ vrijedi

$$v\beta \otimes_{\mathbb{C}} w - v \otimes_{\mathbb{C}} \beta w \in J \qquad \forall v \in V \quad \text{i} \quad \forall w \in W.$$

Doista, uzmimo $v \in V$ i $w \in W$ i stavimo $v' = vX \in V$ i $w' = uTw \in W$. Tada imamo

$$v\beta \otimes_{\mathbb{C}} w - v \otimes_{\mathbb{C}} \beta w = vXuT \otimes_{\mathbb{C}} w - v \otimes_{\mathbb{C}} XuTw =$$

$$= ((vX)uT \otimes_{\mathbb{C}} w - vX \otimes_{\mathbb{C}} uTw) + (vX \otimes_{\mathbb{C}} uTw - v \otimes_{\mathbb{C}} XuTw) =$$
$$= (v'\alpha \otimes_{\mathbb{C}} v' \otimes_{\mathbb{C}} \alpha w) + (vX \otimes_{\mathbb{C}} w' - v \otimes_{\mathbb{C}} Xw') \in J.$$

Teorem 10.4 *Neka je $(\mathfrak{g}, K)$ par, $R(U(\mathfrak{g}), K)$ Heckeova algebra slabog para $(U(\mathfrak{g}), K)$ i $R(\mathfrak{g}, K)$ Heckeova algebra para $(\mathfrak{g}, K)$.*

(*a*) *Postoji jedinstven linearan operator $\alpha \mapsto \alpha^t$ sa $R(U(\mathfrak{g}), K)$ u $R(U(\mathfrak{g}), K)$ takav da vrijedi*

$$(T \otimes_{\mathbb{C}} a)^t = a^t \otimes_{\mathbb{C}} T^t, \qquad T \in R(K),\ a \in U(\mathfrak{g}).$$

(*b*) *$\alpha \mapsto \alpha^t$ je involutivni antiautomorfizam algebre i vrijedi*

$$(a \otimes_{\mathbb{C}} T)^t = T^t \otimes_{\mathbb{C}} a^t, \qquad a \in U(\mathfrak{g}),\ T \in R(K).$$

(*c*) *$I_{\mathfrak{k}}^t = I_{\mathfrak{k}}$, dakle, $\alpha \mapsto \alpha^t$ se spušta do involutivnog antiautomorfizma kvocijentne algebre $R(\mathfrak{g}, K) = R(U(\mathfrak{g}), K)/I_{\mathfrak{k}}$.*

Dokaz: (*a*) Očito je $(T, a) \mapsto a^t \otimes_{\mathbb{C}} T^t$ bilinearno preslikavanje sa $U(\mathfrak{g}) \times R(K)$ u $R(U(\mathfrak{g}), K)$, pa postoji jedinstveno linearno preslikavanje sa $U(\otimes_{\mathbb{C}} R(K) = R(U(\mathfrak{g}), K)$ u $R(U(\mathfrak{g}), K)$ s traženim svojstvom.

(*b*) Neka su $S, T \in R(K)$ i $a, b \in U(\mathfrak{g})$. Neka je kao i obično $\{a_i\}$ baza $Ad-$invarijantnog konačnodimenzionalnog potprostora od $U(\mathfrak{g})$ koji sadrži a i neka je $\{a_i^*\}$ njoj dualna baza. Nadalje, stavimo $T_i = \langle Ad(\cdot)a, a_i^* \rangle T$. Tada je

$$[(S \otimes_{\mathbb{C}} a)(T \otimes_{\mathbb{C}} b)]^t = \left[\sum_i S * T_i \otimes_{\mathbb{C}} a_i b \right]^t = \sum_i b^t a_i^t \otimes_{\mathbb{C}} T_i^t * S^t.$$

Nadalje, za $f \in \mathcal{E}(K)$ je

$$\langle T_i^t, f \rangle = \langle T_i, f^t \rangle = \langle T, \langle Ad(\cdot)^{-1} a, a_i^* \rangle f(\cdot^{-1}) \rangle = \langle T^t, \langle Ad(\cdot)a, a_i^* \rangle f \rangle.$$

Za $Y \in \mathfrak{g}$ imamo
$$(Ad\,x)Y^t = -(Ad\,x)Y = [(Ad\,x)Y]^t$$
pa slijedi da je
$$(Ad\,x)a^t = [(Ad\,x)a]^t.$$
To pokazuje da je $\{a_i^t\}$ baza konačnodimenzionalnog $Ad-$invarijantnog potprostora od $U(\mathfrak{g})$ koji sadrži a^t. Neka je $\{b_i^*\}$ njoj dualna baza. Transponiramo li jednakost
$$(Ad\,x)a = \sum_i \langle (Ad\,x)a, a_i^* \rangle a_i$$
dobivamo
$$(Ad\,x)a^t = \sum_i \langle (Ad\,x)a, a_i^* \rangle a_i^t$$
pa slijedi
$$\langle (Ad\,x)a^t, b_i^* \rangle = \langle (Ad\,x)a, a_i^* \rangle.$$
Sada računamo
$$(T \otimes_{\mathbb{C}} b)^t (S \otimes_{\mathbb{C}} a)^t = (b^t \otimes_{\mathbb{C}} T^t)(a^t \otimes_{\mathbb{C}} S^t) = \sum_i b^t a_i^t \otimes_{\mathbb{C}} (\langle Ad(\cdot)a^t, b_i^* \rangle T^t) * S^t =$$
$$= \sum_i b^t a_i^t \otimes_{\mathbb{C}} (\langle Ad(\cdot)a, a_i^* \rangle T^t) * S^t = \sum_i b^t a_i^* \otimes_{\mathbb{C}} T_i^t * S^t.$$
Time je dokazano da je
$$[(S \otimes_{\mathbb{C}} a)(T \otimes_{\mathbb{C}} b)]^t = (T \otimes_{\mathbb{C}} b)^t (S \otimes_{\mathbb{C}} a)^t.$$
Budući da elementi oblika $S \otimes_{\mathbb{C}} a$, $S \in R(K)$, $a \in U(\mathfrak{g})$, razapinju $R(U(\mathfrak{g}), K)$, dokazali smo da je $\alpha \mapsto \alpha^t$ antihomomorfizam algebre $R(U(\mathfrak{g}), K)$ u samu sebe. Nadalje, imamo
$$(a \otimes_{\mathbb{C}} T)^t = \left[\sum_i \langle Ad(\cdot)^{-1} a, a_i^* \rangle T \otimes_{\mathbb{C}} a_i \right]^t = \sum_i a_i^t \otimes_{\mathbb{C}} \langle Ad(\cdot)a, a_i^* \rangle T^t =$$
$$= \sum_i a_i^t \otimes_{\mathbb{C}} \langle Ad(\cdot)a^t, b_i^* \rangle T^t = T^t \otimes_{\mathbb{C}} a^t.$$
Time je dokazana formula iz tvrdnje (b) a odatle slijedi i da je $\alpha \mapsto \alpha^t$ involucija:
$$\left[(a \otimes_{\mathbb{C}} T)^t\right]^t = (T^t \otimes_{\mathbb{C}} a^t)^t = a \otimes_{\mathbb{C}} T.$$
Prema tome, $\alpha \mapsto \alpha^t$ je antiautomorfizam algebre $R(U(\mathfrak{g}), K)$.

(c) Zbog involutivnosti dovoljno je dokazati da je $I_{\mathfrak{k}}^t \subseteq I_{\mathfrak{k}}$. Imamo
$$(S \otimes_{\mathbb{C}} ua - S * \partial(u) \otimes_{\mathbb{C}} a)^t = a^t u^t \otimes_{\mathbb{C}} S^t - a^t \otimes_{\mathbb{C}} \partial(u)^t * S^t = a^t u^t \otimes_{\mathbb{C}} S^t - a^t \otimes_{\mathbb{C}} \partial(u^t) * S^t.$$
Dakle, $I_r^t \subseteq I_\ell$. Odatle tvrdnja slijedi jer je $I_r = I_\ell = I_{\mathfrak{k}}$.

Dakle, svaki lijevi $R(\mathfrak{g}, K)-$modul V je ujedno desni $R(\mathfrak{g}, K)-$modul, uz djelovanje
$$v\alpha = \alpha^t v, \qquad \alpha \in R(\mathfrak{g}, K),\ v \in V.$$

Poglavlje 11

Funktori P i I

U daljnjem za par $(\mathfrak{g}, K)$ sa $\mathcal{C}(\mathfrak{g}, K)$ označavamo dobru kategoriju svih lijevi aproksimativno unitalnih $R(\mathfrak{g}, K)-$modula koju možemo prema rezultatima prethodnog poglavlja identificirati s kategorijom svih $(\mathfrak{g}, K)-$modula. Stavljamo $\mathcal{C}(\mathfrak{g}) = \mathcal{C}(\mathfrak{g}, \{e\})$. Sa $\tilde{\mathcal{C}}(\mathfrak{g}, K)$ označavamo dobru kategoriju svih lijevih $R(\mathfrak{g}, K)-$modula. Za modul V u kategoriji $\tilde{\mathcal{C}}(\mathfrak{g}, K)$ stavljamo

$$V_K = \{v \in V;\ \chi_A v = v \text{ za neki konačan skup } A \subseteq \hat{K}\}.$$

Tada je V_K modul u kategoriji $\mathcal{C}(\mathfrak{g}, K)$ i zove se $K-$konačni dio modula V. Ako je $\varphi : V \to W$ morfizam u kategoriji $\tilde{\mathcal{C}}(\mathfrak{g}, K)$ onda je $\varphi_K = \varphi | V_K$ morfizam u kategoriji $\mathcal{C}(\mathfrak{g}, K)$ sa V_K u W_K. Na taj način definirali smo funktor:

Propozicija 11.1 *$V \mapsto V_K$, $\varphi \mapsto \varphi_K$ je egzaktan kovarijantan funktor iz kategorije $\tilde{\mathcal{C}}(\mathfrak{g}, K)$ u kategoriju $\mathcal{C}(\mathfrak{g}, K)$.*

Dokaz: Očito je $(\varphi \circ \psi)_K = \varphi_K \circ \psi_K$, i time je dokazana kovarijantnost. Neka je

$$V \xrightarrow{\psi} W \xrightarrow{\varphi} U$$

egzaktan niz u $\tilde{\mathcal{C}}(\mathfrak{g}, K)$. Tada je $\varphi_K \circ \psi_K = (\varphi \circ \psi)_K = 0$, dakle imamo kompleks

$$V_K \xrightarrow{\psi_K} W_K \xrightarrow{\varphi_K} U_K \qquad\qquad \operatorname{Im}\psi_K \subseteq \operatorname{Ker}\varphi_K.$$

Neka je $w \in \operatorname{Ker}\varphi_K$. Tada je $w \in \operatorname{Ker}\varphi = \operatorname{Im}\psi$, dakle, postoji $v \in V$ takav da je $w = \psi(v)$. Neka je $A \subseteq \hat{K}$ konačan skup takav da je $\chi_A w = w$. Tada za $v' = \chi_A v$ vrijedi

$$\chi_A v' = \chi_A^2 v = \chi_A v = v',$$

dakle je $v' \in V_K$. Nadalje,

$$\psi_K(v') = \psi(v') = \psi(\chi_A v) = \chi_A \psi(v) = \chi_A w = w.$$

Dakle, $w \in \operatorname{Im}\psi_K$. Time je dokazano da je $\operatorname{Ker}\varphi_K = \operatorname{Im}\psi_K$, odnosno, funktor je egzaktan.

Promatrajmo par $\mathfrak{k}, K)$, gdje je $\mathfrak{k}$ kompleksifikacija Liejeve algebre $\mathfrak{k}_0$ od K. Tada je

$$R(\mathfrak{k}, K) = R(K) \otimes_{U(\mathfrak{k})} U(\mathfrak{k}) = R(K).$$

Propozicija 11.2 *U kategoriji $\mathcal{C}(\mathfrak{k}, K)$ svaki je modul projektivan i injektivan.*

Dokaz: Neka je P modul u $\mathcal{C}(\mathfrak{k}, K)$. Neka je dan dijagram

$$\begin{array}{ccccc} & & P & & \\ & & \downarrow \tau & & \\ 0 & \longleftarrow & B & \overset{\psi}{\longleftarrow} & C \end{array}$$

pri čemu je redak egzaktan, tj. $\operatorname{Im}\psi = B$. Da bismo dokazali da je modul P projektivan treba dokazati da postoji $\sigma : P \to C$ takav da je $\tau = \psi \circ \sigma$. Imamo

$$C = \operatorname{Ker}\psi \dotplus C'$$

za neki $K-$invarijantan potprostor, odnosno, $R(K)-$podmodul C' od C. Tada je $\psi|C'$ izomorfizam sa C' na B. Stavimo

$$\omega = (\psi|C')^{-1} : B \longrightarrow C' \subseteq C$$

i neka je $\sigma = \omega \circ \tau$. Tada je

$$\Psi \circ \sigma = \psi \circ \omega \circ \tau = \tau.$$

Zadatak 11.1 *Dokažite da je svaki modul I u kategoriji $\mathcal{C}(\mathfrak{k}, K)$ injektivan.*

Promatrajmo dva para $(\mathfrak{h}, L)$ i $\mathfrak{g}, K)$. Tada je $\mathfrak{l} \subseteq \mathfrak{h}$ i $\mathfrak{k} \subseteq \mathfrak{g}$ i postoje uvjeti komaptibilnosti djelovanja kompaktnih grupa L i K. Privremeno ćemo dati imena tim inkluzijama:

$$\iota_L : \mathfrak{l} \longrightarrow \mathfrak{h}, \qquad \iota_K : \mathfrak{k} \longrightarrow \mathfrak{g}.$$

Ako sa $x \mapsto Ad_{\mathfrak{k}}x$ i $x \mapsto Ad_{\mathfrak{g}}x$ označimo djelovanja K na $\mathfrak{k}$ i na $\mathfrak{g}$ uvjet kompatibilnosti je

$$Ad_{\mathfrak{k}}x = Ad_{\mathfrak{g}}x|\mathfrak{k} \qquad \forall x \in K$$

i, analogno,

$$Ad_{\mathfrak{l}}y = Ad_{\mathfrak{h}}y|\mathfrak{l} \qquad \forall y \in L.$$

Ti se uvjeti kompatibilnosti mogu zapisati ovako:

$$Ad_{\mathfrak{g}}(x) \circ \iota_K = \iota_K \circ Ad_{\mathfrak{k}}(x) \qquad \forall x \in K \qquad \text{i} \qquad Ad_{\mathfrak{h}}(y) \circ \iota_L = \iota_L \circ Ad_{\mathfrak{l}}(y) \qquad \forall y \in L.$$

Morfizam parova $\iota : (\mathfrak{h}, L) \to (\mathfrak{g}, K)$ je uređen par $\iota = (\iota_{alg}, \iota_{gp})$ takav da vrijedi:

(*a*) $\iota_{alg} : \mathfrak{h} \to \mathfrak{g}$ je homomorfizam Liejevih algebri.

(*b*) $\iota_{gp} : L \to K$ je homomorfizam Liejevih grupa.

(*c*) $\iota_{alg} \circ \iota_L = \iota_K \circ d\iota_{gp}$ ($d\iota_{gp}$ je diferencijal od ι_{gp}).

(*d*) $\iota_{alg} \circ Ad_{\mathfrak{h}}(y) = Ad_{\mathfrak{g}}(\iota_{gp}(y)) \circ \iota_{alg}$ $\forall y \in L$.

Primjeri: 1. Pretpostavimo da imamo inkluzije $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ i $L \subseteq K$ i to takve da je Liejeva podalgebra $\mathfrak{h}$ $Ad_{\mathfrak{g}}L-$invarijantna.

Zadatak 11.2 *Dokažite da tada inkluzije definiraju morfizam parova.*

U toj ćemo situaciji pisati $(\mathfrak{h}, L) \hookrightarrow (\mathfrak{g}, K)$.

2. Trivijalni morfizam $(\mathfrak{g}, K) \to (\{0\}, \{e\})$ vodi na relativnu homologiju i kohomologiju.

3. *Specijalni semidirektan produkt*: Neka je $(\mathfrak{h}, L)$ par takav da postoji ideal $\mathfrak{u}$ u $\mathfrak{h}$ koji je $Ad_{\mathfrak{h}}L-$invarijantan i takav da je $\mathfrak{h} = \mathfrak{l} \dotplus \mathfrak{u}$. Neka je $\iota_{alg} : \mathfrak{h} \to \mathfrak{l}$ projekcija u odnosu na tu direktnu sumu i $\iota_{gp} : L \to L$ identiteta.

Zadatak 11.3 *Dokažite da je u opisanoj situaciji sa* $\iota = (\iota_{alg}, \iota_{gp})$ *zadan morfizam parova* $(\mathfrak{h}, L) \to (\mathfrak{l}, L)$.

To će voditi na tzv. $\mathfrak{u}-$homologiju i $\mathfrak{u}-$kohomologiju s djelovanjem kompaktne grupe L. Na primjer, neka je $\mathfrak{h}$ Liejeva algebra gornje trokutastih kompleksnih $n \times n$ matrica i $L = U(1)^n$ kompaktna Liejeva grupa svih dijagonalnih unitarnih $n \times n$ matrica. Tada je Liejeva algebra $\mathfrak{n}$ svih striktno gornje trokutastih komleksnih $n \times n$ matrica ideal u $\mathfrak{h}$ koji je $Ad_{\mathfrak{h}}L-$invarijantan i $\mathfrak{h} = \mathfrak{l} \dot{+} \mathfrak{n}$.

4. *Natkrivanje*: Neka je $\mathfrak{g}, K)$ par. Neka je $\iota_{gp} : \tilde{K} \to K$ konačnolisno natkrivanje povezane kompaktne Liejeve grupe K i neka je ι_{alg} identitata na $\mathfrak{g}$. Tada je $\iota = (\iota_{alg}, \iota_{gp})$ morfizam parova $(\mathfrak{g}, \tilde{K}) \to (\mathfrak{g}, K)$.

Neka je $\iota : (\mathfrak{h}, L) \to (\mathfrak{g}, K)$ morfizam parova. Tada $R(\mathfrak{g}, K)$ postaje lijevi i desni $(\mathfrak{h}, L)-$modul uz djelovanja:

$$b(a \otimes_{U(\mathfrak{k})} T) = \iota_{alg}(b)a \otimes_{U(\mathfrak{k})} T, \quad b \in U(\mathfrak{h}),\ a \in U(\mathfrak{g}),\ T \in R(K),$$

$$y(a \otimes_{U(\mathfrak{k})} T) = Ad_{\mathfrak{g}}(\iota_{gp}(y))a \otimes_{U(\mathfrak{k})} \delta_{\iota_{gp}(y)} * T, \quad y \in L,\ a \in U(\mathfrak{g}),\ T \in R(K),$$

$$y(T \otimes_{U(\mathfrak{k})} a) = \delta_{\iota_{gp}(y)} * T \otimes_{U(\mathfrak{k})} a, \quad y \in L,\ T \in R(K),\ a \in U(\mathfrak{g}),$$

$$(T \otimes_{U(\mathfrak{k})} a)b = T \otimes_{U(\mathfrak{k})} a\iota_{alg}(b), \quad T \in R(K),\ a \in U(\mathfrak{g}),\ b \in U(\mathfrak{h}),$$

$$(T \otimes_{U(\mathfrak{k})} a)y = T * \delta_{\iota_{gp}(y)} \otimes_{U(\mathfrak{k})} Ad_{\mathfrak{g}}(\iota_{gp}(y))^{-1}a, \quad T \in R(K),\ a \in U(\mathfrak{g}),\ y \in L,$$

$$(a \otimes_{U(\mathfrak{k})} T)y = a \otimes_{U(\mathfrak{k})} T * \delta_{\iota gp(y)}, \quad a \in U(\mathfrak{g}),\ T \in R(K),\ y \in L.$$

Pomoću teorema 10.1. i 10.2. $R(\mathfrak{g}, K)$ postaje aproksimativno unitalan $R(\mathfrak{h}, L)-$bimodul.

Za modul V u $\mathcal{C}(\mathfrak{h}, L)$ definiramo

$$P(V) = P_{\mathfrak{h},L}^{\mathfrak{g},K}(V) = R(\mathfrak{g}, K) \otimes_{R(\mathfrak{h},L)} V.$$

To je lijevi $R(\mathfrak{g}, K)-$modul s djelovanjem:

$$\alpha(\beta \otimes_{R(\mathfrak{h},L)} v) = \alpha\beta \otimes_{R(\mathfrak{h},L)} v, \qquad \alpha, \beta \in R(\mathfrak{g}, K),\ v \in V.$$

Modul $P(V)$ je aproksimativno unitalan. Doista, za $\beta \in R(\mathfrak{g}, K)$ postoji konačan skup $A \subseteq \hat{K}$ takav da je $\chi_A\beta = \beta$, a tada je i $\chi_A(\beta \otimes_{R(\mathfrak{h},L)} v) = \beta \otimes_{R(\mathfrak{h},L)} v$. Prema tvrdnji (c) propozicije 2.2. imamo:

Propozicija 11.3 *P je kovarijantan desno egzaktan funktor iz* $\mathcal{C}(\mathfrak{h}, L)$ *u* $\mathcal{C}(\mathfrak{g}, K)$.

Slično možemo $Hom_{R(\mathfrak{h},L)}(R(\mathfrak{g}, K), V)$ (gdje se $R(\mathfrak{g}, K)$ promatra kao lijevi $R(\mathfrak{h}, L)-$modul) učiniti lijevim $R(\mathfrak{g}, K)-$modulom:

$$(\alpha\varphi)(\beta) = \varphi(\beta\alpha), \qquad \alpha, \beta \in R(\mathfrak{g}, K),\ \varphi \in Hom_{R(\mathfrak{h},L)}(R(\mathfrak{g}, K), V).$$

Međutim, taj modul ne mora biti aproksimativno unitalan. Njegov $K-$konačni dio to jest, pa definiramo:

$$I(V) = I_{\mathfrak{h},L}^{\mathfrak{g},K}(V) = Hom_{R(\mathfrak{h},L)}(R(\mathfrak{g}, K), V)_K.$$

Propozicija 11.4 *I je kovarijantan lijevo egzaktan funktor iz $\mathcal{C}(\mathfrak{h}, L)$ u $\mathcal{C}(\mathfrak{g}, K)$.*

Dokaz: Prema tvrdnji (b) propozicije 2.2. $Hom_{R(\mathfrak{h},L)}(R(\mathfrak{g}, K), \cdot)$ je lijevo egzaktan kovarijantan funktor iz $\mathcal{C}(\mathfrak{h}, L)$ u $\tilde{\mathcal{C}}(\mathfrak{g}, K)$. Prema propoziciji 11.1. $W \mapsto W_K$ je egzaktan kovarijantan funktor iz $\tilde{\mathcal{C}}(\mathfrak{g}, K)$ u $\mathcal{C}(\mathfrak{g}, K)$. Napokon, I je kompozicija tih dvaju funktora, pa je kovarijantan i lijevo egzaktan.

Oznake su ovako izabrane, jer ćemo vidjeti da funktor P šalje projektivne module u projektivne i jer se izvedeni funktori od P računaju pomoću projektivnih rezolucija. Funktor I šalje injkektivne module u injektivne i izvedeni funktori od I računaju se pomoću injektivnih rezolucija.

Posebni slučajevi i drugačije oznake

1. $K = L$ i $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ je $Ad\, K)-$invarijantna. Tada je funktor P prirodno izomorfan funktoru *ind* (zove se *funktor induciranja*), a funktor I je prirodno izomorfan funktoru *pro* (zove se *funktor produciranja*):

$$P_{\mathfrak{h},L}^{\mathfrak{g},K}(V) \simeq ind_{\mathfrak{h},L}^{\mathfrak{g},K}(V) = U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{h})} V,$$

$$I_{\mathfrak{h},L}^{\mathfrak{g},K}(V) \simeq pro_{\mathfrak{h},L}^{\mathfrak{g},K}(V) = Hom_{U(\mathfrak{h})}(U(\mathfrak{g}), V)_K.$$

Pri tome K djeluje na $U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{h})} V$ sa

$$x(u \otimes_{U(\mathfrak{h})} v) = (Ad\, x)u \otimes_{U(\mathfrak{h})} xv, \qquad x \in K,\ u \in U(\mathfrak{g}),\ v \in V,$$

a na $Hom_{U(\mathfrak{h})}(U(\mathfrak{g}), V)_K$ sa

$$(x\varphi)(u) = x\varphi((Ad\, x)^{-1}u), \qquad x \in K,\ \varphi \in Hom_{U(\mathfrak{h})}(U(\mathfrak{g}), V)_K,\ u \in U(\mathfrak{g}).$$

2. $\mathfrak{g} = \mathfrak{h}$, $L \subseteq K$. Tada su uobičajene oznake $P = \Pi$ i $I = \Gamma$. Γ se zove *Zuckermanov funktor*, a Π se zove *Bernsteinov funktor*. Pokazuje se da je tada

$$P_{\mathfrak{h},L}^{\mathfrak{g},K}(V) = \Pi_{\mathfrak{h},L}^{\mathfrak{g},K}(V) \simeq R(K) \otimes_{R(\mathfrak{k},L)} V,$$

$$I_{\mathfrak{h},L}^{\mathfrak{g},K}(V) = \Gamma_{\mathfrak{h},L}^{\mathfrak{g},K}(V) \simeq Hom_{R(\mathfrak{k},L)}(R(K), V)_K.$$

3. $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} = \{0\}$, L i K konačne grupe i $L \subseteq K$. Tada je $I_{\{0\},L}^{\{0,\}K}$ klasično induciranje reprezentacija konačnih grupa.

4. $\mathfrak{g} = \mathfrak{h}$, L je podgrupa od K konačnog indeksa. Tada su i P i I prirodno izomorfni funktoru koji je varijanta klasičnog induciranja.

5. Razmotrimo morfizam parova $\iota : (\mathfrak{g}, K) \to (\{0\}, \{e\})$. Kako je očito $R(\{0\}, \{e\}) = \mathbb{C}$, imamo

$$I_{\mathfrak{g},K}^{\{0\},\{e\}}(V) = Hom_{R(\mathfrak{g},K))}(\mathbb{C}, V).$$

Pokazuje se da te to izomorfno s potprostorom *invarijanata*:

$$V^{\mathfrak{g},K} = \{v \in V;\ Xv = 0\ \forall X \in \mathfrak{g} \text{ i } xv = v\ \forall x \in K\}.$$

Nadalje,

$$P_{(\mathfrak{g},K)}^{\{0\},\{e\}}(V) = \mathbb{C} \otimes_{R(\mathfrak{g},K)} V.$$

Pokazuje se da je to prirodno izomorfno s prostorom tzv. *koinvarijanata*:

$$V_{\mathfrak{g},K} = V/[\{Xv;\ X \in \mathfrak{g},\ v \in V\} \cup \{v - xv;\ x \in K,\ v \in V\}] \simeq (V/[\mathfrak{g}V])^K.$$

Ako je $K = \{e\}$ za prostore invarijanata i koinvarijanata pišemo $V^{\mathfrak{g}}$ i $V_{\mathfrak{g}}$.

6. *Specijalni semidirektan produkt*: $\iota : (\mathfrak{h}, L) \to (\mathfrak{l}, L)$, pri čemu je $\mathfrak{h} = \mathfrak{l} \dotplus \mathfrak{u}$, gdje je $\mathfrak{u}$ $Ad_{hh}L-$invarijantan ideal u $\mathfrak{h}$ i ι_{alg} je projektor sa $\mathfrak{h}$ na $\mathfrak{l}$ duž $\mathfrak{u}$. U toj situaciji imamo i drugi relevantan morfizam parova a to je inkluzija $j : (\mathfrak{u}, \{e\}) \hookrightarrow (\mathfrak{h}, L)$. Svaki $(\mathfrak{h}, L)-$modul postaje $(\mathfrak{u}, \{e\})-$modul pomoću *zaboravnog funktora* $\mathcal{F}_{\mathfrak{h},L}^{\mathfrak{u},\{e\}}$. Tada se dobiva:

$$P_{\mathfrak{h},L}^{\mathfrak{l},L}(V) \simeq \mathcal{F}_{\mathfrak{h},L}^{\mathfrak{u},\{e\}}(V)_{\mathfrak{u}},$$

$$I_{\mathfrak{h},L}^{\mathfrak{l},L}(V) \simeq \mathcal{F}_{\mathfrak{h},L}^{\mathfrak{u},\{e\}}(V)^{\mathfrak{u}}.$$

7. *Natkrivanje* $\iota : (\mathfrak{g}, \tilde{K}) \to (\mathfrak{g}, K)$, $\iota_{alg} = id_{\mathfrak{g}}$, ι_{gp} natkrivanje s konačnom jezgrom. Tada se može uvesti tzv. *funktor usrednjenja* $A_{\mathfrak{g},\tilde{K}}^{\mathfrak{g},K}$, koji predstavlja usrednjenje $\tilde{K}-$djelovanja tako da se dobije $K-$djelovanje. Pokazuje se da su tada i $P_{\mathfrak{g},\tilde{K}}^{\mathfrak{g},K}$ i $I_{\mathfrak{g},\tilde{K}}^{\mathfrak{g},K}$ prirodno izomorfni funktoru $A_{\mathfrak{g},\tilde{K}}^{\mathfrak{g},K}$.

Proučit ćemo sada najosnovnija svojstva funktora P i I.

Propozicija 11.5 *Neka je $(\mathfrak{g}, K)$ par i V modul u kategoriji $\mathcal{C}(\mathfrak{g}, K)$. Tada imamo prirodne izomorfizme u kategoriji $\mathcal{C}(\mathfrak{g}, K)$:*

$$P_{\mathfrak{g},K}^{\mathfrak{g},K}(V) \simeq V \qquad i \qquad I_{\mathfrak{g},K}^{\mathfrak{g},K}(V) \simeq V.$$

Dokaz: Po univerzalnom svojstvu tenzorskog produkta postoji jedinstven linearan operator $P(V) \to V$ takav da $\alpha \otimes_{R(\mathfrak{g},K)} v \mapsto \alpha v$. To je surjekcija, jer je V aproksimativno unitalan $R(\mathfrak{g}, K)-$modul. Dokažimo injektivnost. Pretpostavimo da

$$\sum_i \alpha_i \otimes_{R(\mathfrak{g},K)} v_i \mapsto 0, \qquad \text{tj.} \qquad \sum_i \alpha_i v_i = 0.$$

Neka je $A \subseteq \hat{K}$ konačan skup takav da je $\chi_A \alpha_i = \alpha_i$ $\forall i$. Slijedi

$$\sum_i \alpha_i \otimes_{R(\mathfrak{g},K)} v_i = \sum_i \chi_A \alpha_i \otimes_{R(\mathfrak{g},K)} v_i - \chi_A \otimes_{R(\mathfrak{g},K)} \sum_i \alpha_i v_i = \sum_i (\chi_A \alpha_i \otimes_{R(\mathfrak{g},K)} v_i - \chi_A \otimes_{R(\mathfrak{g},K)} \alpha_i v_i) = 0.$$

Za modul X u $\mathcal{C}(\mathfrak{g}, K)$ je (uz oznake $R = R(\mathfrak{g}, K)$ i $I = I_{\mathfrak{g},K}^{\mathfrak{g},K}$)

$$Hom_R(X, I(V)) = Hom_R(X, Hom_R(R, V)_K) = Hom_R(X, Hom_R(R, V)),$$

jer je slika lokalno konačnog modula X pri $R-$morfizmu uvijek sadržana u $Hom_R(R, V)_K$. Prema propoziciji 2.6. to je prirodno izomorfno (po X i po V) sa

$$Hom_R(R \otimes_R X, V) \simeq Hom_R(X, V).$$

Dakle, $Hom_R(X, I(V)) \simeq Hom_R(X, V)$, pa po propoziciji 2.8. slijedi $I(V) \simeq V$.

Propozicija 11.6 *Neka su $\iota : (\mathfrak{h}, L) \to (\mathfrak{g}, K)$ i $\kappa : (\mathfrak{j}, M) \to (\mathfrak{h}, L)$ morfizmi parova. Tada su prirodno izomorfni funktori $P_{\mathfrak{h},L}^{\mathfrak{g},K} \circ P_{\mathfrak{j},M}^{\mathfrak{h},L}$ i $P_{\mathfrak{j},M}^{\mathfrak{g},K}$, a također funktori $I_{\mathfrak{h},L}^{\mathfrak{g},K} \circ I_{\mathfrak{j},M}^{\mathfrak{h},L}$ i $I_{\mathfrak{j},M}^{\mathfrak{g},K}$.*

Dokaz: Pomoću propozicije 2.7. imamo

$$(P^{\mathfrak{g},K}_{\mathfrak{h},L} \circ P^{\mathfrak{h},L}_{\mathfrak{j},M})(V) = R(\mathfrak{g},K) \otimes_{R(\mathfrak{h},L)} (R(\mathfrak{h},L) \otimes_{R(\mathfrak{j},M)} V) \simeq$$

$$\simeq (R(\mathfrak{g},K) \otimes_{R(\mathfrak{h},L)} R(\mathfrak{h},L)) \otimes_{R(\mathfrak{j},M)} V = R(\mathfrak{g},K) \otimes_{R(\mathfrak{j},M)} V = P^{\mathfrak{g},K}_{\mathfrak{j},M}(V).$$

Nadalje, pomoću propozicije 2.6. imamo zbog toga što je $R(\mathfrak{g},K)$ aproksimativno unitalan lijevi $R(\mathfrak{h},L)-$modul:

$$(I^{\mathfrak{g},K}_{\mathfrak{h},L} \circ I^{\mathfrak{h},L}_{\mathfrak{j},M})(V) = Hom_{R(\mathfrak{h},L)}(R(\mathfrak{g},K), Hom_{R(\mathfrak{j},M)}(R(\mathfrak{h},L),V)_L)_K =$$

$$= Hom_{R(\mathfrak{h},L)}(R(\mathfrak{g},K), Hom_{R(\mathfrak{j},M)}(R(\mathfrak{h},L),V))_K \simeq Hom_{R(\mathfrak{j},M)}(R(\mathfrak{g},K) \otimes_{R(\mathfrak{h},L)} R(\mathfrak{h},L),V)_K =$$

$$= Hom_{R(\mathfrak{j},M}(R(\mathfrak{g},K),V)_K = I^{\mathfrak{g},K}_{\mathfrak{j},M}(V).$$

Napomena: U svim ovim tvrdnjama važna nam je prirodnost izomorfizama, jer zbog toga ćemo imati i prirodnu izomorfnost izvedenih funktora.

Neka je $\iota : (\mathfrak{h},L) \to (\mathfrak{g},K)$ morfizam parova. Tada imamo **zaboravni funktor**

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}^{\mathfrak{h},L}_{\mathfrak{g},K} : \mathcal{C}(\mathfrak{g},K) \longrightarrow \mathcal{C}(\mathfrak{h},L)$$

definiran na sljedeći način: ako je V $(\mathfrak{g},K)-$modul, onda je $\mathcal{F}(V)$ isti vektorski prostor, a djelovanja su dana sa

$$bv = \iota_{alg}(b)v, \qquad yv = \iota_{gp}(y)v, \qquad b \in U(\mathfrak{h}),\ y \in L,\ v \in V.$$

Očito je $\mathcal{F}$ kovarijantan egzaktan funktor. Koristeći strukturu aproksimativno unitalnog lijevog $R(\mathfrak{h},L)-$modula na $R(\mathfrak{g},K)$ imamo prirodni izomorfizam:

$$\mathcal{F}(V) \simeq R(\mathfrak{g},K) \otimes_{R(\mathfrak{g},K)} V.$$

Preslikavanje zdesna na lijevo dano je sa $\alpha \otimes_{R(\mathfrak{g},K)} v \mapsto \alpha v$. U dokazu propozicije 11.5. vidjeli smo da je to bijekcija.

Teorem 11.1 (Frobeniusov reciprocitet za funktor I) *Funktor I je desno adjungiran funktoru $\mathcal{F}$. Drugim riječima, postoji izomorfizam*

$$Hom_{R(\mathfrak{g},K)}(X, I^{\mathfrak{g},K}_{\mathfrak{h},L}(V)) \simeq Hom_{R(\mathfrak{h},L)}(\mathcal{F}^{\mathfrak{h},L}_{\mathfrak{g},K}(X),V)$$

koji je prirodni i u odnosu na V iz $\mathcal{C}(\mathfrak{h},L)$ i u odnosu na X iz $\mathcal{C}(\mathfrak{g},K)$.

Dokaz: Pomoću propozicije 2.6. imamo

$$Hom_{R(\mathfrak{g},K)}(X, I^{\mathfrak{g},K}_{\mathfrak{h},L}(V)) = Hom_{R(\mathfrak{g},K)}(X, Hom_{R(\mathfrak{h},L)}(R(\mathfrak{g},K),V)_K) =$$

$$= Hom_{R(\mathfrak{g},K)}(X, Hom_{R(\mathfrak{h},L)}(R(\mathfrak{g},K),V)) \simeq$$

$$\simeq Hom_{R(\mathfrak{h},L)}(R(\mathfrak{g},K) \otimes_{R(\mathfrak{g},K)} X, V) \simeq Hom_{R(\mathfrak{h},L)}(\mathcal{F}^{\mathfrak{h},L}_{\mathfrak{g},K}(X),V).$$

Zadatak 11.4 *Dokažite: ako*

$$\Phi \in Hom_{R(\mathfrak{g},K)}(X, I^{\mathfrak{g},K}_{\mathfrak{h},L}(V))$$

odgovara elementu

$$\Psi \in Hom_{R(\mathfrak{h},L)}(\mathcal{F}^{\mathfrak{h},L}_{\mathfrak{g},K}(X),V)$$

pri izomorfizmu iz teorema 11.1. onda vrijedi

$$[\Phi(x)](\alpha) = \Psi(\alpha x), \qquad x \in X,\ \alpha \in R(\mathfrak{g},K).$$

Korolar 11.1 *Neka je V injektivan modul u $\mathcal{C}(\mathfrak{h}, L)$. Tada je $I_{\mathfrak{h},L}^{\mathfrak{g},K}(V)$ injektivan modul u $\mathcal{C}(\mathfrak{g}, K)$.*

Dokaz: Prema teoremu 11.1. funktor

$$X \mapsto Hom_{R(\mathfrak{g},K)}(X, I_{\mathfrak{h},L}^{\mathfrak{g},K}(V))$$

je prirodno izomorfan funktoru

$$X \mapsto Hom_{R(\mathfrak{h},L)}(\mathcal{F}_{\mathfrak{h},L}^{\mathfrak{g},K}(X), V).$$

Ovaj drugi funktor je egzaktan jer je to kompozicija egzaktnih funktora

$$X \mapsto \mathcal{F}_{\mathfrak{h},L}^{\mathfrak{g},K}(X) \qquad \text{i} \qquad Y \mapsto Hom_{R(\mathfrak{h},L)}(Y, V)$$

(ovo drugo zbog propozicije 2.3. jer je modul V injektivan). Dakle, funktor

$$X \mapsto Hom_{R(\mathfrak{g},K)}(X, I_{\mathfrak{h},L}^{\mathfrak{g},K}(V))$$

je egzaktan, a to po propoziciji 2.3. znači da je modul $I_{\mathfrak{h},L}^{\mathfrak{g},K}(V)$ injektivan

Korolar 11.2 *Za svaki modul V u $\mathcal{C}(\mathfrak{k}, K)$ modul $I_{\mathfrak{k},K}^{\mathfrak{g},K}(V)$ je injektivan u $\mathcal{C}(\mathfrak{g}, K)$.*

Dokaz: To slijedi neposredno iz propozicije 11.2. i iz korolara 11.1.

Za module iz korolara 11.2. kažemo da su **standardni injektivni moduli** u kategoriji $\mathcal{C}(\mathfrak{g}, K)$.

Korolar 11.3 (a) *Svaki modul X u $\mathcal{C}(\mathfrak{g}, K)$ je podmodul standardnog injektivnog modula. Posebno, kategorija $\mathcal{C}(\mathfrak{g}, K)$ ima dosta injektivnih.*

(b) *Neka je X injektivan modul u $\mathcal{C}(\mathfrak{g}, K)$. Tada je X direktni sumand u standardnom injektivnom modulu.*

Dokaz: (a) Stavimo

$$I = I_{\mathfrak{k},K}^{\mathfrak{g},K}(\mathcal{F}_{\mathfrak{g},K}^{\mathfrak{k},K}(X)).$$

Modul I je standardni injektivni, a prema teoremu 11.1. imamo

$$Hom_{R(\mathfrak{g},K)}(X, I) \simeq Hom_{R(K)}(\mathcal{F}_{\mathfrak{g},K}^{\mathfrak{k},K}(X), \mathcal{F}_{\mathfrak{g},K}^{\mathfrak{k},K}(X)).$$

Neka je $\varphi \in Hom_{\mathbb{R}(\mathfrak{g},K)}(X, I)$ element koji pri gornjem izomorfizmu odgovara identiteti na $\mathcal{F}_{\mathfrak{g},K}^{\mathfrak{k},K}(X)$. Prema zadatku 11.4.

$$[\varphi(x)](\alpha) = \alpha x, \qquad \alpha \in R(\mathfrak{g}, K),\ x \in X.$$

Tvrdnja (a) bit će dokazana ako ustanovimo da je φ injekcija. Ako je $\varphi(x) = 0$ onda je $\alpha x = 0$ $\forall \alpha$ pa slijedi da je $x = 0$ jer je modul X aproksimativno unitalan.

(b) Neka je I kao u dokazu tvrdnje (a). Tada imamo egzaktan niz

$$0 \longrightarrow X \longrightarrow I \longrightarrow I/X \longrightarrow 0.$$

Budući da je modul X injektivan, taj je niz rascjepiv, a to upravo znači da je slika od X u I direktni sumand u I.

Nešto je delikatnije da se dobiju analogne tvrdnje o funktoru P. Neka je $\iota : (\mathfrak{h}, L) \to (\mathfrak{g}, K)$ morfizam parova. Za modul X u kategoriji $\mathcal{C}(\mathfrak{g}, K)$ definiramo lijevi $R(\mathfrak{h}, L)-$modul

$$\check{\mathcal{F}}(X) = \check{\mathcal{F}}_{\mathfrak{g},K}^{\mathfrak{h},L}(X) = Hom_{R(\mathfrak{g},K)}(R(\mathfrak{g}, K), X)_L$$

pri čemu je lijevo djelovanje algebre $R(\mathfrak{h}, L)$ definirano pomoću strukture desnog $R(\mathfrak{h}, L)-$modula na $R(\mathfrak{g}, K)$:

$$(\alpha\varphi)(\beta) = \varphi(\beta\alpha), \qquad \varphi \in Hom_{R(\mathfrak{g},K)}(R(\mathfrak{g}, K), X), \ \alpha \in R(\mathfrak{h}, L), \ \beta \in R(\mathfrak{g}, K).$$

Indeks "L" u definiciji modula $\check{\mathcal{F}}(X)$ znači uzimanje $L-$konačnog dijela, odnosno, najvećeg aproksimativno unitalnog $R(\mathfrak{h}, L)-$podmodula.

Propozicija 11.7 *Neka je X modul u kategoriji $\mathcal{C}(\mathfrak{g}, K)$ i neka je*

$$X = \coprod_{\gamma \in \hat{K}} X_\gamma$$

njegov rastav kao $R(K)-$modula (propozicija 6.1.). Tada je

$$Hom_{R(\mathfrak{g},K)}(R(\mathfrak{g}, K), X) \simeq \prod_{\gamma \in \hat{K}} X_\gamma \qquad (*)$$

kao $R(K)-$modul, i taj je izomorfizam prirodan u X. Ako je $\iota : (\mathfrak{h}, L) \to (\mathfrak{g}, K)$ morfizam parova, onda gornji izomorfizam poštuje djelovanje $R(L)$ i to s lijeve strane to je djelovanje dobiveno pomoću inkluzije $R(L) \subseteq R(\mathfrak{h}, L)$ a desne strane to je produkt djelovanja na pojedinim X_γ i to putem homomorfizma $\iota_{gp} : L \to K$.

Dokaz: Imamo dekompoziciju

$$R(K) = \coprod_{\gamma \in \hat{K}} R_\gamma(K)$$

koja poštuje i lijevo i desno djelovanje grupe K, dakle, putem homomorfizma ι_{gp} i djelovanja grupe L. Slijedi

$$R(\mathfrak{g}, K) = U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{k})} R(K) \simeq \coprod_{\gamma \in \hat{K}} U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{k})} R_\gamma(K)$$

i taj izomorfizam poštuje desno djelovanje grupe K, dakle i grupe L. Djelovanje grupe K slijeva na $R(\mathfrak{g}, K)$ prelazi u $Ad \otimes \lambda$ na svakom faktoru. Nadalje, gornji rastav poštuje djelovanje $U(\mathfrak{g})$ slijeva.

Primijenimo li $Hom_{R(\mathfrak{g},K)}(\cdot, X)$ na obje strane slijedi

$$Hom_{R(\mathfrak{g},K)}(R(\mathfrak{g}, K), X) \simeq \prod_{\gamma \in \hat{K}} Hom_{R(\mathfrak{g},K)}(U\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{k})} R_\gamma(K), X)$$

i to kao lijevi $R(K)-$moduli, dakle i kao lijevi $R(L)-$moduli, i izomorfizam je prirodan u varijabli X.

Fiksirajmo sada $\gamma \in \hat{K}$ i neka je $\Phi \in Hom_{R(\mathfrak{g},K)}(U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{k})} R_\gamma(K), X)$. Definiramo $\varphi \in Hom_{R(K)}(R_\gamma(K), X)$ sa

$$\varphi(T) = \Phi(1 \otimes_{U(\mathfrak{k})} T), \qquad T \in R_\gamma(K).$$

Preslikavanje $\Phi \mapsto \varphi$ označimo sa A. Dakle,

$$[A(\Phi)](T) = \Phi(1 \otimes_{U(\mathfrak{k})} T), \qquad T \in R(K).$$

Neka je sada zadano $\varphi \in Hom_{R(K)}(R_\gamma(K), X)$ i definirajmo

$$\Phi \in Hom_{R(\mathfrak{g},K)}(U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{k})} R_\gamma(K), X)$$

sa

$$\Phi(a \otimes_{U(\mathfrak{k})} T) = a\varphi(T), \qquad a \in U(\mathfrak{g}),\ T \in R_\gamma(K).$$

Označimo preslikavanje $\varphi \mapsto \Phi$ sa B :

$$B(\varphi)(a \otimes_{U(\mathfrak{k})} T) = a\varphi(T), \qquad a \in U(\mathfrak{g}),\ T \in R_\gamma(K).$$

Tada imamo

$$[B(A(\Phi))](a \otimes_{U(\mathfrak{k})} T) = a[A(\Phi)](T) = a\Phi(1 \otimes_{U(\mathfrak{k})} T) = \Phi(a(1 \otimes_{U(\mathfrak{k})} T)) = \Phi(a \otimes_{U(\mathfrak{k})} T)$$

i

$$[A(B(\varphi))](T) = [B(\varphi)](1 \otimes_{U(\mathfrak{k})} T) = \varphi(T).$$

To pokazuje da su preslikavanja A i B međusobno inverzna, dakle

$$Hom_{R(\mathfrak{g},K)}(U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{k})} R_\gamma(K), X) \simeq Hom_{R(K)}(R_\gamma(K), X)$$

prirodno u odnosu na X. Po teoremu 7.1 i propoziciji 7.6. imamo

$$Hom_{R(K)}(R_\gamma(K), X) = Hom_K(R_\gamma(K), X) \simeq X_\gamma,$$

također prirodno u odnosu na X.

Propozicija 11.8 *Neka je $\iota : (\mathfrak{h}, L) \to (\mathfrak{g}, K)$ morfizam parova.*

(*a*) *$\check{\mathcal{F}}$ je egzaktan kovarijantan funktor iz $\mathcal{C}(\mathfrak{g}, K)$ u $\mathcal{C}(\mathfrak{h}, L)$.*

(*b*) *Definirajmo $j : \mathcal{F}(X) \to \check{\mathcal{F}}(X)$ sa*

$$j(x)(\alpha) = \alpha x, \qquad \alpha \in R(\mathfrak{g}, K),\ x \in X.$$

Tada je j surjekcija.

(*c*) *j iz (b) je injekcija ako i samo ako svaki $\tau \in \hat{L}$ ima sljedeće svojstvo: postoji najviše konačno mnogo $\gamma \in \hat{K}$ takvih da je $X_\gamma \neq \{0\}$ i da se τ pojavljuje u reprezentaciji $\gamma \circ \iota_{gp}$ grupe L.*

Posebno, j je izomorfizam u sljedeća dva slučaja:

(*i*) $\iota_{gp}(L)$ je podgrupa od K konačnog indeksa; to je, naravno, ispunjeno ako je ι_{gp} epimorfizam grupa, a posebno ako je $L = K$ i $\iota_{gp} = id_K$.

(*ii*) $X_\gamma \neq \{0\}$ za samo konačno mnogo $\gamma \in \hat{K}$; to je, naravno, ispunjeno ako je X konačnodimenzionalan.

Dokaz: Očito je funktor $\check{\mathcal{F}}$ kovarijantan. Za modul X iz kategorije $\mathcal{C}(\mathfrak{g}, K)$ neka je $\check{X}$ modul iz kategorije $\tilde{\mathcal{C}}(\mathfrak{h}, L)$ definiran sa

$$\check{X} = Hom_{R(\mathfrak{g},K)}(R(\mathfrak{g}, K), X.$$

Funktor $\check{\mathcal{F}}$ je kompozicija funktora $X \mapsto \check{X}$ i uzimanja $L-$konačnog dijela $(\cdot)_L$. Ovo drugo je egzaktan funktor po propoziciji 11.1., dakle, dovoljno je dokazati da je funktor $X \mapsto \check{X}$ egzaktan. Prema propiziciji 11.7. je

$$\check{X} \simeq \prod_{\gamma \in \check{C}K} X_\gamma$$

i to kao $R(L)-$moduli. Dakle, za egzaktnost funktora $\check{\mathcal{F}}$ dovoljno je dokazati da je

$$X = \coprod_{\gamma\in\hat{K}} X_\gamma \mapsto \prod_{\gamma\in\hat{K}} X_\gamma$$

egzaktan funktor iz kategorije $\mathcal{C}(\mathfrak{k}, K)$ u kategoriju $\tilde{\mathcal{C}}(\mathfrak{l}, L)$. Budući da je $R(\mathfrak{k}, K) = R(K)$, zbog propozicije 11.7 taj je funktor prirodno izomorfan funktoru $F = Hom_{R(K)}(R(K), \cdot\,)$ koji je lijevo egzaktan prema propoziciji 2.2. Dakle, ako je

$$0 \longrightarrow Y \longrightarrow X \longrightarrow X/Y \xrightarrow{\rho} 0 \qquad (*)$$

kratki egzaktni niz u kategoriji $\mathcal{C}(\mathfrak{k}, K)$, onda je kompleks

$$0 \longrightarrow F(X) \longrightarrow F(Y) \xrightarrow{F(\rho)} F(X/Y)$$

egzaktan. Treba još dokazati da je $F(\rho)$ surjekcija. Međutim, prema tvrdnji (c) propozicije 6.1. niz $(*)$ u kategoriji $\mathcal{C}(\mathfrak{k}, K)$ je rascjepiv. Ako je $\rho' : X/Y \to X$ $(\mathfrak{k}, K)-$morfizam takav da je $\rho\circ\rho' = id_{X/Y}$, onda je $F(\rho)\circ F(\rho') = id_{F(X/Y)}$. Odatle slijedi da je $F(\rho)$ surjekcija. Dakle, funktor F, a time i funktor $\check{\mathcal{F}}$, je egzaktan.

(b) Jasno je da je j $R(\mathfrak{h}, L)-$morfizam koji je prirodan u X. Neka je $x \in X$ takav da je $j(x) = 0$. Tada slijedi da je $\alpha x = 0$ $\forall\alpha \in R(\mathfrak{g}, K)$. Kako je modul X aproksimativno unitalan, slijedi $x = 0$. Dakle, j je injekcija.

(c) U dokazu tvrdnje (a) označili smo

$$\check{X} = Hom_{R(\mathfrak{g},K)}(R(\mathfrak{g}, K), X),$$

dakle, $\check{\mathcal{F}}(X) = \check{X}_L$. Realizirajmo sada $\check{X}$ kao $R(L)-$modul kao u propoziciji 11.7:

$$\check{X} \simeq \prod_{\gamma\in\hat{K}} X_\gamma.$$

Ako je $x \in X$, tada je $\gamma-$član od $j(x)$ u desnoj strani od

$$Hom_{R(\mathfrak{g},K)}(R(\mathfrak{g}, K), X) \simeq \prod_{\gamma\in\hat{K}} Hom_{R(\mathfrak{g},K)}(U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{k})} R_\gamma(K), X)$$

(što je dokazano u propoziciji 11.7.) jednak

$$j(x)|U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{k})} R_\gamma(K).$$

To pri izomorfizmu

$$Hom_{R(\mathfrak{g},K)}(U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{k})} R_\gamma(K), X) \simeq Hom_{R(K)}(R_\gamma(K), X)$$

odgovara elementu

$$j(x)|1 \otimes_{U(\mathfrak{k})} R_\gamma(K),$$

a ovo opet pri izomorfizmu

$$Hom_{R(K)}(R_\gamma(K), X) \simeq X_\gamma$$

odgovara elementu

$$j(x)(1 \otimes_{U(\mathfrak{k})} \chi_\gamma).$$

Po definiciji j taj element od X_γ jednak je

$$(1 \otimes_{U(\mathfrak{k})} \chi_\gamma)(x) = \chi_\gamma x.$$

Za $x \in X$ vrijedi $\chi_\gamma x \neq 0$ za samo konačno mnogo $\gamma \in \hat{K}$ (jer je modul X lokalno konačan) i njihova suma jednaka je x. Dakle, slika od j je upravo podskup

$$\coprod_{\gamma} X_\gamma \subseteq \check{X} = \prod_{\gamma \in \hat{K}} X_\gamma.$$

S druge strane,

$$\check{\mathcal{F}}(X) = (\prod_{\gamma \in \hat{K}} X_\gamma)_L.$$

Dakle, j je surjekcija ako i samo ako je

$$\coprod_{\gamma \in \hat{K}} X_\gamma = (\prod_{\gamma \in \hat{K}} X_\gamma)_L$$

kao vektorski prostori. Obje strane se mogu dekomponirati kao direktne sume $\tau-$izotipnih potprostora po $\tau \in \hat{L}$, a $\tau-$izotipni potprostori za određeni $\tau \in \hat{L}$ s lijeve i desne strane su

$$\coprod_{\gamma \in \hat{K}} (X_\gamma)_\tau \qquad \text{i} \qquad \prod_{\gamma \in \hat{K}} (X_\gamma)_\tau \,.$$

Ta su dva vektorska prostora jednaka ako i samo ako imaju konačno mnogo članova. Time je tvrdnja (c) dokazana.

Teorem 11.2 (Frobeniusov reciprocitet za funktor P) *Funktor P je lijevo adjungiran funktoru $\check{\mathcal{F}}$. Dugim riječima, postoji izomorfizam*

$$Hom_{R(\mathfrak{g},K)}(P_{\mathfrak{h},L}^{\mathfrak{g},K}(V), X) \simeq Hom_{R(\mathfrak{h},L)}(V, \check{\mathcal{F}}_{\mathfrak{g},K}^{\mathfrak{h},L}(X))$$

i taj je izomorfizam prirodan u odnosu na V iz $\mathcal{C}(\mathfrak{h}, L)$ i u odnosu na X iz $\mathcal{C}(\mathfrak{g}, K)$.

Dokaz: Pomoću propozicije 2.6. imamo

$$Hom_{R(\mathfrak{g},K)}(P_{\mathfrak{h},L}^{\mathfrak{g},K}(V), X) = Hom_{R(\mathfrak{g},K)}(R(\mathfrak{g}, K) \otimes_{R(\mathfrak{h},L)} V, X) \simeq$$

$$\simeq Hom_{R(\mathfrak{h},L)}(V, Hom_{R(\mathfrak{g},K)}(R(\mathfrak{g}, K), X)) =$$

$$= Hom_{R(\mathfrak{h},L)}(V, Hom_{R(\mathfrak{g},K)}(R(\mathfrak{g}, K), X)_L) = Hom_{R(\mathfrak{h},L)}(V, \check{\mathcal{F}}_{\mathfrak{g},K}^{\mathfrak{h},L}(X)).$$

Kao i u slučaju korolara 11.1., 11.2. i 11.3. teorema 11.1., iz ovog teorema na potpuno analogan način dobivamo:

Korolar 11.4 *Funktor P prevodi projektivne module u kategoriji $\mathcal{C}(\mathfrak{h}, L)$ u projektivne module u kategoriji $\mathcal{C}(\mathfrak{g}, K)$.*

Korolar 11.5 *Za morfizam parova $\iota : (\mathfrak{k}, K) \hookrightarrow (\mathfrak{g}, K)$ i za svaki modul V u kategoriji $\mathcal{C}(\mathfrak{k}, K)$ modul $P_{\mathfrak{k},K}^{\mathfrak{g},K}(V)$ je projektivan u kategoriji $\mathcal{C}(\mathfrak{g}, K)$.*

Za module iz korolara 11.5. kažemo da su **standardni projektivni** u kategoriji $\mathcal{C}(\mathfrak{g}, K)$.

Korolar 11.6 (*a*) *Svaki modul* X *u* $\mathcal{C}(\mathfrak{g}, K)$ *je kvocijent standardnog projektivnog modula. Posebno, kategorija* $\mathcal{C}(\mathfrak{g}, K)$ *ima dosta projektivnih.*

(*b*) *Neka je* X *projektivni modul u* $\mathcal{C}(\mathfrak{g}, K)$*. Tada je* X *direktni sumand u standardnom projektivnom modulu.*

Zadatak 11.5 (*a*) *Dokažite korolar 11.4.*

(*b*) *Dokažite korolar 11.5.*

(*c*) *Dokažite tvrdnju* (*a*) *korolara 11.6.*

(*d*) *Dokažite tvrdnju* (*b*) *korolara 11.6.*

Poglavlje 12

Konstrukcije u kategoriji $\mathcal{C}(\mathfrak{g}, K)$

U ovom poglavlju $(\mathfrak{g}, K)$ je par. Proučit ćemo najprije svojstva $(\mathfrak{g}, K)-$modula u odnosu na operacije $\otimes_{\mathbb{C}}$ i $Hom_{\mathbb{C}}$. Na modulima u kategoriji $\mathcal{C}(\mathfrak{g}, K)$ reprezentacije grupe K, Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ i njene univerzalne omotačke algebre $U(\mathfrak{g})$ pisat ćemo bez ikakvog znaka. Neka su V i W moduli u $\mathcal{C}(\mathfrak{g}, K)$. Tada na vektorskom prostoru $V \otimes_{\mathbb{C}} W$ imamo reprezentacije Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ i grupe K takve da za $v \in V$ i $w \in W$ vrijedi

$$X(v \otimes_{\mathbb{C}} w) = Xv \otimes_{\mathbb{C}} w + vXw, \qquad X \in \mathfrak{g},$$

$$x(v \otimes_{\mathbb{C}} w) = xv \otimes_{\mathbb{C}} xw, \qquad x \in K.$$

Uz takva djelovanja $V \otimes_{\mathbb{C}} W$ je $(\mathfrak{g}, K)-$modul. Doista:

(i) Očito je reprezentacija grupe K na prostoru $V \otimes_{\mathbb{C}} W$ lokalno konačna.

(ii) Za $X \in \mathfrak{k}_0$, $v \in V$ i $w \in W$ imamo

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[(\exp tX)(v \otimes_{\mathbb{C}} w)]\Big|_{t=0} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[(\exp tX)v \otimes_{\mathbb{C}} (\exp tX)w]\Big|_{t=0} =$$

$$= Xv \otimes_{\mathbb{C}} w + v \otimes_{\mathbb{C}} Xv = X(v \otimes_{\mathbb{C}} w).$$

(iii) Za $x \in K$, $X \in \mathfrak{g}$, $v \in V$ i $w \in W$ imamo

$$[(Ad\, x)X](v \otimes_{\mathbb{C}} w) = [(Ad\, x)X]v \otimes_{\mathbb{C}} w + v \otimes_{\mathbb{C}} [(Ad\, x)X]w =$$

$$= x[X(x^{-1}v)] \otimes_{\mathbb{C}} w + v \otimes_{\mathbb{C}} x[X(x^{-1}w)] = x[X(x^{-1}v) \otimes_{\mathbb{C}} x^{-1}w] + x[x^{-1}v \otimes_{\mathbb{C}} X(x^{-1}w)] =$$

$$= x[X(x^{-1}v) \otimes_{\mathbb{C}} x^{-1}w + x^{-1}v \otimes_{\mathbb{C}} X(x^{-1}w)] = x[X(x^{-1}v \otimes_{\mathbb{C}} x^{-1}w)] = x[X(x^{-1}(v \otimes_{\mathbb{C}} w))].$$

Odatle indukcijom po n nalazimo da za svaki $u \in U(\mathfrak{g})$ oblika $u = X_1X_2 \cdots X_n$ vrijedi

$$[(Ad\, x)u](v \otimes_{\mathbb{C}} w) = x[u(x^{-1}(v \otimes_{\mathbb{C}} w))], \qquad x \in K,\ v \in V,\ w \in W$$

a po linearnosti nalazimo da to vrijedi za svaki $u \in U(\mathfrak{g})$.

Dakle, stvarno je $V \otimes_{\mathbb{C}} W$ modul u $\mathcal{C}(\mathfrak{g}, K)$.

Situacija s $Hom_{\mathbb{C}}$ je nešto kompliciranija. Za module V i W u kategoriji $\mathcal{C}(\mathfrak{g}, K)$ definiramo na prirodan način djelovanja $\mathfrak{g}$ i K na $Hom_{\mathbb{C}}(V, W)$: za $\varphi \in Hom_{\mathbb{C}}(V, W)$ i $v \in V$ stavljamo

$$(X\varphi)(v) = X(\varphi(v)) - \varphi(Xv), \qquad X \in \mathfrak{g},$$

$$(x\varphi)(v) = x(\varphi(x^{-1}v)), \qquad x \in K.$$

Međutim, djelovanje K na $Hom_{\mathbb{C}}(V, W)$ ne mora biti lokalno konačno. Npr. ako je $\mathfrak{g} = \mathfrak{k}$ onda je

$$V = \coprod_{\gamma \in \hat{K}} V_\gamma$$

i za $W = \mathbb{C}$ s trivijalnim $K-$djelovanjem imamo

$$Hom_{\mathbb{C}}(V, W) = \prod_{\gamma \in \hat{K}} V_\gamma^*,$$

a na tom je prostoru $K-$djelovanje lokalno konačno ako i samo ako je $V_\gamma \neq \{0\}$ za samo konačno mnogo $\gamma \in \hat{K}$.

Zbog toga umjesto $Hom_{\mathbb{C}}(V, W)$ promatramo $Hom_{\mathbb{C}}(V, W)_K$, što označava $K-$konačam dio za gore definiranu reprezentaciju grupe K na prostoru $Hom_{\mathbb{C}}(V, W)$. Primijetimo da je oznaka ista kao i za prije promatrani funktor kategorije $\tilde{\mathcal{C}}(\mathfrak{g}, K)$ u kategoriju $\mathcal{C}(\mathfrak{g}, K)$, ali to nije isto jer $Hom_{\mathbb{C}}(V, W)$ nije $R(K)-$modul. Spomenuti funktor bio je egzaktan, ali sada imamo samo lijevu egzaktnost. Da bismo tu činjenicu mogli precizno formulirati, moramo utvrditi kategorije u kojima radimo. U tu svrhu definiramo **apstraktnu grupovnu algebru** $\mathbb{C}[K]$ grupe K nad poljem $\mathbb{C}$: to je vektorski prostor s bazom $\{\nu_x;\ x \in K\}$ i s množenjem

$$\nu_x \nu_y = \nu_{xy}, \qquad x, y \in K.$$

Ekvivalentno se $\mathbb{C}[K]$ može definirati kao konvoluciona algebra svih funkcija $K \to \mathbb{C}$ s konačnim nosačem. Tada je svaki kompleksan vektorski prostor s $K-$djelovanjem zapravo lijevi $\mathbb{C}[K]-$modul. Tu ćemo kategoriju označiti sa $\mathcal{C}(\mathbb{C}[K])$. Kategorija prostora s lokalno konačnom reprezentacijom grupe K je kao i prije označena sa $\mathcal{C}(\mathfrak{k}, K)$ i to je upravo kategorija svih aproksimativno unitalnih lijevih $R(K)-$modula.

Propozicija 12.1 *$V \mapsto V_K$, $\varphi \mapsto \varphi_K = \varphi|V_K$ je kovarijantan lijevo egzaktan funktor iz kategorije $\mathcal{C}(\mathbb{C}[K])$ u kategoriju $\mathcal{C}(\mathfrak{k}, K)$.*

Dokaz: Prije svega treba ustanoviti da za module V, W u kategoriji $\mathcal{C}(\mathbb{C}[K])$ i za $\varphi \in Hom_K(V, W)$ vrijedi $\varphi(V_K) \subseteq W_K$, kako bi φ_K uopće mogao biti definiran. U tu svrhu pišemo

$$V_K = \coprod_\alpha V_\alpha,$$

gdje je svaki V_α konačnodimenzionalan $K-$invarijantan potprostor čija je pripadna subreprezentacija od K ireducibilna i neprekidna. Po Schurovoj lemi tada je $\varphi|V_\alpha$ ili 0 ili injekcija. U drugom slučaju je $\varphi|V_\alpha$ izomorfizam V_α na $\varphi(V_\alpha)$, dakle, $\varphi(V_\alpha)$ je konačnodimenzionalan $K-$invarijantan potprostor s ireducibilnom neprekidnom subreprezentacijom. Dakle, $\varphi(V_\alpha) \subseteq W_K\ \forall \alpha$, a to znači da je $\varphi(V_K) \subseteq W_K$.

Očito se radi o kovarijantnom funktoru. Neka je

$$= \longrightarrow A \xrightarrow{\psi} B \xrightarrow{\varphi} C \longrightarrow 0$$

egzaktni niz u kategoriji $\mathcal{C}(\mathbb{C}[K])$. Formiramo niz u kategoriji $\mathcal{C}(\mathfrak{k}, K)$:

$$0 \longrightarrow A_K \xrightarrow{\psi_K} B_K \xrightarrow{\varphi_K} C_K.$$

Tada je $\psi_K = \psi|A_K$ injekcija, jer je ψ injekcija. Nadalje, imamo

$$\operatorname{Im}\psi = \operatorname{Ker}\varphi \quad \Longrightarrow \quad \varphi \circ \psi = 0 \quad \Longrightarrow \quad \varphi_K \circ \psi_K = (\varphi \circ \psi)_K = 0 \quad \Longrightarrow \quad \operatorname{Im}\psi_K \subseteq \operatorname{Ker}\varphi_K.$$

Neka je $b \in \operatorname{Ker} \varphi_K$. Tada je $b \in \operatorname{Ker} \varphi = \operatorname{Im} \psi$, dakle, postoji $a \in A$ takav da je $b = \psi(a)$. Budući da je ψ injekcija imamo

$$\dim [Ka] = \dim \psi([Ka]) = \dim [K\psi(a)] = \dim [Kb] < \infty$$

jer je b $K-$konačan. Dakle, a je formalno $K-$konačan. Linearan operator $\psi|[Ka]$ ostvaruje ekvivalenciju subreprezentacije na $[Ka]$ sa subreprezentacijom na $[Kb]$. Kako je b $K-$konačan a ne samo formalno $K-$konačan, subreprezentacija na $[Kb]$ je neprekidna, dakle i reprezentacija na $[Ka]$ je neprekidna. Time je dokazano da je a $K-$konačan, tj. $a \in A_K$. Dakle, $b \in \operatorname{Im} \psi_K$. Time je dokazana obrnuta inkluzija $\operatorname{Ker} \varphi_K \subseteq \operatorname{Im} \psi_K$, pa imamo jednakost $\operatorname{Ker} \varphi_K = \operatorname{Im} \psi_K$. Dakle, niz

$$0 \longrightarrow A_K \xrightarrow{\psi_K} B_K \xrightarrow{\varphi_K} C_K$$

u kategoriji $\mathcal{C}(\mathfrak{k}, K)$ je egzaktan.

U propoziciji 12.1. stvarno nemamo egzaktnost:

Zadatak 12.1 *Neka je $K = S^1$ i neka je $e : \mathbb{C}[K] \to \mathbb{C}$ definirano sa*

$$e\left(\sum_x \alpha_x \nu_x\right) = \sum_x \alpha_x.$$

Označimo sa $\mathbb{C}_0[K]$ jezgru morfizma e. Tada imamo egzaktan niz lijevih $\mathbb{C}[K]-$modula:

$$0 \longrightarrow \mathbb{C}_0[K] \longrightarrow \mathbb{C}[K] \xrightarrow{e} \mathbb{C} \longrightarrow 0.$$

Dokažite da je odgovarajući kompleks u kategoriji $\mathcal{C}(\mathfrak{k}, K)$

$$0 \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathbb{C} \longrightarrow 0$$

koji nije egzaktan.

Zbog toga što nemamo egzaktnost naš pristup proučavanju svojstava modula $Hom_K(V, W)_K$ će biti indirektan. Prvo provjerimo da je $Hom_{\mathbb{C}}(V, W)_K$ stvarno $(\mathfrak{g}, K)-$modul:

Propozicija 12.2 *Ako su V i W moduli u kategoriji $\mathcal{C}(\mathfrak{g}, K)$ onda je $Hom_{\mathbb{C}}(V, W)_K$ $\mathfrak{g}-$invarijantan potprostor od $Hom_{\mathbb{C}}(V, W)$ i jest modul u kategoriji $\mathcal{C}(\mathfrak{g}, K)$.*

Dokaz: Za $x \in K$, $X \in \mathfrak{g}$, $\varphi \in Hom_{\mathbb{C}}(V, W)$ i $v \in V$ imamo

$$(xX\varphi)(v) = x[(X\varphi)(x^{-1}v)] = x[X(\varphi(x^{-1}v)) - \varphi(X(x^{-1}v))] =$$

$$= x[X(\varphi(x^{-1}v))] - x[\varphi(X(x^{-1}v))] = [(Ad\, x)X](x(\varphi(x^{-1}v))) - x[\varphi(x^{-1}((Ad\, x)X)v)] =$$
$$= [(Ad\, x)X]((x\varphi)(v)) - (x\varphi)(((Ad\, x)X)v) = [((Ad\, x)X)(x\varphi)](v).$$

Dakle,

$$xX\varphi = [(Ad\, x)X)(x\varphi) \in \mathfrak{g}(K\varphi)].$$

Ako je φ $K-$konačan (tj. $\varphi \in Hom_{\mathbb{C}}(V, W)_K$) onda $K\varphi$ razapinje $K-$invarijantan konačnodimenzionalan potprostor U od $Hom_{\mathbb{C}}(V, W)$ i na tom potprostoru subreprezentacija od K je neprekidna. Prema dokazanom potprostor T od $Hom_{\mathbb{C}}(V, W)$ razapet sa $KX\varphi$ je $K-$invarijantan i konačnodimenzionalan. T je sadržan u slici linearnog operatora $A : \mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{C}} U \to Hom_{\mathbb{C}}(V, W)$ takvog da je

$$A(Y \otimes_{\mathbb{C}} \psi) = Y\psi.$$

Gornji račun za Y i ψ umjesto X i φ pokazuje da je operator A $K-$ekvivarijantan ako na $\mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{C}} U$ imamo tenzorski produkt neprekidnog $K-$djelovanja Ad na $\mathfrak{g}$ i neprekidne subreprezentacije na U. Prema tome, slika operatora A je $K-$invarijantna i na njoj je subreprezentacija od K neprekidna. Odatle je subreprezentacija od K na potprostoru T neprekidna. Dakle, vrijedi $X\varphi \in Hom_{\mathbb{C}}(V, W)_K$. Time je dokazano da je $Hom_{\mathbb{C}}(V, W)_K$ $\mathfrak{g}-$invarijantan potprostor od $Hom_{\mathbb{C}}(V, W)$.

Treba još provjeriti aksiome $(\mathfrak{g}, K)-$modula:

Svojstvo (i) je jasno iz definicije $Hom_{\mathbb{C}}(V, W)_K$.

Svojstvo (ii) slijedi iz sljedećeg računa za $X \in \mathfrak{k}_0$, $\varphi \in Hom_{\mathbb{C}}(V, W)$ i $v \in V$:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[(\exp\, tX)\varphi](v)\bigg|_{t=0} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\exp\, tX)[\varphi(\exp(-tX)v)]\bigg|_{t=0} = X(\varphi(v)) - \varphi(Xv) = (X\varphi)(v).$$

Svojstvo (iii) slijedi iz malo prije dokazane jednakosti

$$xX\varphi = [(Ad\, x)X](x\varphi).$$

Napomena. U posebnom slučaju $W = \mathbb{C}$ s trivijalnim reprezentacijama od $\mathfrak{g}$ i od K pišemo $V^c = Hom_{\mathbb{C}}(V, \mathbb{C})_K$. Taj se modul zove $K-$**konačni kontragredijent** od V.